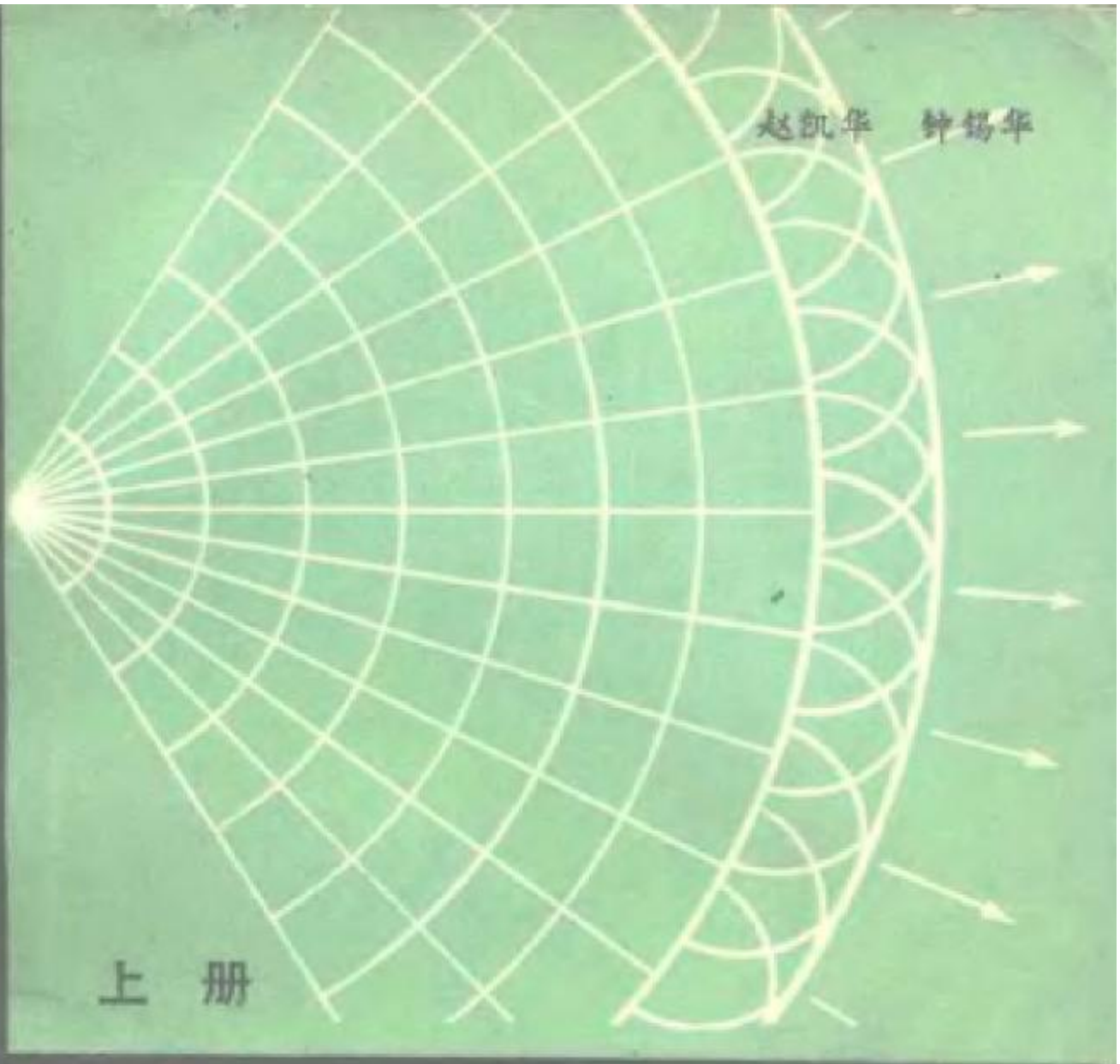
OPTICS

赵凯华　钟锡华



上　册

光学

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

光　学

上　册

赵凯华　钟锡华

北京大学出版社

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

内 容 提 要

本书是根据作者在北京大学物理系讲授光学课程的讲义修改补充而成。本书内容丰富，以波动光学为重点，并以"波前"这一概念为纽带联接现代变换光学与传统光学，反映了本学科的现代面貌。书中附有较多的思考题和习题。

全书分上、下两册。上册主要内容：几何光学、波动光学基本原理、干涉装置和光场的时空相干性。下册主要内容：衍射光栅、傅里叶变换光学、全息照相、光在晶体中的传播、光的吸收、色散和散射、光的量子性和激光。

本书可作为高等院校物理专业光学课程教材，也可供其他专业有关师生及工程技术人员参考。

2P30/14

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

前　言

本书是我们1981年编写的一套讲义，这次公开出版之前只作了少量修改。它与我们六十年代和七十年代编写的讲义相比，在结构上有较大的变动，内容上也有相当的充实和提高。

按传统的眼光，这本《光学》教科书仍然大致可分为几何光学、波动光学和光与物质相互作用三大部分。第一章为几何光学（包括光度学），第二章到第七章为波动光学，第八、九章主要讨论光和物质的相互作用。我们认为，对大学基础课来说，波动光学应是光学课程的主体。这本书在结构上的最大变动，是将波动光学的基本原理集中到第二章优先予以介绍，而将干涉、衍射的各种装置和仪器中的具体问题和应用分离出来，留到较后的章节讨论。过去光学教学中常遇到这样的矛盾：讲波动光学现象，就离不开装置和仪器；一谈到装置和仪器，就出现许多综合性的问题。例如任何分波前的干涉装置中衍射现象都较突出；分振幅的干涉装置中总要涉及反射、透射光的振幅或强度分配问题；此外，半波损问题有时是不可回避的。如果让这些问题一开头都牵扯进来，就会使学生感到课程内容庞杂零乱。在过去的普通物理光学课中经常听到学生有这类反映。本教科书现在这种处理或许有助于克服上述缺点。这种尝试是否成功？或者会不会带来什么新的矛盾？尚有待于更多的教学实践来回答。

现在谈谈我们对几何光学部分的处理。从理论高度上看，几何光学三个基本定律只不过是光波衍射规律的短波近似行为。目前有不少教材把几何光学放在波动光学之中或之后讲解，我们也曾有过这样的想法。但考虑到几何光学的规律毕竟是比较简单的，而且它处理问题的方法有独立于波动光学之外的巨大实际意

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

义，在讲解、分析和调节各种物理光学仪器装置的光路时，又常常要用到几何光学的术语、概念和规律。从循序渐进的观点出发，仍把几何光学放在最前边不无好处。至于它和波动光学的关系，通过以后各章节的多次强调，学生在学完全课程之后还是可以最终建立起完整概念的。此外，为了适应不同专业在课程要求和学时上的差异，我们将几何光学中相当一部分内容改用小字印刷。教学时越过它们，仍可保证后面物理光学的基本需要。

有关光和物质相互作用的部分，本书新添的内容主要是激光。为了介绍激光，量子光学的有关章节作了相应的加强，例如我们在这里引入了能级和跃迁、粒子数的正则分布与反转、自发辐射与受激辐射等各种概念，传统上这些往往是原子物理课程的内容。当然，所有这些内容是否仍应放在原子物理课程中讲授，是有争议的。为了教材的完整性，我们还是将它们写在这里。好在它们是在最后的章节，对教学上无论怎样处置都不会有妨碍。

最后着重谈谈"现代光学"问题。"现代光学"是近三十年来兴起并得到蓬勃发展的。1948年全息术的提出，1955年作为像质评价的光学传递函数概念的建立，1960年新型光源——激光器的诞生，这是现代光学发展中有重要意义的三件大事。现代光学已渗透到物理学和其它科学技术的许多领域，得到越来越广泛的应用。时至今日，在基础光学课程中已不能不对现代光学的新成就多少有所反映了。要做到这一点，就不可避免地要扩充教材的篇幅，增加课程的学时。现代光学的最重大进展之一是引入了傅里叶变换的概念，形成了"变换光学"。能否以尽量少的学时把现代变换光学的梗概介绍出来？我们体会，现代变换光学与传统波动光学的关系，犹如分析力学对牛顿力学的关系，而不是相对论力学对牛顿力学的关系。这就是说，现代变换光学的基本规律并未超出传统波动光学的范围。关键问题是如何把现代变换光学与普通物理光学课程的传统内容尽可能紧密地结合和衔接起来。如果能在讲授波动光学的传统内容时考虑到现代变换光学的需要，不时地

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

加以某些引伸和发挥，力求挖掘新意，讲出新水平，便可较自然地沟通现代变换光学和传统光学在概念上的联系，在教学上收到事半功倍的效果。

波动光学的基本问题是光波在各种条件下的传播问题，解决这个问题的基本原理就是惠更斯-菲涅耳原理。用现代变换光学的眼光来看，这个原理解决的是如何从光场中的一个波前导出另一个波前。从这种广泛的意义上说，波前的传播问题就是衍射问题，几何光学只不过是它在短波下的极限。因此，我们选择了"波前"这一概念作为联接传统光学和现代变换光学的纽带。如何描述波前、识别波前、分解波前和改造波前，乃至记录波前和再现波前，这一系列问题构成了贯穿波动光学部分的一条主线。普通物理中光学的传统讲法较多地用光线来分析问题，我们的意图是要训练学生善于与波前打交道。除了正文之外，例题、习题都与之配合。唯有这样，才能在讲授后来波动光学的传统内容时渗入现代变换光学的风格，使学生在复杂的波前面前处于主动地位。

现代光学的内容是放在基础课中讲授，还是应该另开选修课？这是个值得研究的问题。本书在这部分内容(主要是第五章和第六章)的写法上考虑了给教师以较大的选择余地。若想对现代光学的基本思想只作一个简单的介绍，第五章后四节的小字部分是可以删去的。即使将第五、六两章完全去掉，也不会影响其它各章中传统内容的教学。

以上是我们在编写这本《光学》时的一些想法。教科书内容的处理可以多种多样，而且往往很难说怎样处理就一定是最好的。把我们目前的认识提供出来，是为了听取广泛的批评和建议。

本书很多地方借鉴了我校任课教师的教学经验；陈熙谋、章立源二同志七十年代曾参加过本课的讲义编写工作；陈熙谋、张之翔、陈怀琳同志对这次的编写工作一直很关心，本书吸取了他们的一些建议；吴仲英和汪滨同志协助我们排出一些演示实验并

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

拍摄了许多照片。作者谨此对他们一并表示感谢。

本书有错误和不妥之处，恳切希望广大教师和读者不吝批评指正。

赵凯华　钟锡华

一九八二年十一月于北京大学物理系

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

上 册 目 录

（带 * 号的章节为小字部分）

绪论……（1）

1. 光的本性（1） 2. 光源和光谱（3） 3.光学的研究对象、分支与应用（7）

第一章 几何光学……（10）

§ 1 几何光学基本定律……（10）

1.1几何光学三定律(10) 1.2全反射(14) 1.3棱镜与色散(16) 1.4光的可逆性原理(19) 思考题(21) 习题(22)

§ 2 惠更斯原理……（25）

2.1波的几何描述(26) 2.2惠更斯原理的表述(26) 2.3对反射定律和折射定律的解释(27) 2.4直线传播问题(30) 思考题(32) 习题(32)

§ 3 费马原理……（33）

3.1光程(33) 3.2费马原理的表述(34) 3.3由费马原理推导几何光学三定律(37) 习题(38)

§ 4 成像……（39）

4.1实像与虚像 实物与虚物(39) 4.2物方和像方 物与像的共轭性(41) 4.3物像之间的等光程性(42) *4.4等光程面(43) 思考题(45) 习题(46)

§ 5 共轴球面组傍轴成像……（46）

5.1光在单个球面上的折射(46) 5.2轴上物点成像 焦距、物像距公式(48) 5.3傍轴物点成像与横向放大率(51) 5.4逐次成像(53) *5.5拉格朗日-亥姆霍兹定理(54) 思考题(54) 习题(55)

§ 6 薄透镜……（57）

6.1焦距公式(57) 6.2成像公式(59) 6.3密接薄透镜组(61)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

6.4焦面(63) 6.5作图法(64) 6.6透镜组成像(65) 思考题(68) 习题(69)
*§ 7 理想光具组理论 …… (71)
7.1理想成像与共线变换(71) 7.2共轴理想光具组的基点和基面(73) 7.3物像关系(75) 7.4理想光具组的联合(77) 思考题(82) 习题(82)
§ 8 光学仪器 …… (84)
8.1投影仪器(84) 8.2照相机(85) 8.3眼睛(86) 8.4放大镜和目镜(89) 8.5显微镜(91) 8.6望远镜(94) 8.7棱镜光谱仪(95) 思考题(97) 习题(97)
*§ 9 光阑 …… (98)
9.1孔径光阑 入射光瞳和出射光瞳(98) 9.2视场光阑 入射窗和出射窗(102) 习题(104)
*§10 像差 …… (106)
10.1像差概述(106) 10.2球面像差(107) 10.3彗形像差(109) 10.4正弦条件和齐明点(110) 10.5像散和像场弯曲(112) 10.6畸变(113) 10.7色像差(115) 10.8小结(119) 思考题(119) 习题(120)
§11 光度学基本概念 …… (120)
11.1辐射能通量和光通量(120) 11.2发光强度和亮度(124) 11.3余弦发射体和定向发射体(126) 11.4照度(128) 11.5光度学单位的定义(130) 习题(132)
*§12 像的亮度、照度和主观亮度 …… (133)
12.1像的亮度(133) 12.2像的照度(135) 12.3主观亮度(137) 思考题(138) 习题(138)
第二章 波动光学基本原理 …… (140)
§ 1 定态光波与复振幅描述 …… (140)
1.1波动概述(140) 1.2定态光波的概念(142) 1.3复振幅描述(144) 1.4平面波和球面波的复振幅(145) 1.5强度的复振幅表示(146) 思考题(147) 习题(147)
§ 2 波前 …… (148)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2.1波前的概念(148) 2.2傍轴条件与远场条件(轴上物点)(151) 2.3傍轴条件与远场条件(轴外物点)(154)
*2.4高斯光束(157) 思考题(158) 习题(159)
§ 3 波的迭加和波的干涉 …… (160)
3.1波的迭加原理(160) 3.2波的干涉与相干条件(162) 3.3普通光源发光微观机制的特点(164) 3.4干涉条纹的反衬度及其与振幅比的关系(167) *3.5线性光学系统(168) 思考题(168) 习题 (169)
§ 4 两个点源的干涉 …… (169)
4.1两列球面波的干涉场(169) 4.2杨氏实验(172) 4.3两束平行光的干涉场(177) 思考题(179) 习题(180)
§ 5 光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理…… (182)
5.1光的衍射现象(182) 5.2惠更斯-菲涅耳原理(186) 5.3巴俾涅原理(191) 5.4衍射的分类(192) 思考题(193)
§ 6 菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射 …… (194)
6.1实验现象(194) 6.2半波带法(196) 6.3矢量图解法(199) 6.4菲涅耳波带片(202) 思考题(206) 习题(207)
§ 7 夫琅和费单缝和矩孔衍射 …… (209)
7.1实验装置和实验现象(209) 7.2单缝衍射的强度公式(210) 7.3矩孔衍射的强度公式(214) 7.4单缝衍射因子的特点(216) *7.5衍射反比关系意义的探讨(222) 思考题(223) 习题(224)
§ 8 光学仪器的像分辨本领 …… (225)
8.1夫琅和费圆孔衍射(225) 8.2望远镜的分辨本领(228) *8.3球面波照明条件下像面接收的夫琅和费衍射(231) *8.4显微镜的分辨本领(232) 思考题(234) 习题(235)
§ 9 光的横波性与五种偏振态 …… (235)
9.1偏振现象与光的横波性(236) 9.2偏振片(238) 9.3自然光(239) 9.4线偏振光(240) 9.5部分偏振光(241) 9.6圆偏振光(242) 9.7椭圆偏振光(243) 思考题(244) 习题(245)
§ 10 光在电介质表面的反射和折射 菲涅耳公式 … (245)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.1菲涅耳反射折射公式(246)　10.2反射率和透射率(248)　10.3斯托克斯的倒逆关系(252)　10.4位相关系与半波损问题(252)　10.5反射、折射时的偏振现象(257)　*10.6从电磁理论推导光的反射、折射定律和菲涅耳公式(258)　*10.7全反射与衰逝波(261)　思考题(262)　习题(264)

第三章　干涉装置　光场的时空相干性 …… (267)

§ 1　分波前干涉装置　光场的空间相干性 …… (268)

1.1各种分波前干涉装置(268)　1.2条纹形状与间距(271)　1.3干涉条纹的移动(272)　1.4光源宽度对干涉条纹反衬度的影响(274)　1.5光场的空间相干性(278)　思考题(281)　习题(282)

§ 2　薄膜干涉(一)——等厚条纹 …… (284)

2.1薄膜干涉概述(284)　2.2薄膜表面的等厚条纹(286)　2.3楔形薄膜的等厚条纹(288)　2.4牛顿圈(291)　*2.5等厚干涉条纹的观测方法及倾角的影响(293)　2.6薄膜的颜色　增透膜和高反射膜(296)　思考题(298)　习题(300)

§ 3　薄膜干涉(二)——等倾条纹 …… (303)

3.1无穷远的等倾干涉条纹(303)　*3.2观察等倾条纹时扩展光源的作用(306)　*3.3薄膜干涉的定域问题(306)　思考题(309)

§ 4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性 …… (309)

4.1迈克耳孙干涉仪的结构(309)　4.2干涉条纹(311)　4.3光源的非单色性对干涉条纹的影响(315)　*4.4傅里叶变换光谱仪(319)　4.5精密测长与长度的自然基准(320)　4.6光场的时间相干性(323)　4.7光场的相干性小结(327)　思考题(328)　习题(329)

§ 5　多光束干涉　法布里-珀罗干涉仪…… (330)

5.1多光束干涉的强度分布公式(330)　5.2法布里-珀罗干涉仪的装置和条纹的半值宽度(335)　5.3法布里-珀罗干涉仪在光谱学中的应用(340)　思考题(342)　习题(343)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

绪　论

1. 光的本性

光是一种重要的自然现象．我们所以能够看到客观世界中斑驳陆离、瞬息万变的景象，是因为眼睛接收物体发射、反射或散射的光．据统计，人类感官收到外部世界的总信息量中，至少有90%以上通过眼睛．由于光与人类生活和社会实践的密切联系，光学也和天文学、几何学、力学一样，是一门最早发展起来的学科．然而，在很长一个历史时期里，人类的光学知识仅限于一些现象和简单规律的描述．对光的本性的认真探讨，应该说是从十七世纪开始的．当时有两个学说并立．一方面，以牛顿为代表的一些人提出了微粒理论，认为光是按照惯性定律沿直线飞行的微粒流．这学说直接说明了光的直线传播定律，并能对光的反射和折射作一定的解释(见第一章2.3节)．但是，用微粒说研究光的折射定律时，得出了光在水中的速度比空气中大的错误结论．不过这一点在当时的科学技术条件下还不能通过实验测定来鉴别．光的微粒理论差不多统治了十七、十八两个世纪．另一方面，和牛顿同时代的惠更斯提出了光的波动理论，认为光是在一种特殊弹性媒质中传播的机械波．这理论也解释了光的反射和折射等现象(见第一章2.3节)．然而惠更斯认为光是纵波，他的理论是很不完善的．十九世纪初，托马斯·杨和菲涅耳等人的实验和理论工作，把光的波动理论大大推向前进，解释了光的干涉、衍射现象，初步测定了光的波长，并根据光的偏振现象确认光是横波(有关光的波动理论，参见第二章)．根据光的波动理论研究光的折射，得出的结论是光在水中的速度应小于在空气中的速度，这一点在1862年为傅科的实验所证实．因此，到十九世纪中叶，光

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的波动说战胜了微粒说，在比较坚实的基础上确立起来．

惠更斯-菲涅耳旧波动理论的弱点，和微粒理论一样，在于它们都带有机械论的色彩，把光现象看成某种机械运动过程．认为光是一种弹性波，就必须臆想一种特殊的弹性媒质(历史上叫做"以太")充满空间，为了不与观测事实抵触，还必须赋予以太极其矛盾的属性：密度极小和弹性模量极大．这不仅在实验上无法得到证实，理论上也显得荒唐．重要的突破发生在十九世纪六十年代．麦克斯韦在前人的基础上，建立起他著名的电磁理论．这个理论预言了电磁波的存在，并指出电磁波的速度与光速相同．因此麦克斯韦确信光是一种电磁现象，即波长较短的电磁波．1888年赫兹实验发现了波长较长的电磁波——无线电波，它有反射、折射、干涉、衍射等与光波类似的性质．后来的实践又证明，红外线、紫外线和X射线等也都是电磁波，它们彼此的区别只是波长不同而已．光的电磁理论以大量无可辩驳的事实赢得了普遍的公认．

以上是经典物理学中光的微粒说与波动说之争的简短回顾，其中讨论的主要是光的传播，很少涉及光的发射和吸收．那时期光和物质的相互作用问题还沒有怎么研究过，许多现象尚未发现．

十九世纪末、廿世纪初是物理学发生伟大革命的时代．从牛顿力学到麦克斯韦的电磁理论，经典物理学形成一套严整的理论体系．当时绝大部分物理学家深信，物理学中各种基本问题在原则上都已得到完美的解决，它的理论体系囊括了一切物理现象的基本规律，剩下的似乎只是解微分方程和具体应用的问题了．然而，正当人们欢庆这宏伟的经典物理学大厦落成的时候，一个个使经典物理学理论陷入窘境的惊人发现接踵而来．1887年迈克耳孙和莫雷利用光的干涉效应，试图探测地球在"以太"中的绝对运动．他们得到否定的结果，从而动摇了作为光波(电磁波)载体的"以太"假说，以"静止以太"为背景的绝对时空观遇到了根本困难．随后瑞利和金斯根据经典统计力学和电磁波理论，导出黑体

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

辐射公式，该公式要求辐射能量随频率的增大而趋于无穷．当时物理学界的权威开耳芬爵士把这两个问题比喻作笼罩在物理学晴朗天空中的两朵乌云．从后来物理学的发展看来，这两朵“乌云”正预示着近代物理学两个革命性的重大理论——相对论和量子论的诞生．有趣的是，这两个问题恰好都与光学有关．

现在让我们回到光的本性问题上来．为了解决黑体辐射理论的矛盾，1900年普朗克提出了量子假说，认为各种频率的电磁波（包括光），只能象微粒似地以一定最小份额的能量发生（它称为能量子，正比于频率，详见第九章§1）．这是一个光的发射问题．另一个显示光的微粒性的重要发现是光电效应，即光照射在金属表面上可使电子逸出，逸出电子的能量与光的强度无关，但与光的频率有关（详见第九章§2）．这是一个光的吸收问题．1905年爱因斯坦发展了光的量子理论，成功地解释了这个效应．光究竟是微粒还是波动？这个古老的争论重新摆在了我们的面前．

其实，“粒子”和“波动”都是经典物理的概念．近代科学实践证明，光是个十分复杂的客体．对于它的本性问题，只能用它所表现的性质和规律来回答：光的某些方面的行为象经典的“波动”，另一些方面的行为却象经典的“粒子”．这就是所谓“光的波粒二象性”．任何经典的概念都不能完全概括光的本性．

2． 光源和光谱

任何发光的物体，都可以叫做光源．太阳、蜡烛的火焰、钨丝白炽灯、日光灯、水银灯，都是我们日常生活中熟悉的光源．光源不仅用来照明，在实验室中为了各种科学研究课题的需要，人们常使用形式多样的特殊光源，如各种电弧和气体辉光放电管等．1960年发明的激光器，则是一种与所有过去的光源性质不同的崭新光源．

光既然是一种电磁辐射，就要有某种能量的补给来维持其发射．按能量补给的方式不同，光的发射大致可分为以下两大类．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

（1）热辐射

不断给物体加热来维持一定的温度，物体就会持续地发射光，包括红外线、紫外线等不可见的光．在一定温度下处于热平衡状态下物体的辐射，叫做热辐射或温度辐射．太阳、白炽灯中光的发射属于此类．

（2）光的非热发射

各种气体放电管(如日光灯、水银灯)管内的发光过程是靠电场来补给能量的，这过程叫做电致发光．某些物质在放射线、X射线、紫外线、可见光或电子束的照射或轰击下，可以发出可见光来，这种过程叫做荧光，日光灯管壁上的荧光物质、示波管或电视显象管中的荧光屏的发光属于此类．有的物质在上述各种射线的辐照之后，可以在一段时间内持续发光，这种过程叫做磷光，夜光表上磷光物质的发光属于此类．由于化学反应而发光的过程，叫做化学发光，如腐物中的磷在空气中缓慢氧化发出的光(如有时在坟地上出现的"鬼火")属于这一类．生物体(如萤火虫)的发光叫做生物发光，它是特殊类型的化学发光过程．

应当指出，能量形式可以相互转化，上述光的各种发射过程不能截然分开，同一光源中光的发射过程也往往不是单一的．

在各种波长 λ 的电磁波中，能为人类的眼睛所感受的，只是 $\lambda = 4000—7600$ Å①的狭小范围．这波段内的电磁波叫做可见光．在可见光范围内不同波长的光引起不同的颜色感觉．大致说来，波长与颜色的对应关系见下表：

7600	6300	6000	5700	5000	4500	4300	4000 (Å)
红	橙	黄	绿	青	蓝	紫	

由于颜色是随波长连续变化的，上述各种颜色的分界线带有人为约定的性质．

① $1\text{ Å} = 10^{-8}\text{cm}$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在电磁波谱中与可见光波段衔接的，短波一侧是紫外线(4000Å—50Å左右)，长波一侧是红外线(7600Å—十分之几毫米)。红外的波段很宽，为了方便，人们还常把它进一步分为近红外、中红外和远红外几段。习惯上红外线的波长用微米(μm)作单位，$1\mu m = 10^{-6}m = 10^4$Å，波长小于1—2μm的叫近红外，大于10μm的叫远红外，二者之间便是中红外(用μm表示，可见光的波长范围为0.40—0.76μm)。下面我们谈到"光"，常广义地把可见光以外波段的电磁辐射包括在内。

任何波长的电磁波在真空中的传播速度都是相同的，通常用 c 表示，其数值为

$$c = 299792458 m/s \simeq 3\times10^8 m/s.$$

因此从波长 λ 立即可以换算出频率 ν 来：

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \qquad (0.1)$$

例如，波长范围为4000—7600Å的可见光，对应的频率范围是 $7.5—3.9\times10^{14}$Hz。

通常说光的强度(简称光强)，是指单位面积上的平均光功率，或者说，光的平均能流密度。作为电磁波，这应由坡印廷矢量 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 确定①。因电磁波中 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$，且 $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$，坡印廷矢量的瞬时值为

$$S = |\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2, \qquad (0.2)$$

式中 ε 和 μ 是相对介电常数和相对磁导率，ε_0 和 μ_0 是真空介电常数和真空磁导率。在光频波段，所有磁化机制都不起作用，$\mu\simeq1$，从而光学折射率 $n = \sqrt{\varepsilon\mu} \simeq \sqrt{\varepsilon}$。故

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}nE^2 = \frac{n}{c\mu_0}E^2, \qquad (0.3)$$

这里用到 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 的关系式。对于简谐振动，平均值

① 参见赵凯华、陈熙谋：《电磁学》，第八章，人民教育出版社。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$\overline{E^2} = \frac{1}{2} E_0^2$，其中$E_0$为振幅，故光的强度为

$$I = \overline{S} = \frac{n}{2c\mu_0} E_0^2 \propto E_0^2. \tag{0.4}$$

在同一种媒质里只关心光强的相对分布时，上式中的比例系数不重要，人们往往把光的(相对)强度就写成是振幅的平方：

$$I = E_0^2. \tag{0.5}$$

但在比较两种媒质里的光强时，则应注意到，比例系数中还有一个与媒质有关的量——折射率 n.

单一波长的光叫单色光，否则是非单色光.

如果我们用棱镜或其它分光仪器对各种普通光源发出的光进行分析，就会发现它们大都不是单色光. 令dI_λ代表波长在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 之间光的强度，

$$i(\lambda) = \frac{dI_\lambda}{d\lambda} \tag{0.6}$$

代表单位波长区间的光强. 非单色光的 $i(\lambda)$按波长的分布，叫做光谱，$i(\lambda)$叫做谱密度，总光强 I 与谱密度的关系是

$$I = \int_0^\infty dI_\lambda = \int_0^\infty i(\lambda) d\lambda. \tag{0.7}$$

不同的光源有不同的光谱，例如热辐射光源光谱的特点如图0-1所示，光强在很大的波长范围内连续分布. 这种光谱叫连续光谱. 气体(或金属蒸汽)放电发射光谱的特点如图0-2所示，光强

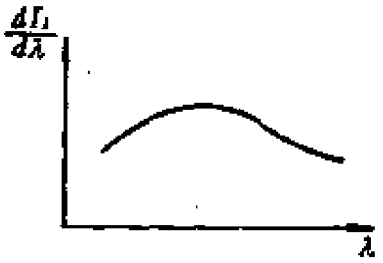


图 0-1 连续光谱

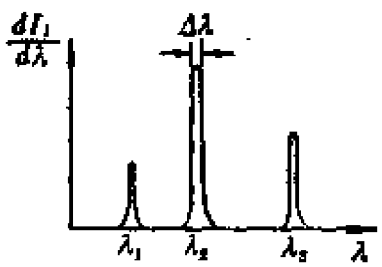


图 0-2 线光谱

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

集中在一些分立的波长值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ 附近形成一条条谱线. 这种光谱叫线光谱. 不同的化学成分各有自己的特征谱线. 每条谱线只是近似的单色光. 它们的光强分布有一定的波长范围 $\Delta\lambda$, 这 $\Delta\lambda$ 称为谱线宽度. $\Delta\lambda$ 越小, 表示光的单色性越好. 激光器的谱线宽度可以做得比普通光源小得多, 单色性好正是激光的几个基本优点之一. 若干元素的普通光源和激光器的典型谱线列于表0-1.

表0-1 典型谱线

元 素	谱线波长(Å)	颜 色	元 素	谱线波长(Å)	颜 色
钠 (N_a)	5890, 5896	黄(D双线)	氢(H)	4102	紫
汞(H_g)	4047, 4078	紫		4340	蓝
	4358	蓝		4861	青绿(F线)
	5461(最强)	绿		6563	橙红(C线)
	5770, 5791	黄	氦氖激光器	6328	红
镉(Cd)	6438	红	氩离子激光器	4880	青
氪(K_r)	6057	橙		5145	绿

太阳光谱除了一些暗线外, 基本上是连续谱, 它所发出的各种波长的可见光混合起来, 给人的感觉是白色. 光学中所谓白光, 通常指具有和太阳连续光谱相近的多色混合光①.

3. 光学的研究对象、分支与应用

光学是研究光的传播以及它和物质相互作用问题的学科. 光

① 两种互补色(如橙和蓝、黄和靛青)的光, 或三种颜色(如红、绿、蓝)的光按适当比例混合, 也可给人的视觉造成白色的感觉. 但用它们来照明各种颜色的物体时, 看起来就和日光照明不同了, 其原因在于光谱不同. 从物理学的角度来研究问题, 则不仅要看生理效果, 还要看光谱分布.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

学除了是物理学中一门重要的基础学科外，它也是一门应用性很强的学科。光学的研究对象早已不限于可见光。在长期的发展过程中，光学里形成一套行之有效的特殊方法和仪器设备，它们可用之于日益宽广的电磁波段。光学与其它同电磁波打交道的学科(如无线电物理、原子和原子核物理)之间的界限，与其说按波段，还不如说按研究手段来划分，并且随着科学的发展，各学科相互交迭与渗透，其间界限越来越模糊了。

若不涉及光的发射和吸收等与物质相互作用过程的微观机制，光学在传统上分为两大部分：当光的波长可视为极短，从而其波动效应不明显时，人们把光的能量看成是沿着一根根光线传播的，它们遵从直进、反射、折射等定律，这便是几何光学。研究光的波动性(干涉、衍射、偏振)的学科，是为物理光学(或波动光学)。光和物质相互作用的问题，通常是在分子或原子的尺度上研究的。在这领域内有时可用经典理论，有时则需用量子理论。对于这类原不属传统光学的内容，有人冠之以"分子光学"和"量子光学"等名称，也有人把它们仍归于物理光学之内。

光学的应用十分广泛。几何光学本来就是为设计各种光学仪器而发展起来的专门学科。随着科学技术的进步，物理光学也越来越显示出它的威力。例如，光的干涉目前仍是精密测量中无可替代的手段，衍射光栅则是重要的分光仪器。光谱在人类认识物质的微观结构(如原子结构、分子结构等)方面曾起了关键性的作用，现在它不仅是化学分析中的先进方法，还为天文学家提供了关于星体的化学成分、温度、磁场、速度等大量信息。近三十年来，人们把数学、信息论与光的衍射结合起来，发展起一门新的学科——傅里叶光学，把它应用到信息处理、像质评价、光学计算等技术中去。激光的发明，可以说是光学发展史上的一个革命性的里程碑。由于激光具有强度大、单色性好、方向性强等一系列独特的性能，自从它问世以来，很快就被运用到材料加工、精密测量、通讯、测距、全息检测、医疗、农业等极为广泛的技术

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

领域，取得了优异的成绩．此外，激光还为同位素分离、催化、信息处理、受控核聚变、以及军事上的应用，展现了光辉的前景．

本书第一章是几何光学，第二章到第七章是物理光学（波动光学），第八章和第九章讨论光和物质的相互作用．作为物理专业一门基础课的教材，本书的重点只能是阐述光学的基本原理和有关的典型应用，过于专门的问题从略．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

第一章　几何光学

§1　几何光学基本定律

1.1　几何光学三定律

几何光学是以下列三个实验定律为基础建立起来的，它是各种光学仪器设计的理论根据.

（1）光的直线传播定律：光在均匀媒质里沿直线传播

在点光源的照射下，在不透明的物体背后出现清晰的影子.影子的形状与光源为中心发出的直线所构成的几何投影形状一致(图1-1)．如果在一个暗箱的前壁上开一小孔，由物体上各点发出的光线将沿直线通过小孔，在暗箱的后壁上形成一倒立的像(图1-2)．以上两个例子都是表明光线沿直线传播的基本事实.

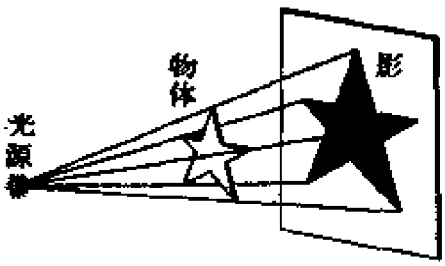


图1-1　物体的影子

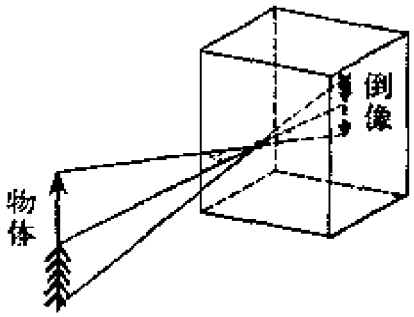


图1-2　针孔成像

应当注意，光线只在均匀媒质中沿直线传播．在非均匀媒质中光线将因折射而弯曲，这种现象经常发生在大气中．例如在海边有时出现的海市蜃楼幻景，便是由光线在密度不均匀的大气中折射引起的.

（2）光的反射定律和折射定律

设媒质1，2都是透明、均匀和各向同性的，且它们的分界

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

面是平面(如果分界面不是平面，但曲率不太大时，以下结论仍适用)．当一束光线由媒质 1 射到分界面上时，在一般情形下它将分解为两束光线：反射线和折射线(图1-3)．入射线与分界面的法线构成的平面称为入射面．分界面法线与入射线、反射线和折射线所成的夹角 i_1, i_1' 和 i_2 分别称为入射角、反射角和折射角．实验表明：

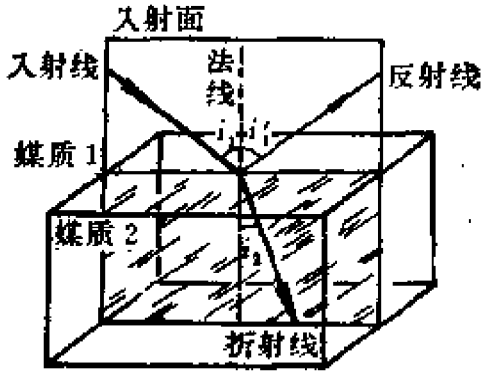


图 1-3　光的反射与折射

(i) 反射线与折射线都在入射面内．

(ii) 反射角等于入射角，

$$i_1' = i_1. \tag{1.1}$$

(iii) 折射角与入射角正弦之比与入射角无关，是一个与媒质和光的波长有关的常数，

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12} \quad (\text{常数}), \tag{1.2}$$

比例常数 n_{12} 称为第 2 种媒质相对第一种媒质的折射率．上式有时称做斯涅耳定律(W.Snell, 1621)．

任何媒质相对于真空的折射率，称为该种媒质的绝对折射率，简称折射率．折射率较大的媒质称为光密媒质，折射率较小的媒质称为光疏媒质．

实验还表明，两种媒质 1,2 的相对折射率 n_{12} 等于它们各自的绝对折射率 n_1 与 n_2 之比，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$n_{12}=\frac{n_2}{n_1}, \tag{1.3}$$

从而

$$n_{21}=\frac{1}{n_{12}}. \tag{1.4}$$

用两种媒质的绝对折射率 n_1 和 n_2 来表示，斯涅耳折射定律式(1.2)可写成

$$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2. \tag{1.5}$$

几种常见透明媒质对钠黄光(D线，5893Å)的折射率数值列于表Ⅰ-1中，更详细的折射率数据见1.3节.

表Ⅰ-1 折射率

媒质	折射率 (D线)
空气	1.00028
水	1.333
各种玻璃	1.5—2.0
金刚石	2.417

应当指出，作为实验规律，几何光学三定律是近似的，它只有在空间障碍物以及反射和折射界面的尺寸远大于光的波长时成立．尽管如此，在很多情况下用它们来设计光学仪器，还是足够精确的.

例题1 在水中深度为 y 处有一发光点Q，作 QO 垂直于水面，求射出水面折射线的延长线与QO交点 Q' 的深度 y' 与入射角 i 的关系(图1-4).

解 设水相对于空气的折射率为 $n(n\simeq 4/3)$，则根据折射定律，有

$$n\sin i=\sin i'.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

设入射角为 i 的光线与水面相遇于 M 点，令 $\overline{OM}=x$，则

$$y=\frac{x}{\tan i},\quad y'=\frac{x}{\tan i'},$$

于是

$$y'=y\frac{\tan i}{\tan i'}=y\frac{\sin i\cos i'}{\sin i'\cos i}$$

$$=\frac{y\sqrt{1-n^2\sin^2 i}}{n\cos i}.$$

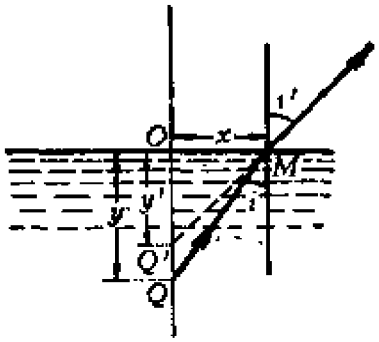


图 1-4　例题1——水中发光点

上式表明，由 Q 发出的不同方向光线，折射后的延长线不再交于同一点．但对于那些接近法线方向的光线（$i\simeq 0$），若忽略 $O(i^2)$ 的高级小量，则 $\sin^2 i\simeq 0$，$\cos i\simeq 1$，我们有

$$y'=\frac{y}{n}.$$

这时 y' 与入射角 i 无关，即折射线的延长线近似地交于同一点 Q'，其深度为原光点深度的 $1/n\simeq 3/4$．

例题 2　用作图法求任意入射线在球面上的折射线．

解　如图1-5，设折射球面的球心位于 C 点，半径为 r，左右两边媒质的折射率分别为 n 和 n'（$n<n'$）．以 C 为中心，分别以 $\rho=(n'/n)r$ 和 $\rho'=(n/n')r$ 为半径作圆弧 Σ 和 Σ'．将入射线 RM 延长，与 Σ 交于 H．联接 CH 交 Σ' 于 H'．联接 MH'，即为所求的折射线．以上作图法的依据如下：

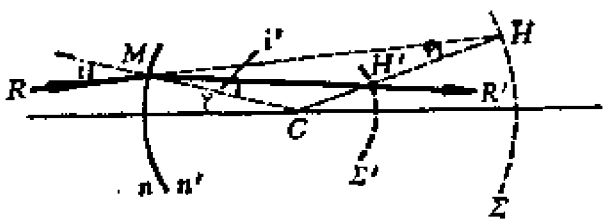


图 1-5　例题 2——球面折射的光线追迹作图

(i) 应用正弦定律于 $\triangle HCM$，则有

$$\sin i/\sin\varphi=\overline{CH}/\overline{CM}=n'/n.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(ii) 在 $\triangle MCH'$ 和 $\triangle HCM$ 中有公共角$\angle C$，且

$$\overline{CH}/\overline{CM} = \overline{CM}/\overline{CH'} = n'/n,$$

故两三角形相似，从而 $i' = \varphi$.

将 (i) 与 (ii) 结论结合起来，得 $\sin i/\sin i' = n'/n$，即图中的 i 和 i' 满足折射定律.

1.2 全反射

当光线从光密媒质射向光疏媒质时，$n_{12}<1$，或 $n_2<n_1$，由式 (1.2) 或 (1.5) 可以看出，折射角 i_2 大于入射角 i_1 (图1-6中1—1′). 当入射角增至某一数值

$$i = \sin^{-1}(n_2/n_1) \qquad (1.6)$$

时，折射角$i_2 = 90°$(见图1-6中光线2—2′). 当$i_1 > i$ 时，折射线消失，光线全部反射(见图1-6中光线3—3″). 这现象称为全反射，i 称为全反射临界角. 由水到空气的全反射临界角约为 49°，由各种玻璃到空气的反射临界角在30°—42°之间.

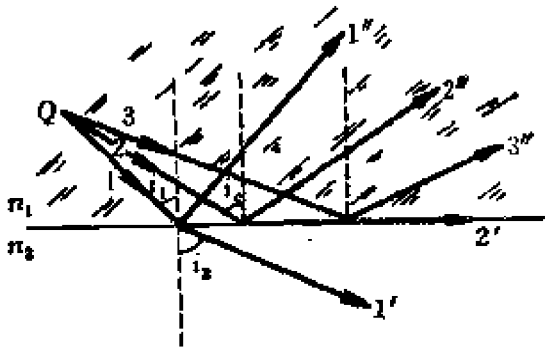


图 1-6 全反射

通过全反射临界角时，光的强度变化情形如下：当入射角i_1由小到大趋近临界角 i 时，折射光的强度逐渐减小，反射光的强度逐渐增大. i_1 达到或超过临界角 i 后，折射光的强度减到 0，反射光的强度达到100%.

这里举几个全反射原理应用的例子.

(1) 全反射棱镜

图1-7所示是等腰直角三角形棱镜的几种用途. 在图1-7(a)中，光线从

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

直角棱的一个界面正入射后，以超过 i 的45°入射角射在斜面上，在该处发生全反射后又从直角棱的另一界面垂直射出。这样就使光线的传播方向改变90°，我们也可以如图1-7(b)那样安排光路，使光线在棱镜内发生两次全反射，将它的传播方向改变180°。这样的光路可以使像的上下方位 A，B 倒转过来，但左右方位 C，D 不变。如果要使像的左右方位也同时调转，我们可以如图1-7(c)那样，安置两个棱边互相垂直的等腰直角三棱镜，一个倒转上下方位，一个倒转左右方位。这类装置常在观察地面物体用的双筒望远镜中使用。

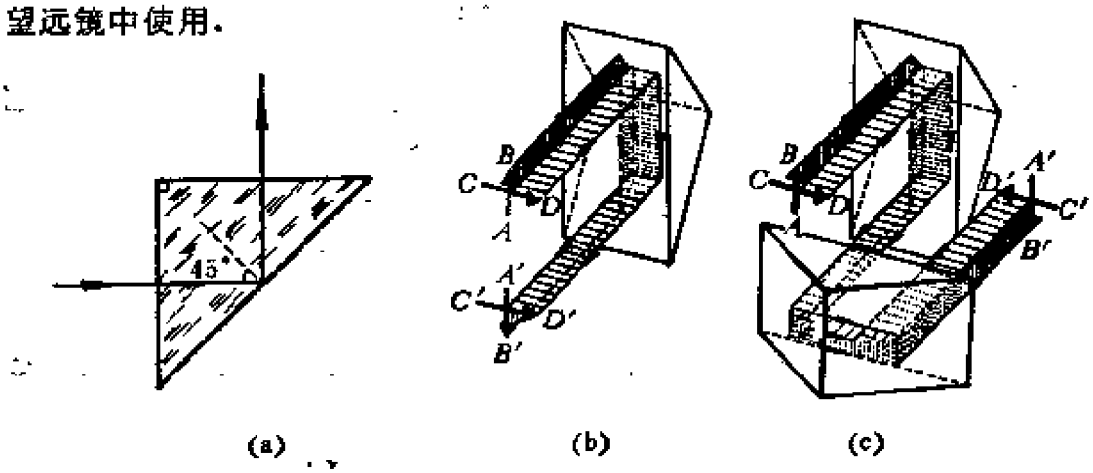


图 1-7　全反射棱镜

（2）光学纤维

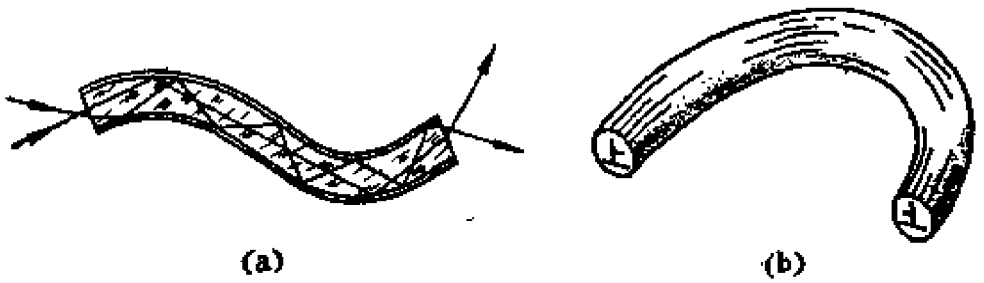
如图1-8(a)，在一根折射率较高的玻璃纤维外包一层折射率较低的玻璃媒质①，光线经多次全反射可沿着它从一端传到另一端②，而且用大量这样的玻璃纤维并成一束，光在各条纤维之间不会串通。如果纤维束的两端各条纤维的排列顺序严格地对应，则可以利用它来传像。如图1-8(b)所示，在这样的纤维束的一个端面上有一图形，图形上每一点的光线沿着一根特定的纤维传到另一端面上对应的点，在这一端就会显现出与原来一样的图形。若能再用其它光学仪器放大，就更便于观察了。这种玻璃纤维束很柔软，可以弯成任意形状，又可做得很细，它能探入人体内部(如膀胱)

① 光学纤维折射率的分布不一定是内、外截然不同的两层，它也可以是渐变的。这类纤维能使光线向轴线会聚。在这种聚光纤维中光线走的不是折线，而是光滑曲线。聚光纤维具有光程短、光的透过率和像的分辨率高等一系列优点。

② 当光学纤维细到一定程度，传光的过程就不能用几何光学中的全反射概念来描述了。这时应把它看成是传播电磁波的微型波导。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

以及结构复杂的机器部件中不易达到的部位进行照明或窥视.



(a) (b)

图 1-8 光学纤维

纤维光学近十多年来，特别是近几年来，得到了突飞猛进的发展，它不仅用于内窥光学系统，尤其重要的，是它已成功地应用于通讯系统．自从七十年代初低损耗的石英光导纤维问世以来，便开始了激光光导纤维通讯的研究工作．由于光纤通讯与电通讯相比有许多优点，如抗电磁干扰性强、频带宽和通讯容量大、保密性好、能节省有色金属等，近些年来，许多国家都已先后铺设了试验性光纤通讯线路．相信在不久的将来，光纤通讯将在实际的应用方面取得重大的进展．

1.3 棱镜与色散

棱镜是由透明媒质(如玻璃)做成的棱柱体、截面呈三角形的棱镜叫三棱镜．与棱边垂直的平面叫做棱镜的主截面．下面我们讨论光线在三棱镜主截面内折射的情况．

如图1-9，$\triangle ABC$是三棱镜的主截面，沿主截面入射的光线DE在界面AB上的E点发生第一次折射．光线在这里是由光疏媒质进入光密媒质的，折射角i_2小于入射角i_1，光线偏向底边BC．进入棱镜的光线EF在界面AC上的F点发生第二次折射，在这里光线是由光密媒质进入光疏媒质的，折射角i_1'大于入射角i_2'，出射光线进一步偏向底边BC．光线经两次折射，传播方向总的变化可用入射线DE和出射线FG延长线的夹角δ来表示，δ叫做偏向角．

由图1-9可以看出，δ与i_1, i_2, i_1', i_2'以及棱角α之间有如下几何关系：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

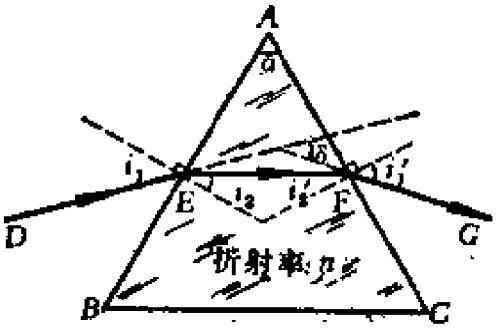


图 1-9　光线在三棱镜主截面内的折射

$$\delta = (i_1 - i_2) + (i_1' - i_2')$$
$$= (i_1 + i_1') - (i_2 + i_2'), \qquad (1.7)$$
$$\alpha = i_2 + i_2', \qquad (1.8)$$

所以

$$\delta = i_1 + i_1' - \alpha. \qquad (1.9)$$

上式表明，对于给定的棱角 α，偏向角 δ 随 i_1 而变．由实验得知：在 δ 随 i_1 的改变中，对于某一 i_1 值，偏向角有最小值 δ_m，称为最小偏向角．可以证明，产生最小偏向角的充要条件是

$$i_1 = i_1' \quad 或 \quad i_2 = i_2'. \qquad (1.10)$$

在此情况下有

$$n = \frac{\sin\dfrac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (1.11)$$

在棱角 α 已知的条件下，通过最小偏向角 δ_m 的测量，利用上式可算出棱镜的折射率 n．

产生最小偏向角的条件可证明如下：取式(1.9)对 i_1 的导数，得

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_1'}{di_1}.$$

产生最小偏向角的必要条件是

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0 \quad 即 \quad \frac{di_1'}{di_1} = -1.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

按折射定律

$$\begin{cases} n\sin i_2 = \sin i_1, \\ n\sin i_2' = \sin i_1'. \end{cases} \tag{1.12}$$

取微分后得

$$\begin{cases} n\cos i_2 di_2 = \cos i_1 di_1, \\ n\cos i_2' di_2' = \cos i_1' di_1'. \end{cases}$$

由上述两式得

$$\frac{di_1'}{di_1} = \frac{\cos i_1 \cos i_2'}{\cos i_2 \cos i_1'} \frac{di_2'}{di_2}.$$

由式(1.8)知，$di_2 = -di_2'$，上式又可写为

$$\frac{di_1'}{di_1} = -\frac{\cos i_1 \cos i_2'}{\cos i_2 \cos i_1'}.$$

所以，产生最小偏向角的条件为

$$\frac{\cos i_1 \cos i_2'}{\cos i_2 \cos i_1'} = 1 \quad 或 \quad \frac{\cos i_1}{\cos i_2} = \frac{\cos i_1'}{\cos i_2'}.$$

取上式的平方，并利用式(1.12)，得

$$\frac{1-\sin^2 i_1}{n^2-\sin^2 i_1} = \frac{1-\sin^2 i_1'}{n^2-\sin^2 i_1'}. \tag{1.13}$$

上式只有当$i_1 = i_1'$时才成立，此时$i_2 = i_2'$亦成立．这就是说，光线DE和FG对棱镜对称，$\triangle EFA$是等腰三角形．在此情况下，可由式（1.8）和(1.9)得

$$i_2 = i_2' = \alpha/2, \quad i_1 = i_1' = (\alpha + \delta_m)/2,$$

代入式(1.12)后，经整理可得式(1.10)．

可以证明，$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d^2 i_1'}{di_1^2} > 0$，故上述必要条件也是产生最小偏向角的充分条件．

除了1.2节所述的几种全反射方面的用途外，棱镜最主要的应用在于分光，即利用棱镜对不同波长的光有不同折射率的性质来分析光谱．折射率n与光的波长有关，这一现象叫做色散．当一

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

束白光或其它非单色光射入棱镜时，由于折射率不同，不同波长（颜色）的光具有不同的偏向角δ，从而出射线方向不同（图1-10）。通常棱镜的折射率n是随波长λ的减小而增加的（正常色散），所以可见光中紫光偏折最大，红光偏折最小。棱镜光谱仪便是利用棱镜的这种分光作用制成的。它是研究光谱的重要仪器。由于棱镜光谱仪中除了棱镜这个主要部件外，还有准直管、望远或摄影等辅助光路系统，这些将在本章§8中作较详细的介绍。

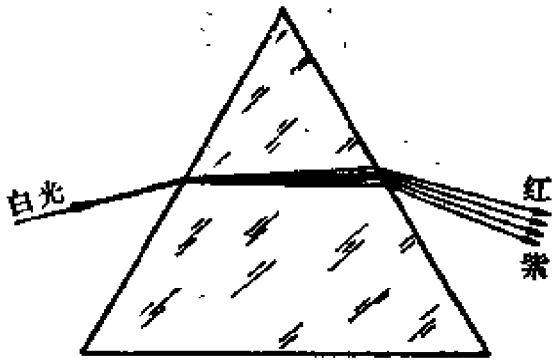


图 1-10　棱镜的色散

表Ⅰ-2中给出一些典型光学玻璃的折射率随波长变化的数据。

1.4　光的可逆性原理

从几何光学的基本定律不难看出，如果光线逆着反射线方向入射，则这时的反射线将逆着原来的入射线方向传播；如果光线逆着折射线方向由媒质2入射，则射入媒质1的折射线也将逆着原来的入射线方向传播（参见图1-11）。也就是说，当光线的方向返转时，它将逆着同一路径传播。这个带有普遍性的结论，称为光的可逆性原理。今后不少场合这一原理将对我们有所帮助。

例题3　利用光的可逆性原理证明：棱镜产生最小偏向角的条件是光线相对于棱镜对称。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表 I-2　典型光学玻璃的色散

谱线代号*	——	h	g	F	e	D	C	A′	——	——
光色	(紫外)	兰	青	青绿	绿	黄	橙红	红	(红外)	(红外)
波长 (Å)	3650	4047	4358	4861	5461	5893	6563	7665	8630	9508
冕玻璃 (K_9)	1.53582	1.52982	1.52626	1.52195	1.51829	1.51630	1.51389	1.51104	1.50918	1.50778
钡冕玻璃 (BaK_7)	1.59417	1.58620	1.58154	1.57597	1.57130	1.56880	1.56582	1.56238	1.56023	1.55866
重冕玻璃 (ZK_6)	1.63862	1.63049	1.62573	1.61999	1.61519	1.61260	1.60949	1.60592	1.60268	1.60206
轻火石玻璃 (QF_3)	1.61197	1.59968	1.59280	1.58481	1.57832	1.57490	1.57089	1.56638	1.56366	1.56172
钡火石玻璃(BaF_1)	1.57371	1.56553	1.56080	1.55518	1.55050	1.54800	1.54502	1.54160	1.53946	1.53791
重火石玻璃 (ZF_1)	1.70022	1.68229	1.67245	1.66119	1.65218	1.64750	1.64207	1.63609	1.63254	1.63007

* 这些谱线是太阳光谱中的夫琅和费黑线，详见第八章 §1. 光谱学中经常用夫琅和费谱线来作波长的基准标志，这是很方便的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

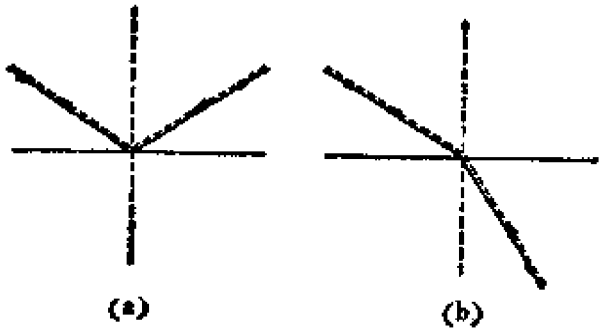


图 1-11　光的可逆性原理

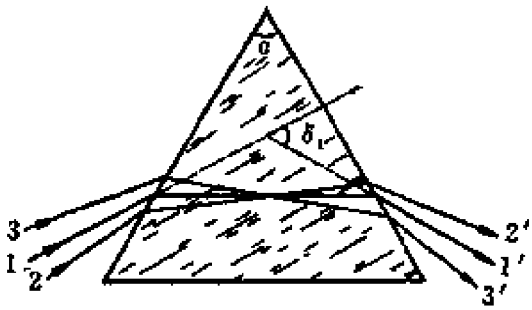


图 1-12　例题3——用光的可逆性原理求棱镜的最小偏向角

证　设图1-12中光线 1—1′ 相对于棱镜对称．在它的附近取另一条光线 2—2′，并作与 2—2′ 对称的光线 3′—3．后者是由棱镜的另一侧入射的，它的逆光线 3—3′ 与前二者从棱镜的同一侧入射．由对称性和可逆性可知，光线 2—2′ 和 3—3′ 的偏向角是一样大的($\delta_2 = \delta_3$)．应注意，光线 2—2′ 和 3—3′ 朝相反方向偏离光线 1—1′，而它们的偏向角只能都比 δ_1 大，或都比 δ_1 小，亦即 δ_1 是极值．(要证明这极值是极小值，必须象1.3节中那样，利用折射定律和几何关系对 δ_2 或 δ_3 作具体运算．仅用光的可逆性是不可能作出判断的．)

上述例题告诉我们，利用光的可逆性原理，往往可以通过很简短的推理得到某些重要的结论．

思　考　题

1．　如何利用针孔照相机测量树的高度？

2．　为什么透过茂密树叶缝隙投射到地面的阳光形成圆形光斑？你能设想在日偏蚀的情况下这种光斑的形状会有变化吗？

3．　你能否想出一个简单的实验或观察，来说明反射定律对一切波长的可见光都适用．

4．　试说明，为什么远处灯火在微波荡漾的湖面形成的倒影拉得很长．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

5. 证明光点式电流计中悬丝上的小镜转过 θ 角时，反射光线的方向偏转 2θ 角.

6. 有人设想用如图所示的反射圆锥腔使光束的能量集中到极小的面积上. 因为出口可以做得任意小，从而射出的光束的能流密度可以任意大. 这种想法正确吗？



思考题 6 图

7. 为什么日出和日落时太阳看起来是扁的？

8. 大气折射给星体位置的观察造成的偏差，叫做蒙气差. 这是天文观测中必须考虑的因素. 试定性地讨论蒙气差与星体到天顶距离之间的关系.

9. 试讨论平行光束折射后截面积的变化.

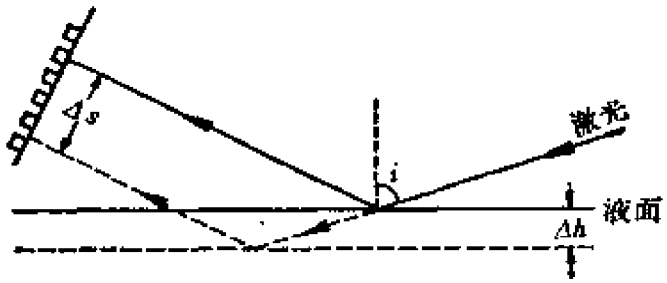
10. 设想一下，在鱼的眼睛里看到的天空是什么样子？

11. 为什么金刚石比磨成相同形状的玻璃仿制品显得更加光彩夺目？

习　题

1. 太阳与月球的直径分别是 1.39×10^{6}km 和 3.5×10^{3}km，太阳到地面的距离为 1.50×10^{8}km，月球到地面的距离为 3.8×10^{5}km. 试计算地面上能见到日全蚀区域的面积(可把该区域的地面视为平面).

2. 如图所示为一种液面激光控制仪. 当液面升降时，反射光斑移动，为不同部位的光电转换元件所接收，变成电讯号输入控制系统. 试计算液面升高 Δh 时反射光斑移动的距离 Δs.

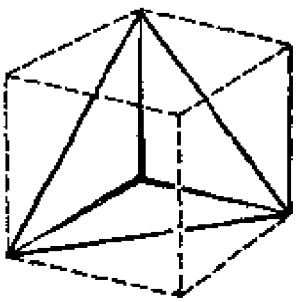


习题 2 图

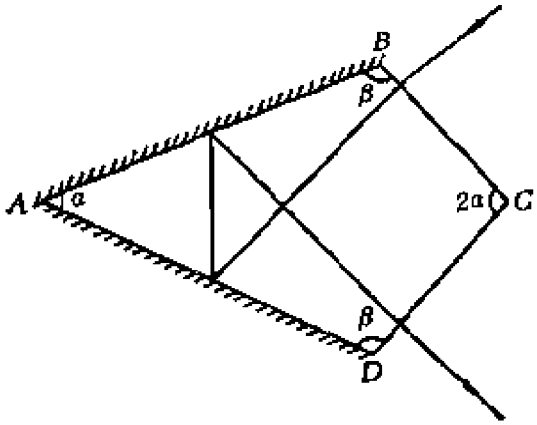
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

3. 由立方体的玻璃切下一角制成的棱镜，称为四面直角体(见图)，证明从斜面射入的光线经其它三面全反射后，出射线的方向总与入射线相反．设想一下，这样的棱镜可以在什么场合发挥作用．

4. 光线射入如图所示的棱镜，经两次折射和反射后射出．



习题3图



习题4图

(1) 证明偏向角与入射方向无关，恒等于2α．

(2) 在此情况下，能否产生色散？

5. 试证明：当一条光线通过平行平面玻璃板时，出射光线方向不变，但产生侧向平移．当入射角θ很小时，位移为

$$x=\frac{n-1}{n}\theta t,$$

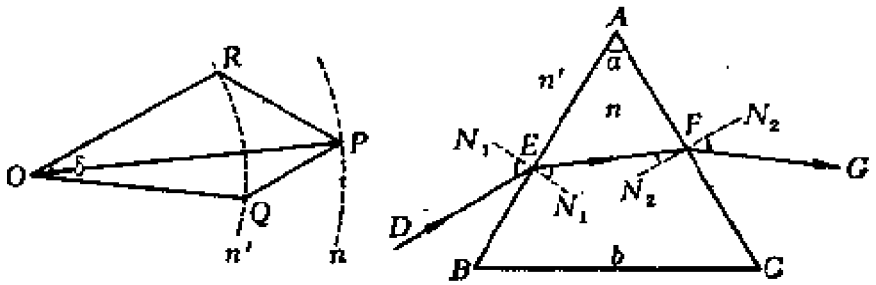
式中n为玻璃板的折射率，t为其厚度．

6. 证明：光线相继经过几个平行分界面的多层媒质时，出射光线的方向只与两边的折射率有关，与中间各层媒质无关．

7. 顶角α很小的棱镜称为光楔．证明光楔使垂直入射的光线产生偏向角$\delta=(n-1)\alpha$，其中n是光楔的折射率．

8. 如图所示是一种求折射线方向的追迹作图法．例如为了求光线通过棱镜的路径(图(b))，可如图(a)以O为中心作二圆弧，半径正比于折射率n、n'(设$n>n'$)．作OR平行于入射线DE，作RP平行于棱镜第一界面的法线N_1N_1，则OP的方向即为第一次折射后光线EF的方向．再作QP平行于第二界面的法线N_2N_2，则OQ的方向即为出射线FG的方向，从而$\angle ROQ=\delta$为偏向角．试论证此法的依据．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) (b)

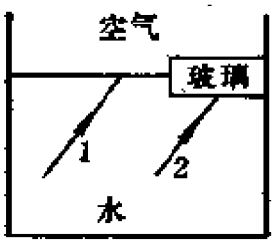
习题 8 图

9. 利用上题的图证明最小偏向角的存在及式(1.11).

10. 已知棱镜顶角为60°，测得最小偏向角为53°14′，求棱镜的折射率.

11. 顶角为50°的三棱镜的最小偏向角是35°，如果把它浸入水中，最小偏向角等于多少？（水的折射率为1.33.）

12. 如图所示，在水中有两条平行光线 1 和 2，光线 2 射到水和平行平板玻璃的分界面上.



习题 12 图

(1) 两光线射到空气中是否还平行？

(2) 如果光线 1 发生全反射，光线 2 能否进入空气？

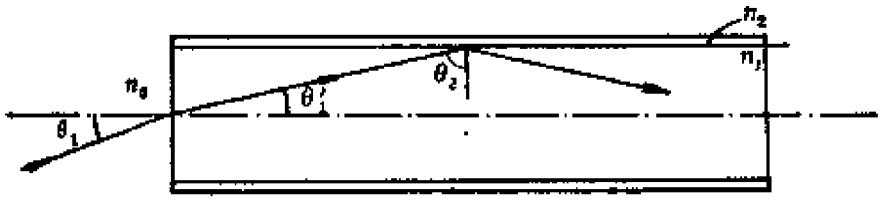
13. 计算光在下列媒质之间穿行时的全反射临界角：(1) 从玻璃到空气；(2) 从水到空气；(3) 从玻璃到水.

14. 设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 n_2 ($n_1 > n_2$)，垂直端面外媒质的折射率为 n（见图），试证明，能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_1 满足下式：

$$n \sin\theta_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

($n \sin\theta_1$ 称为纤维的数值孔径).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

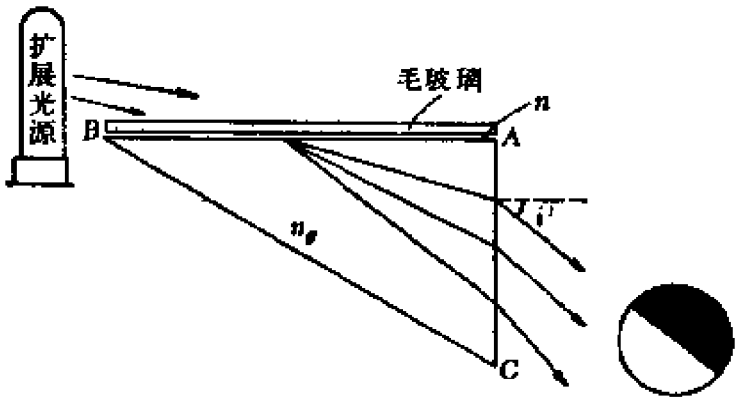


习题 14 图

15. 光导纤维外套由折射率为 1.52 的冕玻璃做成，芯线由折射率为 1.66的火石玻璃做成，求垂直端面的数值孔径。

16. 极限法测液体折射率的装置如图所示，ABC是直角棱镜，其折射率 n_g为已知。将待测液体涂一薄层于其上表面 AB，覆盖一块毛玻璃。用扩展光源在掠入射的方向照明。从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i'（用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区）。试证明，待测液体的折射率 n 可按下式算出：

$$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}\ .$$



习题 16 图

用这种方法测液体的折射率，测量范围受到什么限制？

§2 惠更斯原理

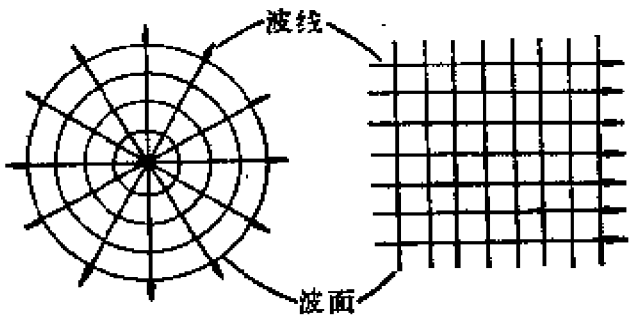
在应用几何光学三定律于实际问题之前，我们先用两节的篇幅，从波动传播的角度来讨论一下这些实验规律的物理实质，以及比它们更为概括的表述形式。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2.1 波的几何描述

我们知道，波动是扰动在空间里的传播．这里所说的扰动，在较多的情况下是指周期性的振动．

在同一振源的波场中，扰动同时到达的各点具有相同的位相，这些点的轨迹是一曲面，称为波面(或波阵面)．例如由一个点振源发出的波，在各向同性的均匀媒质中的波面是以振源为中心的球面，这种波称为球面波(见图2-1(a))．在离振源很远的地方，波面趋于平面，称为平面波(见图2-1(b))．



(a) 球面波　　(b) 平面波

图 2-1　波面与波线

我们设想在波场中绘出一线族，它们每点的切线方向代表该点波扰动传播的方向(或者说代表能量流动的方向)．这样的线族，称为波线．在各向同性媒质中，波线总是与波面正交的(参见图2-1)①．所以球面波的波线通过共同中心点，构成同心波束．平面波的波线构成平行波束．所谓"光线"，就是光波的波线．

用波面或波线都可描绘波的传播情况，它们统称波的几何描述．几何光学便是以1.1节所述三个定律为基础，研究光线(或波面)传播的学科．

2.2 惠更斯原理的表述

惠更斯原理(C.Huygens，1678年)是关于波面传播的理论．

① 在各向异性媒质中情况有所不同，详见第七章．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

它的表述可通过图2-2来说明．我们考虑在某一时刻 t，这时由振源发出的波扰动传播到了波面 S．惠更斯提出：S 上的每一面元可以认为是次波的波源．由面元发出的次波向四面八方传播，在以后的时刻 t' 形成次波面，在各向同性的均匀媒质中，次波面是半径为 $v\Delta t$ 的球面，这里 v 为波速，$\Delta t = t' - t$．惠更斯认为：这些次波面的包络面 S' 就是 t' 时刻总扰动的波面．

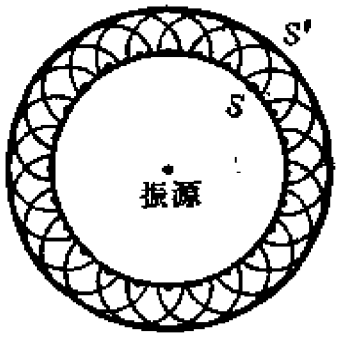


图 2-2　惠更斯原理

2.3　对反射定律和折射定律的解释

根据惠更斯原理，可以解释光的反射定律和折射定律，并给出折射率的物理意义——光在两种媒质中速度之比．下面就来论证这个问题．

如图2-3所示，设想有一束平行光线(平面波)以入射角 i_1 由媒质 1 射向它与媒质 2 的分界面上．作通过 A_1 点的波面，它与所有的入射光线垂直．在光线 1 到达 A_1 点的同时，光线 2，…，n 到达此波面上的 A_2，…，A_n 点．设光在媒质 1 中的速度为 v_1，则光线 2，3，…，n 分别要经过一段时间 $t_2 = \overline{A_2B_2}/v_1$，$t_3 = \overline{A_3B_3}/v_1$，…，$t_n = \overline{A_nB_n}/v_1$ 后才到达分界面上的 $B_2, B_3 \cdots, B_n$ 各点．每条光线到达分界面上时，都同时发射两个次波，一个是向媒质 1 内发射的反射次波，另一个是向媒质 2 内发射的透射次波．设光在媒质 2 中的速度为 v_2，在第 n 条光线到达 B_n 的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

同时，由A_1点发出的反射次波面和透射次波面分别是半径为v_1t和v_2t的半球面．在此同时，光线2,3,…传播到$B_2,B_3,\cdots$各点后发出的反射次波面的半径分别为$v_1(t-t_2),v_1(t-t_3),\cdots$，而透射次波面的半径为$v_2(t-t_2),v_2(t-t_3),\cdots$．这些次波面一个比一个小，直到$B_n$处缩成一个点．根据惠更斯原理，这时刻总扰动的波面是这些次波面的包络面．不难证明，反射次波和透射次波的包络面都是通过B的平面①．设反射波总扰动的波面与各次波面相切于$C_1,C_2,C_3,\cdots$各点，而透射波总扰动的波面与各次波面相切于$D_1,D_2,D_3\cdots$各点．联接次波源和切点，即得到总扰动的波线，亦即，A_1C_1，B_2C_2，$B_3C_3,\cdots$为反射光线，$A_1D_1,B_2D_2,B_3D_3,\cdots$为折射光线．

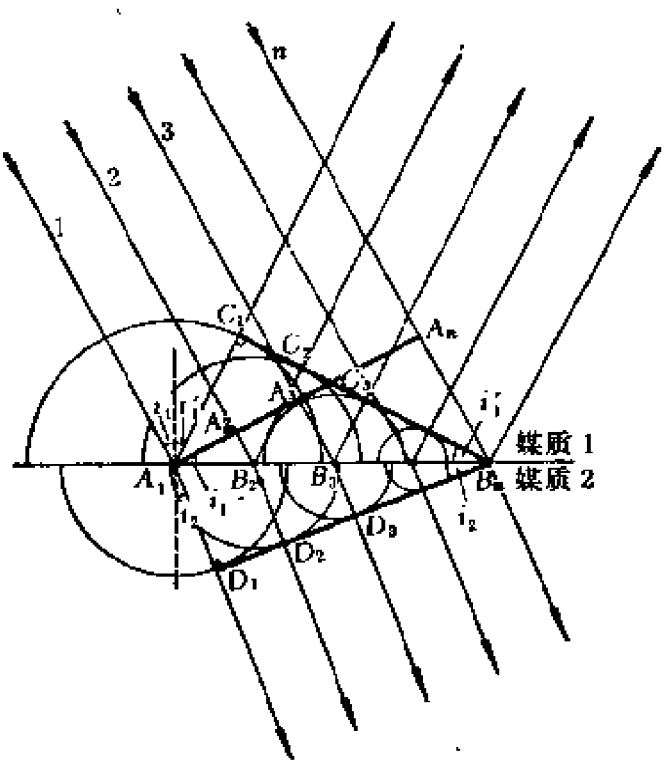


图 2-3　用惠更斯原理解释反射定律和折射定律

① 图2-3是某入射面的平面图．应当注意，实际上在与图纸平面平行的其它入射面内也有入射光线．在这些平面内发生的情况与图2-3所示的完全一样，也就是说，这里也有一系列同样的次波面．总扰动的波面与所有这些中心位于不同入射面内的波面相切，因此是垂直于入射面的平面．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

由于 $A_1C_1 = AB = v_1 t_0$，直角三角形 $\triangle A_1C_1B_0$ 和 $\triangle BAA_1$ 全同，因而 $\angle AA_1B = \angle C_1BA_1$。由图2-3不难看出，$\angle AA_1B$ = 入射角 i_1，$\angle C_1BA_1$ = 反射角 i_1'，故得到

$$i_1' = i_1.$$

这样便导出了反射定律。

由图2-3还可看出，$\angle D_1B_0A_1$ = 折射角 i_2，因此

$$\sin i_2 = \overline{A_1D_1} / \overline{A_1B}.$$

此外 $\sin i_1 = \overline{AB} / \overline{A_1B_0}$，于是

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{A_1D_1}} = \frac{v_1 t_0}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}.$$

由此可见，入射角与折射角正弦之比为一常数。这样我们便导出了折射定律。在折射定律中我们称 $\sin i_1 / \sin i_2$ 的比值为媒质2相对媒质1的折射率 n_{12}，因此相对折射率与光在两种媒质中速度的关系为

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{2.1}$$

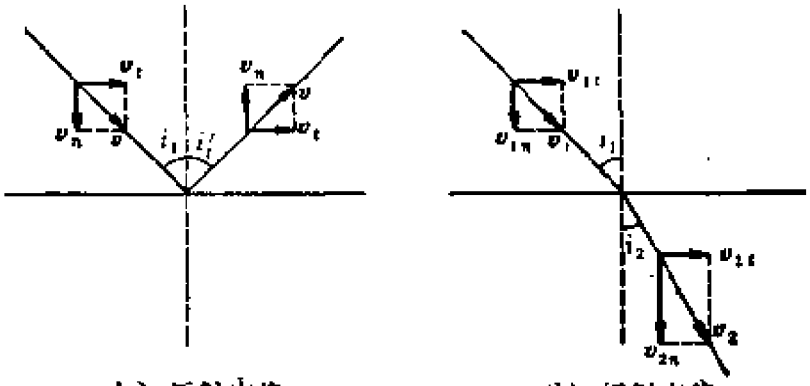
由此可见，一种媒质的绝对折射率为

$$n = \frac{c}{v}, \tag{2.2}$$

式中 c 为真空中光速，v 为该种媒质中的光速。从式(2.1)或式(2.2)看来，在光密媒质中光的速度较小。这一结论是与实验相符的。

早期微粒说也可以解释光的反射定律和折射定律。微粒说认为，光的微粒由光源发出后，在透明的均匀媒质中依惯性定律飞行。当微粒遇到反射面时，它们象弹性小球一样地反跳。这时微粒的切向速度 v_t 不变，而法向速度 v_n 反转，从而反射角 i_1' 等于入射角 i_1（参见图2-4(a)）。为了解释折射定律，则需假设在媒质界面存在着一种力，它使微粒通过界面时法向速度发生改变，$v_{2n} \neq v_{1n}$（参见图2-4(b)）。由于切向速度 $v_{1t} = v_1 \sin i_1$ 与

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) 反射定律　　(b) 折射定律

图 2-4　微粒说对反射定律和折射定律的解释

$v_{2t}=v_2\sin i_2$相等，于是

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{v_2}{v_1}.$$

由于在各向同性媒质中速度v_1,v_2与光的传播方向无关，上式右端是一个与入射角无关的常数．这样便解释了光的折射定律．不过，当我们将上式与式(1.5)比较后，可以看出

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

亦即在光的微粒说看来，在光密媒质中光"微粒"的速度较大．这一点后来为傅科的实验所否定．

2.4　直线传播问题

要想验证光的直进性，我们必须用带小孔的障板把一根光线(更确切地说，是一束较窄的光)分离出来(见图2-5)．由这束光的边缘光线可以考察直线传播定律是否成立．我们设原来的波是由点波源Q发出的球面波．画出它传播到障板开口处的波面．根据惠更斯原理，这波面上的每个面元都是一个次波中心，当然只有波面上未被障板遮住的部分AB发出的次波，才对障板后边的空间起作用．考虑以后的某一时刻，画出此时波前S上AB部分每点发出的次波的波面，并作这些次波面的包络面CD．不难看

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

出，CD也是以Q为中心的球面的一部分．按照惠更斯的说法，只有各次波面的包络面CD上才发生可察觉的总扰动，也就是说，在包络面两侧D和C之外的扰动是可以忽略不计的．所以QAC和QBD就是透过孔隙的边缘光线，它们都是直线．惠更斯就这样说明了波的直进性．

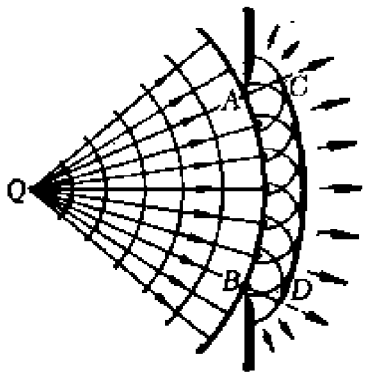


图 2-5　用惠更斯原理解释光的直进性

以上的解释并不令人十分满意，因为CD两侧之外还有次波存在着，为什么次波在这些地方不发生作用呢？事实上并非如此．图2-6所示为水波通过大小不同的孔隙后的情况．可以看出，当孔隙大时（见图2-6(a)），障板后面的波动正象上面的论述所预期的那样，基本上沿直线传播．当孔较小时（见图2-6(b)），波的传播开始偏离直线．当孔十分小时（见图2-6(c)），在障板后面看来，好象波是从小孔那里重新发出似的，这时完全谈不上直进性．在后两种情况下所发生的，就是通常所说的衍射现象．由于惠更斯

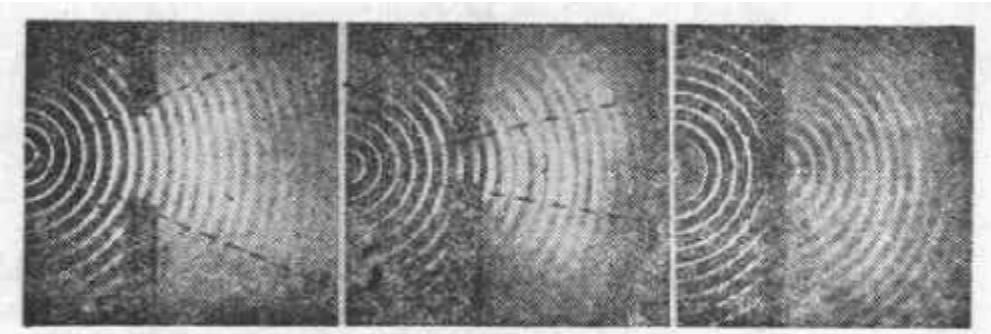


图 2-6　水波的衍射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

原理未能定量地给出次波面的包络面上和包络面以外波扰动强度的分布，因而也就不能完满地解释波的直进性与衍射现象的矛盾．随着科学的进展，这个问题直到一百多年后才得到解决．原来，任何波动的直进性只是波长 λ 远小于孔隙线度 a 的条件下近似成立的规律．在 λ 与 a 可比拟、甚至大于 a 的情形下，将发生显著的衍射．光波的情况当然也不例外，只是可见光的波长（10^{-5}cm量级）比通常障碍物的线度小得多，偏离直线传播的现象很不容易察觉罢了．有关这个问题的讨论，详见第二章§5—§8．

除了直线传播定律之外，作为几何光学基础的另外两条定律——反射定律和折射定律，也都只在 λ 很小的条件下才近似成立．所以几何光学原理的适用范围是有限度的，在必要的时候需要用更严格的波动理论来代替它．不过由于几何光学处理问题的方法要简单得多，并且它对于各种光学仪器中遇到的许多实际问题已足够精确，所以几何光学并不失为各种光学仪器的重要理论基础．

思考题

1．惠更斯原理是否适用于空气中的声波？你是否期望声波也服从和光波一样的反射定律和折射定律？

2．用惠更斯作图法研究平行光束在平面上的折射时，是否会遇到次波没有包络面的情况？

习题

1．在空气中钠黄光的波长为5893Å，问：

(1) 其频率有多大？

(2) 在折射率为1.52的玻璃中其波长为多少？

2．在熔凝石英中波长为5500Å的光频率为多少？已知折射率为1.460．

3．填充下表中的空白：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

谱　线	F　线		D　线	
媒　质	真　空	水	真　空	水
折 射 率		1.337		1.333
波　长	4861Å		5893Å	
频　率				
光　速				

4. 用惠更斯原理求平行光束在球面上的反射波(分别就凸、凹两种情形作图).

5. 拖着棒的一端在水中以速度 v 移动，v 比水波的速率 u 为大．用惠更斯作图法证明：在水中出现一圆锥形波前，其半顶角 α 由下式给出：

$$\sin\alpha = \frac{u}{v},$$

船后的弓形波，超音速飞机在空气中产生的冲击波，都是这样产生的.

设想一下，若电子以大于媒质中光速的速度在媒质中作匀速运动，会产生什么现象?

§3 费马原理

3.1 光程

光线在真空中传播距离 $\overline{QP}$ 所需的时间为

$$\tau_{QP} = \overline{QP}/c,$$

当光线经过几种不同媒质时(图3-1)，由 Q 经 M, N 直到 P 所需的时间为

$$\tau_{QP} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{v_i} = \sum_i \frac{n_i \Delta l_i}{c} = (QMNP)/c, \qquad (3.2)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

其中 Δl_i ,v_i ,n_i 分别是光线在第 i 种媒质中的路程、速度和折射率，而

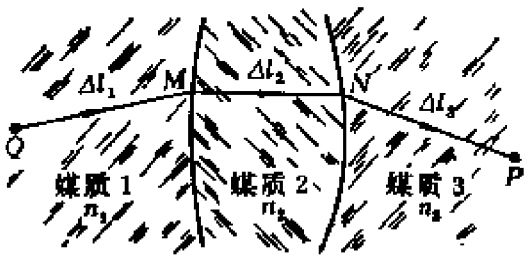


图 3-1 光 程

$$(QMNP) \text{ 或简写成 } (QP)=\sum n\,\Delta l_i \qquad (3.3)$$

称为光线$QMNP$的光程．若媒质的折射率连续变化，则光程应为

$$(QP)=\int_{(L)}^{P} n\,dl, \qquad (3.4)$$

其中积分沿光线的路径L．从式(3.2)可以看出，“光程”可理解为在相同时间内光线在真空中传播的距离．

以后我们会看到，位相差的计算在波动光学中是十分重要的．可以证明，位相差 $\varphi(P)-\varphi(Q)$ 与光程(QP)成正比，从而可以用光程差的计算代替位相差的计算．此是后话，暂且不谈，下面仍局限于几何光学的讨论．

3.2 费马原理的表述

光程的概念对几何光学的重要意义体现在费马原理中．几何光学的基础本是1.1节所述的三个实验定律，费马却用光程的概念高度概括地把它们归结成一个统一的原理．费马原理(P. de Fermat，1679 年)的表述为：QP两点间光线的实际路径，是光程(QP)(或者说所需的传播时间τ_{QP})为平稳的路径．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

以上表述，特别是其中“平稳”一词，有些费解．在微分学中说一个函数$y=f(x)$在某处平稳，是指它的一阶微分$dy=0$．在这里函数可以具有极小值($d^2y>0$)，也可以有极大值($d^2y<0$)，还可以有其它情况(如拐点，甚至是常数等)．在费马原理的表述中“平稳”一词的含义也是如此．若用严格的数学语言来表述，就是在光线的实际路径上光程的变分为0：

$$\delta(QP)=\delta\int_{(L)}^{P}n\,dl=0. \tag{3.5}$$

读者可能对“变分”一词感到生疏．粗浅一点理解，可认为它就是函数的微分．要想稍详细一点理解它，请参看后面的小字．不过在下面我们将遇到的多数场合里，光程具有极小值或恒定值，少数场合里是极大值，因此我们可在这些较狭隘的意义下理解它．

在微分学中所谓“极小”、“极大”或“平稳”，都是对自变量的无穷小变化而言的．式(3.5)中的积分与路径L有关．所谓“极小”、“极大”或“平稳”，是对路径的无穷小变化而言的．如图3-2，设$QMNP$是光线的实际路径，今在其附近取任一其它路径$QM'N'P$，两者间的距离处处小于某个无穷小量ε．所谓光程$(QMNP)$极小(或极大)，就是它小于(或大于)所有附近路径的光程$(QM'N'P)$；所谓光程$(QMNP)$具有恒定值，就是它和附近所有路径的光程$(QM'N'P)$相等．

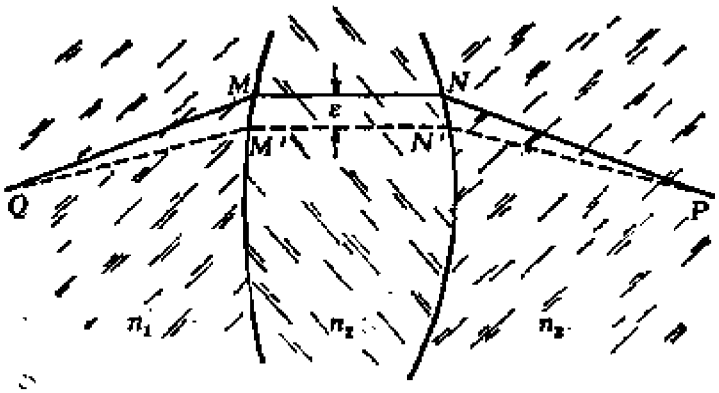


图3-2　费马原理

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在微分学中，一个函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 可写成

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+O(\Delta x^2),\quad ①$$

其中 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 是 $f(x)$ 的微商．微分 dy 的定义是

$$dy=f'(x)\Delta x,\qquad (3.6)$$

它是 Δy 中正比于 Δx 的线性主部．若在某处 $dy=0$，我们说函数在该处是平稳的．函数在某处平稳，包含下列各种可能：若在该处进一步有 $d^2y>0$，则函数在该处具有极小值；若 $d^2y<0$，则函数具有极大值；若 $d^2y=0$ 而 $d^3y\neq 0$，则该处是函数的拐点；若 $d^2y=0$，$d^3y=0$，则函数在该点有更高阶的平稳值．

以上概念推广到多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，增量和微分分别为

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n}f_i\Delta x_i+O(\Delta x_i^2),$$

$$dy=\sum_{i=1}^{n}f_i\Delta x_i,\qquad (3.7)$$

其中 $f_i=\frac{\delta y}{\delta x_i}$ 是 f 对 x_i 的偏微商．dy 亦为 Δy 中的线性主部．若在某处 $dy=0$，则函数在该处平稳，其中亦包括极小、极大、马鞍点，以及具有更高阶平稳值等各种可能性．

光程 $(QP)=\int_{(L)}^{P}_{Q}ndl$ 是路径 L 的函数，而路径 L 本身又可用空间坐标的函数表示出来．故光程是函数的函数，这在数学中叫做泛函，下面记作 $J[L]$．泛函 $J[L]$ 这个概念是多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 概念的推广．因为积分路径 L 上的每一点可看作是一个自变量，整个积分路径的改变，是由其上每一点的移动构成的．但是积分路径上的点有无穷多个，即积分路径是无穷多个自变量的集合，从而泛函 $J[L]$ 可以看作是无穷多个自变量的多元函数．这种广义多元函数的微分称作“变分”，代表微分的符号 d 也改作 δ，如 $\delta J[L]$．若对于某条给定的路径 L_0，变分 $\delta J[L_0]=0$，则我们说泛函 $J[L]$ 在 L_0 上是平稳的，它可以是极大、极小、或具有更高阶的平稳值．利用变分的概念，费马原理可表述为：在光线的实际路径上，

① $O(\Delta x^2)$ 代表数量级为 Δx^2 以及更高级无穷小的项．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

光程的变分等于0：

$$\delta J[L]=\delta\int_{(L)}^{P}n\,dl=0. \tag{3.8}$$

3.3 由费马原理推导几何光学三定律

前已述及，费马原理比几何光学三定律具有更高的概括性，由它可以推导出这三个定律来.

在均匀媒质中光的直线传播定律是费马原理的显然推论，下面看反射定律和折射定律.

（1）反射定律

考虑由Q发出，经反射面Σ到达P的光线. 相对于Σ取P的对称点P'(图3-3)，从Q到P任一可能路径$QM'P$的长度与$QM'P'$相等. 显然，直线QMP'是其中最短的一根，从而路径QMP的长度最短. 根据费马原理，QMP是光线的实际路径. 由对称性不难看出，$i=i'$.

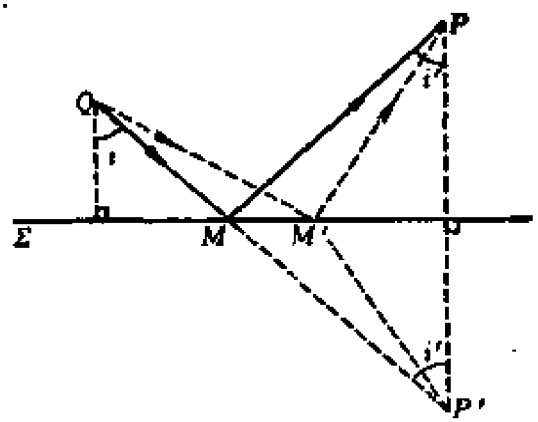


图 3-3 由费马原理推导反射定律

（2）折射定律

图3-4中的Σ是折射面. 考虑由Q出发经Σ折射到达P的光线. 作$QQ'\perp\Sigma$，$PP'\perp\Sigma$. 因QQ'与PP'平行. 故而共面，我们称此平面为Π. 考虑从Q经折射面Σ上任一点M'到P的光线$QM'P$. 由M'作垂足Q'，P'联线的垂线$M'M$，不难看出$\overline{QM}$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$<\overline{QM'}$，$\overline{PM}<\overline{PM'}$，即光线$QM'P$在$\Pi$平面上的投影$QMP$比$QM'P$本身的光程更短．可见光程最短的路径应在$\Pi$平面内寻找．

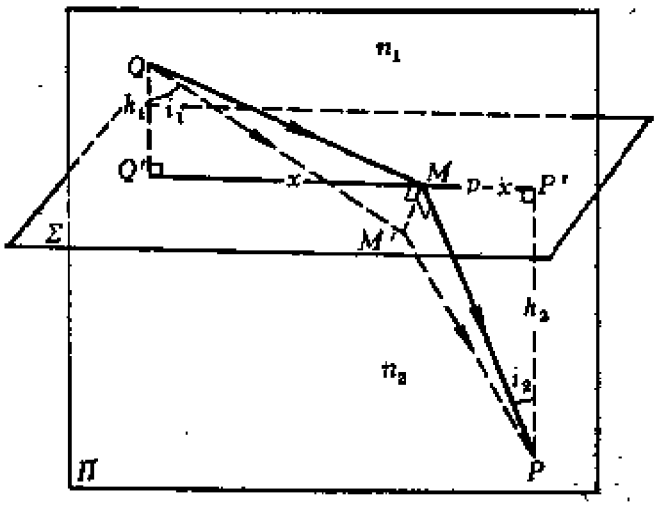


图 3-4　由费马原理推导折射定律

在Π平面内，令$\overline{QQ'}=h_1$，$\overline{PP'}=h_2$，$\overline{Q'P'}=p$，$\overline{Q'M}=x$，则

$$(QMP)=n_1\overline{QM}+n_2\overline{MP}$$
$$=n_1\sqrt{h_1^2+x^2}+n_2\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}\ ,$$

式中n_1，n_2为Σ两边媒质的折射率．取上式对x的微商，得

$$\frac{d}{dx}(QMP)=\frac{n_1x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{n_2(p-x)}{\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}}$$
$$=n_1\sin i_1-n_2\sin i_2\ .$$

由光程极小的条件：$d(QMP)/dx=0$，即得$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$．

至此我们全面证明了，符合费马原理的光线路径与几何光学三个基本定律一致．

习　　题

1．证明图 2-3 中光线A_1C_1，$A_2B_2C_2$，$A_3B_3C_3$，…，A_nB_n的光程相等．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2. 证明图 2-3 中光线 $A_1D_1, A_2B_2D_2, A_3B_3D_3, \cdots, A_nB_n$ 的光程相等.

§4 成　像

光学仪器中很大一部分是成像的仪器，如显微镜、望远镜、投影仪和照相机等皆是. 成像是几何光学要研究的中心问题之一. 本节先介绍一些有关成像的基本概念，以后各节再研究它的规律.

4.1 实像与虚像　实物与虚物

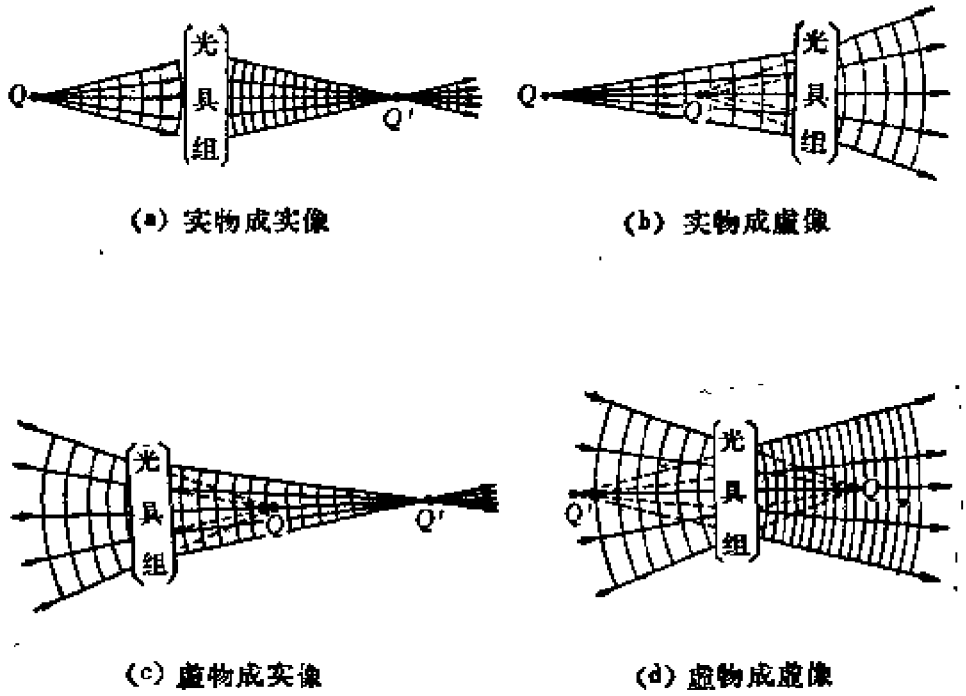
各光线本身或其延长线交于同一点的光束，叫同心光束，在各向同性介质中它对应于球面波，例如从一点光源发出的光束便是同心光束. 由若干反射面或折射面组成的光学系统，叫做光具组，例如平面镜(一个反射平面)、透镜(两个折射球面)、以及更复杂的光学仪器，都可称之为光具组. 如果一个以 Q 点为中心的同心光束经光具组的反射或折射后转化为另一以 Q' 点为中心的同心光束，我们说光具组使 Q 成像于 Q'. Q 称为物点，Q' 称为像点. 若出射的同心光束是会聚的(图4-1(a)与(c))，我们称像点 Q' 为实像；若出射同心光束是发散的(图4-1(b)与(d))，我们称像点 Q' 为虚像①.

