GUANGXUE XITI SIKAOTI JIEDA

GUANGXUE XITI SIKAOTI JIEDA

光学习题思考题解答

钟锡华　骆武刚　邓淑琴　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

043
10A
2006

光学习题思考题解答

钟锡华　骆武刚　邓淑琴　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

光学习题思考题解答/钟锡华,骆武刚,邓淑琴编著. —北京：北京大学出版社，2006.11

ISBN 7-301-10790-0

Ⅰ.光… Ⅱ.①钟… ②骆… ③邓… Ⅲ.光学-高等学校-解题 Ⅳ.O43-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 062029 号

书　　名：光学习题思考题解答

著作责任者：钟锡华　骆武刚　邓淑琴　编著

责 任 编 辑：孙　琰　聂一民

标 准 书 号：ISBN 7-301-10790-0/O·0698

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://www.pup.cn

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962

电 子 邮 箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者：北京大学印刷厂

经　销　者：新华书店

890 毫米×1240 毫米　A5　14.875 印张　426 千字

2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷

定　　价：24.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024　电子邮箱：fd@pup.pku.edu.cn

作者前言

呈现于读者面前的这本《光学习题思考题解答》，是与《光学》(赵凯华、钟锡华编著，北京大学出版社出版，1984)配套的一本教学参考书。本书包含了326道习题和197道思考题的解答，与《光学》中的题目基本保持一致，稍有变动。《光学》曾获“国家教委全国高等学校优秀教材奖”国家级优秀奖(1988)，至今仍被许多高校用做教材，也被不少科研院所选做研究生入学考试的指定参考书目。北京大学出版社时有接到读者来电，询问如何能获得《光学》的题解资料。在犹豫多年之后，我们还是决定将这本《光学习题思考题解答》付梓出版。愿它在分析、解决基础光学中众多问题时，能成为读者的一个好帮手。

钟锡华

于北京大学物理学院

2006年8月7日·丙戌立秋

目　录

习题解答

第一章　几何光学 …… (3)

§1　几何光学基本定律 …… (3)

§2　惠更斯原理 …… (16)

§3　费马原理 …… (19)

§4　成像 …… (20)

§5　共轴球面组傍轴成像 …… (24)

§6　薄透镜 …… (31)

*§7　理想光具组理论 …… (37)

§8　光学仪器 …… (45)

*§9　光阑 …… (50)

*§10　像差 …… (57)

§11　光度学基本概念 …… (61)

*§12　像的亮度、照度和主观亮度 …… (66)

第二章　波动光学基本原理 …… (71)

§1　定态光波与复振幅描述 …… (71)

§2　波前 …… (74)

§3　波的叠加和波的干涉 …… (76)

§4　两个点源的干涉 …… (78)

§5　光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理 …… (88)

§6　菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射 …… (90)

§7　夫琅禾费单缝和矩孔衍射 …… (96)

§8　光学仪器的像分辨本领 …… (104)

§9　光的横波性与五种偏振态 …… (107)

§10　光在电介质表面的反射和折射　菲涅耳公式…… (111)

第三章　干涉装置　光场的时空相干性…… (124)

§1　分波前干涉装置　光场的空间相干性…… (124)

§2　薄膜干涉(一)——等厚条纹 …… (133)

§3　薄膜干涉(二)——等倾条纹 …… (144)

§4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性…… (145)

§5　多光束干涉　法布里-珀罗干涉仪 …… (150)

第四章　衍射光栅…… (161)

§1　多缝夫琅禾费衍射 …… (161)

§2　光栅光谱仪 …… (172)

*§3　三维光栅——X射线在晶体上的衍射 …… (177)

第五章　傅里叶变换光学…… (183)

§1　衍射系统的屏函数和相因子判断法 …… (183)

§2　正弦光栅的衍射 …… (190)

§3　阿贝成像原理与相衬显微镜 …… (200)

*§4　夫琅禾费衍射场的标准形式 …… (204)

*§5　傅里叶变换　δ函数 …… (207)

*§6　空间滤波和信息处理 …… (219)

*§7　点扩展函数与光学传递函数 …… (226)

第六章　全息术照相…… (235)

§1　全息照相的过程与特点 …… (235)

§2　全息照相的原理 …… (235)

*§3　全息术应用简介 …… (245)

*§4　傅里叶全息图及其应用举例 …… (245)

第七章　光在晶体中的传播…… (246)

§1　双折射 …… (246)

§2　晶体光学器件 …… (255)

§3　圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验…… (258)

§4　偏振光的干涉及其应用 …… (259)

§5 旋光 …… (277)

第八章 光的吸收、色散和散射 …… (285)

§1 光的吸收 …… (285)

§2 色散 …… (285)

§3 群速 …… (291)

§4 光的散射 …… (293)

第九章 光的量子性 …… (296)

§1 热辐射 …… (296)

§2 光的粒子性和波粒二象性 …… (301)

§3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论 …… (308)

§4 激光的产生 …… (311)

§5 激光器对频率的选择 …… (311)

§6 激光的特性及应用 …… (312)

思考题解答

第一章 几何光学 …… (315)

§1 几何光学基本定律 …… (315)

§2 惠更斯原理 …… (320)

§3 费马原理 …… (321)

§4 成像 …… (321)

§5 共轴球面组傍轴成像 …… (323)

§6 薄透镜 …… (324)

*§7 理想光具组理论 …… (328)

§8 光学仪器 …… (328)

*§9 光阑 …… (330)

*§10 像差 …… (330)

§11 光度学基本概念 …… (332)

*§12 像的亮度、照度和主观亮度 …… (332)

第二章 波动光学基本原理 …… (334)

§1 定态光波与复振幅描述 …… (334)

§2　波前 …… (335)
§3　波的叠加和波的干涉 …… (339)
§4　两个点源的干涉 …… (341)
§5　光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理 …… (345)
§6　菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射 …… (350)
§7　夫琅禾费单缝衍射和矩孔衍射 …… (359)
§8　光学仪器的像分辨本领 …… (365)
§9　光的横波性与五种偏振态 …… (367)
§10　光在电介质表面的反射和折射　菲涅耳公式 …… (369)

第三章　干涉装置　光场的时空相干性 …… (385)
§1　分波前干涉装置　光场的空间相干性 …… (385)
§2　薄膜干涉(一)——等厚条纹 …… (387)
§3　薄膜干涉(二)——等倾条纹 …… (395)
§4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性 …… (396)
§5　多光束干涉　法布里-珀罗干涉仪 …… (399)

第四章　衍射光栅 …… (403)
§1　多缝夫琅禾费衍射 …… (403)
§2　光栅光谱仪 …… (410)
*§3　三维光栅——X射线在晶体上的衍射 …… (415)

第五章　傅里叶变换光学 …… (416)
§1　衍射系统的屏函数和相因子判断法 …… (416)
§2　正弦光栅的衍射 …… (416)
§3　阿贝成像原理与相衬显微镜 …… (417)
*§4　夫琅禾费衍射场的标准形式 …… (426)
*§5　傅里叶变换　δ函数 …… (428)
*§6　空间滤波和信息处理 …… (428)
*§7　点扩展函数与光学传递函数 …… (431)

第六章　全息照相 …… (434)
§1　全息照相的过程与特点 …… (434)
§2　全息照相的原理 …… (434)

*§3 全息术应用简介 …… (439)
*§4 傅里叶全息图及其应用举例 …… (439)

第七章 光在晶体中的传播 …… (440)
§1 双折射 …… (440)
§2 晶体光学器件 …… (443)
§3 圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验 …… (445)
§4 偏振光的干涉及其应用 …… (451)
§5 旋光 …… (455)

第八章 光的吸收、色散和散射 …… (457)
§1 光的吸收 …… (457)
§2 色散 …… (457)
§3 群速 …… (457)
§4 光的散射 …… (457)

第九章 光的量子性 激光 …… (459)
§1 热辐射 …… (459)
§2 光的粒子性和波粒二象性 …… (460)
§3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论 …… (463)
§4 激光的产生 …… (463)
§5 激光器对频率的选择 …… (463)
§6 激光的特性及应用 …… (463)

习题解答

第一章　几何光学

§1　几何光学基本定律

1. 太阳与月球的直径分别是 1.39×10^6 km 和 3.5×10^3 km，设日全食时太阳到地面的距离为 1.50×10^8 km，月球到地面的距离为 3.8×10^5 km. 试计算地面上能见到的日全食区域的面积. (可把该区域的地面视为平面.)

解　忽略地球大气层对阳光的折射，按照光的直线传播定律作几何投影(如图 1-1 所示)，则地面上出现日全食的区域是半径为 d 的圆.

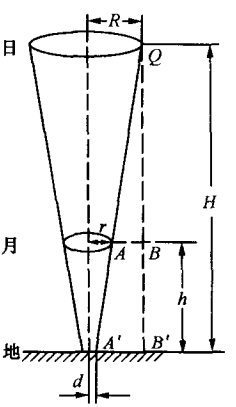


图　1-1

由相似三角形的比例关系

$$\frac{\overline{QB'}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

得

$$\frac{H}{H-h}=\frac{R-d}{R-r},$$

故

$$d=R-\frac{H(R-r)}{H-h}.$$

以 $R=0.695\times10^6$ km，$r=1.75\times10^3$ km，$H=1.5\times10^9$ km，$h=3.8\times10^5$ km 代入上式，可得

$$d=1.6\times10^3\ \text{km}.$$

所以日全食区域的面积为

$$S=\pi d^2=7.8\times10^6\ \text{km}^2.$$

2. 如图 1-2 所示为一种液面激光控制仪. 当液面升降时，反射光斑移动，为不同部位的光电转换元件所接收，变成电信号输入控制系统. 试计算液面升高 Δh 时反射光斑移动的距离 Δs.

解　按光的反射定律作光路于图 1-2，则由图可得反射光线的位移量为

$$\Delta s = \overline{OB} = \overline{OO'}\sin 2(\pi/2 - i).$$

又

$$\overline{OO'} = \Delta h/\cos i,$$

于是得

$$\Delta s = 2\Delta h \sin i.$$

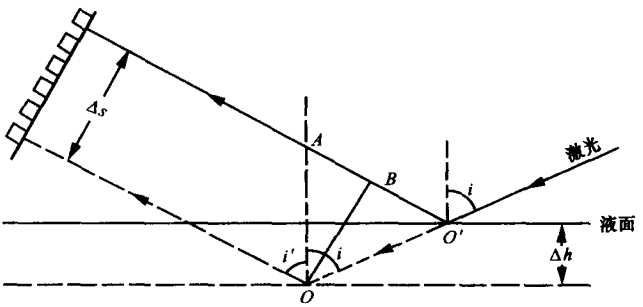


图　1-2

3. 由立方体的玻璃切下一角制成的棱镜称为四面直角体棱镜（见图 1-3(a)）. 证明从斜面射入的光线经其他三个面反射后，出射光线的方向总与入射光线相反. 设想一下，这样的棱镜可以在什么场合发挥作用.

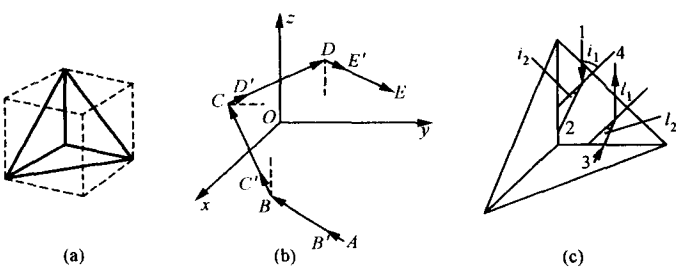


图　1-3

证　从斜面入射的光线经三个直角面反射后仍从斜面出射，其间光线共经历了三个直角面的三次反射和斜面往返的二次折射. 证

明出射光线和入射光线方向相反，可分两步进行：

(1) 先证明任意一根经三个直角面反射以后的光线总是和入射光线平行且方向相反.

用矢量的概念证明这个结论比较简单. 如图 1-3(b)所示，设三个直角面分别为 Oxy 平面、Oxz 平面和 Oyz 平面，入射光线 AB 先后经三个平面反射后出射光线为 DE. 并设$\vec{AB}'$，$\vec{BC}'$，$\vec{CD}'$，$\vec{DE}'$分别为光线 AB，BC，CD，DE 的单位矢量，则

$$\vec{AB}' = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

式中 α，β，γ 为 $\vec{AB}'$的方向角. 由于 $\vec{BC}$为 $\vec{AB}$经 Oxy 平面的反射线，根据反射定律显然有

$$\vec{BC}' = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos(\pi - \gamma)].$$

同理，

$$\vec{CD}' = [\cos\alpha, \cos(\pi - \beta), \cos(\pi - \gamma)],$$

$$\vec{DE}' = [\cos(\pi - \alpha), \cos(\pi - \beta), \cos(\pi - \gamma)]$$

$$= (-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma).$$

因此

$$\vec{AB}' = -\vec{DE}',$$

即光线 AB 和 DE 反向平行.

(2) 再证明斜面的出射光线和入射光线平行且方向相反.

如图 1-3(c)所示，设光线 1 以入射角 i_1 入射到斜面上，其折射光线 2 的折射角为 i_2. 则根据(1)的证明，光线 2 经三个直角面反射后的光线 3 必以入射角 i_2 入射到斜面上，再次折射后的光线 4 的折射角也必为 i_1. 因此出射光线 4 必和入射光线 1 反向平行.

由(1)，(2)证明可知，经直角四面体棱镜两次折射和三次反射的出射光线和入射光线方向相反. 如果入射光线(即入射面)垂直于某个直角交棱，则此时光线只经过两次折射和两次反射，但显然可见出射光线与入射光线方向相反的结论仍然成立.

四面直角体棱镜又叫直角锥棱镜. 直角锥棱镜的出射光线与入射光线方向相反，这一特性可以有效地被利用来进行远距离激光测距. 设想登月飞船把一个由多只直角锥棱镜组成的反射器送到月球表面，则地球上许多国家就可以选择反射器中的某些直角锥作为自

已的“合作目标”，用激光束测量月—地距离.

4. 光线射入如图 1-4 所示的棱镜，经两次折射和反射后射出.

(1) 证明偏向角与入射方向无关，恒等于 2α；

(2) 在此情况下能否产生色散？

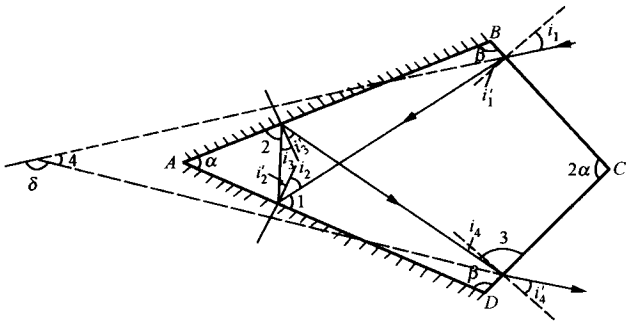


图　1-4

证　两次折射和反射的入射角、折射角、反射角分别示于图 1-4 中. 由几何关系和反射定律可得

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{\pi}{2} - \angle 1 \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[2\pi - \left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} + i_1'\right)\right] \\
&= -\pi + 2\alpha + \beta + i_1', \qquad ① \\
i_2' &= i_2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_3 &= \frac{\pi}{2} - \angle 2 \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - i_2'\right)\right] \\
&= \alpha - i_2', \qquad ② \\
i_3' &= i_3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_4 &= \angle 3 - \frac{\pi}{2} \\
&= \left[2\pi - \left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} - i_3'\right)\right] - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$= \pi - 2\alpha - \beta + i_3'. \qquad ③$$

逐步以 i_3', i_3, i_2', i_2 代入式③得

$$\begin{aligned} i_4 &= \pi - 2\alpha - \beta + i_3 \\ &= \pi - 2\alpha - \beta + (\alpha - i_2') \\ &= \pi - \alpha - \beta - i_2' \\ &= \pi - \alpha - \beta - (-\pi + 2\alpha + \beta + i_1') \\ &= 2\pi - 3\alpha - 2\beta - i_1' \\ &= -i_1'. \end{aligned}$$

又根据折射定律有

$$\sin i_1 = n\sin i_1', \quad \sin i_4' = n\sin i_4,$$

于是得

$$i_1 = -i_4',$$

式中 n 为棱镜的折射率. 因此偏向角为

$$\begin{aligned} \delta &= \pi - \angle 4 \\ &= \pi - \left[2\pi - \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} + i_4' + \frac{\pi}{2} + i_1\right)\right] \\ &= 2\alpha + i_4' + i_1 \\ &= 2\alpha. \end{aligned}$$

可见,偏向角恒等于 2α,它与入射角 i_1 和折射率 n 均无关,即与波长也无关. 这种棱镜虽然使光受到两次折射,但仍无色散,因此可用于要求无色散的光路偏转系统.

5. 试证明:当一条光线通过平行平面玻璃板时,出射光线方向不变,只产生侧向平移. 当入射角 i_1 很小时,位移为

$$\Delta\chi = \frac{n-1}{n} i_1 t,$$

式中 n 为玻璃板的折射率,t 为其厚度.

证 对平行平板上下表面分别两次运用折射定律,并考虑到平板上下是同一介质,便可证明最后出射光线与初始入射光线的方向一致.

如图 1-5 所示,根据几何关系可得侧向位移量为

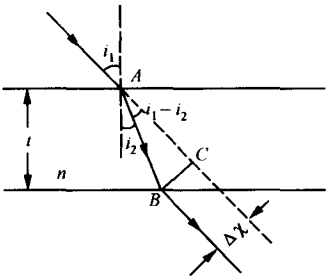


图　1-5

$$\Delta\chi = \overline{AB}\sin(i_1 - i_2)$$

$$= \frac{t}{\cos i_2}(\sin i_1\cos i_2 - \cos i_1\sin i_2)$$

$$= t\left(\sin i_1 - \frac{\cos i_1\sin i_2}{\cos i_2}\right). \qquad ①$$

利用折射定律

$$\sin i_1 = n\sin i_2,$$

式①可改写为

$$\Delta\chi = t\sin i_1\left(1 - \frac{\cos i_1}{n\cos i_2}\right).$$

在 $i_2 < i_1 \ll 1$ 的条件下，取小角近似

$$\sin i_1 \approx i_1, \quad \cos i_1 \approx \cos i_2 \approx 1,$$

于是有

$$\Delta\chi \approx \frac{n-1}{n} i_1 t.$$

6. 证明：光线相继经过几个平行分界面的多层媒质时，出射光线的方向只与入射方向及两边的折射率有关，与中间各层媒质无关.

证　因为界面都是平行的，所以光线在同一层媒质中上界面的折射角与下界面的入射角相等. 如图 1-6 所示，由折射定律有

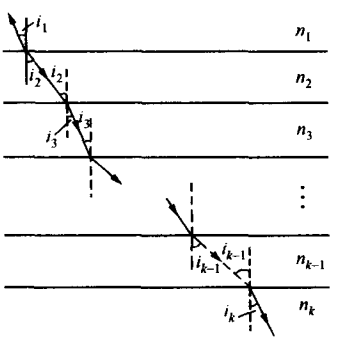


图　1-6

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1,$$

$$\sin i_3 = \frac{n_2}{n_3}\sin i_2 = \frac{n_1}{n_3}\sin i_1,$$

$$\vdots$$

$$\sin i_k = \frac{n_{k-1}}{n_k}\sin i_{k-1} = \frac{n_1}{n_k}\sin i_1.$$

由此可见，最后出射光线的方向只与当初入射方向及两边介质的折射率有关.

7. 顶角 α 很小的棱镜称为光楔. 证明：光楔使近轴入射的光线产生偏向角 $\delta = (n-1)\alpha$. (其中 n 是光楔的折射率.)

证 由于光线垂直入射，故光线在第一个界面不发生折射，仅在第二个界面有折射. 如图 1-7，根据折射定律

$$n\sin i_2 = \sin i_2'$$

以及几何关系 $i_2=\alpha$，故

$$n\sin\alpha = \sin i_2'.$$

当 $\alpha \ll 1$ 时，有

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin i_2' \approx i_2',$$

则上式可写成

$$n\alpha = i_2'.$$

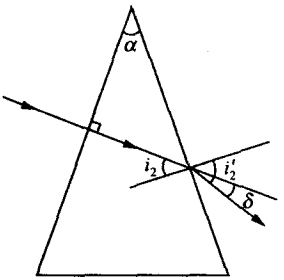


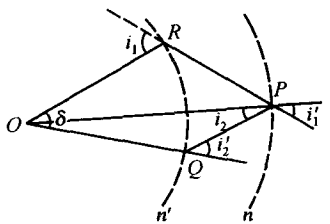
图 1-7

所以偏向角为

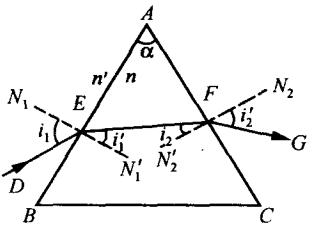
$$\delta = i_2' - i_2 = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha.$$

这个近似公式在干涉、衍射、偏振中经常要用到，我们应当记住它.

8. 如图 1-8 所示是一种求折射线方向的追迹作图法. 例如，为了求光线通过棱镜的路径，如图 1-8(b)所示. 可如图 1-8(a)以 O 点为中心作两圆弧，半径分别正比于折射率 n，n'(设 $n>n'$). 作 OR 平行于入射光线 DE，作 RP 平行于棱镜第一界面的法线 N_1N_1'，则 OP 的方向即为第一次折射后光线 EF 的方向. 再作 QP 平行于第二界面的法线 N_2N_2'，则 OQ 的方向即为出射光线 FG 的方向，从而 $\angle ROQ=\delta$ 为偏向角. 试论证此法的依据.



(a)



(b)

图 1-8

证　如图 1-8(a)所示，由题意知 i_1, i_1', i_2, i_2' 分别为第一界面与第二界面的入射角和折射角. 故只需论证 i_1, i_1' 和 i_2, i_2' 分别满足折射定律即可.

应用正弦定理于$\triangle ORP$，则有

$$\frac{\sin(\pi - i_1)}{\sin i_1'} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{n}{n'},$$

即

$$n' \sin i_1 = n \sin i_1'.$$

应用正弦定理于$\triangle OPQ$，则有

$$\frac{\sin(\pi - i_2')}{\sin i_2} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{n}{n'},$$

即

$$n' \sin i_2' = n \sin i_2.$$

故 i_1, i_1' 和 i_2, i_2' 分别满足折射定律. 由于 $OR /\!/ DE, OQ /\!/ FG$，故 δ 即为偏向角.

9. 利用上题的图，证明最小偏向角的存在，并证明棱镜折射率的计算公式为

$$n = n' \frac{\sin[(\alpha + \delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)},$$

式中 δ_m 为最小偏向角.

证　在图 1-8(b)中，有几何关系

$$i_2 + i_1' = \alpha.$$

因此在光线追迹图 1-8(a)中有

$$\angle RPQ = \alpha.$$

如图 1-9 所示，在光线追迹图中$\angle RPQ$ 是恒定的，它正是棱镜顶角 α. 设$\angle RPO = x$，则$\angle OPQ = \alpha - x$. 两圆弧的半径分别正比于折射率 n, n'，即

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{n}{n'}.$$

设

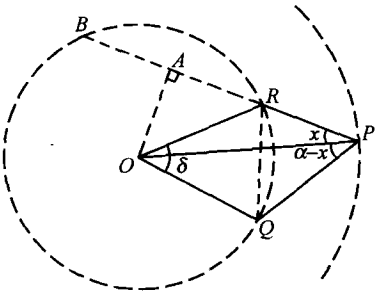


图 1-9

$$\overline{OP}=n,\quad \overline{OR}=n',$$

$$\overline{RP}=l_1=l_1(x),\quad \overline{QP}=l_2=l_2(x),$$

则由余弦定理可得连接 R,Q 两点的弦长为

$$\Delta(x)=\overline{RQ}=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\alpha.$$

由几何关系(见图 1-9)可得

$$\begin{aligned} l_1&=\overline{AP}-\overline{AR}\\ &=n\cos x-\sqrt{n'^2-n^2\sin^2x}, \end{aligned}\qquad ①$$

$$l_2=n\cos(\alpha-x)-\sqrt{n'^2-n^2\sin^2(\alpha-x)}\ . \qquad ②$$

产生最小偏向角时(即$\angle ROQ=\delta_m$时),Δ 取极小值,其必要条件是

$$\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}x=0,$$

即

$$2l_1\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x}+2l_2\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}-2l_2\cos\alpha\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x}-2l_1\cos\alpha\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}=0,$$

整理得

$$(l_1-l_2\cos\alpha)\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x}+(l_2-l_1\cos\alpha)\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}=0. \qquad ③$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}x}=-n\sin x+\frac{n^2\sin x\cos x}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2x}}, \qquad ④$$

$$\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}x}=-\left[-n\sin(\alpha-x)+\frac{n^2\sin(\alpha-x)\cos(\alpha-x)}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2(\alpha-x)}}\right], \qquad ⑤$$

当 $x=\alpha/2$ 时，由式①，②得

$$l_1 = l_2; \qquad ⑥$$

由式④，⑤得

$$\frac{dl_1}{dx} = -\frac{dl_2}{dx}. \qquad ⑦$$

把式⑥，⑦代入式③得

$$\left.\frac{d\Delta}{dx}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

可以证明

$$\left.\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}} > 0,$$

故 $x=\alpha/2$ 既是产生最小偏向角的必要条件，也是产生最小偏向角的充分条件，即

$$\delta = \delta_m \quad (x = \alpha/2).$$

从追迹图 1-8(a)所示可知，当 $x=\angle RPO=\alpha/2$ 时，有

$$i_1 = i_2' = (\delta_m + \alpha)/2,$$

$$i_1' = i_2 = \alpha/2.$$

把以上两式代入折射定律表达式

$$n'\sin i_1 = n\sin i_1'$$

则得

$$n = n'\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}. \qquad ⑧$$

10. 已知棱镜顶角为 60°，测得最小偏向角为 53°14′，求棱镜的折射率.

解　把已知数据代入上题中式⑧，并取 $n'=1$，即得

$$n = \frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin\alpha/2} = \frac{\sin(60°+53°14')/2}{\sin(60°/2)} = 1.670.$$

11. 顶角为 50°的三棱镜的最小偏向角是 35°. 如果把它浸入水中，最小偏向角等于多少？（水的折射率为 1.33.）

解　设棱镜的折射率为 n，水的折射率为 n'. 先求得

$$n=\frac{\sin(50^\circ+35^\circ)/2}{\sin(50^\circ/2)}=1.60.$$

再由

$$n=n'\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

得

$$\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\frac{n}{n'}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1.60}{1.33}\sin25^\circ=0.5080,$$

即

$$\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\arcsin(0.5080)=30^\circ32'.$$

最后求出此棱镜放入水中的最小偏向角为

$$\delta_m=11^\circ4'.$$

12. 如图 1-10 所示，在水中有两条平行光线 1 和 2，光线 2 射到水和平行平板玻璃的分界面上. 问：

(1) 两光线射到空气中是否还平行？

(2) 如果光线 1 发生全反射，光线 2 能否进入空气？

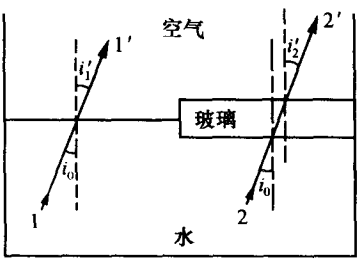


图 1-10

解 由本节习题 6 结论，光线经平行分界面的多层介质时，出射方向只与两边的折射率有关. 由此可知图 1-10 中的光线 1 和 2 射到空气中仍保持平行.

如图 1-10，当 $i_1'=90^\circ$时，也有 $i_2'=90^\circ$，所以光线 1 发生全反射时，光线 2 也不能进入空气，光线 2 在玻璃与空气的界面上发生全反射.

13. 计算光在下列媒质之间穿行时的全反射临界角：

(1) 从玻璃到空气；

(2) 从水到空气；

(3) 从玻璃到水.

解　设空气、水、玻璃的折射率分别为 $n_1=1.000$，$n_2=1.333$，$n_3=1.516$，则：

(1)　$i_{1c}=\arcsin\dfrac{n_1}{n_3}=\arcsin\dfrac{1.000}{1.516}=41°16'$；

(2)　$i_{2c}=\arcsin\dfrac{n_1}{n_2}=\arcsin\dfrac{1.000}{1.333}=48°36'$；

(3)　$i_{3c}=\arcsin\dfrac{n_2}{n_3}=\arcsin\dfrac{1.333}{1.516}=61°33'$.

14. 设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 $n_2(n_1>n_2)$，垂直端面外媒质的折射率为 n_0(见图 1-11). 试证明，能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_1 满足下式：

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

($n_0\sin\theta_1$ 称为纤维的数值孔径.)

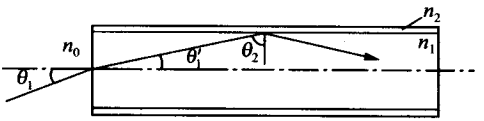


图　1-11

解　根据折射定律，得到

$$n_0\sin\theta_1=n_1\sin\theta_1'=n_1\cos\theta_2=n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2}.$$

因为光线在玻璃芯和外套的界面上发生全反射的条件为

$$\sin\theta_2\geqslant n_2/n_1.$$

所以欲使光线在光导纤维内发生全反射，θ_1 必须满足

$$n_0\sin\theta_1\leqslant n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2}.$$

故数值孔径为

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}.\qquad①$$

光导纤维的数值孔径反映集光本领，是导光传像的重要性能参

数之一.

15. 光导纤维外套由折射率为 1.52 的冕玻璃做成,芯线由折射率为 1.66 的火石玻璃纤维做成.求垂直端面的数值孔径.

解 据上题给出的光导纤维数值孔径公式①,算出

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.66^2-1.52^2}=0.667.$$

16. 极限法测液体折射率的装置如图 1-12(a)所示,ABC 是直角棱镜,其折射率 n_g 为已知.将待测液体涂一薄层于其上表面 AB,再覆盖一块毛玻璃.用扩展光源在掠入射的方向照明.从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i'(用望远镜观察,则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区).试证明,待测液体的折射率 n 可按下式算出:

$$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}.$$

用这种方法测液体的折射率,测量范围受到什么限制?

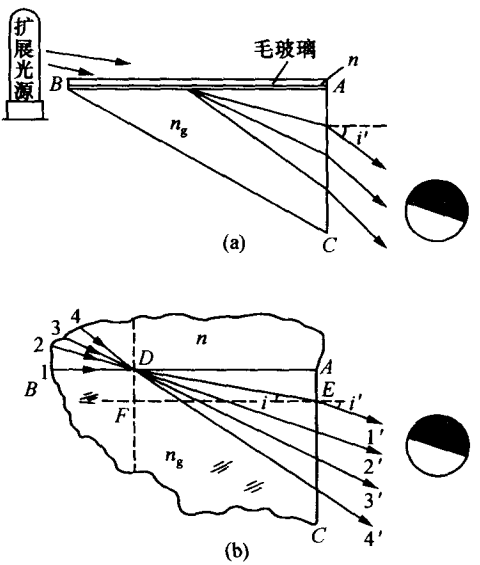


图 1-12

证 毛玻璃的作用是增加散射,以使液层上表面处处为散射源.

如图 1-12(b)所示，在 AB 面入射角较小的光线，在 AC 面出射时折射角较大. 以折射角下限 i' 出射的光线 $1'$，其共轭出射光线 1 在 AB 面的入射角为 90°. 出射方向观察用的是一架接收平行光用的望远镜，它能接收从 AC 面出射的一系列不同方向的平行光束，同一方向的平行光在望远镜中会聚于一点. 由于 AC 面出射光线的折射角有一下限 i'，因此在视场中出现有明显分界线的半明半暗区.

对图 1-12(b)中的 E 点，写出折射定律

$$n_g \sin\angle DEF = \sin i';$$

对图 1-12(b)中的 D 点，写出折射定律

$$n_g \sin\angle EDF = n\sin 90°;$$

又

$$\angle EDF = 90° - \angle DEF.$$

故由以上三式得

$$\begin{aligned} n &= n_g \sin\angle EDF = n_g \cos\angle DEF \\ &= n_g \sqrt{1 - \sin^2\angle DEF} = n_g \sqrt{1 - (\sin i'/n_g)^2} \\ &= \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'} < n_g. \end{aligned}$$

$n < n_g$ 是极限法测液体折射率的限制条件. 如果液体相对棱镜是高折射率物质，经 AB 面一次折射后就有各种方向的平行光束，在 AC 面出射时就不可能在望远镜中出现有明显分界线的半明半暗区.

§2　惠更斯原理

1. 在空气中钠黄光的波长为 5893 Å[①]. 问：

(1) 其频率为多少？

(2) 在折射率为 1.52 的玻璃中，钠黄光波长为多少？

解　(1) 光频

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^{18}\ \text{Å/s}}{5893\ \text{Å}}$$

① 1 Å(埃) $= 10^{-10}$ m.

$$= 5.09 \times 10^{14}\ \text{Hz},$$

式中 λ_0 为光谱线的真空波长.

(2) 同一谱线在介质中的光波长

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{5893\ \text{Å}}{1.52} = 3877\ \text{Å}.$$

2. 在熔凝石英中波长为 5500 Å 的光频率为多少?(已知折射率为 1.460.)

解 光频为

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{n\lambda} = \frac{3 \times 10^{18}\ \text{Å/s}}{1.460 \times 5500\ \text{Å}} = 3.74 \times 10^{14}\ \text{Hz}.$$

3. 填充表 1-1 中的空白:

表 1-1

谱 线	F 线		D 线	
媒 质	真 空	水	真 空	水
折射率	(1)	1.337	(1)	1.333
波长/Å	4861	(3636)	5893	(4421)
频率/Hz	(6.17×10^{14})	(6.17×10^{14})	(5.09×10^{14})	5.09×10^{14}
光速/$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	(3×10^{8})	(2.24×10^{8})	(3×10^{8})	(2.25×10^{8})

解 设 $f, c, v, \lambda_0, \lambda, n$ 分别为光的频率、真空中光速、介质中光速、真空中波长、介质中波长、介质的折射率. 根据下列关系式:

$$f = \frac{c}{\lambda_0},\quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n},\quad v = \frac{c}{n},$$

代入表中所给有关数据,把计算结果填入表中空白①.

从以上计算中,我们应该看到:

(1) 可见光波段的光频很高(达 10^{14} Hz 数量级),这相当于光扰动的周期为 10 fs②数量级. 对于如此高频的振荡,目前尚无接收器能瞬时响应,这就导致光信号接收时的一系列统计平均问题.

(2) "波速等于频率乘以波长"的公式,对任何波动都是普遍成

① 括号内的数据为计算结果,本书后同.

② 1 fs(飞秒)$=10^{-15}$ s.

立的，它是波动的一个运动学公式，不涉及波动的动力学机制，因而与介质无关；但是波速的具体取值却与介质的性质有关. 那么，当波速随介质而改变时，是频率变而波长不变，还是波长变而频率不变，或者是频率和波长都要变呢？我们须知，对于线性介质来说，波场中的扰动频率取决于波源，它反映波源的固有属性，而与介质无关. 空间波长这个物理量正是反映波动与介质的相互作用，它是与介质有关的，自然也就与频率有关了. 总之，波源（光源）所激发的某条谱线，其时间频率与介质无关，空间波长随介质而变，因而波速随介质而变，这是物理分析的结果.

（3）光频极高，光速极快（即使在介质中），真空光速恒为常数（与光频无关）等，都是光波的特点. 由于接收器时间响应能力的限制，至今所有光频的数据都是通过光波长的测量再加上折射率因素而间接获得的.

4. 拖着棒的一端在水中以速度 v 移动，v 比水波速度 u 大. 用惠更斯（Huygens）作图法证明，在水中出现一圆锥形波前，半顶角 α 由下式给出：

$$\sin\alpha = u/v.$$

船后的弓形波、超音速飞机在空气中产生的冲击波都是这样产生的.

证　由于棒对水的撞击（压缩），使棒端沿途各点先后成为水波源. 如图 1-13 所示，设棒端在水中依次经过 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 点，则当棒端到达 A_n 点时，$A_1, A_2, \cdots$ 发出的水波面分别是半径为 $(u/v)\overline{A_1A_n}$，$(u/v)\overline{A_2A_n}, \cdots$ 的球面. 作这些球面的包络面，即为宏观波面（总扰动的水波面）. 设总扰动的水波面与次波面分别相切于 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 各点，则

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1A_n}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2A_n}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_3A_n}} = \cdots = \frac{u}{v}.$$

即宏观波面是以端点 A_n 为顶点的锥面（称为“马赫（Mach）锥”），锥角大小由

$$\sin\alpha = u/v$$

确定.

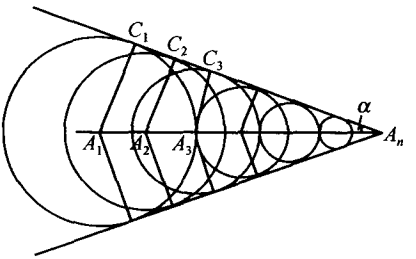


图 1-13

§3 费马原理

1. 证明反射光束的方向是等光程方向，即证明图 1-14 中

$$L(A_1B_1C_1)=L(A_2B_2C_2).$$

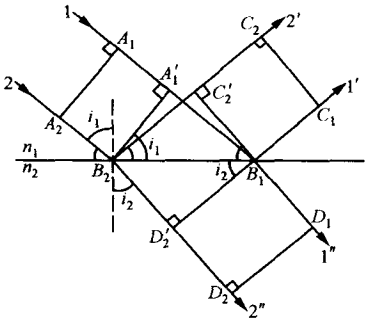


图 1-14

证 如图 1-14，分别由入射点 B_1，B_2 向光线 1，2′作垂线，相应垂足为 A_1'，C_2'. 显然$\overline{A_2B_2}=\overline{A_1A_1'}$，$\overline{C_2'C_2}=\overline{B_1C_1}$. 又根据反射定律可证 $\triangle A_1'B_2B_1$ 与$\triangle C_2'B_2B_1$ 是全等三角形，即

$$\overline{B_2C_2'}=\overline{A_1'B_1}.$$

所以光程

$$L(A_1B_1C_1)=n_1(\overline{A_1A_1'}+\overline{A_1'B_1}+\overline{B_1C_1})$$

与

$$L(A_2B_2C_2)=n_1(\overline{A_2B_2}+\overline{B_2C_2'}+\overline{C_2'C_2})$$

是相等的.

这表明，反射定律给出的反射光束的方向正好与等光程(从入射光算起)要求的方向是一致的.

2. 证明折射光束的方向是等光程方向. 即证明图 1-14 中

$$L(A_1B_1D_1) = L(A_2B_2D_2).$$

证　如图 1-14，由次波源 B_1 向光线 2″作垂线，垂足为 D_2'. 显然

$$\overline{D_2'D_2} = \overline{B_1D_1}.$$

再比较 $A_1'B_1$，B_2D_2' 两段光程，在直角$\triangle A_1'B_1B_2$ 和直角$\triangle D_2'B_1B_2$ 中，有

$$\overline{A_1'B_1} = \overline{B_1B_2}\sin i_1, \quad L(\overline{A_1'B_1}) = \overline{B_1B_2}n_1\sin i_1,$$
$$\overline{B_2D_2'} = \overline{B_1B_2}\sin i_2, \quad L(\overline{B_2D_2'}) = \overline{B_1B_2}n_2\sin i_2.$$

由折射定律可知

$$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2.$$

于是

$$L(A_1'B_1) = L(B_2D_2).$$

所以光程

$$L(A_1B_1D_1) = n_1\overline{A_1A_1'} + n_1\overline{A_1'B_1} + n_2\overline{B_1D_1}$$

和

$$L(A_2B_2D_2) = n_1\overline{A_2B_2} + n_2\overline{B_2D_2'} + n_2\overline{D_2'D_2}$$

是相等的.

这表明，折射定律给出的折射光束的方向正好与等光程(从入射光算起)要求的方向是一致的.

§4　成　　像

1. 试导出球面折射宽光束严格成像的一对共轭点(齐明点)的位置公式.

解　如图 1-15，设球面半径为 R，物、像方折射率分别为 n，n'. 按我们的符号法则，由顶点 A 算起的距离$\overline{AQ}=s$，$\overline{AQ'}=-s'$，$\overline{AC}=-R$. 由球心 C 点算起的距离$\overline{CQ}=s_0$，$\overline{CQ'}=-s_0'$，于是

$$s = s_0 + (-R), \quad s' = s'_0 + R.$$

在$\triangle CMQ$,$\triangle CMQ'$中分别应用正弦定理,则有

$$\frac{\sin u}{\sin i} = \frac{-R}{s_0} = \frac{-R}{s+R},$$

$$\frac{\sin u'}{\sin i'} = \frac{-R}{-s'_0} = \frac{-R}{-s'+R},$$

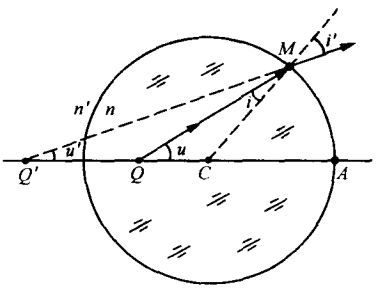


图 1-15

解得

$$s_0 = -R\frac{\sin i}{\sin u}, \quad s'_0 = R\frac{\sin i'}{\sin u'}.$$

又根据折射定律$n\sin i = n'\sin i'$以及角度关系$u = u' + (i' - i)$,进一步得到

$$s_0 = -\frac{n'}{n}\frac{\sin i'}{\sin u}R,$$

$$s'_0 = R\frac{\sin i'}{\sin(u+i-i')} = -\frac{n}{n'}\frac{\sin u}{\sin(u+i-i')}s_0.$$

由此可见,一般情况下Q'点位置是Q点位置s_0和出射角u的复杂函数. 只有在$u = i'$的特殊条件下,才得到

$$s_0 = -\frac{n'}{n}R, \quad s'_0 = \frac{n}{n'}R.$$

此时Q'的位置与出射角u无关,使Q,Q'点成为宽光束严格成像的一对共轭点;同时还有

$$u = i', \quad u' = i$$

以及

$$\frac{-s'}{s} = \frac{\sin u}{\sin u'}$$

等关系成立.

2. 由费马(Fermat)原理导出傍轴条件下球面反射近似成像公式以及物像距公式.

解 本题要求我们不是利用反射定律,而是利用费马原理去证明,在傍轴条件下球面反射可以近似成像,并由此导出物像距公式.

如图 1-16 所示,设轴上物点Q发出的光线经球面M点后的反

射光线交光轴于 Q' 点，则光程 $L(QMQ')=n\overline{QM}+n\overline{MQ'}$. 设球面反射镜的曲率半径为 $r(r<0)$，则 $\overline{AC}=\overline{MC}=-r$，由几何关系可得

$$h^2 = d(2|r| - d) = -d(2r + d),$$

$$\overline{QM} = [(s - d)^2 + h^2]^{1/2} = [(s - d)^2 - d(2r + d)]^{1/2}$$
$$= [s^2 - 2d(r + s)]^{1/2},$$

$$\overline{MQ'} = [(s' - d)^2 + h^2]^{1/2} = [s'^2 - 2d(r + s')]^{1/2}.$$

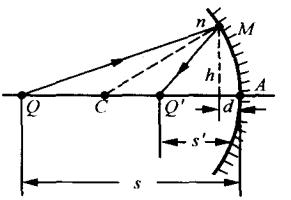


图　1-16

在 $d \ll s, s', |r|$ 的傍轴条件下，略去二阶以上无穷小量得

$$\overline{QM} \approx s\left[1 - \frac{d(r + s)}{s^2}\right],$$

$$\overline{MQ'} \approx s'\left[1 - \frac{d(r + s')}{s'^2}\right],$$

从而

$$L(QMQ') = ns\left[1 - \frac{d(r + s)}{s^2}\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r + s')}{s'^2}\right].$$

若要求等光程，即令

$$L(QMQ') = L(QAQ'),$$

可得方程

$$ns\left[1 - \frac{d(r + s)}{s^2}\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r + s')}{s'^2}\right] = ns + ns',$$

解出

$$s' = -\frac{rs}{r + 2s}.$$

可见 s' 只与 s 有关，而与 d 无关. 这表明在傍轴范围内，无论入射光线的高度如何，等光程要求下的 s' 都有解. 根据费马原理的推论——物像等光程性，可知 Q 点成像于 Q' 点. Q' 点的位置公式③可以

改写成

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}.$$

上式就是球面反射傍轴成像的物像距公式.

3. 由费马原理导出傍轴条件下球面折射近似成像以及物像距公式.

解一 如图 1-17 所示,轴上物点 Q 发出的光线与折射球面相遇于 M 点,折射后交光轴于 Q' 点. 设球面的半径为 r,则 $r=\overline{AC}=\overline{MC}$(曲率半径为正). 与上题同理,可得光程

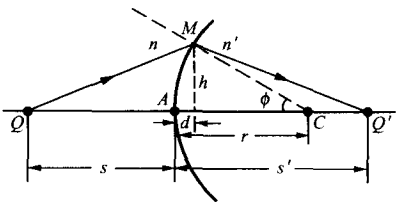


图 1-17

$$L(QMQ')=n\overline{QM}+n'\overline{MQ'}$$

$$\approx ns\left[1+\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+n's'\left[1+\frac{d(r-s')}{s'^2}\right]. \quad ①$$

若要求等光程,即令

$$L(QMQ')=L(QAQ'),$$

得方程

$$ns\left[1+\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+n's'\left[1+\frac{d(r-s')}{s'^2}\right]=ns+n's'. \quad ②$$

如果方程②对 s' 有解,而且 Q' 点的位置 s' 与 d 无关,则由费马原理的推论——物像等光程性,表明 Q 点经球面折射成像于 Q' 点. 化简上式得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}. \quad ③$$

可见在傍轴条件下 Q' 点的位置 s' 与 d 无关,只与 Q 点的位置 s 有关,表明 Q 点成像于 Q' 点. 方程③即为球面折射傍轴成像的物像距公式.

解二 如图 1-17 所示,轴上 Q 点发出的光线经球面 M 点折射后,折射光线交光轴于 Q' 点. 半径 MC 与光轴的夹角为 ϕ,设球面的半径为 r,则 $r=\overline{MC}$(曲率半径为正). 光程

$$L(QMQ') = n'\overline{QM} + n'\overline{MQ'}$$
$$= n\sqrt{r^2 + (r+s)^2 - 2r(r+s)\cos\phi}$$
$$+ n'\sqrt{r^2 + (s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi}. \quad ⑤$$

根据费马原理，有

$$\mathrm{d}L(QMQ') = \mathrm{d}L(\phi) = 0,$$

即

$$n\frac{2r(r+s)\sin\phi}{2\sqrt{r^2 + (r+s)^2 - 2r(r+s)\cos\phi}}\mathrm{d}\phi$$
$$+ n'\frac{-2r(s'-r)\sin\phi}{2\sqrt{r^2 + (s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi}}\mathrm{d}\phi = 0. \quad ⑥$$

在傍轴条件下，$\phi \ll 1$，$\cos\phi \approx 1$，上式可化简为

$$\left(n\frac{r+s}{s} + n'\frac{r-s'}{s'}\right)r\sin\phi\mathrm{d}\phi = 0, \quad ⑦$$

进一步化简得

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}. \quad ⑧$$

可见 Q' 点的位置 s' 与 ϕ 无关，只与 Q 点的位置 s 有关. 说明 Q 点经球面折射傍轴成像于 Q' 点. 方程⑧即为物像距公式.

§5　共轴球面组傍轴成像

1. 根据反射定律推导球面反射镜的物像距公式和焦距公式.

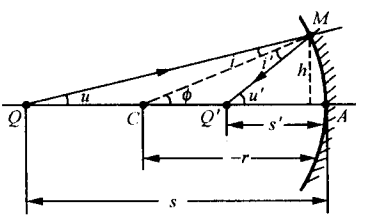


图　1-18

解　如图 1-18 所示，设入射角为 i，反射角为 i'，入射光线、反射光线、半径 CM 与光轴的夹角分别为 u，u'，ϕ. 若 Q 点成像于 Q' 点，则

$$i = \phi - u, \quad i' = u' - \phi.$$

在傍轴条件下有

$$\phi \approx \frac{h}{-r}, \quad u \approx \frac{h}{s}, \quad u' \approx \frac{h}{s'}.$$

又由反射定律 $i = i'$，得

$$\frac{h}{-r}-\frac{h}{s}=\frac{h}{s'}-\frac{h}{-r}.$$

整理上式即得，球面反射镜的物像距公式为

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}.$$

分别令 $s'\to\infty, s=f$ 和 $s\to\infty, s'=f'$，球面反射镜的焦距公式为

$$f=f'=-r/2.$$

2. 物体放在凹面反射镜前何处，可产生大小与物体相等的倒立实像？

解 设物距为 s. 根据题意，球面反射镜的横向放大率

$$V=-s'/s=-1,$$

则得像距

$$s'=-sV=s.$$

再代入反射球面成像公式，解得

$$s=-r.$$

故物体应放在凹球面反射镜前球心处.

3. 凹面镜的半径为 40 cm. 物体放在何处成放大两倍的实像？放在何处成放大两倍的虚像？

解 实物形成两倍实像时，球面反射镜的横向放大率 $V_1=-2$；实物形成两倍虚像时 $V_2=+2$. 联立反射镜物像距公式及横向放大率公式

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r},$$

$$s'=-Vs,$$

解得

$$s=\frac{1-V}{2V}r.$$

按题意，分别以 $r=-40\,\text{cm}, V_1=-2, V_2=+2$ 代入上式，算出

$$s_1=30\,\text{cm},\quad s_2=10\,\text{cm},$$

即物体应相应地置于凹面镜前 30 cm 和 10 cm 处.

4. 要把球面反射镜前 10 cm 处的灯丝成像于距离反射镜 3 m 处的墙上，镜形应是凸的还是凹的？半径应有多大？这时的像放大了多少倍？

解　以物距 $s=10\,\text{cm}$、像距 $s'=300\,\text{cm}$ 代入球面反射镜物像距公式和横向放大率公式，分别求得球面镜的曲率半径和横向放大率为

$$r=-19.4\,\text{cm},\quad V=-30.$$

这说明，为了满足像距要求，应选用一块凸面镜，此时得到的是一个放大了 30 倍的倒立的实像.

5. 一凹面镜的曲率半径为 24 cm. 填充表 1-2 中的空白，并作出相应的光路图.

表　1-2

物距 s/cm	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s'/cm	(8.0)	(6.0)	(4.0)	(0)	(−12)	(∞)	(24)	(18)
横向放大率 V	(1/3)	(1/2)	(2/3)	(1)	(2)	(−∞)	(−1)	(−1/2)
像的虚实	(实)	(实)	(实)	(虚)	(虚)	(实)	(实)	(实)
像的正倒	(正)	(正)	(正)	(正)	(正)	(倒)	(倒)	(倒)

解　分别把数据代入球面反射镜物像距公式和横向放大率公式，计算结果填于表中空白处. 光路图从略.

6. 按我们约定的正负号法则(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)，(Ⅴ)等[①]，标出图 1-19(a)～(d)中的物距 s、像距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u，u' 的绝对值. 比较各图中折射率 n，n' 的大小，指明各图中物、像的虚实.

解　光路图 1-19(a)～(d)的结果分别示于图 1-19(e)～(h)，其中：

(1) $n<n'$，实物，实像(如图 1-19(e)所示)；

(2) $n<n'$，虚物，实像(如图 1-19(f)所示)；

(3) $n>n'$，实物，虚像(如图 1-19(g)所示)；

(4) $n>n'$，虚物，虚像(如图 1-19(h)所示).

7. 分别根据上题各图推导球面折射成像公式.

解　在图 1-19(e)的情况下，傍轴条件下球面折射成像的物像距公式为

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：50～52，54.

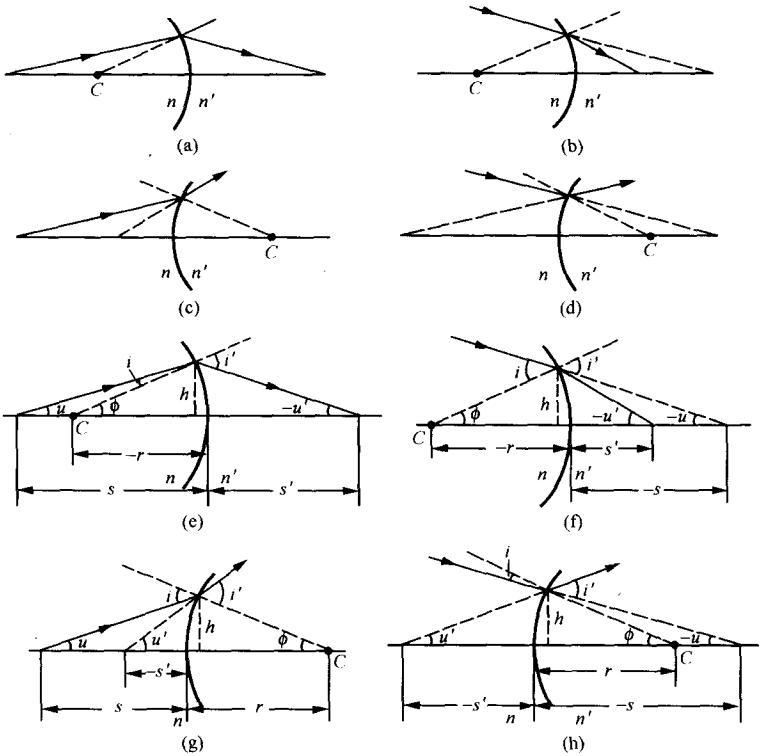


图 1-19

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}.$$

此式是否普遍，是否适用于其他情形如图 1-19(c)～(e)等三种情况，这是需要论证的. 本题意图就在于此. 下面分别推导 1-19(f)～(h)各种情况在傍轴条件下的成像公式.

在图 1-19(f)情况下，考虑傍轴近似，折射定律可写成

$$ni\approx n'i', \qquad ①$$

又有

$$-u\approx\frac{h}{-s},\quad -u'\approx\frac{h}{s'},\quad \phi=\frac{h}{-r}.$$

由几何关系得

$$i=\phi+(-u),\quad i'=\phi+(-u'),$$

从而

$$i=h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right),\quad i'=h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right).$$

代入式①有

$$nh\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right)=n'h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right),$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}.$$

同理，对图 1-19(g)的情况，在傍轴条件下有

$$i=\phi+u=\frac{h}{r}+\frac{h}{s}=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right),$$

$$i'=\phi+u'=\frac{h}{r}+\frac{h}{-s'}=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right).$$

代入式①得

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right),$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}.$$

在图 1-19(h)情况下，考虑傍轴近似有

$$i=\phi-(-u)=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{-s}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right),$$

$$i'=\phi+u'=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{-s'}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right).$$

代入式①有

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right),$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}.$$

至此，我们已经证明了以上四种情况下的物像距公式可采取同一形式；不同之处在于公式中各物理量的正负号有所区别，这种区别由事先约定的一套正负号规则来判断. 这种处理方法是符合人们记忆习惯的. 反之，如果我们对所有物理量都取正号，以上四种情况下就有四种不同形式的物像距公式，不便于记忆. 任何一本几何光学文献中必须交代清楚自己的正负号约定，不同书中的正负号约定可能不同，因此物像距等一套公式在形式上也会不同，阅读时应予以注意.

8. 若空气中一球形透明体能将平行光束会聚于其背面的顶点上，此透明体的折射率应等于多少？

解 由球面折射成像的焦距公式

$$f'=\frac{n'r}{n'-n},$$

得

$$n'=\frac{f'n}{f'-r}.$$

按题意，将 $f'=2r$，$n=1.00$ 代入上式得

$$n'=\frac{2rn}{2r-r}=2n=2.00,$$

即此透明体的折射率二倍于周围介质的折射率.

9. 如图 1-20，一平行平面玻璃板的折射率为 n，厚度为 h，点光源 Q 发出的傍轴光束（即接近于正入射的光束）经上表面反射并成像于 Q_1' 点；穿过上表面后在下表面反射，再从上表面折射的光束成像于 Q_2' 点. 证明 Q_1'，Q_2' 点间的距离为 $2h/n$.

（**提示** 把平面看成 $r\to\infty$ 的球面，并利用球面折射公式计算.）

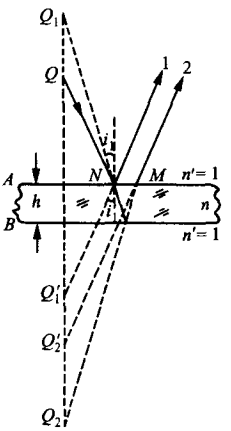


图 1-20

证一 Q_1' 点是由 Q 点经上表面 A 反射成

像所得. Q_2' 点是 Q 点经 A 面折射、B 面反射，再经 A 面折射三次成像所得(如图 1-20). 先计算 Q_2' 点的位置，设 Q 点离 A 面的距离为 s_1，Q 点第一次经 A 面折射成像，有

$$\frac{n}{s_1'}+\frac{n'}{s_1}=0,$$

解得

$$s_1'=-\frac{n}{n'}s_1=-ns_1,$$

即像 Q_1 在 A 面上方距 A 面 ns_1 处，距离 B 面 ns_1+h. 第二次经 B 面反射成像 Q_2，按镜像对称知道，像 Q_2 在 B 面下方距 B 面 ns_1+h 处，距 A 面 ns_1+2h. 第三次再经 A 面折射成像，有

$$\frac{1}{s_3'}+\frac{n}{s_3}=0,\quad s_3=ns_1+2h,$$

解得

$$s_3'=-\frac{s_3}{n}=-\left(s_1+\frac{2h}{n}\right),$$

即像 Q_2' 在 A 面下方距 A 面 s_1+2h/n 处.

Q' 点经 A 面反射成像 Q_1' 点在 A 面下方 s_1 处，所以 Q_1'，Q_2' 点之间的距离为

$$\Delta s=\left(s_1+\frac{2h}{n}\right)-s_1=\frac{2h}{n}.$$

证二　如图 1-20，设在 A 面的入射角为 i_1，折射角为 i_1'，则

$$\overline{NM}=2h\tan i_1',$$

$$\overline{Q_1'Q_2'}=\frac{\overline{NM}}{\tan i_1}=2h\frac{\tan i_1'}{\tan i_1}=2h\frac{\sin i_1'}{\sin i_1}\frac{\cos i_1}{\cos i_1'}=\frac{2h}{n}\frac{\cos i}{\cos i_1'}.$$

在傍轴条件下 $\cos i_1\approx\cos i_1'\approx1$，所以 $\overline{Q_1'Q_2'}=\dfrac{2h}{n}$.

由此可见，像的位移与物点高度无关，只与平行平板的厚度和折射率有关.

10. 如图 1-21，一束会聚光本来交于 P 点，插入一折射率为 1.50 的平面平行玻璃板后，像点移至 P' 点. 求玻璃板的厚度 t.

解　本题是 P 点经两次平面(半径为无穷大的球面)折射成像

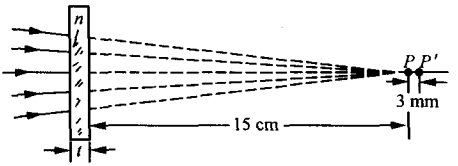


图 1-21

于 P' 点. 令 $r\to\infty$,联立物像距公式

$$\frac{1}{s_1}=-\frac{n}{s_1'},\quad \frac{n}{s_2}=-\frac{1}{s_2'},$$

并注意到 $s_2=-(s_1'-t)$,解出

$$s_2'=-(ns_1+t)/n.$$

我们须知,物像之间的位移值

$$\overline{PP'}=(s_2'+t)-(-s_1)=\frac{n-1}{n}t,$$

所以

$$t=\frac{n}{n-1}\overline{PP'},$$

与物点 P 的远近无关(图 1-21 中的数据 15 cm不是必要的). 以 $n=1.50$,$\overline{PP'}=3$ mm 代入上式算出

$$t=9\text{ mm}.$$

§6 薄 透 镜

1. 某透镜用 $n=1.50$ 的玻璃制成,它在空气中的焦距为 10.0 cm,它在水中的焦距为多少?(水的折射率为 4/3.)

解 设薄透镜材料的折射率为 n_L,物像方(同一介质)的折射率为 n_0,则薄透镜的焦距公式应当为

$$f=\frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}.$$

如设该透镜在空气中和在水中的焦距分别为 f_1,f_2,按上式有

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{n_L-1}{(n_L/n_0-1)},$$

则

$$f_2=\frac{1.50-1}{1.50\Big/\frac{4}{3}-1}f_1=4f_1=40\,\text{cm}.$$

2. 一薄透镜折射率为 1.500，焦度为 500 D[①]. 将它浸入某液体，焦度变为 −1.00 D. 求此液体的折射率.

解　由于

$$P=1/f,$$

所以薄透镜(折射率为 n_L)在介质(折射率为 n_0)中的焦度公式应当写成

$$P=\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

如果薄透镜先后置于两种介质(折射率分别为 n_1 和 n_2)中，则其焦度之比为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{n_L}{n_2}-1\right)\Big/\left(\frac{n_L}{n_1}-1\right).$$

按题意，$P_2/P_1=-1/500$，$n_L=1.500$，$n_1=1.000$，由此算出第二种介质(液体)的折射率为

$$n_2=n_L/0.999=1.502.$$

3. 用一曲率半径为 20 cm 的球面玻璃和一平面玻璃黏合成空气透镜(见图 1-22). 设玻璃壁厚可忽略，水和空气的折射率分别为 4/3 和 1，求此浸于水中透镜的焦距 f. 此透镜是会聚的还是发散的?

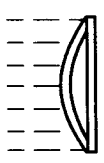


图 1-22

解　以 $n_L=1$，$n_0=4/3$，$r_1=20\,\text{cm}$，$r_2\to\infty$ 代入薄透镜焦距公式(见本节习题 1 解)，算出该空气薄透镜(置于水中)的焦距为

$$f=-80\,\text{cm},$$

它是发散透镜. 由此可见，笼统地说“凸透镜是会聚透镜”是不对的；

① 焦度 P(单位：屈光度，D)与焦距 f(单位：m)的关系为 $P=1/f$.

这句话只在周围介质折射率小于透镜折射率时是正确的.

4. 一凸透镜的焦距为 12 cm,填充表 1-3 中的空白(物距 s 为已知),并作出相应的光路图.

表 1-3

物距 s/cm	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s'/cm	(8)	(6)	(4)	(0)	(−12)	(∞)	(24)	(18)
横向放大率 V	(1/3)	(1/2)	(2/3)	(1)	(2)	(−∞)	(−1)	(−1/2)
像的虚实	(实)	(实)	(实)	(—)	(虚)	(实)	(实)	(实)
像的正倒	(正)	(正)	(正)	(正)	(正)	(倒)	(倒)	(倒)

解 根据薄透镜的物像距高斯公式和横向放大率公式,分别代入数据,把计算结果填于表中空白中. 光路图从略.

5. 一凹透镜的焦距为 12 cm,填充表 1-4 中的空白(物距 s 为已知),并作出相应的光路图.

表 1-4

物距 s/cm	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s'/cm	(−24)	(∞)	(12)	(0)	(−4)	(−6)	(−8)	(−9)
横向放大率 V	(−1)	(∞)	(2)	(1)	(2/3)	(1/2)	(1/3)	(1/4)
像的虚实	(虚)	(实)	(实)	(—)	(虚)	(虚)	(虚)	(虚)
像的正倒	(倒)	(正)	(正)	(正)	(正)	(正)	(正)	(正)

解 根据薄透镜的物像距高斯公式和横向放大率公式,分别代入数据,把计算结果填于表中空白内. 光路图略.

6. 在 5 cm 焦距的放大镜前放一小物. 要想成虚像于 25 cm 到无穷远之间,物应放在什么范围里?

解 在薄透镜物像公式的高斯形式中,令像距

$$-\infty < s' < -25\ \text{cm},$$

得物距

$$4.2\ \text{cm} < s < 5\ \text{cm},$$

即物应放在透镜前 4.2～5 cm 处;或者说,该透镜的焦深为 8 mm.

7. 一光源与屏间的距离为 1.6 m. 用焦距为 30 cm 的凸透镜插在两者之间,透镜应放在什么位置,才能使光源成像于屏上?

解　设光源离透镜距离为 s，则屏离透镜的距离为 $s'=l-s$($l=160\,\text{cm}$). 由高斯公式求得物距有两个解

$$s_1 = 120\,\text{cm},\quad s_2 = 40\,\text{cm},$$

即透镜放在光源后 120 cm 处和 40 cm 处均能使光源成实像于屏上. 当 $s_1=120$ cm 时，物成缩小实像；当 $s_2=40$ cm 时，物成放大实像.

8. 屏幕放在距物 100 cm 处，两者之间放一凸透镜. 当前后移动透镜时，我们发现透镜有两个位置可以使物成像在屏幕上；测得这两个位置之间的距离为 20.0 cm. 求：

(1) 这两个位置到屏幕的距离和透镜的焦距；

(2) 两个像的横向放大率.

解　在物像距离(大于 4 倍焦距)一定的条件下，利用光的可逆性原理可以证明，两次成像的物像距满足对易关系，即第一次成像的物距正是第二次成像的像距，第一次成像的像距正是第二次成像的物距. 这个结论也可以由高斯公式求得. 令 $l=s+s'$，应用高斯公式得

$$s^2 - ls + lf = 0,$$

解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2},$$

即

$$s_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2},\quad s_1' = l - s_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2};$$

$$s_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2},\quad s_2' = l - s_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}.$$

由此可见，两次物距差为

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \sqrt{l^2 - 4lf}.$$

由已知 $l=100\,\text{cm}$，$\Delta s=20.0\,\text{cm}$，于是透镜焦距

$$f = \frac{l^2 - (\Delta s)^2}{4l} = 24.0\,\text{cm}.$$

两次成像的像距分别为

$$s_1' = 40\,\text{cm},\quad s_2' = 60\,\text{cm}.$$

横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{2}{3},\quad V_2 = -\frac{3}{2},$$

且有

$$V_1 V_2 = 1.$$

9. 如上题，在固定的物与幕之间移动凸透镜. 证明：要使透镜有两个成像位置，物和幕之间的距离必须大于 4 倍焦距.

证 设物与幕距离为 l，上题已经解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}.$$

欲使透镜有两个成像位置，物距应有两个实数解，也即必须要求

$$l^2 - 4lf > 0,$$

即

$$l > 4f.$$

10. 如图 1-23，L_1，L_2 分别为凸透镜和凹透镜. 前面放一小物，移动屏幕到 L_2 后 20 cm 的 S_1 处接收到像. 现将凹透镜 L_2 撤去，将屏幕移前 5 cm 至 S_2 处，重新接收到像. 求凹透镜 L_2 的焦距.

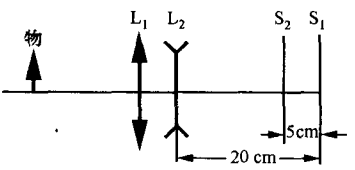


图 1-23

解 这是测定发散透镜焦距的一种实用方法(物距-像距法)，其中会聚透镜是这种方法所要求的一个辅助透镜. 按题意，无凹透镜时所成的实像正是凹透镜引入后的虚物，此时对凹透镜来说，物距 $s = -(20-5)\ \text{cm} = -15\ \text{cm}$，像距 $s' = 20\ \text{cm}$. 由高斯公式算出凹透镜焦距

$$f = -60\ \text{cm}.$$

11. 一光学系统由一焦距为 5.0 cm 的会聚透镜 L_1 和一焦距为 10.0 cm 的发散透镜 L_2 组成，L_2 在 L_1 之右 5.0 cm. 在 L_1 之左 10.0 cm 处置一小物，求经此光学系统后所成的像的位置和横向放大率. 用作图法验证计算结果.

解 这是两次成像问题，设对 L_1 的物距和像距分别为 s_1，s_1'，对

L_2 的物距和像距分别为 s_2, s_2'. 并注意到 $s_2 = -(s_1' - d)$(d 是 L_2 在 L_1 右方的距离). 把数据代入高斯公式得

$$\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{10.0} = \frac{1}{5.0}, \quad \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{-(s_1' - 5.0)} = \frac{1}{-10.0},$$

解得

$$s_1' = 10.0\,\text{cm}, \quad s_2' = 10.0\,\text{cm},$$

并有

$$s_2 = -5.0\,\text{cm}.$$

所以经此光学系统,像成在 L_2 之右 10.0 cm 处. 横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{10.0}{10.0} = -1.0,$$

$$V_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{10.0}{-5.0} = 2.0.$$

总放大率为

$$V = V_1 V_2 = -20.$$

验证计算结果的作图法如图 1-24 所示.

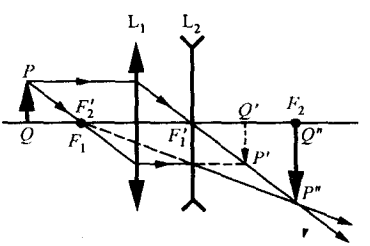


图　1-24

12. 当黏合两薄透镜时,若相接触的表面曲率半径 r_2, r_3 不吻合(见图 1-25),复合透镜的焦距公式应如何修改?

解　这里的黏合剂又可以看为一个两侧为空气的透镜. 于是复合透镜相当于三个透镜的密接,其合成焦距公式为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_2},$$

式中 f_1, f_2 分别为原来两个透镜(两侧是空气)的焦距,f_0 是胶透镜

的焦距，它应当为

$$f_0 = \frac{1}{(n_0 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)},$$

式中 n_1 为胶的折射率. 由此可见，当 $r_2 = r_3$，即两透镜吻合时，$f_0 \to \infty$，即使有一层胶，合成焦距公式仍为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$



图 1-25

*§7 理想光具组理论

1. 如图 1-26 所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求各图中 Q 点的像(入射光线从左到右).

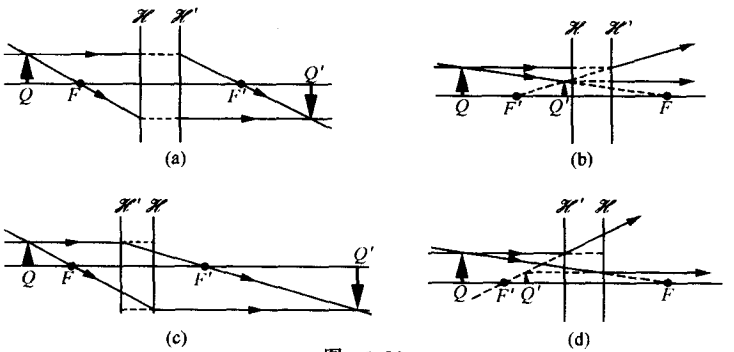


图 1-26

解 分别用作图法求得 Q 点的像为 Q' 点，如图 1-26 所示.

2. 如图 1-27 所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求 PQ 的像(入射光线从左到右).

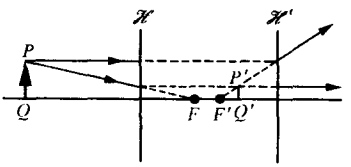


图 1-27

解　如图 1-27 所示，作图得 PQ 的像为 $P'Q'$.

3. 如图 1-28 所示的联合光具组中，已知光具组 Ⅰ 的主面为 $\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}'_1$，焦点为 F_1，F'_1；光具组 Ⅱ 的主面为 $\mathscr{H}_2$，$\mathscr{H}'_2$，焦点为 F_2，F'_2. 用作图法求联合光具组的主面和焦点.

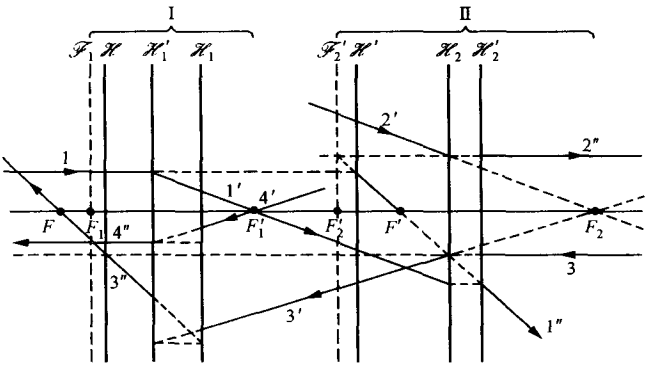


图　1-28

解　如图 1-28 所示，作图得 $\mathscr{H}$，$\mathscr{H}'$ 面和 F，F' 点，此即分别为该联合光具组的主面和焦点. 作图步骤简述如下：

(1) 作光线 1 平行光轴，则过光具组 Ⅰ 后的共轭光线 1′必过焦点 F'_1.

(2) 过焦点 F'_2 作光具组 Ⅱ 的像方焦面 $\mathscr{F}'_2$，过 F_2 点作辅助光线 2′平行于 1′，则过光具组 Ⅱ 后的共轭光线 2″与 1″必交于 $\mathscr{F}'_2$ 面上一点. 光线 1 与光线 1″的交点决定的平面 $\mathscr{H}'$ 即为联合光具组的像方主面，光线 1″与光轴的交点 F' 即为联合光具组的像方焦点.

(3) 令光线从右到左入射，作光线 3 平行于光轴，则过光具组 Ⅱ 后的共轭光线 3′必过 F_2.

(4) 过 F_1 点作光具组 Ⅰ 的物方焦面 $\mathscr{F}_1$(相对于入射光线从右到左时为像方焦面)，过 F'_1 点作辅助光线 4′平行于 3′，则过光具组 Ⅰ 后的共轭光线 4″与 3″必交于 $\mathscr{F}_1$ 面上一点. 光线 3 与 3″的交点决定的平面 $\mathscr{H}$ 即为联合光具组的物方主面，光线 3″与光轴的交点 F 即为联合光具组的物方焦点.

4. 如图 1-29 所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求正方

形 $ABCD$ 的像.

解 如图 1-29 所示,作图得 $A'B'C'D'$ 为正方形 $ABCD$ 的像.

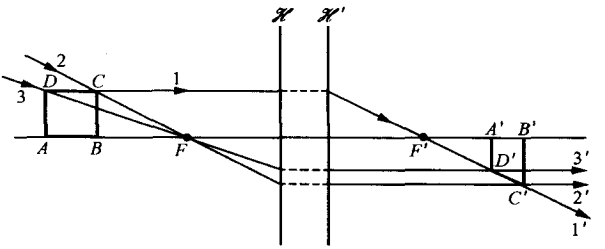


图 1-29

5. (1) 试用公式计算拉姆斯登(Ramsden)目镜($f_1 : f_2 : d = 1 : 1 : 1$)的主面和焦点的位置;

(2) 试用公式计算改进型拉姆斯登目镜($f_1 : f_2 : d = 1 : 1 : 2/3$)的主面和焦点位置.

解 (1) 按题意,令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = d, \quad \Delta = d - f_1' - f_2 = -d.$$

由光具组联合公式得目镜焦距

$$f = f' = -f_1 f_2 / \Delta = d.$$

主面位置为

$$x_H = x_H' = f_1 d / \Delta = -d,$$

即 $\mathscr{H}$ 面在向场镜 L_1 之右 d 处,正好与接目镜 L_2 重合,$\mathscr{H}'$ 面在 L_2 之左 d 处,正好与透镜 L_1 重合. 同时,焦点 F,F' 也正好落在两个透镜的光心位置. 这些结果与精确绘图所得结果是一致的.

(2) 令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = 3d/2,$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -2d,$$

因此

$$x_H = x_H' = -3d/4, \quad f = f' = 9d/8,$$

即 $\mathscr{H}$ 面在 L_1 之右 $3d/4$ 处,$\mathscr{H}'$ 面在 L_2 之左 $3d/4$ 处;F 点在 $\mathscr{H}$ 面之左 $9d/8$ 处,F' 点在 $\mathscr{H}'$ 面之右 $9d/8$ 处,这与精确作图所得结

果一致.

6. 求下列厚透镜(表 1-5)的焦距与主面、焦点的位置,并作图表示.(已知玻璃的折射率为 1.500,两界面顶点间的距离为 1.00 cm,透镜放在空气中.)

表　1-5

序　号	形　状	r_1/cm	r_2/cm
(1)	双凸	10.0	−10.0
(2)	凸凹	10.0	20.0
(3)	凹凸	−15.0	−20.0

解　厚透镜是两个折射球面组成的光具组.在傍轴条件下,这两个折射面能很好成像,且主点 H_1,H_1' 和 H_2,H_2' 分别与前后两个球面的顶点重合.设前后两个折射球面的焦距分别为 f_1,f_1' 和 f_2,f_2'.取空气的折射率为 $n_0=1.00$,则:

(1)
$$f_1=\frac{n_0r_1}{n_L-n_0}=20.0\,\text{cm},$$
$$f_1'=\frac{n_Lr_1}{n_L-n_0}=30.0\,\text{cm},$$
$$f_2=\frac{n_Lr_2}{n_0-n_L}=30.0\,\text{cm},$$
$$f_2'=\frac{n_0r_2}{n_0-n_L}=20.0\,\text{cm}.$$

两个折射面的光学间隔

$$\Delta\equiv\overline{F_1'F_2}=d-f_1'-f_2=-59.0\,\text{cm}.$$

利用理想光具组的联合公式得,厚透镜系统的焦距为

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta}=10.2\,\text{cm},\quad f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}=10.2\,\text{cm},$$

主点位置

$$x_H\equiv\overline{H_1H}=f_1d/\Delta=-0.34\,\text{cm},$$
$$x_{H'}\equiv\overline{H_2'H'}=f_2'd/\Delta=-0.34\,\text{cm},$$

即物方主面 $\mathscr{H}$ 在 H_1 点之右 0.34 cm 处,像方主面 $\mathscr{H}'$ 在 H_2' 点之左 0.34 cm 处.物方焦点 F 在物方主点 H 之左 10.2 cm 处,像方焦

点 F' 在像方主点 H' 之右 10.2 cm 处，如图 1-30(a)所示.

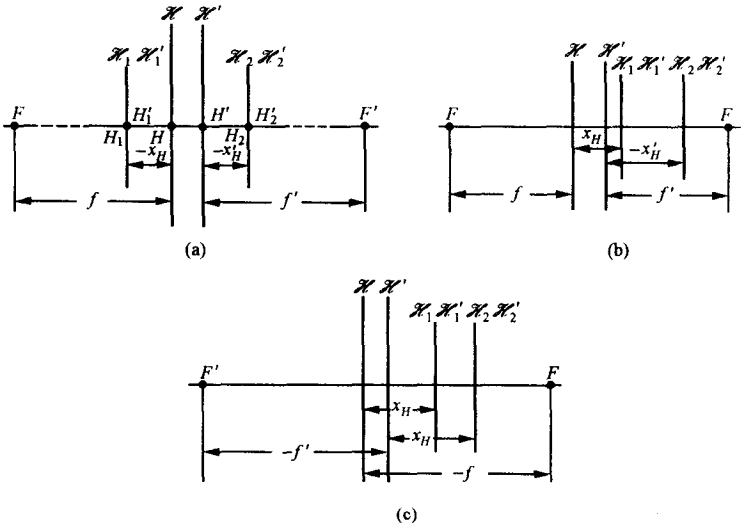


图 1-30

(2)

$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = 20.0\,\text{cm},$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 30.0\,\text{cm},$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = -60.0\,\text{cm},$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = -40.0\,\text{cm},$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 31.0\,\text{cm}.$$

因此

$$f = -f_1 f_2/\Delta = 38.7\,\text{cm},$$

$$f' = -f_1' f_2'/\Delta = 38.7\,\text{cm},$$

$$x_H = f_1 d/\Delta = 0.65\,\text{cm},$$

$$x_{H'} = f_2' d/\Delta = -1.29\,\text{cm}.$$

主面，焦点位置如图 1-30(b)所示.

(3)
$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = -30.0\,\text{cm},$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = -45.0\,\text{cm},$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = 60.0\,\text{cm},$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = 40.0\,\text{cm},$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -14.0\,\text{cm}.$$

因此

$$f = -f_1 f_2/\Delta = -128.6\,\text{cm},$$

$$f' = -f_1' f_2'/\Delta = -128.6\,\text{cm},$$

$$x_H = f_1 d/\Delta = 2.14\,\text{cm},$$

$$x_H' = f_2' d/\Delta = -2.86\,\text{cm}.$$

主面、焦点位置如图 1-30(c)所示.

7. 求放在空气中的玻璃球的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示.(已知玻璃球的半径为 2.00 cm，折射率为 1.500.)

解　在傍轴条件下，玻璃球是由两个折射成像球面组成的共轴光具组. 如图 1-31 所示，H_1，H_1' 点与 A_1 点重合，H_2，H_2' 点与 A_2 点

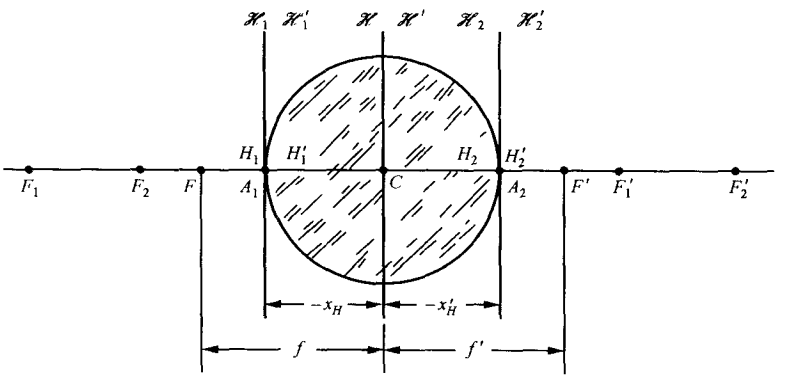


图　1-31

重合，且 $r_1=\overline{A_1C}=2.00\,\text{cm}$，$r_2=-\overline{CA_2}=-2.00\,\text{cm}$. 单球面的焦距分别为

$$f_1=4.00\,\text{cm},\quad f_1'=6.00\,\text{cm},$$
$$f_2=6.00\,\text{cm},\quad f_2'=4.00\,\text{cm},$$

且有

$$\Delta=-\overline{F_1'F_2}=-8.00\,\text{cm},$$
$$d=\overline{A_1A_2}=4.00\,\text{cm}.$$

因此

$$f=-f_1f_2/\Delta=3.00\,\text{cm},\quad f'=-f_1'f_2'/\Delta=3.00\,\text{cm},$$
$$x_H=f_1d/\Delta=-2.00\,\text{cm},\quad x_{H'}=f_2'd/\Delta=-2.00\,\text{cm},$$

即 $\mathscr{H}$ 面在 A_1 点之右 2.00 cm 处，$\mathscr{H}'$ 面在 A_2 点之左 2.00 cm 处. F 点在 A_1 点之左 1.00 cm 处，F' 点在 A_2 点之右 1.00 cm 处，其位置分别标于图 1-31. 由此可见 H 和 H' 点重合，均在球心 C 点处.

8. 上题中玻璃球面上有一斑点，计算从另一侧观察此斑点像的位置和放大率，并用作图法验证之.

解 把玻璃球看做一个光具组. 根据上题的结果，把物距 $s=2.00\,\text{cm}$ 代入高斯公式得像距

$$s'=-6.00\,\text{cm}.$$

放大率为

$$V=-s'/s=3.00.$$

作图法验证如图 1-32 所示.

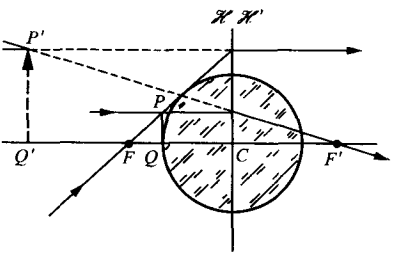


图 1-32

9. (1) 如图 1-33 所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求

光线 1 的共轭线；

(2) 在图上标出光具组节点 N，N' 的位置.

解　如图 1-33 所示，先过 F' 点作像方焦面 $\mathscr{F}'$.

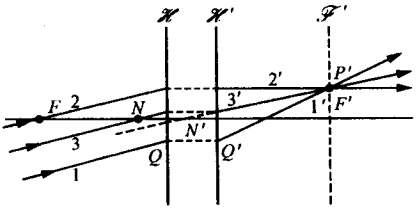


图　1-33

(1) 过 F 点作光线 2 平行于光线 1，则光线 2 的共轭光线 $2'$ 与光线 1 的共轭光线 $1'$ 必交于 $\mathscr{F}'$ 面上某一点 P'. 入射光线 1 与 $\mathscr{H}$ 面交点为 Q，在 $\mathscr{H}'$ 面上取等高点 Q'，则连接 Q'，P' 点的光线 $1'$ 便是光线 1 的共轭光线.

(2) 如图 1-33 所示，过 P' 点作平行于光线 2 的光线 $3'$，与光轴相交于一点，即为像方节点 N'；再作 $3'$ 的共轭光线 3，它与光轴的交点即为物方节点 N.

10. 如图 1-34 所示，已知光具组的主面和节点，1，$1'$ 是一对共轭光线. 求光线 2 的共轭光线.

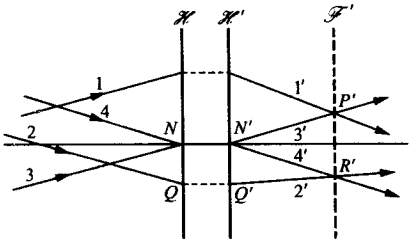


图　1-34

解　如图 1-34 所示，先找系统的后焦面. 为此，过 N 点作光线 3 平行光线 1，其共轭光线 $3'$ 过 N' 点且与光线 3 平行，光线 $3'$ 与 $1'$ 的交点 P' 必在焦面 $\mathscr{F}'$ 之中. 作光线 4 平行光线 2，其共轭光线 $4'$ 与 $\mathscr{F}'$ 面交于 R' 点. 入射光线 2 交 $\mathscr{H}$ 面于 Q，在 $\mathscr{H}'$ 面上取等高点 Q'.

那么，连接 Q'，R' 点的光线 $2'$ 必定是入射光线 2 的共轭光线.

11. 对一光具组，测得当物距改变 Δx 时，像距改变 $\Delta x'$，同时横向放大率由 V_1 变到 V_2，试证明此光具组的焦距为

$$f=\Delta x\Big/\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right),\quad f'=\frac{\Delta x}{V_1-V_2}.$$

（**提示** 这里提供了一种测焦距的方法，它与测焦点位置的方法配合起来，可以确定光具组的主面.）

证 由横向放大率公式

$$V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}$$

得

$$V_1=-\frac{f}{x_1}=-\frac{x_1'}{f'},\quad V_2=-\frac{f}{x_1+\Delta x}=-\frac{x_1'+\Delta x'}{f'}.$$

所以

$$\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}=-\frac{\Delta x}{f},\quad V_2-V_1=-\frac{\Delta x'}{f'},$$

即

$$f=\Delta x\Big/\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right),\quad f'=\frac{\Delta x'}{V_1-V_2}.$$

应注意上式中的 Δx，$\Delta x'$ 是含有正负号的，实验时应按标尺的同一方向为坐标来读数.

§8 光学仪器

1. 一架幻灯机的投影镜头焦距为 7.5 cm. 当屏幕由 8 m 移至 10 m 远时，镜头需移动多少距离？

解 由物像距关系的牛顿(Newton)公式

$$x_1=\frac{f^2}{x_1'},\quad x_2=\frac{f^2}{x_2'}$$

得物位移量 Δx 与像位移量 $\Delta x'$ 的关系为

$$\Delta x=x_2-x_1=-\frac{\Delta x'}{x_2'x_1'}f_2.$$

考虑到投影系统的特点是像距远远大于焦距，取

$$x_1' \approx s_1' = 8\,\mathrm{m}, \quad x_2' \approx s_2' = 10\,\mathrm{m},$$

则

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \approx s_2' - s_1' = 2\,\mathrm{m}.$$

所以

$$\Delta x = -0.014\,\mathrm{cm},$$

即投影镜头应移近画片 0.014 cm.

2. 某照相机可拍摄物体的最近距离为 1 m. 装上 2 D 的近拍镜后，能拍摄的最近距离为多少？（假设近拍镜与照相机镜头是密接的.）

解　用二次成像的概念分析，在像平面（底板最远位置）不变的条件下，先后两次的物像关系应当是：相对近拍镜来说，近拍物距 s 所对应的像距正是无近拍镜时的近拍距离 s'. 按题意 $s' = -1\,\mathrm{m}$，$P = 2\,\mathrm{m}^{-1}$，由高斯公式得

$$s = \frac{s'}{Ps' - 1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}.$$

3. 某人对 2.5 m 以外的物看不清，需配多少度的眼镜？另一个人对 1 m 以内的物看不清，需配怎样的眼镜？

解　对 2.5 m 以外的物体看不清者，其远点在 2.5 m 远处，故为近视眼，应配发散镜，使无穷远的物成像于 2.5 m 处. 这相当于此发散镜的焦距为

$$f_1 = -2.5\,\mathrm{m},$$

眼镜度数为

$$P_1 = 1/f_1 = -0.4\,\mathrm{D} = -40\ \text{度}.$$

对 1 m 以内物看不清者，其近点在 1 m 处，故为远视眼，应配会聚镜，使明视距离 0.25 m 的物成像于 1 m 处. 由高斯公式算出

$$f_2 = (1/3)\,\mathrm{m},$$

眼镜度数为

$$P_2 = 1/f_2 = 3\,\mathrm{D} = 300\ \text{度}.$$

4. 计算 2×，3×，5×，10× 放大镜（或目镜）的焦深.

解　放大镜（或目镜）的工作距离是使得物体处在第一焦点附近

稍靠里一些的小范围内. 这样,才能形成一个明视距离 s_0,以远处的放大虚像供正常人眼观察. 所谓"焦深"是指上述小范围的纵向间隔 Δx,这也正是与明视距离对应的物距. 令像距 $x'=-(s_0+f)$,由牛顿公式得

$$x=\frac{f^2}{x'}=-\frac{f^2}{s_0+f}.$$

我们须知,视角放大率 $M=s_0/f$,替换上式中的焦距 f 得

$$x=-\frac{s_0}{M(M+1)},$$

焦深

$$\Delta x=|x|=\frac{s_0}{M(M+1)}.$$

由此算出

$$\Delta x=\begin{cases}4.17\,\text{cm} & (M=2),\\ 2.08\,\text{cm} & (M=3),\\ 0.83\,\text{cm} & (M=5),\\ 0.23\,\text{cm} & (M=10).\end{cases}$$

由此可见,高倍放大镜或目镜的焦距很短,焦深也随之缩短,要求实验调节更要精细.

5. 一架显微镜,物镜焦距为 4 mm,中间像成在物镜像方焦点后面 160 mm 处. 如果目镜是 20×的,显微镜的总放大率是多少?

解 物镜的横向放大率为

$$V_O=-\frac{x_0'}{f_0}=-\frac{160}{4}=-40.$$

显微镜的总放大率为

$$M=V_OM_E=-40\times 20=-800.$$

6. 一架显微镜的物镜和目镜相距 20.0 cm,物镜焦距 7.0 mm,目镜焦距 5.0 mm. 把物镜和目镜都看成是薄透镜,求:

(1) 被观察物到物镜的距离;

(2) 物镜的横向放大率;

(3) 显微镜的总放大率;

(4) 焦深.

解　(1) 显微镜的工作距离应使小物成放大的实像(中间像)于目镜第一焦点附近(靠里一些),故按题意此显微镜中间像对物镜的距离为

$$s'_O = 20.0\ \text{cm} - 5.0\ \text{mm} = 195\ \text{mm},$$

由高斯公式求得小物到物镜的距离为

$$s_O = 7.3\ \text{mm}.$$

(2) 物镜的横向放大率为

$$V_O = -s'_O/s_O = -26.7 \approx -27.$$

(3) 显微镜的总(角)放大率 M 可取物镜横向(线)放大率 V_O 与目镜(角)放大率 M_E 的乘积,而目镜的(角)放大率 M_E 等于明视距离除以目镜焦距:

$$M_E = \frac{25\ \text{cm}}{5.0\ \text{mm}} = 50.$$

所以

$$M = V_O M_E = (-26.7) \times 50 = -1335.$$

(4) 目镜的焦深(参见本节思考题 4 解)为

$$\Delta x_E = \frac{25\ \text{cm}}{M_E(M_E+1)} \approx 0.1\ \text{mm}.$$

相应的物镜焦深可通过牛顿公式微分运算(取绝对值)求得:

$$\Delta x_O = \frac{f_O^2}{x'^2_O}\Delta x'_O = \frac{f_O^2}{x'^2_O}\Delta x_E.$$

以 $f_O = 7\ \text{mm}$, $\Delta x_E = 0.1\ \text{mm}$, $x'_O = s'_O - f_O = 188\ \text{mm}$ 代入,算出

$$\Delta x_O = 0.0001\ \text{mm}.$$

焦深几乎为零,这说明在目镜位置(相对镜筒)固定的情况下,显微镜的工作距离(物镜头与小物之间的距离)被严格确定,几乎没有什么调节余地.

7. 物镜、目镜皆为会聚的望远镜称为开普勒(Kepler)望远镜;物镜会聚而目镜发散的望远镜称为伽利略(Galileo)望远镜.

(1) 画出伽利略望远镜的光路.

(2) 一伽利略型望远镜的物镜和目镜相距 12 cm. 若望远镜的放大率为 4×,物镜和目镜的焦距各为多少?

解 (1) 伽利略型望远镜的光路如图 1-35 所示.

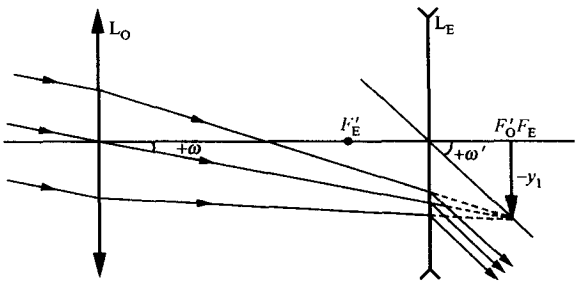


图 1-35

(2) 望远镜的角放大率为

$$M = -f_O/f_E.$$

再考虑到筒长

$$d = f_O + f_E,$$

解得

$$f_O = \frac{M}{M-1}d, \quad f_E = -\frac{d}{M-1}.$$

以 $M=+4, d=12\,\text{cm}$ 代入,算出此望远镜物镜和目镜的焦距分别为

$$f_O = 16\,\text{cm}, \quad f_E = -4\,\text{cm}.$$

8. 拟制一个 3×的望远镜. 已有一个焦距为 50 cm 的物镜,问:在开普勒型和伽利略型望远镜中目镜的光焦度以及物镜、目镜的距离各为多少?

解 (1) 按题意,在开普勒型望远镜中应取 $M=-3$. 由物镜焦距 $f_O=50\,\text{cm}$ 可以算出目镜焦距

$$f_E = -f_O/M = 17\,\text{cm},$$

光焦度

$$P_E = \frac{1}{f_E} = \frac{1}{0.17\,\text{m}} = 6\,\text{D}.$$

望远镜筒长

$$d = 50\,\text{cm} + 17\,\text{cm} = 67\,\text{cm}.$$

(2) 按题意,在伽利略型望远镜中应取 $M=3$. 由此算出

$$f_E = -17\,\text{cm},$$
$$P_E = -6\,\text{D},$$
$$d = 50\,\text{cm} - 17\,\text{cm} = 33\,\text{cm}.$$

*§9 光　　阑

1. 一望远镜的物镜直径为 5.0 cm，焦距为 20 cm，目镜直径为 1.0 cm，焦距为 2.0 cm. 求此望远镜的入射光瞳和出射光瞳的位置和大小.

解　如图 1-36 所示，由几何关系易得孔径光阑即为物镜 L_O 的边框. 所以入射光瞳即为物镜本身，出射光瞳为物镜对目镜在像方的共轭像. 由高斯公式

$$\frac{1}{s'_E} + \frac{1}{20\,\text{cm} + 2.0\,\text{cm}} = \frac{1}{2.0\,\text{cm}}$$

解得

$$s'_E = 2.2\,\text{cm},$$

即出射光瞳的位置在目镜后 2.2 cm 处. 由横向放大率公式得

$$V_E = -\frac{s'_E}{s_E} = -\frac{2.2\,\text{cm}}{22\,\text{cm}} = -0.1.$$

所以出射光瞳的直径为

$$D' = D_O|V_E| = 5.0 \times 0.1\,\text{cm} = 0.5\,\text{cm} = 5.0\,\text{mm}.$$

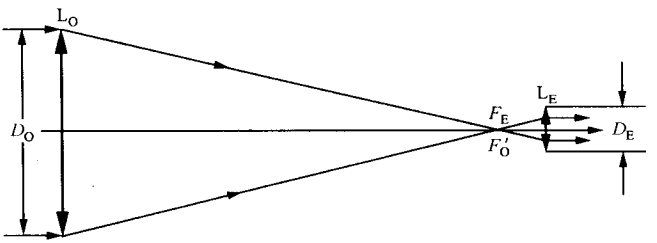


图　1-36

2. 望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘. 求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳直径 D' 与物镜直径 D_O 之关系为

$$D' = D_O/|M|,$$

式中 $M=-f_O/f_E$ 是望远镜的视角放大率.

解 (1) 出射光瞳为物镜(孔径光阑)对目镜所成的像,此时物距 $s=f_O+f_E$. 由高斯公式求得像距(出射光瞳与目镜的距离)

$$s' = (1 + f_E/f_O)f_E \approx f_E \quad (f_O \gg f_E).$$

(2) 设物镜直径为 D_O,出射光瞳直径为 D'. 在目镜与物镜的前后焦点重合的情况下,由作图法提供的相似三角形的比例关系很容易说明:

$$\frac{D_O}{D'} = \frac{f_O}{f_E}.$$

又因

$$M = -f_O/f_E,$$

则得

$$D' = D_O/|M|.$$

3. 将望远镜倒过来可作激光扩束之用. 设一望远镜的物镜焦距 30 cm,目镜焦距 1.5 cm,它能使激光束的直径扩大几倍?

解 这时,通过望远镜出射光瞳的激光束都能通过入射光瞳. 由上题可知,

$$\frac{D_O}{D'} = |M| = \frac{f_O}{f_E} = 20.$$

使用这台倒望远镜时,激光束直径扩大了 20 倍.

4. 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常是其物镜的边缘. 求出射光瞳的位置,并证明在傍轴近似下出射光瞳的直径 D' 与入射孔径角 u_0 的关系是

$$D' \approx 2s_0nu_0/|M|,$$

式中 $s_0=25$ cm 是明视距离,M 是显微镜的视角放大率,n 是物方折射率.

解 (1) 出射光瞳为物镜(孔径光阑)对目镜所成的像. 由高斯公式得出射光瞳离目镜的距离(像距)

$$s' = \left(1 + \frac{f_E}{f'_O + \Delta}\right) f_E \approx f_E \quad (\Delta \gg f_E),$$

式中 Δ 为显微镜的光学筒长.

(2) 以物镜为物,目镜的横向放大率为

$$V_E = -\frac{f_E}{f'_O + \Delta}.$$

故出射光瞳的直径为

$$D' = V_E D = -\frac{f_E}{f'_O + \Delta} D, \qquad ①$$

式中 D 为物镜直径. 在傍轴条件下

$$D \approx 2 f_O u_0,$$

改写式①为

$$D' = -\frac{f_O f_E}{f'_O + \Delta} 2u_0. \qquad ②$$

考虑到显微镜总的(角)放大率

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f'_O f_E},$$

再改写式②为

$$D' = \frac{f_O}{f'_O} \frac{\Delta}{f'_O + \Delta} \frac{2 s_O u_0}{M}.$$

又考虑到

$$\frac{f_O}{f'_O} = n, \quad \frac{\Delta}{f'_O + \Delta} \approx 1,$$

最后得

$$D' \approx 2 n s_0 u_0 / M.$$

凡是显微镜中的问题,应注意到它的特点是短焦距,筒长远远大于焦距值;它工作于齐明点时,对物镜来说满足阿贝正弦条件.

5. 如图 1-37 中 L_1,L_2 是两个会聚透镜,Q 点是物点,DD 是光阑. 已知焦距 $f_1 = 2a$,$f_2 = a$,图中标示各距离为 $s = 10a$,$l = 4a$,$d = 6a$,此外透镜与光阑半径之比是 $r_1 = r_2 = 3r_3$. 求此光具组的孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳、入射窗和视场光阑的位置和大小.

解　(1) 确定孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳.

先将 DD 对 L_1 成像到系统物空间去. 这时 $s = l = 4a$,求得

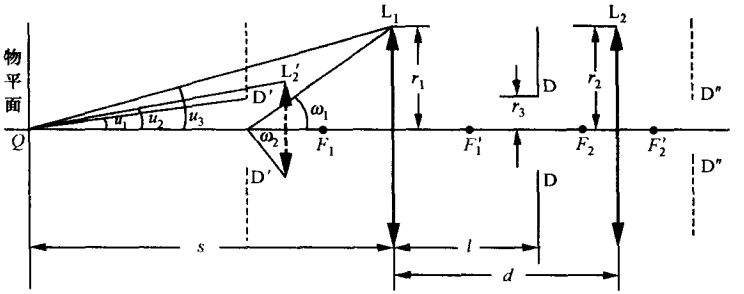


图 1-37

$$s' = \frac{sf_1}{s - f_1} = \frac{4a \times 2a}{4a - 2a} = 4a,$$

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{4a}{4a} = -1,$$

$$r_3' = r_3|V| = r_3,$$

式中 r_3' 为 DD 的像 D′D′的半径(如图 1-37).

再将 L_2 对 L_1 成像到系统的物空间去. 这时 $s=d=6a$,求得

$$s' = \frac{sf_1}{s - f_1} = \frac{6a \times 2a}{6a - 2a} = 3a,$$

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{3a}{6a} = -\frac{1}{2},$$

$$r_2' = r_2|V| = \frac{1}{2}r_2 = \frac{3}{2}r_3,$$

式中 r_2' 为 L_2 的像 L_2'(如图 1-37)的半径.

现在比较像 D′D′,L_2',L_1 分别对轴上物点 Q 的张角 u_1,u_2,u_3 的大小:

$$\tan u_1 = \frac{r_3'}{10a - 4a} = \frac{r_3}{6a},$$

$$\tan u_2 = \frac{r_2'}{10a - 3a} = \frac{3r_3}{14a},$$

$$\tan u_3 = \frac{r_1}{10a} = \frac{3r_3}{10a}.$$

可见 $u_1 < u_2 < u_3$. 因此光阑 DD 为孔径光阑,它在物空间的像 D′D′即

为入射光瞳，位置在 L_1 左侧 $4a$ 处，大小与 DD 一样.

把 DD 对 L_2 成像到系统的像空间去，即得出射光瞳 D″D″(如图 1-37). 这时 $s=d-l=2a$，求得

$$s' = \frac{sf_2}{s-f_2} = \frac{2a \times a}{2a-a} = 2a,$$

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{2a}{2a} = -1,$$

$$r''_3 = r_3|V| = r_3,$$

式中 r''_3 为 D″D″的半径. 出射光瞳在 L_2 右侧 $2a$ 处，大小与 DD 一样.

(2) 确定视场光阑和入射窗.

比较 L_1 和 L'_2 对入瞳 D′D′中心的张角 ω_1,ω_2(如图 1-37)的大小：

$$\tan\omega_1 = \frac{r_1}{4a} = \frac{3r_3}{4a},$$

$$\tan\omega_2 = \frac{r'_2}{4a-3a} = \frac{3r_3}{2a},$$

可见 $\omega_1<\omega_2$. 所以 L_1 的边框即为视场光阑，并兼为入射窗.

6. 惠更斯目镜的结构如图 1-38 所示(用理想光具组的联合公式可以证明系统的物方焦点 F 在向场镜 L_1 右侧 $1.5a$ 处，物平面在 F 点内侧附近). 今在两透镜间放一光阑 AA，设透镜 L_1，L_2 和光阑的直径分别为 D_1，D_2 和 D. 试证：

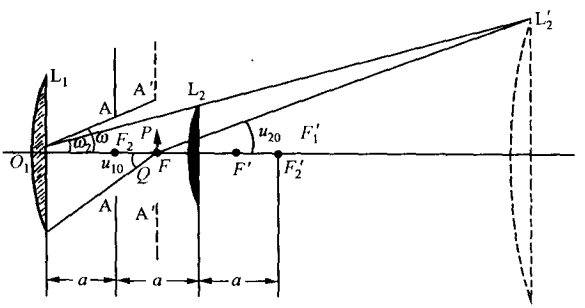


图　1-38

(1) 向场镜 L_1 成为孔径光阑的条件是

$$D_1 < D_2.$$

(2) 光阑 AA 成为视场光阑的条件是

$$D < D_2/2.$$

(3) 这时对 F_2' 点计算的出射孔径角 u_0' 由下式确定：

$$\tan u_0' = D_1/2a.$$

证 要确定光学系统的孔径光阑，必须首先将所有光学元件对物方成像，并确定这些像的孔径线度，然后明确物点的位置. 我们须知，对不同物点来说，孔径光阑将可能发生变化. 要确定系统的视场光阑，就应当在上述确定孔径光阑的基础上，以入射光瞳中心为顶点向物平面横扫，在物方的(像面)孔径对横向范围限制得最厉害的就是视场光阑.

(1) 为确定孔径光阑，需把 AA 和 L_2 的边框通过 L_1 属于物方空间的像 A′A′和 L_2' 求出. 由高斯公式可以求得 A′A′正好与物平面重合，如图 1-38 所示，因此 AA 不可能为孔径光阑. 现以物点 Q 为顶点，向场镜 L_1 所张的角为

$$u_{10} = \arctan \frac{D_1}{2 \times 1.5a} = \arctan \frac{D_1}{3a},$$

接目镜 L_2 在物方共轭 L_2' 所张的角为

$$u_{20} = \arctan \frac{D_2'}{2(s_2' - 1.5a)},$$

式中 s_2' 是 L_2' 对 L_1 的像距绝对值，D_2' 为 L_2' 的孔径. 由高斯公式和横向放大率公式算得 $s_2' = 6a$，$D_2' = 3D_2$，所以

$$u_{20} = \arctan(D_2/3a).$$

由此可见，要使向场镜成为孔径光阑，必须满足

$$D_1 < D_2.$$

(2) 如图 1-38，若惠更斯目镜的向场镜 L_1 是孔径光阑，则同时也是入射光瞳. 以 O_1 点为顶点，AA 或 A′A′所张的角设为 ω，L_2 或 L_2' 所张的角设为 ω_2，则

$$\omega_2 > \omega \quad (D_2 > 2D),$$

$$\omega_2 = \omega \quad (D_2 = 2D),$$

$$\omega_2 < \omega \quad (D_2 < 2D).$$

所以，AA 为视场光阑的条件是

$$D < D_2/2.$$

(3) 这里所谓的“出射孔径角”是指出射光瞳对 F_2' 所张的角 u_0'. 为此首先确定孔径光阑 L_1 在像方共轭 L_1' 的纵向位置和横向孔径. 据题意，对 L_2 来说焦距 $f_2 = a$，物距 $s = 2a$，算出此时像距 $s' = 2a$，$x' = a$，横向放大率 $V = -1$，即 L_1' 的孔径 $D_1' = VD_1 = -D_1$，所以

$$\tan u_0' = \left|\frac{D_1'}{2x'}\right| = \frac{D_1}{2a}.$$

7. 试用两个薄透镜组装一台简易的望远镜，要求：

(1) 该望远镜能分辨 100 m 远物面上 1 mm 间隔的两条刻线；

(2) 镜筒长度(指物镜与目镜之间的距离)为 62 cm.

试求：

(1) 物镜的口径应选多大？

(2) 物镜焦距与目镜焦距应选多长？

(3) 指明这台望远镜的出射光瞳的位置.

(4) 当目镜口径选为 3 cm 时，这台望远镜的入射视场角为多少？

解　简易望远镜光路如图 1-39 所示.

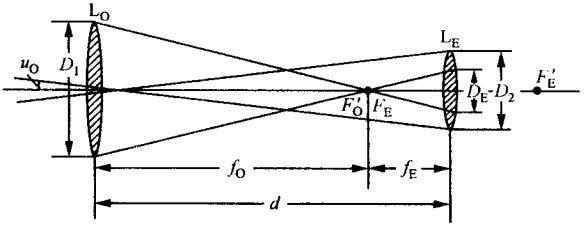


图　1-39

(1) 按题意，要求此望远镜的最小分辨角为

$$\delta\theta_m = \frac{1\text{ mm}}{100\text{ m}} = 10^{-5}\text{ rad}^{①}.$$

① “rad”(弧度)是“[平面]角”的单位符号.

根据望远镜分辨角公式

$$\delta\theta_m = 1.22\lambda/D$$

得，物镜口径应不小于

$$D_1 = 1.22\frac{\lambda}{\delta\theta_m} = 1.22 \times \frac{0.55\ \mu m}{10^{-5}} = 6.7\,cm.$$

(2) 考虑到眼睛的最小分辨角为

$$\delta\theta_e = 1' \approx 3 \times 10^{-4}\,rad,$$

应使望远镜的视角放大率满足

$$M = \delta\theta_e/\delta\theta_m = 30.$$

此为正常放大率值. 而放大率与焦距的关系为

$$M = f_O/f_E = 30,$$

又

$$f_O + f_E = 62\,cm,$$

联立解出

$$f_O = 60\,cm, \quad f_E = 2\,cm.$$

(3) 望远镜的孔径光阑就是物镜口径本身. 它对目镜(短焦距)来说为远物，所以物镜在像方的像位于目镜后焦点 F'_E 附近，此为出射光瞳位置所在. 于是目镜口径便是视场光阑，也是出射窗. 它对物镜中心所张的角 u_0 就是入射视场角，u_0 由下式决定：

$$u_0 = \arctan\frac{D_2}{2d} = \arctan\left(\frac{1}{41}\right) \approx 0.024\,rad = 1°23'.$$

*§10 像 差

1. 阿贝(Abbe)正弦条件

$$ny\sin u = n'y'\sin u'$$

与理想光具组理论中的亥姆霍兹公式

$$ny\tan u = n'y'\tan u'$$

是否矛盾？这说明了什么？证明一对齐明点附近不可能有另一对齐明点.

证 我们须知，齐明点满足的阿贝正弦条件为

$$ny\sin u = n'y'\sin u'$$

或

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{fy}{f'y'} = \mathrm{C}\ (\text{常数}); \qquad ①$$

而理想光具组理论中的亥姆霍兹公式(正切条件)为

$$ny\tan u = n'y'\tan u'$$

或

$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{fy}{f'y'} = \mathrm{C}\ (\text{常数}). \qquad ②$$

在出射角 u 变化的情况下,如果要同时满足式①,②,势必

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{\tan u'}{\tan u}.$$

于是得

$$\cos u'/\cos u = 1,$$

其解 $u'=u$ 是唯一的.这正是平面镜的情况.除此之外的一般情况是 $u'\neq u$,则正弦条件和正切条件是不能同时满足的.在此,我们还必须进一步弄清楚两个问题:在两者之中,究竟是哪一个在物理上得以实现?两者不能同时实现说明了什么?我们须知,理想光具组的一整套理论是纯几何理论,它不涉及物理上是否得以实现的可能性;而齐明点满足的阿贝正弦条件是由折射定律出发如实分析而得到的.换句话说,对于共轴球面系统来说,确实可以找到一对共轭点(齐明点)满足阿贝正弦条件,从而在消除球差的基础上同时消除了彗差,使傍轴小物宽光束很好地成像.此时,正切条件不被满足.

既然正切条件是理想光具组点点宽光束理想成像的必要条件之一,也必定是傍轴小物理想成像的必要条件之一.而正弦条件的成立使这一条件不满足;这意味着对共轴球面系统来说,沿纵向(光轴)各点都做到傍轴小物很好成像是不可能的.如果在一对齐明点附近又能导出另一对齐明点,利用递推法就能导出纵向各点都能使傍轴小物很好成像.根据以上逻辑,这是做不到的.

2. 试证明,显微镜出射光瞳直径 D' 由下式决定:

$$D' = \frac{2s_0 n\sin u_0}{|M|} = 2s_0\frac{\mathrm{N.A.}}{|M|},$$

即 D' 正比于数值孔径 N. A. $=n\sin u_0$，反比于视角放大率 M. ($s_0=25\,\text{cm}$，是明视距离.)

证 如图 1-40 所示，显微镜的特点是 $\Delta\gg f'_O, f_E$，小物位于 F_O 点附近齐明点时对物镜来说满足阿贝正弦条件，中间像落在 F_E 点附近，出射光瞳在 F'_E 点附近.

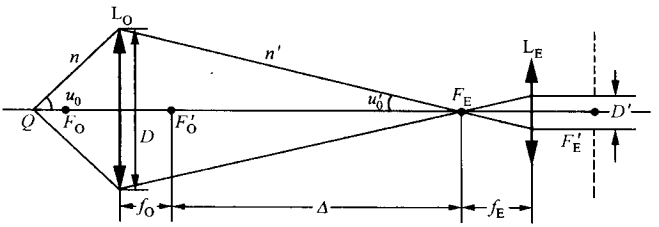


图 1-40

据此，由横向放大率公式得

$$D'\approx-\frac{f_E}{f'_O+\Delta}D. \qquad ①$$

再由显微镜的视角放大率

$$|M|=\Delta s_0/f'_O f_E$$

得

$$f_E=\Delta s_0/f'_O|M|. \qquad ②$$

又有

$$D=2(\Delta+f'_O)\tan u'_0\approx 2(\Delta+f'_O)\sin u'_0.$$

再由阿贝正弦条件

$$ny\sin u_0=n'y'\sin u'_0$$

和物镜的横向放大率

$$V_O=\frac{y'}{y}=-\frac{\Delta}{f'_O}$$

得

$$\sin u'_0=\frac{ny\sin u_0}{n'y'}=-\frac{f'_O}{\Delta}\frac{n}{n'}\sin u_0$$

$$=-\frac{f'_O}{\Delta}n\sin u_0 \quad (n'=1). \qquad ③$$

将式②,③代入式①得

$$D'=\left(\frac{-1}{f'_O+\Delta}\right)\left(\frac{\Delta s_0}{f'_O|M|}\right)2(\Delta+f'_O)\left(\frac{-f'_O}{\Delta}n\sin u_0\right)$$

$$=2s_0 n\sin u_0/|M|.$$

由此可见,出瞳孔径与放大率成反比. 显微镜倍率越高,则出瞳越小,以致小于眼瞳. 此时对眼睛来说,其有效入瞳口径就由显微镜的出瞳口径限制,从而降低了眼睛的相对孔径,使像场变暗.