作为成实像或成虚像的简单例子，读者也许会举出凸透镜和凹透镜来. 但是以后我们将看到，透镜并不能严格地保持光束的同心性，即它们都只能近似地成像. 能严格保持光束同心性的光

① 从图4-1可以看出，会聚光束经过像点 Q' 后就变为发散的了. 所以判断光束是会聚还是发散，应以刚从光具组的最后一个界面射出时为准. 此外有一种说法，认为像的虚实要看它是光线本身还是延长线的交点. 对于单个薄透镜来说，这种说法与我们的定义一致. 然而当光束一连通过几个光具组时，用这种方法来规定中间像的虚实就不恰当了(参见图4-3中给出的例子).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

具组是极少的．§1的例题1表明，单个折射平面就不能保持光束的同心性．然而，单个反射平面却是为数不多的几个严格成像的例子之一。



(a) 实物成实像　(b) 实物成虚像

(c) 虚物成实像　(d) 虚物成虚像

图 4-1　物与像

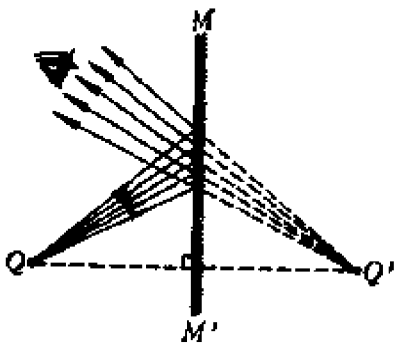


图 4-2　平面镜成像

图4-2所示为平面镜成像原理．MM'为镜面．由镜前一发光点Q射出的同心光束经镜面反射后成为发散光束．根据反射定律不难证明，反射线的延长线严格地交于镜面后同一点Q'，像点Q'与物点Q对镜面对称(证明由读者自己完成)．这是个实物严格

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

成虚像的例子，严格成实像的例子将在4.4节中给出。

实像既可用屏幕来接收，又可用眼睛来观察，这一点是不难理解的。然而眼睛为什么能看到虚像？原来在观察一个发光点时，我们是根据射入眼睛的那部分光线的最后方向和发散程度来判断它们发光中心的位置的。所以当一束成虚像的发散光束射入眼睛后，我们的感觉是在它们延长线的交点处似乎真有一个发光点(参见图4-2)。

不仅像点有虚实之分，物点也可以有虚实之别。对于某个光具组来说，如果入射的是个发散的同心光束，则相应的发散中心Q称为实物(图4-1(a)与(b))；如果入射的是个会聚的同心光束，则相应的会聚中心Q称为虚物(图4-1(c)与(d))。来自真实发光点的光束当然不会是会聚的，虚物出现在几个光具组联合成像的问题中。以图4-3所示的光路为例，真实发光点Q经第一个透镜L_1成像于Q_1'，这是个实像。当第二个透镜L_2插在Q_1'之前时，它接收到的便是一个会聚光束，中间像Q_1'可看作是L_2的虚物。L_2把入射的光束进一步会聚到Q_2'，我们说，L_2使虚物Q_1'成实像于Q_2'。

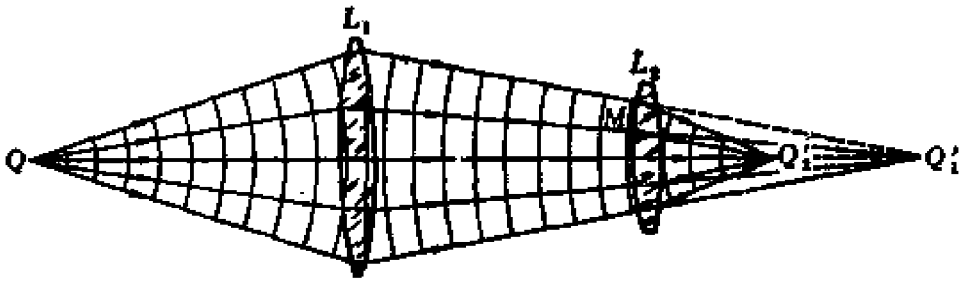


图 4-3　虚物的例子

4.2　物方和像方　物与像的共轭性

一个能使任何同心光束保持同心性的光具组，称为理想光具组。理想光具组将空间每个物点Q和相应的像点Q'组成一一的对应关系。为了讨论问题的方便，我们把分别由这两类点组成的空间从概念上区别开来，前者称为物方(物空间)，后者称为像方

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(像空间)．由于物方包括了所有实的和虚的物点，它不仅是光具组前面的那部分空间，它还要延伸到光具组之后．同样地，由于像方包括所有实的和虚的像点，它也不仅是光具组后面的那部分空间，它还要延伸到光具组之前．所以，物方和像方两个空间实际上是重迭在一起的．在一个问题中为了区分空间某个点属于物方还是像方，不是看它在光具组之前还是之后，而要看它与入射光束相联系还是与出射光束相联系．例如在图4-3中的Q_1'和Q_2'点都在透镜L_2之后，但Q_1'点是入射光束延长线的交点，故对L_2来说它属于物方；而Q_2'点是出射光束会聚的中心，对L_2来说它属于像方．

物方和像方的点不仅一一对应，而且根据光的可逆性原理，如果将发光点移到原来像点的位置Q'上，并使光线沿反方向射入光具组，它的像将成在原来物点的位置Q上．这样一对互相对应的点Q和Q'，称为共轭点．

4.3 物像之间的等光程性

由费马原理可导出一个重要结论：物点Q和像点Q'之间各光线的光程都相等．这便是物像之间的等光程性．

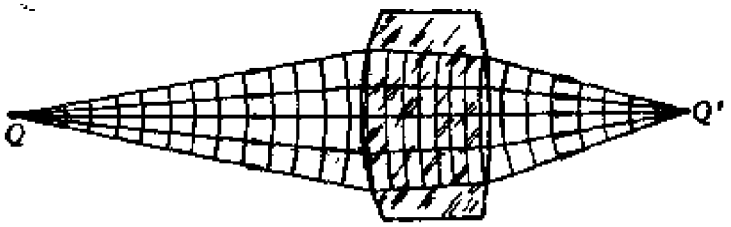


图 4-4 物像之间的等光程性

实物和实像之间的等光程性很容易证明．如图4-4所示，在从Q到Q'的同心光束内连续分布着无穷多条实际的光线路径．根据费马原理，它们的光程都应取极值或恒定值．这些连续分布的实际光线，其光程都取极大值或极小值是不可能的，唯一的可能性是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

取恒定值，即它们的光程都相等.

为了把物像之间的等光程原理推广到虚物或虚像情形，需要引入"虚光程"的概念.以图4-3中透镜L_2成像为例.取虚物点Q_1'到实像点Q_2'之间的某一条光线$Q_1'MQ_2'$，这条光线中$Q_1'M$一段是物方实际光线的延长线，我们规定其光程取负值，即$(Q_1'M)=-n\overline{Q_1'M}$.应注意，这里$n$是物方的折射率.这段光程叫做虚光程.对于虚像情形也可作同样处理，只是虚光程的折射率是像方的.对虚物或虚像间光线的光程作如上理解后，等光程原理就可对它们同样适用了.其证明如下：在图4-3中，Q和Q_2'对于透镜L_1和L_2组成的联合光具组是一对实的共轭点，Q和Q_1'对于透镜L_1是一对实的共轭点，故QQ_1'和QQ_2'之间各光线分别是等光程的.两光程相减，便可导出Q_1'和Q_2'之间的等光程性.以上是虚物情形.若利用光的可逆性原理把$Q_1'Q_2'$的物像关系颠倒一下，就可得到虚像的情形.

*4.4 等光程面

下面我们利用物像之间的等光程原理，探讨一下严格成像的可能性.

给定Q,Q'两点，若有这样一个曲面，凡是从Q出发经它反射或折射后达到Q'的光线都是等光程的，这样的曲面叫做等光程面.显然，对于等光程面，Q和Q'是一对物像共轭点，以Q为中心的同心光束经等光程面反射或折射后，严格地转化为以Q'为中心的同心光束.

（1）反射等光程面

设从Q到Q'的光线与等光程面相遇的点为M，则反射等光程面方程为

$$\overline{QM}+\overline{MQ'}=\text{常数(实像)},\qquad(4.1)$$

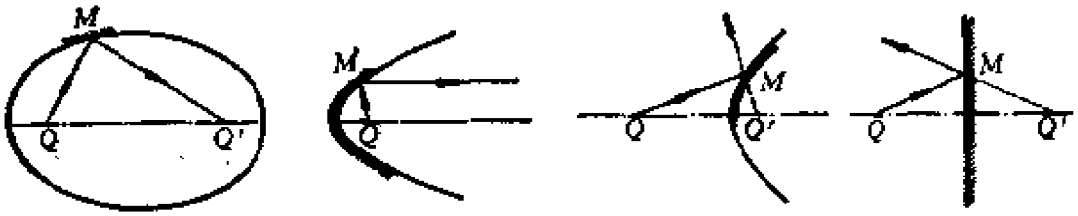
或

$$\overline{QM}-\overline{MQ'}=\text{常数(虚像)}.\qquad(4.2)$$

满足式(4.1)的曲面是以Q,Q'为焦点的旋转椭球面(图4-5(a))，在Q或Q'之一为无穷远点，即入射或出射光束之一为平行光束的极限情形下，曲面退化为旋转抛物面(4-5(b)).满足式(4.2)的曲面是以Q,Q'为焦点的旋转双曲面(图4-5(c))，当式中常数$=0$时，曲面退化为平面(图4-5(d)).以上便是所有可能的反射等光程面，其中反射平面是前面已提到的平庸例

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

子，能产生和接收平行光束的抛物反射面已在探照灯、望远镜中获得实际的应用。



(a) 椭球面　(b) 抛物面　(c) 双曲面　(d) 平　面

图 4-5　反射等光程面

（2）折射等光程面和齐明点

一般地说，折射等光程面是四次曲面(笛卡儿卵形面)，由于这种形状加工不易，实际意义不大。下面只讨论折射球面，看它是否可能成为某对共轭点的等光程面。

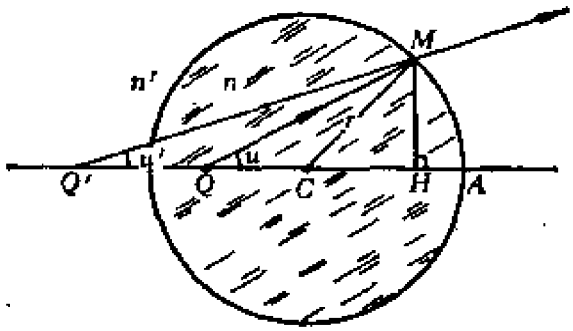


图 4-6　折射球面的齐明点

如图4-6所示，设球的半径为r，球心在C点，球内外媒质的折射率分别是n和n'，并设$n>n'$。研究表明，这里存在一对共轭点Q,Q'，它们到球心的距离分别是

$$\overline{QC}=\frac{n'}{n}r,\quad \overline{Q'C}=\frac{n}{n'}r. \tag{4.3}$$

由于对称性，Q,Q'必与C共线，此线叫做光轴。

Q,Q'间各光线的等光程性证明如下：在球上取任一点M，由于式(4.3)，$\triangle QMC$与$\triangle MQ'C$相似，故

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{MQ'}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{Q'C}}=\frac{n'}{n},$$

即光程 $(QMQ')=n\overline{QM}-n'\overline{MQ'}=0$(与$M$无关)．应注意，因$(Q'M)$这段光程是虚的，$Q'$是$Q$的虚像．

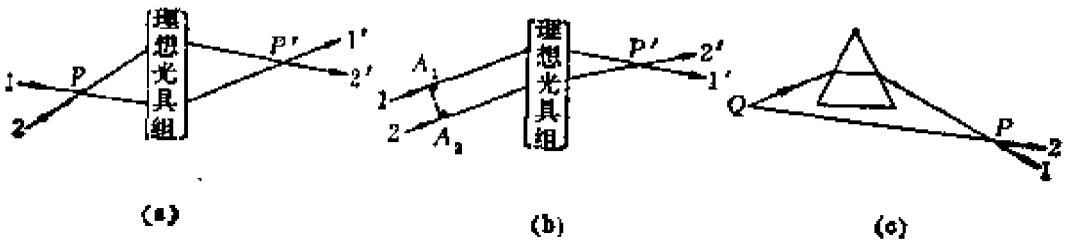
顺便提起，角度 $u=\angle MQA$，$u'=\angle MQ'A$ 和距离 $\overline{QA}$，$\overline{AQ'}$之间存在下列关系：

$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{AQ'}}{\overline{QA}}. \tag{4.4}$$

Q，Q'这对共轭点叫做折射球面的齐明点．齐明点的概念和式(4.4)将在以后用到．

思 考 题

1．(1)如图(a)所示，若光线1，2相交于P点，经过一理想光具组后，它们的共轭线1′，2′是否一定相交？如果有交点，令此交点为P'．两光线在P，P'间的光程是否相等？



(a)　(b)　(c)

思考题 1 图

(2) 如图(b)所示，若光线1，2平行，经过一理想光具组后，它们的共轭线1′，2′是否一定相交？如果有交点，令此交点为 P'．作A_1A_2垂直于1，2，光程(A_1P')和(A_2P')是否一定相等？

(3) 如图(c)所示，从点光源Q发出两根光线1和2，光线1经棱镜偏折，光线2不经过棱镜，两光线相交于P．在Q，P间两光线的光程是否相等？

2．在图4-5(a)中用通过M点与椭球面相切的球面反射镜代替椭球面反射镜，在下列三种情况下光线QMQ'的光程是极大值、极小值、还是恒定值？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(1) 球面的半径大于椭球在M点的曲率半径；

(2) 球面的半径等于椭球在M点的曲率半径；

(3) 球面的半径小于椭球在M点的曲率半径。

习　题

1. 以§1例题2中所用的光线追迹作图法证明图4-6中Q和Q'是一对共轭点。

2. 证明式(4.4)。

§5　共轴球面组傍轴成像

大多数光学仪器是由球心在同一直线上的一系列折射或反射球面组成的，这种光具组叫做共轴球面光具组，各球心的联线叫做它的光轴。

前面我们看到，除了个别特殊共轭点外，球面是不能成像的。但是若将参加成像的光线限制在光轴附近，即所谓“傍轴光线”，则近似成像是可能的。为了研究共轴球面光具组在傍轴条件下成像的规律，我们从单个球面开始，然后利用逐次成像的概念推广到多个球面。

5.1　光在单个球面上的折射

如图5-1所示，Σ为折射球面。设其半径为r，球心位于C，顶点(与光轴的交点)为A；前后媒质的折射率分别为n和n'。从轴上

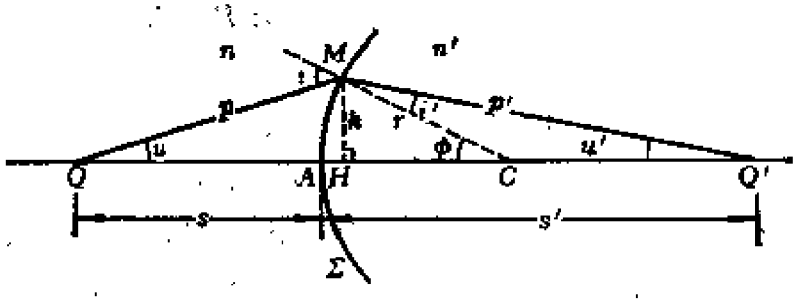


图5-1　单个球面的折射

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

物点 Q 引一条入射光线与 Σ 相遇于 M，折射后重新交光轴于 Q'．令

$$\overline{QA}=s,\ \overline{AQ'}=s',\ \overline{QM}=p,\ \overline{MQ'}=p',$$

QM，MQ' 以及半径 CM 与光轴的夹角分别为 u，u' 和 ϕ，入射角为 i，折射角为 i'．我们的任务是寻求任意入射线 QM 经 Σ 折射后的出射线 MQ'，这是一个光线追迹问题．两光线可分别用 (s,u) 和 (s',u') 来表征，或者用 s，s' 和 ϕ 来表征．可资利用的关系式，在物理上有斯涅耳折射定律

$$n\sin i=n'\sin i', \tag{5.1}$$

在几何上有

$$i-u=i'+u'=\phi, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{p}{\sin\phi}=\dfrac{s+r}{\sin i}=\dfrac{r}{\sin u}, & (5.3)\\[2ex] \dfrac{p'}{\sin\phi}=\dfrac{s'-r}{\sin i'}=\dfrac{r}{\sin u'}, & (5.4)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}p^2=(s+r)^2+r^2-2r(s+r)\cos\phi, & (5.5)\\ p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\phi. & (5.6)\end{cases}$$

(5.3)—(5.6)各式分别是正弦定律和余弦定律在 $\triangle QCM$ 和 $\triangle Q'CM$ 上的应用．上列各式已在原则上解决了光线追迹问题，尽管需要解一系列三角方程，具体计算是相当复杂的．不过有了近代的电子计算机，这也算不了什么困难．

为了便于分析问题，我们将上列公式进行改写．由式(5.1)，(5.2)，(5.3)可得

$$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{p'}{n'(s'-r)}. \tag{5.7}$$

此外，式(5.5)和(5.6)可改写为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\begin{cases} p^2 = s^2 + 4r(s+r)\sin^2(\phi/2), & (5.8) \\ p'^2 = s'^2 - 4r(s'-r)\sin^2(\phi/2). & (5.9) \end{cases}$$

取式(5.7)的平方，然后将式(5.8),(5.9)代入，可整理成如下形式

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = -4r\sin^2(\phi/2)\left[\frac{1}{n^2(s+r)} + \frac{1}{n'^2(s'-r)}\right]. \quad (5.10)$$

给定 s和 ϕ，可由上式定出 s'.一般说来，s'是与 ϕ 有关的.这就是说，由Q点发出的不同倾角的光线，折射后不再与光轴交于同一点,亦即光束丧失了它的同心性．从成像的角度来讨论问题,我们关心的是在什么条件下s'将与 ϕ 无关，从而Q成像于Q'．一种可能性是我们要求宽光束成像，这可通过令式(5.10)的左端和右端同时为零

$$\begin{cases} \dfrac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \dfrac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = 0, & (5.11) \\ \dfrac{1}{n^2(s+r)} + \dfrac{1}{n'^2(s'-r)} = 0. & (5.12) \end{cases}$$

这组联立方程将把 s 和s' 同时确定下来，亦即宽光束成像只能在个别的共轭点上实现．这对特殊的共轭点正是 4.4 节讲过的齐明点(参见本节习题13)．另一种可能性是把光束限制在傍轴范围内，这时光轴任意点皆可成像．下面着重讨论这一情形．

5.2 轴上物点成像 焦距、物像距公式

在图5-1中，引M点到光轴的垂线 MH，令此高度$\overline{MH} = h$.对于轴上物点来说，傍轴条件可表述为

$$h^2 \ll s^2,\ s'^2 \text{和} r^2. \quad (5.13)$$

若用角度来表示，则有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$u^2,\ u'^2 \text{ 和 } \phi^2 \ll 1, \tag{5.14}$$

由于有式(5.2)，上式将意味着 i^2 和 $i'^2 \ll 1$.

在傍轴条件下，式(5.10)中正比于 $\sin^2(\phi/2) \simeq (\phi/2)^2$ 的项可忽略，于是得到

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} = \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}.$$

上式两端开方取倒数后除以 r，可整理成如下形式：

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}. \tag{5.15}$$

上式表明，对于任一个 s，有一个 s'，它与 ϕ 角无关．这就是说，在傍轴条件下轴上任意物点 Q 皆可成像于某个 Q' 点，故式中的 s 和 s' 可分别称为物距和像距．式(5.15)便是单个折射球面的物像距公式．

轴上无穷远像点的共轭点称为物方焦点(或第一焦点、前焦点，记作 F)；轴上无穷远物点的共轭像点称为像方焦点(或第二焦点、后焦点，记作 F')①．它们到顶点 A 的距离分别叫做物方焦距(第一焦距、前焦距)和像方焦距(第二焦距、后焦距)，记作 f 和 f'．依次令式(5.15)中 $s' = \infty$，$s = f$ 和 $s = \infty$，$s' = f'$，可得物、像方焦距的公式：

$$f = \frac{nr}{n'-n}, \quad f' = \frac{n'r}{n'-n}. \tag{5.16}$$

两者之比为

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}. \tag{5.17}$$

物像距公式(5.15)可用焦距表示为

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \tag{5.18}$$

① 轴上的物点或像点在无穷远处，分别表示入射光束或出射光束为平行于光轴的平行光束．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

上面就一种特殊情形求得了物像距公式(5.15),(5.18)和焦距公式(5.16)，在这种情形里，实物点 Q 成实像点 Q'．一般说来，物和像都有实、虚两种可能性．此外球心 C 在哪一侧也有两种可能性，不同情形的公式之间差别仅在于各项的正负号．可以约定一种正负号法则，把所有这些情形的公式统一起来．这类法则不是唯一的，我们采用下列一种．

设入射光从左到右，我们规定：

（Ⅰ）若 Q 在顶点 A 之左(实物)，则 $s>0$；Q 在 A 之右(虚物)，则 $s<0$．

（Ⅱ）若 Q' 在顶点 A 之左(虚像)，则 $s'<0$；Q' 在 A 之右(实像)，则 $s'>0$．

（Ⅲ）若球心 C 在顶点 A 之左，则半径 $r<0$；C 在 A 之右，则 $r>0$．

焦距 f，f' 是特殊的物、像距，对它们正负的规定分别与 s，s' 相同．

有了上述正负号的约定，物像距公式(5.15),(5.18)和焦距公式(5.16)将对上述所有情况适用，成为傍轴条件下球面折射的普遍公式．读者可挑选几种情形验证一下．为了推导的方便，作图时其中距离总用绝对值标示．例如图5-2(a)中的 r，s' 和图5-2(b)中的 s 都是负的，图中分别用它们的绝对值 $|r|=-r$，$|s'|=-s'$ 和 $|s|=-s$ 标示．以上标示法下面将一直沿用，并推广到角度、横向距离等其它量(参看图5-4)．

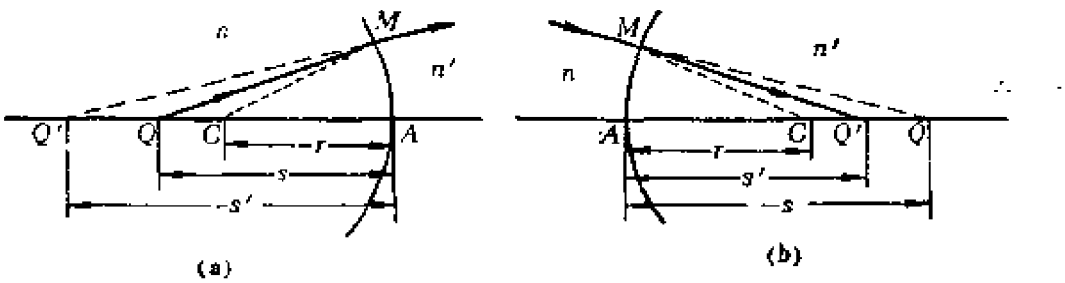


图 5-2　正负号法则及其标示法

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

对于反射情形，由于反射线的方向倒转为从右到左，需将上述像距的规定(Ⅱ)改变如下：

(Ⅱ′) 若Q'在顶点A之左(实像)，则$s'>0$；Q'在A之右(虚像)，$s'<0$.

傍轴条件下反射球面成像的普遍物像距公式为

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}. \tag{5.19}$$

焦距公式为

$$f=f'=-\frac{r}{2}. \tag{5.20}$$

这时F，F'两个焦点是重合的. 式(5.19)和(5.20)请读者自己推导.

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

设想将图5-1绕球心C转一很小的角度ϕ，Q和Q'将分别转到P和P'点(图5-3). 由于球对称性，P和P'必然也是共轭点，这就证明了傍轴物点成像. $\overset{\frown}{PQ}$和$\overset{\frown}{P'Q'}$分别是以C为中心的两个球面上的弧线，因ϕ很小，它们都可近似地看作是光轴的垂线，而那两个球面也可看作是垂直于光轴的小平面，下面分别用Π和Π'表示. 在上述推论中，小角度ϕ是任意的，故上述结论对Π，Π'上的其它点也都适用. 这就是说，Π上所有的点都成像在Π'上(当然只限于傍轴区域). Π和Π'这样一对由共轭点组成的平面，叫

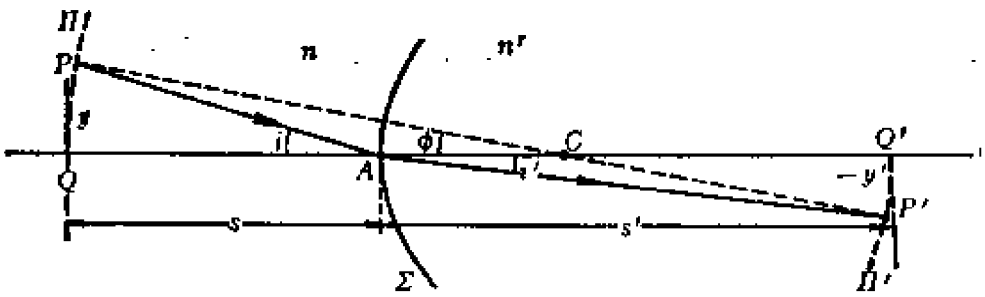


图 5-3 傍轴物点成像

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

做共轭平面．其中Π叫物平面，Π'叫像平面．

令共轭点P,P'到光轴的距离分别为y,y'，轴外共轭点的傍轴条件为

$$y^2,y'^2\ll s^2,s'^2和r^2. \tag{5.21}$$

对y,y'的正负号作如下补充规定：

（Ⅳ）若P(或P')在光轴之上，y(或y')>0；在光轴之下，y(或y')<0.

引入横向放大率V的概念，其定义为

$$V=\frac{y'}{y}. \tag{5.22}$$

$|V|>1$表示放大，$|V|<1$表示缩小．此外，按照正负号法则(Ⅳ)，$V>0$表示像是正立的，$V<0$表示像是倒立的．

为了推导横向放大率的计算公式，在图5-3中作入射线PA，它在Σ折射后必通过共轭点P'，且$\angle PAQ=i$和$\angle P'AQ'=i'$分别为入射角和折射角．在傍轴近似下$ni\simeq n'i'$．因

$$i\simeq\frac{\overline{PQ}}{\overline{QA}}=\frac{y}{s},\qquad i'=\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{AQ'}}=\frac{-y'}{s'}.$$

于是得到折射球面的横向放大率公式为

$$V=-\frac{ns'}{n's}. \tag{5.23}$$

用类似的方法可以证明，反射球面的横向放大率公式为

$$V=-\frac{s'}{s}. \tag{5.24}$$

式(5.23),(5.24)表明，对于给定的一对共轭平面，放大率是与y无关的常数．这就保证了一对共轭平面内几何图形的相似性．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

5.4 逐次成像

5.2和5.3节中都仅仅讨论了单个球面上的成像问题，要把得到的结果用到共轴球面组，可采用逐次成像法：以折射为例，如图5-4，物PQ经Σ_1成像于$P'Q'$；然后把$P'Q'$当作物，经Σ_2成像于$P''Q''$，…．如此下去，直到最后一个球面为止．对每次成像过程列出物像距公式(5.15)或(5.18)和横向放大率公式(5.23)：

$$\frac{n'}{s_1'}+\frac{n}{s_1}=\frac{n'-n}{r_1},\quad \frac{n''}{s_2'}+\frac{n'}{s_2}=\frac{n''-n'}{r_2},\quad \cdots \tag{5.25}$$

或

$$\frac{f_1'}{s_1'}+\frac{f_1}{s_1}=1,\quad \frac{f_2'}{s_2'}+\frac{f_2}{s_2}=1,\quad \cdots \tag{5.26}$$

和

$$V_1=-\frac{ns_1'}{n's_1},\quad V_2=-\frac{n's_2'}{n''s_2},\quad \cdots \tag{5.27}$$

最后总的放大率V是$V_1,V_2,\cdots$的乘积．

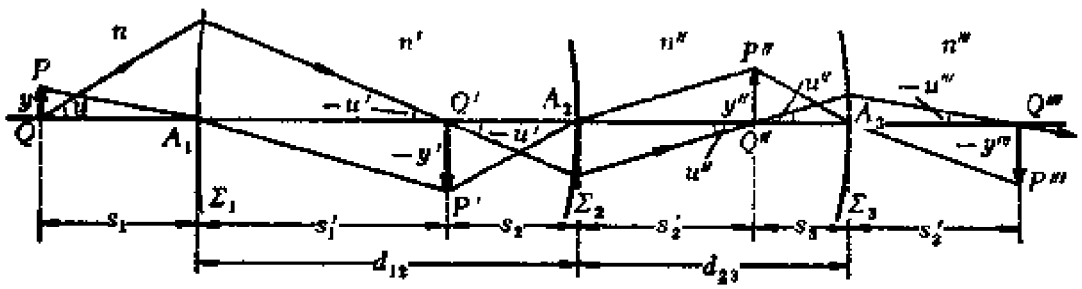


图 5-4　逐次成像

从原则上讲，逐次成像法可以解决任何数目的共轴球面问题①．不过要从这里得到整个光具组物方量和像方量之间的一般关系式是比较困难的．因为上述公式都包含物距、像距这类量，它们在逐次成像的过程中计算的起点$A_1,A_2,\cdots$每次都要改变．它们之间的换算关系是

① 当然这里需要假设，傍轴条件始终得到保持．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$s_2 = d_{12} - s_1', \quad s_3 = d_{23} - s_2', \quad \cdots \tag{5.28}$$

式中$d_{12} = \overline{A_1A_2}$，$d_{23} = \overline{A_2A_3}$，…．把式(5.28)代入式(5.25)至(5.27)后，很难从中把那些中间像的位置消去．

*5.5 拉格朗日-亥姆霍兹定理

如图5-4，由轴上物点Q引一根入射线，并作出它逐次折射的路径，令各段光线对光轴的倾角分别为$u, u', u'', \cdots$(取锐角)，并对u的正负号作如下的补充规定：

(Ⅴ) 从光轴转到光线的方向为逆时针时交角u为正，顺时针时交角u为负．

先考虑在某一次折射时u的变换规律，为此参看图5-1，不过按(Ⅴ)，其中u'应改为$-u'$，于是有

$$u \simeq \frac{h}{\overline{QA}} = \frac{h}{s}, \quad -u' \simeq \frac{h}{\overline{AQ'}} = \frac{h}{s'}.$$

故

$$\frac{u}{u'} = -\frac{s'}{s}. \tag{5.29}$$

把式(5.29)代入横向放大率公式，即可得到

$$ynu = y'n'u'. \tag{5.30}$$

这关系式叫做拉格朗日-亥姆霍兹定理(J.L.Lagrange, H. von Helmholtz)，它表明ynu这个乘积经过每次折射都不变，它叫做拉格朗日-亥姆霍兹不变量．与前面的物像距公式和横向放大率公式不同，拉格朗日-亥姆霍兹定理很容易推广到多个共轴球面上：

$$ynu = y'n'u' = y''n''u'' = \cdots.$$

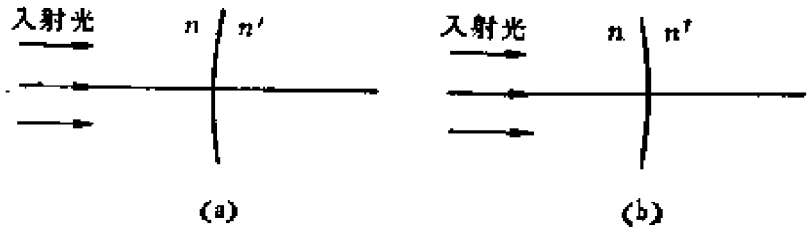
此公式立即把整个光具组的物方量和像方量联系起来了．

思 考 题

1．手头只有一个白炽灯，如何简便地估计一个凹面反射镜的曲率半径和焦距？

2．在什么条件下图中的折射球面起会聚作用？在什么条件下起发散作用？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



思考题2图

习　题

1. 根据反射定律推导球面反射镜的物像距公式(5.19)和焦距公式(5.20).

2. 物体放在凹球面反射镜前何处，可产生大小与物体相等的倒立实像？

3. 凹面镜的半径为40cm，物体放在何处成放大两倍的实像？放在何处成放大两倍的虚像？

4. 要把球面反射镜前10cm处的灯丝成像于3 m处的墙上，镜形应是凸的还是凹的？半径应有多大？这时像放大了多少倍？

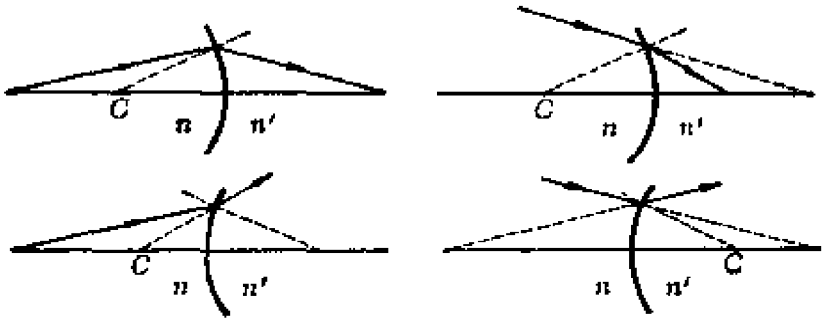
5. 一凹面镜的曲率半径为24cm，填充下表中的空白，并作出相应的光路图.

物距 s (cm)	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s' (cm)								
横向放大率 V								
像的虚实								
像的正倒								

6. 按已约定的正负号法则(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ),(Ⅴ)等，标示出下列各图中的物距s,像距s',曲率半径r,光线倾角u,u'的绝对值．比较各图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

中折射率 n,n' 的大小，指明各图中物、像的虚实．



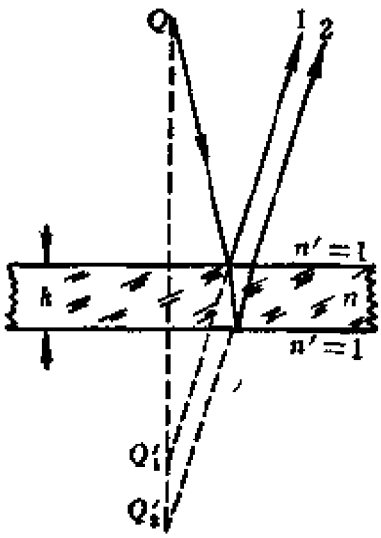
习题 6 图

7． 分别根据上题各图推导球面折射成像公式(5.15)．

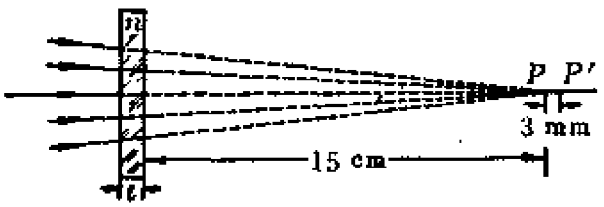
8． 若空气中一均匀球形透明体能将平行光束会聚于其背面的顶点上，此透明体的折射率应等于多少？

9．如图，一平行平面玻璃板的折射率为 n，厚度为 h，点光源 Q 发出的傍轴光束（即接近于正入射的光束）经上表面反射，成像于 Q_1'；穿过上表面后在下表面反射，再从上表面折射的光束成像于 Q_2'．证明 Q_1' 与 Q_2' 间的距离为 $2h/n$．

【提示：把平面看成 $r\to\infty$ 的球面，并利用球面折射公式计算．】



习题 9 图



习题 10 图

10．如图，一会聚光束本来交于 P 点，插入一折射率为1.50的平面平行玻璃板后，像点移至 P'．求玻璃板的厚度 l．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

11．根据费马原理推导傍轴条件下球面反射成像公式(5.19)．

12．根据费马原理推导傍轴条件下球面折射成像公式(5.15)．

13．求联立方程式(5.11)和(5.12)的解，说明它所代表的共轭点就是4.4节中给出的齐明点．

§6 薄 透 镜

6.1 焦距公式

透镜是由两个折射球面组成的光具组(图6-1)，两球面间是构成透镜的媒质(通常是玻璃)，其折射率记作n_L，透镜前后媒质的折射率(物方折射率和像方折射率)分别记作n和n'，在大多数场合，物方和像方的媒质都是空气，$n=n'\simeq 1$，今后我们也会遇到少数情况，其中物方和像方的折射率不同．

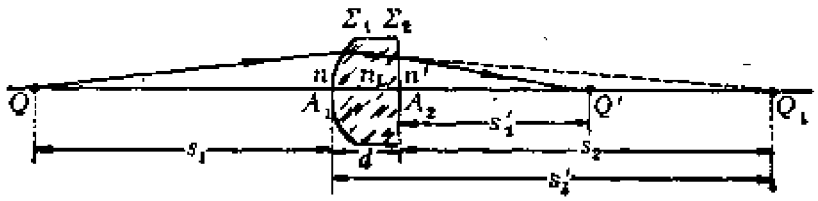


图6-1 透 镜

分别写出两折射球面的物像距公式：

$$\frac{f_1'}{s_1'}+\frac{f_1}{s_1}=1,\qquad \frac{f_2'}{s_2'}+\frac{f_2}{s_2}=1.$$

由图6-1可以看出，$-s_2=s_1'-d$，即$s_2=d-s_1'$，这里$d=\overline{A_1A_2}$为透镜的厚度．d很小的透镜，称为薄透镜．在薄透镜中A_1和A_2几乎重合为一点，这个点叫做透镜的光心，今后记作O，薄透镜的物距s和像距s'都从光心O算起，于是$s=\overline{QO}\simeq s_1$，$s'=\overline{OQ'}\simeq s_2'$．此外，$-s_2\simeq s_1'$．代入上面两式，消去$s_2$和$s_1'$，可得

$$\frac{f_1'f_2'}{s'}+\frac{f_1f_2}{s}=f_1'+f_2.\qquad (6.1)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

依次令上式中 $s'=\infty$，$s=f$ 和 $s=\infty$，$s'=f'$，即得薄透镜的焦距：

$$f=\frac{f_1f_2}{f_1+f_2},\qquad f'=\frac{f_1'f_2'}{f_1+f_2}. \tag{6.2}$$

把单球面的焦距公式(5.16)用于透镜两界面：

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{nr_1}{n_L-n}, \\ f_1'=\dfrac{n_Lr_1}{n_L-n}; \end{cases}\qquad \begin{cases} f_2=\dfrac{n_Lr_2}{n'-n_L}, \\ f_2=\dfrac{n'r_2}{n'-n_L}. \end{cases}$$

代入式(6.2)，即得薄透镜的焦距公式

$$\begin{cases} f=\dfrac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}, \\ f'=\dfrac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}. \end{cases} \tag{6.3}$$

两者之比为

$$\frac{f}{f'}=\frac{n}{n'}. \tag{6.4}$$

在物像方折射率 $n=n'\simeq1$ 的情况下

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)}. \tag{6.5}$$

式(6.5)给出薄透镜焦距与折射率、曲率半径的关系，称为磨镜者公式.

具有实焦点(f和$f'>0$)的透镜叫做正透镜或会聚透镜，具有虚焦点(f和$f'<0$)的透镜叫做负透镜或发散透镜.因为$n_L>1$，由式(6.5)可见，会聚透镜要求 $1/r_1>1/r_2$，发散透镜要求 $1/r_1$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$<1/r_2$. 应注意，r_1和r_2都是可正可负的代数量，以上每个不等式都包含多种可能性(见图6-2)。归纳起来，会聚透镜的共同特点是中央厚、边缘薄，这类透镜称凸透镜；发散透镜的共同特点是边缘厚，中央薄，这类透镜统称凹透镜。当然，这是指透镜材料折射率大于两侧折射率的情况。

凹凸透镜	平凸透镜	双凸透镜	平凸透镜	凹凸透镜
				
$r_1<0$，$r_2<0$ $\|r_1\|>\|r_2\|$	$r_1=\infty$，$r_2<0$	$r_1>0$，$r_2<0$	$r_1>0$，$r_2=\infty$	$r_1>0$，$r_2>0$ $r_1<r_2$

(a) 凸透镜(会聚)

凸凹透镜	平凹透镜	双凹透镜	平凹透镜	凸凹透镜
				
$r_1<0$，$r_2<0$ $\|r_1\|<\|r_2\|$	$r_1<0$，$r_2=\infty$	$r_1<0$，$r_2>0$	$r_1=\infty$，$r_2>0$	$r_1>0$，$r_2>0$ $r_1>r_2$

(b) 凹透镜(发散)

图 6-2　各种形状的透镜

6.2　成像公式

利用式(6.2)中 f 和 f'的表达式，可将式(6.1)通过 f，f'表示出来：

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1. \tag{6.9}$$

当物像方折射率相等时，$f'=f$，上式化为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}, \tag{6.7}$$

这便是薄透镜物像公式的高斯形式. 图6-3是按此公式绘制的s-s'曲线.

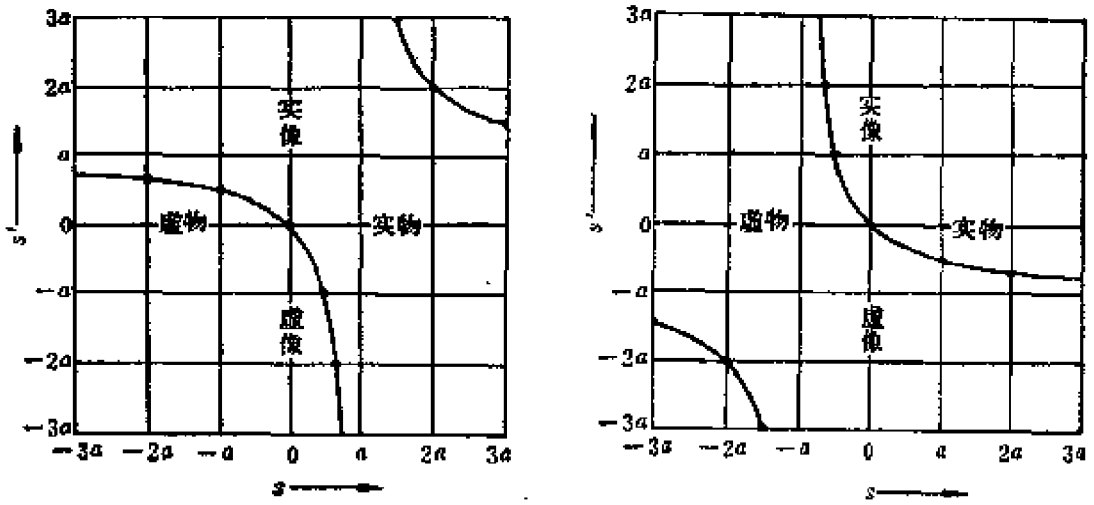


图 6-3 薄透镜的物像关系($|f|=a$)

前面的物、像距s,s'都是从光心O算起的，它们也可以从焦点F、F'算起. 从F,F'算起的物、像距记作x,x'，对它们的正负号作如下约定：

(Ⅵ) 当物点Q在F之左，则$x>0$；Q在F之右，$x<0$；

(Ⅶ) 当像点Q'在F'之左，则$x'<0$；Q'在F'之右，$x'>0$.

由图6-4不难看出，

$$s=x+f, \qquad s'=x'+f', \tag{6.8}$$

代入式(6.7)，得

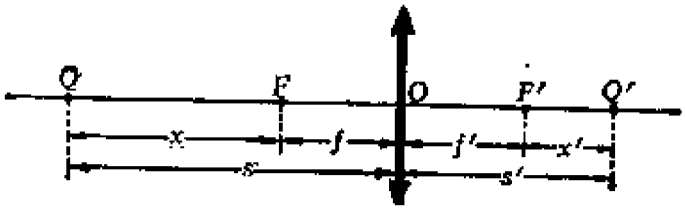
$$xx'=ff'. \tag{6.9}$$

这是薄透镜物像公式的牛顿形式.

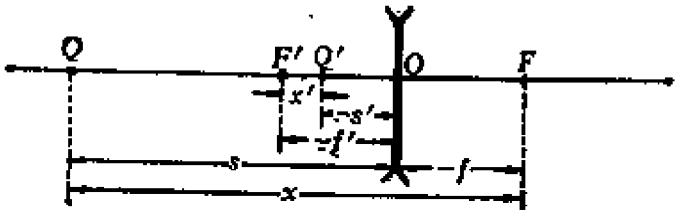
透镜两球面的横向放大率分别为

$$V_1=-\frac{ns_1'}{n_1s_1}, \qquad V_2=-\frac{n_1s_2'}{n's_2}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) 凸透镜



(b) 凹透镜

图 6-4　s,x,f和s',x',f'的相互关系

总的横向放大率$V=V_1V_2$，令上式中$s_1=s$，$-s_2=s_1'$，$s_2'=s'$，即得

$$V=-\frac{ns'}{n's}=-\frac{fs'}{f's}. \tag{6.10}$$

若用 x,x' 来表示，则有

$$V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}. \tag{6.11}$$

物、像方折射率相等时，$f=f'$，上面各式化为

$$V=-\frac{s'}{s}, \tag{6.12}$$

或

$$V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f}. \tag{6.13}$$

这些便是薄透镜的横向放大率公式.

6.3　密接薄透镜组

在实际中，我们往往需要将两个或更多的透镜组合起来使用．透镜组合的最简单情形，是两个薄透镜紧密接触在一起，有

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

时还用胶将它们粘合起来①，成为复合透镜。下面讨论这种复合透镜与组成它的每个透镜焦距之间的关系。为此我们只需使用高斯公式两次。两次成像的公式分别为

$$\frac{1}{s_1'}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1},\qquad \frac{1}{s_2'}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f_2}.$$

由于两透镜紧密接触，$s_2=-s_1'$。于是

$$\frac{1}{s_2'}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}.$$

与 $s_2'=\infty$ 对应的 s_1 即为复合透镜的焦距 f，所以

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}. \tag{6.14}$$

即密接复合透镜焦距的倒数是组成它的透镜焦距倒数之和。

通常把焦距的倒数 $1/f$ 称为透镜的光焦度 P②。式(6.14)表明，密接复合透镜的焦度是组成它的透镜光焦度之和，即

$$P=P_1+P_2, \tag{6.15}$$

其中

$$P=\frac{1}{f},\qquad P_1=\frac{1}{f_1},\qquad P_2=\frac{1}{f_2}. \tag{6.16}$$

光焦度的单位是屈光度(diopter，记为D)。若透镜焦距以 m 为单位，其倒数的单位便是 D。例如$f=-50.0$cm的凹透镜的光焦度 $P=\dfrac{1}{-0.500\text{m}}=-2.00\text{D}$。应注意，通常眼镜的度数，是屈光度的100倍，例如焦距为 50.0cm 的眼镜，度数是 200。

---

① 这里假定相互粘合的两个表面的曲率吻合。

② 在透镜的物像方折射率n,n'彼此不等或不等于 1 的情形里，更普遍的光焦度定义为

$$P=\frac{n'}{f'}=\frac{n}{f}.$$

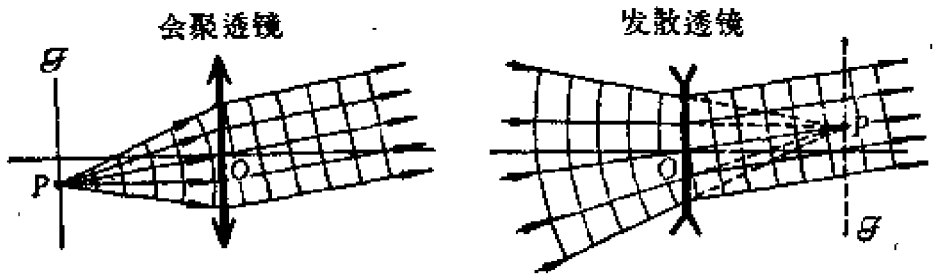
单个折射球面的光焦度定义为

$$P=\frac{n'}{f'}=\frac{n}{f}=\frac{n'-n}{r}\quad (r\text{为曲率半径}).$$

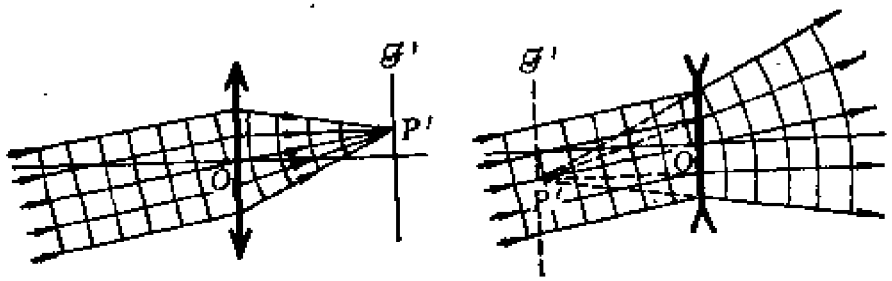
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

6.4 焦面

通过物方焦点 F 与光轴垂直的平面 $\mathscr{F}$，叫物方焦面（第一焦面、前焦面），通过像方焦点 F' 与光轴垂直的平面 $\mathscr{F}'$，叫像方焦面（第二焦面、后焦面）。因焦点与轴上无穷远点共轭，焦面的共轭平面也在无穷远处，焦面上轴外点的共轭点是轴外的无穷远点。换句话说，以物方焦面 $\mathscr{F}$ 上轴外一点 P' 为中心的入射同心光束转化为与光轴成一定倾角的出射平行光束（图6-5(a)）。与光轴成一定倾角的入射平行光束转化为以像方焦面 $\mathscr{F}'$ 上轴外一点 P' 为中心的出射同心光束（图6-5(b)）。倾斜平行光束的方向可由 P 或 P' 与光心 O 的联线来确定。这联线有时称为副光轴，相应地把透镜的对称轴称为主光轴。



(a) 物方焦面



(b) 像方焦面

图 6-5 焦面的性质

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

6.5 作图法

除了利用6.2节的物像公式外，求物像关系的另一方法是作图法．作图法的依据是共轭点之间同心光束转化的性质．每条入射线经光具组后转化为一条出射线，这一对光线称为共轭光线．按照成像的含义，通过物点每条光线的共轭光线都通过像点，这里“通过”指光线本身或其延长线．因此只需选两条通过物点的入射光线，画出与它们共轭的出射光线来，即可求得像点．在薄透镜的情形里，对轴外物点P有三对特殊的共轭光线可供选择：

（1）若物像方折射率相等，通过光心O的光线，经透镜后方向不变(见图6-6中光线1—1′)，其原因是薄透镜的中央部分可近似地看成是很薄的平行平面玻璃板(参看§1习题5)；

（2）通过物方焦点F的光线，经透镜后平行于光轴(见图6-6中光线2—2′)；

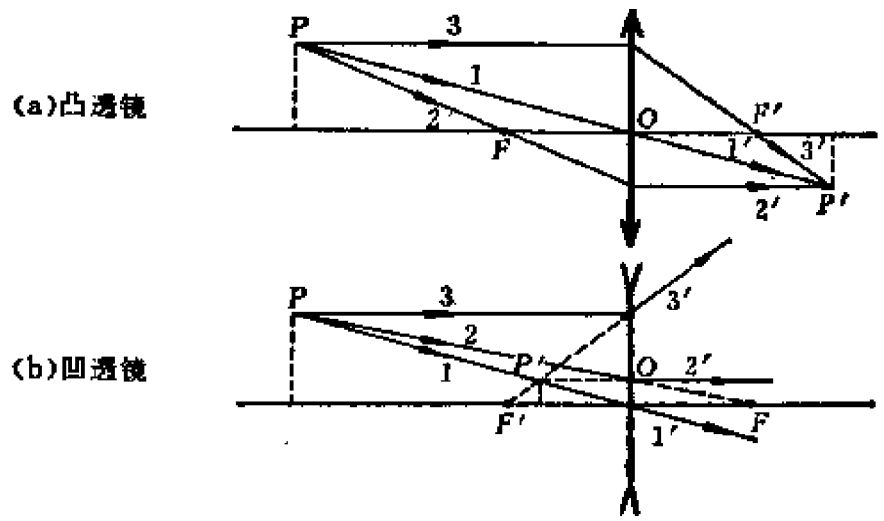


图 6-6　用作图法求轴外物点的像

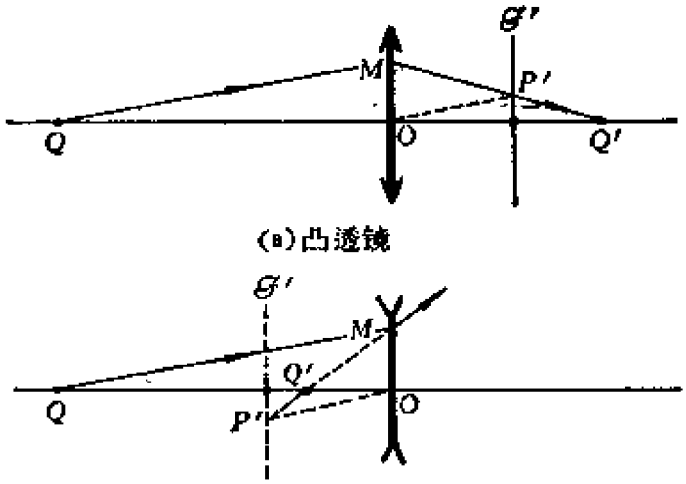
（3）平行于光轴的光线，经透镜后通过像方焦点F'(见图6-6中光线3—3′)．

从以上三条光线中任选两条作图，出射线的交点即为像点P'．

为求轴上物点的像，或任意入射光线的共轭线，可利用焦面

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的性质．例如为求图6-7中任意光线 QM 的共轭线，通过光心作它的平行线．令此线与像方焦面 $\mathcal{F}'$ 的交点为 P'，联 MP'，即为 QM 的共轭光线．因共轭光线与光轴的交点 Q 与 Q' 彼此共轭，上述方法也可用来求轴上的共轭点．



(a)凸透镜

(b)凹透镜

图 6-7　用作图法求共轭光线

6.6　透镜组成像

利用6.3节给出的成像公式，或6.4节所述的作图法，都可直接给出一次成像过程中的物像关系．逐次使用这些方法，就可解决共轴透镜组的成像问题．对初学的读者来说，困难往往发生在如何处理虚共轭点(特别是虚物)上．下面的例题 1 就是这样的例子．在这个例题中，我们用作图、高斯公式、牛顿公式三种方法求像，所得结果可以互相验证．

例题 1　凸透镜 L_1 和凹透镜 L_2 的焦距分别为 20.0cm 和 40.0cm．L_2 在 L_1 之右 40.0cm．傍轴小物放在 L_1 之左 30.0cm，求它的像．

解　(i) 作图法

首先根据题意，将两透镜和它们焦点的位置，以及物体的位置，按比例标在图上(见图6-8(a))．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

第一次QP对L_1成实像Q_1P_1(见图6-8(b)),第二次虚物Q_1P_1对L_2成实像$P'Q'$(见图6-8(c)).两图中,1—1′都代表平行于光轴折射后通过像方焦点的光线,2—2′都代表通过物方焦点折射后平行于光轴的光线,实线表示光线实际经过的部分,虚线表示它的延长线.

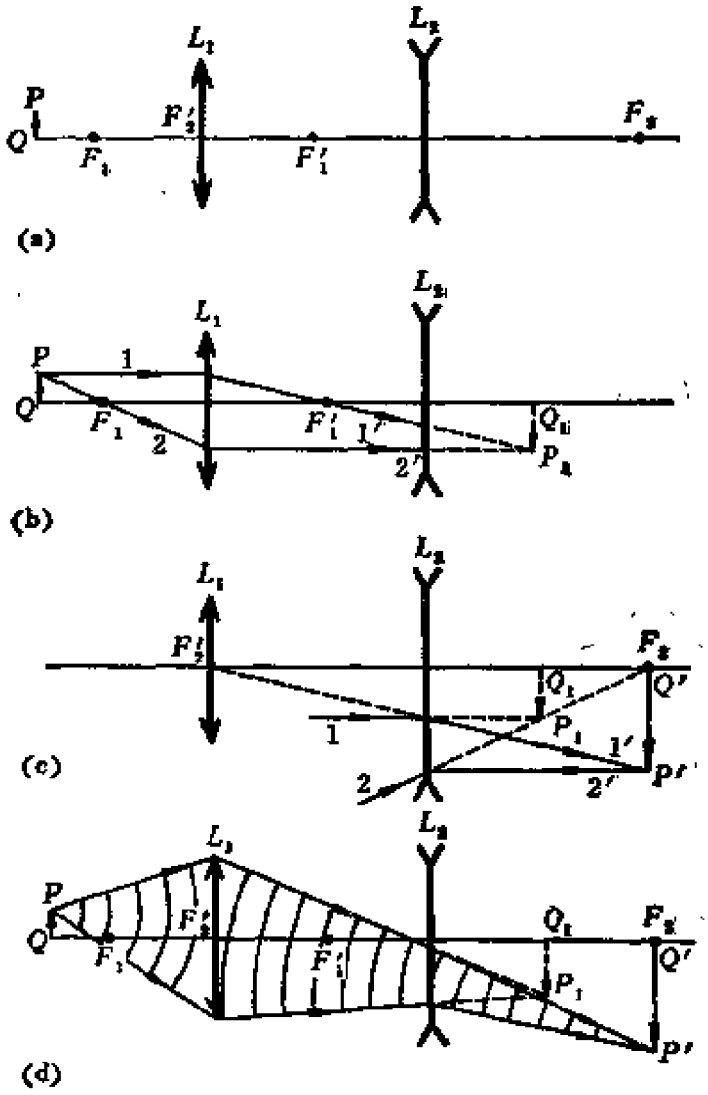


图 6-8　例题 1 图

为了把整个成像过程中由P点发出的同心光束逐次转化的情形显示出来,我们将它的边缘光线和波面示于图6-8(d)中.图中清楚地显示出,这发散的同心光束经凸透镜L_1折射后,转化为会聚

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

到P_1的同心光束．它再经凹透镜L_2折射后，转化为会聚到P'的同心光束．由于L_2的发散作用，最后的光束与中间光束相比，会聚程度较小．

这里为了使读者把作图过程看清楚，我们把图分成几幅来画．读者自己作图时，可把前三幅合并在一幅内画出．

(ii) 用高斯公式

第一次成像

$$\frac{1}{s_1'}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1},$$

其中$s_1=30.0\text{cm}$，$f_1=20.0\text{cm}$．由此得$s_1'=60.0\text{cm}$(实像)，横向放大率

$$V_1=-\frac{s_1'}{s_1}=-2(\text{倒立}).$$

第二次成像

$$\frac{1}{s_2'}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f_2},$$

其中$d=40.0\text{cm}$，$s_2=-20.0\text{cm}$(虚物)，$f_2=-40.0\text{cm}$．由此得$s_2'=40.0\text{cm}$(实像)，横向放大率

$$V_2=-\frac{s_2'}{s_2}=+2(\text{正立}).$$

两次成像的横向放大率为

$$V=V_1V_2=-4(\text{倒立}).$$

(iii) 用牛顿公式

第一次成像

$$x_1x_1'=f_1f_1',$$

其中$x_1=10.0\text{cm}$，$f_1=f_1'=20.0\text{cm}$．由此得$x_1'=40.0\text{cm}$，横向放大率

$$V_1=-\frac{x_1'}{f_1'}=-2(\text{倒立}).$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

第二次成像

$$x_2 x_2' = f_2 f_2',$$

其中$x_2 = 20.0\text{cm}$，$f_2 = f_2' = -40.0\text{cm}$．由此得$x_2' = 80.0\text{cm}$，横向放大率

$$V_2 = -\frac{x_2'}{f_2'} = 2(\text{正立}).$$

两次成像总的横向放大率

$$V = V_1 V_2 = -4(\text{倒立}).$$

我们看到，用三种方法得到的结果完全一致．

例题 2　凸透镜L_1和L_2及其焦点的位置示于图6-9中，将傍轴小物PQ放在L_1的第一焦面上，用作图法求它的像．

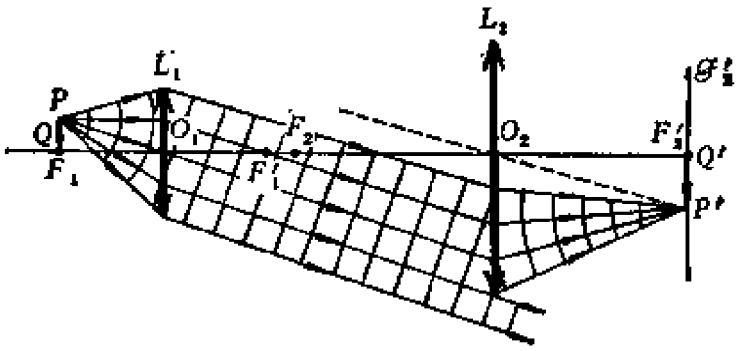


图 6-9　例题 2 图

解　由P发出的光线经L_1折射后，成为倾斜的平行光，它平行于通过光心的光线PO_1．通过L_2的光心作平行这光束的辅助光线(图6-9中虚线O_2P')，它与$\mathscr{F}_2'$的交点即是P'．最后，我们在图中仍画出由P点发出的整个同心光束的两次转化过程．

思　考　题

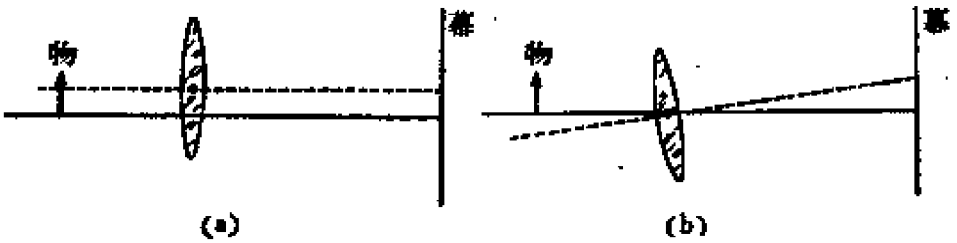
1．将物体放在凸透镜的焦面上，透镜后放一块与光轴垂直的平面反射镜，最后的像成在什么地方？其大小和虚实如何？上述装置中平面镜的位置对像有什么影响？你能否据此设计出一种测凸透镜焦距的简便方法？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(此法称为自聚焦法.)

2. 上题中测焦距的方法能否用于凹透镜?

3. 如图，一凸透镜将傍轴小物成像于幕上．保持物和幕不动，(1)将透镜稍微沿横向平移(图(a))，(2)将透镜的光轴稍微转动(图(b))，讨论幕上像的移动．

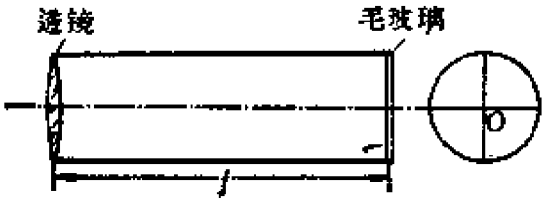


思考题3图

4. 在镜筒前端装一凸透镜，后端装一毛玻璃屏，上面刻有十字线，交点O在光轴上(见图)．筒长为透镜的焦距f．用此装置瞄准一个很远的发光点，使成像于屏上O点．讨论在下列情况中像点在屏上的移动：(1)镜作横向平移；(2)镜筒轴线转过角度θ.

5. 用上题的装置对准很远的景物，使之成像于毛玻璃屏上．若这时把透镜下半部遮住，我们在屏上会看到什么现象?

6. 当粘合两薄透镜时，若相接触的表面曲率半径r_2, r_3不吻合(见图)，复合透镜的焦距公式(6.14)应如何修改?



思考题4图



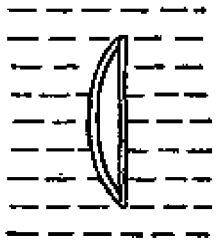
思考题6图

习　题

1. 某透镜用$n=1.50$的玻璃制成，它在空气中的焦距为10.0cm，它在水中的焦距为多少?(水的折射率为4/3.)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2. 一薄透镜折射率为1.50，光焦度为5.00D．将它浸入某液体，光焦度变为－1.00D．求此液体的折射率．



习题3图

3. 用一曲率半径为20cm的球面玻璃和一平玻璃粘合成空气透镜，将其浸于水中（见图），设玻璃壁厚可忽略，水和空气的折射率分别为4/3和1，求此透镜的焦距f．此透镜是会聚的还是发散的？

4. 一凸透镜的焦距为12cm，填充下表中的空白，并作出相应的光路图．

物距 s (cm)	—24	—12	—6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s' (cm)								
横向放大率 V								
像的虚实								
像的正倒								

5. 一凹透镜的焦距为12cm，填充下表中的空白，并作出相应的光路图．

物距 s (cm)	—24	—12	—6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s' (cm)								
横向放大率 V								
像的虚实								
像的正倒								

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

6. 在5 cm焦距的凸透镜前放一小物，要想成虚像于25cm到无穷远之间，物应放在什么范围里？

7. 一光源与屏间的距离为1.6m，用焦距为30cm的凸透镜插在二者之间，透镜应放在什么位置，才能使光源成像于屏上？

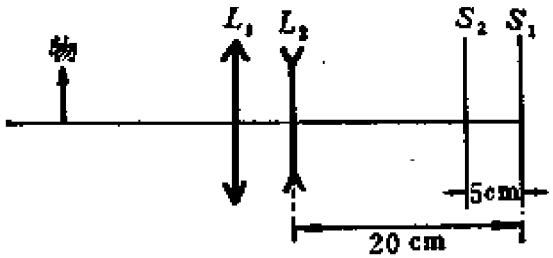
8. 屏幕放在距物100cm远，二者之间放一凸透镜．当前后移动透镜时，我们发现透镜有两个位置可以使物成像在屏幕上．测得这两个位置之间的距离为20.0cm，求

(1) 这两个位置到幕的距离和透镜的焦距；

(2) 两个像的横向放大率．

9. 如上题，在固定的物与幕之间移动凸透镜．证明：要使透镜有两个成像位置，物和幕之间的距离必须大于四倍焦距．

10. 如图，L_1，L_2分别为凸透镜和凹透镜．前面放一小物，移动屏幕到L_2后20cm的S_1处接到像．现将凹透镜L_2撤去，将屏移前5cm至S_2处，重新接收到像．求凹透镜L_2的焦距．



习题10图

11. 一光学系统由一焦距为5.0cm的会聚透镜L_1和一焦距为10.0cm的发散透镜L_2组成，L_2在L_1之右5.0cm．在L_1之左10.0cm处置一小物，求经此光学系统后所成的像的位置和横向放大率．用作图法验证计算结果．

*§7 理想光具组理论

7.1 理想成像与共线变换

我们在4.2节已提到过理想成像的概念．理想成像要求空间每一点都能严格成像，亦即物方的每个同心光束转化为像方的一个同心光束．满足这种理想成像要求的光具组，叫做理想光具组．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在实际中几乎不存在理想光具组，个别的例子是平面反射镜．不过它的放大率恒等于1，实际价值不太大．但共轴球面组在傍轴条件下近似地满足理想成像要求，理想光具组的概念正是以此为原型，经抽象概括和理想化而得来的．

可以证明，理想光具组具有下列性质：

(1) 物方每个点对应像方一个点(共轭点)；

(2) 物方每条直线对应像方一条直线(共轭线)；

(3) 物方每个平面对应像方一个平面(共轭面)．

物方和像方之间的这种点点、线线、面面的一一对应关系，称为共线变换．理想光具组的理论不涉及光具组的具体结构，它是一种几何理论，研究的是共线变换的普遍几何性质，以及满足这种几何变换的光具组的共同规律．今后我们将看到，它对实际光具组的研究具有相当大的指导意义．

如果理想光具组是轴对称的，除上述三点外，它还具有下列一些性质：

(4) 光轴上任何一点的共轭点仍在光轴上；

(5) 任何垂直于光轴的平面，其共轭面仍与光轴垂直；

(6) 在垂直于光轴的同一平面内横向放大率相同；

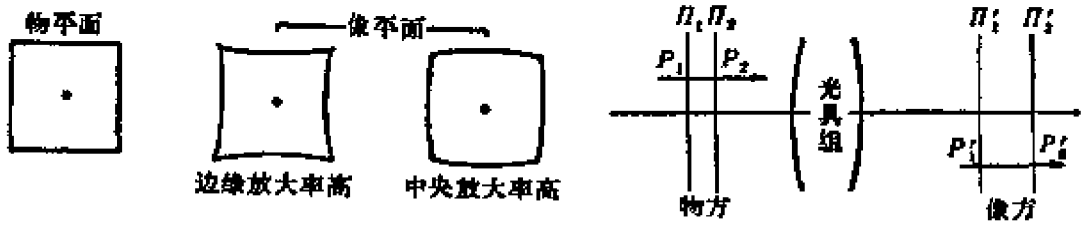
(7) 在垂直于光轴的不同平面内横向放大率一般不等．但是只要有两个这样的平面内横向放大率相等，则横向放大率处处相等．在这种光具组中，平行于光轴的光束的共轭光束仍与光轴平行．这种光具组叫做望远系统①．

理想光具组的性质(1)—(7)证明的梗概如下：共轭点是对应同心光束的交点，其一一对应的性质是显然的(性质(1))．共轭线是由共轭点组成的，若为直线，则它本身就是相交于其上每点的各同心光束中的一条公共线，其共轭线也必须是直线（性质(2)）．一平面上四个不共线点两两间的联线必有第五个交点，与此交点对应的两条共轭线和五个共轭点必共面(性质(3))．对于轴对称的理想光具组来说，性质(4)是显然的；假若性质(5)不成立，只有两种可能性，一是垂直于光轴的平面的共轭面是曲面，二是倾斜的平面．前者违反性质(3)，后者破坏对称性．假若性质(6)不成立，垂直于光轴的共轭面内图形将不保持几何相似性，直线变为曲线(图7-1(a))，这是违反性质(2)的．为了证明性质(7)，令横向放大率相等的共轭面为Π_1，

① 望远系统的典型例子是望远镜，参见8.6节．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

Π'_1和Π_2,Π'_2(图7-1(b))，在Π_1,Π_2上取一对离轴等远的点P_1和P_2，它们的共轭点P'_1和P'_2也是离轴等远的．P_1P_2的联线和$P'_1P'_2$的联线是一对共轭线，二者都与光轴平行．这两条直线穿过物、像方所有其它与光轴垂直的共轭面，由此可以证明，横向放大率处处相等．



(a)违反性质(6)会发生像的畸变　　(b)望远系统的性质

图 7-1　轴对称性光具组共线变换的一些性质

7.2　共轴理想光具组的基点和基面

在§6中我们看到，给出一个薄透镜光心O的位置和焦距f,f'，从而也就知道了焦点和焦面的位置，则物像关系就完全确定了，无需再问光具组的其它细节，如透镜的折射率n_2，曲率r_1,r_2等．下面我们将证明，对于任何共轴的光具组，从单个折射面，单个透镜，乃至多个透镜构成的复杂组合，无论其结构简单还是复杂，只要把它看成是理想光具组，物像之间的共轭关系完全由几对特殊的点和面所决定，这就是共轴理想光具组的基点和基面．

（1）焦点和焦面

焦点和焦面的定义与前面引入的相同，即与无穷远像平面共轭的，为物方焦面(记作$\mathscr{F}$)，其轴上点是为物方焦点(记作F)；与无穷远物平面共轭的，为像方焦面(记作$\mathscr{F}'$)，其轴上点是为像方焦点(记作F')．或者说，中心在焦面上的同心光束，其共轭光束是平行光束；对于中心在焦点上的同心光束，共轭光束与光轴平行．

以上都是对非望远系统而言的，望远系统没有焦点和焦面．

（2）主点和主面

横向放大率等于1的一对共轭面，叫做主面．属于物方的叫物方主面(记作$\mathscr{H}$)，其轴上点叫做物方主点(记作H)；属于像方的叫像方主面(记作$\mathscr{H}'$)，其轴上点叫做像方主点(记作H')．

以透镜为例来说明．如图7-2(a)所示，从物方焦点F发出的光束经两

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

次折射后变得与光轴平行的情形，图7-2(b)则是平行于光轴的光束经两次折射后通过像方焦点F'的情形。在两图中分别将每对共轭光线延长，找到它们的交点，这些交点的轨迹一般是对于光轴对称的曲面。如果限于傍轴范围内，这曲面可近似地看成是与光轴垂直的平面，这就是透镜的主面，它们与光轴的交点就是主点。图7-3给出不同曲率透镜的主面。可以看出，主面不一定在透镜的两界面之间。当透镜的厚度趋于0时，透镜的两顶点A_1，A_2和两主点H，H'都重合在一起，成为光心。即薄透镜本身所在的平面就是主面，光心就是主点。

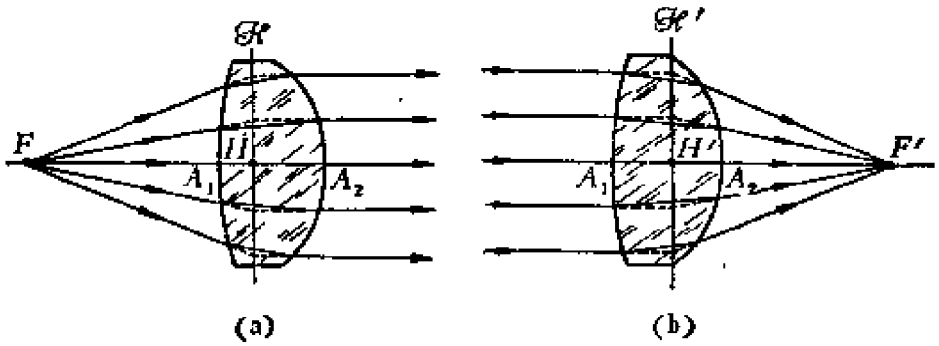


图7-2　透镜的主点和主面

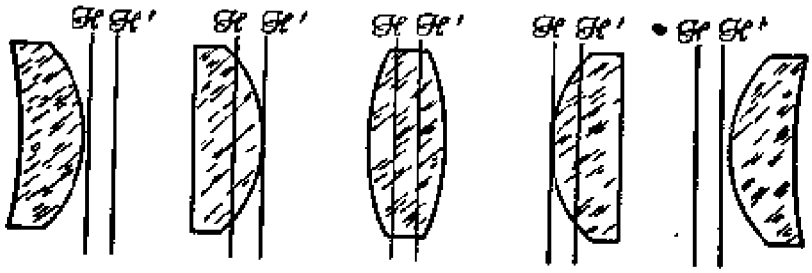


图7-3　不同曲率透镜的主面

我们知道，薄透镜的物距s，像距s'和焦距f，f'都是从光心算起的。对于任意共轴理想光具组，它们都从主点算起，即物距s是物方主点H到轴上物点Q的距离，像距s'是像方主点H'到轴上像点Q'的距离。与此相应地，物方焦距f是H到F的距离，像方焦距f'是H'到F'的距离。正负号法则可仿照§5中的(Ⅰ)，(Ⅱ)来规定。设入射光从左到右。

(Ⅰ′) 在物方，若Q(或F)在H之左，则s(或f)>0；Q(或F)在H之右，则s(或f)<0。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(Ⅱ′) 在像方，若 Q'(或F')在H'之左，则 s'(或f')<0；Q'(或F')在H'之右，则 s'(或f')>0。

7.3 物像关系

给定了主面和焦点求物像关系，既可用作图法，也可用公式计算。

先看作图法。如图7-4，由轴外物点P作平行于光轴的光线，遇物方主面$\mathscr{H}$于M点，其共轭光线通过像方主面$\mathscr{H}'$上的等高点M'和焦点F'。再由P作通过物方焦点F的光线，遇$\mathscr{H}$于R，其共轭光线通过$\mathscr{H}'$上的等高点R'与光轴平行。以上两共轭线在像方的交点即为像点P'。

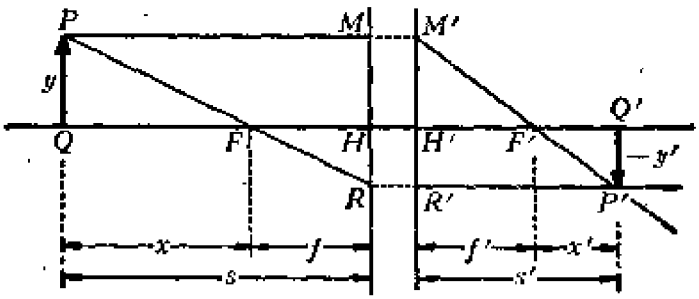


图7-4 理想光具组的物像关系

根据图7-4中的几何关系，不难导出理想光具组的物像距公式和放大率公式。因$\triangle PQF\sim\triangle RHF$，$\triangle P'Q'F'\sim\triangle M'H'F'$，且

$$\overline{PQ}=\overline{M'H'}=y,\quad \overline{HR}=\overline{P'Q'}=-y,$$

$$\overline{QF}=s-f=x,\quad \overline{HF}=f,\quad \overline{Q'F'}=s'-f'=x',\quad \overline{H'F'}=f'。$$①

下列比例关系成立：

$$\frac{-y'}{y}=\frac{f}{x}=\frac{f}{s-f},\quad 又\quad \frac{-y'}{y}=\frac{x'}{f'}=\frac{s'-f'}{f'},$$

由此不难得到高斯公式

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1,\tag{7.1}$$

牛顿公式

$$xx'=ff',\tag{7.2}$$

① x和x'的正负号法则与6.2节的(Ⅵ)与(Ⅷ)同。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

和横向放大率公式

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{f}{x}=-\frac{fs'}{f's}. \tag{7.3}$$

除横向放大率外，有时还引入角放大率的概念．令共轭光线与光轴的夹角为 u,u'①，二者正切之比叫做理想光具组的角放大率，记作 W：

$$W=\frac{\tan u'}{\tan u}. \tag{7.4}$$

为了得到角放大率的计算公式，过轴上共轭点 Q,Q' 作一对共轭线，交主面 $\mathscr{H},\mathscr{H}'$ 于 T,T'（图7-5）．因

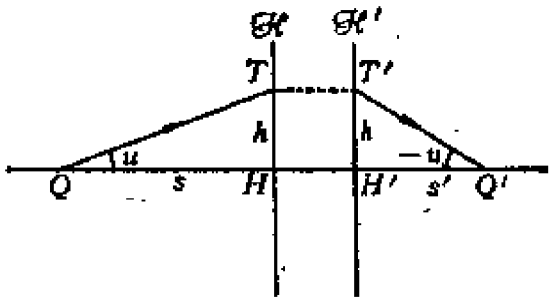


图 7-5　角放大率

$$\tan u=\frac{\overline{HT}}{\overline{HQ}},\qquad \tan(-u')=\frac{\overline{H'T'}}{\overline{H'Q'}},$$

$$\overline{HQ}=s,\quad \overline{H'Q'}=s',\quad \overline{HT}=\overline{H'T'},$$

故得

$$W=-\frac{s}{s'}. \tag{7.5}$$

比较式(7.3)和(7.5)可以看出，横向放大率与角放大率成反比：

$$VW=\frac{f}{f'}. \tag{7.6}$$

当 $f=f'$ 时

$$VW=1. \tag{7.7}$$

以后我们将在讨论光度学问题时看到式(7.6)与(7.7)的深刻物理内容（见

① 它们的正负号仍按5.5节中的(V)来规定．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

12.1节).

对于单个折射球面，$f/f'=n/n'$，把 V 和 W 的定义式代回 (7.6)，即得

$$yn\tan u=y'n'\tan u' \tag{7.8}$$

此式称为亥姆霍兹公式(H.von Helmholtz)，它是折射球面能使空间所有点以任意宽广光束成像的必要条件①. 在傍轴区域内 $\tan u\simeq u$，上式化为拉格朗日-亥姆霍兹定理(5.30).

顺便提起，给出一光具组的焦点和主点，对于物像关系的讨论已足够了.但有时为了讨论共轭光线之间的关系，还引入第三对基点——节点.节点定义为轴上角放大率等于 1 的共轭点，属于物方的叫物方节点(记作 N)，属于像方的叫像方节点(记作 N').节点的物理意义是通过它们的任意共轭光线方向不变($u=u'$，见图7-6). 由式(7.7)可以看出，当物、像方折射率相等，从而焦距相等时，$V=1$ 的地方也是 $W=1$ 的地方，即这时节点与主点重合. 薄透镜的光心既是主点，又是节点. 在物、像方折射率不等时，节点与主点不重合，薄透镜的节点落在外边.

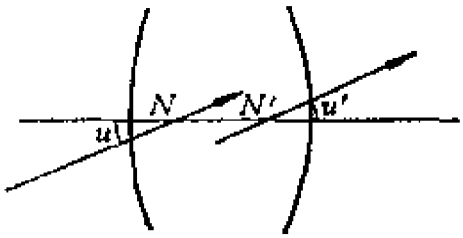


图 7-6 节　　点

7.4 理想光具组的联合

下面我们的任务是：给定两个光具组 I 和 II 的基点、基面 $F_1,F_1',H_1,H_1',\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_1'$ 和 $F_2,F_2',H_2,H_2',\mathscr{H}_2,\mathscr{H}_2'$，求联合起来作为一个光具组时的基点、基面 $F,F',H,H',\mathscr{H},\mathscr{H}'$. 如图7-7，作一条平行于光轴的

① 本节理论是从共线变换导出的纯几何理论，公式中本应不包含光具组的物理参数，如 n,n' 等. 它们是普遍的，是任何共轴光具组能够理想成像的必要条件. 但亥姆霍兹公式(7.8)是个例外，导出它时用到了 $f/f'=n/n'$ 这一折射球面的傍轴公式. 不管此式是否在傍轴区域以外成立，因理想光具组要求 f,f' 与 u,u' 无关，故它也是理想成像的必要条件.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

入射线 SM_1，经光具组 I 后的共轭光线 $M_1'R_2$ 通过它的像方焦点 F_1'。由 R_2' 射出的既是 $M_1'R_2$ 对光具组 II 的共轭光线，又是 SM_1 对联合光具组的共轭光线，所以它与光轴的交点必为联合光具组的像方焦点 F'。此外，设 SM_1 在联合光具组的物方主面 $\mathscr{H}$ 上的高度为 h，出射线必通过像方主面 $\mathscr{H}'$ 上的等高点，故 SM_1 与 $R_2'F'$ 的交点 M' 必在 $\mathscr{H}'$ 上，从而求得 $\mathscr{H}'$ 和 H' 的位置。

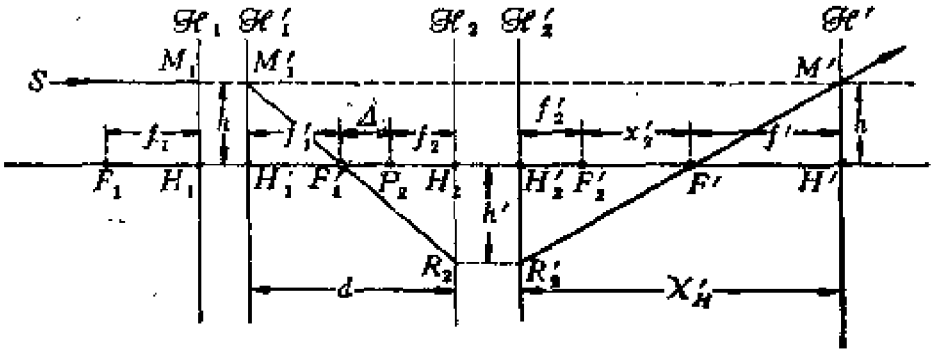


图 7-7　理想光具组的联合

两光具组的间隔可用 F_1'，F_2 间的距离 Δ 或 H_1'，H_2 间的距离 d 来表征（$d=f_1'+\Delta+f_2$），它们的正负号约定如下：设入射线来自左方，

（VIII）若 F_2 在 F_1' 之左，$\Delta<0$；F_2 在 F_1' 之右，$\Delta>0$；

（IX）若 H_2 在 H_1' 之左，$d<0$；H_2 在 H_1' 之右，$d>0$。

联合光具的主面位置用 H，H_1 间的距离 X_H 和 H'，H_2' 间的距离 X_H' 来表征，它们的正负号约定如下：

（X）若 H 在 H_1 之左，则 $X_H>0$；H' 在 H_2' 之右，则 $X_H'>0$；反之则反号。以上两条分别与以前我们对物方和像方距离的正负号规定一致。现在给出 f，f' 和 X_H，X_H' 的普遍表达式：

$$\begin{cases} f=-\dfrac{f_1f_2}{\Delta}, \\ f'=-\dfrac{f_1'f_2'}{\Delta}. \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\begin{cases} X_H=f_1\dfrac{\Delta+f_1'+f_2}{\Delta}=f_1\dfrac{d}{\Delta}, \\ X_H'=f_2'\dfrac{\Delta+f_1'+f_2}{\Delta}=f_2'\dfrac{d}{\Delta}. \end{cases} \tag{7.10}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

上列各式的推导如下：首先根据图7-7中两对相似三角形$\triangle M_1'H_1'F_1'$和$\triangle R_2H_2F$，以及$\triangle M'H'F'$和$\triangle R\ H\ F'$，写出下列比例式：

$$\frac{h}{h'}=\frac{f_1'}{\Delta+f_2},\qquad \frac{h}{h'}=\frac{-f'}{f_2'+x_2'}.$$

由此解出f'来

$$f'=-\frac{f_1'(f_2'+x_2')}{\Delta+f_2}.$$

此外，因F_1'和F'是光具组Ⅱ的共轭点，按牛顿公式，有

$$x_1'=\frac{f_2f_2'}{\Delta},$$

将此式代入前式，得

$$f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}.$$

从而

$$X_H'=f_2'+x_2'-f'=\frac{\Delta+f_1'+f_2}{\Delta}f_2'.$$

以上两式便是式(7.9)和(7.10)中的第二式。为了得到第一式，只需利用光的可逆原理作如下代换：

$$f_1'\rightleftharpoons f_2,\qquad f_2'\rightleftharpoons f_1,$$
$$f\rightleftharpoons f',\qquad X_H\rightleftharpoons X_H'.$$

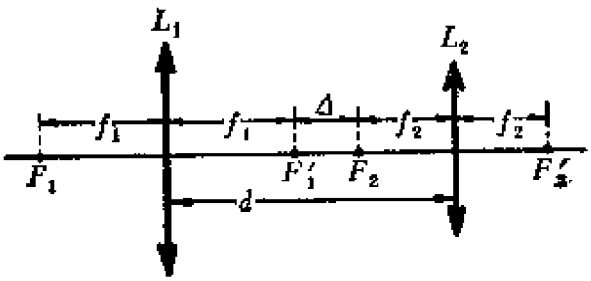


图7-8　薄透镜的组合

作为例子我们看两个薄透镜L_1，L_2的组合(图7-8)。设透镜以外媒质的折射率皆为1，从而$f_1=f_1$，$f_2'=f_2$。$d=\Delta+f_1+f_2$，由式(7.9)得

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

联合光具组的焦距为

$$f = f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta},$$

或

$$\frac{1}{f} = -\frac{\Delta}{f_1 f_2} = -\frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{7.11}$$

用光焦度 $P = 1/f$, $P_1 = 1/f_1$和 $P_2 = 1/f_2$来表示，则有

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 d. \tag{7.12}$$

对于密接透镜组，$d = 0$，式(7.12)过渡到以前的公式(6.15)。

把式(7.11)代入式(7.10)，可得联合光具组的主面位置公式：

$$\begin{cases} X_H = \dfrac{fd}{f_2} = \dfrac{P_2 d}{P}, \\ X_H' = \dfrac{fd}{f_1} = \dfrac{P_1 d}{P}. \end{cases} \tag{7.13}$$

例题1 惠更斯(C.Huygens)目镜的结构如图7-9所示，它由焦距分别为 $3a$ 和 a 的凸透镜L_1和L_2组成，光心之间的距离为 $2a$。求它的焦点和主面的位置。

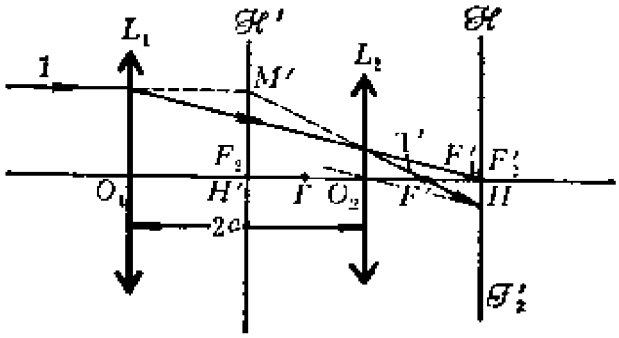


图 7-9 例题 1——求惠更斯目镜的基点、基面

解 (i) 作图法

作入射线 1 平行于光轴，经 L_1 折射后通过 L_1，为了进一步找出经 L_2折射后的出射线1′，可利用 L_2 的像方焦面$\mathscr{H}_2'$ 和通过透镜光心的辅助线。最后通过 1 和1′的交点M'找到第二主面$\mathscr{H}'$，1′与光轴的交点即为第二焦点F'。精确的作图表明，$\mathscr{H}'$在L_2之左距离为 a 的地方，F'在$\mathscr{H}'$之右

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

距离为1.5a 的地方.

求物方的焦点 F 和主面 $\mathscr{H}$，可利用光的可逆性原理.平行于光轴的反方向作入射线 2′，用类似前法求得先后经 L_2,L_1 两透镜折射后的出射线 2，并由此找到$\mathscr{H}$和 F. 精确的作图表明，$\mathscr{H}$在 L_1之右3a 的地方，F在$\mathscr{H}$之左1.5a 处（图7-9中标出了它们的位置，作图过程从略）.

（ii）用公式计算

按题中所给，$d=2a$，$f_1=3a$，$f_2=a$，故

$$\Delta=d-f_1-f_2=-2a,$$

代入式(7.11)和(7.13)，得

$$f=f'=3a/2,\quad X_H=-3a,\quad X_{H'}=-a,$$

即H在O_1之右3a 处，H'在O_2之左 a 处，F在H之左 1.5a 处，F'在H'之右1.5a 处. 结果完全与（ i ）同.

在这个例子中，物像方焦距都是正的，但物方焦点F 在光具组最前的界面(透镜L_1)之后，它只能是会聚光束的中心，即它是虚焦点. 可见，对有一定间隔的透镜组来说，从焦距的正负来判断焦点的虚实，已没有什么意义了.

例题2 虚物QP位于图7-9所示的光具组中凸透镜L之右距离为 2a 的地方，试利用焦点主面作图法求它的像.

解 （ i ）作图法

如图7-10，过P点作平行于光轴的入射线 1 遇$\mathscr{H}$于M，其共轭线 1′过$\mathscr{H}'$上等高点M'和像方焦点F'；再作过F,P的入射线 2 遇$\mathscr{H}$于 R，其共轭线2′过$\mathscr{H}'$上的等高点R'，且与光轴平行. 1′与2′的交点即为像点P'.

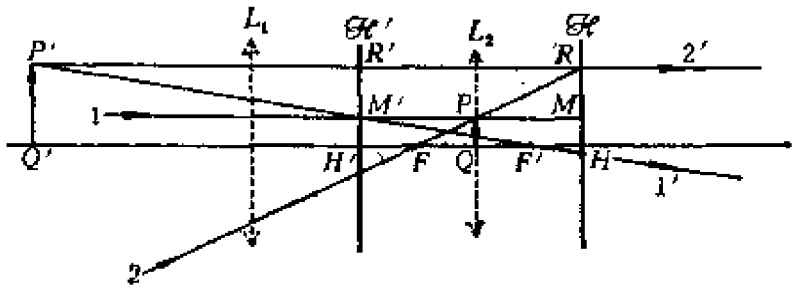


图 7-10 例题 2——惠更斯目镜成像

（ii）用公式计算

题中给出的物距 $s=a$，上题已求出$f=f'=1.5a$，代入高斯公式，得

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$s' = -3a$，即像在 H' 之左 $3a$ 处。

从这个例题可以看出，知道了透镜组的基点、基面，就可一次求出最后的像。因为事前需要如例题 1 那样先计算出联合光具组的基点、基面位置，这种方法似乎不比逐次成像法简单。然而当我们需要计算的不是一对而是一系列共轭点时，用联合光具组的基点、基面一次成像的方法就比逐次成像法方便了。

思 考 题

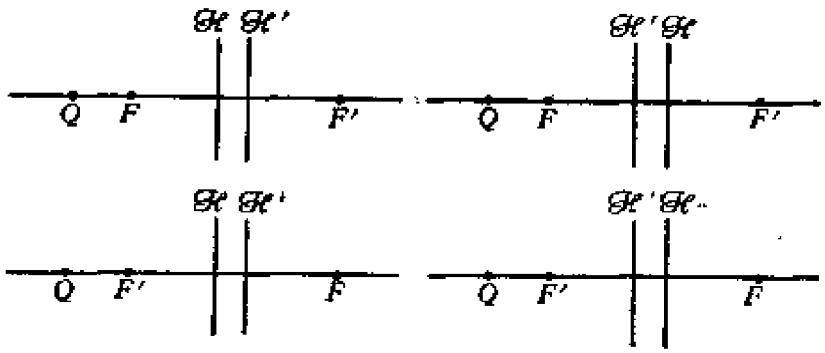
1. 非望远系统中可以有一对以上的主面吗？

2. 一般说来，理想光具组能保持不与光轴垂直的平面内几何图形的相似性吗？

习 题

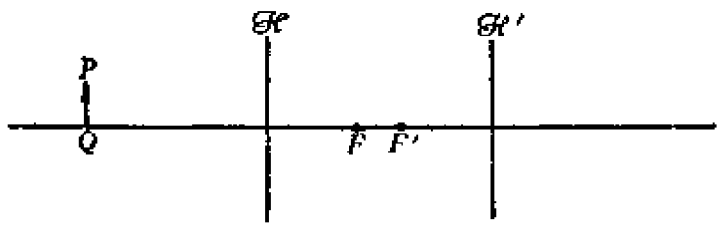
1. 用逐次成像法解7.4节中的例题2，并将结果与之比较。

2. 用作图法求 Q 点的像(入射线从左到右)：



习题 2 图

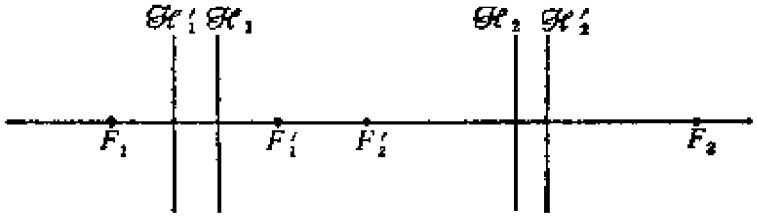
3. 用作图法求 PQ 的像(入射线从左到右)：



习题 3 图

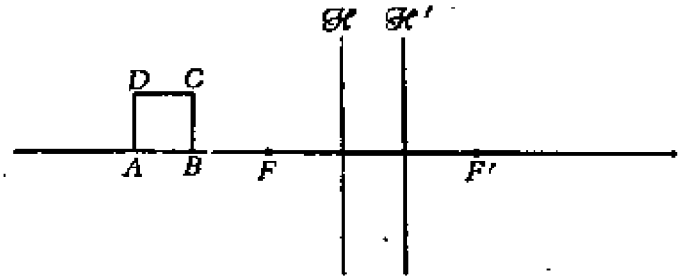
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

4. 用作图法求联合光具组的主面和焦点：



习题 4 图

5. 用作图法求正方形 $ABCD$ 的像。



习题 5 图

6. 验算10.9节图10-15(a)和(b)绘出的两种冉斯登目镜的主面与焦点。

7. 求下列厚透镜的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃的折射率为 1.500，两界面顶点间的距离为 1.00cm，透镜放在空气中。

形　　状	r_1(cm)	r_2(cm)
(1)双凸	10.0	−10.0
(2)凸凹	10.0	20.0
(3)凹凸	−15.0	−20.0

8. 求放在空气中玻璃球的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃球的半径为2.00cm，折射率为1.500。

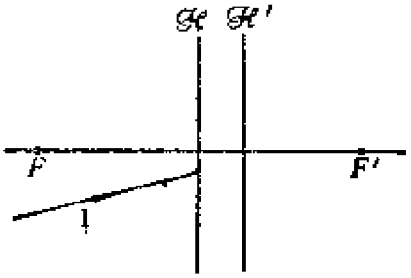
9. 上题中玻璃球表面上有一斑点，计算从另一侧观察此斑点像的位置和放大率，并用作图法验证之。

10. (1) 用作图法求图中光线 1 的共轭线；

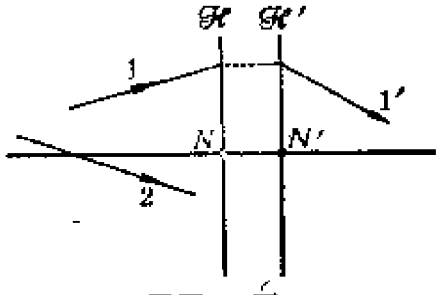
(2) 在图上标出光具组节点N，N'的位置。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

11. 已知1—1′是一对共轭光线，求光线2的共轭线(见图).



习题10图



习题11图

12. 对一光具组，测得当物距改变 Δx 时，像距改变 $\Delta x'$，同时横向放大率由 V_1 变到 V_2，试证明此光具组的焦距为

$$f=\frac{\Delta x}{\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}},\qquad f'=\frac{\Delta x'}{V_2-V_1}.$$

这里提供了一种测焦距的方法，它与测焦点位置的方法配合起来，可以确定光具组的主面.

§8 光学仪器

8.1 投影仪器

电影机、幻灯机、印相放大机以及绘图用的投影仪等，都属于投影仪器. 它的主要部分是一个会聚的投影镜头，将画片成放大的实像于屏幕上(图8-1).由于通常镜头到像平面(幕)的距离 s'

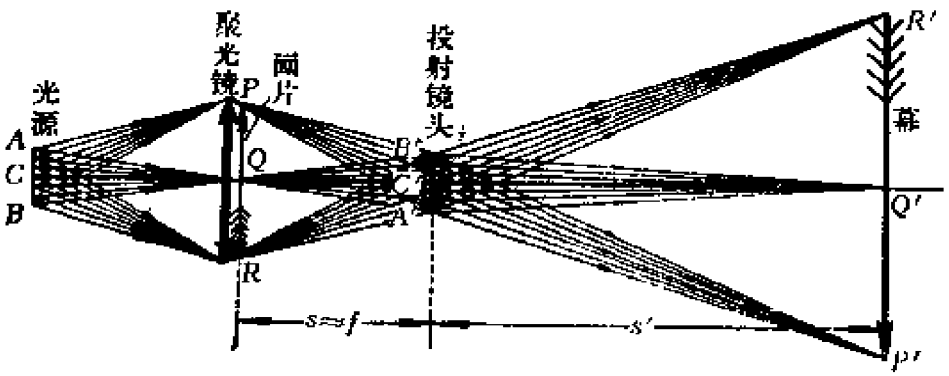


图 8-1 投影仪器

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

比焦距f大得多，所以画片总在物方焦面附近，物距$s \simeq f$，因而放大率$V = -s'/s \simeq s'/f$，它与像距s'成正比.

为了使光线经画片后进入投影镜头，投影仪器中需要附有聚光系统．总的来说，聚光系统的安排应有利于幕上得到尽可能强的均匀照明.通常聚光系统有两种类型.其一适用于画片面积较小的情况，这时聚光镜将光源的像成在画片上或它的附近．其二适用于画片面积较大的情况，这时聚光镜将光源的像成在投射镜头上．图8-1中只画出第二种情况，对这情形的详细分析，参看9.1节．

8.2 照相机

摄影仪器的成像系统刚好与投影仪器相反，拍摄对象的距离s一般比焦距f大得多，因此像平面(感光底片)总在像方焦面附近，像距$s' \simeq f'$(图8-2)．在小范围内调节镜头与底片间的距离，可使不同距离以外的物体成清晰的实像于底片上.

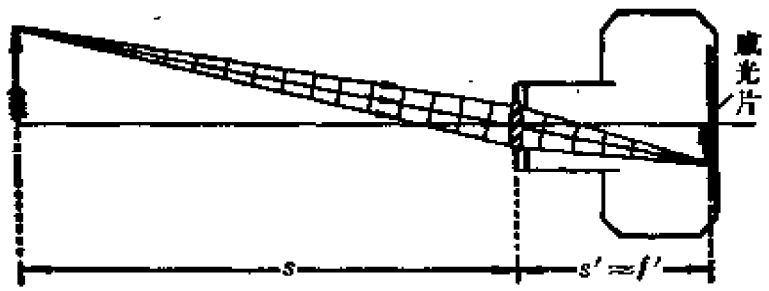


图8-2 照相机

照相机镜头上都附有一个大小可改变的光阑．光阑的作用有二：一是影响底片上的照度(参见§12)，从而影响曝光时间的选择．二是影响景深．如图8-3所示，照相镜头只能使某一个平面H上的物点成像在底片上，在此平面前后的点成像在底片前后，来自它们的光束在底片上的截面是一圆斑．如果这些圆斑的线度小于底片能够分辨的最小距离，还可认为它们在底片上的像是清晰

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的.对于给定的光阑，只有平面Π前后一定范围内的物点，在底片上形成的圆斑才会小于这个限度．物点的这个可允许的前后范围，称为景深．当光阑直径缩小时，光束变窄，离平面Π一定距离的物点在底片上形成的圆斑变小，从而景深加大．除光阑直径外，影响景深的因素还有焦距和物距．令x, x'分别为物距和像距（从焦点算起），当物距改变δx时，像距改变$\delta x'$，$\delta x'/\delta x$的数值越小，越有利于加大景深．由牛顿公式可知，$\delta x'/\delta x = -f^2/x^2$（设物、像方焦距相等），对给定的焦距$f$来说，$x$越小，则景深越小．因此在拍摄不太近的物体时，很远的背景可以很清晰，而在拍摄近物时，稍远的物体就变得模糊了．

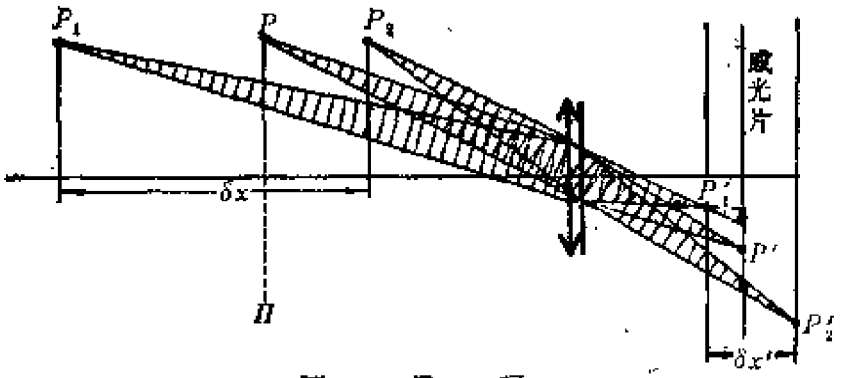


图8-3 景　深

8.3 眼睛

人类的眼睛是一个相当复杂的天然光学仪器．从结构来看，它类似前面讲过的照相机．对于下面要讲的目视光学仪器，它可看成是光路系统的最后一个组成部分．所有目视光学仪器的设计，都要考虑眼睛的特点．

图8-4所示为眼球在水平方向上的剖面图．其中布满视觉神经的网膜，相当于照相机中的感光底片，虹膜（或称虹采、采帘）相当于照相机中的可变光阑，它中间的圆孔称为瞳孔．眼球中与照相镜头对应的部分结构比较复杂，其主要部分是晶状体（或称眼球），它是一个折射率不均匀的透镜．包在眼球外面的坚韧的膜，最前面

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

透明的部分称为角膜，其余部分称为巩膜．角膜与晶状体之间的部分称为前房，其中充满水状液(前房液)．晶状体与网膜之间眼球的内腔，称为后房，其中充满玻璃状液．所以，眼睛是一个物、像方媒质折射率不相等的例子，因而它的两个焦距是不等的，主点与节点也不重合．聚焦于无穷远时，物方焦距$f=17.1\text{mm}$，像方焦距$f'=22.8\text{mm}$．

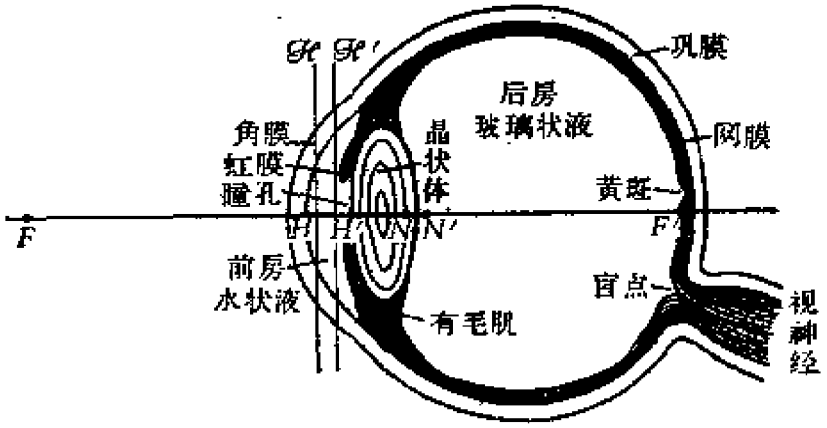


图 8-4　眼球结构

在照相机中通过镜头和底片间距离的改变来调节聚焦的距离，在眼睛里这是靠改变晶状体的曲率(焦距)来实现的①．晶状体的曲率由有毛肌来控制．正常视力的眼睛，当肌肉完全松弛的时候，无穷远的物体成像在网膜上．为了观察较近的物体，肌肉压缩晶状体，使它的曲率增大，焦距缩短．眼睛的这种调节聚焦距离(调焦)的能力有一定的限度，小于一定距离的物体是无法看清楚的．儿童的这个极限距离在10cm以下，随着年龄的增长，眼睛的调焦能力逐渐衰退，这极限距离因之而加大．造成老花眼的原因就在于此．

眼睛肌肉完全松弛和最紧张时所能清楚看到的点，分别称为

① 在调焦时眼球的基点位置和焦距变化不大，在整个调焦范围内，眼球焦距的变化幅度是：$f\sim17.1\text{—}14.2\text{mm}$，$f'\sim22.8\text{—}18.9\text{mm}$．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

它调焦范围的远点和近点．如前所述，正常眼睛的远点在无穷远(图8-5(a))．近视眼睛的眼球过长，当肌肉完全松弛时，无穷远的物体成像在网膜之前(图8-5(b))，它的远点在有限远的位置．远视眼的眼球过短，无穷远的物体成像在网膜之后(图8-5(c))，它的远点在眼睛之后(虚物点)．图8-5中光轴上画实线的部分代表调焦范围．不难看出，矫正近视眼和远视眼的眼镜应分别是凹透镜和凸透镜．所谓散光，是由于眼球在不同方向的平面内曲率不同引起的，它需要用非球面透镜来矫正．

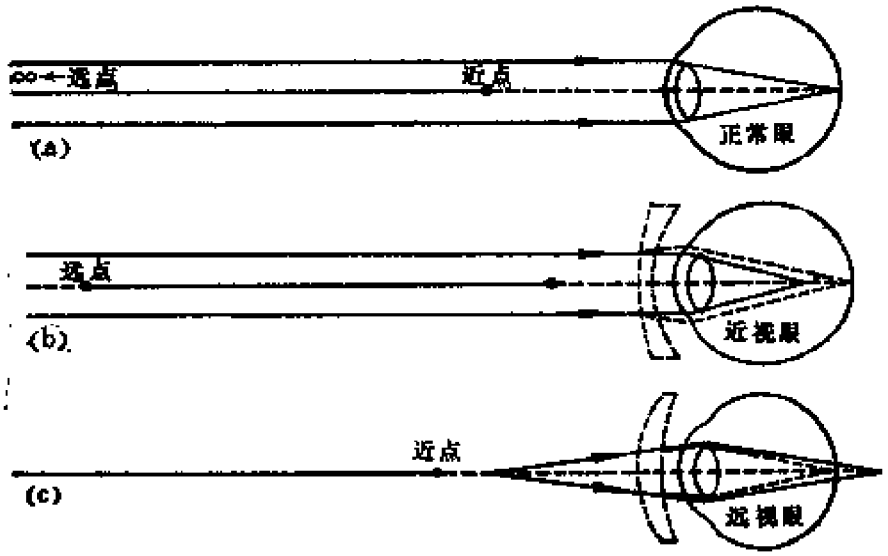


图 8-5　眼睛的缺陷与矫正

物体在网膜上成像的大小，正比于它对眼睛所张的角度——视角①．所以物体愈近，它在网膜上的像也就愈大(图8-6)，我们

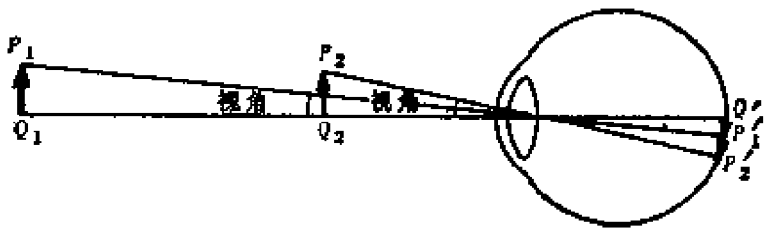


图 8-6　像的大小与视角

① 严格说来，网膜上像的大小 $y' = l\tan w$，式中 w 为视角，l 为像方节点 N'(见7.3节)到网膜的距离．故 y' 的大小，除 w 外，还与 l 有关，而后者在调焦的过程中随物距而变．但是在整个调焦的范围内，l 的变化是不大的(约2.5%)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

便愈容易分辨它的细节.但是物体太近了,即使不超出调焦范围,看久了眼睛也会感到疲倦. 只有在适当的距离上眼睛才能比较舒适地工作,这距离称为明视距离.习惯上规定明视距离为 25cm.

眼睛分辨物体细节的本领与网膜的结构(主要是其上感光单元的分布)有关,不同部分有很大差别.在网膜中央靠近光轴的一个很小区域(称为黄斑)里,分辨本领最高. 能够分辨的最近两点对眼睛所张视角,称为最小分辨角.在白昼的照明条件下,黄斑内的最小分辨角接近1′.趋向网膜边缘,分辨本领急剧下降. 所以人的眼睛视场虽然很大,水平方向视场角约160°,垂直方向约130°,但其中只有中央视角约为6°—7°的一个小范围内才能较清楚地看到物体的细节.然而这对我们并没有什么妨碍.因为眼球是可以随意转动的,它可随时使视场的中心瞄准到所要注视的地方. 还要指出,眼睛的分辨本领与照明条件有很大的关系. 在夜间照明条件比较差的时候,眼睛的分辨本领大大下降,最小分辨角可达1°以上.

瞳孔的大小随着环境亮度的改变而自动调节. 在白昼条件下其直径约为2mm, 在黑暗的环境里,最大可达8mm左右.

8.4 放大镜和目镜

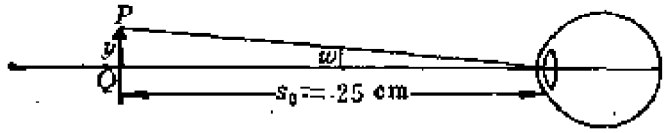
最简单的放大镜就是一个焦距f很短的会聚透镜. $f \ll$明视距离s_0, 其作用是放大物体在网膜上所成的像. 如前所述,这像的大小是与物体对眼睛所张的视角成比例的.

如果我们用肉眼观察物体,当物体由远移近时,它所张的视角增大.但是在达到明视距离s_0以后继续前移,视角虽继续增大,但眼睛将感到吃力,甚至看不清. 可以认为,用肉眼观察,物体的视角最大不超过

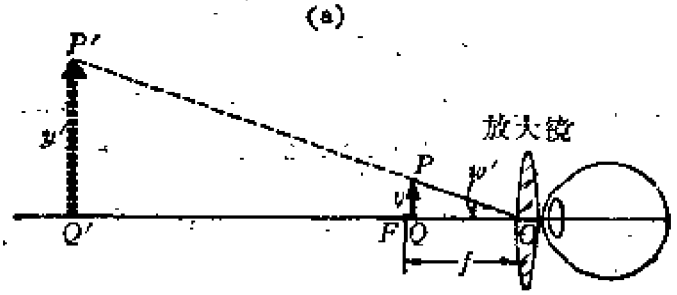
$$w = \frac{y}{s_0}, \tag{8.1}$$

其中 y 为物体的长度(参见图8-7(a)).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a)



(b)

图 8-7　放大镜的视角放大率

现在我们设想将一个放大镜紧靠在眼睛的前面(图8-7(b)),并考虑一下，物体应放在怎样的位置上，眼睛才能清楚地看到它的像？若物距太大，实像落在放大镜和眼睛之后；若物距太小，虚像落在明视距离以内.只有当像成在无穷远到明视距离之间时，才和眼睛的调焦范围相适应.与此相应地，物体就应放在焦点 F 以内的一个小范围里，这范围叫做焦深.在 $f \ll s_0$ 的条件下，这范围比焦距 f 小得多，根据牛顿公式，这范围是 $0<x<-f^2/(s_0-f) \simeq -f^2/s_0$，$|x|<f^2/s_0 \ll f$，也就是说，物体只能放在焦点内侧附近①.这时它对光心所张的视角近似等于

$$w' = \frac{y}{f}. \tag{8.2}$$

由图8-7(b)可以看出，由物点 P 发出的通过光心的光线，延长后通过像点 P'，所以物体 QP 与像 $Q'P'$ 对光心所张视角是一样的，亦即式(8.2)中的 w' 也是像对光心所张的视角.由于眼睛与放大镜十分靠近，又可认为 w' 就是像对眼睛所张的视角.

由于放大镜的作用是放大视角，我们引入视角放大率 M 的

① 作为一个例子，请见§6习题6.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

概念，它定义为像所张的视角 w' 与用肉眼观察时物体在明视距离处所张的视角 w 之比

$$M = \frac{w'}{w}, \tag{8.3}$$

将式(8.1)和(8.2)代入后，就得到放大镜视角放大率的公式

$$M = \frac{s_0}{f}. \tag{8.4}$$

下面要讲的显微镜和望远镜中的目镜，从原理上看就是一个放大镜．不过为了消除像差以及其它一些原因，目镜常采用种种复合透镜的形式，最典型的有惠更斯目镜和冉斯登目镜．有关这些目镜的详细情况，可参阅10.7节．

8.5 显微镜

简单放大镜的放大倍率有限(几倍到几十倍)，欲得到更大的

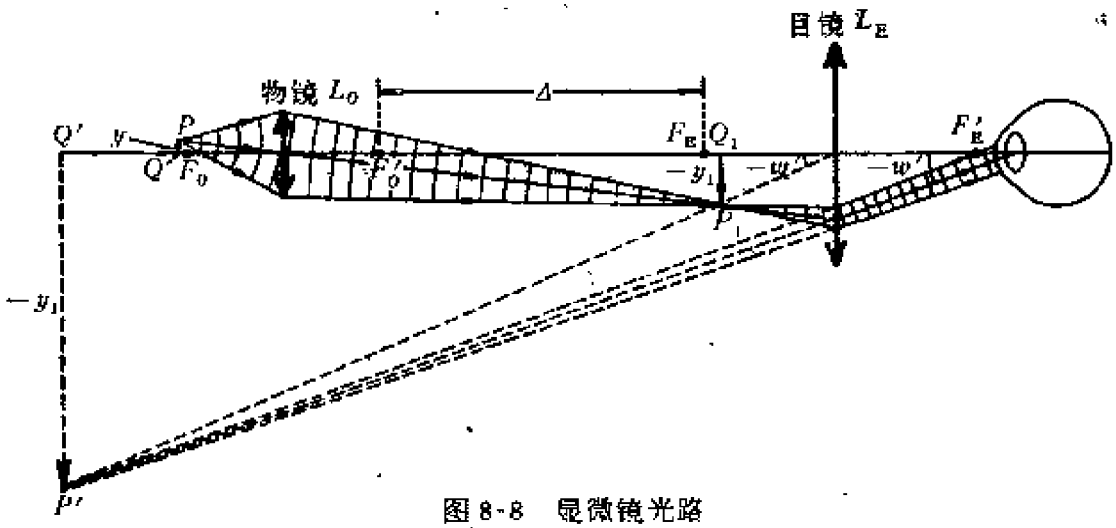


图 8-8 显微镜光路

放大倍率要靠显微镜．显微镜的原理光路示于图8-8．在放大镜(目镜)前再加一个焦距极短的会聚透镜组，称为物镜．物镜和目镜的间隔比它们各自的焦距大得多．被观察的物体 QP 放在物镜物方焦点 F_0 外侧附近，它经物镜成放大实像 Q_1P_1 于目镜物方焦点 F_E 内侧附近，再经目镜成放大的虚像 $Q'P'$ 于明视距离以外．在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

实际显微镜中为了减少各种像差，物镜和目镜都是复杂的透镜．我们为了突出其基本原理，在图8-8中二者都用一个薄透镜代替．

设y为物体QP的长度，y_1为中间像Q_1P_1的长度，f_O和f_E分别为物镜L_O和目镜L_E的焦距，Δ为物镜像方焦点F_O'到目镜物方焦点F_E的距离(称为光学筒长)．显微镜的视角放大率为

$$M=\frac{w'}{w}, \tag{8.5}$$

其中w为物体QP在明视距离处所张视角，即$w=y/s_0$．w'为最后的像$Q'P'$所张的视角．现规定由光轴转到光线的方向为顺时针时交角为正，逆时针时交角为负①，故这里的$w'<0$．如前所述，w'和中间像Q_1P_1所张的视角一样，故$-w'=-y_1/f_E$．所以

$$M=\frac{y_1/f_E}{y/s_0}=\frac{y_1}{y}\cdot\frac{s_0}{f_E}=V_OM_E, \tag{8.6}$$

式中$M_E=s_0/f_E$是目镜的视角放大率，$V_O=y_1/y$是物镜的横向放大率．根据式(6.13)，其中$x'=\Delta$，$f'=f_E$，得

$$V_O=-\frac{\Delta}{f_O},$$

代入式(8.6)后，得到显微镜视角放大率的最后表达式

$$M=-\frac{s_0\Delta}{f_Of_E}, \tag{8.7}$$

式中负号表示像是倒立的．上式表明，物镜、目镜的焦距愈短，光学筒长愈大，显微镜的放大倍率愈高．

显微镜物镜的结构应满足以下要求：第一，由物点射入物镜光束的立体角(孔径)应较大，它影响着像的分辨本领和亮暗；第二，物镜必须消除各种像差，主要是球差、彗差和色差．显微镜的放大倍率越高，对以上两点的要求就越高，从而物镜的结构越复杂(参见图8-9)．有关显微物镜的详

① 注意：这里对视角w正负的规定，与5.5节中关于角度u的规定(V)正好相反，这是因为视角是逆着光线看的．对视角的正负如此规定，好处是它直接与像的正倒相对应．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

细情况，还要在以后几节中谈到。

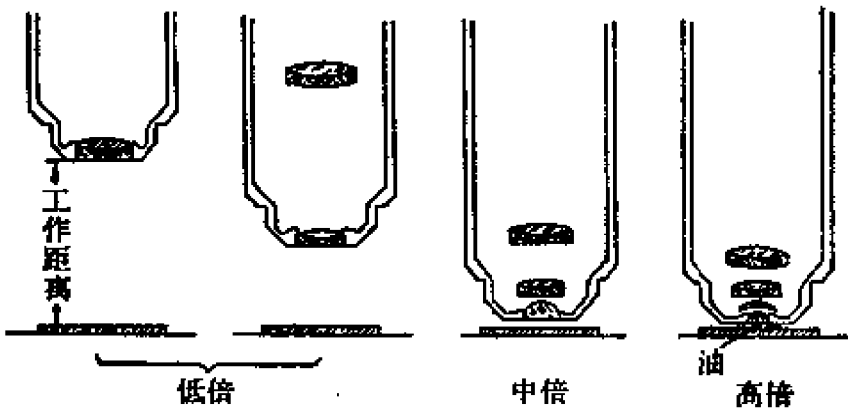


图 8-9　显微物镜

近代高级显微镜里往往有三个到四个倍率不同的物镜，可以互相替换使用。最高倍的显微物镜常常是油浸的，其原理见10.4节。表Ⅰ-3中给出我国上海光学仪器厂出品的XPG偏光显微镜的一些基本数据。

实验室中广泛使用一种测量微小距离用的显微镜，它们的目镜中装有标尺或叉丝，物镜的倍率一般都较低。特别是在工作距离较大的场合下使用的显微镜中，物镜的焦距较长，它的作用主要是将物体成像于目镜物方焦面附近，放大的作用基本靠目镜。

表Ⅰ-3　显微镜的物镜和目镜

物镜			光学筒长	目镜	
倍率V_O	焦距f_O	N.A.	(计算值)	倍　率M_E	焦　距f_E
(1) 3×	39.50mm	0.10	118.50mm	(1) 5×(叉丝)	50mm
(2) 8×	19.96mm	0.25	159.68mm		
(3)45×	4.12mm	0.63	185.40mm	(2) 10×(标尺)	25mm
(4)100×(油浸)	1.91mm	1.32	191.00mm		

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

8.6 望远镜

望远镜的结构和光路与显微镜有些类似(参见图8-10)，也是先由物镜成中间像，再通过目镜来观察此中间像．与显微镜不同的是，望远镜所要观察的物体在很远的地方(可以看成是无穷远)，因此中间像成在物镜的像方焦面上．所以望远镜的物镜焦距较长，而物镜的像方焦点F_O'和目镜的第一焦点F_E几乎重合①．

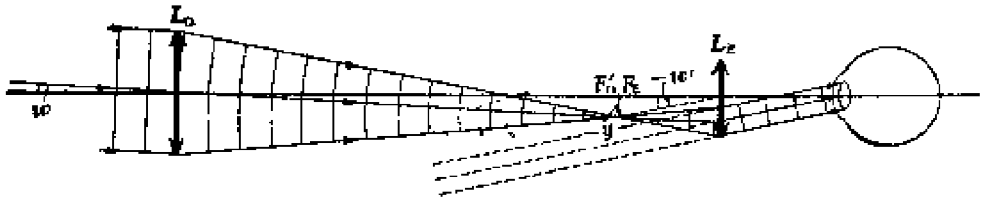


图 8-10　望远镜光路

望远镜的视角放大 M 应定义为最后的虚像对目镜所张视角 w' 与物体在实际位置所张视角 w 之比，

$$M = \frac{w'}{w}. \tag{8.8}$$

由于物距远比望远筒长大得多，它对眼睛或目镜所张视角实际上和它对物镜所张视角是一样的．从图8-10不难看出，$w = -y_1/f_O$，而 $-w' = -y_1/f_E$ (w, w'的正负号规定同前)，代入式(8.8)得到

$$M = -\frac{f_O}{f_E}, \tag{8.9}$$

式中负号的意义同前，表示像是倒立的．上式表明，物镜的焦距愈长，望远镜的放大倍率愈高．

当望远镜对无穷远聚焦时，中间像成在物镜的像方焦面上．这

① 当望远镜中F_O'和F_E严格重合时，由物镜入射的平行光束最后转化为由目镜出射的平行光束．这时望远镜作为一个联合光具组是没有焦点的，即它是一个望远系统．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

样，平面上的每个点和一个方向的入射线对应，所以当望远镜筒平移时，中间像对镜筒没有相对位移，只有当望远镜的光轴转动时，中间像才会相对它移动．因此望远镜可用来测量两平行光束间的夹角．

8.7 棱镜光谱仪

在1.3节中已介绍过棱镜的折射与色散．棱镜光谱仪便是利用棱镜的色散作用将非单色光按波长分开的装置，其结构的主要部分见图 8-11．棱镜前那部分装置称为准直管(或平行光管)，它由一个会聚透镜L_1和放在它第一焦面上的狭缝S 组成，S与纸面垂直．光源照射狭缝S，通过缝中不同点射入准直管的光束经L_1折射后变为不同方向的平行光束．非单色的平行光束通过棱镜后，不同波长的光线沿不同方向折射，但同一波长的光束仍维持平行．棱镜后的透镜L_2是望远物镜，不同波长的平行光束经L_2后会聚到其像方焦面上的不同地方，形成狭缝 S 的一系列不同颜色的像，这便是光谱．

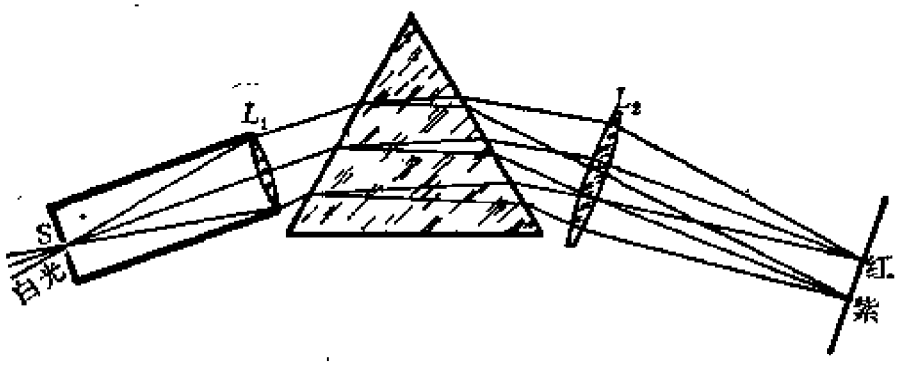


图 8-11 棱镜摄谱仪

若光谱仪中的望远物镜装有目镜，可供眼睛来直接观察光谱，则称之为分光镜．若光谱仪中在望远物镜的焦平面上放置感光底片，是用来拍摄光谱的，则称之为摄谱仪．若光谱中在望远物镜的焦平面上放一狭缝，是用来将某种波长的光分离出来的，则称之为单色仪．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

不同物质发射的光具有自己特有的光谱，它反映了这种物质本身的微观结构，所以光谱是研究物质微观结构的重要手段．此外还可通过光谱来分析物质的化学成分．

色散本领和色分辨本领是标志任何类型分光仪器性能的两个重要指标，下面讨论棱镜的色散本领，而色分辨本领问题留待第四章介绍．

偏向角对波长的微商，称为棱镜的角色散本领(用D代表)，即

$$D=\frac{d\delta}{d\lambda}. \tag{8.10}$$

只有通过狭缝S中点的光线才在棱镜的主截面内折射．由于不在棱镜主截面内的光线偏折的方向不同，在望远物镜焦平面上S的像(即光谱线)是弯的．可以证明，沿产生最小偏向角的方向入射时，光谱线弯曲得最少．所以在光谱仪中棱镜通常是装在接近于产生最小偏向角的位置．因此棱镜的角色散本领D可通过对1.3节中的式(1.13)微分得到

$$D=\frac{d\delta_m}{d\lambda}=\frac{d\delta_m}{dn}\frac{dn}{d\lambda}=\left(\frac{dn}{d\delta_m}\right)^{-1}\frac{dn}{d\lambda}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta_m}{2}}\cdot\frac{dn}{d\lambda},$$

由于

$$\cos\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\cos i_1\sqrt{1-\sin^2 i_1}$$

$$=\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1'}$$

$$=\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

最后得到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$D=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{dn}{d\lambda} \qquad (8.11)$$

其中 $dn/d\lambda$ 称为色散率，它是棱镜材料的性质．由于角色散本领 D 正比于色散率，光谱仪中的棱镜常用色散率尽可能大的玻璃（如重火石玻璃）制成．

思考题

1．为什么调节显微镜时镜筒作整体移动，而不改变筒长，调节望远镜时则需要调节目镜相对于物镜的距离？

2．通常说将望远镜调节到对无穷远聚焦，这是什么意思？如何利用自聚焦法（参考本章§6思考题1）调节望远镜，使聚焦于无穷远？

3．测距显微镜是利用镜筒的平移来测量微小长度的，能够利用望远镜筒的平移来测量远处物体的长度吗？为什么？

4．为什么用极限法测折射率的装置中（参见本章§1习题16）需用望远镜观察？为什么在望远镜视场中出现有明显分界线的半明半暗区？

习题

1．一架幻灯机的投影镜头焦距7.5cm，当幕由8m移至10m远时，镜头需移动多少距离？

2．某照相机可拍摄物体的最近距离为1m，装上2D的近拍镜后，能拍摄的最近距离为多少？（假设近拍镜与照相机镜头是密接的．）

3．某人对2.5m以外的物看不清，需配多少度的眼镜？另一人对1m以内的物看不清，需配怎样的眼镜？

4．计算2×，3×，5×，10×放大镜或目镜的焦深．

5．一架显微镜，物镜焦距为4mm，中间像成在物镜像方焦点后面160mm处，如果目镜是20×的，显微镜的总放大率是多少？

6．一架显微镜的物镜和目镜相距20.0cm，物镜焦距7.0mm，目镜焦距5.0mm，把物镜和目镜都看成是薄透镜，（1）求被观测物到物镜的距离；（2）物镜的横向放大率；（3）显微镜的总放大率；（4）焦深．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

7. 物镜、目镜焦距皆为会聚的望远镜称为开普勒型望远镜(图8-10)，物镜会聚而目镜发散的望远镜，称为伽里略型望远镜。(1) 画出伽里略望远镜的光路；(2) 一伽里略型望远镜的物镜和目镜相距 12cm，若望远镜的放大率为4×，物镜和目镜的焦距各多少？

8. 拟制一个3×的望远镜，已有一个焦距为 50cm 的物镜，问：在(1) 开普勒型中，(2) 伽里略型中目镜的光焦度以及物镜、目镜的距离各多少？

*§9 光 阑

前面我们研究了共轴球面组在傍轴条件下成像的规律和理想光具组的理论。除了平面镜的特例外，理想光具组是不能实现的。只有把光束限制在傍轴区域内，一个实际的共轴光具组才能近似成像。但光具组中对光束起限制作用的可以是透镜的边缘、框架、或特别设置的带孔屏障，即光阑。光阑有限制光束孔径和限制视场两方面的作用，它影响着像差、像的亮暗、景深、分辨本领等一系列实际中很关心的问题。这些问题有的前面已提到过(如照相机的景深)，更多的将在以后章节中详细讨论(参见本章 §10，§12 和第二章 §8)。这里只介绍一些有关光阑的基本概念。

9.1 孔径光阑 入射光瞳和出射光瞳

每个光具组内都有一定数量的光阑。由光轴上一物点 Q 发出的光束通过光具组时，一般说来，不同的光阑对此光束的孔径限制到不同的程度。其中对光束孔径的限制最多的光阑，即真正决定着通过光具组光束孔径的光阑，称为孔径光阑，有时称为有效光阑。被孔径光阑所限的光束中的边缘光线与物、像方光轴的夹角 u_0 和 u'_0，分别称为入射孔径角和出射孔径角。下面举例说明。

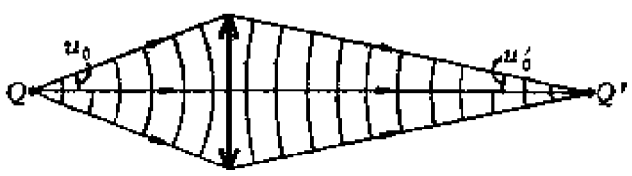
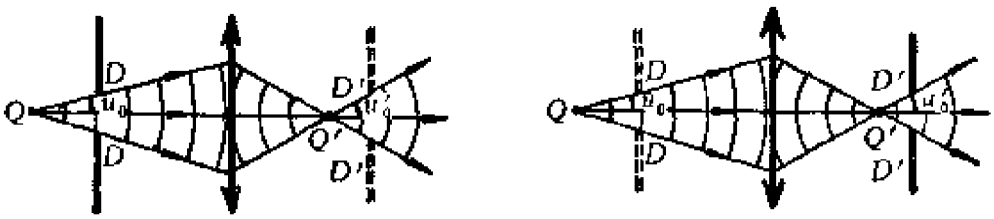


图 9-1 薄透镜的孔径光阑和孔径角

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

首先我们看最简单的光具组——单个薄透镜（见图9-1）。它的边缘（镜框）是光具组中唯一的光阑，因此它便是孔径光阑。但是，在实际光学仪器中往往另外加入一些带圆孔的屏作为光阑，图9-2(a)，(b)所示分别为把这种光阑加在透镜前后的情形。它们限制光束的作用比镜框大，所以都是孔径光阑。



(a)　　(b)

图 9-2　入射光瞳和出射光瞳（实）

在图9-2中我们故意把(a)中的光阑 DD 和(b)中的光阑 $D'D'$ 画在对透镜共轭的位置上。这样一来，当入射光线通过 DD 的边缘时，与它共轭的出射光线必定通过 $D'D'$ 的边缘，所以在两种情形里，光束的孔径角是一样的。在情形(a)里，孔径光阑 DD 在物方，入射孔径角 u_0 可直接由它来确定。可是从像方看来，可以设想 DD 的像 $D'D'$ 是一个虚构的光阑，出射孔径角 u_0' 直接由这虚构的光阑 $D'D'$ 所确定。同样地，在情形(b)里，孔径光阑 $D'D'$ 在像方，在物方与 $D'D'$ 共轭的 DD 也可看成是一个虚构的光阑，入射和出射孔径角 u_0 和 u_0' 可分别由 DD 和 $D'D'$ 直接确定下来。通过这个例子我们看到，找到孔径光阑在物方和像方的共轭像，并把它们看成是某种虚构的光阑，从而由它们来直接确定入射和出射孔径角，这种方法在实际中是很有用的。我们把孔径光阑在物方的共轭称为入射光瞳，在像方的共轭称为出射光瞳。如果像图9-2(a)中那样，孔径光阑 DD 就在物方，它便同时又是入射光瞳；如图9-2(b)那样，孔径光阑 $D'D'$ 就在像方，它便同时又是出射光瞳。

应当指出，在实际光学仪器中，孔径光阑的共轭像往往是虚的，图9-3(a)和(b)中所示的两种最简单的照相机镜头便是这样的例子。拿图9-3(b)的情形来说，这时凡通过孔径光阑 $D'D'$ 边缘的出射光线，在未经透镜折射之前，不是入射光线本身，而是其延长线必定通过入射光瞳 DD 的边缘。在这里它与图9-2(b)情形的这种差别绝毫无本质意义，当我们说"光线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

通过某点"的时候，从来就包含了它的延长线通过该点的可能性。

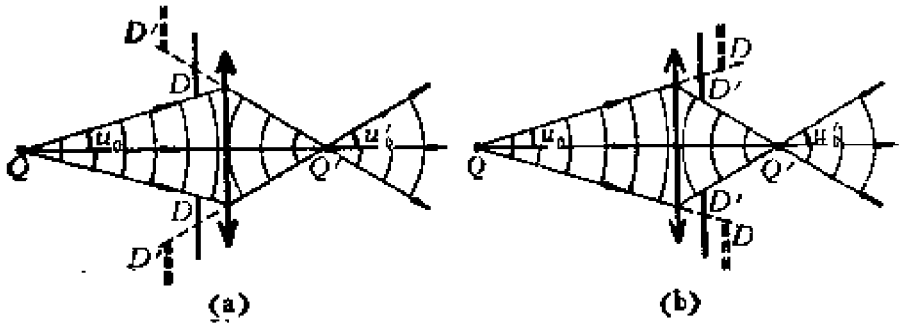


图 9-3　入射光瞳和出射光瞳(虚)

在图9-2和图9-3的例子中，孔径光阑不是在物方里，就是在像方里。而在较复杂的光学仪器中它可以在几个透镜中间。图9-4所示的一种对称的照相镜头便是这样的例子，其中D_0D_0是孔径光阑，DD和$D'D'$分别是入射光瞳和出射光瞳。这里应注意的是，DD和D_0D_0是对于D_0D_0之前的透镜L_1共轭的，而D_0D_0和$D'D'$是对于D_0D_0之后的透镜L_2共轭的。这样就可保证通过DD边缘的入射光线经L_1折射后，一定通过D_0D_0的边缘，再经L_2折射后，出射光线一定通过$D'D'$的边缘。

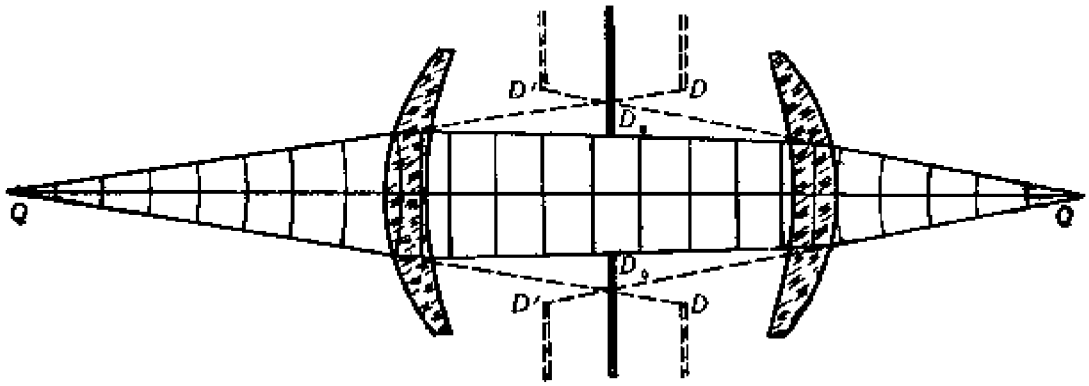


图 9-4　对称照相镜头的孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳

望远镜或由一个复合透镜构成的低倍率显微物镜，孔径光阑就是物镜的镜框，因此它也是入射光瞳。比较复杂的显微物镜，孔径光阑常设置在它的后面，且靠近或者就在它的像方焦面上，因此入射光瞳趋于无穷远。无论望远镜还是显微镜，物镜和孔径光阑到目镜的距离都比目镜的焦距大得多，所以整个仪器的出射光瞳(即孔径光阑对目镜成的像)都近似地在目

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

镜的像方焦面附近。无论对于哪种目镜，这都在最后一个折射面之后不远的地方。

粗略地说，眼睛的入射光瞳就是瞳孔。我们使用显微镜或望远镜的时候，必须把瞳孔尽量放在接近仪器出射光瞳的位置，通常这就是目镜镜筒

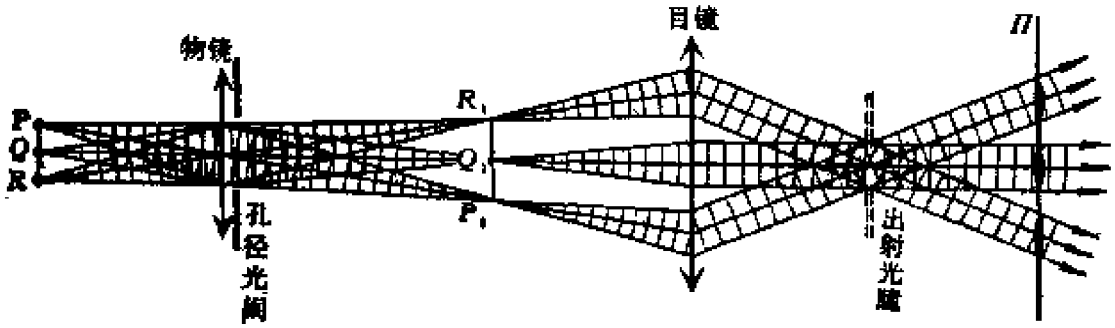


图 9-5　显微镜的出射光瞳

的终端。其中的道理可由图9-5来说明。这是显微镜光路的示意图。根据入射光瞳和出射光瞳的共轭性，穿过入射光瞳的光线，如果不受到光具组中其它光阑的阻碍，都应穿过出射光瞳。由于孔径光阑和光瞳都是对轴上物点而言的，从轴上 Q 点射进入射光瞳的光束，在光具组中不会受到阻碍。但是要使从轴外物点射进入射光瞳的光束，在光具组中完全或大部分不受阻碍，则要求这些物点到光轴的距离在一定范围之内。在图9-5中我们假定 P，R 点在此范围之内，从它们射进入射光瞳的光束不受阻碍地穿过光具组。虽然从 Q,P,R 射进入射光瞳的光束都由光具组穿出来了，当我们在像方用任意一平面 Π 与各出射光束相截时，一般说来，各光束的截面不重合。如果把瞳孔放在这里，就要求它的直径相当大，才能把出射光束全部接收进去。但实际上瞳孔很小，因此来自轴外物点的光束就不能(或大部分不能）进入瞳孔，从而我们也就看不到它们的像，或看起来很暗。然而若将上述截面取在仪器出射光瞳的平面内，由于出射光瞳是所有光束必经之路，它们在此平面内的截面基本上重合。这地方是放置瞳孔最有利的位置。

根据同样的道理我们可以说明，为什么在投影仪器中光源经聚光镜所成的像最好与投射镜头(更确切地说，与它的入射光瞳)重合？应当注意，光具组的孔径光阑和光瞳是对特定的共轭点来说的，对于不同的共轭点，可以有不同的孔径光阑和光瞳。这里我们要找的出射光瞳不是对于光源，而是对于待映的画片而言的。画片在聚光镜的像方，通过其上各点的同心

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

光束是出射光束。从图 8-1 不难看出，限制着出射光束孔径的是光源像 $A'C'B'$ 的边缘，所以对于画片来说，$B'A'$ 便是出射光瞳。图8-1还表明，$B'A'$ 也是来自画片上各点的同心光束共同的出口，如果将投射镜头的入射光瞳放在这里，对它直径的要求最小。此外，在这种安排下，从画片上每一点(譬如 P)射向投影镜头的同心光束中，都包含了来自光源 ACB 上每一点的光线。这样的光束会聚到屏幕上成像时，便不会因光源亮度的不均匀性而造成幕上不均匀的照明。

从上面几个例子可以看出，孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳的概念不仅对轴上物点有意义，对于轴外物点也是重要的，因为它们是从所有物点发出的光束的必由之路。

9.2 视场光阑 入射窗和出射窗

前面讨论的孔径光阑是对轴上共轭点而言的，现在要讨论的视场光阑牵涉到轴外共轭点。

入射光瞳中心 O 与出射光瞳中心 O' 对整个光具组是一对共轭点，若入射线通过 O，出射线必通过 O'。在轴外共轭点 P，P' 之间的共轭光束中通过 O，O' 的那条共轭光线，称为此光束的主光线。随着 P，P' 到光轴距离的加大，主光线通过光具组时会与某个光阑 DD 的边缘相遇(见图9-6)。离光轴更远的共轭点的主光线将被此光阑所遮断。这个光阑叫做视场光阑，主光线 PO 和 $O'P'$ 与光轴的交角 w_0，w_0' 分别称为入射视场角和出射视场角。物平面上被 w_0 所限制的范围，叫做视场。

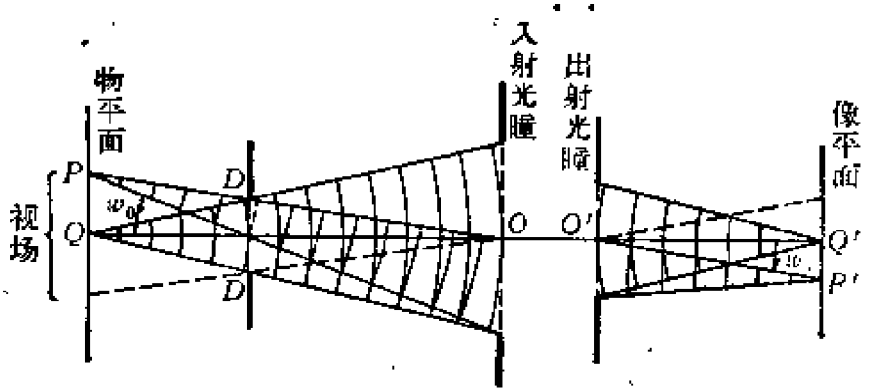
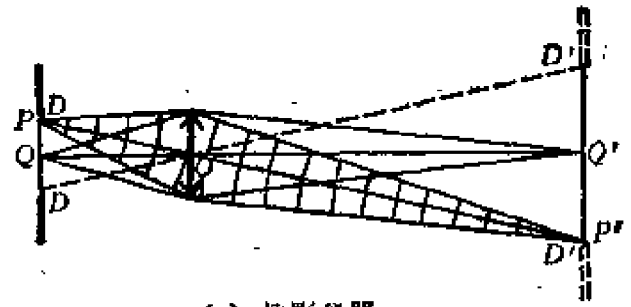


图 9-6 视场和渐晕

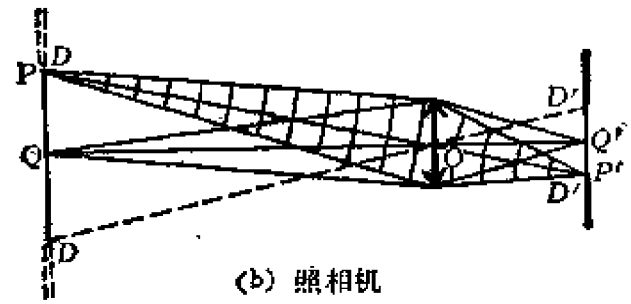
应当指出，并不是只有视场内的物点才能通过光具组成像。设想某个

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

物点比图9-6中的 P 点离轴稍远一点，其主光线虽然被遮，但仍然有一些光线可以从它通过光具组达到像点．不过随着它到光轴距离的增大，参加成像的光束越来越窄，从而像点越来越暗．这种现象实际上早在视场的边缘以内就开始了，从而在像平面内视场的边缘是逐渐昏暗的．这种现象叫做渐晕．要使像平面内视场的边界清晰，可把视场光阑 DD 设在物平面上．投影仪器的视场光阑就是这样安排的(图9-7(a))，此时它在像方的共轭 $D'D'$ 恰好落在像平面上．在照相机的情形里，显然我们不便于把视场光阑放在物平面上，这时可把视场光阑 $D'D'$ 放在像平面上，它物方的共轭 DD 落在物平面上(图9-7(b))①．



(a) 投影仪器



(b) 照相机

图 9-7　视场光阑

显微镜和望远镜的视场光阑既不放在物平面上，也不放在像平面上，而是放在中间像的平面上(见图9-8中的 D_0D_0)，它对于物镜的共轭 DD 在物平面上，对于目镜的共轭 $D'D'$ 在像平面上．

视场光阑在物方的共轭叫做入射窗，在像方的共轭叫做出射窗．例如图9-8中的 DD 和 $D'D'$ 分别是入射窗和出射窗．图9-7(a)中的 $D'D'$ 是出

① 在幻灯机、电影放映机、照相机中的视场光阑通常就是画片或底片周围的矩形外框．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

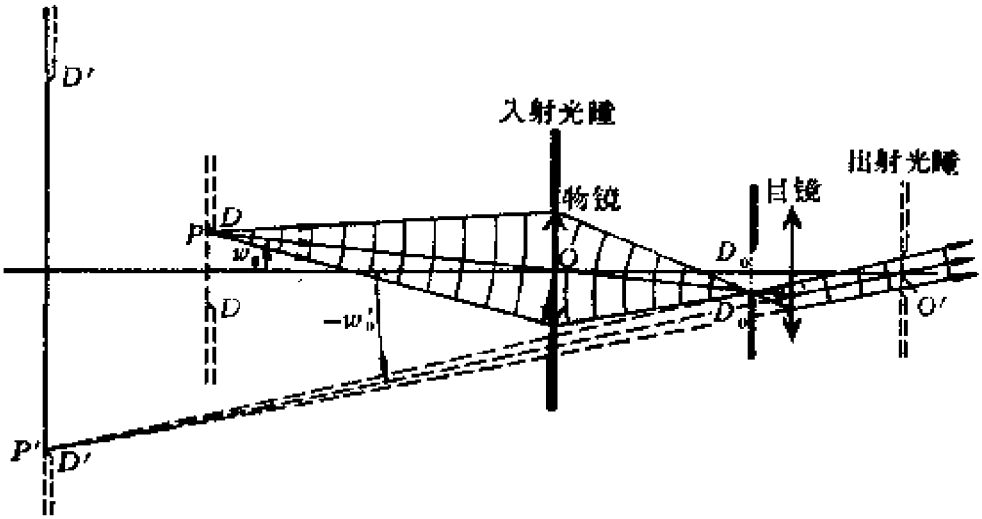


图 9-8　望远镜的视场光阑、入射窗和出射窗

射窗，图9-7(b)中的DD是入射窗。若视场光阑本身就在物方，则它就同时又是入射窗，如图9-6和9-7(a)中的 DD；若视场光阑本身就在像方，则它就同时又是出射窗，如图9-7(b)中的$D'D'$。引进入射窗和出射窗的概念，并与入射光瞳和出射光瞳的知识结合起来，便于我们确定入射视场角 w 和出射视场角 w_0'。例如在图 9-8 中望远镜的入射光瞳就是物镜的边缘，如果把物镜看成薄透镜的话，入射光瞳的中心 O 就是物镜的光心，由 O 引向入射窗 DD 边缘的直线与光轴的交角就是入射视场角 w_0。如前所述，望远镜出射光瞳的中心 O'在目镜之后，这里正是观察者瞳孔的位置。所以出射视场角 w_0' 就是像方视场边缘到视场中心对观察者瞳孔中心所张的角度。

习　　题

1.　一望远镜的物镜直径 5.0cm，焦距 2.0cm，目镜直径 1.0cm，焦距2.0cm，求此望远镜的入射光瞳和出射光瞳的位置和大小。

2.　望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳直径 D' 与物镜直径 D_0 之比为

$$D' = \frac{D_0}{|M|},$$

其中 $M = -f_0/f_E$ 是望远镜的视角放大率。

3.　将望远镜倒过来可作激光扩束之用。设一望远镜物镜焦距 30 cm，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

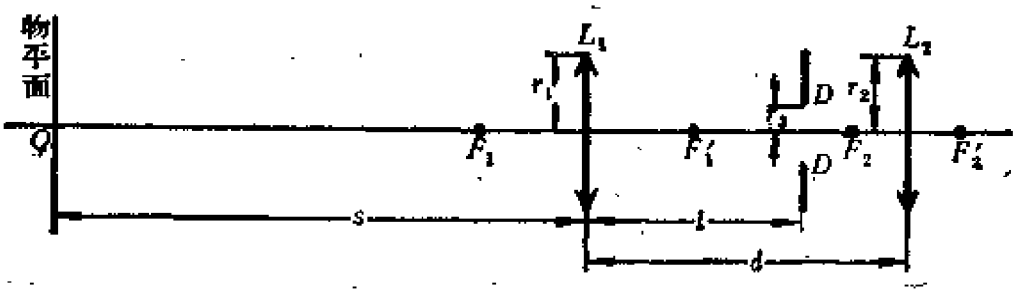
目镜焦距1.5cm，它能使激光光束的直径扩大几倍？

4. 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘．求出射光瞳的位置，并证明在傍轴近似①下出射光瞳的直径 D' 与入射孔径角 u_0 的关系是

$$D' = \frac{2s_0 n u_0}{|M|},$$

式中 $s_0 = 25\text{cm}$ 是明视距离，M 是显微镜的视角放大率，n 是物方折射率（除油浸物镜外，$n \simeq 1$）．

5. 如图中 L_1, L_2 是两个会聚透镜，Q 是物点，DD 是光阑，已知焦距 $f_1 = 2a$，$f_2 = a$，图中标示各距离为 $s = 10a$，$l = 4a$，$d = 6a$；此外透镜与光阑半径之比是 $r_1 = r_2 = 3r_3$．求此光具组的孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳、入射窗和视场光阑的位置和大小．



习题5图

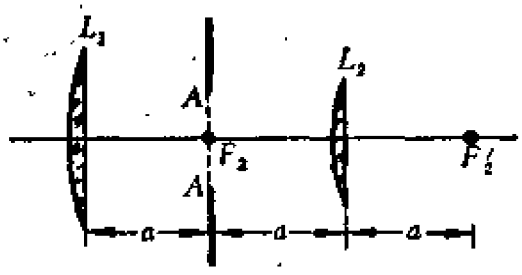
6. 惠更斯目镜的结构详见10.7节图10-14．今在两透镜间放一光阑 AA，设透镜 L_1, L_2 和光阑的直径分别为 D_1, D_2 和 D．试证：

(1) AA 是孔径光阑的条件为

$$\frac{D_1}{3} > D < D_2;$$

(2) 这时对 F_2' 点计算的出射孔径角 u_0' 由下式确定：

$$\tan u_0' = D/2a.$$



习题6图

① 严格的公式应把 u_0 换成 $\sin u_0$，参见§10习题4．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

*§10 像　差

10.1 像差概述

制造各种成像光学仪器的目的是产生一个与原物在几何形状上相似的清晰的像．对于照相机来说，还希望这个像成在一个平面上．归纳起来，我们希望一个共轴光具组有如下性能：

（1）物方每点发出的同心光束在像方仍保持为同心光束；

（2）垂直于光轴的物平面上各点的像仍在垂直于光轴的一个平面上；

（3）在每个像平面内横向放大率是常数，从而保持物、像之间的几何相似性．

7.1节所述的理想成像条件概括了这些要求，然而实际的共轴球面组满足不了这样的要求．任何偏离理想成像的现象，称为像差．

我们已看到，在傍轴条件下理想成像是能近似实现的．傍轴条件要求成像光束的孔径小和仪器的视场小．这样的限制在实用中往往行不通．例如要使显微镜的像比较亮而细部清晰，就不得不加大成像光束的孔径．又如某些特殊用途的照相机要求有较大的视场．在这些情况下人们不得不突破傍轴条件的限制，从而不可避免地会带来这样或那样的像差．搞清产生各种像差的规律，并设法把它们减小到最低限度，是设计各种成像光学仪器的中心问题．

像差可分单色像差和色像差两大类．单色像差有五种：(i)球面像差，(ii)彗形像差，(iii)像散，(iv)像场弯曲(场曲)，(v)畸变．其中(i)和(ii)是大孔径引起的，(iii),(iv)和(v)是大视场引起的，(i)，(ii)，(iii)破坏了光束的同心性，(iv)使像平面弯曲，(v)破坏了物像的相似性．以上五种像差彼此有密切联系，往往几种同时存在．除了单色像差外，对于非单色的物，还存在因色散而引起的色像差．

正弦函数的幂级数为

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots\cdots,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在傍轴条件下所有角度的正弦可只保留一次项θ。如§5中已证明的，照此计算，共轴球面组可以成像，不存在像差。如果我们进一步把下一项$\theta^3/3!$考虑进去，计算从物点发出的每一根光线的横向像差，即该光线经光具组后与理想像平面交点的位置偏离理想点的距离，得到的表达式中有五项，每项的系数称为赛德耳（L.Seidel）系数。若能使五个赛德耳系数中之一为0，则表示上述五种单色像差之一被消除。上述五种单色像差是与五个赛德耳系数对应的。这种像差来自对傍轴理论最低级的修正，故称为初级像差。又因理论是依据正弦函数幂级数中的θ^3项来计算的，这种理论又称三级像差理论。因而可以说，上述五种单色像差是按三级像差理论来分类的。

在较严格的光学仪器设计中，往往还采用光线追迹法，即严格地按照几何光学三定律计算每根光线的折射或反射，求出它们对理想像点的偏离。

所有上面列举的像差，都是按几何光学计算的，统称几何像差。即使把所有几何像差全部消除，由于存在着衍射效应，理想成像条件仍不能满足。这时像的质量就要靠波动光学的理论来分析和评价了（参见第五章）。

10.2 球面像差

当孔径较大时，由光轴上一物点发出的光束经球面折射后不再交于一点（图10-1），这种现象叫做球面像差，简称球差。

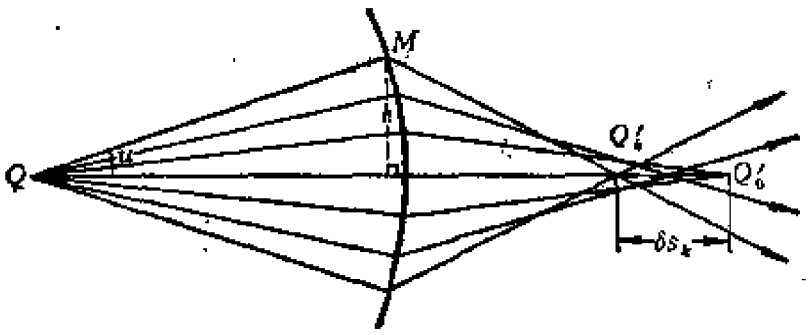


图10-1 球　　差

球差的大小与光线的孔径有关，孔径既可用孔径角u来表征，又可用光线射在折射面上的高度h来表征。我们这里采用后者（对于平行于光轴的入射光束来说，只能用后者）。为定量地描述球差，我们定义高度为h的光

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

线的交点Q_h'到傍轴光线的交点Q_0'之间的距离δs_h为纵向球差，并规定当光线由左向右时，若Q_h'在Q_0'之左时，$\delta s_h<0$（负球差），Q_h'在Q_0'之右时，$\delta s_h>0$（正球差）。

透镜的纵向球差δs_h与透镜的折射率n_L和曲率半径r_1，r_2都有关系。因透镜焦距f也是n_L，r_1，r_2这三个参量的函数（见式(6.11)），故对给定的n_L，同样焦距的透镜可以有不同的曲率比r_1/r_2，选择这个比值，可使球差的数值达到最小，但不能使之完全消除。以图10-2中所示薄透镜为例，它的$n_L=1.5$，$f=100$cm，根据计算，选择$r_1/r_2=-1/6$，可使$h=10$cm的入射平行光束产生的球差达到最小（图10-2(a)）。按照光的可逆性原理，若把物点放在焦点上，则应把透镜倒过来使用，即选$r_1/r_2=-6$（图10-2(b)）。这种减小单个透镜球差的方法，叫做配曲法。

用配曲法不可能将一个透镜的球差完全消除。理论计算表明，凸透镜的球差是负的，凹透镜的球差是正的。所以把凸、凹两个透镜粘合起来，组成一个复合透镜，可使某个高度h上的球差完全抵消（见图10-3所示的例子）。在考虑到透镜有一定厚度时，此法不能同时在任何高度上消除球差，但可使剩余的球差减到比单透镜小得多的程度。

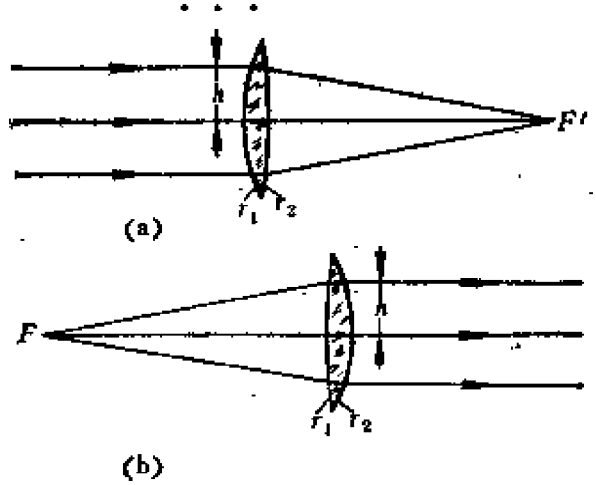
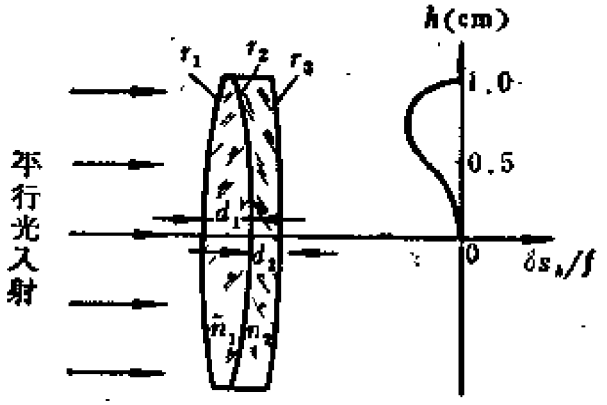


图 10-2　用配曲法减小透镜的球差



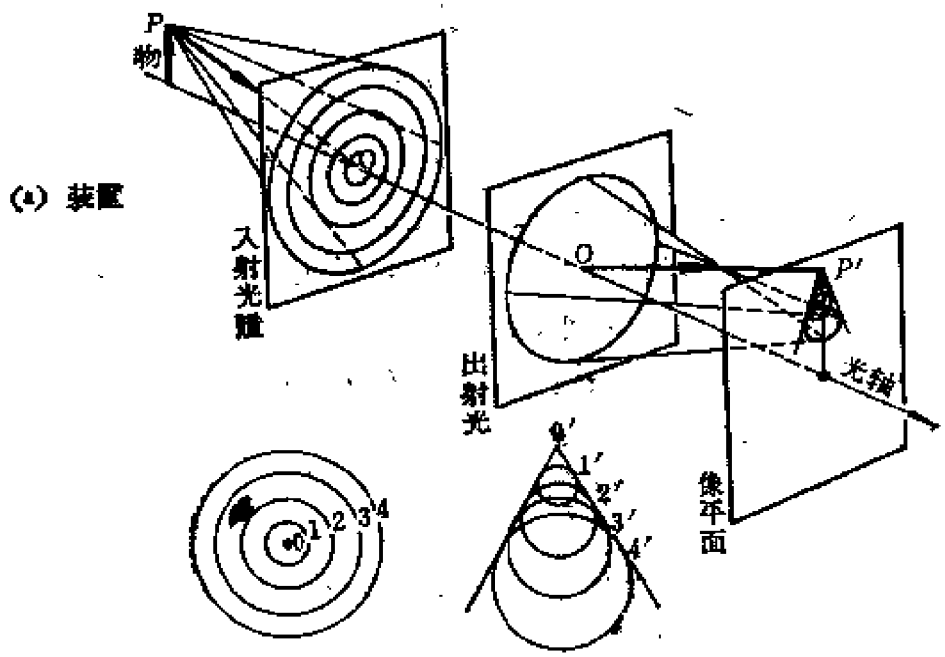
$n_1=1.5166$
$n_2=1.6256$
$r_1=3.550$cm
$r_2=-3.550$cm
$r_3=-60.000$cm
$d_1=0.300$cm
$d_2=0.200$cm
$f=79.563$cm
$h=1.0$cm

图 10-3　用粘合透镜消球差

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.3 彗形像差

傍轴物点发出的宽阔光束经光具组后在像平面上不再交于一点，而是形成状如彗星的亮斑．这种像差称为彗形像差，简称彗差．如图10-4(a))由物点发出的主光线PO经光具组后与像平面交于P'(理想交点)．为了描述有彗差时光束的特点，我们在光瞳上作一系列同心圆1，2，3，4，…(图10-4(b))，计算表明，经过各个圆周的光线在像平面上仍将落在一系列圆周1′，2′，3′，4′，…上，不过这些圆不再是同心的，半径越大的圆，其中心离P'越远(图10-4(c))．这样就形成了如彗星般的光斑．



(a) 装置　(b) 光瞳上　(c) 像平面上

图 10-4　彗　　差

球差和彗差往往混在一起，只有当轴上物点的球差已消除时，才能明显地观察到傍轴物点的彗差．

利用配曲法可消除单个透镜的彗差，也可利用粘合透镜来消除彗差．然而消球差和消彗差所要求的条件往往不一致，所以二者不容易同时消除．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.4 正弦条件和齐明点

前已述及，显微镜物镜需要使傍轴小物能以大孔径成像．现在我们根据物像之间各光线的等光程性研究这样一个问题：在轴上已消球差的前提下，傍轴物点以大孔径光束成像的条件是什么？

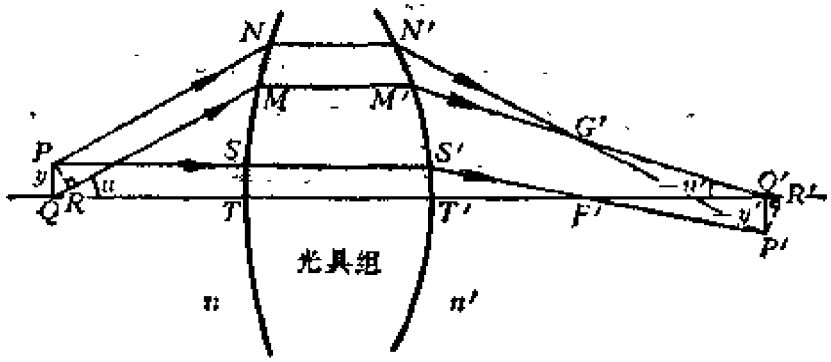


图 10-5 正弦条件

如图10-5，设轴上物点 Q 和傍轴物点 P 分别成像于 Q'，P'．光线 PS 与光轴平行，从而其共轭线通过像方焦点 F'．光线 PN 与 QM 平行，它们对光轴的倾角为 u，它们的共轭线 $N'P'$ 和 $M'Q'$ 交于某点 G'．作 PR 上 QM，$P'R' \perp M'Q'$，在傍轴条件下

$$(F'Q') \simeq (F'P'),\quad (G'R') \simeq (G'P'),$$

按照物像间等光程性原理，我们有

$$(QMM'Q') = (QTT'Q'),\quad (PNN'P') = (PSS'P'),$$

以及①

$$(PSS'F') = (QTT'F'),\quad (PNN'G') = (RMM'G'),$$

由以上各等式可得

$$(QR) = (Q'R').$$

设 $\overline{PQ} = y$，$\overline{P'Q'} = -y$，$\angle MQT = u$，$\angle M'Q'T' = -u'$．由图可见

$$(QR) = n\,\overline{QR} = ny\sin u,\qquad (Q'R') = n'\,\overline{Q'R'} = n'y'\sin u'$$

（n，n' 是物、像方折射率），于是

$$ny\sin u = n'y'\sin u'. \tag{10.1}$$

① 参见§ 4 思考题 1 (2)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

这公式称为阿贝正弦条件(E.Abbe，1879年)，它是在轴上已消球差的前提下，傍轴物点以大孔径的光束成像的充分必要条件。

在光轴上已消除球差且满足阿贝正弦条件的共轭点，叫做齐明点。4.4节和5.5节已证明，单个折射球面有一对齐明点，其中实物点Q到球心C的距离$\overline{QC}=(n'/n)r$，虚像点Q'到球心的距离$\overline{Q'C}=(n/n')r$，这里r为球面半径，$n>n'$。这对齐明点在高倍显微镜中有重要应用，油浸物镜就是照此原理设计而成的。如图10-6所示，第一个透镜作成半球形，平面一侧朝着物点Q_1，二者之间的空隙用一滴油填充，油的折射率n与透镜玻璃的折

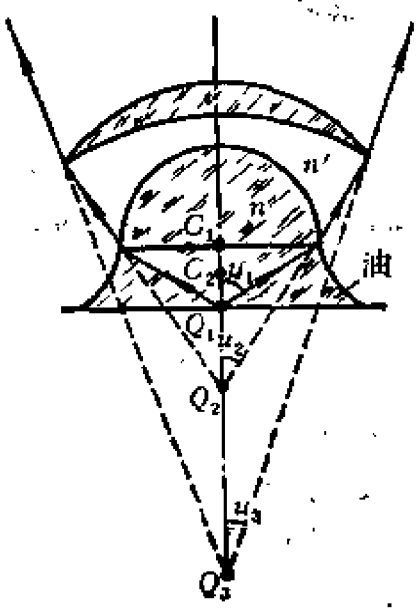


图 10-6　油浸显微物点

射率相等。把Q_1调节在齐明点上，它将以宽光束成虚像于共轭点Q_2。如果把第二个透镜做成凹凸透镜，令其第一折射面的中心位于Q_2，并使Q_2对于第二折射面也是齐明点，则光束经第一折射面时不折射，再经第二折射面时，在更远处成虚像Q_3。可以看出，在这种成像的过程中，孔径一次一次地减小，像一次一次地放大，且不产生球差和彗差。用更多的凹凸透镜本可使这种过程继续下去，但由于存在色散，折射次数过多将会引起较大的色差(见下面10.7节)。故实际中为利用齐明点而设置的透镜往往不多于两个。

最后，让我们谈谈阿贝正弦条件(10.1)

$$ny\sin u=n'y'\sin u'$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

与亥姆霍兹公式(7.8)

$$ny\tan u = n'y'\tan u'$$

之间的关系。首先可以看出，除了傍轴区域，二者是不能同时满足的。阿贝正弦条件是由物理规律(费马原理)导出的，它能够在一对特定的共轭点(齐明点)上实现。亥姆霍兹公式是共轴折射球面组在空间所有点以任意宽的光束理想成像的必要条件。二者的冲突表明，后者的要求是不能实现的，请注意不要误会，以为在齐明点附近实现了理想成像的要求。§ 7 提出的那种理想成像的标准，齐明点远没有达到，因为从横向来看，齐明点附近能清晰成像的物点必须是傍轴的；从纵向来看，在一对齐明点附近的其它点都不再是齐明点。

10.5 像散和像场弯曲

这两种像差都是由于物点离光轴较远、光束倾斜度较大引起的。像散现象如图10-7所示，出射光束的截面一般呈椭圆形，但在两处退化为直线，

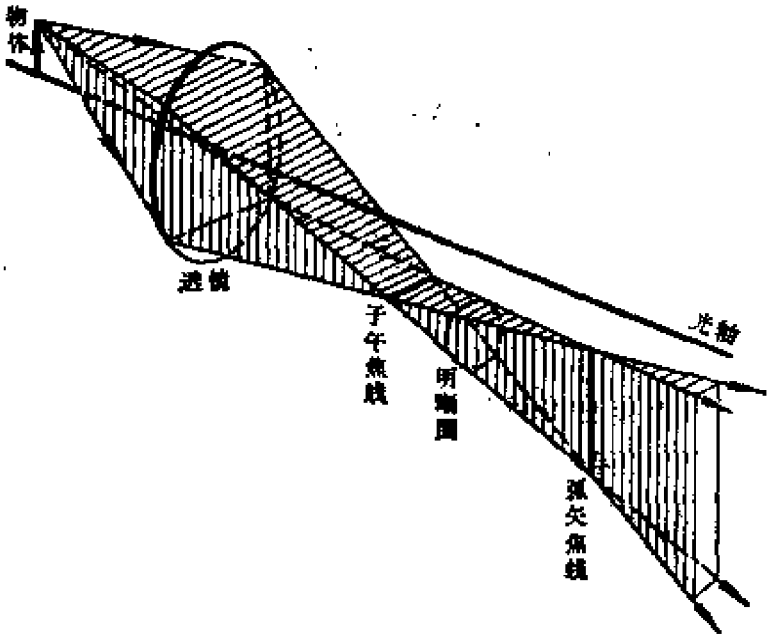


图 10-7 像 散

称为散焦线。两散焦线互相垂直，分别称为子午焦线和弧矢焦线。在两散焦线之间某个地方光束的截面呈圆形，称为明晰圈。可以认为这里是光束聚焦最清晰的地方，是放置照相底片或屏幕的最佳位置。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

对于物平面上所有的点，散焦线和明晰圈的轨迹一般是个曲面．这现象示于图10-8，称为像场弯曲．图中Σ_M，Σ_S和Σ_C分别代表子午焦线，弧矢焦线和明晰圈的轨迹．如果照相机中存在着像场弯曲，感光底片就需要做成同样形状的曲面，这是很不方便的．对于单个透镜，像场弯曲可通过在透镜前适当位置上放一光阑来矫正(图10-8(b))．像散现象则需通过复杂的透镜组来消除．

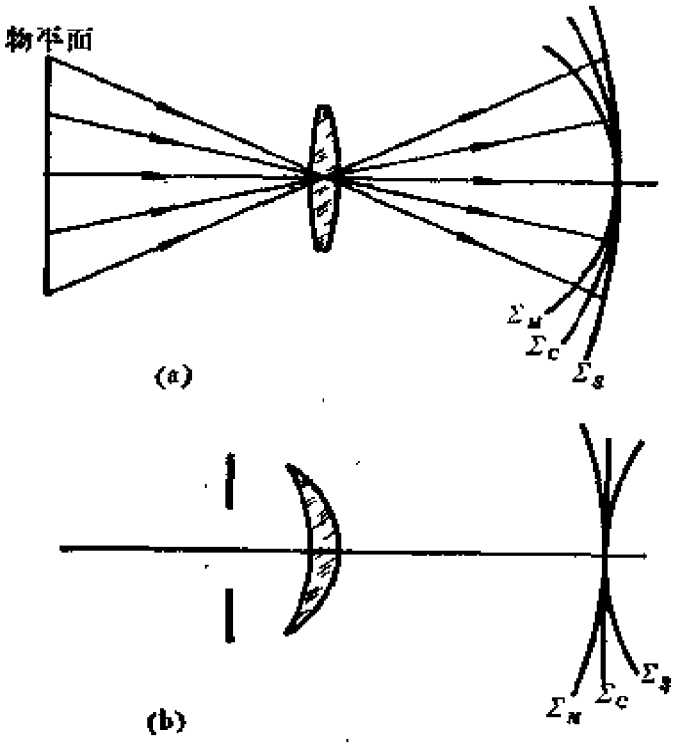


图 10-8　像场弯曲及其矫正

10.6　畸变

畸变也是由于光束的倾斜度较大引起的．与球差、彗差和像散不同，畸变并不破坏光束的同心性，从而不影响像的清晰度．畸变表现在像平面内图形的各部分与原物不成比例．图10-9(a)是放在物平面内的方格，若远光轴区域的放大率比光轴附近大，在像平面内就会出现如图10-9(b)所示的情景，这现象称为枕形畸变；反之，若远光轴区域的放大率比光轴附近小，在像平面内就会出现如图10-9(c)所示的情景，这现象称为桶形畸变．究竟产生哪种畸变，与孔径光阑的位置有关．例如对凸透镜来说，将光阑放在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

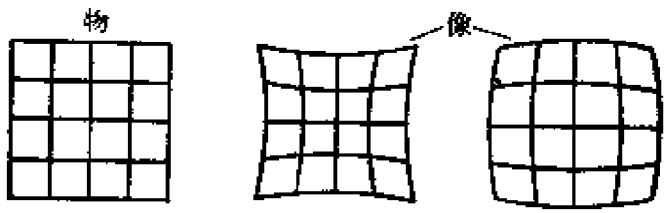


图 10-9 畸　　变

前面(图10-10(a)),就会产生桶形畸变；光阑放在后面(图10-10(b)),则产生枕形畸变①．有的照相机里采用如图10-10(c)所示的对称镜头，将光阑放在一对相同的透镜中间，可以使两种相反的畸变互相抵消．

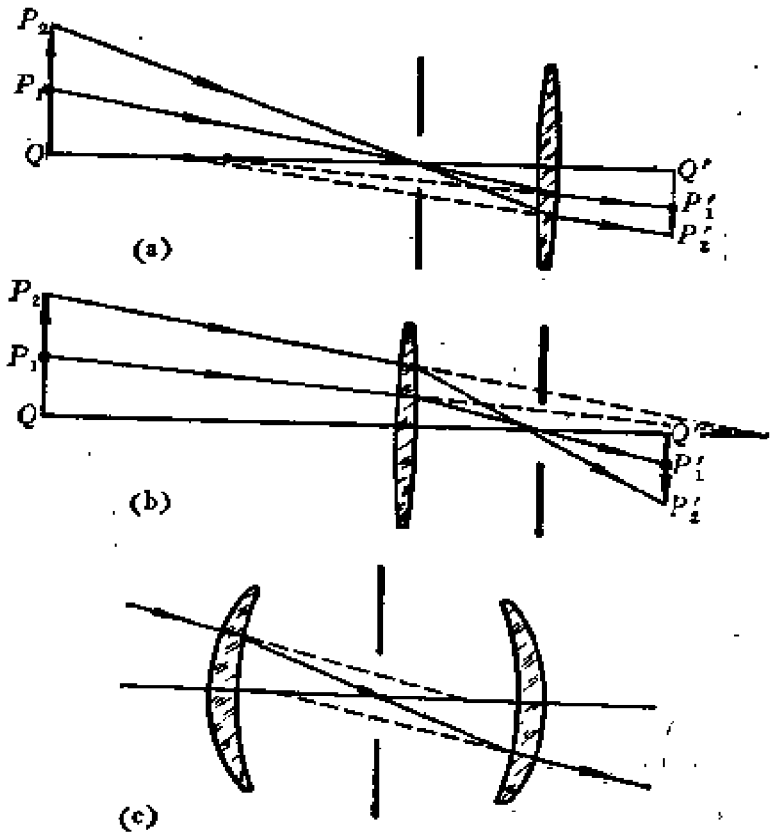


图 10-10　用光阑消除畸变

① 这与凸透镜的球差是负的有关，参见图10-10(a),(b)和本节思考题．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.7 色像差

如图10-11所示，由于折射率随颜色(波长)不同，不同颜色的光所成的像，无论位置和大小都可能不同，前者称为位置色差(或轴向色差)，后者称为放大率色差(或横向色差)。

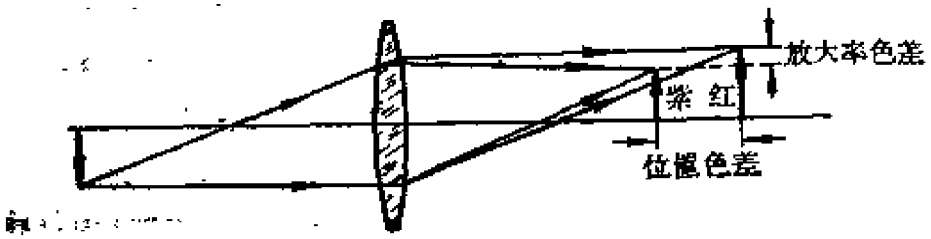


图 10-11 色 差

单个透镜的色差是无法消除的，但将一对用不同材料做成的凸、凹透镜粘合起来(见图10-12)，可以对选定的两种波长消除色差。根据磨镜者

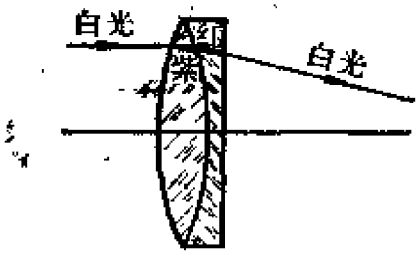


图 10-12 例题——消色差粘合透镜

公式(6.5)，两透镜的光焦度可分别写成

$$P_1=\frac{1}{f_1}=(n_1-1)K_1,\quad P_2=\frac{1}{f_2}=(n_2-1)K_2,$$

其中 $K_1=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$，$K_2=\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)$都是与波长无关的常数。两透镜粘合起来的光焦度为

$$P=P_1+P_2=(n_1-1)K_1+(n_2-1)K_2,$$

对于目视光学仪器，通常在眼睛最敏感的波长 5550 Å①两侧各选一波长来消除色差，它们分别是氢光谱中的 C 线 (6563 Å，红色)和 F 线 (4861 Å，

① 参见§11.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

兰色)．粘合透镜对两个波长的光焦度分别为

$$P_C=(n_{1C}-1)K_1+(n_{2C}-1)K_2,$$

$$P_F=(n_{1F}-1)K_1+(n_{2F}-1)K_2.$$

只要适当地选择曲率半径 r_1,r_2,r_3，使 K_1和 K_2满足下式

$$P_F-P_C=(n_{1F}-n_{1C})K_1+(n_{2F}-n_{2C})K_2=0,$$

对 C 线和 F 线的焦距色差即可消除．由于一般折射率随波长而减小，$n_{1F}-n_{1C}>0$，$n_{2F}-n_{2C}>0$，故满足上式的K_1和 K_2正负号必相反，亦即只有一个凸透镜和一个凹透镜粘合起来，才能消除色差．

例题 用冕玻璃和火石玻璃(折射率见下表)来做焦距为 10.0cm 的消色差粘合透镜，求两透镜焦距．焦距通常以可见光区域中部的钠光谱D线为准，$\lambda_D=5893$Å，黄色．

玻　　璃	n_F	n_D	n_C
冕玻璃	1.517	1.511	1.509
火石玻璃	1.633	1.621	1.616

解

$$P_D=(n_{1D}-1)K_1+(n_{2D}-1)K_2$$
$$=10.0\mathrm{D},$$

$$P_F-P_C=(n_{1F}-n_{1C})K_1+(n_{2F}-n_{2C})K_2=0.$$

将上表中的数值代入上列联立方程组，即可解得

$$K_1=45.7(\text{冕玻璃}),\quad K_2=-21.5(\text{火石玻璃}).$$

从而

$$P_1=(n_{1D}-1)K_1=23.4\mathrm{D},$$
$$P_2=(n_{2D}-1)K_2=-13.4\mathrm{D},$$
$$f_1=4.27\mathrm{cm},\quad f_2=-7.46\mathrm{cm}.$$

在粘合透镜中有三个曲率半径r_1,r_2,r_3可供选择，除了保证上述两个焦距之外，还可考虑消除球差和彗差的问题．

对于粘合薄透镜，主面与透镜所在平面重合，焦距的色差消除了，不同颜色光的焦点就自然重合在一起，然而当光具组有一定厚度时情况便不如此．此时为了消除全部色差，必须同时使焦距相等、焦点重合．可是在实际的某些场合下，并不要求消除全部色差．例如显微镜或望远镜的目镜，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

只要求不同颜色的像对眼睛所张的视角相同(见图10-13)，6.4节的式(8.4)表明，视角放大率只与焦距有关，因而只需消除焦距色差，无需消除

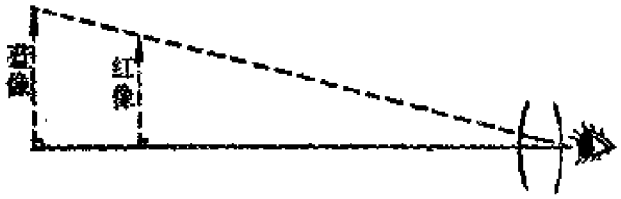


图10-13 只消除了放大率色差，但未消除位置色差的目镜，不同颜色的像看起来是重迭的

位置色差。常见的目镜多由两个材料相同的薄透镜组成，它们之间相隔一定距离 d，在这种情况下透镜的光焦度为①

$$P = P_1 + P_2 - P_1P_2d = (n-1)(K_1+K_2) - (n-1)^2K_1K_2d.$$

取对折射率 n 的导数：

$$\frac{\delta P}{\delta n} = K_1 + K_2 - 2(n-1)K_1K_2d.$$

由极值条件 $\delta P/\delta n = 0$ 得

$$d = \frac{K_1+K_2}{2(n-1)K_1K_2} = \frac{P_1+P_2}{2P_1P_2} = \frac{f_1+f_2}{2}. \qquad (10.2)$$

因 f_1, f_2 与折射率 n 有关，n 与波长 λ 有关，故只能对于某个特定的波长 λ_0 选择 d 满足上式。用这样的透镜组作目镜，对波长在 λ_0 附近的光来说是消除了视角色差的。

下面介绍两种常用的目镜。

(1) 惠更斯目镜

向场镜 L_1 和接目镜 L_2 的焦距和间隔之间的比例为

$$f_1 : f_2 : d = 3 : 1 : 2.$$

整个光具组的基点，基面已在§7的例题1中计算过，现重画于图10-14中与简单放大镜一样，物 QP 的位置放在物方焦点 F 内侧附近，因 F 在 L_1 之后，这只能是虚物。经 L_1 所成的中间像 Q_1P_1 在两透镜之间。它是实像，

① 参见式(7.12)。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

同时是下一步的实物．最后的虚像 $Q'P'$ 成在明视距离以外，整个光路如图10-14所示．

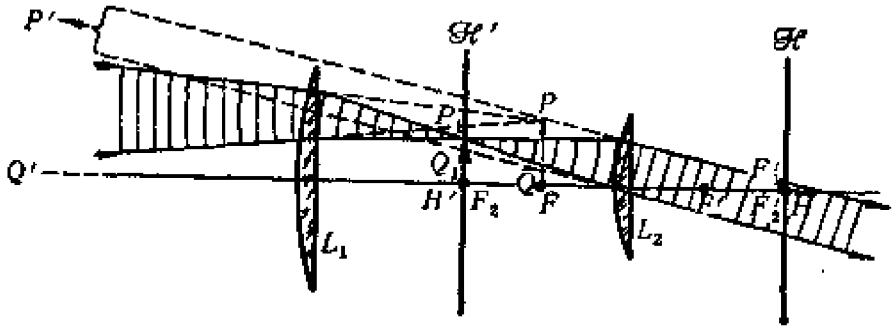


图10-14　惠更斯目镜

（2）冉斯登(J.Ramsden)目镜

向场镜 L_1 和接目镜 L_2 的焦距和间隔之间的比例为

$$f_1 : f_2 : d = 1 : 1 : 1.$$

整个系统的焦点 F, F' 和主面 $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ 的位置和光路示于图 10-15(a)，物体 QP 同样应放在焦点 F 内侧附近．

由于冉斯登目镜的 F 和物体 QP 就在向场镜 L_1 的表面上，在它表面上附着的灰尘、缺陷或伤痕将与物体一起放大，同时出现在目镜的像平面上，

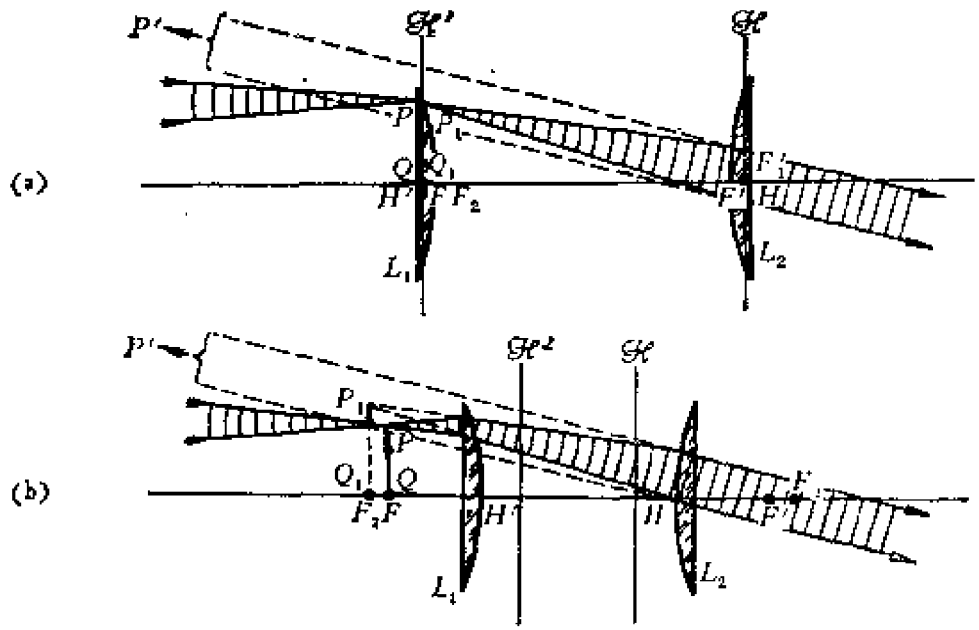


图 10-15　冉斯登目镜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

使得视场模糊不清．这个缺点是惠更斯目镜所没有的．为了避免这缺点，冉斯登目镜常采用以下变通形式：

$$f_1 : f_2 : d = 1 : 1 : \frac{2}{3}$$

（见图10-5(b)）．这时焦点 F 将在向场镜前面一些，这样物体就可躲开透镜的表面．当然这样做使得条件(10.2)不严格满足，牺牲了一些消色差的性能．

通常为了测量的目的，需要在目镜中装上透明标尺或叉丝．标尺或叉丝必须在物平面或某一中间平面上，以便一起放大，同时出现在目镜的像平面上．这就要求中间像既是实像，又是下一步的实物．在冉斯登目镜中标尺或叉丝装在物体 QP 所在平面内．在惠更斯目镜中 QP 是虚物，如果一定要装标尺或叉丝，它只能装在中间像 Q_1P_1 所在的平面内．但由于这时标尺或叉丝只对接目镜 L_2 成像，它的色差是不能消除的．这一点是冉斯登目镜比惠更斯目镜优越的地方．

10.8 小结

上面我们简单地介绍了各种像差的成因、现象和消除途径．完全消除所有的像差是不可能的，也是不必要的．由于各种光学仪器都有特定的用途，各自遇到不同的矛盾，从而需要重点考虑的只是某几种类型的像差．例如显微物镜的对象是傍轴小物，但要求孔径大，主要矛盾在于球差和彗差．某些照相机的视场较大，特别是航测或翻拍镜头对物像间的相似性要求较严格，重点在于消除像场弯曲和畸变．目镜的重点是消除视角色差．此外，由于接收器件（眼睛、照相底片等）的分辨本领有一定限度，所以只需将像差减小到接收器件不能分辨的程度就够了．总之在每种光学仪器中我们只需重点地将某些像差消除到一定的程度，这是完全可以做到的，但并不轻而易举．我们只要看看近代精密光学仪器结构的复杂性，就可体会到消除像差之不易．这些问题是应用光学中的专门课题，远远超出了本课程的范围．

思 考 题

用光路图说明，对于有负球差的透镜，孔径光阑在前时产生桶形畸变，在后时产生枕形畸变．有正球差的透镜则正好相反（参考图10-10(a)，(b)）．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

习　题

1. 证明在一对齐明点附近不可能有另一对齐明点.

2. 在图10-6的油浸显微物镜中,设半球形透镜的半径为 r，第二个透镜(凹凸)的第一个以Q_2为中心的折射面半径为R,两透镜的折射率皆为 n，空气的折射率 $n'=1$，求图中 Q_1,C_2,Q_2,Q_3 各点到 C_1的距离，以及凹凸透镜另一面的曲率半径.

3. 在上题中设 $n=1.5$，试计算此物镜的数值孔径 $\mathrm{N.A.}=n\sin u_1$ 以及孔径角 u_2,u_3 的正弦.

4. 试证明，显微镜出射光瞳直径D'由下式确定:

$$D'=\frac{2s_0 n\sin u_0}{|M|}=2s_0\frac{\mathrm{N.A.}}{|M|},$$

即D'正比于数值孔径$\mathrm{N.A.}=n\sin u_0$，反比于视角放大率M.($s_0=25\mathrm{cm}$，是明视距离.)

5. 拟用玻璃K9($n_D=1.5163$，$n_F=1.5220$，$n_C=1.5139$)和重火石玻璃F4($n_D=1.6199$，$n_F=1.6321$，$n_C=1.6150$)来做消色差粘合透镜，焦距100mm，若已确定其负透镜的非粘合面为平面，试求其余各面的曲率半径.

§11　光度学基本概念

11.1　辐射能通量和光通量

我们知道，可见光在电磁辐射中只占一个很窄的波段.研究光的强弱的学科称光度学，而研究各种电磁辐射强弱的学科，称为辐射度学.

辐射度学中一个最基本的量是辐射能通量,或者说辐射功率，它是指单位时间内光源发出或通过一定接收截面的辐射能，在CGS和MKS制中它的单位分别是瓦(W)和千瓦(kW).

对于非单色辐射，辐射能通量的概念显得太笼统，人们往往关心能量的频谱分布.用Ψ代表辐射能通量,$\Delta\Psi_\lambda$代表在波长范围

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

λ 到 $\lambda+\Delta\lambda$ 中的辐射能通量．对于足够小的 $\Delta\lambda$，可以认为 $\Delta\Psi_\lambda \propto \Delta\lambda$，于是写成 $\Delta\Psi_\lambda = \psi(\lambda)\Delta\lambda$，各种波长的总辐射通量则为

$$\Psi = \sum_\lambda \Delta\Psi_\lambda = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\sum_\lambda \psi(\lambda)\Delta\lambda,$$

即

$$\Psi = \int \psi(\lambda)d\lambda, \qquad (11.1)$$

这里 $\psi(\lambda)$ 描述着辐射能在频谱中的分布，称为辐射能通量的谱密度．

研究光的强度，或更广泛些，研究电磁辐射的强度，都离不开检测器件，如光电池、热电偶、炭斗、光电倍增管、感光乳胶等．一般说来，每种检测器件对不同波长的光或电磁辐射有不同的灵敏度．检测器件的这种特性用其光谱响应曲线来表征．光谱响应 R_λ 的定义是检测器件的输出讯号(通常是电压或电流)的大小与某个波长 λ 的入射光功率之比．图11-1给出一些光电阴极的光谱响应曲线，它显示不同器件的光谱响应差别很大．在光度学或辐射度学的测量中往往希望有 R_λ 不随 λ 变化的器件，近似于黑体的热电偶或炭斗可以满足这一要求，它们的 R_λ 在包括可见光的相当大波长范围内是常数．

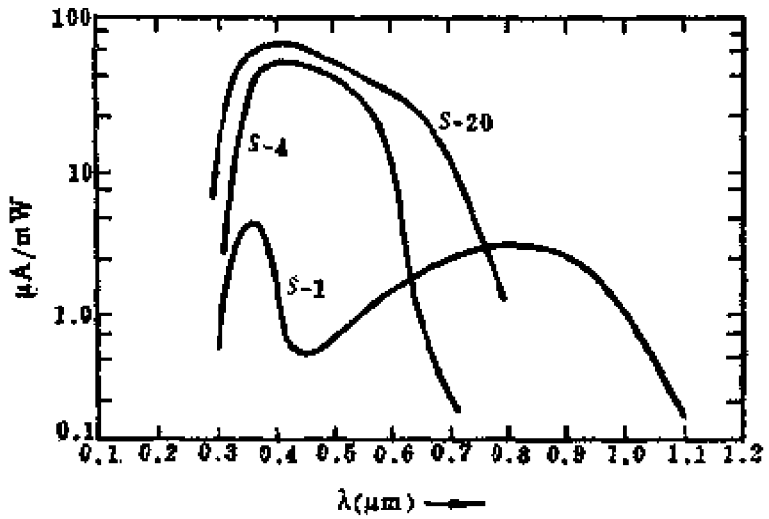


图 11-1　光电阴极的光谱响应曲线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在光学的发展史中可见光波段曾占有特殊的地位．随着人们认识的发展和检测技术的进步，眼睛的作用越来越多地被客观的(或者说物理的)仪器所取代．可见光强度的度量已可归入更普遍的辐射度量之内．但是在某些领域中，人类的眼睛仍不失为一个重要的接收或检测器件而保持其特殊地位．例如，虽然人们越来越多地用照相机去拍摄显微镜和望远镜所成的像，但用肉眼观察还是不可避免的．又如，照明技术是直接为人类创造适当的工作环境而服务的，它就不能不考虑人类眼睛对光的适应性．下面谈谈人类眼睛的光谱响应特征．

诚然，光使眼睛产生亮暗感觉的程度是无法作定量比较的，但人们的视觉有办法相当精确地判断两种颜色的光亮暗感觉是否相同；所以为了确定眼睛的光谱响应，可将各种波长的光引起相同亮暗感觉所需的辐射通量进行比较．对大量具有正常视力的观察者所做的实验表明，在较明亮环境中人的视觉对波长为5550Å左右的绿色光最敏感．设任一波长为 λ 的光和波长为5550Å的光，产生同样亮暗感觉所需的辐射能通量分别为 $\Delta\Psi_\lambda$ 和 $\Delta\Psi_{5550}$，我们把后者与前者之比

$$V(\lambda)=\frac{\Psi_{5550}}{\Psi_\lambda} \tag{11.2}$$

叫做视见函数．例如，实验表明，要引起与1mW的5550Å绿光相同亮暗感觉的4000Å紫光需要2.5W，于是在4000Å的视见函数值为

$$V(4000\text{Å})=\frac{10^{-3}}{2.5}=0.0004.$$

表Ⅰ-4和图11-2中分别给出了国际上公认的视见函数值和曲线．可以看出，在4000Å—7600Å范围以外，$V(\lambda)$ 实际上已趋于零．应当指出，在比较明亮的环境中(如白昼)和比较昏暗的环境中(如夜晚)，视见函数是不同的．图11-2中实线代表前者，虚线代表后者，它们分别称为适光性视见函数和适暗性(或微光)视见

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表1-4　适光性视见函数

λ(Å)	V(λ)	λ(Å)	V(λ)	λ(Å)	V(λ)
3800	0.0000	5200	0.710	6600	0.061
3900	0.0001	5300	0.862	6700	0.032
4000	0.0004	5400	0.954	6800	0.017
4100	0.0012	5500	0.995	6900	0.0082
4200	0.0040	5600	0.995	7000	0.0041
4300	0.0116	5700	0.952	7100	0.0021
4400	0.023	5800	0.870	7200	0.00105
4500	0.038	5900	0.757	7300	0.00052
4600	0.060	6000	0.631	7400	0.00025
4700	0.091	6100	0.503	7500	0.00012
4800	0.139	6200	0.381	7600	0.00006
4900	0.208	6300	0.265	7700	0.00003
5000	0.323	6400	0.175	7800	0.000015
5100	0.503	6500	0.107		

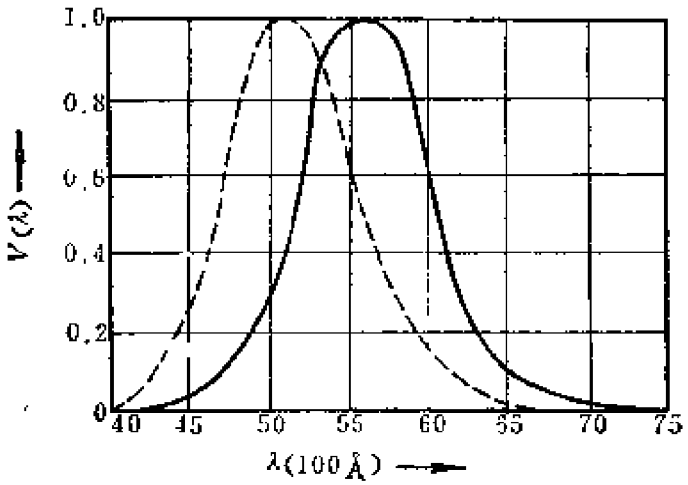


图 11-2　视见函数曲线

函数．可以看出，在昏暗的环境中，视见函数的极大值朝短波(蓝色)方向移动．所以在月色朦胧的夜晚，我们总感到周围的一切笼罩了一层蓝绿的色彩，便是这个缘故．视见函数的这种差别，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

来源于视网膜上有两种感光单元，一种呈圆锥状，称为圆锥视神经细胞；另一种呈圆柱状，称为圆柱视神经细胞．在明亮的环境中圆锥视神经细胞起作用，在昏暗的环境中圆柱视神经细胞起作用，它们有不同的光谱响应特性，从而形成适光性和适暗性两个不同的视见函数．

量度光通量的多少，要将辐射通量以视见函数为权重因子折合成对眼睛的有效数量．例如对波长为 λ 的光，光通量 $\Delta\Phi_\lambda$ 与辐射能通量 $\Delta\Psi_\lambda$ 的关系为

$$\Delta\Phi_\lambda \propto V(\lambda)\Delta\Psi_\lambda,$$

多色光的总光通量

$$\Phi \propto \sum_\lambda V(\lambda)\Delta\Psi_\lambda = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\sum_\lambda V(\lambda)\psi(\lambda)\Delta\lambda$$

$$= \int V(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda,$$

写成等式，则有

$$\Phi = K_M\int V(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda, \qquad (11.3)$$

式中 K_M 是波长为5550 Å的光功当量，也可叫做最大光功当量，其值由 Φ 和 Ψ 的单位决定．光通量单位为流明(lumen，记作 lm)，

$$K_M = 683\ \mathrm{lm/W}.$$

有关光度学单位的定义留到11.5节中再详谈．

11.2 发光强度和亮度

当光源的线度足够小，或距离足够远，从而眼睛无法分辨其形状时，我们把它叫做点光源．在实际中多数情形里，我们看到的光源有一定的发光面积，这种光源叫做面光源，或扩展光源．

点光源Q 沿某一方向 r 的发光强度 I 定义为沿此方向上单位立体角内发出的光通量．如图11-3所示，我们以 r 为轴取一立体角元 $d\Omega$，设 $d\Omega$ 内的光通量为 $d\Phi$，则沿 r 方向的发光强度为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

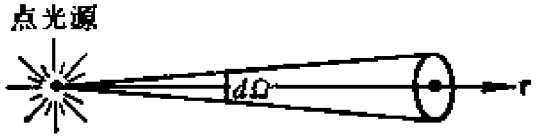


图 11-3　发光强度

$$I=\frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{11.4}$$

发光强度的单位为坎德拉(candela,记作cd),

$$1\text{ 坎德拉}=\frac{1\text{ 流明}}{1\text{ 球面度}}.$$

大多数光源的发光强度因方向而异. 图11-4显示了一盏电灯在加罩前后各方向发光强度的角分布.

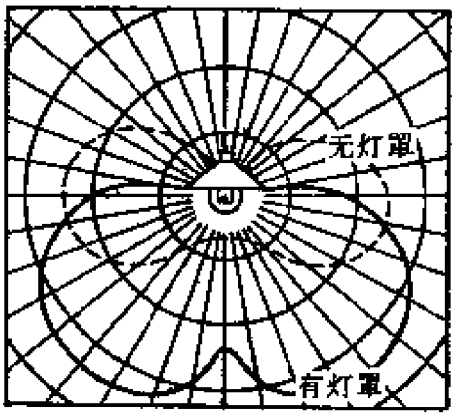


图 11-4　电灯发光强度的角分布

扩展光源表面的每块面元 dS 沿某方向 r 有一定的发光强度 dI. 如图11-5所示,设 r 与法线 n 的夹角为 θ,当一个观察者迎着

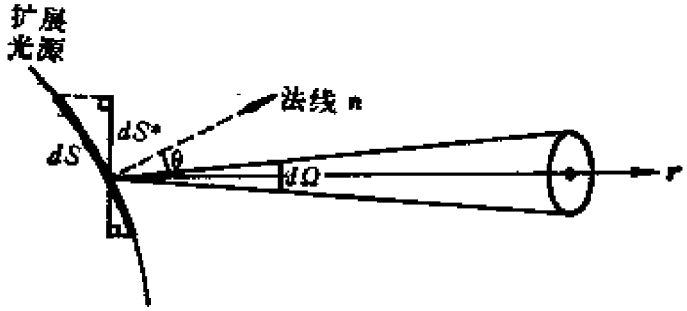


图 11-5　亮　　度

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

r 的方向观察dS时，它的投影面积为$dS^* = dS\cos\theta$. 面元dS沿 r 方向的光度学亮度(简称亮度)B定义为在此方向上单位投影面积的发光强度，或者更具体一些，它是在 r 方向上从单位投影面积在单位立体角内发出的光通量. 用公式表示，则有

$$B \equiv \frac{dI}{dS^*} = \frac{dI}{dS\cos\theta},$$

或

$$B \equiv \frac{d\Phi}{d\Omega dS^*} = \frac{d\Phi}{d\Omega dS\cos\theta}. \qquad (11.5)$$

从式(11.5)可知，光度学亮度 B 的单位为“流明/米^2·球面度(lm/m^2·sr)”，或“流明/厘米^2·球面度(lm/cm^2·sr)”，后者称为熙提(stilb，记作sb)：

1 熙提 = 1 流明/厘米^2·球面度.