3. 拟用冕玻璃 K9($n_D=1.5163, n_F=1.5220, n_C=1.5139$)和重火石玻璃 F4($n_D=1.6199, n_F=1.6321, n_C=1.6150$)来做消色差黏合透镜,焦距 100 mm. 若已确定其负透镜的非黏合面为平面,试求其余各面的曲率半径.

解　联立下列二方程:

$$P_D=(n_{1D}-1)k_1+(n_{2D}-1)k_2$$

$$=\frac{1}{100\times10^{-3}}D=10.0D,$$

$$P_F-P_C=(n_{1F}-n_{1C})k_1+(n_{2F}-n_{2C})k_2=0.$$

以 $n_{1D}=1.5163, n_{2D}=1.6199, n_{1F}=1.5220, n_{1C}=1.5139, n_{2F}=1.6321, n_{2C}=1.6150$ 代入,解得

$$k_1=44.90, \quad k_2=-21.27,$$

即

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=44.90, \quad \frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}=-21.27.$$

令 $r_4\to\infty, r_2=r_3$,算出

$$r_1=42.3\,\text{mm}, \quad r_2=-47.0\,\text{mm},$$

式中 r_1 为正透镜非黏合面曲率半径,r_2 为黏合面曲率半径.

4. 试论证:对助视光学仪器来说,消除焦距色差就能消除视角色差.

证　对薄透镜来说,由于不同波长的主面仍然重合于过透镜光心的平面,所以一旦消除了焦距色差,也必定同时消除了焦点色差.

但是对厚透镜或透镜组来说，由于不同波长的主面并不重合(如图1-41)，所以即使消除了焦距色差使 $f_1(\lambda_1)=f_2(\lambda_2)$，两对焦点 F_1 与 F_2，F_1' 与 F_2' 并不重合，从而横向放大率色差和纵向位置色差依然存在. 不过，此时两种不同颜色的像虽然大小和位置均不同，但它们各自对后焦点 F_1'，F_2' 所张的角度 u_1'，u_2' 是相等的，这一点从图上看得很清楚. 我们须知，对于助视光学仪器来说，出瞳位置正在后焦点附近，此处是眼瞳最佳位置. 故 $u_1'=u_2'$ 表明两种颜色的像的视角是相等的，在视网膜上便能很好重叠一致，从而消除了视角色差.

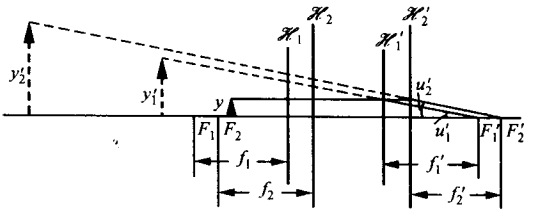


图 1-41

从图中还可以算出，有仪器时的视角

$$\tan u_1' = \tan u_2' = \frac{y}{f_1'} = \frac{y}{f_2'};$$

而无仪器时的视角

$$\tan u_0 = y/s_0,$$

式中 s_0 为明视距离. 故视角放大率

$$M = \frac{\tan u_1'}{\tan u_0} = \frac{s_0}{f'}$$

与焦点位置无关，仅由焦距决定. 只要眼睛置于目镜后焦点附近，上式总是成立的.

§11 光度学基本概念

1. 在离桌面 1.0 m 处有盏(发光强度为)100 cd[①]的电灯 L. 设 L

① "cd"(坎[德拉])是"发光强度"的单位符号.

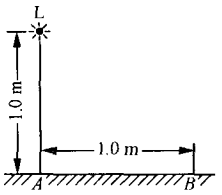


图　1-42

可看做是各向同性的点光源，求桌面上 A，B 两点的照度(见图 1-42).

解　按点光源照明时的照度公式

$$E = I\cos\theta/r,$$

并分别以 $I = 100\ \text{cd}$，$\cos\theta_A = \cos 0° = 1$，$r_A = 1.0\ \text{m}$，$\cos\theta_B = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$，$r_B = \sqrt{2}\,r_A$ 代入，算出 A，B 两点的照度为

$$E_A = 100\ \text{lx}^{①},\quad E_B = 35\ \text{lx}.$$

2. 若上题中的电灯 L 可以垂直上下移动，问：怎样的高度使 B 点的照度最大？

解　如图 1-43，设照明处 B 与灯泡垂足 A 点的距离为 l，灯泡位于不同高度将同时改变距离 r 和倾角 θ. 选 θ 为变量，则 $r = l/\sin\theta$. 照度公式改写为

$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2} = \frac{I}{l^2}\cos\theta\sin^2\theta.$$

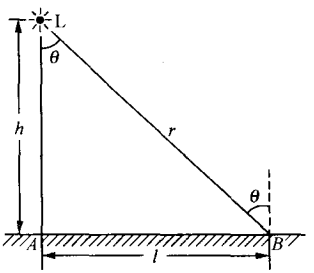


图　1-43

对上式求导，得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} = \frac{I}{l^2}\sin\theta(2 - 3\sin^2\theta).$$

令 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\theta = 0$，解得

$$\sin\theta = \sqrt{2/3},$$

① “lx”(勒[克斯])是“[光]照度”的单位符号.

则

$$h = l/\sqrt{2},$$

此时，横向固定距离处的照度最大. 以 $l=1.0\,\mathrm{cm}$ 代入，得

$$h=0.7\,\mathrm{m}.$$

3. (1) 设天空为亮度均匀的朗伯(Lambert)体，其亮度为 B. 试证明，在露天水面上的照度 $E=\pi B$.

(2) 在上面的计算中，与我们假设天空是怎样形状的发光面有无关系？与被照射面的位置有无关系？

证 (1) 如图 1-44(a)，若天空为朗伯体，由互易关系可知，亮度为 B 的天空照射在水平面元 $\mathrm{d}S'$ 上的光通量 $\Delta\Phi'$ 等于亮度为 B 的面 $\mathrm{d}S'$ 发射于整个天空上的光通量 $\Delta\Phi$. 于是，水平面元的照度为

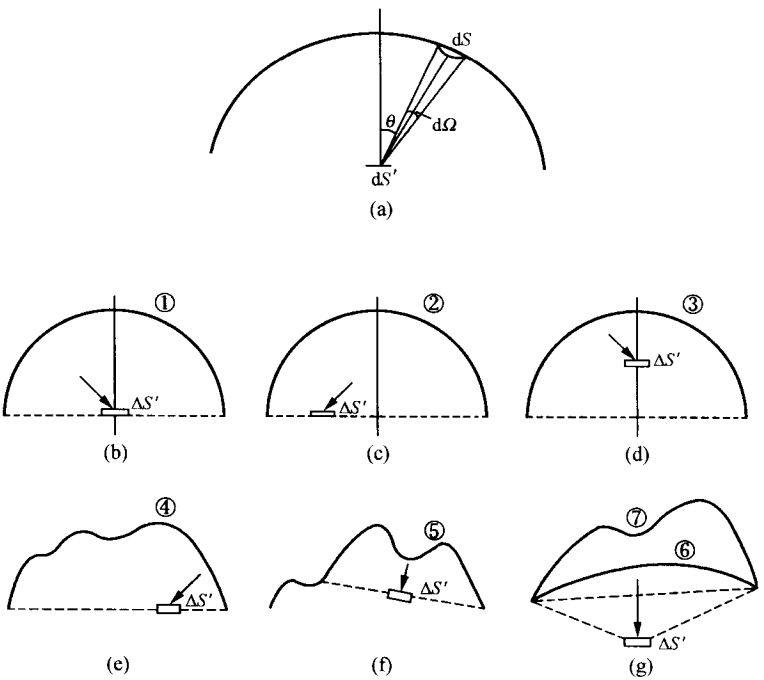


图 1-44

$$E=\frac{\Delta\Phi'}{\mathrm{d}S'}=\frac{\Delta\Phi}{\mathrm{d}S'}=\frac{1}{\mathrm{d}S'}\iint B\mathrm{d}S'\cos\theta\mathrm{d}\Omega$$
$$=\iint B\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=B\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\pi B.$$

(2) 以上论证表明，面元的照度决定于投射于该面元的总光通量，也就是决定于亮度为 B 的假想面元向实际面光源所张立体角范围内所发射的光通量. 显然，这个光通量的数值与实际朗伯体的形状无关，而与立体角的大小有关. 因此，上面的计算结果与天空形状和水平被照面的位置均无关. 按这个概念，就可以对图 1-44(b)～(g)几种情况下的照度大小作出正确的判断：

$$E_1=E_2=E_3=E_4=E_5=\pi B\neq E_6=E_7.$$

4. 试证明，一个理想漫射体受到照度为 E 的辐射时，反射光的亮度 $B=E/\pi$.

证　如果引入面发光度的概念，此题更易于证明. 对于一个面光源来说，某处 $\mathrm{d}S$ 面元向外辐射的总光通量为 $\Delta\Phi$，则定义

$$R=\Delta\Phi/\mathrm{d}S$$

为面光源该处的面发光度. 对于朗伯体来说，如果亮度为 B，则

$$\Delta\Phi=\iint B\mathrm{d}S\cos\theta\mathrm{d}\Omega=B\mathrm{d}S\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=\pi B\mathrm{d}S.$$

所以，亮度 B 与面发光度 R 的关系为

$$R=\pi B.$$

当然，面光源既可以是真实的发光体，也可以是被照明的反射物. 如果忽略吸收，反射物的照度便等于它作为光源的面发光度，即 $R=E$. 如果它又是一个漫射体，当做朗伯体处理，则其亮度

$$B=\frac{R}{\pi}=\frac{E}{\pi}.$$

5. 阳光垂直照射地面时，照度为 1.5×10^5 lx. 若认为太阳的亮度与光流方向无关，并忽略大气对光的吸收，且已知地球轨道半径为

1.5×10^8 km，太阳的直径为 1.4×10^6 km，求太阳的亮度.

解一 设地面的照度为 E，地球的轨道半径为 z，太阳的半径为 r. 由球对称性得太阳的总光通量为

$$\Phi = E4\pi z^2,$$

太阳的面发光度为

$$R = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{Ez^2}{r^2}.$$

由面发光度与亮度的关系得太阳的亮度为

$$\begin{aligned} B &= \frac{R}{\pi} = \frac{Ez^2}{\pi r^2} \\ &= 1.5\times10^9 \text{ lm/m}^2\cdot\text{sr} \\ &= 1.5\times10^5 \text{ sb}^{①}. \end{aligned}$$

如果考虑到光功当量为 $k_M = 683$ lm/W，则太阳的亮度也可以表示为

$$B = 2.2\times10^6 \text{ W/m}^2\cdot\text{sr}.$$

如果对大气层的吸收(以致地面照度降低)作修正，并考虑到太阳辐射于整个波段(不限于可见光范围)的功率，那么太阳辐射亮度值自然比以上数值还要高. 目前在大气层上边界所取的太阳辐射亮度值为 2×10^7 W/m$^2\cdot$sr.

解二 如图 1-45，根据互易关系，亮度为 B 的太阳照射在地球面元 $\Delta S'$ 上的光通量等于亮度为 B 的面元 $\Delta S'$ 照射在太阳上的光通量，即

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi' = B\Delta S'\Delta\Omega'.$$

已知太阳光投射于地球的照度 $E=\Delta\Phi/\Delta S'$，又由太阳的半径和太阳至地球的距离可以算出太阳对地球所张的立体角 $\Delta\Omega'\approx \pi r^2/z^2$，解出

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Delta\Phi}{\Delta S'}\frac{z^2}{\pi r^2} = \frac{Ez^2}{\pi r^2} \\ &= 1.5\times10^5 \text{ sb}. \end{aligned}$$

---

① "sr"(球面度)是"立体角"的单位符号；"lm"(流[明])是"光通量"的单位符号：1 lm=1 cd·sr. 1 sb(熙提)$=10^4$ cd/m^2.

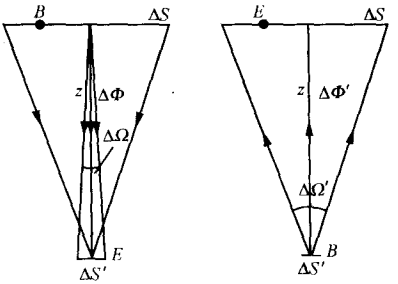


图　1-45

*§12　像的亮度、照度和主观亮度

1. 太阳表面的辐射亮度为 $2\times10^7\ \mathrm{W/m^2\cdot sr}$. 用相对孔径 $D/f=1.5$ 的放大镜将阳光聚集成光斑的最大辐射照度是多少?

解　在光能被聚焦,用于点火、钻孔、熔化、烧毁等过程中,起作用的光学度量是照度,而不是光源本身的亮度. 利用远物(成像于聚光透镜的焦面附近)成像的照度公式

$$E\approx\frac{\pi}{4}B\left(\frac{D}{f}\right)^2,$$

以 $B=2\times10^7\ \mathrm{W/(m^2\cdot sr)}$, $D/f=1.5$ 代入,算出太阳像斑的最大辐射照度值为

$$E\approx3.5\times10^7\ \mathrm{W/m^2}.$$

整个光斑集中的光功率 ΔW 为

$$\Delta W'=E\Delta S',$$

式中 $\Delta S'$ 为光斑面积(忽略衍射效应):

$$\Delta S'=V^2\Delta S=(f/z)^2\Delta S.$$

设 $f=1$ m,取太阳面积

$$\Delta S=\pi r^2=\pi(1.4\times10^6/2)^2\ \mathrm{km^2},$$

地球到太阳的平均距离 $z=1.5\times10^8$ km,求得

$$\Delta S'=\pi(r/z)^2f^2=0.68\ \mathrm{cm^2}.$$

如仍保持相对孔径为 1.5,即选取透镜口径 $D=1.5$ m(够大的了!),

则

$$\Delta W' = 2.4 \times 10^3\ \mathrm{W}.$$

通过以上讨论，应强调指出，远物成像的照度正比于相对孔径的平方或像斑的面积正比于焦距平方. 据此判断，阿基米德(Archimedes)曾用长焦距镜面会聚日光烧毁远处敌舰的传说，只是一种没有科学根据的妄说. 与长焦距匹配，应有足够大的镜面，才能获得较大的照度.

2. 一屏放在离烛 100 cm 处. 把一会聚透镜放在烛和屏之间，透镜有两个位置可以在屏上得到烛的像，这两个位置相距 20 cm. 在屏上烛的两个像的照度相差多少倍?

解 这两对共轭物像满足互易关系，也就是说，物距 s_1 及其像距 s_1'. 物距 s_2 及其像距 s_2' 满足

$$s_2 = s_1', \quad s_2' = s_1.$$

又有

$$s_1 + s_1' = s_1 + s_2 = l = 100\,\mathrm{cm},$$
$$s_1 - s_2 = \Delta s = 20\,\mathrm{cm}.$$

解出

$$s_1 = 60\,\mathrm{cm}, \quad s_1' = 40\,\mathrm{cm};$$
$$s_2 = 40\,\mathrm{cm}, \quad s_2' = 60\,\mathrm{cm}.$$

对于朗伯体，两种情况下像面接收的光通量 $\Delta\Phi_1$，$\Delta\Phi_2$ 之比为

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2} = \frac{k\pi B\sigma\sin^2 u_{10}}{k\pi B\sigma\sin^2 u_{20}} \approx \frac{u_{10}^2}{u_{20}^2} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2,$$

式中 k，B 和 σ 分别为透镜的透光系数、光源的亮度和面积，u_{10}，u_{20} 分别为两种情况下的入射孔径角. 成像面积 σ_1，σ_2 之比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{s_1'}{s_1}\,\frac{s_2}{s_2'}\right)^2,$$

所以像的照度之比

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2\left(\frac{s_2'}{s_2}\,\frac{s_1}{s_1'}\right)^2$$

$$=\left(\frac{s_2'}{s_1'}\right)^2=\left(\frac{60}{40}\right)^2=2.25,$$

即小像照度大.

3. 望远镜物镜的直径为 75 mm，求放大率为 20，25，50 倍时，望远镜中月亮的像的主观亮度与天然主观亮度之比.（设眼瞳的直径为 3.0 mm.）

解　天然主观亮度是无仪器时视网膜上像的照度，计算公式为

$$H_0=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D_e}{f}\right)^2.$$

有仪器时的视网膜上像的照度称为主观亮度，计算公式为

$$H=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D_e'}{f}\right)^2,$$

式中 D_e' 为有效眼瞳直径. 当望远镜出瞳直径 $D'\geqslant D_e$ 时，应取 $D_e'=D_e$，主观亮度与天然主观亮度相等；当 $D'\leqslant D_e$ 时，应取 $D_e'=D'$，主观亮度小于天然主观亮度，两者之比为

$$\frac{H_0}{H}=\left(\frac{D_e}{D'}\right)^2=\left(\frac{D_eM}{D}\right)^2.$$

下面讨论 $D_e=3.0\text{ mm}$，$D=75\text{ mm}$ 时的情况：

（1）当 $M=25$ 时，则

$$D'=D/M=3.75\text{ mm}>D_e=3.0\text{ mm},$$

此时，

$$H_0/H=1.$$

（2）当 $M=25$ 时，则

$$D'=D/M=3.0\text{ mm}=D_e,$$

此时，

$$H_0/H=1.$$

（3）当 $M=50$ 时，则

$$D'=D/M=1.5\text{ mm}<D_e,$$

此时，

$$\frac{H_0}{H}=\left(\frac{D_eM}{D}\right)^2=\left(\frac{3.0\times 50}{75}\right)^2=4.0.$$

4. 一天文望远镜的物镜直径等于 18 cm，透光系数为 0.50. 已知肉眼可直接观察到六等星，求：

(1) 用此望远镜所能看到的最高星等.

(2) 最适宜观察星的放大率(正常放大率).

(3) 当放大率为 10 倍时可见到星的等次.(设眼睛的瞳孔直径可取 3.0 mm.)

(**提示** 星等增加一等，其亮度减少到 $1/\sqrt[5]{100}\approx 1/2.5$.)

解 (1) 此题应将星体当做点光源处理，视网膜上像点的亮度直接取决于进入眼瞳的全部光通量. 无望远镜时，进入眼瞳的光通量为

$$\Delta\Phi_0 \propto D_e^2;$$

有望远镜时，进入物镜的光通量为

$$\Delta\Phi \propto D^2.$$

考虑系统的透光系数 k，从出瞳通过的光通量减为

$$\Delta\Phi' = k\Delta\Phi \propto kD^2.$$

当 $D' \leqslant D_e$ 时，显然从望远镜出瞳通过的光通量全部进入眼瞳，故

$$\frac{\Delta\Phi'}{\Delta\Phi_0} = k\left(\frac{D}{D_e}\right)^2 = 0.50 \times \left(\frac{180}{3.0}\right)^2 = 1800.$$

按天文学上关于星等划分标准，此时所能看到的最高星等(弱星)为

$$N = N_0 + \log_{2.5}1800 = 6 + 8 = 14.$$

(2) 为满足 $D' \leqslant D_e$ 条件，合理的设计应是望远镜的放大率 M 满足

$$D' = D/M = D_e.$$

由此算出

$$M = \frac{D}{D_e} = \frac{180}{3.0} = 60.$$

(3) 若放大率过小，以致 $D' \geqslant D_e$，显然从望远镜出瞳通过的光通量只有部分进入眼瞳，按比例应为

$$\Delta\Phi'' \propto k(D_e/D')^2D^2.$$

故

$$\Delta\Phi''/\Delta\Phi_0 = kM^2.$$

当该望远镜的放大率 $M=10$ 时，$D'=D/10=18\,\text{mm}>D_e$，故按上式算出

$$\Delta\Phi''/\Delta\Phi_0 = 50.$$

此时，可见到的星等为

$$N'=N_0+\log_{2.5}50=6+4.3\approx10.$$

5. 求数值孔径为 1.5 的显微镜的正常放大率.（设瞳孔直径为 3.0 mm.）

解　显微镜的数值孔径 N.A.、放大率、出瞳孔径三者之间有一个简单关系：

$$D' = 2s_0\text{N.A.}/|M|,$$

式中 s_0 为明视距离. 显微镜的合理设计应使出瞳孔径 D' 等于眼瞳直径 D_e. 在数值孔径 N.A. 确定条件下，此时放大率（正常放大率）

$$|M_e| = \frac{2s_0\text{N.A.}}{D_e} = \frac{2\times 250\,\text{mm}\times 1.5}{3.0\,\text{mm}} = 250.$$

第二章　波动光学基本原理

§1　定态光波与复振幅描述

1. 钠黄光(D双线)包含的波长为 $\lambda_1=5890$ Å，$\lambda_2=5896$ Å. 设 $t=0$ 时两波列的波峰在 O 点重合. 问：

(1) 自 O 点算起，沿传播方向多远的地方两波列的波峰还会重合？

(2) 经过多长时间以后，在 O 点又会出现两列波的波峰重合的现象？

解　(1) 波峰再重合时传播距离应为 λ_1 和 λ_2 的公倍数，即

$$l = k\lambda_2 = (k+n)\lambda_1,$$

式中 k，n 为满足上式的正整数. 由上式得

$$k = n\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{n}{3}\times 2945.$$

因此，当 $n=3$ 时，

$$k = 2945,$$

$$l_m = n\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} = 2945\lambda_2 \approx 0.1736\ \text{cm}, \qquad ①$$

即为再次重合时的传播距离.

有人认为，再次重合时应满足 $k'\lambda_2=(k'+1)\lambda_1$，则

$$k' = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \approx 981.7,$$

$$l' = k'\lambda_2 \approx 0.05788\ \text{cm}.$$

由此可见，k' 并非整数，这时两列波波峰并不严格重合. 上述第一种考虑是可靠的，式①是符合题意的.

(2) 这是关于扰动时间周期性的讨论. 不妨设光波长为 λ_1 的时间周期 $T_1=\lambda_1/c$，光波长为 λ_2 的时间周期 $T_2=\lambda_2/c$. 仿照上面关于

扰动空间周期性的讨论，找出 T_1 和 T_2 的最小公倍数，即原点重新出现两种扰动峰值的时间间隔 t_m. 不过，利用波动所具有的时间周期性和空间周期性的互相联系，可以直接由(1)求得的同时刻两波峰再次重合的纵向距离 l_m 算出同一地点(O 点)两波峰再次重合的时间间隔

$$t_m = l_m/c \approx 5.7879\ \text{ps}^{①},$$

它远远大于两种扰动本身的周期(3000 倍左右).

由以上知，两个非同频的简谐量的叠加结果仍然是一种周期性函数，其周期长短与频差(或波长差、周期差)成反比，频差越小，则周期越长. "拍频"现象就是如此.

2. 写出沿 z 轴传播的平面波的复振幅.

解　沿 z 方向传播的平面波的相位分布为

$$\varphi(P) = kz + \varphi_0,$$

式中 φ_0 为初相位，其复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A\exp[\mathrm{i}(kz + \varphi_0)].$$

3. 写出在 Oxz 平面内沿与 z 轴成 θ 角的方向传播的平面波的复振幅.

解　如图 2-1，该平面波波矢的三个分量分别为

$$k_x = k\sin\theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k\cos\theta,$$

其复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A\exp\mathrm{i}[k(x\sin\theta + z\cos\theta) + \varphi_0].$$

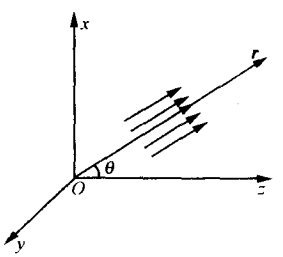


图　2-1

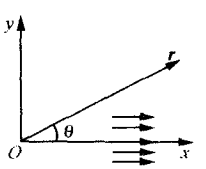


图　2-2

① 1 ps(皮秒)$=10^{-12}$ s.

4. 如图 2-2，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ. 设 $x=0$ 点的相位 $\varphi_0=0$. 写出：

(1) 沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(2) 沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$；

(3) 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向波的相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$.

解 (1) $$\varphi(x)=kx=\frac{2\pi}{\lambda}x.$$

(2) $$\varphi(y)=-\varphi_0=0.$$

(3) $$\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{r}=kr\cos\theta=\frac{2\pi}{\lambda}r\cos\theta.$$

5. 如图 2-3，一平面简谐波沿 $\boldsymbol{r}$ 方向传播，波长为 λ. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 点的相位为 φ_0. 写出：

(1) 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向波的相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$；

(2) 沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(3) 沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$.

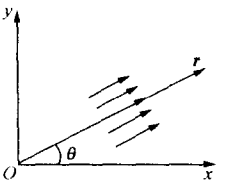


图 2-3

解 (1) $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}r-\varphi_0$；

(2) $\varphi(x)=kx-\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\theta-\varphi_0$；

(3) $\varphi(y)=ky-\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}y\sin\theta-\varphi_0$.

6. 写出向 $Q(x_0,y_0,z_0)$ 点会聚的球面波的复振幅.

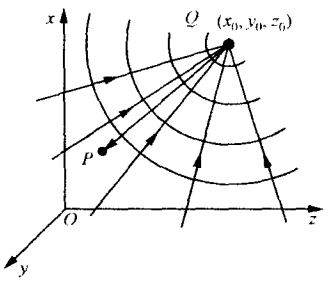


图 2-4

解 如图 2-4，设源点为 $Q(x_0,y_0,z_0)$，场点为 $P(x,y,z)$，则源点与场点的距离为

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}.$$

因为 Q 点是会聚中心，所以沿靠近点源方向考查，扰动相位逐点落后，按符号约定应写成

$$\varphi(P)=\varphi(Q)-kr.$$

再考虑到振幅系数，这列球面波的复振幅为

$$\tilde{U}(P)=\frac{A_1}{r}\exp[-\mathrm{i}(kr+\varphi_0)],$$

其中 φ_0 为 Q 点源的实际初相位.

§2 波　前

1. 如图 2-5(a),在一薄透镜的物方焦面上有三个点光源 O,A,B. 试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后,在像方焦面上产生的复振幅分布函数.

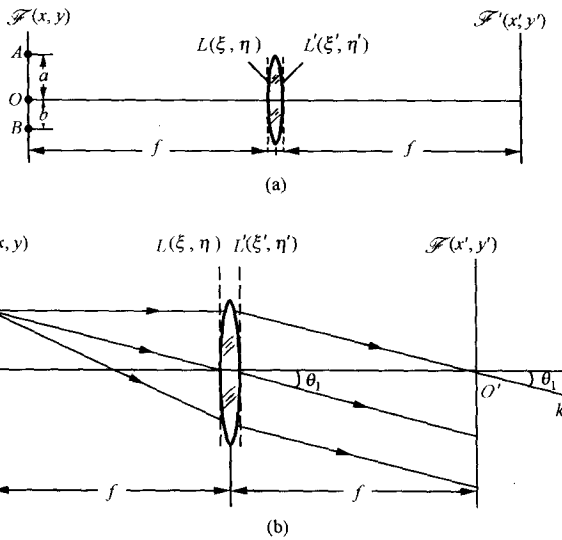


图　2-5

解　如图 2-5(b),处于前焦面上的三个点源 A,O,B 发射的球面波经透镜变换后,成为三列平面波射于后焦面(图中只画出了自 A 点发出的一列). 设三列波的波长均为 λ,波矢分别为 $\boldsymbol{k}_A,\boldsymbol{k}_O,\boldsymbol{k}_B$,其分量分别表示为

$$\boldsymbol{k}_A = (-k\sin\theta_1, 0, k\cos\theta_1),$$
$$\boldsymbol{k}_O = (0,0,k),$$
$$\boldsymbol{k}_B = (k\sin\theta_2, 0, k\cos\theta_2),$$

式中

$$k = |\boldsymbol{k}_A| = |\boldsymbol{k}_O| = |\boldsymbol{k}_B| = 2\pi/\lambda,$$

$$\sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{f^2 + a^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{b}{\sqrt{f^2 + b^2}}.$$

它们在后焦面上的复振幅分布函数分别为

$$\tilde{U}_A(x', y') = A_1 \exp[-\mathrm{i}(kx'\sin\theta_1 + \varphi_1)],$$

$$\tilde{U}_O(x', y') = A_0 \exp(-\mathrm{i}\varphi_0),$$

$$\tilde{U}_B(x', y') = A_2 \exp[\mathrm{i}(kx'\sin\theta_2 - \varphi_2)],$$

式中 $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$ 分别是三列平面波在 $O'x'y'$ 平面上原点 O' 的实际初相位，A_1, A_0, A_2 分别是三列平面波的振幅. 这些量反映出三个点源的发光强度和相位关系，其具体数值在本题中并不重要.

2. 考查上题中紧贴于薄透镜前、后表面的两个平面波前 $L(\xi, \eta)$ 和 $L'(\xi', \eta')$，分别写出在傍轴条件下三列波在它们上边的复振幅分布.

解 在 $\mathscr{F}(x, y)$ 平面上三个点源的坐标分别为 $A(a, 0)$，$O(0, 0)$，$B(-b, 0)$. 在傍轴条件下，它们与波前平面 $L(\xi, \eta)$ 的距离近似为焦距 f. 设三个点源的初相位均为零，则其波前复振幅分布分别为

$$\tilde{U}_A(\xi, \eta) = \frac{A_1}{f} \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} - \frac{a\xi}{f} + \frac{a^2}{2f} + f\right)\right],$$

$$\tilde{U}_O(\xi, \eta) = \frac{A_0}{f} \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} + f\right)\right],$$

$$\tilde{U}_B(\xi, \eta) = \frac{A_2}{f} \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2f} + \frac{b\xi}{f} + \frac{b^2}{2f} + f\right)\right],$$

式中 A_1, A_0, A_2 分别是三列傍轴球面波取决于点源强度的振幅系数.

三列球面波经透镜变换后成为三列平面波，在 $L'(\xi', \eta')$ 平面上的波前函数与本节习题 1 结果相同，只是表达式中的参考相位 φ_1，φ_0, φ_2 的含义有了变化，应将它们看做三列平面波在 $L'(\xi', \eta')$ 平面原点的实际初相位.

3. 仿照上题的办法，讨论一束倾斜的平行光经过一个凹透镜时，在它前后两波前上复振幅分布的变化.

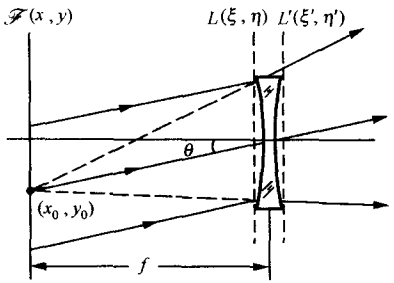


图　2-6

解　如图 2-6，假定平行光与光轴成倾角 θ. 则在平面波前 $L(\xi,\eta)$ 上接收到的是斜入射的平面波，在波前平面 $L'(\xi',\eta')$ 上接收到的是发散的球面波，其中心在平面 $\mathscr{F}(x,y)$ 上，坐标为 $(x_0,y_0)(x_0=-f\tan\theta, y_0=0)$. 设 $L(\xi,\eta)$ 平面上原点的初相位为零，写出在该面上的波前函数为

$$\tilde{U}(\xi,\eta) = A\exp(ik\xi\sin\theta).$$

设发散中心 (x_0,y_0) 点的初相位为零，写出在 $L(\xi',\eta')$ 平面上傍轴条件下的波前函数为

$$\tilde{U}(\xi',\eta') = A\exp\left[ik\left(\frac{\xi'^2+\eta'^2}{2f}+\xi'\tan\theta+\frac{f\tan^2\theta}{2}+f\right)\right].$$

§3　波的叠加和波的干涉

1.（1）人眼视神经的时间响应能力约为 0.1 s. 在这段时间里光扰动经历了多少个周期？

（2）目前光电接收器的最高时间响应能力可达 10^{-9} s(ns[①]数量级)，在这段时间里光扰动经历了多少个周期？

（3）自发辐射一列光波的持续时间不超过 10^{-8} s，其中约包含多少次振动？

解　可见光波段的频率数量级为 $\nu\approx10^{14}$ Hz. 在人眼的可分辨的最小时间间隔(时间响应能力)0.1 s 之内，光扰动经历的次数

$$N_1 \approx 10^{13}.$$

即使对时间响应能力高达 10^{-9} s 的光电接收器来说，在它可分辨的最小时间间隔内，光扰动经历的次数也是

$$N_2 \approx 10^5.$$

① 1 ns(纳秒)$=10^{-9}$ s.

在波列持续时间为 10^{-8} s 这段时间内，包含的扰动次数为

$$N_3 \approx 10^6.$$

这些数据表明，鉴于光频很高，目前接收器对光频的直接测量都是无能为力的. 以上涉及三个时间尺度——光扰动周期 T、持续发光时间 τ_0、接收仪器的时间响应能力 $\Delta\tau$；当然，实际测量过程中还有一个连续测量时间间隔 Δt. 自从激光问世以后，在光的单色性不断提高的趋势下，虽然还是 $\Delta t \gg T$，但已能够实现 $\Delta\tau \leqslant \tau_0$. 这样，对干涉强度的测量就有了新的考虑，它使两个独立的准单色光源产生的叠加场中干涉强度的不稳定性成为可分辨的. 换句话说，如用高分辨的接收器(配以适当的快门速度)，就可以拍摄下来一幅幅干涉图，这一系列干涉图的区别只是空间略有位移. 此时，对干涉强度第二次取时间平均的做法就不是绝对必要的.

2. 在扩展强光束(激光)时. 人们避免用“实聚焦”的方法(图 2-7(a))，因为在实焦点处的光功率密度太高，可能引起空气“着火”(电离). 现在设想，如果将入射光束挡住一半，先后让 Ⅰ，Ⅱ 两部分聚焦于 F 点(并不引起着火)；而同时开放，让全部光束聚焦时，就要发生空气着火现象. 试问：在这个过程中，波的叠加原理是否成立？这可算得是一种非线性效应吗？

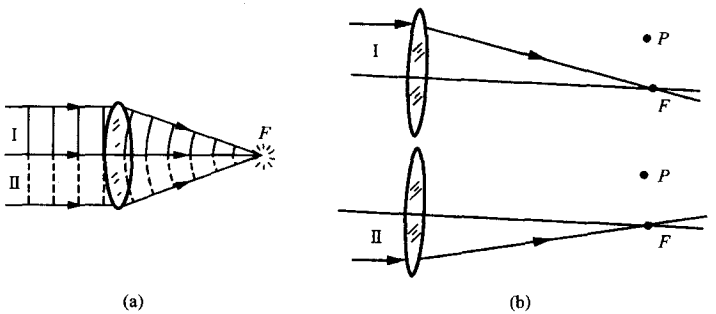


图 2-7

解 两束光同时聚焦时焦点着火，这是一种次级效应. 但只要有次级效应，波的叠加原理就将遭到破坏. 为此，考虑轴外一点 P(图 2-7(b)). 显然，第一列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_1(P) = 0;$$

第二列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_2(P) = 0.$$

而两列波同时存在时，由于焦点着火，则 $\tilde{U}(P) \neq 0$. 可见，

$$\tilde{U}(P) \neq \tilde{U}_1(P) + \tilde{U}_2(P).$$

应该说，这是一种非线性效应.

§4　两个点源的干涉

1. 在杨氏(Young)双孔实验中，孔距为 0.1 mm，孔与幕的距离为 3 m. 对下列三条典型谱线求出干涉条纹的间距：

(1) F 蓝线(4861 Å)；

(2) D 黄线(5893 Å)；

(3) C 红线(6563 Å).

解　根据杨氏双孔干涉条纹间距公式

$$\Delta x = \lambda D/d,$$

得到三条谱线产生的条纹间距分别为

$$\Delta x_F = 14.6 \text{ mm}, \quad \Delta x_D = 17.7 \text{ mm}, \quad \Delta x_C = 19.7 \text{ mm}.$$

由此可见，如果入射光同时包含有这三条谱线或如白光那样的连续谱，则干涉场中将出现彩色条纹. 它们分布在零级条纹两侧，短波蓝光靠里，长波红光靠外；而对各种波长来说，干涉零级位置是重合的. 这也可以说是一种色散现象，是“干涉色散”效应.

2. 在杨氏双孔实验中，孔距为 0.45 mm，孔与幕的距离 1.2 m，测得 10 个亮纹之间的间距为 1.5 cm. 问：光源的波长是多少？

解　由条纹间距可以推算本实验中光源的光波长为

$$\lambda = \frac{d}{D}\Delta x' = 6250 \text{ Å}.$$

在历史上，杨氏首先提出“干涉”的概念，引入“波长”一量，用波的叠加原理解释薄膜的颜色，并设计了现在人所共知的著名的双缝干涉实验，来验证自己的理论. 杨氏实验本身也就成为历史上最早测定光波长的一种实际方法.

3. 试计算两列相干光波的振幅比为下列数值时条纹的衬比度：$A_1/A_2=1,1/3,3,1/6,1/10$.

解 由双光束干涉衬比度与振幅比的关系式

$$\gamma=\frac{2A_1/A_2}{1+(A_1/A_2)^2}$$

得

$$\gamma=\begin{cases}1 & (A_1/A_2=1),\\ 0.6 & (A_1/A_2=1/3),\\ 0.6 & (A_1/A_2=3),\\ 0.32 & (A_1/A_2=1/6),\\ 0.2 & (A_1/A_2=1/10).\end{cases}$$

4. 两束相干的平行光束，传播方向平行于 Oxz 面，对称地斜射在记录介质(Oxy 面)上. 光波长为 6328 Å. 问：

(1) 当两束光的夹角为 5°时，干涉条纹的间距为多少？

(2) 当两束光的夹角为 30°时，干涉条纹的间距为多少？

(3) 如果记录介质的空间分辨率为 2000 根/mm，这介质能否记录上述两种条纹？

解 根据题意，干涉条纹走向与 x 轴正交，即平行 y 轴. 条纹间距公式为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}=\frac{\lambda}{2\sin\theta}\quad(\text{对称入射}),\qquad①$$

式中 θ_1 和 θ_2 如图 2-8 所示.

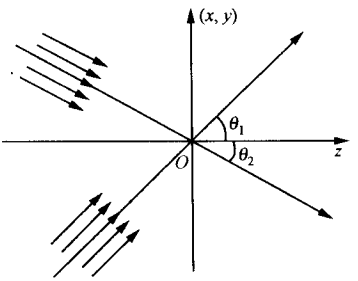


图 2-8

(1) 当 $\theta=5°$时，$\Delta x_1=3.6\ \mu m$；

(2) 当 $\theta=30°$时，$\Delta x_2=0.63\ \mu m$；

(3) 上述两种情况下，干涉条纹的空间频率

$$f_{1x}=1/\Delta x_1=276/mm,$$

$$f_{2x}=1/\Delta x_2=1580/mm$$

均小于记录介质的空间分辨率. 所以，该介质干版能记录上述两种条纹.

5. 在一焦距为 f 的薄凸透镜的物方焦面上有 O,Q 两个相干的点光源，O 点在光轴上，Q 点到光轴的距离为 a(满足傍轴条件).

(1) 试分析像方焦面上接收到的干涉条纹的特征(形状、间距和取向)；

(2) 如果将 $\mathscr{F}'$ 上的屏幕向背离透镜的方向平移，其上干涉条纹有何变化？

解　(1) 如图 2-9，后焦面 $\mathscr{F}'$ 上为两束平行光干涉，只要将两束平行光相对于接收平面的倾角确定下来，就能算出条纹间距. 按题意，$\theta_1=0,\theta_2\approx a/f$. 条纹间距为

$$\Delta x'=\frac{\lambda}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}=\frac{f\lambda}{a}.$$

条纹形状为平行于 y' 轴(与 O,Q 点连线正交)的一组平行条纹.

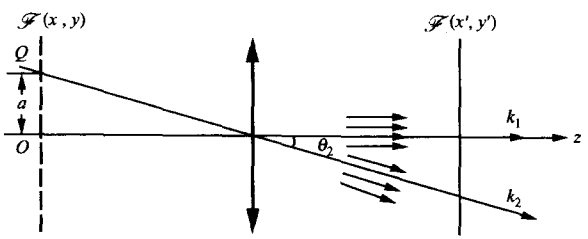


图　2-9

(2) 当接收屏幕移动时，由于平行光束的倾角不变，所以条纹形状、间隔、取向均不变；但条纹总体上发生移动. 当点源 Q 在 x 轴上方，且屏幕移远时，条纹向下方移动. 当然，当屏幕远离透镜过程中，两光束的交叠区也随之减小，将使条纹数目降低.

6. 如果上题中把 O 点视为参考点源，Q 点置于输入面 $\mathscr{T}(x,y)$ 任何位置，证明在输出面 $\mathscr{T}'(x',y')$ 上的干涉条纹与 Q 点位置(x,y)有如下关系：

(1) 空间频率

$$f_{x'}=\frac{1}{\Delta x'}=\frac{|x|}{\lambda f},$$

$$f_{y'}=\frac{1}{\Delta y'}=\frac{|y|}{\lambda f}.$$

(2) 条纹取向 θ(与 x' 轴的夹角)由下式决定：

$$\tan\theta=-x/y.$$

(3) 同一个 θ 值，对应 Q 点的几个方位？用什么方法可将它们区别开来[①]？

解 (1) 在 $\mathscr{T}'$ 面上仍为两束平行光的干涉. 来自 O 点的平行光正入射于 $\mathscr{T}'$ 面，其波前函数为

$$\tilde{U}_1(x',y')=A_1.$$

来自 Q 点的平行光斜入射于 $\mathscr{T}'$ 面，其波前函数为

$$\tilde{U}_2(x',y')=A_2\exp[\mathrm{i}k(x'\cos\alpha+y'\cos\beta)],$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是该波矢的方向余弦，也就是点源 Q 指向透镜光心 C 点的矢量(如图 2-10(a)所示)的方向余弦，它们应当为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+f^2}}\approx-\frac{x}{f},$$

$$\cos\beta=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+f^2}}\approx-\frac{y}{f}.$$

因本题不涉及条纹的衬比度，不妨设两列波的振幅相等；又因本题也不关心亮(暗)纹的具体位置，不妨设两列波在 $\mathscr{T}'$ 面原点的相位相同. 于是，干涉强度分布函数为

$$\begin{aligned}I(x',y')&=(\tilde{U}_1+\tilde{U}_2)(\tilde{U}_1^*+\tilde{U}_2^*)\\&=I_0[1+\cos\delta(x',y')],\end{aligned}$$

---

① 此题具体体现了干涉条纹是如何记录波前上的相位分布，从而记录点源位置的. 实际上，这就是一张最简单的全息图.

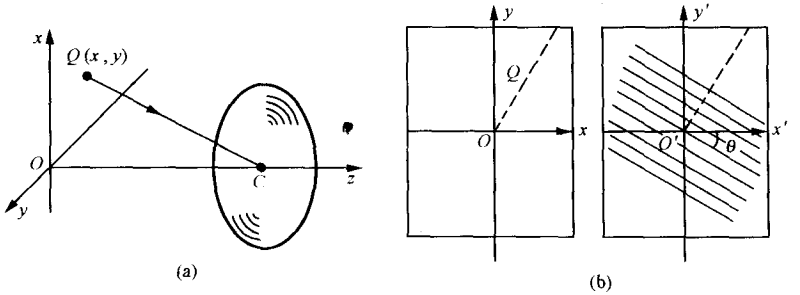


图　2-10

式中相位差

$$\delta(x',y') = -k(x'\cos\alpha + y'\cos\beta)$$
$$\approx k(xx' + yy')/f,$$

故

$$I(x',y') = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{kx}{f}x' + \frac{ky}{f}y'\right)\right].$$

相因子中的线性系数是强度分布的空间角频率，于是求得条纹的空间频率分别为

$$f_{x'} = \left|\frac{kx}{2\pi f}\right| = \frac{|x|}{\lambda f},$$
$$f_{y'} = \left|\frac{ky}{2\pi f}\right| = \frac{|y|}{\lambda f};$$

或者说，条纹的空间周期为

$$\Delta x' = \frac{1}{f_{x'}} = \frac{\lambda f}{|x|},$$
$$\Delta y' = \frac{1}{f_{y'}} = \frac{\lambda f}{|y|}.$$

(2) 由

$$\delta(x',y') = C\ (\text{常数，不妨设 } C = 0)$$

可以得到条纹的轨迹方程为

$$xx' + yy' = 0,$$

即

$$y' = -\frac{x}{y}x'.$$

由方程可知条纹的形状为直线，如图 2-10(b)所示，斜率为

$$\tan\theta = -x/y.$$

(3) 以上结果表明，我们可以通过对条纹间距和条纹斜率的测量，来确定点源 Q 的位置坐标. 当 Q 点越靠近 O 点时，条纹间距越大，因而越便于测量. 我们从中可以初步看到这种干涉定位对于结构分析的意义.

但是，我们还应该注意到对于同一斜率，点源 Q 可能有两个位置，这两个位置以原点为中心对称(如分别位于第 1，3 象限或第 2，4 象限). 此时，仅根据静态条纹的特征是无法唯一确定 Q 点位置的. 可是当接收屏幕稍有移动时，区别便显示出来了. 当屏幕稍稍远离透镜时，若条纹移动趋势向着 $O'x'y'$ 平面的第 1 象限，则点源 Q 位于 Oxy 平面的第 3 象限.

7. 如图 2-11(a)，三束平行光在原点 O 处的初相位 $\varphi_{10}=\varphi_{20}=\varphi_{30}=0$，振幅比 $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 2 : 1$，传播方向与 Oxz 面平行，与 z 轴夹角为 $\theta, 0, -\theta$. 试用复数法和矢量图解法求波前 $z=0$ 面上的强度分布函数，并分析干涉条纹的特征.

解一 复数法. 本题是三束平行光的干涉问题. 因三束光是相干的，其波矢数值相等，即

$$k_1 = k_2 = k_3 = k = 2\pi/\lambda.$$

根据入射倾角，可以写出三束平行光在 Oxy 平面上的相位分布函数分别为

$$\varphi_1(x,y) = kx\sin\theta,$$

$$\varphi_2(x,y) = 0,$$

$$\varphi_3(x,y) = -kx\sin\theta.$$

相应的复振幅分布函数分别为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta),$$

$$\tilde{U}_2(x,y) = A_2 = 2A_1,$$

$$\tilde{U}_3(x,y) = A_3\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta) = A_1\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta).$$

总的复振幅分布为

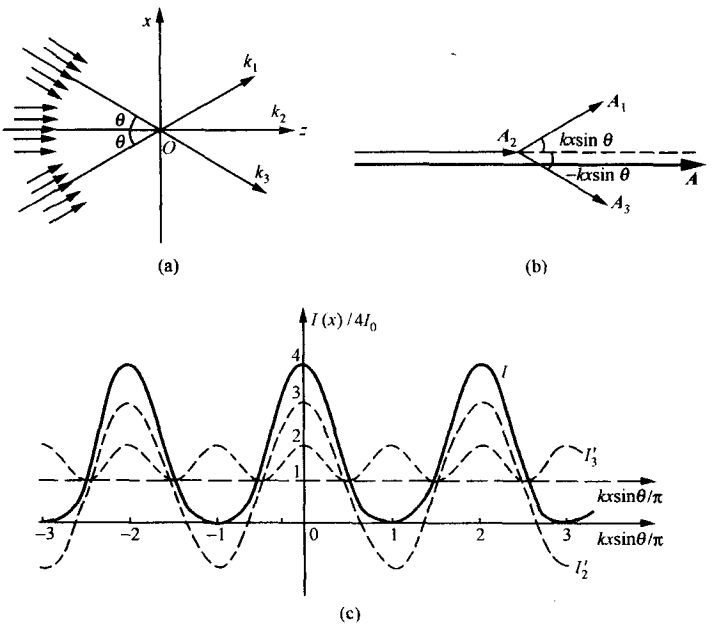


图　2-11

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y)&=\tilde{U}_1+\tilde{U}_2+\tilde{U}_3\\&=A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta)+2A_1+A_1\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta)\\&=2A_1[1+\cos(kx\sin\theta)].\end{aligned}$$

因此干涉场 Oxy 面上的强度分布函数为

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\tilde{U}(x,y)\tilde{U}^*(x,y)\\&=4A_1^2[1+\cos(kx\sin\theta)]^2\\&=4I_0[1+2\cos(kx\sin\theta)+\cos^2(kx\sin\theta)]\\&=I(x),\end{aligned}\qquad①$$

式中 $I_0=A_1^2$，为 k_1 波或 k_3 波的强度. 强度分布与 y 无关，说明干涉条纹为垂直于 x 轴的一系列直线.

解二　矢量图解法. 可根据矢量与复数的对应关系作矢量图(如图 2-11(b))，图中有对应关系：

$$\boldsymbol{A}_1\leftrightarrow\tilde{U}_1,\quad \boldsymbol{A}_2\leftrightarrow\tilde{U}_2,\quad \boldsymbol{A}_3\leftrightarrow\tilde{U}_3,$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 \leftrightarrow \tilde{U}.$$

由此可得合矢量的长度为

$$\begin{aligned} A &= A_1\cos(kx\sin\theta) + A_2 + A_3\cos(-kx\sin\theta) \\ &= 2A_1[1 + \cos(kx\sin\theta)]. \end{aligned}$$

因此强度分布为

$$\begin{aligned} I(x,y) = A^2 &= 4A_1^2[1 + \cos(kx\sin\theta)]^2 \\ &= 4I_0[1 + 2\cos(kx\sin\theta) + \cos^2(kx\sin\theta)]. \end{aligned}$$

结果与式①完全一样.

为了进一步分析干涉条纹的特征,可以作出强度分布曲线. 先把强度分布函数改写成三项之和,即

$$I(x) = I_1' + I_2' + I_3',$$

式中

$$I_1' = 4I_0,$$

$$I_2' = 8I_0\cos(kx\sin\theta),$$

$$I_3' = 4I_0\cos^2(kx\sin\theta).$$

以 $4I_0$ 为单位取纵坐标 $I(x)$,以 π 为单位取横坐标 $kx\sin\theta$,先作出曲线 I_2',I_3'(图 2-11(c)中虚线),I_2' 和 I_3' 合成后再把横坐标下移一个单位,即得总的强度分布曲线,如图 2-11(c)中实线所示.

由此可见,干涉条纹具有以下特征:

① 由强度分布 $I(x,y)=I(x)$ 可知 I 与 y 无关. 我们已经知道干涉条纹为垂直于 x 轴的直线. 由强度分布曲线可看到,除主极大外并无次极大,因此 Oxy 平面上只有一组直线条纹.

② $I(x)$ 的空间周期与 $I_2'(x)$ 相同,因此条纹间隔为

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda}{\sin\theta}.$$

③ 强度极大值 $I_{max}=16I_0$,它是 k_1 波或 k_3 波单独存在时的 16 倍;强度极小值 $I_{min}=0$,因此条纹的衬比度

$$\gamma = 1.$$

④ 如果没有 k_2 波,而只有 k_1 波和 k_3 波造成双光束干涉,则

$$\tilde{U}'(x,y) = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$$

$$= A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta) + A_1\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta)$$
$$= 2A_1\cos(kx\sin\theta),$$
$$I'(x,y) = \tilde{U}'(x,y)\tilde{U}'^{*}(x,y)$$
$$= 4A_1^2\cos^2(kx\sin\theta)$$
$$= 4I_0\cos^2(kx\sin\theta).$$

因此

$$I'_{\max} = 4I_0, \quad I'_{\min} = 0, \quad \gamma' = 1 = \gamma,$$
$$\Delta x' = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{k\sin\theta} = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}\Delta x,$$

即条纹衬比度与三光束干涉时一样，条纹间隔比三光束干涉时缩小了 1/2. 但由于 $I_{\max}=4I'_{\max}$，与双光束干涉相比，三光束干涉条纹的锐度增加. 参与干涉效应的光束数目越多，则干涉条纹越加细锐. 这是多光束干涉的普遍特征，在本题三光束干涉的结果中已经初步看到这一趋势.

8. 如图 2-12(a)，一列平面波 $\tilde{U}_1$ 正入射到波前 $z=0$ 面上，与一列球面波 $\tilde{U}_2$ 在傍轴范围内发生干涉. 试分析干涉条纹的特征.

解　本题是平面波和球面波的干涉问题. 实验上可以采用如图 2-12(b)所示的装置，把一个点源置于旋转抛物面反射镜的焦点上，则经反射后照射在屏幕上的是一列正入射的平面波. 由点源直接照射在屏幕上的是一列发散的球面波，且发散中心在轴上.

据题意，可写出 Oxy 平面上平面波和傍轴球面波的复振幅分布函数分别为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1,$$
$$\tilde{U}_2(x,y) = A_2\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right)\right],$$

式中 φ_{20} 是常数，为两列波在原点 O 处的相位差. 因此总的复振幅分布为

$$\tilde{U}(x,y) = A_1 + A_2\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right)\right].$$

干涉强度分布为

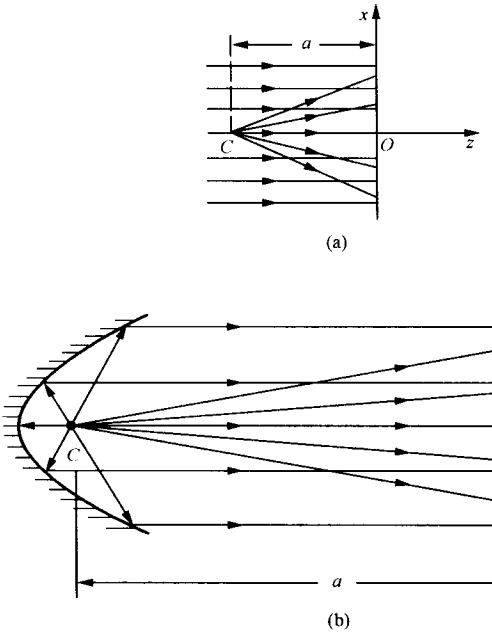


图 2-12

$$
\begin{aligned}
I(x,y) &= \tilde{U}(x,y)\tilde{U}^{*}(x,y) \\
&= \left\{A_1 + A_2\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right)\right]\right\} \\
&\quad \times \left\{A_1 + A_2\exp\left[-\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right)\right]\right\} \\
&= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\frac{x^2+y^2}{2a} + \varphi_{20}\right) \\
&= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta(x,y).
\end{aligned}
$$

式中 $\delta(x,y)=k(x^2+y^2)/2a+\varphi_{20}$，它是 Oxy 面上任一场点两列波的相位差. $\delta(x,y)=$C(常数)的轨迹即为等强度的轨迹，也即干涉条纹的轨迹. 因此任一干涉条纹的轨迹方程为

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

式中 r^2 为常数. 这是中心在坐标原点的圆的标准方程. 由此可见干

涉条纹形状是以原点为中心的一系列同心圆环. 原点的强度究竟是亮还是暗,取决于 φ_{20} 值.

第 N 级亮环条件为

$$k\frac{x^2+y^2}{2a}+\varphi_{20}=2\pi N \quad (N=0,1,2,\cdots).$$

如果 φ_{20} 为 2π 的整数倍,即相当于原点为亮点的情形,可略去 φ_{20} 不写,得

$$r_N^2=x^2+y^2=\frac{2a}{k}N(2\pi)=N(2a\lambda),$$

则由中心向外第 N 个亮环的半径为

$$r_N=\sqrt{N(2a\lambda)}=\sqrt{N}r_1,$$

式中 r_1 为中心向外第一个亮环的半径. 上式即为亮环的半径公式,它与菲涅耳(Fresnel)波带片半波带的半径公式 $\rho_N=\sqrt{N}\rho_1$ 形式一致. 菲涅耳波带片是黑白型的. 如在本题装置中,Oxy 面上用感光底片接收,则经线性冲洗后可以得到一张正弦型的波带片. 从全息照相的眼光看,该正弦型波带片是一张全息图,平行光作为参考光波,记录的是点源发出的物光波.

§5　光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理

1. 当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时,有人认为它无关大局,其影响可以忽略,后场基本上还是一束平行光. 这个看法对吗?你能否设想一种场合,这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗?

解　如图 2-13,不妨通过小墨点作一个假想平面 Σ_0,惠更斯-菲涅耳原理表明,后场是 Σ_0 面上所有次波源相干叠加的结果. 如果没有墨点,相干叠加结果在后场仍为单纯的平行光. 如果有一

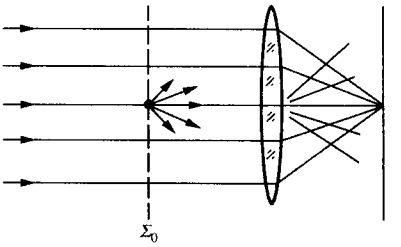


图　2-13

个墨点，后场就少了一些相干叠加成分. 原波面在这一局部的缺损所带来的影响将牵动整个后场，将明显地影响后场的方向性. 使后场衍射波通过聚焦透镜，就能容易地监测到小墨点的影响. 若平行光通行无阻，经透镜后在后焦面(轴上)出现一个亮点，轴外强度为零；若有一个墨点在前场，后焦面上(轴外)的衍射强度就不为零了. 按巴比涅(Babinet)原理，有墨点时的轴外衍射强度分布就是与墨点互补的圆孔衍射图样.

总之，在分析衍射问题时，要十分注意“相干叠加”这一特点. 相干叠加可以使“部分大于整体”，使“局部牵动全局”. 整个衍射场如同一张绷紧的弹簧床，不论哪里断缺了几个小弹簧，必将影响整张床的形态，其影响波及整个衍射场. 我们须知，波场中(波面上)各次波源是互相关联的. 在光路中有一个小墨点，同光路中有一个小孔一样，都将成为“散射源”. 这一概念在关于菲涅耳圆孔、圆屏衍射问题的分析中将更为明确.

2. 关于两个互补屏在同一场点的衍射强度的关系，有人说一个强度是亮(暗)的，则另一个强度是暗(亮)的. 这样理解衍射巴比涅定理对吗？

解 这里又一次涉及对于相干叠加概念的理解问题. 巴比涅定理告诉我们，互补屏产生的两个场 $\tilde{U}_a(P)$，$\tilde{U}_b(P)$ 与自由场 $\tilde{U}_0(P)$ 满足恒等式

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}_0(P).$$

这是复振幅关系式，其中隐含了相位差的作用，不是简单的代数关系. 反映在矢量图解上，三者是一个三角形关系，这就可能出现如图 2-14(a)～(f)的各种情况(图中与 $\tilde{U}_a$，$\tilde{U}_b$，$\tilde{U}_0$ 分别对应的是 $\boldsymbol{U}_a$，$\boldsymbol{U}_b$，$\boldsymbol{U}_0$)，依次为 $|\tilde{U}_a|$，$|\tilde{U}_b|<|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|=|\tilde{U}_b|>|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|>|\tilde{U}_b|>|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|-|\tilde{U}_b|=|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|+|\tilde{U}_b|=|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|=|\tilde{U}_b|$，$|\tilde{U}_0|=0$.

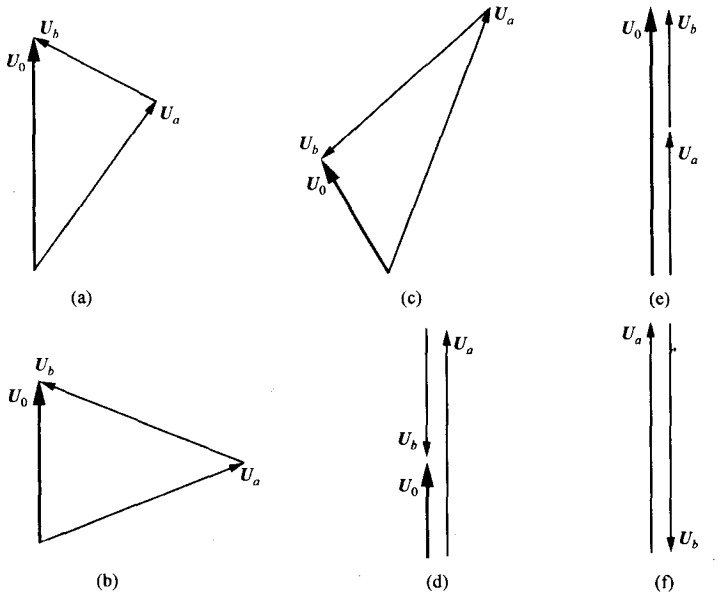


图　2-14

§6　菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

1. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，圆孔半径为 2.0 mm，光源离圆孔 2.0 m，波长为 0.5 μm. 当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时，求：

(1) 前三次出现中心亮斑(强度极大)的位置；

(2) 前三次出现中心暗斑(强度极小)的位置.

解　由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

得

$$k = \frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{1}{b} + \frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{1}{R}. \qquad ①$$

上式说明，在目前圆孔半径 ρ、光源离圆孔距离 R 以及光波长 λ 等物

理量确定时，圆孔所露半波带数 k 与观察点离圆孔距离 b 之间呈双曲线关系，b 减小时 k 不断增加. 当 $b\to\infty$ 时，得

$$k=\frac{\rho_k^2}{\lambda R}=\frac{(2.0\ \text{mm})^2}{0.5\ \mu\text{m}\times 2.0\ \text{m}}=4.$$

所以，当屏幕由很远处向圆孔靠近时，$k>4$. 当 $k=5,7,9$ 时出现前三次亮斑；除无穷远外，当 $k=6,8,10$ 时出现前三次暗斑. 为了计算亮、暗斑的位置 b，将式①改写为

$$b=\frac{R\rho_k^2}{kR\lambda-\rho_k^2}.$$

以 $R=2.0$ m，$\rho_k=2.0$ mm，$\lambda=0.5$ μm 代入得

$$b=\frac{8.0}{k-4.0}\ \text{m}.$$

(1) 分别取 $k=5,7,9$，得前三次出现中心亮斑的位置

$$b_5=\frac{8.0}{5-4.0}\ \text{m}=8.0\ \text{m},$$

$$b_7=\frac{8.0}{7-4.0}\ \text{m}=2.7\ \text{m},$$

$$b_9=\frac{8.0}{9-4.0}\ \text{m}=1.6\ \text{m}.$$

(2) 分别取 $k=6,8,10$，得前三次出现中心暗斑的位置

$$b_6=\frac{8.0}{6-4.0}\ \text{m}=4.0\ \text{m},$$

$$b_8=\frac{8.0}{8-4.0}\ \text{m}=2.0\ \text{m},$$

$$b_{10}=\frac{8.0}{10-4.0}\ \text{m}=1.3\ \text{m}.$$

2. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，光源离圆孔 1.5 m，波长 0.63 μm，接收屏幕与圆孔距离 6.0 m. 圆孔半径从 0.5 mm 开始逐渐扩大. 求：

(1) 最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径；

(2) 最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径.

解 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_1=\sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}},\quad \rho_k=\sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda}=\sqrt{k}\,\rho_1\quad (k=1,2,\cdots)$$

得

$$k=\frac{R+b}{Rb\lambda}\rho_k^2.$$

上式说明，在目前光源离圆孔距离 R、观察点离圆孔距离 b、光波长 λ 等量确定的条件下，圆孔露出半波带数 k 和圆孔半径 ρ_k 之间呈二次抛物线关系. 当圆孔半径 ρ_k 逐渐扩大时，所露出半波带数显然增加.

开始 $\rho_k=0.5$ mm 时，算得露出半波带数目为

$$k=0.33.$$

所以在圆孔扩大过程中，当 $k=1,3$ 时出现头两次中心亮斑；当 $k=2,4$ 时出现头两次中心暗斑. 代入数据，得

$$\rho_k=\sqrt{k}\,\rho_1=0.87\sqrt{k}\ \text{mm}.$$

(1) 分别取 $k=1,3$ 得最先两次出现中心亮斑的圆孔半径

$$\rho_1=\sqrt{1}\,\rho_1=0.87\ \text{mm},$$

$$\rho_3=\sqrt{3}\,\rho_1=1.5\ \text{mm}.$$

(2) 分别取 $k=2,4$ 得最先两次出现中心暗斑的圆孔半径

$$\rho_2=\sqrt{2}\,\rho_1=1.2\ \text{mm},$$

$$\rho_4=\sqrt{4}\,\rho_1=1.7\ \text{mm}.$$

3. 用直刀口将点光源的波前遮住一半(直边衍射)，几何阴影边缘点上的光强是自由传播时的多少倍？

解　这种情况相当于自由传播时的所有半波带都被遮掉 1/2，各半环(半波带)对场点贡献的振幅因而减半，相位关系不变. 故此时，场点的合成振幅为

$$A(P_0)=A_0(P_0)/2,$$

强度为

$$I(P_0)=I_0/4,$$

即几何阴影线上各点的光强是自由传播时的 1/4. 而几何阴影区内的光强将急剧衰减，具体计算颇费功夫(有兴趣的读者可参阅一般光学文献).

4. 求圆孔中露出 1.5 个半波带时衍射场中心强度与自由传播时强度之比.

解 作振动矢量图如图 2-15 所示,可知此时场点振幅为

$$A(P_0)=\sqrt{2}\,A_0(P_0),$$

强度为

$$I(P_0)=2I_0(P_0),$$

即中心强度为自由传播时的 2 倍.

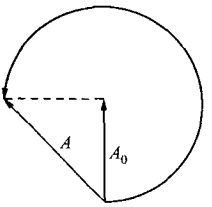


图 2-15

5. 用平行光照明衍射屏,屏对波前作如图 2-16 中几种方式的遮挡,分别求轴上场点的光强与自由传播时之比.(图中标出的是该处到场点的光程,其中 b 是中心到场点的光程.)

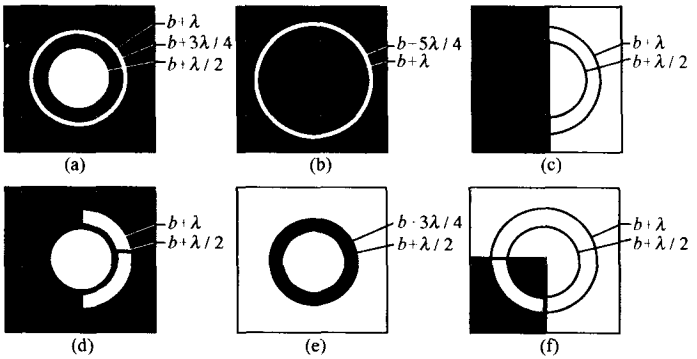


图 2-16

解 设加衍射屏后轴上场点的振幅为 A',光强为 I';自由传播时轴上场点的振幅为 A_0,光强为 I_0.分别作振动矢量图如图 2-17,分别求得:

(1) $A'=\sqrt{2}\,A_0, I'/I_0=2$;

(2) $A'=\sqrt{2}\,A_0, I'/I_0=2$;

(3) $A'=A_0/2, I'/I_0=1/4$;

(4) $A'=A_0, I'/I_0=1$;

(5) $A'=\sqrt{(2A_0)^2+A_0^2}=\sqrt{5}\,A_0, I'/I_0=5$;

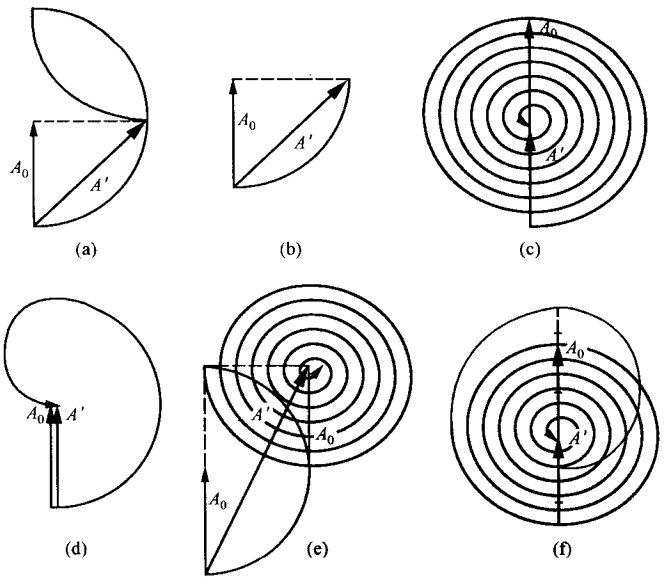


图　2-17

(6) $A'=A_0/4$, $I'/I_0=1/16$.

6. 若一个菲涅耳波带片只将前 5 个偶数半波带挡住，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比.

解　如图 2-18，此时场点的振幅为

$$A' = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 + A_{11}/2$$
$$\approx 5.5A_1 = 11A_0.$$

强度为

$$I' = 121I_0,$$

即中心强度为自由传播时的 121 倍.

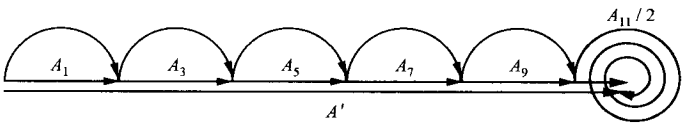


图　2-18

7. 若将一个菲涅耳波带片前 50 个奇数半波带遮挡，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比.

解 此时，场点振幅为

$$A = A_2 + A_4 + \cdots + A_{98} + A_{100}/2$$
$$\approx 49.5A_1 = 99A_0.$$

强度为

$$I = 99^2 I_0 \approx 9800 I_0,$$

即中心强度为自由传播时的 9800 倍.

8. 菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1 = 5.0$ mm.

(1) 用波长 $\lambda = 1.06\ \mu$m 的单色平行光照明，求主焦距；

(2) 若要求主焦距为 25 cm，需将此波带片缩小多少？

解 (1) 根据菲涅耳波带片主焦距公式

$$f = \rho_1^2/\lambda$$

算出

$$f = 23.6\ \text{m}.$$

(2) 为使焦距缩小到 $f' = 25$ cm，则应将上述波带片用照相法收缩. 由

$$\frac{f}{f'} = \frac{\rho_1^2}{\rho_1'^2}$$

求得

$$\frac{\rho_1}{\rho_1'} = \sqrt{\frac{f}{f'}} \approx 10,$$

即此波带片的直径需缩小到原来的 1/10.

9. 如何制作一张满足以下要求的波带片？

(1) 它在 4000 Å 紫光照明下的主焦距为 80 cm；

(2) 主焦点的光强是自由传播时的 10^3 倍左右.

解 (1) 先由主焦距的要求算出第一个半波带的半径

$$\rho_1 = \sqrt{f\lambda} = 0.57\ \text{mm};$$

然后以 $\rho_k = \sqrt{k}\,\rho_1$ 的比例刻画出一系列同心环；再交替地遮断(或露出)奇数个半波带，整个波带片的有效尺寸应由光强要求确定.

(2) 因振幅比为

$$\frac{A}{A_0}=\sqrt{\frac{I}{I_0}},$$

又因

$$A=A_2+A_4+\cdots+A_k\approx kA_2/2=kA_0,$$

所以波带片包含的最高半波带数目为

$$k=\sqrt{I/I_0}=\sqrt{10^3}\approx 32.$$

有效面积的半径为

$$\rho_k=\sqrt{k}\,\rho_1\approx 3.2\ \text{mm}.$$

10. 一菲涅耳波带片对 9000 Å 的红外光主焦距为 30 cm. 改用 6328 Å 的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解　波带片主焦距与光波长成反比，所以

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

由此得

$$f_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}f_1\approx 43\ \text{cm}.$$

§7　夫琅禾费单缝和矩孔衍射

1. 如图 2-19(a)，平行光以 θ_0 角斜入射在宽度为 a 的单缝上. 试证明：

(1) 夫琅禾费衍射的强度公式基本不变(忽略倾斜因子)，即

$$I_\theta=I_0(\sin\alpha/\alpha)^2,$$

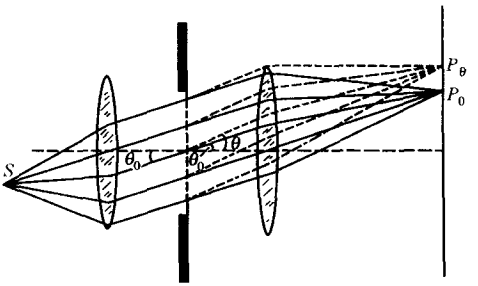
式中 I_0 为零级中心强度，只不过 α 的定义与正入射不同：

$$a=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0);$$

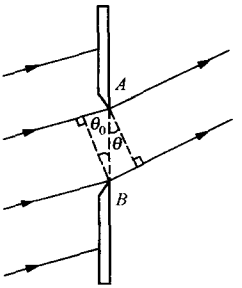
(2) 零级中心的位置在几何光学像点处；

(3) 零级斑半角宽度为

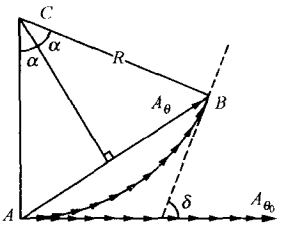
$$\Delta\theta=\lambda/a\cos\theta_0;$$



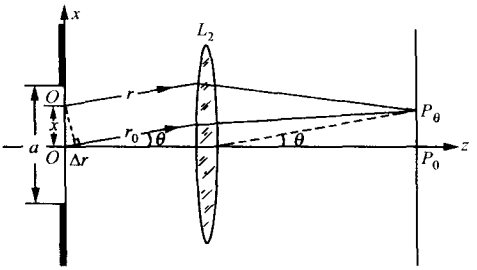
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2-19

(4) 如果考虑到单缝两侧并非同一介质,情况将怎样?

证 (1) 与正入射情况相比,斜入射时光孔面上各点次波源的相位是不同的.因此,在分析到达场点的各次级扰动之间的相位关系时,不仅要考虑后场光程差的影响,而且还要考虑前场光程差的影

响. 如图 2-19(b),(c)所示. 若用矢量图解法处理,代表边缘两点 A, B 到达场点的相位差 δ 应为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta - \sin\theta_0);$$

其他运算与正入射相同. 于是强度分布函数成为

$$I(\theta) = I(\theta_0)(\sin\alpha/\alpha)^2,$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

若用复数法处理,应先写出光孔面上的波前函数

$$\tilde{U}_0(x,y) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\theta_0}.$$

考虑到傍轴条件下的菲涅耳-基尔霍夫(Fresnel-Kirchhoff)衍射积分公式为

$$\tilde{U}(P) \propto \iint \tilde{U}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}\Sigma,$$

并在夫琅禾费(Fraunhofer)衍射时改写被积函数的相因子(见图 2-19(d))

$$\mathrm{i}kr = \mathrm{i}kr_0 + \mathrm{i}k(r - r_0) = \mathrm{i}kr_0 - \mathrm{i}kx\sin\theta,$$

于是单缝夫琅禾费衍射场为

$$\tilde{U}(\theta) = C\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\theta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\mathrm{d}x = C\int_{-a/2}^{+a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\sin\theta-\sin\theta_0)x}\mathrm{d}x.$$

与正入射时的夫琅禾费衍射积分式相比,仅仅在被积函数的相因子中由 $\sin\theta-\sin\theta_0$ 替代原来的 $\sin\theta$. 可见,积分结果所得到的强度分布函数与正入射时的形式相同:

$$I(\theta) = I(\theta_0)(\sin\alpha/\alpha)^2,$$

只是

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

(2) 根据强度分布公式,零级(极强)出现在 $\alpha=0$ 的地方. 此时 $\theta=\theta_0$,各衍射线(连同入射光线)之间无光程差,根据费马原理推得的物像等光程性,这正是几何光学像点的位置.

(3) 令 $\alpha=\pm\pi$,得到零级两侧第一暗点的衍射角 $\theta_{\pm1}$ 满足

$$\sin\theta_{\pm1}-\sin\theta_0=\lambda/a.$$

设零级半角宽度为 $\Delta\theta$,则

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta)-\sin\theta_0=\lambda/a.$$

注意到 $\Delta\theta$ 很小,用微分运算近似,得

$$\cos\theta_0\Delta\theta\approx\lambda/a,$$

即

$$\Delta\theta\approx\lambda/a\cos\theta_0.$$

由此可见,在缝宽 a 不变的条件下,照明单缝的平行光的倾角越大,零级斑的半角宽度也越大,衍射效应更为明显.这时,相当于单缝有效宽度 $a\cos\theta_0$ 变小了.

(4) 如果衍射屏前后两侧为不同介质,设前场照明空间折射率为 n_1,后场衍射空间折射率为 n_2,则衍射强度分布函数形式不变,仍为

$$I(\theta)=I_0(\sin\alpha/\alpha)^2,$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda_0}(n_2\sin\theta-n_1\sin\theta_0),$$

λ_0 为真空光波长.零级角方位 θ_0' 由 $\alpha=0$ 给出,它也满足折射定律

$$n_2\sin\theta_0'=n_1\sin\theta_0.$$

零级半角宽度 $\Delta\theta$ 由下式确定:

$$n_2\sin(\theta_0'+\Delta\theta)-n_1\sin\theta_0=\lambda_0/a,$$

即

$$n_2\sin(\theta_0'+\Delta\theta)-n_2\sin\theta_0'=\lambda_0/a.$$

取微分近似,得

$$\Delta\theta\approx\frac{\lambda_0}{n_2a\cos\theta_0'}=\frac{\lambda_0}{a\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_0}}.$$

2. 设界面的线度为 1 cm,光波的波长为 0.6 μm,折射率为 1.5.估算在下列情形下光束在媒质界面上反射和折射时反射光束和折射光束的衍射发散角:

(1) 平行光正入射；

(2) 入射角为 75°；

(3) 入射角为 89°(掠入射).

解　考虑到监测元件总有一定的灵敏度，故衍射发散角取半角宽度更为实际，而不必取零级附近的暗点(或暗环)的全部角间隔. 根据上题得到的反射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta = \lambda_0/a\cos\theta_0$$

和折射光束的半角宽度公式

$$\Delta\theta' = \frac{\lambda_0}{a\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_0}},$$

可分别计算反射光束和折射光束的衍射发散角(空气中 $\lambda\approx\lambda_0$). 以 $\lambda_0=0.6\ \mu m$，$a=1\ cm$，$n_1=1.0$，$n_2=1.5$ 代入，分别算出：

(1) 当 $\theta_0=0°$时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm} = 0.6\times10^{-4}\ rad \approx 12.4'',$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm\times 1.5} = 0.4\times10^{-4}\ rad \approx 8.2'';$$

(2) 当 $\theta_0=75°$时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm\times\cos75°} \approx 2.3\times10^{-4}\ rad \approx 47.4'',$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm\times\sqrt{1.5^2-\sin^2 75°}} \approx 5.2\times10^{-5}\ rad \approx 10.7'';$$

(3) 当 $\theta_0=89°$时，得

$$\Delta\theta = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm\times\cos89°} \approx 3.4\times10^{-3}\ rad \approx 700'',$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6\ \mu m}{1\ cm\times\sqrt{1.5^2-\sin^2 89°}} \approx 5.4\times10^{-5}\ rad \approx 11.1''.$$

以上计算结果表明，虽然掠入射时界面的有效宽度变小，因而衍射发散角变大；但其数量级与正入射时相比高不了多少，只在入射角非常逼近 90°时，才有明显的增加.

3. 试用巴比涅原理证明：互补的衍射屏产生的夫琅禾费衍射图样相同.

证 设 a,b 两屏互补，造成的衍射场分别为 $\tilde{U}_a(P)$,$\tilde{U}_b(P)$，自由传播场为 $\tilde{U}_0(P)$，则由巴比涅原理有

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}_0(P).$$

在夫琅禾费衍射中，除几何像点外 $\tilde{U}_0(P)$ 都等于零. 从而，除几何像点外，处处有

$$\tilde{U}_a(P)=-\tilde{U}_b(P),$$

如图 2-20 所示. 因此

$$I_a(P)=I_b(P),$$

即除零级斑中心以外的区域，互补屏造成的衍射强度分布完全一样.

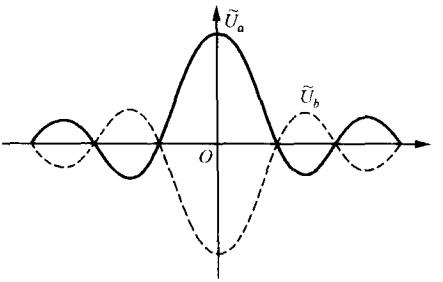


图 2-20

再看零级斑中心点的情形. 从理论上看这是一个奇异点，因为如果不考虑透镜有限口径的衍射，则自由传播时该处成为几何像点，即振幅无限大. 若互补屏之一在此处产生的衍射振幅 $U_a(0)$ 为有限值，则另一屏在此处产生的衍射振幅 $\tilde{U}_b(0)$ 还是无限大(反正它们都是亮的). 不过，衍射测量术中利用的是零级斑中心点以外暗点(暗纹或暗环)的角分布或强度分布，并不直接关心零级斑中心点的绝对强度.

4. 衍射细丝测径仪是将单缝夫琅禾费衍射装置中的单缝用细丝代替. 今测得 0 级衍射斑的宽度(两个 1 级暗纹间的距离)为 1 cm. 求细丝的直径. (已知光波长 0.63 μm，透镜焦距 50 cm.)

解 根据上题分析，细丝夫琅禾费衍射强度分布与其互补的单缝强度分布在像点以外是处处相同的，故 0 级斑半角宽度取同一个公式

$$\Delta\theta\approx\frac{\lambda}{a}\approx\frac{\Delta l}{2f}.$$

在本题中，应将 a 看做细丝直径，Δl 为 0 级斑的线宽度. 由此可算出

$$a = 2f\lambda/\Delta l = 63\ \mu\text{m}.$$

5. 在白光照明下夫琅禾费衍射的零级斑中心是什么颜色？零级斑外围呈什么颜色？

解　白光是由各种波长的成分按一定比例组成的，经夫琅禾费衍射后各种波长的零级斑中心仍重合于几何像点. 但由衍射反比关系知，零级斑的半角宽度 $\Delta\theta \propto \lambda$，即长波比短波更加弥漫. 这就必然导致中心点的长波成分减小，短波成分增加，使零级斑的中心不再严格保持白色，短波成分加重的结果呈蓝白色. 同理，零级斑的外围应呈彩色，长波（红色）成分靠外，短波（蓝色）成分靠里. 根据菲涅耳-基尔霍夫衍射公式，发生这一现象应是预料中的事情，因为零级中心的振幅

$$\tilde{U}(P_0) \propto 1/\lambda.$$

通常所说的“零级无色散”是指，零级中心位置重合，在空间上没有被分离.

6. 讨论单缝夫琅禾费衍射装置有如下变动时，衍射图样的变化（参见图 2-21(a)）：

（1）增大透镜 L_2 的焦距；

（2）增大透镜 L_2 的口径；

（3）将衍射屏沿光轴（z 轴）前后平移；

（4）衍射屏作垂直于光轴的移动（不超出入射光束照明范围）；

（5）衍射屏绕光轴 z 旋转；

（6）点光源作垂直于 z 轴的移动，从轴上移到轴外；

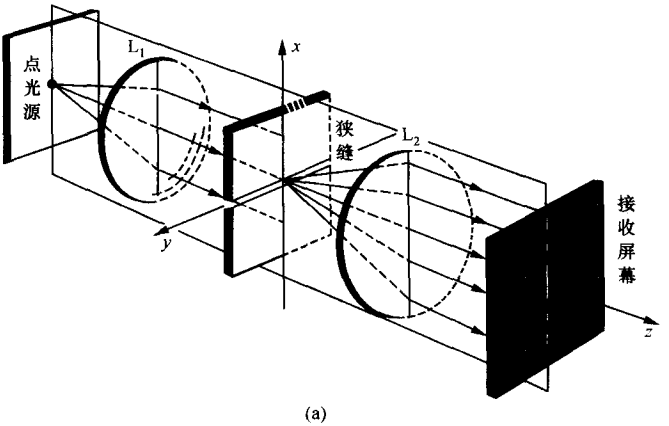
（7）把点光源改成与狭缝平行的线光源.

解　装置未作变动时，衍射图样为沿 x 轴的一系列衍射斑. 零级斑在轴上，高级斑对称分布. 设缝宽为 a，则零级斑在 x 轴的半角宽度为

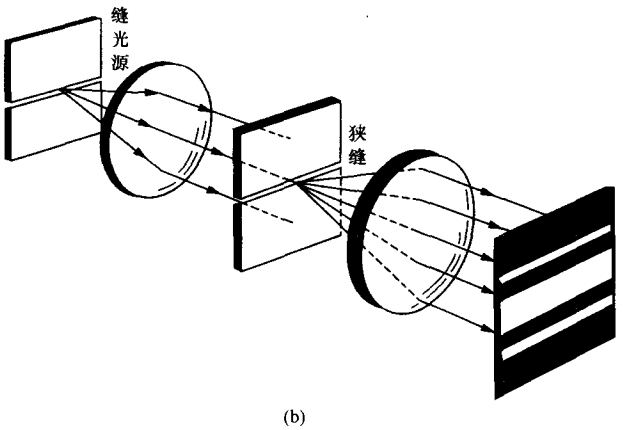
$$\Delta\theta_x \approx \lambda/a.$$

（1）若增大透镜 L_2 的焦距，衍射图样的形状和零级斑的半角宽度都不变，但亮斑的线度及其间距均同时被放大.

（2）若增大透镜 L_2 的口径，则在接收屏幕上将增加高级衍射斑，原有衍射斑保持不变.



(a)



(b)

图 2-21

(3) 若沿光轴 z 轴前后平移衍射屏，则高级衍射斑将会有增加或减少，衍射屏移近透镜 L_2 时高级斑增加；反之减少，其余衍射斑保持不变.

(4) 若将衍射屏作垂直于光轴上下移动时，则零级斑保持不变，但高级斑可能不再呈对称分布. 如衍射屏沿 x 轴正方向移动，则在该方向上高级斑减少，而沿 x 轴负方向高级斑增多.

(5) 若衍射屏绕 z 轴旋转，则衍射斑整体跟着旋转，衍射斑连线

保持与狭缝正交.

在以上 5 种变动中,零级斑中心位置均保持不变.

(6) 若点光源由轴上移到轴外,则衍射图样整体向反方向平移,且零级斑中心始终保持在点源的几何光学像点的位置.

(7) 线光源可看成一系列非相干点源的集合;每一点源对应一套衍射斑,零级斑的中心分别在各自的几何光学像点的位置. 若点光源沿平行狭缝方向扩展为线光源,则各套衍射斑不相干地叠加在一起,就在屏幕上得到一系列平行直线衍射条纹,其走向与狭缝平行,如图 2-21(b)所示.

在单缝夫琅禾费衍射实验装置中,一定要区别点光源照明和线光源照明(在没有激光的条件下,人们经常采用线光源照明)两种情形. 如果不加区分地认为直线衍射条纹是由于狭缝造成的,这就犯了概念性的错误.

顺便指出,在线光源照明情形中,如果线光源与狭缝没有保持平行,则条纹会变得模糊不清,仅当两者保持平行时,衍射条纹最为清晰,这一结论不难从(6),(7)两种情形的结果中得到,请读者自行分析. 这一点在实验中是有实际意义的,因为在实验中很难事先测定线光源与狭缝是否严格平行;而反过来,由条纹的清晰程度(变化)来判断两者的平行程度,是极为方便的.

§8　光学仪器的像分辨本领

1. 一对双星的角间隔为 0.05″. 问:

(1) 需要多大口径的望远镜才能分辨它们?

(2) 此望远镜的角放大率应设计为多少才比较合理?

解　(1) 根据望远镜的最小分辨角公式

$$\Delta\theta_{\mathrm{m}} = 1.22\lambda/D,$$

取光波长 $\lambda\approx 0.55\ \mu\mathrm{m}$,$\Delta\theta_{\mathrm{m}}=0.05''\approx 2.4\times10^{7}\ \mathrm{rad}$,算出物镜口径

$$D = 1.22\lambda/\Delta\theta_{\mathrm{m}} \approx 2.8\ \mathrm{m}.$$

(2) 仪器可分辨的角间隔(双星)还需要由仪器以适当放大率将它放大为人眼可分辨的最小角度 $\Delta\theta_e \approx 1' \approx 2.9\times10^{-4}$ rad. 因此,与本台望远镜的分辨本领相匹配的视角放大率

$$M = \Delta\theta_e/\Delta\theta_m \approx 1210.$$

2. 一台天文望远镜的口径为 2.16 m. 由这一数据你能进一步获得关于它在光学性能方面的哪些知识?

解 从物镜口径的数据可以初步推算出一台望远镜的以下几方面光学性能:

(1) 望远镜的孔径光阑为物镜. 从物镜的口径值可以推算出最小分辨角(取光波长 $\lambda=0.55\ \mu m$)

$$\Delta\theta_m = 1.22\lambda/D \approx 3.1\times10^{-7}\ \text{rad} \approx 0.064''.$$

(2) 望远镜的有效(正常)放大率应设计为使得最小分辨角放大成人眼最小可分辨角. 所以这台望远镜的视角放大率的正常值为

$$M = \frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta_m} = \frac{2.9\times10^{-4}\ \text{rad}}{3.1\times10^{-7}\ \text{rad}} \approx 935.$$

(3) 扩大口径不仅可以提高分辨本领,而且可以提高集光能力,即提高观察星体(点源)的主观亮度. 根据第一章 §12 有关仪器主观亮度的知识可以知道,当实际放大率等于(或大于)正常放大率时,望远镜出瞳口径将等于(或小于)眼瞳直径. 此时,被物镜接收的光通量(来自星体)将全部进入眼瞳,主观亮度是自然主观亮度的 M 倍.

当然,实际的望远镜一般为反射型望远镜. 以上由物镜口径的数据对光学性能的推算也适用于反射型.

3. 一台显微镜,已知其数值孔径 N.A. =1.32,物镜焦距 $f_0=1.91$ mm,目镜焦距 $f_e=50$ mm. 求:

(1) 最小分辨距离;

(2) 有效放大率;

(3) 光学筒长.

解 (1) 根据显微镜的最小分辨距离公式

$$\Delta y_m = 0.61\lambda/\text{N.A.},$$

取光波长 $\lambda=0.55\ \mu m$,算出

$$\Delta y_m \approx 0.25\ \mu m.$$

(2) 显微镜的有效(正常)放大率应使仪器可分辨的最小距离放大为人眼可分辨的最小距离：

$$\begin{aligned}\Delta y_e &= s_0 \Delta\theta_e \\ &\approx 25\ cm \times (2.9 \times 10^{-4}\ rad) \\ &= 72.5 \times 10^{-6}\ m = 72.5\ \mu m,\end{aligned}$$

式中 s_0 为明视距离. 所以放大率的正常值为

$$M = \Delta y_e / \Delta y_m = 290.$$

(3) 以上对放大率的要求应由镜头焦距的选取和镜头位置的适当安排来实现. 根据显微镜视角放大率公式，本题中的光学筒长应取

$$\Delta = \frac{f_e f_0}{s_0} M \approx 111\ mm.$$

4. 用一架照相机在离地面 200 km 的高空拍摄地面上的物体. 如果要求它能分辨地面上相距 1 m 的两点，照相机的镜头至少要多大？(设镜头的几何像差已被很好地消除，感光波长为 4000 Å.)

解　按题意，要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_m = \frac{1\ m}{200\ km} = 0.5 \times 10^{-5}\ rad.$$

该照相机的镜头即为孔径光阑，其最小分辨角公式为

$$\Delta\theta_m = 1.22\lambda / D.$$

据此，以 $\lambda = 0.4\ \mu m$ 代入上式，算得相机镜头孔径

$$D = 1.22\lambda / \Delta\theta_m = 9.76\ cm.$$

5. 已知地月距离约为 3.8×10^5 km. 用口径为 1 m 的天文望远镜能分辨月球表面两点的最小距离是多少？

解　取光波长 $\lambda = 0.55\ \mu m$，算得

$$\Delta\theta_m = 1.22\lambda / D = 6.71 \times 10^{-7}\ rad.$$

因此月球表面上能被该望远镜分辨的最小距离为

$$\begin{aligned}\Delta y_m &= l \Delta\theta_m = (3.8 \times 10^5\ km) \times (6.71 \times 10^{-7}\ rad) \\ &\approx 255 \times 10^{-3}\ km = 255\ m.\end{aligned}$$

6. 已知日地距离约为 1.5×10^{8} km. 要求分辨太阳表面相距 20 km 的两点，望远镜的口径至少需要多大？

解 按题意，要求能分辨的最小角间隔为

$$\Delta\theta_{m}=\frac{20\ \text{km}}{1.5\times10^{8}\ \text{km}}\approx1.33\times10^{-7}\ \text{rad}.$$

取光波长 $\lambda=0.55\ \mu$m，算得该望远镜的口径

$$D=1.22\lambda/\Delta\theta_{m}\approx5.0\ \text{m}.$$

§9 光的横波性与五种偏振态

1. 试证明自然光通过偏振片后的强度为总强度的一半.

证 自然光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布具有轴对称性(如图 2-22). 在此，引入“线偏振数密度”来描述大量线偏振集合的角分布. 设在角范围 $\theta\sim\theta+\Delta\theta$ 之内，包含线偏振的数目为 ΔN，则

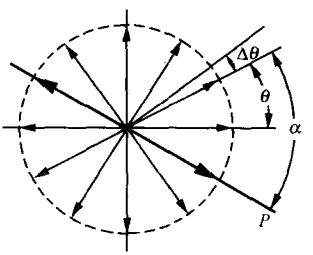


图 2-22

$$\Delta N=\rho(\theta)\Delta\theta,$$

式中 $\rho(\theta)$ 为线偏振密度，即单位角度内所包含的线偏振数. 显然，对于具有轴对称性的自然光来说，$\rho(\theta)$ 与 θ 无关，保持为一个常数. 由于自然光中的各线偏振光之间无固定相位关联，故其总强度 I_0 等于各线偏振光强度 i 的直接相加，即

$$I_0=\sum\Delta I=\sum(i\Delta N)=\sum(i\rho\Delta\theta)$$

$$=i\rho\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\rho i.$$

透过偏振器 P 的光强应按马吕斯(Malus)定律先投影再求和，即在 $\alpha\sim\alpha+\Delta\alpha$ 范围内线偏振光透过 P 的光强为

$$\Delta I=i\Delta N\cos^{2}\alpha=i\rho\cos^{2}\alpha\Delta\alpha.$$

透过 P 的光强为

$$I=\sum\Delta I=i\rho\sum\cos^{2}\alpha\Delta\alpha$$

$$= i\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha \mathrm{d}\alpha = \pi i\rho.$$

由此可见，若用线偏振数密度 ρ 和个别线偏振光强度 i 两个量来表示自然光总强度 I_0 和任意方向的强度 $I(\theta)$，分别为

$$I_0 = 2\pi i\rho, \quad I(\theta) = \pi i\rho.$$

显然

$$I(\theta) = I_0/2.$$

2. 试论证：对于任意角分布的部分偏振光，经偏振片后旋转一周之内只有两个光强极大方位和两个光强极小方位，而且极大与极小的方位角彼此相隔 $\pi/2$ 角度.

证　如图 2-23 所示，部分偏振光是大量的有各种取向的彼此无关的线偏振光的集合，且角分布不具有轴对称性. 设部分偏振光的数密度分布函数为 $\rho(\alpha)$，个别线偏振光的强度为 $i(\alpha)$(图 2-23(a))，则部分偏振光的总强度为

$$I_0 = \sum\Delta I = \sum i(\alpha)\Delta N = \sum i(\alpha)\rho(\alpha)\Delta\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

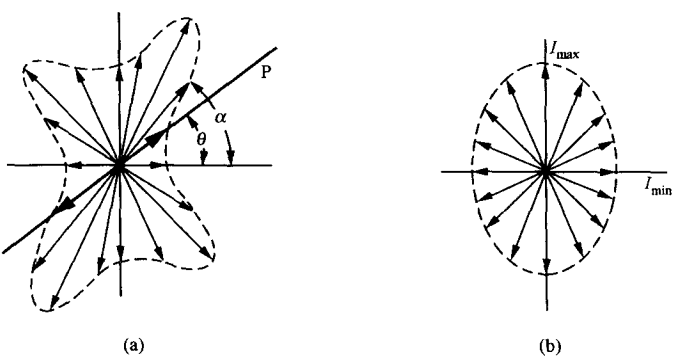


图　2-23

经偏振片以后的强度为

$$I(\theta) = \sum i(\alpha)\Delta N\cos^2(\alpha - \theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos^2(\alpha-\theta)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)[1+\cos(2\alpha-2\theta)]\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)\mathrm{d}\alpha,$$

其中等号右边第一项为

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}I_0.$$

对第二项求积分，利用解析函数的中值定理将其转化为

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}i(\alpha_0)2\pi\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta),$$

式中 $0<\alpha_0<2\pi$. 所以

$$I(\theta) = I_0/2 + \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta).$$

对上式的函数取极值是明显的，当 $\theta_1=\alpha_0$，$\theta_3=\alpha_0+\pi$ 时，得极大光强

$$I_{\max} = I_0/2 + \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0),$$

当 $\theta_2=\alpha_0+\pi/2$，$\theta_4=\alpha_0+3\pi/2$ 时，得极小光强

$$I_{\min} = I_0/2 - \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0).$$

以上四个方位角依次相隔 $\pi/2$. 当然，α_0 的具体取值决定于角分布函数 $\rho(\alpha)$和 $i(\alpha)$的具体形式.

更有意思的是，若用极大光强 $I_{\max}$和极小光强 $I_{\min}$改写总强度 I_0 和经偏振片后的光强 $I(\theta)$，有

$$I_0 = I_{\max} + I_{\min},$$

$$I(\theta) = I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min})\cos^2(\alpha_0-\theta).$$

由上式可以看出，任何一种部分偏振光都可以被看为一种自然光和一个线偏振光的组合，自然光的等效强度为 $I_{\min}$，线偏振光的强度为 $I_{\max}-I_{\min}$.

3. 任意一个线偏振可以分解为两个正交方向振动的合成，这两个正交振动之间是有固定相位差的. 对于自然光，也可以分解为两个

正交方向振动的合成；而这两个正交振动之间是没有固定相位差的.这是为什么？

证　虽然就个别线偏振光而言，其两个正交分量之间是有固定相位关系的，但大量的彼此无固定相位关系的线偏振光，分别在两个正交方向的叠加结果为

$$A_x(t)=\sum_n a_{xn}(t),\quad A_y(t)=\sum_n a_{yn}(t),$$

这两个正交振动 $A_x(t)$，$A_y(t)$之间是不会有固定相位关系的.反之，若两者之间有固定相位关系，则由垂直振动的合成知识可知，合成振动必然是椭圆偏振光(或线偏振光、圆偏振光).没有利用任何实际的偏振元件，仅单纯地采用数学上的分解合成的手段，是不可能改造自然光的偏振态.于是，我们采用上述反证法，简单地证明了自然光的两个正交分量之间是无固定相位差的.在以后讨论偏振光干涉问题时，还可以对此命题给出另一方式的证明.

4. 自然光投射到互相重叠的两块偏振片上，如果透射光的强度为：

(1) 透射光束最大强度的 1/3，

(2) 入射光束强度的 1/3，

则这两个偏振片的透振方向之间夹角是多大？(假定偏振片是理想的，即它把自然光的强度严格减小一半.)

解　(1) 设自然光(即入射光)的总强度为 I_0，通过第一块偏振片 P_1 的强度为 $I_0/2$.当两块偏振片平行时，最后通过第二块偏振片 P_2 的强度为 $I_0/2$，此为最大透光强度

$$I_{max}=I_0/2.$$

当 P_1，P_2 的透振方向夹角为 θ(如图 2-24)时，则

$$I_2=I_1\cos^2\theta=I_0\cos^2\theta/2=I_{max}\cos^2\theta.$$

若 $I_2/I_{max}=1/3$，算出 $\cos\theta=\sqrt{1/3}$，故

$$\theta\approx 54°45'.$$



图　2-24

(2) 若 $I_2/I_0=1/3$，算出 $\cos\theta=\sqrt{2/3}$，故

$$\theta\approx 35°15'.$$

5. 一束自然光入射到一偏振片组上.这个偏振片组由四块偏振

片组成，每块的透振方向相对于前面一片沿顺时针方向转过 30°角. 试问入射光中有多大一部分透过了这组偏振片？

解 设入射自然光总强度为 I_0，通过四块偏振片的光强依次为 I_1, I_2, I_3, I_4. 根据马吕斯定律，得

$$I_4 = I_3\cos^2\theta = I_2\cos^4\theta = I_1\cos^6\theta = I_0\cos^6\theta/2,$$

算出比值为

$$\frac{I_4}{I_0} = \frac{1}{2}\cos^6 30° = \frac{27}{128} \approx 21\%.$$

6. 将一偏振片沿 45°角插入一对正交偏振器之间. 自然光经过它们，强度减为原来的百分之几？

解 设偏振片 P_1, P_2 正交，则最终通过 P_2 的光强为

$$I_2 = 0 \quad (\text{消光}).$$

若在 P_1, P_2 之间插入另一块偏振片 P，P 与 P_1 夹角为 θ（如图 2-25），则最终通过 P_2 的光强为

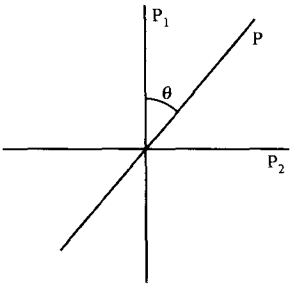


图 2-25

$$I_2' = I\sin^2\theta = I_1\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\theta,$$

式中 I_0 为入射光强，I_1, I 分别为通过 P_1，P 后的光强. 当 $\theta = 45°$ 时，

$$\frac{I_2'}{I_0} = \frac{1}{8} = 12.5\%.$$

§10 光在电介质表面的反射和折射 菲涅耳公式

1. 计算从空气到水面的布儒斯特角.（水的折射率 $n = 4/3$.）

解 光从一介质（折射率为 n_1）到另一介质（折射率为 n_2）时的布儒斯特（Brewster）角公式为

$$\tan i_B = n_2/n_1. \qquad ①$$

据此算出从空气到水的布儒斯特角

$$i_B = \arctan(4/3) \approx 53°8'.$$

2. 一束光由水射到玻璃上. 当入射角为 50.82°时反射光全偏振. 求玻璃的折射率. (已知水的折射率为 4/3.)

解　根据布儒斯特角公式(上题中式①)得

$$n_2' = n_1 \tan i_B \approx 1.636.$$

3. 计算:

(1) 由空气到玻璃($n=1.560$)的全偏振角;

(2) 由此玻璃到空气的全偏振角;

(3) 在全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度;

(4) 在全偏振时由此玻璃到空气的折射光的偏振度;

(5) 自然光从空气以布儒斯特角入射到平行平面玻璃板以后,最终透射光的偏振度.

解　(1) 由空气到此玻璃的全偏振角为

$$i_{1B} = \arctan n = \arctan(1.560) = 57.34° = 57°20'.$$

(2) 由此玻璃到空气的全偏振角为

$$i_{2B} = \arctan(1/n) = \operatorname{arccot} n = 90° - i_{1B} = 32°40'.$$

由此可见,光束射到空气中的平行平面玻璃板上,当上表面反射发生全偏振时,则折射光在下表面的反射也将发生全偏振,每一界面反射的全部都是 s 分量. 这正是玻片堆起偏器的理论根据之一.

(3) 首先导出计算折射光偏振度的一般公式. 由空气到玻璃时,折射光的 p 分量为极大强度,s 分量为极小强度. 所以折射光的偏振度为

$$\begin{aligned} P &= \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{I_{2p} - I_{2s}}{I_{2p} + I_{2s}} = \frac{I_{1p}T_p - I_{1s}T_s}{I_{1p}T_p + I_{1s}T_s} \\ &= \frac{I_{1p}\dfrac{n_2}{n_1}|t_p|^2 - I_{1s}\dfrac{n_2}{n_1}|t_s|^2}{I_{1p}\dfrac{n_2}{n_1}|t_p|^2 + I_{1s}\dfrac{n_2}{n_1}|t_s|^2} \\ &= \frac{I_{1p}|t_p|^2 - I_{1s}|t_s|^2}{I_{1p}|t_p|^2 + I_{1s}|t_s|^2}, \end{aligned} \qquad ①$$

式中 n_1 为空气的折射率,n_2 为玻璃的折射率. 自然光的 p 和 s 分量的强度相等,即 $I_{1p}=I_{1s}$,故

$$P=\frac{|t_p|^2-|t_s|^2}{|t_p|^2+|t_s|^2}.$$

上式即为求折射光偏振度的公式，条件是自然光入射. 因此，只要根据菲涅耳公式求出振幅透射率 t_p，t_s，就可得到折射光的偏振度.

以布儒斯特角入射时，由菲涅耳公式得

$$t_p=\frac{2n_1\cos i_{1B}}{n_2\cos i_{1B}+n_1\cos(90^\circ-i_{1B})}=\frac{n_1}{n_2},$$

$$t_s=\frac{2n_1\cos i_{1B}}{n_1\cos i_{1B}+n_2\cos(90^\circ-i_{1B})}=\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2}.$$

当然，$t_p=n_1/n_2$ 的结果也可根据能流守恒关系得到. 因为以布儒斯特角入射时 p 分量 100%透过，故

$$\mathscr{T}_p=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_{1B}}|t_p|^2$$

$$=\frac{n_2}{n_1}\tan i_{1B}|t_p|^2=\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2|t_p|^2=1.$$

因此得

$$t_p=n_1/n_2.$$

于是，改写式①，得到以布儒斯特角入射时折射光偏振度的计算公式为

$$P=\frac{(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2},$$

以 $n_1=1$，$n_2=1.560$ 代入，得 $P=9.5\%$.

(4) 从上面折射光的偏振度的计算公式①中看到，P 对 n_1 与 n_2 是对称的，满足互易关系. 当光线逆向从玻璃到空气以布儒斯特角入射，折射光的偏振度不变，即

$$P'=P=9.5\%.$$

(5) 当入射光的 p，s 分量强度相等时，无论是从空气到玻璃，还是从玻璃到空气，均有折射光的 p 分量强度极大，s 分量强度极小. 因此，以自然光入射到平行平面玻璃板上时，最终透射光的偏振度公式仍为

$$P=\frac{|t_p|^2-|t_s|^2}{|t_p|^2+|t_s|^2},$$

但式中 t_p,t_s 应由单次透射率的乘积来代替,即

$$t_p=t_{1p}t'_{1p},\quad t_s=t_{1s}t'_{1s},$$

t_1,t'_1 分别为平行平板上下表面的振幅透射率. 若是 N 块这样的平行平板叠放在一起(玻片堆),则

$$t_p=(t_{1p}t'_{1p})^N,\quad t_s=(t_{1s}t'_{1s})^N.$$

当以布儒斯特角入射时,由(3),(4)讨论知道

$$t_{1p}=\frac{n_1}{n_2},\quad t'_{1p}=\frac{n_2}{n_1},\quad t_p=1;$$

$$t_{1s}=\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2},\quad t'_{1s}=\frac{2n_2^2}{n_2^2+n_1^2},\quad t_s=\left(\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2.$$

此时透射光的偏振度简化为

$$P=\frac{1-\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{2N}}{1+\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{2N}}.$$

若为玻片堆(N 块),则经历 $2N$ 次折射,最终透射光的偏振度为

$$P_N=\frac{1-\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{2N}}{1+\left(\dfrac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{2N}}.\qquad ②$$

结合本题,取 $n_1=1$,$n_2=1.560$,$N=2$,算出

$$P_1\approx 18.9\%.$$

从式②看出,由于 $2n_1n_2/(n_1^2+n_2^2)<1$,当 N 越大,则 P_N 值越高.

4. 求自然光透过 8 块 $n=1.560$ 的平行玻璃板组成的玻片堆后的偏振度(忽略玻璃对光的吸收).

解　由上题中式②,令 $N=16$,$n_1=1$,$n_2=1.560$,得此玻片堆获得的透射光的偏振度为

$$P_8=\frac{1-\left(\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{32}}{1+\left(\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^{32}}\approx 91\%.$$

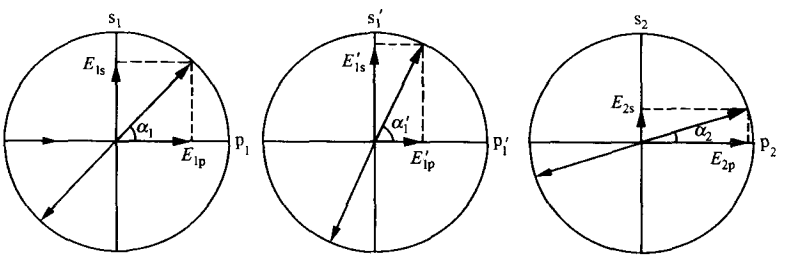
5. 线偏振光的偏振面和入射面间的夹角称为振动的方位角. 设入射光线偏振光的方位角为 α,入射角为 i,求反射光和折射光的方位角 α_1' 和 α_2. (已知两介质的折射率为 n_1 和 n_2.)

解 入射、反射和折射线偏振光如图 2-26(a)～(c)所示. 由于 p 分量和 s 分量的振幅反射率(或振幅透射率)是不同的,这将导致反射线偏振或折射线偏振的方位角 α_1',α_2 与入射光线偏振的方位角 α_1 一般也不相等.

根据菲涅耳公式导出 α_1 与 α_1',α_2 的关系为

$$\begin{aligned}\tan\alpha_1'&=\frac{E_{1s}'}{E_{1p}'}=\frac{r_sE_{1s}}{r_pE_{1p}}=\frac{r_s}{r_p}\tan\alpha_1\\&=\frac{\sin(i_2-i_1)}{\sin(i_2+i_1)}\frac{\tan(i_2+i_1)}{\tan(i_1-i_2)}\tan\alpha_1\\&=\frac{\cos(i_2-i_1)}{\cos(i_2+i_1)}\tan\alpha_1,\end{aligned}\qquad①$$

$$\begin{aligned}\tan\alpha_2&=\frac{E_{2s}}{E_{2p}}=\frac{t_sE_{1s}}{t_pE_{1p}}=\frac{t_s}{t_p}\tan\alpha_1\\&=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}\frac{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}{2n_1\cos i_1}\tan\alpha_1\\&=\frac{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}\tan\alpha_1.\end{aligned}\qquad②$$



(a) (b) (c)

图 2-26

在本题中，$i_1=i$，$\alpha_1=\alpha$. 由折射定律，得

$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i,\quad \cos i_2=\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}.$$

将上式代入式①，②得

$$\tan\alpha_1'=\frac{\cos i_1\cos i_2+\sin i_1\sin i_2}{\sin i_1\sin i_2-\cos i_1\cos i_2}\tan\alpha_1$$

$$=\frac{\frac{n_1}{n_2}\sin^2 i+\cos i\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}{\frac{n_1}{n_2}\sin^2 i-\cos i\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}\tan\alpha,$$

$$\tan\alpha_2=\frac{n_2\cos i+n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}{n_1\cos i+n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i\right)^2}}\tan\alpha.$$

6. 线偏振光以布儒斯特角从空气入射到玻璃($n=1.560$)的表面上，其振动的方位角为 20°. 求反射光和折射光的方位角.

解　因该偏振光以布儒斯特角入射，反射光显然为 s 光，即反射光的方位角为 $\alpha_1'=90°$. 在上题结果中取 $i=i_B$，$\tan i_B=n_2/n_1$，进一步简化折射线偏振方位角公式

$$\tan\alpha_2=\frac{n_2\cos i_B+n_1\sin i_B}{n_1\cos i_B+n_2\sin i_B}\tan\alpha_1$$

$$=\frac{n_2+n_1\tan i_B}{n_1+n_2\tan i_B}\tan\alpha_1$$

$$=\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}\tan\alpha_1.$$

以 $n_1=1$，$n_2=1.560$，$\alpha_1=20°$代入，算得

$$\alpha_2\approx 18°18'.$$

7. 设入射光、反射光、折射光的总能流分别为 W_1，W_1'，W_2，则总能流反射率 $\mathscr{R}$ 和总能流透射率 $\mathscr{T}$ 定义为

$$\mathscr{R}=\frac{W_1'}{W_1},\quad \mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}.$$

(1) 当入射光为线偏振光，方位角(见上题)为 α 时，试证明：

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_p\cos^2\alpha + \mathscr{R}_s\sin^2\alpha,$$
$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_p\cos^2\alpha + \mathscr{T}_s\sin^2\alpha;$$

(2) 证明

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1;$$

(3) 设入射光是自然光，求 $\mathscr{R}$，$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{T}_s$ 的关系；

(4) 设入射光是圆偏振光，求 $\mathscr{R}$，$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$，$\mathscr{T}_p$，$\mathscr{T}_s$ 的关系.