把式(11.4)中的光通量Φ换为辐射通量Ψ，即得辐射强度，其单位为“瓦/球面度(W/sr)”. 把式(11.5)中的Φ换为Ψ，则得辐射亮度，其单位为“瓦/米^2·球面度(W/m^2·sr)”或“瓦/厘米^2·球面度(W/cm^2·sr)”.

11.3 余弦发射体和定向发射体

如前所述，光源发射光通量一般是因方向而异的. 这里就发光的方向性来看，讨论两个特殊情况.

(1) 余弦发射体

如果一扩展光源的发光强度$dI \propto \cos\theta$，从而其亮度B与方向无关. 这类发射体称为余弦发射体，或朗伯(J.H.Lambert)发光体，上述按 $\cos\theta$ 规律发射光通量的规律，叫做朗伯定律.

一个均匀的球形余弦发射体，从远处的观察者看来，与同样半径同样亮度的一个均匀发光圆盘无异. 这一点不难从图11-6看出. 因为我们可以把面对观察者的半球上每个面元 dS 投影到圆盘上，得到一个面积为 $dS^* = dS\cos\theta$ 的面元，这两个面元在指向

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

观察者方向上的发光强度和投影面积都是一样的，因而亮度也一样．太阳看起来近似像一个亮度均匀的圆盘，这表明它接近于一个余弦发射体．此外，日常生活里常见的光源，许多接近余弦发射体．

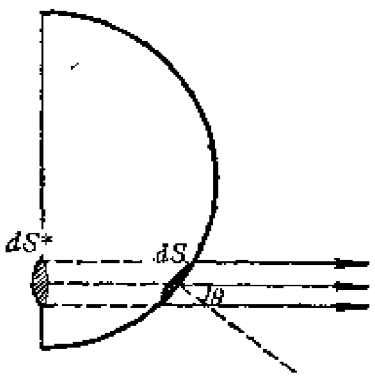


图 11-6　朗伯球体的亮度

发光强度和亮度的概念不仅适用于自己发光的物体，还可应用到反射体．光线射到光滑的表面上，定向地反射出去；射到粗糙的表面上时，它将朝所有方向漫射．一个理想的漫射面，应是遵循朗伯定律的，亦即不管入射光来自何方，沿各方向漫射光的发光强度总与$\cos\theta$成正比，从而亮度相同．积雪、刷粉的白墙、以及十分粗糙白纸的表面，都很接近这类理想的漫射面．这类物体称为朗伯反射体．

（2）定向发射体

实际中有相当大一类发射体，它们发出的光束集中在一定的立体角$\Delta\Omega$内，即亮度有一定的方向性．从成像光学仪器发出的光束都有这样的特征．在亮度具有方向性方面最突出的例子是激光器．激光器发出的光束通常是截面ΔS很小而高度平行（图11-7），

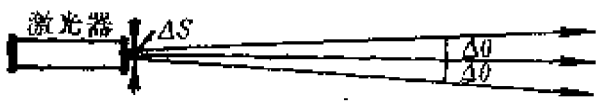


图 11-7　激光器的亮度

从而用不大的辐射功率就可获得极大的辐射亮度．以辐射功率$\Delta\Psi = 10\mathrm{mW}$的氦氖激光器为例，典型的数据可取光束截面$\Delta S = 1\ \mathrm{mm}^2$，光束发散角$\Delta\theta = 2' = 6\times10^{-4}\mathrm{rad}$，从而立体角$\Delta\Omega \simeq \pi(\Delta\theta)^2 \simeq 10^{-6}\mathrm{sr}$，在光束内部$\cos\theta \simeq 1$，由此算得辐射亮度

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$B = \Delta\Psi/\Delta S\Delta\Omega\cos\theta \simeq 10^{10}\mathrm{W/m^2\cdot sr},$$

为了对此数值有个量级的概念，可用太阳光对比．太阳的辐射亮度

$$B \simeq 3\times10^{6}\mathrm{W/m^2\cdot sr},$$

亦即区区10mW的功率竟产生了比太阳大几千倍的辐射亮度！其关键在于能量在空间的高度集中．

11.4 照度

一个被光线照射的表面上的照度定义为照射在单位面积上的光通量．假设面元dS'上的光通量为$d\Phi'$，则此面元上的照度为

$$E = \frac{d\Phi'}{dS'}, \qquad (11.6)$$

照度的单位叫勒克斯(lux，记作lx)或辐透(phot，记作ph)：

$$1\text{ 勒克斯} = \frac{1\text{ 流明}}{1\text{ 米}^2}, \qquad 1\text{ 辐透} = \frac{1\text{流明}}{1\text{厘米}^2},$$

故 1 lx = 10^{-4}ph．把式(11.6)中的光通量换成辐射通量，则得辐射照度，即辐射能流密度，其单位为 $\mathrm{W/m^2}$ 或 $\mathrm{W/cm^2}$．

（1）点光源产生的照度

如图11-8，设点光源的发光强度为 I，被照射面元 dS'对它

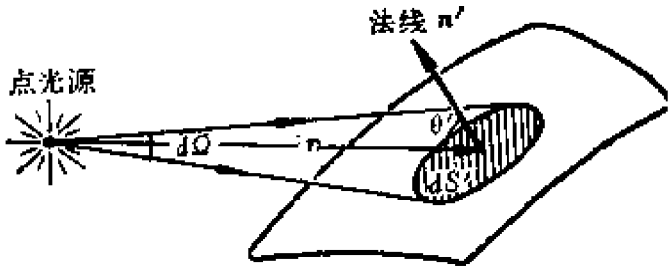


图 11-8 点光源的照度

所张的立体角为 $d\Omega$，则照射在 dS' 的光通量

$$d\Phi' = I\,d\Omega = I\,dS'\cos\theta'/r^2,$$

从而照度

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$E=\frac{d\Phi'}{dS'}=\frac{I\cos\theta'}{r^2},\qquad(11.7)$$

上式表明，$E\propto\cos\theta'$ 和 $1/r^2$，后者是读者熟知的平方反比律.

（2）面光源产生的照度

如图11-9，在光源表面和被照射面上各取一面元 dS 和 dS'，

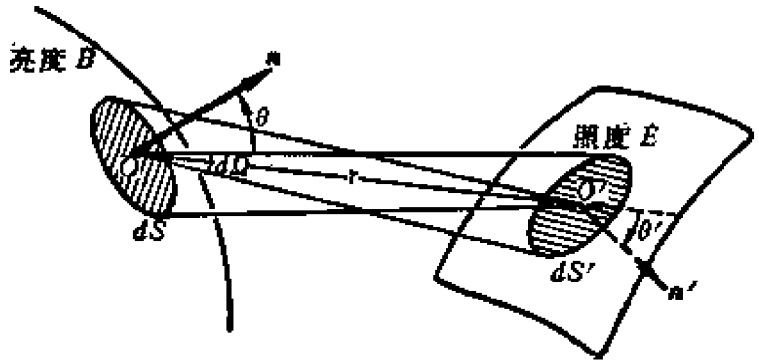


图 11-9　面光源的照度

令二者联线与各自的法线 n,n' 的夹角分别为 θ,θ'，面光源的亮度为 B，则由 dS 发出并照射在 dS' 上的光通量为

$$d\Phi'=Bd\Omega dS\cos\theta=B\left(\frac{dS'\cos\theta'}{r^2}\right)dS\cos\theta$$

$$=\frac{BdS\ dS'\cos\theta\cos\theta'}{r^2},\qquad(11.8)$$

式中 $d\Omega=dS'\cos\theta'/r^2$ 是 dS' 对 dS 的中心 O 点所张的立体角. 上式对 dS 积分并除以 dS'，即得 dS' 上的照度

$$E=\iint\limits_{(光源表面)}\frac{B\,dS\cos\theta\cos\theta'}{r^2}.\qquad(11.9)$$

值得注意的是，面元 dS 和 dS' 在表达式(11.8)中的地位是对称的，从这里我们得到光源与被照面可以互易的结论：倘若 dS' 是亮度为 B 的面光源，它将产生同样的通量照射在 dS 上.

例题　计算均匀余弦发射圆盘在轴上一点产生的垂直照度.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

设盘的半径为 R，亮度为 B.

解 $r^2 = r'^2 + z^2$,

$$\cos\theta = \cos\theta' = \frac{z}{\sqrt{r'^2 + z^2}},$$

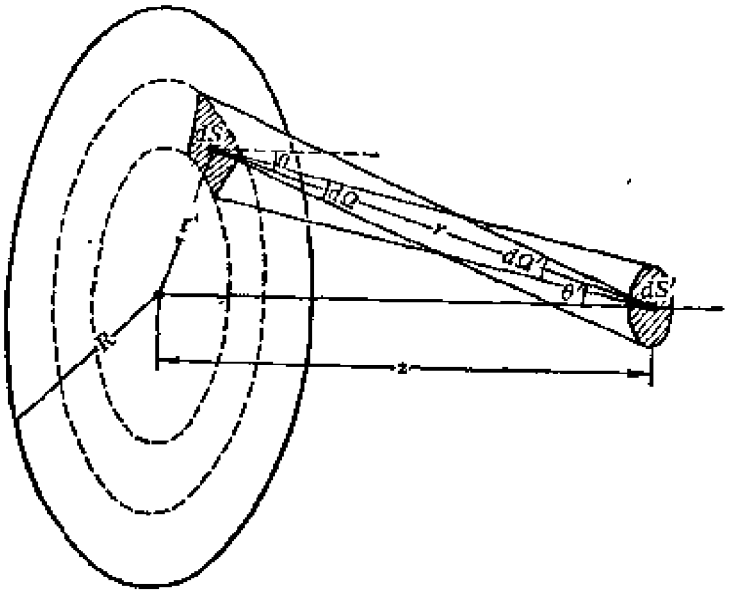


图 11-10　例题——圆盘光源在轴上的垂直照度

式中字母的含义见图11-10. 按式(11.8)有

$$d\Phi' = 2\pi B dS' \int_0^R \frac{z^2 r' dr dr'}{(r'^2 + z^2)^2} = \frac{\pi R^2 B dS'}{R^2 + z^2}.$$

而照度

$$E = \frac{d\Phi'}{dS'} = \frac{\pi R^2 B}{R^2 + z^2}. \qquad (11.10)$$

当 $z \gg R$ 时，发光圆盘可看成是发光强度 $I = \pi R^2 B$ 的点光源，$E \simeq \pi R^2 B / z^2 = I / z^2$，亦即在此极限情形下它和点光源一样，产生的照度遵循平方反比律.

11.5　光度学单位的定义

上面引进了一系列光度单位：流明、坎德拉、熙提、勒克斯等. 选择其中之一为基本单位，其它便可作为导出单位. 在光度

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

学中采用发光强度的单位为基本单位。

早年发光强度的单位叫做烛光，它是通过一定规格的实物基准来定义的。最初的基准是标准蜡烛，后来用一定燃料的标准火焰灯，以至标准电灯。所有上述标准具在一般实验室中都不易复制，并且很难保证其客观性和准确度。1948年第9届国际计量大会决定用一种绝对黑体辐射器作标准具，并给予发光强度以现在的命名——坎德拉。坎德拉是国际单位制(SI)的七个基本单位之一，其修正了的定义是1967年第13届国际计量大会上规定的："坎德拉是在101825N/m^2压力下，处于铂凝固温度的黑体的(1/600000)m^2表面垂直方向上的发光强度"。现代照明技术和电子光学工业的发展，各种新型光源和探测器的出现，要求对各种复杂辐射进行准确测量，而上述坎德拉的定义是以铂在凝固点下的光谱成分为基点的，要换算到其它光谱成分，还要相应的视见函数值，很不易准确。此外上述定义中未明确规定最大光功当量K_M之值，影响整个光度学和辐射度学之间的换算关系。1979年第16届国际计量大会通过决议，废除上述坎德拉的定义，并规定其新定义为：

"坎德拉是发出540×10^{12}Hz频率的单色辐射源在给定方向上的发光强度，该方向上的辐射强度为(1/683)W/sr。"

在上述定义中，频率540×10^{12}Hz是当视见函数$V(\lambda)$取最大值1时，且在空气中波长接近5550Å的单色辐射的频率为540.0154×10^{12}Hz略去其尾数而得。因频率与空气折射率无关，在定义中采用频率比波长更为严密。这个定义等于说规定了最大光功当量K_M之值为683 lm/W。有了坎德拉和流明，亮度和照度的单位熙提和勒克斯也就定下来了。

为了使读者对光度学单位的大小有个概念，表Ⅰ-5和表Ⅰ-6分别给出一些常见的实际情形中的亮度和照度值。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表 I-5　常见光源的亮度

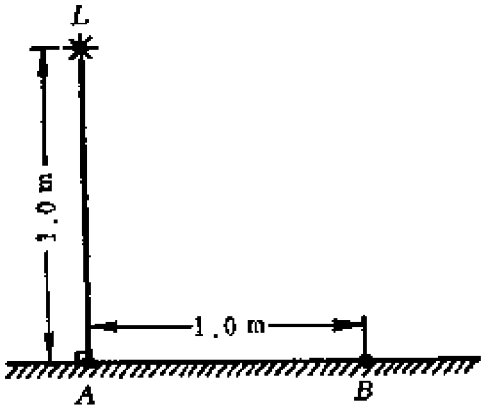
在地球大气层外看到的太阳	约190000 sb
通过大气看到的太阳	约150000 sb
钨丝白炽灯	约　500 sb
蜡烛火焰	约　0.5 sb
通过大气看到的满月	约　0.25 sb
晴朗的白昼天空	约　0.15 sb
没有月亮的夜空	约　10^{-4} sb

表 I-6　一些实际情况下的照度

无月夜天光在地面上的照度	3×10^{-4} lx
接近天顶的满月在地面上的照度	0.2　lx
办公室工作所必须的照度	20—100 lx
晴朗夏日在采光良好的室内照度	100—500lx
夏天太阳不直接照到的露天地面上的照度	10^3—10^4lx

习　题

1．在离桌面1.0m 处有盏100cd 的电灯 L，设 L 可看作是各向同性的点光源，求桌上 A，B 两点的照度(见图)．



习题 1 图

2．若上题中电灯 L 可垂直上下移动，问怎样的高度使 B 点的照度最大．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

3．（1）设天空为亮度均匀的朗伯体，其亮度为 B，试证明，在露天水平面上的照度为 $E=\pi B$；

（2）在上面的计算中，与我们假设天空是怎样形状的发光面有无关系？与被照射面的位置有无关系？

4．试证明，一个理想漫射体受到照度为 E 的辐射时，反射光的亮度 $B=E/\pi$．

5．阳光垂直照射地面时，照度为 1.0×10^5 lx．若认为太阳的亮度与光流方向无关，并忽略大气对光的吸收，且已知地球轨道半径为 1.5×10^8 km，太阳的直径为 1.4×10^6 km，求太阳的亮度．

*§12 像的亮度、照度和主观亮度

人们往往笼统地谈论光具组成像的亮暗，其实仔细分析起来，这里有两个不同的概念，其一是像的照度，另一是像的亮度．

决定照相底片感光程度的，是投射在每个面之上总光通量的多少，因此这里是像的照度问题．助视光学仪器的像是眼睛视察的对象，而瞳孔只接收一定立体角内的光通量．也就是说，从每个面元发出的总光通量中有多少能进入瞳孔，要看单位立体角内光通量的多少．因此这里是像的亮度问题．投影仪器的问题要复杂一些，这里的问题有两个方面，一是投影仪器在幕上成的像，另一是观众所看到经幕反射的像．前者是照度问题，后者是亮度问题，但二者有联系．若屏幕是理想的漫射体，不管投射到其上的光通量的角分布如何，反射光总是服从朗伯定律的．这时反射光的亮度又与入射光的照度有如下关系：

$$B=\frac{E}{\pi}. \tag{12.1}$$

这公式请读者自己推导出来①．

12.1 像的亮度

如图12-1所示，设 y,σ,B,u_0,n 分别为傍轴小物的线度、面积、亮度

① 参见§11习题4．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

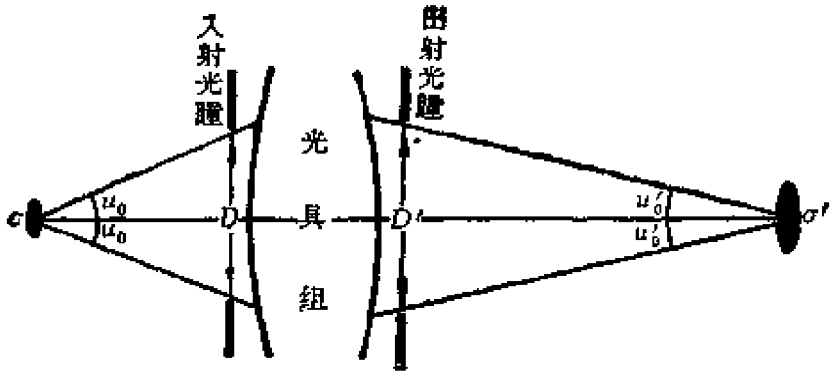


图 12-1 像的亮度和照度

和入射孔径角、物方折射率，y',σ',B',u_0',n'为像方的相应量，则射进光瞳的光通量为

$$\Phi = \int B\sigma \cos u \, d\Omega = \int_0^{u_0} B\sigma \cos u \sin u \, du \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

对于朗伯体，上式给出

$$\Phi = \pi B\sigma \sin^2 u_0 \quad 或 \quad B = \frac{\Phi}{\pi\sigma \sin^2 u_0}. \tag{12.2}$$

同理，由出射光瞳射出的光通量为

$$\Phi' = \pi B'\sigma' \sin^2 u_0' \quad 而 \quad B' = \frac{\Phi'}{\pi\sigma' \sin^2 u_0'}. \tag{12.3}$$

式(12.3)除以(12.2)，得

$$\frac{B'}{B} = \frac{\Phi'}{\Phi} \frac{\sin^2 u_0}{\sin^2 u_0'} \frac{\sigma}{\sigma'}. \tag{12.4}$$

当光线在光具组内遇到折射面时，总有一部分光通量被反射掉，玻璃内也或多或少有些吸收，所以一般$\Phi' < \Phi$，通常把二者之比称为光具组的透光系数，用 k 来代表

$$k = \frac{\Phi'}{\Phi} \leqslant 1. \tag{12.5}$$

利用正弦条件

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$ny\sin u_0 = n'y'\sin u_0' \tag{12.6}$$

和

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{y^2}{y'^2}, \tag{12.7}$$

由式(12.4)得

$$\frac{B'}{B} = k\left(\frac{n'}{n}\right)^2. \tag{12.8}$$

以上便是像的亮度 B' 与物的亮度 B 间的关系. 在 $n=n'$ 的情况下

$$B' = kB. \tag{12.9}$$

若忽略光通量在光具组中的损失，即令 $k\simeq 1$，于是得到 $B'\simeq B$. 这表明，像的亮度与物像位置和放大率无关，且在 $n=n'$ 的条件下近似等于物的亮度. 也就是说，光具组基本上不改变像的亮度.

也许读者会觉得这个结论有些意外. 当像被放大的时候，来自其上单位面积的光通量减少了，为什么它的亮度不变呢？如果我们仔细思考一下，这个结论是不难理解的. 因为正弦条件告诉我们：在像被放大的同时，光束的孔径变小了①. 虽然来自单位面积的总光通量减少了，但它集中在较小的孔径内，从单位面积上在单位立体角内发出的光通量仍可维持不变，即亮度不变.

12.2 像的照度

设想在图12-1中像平面上放置一幕，则其上像的照度为

$$E = \frac{\Phi'}{\sigma'} = \pi B'\sin^2 u_m' = k\pi B\left(\frac{n'}{n}\right)^2\sin^2 u_0' \tag{12.10}$$

$$\approx k\pi B\frac{\sin^2 u_0}{V^2}, \tag{12.11}$$

其中 V 是横向放大率，$V^2=\sigma'/\sigma$.

在傍轴近似下，上式化为

① 在傍轴条件下，正弦条件化为 $VW=$ 常数 $\times(n/n')$，即横向放大率 V 与角放大率 W 成反比，参见式(7.6)，(7.7).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$E = k\pi B\left(\frac{n'}{n}\right)^2 u_0'^2 = \frac{k\pi B u_0^2}{V^2}. \qquad (12.12)$$

以上便是我们要推导的像的照度公式．下面分析两个有实际意义的特殊情况．

（1）像距远大于焦距的情形

投影仪器属于这种情形．这时当像平面的位置在很大范围内改变时，物平面总在物方焦面附近，因此入射孔径角 u_0 近似是个常数．由式(12.11)可以看出，幕上像的照度与横向放大率的平方(或者说像的面积)成反比．在放映电影或幻灯时，幕远了，像就放大了，但同时变暗了，这是不少读者熟悉的事实．

（2）物距远大于焦距的情形

照相机和眼睛属于这种情形．这时当物体的位置在很大范围改变时，像平面(感光片或网膜)总在像方焦面附近，因此出射孔径角 u_0' 近似是个常数．由式(12.12)可以看出，这时像的照度是不变的．所以当我们用照相机拍摄远近不同但亮度相同的物体时，底片的感光程度是一样的．因此，我们选择曝光时间，就无需考虑物体的距离①．

为简单起见，我们假定照相机或眼睛的光具组是一个薄透镜，孔径光阑和光瞳就在这透镜附近，于是

$$s' \simeq p' \simeq f' = \frac{n'}{n} f, \quad D \simeq D',$$

$$u_0' \simeq \frac{D'}{2p'} = \frac{D}{2f'} = \frac{n}{n'} \frac{D}{2f},$$

式中 D, D' 为入射光瞳和出射光瞳的直径，p' 的意义见图5-1．因此像的照度为

$$E = \frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D}{f}\right)^2, \qquad (12.13)$$

D 与 f 之比，称为光具组的相对孔径．上式表明，像的照度 E 正比于相对孔径 D/f 的平方．一般照相机上光圈刻度的标记值 1.4，2，2.8，4，5.6，8，11，16，…就是相对孔径的倒数 f/D．这序列中后一个数近似为前一个的

① 这结论不适用于拍摄十分近的物体(如翻拍文件)时的情况．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$\sqrt{2}$ 倍，因此相对孔径按 $1/\sqrt{2}$ 的比值递减，从而照度依次减少一半，所需曝光时间依次增加一倍.

12.3 主观亮度

分布在网膜上的每个感光单元各自独立地接受光通量的刺激. 扩展光源在网膜上的像照度愈大，照射在它所复盖的面积内每个感光单元上的光通量就愈多. 所以对于扩展光源，我们规定眼睛的主观亮度 H 就是网膜上像的照度.

用肉眼直接观察物体获得的主观亮度 H_0，称为天然主观亮度. 扩展光源的天然主观亮度为

$$H_0 \equiv E = \frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D_e}{f}\right)^2, \tag{12.14}$$

式中 D_e 是瞳孔的直径，f 是眼睛的焦距. 式(12.14) 表明，H_0 与物的亮度 B 成正比，与光源的距离无关.

当我们用助视光学仪器观察物体时，式(12.14) 中的 B 应为仪器所成像的亮度 B' 所代替. 如前所述，在 $n=n'$ 时，$B'\approx B$. 但这是否说，通过仪器观察物体时的主观亮度总是和天然主观亮度一样呢？可以证明，望远镜和显微镜出射光瞳的直径 D' 都与视角放大率 M 成反比. 对于望远镜 $(D')^2=(D/M)^2$①，对于显微镜，$(D')^2\propto(\mathrm{N.A.}/M)^2$，其中 D 为望远镜入射光瞳的直径，$\mathrm{N.A.}\equiv n\sin u_0$ 称为显微镜的数值孔径②. 当放大率超过某一数值时(这数值称为正常放大率)，出射光瞳变得比眼睛的瞳孔还小. 在这种情况下，式(12.14)中的 D_e 应为仪器出射光瞳的直径 D' 所代替，从而主观亮度变小了. 所以，通过望远镜或显微镜观察物体时，如果放大率小于正常放大率，主观亮度与天然主观亮度相等；如果放大率大于正常放大率，主观亮度将小于天然主观亮度. 高倍显微镜的放大率一般大于正常放大率，所以它的像的主观亮度小于天然主观亮度. 用高倍显微镜观察物体时，我们感到像较暗，便是这个道理. 在这种放大率大于正常放大率的情况下，对于给定的放大率，主观亮度与数值孔径的平方成正比. 这也是高倍显微镜需要有尽可能大的数值孔径的原因. 油浸镜头有助于这

① 参见§ 9 习题2.
② 参见§10习题4.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

一点．

上面讨论的都是扩展光源的主观亮度．如果是点光源，由于其线度非常小，或位置非常远(例如星体)，它在网膜上的像落在个别的感光单元上，所以来自点光源的光通量只刺激网膜上个别的感光单元，它的主观亮度不取决于像的照度，而取决于进入瞳孔总光通量．当我们用望远镜观察点光源时，如果它的入射光瞳越大，它就把越多的光通量集中起来射入观察者的瞳孔(图12-2)．所以望远镜可以使点光源的主观亮度大大增加．利用望远镜观察星体，可以使星体的主观亮度增大，但不改变作为扩展光源的天空背景的主观亮度．这样一来，星体与天空背景主观亮度的对比加大了，使我们在白昼也能看到星体．

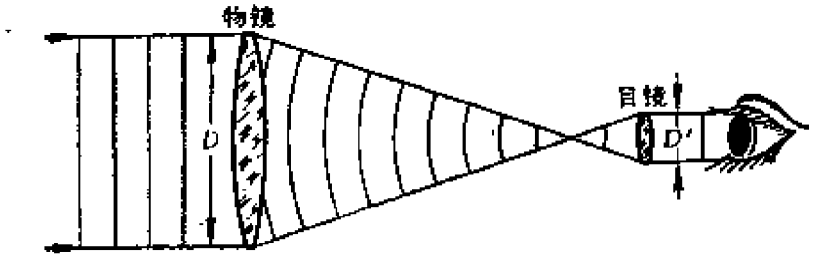


图 12-2　望远镜可增大点光源的主观亮度

思　考　题

1．　在一个大晴天，我们可以用一个放大镜把阳光会聚到焦点上，引起纸片或干木屑的燃烧，这是尽人皆知的事实．相传古代阿基米德曾用长焦距的镜子会聚日光烧毁了停泊在远处的敌舰．多少代来，这个传说一直吸引着发明家的遐想．你能用科学的论据来辨明这个传说的真伪吗？

2．　当前世界上拟建的最大望远镜物镜(拼合反光镜)的直径为15m，你能大致估计出它的放大倍率吗？

习　　题

1．　太阳表面的辐射亮度为 $2\times10^{7}\,W/m^{2}\cdot sr$ 用相对孔径 $D/f=1.5$ 的放大镜将阳光聚焦成光斑的最大辐射照度是多少？

2．　一屏放在离烛100cm处，把一会聚薄透镜放在烛和屏之间，透镜有两个位置可以在屏上得到烛的像，这两个位置相距20cm，在屏上烛的两

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

个像的照度相差多少倍？

3. 望远镜物镜的直径75mm，当放大率为(1) 20倍，(2) 25倍，(3) 50倍时，求望远镜中月亮的像的主观亮度与天然主观亮度之比．设眼睛瞳孔的直径为 3.0mm．

4. 一天文望远镜的物镜直径等于 18cm，透光系数为 0.50，已知肉眼可直接观察到六等星．求(1) 用此望远镜所能看到的最弱星等；(2) 最适宜观察星的放大率(正常放大率)；(3) 当放大率为10倍时可见到星的等次．设眼睛瞳孔的直径值可取 3.0mm．

【注：星等增加一等，其亮度减小 $\sqrt[5]{100} \simeq 2.5$倍．】

5. 求数值孔径为 1.5 的显微镜的正常放大率，设瞳孔直径为 3.0mm．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

第二章　波动光学基本原理

几何光学和波动光学是经典光学的两个组成部分．几何光学从光的直线传播、反射、折射等基本实验定律出发，讨论成像等特殊类型的光的传播问题，它在方法上是几何的，在物理上不必涉及光的本性．但是，要真正理解光，理解光场中可能发生的一切绚丽多彩的景象，必须研究光的波动性．此外，也只有从光的波动理论才能看出几何光学理论的限度．

波动是自然界中相当普遍的一类运动形式，在力、热、电、光各个领域中无处不有．尽管各种波动的具体形态各异，其间却存在着非常明显的共性．无论在基本概念、基本原理方面，还是在所用的数学语言和计算方法方面，它们都具有惊人的相似性，甚至可以说几乎完全一样．然而，光波是特定波段内的电磁波，其波长按宏观尺度看来非常小，以及发射源是微观客体，这使它带有一些自己的特点．光波的特点集中地反映在研究和应用它的实验装置和仪器上．这些仪器装置的设计往往需要针对光波的特点，作种种十分细腻，甚至令人感到"琐碎"的考虑．鉴于以上情况，我们把波动光学、或者更广泛些，一般波动理论中带普遍意义的基本原理和计算方法集中起来，在本章中优先加以介绍．有关波动光学的各种仪器装置和重要应用中的细致问题，留给后面几章去讨论．

§1　定态光波与复振幅描述

1.1　波动概述

振动在空间的传播形成波动．波场中每点的物理状态随时间作周期性的变化，而在每一瞬时波场中各点物理状态的空间分布

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

也呈现一定的周期性，因此，我们说波动具有时空双重周期性．此外，伴随着波动，总有能量的传输．具有时空双重周期性的运动形式和能量的传输，是一切波动的基本特性，不具备这种特性的事物，不能成为严格意义下的波动．

波场中物理状态的扰动可用标量场描述的，称为标量波；需用矢量场描述的，称为矢量波①．例如，密度波、温度波等是标量波，电磁波（包括光波）是典型的矢量波．矢量波可以有一个纵方向（与传播方向平行）的自由度和两个横方向（与传播方向垂直）的自由度．自由空间的电磁波（光波）是横波，它有两个自由度，它们对应着两个独立的偏振状态．

如第一章 2.1 节所述，波场的几何描述使用波面和波线的概念．波面，也叫做等相面，它是扰动的位相相等的各点的轨迹．一般说来，波面是三维空间里的曲面族．能量传播的路径叫做波线，在各向同性媒质中波线是与波面处处正交的空间曲线族．在各向异性媒质中情况比较复杂，波线与波面一般不正交，详细情况留待第七章讨论．

波面为球面的波，叫做球面波．波面为平面的波，叫做平面波．球面波就是几何光学中所说的同心光束，平面波是平行光束，它也可看成是中心位于无远穷的同心光束．在具有多种形状波面的波动中，球面波和平面波占有特殊的地位．这一方面是因为它们比较简单，从而也被研究得比较透彻；另一方面是因为任何形状的波面可看作是点源的集合．点光源之于光学，正象质点之于力学、点电荷之于电学一样，是建筑整个理论体系的砖石．当光束经过光学系统改造后形成的波场，一般是比较复杂的．例如图 1-1所示的高斯光束，起初其波面是平的，随后逐渐向球面过渡．这是平行光发生衍射后演化成的一类光束．现代光学的思想就是

① 除了标量波和矢量波外，还可以有形式更复杂的波动——张量波，如固体中的弹性波，引力波等属之．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

要在复杂的波场中分离出简单的成分——球面波或平面波．基于上述种种理由，球面波和平面波将是今后我们讨论的重点．我们要从各个角度去仔细研究它们，如研究它们的描述、识别和互相转化等问题．

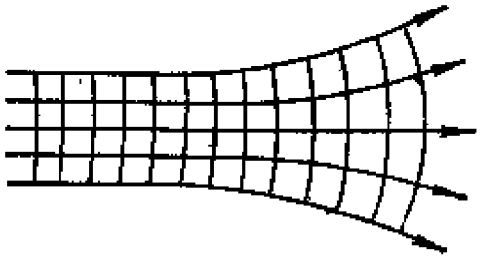


图 1-1　高斯光束

1.2　定态光波的概念

具有如下性质的波场叫定态波场：

（1）空间各点的扰动是同频率的简谐振荡（频率与振源相同）；

（2）波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间形成一个稳定的振幅分布．

严格的定态光波要求波列无限长．但任何实际光源的发光过程总是有限的，特别从微观角度看，发光过程是断断续续的．以后我们会看到，有限波列不可能是严格单色的．不过当波列的持续时间比扰动的周期长得多时，除了考虑某些特殊问题（如时间相干性）外，我们可把它作无限长单色波列处理，这样的波在空间传播时形成定态波场．今后，如果没有特别的必要，我们一律以定态光波为讨论对象．

普遍的定态标量波的表达式为

$$U(P,t)=A(P)\cos[\omega t-\varphi(P)], \qquad (1.1)$$

其中P代表场点，函数$A(P)$反映振幅的空间分布，$\varphi(P)$反映位相的空间分布，二者都与时间t无关．波函数$U(P,t)$中唯一与t有关的是位相因子中独立的一项ωt（ω为圆频率），这项又是与场

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

点坐标无关的.

诚然，定态光波的波面也可以有各式各样的形状，如1.1节所述，我们重点讨论定态平面波和球面波.

（1）平面波波函数$U(P,t)$的特点是：

（i）振幅$A(P)$是常数，它与场点坐标无关；

（ii）位相$\varphi(P)$是直角坐标的线性函数，即

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=k_x x+k_y y+k_z z+\varphi_0, \qquad (1.2)$$

式中矢量$\boldsymbol{k}=k_x\hat{x}+k_y\hat{y}+k_z\hat{z}$是波矢，其大小$k$与波长$\lambda$的关系为$k=2\pi/\lambda$，它的方向代表波的传播方向．$\boldsymbol{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$是场点$P$的位置矢量，这里$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$是沿直角坐标轴的三个单位基矢．$-\varphi_0$是坐标原点$O$处的初位相①.

为了说明式(1.2)的由来，可如图1-2，将新坐标轴z'取在波矢$\hat{\boldsymbol{k}}$的方向，这时

$$\varphi(P)=kz'+\varphi_0.$$

因$z'=\hat{z}'\cdot\boldsymbol{r}$（$\hat{z}'$是沿$z'$轴的单位基矢，即沿$\hat{\boldsymbol{k}}$的单位矢量$\hat{\boldsymbol{k}}$），故$kz'=k\hat{z}'\cdot\boldsymbol{r}=k\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$，代入上式即得式(1.2).

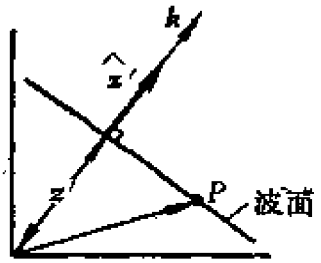


图1-2 平面波的波矢与波面

由解析几何的知识可知，波面方程$\varphi(P)=$常数确实代表一个以$\boldsymbol{k}$方向为法线的平面．给定$\boldsymbol{k}$或其三个分量，我们可立即写出平面波的位相分布$\varphi(P)$来；反之，给出线性位相因子$\varphi(P)$，亦可导出平面波的波矢和波面的取向.

（2）球面波波函数$U(P,t)$的特点是：

（i）振幅$A(P)=a/r$反比于场点到振源的距离r，这是能量守恒的要求.

（ii）位相分布的形式为

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0, \qquad (1.3)$$

$-\varphi_0$是振源的初位相．不难看出，波面方程$\varphi(P)=$常数确实代

① 有关φ_0前的负号，参见下页注②.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表以振源为中心的一个球面.

光波是一种电磁波，它是矢量横波，定态电磁波需用两个矢量场来描述：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(P,t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\omega t-\varphi(P)], \\ \boldsymbol{H}(P,t)=\boldsymbol{H}_0(P)\cos[\omega t-\varphi(P)]. \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是电场强度和磁场强度矢量，$\boldsymbol{E}_0(P)$ 和 $\boldsymbol{H}_0(P)$ 分别是它们的振幅分布．在一定的条件下，往往只需考虑光波中振动矢量的某一分量，这时矢量波可作标量波处理．大体说来，在各向同性媒质中满足傍轴条件时，用标量波理论处理光的干涉、衍射问题得到的结果基本正确．

1.3 复振幅描述

用复数来描述简谐振动，读者是不会生疏的，这问题在力学（简谐振动部分）和电学（交流电部分）都曾遇到过，办法是用一个复指数函数与余弦（或正弦）函数对应．这样做的依据是它们的运算规律（迭加，微分和积分）是对应的，用复数运算来代替简谐量的运算曾给我们带来极大的方便①.

定态波场中各点的扰动是同一频率的简谐振动，我们同样可将它的表达式用一个对应的复数式代替．例如对于式（1.1），有如下对应关系：

$$U(P,t)=A(P)\cos[\omega t-\varphi(P)]$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{U}(P,t)=A(P)e^{\pm i[\omega t-\varphi(P)]},$$

式中指数上的正负号代表两种不同的选择，运算时可采用任何一种，它们实质上完全等效．纯粹由于习惯（也许还有某些计算上的方便），本书选用负号②，即

① 参见赵凯华、陈熙谋，《电磁学》，下册第七章和附录C，人民教育出版社．

② 按照这种选择，指数上正位相代表落后，负位相代表超前，P点的实际初位相为 $-\varphi(P)$，振源的初位相为 $-\varphi_0$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\tilde{U}(P,t)=A(P)e^{i[\varphi(P)-\omega t]}=A(P)e^{i\varphi(P)}e^{-i\omega t}. \quad (1.5)$$

可以看出，在上式中包含时间和空间变量的两部分完全分离，成为独立的因子。在讨论单色波场中各点扰动的空间分布时，时间因子 $e^{-i\omega t}$ 总是相同的，常可略去不写，剩下的空间分布因子

$$\tilde{U}(P)=A(P)e^{i\varphi(P)} \quad (1.6)$$

称为复振幅。复振幅 $\tilde{U}(P)$ 由两部分组成，其模量 $A(P)$ 代表振幅在空间的分布，其辐角 $\varphi(P)$ 代表位相在空间的分布。复振幅集定态波场中两个空间分布于一身，其优越性正体现在这里。

1.4 平面波和球面波的复振幅

下面我们把复振幅的概念运用于平面波和球面波这两个重要的特例：

（1）平面波

如1.2节所述，对于平面波，$A(P)=A$（常数），位相

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=k_x x+k_y y+k_z z+\varphi_0,$$

故其复振幅为

$$\tilde{U}(P)=A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)] \quad (1.7)$$

$$=A\exp[i(k_x x+k_y y+k_z z+\varphi_0)]. \quad (1.8)$$

再次强调，平面波的特点是：(i)振幅为常数；(ii)具有线性位相因子。今后我们遇到的问题，往往不是已知一平面波，写出其复振幅的表达式；而是反过来，给出一个复振幅的表达式，判断它是否为平面波，以及是怎样的平面波。上述两个特点将是我们判断的依据，波矢的方向和大小也可由线性位相因子的系数定出来。

（2）球面波

对于球面波，$A(P)=a/r$，$\varphi(P)=kr+\varphi_0$，故其复振幅为

$$\tilde{U}(P)=\frac{a}{r}\exp[i(kr+\varphi_0)], \quad (1.9)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

这里 r 是场点 P 到振源的距离．若采用直角坐标系，设振源在 x_0, y_0, z_0 位置上，则有

$$\tilde{U}(x,y,z)=\frac{a}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$
$$\times\exp[i(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+\varphi_0)]. \tag{1.10}$$

可见，除非采用原点在波源上的球坐标系，球面波复振幅的函数形式是比较复杂的．

例题 已知位相分布 $\varphi(P)=lx+my+nz+p$，求波的传播方向和波长．

解 这是平面波的线性位相分布．波矢的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{l}{k},\qquad \cos\beta=\frac{m}{k},\qquad \cos\gamma=\frac{n}{k},$$

其中 k 为波矢的大小，

$$k=\sqrt{l^2+m^2+n^2},$$

波长 $\lambda=2\pi/k=2\pi/\sqrt{l^2+m^2+n^2}$．注意，对于给定的 ω，在 l，m，n 三个系数中只有两个是独立的，这是波动方程的要求．

1.5 强度的复振幅表示

我们知道，任何波的强度都正比于振幅的平方，光波也不例外(参见绪论)．在许多场合只需要知道光强的相对分布，这时可直接令光强 I 等于振幅 A 的平方：

$$I(P)=[A(P)]^2.①$$

因 $A(P)$ 是复振幅 $\tilde{U}(P)$ 的模，故可写为

① 对于矢量波，若同时存在多个正交分量的振动时，总强度应为各分量强度之和．例如对于沿 z 方向传播的平面光波

$$I=A_x^2+A_y^2.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$I(P)=\tilde{U}^{*}(P)\,\tilde{U}(P),\qquad(1.11)$$

式中 $\tilde{U}^{*}$ 是 $\tilde{U}$ 的复数共轭．在这里位相因子彼此相消，它不进入强度 I 的表达式中．式(1.11)是一个由复振幅分布求光强分布的常用公式．

思 考 题

1． 在气象数据的分析研究中经常使用"压力波"、"高度波"等术语．设某一纬圈同一高度的气压随经度的变化呈正弦式的周期性，人们就称它为"气压波"；又设某一纬圈同一气压的高度值随经度的变化呈正弦式的周期性，人们称它为"高度波"．你认为这些确是一种波动吗？交变电流在示波器上显示的稳定波形是一种波动吗？

2． 在下列情况下你能确定一个点波源的位置吗？

(1) 已知在三个特定位置的接收器记录到的强度；

(2) 已知点源发振后三个接收器所记录的首波之间的时差 $\Delta t_{12},\Delta t_{23}$ 和波速；

(3) 上述两条同时已知．

3． 你能用什么简便的方法测定一个无法直接接近的点光源的位置？

习 题

1． 钠黄光(D双线)包含的波长为 $\lambda_1=5890$ Å 和 $\lambda_2=5896$ Å，设 $t=0$ 时两波列的波峰在 O 点重合，问：

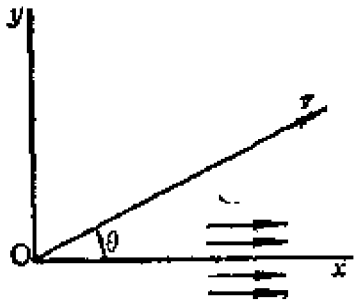
(1) 自 O 点起算，沿传播方向多远的地方两波列的波峰还会重合？

(2) 经过多长时间以后，在 O 点又会出现两列波的波峰重合的现象？

2． 写出沿 z 轴传播的平面波的复振幅．

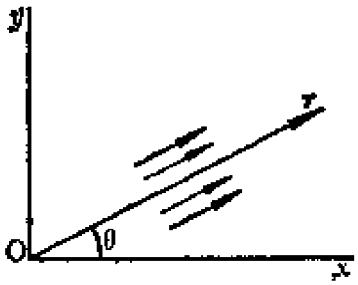
3． 写出在 x-z 平面内沿与 z 轴成 θ 角的方向传播的平面波的复振幅．

4． 如图，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ，设 $x=0$ 点的位相 $\varphi_0=0$，



习题 4 图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



习题5图

(1) 写出沿x轴波的位相分布$\varphi(x)$；

(2) 写出沿y轴波的位相分布$\varphi(y)$；

(3) 写出沿r方向波的位相分布$\varphi(r)$.

5. 如图，一平面简谐波沿r方向传播，波长为λ，设$r=0$点的位相为φ_0.

(1) 写出沿r方向波的位相分布$\varphi(r)$；

(2) 写出沿x轴波的位相分布$\varphi(x)$；

(3) 写出沿y轴波的位相分布$\varphi(y)$.

6. 写出向$P(x_0,y_0,z_0)$点会聚的球面波的复振幅.

§2 波　　前

2.1 波前的概念

“波前”一词，过去人们常指的是一个等相面(波面)，或走在最前面的波面，这后一种含义只对冲击波一类非定态波有意义. 今后我们在研究定态光波时，将用“波前”一词泛指波场中任一曲面，更多地是指一个平面，如记录介质、感光底片、接收屏幕、透明的黑白画面等所在的平面，或透镜前后的某个平面. 在实际问题中人们有时不必泛泛地讨论三维波场里复振幅的分布，也无需追求复杂波场中波面的形状和波线的轨迹，而只关心某一特定波前上复振幅的二维分布. 一列波携带着许多信息，如频率ω、波长λ和传播方向(二者包含在波矢k中)，振幅分布，位相分布，传播速度，等等. 对于单色的定态波场，这些信息全部包含在三维的复振幅分布函数中了. 然而通常光学系统中的一个元件只和波场中某个波前打交道，也就是说，与它有关的只是这个波前上的信息. 至于波前上各种信息中哪些能被接收，或引起什么效果，则取决于接收器件的性能. 但无论如何，我们要关心复振幅在波前上的二维分布问题. 以下我们举一系列这方面的例子.

例题1 一列平面波的传播方向平行于x-z面，与z轴成倾

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

角 θ，写出它在波前 $z=0$ 面上的复振幅分布①.

解 该平面波波矢的三个分量分别为

$$k_x = k\sin\theta,\quad k_y = 0,\quad k_z = k\cos\theta.$$

设 $\varphi_0 = 0$，则

$$\tilde{U}(x,y,z) = A\exp[ik(x\sin\theta + z\cos\theta)],$$

在波前 $z=0$ 面上

$$\tilde{U}(x,y) = A\exp[ikx\sin\theta]. \qquad (2.1)$$

例题 2 复振幅互为复数共轭的波，称为共轭波. 上题中那列平面波的共轭波是怎样的一列波②?

解 与上例相共轭的波在波前 $z=0$ 上的复振幅分布为

$$\tilde{U}^*(x,y) = A\exp[-ikx\sin\theta] = A\exp[ikx\sin(-\theta)].$$

可见，它也是一列传播方向与 x-z 平面平行的平面波，只是它与 z 轴的倾角换为 $\theta' = -\theta$(见图2-1).

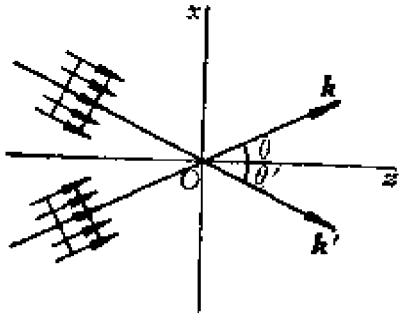


图 2-1 例题 1 和例题 2 ——一对共轭的平面波

例题 3 分别写出与 $z=0$ 平面距离为 R 的两个物点在此平面上产生的复振幅分布. 一物点在 z 轴上，另一物点在轴外.

解 对于轴上物点 O (坐标为 $0,0,-R$)发出的球面波，其波前为

$$\tilde{U}(x,y) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}}\exp[ik\sqrt{x^2+y^2+R^2}]. \qquad (2.2)$$

对轴外物点 O_1(坐标为 $x_1, y_1, -R$)发出的球面波，其波前为

① 我们今后有时把波前上的复振幅分布函数简称波前或波前函数.

② 若不特别声明，我们总假设波都来自波前的同一侧(左侧).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\widetilde{U}_1(x,y)=\frac{a}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}}$$

$$\times\exp[ik\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}]. \quad (2.3)$$

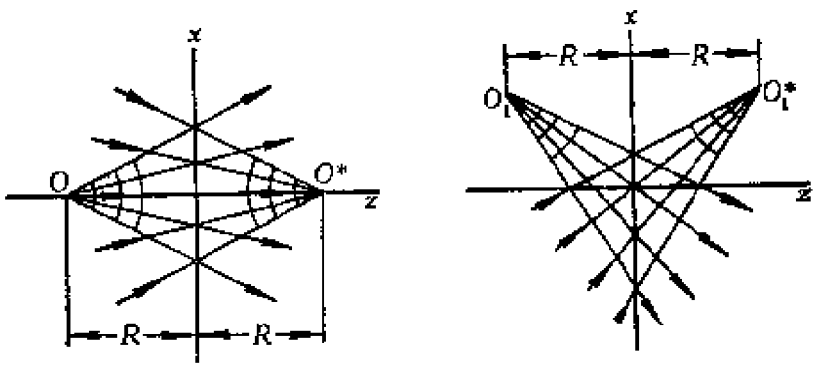
例题 4　上题中两球面波的共轭波分别是怎样的波？

解　$$\widetilde{U}^*(x,y)=\frac{a}{x^2+y^2+R^2}\exp[-ik\sqrt{x^2+y^2+R^2}]$$

$$\widetilde{U}_1^*(x,y)=\frac{a}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}}$$

$$\times\exp[-ik\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+R^2}],$$

它们都是会聚的球面波，会聚中心 O^* 和 O_1^* 分别与 O 和 O_1 对波前成镜像对称(见图2-2(a))①.



(a) 轴上物点　　(b) 轴外物点

图 2-2　例题 3 和例题 4——两对共轭球面波

① 向 O 和 O^* 会聚的球面波的复振幅分别是(参见 § 1 习题 6)，

$$\widetilde{U}^*(x,y,z)=\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+(z\pm R)^2}}\exp[-ik\sqrt{x^2+y^2+(z\pm R)^2}],$$

它们在 $z=0$ 波前上造成的二维分布皆为

$$\widetilde{U}^*(x,y)=\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}}\exp[-ik\sqrt{x^2+y^2+R^2}].$$

而来自波前同一方的波，只能是向 O^* 会聚的球面波。O_1 和 O_1^* 的情况也是一样。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2.2 傍轴条件与远场条件(轴上物点)

今后在研究具体光学仪器和实验装置时我们将会经常遇到这样一类典型问题：x-y 是物平面，x'-y' 是接收平面，二者相隔一定的距离 z(见图2-3)，讨论在物平面上某个点源的照明下接收平面上的波前如何？我们知道，一个半径很大的球面，其局部可近似看作是平面．显然，这里半径的大小是相对于局部曲面的横向线度而言的．当物平面和接收面的横向线度远小于 z 时，物点发出的球面光波可近似看成平面光波．但应注意，这不是一个纯粹的几何问题，而是一个物理问题．从物理(即波动)的意义上看，点光源距离与波前线度之比究竟需要大到什么程度，才能把球面波看作平面波？这要同时考察振幅分布和位相分布两个方面，为此，下面我们分两步回答这个问题，这里先看轴上物点 O，下一节再看轴外物点 Q．

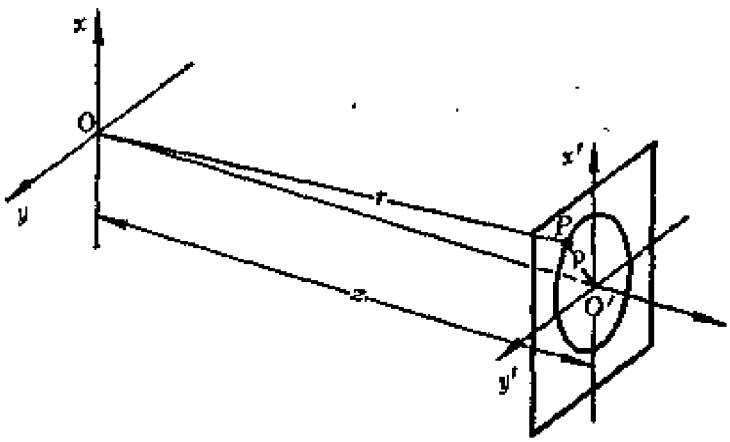


图 2-3 傍轴条件与远场条件(轴上物点)

如图2-3所示，点光源放在坐标原点 O 处．接收平面 x'-y' 上场点 P 到 z 轴的距离为

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

场点 P 到物点 O 的距离为

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}. \tag{2.4}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

从而在 $x'-y'$ 面上的球面波前为

$$\tilde{U}(x',y')=\frac{a}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\exp[ik\sqrt{z^2+\rho^2}]. \qquad (2.5)$$

若 $\rho^2\ll z^2$，将 r 的表达式(2.4)作泰勒展开，保留到 ρ^2 项：

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}=z\left(1+\frac{\rho^2}{2z^2}-\cdots\cdots\right). \qquad (2.6)$$

代入式(2.5)，得

$$\tilde{U}(x',y')=\frac{a}{z(1+\rho^2/2z^2)}\exp\left[ik\left(z+\frac{\rho^2}{2z}\right)\right]. \qquad (2.7)$$

这个分布函数与平面波前的差别有两点，一是振幅的分母中多一含 ρ^2 的项，二是位相因子中多一含 ρ^2 的项．为了振幅中此项可忽略，只需

$$\frac{\rho^2}{z^2}\ll 1 \quad 或 \quad z^2\gg\rho^2, \qquad (2.8)$$

然而要使位相中该项可忽略，则需

$$\frac{1}{2}k\frac{\rho^2}{z}\ll\pi \quad 或 \quad z\gg\frac{\rho^2}{\lambda}, \qquad (2.9)$$

这是因为在指数上的位相因子决定了函数的周期性．每当位相因子改变 π 时，指数函数反号，这种变化是不可忽略的．位相因子中只有远小于 π 的项才可忽略．

可见，球面波向平面波过渡，同时需要两个条件．不等式(2.8)称为傍轴条件，它保证波前上接收到的振幅分布与平面波一样，是与场点无关的常数，但不一定能保证其上位相分布也具有平面波的特点．不等式(2.9)称为远场条件，它保证波前上接收到的位相分布具有平面波的特点，但不一定保持振幅是常数．傍轴条件与远场条件中哪一个更强？这要看 ρ 与 λ 的比值．在光学中往往是远场条件蕴涵傍轴条件．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

总之，(1) 在满足傍轴条件$\rho^2 \ll z^2$时，波前为

$$\tilde{U}(x', y') \simeq \frac{a}{z} \exp\left[ik\left(z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)\right], \qquad (2.10)$$

其振幅已为常数，但位相中还保留平方项(二次相因子)。

(2) 在傍轴条件和远场条件 $\rho^2/\lambda \ll z$ 同时满足时，波前为

$$\tilde{U}(x', y') = \frac{a}{z} \exp[ikz]. \qquad (2.11)$$

这时不仅振幅为常数，位相中也不存在平方项，$\tilde{U}(x', y')$ 是个与 x', y' 无关的常数，这正是垂直入射的平面波。

例题 5 设单色点光源发射的光波波长 $\lambda \sim 0.5\mu m$，横向观测范围的线度 $\rho \sim 1mm$，试估算傍轴距离和远场距离。

解 傍轴条件和远场条件两不等式都代表量级的比较，一般可取 10倍—100 倍作估算。我们约定取50倍，故此题中的傍轴距离应取

$$z_1 = \sqrt{50}\,\rho \simeq 7mm,$$

远场距离应取

$$z_2 = 50\rho^2/\lambda = 100m.$$

可见，由于光波很短，实际观测范围往往远大于波长，致使远场距离远大于傍轴距离，即远场条件蕴涵了傍轴条件。

例题 6 某点声源发射的声波波长$\lambda \sim 1m$，横向探测范围的线度$\rho \sim 10cm$，试估算傍轴距离和远场距离。

解 傍轴距离取

$$z_1 = \sqrt{50}\,\rho \simeq 70cm,$$

远场距离取

$$z_2 = 50\rho^2/\lambda = 50cm.$$

可见对于这类长波，傍轴条件蕴涵了远场条件。

从上面例题 5 可以看出，对于光波实现远场条件往往有困难，因为它所要求的距离之大可能对实验室条件来说是极不现实的。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

但是我们可以利用透镜焦点和焦面的性质，把球面波转化为平面波．如此既可保证远场条件的实现，又大大缩短了装置的长度，这是实际中经常使用的一种方法．有关透镜如何具体地改变复振幅分布的问题，留给第五章讨论(见第五章1.2节)．

2.3 傍轴条件与远场条件(轴外物点)

如图2-4，过 O 点的 x-y 平面为物平面，过 O' 点的 x'-y' 平面为波前，二者间距为 z．令物平面上任意光点 $Q(x,y)$ 到场点 $P(x',y')$ 的矢径为 r，物平面中心 O 到 P 的矢径为 r_0，Q 到波前中心 O' 的矢径为 r_0'，它们的长度分别为

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}\,, \tag{2.12}$$

$$r_0=\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}\,, \tag{2.13}$$

$$r_0'=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \tag{2.14}$$

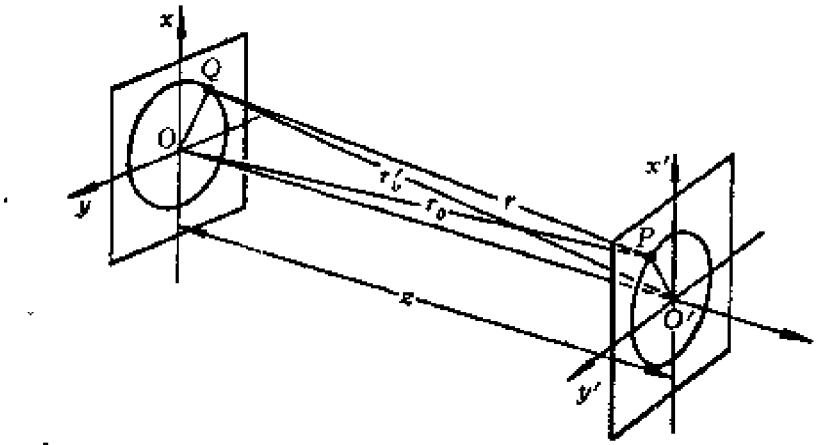


图 2-4 傍轴条件与远场条件(轴外物点)

点源 Q 在 x'-y' 面上激发的球面波前为

$$\tilde{U}(x',y')=\frac{a}{r}\exp[ikr]$$

$$=\frac{a}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}$$

$$\times\exp[ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}]\,. \tag{2.15}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

将 r_0, r_0' 和 r 的表达式(2.12)—(2.14)作泰勒展开：

$$r_0 = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} + \cdots,$$

$$r_0' = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} + \cdots,$$

$$r = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} + \cdots$$

$$= r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} + \cdots$$

或

$$r = r_0' + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} + \cdots,$$

下面分几种情形来讨论：

（1）物点和场点都满足傍轴条件 $x^2, y^2 \ll z^2$；$x'^2, y'^2 \ll z^2$. 这时振幅中可令 $r \simeq z$，于是

$$\tilde{U}(x', y') = \frac{a}{z} \exp\left[ik\left(r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right] \times \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx' + yy')\right] \qquad (2.16)$$

$$= \frac{a}{z} \exp\left[ik\left(r_0' + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)\right] \times \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx' + yy')\right]. \qquad (2.16')$$

此时只有振幅具有平面波的特点，即它等于常数. 在位相因子中既有 x 和 y 的平方项(在 r_0' 中)，也有 x' 和 y' 的平方项(在 r_0 中)，还有正比于 $xx' + yy'$ 的交叉项.

（2）场点满足傍轴条件，而物点同时满足傍轴条件和远场

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

条件 x^2/λ，$y^2/\lambda \ll z$. 这时式(2.16)的位相因子中 x 和 y 的平方项可忽略，

$$\widetilde{U}(x',y') = \frac{a}{z}\exp ikr_0 \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx'+yy')\right]. \quad (2.17)$$

（3）物点满足傍轴条件，而场点同时满足傍轴条件和远场条件 x'^2/λ，$y'^2/\lambda \ll z$. 这时式(2.16′)的位相因子中 x' 和 y' 的平方项可忽略，

$$\widetilde{U}(x',y') = \frac{a}{z}\exp ikr'_0 \exp\left[\frac{-ik}{z}(xx'+yy')\right]. \quad (2.18)$$

此处位相因子中与场点坐标 x'，y' 有关的只剩下线性项 $\frac{-ik}{z}(xx'+yy')$ 了，即 $\widetilde{U}(x',y')$ 完全化为平面波前. 由此线性位相因子中的系数可以看出，此斜入射平面波波矢的前两个方向余弦为

$$\cos\alpha' = -\frac{x}{z}, \qquad \cos\beta' = -\frac{y}{z},$$

它们分别正比于 x 和 y，这正是由 $Q(x,y)$ 到接收面中心 O' 联线的方向①.

上面我们给出了三种情况下波前的表达式(2.16)，(2.16′)，(2.17)和(2.18)，四式中的振幅都是常数，在位相因子的各项中特别值得注意的是那个交叉项：

$$\frac{-ik}{z}(xx'+yy').$$

它的特点是对源点坐标 (x,y) 和场点坐标 (x',y') 都是线性的.对

---

① 在 $x'y'z$ 坐标系中 QO' 方向的方向余弦是

$$\cos\alpha' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \simeq -\frac{x}{z}, \quad \cos\beta' = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \simeq -\frac{y}{z},$$

$$\cos\gamma' = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \simeq 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

于场点$P(x',y')$来说，此因子的线性系数为$-k\frac{x}{z}$和$-k\frac{y}{z}$，它们与源点坐标(x,y)有一一对应关系：

$$(x,y)\longleftrightarrow -\frac{k}{z}(x,y); \tag{2.19}$$

反过来，对于源点$Q(x,y)$来说，此因子的线性系数为$-k\frac{x'}{z}$和$-k\frac{y'}{z'}$，它们又与场点坐标(x',y')一一对应：

$$(x',y')\longleftrightarrow -\frac{k}{z}(x',y'). \tag{2.20}$$

这些性质我们将在以后不同的地方用到.

我们强调上述对应关系，意味着在我们心目中已有了"系统"的概念，这就是说，左边一个物平面(x,y)，右边一个接收面(x',y')，光在其间自由传播，这就构成了一个光学系统，尽管它也许是最简单的光学系统.若用一个电子学网络作比喻的话，物平面相当于信息的输入端，接收面相当于输出端.不过两者有个区别，网络中传递的是随时间变化的讯号，光学系统中传递的是具有空间分布的信息.物光点相当于脉冲讯号，点光源在输出波前上造成的分布函数$\tilde{U}(x',y')$相当于电路的脉冲响应，在现代光学中有个专门术语称呼它，叫做光学系统的"点扩散函数".如果在物平面上输入的是个复杂的画面，可把它看作是物点的集合，式(2.17)中的线性位相因子使得输出面上得到的正好是其傅里叶变换式.

*2.4 高斯光束

激光器谐振腔内以及由它发出的光束，既区别于单纯的平面波，又区别于单纯的球面波(参见图2-5)，它的复振幅可表示为

$$\tilde{U}(x,y,z)=\frac{A}{w(z)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]\times\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2r(z)}+z\right)+i\varphi(z)\right], \tag{2.21}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

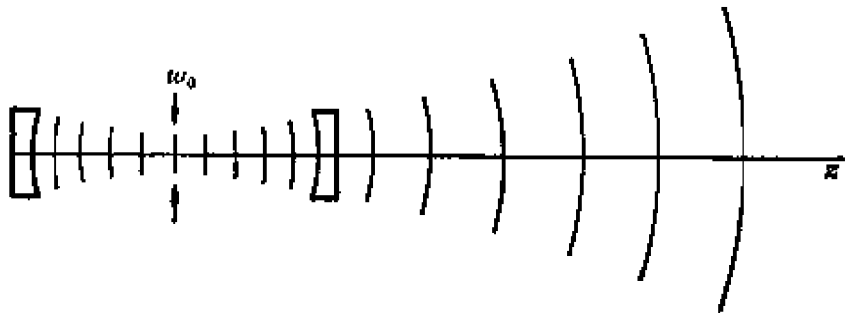


图 2-5　激光器谐振腔发出的高斯光束

其振幅和位相在横向都是(x,y)的高斯型函数(即指数上负的二次型函数)，这种光束称为高斯光束．可以证明，这类高斯型的光场分布可以在两个反射面之间来回传播而保持为高斯型．这就是说，高斯光束是激光器内部能稳定存在的一种光场．

式(2.21)中的$w(z)$和$r(z)$具有如下函数形式：

$$\begin{cases} w(z)=w_0\left(1+\dfrac{\lambda^2z^2}{\pi w_0^4}\right)^{1/2}, & (2.22)\\ r(z)=z\left(1+\dfrac{\pi^2w_0^4}{\lambda^2z^2}\right). & (2.23)\end{cases}$$

w的大小代表光束有效半径，横向距离$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=w$时，振幅减为轴上的$1/e\simeq36\%$，强度减少13%．在坐标原点$z=0$处$w=w_0$，光束最细，w_0称为高斯光束的腰粗．高斯光束腰的位置和粗细取决于谐振腔的具体结构，与两个腔面的曲率和腔长有关．在傍轴的范围内，高斯光束的等相面近似为曲率半径为$r(z)$的球面．式(2.23)表明，$r(z)\fallingdotseq z$，这些球面的中心并不重合．在光束腰处，等相面为平面；在远场范围，$z^2\lambda^2\gg\pi^2w_0^4$，$r(z)\simeq z$，高斯光束才过渡为通常的球面波，其光锥中心正好在腰处．

综上所述，一旦确定了高斯光束腰的位置和粗细，根据式(2.21)，(2.22)，(2.23)即可确定它的所有传播特征．

思　考　题

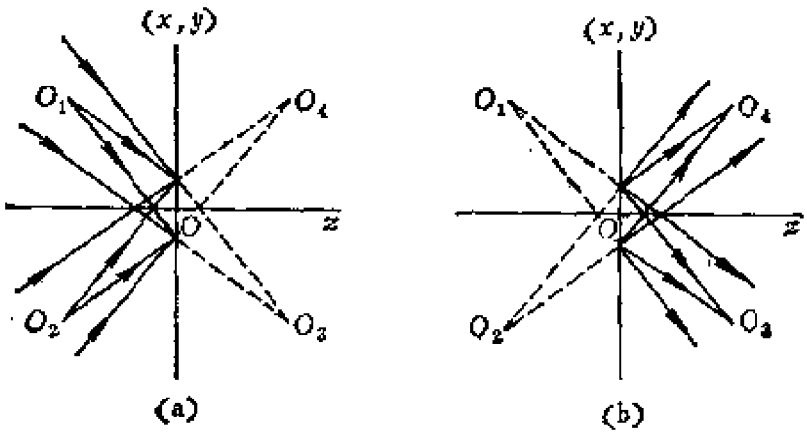
1．本节例题1—例题4中波前上等位相点的轨迹都是些什么样的曲线？描绘一下它们的主要特征，如取向、间隔等．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

2. 比较球面波向平面波过渡的远场条件和傍轴条件。什么情况下远场条件蕴涵了傍轴条件？什么情况下傍轴条件蕴涵了远场条件？

3. 某天文望远镜的口径有 3 m，对这台望远镜来说，多少距离以外的星体可当作"无限远"看待？并将这个距离与月地间的距离（约 4×10^8 m）作比较。

4. 如图，有八列球面波，其中四列是入射波（图(a)），四列是出射波（图(b)），它们在波前 $z=0$ 面上具有共同的光瞳（即窗口），能流数值相同，波束中心 O_1,O_2,O_3,O_4，分别与 $z=0$ 和 $x=0$ 面成镜像对称。



思考题 4 图

(1) 指明其中哪几列波在 $z=0$ 面上的复振幅分布相同；

(2) 哪几列波在 $z=0$ 面的复振幅分布互为共轭；

(3) 设 O_1 的坐标为 $(x_1,y_1,-R)$，其它波束中心 O_2,O_3,O_4 的坐标为何？具体写出(a),(b)两图中 1，2 两列波在波前 $z=0$ 上的复振幅分布函数。

习　题

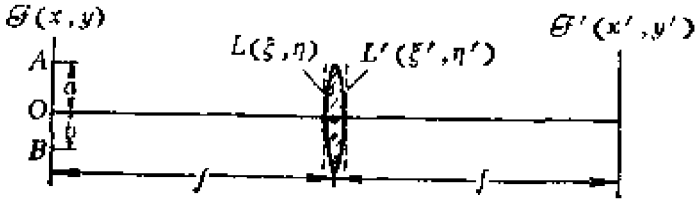
1. 如图，在一薄凸透镜的物方焦面上有三个点光源 O,A,B，试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后，在像方焦面上产生的复振幅分布函数。

2. 考察上题中紧贴于薄透镜前后表面的两个平面波前 $L(\xi,\eta)$ 和 $L'(\xi',\eta')$，分别写出在傍轴条件下三列波在它们上边的复振幅分布。

3. 仿照上题的办法，讨论一束倾斜的平行光经过一个凹透镜时，在

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

它前后两波前上复振幅分布的变化。



习题 1 图

§3 波的迭加和波的干涉

本节首先介绍对各种波动具有普遍意义的波的迭加原理，再结合光波的特殊性，阐明相干条件。

3.1 波的迭加原理

房里点着两盏灯，经验告诉我们，我们看到每盏灯的光并不因另一盏灯是否存在而受到影响。这现象告诉我们，当两列光波在空间交迭时(图3-1)，它的传播互不干扰，亦即每列波如何传播，就象另一列波完全不存在一样，各自独立进行。这就是所谓光的独立传播定律。以上现象不是光波所特有，而是一般波动的性质，这就是波的独立传播定律。

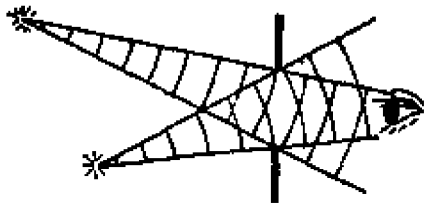


图 3-1 光的独立传播定律

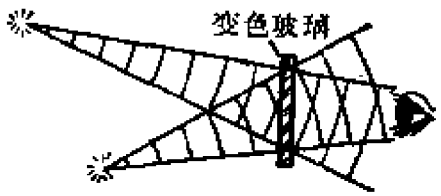


图 3-2 光不独立传播的例子

光的独立传播定律，或波的独立传播定律是否普遍成立而无例外呢？否！它们和任何实验定律一样，都是有条件的。举个最形象化的例子：现在有一种变色玻璃，这种玻璃，在光照比较暗的条件下它是无色透明的，但当较强的光照射在其上时，它就逐

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

渐变成有色的，对光产生较强的吸收．在我们隔着这样的玻璃观看一盏较弱的灯光时，旁边一盏很强的灯是否开着，是很有影响的(图3-2)，因为它会改变玻璃的透光率和颜色．这例子表明，光通过变色玻璃时，是不服从独立传播定律的．

一列波在空间传播时，在空间的每一点引起振动．当两列(或多列)波在同一空间传播时，空间各点都参与每列波在该点引起的振动．如果波的独立传播定律成立，则当两列(或多列)波同时存在时，在它们的交迭区域内每点的振动是各列波单独在该点产生的振动的合成，这就是波的迭加原理．这里所谓振动，对机械波来说，就是媒质中质点的振动，对光波(电磁波)来说，则是电矢量和磁矢量的振动．所以波的迭加就是空间每点振动的合成问题．对于标量波，则是标量的迭加：

$$U(P,t)=U_1(P,t)+U_2(P,t)+\cdots, \tag{3.1}$$

对于矢量波，则是矢量的合成：

$$\boldsymbol{U}(P,t)=\boldsymbol{U}_1(P,t)+\boldsymbol{U}_2(P,t)+\cdots, \tag{3.2}$$

式中的 P 代表波场中任一场点．

波的迭加原理与独立传播定律一样，适用性是有条件的．这条件一是媒质，二是波的强度．光在真空中总是独立传播的，从而服从迭加原理．光在普通的玻璃中，只要不是太强，也是独立传播和服从迭加原理的．但在上述变色玻璃中则不然．其实即使在普通玻璃中，当光的强度非常大时，也会出现违背迭加原理的现象．波在其中服从迭加原理的媒质，称为“线性媒质”，不服从迭加原理的媒质，称为“非线性媒质”．违反迭加原理的效应，称为“非线性效应”．光的非线性效应种类很多，研究光的非线性效应的学科称为“非线性光学”．因为许多媒质的非线性效应只有在很强的光作用下才较明显，所以非线性光学只在激光出现之后才得以蓬勃的发展．有关光的非线性效应，我们将在本书最后一章的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

最后一节作些简单的介绍．在此之前我们不作特殊声明，都假定媒质是线性的，即光波服从迭加原理．波的迭加原理实际上是今后许多章节的理论基础．

3.2 波的干涉与相干条件

上面讨论的是光扰动瞬时值的迭加问题，而实际中往往更关心光强的迭加，因为大多数接收器件(包括我们的眼睛)响应的是光的强度．波的迭加原理并不意味着两列波交迭时强度一定相加，但可以由它导出强度的合成规律．

首先考虑两列同频率的简谐标量波：

$$\begin{cases} U_1(P,t) = A_1\cos[\omega t - \varphi_1(P)], \\ U_2(P,t) = A_2\cos[\omega t - \varphi_2(P)]. \end{cases}$$

它们的迭加可用矢量图解法或复数法①，这里我们采用复数法，写出对应的复振幅：

$$\begin{cases} \widetilde{U}_1(P) = A_1(P)e^{i\varphi_1(P)}, \\ \widetilde{U}_2(P) = A_2(P)e^{i\varphi_2(P)}. \end{cases}$$

二者的合成为

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(P) &= \widetilde{U}_1(P) + \widetilde{U}_2(P) \\ &= A_1(P)e^{i\varphi_1(P)} + A_2(P)e^{i\varphi_2(P)}, \end{aligned}$$

强度(平均能流)正比于振幅的平方，或复振幅与其共轭的乘积．于是

$$\begin{aligned} I(P) &= \widetilde{U}(P)\widetilde{U}^*(P) \\ &= [\widetilde{U}_1(P) + \widetilde{U}_2(P)][\widetilde{U}_1^*(P) + \widetilde{U}_2^*(P)] \\ &= [A_1(P)]^2 + [A_2(P)]^2 \\ &\quad + A_1(P)A_2(P)(e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} + e^{-i\varphi_1 + i\varphi_2}), \end{aligned}$$

---

① 可参考赵凯华、陈熙谋，《电磁学》，下册第七章和附录C，人民教育出版社．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

即

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\cos\delta(P),\quad(3.3)$$

式中$I_1(P)=[A_1(P)]^2$和$I_2(P)=[A_2(P)]^2$分别是两列波单独在场点P处的强度，$\delta(P)=\varphi_1(P)-\varphi_2(P)$是两波在$P$点的位相差．式(3.1)告诉我们，两波迭加时，在一般情况下，强度不能直接相加：

$$I(P)\neq I_1(P)+I_2(P),$$

相差有$2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)$一项．$\delta(P)$与位置有关，$\cos\delta(P)$可正可负．在那些$\cos\delta(P)>0$的地方，$I(P)>I_1(P)+I_2(P)$，$\cos\delta(P)<0$的地方，$I(P)<I_1(P)+I_2(P)$．换句话说，波的迭加引起了强度的重新分布．这种因波的迭加而引起强度重新分布的现象，叫做波的干涉，式(3.3)中$2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)$一项称为干涉项．

对于光波来说，干涉项的效应并不是在任何条件下都能显示出来的．因为光波的振源是微观客体，在下面3.3节中我们将看到，$\delta(P)$经常是极不稳定的，它的数值在0到2π之间迅速变化着，从而使$\cos\delta(P)$的时间平均值为0．所以，保证位相差$\delta(P)$的稳定，是干涉现象能够被观察或检测到的重要条件之一．

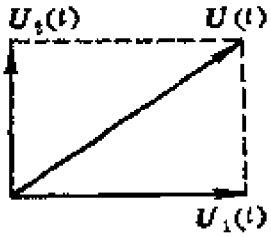


图 3-3　垂直振动的合成

现在来看两列同频的简谐矢量波．如果它们的振动方向平行，其迭加与标量无异，同样会出现干涉项．如果两列波的振动方向垂直，则瞬时值之间有下列关系(见图3-3)：

$$U^2(P,t)=U_1^2(P,t)+U_2^2(P,t),$$

取时间平均后，得强度之间的关系为

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P),$$

即不存在干涉效应．在一般情况下，振动方向成一定角度．这时可把它们分解成相互平行和相互垂直的分量，平行分量之间可以

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

发生干涉，垂直分量决不会干涉。

最后，不同频率的波之间总是没有干涉效应的。因为这时交叉项中将出现下列因子：

$$2\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$=\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2]$$
$$+\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_1-\varphi_2],$$

在 $\omega_1-\omega_2\approx 0$ 的情况下其时间平均值总是为 0 的。

归纳起来，产生干涉的必要条件（相干条件）有三条：

（1）频率相同；

（2）存在相互平行的振动分量；

（3）位相差 $\delta(P)$ 稳定。

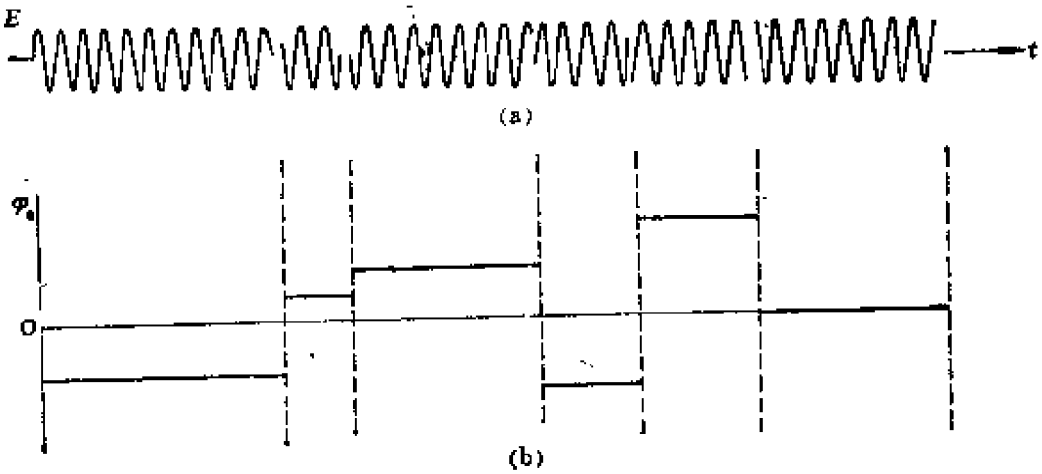
其实这三条并非处于同等地位。第一条是任何波发生干涉的必要条件。第二条是针对矢量波的，因为标量波没有这个问题。一般说来有此二条就足以产生干涉了，剩下的是干涉场的稳定性问题，稳定与否的标准又和探测仪器的响应时间有关。对于宏观波源发出的波（如无线电波、声波），位相差和干涉场的稳定性是不成问题的，对于它们，相干条件中的第三条无需强调。但对于微观客体发射的光波来说，这第三条却成了相干条件中最需要着重研究的问题，下面专门来讨论它。

3.3 普通光源发光微观机制的特点

光是由光源中多个原子、分子等微观客体发射的。微观客体的发光过程是一种量子过程（详见第九章），很难用一个简单的图像描绘清楚。粗略地说，原子或分子每次发射的光波波列都是有限长的，波列的长度与它们所处的环境有关，如果发射光波的原子或分子受到其它原子或分子的作用越强，发射过程受到的干扰越大，波列就越短。不过，即使在非常稀薄的气体中相互作用几乎可以完全忽略的情况下，它们发射的波列持续的时间 τ_0 也不会大于 10^{-8}s，相应的长度小于米的数量级。微观客体的发光过程

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

有二：自发辐射和受激辐射．普通光源(即非激光光源)的发射过程以自发辐射为主，这是一种随机过程，每个原子或分子先后发射的不同波列，以及不同原子或分子发射的各个波列，彼此之间在振动方向和位相上没有什么联系．因此，许多断续的波列，持续时间比通常探测仪器的响应时间短得多，振动方向和位相是无规的，这就是普通光源发光的基本特征(参见图3-4)．



(a) 断续的波列　(b) 位相的随机跃变

图 3-4　非激光光源中原子发射光波的图像

现在让我们回到上面的式(3.1)，着重考察其中的干涉项．对于任意两个普通光源（或同一光源的两个不同部分）发出的光波，由于位相差 $\delta=\varphi_1-\varphi_2$ 不固定，$\cos\delta$ 的数值在 ±1 之间迅速的改变着．人们观察到或仪器记录到的是它的时间平均值 $\overline{\cos\delta}$，在位相的变化完全无规的情况下，$\overline{\cos\delta}=0$，从而式(3.1)化为

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P),$$

这时我们说，这两个光源是非相干的，它们的强度非相干迭加．要产生相干迭加，必须设法使它们发射的光波之间有稳定的位相差．4.2节中将介绍，如何利用普通光源作到这一点．

在“光强”这个物理量的引入和干涉场稳定性问题的讨论中，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

涉及若干个时间尺度的量级比较，我们应当予以注意。一是光扰动的时间周期 T，二是实验观测时间 τ，三是接收器件的时间响应能力（可分辨的最小时间间隔）Δt。在可见光波段，$T\sim10^{-15}$s，人眼的$\Delta t\simeq10^{-1}$s，好的光电探测器的 $\Delta t\sim10^{-9}$s（毫微秒器件）；观测时间总是大于接收器的时间响应能力，所以 $\tau>\Delta t\gg T$。于是，接收器感受到的只是光波在一个周期内的平均能流密度，即光强。这就是引入光强概念及计算光强公式的物理根据。当然，即使日后器件的响应能力达到了与光扰动的周期可以相比甚至更短的水平，我们所定义的光强仍不失其意义。这是因为人们并不一定对光波的瞬时能流值感兴趣，当人们关心同一波场不同地点能流强弱的情况，或者比较不同波列能流的强弱时，人们宁愿将能流对时间取平均值以突出它的空间分布问题，实验时往往有意让观测时间足够长，满足 $\tau\gg T$。

在干涉场的稳定性问题中，还涉及第四个时间量级——从微观上看光源一次持续发光的时间τ_0。普通光源的$\tau_0\sim10^{-8}$s以下，则一秒钟内，光源发射 10^8 段以上的波列，或者说一秒钟内波列的初位相无规跃变10^8次以上，影响到干涉强度公式中的交叉项，将使干涉花样在一秒钟内闪动10^8次以上。如果接收器的时间响应能力$\Delta t\gg\tau_0$，则接收到的是一种平均干涉场，是对干涉场中能流又一次取时间平均值，使得已出现的交叉项效应消失，成为非相干迭加。设想如果光源的持续发光时间τ_0较长，接收器的时间响应能力很高，以致$\Delta t<\tau_0$，那么就无需对干涉场中能流第二次取时间平均值，接收器就可以感受到两波列的瞬时干涉花样并记录下来。如果接收器（配以快门装置）不断开启，就象电影摄影机那样可以记录下来一幅幅干涉花样。值得注意的是这些花样的形状是相同的，只在空间分布上条纹总体略有位移而已。

总之，如果在观测时间中场点有稳定的位相差，则可以接收到一套稳定的干涉花样；如果在观测时间中场点的位相差不稳定，则接收到一套套不稳定的干涉花样；如果位相差的不稳定性过于

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

频繁，以致接收器来不及反应，那么接收到的将是这一系列略有位移的干涉花样的时间平均，其后果呈现为非相干迭加的情景.

3.4 干涉条纹的反衬度及其与振幅比的关系

3.2节中列出的相干条件是出现干涉现象的必要条件.但是这些条件尚不足以保证干涉现象是否显著. 对于光波来说，干涉现象往往表现成亮暗相间的条纹，干涉现象的显著程度可用干涉条纹的反衬度来描述. 干涉条纹的反衬度 γ 定义为

$$\gamma=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}, \tag{3.4}$$

其中 I_M 和 I_m 分别是干涉场中光强的极大和极小值（见图3-5），γ 的取值范围为

$$0\leqslant\gamma\leqslant1.$$

当 $I_m=0$（暗纹全黑）时，$\gamma=1$，条纹的反差最大，清晰可见. 当 $I_M\to I_m$ 时，$\gamma\simeq0$，条纹模糊不清，乃至不可辨认.

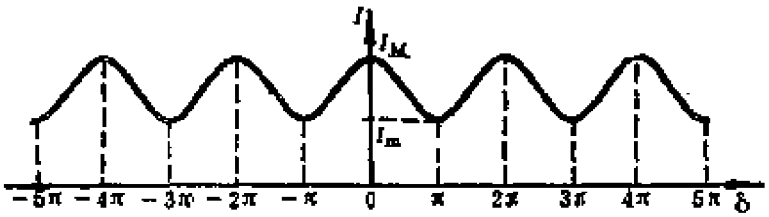


图 3-5 干涉条纹的反衬度

影响干涉条纹反衬度大小的因素很多，对于理想的相干点源发出的光来说，主要的因素是振幅比. 下面就此作些说明. 让我们回到式(3.3)，把它用振幅表述成：

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta, \tag{3.5}$$

当 $\delta=2k\pi$（k 为整数）时，$\cos\delta=+1$，$I=I_M=(A_1+A_2)^2$；当 $\delta=(2k+1)\pi$（k 为整数）时，$\cos\delta=-1$，$I=I_m=(A_1-A_2)^2$. 于是反衬度为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\gamma=\frac{2A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}=\frac{2(A_1/A_2)}{1+(A_1/A_2)^2}. \tag{3.6}$$

若令$I_0=I_1+I_2=A_1^2+A_2^2$，式(3.5)可写为

$$I=I_0(1+\gamma\cos\delta). \tag{3.7}$$

这是双光束干涉场中强度分布的另一标准表达式.

*3.5 线性光学系统

顺便指出，无论相干迭加和非相干迭加，都属于线性迭加. 在非相干光学系统中，N列波的强度满足线性迭加关系：

$$I(P)=\sum_{i=1}^{N}I_i(P), \tag{3.8}$$

在相干光学系统中，复振幅满足线性迭加关系：

$$\tilde{U}(P)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{U}_i(P). \tag{3.9}$$

故非相干光学系统是光强的线性系统，相干光学系统是复振幅的线性系统. 既然都是线性系统，在其它领域(如电通讯系统)中早已成熟的一整套有关线性系统的概念、术语、分析方法和数学手段都可移植过来. 这是现代波动光学的一种新风格.

思 考 题

1. 有人说，相干迭加服从波的迭加原理；非相干迭加不服从波的迭加原理. 这种说法对吗?

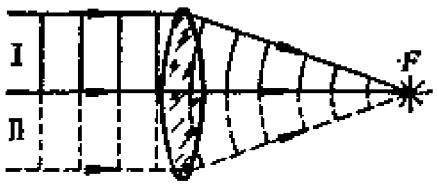
2. 有人说，光强可以直接相加，就服从波的迭加原理；否则就是不服从波的迭加原理. 这种说法对吗? 光强不可以直接相加，是否意味着波的独立传播定律不成立?

3. 两列光波频率相同，且有稳定的位相差，但振动的方向既不互相垂直，又不严格平行，这两列波的迭加将是相干迭加还是非相干迭加.

4. 在扩展强光束(激光)时，人们避免用"实聚焦"的方法(如图)，因为在实焦点处的光功率密度太高，可能引起空气"着火"(电离). 现在设想如果将入射光束挡住一半，先后让Ⅰ，Ⅱ两部分聚焦于F点，并不引起着

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

火，而同时开放，让全部光束聚焦时，就要发生空气着火现象．试问，在这个过程中，波的迭加原理是否成立？这可算得是一种非线性效应吗？



思考题4图

5．设§2例题2中那一对共轭波是相干的，求它们在波前上迭加时产生的复振幅分布．在波前上强度最大和最小的点都在那些位置上？

习　题

1．人眼视神经的时间响应能力约为0.1s，在这段时间里光扰动经历了多少个周期？

2．目前光电接收器的最高时间响应能力可达 10^{-9}s(ns量级)，在这段时间里光的扰动经历了多少个周期？

3．自发辐射一列光波的持续时间不超过 10^{-8}s，其中约包含多少次振动？

4．试计算两列相干光波的振幅比为下列数值时条纹的反衬度：

$$A_1/A_2=1,\ 1/3,\ 3,\ 1/6,\ 1/10.$$

§4　两个点源的干涉

4.1　两列球面波的干涉场

作为波的干涉的最简单、也是最重要的例子，让我们先研究两列球面波的干涉．

设在均匀媒质中有两个作同频率简谐振动的相干点波源 Q_1 和 Q_2(图4-1)，它们各自向周围媒质发出球面波．现考虑空间任一点 P 的强度．按照式(3.3)，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

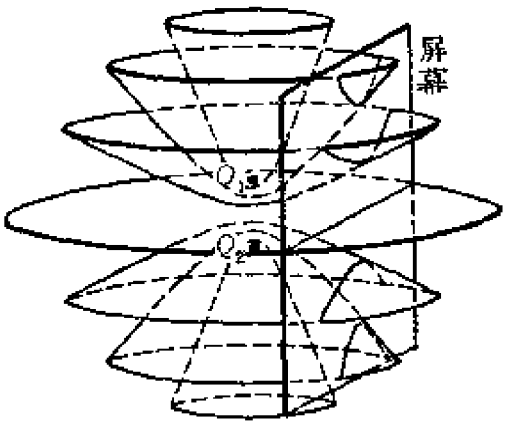


图 4-1　两球面波的干涉场

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\cos\delta(P),$$

这里$I_1(P)=[A_1(P)]^2$和$I_2(P)=[A_2(P)]^2$，而$A_1(P)$与$A_2(P)$与振源的强度和距离$\overline{Q_1P}=r_1$，$\overline{Q_2P}=r_2$有关．设两振源强度相等，这时振幅$A_1(P)$和$A_2(P)$分别与r_1和r_2成反比．设r_1和r_2远大于$\overline{Q_1Q_2}=d$，则可认为$A_1(P)\simeq A_2(P)$，记作A，于是

$$\begin{aligned}I(P)&=2A^2[1+\cos\delta(P)]\\&=4A^2\cos^2\frac{\delta(P)}{2}.\end{aligned}\qquad(4.1)$$

即$I(P)$是$\delta(P)$的周期性函数(见图4-2)．

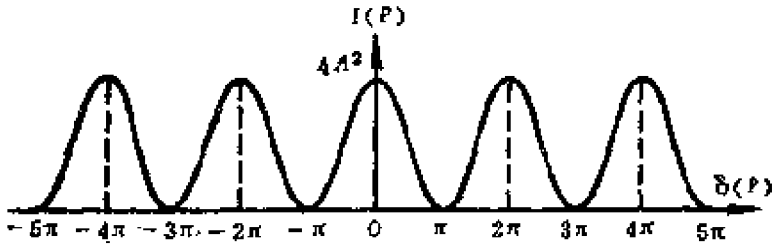


图 4-2　两波相干迭加时强度与位相差的关系

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

现在考察位相差：

$$\delta(P)=\varphi_1(P)-\varphi_2(P),$$

而

$$\begin{cases}\varphi_1(P)=\varphi_{10}+kr_1=\varphi_{10}+\dfrac{2\pi}{\lambda}r_1,\\[2ex]\varphi_2(P)=\varphi_{20}+kr_2=\varphi_{20}+\dfrac{2\pi}{\lambda}r_2.\end{cases}$$

于是

$$\delta(P)=\varphi_{10}-\varphi_{20}+\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2),$$

这里 $-\varphi_{10}$ 和 $-\varphi_{20}$ 分别是波源 Q_1 和 Q_2 的初位相．对于相干波源，$\varphi_{10}-\varphi_{20}$是固定不变的，为简单起见，考虑 $\varphi_{10}-\varphi_{20}=0$ 的情形．这时

$$\delta(P)=\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2), \tag{4.2}$$

即 $\delta(P)$ 正比于波程差 $\Delta L=r_1-r_2$．

下面来分析强度分布的具体情况．由式(4.2)和(4.1)可以看出，波场中强度 $I(P)$ 为极大和极小的条件是

$$\begin{cases}\text{极大}\quad \Delta L=k\lambda, & (4.3a)\\[2ex]\text{极小}\quad \Delta L=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\lambda & (4.3b)\end{cases}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

满足以上方程的P点轨迹是以 Q_1,Q_2 为焦点的回转双曲面族(图4-1)．在此$I_1=I_2$的情况下，$I(P)$的极大值是$4A^2$，即I_1或 I_2的四倍，I_1+I_2的两倍；$I(P)$ 的极小值为 0；强度的平均值为 $2A^2=I_1+I_2$．这体现了强度在空间的重新分布．

两点波源的干涉场，可以用水波盘来演示出来（见图4-3）．从照片可以看出振动加强和减弱(抵消)的情况．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



图 4-3　两点源干涉场的水波盘演示

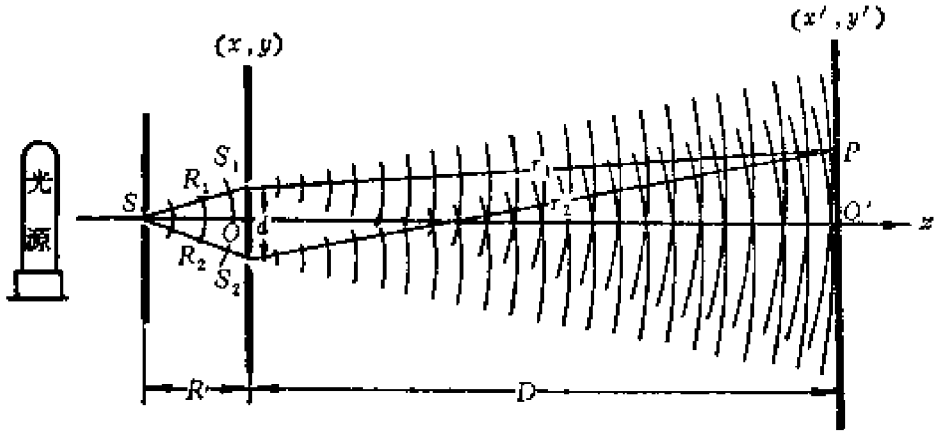
4.2　杨氏实验

用两个点源作光的干涉实验的典型代表，是杨氏实验(T. Young，1801年)．在上面用水波盘演示的干涉实验中，两振源是装在同一支架上的振子，3.2节所述的三个相干条件无疑都能实现．但要用普通光源来实现干涉，就不那么容易了．杨氏实验以极简单的装置和巧妙的构思做到了这一点，它不仅是许多其它光的干涉装置的原型，在理论上还可从中提取许多重要的概念和启发，无论从经典光学还是从现代光学的角度来看，杨氏实验都具有十分重要的意义．

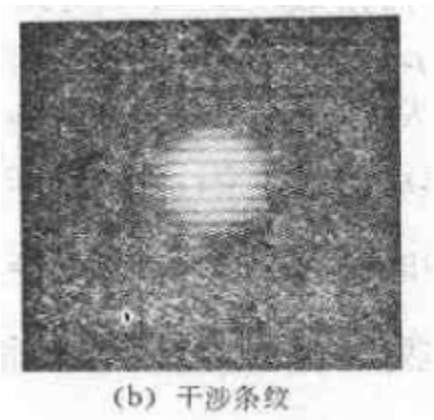
杨氏实验的装置如图4-4(a)所示，在普通单色光源（如钠光灯）前面放一个开有小孔S的屏，作为单色点光源．在S的照明范围内，再放一个开有两个小孔S_1和S_2的屏．按惠更斯原理，S_1和S_2将作为两个次波源向前发射次波（球面波），形成交迭的波场．在较远的地方放置一接收屏，屏上可以观测到一组几乎是平行的直线条纹(图4-4(b))．为了提高干涉条纹的亮度，实际中S，S_1，S_2用三个互相平行的狭缝(杨氏双缝干涉)，而且可不用屏幕接收，而代之以目镜直接观测．在激光出现以后，利用它的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

相干性和高亮度，人们可以用氦氖激光束直接照明双孔，在屏幕上可获得一套相当明显的干涉条纹，供许多人同时观看。



(a) 装置



(b) 干涉条纹

图 4-4 杨氏实验

利用普通光源做杨氏实验，相干光源是由同一点光源 S 分解出来的两个次级光源．现在来分析，它们之间的稳定位相差是如何现实的．设 $\overline{SS_1}=R_1$，$\overline{SS_2}=R_2$，用 φ_0 代表点波源 S 的初位相，则点波源 S_1,S_2 的初位相分别为

$$\varphi_{10}=\varphi_0(t)+\frac{2\pi}{\lambda}R_1,\quad \varphi_{20}=\varphi_0(t)+\frac{2\pi}{\lambda}R_2,$$

从而

$$\varphi_{10}-\varphi_{20}=\frac{2\pi}{\lambda}(R_1-R_2). \tag{4.3}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

由此可见，尽管φ_0可以是不稳定的，从而φ_{10}和φ_{20}都是不稳定的，但φ_{10}与φ_{20}之差却只与光程差R_1-R_2有关，它是不随时间变化的．这就是说，S_1和S_2确是一对相干光源．从同一列波的波面上取出的两个次波源，总是相干的——这就是杨氏实验构思的精巧之所在，一切分波前干涉装置(参见第三章)的设计思想都仿效于此．杨氏实验的意义还在于，历史上最先为光的波动性提供实验证据的是光的干涉现象，而杨氏实验是导致光的波动理论被普遍承认的一个决定性的实验．

杨氏双孔实验装置中的数据一般可取：

双孔间隔　　$d\sim 0.1\text{mm}—1\text{mm}$，

横向观测范围　　$\rho\sim 1\text{cm}—10\text{cm}$，

幕与双孔屏的距离　　$D\sim 1\text{m}—10\text{m}$．

在这里$d^2\ll D^2$，$\rho^2\ll D^2$，点源和接收场都符合傍轴条件．设S_1，S_2与S等远，$R_1=R_2$，从而$\varphi_{10}=\varphi_{20}$可取二者皆为0．如图4-4，取物平面原点$O$位于$S_1$，$S_2$联线的中点上，$x$轴沿此联线，于是式(2.16)中的$z=D$，$x=d/2$，$y=0$，$r_0=D+\frac{(d/2)^2}{2D}$．$S_1$，$S_2$两点源在接收屏上造成的复振幅分布为

$$\begin{cases}\widetilde{U}_1(x',y')=\dfrac{a}{D}\exp\left\{ik\left(D+\dfrac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right)\right\}\\ \qquad\qquad\times\exp\left(\dfrac{-ikd}{2D}x'\right),\\ \widetilde{U}_2(x',y')=\dfrac{a}{D}\exp\left\{ik\left(D+\dfrac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right)\right\}\\ \qquad\qquad\times\exp\left(\dfrac{ikd}{2D}x'\right),\end{cases}$$

故合成振幅为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\tilde{U}(x',y') = \tilde{U}_1(x',y') + \tilde{U}_2(x',y')$$
$$= \frac{2a}{D}\exp\left[ik\left(D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right)\right]$$
$$\times \cos\left(\frac{kd}{2D}x'\right), \qquad (4.4)$$

屏幕上的强度分布为

$$I(x',y') = \tilde{U}^*(x',y')\tilde{U}(x'y')$$
$$= 4A^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right), \qquad (4.5)$$

其中$A = a/D$是每个点源单独在屏幕上产生的振幅，$A^2 = I_1 = I_2$则是每个点源单独产生的强度．下面让我们来分析干涉条纹的特征：

（1）干涉条纹的形状

式(4.5)表明$I(x',y')$与y'无关，即等强度线是一组与y'轴平行的直线①，强度随x'作周期性变化．

（2）干涉条纹的间距

干涉条纹的间距定义为两条相邻亮纹(强度极大)或两条暗纹(强度极小)之间的距离．由式(4.5)可得双孔干涉条纹的间距为

$$\Delta x' = \frac{\lambda D}{d}, \qquad (4.6)$$

如果我们注意到，双孔S_1, S_2对接收屏幕中心点O'所张的角距离为

$$\Delta\theta \simeq \frac{d}{D}, \qquad (4.7)$$

条纹间距公式(4.6)可改写为

$$\Delta x' \simeq \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad 或 \quad \Delta x' \cdot \Delta\theta = \lambda, \qquad (4.8)$$

① 前曾指出(见4.1节)，两球面波干涉场中等强度面是双曲面，它们被平面屏幕截出的轨迹是双曲线．在傍轴条件下，这些双曲线可近似看成平行的直线．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

可见，$\Delta x'$与$\Delta\theta$成反比.

例题 1 在杨氏双孔干涉装置中，以氦氖激光束直接照射双孔，双孔间隔为0.5mm，屏幕在 2m 远，求条纹的间距，它是光波长的多少倍？

解 氦氖激光的波长 $\lambda = 6328\,\text{Å} \simeq 0.6\mu\text{m}$. 因 $d = 0.5\text{mm}$, $D = 2\text{m}$，代入式(4.6)，得$\Delta x' = 2.4\text{mm}$. 而

$$\frac{\Delta x'}{\lambda} = \frac{D}{d} = 4 \times 10^3 \text{倍}.$$

从上述例题中$\Delta x'$和 λ 两个长度在数量级上的比较，可以在物理思想上得到很大的启发. 我们知道，波长一量是反映光波的空间周期性的，而条纹间距一量是反映干涉场中光强分布的空间周期性的. 在本质上，这两种周期性互为表里. 光的波长很小，光的行波又以极快的速度传播，使我们很难观察其空间周期性. 人们通过干涉的手段，将上述不能直接观测的现象加以转化放大，并使之稳定下来，变为可观测的图样，这就是干涉条纹. 如果我们测定了条纹间隔$\Delta x'$，就可利用式(4.6)反过来推算光的波长.

若光源中包含 λ_1和 λ_2 两条谱线，则屏幕上有两套间距不同的条纹同时存在，它们非相干地迭加在一起（图4-5）. 对于更复杂的光谱，屏幕上的强度分布将具有复杂的形式. 若光源发出的是白光，则在中央零级的白色亮纹两侧对称地排列着若干条彩色条纹.

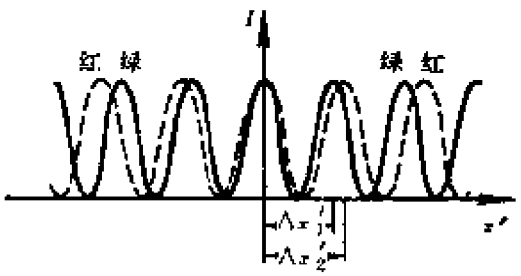
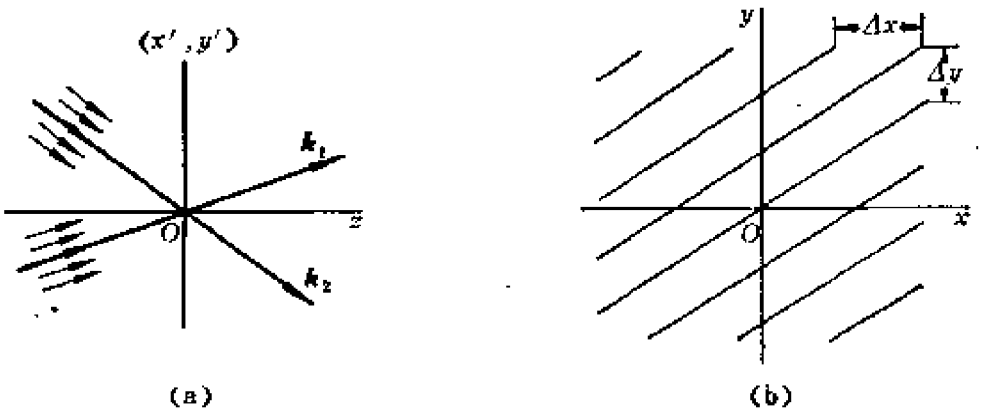


图 4-5 两套不同颜色的干涉条纹不相干迭加

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

4.3 两束平行光的干涉场

杨氏实验是两列球面光波在傍轴条件下的干涉，下面我们讨论两列平面波的干涉.这相当于两点源位于无穷远的情形.实际上可用一束激光经过准直化、分束器和反射镜来实现.



(a) (b)

图 4-6 两束平行光的干涉

如图4-6(a)两列同频率的单色平面波同时照射在$z=0$的波前上. 设它们的振幅分别为A_1和A_2，在坐标原点O处的初位相分别是φ_{10}和φ_{20}，传播的方向角分别是$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$和$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$. 于是波前上的位相分布为

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y)=k(\cos\alpha_1 x+\cos\beta_1 y)-\varphi_{10},\\ \varphi_2(x,y)=k(\cos\alpha_2 x+\cos\beta_2 y)-\varphi_{20},\end{cases}$$

$$\delta(x,y)=k(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)x+k(\cos\beta_1-\cos\beta_2)y+\varphi_{20}-\varphi_{10}.$$

按式(3.7)可以写出波前上强度的分布：

$$I(x,y)=(A_1^2+A_2^2)\{1+\gamma\cos[k(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)x+k(\cos\beta_1-\cos\beta_2)y+\varphi_{20}-\varphi_{10}]\},\qquad(4.9)$$

此式表明，干涉条纹是一组平行的直线(图4-6(b))，它们的取向由$\cos\alpha_1-\cos\alpha_2$和$\cos\beta_1-\cos\beta_2$之比决定. 沿$x,y$两个方向的条纹间距分别为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\pi}{k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)} = \dfrac{\lambda}{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}, \\ \Delta y = \dfrac{2\pi}{k(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)} = \dfrac{\lambda}{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}. \end{cases} \tag{4.10}$$

它们的倒数代表单位长度内的条纹数，称为空间频率．沿两方向的空间频率分别为

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{\Delta x} = \dfrac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\lambda}, \\ f_y = \dfrac{1}{\Delta y} = \dfrac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{\lambda}. \end{cases} \tag{4.11}$$

例题 2　两束相干的平行光，波长为0.6μm（氦氖激光），传播方向与x-z面平行，与z轴的交角分别为$\theta_1 = 15°$和$\theta_2 = -30°$（见图4-7），振幅比为$A_1 : A_2 = 1:2$，求$z=0$波前上干涉条纹的性质．

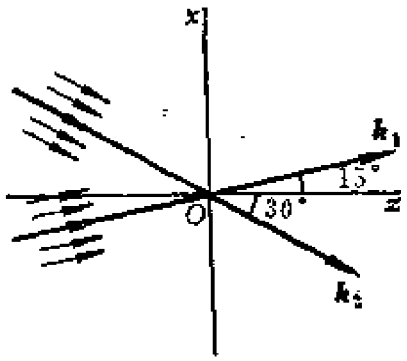


图 4-7　例题2——平行于 x-z 面的两束平行光的干涉场

解　反衬度

$$\gamma = \frac{2A_1/A_2}{1+(A_1/A_2)^2} = 0.8,$$

因$\alpha_1 = 90° - \theta_1$，$\alpha_2 = 90° - \theta_2$，$\beta_1 = \beta_2 = 90°$，条纹间距为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{\lambda}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2} = 0.8\mu m, \\ \Delta y = \infty. \end{cases}$$

空间频率为

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{\Delta x} = 1250 mm^{-1}, \\ f_y = \dfrac{1}{\Delta y} = 0. \end{cases}$$

干涉条纹是一组平行于 y 轴的直线，每毫米内有1250条。

如果从波信息的眼光评价干涉条纹的话，在它的反衬度中包含了振幅比的信息，而它的形状、间距(或空间频率)等几何特征反映了两列波之间位相差 δ 的分布。总之，若把干涉场中光强的分布记录下来，就相当于记录了相干光波前上的振幅比和位相差两方面的信息。这就是"全息记录"的概念，详见第六章。

思 考 题

1. 除了3.2节中叙述的三个必须保证的相干条件外，还需要有什么样的条件，才能使干涉条纹清晰可见？

2. 设想一下，在杨氏双孔实验中(见图4-4)若 S 沿平行于 S_1S_2 联线的方向作微小位移，干涉图样发生怎样的变化？沿垂直 S_1S_2 联线的方向位移时情况如何？

3. 在杨氏双孔实验中，双孔 S_1，S_2 彼此稍微移近时，干涉条纹有何变化？

4. 你能想象，杨氏双缝实验中缝的宽度 b 对干涉条纹会产生怎样的影响吗？

5. 在杨氏双孔实验中，用白光照明，将出现怎样的干涉图样？

6. 波长为 λ 的两束平行光造成的干涉条纹的间距，其上限和下限各为多少？相应空间频率的上限和下限各为多少？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

7. 设想我们用声波或无线电波来模拟杨氏双孔干涉实验，采用的数据如下：

(1) 两声波源间距60cm，到接收场的距离10m，声频1000Hz，声速340m/s.

(2) 两无线电波源间距1m，到接收场的距离10m，频率10Mc.

这样的装置能得到什么结果？由此你对光波的特点有什么新的体会？

8. 在耳朵近旁将一只振动着的音叉绕其对称轴旋转一周，听到的音响增强和减弱各四次．试解释这个现象．响度的极大和极小各应在什么方位？

习　题

1. 在杨氏双孔实验中，孔距为0.1mm，孔与屏幕的距离为3m，对下列三条典型谱线求出干涉条纹的间距：

F蓝线(4861Å)，D黄线(5893Å)，C红线(6563Å).

2. 在杨氏双孔实验中．孔距为0.45mm，孔与幕的距离1.2m，测得10个亮纹之间的间距为1.5cm，问光源的波长是多少．

3. 两束相干的平行光束，传播方向平行于 x-z 面，对称地斜射在记录介质(x-y 面)上，光的波长为6328Å，

(1) 当两束光的夹角为10°时，干涉条纹的间距为多少？

(2) 当两束光的夹角为60°时，干涉条纹的间距为多少？

(3) 如果记录介质的空间分辨率为2000条/mm，这介质能否记录上述两种条纹？

4. 在一焦距为 f 的薄凸透镜的物方焦面 $\mathscr{F}$ 上有 O，Q 两个相干的点光源，O 在光轴上，Q 到光轴的距离为 a(满足傍轴条件)，

(1) 试分析像方焦面上接收到的干涉条纹的特征（形状、间距和取向）.

(2) 如果将 $\mathscr{F}'$ 上的屏幕向背离透镜的方向平移，其上干涉条纹有何变化？

5. 如果在上题中把 O 点视为参考点源，证明在输出面 $\mathscr{F}'(x',y')$ 上的干涉条纹与 Q 点在输入面 $\mathscr{F}$ 上的位置 (x,y) 有如下关系：

(1) 空间频率

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\begin{cases} f_x' = \dfrac{1}{\Delta x'} = \dfrac{|x|}{\lambda f}, \\ f_y' = \dfrac{1}{\Delta y'} = \dfrac{|y|}{\lambda f}. \end{cases}$$

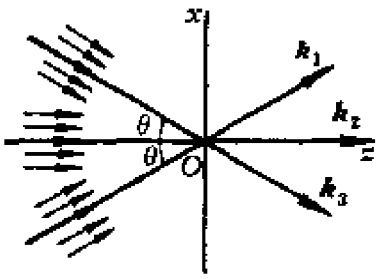
(2) 条纹的取向 θ (与 x' 轴的夹角)由下式决定

$$\tan\theta = -\frac{x}{y}.$$

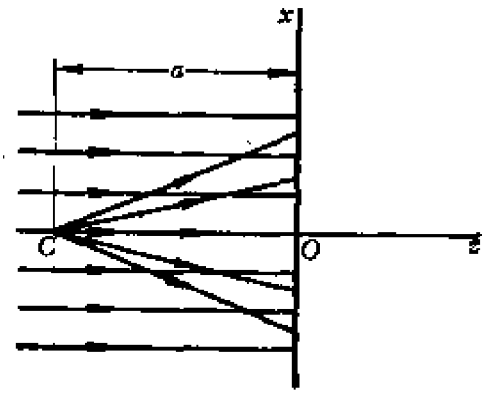
(3) 同一个 θ 值，对应 Q 的几个方位？用什么办法可将它们区别开来①？

6. 如图，三束相干平行光在原点 O 处的初位相 $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_{30} = 0$，振幅比 $A_1 : A_2 : A_3 = 1:2:1$，传播方向与 x-z 面平行，与 z 轴夹角为 θ，0 和 $-\theta$，试用复数法和矢量图解法求波前 $z=0$ 面上强度分布函数，并分析干涉条纹的特征。

7. 一列平面波 $\widetilde{U}_1$ 正入射于波前 $z=0$ 面上，与一列球面波 $\widetilde{U}_2$ 在傍轴范围内发生干涉，试分析干涉条纹的特征。



习题 6 图



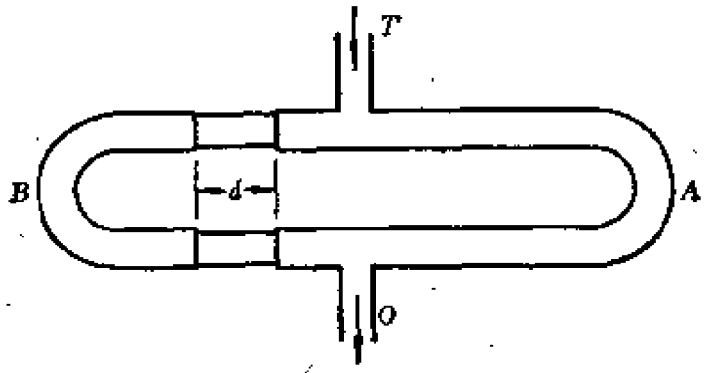
习题 7 图

8. 一微波检测器安装在湖滨高出水面 0.5m 处。当一颗发射 21cm 波长单色微波的射电星体徐徐自地平线升起时，检测器指出一系列讯号强度的极大和极小。当第一个极大出现时，射电星体相对地平线的仰角 θ 为多少？

① 此题具体体现了干涉条纹是如何记录了波前上的位相分布，从而记录了点源位置的。它实际上就是一张最简单的全息图。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

9. 图所示装置，是昆克(G.Quincke)用来测声波波长的．管口T置于单一声调的声源之前，声波分A,B两股传播到出口O，其中一股B的长度象乐队中的长号那样，可以拉出拉进．当A,B两股等长时，声音近似保持原有的强度．当B逐渐拉开到$d=16.0$cm时，在管口O处的声音第一次消失．求此声波的波长．



习题9图

§5 光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理

除干涉现象外，波动的另一重要特征是衍射现象．本节首先对光的衍射现象作较充分的介绍，然后阐明衍射问题的理论基础——惠更新-菲涅耳原理．

5.1 光的衍射现象

在日常生活的经验中，人们对水波和声波的衍射是比较熟悉的．在房间里，人们即使不能直接看见窗外的发声的物体，却能听到从窗外传来的喧闹声．在一堵高墙两侧的人，也都能听到对方说的话．这些现象表明，声波能绕过障碍物传播．粗略地说，当波遇到障碍物时，它将偏离直线传播．这种现象叫做波的衍射．图5-1是一套从水波盘上拍摄下来的照片，其中(a)，(b)，(c)分别是水波通过窄缝、宽缝和挡板等三种情况下发生衍射的景象．从图中可以看出，障碍物(或其上的开口)线度越小，衍射现象越明显．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

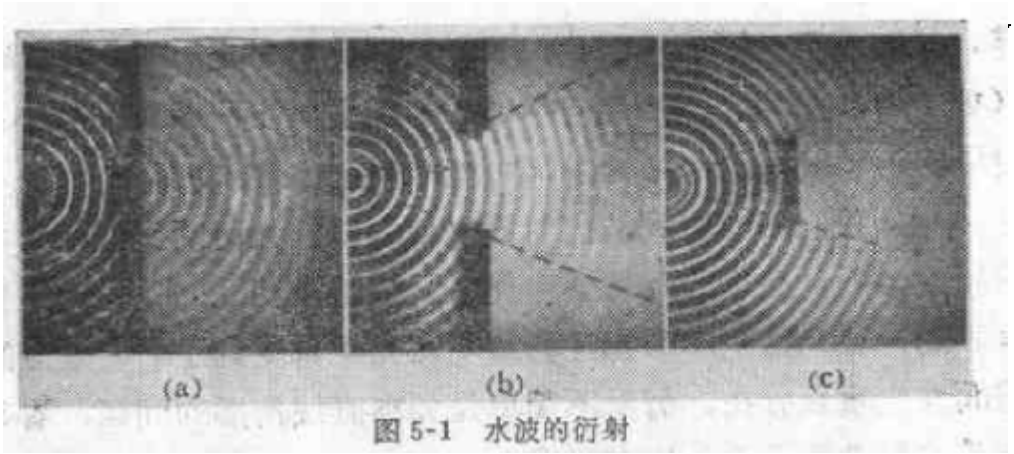


图 5-1　水波的衍射

在日常生活中，光的衍射现象不易为人们所察觉，与此相反，光的直线传播行为给人们的印象却很深．这是由于光的波长很短，以及普通光源是不相干的面光源．以上两方面的原因使得在通常的条件下的光的衍射现象很不显著．只要我们注意到这些，在实验室的条件下采用高亮度的相干光（激光）或普通的强点光源(如炭弧灯)，并保证屏幕的距离足够大，是可以将光的衍射现象演示出来的．图 5-2 就是这样拍摄下来的各种光的衍射图

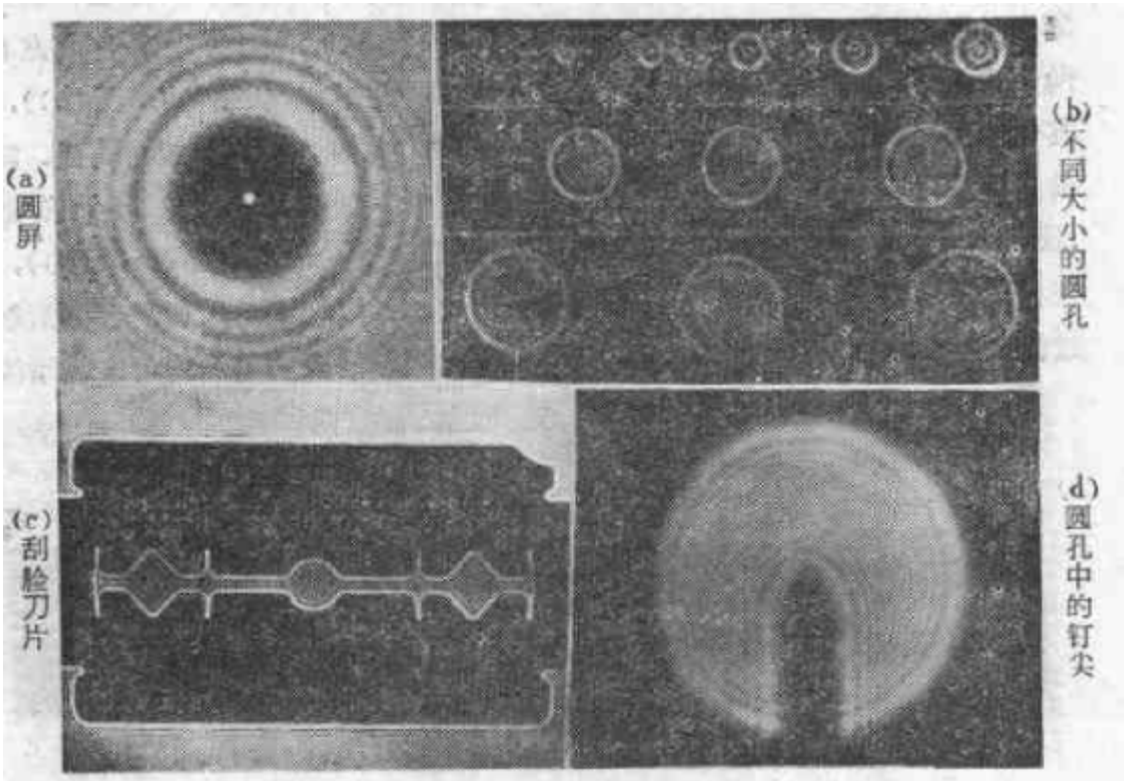


图 5-2　光的衍射图样

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

样．仔细观察一下这些照片，我们发现，对于足够小的障碍物（如图(a)中的圆屏），几何阴影的中部居然出现亮斑；而小孔衍射环的中心既可能是亮的，又可能是暗的(见图(b))．

此外我们还能看到，衍射不仅使物体的几何阴影失去了清晰的轮廓，而且在边缘附近还出现一系列明暗相间的条纹．这些现象表明，在几何阴影区和几何照明区光强都受到了衍射效应的影响而发生重新分布，衍射不简单是偏离直线传播的问题，看来它与某种复杂的干涉效应有联系．

这里我们再介绍几组光波衍射的演示实验，以便使读者对衍射现象的特点得到某些带有规律性的认识．

（1）单缝的衍射

用一束激光照射在一个宽度可调的竖直单狭缝上，在数米外放置接收屏幕．图5-3便是一系列这样得到的衍射图样，其中从(a)到(d)对应缝宽从大变小．当狭缝较宽时，对入射光束未加限制，幕上出现一个亮斑，它是入射光束沿直线投射的结果．可以说，此时衍射效应极不明显．收缩缝宽，使之对光束左右两侧施加越来越大的限制时，幕上的光斑将向左右两侧水平方向铺展，同时出现一系列亮暗相间的结构(从图(a)到图(b))，其中中央亮斑强度最大，两侧递减．可以说，此时衍射现象相当明显．随着狭缝进一步变窄，中央亮斑不断沿水平方向扩展，两侧亮斑向外疏散(图(c))，最后当狭缝很窄时，中央亮斑已延伸为一条水平细带(图(d))，在整个视场内不再察觉到光强的周期性起伏．可以说，这时衍射已向散射过渡．当然，在狭缝收缩的过程中，幕上光强总的来说是变得越来越暗淡

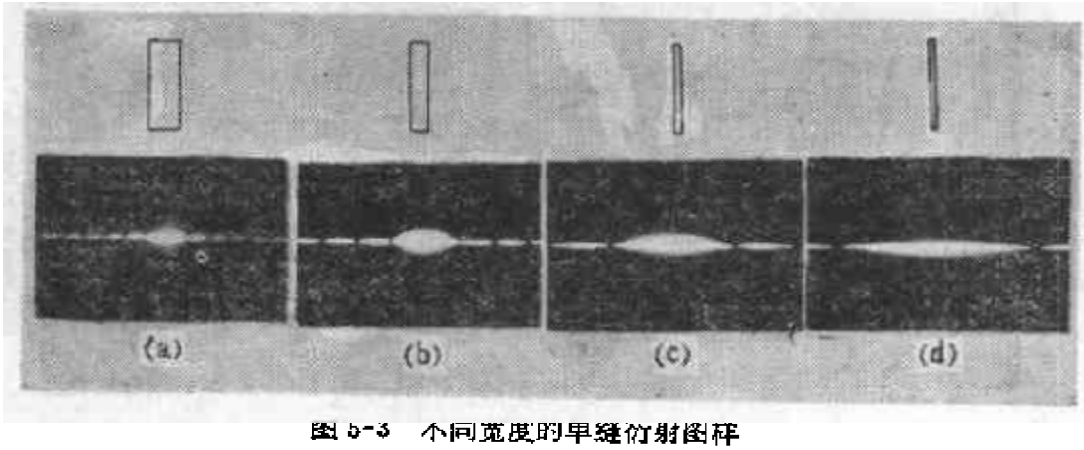


图 5-3　不同宽度的单缝衍射图样

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

了．光的衍射效应是否明显，除了光孔的线度 ρ 外，还与观察的距离和方式，光源的强度等多方面的因素有关．用激光来演示上列现象时，ρ 的数量级大体可如下划分：

$\rho\sim10^3\lambda$以上，　　衍射效应不明显，

$\rho\sim10^3\lambda$—10λ，　衍射效应明显，

$\rho\sim\lambda$，　　向散射过渡．

（2）从矩孔到圆孔的衍射

如果转动上述实验中的狭缝，则衍射图样也随之转动，而其延伸的方向总保持与缝的走向正交(见图5-4(a))．如果我们把缝的长度也缩小，使之成为矩孔，从相互垂直的两个方向上来限制光束，则衍射图样也沿相互正交的两个方向延伸(图5-4(b))．如果采用三角形孔，衍射图样将沿六个方向扩展(图5-4(c))．可以想到，随着多边形边数的增加，衍射图样向外扩展的方向也增加．圆形相当于多边形边数趋于无穷的极限，圆孔的衍射图样过渡到一系列同心环(图5-4(d))．

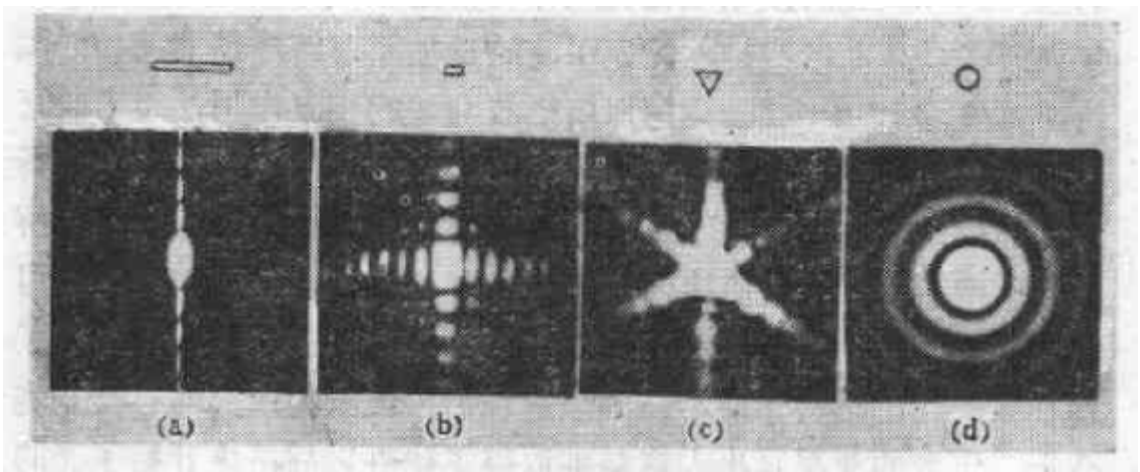


图 5-4　从矩孔到圆孔的衍射图样

将以上各个实验归纳起来，可以看出衍射现象具有如下鲜明的特点：第一，光束在衍射屏上的什么方位受到限制，则接收屏幕上的衍射图样就沿该方向扩展；第二，光孔线度越小，对光束的限制越厉害，则衍射图样越加扩展，即衍射效应越强．以后我们将证明，光孔的线度与衍射图样的扩展之间存在着反比关系．对上述特点的理论解释，将在今后的章节里陆续阐明．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

5.2 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯-菲涅耳原理是研究衍射现象的理论基础。

我们知道，波动具有两个基本性质，一方面它是扰动的传播，一点的扰动能够引起其它点的扰动，各点的扰动相互之间是有联系的；另一方面，它具有时空周期性，能够相干迭加。惠更斯原理中的“次波”概念反映了上述前一基本性质，这是该原理中成功的地方。但当时对波动的认识还很肤浅，惠更斯把光看成像空气中的声波那样的纵波，他并不知道光速有多大，他所谓的“扰动”，是爆发式的非周期性无规脉冲，故而波的后一性质(时空周期性）在原理中没有得到反映。缺少这一点，对各次波应如何迭加的问题，就不可能给出令人满意的回答。

由于牛顿的极高威望，以及牛顿的追随者极力推崇的微粒说的强大影响，光的波动理论长期停滞不前，几乎过了一百年才又复兴起来。十九世纪初，杨氏用波的迭加原理解释了薄膜的颜色，首先提出“干涉”一词用以概括波与波的相互作用；为了验证自己的理论，他做了一个双缝干涉实验，即人所共知的著名的杨氏实验；杨氏并对出现于影界附近的衍射条纹给出了正确的解释，他把衍射看成是直接通过缝的光和边界波之间的干涉。可惜，当时杨氏的这些富有价值的光学研究没有被重视，只是到了1918年，在巴黎科学院举行的以解释衍射现象为内容的有奖竞赛会上，年青的菲涅耳出人意料地取得了优胜以后，才开始了光的波动说的兴旺时期。菲涅耳吸取了惠更斯提出的次波概念，用“次波相干迭加”的思想将所有衍射情况引到统一的原理中来，这就是一般教科书中所说的惠更斯-菲涅耳原理(A.J.Fresnel，1818年)。现在就来介绍这个原理的具体内容。

如图5-5，S为点波源，Σ为从S发出的球面波在某时刻到达的波面，P为波场中的某个点。如果要问，波在P点引起的振动如何？则惠更斯-菲涅耳原理告诉我们，你应该把Σ面分割成无穷多

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

个小面元 $d\Sigma$，把每个 $d\Sigma$ 看成发射次波的波源，从所有面元发射的次波将在 P 点相遇．一般说来，由各面元 $d\Sigma$ 到 P 点的光程是不同的，从而在 P 点引起的振动位相不同．P 点的总振动就是这些次波在这里相干迭加的结果．以上就是惠更斯-菲涅耳原理的基本思想．

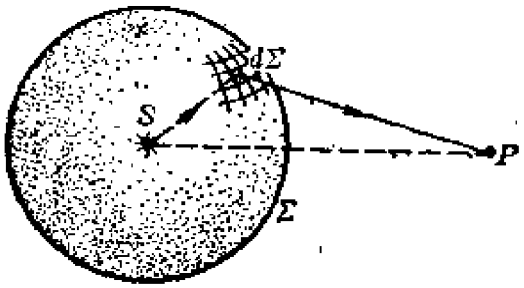


图 5-5　惠更斯-菲涅耳原理

实际上惠更斯-菲涅耳原理还可以理解得更广一些，即上述的 Σ 面不一定是从 S 发出光波的波面，它可以是将源点 S 和场点 P 隔开的任何曲面(波前)，不过这样一来就必须考虑到，由于 S 到 Σ 面上各面元 $d\Sigma$ 的光程一般不相同，从而这些次波源各有各的位相．

用简短的文字概括起来，惠更斯-菲涅耳原理可表述如下：波前 Σ 上每个面元 $d\Sigma$ 都可以看成是新的振动中心，它们发出次波．在空间某一点 P 的振动是所有这些次波在该点的相干迭加．

既然是相干迭加，就可利用复振幅的概念．设 $d\tilde{U}(P)$ 是由波前 Σ 上的面元 $d\Sigma$ 发出的次波在场点 P 产生的复振幅，则在 P 点的总扰动应为

$$\tilde{U}(P)=\iint_{(\Sigma)} d\tilde{U}(P)．\text{①} \qquad (5.1)$$

这可以说是惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式．不过要用它来计

① 惠更斯-菲涅耳原理是标量波的原理．对于光波，当参与相干迭加的振动矢量近于平行时，可作标量处理．实际中，傍轴的自然光满足这样的条件．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

算，还需进一步具体化．假设

$$d\tilde{U}(P) \propto d\Sigma \tag{5.2}$$

$$\propto \tilde{U}_0(Q) \tag{5.3}$$

$$\propto \frac{e^{ikr}}{r} \tag{5.4}$$

$$\propto F(\theta_0,\theta). \tag{5.5}$$

式(5.2)中 $d\Sigma$ 是面元的面积，式(5.3)中 $\tilde{U}_0(Q)$ 是面元(次波源)上 Q 点的复振幅，取其等于从波源自由传播到 Q 时的复振幅．式(5.4)中 r 是面元 $d\Sigma$ 到场点 P 的距离，$k=2\pi/\lambda$，这比例式说明次波源发射的是球面波．式(5.5)中的 θ_0 和 θ 分别是源点 S 和场点 P 相对次波面元 $d\Sigma$ 的方位角(见图5-6)，$F(\theta_0,\theta)$ 是 θ_0 和 θ 的某个函数，它称为倾斜因子，它表明由面元发射的次波不是

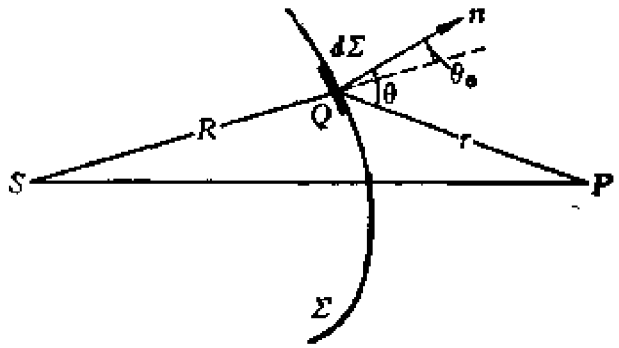


图 5-6　关于菲涅耳衍射公式中各量的说明

各向同性的．根据以上各条假设，式(5.1)可写成

$$\tilde{U}(P)=K\iint_{\Sigma}\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma. \tag{5.6}$$

式中 K 是个比例常数．式(5.6)称为菲涅耳衍射积分公式．最初菲涅耳作上列各假设时只凭朴素的直觉，六十余年后基尔霍夫(G. Kirchhoff，1882年)建立了一个严格的数学理论，证明菲涅耳的设想基本上正确，只是菲涅耳给出的倾斜因子不对．菲涅耳只考虑

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

了 Σ 是以点波源 S 为中心的球面情形，这时 $\theta_0 = 0$，倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)$ 只是 θ 的函数，现记作 $f(\theta)$。菲涅耳设想：$\theta = 0$ 时 $f(\theta)$ 最大（可取作1），随 θ 的增大，$f(\theta)$ 减小；到 $\theta \geqslant \pi/2$ 时，$f(\theta) \equiv 0$。最后这一点的意思是说不存在向后退的次波。基尔霍夫推导出的严格公式表明，倾斜因子应取

$$F(\theta_0,\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta), \tag{5.7}$$

在 $\theta_0 = 0$ 的情况下

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \tag{5.8}$$

当 $\theta = 0$ 时，$f(\theta) = 1/2$ 而不是0。只有当 θ 大到 π 时，$f(\theta)$ 才减到 0。这结果与菲涅耳的直觉是不同的。不过以后我们将看到，倾斜因子的具体形式对计算结果的影响并不大。基尔霍夫还导出了比例常数 K 的表达式为

$$K = \frac{-i}{\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}, \tag{5.9}$$

式中 λ 是波长。式(5.9)中的因子 $-i = e^{-i\pi/2}$ 表明，我们必须假设等效次波源 $K\tilde{U}_0(\theta)$ 的位相并非波前上该点扰动 $\tilde{U}_0(\theta)$ 的位相，而是比它超前 $\pi/2$①。这一点不是只凭直觉所能想象得出来的，不过以后我们将看到，为了保证菲涅耳衍射公式（5.6）在波的自由传播情形下不给出矛盾的结果，这一位相差是必要的（参看6.3节例题 2），它实质上是相干迭加的必然结果。

显然惠更斯-菲涅耳原理的提出不是为了解决光的自由传播问题，而是为了求有障碍物时衍射场的分布。这时我们自然应把波前 Σ 取在衍射屏的位置上（见图5-7），于是波前 Σ 分为两部

① 按照1.3节的约定，指数上的正位相代表落后，负位相代表超前。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

分：光孔部分 Σ_0 和光屏部分 Σ_1。通常假设 Σ_0 上的复振幅 $\tilde{U}_0(Q)$（可称为瞳函数）取自由传播时光场的值①，而 Σ_1 上的 $\tilde{U}_0(Q)$ 取为 0。为了使 Σ 成为闭合曲面，应该说它还有第三部分 Σ_2，它可取为半径为无穷大的半球面，有人作了严格的数学证明，在 Σ_2 上积分值为 0，今后不再考虑它。以上做法，称为基尔霍夫边界条件。

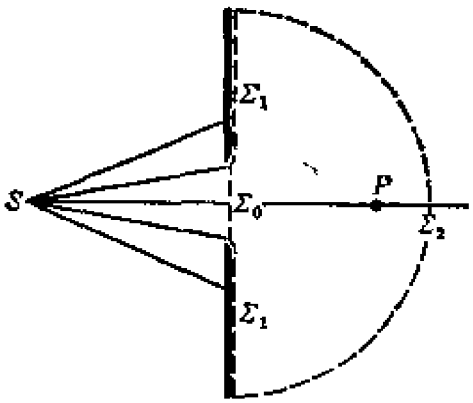


图 5-7　关于基尔霍夫边界条件的说明

基尔霍夫边界条件直觉地看起来也是比较自然的，但它并不严格。光是电磁波，严格的理论应是高频电磁场的矢量波理论，对于组成光屏的物质是导体或电介质的不同情形，电磁场的边界条件是有区别的。但是理论表明，严格的边界条件与基尔霍夫边界条件给出的场分布有显著不同的地方，局限于光屏或光孔边缘附近距离为 λ 量级的范围。对于光波，由于波长 λ 往往比光屏或光孔的线度小得多，使用基尔霍夫边界条件计算，产生的误差不大。但是对于无线电波，影响就大了。所以在研究无线电波的衍射问题时，需要采用较严格的电磁理论。

综合以上所述，菲涅耳衍射积分公式(5.6)化为

$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{2\lambda}\iint_{(\Sigma_0)}(\cos\theta_0+\cos\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma. \qquad (5.10)$$

注意，这里的积分范围已按照基尔霍夫边界条件改为透光部分 Σ_0，式(5.10)称为菲涅耳-基尔霍夫衍射公式。在光孔和接收范围满足傍轴条件的情况下，$\theta\simeq\theta_0\simeq 0$，$r\simeq r_0$（场点到光孔中心的距离），上式简化为

$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{\lambda r_0}\iint\tilde{U}_0(Q)e^{ikr}d\Sigma. \qquad (5.11)$$

① 这里讨论的衍射光孔是简单的窗口，以后我们还会遇到较复杂的情况，在窗口上附有透过率或光程不均匀的图像画面。那时 $\tilde{U}_0(Q)$ 应取经过画面改变后的波前函数。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

5.3 巴俾涅原理

从菲涅耳-基尔霍夫衍射公式(5.10)可顺便导出一个很有用的原理．考虑图 5-8 中的一对衍射屏 a,b，其一的透光部分正是另一的遮光部分，反之亦然，即两屏是互补的．因 $\Sigma_0=\Sigma_a+\Sigma_b$，我们有

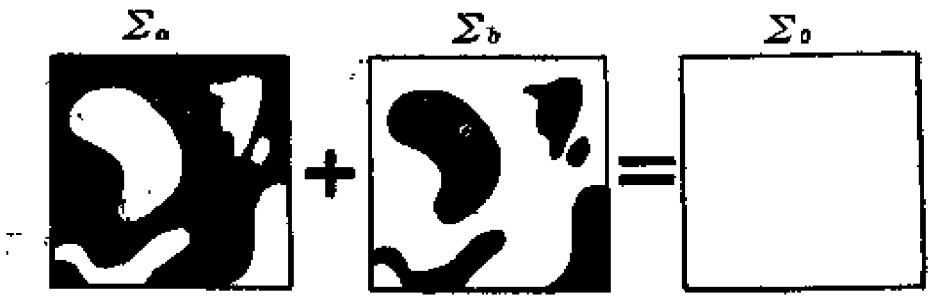


图 5-8 巴俾涅原理

$$\iint\limits_{(\Sigma_a)} d\Sigma+\iint\limits_{(\Sigma_b)} d\Sigma=\iint\limits_{(\Sigma_0)} d\Sigma,$$

上式左端第一项给出 a 屏的衍射场 $\widetilde{U}_a(P)$，第二项给出 b 屏的衍射场 $\widetilde{U}_b(P)$，而右端是自由波场 $\widetilde{U}_0(P)$，于是

$$\widetilde{U}_a(P)+\widetilde{U}_b(P)=\widetilde{U}_0(P). \qquad (5.12)$$

它表明，互补屏造成的衍射场中复振幅之和等于自由波场的复振幅．这个结论称为巴俾涅原理 (A.Babinet，1837年)．由于自由波场是容易计算的，因此利用巴俾涅原理可以较方便的由一种衍射屏的衍射图样求出其互补屏的衍射图样来．

巴俾涅原理对下列一类衍射装置特别有意义，即衍射屏由点光源照明，其后装有成像光学系统，在光源的几何像平面上接收衍射图样．这时所谓自由光场，就是服从几何光学规律传播的光场，它在像平面上除像点外 $\widetilde{U}_0(P)$ 皆等于 0，从而除几何像点外，处处有

$$\widetilde{U}_a(P)=-\widetilde{U}_b(P),$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

取它们与各自复数共轭的乘积，则得

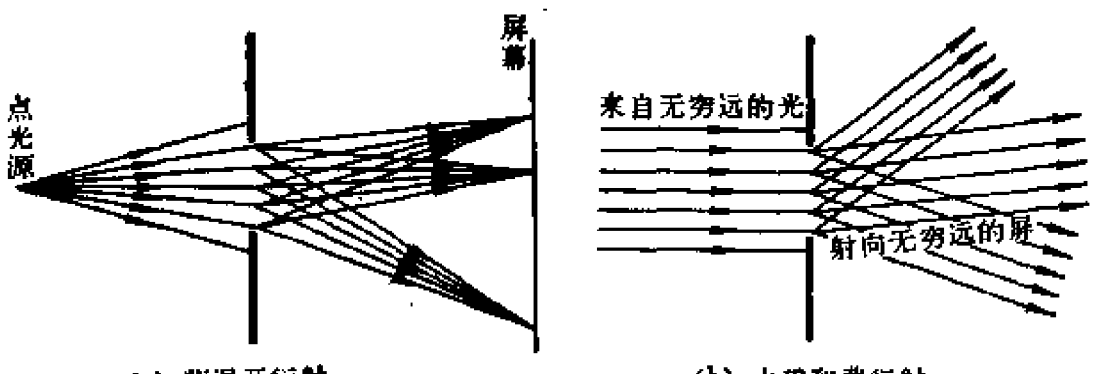
$$I_a(P)=I_b(P).$$

亦即除几何像点的地方之外，两个互补屏分别在像平面产生的衍射图样完全一样！

读者将在以后看到应用巴俾涅原理的例子。

5.4 衍射的分类

衍射系统由光源、衍射屏和接收屏幕组成。通常按它们相互间距离的大小，将衍射分为两类：一类是光源和接收屏幕（或两者之一）距离衍射屏有限远（见图5-9(a)），这类衍射叫做菲涅耳衍射(A.J.Fresnel，1818年)；另一类是光源和接收屏幕都距离衍射屏无穷远(图5-9(b))，这类衍射叫做夫琅和费衍射(J.Fraunhofer，1821—1822年)。前面图5-2中的几张照片是菲涅耳衍射的图样，图5-3和5-4则是夫琅和费衍射图样。两种衍射的区分是从理论计算上考虑的。可以看出，菲涅耳衍射是普遍的，夫琅和费衍射本是它的一个特例。不过由于夫琅和费衍射的计算简单得多，人们把它单独归成一类进行研究。近年来发展起来的傅里叶变换光学，赋予了夫琅和费衍射以新的重要意义。显然，在实验室中实现图5-9(b)所示的那种夫琅和费装置的原型是有困难的，但我们可以近似地或利用成像光学系统(透镜)使之实现。所以实



(a) 菲涅耳衍射　　(b) 夫琅和费衍射

图5-9 衍射的分类

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

际中夫琅和费衍射的装置可以有许多变型．这样一来，就牵涉到关于“夫琅和费衍射”更普遍的定义问题，这个问题留待第五章§4讨论．

思 考 题

1． “衍射”一词，旧译“绕射”，你觉得这名词有什么不确切的地方？

2． 隔着山可以听到中波段的电台广播，而电视广播却很容易被山甚至高大的建筑物挡住，这是什么缘故？

3． 用普通的点光源照明波场时，波前上各次波源的位相是否稳定，它们是否相干？它们之间的位相差是否稳定？在这种情况下我们能看到稳定的衍射图样吗？

4． 你在日常生活中曾看到过某些属于光衍射的现象吗？试举例说明之．

5． 观察与讨论下列日常生活中遇到的光的衍射现象：

(1) 在晚间对着远处的白炽灯泡张开一块手帕，或隔着窗帘看远处的白炽灯，将看到的现象记录下来．

(2) 通过眼前张开的手帕注视远处的高压水银灯，将看到的现象记录下来．与白炽灯的情形相比有何不同？

(3) 用肉眼观察远处的灯，有时会看到它周围有光芒辐射，这种现象是怎样产生的？有人说这是瞳孔的衍射现象，因为一般人的瞳孔不是理想的圆孔，而是多边形．你满意这种解释吗？有什么办法可以验证或否定这种看法？

(4) 当你瞪大或眯小眼睛时，灯泡周围的辐射状的光芒有什么变化？晃动或摇摆你的脑袋时，这些光芒有什么变化？这些现象是有助肯定还是否定(3)中提出的解释？

(5) 当你注视月亮或日光灯时，你能看到这些辐射状的光芒吗？对你的观察结果作些解释．

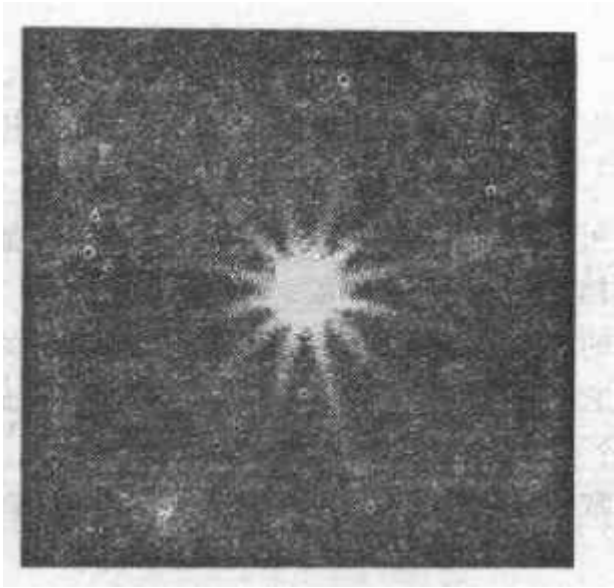
(6) 将手指并拢贴在眼前，通过指缝看一灯泡发的光，记录并解释你观察到的现象．

(7) 俗话说：“隔着门缝看人——把人看扁(贬)了”，从波动光学的角

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

度看，这句歇后语有道理吗？

6．附图是张激光束射在可变光阑（类似照相机里的光圈）上形成的美丽的衍射图样照片．试解释一下，为什么会有这样多的辐射状光芒？



思考题6图

7．当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时，有人认为它无关大局，其影响可以忽略，后场基本上还是一束平行光，这个看法对吗？你能设想一种场合，这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗？

8．关于两个互补屏在同一场点的衍射强度之间的关系，有人说一个强度是亮(暗)的，则另一个强度是暗(亮)的．这样理解衍射巴俾涅定理，对吗？

§6 菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

本节采用半波带法和矢量图解法处理菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射问题，最后介绍有实际意义的菲涅耳波带片．

6.1 实验现象

如图6-1，在点光源(或激光束)的照明空间中插入带圆孔的衍射屏，在较远的接收屏幕上就可看到清晰的衍射图样，对于

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

可见光，实验装置的数据一般可取：

圆孔半径ρ～毫米的量级；

光源到圆孔的距离R～米的量级；

接收屏幕到圆孔的距离b～3m—5m。

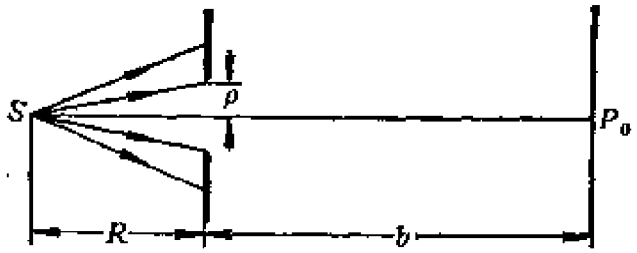


图 6-1　菲涅耳衍射装置

衍射花样是以轴上场点P_0为中心的一套亮暗相间的同心圆环，中心点可能是亮的，也可能是暗的。如果我们用可调的光阑作实验，在孔径变化的过程中，可以发现衍射图样的中心亮暗交替变化。我们还可在保持孔径ρ不变的情况下移动屏幕，在此过程中也可观察到衍射图样中心的亮暗交替变化。不过中心强度随ρ的变化是很敏感的，而随b的变化则是相当迟缓的。

如果用圆屏(或滚珠、玻璃上的墨点之类)代替上述实验中的圆孔，我们观察到的衍射图样也是同心圆环。与圆孔情形显著不同的是，无论改变半径ρ还是距离b，衍射图样的中心总是一个亮点。1818年巴黎科学院曾举行一次规模很大的科学竞赛，当时参加竞赛评比委员会的有多位著名学者，如毕奥、拉普拉斯、泊松等是光的微粒说的积极拥护者，竞赛题目的具体表达方式带有明显的有利于微粒说的倾向性。然而，菲涅耳阐述的次波相干迭加的新观点具有极大的说服力，使反对派也马上接受了。会后泊松又仔细地审核菲涅耳理论，并用于圆盘衍射，导致圆盘中心轴线上应有亮斑这样一个当时看来似乎不可思议甚至离奇的结论。菲涅耳原理又面临新的考验。过后不久，在实验中果真发现了这一惊人现象。这一发现对光的波动理论和惠更斯-菲涅耳原理是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

十分有力的支持.

6.2 半波带法

半波带法是处理次波相干迭加的一种简化方法. 菲涅耳的衍射公式本要求对波前作无限分割，半波带法则用较粗糙的分割来代替，从而使式(5.6)或(5.10)中的积分化为有限项求和. 此法虽不够精细，但可较方便地得出衍射图样的某些定性特征，故为人们所喜用.

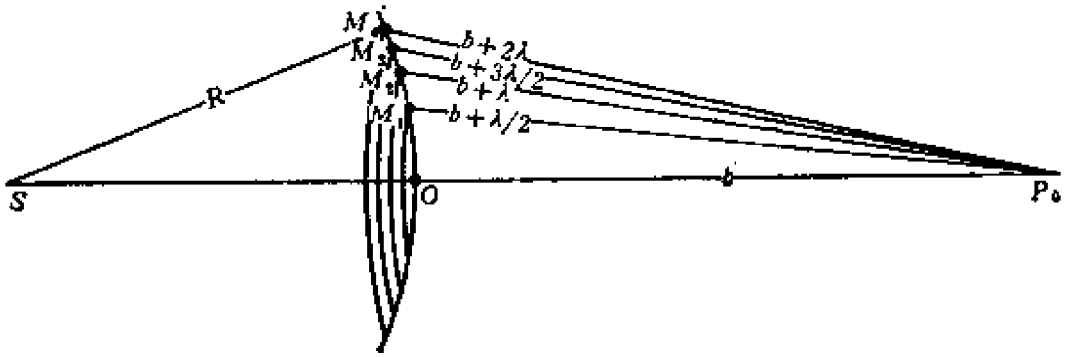


图 6-2 半波带法

如图6-2，取波前 Σ 为以点源为中心的球面(等相面)，设其半径为R，其顶点O与场点P_0的距离为 b，以P_0为中心，分别以 $b+\lambda/2$，$b+\lambda$，$b+3\lambda/2$，$b+2\lambda$，…为半径作球面，将波前 Σ 分割为一系列环形带. 由于这些环形带的边缘点O，M_1，M_2，M_3，M_4，…到P_0的光程逐个相差半个波长，故称之为半波带. 用 $\Delta\widetilde{U}_1(P_0)$，$\Delta\widetilde{U}_2(P_0)$，…代表各半波带发出的次波在 P_0 点产生的复振幅，由于相邻半波带贡献的复振幅中位相差 π，即

$$\Delta\widetilde{U}_1(P_0) = A_1(P_0)e^{i\varphi_1},$$
$$\Delta\widetilde{U}_2(P_0) = A_2(P_0)e^{i(\varphi_1+\pi)},$$
$$\Delta\widetilde{U}_3(P_0) = A_3(P_0)e^{i(\varphi_1+2\pi)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 P_0 点的合成复振幅为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$A(P_0)=|\tilde{U}(P_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta\tilde{U}_k(P_0)\right|$$
$$=A_1(P_0)-A_2(P_0)+A_3(P_0)-\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}A\ (P_0). \tag{6.1}$$

下面我们来比较 $A_1, A_2, A_3\cdots$ 各振幅的大小。惠更斯-菲涅耳原理告诉我们，

$$A_k\propto f(\theta_k)\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}, \tag{6.2}$$

其中$\Delta\Sigma_k$是第 k 个半波带的面积；r_k 是它到场点 P_0 的距离；$f(\theta_k)$是其倾斜因子。为了计算 $\Delta\Sigma_k/r_k$，我们先考虑图6-3所示

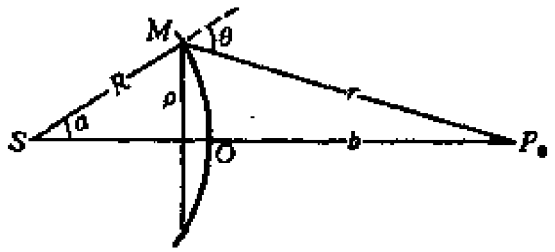


图 6-3　半波带面积$\Delta\Sigma_k$的计算

的球帽，其面积为

$$\Sigma=2\pi R^2(1-\cos\alpha),$$

而

$$\cos\alpha=\frac{R^2+(R+b)^2-r^2}{2R(R+b)},$$

式中的各字母所代表的几何量见图 6-3 自明。分别取以上两式的微分：

$$d\Sigma=2\pi R^2\sin\alpha\ d\alpha,$$

$$\sin\alpha\ d\alpha=\frac{rdr}{R(R+b)},$$

将第二式代入第一式，得

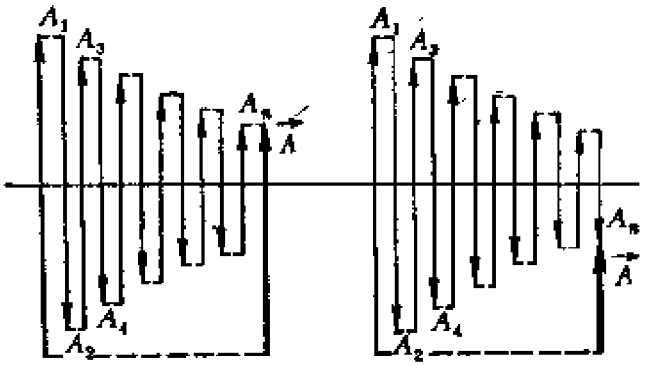
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\frac{d\Sigma}{r}=\frac{2\pi R dr}{R+b}. \tag{6.3}$$

因$\lambda \ll r_k$，可把上式中的微分 dr 看成相邻半波带间 r 的差值 $\lambda/2$，dS 看作半波带的面积 $\Delta\Sigma_k$. 于是得

$$\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}=\frac{\pi R\lambda}{R+b}. \tag{6.4}$$

可见，作为 λ 的最低级近似，$\Delta\Sigma_k/r_k$ 与 k 无关，即它对于每个半波带都是一样的. 这样一来，影响 A_k 大小的因素中只剩下倾斜因子 $f(\theta_k)$ 了. 从一个半波带到下个半波带，θ_k 之值变化甚微，从而 $f(\theta_k)$ 和 A_k 随 k 的增加而缓慢地减小，最后当 $\theta_k \to \pi/2$ 时（菲涅耳的最初假设）或当 $\theta_k \to \pi$ 时（基尔霍夫理论），$f(\theta_k)\to 0$. 从下面的讨论可以看出，$f(\theta_k)$ 的这一性质就足以说明问题了，其具体函数形式无关紧要.



(a) n 为奇数　　(b) n 为偶数

图 6-4　半波带法中的振动矢量图

现在让我们回到式(6.1)，式中各项加减交替，可用图6-4中上下交替的矢量来表示. 为了能让人看得清，图中的矢量故意画得彼此错开. 由图可见，合成振幅为

$$A(P_0)=\frac{1}{2}[A_1+(-1)^{n+1}A_n]. \tag{6.5}$$

先看自由传播情形. 这时整个波前裸露，最后一个半波带上

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$f(\theta_n)\to 0$，从而$A_n\to 0$，于是

$$A(P_0)=\frac{1}{2}A_1(P_0). \tag{6.6}$$

亦即，自由传播时整个波前在P_0产生的振幅是第一个半波带的效果之半.

再看圆孔衍射. 设想在波前上放一带圆孔的屏. 当孔的大小刚好等于第一个半波带时，$A(P_0)=A_1(P_0)$，即中心是亮点. 若孔中包含前两个半波带时，$A(P_0)=A_1(P_0)-A_2(P_0)\simeq 0$，中心是暗点. 一般说来，当圆孔中包含奇数个半波带时，中心是亮点；包含偶数个半波带时，中心是暗点. 这就解释了衍射图样中心强度随孔径ρ的增大亮暗交替变化的现象. 中心强度随距离b变化的现象也是不难解释的，这个问题留给读者自己考虑.

最后我们看圆屏衍射. 设圆屏遮住前k个半波带，则

$$\begin{aligned}A(P_0)&=A_{k+1}(P_0)-A_{k+2}(P_0)+\cdots+(-1)^{n+1}A_n(P_0)\\&=\frac{1}{2}A_{k+1}(P_0).\end{aligned}$$

可见，无论k是奇是偶，中心总是亮的.

这样，我们便用半波带法解释了圆孔、圆屏衍射的一些主要特征.

6.3 矢量图解法

如果圆孔内包含的不是整个半波带，再用半波带法来讨论就有困难了. 这时需要把每个半波带进一步划分得更细. 例如对于第一个半波带，我们可以作中心在P_0，半径分别为$b+\lambda/(2m)$，$b+\lambda/m$，$b+3\lambda/(2m)$，…的球面，将它分割为m个更窄的环带(图6-5)，相邻小环带在P_0贡献的振动位相差π/m. 振动的合成可用图6-6(a)中的矢量图来表示，其中通过O点的水平线表示波前顶点O贡献的振动，取为零位相，小矢量$\Delta\vec{A}_1$，$\Delta\vec{A}_2$，$\Delta\vec{A}_3$，…分别代表各个小环带的贡献，若暂不考虑倾斜因子的影响，它们

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

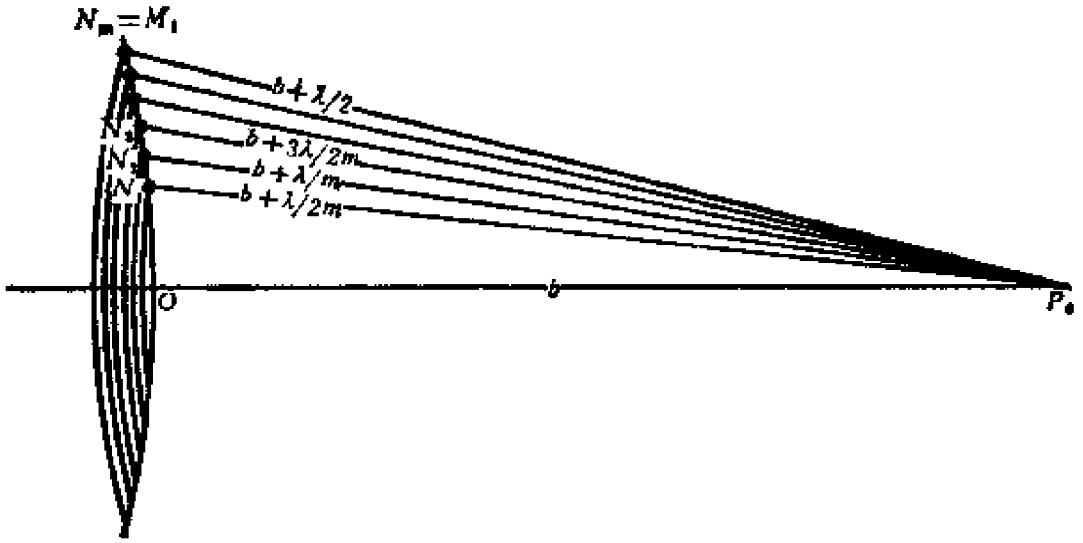


图 6-5　半波带的进一步分割

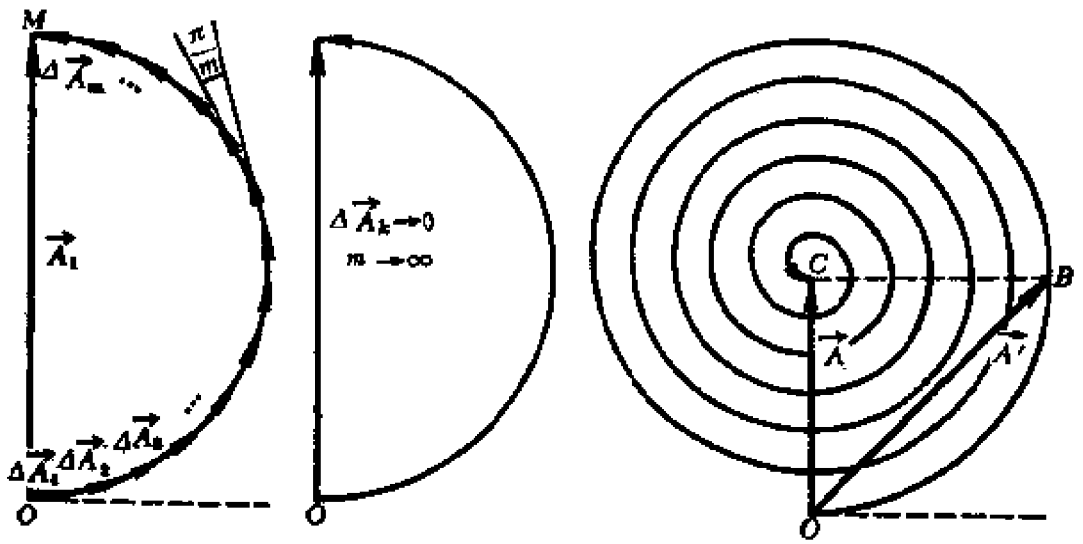


图 6-6　振动矢量图

长度相等．将它们首尾相接，方向逐个转过π/m角度．到了$\Delta\vec{A}_m$刚好转过角度 π，达到第一个半波带的边缘点M．由O到M引合成矢量$\vec{A}_1$，其长度就是整个第一个半波带贡献的振幅．取$\Delta A_k \to 0$，$m \to \infty$ 的极限，图 6-6(a) 中由小矢量组成的半个正多边形过渡到图6-6(b)中的半圆．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

上面我们对第一个半波带作了细致的处理，其余的半波带可如法炮制，于是在振动矢量图上增添一个又一个的半圆．不过至此我们忽略了倾斜因子$f(\theta)$的影响．若考虑到它，半径将逐渐收缩，形成如图6-6(c)所示的螺旋线．在自由传播情形里，这螺线要一直旋绕到半径趋于0为止，最后到达圆心C．由O到C引合成矢量$\vec{A}$，其长度即为整个波前在P_0点产生的振幅．比较图6-6中(a),(c)两图即可看出，$A=A_1/2$，这便是6.2节中用半波带法得到的结果．

例题1　求圆孔包含1/2个半波带时轴上的衍射强度．

解　这时边缘与中心光程差为$\lambda/4$，位相差为$\pi/2$，图6-6(c)的振动曲线应取OB一段，振幅$A'=\overline{OB}=\sqrt{2}A$，光强$I'=2A^2$，即光强为自由传播时的两倍．|

利用振动曲线图6-6(c)可以较方便的求出任何半径的圆孔和圆屏在轴上产生的振幅和光强．至于轴外场点，则不能作简易的分析了，需要利用菲涅耳积分公式作复杂的计算．

例题2　以自由传播为特例，验证惠更斯-菲涅耳原理，并定出衍射积分公式(5.6)中的比例系数

$$K=-i/\lambda.$$

解　设从波源S发出的球面波为

$$\tilde{U}=\frac{a}{r}e^{ikr},$$

它自由传播到$r=R$和$r=R+b$处的Q和P点时复振幅分别为

$$\tilde{U}(Q)=\frac{a}{R}e^{ikR}. \qquad (1)$$

和

$$\tilde{U}(P)=\frac{a}{R+b}e^{ik(R+b)}. \qquad (2)$$

如前所述，若用惠更斯-菲涅耳原理处理自由传播到P点的场，它应等于第一个半波带的贡献$\tilde{U}_1(P)$之半，即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{2}\tilde{U}_1(P), \qquad (3)$$

下面我们用菲涅耳衍射积分公式(5.6)计算 $\tilde{U}_1(P)$. 式(5.6)为

$$\tilde{U}_1(P) = K \iint_{\text{(第一个半波带)}} \tilde{U}_0(Q)F(\theta,\theta_0)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma, \qquad (4)$$

对于第一个半波带，$F(\theta,\theta_0)\simeq 1$，$\tilde{U}_0(Q)$ 即上面式(1)中的 $\tilde{U}(Q)$，按式(6.3)，

$$\frac{d\Sigma}{r} = \frac{2\pi R}{R+b}dr,$$

故

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(P) &= \frac{2\pi RK}{R+b}\int_b^{b+\lambda/2}\tilde{U}_0(Q)e^{ikr}dr\\ &= \frac{2\pi aK}{R+b}e^{ikR}\int_b^{b+\lambda/2}e^{ikr}dr\\ &= \frac{2\pi aK}{ik(R+b)}e^{ik(R+b)}(e^{ik\lambda/2}-1)\\ &= -\frac{4\pi aK}{ik(R+b)}e^{ik(R+b)}\\ &= -\frac{2\lambda aK}{i(R+b)}e^{ik(R+b)}. \qquad (5)\end{aligned}$$

把式(5)代入式(3)并同式(2)进行比较，即可得到

$$-\frac{\lambda K}{i} = 1 \quad \text{或} \quad K = -\frac{i}{\lambda}.$$

这正是5.2节的式(5.9).

6.4 菲涅耳波带片

现在我们计算半波带的半径 ρ_k. 令图 6-3 中 $r = b + k\lambda/2$，$\rho = \rho_k$，在忽略 λ^2 项的情况下，可以导出

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda} = \sqrt{k}\,\rho_1 \quad (k=1,2,\cdots), \tag{6.7}$$

其中 ρ_1 是第一个半波带的半径：

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}. \tag{6.8}$$

如果用平行光照明圆孔，则 $R\to\infty$，$\rho_1 = \sqrt{b\lambda}$.

我们可做一块如图6-7(a)或(b)所示的透明板，在其上按照式(6.7)给出的比例画出各半波带，并将偶数或奇数的半波带涂黑，这就构成一块波带片，称为菲涅耳波带片，它可使轴上一定距离的场点光强增加很多倍．请看下面的例子．

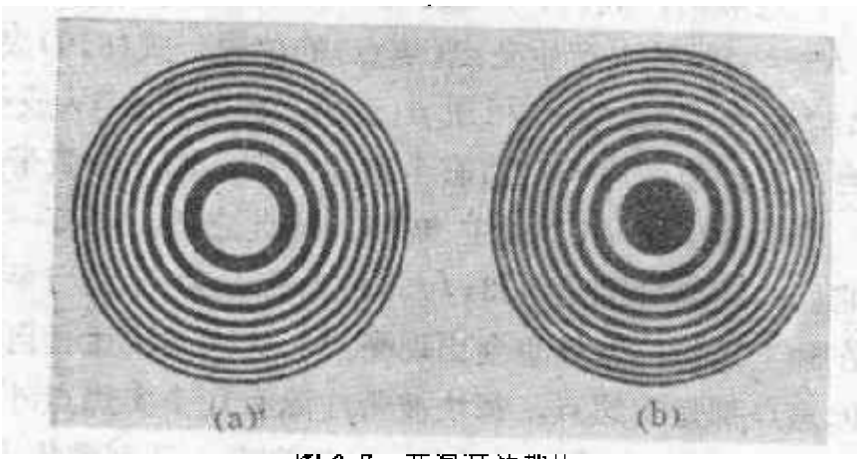


图 6-7　菲涅耳波带片

例题 3　一块波带片的孔径内有20个半波带．1,3,5,…,19 等10个奇数带露出，第 2,4,…,20 等 10 个偶数带挡住，轴上场点的强度比自由传播时大多少倍？

解　波带片在轴上场点产生的振幅为

$$A' = A_1 + A_3 + \cdots + A_{19} \simeq 10A_1 = 20A,$$

$$I' = (A')^2 = 400A^2,$$

其中 $A = A_1/2$ 是自由传播时的振幅．本题中的波带片使光强增大400倍．

从这个例题可以看出，菲涅耳波带片的作用有如透镜，它可

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

以使入射光会聚起来，产生极大的光强．波带片与透镜的相似性在式(6.7)中已反映出来了，因为它可以改写成如下形式：

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_k^2},$$

令

$$f=\rho_k^2/k\lambda=\rho_1^2/\lambda, \tag{6.9}$$

上式化为

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \tag{6.10}$$

此式与透镜的成像公式的形式完全相同，R 相当于物距，b 相当于像距，f 是焦距．式(6.9)是波带片的焦距公式，它给出平行光入射($R\to\infty$)时轴上产生亮点(焦点)的位置．式(6.9)表明，波带片焦距 f 与 k 无关，完全可用 ρ_1 表示；此外，f 与 λ 成反比①．

应当注意，波带片与透镜有个重要区别，即一个波带片有许多焦点，上面给出的是它的主焦点，除此之外，还有一系列次焦点，它们的距离分别是 $f/3, f/5, f/7, \cdots$．为什么当平行光照明时，在轴上这些位置处也会出现亮点？这问题请读者自己去思考．上述焦点都是实焦点，每块波带片除有几个实焦点外，在对称的位置上(即 $-f, -f/3, -f/5, \cdots$)还存在一系列虚焦点(参见本节末尾小字和思考题10)．菲涅耳波带片是有多个虚、实焦点这一事实告诉我们，它所产生的衍射场虽很复杂，但它包含有一系列会聚的和发散的球面波成分，当然还有按几何光学规律直进的平面波成分(见图6-8)．善于用分解和合成的观点研究波场(或波前)，是现代光学中要培养的一种重要能力．

最后再通过一个数字的例子给读者以数量级的概念．

例题 4　照明光的波长为 0.5μm，$R=1$m，$b=4$m，求前 4 个和第100个半波带的半径．

① 这正好与玻璃透镜的焦距色差相反，两者配合使用，有利于消除色差．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

解 利用式(6.8)算得

$$\rho_1 = 0.63\text{mm}, \qquad \rho_2 = \sqrt{2}\,\rho_1 = 0.89\text{mm},$$

$$\rho_3 = \sqrt{3}\,\rho_1 = 1.10\text{mm}, \quad \rho_4 = \sqrt{4}\,\rho_1 = 1.26\text{mm},$$

$$\rho_{100} = 10\rho_1 = 6.3\text{mm}.$$

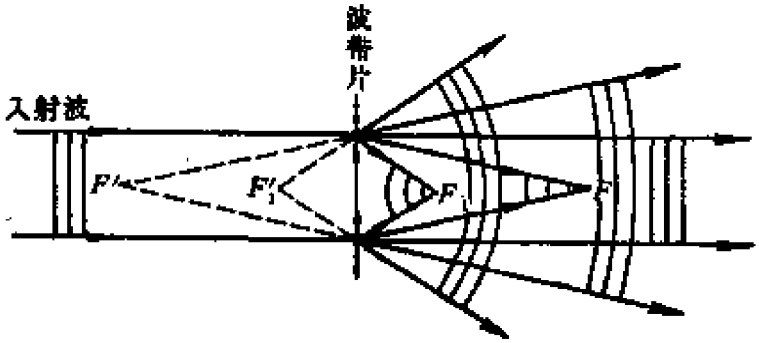


图 6-8 波带片衍射场的分解

这个例子告诉我们，半波带的宽度是很小的，随着级别 k 的增大，尤其如此，要在6.3mm的半径内容纳100个半波带，可以想见最外面的一些半波带是非常细密的．所以制作菲涅耳波带片是件很细致的工作，不过在目前的条件下并不困难．我们可以先在白纸上精密地绘制，然后用照相机进行两次拍摄和缩小，就可得到一张平面的菲涅耳波带片．

波带片与透镜相比，具有大面积、轻便、可折叠等优点，特别适宜用于远程光通讯、光测距和宇航技术中．

古老的菲涅耳波带片一度曾为人们所淡忘．现代变换光学的兴起，重新唤起了人们对它的兴趣．现在可以说，利用衍射规律有意地改变波前，以造成人们所需的衍射场，这在经典光学中菲涅耳波带片是一篇杰作，它属于振幅型的黑白光学波带片．现代的波带片品种已经相当繁多：有振幅型的，也有位相型的；有黑白的，也有正弦的；除光学外，还有声波和微波的波带片，等等．波带片的应用越来越广泛，设计和制备各种特殊用途的波带片，正在发展成为一种专门技术．广义地说，在第五、六章中将介绍

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的光学空间滤波器和全息底片，也是一种波带片。

菲涅耳波带片的虚焦点 菲涅耳波带片在与每个实焦点对称的位置 F' 处有一个虚焦点。这就是说，若如图 6-9 所示，以平行光入射，用一透镜接收来自波带片的衍射光，我们将在 F' 的物像共轭点 P 处得到光强为极大的亮点（这透镜可以就是眼睛的晶状体，这就是说，我们可以用眼直接观察到在 F' 处有个亮点）。现在就来证明上述结论。

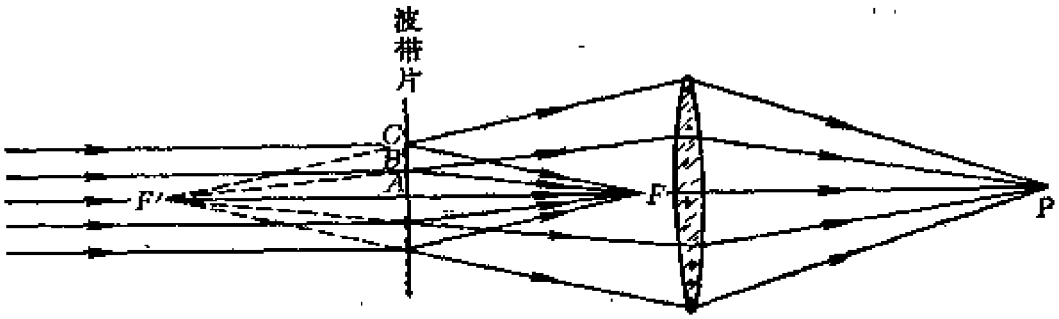


图 6-9 菲涅耳波带片的虚焦点

波带片所在平面是入射光的等相面，我们所以会在实焦点 F 处获得亮点，是因为从各透光的半波带 $A,B,C,\cdots$ 到 F 的衍射线的光程相差 λ 的整数倍。即

$$(BF)=(AF)+\lambda,\quad (CF)=(AF)+2\lambda,\quad \cdots.$$

现在要证明的是由 $A,B,C,\cdots$ 经透镜到 P 的光程也相差 λ 的整数倍。由于对透镜来说 F' 和 P 是一对共轭点，其间存在等光程性：

$$(F'AP)=(F'BP)=(F'CP)=\cdots;$$

又因 F,F' 的对称性，有

$$(F'B)=(F'A)+\lambda,\quad (F'C)=(F'A)+2\lambda,\cdots.$$

以上两组式子相减，即得

$$(BP)=(AP)-\lambda,\quad (CP)=(AP)-2\lambda,\quad \cdots.$$

思 考 题

1. 试估算菲涅耳圆孔衍射实验中第10^4个半波带处的倾斜因子 $f(\theta)=(1+\cos\theta)/2$的数量级。如果将 $f(\theta)$近似取为 1，误差为多少？（所需的参考数据见6.1节。）

2. 为什么作菲涅耳衍射实验时，光源和接收屏幕要放得那样远？为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

什么放近了不易看到衍射图样？

3. 我们说，整个波前产生的振幅相当于第一个半波带效果之半，它是否等于半个第一半波带的效果？

4. 严格说来，只有对波前进行无限分割，面元 dS 贡献的复振幅 $d\tilde{U}(P)$ 才与它的面积成正比。为什么对于并非无穷小的半波带也能使用上述结论？能否对波前的分割比半波带法更粗糙一点，譬如使用"全波带"（即相邻边缘的光程相差 λ 的环形带）的概念？

5. 设 S 为点光源，D 为孔径固定的衍射屏，P 为接收屏幕（见图6-1）。讨论下列情况下圆孔中包含半波带数目的增减：

(1) S，D 位置不变，移动 P；

(2) D，P 位置不变，移动 Q；

(3) S，P 位置不变，移动 D。

6. 你能够用半波带法说明轴上场点的强度随圆屏半径 ρ 的增大而连续单调下降吗？怎样利用振动矢量图6-6(c)来说明这一点？能否用巴俾涅原理来说明，为什么圆孔衍射图样中心强度作亮暗交替的变化，而圆屏衍射图样的中心强度却作单调变化？

7. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，从近到远移动接收屏幕，中心强度始终作亮暗交替的变化吗？接收屏幕在哪些位置上中心强度达到极大？

8. 对于一个圆孔的衍射，是否能引入焦点和焦距的概念？是否有类似于透镜的物像公式？

9. 菲涅耳波带片的"物点"和"像点"之间是否有等光程性？

10. 论证菲涅耳波带片除了具有主焦点外，还存在一系列次焦点。次焦点与主焦点光强之比是多少？有人认为是1/9，1/25，…，你认为对吗？如果说次焦点的光强确实比主焦点弱，主要是什么因素造成的？

11. 振幅型的黑白波带片有个缺点，即它使入射光通量损失一半。有什么办法使照射波带片的光通量全部进入衍射场，从而造成更强的主焦点？

习　　题

1. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，圆孔半径2.0mm，光源离圆孔2.0m，波长0.5μm，当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时，求

(1) 前三次出现中心亮斑（强度极大）的位置；

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(2) 前三次出现中心暗斑(强度极小)的位置.

2. 在菲涅耳圆孔衍射实验中，光源距离圆孔1.5m，波长0.63μm，接收屏幕与圆孔距离6.0m，圆孔半径从0.5mm开始逐渐扩大，求

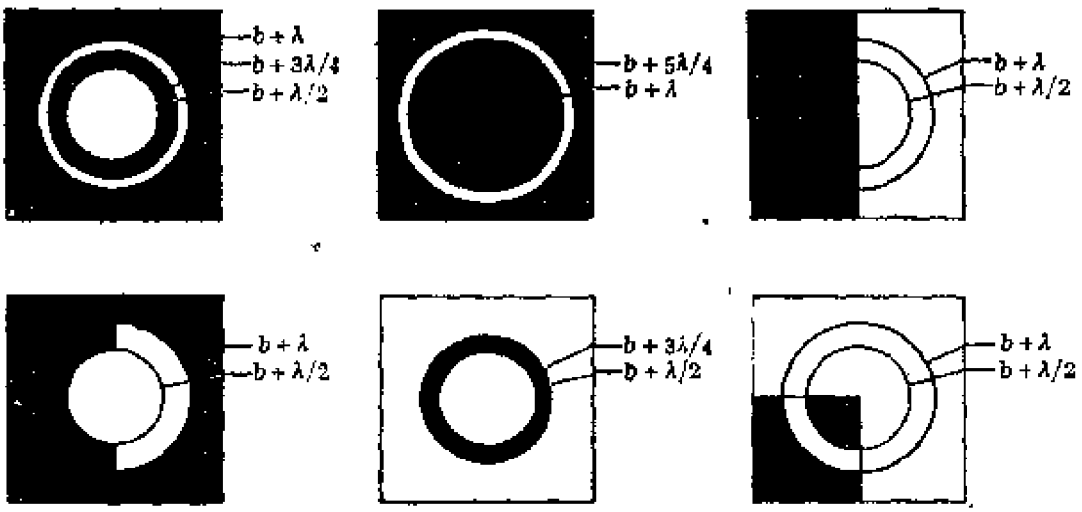
(1) 最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径；

(2) 最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径.

3. 用直刀口将点光源的波前遮住一半(直边衍射)，几何阴影边缘点上的光强比自由传播时小多少倍？

4. 求圆孔中露出1.5个半波带时衍射场中心强度与自由传播时强度之比.

5. 用平行光照明衍射屏，屏对波前作如下几种方式的遮挡，求轴上场点的光强与自由传播时之比(图中标出的是该处到场点的光程，其中b是中心到场点的光程).



习题5图

6. 若一个菲涅耳波带片只将前五个偶数半波带遮挡，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比.

7. 若一个菲涅耳波带片将前50个奇数半波带遮挡，其余地方都开放，求衍射场中心强度与自由传播时之比.

8. 菲涅耳波带片第一个半波带的半径$\rho_1 = 5.0$mm，

(1) 用波长$\lambda = 1.06\mu$m的单色平行光照明，求主焦距；

(2) 若要求主焦距为25cm，需将此波带片缩小多少倍？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

9. 如何制作一张满足以下要求的波带片：

(1) 它在 4000Å 紫光照明下的主焦距为 80cm；

(2) 主焦点光强是自由传播时的 10^3 倍左右。

10. 一菲涅耳波带片对 9000Å 的红外光主焦距为 30cm，改用 6328Å 的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

§7 夫琅和费单缝和矩孔衍射

在上节中我们只求得菲涅耳圆孔、圆屏衍射中轴上强度的定量结果，对轴外强度分布，由于计算上的复杂性，本书从略。这对于我们充分认识衍射现象的特征不能不是限制。夫琅和费衍射的计算简单得多，本节将对单缝、矩孔等夫琅和费衍射场分布函数进行较全面的计算，并从中进一步概括出衍射现象的一些重要特征。

7.1 实验装置和实验现象

如 6.4 节所述，夫琅和费衍射是平行光的衍射，在实验中它可借助两个透镜来实现。如图 7-1，位于物方焦面上的点源经第一个透镜，化为一束平行光，照在衍射屏上。衍射屏开口处的波前向各方向发出次波(衍射光线)。方向彼此相同的衍射线经第二个透镜会聚到其像方焦面的同一点上。

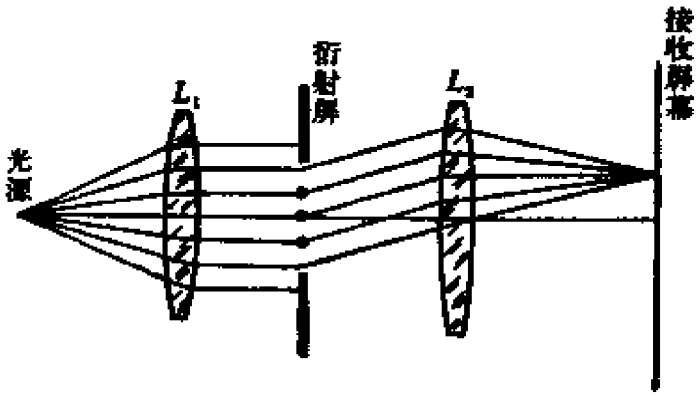


图 7-1 实现夫琅和费衍射的实验装置

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

为了对比，在图 7-2 给出一系列不同情况下的夫琅和费矩孔衍射图样，其中单缝是拉长了的矩孔，可看作是矩孔的一个特例.

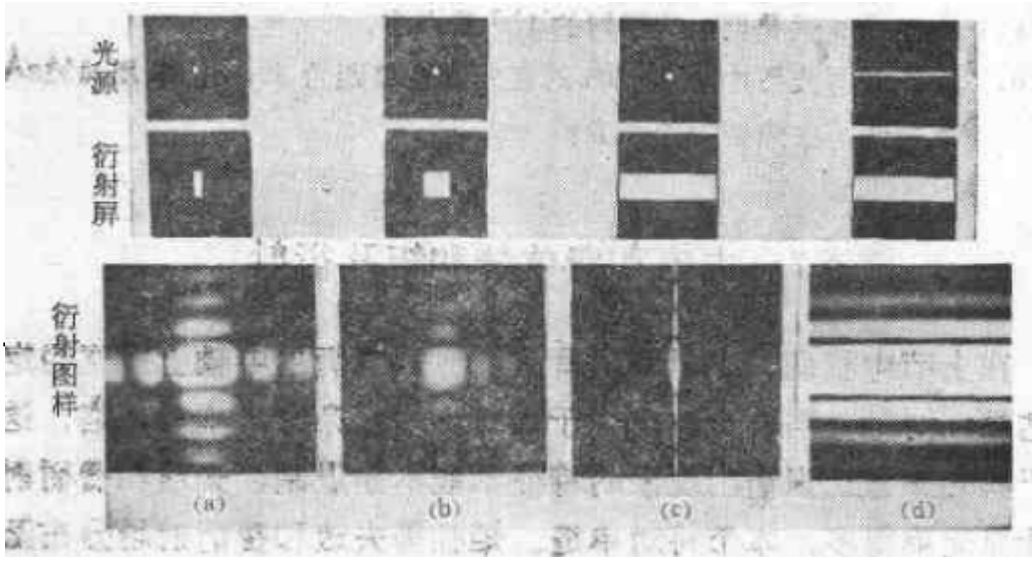


图 7-2. 夫琅和费矩孔衍射中光源、衍射屏和衍射图样的对应

图 7-2(a),(b),(c)中光源都是点光源①，即入射在衍射孔上的都是单一方向的平行光.如果不发生衍射，在接收屏幕上我们看到的只是中央有个亮点(几何像点)，从(a),(b),(c)的衍射图样可以看出，一般说来衍射是朝上下左右多个方向进行的，但是当开口在水平方向拉得长时(单缝)，衍射图样基本上只在上下这个一维的方向上铺展(见图(c)).按照严格的理论体系，本应先计算矩孔的二维衍射，然后作为特例，过渡到单缝衍射.然而考虑到教学上由简到繁的原则，我们先计算单缝的衍射，在这里衍射基本上是一维的这个特点暂作为实验事实承认下来，待后面讨论过矩孔衍射之后，再给予理论上的说明.

7.2 单缝衍射的强度公式

考虑点光源照明时单缝的夫琅和费衍射.取坐标系如图 7-3(a)，z 轴沿光轴，y 轴沿狭缝的走向，x 轴与之垂直.如前所述，

① 图 7-2(d)是线光源情形，我们这里暂且不讨论它，留待7.4节讨论.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

衍射只在x-z面内进行，计算光程时，我们只需作x-z平面图，如图7-3(b)．按惠更斯-菲涅耳原理，我们把缝内的波前AB分割为许多等宽的窄条ΔS，它们是振幅相等的次波源，朝多个方向发出次波．由于接收屏幕位于透镜L_2的像方焦面上，角度θ相同的衍射线会聚于幕上同一点P_θ，设入射光与光轴平行，则在波面AB上无位相差，为求单缝上下边缘A，B到P_θ的衍射线间的光程差，只需自A引这组衍射线的垂线．它与自B发出的衍线相遇于N，$\Delta L = \overline{BN}$即为所求的光程差．(为什么?) 设缝宽为a，则

$$\Delta L = a\sin\theta. \qquad (7.1)$$

波前上介于A，B各点发出衍射线的光程可据此按比例推算．振动的合成可用矢量图解和复数积分两种方法计算．

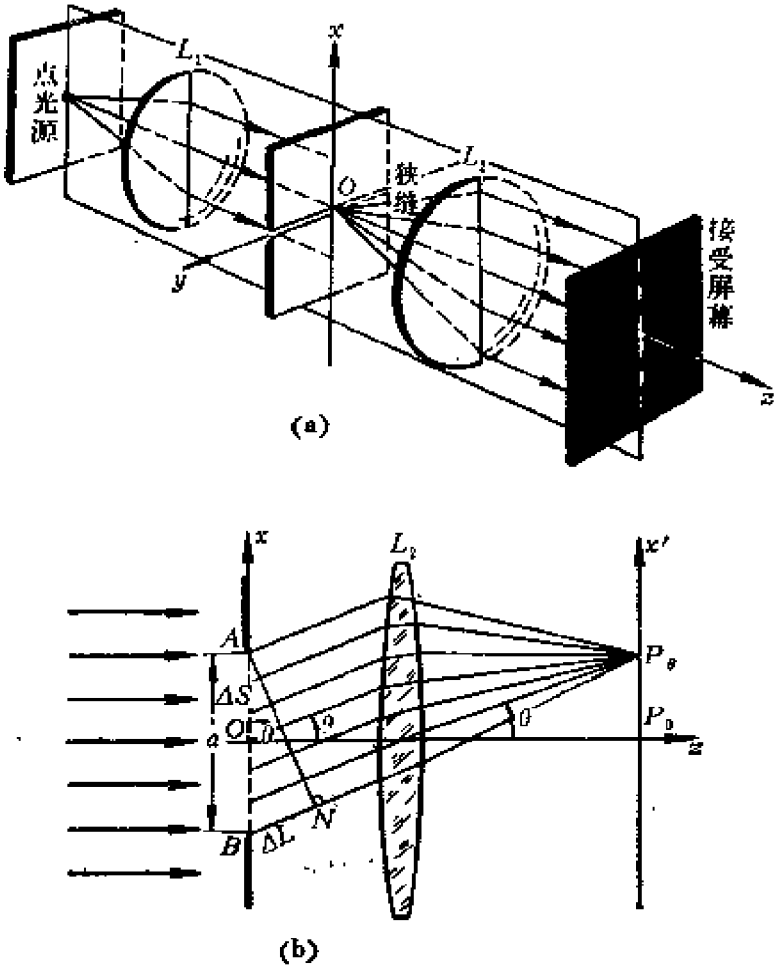


图 7 3　夫琅和费单缝衍射(点光源情形)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

（1）矢量图解法

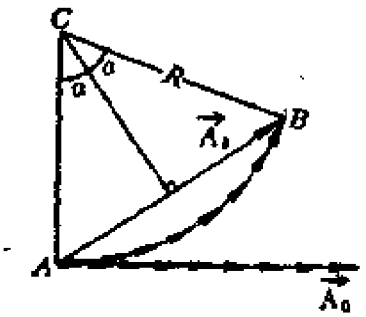


图 7-4　单缝衍射的矢量图解

如图 7-4，由A点作一系列等长的小矢量首尾相接，逐个转过一个相同的小角度，最后到达B点，共转过的角度为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\ \Delta L = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta, \qquad (7.2)$$

这里每个小矢量代表波前上一窄条 ΔS 对 P_θ 处振动的贡献．取 $\Delta S \to 0$ 的极限后，由小矢量连成的折线化为圆弧，设此弧的圆心在C点，半径为R，圆心角为2α．显然$2\alpha = \delta$．整个缝宽在 P_θ 处产生的合成振幅A_θ等于弦长$\overline{AB}$．由图7-4不难看出：

$$A_\theta = \overline{AB} = 2R\sin\alpha,$$

而

$$R = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2\alpha},$$

故

$$A_\theta = \overline{AB} = \overset{\frown}{AB}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

现在看弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 的物理意义．设想将此弧舒展开来，成为一条直线．在傍轴条件下忽略倾斜因子$f(\theta)$的影响，此直线的长度就代表 $\theta = 0$ 时(即在幕中心P_0点)的振幅A_0．于是我们得到

$$A_\theta = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \qquad (7.3)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

其中

$$\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta. \tag{7.4}$$

取式(7.3)的平方得

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{7.5}$$

这就是单缝的夫琅和费衍射的强度分布公式. 衍射场中相对强度 I_θ/I_0 等于$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$，这个因子称为单缝衍射因子，在7.4节我们还要专门研究它的特点.

（2）复数积分法

在傍轴条件下，按菲涅耳-基尔霍夫公式(5.11)，

$$\tilde{U}(\theta) = \frac{-i}{\lambda z_0}\int\int \tilde{U}_0\, e^{ikr}dxdy, \tag{7.6}$$

式中 r 是波前上坐标为 x 的点 Q 到场点 P_θ 的光程，由图7-5 可知光程差为

$$\Delta r = r - r_0 = -x\sin\theta,$$

它与y无关. z_0是某个长度①.在正入射的情况下$\tilde{U}_0$是与 x,y 都

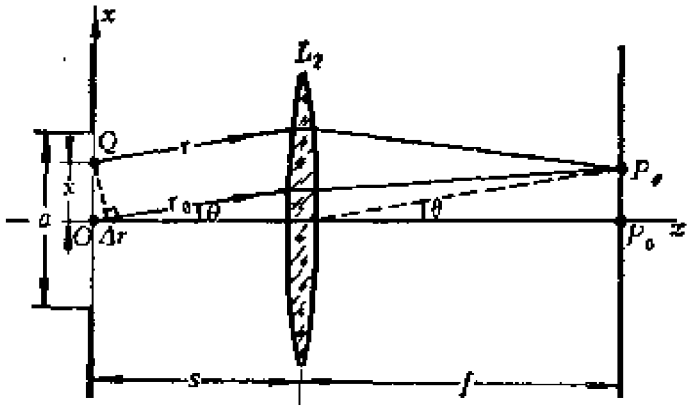


图 7-5　单缝夫琅和费衍射光程差Δr的计算

① 由于透镜对波面的变换，球面次波在场点的振幅表达式中的分母不能直接选为 r_θ(波前中心到场点的路径长度，见图7-5)，故而改写为 z_0. 不论衍射屏是否置于前焦面，只要是在后焦面接收衍射场，应选 $z_0 = |s(1-f/s')| = |f|$，这里 s,s' 为物像距，满足物像高斯公式.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

无关的常数．将式(7.6)先对y积分，并把所有与x无关的因子归并到一个常数C中，于是得

$$\widetilde{U}(\theta)=C\int_{-a/2}^{a/2}e^{ikx\sin\theta}dx=C\int_{-a/2}^{a/2}\exp(-ikx\sin\theta)dx$$

$$=C\frac{\exp(ikx\sin\theta)}{ik\sin\theta}\Big|_{x=-a/2}^{x=a/2}=2C\frac{\sin(ka\sin\theta/2)}{k\sin\theta}$$

$$=aC\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ . \tag{7.7}$$

其中

$$\alpha=\frac{ka\sin\theta}{2}=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},$$

它与式(7.4)的定义同．在式(7.7)中取$\theta=0$，于是

$$\alpha=0,\quad \sin\alpha/\alpha=1,\quad \widetilde{U}(\theta)\to\widetilde{U}(0)=aC,$$

故式(7.7)可写为

$$\widetilde{U}(\theta)=\widetilde{U}(0)\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

取绝对值的平方，即得

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

其中$I_0=\widetilde{U}^*(0)\widetilde{U}(0)$是衍射场中心强度．这正是上面用矢量图解法得到的结果．

7.3 矩孔衍射的强度公式

如图7-6(a)所示，设矩孔沿x,y方向的边长分别为a,b，衍射线的方向用它的两个方向角的余角θ_1,θ_2来表示（今后我们称之为二维的衍射角），衍射线在焦面上会聚点P的坐标(x',y')与(θ_1,θ_2)有一一的对应关系．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

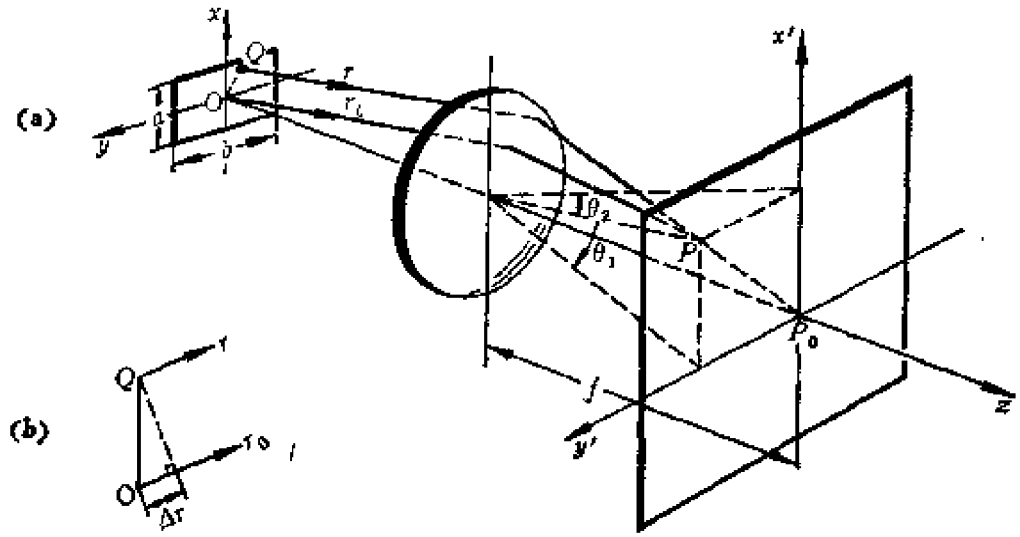


图 7-6　夫琅和费矩孔衍射

在波前上取一点Q，其坐标为(x,y)．O代表波前上的原点．现计算二者到场点P的光程差．把$\overrightarrow{OQ}$看作一个矢量，它的分量为$(x,y,0)$，衍射线方向的单位矢量$\hat{r}$的分量为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$．光程差$\Delta r$等于$\overrightarrow{OQ}$在$\hat{r}$上的投影长度(见图7-6(b))，即二矢量的标积，故

$$\begin{aligned}\Delta r &= r - r_0 \\ &= -(x\cos\alpha + y\cos\beta) \\ &= -(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2).\end{aligned} \tag{7.8}$$

最后一步利用了(θ_1,θ_2)与(α,β)的余角关系．

类似前面一维情形的计算，由菲涅耳-基尔霍夫衍射公式得

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta_1,\theta_2) &= C\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy\, e^{ik\Delta r} \\ &= C\int_{-a/2}^{a/2} \exp[-ikx\sin\theta_1]dx \\ &\quad \times \int_{-b/2}^{b/2} \exp[-iky\sin\theta_2]dy\end{aligned}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$= abC\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}\ \frac{\sin\beta}{\beta}, \tag{7.9}$$

其中 $C\propto -ie^{ikr_0}/\lambda z_0$ 是个常数，而

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{ka\sin\theta_1}{2} = \dfrac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda}, \\ \beta = \dfrac{kb\sin\theta_2}{2} = \dfrac{\pi b\sin\theta_2}{\lambda}, \end{cases} \tag{7.10}$$

在式(7.9)中取 $\theta_1=\theta_2=0$，于是

$$\alpha=\beta=0,\ \sin\alpha/\alpha=\sin\beta/\beta=1,\ \widetilde{U}(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{U}(0,0)=abC,$$

故式(7.8)可写为

$$\widetilde{U}(P)=\widetilde{U}(0,0)\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ \frac{\sin\beta}{\beta}.$$

取绝对值平方，得

$$I(P)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \tag{7.11}$$

其中

$$I_0=\widetilde{U}^*(0,0)\widetilde{U}(0,0)=a^2b^2|C|^2\propto\left(\frac{ab}{\lambda}\right)^2 \tag{7.12}$$

是衍射场的中心强度．式（7.11）表明，矩孔衍射的相对强度 $I(P)/I_0$ 是两个单缝衍射因子的乘积．

7.4 单缝衍射因子的特点

从7.2和7.3节的计算看出，单缝和矩孔的衍射强度分布都与单缝衍射因子有关，现在我们专门来研究这个函数的性质和特点．图7-7虚线是振幅因子 $\sin\alpha/\alpha$ 的曲线，实线是强度因子 $(\sin\alpha/\alpha)^2$ 的曲线，其中 $\alpha=(\pi a/\lambda)\sin\theta$，曲线是以 $\sin\theta$ 为横坐标画出的．下面着重分析强度因子．

由图7-7可见，在单缝衍射的强度因子中心 $\alpha=0$，$\sin\theta=0$ 的地方有个主极大，两侧都有一系列次极大和极小，它们分别代表

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

衍射图样中主极强、次极强和暗纹的位置．这与图 7-2 中给出的衍射图样是一致的．下面我们分几个方面作些具体的讨论．

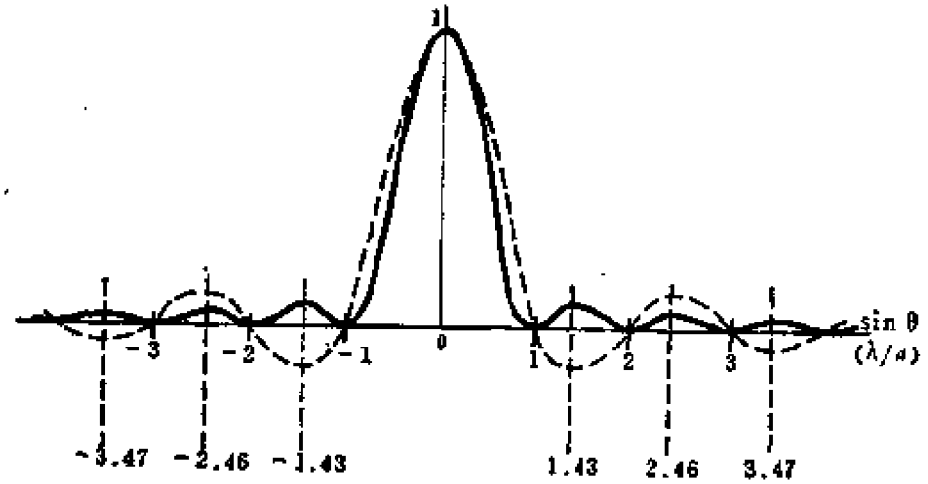


图 7-7　单缝衍射因子

（1）主极强——零级衍射斑

主极强出现在$\alpha=0$的地方，$\alpha=0$相当于各衍射线之间无光程差．根据费马原理，这就是几何光学像点的位置．在这里我们看到了“物像等光程性”的物理意义．几何光学中着重从保持光束的同心性方面研究成像问题，从波动光学的角度看，光线会聚于一点，未必产生很大的光强，这里还需看各光线的位相关系．正是等光程性保证了到达像点各光线有相同的位相，从而产生最大的强度．费马原理中所谓的“实际光线”就是零级衍射线，而零级衍射斑的中心就是几何光学的像点．这是具有普遍意义的结论．利用它我们可较容易地找到零级衍射斑的位置．例如在图 7-3(a)所示的装置中如果点光源的位置发生上下或左右的移动，几何光学的知识告诉我们，它在接收屏幕上的像点朝相反的方向移动，移动的距离也不难算出．根据上述结论我们可以判断，屏上的零级衍射斑将作同样的移动．

（2）次极强——高级衍射斑

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

次极强出现在 $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=0$ 的位置上，它们是超越方程 $\alpha=\tan\alpha$ 的根，其数值为

$$\alpha=\pm1.43\pi,\ \pm2.46\pi,\ \pm3.47\pi,\ \cdots, \tag{7.13}$$

对应的 $\sin\theta$ 值为

$$\sin\theta=\pm1.43\frac{\lambda}{a},\ \pm2.46\frac{\lambda}{a},\ \pm3.47\frac{\lambda}{a},\ \cdots, \tag{7.14}$$

各次极强的强度为

$$I_1\simeq4.7\%I_0,\ I_2\simeq1.7\%I_0,\ I_3\simeq0.8\%I_0,\cdots①, \tag{7.15}$$

可见高级衍射斑的强度比零级少得多．这里尚未考虑倾斜因子的作用，考虑到它，高级衍射斑的强度还要进一步减小．故经衍射后，绝大部分光能集中在零级衍射斑内．

（3）暗斑位置

由单缝衍射因子的函数形式立即看出，它在 $\alpha\neq0$ 而 $\sin\alpha=0$ 的地方等于 0，这就是说暗纹出现在下列地方：

$$\alpha=\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \cdots, \tag{7.16}$$

$$\sin\alpha=\pm\frac{\lambda}{a},\ \pm\frac{2\lambda}{a},\ \pm\frac{3\lambda}{a},\ \cdots. \tag{7.17}$$

（4）亮斑的角宽度

我们规定，以相邻暗纹的角距离作为其间亮斑的角宽度．在傍轴条件下，式(7.17)可写为 $\theta\simeq\pm k\lambda/a$ $(k=1,2,\cdots)$，由此可以看出，零级亮斑在 $\theta=\pm\lambda/a$ 之间，它的半角宽为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a}\quad\text{或写成}\quad a\Delta\theta=\lambda. \tag{7.18}$$

$\Delta\theta$ 等于其它亮斑的角宽度，亦即零级亮斑的角宽度比其余的大一倍．这特点在衍射图样7-2中也反映出来了．

① 次极强的位置和强度可用近似式表示(见思考题1)：
$\alpha\simeq\pm(k+1/2)\pi$，$I_k\simeq[(k+1/2)\pi]^{-2}I_0$，$k=1,2,3,\cdots$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

如前所述，零级亮斑集中了绝大部分光能，它的半角宽度$\Delta\theta$的大小可作为衍射效应强弱的标志①. 式(7.18)告诉我们，对于给定的波长，$\Delta\theta$与缝宽成反比，即在波前上对光束限制越大，衍射场越弥散，衍射斑铺开得越宽；反之，当缝宽很大，光束几乎自由传播时，$\Delta\theta\to 0$，这表明衍射场基本上集中在沿直线传播的原方向上，在透镜焦面上衍射斑收缩为几何光学像点. 式(7.18)还告诉我们，在保持缝宽不变的条件下，$\Delta\theta$与λ成正比，波长越长，衍射效应越显著；波长越短，衍射效应越可忽略，所以说，几何光学是短波($\lambda\to 0$)的极限.