解 (1) 总能流反射率为

$$\mathscr{R} = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{W_{1p}' + W_{1s}'}{W_1} = \frac{\mathscr{R}_p W_{1p} + \mathscr{R}_s W_{1s}}{W_1}.$$

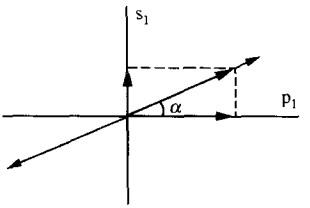


图 2-27

如图 2-27 所示，根据马吕斯定律有

$$I_{1p} = I_1\cos^2\alpha, \quad W_{1p} = W_1\cos^2\alpha,$$
$$I_{1s} = I_1\sin^2\alpha, \quad W_{1s} = W_1\sin^2\alpha.$$

因此

$$\mathscr{R} = (\mathscr{R}_p W_1\cos^2\alpha + \mathscr{R}_s W_1\sin^2\alpha)/W_1$$
$$= \mathscr{R}_p\cos^2\alpha + \mathscr{R}_s\sin^2\alpha. \quad ①$$

同理，总能流透射率为

$$\mathscr{T} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_{2p} + W_{2s}}{W_1} = \frac{\mathscr{T}_p W_{1p} + \mathscr{T}_s W_{1s}}{W_1}$$
$$= \frac{\mathscr{T}_p W_1\cos^2\alpha + \mathscr{T}_s W_1\sin^2\alpha}{W_1}$$
$$= \mathscr{T}_p\cos^2\alpha + \mathscr{T}_s\sin^2\alpha. \quad ②$$

(2) 根据能量守恒，入射光的总能流等于反射光和折射光的能流之和，即

$$\mathscr{R} + \mathscr{T} = (\mathscr{R}_p\cos^2\alpha + \mathscr{R}_s\sin^2\alpha) + (\mathscr{T}_p\cos^2\alpha + \mathscr{T}_s\sin^2\alpha)$$
$$= (\mathscr{R}_p + \mathscr{T}_p)\cos^2\alpha + (\mathscr{R}_s + \mathscr{T}_s)\sin^2\alpha$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(3) 自然光入射时，p，s 分量的入射能流相等，分别等于入射总能流的 1/2，即

$$W_{1p}=W_{1s}=W_1/2.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{R}&=\frac{W_1'}{W_1}=\frac{W_{1p}'+W_{1s}'}{W_1}=\frac{W_{1p}'}{W_1}+\frac{W_{1s}'}{W_1}\\&=\frac{W_{1p}'}{2W_{1p}}+\frac{W_{1s}'}{2W_{1s}}\\&=(\mathscr{R}_p+\mathscr{R}_s)/2,\\\mathscr{T}&=\frac{W_2}{W_1}=\frac{W_{2p}+W_{2s}}{W_1}=\frac{W_{2p}}{2W_{1p}}+\frac{W_{2s}}{2W_{1s}}\\&=(\mathscr{T}_p+\mathscr{T}_s)/2.\end{aligned}$$

(4) 圆偏振光入射时，也有

$$W_{1p}=W_{1s}=W_1/2.$$

与自然光入射时同理，有

$$\mathscr{R}=(R_p+R_s)/2,\quad \mathscr{T}=(\mathscr{T}_p+\mathscr{T}_s)/2.$$

本题在于确定各种偏振态入射情况下 R 与 $\mathscr{R}_p,\mathscr{R}_s$ 以及 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}_p,\mathscr{T}_s$ 的关系. 虽然从菲涅耳公式中可以得到 $\mathscr{R}_p,\mathscr{R}_s,\mathscr{T}_p,\mathscr{T}_s$ 的公式，而实际中有时还关心总的能流反射率和总的能流透射率，因此本题得到的一些结论是有意义的.

8. 光从空气到玻璃($n=1.50$)以布儒斯特角入射. 试计算：

(1) 能流反射率 $\mathscr{R}_p$ 和 $\mathscr{R}_s$ 值；

(2) 能流透射率 $\mathscr{T}_p$ 和 $\mathscr{T}_s$ 值.

解　(1) 以布儒斯特角入射时，反射光无 p 分量，即

$$\mathscr{R}_p=0;$$

而 s 分量的能流反射率为

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_s&=r_s^2=\frac{\sin^2(i_2-i_1)}{\sin^2(i_2+i_1)}\\&=\sin^2(90^\circ-2i_B).\end{aligned}$$

当玻璃折射率 $n=1.50$ 时，算出

$$i_B=\arctan 1.50\approx 56°19',\quad \mathscr{R}_s\approx 15\%.$$

(2) 根据能流守恒，直接求出

$$\mathscr{T}_p = 1 - \mathscr{R}_p = 1, \quad \mathscr{T}_s = 1 - \mathscr{R}_s \approx 85\%.$$

9. 线偏振光从空气到玻璃($n=1.5$)以 45°角入射,方位角为 60°. 试计算:

(1) 总能流反射率 $\mathscr{R}$ 和总能流透射率 $\mathscr{T}$;

(2) 改为自然光入射,$\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 为多少?

解 (1) 已知入射角 $i_1=45°, n_1=1, n_2=1.5$,则折射角为

$$i_2 = \arcsin(n_1 \sin i_1 / n_2) \approx 28°7'.$$

据此,由菲涅耳公式先求出能流反射率和能流透射率 $\mathscr{R}_p, \mathscr{R}_s, \mathscr{T}_p, \mathscr{T}_s$,即

$$\mathscr{R}_p = r_p^2 = \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} \approx 0.9\%,$$

$$\mathscr{R}_s = r_s^2 = \frac{\sin^2(i_2 - i_1)}{\sin^2(i_2 + i_1)} \approx 9\%,$$

$$\mathscr{T}_p = 1 - \mathscr{R}_p \approx 99\%,$$

$$\mathscr{T}_s = 1 - \mathscr{R}_s \approx 91\%.$$

再根据本节习题 7 中式①,②,令 $\alpha=60°$,得总能流反射率和透射率

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_p \cos^2\alpha + \mathscr{R}_s \sin^2\alpha \approx 7\%,$$

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_p \cos^2\alpha + \mathscr{T}_s \sin^2\alpha \approx 93\%.$$

(2) 如果自然光入射,则由题 7 所得公式,算出

$$\mathscr{R} = (\mathscr{R}_p + \mathscr{R}_s)/2 \approx 5\%,$$

$$\mathscr{T} = (\mathscr{T}_p + \mathscr{T}_s)/2 \approx 95\%.$$

10. 已知自然光入射于某平行平面玻璃板上,反射光的强度为入射光的 0.10 倍(见图 2-28). 取入射能流为一个单位,求图中标出的光线 2,3,4 的能流(略去玻璃对光的吸收).

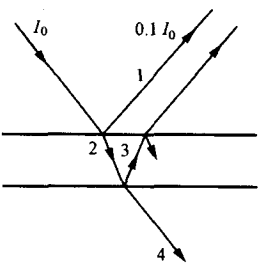


图 2-28

解 设入射能流为 W_0,则光束 1,2,3,4 能流关系式分别为

$$W_1 = \mathscr{R} W_0,$$

$$W_2 = \mathscr{T} W_0 = (1 - \mathscr{R}) W_0,$$

$$W_3 = \mathscr{R}' W_2 = \mathscr{R}\mathscr{T} W_0 = \mathscr{R}'(1 - \mathscr{R}) W_0,$$

$$W_4 = \mathscr{T}'W_2 = \mathscr{T}'\mathscr{T}W_0 = (1-\mathscr{R}')(1-\mathscr{R})W_0.$$

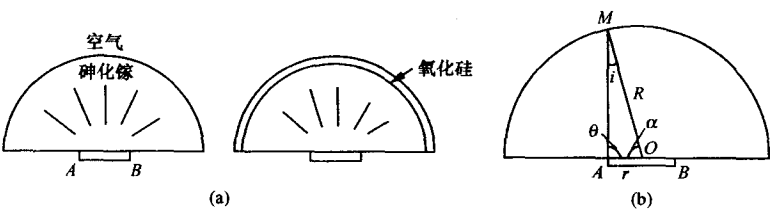
在平面玻璃板的情况下，$r'=-r$，$\mathscr{R}'=\mathscr{R}$. 按题意 $\mathscr{R}=0.1$，算出

$$W_1 = 10\%W_0, \quad W_2 = 90\%W_0,$$

$$W_3 = 9\%W_0, \quad W_4 = 81\%W_0.$$

如果要求算出光束 2，3，4 的光强比值(与入射光强相比)，则必须给定玻璃板的折射率，并由 $\mathscr{R}=0.1$ 算出相应的入射角和折射角，方能求得结果，计算是繁杂的. 在此情况下，也许用图解法更为简单：先比较精确地绘制 $\mathscr{R}_p$，$\mathscr{R}_s$ 曲线，再在图上找出 $\mathscr{R}=(\mathscr{R}_p+\mathscr{R}_s)/2=0.1$ 的入射角，按折射定律算出折射角，后面的计算就简单了.

11. 图 2-29(a)所示为一支半导体砷化镓发光管，管芯 AB 为发光区，其直径 $d\approx 3$ mm. 为了避免全反射，发光管上部研磨成半球形，以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送. 如果要使发光区边缘两点 A 和 B 发出的光不致全反射，半球的半径至少应取多少？(已知砷化镓的折射率为 3.4(对发射的 0.9 μm 波长).)



(a)　(b)

图　2-29

解　如图 2-29(b)，由发光区边缘点 A 或 B 发出的光可能在球面上发生全反射. 为避免全反射，在动点 M 变动过程中，使入射角 i 的最大值不超过临界角. 在 $\triangle AMO$ 中以 θ 为变量，应用三角正弦定理

$$\frac{\sin i}{\sin\theta} = \frac{r}{R}$$

得

$$\sin i = \frac{r}{R}\sin\theta = \frac{d}{2R}\sin\theta.$$

当 $\theta=\pi/2$ 时，入射角最大，其正弦值为

$$\sin i_m = d/2R.$$

令 $\sin i_m < \sin i_c = n_2/n_1 = 1/3.4$，求出

$$R > 1.7d \approx 5.1\ \text{mm}.$$

12. 接上题，为了减少光在砷化镓-空气界面的反射，工艺上常在砷化镓表面镀一层氧化硅薄膜，氧化硅的折射率为 1.7. 现在单纯从几何光学角度提出一个问题，加膜后入射角为多大才不至于在空气表面发生全反射？试与不加膜时相比.（设膜很薄，可按平面板计算.）

解 如图 2-30，单界面的临界角 i_c 满足

$$\sin i_c = n_2/n_1.$$

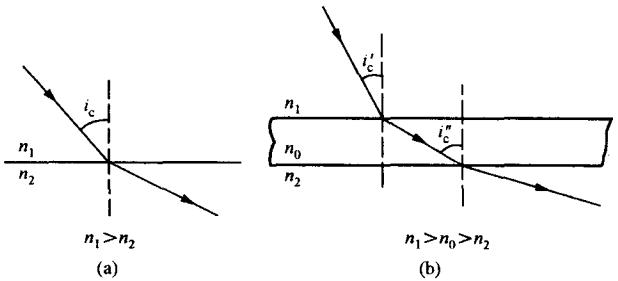


图 2-30

单膜的临界角 i_c'，i_c'' 分别满足

$$\sin i_c'' = n_2/n_0, \quad n_1 \sin i_c' = n_0 \sin i_c''.$$

由此得

$$\sin i_c' = n_2/n_1.$$

可见 $i_c' = i_c$，即加单膜不改变发生全反射的（入射）临界角. 本题的情况也是如此.

13. 从光密介质到光疏介质，当 $\sin i_1 > n_2/n_1$ 时发生全反射. 作为一种处理方法，我们仍可在形式上维持折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. 这时 $\sin i_2 > 1$，可认为 i_2 是个虚折射角，它的余弦也为虚数：

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \mathrm{i}\sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 i_1 - 1}\ ①.$$

① 这里只取正号，在物理上是合理的.

试利用菲涅耳公式证明此时$|r_p|=1$，$|r_s|=1$.

证　只要注意到以下形式的复数：

$$\tilde{z}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a+\mathrm{i}b},$$

其模为1，即

$$|\tilde{z}|=\frac{|a-\mathrm{i}b|}{|a+\mathrm{i}b|}=1,$$

便可证明本题. 也就是说，只要在相应的菲涅耳公式中，将$\cos i_2$改写为题中已提出的虚数形式，就可以看出r_p，r_s都是两个共轭复数的比值，其模为1.

14. 推导全反射时的相移公式.

解　当$n_1>n_2$且$\sin i_1>n_2/n_1$时，发生全反射. 此时仍按折射定律在形式上出现

$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1>1,$$

不符合正弦函数的取值范围. 将菲涅耳公式中直接涉及的$\cos i_2$在形式上写成虚数，即

$$\cos i_2=\sqrt{1-\sin^2 i_2}=\mathrm{i}\sqrt{(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1-1}.$$

令

$$n_2\cos i_1=a_1,\quad n_1\cos i_2=\mathrm{i}b_1,$$
$$n_1\cos i_1=a_2,\quad n_2\cos i_2=\mathrm{i}b_2,$$

则复振幅反射率为

$$r_p\equiv\frac{\tilde{E}'_{1p}}{\tilde{E}_{1s}}=\frac{A'_{1p}}{A_{1p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_p}=\frac{a_1-\mathrm{i}b_1}{a_1+\mathrm{i}b_1},$$
$$r_s\equiv\frac{\tilde{E}'_{1s}}{\tilde{E}_{1s}}=\frac{A'_{1s}}{A_{1s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_s}=\frac{a_2-\mathrm{i}b_2}{a_2+\mathrm{i}b_2}.$$

由此得到反射光p，s振动与入射光p，s振动经界面产生的相位差分别为

$$\delta_p=-2\arctan\frac{b_1}{a_1}=-2\arctan\left[\frac{n_1}{n_2}\frac{\sqrt{(n_2/n_1)^2\sin i_1-1}}{\cos i_1}\right],\quad ①$$

$$\delta_s = -2\arctan\frac{b_2}{a_2} = -2\arctan\left[\frac{n_2}{n_1}\frac{\sqrt{(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}\right], \quad ②$$

此时 $\delta_p, \delta_s \neq 0, \pi$. 如果线偏振光入射，则反射光中的 p 振动与 s 振动之间的相位差 $\delta_{ps} \neq 0, \pi$，合成结果为椭圆偏振光. 不过，在判断椭圆光是右旋还是左旋时，我们应注意到当初相位正负号的约定——实、际相位落后取正号. 故实际相位差应当为

$$\varphi'_{1p} - \varphi_{1p} = -\delta_p, \quad \varphi'_{1s} - \varphi_{1s} = -\delta_s,$$

即式①，②中的负号可以除去.

15. (1) 计算 $n_1 = 1.51, n_2 = 1.0$，入射角为 54°37′时全反射光的相移 δ_p 和 δ_s.

(2) 如果入射光是线偏振的，全反射光中 p 振动和 s 振动的相位差为多少？说明两者合成为椭圆偏振光.

解 (1) 以 $n_1 = 1.51, n_2 = 1.0, i_1 = 54°37'$ 代入上题中式①，②，分别算出

$$\delta_p \approx -123°48', \quad \delta_s \approx -78°48',$$

$$\varphi'_{1p} - \varphi_{1p} \approx 123°48', \quad \varphi'_{1s} - \varphi_{1s} \approx 78°48'.$$

(2) 考查全反射光中 s 振动与 p 振动的实际相位差. 设入射光为线偏振光，且 $\varphi_{1s} - \varphi_{1p} = 0$，则

$$\varphi'_{1s} - \varphi'_{1p} = (\varphi'_{1s} - \varphi_{1s}) - (\varphi'_{1p} - \varphi_{1p}) = -45°.$$

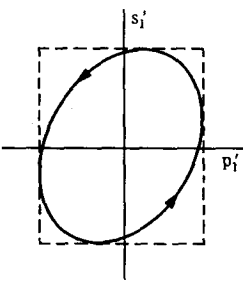


图 2-31

两个振动合成结果为左旋的椭圆偏振光，如图 2-31 所示.

16. 若在上题中用的光源是氦氖激光，求隐失波的穿透深度.

解 当光从光密媒质射入光疏媒质，入射角大于临界角时，在光疏媒质中将存在沿纵深方向急剧衰减的隐失波，其穿透深度为

$$d = \frac{1}{k\sqrt{n_1^2\sin^2 i_1 - n_2^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2\sin^2 i_1 - n_2^2}}$$

$$\approx 2\lambda/9.$$

取激光波长 $\lambda = 6328$ Å，算出

$$d \approx 1406 \text{ Å}.$$

第三章　干涉装置　光场的时空相干性

§1　分波前干涉装置　光场的空间相干性

1. 设菲涅耳双面镜的夹角为 20′，缝光源离双面镜交线的距离为 10 cm，接收屏幕与光源经双面镜所成的两个虚像连线平行，幕与双镜交线的距离为 210 cm，光波长 6000 Å. 问：

(1) 干涉条纹的间距为多少？

(2) 在幕上最多能看到几根条纹？

(3) 如果光源到双镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有什么变化？

(4) 如果光源与双镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有什么变化？

(5) 如果要在幕上产生有一定衬比度的干涉条纹，允许缝光源的最大宽度为多少？

解　(1) 实际上，各种分波前干涉装置都可以杨氏双孔实验为原型. 它们是严格的或近似的双像系统，其干涉条纹的间距均可以套用公式

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda, \qquad ①$$

式中 d 为双像的距离，D 为双像中垂线方向至屏幕的距离. 在菲涅耳双面镜装置(如图 3-1)中，

$$d = 2aB, \quad D = B + C,$$

$$\Delta x = \frac{B + C}{2aB}\lambda \approx 1.13 \text{ mm}.$$

(2) 因幕上两光束的最大交叠区的宽度为

$$\Delta l \approx 2aC,$$

所以幕上最多能看到的条纹数为

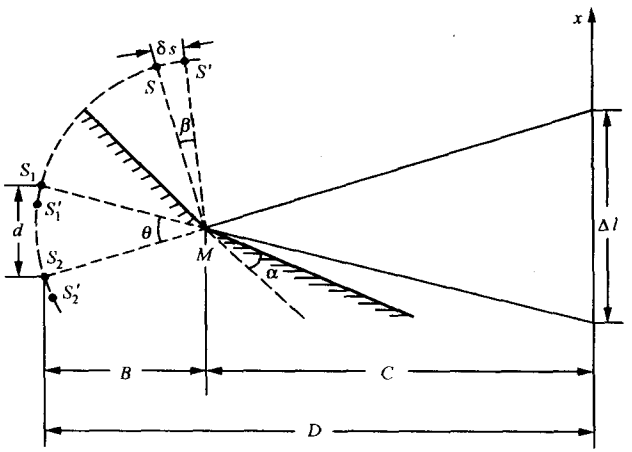


图 3-1

$$\Delta N \approx \Delta l/\Delta x \approx 22.$$

(3) 由于实际装置中 $B \ll C$，所以当光源沿纵向 M,S 点连线方向移远一倍时，则

$$D' = 2B + C \approx D,$$

$$d' = 2\alpha \times 2B = 2d.$$

于是

$$\Delta x \to \Delta x' \approx \Delta x/2,$$

即条纹间距密集了一倍. 而交叠区的宽度 Δl 没有变化，故可见条纹数的最大值增加一倍，即

$$\Delta N' \approx 2\Delta N \approx 44.$$

(4) 若点光源横向移动 δs，则虚像 S_1',S_2' 分别随之在半径为 B 的圆弧上移动 $\delta s_1',\delta s_2'$，且

$$\delta s_1' = \delta s_2' = \delta s,$$

从而保持 S_1',S_2' 的间距 d 不变，因此条纹间距 Δx 保持不变. 但是，双像中垂线与屏幕的交点位置(零级)随之移动，即以 M 点为中心转了一个角度

$$\beta \approx \delta s/B.$$

反映在屏幕上零级位移为

$$\delta x = C\beta = \frac{C}{B}\delta s;$$

换句话说，此时幕上的条纹总体发生一个平移. 这一点为以下扩展光源对干涉场衬比度的影响作了概念上的准备.

(5) 设扩展光源为 b，即其边缘两点间隔 $\delta s = b$. 若这两套条纹错开的距离(即零级平移量)$\delta x = \Delta x$，则幕上衬比度降为零. 据此，有

$$\delta x = \frac{C}{B}b, \quad \Delta x = \frac{B + C}{2\alpha B}\lambda.$$

令

$$\delta x = \Delta x,$$

得光源的极限宽度

$$b_1 \approx \lambda/2\alpha \approx 0.05 \text{ mm}.$$

从以上讨论中可以看到，菲涅耳双面镜的夹角 α 越小，条纹的间距越大，允许扩展缝光源的宽度越宽. 这对实际观察是有利的. 但是，此时光束的交叠区变小，产生的干涉条纹的数目很少.

2. 一点光源置于薄透镜的焦点，薄透镜后放一个双棱镜(见图 3-2). 设双棱镜的顶角为 3′30″，折射率为 1.5，屏幕与棱镜相距 5.0 m，光波长为 5000 Å. 求幕上条纹的间距. 幕上能出现几根干涉条纹?

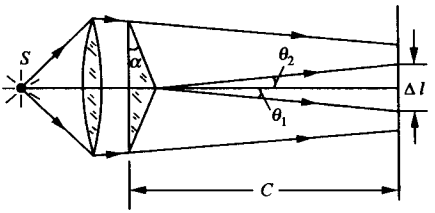


图　3-2

解　(1) 点光源置于薄透镜的焦点时，经透镜成为一束平行光正入射于棱镜，经双棱镜偏转，成为两束平行光对称地斜入射于屏幕. 设棱镜顶角 α 很小，利用折射定律，并作小角近似，则斜入射的平行光的倾角为

$$\theta_1 = \theta_2 \approx (n - 1)\alpha.$$

由关于两束平行光干涉条纹的间距公式(第二章§4习题4中式①)得,幕上条纹间距为

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} \approx 0.49 \text{ mm}.$$

(2) 相干范围(交叠区域)的孔径角为

$$\Delta\theta = 2\theta_1 = 2(n-1)\alpha \approx 0.001 \text{ rad}.$$

交叠区域的线度为

$$\Delta l = C\Delta\theta \approx 5 \text{ mm}.$$

幕上产生的条纹数目为

$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{C}{\lambda}[2(n-1)\alpha]^2 \approx 10.$$

3. 如图3-3,设劳埃德(Lloyd)镜的镜长 $C=5.0$ cm,幕与镜边缘的距离 $B=3.0$ m.缝光源与镜边缘的距离 $A=2.0$ cm,离镜面高度 $a=0.5$ mm.光波长为5893 Å.求幕上条纹的间距和能出现的干涉条纹数目.

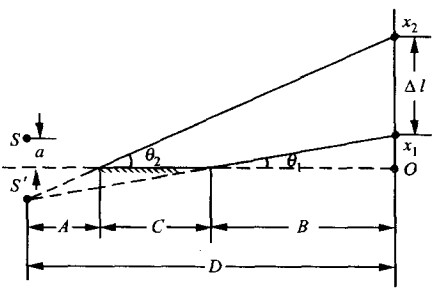


图 3-3

解 劳埃德镜为双像干涉装置,双像间隔

$$d = 2a.$$

按条纹间距公式(本节习题1中式①),有

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{A+B+C}{2a}\lambda$$

$$\approx \frac{B}{2a}\lambda \approx 1.8 \text{ mm}.$$

交叠区域的线度为

$$\Delta l = \overline{x_1 x_2} = (C + B)\tan\theta_2 - B\tan\theta_1.$$

由于

$$\tan\theta_2 = \frac{a}{A}, \quad \tan\theta_1 = \frac{a}{A + C}.$$

并考虑到 $B \gg A, C$，得

$$\Delta l = \frac{aBC}{A(A + C)} \approx 54 \text{ mm}.$$

幕上产生的条纹数目为

$$\Delta N = \Delta l / \Delta x \approx 30.$$

4. 图 3-4 所示为 Meslin 干涉装置，将透镜对剖后再沿光轴方向将两半 L_1，L_2 错开一定距离. 光点 S 位于光轴上，S_1'，S_2' 是它的像.

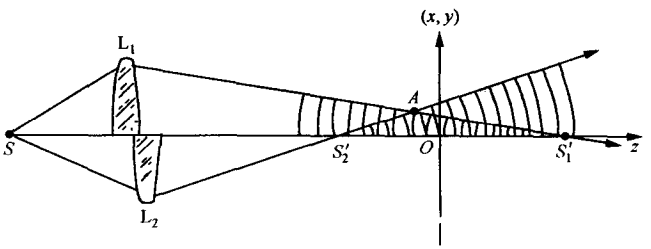


图　3-4

(1) 在图上标出相干光束的交叠区.

(2) 在交叠区中放一屏幕垂直于光轴，幕上干涉条纹的形状是怎样的？

(3) 设透镜焦距为 30 cm，S 与 L_1 的距离为 60 cm，L_1 与 L_2 的距离为 8.0 cm，光波波长为 5000 Å. 两个像的中点距离透镜 L_2 有多远？在此放一屏幕，其上接收到的亮纹间距为多少？

解　(1) 由点源 S 发出的发散球面波经 L_1 后转化为以 S_1' 为中心的会聚球面波，经 L_2 后转化为以 S_2' 为中心的会聚球面波；又分别在 S_1' 和 S_2' 的右侧成为两束发散球面波. 以 S_2' 为中心的发散球面波和以 S_1' 为中心的会聚球面波发生交叠，如图 3-4 所示. $\triangle S_1' A S_2'$ 为相干交叠区.

(2) 在交叠区内会聚球面波和发散球面波产生干涉. 设屏幕所

在平面为 Oxy 面，与 S_1' 的距离为 d_1，与 S_2' 的距离为 d_2，则在此平面上，会聚球面波的复振幅分布为

$$\tilde{U}_1(x,y)=A_1\exp\left\{\mathrm{i}\left[-k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)-\varphi_{10}\right]\right\},$$

发散球面波的复振幅分布为

$$\tilde{U}_2(x,y)=A_2\exp\left\{\mathrm{i}\left[k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)-\varphi_{20}\right]\right\},$$

式中 φ_{10} 和 φ_{20} 分别为两列波在中心 S_1' 和 S_2' 处的初相位. 两列波的相位差为

$$\begin{aligned}\delta(x,y)&=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\\&=k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)-\varphi_{20}+k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)+\varphi_{10}\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)+k(d_2+d_1)-(\varphi_{20}-\varphi_{10})\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)+\varphi_0\\&=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right),\end{aligned}$$

式中 φ_0 为两列波在坐标原点 O 处的相位差. 因为两列波从点源 S 到原点 O 的光程都为 $L(SO)$，故 $\varphi_0=0$.

决定条纹形状的是等强度轨迹方程

$$\delta(x,y)=\mathrm{C}\ (\text{常数}),$$

即

$$k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)=\mathrm{C}\ (\text{常数}),$$

也即

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

式中 ρ^2 为常数. 上式是以原点 O 为中心的圆的标准方程. 由于图 3-4 中的交叠区只限于 $x\geqslant 0$，所以条纹形状是一系列以原点为中心的同心半圆.

普遍来看，以 S_1' 为中心的会聚球面波与以 S_2' 为中心的发散球面波叠加时，等光程差的轨迹是旋转椭圆面族. 当然，在 Meslin 情

形，这些椭圆面并不完整.

(3) 由薄透镜物像的高斯公式

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f},$$

得 S_1' 离 L_1 的距离为

$$s_1'=\frac{fs_1}{s_1-f}=\frac{30\text{ cm}\times 60\text{ cm}}{60\text{ cm}-30\text{ cm}}=60\text{ cm},$$

S_2' 离 L_2 的距离为

$$s_2'=\frac{fs_2}{s_2-f}=\frac{30\text{ cm}\times 68\text{ cm}}{68\text{ cm}-30\text{ cm}}=53.7\text{ cm},$$

所以两个像的中点离 L_2 的距离为

$$\bar{s}=\frac{53.7\text{ cm}+60\text{ cm}-8\text{ cm}}{2}=52.85\text{ cm}.$$

计算结果表明，S_1'，S_2' 的位置与图 3-4 中所示不符；实际应为 S_1' 离 S 较近，S_2' 离 S 较远，相应的交叠区应限于 $x\leqslant 0$. 但这并不影响条纹的形状以及亮纹半径的计算.

当屏幕放在两个像的中点时，

$$d_1=d_2=d=0.85\text{ cm},$$

$$\delta(x,y)=k\left(\frac{x^2+y^2}{2d_1}+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)$$

$$=k\frac{x^2+y^2}{d}=\frac{k}{d}\rho^2.$$

第 n 级亮纹满足 $\delta(x,y)=2n\pi$，即

$$\frac{k}{d}\rho_n^2=2n\pi,$$

化简得

$$\rho_1=\sqrt{d\lambda},\quad \rho_n=\sqrt{nd\lambda}=\sqrt{n}\,\rho_1\quad (n=1,2,\cdots).$$

这就是亮纹的半径公式，式中 ρ_1 为中心向外第一个亮纹的半径. 上式与菲涅耳波带片的半波带半径公式形式一致. 在本题中，

$$\rho_1\approx 0.065\text{ mm},$$

亮纹间距

$$\Delta\rho = \rho_{n+1} - \rho_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\rho_1.$$

亮纹半径与$\sqrt{n}$成正比，亮纹间距不等.

5. 图 3-5 所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性结构，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器. 当待测气体注入容器而将空气排出的过程中，幕上的干涉条纹就会移动. 由移过条纹的根数即可推知气体的折射率.

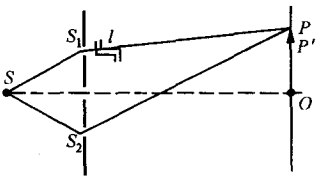


图 3-5

(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率，干涉条纹如何移动？

(2) 设 $l=2.0$ cm，条纹移过 20 根，光波长 5893 Å，空气折射率为 1.000 276. 求待测气体(氯气)的折射率.

解 (1) 判断条纹移动趋向的方法是考查特定级别(确定光程差)的条纹，看它在新的条件下出现在什么方位. 显然，当待测气体的折射率大于空气折射率时，光程差 $\Delta L = L(S_2P) - L(S_1lP)$ 变小(注入待测气体)，则原来光程差较 P 点处小一些的 P' 点(如图 3-5)的条纹现在移向 P 点处，即条纹向上移动.

(2) 凡光程差 $\Delta L(P)$ 改变一个波长 λ，则 P 处强度变化一次，也即条纹移过一根. 据此，写出光程差改变量 $\delta(\Delta L)$ 与条纹移动数 N 的关系为

$$\delta(\Delta L) = N\lambda.$$

在本题中，光程差的改变是由一路 $L(S_1lP)$ 光程改变引起的，即

$$\delta(\Delta L) = \delta L(S_1lP) = (n - n_0)l = \Delta n l,$$

于是

$$\Delta n = N\lambda/l,$$

$$n = n_0 + \Delta n = n_0 + N\lambda/l$$

$$\approx 1.000\,276 + 0.000\,589\,3$$

$$\approx 1.000\,865\,3.$$

6. 瑞利(Rayleigh)干涉仪的结构和使用原理如下(参见图 3-6)：以钠光灯作为光源置于透镜 L_1 的前焦点，在透镜 L_2 的后焦面

上观测干涉条纹的变动，在两块透镜之间安置一对完全相同的玻璃管 T_1 和 T_2. 实验开始时，T_2 管充以空气，T_1 管抽成真空，此时开始观察干涉条纹. 然后逐渐使空气进入 T_1 管，直到它与 T_2 管的气压相同为止，记下这一过程中条纹移动的数目. 设光波长为 5893 Å，管长 20 cm，条纹移动 98 根. 求空气的折射率.

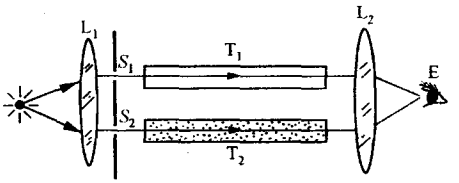


图　3-6

解　设空气折射率为 n，真空折射率为 n_0，则实验过程中两管光程差的变化等于 T_1 管中光程的变化

$$\delta(\Delta L) = \Delta n l = N\lambda,$$

所以

$$n = n_0 + \Delta n = 1 + N\lambda/l \approx 1.000\,289.$$

7. 用钠光灯作杨氏双缝干涉实验，光源宽度被限制为 2 mm，带双缝的屏离缝光源 2.5 m. 为了在幕上获得可见的干涉条纹，双缝间隔不能大于多少？

解　根据光场空间相干性反比关系

$$b\Delta\theta_1 \approx \lambda,$$

在光源宽度 b 给定的情况下，干涉孔径角(即双缝对光源所张的角间隔)$\Delta\theta$ 必须满足

$$\Delta\theta < \Delta\theta_1 \approx \lambda/b,$$

即双缝间隔

$$d = R\Delta\theta < R\Delta\theta_1 = R\lambda/b \approx 0.74 \text{ mm}.$$

这样才能在幕上产生有一定衬比度的可观测的条纹.

8. 一个直径为 1 cm 的发光面元，如果用干涉孔径角量度的话，其空间相干范围是多少弧度？如果用相干面积量度，问 1 m 远的相干面积为多大？10 m 远的相干面积为多大？

解 设光波长为 0.55 μm,若空间相干范围用孔径角 $\Delta\theta$ 量度,则

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{b} = \frac{0.55\ \mu m}{10\ m}$$
$$\approx 0.55 \times 10^{-4}\ rad.$$

在 $R=1$ m 处的相干面积为

$$\Delta S_1 \approx \frac{\pi}{4}(R\Delta\theta)^2 \approx 0.0024\ mm^2;$$

在 $R=10$ m 处的相干面积为

$$\Delta S_2 \approx 0.24\ mm^2.$$

§2 薄膜干涉(一)——等厚条纹

1. 把直径为 D 的细丝夹在两块平玻璃砖的一边形成尖劈形空气层(图 3-7),在钠黄光($\lambda=5893$ Å)的垂直照射下形成如图 3-7 上方所示的干涉条纹. 试问 D 为多少?

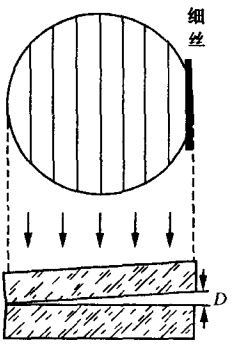


图 3-7

解 薄膜表面等厚条纹的一条重要性质是,不论条纹形状如何,相邻两条纹所在位置的厚度差为半个波长. 因此,相隔 N 根条纹两处的厚度差为

$$\Delta h = N(\lambda/2),$$

据此,本题中细丝直径

$$D = 8(\lambda/2) \approx 2.36\ \mu m.$$

2. 块规是机加工里用的一种长度标准,它是钢质长方体,它的两个端面经过磨平抛光,达到相互平行. 图 3-8 中 G_1,G_2 是同规号的两个块规,G_1 的长度是标准的,G_2 是要校准的. 校准方法如下:把 G_1 和 G_2 放在钢质平台面上,使其面和面严密接触,G_1,G_2 上面用一块透明平板 T 压住. 如果 G_1 和 G_2 的高度(即长度)不等,微有差别,则在 T

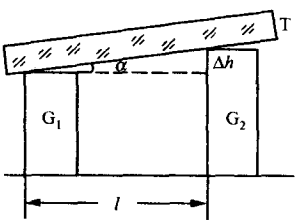


图 3-8

和 G_1,G_2 之间分别形成尖劈形空气层,它们在单色光照射下各产生等厚干涉条纹.

(1) 设入射光的波长是 5893 Å,G_1 和 G_2 相隔 5 cm(即图中的 l),T 和 G_1,G_2 间干涉条纹的间距都是 0.5 mm. 试求 G_2 和 G_1 的高度之差. 怎样判断它们谁长谁短?

(2) 如果 T 和 G_1 间干涉条纹的间距是 0.5 mm,而 T 和 G_2 间的是 0.3 mm,则说明什么问题?

解　(1) 如图 3-8,先由条纹间距算出空气层劈角 α,再由两块规距离 l 算出高度差

$$\Delta h \approx al = \frac{\lambda}{2\Delta x} l \approx 29.47\ \mu\text{m}.$$

当然,要判断哪个块规高,并非图上画得那么显而易见;仅靠静态条纹的性质也是无法作出判断的. 为此,轻压盖板 T 的中部,两侧条纹疏密变化正好相反:条纹变密的一端块规长;条纹变疏的一端块规短.

(2) 这说明 G_2 上、下两表面有不平行度,致使其上表面并不严格平行于 G_1 的上表面,造成两边空气层劈角不等,劈角差(用以量度不平行的程度)为

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \left(\frac{1}{\Delta x_2} - \frac{1}{\Delta x_1}\right)\frac{\lambda}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{0.3\ \text{mm}} - \frac{1}{0.5\ \text{mm}}\right)\frac{5893\ \text{Å}}{2}$$

$$\approx 3.93 \times 10^{-4}\ \text{rad} \approx 1.35'.$$

3. 图 3-9 所示为一种干涉膨胀计. G 为标准的石英环,C 为待测的柱形样品,由于它的膨胀系数与石英环的不同,当温度改变时,柱体 C 的上表面与上石英平板 Π_1 之间楔形空气层的厚度就会改变. 现已知样品与石英环的高度约为 1 cm,当温度升高 100℃时,视场中的干涉条纹移过 20 根,求样品的线膨胀系数. (设光波长为 5893 Å,石英的线膨胀系数为

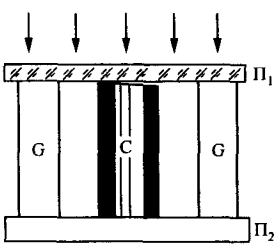


图　3-9

$0.35\times10^{-6}/℃$.)

解 按题意,样品C上方空气层的厚度改变了

$$\Delta h = \pm N(\lambda/2),$$

式中 N 为条纹移过的根数. 空气层厚度的改变是由于标准石英环与样品的线膨胀系数不相等引起的. 设石英和样品的线膨胀系数分别为 a_1, a_2,则线膨胀系数之差

$$\Delta a = a_2 - a_1 = \frac{l_2(T) - l_0}{l_0 T} - \frac{l_1(T) - l_0}{l_0 T}$$

$$= \frac{l_2(T) - l_1(T)}{l_0 T},$$

式中

$$l_2(T) - l_1(T) = \Delta h,$$

故得

$$\Delta a = \pm \frac{N\lambda}{2 l_0 T} \approx \pm 5.89 \times 10^{-6}/℃.$$

以上分析并未确认空气层的厚度是变厚了还是变薄了,因而并未确认两个线膨胀系数谁大谁小,这只能由条纹移动的趋向来确定. 如果条纹移动方向背向,说明空气层变厚,样品线膨胀小于石英环. 总之,样品的线膨胀系数有两个可能的取值,即

$$a_2 = a_1 + \Delta a^{①} \approx 6.24\times10^{-6}/℃.$$

4. 图 3-10(a)所示为一种测 pn 结结深 x_j 的方法. 在 n 型半导体的基质硅片表面经杂质扩散而形成 p 型半导体区. p 区与 n 区的交界面叫 pn 结,pn 结距表面的深度(即 p 区厚度)x_j 叫结深. 在半导体工艺上需要测定结深,测量的方法是先通过磨角、染色,使 p 区和 n 区的分界线清楚地显示出来,然后盖上半反射膜,在它与硅片之间形成尖劈形空气薄膜. 用单色光垂直照射时,可以观察到空气薄膜的等厚干涉条纹. 数出 p 区空气薄膜的条纹数目 Δk,即可求出结深

$$x_j = \Delta k(\lambda/2).$$

由于光在金属或半导体表面反射时相位变化比较复杂,用本方法测量结深 x_j 没有考虑此相位突变,因此测量结果不太精确. 更精确的

① 这里 Δa 只取正号,在物理上是合理的.

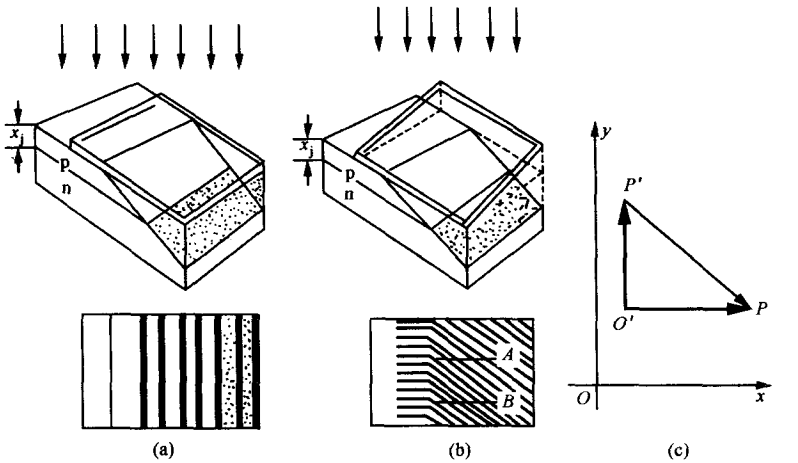


图　3-10

测量方法见图 3-10(b)，半反射膜不是像在图 3-10(a)中那样紧贴在 p 区上表面，而是一端稍微往上翘一点，观察到的干涉条纹如图 3-10(b)下方所示. 试说明：

(1) 干涉条纹为什么会是这样的？

(2) 若用 $\lambda=5500$ Å 的单色光照明，测得 AB 间的距离为 1.1 mm，斜干涉条纹的间隔为 0.20 mm，结深 x_j 为多少？

(3) 此法比图 3-10(a)所示的方法精确在哪里？

解　(1) 薄膜表面等厚条纹形状与空气膜的等厚线轨迹一致. p 区上表面的盖片只沿一个方向翘起，等厚线平行于 x 轴. p 区的斜面交棱沿 y 轴，而上表面盖片交棱沿 x 轴. 合成后，此区域的尖劈交棱就是斜的了. 我们也可作如下更细致的分析：在斜面中任取一点 O' 为参考点(图 3-10(c))). 如果仅有斜面下倾，则沿 x 轴有 $h(P)>h(O')$；如果仅有盖片在另一正交方向翘起，则沿 y 轴有 $h(P')=h(O')$；而当两者同时起作用时，使 $h(P')=h(P)$，即等厚线轨迹理应为斜线.

(2) 用读数显微镜进行测量时，先选定左侧一组条纹(平行 x 轴)中的一条为基准，以其几何延长线的交点 A 为起点，沿 y 轴测长至该条纹实际走向的交点 B. 等厚点的位移(从 A 点移至 B 点)正是

由斜面结深引起的,所以结深为

$$x_j = \Delta k \frac{\lambda}{2} = \frac{\overline{AB}}{\Delta y}\frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{1.1\ \text{mm}}{0.20\ \text{mm}} \times \frac{5500\ \text{Å}}{2} \approx 1.51\ \mu\text{m}.$$

(3) 这种方法避开了精确判断盖片与 p 区上表面交棱的困难. 如果采用第一种方法,让盖片与 p 区上表面密接,则由于相位变化的复杂性,其右侧交棱处的干涉强度不一定是极大(亮纹)或极小(暗纹),换句话说,人们很难在干涉场中精确认定交棱位置,因而条纹数目就难以精确,其误差与干涉测厚精度是可比的,这就大大降低了测量精度. 而这种改进型的方法从根本上避开了上述困难. 即使要知道交棱的位置也不难,它正是整套干涉条纹拐点的连线.

5. 测得牛顿圈从中间数第 5 环和第 15 环的半径分别为 0.70 mm 和 1.7 mm. 求透镜的曲率半径. (设光波长为 0.63 μm.)

解 考虑到牛顿环的中心点不一定密接,可靠的测量方法应如本题所述. 这时,干涉环的半径与透镜曲率半径的关系修改为

$$R = \frac{r_{k+m}^2 + r_k^2}{m\lambda},$$

式中重要的是两圈干涉环相隔的圈数 m,而不是绝对级别 k. 取 $r_{k+m} = 1.7$ mm, $r_k = 0.70$ mm, $m = 15-5 = 10$, $\lambda = 0.63\ \mu$m, 算得透镜的曲率半径为

$$R = 381\ \text{mm}.$$

6. 肥皂膜的反射光呈现绿色,这时膜的法线和视线的夹角约为 35°. 试估算膜的最小厚度. (设肥皂水的折射率为 1.33,绿光波长为 5000 Å.)

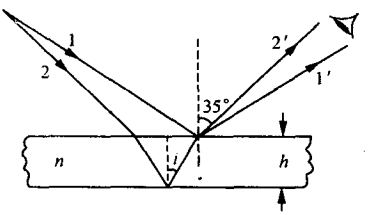


图 3-11

解 考虑到目前存在半波损,出现亮场的表观光程差应满足(见图 3-11)

$$2nh\cos i = (2k+1)(\lambda/2)$$

$$(k = 0,1,2,\cdots).$$

令 $k=0$，得肥皂膜的最小厚度为

$$h_0=\frac{\lambda}{4n\cos i}=\frac{\lambda}{4n\sqrt{1-\sin^2 i}}$$

$$=\frac{\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2 35°}}$$

$$=\frac{5000\ \text{Å}}{4\sqrt{1.33^2-\sin^2 35°}}$$

$$\approx 1042\ \text{Å}.$$

7. 在玻璃表面上涂一层折射率为 1.30 的透明薄膜. 设玻璃的折射率为 1.5. 问：

(1) 对于波长为 5500 Å 的入射光来说，膜厚应为多少才能使反射光干涉相消？这时光强反射率为多少？与不加膜时相比，光强反射率降了多少？

(2) 对波长为 4000 Å 的紫光和 7000 Å 的红光来说，(1)所得的厚度在两束反射相干光之间产生多大的相位差？(不考虑色散.)

解　(1) 如图 3-12，因为这时膜层为低膜，即 $n_1<n_2<n_3$，所以反射两光束之间无半波损，有效光程差等于表观光程差. 为使反射光干涉相消，应使光程差为

$$\Delta L=2n_2h=(2k+1)(\lambda/2)\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

若取 $k=0$，则膜厚

$$h=\frac{\lambda}{4n_2}=\frac{5500\ \text{Å}}{4\times 1.30}\approx 1058\ \text{Å}.$$

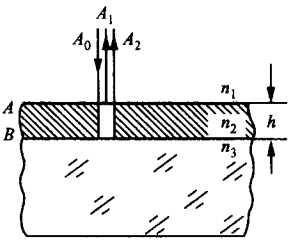


图　3-12

此时，反射光振幅(双光束干涉近似)

$$A=A_1-A_2,$$

式中

$$A_1=r_AA_0=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}A_0$$

$$=\frac{1.3-1.0}{1.3+1.0}A_0\approx 13\%A_0,$$

$$A_2=A_0t_Ar_Bt'_A=r_B(1-r_A^2)A_0$$

$$= \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}(1 - r_A^2)A_0$$

$$= \frac{1.5 - 1.3}{1.5 + 1.3}(1 - 0.13^2)A_0$$

$$= 0.07 \times 0.98A_0 \approx 6.9\%A_0.$$

所以膜层反射光强

$$I = (A_1 - A_2)^2$$

$$= [r_A - r_B(1 - r_A^2)]^2 I_0 \approx 0.37\%I_0,$$

反射率

$$R' = I/I_0 \approx 0.37\%, \qquad ①$$

此时接近完全消反射. 若无薄膜,空气-玻璃单界面反射率为

$$R = \left(\frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1}\right)^2 = 4\%.$$

由于自然光正入射时光强总反射率

$$R = R_p = R_s.$$

所以式①即为总的光强反射率. 可见有了薄膜以后,反射率下降了

$$\Delta R = R - R' \approx 3.6\%.$$

(2) 以上厚度只对原来考虑的特定波长 $\lambda = 5500$ Å 满足反射相消(反射两光束相位差 π),对别的波长并非如此. 例如对 $\lambda_1 = 4000$ Å 的紫光,反射两光束的相位差

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} 2n_2 h = \frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{\lambda}{2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_1}\pi = \frac{5500\ \text{Å}}{4000\ \text{Å}}\pi$$

$$= 1.375\pi\ \text{rad}.$$

对于 $\lambda_2 = 7000$ Å 的红光,反射两光束的相位差

$$\delta_2 = \frac{\lambda}{\lambda_2}\pi = \frac{5500\ \text{Å}}{7000\ \text{Å}}\pi \approx 0.7857\pi\ \text{rad}.$$

8. 砷化镓发光管制成半球形,以增加位于球心的发光区对外输出功率,减少反射损耗. 已知砷化镓发射光波波长为 9300 Å,折射率为 3.4. 为了进一步提高输出光功率,常在球形表面涂敷一层增透膜

(见图 3-13(a)).

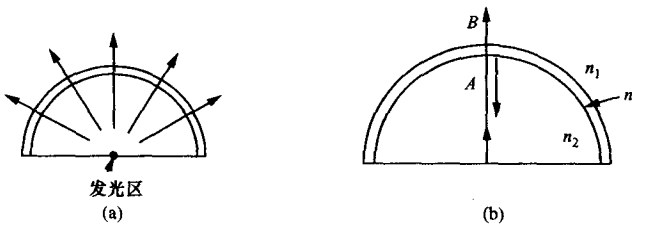


图　3-13

(1) 不加增透膜时,球面光强反射率有多大?

(2) 增透膜的折射率和厚度应取多大?

(3) 如果用氟化镁(折射率为 1.38)能否增透? 光强反射率有多大?

(4) 如果用硫化锌(折射率为 2.58)能否增透? 光强反射率还有多大?

解　(1) 如图 3-13(b),不加增透膜时,单界面的光强反射率

$$R=\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2=\left(\frac{3.4-1.0}{3.4+1.0}\right)^2\approx 29.8\%.$$

(2) 如欲完全消反射,膜层折射率和光学厚度必须同时满足以下两个条件,即

$$n=\sqrt{n_1n_2},$$

$$nh=(2k+1)(\lambda/4)\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

取 $n_1=1.0$,$n_2=3.4$,$\lambda=9300$ Å,$k=0$,算出

$$n\approx 1.84,\quad h\approx 1264\ \text{Å}\approx 0.13\ \mu\text{m}.$$

(3) 如果只要求增透,即使不是完全消反射,也应使膜层光学厚度 $nh=(2k+1)\lambda/4$,且应是低膜(即 $n_1<n<n_2$). 因此,选用折射率 $n=1.38$ 的氟化镁作膜层,是可以增透的. 以双光束干涉近似计算反射光强 I,设入射光振幅为 A_0,则经界面 A 一次反射光的振幅为 $A_1=A_0r_A$,经界面 B 再反射回来的透射光振幅为 $A_2=A_0t_Ar_Bt'_A$. 在正入射的情况下,

$$r_A = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} = \frac{3.4 - 1.38}{3.4 + 1.38} \approx 42.3\%,$$

$$r_B = \frac{n - n_1}{n + n_1} = \frac{1.38 - 1.0}{1.38 + 1.0} \approx 16.0\%,$$

$$t_A t'_A = 1 - r_A^2 \approx 82.1\%.$$

考虑到上述两束光之相位差为 π,故膜层反射光强为

$$I = (A_1 - A_2)^2 = [r_A - r_B(1 - r_A^2)]^2 A_0^2.$$

光强反射率为

$$R = I/I_0 = [r_A - r_B(1 - r_A^2)]^2 \approx 8.5\%.$$

(4) 如果选用折射率 $n=2.35$ 的硫化锌作膜层,同理也可以增透.此时光强反射率为

$$R = [r_A - r_B(1 - r_A^2)]^2,$$

式中

$$r_A = \frac{3.4 - 2.58}{3.4 + 2.58} \approx 18.3\%,$$

$$r_B = \frac{2.58 - 1.0}{2.58 + 1.0} \approx 40.3\%,$$

$$t_A t'_A = 1 - r_A^2 \approx 96.7\%.$$

最后算出

$$R \approx 8.7\%.$$

9. 如图 3-14(a),用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹.设薄膜折射率为 1.5,上方为空气,瞳孔直径为 3 mm,与观察点 P 相距 30 cm,视线与表面法线夹角 30°.

(1) 分别计算膜厚 2 cm 及 20 μm 两种情况下,点源 Q_1,Q_2 在观察点 P 产生的光程差改变量 $\delta(\Delta L)$.

(2) 如果为了保证条纹有一定的衬比度,要求上述光程差改变量的数量级不能超过多少?以此来估计对膜厚 h 的限制.

解 本题意在具体理解薄膜表面条纹的衬比度是如何因扩展光源的影响而下降的.应注意到,影响衬比度的光源有效宽度由观察者(包括仪器)的入射光瞳的孔径来决定.

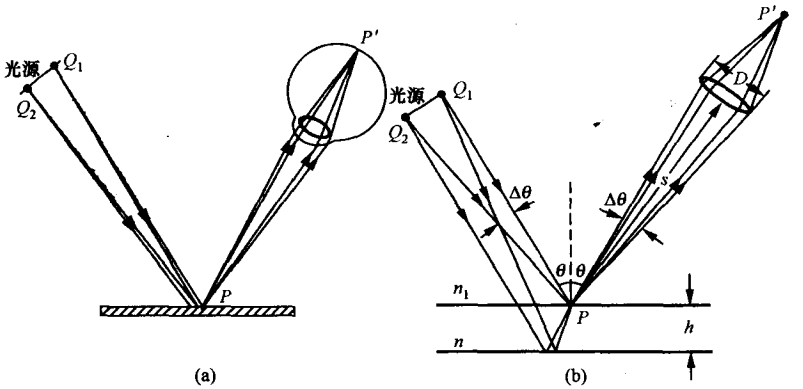


图　3-14

(1) 如图 3-14(b)，设点源 Q_1 的入射角为 θ，对应的折射角为 γ，点光源 Q_2 的入射角为 $\theta+\Delta\theta$，对应的折射角为 $\gamma+\Delta\gamma$. 它们在同一场点 P 产生的光程差不等，分别为

$$\Delta L_1(P) = 2nh\cos\gamma,$$

$$\Delta L_2(P) = 2nh\cos(\gamma + \Delta\gamma).$$

光程差的改变量为

$$\begin{aligned}\delta(\Delta L) &= 2nh\cos\gamma - 2nh\cos(\gamma + \Delta\gamma)\\ &\approx 2nh\sin\gamma\Delta\gamma. \qquad ①\end{aligned}$$

若要进一步化简，可以考虑到 $\Delta\gamma$ 由 $\Delta\theta$ 确定，而 $\Delta\theta$ 由观察者的距离 s 与入射光瞳孔径 D 决定，即

$$\Delta\theta \approx D/s,$$

并对折射定律

$$n_1\sin\theta = n\sin\gamma \qquad ②$$

作如下微分运算：

$$n_1\cos\theta\Delta\theta \approx n\cos\gamma\Delta\gamma,$$

得

$$\Delta\gamma \approx \frac{n_1\cos\theta}{n\cos\gamma}\Delta\theta.$$

把式②和上式代入式①，并化简得

$$\delta(\Delta L)\approx 2h\frac{n_1^2\sin\theta\cos\theta}{n\cos\gamma}\Delta\theta$$

$$\approx\frac{n_1^2}{n}\frac{\sin2\theta}{\cos\gamma}\Delta\theta h. \qquad ③$$

取 $n_1=1.0, n=1.5, \theta=30, s=30\ \text{cm}, D=3\ \text{mm}$,算出

$$\Delta\theta\approx 10^2,\quad \sin2\theta\approx 0.8660,\quad n_1^2/n=0.6667.$$

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{1-\left(\frac{n_1\sin\theta}{n}\right)^2}\approx 0.9428,$$

再代入式③,得

$$\delta(\Delta L)=0.0061h.$$

当 $h=2\ \text{cm}$ 时,$\delta(\Delta L)=0.0122\ \text{cm}=122\ \mu\text{m}$;当 $h=20\ \mu\text{m}$ 时,$\delta(\Delta L)=0.122\ \mu\text{m}$.

(2) 为使干涉条纹有一定的衬比度,至少要求

$$\delta(\Delta L)<\lambda.$$

要使衬比度不致过小,应要求

$$\delta(\Delta L)\leqslant\lambda/2,$$

即

$$\frac{n_1^2}{n}\frac{\sin2\theta}{\cos\gamma}\Delta\theta h\leqslant\frac{\lambda}{2}.$$

在其他条件确定的情况下,应使膜层厚度

$$h\leqslant\frac{\lambda}{2}\frac{n\cos\gamma}{n_1^2\sin2\theta\Delta\theta}.$$

本题中,

$$h\leqslant\frac{\lambda}{2\times 0.0061}\approx 82\lambda.$$

若取 $\lambda=0.55\ \mu\text{m}$,则 $h\leqslant 45\ \mu\text{m}$.

综上所述,为使薄膜表面出现等厚干涉条纹,膜层应当很薄,其主要原因是光源本身各部分的非相干性,而并不是光源发光的非单色性.换句话说,这里主要是一个光场的空间相干性问题,而不是光场的时间相干性问题.

§3　薄膜干涉(二)——等倾条纹

1. 在傍轴条件下,等倾条纹的半径与干涉级数有怎样的依赖关系?牛顿圈的情况怎样?两者有区别吗?你怎样把两者区分开来?

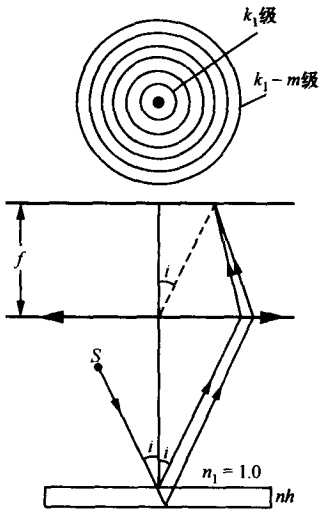


图　3-15

解　如图 3-15,设透镜焦距为 f,薄膜光学厚度为 nh,入射倾角为 i,对应膜层内的折射角为 γ. 对于等倾干涉条纹来说,内圈干涉环的级别高,外圈干涉环的级别低,而且中心并不一定正好为亮斑或暗斑. 为方便起见,设最靠里边的干涉环级别为 k_1,则往外相隔 $m(m=1,2,\cdots,k_1)$ 圈干涉环的级别为 k_1-m. 于是,有

$$2nh\cos\gamma_1 = k_1\lambda,$$

$$2nh\cos\gamma_m = (k_1 - m)\lambda.$$

注意此处 γ_1,k_1,γ_m,m 都是变量. 在傍轴条件下,$i_m,\gamma_m,\gamma_1 \ll 1$. 第 m 圈在透镜后焦面(接收面)上的半径为

$$\rho_m \approx f\sin i_m = nf\sin\gamma_m = nf\sqrt{1-\cos^2\gamma_m}$$

$$= nf\sqrt{1-\left(\frac{k_1\lambda - m\lambda}{2nh}\right)^2}$$

$$= nf\sqrt{1-\left(\cos\gamma_1 - \frac{m\lambda}{2nh}\right)^2}$$

$$= nf\sqrt{1-\left[\cos^2\gamma_1 + \left(\frac{m\lambda}{2nh}\right)^2 - m\frac{\cos\gamma_1\lambda}{nh}\right]},$$

忽略 $(m\lambda/2nh)^2 \approx 0$,并取 $\cos^2\gamma_1 \approx \cos\gamma_1 \approx 1$,于是

$$\rho_m = f\sqrt{mn\lambda/h} = \sqrt{m}\,\rho_1,$$

式中 $\rho_1 = f\sqrt{n\lambda/h}$. 总之,等倾条纹的半径与整数的平方根成正比,整数 m 取值为该干涉环与最靠里边干涉环之间的圈数. 结果表明,

等倾圆环的间隔是里边疏，外边密，这与牛顿环相似. 但是牛顿环(等效空气膜是中间薄，外边厚)的级别是里边低，外边高，这一点与等倾条纹不同. 于是，人们可以利用这一点将两者区别开来. 例如，设法加大膜层厚度，看看条纹的变动情况：若是等倾条纹，此时必将往外冒；若是中间薄、外边厚的牛顿环，此时必将往里吞；若是中间厚、外边薄的牛顿环，此时的吞吐情况就与等倾条纹相同，仅此操作就难以区别了.

§4 迈克耳孙干涉仪 光场的时间相干性

1. 用钠光 5893 Å 观察迈克耳孙(Michelson)干涉条纹. 先看到干涉场中有 12 圈亮环，且中心是亮的；移动平面镜 M_1 后，看到中心吞(吐)了 10 环，而此时干涉场中还剩有 5 圈亮环. 试求：

(1) M_1 移动的距离；

(2) 开始时中心亮斑的干涉级；

(3) M_1 移动后，从中心向外数第 5 圈亮环的干涉级.

解 本题的意义在于通过条纹的移动，由条纹相对级别的变化来确定条纹的绝对级别.

(1) 首先定性分析等效空气膜厚度的变化. 在相同视场(角范围)之内，条纹数目变小，条纹变稀，说明膜厚变薄，条纹向里吞(吐)了 10 环，因而位移绝对值为

$$\Delta h = N(\lambda/2) = 2.947\ \mu\text{m}.$$

(2) 中心级别的绝对数 k 取决于膜层厚度 h，然而 k，h 以及视场角范围 θ 开始时都是未知的. 为此，考虑镜面移动前有

$$2h = k\lambda, \tag{①}$$

$$2h\cos\theta = (k-12)\lambda; \tag{②}$$

镜面移动后有

$$2(h-\Delta h) = (k-10)\lambda, \tag{③}$$

$$2(h-\Delta h)\cos\theta = (k-15)\lambda. \tag{④}$$

由式①，②以及式③，④分别得

$$k\lambda\cos\theta = (k-12)\lambda,$$

$$(k-10)\lambda\cos\theta=(k-15)\lambda.$$

以上两式相除，消去 $\cos\theta$，得方程

$$\frac{k-10}{k}=\frac{k-15}{k-12},$$

解出

$$k\approx 17.$$

(3) 显然，M_1 移动后中心亮环的级别为 7，向外数第 5 圈亮环的干涉级别为 2.

2. 在迈克耳孙干涉仪中，反射镜移动 0.33 mm，测得条纹变动 192 次. 求光的波长.

解　根据

$$\Delta h=N(\lambda/2) \qquad ①$$

得

$$\lambda=\frac{2\Delta h}{N}=\frac{2\times 0.33\ \text{mm}}{192}\approx 3.438\ \mu\text{m}.$$

此光波长在红外波段.

3. 钠光灯发射的黄线包含两条相近谱线，平均波长为 5893 Å. 在钠光下调节迈克耳孙干涉仪，人们发现干涉场的衬比度随镜面移动而周期性地变化. 实测的结果由条纹最清晰到最模糊，视场中吞(吐)490 圈条纹. 求钠双线的两个波长.

解　钠双线产生的两套条纹，其不相干叠加的结果将使干涉场的衬比度随光程差的增加而呈现周期性变化. 从最清晰(或模糊)到最模糊(或清晰)的光程差改变量 $\delta(\Delta L)$ 以及条纹的吞(吐)数 ΔN 满足

$$\delta(\Delta L)=\frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}=\Delta N\bar{\lambda}.$$

由此求得双线间隔为

$$\Delta\lambda=\frac{\bar{\lambda}}{2\Delta N}=\frac{5893\ \text{Å}}{2\times 490}\approx 6.0\ \text{Å}.$$

波长分别为

$$\lambda_1=\bar{\lambda}-\Delta\lambda/2=5890.0\ \text{Å},$$

$$\lambda_2=\bar{\lambda}+\Delta\lambda/2=5896.0\ \text{Å}.$$

4. 在一次迈克耳孙干涉仪实验中，所用的最短标准具长度为 0.39 mm. 如用镉灯(波长为 6428.41 Å)做光源，实验时所测得的条纹变动数目应是多少?

解 设标准具长度为 l，则动镜移动距离 $\Delta h=l$. 根据本节习题 2 中式①得，条纹变动为

$$N = 2l/\lambda \approx 1213.$$

5. 用迈克耳孙干涉仪进行精密测长. 光源为 6328 Å 的氦氖激光，其谱线宽度为 10^{-3} Å，整机接收(光电转换)灵敏度可达 1/10 根条纹. 求这台仪器测长精度为多少? 一次测长量程为多少?

解 干涉精密测长精度 δl 被接收灵敏度(可达一根条纹的分数)δN 所决定. 按题意 $\delta N=1/10$，由此算出

$$\delta l = \delta N \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{20} = 316.4 \text{ Å} \approx 0.032 \ \mu\text{m}.$$

此精度比最高级的螺旋测径器(千分尺)还高一个数量级.

一次测长量程 l_s 被相干长度 l_0 所决定，而相干长度 l_0 可由谱线宽度 $\Delta\lambda$ 算出：

$$l_s = \frac{1}{2}l_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 2 \text{ m}.$$

6. 迈克耳孙干涉仪中的一臂(反射镜)以速度 v 匀速推移. 用透镜接收干涉条纹，并将它会聚到光电元件上，把光强变化转换为电信号.

(1) 若测得电信号的时间频率为 ν，求入射光的波长 λ.

(2) 若入射光波长在 0.6 μm 左右，要使电信号频率控制在 50 Hz，反射镜平移的速度应为多少?

(3) 按以上速度移动反射镜，钠黄光产生电信号的拍频为多少? (钠黄光双线波长为 5890 Å 和 5896 Å.)

解 (1) 将本节习题 2 中式①等号两边均除以时间间隔 Δt，即

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}\frac{\lambda}{2},$$

得

$$v = \nu(\lambda/2), \qquad ①$$

故

$$\lambda = 2v/\nu.$$

(2) 根据以上关系，可按式①估算镜运动的速度 v. 若 $\lambda=0.6\ \mu m$，$\nu=50\ Hz$，则

$$v = 15\ \mu m/s;$$

若 $\lambda=40\ \mu m$，$\nu=100\ Hz$，则

$$v = 2\ mm/s.$$

快速扫描型傅里叶(Fourier)变换光谱仪的动镜速度属于这一数量级.

(3) 设钠黄光双线波长为 λ_1，λ_2，则干涉仪中产生电信号的时间频率分别为

$$\nu_1 = 2v/\lambda_1, \quad \nu_2 = 2v/\lambda_2.$$

产生电信号的拍频为

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 2v\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \approx 2v\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

若取 $v=15\ \mu m/s$，$\lambda=5893$ Å (平均波长)，$\Delta\lambda=6$ Å，算出

$$\Delta\nu = 5.2\times10^{-2}\ Hz \ll \nu_1, \nu_2.$$

7. 迈克耳孙干涉仪中的一臂(反射镜)以速度 v 匀速推移. 用透镜将干涉条纹会聚到光电元件上，把光强变化转换为电信号. 设电信号 i 对光强 I 的响应是线性的，且本底为零. 经频谱分析，实测的电信号可以表示为

$$i(t) = i_0 + i_1\cos\omega_1 t + i_2\cos\omega_2 t. \qquad ①$$

求：

(1) 入射光谱(即入射光)包含几种波长成分？其相对强度为多少？这台干涉仪实现双光束干涉的衬比度为多少？

(2) 若入射光选为水银光谱的黄双线 5770 Å，5791 Å，动臂速度取 $v=4\ \mu m/s$. 电信号的拍频为多少？在低频包络的一个周期(波包)中包含有多少个振荡(参见图 3-16)？

解　(1) 若入射波长为 λ，则电信号的时间频率为

$$\nu = 2v/\lambda.$$

因目前电信号中包含两种角频率 ω_1，ω_2，所以入射光包含了两条谱线，其波长分别为

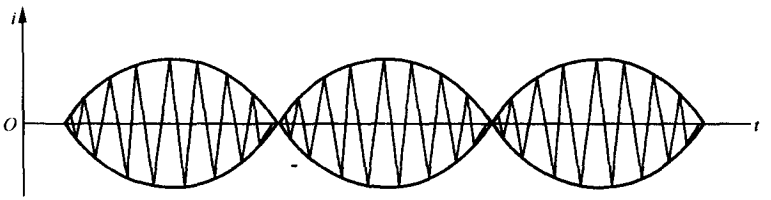


图 3-16

$$\lambda_1=\frac{2v}{\nu_1}=\frac{4\pi v}{\omega_1},\quad \lambda_2=\frac{2v}{\nu_2}=\frac{4\pi v}{\omega_2}.$$

设这两条谱线的强度分别为 I_{10},I_{20}. 若忽略干涉仪各元件在光路转换过程中对光强的损耗,则干涉场的合成强度应是

$$\begin{aligned}I(t)&=I_{10}(1+\gamma\cos\omega_1 t)+I_{20}(1+\gamma\cos\omega_2 t)\\&=(I_{10}+I_{20})+\gamma I_{10}\cos\omega_1 t+\gamma I_{20}\cos\omega_2 t.\end{aligned}$$

对比电信号(见式①)中的三个系数,有

$$i_0\propto I_{10}+I_{20},\quad i_1\propto\gamma I_{10},\quad i_2\propto\gamma I_{20}.$$

由此得到两条谱线的相对强度为

$$\frac{I_{20}}{I_{10}}=\frac{i_2}{i_1}.$$

干涉仪实现双光束干涉的衬比度为

$$\gamma=\frac{i_1+i_2}{i_0}.$$

(2) 设这两条黄双线的强度相近,则电信号表示为

$$\begin{aligned}i(t)&=i_0+\frac{1}{2}i_0\gamma\cos\omega_1 t+\frac{1}{2}i_0\gamma\cos\omega_2 t\\&=i_0\left[1+\gamma\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right].\end{aligned}$$

由此,高频振荡频率为

$$\bar{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2}{2}=\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)v\approx 13.84\ \text{Hz};$$

拍频(低频包络频率)为

$$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2=2v\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\approx 0.05\ \text{Hz}.$$

在低频包络的一个周期中包含的振荡数目为

$$N = \bar{\nu}/\Delta\nu \approx 277.$$

§5　多光束干涉　法布里-珀罗干涉仪

1. 有两个波长 λ_1 和 λ_2，在 6000 Å 附近相差 0.001 Å，要用法布里-珀罗(Fabry-Perot)干涉仪(简称法-珀仪)把它们分辨开来. 间隔 h 需要多大？(设反射率 $R=0.95$.)

解　法-珀仪属于多光束长程干涉仪，有很强的色分辨本领. 设光波长为 λ 的 k 级可分辨的最小波长间隔为 $\delta\lambda$，满足以下关系(色分辨本领公式)：

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}, \qquad ①$$

式中 k 值很高，中心 k 值决定于

$$2nh = k\lambda.$$

按题意，合并以上两式得

$$h = \frac{k\lambda}{2n} = \frac{1}{2n\pi}\frac{1-R}{\sqrt{R}}\frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

取 $n=1$，$R=0.95$，$\lambda=0.6\ \mu m$，$\delta\lambda=10^{-7}\ \mu m$，算出

$$h \approx 2.94\ cm.$$

这是在本题给出的分辨要求下所需的腔长最小值.

2. 如果法布里-珀罗干涉仪两反射面之间的距离为 1.00 cm，用绿光(5000 Å)作实验，干涉图样的中心正好是一个亮斑. 求第 10 圈亮环的角直径.

解　在法-珀仪中，极强(亮斑)所满足的角方位条件为

$$2nh\cos\theta_k = k\lambda.$$

中心亮斑的级别由下式决定：

$$2nh = k_0\lambda.$$

所以第 10 圈亮环的角半径 θ_k 满足

$$\cos\theta_k = \frac{(k_0-10)\lambda}{2nh} = 1 - 10\frac{\lambda}{2nh}.$$

取 $n=1, h=1.00\ \text{cm}, \lambda=0.5\ \mu\text{m}$，算得

$$\cos\theta_k \approx 0.9998,$$

即

$$\theta_k \approx 1°9'.$$

角直径为

$$2\theta_k = 2°18'.$$

3. 设法布里-珀罗谐振腔(简称法-珀腔)长 5 cm，用扩展光源作实验，光波波长为 0.6 μm. 问：

(1) 中心干涉级数为多少？

(2) 在倾角为 1°附近干涉环的半角宽度为多少？(设反射率 $R=0.98$.)

(3) 如果用这个法-珀腔分辨谱线，其色分辨本领有多高？可分辨的最小波长间隔为多少？

(4) 如果用这个法-珀腔对白光进行选频，透射最强的谱线有几条？每条谱线宽度为多少？

(5) 由于热胀冷缩，引起腔长的改变量为 10^{-5}(相对值)，则谱线的漂移量为多少？

解 (1) 中心级别为

$$k_0 = \frac{2nh}{\lambda} = \frac{2\times 1\times 5\ \text{cm}}{0.6\ \mu\text{m}} \approx 1.7\times 10^5.$$

(2) k 级亮环的半角宽度公式为

$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin\theta_k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

由此算出 $\theta_k \approx 1°$ 时，半角宽度

$$\Delta\theta_k \approx 2.2\times 10^{-6}\ \text{rad} \approx 0.45''.$$

可见，亮环非常细锐.

(3) 由本节习题 1 中式①得，色分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k_0 \frac{\sqrt{R}}{1-R} \approx 2.6\times 10^7,$$

可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda \approx \frac{1}{2.6\times 10^7}\lambda \approx 2.3\times 10^{-4}\ \text{Å}.$$

(4) 法-珀腔作为一个无源谐振腔具有选频作用，其所选纵模(频率)间隔为

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nh} \approx 3 \times 10^9 \text{ Hz}. \qquad ①$$

白光的波长范围为 4000～7600 Å，相应的光频范围为$(4.0\sim7.5)\times10^{14}$ Hz，在此范围内包含的纵模个数(透射最强的谱线条数)为

$$\Delta N = (\nu_{max} - \nu_{min})\Delta\nu \approx 1.2 \times 10^5.$$

每条谱线的宽度为

$$\begin{aligned}\delta\nu &= \frac{c}{2\pi nh}\frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}\Delta\nu \\ &\approx 6.4 \times 10^{-3}\Delta\nu \\ &\approx 19 \text{ MHz};\end{aligned}$$

换算为 $\lambda=0.55$ μm 附近的波长线宽，即

$$\delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{c}\delta\nu \approx 1.9 \times 10^{-4} \text{ Å}.$$

值得指出的是，用频率间隔 $\Delta\nu$ 或 $\delta\nu$ 计算法-珀腔的选频性能较为方便，可避开入射光频(或波长)的影响，突出器件参数 h，R 的作用.

(5) 从式①可以看出，$\Delta\nu \propto 1/h$，故腔长的任何微小改变都将引起纵模间隔 $\Delta\nu$ 的改变. 即使在中心波长被稳住的情况下，也必将引起两侧的谱线频移，频移量

$$\begin{aligned}\delta(\Delta\gamma) &= \delta\left(\frac{c}{2nh}\right) = \frac{c}{2nh}\frac{\delta h}{h} \\ &\approx 3 \times 10^9 \times 10^{-5} \text{ Hz} \\ &= 3 \times 10^4 \text{ Hz},\end{aligned}$$

换算为 $\lambda=0.55$ μm 附近的波长漂移量，即

$$\delta(\Delta\lambda) \approx \frac{\lambda^2}{c}\delta(\Delta\gamma) \approx 3 \times 10^{-7} \text{ Å}.$$

4. 利用多光束干涉可以制成一种干涉滤光片. 如图 3-17，在很平的玻璃片上镀一层银，在银面上加一层透明膜，例如水晶石($3NaF \cdot AlF_3$)，其上再镀一层银. 于是两个银面之间形成一个膜层，产生多光束干涉. 设银面的反射率 $R=0.96$，透明膜的折射率为 1.55，膜厚 $h=4\times10^{-5}$ cm，平行光正入射. 问：

(1) 在可见光范围内，透射最强的谱线有几条？它们的光波长分别为多少？

(2) 每条谱线的宽度为多少？

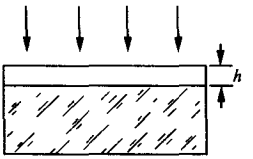


图 3-17

解 (1) 先算纵模频率间隔

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nh} \approx 2.4 \times 10^{14}\ \text{Hz};$$

再算可见光频段内包含的纵模个数(即透射最强的谱线条数)

$$\Delta N = \frac{3.5 \times 10^{14}\ \text{Hz}}{2.4 \times 10^{14}\ \text{Hz}} \approx 1.5.$$

鉴于在本题中谱线仅有几条，不妨算出谱线波长的具体数值. 为此，令 $\lambda_{\min}=4000$ Å，算出

$$k_{\max} = 2nh/\lambda_{\min} = 3.1;$$

令 $\lambda_{\max}=7600$ Å，算出

$$k_{\min} = 2nh/\lambda_{\max} = 1.6.$$

因此在可见光范围内，只能在 1.6～3.1 之间取 $k=2,3$，相应的最强谱线波长分别为

$$\lambda = 2nh/2 \approx 6200\ \text{Å}, \quad \lambda' = 2nh/3 \approx 4133\ \text{Å}.$$

(2) 上述两条谱线的宽度分别为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{6200\ \text{Å}}{2\pi}\frac{1-0.96}{\sqrt{0.96}} \approx 40.3\ \text{Å},$$

$$\delta\lambda' = \frac{4133\ \text{Å}}{3\pi}\frac{1-0.96}{\sqrt{0.96}} \approx 17.9\ \text{Å}.$$

5. 如果平行膜层两侧的折射率不等(见图 3-18(a))，设入射光强为 I_0.

(1) 导出多光束干涉后形成的反射光强 I_R 和透射光强 I_T 的公式.

(2) 证明只有同时满足以下三个条件时，才能使波长为 λ 的正入射光完全透过，即 $I_R=0$：① $n_3>n_2>n_1$；② $n_2h=\lambda/4$；③ $n_2=\sqrt{n_1n_3}$.

解 (1) 设上、下界面单次反射(或透射)的振幅反射率(或振幅透射率)(如图 3-18(b))，则反射多光束的复振幅系列为

$$\tilde{U}_1 = Ar_1, \quad \tilde{U}_2 = At_1t_1'r_2e^{i\delta},$$

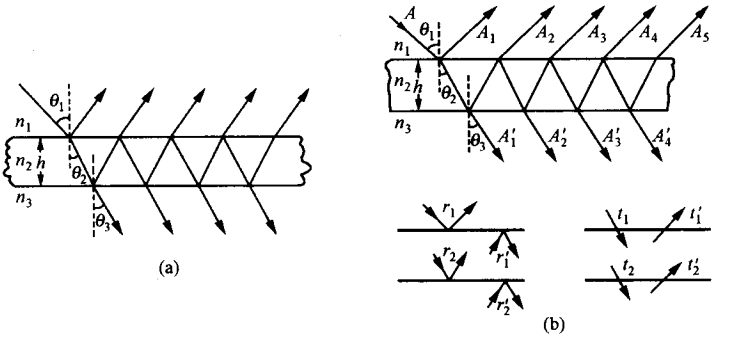


图　3-18

$$\tilde{U}_3 = At_1t_1'r_2^2r_1'e^{i2\delta},\quad \tilde{U}_4 = At_1t_1'r_2^3r_1'^2e^{i3\delta},\quad \cdots,$$

公比为 $r_1'r_2e^{i\delta}$. 这里,在界面上反射时可能引起的相位突变已包含在振幅反射率中. 每对相邻反射光线的表观光程差为

$$\Delta L = 2n_2h\cos\theta_2,$$

相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{4\pi n_2h\cos\theta_2}{\lambda}.$$

反射光的总复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_R &= \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{U}_j\\ &= Ar_1 + At_1t_1'r_2e^{i\delta} + At_1t_1'r_2^2r_1'e^{i2\delta} + At_1t_1'r_2^3r_1'^2e^{i3\delta} + \cdots\\ &= Ar_1 + At_1't_1'r_2e^{i\delta}[1 + r_2r_1'e^{i\delta} + (r_2r_1')^2e^{i2\delta} + \cdots]\\ &= Ar_1 + At_1't_1'r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 - r_2r_1'e^{i\delta}}.\end{aligned}$$

由斯托克斯(Stokes)倒逆关系有

$$t_1t_1' = 1 - r_1^2,\quad r_1' = -r_1,$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{U}_R &= Ar_1 + A(1 - r_1^2)r_2e^{i\delta}\frac{1}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}\\ &= \frac{A(r_1 + r_2e^{i\delta})}{1 + r_1r_2e^{i\delta}}.\end{aligned}$$

因此反射光强为

$$I_R=\tilde{U}_R\tilde{U}_R^*=\frac{A(r_1+r_2e^{i\delta})}{1+r_1r_2e^{i\delta}}\frac{A(r_1+r_2e^{-i\delta})}{1+r_1r_2e^{-i\delta}}$$

$$=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}A^2$$

$$=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0. \qquad ①$$

上式即为反射光强公式.

设入射光束的横截面积为 S_1,透射光束的横截面积为 S_3,则根据能量守恒,透射光强 I_T 与入射、反射光强的关系为

$$I_TS_3=S_1(I_0-I_R),$$

即

$$I_T=\frac{S_1}{S_3}(I_0-I_R).$$

由折射定律可知

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3},$$

故

$$I_T=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}(I_0-I_R)$$

$$=I_0\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\left(1-\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}\right)$$

$$=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\delta}I_0. \qquad ②$$

上式即为透射光强公式. 以上得到的式①,②对 p,s 分量均适用. 当 $\theta_1\approx0$ 时,由于 $R=R_p=R_s$,则 I_R,I_T 分别为总的反射光强和透射光强.

(2) 利用三角关系式

$$\cos\delta=\cos^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\delta}{2},\quad \sin^2\frac{\delta}{2}+\cos^2\frac{\delta}{2}=1,$$

把式①改写成对称形式,即

$$I_R=\frac{(r_1+r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+(r_1-r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1+r_1r_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+(1-r_1r_2)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}I_0. \qquad ③$$

在 $n_3>n_2>n_1$ 的条件下，各反射光线间没有因半波损而引起的附加相位差，r_1，r_2 中不再包含相位因子. 在正入射时，由菲涅耳反射公式可得

$$r_1=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1},\quad r_2=\frac{n_3-n_2}{n_3+n_2}.$$

代入式③得

$$I_R=\frac{(n_1-n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+\left(\frac{n_1n_3}{n_2}-n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(n_1+n_3)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+\left(\frac{n_1n_3}{n_2}+n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}I_0.$$

当 $n_2h=\lambda/4$ 时，有

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2\lambda}{4}=\pi,\quad \cos\frac{\delta}{2}=0,\quad \sin\frac{\delta}{2}=1.$$

最后得

$$I_R=\frac{(n_2-n_1n_3/n_2)^2}{(n_2+n_1n_3/n_2)^2}I_0.$$

若再有

$$n_2=\sqrt{n_1n_3}, \qquad ④$$

则

$$I_R=0.$$

综上所述，当光学厚度 $n_2h=\lambda/4,3\lambda/4,\cdots,n_3>n_2>n_1$（低膜）时，薄膜起增透作用. 一般情况下，增透膜的作用是增加透射、减少反射，但不能完全消除反射；仅当低膜折射率满足式④时，才能使波长为 λ 的正入射光完全消除反射. 这时入射光的能流全部透过薄膜，透射光强最大.

6. 试分析在法布里-珀罗干涉仪中，由于将有限项多光束相干叠加当做无限项处理而引入的误差.

解　如图 3-19，在法-珀仪中，由于腔的横向尺寸有限，在光束倾

角 $\theta\neq0$ 时，透射多光束不可能有无限项. 一般相关文献中，为简化起见，都以无限项等比级数求和来计算透射场. 我们不妨分析一下这种近似处理的误差有多大.

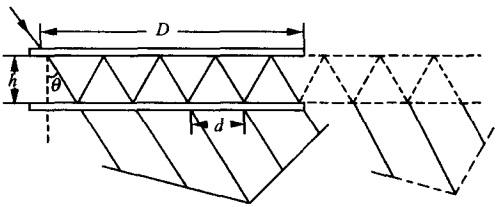


图 3-19

设透射多光束的数目为 N(N 为有限值). 如对腔的横向宽度作无限延伸，则 N 项系列就等于两组无限系列之差，即透射场

$$\tilde{U}_{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{N}\tilde{U}_j=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{U}_j-\sum_{j=N+1}^{\infty}\tilde{U}_j,$$

其中第二个等号右边第一组级数的首项为

$$\tilde{U}_1=A_0tt'=(1-R)A_0,$$

第二组级数的首项为

$$\tilde{U}_{N+1}=A_0tt'r^{2N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}=(1-R)R^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}A_0,$$

式中

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos\theta.$$

两组级数的等比均为

$$r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}.$$

根据无限项等比级数求和公式，得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{U}_j=\frac{1}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\tilde{U}_1,$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\tilde{U}_j=\frac{1}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\tilde{U}_{N+1}.$$

所以透射多光束(有限项等比级数)相干场为

$$\tilde{U}_{\mathrm{T}}=\tilde{U}_1\frac{1}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\left(1-\frac{\tilde{U}_{N+1}}{\tilde{U}_1}\right)=\tilde{U}'_{\mathrm{T}}(1-\tilde{\Delta}),$$

式中

$$\tilde{U}'_{\mathrm{T}}=\frac{1-R}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A_0$$

就是通常给出的理论结果，其误差为

$$\tilde{\Delta}=\tilde{U}_{M+1}/\tilde{U}_1=R^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}.$$

透射相干强度为

$$I_{\mathrm{T}}=\tilde{U}_{\mathrm{T}}\tilde{U}^*_{\mathrm{T}}=\tilde{U}'_{\mathrm{T}}\tilde{U}'^*_{\mathrm{T}}(1-\tilde{\Delta})(1-\tilde{\Delta}^*)=I'_{\mathrm{T}}(1-\Delta'_I),$$

式中

$$I'_{\mathrm{T}}=I_0\Big/\Big[1+\frac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}\Big]$$

也是通常给出的理论结果，其误差为

$$\Delta_I=\tilde{\Delta}+\tilde{\Delta}^*-\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}^*=R^N(2\cos N\delta-R^N).$$

下面给出具体数值，并作几点定量讨论：

(1) 内反射两次的横向位移为

$$d=2h\tan\theta,$$

透射多光束的有限项数目

$$N\approx\frac{D}{d}=\frac{D}{2h\tan\theta}. \qquad ①$$

选用本节习题 2 的数据，取

$$h=1.00\ \mathrm{cm},\quad \theta=1°9'.$$

此时有 10 圈亮环. 若设 $D=2$ cm，则

$$N\approx 50.$$

(2) 选 $N=40$，$R=0.95$，有

$$|\tilde{\Delta}|=R^N\approx 0.13.$$

干涉强度极大方位显然发生在 $\delta=2k\pi$ 之处. 此时，有

$$\Delta I=R^N(2-R^N)\approx 0.24.$$

于是透射相干极大强度不再等于入射光强，而变为

$$I_{\mathrm{Tm}}=I_0(1-\Delta I)=I_0(1-R^N)^2\approx 76\%I_0.$$

(3) 为考虑干涉极大(峰)的半值宽度是否有所变化，令 $\delta=2k\pi\pm\varepsilon/2$，满足半值要求：

$$I_{\mathrm{T}}=I_0(1-R^N)^2/2,$$

即

$$\frac{(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2(\delta/2)}\left[(1-R^N)^2+4R^N\sin^2\frac{N\delta}{2}\right]I_0$$
$$=I_0(1-R^N)^2/2.$$

经整理,得

$$\frac{8R^N}{(1-R^N)^2}\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0.$$

当 $N\to\infty$时,就得到半值宽度的理论结果

$$\varepsilon_0\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}\approx 0.1026.$$

当 $N=40$ 时,采用数值方法解方程

$$1.354\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0$$

得

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\Delta\varepsilon)\approx 0.1574,\quad \Delta\varepsilon\approx\pm 53\%;$$

当 $N=30$ 时,解方程

$$2.784\sin^2\frac{N\varepsilon}{4}-1520\sin^2\frac{\varepsilon}{4}+1=0$$

得

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\Delta\varepsilon)\approx 0.1994,\quad \Delta\varepsilon\approx\pm 94\%.$$

(4) 综上所述,考虑到法-珀仪中横向尺寸的限制,透射场应当是有限项多光束的相干叠加,其结果与理论值比较,主极大方位角不变,但主极大强度值略有下降,条纹的半值宽度也有所增宽,具体数量级见表 3-1.

表 3-1

N	$\lvert\tilde{\Delta}\rvert$	ΔI	$\Delta\varepsilon$
40 (10 环)	0.13	0.24	0.53
30 (5 环)	0.21	0.38	0.94

7. 在分析法布里-珀罗谐振腔的选频作用时,为什么不必考虑入射光相干长度的限制?

解 当入射光为非单色时,其波列长度确实是有限的.但是对于

法-珀腔中发生的多光束相干来说，波列有限长度不起限制光程差的作用，这是因为多光束相干本身具有挑选波长、压缩线宽的作用. 我们不妨将入射的非单色光分解为一系列准单色之和. 由于多光束相干结果，在透射一方只有若干准单色谱线被选取，获得相干极强，其他谱线的强度不参与透射一方的不相干叠加. 这与杨氏干涉、薄膜干涉等双像干涉系统是根本不同的. 在些情况下，没有选频作用，尽管我们仍然可以从数学上对非单色的入射光作频谱分解，但是全体谱线都参与干涉场的不相干叠加. 由于条纹间距因波长而异，不相干叠加的结果致使光程差超过某一数值的那些区域的条纹衬比度降为零，这与由相干长度的一次分析所得到的光程差限制的结论是完全一致的. 对此可作以下粗略的说明：一方面，线宽为 $\Delta\lambda$ 的谱线集合，形成一有限长波列，表示为

$$A(x)=\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\mathrm{d}\lambda. \qquad ①$$

$A(x)$的有限长度 l_0 与线宽 $\Delta\lambda$ 的关系为

$$l_0=\lambda_2/\Delta\lambda.$$

另一方面，如用光程差 ΔL 为变量，描述双光束干涉场的强度叠加，则表示为

$$I(\Delta L)=I_0+\int_{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} i\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)\mathrm{d}\lambda. \qquad ②$$

根据 $I(\Delta L)$与 $A(x)$函数(见式①，②)形式的相似性，可见干涉场中强度起伏的线度是有限的，且 $I(\Delta L)$的有效长度 ΔL_e 与线宽 $\Delta\lambda$ 的关系应为

$$\Delta L_e=\lambda^2/\Delta\lambda.$$

显然

$$\Delta L_e=l_0,$$

即由频谱分析得到的最大光程差数值与相干长度一致.

总之，在有选频效应的场合，相干长度对光程差的限制将失去意义；只有在无选频效应的场合，相干长度对光程差的限制作用才真正地体现出来.

第四章　衍射光栅

§1　多缝夫琅禾费衍射

1. 用坐标纸绘制 $N=2, d=3a$ 的夫琅禾费衍射强度分布曲线. 横坐标取 $\sin\theta$，至少画到第 7 级主极强，并计算第一个主极强与单缝主极强之比.

解　作强度分布曲线如图 4-1. 作图时注意到 $N=2$，故相邻主极强之间不出现次极强；又 $d=3a$，故缺级在 $k=\pm3, \pm6, \cdots$ 等级.

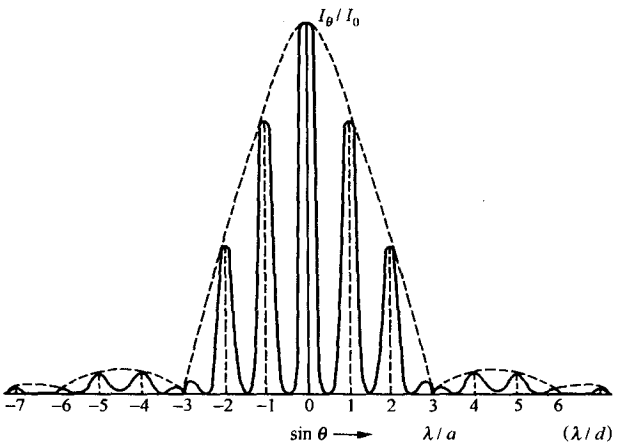


图　4-1

多缝衍射某级主极强与单缝 0 级(主极强)强度之比为

$$\frac{I(\theta)}{I_0}=\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2=N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta_k}{\lambda}=\pi\frac{a}{d}\frac{d\sin\theta_k}{\lambda}=k\pi\frac{a}{d}.$$

当 $k=1, a/d=1/3, N=2$ 时，得

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx 0.684.$$

于是

$$I(\theta_1)/I_0=4\times 0.684\approx 2.74.$$

2. 用坐标纸绘制 $N=6, d=1.5a$ 的夫琅禾费衍射强度分布曲线. 横坐标取 $\sin\theta$，至少画到第 4 级主极强，并计算第 4 级主极强与单缝主极强之比.

解　作强度分布曲线如图 4-2. 作图时注意到 $N=6$，故相邻主极强之间出现 4 个次极强；又 $d=1.5a$，故缺级现象发生在 $k=\pm 3, \pm 6, \cdots$ 等级.

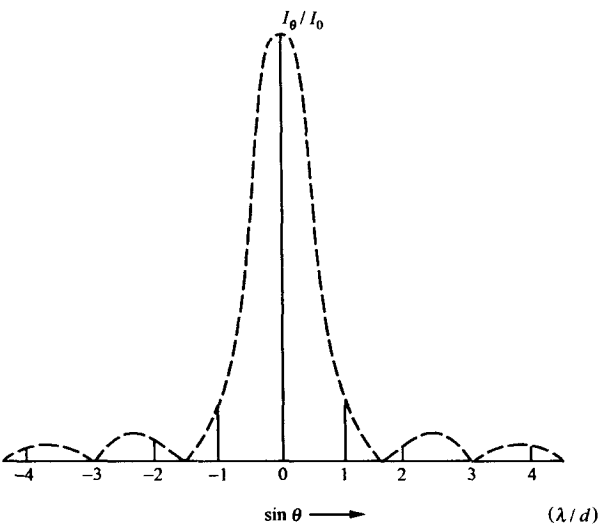


图　4-2

当 $k=4, a/d=2/3, N=6$ 时，得

$$\alpha=k\pi\frac{a}{d}=\frac{8}{3}\pi,\quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{16\pi},\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx 0.0107.$$

于是第 4 级主极强与单缝主极强之比为

$$\frac{I(\theta_4)}{I_0}=N^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\approx 0.39.$$

3. 导出斜入射时多缝夫琅禾费衍射强度分布公式

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2,$$

式中

$$\alpha'=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0),\quad \beta'=\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0),$$

θ_0 为入射光线与光轴的夹角(见图 4-3(a)).

解 如图 4-3(b),考虑衍射角为 θ 的一束衍射线,始于单缝上边缘 A 点和下边缘 B 点的两衍射线的光程差为

$$\Delta l=a(\sin\theta-\sin\theta_0),$$

相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta l=\frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta-\sin\theta_0).$$

由矢量图可得场点的合振幅为

$$a_\theta=2R\sin\alpha'=2\frac{\overset{\frown}{AB}}{2\alpha'}\sin\alpha'=a_0\frac{\sin\alpha'}{\alpha'},$$

式中

$$\alpha'=\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0).$$

多缝夫琅禾费衍射的总振幅为 N 个 a_θ 的相干叠加. 如图 4-3(c),相邻缝间对应点衍射线之间的光程差为

$$\Delta L=d(\sin\theta-\sin\theta_0),$$

相位差为

$$\delta'=\frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta-\sin\theta_0).$$

由矢量图可得总振幅为

$$A_0=2R\sin N\beta'=2\frac{a_\theta/2}{\sin\beta'}\sin N\beta'=a_\theta\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'},$$

式中

$$\beta'=\frac{\delta'}{2}=\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0).$$

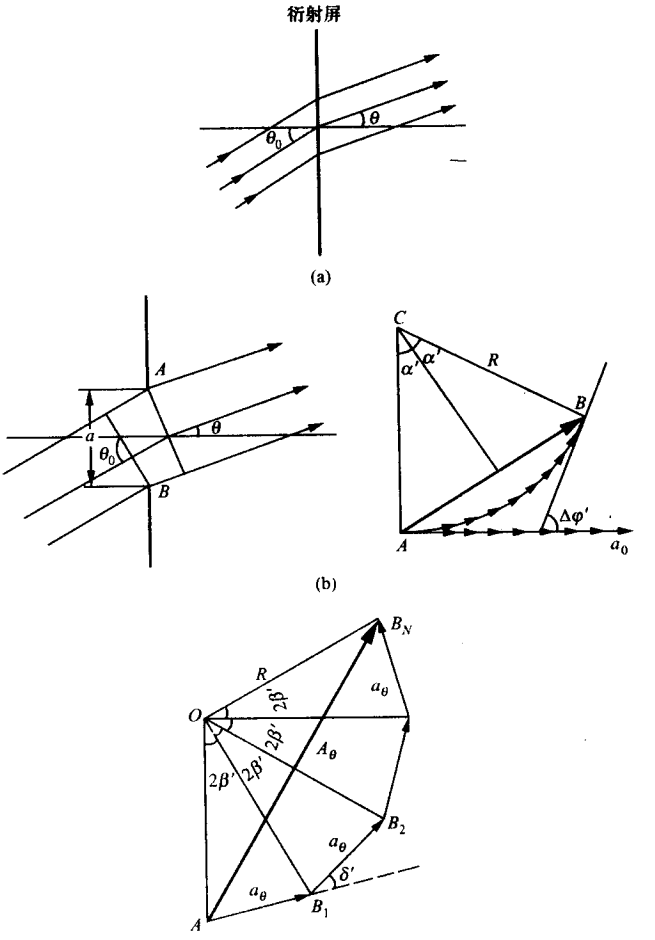


图　4-3

因此强度分布公式为

$$I_\theta = A_\theta^2 = a_\theta^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= a_0^2\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2.$$

以上分析表明，当衍射屏并非入射光波的等相面时，在作相干叠加运算时，既要考虑前场的光程差，又要考虑后场的光程差. 这样才能正确决定到达同一场点的各次级扰动之间的相位差. 以上结果还表明，当衍射角 θ 等于入射倾角 θ_0 时，单缝衍射因子 $(\sin\alpha'/\alpha')^2$ 与缝间干涉因子 $(\sin N\beta'/\sin\beta')^2$ 同时到达零级主极大，这正是几何光学像点方位，此时仍然不可能将单元衍射零级与单元间干涉零级分离. 为使上述两个零级分离，必须采用反射闪耀光栅或透射闪耀光栅，闪耀光栅实质上是一种相位型光栅. 如用黑白光栅这类振幅型光栅，不论怎样改变入射方式，总不可能分开两个零级.

4. 写出斜入射时夫琅禾费多缝衍射主极强位置公式、第 k 级主极强的半角宽度公式及缺级情况，并注意与正入射情况作比较.

解 斜入射时主极强位置公式应改为

$$d(\sin\theta_k - \sin\theta_0) = k\lambda$$

或

$$d\sin\theta_k = k\lambda + d\sin\theta_0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

而 k 级主极强半角宽度公式为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}.$$

它形式上与正入射时一样；但对级数 k 相同的主极强来说，两者 θ_k 的取值是不同的. 当 k 级主极强角方位与单元衍射 k' 级零点角方相位同时，则出现缺级情况，据此令

$$k\frac{\lambda}{d} + \sin\theta_0 = k'\frac{\lambda}{a} + \sin\theta_0,$$

得

$$\frac{k}{k'} = \frac{d}{a}.$$

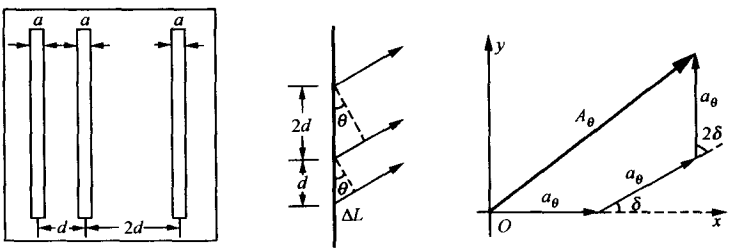
此式说明光栅 k 级主极强落在单元衍射 k' 级零点位置，因而缺级. 可见，斜入射时与正入射相比缺级情况相同.

5. 有三条平行狭缝，宽度都是 a，缝距分别为 d 和 $2d$（见图 4-4(a)）. 证明：正入射时其夫琅禾费衍射强度分布公式为

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3 + 2(\cos2\beta + \cos4\beta + \cos6\beta)],$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}.$$



(a)　(b)　(c)

图 4-4

证　考虑三束衍射线之间的光程差(图 4-4(b)所示),据此作矢量图 4-4(c),a_θ 为单缝衍射的振幅,A_θ 为三缝衍射的总振幅. 显然 A_θ 的 x,y 分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta(1 + \cos\delta + \cos3\delta),$$

$$A_{\theta y} = a_\theta(\sin\delta + \sin3\delta).$$

所以三缝衍射强度分布为

$$\begin{aligned} I_\theta &= A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2 \\ &= a_\theta^2[(1 + \cos\delta + \cos3\delta)^2 + (\sin\delta + \sin3\delta)^2] \\ &= a_\theta^2[3 + 2(\cos\delta + \cos2\delta + \cos3\delta)] \\ &= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3 + 2(\cos2\beta + \cos4\beta + \cos6\beta)], \end{aligned}$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}.$$

6. 导出正入射时不等宽双缝的夫琅禾费衍射强度分布公式. (缝宽分别为 a 和 $2a$,缝距 $d=3a$(见图 4-5(a)).)

解　把缝宽为 $2a$ 的单缝看成缝宽为 a,且间距也为 a 的双缝. 这样本题的不等宽双缝即化成等宽不等距的三缝,缝宽均为 a,缝距

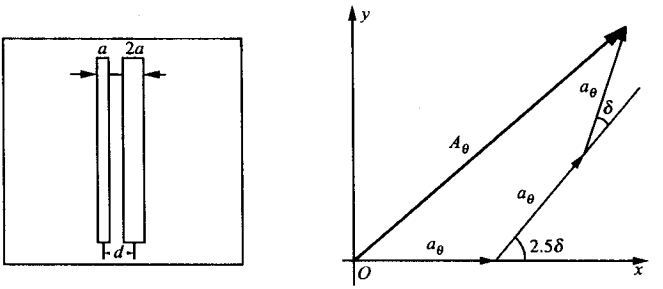


图 4-5

分别为 2.5a 和 a. 用图 4-5(b)所示的矢量图即可求得合振幅 A_θ,图中 $\delta=2\pi a\sin\theta/\lambda$. A_θ 的 x,y 分量分别为

$$A_{\theta x}=a_\theta\left(1+\cos\frac{5}{2}\delta+\cos\frac{7}{2}\delta\right),$$

$$A_{\theta y}=a_\theta\left(\sin\frac{5}{2}\delta+\sin\frac{7}{2}\delta\right).$$

所以衍射强度分布为

$$\begin{aligned}I_\theta&=A_{\theta x}^2+A_{\theta y}^2\\&=a_\theta^2\left[\left(1+\cos\frac{5}{2}\delta+\cos\frac{7}{2}\delta\right)^2+\left(\sin\frac{5}{2}\delta+\sin\frac{7}{2}\delta\right)^2\right]\\&=a_\theta^2\left[3+2\left(\cos\delta+\cos\frac{5}{2}\delta+\cos\frac{7}{2}\delta\right)\right]\\&=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos2\beta+\cos5\beta+\cos7\beta)]\\&=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos2\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha)],\end{aligned}$$

式中 I_0 为单缝的零级主极强,$\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda$.

7. 有 $2N$ 条平行狭缝,缝宽相同都是 a,缝间不透明部分的宽度作周期性变化:$a,3a,a,3a,\cdots$(见图 4-6). 求下列各种情形中正入射时的夫琅禾费衍射强度分布:

(1) 遮住偶数缝;

(2) 遮住奇数缝;

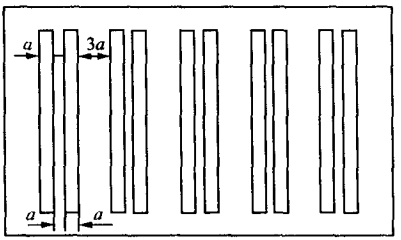


图 4-6

(3) 全开放.

解 (1) 遮住偶数缝时,衍射屏成为一块缝宽为 a,缝距 $d=6a$ 的 N 缝光栅,其夫琅禾费衍射强度分布为

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2,$$

式中 I_0 为单缝零级主极强,

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},\quad \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = 6\alpha.$$

(2) 遮住奇数缝时,与遮住偶数缝时相比,衍射屏内部各次波源到达场点的相位关系完全相同,因此衍射强度分布也完全相同.

(3) 衍射屏是大量次波源的集合.全开放时,这种周期性结构的衍射屏上的次波源,有两种编组方式,相应地有两种处理衍射强度分布的运算方法:

方法一:把每两条缝宽为 a、间距 $d'=2a$ 的双缝看做一个衍射单元,整个衍射屏由间距 $d=6a$ 的 N 个这样的衍射单元组成.则单元衍射因子为

$$u(\theta) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin 2\beta'}{\sin\beta'} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta' = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha,$$

式中

$$\alpha = \pi a\sin\theta/\lambda,$$

$$\beta' = \frac{\pi d'\sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi(2a)\sin\theta}{\lambda} = 2\alpha.$$

N 元干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha},$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = 6\alpha.$$

所以强度分布函数为

$$I(\theta) = I_0u^2(\theta)N^2(\theta)$$

$$= 4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2,$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强.

方法二：分别把 N 条奇数缝与 N 条偶数缝看做两个相同的衍射单元. 于是整个衍射屏就只是由间距 $d=2a$ 的两个衍射单元组成. 则由(1)或(2)的结果知，单元衍射因子为

$$u(\theta) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha},$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta' = \frac{\pi d'\sin\theta}{\lambda} = 6\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = 6\alpha.$$

元间干涉因子为

$$N(\theta) = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha,$$

式中

$$\beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = 2\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = 2\alpha.$$

所以强度分布为

$$I(\theta) = I_0u^2(\theta)N^2(\theta)$$

$$= 4I_0(\cos 2\alpha)^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2.$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强.

8. 有两块完全相同的光栅，缝数、缝宽和光栅常数分别为 N，a 和 d. 现将它们在同一平面上平行放置，对接后两块光栅间相邻两缝的间距为 l(参见图 4-7(a)). 当 $l=d$，1.5d，2d 时，分别讨论原来单一光栅 k 级主极强现在将发生什么变化？(设平行光正入射照明光栅.)

解 两块光栅对接后，整个衍射屏由两个相同的衍射单元组成，原先的每块单一光栅构成一个衍射单元. 在衍射角为 θ 的方向，单元间衍射线的光程差(如图 4-7(b)所示)为

$$\Delta L = [(N-1)d + l]\sin\theta,$$

对原来单一光栅的 k 级主极强来说，有

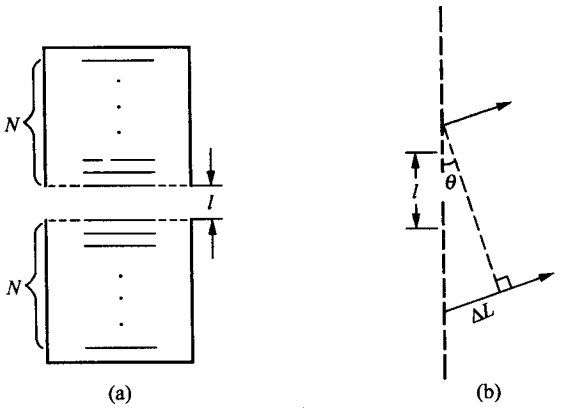


图　4-7

$$d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

因此合成强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)$$

$$= 2I_k\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)\right],$$

式中 I_k 为单一光栅 k 级主极强的强度.

(1) 当 $l=d$ 时,两者对接后相当于一块 $2N$ 条缝、缝宽为 a、光栅常数为 d 的光栅. 显然,原先的 k 级主极强目前仍为 k 级主极强,且

$$I = 4I_k, \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{2Nd\cos\theta_k} = \frac{1}{2}\Delta\theta_k.$$

即强度为原先的 4 倍,半角宽度为原先的 1/2.

(2) 当 $l=1.5d$ 时,则

$$\Delta L = [(N-1)d + 3d/2]\sin\theta$$

$$= (N + 1/2)d\sin\theta = (N + 1/2)k\lambda$$

$$= Nk\lambda + k\lambda/2.$$

有效光程差为

$$\Delta L' = k\lambda/2,$$

因此,当 $k=\pm1, \pm3, \cdots$ 时,$I=0$,即原先单一光栅的奇数级主

极强成为缺级.

当 $k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 时,$I=4I_k$,即原先单一光栅的偶数级主极强,目前仍为主极强,且强度增加到 4 倍,其半角宽度可以由微分近似运算得到.因主极强位置满足

$$\sin\theta_k=\frac{(N+1/2)k}{(N+1/2)d}\lambda\quad(k=0,\pm2,\pm4,\cdots).$$

相邻暗线位置满足

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)=\frac{(N+1/2)k+1/2}{(N+1/2)d}\lambda,$$

取微分近似有

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)-\sin\theta_k\approx\cos\theta_k\Delta\theta,$$

而

$$\sin(\theta_k+\Delta\theta)-\sin\theta_k=\frac{\lambda}{2(N+1/2)d},$$

故

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2(N+1/2)d\cos\theta_k}<\frac{\Delta\theta_k}{2},$$

即半角宽度小于原先单一光栅的 1/2.

(3) 当 $l=2d$ 时,则

$$\begin{aligned}\Delta L&=[(N-1)d+2d]\sin\theta=(N+1)d\sin\theta\\&=(N+1)k\lambda,\end{aligned}$$

故

$$I=4I_k,$$

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2(N+1)d\cos\theta_k}<\frac{\Delta\theta_k}{2},$$

即原先单一光栅的 k 级主极强目前仍为主极强,强度增加到 4 倍,其半角宽度小于单一光栅的 1/2,且比 $l=1.5d$ 时进一步缩小.

本题中情况(3)相当于在制作一块 $2N+1$ 条缝的光栅时当中漏刻了一条缝.讨论结果表明这在使用中并不造成严重的后果,与一块完整的光栅性能基本相近.但如果 $l=1.5d$(情况(2)),即仅仅在当中的两条缝之间破坏了空间周期性,尽管其余绝大多数($2N$ 条)缝的制作周期仍然严格保证,但这在使用中带来的后果将是严重的.可

见，刻画一块精密母光栅的要求是很高的，不但要求刻画机的元件非常精密，而且还要求在刻画过程中防止震动和温度变化，以严格保证光栅的空间周期性.

§2　光栅光谱仪

1. 波长为 6500 Å 的红光谱线，经观测发现它是双线. 如果在 9×10^5 条刻线光栅的第 3 级光谱中刚好能分辨此双线，求其波长差.

解　由光栅的色分辨本领公式

$$R = \lambda/\delta\lambda = kN$$

得双线间隔

$$\delta\lambda = \lambda/kN = 2.41\times10^{-3}\ \text{Å}.$$

2. 若要 50 条/mm 的光栅在第 2 级光谱中能分辨钠双线 λ_1(5890 Å)和 λ_2(5896 Å)，光栅宽度应选多少？

解　由光栅色分辨本领公式可得，光栅单元总数应当满足

$$N = \frac{\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{5893\ \text{Å}}{2\times6\ \text{Å}} = 491.$$

光栅尺寸

$$D = Nd = 491\times\frac{1}{50/\text{mm}} = 9.82\ \text{mm},$$

即应选宽度大于 10 mm 的光栅.

3. 绿光 5000 Å 正入射在光栅常数为 2.5×10^{-4} cm、宽度为 3 cm 的光栅上，聚光镜的焦距为 50 cm. 求：

(1) 第 1 级光谱的线色散；

(2) 第 1 级光谱中能分辨的最小波长差；

(3) 该光栅最多能看到第几级光谱？

解　(1) 根据光栅的线色散本领公式

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k}f,$$

得，光栅 1 级光谱在 5000 Å 附近的线色散为

$$D_1=\frac{1}{d\sqrt{1-\sin^2\theta_1}}f=\frac{1}{d\sqrt{1-(\lambda/d)^2}}f$$
$$=\frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}}f\approx 2\times 10^{-2}\ \text{mm/Å}.$$

(2) 此光栅 1 级光谱在 5000 Å 邻近可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{N}=\frac{\lambda d}{D_1}\approx 0.42\ \text{Å}.$$

(3) 根据光栅公式

$$d\sin\theta_k=k\lambda, \qquad ①$$

并考虑到衍射角取值范围为 $0\leqslant|\theta_k|\leqslant\pi/2$,可见最大级别 k_m 应当满足

$$k_m<\frac{d}{\lambda}=\frac{2.5\times 10^{-4}\ \text{cm}}{5000\ \text{Å}}=5.$$

取 $k_m=4$,即此光栅最多能看到±4 级光谱.

4. 一束白光正入射在 600 条/mm 的光栅上. 第 1 级可见光谱末端与第 2 级光谱始端之间的角间隔有多少?

解 白光波长范围为 4000～7600 Å,由光栅公式(上题中式①)得白光 1 级光谱末端的衍射角为

$$\theta_1=\arcsin(\lambda_{max}/d)=\arcsin(7600\ \text{Å}\times 600/\text{mm})$$
$$=\arcsin 0.456=27°8'.$$

白光 2 级光谱始端的衍射角为

$$\theta_2=\arcsin(2\lambda_{min}/d)=\arcsin(2\times 4000\ \text{Å}\times 600/\text{mm})$$
$$=\arcsin 0.48=28°41'.$$

两者角间隔为

$$\delta_\theta=\theta_2-\theta_1=1°33'.$$

5. 国产 31WI 型一米平面光栅摄谱仪的技术数据表中列有:

物镜焦距: 1050 mm,
光栅刻画面积: 60 mm×40 mm,
闪耀波长: 3650 Å(1 级),
刻线: 1200 条/mm,

色散：　　8 Å/mm，

理论分辨率：　72 000（1 级）.

试根据以上数据来计算一下：

（1）该摄谱仪能分辨的谱线间隔的最小值为多少？

（2）该摄谱仪的角色散本领为多少（以 Å/(′)为单位）？

（3）光栅的闪耀角为多大？闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大角度？

解　（1）从产品说明书中已知该光栅的色分辨率 R，所以该光栅 1 级光谱在闪耀波长 3650 Å 邻近，能分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{3650\ \text{Å}}{72\,000} \approx 0.05\ \text{Å}.$$

（2）根据说明书中给出的物镜焦距 f 和线色散 D_l，可以算出角色散

$$D_\theta = D_l / f.$$

考虑到实际场合常习惯用 $1/D_l$（单位：Å/mm），$1/D_\theta$（单位：Å/(′)）说明性能，故将上式换算为

$$\frac{1}{D_\theta} = \frac{1}{D_l} f = 8\ \text{Å/mm} \times 1050\ \text{mm} \approx 2.44\ \text{Å}/(').$$

（3）1 级闪耀波长 λ_b 满足

$$2d\sin\theta_b = \lambda_b,$$

由此得闪耀角（即压槽劈角）为

$$\theta_b = \arcsin\frac{\lambda_b}{2d} = \arcsin\left(\frac{1}{2} \times 1200/\text{mm} \times 3650\ \text{Å}\right)$$

$$\approx 12°39'.$$

此角度也正是闪耀方向与光栅平面（宏观）法线方向之间的夹角，当照明光束从槽面（微观）法线方向入射时，便是如此.