矩孔衍射是两个单缝因子$(\sin\alpha/\alpha)^2$,$(\sin\beta/\beta)^2$的乘积，其一等于0的地方，强度就为0. 从而衍射亮斑如图7-2所示，排列在矩形格子中. 在衍射孔的两边不等时($a\neq b$)，上述因子在x,y两个方向上给出不同的半角宽度

$$\begin{cases}\Delta\theta_1=\dfrac{\lambda}{a},\\[2ex]\Delta\theta_2=\dfrac{\lambda}{b},\end{cases}\qquad\text{或写成}\qquad\begin{cases}a\Delta\theta_1=\lambda,\\[2ex]b\Delta\theta_2=\lambda,\end{cases}\tag{7.19}$$

$\Delta\theta_1$,$\Delta\theta_2$分别与a,b成反比，这就是说，在波前上光束在哪个方向上受到的限制较大，则衍射斑就在该方向上铺展得较宽. 比较一下图7-2(a),(b),(c)，即可看到这一点. 当衍射矩孔的某个边(譬如b)很大时($b\to\infty$)，矩孔过渡到单缝. 这时$\Delta\theta_2\to 0$，即衍射图样在缝长的方向上缩得无限窄，光强几乎只分布在与缝垂直的一条线上，这就解释了图7-2(c)中所示的现象，同时为我们在7.2节中计算单缝衍射时作一维处理提供了理论依据.

最后我们解释一下图7-2(d)中所示的线光源单缝衍射实验. 实验装置如图7-8所示，线光源取向与单缝平行. 在没有激光的

① 再次强调指出，位于透镜后焦面上的一个点，对应于物空间衍射线的一个方向. 所以$\Delta\theta$既是接收屏幕上衍射斑大小的量度，也是衍射场中波线取向弥散程度的量度.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

条件下人们经常采用这样的装置．线光源可看成是一系列不相干点光源的集合．我们可以设想图7-3(a)所示装置中的点源沿y方向移动，则接收屏幕上的衍射图样将沿相反的方向平移．把点光源在各个位置上形成的衍射图样不相干地迭加在一起，我们就得到图7-2(d)或图7-8中幕上的直线衍射条纹．

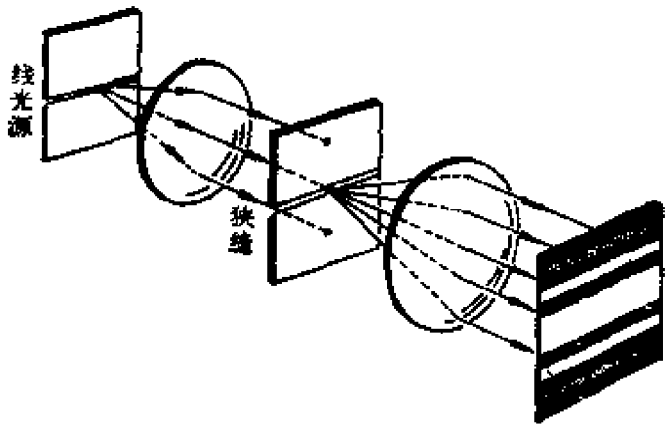


图 7-8　夫琅和费单缝衍射(线光源情形)

例题　波长为0.6μm的一束平行光照射在宽度为20μm的单缝上，透镜焦距为20cm，求零级夫琅和费衍射斑的半角宽度和线宽．

解　半角宽度 $\Delta\theta=\lambda/a=0.03\text{rad}$．幕上零级斑线宽

$$\Delta l=2f\Delta\theta=1.2\text{cm}.$$

研究一下夫琅和费单缝衍射的振幅分布函数在几何光学极限下的行为是很有意义的．按式(7.7)，

$$\tilde{U}(P_\theta)=aC\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

其中 $\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$，在傍轴条件下可写成 $\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\theta$，而 $C\propto\frac{a}{\lambda}$，故

$$\tilde{U}(P_\theta)\propto\frac{a}{\lambda}\frac{\sin\frac{\pi a}{\lambda}\theta}{\frac{\pi a}{\lambda}\theta}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi a}{\lambda}\theta}{\theta}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin p\theta}{\theta},$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

其中 $p=\pi a/\lambda$. 下面我们把此函数记作 $\delta(\theta,p)$，即

$$\delta(\theta,p)\equiv\frac{1}{\pi}\frac{\sin p\theta}{\theta}. \tag{7.20}$$

$\delta(\theta,p)$这个函数有个性质，即它对 θ 的定积分与 p 无关，恒等于 1：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta,p)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin p\theta}{\theta}d\theta=1. \tag{7.21}$$

如前所述，所谓几何光学极限，就是 $\lambda/a\to 0$，或 $p\to\infty$. 图7-9(a),(b),(c)依次给出 $\delta(\theta,p)$ 随 p 增大的演变情形. 当 $p\to\infty$ 时，$\delta(\theta,p)$ 在 $\theta=0$ 处趋于∞，但曲线下的总面积不变，从而尖峰的宽度要趋于0，在 $\theta\neq 0$ 的地方其数值全都趋于0. 这正好反映了几何光学的形象，$\delta(\theta,p)$ 在此情形的极限，称为 δ 函数①，即

$$\delta(\theta)=\lim_{p\to\infty}\delta(\theta,p)=\frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{\sin p\theta}{\theta}. \tag{7.22}$$

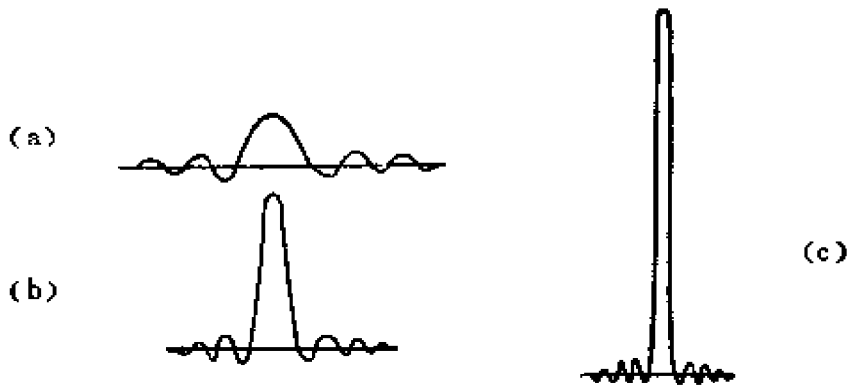


图 7-9　单缝衍射因子与 δ 函数

δ 函数的基本性质之一是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta)d\theta=1; \tag{7.23}$$

基本性质之二是对于任何在 $\theta=0$ 处连续的函数 $f(\theta)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta)f(\theta)d\theta=f(0). \tag{7.24}$$

① δ 函数最先是狄拉克(P.A.M.Dirac)在量子力学中引入的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

"δ函数"不是数学中普通意义下的"函数"，它可视为一种广义的函数．目前δ函数在物理学中已得到广泛的应用，在本书以后的章节中我们还要介绍和用到它(见第五章5.4—5.6节)．

*7.5 衍射反比关系意义的探讨

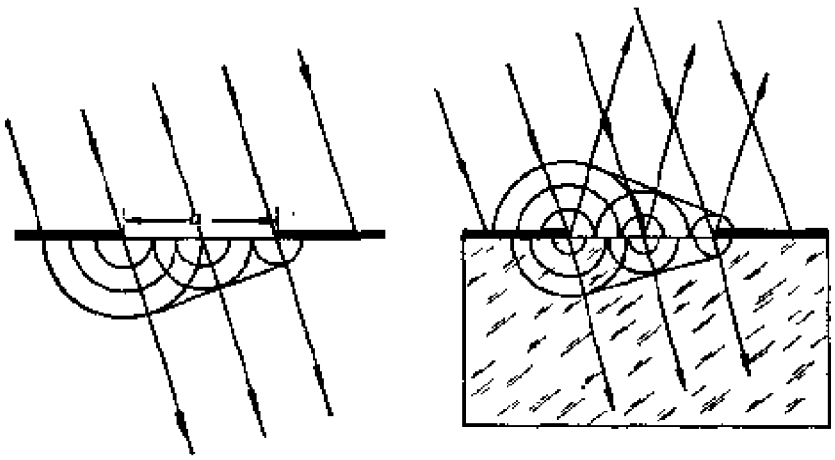
以上我们从次波相干迭加原理出发，具体推算了矩孔（单缝是它的一个特例)夫琅和费衍射的振幅和强度的分布，详细分析了衍射图样的主要特征．我们认为，从概念上和物理意义上看，其中最富有教益的是零级斑的半角宽度公式(7.18)或(7.19)．它们表明，由于衍射，光束在某个方向的弥散角$\Delta\theta_1,\Delta\theta_2$分别与光孔在该方向的线度$a,b$成反比：

$$a\Delta\theta_1=\lambda,\quad b\Delta\theta_2=\lambda.$$

我们不妨称它们为衍射反比关系．下面从几个方面发掘一下这公式的物理内容．

（1）几何光学的限度

前已指出，几何光学是$\Delta\theta=\lambda/a\to 0$时的极限，不过那时只讨论了光从窗口直接透射的问题(图7-10(a))．这时$\Delta\theta\to 0$意味着光束沿原方向前进，因此上述衍射反比关系给出了光的直线传播定律成立的条件．



(a) 直进性　　(b) 反射和折射

图 7-10　几何光学的限度

反射定律和折射定律成立的条件，也可用类似的方法得出．如图7-10(b)，在透明媒质表面设置一矩形窗口，这窗口也可以就是媒质界面的边界．取界面为波前，其上每个面元都是次波源，不过与图(a)情形不同的是，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

每个次波中心向前后两种媒质发出速度不同的两列球面次波，其一是反射次波，另一是折射次波。所以反射波场和透射波场都是平行光斜射的矩孔衍射场。根据费马原理可知，两侧零级极强方向就是几何光学反射光和折射光的方向。按照衍射理论，围绕着每个零级极强方向都有一衍射发散角，其大小都由上述衍射反比关系决定，它分别规定着几何光学反射定律和折射定律的限度①。

（2）波场中的能量分布同参与相干迭加波的数目有关

如果说，一个点源发出的球面波是各向同性的话，两个点源的干涉场中能量已开始在某些方向上聚集。参与相干迭加的波源数目越多，它们在空间分布的范围越广，则波场中能量向某些很窄的方向集中的趋势越明显。以上是一个带有普遍性的规律，今后我们会在多光束干涉，一维和多维光栅等许多例子中看到这一点。衍射反比关系 $a\Delta\theta=\lambda$ 也属于这一范畴。

上述规律可定性地解释如下。参与相干迭加的波源数目越多，出现相干极强的条件就越加苛刻，只有某些特定的方向上才能满足所需的光程条件。参与相干迭加的波源分布得越广，对主极强方向稍有偏离，许多波的位相就会发生显著的变化，故使合成的振幅和强度急剧下降。

（3）衍射的放大作用

凡两量成反比，一个越小，另一个越大。衍射反比关系提供了一种特殊的放大原理。如果一单缝或细丝的宽度太小，或由于其它原因使我们无法直接测定，我们可以用光学的方法测定其衍射斑的大小，然后由衍射反比关系推算其宽度。目前已利用此原理制成一种激光衍射细丝测径仪（见习题 4），其精度比千分尺高一个量级以上。光学测量是不接触测量，不损害样品，便于作连续的动态监测，并使拉丝流程实现自动控制。此外，早已广泛使用的 X 光衍射结构分析也利用了衍射的这种放大作用，将晶体的微观结构显示出来。当然，衍射的这种放大作用，不同于显微镜，它不是几何相似的放大，本质上是一种“光学变换”（参见第五章）。

思 考 题

1. 试用半波带法说明夫琅和费单缝衍射因子的一些特征，如暗纹和次极强出现的位置。你能用半波带法说明各次极强的强度的大小比例吗？

① 应注意，这时衍射反比关系中出现的 λ 是相应媒质中的波长。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

能说明次极强和主极强强度之比吗？

2. 在夫琅和费单缝衍射中，为保证在衍射场中至少出现强度的一级极小，单缝的宽度不能小于多少？为什么用 X 光而不用可见光衍射作晶体结构分析？

3. 试讨论，当图 7-3 所示的装置里点光源在垂直光轴的平面里上下左右移动时，衍射图样有何变化？

4. 若在单缝夫琅和费衍射装置中线光源取向并不严格平行单缝，这对衍射图样有什么影响？如果线光源本身太宽，对衍射图样有什么影响？设想一下，若在图7-8所示的装置中把线光源转90°使之与单缝垂直，你在幕上看到的是什么图样？

5. 在白光照明下夫琅和费衍射的零级斑中心是什么颜色？零级斑外围呈什么颜色？

6. 若将图7-3(a)所示装置中的单缝换为方孔、三角孔、或六角形孔，幕上零级衍射斑中心位置将在什么地方？

7. 讨论夫琅和费衍射装置有如下变动时，衍射图样的变化（参看图7-1）：

(1) 增大透镜 L_2 的焦距；

(2) 增大透镜 L_2 的口径；

(3) 将衍射屏沿光轴 z 方向前后平移；

(4) 衍射屏作垂直于光轴的移动(不超出入射光束照明范围)；

(5) 衍射屏绕光轴 z 旋转。

在以上哪些情形里零级衍射斑的中心发生移动？

习　题

1. 如图，平行光以 θ_0 角斜入射在宽度为 a 的单缝上，试证明：

(1) 夫琅和费衍射的强度公式基本不变(忽略倾斜因子)，即

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

式中 I_0 为零级中心强度，只不过 α 的定义与正入射不同：

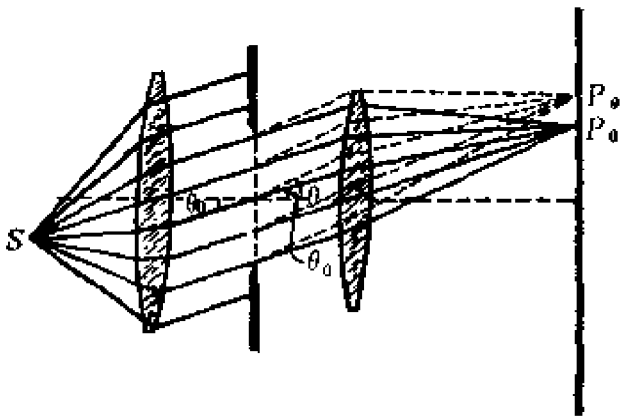
$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

(2) 零级中心的位置在几何光学像点处；

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

（3）零级斑半角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a\cos\theta_0}.$$



习题1图

2. 估算下列情形光束在媒质界面上反射和折射时反射光束和折射光束的衍射发散角.设界面的线度为1cm,光波波长为0.6μm,折射率为1.5,

（1）平行光正入射;

（2）入射角为75°;

（3）入射角为89°(掠入射).

3. 试用巴俾涅原理证明：互补的衍射屏产生的夫琅和费衍射图样相同.

4. 衍射细丝测径仪就是把单缝夫琅和费衍射装置中的单缝用细丝代替.今测得零级衍射斑的宽度(两个一级暗纹间的距离)为1cm，求细丝的直径.已知光波波长0.63μm，透镜焦距50cm.

§8 光学仪器的像分辨本领

8.1 夫琅和费圆孔衍射

在光学成像系统中,光瞳多呈圆形,讨论夫琅和费圆孔衍射问题,对分析成像的质量是必不可少的.计算的出发点仍是菲涅耳-基尔霍夫衍射公式，但由于用到的数学知识较多，这里只给出结

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

果．在正入射时，圆孔的夫琅和费衍射复振幅分布为

$$\widetilde{U}(\theta)\propto\frac{2J_1(x)}{x},\tag{8.1}$$

其中

$$x=\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta,\tag{8.2}$$

a 是圆孔的半径，θ 是衍射角，$J_1(x)$是一阶贝塞耳函数(一种特殊函数)，数值可查有关数学用表．强度分布公式为

$$I(\theta)=I_0\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2.\tag{8.3}$$

式中I_0是中心强度，$I_0\propto(\pi a^2)^2/\lambda^2$．$[2J_1(x)/x]^2$的曲线见图8-1．我们特别关心的是这函数的极大值和极小值(零点)，它们的数值列于表Ⅱ-1．

表Ⅱ-1　夫琅和费圆孔衍射强度分布函数的极大值和零点

x	0	1.220π	1.635π	2.233π	2.679π	3.238π
$[2J_1(x)/x]^2$	1	0	0.0175	0	0.0042	0

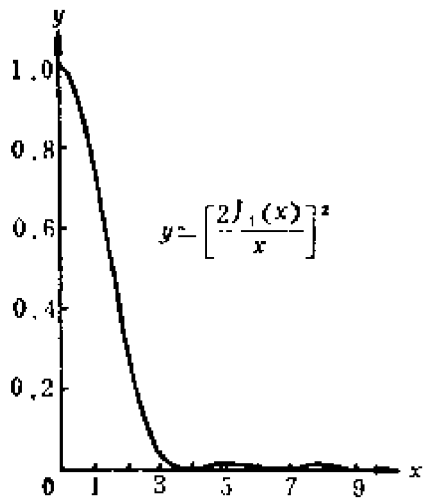


图 8-1　圆孔夫琅和费衍射因子

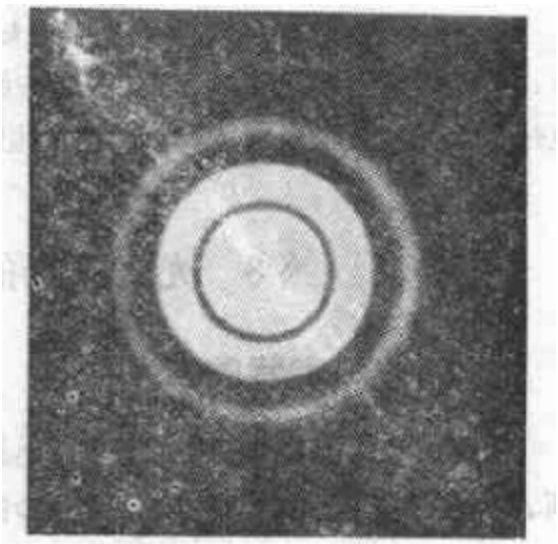


图 8-2　圆孔夫琅和费衍射图样与爱里斑

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

定性看圆孔的夫琅和费衍射因子与单缝的相似，但在具体数值上有些小差别．圆孔夫琅和费衍射图样的照片见图 8-2．从轴对称性可以想见，它由中心亮斑和外围一些同心亮环组成．

与单缝和矩孔情形类似，圆孔衍射场中的绝大部分能量也集中在零级衍射斑内．圆孔的零级衍射斑称为爱里斑 (G．B．Airy，1835年)，其中心是几何光学像点．衍射光角分布的弥散程度可用爱里斑的大小，即第一暗环的角半径 $\Delta\theta$ 来衡量．从表 Ⅰ-1 可以看出，

$$\Delta\theta = 0.61\frac{\lambda}{a} \quad 或 \quad \Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}, \tag{8.4}$$

其中 $D = 2a$ 是圆孔直径，以上便是圆孔衍射的反比关系．

例题 1　估算眼睛瞳孔爱里斑的大小．

解　人的瞳孔基本上是圆孔，直径 D 在 2mm—8mm 之间调节．取波长 $\lambda = 0.55\mu m$，$D = 2mm$，估算爱里斑(最大)的角半径为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 3.4\times10^{-4}rad \simeq 1'.$$

人眼基本上是球形，新生婴儿眼球的直径约为 16mm，成年人眼球直径约为24mm．我们取 $f \simeq 20mm$ 估算视网膜上爱里斑的直径为

$$d = 2f\Delta\theta \simeq 14\mu m.$$

在 $1mm^2$ 的视网膜面元中，可以布满约 540 个爱里斑．|

例题 2　氦氖激光器沿管轴发射定向光束，其出射窗口的直径(即内部毛细管的直径)约为1mm，求激光束的衍射发散角．

解　氦氖激光的波长为 6328Å，由于光束被出射窗限制，它必然会有一定的衍射发散角，用式(8.4)来估计：

$$\Delta\theta \simeq 1.22\frac{\lambda}{D} = 7.7\times10^{-4}rad \simeq 2.7'.$$ |

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

如果我们在 10km 以外接收的话，这束定向光束的光斑可达 7.7m，这是多么大的截面啊！这个例子告诉我们，由于衍射效应，截面有限而又绝对平行的光束是不可能存在的．由于光波波长很短，在通常条件下衍射发散角很小．不过在光通讯或光测距这类远程装置里，即使很小的发散角也会造成很大面积的光斑，在估算整机的接收灵敏度时，需要考虑到这一点．在估算衍射发散角的量级时，往往用矩孔公式(7.19)就可以了，不必过细计较光孔的具体形状．

8.2 望远镜的分辨本领

当我们用光学仪器去观察一个较复杂的物体，如一对双星，一张显微切片时，画面可以看成是许多不同颜色、不同亮度、不同位置的物点组成的．由于每个物点成的像实际上都是一个有一定大小的衍射斑，靠得太近的像斑就彼此重迭起来，使画面的细节变得模糊不清．所以对于高放大率精密光学仪器来说，衍射效应是提高分辨本领的一个严重障碍．

我们举一个最简单的例子．用望远镜观察太空中的一对双星．它们的像是两个圆形衍射斑．如果这两个物点的像之间的角距离$\delta\theta$大于衍射斑的角半径 $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$ 时，很明显，我们能够看出是两个圆斑(图8-3(a))，从而也就知道有两颗星．但是当两个像之间的角距离 $\delta\theta$ 比 $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$ 小(图8-3(c))，两个圆斑几乎重迭在一起，由于两个物点的光是非相干的，强度直接迭加，这时我们就看不出是两个圆斑，因而也就无从知道是两颗星．为了给光学仪器规定一个最小分辨角的标准，通常采用所谓瑞利判据．这判据规定，当一个圆斑像的中心刚好落在另一圆斑像的边缘(即一级暗纹)上时，就算两个像刚刚能够被分辨(见图8-3(b))．计算表明，满足瑞利判据时，两圆斑重迭区的光强约为每个圆斑中心最亮处光强的80%，一般人的眼睛是刚刚能够分辨这种光强差别的．对于望远镜来说，这时两像斑中心的角距离$\delta\theta_m$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

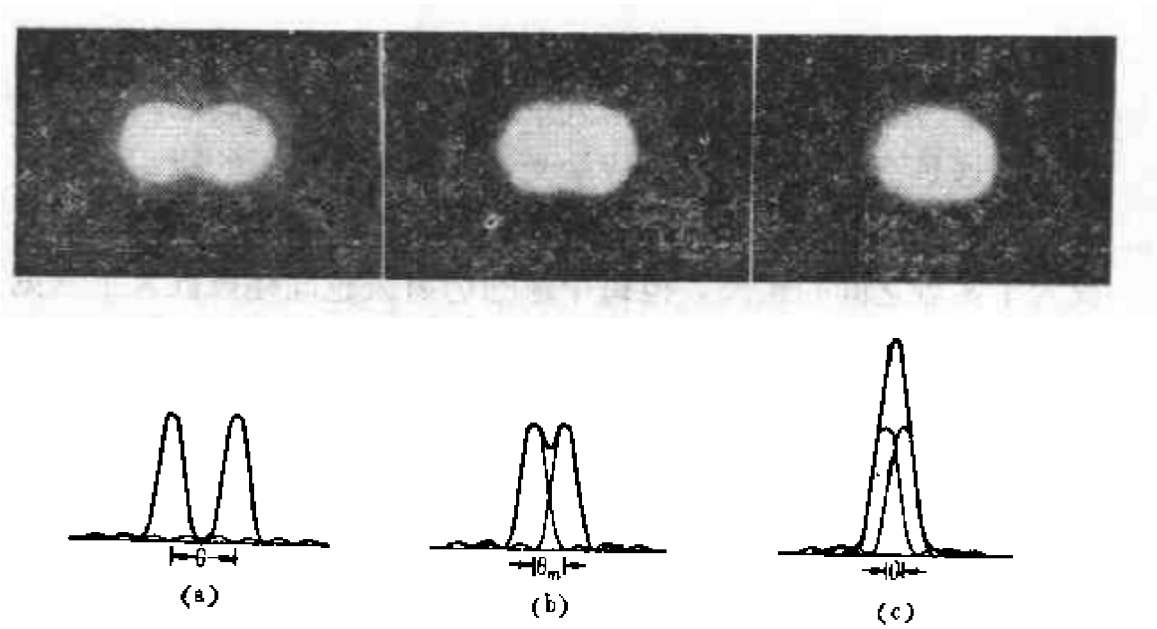


图 8-3　瑞利判据

等于每个的半角宽度 $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$，即

$$\delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}. \tag{8.5}$$

这就是望远镜的最小分辨角公式，其中D是物镜的直径．由此可见，为了提高望远镜的分辨本领，即减小其最小分辨角，必须加大物镜的直径．

例题3　计算物镜直径$D = 5.0$cm 和 50cm 的望远镜对可见光平均波长 $\lambda = 5500$Å 的最小分辨角．

解　　$$\delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D},$$

$D = 5.0$cm时，

$$\delta\theta_m = 1.22 \times \frac{0.55 \times 10^{-4}}{5.0} = 1.3 \times 10^{-5}\text{rad},$$

$D = 50$cm时，

$$\delta\theta_m = 1.22 \times \frac{0.55 \times 10^{-4}}{50} = 1.3 \times 10^{-6}\text{rad}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

也许有人会想，既然光学仪器可以放大视角，从而使人能够分辨物体的细节，是否可以增大仪器的放大率来提高它的分辨本领呢？这是不行的，衍射效应给光学仪器分辨本领的限制，是不能用提高放大率的办法来克服的．因为增大了放大率之后，虽然放大了像点之间的距离，但每个像的衍射斑也同样被放大了（见图8-4），光学仪器原来所不能分辨的东西，放得再大，仍不能为我们的眼睛或照相底片所分辨．当然，另一方面如果光学仪器的放大率不足，也可能使仪器原来已经分辨了的东西由于成像太小，使眼睛或照相底片不能分辨，这时仪器的分辨本领未被充分利用，我们还可以提高它的放大率．所以设计一个光学仪器时应使它的放大率和分辨本领相适应．对于助视光学仪器，最好如此选择其放大率，使等于仪器最小分辨角$\delta\theta_m$的角度放大到人眼所能分辨的最小角度（约1′），

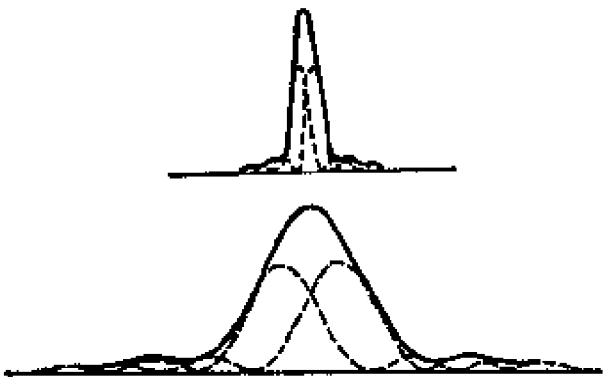


图 8-4　提高放大率不能解决分辨率不足的问题

例题 4　上题中的两个望远镜的放大率各以多少为宜？

解　我们眼睛的最小分辨角为 $\delta\theta_e = 1' = 2.9\times10^{-4}\text{rad}$，$D = 5.0\text{cm}$的望远镜的最小分辨角 $\delta\theta_m = 1.3\times10^{-5}\text{rad}$，它的视角放大率应选择为

$$M = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = \frac{2.9\times10^{-4}}{1.3\times10^{-5}} = 22.5\text{倍；}$$

$D = 50\text{cm}$的望远镜$\delta\theta_m = 1.3\times10^{-6}\text{rad}$，视角放大率应选择为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$M=\frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m}=\frac{2.9\times10^{-4}}{1.3\times10^{-6}}=225\text{倍}.$$

实际上为了让眼睛看得舒服些，放大率还可再提高一点.

通常我们看到的物镜直径较大的望远镜倍率也较高，或者说要制造倍率高的望远镜必须同时增大物镜直径，就是这个道理.

*8.3 球面波照明条件下像面接收的夫琅和费衍射

望远镜接收的是平行光，故在8.2节里讨论它的分辨本领时可以用夫琅和费衍射理论. 显微镜接收的是发散角很大的同心光束(球面波)，研究显微镜的分辨本领时我们还可用夫琅和费衍射理论吗？回答是肯定的. 初看起来这有些意外，待我们证明了下面一条定理后，就不觉得奇怪了.

考虑图8-5所示的衍射装置(暂不看Q点左边用虚线绘制的部分)，由点光源Q发出的同心光束经过L成像于P，在像面Π上放置接收屏幕. AA是这光具组的孔径光阑，光束被它限制，从而发生衍射. 考虑到衍射效应，幕上呈现的将不是一个像点P，而是一定的衍射图样. 现在证明，无论孔径光阑AA位于何处，像平面Π上接收到的总是光瞳的夫琅和费衍射图样.

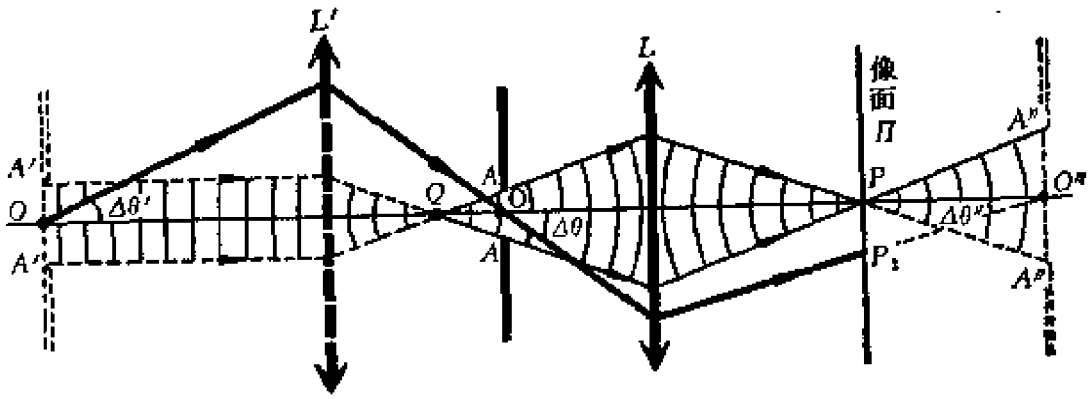


图 8-5 球面波照明像面接收的夫琅和费衍射

为了证明上述结论①，设想Q点之左还有一个透镜L'，置Q位于它的像方焦点上. 由Q向右发出的球面波可看成是L'之左一束平行光会聚后的延伸. $A'A'$是L'和L组成的联合光具组的入射光瞳，它限制了入射的平行光束的孔径. 不难看出，对于联合光具组来说Π是像方焦面，故平行光经

① 在第五章§4里我们还要给出另一种证明.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$A'A'$ 衍射后在其上呈现的应是夫琅和费衍射图样，从而 8.1 节推导的公式对它都适用．对于圆孔，幕上是爱里斑和周围的同心环条纹．

设$A''A''$是光具组的出射光瞳，其直径为D''，由其中心O''引一条光线到爱里斑的边缘点P_1，此线与光轴成夹角$\Delta\theta''$，$\Delta\theta''$就是爱里斑对O''所张的角半径，按式(8.5)，

$$\Delta\theta'' = 1.22\frac{\lambda}{n''D''}, \tag{8.6}$$

式中n''是像方空间折射率，λ是真空波长．设AA和$A'A'$的直径分别为D和D'，它们所在空间的折射率分别为n和n'，中心分别为O和O'，光线$O''P_1$通过O和O'的共轭光线与光轴所成倾角分别为$\Delta\theta$和$\Delta\theta'$，由于爱里斑的角半径$\Delta\theta$，$\Delta\theta'$，$\Delta\theta''$等都很小，故可利用傍轴条件下的拉格朗日-亥姆霍兹定理(第一章5.5节)．由式(8.6)，我们有

$$nD\Delta\theta = n'D'\Delta\theta' = n''D''\Delta\theta'' = 1.22\lambda. \tag{8.7}$$

以上就是球面波照明像面接收的夫琅和费衍射系统中衍射反比关系的几种表达方式．

*8.4 显微镜的分辨本领

显微镜的特点是物镜焦距短，被观测的小物放在物镜焦点附近的齐明点上，中间像面离镜头较远．根据显微镜的性能，它的分辨本领不用最小分辨角而用最小分辨距离来衡量．

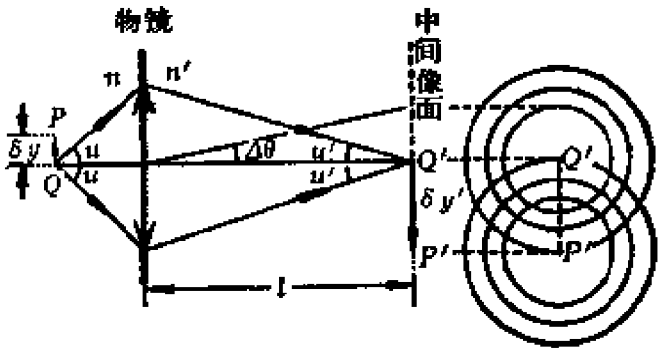


图 8-6 显微镜的分辨本领

如图8-6，物点Q发射的球面波经入射光瞳的衍射，在中间像面形成夫琅和费衍射斑(爱里斑)．显微镜中物镜的边缘是孔径光阑，从而它又是入

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

射光瞳．根据式(8.6)或(8.7)，爱里斑的角半径为

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{n'D}, \tag{8.8}$$

式中n'是像方折射率，D为物镜直径．设物镜到中间像面的距离为l，在中间像面上爱里斑的半径为$l\Delta\theta$．

再考虑轴外物点P，根据瑞利判据，当P点的像点P'(实际上是衍射斑中心)正好落在Q点产生的爱里斑边缘时，即$\overline{Q'P'} = \delta y' = l\Delta\theta$时，$Q$,$P$两点刚刚可以分辨．换句话说，满足以上条件的距离$\overline{QP} = \delta y$就是我们要求的显微镜最小分辨距离$\delta y_m$．

由于显微物镜工作在齐明点，在这对共轭点上满足阿贝正弦条件（见第一章10.4节)：

$$n\sin u\,\delta y = n'\sin u'\delta y',$$

这里u通常较大，而u'较小，可认为$\sin u' \simeq u' = \frac{D/2}{l}$，故

$$\delta y_m = \frac{n'u'\delta y'}{n\sin u} = \frac{n'u'l\Delta\theta}{n\sin u} = \frac{n'u'}{n\sin u} \times l \times \frac{1.22\lambda}{n'D}.$$

即

$$\delta y_m = \frac{0.61\lambda}{n'\sin u}. \tag{8.9}$$

其中$n\sin u$称为数值孔径，用N.A.(Numerical Aperture)表示．

式(8.9)表明，要提高显微镜的分辨本领，即设法使δy_m尽量小，提高数值孔径是个可行的措施．所以高倍率的显微镜是油浸式的，使用时在载物片与物镜之间滴上一滴油，以增大物方折射率n．不过，这样也只能把数值孔径增大到1.5左右．所以光学显微镜的分辨本领有个最高限度，即$\delta y_m \gtrsim \frac{0.61}{1.5}\lambda \simeq 0.4\lambda$，其量级为半个波长．在可见光波段，$\delta y_m \gtrsim 0.2\mu m$，与此相应地，光学显微镜的放大率也有个最高限度，约为数百倍，比这数值再放宽一些，也不过1000倍左右．光学显微镜的放大倍数不能再高，这不是技术上的问题，而是考虑到衍射效应以后所采取的一种合理的设计，因为放大率再高，除造价更高外，并不会使我们看清比$0.2\mu m$更小的物体细节．要得到有效放大率很高的显微镜，唯一的途经是缩短波长λ，近代电子显微镜利用电子束的波动性来成像．在几万伏的加速电压下电子束的波长可达10^{-2}Å的数量级．但电子显微镜的孔径角较小（不到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10^5），最小分辨距离 δy_m 可达几埃，放大率可达几万倍乃至几百万倍。

例题 5 某光学显微镜的数值孔径N.A.=1.5，试估算它的有效放大率。

解 显微镜是助视光学仪器，应该针对人眼的光学性能来设计。人眼的最小分辨角为

$$\delta\theta_e \simeq 1' = \frac{3\text{mm}}{10\text{m}} = \frac{0.075\text{mm}}{25\text{cm}},$$

这就是说，一般人眼能分辨10m远处相隔3mm的两条刻线，或者说，在明视距离处相隔0.075mm 的两条刻线。另外，λ 应取人眼最敏感的0.55μm。合理的设计方案应是把$\delta y_m = 0.61\lambda/\text{N.A.} = 0.4\times 0.55\mu\text{m}$放大到明视距离的$\delta y_e = 0.075\text{mm}$，这样才充分利用了镜头的分辨本领。故这台显微镜的有效放大率至少应为

$$V_m = \frac{\delta y_e}{\delta y_m} \simeq 340\text{倍}.$$

当然，实际放大率还可以设计得比这数值稍高一些，譬如500倍，以便使眼睛看得更舒服一些。

在结束本节之前，我们指出，成像仪器的分辨本领虽然可以作为仪器性能的一个主要指标，但它不足以全面评价仪器的成像质量(像质)。这里至少存在两个问题：一是除了分辨两点或两条线外，还应着眼于整个像面上光强分布是否准确地反映物面上光强分布问题。二是仪器的几何像差与光瞳的衍射效应实际上是混杂在一起的，因此单纯由衍射效应算出的分辨本领理论值与该仪器的实际像质之间就可能有很大的出入。总之，对一种仪器的像质如何作出全面的客观的评价，是个十分复杂和仔细的问题。有关这个问题我们将在第五章§7中作些介绍。

思 考 题

1. 菲涅耳圆孔衍射图样的中心点可能是亮的，也可能是暗的，而夫琅和费圆孔衍射图样的中心总是亮的。这是为什么？

2. 讨论下列日常生活中的衍射现象：

(1) 假如人眼的可见光波段不是0.55μm左右，而是移到毫米波段，而人眼的瞳孔仍保持4mm左右的孔径，那么，人们所看到的外部世界将是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

一幅什么景象？

（2）人体的线度是米的数量级，这数值恰与人耳的可听声波波长相近．假想人耳的可听声波波长移至毫米量级，外部世界给予我们的听觉形象将是什么状况？

3．蝙蝠在飞行时是利用超声波来探测前面的障碍物的，它们为什么不用对人类来说是可闻的声波？

习　题

1．一对双星的角间隔为0.05″，

（1）需要多大口径的望远镜才能分辨它们？

（2）此望远镜的角放大率应设计为多少才比较合理？

2．一台天文望远镜的口径为2.16m，由这一数据你能进一步获得关于它在光学性能方面的哪些知识？

3．一台显微镜，已知其 N.A.＝1.32，物镜焦距 f_O＝1.91mm，目镜焦距 f_E＝50mm，求

（1）最小分辨距离；

（2）有效放大率；

（3）光学筒长．

4．用一架照相机在离地面200km的高空拍摄地面上的物体，如果要求它能分辨地面上相距1m的两点，照相机的镜头至少要多大？设镜头的几何像差已很好地消除，感光波长为4000Å．

5．已知地月距离约为3.8×10^5km，用口径为1m的天文望远镜能分辨月球表面两点的最小距离是多少？

6．已知日地距离约为1.5×10^8km，要求分辨太阳表面相距20km的两点，望远镜的口径至少需有多大？

§9　光的横波性与五种偏振态

光的干涉和衍射现象表明光是一种波动，但这些现象还不能告诉我们光是纵波还是横波．本节要介绍的光的偏振现象清楚地显示光的横波性，这一点是和光的电磁理论完全一致的，或者

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

说，这也是光的电磁理论的一个有力证明。

9.1 偏振现象与光的横波性

我们先看一个机械波的例子。如图 9-1，将橡皮绳的一端固定，手拿着另一端上下抖动，于是就有横波沿绳传播。在波的传播路径中放置两个栏杆G_1，G_2。如果二者缝隙的方向一致（见图 9-1(a)），则通过G_1的振动可以无阻碍地通过G_2；如果缝隙的方向垂直（见图9-1(b)），通过G_1的振动传到G_2处就被挡住，在G_2之后不再有波动。显然，这种现象只可能在横波的情况下发生，而纵波的振动方向与传播方向一致，栏杆的任何取向都不会对它有影响。

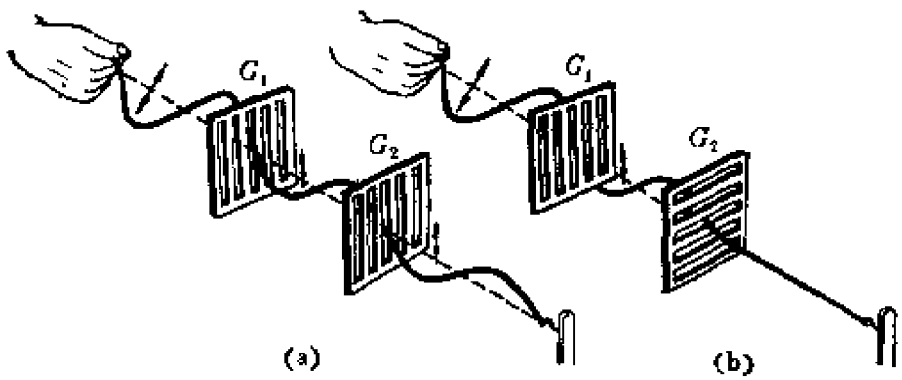


图 9-1 用机械横波模拟光的偏振现象

现在我们来看一个类似的光学实验。有一种叫做偏振片的器件，它表面看起来和普通的透明薄膜没有什么区别，可能略带一些暗绿或紫褐的色彩，但它们的特殊性能将在图 9-2 所示的实验中显示出来。让光线依次通过两块偏振片P_1和P_2。P_1固定不动，以光线为轴转动 P_2。我们会发现，随着 P_2的取向不同，透射光的强度发生变化。当 P_2 处于某一位置时透射光的强度最大(图 9-2(a))，由此位置转过 90°后，透射光的强度减为 0，即光线完全被 P_2 所阻挡(见图9-2(b))，这种现象叫做消光。若继续将 P_2

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

转过90°，透射光又变为最亮，再转过90°，又复消光，如此等等．显然，这现象和上述机械横波通过栏杆的实验十分相似，这里偏振片的作用相当于机械波实验中的栏杆．如果光是横波，则经过第一个“栏杆”(P_1)时，只有振动方向与此“栏杆”方向一致的光才能顺利通过，也只有当第二个“栏杆”(P_2)与第一个“栏杆”方向一致时，光才能顺利地通过第二个“栏杆”．当然偏振片并不是栏杆，我们说它起“栏杆”的作用只是为了易于理解而作的直观比喻．然而，偏振片所起的作用反映了它上面也存在着一个特殊方向，使光波中的振动能顺利地通过．上述实验同时也反映了光波本身的性质，即它的振动方向与传播方向垂直，光波是横波．

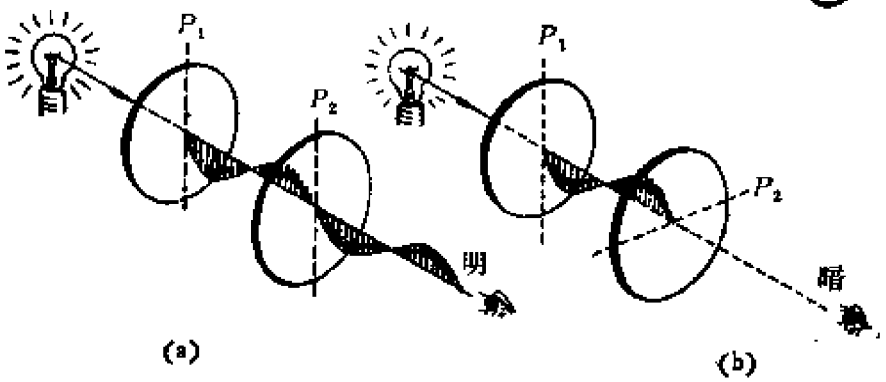


图 9-2　光的偏振现象的演示

历史上，早在光的电磁理论建立以前，在杨氏双缝实验成功以后不多年，马吕斯(E.L.Malus)于1809年就在实验上发现了光的偏振现象．当时人们认为传播光波的媒质是充满整个宇宙空间的“以太”．由于观察不到它对天体的运行有什么影响，人们必须假设“以太”是极其稀薄的气状物质．如果光波象空气中的声波那样是纵波，假想“以太”是一种气状媒质就自然得多了．偏振现象的发现偏偏打破了这种假设，光的横波性要求“以太”应该是一种能产生切向应力的胶状或弹性媒质．于是光扰动传播的以太模型面临着极大的困难．直到光的电磁理论建立以后，光的横波性才得以完满的说明．电磁理论预言，在自由空间传播的光波是一种

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

纯粹的横波，光波中沿横向振动着的物理量是电场矢量和磁场矢量．这些都已被大量实验事实所证明．鉴于在光和物质的相互作用过程中主要是光波中的电矢量起作用，所以人们常以电矢量作为光波中振动矢量的代表．

光的横波性只表明电矢量与光的传播方向垂直，在与传播方向垂直的二维空间里电矢量还可能有各式各样的振动状态，我们称之为光的偏振态或偏振结构．实际中最常见的光的偏振态大体可分为五种，即自然光、线偏振光、部分偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光．下面我们将分别对它们作些简单的介绍．不过为了演示光的偏振态，经常要使用偏振片，故这里先插一段有关偏振片的说明．

9.2 偏振片

现在我们对偏振片作些简单的说明．有些晶体对不同方向的电磁振动具有选择吸收的性质．例如天然的电气石晶体是六角形的片状（见图9-3），长对角线的方向称为它的光轴．当光线射在这种晶体的表面上时，振动的电矢量与光轴平行时被吸收得较少，光可以较多地通过（见图9-3(a)）；电矢量与光轴垂直时被吸收得较多，光通过得很少（见图9-3(b)）．这种性质叫做二向色性．电气石对两个方向振动吸收程度的差别是不够大的，用做偏振片的理想晶体最好能尽量使一个方向的振动全部吸收．在这一点上硫酸碘奎宁晶体的性能要比电气石好得多，但它的晶体很小．通常的偏振片是在拉伸了的赛璐璐基片上蒸镀一层硫酸碘奎宁的晶

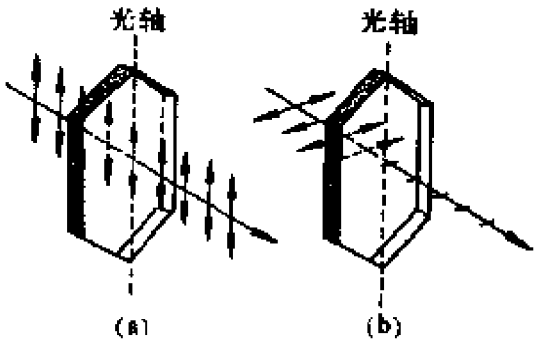


图 9-3 电气石的二向色性

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

粒，基片的应力可以使晶粒的光轴定向排列起来，这样可得到面积很大的偏振片。

今后我们把偏振片上能透过的振动方向称为它的透振方向（以区别于光的传播方向），在图中用虚线表示。

9.3 自然光

现在让我们用一块偏振片P来检验普通光源（如太阳、电灯）发出的光。如图9-4，当我们转动P的透振方向时，透射光的强度I并不改变。这是为什么呢？光是光源中大量原子或分子发出的，在普通光源中各原子或分子发出的光波不仅初位相彼此无关联，它们的振动方向也是杂乱无章的。因此宏观看起来，入射光中包含了所有方向的横振动，而平均说来它们对于光的传播方向形成轴对称分布，哪个横方向也不比其它横方向更为优越（见图9-5）。具有这种特点的光叫做自然光。任何光线通过偏振片后剩下的只是振动沿其透振方向的分量，透射光的强度等于这分量的平方。由于自然光中各振动的对称分布，它们沿任何方向的分量造成的强度I都一样，它等于总强度I_0之半，所以在上述实验里我们看不到透射光强度随偏振片的转动而变化的现象。

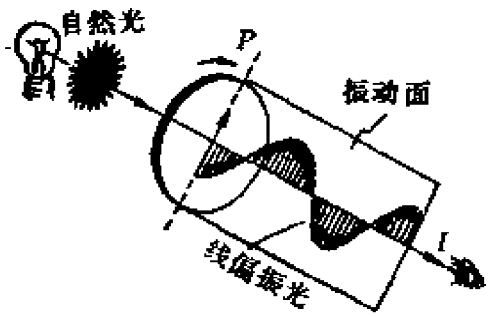


图9-4 自然光的演示

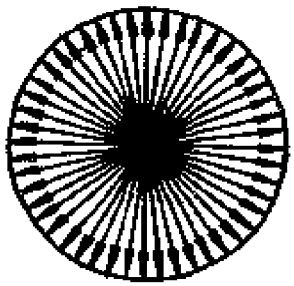


图9-5 自然光中振动的分布

总之，在自然光波场中的每一点，对于每个传播方向来说，同时存在大量的有各种取向的横振动，在波面内取向分布的几率各向同性，且彼此之间没有固定的位相关联。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

9.4 线偏振光

透过偏振片的光线中只剩下了与其透振方向平行的振动．这种只包含单一振动方向的光叫做线偏振光．线偏振光中振动方向与传播方向构成的平面，叫做振动面(见图9-4)①．

现在我们来研究线偏振光通过偏振片后强度变化的规律．仍采用图9-2所示的装置，其中偏振片P_1用来产生线偏振光，按照它在这里所起的作用，我们叫它起偏器．偏振片P_2用来检验线偏振光，所以叫做检偏器．设通过两偏振片的振动矢量分别是$\boldsymbol{E}_1$和$\boldsymbol{E}_2$，振幅分别是A_1和A_2，从而强度是$I_1 = A_1^2$和$I_2 = A_2^2$．固定P_1，改变P_2的透振方向．当P_2的透振方向与P_1平行时(见图9-6(a))，$\boldsymbol{E}_2 \parallel \boldsymbol{E}_1$，$A_2 = A_1$，$I_2 = I_1$．转过角度$\theta$时，$\boldsymbol{E}_2$是$\boldsymbol{E}_1$在$P_2$方向上的投影，从而$A_2 = A_1\cos\theta$，故

$$I_2 = A_2^2 = A_1^2\cos^2\theta = I_1\cos^2\theta \qquad (9.1)$$

(见图9-6(b))．$\theta = 90°$时，$A_2 = 0, I_2 = 0$(图9-6(c))．式(9.1)所表达的线偏振光通过检偏器后透射光强随θ角变化的这种规律，叫做马吕斯定律．

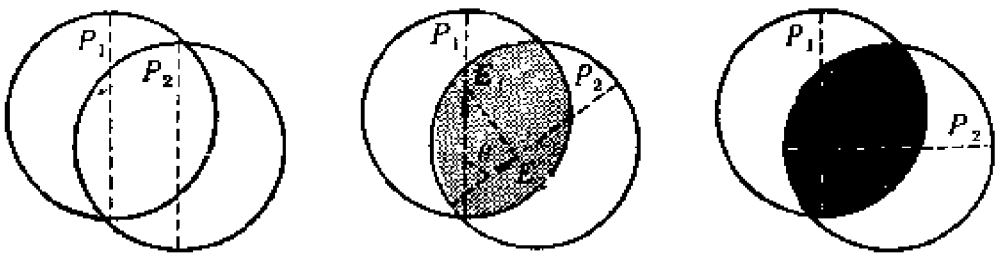


图 9-6 马吕斯定律

能将自然光改造为线偏振光的起偏器有多种多样，除了利用晶体的二向色性制成的偏振片外，利用晶体的光学各向异性，可以制成晶体棱镜偏振器；利用界面反射和折射，也可制成布儒斯特

① 因线偏振光中沿传播方向各处的振动矢量维持在一个平面(振动面)内，故线偏振又叫平面偏振．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

反射偏振器或透射的玻片堆．各种具体的偏振器将在第七章和本章§10适当的地方介绍．

9.5 部分偏振光

经常遇到的光，除了自然光和线偏振光外，还有一种偏振状态介于两者之间的光．如果用偏振片去检验这种光的时候，随着检偏器透光方向的转动，透射光的强度既不象自然光那样不变，又不象线偏振光那样每转90°交替出现强度极大和消光．其强度每转90°也交替出现极大和极小，但强度的极小不是0（即不消光），从内部结构来看，这种光的振动虽然也是各方向都有，但不同方向的振幅大小不同（见图9-7）．具有这种特点的光，叫做部分偏振光．所以当我们用检偏器检验部分偏振光时，透射光的强度随其透振方向而变．设强度的极大和极小分别是$I_{极大}$和$I_{极小}$，两者相差越大，我们就说这部分偏振光的偏振程度高．通常用偏振度P来衡量部分偏振光偏振程度的大小，它定义为

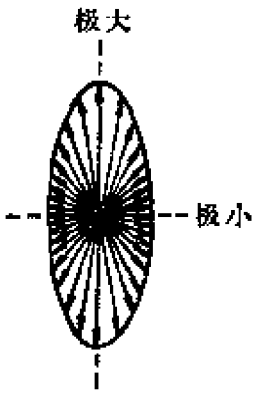


图9-7 部分偏振光中振动的分布

$$P\equiv\frac{I_{极大}-I_{极小}}{I_{极大}+I_{极小}},$$

这里分母$I_{极大}+I_{极小}$实际是两个相互垂直分量的强度之和，即部分偏振光原来的总强度，分子是$I_{极大}$与$I_{极小}$之差．在$I_{极大}=I_{极小}$的特殊情况下（此时透射光的强度不变），$P=0$，入射光是自然光．所以自然光是偏振度等于0的光，也可以叫做非偏振光．在$I_{极小}=0$的特殊情况下（此时出现消光），$P=1$，入射光是线偏振光．所以线偏振光是偏振度最大的光，也叫做全偏振光．

在晴朗的日子里，蔚蓝色天空所散射的日光多半是部分偏振光．散射光与入射光的方向越接近垂直，散射光的偏振度越高（详见第八章4.3节）．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

9.6 圆偏振光

如果一束光的电矢量在波面内运动的特点是其瞬时值的大小不变，方向以角速度ω（即波的圆频率）匀速旋转，换句话说，电矢量的端点描绘的轨迹为一圆，这种光叫做圆偏振光．垂直振动的合成理论告诉我们，两个相互垂直的简谐振动，当它们的振幅相等，位相差 $\pm\pi/2$ 时，其合成运动是一个旋转矢 量（见图9-8），所以圆偏振光可看成是两个相互垂直的线偏振光的合成，其分量应写成

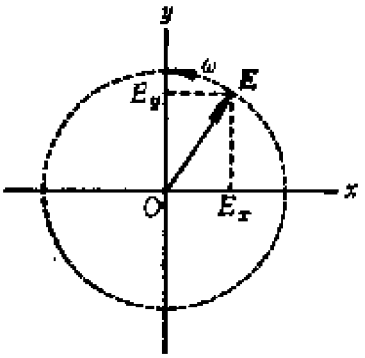


图 9-8　圆偏振光中电矢量的运动

$$\begin{cases} E_x = A\cos\omega t, \\ E_y = A\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{9.3}$$

电矢量的表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= E_x\hat{\boldsymbol{x}} + E_y\hat{\boldsymbol{y}} \\ &= A\cos\omega t\,\hat{\boldsymbol{x}} + A\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

式中$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$是沿 x，y 轴的单位基矢．我们假定波是沿 z 轴传播的，在图9-8中它垂直纸面迎面而来．这时若电矢量按逆时针方向旋转，我们称之为左旋圆偏振光；若按顺时针方向旋转，则称之为右旋圆偏振光①．读者可验证一下，式(9.4)中 $\pi/2$ 前的正号对应右旋，负号对应左旋．

如果迎着圆偏振光的传播方向放一偏振片，并旋转其透振方

① 在光学中偏振光左旋还是右旋，是相对迎着光束传播的观察方向而言的；在微波技术中，电磁波的左旋和右旋偏振，是相对波束传播方向而言的，和光学中的习惯正好相反．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

向以观察透射光强的变化，我们会发现光强不变．这是因为圆偏振光可沿任意一对相互垂直的方向分解成振幅相等的两个偏振光，其中一个分量通不过偏振器，另一个分量能通过它．设入射光强为I_0，则

$$I_0 = A_x^2 + A_y^2 = 2A^2,$$

设偏振器的透振方向为x，则透射光的强度为

$$I = A_x^2 = A^2 = \frac{1}{2}I_0. \tag{9.5}$$

即透射光强总为入射光强的一半．以上特点与自然光相同，故仅用一个偏振器观察圆偏振光，我们无法将它和自然光区别开来．如何鉴别圆偏振光和自然光，将在第七章§4中讨论．

9.7 椭圆偏振光

电矢量的端点在波面内描绘的轨迹为一椭圆的光，叫椭圆偏振光．椭圆运动也可看成是两个相互垂直的简谐振动的合成，只是它们的振幅不等，或位相差不等于$\pm\pi/2$(图9-9)．椭圆偏振光两个分量的表达式可写成

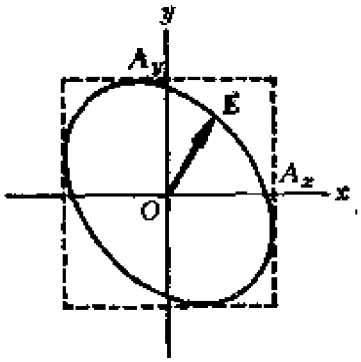


图9-9 椭圆偏振光中电矢量的运动

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t + \delta). \end{cases} \tag{9.6}$$

电矢量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= E_x\hat{x} + E_y\hat{y} \\ &= A_x\cos\omega t\hat{x} + A_y\cos(\omega t + \delta)\hat{y}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

椭圆长、短轴的大小和取向，与振幅A_x，A_y和位相差δ都有关系．图9-10给出不同δ时的椭圆轨迹．可以看出，线偏振光和圆偏振

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

光都可看成是椭圆偏振光的特例．椭圆偏振光退化为圆偏振光的条件是$A_x = A_y$和$\delta = \pm\pi/2$；退化为线偏振光的条件是$A_x = 0$或$A_y = 0$或$\delta = 0, \pm\pi$．椭圆偏振光也有左、右旋之分，其定义与前同，即迎着光的传播方向看去，逆时针者为左旋，顺时针者为右旋．在式(9.7)中，$\delta > 0$对应于右旋；$\delta < 0$对应于左旋($0 < |\delta| < \pi$)．

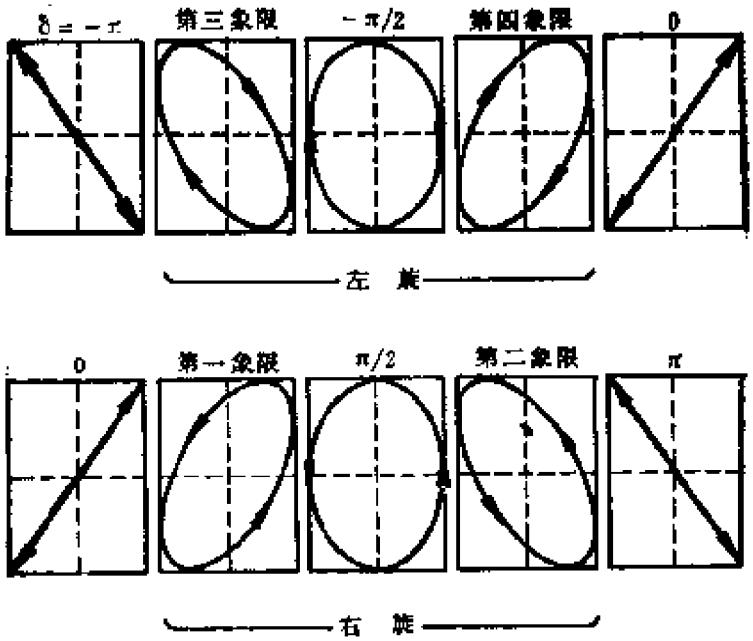


图 9-10　各种位相差的椭圆运动

如果迎着椭圆偏振光的传播方向放一偏振器，旋转其透振方向以观察透射光强度的变化，则我们看到的特点将与部分偏振光相同，即透射光强每隔90°从极大变为极小，再由极小变为极大，但无消光位置．如何将椭圆偏振光和部分偏振光区别开来的问题．也将在第七章§4中讨论．

思　考　题

1．　如果你手头有一块偏振片的话，请用它来观察下列各种光，并初步鉴定它们的偏振态：(1) 直射的阳光；(2) 经玻璃板反射的阳光；

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(3) 经玻璃板透射的阳光；(4) 不同方位的天空散射的光；(5) 白云散射的光；(6) 月光；(7) 虹霓。

2. 自然光中的振动矢量如图 9-5 所示呈各向同性分布，合成矢量的平均值为 0，为什么光强度却不为 0？

3. 自然光和圆偏振光都可看成是等幅垂直偏振光的合成，它们之间主要的区别是什么？部分偏振光和椭圆偏振光呢？

4. 自然光投射在一对正交的偏振片上，光不能通过。如果把第三块偏振片放在它们中间，最后是否有光通过？为什么？

习　题

1. 自然光投射到互相重迭的两个偏振片上，如果透射光的强度为：(1) 透射光束最大强度的1/3；(2) 入射光束强度的1/3，则这两个偏振片的透振方向之间夹角是多大？假定偏振片是理想的，它把自然光的强度严格减少一半。

2. 一束自然光入射到一偏振片组上，这组由四块组成，每片的透振方向相对于前面一片沿顺时针方向转过 30° 的角。试问入射光中有多大一部分透过了这组偏振片？

3. 将一偏振片沿45°角插入一对正交偏振器之间，自然光经过它们，强度减为原来的百分之几？

§10　光在电介质表面的反射和折射　菲涅耳公式

作为一种波动，光在两种介质界面上的行为除传播方向可能改变外，还有能流的分配、位相的跃变和偏振态的变化等问题，这些问题可根据光的电磁理论，由电磁场的边界条件求得全面的解决。在麦克斯韦建立光的电磁理论之前，菲涅耳已用光的弹性以太论回答了这些问题。两者在形式上稍有不同，但结论是一致的。本节先直接给出菲涅耳反射折射公式，然后讨论一系列由菲涅耳公式得到的有关光在电介质表面反射和折射的主要性质，如反射率和透射率，布儒斯特角、半波损、临界角与衰逝波等。根据

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

电磁场边界条件所做的菲涅耳反射折射公式的推导，我们把它放在本节的最后，用小字排印，供读者查阅和参考．

10.1 菲涅耳反射折射公式

两种电介质的折射率分别是 n_1 和 n_2，它们由平面界面分开．平行光从介质 1 一侧入射，在界面上发生反射和折射．菲涅耳公式给出的是这种情形下反射、折射与入射光束中电矢量各分量的比例关系．

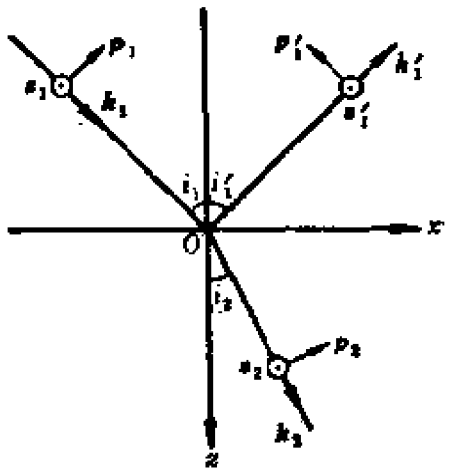


图 10-1 入射光、反射光和折射光内 $p,s,\hat{k}$ 正交系的选取

首先就坐标的选取作些说明．如图 10-1，取界面的法线为 z 轴，方向与入射光协调，从介质 1 到介质 2．此外取 x 轴在入射面内，从而 y 轴与入射面垂直，x,y,z 构成右手正交系．设入射角、反射角和折射角分别为 i_1,i_1' 和 i_2，并承认反射定律和折射定律成立，即

$$i_1' = i_1 \quad 和 \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 .$$

为了描述各光束中电矢量的分量，我们还需为每个光束取一局部直角坐标系．第一组基矢选 $\hat{k}_1,\hat{k}_1',\hat{k}_2$，即入射光、反射光和折射光波矢方向的单位矢量．第二组基矢 s_1,s_1',s_2 取在与入射面垂直的方向(叫 s 方向①)．第三组基矢 p_1,p_1',p_2 取在与入射面平行

① s 和 p 分别取自德文 senkrecht(垂直)和 parallel(平行)两字的字头．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的方向(叫p方向)．我们约定：s 的正方向沿 $+y$ 方向(图10-1中垂直纸面向外)，p 的正方向由下式规定：

$$\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{s}_1 = \hat{\boldsymbol{k}}_1, \quad \boldsymbol{p}_1' \times \boldsymbol{s}_1' = \hat{\boldsymbol{k}}_1', \quad \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{s}_2 = \hat{\boldsymbol{k}}_2,$$

即对于每束光来说，要求按$\boldsymbol{p},\boldsymbol{s},\boldsymbol{k}$的顺序组成右手正交系．有了这三个局部直角坐标系，我们就可把三光束的电矢量 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_1'$，$\boldsymbol{E}_2$分解成p分量和s分量，它们的正负都是相对于各自的基矢方向而言的．

按以上方向约定，由电磁场的边值关系可以导出，在界面两侧邻近点的入射场、反射场和折射场各分量满足如下关系：

$$\begin{cases} E_{1p}' = \dfrac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2} E_{1p} = \dfrac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} E_{1p}, & (10.1) \\ E_{2p} = \dfrac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2} E_{1p}, & (10.2) \\ E_{1s}' = \dfrac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} E_{1s} = \dfrac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} E_{1s}, & (10.3) \\ E_{2s} = \dfrac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} E_{1s} = \dfrac{2\cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_2 + i_1)} E_{1s}. & (10.4) \end{cases}$$

以上四等式便是菲涅耳反射折射公式(A.J.Fresnel,1823年)．其中式(10.1),(10.3)是反射公式，式(10.2),(10.4)是折射公式．式中的各个场分量既可理解为瞬时值，也可看成是复振幅，因为它们的时间频率是相同的．菲涅耳公式表明，反射、折射光里的p分量只与入射光里的p分量有关，s分量只与s分量有关．这就是说，在反射、折射的过程中 p,s 两个分量的振动是相互独立的．这一事实支持了上面我们把电矢量按p(平行入射面)和s(垂直入射面)两方向的分解方法，它是有深刻物理背景的(请参看第七章5.3节中有关本征振动的一段议论)．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.2 反射率和透射率

当一束光遇到两种折射率不同媒质的界面时，一般说来一部分反射，一部分折射.为了说明反射和折射各占多少比例，通常引入反射率和透射率的概念. 这里除了 p 分量和 s 分量要分别计算外，还应区别三种不同的反射率和透射率，即振幅反(透)射率、光强反(透)射率和能流反(透)射率①，它们的定义和相互关系列于表Ⅱ-2，现对表中的内容作几点说明.

表Ⅱ-2 各种反射率和透射率的定义

	p 分 量	s 分 量
振幅反射率	$r_p=\frac{E'_{1p}}{E_{1p}}$ (10.5)	$r_s=\frac{E'_{1s}}{E_{1s}}$ (10.6)
光强反射率	$R_p=\frac{I'_{1p}}{I_{1p}}=\lvert r_p\rvert^2$ (10.7)	$R_s=\frac{I'_{1s}}{I_{1s}}=\lvert r_s\rvert^2$ (10.8)
能流反射率	$\mathscr{R}_p=\frac{W'_{1p}}{W_{1p}}=R_p$ (10.9)	$\mathscr{R}_s=\frac{W'_{1s}}{W_{1s}}=R_s$ (10.10)
振幅透射率	$t_p=\frac{E_{2p}}{E_{1p}}$ (10.11)	$t_s=\frac{E_{2s}}{E_{1s}}$ (10.12)
光强透射率	$T_p=\frac{I_{2p}}{I_{1p}}=\frac{n_1}{n_2}\lvert t_p\rvert^2$ (10.13)	$T_s=\frac{I_{2s}}{I_{1s}}=\frac{n_2}{n_1}\lvert t_s\rvert^2$ (10.14)
能流透射率	$\mathscr{T}_p=\frac{W_{2p}}{W_{1p}}=\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_p$ (10.15)	$\mathscr{T}_s=\frac{W_{2s}}{W_{1s}}=\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_s$ (10.16)

首先，强度 I 本来的意思是平均能流密度，我们经常把它理解成振幅的平方，在讨论同种媒质中光的相对强度时这是可以的，讨论不同媒质中光的强度时，需回到它原始的定义(参见绪论)；

① 在中外文书刊中这几种反(透)射率的名称使用得十分混乱.以反射率为例，外文有reflectance, reflectivity, reflection coefficient, reflecting power等字，中文有反射率，反射比，反射系数，反射本领等词. 它们之间或只差一字尾、或相差一、二字，含义既不明确，又不统一. 我们这里采用的命名法将含义直接标明，对澄清概念上的混乱是有好处的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$I=\frac{n}{2c\mu_0}|E|^2\propto n|E|^2,$$

式中 n 是折射率，它的出现反映了光在不同媒质中速度的不同．因反射光与入射光同在媒质 1 内，故 $R=|r|^2$，这里对 p,s 分量都一样，我们把下标省略不写；但折射光与入射光在不同媒质内，故 $T=(n_2/n_1)\ |t|^2$．

其次，能流 $W=IS$，这里 S 为光束的横截面积．由反射定律和折射定律可知，反射光束与入射光束的横截面积相等，而折射光束与入射光束横截面积之比是 $\cos i_2/\cos i_1$，故有 $\mathscr{R}=R$，$\mathscr{T}=(\cos i_2/\cos i_1)T$．

最后，根据能量守恒，对于 p,s 分量分别有

$$W'_{1p}+W_{2p}=W_{1p},\qquad W'_{1s}+W_{2s}=W_{1s}.$$

故有

$$\mathscr{R}_p+\mathscr{T}_p=1,\qquad \mathscr{R}_s+\mathscr{T}_s=1. \tag{10.17}$$

由此及上表中各式，还可得到

$$R_p+\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_p=1,\qquad R_s+\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_s=1, \tag{10.18}$$

$$|r_p|^2+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_p|^2=1,\quad |r_s|^2+\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1}|t_s|^2=1. \tag{10.19}$$

把菲涅耳反射折射公式代入振幅反射率和透射率的公式(10.5),(10.6),(10.11),(10.12)，即可得到 r_p,r_s,t_p,t_s 的具体表达式：

$$\begin{cases} r_p=\dfrac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\dfrac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}, \\ r_s=\dfrac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\dfrac{\sin(i_2-i_1)}{\sin(i_2+i_1)}. \end{cases} \tag{10.20}$$

$$\begin{cases} t_p=\dfrac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}, \\ t_s=\dfrac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}. \end{cases} \tag{10.21}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

利用表中其它各式，可进一步求出光强和能流的反射率和透射率来.直接的运算可验证,这些具体表达式确实满足守恒律(10.17),(10.18),(10.19).

下面我们具体研究一下反射率和透射率的变化规律.

（1）当光束正入射时，$i_1 = i_2 = 0$，上述各式简化为

$$\begin{cases} r_p = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_s, \\ t_p = t_s = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1}. \end{cases} \tag{10.22}$$

此外

$$\begin{cases} R_p = R_s = \mathscr{R}_p = \mathscr{R}_s = \left(\dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \\ T_p = T_s = \mathscr{T}_p = \mathscr{T}_s = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}. \end{cases} \tag{10.23}$$

以玻璃为例，设其折射率为$n_2 = 1.5$，光从空气($n_1 = 1.0$)正入射在玻璃表面时 $r_p = 20\%$，$r_s = -20\%$，$R_p = R_s = \mathscr{R}_p = \mathscr{R}_s = 4\%$，$t_p = t_s = 80\%$，$T_p = T_s = \mathscr{T}_p = \mathscr{T}_s = 96\%$.

（2）为了给读者对一般斜入射情况下反射率和透射率随入射的变化有个总体印象，图10-2和10-3中分别给出空气到玻璃和玻璃到空气的振幅和光强反射率曲线. 可以看出，随入射角的增大，s 分量的光强反射率总是单调上升的，但 p 分量的光强反射率先是下降，在某个特殊角度 i_B 处降到 0，尔后再上升. 当入射角 $i \to 90°$(光疏到光密，掠入射)或 $i \to i_C$(光密到光疏时的全反射临界角)时，p,s 两分量的反射率都急剧增大到100%. 使 p 分量反射率为零的入射角 i_B 称为布儒斯特角(D.Brewster,1815年)，我们将在下面专门讨论它.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

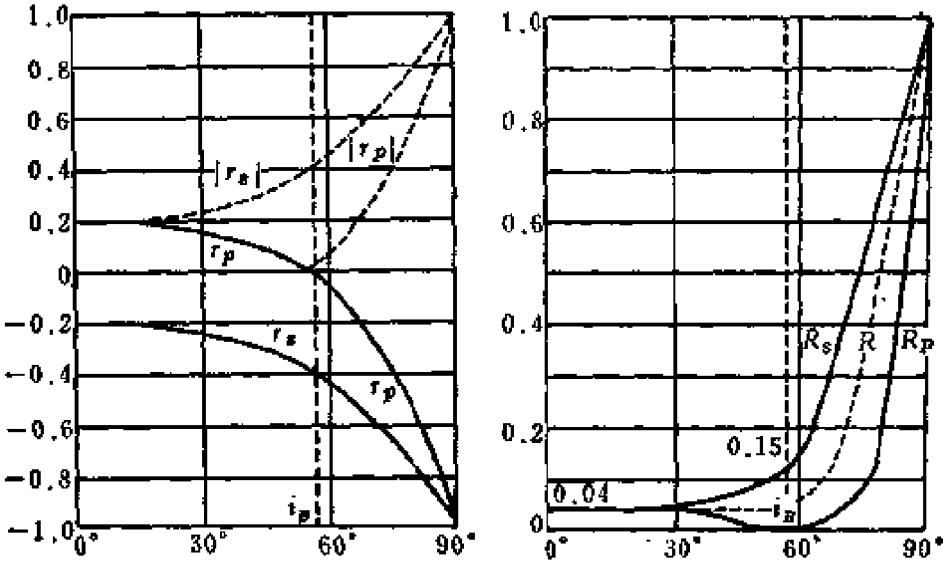


图 10-2　空气到玻璃($n=1.50$)的反射率曲线

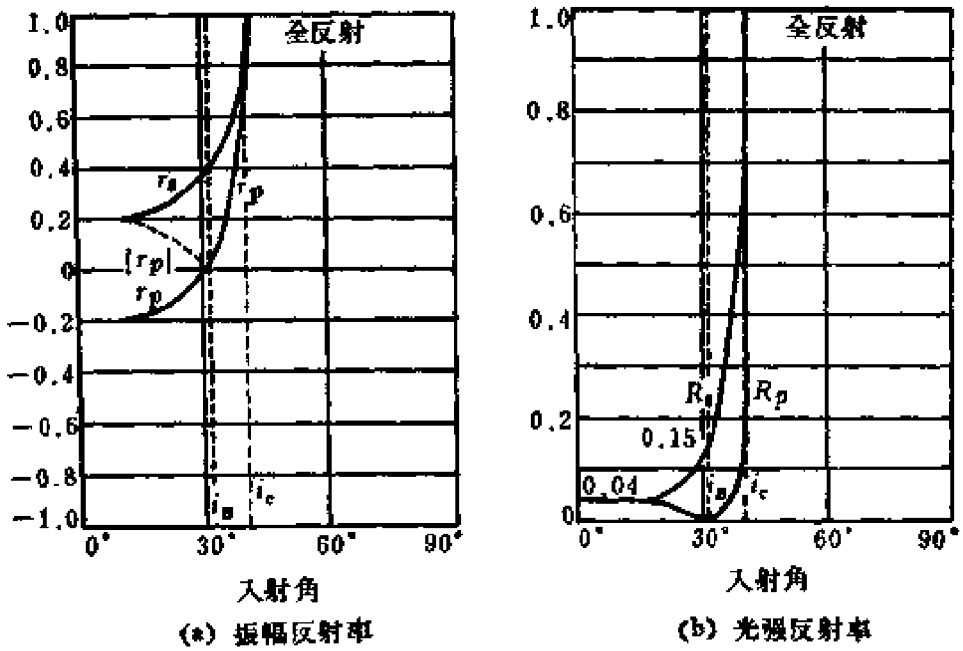


图 10-3　玻璃($n=1.54$)到空气的反射率曲线

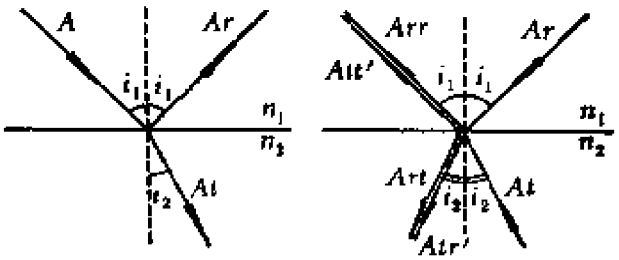
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

10.3 斯托克斯的倒逆关系

在两种电介质1，2的界面上，光从1射向2时的振幅的反射率r、透射率t与光从2射向1时的振幅反射率r'、透射率t'间有什么关系？斯托克斯巧妙地利用光的可逆性原理解决了这个问题．如图10-4(a)，一光线振幅为A，由介质1射向界面，按照振幅反射、透射率的定义，反射光的振幅应为Ar，折射光的振幅为At．现设想一振幅为Ar的光逆着原先的反射光入射，和一振幅为At的光逆着原先的折射光入射，两束光遇界面时都要反射和折射，所得两束光的振幅如图10-4(b)所示，其中沿原先返回的两束光振幅为Arr和Att'；在介质2中新添的两束光振幅为Art和Atr'．按照光的可逆性原理，Arr和Att'应合成为原来入射光的振幅A，Art和Atr'应相互抵消，故有

$$\begin{cases} r^2 + tt' = 1, & (10.24) \\ r' = -r. & (10.25) \end{cases}$$

以上两倒逆关系分别对p，s两个分量适用．这些关系式也可用菲涅耳公式直接验证，它们将在讨论多层介质膜或多光束干涉中用到．



(a) (b)

图 10-4 斯托克斯倒逆关系的推导

10.4 位相关系与半波损问题

前已指明，菲涅耳公式中的E_1，E_1'，E_2等可理解为复振幅，因此$-\arg r$就是E_1'和E_1间的位相差，$-\arg t$就是E_2和E_1间的位相

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

差①. 从式(10.21)可以看出，t_p和t_s总是正实数②，即它们的辐角为0，这表明，E_2与E_1总是同位相的. 但式(10.20)告诉我们，r_p和r_s的辐角是比较复杂的，让我们仔细地分析一下.

在r_p的表达式中分母是$\tan(i_1+i_2)$，当$i_1+i_2=90°$时它趋于无穷，从而$r_p=0$. 这时的入射角就是前面提过的布儒斯特角i_B. 将$i_1=i_B$，$i_2=90°-i_B$代入折射定律$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$，即得布儒斯特角的表达式

$$i_B=\tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}, \tag{10.26}$$

对于空气到玻璃情形$n_2/n_1\sim1.5$，$i_B\sim57°$.

当$i_1\lesssim i_B$时，$i_1+i_2\lesssim90°$，$\tan(i_1+i_2)\gtrsim0$，即$r_p\gtrsim0$，或者说δ_p是0和π，在$i_1=i_B$处它有个突变.

先看$n_1<n_2$情形(外反射)，这时$i_1>i_2$，不发生全反射，$\tan(i_1-i_2)>0$，$\sin(i_2-i_1)<0$，故i_1由0经i_B增到90°时，位相差$\delta_p=-\arg r_p$由0突变到π(见图10-5(a))，而位相差$\delta_s=-\arg r_s$始终是π(见图10-5(b)).

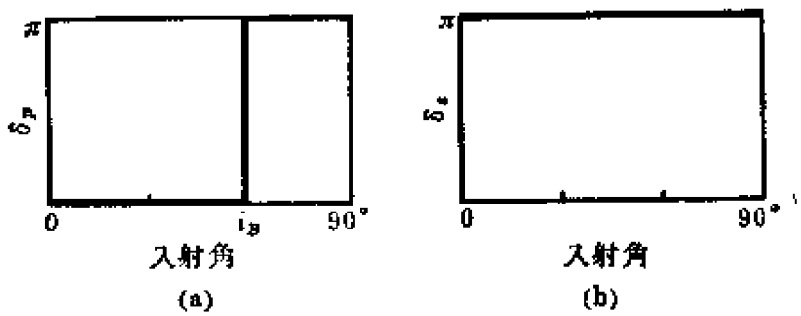


图10-5 $n_1<n_2$(外反射)时的位相改变

再看$n_1>n_2$情形(内反射)，这时$i_1<i_2$，当$i_1>i_c$时发生全反射. 全反射临界角$i_c=\sin^{-1}(n_2/n_1)>\tan^{-1}(n_2/n_1)=i_B$，即在布儒斯特角处尚未发生全反射. 当$i_1$由0经$i_B$增到$i_c$时，$r_p$

① arg代表辐角，负号与1.3节中指数上正负号选择的约定有关.

② 全反射时例外，可参见10.7节.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

和 r_s 的符号变化恰与外反射情形相反，即 δ_p 由 π 突变到 0（见图 10-6(a)），δ_s 始终是 0（见图10-6(b)）①. 当 $i_1 > i_c$ 时，r_p 和 r_s 将成为复数，它们的辐角可根据式(10.20)求得，

$$\begin{cases} \delta_p = 2\tan^{-1}\dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{\sqrt{(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \\ \delta_s = 2\tan^{-1}\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{\sqrt{(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \end{cases} \tag{10.27}$$

反映它们这段变化的曲线，也参见图10-6.

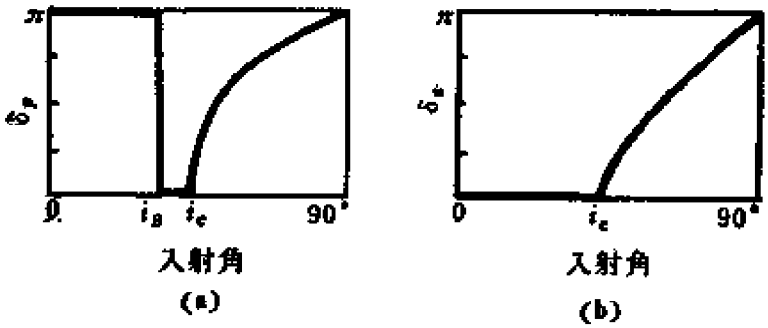


图 10-6　$n_1 > n_2$(内反射)时的位相改变

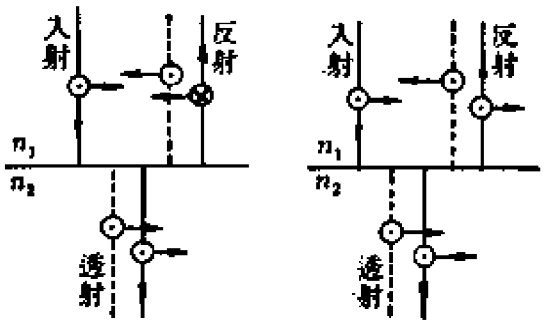
例题 1　分析正入射时电矢量 p，s 分量的位相改变.

解　根据上面的分析，正入射($i_1 = 0$)时 r_p，r_s，t_p，t_s 的正负号见下表.

	$n_1 < n_2$	$n_1 > n_2$
r_p	+	−
r_s	−	+
t_p	+	+
t_s	+	+

① 可以看出，这是符合斯托克斯倒逆关系 $r' = r$ 的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) $n_1<n_2$ 情形　　(b) $n_1>n_2$ 情形

图 10-7　例题 1——正入射时的半波损问题

但应注意，这里的正负是相对我们在10.1节中所取的$p,s,\hat{k}$坐标架而言的，由于此时p_1和p_1'的方向相反，正负号并不能直接说明实际的场分量是否发生了突然反向，可按以下程序画出来再看．图10-7中虚线代表我们取的坐标架，实线代表实际的场分量．凡上表中是正号的，画场分量与坐标架一致，是负号的画场分量与坐标架相反．如此作图的结果，我们发现：$n_1<n_2$ 时反射光中p,s分量方向都与入射光相反；$n_1>n_2$ 时反射光中 p,s 分量方向都与入射光相同．折射光中所有场分量在任何情形下都与入射光相同．|

例题 2　分析$n_1<n_2$情形掠入射时反射光中电矢量p,s分量的位相改变．

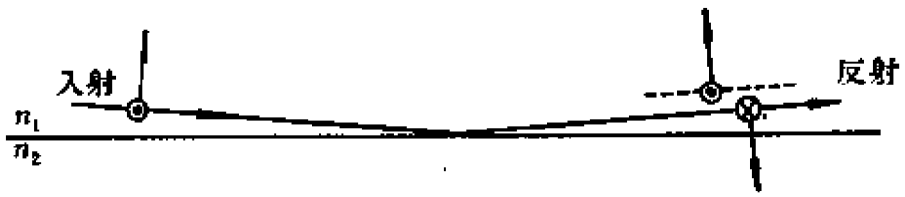


图 10-8　例题 2——掠入射时的半波损问题

解　在$n_1<n_2$时，$r_p<0$，$r_s<0$，按上题的方法画出$p,s,\hat{k}$坐标架和实际场分量的方向(图10-8)，可以看出，反射光中 p,s两分量的方向都与入射光相反．|

从上面两个例题可以看出，当一束光在界面上反射时，其中电矢量的方向可能发生突然的反向，或者说，振动的位相突然改

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

变 π（或者说 $-\pi$）。本来沿着光线位相的变化是正比于光程的，在界面上发生这种位相跃变以后，位相和几何光程之间的关系不再相符了。为了使两者调和一致，我们需在几何程差 ΔL 上添加一项 $\pm\lambda/2$（λ 为真空中波长），即

$$\Delta L' = \Delta L \pm \frac{\lambda}{2}.$$

几何程差 ΔL 也可说是表观程差，而 $\Delta L'$ 是有效程差，它是与实际的位相相符的。通常把位相跃变而引起的这个附加程差 $\pm\lambda/2$ 叫做半波损①。用这一术语来表达，上面两个例题的结果可以说成：在正入射和掠入射的情况下，光从光疏媒质到光密媒质时反射光有半波损，从光密媒质到光疏媒质时反射光无半波损；在任何情况下透射光都没有半波损。

在上面两个例题中反射、折射光的电矢量与入射光相比，或平行，或反平行。在一般斜入射的情况下，三光束的 p 分量成一定角度，因此比较它们的位相没有什么绝对的意义。讨论一列波的位相改变，说到底是为了处理它与其它波列的相干迭加问题。在第三章里，我们经常要研究从一介质层上下两表面反射的光束 1，2 之间的干涉问题（图10-9）。这时人们关心的是，在计算了

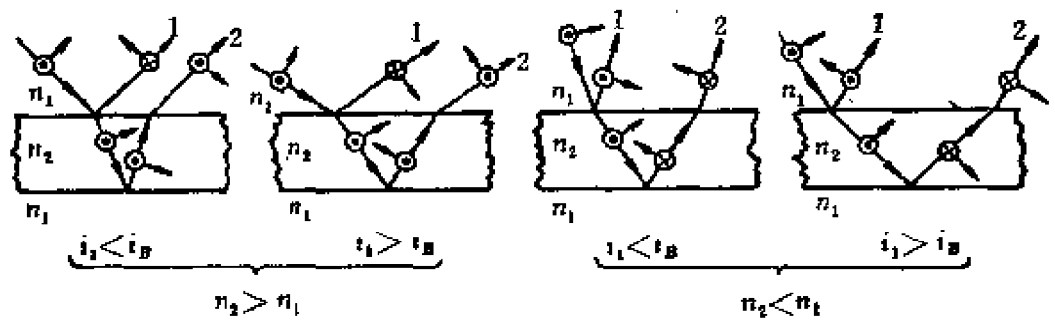


图 10-9　介质层上下表面反射光之间的半波损

① “半波损”一词是广泛通用的。既谓之“损”，似乎是原不该有的，顾名思义起来，造成一些困惑，叫做“半波跃变”也许更为恰当。因两介质的界面本是物理性质（折射率）的跃变面，一切物理量到此可能发生跃变，应是意料中事。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

两光束间的表观程差后是否需要添加半波损？图10-9是几种情形的实际场分量方向．可以看出，就一束光而言，往往很难笼统地说是否有半波损；但就上下两反射光束来说，在介质层两侧折射率相同的情况下，它们之间的有效程差中总要添加一项 $\pm\lambda/2$，或者说，有效程差中总是有半波损的．

10.5 反射、折射时的偏振现象

由菲涅耳公式可知，p 分量与 s 分量的反射率和透射率一般是不一样的，而且反射时还可能发生位相跃变．这样一来，反射和折射就会改变入射光的偏振态．具体地说，如果入射的是自然光，则反射光和折射光一般是部分偏振光；如果入射光是圆偏振光，则反射光和折射光一般是椭圆偏振光；如果入射光是线偏振光，则反射光和折射光仍是线偏振光，但电矢量相对于入射面的方位要发生改变．全反射时情况有所不同，因位相跃变介于 0 和 π 之间，线偏振光入射，反射光一般是椭圆偏振的．

特别值得注意的是光束以布儒斯特角 i_B 入射的情形，这时 $r_p=0$，反射光中只有 s 分量．这就是说，不管入射光的偏振态如何，反射光总是线偏振的．故布儒斯特角 i_B 又称为全偏振角，或起偏角．

我们知道，自然光以任何入射角入射，折射光总是部分偏振的，不过以布儒斯特角入射时，p 分量100%透过，这时折射光的偏振度最高(从空气到玻璃偏振度 $P=8\%$)．

既然反射和折射时都产生偏振，我们就可利用玻璃片来做偏振器(起偏器或检偏器)．以布儒斯特角入射时，虽然反射光是线偏振的，不过反射改变了光线传播的方向，用起来很不方便，通常更多地利用透射光．如前所述，即使在布儒斯特角入射的情形里，单个玻璃表面只能产生偏振度为 8 %左右的透射光．要得到偏振度很高的透射光，就需利用多块玻璃片．如图10-10，将许多块玻璃片迭在一起，令自然光以布儒斯特角入射．光线每遇一

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

界面，约15%的s分量被反射掉，而p分量却100%地透过．通过多次的反射和折射，最后从玻片堆透射出来的光束中s分量就很微弱了，它几乎是100%的p方向的线偏振光．

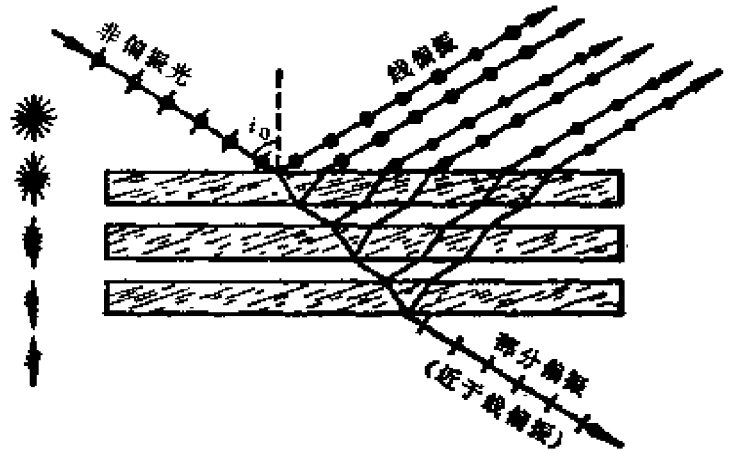


图 10-10　玻片堆偏振器

*10.6　从电磁理论推导光的反射、折射定律和菲涅耳公式

麦克斯韦电磁理论告诉我们，无限大的均匀各向同性介质中单色的平面电磁波有如下性质①：

$$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}, \tag{10.28}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\parallel\boldsymbol{k}, \tag{10.29}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E=\sqrt{\mu\mu_0}H, \tag{10.30}$$

$$k=\frac{n}{c}\omega, \tag{10.31}$$

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}\simeq\sqrt{\varepsilon}, \tag{10.32}$$

式中$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$分别是电场强度和磁场强度，k是波矢，ω是圆频率，$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$是真空中光速，$\varepsilon$和$\mu$是相对介电常数和磁导率，$n$是折射率．对于光频，可认为$\mu=1$，$n=\sqrt{\varepsilon}$．

电磁理论还告诉我们，在两种介质的分界面上场分量有如下边值关系：

$$D_{2n}=D_{1n}\quad\text{或}\quad\varepsilon_2\varepsilon_0E_{2n}=\varepsilon_1\varepsilon_0E_{1n}, \tag{10.33}$$

① 可参看赵凯华、陈熙谋，《电磁学》，下册第八章，人民教育出版社。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$E_{2t} = E_{1t}, \tag{10.34}$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad 或 \quad \mu_2\mu_0 H_{2n} = \mu_1\mu_0 H_{1n}, \tag{10.35}$$

$$H_{2t} = H_{1t}, \tag{10.36}$$

式中 D,B 分别是电位移和磁感强度，下标 n,t 分别代表法向和切向分量.