6. 底边长度为 6 cm 的棱镜在光波长为 0.6 μm 附近能分辨的最小波长间隔为多少？（以棱镜材料的色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 值为 0.4×10^{-5}/Å 来估算.）

解　根据棱镜的色分辨本领公式

$$R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$$

得

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{R}=\frac{\lambda}{b(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)}=\frac{0.6\ \mu\mathrm{m}}{6\ \mathrm{cm}\times(0.4\times10^{-5}\ \text{Å})}\text{Å}$$

$$\approx 2.5\ \text{Å}.$$

7. 根据以下数据比较光栅、棱镜、法布里-珀罗干涉仪三者的分光性能：

(1) 分辨本领；

(2) 色散本领；

(3) 自由光谱范围.

(已知光栅宽度 $D=5$ cm，刻线密度 $1/d=600$ 条/mm；棱镜底边 $b=5$ cm，顶角 $\alpha=60°$，折射率 $n=1.5$，色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda=0.6\times10^{-5}/\text{Å}$；法-珀腔长 $h=5$ cm，反射率 $R=0.99$.)

解 (1) 光栅 1 级光谱的色分辨本领为

$$R_1=N=3\times10^4.$$

棱镜的色分辨本领为

$$R_2=b\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda=3\times10^3.$$

法-珀仪的色分辨本领为

$$R_3=\pi k\frac{\sqrt{R}}{1-R}=\frac{2\pi nh\cos\theta_k}{\lambda}\frac{\sqrt{R}}{1-R}.$$

取 $\lambda=5000$ Å，$\cos\theta_k\approx1$，$n=1.0$ 代入，得

$$R_3\approx6\times10^5.$$

可见 $R_3>R_1>R_2$.

(2) 光栅 1 级光谱在 5000 Å 邻近的角色散本领为

$$D_1=\frac{1}{d\cos\theta_1}=\frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}}\approx0.22'/\text{Å}.$$

棱镜的角色散本领为

$$D_2=\frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\approx0.031'/\text{Å}.$$

法-珀腔的角色散本领为

$$D_3=\frac{k}{2nh\sin\theta_k}=\frac{2nh\cos\theta_k}{2nh\sin\theta_k}\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda\tan\theta_k}.$$

取 $\lambda=5000$ Å，$\theta_k=10°$代入，算出

$$D_3 \approx 3.9'/\text{Å}.$$

可见 $D_3>D_1>D_2$.

(3) 光栅可测波长的最大值 λ_{max}被光栅常数 d 所限制：

$$\lambda_{max} < d = \frac{1}{600/\text{mm}} = 17\,000 \text{ Å}.$$

1 级光谱上限波长 λ_{max}与 2 级光谱下限波长 λ_{min}满足

$$\lambda_{max} = 2\lambda_{min},$$

所以光栅 1 级光谱的自由光谱范围(不至于与 2 级光谱发生重叠)应当为

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_{max} - \lambda_{min} = \lambda_{max}/2.$$

如果取 $\lambda_{max}=17\,000$ Å，则自由光谱范围为 8500～17 000 Å；如果取 $\lambda_{max}=8000$ Å，则自由光谱范围为 4000～8000 Å，恰巧覆盖整个可见光波段.

对法-珀仪来说，中心附近区域波长为 λ 的 k 级与波长为 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 $k-1$ 级发生重叠的条件为

$$k\lambda = (k-1)(\lambda + \Delta\lambda).$$

所以 2 级光滑的自由光谱范围为

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\lambda}{k-1} \approx \frac{\lambda}{k} \approx \frac{\lambda^2}{2nh}.$$

如果取 $\lambda=5500$ Å，$n=1.0$，则

$$\Delta\lambda_2 \approx 0.03 \text{ Å}.$$

由此可见，法-珀仪是一种长程干涉仪，有很高的色分辨本领，但是其量程很窄，仅适用于高分辨光谱技术.

对棱镜来说，由于只有一套光谱，故无光谱级(序)之间的重叠问题，自由光谱范围不受限制. 当然，考虑到棱镜材料的吸收，对于从红外到可见再到紫外等不同波段，应分别选用不同材料的棱镜. 棱镜光谱不分级别，使入射光能充分集中在一套谱线上，可提高光谱分析的灵敏度. 这是棱镜光谱仪的一大优点.

*§3 三维光栅——X射线在晶体上的衍射

1. 如图 4-8(a),在透明膜上压上一系列平行等距的劈形纹路,制成一块相位型透射式闪耀光栅,透明膜折射率为 1.5,劈角为 0.1 rad,纹路密度为 100 条/mm. 求:

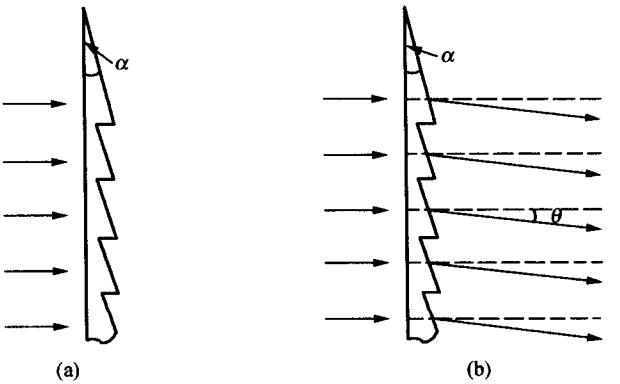


图 4-8

(1) 该光栅单元衍射 0 级的方位角(以入射方向为准),并在图上标出;

(2) 该光栅的 1 级闪耀波长为多少?

解 (1) 单元衍射的 0 级方向应是几何光学的传播方向. 在小棱镜劈角 α 很小的条件下,出射光束的偏转角(如图 4-8(b)所示)为

$$\theta \approx (n-1)\alpha = 0.5 \times 0.1 \text{ rad} = 0.05 \text{ rad}.$$

(2) 在 0 级方向,两相邻单元之间的光程差为

$$\Delta L = d\sin\theta,$$

使其满足 1 级主极强的波长条件为

$$d\sin\theta = \lambda_1.$$

由此便可算出 1 级闪耀波长为

$$\lambda_{1b} = \frac{1 \times 0.05 \text{ rad}}{100/\text{mm}} = 5000 \text{ Å}.$$

2. 如图 4-9 所示的光栅模型可视为等间距排列的一维相干点

源. 试就以下两种情况分析 Oxz 平面内夫琅禾费衍射主极大条件：

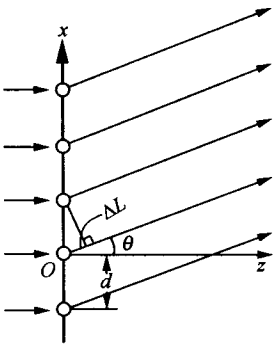


图　4-9

(1) 入射波长连续；

(2) 入射波长单色，且满足 $d=10\lambda$.

解　考查衍射角为 θ 的一束平行次波线的相干叠加. 主极大条件取决于相邻光程差 ΔL 是否可能等于波长的整数倍，即

$$\Delta L = d\sin\theta$$

是否满足

$$d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \text{①}$$

由此可见：

(1) $\theta=0$ 的方向为所有波长的 0 级主极大方向.

(2) 考虑到衍射角的取值范围为 $0\sim\pi/2$，能获得 1 级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_1 < d;$$

能获得 2 级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_2 < d/2;$$

能获得 3 级主极大的波长范围为

$$0 < \lambda_3 < d/3.$$

依此类推可得，在入射波长连续的条件下，能产生非 0 级主极大的波长最大值为

$$\lambda_m = d.$$

波长大于 λ_m 的入射光经一维光栅衍射将产生隐失波.

(3) 当入射光波长

$$\lambda = 1/10d$$

时，将上式代入式①得

$$\sin\theta = k/10.$$

考虑到 $\sin\theta\leqslant 1$，于是有

$$k \leqslant 10,$$

即这种情况下所获得主极大的最高级数为 10.

3. 如图 4-10(a)所示的光栅模型可视为二维列阵的相干点源.

试就以下两种情况分析 Oxz 平面内的夫琅禾费衍射主极大条件：

(1) 入射波长连续；

(2) 入射波长单色，且 $d_1=d_2=d=10\lambda$.

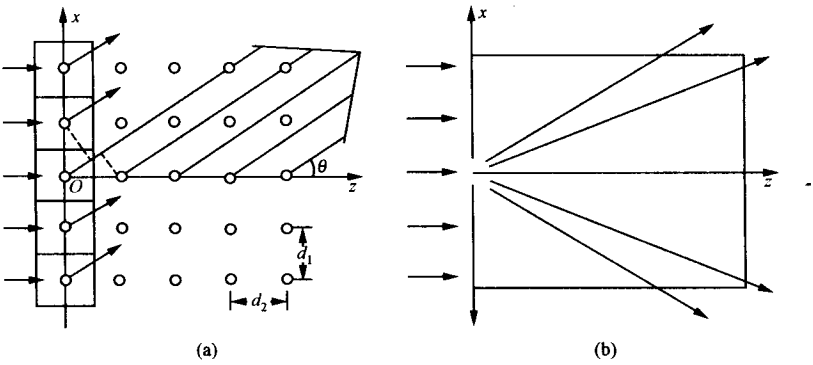


图 4-10

解 首先说明，这种光栅模型的实际背景是二维晶片，模型中的相干点源相当于处在元胞(图 4-10(a)中以正方形格子表示)中心的实物粒子(如原子、离子、分子等散射源). 应该说，原胞中的散射源连同周围的次波源共同激发了单元衍射波，其具体形态当然是相当复杂的. 经第一排元胞作用后而产生的衍射波，先波及第二排元胞，再波及第三排元胞，等等，使整个二维晶片等效于二维列阵的相干点源. 虽然沿入射方向自左向右，经一排排元胞的作用，波前变换是复杂的，但是整个衍射场主极大的方位是既满足排内点间干涉主极大条件，又满足排间干涉主极大条件的那些方位，这与每排波前的具体形态是无关的. 考虑到沿平行 x 轴方向排内各点等相位，沿 z 轴方向相邻两排相位依次落后 $\Delta\varphi=(2\pi/\lambda)d_2$，故上述两项主极大条件应当写成

$$d_1\sin\theta = k_1\lambda, \qquad ①$$

$$d_2 - d_2\cos\theta = k_2\lambda \qquad ②$$

$$(k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

由此可见：

(1) $\theta=0$ 的方向能同时满足式①和②. 此时 $k_1=k_2=0$，即对于

所有波长来说，其零级主极大方向正是入射光直接透射的方向.

(2) 根据式①，能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{1m} = d_1;$$

根据式②，能产生非零级主极大的波长范围上限为

$$\lambda_{2m} = d_2.$$

所以，当入射光为连续谱时，能同时满足式①，②，获得二维衍射非零级主极大的波长范围也应当是受限制的，其最大值应取 λ_{1m}，λ_{2m} 两者之中的短者.

(3) 当入射光为单色，且 $d_1=d_2=10\lambda$ 时，满足式①的 k_1 取值是受限制的，即

$$|k_1| \leqslant 10,$$

且衍射角 θ 的取值是分立的，满足

$$\sin\theta = k_1/10 \quad (k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 10).$$

将此值代入式②，只有那些能保证 k_2 取值为整数的解才被保留下来，最终成为二维衍射主极大的方位. 为此，把式①代入式②，解出

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{d - d\cos\theta}{\lambda} \\ &= \frac{d}{\lambda} - \frac{d}{\lambda}\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{d}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 - k_1^2} \\ &= 10 - \sqrt{100 - k_1^2}. \end{aligned}$$

结果如表 4-1 所列.

表　4-1

k_1	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10
$\sqrt{100-k_1^2}$	10	$\sqrt{99}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{84}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{51}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{19}$	0
k_2	0	非整数	非整数	非整数	非整数	非整数	2	非整数	4	非整数	10

由此可见，在 $d=10\lambda$ 的条件下，这块光栅(二维点阵)在 Oxz 平面内只出现 7 个夫琅禾费衍射斑(参见图 4-10(b)). 如果 d/λ 是其他比值(甚至是非整数)，则保留下来的夫琅禾费衍射斑的数目也将不同，甚至一个非零级衍射斑也无法出现. 我们不妨用一对 (k_1, k_2)

值来标定这7个衍射斑，连同相应的衍射角 θ，列于表4-2.

表 4-2

(k_1,k_2)	(0,0)	(6,2)	(−6,2)	(8,4)	(−8,4)	(10,10)	(−10,10)
θ	0°	36°52′	−36°52′	53°8′	−53°8′	90°	−90°

4. 在上题二维点阵光栅中，点阵常数为 d. 设入射波长连续，并选取衍射角从90°减小的任意三个值. 试分析出现衍射主极大的波长选择性.

解 二维点阵衍射主极大条件为

$$\begin{cases} d\sin\theta = k_1\lambda \\ d - d\cos\theta = k_2\lambda \end{cases} \quad (k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \qquad ①$$

由此解出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

选取 $\theta=80°, 70°, 60°$ 三个值，分别算出

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos80°}{\sin80°} \approx 0.84 = \frac{21}{25},$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos70°}{\sin70°} \approx 0.70 = \frac{7}{10},$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1-\cos60°}{\sin60°} \approx 0.58 = \frac{29}{50}.$$

根据式①，对于 $\theta=80°$，选 $k_1=25, k_2=21$，选出波长

$$\lambda_1 = \frac{\sin80°}{25}d \approx 0.039d;$$

对于 $\theta=70°$，选 $k_1=10, k_2=7$，选出波长

$$\lambda_2 = \frac{\sin70°}{10}d \approx 0.094d;$$

对于 $\theta=60°$，选 $k_1=50, k_2=29$，选出波长

$$\lambda_3 = \frac{\sin60°}{50} \approx 0.017d.$$

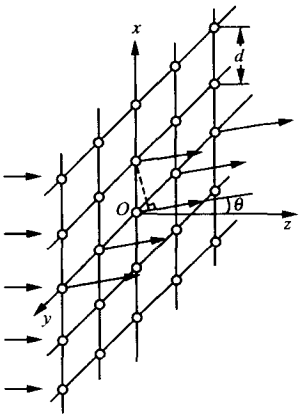


图　4-11

综合上题、本题的分析和计算结果，我们再一次看到，对于周期性结构（光栅）的衍射，当单色光入射时具有角度选择性时，只有在某些特定的方位出现衍射主极大；当连续谱入射时具有波长选择性时，在任意角方位只有某些特定的波长出现衍射主极大. 而随着周期性结构维数的增加，从一维到二维到三维，这两种选择性将更为苛刻.

5. 如果衍射单元是在 Oxy 平面内的二维点阵（如图 4-11），试分析平行于 Oxz 平面方向的夫琅禾费衍射的主极大条件.

解　沿平行 x 轴的每排内部点间干涉的主极大条件为

$$d\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

而沿 y 轴的排间干涉是等光程的. 因此，凡是满足上述条件的主极大方向，在排间干涉中都将保留下来. 在平行 Oxz 平面内衍射时，此情况与本节习题 2 中的一维点阵相似.

第五章　傅里叶变换光学

§1　衍射系统的屏函数和相因子判断法

1. 设薄透镜由折射率为 n_L 的材料组成，物方和像方的折射率分别是 n 和 n'，导出其相位变换函数(用透镜的焦距表示出来).

解　如图 5-1，在透镜前后各取一个平面与顶点相切，且与光轴垂直，入射点为 $P_1(x,y)$，出射点为 $P_2(x,y)$. 在薄透镜傍轴条件下，可近似地认为光线从等高处变向出射. 相位差为

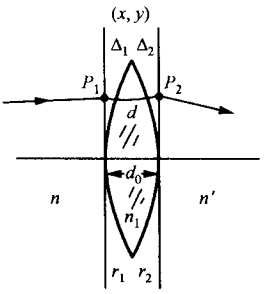


图　5-1

$$\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\approx k_0(n\Delta_1+n_Ld+n'\Delta_2). \qquad ①$$

忽略透镜对光能的损耗，其相位变换函数简化为

$$\tilde{t}_p(x,y)\approx \exp[\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)]. \qquad ②$$

考虑到

$$d=d_0-(\Delta_1+\Delta_2),$$

式中

$$\Delta_1\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1},\quad \Delta_2\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}.$$

此时，式①改写为

$$\begin{aligned}&\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)\\&\approx k_0\left[\frac{n-n_L}{2r_1}(x^2+y^2)-\frac{n'-n_L}{2r_2}(x^2+y^2)\right]\\&=\frac{1}{2}k_0\left(\frac{n-n_L}{2r_1}-\frac{n'-n_L}{2r_2}\right)(x^2+y^2),\end{aligned}$$

式中略写了与 x,y 无关的项 k_0d_0. 真空中的波矢值 k_0 与像方波矢值 k' 之间的关系为

$$k' = n'k_0.$$

于是式②改写为

$$\tilde{t}_p(x,y) \approx \exp\left[-\mathrm{i}k'\frac{(x^2+y^2)}{2F'}\right],$$

式中

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{n_L - n}{r_1} - \frac{n_L - n'}{r_2}\right).$$

不难看出 F' 就是像方焦距. 因为当平行光正入射时，入射波前为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1;$$

出射波前为

$$\tilde{U}_2(x,y) = \tilde{t}_p\tilde{U}_1 = A_1\exp\left(-\mathrm{i}k'\frac{x^2+y^2}{2F'}\right),$$

这正是中心在轴上的球面波波前函数的标准形式. 如 $F'>0$，$\tilde{U}_2$ 是会聚的球面波；如 $F'<0$，$\tilde{U}_2$ 是发散的球面波.

2. 如图 5-2，将一正弦光栅与一薄透镜叠放在一起. 试写出此组合系统的屏函数.

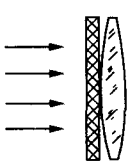


图　5-2

解　由两个屏密接的组合系统的屏函数应是各单个屏函数的乘积，即

$$\tilde{t} = \tilde{t}_1\tilde{t}_2,$$

式中 $\tilde{t}_1$ 是正弦光栅的屏函数：

$$\tilde{t}_1 = t_0 + t_1\cos 2\pi fx,$$

$\tilde{t}_2$ 是薄透镜的屏函数：

$$\tilde{t}_2 = \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= (t_0 + t_1\cos 2\pi fx)\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x_2+y_2}{2F}\right)\\ &= t_0\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - f\lambda x\right)\right]\\ &\quad + \frac{1}{2}t_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2F} + f\lambda x\right)\right].\end{aligned}$$

3. (1) 长长的一行树，相邻的两棵树间距为 10 m. 这行树的空间频率(基频)为多少？一架高空摄影机对准这行树拍照，在长度为 10 cm 的胶卷上出现 200 棵树的像. 胶卷上图像的空间频率为多少？

(2) 在一张白纸上等间隔地画上许多等宽的平行黑条纹. 设黑条纹的宽度 3 cm，白底宽 5 cm. 这张图案的空间频率(基频)为多少？

(3) 图样全同的单元在平面上重复排列成二维列阵，它在 x 轴的间隔为 a，在 y 轴的间隔为 b，其空间频率为多少？在转过角为 θ 的新坐标系中，沿 x' 轴第一单元的坐标 (x,y) 为 $(2a,b)$，沿 y' 轴第一单元的坐标 (x,y) 为 $(-a,b)$. 求空间频率 $f_{x'}, f_{y'}$.

解 (1) 一维周期性结构的空间频率等于空间周期 d 的倒数，即

$$f = 1/d,$$

当 $d=10$ m 时，$f=0.1$ /m，当 $d=(10/200)$ cm 时，$f=2\times10^3$ /m.

(2) 如图 5-3(a)，对于二维周期性的图案，其空间频率应有两个分量 f_x, f_y. 当我们取坐标系 Oxy 与平行黑条纹分别平行(或正交)时，则

$$f_x = f = \frac{1}{d_1 + d_2} = \frac{1}{3\,\text{cm} + 5\,\text{cm}}$$
$$= 0.125\ /\text{cm} = 12.5\ /\text{m},$$

$$f_y = 0.$$

当我们取新坐标系 $Ox'y'$ 时，图案的空间频率 f'_x, f'_y 与正交时所得的最高空间频率 f 的关系分别为

$$f_{x'} = f\cos\theta, \quad f_{y'} = f\sin\theta.$$

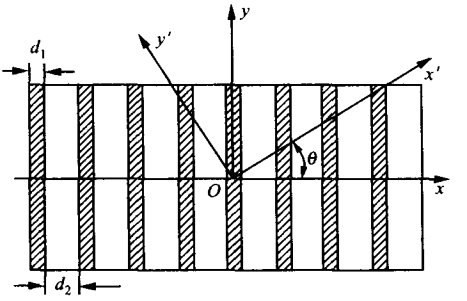
如取 $\theta=30°$，则

$$f_{x'} \approx 0.108\ /\text{cm} = 10.8\ /\text{m},$$
$$f_{y'} = 0.0625\ /\text{cm} = 6.25\ /\text{m}.$$

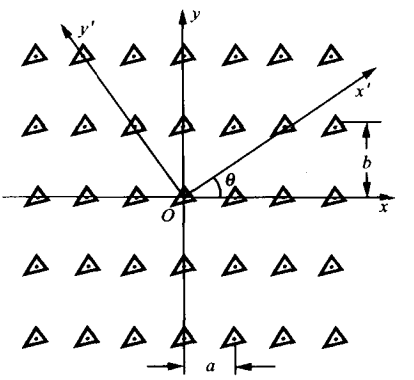
(3) 如图 5-3(b)，二维列阵在坐标系 Oxy 中两个方向的空间频率分别为

$$f_x = \frac{1}{a}, \quad f_y = \frac{1}{b}.$$

在坐标系 $Ox'y'$ 中的空间周期分别为



(a)



(b)

图　5-3

$$d_{x'}=\sqrt{(2a)^2+b^2},\quad d_{y'}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

相应的空间频率为

$$f_{x'}=\frac{1}{d_{x'}}=\frac{1}{\sqrt{4a^2+b^2}},$$

$$f_{y'}=\frac{1}{d_{y'}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. 一列平面波，波长为 6328 Å，方向角 $\alpha=30°,\beta=75°$.

(1) 求复振幅的空间频率 f_x,f_y,f_z；

(2) 这列平面波中沿什么方向的空间频率最高？最高空间频率

为多少？相应的最短空间周期为多少？

(3) 在光谱学中常使用“波数”$\tilde{\nu}=1/\lambda$ 的概念. 它与平面波场中的空间频率有什么联系和区别？

解 (1) 平面波波函数的标准形式为

$$\tilde{U}(x,y,z) = A\exp[\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)],$$

其空间频率分别为

$$f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{k\cos\alpha}{2\pi} = \frac{\cos\alpha}{\lambda},$$

$$f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{k\cos\beta}{2\pi} = \frac{\cos\beta}{\lambda},$$

$$f_z = \frac{k_z}{2\pi} = \frac{k\cos\gamma}{2\pi} = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}.$$

取 $\lambda=6328$ Å，$\alpha=30°$，$\beta=75°$代入，得

$$f_x \approx 1.37\ /\mu\mathrm{m},\quad f_y \approx 0.41\ /\mu\mathrm{m},\quad f_z \approx 0.68\ /\mu\mathrm{m}.$$

(2) 平面波沿波矢方向的波面排列最密，因而空间频率最高，其值为

$$f_\mathrm{m} = \sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2} = 1/\lambda \approx 1.58\ /\mu\mathrm{m}.$$

光波长 λ 就是沿波矢方向波函数的空间周期.

(3) 由以上讨论可见，波数 $\tilde{\nu}=1/\lambda$ 正是沿波矢方向的平面波的空间频率. 它比其他任何方向的空间频率都高.

5. 正弦光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y) = t_0 + t_1\cos(2\pi f x + \varphi_0).$$

(1) 一束平行光正入射于这正弦光栅上，求透射场的复振幅分布函数 $\tilde{U}_2(x,y)$ 的空间频率.

(2) 求透射场强度分布函数 $I_2(x,y)=\tilde{U}_2\tilde{U}_2^*$ 的空间频率.

(3) 利用图 5-4(a)所示的装置制备正弦光栅，所用照明光波长为 6328 Å，$\theta_1=\theta_2=30°$. 算出这样制出的正弦光栅在(1)，(2)中空间频率的具体数值.

(4) 用此正弦光栅按图 5-4(b)所示的方法再制备一张新的光

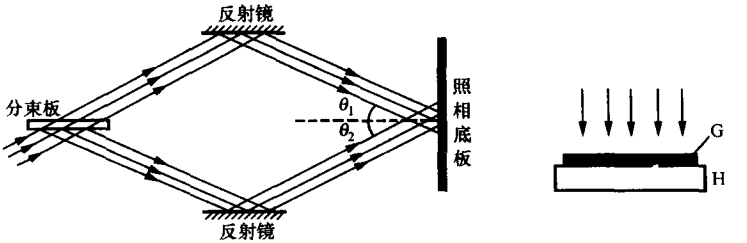


图　5-4

栅：将记录介质(感光底片)H 紧贴在正弦光栅 G 的下面，先用一束平行光照明，然后对曝光的记录介质进行线性冲洗. 这张新光栅的复振幅透过率函数包含有几种空间频率成分？

解　(1) 透射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x,y)&=\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}\\&=A_1[t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)];\end{aligned}$$

可见其空间频率有两个，即与直流项对应的空间频率

$$f_0=0$$

和与交流项对应的空间频率

$$f_1=f.$$

(2) 透射场强度为

$$\begin{aligned}I_2(x,y)&=\tilde{U}_1\tilde{U}_2^*\\&=I_1[t_0^2+2t_0t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)+t_1^2\cos^2(2\pi fx+\varphi_0)]\\&=I_1\left[\left(t_0^2+\frac{1}{2}t_1^2\right)+2t_0t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}t_1^2\cos(4\pi fx+2\varphi_0)\right];\end{aligned}$$

可见其空间频率有三个，分别是

$$f_0=0,\quad f_1=f,\quad f_2=2f.$$

(3) 如用两束相干平行光对称入射，相干叠加而制备一张正弦光栅，则其空间频率为

$$f=\frac{1}{d}=\frac{2\sin\theta}{\lambda}.$$

根据本题 $\theta=30°$，$\lambda=6328$ Å，得

$$f_1=f=\frac{1}{\lambda}\approx\frac{1}{1.58\ \mu m}=1580\ /mm,$$

$$f_2=2f\approx 3160\ /mm.$$

(4) 对底片曝光起作用的是光强，所以新光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}_H\propto I_2=I_1\left[\left(t_0+\frac{1}{2}t_1^2\right)+2t_0t_1\cos 2\pi fx+\frac{1}{2}t_1^2\cos 4\pi fx\right].$$

如用(3)所得的正弦光栅，则 t_H 包含的三种空间频率数值为

$$f_0=0,\quad f_1=1580\ /mm,\quad f_2=3160\ /mm.$$

这个结果说明，以正弦光栅为底片，用曝光线性冲洗的办法不能复制正弦光栅，这一点与黑白光栅是不同的. 黑白光栅是可以用母光栅光刻复制的.

6. 一正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+t_1\cos 2\pi fx.$$

现将它沿 x 轴平移 $\Delta x=d/6,d/4,d/2,d,3d/2$，写出移动后的屏函数表达式.

解 位移 Δx 引起相移 $\Delta\varphi$，两者的定量关系为

$$\Delta\varphi=-2\pi f\Delta x=-\frac{2\pi}{d}\Delta x. \qquad ①$$

此时，屏函数的表达式写成

$$t(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\Delta\varphi).$$

由式①得

$$\Delta\varphi=\begin{cases}-\pi/3 & (\Delta x=d/6),\\ -\pi/2 & (\Delta x=d/4),\\ \pi & (\Delta x=d/2),\\ 2\pi & (\Delta x=d),\\ 3\pi & (\Delta x=3d/2).\end{cases}$$

7. 正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi f_xx+2\pi f_yy).$$

现将它沿斜方向平移 $\Delta\boldsymbol{r}=(\Delta x,\Delta y)$，写出移动后的屏函数表达式.

解　对于空间频率为(f_x, f_y)的正弦光栅，当位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}=(\Delta x, \Delta y)$（见图 5-5）时，相应的相移$(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y)$为

$$\Delta\varphi_x = -2\pi f_x \Delta x,$$

$$\Delta\varphi_y = -2\pi f_y \Delta y.$$

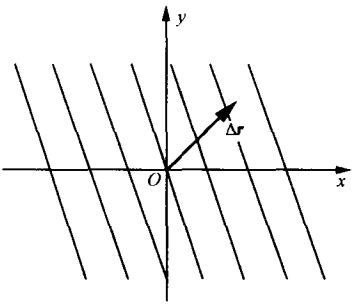


图　5-5

此时，屏函数表达式为

$$t(x,y) = t_0 + t_1\cos[2\pi f_x(x-\Delta x) + 2\pi f_y(y-\Delta y)].$$

§2　正弦光栅的衍射

1. 用薄透镜的相位变换函数导出傍轴条件下的横向放大率公式.

解　如图 5-6，傍轴物点 P 与透镜相距为 s，坐标为$(x_0, 0)$. 由此发射的发散球面波到达透镜的波前函数（相因子中略去与 x, y 无关的部分）为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{x_0 x}{s}\right)\right].$$

经透镜相位变换函数的作用，出射波前函数为

$$\tilde{U}_2(x,y) = \tilde{t}_p\tilde{U}_1$$

$$= A_1\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{x_0 x}{s}\right)\right].$$

考虑到轴外点源所联系的球面波前函数的标准形式，将上式改写成

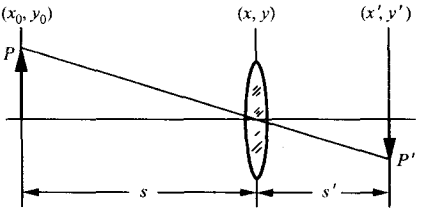


图 5-6

$$\tilde{U}_2(x,y) = A_1\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{x^2+y^2}{2s'} - \frac{1}{s'}\left(-\frac{s'x_0}{s}\right)x\right]\right\},$$

式中

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{s}.$$

运用相因子判断法可知，$\tilde{U}_2(x,y)$代表会聚于轴外的球面波，纵向距离(即像距)为 s'，横向坐标为

$$x' = -(s'/s)x_0,$$

即横向放大率为

$$V \equiv \frac{x'}{x_0} = -\frac{s'}{s}.$$

2. 用楔形棱镜的相位变换函数导出傍轴光束斜入射时产生的偏向角 δ.

解 如图 5-7，入射光束傍轴倾角为 θ，其波前函数为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta).$$

经薄棱镜相位变换函数作用以后，出射波前函数为

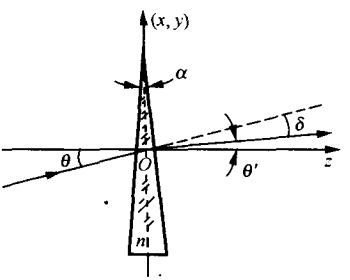


图 5-7

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x,y) &= \tilde{t}_p\tilde{U}_1\\ &= A_1\exp[-\mathrm{i}k(n-1)\alpha x]\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta)\\ &= A_1\exp\{\mathrm{i}k[\sin\theta - (n-1)\alpha]x\}\\ &= A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta'),\end{aligned}$$

式中

$$\sin\theta' = \sin\theta - (n-1)\alpha.$$

运用相因子判断法可知，出射光为倾角等于 θ' 的平行光，所以偏向角为

$$\begin{aligned}\delta &= \theta' - \theta \approx \sin\theta' - \sin\theta \\ &= -(n-1)\alpha.\end{aligned}$$

最后一个等号右边的负号说明，当顶角 α 在上方时，则偏向角朝下（顺时针偏转）；当顶角 α 在下方时，则偏向角朝上（逆时针偏转）.

3. 讨论斜入射时正弦光栅夫琅禾费衍射. 证明衍射（方位角）公式与正入射时的差别仅在于把 $\sin\theta$ 换为 $\sin\theta-\sin\theta_0$，这里 θ_0 为入射光的倾角.

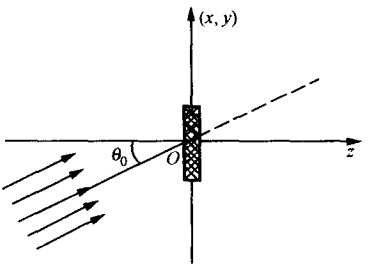


图　5-8

解　如图 5-8，斜入射时平行光的波前函数为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_0),$$

正弦光栅的屏函数为

$$\tilde{t}(x,y) = t_0 + t_1\cos 2\pi fx.$$

故出射波前为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x,y) &= \tilde{t}\tilde{U}_1 \\ &= A_1(t_0 + t_1\cos 2\pi fx)\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_0) \\ &= A_1t_0\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_0) + A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\sin\theta_0 + f\lambda)x]/2 \\ &\quad + A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\sin\theta_0 - f\lambda)x]/2.\end{aligned}$$

运用相因子判断法可知，上式包含三列平面衍射波，其中

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0(x,y) &= A_1t_0\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_0), \\ \tilde{U}_{+1}(x,y) &= (A_1/2)t_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{+1}). \\ \tilde{U}_{-1}(x,y) &= (A_1/2)t_1\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_{-1}),\end{aligned}$$

式中

$$\sin\theta_{+1} = \sin\theta_0 + f\lambda, \quad \sin\theta_{-1} = \sin\theta_0 - f\lambda.$$

它们在远场分离为三个夫琅禾费衍射斑，衍射角分别为 $\theta_0,\theta_{+1},\theta_{-1}$，满足

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = \begin{cases} f\lambda & (+1\text{ 级衍射斑}), \\ 0 & (0\text{ 级斑}), \\ -f\lambda & (-1\text{ 级衍射斑}). \end{cases}$$

与正入射时的区别仅在于，把 $\sin\theta$ 换做 $(\sin\theta-\sin\theta_0)$.

4. 如图 5-9(a)，制备正弦光栅时所用的两束平行光的波长为 λ_1，其中一束正入射，另一束倾角为 θ_1. 用此法制成的光栅作夫琅禾费衍射实验时，照明光正入射，波长为 λ_2(如图 5-9(b)).

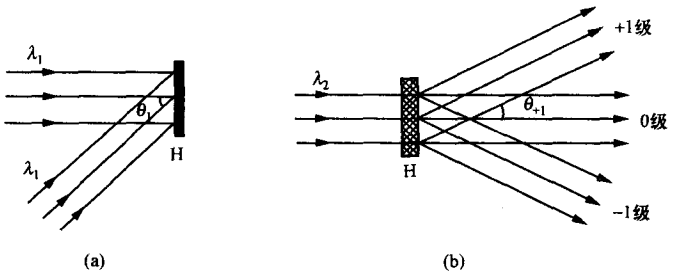


图 5-9

(1) 证明

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

式中 θ_{+1}是+1 级衍射斑的衍射角；

(2) 如果两光束干涉时用红外光 $\lambda_1=10.6\ \mu m$(二氧化碳激光)，衍射时用可见光 $\lambda_2=6328$ Å(氦氖激光)，$\theta_1=20°$，求 θ_{+1}值.

解 (1) 利用两束平行光相干场的条纹间距公式，可得本题制备的正弦光栅的频率为

$$f=\frac{1}{d}=\frac{\sin\theta_1}{\lambda_1}.$$

如用波长为 λ_2 的正入射平行光照明此光栅，则其+1 级平面衍射波的衍射角正弦为

$$\sin\theta_{+1}=f\lambda_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_1. \qquad ①$$

衍射角与入射角正弦值之比等于波长之比，即

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

这表明我们可以通过改换波长来实现再现像的缩放.

(2) 即取 $\lambda_1=10.6\ \mu m$，$\lambda_2=0.6328\ \mu m$，$\theta_1=20°$，代入式①得

$$\sin\theta_{+1}=\frac{0.6328}{10.6}\sin20^\circ\approx 0.02042,$$

即

$$\theta_{+1}\approx 1^\circ10'.$$

5. 设光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x)=t_0+t_1\cos2\pi fx+t_1\cos(2\pi fx+\pi/2). \qquad ①$$

这块光栅的夫琅禾费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与 0 级斑的比值是多少？

解　这块光栅的复振幅透过率函数除直流成分项 t_0 外，后面两项对应同一空间频率 f. 可以肯定，这块光栅仍将只有三个夫琅禾费衍射斑. 但在分析衍射斑中心强度的比值时，必须注意到后两项给出的两个同级衍射斑之间是有 $\pi/2$ 相位差的，因此

$$A_0\propto t_0,$$

$$A'_{+1}=A''_{+1}\propto\frac{1}{2}t_1,\quad A_{+1}=\sqrt{A'^2_{+1}+A''^2_{+1}}\propto\frac{\sqrt{2}}{2}t_1,$$

$$A'_{-1}=A''_{-1}\propto\frac{1}{2}t_1,\quad A_{-1}=\sqrt{A'^2_{-1}+A''^2_{-1}}\propto\frac{\sqrt{2}}{2}t_1.$$

所以 ±1 级衍射斑中心强度与 0 级斑之比值为

$$\frac{I_{\pm1}}{I_0}=\frac{A^2_{\pm1}}{A^2_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2.$$

另一种算法是将式①等号右边后两项合并为一项，即

$$\tilde{t}(x)=t_0+2t_1\cos\left(2\pi fx+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=t_0+\sqrt{2}\,t_1\cos\left(2\pi fx+\frac{\pi}{4}\right).$$

由正弦光栅夫琅禾费衍射特征表[①]查出

$$A_{\pm1}\propto\sqrt{2}\,t_1/2,\quad A_0\propto t_0.$$

故

$$\frac{I_{\pm1}}{I_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2.$$

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：57.

6. 试分析一正弦光栅与一薄透镜密接组合系统的夫琅禾费衍射(参见本章§1习题2).

解 当平行光正入射时,经正弦光栅后成为三列平面衍射波,其方位角(衍射角)正弦值分别为

$$\sin\theta_0 = 0,$$

$$\sin\theta_{\pm 1} = \pm f\lambda.$$

这三列平面衍射波经透镜变换为后焦面上的三个衍射斑S_0, S_{+1}, S_{-1}(如图5-10),其位置坐标分别为

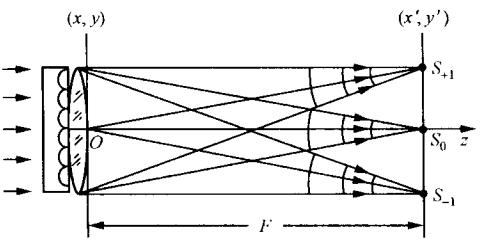


图 5-10

$$x'_0 = 0, \quad x'_{\pm 1} \approx \pm f\lambda F.$$

当然,也可以从组合系统的屏函数

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t_0\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - f\lambda x\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2F} + f\lambda x\right)\right] \\ &= t_0\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right) + \frac{1}{2}t_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{f\lambda F x}{F}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{(-f\lambda F)x}{F}\right]\right\}\end{aligned}$$

出发,运用相因子判断法求得上述三列会聚球面衍射波.

7. 试分析由正弦光栅再制备而得到的正弦光栅的夫琅禾费衍射(参见本章§1习题5).

解 我们注意到如此获得的复制光栅,其透过率函数除保留原有正弦光栅的频率成分外,还增加一种二倍频成分.为简单起见,将复制光栅的复振幅透过率函数直接写成

$$\tilde{t}_{\mathrm{H}} = \left(t_0^2 + \frac{1}{2}t_1^2\right) + 2t_0t_1\cos 2\pi fx + \frac{1}{2}t_1^2\cos 4\pi fx,$$

式中t_0, t_1分别是上面覆盖的正弦光栅透过率的直流系数和交流系数.由此可见,复制光栅的衍射场主要包含5列平面衍射波,在透镜后焦面上有5个夫琅禾费衍射斑,其角方位分别为

$$\sin\theta=\begin{cases}0 & (0\text{ 级}),\\ \pm f\lambda & (\text{基频}),\\ \pm 2f\lambda & (\text{二倍频}).\end{cases}$$

2 级斑与 1 级斑中心强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{t_1^2/4}{t_0t_1}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2.$$

8. 如图 5-11(a),G 为一块正弦光栅,其复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+t_1\cos 2\pi fx.$$

现用一束会聚球面光波照明. 试用相因子判断法导出傍轴条件下衍射场的主要特征.

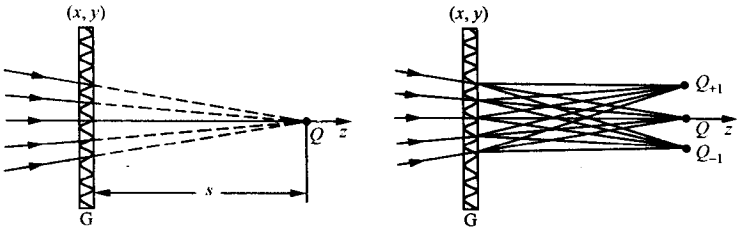


图　5-11

解　傍轴条件下,中心在轴上的会聚球面波波前函数的标准形式为

$$\tilde{U}_1(x,y)\approx A_1\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right).$$

经正弦光栅 G 作用后,透射波前为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x,y)&=(t_0+t_1\cos 2\pi fx)\tilde{U}_1\\&=\left[t_0+\frac{1}{2}t_1\exp(\mathrm{i}2\pi fx)+\frac{1}{2}t_1\exp(-\mathrm{i}2\pi fx)\right]\tilde{U}_1\\&=t_0A_1\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}t_1A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right]\\&\quad+\frac{1}{2}t_1A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}+\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right].\end{aligned}$$

运用相因子判断法可知衍射场主要包含三种成分的衍射波(如图5-11(b)所示)：上式第三个等号右边的第一项

$$\tilde{U}_0(x,y)=t_0A_1\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)$$

代表会聚于 s 处的球面波，即入射光的直接透射波，当然能流有所减少；而第二项

$$U_{+1}(x,y)=\frac{1}{2}t_1A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right]$$

代表会聚于轴外上方 Q_{+1} 点的球面波，Q_{+1} 点的位置坐标为($f\lambda s$，0，s)；第三项

$$\tilde{U}_{-1}(x,y)=\frac{1}{2}t_1A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}+\frac{f\lambda sx}{s}\right)\right]$$

代表会聚于轴外下方 Q_{-1} 点的球面波，其位置坐标为 $Q_{-1}(-f\lambda s,0,s)$.

以上结果表明，正弦光栅对波前的变换作用同时相当于两个楔形棱镜：一个劈角在下方的棱镜产生像点 Q_{+1}，一个劈角在上方的棱镜产生像点 Q_{-1}.

9. 装置如图5-12(a)，将一点源置于抛物面镜的焦点，用以实现平面波与球面波的干涉. 设记录介质H上平面波振幅为 A_1，球面波(傍轴条件)的振幅为 A_2.

(1) 试分析干涉条纹的形状；

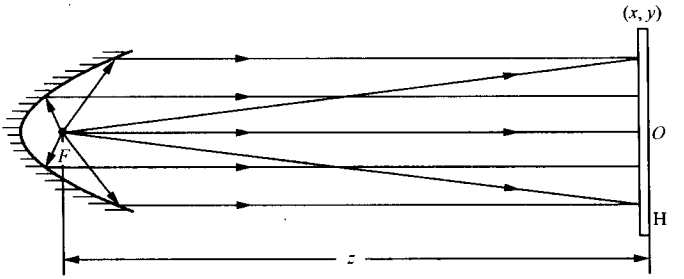
(2) 导出干涉场的强度分布；

(3) 若将感光底片H作线性冲洗而成为一张波带片，再用一束相同波长的平行光束正入射于该波带片，试用相因子判断法分析衍射场的主要特征.

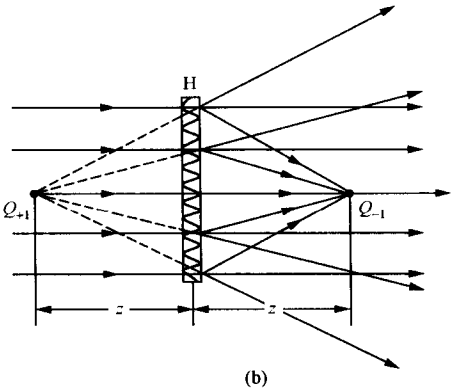
解 (1) 干涉花样的形状是以 O 点为中心的同心环.

(2) 干涉场强度分布为

$$I_{\mathrm{H}}(x,y)=\left[A_1+A_2\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]\times\left[A_1+A_2\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]^*$$



(a)



(b)

图　5-12

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(k\frac{r^2}{2z}\right).$$

(3) 入射光波前 $\tilde{U}_1(x,y)=A$. 经波带片 H 后的透射场为

$$\tilde{U}_2(x,y)=\tilde{t}_H\tilde{U}_1 \propto AI_H$$

$$= A(A_1^2 + A_2^2) + AA_1A_2\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$+ AA_1A_2\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right).$$

我们须知，透射场便是衍射场的波前. 进一步运用相因子判断法可

知，此时衍射场主要包含以下三种衍射波：第一项

$$\tilde{U}_0(x,y) = A(A_1^2 + A_2^2)$$

是一束正出射的平面衍射波；第二项

$$\tilde{U}_{+1}(x,y) = AA_1A_2\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束发散球面衍射波，中心 Q_{+1} 点位于底片左侧，距离为 z；第三项

$$\tilde{U}_{-1}(x,y) = AA_1A_2\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

是一束会聚球面衍射波，中心 Q_{-1} 点位于底片右侧，距离为 z.

底片 H 是一块正弦型的菲涅耳波带片. 由以上讨论可知，它对波前的变换作用相当于两个透镜：一个为发散透镜，产生平行光的虚像点 Q_{+1}；另一个为会聚透镜，产生平行光的实像点 Q_{-1}，如图 5-12(b)所示.

10. 算出下列黑白光栅的前 10 个傅里叶系数 $t_0,\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_9$：

(1) $a/d=1/3$；

(2) $a/d=1/2$.

解 黑白光栅的透过率函数为

$$t(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a/2); \\ 0 & (a/2 < |x| < d/2). \end{cases}$$

傅里叶系数为

$$t_0 = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x = \frac{a}{d};$$

$$\begin{aligned}\tilde{t}_n &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f_n x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f_n x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{d}\frac{\sin\pi f_n a}{\pi f_n} = \frac{a}{d}\frac{\sin n\pi fa}{n\pi fa} \quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由于 $t(x+d)=t(x)$，所以基频

$$f = 1/d.$$

傅里叶系数可写成

$$\tilde{t}_n = \frac{a}{d}\frac{\sin(n\pi a/d)}{n\pi a/d}.$$

(1) 当$\frac{a}{d}=\frac{1}{3}$时,得

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{3},\quad \tilde{t}_1 = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi},\quad \tilde{t}_3 = \frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{3} = 0,$$

$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi},\quad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi},$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{3} = 0,\quad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{14\pi},$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16\pi},\quad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{3} = 0.$$

(2) 当$\frac{a}{d}=\frac{1}{2}$时,得

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{2},\quad \tilde{t}_1 = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi},$$

$$\tilde{t}_2 = \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2} = 0,\quad \tilde{t}_3 = \frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi},$$

$$\tilde{t}_4 = \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{2} = 0,\quad \tilde{t}_5 = \frac{1}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5\pi},$$

$$\tilde{t}_6 = \frac{1}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{2} = 0,\quad \tilde{t}_7 = \frac{1}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{2} = -\frac{1}{7\pi},$$

$$\tilde{t}_8 = \frac{1}{8\pi}\sin\frac{8\pi}{2} = 0,\quad \tilde{t}_9 = \frac{1}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{2} = \frac{1}{9\pi}.$$

§3　阿贝成像原理与相衬显微镜

1. 如图 5-13,设透镜理想成像. 证明在成像光束中任意几个次波源(如图中 a,b,c 点)在像点 Q' 产生的扰动是同相位的. 如果在光路中设有衍射屏,以上结论是否成立?

证　点源在某一场点产生扰动的相位,既决定于点源本身的相位,又决定于点源至场点的光程. 而次波源具有双重性,既是实际

物点 Q 所激发的波场中的一点，又是对像点 Q' 扰动有所贡献的点源. 因此，次波源 a,b,c 点在 Q' 点所产生的扰动相位应表示为

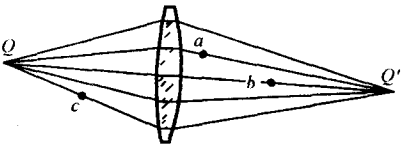


图 5-13

$$\varphi_a(Q')=\varphi_Q(a)+\frac{2\pi}{\lambda}L(aQ')$$
$$=\frac{2\pi}{\lambda}L(Qa)+\frac{2\pi}{\lambda}L(aQ')=\frac{2\pi}{\lambda}L(QaQ'),$$
$$\varphi_b(Q')=\varphi_Q(b)+\frac{2\pi}{\lambda}L(bQ')$$
$$=\frac{2\pi}{\lambda}L(Qb)+\frac{2\pi}{\lambda}L(bQ')=\frac{2\pi}{\lambda}L(QbQ'),$$
$$\varphi_c(Q')=\varphi_Q(c)+\frac{2\pi}{\lambda}L(cQ')$$
$$=\frac{2\pi}{\lambda}L(Qc)+\frac{2\pi}{\lambda}L(cQ')=\frac{2\pi}{\lambda}L(QcQ').$$

再考虑到理想成像的物像等光程性，即

$$L(QaQ')=L(QbQ')=L(QcQ'),$$

所以

$$\varphi_a(Q')=\varphi_b(Q')=\varphi_c(Q').$$

这在分析计算像面衍射场问题中是有用的. 不论光路中是否有衍射屏，只要这些次波源对像点的扰动有所贡献，这个结论依然成立.

2. 证明在傍轴条件下傅氏面上 $\pm n$ 级衍射斑相对 0 级的相位为

$$\varphi_{\pm n}=-k(na)^2/2z,$$

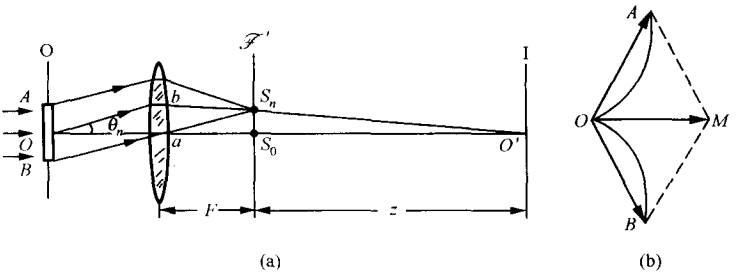
式中 z 是傅氏面到像面的距离，a 为相邻衍射斑中心间的距离.

证 如图 5-14(a)，n 级衍射斑的衍射角满足

$$\sin\theta_n=f_n\lambda=nf\lambda.$$

我们须知，如何决定衍射斑中心的相位是个关键. 衍射斑中心的扰动是物面上大量次波源沿 θ_n 方向传播的次级扰动的相干叠加. 中心次波源 O 点沿光程 $L(ObS_n)$ 到达 S_n 点的相位为

$$\varphi_0(S_n)=\varphi_0+\frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n).$$



(a)　(b)

图　5-14

考虑到单频信息是偶函数，上方 OA 段与下方 OB 段在 S_n 处扰动的相位关系具有对称性，从矢量图(图 5-14(b))中清楚看出，S_n 点总扰动$\overset{\frown}{OM}$的相位与中心点 O 发射的次级扰动(小矢量)相位是一致的.

因此，n 级衍射斑与 0 级斑的相位分别表示为

$$\varphi(S_n) = \varphi_0(S_n) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}L(ObS_n),$$

$$\varphi(S_0) = \varphi_0(S_0) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}L(OaS_0).$$

相位差为

$$\varphi(S_n) - \varphi(S_0) = \frac{2\pi}{\lambda}[L(ObS_n) - L(OaS_0)]. \qquad ①$$

注意到前场的光程差可以转换为后场的光程差

$$L(ObS_n) = L(ObS_nO') - L(S_nO'),$$

$$L(OaS_0) = L(OaS_0O') - L(S_0O'),$$

并考虑到物像等光程性

$$L(ObS_nO') = L(OaS_0O'),$$

于是有

$$L(ObS_n) - L(OaS_0) = -[L(S_nO') - L(S_0O')]. \qquad ②$$

在傍轴条件下，

$$\overline{S_nO'} - \overline{S_0O'} \approx (\overline{S_nS_0})^2/2z, \qquad ③$$

$$\overline{S_nS_0} \approx F\sin\theta_n = nf\lambda F = na, \qquad ④$$

式中 $a = f\lambda F$ 是相邻衍射斑中心间的线距离. 综合式①～④，最后得

相位差为

$$\varphi(S_n) - \varphi(S_0) = -k(na)^2/2z.$$

值得注意的是，对于$-n$级衍射斑的相位差表示式也是如此，不必变号. 当然，按我们原先对相位正负号的习惯约定(相位超前算负)，上式中的负号说明n级衍射斑的实际相位是超前0级斑的.

3. 在一个相干成像系统中，镜头(作为入射光瞳)的相对孔径为1/5，求此系统的截止频率(单位：/mm). (设物平面在前焦面附近，照明波长为0.5 μm.)

解 如图5-15，系统的截止频率f_m由镜头口径限制的最大出射角u_0决定，其关系为

$$\sin u_0 = f_m\lambda.$$

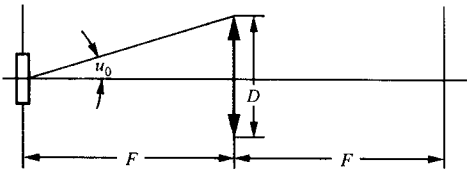


图 5-15

从几何上看，大体上

$$\sin u_0 \approx D/2F,$$

所以

$$f_m = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{D}{F}\right).$$

取镜头的相对孔径$D/F=1/5$，$\lambda=0.5$ μm，算得

$$f_m = 200\ /\text{mm}.$$

4. 利用阿贝成像原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式.

解 上题讨论过的截止频率f_m的倒数便是镜头口径限制下的相干显微成像系统可分辨的最小空间周期

$$d_{min} = \frac{1}{f_{max}} = \frac{\lambda}{\sin u_0} = 2\lambda\Big/\frac{D}{F};$$

而非相干显微成像系统的最小分辨距离公式为

$$\delta y_{min} = 0.61\frac{\lambda}{\sin u_0}.$$

由此可见，d_{min}与δy_{min}的数值很相近.

*§4　夫琅禾费衍射场的标准形式

1. 采用远场装置(如图 5-16)接收夫琅禾费衍射场. 设单缝宽度约为 100 μm,入射光波长 6328 Å. 问:

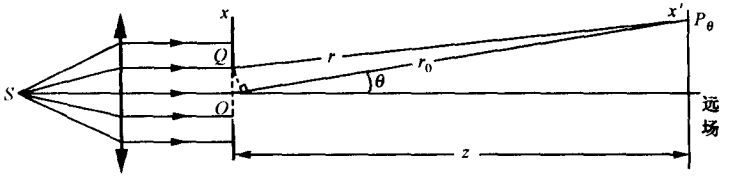


图　5-16

(1) 接收屏幕至少应放多远?

(2) 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅禾费衍射场?

(3) 零级半角宽度为多少?

(4) 在接收屏幕上零级的线宽度有多少?

解　(1) 相对于衍射屏线度 a 来说,远场条件要求纵向距离

$$z \gg a^2/\lambda.$$

取 $a \approx 100\ \mu m$, $\lambda = 0.63\ \mu m$,并选 30 倍作估算,得

$$z = 30a^2/\lambda \approx 48\ cm.$$

(2) 夫琅禾费衍射远场装置只要求接收范围 ρ 满足傍轴条件

$$\rho \ll z.$$

取 $z \approx 50$ cm,并选 10 倍作估算,得

$$\rho = z/10 \approx 5\ cm.$$

(3) 零级半角宽度公式仍然是

$$\Delta\theta_0 \approx \lambda/a = 6.3 \times 10^{-3}\ rad \approx 21'42''.$$

(4) 在接收屏幕零级两侧,暗点之间的线宽度

$$\Delta l_0 \approx 2\Delta\theta_0 z \approx 2 \times (6.3 \times 10^{-3}\ rad) \times 50\ cm = 6.3\ mm.$$

2. 采用像面接收装置(图 5-17(a)或(b))接收单缝的夫琅禾费衍射场. 设单缝宽度约为 1 mm,入射光波长 4880 Å,物距 40 cm,像距 80 cm. 问:

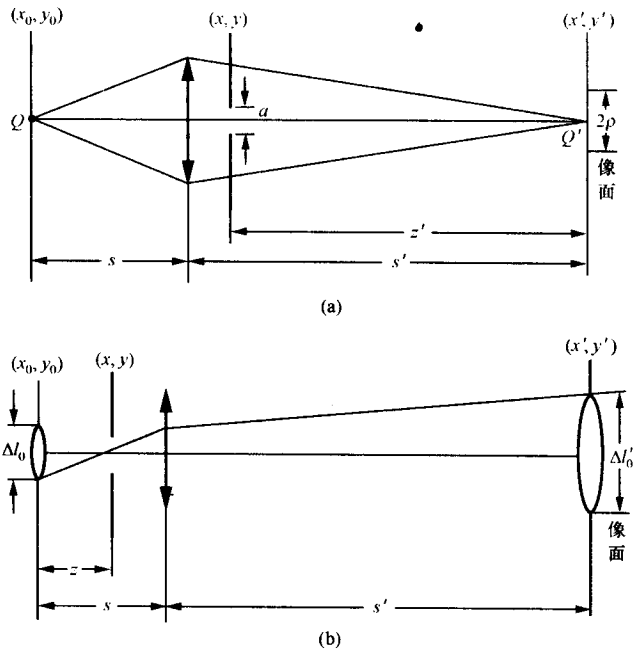


图 5-17

(1) 如果单缝置于透镜后方,要求像面在 1 cm 范围内接收到夫琅禾费衍射场,单缝距像面至少多远?

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧,求零级半角宽度和接收屏幕上零级的线宽度.

(3) 如果单缝离透镜 40 cm 远,求零级半角宽度及它在幕上的线宽度.

(4) 如果单缝置于透镜前方,紧贴在其左侧,情形如何?

解 (1) 如图 5-17(a),像面接收装置对衍射屏和接收屏都只要求傍轴条件,即要求衍射屏线度 a 和接收屏横向线度 ρ 满足

$$z' \gg a, \quad z' \gg \rho.$$

令 $\rho \approx (1/2) \times 1.0\ \text{cm} = 0.5\ \text{cm}$, $a \approx 0.1\ \text{cm}$,并取

$$z' = 10\rho = 5\ \text{cm},$$

即单缝与像面距离大于 5 cm,便足以在像面 1 cm 范围内接收到夫

琅禾费衍射场.

(2) 如果取 $z' \approx s' = 80$ cm，则像面上零级半角宽度仍为

$$\Delta\theta_0 \approx \lambda/a = 4.9 \times 10^{-4}\ \text{rad} \approx 1.7' = 1'42'';$$

而零级线宽

$$\Delta l_0 \approx 2\Delta\theta_0 z' = 2 \times (4.9 \times 10^{-4}\ \text{rad}) \times 80\ \text{cm} \approx 0.78\ \text{mm}.$$

(3) 如果单缝与透镜之间的距离 $s' - z' = 40$ cm，零级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx \lambda/a \approx 4.9 \times 10^{-4}\ \text{rad};$$

而零级线宽缩短为

$$\Delta l_0 \approx 0.39\ \text{mm}.$$

(4) 如果单缝紧贴透镜左侧，情况与(2)相近，零级半角宽度不变，仍为

$$\Delta\theta_0 \approx 4.9 \times 10^{-4}\ \text{rad};$$

而零级线宽仍为

$$\Delta l_0 \approx 0.78\ \text{mm}.$$

如果衍射屏置于透镜前方某处(如图 5-17(b))，利用可逆共轭原理处理最简单：先将光路逆转(自右向左)，视物面 Qx_0y_0 为像面，此时零级线宽为

$$\Delta l_0 = 2\Delta\theta_0 z = 2\frac{\lambda}{a}z.$$

再将光路还原，此时像面 $Q'x'y'$ 上的零级斑就是当初物面 Qx_0y_0 上零级斑的共轭像，故零级线宽

$$\Delta l_0' = V\Delta l_0 = \frac{s'}{s}\left(2\frac{\lambda}{a}z\right) = 2\frac{\lambda}{a}\frac{s'}{s}z.$$

3. 试论证衍射屏置于透镜前方时，像面接收的是夫琅禾费衍射场，并给出此时衍射场的函数形式.

证　如图 5-18，利用已经给出的衍射屏置于透镜后方时的像面衍射场的结果[①]，并根据光路可逆共轭原理，便可论证衍射屏置于透镜前方的情况. 具体说明如下：设平面 Sx_0y_0 是照明物点 S 所在的

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：82～83.

平面，其共轭像面为 $S'x'y'$，衍射平面为 Oxy. 根据光的可逆性原理，如果将光路逆转自右向左，S' 成为物点，S 成为像点. 此时，衍射屏成为透镜后方，所得衍射场为

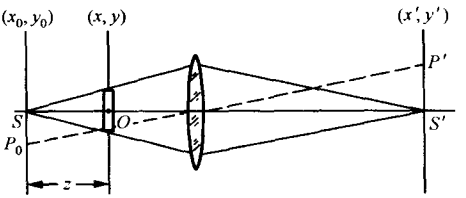


图 5-18

$$\tilde{U}(x_0,y_0)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}A_1 \times\iint\tilde{t}(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{1}{z}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

现在再将照明点源还原至 S 点，则衍射场 $\tilde{U}(x_0,y_0)$ 就回到 $Sx'y'$ 面上，即

$$P_0(x_0,y_0)\to P'(x',y')=(Vx_0,Vy_0),$$
$$\tilde{U}(x_0,y_0)\to\tilde{U}(x',y'),$$
$$\tilde{U}(x',y')=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda Vz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}A_1 \times\iint\tilde{t}(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{1}{zV}(x'x+y'y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上式符合夫琅禾费衍射积分的标准形式. 它就是衍射屏置于透镜前方时像面上接收的夫琅禾费衍射场的具体形式.

*§5 傅里叶变换 δ函数

1. 若 $\tilde{g}(x)\rightleftharpoons\tilde{G}(f)=G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(f)}$. 证明：

(1) 当 $\tilde{g}(x)$是实函数(记做 $g(x)$)时，有

$$\tilde{G}(f)=\tilde{G}^*(-f),\quad \tilde{G}^*(f)=\tilde{G}(-f),$$
$$g(x)=2\int_0^\infty G(f)\cos[2\pi fx+\varphi(f)]\mathrm{d}f;$$

(2) 当 $\tilde{g}(x)$是偶函数时，有

$$\tilde{G}(f)=2\int_0^\infty\tilde{g}(x)\cos2\pi fx\mathrm{d}x,$$
$$\tilde{g}(x)=2\int_0^\infty\tilde{G}(f)\cos2\pi fx\mathrm{d}f;$$

(3) 当 $\widetilde{g}(x)$是实偶函数时,有

$$G(f) = 2\int_0^\infty g(x)\cos 2\pi f x \mathrm{d}x, \quad \varphi(f) = 0,$$

$$g(x) = 2\int_0^\infty G(f)\cos 2\pi f x \mathrm{d}f.$$

证 (1) 如果 $\widetilde{g}(x)$仅是实函数,其频谱则可能是复函数:

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty g(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty [g(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x} + g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\widetilde{G}(-f) = \int_0^\infty [g(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x} + g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}]\mathrm{d}x.$$

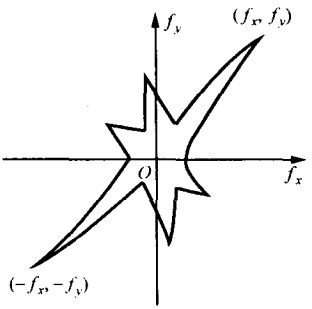


图　5-19

由于 $g(x)$是实函数,$g(-x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}$与 $g(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}$ 共轭,$g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}$与 $g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}$共轭,故

$$\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}^*(-f),$$

$$\widetilde{G}^*(f) = \widetilde{G}(-f).$$

这一关系的光学意义是,当屏函数为纯振幅型时,其傅里叶频谱强度(夫琅禾费衍射图样)是中心对称的,绕光轴(z 轴)转 π 角后图样不变,如图 5-19.

实函数的频谱展开式为

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \widetilde{G}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}f + \int_0^\infty \widetilde{G}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}f \\ &= \int_0^\infty \widetilde{G}(-f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}f + \int_0^\infty \widetilde{G}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f x}\mathrm{d}f\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} [\tilde{G}^*(f)e^{-i2\pi fx} + \tilde{G}(f)e^{i2\pi fx}]df$$

$$= 2\int_0^{\infty} G(f)\cos[2\pi fx + \varphi(f)]df.$$

以上证明仅用了 $g(x)$ 为实函数这一性质.

(2) 当 $\tilde{g}(x)$ 为偶函数时,$\tilde{g}(x)=\tilde{g}(-x)$. 于是频谱函数演变为

$$\tilde{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \tilde{g}(x)e^{-i2\pi fx}dx + \int_0^{\infty} \tilde{g}(x)e^{-i2\pi fx}dx$$

$$= \int_0^{\infty} [\tilde{g}(-x)e^{i2\pi fx} + \tilde{g}(x)e^{-i2\pi fx}]dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} \tilde{g}(x)\cos 2\pi fx dx, \qquad ①$$

$$\tilde{G}(f) = \tilde{G}(-f).$$

原函数为

$$\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f)e^{i2\pi fx}df,$$

$$\tilde{g}(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f)e^{-i2\pi fx}df.$$

由此得

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x) + \tilde{g}(-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f)(e^{i2\pi fx} + e^{-i2\pi fx})df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f)\cos 2\pi fx df$$

$$= 2\int_0^{\infty} \tilde{G}(f)\cos 2\pi fx df. \qquad ②$$

由式①,②可看出,当原函数为偶函数时,频谱函数也为偶函数,且傅里叶变换具有余弦变换形式.

(3) 当 $\tilde{g}(x)$ 为实偶函数时,式①,②进一步分别演变为

$$G(f) = 2\int_0^{\infty} g(x)\cos 2\pi fx dx,$$

$$g(x)=2\int_0^{\infty}G(f)\cos 2\pi fx\mathrm{d}f.$$

此时频谱函数才是实数形式，相位频谱恒为零，只有振幅频谱.

2. 证明傅里叶变换中的微积分运算公式：

(1) $$\mathrm{d}g(x)/\mathrm{d}x\rightleftharpoons \mathrm{i}2\pi fG(f);$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x\rightleftharpoons\frac{G(f)}{\mathrm{i}2\pi f};$$

(3) $$-\mathrm{i}2\pi xg(x)\rightleftharpoons \mathrm{d}G(f)/\mathrm{d}f;$$

(4) $$\frac{g(x)}{-\mathrm{i}2\pi x}\rightleftharpoons\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{d}f.$$

证　(1) 因为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}]\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{i}2\pi fG(f)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}g(f)}{\mathrm{d}x}\rightleftharpoons \mathrm{i}2\pi fG(f)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\rightleftharpoons \mathrm{i}2\pi f.$$

(2) 以 $g(x)$的傅里叶变换代入

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f}G(f)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f,\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{-\infty}g(x)\mathrm{d}x\rightleftharpoons\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f}G(f)\quad 或\quad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\rightleftharpoons\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f}.$$

(3) 同理,以 $G(f)$的傅里叶变换代入

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G(f)}{\mathrm{d}f}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}[g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}[-\mathrm{i}2\pi xg(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$-\mathrm{i}2\pi xg(x)\rightleftharpoons\frac{\mathrm{d}G(f)}{\mathrm{d}f}\quad\text{或}\quad-\mathrm{i}2\pi x\rightleftharpoons\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}.$$

(4) 以 $G(f)$的傅里叶变换代入

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{d}f&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x\mathrm{d}f\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{-\mathrm{i}2\pi x}g(x)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{-\mathrm{i}2\pi x}g(x)\rightleftharpoons\int_{-\infty}^{\infty}G(f)\mathrm{d}f\quad\text{或}\quad\frac{1}{\mathrm{i}2\pi x}\rightleftharpoons\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}f.$$

3. 如图 5-20(a),$g(x)$和 $h(x)$是宽度分别为 a 和 b 的单位方垒函数. 求它们的卷积.

解 卷积函数的几何意义是 h 函数平移再翻转,与 g 函数相乘再积分. 对于势垒函数来说,这种平移、翻转、乘积、积分就是重叠面积(如图 5-20(b)). 据此算出

$$\begin{aligned}g(x)*h(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x')h(x-x')\mathrm{d}x'\\&=\begin{cases}0 & \left(|x|>\dfrac{a+b}{2}\right),\\ \dfrac{a+b}{2}-|x| & \left(\dfrac{|b-a|}{2}<|x|<\dfrac{a+b}{2}\right),\\ a & \left(|x|<\dfrac{|b-a|}{2}\right).\end{cases}\end{aligned}$$

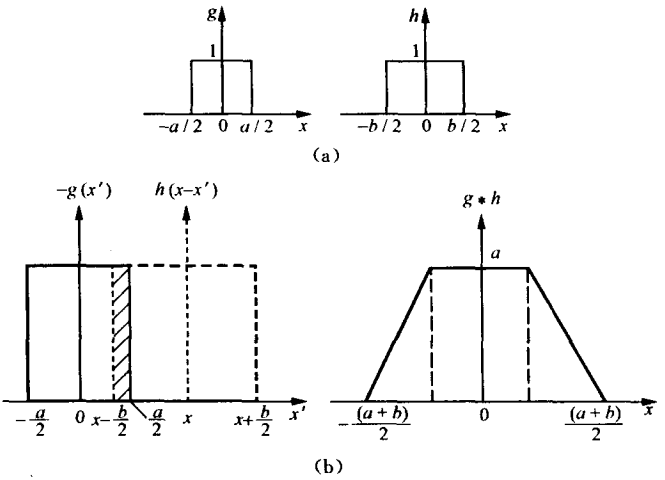


图　5-20

4. 证明卷积的频谱等于频谱的乘积，即若

$$g \rightleftharpoons G, \quad h \rightleftharpoons H,$$

则

$$g * h \rightleftharpoons GH.$$

证　由卷积定义式

$$g * h = \int_{-\infty}^{\infty} g(x')h(x - x')\mathrm{d}x'$$

得其频谱表达式如下：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{g * h\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (g * h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')h(x - x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x'\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx'}h(x - x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f(x-x')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}(x - x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx'}h(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fy}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx'}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fy}\mathrm{d}y \\
&= \mathscr{F}\{g\}\mathscr{F}\{h\}.
\end{aligned}$$

5. 证明相关函数的频谱关系为

$$g\circledast h \rightleftharpoons G * H.$$

证 由相关函数定义式

$$g\circledast h = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x')h(x+x')\mathrm{d}x'$$

得其频谱表达式如下：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{g\circledast h\} &= \int_{-\infty}^{\infty}(g\circledast h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x')h(x+x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x'\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx'}h(x+x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f(x+x')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}(x+x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[g(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx'}] * h(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fy}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx'}\mathrm{d}x'\right] * \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fy}\mathrm{d}y \\
&= \mathscr{F}^*\{g\}\mathscr{F}\{h\}.
\end{aligned}$$

6. 证明 $g\circledast g = g * g^*$.

证 因为自相关的频谱等于频谱绝对值的平方，即

$$g\circledast g \rightleftharpoons |G(f)|^2 = G(f)G^*(f),$$

又因为卷积的频谱等于频谱的乘积，即

$$g * g^* \rightleftharpoons G(f)G^*(f),$$

可见，两式右端频谱相同，则原函数亦相同，故有

$$g\circledast g = g * g^*.$$

7. 证明两个高斯函数

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\mathrm{e}^{-ax^2}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\mathrm{e}^{-bx^2}$$

的卷积仍为高斯函数：

$$g(x) * h(x) = \sqrt{\frac{c}{\pi}}\mathrm{e}^{-cx^2},$$

式中 $c=ab/(a+b)$.

证 利用卷积的频谱关系

$$g(x)*h(x)\rightleftharpoons G(f)H(f)$$

证明本题更为方便. 高斯函数的频谱仍为高斯函数,即

$$G(f)=\exp(-\pi^2f^2/a),$$

$$H(f)=\exp(-\pi^2f^2/b).$$

故有

$$G(f)H(f)=\exp\left[-\pi^2f^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$=\exp(-\pi^2f^2/c),$$

式中

$$c=\frac{ab}{a+b}.$$

所以卷积

$$g(x)*h(x)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{\pi^2f^2}{c}\right)\right\}=\sqrt{\frac{c}{\pi}}\exp(-cx^2).$$

8. 证明两个洛伦兹(Lorentz)函数

$$g(x)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2},\quad h(x)=\frac{b}{\pi}\frac{1}{b^2+x^2}$$

的卷积仍为洛伦兹函数

$$g(x)*h(x)=\frac{c}{\pi}\frac{1}{c^2+x^2},$$

式中 $c=a+b$.

证　利用卷积的频谱关系

$$g(x)\rightleftharpoons G(f)=\exp(-2\pi a|f|),$$

$$h(x)\rightleftharpoons H(f)=\exp(-2\pi b|f|)$$

和

$$g(x)*h(x)\rightleftharpoons G(f)H(f)$$

$$=\exp[-2\pi(a+b)|f|]=\exp(-2\pi c|f|)$$

证明本题更为方便,式中 $c=a+b$. 所以卷积

$$g(x)*h(x)=\mathscr{F}^{-1}\{e^{-2\pi c|f|}\}=\frac{c}{\pi}\frac{1}{c^2+x^2}.$$

9. 一质量为 m 的质点位于空间(x_0,y_0,z_0)处. 试用 δ 函数写出空间里的密度分布函数 $\rho(x,y,z)$.

解 此时,质量密度分布函数为

$$\rho(x,y,z) = m\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

10. 点电荷 q 位于坐标原点.写出静电场所满足的泊松方程.

解 静电场电势分布函数 $U(x,y,z)$ 所满足的泊松(Poission)方程的一般形式为

$$\nabla^2 U = -\rho/\varepsilon_0,$$

式中 ε_0 为真空介电常数.如果电荷是点状分布,且点电荷 q 位于坐标原点,则体电荷密度分布函数为

$$\rho(x,y,z) = q\delta(x,y,z),$$

故泊松方程为

$$\nabla^2 U = -q\delta(x,y,z)/\varepsilon_0.$$

11. 试证明 δ 函数具有以下性质:

(1) δ 函数是偶函数;

(2) δ 函数的选择性,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\mathrm{d}x = f(0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

(3) δ 函数的卷积性质,即

$$f(x) * \delta(x) = f(x);$$

(4) δ 函数的缩放性,即

$$\delta(ax) = \delta(x)/|a|.$$

证 (1) 从 $\delta(x)$ 函数的定义出发,便可说明

$$\delta(-x) = \begin{cases} \infty & (x = 0), \\ 0 & (x \neq 0); \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\mathrm{d}x = -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(x')\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\mathrm{d}x' = 1.$$

这两条性质都与 $\delta(x)$ 相同,故

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

即 δ 函数是偶函数.

(2) 以原点为中心取任意小的变量区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$,因在区间外

$\delta(x)=0$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

又因 $\varepsilon\to 0$，区间以内连续函数 $f(x)$ 为常量 $f(0)$，故

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

于是证得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

同理，对于轴外 δ 函数，我们可以 x_0 点为中心考虑一个任意小的变量区间$[-\varepsilon,\varepsilon]$，证得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x&=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x\\&=f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x\\&=f(x_0).\end{aligned}$$

(3) 按卷积定义式，有

$$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'.$$

根据 δ 函数的偶对称性

$$\delta(x-x')=\delta(x'-x),$$

再由 δ 函数的选择性，便可证得

$$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x'-x)\mathrm{d}x'=f(x).$$

在物理上，尤其是在光学中，常将某一连续分布函数(如物平面上的光强分布或复振幅分布)看为点源的集合. 对这一处理手段的数学描述就是 δ 函数的卷积性质，即相当于用一个 δ 脉冲在整个区间扫描，从而探测出函数分布 $f(x)$.

(4) 由 δ 函数的归一化要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\mathrm{d}(ax)=|a|\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\mathrm{d}x=1$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$$

得

$$|a|\delta(ax)=\delta(x),$$

即

$$\delta(ax)=\delta(x)/|a|.$$

12. 求 $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)\}$及其模的平方 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$.

解 因为

$$\delta(x-x_0)\rightleftharpoons \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx_0},\quad \delta(x-2x_0)\rightleftharpoons \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi fx_0},$$

所以由傅里叶变换的线性定理得

$$\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)\rightleftharpoons \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi fx_0}.$$

故得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\mathscr{F}^*&=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi fx_0})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx_0}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi fx_0})\\&=2+2\cos 2\pi x_0 f,\end{aligned}$$

这里运算的光学实例是透镜前焦面上有两个等间距的相干点源,它们在后焦面上相干叠加的强度分布就是 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$. 当然,应该明确空间频率 f 与装置中的场点坐标 x' 的关系为

$$x'=Ff\lambda,$$

式中 F 为透镜焦距. 于是

$$I(x')=\mathscr{F}\mathscr{F}^*=2+2\cos\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right)$$

13. 求 $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)+\delta(x-3x_0)\}$及其模的平方 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$.

解 利用傅里叶变换的线性定理得

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)+\delta(x-3x_0)\}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi fx_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\pi fx_0},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\mathscr{F}^*&=3+2\cos 2\pi fx_0+2\cos 2\pi fx_0+2\cos 4\pi fx_0\\&=1+4\cos 2\pi fx_0+4\cos^2 2\pi fx_0.\end{aligned}$$

这里运算的光学实例是透镜前焦面上有三个等间距的相干点源,它

们在后焦面上相干叠加的强度分布就是 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*$. 用空间频率 f 和场点坐标 x' 表示，仍有

$$x' = Ff\lambda.$$

于是

$$I(x') = \mathscr{F}\mathscr{F}^* = 1 + 4\cos\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right) + 4\cos^2\left(2\pi\frac{x_0}{\lambda F}x'\right).$$

14. 大量点源无规地分布在 x 轴上，其振幅分布可写为

$$\tilde{U}(x) = \sum_{n=1}^{N}\delta(x - x_n).$$

(1) 求 $\mathscr{F}\{\tilde{U}(x)\}$；

(2) 试证 $\mathscr{F}\mathscr{F}^* = N$.

解　(1) 由傅里叶变换的线性定理得

$$\mathscr{F}\{\tilde{U}(x)\} = \mathscr{F}\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta(x - x_n)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\mathscr{F}\{\delta(x - x_n)\} = \sum_{n=1}^{N}e^{-i2\pi fx_n}.$$

(2) 此时，

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^* = \left(\sum_{n=1}^{N}e^{-i2\pi fx_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}e^{-i2\pi fx_n}\right)^*$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N}e^{-i2\pi fx_n}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}e^{i2\pi fx_n}\right)$$

$$= N + \sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N}e^{i2\pi f(x_n - x_m)},$$

式中

$$\sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N}e^{i2\pi f(x_n - x_m)} = \sum_{\substack{n\neq m\\ n,m=1}}^{N}\cos[2\pi f(x_n - x_m)].$$

由于点源位置 $x_n, x_m (n, m = 1, 2, \cdots, N; n \neq m)$ 呈无规分布，点源数目 N 足够大，致使交叉项统计结果内部互相抵消，总和为零，故

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^* = N.$$

这个例子的意义是，虽然大量点源是相干的，由于其空间排列无序，致使它们产生的夫琅禾费衍射强度分布回到非相干叠加的结果，处

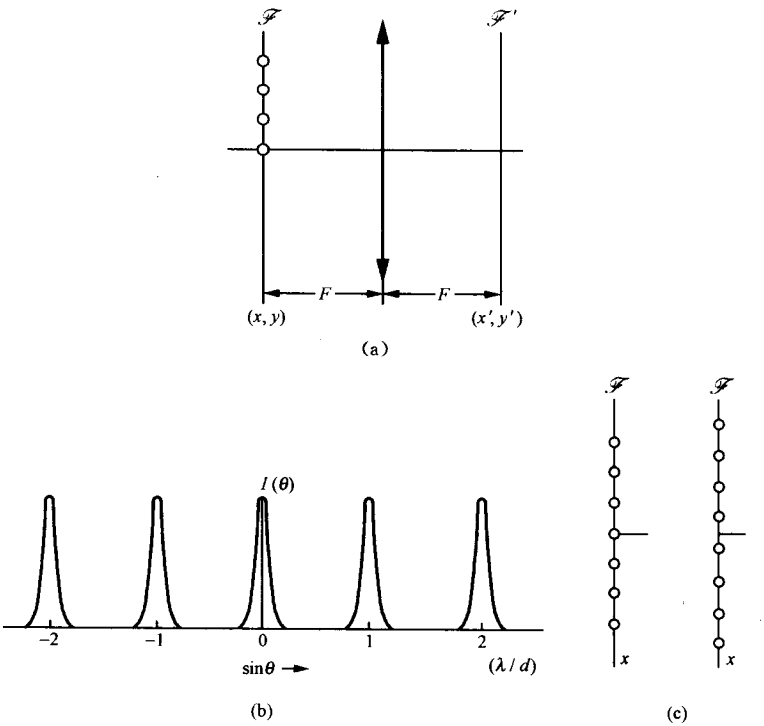
处是单一点源产生的强度的 N 倍；仅在极低频段处，此交叉项之和为非零.

*§ 6 空间滤波和信息处理

1. 在透镜的前焦面上有一系列同相位的相干光源等距排列在 x 轴上，形成一维点阵. 用傅里叶变换法求后焦面上的夫琅禾费衍射场.

解 点源的复振幅应由 δ 函数来描述. 沿 x 轴等距排列的一维点阵(如图 5-21(a))表示为

$$\tilde{U}(x,y)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(x-nd,y).$$



(b)

图 5-21

后焦面上的夫琅禾费衍射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x',y') &= \mathscr{F}\{\tilde{U}(x,y)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\mathscr{F}\{\delta(x-nd,y)\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f_x nd} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\beta'}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta'}},\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $\beta'=2\pi f_x d, f_x=x'/F\lambda$.

衍射场强度分布为

$$\begin{aligned}I(x',y') &= \tilde{U}(x',y')\tilde{U}^*(x',y') \\ &= \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\beta'}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta'}}\right)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\beta'}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta'}}\right) \\ &= \frac{2-2\cos N\beta'}{2-2\cos\beta'} = \frac{\sin^2\dfrac{N\beta'}{2}}{\sin^2\dfrac{\beta'}{2}} \\ &= \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta},\end{aligned} \tag{2}$$

式中

$$\beta = \frac{\beta'}{2} = \pi d f_x = \frac{\pi d}{\lambda}\frac{x'}{F}.$$

它的强度分布曲线如图 5-21(b)所示，是一组等间隔等高度的空间脉冲. 若横坐标以衍射角正弦值 $\sin\theta$ 标定，则脉冲角间隔 $\Delta\theta$ 和脉冲角宽度 $\delta\theta$ 分别为

$$\Delta\theta(d\cos\theta)\approx\lambda,\quad \delta\theta(Nd\cos\theta)\approx\lambda.$$

最后顺便交代一下，实际上总是将一维点阵对称地安排成图 5-21(c)那样，这相当于把图 5-21(a)中的排列沿 x 轴向下位移适当的距离 x_0. 其实这只要在式①中添加一个常数相因子 $\exp(\mathrm{i}2\pi f x_0)$，而并不影响衍射强度表达式②.

2. 设透镜直径 $D=5$ cm，焦距 $F=60$ cm，图像(衍射屏)线度 $l=2$ cm，入射光波长 $\lambda=0.6$ μm.

(1) 分别算出后焦面上 $(x',y')=(0,0),(0,1),(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(0.5,2),(3,-5),(-10,-15)$(单位：mm)等处所对应的

空间频率(f_x,f_y)的具体数值(单位：/mm)；

(2) 计算系统的截止频率.

解 (1) 夫琅禾费衍射场点位置(x',y')与屏函数空间频率(f_x,f_y)的关系为

$$(x',y')=F\lambda(f_x,f_y) \quad 或 \quad (f_x,f_y)=(x',y')/F\lambda.$$

按题意算出(f_x,f_y)值列于表 5-1.

表 5-1

(x',y') /mm	(0,0)	(0,1)	$(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$	(0.5,2)	(3,−5)	(−10,−15)
(f_x,f_y) /mm^{-1}	(0,0)	(0,2.8)	(2.0,2.0)	(1.4,5.6)	(8.3,−13.9)	(28.0,−69.5)

(2) 如图 5-22，透镜所能接收的最大衍射角θ_m满足

$$\sin\theta_m \approx \left(\frac{D}{2}-\frac{l}{2}\right)\Big/F=\frac{D-l}{2F}.$$

因此，透镜作为漏高频的低通滤波器，其截止频率为

$$f_m=\frac{\sin\theta_m}{\lambda}=\frac{D-l}{2F\lambda}\approx 42\ /\text{mm}.$$

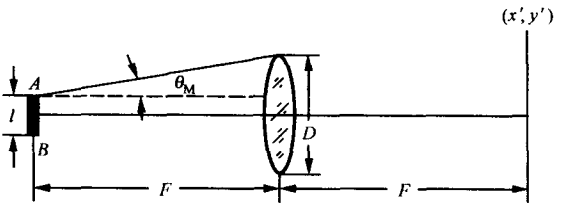


图 5-22

3. 光信息处理的 4F 系统如图 5-23. 在系统的输入平面 O 上放置一张较大的图片，其振幅透过率函数为

$$\tilde{t}_0=t_0+t_1\cos 2\pi f x_0.$$

式中 $t_0=0.6$，$t_1=0.3$，$f=400\ \text{mm}^{-1}$，$F=20\ \text{cm}$. 现以单色平行光照明图片，光波长 $\lambda=0.63\ \mu\text{m}$.

(1) 求变换平面 T 上所获得的衍射图样的主要特征(衍射斑的方位及相对强度)；

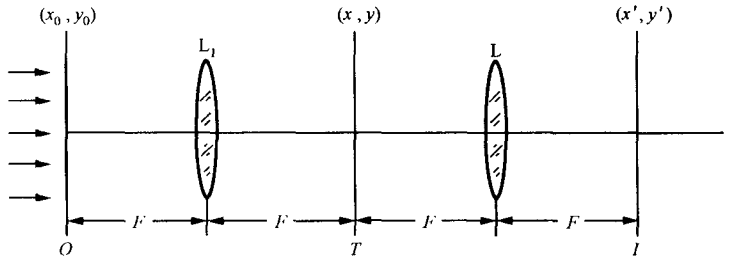


图　5-23

(2) 求输出平面 I 上所获得的图像光强分布；

(3) 如果用一张黑纸(作为空间滤波器)挡掉 0 级斑，求输出图像的光强分布，并算出空间频率的具体数值；

(4) 如果用一张黑纸挡掉上半部非 0 级衍射斑，求输出图像的光强分布，并算出空间频率的具体数值.

解　(1) 变换平面 T 是系统第一次夫琅禾费的衍射场，正弦光栅在该平面上的衍射图样是三个衍射斑. 目前这三个衍射斑沿 x 轴分布，其角方位分别为

$$\sin\theta = \begin{cases} 0 & (0\text{ 级斑}), \\ \pm f\lambda & (\pm 1\text{ 级斑}). \end{cases}$$

按 $f=400\ \text{mm}^{-1}$，$\lambda=0.63\ \mu\text{m}$ 算出

$$\theta_{\pm 1} \approx \pm\ 14°36'.$$

± 1 级衍射斑的中心强度与 0 级斑的比值为

$$\frac{I_{\pm 1}}{I_0} = \left(\frac{t_1}{2t_0}\right)^2 \approx 6.3\%.$$

(2) 在变换平面不加滤波器的情况下，输出图像等于输入图像再绕轴倒置，即输出场的复振幅分布为

$$\tilde{t}_i(x', y') = \tilde{t}_0(-x', -y') = t_0 + t_1\cos 2\pi f x',$$

输出光强分布为

$$I_i(x', y') \propto \tilde{t}_i\tilde{t}_i^* = t_0^2 + 2t_0t_1\cos 2\pi f x' + t_1^2\cos^2 2\pi f x'.$$

(3) 变换平面上的 0 级斑反映物平面上的与 t_0 相联系的直流信息. 挡掉 0 级斑，相当于完全通过系统的物信息成为

$$\tilde{t}_0'(x_0,y_0) = t_1\cos 2\pi f x_0.$$

这时输出信息为

$$\tilde{t}_i(x',y') = \tilde{t}_0'(-x',-y') = t_1\cos 2\pi f x',$$

输出图像的光强分布为

$$I_i(x',y') \propto \tilde{t}_i\tilde{t}_i^*$$

$$= t_1^2\cos^2 2\pi f x' = \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_1^2\cos 4\pi f x'.$$

除直流成分外,其交变成分的空间频率为

$$f' = 2f = 800\ /\mathrm{mm}.$$

(4) 此时挡掉的是+1 级斑. 展开输入平面上的物信息得

$$t_0(x_0,y_0) = t_0 + \frac{1}{2}t_1 e^{i2\pi f x_0} + \frac{1}{2}t_1 e^{-i2\pi f x_0}.$$

变换平面上的+1 级斑与物信息 $t_1 e^{i2\pi f x_0}/2$ 相对应. 挡掉+1 级斑,相当于完全通过系统的物信息

$$\tilde{t}_0''(x_0,y_0) = t_0 + t_1 e^{-i2\pi f x_0}/2.$$

此时输出信息为

$$\tilde{t}_i(x',y') = \tilde{t}_0''(-x',-y') = t_0 + t_1 e^{-i2\pi f x'}/2.$$

输出图像的光强分布为

$$I_i(x',y') \propto \tilde{t}_i\tilde{t}_i^* = t_0^2 + t_1^2/4 + t_0 t_1\cos 2\pi f x',$$

除直流成分外,其交变成分的空间频率为

$$f'' = f = 400\ /\mathrm{mm}.$$

当然,(3),(4)还可以从以下两种方法考虑:一是将留下来的两个衍射斑作为两 个相干点源,经第二个透镜成为两束相干的平行光,则输出图像是两束平行光在后焦面上的干涉场. 如此处理,我们也是熟悉的. 二是将留在变换平面上的两个衍射斑当做两个 δ 函数,用傅里叶变换式求得第二次夫琅禾费的衍射场,即为输出场.

4. (1) 以一张黑白图案作光学滤波器,在黑的地方开个孔. 这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过率函数的相乘还是相加?

(2) 若在上述图案中白的地方点上一个黑点,图案与黑点的透过率函数是相乘还是相加?

解　(1) 此时,滤波器的透过率函数应是黑白图案与孔函数的相加,而不是相乘.

(2) 此时,滤波器的透过率函数应是黑白图案与黑点函数的相乘而不是相加.

5. 用一块正弦光栅(或 $d:a=2:1$ 的黑白光栅)作为 $4F$ 系统的滤波器.设物波前为 $\tilde{U}_O$.

(1) 经过变换平面中心的是不透光的黑条纹(如图 5-24(a)所示),求像面上的复振幅分布;

(2) 在光栅的正中央黑条纹上开一个小洞,求像面上的复振幅分布;

(3) 这一装置能否实现衬比度完全反转?

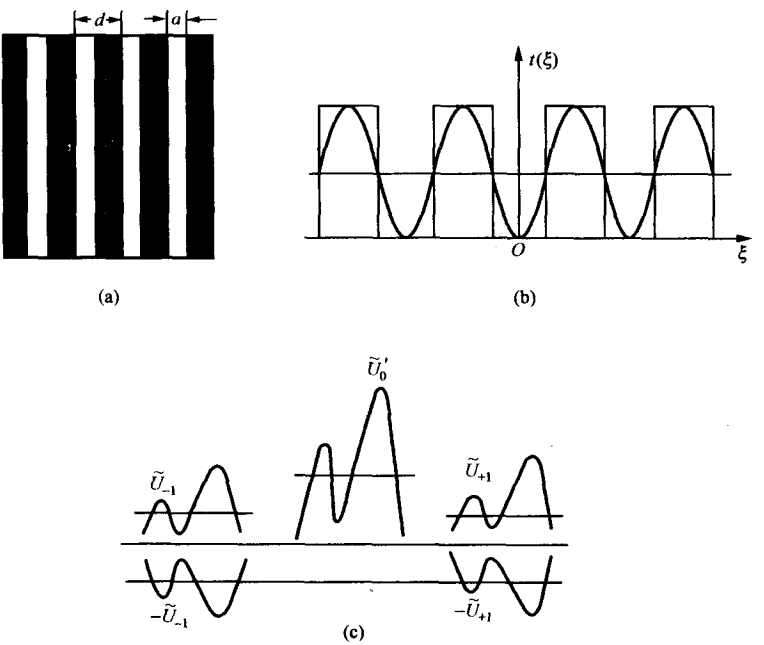


图　5-24

解　(1) 如图 5-24(b),此时滤波函数应当写成

$$t_R(\xi,\eta)=t_0+t_1\cos(2\pi f_0\xi-\pi).$$

完全通过系统的物信息变为

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_0(x,y) &= \tilde{U}_O(x,y) * \mathscr{F}^{-1}\{t_R(\xi,\eta)\},(f_x,f_y)\\ &= (\xi,\eta)/\lambda F,\end{aligned}$$

而滤波函数的傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\{t_R\} &= \mathscr{F}^{-1}\{t_0 + t_1\cos(2\pi f_0\xi - \pi)\}\\ &= t_0\delta(x,y) + t_1 e^{i\pi}\delta(x + \lambda F f_0)/2\\ &\quad + t_1 e^{i\pi}\delta(x - \lambda F f_0)/2.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_0(x,y) =& t_0\tilde{U}_O(x,y) + t_1 e^{i\pi}\tilde{U}_O(x + \lambda F f_0,y)/2\\ &+ t_1 e^{i\pi}\tilde{U}_O(x - \lambda F f_0,y)/2.\end{aligned}$$

最后输出场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i(x',y') &= \tilde{U}'_0(-x',-y')\\ &= t_0\tilde{U}_O(-x',-y')\\ &\quad + t_1 e^{i\pi}[\tilde{U}_O(-x' + \lambda F f_0,-y')/2\\ &\quad + \tilde{U}_O(-x' - \lambda F f_0,-y')].\end{aligned}$$

在像面上出现位置错开的三个物图像，相当于 0，±1 级像.

(2) 如果不开小孔，中央全是黑条纹，挡住了直流成分. 这意味着最后输出的三项的直流成分之和为零，即

$$t_0\mathscr{F}\{\tilde{U}_O\}_0 - \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 - \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0 = 0.$$

于是

$$t_0\mathscr{F}\{\tilde{U}_O\}_0 = \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 + \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{-1}\}_0$$

在滤波器中央开个小孔，这意味着物图像的 0 级完全通过，输出图像应当是(1)的结果与 $t_0\mathscr{F}\{\tilde{U}_O\}_0$ 的和，即

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_i(x',y') &= \tilde{U}_i(x',y') + t_0\mathscr{F}\{\tilde{U}_O\}_0\\ &= t_0\tilde{U}_O(-x',-y') - t_1\tilde{U}_{+1}/2\\ &\quad - t_1\tilde{U}_1 + t_0\mathscr{F}\{\tilde{U}_O\}_0/2.\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i'(x',y') &= t_0\tilde{U}_O - \frac{1}{2}t_1\tilde{U}_{+1} - \frac{1}{2}t_1\tilde{U}_{+1} \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 + \frac{1}{2}t_1\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 \\ &= t_0\tilde{U}_O + \frac{1}{2}t_1(\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 - \tilde{U}_{+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1(\mathscr{F}\{\tilde{U}_{+1}\}_0 - \tilde{U}_{+1}).\end{aligned}$$

(3) 一个信息与其直流成分的相减结果有可能使强度衬比度完全反转. 上式第二个等号右边后两项括号中正是这种情况(如图 5-24(c)).

*§ 7　点扩展函数与光学传递函数

1. 证明简谐信息是线性不变系统的本征信息.

证　所谓系统的本征信息是指,经系统变换以后,输出信息的函数线型不变,仍为同类的简单信息. 系统的变换作用仅在于改变本征信息的特征参量. 对于线性不变系统来说,不论具体装置是变换时间信号的电学系统(如图 5-25(a)所示),还是变换空间图像的光学系统(如图 5-25(b)所示),其本征信息都是简谐型信息. 对此,有以下三种证明方法:

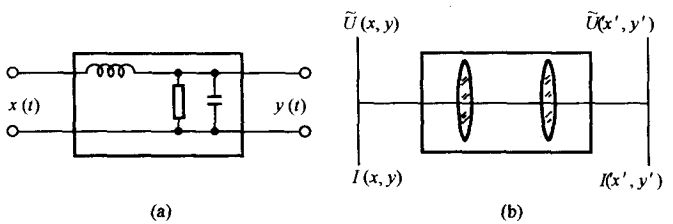


图　5-25

(1) 由卷积关系直接证明. 为书写简单起见,以图 5-25(a)为例. 设输入信息为系统的脉冲响应函数为 $h(t)$. 当系统是线性不变系统时,输出信息等于输入信息与脉冲响应函数的卷积. 因此,目前的输出信息应当为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')h(t-t')\mathrm{d}t'=\int_{-\infty}^{\infty}h(t')x(t-t')\mathrm{d}t'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t')A\cos[\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t'.$$

再展开 $\cos[\omega_0(t-t')]$，在积分运算中将 t 看做常量，最后仍然可将输出信息写成简谐型，即

$$y(t)=B\cos(\omega_0 t-\varphi),$$

式中 $B(\omega_0)$，$\varphi(\omega_0)$ 均为频率 ω_0 的函数①.

(2) 利用卷积的频谱关系证明. 因为

$$y(t)=x(t)*h(t),$$

于是频谱

$$\mathscr{F}\{y\}=\mathscr{F}\{x\}\mathscr{F}\{h\}.$$

设

$$\mathscr{F}\{h\}=\tilde{H}(\omega),\quad x(t)=A\cos\omega_0 t,$$

得

$$\mathscr{F}\{y\}=\tilde{H}(\omega)\mathscr{F}\{A\cos\omega_0 t\}$$

$$=\tilde{H}(\omega)A[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]/2.$$

再由傅里叶逆变换求得输出函数

$$y(t)=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\tilde{H}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\nu,$$

式中

$$\nu=\omega/2\pi.$$

利用 δ 函数的选择性，得

$$y(t)=A[\tilde{H}(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+\tilde{H}(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]/2. \qquad ①$$

由于描述时间信号点脉冲或空间光强点脉冲的响应(扩展)函数为实函数，其正负两支频谱互为共轭，即

$$\tilde{H}(-\omega_0)=\tilde{H}^*(\omega_0),$$

$$\tilde{H}(\omega_0)=H(\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(\omega_0)}.$$

于是式①化简得

---

① 以上证明的中间运算过程见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：132～134.

$$y(t) = AH\cos(\omega_0 t - \varphi_H).$$

可见，输出函数仍为同频的简谐信息. 与输入信息相比，输出信息的振幅变化和相位变化集中于 $\tilde{H}(\omega_0)$.

(3) 利用线性运算操作证明.

设运算操作 T 为抽象的线性变换，即

$$y(t) = T\{x(t)\}.$$

为简单起见，又设简谐信息为

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t},$$

则

$$y(t) = T\{Ae^{i\omega_0 t}\}.$$

因系统具有不变性(电网络的时间稳定性或光学系统的空间不变性)，故有

$$\begin{aligned} y(t+\tau) &= T\{Ae^{i\omega_0(t+\tau)}\} \\ &= T\{Ae^{i\omega_0 t}e^{i\omega_0\tau}\} = e^{i\omega_0\tau}T\{Ae^{i\omega_0 t}\} \\ &= e^{i\omega_0\tau}y(t). \end{aligned}$$

以上关系对任意 τ 都成立. 令 $t=0$，得

$$y(\tau) = y(0)e^{i\omega_0\tau},$$

即输出函数仍为同频的简谐信息. 与输入信息相比，输出信息的振幅变化和相位变化集中于 $y(0)/A$($y(0)$可能是复数).

2. 在理论分析中，光学传递函数(optical transfer function，简称 OTF)在 $f_x=f_y=0$ 处都等于 1. 这是为什么？OTF 值可能大于 1 吗？如果光学系统真的实现了点物成点像，其 OTF 曲线应该怎样？

解　(1) 系统的 OTF 是点扩展函数(point spread function，简称 PSF)的频谱，即

$$h(x,y) \rightleftharpoons \tilde{H}(f_x,f_y).$$

我们须知，频谱的零点值等于原函数在全区域的积分(面积)，即

$$\tilde{H}(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在理论分析中不考虑系统对光能流的损耗，认定物面上单位光功率的点源总能流都将全部弥漫在像面上，这便导致点扩展函数的归一化，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1, \quad \widetilde{H}(0,0) = 1.$$

(2) OTF 值是不可能大于 1 的. 虽然像面强度仍是简谐型的，但系统对点源的扩展以及点扩展函数对物面简谐光强的卷积必定使像面强度的衬比度下降.

(3) 只有当理想成像时，像面与物面才有点点对应的关系. 此时点扩展函数本身便是 δ 函数，δ 函数的频谱为 1，说明此时对各种空间频率来说，其 OTF 值恒为 1. 这当然是理想情形.

3. 画出正方形光瞳的一组 OTF 曲线，以 ρ/a 为横坐标（$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，a 为光瞳边长），$\theta=0°$，30°和 45°.

解 如图 5-26(a)，正方形瞳函数为

$$t(\xi,\eta) = \begin{cases} 1 & \left(|\xi| > \dfrac{a}{2}, |\eta| < \dfrac{a}{2}\right), \\ 0 & \left(|\xi| > \dfrac{a}{2}, |\eta| > \dfrac{a}{2}\right). \end{cases}$$

OTF 曲线为瞳函数的自相关，即

$$\widetilde{H}(f_x,f_y) \propto \tilde{t}(\xi,\eta) \circledast \tilde{t}(\xi,\eta),$$

式中 $(\xi,\eta) = -\lambda s'(f_x,f_y)$. 自相关的几何意义是位移 ρ 后两个方孔的重叠面积 $\bar{A}$ 与全面积 A 之比，其中全面积

$$A = a^2,$$

重叠面积

$$\bar{A} = \begin{cases} (a-|\xi|)(a-|\eta|) & (|\xi| < a, |\eta| < a), \\ 0 & (|\xi| > a, |\eta| > a). \end{cases}$$

所以

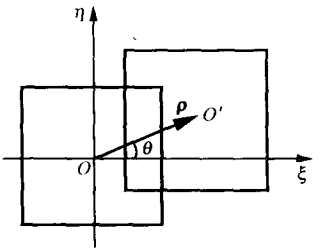
$$\widetilde{H}(f_x,f_y) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{|\xi|}{a}\right)\left(a-\dfrac{|\eta|}{a}\right) & (|\xi| < a, |\eta| < a), \\ 0 & (|\xi|, |\eta| > a). \end{cases} \quad ①$$

设极坐标系中的位移矢量为 $\boldsymbol{\rho}(\rho,\theta)$，它与直角坐标 ξ,η 的关系为

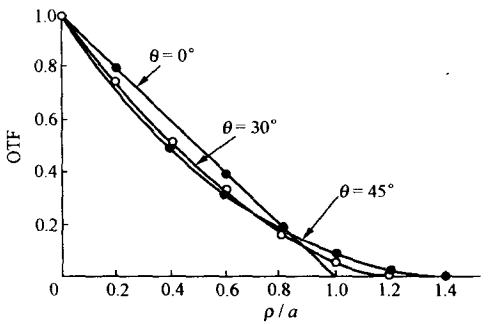
$$\xi = \rho\cos\theta, \quad \eta = \rho\sin\theta.$$

由于方孔的对称性，只需具体分析第 1 象限（$0°\leqslant\theta\leqslant 90°$）内 $\widetilde{H}$ 的情况. 用 ρ,θ 表示，式①改写为

$$\widetilde{H}(f_x,f_y) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{\rho}{a}\cos\theta\right)\left(1-\dfrac{\rho}{a}\sin\theta\right) & (\xi,\eta < a), \\ 0 & (\xi,\eta > a). \end{cases}$$



(a)



(b)

图　5-26

以 ρ/a 为变量计算出不同 θ 时的 OTF 值，如表 5-2；再以 ρ/a 为横坐标画出 OTF 曲线，如图 5-26(b).

表　5-2

ρ/a		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
OTF	$\theta=0°$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0
	$\theta=30°$	1.0	0.74	0.52	0.34	0.18	0.067	0	0	0
	$\theta=45°$	1.0	0.74	0.51	0.33	0.19	0.086	0.023	0	0

从表中看出，在 $\rho/a=1.0\sim1.4$ 范围内，不同 θ 方位的 OTF 曲线开始取零值. 由此可以算出正方光瞳的截止频率为

$$f_c=\sqrt{f_x^2+f_y^2}=\sqrt{\xi^2+\eta^2}/\lambda s'$$

$$= \frac{1}{\lambda s'}\rho = \frac{a}{\lambda s'}\left(\frac{\rho}{a}\right).$$

取 $\rho/a=1$，则截止频率 f_c 及其对应的最小空间周期 d_m 分别为

$$f_c \approx \frac{1}{s'}\frac{a}{\lambda}, \quad d_m = \frac{1}{f_c} = s'\frac{\lambda}{a},$$

式中 s' 是像距.

4. 导出双缝光瞳(如图 5-27(a))的 OTF 表达式，并画出沿 ξ 方向的 OTF 曲线.

解 随着位移矢量 ρ 的大小增加，一对双缝之间的重叠面积出现如图 5-27(b)～(e)的几种情况：先是重叠面积逐渐减少的区间(图 5-27(b))；然后存在一段重叠面积为零的区间(图 5-27(c))；再开始一段重叠面积逐渐增加的区间(图 5-27(d))；继而又出现重叠面积逐渐减少以至为零的区间(图 5-27(e))；之后就一直无重叠面积了. 定量讨论如下：双缝瞳函数为

$$t(\xi,\eta) = \begin{cases} 1 & ((d+a) > |\xi| > (d-a), |\eta| < b), \\ 0 & (|\xi| < (d-a), |\xi| > (d+a) \text{ 或 } |\eta| > b). \end{cases}$$

设位移为 $\rho(\xi,\eta)$，则重叠面积为

$$\overline{A} = \begin{cases} 2(2a-\xi)(2b-\eta) & (\xi<2a, \eta<2b), \\ 0 & (2a<\xi<2(d-a) \text{或} \eta>2b), \\ [\xi-2(d-a)](2b-\eta) & (2(d-a)<\xi<2d, \eta<2b), \\ [2a-(\xi-2d)](2b-\eta) & (2d<\xi<2(d+a), \eta<2b), \\ 0 & (\xi>2(d+a)). \end{cases}$$

全面积为

$$A = 2 \times (2a) \times (2b) = 8ab.$$

所以双缝光瞳的传递函数为

$$\tilde{H}(f_x,f_y) = \overline{A}/A$$

$$= \begin{cases} \left(1-\frac{\xi}{2a}\right)\left(1-\frac{\eta}{2b}\right) & (\xi<2a, \eta<2b), \\ 0 & (2a<\xi<2(d-a) \text{或} \eta>2b), \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{d}{a}+\frac{\xi}{2a}\right)\left(1-\frac{\eta}{2b}\right) & (2(d-a)<\xi<2d, \eta<2b), \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{d}{a}-\frac{\xi}{2a}\right)\left(1-\frac{\eta}{2b}\right) & (2d<\xi<2(d+a), \eta<2b), \\ 0 & (\xi>2(d+a)). \end{cases}$$

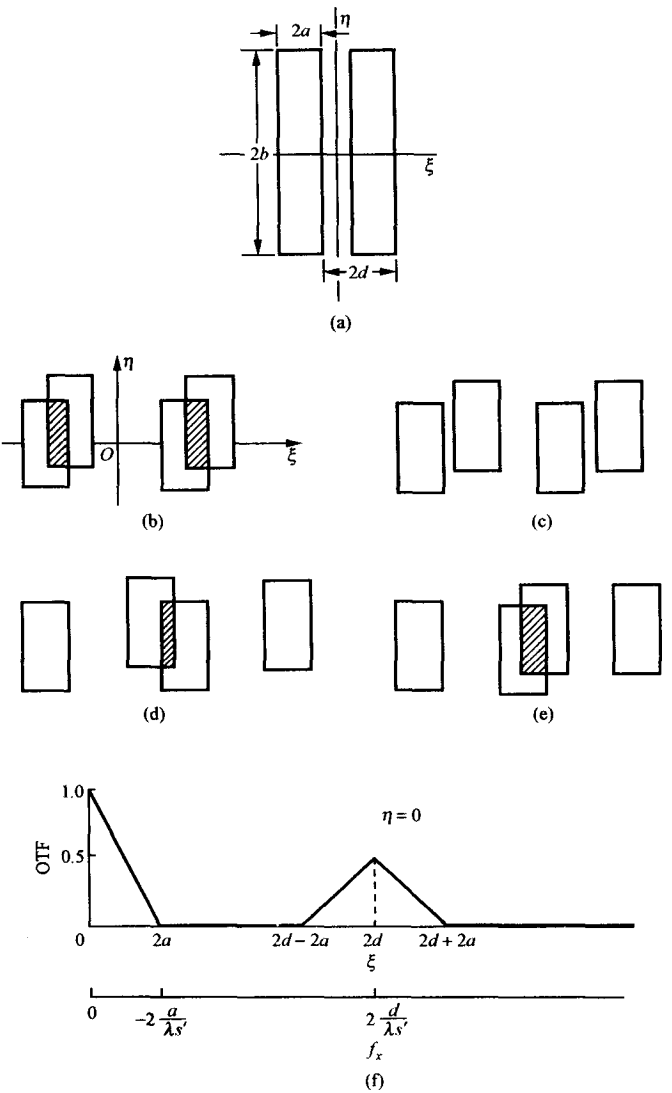


图　5-27

如果平移仅限沿 ξ 轴，此时 $\eta=0, f_y=0$. 传递函数为

$$\widetilde{H}(f_x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\xi}{2a}\right) & (\xi<2a),\\ 0 & (2a<\xi<2(d-a)),\\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{d}{a}+\dfrac{\xi}{2a}\right) & (2(d-a)<\xi<2d),\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{d}{a}-\dfrac{\xi}{2a}\right) & (2d<\xi<2(d+a)),\\ 0 & (\xi>2(d+a)),\end{cases}$$

其变化曲线如图 5-27(f). 由于空间频率(f_x,f_y)与位移坐标(ξ,η)的对应关系为

$$(f_x,f_y)=-(\xi,\eta)/\lambda s',$$

因此横坐标也可以用 f_x 标定.

从图 5-27(f)中看出,与圆形或矩形等单孔光瞳相比,双缝、多缝等多孔光瞳的特点是具有选频性能,相当于电学中的谐振回路.

5. 实际上像点的扩展不仅发生在光波通过光学系统的传输过程中,而且也发生在最后的接收器件上,如乳胶底片,荧光屏、光学纤维面板等. 设透镜系统的 OTF 为 $\widetilde{H}_0$,像面接收器的点扩展函数为 h_1. 求这台光学仪器总的 OTF.

解 如图 5-28,设系统从物面 O 到像面 I 先后经历两个分系统 Ⅰ 和 Ⅱ,各自的点扩展函数分别为 h_1 和 h_2. 当物面上有一点源输入时,最终的像面强度 I_i 是两次扩展的结果. 设此时中间像面 O' 上的强度分布为 I',则

$$I'=h_1,\quad I_i=I'*h_2=h_1*h_2.$$

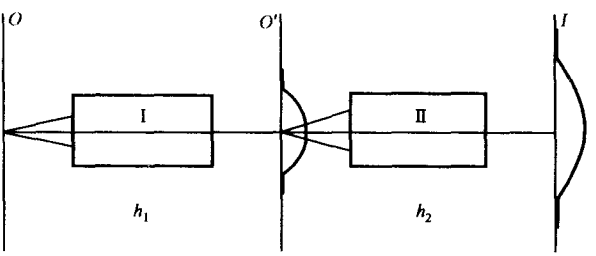


图 5-28

因此全系统的传递函数为

$$\begin{aligned}\tilde{H}(f_x,f_y)&=\mathscr{F}\{\tilde{I}_i\}=\mathscr{F}\{h_1*h_2\}\\&=\mathscr{F}\{h_1\}\mathscr{F}\{h_2\}=\tilde{H}_1\tilde{H}_2.\end{aligned}$$

在本题中，透镜系统可视为上述的分系统Ⅰ，像面接收元件可视为分系统Ⅱ. 故这台光学仪器的 OTF 为

$$\tilde{H}=\tilde{H}_0\mathscr{F}\{h_1\}.$$

第六章　全息术照相

§1　全息照相的过程与特点

本节习题从略.

§2　全息照相的原理

1. 如图 6-1(a)，参考光束 R 和物光束 O 均为平行光，对称地斜入射到记录介质 Σ 上，即 $\theta_R=-\theta_O$，两者间的夹角为 $\theta=2\theta_O$.

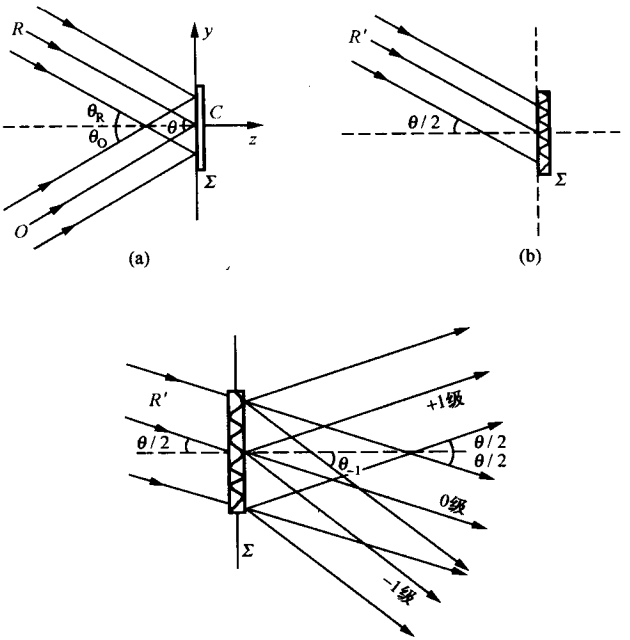


图　6-1

(1) 试说明全息图上干涉条纹的形状.

(2) 试分别写出物光波和参考光波在 Σ 平面上的相位分布函数 $\varphi_O(y)$和 $\varphi_R(y)$.

(3) 试证明全息图上干涉条纹的间距公式为

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}.$$

(4) 试计算,当夹角 $\theta=1°,60°$时,间距 Δy 分别为多少?(采用氦氖激光记录,波长 $\lambda=6328$ Å);

(5) 某感光胶片厂生产一种可用于全息照相的记录干版,其性能为:感光层厚度 8 μm,分辨率为 3000 条/mm 以上. 利用(4)中所得数据,试说明:当 $\theta=60°$时,用该记录干版是否构成一张体全息图?该记录干版的分辨率是否区配?

(6) 如图 6-1(b),采用与参考光束 R 同样波长同样倾角的重现光波 R'照射该张全息图,试分析 0,±1 级三列衍射波都出现在什么方向上,并作图表示.

解　(1) 条纹形状为一组与 y 轴正交的等距直线.

(2) 物光波和参考光波在 Σ 平面上的相位分布函数分别为

$$\varphi_O(y) = ky\sin\theta_O + \varphi_0,$$

$$\varphi_R(y) = ky\sin\theta_R = -ky\sin\theta_O,$$

式中 φ_0 为物光波和参考光波在 Σ 面坐标原点处的相位差.

(3) 应从相位差的改变来确定条纹的间距. 当场点坐标改变一个条纹间距 Δy 时,则相位差改变 2π,干涉强度还原. 由(2)知道,物光波与参考光波在 Σ 面上的相位差分布为

$$\Delta\varphi(x,y) = \varphi_O(y) - \varphi_R(y) = (2k\sin\theta_0)y + \varphi_0,$$

其改变量为

$$\delta(\Delta\varphi) = 2k\sin\theta_0\delta y.$$

令 $\delta(\Delta\varphi)=2\pi$,得

$$\Delta y = \frac{2\pi}{2k\sin\theta_0} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}.$$

(4) 当 $\theta=1°$时,得

$$\Delta y = 36.26\ \mu m;$$

当 $\theta=60°$时，得

$$\Delta y = 0.6328\ \mu\text{m}.$$

(5) 当 $\theta=60°$时，条纹间距 Δy 和感光层厚度 l 之间满足

$$l \gg \Delta y.$$

故该记录干版可以构成一张体全息图. 干版的最小分辨距离为

$$d = \frac{1}{3000\ /\text{mm}} = 0.33\ \mu\text{m}.$$

可见，$d<\Delta y$，且两者同数量级，是匹配的.

(6) 记录时，干涉场的强度分布为

$$I_H(x,y) = (\tilde{U}_O + \tilde{U}_R)(\tilde{U}_O + \tilde{U}_R)^*.$$

经线性冲洗后，这张全息底片的透过率函数为

$$\begin{aligned}\tilde{t}_H(x,y) &= t_0 + \beta I_H(x,y)\\ &= (t_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2) + \beta \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O + \beta \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*.\end{aligned}$$

经照明光波 $\tilde{U}'_R$ 作用，透射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_T(x,y) &= \tilde{t}_H \tilde{U}'_R\\ &= (t_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2)\tilde{U}'_R + \beta \tilde{U}'_R \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O + \beta \tilde{U}'_R \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*,\end{aligned}$$

式中 $\tilde{U}'_R$，$\tilde{U}_O$，$\tilde{U}_R$ 分别为照明光波、物光波、参考光波三列平面波的波前函数：

$$\tilde{U}'_R = \tilde{U}_R = A_R \exp\left(-\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\tilde{U}_O = A_O \exp\left(\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\varphi_0\right).$$

于是透射场的具体形式为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_T = {} & A'_O \exp\left(-\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2}\right) + A_1 \exp\left(\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\varphi_0\right)\\ & + A_1 \exp\left(-\mathrm{i}k2y\sin\frac{\theta}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}\varphi_0\right).\end{aligned}$$

运用相因子判断法可以看到，透射场包含的主要成分是三列平面衍射波(图 6-1(c))，可写成

$$\tilde{U}_T = \tilde{U}'_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1},$$

其中 0 级波

$$\tilde{U}'_0 = A'_0\exp\left(-\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

是照明光束照直前进的透射平面波，振幅 A'_0 有所下降；+1 级波

$$\tilde{U}_{+1} = A_1\exp\left[\mathrm{i}\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]$$

是物光波 $\tilde{U}_O$ 的再现波，但振幅 A_1 有所变化；−1 级波

$$\tilde{U}_{-1} = A_1\exp\left[-\mathrm{i}\left(3ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]$$

是方向被进一步偏转的物光共轭波. 偏转角 θ_{-1} 的正弦值为

$$\sin\theta_{-1} = 3\sin(\theta/2).$$

如选 $\theta=30°$，则

$$\theta_{-1} = 50°56';$$

如选 $\theta=60°$，则

$$\sin\theta_{-1} = 3/2,$$

不符合正弦函数的取值范围. 实际上，此时的−1 级衍射波已经失掉正常平面波的特性而成为隐失波.

2. 若在上题中改为用正入射的平面波再现，±1 级衍射波各发生什么变化？

解　参考上题分析，本题中应将照明光波前函数写成

$$\tilde{U}'_R = A'_R.$$

透射波前仍然包含三列平面衍射波，即

$$\tilde{U}_T = \tilde{U}'_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1},$$

式中

$$\tilde{U}'_0 = (t_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2)\tilde{U}'_R = A'_0$$

是照明光波照直前进(正出射)的平面透射波成分. 第二种成分

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{+1} &= \beta\tilde{U}'_R\tilde{U}_R^*\tilde{U}_O\\ &= A_1\exp\left(\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]\\ &= A_1\exp\left[\mathrm{i}\left(2ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]\end{aligned}$$

是方向被偏转的物光波. 偏转角 θ_{+1} 的正弦值为

$$\sin\theta_{+1} = 2\sin(\theta/2).$$

第三种成分

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{-1} &= \beta\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^{*}\\ &= A_1\exp\left(-\mathrm{i}ky\sin\frac{\theta}{2}\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]\\ &= A_1\exp\left[-\mathrm{i}\left(2ky\sin\frac{\theta}{2}+\varphi_0\right)\right]\end{aligned}$$

是方向被偏转的物光波的共轭波. 偏转角 θ_{-1} 的正弦值为

$$\sin\theta_{-1} = -2\sin(\theta/2).$$

可见,在照明光波正入射条件下,如果当初物光波和参考光波是对称入射的,则 $\tilde{U}_{+1}$ 与 $\tilde{U}_{-1}$ 波仍然保持对称出射,但它们的倾角不再等于入射角. 这张全息底片的作用等效于两个偏转棱镜:对物光波的作用相当于顶角在下方的棱镜;对物光波的共轭波的作用相当于顶角在上方的棱镜.

3. 如图 6-2(a),用正入射的平面参考光波记录轴外物点 O 发出的球面波. 如图 6-2(b),用轴上点源 R' 发出的球面波再现波前. 求 ±1 级两像点的位置.

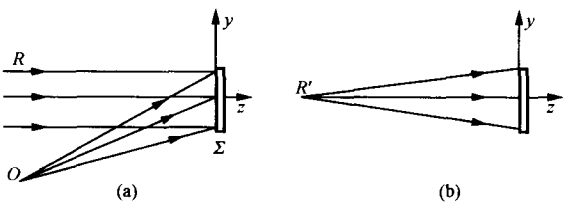


图 6-2

解 首先分别写出物光波 $\tilde{U}_{\mathrm{O}}$、参考光波 $\tilde{U}_{\mathrm{R}}$、照明光波 $\tilde{U}'_{\mathrm{R}}$ 的波前函数. 设物点 O 的坐标为 $(0,y_0,z)$,物点的初相位不为零,以使其波前在 Σ 面原点处的相位为零. 于是在傍轴条件下,有

$$\tilde{U}_{\mathrm{O}}(x,y) \approx A_{\mathrm{O}}\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{y_0y}{z}\right)\right].$$

正入射时的平面参考光波波前函数为

$$\tilde{U}_{\mathrm{R}}(x,y) = A_{\mathrm{R}}\exp(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}}).$$

设轴上照明点源 R' 的坐标为 $(0,0,z')$，在傍轴条件下，其波前函数为

$$\tilde{U}'_{\mathrm{R}}(x,y)=A'_{\mathrm{R}}\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'}+\varphi'_{\mathrm{R}}\right)\right].$$

将它们代入线性冲洗条件下透射场的标准形式：

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\mathrm{T}}(x,y)&=(t_0+\beta A_{\mathrm{O}}^2+\beta A_{\mathrm{R}}^2)\tilde{U}'_{\mathrm{R}}+\beta\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\tilde{U}^*_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}+\beta\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}^*_{\mathrm{O}}\\&=\tilde{U}'_0+\tilde{U}_{+1}+\tilde{U}_{-1},\end{aligned}$$

即可分别求得 0，±1 级衍射波．其中 0 级衍射波的波前函数为

$$\begin{aligned}\tilde{U}'_0&=(t_0+\beta A_{\mathrm{O}}^2+\beta A_{\mathrm{R}}^2)\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\\&=A'_0\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'}+\varphi\right)\right].\end{aligned}$$

显然，它表示中心在 $(0,0,z')$ 点处的发散球面波，也就是照明波的直接透射波，但振幅 A'_0 不同于 A'_{R}．+1 级衍射波的波前函数为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{+1}&=\beta\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\tilde{U}^*_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}\\&=A_1\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'}+\varphi'_{\mathrm{R}}\right)\right]\\&\quad\times\exp(-\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}})\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{y_0y}{z}\right)\right]\\&=A_1\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{+1}}-\frac{y}{z_{+1}}\frac{z_{+1}}{z}y_0\right)\right]\exp(\mathrm{i}\varphi),\end{aligned}$$

式中

$$\frac{1}{z_{+1}}=\frac{1}{z'}+\frac{1}{z},$$

$$\varphi=\varphi'_{\mathrm{R}}-\varphi_{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\ (\text{无关紧要的常数}).$$

运用相因子判断法可知，$\tilde{U}_{+1}$ 波是一列中心在轴外的发散球面波，其中心坐标（即像点位置）为 $(0,z_{+1}y_0/z,z_{+1})$；换句话说，是变换后的物光波，与物光波的中心坐标 $(0,y_0,z)$ 相比，$\tilde{U}_{+1}$ 波的纵向位置

$$z\to z_{+1}=\frac{z'z}{z'+z},$$

横向位置

$$y_0\to\frac{z_{+1}}{z}y_0=\frac{z'}{z'+z}y_0.$$

横向放大率为

$$V_{+1}=\frac{y_{+1}}{y_0}=\frac{z_{+1}}{z}=\frac{z'}{z'+z}\quad\left(y_{+1}=\frac{z_{+1}}{z}y_0\right).$$

-1 级衍射波的波前函数为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{-1}&=\beta\tilde{U}'_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^{*}\\&=A_1\exp\left[\mathrm{i}\left(k\frac{x^2+y^2}{2z'}+\varphi'_{\mathrm{R}}\right)\right]\\&\quad\times\exp(\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}})\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{y_0y}{z}\right)\right]\\&=A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{-1}}-\frac{y}{z_{-1}}\frac{z_{-1}y_0}{z}\right)\right]\exp(\mathrm{i}\varphi),\end{aligned}$$

式中

$$\frac{1}{z_{-1}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z'},$$

$$\varphi=\varphi'_{\mathrm{R}}+\varphi_{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\ (\text{无关紧要的常数}).$$

运用相因子判断法可知，$\tilde{U}_{-1}$波是一列中心在轴外的傍轴球面波. 究竟它是会聚球面波还是发散球面波，要看 z_{-1}的符号. 不难看出，当 $z'>z$ 时，$z_{-1}>0$，$\tilde{U}_{-1}$波为会聚球面波；当 $z'<z$ 时，$z_{-1}<0$，$\tilde{U}_{-1}$波为发散球面波. 总之，-1 级球面衍射波的中心坐标(即像点位置)为 $(0,z_{-1}y_0/z,z_{-1})$. 横向放大率为

$$V_{-1}=\frac{y_{-1}}{y_0}=\frac{z_{-1}}{z}=\frac{z'}{z'-z}\quad\left(y_{-1}=\frac{z_{-1}}{z}y_0\right).$$

当 $z'>z$ 时，$V_{-1}>0$；当 $z'<z$ 时，$V_{-1}<0$.

通过以上具体分析，有两点值得强调指出：

(1) 照明球面波 $\tilde{U}'_{\mathrm{R}}$ 的作用是在 $\tilde{U}_{\mathrm{O}}$ 和 $\tilde{U}_{\mathrm{O}}^{*}$ 波前面提供一个二次相因子的变换函数，实际上相当于透镜的作用. 当照明球面波为发散型时，其作用相当于负透镜；当照明球面波为会聚型时，其作用相当于正透镜. 等效透镜的焦距便是照明点源的纵向距离. 所谓“全息成像是无透镜的透镜成像”，其道理就在于此.

(2) 通常说，全息底片再现时将孪生两个像：一个是物光波的再现像(虚像)；另一个是物光波的共轭像(实像). 这个具体结论是有

条件的，即在参考光波和照明光波均为平面波时通常如此. 如果照明光波或参考光波为球面波时，情况就不一定是这样了. 既然此时照明光波或参考光波相当于一个透镜的作用，$\tilde{U}_O$ 和 $\tilde{U}_O^*$ 波将重新成像而被移位、缩放，甚至可能使得它们全是发散波(全是虚像)或全是会聚波(全是实像).

4. 与上题情况类似，只是把照明光波改为不同波长的正入射的平面波. 试求±1级两像点的位置.

解　此时，照明光波波前函数为

$$\tilde{U}'_R = A'_R e^{i\varphi'_R}.$$

透射场仍然包含三项，即

$$\tilde{U}_t(x,y) = \tilde{U}'_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}.$$

在运用相因子判断法分析衍射场的主要特征时，必须将波函数改写为以照明波的波数 $k'=2\pi/\lambda'$ 为特征的标准形式. 上式中的第一项

$$\tilde{U}'_0 = (t_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2)\tilde{U}'_R = A'_0 e^{i\varphi'_R}$$

很简单，代表正出射的平面衍射波. 第二项为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{+1} &= \beta \tilde{U}'_R \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O \\ &= A_1 e^{i\varphi'_R} e^{-i\varphi_R} \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{y_0 y}{z}\right)\right] \\ &= A_1 \exp\left[ik'\left(\frac{x^2+y^2}{2z(k'/k)} - \frac{y_0 y}{z(k'/k)}\right)\right]\exp(i\varphi) \\ &= A_1 \exp\left[ik'\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{+1}} - \frac{y_0 y}{z_{+1}}\right)\right]\exp(i\varphi),\end{aligned}$$

式中

$$z_{+1} = \frac{k'}{k}z, \quad \varphi = \varphi'_R - \varphi_R = C \text{（无关紧要的常数）}.$$

由此可见，波前 $\tilde{U}_{+1}$ 代表轴外发散的球面衍射波，其发散中心坐标(即+1级像点位置)为 $(0, y_0, z_{+1})$. 纵向放大率为

$$V_{+z} = \frac{z_{+1}}{z} = \frac{k'}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

而横向坐标不变. 第三项为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{-1} &= \beta U'_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^{*}\\ &= A_1 e^{i\varphi_{\mathrm{R}}} e^{i\varphi_{\mathrm{R}}}\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{y_0 y}{z}\right)\right]\\ &= A_1\exp\left[-ik'\left(\frac{x^2+y^2}{2z_{-1}}-\frac{y_0 y}{z_{-1}}\right)\right]\exp(i\varphi'),\end{aligned}$$

式中

$$z_{-1}=\frac{k'}{k}z,\quad \varphi'=\varphi'_{\mathrm{R}}+\varphi_{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\ (\text{无关紧要的常数}).$$

由此可见，波前 $\tilde{U}_{-1}$ 代表轴外会聚的球面衍射波，其会聚中心坐标(即 -1 级像点位置)为 $(0,y_0,z_{-1})$. 纵向放大率为

$$V_{-z}=\frac{z_{-1}}{z}=\frac{k'}{k}=\frac{\lambda}{\lambda'},$$

而横向坐标不变.

不过，应当注意到，如果照明光波是斜入射的平面波时，横向放大率将不等于 1，与波长比值 λ'/λ 有关.

5. 图 6-3 所示是全息术的创始者加伯(Gabor)最初设计的一类共轴全息装置. 设物是高度透明的，其振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+\Delta\tilde{t}(x,y),$$

式中 $|\Delta t|\ll t_0$.

(1) 求记录时全息底片(H 面)上的振幅与光强分布；

(2) 求线性冲洗后全息图的振幅透过率函数；

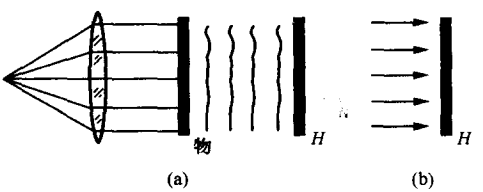


图 6-3

(3) 分析再现的波场；

(4) 讨论这种共轴系统的缺点与局限性.

解 (1) 由于是正入射的平行光照明物平面，故入射场为

$$\tilde{U}_1=A_1.$$

物平面的透射场

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2&=\tilde{t}\tilde{U}_1=[t_0+\Delta\tilde{t}(x,y)]A_1\\ &=A_1t_0+A_1\Delta\tilde{t}(x,y)\end{aligned}$$

包含两项：第一项

$$\tilde{U}_R(x,y) = A_1 t_0$$

代表正出射的平面衍射波，直达记录平面 H. 这一项与物平面的本底透射率 t_0 相联系. 第二项

$$\tilde{U}'_0(x,y) = A_1 \Delta\tilde{t}(x,y)$$

代表弥漫的衍射波，携带了物信息 $\Delta\tilde{t}(x,y)$，而波及记录平面 H. 设这一项到达 H 平面的衍射场为 $\tilde{U}_O(x,y)$，$\tilde{U}_O$ 与 $\tilde{U}'_0$ 的关系应由惠更斯-菲涅耳原理确定. 由此可见，此时到达记录平面 H 的仍然可看做有 $\tilde{U}_R$ 和 $\tilde{U}_O$ 波，其中 $\tilde{U}_R$ 为参考波，$\tilde{U}_O = A_O \exp(i\varphi_O)$ 为物光波. H 面上的振幅分布为

$$\tilde{U}_H(x,y) = \tilde{U}_R(x,y) + \tilde{U}_O(x,y),$$

干涉强度分布为

$$I_H(x,y) = \tilde{\tilde{U}}_H \tilde{U}^*_H = (\tilde{U}_R + \tilde{U}_O)(\tilde{U}_R + \tilde{U}_O)^*.$$

(2) 对记录底片(H 面)作线性处理后，其振幅透过率函数为

$$\begin{aligned}\tilde{t}_H(x,y) &= \tilde{t} + \beta I_H \\ &= (\tilde{t} + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_0^2) + \beta \tilde{U}^*_R \tilde{U}_O + \beta \tilde{U}_R \tilde{U}^*_O.\end{aligned}$$

(3) 如果用一束平行光 $\tilde{U}'_R$ 正入射照明底片，设

$$\tilde{U}'_R = A_2,$$

则透射场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_T(x,y) = \tilde{t}_H \tilde{U}'_R &= (\tilde{t} + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_0^2) A_2 \\ &\quad + \beta A_1 A_2 t_O \tilde{U}_0 + \beta A_1 A_2 t_0 \tilde{U}^*_O.\end{aligned}$$

它包含三种主要成分，可写成

$$\tilde{U}_T = \tilde{U}'_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1},$$

其中第一项为

$$\tilde{U}'_0 = (t + \beta t_0^2 A_1^2 + \beta A_O^2) A_2,$$

式中除 $A_O(x,y)$ 外的其他量都是常量. 考虑到 $A_O(x,y)$ 是物平面上与 $\Delta\tilde{t}(x,y)$ 相联系的衍射到 H 面上的振幅分布，而 $|\Delta\tilde{t}| \ll t_0$，故可以

认为 βA_0^2 不起主要作用，即 $\tilde{U}_0'$ 波基本上是正出射的平面衍射波. 第二项

$$\tilde{U}_{+1} = \beta A_1 A_2 t_0 \tilde{U}_O$$

是物光波的再现波，当然振幅系数有所改变. 第三项

$$\tilde{U}_{-1} = \beta A_1 A_2 t_0 \tilde{U}_O^*$$

是物光波共轭波. 值得注意的是，这两列衍射波 $\tilde{U}_{+1}$ 和 $\tilde{U}_{-1}$ 都同 $\tilde{U}_0'$ 波共轴.

(4) 再现波场所包含的三种成分共轴展现，是这种全息装置的最大缺点. 它给人们观测带来很大麻烦，不便于分离两个孪生像 $\tilde{U}_{+1}$ 和 $\tilde{U}_{-1}$ 波；而且，受 $\tilde{U}_0'$ 波的干扰也很大.

*§3 全息术应用简介

本节习题从略.

*§4 傅里叶全息图及其应用举例

本节习题从略.

第七章　光在晶体中的传播

§1　双　折　射

1. 一束线偏振的钠黄光垂直射入一块方解石晶体，振动方向与晶体的主平面成 20°角. 试计算 o，e 两光束折射光的相对振幅和强度.

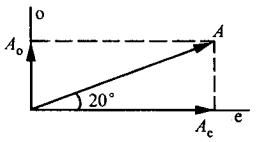


图　7-1

解　线偏振光射入方解石晶体后，电矢量被分解为垂直于主平面的 o 振动和平行于主平面的 e 振动. 如图 7-1，主平面是通过 e 轴垂直纸面的. 设入射光线偏振的振幅为 A，则 o 光、e 光振幅分别为

$$A_o = A\sin 20° = 0.34A,$$

$$A_e = A\cos 20° = 0.94A.$$

两者之比为

$$A_o/A_e = \tan 20° = 0.36.$$

在考虑两束光的强度问题时，应注意光强与折射率成正比，而且 e 光的折射率与传播方向有关，因此，o 光和 e 光的强度分别为

$$I_o = n_o A_o^2 = n_o A^2 \sin^2 20° = 0.12 n_o A^2,$$

$$I_e = n(\theta) A_e^2 = n(\theta) A^2 \cos^2 20° = 0.88 n(\theta) A^2.$$

强度之比为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n(\theta)} \tan^2 20° = 0.14 \frac{n_o}{n(\theta)},$$

式中 θ 为 e 光法线速度和光轴的夹角. 如光轴与晶体表面平行，则有

$$n(\theta) = n_e,$$

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{n_o}{n_e} \tan^2 20° = \frac{1.66}{1.49} \times 0.14 = 0.16.$$

2. 如图 7-2(a),两块大小相同的冰洲石晶体 A,B 前后排列,强度为 I 的自然光垂直于晶体 A 的表面入射后相继通过 A,B. A,B 的主截面(入射界面的法线和光轴组成的平面)之间夹角为 α(图中 $\alpha=0°$). 求 $\alpha=0°,45°,90°,180°$时由 B 射出光束的数目和每束光的强度. (忽略反射、吸收等损失.)

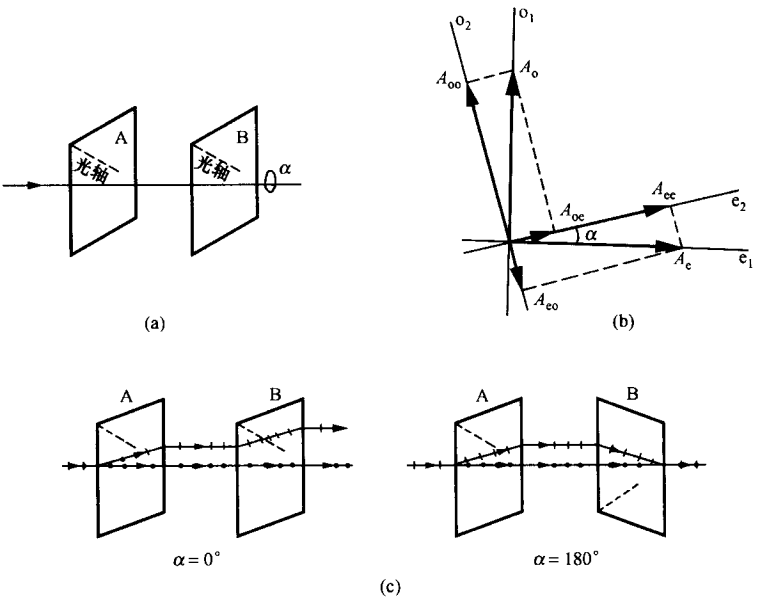


图 7-2

解 自然光垂直射入晶体 A 以后,被分解为平行于主截面的 e_1 振动和垂直于主截面的 o_1 振动,由于光轴与表面既不平行,又不垂直,o_1 光和 e_1 光的传播方向不同,从 A 出射后被分解为垂直 A 表面的两束光,其强度分别为

$$I_o=\frac{I}{2},\quad I_e=\frac{I}{2}.$$

这两束光射入 B 后,又分别被分解为 B 内的 o_2 振动和 e_2 振动;一般来说,其传播方向也要继续分离. 从 B 出射的将有四束光(除特殊夹角外),它们的强度与 A,B 两晶体主截面的夹角 α 有关(参见图

7-2(b)). 这四束光的强度分别为

$$I_{oo} = A_{oo}^2 = I_o\cos^2\alpha = I\cos^2\alpha/2,$$

$$I_{oe} = A_{oe}^2 = I_o\sin^2\alpha = I\sin^2\alpha/2,$$

$$I_{eo} = A_{eo}^2 = I_e\sin^2\alpha = I\sin^2\alpha/2,$$

$$I_{ee} = A_{ee}^2 = I_e\cos^2\alpha = I\cos^2\alpha/2.$$

当 $\alpha=0°$时,得

$$I_{oo} = I_{ee} = I/2, \quad I_{oe} = I_{eo} = 0,$$

即从 B 出射的为两束光,强度均为 $I/2$. $I_{oe}=I_{eo}=0$,这是因为此时两个主截面之夹角为零(如图 7-2(c)). A 中的 o_1 振动进入 B 后仍为 o 振动,无 e 分量;而 A 中的 e_1 振动进入 B 后仍为 e 振动,无 o 分量.

当 $\alpha=45°$时,得

$$I_{oo} = I_{ee} = I_{oe} = I_{eo} = I/4,$$

即从 B 出射的为四束光,强度均为 $I/4$.

当 $\alpha=90°$时,得

$$I_{oo} = I_{ee} = 0, \quad I_{oe} = I_{eo} = I/2,$$

即从 B 出射的为两束光,强度均为 $I/2$. 这时 A 中的 o_1 振动进入 B 内全部为 e 振动;而 A 中的 e_1 振动进入 B 内全部为 o 振动.

当 $\alpha=180°$时,得

$$I_{oo} = I_{ee} = I/2, \quad I_{oe} = I_{eo} = 0,$$

即从 B 出射的为两束光,强度均为 $I/2$. 这时 A 中的 o_1 振动进入 B 后仍全部为 o 振动;A 中的 e_1 振动进入 B 后仍全部为 e 振动. 但由于这时 A,B 中的光轴方向对称于表面的法线(如图 7-2(c)),e_1 光在 A 中的偏折方向与在 B 中的偏折方向相反. 因此从 B 出射后 e,o 振动复合为一束光(传播方向重合),非相干叠加的结果强度仍为 I.

3. 一水晶平板厚 0.850 mm,光轴与表面平行. 用水银灯的绿光(5461 Å)垂直照射. 求:

(1) o,e 两光束在晶体中的光程;

(2) 两者的相位差(用度(°)表示).

解　(1) 水银绿光(5461 Å)在水晶中的主折射率分别为 $n_o=1.546\,17$, $n_e=1.555\,35$. 绿光通过 $l=0.850$ mm 的光程分别为

$$L_o = n_o l \approx 1.314\ \text{mm}, \quad L_e = n_e l \approx 1.322\ \text{mm}.$$

(2) 相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e = -\frac{2\pi}{\lambda}(L_o - L_e)$$

$$\approx 92.04\ \text{rad} = 5273.5°.$$

4. 一束钠黄光以 50°的入射角射到冰洲石平板上. 设光轴与板表面平行,并垂直于入射面. 求晶体中 o 光和 e 光的夹角.

解 在此特殊情况下,o 光与 e 光在晶体内的传播方向均服从普遍的折射定律,即

$$n_o \sin i_o = \sin i, \quad n_e \sin i_e = \sin i. \qquad ①$$

以 $n_o = 1.658\,36$, $n_e = 1.486\,41$, $i = 50°$ 代入,分别算出

$$i_o = 27.51°, \quad i_e = 31.02°.$$

两束光在晶体中的夹角为

$$\Delta i = i_e - i_o \approx 3.51°.$$

5. 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上. 光轴与入射面垂直,平板厚度为 4.20 mm. 求 o 光和 e 光射到平板对面上两点的间隔. (已知对于钠黄光冰, $n_o = 1.3090$, $n_e = 1.3104$.)

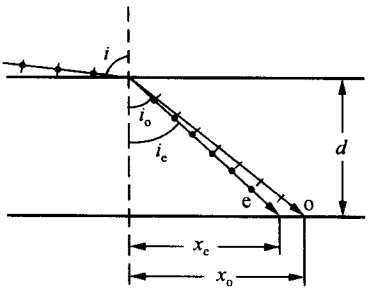


图 7-3

解 这时入射角 $i \approx 90°$, 故 $\sin i \approx 1$. 先由上题中式①求得折射角 i_o 和 i_e; 再分别求出 o,e 两光线射向平板对面的位置坐标(参见图 7-3)

$$x_o = d\tan i_o, \quad x_e = d\tan i_e;$$

最后算出两点间隔为

$$\Delta x = x_o - x_e = d(\tan i_o - \tan i_e) \approx 12.7\ \mu\text{m}.$$

6. 用 ADP(磷酸二氢铵 $NH_4H_2PO_4$)晶体制成 50°顶角的棱镜. 光轴与棱镜主截面垂直,$n_o=1.5246$,$n_e=1.4792$. 试求:

(1) o 光和 e 光的最小偏向角;

(2) 两者之差.

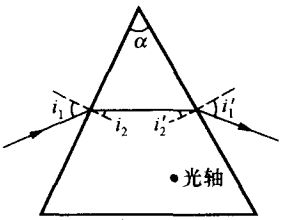


图　7-4

解　此时,o 光和 e 光皆按通常的折射定律在棱镜内部传播. 我们须知,最小偏向角的条件是光线对称入射和出射(如图 7-4 所示):

$$i_1 = i_1', \quad i_2 = i_2' = \alpha/2.$$

由于 o 光和 e 光有不同的折射率,它们的外角 i_1,i_1' 是不同的,分别为

$$\begin{aligned} i_{1o} &= \arcsin\left(n_o \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \arcsin[1.5246 \times \sin(50°/2)] \approx 40.11°, \\ i_{1e} &= \arcsin\left(n_e \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \arcsin[1.4792 \times \sin(50°/2)] \approx 38.70°. \end{aligned}$$

各自的最小偏向角分别为

$$\delta_{om} = 2i_{1o} - \alpha \approx 30.22°, \quad \delta_{em} = 2i_{1e} - \alpha \approx 27.40°.$$

偏向角之差为

$$\Delta\delta = \delta_{om} - \delta_{em} = 2.82°.$$

7. 设一水晶棱镜的顶角为 60°,光轴与棱镜主截面垂直. 钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射,用焦距为 1 m 的透镜聚焦. o 光和 e 光两谱线的间隔为多少?

解　与上题同理,得

$$\begin{aligned} i_{1o} &= i_{1o}' = \arcsin\left(n_o \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \arcsin[1.544\,25 \times \sin(60°/2)] \\ &\approx 50.55°, \\ i_{1e} &= i_{1e}' = \arcsin\left(n_e \sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \arcsin[1.553\,36 \times \sin(60°/2)] \\ &\approx 50.96°. \end{aligned}$$

值得注意的是，一束光的入射角严格地说不能使 o 光和 e 光同时满足最小偏向角的条件. 实际上，可近似地以 i_{1o} 和 i_{1e} 的平均值入射. 这时两束出射光线的角间隔

$$\Delta i = i_{1e} - i_{1o} \approx 0.41^\circ \approx 7.16 \times 10^{-3}\ \text{rad},$$

经透镜聚焦后，两束光线的间隔

$$\Delta x = f\Delta i = 1\ \text{m} \times (7.16 \times 10^{-3}\ \text{rad}) = 7.16\ \text{mm}.$$

8. 求冰洲石晶体中光线和波法线间的最大夹角.

解 根据射线速度倾角(与光轴的夹角)ξ 和法线速度倾角 θ 的关系

$$\cot\theta = \frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi,$$

直接写出两者夹角 α 的公式

$$\alpha = \xi - \theta = \xi - \arctan\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi\right).$$

为求 α 的极值，令

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = 1 - \left[-\frac{\frac{n_o^2}{n_e^2}\left(-\frac{1}{\sin^2\xi}\right)}{1 + (n_o^2\cot\xi/n_e^2)^2}\right] = 0.$$

整理得

$$\frac{n_e^2}{n_o^2}\sin^2\xi + \frac{n_o^2}{n_e^2}\cos^2\xi = 1.$$

由此解出使偏离角 α 出现极大的条件为

$$\cot\xi = n_e/n_o \quad \text{或} \quad \cot\theta = n_o/n_e.$$

此时偏离角的极大值 α_M 由下式给出：

$$\tan\alpha_m = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e}.$$

以钠黄光为例，把 $n_o = 1.658\,36$，$n_e = 1.486\,41$ 代入上式，算得

$$\alpha_m \approx 6.26^\circ.$$

9. 钠黄光以 45°的入射角入射到方解石晶体的表面. 设光轴与晶体表面成 30°角，入射面与主截面重合. 求：

(1) o 光和 e 光的方向；

(2) e 光的折射率.

解　在斜入射、斜光轴的情形下，即使主截面与入射面重合，如何定量地确定 e 光的传播方向，也是一个比较麻烦的问题.

如图 7-5，设入射角为 i，光轴与晶体表面夹角为 β. 以 O 点(次波源)为原点取坐标系 Oxy，并令 y 轴沿光轴方向. 设 e 光的传播方向 $\boldsymbol{r}$ 与 y 轴的夹角为 ξ，相应的 e 光的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴的夹角为 θ，两者相对于晶体表面法线方向的夹角分别为 i_e 和 i_n. 根据晶体中的惠更斯作图法和有关椭圆的解析几何理论可以导出

$$\tan\theta = n_e^2 \frac{\sin\beta\cos\beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin^4 i}{n_o^2 n_e^2}\right)}}{\sin^2 i - n_e^2\sin^2\beta},$$

$$\tan\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta,$$

$$i_e = \pi/2 + \beta - \xi, \qquad ①$$

$$i_n = \pi/2 + \beta - \theta. \qquad ②$$

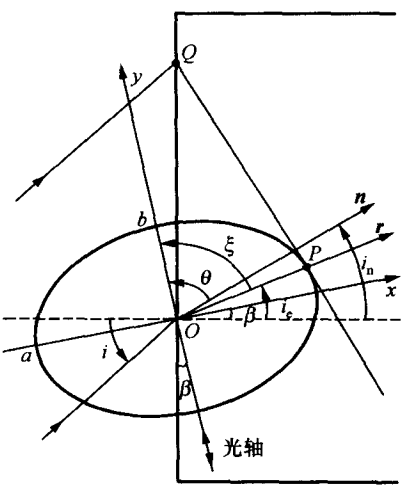


图　7-5

将 $i=45°$，$\beta=30°$，$n_o=1.6584$，$n_e=1.4864$ 代入以上四式，算得

$$\xi = 88.717\,550,$$

$$\theta = 88.403\,725$$

$$i_e = 28.652°,$$

$$i_n = 28.323°.$$

此外，根据折射定律算出 o 光传播方向角为

$$i_o = 25.238°,$$

在作数值运算时应注意，若按式①，②算出 $|i_e|>90°$ 或 $|i_n|>90°$ (返回第 2，3 象限)，则应取反方向(即 $i_e-180°$ 或 $i_n-180°$)，才是 e 光射线和波法线的实际方向.

最后，算出

$$n_e(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^2\cos^2\theta + n_o^2\sin^2\theta}}$$

$$= n_e(88.323) = 1.4865.$$

10. 试导出斜入射斜光轴(入射面与主截面重合)情形下 e 光的传播方向公式.

解 这个问题比较复杂,下面我们结合图 7-5 逐步导出 e 光折射角 i_e 的公式.

(1) 设入射角为 i,入射光束两边缘光线的入射点分别为 O 与 Q 点,并设 $\overline{OQ}=l$.

(2) 以入射点 O 为原点,取正交坐标系 Oxy,y 轴沿光轴方向.设光轴与晶体表面夹角为 β.

(3) 以次波源 O 点为中心,作一个次波椭圆,椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

其长短轴分别为

$$a = v_e t = \frac{c}{n_e} t, \quad b = v_o t = \frac{c}{n_o} t,$$

式中 t 应等于入射光束到达 O,Q 两点的时间差,即

$$t = l\sin i/c.$$

(4) 从 Q 点向椭圆作切线,切点为 P,则 O,P 两点的连线方向便是 e 光的传播方向 $\boldsymbol{r}$.它与光轴(y 轴)的夹角为 ξ,与晶体表面法线的夹角为 i_e.从 O 点作 Q,P 两点连线的法线 $\boldsymbol{n}$,便是波法线方向.它与光轴(y 轴)的夹角为 θ.

(5) 计算 i_e 的方法有两种:一是设法确定 P 点坐标(x_0, y_0),由此求得 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴的夹角,与 β 角的和便是折射角 i_e.二是设法确定 PQ 直线方程,由此求得法线 $\boldsymbol{n}$ 与光轴(y 轴)的夹角 θ,再根据

$$\tan\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta$$

和

$$i_e = \pi/2 + \beta - \xi$$

求得折射角 i_e.这两种方法的计算量相近,都要利用解析几何中有关直线方程和椭圆切线方程的知识.这里我们采取第二种方法.过椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$的切线方程为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \qquad ①$$

将它写成直线方程的标准形式：

$$y = kx + h,$$

其中斜率为

$$k = -b^2 x_0 / a^2 y_0,$$

截距为

$$h = b^2/y_0 \quad 或 \quad h^2 = a^2 k^2 + b^2. \qquad ②$$

我们须知，切线方程①应当与由 Q,P 两点确定的直线方程一致. 设 Q 点坐标为(x',y')，则

$$x' = l\sin\beta, \quad y' = l\cos\beta.$$

过点 $Q(x',y')$而斜率为 k 的直线方程为

$$\frac{y - y'}{x - x'} = k,$$

即

$$y = kx + h,$$

其中截距为

$$h = y' - kx'. \qquad ③$$

将式③代入式②，就得到斜率 k 所满足的一元二次方程，并解出

$$k = \frac{-x'y' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}$$

$$= \frac{-\sin\beta\cos\beta \pm \sqrt{\left(\frac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin^4 i}{n_o^2 n_e^2}\right)}}{\left(\frac{\sin i}{n_e}\right)^2 - \sin^2\beta}.$$

因此有

$$\tan\theta = -k,$$

$$\tan\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta$$

$$=n_o^2\frac{\sin\beta\cos\beta\pm\sqrt{\left(\frac{\sin i\cos\beta}{n_e}\right)^2+\left(\frac{\sin i\sin\beta}{n_o}\right)^2-\left(\frac{\sin^2 i}{n_o n_e}\right)^2}}{\sin^2 i-(n_e\sin\beta)^2}\text{①},$$

最后得

$$i_e=\pi/2+\beta-\xi.$$

§2 晶体光学器件

1. 如图 7-6 所示，沃拉斯顿(Wollaston)棱镜的顶角 $\alpha=15°$. 两出射光线间的夹角为多少?

解 如图 7-6，在中间界面上发生的折射情形是，光线 1 由折射率 $n_e\to n_o$，光线 2 由折射率 $n_o\to n_e$，入射角均为 α. 折射角分别设为 i_1 和 i_2. 此时，两光线在第二块棱镜中的传播方向仍由通常的折射定律确定. 取 $n_o=1.658\,36$，$n_e=1.486\,41$，算出

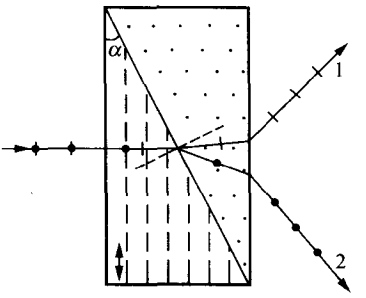


图 7-6

$$i_1=\arcsin\left(\frac{n_e}{n_o}\sin\alpha\right)\approx 13.41°,$$

$$i_2=\arcsin\left(\frac{n_o}{n_e}\sin\alpha\right)\approx 16.78°.$$

再考虑 1，2 两条光线在右侧界面的折射情形. 根据几何关系，此时的入射角分别为

$$i_1'=\alpha-i_1\approx 1.59°,$$

$$i_2'=\alpha-i_2\approx -1.78°.$$

相应的折射角为

$$i_1''=\arcsin(n_o\sin i_1')\approx 2.637°,$$

$$i_2''=\arcsin(n_e\sin i_2')\approx -2.646°.$$

① 这里只取正号，在物理上是合理的.

两光线夹角为

$$\Delta i = i_1'' - i_2'' \approx 5.28°.$$

2. 设在图 7-7 所示的尼科耳(Nicol)棱镜中，$\angle CA''C''$为直角，SM 平行于 $A''A'$. 试计算此时能使 o 光在棱镜黏合面上发生全反射的最大入射角度以及相应的$\angle S_oMS$. (设以钠黄光入射.)

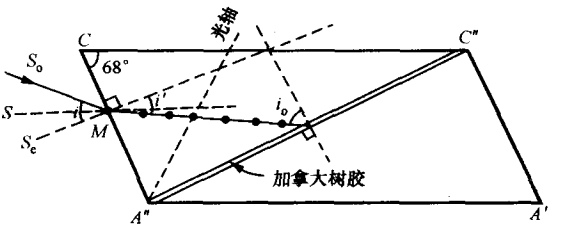


图 7-7　尼科耳棱镜

解　尼科耳棱镜的两部分是用加拿大树胶($n=1.55$)黏合的. o 光($n_o=1.658\,36$)在界面上全反射临界角(见图 7-7)为

$$i_o = \arcsin\left(\frac{1.55}{1.658\,36}\right) \approx 69.17°.$$

此时第一界面的折射角为

$$i' = 90° - i_o \approx 20.83°,$$

相应的最大入射角为

$$i = \arcsin(n_o \sin i') \approx 36.14°,$$

所以

$$\angle S_oMS = i - (90° - 68°) \approx 14.14°.$$

3. 用方解石和石英薄板做对钠黄光的 $\lambda/4$ 波片. 它们的最小厚度各为多少?

解　$\lambda/4$ 波片的最小厚度 d 应满足

$$(n_o - n_e)d = \pm \lambda/4.$$

就 $\lambda=5892.90$ Å的钠黄光来说，对于方解石有

$$n_o - n_e = 1.658\,36 - 1.486\,41 = 0.171\,95,$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} \approx 8568 \text{ Å}.$$

对于石英，有

$$n_e - n_o = 1.553\,36 - 1.544\,25 = 0.009\,11,$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} \approx 161715\ \text{Å} = 16.17\ \mu\text{m}.$$

4. 两尼科耳棱镜主截面的夹角由 30°变到 45°. 透射光的强度如何变化？（设入射自然光的强度为 I_0.）

解 由马吕斯定律知道，通过第二个尼科耳棱镜后的光强为

$$I_2 = I_0\cos^2\alpha/2,$$

式中 α 为两尼科耳棱镜主截面的夹角. 当 $\alpha=30°$时，得

$$I_2 = 3I_0/8;$$

当 $\alpha=45°$时，得

$$I_2 = I_0/4.$$

5. 单色线偏振光垂直射入方解石晶体，其振动方向与主截面成 30°角. 两折射光再经过置于方解石后的尼科耳棱镜，其主截面与原入射光的振动方向成 50°角. 求两条光线的相对强度.

解 如图 7-8，设线偏振光的振幅为 A_0，其振动方向与晶体主截面的夹角为 α，与尼科耳棱镜主截面的夹角为 β. 线偏振光经方解石后分解为 e 振动和 o 振动，其振幅分别为

$$A_e = A_0\cos\alpha, \quad A_o = A_0\sin\alpha.$$

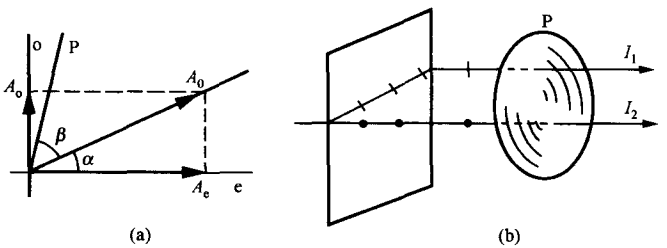


图 7-8

各自通过尼科耳棱镜后的振幅分别为

$$A_1 = A_e\cos(\alpha+\beta) = A_0\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha,$$

$$A_2 = A_o\sin(\alpha+\beta) = A_0\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha.$$

强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{A_2^2}{A_1^2}=\tan^2(\alpha+\beta)\tan^2\alpha$$

$$=\tan^2(30°+50°)\tan^2 30°\approx 10.72.$$

6. 经尼科耳棱镜观察部分偏振光. 当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过 60°时，光强减为一半. 求光束的偏振度.

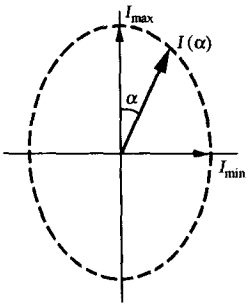


图　7-9

解　如图 7-9，部分偏振光的光强极大 I_{max} 方位与光强极小 I_{min} 方位总是正交的. 任意斜方位的光强 $I(\alpha)$ 是 I_{max} 和 I_{min} 的非相干叠加，即

$$I(\alpha)=I_{max}\cos^2\alpha+I_{min}\sin^2\alpha,$$

当 $\alpha=60°$ 时，$I(\alpha)=I_{max}/2$，代入上式求出

$$I_{min}=I_{max}/3.$$

因此，该部分偏振光的偏振度为

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}=50\%.$$

§3　圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验

1. 用一块 $\lambda/4$ 片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光. 达到消光位置后，$\lambda/4$ 片的光轴与偏振片透振方向相差 22°. 求椭圆长短轴之比.

解　一椭圆偏振光经 $\lambda/4$ 片后能有消光位置. 这说明 $\lambda/4$ 片的光轴已经对准入射椭圆光的长轴或短轴方向，如图 7-10. 消光时，偏振片 P 的透振方向与合成线偏振 A 方向正交，而 A 的方位取决于入射椭圆光的长短轴之比，由图 7-10 可见，长短轴之比为

$$A_o/A_e=\cot 22°\approx 2.5.$$

2. 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过 $\lambda/4$ 片(此 $\lambda/4$ 片由方

解石做成，o 光和 e 光在晶片中的光程差正好是 $\lambda/4$），然后再经过一块主截面相对于 $\lambda/4$ 片向右旋 15°的尼科耳棱镜. 求最后出射的光强（忽略反射、吸收等损失）.

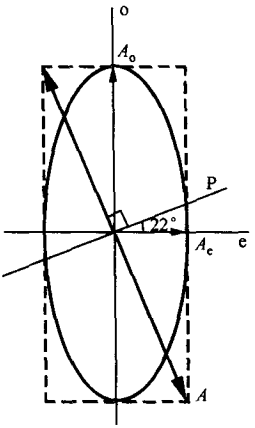


图 7-10

解 为考查射向尼科耳棱镜的是一种什么状态的偏振光，分析两垂直分量间的相位差

$$\delta_1 = \pi/2,$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

其中 δ_1 是 $\lambda/4$ 片入射点的相位差，δ_2 是 $\lambda/4$ 片体内传播的附加相位差. 所以总相位差为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.$$

这说明它是一个在第 1，3 象限的线偏振光（如图 7-11），强度为 I_0. 按马吕斯定律，很容易算出它再通过尼科耳棱镜 P 的强度为

$$I_P = I_0\cos^2(45° + 15°) = I_0/4.$$

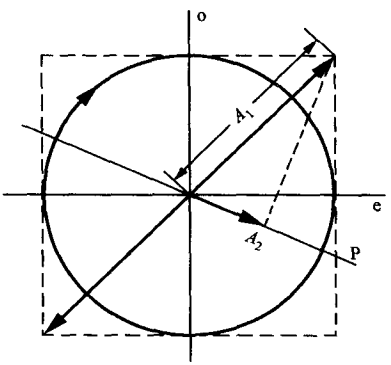


图 7-11

§4 偏振光的干涉及其应用

1. 平行于光轴切割的一块方解石晶片，被放置在一对尼科耳棱

镜之间，光轴方向与两个棱镜主截面均成 15°角. 求：

(1) 从方解石晶片射出的 o 光和 e 光的振幅和光强；

(2) 投影于第二块尼科耳棱镜的 o 光和 e 光的振幅和光强.

(设入射自然光的光强为 $I_0=A^2$，反射和吸收等损失可以忽略.)

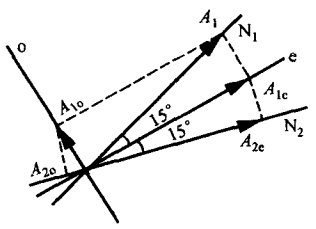


图　7-12

解　(1) 如图 7-12，设经第一块尼科耳棱镜 N_1 后的线偏振光的振幅为 A_1，光强为 I_1，则

$$I_1 = I_0/2 = A^2/2, \quad A_1 = A/\sqrt{2}.$$

从方解石晶片出射的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{1e} = A_1\cos 15° = (A/\sqrt{2})\cos 15° \approx 0.68A,$$

$$A_{1o} = A_1\sin 15° = (A/\sqrt{2})\sin 15° \approx 0.18A.$$

光强分别为

$$I_e = A_{1e}^2 = A^2\cos^2 15°/2 = I_0\cos^2 15°/2 \approx 0.47I_0,$$

$$I_o = A_{1o}^2 = A^2\sin^2 15°/2 = I_0\sin^2 15°/2 \approx 0.03I_0.$$

(2) 投影于第二块尼科耳棱镜 N_2 的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{2e} = A_{1e}\cos 15° = A_1\cos^2 15° = (A/\sqrt{2})\cos^2 15° \approx 0.66A,$$

$$A_{2o} = A_{1o}\sin 15° = A_1\sin^2 15° = (A/\sqrt{2})\sin^2 15° \approx 0.05A.$$

光强分别为

$$I'_e = A_{2e}^2 = I_0\cos^4 15°/2 \approx 0.44I_0,$$

$$I'_o = A_{2o}^2 = I_0\sin^4 15°/2 \approx 0.0022I_0.$$

2. 强度为 I_0 的单色平行光通过正交尼科耳棱镜. 现在两块尼科耳棱镜之间插入一 $\lambda/4$ 片，其主截面与第一块尼科耳棱镜的主截面成 60°角. 求出射光的强度(忽略反射、吸收等损失).

解　用偏振光干涉的方法求解. 如图 7-13，对通过第一块尼科耳棱镜 N_1 的线偏振光的振幅 A_1 作两次投影，得第二块尼科耳棱镜 N_2 透振方向的两个振动的振幅 A_{2e}，A_{2o}，其值分别为

$$A_{2e} = A_1\cos\alpha\sin\alpha = A_1\sin 2\alpha/2,$$

$A_{2o} = A_1 \sin\alpha\cos\alpha = A_1 \sin 2\alpha/2$.

再仔细分析这两个振动之间总的相位差

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

式中 δ_1 为 $\lambda/4$ 片入射点处 o,e 振动的相位差：$\delta_1 = \pi$；δ_2 为晶片体内传播附加的相位差：$\delta_2 = \pm\pi/2$(我们取 $\delta_2 = +\pi/2$)；δ_3 为 o 轴、e 轴正向朝 N_2 方向投影的相位差：$\delta_3 = 0$. 所以

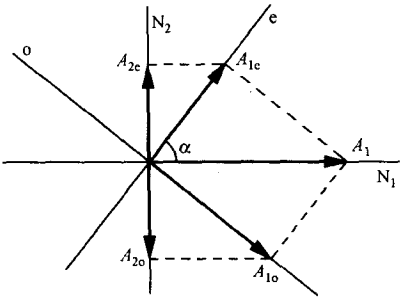


图 7-13

$$\delta = 3\pi/2.$$

最后通过 N_2 的光强 I_2 是 A_{2e}，A_{2o}相干叠加的结果，即

$$\begin{aligned} I_2 &= A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2A_{2e}A_{2o}\cos\delta \\ &= \frac{1}{4}A_1^2\sin^2 120° + \frac{1}{4}A_1^2\sin^2 120° \\ &= \frac{6}{16}A_1^2 = \frac{3}{16}I_0. \end{aligned}$$

如果取 $\delta_2 = -\pi/2$，上式等号右边第三项(交叉项)仍然为零，I_2 不变.

3. 一块 $d = 0.025$ mm 厚的方解石晶片表面平行于光轴，放在正交尼科耳棱镜之间. 晶片的主截面与它们成 45°角. 试问：

(1) 在可见光范围内哪些波长的光不能通过？

(2) 如果将第二块尼科耳棱镜的主截面转到与第一个平行，哪些波长的光不能通过？

解 如图 7-14 所示，这是一个由偏振光干涉而引起的显色问题. 我们须知，对于给定的某一厚度的晶片来说，虽然 o,e 光的光程差是确定的，即

$$\Delta L = (n_o - n_e)d,$$

但相位差 $\Delta\varphi$ 却因波长而异：

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d.$$

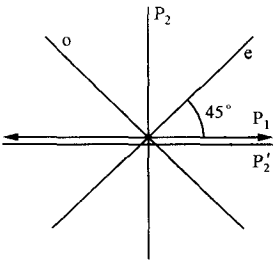


图 7-14

凡是使相位差满足

$$\Delta\varphi = 2k\pi \quad (k = 1,2,\cdots)$$

的光从晶片出来后，仍为与 P_1 透振方向一致的线偏振光，如图 7-14. 因 P_2 与 P_1 正交，这些光将不能通过 P_2. 据此，算出这一系列波长 λ_k 应满足

$$\lambda_k = (n_o - n_e)d/k.$$

将钠黄光的 n_o，n_e 及 d 代入上式分子，得

$$(n_o - n_e)d = (1.658\,36 - 1.486\,41) \times 0.025\ \text{mm}$$
$$= 42\,987.5\ \text{Å}.$$

故当 $k=5,6,\cdots,11$ 时，可算出

$$\lambda_5 \approx 8598\ \text{Å}, \quad \lambda_6 \approx 7165\ \text{Å},$$
$$\lambda_7 \approx 6141\ \text{Å}, \quad \lambda_8 \approx 5373\ \text{Å},$$
$$\lambda_9 \approx 4776\ \text{Å}, \quad \lambda_{10} \approx 4299\ \text{Å}, \quad \lambda_{11} \approx 3908\ \text{Å},$$

其中 $\lambda_6,\lambda_7,\cdots,\lambda_{11}$ 大体落在可见光波段.

(2) 如果 P_2 转到与 P_1 平行的方向，情况正好相反. 上述几种波长的光将完全通过 P_2，而使相位差满足

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

的光经晶片作用后，虽然仍为线偏振光，但其振动方向绕光轴转 $2\times 45°=90°$，正好与 P_2' 正交而消光. 据此，算出这一系列波长 λ_k' 应满足

$$\lambda_k' = \frac{(n_o - n_e)d}{k+1/2} = \frac{42\,987.5}{k+1/2}\ \text{Å},$$

故当 $k=5,6,\cdots,10$ 时，可算出

$$\lambda_5' \approx 7816\ \text{Å}, \quad \lambda_6' \approx 6613\ \text{Å}, \quad \lambda_7' \approx 5732\ \text{Å},$$
$$\lambda_8' \approx 5057\ \text{Å}, \quad \lambda_9' \approx 4525\ \text{Å}, \quad \lambda_{10}' \approx 4094\ \text{Å}.$$

这些波长大体落在可见光波段之内.

4. 两尼科耳棱镜主截面夹角为 60°，中间插入一块水晶的 $\lambda/4$ 片，其主截面平分上述夹角. 光强为 I_0 的自然光入射. 试问：

(1) 通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振态；

(2) 通过第二块尼科耳棱镜的光强.

解 (1) 自然光通过第一块尼科耳棱镜后成为线偏振光，再通过 $\lambda/4$ 片后成为(正)椭圆偏振光.

(2) 用偏振光干涉的方法求此椭圆偏振光通过第二块尼科耳棱镜 P_2 的光强，为此分别求出振幅(见图 7-15)

$$A_{e2} = A_e\cos 30° = A_1\cos^2 30°,$$

$$A_{o2} = A_o\sin 30° = A_1\sin^2 30°.$$

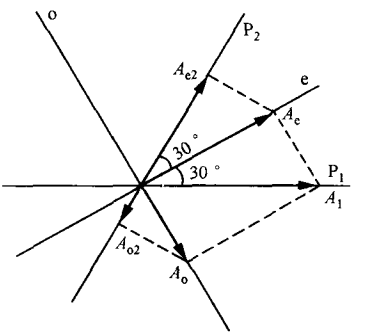


图 7-15

投影于 P_2 方向的两个扰动的相位差为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

式中 δ_1 为 $\lambda/4$ 片的入射点的相位差，δ_2 为晶片体内传播的附加相位差，δ_3 为由 o 光，e 光组成的坐标系正向朝 P_2 投影引起的相位差：

$$\delta_1 = \pi, \quad \delta_2 = \pm\pi/2, \quad \delta_3 = 0,$$

故

$$\delta = \pi \pm \pi/2.$$

于是出射光强为

$$I_2 = A_2^2 = A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\delta$$

$$= A_{e2}^2 + A_{o2}^2 = 10A_1^2/16 = 5I_0/16.$$

5. 试确定斜椭圆偏振光

(1) 任意方位的光强；

(2) 长短轴方位以及强度极大值和极小值.

解 在讨论偏振光干涉或椭圆偏振光的产生和检验一类问题时，我们可能经常遇到这样的情形：对于给定的坐标系来说，椭圆不是正的，而是斜的，这是由两个正交振动 $E_y(t)$ 与 $E_x(t)$ 之间的相位差 $\delta \neq \pm\pi/2, 0, \pi$ 引起的. 设

$$E_x(t) = A_x\cos\omega t, \quad E_y(t) = A_y\cos(\omega t + \delta).$$

(1) 先求此斜椭圆光通过偏振片 P 以后的光强 $I(\theta)$，θ 为偏振片透振方向与坐标轴之一(图 7-16(a)中选 x 轴)的夹角. 分别将振

动 $E_x(t)$与 $E_y(t)$向 P 方向投影，得

$$E_{x\mathrm{P}}(t) = A_x\cos\theta\cos\omega t,$$

$$E_{y\mathrm{P}}(t) = A_y\sin\theta\cos(\omega t + \delta).$$

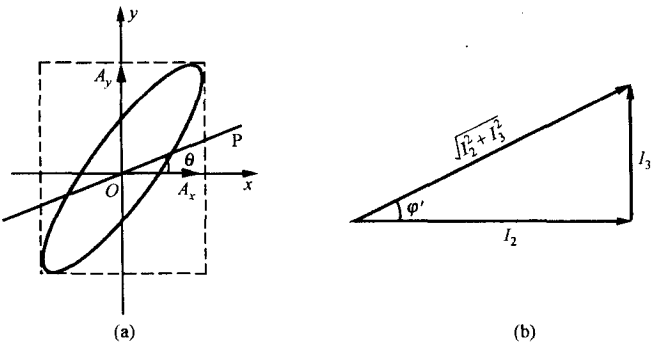


图　7-16

两者叠加便是通过偏振片的振动，即

$$E_{\mathrm{P}}(t) = E_{x\mathrm{P}}(t) + E_{y\mathrm{P}}(t) = A_{\mathrm{P}}\cos(\omega t + \varphi).$$

由一维同频简谐量合成公式得

$$\begin{aligned} I(\theta) &= A_{\mathrm{P}}^2 \\ &= (A_x\cos\theta)^2 + (A_y\sin\theta)^2 + 2(A_x\cos\theta)(A_y\sin\theta)\cos\delta \\ &= I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta + \sqrt{I_xI_y}\sin 2\theta\cos\delta, \qquad ① \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_y\sin\theta\sin\delta}{A_x\cos\theta + A_y\sin\theta\cos\delta}\right). \qquad ②$$

式①是已知 I_x，I_y，δ，求 $I(\theta)$的一般公式；式②给出的 φ 对光强的观测没有直接意义.

(2) 此时如要确定斜椭圆的长短轴方位以及相应的强度极大值 $I_{\max}$和强度极小值 $I_{\min}$，有两种方法可供选择：一种是纯解析几何方法，即作转动坐标变换，将斜椭圆轨迹方程

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2\frac{E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta = \sin^2\delta$$

中的交叉项消除掉，成为椭圆的标准方程，便可求解. 而我们常用的是另一种方法，即用偏振光干涉的光学方法求解，将式①中的 θ 看做

变量而求其极值. 为此式①改写为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2}I_x(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}I_y(1-\cos 2\theta) \\ &\quad +\sqrt{I_xI_y}\sin 2\theta\cos\delta \\ &= \frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}(I_x-I_y)\cos 2\theta \\ &\quad +\sqrt{I_xI_y}\cos\delta\sin 2\theta. \end{aligned} \tag{③}$$

令

$$I_1=\frac{1}{2}(I_x+I_y),\quad I_2=\frac{1}{2}(I_x-I_y),\quad I_3=\sqrt{I_xI_y}\cos\delta,$$

将式③简化为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_1+I_2\cos 2\theta+I_3\sin 2\theta \\ &= I_1+\sqrt{I_2^2+I_3^2}\cos(2\theta-\varphi'), \end{aligned}$$

$$\varphi'=\arctan\frac{I_3}{I_2}$$

或

$$\varphi'=\arccos\frac{I_2}{\sqrt{I_2^2+I_3^2}},$$

式中 φ' 与 I_2,I_3 的关系如图 7-16(b)所示. 显然,$I(\theta)$的极值条件为

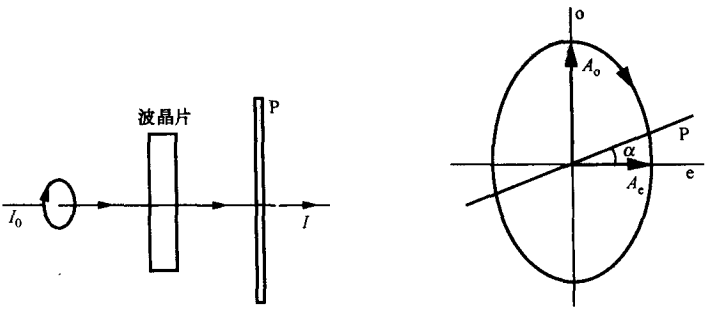
当 $\theta=\varphi'/2$ 时,有极大值

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I_1+\sqrt{I_2^2+I_3^2} \\ &= \frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos 2\delta}, \end{aligned} \tag{④}$$

当 $\theta=(\varphi'\pm\pi)/2$ 时,有极小值

$$\begin{aligned} I_{\min} &= I_1-\sqrt{I_2^2+I_3^2} \\ &= \frac{1}{2}(I_x+I_y)-\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos 2\delta}. \end{aligned} \tag{⑤}$$

6. 如图 7-17(a),波长为 λ 的右旋椭圆偏振光通过由负晶体制成的一块波晶片. 椭圆光的总强度为 I_0,其强度极大值与极小值之比



(a)　(b)

图　7-17

为 4∶1. 波晶片的光轴已对准椭圆光的短轴方向，其造成的(有效)光程差$(n_o-n_e)d=\lambda/6$. 偏振片透振方向与光轴夹角为 $\alpha=\pi/6$.

(1) 求出射光强 I(以 I_o 表示).

(2) 如果入射光改为左旋，其他条件不变，出射光强为多少？

(3) 在偏振片转动过程中，出射光强的极大值和极小值(以 I_0 表示)分别为多少？

解　按题意作图 7-17(b)，图中 $\alpha=\pi/6$.

(1) 由光强极大值 I_{max}和极小值 I_{min}的关系

$$I_{max}+I_{min}=I_0,\quad I_{max}=4I_{min}$$

得

$$I_y=I_{max}=4I_0/5,\quad I_x=I_{min}=I_0/5.$$

现用偏振光干涉的方法求 $I(\alpha)$，则可直接利用上题中式①得

$$I(\alpha)=I_{min}\cos^2\alpha+I_{max}\sin^2\alpha+\sqrt{I_{min}I_{max}}\sin 2\alpha\cos\delta,$$

式中 δ 是从波晶片出射后的 o 振动与 e 振动之间的相位差，它应当等于入射点的相位差 δ_1：

$$\delta_1=\varphi_o-\varphi_e=+\pi/2$$

和波晶片体内传播的附加相位差 δ_2：

$$\delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d=-\pi/3$$

之和：

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \pi/6.$$

最后得

$$I(\alpha) = \frac{1}{5}I_0\cos^2\frac{\pi}{6} + \frac{4}{5}I_0\sin^2\frac{\pi}{6} + \frac{2}{5}I_0\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3}{20}I_0 + \frac{4}{20}I_0 + \frac{6}{20}I_0 = \frac{13}{20}I_0.$$

(2) 如果入射光改为左旋,则

$$\delta_1' = \varphi_o - \varphi_e = -\pi/2,$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = -\frac{\pi}{3},$$

所以

$$\delta = \delta_1' + \delta_2 = -5\pi/6.$$

由于 $\cos\delta = -\sqrt{3}/2$. 故出射光强为

$$I'(\alpha) = \frac{3}{20}I_0 + \frac{4}{20}I_0 - \frac{6}{20}I_0 = \frac{1}{20}I_0.$$

显然,它不等于(1)右旋光入射时的结果.

(3) 由于从波晶片出射的两个正交振动之间的相位差为 $\delta = \pi/6$,故它们合成为斜椭圆光. 求斜椭圆长短轴方位及光强极值问题,可直接利用上题给出的式④和⑤,得

$$I_{max} = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}}I_0$$

$$= \frac{5+\sqrt{21}}{10}I_0 \approx 0.96I_0.$$

$$I_{min} = \frac{5-\sqrt{21}}{10}I_0 \approx 0.04I_0.$$

还可以算出偏振片 P 相对于 o,e 轴的方位角(即椭圆长短轴的方位),分别为

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{I_2}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)}{\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_xI_y\cos 2\delta}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\cos 60^\circ}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{21}}\right) \approx \frac{1}{2}(180^\circ - 49.11^\circ) \approx 65.45^\circ,$$

$$\alpha_{\min} = \alpha_{\max} + 90^\circ \approx 155.45^\circ.$$

7. 楔形水晶棱镜顶角为 0.5°，棱边与光轴平行，置于正交尼科耳棱镜之间，使其主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成 45°角. 以水银的 4047 Å 紫色平行光正入射. 问：

(1) 通过第二块尼科耳棱镜看到的干涉图样如何？

(2) 相邻暗纹的间隔 d 等于多少？

(3) 若将第二块尼科耳棱镜的主截面转 90°，干涉图样有何变化？

(4) 维持两尼科耳棱镜正交，但把水晶棱镜的主截面转 45°，使之与第二块尼科耳棱镜的主截面垂直. 干涉图样有何变化？

解　(1) 如图 7-18(a)，当第一块尼科耳棱镜 P_1 的透振方向与水晶棱镜的 e 轴成 45°夹角时，从 P_1 透射出来的线偏振光进入水晶后被分解为 o 光和 e 光. 如图 7-18(b)所示，目前 o 振动平行于纸面，e 振动垂直于纸面. 水晶为正晶体，o 光比 e 光传播快，即 $n_o < n_e$. 由于水晶棱镜的厚度连续变化，使出射面(斜面)上、下各点两个正交振

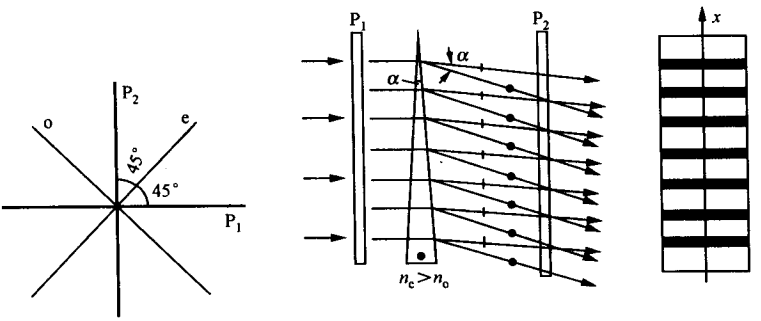


图　7-18

动之间的相位差也随之连续变化，合成结果为各种状态的椭圆光. 就传播方向看，它们经斜面折射成为两束平行光，其偏向角(相对于入射方向)在顶角 α 很小的条件下分别近似为

$$\delta_e \approx (n_e - 1)\alpha, \quad \delta_o \approx (n_o - 1)\alpha,$$

于是后场就是这两束平行光的叠加场. 如果安置第二块偏振片(尼科耳棱镜)P_2，后场就成为这两束平行光的干涉场；干涉图样是一组平行于棱镜边的直条纹.

(2) 可以按照我们熟悉的两束平行光干涉的条纹间距公式，直接求得目前水晶棱镜造成的相邻暗纹的间距为

$$d = \Delta x = \frac{\lambda}{\sin\delta_e - \sin\delta_o} \approx \frac{\lambda}{\delta_e - \delta_o} = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\alpha}.$$

按 $\lambda = 4047$ Å，$n_e = 1.566\,71$，$n_o = 1.557\,16$，$\alpha = 0.5°$，算出

$$\Delta x \approx 4.86 \text{ mm}.$$

这些暗纹的具体位置正好使相位差 $\Delta\varphi = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(3) 当我们将第二块尼科耳棱镜的透振方向(主截面)转 90°，与第一块尼科耳棱镜一致时，由于 o 轴、e 轴的正向在 P_2 投影的相位差与未转动时相比增加 180°，所以原来的暗线就成为亮纹，而原来的亮纹位置出现了暗线；其他方面(诸如条纹的形状、间距等)均无变化.

(4) 如果将水晶棱镜的主截面转 45°而与 P_1 主截面一致，则射入水晶棱镜的是纯 e 光. 此时，o 振动与 e 振动的相位差不起作用. 从棱镜出射的是同一振动方向的线偏振光，被 P_2 全部消光，P_2 后方呈一片暗场.

8. 巴比涅补偿器的结构如图 7-19(a)所示. 它由两个楔形的石英棱镜组成，光轴方向如图. 问：

(1) 将巴比涅补偿器放在正交偏振片之间，将看到什么现象？

(2) 若楔角 $\alpha = 2.75°$，用平行的钠黄光照明，求干涉条纹的间隔.

解 (1) 首先，分析巴比涅补偿器的工作原理和特性. 当经偏振片 P_1 后的线偏振光正入射于补偿器时，被分解为两个正交振动 $A_{/\!/}$ 和 $A_\perp$. 如图 7-19(b)，$A_{/\!/}$ 平行于纸面，$A_\perp$ 垂直于纸面. $A_{/\!/}$ 先后以折

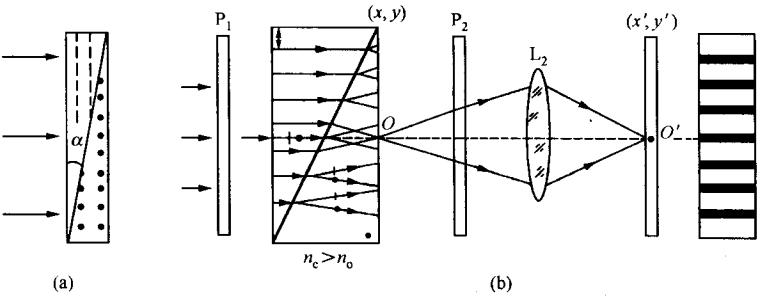


图　7-19

射率 n_e, n_o 通过两块棱镜，$A_\perp$ 先后以折射率 n_o, n_e 通过两块棱镜. 于是，在第一个棱镜内传播的包含两个正交振动的一束平行光经界面(斜面)后，就开始分离为两束不同方向的平行光，其偏向角(相对于图 7-19(a)中以虚线表示的入射方向)在楔角 α 很小的条件下分别近似为

$$\alpha_{/\!/} \approx (n_e/n_o - 1)\alpha > 0 \quad (\text{向上}),$$
$$\alpha_\perp \approx (n_o/n_e - 1)\alpha < 0 \quad (\text{向下}).$$

夹角为

$$\Delta\alpha = \alpha_{/\!/} - \alpha_\perp \approx \left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e}\right)\alpha.$$

由此可见，界面以后的空间是两束不同传播方向而振动方向又互相垂直的平行光的叠加场. 这两束平行光在出射面 $O'xy$ 内的相位分布分别为

$$\varphi_{/\!/}(x,y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_{/\!/}\, x + \varphi_{/\!/}(0)$$
$$\approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{n_e}{n_o} - 1\right)\alpha x + \varphi_{/\!/}(0),$$
$$\varphi_\perp(x,y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_\perp\, x + \varphi_\perp(0)$$
$$\approx -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{n_o}{n_e} - 1\right)\alpha x + \varphi_\perp(0),$$

式中 $\varphi_{/\!/}(0)$ 和 $\varphi_\perp(0)$ 分别为两个振动在中心点 O(两楔形棱镜等厚路

线所指的地点)的相位. 由于两个棱镜对光程的互补作用,致使 $\varphi_{/\!/}(0)=\varphi_{\perp}(0)$. 于是两束平行光的相位差分布为

$$\Delta\varphi(x,y)=\varphi_{\perp}-\varphi_{/\!/}=\frac{2\pi}{\lambda}\left[2\left(\frac{n_e}{n_o}-\frac{n_o}{n_e}\right)\alpha x\right].$$

从相位差随 x 呈连续线性变化这一点上看,几何厚度处处相等的补偿器相当于一块厚度连续变化的楔形晶片. 但是与单块楔形晶片不同,补偿器在 $x=0$ 的中心地带(即 y 轴)的相位差为零,并以此为准确的参考线,朝上、下展开,相位差依次为 $\Delta\varphi(x)=0,\pm\pi/4,\pm\pi/2,\pm3\pi/4,\pm\pi,\pm5\pi/4,\pm3\pi/2,\pm7\pi/2,\pm2\pi,\cdots$. 因此,两束平行光在 Oxy 面上的合成振动为各种状态的椭圆光,当然若干处仍然是线偏振光,而中心地带必定是与 P_1 透振方向一致的线偏振光. 利用补偿器的这一特点,偏振光干涉可以用于对体内传播引起的附加相位差进行绝对测量.

为使两束平行光产生相干叠加,需置放第二块偏振片 P_2. 考虑到这两束平行光从 Oxy 面出射到空气时将要进一步分离,如果直接接收的屏幕离得较远,将不可能获得交叠区域. 实验上最好的方法是加一个透镜 L_2,将物面 Oxy 成像于 $O'x'y'$ 面而实现相干叠加. 此时,像面上将出现一系列平行等距的直条纹. 如果所成像的横向放大率等于 1,则由两束平行光相干叠加的条纹间距公式得条纹间隔为

$$\begin{aligned}\Delta x'=\Delta x&=\frac{\lambda}{\sin\alpha_{/\!/}-\sin\alpha_{\perp}}\approx\frac{\lambda}{\Delta\alpha}\\&=\frac{\lambda}{2\left(\frac{n_e}{n_o}-\frac{n_o}{n_e}\right)\alpha}=\frac{n_on_e\lambda}{2(n_e+n_o)(n_e-n_o)\alpha}\\&\approx\frac{\lambda}{4(n_e-n_o)\alpha}.\end{aligned}$$

当 P_1,P_2 正交时,中心地带(y' 轴)必定是暗线(零级暗线).

如果不用透镜在像面上接收,而用肉眼在 P_2 后方观察,所看到的现象将因人而异,取决于你的眼睛聚焦于何处. 当眼睛(习惯于)聚焦在眼前的实物 P_2,而 P_2 又是贴近于 Oxy 平面时,眼睛观察到的与透镜接收的相同.

(2) 取 $\alpha=2.75°$,$n_o=1.544\,25$,$n_e=1.553\,36$,$\lambda=5893$ Å,算出

条纹间隔为

$$\Delta x \approx 0.52\ \text{mm}.$$

9. 以线偏振光照在巴比涅补偿器(参见上题)上,通过偏振片观察时在中央两楔形棱镜厚度 $d_1=d_2$ 处有一暗线,与中央暗线距离 a 处又有一暗线.今以同样波长的椭圆偏振光照在此巴比涅补偿器上,发现(中央)暗线移至离中央 b 处.

(1) 求椭圆偏振光在补偿器晶体中分解成的两个振动分量的初始相位差与 a,b 的关系;

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两楔形棱镜的光轴平行,试证此时 $b=a/4$;

(3) 设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ.找出 θ 与(2)中椭圆长短轴比值的关系.

解　(1) 因相邻暗线间距为 a,对应的相位差改变为 2π,所以当同级暗线位移 b 时,相位差改变量为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{a}b.$$

这也正是入射椭圆光两个正交振动 $A_\perp$ 与 $A_{/\!/}$ 的初始相位差值.它被补偿器带来的附加相位差所抵消,在非中心的某处出现了零级暗线.

(2) 此时,椭圆光为正椭圆,相位差 δ_1 只有取 $\pm\pi/2$ 两种可能:

$$\delta_1 = \pm\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{a}b.$$

由此解得

$$b=\pm a/4,$$

式中正号说明暗线向上位移,此时入射椭圆光为右旋;负号说明暗线向下位移,相应的入射椭圆光为左旋.

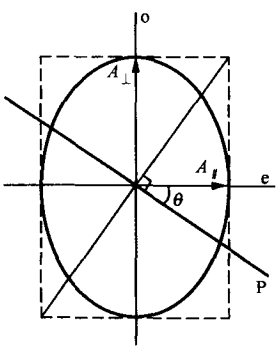


图　7-20

(3) 在巴比涅补偿器后面加偏振片观测,对于暗线位置来说(如图 7-20),必须保证偏振片 P 的透振方向与从补偿器出射的两个正交振动 $A_\perp$,$A_{/\!/}$ 合成的线偏振方向

彼此正交. 从图中可见，此时偏振片透振方向与补偿器一楔光轴的夹角 θ 应满足

$$\theta = \arctan(A_{/\!/}/A_{\perp}),$$

式中 $A_{\perp}/A_{/\!/}$ 为入射正椭圆偏振光长短轴之比.

10. 图 7-21(a)所示为杨氏干涉装置，其中 S 为单色自然光源，S_1' 和 S_2' 为双孔.

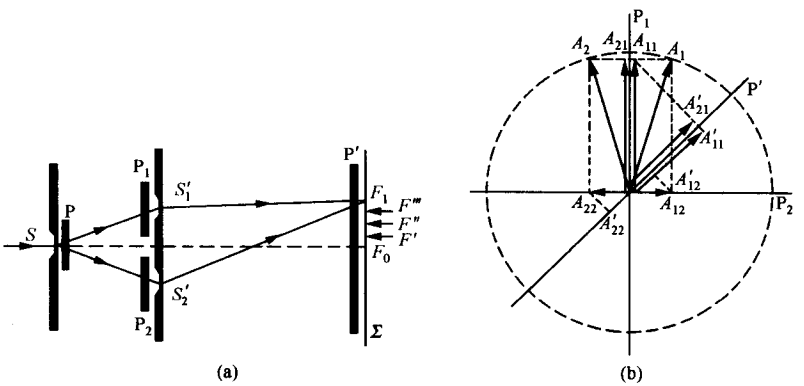


图 7-21

(1) 如果在 S 后放置一偏振片 P，干涉条纹是否发生变化？有何变化？

(2) 如果在 S_1，S_2 之前再各放置一偏振片 P_1，P_2，它们的透振方向相互垂直，并都与 P 的透振方向成 45°角，幕 Σ 上强度分布如何？

(3) 在 Σ 前再放置一偏振片 P′，其透振方向与 P 平行. 试比较在这种情形下观察到的干涉条纹与 P_1，P_2，P′ 都不存在时的干涉条纹有何不同？

(4) 同(3)，如果将 P 旋转 90°，幕上干涉条纹有何变化？

(5) 同(3)，如果将 P 撤去，幕上是否有干涉条纹？

(6) 类似(2)的布置，屏幕 Σ 上的 F_0，F_1 分别是未加 P_1，P_2 时 0，1 级亮纹所在处，F'，F''，F''' 分别是 F_0F_1 的四等分点. 试说明 F_0，F_1 及 F'，F''，F''' 各点的偏振状态.

解 (1) 插入偏振片 P 后，干涉条纹的形状、间距、衬比度均不

发生变化. 但由于自然光通过偏振片 P 时强度减半，导致屏幕上的平均强度减半，干涉条纹的亮度下降.

(2) 由于 P_1，P_2 的透振方向相互正交，干涉场是两束振动方向互相垂直的线偏振光的叠加. 这时不满足“振动方向相同”这一相干条件，屏幕上得不到干涉条纹，而是一片均匀照明，其强度是两束线偏振光的非相干叠加.

(3) 这时，经 P_1，P_2 出射的两束相互正交的线偏振光都再次投影到 P′的透振方向上，使“振动方向相同”这一相干条件重新得到满足，屏幕 Σ 上又出现了干涉条纹. 条纹的形状、间距、衬比度均与 P_1，P_2，P′都不存在时相同，但由于偏振片的二向色性，P_1，P_2，P′分别吸收了入射光线偏振光中与其透振方向垂直的分量，因此与只有 P 单独存在时相比，干涉条纹的亮度下降.

(4) 如果在(3)的布置中把 P 的透振方向旋转 90°，由于两次投影引起的附加相位差改变了 π，原来的亮纹位置变成了暗纹，而原来的暗纹位置现在变成了亮纹条纹；其他性质均不发生变化.

(5) 如果在(3)的布置中将 P 撤去，则投影到 P′透振方向上的两个正交振动是来自于自然光的两个垂直分量；而这两个垂直分量之间是没有稳定的相位关系的. 因此，尽管此时“振动方向相同”仍然满足，但由于“相位差稳定”这一相干条件被破坏，屏幕上得到的是双光束的非相干叠加，即此时干涉条纹消失，Σ 面上的照明趋于均匀.

关于“自然光的两个垂直分量之间没有稳定相位关系”的这一结论，我们已在第二章 § 9 习题 3 中用反证法作了证明. 这里，我们将通过分析自然光的细微结构，用另一方法来证明这一结论. 自然光是大量相位无规的轴对称分布的线偏振光的集合(如图 7-21(b)). 任取两个对称于 P_1 的线偏振光 A_1 和 A_2，其中 A_1 经两次投影于 P′的方向后，其强度是 A'_{11}和 A'_{12}的相干叠加；A_2 经两次投影于 P′的方向后其强度是 A'_{21}和 A'_{21}的相干叠加. 由对称性知，$A'_{11}=A'_{21}$，$A'_{12}=A'_{22}$；又由图可见，A_1 和 A_2 分别在两次投影过程中引起的附加相位差之差为 π. 因此分别相干叠加时，得到的两个交叉项(干涉项)大小相等，符号相反；再次叠加时干涉项互相抵消，所以透过 P′的强度仍

为非相干叠加的结果. 而自然光的大量线偏振光中，像 A_1，A_2 这样对称分布的线偏振光总是成对出现，相应的交叉项也总是成对出现，相互抵消的. 综上分析，取自自然光(分别沿 P_1 和 P_2 的方向)的两个总的垂直分量投影到 P′的方向后，其宏观后果仍表现为非相干叠加. 这就证明了自然光的两个垂直分量之间是没有稳定的相位关系的.

由以上证明，也可看出(3)，(4)中未撤去 P 时，幕上能够得到干涉条纹，是因为投影到 P_1，P_2 方向上的正交分量来自于自然光中 P 方向的分量；再次投影到 P′方向时，由投影引起的相位差之差为 π 的情况不复存在，从而交叉项不再成对出现，所以其宏观后果仍表现为相干叠加.

(6) 此时，F_0，F_1 两点分别为相位差为 0，2π 的两个垂直振动的合成，结果为线偏振. F''点为相位差为 π 的两垂直振动的合成，结果也为线偏振，但振动方向与 F_0，F_1 点的振动方向正交. F'，F''两点分别为相位差为 π/2，3π/2，大小相等的两垂直振动的合成，结果都为圆偏振，一个左旋，一个右旋；而到底哪个为左旋，哪个为右旋，取决于 P_1，P_2 的绝对取向.

11. 试讨论两束同频左、右旋圆偏振光的平行光的干涉.

解 如图 7-22，一束强度为 I_1 的左旋圆偏振光以 θ_1 倾角射向 Oxy 平面，另一束强度为 I_2 的同频右旋圆偏振光以 θ_2 倾角射向 Oxy 平面. 为分析相干叠加问题，应对振动矢量作必要的分解. 将 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别分解为旋转矢量 $\boldsymbol{A}_1$ (A_{1x}，A_{1y}，A_{1z}) 和 $\boldsymbol{A}_2$ (A_{2x}，A_{2y}，A_{2z}). 显然，A_{1x} 与 A_{2x} 之间、A_{1y} 与 A_{2y} 之间、A_{1z} 与 A_{2z} 之间是完全满足相干条件的. 为使问题逐步深入，在 θ_1，θ_2 很小的条件下，可暂且忽略 z 分量的影响. 在讨论 x，y 分量的叠加时，我们注意到，对左旋平行光，自身有相位

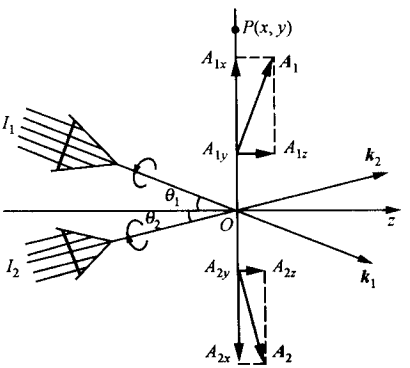


图 7-22

差

$$\varphi_{1y}(P)-\varphi_{1x}(P)=-\pi/2;$$

对右旋平行光，自身有相位差

$$\varphi_{2y}(P)-\varphi_{2x}(P)=\pi/2.$$

当然，两束平行光之间随场点 $P(x,y)$ 还有一个因光程差引起的相位差分布. 设此相位差分布对 x 分量来说为

$$\delta_x(P)=\varphi_{2x}(P)-\varphi_{1x}(P);$$

而对 y 分量来说，必有

$$\delta_y(P)=\varphi_{2y}(P)-\varphi_{1y}(P)=\delta_x(P)+\pi.$$

于是两个分量的干涉强度分布分别为

$$\begin{aligned}I_x(P)&=A_{1x}^2+A_{2x}^2+2A_{1x}A_{2x}\cos\delta_x(P),\\ I_y(P)&=A_{1y}^2+A_{2y}^2+2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_y(P)\\ &=A_{1y}^2+A_{2y}^2-2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_x(P).\end{aligned}$$

总的强度分布为两个正交方向强度的不相干叠加，即

$$\begin{aligned}I(P)&=I_x(P)+I_y(P)\\ &=(A_{1x}^2+A_{1y}^2)+(A_{2x}^2+A_{2y}^2)\\ &\quad+2(A_{1x}A_{2x}-A_{1y}A_{2y})\cos\delta_x(P),\end{aligned}$$

在忽略 z 分量的情形下，令

$$I_1=A_{1x}^2+A_{1y}^2,\quad I_2=A_{2x}^2+A_{2y}^2,$$

式中

$$A_{1x}=A_{1y},\quad A_{2x}=A_{2y},\quad A_{1x}A_{2x}-A_{1y}A_{2y}=0,$$

则

$$I(P)=I_1+I_2.$$

这表明两束同频左右旋圆偏振光的叠加，由于两个交叉项正好抵消，最终回到非相干叠加的结果，幕上不出现亮暗条纹.

若考虑 z 分量的影响，则因矢量投影的方向性，有

$$\begin{aligned}I_z(P)&=A_{1z}^2+A_{2z}^2+2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_z(P)\\ &=A_{1z}^2+A_{2z}^2-2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_x(P),\end{aligned}$$

式中

$$\delta_z(P) = \delta_x(P) + \pi.$$

以上所有振幅值满足

$$I_1 = 2A_1^2, \quad I_2 = 2A_2^2,$$

$$A_{1x} = A_1\cos\theta_1, \quad A_{1y} = A_1, \quad A_{1z} = A_1\sin\theta_1,$$

$$A_{2x} = A_2\cos\theta_2, \quad A_{2y} = A_2, \quad A_{2z} = A_2\sin\theta_2.$$

于是总强度

$$\begin{aligned} I(P) &= I_x(P) + I_y(P) + I_z(P) \\ &= I_1 + I_2 + 2(A_1A_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ &\quad - A_1A_2 - A_1A_2\sin\theta_1\sin\theta_2)\cos\delta_x(P) \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2}[\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1]\cos\delta_x(P). \end{aligned}$$

可见，交叉项依然保留，幕上出现一系列平行于 y 轴的直条纹，其衬比度为

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}|\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1|.$$

当 $\theta_1 = -\theta_2$，即同方向入射时，则

$$\gamma = 0, \quad I(P) = I_1 + I_2;$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$，即两束光正交时，则

$$\gamma = \sqrt{I_1I_2}/(I_1 + I_2),$$

$$I(P) = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1I_2}\cos\delta_x(P);$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$，即两束光对头碰时，则

$$\gamma = 2\sqrt{I_1I_2}/(I_1 + I_2),$$

$$I(R) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta_x(P).$$

§5 旋　光

1. 已知水晶对钠黄光的旋光率 $\alpha = 21.75°/\text{mm}$. 求左、右旋圆偏振光折射率之差 Δn.

解　由旋光率 α 与折射率差 Δn 的关系：

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda}\Delta n$$

得

$$\Delta n = \frac{\lambda\alpha}{\pi} = (5893 \times 10^{-7}/\text{mm}) \times \frac{21.75°/\text{mm}}{180°} \approx 7.121 \times 10^{-5}.$$

2. 在两尼科耳棱镜之间插一块石英旋光晶片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光($\lambda=5500$ Å). 设对此波长的旋光率为 24°/mm. 求下列情形下晶片的厚度：

(1) 两尼科耳棱镜主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜主截面平行.

解　(1) 当两尼科耳棱镜主截面正交时，为要消除黄绿色光，应使该波长的光在通过石英旋光晶片后，偏振面旋转 180°，即

$$\psi = \alpha d = 180°.$$

由此得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{180°}{24°/\text{mm}} = 7.5\ \text{mm},$$

即当晶片厚度 $d=7.5k$ mm($k=1,2,\cdots$)时都可对此波长消光.

(2) 当两尼科耳棱镜主截面平行时，应满足

$$\psi = \alpha d = 90°.$$

由此得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{90°}{24°/\text{mm}} = 3.75\ \text{mm},$$

即当晶片厚度 $d=3.75k$ mm($k=1,3,\cdots$)时都能对此波长消光.

3. 一石英棒长 5.639 cm，端面垂直于光轴，置于正交偏振器间. 沿轴方向输入白光，用光谱仪观察透射光.

(1) 用一大张坐标纸画出可见光范围(4000～7600 Å)偏振面的旋转角与波长的曲线.(旋光率数据可查表①得之.)

(2) 从这曲线看，哪些波长的光在光谱仪中消失？

(3) 在这些丢失的波长中，偏振面的最大和最小旋转角各是多

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：216.

少?

解 (1) 根据旋光率与波长的关系表提供的 $\alpha(\lambda)$ 数值,由公式 $\psi=\alpha d$ 得

$$\psi=\begin{cases}55.625°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=3137° & (\lambda=3820\ \text{Å}),\\ 48.945°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=2760° & (\lambda=4047\ \text{Å}),\\ 42.604°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=2402° & (\lambda=4307\ \text{Å}),\\ 32.773°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=1848° & (\lambda=4861\ \text{Å}),\\ 25.538°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=1440° & (\lambda=5461\ \text{Å}),\\ 21.749°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=1226° & (\lambda=5890\ \text{Å}),\\ 17.318°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=976.6° & (\lambda=6562\ \text{Å}),\\ 16.535°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=932.4° & (\lambda=6708\ \text{Å}),\\ 13.924°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=785.2° & (\lambda=7281\ \text{Å}),\\ 12.668°/\text{mm}\times 5.639\ \text{cm}=714.3° & (\lambda=7604\ \text{Å}).\end{cases}$$

ψ-λ 曲线(如图 7-23)表明,偏振面的旋转角随波长的增加而减小,此为旋光色散.

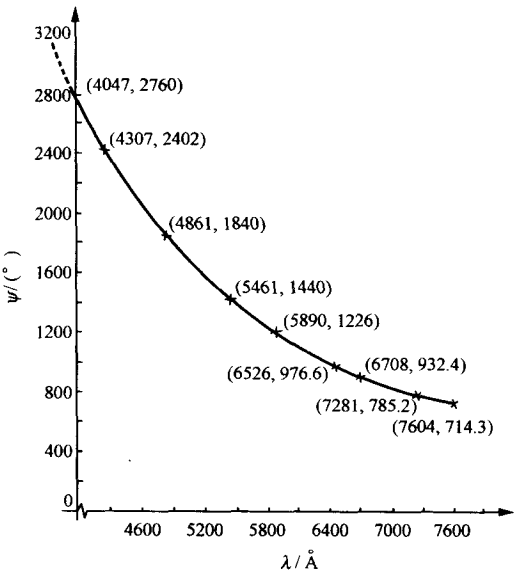


图 7-23

(2) 因为石英棒置于正交偏振器之间，所以凡满足

$$\psi = k \cdot 180^\circ \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

的波长的光都将被第二个偏振器消光，而在光谱仪中消失. 在可见光范围内，这一系列波长的取值如表 7-1.

表 7-1

ψ/(°)	720	900	1080	1260	1440	1620
λ/Å	7570	6790	6280	5830	5461	5140
ψ/(°)	1800	1980	2160	2340	2520	2700
λ/Å	4900	4660	4480	4360	4210	4150

(3) 在可见光范围内被丢失的波长中，当 $\lambda_{min}=4150$ Å 时，偏振面的旋转角最大，其值为 $\psi_{max}=2700°$；当 $\lambda_{max}=6790$ Å 时，偏振面的旋转角最小，其值为 $\psi_{min}=900°$. 有意思的是，有

$$\frac{\psi_{max}}{\psi_{min}} \approx \frac{\lambda_{max}^2}{\lambda_{min}^2}.$$

换句话说，旋光色散效应几乎与波长平方成反比，这是一定范围内近似成立的经验公式.

4. 一块表面垂直于光轴的水晶片恰好抵消 10 cm 长、浓度为 20%的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转. 对此波长，水晶的旋光率 $\alpha=21.75°/\text{mm}$，麦芽糖的旋光比率$[\alpha]=144°/(\text{dm}\cdot\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$. 求此水晶片的厚度.

解　在麦芽糖溶液中偏振面的旋转角为

$$\psi_1 = [\alpha]Nl.$$

按题意，此旋转角等于水晶片中所引起的旋转角

$$\psi_2 = \alpha d.$$

由以上二式得，此水晶片厚度应为

$$d = \frac{[\alpha]Nl}{\alpha} = \frac{144°/(\text{dm}\cdot\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}) \times 20\% \times 10\ \text{cm}}{21.75°/\text{mm}} = 1.32\ \text{mm}.$$

5. 15 cm 长的左旋葡萄糖溶液使钠光的偏振面转了 25.6°. 求溶液浓度. (已知$[\alpha]=-51.4°/(\text{dm}\cdot\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$.)

解　溶液浓度为

$$N=\frac{\psi}{[\alpha]l}=\frac{-25.6^\circ}{-51.4^\circ/(\mathrm{dm}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3})\times 15\ \mathrm{cm}}=0.332\ \mathrm{g/cm^3}.$$

6. 将 14.50 g 蔗糖溶于水，得到 60 $\mathrm{cm^3}$ 溶液. 在 15 cm 量糖计中测得钠光偏振面旋转角为 16.8°(向右). 已知$[\alpha]=66.5^\circ/(\mathrm{dm}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3})$. 这蔗糖样品中有多少比例的非旋光性杂质？

解 蔗糖溶于水后的“粗”浓度为

$$N'=\frac{14.50\ \mathrm{g}}{60\ \mathrm{cm^3}}=0.242\ \mathrm{g/cm^3}.$$

由量糖计中测得蔗糖的“净”浓度为

$$N=\frac{\psi}{[\alpha]l}=\frac{16.8^\circ}{66.5^\circ/(\mathrm{dm}\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3})\times 15\ \mathrm{cm}}=0.168\ \mathrm{g/cm^3}.$$

故此蔗糖含非旋光性杂质的比例为

$$\frac{N'-N}{N'}=\frac{(0.242-0.168)\ \mathrm{g/cm^3}}{0.242\ \mathrm{g/cm^3}}=31\%.$$

7. 钠光以最小偏向角条件射入顶角为 60°的石英晶体棱镜，棱镜中光轴与底平行. 求出射的左、右旋偏振光之间的夹角.

解 如图 7-24，所谓以“最小偏向角入射”，意即选取合适的入射角，使光线经第一折射面后平行于棱镜的底边. 本题棱镜底边平行于光轴，故光线在水晶棱镜内部沿光轴传播. 它将被分解为左旋光和右旋光，折射率分别为 n_L 和 $n_R(n_R<n_L)$；经第二折射面后就有不同的偏向角 δ_L 和 δ_R. 考虑到在第二个折射面右旋光和左旋光的入射角近似于 90°−60°=30°，应用折射定律有

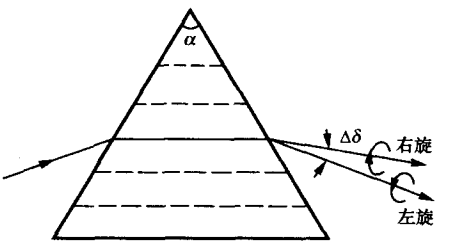


图 7-24

$$n_R\sin 30^\circ=\sin i_R,\quad n_L\sin 30^\circ=\sin i_L.$$

由此得

$$\sin i_L-\sin i_R=(n_L-n_R)/2,$$

即

$$2\sin\left(\frac{i_L - i_R}{2}\right)\cos\left(\frac{i_L + i_R}{2}\right) = \frac{1}{2}\Delta n,$$

其中

$$\sin\left(\frac{i_L - i_R}{2}\right) \approx \frac{1}{2}(i_L - i_R) = \frac{1}{2}\Delta\delta,$$

$$\cos\left(\frac{i_L + i_R}{2}\right) \approx \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$$

$$= \sqrt{1 - (n_o \sin 30°)^2}$$

$$= \sqrt{1 - (1.544 \times 0.5)^2} \approx 0.6356.$$

Δn 取本节习题 1 的结果：$\Delta n \approx 7.121 \times 10^{-5}$. 最后得到出射的两束左右旋圆偏振光传播方向之间的夹角为

$$\Delta\delta \approx \frac{\Delta n}{2\cos i} \approx 5.6 \times 10^{-5}\ \text{rad} \approx 12''.$$

8. 有四个滤光器件：Ⅰ是各向同性的滤光片，使各种偏振态的光强都滤掉一半；Ⅱ和Ⅲ都是线起偏器，透光方向分别为水平方向（x 轴）和 45°角（见图 7-25）；Ⅳ是圆起偏器，它让右旋圆偏振光全部通过，把左旋圆偏振光全部吸收掉. 把各滤光器件分别放在要研究的光路中，测量透射出来的光强. 设入射光强为 I_0，透过器件Ⅰ～Ⅳ的光强分别为 I_1, I_2, I_3, I_4. 斯托克斯（1852）引入下列四个参量来描述电磁波的偏振状态：

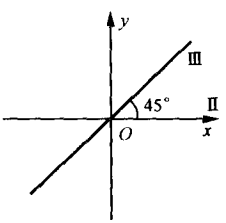


图　7-25

$$S_0 = 2I_1, \quad S_1 = 2(I_2 - I_1),$$

$$S_2 = 2(I_3 - I_1), \quad S_4 = 2(I_4 - I_1).$$

这也是斯托克斯参量的操作定义. 人们还常常把这些参量归一化，即用 I_0 除各参量，把得到的四个参数 $S_0/I_0, S_1/I_0, S_2/I_0, S_4/I_0$ 写成一组，用来描写入射光的偏振状态. 例如，对于自然光，$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_0/2$，故描述它的归一化斯托克斯参量为（1，0，0，0）. 写出下列偏振态的斯托克斯参量：

（1）水平方向（x 轴）线偏振；

（2）垂直方向（y 轴）线偏振；

(3) 45°线偏振;

(4) −45°线偏振;

(5) 右旋圆偏振;

(6) 左旋圆偏振;

(7) 部分偏振,极大在 x 轴,偏振度 50%;

(8) 部分偏振,极大在 y 轴,偏振度 50%.

解 (1) 对于水平方向(x 轴)线偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0, \\ I_3 = I_0\cos^2 45° = I_0/2, \\ I_4 = I_0/2. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = 2I_1 = I_0, \\ S_1 = 2(I_2 - I_1) = I_0, \\ S_2 = 2(I_3 - I_1) = 0, \\ S_3 = 2(I_4 - I_1) = 0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,1,0,0).

(2) 对于垂直方向(y 轴)线偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = 0, \\ I_3 = I_0/2, \\ I_4 = I_0/2. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = -I_0, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = 0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,−1,0,0).

(3) 对于 45°角方向线偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0/2, \\ I_3 = I_0, \\ I_4 = I_0/2. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = 0, \\ S_2 = I_0, \\ S_3 = 0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,0,1,0).

(4) 对于−45°角方向线偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0/2, \\ I_3 = 1/2, \\ I_4 = I_0/2. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = 0, \\ S_2 = -I_0, \\ S_3 = 0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,0,−1,0).

(5) 对于右旋圆偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0/2, \\ I_3 = I_0/2, \\ I_4 = I_0. \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = 0, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = I_0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,0,0,1).

(6) 对于左旋圆偏振,有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0/2, \\ I_3 = I_0/2, \\ I_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = 0, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = -I_0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,0,0,-1).

(7) 对于 $I_{\max}=I_x$,$P=50\%$的部分偏振光,由

$$P = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = 0.5, \quad I_x + I_y = I_0$$

得两垂直分量的强度分别为

$$I_x = \frac{3}{4}I_0, \quad I_y = \frac{1}{4}I_0.$$

故有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = 3I_0/4, \\ I_3 = I_x\cos^2 45° + I_y\cos^2 45° = I_0/2, \\ I_4 = I_x/2 + I_y/2 = I_0/2. \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = I_0/2, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = I_0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,1/2,0,0).

(8) 对于 $I_{\max}=I_y$,$P=50\%$的部分偏振光,与(7)同理可得

$$I_x = I_0/4, \quad I_y = 3I_0/4.$$

故有

$$\begin{cases} I_1 = I_0/2, \\ I_2 = I_0/2, \\ I_3 = I_0/2, \\ I_4 = I_0/2. \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0, \\ S_1 = -I_0/2, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = 0. \end{cases}$$

归一化斯托克斯参量为(1,-1/2,0,0).

第八章　光的吸收、色散和散射

§1　光的吸收

1. 有一媒质，吸收系数 $\alpha=0.32/\text{cm}$. 当透射光强分别为入射光强的 10%，20%，50%及 80%时，媒质的厚度各为多少？(**提示**　这里的入射光强与透射光强都已经考虑到媒质表面的反射，而成为体内两侧的光强.)

解　由布格(Bouguer)定律

$$I = I_0 e^{-\alpha l}$$

得

$$l = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{I}{I_0},$$

式中 l 为媒质的厚度. 把 $\alpha=0.32/\text{cm}$ 代入，算出

$$l = \begin{cases} 7.2\ \text{cm} & (I/I_0 = 10\%), \\ 5.0\ \text{cm} & (I/I_0 = 20\%), \\ 2.2\ \text{cm} & (I/I_0 = 50\%), \\ 0.7\ \text{cm} & (I/I_0 = 80\%). \end{cases}$$

2. 一玻璃管长 3.50 m，内贮标准大气压下的某种气体. 若这种气体在此条件下的吸收系数为 0.1650/m，求透射光强的百分比.

解　由布格定律得透射光强与入射光强的百分比为

$$I/I_0 = \exp[-\alpha l]$$
$$= \exp[-(0.1650 \times 3.50)] = 56.1\%.$$

§2　色　　散

1. 一块光学玻璃对水银灯蓝、绿谱线(4358 Å 和 5461 Å)的折

射率分别为 1.652 50 和 1.624 50. 用此数据定出柯西(Cauchy)公式[①]中的 A,B 两常数,并计算此光学玻璃对钠黄线 5893 Å 的折射率及色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$.

解　将蓝、绿谱线的波长和折射率的数据分别代入柯西公式

$$n = A + B/\lambda^2, \qquad ①$$

得联立方程

$$\begin{cases} 1.652\,50 = A + B/(4358\ \text{Å})^2, \\ 1.624\,50 = A + B/(5461\ \text{Å})^2. \end{cases}$$

解得

$$B = 1.464 \times 10^6\ \text{Å}^2, \quad A = 1.575.$$

再将以上 A,B 值代入式①,得该光学玻璃对钠黄线(5893 Å)的折射率为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.575 + \frac{1.464 \times 10^6\ \text{Å}^2}{(5893\ \text{Å})^2} = 1.617,$$

色散率为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -2\frac{B}{\lambda^3} = (-2) \times (1.464 \times 10^6\ \text{Å}^2) \times \frac{1}{(5893\ \text{Å})^3}$$

$$= -1.431 \times 10^{-4}/\text{Å}.$$

2. 利用表 8-1 中冕玻璃(K9)F,D,C 三条谱线的折射率数据[②]定出柯西公式[③]中的 A,B,C 三个常数,计算表中给出的其他波长下折射率数据,并与表中实测数据比较.

表 8-1　冕玻璃(K9)的色散

谱线代号	——	h	g′	F	e
光色	(紫外)	蓝	青	青绿	绿
波长/Å	3650	4047	4358	4861	5461
折射率 n	1.535 82	1.529 82	1.526 26	1.521 95	1.518 29

① 见:赵凯华,钟锡华. 光学(下册). 北京:北京大学出版社,1984:235.
② 另见:赵凯华,钟锡华. 光学(上册). 北京:北京大学出版社,1984:20.
③ 见:赵凯华,钟锡华. 光学(下册). 北京:北京大学出版社,1984:235.

（续表）

谱线代号	D	C	A′	——	——
光色	黄	橙红	红	（红外）	（红外）
波长/Å	5893	6563	7665	8630	9508
折射率 n	1.516 30	1.513 89	1.511 04	1.509 18	1.507 78

解 把冕玻璃(K9)对 F,D,C 三条谱线的折射率数据分别代入柯西公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \qquad ①$$

得联立方程

$$1.521\,95 = A + \frac{B}{(4861\ \text{Å})^2} + \frac{C}{(4861\ \text{Å})^4},$$

$$1.516\,30 = A + \frac{B}{(5893\ \text{Å})^2} + \frac{C}{(5893\ \text{Å})^4},$$

$$1.513\,89 = A + \frac{B}{(6563\ \text{Å})^2} + \frac{C}{(6563\ \text{Å})^4}.$$

用行列式法求解如下：由

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & (4861)^{-2} & (4861)^{-4} \\ 1 & (5893)^{-2} & (5893)^{-4} \\ 1 & (6563)^{-2} & (6563)^{-4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4.2320\times10^{-8} & 1.7910\times10^{-15} \\ 1 & 2.8796\times10^{-8} & 8.2919\times10^{-16} \\ 1 & 2.3216\times10^{-8} & 5.3900\times10^{-16} \end{vmatrix}$$

$$= 10^{-24}\begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 17.910 \\ 1 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= 10^{-24}\left(\begin{vmatrix} 2.8796 & 8.2919 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.8796 & 8.2919 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 10^{-24}(-3.7294 + 18.769 - 16.482) = -1.4424\times10^{-24},$$

$$\Delta_A = 10^{-24}\begin{vmatrix} 1.521\,95 & 4.2320 & 17.910 \\ 1.516\,30 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1.513\,89 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= -2.169 \times 10^{-24},$$

$$\Delta_B = 10^{-16}\begin{vmatrix} 1 & 1.521\,95 & 17.910 \\ 1 & 1.516\,30 & 8.2919 \\ 1 & 1.513\,89 & 5.3900 \end{vmatrix}$$

$$= -6.4 \times 10^{-19},$$

$$\Delta_C = 10^{-8}\begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 1.52195 \\ 1 & 2.8796 & 1.51630 \\ 1 & 2.3216 & 1.51389 \end{vmatrix}$$

$$= 2.0 \times 10^{-12}$$

可算出

$$A = \Delta_A/\Delta = 1.504,$$

$$B = \Delta_B/\Delta = 4.437 \times 10^5\ \text{Å}^2,$$

$$C = \Delta_C/\Delta = -1.387 \times 10^{12}\ \text{Å}^4.$$

再由以上 A,B,C 值计算出冕玻璃对其他谱线的折射率为

$$n = \begin{cases} 1.529 & (\lambda = 3650\ \text{Å}), \\ 1.526 & (\lambda = 4047\ \text{Å}), \\ 1.523 & (\lambda = 4358\ \text{Å}), \\ 1.517 & (\lambda = 5461\ \text{Å}), \\ 1.511 & (\lambda = 7665\ \text{Å}), \\ 1.510 & (\lambda = 8630\ \text{Å}), \\ 1.509 & (\lambda = 9508\ \text{Å}). \end{cases}$$

以上谱线折射率的计算数值和表 8-1 中给出的实测数据都表明，折射率 n 随波长 λ 的增加而下降(正常色散)；但在可见光波段，计算值比实验值偏小.

3. 一棱镜的顶角 $\alpha=50°$. 设它的玻璃材料色散性质可用两常数的柯西公式来描写，两常数分别为 $A=1.539\,74$，$B=4.6528\times10^5$ Å^2. 求此棱镜对波长 5500 Å 光波调到最小偏向角时的色散本领.

解 工作于最小偏向角条件下的棱镜的角色散本领为

$$D_\theta \equiv \frac{\mathrm{d}\delta_m}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \qquad ①$$

由柯西公式(本节习题1中式①)可算出,该棱镜材料对波长5500 Å光波的折射率和色散率分别为

$$n = 1.53974 + \frac{4.6528\times 10^5\ \text{Å}^2}{(5500\ \text{Å})^2} \approx 1.55512,$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -2\frac{B}{\lambda^3} \approx 5.593\times 10^{-6}/\text{Å}.$$

将上述数值及 $\alpha=50°$ 代入本题式①,得

$$D_\theta \approx 6.2723\times 10^{-6}\ \text{rad/Å} \approx 1.29''/\text{Å}.$$

4. 证明吸收峰的高度反比于 γ,半值宽度 $\Delta\lambda$ 正比于 γ.

证 物质的吸收值可由 $2n^2\kappa$ 一量描述,其中 κ 称为衰减指数,它与(宏观)吸收系数有正比关系.根据经典色散理论,导出 $2n^2\kappa$ 具有以下函数形式:

$$2n^2\kappa = a\frac{\gamma\lambda_0^4\lambda^3}{b(\lambda^2-\lambda_0^2)^2+\gamma^2\lambda_0^4\lambda^2}.$$

在阻尼常数(如 γ)很小条件下,其极值(即吸收峰位置)发生在 $\lambda\approx\lambda_0$ 处,即发生在外来光波长 λ 与物质本征谱线 λ_0 相近的情况.此时,吸收峰高度值为

$$(2n^2\kappa)_m \approx \frac{a\lambda_0}{\gamma} \propto \frac{1}{\gamma}.$$

为求吸收峰的半值宽度,令

$$\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda/2,$$

且满足下式:

$$\frac{a\gamma\lambda_0^4(\lambda_0\pm\Delta\lambda/2)^3}{b[(\lambda_0\pm\Delta\lambda/2)^2-\lambda_0^2]^2+\gamma^2\lambda_0^4(\lambda_0\pm\Delta\lambda/2)^2} = \frac{1}{2}\frac{a\lambda_0}{\gamma}.$$

在展开式中忽略高阶小量$(\Delta\lambda)^3$,$(\Delta\lambda)^4$,得

$$2\gamma^2\lambda_0^4 + \gamma^2\lambda_0^3\Delta\lambda + \frac{3}{2}\gamma^2\lambda_0^2(\Delta\lambda)^2$$
$$= (b+\gamma^2\lambda_0^2/4)(\Delta\lambda)^2 + \gamma^2\lambda_0^3\Delta\lambda + \gamma^2\lambda_0^4.$$

经整理，最后解出吸收峰的半值宽度为

$$\Delta\lambda = \frac{\gamma\lambda_0^2}{\sqrt{b - \gamma^2\lambda_0^2/4}} \approx \frac{\gamma\lambda_0^2}{\sqrt{b}} \propto \gamma.$$

5. 一块玻璃对波长 0.70 Å 的 X 射线的折射率比 1 小 1.600×10^{-6}. 求 X 射线能在此玻璃外表面发生全反射的最大掠射角.