设入射、反射、折射三列平面电磁波为

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_1 &= E_1 \exp[i(k_1\cdot r - \omega_1 t)],\\ \widetilde{H}_1 &= H_1 \exp[i(k_1\cdot r - \omega_1 t)],\end{aligned}\right\} \quad (入射波) \tag{10.37}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_1' &= E_1' \exp[i(k_1'\cdot r - \omega_1' t)],\\ \widetilde{H}_1' &= H_1' \exp[i(k_1'\cdot r - \omega_1' t)],\end{aligned}\right\} \quad (反射波) \tag{10.38}$$

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{E}_2 &= E_2 \exp[i(k_2\cdot r - \omega_2 t)],\\ \widetilde{H}_2 &= H_2 \exp[i(k_2\cdot r - \omega_2 t)].\end{aligned}\right\} \quad (折射波) \tag{10.39}$$

在以上各式中我们把可能出现的初位相差φ_0吸收到振幅内了. 将这些波的表达式代入上列任何一个边值关系中，等式中都有三项，即左端一项(折射波)，右端两项(入射波和反射波)，三项的指数因子分别是

$$\exp[i(k_{1x}x + k_{1y}y - \omega_1 t)],$$

$$\exp[i(k_{1x}'x + k_{1y}'y - \omega_1' t)],$$

$$\exp[i(k_{2x}x + k_{2y}y - \omega_2 t)].$$

这里坐标的选取同10.1节，介质分界面为 $z=0$ 平面. 要想边值关系对任何 x,y,t 都满足，只有

$$k_{1x} = k_{1x}' = k_{2x}, \quad k_{1y} = k_{1y}' = k_{2y}, \quad \omega_1 = \omega_1' = \omega_2.$$

上面第三式表明，反射波、折射波的频率与入射波相同. 因我们取 x 轴在入射面内，从而 $k_{1y}=0$. 上面第二式表明，$k_{1y}'=k_{2y}=0$，即反射线、折射线与入射线在同一平面(入射面)内. 设 i_1,i_1',i_2 分别为入射角、反射角和折射角，则

$$\sin i_1 = \frac{k_{1x}}{k_1}, \quad \sin i_1' = \frac{k_{1x}'}{k_1'} = \frac{k_{1x}}{k_1'}, \quad \sin i_2 = \frac{k_{2x}}{k_2} = \frac{k_{1x}}{k_2},$$

按式(10.31)，$k_1 = \frac{n_1\omega}{c}$，$k_1' = \frac{n_1\omega}{c}$，$k_2 = \frac{n_2\omega}{c}$，故有

$$\sin i_1 = \sin i_1', \qquad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

这样，我们就推出了光的反射定律和折射定律．最后我们看折射波矢的 z 分量．

$$k_{2z}=\sqrt{k_2^2-k_{2x}^2}=\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2k_1^2-k_{1x}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2k^2-k^2\sin^2i_1}$$

$$=k\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2-\sin^2i_1}.$$

当 $n_1<n_2$ 时，$(n_2/n_1)^2>1$，k_{2z} 永远为实数；但在 $n_1>n_2$ 时，$(n_2/n_1)^2<1$，k_{2z} 就有可能取虚数值了．令 $\sin i_c=n_2/n_1$（i_c 为全反射临界角），得

$$k_{2z}=k_1\sqrt{\sin^2i_c-\sin^2i_1}=\frac{n_1\omega}{c}\sqrt{\sin^2i_c-\sin^2i_1}$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2i_c-\sin^2i_1},\qquad(10.40)$$

式中 λ_1 为光在介质 1 中的波长．上式表明，当 $i_1>i_c$ 时，k_{2z} 是纯虚数，这时发生全反射．有关全反射时介质 2 中虚波矢 k_{2z} 的物理意义，我们留待10.7节中讨论．

下面我们来推导菲涅耳公式．

由于在界面（$z=0$）上波函数中的指数因子都一样，可略去不写，边值关系(10.33)—(10.36)可写成如下分量形式(参见图10-11)：

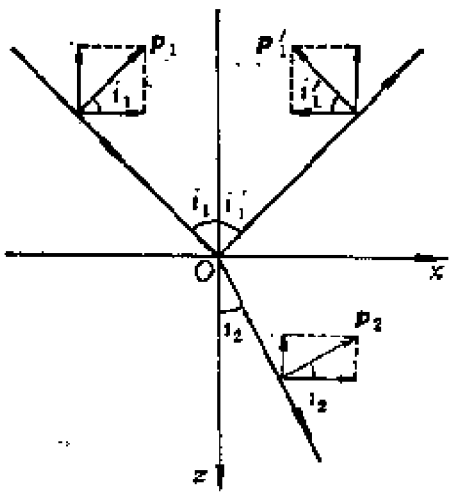


图 10-11　p 分量在法向和切向的投影

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$-\varepsilon_2\varepsilon_0 E_{2p}\sin i_2 = -\varepsilon_1\varepsilon_0 E_{1p}\sin i_1 - \varepsilon_1\varepsilon_0 E'_{1p}\sin i'_1, \tag{10.41}$$

$$E_{2p}\cos i_2 = E_{1p}\cos i_1 - E'_{1p}\cos i'_1, \tag{10.42}$$

$$-\mu_2\mu_0 H_{2p}\sin i_2 = -\mu_1\mu_0 H_{1p}\sin i_1 - \mu_1\mu_0 H'_{1p}\sin i'_1, \tag{10.43}$$

$$H_{2p}\cos i_2 = H_{1p}\cos i_1 - H'_{1p}\cos i'_1. \tag{10.44}$$

还有两个有关 s 分量的关系式，因为不用，就不写了．认为E_{1p}为已知，由式(10.40)和(10.41)可解出 E'_{1p} 和 E_{2p} 来：

$$\begin{cases} E'_{1p} = -\dfrac{\varepsilon_2\sin i_2\cos i_1 - \varepsilon_1\sin i_1\cos i_2}{\varepsilon_1\sin i'_1\cos i_2 + \varepsilon_2\sin i_2\cos i'_1}E_{1p}, \\ E_{2p} = \dfrac{\varepsilon_1(\sin i_1\cos i'_1 + \sin i'_1\cos i_1)}{\varepsilon_1\sin i'_1\cos i_2 + \varepsilon_2\sin i_2\cos i'_1}E_{1p}. \end{cases} \tag{10.45}$$

同理，认为H_{1p}为已知，由式(10.42)和(10.43)解出H'_{1p}和H_{2p}来，

$$\begin{cases} H'_{1p} = \dfrac{\mu_2\sin i_2\cos i_1 - \mu_1\sin i_1\cos i_2}{\mu_1\sin i'_1\cos i_2 + \mu_2\sin i_2\cos i'_1}H_{1p}, \\ H_{2p} = \dfrac{\mu_1(\sin i_1\cos i'_1 + \sin i'_1\cos i_1)}{\mu_1\sin i'_1\cos i_2 + \mu_2\sin i_2\cos i'_1}H_{1p}. \end{cases} \tag{10.46}$$

应注意到，由式(10.28),(10.29),(10.30)可得

$$H_{1p} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}E_{1s}, \qquad H'_{1p} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}E'_{1s},$$

$$H_{2p} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}}E_{2s},$$

将此代入式(10.46)，再在式(10.45),(10.46)中令 $\mu_1=\mu_2=1$，$\varepsilon_1=n_1^2$，$\varepsilon_2=n_2^2$，利用反射定律$i'_1=i_1$和折射定律$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$，即可得到非涅耳反射折射公式(10.1)—(10.4)。

*10.7 全反射与表逝波

现在我们回过来讨论全反射时出现的虚波矢问题．把式(10.40)中的k_{2z}写成$i\kappa$，则

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2 i_1 - \sin i_c}, \tag{10.47}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

这时介质 2 中波的表达式(10.39)化为

$$\begin{cases}\widetilde{E}_2 = E_2 e^{-\kappa z}\exp[i(k_{2x}x-\omega t)],\\ \widetilde{H}_2 = H_2 e^{-\kappa z}\exp[i(k_{2x}x-\omega t)].\end{cases} \tag{10.48}$$

上式表明，在发生全反射时，折射波在 x 方向(沿界面)仍具有行波的形式，但沿 z 方向(纵深方向)按指数律急剧衰减，光波场在介质 2 中的有效穿透深度可定义为

$$d_z = \frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda_1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_c}}. \tag{10.49}$$

d_z 的数量级为一个波长．人们把这样一种波称为衰逝波①．衰逝波的出现说明，不能简单地认为 $i_1 > i_c$ 时介质 2 内完全不存在波场，实际上在界面附近波长数量级的厚度内仍然有场．计算表明，在穿透深度内，z 方向的瞬时能流不为 0，但平均能流为 0②．故可以认为，入射波的能量不是在严格的界面上全部反射的，而是穿透到介质 2 内一定深度后逐渐反射的．这就不难想见，为什么全反射时反射波中有一定的相移 δ_p, δ_s 了．

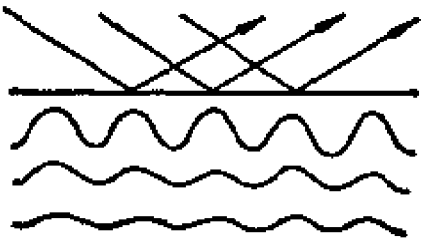


图 10-12　全反射时的衰逝波瞬时图像示意图

思　考　题

1．当你站在清彻见底的湖岸远眺湖面时，你看到的是对岸景物的倒影，只有俯视岸边的湖水时，你才能看到水中的游鱼．试解释这个现象．

2．当一束光射在两种透明介媒的分界面上时，会发生只有透射而无反射的情况吗？

① 当光波在有吸收的介质中传播时，也会按指数律衰减，衰逝波与那种因吸收而衰减的波不同之处，是它没有能量耗散．

② 这一点也可通过 $\mathscr{R}_p = \mathscr{R}_s = 1$ 来间接证明，而此式的证明留作习题13．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

3. 科学幻想小说中常描绘一种隐身术．根据本节所述的知识设想一下，即使有办法使人体变得无色透明，要想别人完全看不见，还需要什么条件？

4. 一束光从空气入射到一块平板玻璃上，讨论：

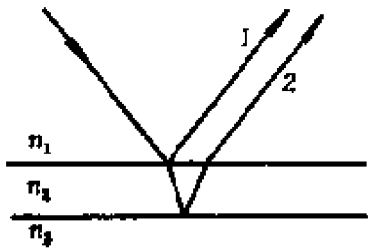
(1) 在什么条件下透射光获得全部光能流？

(2) 在什么条件下透射光能流为 0？

5. 振幅透射率可能大于 1 吗？试举例说明之。

6. 斯托克斯倒逆关系中 t 与 t' 的关系如何？

7. 设折射率为 n_2 的介质层放在折射率分别为 n_1, n_3 的两种介质之间(见图)，讨论下列各情形里上下两界面反射的光线 1，2 之间是否有半波损？



思考题 7 图

(1) $n_1 > n_2 > n_3$；

(2) $n_1 < n_2 < n_3$；

(3) $n_1 > n_2 < n_3$．

8. 通常偏振片的透振方向是没有标明的，你用什么简易的方法可将它确定下来？

9. 在夏天，炽热的阳光照射柏油马路发出刺眼的反光，汽车司机需要戴上一付墨镜来遮挡．是否可用偏振片做眼镜，这比墨镜有什么优点？

10. 一束右旋圆偏振光从空气正入射在玻璃板上，反射光的偏振态如何？

11. 验证菲涅耳公式满足能量守恒条件(10.17)。

12. 验证菲涅耳公式满足斯托克斯倒逆关系式(10.26)。

13. 证明当光束射在平行平面玻璃板上时，如果在上表面反射时发生全偏振，则折射光在下表面反射时亦将发生全偏振。

14. 试从以下诸方面归纳一下衰逝波的特点：

(1) 波矢的虚实；

(2) 有无周期性；

(3) 等相面与等幅面；

(4) 瞬时能流与平均能流。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

习　题

1. 计算从空气到水面的布儒斯特角(水的折射率 $n=4/3$).

2. 一束光由水射在玻璃上，当入射角为50.82°时，反射光全偏振，求玻璃的折射率(已知水的折射率为4/3).

3. 计算(1)由空气到玻璃($n=1.560$)的全偏振角；

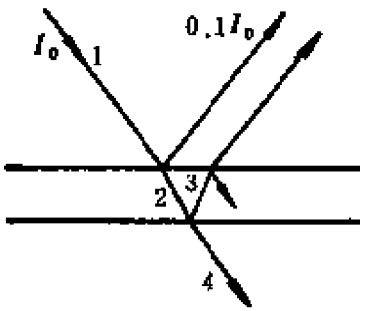
(2) 由此玻璃到空气的全偏振角；

(3) 在全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度；

(4) 在全偏振时由此玻璃到空气的折射光的偏振度.

4. 求自然光透过八块 $n=1.560$ 的平行玻璃板组成的玻片堆后的偏振度(忽略玻璃对光的吸收).

5. 已知自然光射于某平行平面玻璃板上时，反射光的能流为入射光的0.10倍(见图). 取入射能流为一个单位，设玻璃的折射率为1.50，求图中标出的光束 2，3，4 的能流(略去玻璃对光的吸收).



习题 5 图

6. 线偏振光的振动面和入射面之间的夹角称为振动的方位角. 设入射线偏振光的方位角为 α，入射角为 i，求折射光和反射光的方位角 α_2 和 α_1'(已知两介质的折射率为 n_1 和 n_2).

7. 线偏振光以布儒斯特角从空气入射到玻璃($n=1.560$)的表面上，其振动的方位角为20°，求反射光和折射光的方位角.

8. 设入射光、反射光、折射光的总能流分别为 W_1，W_1'，W_2，则总能流反射率 $\mathscr{R}$ 和总能流透射率 $\mathscr{T}$ 定义为

$$\mathscr{R}=\frac{W'_1}{W_1},\quad \mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}.$$

(1) 当入射光为线偏振光，方位角(见习题 6)为 α 时，试证明

253376

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_p \cos^2\alpha + \mathscr{R}_s \sin^2\alpha,$$

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_p \cos^2\alpha + \mathscr{T}_s \sin^2\alpha.$$

(2) 证明 $\mathscr{R} + \mathscr{T} = 1$.

(3) 设入射光是自然光，求$\mathscr{R}$,$\mathscr{T}$与$\mathscr{R}_p$,$\mathscr{R}_s$和$\mathscr{T}_p$,$\mathscr{T}_s$的关系.

(4) 设入射光是圆偏振光，求$\mathscr{R}$,$\mathscr{T}$与$\mathscr{R}_p$,$\mathscr{R}_s$和$\mathscr{T}_p$,$\mathscr{T}_s$的关系.

9. 光从空气到玻璃($n = 1.50$)以布儒斯特角入射，试计算

(1) 能流反射率$\mathscr{R}_p$和$\mathscr{R}_s$值;

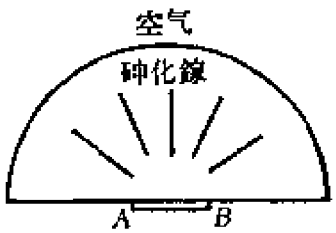
(2) 能流透射率$\mathscr{T}_p$和$\mathscr{T}_s$值.

10. 线偏振光从空气到玻璃($n=1.5$)以45°角入射，方位角为60°，试计算

(1) 总能流反射率$\mathscr{R}$和总能流透射率$\mathscr{T}$,

(2) 改为自然光入射，$\mathscr{R}$和$\mathscr{T}$为多少?

11. 图所示为一支半导体砷化镓发光管，管芯AB为发光区，其直径$d \sim 3$mm.为了避免全反射,发光管上部研磨成半球形,以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送. 如果要使发光区边缘两点A和B发的光不致全反射，半球的半径至少应取多少? 已知砷化镓的折射率为3.4(对发射的0.9μm波长).



习题11图



习题12图

12. 接上题，为了减少光在砷化镓-空气界面的反射，工艺上常在砷化镓表面镀一层氧化硅增透膜，氧化硅的折射率为1.7. 现在单纯从几何光学角度提出一个问题，加膜后入射角为多大才不致于在空气表面发生全反射? 试与不加膜时相比(设膜很薄，可按平面板计算).

13. 从光密介质到光疏介质，当$\sin i_1 > n_2/n_1$时发生全反射，作为一种处理方法，我们仍可在形式上维持折射定律$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$，这时$\sin i_2 > 1$，可认为$i_2$是个虚折射角，它的余弦也为虚数:

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\cos i_2 = \sqrt{1-\sin^2 i_2} = i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1},$$

试利用菲涅耳公式证明此时 $|r_p| = 1$，$|r_s| = 1$，从而 $\mathscr{R}_p = \mathscr{R}_s = 1$.

【注：本来这里根号前有正、负两种可能，为了保证式(10.47)中的 $\kappa > 0$，从而使式(10.48)中衰减因子的指数确实是负的，根号应取正的.】

14. 推导全反射时的相移公式(10.27).

15. (1) 计算 $n_1 = 1.51$，$n_2 = 1.0$，入射角为 54°37′时全反射光的相移 δ_p 和 δ_s.

(2) 如果入射光是线偏振的，全反射光中 p 振动和 s 振动的位相差为多少？说明两者合成为椭圆偏振光.

16. 若在上题中用的光源是氦氖激光，求衰逝波的穿透深度.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

第三章　干涉装置　光场的时空相干性

本章将在第二章§3、§4 的基础上，具体讨论光的各种干涉装置和干涉仪，介绍光的干涉现象的一些实际应用．与此同时，结合具体的干涉装置，阐明两个重要的概念——光场的空间相干性和时间相干性．

第二章 3.3 节中已述及，由于普通光源是不相干的，我们不能简单地由两个实际点光源或面光源的两个独立部分形成稳定的干涉场①．为了保证相干条件，通常的办法是利用光具组将同一波列分解为二，使它们经过不同的途径后重新相遇．由于这样得到的两个波列是由同一波列分解而来的，它们频率相同，位相差稳定，振动方向也可作到基本上平行，亦即第二章 3.2 节中所陈述的相干条件都得到满足，从而可以产生稳定的可观测的干涉场．分解波列的方法有二：

（1）分波前法：将点光源的波前分割为两部分，使之分别通过两个光具组，经衍射、反射或折射后交迭起来，在一定区域内产生干涉场．杨氏实验是这类分波前干涉装置的典型，其它装置在本章§1 有所叙述．

（2）分振幅法：当一束光投射到两种透明媒质的分界面上时，光能一部分反射，一部分透射．这方法叫做分振幅法．最简单的分振幅干涉装置是薄膜，它将在§2和§3中介绍；另一种重

① 如第二章3.3节所述，普通光源之所以不相干，在于它们持续发光时间 τ_0 太短．自从激光问世以后，人们已可获得单色性很好（即 τ_0 很长）的光束，因而用两台激光器作干涉实验，原则上是没有问题的．不过，由于激光器频率的独立漂移，同频条件的保证就不如下述传统方法那么严格．此时在时间响应能力很高的接收器中感受到的，将是一幅有拍频效应的图像．近年某些文章中讨论的“两个独立光源的干涉”问题，其意义之一就是提醒人们，不要绝对地认为两个独立光源是完全不相干的．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

要的分振幅干涉装置，是迈克耳孙干涉仪．可以说，它是近代各种分振幅型干涉仪的原型，我们将在§4中介绍它．

§1 分波前干涉装置 光场的空间相干性

1.1 各种分波前干涉装置

各种分波前装置的共同特点参见示意图1-1．Σ是由点光源S发射球面波的波面，它被光具组Ⅰ和Ⅱ分割为Σ_1和Σ_2两部分．被分割出来的两束光1和2分别经光具组Ⅰ和Ⅱ后在一定区域里交迭起来．两光束在交迭区里任一点P激起振动的初位相分别为

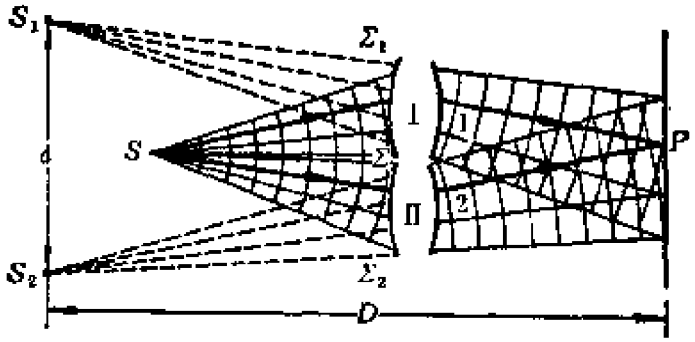


图1-1 分波前干涉装置示意图

$$\begin{cases} \varphi_1(P) = \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{\lambda}(S\,\mathrm{Ⅰ}\,P), \\ \varphi_2(P) = \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{\lambda}(S\,\mathrm{Ⅱ}\,P), \end{cases}$$

这里$-\varphi_0$是振源的初位相．二者之差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(P) &= \varphi_2(P) - \varphi_1(P) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}[(S\,\mathrm{Ⅱ}\,P) - (S\,\mathrm{Ⅰ}\,P)]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

如前所述，位相φ_0是极不稳定的，从而$\varphi_1(P)$和$\varphi_2(P)$也不稳定．然而，二者之差$\Delta\varphi(P)$与φ_0无关，它只取决于光程差

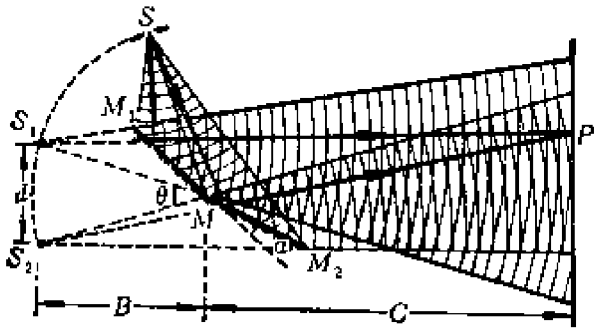
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$\Delta L=(S\,\mathrm{I}\,P)-(S\,\mathrm{II}\,P)$，因而是稳定的．此外，也是由于在$P$点相遇的两光线$S\,\mathrm{I}\,P$和$S\,\mathrm{II}\,P$原属于同一波列，且在一般干涉装置里它们在$P$点夹角十分小，即在$P$点的传播方向大致相同，因而它们在$P$点激起的振动频率相同，方向也基本上平行．就这样，各相干条件得到了保证．

第二章4.2节中介绍过的杨氏实验是分波前干涉装置的典型，或者说，它是下面将介绍的各种分波前干涉装置的原型．在杨氏实验中光具组Ⅰ，Ⅱ就是两个孔(或者两条狭缝)．光束1，2是靠衍射效应交迭起来的．在下面介绍的几种装置中，光束1，2的交迭或者靠反射，或者靠折射．

（1）菲涅耳双面镜和双棱镜

继杨氏装置之后另外两种重要的分波前两光束干涉装置是菲涅耳的双面镜和双棱镜．它们分别示于图1-2(a)和1-3(a)．做为分波前的光具组，前者是一对紧靠在一起夹角α很小的平面反射镜M_1和M_2，后者是一个棱角α很小的双棱镜A．两装置中狭缝光源S都与交棱M平行(即与图1-2(a)和1-3(a)的纸面垂直)．从S发出的波列经反射或折射后被分割为两光束，在它们的交迭区



(a) 装置

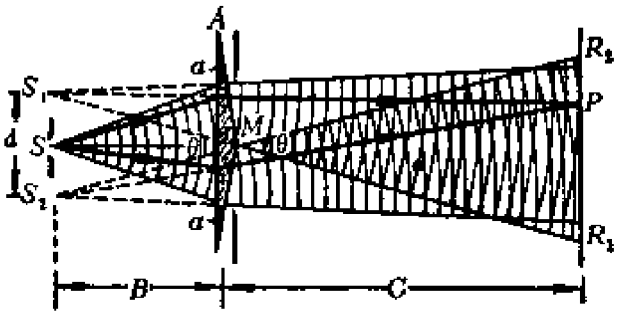


(b) 干涉条纹

图 1-2 菲涅耳双面镜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

域里幕上出现等距的平行干涉条纹，如图1-2(b)和图1-3(b)，条纹与图1-2(a)和1-3(a)纸面垂直。设S_1与S_2为S对双面镜或双棱镜所成虚像，幕上的干涉条纹就如同是由相干的虚像光源S_1和S_2发出的光束产生的一样，因此条纹间隔的计算可利用杨氏装置的结果。



(a) 装置



(b) 干涉条纹

图 1-3 菲涅耳双棱镜

纪

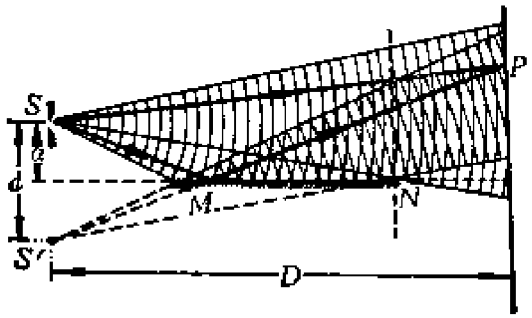
（2）洛埃镜

洛埃(H.Lloyd)镜的装置如图1-4(a)所示，MN是一平面反射镜，从狭缝光源S(与纸面垂直)发出的波列中一部分掠入射到平面镜后反射到幕上，另一部分直接投射到幕上．在幕上两光束交迭区域里将出现如图1-4(b)所示的干涉条纹（条纹与图1-4(a)纸面垂直)．设S'为S对平面镜所成的虚像，幕上干涉条纹就如同是实际光源S和虚像光源S'发出的光束产生的一样，因此条纹间隔的计算也可利用第一章§4中杨氏装置的结果．

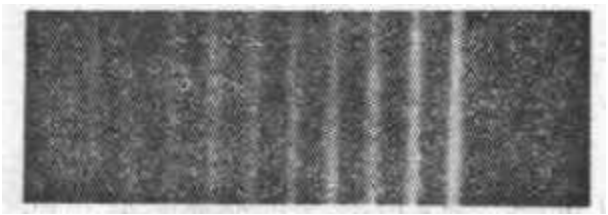
在洛埃镜中存在一个值得提出的特点．如果我们将图1-4(a)中的幕平移到图中虚线的位置，使它通过平面镜的边缘N点，根

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

据表观光程差的计算，我们期望在N点得到第0级亮纹．然而实验表明，该处是暗纹．上述现象要用第二章10.4节中讲的反射光的半波损来解释．



(a) 装置



(b) 干涉条纹

图1-4 洛埃镜

1.2 条纹形状与间距

如前所述，各种分波前干涉装置可概括成图1-1所示的统一模式．在上述各种装置里，幕上的干涉图样都可看成是由一对点源（或与纸面垂直的一对狭缝光源）S_1和S_2造成的．与杨氏实验一样，在幕上的干涉条纹应近似地是一组平行直线条纹，条纹是等间隔的，条纹间距可统一用第二章4.2节中的式（4.6）来计算：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d}, \tag{1.2}$$

式中d是S_1,S_2间的距离，D是S_1,S_2所在平面到幕的距离．故只要找到S_1,S_2的位置，就可利用上式求干涉条纹的间距了．

对于菲涅耳双面镜(见图1-2(a))S到M的距离为B，M到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

幕的距离为C．根据平面镜成像的对称性可知，$\overline{S_1M}=\overline{S_2M}=B$，从而式（1.2）中的$D=B+C$．再设$\angle S_1MS_2=\theta$，由反射定律可知$\theta=2\alpha$，故式（1.2）中的$d=\theta B=2\alpha B$．代入式（1.2），得

$$\Delta x=\frac{(B+C)\lambda}{2\alpha B}. \tag{1.3}$$

对于菲涅耳双棱镜（见图1-3(a)），同样有$D=B+C$，但$\theta=2\delta$，而$\delta=(n-1)\alpha$，这里δ是光线经每个棱镜后产生的偏向角，n是棱镜的折射率．故

$$\Delta x=\frac{(B+C)\lambda}{2(n-1)\alpha B}. \tag{1.4}$$

对于洛埃镜（见图1-4(a)），设S到镜面MN的垂直距离为a，则$d=2a$，故

$$\Delta x=\frac{D\lambda}{2a}. \tag{1.5}$$

这里D就是S到幕的距离．

以上各公式都表明，干涉条纹的间距Δx与波长λ成正比．这就是说，不同颜色的光产生的条纹间距不同．当我们采用白光或其它非单色光（如水银灯光）照明时，幕上呈现的是许多套不同颜色条纹的非相干迭加．由于各色条纹宽窄不同，除0级外，任何级的亮纹和暗纹都彼此错开．故在白光照明时，除0级亮纹是白色外，其它条纹均带有色彩．

1.3 干涉条纹的移动

在干涉装置中，人们不仅注意干涉条纹的静态分布，而且关心它们的移动和变化，因为光的干涉的许多应用都与条纹的变动有关．造成条纹变动的因素来自三方面：一是光源的移动，二是

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

装置结构的变动，三是光路中媒质的变化．

探讨干涉条纹的变动时，通常可以用两种方式提出问题．一是固定干涉场中一个点 P，观察有多少根干涉条纹移过此点．另一是跟踪干涉场中某级条纹(譬如 0 级条纹)，看它朝什么方向移动多少距离．当然在普遍的情况下，干涉条纹的间距、取向和形状都可能发生变化，其特征已不是简单的描述所能概括得了的．

为了计算移过某个固定场点 P 干涉条纹的数目 N 时，需要知道交于该点两相干光线之间的光程差 $\Delta L(P)$ 如何变化．因为每当 $\Delta L(P)$ 增减一个 λ 时，便有一根干涉条纹移过 P 点，故 N 与光程差的改变量 $\delta(\Delta L)$ 之间的关系是

$$\delta(\Delta L) = N\lambda, \tag{1.6}$$

式中 λ 是真空中波长．

为了研究某一特定条纹移动的情况，则须探求具有给定光程差（譬如 $\Delta L = 0$ ）场点的去向．现在我们就用此法分析分波前干涉装置中因光源的位移而引起干涉条纹的变动．这个问题之所以重要，是因为它与下面将要研究的问题——光源宽度对干涉条纹反衬度的影响——密切相关．其它因素（如媒质折射率的改变）引起干涉条纹变化的例子，将在习题中给出．

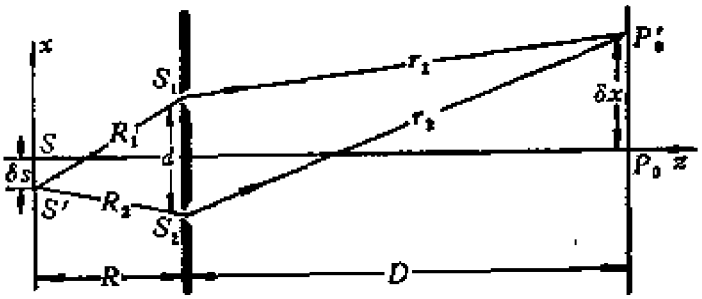


图 1-5　杨氏实验中光源的位移 δs 引起干涉条纹的位移 δx

如图 1-5 所示，我们考虑杨氏实验中点光源的微小位移 δs 引起干涉条纹变动的情况．为了说话方便，我们仍取以前惯用的坐标：轴向为 z；平行于 S_1，S_2 联线方向为 x，垂直纸面的方向为 y．起初当点源 S 位于轴上时，0 级条纹也在轴上（幕上 P_0 点），

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

当点源沿 x 方向移到轴外 S' 处时，0 级条纹将移至轴外 P_0' 处，P_0' 的位置由零程差条件决定：

$$\Delta L(P_0') = R_1 + r_1 - R_2 - r_2 = 0,$$

或

$$R_1 - R_2 = r_2 - r_1. \tag{1.7}$$

当点源向下平移时，$R_1 > R_2$，零程差要求 $r_2 > r_1$，即条纹向上移动(见图)．反之当点源向上移动时，必导致干涉条纹向下移动．令 $\overline{SS'} = \delta s$，$\overline{P_0P_0'} = \delta x$，计算表明，在傍轴近似下

$$R_1 - R_2 \simeq \frac{d\delta s}{R}, \qquad r_2 - r_1 \simeq \frac{d\delta x}{D},$$

代入式(1.7)，得杨氏实验中条纹位移 δx 与点源位移 δs 的关系：

$$\delta x = \frac{D}{R}\delta s. \tag{1.8}$$

最后指出，由于干涉条纹的取向沿 y 方向，点光源沿此方向的平移不会引起干涉条纹的变动．

在其它分波前干涉装置中点源的位移造成干涉条纹变动的情况，可用类似的方法去分析．它们的情况与杨氏实验中不同之处，是干涉条纹除了移动之外，间距是有些变化的．有关这些装置中条纹变动的计算．留做思考题或习题，请读者自己去考虑．

1.4 光源宽度对干涉条纹反衬度的影响

在第二章 3.4 节中我们曾讨论过振幅比对干涉条纹反衬度的影响．在本节所研究的各种分波前干涉装置中，振幅比都接近于 1，因而振幅比不是影响条纹反衬度的主要因素，主要因素是光源的宽度．

迄今为止，我们对干涉条纹性质的所有分析都是以点光源为前提的．实际中不存在严格的点光源，任何光源总有一定的宽度．这样的光源可看成由许多不相干的点光源组成，每一点光源都有一套自己的干涉条纹．幕上总强度是各套干涉条纹的非相干迭加，(再次迭加!) 迭加的后果对条纹的清晰程度有利还是不

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

利，不同情况要作具体分析．例如在杨氏实验中，若光源沿 x 方向扩展，各点源产生的干涉条纹彼此错开，亮纹与暗纹重迭的结果，使条纹变得模糊起来，即反衬度下降．这就是说，光源在 x 方向上的扩展必须受到限制．若光源沿 y 方向扩展，各点源产生的干涉条纹一样，暗纹与暗纹重迭仍是暗纹，亮纹与亮纹重迭显得更亮了．可见在这种情况下条纹不但不会模糊，反而变得更加清晰可见．所以在杨氏实验中通常不用点源，而采用沿 y 方向扩展的狭缝光源，与之相应地，S_1和S_2也采用平行y方向的双缝．根据同样道理，在菲涅耳双面镜、双棱镜装置里，通常都采用平行于棱镜方向(即垂直于图1-2(a)和1-3(a)纸面方向)的狭缝光源；在洛埃镜装置中也采用垂直于图1-4(a)纸面方向的狭缝光源．

现在让我们较为具体地研究一下，光源在 x 方向上宽度 b 的最大限度问题，亦即光源宽度 b 大到什么程度，干涉条纹就会变得不可分辨？式(1.8)表明，条纹错开的距离δx是与点源的间距δs成正比的．在图1-6中(a)—(c)画的是两个相隔一定距离的点源形成的条纹的迭加．图中由(a)到(c)，δx随δs逐个增大，合成强度的反衬度逐个下降．在图1-6(c)中 δx 已达到半个条纹的宽度 $\Delta x/2$，从而一套条纹中的亮纹与另一套条纹中的暗纹恰好重合，反衬度下降到 0，合成强度成为均匀的了．实际上扩展光源中并非只有两个点源，而是在两边缘点源之间连续分布着无穷多个点源．图 1-6(d),(e) 所示即为这种情况．在这种点源连续分布的

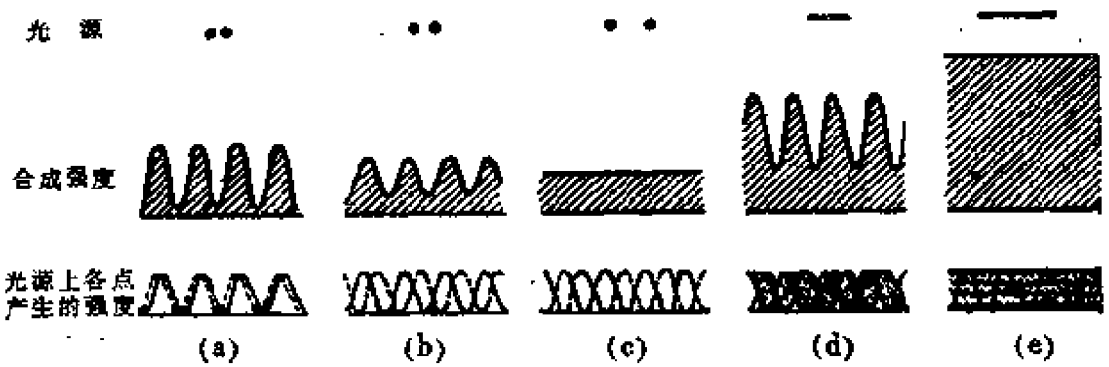


图 1-6　光源宽度对干涉条纹反衬度的影响

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

情况下，边缘点产生的条纹错开距离 $\delta x = \Delta x/2$ 时，合成强度仍有一定的反衬度(见图1-6(d))，只有当 $\delta x = \Delta x$ 时，反衬度才下降到 0 (见图1-6(e))，这时干涉条纹完全消失．与这个δx相对应的边缘点源间距$\delta s = b_1$，可看成是光源宽度的极限．对于杨氏实验，根据式(1.2)和(1.8)，令$\delta x = \Delta x$，$\delta s = b_1$，可得

$$b_1 = \frac{R}{d}\lambda. \tag{1.9}$$

例如，对于波长$\lambda = 0.6\mu m$的光，$R = 1m$ 和 $d = 1mm$时，光源(即S处狭缝)的宽度限制在 $b = 0.6mm$ 以内．

下面我们定量计算一下杨氏装置中不同光源宽度时干涉条纹的反衬度．令 $f = 1/\Delta x = d/D\lambda$ 代表幕上沿 x 方向强度的空间频率，则 0 级条纹移在x_0处时的强度分布正比于$1 + \cos 2\pi f(x - x_0)$．设与x_0 对应的光源位置为 s，按式 (1.8)，　$x_0 = (D/R)s$ (这里 x_0 与 s 分别相当于该式中的δx与δs)．s 之值分布在 $\pm b/2$ 之间，故幕上总强度分布为

$$\begin{aligned} I(x) &\propto \int_{-b/2}^{b/2} [1 + \cos 2\pi f(x - x_0)]ds \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos 2\pi f\left(x - \frac{D}{R}s\right)\right]ds \\ &\propto 1 + \frac{\sin(\pi bd/R\lambda)}{\pi bd/R\lambda}\cos 2\pi f x, \end{aligned}$$

写成等式，有

$$I(x) = I_0\left[1 + \frac{\sin u}{u}\cos 2\pi f x\right],$$

式中 $u = \pi bd/(R\lambda)$，I_0是某个比例常数．由上式可知，强度的极大 I_M和极小 I_m 分别为

$$I_M = 1 + \left|\frac{\sin u}{u}\right|, \quad I_m = 1 - \left|\frac{\sin u}{u}\right|.$$

按照反衬度的定义

$$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \left|\frac{\sin u}{u}\right|. \tag{1.10}$$

图1-7 和表 Ⅲ-1分别给出 γ 的曲线和数值．可以看出，γ 第一次为 0 出现

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在 $u=\pi$ 的地方，由此定出的光源宽度为 $b_1=R\lambda/d$，这正是式(1.9)中给出的极限值，由此可见，上面确定的光源极限宽度只是第一次使 γ 为 0 的宽度.超过此极限时，γ 的数值还有多次回升和起伏，不过起伏的幅度已不大(≤21%)，而且越来越小。

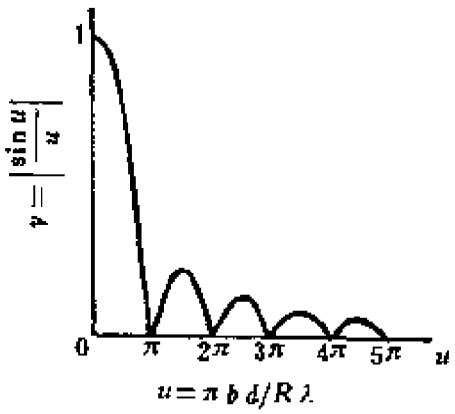


图 1-7　反衬度随光源宽度变化的曲线

表Ⅲ-1　反衬度与光源宽度

u	b	γ
$\pi/2$	$b_1/2$	0.64
π	b_1	0
$3\pi/2$	$3b_1/2$	0.21
2π	$2b_1$	0
$5\pi/2$	$5b_1/2$	0.13
3π	$3b_1$	0
$7\pi/2$	$7b_1/2$	0.09
4π	$4b_1$	0
$9\pi/2$	$9b_1/2$	0.07
5π	$5b_1$	0

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

1.5 光场的空间相干性

前面我们把波的迭加分成相干的和不相干的两种极端情况，实际上并不能这样截然划分．仍以杨氏干涉装置为例说明这一点(见图1-6(a))．我们知道，普通光源表面上不同的两个独立部分A,B是不相干的，双孔S_1,S_2各接收来自A,B的一列波．仅就A,B两点源来说，在后场就有四列次波：$\tilde{U}_{A1}$，$\tilde{U}_{A2}$，$\tilde{U}_{B1}$，$\tilde{U}_{B2}$．这里有彼此相干的成分，如$\tilde{U}_{A1}$和$\tilde{U}_{A2}$，$\tilde{U}_{B1}$和$\tilde{U}_{B2}$；也有彼此不相干的成分，如$\tilde{U}_{A1}$和$\tilde{U}_{B2}$，$\tilde{U}_{B1}$和$\tilde{U}_{A2}$．所以说，作为次波源，S_1和S_2是部分相干的．其相干程度如何，可用它们产生干涉条纹的反衬度γ的大小来衡量．

1.4节讨论了杨氏实验中光源的极限宽度问题，其数量级由式(1.9)决定：

$$b_1 \simeq \frac{R\lambda}{d}.$$

上式的物理意义是，给定了S_1,S_2的位置，即给定了R和d，光源的宽度b达到上式所确定的b_1时，由S_1,S_2发出的次波产生的

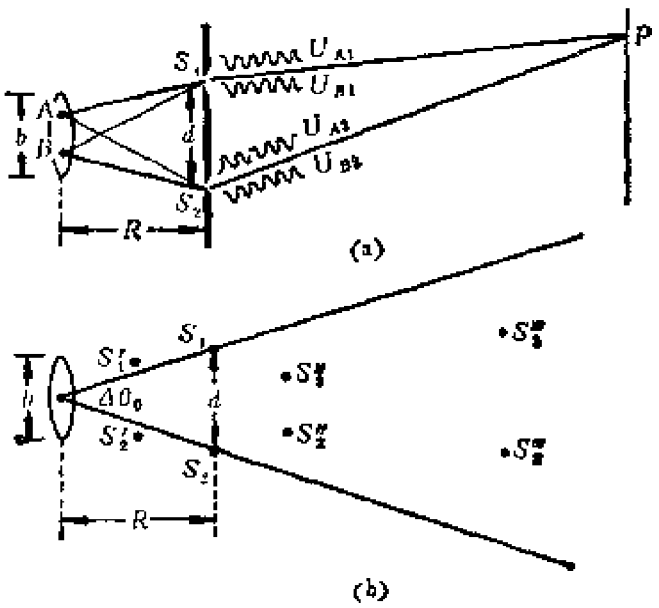


图 1-8 空间相干性问题

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

干涉条纹反衬度降为 0，即这时可认为S_1和S_2完全不相干.

现在我们可以从具体的干涉装置中解脱出来，倒过来提问题：给定宽度为 b 的面光源，在它照明空间中在波前上多大的范围里提取出来的两个次波源 S_1和S_2 还是相干的？这便是所谓光场的空间相干性问题. 为了回答这个问题，不妨将式(1.9)倒过来写，

$$d\simeq\frac{R\lambda}{b}, \tag{1.11}$$

这式中的 d 给出了光场中相干范围的横向线度. 如果面光源在相互垂直的两个方向上都有宽度 b，则在它的照明空间中相干范围的面积（称为相干面积）数量级为 d^2. 式（1.11）表明，d 正比于距离 R，因此用角度 $\Delta\theta_0=d/R$ 来表征相干范围更加方便. 这 $\Delta\theta_0$是 S_1,S_2对光源中心所张的角度，称为相干范围的孔径角. 如图1-8(b)所示，凡在此孔径角以外的两点，如 S_1'和 S_2'，都可看作是不相干的；在此孔径角以内的两点，如S_1''和S_2''，S_1''' 和S_2'''都有一定程度的相干性. 由式(1.9)或(1.11)不难求得：

$$b\,\Delta\theta_0\simeq\lambda. \tag{1.12}$$

此式表明，相干范围的孔径角$\Delta\theta_0$与光源宽度 b 成反比，这是空间相干性的反比公式.

例题 1 估算太阳光射在地面上相干范围的线度和相干面积，已知太阳的视角约为 10^{-2}rad.

解 太阳光谱的极大位于可见光中间，可取 $\lambda\sim0.55\mu$m. 式(1.11)可写为

$$\frac{db}{R}\simeq\lambda,$$

因相干孔径角 $\Delta\theta_0=d/R$,太阳视角 $\Delta\theta'=b/R$，故上式又可写成

$$b\,\Delta\theta_0=d\,\Delta\theta'\simeq\lambda.$$

故

$$d\simeq\frac{\lambda}{\Delta\theta'}\simeq55\mu\text{m}.$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

据此得相干面积

$$S = d^2 \simeq 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}^2.$$

由此可见，虽然面光源的照明面积可以很大，但相干面积却很小．为了增大相干面积，必须象在杨氏实验或其它分波前的干涉装置中那样，在光源上加狭缝，以限制其有效宽度．

例题 2　迈克耳孙测星干涉仪（A.A.Michelson,1890年）的结构如图1-9所示，两个离开很远的可移动的反射镜M_1和M_2，收集来自一个很远的恒星的光线(可认为是平行光)．然后光经由另两块反射镜M_3和M_4，穿过一块挡光板上的小孔S_1和S_2，进入望远镜的物镜．M_1,M_3,S_1和M_2，M_4,S_2对称布局．透过两小孔的光在物镜焦面上产生通常杨氏实验的条纹(见第二章图4-4(b))．用这样的仪器可以测量星体的角直径，办法是拉开M_1，M_2之间的距离h，看看什么时候干涉条纹消失．参宿四（猎戶座α）是被这个装置测量角直径的第一颗星，它是猎戶座左上方的一颗橙色的星．测量是在1920年12月的一个寒冷的夜晚进行的．当h调节到121吋时，杨氏干涉条纹消失了．这颗星的角直径应为多少？

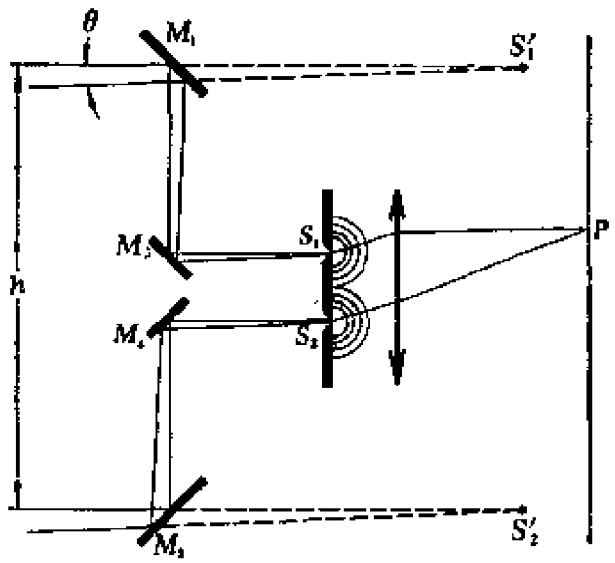


图 1-9　例题 2 —— 迈克耳孙测星干涉仪

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

解 图中S_1',S_2'分别为S_1,S_2经两次反射在M_1,M_2中成的虚像．S_1和S_2处的空间相干程度与S_1'和S_2'处相同．S_1'和S_2'间的距离近似为h，干涉条纹消失，表示h(121in = 3.07m)已达到空间相干范围的极限d．取平均波长$\overline{\lambda}=5700\text{Å}$，代入式(1.11)，得星体的角直径$\Delta\theta'$为

$$\Delta\theta'=\frac{b}{R}\simeq\frac{\overline{\lambda}}{h}\simeq 2\times10^{-8}\text{rad}\simeq 0.05''.$$

综上所述，空间相干性问题源于普通扩展光源的不同部分不相干．在点光源照明的空间里波面上各点是完全相干的，但在面光源照明的空间里只在波前的一定范围内各点才是相干的（部分相干）．应强调，这里所谓“波前的一定范围”，是指光场中的横向范围．光场中沿纵向也有相干性问题，但那是属于时间相干性问题．时间相干性问题将在本章4.6节中讨论．

思 考 题

1． 我们在正文中多以点光源来讨论多种分波前的干涉装置，实际干涉装置常采用缝光源．

(1) 缝光源与点光源相比有什么好处？

(2) 缝光源的走向应该怎样，才能使条纹既明亮又清晰？

(3) 为什么对缝光源的宽度要加以限制？对它的长度需要限制吗？

(4) 如何在实际中把钠光灯、水银灯变成缝光源？

(5) 实验室中获得的缝光源上各点是完全相干的？还是完全不相干的？或部分相干的？

2． 在许多分波前干涉装置中，我们可以发现条纹并不是等亮的．亮纹的强度似乎受某种因子所调制而有一种缓慢的起伏（参见图1-2(b)，图1-3(b)）．试解释这一现象．

3． 在实验中观察分波前干涉装置的干涉条纹时往往不用屏幕，而是用测微目镜．我们知道，在光束交迭区里前前后后都有干涉条纹，我们用目镜看到的是什么地方的条纹？试说明理由．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

习　题

1. 设菲涅耳双面镜的夹角为20′，缝光源离双面镜交线10cm，接收屏幕与光源经双面镜所成的两个虚像联线平行，幕与两镜交线的距离为210cm，光波长为6000Å，问：

(1) 干涉条纹的间距为多少？

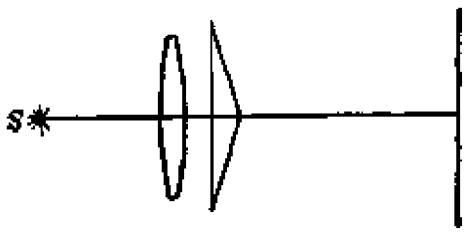
(2) 在幕上最多能看到几根干涉条纹？

(3) 如果光源到两镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有什么变化？

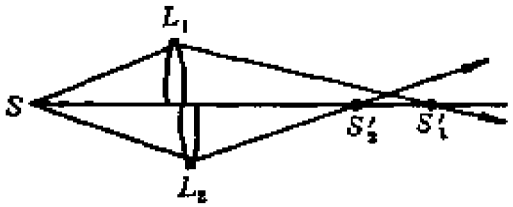
(4) 如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有什么变化？

(5) 如果要在幕上出现有一定反衬度的干涉条纹，允许缝光源的最大宽度为多少？

2. 一点光源置于薄透镜的焦点，薄透镜后放一个双棱镜(见图)，设双棱镜的顶角为3′30″，折射率为1.5，屏幕与棱镜相距5.0m，光波长为5000Å，求幕上条纹的间距？幕上能出现几根干涉条纹？



习题2图



习题4图

3. 设洛埃镜的镜长有5.0cm，幕与镜边缘的距离为3.0m，缝光源离镜面高度为0.5mm，水平距离2.0cm，光波长为5893Å，求幕上条纹的间距？幕上能出现几根干涉条纹？

4. 图为梅斯林(L.Meslin)干涉装置，将透镜对剖后再沿光轴方向将两半L_1，L_2错开一定距离，光点S位于光轴上，S_1'，S_2'是它的像。

(1) 在图上标出相干光束的交迭区，

(2) 在交迭区中放一屏幕垂直于光轴，幕上干涉条纹的形状是怎样的？

(3) 设透镜焦距为30cm，S与L_1的距离为60cm，L_1与L_2的距离为8.0cm，光波长为5000Å，两像间的中点距离透镜L_2有多远？在此放一屏

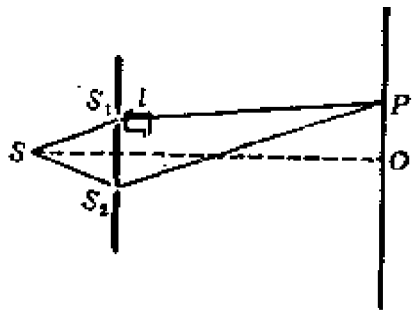
PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

幕，在其上接收到的亮纹间距为多少？

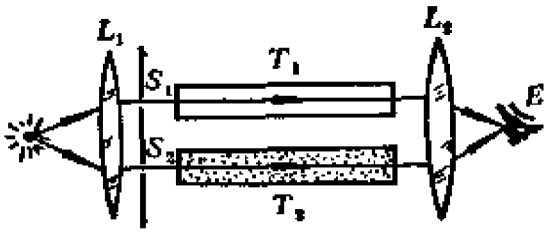
5. 如图所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性结构，在S_1孔后面放置一长度为l的透明容器，当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹就会移动．由移过条纹的根数即可推知气体的折射率．

(1) 设待测气体的折射率大于空气折射率，干涉条纹如何移动？

(2) 设$l=2.0$cm，条纹移过20根，光波长5893Å，空气折射率为1.000276，求待测气体(氯气)的折射率．



习题5图



习题6图

6. 瑞利(Rayleigh)干涉仪的结构和使用原理如下(参见图)．以钠光灯作为光源置于透镜L_1的前焦点，在透镜L_2的后焦面上观测干涉条纹的变动，在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管T_1和T_2．实验开始时，T_2管充以空气，T_1管抽成真空，此时开始观测干涉条纹．然后逐渐使空气进入T_1管，直到它与T_2管的气压相同为止．记下这一过程中条纹移动的数目．设光波长为5893Å，管长20cm，条纹移动98根，求空气的折射率．

7. 用钠光灯作杨氏双缝干涉实验，光源宽度被限制为2mm，带双缝的屏离缝光源2.5m．为了在幕上获得可见的干涉条纹，双缝间隔不能大于多少？

8. 一个直径为1cm的发光面元，如果用干涉孔径角量度的话，其空间相干性是多少弧度？如果用相干面积量度，问1m远的相干面积为多大？10m远的相干面积为多大？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

§2 薄膜干涉(一)——等厚条纹

2.1 薄膜干涉概述

当从点光源Q发出的一束光投射到两种透明媒质的分界面上时，它携带的能量一部分反射回来，一部分透射过去．能流正比于振幅的平方，因此光束的这种分割方式称做是分振幅的．最基本的分振幅干涉装置是一块由透明媒质做的薄膜．如图2-1所示，当入射光射在薄膜的上表面时，它被分割为反射和折射两束光．折射光在薄膜的下表面反射后，又经上表面折射，最后回到原来的媒质，在这里与上表面的反射光束交迭．在两光束交迭的区域里每个点上都有一对相干光线在此相交．例如在图 2-1 中在薄膜表面上的A点和薄膜上面空间里 B 点相交的分别为光线$4'$,$3''$ 和$2'$,$1''$，相交于无穷远的 C 点的为彼此平行的光线 $5'$,$4''$，光线$2'$,$2''$的延长线交于薄膜下面空间里的 D 点．这里号码相同的代表是从同一入射光线分割出来的光线，带“′”的是上表面反射的光线，带“″”的是下表面反射的光线．为了让读者看得更清楚，我们把交于A,B,C,D各点的光线单独画出来，分别示于图 2-2(a)，(b),(c),(d)中．可以看出，只要由光源 Q 发出的光束足够宽，相干光束的交迭区可以从薄膜表面附近一直延伸到无穷远，此时

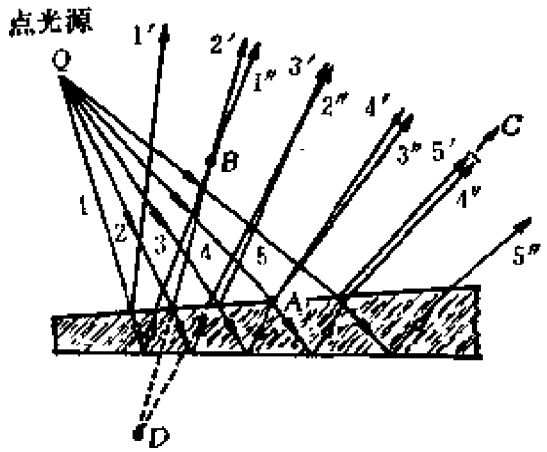


图 2-1 薄膜干涉

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

在广阔的区域里到处都有干涉条纹。

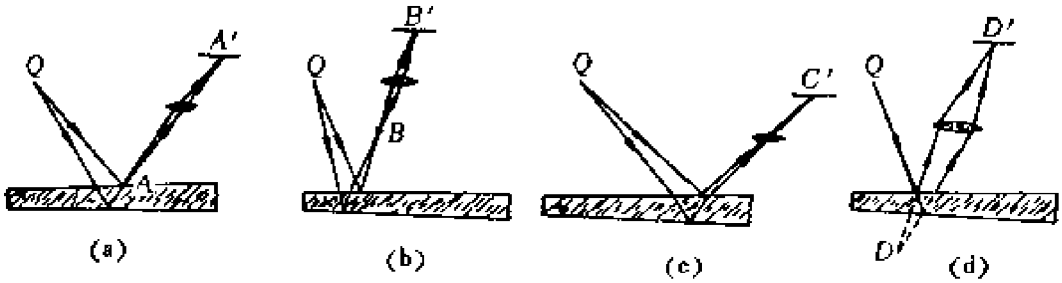
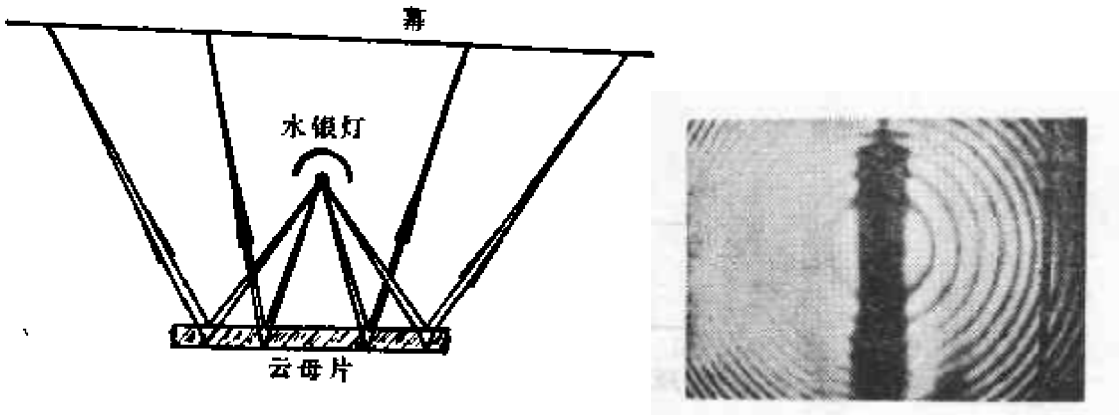


图 2-2　用透镜成像法观察薄膜的干涉条纹

为了观察薄膜产生的干涉条纹，可以象图 2-3 所示那样，用屏幕直接接收。除此之外，通常更多地是利用光具组使干涉条纹成像(用眼睛直接观察亦属于此)。当我们将光具组聚焦于某一物平面时，通过其上任一点的两条光线将在像平面上的共轭点重新相遇(见图2-2)，物像平面上各点光的强度取决于交于该点两相干光线间的光程差 ΔL。由于物像间的等光程性，参加干涉的两光线在共轭点上重新相遇时光程差是不变的。这样，我们就在光具组的像平面上得到与物平面内相似的干涉图样。用这种方法我们不仅可以观察薄膜前的“实”干涉条纹，还可以观察薄膜后的“虚”干涉条纹(图2-2(d))。



(a) 装置　　(b) 条纹

图 2 3　用屏幕接收薄膜的干涉条纹

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

普遍地讨论薄膜装置整个交迭区内任意平面上的干涉图样是一个极为复杂的问题．但实际中意义最大的是厚度不均匀薄膜表面的等厚条纹和厚度均匀薄膜在无穷远产生的等倾条纹．这两类条纹的理论比较单纯，应用比较广泛，它们分别是本节和下节讨论的重点．

2.2 薄膜表面的等厚条纹

本节着重研究薄膜表面的干涉条纹，先计算光程差．如图2-4，设薄膜折射率为 n，上下两方的折射率为 n_1 和 n_2，场点 P 处膜厚为 h．从点光源 Q 发出的两条特定的光线交于 P 点，它们的光程差为

$$\Delta L(P)=(QABP)-(QP)=(QA)-(QP)+(ABP),$$

由于膜很薄，A 和 P 两点很近，夹角 $\Delta\theta$ 很小，作为一级近似，可作 AC 垂直于 QP，

$$\begin{aligned}(QA)-(QP)&\simeq-(CP)=-n_1\overline{AP}\sin i_1\\&=-n\overline{AP}\sin i\text{①}=-n(2h\tan i)\sin i\\&=-2nh\sin^2 i/\cos i,\end{aligned}$$

此外

$$(ABP)=2(AB)\simeq 2nh/\cos i.$$

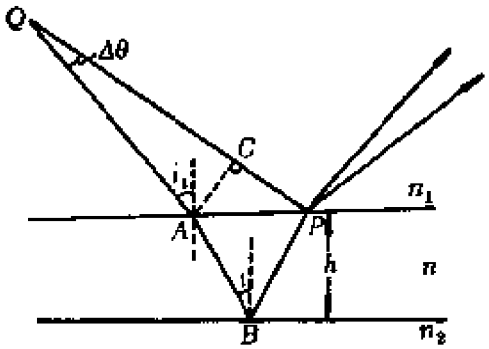


图 2-4 薄膜表面干涉场中光程差的计算

① 这里用了折射定律：$n_1\sin i_1=n\sin i$.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

代入上式，即得

$$\Delta L(P)\simeq 2nh\cos i, \qquad (2.1)$$

其中 i 是光线在薄膜内的倾角．干涉强度的极大（亮纹）和极小（暗纹）分别位于以下地方：

$$\begin{cases} \Delta L = k\lambda \quad \text{或} \quad h=\dfrac{k\lambda}{2n\cos i}, \text{极大} & (2.2a) \\ \Delta L=\dfrac{2k+1}{2}\lambda \quad \text{或} \quad h=\dfrac{(2k+1)\lambda}{4n\cos i}, \text{极小} & (2.2b) \end{cases}$$

式中 λ 是真空中波长．

第二章10.4节已指出，在电介质表面反射时可能产生半波损．在该节的思考题7中已归纳了，有半波损的条件是 $n_1<n>n_2$ 或 $n_1>n<n_2$；当 $n_1<n<n_2$ 或 $n_1>n>n_2$ 时没有半波损．有无半波损的差别仅仅在于干涉条纹的级数差半级，即亮暗纹对调，并不影响条纹的其它特征，如形状、间隔、反衬度等．在实际中人们经常关心的只是条纹的相对变动，只有少数场合需要确定条纹的绝对级数．为了公式和叙述的简洁，今后我们一般不去理会半波损．只在必要时才指出它的存在，届时再将亮暗纹的地位调换过来就是了．

薄膜表面干涉条纹的形状，与照明和观察的方式有很大的关系．下面只讨论实际中采用最多的正入射方式，即入射光和反射光处处都与薄膜表面垂直．这时式(2.1)中的 $i=0$，

$$\Delta L = 2nh, \qquad (2.2)$$

即下表面反射的光比上表面反射的光多走的路程就是前者在薄膜内部一次垂直的往返．薄膜上厚度相等各点的轨迹称为它的等厚线．如果薄膜的折射率是均匀的，则 ΔL 只与厚度 h 有关，因此光的强度也取决于 h，亦即沿等厚线的强度相等．薄膜表面上的这种沿等厚线分布的干涉条纹，称为等厚干涉条纹．由于相邻条纹上的光程差 ΔL 相差一个波长，因此相邻等厚条纹对应的厚度差为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

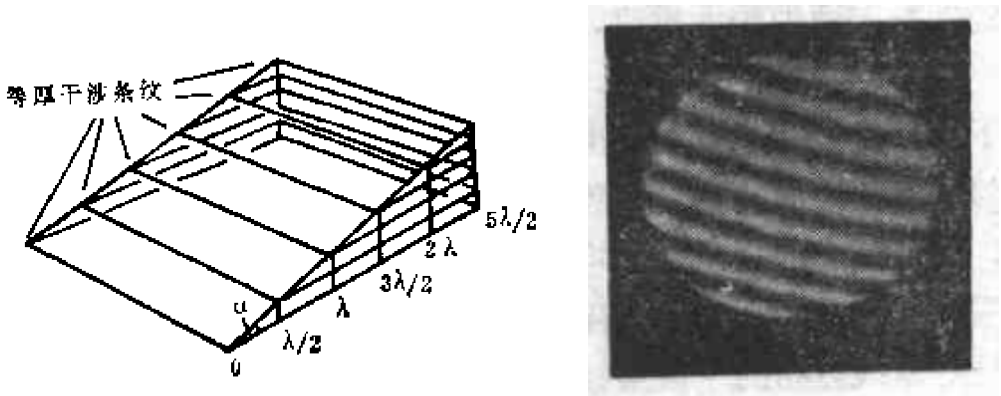
$$\Delta h = \frac{\lambda}{2n}, \qquad (2.3)$$

即半个媒质内的波长 λ/n.

由于等厚干涉条纹可以将薄膜厚度的分布情况直观地表现出来，它是研究薄膜性质的一种重要手段．科学技术的发展对度量的精确性提出了愈来愈高的要求．精密机械零件的尺寸必须准确到以至 $(1/10)\mu m(10^{-4}—10^{-5}cm)$ 的数量级，对精密光学仪器零件精密度的要求更高，达 $10^{-6}cm$ 的数量级．用机械的检验方法达到这样的精密度是十分困难的，但光的干涉条纹可将在波长 λ 的数量级以下的微小长度差别和变化反映出来（可见光波长 λ 的数量级平均为 $5\times10^{-5}cm$），这就为我们提供了检验精密机械或光学零件的重要方法，这类方法在现代科学技术中的应用是非常广泛的．下面我们分析两个等厚干涉条纹的特例，并结合这些例子介绍一些光的干涉在精密度量方面的应用．

2.3 楔形薄膜的等厚条纹

现在我们考虑介于一对不平行的反射平面之间的楔形空气薄膜形成的等厚干涉条纹(见图2-5(a))．不难看出，这种薄膜的等厚线是一组平行于交棱的直线(图中粗线)．图2-5(b)是楔形薄膜



(a) 装置　　(b) 条纹

图 2-5　楔形薄膜的等厚条纹

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

等厚干涉条纹的照片．由于相邻干涉条纹上的高度相差 $\lambda/2$，条纹间隔Δx与楔的顶角 α 之间的关系为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\alpha} \quad 或 \quad \alpha=\frac{\lambda}{2\Delta x}. \tag{2.4}$$

如果波长 λ 已知，测得Δx,便可根据上式求得 α 角．利用这种方法测量玻璃板的不平行度，可达1″的数量级．

从楔形薄膜可演化出多种多样的测量装置．例如为了测量细丝的直径，我们可以把它夹在两块平面玻璃板的一端，而玻璃板的另一端压紧(见图2-6)．这样，在两玻璃板间就形成一楔形空气层．通过对其顶角α的测量，或者更简单一些，数一下从棱线到细丝间干涉条纹的数目，即可求出细丝的直径．为了精确测量较大的长度，则需将待测物体的长度与标准块规的长度进行比较．图2-7所示为测量滚珠直径的装置．将滚珠K和标准块规G放在平板Π_2上，上面盖一块平面玻璃板Π_1，从Π_1和G之间楔形空气层的等厚条纹求得角α，由此可算出K的直径与G的长度间的差值．

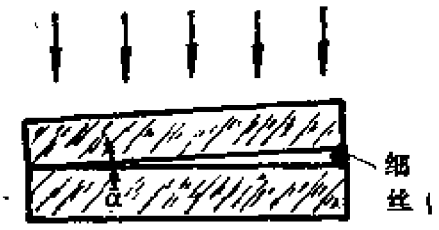


图 2-6　测量细丝直径装置

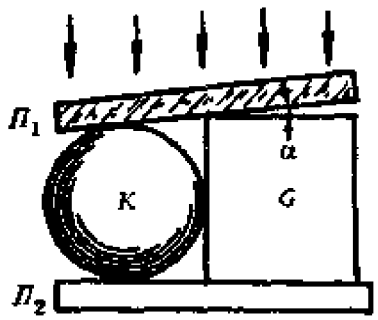
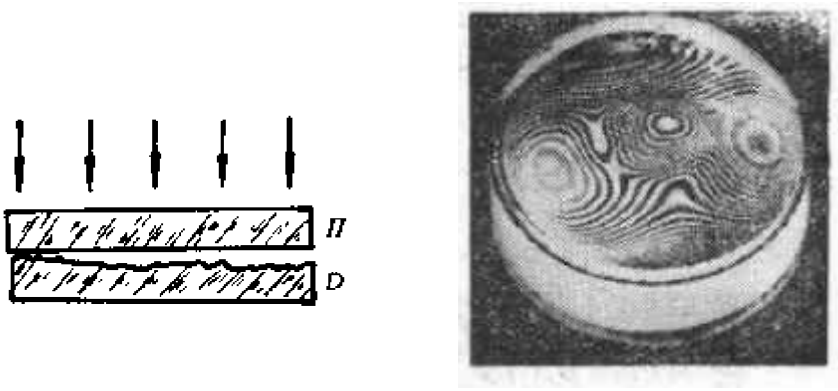


图 2-7　测量滚珠直径装置

类似的方法还可以用来检验精密机械零件表面的光洁度．图2-8(a)中D为待检验零件，Π为标准平面玻璃板．如果D的上表面是严格的平面，楔形空气层的等厚条纹是一组平行的直线．若D的表面某处有微小的起伏，在相应的地方干涉条纹便会弯曲（见图2-8(b)），根据干涉条纹的形状可以判知零件表面起伏的情况．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) 装置　　(b) 条纹

图 2-8　检验机械零件表面光洁度

在实际的精密检测工作或干涉仪调节技术中，只知道静止干涉条纹的情况还是不够的，常常需要根据条纹变动的情况对装置的情况作出判断，以便指导加工工艺或实验操作．对于楔形薄膜来说，最主要的是判断交棱在哪一边，以及上下表面发生怎样的相对推移．如图2-5(b)那样，只有一组静止的平行直线条纹，我们并不知道楔形空气薄膜哪边薄哪边厚，或者说不知道交棱在哪边．这时我们不妨在左边或右边轻轻按一下平板，看看条纹是变疏还是变密，便可判定这时 α 角变大还是变小，从而得知交棱在左边还是在右边(见思考题)．如果要问，当干涉装置中上下两块平面玻璃板 Π_1 和 Π_2 相对平移时(见图2-9)，楔形空气层的干涉条纹怎样变化？在回答这个问题时，首先我们看到，由于 α 角未变，因此条纹间隔 Δx 未变，但是条纹将发生平移．条纹平移的问题通常可用追踪某特定级条纹的办法来分析：原来第 k 级条纹($\Delta L = k\lambda$)在厚度为 $h_k = k\lambda/2$ 的地方(P_k点)，设玻璃板 Π_1 和 Π_2 的间距改变 Δh 后，第 k 级条纹将移到这样一个 P_k' 点的位置，在该处 Π_1 和 Π_2 新的间隔也为 h_k．为找到这个 P_k' 点，我们只需过 P_k 作 Π_2 表面的平行线，它与处在新位置的 Π_1 表面的交点即为 P_k'．不难看出，当 Π_1 和 Π_2 的间隔增大时，条纹趋向棱线；反之则背离棱线．还可看出，当 Π_1 和 Π_2 的间隔每改变 $\lambda/2$ 时，条

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

纹平移的距离恰好等于条纹间隔 Δx，亦即这时每根条纹移到与之相邻条纹原来的位置上．根据这个特点，若波长 λ 已知，我们便可从条纹移动的情况判断 Δh 的大小；反之也可由 Δh 推算 λ．

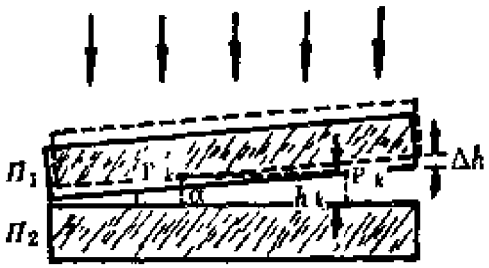


图 2-9　等厚条纹的平移

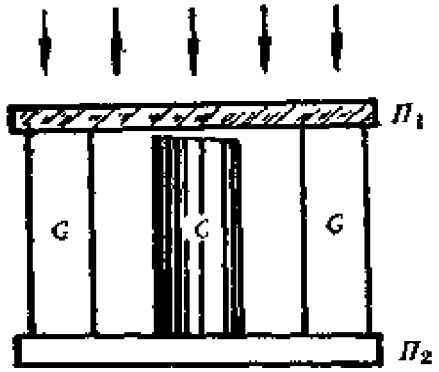


图 2-10　干涉膨胀计

图2-10所示为一种干涉膨胀计．G为标难的石英环，C 为待测的柱形样品．由于它的膨胀系数与石英环的不同，当温度改变时，柱体 C 的上表面与石英平板 Π_1之间楔形空气层的厚度就会改变．我们可以从干涉条纹移动的距离计算出 C和G 长度的相对改变量．若石英环 G 的膨胀系数已知，就可求得 C 的膨胀系数．

2.4　牛顿圈

如图2-11(a)所示，如果我们把一个曲率半径很大的凸透镜放在一块平面玻璃板上，二者之间形成一厚度不均匀的空气层．设接触点为O，显然等厚线是以 O 为中心的圆，因此等厚干涉条纹是一系列以 O 为中心的同心圆圈．这种干涉条纹是牛顿首先观察到并加以描述的，故称为牛顿圈．由于有半波损，中心 O 点 $(\Delta L = 0)$为暗点．现在我们推导第 k 级暗纹的半径 r_k 与透镜曲率半径 R 的关系．如图2-11所示，C为透镜的曲率中心，P_k为第 k 级暗纹所在位置．通过 P_k 作 CO 的垂线 P_kD，则有

$$\overline{DP_k^2} = \overline{CP_k^2} - \overline{CD^2}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

此外$\overline{OD} = h_k = k\lambda/2$，$\overline{CD} = R - h_k$；$\overline{CP_k} = R$，$\overline{DP_k} = r_k$．于是

$$r_k^2 = R^2 - (R - h_k)^2 = 2Rh_k - h_k^2 ,$$

由于$R \gg h_k = k\lambda/2$，上式右端第二项可以忽略，最后得到

$$r_k^2 = 2Rh_k = kR\lambda ,$$

或

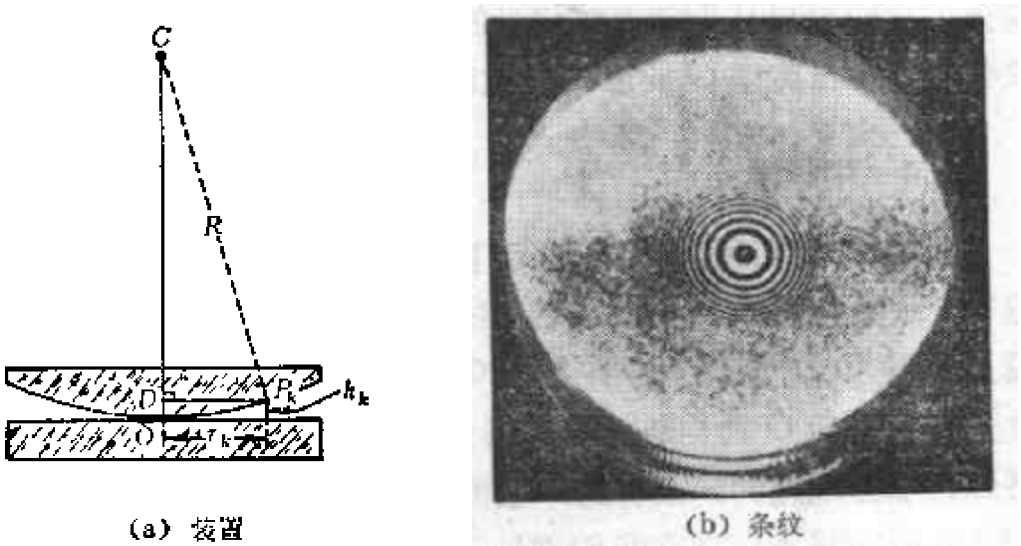
$$r_k = \sqrt{kR\lambda} . \tag{2.5}$$

上式表明，r_k与k的平方根成正比，即

$$r_1 : r_2 : r_3 : \cdots = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \cdots ,$$

所以随着级数k增大，干涉条纹变密（参看图2-11(b)）．如果λ为已知，用测距显微镜测得r_k，便可求得透镜的曲率半径R．不过应该注意，由于存在灰尘或其它因素，致使中心O处两表面不是严格密接．为了消除这种误差，可测出某一圈的半径r_k和由它向外数第m圈的半径r_{k+m}，据此可算出R来：

$$R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda} . \tag{2.6}$$



(a) 装置　　(b) 条纹

图 2-11　牛顿圈

在光学冷加工车间中经常利用牛顿圈快速检测工件（透镜）表面曲率是否合格，并作出判断，进一步应该如何研磨．作法大致

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

如下：将标准件（玻璃验规）G 覆盖于待测工件 L 之上，两者间形成空气膜，因而出现牛顿圈（见图2-12）．圈数越多，说明公差越大．例如，当人们说某工件表面的公差为一个光圈（牛顿圈的俗称）时，就表示它与验规之间的最大差距为$\lambda/2$．如果某处光圈偏离圆形，则说明待测表面在该处有不规则起伏．如果光圈太多，工件不合格，还需进一步研磨．究竟磨边缘还是磨中央，有经验的工人师傅只要将验规轻轻下压，即可作出判断（参见图2-12(a)，(b)和思考题8）．

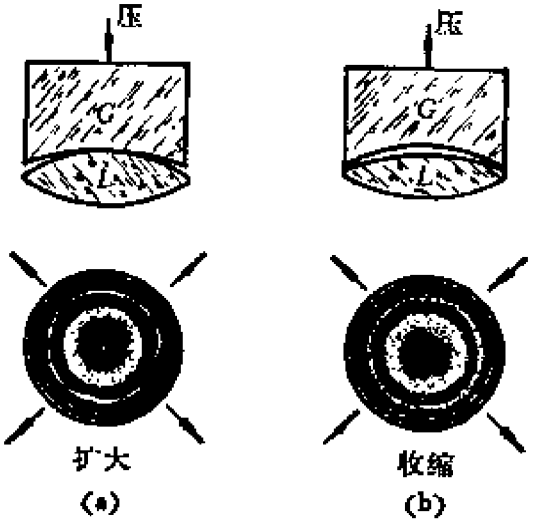


图 2-12　用牛顿圈检测透镜曲率

*2.5　等厚干涉条纹的观测方法及倾角的影响

我们具体地讨论一下观察等厚干涉条纹的方法．精密观测时要求入射光和反射光处处与薄膜垂直．图2-13所示的光路可以保证这一点，其中 D 为放在凸透镜 L_1 焦点上的小孔光阑，D 与 L_1 组成准直装置．M 是半镀银或不镀银的玻璃板，它与薄膜成45°角，将来自 L_1 的水平平行光束部分地反射到铅直方向．铅直的平行光束在薄膜的上下表面反射后部分地透过玻璃板 M．由于眼睛的瞳孔很小，不能直接把透过 M 的光束全部接收进来，因此需要在 M 之上放置另一凸透镜 L_2 调焦于薄膜表面上．这样一来，在薄

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

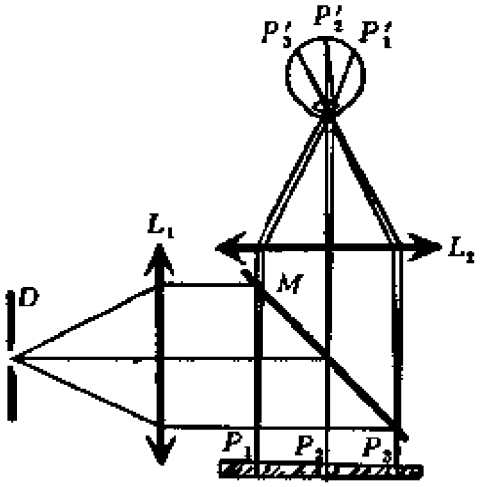


图 2-13　精密观测等厚条纹的装置

膜表面上各点P_1，P_2，…相遇的每一对相干光线经L_2和眼球折射后，重新在网膜上的P_1'，P_2'，…点相遇，薄膜表面上的等厚干涉条纹便可在网膜上再现．如果需要对干涉条纹作定量的测量，可用测距显微镜代替这里的L_2．

上面描述的是精密测量等厚条纹所需的装置．在要求不太高的时候，装置可以简化．首先，入射光束不一定需要严格平行，光源可以是扩展的，图2-13中的准直装置可以不要．其次，观察条纹时可直接用眼睛（见图2-14(a)），或者在条纹较密的情况下通过放大镜或显微镜来观察（见图2-14(b)）．甚至半反射板M也可以不要，直接用眼睛沿一定的倾角观察薄膜的表面（见图2-14(c)），也可以看到干涉条纹．不过除了膜的厚度十分小的情况外，我们按这些方式观察到的干涉条纹不是严格的等厚线，而且条纹的反衬往往很差，甚至看不见．这些都是光线倾斜带来的影响，下面分两点来讨论．

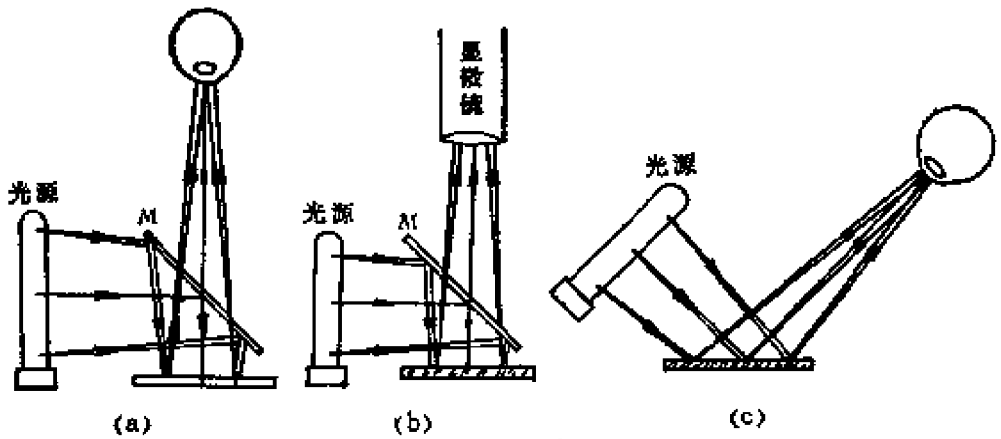


图 2-14　观察等厚干涉条纹的一些简化装置

（1）条纹形状偏离等厚线

以图2-15(a)所示楔形薄膜为例．当我们用眼睛注视它的表面时，膜的厚度h和光线的倾角i都逐点变化着．取光程差表达式(2.1)的全微分：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\delta(\Delta L) = -2nh\sin i\,\delta i + 2n\cos i\,\delta h. \qquad (2.7)$$

我们知道，干涉条纹是等强度点的轨迹，而强度完全由光程差所决定．亦即同一根干涉条纹上ΔL＝常数，或者说$\delta(\Delta L)=0$．由式(2.7)可见，因倾角增大了引起光程差的减小必须由厚度的增大来补偿．例如图2-15(a)中等厚线上P_2点的倾角比P_1点大，因而干涉条纹偏离到更厚的点P_2'上去．这个问题也可用图2-15(b)来分析，其中平行直线是严格的等厚线，同心圆是相对于瞳孔的等倾线，两线族中相邻线条的光程差ΔL差同一常数(譬如一个波长λ)．等厚线的光程差是由左到右递增的，等倾线的光程差是由里向外递减的．因而图中$P_1, P_2', P_3', P_4', \cdots$各点的$\Delta L$相等，它们同在一根干涉条纹上．

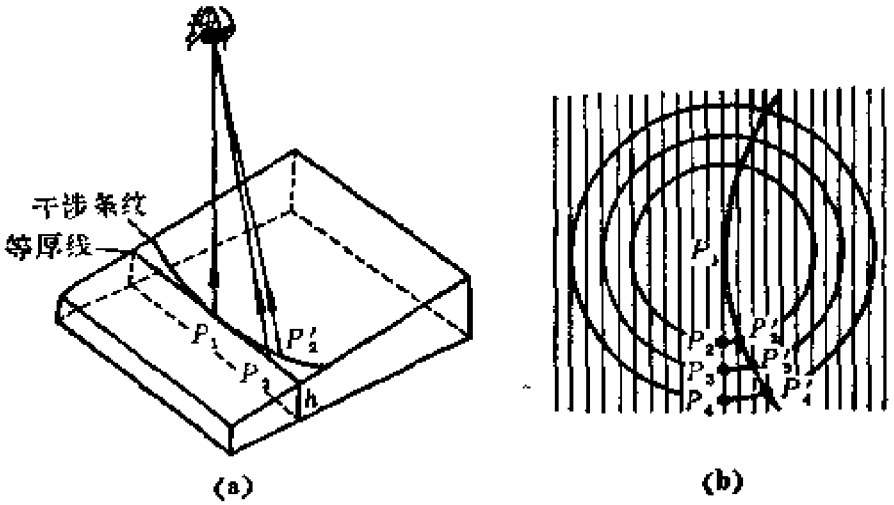


图 2-15　干涉条纹对等厚线的偏离

式(2.7)还表明，对于相同的倾角变化δi，h越大或$\sin i$越大，δi给ΔL带来的影响越大，从而干涉条纹对等厚线的偏离也就越显著．

（2）反衬度的下降

如图2-16所示，来自光源上不同点Q_1, Q_2到同一场点P的两对相干光线倾角不等，从而光程差也不等．或者说，光源上不同的点在薄膜表面产生的干涉条纹不完全相同．这些图样彼此不相干，迭加起来就会使条纹的反衬度下降．如式(2.7)中第一项所示，h越大，以上现象越严重．当膜的厚度h增大到一定程度时，干涉条纹就完全看不见了．

薄膜干涉条纹的观察，特别是直接用肉眼去观察，是个十分细致的问题．往往会发生这样的情况，一个人看到了条纹，另一个人却看不到．除

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

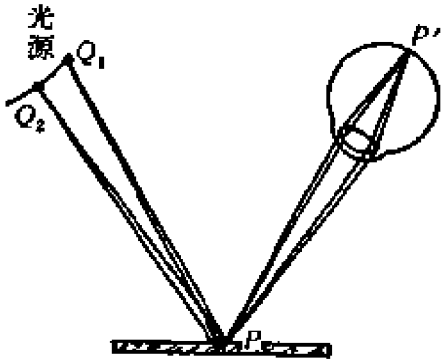


图 2-16　干涉条纹反衬度下降的原因

了上述反衬度问题之外，还有许多主观和客观的因素会影响我们的观察．由于这些问题过于琐屑，就不在这里一一赘述了，其中有的在 3.3 节中谈到，有的将放在习题中讨论（见习题 9）．

2.6　薄膜的颜色　增透膜和高反射膜

前面我们只讨论了单色光的干涉条纹．如果光源是非单色的，则其中不同波长的成分各自在薄膜表面形成一套干涉图样．由于干涉条纹的间隔与波长有关，因而各色的条纹彼此错开，在薄膜表面形成色彩绚丽的干涉图样．这是日常生活里最容易看到的一种光的干涉现象．在水面上铺展的汽油膜上，肥皂泡上，附着在玻璃窗上的油垢层上，以及许多昆虫(如蜻蜓、蝉、甲虫等)的翅膀上，都可看到这种彩色的干涉图样．在高温下金属表面被氧化而形成的氧化层上，也能看到因干涉现象而出现的色彩．例如从车床切削下来的钢铁碎屑往往呈美丽的蓝色．

由于薄膜的颜色与它的厚度有关，我们可利用它来测量膜的厚度．为此可预先制备一系列敷盖不同厚度透明膜的样板，这些样板上透明膜的厚度用其它方法(譬如用称量重量的方法)事先校准好．以后只需把待测敷盖膜颜色与这系列样板作一比较，就能很快地定出它的厚度．用这种方法确定敷盖膜的厚度，可准确到100Å的数量级．

以上原理还有一个重要的应用，即制造增透膜．我们知道，光在两种媒质的界面上同时发生反射和折射．从能量的角度来看，对于任何透明媒质，光的能量并不全部透过界面，而是总有一部分从界面上反射回来．在空气到玻璃的界面上正入射时，反射光能约占入射光能的5%．在各种光学仪器中，为了矫正像差

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

或其它原因，往往采用多透镜的镜头．例如较高级的照相机物镜由6个透镜组成，在潜水艇上用的潜望镜中约有20个透镜．每一透镜有两个与空气相界的表面，这样一来，复杂的光学仪器就可能有几十个界面．如果每个界面上因反射光能损失5%，总起来光能的损失就十分可观了．计算表明，上述照相机物镜中光能的损失达45%，而潜望镜中竟达90%．如此巨大的反射损失是很可惜的．此外，这些反射光在光学仪器中还会造成有害的杂光，影响成像的清晰度．为了避免反射损失，近代光学仪器中都采用真空镀膜或用离心机"甩胶"（又叫化学镀膜）的方法，在透镜表面敷上一层薄透明胶．它能够减少光的反射，增加光的透射，所以叫做增透膜或消反射层．平常我们看到照相机镜头上一层蓝紫色的膜就是增透膜．

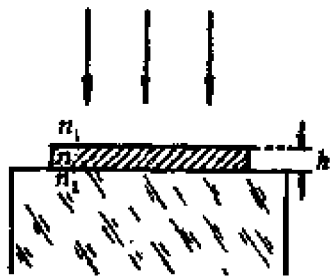


图 2-17　增透膜或高反射膜

增透膜的原理就是薄膜的干涉．薄膜光学是六十年代初兴起的一门应用光学技术．单膜结构如图2-17，上方媒质一般为空气（折射率为n_1），下方媒质一般是玻璃（折射率为n_2），它是膜层的基底．令膜层的折射率为n，$n<n_2$的膜称为低膜（记作L），$n>n_2$的膜称为高膜（记作H）．当膜层的光学厚度$nh=\lambda/4$，$3\lambda/4$，…，且为低膜时（即$n_1<n<n_2$），上、下两束光的有效程差中无半波损，从而位相差为π，相干迭加的结果为暗场．理论上可以进一步证明，当低膜折射率满足下式时

$$n=\sqrt{n_1 n_2},$$

可以实现完全消反射（见§5习题5）．例如，$n_1=1.00$，$n_2=1.52$，则要求$n=1.23$．不过，实际上并未找到折射率如此之低而其它性能又好的材料．目前采用的材料为氟化镁（MgF_2），$n=1.38$．用它制成的单膜光强反射率为1.2%．

由上面的讨论可以看出，增透膜只能使个别波长的反射光达到极小，对于其它波长相近的反射光也有不同程度的减弱．至于控制哪一波长的反射光达到极小，视实际需要而定．对于助视光学仪器或照相机，一般选

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

择可见光的中部波长5500Å来消反射光，这波长呈黄绿色，所以增透膜的反射中呈现出与它互补的蓝紫色.

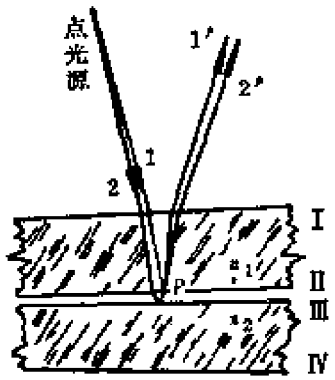
实际中有时提出相反的需要，即尽量降低透射率、提高反射率，这同样可用图2-17所示的装置来实现，只是低膜改成同样光学厚度的高膜. 因这时$n_1<n>n_2$，上下表面反射光之间有半波损，相干迭加的结果是亮场. 靠单膜是不能将反射率提高太多的. 例如当$n_1=1.00$，$n_2=1.52$时，取硫化锌(ZnS)制成$\lambda/4$增反膜，它的$n=2.40$，光强反射率增至33.8%. 进一步提高反射率，应该采用多层膜，这就是通常谈的多层介质高反射膜，光强反射率可达99%以上，它与金属高反射膜相比，有更多的优点.

思 考 题

1. 判断以下各种说法是否确切：

(1) 等厚条纹就是薄膜表面的干涉条纹.

(2) 等厚干涉条纹不仅存在于薄膜表面，而且还存在于薄膜前后的空间里.



思考题2图

(3) 只有膜很薄时干涉条纹才是等厚条纹，膜太厚了就不存在等厚条纹.