解　X 射线在玻璃外表面发生全反射时的临界角 i_c 对应最大的掠射角 $\alpha_m = 90° - i_c$，而临界角应满足

$$\sin i_c = n = 1 - 1.600 \times 10^{-6}.$$

故得

$$i_c = 89.8975°, \quad \alpha_m = 6.150'.$$

6. 估计一下铜的等离子体振荡角频率 ω_p 的数量级.

解　根据经典色散理论，等离子体振荡角频率为

$$\omega_p = \sqrt{NZe^2/\varepsilon_0 m}; \qquad ①$$

其意义在于：当入射光频 ω 如此之高，以致远高于某媒质的所有共振频率时，该媒质的折射率 $n<1$，由

$$n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$$

给出. 我们查得铜原子的质量

$$M = \frac{\text{铜的原子量}}{\text{阿伏伽德罗常数}} = \frac{63.54 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}{6.02 \times 10^{23}/\text{mol}}$$

$$\approx 1.055 \times 10^{-25}\ \text{kg},$$

原子数密度

$$N = \frac{\text{铜的密度}}{M} \approx \frac{8940\ \text{kg/m}^3}{1.055 \times 10^{25}\ \text{kg}} \approx 8.474 \times 10^{28}/\text{m}^3;$$

且真空介电常数为

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2,$$

电子质量为

$$m = 9.200 \times 10^{-31}\ \text{kg},$$

电子电荷为

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

在经典色散理论中，式①中的 Z 值取多大较为合理？铜的原子

序数为 29,即原子核外围共有 29 个电子分几个壳层分布,其中内层电子被原子核紧密束缚,同原子核一起组成原子实(正离子);外层电子被束缚得较弱,在比紫外光频率高得多的外来光作用下,这些电子的状态与最外层被称为价电子(或自由电子)的状态相似,它们都成为自由电子. 因此,取 $Z\geqslant 1$ 是合理的;然而,究竟取多大,这里不便说得太死(本来经典色散理论就是一种唯象理论). Z 的确切数值也许要由别的理论途径和实验手段来断定. 我们暂取 $Z=3$,在数量级上是没有问题的. 最后算出铜的等离子体振荡的角频率(数量级)为

$$\omega_p \approx 3\times 10^{16}\ \mathrm{Hz},$$

它比紫外光频 $\omega_0\approx 10^{15}$ Hz 高一个数量级以上.

§3 群 速

1. 求冕玻璃(K9)(参见本章 §2 习题 2)对 D 双线的群速.

解 小色散时群速 v_g 与相速 v_p 的关系为

$$v_g = v_p - \lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right), \qquad ①$$

式中波长 λ 是介质波长. 鉴于式中要用到材料色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$,而柯西色散公式中的 λ 是指真空波长 λ_0,因此先用柯西公式求出色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda_0$,然后还需换算成 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$. 这就要推导出 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 与 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda_0$ 的关系如下:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\frac{\mathrm{d}(n\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\\ &= \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\left(n+\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)\approx n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}. \qquad ②\end{aligned}$$

这样,式①就可以改写成

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1+\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right) = \frac{c}{n}\left(1+\frac{\lambda_0}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right), \qquad ③$$

式中折射率 n 取双线平均折射率 $\bar{n}=1.516\,30$,D 双线在真空中的光波长 λ_0 取双线平均波长 $\bar{\lambda}=5893$ Å. 剩下的问题就是计算该材料的色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda_0$. 按柯西公式(本章 §2 习题 2 中式①)求得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0} = -2\frac{B}{\lambda_0^3} - 4\frac{C}{\lambda_0^5}, \qquad ④$$

式中系数 B,C 由本章 § 2 习题 2 给出：

$$B = 4.437 \times 10^5\ \text{Å}^2, \quad C = -1.387 \times 10^{12}\ \text{Å}^4.$$

将以上 B,C 值代入式④,可算出

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda_0 \approx -4.336 \times 10^{-6}/\text{Å} + 7.806 \times 10^{-7}/\text{Å}$$
$$\approx -3.555 \times 10^{-6}/\text{Å}.$$

再代入式④算出群速

$$v_g = \frac{3 \times 10^8\ \text{m/s}}{1.5163}\left(1 - \frac{5893\ \text{Å}}{1.5163} \times 3.555 \times 10^{-6}/\text{Å}\right)$$
$$\approx 1.952 \times 10^8 \text{m/s},$$

并可算得

$$\frac{v_g - v_p}{v_p} \approx \frac{1.979 - 1.952}{1.979} \approx 1.4\%.$$

2. 试计算下列各情况下的群速度：

(1) $v_p = v_0$(常数)(无色散媒质,如空气中的声波)；

(2) $v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}$(水面波,$g$ 为重力加速度,T 为表面张力,ρ 为液体的密度)；

(3) $n = A + B/\lambda_0^2$(正常色散媒质中光波的柯西公式)；

(4) $\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$(波导中的电磁波,$\omega_c$ 为截止角频率).

解　(1) 对无色散媒质来说,

$$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda = 0,$$

则群速与相速相等：

$$v_g = v_p = v_0.$$

(2) 对于水面波,有

$$\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}$$
$$= \left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^2 \rho}\right) \Big/ \left[2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi'}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}\right].$$

所以群速为

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)} - \left(\frac{\lambda g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda \rho}\right) \Big/ \left[2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\left(g + 3\frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right) \Big/ \left[2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}\right].$$

(3) 由柯西公式得

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = -\frac{2B}{\lambda_0^3},$$

式中 λ_0 为真空中的光波长. 由本节习题 1 中式②,有

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx n \frac{dn}{d\lambda_0}.$$

所以正常色散媒质中群速为

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) \approx \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_0}\right)$$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \frac{2B}{n\lambda_0^2}\right) = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{2B}{n^2\lambda^2}\right),$$

式中 $n = A + B/\lambda_0^2$, c 为真空中的光速, λ 为媒质中波长. 可见,正常色散媒质中群速小于相速.

(4) 波导中的电磁波的群速为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\omega_c^2 + c^2k^2) = 2ck.$$

本题在求以上四种情况下的群速时,对于不同的色散关系: $v_p = v_p(\lambda)$, $n = n(\lambda)$, $\omega = \omega(k)$,分别采用了三种不同形式的群速公式. 它们都是瑞利群速公式的不同表示.

§4 光的散射

1. 摄影者知道用橙黄色滤色镜拍摄天空时,可增加蓝天和白云的对比. 设照相机镜头和底片的灵敏度将光谱范围限制在 3900～6200 Å 之间,并设太阳光谱在此范围内可以看成是常数. 若滤色镜把波长在 5000 Å 以下的光全部吸收,天空的散射光被它去掉了百分

之几?

解　橙黄色波长约为 6000 Å. 橙黄色滤光镜对于长波(6000 Å 以上)的透过率较大;而对于短波(6000 Å 以下)的吸收率较大. 白光经此滤色镜后,长波成分显著增加;而短波成分将大大削减. 于是,蓝天(背景)在底片上的照度很低,白云在照相底片上的照度相对较高,综合结果势必增加底片上蓝天与白云的反差. 为估算数量级,设滤色镜的滤光性能如题意,3900～6200 Å 之间的散射光强为 I_0,3900～5500 Å 的散射光强为 I',则滤色镜吸收光强的百分比为

$$\frac{I'}{I_0}=\frac{(5500-3900)\text{Å}}{(6200-3900)\text{Å}}=70\%.$$

2. 苯(C_6H_6)的拉曼(Raman)散射中较强的谱线与入射光的波数差分别为 607 /cm, 992 /cm, 1178 /cm, 1586 /cm, 3047 /cm, 3062 /cm. 今以氩离子激光($\lambda=4880$ Å)入射,计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长.

解　已知入射波光长为 $\lambda_0=4880$ Å,则其波数为

$$\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{4880\ \text{Å}}=20491.8\ /\text{cm}.$$

又已知拉曼散射与入射光的波数差 $1/\lambda_j(j=1,2,\cdots,6)$分别为

$$1/\lambda_1=607\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_2=992\ /\text{cm},$$
$$1/\lambda_3=1178\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_4=1586\ /\text{cm},$$
$$1/\lambda_5=3047\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_6=3062\ /\text{cm}.$$

将以上数据代入斯托克斯谱线(长波线)的波数

$$1/\lambda_j'=(1/\lambda_0)-(1/\lambda_j),$$

得

$$1/\lambda_1'=19\,884.8\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_2'=19\,499.8\ /\text{cm},$$
$$1/\lambda_3'=19\,313.8\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_4'=18\,905.8\ /\text{cm},$$
$$1/\lambda_5'=17\,444.8\ /\text{cm},\quad 1/\lambda_6'=17\,429.8\ /\text{cm}.$$

又代入反斯托克斯谱线(短波线)的波数

$$\frac{1}{\lambda_j''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_j},$$

得

$$1/\lambda_1'' = 21\,098.8\ /\mathrm{cm},\quad 1/\lambda_2'' = 21\,483.8\ /\mathrm{cm},$$

$$1/\lambda_3'' = 21\,669.8\ /\mathrm{cm},\quad 1/\lambda_4'' = 22\,077.8\ /\mathrm{cm},$$

$$1/\lambda_5'' = 23\,538.8\ /\mathrm{cm},\quad 1/\lambda_6'' = 23\,553.8\ /\mathrm{cm}.$$

因此各斯托克斯谱线的波长 λ_j' 分别为

$$\lambda_1' = 5029.0\ \text{Å},\quad \lambda_2' = 5128.3\ \text{Å},$$

$$\lambda_3' = 5177.6\ \text{Å},\quad \lambda_4' = 5289.4\ \text{Å},$$

$$\lambda_5' = 5732.4\ \text{Å},\quad \lambda_6' = 5737.3\ \text{Å};$$

各反斯托克斯谱线的波长 λ_j'' 分别为

$$\lambda_1'' = 4739.6\ \text{Å},\quad \lambda_2'' = 4654.7\ \text{Å},$$

$$\lambda_3'' = 4614.7\ \text{Å},\quad \lambda_4'' = 4529.4\ \text{Å},$$

$$\lambda_5'' = 4248.3\ \text{Å},\quad \lambda_6'' = 4245.6\ \text{Å}.$$

第九章　光的量子性

§1　热　辐　射

1. 一空腔辐射器的内、外器壁在某温度 T 的材料(单次)辐射亮度均为 $b(\nu,T)$,吸收本领均为 $a(\nu,T)$. 设器壁是理想的漫射体(即朗伯体). 证明:

(1) 由于多次反射,腔内任何面元上的辐射照度 $e_0(\nu,T)$和辐照亮度 $b_0(\nu,T)$分别为

$$\begin{cases} e_0(\nu,T)=\dfrac{\pi b(\nu,T)}{a(\nu,T)}, \\ b_0(\nu,T)=\dfrac{b(\nu,T)}{a(\nu,T)}; \end{cases}$$

(2) 小孔处辐射场的亮度亦为上式所决定的 $b_0(\gamma,T)$,它比外器壁的亮度 $b(\nu,T)$大 $1/a(\nu,T)$倍.

(**提示**　首先证明,不管空腔形状如何,内器壁接收第 n 次反射光的照度 $e_n(\nu,T)$与第 n,$n+1$ 次反射光的亮度 $b_n(\gamma,T)$, $b_{n+1}(\nu,T)$有如下关系(可参考第一章 §11 习题 3 的做法):

$$e_n(\nu,T)=\pi b_n(\nu,T),$$

$$b_{n+1}(\nu,T)=e_n(\nu,T)[1-a(\nu,T)]/\pi.$$

而

$$e_0(\nu,T)=\sum_n e_n(\nu,T),\quad b_0(\nu,T)=\sum_n b_n(\nu,T).)$$

证　处理这类问题首先从概念上要明确两点:其一,辐射亮度(反射亮度) $b(\nu,T)$和吸收本领 $a(\gamma,T)$是反映物质(材料)辐射的内在特性,它们与环境没有关系;而辐射照度 $e_0(\gamma,T)$和辐照亮度 $b_0(\nu,T)$是反映器件辐射的表观特性,它们与环境是有关系的. 其二,处在空腔辐射器壁上的任一面元具有双重性:一方面,它是辐射源,向其

他面元辐射能量；另一方面，它又接收来自其他面元的辐照（如图 9-1），这种相互作用过程是彼此交织无数次往返，以致整个空腔形成一个热平衡辐射器.

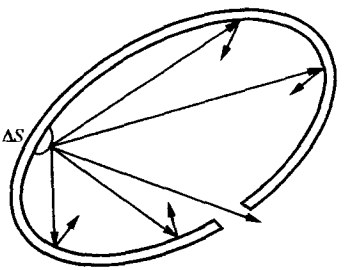


图 9-1

（1）考查任一面元 ΔS，设其中第 n 次（所有面元）反射光的亮度为 b_n. 由光度学中的互易关系知道，来自其他面元而落在该面元上的辐射照度为

$$e_n = \pi b_n.$$

经吸收后，面辐射度（即辐射本领）就成为 $e_n(1-a)$，它决定了下一次该面元的辐射亮度为

$$b_{n+1} = e_n(1-a)/\pi.$$

由以上两式得

$$b_{n+1}/b_n = 1 - a.$$

可见，多次反射的辐照亮度 $b_1, b_2, \cdots$ 构成了一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的亮度

$$b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \frac{1}{1-(1-a)} = \frac{b}{a}. \qquad ①$$

若初始亮度 b_1 取为材料（本底）的辐射亮度 b，则

$$b_0 = b/a.$$

多次反射而来的辐照度 $e_1, e_2, \cdots$ 也构成一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的辐照度

$$e_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pi b_0 = \pi \frac{b}{a}.$$

（2）小孔面元被腔壁其他所有亮度为 b_0 的面元辐照，照度为 πb_0. 因小孔并无吸收，且对外辐射特性仍为朗伯体，故其亮度为

$$b_0' = \frac{\text{辐射本领}}{\pi} = \frac{\text{辐照度}}{\pi} = \frac{\pi b_0}{\pi} = b_0. \qquad ②$$

它与外器壁（材料）的辐射亮度之比为

$$\frac{b_0'}{b} = \frac{b_0}{b} = \frac{1}{a}.$$

可见，器壁吸收系数越小（白体），则比值越大. 如果器壁材料本身就是绝对黑体（$a=1$），则 $b_0'=b$. 这说明在器壁面元之间完全没有反射（辐照）的条件下，小孔对外的辐射亮度并不等于零，而等于材料的辐射亮度. 这也补充说明以上对 b_0，b_0' 的计算公式①，②中已经包含了材料的辐射亮度 b，还加上来自周围的辐照引起的亮度（反射亮度）. 因此，统称 b_0 或 b_0' 为“亮度”也许更妥当一些，或者称为器件的辐射亮度，以区别于材料的辐射亮度. 器件的辐射亮度由材料的辐射亮度和环境的辐照亮度两部分组成.

2. 太阳常数（太阳在单位时间内垂直照射在地球表面单位面积上的能量）为 $1.94\ \mathrm{cal/cm^2\cdot min}$，日地距离约为 $1.50\times10^8\ \mathrm{km}$，太阳直径约为 $1.39\times10^6\ \mathrm{km}$. 用这些数据来估算一下太阳的温度.

解一　本题最简单的处理就是根据太阳光的球对称性，先由地面照度 e 算出太阳光球的总辐射通量（总辐射功率）Ψ；再除以太阳光球的总面积 S 得太阳的面辐射度（辐射本领）R；最后由黑体辐射的斯特藩-玻尔兹曼（Stefan-Boltzmann）定律估算太阳温度（辐射温度）T. 具体计算如下：

设日地距离为 r_1，太阳光球半径为 r_2，则

$$\Psi = 4\pi r_1^2 e,$$

$$R = \frac{\Psi}{S} = \frac{4\pi r_1^2 e}{4\pi r_2^2} = e\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\delta}} = \sqrt[4]{\frac{e}{\delta}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}. \qquad ①$$

取

$$e = 1.94\ \mathrm{cal/cm^2\cdot min} = 1352\ \mathrm{W/m^2},$$

$$\sigma = 5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\cdot K},$$

$$r_1 = 1.50\times10^8\ \mathrm{km},\quad r_2 = 6.95\times10^5\ \mathrm{km}.$$

代入式①，算得

$$T \approx 5773\ \mathrm{K}.$$

实际上，太阳并非绝对黑体，因此其表面实际温度比 5773 K 要高，才能有与黑体同样大的辐射本领.

解二 设太阳的辐射亮度为 b，把太阳看成余弦发射体，则

$$R = \pi b,$$

b 与地面照度 e 的关系为

$$e = \Omega b,$$

式中 Ω 为太阳对被照地点所张立体角：

$$\Omega = \pi r_2^2 / r_1^2.$$

故太阳的辐射本领为

$$R = e(r_1/r_2)^2,$$

同样，由式①得

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\delta}} = \sqrt[4]{\frac{e}{\delta}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \approx 5773\ \mathrm{K}.$$

3. 设空腔处于某温度时 $\lambda_m = 6500$ Å. 如果腔壁的温度增加，以致总辐射本领加倍，λ_m 变为多少？

解 设腔壁温度增加后的空腔温度为 T'，相应的总辐射本领为 R'，辐射峰值位置为 λ'_m，则由斯特藩-玻尔兹曼（四次方）定律得

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{T'}{T}\right)^4 = 2.$$

又由维恩（Wien）位移（反比）定律得

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = \frac{T}{T'},$$

于是

$$\lambda'_m = \left(\frac{T}{T'}\right)\lambda_m = \sqrt[4]{\frac{R}{R'}}\lambda_m = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times 6500\,\text{Å} \approx 5466\ \text{Å}.$$

4. 热核爆炸中火球的瞬时温度达 10^7 K. 求：

（1）辐射最强的波长；

（2）这种波长的能量子 $h\nu$ 是多少？

解 （1）作黑体近似，按维恩位移（反比）定律，得火球辐射峰的波长为

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{0.288\ \mathrm{cm \cdot K}}{10^7\ \mathrm{K}} = 2.88\ \text{Å}.$$

这属于 X 射线波段.

(2) 能量子值为

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda$$

$$= \frac{(6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J/K})\times(3\times10^{8}\ \mathrm{m/s})}{2.88\ \text{Å}}$$

$$\approx 69\times10^{-17}\ \mathrm{J} = \frac{69\times10^{-17}\ \mathrm{J}}{1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}$$

$$\approx 4313\ \mathrm{eV}.$$

5. 利用普朗克(Planck)公式证明斯特藩-玻尔兹曼常数为

$$\sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}.$$

(**提示** $\int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\pi^4}{15}.$)

证 黑体的总辐射本领为

$$R = \int_0^\infty r_0(\nu,T)\mathrm{d}\gamma = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu.$$

令 $x=h\nu/kT$,改写上式为

$$R = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\frac{\pi^4}{15}$$

$$= \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4,$$

即

$$R = \sigma T^4,$$

式中斯特藩-玻尔兹曼常数为

$$\sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3} \approx 5.65\times10^{-12}\ \mathrm{W/(cm^2\cdot K^4)}.$$

6. 利用普朗克公式证明维恩常数为

$$b = 0.2014hc/k.$$

(**提示** $\mathrm{e}^{-x}+x/5=1$ 的解为 $x=4.965$.)

证 为求辐射峰值位置 λ_M,我们将普朗克公式

$$r_0(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\Big/\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1$$

对波长 λ 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\lambda}=-2\pi hc^2\frac{\left[5\lambda^4(\mathrm{e}^{(hc)/(kT\lambda)}-1)+\lambda^5\mathrm{e}^{(hc)/(kT\lambda)}\left(-\frac{hc}{kT}\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]}{[\lambda^5(\mathrm{e}^{(hc)/(kT\lambda)}-1)]^2}.$$

令 $\mathrm{d}r_0/\mathrm{d}\lambda=0$,得方程

$$\left[1-\exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda}\right)\right]-\frac{1}{5}\frac{hc}{kT\lambda}=0,$$

令 $hc/kT\lambda=x$,解方程

$$\mathrm{e}^{-x}+x/5-1=0$$

得

$$x_\mathrm{m}=4.965,$$

即

$$\lambda_\mathrm{m}T=\frac{hc}{kx_\mathrm{m}}=0.2014\frac{hc}{k},$$

写成

$$\lambda_\mathrm{m}T=b,$$

式中维恩常数

$$b=0.2014hc/k\approx 0.290\ \mathrm{cm\cdot K}.$$

§2 光的粒子性和波粒二象性

1. 从钠中取去一个电子所需的能量为 2.3 eV. 试求从钠表面光电发射的截止波长为多少? 钠是否会对 $\lambda=6800$ Å 的橙黄色光表现出光电效应?

解 由钠的电子脱出功 A 给出钠发生光电效应的截止(红限)频率 ν_0 或红限波长 λ_0 分别为

$$\nu_0=A/h,$$

$$\begin{aligned}\lambda_0&=\frac{c}{\nu_0}=\frac{ch}{A}\\&=\frac{(3\times10^8\ \mathrm{m/s})\times(6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})}{2.3\ \mathrm{eV}\times(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV})}\\&\approx 5.395\times10^{-5}\ \mathrm{cm}=5395\ \text{Å}.\end{aligned}$$

可见，钠对 $\lambda=6800$ Å 的光波不能表现出光电效应.

2. 波长为 2000 Å 的光照到铝表面. 对铝来说，移去一个电子所需的能量为 4.2 eV. 试问：

(1) 出射的最快光电子的能量是多少？

(2) 截止电压为多少？

(3) 铝的截止波长为多少？

(4) 如果入射光强度为 2.0 $\mathrm{W/m^2}$，单位时间打到单位面积上的平均光子数为多少？

解　波长 $\lambda=2000$ Å 的光子能量为

$$E=h\nu=hc/\lambda$$

$$=\frac{(6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})\times(3\times10^{8}\ \mathrm{m/s})}{2\ \text{Å}\times(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV})}$$

$$\approx 6.2\ \mathrm{eV}.$$

(1) 出射的最快光电子的能量为

$$W_m=h\nu-A=6.2\ \mathrm{eV}-4.2\ \mathrm{eV}=2.0\ \mathrm{eV}.$$

(2) 截止电压为 2.0 V.

(3) 铝的截止波长(红限)为

$$\lambda_0=\frac{hc}{A}=\frac{E}{A}\lambda$$

$$=\frac{6.2\ \mathrm{eV}}{4.2\ \mathrm{eV}}\times 2000\ \text{Å}\approx 2952\ \text{Å}.$$

(4) 由于光强 I 与光子流平均密度 N 的关系为

$$I=Nh\nu,$$

故

$$N=\frac{I}{h\nu}\approx\frac{2.0\ \mathrm{W/m^2}}{6.2\ \mathrm{eV}\times(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV})}$$

$$\approx 2.0\times10^{18}/(\mathrm{m^2\cdot s}).$$

3. 某光电阴极对于 $\lambda=4910$ Å 的光，发射光电子的截止电压为 0.71 V. 当改变入射光波长时，其截止电压变为 1.43 V. 此对应的入射光波长为多少？

解　光电效应的截止电压 V_0 与光电阴极的脱出功 A 以及入射光频 ν(或波长 λ)的关系为

$$eV_0 = h\nu - A \quad 或 \quad eV_0 = hc/\lambda - A; \qquad ①$$

对于另一入射光频 ν' 或(波长 λ'),有

$$eV_0' = h\nu' - A \quad 或 \quad eV_0' = hc/\lambda' - A. \qquad ②$$

式②减式①得

$$e(V_0' - V_0) = hc\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

由此解出

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{e(V_0' - V_0)}{hc} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \left[\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}) \times (1.43\ \mathrm{V} - 0.71\ \mathrm{V})}{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}) \times (3 \times 10^{18}\ \text{Å/s})} + \frac{1}{4910\ \text{Å}}\right]$$

$$\approx 0.2616 \times 10^{-3}/\text{Å},$$

故 $\lambda' \approx 3823$ Å,即当截止电压增加到 1.43 V 时,对应的入射光波长减小到 3823 Å.

4. 有光照射到照相底版上.如果在底版上分解出 AgBr 分子,则光被记录下来.分解一个 AgBr 分子所需的最小能量约为 10^{-19} J.求截止波长(即大于该波长的光将不被记录).

解 这里光化作用(量子效应)的最小能量(能量阈值)A_0 与光电效应中的脱出功意义相当;与其相应的入射光的截止波长 λ_0 由下式决定:

$$hc/\lambda_0 = A_0,$$

即

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_0} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}) \times (3 \times 10^{18}\ \text{Å/s})}{10^{-19}\ \mathrm{J}} \approx 19878\ \text{Å}.$$

5. 一个空腔辐射器处于 6000 K 的温度.器壁上小圆孔的直径是 0.10 mm.计算每秒从此孔发出的波长在 5500～5510 Å 之间的光子数.

解 普朗克公式给出面元 ΔS 的黑体在 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 波长间隔内的辐射通量为

$$\Delta\Psi = r_0(\lambda, T)\Delta S\Delta\lambda$$

$$= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}\Delta S\Delta\lambda,$$

相应的光子流量为

$$\Delta N=\frac{\Delta\psi}{h\nu}=\frac{2\pi c}{\lambda}\frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}\Delta S\Delta\lambda. \qquad ①$$

取

$$\lambda\approx 5505\ \text{Å},\quad \Delta\lambda=5510\ \text{Å}-5500\ \text{Å}=10\ \text{Å},$$
$$\Delta S=\pi(0.10\ \text{mm})^2/4\approx 8\times 10^{11}\ \text{Å}^2,$$

则

$$\frac{hc}{kT\lambda}=\frac{(6.626\times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\times(3\times 10^{18}\ \text{Å/s})}{(1.38\times 10^{-23}\ \text{J/K})\times 6000\ \text{K}\times 5505\ \text{Å}}\approx 4.361.$$

代入式①,可算出

$$\Delta N\approx 2.123\times 10^{15}/\text{s}.$$

6. 太阳光以 1340 $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$的照度投射到垂直于入射光线的地球表面上.假如入射光的平均波长为 5500 Å,求每秒每平方米上的光子数.

解　太阳光每秒投射到地球表面每平方米上的光子数为

$$\Delta N=\frac{\text{辐照度}}{hc/\lambda}=\frac{1340\ \text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{s})}{(6.626\times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\times\left(\dfrac{3\times 10^{18}\ \text{Å/s}}{5500\ \text{Å}}\right)}$$

$$\approx 37\times 10^{20}/(\text{m}^2\cdot\text{s}).$$

7. 在理想条件下,当正常人的眼睛接收 5500 Å 的可见光时,每秒光子数达 100 个就有光的感觉.问:与此相当的功率是多少?

解　此时,光功率为

$$\Delta W=\Delta N\frac{hc}{\lambda}$$

$$=100\times\frac{(6.626\times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\times(3\times 10^{18}\ \text{Å/s})}{5500\ \text{Å}}$$

$$\approx 3.6\times 10^{-17}\ \text{W}.$$

8. 单色电磁波的强度是 $Nh\nu$,其中 N 是每单位时间通过单位面积的光子数.问:照在全反射镜面上的辐射压强是多少?

解　辐射压强(光压)是由光子流经反射镜后的动量改变而引起的.光子的能量为

$$E=h\nu=hc/\lambda \qquad ①$$

动量为

$$mv = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}. \qquad ②$$

光强 I 与光子流密度 N 的关系为

$$I = Nh\nu. \qquad ③$$

故动量流密度为

$$P = Nmv = Nh\nu/c. \qquad ④$$

由于镜面的全反射，动量流密度的改变量为

$$\Delta P = 2P = 2Nh\nu/c.$$

按动量定理，镜面的辐射压强为

$$f = \Delta P = 2Nh\nu/c,$$

即平均光压为

$$f = 2I/c.$$

9. 试导出康普顿散射实验中电子的反冲角 ψ 与光子散射角 θ 的关系式[①].

解 如图 9-2，将动量守恒关系写成分量形式：

$$mv\sin\psi - \frac{h}{\lambda}\sin\theta = 0,$$

$$mv\cos\psi + \frac{h}{\lambda}\cos\theta = \frac{h}{\lambda_0}.$$

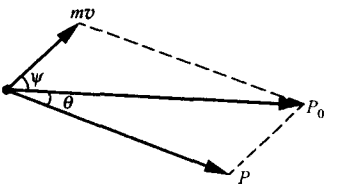


图 9-2

两式相比得

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{(\lambda/\lambda_0) - \cos\theta}, \qquad ①$$

式中分母

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta &= \frac{\lambda_0 + \Delta\lambda}{\lambda_0} - \cos\theta \\ &= (1 - \cos\theta) + \Delta\lambda/\lambda_0 \\ &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\frac{\lambda_C}{\lambda_0}\sin^2\frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：285.

式中 λ_C 为康普顿波长(常数)：

$$\lambda_C = h/mc = 0.0241\ \text{Å}.$$

由此给出 ψ 与 θ 的关系

$$\tan\psi = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)[1 + (\lambda_C/\lambda_0)]}$$

$$= 1\Big/\left[\left(1 + \frac{\lambda_C}{\lambda_0}\right)\tan\frac{\theta}{2}\right].$$

10. 试证明，康普顿散射中反冲电子的动能 K 和入射光子的能量 E 之间的关系为

$$\frac{K}{E} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\lambda_C\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0 + 2\lambda_C\sin^2(\theta/2)},$$

式中 $\lambda_C = h/mc$ 为康普顿波长，θ 见图 9-2.

证　碰撞前、后光子的动能分别为

$$E = h\nu_\theta = hc/\lambda_0, \quad E' = h\nu = hc/\lambda.$$

根据动能守恒定理，反冲电子的动能为

$$K = E - E',$$

与入射光子动能之比为

$$\frac{K}{E} = \frac{E - E'}{E} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{2\lambda_C\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0 + 2\lambda_C\sin^2(\theta/2)}.$$

当散射角 $\theta = 90°$ 时，$\Delta\lambda = \lambda_C$，则

$$\frac{K}{E} = \frac{\lambda_C}{\lambda_0 + \lambda_C}. \qquad ①$$

11. 今有波长为 1.00 Å 的 X 射线束以及从铯(^{137}Cs)样品得到的波长为 1.88×10^{-2} Å 的 γ 射线束分别与自由电子碰撞. 现从与入射方向成 90°的方向去观察散射线. 问，每种情况下：

(1) 康普顿波长偏移是多少？

(2) 入射光在碰撞时失去的能量占总能量的百分之几？

(3) 给予反冲电子的动能为多少？

解　(1) 按康普顿波长偏移公式

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2) \qquad ①$$

可见，波长偏移量与入射光波长的长短是无关的(当然，不要误认为频移量 $\Delta\nu$ 与 λ_0 无关). 在散射角 $\theta=90°$时，有

$$\Delta\lambda = \lambda_C = 0.0241\ \text{Å}.$$

对 X 射线的散射是如此；对 γ 射线的散射也是如此.

(2) 按上题中的式①，入射光在碰撞时失去的动能(即反冲电子获得的成功)与原入射光子动能(即总能量)之比为

$$\frac{K}{E} = \frac{\lambda_C}{\lambda_0 + \lambda_C}.$$

当 $\lambda_0=1.00$ Å时，得

$$\frac{K}{E} = \frac{0.0241\ \text{Å}}{1.00\ \text{Å} + 0.0241\ \text{Å}} \approx 2.35\%;$$

当 $\lambda_0=1.88\times10^{-2}$ Å时，得

$$\frac{K}{E} = \frac{0.0241\ \text{Å}}{0.0188\ \text{Å} + 0.0241\ \text{Å}} \approx 56\%.$$

(3) 当 $\lambda_0=1.00$ Å时，反冲电子获得的动能为

$$K \approx 2.35\% E = 2.35\% hc/\lambda_0$$

$$= 2.35\% \times \frac{(6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\times(3\times10^{18}\ \text{Å/s})}{1.00\ \text{Å}\times(1.60\times10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 292\ \text{eV};$$

当 $\lambda_0=1.88\times10^{-2}$ Å时，反冲电子获得的动能为

$$K \approx 56\% hc/\lambda_0$$

$$= 56\% \times \frac{(6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})\times(3\times10^{18}\ \text{Å/s})}{(1.88\times10^{-2}\ \text{Å})\times(1.6\times10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$\approx 370\ \text{keV}.$$

12. 可以用可见光来作康普顿散射实验吗？为什么？

解 此问题是由康普顿散射波长偏移公式(上题中式①)引起的. 偏移量 $\Delta\lambda$ 确实与入射光波长没有关系；不论长波入射或短波入射，对固定散射角 θ 来说，$\Delta\lambda$ 是相同的. 波长偏移公式并不反映散射光的强度分布. 在分析散射光的强度问题时，注意到以下两点是必要的：

(1) 康普顿效应是光子与自由电子“碰撞”的量子效应,它毕竟不是纯力学中的两体碰撞;而是大量光子与大量自由电子相互作用的集体效应.作为一种近似处理,可看成光子-电子对的一次碰撞,其中每一对的碰撞具有随机性,有各种可能的散射角.

(2) 不同散射角的强度分布 $I(\theta,\lambda)$ 问题不可能从一对碰撞中求得解决,这涉及入射的光子流密度中有多少几率被散射到 θ 角的方向.大体上说,只有当光波长极短时,光才具有明显的粒子性.X 射线的波长是 Å 数量级,这正是原子尺度的数量级.这种短波射线具有极强的穿透力,有很大一部分进入靶体内部,与体内自由电子发生有效碰撞.而且,X 射线的光子能量约为 $10^3\sim10^4$ eV,而靶物质中的电子束缚能约为 10～100 eV;由于前者远大于后者,致使靶物质在 X 射线照射下,释放出比原有多得多的自由电子,参与康普顿散射,因而大大提高散射光强.如果长波(可见光)入射,由于金属表面的高反射和体内的强吸收,进入体内与电子碰撞的光子数几率很小.因此,用可见光来作康普顿散射实验,效应不明显.如果可见光入射于自由电子气,则另当别论.

§3　玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论

1. (1) 不考虑电磁辐射,试证明氢原子中电子以半径 r 绕核作圆周运动时,经典理论给出的原子能量(动能与静电势能之和)为(用 MKSA 单位制表示)

$$E=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

式中 ε_0 为真空介电常数,e 为基本电荷.

(2) 验证普朗克常数 h 具有角动量的量纲.

(3) 设(1)中电子绕核的角动量为 J,玻尔(Bohr)的“量子化条件”是 J 取如下分立值:

$$J=nh/2\pi\quad(n=1,2,\cdots).\qquad①$$

证明此时电子轨道半径也取分立值:

$$r=n^2a_B,$$

式中 $a_B=\varepsilon_0 h^2/\pi me^2$ 称为玻尔半径，m 为电子质量，并计算玻尔半径 a_B 的具体数值.

(4) 证明氢原子能级 E_n 和里德伯(Rydberg)常数 R_H 的表达式分别为

$$E_n=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2},\quad R_H=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 c},$$

并计算里德伯常数 R_H 的具体数值.

(5) 量子数 $n\to\infty$意味着什么?

解 (1) 氢原子中电子的库仑(Coulomb)势能和动能分别为

$$U(r)=\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad K(r)=\frac{1}{2}mv^2.$$

因电子绕核运动的向心力由库仑引力来提供：

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

即

$$mv^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},\qquad ②$$

故

$$K(r)=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

所以，经典电磁理论给出的氢原子的能量为

$$E(r)=K(r)+U(r)=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.\qquad ③$$

(2) 普朗克常数 h 的单位 J·s=N·m·s=kg·m²/s，而角动量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 的单位是 kg·m²/s，故二者量纲相同.

(3) 粒子作圆周运动的角动量写成

$$J=mvr=r\sqrt{m^2v^2}.\qquad ④$$

由式②得

$$m^2v^2=\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

代入式④有

$$J=\sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

再按玻尔的量子化条件(见式①),令 $J=nh/2\pi$,解出

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_B, \qquad ⑤$$

式中

$$a_B = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

$$= \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}) \times (6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^2}{3.1416 \times (9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}) \times (1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}$$

$$\approx 0.5291\ \text{Å}.$$

(4) 引入角动量的玻尔的量子化条件后,引起一系列物理量的量子化,如轨道半径量子化,能量取值量子化等. 以式⑤给出的轨道半径 r 代入式③,得到能量取值(能级)为

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_B}\frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -hcR_H\frac{1}{n^2},$$

式中

$$R_H = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

$$= \frac{(9.109\times10^{-31}\ \mathrm{kg})\times(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C})^4}{8\times(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m})^2(6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^3(3\times10^8\ \mathrm{m/s})}$$

$$\approx 1.09715\times10^7/\mathrm{m}.$$

(5) 当主量子数 $n\to\infty$ 时,$r\to\infty$,$E\to0$,$\Delta E\to0$,其能量取值高于所有束缚态,能级间隔趋于零,能量连续取值. 这意味着电子完全失去量子效应,过渡为经典的自由电子模型.

2. 设一个两能级系统能级差 $E_2-E_1=0.01$ eV.

(1) 分别求 $T=10^2$ K,10^3 K,10^5 K,10^8 K 时粒子数 N_2 与 N_1 之比;

(2) $N_2=N_1$ 的状态相当于多高的温度?

(3) 粒子数发生反转时的状态相当于怎样的温度?

(4) 我们姑且引入"负温度"的概念来描述粒子数反转的状态. 你觉得 $T=-10^8$ K 和 $T=10^8$ K 两个温度中哪一个更高?$T=-10^4$ K 和 $T=-10^8$ K 两个温度中哪一个更高?

解　按粒子数的玻尔兹曼正则分布律,有

$$\frac{N_2}{N_1}=\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right)=\exp\left(-\frac{0.01}{kT}\right).$$

由此可算出 kT(单位：eV)的数量级以及相应的粒子数比值 N_2/N_1 分别为

$$kT=\frac{1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}\times100\,\mathrm{K}}{1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J/eV}}\approx8.616\times10^{-3}\,\mathrm{eV},$$

$$N_2/N_1\approx0.31\quad(T=100\,\mathrm{K});$$

$$kT=8.616\times10^{-2}\,\mathrm{eV},\quad N_1/N_1\approx0.89\quad(T=10^3\,\mathrm{K});$$

$$kT=8.616\,\mathrm{eV},\quad N_2/N_1\approx0.9988\quad(T=10^5\,\mathrm{K});$$

$$kT=8.616\,\mathrm{keV},\quad N_2/N_1\approx0.999\,9988\quad(T=10^8\,\mathrm{K}).$$

可见正则分布的特点是：随着温度的急剧增加，粒子数比值 N_2/N_1 缓慢上升而逼近 1.

(2) 当 $T\to\infty$时，

$$\frac{N_2}{N_1}=\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right)\to1,$$

则 $N_2=N_1$.

(3) 如果仍然用正则分布的语言来描述，我们只能说粒子数发生反转时的状态是“负温度”状态.

(4) 应该说，$T=-10^8$ K 比 $T=10^8$ K 温度高，因为前者粒子数的比值比后者高；同理，$T=-10^4$ K 比 $T=-10^8$ K 温度高. 如果坚持用正则平衡分布的统计语言来描述粒子数反转这种非平衡态，势必在温度为绝对零度(正负)附近出现突变，即

$$\frac{N_2}{N_1}\to\begin{cases}0 & (T\to0\,\mathrm{K}),\\ +\infty & (T\to-0\,\mathrm{K}).\end{cases}$$

§4 激光的产生

本节思考题从略.

§5 激光器对频率的选择

本节思考题从略.

§6　激光的特性及应用

本节思考题从略.

思考题解答

第一章　几何光学

§1　几何光学基本定律

1. 如何利用针孔照相机测量树的高度？

答　针孔照相机是根据小孔成像原理制作的. 先测出像高、物距和像距，再利用三角形相似关系即可算出物(即树)的高度.

2. 为什么透过茂密树叶的缝隙投射到地面的阳光形成圆形光斑？你能设想在日偏食的情况下这种光斑的形状会有变化吗？

答　这是小孔成像现象. 光斑是太阳的像，其形状与太阳相同，而与小孔(树叶缝隙)的形状无关. 当日偏食发生时，光斑的形状将随之改变，但仍保持相似关系.

3. 你能否想出一种简单的实验或观察，来说明反射定律对一切波长的可见光都适用？

答　令一束太阳光照射在平面镜上，即可观察到入射光束和反射光束之间总是遵循反射定律的. 因为太阳光是包含一切波长的可见光，这一现象说明反射角的大小与波长无关，都遵从反射定律. 光在折射时是有色散的；而反射时总是无色散的. 因此，在光学仪器中，为减小色散总是尽量采用反射光路.

4. 试说明，为什么远处的灯火在微波荡漾的湖面形成的倒影拉得很长？

答　湖中灯火的倒影是灯光经湖面反射所成的像. 当湖面平静如镜时，灯光将在水面下对称处形成轮廓清晰的倒影. 当微风吹过时，平静的湖面泛起层层细浪，宛如一块块小平面镜；在每一块小镜面下方与灯火对称处，都会出现一个对称的灯影. 因为这些小镜面不在同一平面上，所以各自所成的像的位置也不同. 如果水波排列得很整齐，细浪就像一排有相同倾角的小镜子一个错后一个地排列，灯火的影子也就会一个摞一个地排列得很整齐，于是形成一串长长的倒

影.但如果水面的波浪很大,浪面排列没有规则,灯影就会被撕碎,形成斑斓的碎花;这些散碎的光斑随着波浪的起伏荡漾,则不再成串了.

5. 证明:当光点式电流计中悬丝上的小镜子转过 θ 角时,反射光线的方向转过 2θ 角.

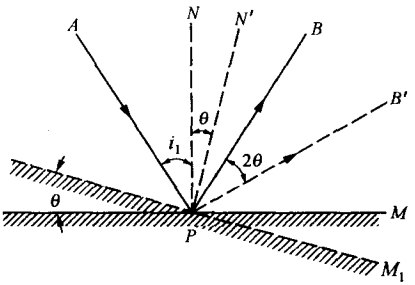


图 10-1　光点电流计

答　如图 10-1 所示,设小镜子转动前光线 AP 的入射角为 i_1,则入射光线 AP 和反射光线 PB 的夹角 $\angle APB=2i_1$.

当镜面转过 θ 角时,其法线也转过 θ 角,但此时入射光线 AP 方向不变,入射角为 $i_1+\theta$,入射光线 AP 与反射线 PB' 的夹角为

$$\angle APB' = 2(i_1 + \theta).$$

因此,小镜子转动前后两反射线的夹角为

$$\angle BPB' = \angle APB' - \angle APB = 2(i_1 + \theta) - 2i_1 = 2\theta.$$

显然,在入射光线方向不变的条件下,镜面的转角 θ 无论是向左还是向右,反射光线总是转过 2θ 角.这一结论在测量微小角度、微小位移时经常用到.

6. 有人设想用如图 10-2 所示的反射圆锥腔使光束的能量集中到极小的面积上.因为出口可以做得任意小,从而射出的光束的能流密度可以任意大.这种想法正确吗?

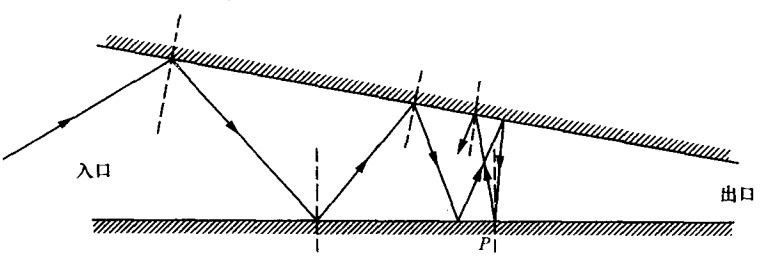


图　10-2

答 如图 10-2 所示，圆锥的截面两母线是不平行的，从入口进入的光线，在逐次反射过程中入射角依次减小，必然会在某一点（如图中 P 点）处光线从法线右侧入射，从而使光线返回入口. 显然，仅从光的反射定律来分析，欲用反射圆锥腔来聚焦光束能流的设想是不可能实现的.

7. 为什么日出和日落时太阳看起来是扁的？

答 这是由于太阳发出的光线穿过地球周围大气层时的折射造成的. 大气的密度随高度的增加而减小；折射率也随高度的增加而逐渐降低. 因此，来自太阳的光线穿过大气层的过程，是从光疏媒质到光密媒质的入射过程；折射光线越来越向法线靠近，即向地面弯曲. 我们从地面上观察光线好像是从较高的位置射来的，也就是说，我们感到发光点的位置比实际位置高了. 只要发光点不在大气正上方，这种视位置抬高的现象都是不可避免的.

光线的弯曲程度与光线的入射角有关. 可以证明，光线的入射角越大，也就是说，入射光线越贴近地平线，弯曲得越厉害，发光点的视觉位置被抬高得越多. 对朝阳或夕阳上半部各点来说，越靠近顶部，发出光线的入射角越小，光线弯曲程度小，视觉位置抬高得也少一些；而两个部分的视位置相对被抬高得多一些，因此太阳上半部分的弧度变小了. 同理，朝阳或夕阳下半部分的圆弧也会变得平直一些，而且下半部的视觉位置普遍地比上半部抬高得多一些. 这样，我们看起来圆圆的太阳就变成扁的了.

下面我们来证明入射角越大，视觉位置被抬高得越多. 为此，我们只要证明当光从光疏媒质到光密媒质的界面上折射时，入射角与折射角之差随入射角的增大而单调上升即可.

如图 10-3，设 $n_1<n_2$，则 $i_1>i_2$. 由折射定律得

$$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2,$$

即

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right).$$

故有

$$f(i_1) = i_1 - i_2 = i_1 - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right),$$

取导数得

$$\frac{\mathrm{d}f(i_1)}{\mathrm{d}i_1}=1-\frac{(n_1/n_2)\cos i_1}{\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1}}$$

$$=1-\frac{\sqrt{1-\sin^2 i_1}}{\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1}}\frac{n_1}{n_2}.$$

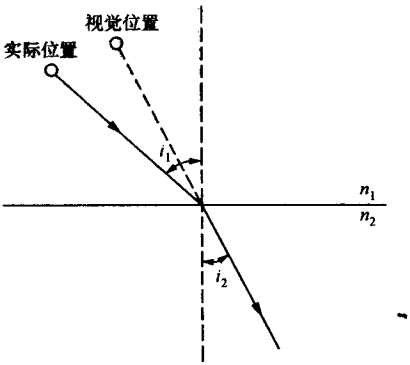


图　10-3

由于 $n_1<n_2$，显然有 $f'(i_1)>0$. 这就证明了入射角与折射角之差 i_1-i_2是入射角 i_1 的单调上升函数.

8. 大气折射给星体位置的观察造成的偏差叫做蒙气差. 这是天文观测中必须考虑的因素. 试定性讨论蒙气差与星体到天顶距离之间的关系.

答　由上题分析可知，如图 10-4 所示，由于来自星体的光线穿

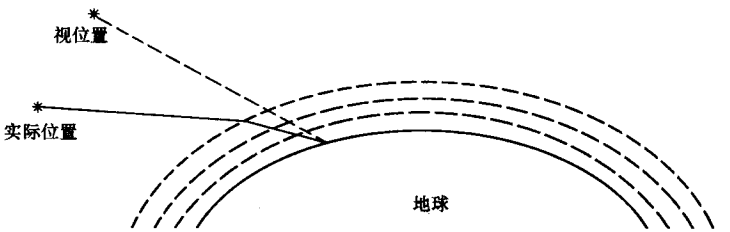


图　10-4

过大气层时因折射发生弯曲，观察到星体的视觉位置比实际位置要高. 星体离天顶越远，这种偏差越大. 只有在星体完全处天顶位置，星光垂直射入大气层时，光线才不发生弯曲，视觉位置与实际位置一致.

9. 试讨论平行光束折射后截面的变化.

答 如图 10-5 所示，设平行光束的入射角为 i_1，折射角为 i_2，则折射光束和入射光束截面之比为

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{l_2}{l_1}=\frac{AB\cos i_2}{AB\cos i_1},$$

即平行光束在媒质的界面上折射时，折射光束和入射光束的横截面积之比等于折射角和入射角的余弦之比. 由此，根据折射定律可知，当 $n_2>n_1$ 时，$i_2<i_1$，$S_2/S_1>1$；当 $n_2<n_1$ 时 $i_2>i_1$，$S_2/S_1<1$，即从光疏媒质到光密媒质，折射后光束截面变大；反之，则变小. 应当指出，这一结论也正是能量守恒所要求的.

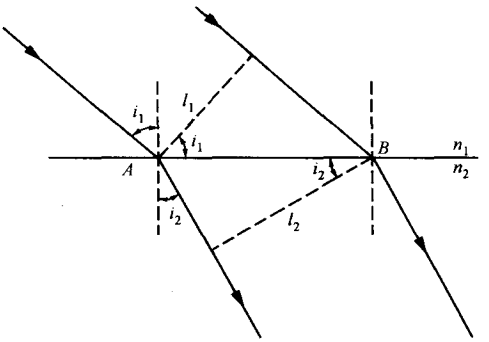


图 10-5

10. 设想一下，在鱼的眼睛里看到的天空是什么样子？

答 光线从空气射入水中，经过水面时要发生折射. 空气的折射率 $n_1=1.0$，水的折射率 $n_2=1.33$. 根据斯涅尔折射定律 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$ 可以算出，当入射角 $i_1=90°$时，折射角 $i_2=48.59°$. 可见，水面上 180°范围内的入射光线经过水面折射后，在水中收拢在一个顶角大约是 75°的锥体内. 由此可以想见，鱼眼睛里的天空被限制在一个小圆圈内，与坐井观天的青蛙眼睛里的差不多. 所不同的是，前者

是一个高度收缩的天空，包括水面以上整个半空间，物空间的角范围丝毫没有减小. 可以想象，鱼在晴朗夜间看到的星星比我们看到的要稠密得多；眼睛长在头顶上的鱼，只需向上看，即可看到两岸的景物.

11. 为什么金刚石比磨成相同形状的玻璃仿制品显得更加光彩夺目？

答　这是由于光的全反射现象造成的. 光线从空气射入金刚石后，在与入射面相对的金刚石和空气的界面上，光从光密媒质向光疏媒质入射，此时就有可能发生全反射. 眼睛迎着经过全反射的出射光看去，就会感到特别明亮. 这种全反射现象在金刚石制品和玻璃制品中都会发生. 但由于在金刚石中的全反射临界角比在玻璃中的全反射临界角要小得多，即光在金刚石中比在玻璃中更容易发生全反射. 因此，金刚石制品比相同形状的玻璃制品看起来更加光彩夺目.

我们不妨通过计算来比较一下两者全反射临界角的大小. 金刚石的折射率 $n_1=2.417$；玻璃的折射率在 1.5 到 2.0 之间，取 $n'=1.5$ 计算；空气的折射率 $n_2=1.0$. 把以上数据代入全反射临界角公式，得出由金刚石到空气的全反射临界角为

$$i_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1}=\arcsin\frac{1.0}{2.4}\approx 25°.$$

从玻璃到空气的全反射临界角为

$$i_c'=\arcsin\frac{n_2}{n_1}=\arcsin\frac{1.0}{1.5}\approx 42°.$$

上述结果说明，在金刚石的内表面上入射角在 25°～90°之间的入射光都发生全反射，而在折射率为 1.5 的玻璃的内表面，只有入射角在 42°～90°范围内的入射光才发生全反射. 显然，金刚石比相同形状的玻璃仿制品要耀眼多了.

§2　惠更斯原理

1. 惠更斯原理是否适用于空气中的声波？你是否期望声波也服从和光波一样的反射定律和折射定律？

答　惠更斯原理是关于波面传播的理论，对任何波动过程它都

是适用的. 不论是机械波或电磁波，只要知道某一时刻的波面，都可以用惠更斯作图法求出下一时刻的波面. 由此可以导出波的反射定律和折射定律，既适用于光波，也适用于声波. 所不同的是，声波是机械波，不能在真空中传播. 因此，对声波来讲，只有“相对折射率”的概念，而无“绝对折射率”的概念. 这是不同于光波的.

2. 当用惠更斯作图法研究平行光束在平面上折射时，是否会遇到次波没有包络面的情况？

答 由惠更斯作图法易见，在平行光折射光束的两侧，无次波包络面处仍然存在次波面. 光波在界面上反射和折射时，与光从窗口直接透射一样，都不可避免地存在衍射. 惠更斯原理未能定量地给出次波在包络面上和包络面以外各处波动的强度分布，从而不能圆满解释波的直进性与衍射现象的矛盾. 这正是惠更斯原理的缺陷所在.

§3 费马原理

本节思考题从略.

§4 成 像

1. (1) 如图 10-6(a)所示，若光线 1，2 相交于 P 点，经过一理想光具组后，它们的共轭线 1′，2′是否一定相交？如果有交点，令此交点为 P'. 两光线在 P，P' 间的光程是否相等？

(2) 如图 10-6(b)所示，若光线 1，2 平行，经过一理想光具组后，它们的共轭线 1′，2′是否一定相交？如果有交点，令此交点为 P'. 作线段 A_1A_2 垂直于光线 1，2，光程 $L(A_1P')$ 和 $L(A_2P')$ 是否一定相等？

(3) 如图 10-6(c)所示，从点光源 Q 发出两根光线 1 和 2，光线 1 经棱镜偏折，光线 2 不经过棱镜，两光线相交于 P 点. 在 Q，P 两点间光线 1，2 的光程是否相等？

答 (1) 理想光具组必须保证同心光束保持同心性，即相交于一点的入射光线经理想光具组变换后，其出射光线必然也交于唯一

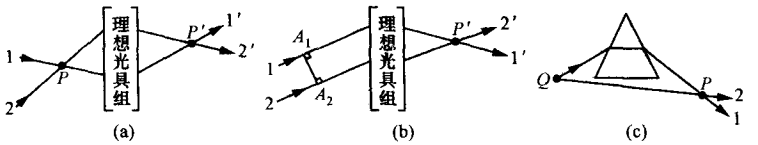


图　10-6

的一点. 所以图 10-6(a)中交于 P 点的入射光线 1,2,其共轭光线 1′, 2′必定相交一点. 若交点为 P',则 P 和 P' 点为物像共轭点. 根据物像等光程性,两光线在 P 和 P' 间光程相等.

(2) 图 10-6(b)中的入射光线 1,2 平行,相当于交点在无穷远处,令该交点为 P;由(1)的分析可知,其共轭光线 1′,2′也必定交于一点. 若交点为 P',则 P 和 P' 点为物像共轭点. 根据物像等光程性,有光程 $L(PA_1P')=L(PA_2P')$. 又因线段 A_1A_2 垂直于光线 1,2,故 A_1,A_2 点为入射光线等相面上的两点,$L(PA_1)=L(PA_2)$. 因此有

$$\begin{aligned} L(A_1P') &= L(PA_1P') - L(PA_1) \\ &= L(PA_2P') - L(PA_2) = L(A_2P'). \end{aligned}$$

这一结论在处理干涉和衍射问题的光程差计算中经常要用到. 其实图 10-6(b)中的 P' 点必定在理想光具组的后焦面上.

(3) 图 10-6(c)中,显然沿光线 1 的 Q,P 两点间的光程大于光线 2 的 Q,P 两点间的光程. 目前 Q,P 两点间存在两条实际的光线,而光程却不相等,这是否与费马原理矛盾呢? 必须指出,费马原理要求 Q,P 两点间实际光线的光程取平稳值(所谓"平稳",是对路径的无穷小变化而言的). 目前光线 1 和 2 已不属同一邻域的实际路径,所以它们在 Q,P 两点间的光程将取各自的稳定值;当然,两者可以不相等.

2. 图 10-7(a)为以 Q,Q' 点为焦点的旋转椭球面. 现用通过 M 点与椭球面相切的球面反射镜代替椭球面反射镜. 在下列三种情况下,光线 QMQ' 的光程是极大值、极小值还是恒定值?

(1) 球面的半径大于椭球在 M 点的曲率半径;

(2) 球面的半径等于椭球在 M 点的曲率半径;

(3) 球面的半径小于椭球在 M 点的曲率半径.

答　如图 10-7(b),M' 点在曲率半径大于椭球面的球面上,P 点

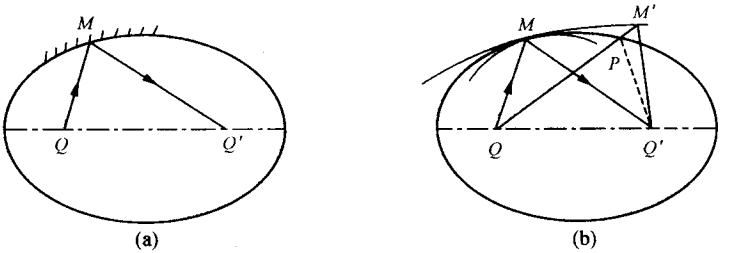


图 10-7

在椭球面上. 根据椭球的特性知,光程 $L(QPQ')=L(QMQ')$. 由于

$$\overline{PQ'} < \overline{PM'} + \overline{M'Q'},$$

所以光程

$$L(QMQ') = L(QPQ') < L(QM'Q').$$

光线 $QM'Q'$ 是违背反射定律的,即入射光线 QM' 在 M' 点反射后不会通过 Q' 点;而光线 QMQ' 是符合反射定律的. 因此,在球面反射镜 MM' 上,光线 QMQ' 是光程为极小的情形. 这就是(1)的结果. 同理可证,在(2)和(3)中,光线 QMQ' 的光程分别是恒定值和极大值.

此外,我们还可设想有一在 M 点与椭球外切于左侧而内切于右侧的反射镜,则 $L(QMQ')$ 取拐点值. 由此可见,费马原理所讲的光线的实际路径是光程为平稳的路径. 平稳光程可以有上述四种基本形态,相应的实际例子都是可以被找到的.

§5 共轴球面组傍轴成像

1. 手头只有一盏白炽灯,如何简便地估计一个凹面反射镜的曲率半径和焦距?

答 令发光的白炽灯对着凹面镜反射成像,使灯离凹面镜尽量远一些,此时的像距(像到凹面镜顶点的距离)就近似为焦距. 焦距的二倍就是凹面镜的曲率半径.

2. 在什么条件下,图 10-8 中的折射球面起会聚作用? 在什么条件下起发散作用?

答 我们可以利用单折射球面的焦距公式

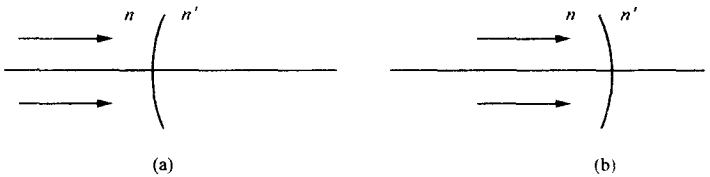


图　10-8

$$f=\frac{nr}{n'-n},\quad f'=\frac{n'r}{n'-n}$$

来判断聚散的条件.

对于图 10-8(a)的折射球面,半径 $r>0$. 当 $n'>n$ 时,$f,f'>0$,折射球面起会聚作用;当 $n'<n$ 时,$f,f'<0$,折射球面起发散作用.

对于图 10-8(b)的折射球面,半径 $r<0$. 当 $n'>n$ 时,$f,f'<0$. 折射球面起发散作用;当 $n'<n$ 时,$f,f'>0$,折射球面起会聚作用.

用焦距的正负来判断单球面折射或薄透镜对光束的聚散性是正确的;但对透镜组来说,这种判断就不灵了.

§6　薄　透　镜

1. 将物体放在凸透镜的焦面上,透镜后放一块与光轴垂直的平面反射镜,最后的像成在什么地方?其大小和虚实如何?上述装置中平面镜的位置对像有什么影响?你能否据此设计出一种测凸透镜焦距的简便方法?(此法称为自聚焦法.)

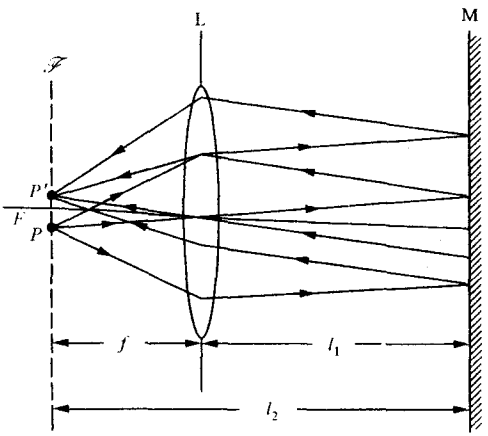


图　10-9

答　如图 10-9 所示,凸透镜前焦面上轴外物点 P 点发出的发散同心光束,先经透镜 L 后转

化为斜入射到平面镜 M 上的平行光束；然后经 M 反射后转化为自右向左的倾斜平行光束；再次通过透镜后必聚于焦面 F 上的一点 P'. 由平面镜 M 上入射平行光和反射平行光方向上的对称性，可知 P' 必与 P 对称于光轴. 因此，凸透镜焦面上的物 PQ 经上述系统后仍成像在原焦面上，像 $P'Q'$ 与原物大小相同，为倒立实像. 移动平面镜的前后位置对像的大、正倒、虚实及位置均无影响. 当然，上述结论也可用逐次成像法计算得到，但得到物理图像不如作图法清楚.

利用图 10-9 中的装置，即可测定凸透镜的焦距. 沿光轴前后挪动透镜 L，当物与透镜距离刚好等于透镜焦距时，由平面镜反射回来的光束在物面上成像最清晰. 这时，分别测出透镜与平面镜的距离 l_1 和物与平面镜的距离 l_2，即得透镜焦距

$$f = l_2 - l_1.$$

用自聚焦法测透镜的焦距，主要是利用了透镜焦面的性质和平面镜对称成像的特性. 当然，实验还要讲究技巧，例如，实际发光体往往不是平面的，可以用灯泡照明小孔或网格获得平面物；为了减小色像差，可以在灯泡后加一红色玻璃，使光源近似为单色.

2. 上题中测焦距的方法能否用于凹透镜？

答 自聚焦法也可用于测凹透镜的焦距，测试时需有一凸透镜作为辅助透镜. 光路如图 10-10 所示，开始先撤走待测凹透镜 L_2，令实物（图中为轴上小孔）A 通过凸透镜成实像 A'，测出像 A' 与平面镜的距离 l_1. 然后再在像 A' 与凸透镜 L_1 之间插入凹透镜 L_2，前后移动 L_2. 当 L_2 与 A' 的距离刚好等于待测透镜焦距时，经平面镜 M 反

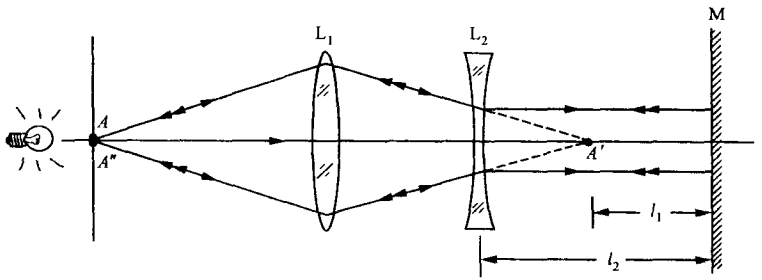


图 10-10

射回来的光束必须在物面上成像 A''最清晰(图中物 A 在轴上时,像 A''与物 A 重合). 测出凹透镜 L_2 与平面镜 M 的距离,则得凹透镜焦距的大小为

$$|f_2| = l_2 - l_1.$$

测试时为了便于观察,可把物 A 置于轴外,则像 A''也在轴外与物 A 对称于光轴,且 A''仍在物面上.

3. 如图 10-11,一凸透镜将傍轴小物成像于幕上. 保持物和幕不动,(1) 将凸透镜稍微沿横向平移(图 10-11(a)); (2) 将凸透镜的光轴稍微转动(图 10-11(b)). 讨论幕上像的移动.

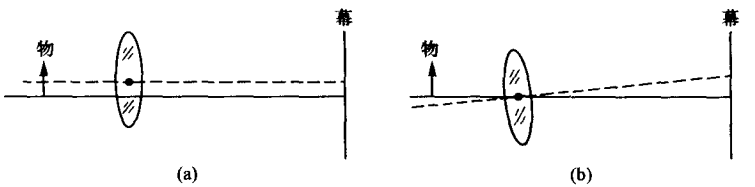


图　10-11

答　(1) 将凸透镜作横向微小平移,则幕上的像也向同方向平移,像的大小不变,清晰度也不变. 设凸透镜横向移动距离为 Δy,则像的移动距离为

$$\Delta y' = \Delta y + |V|\Delta y,$$

其中 V 为像的横向放大率.

(2) 将光轴作微小转动时,幕上的像不产生移动. 但由于此时傍轴小物和幕都不再位于同一物面和像面上,因此像的清晰度下降,且有放大率不一致而带来的畸变.

4. 在镜筒前端装一凸透镜,后端装一毛玻璃屏,上面刻有"十"字线,交点 O 在光轴上(见图 10-12). 筒长为透镜的焦距 f. 用此装置瞄准一个很远的发光点,使之成像于屏上 O 点. 讨论在下列情况中像点在屏上的移动:

(1) 镜作横向平移;

(2) 镜筒轴线转过角度 θ.

答　发光点在很远的地方,可视为无穷远. 当入射到透镜上的光

束为平行光束，像点在 O 点(即焦点)时，说明入射光束平行光轴. 当透镜作横向平移时，并未改变入射平行光的相对方向，因此屏上的像点仍在 O 点. 当镜筒轴线转过 θ 角时(如图 10-12(b))，入射平行光与光轴成 θ 角，像点 O' 仍在毛玻璃屏(透镜后焦面)上，但不在轴上，而在轴外，O' 与 O 的距离 $\Delta y' \approx f\theta$. 可见，用这种镜筒可以测定两束平行光的夹角.

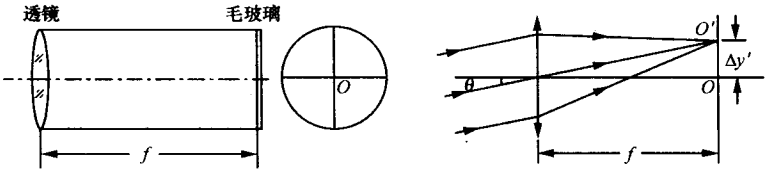


图 10-12

5. 用上题的装置对准很远的景物，使之成像于毛玻璃上. 若这时把透镜下部遮住，我们在屏上会看到什么现象？

答 将透镜遮住一半，屏上仍能得到完整的像. 只是由于参加成像的光束截面减小，使像变暗.

6. 当黏合两薄透镜时，若相接触的表面曲率半径不相等，即两者不吻合(见图 10-13)，复合透镜的焦距公式应如何修改？

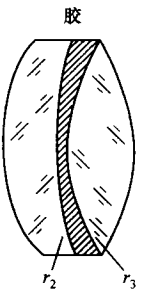


图 10-13

答 这里的黏合剂可以看为一个两侧为空气的透镜(胶透镜)，则复合透镜相当于三个透镜的密接，其合成焦距公式为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_2}, \qquad ①$$

式中 f_1, f_2 分别为已知两个透镜(两侧是空气)的焦距，f_0 是胶透镜的焦距，且

$$f_0 = 1\Big/(n_0 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right),$$

n_0 为胶的折射率. 由此可见，当 $r_2 = r_3$，即两透镜吻合时，$f_0 \to \infty$. 即使有一层胶，式①也可化为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}.$$

*§7　理想光具组理论

1. 非望远系统中可以有一对以上的主面吗?

答　共轴理想光具组的主面是横向放大率为 1 的一对垂轴共轭面. 如果有一对以上的主面,则至少有两个垂直于光轴的平面内的横向放大率等于 1,由此导致横向放大率处处等于 1. 然而,横向放大率处处相等的光具组是望远系统. 因此,非望远系统中是不可能有一对以上的主面的.

2. 一般来说,理想光具组能保持不与光轴垂直的平面内几何图形的相似性吗?

答　根据共轴理想光具组的性质,在垂直于光轴的同一平面内横向放大率相等,而在垂直于光轴的不同平面内横向放大率一般不等. 因此,不与光轴垂直的平面内各点的放大率一般也是不相等的,这就不能保持几何图形的相似性. 但对于望远系统来说,不属于同一垂直于光轴平面的横向放大率是相等的,因而不与光轴垂直平面内的几何图形仍能保持相似性. 这是一个特例.

§8　光学仪器

1. 为什么调节显微镜时镜筒作整体移动,而不改变筒长,调节望远镜时则需要调节目镜相对于物镜的距离?

答　显微镜的观察对象是近物,其焦深很小,物距的微小改变将非常敏感地影响中间像的位置. 因此,用调节目镜的方法使显微镜对不同距离的物聚焦是很困难的. 而对镜筒作整体移动,即改变物距,只要作微小的调节就可达到调焦的目的. 望远镜所观察的是远处(无穷远)的物,其焦深很大,整体移动镜筒(即物距的微小改变)并不改变中间像的位置,因而不能达到使望远镜调焦的目的. 由于望远镜的中间像在目镜和物镜焦点附近,调节目镜,就改变了中间像作为目镜

的物的物距.这对望远镜的观测是非常有效的.

2. 通常说将望远镜调节到对无穷远聚焦,这是什么意思?如何利用自聚焦法(参考本章§6思考题1)调节望远镜,使聚焦于无穷远?

答 望远镜对无穷远聚焦是指,当平行光入射到望远镜时,出射光束仍为平行光.这时的望远镜是一个无焦系统(望远系统).欲调节望远镜对无穷远聚焦,可采用自聚焦法.如图10-14所示,先按本章§6思考题1的方法,调节凸透镜L达到自聚焦,即使最后的像A'清晰地成于物面.然后在透镜L和平面镜M之间插入望远镜,调节目镜L_E,仍使最后的像A'成在物面上达到最清晰,这样就重新实现自聚焦,望远系统就对无穷远聚焦了.

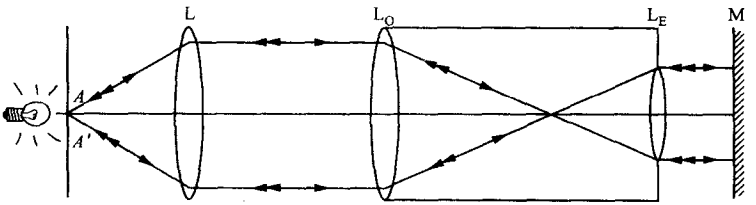


图 10-14

3. 测距显微镜是利用镜筒的平移来测量微小长度的.能够利用望远镜筒的平移来测量远处物体的长度吗?为什么?

答 测距显微镜是通过测量中间像的距离计算出被测物的长度的.当显微镜的镜筒垂直光轴移动时,被测物通过物镜所成的中间像随之移动.设镜筒横移Δy,测中间像横移为$\Delta y'=V_0\Delta y$(其中V_0为物镜的横向放大率).通过对中间像全部移过距离的测量,即可得出被测物的长度.而望远镜所观察的物体在无穷远处,物面上每一个点入射到望远镜的物镜上,是不同方向的平行光.镜筒若作横向移动,并不改变入射平行光的方向,则通过望远镜物镜所成的中间像并不移动.因此,企图利用横向平移望远镜筒以测量远处物体的长度,是不可行的.

4. 为什么用极限法测折射率的装置中(参见本章§1习题16)需用望远镜观察?为什么在望远镜视场中出现有明显分界线的半明

半暗区?

答　参见本章§1习题16的解答,在极限法测折射率的装置中,从棱镜 AC 面出射光线的折射角有一最小值 i',折射角大于 i' 的折射光线是从 AC 面出射的一系列不同方向的平行光束.接收平行光束,相当于观察无穷远的物体,使用望远镜显然是合适的.一组相同方向光线平行光在望远镜物镜的像方焦面上会聚于一点,形成一个亮点.折射角大于 i' 的所有各组平行光会聚的亮点即组成亮区.由于不存在折射角小于 i' 的平行光束,物镜像方焦面上与此对应的地方即为暗区.于是,在望远镜的视场中出现界限分明的半明半暗区.

*§9　光　　阑

本节思考题从略.

*§10　像　　差

1. 用光路图说明,对于有负球差的透镜,孔径光阑在前时产生桶形畸变,在后时产生枕形畸变.有正球差的透镜正好相反.

答　孔径光阑的位置如图10-15所示,其中图10-15(a)和(b)分别为有负球差的透镜产生桶形畸变和枕形畸变;图10-15(c)和(d)分别为有正球差的透镜产生枕形畸变和桶形畸变.物 $P_0P_1P_2$ 成像于 $P'_0P'_1P'_2$.

(1) 图10-15(a)是孔径光阑在有负球差的透镜之前的情形,光线1过近轴物点 P_1 和孔径光阑中心 Q 点,光线2过远轴物点 P_2 和 Q 点.这时,Q 点即可视为轴上物点,光线1的共轭光线1′交光轴于 Q'_0 点;光线2的共轭光线2′交光轴于 Q'_h 点.如透镜是无球差的,则 Q'_0 与 Q'_h 点重合,$\overline{P'_0P'_1}/\overline{P_0P_1}=\overline{P'_1P'_2}/\overline{P_1P_2}$.由于图中透镜是有负球差的,即 Q'_h 点必在 Q'_0 点之左,故 $\overline{P'_1P'_2}/\overline{P_1P_2}<\overline{P'_0P'_1}/\overline{P_0P_1}$,远轴区域的放大率比近轴区域小,像是桶形畸变的.

(2) 图10-15(b)是孔径光阑在有负球差透镜之后的情形,入射

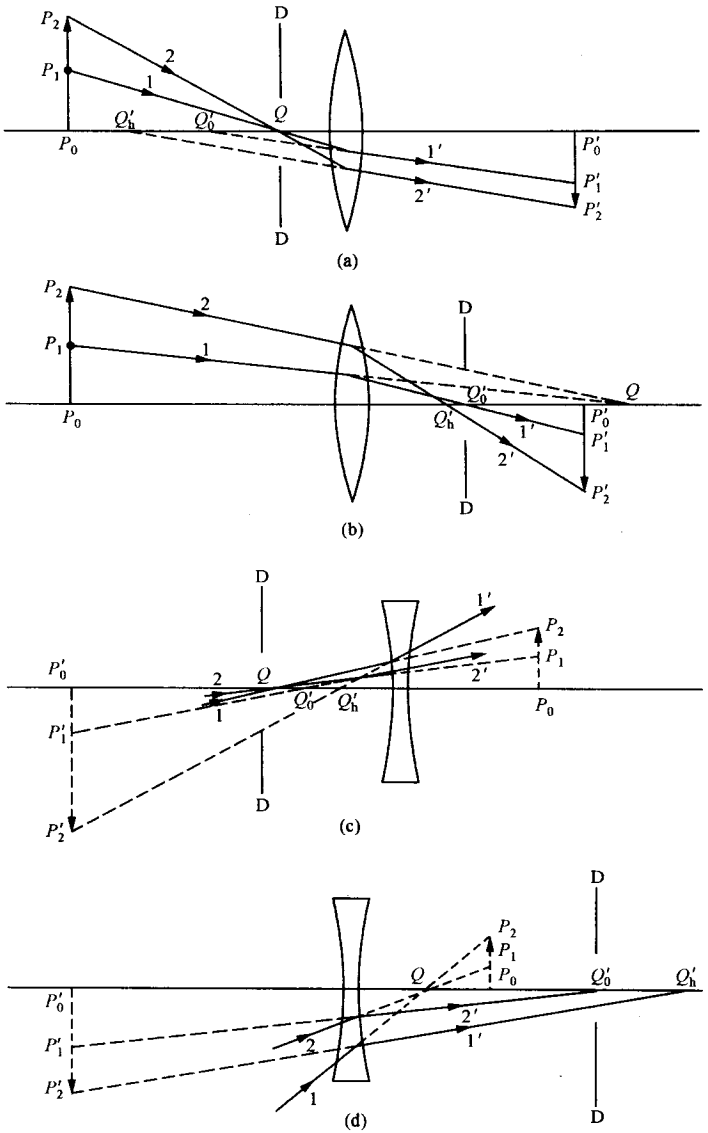


图 10-15

光线 1 和 2 交光轴于 Q 点，光线 1 的共轭光线 1′过孔径光阑中心 Q'_0 点（主光线）. 由于透镜有负球差，光线 2 的共轭光线 2′与光轴的交点 Q'_h 必在 Q'_0 点之左，由图可见，此时 $\overline{P'_1P'_2}/\overline{P_1P_2}>\overline{P'_1P'_0}/\overline{P_1P_0}$，故像是枕形畸变的.

(3) 在图 10-15(c)和(d)中，由于透镜是有正球差的，这时 Q'_h 点必在 Q'_0 点之右. 如前同理分析，当孔径光阑在透镜之前时，像是枕形畸变的；当孔径光阑在透镜之后时，像是桶形畸变的. 可见，对于有正球差和负球差的透镜，孔径光阑对畸变的作用正好是相反的；对于同一有球差的透镜，孔径光阑在前和在后产生的畸变也是相反的. 由此，我们可以利用光阑来控制光学系统的畸变.

§11　光度学基本概念

本节思考题从略.

*§12　像的亮度、照度和主观亮度

1. 在一个大晴天，我们可以用一块放大镜把阳光会聚到焦点上，引起纸片或干木屑的燃烧. 这是尽人皆知的事实. 相传古代阿基米德曾用长焦距的镜子会聚日光，烧毁了停泊在远处的敌舰. 多少年来，这个传说一直吸引着发明家的遐想. 你能用科学的论据来辨明这个传说的真伪吗？

答　用透镜聚焦光能于点火、烧毁等过程中，起决定作用的是像的辐射照度. 我们须知，太阳是一个面光源，故用透镜聚焦太阳光，属于远物成像于焦面附近的情形. 此时像的照度公式为

$$E=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D}{f}\right)^2\propto\left(\frac{D}{f}\right)^2,$$

即远物成像的照度正比于相对孔径 D/f 的平方. 使用长焦距 f 的镜子，必须有大口径 D 相匹配，才能获得足够大的照度. 我们不妨作一个简单计算：太阳表面的辐射亮度为

$$B=2\times10^7\ \mathrm{W/(m^2\cdot sr)}.$$

取 $D/f=1.5$(这是一般大口径放大镜的相对孔径值),透光系数 $k=1$(理想情形),得太阳像斑的最大辐射照度为

$$E=\frac{\pi}{4}B\left(\frac{D}{f}\right)^2\approx 3.5\times 10^7\ \mathrm{W/m^2}=3.5\times 10^3\ \mathrm{W/cm^2}.$$

按此照度(像斑的光功率密度)要求,如选取 $f=1$ m,则镜面口径 $D=1.5$ m(足够大了!);如选取 $f=1$ km(用做烧毁敌舰的距离不算大!),则镜面口径 $D=1.5$ km(太大了!).要制造口径如此大的镜面用于烧毁敌舰,就今天的科学技术水平来说,也是不现实的.可见,古代阿基米德曾用长焦距镜子会聚日光而烧毁远处敌舰的传说,只是一种没有科学依据的妄想.

2. 当前世界上拟建的最大望远镜物镜(拼合反光镜)的直径为 15 m.你能大致估计出它的放大倍率吗?

答 望远镜物镜的边框即为孔径光阑和入射光瞳.望远镜的正常放大率 M 就设计为使得出射光瞳的直径 D' 等于人眼瞳孔的直径 D_E.取入射光瞳直径 $D=15$ m,瞳孔直径 $D_E=2$ mm,即可算出该望远镜的正常放大倍率为

$$|M|=\frac{D}{D'}=\frac{D}{D_E}=\frac{15\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{mm}}=7.5\times 10^3.$$

当然,为了提高集光能力,增加观察星体(点源)的主观亮度,实际放大倍率可设计得比正常放大倍率更大一些.这时,出瞳口径将小于眼瞳直径.

第二章　波动光学基本原理

§1　定态光波与复振幅描述

1. 在气象数据的分析研究中，经常使用“压力波”、“高度波”等术语. 设某一纬圈同一高度的气压随经度的变化呈正弦式的周期性，人们就称它为“气压波”；而设某一纬圈同一气压的高度值随经度的变化呈正弦式的周期性，人们称它为“高度波”. 你认为这些确是一种波动吗？交变电流在示波器上显示的稳定波形是一种波动吗？

答　波动必须同时具有时间周期性和空间周期性. “气压波”和“高度波”只具有空间周期性，因此不是严格意义下的波动.

示波器上显示电流的波形，实际上是把电路中某一点呈时间周期性的电流振动情况转化为呈空间周期性的波形并显示出来，实质上是一种振动图像，描述的是某一点的运动情况，当然谈不上是波动. 人们在描述某个物理量随时间呈周期性变化或随空间呈周期性分布，常常借助于波形这种图像，但切不可把它和波动的概念等同起来.

2. 在下列情况下，你能确定一个点波源的位置吗？

(1) 已知三个特定位置的接收器记录到的强度；

(2) 已知点源发振后三个接收器所记录的首波之间的时差和波速；

(3) 同时已知(1)和(2).

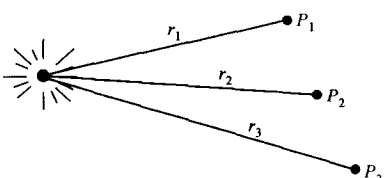


图　11-1

答　点源激发球面波，我们可以利用球面波的特点来确定一个点源的位置.

(1) 如图 11-1 所示，设 P_1，P_2，P_3 三场点接收到的强度分别

为 I_1, I_2, I_3. 根据球面波的强度反比于场点到振源的距离的平方，可得

$$\begin{cases} \dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{\dfrac{I_1}{I_2}}, \\ \dfrac{r_3}{r_2} = \sqrt{\dfrac{I_2}{I_3}}. \end{cases} \quad ①$$

由此我们只能得到两个场点到源点距离的比值，还不能确定点源的位置.

(2) 设首波之间的时差分别 $\Delta t_{12}, \Delta t_{23}$，波速为 v. 根据球面波的球对称性，可得

$$r_2 - r_1 = \Delta t_{12} v, \quad r_3 - r_2 = \Delta t_{23} v. \quad ②$$

此时只能确定三场点的距离差，仍不能确定点源的位置.

(3) 如(1)，(2)同时已知，则点源位置唯一确定. 联立方程①，②可得

$$r_1 = \frac{\Delta t_{12} V}{\sqrt{I_1/I_2} - 1}, \quad r_2 = \frac{\Delta t_{23} V}{\sqrt{I_2/I_3} - 1}, \quad r_3 = \frac{\Delta t_{23} V}{1 - \sqrt{I_3/I_2}}.$$

由此分别以 P_1, P_2, P_3 点为圆心，以 r_1, r_2, r_3 为半径作圆弧得一交点，即为点波源的位置.

3. 你能用什么简便的方法测定一个无法直接接近的点光源的位置?

答 先用一已知焦距的凸透镜对准点光源，使其成实像，测出像距，再用薄透镜的物像距公式算出物距，即可知点源位置.

§2 波 前

1. 图 11-2(a)为一对传播方向平行于 Oxz 面，与 z 轴分别成倾角 θ 和 $-\theta$ 的一对共轭平面波；图 11-2(b)为一对轴上物点的共轭球面波，发散中心为 $O(0,0,-R)$，会聚中心为 $O^*(0,0,R)$；图 11-2(c)为一轴外物点的共轭球面波，发散中心为 $O_1(x_1, y_1, -R)$，会聚中心为 $O_1^*(x_1, y_1, R)$. 上述每列波在 $z=0$ 面上波前等相位点的轨迹都是

些什么样的曲线？描绘一下它们的主要特征，如取向、间隔等.

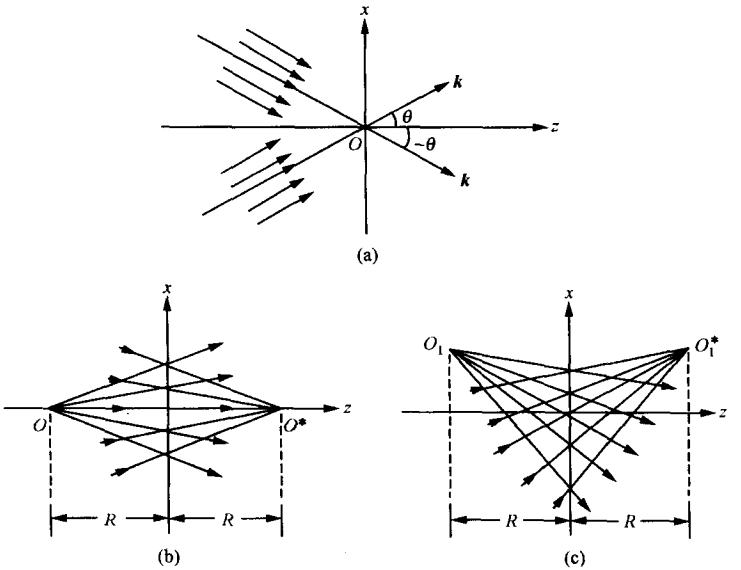


图　11-2

答　(1) 图 11-2(a)中，倾角为 θ 的斜入射平面波在 $z=0$ 面上波前的相位分布函数为

$$\varphi(x,y) = kx\sin\theta.$$

令 $\varphi(x,y)$ 为常数，得波前上等相位点的轨迹 x 也是常数，即等相位点的轨迹为平行于 y 轴的直线. 当两等相线的相位差为 $\Delta\varphi$ 时，得其间隔为

$$\Delta x = \Delta\varphi/k\sin\theta.$$

这说明等相线的密度是均匀的.

同理分析可知，共轭平面波(倾角为 $-\theta$)在 $z=0$ 面上波前等相线的特征相同.

(2) 图 11-2(b)中，发散球面波波前的相位分布函数为

$$\varphi(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2+R^2} = k\sqrt{r^2+R^2}, \qquad ①$$

其中 $r^2=x^2+y^2$. 等相线的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2 = \mathrm{C}\ (\text{常数}).$$

这说明等相线是以坐标原点 O 为中心的一系列同心圆. 对式①取微分得

$$\Delta r = \frac{\sqrt{1+(R/r)^2}}{k}\Delta\varphi.$$

上式说明，等相线是中间稀、外边密的，即随着半径增大而变密.

同理可得，会聚的共轭球面波在 $z=0$ 面上波前等相线的特征与此相同.

(3) 图 11-2(c)中，发散球面波波前上的相位分布函数为

$$\varphi(x,y) = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}. \qquad ②$$

由此得等相线的方程

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r_1^2 = \mathrm{C}\ (\text{常数}),$$

对式②取微分得

$$\Delta r = \frac{\sqrt{1+(R/r_1)^2}}{k}\Delta\varphi.$$

可见，等相线是以 (x_1,y_1) 点为圆心的一系列同心圆，其分布也是中间稀，半径越大面越密.

同理可得，会聚的共轭球面波在 $z=0$ 面上波前等相线的特征与此相同.

掌握上述各种波前等相线的主要特征，对分析由于波前相干叠加而产生的干涉条纹的性质很有用.

2. 比较球面波向平面波过渡的远场条件和傍轴条件. 什么情况下远场条件蕴涵了傍轴条件？什么情况下傍轴条件蕴涵了远场条件？

答 设横向观测范围的线度为 ρ，纵向距离为 z，则傍轴条件为

$$z^2 \gg \rho^2,$$

远场条件为

$$z \gg \rho^2/\lambda.$$

傍轴距离和远场距离哪一个更远，要看 ρ/λ 的值. 由以上两式可见，当 $\lambda<\rho$ 时，远场距离大于傍轴距离，即远场条件蕴涵了傍轴条件. 对于光波这类短波长的波，往往都是这种情形. 当 $\lambda>\rho$ 时，傍轴距离大于远场距离，这时傍轴条件蕴涵了远场条件. 对于声波这类长波，往

往属此种情形.

3. 某天文望远镜的口径有 3 m. 对这台望远镜来说，多远距离以外的星体可当做“无限远”看待？并将这个距离与月地间的距离(约 4×10^8 m)作比较.

答　星体可看做“无限远”的条件是，望远镜物镜接收到的是一束平行光，即要求星体距离(相对望远镜的口径)满足远场条件. 令 $\rho=3$ m，可见光中心波长 $\lambda=5500$ Å，并在远场条件不等式的数量级比较中取 50 倍估算，则远场距离应取

$$z = 50\frac{\rho^2}{\lambda} = 50\times\frac{(3\text{ m})^2}{5500\text{ Å}} \approx 8\times10^8\text{ m},$$

此距离与月地间距离数量级相同. 其他星体与地球间的距离约比月地间距离要远，均能满足远场条件. 对这台望远镜也是如此.

4. 如图 11-3，有 8 列球面波，其中四列是入射波(图 11-3(a))，四列是出射波(图 11-3(b)). 它们在波前 $z=0$ 平面上各有共同的光瞳(即窗口)，能流数值相同；波束中心 O_1,O_2,O_3,O_4 点分别与 $z=0$ 和 $x=0$ 面成镜像对称.

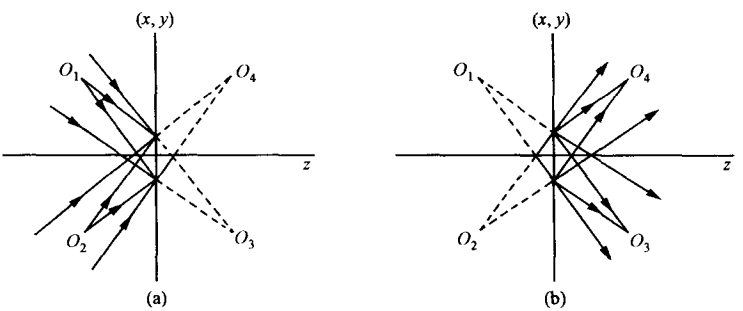


图　11-3

(1) 指明其中哪几列波在 $z=0$ 面上的复振幅分布相同？

(2) 哪几列波在 $z=0$ 面的复振幅互为共轭？

(3) 设 O_1 点的坐标为 $(x_1,y_1,-R)$，其他波束中心 O_2,O_3,O_4 点的坐标如何？具体写出图 11-3(a)，(b)中 1，2 两列波在 $z=0$ 面上的复振幅分布函数.

答　(1) 波束中心相同的两列入射波和出射波在 $z=0$ 面上的

复振幅分布均相同.

(2) 波束中心与 $z=0$ 面成镜像对称的两列波均为共轭波(即复振幅分布互为共轭).

(3) 设 O_1 点的坐标为 $(x_1, y_1, -R)$,则其他波束中心的坐标分别 $O_2(-x_1, y_1, -R)$, $O_3(-x_1, y_1, R)$, $O_4(x_1, y_1, R)$.

图 11-3(a)中波束中心分别为 O_1,O_2 点的 1,2 两列波在 $z=0$ 面上的波前相应为

$$\tilde{U}_1(x,y) = \frac{a}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}} \times \exp\left[\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}\right],$$

$$\tilde{U}_2(x,y) = \frac{a}{\sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}} \times \exp\left[\mathrm{i}k\sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}\right].$$

图 11-3(b)中波束中心为 O_1 和 O_2 点的 1,2 两列波在 $z=0$ 面上的波前分别和图 11-3(a)中的 1,2 两列波相同.

§3 波的叠加和波的干涉

1. 有人说,相干叠加服从波的叠加原理,非相干叠加不服从波的叠加原理. 这种说法对吗?

答 波的叠加原理是指波场中各点振动的瞬时值满足线性叠加关系. 对非相干波(不满足相干条件),线性叠加的结果反映为强度的线性叠加(叫做非相干叠加);对相干波(满足相干条件),线性叠加的结果,反映为复振幅的线性叠加,而强度一般不满足线性叠加关系(就叫做相干叠加). 因此,无论是相干叠加还是非相干叠加,都是对波进行线性叠加的结果,两者都服从波的叠加原理.

2. 有人说,光强可以直接相加,就服从波的叠加原理;否则就是不服从波的叠加原理. 这种说法对吗? 光强不可以直接相加,是否意味着波的独立传播定律不成立?

答　以上说法都是不对的. 非相干叠加结果是光强直接相加；相干叠加结果一般不能将强度直接相加. 但是两者都是按照波的叠加原理对波进行线性叠加的结果. 当服从波的叠加原理时，波的独立传播定律都成立.

3. 两列光波频率相同，且有稳定的相位差，但振动的方向既不互相垂直，又不严格平行. 这两列波是相干叠加还是非相干叠加？

答　这时既有相干叠加，又有非相干叠加. 两个振动的平行分量之间是相干叠加成分，可以出现亮暗起伏的强度分布；垂直分量之间是非相干叠加成分，提供了一个均匀强度的背景.

4. 在扩展强光束(激光)时，人们避免用“实聚焦”的方法(如图11-4)，因为在实焦点处的光功率密度太高，可能引起空气“着火”(电离). 现在设想如果将入射光束挡住一半，先后让Ⅰ，Ⅱ两部分聚焦于F点，并不引起着火；而同时开放，让全部光束聚焦时，就要发生空气着火现象. 试问，在这个过程中，波的叠加原理是否成立？这可算是一种非线性效应吗？

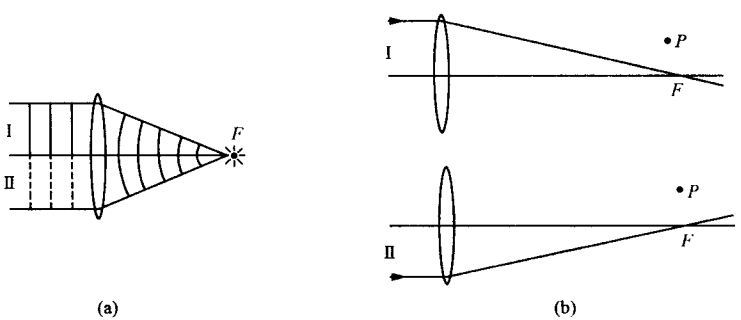


图　11-4

答　两束光同时聚焦时焦点着火，这是一种次级效应. 凡有了次级效应，波的叠加原理就将遭到破坏. 为此，考虑轴外一点P(如图11-4(b)). 显然，第一列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_1(P) = 0;$$

第二列波单独存在时，有

$$\tilde{U}_2(P) = 0;$$

而两列波同时存在时，由于焦点着火，则

$$\tilde{U}(P) \neq 0.$$

可见

$$\tilde{U}(P) \neq \tilde{U}_1(P) + \tilde{U}_2(P).$$

可以说，这是一种非线性效应.

5. 设本章§2思考题1(图11-2(a))中的一对共轭平面波是相干的，求它们在波前上叠加时产生的复振幅分布. 在波前上强度最大和最小的点都在哪些位置上?

答 两列共轭波的波前分别为

$$\tilde{U}_1(x,y) = A\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta),$$

$$\tilde{U}_2(x,y) = A\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta).$$

相干叠加时总的波前为

$$\tilde{U}(x,y) = \tilde{U}_1(x,y) + \tilde{U}_2(x,y) = 2A\cos(kx\sin\theta),$$

其强度分布为

$$I(x,y) = \tilde{U}(x,y)\tilde{U}^*(x,y) = 4A^2\cos^2(kx\sin\theta).$$

由上式可见，强度分布函数与 y 无关，说明干涉条纹为平行于 y 轴的一系列直线.

当 $kx\sin\theta = n\pi$，即 $x = n\lambda/2\sin\theta$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$)时，强度最大；当 $kx\sin\theta = (n+1/2)\pi$，即 $x = (n+1/2)\lambda/2\sin\theta$ 时，强度最小.

§4 两个点源的干涉

1. 除了光波叠加产生干涉的三个必须保证的条件[①]外，还需要什么样的条件，才能使双光束干涉条纹清晰可见?

答 光波相干叠加的必要条件有三条，即

(1) 频率相同；

(2) 存在相互平行的振动分量；

(3) 场点有稳定相位差 $\delta(P)$.

---

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：164.

但仅此三条还不一定就能获得清晰的干涉条纹. 为产生明显的高衬比度的干涉现象，尚有两个补充条件：

(1) 振幅比不能太大. 因为条纹的衬比度为

$$\gamma = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2A_1/A_2}{1 + (A_1/A_2)^2},$$

故当 $A_1 \gg A_2$ 时，$\gamma = 0$. 这时，条纹将模糊不清，乃至不可辨认；合振动的振幅 A 与单一光波的振幅 A_1 无实际的差别，因而看不出干涉现象.

(2) 传播方向间的夹角不能过大. 这是因为光波为横波. 为使两光束光矢量间的平行分量占主要成分，非相干的垂直分量占次要成分，以保证有足够高的衬比度，应当令双光束满足傍轴条件，即令双光束的传播方向间是小角间隔.

2. 设想一下，在杨氏双孔实验中(见图 11-5)，若 S 沿平行于 S_1S_2 连线的方向作微小位移，干涉图样发生怎样的变化？沿垂直 S_1S_2 连线的方向位移时情况如何？

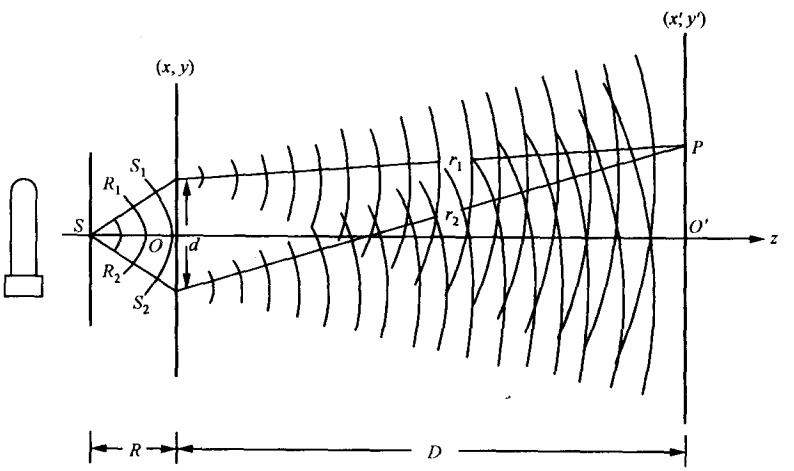


图　11-5

答　当点光源(小孔)S 沿平行于双孔 S_1S_2 方向平移到轴外时，双孔 S_1，S_2 相对于 S 附加固定的前场光程差，后场光程差仍与 S 在

轴上时无异. 因此，干涉条纹的形状、走向、间距等性质保持不变. 但由于这时零光程差点 P_0 在轴外，且 S 在轴上方时 P_0 点在轴下方，S 在轴下方时 P_0 点在轴上方，所以条纹整体反向平移.

若 S 在垂直于 S_1S_2 连线方向作微小位移，屏幕上的零光程差点也要作反向移动，但由于条纹只是作平行于自身的移动，因此不会引起干涉条纹的变动. 由此可见，光源沿此方向扩展时，不但不会减小干涉条纹的衬比度，反而会使条纹变得更加明亮可见. 在激光没有诞生以前，为了增加干涉条纹亮纹的强度，在实际的杨氏干涉装置中通常都采用狭缝光源；与之相应地，S_1 和 S_2 孔也采用平行于光源的双狭缝. 这就是杨氏最初发明的经典装置——双缝干涉实验.

3. 在杨氏双孔实验中，双孔 S_1，S_2 彼此稍微移近时，干涉条纹有何变化？

答 双孔移近，即双孔的间隔 d 变小. 根据条纹间距公式 $\Delta x = D\lambda/d$ 可知，此时条纹变稀，其他性质不变.

4. 你能想象，杨氏双缝实验中缝的自身宽度 b 对干涉条纹会产生怎样的影响吗？

答 在杨氏实验中，双狭缝的作用是限制照明光波的波前，使光波发生衍射，从而使后场两列相干次波产生交叠. 衍射效应是否明显与缝宽 b 有关：b 越小，则衍射效应越明显，从而次波的交叠区就较大，能观察到干涉条纹的范围也较大. 但缝太窄时，由于能量太分散，条纹会变得暗淡模糊. 反之，当 b 逐渐加大时，交叠区变小，产生条纹的范围变小，但条纹较为明亮. 当缝宽 b 远大于光波长 λ 时，衍射现象很不明显，光近乎于直线传播，在后场将没有交叠区，从而不能产生干涉条纹. 另外，缝宽度也将影响条纹的移动，从而降低接收场的衬比度，这里内含单缝衍射效应.

5. 在杨氏双孔实验中，用白光照明，将出现怎样的干涉图样？

答 杨氏干涉条纹的间距与波长成正比，因此用白光照明时干涉图样是一系列彩色的平行条纹. 但是零级条纹的位置与波长无关，即形成白色亮纹. 在白色亮纹的两侧，则是紫光在内、红光在外的彩色条纹.

6. 波长为 λ 的两束平行光造成的干涉条纹的间距，其上限和下限各为多少？相应的空间频率的上限和下限各为多少？

答　由两束平行光干涉的条纹间距公式

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}$$

可知，两束平行光的夹角越小，条纹间距越大. 当夹角为 0°时，间距最大；夹角为 180°时，间距最小. 条纹间距的上限和下限分别为

$$\Delta x_{\max} \to \infty, \quad \Delta x_{\min} = \lambda/2.$$

相应空间频率的上限和下限分别为

$$f_{\max} = 2/\lambda, \quad f_{\min} = 0.$$

其实，两束平行光的夹角为 180°时，相干叠加形成驻波，条纹间距为 $\lambda/2$. 这正是力学中驻波的特点.

7. 设想我们用声波或无线电波来模拟杨氏双孔干涉实验，采用的数据如下(均为实验室可接受的条件)：

(1) 两声波源间距为 60 cm，到接收场的距离为 10 m，声频为 1000 Hz，声速为 340 m/s；

(2) 两无线电波源间距为 1 m，到接收场的距离为 10 m，频率为 10 MHz.

这样的装置能得到什么结果？由此你对光波特点有什么新体会？

答　干涉现象是一切波动所具有的重要特征之一. 因此，用声波或无线电波来模拟杨氏双孔实验时，应当有与用光波作为光源时类似的结果. 我们可以用杨氏干涉条纹的间距公式来计算声波和无线电波相应的干涉场中强度分布的空间周期.

(1) 由声频 $\nu = 1000$ Hz、声速 $v = 340$ m/s 可算出，相应的声波波长 $\lambda = v/\nu = 0.34$ m. 取 $d = 0.6$ m，$D = 10$ m，算出干涉强度空间周期为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda = 5.7 \text{ m}.$$

(2) 由无线电波频率 $\nu = 1.0 \times 10^7$ Hz、波速 $v = 3 \times 10^8$ m/s 算出，无线电波长 $\lambda = v/\nu = 3.0 \times 10$ m. 取 $d = 1.0$ m，$D = 10$ m，算出干涉强度空间周期为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda = 3.0 \times 10^2 \text{ m}.$$

上述两种情形中，显然相邻两强度极大或极小距离的数量级已远远超出实验室可接受的条件. 换句话说，试图通过干涉条纹间距的测量来确定声波长或无线电波长的方案，是行不通的. 唯有短波长的光波，在杨氏干涉实验中展现了便于人们观测的干涉条纹. 历史上正是杨氏本人从干涉强度的周期场中感悟到光是一种周期性的波动，第一次提出"光波长"的概念，并实现了对光波长的干涉法测量，而光频极高，长期以来直至 20 世纪 70 年代，人们正是通过光波长的测量数据推算出光频值. 对于声波和无线电波，倒是可以由其频率的测量值而推算出它们的波长值来.

§5 光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理

1. "衍射"一词旧译"绕射". 你觉得这个名词有什么不确切的地方？

答 衍射现象不但发生在几何阴影区内，也发生在几何照明区内，即"衍射"不是简单的偏离直线传播的问题，还伴随着与某种复杂干涉效应相联系的强度重新分布. "绕"，即迂回曲折之意. 按照望文生义的理解，"绕射"只指出了偏离直线传播的问题，并未强调强度的重新分布. 这样，使用"绕射"一词就不够确切了. 当然，当描述波遇到障碍物的传播问题时，给"绕射"一词赋予特定的含义，把"绕射"理解成"衍射"也未尝不可.

2. 隔着山可以听到中波段的电台广播，而电视广播却很容易被山甚至高大的建筑物挡住. 这是什么缘故？

答 这一现象与波的衍射效应有关. 衍射效应是否明显，取决于波长与障碍物线度的比值：两者比值较小，则衍射效应不明显；反之，就较为明显. 无线电广播的中波段载波波长为数百米，与山的高度数量级差不多，因此衍射效应比较明显，无线电波不易被挡住. 而电视广播的载波是超短波，其波长在米或分米数量级，比山或高大建筑物的高度要小得多. 此时，电磁波的衍射效应很不明显，近乎直线

传播，极易被挡住.

3. 用普通的点光源照明波场时，波前上各次波源的相位是否稳定？它们是否相干？它们之间的相位差是否稳定？在这种情况下我们能看到稳定的衍射图样吗？

答　由于普通光源发光波列的断续性和各波列间相位的无规性，点光源波前上各次波源的相位必然是高频跳变不稳定的.但是各次波源之间的相位差只由光程差决定，却是稳定的.因此，点光源波前上各次波源是相干的，用点光源照明衍射屏时是可以看到稳定的衍射花样的.

4. 观察与讨论下列日常生活中遇到的光的衍射现象：

(1) 在晚间对着远处的白炽灯泡张开一块手帕，或隔着窗帘看远处的白炽灯，将现象记录下来.

(2) 通过眼前张开的手帕注视远处的高压水银灯，将看到的现象记录下来.与白炽灯情形相比有何不同？

(3) 肉眼观察远处的灯，有时会看到它周围有光芒辐射.这种现象是怎样产生的？有人说这是瞳孔的衍射现象，因为一般人的瞳孔不是理想的圆孔，而是多边形.你同意这种解释吗？有什么方法可以验证或否定这种看法？

(4) 当你瞪大或眯小眼睛时，灯泡周围的辐射状光芒有什么变化？晃动或摇摆你的脑袋时，这些光芒有什么变化？这些现象是有助肯定还是否定(3)中提出的解释？

(5) 当你注视月亮或日光灯时，能看到这些辐射状的光芒吗？对你的观察结果作出解释.

(6) 将手指并拢贴在眼前，透过指缝看一灯泡发光，记录并解释你观察到的现象.

(7) 俗话说："隔着门缝看人，把人看扁(贬)了."从波动光学的角度看，这句歇后语有道理吗？

答　(1) 隔着张开的手帕或窗帘观看远处的白炽灯，可以看到呈矩形规则排列的亮格点(衍射斑)，每个斑点周围还镶着彩边.这是非单色光照射在二维网格上发生衍射的结果.

(2) 透过张开的手帕注视远处的水银灯，同样可以看到规则排

列的彩色斑点，由里向外分别有蓝色、绿色和黄色等几组. 这种差别是由白炽灯和高压水银灯的光谱特性决定的，表明白炽灯的光谱是连续的非单色性，而水银灯的光谱包含了几种准单色谱线.

(3) 用肉眼观察远处的灯，可以看到光芒四射的辐射光芒，这是眼瞳衍射的结果. 光芒分布在各个不同的角方位上，表明瞳孔是一个多边形. 这可以用多边孔的衍射实验验证. 若光束在某方向受到限制，则强度就在该方向扩展. 这是衍射现象的特点之一. 如果眼瞳是圆孔，则衍射图样应是一系列同心圆环，而不会是光芒辐射.

(4) 瞪大或眯小眼睛观察灯泡周围的光芒，则有两点明显差别：一是眯起眼睛看到的光芒更加明显，对光束限制越厉害，衍射效应越明显. 这正是衍射现象的特点之一. 二是眯起眼睛看到的光芒在垂直方向和水平方向比瞪大眼睛时看到的更强烈，这是由于眯上眼睛时合上的眼帘和睫毛构成了一条条水平的和垂直的狭缝，使在垂直和水平方向的衍射效应更加明显. 以上现象说明关于眼瞳是多边孔的解释是可信的.

(5) 注视月亮或日光灯时，是看不到辐射光芒的. 凡是观察面光源，都见不到辐射光芒. 这些面光源可以看成是大量非相干点源的集合，每个点源都可以有一套衍射光芒，衍射强度是所有各套衍射光芒的非相干叠加. 由于各个点源所对应的各套衍射光芒彼此错开，非相干叠加的结果使总强度趋于均匀. 这就是看不到面光源辐射光芒的道理. 由此可见，画家笔下的初升太阳光芒万丈，只不过是一种浪漫手法，并不是符合光学原理的真实写照.

(6) 隔着指缝观察灯泡的发光，能看到指缝间有很细的明暗相间的条纹，条纹走向与指缝平行. 这是狭缝衍射的结果.

(7) 波前在什么方向受到限制，后场的强度就要在什么方向扩展. 透过门缝所看到的物体在与门缝正交的方向扩展. 因此，“隔着门缝看人，把人看扁(贬)了”的说法，是符合衍射光学原理的.

5. 图 11-6 是一张激光束射在可变光阑(类似照相机的光圈)上形成的美丽的衍射图样的照片. 试解释一下，为什么会有这样多的辐射光芒？

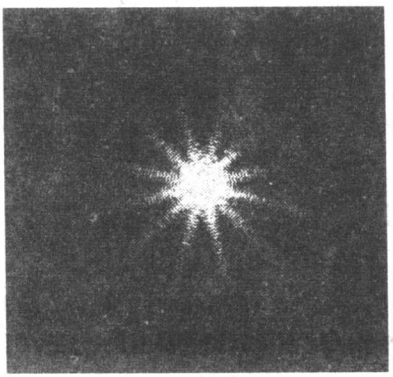


图　11-6

答　可变光阑是一个大小可调的多边孔. 多边孔作为衍射屏时，每条边(或相互平行的两条对边)都成为限制照明光束的方位，在与其正交方向的衍射图就被扩展而形成一对光芒. 所有各边限制光束的结果就是，衍射图成为辐射光芒. 图 11-6 中共有 12 条光芒，可知可变光阑大致为正 6 边形或正 12 边形. 需要指出的是，衍射光芒总是成对出现的，总的光芒数总是偶数. 据说，有一幅古代壁画上的星星画有 5 条光芒，这是不符合光的衍射规律的.

6. 当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时，有人认为它无关大局，其影响可以忽略，后场基本上还是一束平行光. 这种看法对吗？你能设想一种场合，这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗？

答　如图 11-7，不妨通过小墨点作一个假想平面 Σ_0. 惠更斯-菲涅耳原理表明，后场是 Σ_0 面上所有次波源相干叠加的结果. 如果没有墨点，相干叠加结果在后场仍为单纯的平行光. 如果有一个墨点，后场就少了一些相干叠加的成分. 原波面在这一局部的缺损所带来的影响将牵动整个后场，将明显地影响后场的方向性. 若使后场衍射光透过聚焦透镜，就能容易地监测到小墨点的影响. 若平行光通行无阻，经透镜后在后焦面(轴上)出现一个亮点，轴外强度为零. 若有一个墨点在前场，后焦面上轴外的衍射强度就不为零了. 按巴比

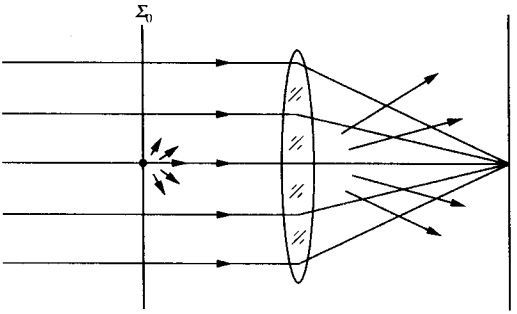


图 11-7

涅原理，有墨点时的轴外衍射强度分布就是与墨点互补的圆孔衍射图样.

总之，在分析衍射问题时，要十分注意“相干叠加”这一特点. 相干叠加可以使“部分大于整体”，使“局部牵动全局”. 整个衍射场如同一张绷紧的弹簧床，不论哪里断缺了几个小弹簧，必将影响整个床的形态并波及整个衍射场. 我们须知，波场中波面上的各次波是关联的. 在光路中有一个小墨点，同光路中有一个小孔一样，都将成为“散射源”. 这一概念在本章§6中更为明确.

7. 关于两个互补屏在同一场点的衍射强度之间的关系，有人说一个强度是亮(暗)的，则另一个强度是暗(亮)的. 这样理解巴比涅原理对吗？

答 这里又一次涉及对相干叠加概念的理解问题. 巴比涅定理告诉我们，互补屏产生的两个场 $\tilde{U}_a(P)$，$\tilde{U}_b(P)$ 与自由场 $\tilde{U}_0(P)$ 满足以下恒等式：

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}_0(P).$$

这是复振幅关系，其中隐含了相位差的作用，不是简单的代数关系；反映在矢量图解上，三者是一个三角关系. 这就可能出现如图 11-8(a)～(f)的各种情况：$|\tilde{U}_a|<|\tilde{U}_0|$，$|\tilde{U}_b|<|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|=|\tilde{U}_b|>|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|>|\tilde{U}_b|>|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|-|\tilde{U}_b|=|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|+|\tilde{U}_b|=|\tilde{U}_0|$；$|\tilde{U}_a|=|\tilde{U}_b|$，$|\tilde{U}_0|=0$.

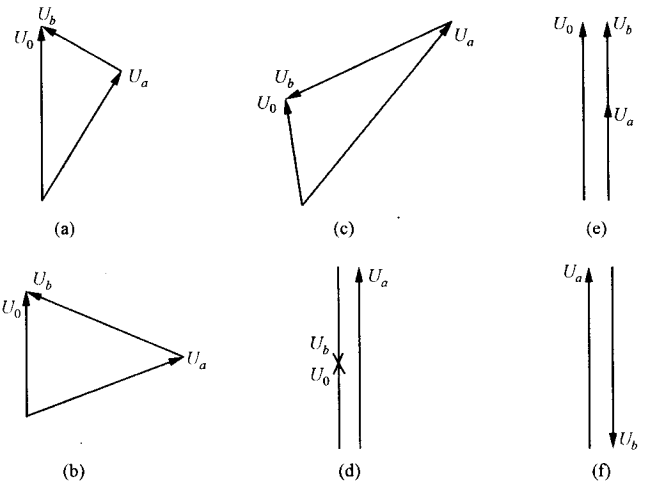


图　11-8

§6　菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

1. 试估算菲涅耳圆孔衍射实验中第 10^4 个半波带处的倾斜因子 $f(\theta)=(1+\cos\theta)/2$ 的数量级. 如果将 $f(\theta)$ 近似取为 1，误差为多少[①]?

答　如图 11-9 所示，由余弦定理可得

$$\cos\theta=\frac{2Rb-2b\Delta b-\Delta b^2}{2R(b+\Delta b)}.$$

在第 10^4 个半波带处，$\Delta b=10^4\lambda/2$. 再取可见光中心波长 $\lambda=0.5\ \mu m$，光源到圆孔的距离 $b=5$ m，圆孔到接收屏幕的距离 $b=5$ m，代入上式估算得

$$\cos\theta_k\approx 0.9970.$$

由此得第 10^4 个半波带处的倾斜因子为

$$f(\theta_k)=(1+\cos\theta_k)/2=0.9985.$$

① 所需的参考数据见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：194～196.

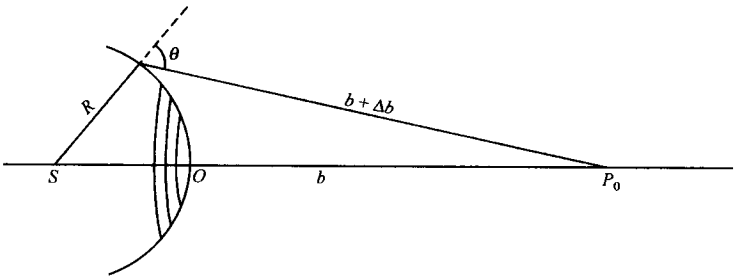


图 11-9

如取近似值 $f(\theta_1)\approx 1$(即第一个半波带处的倾斜因子),则相对误差为

$$\frac{|\Delta f(\theta_k)|}{f(\theta_k)}=\frac{|f(\theta_1)-f(\theta_k)|}{f(\theta_k)}=\frac{0.0015}{0.9985}\approx 0.0015=0.15\%.$$

此误差是相当小的,可见倾斜因子 $f(\theta_k)$值随 k 值的增加是非常缓慢地减少的. 当 k 值不太大时,用 $A_k=A_1$ 为常数的近似来分析菲涅耳衍射轴上场点的特征是合理的.

2. 为什么作菲涅耳衍射实验时,光源和接收屏幕要放得那样远? 为什么放近了不易看到衍射图样?

答 由菲涅耳衍射半波带的半径公式

$$\rho_k=k\frac{Rb}{R+b}\lambda$$

得

$$k=\frac{\rho_k^2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b}\right).$$

由上式可见,在 ρ_k 保持一定的情况下,当光源离接收屏幕很远,即 R 和 b 足够大时,k 取不太大的有限值,这时倾斜因子的作用可以忽略. 以圆孔衍射为例,轴上 P_0 点的合成振幅为

$$A(P_0)=[A_1+(-1)^{k+1}A_k]/2.$$

因此,当改变 b 或 ρ_k 时,P_0 点的强度明暗交替变化,其衍射现象是明显的.

但如果光源离屏幕很近(R 和 b 很小),当 $\rho_x^2\gg\lambda R$ 或 $\rho_x^2\gg\lambda b$ 时,

由上式求出的 $k\to\infty$. 这时倾斜因子的作用不可忽略，实际上第 k 个半波带在 P_0 点产生的振幅 $A_k\to 0$. 因此 P_0 点的合成振幅为

$$A(P_0)=\frac{1}{2}[A_1+(-1)^{k+1}A_k]=\frac{1}{2}A_1(p_0).$$

轴上各点都有相同的强度 $A^2/4$，且都是亮的，这时就看不到明显的衍射现象了. 其实这就是自由传播的结果，与几何光学的结论是一致的. 所以可以说，对某一场点而言，几何光学是波动光学在部分波面上所包含的半波带数目趋于无限大时的极限.

同理，可以分析圆屏衍射的情形. 当 R 和 b 相对于圆屏直径 ρ_k 足够大时，k 为有限值，从而轴上 P_0 点的合成振幅为

$$A(P_0)=A_{k+1}(P_0)/2,$$

即 P_0 点总是亮的. 这是用几何光学不能解释的，说明衍射现象是明显的. 但是，当 R 和 b 相对于 ρ_k 很小时，$k\to\infty$，从而

$$A(P_0)=A_{k+1}(P_0)/2=0,$$

即中心总是暗的. 这时又开始与几何光学的结论一致.

3. 我们说，整个波前产生的振幅相当于第一个半波带效果的 1/2，它是否等于半个第一个半波带的效果？

答　所谓“半个第一个半波带”有如图 11-10(a)和(b)的两种取法，效果是不同的. 图中标出的是该处到轴上场点 P_0 的光程，其中 b

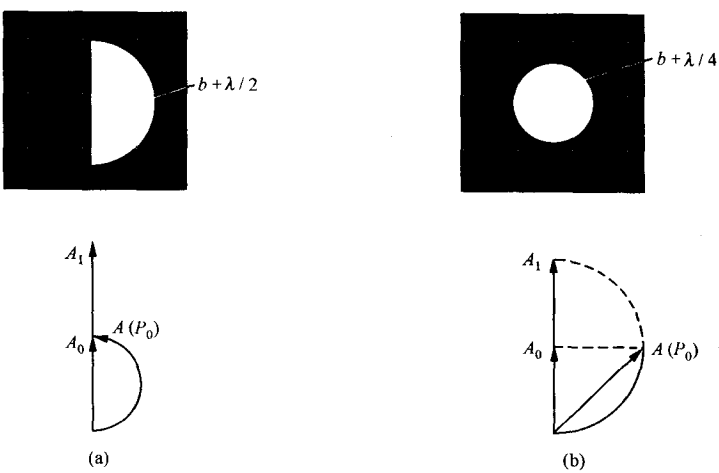


图　11-10

是波前中心到 P_0 的光程.

在图 11-10(a)中,把第一个半波带的面积挡去 1/2,但仍维持中心到边缘的光程差为 $\lambda/2$. 由相应的振动矢量图可得在场点 P_0 的合成振幅为

$$A(P_0) = A_0 = A_1/2,$$

其中 A_0 为整个波前在 P_0 点产生的振幅,A_1 为一个半波带在 P_0 点产生的振幅. 可见,这时的效果与自由传播时相同.

图 11-10(b)中的遮挡是保留第一个半波带中与中心的光程差为 $\lambda/4$ 的部分. 由相应的振动矢量图得此时在 P_0 点的合成振幅为

$$A(P_0) = \sqrt{2}\,A_0 = \sqrt{2}\,A_1/2.$$

显然,这时的效果与自由传播时是不同的.

应当指出,图 11-10(a)中保留的是真正的半个半波带;而图 11-10(b)中保留的是一个 1/4 个半波带,严格地讲不能叫做半个波带(它的相位关系已与半波带的情形不同). 尽管在 $b \gg \lambda$ 的条件下,一个 1/4 波带的面积等于一个半波带面积的 1/2,但两者的合成振幅却不是减半的关系,由此可以体会到,在处理相干叠加问题时分析相位关系的重要性.

4. 严格来说,只有对波前进行无限分割时,面元 $\mathrm{d}S$ 贡献的复振幅 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$ 才与它的面积成正比. 为什么对于并非无穷小的半波带也能使用上述结论?能否对波前的分割比半波带法更粗糙一点,譬如使用"全波带"(即相邻边缘的光程相差 λ 的环形带)的概念?

答 按照菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式有

$$\mathrm{d}\tilde{U}(P) = k\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S,$$

当 $\mathrm{d}S$ 为无穷小面元时,显然有

$$\mathrm{d}\tilde{U}(P) \propto \mathrm{d}S.$$

在半波带分割中,由于波前是等相面,环形带对所考查场点是轴对称的,可知在半波带上 $\tilde{U}_0(Q)$,$F(\theta_0,\theta)=f(\theta)$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/r$ 分别为常数. 因此,尽管半波带的面积 $\mathrm{d}S$ 不是无穷小,上式仍然成立.

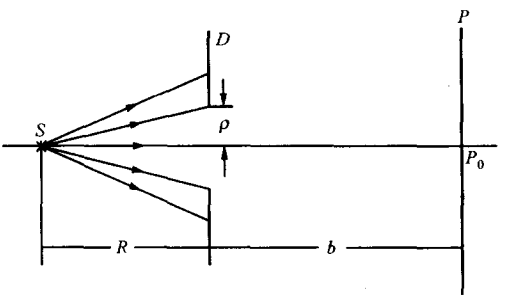
对波前作有限的环形带分割,作为无限分割的近似,以使衍射积分被有限项求和来代替. 这种方法的可行性条件有两点:一是相邻

环带对场点的复振幅贡献 $d\tilde{U}(P)$之间的相位相同或相反，或其他一个确定的相位差. 二是每个环带贡献的 $d\tilde{U}(P)\neq 0$，否则求和结果恒为零. 显然，半波带分割同时满足以上两条. 如果用全波带分割，虽然可以用求和的方法，但当取一个全波带贡献的 $d\tilde{U}(P)=0$ 的近似用于求和时，就会导致自由传播时

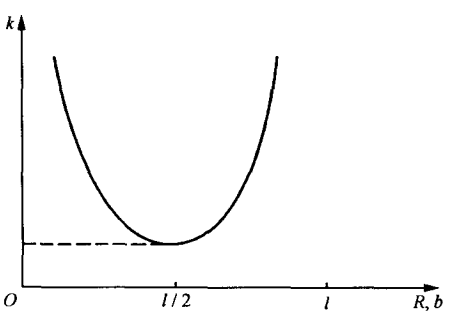
$$\tilde{U}(P)=\int d\tilde{U}(P)=0.$$

显然，这是错误的. 这个结果说明，对于一个全波带来说，取 $d\tilde{U}(P)=0$ 的近似是正确的，但在无限求和时再取就不允许了. 遇到这种情况时，必须考虑用其他近似方法(如半波带法).

5. 设 S 为点光源，D 为孔径固定的衍射屏，P 为接收屏幕(见图 11-11(a)). 讨论下列情况下圆孔中包含半波带数目的增减：



(a)



(b)

图　11-11

(1) D,P 位置不变,移动 S;

(2) S,P 位置不变,变动 D.

答 圆孔所含半波带的个数 k 和装置各参数的关系为

$$k=\frac{\rho_k^2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b}\right), \qquad ①$$

其中 λ 为光波长. 由上式出发,就可以讨论菲涅耳衍射装置中各部分沿轴平移时半波带数目的增减情况.

(1) 保持 D,P 不动. 当移动 S 远离 D 时,半波带数 k 减小;反之,当 S 移近 D 时,k 增加.

(2) 保持 S,P 不动. 当变动 D 时,意味着 R,b 同时改变,但保持 $R+b$ 是常数. 令 $R+b=l$,式①可改写为

$$k=\frac{\rho_k^2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{l-R}\right),$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}R}=\frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{l(2R-l)}{R^2(l-R)}.$$

由上式可见,当 $R<l/2$ 时,$\mathrm{d}k/\mathrm{d}R<0$;当 $R>l$ 时,$\mathrm{d}k/\mathrm{d}R>0$.

以上结果说明,当圆孔衍射屏 D 处于 S 和屏幕中点位置时,圆孔所含半波带数最少. 当 D 从中心向两侧移动时,半波带数都将增加. 而由式①可知,这时半波带数目是对称增加的(如图 11-11(b)所示).

通过本题的讨论我们还可体会到,笼统地问某圆孔包含多少个半波带的问题是没意义的. 圆孔所含半波带的数目不但与孔径有关,还与源点和场点的位置有关.

6. 你能用半波带法说明轴上场点的强度随圆屏半径 ρ 的增大而连续单调下降吗? 怎样利用螺旋振动矢量图来说明这一点? 能否用巴比涅原理来说明,为什么圆孔衍射图样中心强度作亮暗交替变化,而圆屏衍射图样的中心强度却单调变化?

答 设圆屏遮住了前 k 个半波带,则波前上第 $k+1$ 个以后的半波带全部露出,露出的半波带数仍为无穷多个. 因此,由半波带法可得轴上场点 P_0 的合成振幅为

$$A(P_0)=\frac{1}{2}[A_{k+1}+(-1)^{n+1}A_n]=\frac{1}{2}A_{k+1},$$

当 $n\to\infty$ 时，$A_n=0$，所以可以化简. 上式说明合成振幅等于圆屏以外露出的第一个半波带效果之半. 当圆屏半径 ρ 增加时，$k+1$ 的数值随之增大；由于倾斜因子的作用，A_{k+1} 单调下降，从而强度 $I(P_0)=A_{k+1}^2/4$ 也是单调下降的. 这里我们假定圆屏遮去了整数个半波带. 其实遮去的半波带个数为非整数时也无妨，上面的结论仍成立；不过这时用螺旋振动矢量图（见图 11-12）来说明更方便.

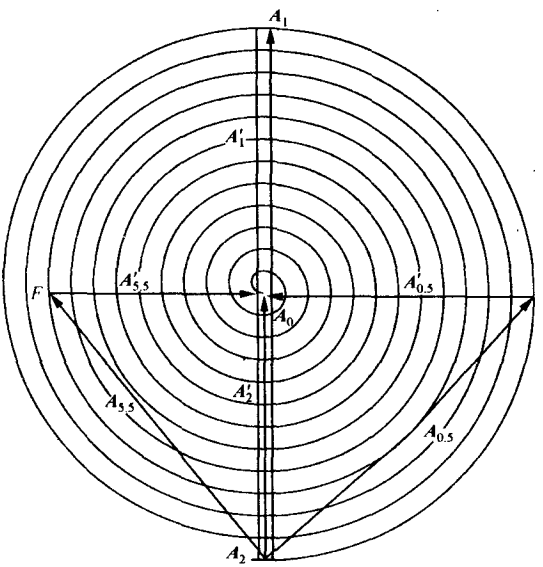


图　11-12

图中 $\boldsymbol{A}_0$ 为自由传播时（轴上场点 P_0）的合成振幅矢量，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots$ 为相应圆孔衍射时的合成振幅矢量（下角标代表相应的半波带数），$\boldsymbol{A}_1',\boldsymbol{A}_2',\cdots$ 为与圆孔互补的圆屏衍射的合成振幅. 从图中可见，圆屏衍射的合成振幅矢量总是从边上指向中心的. 但当 ρ 增加时，合成振幅矢量的起点向中心靠近，其模减小，所以 P_0 点的强度是单调下降的.

借助于振动矢量图，用巴比涅原理来说明圆孔和圆屏的衍射特

点，也是甚为方便的. 根据巴比涅原理，图 11-12 中各合成振幅矢量之间(略去非零下脚标不写)的关系为

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}'.$$

当圆屏(或者说与之互补的圆孔)半径 ρ 不太大时，总有

$$|\boldsymbol{A}'| \approx |\boldsymbol{A}_0|,$$

因此圆屏菲涅耳衍射图样的中心总是亮的. 而圆孔的合成振幅 $|\boldsymbol{A}|$ 则在 $0\sim 2|\boldsymbol{A}_0|$ 范围内周期变化，即说明圆孔衍射的中心亮暗交替变化.

7. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，从近到远移动接收屏幕，中心强度始终作亮暗交替变化吗？接收屏幕在哪些位置上中心强度达到极大？

答 圆孔所含半波带数 k 与实验装置中各参数的关系如本节思考题 5 中式①所示. 移动接收屏幕(即改变 b)，当 $k=1,3,\cdots$ 时，中心强度极大；当 $k=0,2,4,\cdots$ 时，中心强度极小，相应的 b 值还与源点到圆孔的距离 R、圆孔半径 ρ_k 及光波长 λ 有关. 我们须知，随着 b 增加，k 将减小. 当 b 足够大以后，k 值几乎不变. 这意味着，中心强度不再作亮暗交替变化.

8. 对于一个圆孔的衍射，是否能引入焦点和焦距的概念？是否有类似于透镜的物像距公式？

答 对于单个圆孔，只要调整观察点到圆孔的距离 b，使圆孔含有奇数个半波带，中心强度就取极大值. 考虑到倾斜因子的作用，当圆孔含有一个半波带时，观察点的强度最大. 因此，对于单个圆孔的衍射，也可以和菲涅耳波带片一样，引入焦点和焦距的概念. 圆孔含有一个半波带所对应的观察点即为主焦点，其焦距为

$$f = \rho^2/\lambda,$$

与波带片不同的是，式中 ρ 为圆孔半径. 同时，也有类似于透镜的物像距公式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

式中 R 相当于物距，b 相当于像距，f 为焦距. 当 $R\to\infty$(平行光入射)时，$b=f$. 另外，圆孔衍射和菲涅耳波带片一样，除主焦点外，还有

一系列虚、实次焦点；次焦点与主焦点的关系也完全与波带片相同.

9. 菲涅耳波带片的“物点”和“像点”之间是否有等光程性？

答　菲涅耳波带片的“物点”和“像点”之间不存在等光程性. 在“像点”的位置之所以获得亮点，是因为从波带片上各透光的半波带到“像点”的衍射线的光程彼此相差波长 λ 的整数倍，相干叠加结果的强度极大.

10. 论证菲涅耳波带片除了具有主焦点外，还存在一系列次焦点. 次焦点与主焦点的光强之比是多少？有人认为是 1/9，1/25，…，你认为对吗？如果说次焦点的光强确实比主焦点弱，主要是什么因素造成的？

答　由菲涅耳波带片的焦距公式

$$f = \rho_k^2/k\lambda$$

得

$$k = \rho_k^2/f\lambda.$$

k 即为波带片相对于主焦点所含半波带的个数. 对于距离 $b=f/3$ 处的轴上观察点来说，波带片所含的半波带个数为

$$k' = \rho_k^2 \Big/ \frac{f}{3}\lambda = 3\frac{\rho_k^2}{f\lambda} = 3k,$$

即半波带数增加三倍. 这说明原来波带片中每一个透光的半波带，相对于 $b=f/3$ 处来说，变成为三个半波带，其中有两个分别为奇数和偶数的半波带. 它们对场点的贡献相互抵消，有贡献的只是剩下的一个半波带. 波带中透光部分所有有贡献的半波带在轴上场点处合成振幅的再叠加是同相叠加，因此形成亮点，即证明了 $b=f/3$ 处为一个次焦点. 同理可以证明，$b=f/5$，$f/7$，…处均为次焦点.

以上分析还表明，所有次焦点和主焦点一样，波带片中对场点有贡献的半波带的总数都是一样的. 因此，比较次焦点和主焦点的强度，只需分析每一个半波带的贡献. 根据惠更斯-菲涅耳原理，第 k 个半波带在场点的合成振幅

$$A_k \propto f(\theta_k)\Delta\Sigma_k/r_k,$$

其中 $\Delta\Sigma_k$ 为第 k 个半波带的面积，r_k 为该半波带到场点的距离，$f(\theta_k)$是倾斜因子. 对于波带片来讲，$R\to\infty$，因此有

$$\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}=\frac{\pi R\lambda}{R+b}=\pi\lambda,$$

可见 $\Delta\Sigma_k/r_k$ 不但与 k 无关，而且与场点距离 b 也无关. 简单地看，虽然半波带的面积减小为原来的 1/3，但同时，它到场点的距离也缩短为原来的 1/3. 所以，如果忽略倾斜因子 $f(\theta_k)$ 的作用，次焦点和主焦点的强度是一样的！

倾斜因子 $f(\theta_k)$ 随场点距离 b 的减小而单调下降. 因此，考虑倾斜因子的作用后，次焦点的强度随次焦距的减小而依次递减. 当场点距离 b 太短时，$f(\theta_k)\to 0$. 由此可知，能观察到的次焦点不可能有无穷多个.

11. 振幅型的黑白波带片有个缺点，即它使入射光通量损失 1/2. 有什么办法使照射波带片的通光量全部进入衍射场，从而造成更强的主焦点？

答 把振幅型波带片中所有涂黑的半波带改成涂以透明介质，并使之与未涂介质的半波带间的有效光程差为 $\lambda/2$. 这样，波带片就成为相位型的了. 相位型波带片是全透明的，全部光通量都进入衍射场；并且由于所有半波带间的相干叠加在场点都是互相加强的，从而使主焦点有最大的强度. 应该说，这是近年来正在兴起的二元衍射光学元件的一个简单典型.

§7 夫琅禾费单缝衍射和矩孔衍射

1. 试用半波带法说明夫琅禾费单缝衍射因子的一些特征，比如暗纹和次极强的位置. 你能用半波带法说明各次极强的强度大小比例吗？

答 如图 11-13(a)，缝宽为 a 的单缝走向沿 y 轴，衍射只在 P_0xz 平面内发生. 考虑衍射角为 θ 的一组衍射线，为了对波前 AB 进行半波带分割，可以过狭缝边缘上的 A 点作衍射线的垂线 AC，则光程差 $\Delta L=L(BC)=a\sin\theta$，即为狭缝上下边缘 A，B 到 P_θ 点的衍射线间的光程差. 再作一系列平行于线段 AC 且间距为 $\lambda/2$ 的线段，这些线段与线段 AB 的交点就把波前分割成一系列半波带了. 当光

程差 ΔL 是半波长的偶数倍时，缝宽被分割成 $2k$ 个半波带. 每对相邻半波带对场点的贡献相互抵消，从而在屏幕上相应的会聚点 P_θ 上出现第 k 级暗斑. 所以暗斑条件为

$$a\sin\theta = \pm\, 2k(\lambda/2) \quad (k = 1,2,\cdots), \qquad ①$$

即

$$\sin\theta = \pm\, k\lambda/a.$$

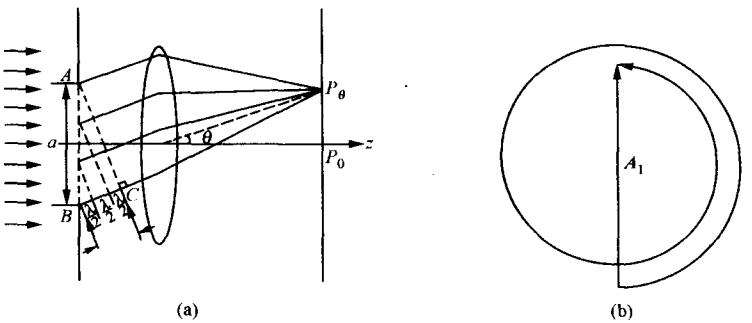


图　11-13

当缝宽被分割成 $2k+1$ 个半波带时，还留下一个半波带的作用，屏幕上相应的会聚点则出现第 k 级亮斑. 所以次极强的位置满足下列条件：

$$a\sin\theta = \pm\, (2k+1)(\lambda/2),$$

即

$$\sin\theta = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}.$$

在傍轴条件下，$\sin\theta \approx \theta$，暗斑条件（见式①）可以写成

$$\theta \approx \pm\, k\lambda/a.$$

由此得 0 级斑的半角宽为

$$\Delta\theta = \pm\, \lambda/a,$$

也等于高级斑的角宽度.

用半波带法也可得出各级次极强的相对强度. 先以 1 级次极强为例，这时波前上共有三个半波带. 有贡献的只是其中的一个半波带，设其在场点的合成振幅为 A_1（如图 11-13(b)所示），则 0 级斑中

心的合成振幅 A_0 等于以 A_1 为直径的半圆弧长度的三倍，即

$$A_0 = 3\pi A_1/2.$$

改写上式得

$$A_1 = 2A_0/3\pi.$$

由此得 1 级次极强的强度 I_1 和 0 级主极强的强度 I_0 的关系为

$$I_1 = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 I_0 \approx 4.5\% I_0.$$

同理，可得 2,3 级次极强的强度分别为

$$I_2 = \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 I_0 \approx 1.6\% I_0, \quad I_3 = \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 I_0 \approx 0.8\% I_0.$$

次极强的普遍近似公式为

$$I_k = I_0 \Big/ \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi\right]^2.$$

以上计算结果表明，用半波带法得到的次极强位置及强度与精确解法得到的结果略有差别，这是因为对次极强的位置而言，狭缝平面上的波前并不严格等于整数个半波带. 当弦弧长等于半圆周长的时候，半圆周的直径并非一定大于弦长.

2. 在夫琅禾费单缝衍射中，为保证在衍射场中至少出现强度的 1 级极小，单缝的宽度不能小于多少？为什么用 X 射线作晶体结构分析，而不用可见光衍射？

答 由暗斑条件（上题中式①）可知，由于 $|\sin\theta| \leqslant 1$，欲得 1 级以上次极强，必须保证

$$a \geqslant \lambda,$$

即缝的宽度不能小于光波长. 这个结果表明，用衍射的方法进行结构分析，其空间分辨率只能达到波长的数量级. 晶体是一种空间点阵结构，其晶格常数（相邻格点的间隔）a_0 为 Å 的数量级，远远小于可见光波长（10^3 Å）的量级. 因而，用可见光是不能分辨晶体结构的. 而 X 射线在 10 Å ～10^{-2} Å 的波长范围，用它来分析晶体结构可以产生明显的衍射效应.

理论上可以证明，当照明光波长大于晶体结构线度时，衍射波的振幅按指数急剧衰减，衍射波不可能到达远场. 或者说，用波长为 λ

的光波对图像结构进行衍射分析，不能把空间频率 $f>1/\lambda$ 的高频信息携带到衍射场中.

3. 试讨论，当图 11-14 所示的夫琅禾费单缝衍射装置里的点光源在垂直于光轴的平面里上下左右移动时，衍射图样有何变化？

答　在夫琅禾费单缝衍射装置中，当点光源在垂直于光轴的平面里作上下左右移动时，衍射图样向反方向整体平移，零级衍射斑的中心始终保持在点源的几何光学像的位置. 零级衍射斑的中心就是几何光学的像点(即等光程点). 这是具有普遍意义的结论.

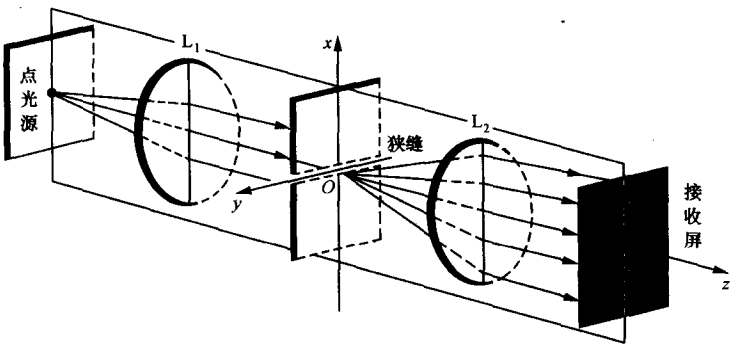


图　11-14

4. 若在单缝夫琅禾费衍射装置中，线光源取向并不严格平行狭缝，这对衍射图样有什么影响？如果线光源本身太宽，对衍射图样有什么影响？设想一下，若在图 11-15 所示的装置中把线光源转 90°，使之与单缝垂直，你在幕上看到的是什么图样？

答　由上题的讨论我们知道，在点光源照明的情形中，当点光源由轴上移到轴外时，衍射图样整体向反方向平移，衍射图样的形状保持不变，衍射斑仍分布在垂直于狭缝的方向上(只是零级衍射斑的中心由轴上移到了轴外). 线光源可以看成是一系列非相干点光源的集合，其中的每一个点光源都对应有一套衍射斑，其零级斑的中心分别处在各自几何光学像点的位置. 若点光源沿平行于狭缝的方向扩展为线光源，则各套衍射斑均只在狭缝方向发生平移，非相干叠加的结果使衍射斑扩展为一系列平行于狭缝的直线衍射条纹，如图 11-15 所示.

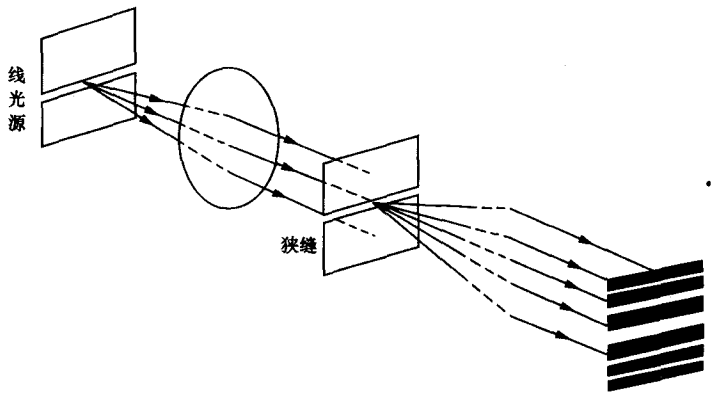


图 11-15

在单缝夫琅禾费衍射装置中，一定要区别点光源照明和线光源照明两种情形. 如果不加区分地认为一系列平行的直线衍射条纹是由狭缝造成的，就会得到错误结论.

如果线光源的取向并不严格与单缝平行，则一系列非相干点源所对应的各套衍射斑不但在平行方向彼此错开，而且在垂直方向也有微小的彼此错开，非相干叠加的结果使条纹变得模糊不清. 可见，只有当线光源与单缝保持平行时，衍射条纹最为清晰. 这个结论是有实际意义的，因为在实验中很难事先测定线光源与狭缝是否严格平行；而反过来，由条纹的清晰度(变化)来判断两者的平行程度，是相当灵敏的方法.

如果线光源与单缝垂直，则由于线光源中一系列非相干点源所对应的各套衍射斑都排列在与单缝垂直的同一直线上，中心位置彼此上下错开，非相干叠加结果成为一条垂直方向的亮纹.

5. 在白光照明下夫琅禾费衍射的零级斑中心是什么颜色？零级斑外围呈什么颜色？

答 白光是由各种波长的成分按一定比例组成的；经夫琅禾费衍射后，各种波长的零级斑中心仍重合于几何像点. 但由衍射反比关系可知，零级斑的半角宽度

$$\Delta\theta \propto \lambda,$$

即长波比短波更加弥漫.这就必然导致中心点的长波成分减小,短波成分增加,使零级斑的中心不再严格保持白色(短波成分加重的结果应呈蓝白色).同理,零级斑的外围应为彩色,长波(红色)成分靠外,短波(蓝色)靠里.根据菲涅耳-基尔霍夫衍射公式,发生这一现象是预料中的事情,这是因为零级中心的振幅

$$\tilde{U}(P_0) \propto 1/\lambda.$$

通常所说的"零级无色散"是指,各波长成分的零级中心位置重合,在空间上没有被分离.由此进一步引申出一个概念——光在传播过程中,其光谱可能发生变化.

6. 若将图 11-14 所示的单缝夫琅禾费衍射装置中的单缝换为方孔、三角孔或六角孔,幕上零级衍射斑中心位置分别将在什么地方?

答　零级衍射斑的中心总是在各衍射线之间光程差为零的位置,即照明点源的几何光学像点处.因此,衍射屏从单缝换为方孔、三角孔或六角形孔,其零级斑的中心位置不变.当照明点源在轴上时,其零级斑的中心都在轴上.

7. 讨论夫琅禾费衍射装置有如下变动时,衍射图样的变化(参看图 11-14):

(1) 增大透镜 L_2 的焦距;

(2) 增大透镜 L_2 的口径;

(3) 衍射屏沿光轴 z 方向前后平移;

(4) 衍射屏作垂直于光轴 z 的移动(不超出入射光束照明范围);

(5) 衍射屏绕光轴 z 旋转.

在以上哪些情形里零级衍射斑的中心发生移动?

答　装置未作变动时,衍射图样为沿 x 轴的一系列衍射斑.零级斑在轴上,高级斑呈对称分布.设缝宽为 a,则零级斑在 x 轴的半角宽度

$$\Delta\theta_x \approx \lambda/a.$$

(1) 若增大透镜 L_2 的焦距,衍射图样的形状和零级斑的半角宽度都不变;但亮斑的线度及其间距均同时被放大.

(2) 若增大透镜 L_2 的口径,则在接收屏上将增加高级衍射斑,原有衍射斑保持不变.

(3) 若沿光轴 z 方向前后平移衍射屏,则高级衍射斑将会增加或减少.当衍射屏移近透镜 L_2 时,高级斑增加;反之,则减少.其余衍射斑保持不变.

(4) 若将衍射屏作垂直于光轴 z 的上下移动时,则零级斑保持不变,但高级斑可能不再对称分布.如衍射屏沿 x 轴正方向移动,则在该方向上高级斑减少,而沿 x 轴负方向的高级斑增多.

(5) 若衍射屏绕 z 轴旋转,衍射斑连线保持与狭缝正交.

在以上五种变动中,零级斑中心位置均保持不变.

§8 光学仪器的像分辨本领

1. 菲涅耳圆孔衍射图样的中心可能是亮的,也可能是暗的,而夫琅禾费圆孔衍射图样的中心总是亮的.这是为什么?

答 在菲涅耳圆孔衍射中,各衍射线到中心点的光程差是和该点到圆孔的距离及圆孔孔径有关的,随着光程差的不同,相干叠加结果就有强度极大(亮)和极小(暗)的情况.而在夫琅禾费圆孔衍射中,中心点总是各衍射线等光程的位置,因此相干叠加结果总是取极大值,即中心点总是亮的.

2. 讨论下列日常生活中的衍射现象:

(1) 假如人眼的可见光波段不是 0.55 μm 左右,而是移到毫米波段,而人眼的瞳孔仍保持 4 mm 左右的孔径,那么人们看到外部世界将是一幅什么景象?

(2) 人体的线度是米的数量级,这个数值恰与人耳的可听声波波长相近.假想人耳的可听声波波长移至毫米数量级,外部世界给予我们的听觉形象将是什么状况?

答 (1) 当人观察物体时,网膜上所成的像是发自物体的光通过眼睛瞳孔而产生的夫琅禾费衍射图样.根据瑞利判据,人眼的最小分辨角为

$$\delta\theta_{\mathrm{m}} = 1.22\lambda/nD,$$

其中 $n=1.336$ 为玻璃体的折射率，$D=4$ mm 为瞳孔直径. 取可见光中心波长 $\lambda=0.55$ μm，即可算出

$$\delta\theta_m = 1.26 \times 10^{-4}\ \text{rad}.$$

这个结果与人眼的实际最小分辨角 $1'(2.9\times10^{-4}$ rad)的数量级是一致的.

假如人眼的可见光移到毫米波段，设 $\lambda'=10^4\lambda=5.5$ mm，则可算出此时的最小分辨角为

$$\delta\theta'_m = 10^4\delta\theta_m = 1.26\ \text{rad} \approx 72°.$$

$\delta\theta'_m$ 如此之大，已与人眼的最大视场角(水平方向为 160°；垂直方向为 130°)相接近，比能较清楚看到物体细节的中央视场角(约 6°～7°)大 10 多倍！实际上，已无法分辨任何物体了. 可以想象，此时的人眼除了有光感以外，与瞎子无异.

有趣的是，由上面得到的最小分辨角 $\delta\theta_m$，再考虑到眼球的直径约在 16～24 mm，又取人眼的第二焦距 $f=20$ mm，可估算视网膜上艾里斑的直径

$$d = 2f\delta\theta_m \approx 5\ \mu\text{m}.$$

这个数值正好与人眼感光单元的线度(2～6 μm)相当. 从生物进化论的眼光看，可以认为这是人眼适应衍射效应的结果.

(2) 人体的线度与可听声波长数量级相近，这绝不是偶然的巧合. 因为人体的线度在米的数量级，所以在设计门、窗以及家具等的线度也要选取同数量级. 这就使得我们日常生活环境中大量障碍物的线度都处在声波极易发生衍射的范围. 应当说，这给我们相互传递语言信息带来了很大方便. 试想如果人耳可听声波移至毫米的数量级，则我们生活环境中大量障碍物的线度要比声波长大得多. 按照衍射理论，这时声波的衍射效应很不明显，大多数情况都表现为直线传播；人们听觉和视觉范围上的许多差异都将消失，“闻其声而不见其人”的现象将不复存在.

3. 蝙蝠在飞行时是利用超声波来探测前面的障碍物的. 它们为什么不用对人类来说是可闻的声波？

答　根据衍射反比关系，在障物线度确定的条件下，波长越短，

衍射效应越不明显；而直线传播行为却更加明显. 蝙蝠是利用波的反射行为来探测障碍物的，显然，波长越短，方向性越强，对目标方位的判断越精确. 超声波的波长比可听声波短，正好能满足这一要求.

§9 光的横波性与五种偏振态

1. 如果你手头有一块偏振片的话，请用它来观察下列各种光，并初步鉴定它们的偏振态：

(1) 直射的阳光；

(2) 经玻璃板反射的阳光；

(3) 经玻璃板透射的阳光；

(4) 不同方位的天空散射的光；

(5) 白云散射的光；

(6) 月光；

(7) 虹霓.

答 (1) 直射的阳光是自然光.

(2) 经玻璃板反射的阳光一般是部分偏振光. 仅当阳光以布儒斯特角入射时，其反射光为线偏振光，且振动面垂直于入射面.

(3) 经玻璃板透射的阳光都是部分偏振光.

(4) 晴朗的日子里，蔚蓝天空的散射光多半是部分偏振光. 偏振度与散射光的方向有关：散射光与入射光的方向越接近垂直，散射光的偏振度越高；垂直方向的散射光是线偏振的. 如果在原入射方向或其逆方向上观察，散射光仍是自然光. 这种散射属于分子散射.

(5) 白云的散射属于悬浮质点的散射，其散射光都是部分偏振光.

(6) 月光是反射的太阳光，但并非光滑表面的反射，因此仍是自然光.

(7) 虹霓是由太阳光照射在残留在天空的小水滴群上，产生规则的折射和反射造成的，应为部分偏振光.

2. 自然光中的振动矢量如图 11-16 所示呈各向同性分布，合成矢量的平均值为零. 为什么光强度却不为零？

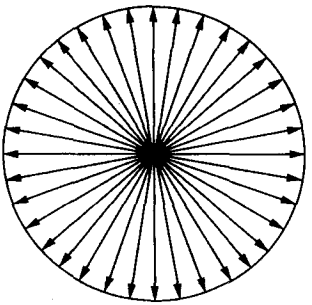


图　11-16

答　如图 11-16 所示的矢量图给出了自然光中大量横振动的方位分布. 它表明自然光是大量相对于光的传播方向轴对称分布的线偏振光的集合. 与矢量图解法中的振幅矢量不同，目前各矢量间的夹角并不代表各振动间的相位差，因此不能对它们进行合成. 由于自然光中各方向横振动之间的相位是无关联的，所以总的光强是所有各方向横振动的线偏振光的非相干叠加. 显然不为零.

3. 自然光和圆偏振光都可看成是等幅垂直偏振光的合成. 它们之间的主要区别是什么？部分偏振光和椭圆偏振光呢？

答　自然光和圆偏振光都可看成是两个等幅垂直偏振的合成. 它们的主要区别在于前者光振动矢量的两个正交分量之间没有稳定的相位关系；而后者的两个正交分量之间有确定的相位差 $\pm\pi/2$. 部分偏振光和椭圆偏振光的主要区别也在相位关系上：前者两正交分量之间无稳定的相位关系；后者两个正交分量之间有稳定的相位差. 在确定两个垂直偏振合成后的偏振态时，起决定作用的是两者的相位关系及其振幅关系.

4. 自然光投射在一对正交的偏振片上，光不能通过. 如果把第三块偏振片放在它们中间，最后是否有光通过？为什么？

答　自然光通过偏振片后，被改造成振动平行于透振方向的线偏振光. 当线偏振光再入射到偏振片上时，只能透过与偏振片透振方向平行的分量. 因此，自然光通过一对正交的偏振片时，其透射光的强度必然为零. 如果在一对正交的偏振片之间插入第三块偏振片，情况就不同了. 只要插入的偏振片的透振方向与已知的两正交偏振片

中任一透振方向不重合，其出射光强就不为零，因为这时从前一偏振片出射的线偏振光入射到下一偏振片时，都有平行分量能透过. 但是如插入的偏振片的透振方向与已知的两正交偏振片之一的透振方向重合，则结果与一对正交偏振片相同，最后出射光强即为零. 可见，在正交偏振片中插入第三块偏振片，出射光强一般不为零，特殊情况下仍为零.

§10 光在电介质表面的反射和折射 菲涅耳公式

1. 当你站在湖岸远眺清澈见底的湖面时，看到的是对岸景物的倒影. 只有俯视岸边的湖水时，你才能看到水中的游鱼. 试解释这个现象.

答 这个现象与光强反射率和光强透射率有关. 根据菲涅耳反射和折射公式可知，当界面两侧媒质的折射率不等，并以自然光入射时，随着入射角的增大，总的光强反射率单调上升；而总的光强透射率正好相反，是单调下降的. 由此可见，仅从像的亮暗考虑，观察对岸景物的倒影(反射像)，远眺(与大入射角对应)有利；而观察游鱼(折射像)，则俯视(与小入射角对应)有利.

2. 当一束光在两种透明介质的分界面上时，会发生只有透射而无反射的情况吗？

答 这种“全透射”的情况是可以发生的，如图 11-17 所示，当入射光为 p 方向的线偏振光，并以布儒斯特角入射时，由于 $r_p=0$，则光

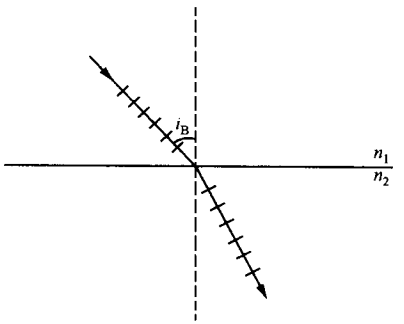


图 11-17

束只有透射，而无反射. 忽略介质的吸收，这时的能流透射率将等于100%.

3. 科学幻想小说中常描绘一种隐身术. 根据本节[①]所述的知识试设想一下，即使有办法使人体变得无色透明，要想别人完全看不见，还需要什么条件？

答　实现隐身术，仅使人体变得无色透明还不够，还必须使人体的光强反射率为零，光强透射率为100%. 根据菲涅耳反射折射公式，只有使人体的折射率和空气一样，才能实现无反射和全透射.

4. 一束光从空气入射到一块平板玻璃上. 讨论：

(1) 在什么条件下透射光获得全部能流？

(2) 在什么条件下透射光能流为零？

答　(1) 如图11-18所示，设空气和平板玻璃的折射率分别为 n_1 和 n_2. 当光束在从空气到玻璃的上表面以布儒斯特角 $i_{1B}=\arctan(n_2/n_1)$ 入射时，折射光线在下表面从玻璃到空气的入射角(即折射角) $i_2=90°-i_{1B}$，故有

$$\tan i_2=\cot i_{1B}=\frac{n_1}{n_2},\quad i_2=\arctan\frac{n_1}{n_2}=i_{2B},$$

即下表面的入射角仍为布儒斯特角. 光束以 i_{1B} 入射到界面上时，恒有p分量的振幅反射率 $r_p=0$. 由以上分析可知：把p方向的线偏振光以 i_{1B} 从空气入射到平板玻璃上，并忽略介质对光的吸收，透射光

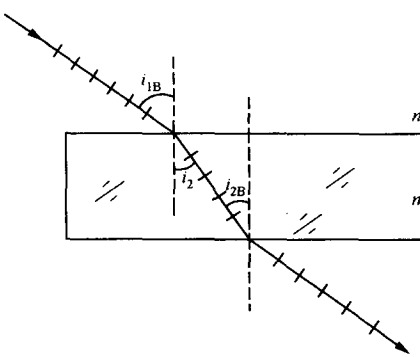


图　11-18

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：245～262.

即可获得全部入射光能流. 取 $n_2=1.52, n_1=1.00$, 可算出入射布儒斯特角

$$i_{1B}=\arctan(n_2/n_1)=\arctan 1.52\approx 57°.$$

(2) 以布儒斯特角 i_{1B} 入射, 只能使 p 分量满足 $r_p=0$, 并不能使 s 分量的 $r_s=100\%$. 因此, 即使以 s 振动的线偏振光在 i_B 入射, 也不能实现透射能流为零. 欲使透射能流为零, 只有利用全反射. 对于在空气中的平板玻璃, 全反射只能发生在其下表面. 当光线在下表面的入射角为临界角时, 上表面相应的入射角为 90°, 所以只有令光束掠入射到玻璃板上, 才能实现透射能流为零. 当然, 此时对入射光束的偏振态并无限制.

5. 振幅透射率可能大于 1 吗? 试举例说明之.

答 能量守恒要求能流透射率 $\mathscr{T}\leqslant 1$, 并不要求振幅透射率一定小于 1. 如图 11-19 所示, 当光从光密向光疏媒质折射时, 由于光束截面变小, 透射光的振幅可以大于入射光的振幅. 这并不违反能量守恒. 论证如下:

$$\mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}=T\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=|t|^2\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}\leqslant 1,$$

其中

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=\frac{n_2\sqrt{1-\sin^2 i_2}}{n_1\sqrt{1-\sin^2 i_1}}=\frac{\sqrt{n_2^2-n_2^2\sin^2 i_2}}{\sqrt{n_1^2-n_1^2\sin i_1}}<1\quad(n_1>n_2).$$

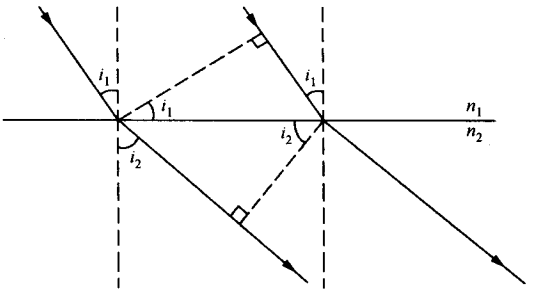


图 11-19

因此, 当 $|t|^2>1$ 时, 仍能保证 $\mathscr{T}\leqslant 1$, 即振幅透射率出现大于 1 的情

形并不违反能量守恒. 上述结论对 p,s 两个分量都适用.

顺便指出,当 p 分量线偏振光以布儒斯特角入射时,$\tau=1$. 在 $n_1>n_2$ 的情形下,必须使 $|t|>1$.

6. 斯托克斯倒逆关系中 t 与 t' 关系如何?

答　如图 11-20 所示,设在斯托克斯倒逆关系中,t 为光线从介质 1 射向介质 2 时的振幅透射率,t' 为光线沿原路返回时的振幅透射率. 根据菲涅耳折射公式可得

$$t_{\mathrm{p}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2},\quad t'_{\mathrm{p}}=\frac{2n_2\cos i_2}{n_1\cos i_2+n_2\cos i_1},$$

$$t_{\mathrm{s}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2},\quad t'_{\mathrm{s}}=\frac{2n_2\cos i_2}{n_2\cos i_2+n_1\cos i_1},$$

因此有

$$\frac{t'_{\mathrm{p}}}{t_{\mathrm{p}}}=\frac{t'_{\mathrm{s}}}{t_{\mathrm{s}}}=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}.$$

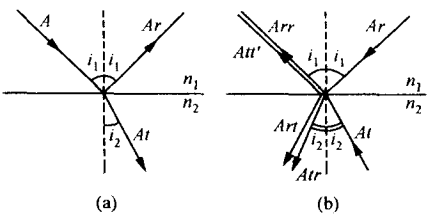


图　11-20

可见在斯托克斯倒逆关系中,对 p,s 分量来说 t 和 t' 的关系是相同的. 必须注意,式中的 i_1 和 i_2 是满足折射定律关系的. 上式还可以改写成

$$t_{\mathrm{p}}t'_{\mathrm{p}}=t'_{\mathrm{p}}\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1},\quad t_{\mathrm{s}}t'_{\mathrm{s}}=t_{\mathrm{s}}^2\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}.$$

注意在未发生全反射($i_1<i_{\mathrm{c}}$)时,t_{p} 和 t_{s} 总是(正)实数,则

$$t_{\mathrm{p}}t'_{\mathrm{p}}=\frac{n_2}{n_1}|t_{\mathrm{p}}|^2\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=\mathscr{T}_{\mathrm{p}},\quad t_{\mathrm{s}}t'_{\mathrm{s}}=\frac{n_2}{n_1}|t_{\mathrm{s}}|^2\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=\mathscr{T}_{\mathrm{s}},$$

即乘积 tt' 正是能流透射率. 这个结论对 p,s 分量都适用.

在此,我们可以顺便指出斯托克斯倒逆关系

$$r^2 + tt' = 1 \qquad ①$$

的物理意义：在未发生全反射时，

$$r^2 = |r|^2 = \mathscr{R},$$

即 r^2 为能流反射率. 式①正是能流守恒方程. 它表示对 p,s 两个分量，能流是分别守恒的.

7. 设折射率为 n_2 的介质层放在折射率分别为 n_1, n_3 的两种介质之间(见图 11-21(a)). 讨论下列情形里上下两界面反射的光线 1，2 之间是否有半波损：

(1) $n_1 > n_2 > n_3$；

(2) $n_1 < n_2 < n_3$；

(3) $n_1 > n_2 < n_3$；

(4) $n_1 < n_2 > n_3$.

答 在介质层两侧折射率不等的情况下，普遍地讨论以任意入射角入射时上下两界面反射的光线 1,2 之间的半波损是比较复杂的. 下面我们仅以上下界面的入射角均小于或均大于布儒斯特角的情形为例进行讨论：

首先，确定各光线的局部 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{k}$ 正交坐标系. 我们规定 $\boldsymbol{s}$ 的正方向垂直纸面向外，$\boldsymbol{k}$ 的正方向沿光波矢，$\boldsymbol{p}$ 的正方向由 $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{k}$ 确定.

其次，设入射点的场分量为正，即与坐标架正方向一致. 根据菲涅耳公式

$$r_p = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}, \quad r_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)}$$

判断各界面的 r_p, r_s, t_p, t_s 的符号；正号表示经过界面后实际场分量与坐标架方向一致；负号表示实际场分量与坐标架方向相反. 由于 t_p, t_s 恒为正实数，相应的计算可以从略.

再次，在光路图中画出实际场分量，比较光线 1,2 实际场分量的方向，如两个分量方向均相同，则表示两光线间无半波损；反之，则表示有半波损.

(1) $n_1 > n_2 > n_3$.

当 $i_1 < i_B$ 时，$i_1 + i_2 < 90°$，$\tan(i_1 + i_2) > 0$. $\sin(i_1 + i_2) > 0$. 在介质

n_1 到 n_2 的界面上，

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0;$$

在介质 n_2 到 n_3 的界面上，

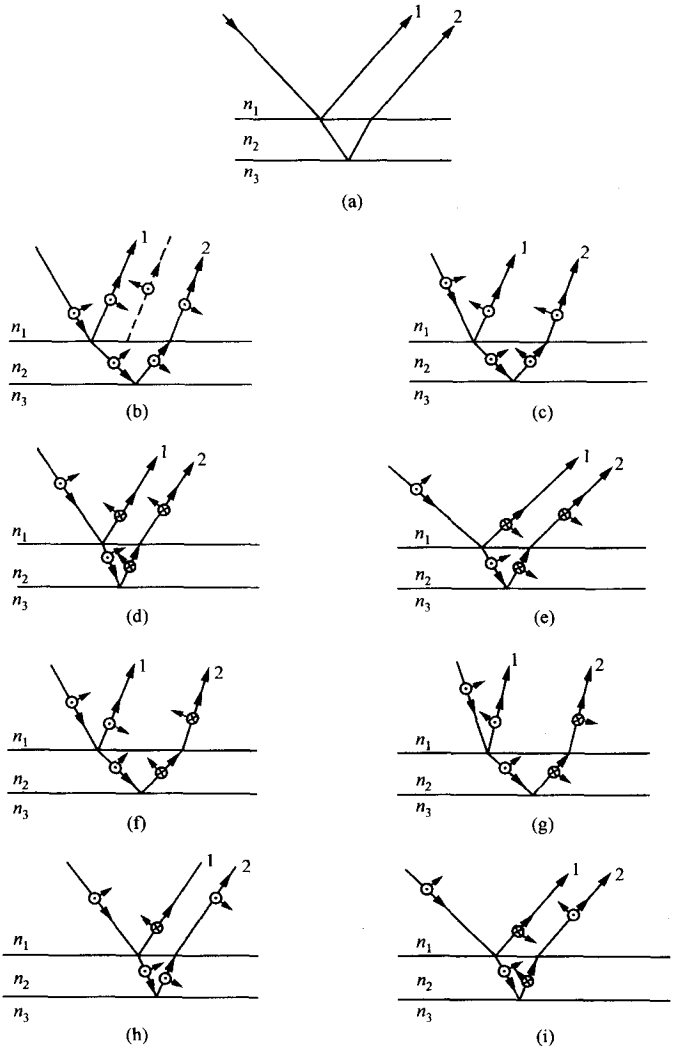


图　11-21

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0.$$

据此作实际场分量如图 11-21(b),图中虚线代表我们所取的坐标架. 可见,此时光线 1,2 之间没有半波损.

当 $i_B < i_1 < i_c$ 时,$i_1 + i_2 > 90°$,$\tan(i_1 + i_2) < 0$,$\sin(i_1 + i_2) > 0$. 在上、下两界面均有

$$i_1 < i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0.$$

画出实际场分量在界面上的突变情况,如图 11-21(c). 这时光线 1,2 之间仍无半波损.

(2) $n_1 < n_2 < n_3$.

与(1)同理分析可知,当 $i_1 < i_B$ 时,在上、下两界面上均有

$$i_1 > i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s < 0;$$

当 $i_1 > i_B$ 时,在上、下两界面均有

$$i_1 > i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0.$$

实际场分量在界面上的突变情况分别如图 11-21(d)和(e)所示. 可见,光线 1,2 之间均无附加半波损.

(3) $n_1 > n_2 < n_3$.

当 $i_1 < i_B$ 时,在上界面有

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0;$$

在下界面有

$$i_1 > i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s < 0.$$

实际场分量在界面上的突变情况如图 11-21(f)所示. 可见,此时光 1,2 之间有附加半波损.

当 $i_1 > i_B$(在上界面须 $i_1 < i_c$)时,在上界面有

$$i_1 < i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0.$$

在下界面有

$$i_1 > i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0.$$

实际场分量在界面上的突变情况如图 11-21(g)所示. 可见,这时光线 1,2 之间仍有附加半波损.

(4) $n_1 < n_2 > n_3$.

当 $i_1 < i_B$ 时,在上界面有

$$i_1 > i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s < 0;$$

在下界面有

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0.$$

实际场分量在界面上的突变情况如图 11-21(h)所示. 可见,这时光线 1,2 之间有附加半波损.

当 $i_1 > i_B$(在下界面须 $i_1 < i_c$)时,在上界面有

$$i_1 > i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0;$$

在下界面上有

$$i_1 < i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0.$$

实际场分量的突变情况如图 11-21(i)所示. 可见,光线 1,2 之间仍有附加半波损.

由以上讨论可归纳出以下重要结论:介质层的上下表面反射光束之间有半波损的条件是 $n_1 > n_2 < n_3$ 或 $n_1 < n_2 > n_3$;当 $n_1 > n_2 > n_3$ 或 $n_1 < n_2 < n_3$ 时,没有半波损. 这个结论在处理薄膜干涉时是有用的,我们应当记住.

顺便指出,在介质层两侧折射率不等的情况下,上下界面并非同时达到布儒斯特角,而是可能出现一个界面的入射角大于布儒斯特角,而另一个界面的入射角小于布儒斯特角的情形. 由此在界面上场分量突变,将导致光线 1,2 之间某一场分量同向,而另一场分量反向. 这时就不能简单用半波损的语言来描述附加光程差了. 另外,发生全反射时相位突变可以取 0～π 的任意值. 若全反射发生在上界面,则光线 2 不复存在,讨论光线 1,2 之间的半波损问题没有意义;如全反射发生在下界面,光线 1,2 都存在,但不能用有无半波损来回答相位突变情况 .

8. 通常偏振片的透振方向是没有标明的. 你能用什么简易的方法可将它确定下来?

答　粗略地判定偏振片的透振方向,一种简单方法是根据反射光的偏振性. 如图 11-22 所示,自然光从空气到玻璃入射,并使入射角为布儒斯特角 i_B(约 57°),则反射偏振光的振动方向是垂直入射面的. 旋转偏振片观察反射光,可得消光位置. 消光时,偏振片上与入射面平行的方向即为透振方向. 当然,实验时来自普通光源的入射光并

不一定是平行光，入射角也不必严格校准. 这时“消光”并不精确，但强度最小的位置还是可以非常明显地观察到的. 例如，隔着偏振片观察物体以接近 i_B 入射经玻璃反射的像，旋转偏振片，可观察到像的亮度变化. 当观察到像的亮度最小时，偏振片上与入射面平行的方向就是透振方向.

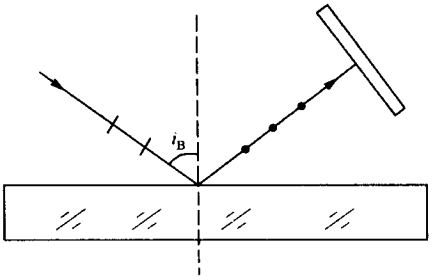


图 11-22

9. 在夏天，炽热的阳光照射柏油马路发出刺眼的反射光，汽车司机需要戴上一副墨镜来遮挡. 是否可用偏振片做眼镜？这比墨镜有什么优点？

答 从路面上发出直接射入眼睛的反射光要比来自其他目标的漫射光强烈得多. 通常把这种刺眼的强光叫眩光. 在眩光的刺激下，视力会急剧下降，观察目标的敏锐程度也会大大降低. 这对司机的安全行车是个严重影响. 戴上墨镜，可以减弱射入眼睛的光强，但并不能突出地限制眩光. 如果用偏振片做眼镜，情况就大不相同了. 因为阳光（自然光）经路面反射后是部分偏振光，在入射角接近布儒斯特角时偏振度很高，近似为线偏振光. 对于水平的路面来说，反射部分偏振光的强度极大的分量总是在水平方向. 因此，只要使眼镜上的偏振片的透振沿竖直方向，就可以强烈地吸收刺目的眩光；而对来自其他目标的漫射光的吸收则要相对小得多. 这种“爱憎分明”的优点是墨镜所没有的.

此外，墨镜对光的吸收往往对波长有选择作用，改变观察目标的真实色调. 而偏振片眼镜的吸收只对偏振态有选择作用，对波长并无选择吸收，不会改变目标的色调. 这也算是一个优点.

10. 一束右旋圆偏振光从空气正入射到玻璃板上. 反射光的偏振态如何？

答 决定反射光偏振态的是反射光中两个垂直分量（p 分量和 s 分量）的振幅关系和相位关系. 两者均可由菲涅耳公式确定. 设空气的折射率为 n_1，玻璃的折射率为 n_2. 正入射时，$i_1=i_2=0$，则由菲涅耳

公式得振幅反射率为

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_s > 0 \quad (n_2 > n_1).$$

上式表明 r_p,r_s 的模和辐角分别为

$$|r_p| = |r_s|,$$

$$\arg r_p = 0, \qquad ①$$

$$\arg r_s = \pi. \qquad ②$$

由于入射光为圆偏振光,两垂直分量振幅相等. 由式①可知,反射光两正交分量的振幅仍相等,即

$$|E'_{1p}| = |E'_{1s}|. \qquad ③$$

又由①,②两式可知,反射界面上 p,s 分量的相位突变

$$\delta_p = -\arg r_p = 0, \quad \delta_s = -\arg r_s = -\pi.$$

由于入射圆偏振光是右旋的,则入射光 s 分量和 p 分量的相位差

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_{1s} - \Delta\varphi_{1p} = \pi/2.$$

因此反射光中 s 分量和 p 分量的相位差

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_1 &= \varphi'_{1s} - \varphi'_{1p} \\ &= (\varphi'_{1s} - \varphi_{1s}) - (\varphi'_{1p} - \varphi_{1p}) + (\varphi_{1s} + \varphi_{1p}) \\ &= \delta_s\delta_p + \Delta\varphi_1 = -\pi - 0 + \pi/2 = -\pi/2. \qquad ④\end{aligned}$$

由③,④两式即可确定反射光为左旋圆偏振光. 与入射光相比,电矢量瞬时值(旋转矢量)要小得多,如图 11-23 所示.

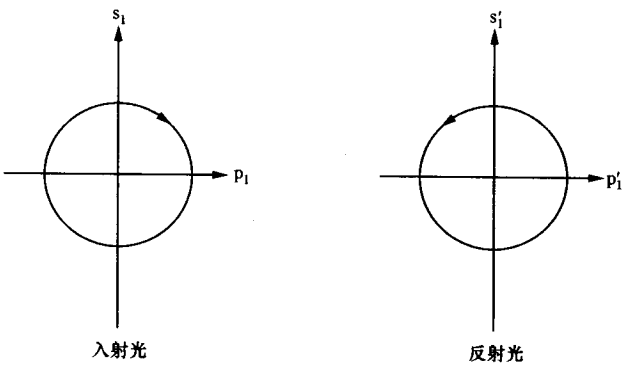


图　11-23

上面我们是根据菲涅耳公式严格推导得出结论的. 其实,这个结论从物理上的对称性分析就可得到. 由于空气和玻璃都是各向同性的均匀介质,由轴对称性可知,正入射时界面对 p 分量和 s 分量的作用应当完全相同,即 p,s 分量的相位突变和振幅改变都应一样. 又因为考查右旋和左旋必须同样是迎着光的传播方向观察,在正入射的情况下入射光和反射光的传播方向正好相反. 因此,入射为右旋圆偏振光,反射必为左旋圆偏振光;条件是正入射且介质各向同性.

11. 验证菲涅耳公式满足能量守恒条件:

$$\mathscr{R}_p + \mathscr{T}_p = 1, \quad \mathscr{R}_s + \mathscr{T}_s = 1.$$

答 把菲涅耳公式

$$E'_{1p} = \frac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}E_{1p}, \tag{①}$$

$$E_{2p} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}E_{1p}, \tag{②}$$

$$E'_{1s} = \frac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}E_{1s}, \tag{③}$$

$$E_{2s} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}E_{1s} \tag{④}$$

分别代入各能流反射率 $\mathscr{R}_p$,$\mathscr{R}_s$ 和能流透射率 $\mathscr{T}_p$,$\mathscr{T}_s$ 的定义式[①],即得

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_p + \mathscr{T}_p &= |r_p|^2 + \frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2 \\
&= \left|\frac{E'_{1p}}{E_{1p}}\right|^2 + \frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}\left|\frac{E_{2p}}{E_{1p}}\right|^2 \\
&= \frac{(n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2)^2}{(n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2)^2} + \frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}\frac{4n_1^2\cos^2 i_1}{(n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2)^2} \\
&= \frac{(n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2)^2}{(n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2)^2} = 1,
\end{aligned}$$

① 见:赵凯华,钟锡华. 光学(上册). 北京:北京大学出版社,1984:248.

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_s+\mathscr{T}_s&=|r_s|^2+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_s|^2\\&=\left|\frac{E'_{1s}}{E_{1s}}\right|^2+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}\left|\frac{E_{2s}}{E_{1s}}\right|\\&=\frac{(n_1\cos i_1-n_2\cos i_2)^2}{(n_1\cos i_1+n_2\cos i_2)^2}+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}\frac{4n_1^2\cos^2 i_1}{(n_1\cos i_1+n_2\cos i_2)^2}\\&=\frac{(n_1\cos i_1+n_2\cos i_2)^2}{(n_1\cos i_1+n_2\cos i_2)^2}=1.\end{aligned}$$

可见，式①～④对 p，s 分量分别满足能流守恒，从而验证了菲涅耳公式的正确性.

12. 验证菲涅耳公式满足斯托克斯倒逆关系

$$\begin{cases}r^2+tt'=1, & ①\\ r'=-r. & ②\end{cases}$$

答　如图 11-24，设 r，t 分别为光线入射角 i_1 从介质 1(折射率为 n_1)射向介质 2(折射率为 n_2)时的振幅反射率和振幅透射率，r'，t' 分别为光线以入射角 i_2 以介质 2 射向介质 1 时的振幅反射和振幅透射率. 入射角 i_1 和 i_2 满足折射定律关系. 因此，由菲涅耳公式得：对 p 分量，有

$$r_p=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2},\quad r'_p=\frac{n_1\cos i_2-n_2\cos i_1}{n_1\cos i_2+n_2\cos i_1}, \qquad ③$$

$$t_p=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2},\quad t'_p=\frac{2n_2\cos i_2}{n_1\cos i_2+n_2\cos i_1}; \qquad ④$$

对 s 分量，有

$$r_s=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2},\quad r'_s=\frac{n_2\cos i_2-n_1\cos i_1}{n_2\cos i_2+n_1\cos i_1}, \qquad ⑤$$

$$t_s=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2},\quad t'_s=\frac{2n_2\cos i_2}{n_2\cos i_2+n_1\cos i_1}. \qquad ⑥$$

由式③可得

$$r'_p=-r_p. \qquad ⑦$$

由式④得

$$t_pt'_p=\frac{4n_1\cos i_1n_2\cos i_2}{(n_2\cos i_1+n_1\cos i_2)^2}=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}\left(\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}\right)^2$$

$$=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2=\mathscr{T}_p.$$

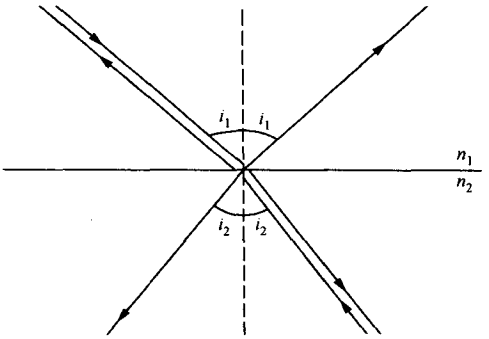


图 11-24

因此，由能量守恒条件得

$$r_p^2+t_pt_p'=|r_p|^2+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2=\mathscr{R}_p+\mathscr{T}_p=1. \qquad ⑧$$

式⑦，⑧表明，对 p 分量来说，菲涅耳公式是满足式①，②的.

同理，由式⑤得

$$r_s'=-r_s. \qquad ⑨$$

由式⑥得

$$t_st_s'=\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_s|^2=\mathscr{T}_s.$$

因此，由能量守恒条件得

$$r_s^2+t_st_s'=\mathscr{R}_s+\mathscr{T}_s=1. \qquad ⑩$$

式⑨，⑩表明，对 s 分量来说，菲涅耳公式也满足.

总之，由上述论证表明，对 p，s 两个分量，菲涅耳公式分别满足斯托克斯倒逆关系；同时还表明，式②正好是能流守恒方程.

13. 证明：当光束射在平行平面玻璃板上时，如果在上表面反射时发生全偏振，则折射光在下表面反射时亦将发生全偏振.

答 如图 11-25 所示，设 n_1，n_3 为空气的折射率，n_2 为玻璃的折射率. 当光线射到平板玻璃上时，上表面的折射角与下表面的入射角相等. 如果上表面的入射角为全偏振角 $i_{1B}=\arctan(n_2/n_1)$，则下表面

的入射角 i_2 满足

$$i_2 = 90° - i_{1B},$$

即

$$\tan i_2 = \cot i_{1B} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_2}.$$

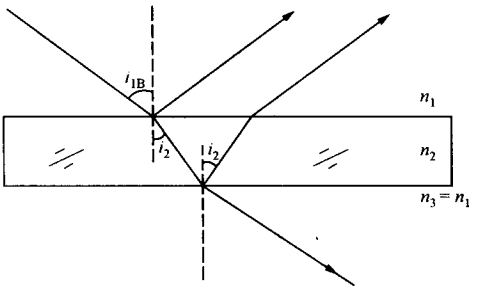


图　11-25

故

$$i_2 = \arctan(n_3/n_2) = i_{2B},$$

也就是说，下表面的入射角也为全偏振角. 因此，上下表面的反射光都是全偏振的(s 方向的线偏振). 玻片堆偏振器能使透射光成为线偏振光，正是利用了平行平板玻璃上下表面同时起偏这一性质.

14. 试从以下诸方面归纳一下隐失波的特点：

(1) 波矢的虚实；

(2) 有无周期性；

(3) 等相面与等幅面；

(4) 瞬时能流与平均能流.

答　如图 11-26 所示，当光波从光密介质到光疏介质($n_1 > n_2$)，以大于全反射临界角 i_c 的入射角 i_1 入射时，发生全反射. 这时，在介质 2 中(界面附近)波长数量级的厚度内仍然存在波场，该波沿 x 轴(界面方向)仍具有行波的特点，但振幅沿 z 轴(纵深方向)按指数急剧衰减. 这种波叫做隐失波，其特点可以大致归纳如下：

(1) 隐失波矢的 z 分量

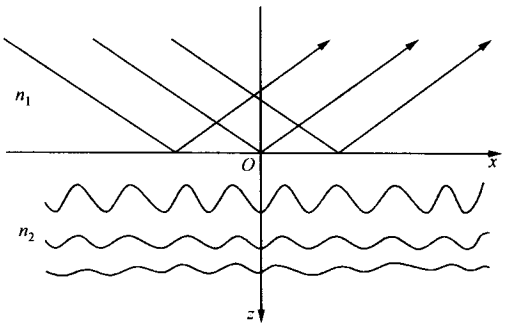


图 11-26

$$k_{2z}=\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2 i_1-\sin^2 i_c}=\mathrm{i}k$$

为纯虚数，即出现虚波矢成分. 上式中 λ_1 为入射波在介质 1 中的波长，其 x 分量的波矢 k_{1x} 仍为实数.

(2) 介质 2 中隐失波的表达式为

$$\begin{cases}\widetilde{E}_2=E_2\mathrm{e}^{-kz}\exp[\mathrm{i}(k_{2x}x-\omega t)],\\ \widetilde{H}_2=H_2\mathrm{e}^{-kz}\exp[\mathrm{i}(k_{2x}x-\omega t)].\end{cases}\qquad①$$

可见，隐失波仍具有时间周期性和沿界面(x 轴)的空间周期性；沿 z 轴则不再具有空间周期性.

(3) 式①可见，其等相面与界面和入射面垂直，等幅面与界面平行. 等相面与等幅面不再重合，而相互正交. 这是一种非均匀波.

(4) 在穿透深度内，沿 z 轴(纵深方向)的瞬时能流不为零(见式①)，但平均能流为零. 这说明在发生全反射时，入射波的能流在几何界面上并不严格地全部反射，而是在穿透到介质 2 的一定深度中逐渐反射. 沿 x 轴的能流不等于零(图中从左侧平行地流向右侧)，这并不违背能流守恒.

平均透射能流为零，可以通过对能流反射率的计算来证明：

当 $i_1>i_c$ 时，

$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1>\frac{n_1}{n_2}\sin i_c>1,$$

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_2 - 1} = \mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}.$$

因此，根据菲涅耳公式得振幅反射率

$$r_\mathrm{p} = \frac{n_2\cos i_1 - \mathrm{i}n_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}}{n_2\cos i_1 + \mathrm{i}n_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}},$$

$$r_\mathrm{s} = \frac{n_1\cos i_1 - \mathrm{i}n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}}{n_1\cos i_1 + \mathrm{i}n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}}.$$

由以上两式即得能流反射率

$$\mathscr{R}_\mathrm{p} = |r_\mathrm{p}|^2 = 1, \quad \mathscr{R}_\mathrm{s} = |r_\mathrm{s}|^2 = 1.$$

由能流守恒知，能流反射率等于 1，则能流透率等于零，即可证明平均透射能流为零.

第三章　干涉装置　光场的时空相干性

§1　分波前干涉装置　光场的空间相干性

1. 我们多以点光源来讨论多种分波前干涉装置；实际装置常采用缝光源. 问：

(1) 缝光源与点光源相比有什么好处？

(2) 缝光源的走向应该怎样才能使条纹既明亮又清晰？

(3) 为什么对缝光源的宽度要加以限制？对它的长度需要限制吗？

(4) 如何在实际中把钠光灯、水银灯变成缝光源？

(5) 实验室中获得的缝光源上各点是完全相干的还是完全不相干的？或部分相干的？

答　(1) 缝光源与点源相比，可以增加光场中的光通量，从而提高干涉条纹的亮度.

(2) 缝光源可以看成大量非相干点源的集合. 在分波前干涉装置中，每个点源都对应一套干涉条纹，屏幕上总的强度是所有各套干涉条纹的非相干叠加. 叠加结果对条纹的清晰度是否有利，要看各套条纹彼此重叠还是彼此错开. 当光源沿条纹走向的方向扩展时，各套条纹彼此重叠. 因此，只有缝光源的走向沿平行条纹方向时，才能使条纹明亮清晰.

(3) 根据空间相干性反比公式

$$b\Delta\theta_0 \approx \lambda,$$

为使光场中有一定的相干孔径角 $\Delta\theta_0$，对缝光源的宽度 b 必须加以限制. 如上分析，在分波前干涉装置中恰当放置的缝光源，其长度方向的非相干性并不影响条纹的衬比度，因此对缝光源的长度无需限制.

但由于在缝光源的宽度方向上，各非相干点源所对应的各套条纹是彼此错开的，非相干叠加结果将使条纹变得模糊不清. 当宽度 b 达到由上式所决定的极限宽度时，衬比度下降到零. 所以，为使干涉条纹有一定的衬比度，缝光源的宽度 b 必须限制在极限宽度以内.

(4) 根据惠更斯原理的次波思想，只要在钠光灯、水银灯的实际扩展光源的后场放置一个透光狭缝，即成为缝光源.

(5) 照明狭缝光源各点的光波中，有来自实际光源中同一点的同一波列，相应的衍射波是相干的；同时还有来自实际光源中彼此独立的各点的非相干波列，相应的后场的衍射波是完全非相干的. 所以，缝光源中的次波源既有彼此相干的成分，又有彼此不相干的成分. 总的来说，缝光源是部分相干的.

2. 在许多分波前干涉装置中，我们可以发现条纹并不是等亮的. 亮纹的强度似乎受某种因子所调制而有一种缓慢的起伏[①]. 试解释这一现象.

答　杨氏干涉装置、菲涅尔双面镜和双棱镜等干涉装置都属于双像干涉系统. 它们的共同特点是：

(1) 有两个相同的衍射单元；

(2) 干涉条纹是衍射波相干叠加的结果，因此，干涉条纹的强度必然要受到单元衍射因子的调制，使条纹的亮度呈现缓慢的起伏.

通常，我们看到的条纹是零级衍射斑叠加的结果.

3. 在实验中观察分波前干涉装置的干涉条纹时往往不用屏幕，而是用测微目镜. 我们知道，在光束交叠区里前前后后都有干涉条纹. 我们用目镜看到的是什么地方的条纹？试说明理由.

答　由于物像之间的等光程性，成像过程并不附加诸光线间的光程差，因此干涉条纹经过系统成像后，除了被缩放以外，并不改变条纹的形状. 我们在测微目镜中看到的是干涉条纹的像，它以物面上的条纹为物，实际上是物面上的条纹. 根据目镜的成像特点，所看到的条纹应在目镜前焦面附近以内一个小范围的平面上.

---

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：269，270.

§2 薄膜干涉(一)——等厚条纹

1. 判断以下各种说法是否确切：

(1) 等厚条纹就是薄膜表面的干涉条纹；

(2) 等厚干涉条纹不仅存在于薄膜表面，而且还存在于薄膜前后的空间里；

(3) 只有膜很薄时干涉条纹才是等厚条纹，膜太厚了就不存在等厚条纹.

答 三种说法都是不确切的. 简要分析如下：

(1) 等厚条纹是指薄膜表面沿等厚线分布的干涉条纹. 如图 12-1 所示，从点源 Q 发出、交于薄膜表面上一点 P 的两条相干线间的光程差为

$$\Delta L = 2nh\cos i. \qquad ①$$

可见，当光线近似正入射时，ΔL 只与厚度 h 有关，从而干涉强度也近似地仅与 h 有关. 这时的干涉条纹是沿等厚线分布的等厚条纹. 但普遍地讲，ΔL 还与倾角 i 有关，从而等光程(即等强度)的轨迹与 h 和 i 都有关，条纹必然是偏离等厚线的. 因此，一般说来，薄膜表面的干涉条纹并不是等厚条纹；等厚条纹只是一种在特定实验条件下出

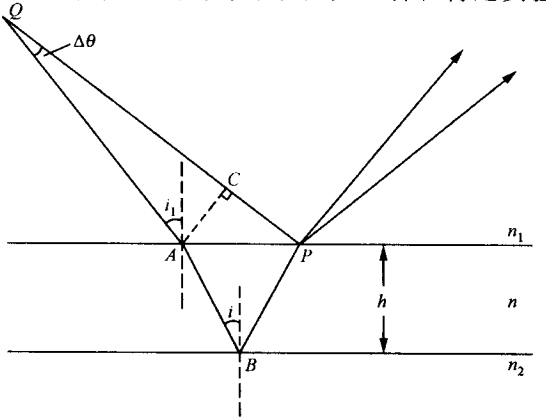


图 12-1

现的一种特殊情形.

(2) 只要由 Q 点发出的光束足够宽,相干光束的交叠区可以从薄膜表面附近一直延伸到薄膜前后的无穷远处. 从而,薄膜干涉条纹不仅存在于薄膜表面,而且还存在于薄膜前后的空间里;但不能笼统地把这种干涉条纹叫做等厚条纹. 仅当光线正入射时,薄膜表面的干涉条纹才是等厚条纹.

(3) 对式①取全微分,得

$$\delta(\Delta L) = -2nh\sin i\delta i + 2n\cos i\delta h.$$

上式表明,由于倾角 i 引起的条纹对等厚线的偏离程度与膜厚 h 有关,h 越大,偏离越显著. 因此,若光线斜入射,当膜很薄时,表面干涉条纹近似为等厚条纹;当膜太厚时,表面干涉条纹就不能看成是等厚条纹了. 但在光线近似正入射时,表面条纹形态与几何等厚线轨迹可很好地一致.

2. 在实际中经常遇到的情况里,产生干涉条纹的薄膜是夹在两片固体媒质间的空气层(见图 12-2). 这里有 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 四个反射面,为什么我们只考虑 Ⅱ, Ⅲ 两个面反射的光之间的干涉,而不考虑 Ⅰ, Ⅳ 两个面?

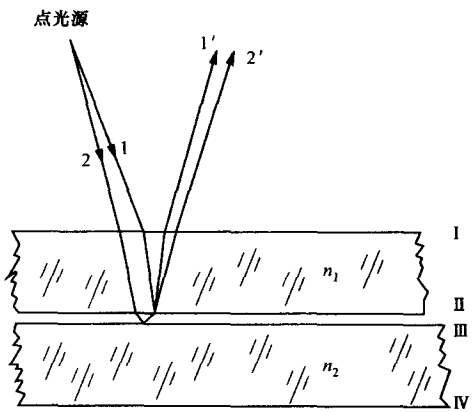


图　12-2

答　这主要是因为上、下两块平板的厚度过大(远大于其间的空气层),以致所允许的光源宽度远小于空气膜层对应的光源极限宽度. 换句话说,在实际扩展光源照明下,上平板或下平板自身产生的干涉场的衬比度近似为零.

3. 按图 12-3(a)方式用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹时,宜采用点光源还是扩展光源?有时当我们找不到干涉条纹时,可在一小片纸上刺一小针孔. 透过针孔注视薄膜表面时,就比较容易看到干

涉条纹.这是为什么?

答 根据空间相干性的要求,为提高条纹的衬比度,应限制光源的宽度.点光源照明时,衬比度最高.但在用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹时,由于眼瞳对光束截面的限制,只能接收来自扩展光源上一部分点源的反射线,从而限制了光源的有效宽度(参见图 12-3(b)).因此,决定视场中条纹衬比度的不是扩展光源的实际宽度,而是被瞳孔所限制的有效宽度.同时,若光源的宽度不够大,肉眼只能同时看到薄膜表面上很小一块面积内的干涉条纹,其他地方的条纹均看不到.因此,较大的扩展光源还有利于扩展观察条纹的视场.

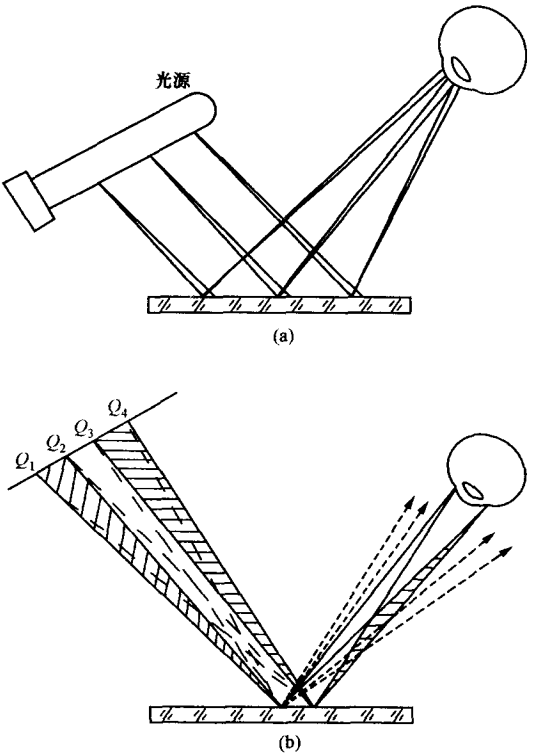


图 12-3

透过针孔比较容易看到干涉条纹,其原因在于,针孔进一步限制

了扩展光源的有效宽度，从而提高了观察区域中的条纹的衬比度.

4. 窗玻璃也有两个表面. 为什么我们从来看不到在其上有干涉条纹？能否估算一下，薄膜厚到什么程度，我们用肉眼就看不到干涉条纹了？

答　如图 12-4 所示，来自扩展光源不同点 Q_1，Q_2 到同一场点 P 的两对相干光线的倾角 i 不等，从而光程差是不等的. 这表明，光源上不同点在薄膜表面产生的条纹是彼此错开的，总的强度是各套条纹强度的非相干叠加，叠加结果必然使条纹衬比度下降. 当扩展光源上两点源 Q_1，Q_2 在同一场点 P 产生的光程差之差达到光波长 λ 时，衬比度即下降为零. 由于倾角 i 变化引起的 P 点处两相干光线的光程差改变

$$\delta(\Delta L) = -2nh\sin i\delta i, \qquad ①$$

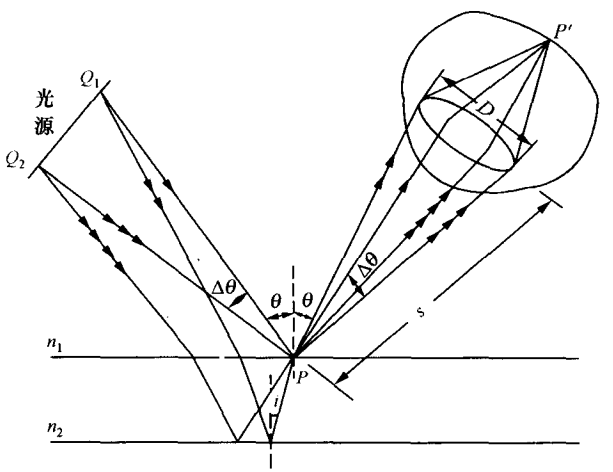


图　12-4

式中负号表示当 i 增大时，光程差减小. 上式说明 $\delta(\Delta L)$ 与膜厚 h 成正比. h 越大，扩展光源造成的条纹衬比度下降越严重；h 大到一定程度时，干涉条纹就看不见了. 窗玻璃两表面间的厚度太大，所以总是看不见干涉条纹的.

由式①可知,欲使条纹有一定的衬比度,必须满足

$$2nh\sin i\delta i \leqslant \lambda.$$

由此得极限厚度为

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{2n\sin i\delta i},$$

式中 i 为膜内光线倾角(即折射角),它由入射角 θ(即观察方向角)决定,δi 由场点 P 对眼瞳的入射孔径角

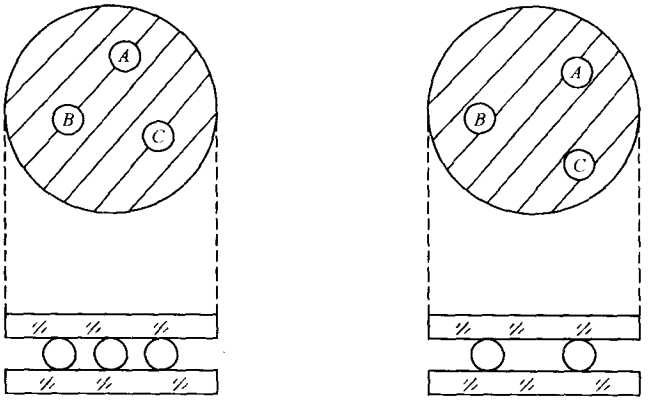
$$\delta\theta = D/s$$

决定. 根据折射定律,并对作角度微分运算,可知当 $n>n_1$ 时,$i<\theta,\delta i<\delta\theta$. 作为估算,不妨令 $\delta i=\delta\theta$,并取观察距离 $s=25$ cm(明视距离),眼瞳直径 $D=4$ mm,$i=30°$,$n=1.5$,$\lambda=0.50$ μm,算出

$$h_{\max} = \frac{s\lambda}{2Dn\sin i} = 20.8\ \mu\text{m}.$$

可见,欲用肉眼看到薄膜干涉条纹,膜层应很薄(远远小于窗玻璃的厚度). 这种限制主要来自扩展光源各点的非相干性. 这是光的空间相干性问题.

5. 图 12-5(a),(b)所示的是检验滚珠质量的干涉装置. 在两块平板玻璃之间放三个滚珠 A,B,C. 在钠黄光的垂直照射下,形成如图上方所示的干涉条纹. 根据这样的干涉条纹,你能分别就图中两种情形对三个滚珠直径的一致性作出什么结论? 用什么方法可以进一



(a) (b)

图 12-5

步判断它们之中哪个大、哪个小？

答　根据图 12-5 所示的静态等厚条纹可判断，在图 12-5(a)中，滚珠 A 与 B 直径一致，与滚珠 C 不一致，A，B，C 的直径分别相差 $3\lambda/2$($\lambda=5893$ Å 为钠黄光波长)；在图 12-5(b)中，滚珠 A，B，C 直径均不一致，A 与 B 的直径相差 λ，B 与 C 相差约为 $3\lambda/2$，A 与 C 相差约为 $5\lambda/2$. 然而，仅根据静态条纹不能判断滚珠大小，必须利用动态条纹才能进一步判断. 具体方法是用手指轻轻压一下盖在上面的平板玻璃的中央，观察条纹移动的方向. 在 12-5(a)情形中，如条纹向滚珠 A，B 方向移动，则说明 A，B 比 C 大；反之，C 比 A，B 大. 在图 12-5(b)情形中，如条纹向滚珠 A 方向移动，则说明 A 最大，C 最小；反之，A 最小，C 最大.

6. 图 12-6 是检验精密加工工件表面光洁度的干涉装置：下面是待测工件，上面是标准的平玻璃板，在钠黄光的垂直照射下看到如图所示的干涉花样. 根据这样的干涉花样，你能对工件表面的光洁度作出怎样的结论？

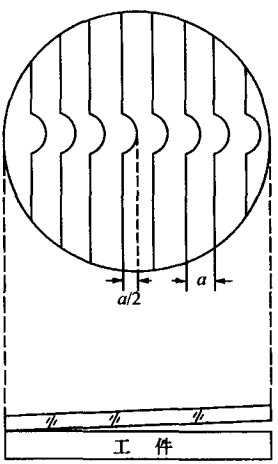


图　12-6

答　等厚条纹指示了薄膜(空气层)等厚线的轨迹. 根据各条纹弯曲处在一条直线上可知，工件表面有一极小的不平整纹路；并且根据条纹是背离尖劈交棱方向弯曲的，可以判断出纹路是凸的，其高度为

$$h=\frac{a/2}{a}\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4}=\frac{5893\ \text{Å}}{4}=1473\ \text{Å}.$$

由此可见，尖劈等厚条纹可以用来测量精密加工工件表面的不平整度.

7. 图 12-7 是检验透镜曲率的干涉装置. 在钠黄光的照射下，显示出图上方的干涉花样. 你能否判断透镜下表面与标准模具之间的气隙厚度最多不超过多少？

答　图 12-7 所示的干涉花样为等厚条纹，相邻条纹间厚度差为 $\lambda/2$. 图中共有三圈完整条纹，其厚度差均为 λ；中央环形条纹与中心的厚度差小于 $\lambda/2$. 由此可知气隙厚度为

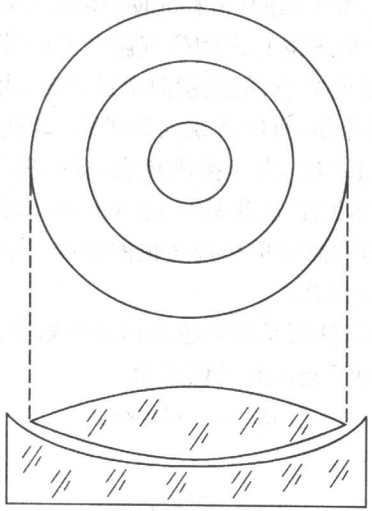


图 12-7

$$\Delta h < \frac{3}{2}\lambda = \frac{3}{2} \times 5893\ \text{Å} = 8840\ \text{Å},$$

即气隙厚度最多不超过 8840 Å.

8. 试解释图 12-8 所示的现象,即下压验规时,若光圈扩大,则表示透镜曲率太大(图 12-8(a));反之,表示透镜曲率过小(图 12-8(b)).

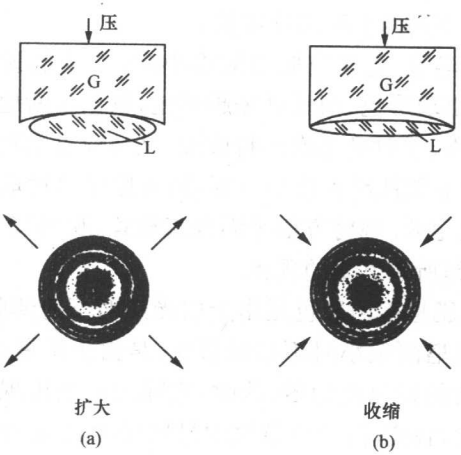


图 12-8

答　图 12-8 是用牛顿圈(俗称光圈)检测透镜曲率的装置,其中牛顿圈是由验规 G 和透镜 L 之间的气隙产生的等厚条纹. 当下压验规时,气隙的劈角都要减小;但透镜曲率过大时,由于接触点在中心,劈角减小使等厚线外移,所以条纹向外扩张. 这就是图 12-8(a)的情形. 而当透镜曲率过小时,由于接触点在边缘,劈角减小使等厚线向中心靠拢,所以条纹收缩. 这就是图 12-8(b)所示的情形.

9. 说明水面的汽油层里呈现彩色的原因. 从不同的倾斜方向观察,颜色会变吗? 为什么?

答　水面上的汽油层呈现彩色是白光照射下油层薄膜干涉的结果. 薄膜表面的两相干光线的光程差为

$$\Delta L = 2nh\cos i,$$

从而相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos i.$$

在膜厚 h 和倾角 i 不变时,相位差还与波长 λ 有关. 相干叠加结果使某些波长的光强得以加强,某些波长的光得以削弱. 因白光中含有各种波长成分,所以薄膜干涉的结果使原来无色透明的汽油呈现彩色. 又由于相位差 $\Delta\varphi$ 与倾角 i 有关,因此当改变观察方向时,油膜呈现的彩色也要发生变化.

10. 试作下列两个观察性实验:

(1) 吹肥皂泡. 起初当肥皂泡很小时,不显示颜色;随着肥皂泡的胀大,开始出现彩色,而且越来越鲜艳,颜色不断地变化;最后光泽变暗,彩色消失,此时肥皂泡即将破裂. 试解释以上现象.

(2) 用一根细铁丝折成小方框,浸入肥皂水后取出,这时在方框上蒙了一层肥皂膜. 现将方框平面竖直放置,观察其上肥皂膜彩色变化的情况. 解释所观察到的现象.

答　(1) 肥皂泡的彩色是由于白光照明下的薄膜干涉现象而出现的. 起初,肥皂泡很小时不显示彩色,是由于扩展光源照明下膜太厚使干涉条纹的衬比度为零. 此时,实际上还未出现干涉条纹. 随着肥皂泡的胀大,膜变薄,干涉条纹的衬比度增加,开始出现干涉条纹. 由于白光照明,各种波长的干涉条纹彼此错开,呈现彩色. 肥皂泡越

大,膜越薄,条纹的衬比度越高,彩色越鲜艳.但是,膜太薄,以致当有效光程差小于一个光波长 λ(考虑到半波损,膜厚应小于 $\lambda/4$)时,干涉强度中的干涉项减小,以致出现负值时,干涉强度越来越趋于零.这相当于膜层厚度趋于零,无反射光了,即肥皂泡变得暗淡无光.这时,肥皂泡就将破裂了.

(2) 把细铁丝小方框上的肥皂膜竖直放置,形成上薄下厚的尖劈状薄膜.在白光照明下,可以观察到平行于薄膜交棱的彩色等厚条纹.由于肥皂膜在重力作用下缓慢地向下流动,肥皂膜上部变薄,于是干涉条纹向下移动.当上部肥皂膜厚度继续变小,直到小于 $\lambda/4$ 时,肥皂膜上部薄膜变暗;随着肥皂膜不断向下流动,薄膜暗淡的范围不断扩大,以致肥皂膜破裂.

§3 薄膜干涉(二)——等倾条纹

1. 从以下几个方面比较等厚条纹和等倾条纹的区别:

(1) 两者对光源的要求和照明方式有何不同?能否用扩展光源观察等厚条纹?用平行光观察等倾条纹将会怎样?

(2) 两者的接收(观测)方式有何不同?如果用一小片黑纸遮去薄膜表面某一部位,这将分别给等厚和等倾条纹带来什么影响?

答 (1) 对于等厚条纹来说,进行严格观测的照明方式应用傍轴窄光束照明.采用扩展光源照明,将导致条纹对等厚线的偏离和条纹衬比度的下降.膜越厚,以上现象越严重.但在要求不太高时,采用扩展光源照明对观察反而往往是利大于弊的,这是因为扩展光源有利于增加视场,影响条纹衬比度的光源有效宽度可以用接收条纹的光瞳来限制.

对于等倾条纹来说,既可用点光源照明,也可用扩展光源照明.采用扩展光源照明是有利无害的,不但不会影响条纹的衬比度,反而可以增加亮纹的强度,使等倾条纹变得更加明亮.当照明光源方向性太强时,将使等倾条纹的图样残缺不全.在平行光照明的极端情形下,屏幕上相干光束的交叠区收缩为一个点,不可能出现干涉图样.

(2) 等厚条纹出现在非均匀薄膜表面,只能用成像系统接收或

肉眼直接观察，不能用屏幕接收. 等倾条纹出现在均匀薄膜的无穷远处，宜用屏幕接收(当然，也可用成像系统或肉眼对无穷远调焦观察). 如果用一小片黑纸遮去薄膜表面某一部位，对等厚条纹来说，除遮去部分外条纹形状不变；对等倾条纹来说，不会影响条纹的完整性.

2. 如果薄膜上、下表面稍有夹角，我们能观察到等倾条纹吗？这时干涉条纹在哪里？

答　如果薄膜上、下表面稍有夹角(夹角很小)，则其定域中心在离薄膜表面较远的地方(既可在薄膜之前，又可在薄膜之后)，由入射光线的倾斜方向与薄膜两表面交棱的相对方位决定(如图 12-10 所示). 一般地，我们可以在远方接收到椭圆形条纹.

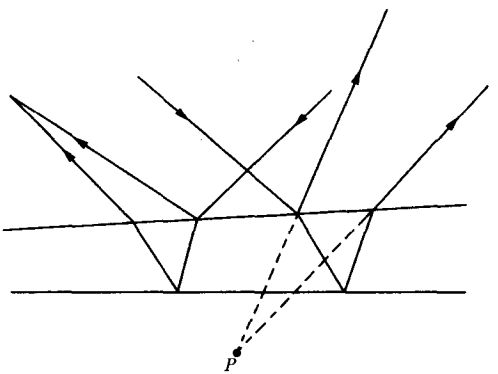


图　12-10

§4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性

1. 迈克耳孙干涉仪中反射镜 M_1 和 M_2 的像 M_2' 组成一等效空气层(见图 12-11)[①]. 下面讨论迈克耳孙干涉仪调节中的几个问题：

(1) 当转动摇把使 M_1 平移时，我们如何判断等效的空气层在增厚还是减薄？

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：309～311.

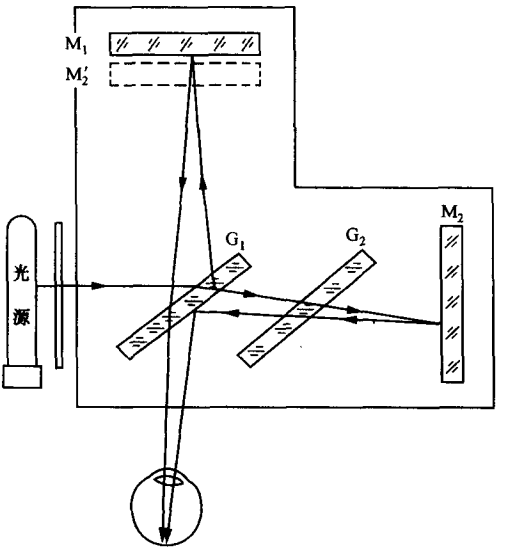


图 12-11

(2) 当我们看到平行的直线干涉条纹时,怎样判断等效空气层哪边厚哪边薄?

(3) 如何有意识地调节镜面倾角,使 M_1,M_2' 完全平行?

(4) 根据什么现象,可以比较准确地判断 M_1,M_2' 是否严格平行?有经验的人是这样做的:前后左右移动自己的眼睛,如果发现圆形干涉条纹的中心有变动(条纹的吞吐),则 M_1,M_2' 尚未达到严格的平行.只有调节到干涉场的中心相当稳定,只随眼睛一起平移而不发生条纹的变化,才算比较满意.试解释这是为什么.

答 (1) 我们可以根据条纹的变化规律来判断.如果视场中是同心圆环形等倾条纹,则当圆环从中心冒出且条纹变细变密时,等效空气层增厚;反之,当圆环从中心吞进且条纹变粗变稀时,等效空气层减薄.如果观察到的是等厚干涉花样,则当条纹变弯且衬比度下降时,等效空气层变厚;反之,当条纹变直且衬比度提高时,等效空气层变薄.

(2) 当看到平行直线干涉条纹时,说明等效空气层是尖劈形的,条纹越直,空气层越薄.然而,仅根据直线条纹还难以判定交棱位置.

转动摇把使 M_2 平移，直线条纹将会发生弯曲，弯曲的条纹必然中间凸向交棱一方，即凸向等效空气层较薄的一边.

(3) 当 M_1 和 M_2' 有微小夹角时，观察到的是等厚条纹，条纹间距与交角成反比. 调节 M_1 或 M_2 后的微调螺丝，当条纹间距变大时，说明夹角在减小；当视场中强度均匀或出现同心圆环形等倾条纹时，说明 M_1 和 M_2' 已完全平行了.

(4) 当 M_1，M_2' 严格平行时，经等效空气膜上下表面反射的两相干光线是严格平行的. 当人眼对无穷远调焦时，平移眼睛，方向相同的两平行反射线恒交于视网膜上同一点；垂直反射的两相干光线的表观光程差恒为零. 故平移眼睛时，条纹形状不变，中心稳定，只是中心位置随眼睛的移动而移动. 如果 M_1 和 M_2' 不是严格平行，则圆形条纹中心的强度并非倾角严格为零的两相干光线叠加的结果. 当眼睛平移时，倾角可能改变，导致光程差的改变，从而会使中心条纹发生吞吐的不稳定现象.

2. 判断下列说法是否正确：

(1) 在面光源照明的光场中，各点(次波源)都是完全不相干的.

(2) 在点光源照明的光场中，各点(次波源)都是完全相干的.

(3) 在理想的单色点光源激发的光场中，各点(次波源)都是完全相干的.

(4) 以纵向的相干长度为轴，横向的相干面积为底作一柱体. 有人称它的体积为相干体积. 在相干体积内，任意两点(次波源)都有较高程度的相干性.

答　(1) 在面光源照明的光场中，横向波面上相干孔径角以内的任意两点都有一定的相干性；纵向波线上相干长度以内的任意两点也有一定的相干性. 光源扩展只对空间相干性有影响，其相干孔径角与光源宽度成反比，对时间相干性并无影响. 因此，认为面光源的光场中各点都是完全不相干，是不正确的.

(2) 点光源照明的光场中具有最高的空间相干性，即横向波面上各点都是完全相干的. 但其光场的时间相干性，即纵向波线上各点的相干性仍受单色性限制，只有在相干长度以内的两点才有一定的相干性；距离超过相干长度的两点仍是不相干的. 因此，不能认为点

光源照明的光场中各点都是完全相干的.

(3) 点光源具有最高的空间相干性,即横向波面上各点都是完全相干的.理想单色光的波列是无限长的,波线上各点都是完全相干的,即具有最高的时间相干性.因此,在理想单色点光源激发的光场中,各点都是完全相干的.

(4) 在相干体积内,横向波面上的任意两点都在相干空间角内,纵向波面上的任意两点都在相干长度以内.所以,相干体积内的任意两点都有较高程度的相干性.

§5 多光束干涉 法布里-珀罗干涉仪

1. 多光束干涉与双光束干涉相比,两者在处理方法和强度分布方面有什么共同和不同之处?干涉条纹各有什么特点?

答 相干强度正比于合成振幅的平方.振动的合成可用矢量图解法和复数法求得.在计算之前,必须明确各列波在场点的振幅关系和相位关系.因此,无论是处理多光束干涉,还是双光束干涉,都必须分析各光束间的振幅关系和相位关系.尤其是相位关系的分析,乃是处理一切干涉问题的出发点.在相邻两光束间相位差 δ 相同的条件下,多光束干涉和双光束干涉强度主极大的位置相同,仅由 δ 决定;干涉图样的形状也相同.以法-珀仪和迈克耳孙干涉仪中的等倾条纹为例,比较两者可见,两种条纹的性质极为相似:(1) 条纹形状为同心圆环,内环的级别高,外环的级别低;(2) 相邻条纹的间隔正比于波长,反比于两反射面的间隔;(3) 条纹的分布中央稀,边缘密,等等.但两者的条纹有一个明显的差别,即法布里-珀罗干涉仪中的亮纹细锐,迈克耳孙干涉仪中的亮纹较宽.参加干涉的光束数目越多,条纹锐度越大.这是多光束干涉普遍的特征.

2. 试分别回答:在高反射率和低反射率的情况下,观察透射和反射条纹哪个有利?为什么?

答 在薄膜多光束干涉中,在高反射率时观察透射条纹有利;在低反射率时观察反射条纹有利.对此,可从透射光强公式出发进行分析.在薄膜两侧折射率相等时,透射光强为

$$I_T = I_0 \Big/ \left[1 + \frac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2}\right]. \qquad ①$$

当光强反射率 $R \ll 1$ 时，

$$(1-R)^2 \approx 1,$$

$$\frac{1 + 4R\sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2} \approx 1 - 4R\sin^2\frac{\delta}{2} = 1 - 2R(1-\cos\delta),$$

从而式①变成

$$I_T = I_0[1 - 2R(1-\cos\delta)]. \qquad ②$$

反射光强为

$$I_R = I_0 - I_T = 2RI_0(1-\cos\delta).$$

式②表明，透射光的干涉图样中有一很强的均匀背景 $I_0(1-2R)$，条纹的衬比度很低. 上式表明，反射光的干涉条纹衬比度为 1. 可见，在低反射率时观察反射条纹有利.

在高反射率时，$R \approx 1$，$4R/(1-R)^2 \gg 1$. 因此，I_T 对相位差 δ 的变化很敏感，即透射条纹中亮纹的锐度很大. 根据强度互补性，反射条纹中的亮纹就变得较宽了. 可见，在高反射率时观察透射条纹有利. 不过，这时若观测反射条纹，则有同样细锐的暗线.

3. 为什么法布里-珀罗干涉仪是高分辨本领、小量程的分光仪器？其分辨谱线的精度由什么因素决定？自由光谱范围受什么因素制约？

答　法-珀仪的色分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}.$$

由于法-珀仪是长程干涉仪，腔长 h 很长，从而干涉条纹的级别 k 很高；加之分束板镀银面的反射率 R 很高，就使仪器的分辨本领很高. 例如，取 $h = 10$ cm，$R = 98\%$，$\lambda = 0.5$ μm，以正入射估算得 $k = 4\times10^5$，并由上式算出分辨本领 $\lambda/\Delta\lambda = 6.2\times10^7$.

法-珀仪的色散本领为

$$\frac{\delta i_k}{\delta\lambda} = \frac{k}{2nh\sin i_k}.$$

由于 k 很大，且 i_k 很小，由上式可知色散本领必然很大. 色散本领大，就会导致不同波长相邻级别的条纹容易重叠. 这就是高分辨本领且小量程的道理.

法-珀仪的可分辨的最小波长间隔

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

决定了分辨谱线的精度. 由上式可见，干涉级别 k 越高(要求腔长 h 大)，反射率 R 越大，精度越高. 例如，仍取 $h=10$ cm，$R=98\%$，$\lambda=0.5\ \mu$m，可算出 $\delta\lambda=8.0\times10^{-5}$ Å.

自由光谱范围，即相邻级别不同波长条纹不重叠的光谱范围. 决定了仪器的量程. 设不同波长 λ 和 $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$ 的两束光入射到法-珀标准具上，则各产生一组同心圆环状的干涉条纹. 对于同一干涉级 k，λ'的干涉圆环的直径比 λ 的小一些，如图 12-12 所示. 当满足

$$2nh\cos i_k = k\lambda = (k-1)\lambda'$$

时，λ 的第 k 级亮环与 λ'的第 $k-1$ 级亮环重叠，因此得自由光谱范围

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{k-1} = \frac{\lambda'}{k}. \qquad ①$$

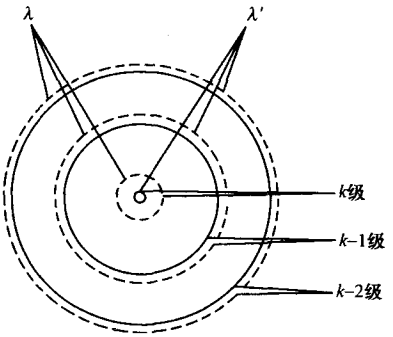


图 12-12

通常 i_k 很小，$\cos i_k\approx1$，$n=1$(空气)，所以

$$k = 2h/\lambda,$$

从而得

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda\lambda'}{2h} = \frac{\lambda^2}{2h}. \qquad ②$$

因实际上 λ 和 λ' 相差很小，故式中取 $\lambda\lambda' = \lambda^2$. $\Delta\lambda$ 为某一波长光的干涉圆环与另一波长光的干涉圆环重叠时的波长差. 若给定腔长 h，$\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 内的波长产生的干涉圆环不发生重叠，此时的 $\Delta\lambda$ 值即为干涉仪的量程，称做自由光谱范围. 由上式可见，自由光谱范围 $\Delta\lambda$ 与腔长 h 成反比. 例如，对 $h = 10$ cm 的法-珀标准具，当 $\lambda = 5000$ Å 时 $\Delta\lambda = 1.3 \times 10^{-2}$ Å. 也就是说，对于该标准具，只有波长在 5000～5000.01 Å 范围内的光谱才没有邻级干涉圆环的重叠现象.

由①，②两式可见，高精度要求腔长 h 大(从而干涉级 k 也大)，而大量程则要求 h 小，两者是矛盾的. 可见，高分辨常常伴随小量程.

第四章　衍射光栅

§1　多缝夫琅禾费衍射

1. 为什么 $d\sin\theta=k\lambda$ 是缝间干涉因子主极强条件，而 $a\sin\theta=k\lambda$ 却是单缝衍射的暗纹条件？

答　如图 13-1(a)，在多缝夫琅禾费衍射中，相邻两缝对应点衍射线间到场点的光程差

$$\Delta L = d\sin\theta.$$

它等效把每条狭缝内的次波源看做一个波源时，两个相邻分立相干波源到场点的光程差. 显然，当 $\Delta L=k\lambda(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，各分立波源在场点的振动叠加相互加强，合振动强度取极大值. 因此，$d\sin\theta=k\lambda$ 为缝间干涉的主极强条件.

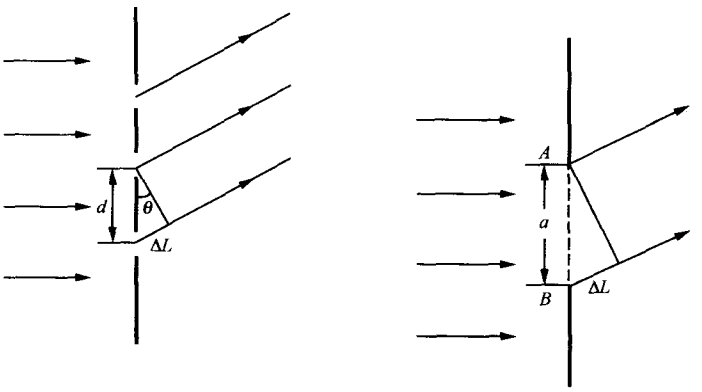


图　13-1

如图 13-1(b)，在单缝夫琅禾费衍射中，单缝上下边缘 A，B 两次波源发出的衍射线到场点的光程差

$$\Delta L = a\sin\theta.$$

场点的合振动不仅有 A,B 两次波源的贡献，还有 A,B 间大量连续密排次波源的贡献. 当 $\Delta L=k\lambda(k=\pm1,\pm2,\cdots$；必须注意，$k\neq0)$时，整个狭缝上的次波面可分割成偶数个半波带；所有半波带在场点的贡献成对抵消，合成结果为零. 所以，$a\sin\theta=k\lambda$ 为单缝衍射的暗纹条件.

本题反映了分立波源和连续密排波源两种情形中产生干涉强度的差别；其结论具有普遍意义，在处理干涉和衍射问题时经常被引用.

2. 设缝宽 a 与缝距 d 之比 $a/d=m/n$(是一不可简约的分数)，讨论缺级情况. $a/d=1$ 的情况应怎样理解？

答　缺级发生在缝间干涉因子主极强和单缝衍射因子零点相重合的位置. 缝间干涉因子主极强条件为

$$d\sin\theta_k = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots),$$

单缝衍射暗纹条件为

$$a\sin\theta_{k'} = k'\lambda \quad (k' = \pm 1,2,\cdots).$$

在缺级位置上，$\sin\theta_{k'}=\sin\theta_k$，于是

$$\frac{a}{d} = \frac{k'}{k}.$$

以 $a/d=m/n$ 代入上式，得

$$k' = km/n.$$

欲使 k' 为非零整数，必须使

$$k = \pm n, \pm 2n,\cdots,$$

即凡是第 $ln(l=\pm1,\pm2,\cdots)$级的主极强均发生缺级(注意，$l\neq0$). 当 $a/d=1$ 时，所有缝间干涉因子的主极强均为缺级. 这种情形相当于把一条单缝分割成缝宽、缝距均为 a 的若干条单缝作等效处理.

3. 多缝衍射屏有缝宽 a、缝距 d、缝数 N 等三个结构参数. 试分别讨论每一个参数的变化是如何影响主极强的位置、主极强的半角宽度和主极强的强度的.

答　(1) 主极强的位置(角方位)由下式决定：

$$\sin\theta_k = k\lambda/d \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots),$$

仅由缝距 d 决定，与缝宽 a，缝数 N 无关. d 越小，各级主极强所对应的衍射角越大，相邻主极强间的角间隔也越大.

(2) 主极强的半角宽度为

$$\sin\theta_k = k\lambda/Nd,$$

与 Nd(即多缝衍射屏的总有效长度)成反比，与缝宽 a 无关. 当多缝衍射屏的总有效长度给定后，改变缝距 d(或缝数 N)，并不影响主极强的半角宽度，因为 Nd 总是维持不变的.

(3) 主极强的强度是单缝该方向强度的 N^2 倍. 所以缝数 N 越大，主极强的强度也越大. 由于主极强的强度要受到单缝衍射因子的调制，而单缝衍射零级斑的半角宽度与缝宽 a 成反比，所以 a 越大，高级主极强的相对强度越大. 此外，当 $a/d=m/n$ 是一不可简约的分数时，第 $\pm n$，$\pm 2n$，…级主极强的强度为零，即造成缺级.

4. N 缝衍射装置中入射光能流比单缝大 N 倍，而主极强却大 N^2 倍. 这违反能量守恒定律吗？

答 缝数 N 越大，主极强的锐度越大，即能量的方向性越强. 这正是多光束干涉的基本特征. 虽然主极强的峰值强度增加为单缝的 N^2 倍，而其半角宽度与 N 成反比，但仍使输出的总能流为单缝的 N 倍. 我们须知，光强并不代表能流，而仅是平均能流密度.

5. 画出以下三种情况下的夫琅禾费衍射强度曲线，并比较它们的特点：

(1) 宽度为 a 的单缝；

(2) 宽度为 $2a$ 的单缝；

(3) 宽度为 a、间距 $d=2a$ 的双缝.

答 三种强度分布分别见图 13-2(a)～(c)，特点如下：

(1) 从宽度为 a 变到宽度为 $2a$ 的单缝，各级极强的强度增加到 4 倍，角宽度减小到 1/2. 考虑到此时入射能流也加倍，以上强度和宽度的改变正是能流守恒的反映. 宽度的改变体现了衍射反比关系.