2. 在实际中经常遇到的情况里，产生干涉条纹的薄膜是夹在两片固体媒质间的空气层(见图). 这里有Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个反射面，为什么我们只考虑Ⅱ，Ⅲ两个面反射的光之间的干涉，而不考虑Ⅰ，Ⅳ两个面？

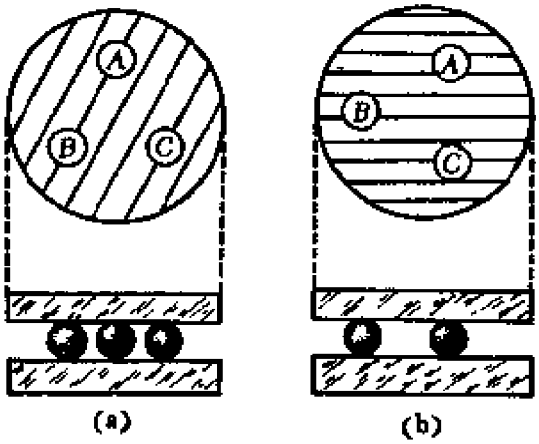
3. 按图2-14(c)方式用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹时，宜采用点光源还是扩展光源？有时当我们找不到干涉条纹时，可在一小片纸上刺一针孔，透过针孔注视薄膜表面时，就比较容易看到干涉条纹. 这是为什么？

4. 窗玻璃也有两个表面，为什么我们从来未看到在其上有干涉条纹？你能否估计一下，薄膜厚到什么程度，我们用肉眼就看不到干涉条纹了？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

【提示：参看图2-16和下面习题9.】

5. 图(a),(b)所示是检验滚珠质量的干涉装置．在两块平玻璃板之间放三个滚珠A,B,C．在钠黄光的垂直照射下，形成如图上方所示的干涉条纹．根据这样的干涉条纹，你能就(a),(b)两情形分别对三个滚珠直径的一致性做出什么结论？用什么办法可进一步判断它们之中哪个大哪个小？

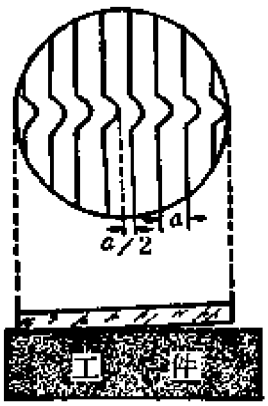


思考题5图

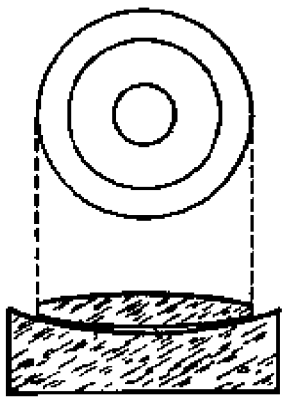
6. 附图是检验精密加工工件表面光洁度的干涉装置．下面是待测工件，上面是标准的平玻璃板，在钠黄光的垂直照射下看到如图上方所示的干涉花样．根据这样的干涉花样，你能对工件表面的光洁度做出怎样的结论？

7. 附图是检验透镜曲率的干涉装置．在钠黄光的垂直照射下显示出图上方的干涉花样，你能否判断透镜的下表面与标准模具之间气隙的厚度最多不超过多少？

8. 试解释图2-12所示现象，即下压验规时，若光圈扩大，则表示透



思考题6图



思考题7图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

镜曲率太大(见图(a))；反之表示曲率过小(见图(b))。

9. 说明水面浮的汽油层呈现彩色的原因。从不同的倾斜方向观察时，颜色会变吗？为什么？

10. 在日常生活中你还能列举哪些薄膜干涉现象？

11. 试作下列两个观察性实验：

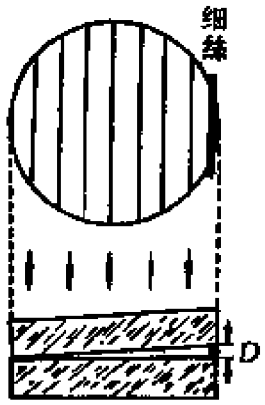
(1) 吹肥皂泡。起初当肥皂泡很小时，不显示颜色；随着肥皂泡的胀大，开始出现彩色，而且彩色越来越鲜艳，颜色不断地变化；最后光泽变暗，彩色消失，此时肥皂泡即将破裂。试解释以上现象。

(2) 用一根细铁丝折成小方框，浸入肥皂水后取出，这时在方框上蒙了一层肥皂膜。现将方框平面竖直放置，观察其上肥皂膜色彩变化的情况。解释你所观察到的现象。

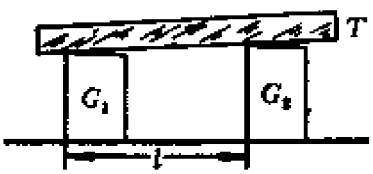
习　题

1. 把直径为 D 的细丝夹在两块平玻璃砖的一边形成尖劈形空气层(见图下方)，在钠黄光($\lambda = 5893$ Å)的垂直照射下形成如图上方所示的干涉条纹，试问 D 为多少？

2. 块规是机加工里用的一种长度标准，它是一钢质长方体，它的两个端面经过磨平抛光，达到相互平行。图中 G_1，G_2 是同规号的两个块规，G_1的长度是标准的，G_2是要校准的。校准方法如下：把G_1和G_2放在钢质平台面上，使面和面严密接触，G_1,G_2上面用一块透明平板 T 压住。如果G_1和G_2的高度(即长度)不等，微有差别，则在T和G_1,G_2之间分别形成尖劈形空气层，它们在单色光照射下产生等厚干涉条纹。



习题1图



习题2图

(1) 设入射光的波长是5893 Å，G_1和G_2相隔 5cm(即图中的 l)，T和

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

G_1，G_2间干涉条纹的间距都是0.5mm，试求块规G_2和G_1的高度之差．怎样判断它们谁长谁短？

(2) 如果T和G_1间干涉条纹的间隔是0.5mm，而T和G_2间的是0.3mm，则说明什么问题？

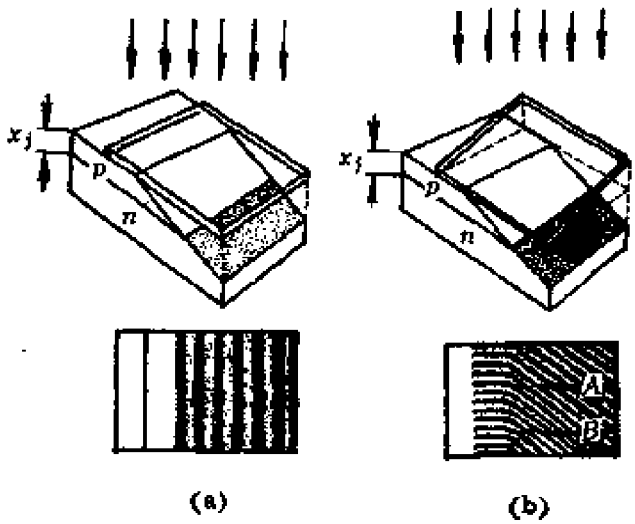
3. 在图2-10所示的干涉膨胀计中，样品与石英环的高度约为1cm，当温度升高100℃时，视场中的干涉条纹移过20根，求样品的线膨胀系数．设光波长为5893Å，石英的线膨胀系数为$0.35\times10^{-6}/℃$．

4. 图(a)所示为一种测p-n结结深x_j的方法．在n型半导体基质硅片表面经杂质扩散而形成p型半导体区．p区与n区的交界面叫p-n结，p-n结距表面的深度(即p区的厚度)x_j叫做结深．在半导体工艺上需要测定结深，测量的方法是先通过磨角、染色，使p区和n区的分界线清楚地显示出来，然后盖上半反射膜，在它与硅片之间形成尖劈形空气薄膜．用单色光垂直照射时，可以观察到空气薄膜的等厚干涉条纹．数出p区空气薄膜的条纹数目Δk即可求出结深

$$x_j=\Delta k\cdot\frac{\lambda}{2}.$$

由于光在金属或半导体表面反射时位相变化比较复杂，用本方法测量结深x_j没有考虑此位相突变，因此测量结果不太精确．更精确的测量方法见图(b)，半反射膜不是象在图(a)中那样紧贴在p区的上面，而是一端稍微往上翘一点，观察到的干涉条纹如图(b)下方所示．试说明

(1) 干涉条纹为什么会是这样的？



习题4图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

(2) 若用 $\lambda=5500$Å的光测得斜干涉条纹的间隔为 0.20mm，交界面上两点 AB 间的距离为 1.1mm，结深 x，为多少？

(3) 此法比图(a)所示的方法精确在哪里？

5. 测得牛顿圈从中间数第五环和第十五环的半径分别为 0.70mm 和 1.7mm，求透镜的曲率半径．设光波长为 0.63μm．

6. 肥皂膜的反射光呈现绿色，这时膜的法线和视线的夹角约为 35°，试估算膜的最小厚度．设肥皂水的折射率为 1.33，绿光波长为 5000Å．

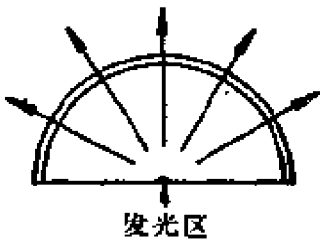
7. 在玻璃表面上涂一层折射率为1.30的透明薄膜，设玻璃折射率为 1.5．

(1) 如果不考虑光的吸收和干涉效应，由于涂上这一层透明膜，一次光强反射率降为多少？

(2) 对于波长为5500Å的入射光来说，膜厚应为多少才能使反射光干涉相消？这时光强反射率为多少？

(3) 对波长为 4000Å 的紫光和 7000Å 的红光来说，第(2)问所得的厚度在两束反射相干光之间产生多大的位相差？(不考虑色散．)

8. 砷化镓发光管制成半球形，以增加位于球心的发光区对外输出功率，减少反射损耗(见图)．已知砷化镓发射光波长为 9300Å，折射率为 3.4．为了进一步提高输出光功率，常在球形表面涂敷一层增透膜．



习题 8 图

(1) 不加增透膜时，球面的光强反射率有多大？

(2) 增透膜的折射率和厚度应取多大？

(3) 如果用氟化镁（折射率为 1.38)能否增透？光强反射率有多大？

(4) 如果用硫化锌(折射率为2.35)能否增透？光强反射率有多大？

9. 如图2-16，用肉眼直接观察薄膜表面的干涉条纹．设瞳孔直径 4mm，与表面相距 30cm，视线与表面法线夹角 30°，薄膜折射率为1.5．

(1) 分别计算膜厚2cm及20μm 两种情况下，点源 Q_1，Q_2 在观察点 P 产生的光程差改变量 $\delta(\Delta L)$．

(2) 如果为了保证条纹有一定的反衬度，要求上述光程差改变量的数量级不能超过多少？以此来估计一下对膜厚 h 的限制．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

§3 薄膜干涉(二)——等倾条纹

3.1 无穷远的等倾干涉条纹

下面我们讨论无穷远处的干涉条纹，这样的干涉条纹是薄膜上彼此平行的反射光线产生的。如果用透镜来观察，条纹将出现在它的焦面上（参看图2-2(c)）。我们局限于薄膜上下表面平行的情形，这时图2-2(c)中的一对入射线将重合在一起，我们把这光线图放大了重画于图 3-1 中，并据此来计算两反射光在焦面上P点相交时的光程差。

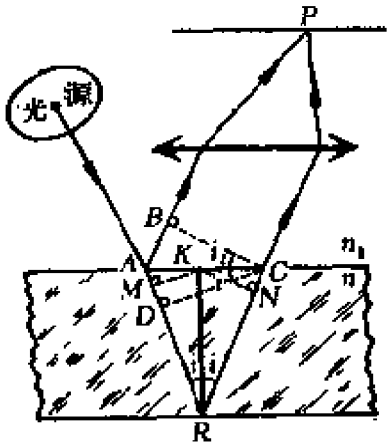


图 3-1 等倾条纹的光程差

如图3-1所示，作两面反射线的垂线CB，根据物像间的等光程性，光程$(BP)=(CP)$，于是$\Delta L=(ARC)-(AB)$.作CD垂直于折射线AR，因$\overline{AB}=\overline{AC}\sin i_1$，$\overline{AD}=\overline{AC}\sin i$，故

$$\overline{AB}/\overline{AD}=\sin i_1/\sin i=n/n_1.$$

其中i_1和i分别为入射角和折射角，n_1和n为两种媒质的折射率，即$n\overline{AD}=n_1\overline{AB}$，亦即$(AD)=(AB)$．故$\Delta L=(DRC)=n(\overline{DR}+\overline{RC})$．作薄膜上下表面的垂线$KR$，由$K$分别作$AR$和$RC$的垂线$KM$和$KN$，不难看出，$\overline{MD}=\overline{AM}-\overline{NC}$．因而$\Delta L=n(\overline{MR}+\overline{RN})$．又$\overline{MR}=\overline{RN}-\overline{KR}\cos i=h\cos i$（$h$为膜的厚度），最后得到

$$\Delta L=2nh\cos i. \quad ① \qquad (3.1)$$

由于膜的厚度h是均匀的(我们设n也是均匀的)，引起ΔL变化的唯一因素是倾角i，ΔL随i的增大而减小．

① 式(3.1)形式上与前面的式(2.1)完全一样，但式(2.1)是近似的，而这里的式(3.1)是严格的.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

观察无穷远干涉条纹的装置如图3-2所示．其中Q是点光源，M是半反射的玻璃板，L是望远物镜，其光轴与薄膜表面垂直，屏幕放在L的焦面上．为了找到彼此平行的反射线在幕上的交点P，只需通过L的光心作平行于反射线的辅助线(图3-2中虚线)．由此可看出，P点到幕中心O的距离只决定于倾角．于是具有相同倾角的反射线排列在一圆锥面上(见图3-3)，它们在幕上交点的轨迹将是以O为中心的圆圈．由于在此圆圈上各点相交的相干光线间光程差相等，亦即幕上看到的干涉条纹是以O为中心的同心圆圈(见图3-4)．由于这种干涉条纹是等倾角光线交点的轨迹，故称等倾干涉条纹．

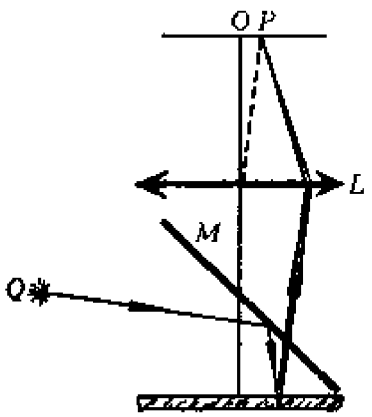


图 3-2　观察等倾条纹实验装置的平面图

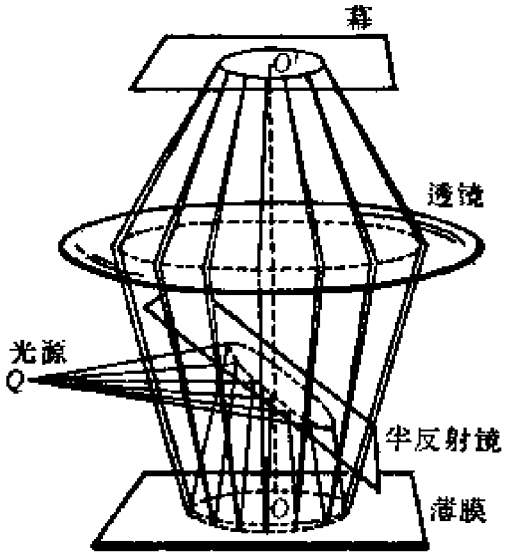


图 3-3　观察等倾条纹实验装置的透视图

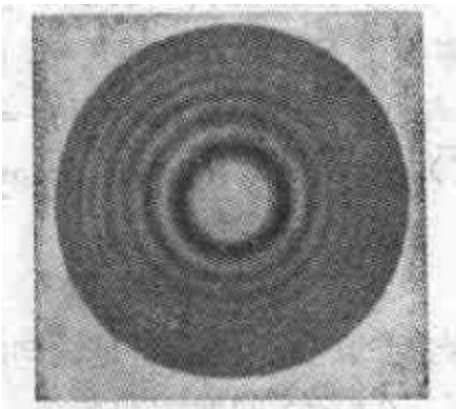


图 3-4　等倾干涉条纹

下面我们分析等倾干涉条纹半径的规律．首先，愈靠近中心

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

点O条纹对应的倾角 i 愈小，光程差就愈大，从而条纹的级数就愈高．其次，当倾角不大时可近似认为相邻条纹半径之差 $r_{k+1}-r_k$ 正比于倾角之差 $(i_{k+1}-i_k)$．后者可计算如下，按照式(3.1)

$$\begin{cases} \text{第 } k \text{ 级条纹} \Delta L = k\lambda, \ \cos i_k = \dfrac{k\lambda}{2nh}, \\ \text{第 } k+1 \text{ 级条纹} \Delta L = (k+1)\lambda, \ \cos i_{k+1} = \dfrac{(k+1)\lambda}{2nh}, \end{cases}$$

故

$$\cos i_{k+1} - \cos i_k = \frac{\lambda}{2nh}.$$

这里 λ 为真空中波长．又

$$\begin{aligned} \cos i_{k+1} - \cos i_k &\simeq \left(\frac{d\cos i}{di}\right)_{i=i_k} (i_{k+1} - i_k) \\ &= -\sin i_k (i_{k+1} - i_k), \end{aligned}$$

于是得到

$$\Delta r = r_{k+1} - r_k \propto i_{k+1} - i_k = \frac{-\lambda}{2h\sin i_k}, \qquad (3.2)$$

式中负号表明上述 $r_{k+1} < r_k$ 的事实．式(3.2)表明，i_k 愈大，$|\Delta r|$ 就愈小，亦即在干涉图样中离中心远的地方条纹较密；此外，h 愈大，$|\Delta r|$ 也愈小，亦即较厚的膜产生的等倾条纹较密．最后，我们研究一下，当膜的厚度 h 连续变化时干涉条纹发生的变化．中心点O的光程差 $\Delta L = 2nh$，每当 h 改变 $\lambda/2n$ 时，ΔL 改变 λ，中心斑点的级数改变 1．设原来 $h = h_k = k\lambda/2n$，这时中心斑点的级数为 k，从中心算起的第1，2，3，…根条纹的级数顺次为 $k-1$，$k-2$，…．当 h 增大到 $h_{k+1} = (k+1)\lambda/2n$ 时，中心斑点的级数变为 $k+1$，从中心算起的第1，2，…根条纹的级数顺次变为 k，$k-1$，…．换句话说，原来的中心斑点变成第 1 圈，原来的第 1 圈变成第 2 圈，……．同时在中心生出一个新的斑点．所以当 h 连续增大时，我

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

们看到的是中心强度周期地变化着，由这里不断生出新的条纹，它们象水波似地发散出去．对于 h 连续减小的情形可作同样的分析．这时我们看到的景象恰好与上面描述的相反，圆形条纹不断向中心会聚，直到缩成一个斑点后在中心消失掉．由于中心强度每改变一个周期(即吐出或吞进一个条纹)，就表明 h 改变了 $\lambda/2n$，利用这种方法可以精确地测定 h 的改变量．

*3.2 观察等倾条纹时扩展光源的作用

上面一直考虑的是点光源情形．如果换成扩展光源，等倾干涉条纹的反衬并不受影响．为了说明这一点，我们在扩展光源上任取另一点 Q'(见图3-5)．图中幕上 C_1 和 C_2 是从 Q 点发出的光线形成的同一干涉条纹上的点．从 Q' 点发出的光线中能通过 C_1 或 C_2 的(图中实线)在未到透镜 L 之前，必与从 Q 到 C_1 或 C_2 的光线(图中虚线)平行，因此它们具有相同的倾角和光程差．也就是说，从 Q' 点发出的光线在幕上产生和 Q 点完全一样的干涉图样．所以若将点光源换为扩展光源，等倾干涉条纹的反衬不受影响．但另一方面，亮纹的强度却因之而大大加强，使干涉图样更加明亮．所以在观察等倾条纹时，采用扩展光源是有利无害的．目前，实验室中常用激光光束为光源，在观察等倾条纹时，人们反而嫌激光光束的方向性太强了，不能使幕上的干涉条纹完满地呈现，为此有意插入一块毛玻璃，以便把激光束转化为扩展光源．

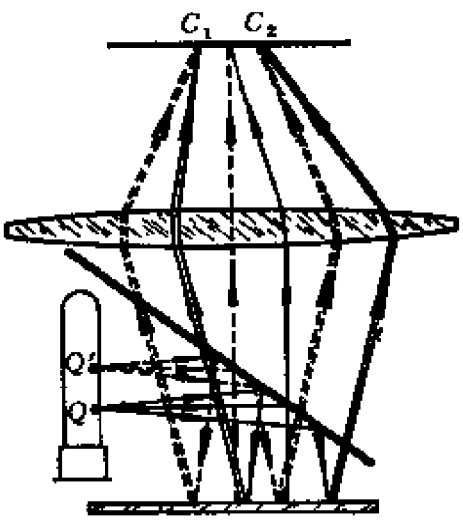


图 3-5 用扩展光源观察等倾条纹

*3.3 薄膜干涉的定域问题

由于薄膜干涉的内容太多，我们把它分成两节来叙述，§2讨论了薄膜表面的等厚条纹，§3 讨论了无限远的等倾条纹．这里我们再讨论一个共同问题——干涉条纹的定域问题，作为两节中涉及扩展光源问题的小结．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

如2.1节所述，当来自点光源的光束射在薄膜上时，在上下表面两束反射光的交迭区内任一点都有干涉条纹(参见图2-1和2-2)．这种条纹叫做非定域条纹．在扩展光源的照射下是否在交迭区的任何地方都能观察到干涉条纹？事实并非如此．由于光源表面各点是不相干的，在干涉场中只有某个曲面上条纹的反衬度 γ 最大，在此曲面前后一定范围内还有可观测的干涉条纹．超出此范围，则因 $\gamma \to 0$ 而使干涉条纹变得无法辨认．这种条纹叫做定域条纹，反衬度最大的曲面叫定域中心，定域中心前后可看到条纹范围的线度叫做定域深度．可以看出，条纹的定域问题，本质上是个空间相干性问题①．定域中心在什么地方？定域深度的大小由哪些因素决定？这些问题都可用 1.5 节所述的理论来定性地回答．

如图3-6，考虑来自同一点源 Q，并在某个任意场点 P 交迭的一对反射线．设相应的入射线在 Q 点所夹的角度为 $\Delta\theta$，光源的横向有效宽度为 b，根据式(1.12)，要使 P 的条纹有一定的反衬度，须有

$$b\,\Delta\theta < \lambda.$$

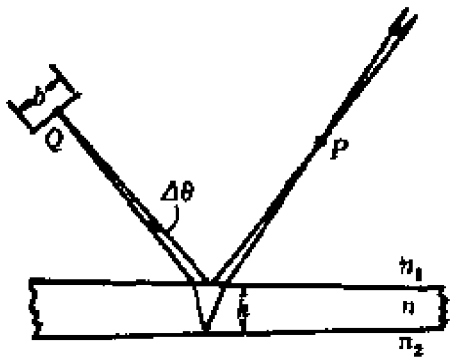


图 3-6　条纹的定域与空间相干性

上式表明，定域中心由 $\Delta\theta = 0$ 决定，即它是同一入射线的两反射线的交点，在该处反衬度接近于 1，并允许光源有任意的宽度 b．定域深度的大小由相干范围的孔径角 $\Delta\theta_0$ 决定：

$$\Delta\theta_0 \simeq \frac{\lambda}{b},$$

它与光源的宽度成反比．

现在来具体分析一下各种薄膜的定域中心在什么地方．对于厚度均匀的薄膜(图3-7(a))，同一入射线的两反射线彼此平行，亦即它们的交点在无穷远．故无穷远正是均匀薄膜的定域中心，这就无怪乎在 3.2 节中我们看到，观察无穷远的等倾条纹时扩展光源有利而无害了．对于厚度不均匀的薄膜，随着上下表面交棱的方位不同，同一入射线的两反射线或交

① 一些早年的书籍中常把干涉装置分成定域的和非定域的，还说分波前装置是非定域干涉装置，分振幅装置是定域干涉装置，等等．我们认为，这些说法是不甚妥当的．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

于薄膜之前（图3-7(b)），或延长线交于薄膜之后(图3-7(c)）．总之，定域中心并不在薄膜的表面上．但只要薄膜的厚度小，定域中心不会离薄膜表面很远，只要给光源的有效宽度 b 以一定的限制①，便可使薄膜的表面纳入定域深度之内．§2中所述薄膜表面的等厚条纹便是这样观察到的．

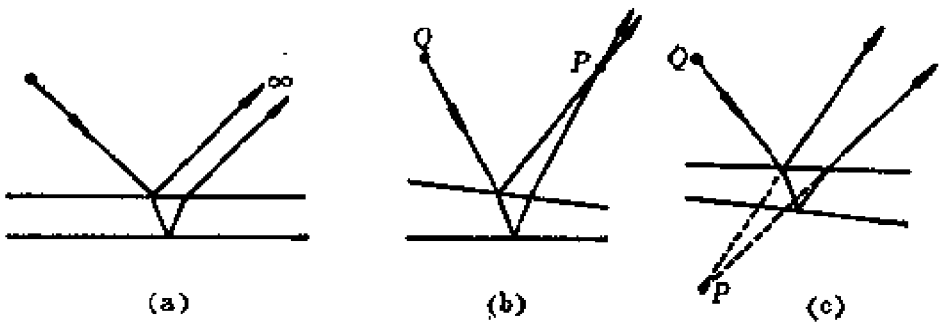


图 3-7　均匀和非均匀薄膜的定域中心

§2 中曾说，薄膜表面的干涉条纹可在扩展光源的照明下用肉眼直接观察．有关这个问题还需作些补充说明．第一，眼睛是可以调焦的．当我们看到条纹时，我们并不知道它是否在薄膜表面还是它的前或后某个地方．若定域中心离表面太远，为了"捕捉"到条纹，眼睛需要一个"搜索"过程．一旦捕捉到条纹，我们就通过眼睛的调节，力图把它们看清楚，这时我们才能找到定域中心．由于我们不习惯于把眼睛聚焦在空无一物的空间，为了找到定域中心以便看到清晰的条纹，可手持一小纸片在薄膜前后移动，来帮助眼睛调节焦距．第二，应当指出，扩展光源在这里也是有利无害的．因为眼睛的瞳孔很小，它只接收来自扩展光源上一部分点源的反射线．例如图3-8中，在 P_1 点交迭的反射线中，只有来自光源表面 Q_1,Q_2 之间的点源，才能射入瞳孔．所以决定 P_1 点条纹反衬度的是 Q_1,Q_2 间的距离，而不是整个扩展光源的宽度．同理，决定 P_2 点条纹反衬度的光源有效宽度只是点源 Q_3,Q_4 间的距离．所以在肉眼观察的场合下，因为瞳孔的限制，较大的扩展光源并不妨碍干涉条纹的反衬度，恰恰相反，若不是光源足够大，我们同时只能看到薄膜表面上很小一块面积内的干涉条纹．例如当图3-8中光源只限于 Q_1 到 Q_2 的一块，由于没有反射光能够进入瞳孔，

① 眼睛的瞳孔可以对光源的有效宽度起限制作用，参见下文．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

我们就看不到 P_2 处的干涉条纹．所以光源的实际大小决定了我们观察的视场．而影响反衬度的光源有效宽度可用接收条纹的光瞳来限制，这便是采用扩展光源照明有利无害的道理．

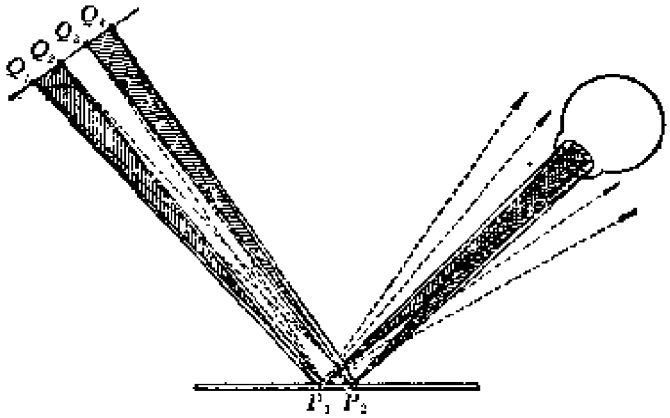


图 3-8　瞳孔对光源有效宽度的限制

思　考　题

1．从以下几个方面比较等厚条纹和等倾条纹的区别：

(1) 两者对光源的要求和照明方式有何不同？能否用扩展光源观察等厚条纹？用平行光观察等倾条纹将会怎样？

(2) 两者的接收(观测)方式有何不同？如果用一小片黑纸遮去薄膜表面某一部位，这将分别给等厚条纹和等倾条纹带来什么影响？

2．在傍轴条件下，等倾条纹的半径与干涉级数有怎样的依赖关系？牛顿圈的情况怎样？两者有区别吗？你怎样把二者区分开来？

3．如果薄膜上、下表面稍有夹角，我们能观察到等倾条纹吗？这时干涉条纹在哪里？

§4　迈克耳孙干涉仪　光场的时间相干性

4.1　迈克耳孙干涉仪的结构

迈克耳孙干涉仪结构和光路如图4-1和图 4-2 所示，其中 M_1 和 M_2 是一对精密磨光的平面镜，G_1 和 G_2 是厚薄和折射率都很均匀的一对相同的玻璃板．在 G_1 的背面镀了一层很薄的银膜

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

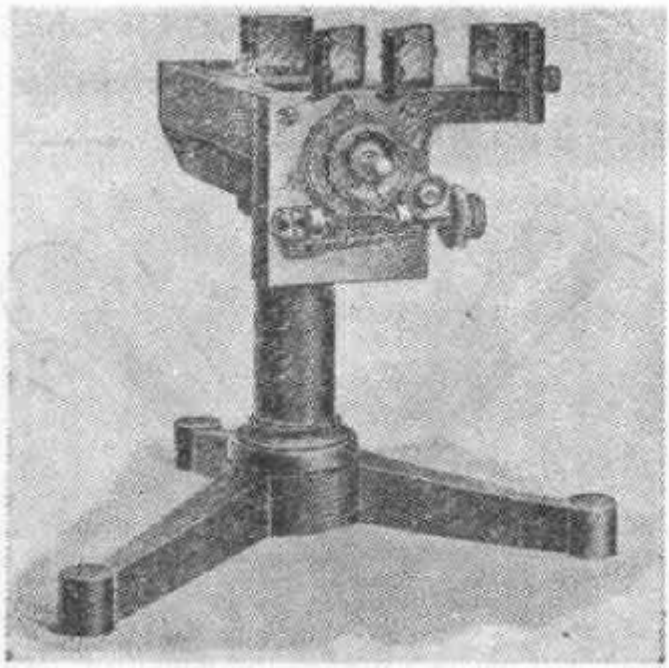


图 4-1　迈克耳孙干涉仪

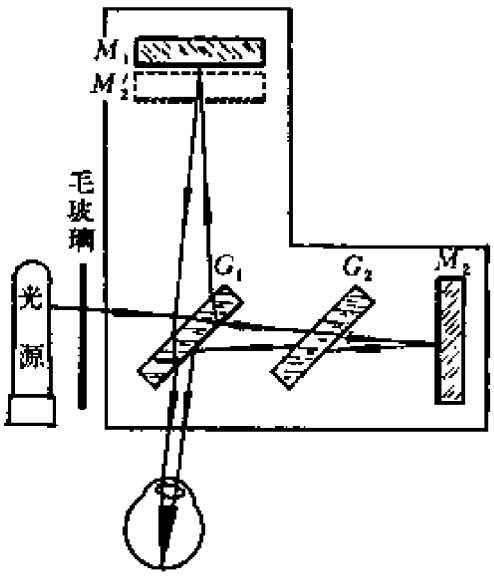


图 4-2　迈克耳孙干涉仪光路图

（图 4-2 中以粗线表示镀银面），以便从光源射来的光线在这里被分为强度差不多相等的两部分．其中反射部分 1 射到M_1，经M_1反射后再次透过G_1进入眼睛；透射部分 2 射到M_2，经M_2反射后再经G_1上的半镀银面反射到眼睛．这两相干光束中各光线

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

的光程差不同，它们在网膜上相遇时产生一定的干涉图样．为了使入射光线具有各种倾角，光源是扩展的．如果光源的面积不够大，可放一磨沙玻璃或凸透镜，以扩大视场．玻璃板 G_2 起补偿光程作用：反射光束 1 通过玻璃板 G_1 前后共三次，而透射光束 2 只通过G_1一次；有了G_2，透射光束将往返通过它两次，从而使两光束在玻璃媒质中的光程完全相等．如果光源是单色的，补偿与否无关紧要．但下面我们将看到，在使用白光时，就非有补偿板G_2不可了．

迈克耳孙最早是为了研究光速问题而精心设计了上述装置的（A.A.Michelson，1881年），它是一种分振幅的干涉装置，与薄膜干涉相比，迈克耳孙干涉仪的特点是光源、两个反射面、接收器（观察者）四者在空间完全分开，东西南北各据一方，便于在光路中安插其它器件．利用它既可观察到相当于薄膜干涉的许多现象，如等厚条纹、等倾条纹，以及条纹的各种变动情况，也可方便地进行各种精密检测．它的设计精巧，用途广泛，不少其它干涉仪是由此派生出来的．可以说，迈克耳孙干涉仪是许多近代干涉仪的原型．迈克耳孙因发明干涉仪器和光速的测量而获得1907年诺贝耳物理学奖金．

4.2 干涉条纹

现在我们来分析迈克耳孙干涉仪产生的各种干涉图样．设 M_2'是 M_2 对G_1上半镀银面所成的虚像(图4-2)．从观察者看来，就好象两相干光束是从M_1和M_2'反射而来的，因此看到的干涉图样与M_1和M_2'间的“空气层”产生的一样．在M_1和M_2之一或两者的后面有螺旋，用来调节它们的方向．如果我们调节这些螺旋，使 M_1 和 M_2'十分精确地平行，当观察者的眼睛对无穷远调焦时，就会看到圆形的等倾干涉条纹．如果 M_1 和 M_2'有微小的夹角，观察者就会在它们表面附近看到楔形“空气层”的等厚条纹．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

平面镜 M_1 是安装在承座 C 上的，承座 C 可沿精密的轨道 T 前后移动．承座的移动是靠丝杠 V 来控制的．当我们转动丝杠 V 时，M_1 前后平移，从而改变了 M_1 和 M_2' 之间的距离，或者说改变了其间"空气层"的厚度，这时我们便会看到干涉图样发生相应的变化．

由此可见，利用迈克耳孙干涉仪可以实现我们在前面分析过的各种薄膜的干涉图样．现在我们再结合着迈克耳孙干涉仪将它们系统地回顾一下．

首先看单色光的干涉条纹．图4-3是各种条纹的照片，图4-4是产生这些条纹时 M_1 和 M_2' 相应的位置．

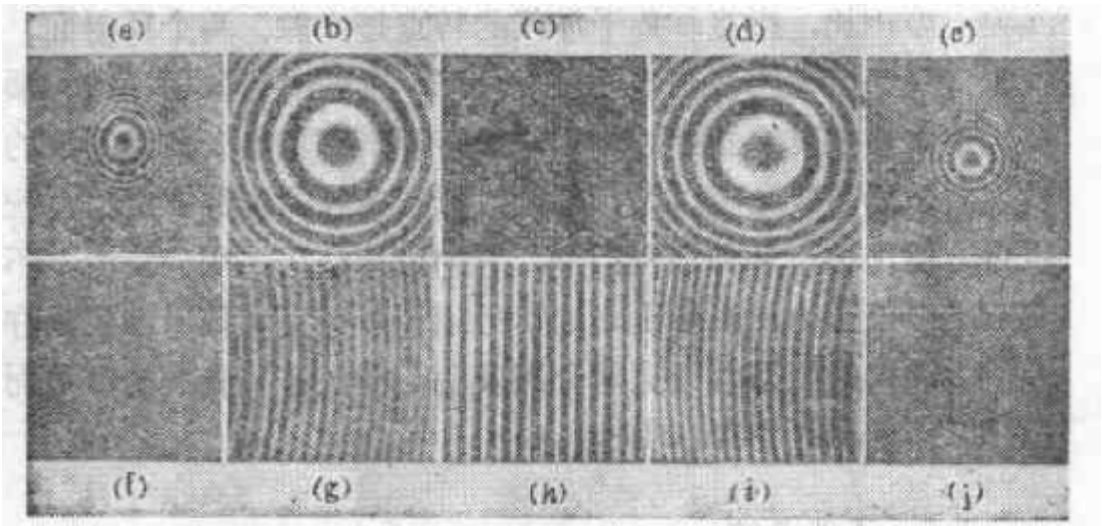


图 4-3　迈克耳孙干涉仪产生的各种干涉条纹

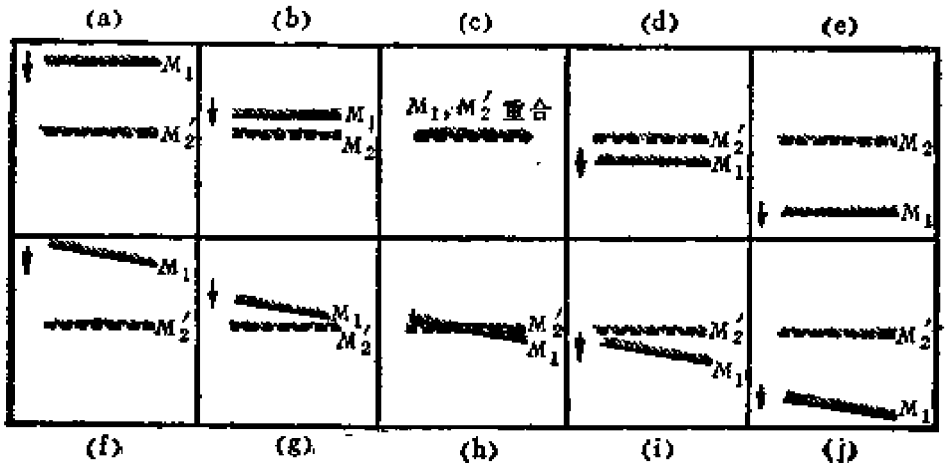


图 4-4　产生图 4-3 中各种条纹时 M_1 和 M_2' 的相应位置

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

（1）等倾条纹

调节M_1,M_2的方向，使M_1和M_2'平行(如图4-4(a)—(e))，我们将在无穷远看到如图4-3(a)—(e)中所示的等倾条纹．起初把M_1放在离M_2'较远(几个厘米)的位置，这时条纹较密(见图(a))．将M_1逐渐向M_2'移近，我们将看到各圈条纹不断缩进中心．当M_1靠得和M_2'较近时，条纹逐渐变得愈来愈稀疏（见图(b))．直到M_1与M_2'完全重合时($\Delta L=0$)，中心斑点扩大到整个视场(见图(c))．假若我们沿原方向继续推进M_1，它就穿M_2'而过，我们又可看到稀疏的条纹不断由中心生出（见图(d))．随着M_1到M_2'的距离不断加大条纹又重新变密(见图(e))．

（2）等厚条纹

当M_1和M_2'有微小夹角时(如图4-4(f)—(j))，我们将在它们的表面附近看到如图4-3(h)—(j)中所示的条纹．仍和前面一样，我们设想起初M_1距M_2'较远，由于光源是扩展的，这时条纹的反衬极小，甚至看不到（见图(f))．当M_1与M_2'的间隔逐渐缩小，开始出现愈来愈清晰的条纹．不过最初这些条纹不是严格的等厚线，它们两端朝背离M_1和M_2'的交线方向弯曲（见图(g))，在M_1与M_2'靠近的过程中，这些条纹不断朝背离交线的方向（向左）平移．当M_1和M_2'十分靠近，甚至相交的时候，条纹变直了(见图(h))．假若我们沿原方向继续推进M_1，使它重新远离M_2'，条纹将朝交线的方向平移(不过这时交线已移到视场左侧，条纹仍向左移)．同时，在此过程中随着M_1和M_2'距离的增大，条纹逐渐朝相反的方向弯曲(见图(i))．当M_1和M_2'的距离太大时，条纹的反衬逐渐减小，直到看不见(见图(j))．

由于干涉仪中M_1和M_2'的相对位置是看不见的，这只能从条纹的形状和变化规律反过来推断．因此熟悉以上各种条纹出现和变化的规律是十分重要的．

在迈克耳孙装置的调节技术中，或在干涉精密测长和精密定

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

位工作中，人们需要确定 M_1 与 M_2' 在视场范围内是否相交和交线的位置，以此作为出发点进行下一步的调节．下面就来讨论一下这个问题．在 M_1 与 M_2' 相交的地方，表现光程差 $\Delta L = 0$，由于存在半波损，在交线处应呈现暗纹．但是，在单色光照明时，不是交线的位置上也有暗纹，从而使我们无法辨认哪条暗纹是交线的位置．要判断交线的位置，需采用白光照明，而且必须加补偿板 G_2．因为第 1 路光束在 G_1 中透射两次，由于玻璃的色散效应，白光中各种波长的光程不同，这相当于不同颜色的 M_1 的像在不同位置上(见图 4-5(a))，若无补偿板 G_2，反射像 M_2' 无色散，它与不同波长的 M_1 像交线位置不重迭，从而没有统一的 0 级条纹，干涉场中不出现全黑的暗线．有了补偿板 G_2，反射像 M_2' 也发生色散(见图4-5(b))，其结果是各种波长的 M_1，M_2' 交线沿观察者的视线重合起来，实现了“0 级干涉条纹无色散”，在该处呈现一条全黑的暗线①．除此之外其它地方不同波长的暗纹都不重迭．看到的只是明暗不同的彩色条纹，对称地排列在那条全黑的暗纹两侧．这条暗纹便是干涉两臂间无程差的位置所在．精确地标定此位置对于精密测长是十分必要的．

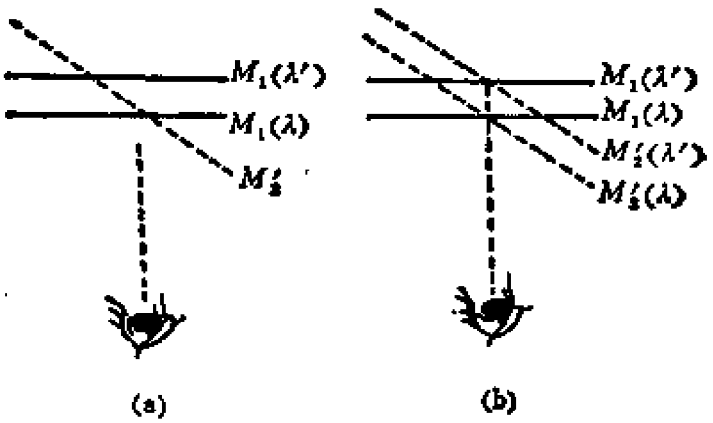


图 4-5　寻找零程差的位置与补偿板的作用

① 光束 1 和光束 2 分别在分束板 G_1 背面的内侧和外侧反射一次，位相突变情况相反，存在半波损．如果 G_1 背面镀银，位相变更非 0 非 π，情况比较复杂，交线位置上并不全黑，往往呈暗紫色．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

4.3 光源的非单色性对干涉条纹的影响

除了找零程差位置时动用了一下白光外，本节前面介绍的基本上是单色光照明下干涉条纹的特点．从光谱的角度来看，纯粹的单色光意味着无限窄的单一谱线，实际上这是不存在的．任何谱线都有一定的线宽 $\Delta\lambda$(见图 4-6(a))．在光学波段里，通常认为$\Delta\lambda\sim10$Å量级的谱线单色性较差；$\Delta\lambda\sim10^{-2}$Å量级时单色性已较好；$\Delta\lambda\sim10^{-5}$Å量级时单色性极好．此外，用高分辨本领的光谱仪器还经常发现，许多看来单色的谱线实际上由波长十分接近的双线或多重线组成(见图4-6(b))．例如钠黄光是由$\lambda_1=5890$Å和$\lambda_2=5896$Å两条谱线组成；水银光谱中也有一黄色双线，$\lambda_1=5770$Å，$\lambda_2=5791$Å．当然双线或多重线中每条谱线仍有自己的线宽．下面我们仅就双线结构和单色线宽这两个因素讨论一下非单色性对迈克耳孙干涉仪中干涉条纹反衬度的影响．

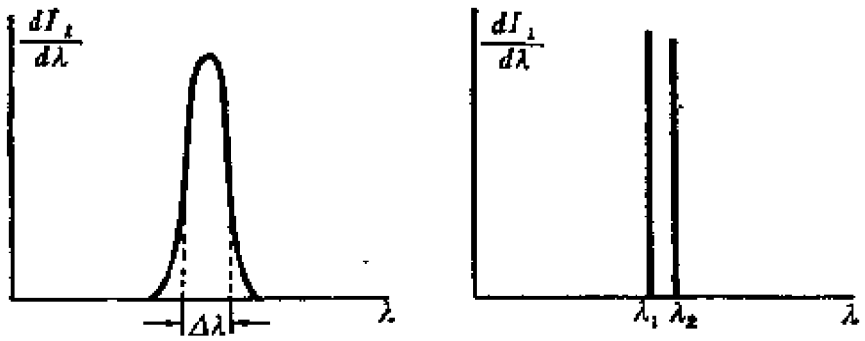


图 4-6 谱线的非单色性

（1）双线结构使条纹反衬度随 ΔL 作周期性变化

为简单起见，假定迈克耳孙干涉仪中两臂光强相等，两束单色光相干迭加后强度 I 随位相差 δ 的变化为

$$I(\delta)=I_0(1+\cos\delta).$$

(参见第二章式(4.1))．对于视场中心，$\delta=k\Delta L$，这里$k=2\pi/\lambda$，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

代入上式得

$$I(\Delta L)=I_0[\,1+\cos(k\Delta L)\,]. \tag{4.1}$$

若用具有双线光谱的光源(如钠光灯)照明时，每条谱线产生的干涉强度分布为

$$\begin{cases} I_1(\Delta L)=I_{10}[\,1+\cos(k_1\Delta L)\,], & k_1=2\pi/\lambda_1; \\ I_2(\Delta L)=I_{20}[\,1+\cos(k_2\Delta L)\,], & k_2=2\pi/\lambda_2. \end{cases}$$

进一步设 $I_{10}=I_{20}=I_0$ (两谱线等强)，总强度是它们的非相干迭加：

$$\begin{aligned} I(\Delta L)&=I_1(\Delta L)+I_2(\Delta L) \\ &=I_0[\,2+\cos(k_1\Delta L)+\cos(k_2\Delta L)\,] \\ &=2I_0\left[1+\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\Delta L\right)\cos(k\Delta L)\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $k=(k_1+k_2)/2$，$\Delta k=k_1-k_2\ll k$，由此可得反衬度：

$$\gamma(\Delta L)=\left|\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\Delta L\right)\right|. \tag{4.3}$$

图4-7画出 I_1，I_2和 I，γ 随 ΔL变化的曲线．可以看出，条纹的反衬度以空间频率 $\Delta k/2\pi=(1/\lambda_1)-(1/\lambda_2)\simeq-\Delta\lambda/\lambda^2$ 变化着，其中 $\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_2\ll\lambda\simeq\lambda_1\simeq\lambda_2$．

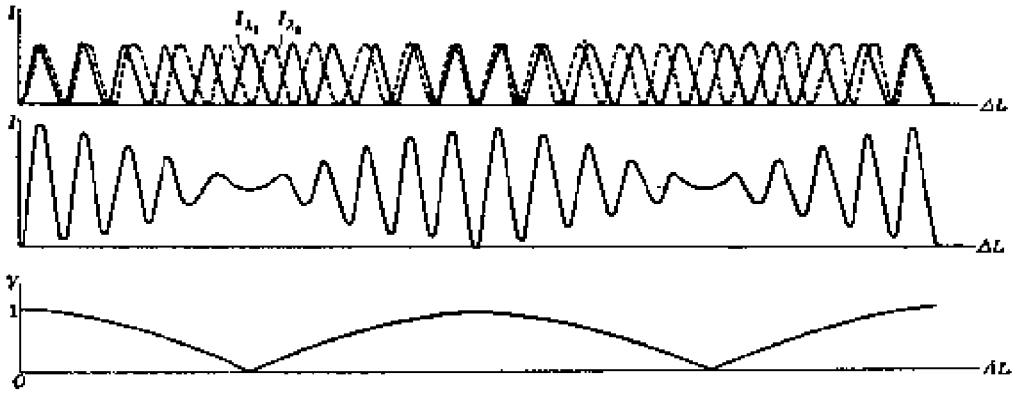


图 4-7　双线结构对条纹反衬度的影响

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

由图 4-7 可以更清楚地看出反衬度变化的原因．设开始时两臂等光程(全黑条纹)．这时反衬度为 1，条纹清晰．现移动一臂中的镜面以改变光程差ΔL．由于两谱线波长不同，I_1和I_2的峰与谷逐渐错开，条纹的反衬度下降．直到错过半根条纹，一个的峰与另一个的谷恰好重迭时，反衬度降到 0，条纹不见了，视场完全模糊．这时两套条纹移过视场中心的根数N_1, N_2之间有如下关系：

$$\Delta L = N_1\lambda_1 = N_2\lambda_2 = \left(N_1 - \frac{1}{2}\right)(\lambda_1 + \Delta\lambda),$$

由此解得

$$N_1 = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}, \tag{4.4}$$

继续移动镜面，当视场中心再移过这么多根条纹时，两套条纹的峰与峰、谷与谷重新重合，反衬度完全恢复．如此下去，周而复始．由此可见，反衬度变化的空间周期是$\Delta L = 2N_1\lambda_1$，空间频率为其倒数：

$$\frac{1}{2N_1\lambda_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} \simeq -\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}, \tag{4.5}$$

这正是前面的 $\Delta k/2\pi$．

（2）单色线宽使条纹反衬度随 ΔL 单调下降

谱线的线型 $dI/d\lambda$ 要由谱密度 $i(\lambda) = dI_\lambda/d\lambda$ 来描述（参见绪论中式(0.6)），而总光强为

$$I_0 = \int_0^\infty i(\lambda)d\lambda,$$

为了计算方便，也可用 $k = 2\pi/\lambda$ 作自变量：

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)dk. \tag{4.6}$$

系数$1/\pi$ 的选择带有人为约定的性质．干涉仪中单一波长的光强随 ΔL 的变化是$i(k)[1 + \cos(k\Delta L)]$，不同波长的光强非相干迭加的结果可以写成积分形式：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$I(\Delta L)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)[\,1+\cos(k\Delta L)]dk$$
$$=I_0+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)\cos(k\Delta L)dk. \qquad (4.7)$$

上式第一项是常数项，第二项随ΔL起伏.积分计算要求知道函数$i(k)$的具体形式，即光谱线型．为了对$I(\Delta L)$的函数作定性的估计，我们采用一个简化模型，即认为$i(k)$在$k=k_0\pm\Delta k/2$范围内等于常数$\pi I_0/\Delta k$，其余地方为0．常数如此选择，为了保证$i(k)$满足归一条件(4.6)．于是式(4.7)化为

$$I(\Delta L)=I_0\left[1+\frac{1}{\Delta k}\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2}\cos(k\Delta L)dk\right]$$
$$=I_0\left[1+\frac{\sin(\Delta k\Delta L/2)}{\Delta k\Delta L/2}\cos(k_0\Delta L)\right], \qquad (4.8)$$

由此得反衬度

$$\gamma(\Delta L)=\left|\frac{\sin(\Delta k\Delta L/2)}{\Delta k\Delta L/2}\right|. \qquad (4.9)$$

上式表明，当ΔL由0增到下列最大值时

$$\Delta L_M=\frac{2\pi}{\Delta k}=\frac{\lambda^2}{|\Delta\lambda|}, \qquad (4.10)$$

反衬度单调下降到0①．ΔL_M称为最大光程差．超过此限度，干涉条纹已基本上不可见．以氪(Kr^{86})的橙黄色谱线为例，$\lambda=6057$Å，$\Delta\lambda=4.7\times10^{-3}$Å，由上式算得$\Delta L_M=78$cm．$I(\Delta L)$和$\gamma(\Delta L)$的曲线见图4-8．

① 当$\Delta L>\Delta L_M$时，$I(\Delta L)$还会稍有回升，这是我们采用的线型不太实际造成的．若采用比较实际的线型，$i(k)$不是突然跃变到0的话，$I(\Delta L)$一直随ΔL单调下降到0．那时没有一个截然的界限ΔL_M，但其数量级仍由式(4.10)决定．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

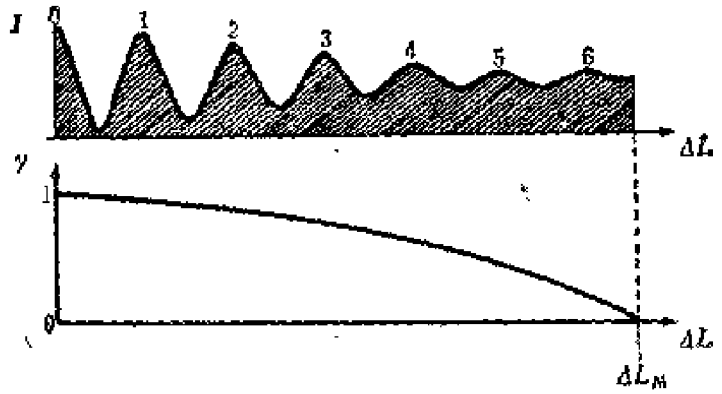


图 4-8　单色线宽对条纹反衬度的影响

*4.4　傅里叶变换光谱仪

光谱仪是分析光源中谱分布的仪器，传统的光谱仪(如以前学过的棱镜摄谱仪和下面将要学的法布里-珀罗干涉仪和光栅光谱仪)都是色散型的，它们的共同特点是把不同波长的光在空间上(角度上)分开。4.3节的讨论启发我们开辟一条新的途径——把时间频谱转化为空间频谱。该节的线索是已知光源的谱分布$i(k)$，求迈克耳孙干涉仪中光强随ΔL的函数关系$I(\Delta L)$。因$I(\Delta L)$是可测量的，故我们可以倒过来提问题：已知$I(\Delta L)$，是否可以求光谱$i(k)$？对于简单的情形，如4.3节讨论的双线情况，我们曾利用测得的条纹数N，求得波长差$\lambda_1-\lambda_2$，这实际上解决的就是上述反演问题。在一般情况下，由$i(k)$求$I(\Delta L)$的公式是(4.7)：

$$I(\Delta L)-I_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)\cos(k\Delta L)dk,$$

这在数学上叫做傅里叶余弦变换，它的逆变换早就有了(参见第五章§5习题)：

$$i(k)=2\int_0^\infty[I(\Delta L)-I_0]\cos(k\Delta L)d(\Delta L). \qquad (4.11)$$

用此式可从已知的$I(\Delta L)$求出$i(k)$来。人们根据这个原理设计出一种新型的光谱仪——傅里叶变换光谱仪。

傅里叶变换光谱仪如图4-9所示，它前面就是一台迈克耳孙干涉仪，其中镜面M_2以匀速v运动，从而$\Delta L=2vt$，通过光电接收器将干涉场中

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

光强函数$I(\Delta L)$转化为时间讯号$I(t)$。也可以再由同步装置，带动记录纸以同样速度沿x方向推移，直接画出讯号曲线$I(x)$来（$x=vt=\Delta L/2$）。傅里叶反演的运算由一套电子计算机系统来处理，最终输出一张$i(k)$的光谱曲线图。

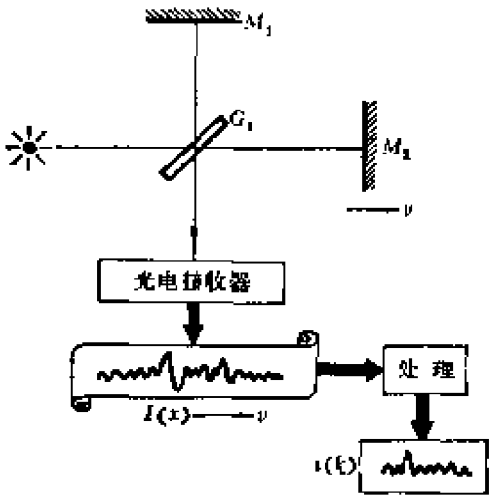


图4-9 傅里叶变换光谱仪

这种在干涉仪基础上发展起来的新型光谱仪，国际上目前已有定型产品。在传统的色散型光谱仪中，衍射效应限制了仪器的分辨本领。而干涉型变换光谱仪入射截面大，分辨本领高。理论上它的分辨本领可以无限提高，只要光程差ΔL可以无限增大，事实上由于镜子可移动的距离总是有限的，因而降低了一些分辨本领。此外这种光谱仪还有测量时间短、受干扰小、讯噪比高、结构简单等优点，它的出现标志着精密光学仪器朝简单、朴实、但与更复杂的电子数据处理系统相配合的方向发展的新趋势。

4.5 精密测长与长度的自然基准

随着科学技术的发展，对度量衡方面的要求愈来愈高。现代很多精密机械和仪器零件的尺寸必须准确到μm数量级。过去国际上长度的标准是以保存在巴黎国际度量衡局的米原器为依据的。这米原器用铂铱合金制成，从当时的科学技术水平看来它是足够稳定的。然而它已不能满足现代科学技术发展的要求。实际上已发现米原器上两刻痕间的距离已发生了约0.7μm的变化。所以建立新的更可靠的长度标准器问题便提到日程上来了。在一定条件下产生的光谱线的波长是较理想的长度标准，因为它不但高度稳定，而且也便于复制。但是怎样能将实物的长度和波长进行比较呢？在迈克耳孙干涉仪器上完成的最重要工作便是将标准米的长度通过光的波长表示出来。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

前已述及，当迈克耳孙干涉仪中的 M_2' 和 M_1 稍有夹角时，出现的是平行且等距的等厚干涉条纹．M_1 镜每移动 $\lambda/2$ 的距离，在视场中就有一个条纹移过，因此数出移过条纹的数目 N，即可得知镜子 M_1 移动的距离 l，因为

$$l = N\frac{\lambda}{2}.$$

上式表明，要想长度测量得准，必须 N 记录得准确和 λ 单一稳定．须知，即使厘米量级的长度，N 的数目已上万．现代在干涉测长仪中已采用光电自动计数技术，而且在逻辑电路上专有可逆计数器，以消除扰动引起的误记．对于光的波长，除保证测量环境恒压措施以外，还采用稳频技术以消除光源内部不稳定性造成的影响，由于采用光电脉冲计数等措施，目前 N 的数值可以读到一两位小数，因此长度的测量可准确到 $\lambda/20$，它相当于 $10^{-2}\mu m$，这种精度已能满足当前大部分精密测量的要求．

前已指出，由于光源非单色性的影响，随着光程差 ΔL 加大，干涉条纹的反衬度下降，这便限制了干涉测长的量程 L_M，

$$l_M \leqslant \frac{1}{2}\Delta L_M = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}.$$

普通单色光源的线宽约0.01Å的量级，因此能用迈克耳孙干涉仪直接测量的长度不过十几厘米．要测量较大的长度，则需采用特殊的实验技术．这项工作是利用若干个居间的长度标准器逐步完成的．长度标准器的结构如图 4-10 所示，其中 E_1 和 E_2 是一对平面镜，其间距离 l 规定了标准器的长度．每个标准器的长度约为另一个的整数倍，量度时，首先将最短的标准器放在干涉仪器上，将其长度与波长进行比较后，再逐次地按长度顺序将各标准器两两进行比较，最后再将最长的标准器与标准米尺比较．下面我们只简单地介绍一下将第一个长度标准器和波长比较的方法．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

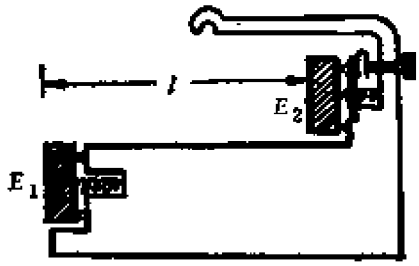


图 4-10　长度标准器

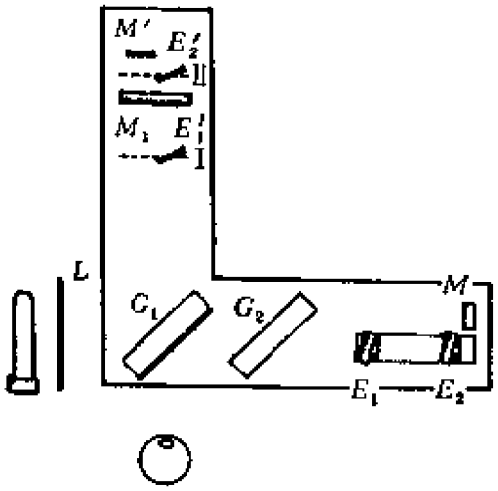


图 4-11　干涉比长仪

如图4-11所示，将长度标准器代替干涉仪中的固定平面镜 M_2，并在其旁放置另一平面镜 M．E_1'，E_2'和 M'分别是E_1，E_2和 M 经 C_1 背面反射所成的虚像．调节 E_1，E_2和 M 的方向，使E_1'和E_2'彼此平行，但与 M_1 略有夹角，而 M'与 M_1 精确平行．利用在白光照射下M_1 分别与E_1' 和E_2' 间形成的等厚条纹来确定M_1与它们相交的位置 Ⅰ，Ⅱ，利用在单色光照射下M_1与 M'之间的等倾条纹来确定这两位置 Ⅰ，Ⅱ 间的距离 l 是单色光波长 $\lambda/2$的多少倍．这倍数的整数部分就是当 M_1由 Ⅰ 移动到 Ⅱ 的过程中在中心消失的条纹数，剩下的零头也可以估计到1/50根条纹左右(相当于 $\lambda/100$ 的长度)．

上述干涉度量工作最初是由迈克耳孙于1892年完成的，他所选用的单色光谱线是镉(Cd)红线．经过他本人的测量和后人的改进，国际上曾确认镉红线在如下标准状态的干燥空气中的波长 $\lambda_{Cd}=6438.4696$Å．空气的标准状态是15℃，760mmHg的压强 ($g=980.665 cm/s^2$)，含0.3%容量的 CO_2．但是任何光谱线的波长总有一定的范围，亦即它们不是严格单色的．为了使上述度量工作更精确，要求所选光谱线的线宽尽量小．目前发现镉红线在这方面还不是最理想的．经过一些国家科学工作者的努

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

力，国际度量衡委员会于1960年决定采用原子量为86的氪同位素（Kr^{86}）的一条橙色光谱在真空中波长 λ_{Kr} 为长度的新标准．规定

$$1\ \mathrm{m} = 1650763.73\lambda_{Kr}.$$

长度基准从米原器这种实物基准改为光波这种自然基准，是计量工作上的一大进步．近年来由于激光技术的发展，可以得到单色性更好的光，国际上正在酝酿进一步用激光的波长代表氪灯的波长来做长度的基准(详见第九章6.3节)．

4.6 光场的时间相干性

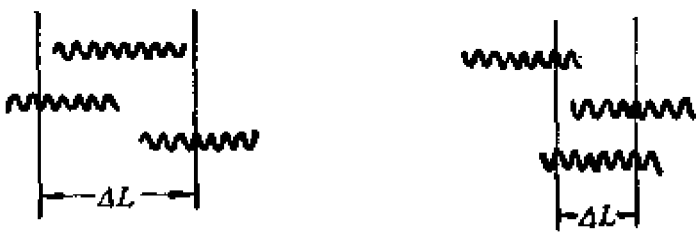
1.5节中曾指出，空间相干性问题是扩展光源引起的．对于点光源，不存在这个问题，它激发的波面上各点总是相干的．然而这结论并不适用于波线，原因是微观客体每次发光的持续时间 τ_0 有限(参见第二章3.3节)，或者说每次发射的波列长度 l_0 有限．τ_0 和 l_0 的关系是

$$l_0 = v\tau_0,$$

这里 $v = c/n$ 是波速，若用光程 $L_0 = n l_0$ 来表示，则有

$$L_0 = c\tau_0. \tag{4.12}$$

时间相干性讨论的问题是：在点源 S 的波场中沿波线相距多远的两点 P_1, P_2 是相干的？判断的方法是比较光程差 $\Delta L = (SP_1) - (SP_2)$ 与 L_0 的大小．当 $\Delta L > L_0$ 时，P_1, P_2 不可能同属一波列(见图4-12(a))，它们不可能相干；$\Delta L < L_0$ 时，P_1, P_2 有可



(a) (b)

图 4-12 光程差与波列长度的比较

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

能属于同一波列(见图4-12(b))，它们是部分相干的；$\Delta L=0$ 时，P_1，P_2完全相干．故L_0又称为相干长度，相应的传播时间 $\tau_0=L_0/c$ 称为相干时间．光源的时间相干性好坏，是以相干长度或相干时间来衡量的．

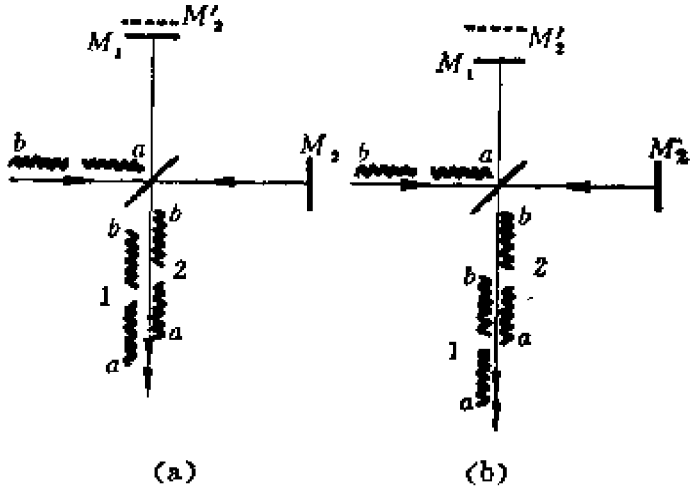


图 4-13　相干长度与最大光程差

相干长度L_0显然是与4.3节引入的最大光程差ΔL_M同量级，这可用图4-13所示的迈克耳孙干涉仪的光路来说明．光源先后发出两个波列 a和 b，长度皆为L_0．每个波列都被分束板分解为1，2 两列波，分别从M_1，M_2 反射回来相遇．a 和 b 之间没有固定的位相关系，只有它们之中同一波列分解出来的 1，2 两路波列有固定的位相关系，因而由不同波列分解出来的波列（如由 a 分解出来第 2 路波列与由 b 分解出来的第 1 路波列)之间也没有固定的位相关系．当两路光程差 $\Delta L<L_0$ 时（见图4-13(a))，由同一波列分解出来的 1，2 两路波列还有可能重迭，这时能够发生干涉，即干涉条纹应有一定的反衬度．假若两路光程差 $\Delta L>L_0$（见图4-13(b))，由同一波列分解出来的两路波列首尾错开，不再重迭，而相互重迭的是由前后两波列 a，b 分解出来的波列，这时便不能发生干涉了，即反衬度应当为 0．从这里我们看到，相干长度L_0与以前引入的最大光程差 ΔL_M 应属同一概念，至少它们应是同

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

数量级的．ΔL_M通过式(4.10)与谱线宽度 $\Delta\lambda$ 联系起来，故而相干长度 L_0 与 $\Delta\lambda$ 也应有同样关系．

以上我们通过 ΔL_M把 L_0 和 $\Delta\lambda$ 联系在一起，其实它们之间的关系完全可以独立推导．第二章告诉我们，定态光波可用复振幅来描述：

$$\tilde{U} = \tilde{A}e^{ikx},$$

这是一列沿 x 方向传播的单色平面波．作为严格的单色波，$\tilde{A}$是与 x 无关的常数，它的波列是无限长的．现考虑一线宽为 Δk 的谱线，它的复振幅应写为

$$\tilde{U}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{a}(k)e^{ikx}dk,$$

这里 $\tilde{a}(k)$描述谱线的线型．为了简单，我们采取与4.3节类似的矩形线型，设当 k 在 $k_0 \pm \Delta k/2$ 区间，$\tilde{a}(k) = \pi\tilde{A}/\Delta k$(常数)，超出此范围时为 0．于是

$$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{A}}{\Delta k}\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} e^{ikx}\,dk = \tilde{A}\frac{\sin(\Delta kx/2)}{\Delta kx/2}e^{ik_0x} \tag{4.13}$$

上式代表一个波包，它的振幅分布为 $\left|\tilde{A}\frac{\sin(\Delta kx/2)}{\Delta kx/2}\right|$，在 $x = 0$ 处振幅最大（等于A)；随着 $|x|$ 增大，振幅减少，在 $|x| = 2\pi/\Delta k = \lambda^2/|\Delta\lambda|$ 的地方振幅等于 0（见图 4-14），可以认为这里就是波列的端点．故波列长度 L_0 的量级为

$$L_0 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \tag{4.14}$$

这与式(4.10)给出ΔL_M的量级相同①．因频率 ν 与真空波长 λ 的

① 对不同的线型，公式中可以出现不同的数值因子，但它们的量级皆与 1 差不多．作为量级的比较，我们略去所有数值因子．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

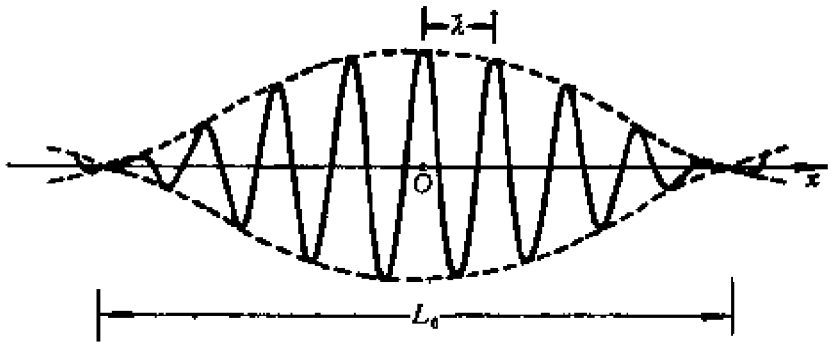


图 4-14　谱线宽度与波列长度的关系

关系为 $\nu = c/\lambda$，故 $\Delta\nu = -c\Delta\lambda/\lambda^2$，于是 $L_0 = c/\Delta\nu$，代入式(4.12)，得

$$\tau_0 \Delta\nu \simeq 1. \qquad (4.15)$$

式(4.14)和(4.15)表明，波列的空间长度和持续时间都是与谱线的宽度成反比的，这便是时间相干性的反比公式．它告诉我们：波列越短，频带越宽；极短的脉冲具有极宽的频谱．反之，谱线越

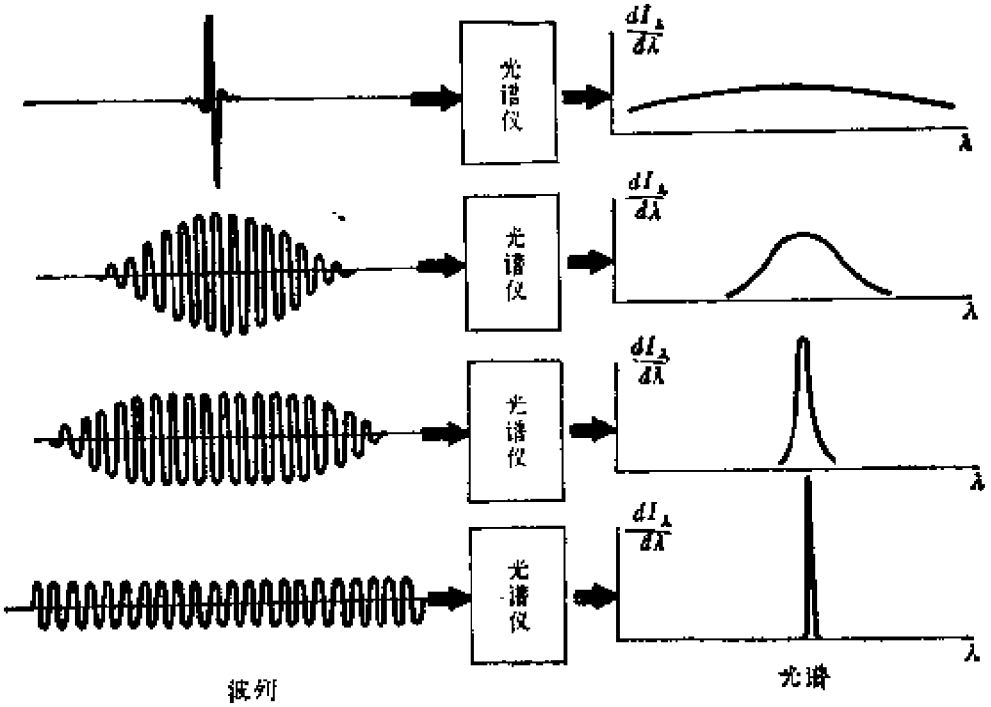


图 4-15　波列长度与谱宽的反比关系

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表Ⅲ-2　有关单色光的典型数据

单色性	$\Delta\lambda$	$\Delta\nu$	τ_0	l_0
差	10Å	10^6Mc	10^{-12}s	1.36mm
好	10^{-2}Å	10^3Mc	10^{-9}s	36cm
很好	10^{-5}Å	1Mc	10^{-6}s	260m

窄，波列就越长；只有无限窄单色谱线的波列才是无限长的．由此可见，“波列长度是有限的”和“光是非单色的”两种说法完全等效，它们是光源同一性质的不同表述．“非单色性”是从光谱观测的角度来看的，因为用光谱仪来分析光源时，直接测得的是它的谱线宽度(参看图4-15)；“波列长度有限”是由发光机制的断续性引起的，它在干涉的实验中表现出来．

4.7　光场的相干性小结

在1.5节和本节我们分别讨论了光场的空间相干性和时间相干性，现在让我们总结一下：

（1）空间相干性和时间相干性都着眼于光波场中各点（次波源)是否相干的问题上．从本质上看，空间相干性问题来源于扩展光源不同部分发光的独立性；时间相干性问题来源于光源发光过程在时间上的断续性．从后果上看，空间相干性问题表现在波场的横方向(波前)上，集中于分波前的干涉装置内；时间相干性问题表现在波场的纵方向(波线)上，集中于长程差的分振幅干涉装置．当然这并不是绝对的，例如薄膜干涉的定域问题实质上是空间相干性问题．

（2）空间相干性用相干区域的孔径角$\Delta\theta_0$，线度d和相干面积$S=d^2$来描述，它们与光源宽度b的关系由空间相干性的反比公式决定，

$$b\,\Delta\theta_0 \approx \lambda;$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

时间相干性用相干长度L_0(波列长度)，相干时间τ_0(波列持续时间)，或最大光程差ΔL_M来描述，它们与表征光源非单色性的量——谱线宽度$\Delta\lambda$(或Δk，$\Delta\nu$)成反比关系，

$$L_0\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\simeq\lambda \quad 或 \quad \tau_0\Delta\nu\simeq 1.$$

(3) 无论衡量时间相干性的相干时间，还是衡量空间相干性的相干区大小，都不是这样一个截然的界限，只要在它们的限度之内就100%地产生干涉，一超出它们干涉条纹就完全消失. 实际上干涉条纹的消失过程是逐渐的，其反衬度由大到小，逐渐下降到0. 这表明，即使稍微超过相干时间或相干区的限度一些，也还可能有点相干成分；而在相干时间或相干区的限度以内，也可能有点非相干成分. 不过在它们的限度以内相干成分占主导地位，产生的干涉条纹的反衬度较大；超过它们的限度，非相干成分逐渐取代了相干成分而居于主导地位，干涉条纹的反衬度逐渐降到0. 总之在相干时间或相干区域以内，部分相干是更为一般的情况. 反衬度γ的数值可作为相干程度高低的一种量度.

思 考 题

1. 如4.1节所述，迈克耳孙干涉仪中反射镜M_1和M_2的像M_2'组成一等效的空气层(见图4-2). 下面讨论迈克耳孙干涉仪调节中的几个问题：

(1) 当转动摇把使M_1平移时，我们如何判断等效的空气层在增厚还是减薄？

(2) 当你看到平行的直线干涉条纹时，怎样判断等效空气层哪边厚哪边薄？

(3) 如何有意识地调节镜面倾角，使M_1,M_2'完全平行？

(4) 根据什么现象，可以比较准确地判断M_1，M_2'是否严格平行？有经验的人是这样作的：前后左右移动自己的眼睛，如果发现圆形干涉条纹的中心有变动(条纹的吞吐)，则表明M_1,M_2'尚未达到严格的平行. 只

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

有调节到干涉场的中心相当稳定，只随眼睛一起平移而不发生条纹的变化时，才算比较满意．试解释这是为什么？

2．判断下列说法是否正确：

（1）在面光源照明的光场中，各点（次波源）都是完全不相干的．

（2）在点光源照明的光场中，各点（次波源）都是完全相干的．

（3）在理想的单色点光源激发的光场中，各点（次波源）都是完全相干的．

（4）以纵向的相干长度为轴，横向的相干面积为底作一柱体．有人称它的体积为相干体积．在相干体积内任意两点（次波源）都有较高程度的相干性．

习　题

1．证明迈克耳孙干涉仪中圆形等倾条纹的半径与整数的平方根成正比．

2．用钠光（5893Å）观察迈克耳孙干涉条纹，先看到干涉场中有12个亮环，且中心是亮的，移动平面镜 M_1 后，看到中心吞（吐）了 10 环，而此时干涉场中还剩有 5 个亮环．试求：

（1）M_1 移动的距离，

（2）开始时中心亮斑的干涉级，

（3）M_1 移动后，从中心向外数第 5 个亮环的干涉级．

3．在迈克耳孙干涉仪中，反射镜移动 0.33mm，测得条纹变动 192 次，求光的波长．

4．钠光灯发射的黄线包含两条相近的谱线，平均波长为5893Å．在钠光下调节迈克耳孙干涉仪，人们发现干涉场的反衬度随镜面移动而周期性地变化．实测的结果由条纹最清晰到最模糊，视场中吞（吐）490 圈条纹，求钠双线的两个波长．

5．在一次迈克耳孙干涉仪实验中，所用的最短标准具长度为0.39mm，如用镉灯（6438.47Å）作光源，实验时所测得的条纹变动数目应是多少？

6．用迈克耳孙干涉仪进行精密测长，光源为6328Å的氦氖光，其谱线宽度为10^{-3}Å，整机接收（光电转换）灵敏度可达 1/10个条纹，求这台

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

仪器测长精度为多少？一次测长量程为多少？

7. 迈克耳孙干涉仪中的一臂(反射镜)以速度 v 匀速推移，用透镜接收干涉条纹，将它会聚到光电元件上，把光强变化转换为电讯号。

(1) 若测得电讯号的时间频率为 ν_1，求入射光的波长 λ.

(2) 若入射光波长在 0.6μm 左右，要使电讯号频率控制 在 50Hz，反射镜平移的速度应为多少？

(3) 按以上速度移动反射镜，钠黄光产生电讯号的拍频为多少？(钠黄光双线波长为5890 Å和5896 Å.)

§5 多光束干涉 法布里-珀罗干涉仪

5.1 多光束干涉的强度分布公式

在 §2—§4中我们讨论薄膜和迈克耳孙干涉仪中的分振幅干涉时，都只讨论了两反射光束之间的干涉．其实仔细考虑一下就会发现，当一束光进入薄膜后，将进行多次反射和折射，振幅和强度被一次一次地分割（见图5-1)．本节将认真分析这个问题，定量地计算每次分割时振幅的比率，并发现只有在薄膜的反射率较小的情况下，只考虑两反射光束的作法才是近似正确的．在高反射率的情况下应按多光束干涉处理，干涉条纹将有一些新的特点．

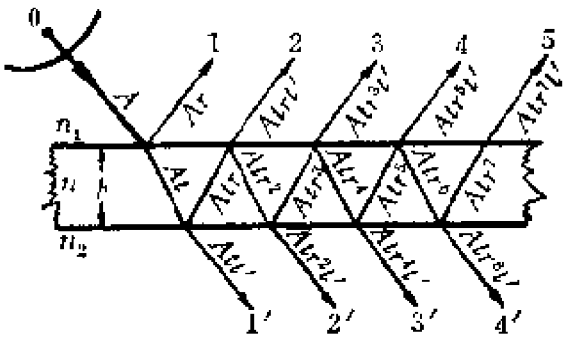


图 5-1 多次反射和折射时振幅的分割

如图5-1，考虑一块上下表面平行的薄膜，一束光 0 入射到其表面上．入射光在上表面被分割为反射光束 1 和折射光束，折

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

射光束在下表面反射的同时，还有一部分能量透射出去，这就是图中的透射光束1′．当从下面反射回来的光再次透过上表面形成光束 2 的同时，也还有一部分能量反射回去．如此反复地折射和反射，我们将得到一个无穷系列的反射光束1,2,3,…和一个无穷系列的透射光束1′,2′,3′,….无疑这两系列光束的振幅和强度都是递减的，最后强度都趋于 0．为了说明它们振幅之间的定量关系，我们令 r 和 r' 分别代表上下表面的振幅反射率，t 和 t' 代表上下表面的振幅透射率．第二章10.3节中证明过，在薄膜两侧媒质的折射率 n_1 和 n_2 相等的条件下，r,r' 和 t,t' 之间有如下关系：

$$r=-r', \qquad r^2+tt'=1. \tag{5.1}$$

下面为了书写方便，所有 r,r',t,t' 都理解为它们的绝对值，有关半波损问题另行考虑．这样，如果入射光 0 的振幅为 A，则在上表面第一次分割出来的反射光束和透射光束的振幅应分别为 Ar 和 At，在下表面第一次分割出来的反射光束和透射光束的振幅应分别为 Atr' 和 Att'．如此类推下去，最后我们得到1,2,3,…和1′,2′,3′,…两系列光束的振幅如下(参见图5-1)：

$$\begin{cases} A_1=Ar, \\ A_2=Atr't'=Atrt', \\ A_3=Atr'rr't'=Atr^3t', \\ \cdots\cdots; \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1'=Att', \\ A_2'=Atr'rt'=Atr^2t', \\ A_3'=Atr'rr'rt'=Atr^4t', \\ \cdots\cdots. \end{cases} \tag{5.2}$$

可见，若 $r\ll 1$ 而 $t\simeq t'\simeq 1$，则在反射光束系列中 $A_1\simeq A_2\gg A_3\gg A_4\gg\cdots$，在此情况下可只考虑 1,2 两束反射光，而把从第 3 束起以后的光束忽略．本章前面各节正是这样做的．然而在 r 比较大的情况下，就必须考虑无穷系列，将它们都迭加起来才能得到反射光和透射光经透镜聚焦后的总振幅 A_R 和 A_T．

为了计算反射光和透射光的总振幅，我们必须分析各光束间的光程差 ΔL 和位相差 δ．在膜的上下表面平行的情况下，上述两系列光束中每对相邻光线之间的光程差都相等．不考虑半波损的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表观光程差为

$$\Delta L = 2nh\cos i,$$

式中 h 为膜的厚度，n 为膜的折射率，i 为光线在膜内的倾角①. 此外，还需考虑半波损问题. 在 $n_1 = n_2$ 的条件下，根据第二章10.4节中给出的原则可以看出，除了反射光线 1 和 2 之外，任何其它相邻光线间都没有因半波损引起的附加光程差（这结论请读者自己分析）. 在没有这一附加光程差的情况下，每条光线的位相比前一条光线落后如下数量：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}. \tag{5.2}$$

根据以上关于各光束的振幅和位相差的分析，我们可以写出各反射光束和透射光束的复振幅来：

$$\begin{cases} \widetilde{U}_1 = -Ar, \\ \widetilde{U}_2 = Atrt'e^{i\delta}, \\ \widetilde{U}_3 = Atr^3t'e^{2i\delta}, \\ \cdots\cdots; \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{U}'_1 = Att', \\ \widetilde{U}'_2 = Atr^2t'e^{i\delta}, \\ \widetilde{U}'_3 = Atr^4t'e^{2i\delta}, \\ \cdots\cdots. \end{cases} \tag{5.3}$$

在反射光束复振幅的表达式中负号来自半波损. 反射光和透射光的总振幅和光强分别为

$$\begin{cases} \widetilde{U}_R = \sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}_j, \\ \widetilde{U}_T = \sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{U}'_j; \end{cases} \qquad \begin{cases} I_R = \widetilde{U}_R\widetilde{U}_R^*, \\ I_T = \widetilde{U}_T\widetilde{U}_T^*. \end{cases} \tag{5.4}$$

由于上、下双方折射率 n_1, n_2 相等，光功率守恒导致光强守恒：

$$I_R + I_T = I_0, \tag{5.5}$$

① 参见式(3.1).

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

式中$I_0 = A^2$为入射光强．因此我们只需在I_R和I_T中先算出一个来，另一个用减法即可得到．下面先算$\widetilde{U}_T$和I_T．将式(5.3)代入(5.4)，得

$$\widetilde{U}_T = Att'(1 + r^2e^{i\delta} + r^4e^{2i\delta} + \cdots).$$

这是一个几何级数(等比级数)，其首项为Att'，公比为$r^2e^{i\delta}$，无穷几何级数的公式告诉我们：

$$\text{级数和} = \frac{\text{首项}}{1 - \text{公比}},$$

故

$$\widetilde{U}_T = \frac{Att'}{1 - r^2e^{i\delta}}, \tag{5.6}$$

因此

$$I_T = \widetilde{U}_T\widetilde{U}_T^* = \frac{A^2(tt')^2}{(1 - r^2e^{-i\delta})(1 - r^2e^{i\delta})}$$

$$= \frac{I_0(1 - r^2)^2}{1 - 2r^2\cos\delta + r^4}.$$

用光强反射率$R = r^2$来表示，透射光强最后可写为

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1 - R)^2}}, \tag{5.7}$$

反射光强为

$$I_R = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{(1 - R)^2}{4R\sin^2(\delta/2)}}. \tag{5.8}$$

图5-2是反射光和透射光的等倾干涉条纹，可以看出，反射光强的地方透射光弱，反射光弱的地方透射光强，两者的干涉花样是互补的．图5-3中给出不同R值的$I_T - \delta$曲线，如果纵坐标倒过来从上而下看，就是$I_R = I_0 - I_T$的曲线．

式(5.7)和(5.8)以及图5-3中的曲线都表明，I_T和I_R虽然都与R有关，但极大值和极小值的位置仅由δ决定，与R无关．I_T的

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

极大值在 $\delta = 2k\pi$ 的地方，极小值在 $\delta = (2k+1)\pi$ 的地方；I_R的极大值和极小值位置刚好对调.

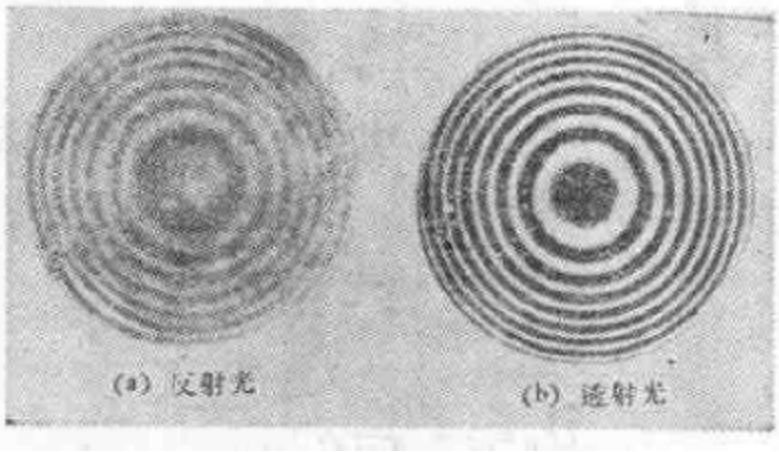


图 5-2　反射光和透射光的干涉条纹

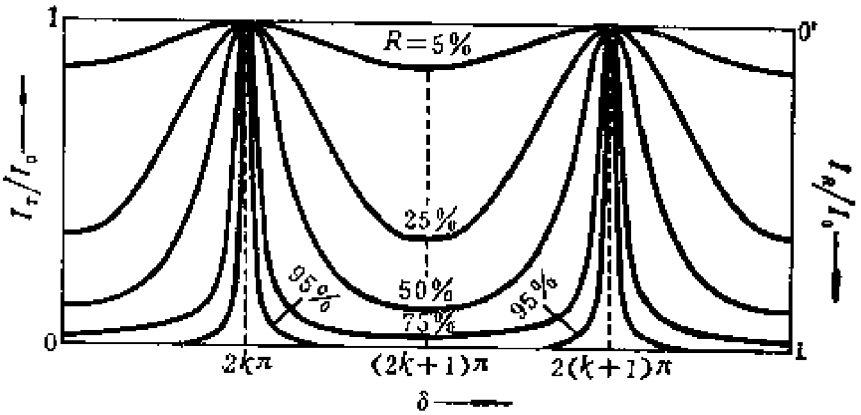


图 5-3　多光束干涉强度分布曲线

现在来考察R对强度分布的影响，在普通玻璃和空气的界面上，$R \simeq 5\%$，可以认为 $R \ll 1$．在此情况下

$$(1-R)^2 \simeq 1,$$

$$\left(1+4R\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^{-1} \simeq 1-4R\sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$= 1-2R(1-\cos\delta),$$

因此

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$I_T = I_0[1 - 2R(1 - \cos\delta)],$$
$$I_R = I_0 - I_T = 2RI_0(1 - \cos\delta).$$

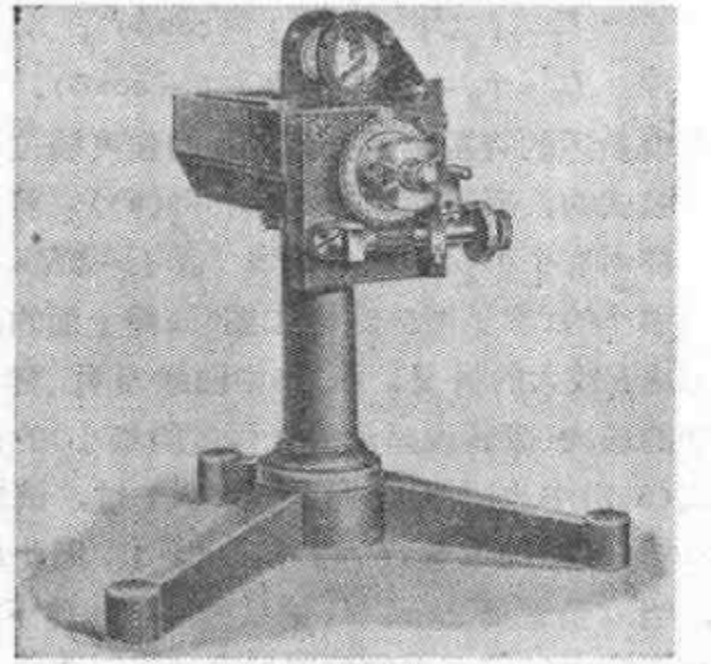
后式正是我们熟悉的等振幅两光束干涉的强度随位相差变化的形式，它是正弦式的，反衬度等于1（图5-2(a)）。前式表明，透射光的干涉花样中有个很强的均匀背景 $I_0(1-2R)$，它的干涉花样反衬度是很小的（参见图5-2(b)和图5-3最上面的那条曲线）。

现在考虑R较大的情况。图5-3中曲线表明，随着R的增大，透射光强度的极大（或者说是反射光强度的极小）的锐度越来越大。这从式(5.7)中也可以看出。当$R \simeq 1$时，该式右端分母的第二项中$\sin^2(\delta/2)$的系数$4R/(1-R)^2 \gg 1$，因此I_T对于δ的变化很敏感。当δ稍偏离$2k\pi$，I_T便从极大值急剧下降。R的增大意味着无穷系列中后面光束的作用越来越不可忽略，从而参加到干涉效应里来的光束数目越来越多，其后果是使干涉条纹的锐度变大。这一特征是多光束干涉的普遍规律，我们将在下一章讨论N列波的干涉（衍射光栅）时再次看到这一特征。

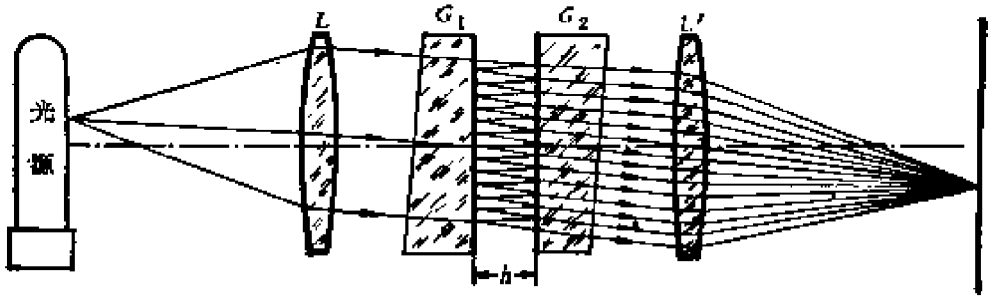
5.2 法布里-珀罗干涉仪的装置和条纹的半值宽度

利用上述多光束干涉产生十分细锐条纹的最重要仪器，是法布里-珀罗干涉仪（C.Fabry, A.Perot, 1899年）。法布里-珀罗干涉仪的结构见图5-4，其中G_1, G_2是两块精密的平面玻璃板（分束板），它们相对的平面平行，上面都薄薄地镀上银（图中用粗线表示），以增大反射率。透镜L将入射光变为平行光，透镜L'将平行光会聚到幕上，形成等倾干涉条纹。由于G_1, G_2之间空气薄膜表面的反射率较大，光线入射后将在它的两个表面之间反复反射，多次反射的过程中强度递减得很慢，因而从G_2透射出来的是一系列强度递减得很慢的光束。它们相干迭加后在幕上形成的等倾干涉条纹如图5-5(b)所示，其形状与迈克耳孙干涉仪产生的等倾条纹（见图5-5(a)）相似，也是同心圆，但亮纹要比迈克耳孙干涉仪产生的条纹细锐得多。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn



(a) 仪器结构



(b) 光路

图 5-4　法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗干涉仪的原理，最早用于分析光谱线的精细结构，近年来又被应用到激光器上，成为它的重要组成部分——谐振腔，简称法-珀腔.这两方面的应用都涉及干涉强度的半值宽度.为了定量地说明反射率 R 对干涉条纹锐度的影响，我们计算一下干涉强度的半值宽度.由式 (5.3) 或图 5-3 中的曲线可以看出，强度的极大峰两侧沒有零点，因此沒有明确的边界可以计算条纹的宽窄.在 $\delta = 2k\pi$ 处 I_T/I_0 的峰值为 1，所谓半值宽度，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

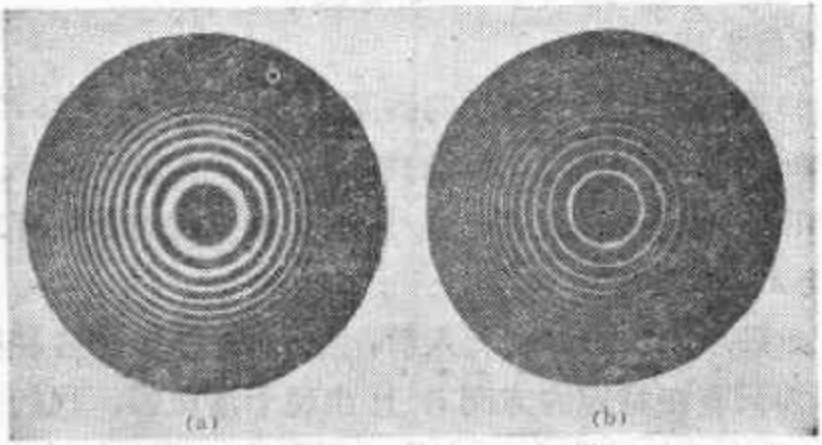


图 5-5　迈克耳孙干涉仪和法布里-珀罗干涉仪条纹的比较

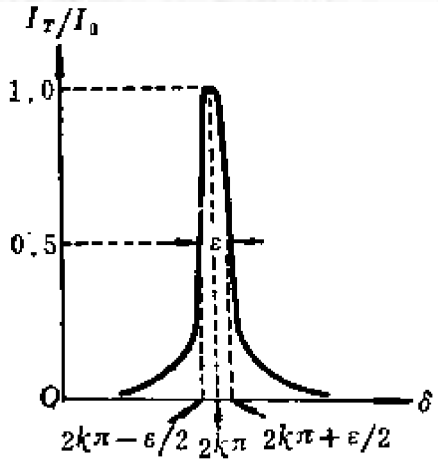


图 5-6　干涉条纹的半值宽度

就是峰值两侧I_T/I_0的值降到一半($I_T/I_0=1/2$)的两点间的距离ε(参见图5-6)。应注意，这里所说的"距离"ε是以位相差来衡量的，即当$\delta=2k\pi\pm\varepsilon/2$时，$I_T/I_0=1/2$。这时在式(5.7)中的$\sin^2(\delta/2)=\sin^2(2k\pi\pm\varepsilon/2)/2=\sin^2\varepsilon/4\simeq(\varepsilon/4)^2$，将此值代入式(5.7)右端，左端$I_T/I_0$应等于1/2，即

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\dfrac{4R(\varepsilon/4)^2}{(1-R)^2}},$$

由此解得

$$\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}. \tag{5.9}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

上式表明，随着R趋近于1，半值宽度$e\to 0$，即干涉强度分布的锐度变得越来越大.

式(5.9)是用位相差来表示的强度半值宽度. 按式(5.2)位相差$\delta=4\pi nh\cos i/\lambda$，它是多因素的综合. 在多光束干涉装置中，折射率$n$和间隔$h$一般是不变的，影响$\delta$值变化的因素有二：倾角$i$和波长$\lambda$.

（1）如果以单色的扩展光入射，则λ固定，但有各种可能的倾角i. 因为只有在特定的方向i_k上出现干涉极强，我们关心某一级极大附近的半角宽度Δi，它比e更直接地反映条纹的细锐程度. 为此对固定的n,h,λ，取δ因i变化引起的微分：

$$d\delta=-4\pi nh\sin i\,di/\lambda,$$

令$d\delta=e$，并将式(5.9)代入，取$i=i_k$，把di写成Δi_k，表示它是第k级亮纹的角宽度，得

$$\Delta i_k=\frac{\lambda e}{4\pi nh\sin i_k}=\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i_k}\,\frac{1-R}{\sqrt{R}}. \qquad (5.10)$$

因只考虑大小，这里和下面略去可能出现的负号不写.式(5.10)告诉我们，不仅反射率R值越高，可以使条纹越细锐，即方向性越强，而且进一步看到，腔长h越大，条纹也越细锐①. 法布里-珀罗干涉仪制成长腔结构，一般h在1cm—10cm量级，就是这个道理. 不妨估算一下Δi_k的量级：取$R\approx 0.90$，$h\simeq 5$cm，$\lambda\simeq 0.6\mu$m，$n\sin i_k\simeq 1/2$，则$\Delta i_k\simeq 4\times 10^{-7}rad\simeq 0.001'$.

（2）如果以非单色平行光入射，则此时i固定（它经常是0或接近于0），位相差δ主要是光波λ的函数. 由于多光束干涉，使得在很宽的光谱范围内只有某些特定的波长λ_k附近出现极大，$i=0$时这些λ_k满足下式：

$$2nh=k\lambda_k. \qquad (5.11)$$

① 由于法布里-珀罗干涉仪的孔径总是有限的，当入射光束有一定倾角i时，若干次折射、反射后，光束将超出孔径，亦即实际上不会是无穷多束光的干涉. h越大，这问题越突出. 必要的时候，光强公式(5.8)要作相应的修正.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

用频率 ν_k 来表示更为方便：

$$\nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = \frac{kc}{2nh}, \tag{5.12}$$

式中 c 是真空中光速．可见，相邻极强的频率是等间隔的，间隔为

$$\Delta\nu = \nu_{k+1} - \nu_k = \frac{c}{2nh}, \tag{5.13}$$

它与腔长 h 成反比．每条谱线 λ_k 或 ν_k，称为一个纵模．我们关心的是某一级纵模的半值宽度 $\Delta\lambda_k$，为此对固定的 n, h, i，取 δ 因 λ 变化引起的微分：

$$d\delta = -4\pi nh\cos i\, d\lambda/\lambda^2,$$

令 $d\delta = \varepsilon$，并将式(5.9)代入，把 $d\lambda$ 写成 $\Delta\lambda_k$，表示它是第 k 级纵模的谱线宽度，得

$$\Delta\lambda_k = \frac{\lambda^2\varepsilon}{4\pi nh\cos i} \simeq \frac{\lambda^2}{2\pi nh\cos i}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}, \tag{5.14}$$

用频率表示，则有

$$\Delta\nu_k = \frac{c\Delta\lambda_k}{\lambda^2} = \frac{c}{2\pi nh\cos i}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{c}{\pi k\lambda}\frac{1-R}{\sqrt{R}}\text{①}. \tag{5.15}$$

上式表明，反射率越高，或腔越长，则谱线宽度越窄．一些典型的数据列于表Ⅱ-3中．

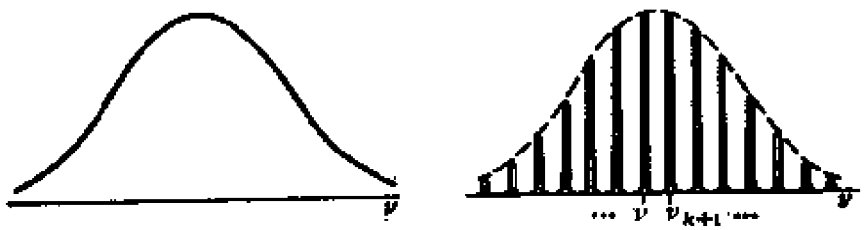
① 注意：不要把式(5.13)中的纵模间隔 $\Delta\nu$ 和式(5.15)中的单模线宽 $\Delta\nu_k$ 混淆起来．

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

表Ⅲ-3　法-珀腔的单模线宽$\Delta\lambda_h$

R \ h	10cm	100cm
0.90	6×10^{-4}Å	6×10^{-5}Å
0.98	1×10^{-4}Å	1×10^{-5}Å
0.998	1×10^{-5}Å	1×10^{-6}Å

我们把法-珀腔的作用示于图 5-7，它从输入的非单色光（见图(a)）中选择出一系列纵模谱线 λ_h，用频率来表示，它们是等间隔的①，每条单模的谱线宽度随 R 和 h 的增大而减小，这便是法-珀腔输出的情况（见图(b)）②.可见，法-珀腔对输入的非单色光起挑选波长，压缩线宽，从而提高单色性的作用．这一点目前已在激光技术中得到重要的应用（详见第九章 § 5）.



(a) 输入　　(b) 输出

图 5-7　法-珀腔的选频作用

5.3　法布里-珀罗干涉仪在光谱学中的应用

由于法布里-珀罗干涉仪的条纹很细，这首先使我们有可能更精密地测定它们的确切位置，因此用这种干涉仪可以精确地比

① 见式(5.13).

② 当然这输出的纵模频谱只能再由分光仪器来显示，在法-珀腔里并没有干涉条纹.

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

较各光谱线的波长，以及用波长来度量长度，§4中所述用波长标准来进行比较工作的更精确结果就是在法布里-珀罗干涉仪上完成的.

然而，法布里-珀罗干涉仪的主要应用还在于光谱线超精细结构的研究方面. 由于原子核磁矩的影响，有的光谱线分裂成几条十分接近(相差10^{-2}Å数量级)的谱线，这叫做光谱线的超精细结构. 设想入射光中包含两个十分接近的波长 λ 和 $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$，它们产生的等倾干涉条纹如图5-8和5-9所示，具有稍微不同的半径. 如果每根干涉条纹的宽度较大，则两个波长的干涉条纹就会重迭在一起使我们无法分辨，法布里-珀罗干涉仪条纹的细锐对提高谱线分辨本领是极为有利的因素. 现在我们来计算一下它的色分辨本领. 因

$$2nh\cos i_k = k\lambda,$$

$$2nh\cos i'_k = k\lambda' = k(\lambda + \delta\lambda),$$

故两谱线 k 级亮纹间的角距离为

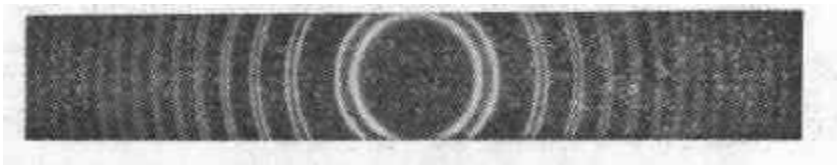


图 5-8　双谱线形成的法布里-珀罗干涉条纹

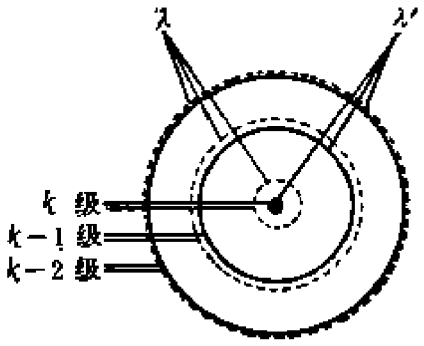


图 5-9　法布里-珀罗干涉仪的色分辨本领

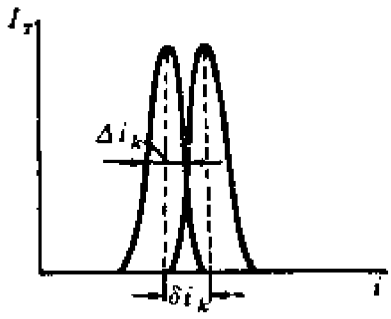


图 5-10　谱线的分辨极限

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

$$\delta i_k = \frac{k}{2nh\sin i_k}\delta\lambda, \tag{5.16}$$

此式反映了干涉仪的色散本领．作为可分辨的极限，要求 δi_k 等于 k 级亮纹本身的角宽度 Δi_k（图5-10）．比较式(5.16)和(5.10)，可得分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}, \tag{5.17}$$

它刚好等于法-珀腔的单模线宽．习惯上人们把 $\lambda/\delta\lambda$ 叫做分光仪器的色辨本领，由式(5.17)可得

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k\frac{\sqrt{R}}{1-R}. \tag{5.18}$$

在法布里-珀罗干涉仪中分束板G_1，G_2的间隔 h 可很大(~10cm)，从而使干涉条纹的级数 k 很高(~10^6)，这使得仪器的色散本领 $\delta i_k/\delta\lambda$ 也很大．加以分束板镀银面的反射率很高(例如 98%)，这些因素合起来，就使仪器的色分辨本领很大．

最后指出，干涉仪的色散扩大了，就同时带来另一问题，即不同级不同波长的条纹就容易重迭，从而使互不重迭的光谱范围(所谓"自由光谱范围")变得很窄，这也是实际使用法布里-珀罗干涉仪时必须考虑的问题．

思 考 题

1． 多光束干涉与双光束干涉相比，两者在处理方法和强度分布方面有什么共同和不同之处？干涉条纹各有什么特点？

2． 试分别回答：在高反射率和低反射率的情况下，观察透射和反射条纹哪个有利？为什么？

3． 为什么法布里-珀罗干涉仪是高分辨本领、小量程的分光仪器？其分辨谱线的精度由什么因素决定？其自由光谱范围受什么因素制约？

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

习　题

1. 有两个波长λ_1和λ_2，在6000Å附近相差0.001Å，要用法布里-珀罗干涉仪把它们分辨开来，间隔h需要多大？设反射率$R=0.95$。

2. 如果法布里-珀罗干涉仪两反射面之间的距离为1.0cm，用绿光（5000Å）做实验，干涉图样的中心正好是一亮斑．求第十个亮环的角直径。

3. 设法-珀腔长5cm，用扩展光源做实验，光波波长为0.6μm．问：

（1）中心干涉级数为多少？

（2）在倾角为1°附近干涉环的半角宽度为多少？设反射率$R=0.98$。

（3）如果用这个法-珀腔分辨谱线，其色分辨本领有多高？可分辨的最小波长间隔有多少？

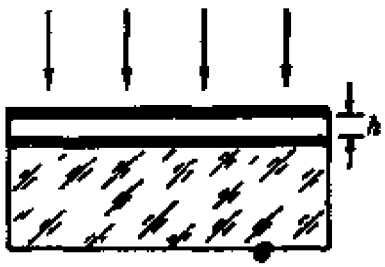
（4）如果用这个法-珀腔对白光进行选频，透射最强的谱线有几条，波长各为多少？每条谱线宽度为多少？

（5）由于热胀冷缩，引起腔长的改变量为10^{-5}（相对值），求谱线的漂移量为多少？

4. 利用多光束干涉可以制成一种干涉滤光片．如图，在很平的玻璃片上镀一层银，在银面上加一层透明膜，例如水晶石（$3NaF\cdot AlF_3$），其上再镀一层银．于是两个银面之间就形成一个膜层，产生多光束干涉．设银面的反射率$R=0.96$，透明膜的折射率为1.55，膜厚$h=4\times10^{-5}$cm，平行光正入射．问：

（1）在可见光范围内，透射最强的谱线有几条？

（2）每条谱线宽度为多少？

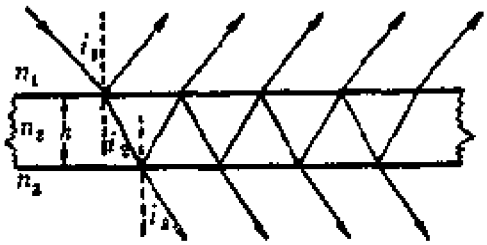


习题4图

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

期 限 表

5. 如果平行膜层两侧的折射率不等(见图)，设入射光强为I_0。



习题6图

(1) 导出多光束干涉后形成的反射光强I_R和透射光强I_T公式。

(2) 证明只有同时满足以下三个条件时，才能使波长为λ的正入射光完全透过($I_R \approx 0$)：

a. $n_3 > n_2 > n_1$；　　b. $n_2 h = \lambda/4$；　　c. $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$。

043
253376

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.com.cn