(2) 当进一步改变成宽度为 a、间距 $d=2a$ 的双缝时，与宽度为 a 的单缝相比，主极强的强度为单缝在该方向的 4 倍，宽度为单缝 0 级主极强的 1/4(主极强的锐度加大)；并在单缝衍射强度曲线的包络内出现了一系列新的主极强. 这都是缝间干涉因子的作用. 缝间干

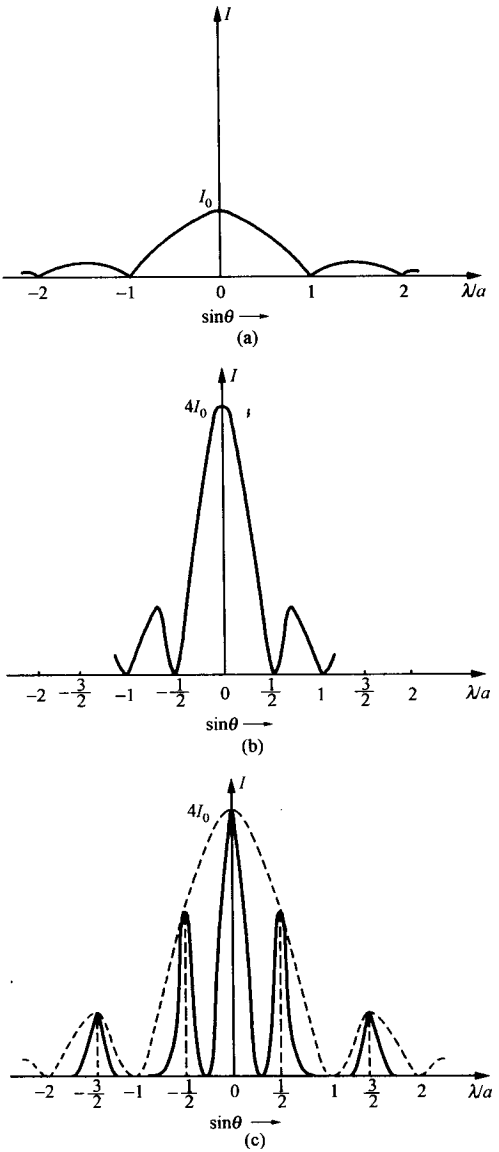

I
I_0
−2
−1
0
1
2
λ/a
sinθ
(a)
I
$4I_0$
$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$
sinθ
(b)
I
$4I_0$
sinθ
(c)

图　13-2

涉的±2，±4，…级主极强为缺级，是单缝衍射因子调制的结果.

(3) 图 13-2(c)，(b)相比，前者主极强宽度为后者的 1/2. 对此可这样分析：宽度为 $2a$ 的单缝(图 13-2(b))可等效为缝宽为 a、间距 $d=a$ 的双缝，因此得 $\Delta\theta_b=\lambda/Nd=\lambda/2a$；而对双缝(图 13-2(c))，显然有 $\Delta\theta_c=\lambda/Nd=\lambda/4a$.

6. 比较一下本节[①]讨论的夫琅禾费双缝衍射和第二章 §4 讨论的杨氏双缝干涉.

答 杨氏双缝干涉强度分布为

$$I(x',y')=4A^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right), \qquad ①$$

其中 A^2 为单缝在屏幕上产生的强度. 当横向观测范围 x' 和纵向距离 D 相比，满足远场条件(蕴涵傍轴条件)时，

$$A^2=a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right), \quad \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},$$

且 $x'/d\approx\sin\theta$，式中 a 为缝宽，d 为双缝间距. 因此式①变成

$$I(x',y')=I(\theta)=4a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right). \qquad ②$$

多缝夫琅禾费衍射强度分布为

$$I(\theta)=a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\beta}\right)^2, \qquad ③$$

其中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}.$$

取 $N=2$，即得双缝夫琅禾费衍射强度分布

$$I(\theta)=4a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta=4a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right).$$

上式与式②相同. 可见，杨氏双缝干涉的结果可以统一在多缝夫琅禾费衍射强度分布公式③中. 当单缝线度 a 很小($a\ll d$)时，单缝衍射因子零级半角宽 $\Delta\theta=\lambda/a$ 较大. 在中心附近小范围内，单缝衍射因子

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：2～15.

$$\sin\alpha/\alpha = A = \mathrm{C}\ (\text{常数}).$$

这就是在杨氏双缝干涉中，我们把傍轴范围内的干涉条纹看成等强度的依据.

7. 在菲涅耳双棱镜干涉条纹的照片[①]中可以看到各级条纹强度不等，它们按一定的规律起伏. 试解释这类现象.

答　在菲涅耳双棱镜实验中，每个棱镜都是一个衍射单元，干涉条纹是两个棱镜的衍射波相干叠加的结果. 因此，干涉条纹的强度必然要受到单元衍射因子的调制，呈现出按单元衍射强度变化曲线规律的起伏. 双像干涉系统中，干涉条纹的强度起伏都有与菲涅耳双棱镜实验相类似的现象.

8. 衍射屏上有大量缝宽 a 相同、但间距 d 作无规分布的缝. 它的夫琅禾费衍射图样该是什么样的？

答　缝宽 a 相同，则单缝衍射因子相同，间距 d 无规，使各相邻两缝间干涉时相位差 δ 也无规. 缝数 N 大，则 δ 的各种可能取值的几率是相等的. 因此，对于这个衍射屏在夫琅禾费衍射中，缝间干涉时的所有干涉项互相抵消. 相干叠加的结果与非相干叠加相同，即衍射图样与单缝衍射相同，只是强度处处(除零级及其附近小范围的近轴强度以外)增加为单缝的 N 倍.

9. 圆孔的夫琅禾费衍射强度分布函数为

$$I(\theta) = I_0\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2, \qquad ①$$

其中 $k=2\pi/\lambda$，a 为圆孔半径，J_1 代表一阶贝塞耳函数. 当衍射屏上有很多(N 个)孔径相同、但位置无规分布的圆孔时，衍射强度分布函数的表达式如何？

答　与上题同理，大量孔径相同、但位置无规的圆孔夫琅禾费衍射场，其元间干涉的相干叠加表现为非相干叠加的结果. 衍射强度分布函数与单个圆孔的形式(见式①)相同，只是再乘上一个常数 N (圆孔数目)，即

---

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(上册). 北京：北京大学出版社，1984：270.

$$I(\theta) = NI_0\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2. \qquad ②$$

10. 在玻璃板上撒上大量无规分布的不透明球形颗粒. 设颗粒半径相同,求衍射强度分布的函数表达式. 由此启发,你能想到一种测定颗粒半径和密度的方法吗?

答 根据巴比涅原理,除零级衍射斑的中心点外,圆屏及与之互补的圆孔的夫琅禾费衍射场的强度分布相同. 故本题的衍射屏的强度分布函数与上题相同(上题中式②),这表明,衍射场的强度处处(除零级中心点外)与球形颗粒总数 N 成正比. 由此,我们可通过夫琅禾费衍射场强度的测量而测定衍屏上的颗粒密度. 不过,在被测量的面积上颗粒总数必须足够多,否则难以保证强度与颗粒数目的线性关系;同时要求颗粒大小相同.

由于大量圆屏与单个圆屏的衍射图样是相同的,我们可以通过测量整个衍射屏的夫琅禾费衍射图样的零级斑半角宽 $\Delta\theta$ 来测定圆球颗粒半径:

$$a = 0.61\lambda/\Delta\theta.$$

11. 在太阳或月亮的周围有时出现彩色晕圈. 你能解释这种现象吗?

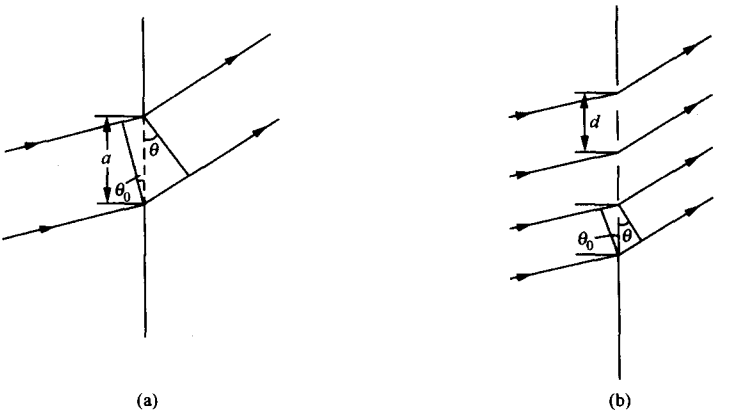
答 在太阳(或月亮)周围出现的彩色晕圈叫日晕(或月晕)现象. 实质上,这是一种光的衍射花样. 当高空的气温比地面低时,天空上常常有层薄雾或薄云,由小滴或小冰晶组成,形状都很规则,在无风的时候很稳定. 当阳光或月光照射在这些小颗粒上时,就产生衍射光环. 由于零级斑的半角宽 $\Delta\theta$ 正比于光波长 λ,于是便呈现紫光在里、红光在外的彩色光环. 人们把这种晕圈叫做风圈,因为它常常预示着大风或大雨的到来. 如果你戴着眼镜,这种现象也能在浴室中被观察到.

12. 正入射时单缝衍射零级与缝间干涉零级重合. 斜入射能将这两个零级分开吗?

答 斜入射时,入射光波的等相面与衍射屏平面不再重合. 在计算衍射线间光程差时,既要考虑前场光程差,又要考虑后场光程差. 如图 13-3(a),缝内上、下边缘的两衍射线间的光程差

$$\Delta L = a(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

因此，单缝衍射零级主极强条件为 $\theta=\theta_0$.



(a)　(b)

图　13-3

如图 13-3(b)，相邻缝间对应点处两衍射射线间的光程差

$$\Delta L = d(\sin\theta - \sin\theta_0).$$

因此，缝间干涉零级主极强条件仍为 $\theta=\theta_0$.

分析可见，斜入射时单缝衍射零级和缝间干涉零级都在衍射角等于入射光倾角的方位(即几何光学像点的位置)上. 此时，仍不能实现两个零级的分离. 为使上述两个零级分离，必须采用反射闪耀光栅或透射闪耀光栅(即相位型光栅). 利用振幅型黑白光栅，不论怎样改变入射方式，均不能实现两个零级分离.

§2　光栅光谱仪

1. 在光谱仪中为什么人们爱用反射镜(平面、凹面)，而不大喜欢用透镜？

答　在光谱仪中采用反射镜而不用透镜，有如下优点：

(1) 缩短装置长度；

(2) 避免不必要的色散(即色差)，因为光在介质中折射时有色散，而反射总是无色散的；

(3) 避免光在介质中的吸收，减少能量损失.

2. 为了提高光栅的色散本领和分辨本领，既要求光栅刻线很密(即 d 小)，又要求刻线总数很多(即 N 大). 怎样理解 N 增大并不能提高光栅的色散本领？怎样理解 d 减小时虽然扩大两条谱线的角间隔，却不能提高分辨本领？

答 光栅的色散由光栅公式

$$d\sin\theta = k\lambda \qquad ①$$

决定. 它来自于单元间干涉因子，只与光栅的空间周期 d 有关，而与衍射单元的总数 N 无关. 因此，增加缝数 N 并不能提高光栅的色散本领. 显然，当 d 减小时，同级光谱中两条谱线的角间隔增大，即色散本领提高. 要看两条谱线能否被分辨，不但要看谱线(主极强)中心的分离程度，还要看每条谱线的细锐程度(即谱线半角宽度的大小). 光栅的色散角为

$$\delta\theta = k\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta} \propto \frac{1}{d},$$

式中 $\delta\lambda$ 为谱线的波长差. 谱线的半角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{1}{d}.$$

由以上两式可见，两条谱线的色散角及每条谱线的半角宽都与 d 成反比. d 减小时，色散角增大，但同时半角宽也增加相同的倍数，因此并不能提高分辨本领.

3. 一台光栅光谱仪备有同样大小的三块光栅：1200 条/mm；600 条/mm；90 条/mm。试问：

(1) 当光谱范围在可见光部分，应选用哪块光栅？为什么？

(2) 当光谱范围在红外 3～10 μm 波段，应选用哪块光栅？为什么？

答 目前，三块光栅的光栅常数分别为

$$d_1 = \frac{1}{1200\ /\mathrm{mm}} \approx 0.83\ \mu\mathrm{m},$$

$$d_2 = \frac{1}{600\ /\mathrm{mm}} \approx 1.7\ \mu\mathrm{m},$$

$$d_3 = \frac{1}{90\ /\mathrm{mm}} \approx 11\ \mu\mathrm{m}.$$

光栅光谱仪是利用光栅的分光原理来分析光谱的，零级光谱无色散，因此必须选用 1 级以上光谱. 根据光栅公式(本节思考题 2 中式①)，要使 $k\neq0$，必须满足 $d\geqslant\lambda$，即光栅常数必须大于被分析光谱波长. 此外，为了便于观测，应尽可能获得最大的色分辨本领 $R(R=kN\propto N)$. 目前光栅大小相同，则 d 小的分辨本领大. 据此，就可以针对不同的光谱范围来选用光栅.

(1) 可见光波长范围为 0.4 ～0.8 μm. d_1,d_2,d_3 均大于光波长. 为获得最大分辨本领，应选用 1200 条/mm 的光栅.

(2) 对于 3～10 μm 的红外光谱，d_1,d_2 小于光波长，而 d_3 大于光波长. 为获得非零级光谱，只有选用 90 条/mm 的光栅.

4. (1) 试由 $R=kN$ 导出光栅色分辨本领公式的另一形式：

$$R = D\sin\theta/\lambda,$$

其中 $D=Nd_0$. $D\sin\theta$ 的物理意义是什么？

(2) 现代光栅的最大宽度 $D\sim25$ cm；在波长 0.5 μm 附近，其极限分辨本领 R 和相应的可分辨的最小波长间隔 $\delta\lambda$ 各是多少？

(3) 有人认为光栅光谱仪的分辨本领受照明光束的时间相干性限制. 你觉得这种看法有道理吗？

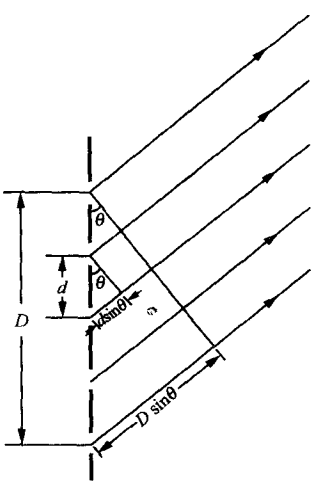


图　13-4

答　(1) 由光栅公式(本节思考题 2 中式①)得

$$k = d\sin\theta/\lambda.$$

把上式代入分辨本领公式

$$R = kN, \qquad ①$$

即得另一形式：

$$R = kN = \frac{d\sin\theta}{\lambda}N = \frac{D\sin\theta}{\lambda}, \qquad ②$$

其中 $D=Nd$ 为光栅有效宽度. $D\sin\theta$ 的物理意义是光栅两端边缘上两衍射单元在 k 级方向上的光程差(图 13-4).

(2) 由本题式②，取 $\sin\theta=1$，即得极限分辨本领为

$$R_m = D/\lambda.$$

以 $D=25\ \text{cm}$，$\lambda=0.5\ \mu\text{m}$ 代入，算出

$$R_{\text{m}}=5\times10^{5}.$$

相应的可分辨最小波长间隔为

$$\delta\lambda=\lambda/R_{\text{m}}=1.0\times10^{-6}\ \mu\text{m}=1.0\times10^{-2}\ \text{Å}.$$

我们须知，光栅是分光仪器，不同的波长成分出现于谱面上的不同方位，彼此并不发生叠加关系. 凡是这类“选频”效应，均不必考虑相干长度的影响，如同法布里-珀罗干涉仪那样.

5. 导出光栅色散本领公式的另一形式：

$$D_\theta=\tan\theta/\lambda.$$

答 根据光栅公式(本节思考题 2 中式①)可得

$$k=d\sin\theta/\lambda.$$

把上式代入光栅的角色散公式

$$D_\theta=k/d\cos\theta,$$

即得该公式的另一种形式：

$$D_\theta=\tan\theta/\lambda.$$

6. 导出棱镜的角色散本领公式

$$D_\theta=\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda},$$

式中 b 是棱镜底边长度，a 是光束的宽度(见图 13-5).

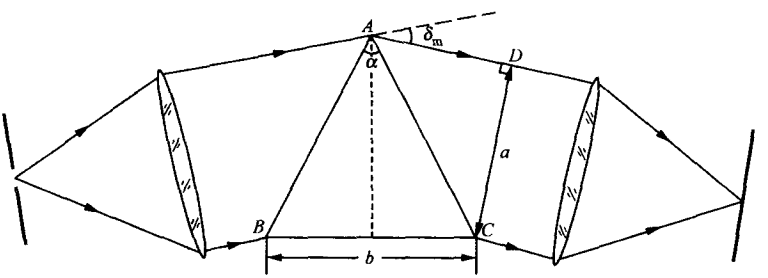


图 13-5

答 在光谱仪中，棱镜工作在产生最小偏向角的位置. 此时，棱镜材料折射率 n 与其顶角 α 及最小偏向角 δ_{m} 的关系为

$$n = \sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}.$$

根据角色散本领的定义，对上式取微分得

$$D_\theta = \frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{d\delta_m}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\delta_m}\right)^{-1}\frac{dn}{d\lambda}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\left(\cos\frac{\alpha+\delta_m}{2}\frac{dn}{d\lambda}\right). \qquad ①$$

如图 13-5 所示，显然有

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{\overline{AC}}. \qquad ②$$

由于工作在最小偏向角时光束相对于棱镜对称，故有

$$\angle DAC = \frac{180^\circ - (\alpha+\delta_m)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\delta_m}{2},$$

$$\angle ACD = (2+\delta_m)/2,$$

从而

$$\cos\frac{\alpha+\delta_m}{2} = \cos\angle ACD = \frac{a}{\overline{AC}}. \qquad ③$$

把②，③两式代入式④，即得

$$D_\theta = \frac{b}{a}\frac{dn}{d\lambda}.$$

7. 色散型光谱仪加上出射狭缝，就成为一台单色仪. 由光栅光谱仪作成的单色仪，其输出光束的单色性好坏由什么因素决定？怎样才算充分利用了光栅元件的分辨本领？增大光栅的宽度 $D=Nd$，能改善输出光束的单色性吗？

答　单色仪单色性的好坏由其色分辨本领决定：色分辨本领越高，可能获得输出光束的单色性越高. 对光栅光谱仪来说，要充分利用光栅的色分辨本领，则应使输出狭缝的宽度与谱线的半角度相匹配，以狭缝宽度与谱线半角宽所对应的线距离相等为宜. 根据光栅的色分辨本领公式(本节思考题 4 中式①)可知，增大光栅宽度 $D=Nd$ 时，在光栅常数 d 不变的情况下，必然增加常数 N，从而提高了色辨本领 R. 这对改善输出光束的单色性是有利的.

*§3 三维光栅——X射线在晶体上的衍射

本节思考题从略.

第五章　傅里叶变换光学

§1　衍射系统的屏函数和相因子判断法

本节思考题从略.

§2　正弦光栅的衍射

1. 单纯的时间信号(如简谐交流电压)可用复数表示为 $\tilde{U}=U_0e^{i\omega t}$或 $\tilde{U}=U_0e^{-i\omega t}$. 这里"正频"和"负频"纯粹是个约定,没什么本质差别. 为什么本节[①]中将正弦光栅的出射波前函数作傅里叶分解时,正频项和负频项具有独立而不同的物理意义?三维空间里定态光波的复振幅表达式的正、负空间频率具有独立而不同的物理意义吗?

答　时间信号是一维的,因此其时间频率是一个标量,正负并无独立的物理意义. 空间信号的复杂性来自空间的维数. 波场是三维的,其中一个平面上的波前也有二维,因此其空间频率是一个矢量,矢量的大小和方向取决于光波的波长和传播方向. 正弦光栅的出射波前是二维的,其正频项和负频项分别代表两列斜出射的共轭平面波. 频率的两个分量和波矢的方向余弦具有以下关系:

$$f_x=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\quad f_y=\frac{\cos\beta}{\lambda}.$$

因为 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 可正、可负,所以 f_x 和 f_y 也可正、可负.

定态光波的三维复振幅的正频项和负频项(同频)也分别代表两列共轭平面波,其频率的三个分量和波矢的方向余弦具有以下关系:

---

① 见:赵凯华,钟锡华. 光学(下册). 北京:北京大学出版社,1984:56～57.

$$f_x=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\quad f_y=\frac{\cos\beta}{\lambda},\quad f_z=\frac{\cos\gamma}{\lambda}.$$

同样，由于 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 可正、可负，故 f_x,f_y,f_z 也可正、可负. 更具体一点说，$f_x>0,f_y>0,f_z>0$ 分别表示沿 x,y,z 轴正方向相位逐点落后；反之，$f_x<0,f_y<0,f_z<0$ 分别表示沿 x,y,z 轴正方向相位逐点超前. 如 z 轴正方向从左到右，则 $f_z>0$ 表示光波从左到右传播；$f_z<0$ 表示光波从右到左传播.

2. 正弦光栅在自身所在平面内平移或转动时，对夫琅禾费衍射场或透镜后焦面上的衍射斑有什么影响？

答 正弦光栅平移时，其夫琅禾费衍射场不变，即透镜后焦面上的衍射斑不动. 正弦光栅转动时，后焦面上的零级斑不动，其余衍射斑绕零级斑与正弦光栅同步转动.

§3 阿贝成像原理与相衬显微镜

1. 如图 14-1，设透镜理想成像. 证明：在成像光束中任意几个次波源（如图中的 a,b,c）在像点 Q' 产生的扰动是同相位的. 如果在光路中设有衍射屏，以上结论是否成立？

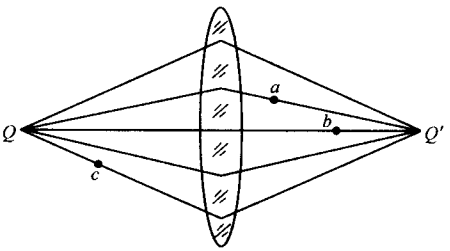


图 14-1

答 在成像光束中任取次波源 a,b,c，设其相位分别为 $\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)$，则它们在像点 Q' 产生扰动的相位相应为

$$\begin{aligned}\varphi_a(Q')&=\varphi(a)-kL(aQ')=\varphi(Q)-kL(Qa)-kL(aQ')\\&=\varphi(Q)-kL(QaQ'),\\\varphi_b(Q')&=\varphi(b)-kL(bQ')=\varphi(Q)-kL(Qb)-kL(bQ')\\&=\varphi(Q)-kL(QbQ'),\\\varphi_c(Q')&=\varphi(c)-kL(cQ')=\varphi(Q)-kL(Qc)-kL(cQ')\\&=\varphi(Q)-kL(QcQ'),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(Q)$ 为物点 Q 的相位. 根据物像等光程性，

$$L(QaQ') = L(QbQ') = L(QcQ').$$

故得

$$\varphi_a(Q') = \varphi_b(Q') = \varphi_c(Q'),$$

即成像光束中任意几个次波源在像点 Q' 产生的扰动都是同相位的.

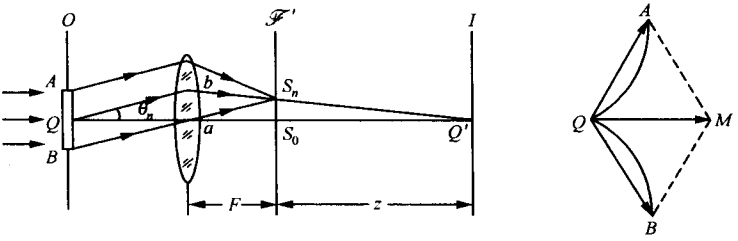
如果光路中没有衍射屏，则点源 Q 不能理想成像于 Q' 点. 但几何光学像点的位置总是衍射零级斑的中心位置，即零光程差的位置. 光路中任意几个次波源在几何光学像点 Q' 产生的扰动相位相同的结论依然成立.

2. 证明：在傍轴条件下傅氏面上 $\pm n$ 级衍射相对零级的相位为

$$\varphi_{\pm n} = -k(na)^2/2z,$$

式中 z 是傅氏面到像面的距离，a 为相邻衍射斑中心间的距离.

答　首先，必须确定 n 级衍射斑中心 S_n 的相位. 如图 14-2(a)，衍射斑中心 S_n 的扰动是物面 O 上大量次波源沿 Q_n 方向的衍射线相干叠加的结果. 考虑到周期性物信息的对称性，上方 QA 段与下方 QB 段的次波源在 S_n 处激发的次级扰动的相位关系具有对称性. 从矢量图(图 14-2(b))中显然可见，S_n 点的总扰动 $\overrightarrow{QM}$ 的相位与中心点 Q 发射的次级扰动(以小矢量代表)的相位是一致的.



(a) 装置图　　(b) 矢量图解

图　14-2

因此，我们可以根据由中心点 Q 发出并经过衍射斑中心的次波线间的光程差来分析各衍射斑间的相位差. 由上题结论可知，各衍射斑(次波源)在中心像点 Q' 产生的扰动的相位是相同的. 故 n 级衍射斑相对零级的相位为

$$\varphi_n = \varphi(S_n) - \varphi(S_0)$$
$$= -k[L(S_nQ') - L(S_0Q')] - k(\overline{S_nQ'} - \overline{S_0Q'}). \quad ①$$

上式等号右边 k 前取负号是因为我们已约定相位超前为负. 在傍轴条件下,

$$\overline{S_nQ'} - \overline{S_0Q'} \approx (\overline{S_nS_0})^2/2z, \quad ②$$

$$\overline{S_nS_0} \approx F\sin\theta_n = nf\lambda F = na, \quad ③$$

其中 $a=f\lambda$ 是相邻衍射斑中的线间距. 以式②,③代入式①,即得

$$\varphi_n = -k(na)^2/2z.$$

考虑到$\pm n$ 级衍射斑的对称分布,即有

$$\varphi_{\pm n} = -k(na)^2/2z.$$

上式的负号表明$\pm n$ 级衍射斑的实际相位是超前于零级斑的.

3. 通常在一台光栅光谱仪的焦面上获得的光谱是时间频谱,还是空间频谱?

答 光栅光谱仪是利用光栅的色散效应进行分光的,通常其焦面上接收的是同一级主极强的不同波长成分. 这样获得的一套同级光谱反映的是入射光的时间频谱,并不反映光栅的空间频谱. 光栅的空间频谱由同一波长的不同级主极强来反映.

4. 阿贝-波特空间滤波实验装置如图 14-3(a),以缝宽为 a、间距为 d 的黑白光栅为物,将它置于前焦面附近. 用一束强单色平行光照明光栅,经透镜在较远处形成一个实像;在透镜的后焦面上安置光阑滤波. 试就下列两种情形讨论频谱、像面上的振幅分布 $\tilde{U}_I(x')$、像面上的强度分布 $I(x')$以及像的变化(用示意图表示):

(1) 光栅中 $a:d=2:3$. 光阑让 0,±1 级通过,挡掉其余衍射斑.

(2) 光栅中 $a:d=1:3$. 光阑挡掉 0 级,而让其他所有衍射斑通过.

答 黑白光栅的透过率函数为

$$t(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a/2), \\ 0 & (a/2 < |x| < d/2); \end{cases}$$

其指数形式的傅里叶级数展开式为

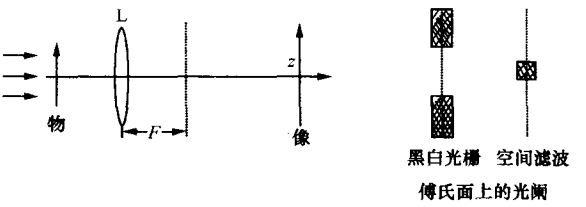
$$t(x) = t_0 + \sum_{n\neq 0} \tilde{t}_n \exp[\mathrm{i}2\pi f_n x],$$

其中

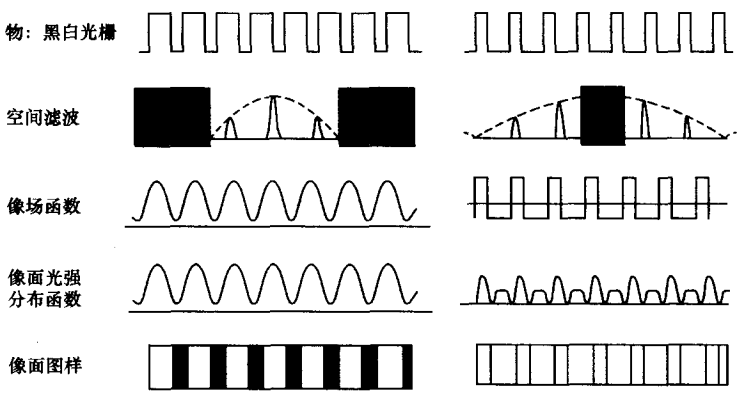
$$t_0 = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{d},$$

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_n x)\mathrm{d}x = \frac{a}{d}\frac{\sin(\pi f_n a)}{\pi f_n a}$$

$$= \frac{a}{d}\frac{\sin(n\pi f a)}{n\pi f a} = \frac{a}{d}\frac{\sin(n\pi a/d)}{n\pi a/d}.$$



(a)



(b)

图　14-3

(1) 当频谱面上的滤波器只让 0，±1 级通过，挡掉其余衍射斑(如图 14-3(b)空间滤波左)时，像面上的振幅分布为基频和直流成分的叠加. 两者的比值决定于傅里叶系数之比，目前由光栅 a 与 d 的

比值决定. 直流成分与交流成分的振幅比为

$$\frac{t_0}{2\tilde{t}_1}=\frac{1}{2}\frac{\pi a/d}{\sin(\pi a/d)}.$$

以 $a:d=2:3$ 代入,得

$$\frac{t_0}{2\tilde{t}_1}=\frac{1}{2}\frac{2\pi/3}{\sin(2\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.2>1.$$

直流成分比交流成分振幅大,像场函数的振幅分布函数不会出现负值(如图 14-3(b)像场函数左). 但由于像场函数的极小值大于零,像面上的光强分布函数 $I(x')$ 的极小值不为零(见图 14-3(b)像面光强分布函数左),在相邻亮纹之间的暗纹并非全黑.

(2) 当频谱面上的滤波器挡掉 0 级而让其余衍射斑通过(见图 14-3(b)空间滤波右)时,像场函数只有交流成分,其平均值为零,故得图 14-3(b)像场函数右,基本上仍是方波. 由于高次谐波未进入透镜,方波棱角变圆. 方波负极大与正极大之比为

$$\frac{A_-}{A_+}=\frac{a}{d-a}.$$

以 $a:d=1:3$ 代入,得

$$\frac{A_-}{A_+}=\frac{1}{2}<1.$$

因此,像场强度分布除原物透光部分仍是亮的外,原来不透光的部分也是亮的,但后者不如前者更亮(见图 14-3(b)像面光强分布函数右). 这时发生了衬比度部分反转现象.

5. 经空间滤波器改造了的频谱是否为像场函数的空间频谱? 试论证你的结论.

答 频谱面上的滤波器可以改造物信息的频谱,以此来达到改造图像的目的. 改造后的频谱即为像场函数的空间频谱. 这个结论可以论证如下: 不妨假定成像系统的横向放大率等于 1. 若频谱面上没有滤波器,光波能够自由通过,则图像将完全复原. 显然,这时物像的空间频谱完全相同. 当频谱面上安插空间滤波器以后,原物的频谱被改造为新的频谱,新的频谱对应一个新的物. 如果在物面上输入这个新的假想物,此时空间滤波器的作用不复存在(相当于可以将它撤

走),假想物的光波可以畅通无阻地通过频谱面.显然,输出像场函数的频谱与假想物的频谱相同,也即像场函数的频谱与滤波器改造后的物信息的频谱一致.

6. (1) 在相衬法中,$\varphi(x,y)\ll 1$ 这个条件有什么好处?

(2) 为了保证 $\varphi(x,y)$ 小,是否要求样品厚度 d 必须很小?在什么条件下样品可以比较厚,同时又能做到 $\varphi(x,y)\ll 1$?

(3) 对一厚度均匀折射率不均匀的相位型物体,$n(x,y)=n_0+\Delta n(x,y)$ 最大相对起伏 $\Delta n/n_0\approx 0.01$.为使 $\varphi\ll 1$ 满足,允许该样品的厚度有多大?

答　(1) 在相衬法中,像面上光强分布的普遍表达式为

$$I(x',y')=I_1[3+2(\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta-\cos\varphi-\cos\delta)]. \quad ①$$

这时虽然出现了与物的相位信息 $\varphi(x',y')$ 相关的黑白图像,但像面上的强度分布与相位物的相位信息之间不是简单的线性关系.而当 $\varphi(x,y)\leqslant 1$ 时,像面上的光强分布简化为

$$I(x',y')=I_1[1+2\sin\delta\varphi(x',y')].$$

这时像面上的强度分布与相位物的相位信息成简单的线性关系,即相位信息线性地调制了像面上光强分布.实现线性调制的条件就是

$$\varphi(x,y)\ll 1. \quad ①$$

非线性调制不易测试分析,因而不被人们重视.

(2) 相位物的透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)},$$

其中

$$\varphi(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}nd.$$

因此,相位物的光学厚度为

$$nd=\frac{\lambda}{2\pi}\varphi(x,y).$$

既然要求保证式①成立,可取 $\varphi(x,y)=0.1$ 作为数量级估算.以可见光中心波长 $\lambda=5500$ Å 代入上式得

$$nd=0.9\ \text{Å},$$

从而要求

$$d < 0.9\ \text{Å}.$$

可见，在普遍情况下，为满足式①，必须要求相位物的厚度 d 很小；但在一定的条件下，d 较大，条件是光学厚度 nd 的起伏量较小. 例如，对折射率均匀、厚度不均匀的相位物来说，

$$nd = n[d_0 + \Delta d(x,y)], \quad \varphi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda} n\Delta d(x,y).$$

按上面的估算，仅需厚度的起伏量 $\Delta d(x,y) < 0.9$ Å，就可使式①成立，而无需 $d(x,y)$ 很小. 对于厚度均匀、折射率不均匀的相位物来说，

$$nd = [n_0 + \Delta n(x,y)]d, \quad \varphi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n(x,y)d.$$

可见，只要折射率的起伏量 $\Delta n(x,y)$ 很小，即使 d 较大也能保证式①成立.

(3) 此时，有

$$\varphi(x,y) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n(x,y)d.$$

取折射率的最大相对起伏 $\Delta n/n = 0.01$，$n_0 = 1.0$，$\lambda = 5500$ Å，$\varphi = 0.1$，估算得

$$d = \frac{\lambda}{2\pi\Delta n}\varphi = 9 \times 10^3\ \text{Å}.$$

与普遍情形相比，d 可以大一个数量级.

7. (1) 若相位板中心液滴的光学厚度为 $3\lambda/4$，写出任意大小的 φ 和 $\varphi \ll 1$ 时像面强度函数的表达式.

(2) 这时像的图样与液滴的光学厚度为 $\lambda/4$ 时的图像有何不同？

(3) 若考虑液滴对光的吸收，设其强度透过率 $\tau < 1$，像面上的强度分布有何变化？衬比度有何变化？

答 (1) 当相位物的相位分布函数 $\varphi(x,y)$ 取任意大小时，像面上的光强分布函数如上题中式①所示. 以

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4} = \frac{3}{2}\pi \qquad ①$$

代入，得

$$I(x',y')=I_1\{3-2[\sin\varphi(x',y')+\cos\varphi(x',y')]\}$$
$$=I_1[3-2\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)]. \quad ②$$

当 $\varphi(x,y)\ll 1$ 时，

$$I(x',y')\approx I_1[1+(2\sin\delta)\varphi(x',y')]. \quad ③$$

以式①代入，得

$$I(x',y')=I_1[1-2\varphi(x',y')]. \quad ④$$

(2) 当液滴的光学厚度为 $\lambda/4$ 时，$\delta=\pi/2$. 若 $\varphi(x,y)$ 取任意大小，像面上的光强分布函数为

$$I(x',y')=I_1[3+2\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)]$$
$$=I_1\left\{3-2\sqrt{2}\sin\left[\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

与式②相比可知，像面上图样的衬比度相同，都随 φ 呈周期性变化，但两者亮度位置不同：前者强度取极大或极小时，后者取本底强度；反之，亦然.

当 $\varphi(x,y)\ll 1$ 时，

$$I(x',y')\approx I_1[1+2\varphi(x',y')].$$

与式④相比可知，两者的相衬度符号相反，表明图样强度互补，即相位物中相位值较大的部位，前者较暗，后者较亮.

(3) 傅氏面上的中心液滴主要只影响像面上的直流成分. 同时考虑液滴对光的吸收和相移，像面上的直流成分应改写为 $\sqrt{\tau}\exp(i\delta)$，因而像面上的复振幅分布为

$$\tilde{U}_I(x',y')=A_1\left[\tau^{1/2}e^{i\delta}+i\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{1}{3!}\varphi^3+\cdots\right]$$
$$=A_1\{(\tau^{1/2}e^{i\delta}-1)+\exp[i\varphi(x',y')]\},$$

像面上的光强分布为

$$I(x',y')=\tilde{U}_I(x',y')\cdot\tilde{U}_I^*(x',y')$$
$$=A_1^2(\tau^{1/2}e^{i\delta}-1+e^{i\varphi})(\tau^{1/2}e^{-i\delta}-1+e^{-i\varphi})$$

$$= I_1[2 + \tau - 2\tau^{\frac{1}{2}}(\cos\delta - \sin\delta\sin\varphi - \cos\delta\cos\varphi)$$
$$- 2\cos\varphi] \qquad (I_1 = A_1^2).$$

在 $\varphi(x,y) \ll 1$ 的情况下，$\cos\varphi \approx 1$，$\sin\varphi \approx \varphi$，上式化为

$$I(x',y') = I_1^2[\tau + (2\tau^{1/2}\sin\delta)\varphi(x',y')].$$

将上式与式③相比可见，选择对光有较强吸收的相移滴，本底强度减弱了 τ 倍，信息 $\varphi(x',y')$ 的强度减弱了 $\sqrt{\tau}$ 倍，由于 $\tau < \sqrt{\tau}$，显然图像的衬比度后者比前者高. 式③的相衬度为

$$\gamma_1 = 2\sin\delta;$$

上式的相衬度为

$$\gamma_2 = 2\sin\delta/\tau^{1/2} > \gamma_1.$$

选择有较强吸收的相移滴，是提高图像衬比度的有效方法.

8. 观察相位型物体的另一种方法是“中心暗场法”，即在傅氏面的中心设置一个细小的不透明屏. 假定物体的相位变换函数 $\varphi \ll 1$，写出像面上的强度分布，并与相衬法的优劣作一比较.

答 相位物的物面上的复振幅分布可以表示为

$$\tilde{U}_0(x,y) = A_1 e^{i\varphi} = A_1\left(1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{i}{3!}\varphi^3\cdots\right).$$

经傅氏面上细小不透明圆屏滤波以后，零频及其附近低频成分被全部吸收，于是像场函数变为

$$\tilde{U}_I(x',y') = A_1\left(i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + \cdots\right).$$

在 $\varphi \ll 1$ 的情况下，可略去 φ^2 以上的高次项，于是

$$\tilde{U}_I(x',y') \approx A_1 i\varphi,$$

从而像面上的强度分布函数为

$$I(x',y') = \tilde{U}_I\tilde{U}_I^* = A_1^2\varphi^2 = I_1\varphi^2 \quad (I_1 = A_1^2).$$

上式表明，在相位起伏的部位出现了与相位信息相关的强度分布. 与相衬法相比，φ 对 $I(x',y')$ 的调制是非线性的；由于 $\varphi \ll 1$，φ^2 是高阶无穷小量，因而光强变化很小. 这两点是暗场法不如相衬法之处. 但是在暗场法中，像的本底强度为零，背景全是黑的，从而提高了像的反衬. 这是暗场法优于相衬法的特点.

*§4　夫琅禾费衍射场的标准形式

1. 装置如图 14-4 所示，在后焦面 $\mathscr{F}'$ 上接收衍射场. 问：

(1) 这种装置能否接收夫琅禾费衍射场？如果能，需要什么条件？夫琅禾费衍射场的范围有多大？

(2) 前后移动衍射屏，对衍射图样有何影响？

(3) 此装置与衍射屏放置在透镜前时有何不同？

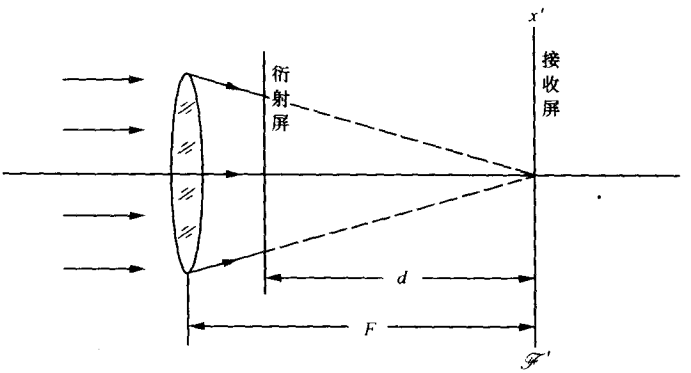


图　14-4

答　(1) 在照明光源像面上接收到的衍射场，是夫琅禾费衍射场. 目前装置中透镜的后焦面正是照明光源的像面，可以接收夫琅禾费衍射场. 这种装置只需物点和场点同时满足傍轴条件，而无需远场条件. 在接收屏幕上相对于纵向距离 d 的傍轴范围内接收到的都是夫琅禾费衍射场.

(2) 衍射屏被透镜会聚的球面波照明，由于透镜光瞳函数的作用，其照明范围由球面中心(即透镜后焦点)与透镜边缘连线构成的光锥所决定. 这个效应相当于衍射屏上存在一个投影光瞳函数. 前后移动衍射屏，当 d 减小时，照明范围缩小，衍射图样也缩小，但强度增大；当 d 增大时，效果相反. 当然，由于照明范围改变，衍射屏上的物信息随之改变，衍射图样不一定保持相似性.

(3) 衍射屏放在透镜前时，其照明范围是不变的；与衍射屏在透

镜后不同，并不受投影光瞳函数的作用. 若衍射屏在透镜前，衍射场的频谱坐标恒为

$$(f_x, f_y) = (x', y')/\lambda F.$$

前后移动衍射屏，并不改变频谱坐标. 若衍射屏在透镜之后，频谱坐标为

$$(f_x, f_y) = (x', y')/\lambda d.$$

前后移动衍射屏，空间频率和频谱面上坐标之间的缩放比例将随距离 d 而改变，从而提供了频谱坐标缩放的灵活性. 这是衍射屏放于透镜之后的优点.

2. 在

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = cA_1 e^{ikL_0} \iint \tilde{t}(x, y) \exp[-i(k\sin\theta_1 x + k\sin\theta_2 y)] dx dy \quad ①$$

中，积分号外有一个与场点坐标(x', y')有关的相因子 $\exp(ikL_0)$. 用什么方法可以使这个相因子成为与场点坐标无关的常数？

答 衍射屏中心 O 点到后焦面上的场点 $P(x', y')$的光程 L_0 在普遍情形下与场点坐标(x', y')有关，从而相因子 $\exp(ikL_0) = \exp[i\varphi(x', y')]$也与场点坐标$(x', y')$有关. 但如图 14-5 所示，若把衍射屏置于透镜的前焦面 $\mathscr{F}$ 上，则从衍射屏中心到达不同场点的衍射线等光程，相因子 $\exp[i\varphi(x', y')] = \exp(ikL_0)$为常数. 这时，式

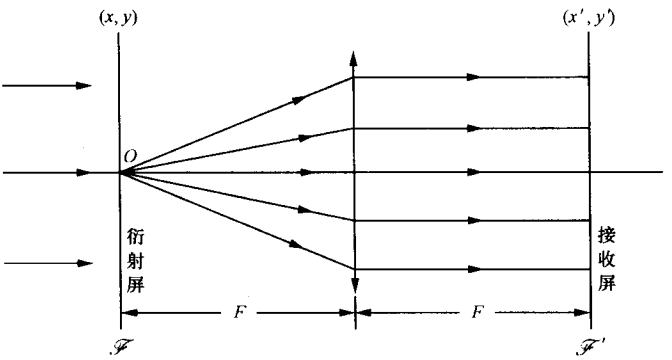


图 14-5

①积分号的因子成为一个常数，可以略去不写；后焦面上的复振幅准确地成为屏函数的傅里叶变换.

*§5　傅里叶变换　δ函数

本节思考题从略.

*§6　空间滤波和信息处理

1. 讨论相干光学图像处理系统[①]：

(1) 如果 L_1，L_2 两透镜的焦距不等，系统的性能有什么变化？

(2) 如果两个透镜不是共焦组合，系统的性能有什么变化？

答　(1) 如图 14-6 所示的不等焦距相干图像处理系统，从 O 面到 T 面以及从 T 面到 I 面的两次衍射都是从焦面的夫琅禾费衍射，从而保证每次的复振幅变换仍然都是纯粹的傅里叶变换. 与等焦距 $4F$ 系统不同的是，两次傅里叶变换中频谱面 T 和 I 上空间坐标对空间频率的缩放比例不同，分别为

$$(\xi,\eta)=\lambda F_1(f_x,f_y),\quad (x',y')=\lambda F_2(f_\xi,f_\eta).$$

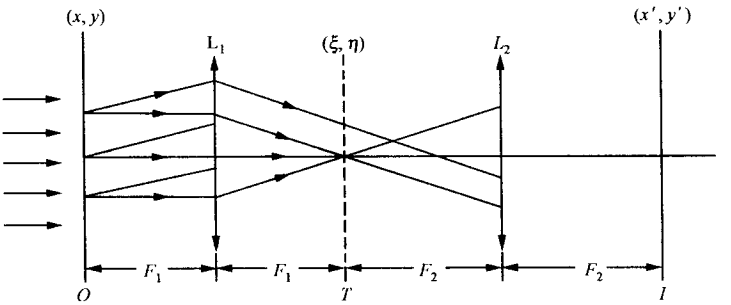


图　14-6

输出图像除倒置外还得到了缩放，但并不影响系统的滤波性和成像质量.

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：115.

(2) 如果两个透镜 L_1,L_2 不是共焦组合,则变换平面 T 不可能同是两个透镜的焦面,只可能是 L_1 的后焦面或 L_2 的前焦面. 对于前者,第一次夫琅禾费衍射是复振幅的纯粹的傅里叶变换,第二次夫琅禾费衍射复振幅的变换则不是纯粹的傅里叶变换;对于后者,两次衍射复振幅变换的情况正好相反. 无论变换平面 T 的位置是哪一种配置,像面的输出波前都不再是物波前或假想物波前的倒置(不妨假设 $F_1=F_2$).

2. 如图 14-7 所示的系统是否成为一个相干光学图像处理系统? 它与 $4F$ 系统比较有什么不同? 哪个系统的性能更好?

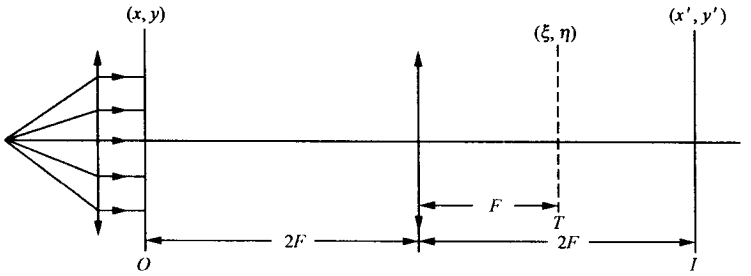


图 14-7

答 求图 14-7 所示的系统中,O 和 I 面为物像共轭面,T 面为 O 面的频谱面. 该系统也构成一个相干光学图像处理系统,其原理就是阿贝成像原理. 在频谱面上设置滤波器,即可改变图像的频谱,实现改造图像的目的. 与 $4F$ 系统不同的是,这里从 O 面到 T 面的第一次衍射虽然是夫琅禾费衍射,但复振幅的变换不是纯粹的傅里叶变换;从 T 面到 I 面的衍射不是夫琅禾费衍射,只是菲涅耳衍射,从而计算要比 $4F$ 系统复杂得多. 该系统虽然是横向放大率等于 -1 的成像系统,但即使 T 面畅通无阻,像面上输出的复振幅分布也不是输入的倒置(还差一个(二次)相位因子). 当然,这个相位因子不影响强度分布,输出的强度分布仍可使图像复原. 显然,图 14-7 所示的系统的性能不如 $4F$ 系统优越,它只适用于成像系统的图像处理. 该系统的一个优点是结构简单,可少用一个傅里叶透镜.

3. 如图 14-8,一张图上画有一只小鸟关在牢笼中,用怎样的光学滤波器能够去掉栅网,把它"释放"出来?

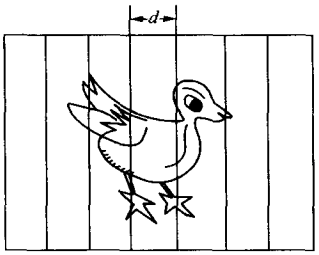


图 14-8

答　这幅“笼中鸟”合成图像的图像函数是栅函数与鸟函数的卷积，前者的频谱是若干离散的谱斑(准离散谱)；而后者的频谱是弥漫的连续谱，其在零频附近的低频成分是主要的. 为了滤掉栅格而呈现纯净的“小鸟”图像，一种简易且有效的方法便是在零频处开一适当大的圆孔，以使“小鸟”图像的低频成分尽可能多地通过，而挡掉栅格从±1 级开始的所有谱斑.

4. 一张底片的本底有灰雾. 用什么样的光学滤波器可以使之改变?

答　在底片的本底灰雾的频谱中，高频成分比较丰富；而在底片的图像中，相对来说低频成分较多. 因此，在相干光学图像处理系统中，以底片为物输入，只要在频谱面上置入低通滤波器，截去高频，即可使输出图像得以改善.

5. (1) 以一张黑白图案作光学滤波器，并在黑的地方开个孔. 这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过度函数的积还是和?

(2) 若在上述图案中白的地方点上一点黑，其透过率函数是图案与黑点透过率函数的积还是和?

答　(1) 以黑白图案中黑的地方开一个小孔作为滤波器，其滤波函数应是黑白图案与小孔的透过率函数的相加，而非相乘；

(2) 以黑白图案中白的地方点一黑点作为滤波器，其滤波函数是黑白图案与黑点透过率函数相乘，而非相加.

6. 如果读者熟悉滤波器电路，将相干成像系统中的空间滤波与它作一比较，看看两者之间有什么共同和不同之处?

答　如图 14-9 所示是简单的空间滤波器与滤波电路的类比. 两者的作用都是选频. 不同的是，光学滤波器选择的是空间频率，滤波电路选择的是时间频率. 光学信息的分频靠夫琅禾费衍射；电路中的分频是靠电阻 R、电容 C、电感 L 等元件及其组合电路的不同阻抗特性.

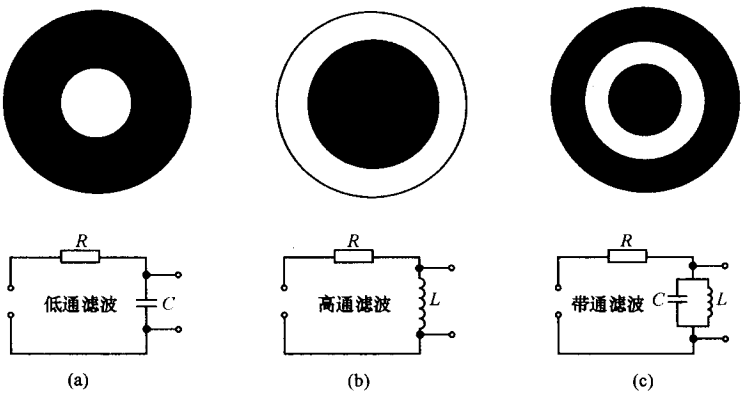


图 14-9

*§7 点扩展函数与光学传递函数

1. 是否凡线性系统的本征信息都是简谐信息？线性系统可以是空变的吗？

答 所谓线性系统是指该系统的输入信息和输出信息有同样的线性叠加关系；用数学语言可表示为：如果对任意的两个输入信息 $t(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 及两个常数 c_1,c_2，有

$$T\{c_1t(x,y)+c_2s(x,y)\}=c_1T\{t(x,y)\}+c_2T\{s(x,y)\},$$

则这个系统就是线性的. 上式中 T 为线性系统算符. 线性系统的输出信息 $g_2(x',y')$ 还可以表示为输入信息 $g_1(x,y)$ 和脉冲响应 $h(x,y,x',y')$ 的叠加积分，即

$$g_2(x',y')=T\{g_1(x,y)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint g_1(x,y)h(x,y,x',y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当脉冲响应只依赖于相对位置 $(x'-x,y'-y)$ 点，即

$$h(x,y,x',y')=h(x'-x,y'-y) \qquad ①$$

时，则系统是空不变的. 我们对于空不变系统来说，简谐信息是本征信息，因此当 $h(x,y,x',y')\neq h(x'-x,y'-y)$ 时，系统就是空变的. 实际中的光学成像系统一般都不是严格的空不变系统，只有在小范

围(等晕区)内才是近似空不变的.因此,空变是最为普遍的.对空变系统来说,简谐信息就不是系统的本征信息了.

下面我们来证明,简谐信息是线性系统本征信息的条件是系统的空不变性.当系统的输入信息为本征信息时,可表示为

$$g_1(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)}.$$

如果简谐信息是该系统的本征信息,则输出信息可表示为

$$\begin{aligned} g_2(x',y') &= H(f_x,f_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(f_x,f_y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x'+f_y y')} \\ &= \widetilde{H}(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x'+f_y y')}, \end{aligned}$$

式中 $\widetilde{H}(f_x,f_y)$ 反映了输出信息相对于输入信息的振幅和相移.用叠加积分来表示,则有

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\eta,x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x\xi+f_y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &\qquad = \widetilde{H}(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x'+f_y y')}, \end{aligned}$$

式中 h 为系统的脉冲响应.上式等号两边同乘以 $\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)]$ 并对 f_x,f_y 取积分,等号左边得到

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{+\infty}\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\eta,x',y')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x\xi+f_y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\} \\ &\qquad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\eta,x',y')\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi[f_x(\xi-x)+f_y(\eta-y)]}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi,\eta,x',y')\delta(\xi-x,\eta-y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= h(x,y,x',y'), \end{aligned}$$

右边得到

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{H}(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x'+f_y y')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \\ &\qquad = \iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{H}(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi[f_x(x'-x)+f_y(y'-y)]}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \end{aligned}$$

$$= h(x' - x, y' - y).$$

由此可知，要使简谐信息为系统的本征信息，式①必须成立，即系统必须是线性空不变的. $\tilde{H}(f_x, f_y)$正是脉冲响应的傅里叶变换，即

$$\tilde{H}(f_x, f_y) = \mathscr{F}\{h(x' - x), (y' - y)\}.$$

上式就是线性空不变系统的传递函数，输出信息相对于输入信息的振幅和相移分别是传递函数的模和辐角.

第六章　全息照相

§1　全息照相的过程与特点

本节思考题从略.

§2　全息照相的原理

1. 试将全息图波前的再现与平面镜成像进行比较,其中有何相同和不同之处?

答　全息图波前再现与平面镜反射成像相比,有如下几个共同点:

(1) 全息图能再现物光波前,平面镜反射的也是物光波前.两者都包含了物体点的振幅信息和相位信息,因而都能观察到逼真的立体图像.

(2) 全息图中的每个点(局部)都能再现物体各点的全部信息,平面镜每个点(局部)也都反射物体各点的全部信息,即都是点面对应关系.

两者的不同之处有:

(1) 平面镜反射的只是物光波(虚像);而全息图再现的是一对孪生的可能有所偏转和缩放的物光波和物光波的共轭波.

(2) 全息图再现的虚像可在原物的位置,实像和虚像可能相对全息图镜像对称;而平面镜所成的虚像与原物镜像对称.

(3) 全息图再现像可以移位和缩放,而平面镜成像既不能移位,也不能缩放.

2. 为什么全息术对光源的时间相干性有较高的要求?在布置全息记录的光路时,人们常常注意让参考光路与物光路到达记录介质的光程尽量相近.这是为什么?为什么全息台要有很好的防震设备?

答 全息术依据的是干涉和衍射原理. 全息图记录的是物光波的振幅信息和相位信息,是由物光波与参考光波相干叠加产生的干涉条纹记录下来的. 干涉条纹的衬比度记录了物光波前的振幅分布,其几何特征记录了物光波前的相位分布. 如果参考光波与物光波不相干,则物光波前的相位分布是不可能记录下来的. 因此,全息术必须要用相干光源照明. 通常物光波和参考光波是由同一照明光波分离出来的,它们在记录介质重新交叠时必然要有光程差. 为使在光程差较大时仍有较高的相干程度,这就要求照明光波有足够的相干长度,即光源有较高的时间相干性. 在布置全息记录光路时,尽量使参考光路与物光路到达记录介质的光程相同(这是基于时间相干性的考虑,因为光程差越小,两光波的相干程度越高). 此外,全息台要有很好的防震性能,才能使记录介质上的干涉条纹准确地反映物光波前的相位分布,因为全息台的任何轻微振动都会导致两相干光束光程差的改变. 到达记录介质某一点的光程差变化一个波长,该处的条纹就会移过一条,条纹的衬比度下降到零. 这时,干涉场的强度将趋于均匀,就完全记录不到相位信息了.

3. 全息图破损就意味着丢失了一些信息. 为什么再现的像仍然完整无缺? 这时再现像中包含的信息没有减少吗? 如果残留的全息图太小了,对再现像有什么影响? 试说明理由.

答 在全息照相中,物光波的振幅信息和相位信息是通过物光波与参考光波的干涉条纹记录在全息图上的. 每一物点所发出的光波直接落在记录介质的整个平面上,也就是说,全息图的每个局部都包含了物体各点的全部振幅信息和相位信息. 因此,即使全息图破损,它仍然记录物光波的全部光信息,再现像仍然完整无缺,再现像中包含的光信息(全部物点的振幅信息和相位信息)并未减少. 当然,如果残留的全息图太小,再现像将会模糊不清,主要原因有二:(1) 由于衍射再现时衍射屏(全息图)的面积太小,导致像的强度减弱. 这一点根据惠更斯-菲涅耳原理是显然的. (2) 由于衍射屏的线度太小,导致衍射波的弥散增加,使像的轮廓模糊.

4. 若制备全息图时未能做到线性冲洗,非线性效应会造成什么后果?

答　在制备全息图时，若对记录介质未能做到线性冲洗，则相应的线性冲洗系数 β 应改写为非线性的复数：

$$\tilde{\beta}(x,y)=\beta_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_R(x,y)}.$$

此时，全息图的透过率函数 $\tilde{t}(Q)$ 与曝光强度 $I(Q)$ 不再成简单的线性关系. 再现时，从全息图输出波前中的 0，±1 级波都要受到非线性冲洗系数 $\tilde{\beta}(x,y)$ 的作用，其中 $\beta_0(x,y)$ 的作用是调制振幅，$\varphi_R(x,y)$ 的作用是使各级衍射波产生偏转和(或)聚散：一次相因子的作用产生偏转；二次相因子的作用产生聚散. 当然，还可能有其他形式的相因子，作用结果就更复杂了. 从观察结果上看，一对孪生像的强度分布与原物不再一致，即产生强度分布失真；同时还可能附加有像的移位和缩放.

5. 怎样配制参考光波与再现时用的照明光波，才能使再现的 ±1 级像与原物大小一样，位置相对全息图面成镜像对称？

答　在全息图再现的衍射场中，±1 级波分别为

$$\tilde{U}_{+1}=\beta A_R' A_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_R'-\varphi_R)}\tilde{U}_O,\quad \tilde{U}_{-1}=\beta A_R' A_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_R'+\varphi_R)}\tilde{U}_O^*.$$

欲使再现的±1 级像与原物大小一样，且成镜像对称，必须满足

$$\varphi_R'-\varphi_R=\varphi_R'+\varphi_R=0,$$

即记录时的参考光波和再现时的照明光波必须是波长相同的正入射的平面波.

6. 一对孪生波均为发散波(两个虚像)或均为会聚波(两个实像)，是可能的吗？试设计出现此种情况的照明条件.

答　全息图再现时，将产生一对由 ±1 级衍射波(上题中式①)决定的孪生像. ±1 级衍射波分别表示受到参考波及照明波相因子作用后的物光波和物光共轭波. 一对孪生像能否保证一个为虚像、另一个为实像，将决定于相因子的作用. 因为线性因子作用到一个波前函数上，等效于一个棱镜的偏转，并不改变光束的聚散性，所以线性相因子分别作用到 $\tilde{U}_O$ 和 $\tilde{U}_O^*$ 上产生的孪生像必然是一个虚像和一个实像. 也就是说，使孪生像为虚像和实像的充分条件是参考波和照明波均为平面波. 二次相因子对波前函数的作用等效于一个透镜的聚散. 一般情况下，球面波在傍轴条件下的相因子包含线性和二次两

部分，从而它对波前的作用等效于一个棱镜和一个透镜的联合. 如果参考波、照明波为球面波时，可以预期，全息图的衍射场中一对孪生波均为发散波或均为会聚波是完全可能的.

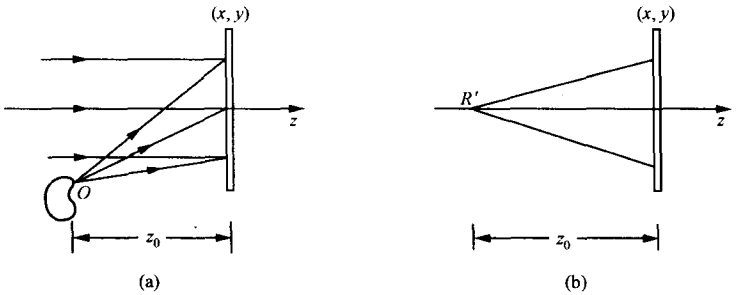


图 15-1

下面我们以用平面波作为参考波、用球面波作为照明波为例，讨论孪生像的均为虚像的照明条件. 如图 15-1(a)，以正入射的平面波作为记录时的参考波(即 $\tilde{U}_R = A_R$). 物体上任一点源发出的球面波是物光波的基元波，不妨以基元波为物光波. 设物点 O 的坐标为$(0, y_0 - z_0)$. 如图 15-1(b)，再现时以轴上点源 R' 发出的球面波为照明波，点源的坐标为$(0, 0, -z_0)$. 略去一切常数不写，则傍轴条件下的物光波和照明波分别为

$$\tilde{U}_O = A_0 \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z_0} - \frac{y_0 y}{z_0}\right)\right],$$

$$\tilde{U}'_R = A'_R \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z_2}\right].$$

因此，全息图再现时的 ± 1 级衍射波分别为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{+1} &= \beta A'_R A_R \exp[i(\varphi'_R - \varphi_R)]\tilde{U}_O = A_1 \exp(i\varphi'_R)\tilde{U}_O \\ &= A_1 \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z_2}\right]\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z_0} - \frac{y_0 y}{z_0}\right)\right] \\ &= A_1 \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z'} - \frac{y}{z'}\frac{z'}{z_0}y\right)\right], \qquad ①\end{aligned}$$

$$\tilde{U}_{-1} = \beta A'_R \exp[i(\varphi'_R + \varphi_R)]\tilde{U}^*_O = A_1 \exp(i\varphi'_R)\tilde{U}^*_O$$

$$= A_1 \exp\left[\mathrm{i}k \frac{x^2 + y^2}{2z_2} \right] \exp\left[-\mathrm{i}k \left(\frac{x^2 + y^2}{2z_0} - \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right]$$

$$= A_1 \exp\left[-\mathrm{i}k \left(\frac{x^2 + y^2}{2z''} - \frac{y}{z''} \frac{z''}{z_0} y_0 \right) \right], \qquad ②$$

其中

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2}, \qquad ③$$

$$\frac{1}{z''} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_2}. \qquad ④$$

根据相因子判断，由式①，③决定的+1级波为发散的球面波，中心(即虚像)O_{+1}点的坐标为 $O_{+1}(0, y_0 z'/z_0, -z')$. 由式②，④决定的−1级波是中心在轴外的球面波，是会聚的还是发散的，要看 z''的符号. 不难看出，当 $z_2 > 0$ 时，$z'' > 0$，−1级波为会聚球面波；中心(即实像)O_{-1}点的坐标为 $O_{-1}(0, y_0 z''/z_0, z'')$. 当 $z_2 < z_0$ 时，$z'' < 0$，−1级波为发散球面波，中心(即另一虚像)O_{-1}点的坐标为 $O_{-1}(0, y_0 z''/z_0, z'')$.

以上分析表明，在如图所示的光路配置情形下，只要物点的纵向距离大于再现照明点源的纵向距离，则全息再现的±1级波都是发散波，一对孪生像均为虚像.

其实，这也可按下述思路直接得到：发散的照明球面波所提供的二次相因子起负透镜的作用. 等效透镜的焦距就是照明点源的纵向距离(包括正负号). 根据几何光学，透镜成像必定仍然是发散波(虚像). 而对会聚球面波(物光波的共轭波)，当会聚中心落在负透镜的第一焦点以外时，它经负透镜以后也将成为发散波(虚像). 同理，如用会聚球面波照明全息图，则照明光波提供的二次相因子起正透镜的作用；等效透镜的焦距就是会聚中心的纵向距离. 会聚球面波(物光波的共轭波)经正透镜后必定仍为会聚波(实像). 而对发散球面波(物光波)，当发散中心(物点)落在透镜第一焦点以外时，它经正透镜以后也将成为会聚球面波(实像). 这种情形相当于图 15-1(b)中改用会聚球面波照明，会聚中心 R'的坐标为 $R'(0, 0, z_2)$，且使 $z_2 > z_0$. 此时，再现的一对孪生像均为实像. 如果再考虑到参考波为球

面波的情形，全息再现两个实像或两个虚像的可能就更为多样了.

*§3 全息术应用简介

本节思考题从略.

*§4 傅里叶全息图及其应用举例

本节思考题从略.

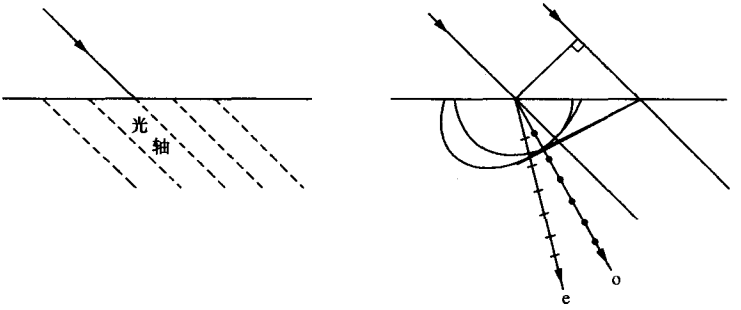
第七章　光在晶体中的传播

§1　双　折　射

1. 在白纸上画一个黑点，上面放一块冰洲石，即可看到两个淡灰色的像，其中一个位置比另一个高. 当转动晶体时，一个像不动，另一个像围绕着它转. 试解释这个现象. 在这个实验中，哪个像点是看起来较高的？

答　透过冰洲石观察纸上的黑点，看到的是光线折射所成的两个像，这是因为光在冰洲石晶体内发生了双折射. 这样看到的折射成像的位置总是比实际物体要向上浮起一些，折射率越大，像浮起的高度越大. 冰洲石是负晶体，其 e 光的折射率（除光轴方向外）总是比 o 光小. 所以在这个实验中，o 光折射引起的像点位置较高. 又由于 e 光的折射率小，与 e 光的方向与光轴方向的相对取向有关，而 o 光的折射率是与此相对取向无关的常数. 因此在转动晶体时，o 光折射引起的像保持不动，e 光折射引起的像转动.

2. 当单轴晶体的光轴与表面成一定角度，一束与光轴方向平行的光入射到晶体表面之内（见图 16-1(a)）时，它是否会发生双折射？



(a)　　(b)

图　16-1

答 如图 16-1(b)所示，用惠更斯作图法可见，在晶体光轴方向与表面成一定夹角时，尽管入射光线与光轴方向平行，晶体内的光线仍然发生了双折射. 无论是在传播方向还是传播速度上，o 光和 e 光都发生了分离. 必须注意，仅当体内光线沿光轴方向传播时，才不发生双折射. 显然，要保证体内折射光线与光轴方向一致，只有光轴垂直晶体表面，且令平行光正入射才行.

3. 在图 16-2(a)，(b)中虚线代表光轴. 试根据图中所画的折射情况分别判断晶体的正负.

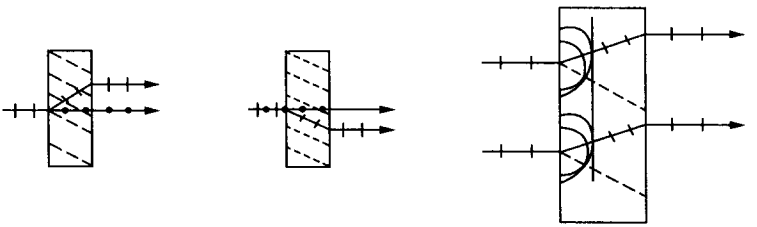


图 16-2

答 我们可根据 e 光的折射方向来判断晶体的正负. 如图 16-2(c)所示，假定晶体是负的，则晶体中的 e 光次波面是长轴垂直光轴的椭球面. 由惠更斯作图法可知，e 光向上偏折. 由此可判定在图 16-2(a)的折射情形中，晶体是负的；同理，在图 16-2(b)的折射情形中，晶体是正的.

4. 用单轴晶体制成三棱镜三块，光轴方向分别由图 16-3(a)，(b)，(c)所示，图中 A 代表顶角. 若用最小偏向角法测折射率，使用哪块棱镜可测得 n_e？哪块可测得 n_o？

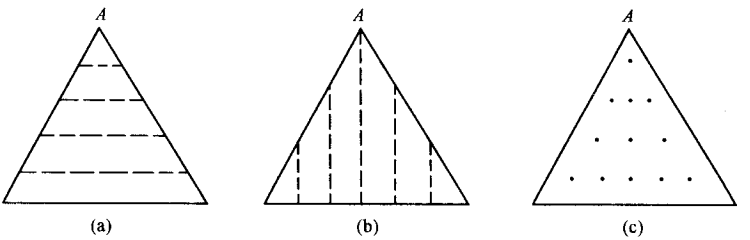


图 16-3

答　在最小偏向角法测折射率的光路中，要求当光线在三棱镜的主截面内传播，且偏向角取最小值时，棱镜内的光线平行于底边. 对棱镜内满足最小偏向角的折射光线来说，在图 16-3(a)的情形中，两个正交的光振动都垂直光轴；对图 16-2(b)和(c)来说，既存在与光轴平行的光振动，又存在与光轴垂直的光振动. 因此，使用图 16-3(a)中的晶体只能测 n_o；而使用图 16-3(b)，(c)中的晶体既可测 n_e，也可测 n_o.

5. 在图 16-4 所示的锥形折射光束中，各光线在晶体中经历的光程相等吗？

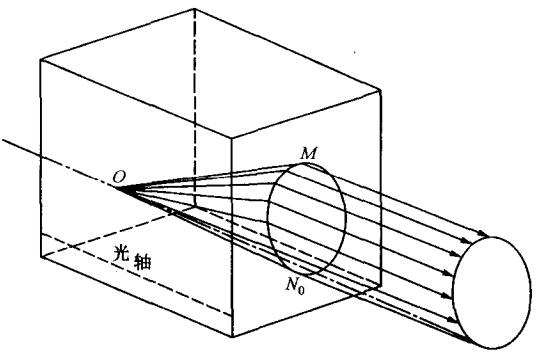


图　16-4

答　在图 16-4 中，$\overrightarrow{ON}_0$ 的方向为晶体的光轴，波法线 $\boldsymbol{k}$ 沿此方向. 各折射光线的相速均相同；晶片的出射面恰为等相面. 因此，锥形折射光束中的各光线在晶体中传播所需的时间相同，经历的光程相等.

6. 令 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 分别代表光线和法线(波矢)方向的单位矢量，通常把平面波写成

$$\begin{aligned} E &= E_0\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \\ &= E_0\exp[-\mathrm{i}\omega(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}/v_p)], \end{aligned} \qquad ①$$

这里 v_p 是法线速度(相速). 把此式写成

$$E = E_0\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{r}}{v_r}\right)\right],$$

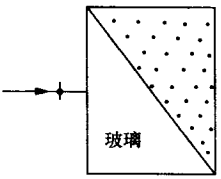
式中 v_r 为射线速度，对吗？为什么？

答 与式①类似，引进射线波长 λ_r 和射线波矢 $\boldsymbol{s}=(2\pi/\lambda_r)\hat{\boldsymbol{s}}$，则平面波可写成

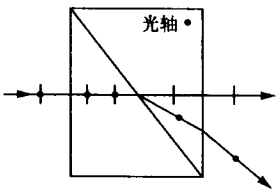
$$\begin{aligned}E&=E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{r})]\\&=E_0\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda_r}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]\\&=E_0\exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{r}}{\lambda_r/T}\right)\right]\\&=E_0\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{r}}{v_r}\right)\right].\end{aligned}$$

§2 晶体光学器件

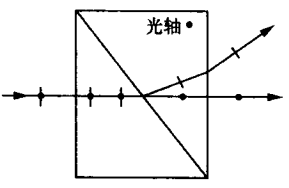
1. 设晶体是负的，玻璃的折射率为 n. 分别就下列四种情形确定自然光经过图 16-5(a)中的棱镜后双折射光线的传播方向和振动方向：



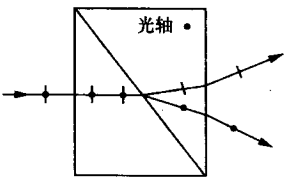
(a)



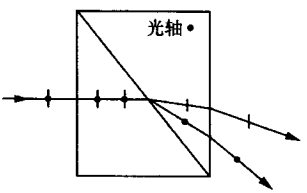
(b)



(c)



(d)



(e)

图 16-5

(1) $n=n_o$;

(2) $n=n_e$;

(3) $n_o>n>n_e$;

(4) $n>n_o$.

答　当晶体中的光轴垂直入射界面时,两折射光线都服从普通的折射定律,只是折射率应取主折射率 n_o 和 n_e. 我们须知,o 振动总是垂直主平面;e 振动总是平行主平面. 据此,可分别以 $n=n_o$,$n=n_e$,$n_o>n>n_e$,$n>n_o$ 四种情形作图,如图 16-5(b)～(e).

2. 确定自然光经过如图 16-6(a)中的棱镜后,双折射光线的传播方向和振动方向.(设晶体是正的.)

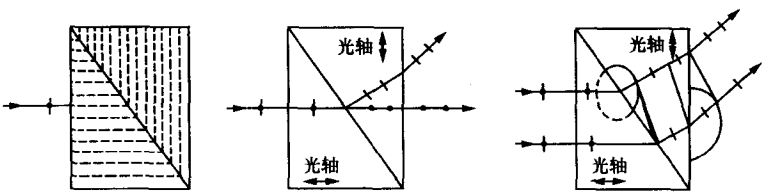


图　16-6

答　本题是光在单轴晶体中的双折射问题. 光在棱镜内及射出棱镜后,双折射光线的传播方向及振动方向如图 16-6(b)所示. 当自然光正入射到第一块棱镜时,由于光轴与晶体表面垂直,不发生双折射. 进入第二块棱镜后,对于 o 光,两棱镜的折射率都是 n_o,它仍原方向前进;根据折射定律,最后出射时也不发生偏折. 对于 e 光,两棱镜的折射率不同,在其界面上要发生偏折,但不服从普通的折射定律;折射光的方向应由惠更斯作图法确定,如图 16-6(c)所示.

由以上结论可知,从双折射棱镜出射的是方向被分离的两束线偏振光. 遮去其中任何一束,都可得到偏振度为 100%的线偏振光. 出射光的偏振度高,是双折射晶体偏振器比其他偏振器优越的特点.

3. 分析沃拉斯顿棱镜(见图 16-7)中双折射光线的传播方向和振动方向.(棱镜的材料是冰洲石.)

答　第一块棱镜的光轴与表面平行. 当自然光正入射时,两折射

光线的传播方向均垂直于表面(和光轴),方向并不分离;但波速 v_o 和 v_e 不同(由于冰洲石是负晶体,$v_o < v_e$). 进入第二块棱镜,由于光轴垂直于入射面,光线的传播方向服从普通的折射定律,只是折射率应取主折射率 n_o 和 n_e. 对于平行纸面的振动,折射率由 n_e 变到 n_o. 因 $n_o > n_e$,所以光线朝第二块棱镜底面的方向偏折. 出射棱镜后,由于空气的折射率比 n_o 和 n_e 都要小,光线将进一步朝相反的方向偏折.

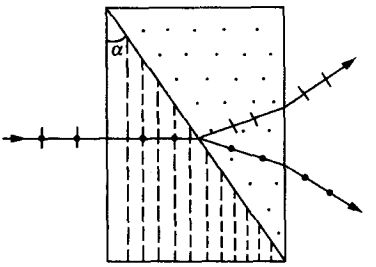


图 16-7

§3 圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验

1. 圆偏振光中的电矢量大小为 A. 它的强度 $I=$?经过偏振片后强度 I' 变为多少?(设偏振片是理想的,即对沿透振方向分量的透射率为 100%.)

答 电矢量大小为 A 的圆偏振光可以看成相位差为 $\pm\pi/2$、振幅为 A 的两个相互垂直的线偏振光的合成,强度为两个线偏振光强度的非相干叠加,即 $I=2A^2$. 圆偏振光经过偏振片后,只剩下振动方向平行于透振方向的线振偏光分量. 在忽略反射、吸收的情况下,透射光的强度 $I'=A^2$.

值得指出的是,圆偏振光的电矢量在波面内,其运动特点是:瞬时值的大小不变;仅方向呈周期性变化. 在此,对电矢量的描述不能引用振幅的概念,即不能把电矢量的大小 A 当做圆偏振光的振幅,否则就会导致 $I=A^2$ 的错误.

2. 图 16-8 所示为一椭圆偏振光的电矢量沿波线的瞬时分布图. 此椭圆偏振光是左旋还是右旋的?

答 波动是运动状态的传播. 某一时刻、某一地点的运动状态必然要成为下一时刻、下一地点的运动状态. 因此,沿波线方向呈右旋的电矢量的瞬时分布,对应于同一波面上电矢量的左旋运动,即图 16-8 所示的右旋瞬时分布的椭圆偏振光是左旋的.

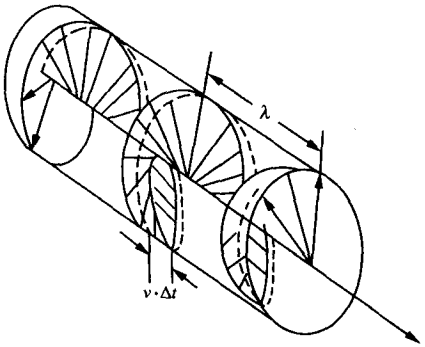


图　16-8

3. 画出表 16-1 中各情形出射光的偏振状态.(已知入射光的偏振态.)

答　已知入射光的偏振态,求通过波晶片后出射光的偏振态,可归结为如下步骤:

(1) 将入射光的电矢量沿波晶片的 e 轴和 o 轴分解,并分别求出其振幅 A_e 和 A_o 及入射点 O 振动相对于 e 振动的相位差 $\delta_{入}$.

(2) 求出出射光两分量的振幅及相位差 $\delta_{出}$. 在忽略反射、吸收等损耗的情况下,出射光的振幅仍为 A_e 和 A_o,从而电矢量端点的轨迹与长、宽为 $2A_e$,$2A_o$ 的矩形内切,矩形的各边分别与 e,o 轴平行. 出射光 o 分量相对于 e 分量的相位差

$$\delta_{出} = \delta_{入} + \delta',$$

其中

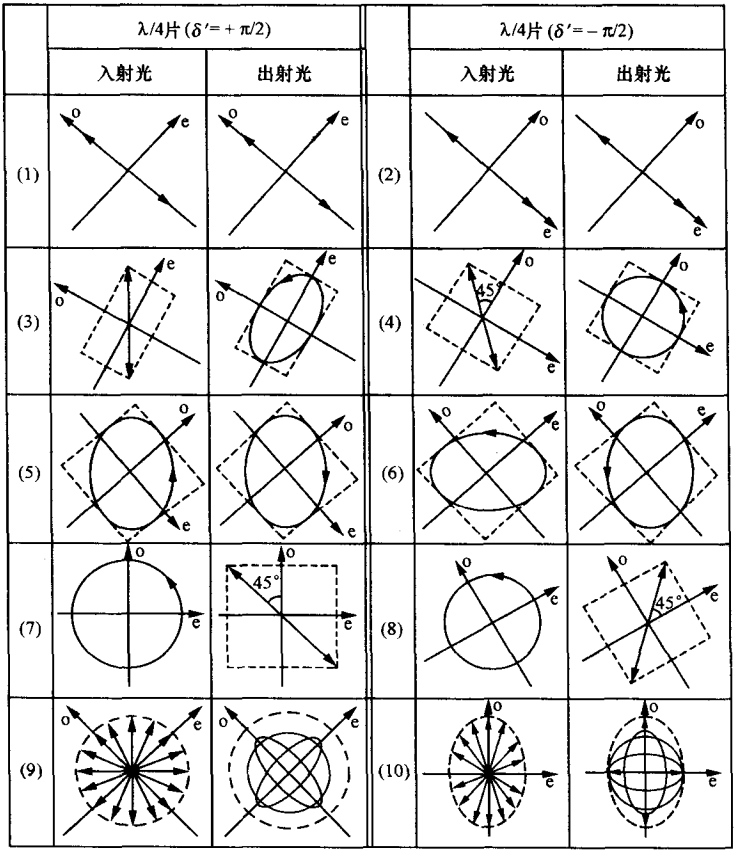
$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$$

是光在波晶片体内传播引起的 o,e 分量间的相位差.

(3) 根据出射光 o 分量与 e 分量的振幅关系和相位关系,合成出射光的偏振态.

据此,作出情形(1)～(10)中出射光的偏振态如表 16-1 所示. 并作如下简要说明:

表 16-1



(1) 入射光只有 o 分量. 故出射光仍为只有 o 分量的线偏振光，且振幅大小不变.

(2) 入射光只有 e 分量. 故出射光仍为只有 e 分量的线偏振光，且振幅大小不变.

(3) 入射光为第 1,3 象限内的线偏振光，$\delta_{入}=0$，$\delta'=-\pi/2$. 故 $\delta_{出}=-\pi/2$；出射光为左旋正椭圆偏振光.

(4) 入射光为第 2,4 象限内的线偏振光，且偏振方向与 o 轴成 45°角，$\delta_{入}=\pi$，$\delta'=\pi/2$. 故 $\delta_{出}=3\pi/2$，出射光为左旋圆偏振光.

(5) 入射光为长轴在第 2,4 象限内的左旋斜椭圆偏振光，$\delta_{入}$为第 3 象限内的某个角度，$\delta'=\pi/2$. 故 $\delta_{出}$为第 2 象限内的某个角度；出射光为右旋斜椭圆偏振光.

(6) 入射光为第 2,4 象限内的左旋椭圆偏振光，$\delta_{入}$为第 3 象限内的某个角度，$\delta'=\pi/2$. 故 $\delta_{出}=\delta_{入}+\delta'$为第 4 象限内的某个角度，出射光为第 1,3 象限内左旋椭圆偏振光.

(7) 入射光为左旋圆偏振光，$\delta_{入}=-\pi/2$. 故 $\delta_{出}=-\pi$，出射光为第 2,4 象限内的线偏振光，且振动方向与 o 轴成 45°角.

(8) 入射光为左旋圆偏振光，$\delta_{入}=-\pi/2$. 故 $\delta_{出}=0$，出射光为第 1,3 象限内的线偏振光，且振动方向与 e 轴成 45°角.

(9) 入射光为自然光，可看成大量取向轴对称分布、振幅大小相等、相位无关联的线偏振光的集合. 经波晶片后，各线偏振光分别转化为沿 o,e 轴的线偏振光，左、右旋圆偏振光以及长短轴比例不同的左、右旋正椭圆偏振光. 简言之，出射光是各种长短轴比例的且大量相位无关联的左、右旋正椭圆偏振光(圆偏振光、线偏振光是椭圆偏振光的特例)的集合. 从宏观上看，出射光的偏振态仍具有轴对称性. 尽管细微偏振结构与入射光不同，但宏观结果是相同的，因此出射光仍可认为是自然光.

(10) 入射光为部分偏振光，它是大量相位无关联的线偏振光的集合；它们的振幅大小不同，不具有轴对称性. 出射光为线偏振光、圆偏振光和长短轴比例各不相同的椭圆偏振光的集合；它们在相位上也是无关联的. 与(9)不同的是，这时出射光在宏观上仍无轴对称性，仍是部分偏振光.

4. 将上题中的 $\lambda/4$ 片换成 $\lambda/2$ 片. 各情形出射光的偏振状态怎样？

答　将 $\lambda/4$ 片换成 $\lambda/2$ 片，则 $\delta'=\delta=\pi$. 分析方法与上题完全类似，具体结果在此不再赘述.

5. 在一对正交的偏振片之间放一块 $\lambda/4$ 片，以自然光入射. 问：

(1) 转动 $\lambda/4$ 片的光轴时，出射光的强度怎样变化？有无消光现象？

(2) 如果有强度极大和消光现象，它们在 $\lambda/4$ 片的光轴处于什

么方向时出现？这时从 $\lambda/4$ 片射出的光的偏振状态如何？

答 首先，自然光入射到第一块偏振片上，出射的是线偏振光. 再经 $\lambda/4$ 片后，出射的一般是椭圆偏振光(特殊情况下是圆偏振光或线偏振光，具体由 $\lambda/4$ 片的光轴方向和第一块偏振片透振方向的相对取向决定). 最后，从第二块偏振片出射的是线偏振光，强度随 $\lambda/4$ 片的转动而变，有极大和消光现象. 当 $\lambda/4$ 片的光轴与第一块偏振片的透振方向成 45°角时，从 $\lambda/4$ 片出射的为圆偏振光，从第二块偏振片出射光的强度为极大. 当 $\lambda/4$ 片的光轴平行或垂直于第一块偏振片的透振方向时，从 $\lambda/4$ 片出射的为线偏振光，偏振方向垂直于第二块偏振片的透振方向；从而最后出射光的强度为零，有消光现象.

6. 如本节[①]指出，在实验室中，偏振片和 $\lambda/4$ 片上的透振方向和光轴方向都未标出；而在检验椭圆偏振光时，需要将 $\lambda/4$ 片的光轴对准椭圆的主轴之一. 你能根据上题的原理设计出一个方案，利用两块偏振片和一块 $\lambda/4$ 片做到这一点吗？

答 仅用一块偏振片，是无法区别椭圆偏振光和部分偏振光的，而必须借助于 $\lambda/4$ 片. 令入射光依次通过 $\lambda/4$ 片和第二块偏振片，并保证 $\lambda/4$ 片的光轴方向对准入射光的强度极大或极小方位(对椭圆偏振光来说，即主轴方位). 再转动第二块偏振片的透振方向，观察出射光的强度变化：如有消光现象，则为椭圆偏振光；如无消光现象，则为部分偏振光. 实验的关键是保证 $\lambda/4$ 片的光轴对准入射光的极大或极小方位，用以下方案可以实现：

(1) 用第一块偏振片对准入射光，转动其透振方向，观察透射光的强度变化. 当强度达极大或极小时，停住转动. 这时，此偏振片已对准入射光的极大或极小方位；

(2) 在第一块偏振片后加第二块偏振片，并转动后者的透振方向，观察透射光的强度变化，必有极大和消光位置. 在消光位置停住转动第二块偏振片，这时必然有两块偏振片的透振方向互相垂直.

(3) 在两块偏振片之间插入 $\lambda/4$ 片，透射光的强度一般不为零. 转动 $\lambda/4$ 片，可观察到四个消光方位，任选一个方位停住 $\lambda/4$ 片. 这

---

① 见：赵凯华，钟锡华. 光学(下册). 北京：北京大学出版社，1984：199.

时，已保证 $\lambda/4$ 片的光轴对准入射光的极大或极小方位(椭圆偏振光的主轴方位)；

(4) 撤去第一块偏振片，并保持 $\lambda/4$ 片不动. 这时，转动第二块偏振片即可检验椭圆偏振光.

7. 激光器的布儒斯特窗口是其法线与管轴夹角等于布儒斯特角(全偏振角)的玻璃窗口. 有布儒斯特窗口的激光器发出的光是线偏振的. 如图 16-9 所示，在使用激光器发出的线偏振光进行各种测量时，为了避免激光返回谐振腔，在激光器输出镜端放一块 $\lambda/4$ 片，并且令其主截面与光的振动平面成 45°角. 试说明此波片的作用.

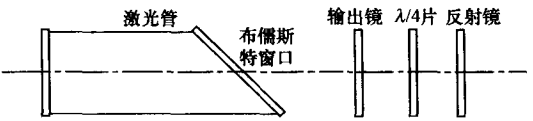


图　16-9

答　从激光器布儒斯特窗输出的激光是线偏振光，其振动面是窗口法线与管轴构成的平面，即发出的激光是 p 光. 由于 p 光的振动面与 $\lambda/4$ 片的主截面成 45°角，故 p 光入射到 $\lambda/4$ 片后，透射的是圆偏振光，不妨设光在波晶片内传播引起的 o，e 两分量间的相位差

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2},$$

则圆偏振光是右旋的. 右旋圆偏振光入射到反射镜上，经反射后成为左旋圆偏振光(注意，所谓左旋还是右旋，总是相对迎着光束传播的观察方向而言的). 左旋圆偏振光再入射到 $\lambda/4$ 片上，透射光又成为线偏振光，其振动方向在由 e，o 分量组成的坐标系中的第 1，3 象限内，且与 e 轴成 45°角，而与从激光器输出的线偏振光的振动方向正好成 90°角，即返回的激光是 s 光. 输出的 p 光返回时成为 s 光，这是由 $\lambda/4$ 片的相移作用造成的. 由于返回的激光以布儒斯特角入射到布儒斯特窗上，反射的全部是 s 光，即对于 s 光来说，反射损耗较大，透射强度被抑制. 进入激光器后，在谐振腔内进一步受到布儒斯特窗的抑制作用，不能满足阈值条件，即不能成长为激光.

§4 偏振光的干涉及其应用

1. 任何干涉装置中都需要有分光束器件. 在偏振光干涉装中的分光束器件是什么?

答 偏振光干涉装置中的分光束器件是各向异性元件,例如波晶片把入射光分解成 o 光和 e 光.

2. 第三章讲过分振幅和分波前干涉装置. 本节所描述的(偏振光)干涉装置是按什么分割光束的?

答 在偏振光干涉装置中是按分振幅法分割光束的,由各向异性介质元来实现. 例如在波晶片中,把入射光的能流分割成 o 振动和 e 振动两部分能流.

3. 如图 16-10 所示的偏振光干涉装置[①]中,偏振器 Ⅰ,Ⅱ 对保证相干条件来说各起什么作用?撤掉偏振器 Ⅰ 或 Ⅱ 能否产生干涉效应?为什么?

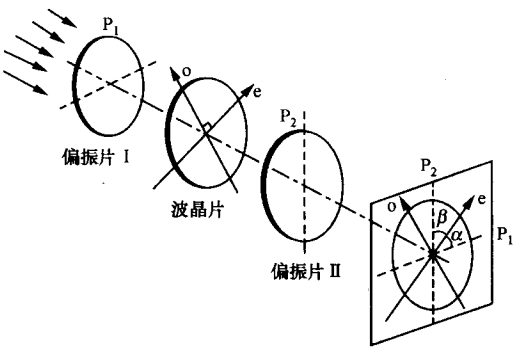


图 16-10

答 如图 16-10 所示的偏振光干涉装置,其出射光强是 o,e 振动在偏振器 Ⅱ P_2 透振方向上投影平行分量的相干叠加. 显然,偏振器 Ⅱ 的作用是保证了"存在相互平行的振动分量"这一相干条件的. 本装置中入射的是自然光,它的垂直的 o,e 分量之间是没有稳定的

① 见:赵凯华,钟锡华. 光学(下册). 北京:北京大学出版社,1984:202~205.

相位关系的.但是,自然光经过偏振片后的情况就不同了,偏振片把自然光改造成线偏振光,线偏振光的两个垂直分量之间是有确定的相位差的.可见,偏振片Ⅰ的作用是使o,e分量之间有稳定的相位差,即保证了"相位差稳定"这一相干条件.综上所述,在自然光入射的情形下,撤掉偏振器Ⅰ或Ⅱ都不能产生干涉效应.当然,如果入射光本身就是线偏振光、圆偏振光或椭圆偏振光,它们的两个垂直分量之间本身有确定的相位关系,偏振器Ⅰ就不是必需的了.

4. 如偏振光干涉实验①中并没有干涉条纹,你认为这时是否发生了光的干涉?为什么?

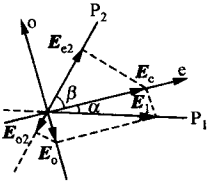


图　16-11

答　凡是符合相干条件的两列光波的叠加都是相干叠加.本实验中,屏幕上的强度是 $\boldsymbol{E}_{e2}$,$\boldsymbol{E}_{o2}$(振幅分别为 A_{e2},A_{o2})同方向振动叠加的结果(图 16-11).由于这两个分量之间是满足相干条件的,叠加结果必然是相干叠加,其强度为

$$I_2 = A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\delta_{出},$$

式中 $2A_{e2}A_{o2}\cos\delta_{出}$ 称为干涉项,它正是干涉效应的体现.当晶片的厚度均匀时,幕上的照度是均匀的,并不出现干涉条纹,这是因为 $\delta_{出}$ 取与屏幕上各点位置无关的均匀值.转动任何元件,$\delta_{出}$ 随之变化,但仍只是均匀地变化.因此,屏幕上的干涉场只有均匀的亮暗颜色的变化(单色光照明时只有亮暗变化),仍不出现干涉条纹.

5. 巴比涅补偿器的结构如图 16-12(a)所示,它由两个楔形的石英棱镜组成,光轴方向如图.问:

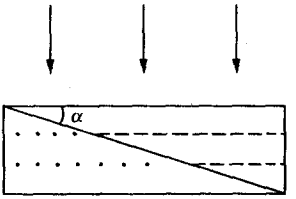
(1) 当单色偏振光、椭圆偏振光、自然光通过巴比涅补偿器时通过检偏器观察,将分别看到什么图样?

(2) 干涉条纹的距离与顶角 α 有什么关系?

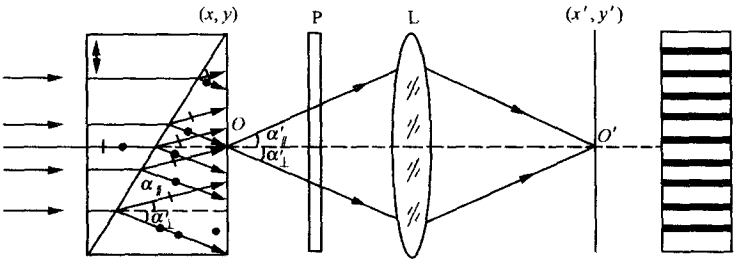
(3) 用白光入射时,观察到的图样如何?

答　首先分析巴比涅补偿器的工作原理和特性.当光线入射到补偿器上后,均要被分解为两个正交振动 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\perp}$(如图 16-12(b)):$\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 平行纸面,$\boldsymbol{E}_{\perp}$ 垂直纸面,其中 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 先后以折射率 n_e,n_o 通过

① 见:赵凯华,钟锡华.光学(下册).北京:北京大学出版社,1984:202～206.



(a)



(b)

图 16-12

两块棱镜. 于是,在第一块棱镜内传播的包含两个正交振动(速度不同)的一束平行光,经两块棱镜的交界面后,开始分离为两束不同方向的平行光. 考虑到当入射面垂直光轴时折射光线满足普通形式的折射定律,且 $n_e > n_o$(石英是正晶体),可确定两束平行光的偏向角(相对于图 16-12(b)中以虚线表示的入射方向)在楔角 α 很小的条件下分别近似为

$$\alpha_{//} \approx (n_e/n_o - 1)\alpha > 0 \quad (\text{向上}),$$

$$\alpha_{\perp} \approx (n_o/n_e - 1)\alpha < 0 \quad (\text{向下}),$$

夹角为

$$\Delta\alpha = \alpha_{//} - \alpha_{\perp} \approx 2\left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e}\right)\alpha.$$

这两束平行光从 Oxy 面出射到空气时将进一步分离,最后的偏向角达到

$$\alpha'_{//} \approx n_o\alpha_{//} \approx (n_e - n_o)\alpha > 0 \quad (\text{向上}),$$

$$\alpha'_{\perp}=n_e\alpha_{\perp}\approx(n_o-n_e)\alpha<0\quad(\text{向下}),$$

夹角为

$$\Delta\alpha'=\alpha'_{/\!/}-\alpha'_{\perp}=2(n_e-n_o)\alpha.$$

可见，两块棱镜交界面以后的空间以及补偿器出射面以后的空间都是两束传播方向不同而振动方向互相垂直的平行光的叠加场. 这两束平行光在 Oxy 面出射时的相位分布分别为

$$\varphi_{/\!/}(x,y)=-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha'_{/\!/}\,x+\varphi_{/\!/}(0)$$

$$\approx-\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)\alpha x+\varphi_{/\!/}(0),$$

$$\varphi_{\perp}(x,y)=-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha'_{\perp}\,x+\varphi_{\perp}(0)$$

$$\approx-\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)\alpha x+\varphi_{\perp}(0),$$

式中 $\varphi_{/\!/}(0)$ 和 $\varphi_{\perp}(0)$ 分别为两个振动在中心 O 点（两楔形棱镜等厚线所在的地点）的相位. 于是，两平行光束的相位差分布为

$$\Delta\varphi(x,y)=\varphi_{\perp}-\varphi_{/\!/}=\frac{2\pi}{\lambda}2(n_e-n_o)\alpha x,$$

可见，几何厚度处处相等的补偿器，其相位差的分布相当于一个厚度连续变化的楔形晶片. 由于两个棱镜对光程的互补作用，$\varphi_{\perp}(0)-\varphi_{/\!/}(0)$ 完全等于补偿器入射点处垂直分量和平行分量的相位差：当线偏振光入射时取 0 或 π；当椭圆偏振光入射时取其他值；当自然光入射时取非稳定值.

(1) 我们可以知道，从补偿器出射的是两束振动方向相互垂直、传播方向不同的平行光叠加场，它们是不相干的. 只有在补偿器后加上偏振器，才能使透射场成为两束平行光的干涉场. 当单色线偏振光、椭圆偏振光入射时，透射场都是两束平行光的干涉场，通过检偏器可以观察到平行于 y 轴的等间距的干涉条纹；两者不同的是零级条纹位置不同. 当检偏器 P 的透振方向与入射光线偏振光的振动方向正交时，中心（即 y 轴）必定是零级暗纹（这是补偿器与等效楔形晶片的不同之处）. 当椭圆偏振光入射时，零级暗线上移或下移；当右旋椭圆偏振光入射时下移；当左旋椭圆偏振光入射时上移. 当自然光入

射时，由于两垂直分量之间没有稳定的相位关系，通过检偏器后仍不能获得干涉场，后场只是一片均匀照明，观察不到干涉花样.

(2) 条纹间距

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\sin\alpha'_{/\!/}-\sin\alpha'_{\perp}}\approx\frac{\lambda}{\Delta\alpha'}=\frac{\lambda}{2(n_e-n_o)\alpha}\propto\frac{1}{\alpha}.$$

观察条纹时，可以用屏幕直接接收；但屏幕离得较远时将不能获得交叠区. 实验中最好的办法是加一个透镜 L(如图 16-12(b))，将物面 Oxy 成像于 $O'x'y'$ 面. 如果成像的横向放大率等于 1，则条纹间距不变. 如果用肉眼在检偏器 P 后观察，并把眼睛聚焦于 Oxy 平面，则观察到的现象与上述结果相同.

(3) 用白光入射，与用单色光入射所不同的是，这时观察到的干涉条纹是彩色的.

6. 将一块透明塑料板(如直尺三角板)立放在光滑桌面或玻璃板上，迎着窗口看它的倒影. 有时你会在倒影中看到一些彩色条纹. 试解释这种现象.

答 这种现象可由显色偏振效应给出解释：(1) 塑料透明板的内部存在内应力分布，使其成为一个非均匀的各向异性样品. (2) 入射的散射光具有偏振性(一般为部分偏振光)；而玻璃板的反射具有起偏器功能. 这样，便可以归结为偏振片-各向异性样品-偏振片装置. 这是我们熟悉的典型的偏振光干涉装置. 当白光入射且样品非均匀时，必将输出一幅彩色图样.

§5 旋　光

1. 图 16-13(a)所示的棱镜叫做考纽(Cornu)棱镜. 它由两半个石英晶体做成，一半是右旋晶体，另一半是左旋晶体，光轴如图中虚线所示. 这种棱镜是为摄谱仪设计的，它有什么优点？实际的摄谱仪中多采用图 16-13(b)所示的半个考纽棱镜，中垂面上镀银或铝，将光束沿原路反射回去. 这样的装置是否能达到整个考纽棱镜的作用？为什么？

答 在图 16-13(a)所示的考纽棱镜中，只要保证光线以最小偏

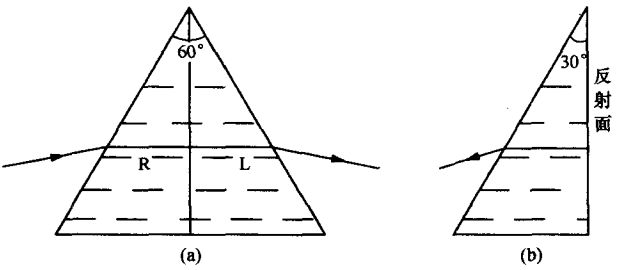


图　16-13

向角条件入射，则当光线通过棱镜时，在左半部的振动面向右旋转，在右半部的振动面向左旋转，两者转过的角度相等，从而保证出射光线的振动面与入射光线的振动面一致. 图 16-13(b)所示的半个考纽棱镜同样能达到上述效果. 因为自然旋光物质的左、右旋性质与光的传播方向是否反转无关. 对右旋晶体来说，迎着传播方向看，振动面总是右旋的. 因此当反射光束沿入射光束的原路返回时，其振动面总是回到初始位置的.

2. 法拉第旋转隔离器的装置就是在一磁光介质棒的前后各放置一个偏振器 P_1 和 P_2. 为了达到光隔离的目的，通过磁感应强度的大小和介质棒长度的选择，应使振动面的偏转角 ψ 等于多少？两偏振器 P_1，P_2 的透振方向应有多大夹角？为什么？

答　法拉第旋转效应的特点之一是：当线偏振光通过磁光介质时，沿磁场方向传播，振动面向右旋；当光束逆磁场方向传播时，振动面向左旋. 所以，如果光束由于反射正、负各两次通过磁光介质后，振动面与初始位置比较将转过 2ψ（ψ 为振动面的偏转角）的角度. 因此，在法拉第旋转隔离器中，通过对磁感应强度大小和介质棒长度的选择，应使振动面的偏转角 $\psi=45°$；同时，使两偏振器 P_1 和 P_2 的透振方向也成 45°夹角. 这样才能使透射光通过，反射光消光，从而达到光隔离的目的.

第八章　光的吸收、色散和散射

§1　光的吸收

本节思考题从略.

§2　色　　散

本节思考题从略.

§3　群　　速

1. 投石于平静的湖面，激起一列波澜. 设想一下，如果水面波的色散规律分别是 $\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda>0$ 和 $\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda<0$，你能观察到什么现象？实地观察一下，水面波的色散属于哪种情况？

答　根据群速与相速的关系

$$v_g = v_p - \lambda \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda$$

可知，如果水面波的色散规律是：

(1) 如果 $\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda>0$，则 $v_g<v_p$，即群速小于相速；波包中心(波峰)的前进速度小于整列波澜的前进速度，相对于波列向后移动.

(2) 如果 $\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda<0$，则 $v_g>v_p$，即群速大于相速；波包中心(波峰)的前进速度大于整列波澜的前进速度，相对于波列向前移动.

仔细观察一下，可知水面波属于情形(1).

§4　光的散射

1. 为什么由点燃的香烟冒出的烟是淡蓝的，而吸烟者口中吐出的烟却呈白色？

答　我们之所以看见烟雾，是光散射的结果. 由点燃的香烟直接冒出的烟是细微颗粒组成的，它对光的散射属于瑞利散射，散射光强与波长的四次方成反比. 由于白光中的短波成分(蓝、紫色)受到的散射比长波成分(红、黄色)强烈得多，我们看到的散射光因短波的富集而呈淡蓝色. 从吸烟者口中吐出的烟由于吸附有水蒸气，使烟雾的颗粒增大，其半径与可见光的波长相比已不算太小；瑞利定律不再适用. 它对光的散射属于米氏(Mie)散射，散射光强与波长的关系不大，因此烟雾呈白色.

第九章　光的量子性　激光

§1　热　辐　射

1. 一块金属在 1100 K 发出红色的光辉，而此温度下，一块石英毫不发光. 这是为什么？

答　除绝对黑体外，物体的辐射本领 $r(\nu,T)$ 是一个与物质的性质有关的函数. 金属在 1100 K 时发出红色的光辉，说明它的辐射谱 $r(\nu,T)$ 在可见光波段出现能量分布；红色则表明可见光波段的能量分布主要集中在长波一端. 石英在此温度下毫不发光，说明其辐射谱 $r(\nu,T)$ 的能量分布基本上不在可见光波段；事实上，它的热辐射中绝大部分是肉眼不可见的红外线. 需要指出的是，只有绝对黑体的辐射谱 $r_0(\lambda,T)$ 才是与物质无关的. 本题中的金属和石英都不能看做绝对黑体.

2. 猎户 α 和猎户 β 是猎户座中最亮的两颗星，看起来前者是橘红色的，后者白中略带蓝色. 它们的温度比太阳高还是低？

答　从这两颗星发出的光的颜色可知，猎户 α 的辐射谱 $r_0(\lambda,T)$ 的极大值波长 $\lambda_{m\alpha}$ 比太阳光谱的要长；猎户 β 辐射的极大值波长 $\lambda_{m\beta}$ 比太阳光谱的要短. 根据维恩位移定律

$$\lambda_m T = b \qquad ①$$

可知，猎户 α 的温度比太阳低；而猎户 β 的温度比太阳高.

3. 天狼星是天空中最亮的星，温度大约在 11 000°. 你能设想它的颜色是怎样的吗？

答　以 $b=0.288\ \text{cm}\cdot\text{K}$，$T=11\,273\ \text{K}$ 代入维恩位移定律（上题中式①），即可算出天狼星辐射光谱的极大值波长为

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{0.288\ \text{cm}\cdot\text{K}}{11\,273\ \text{K}} \approx 2.6\times10^{-5}\ \text{cm} = 2600\ \text{Å}.$$

由于 λ_m 在紫外波段，其辐射谱在可见光波段的能量分布将呈现随波

长增加而减小的趋势. 可以想见,天狼星的颜色因短波成分的比重大而呈现蓝紫色.

4. 估计一下人体热辐射最强的波长. 若人眼对此波长的灵敏度与对绿光差不多,会发生怎样的情况?

答　以正常人的体温 $T=310\ \mathrm{K}$ 代入维恩位移定律(本节思考题 2 中式①),即可算出人体热辐射最强的波长

$$\lambda_m=\frac{b}{T}=\frac{0.288\ \mathrm{cm\cdot K}}{310\ \mathrm{K}}\approx 9.3\times 10^{-4}\ \mathrm{cm}=9300\ \text{Å}$$

在红外波段. 若人眼对此波长的灵敏度与对绿光差不多,则人体将成为一个自身发光的光源,出现在人们面前的将是"衣不遮体"的情景.

5. 如果计算一下不同温度下热辐射中可见光所占的百分比,就会发现在太阳的温度(6000 K)下比例最高. 此外,太阳光谱中辐射能最高的波长与人眼最灵敏的波长大体相符. 你认为这些都是偶然的巧合吗? 其中有什么因果关系?

答　在太阳温度下,黑体辐射的发光效率最高,太阳的辐射谱值与人眼最灵敏的波长大致相符. 这表明,人眼的视觉特性与太阳的光谱特性是一致的. 这种一致性决非偶然,按照达尔文生物进化论的观点,它是生物史上人眼长期适应太阳的结果. 人类长期生活在太阳照射下的地球上,自然选择的结果是适者生存,因此,人眼的视觉特性必然要逐渐地适应太阳的光谱特性. 从因果关系上看,是人眼适应太阳.

§2　光的粒子性和波粒二象性

1. 在图 18-1 的光电伏安特性曲线中,当外电压稍微高于截止电压 $-V_0$ 时,光电流为什么不垂直地上升到它的饱和值?

答　从光电阴极发出的光电子的初速度在大小和方向上都有一个分布. 截止电压的存在表明,只有从阴极释出时飞得最快(初速为 v_0)的光电子才可能克服减速电场的阻碍刚能到达阳极. 当外电压稍高于截止电压 $-V_0$ 时,初速稍低于 v_0 的光电子也可能克服减速电场达到阳极,从而使光电流有所增加;但这时仍有一些速度较小(严

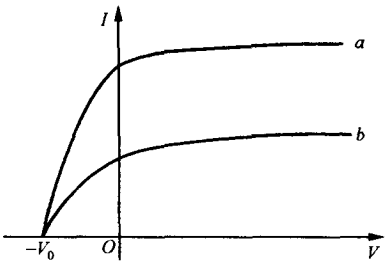


图 18-1

格讲应是指向阳极的速度分量较小)的光电子仍不能达到阳极.因此,光电流并不能立即达到饱和值.

2. 为什么即使入射光是单色的,射出的光电子却有一定的速率分布?

答 光是单色的.这说明射向阴极的光子能量相同(都等于 $h\nu$).光子的能量 $h\nu$ 被金属表面的一个电子吸收后,电子把这部分能量用做两种:一部分用来克服金属对它的束缚;另一部分转化为电子离开金属表面后的初动能.由于金属内部每一个自由电子逸出金属表面所需的能量是不同的,从而它们逸出金属表面时的初动能也不同.因此,光电子的初始速率也有一个分布.必须指出,所谓脱出功 A 是指使金属内部的一个自由电子逸出金属表面所需的最小能量.光子照射到金属表面上,克服脱出功 A 后获得的初动能 $mv_0^2/2$ 是最大初动能,相应的速率 v_0 是最大速率.当单色光照射时,光电子的最大速率 v_0 才是相同的.

3. 为什么光电测量对光电极的表面性质非常敏感?

答 这是因为光电极的表面性质直接影响到电极金属电子的脱出功 A.根据爱因斯坦公式

$$h\nu = mv_0^2/2 + A = eV_0 + A$$

可得

$$\nu_0 = \frac{A}{h}, \quad V_0 = \frac{h\nu - A}{e}.$$

由以上两式可见,脱出功 A 的变化将非常敏感地影响到红限频率 ν_0 和截止电位 V_0.此外,光电极表面的性质状况对所有电子的束缚能

都有影响，从而还将影响到光电饱和电流. 可见，光电极的表面性质，对光电效应的基本特性(饱和电流、截止电位、红限)都是有影响的.

4. 今有如下一些材料(括号内表示其功函数值)：钽(4.2 eV)、钨(4.5 eV)、铝(4.2 eV)、钡(2.5 eV)、锂(2.3 eV). 如果要制造用可见光工作的光电池，应选取哪种材料？

答　要制造用可见光工作的光电池，必须选用功函数值低于可见光光子能量的材料. 取可见光波长 $\lambda=0.4\sim0.8\ \mu m$，相应的光子最小能量和最大能量分别为

$$E_{min}=h\nu_{min}=h\frac{c}{\lambda_{max}}$$

$$=6.626\times10^{-34}\ J\cdot s\times\frac{3\times10^{8}\ m/s}{0.8\ \mu m}$$

$$=2.48\times10^{-9}\ J=1.6\ eV,$$

$$E_{max}=h\nu_{max}=h\frac{c}{\lambda_{min}}=2h\frac{c}{\lambda_{min}}=3.1\ eV,$$

即可见光的光子能量为 1.6～3.1 eV. 可见，在已知的几种材料中，只能选用钡或锂作为光电池的材料.

5. 可以用可见光来作康普顿散射实验吗？为什么？

答　在康普顿散射实验中，我们是把散射原子中的电子看成是自由的和静止的，从而才有光子与自由电子弹性碰撞的能量、动量守恒方程同时成立，并导出康普顿频移关系

$$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

关键是能否把原子中的电子看成自由电子，这要由光子能量和电子束缚能的相对大小决定. 在散射原子中，电子的束缚能约为 10～100 eV. 射线的波长为 0.01～10 Å，相应光子的能量约为 10^3～10^6 eV. 显然，用 X 射线照射散射原子时，把其中的电子看成自由电子，是合理的，从而康普顿效应比较明显. 如上题所述，可见光的光子能量仅为 eV 数量级，比散射原子中的电子束缚能还要低得多. 显然，用可见光照射散射原子时，其电子就不能再看成是自由的了. 这时，康普顿效应是极不明显的. 当可见光光子照射散原子时，应看成是光子与一个质量很大的原子交换能量和动量，这时将有波长差趋

于零.从频移特性上看,已不具有康普顿效应的特点.

当然,如果用人为的方法制造自由电子(如电子云),再用可见光照射自由电子作康普顿散射实验,其康谱顿效应仍将是明显的.

§3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论

本节思考题从略.

§4 激光的产生

本节思考题从略.

§5 激光器对频率的选择

本节思考题从略.

§6 激光的特性及应用

本节思考题从略.



ISBN 7-301-10790-0

9 787301 107904 >

责任编辑：孙　琰　聂一民

ISBN 7-301-10790-0/O · 0698

定价：24.00元