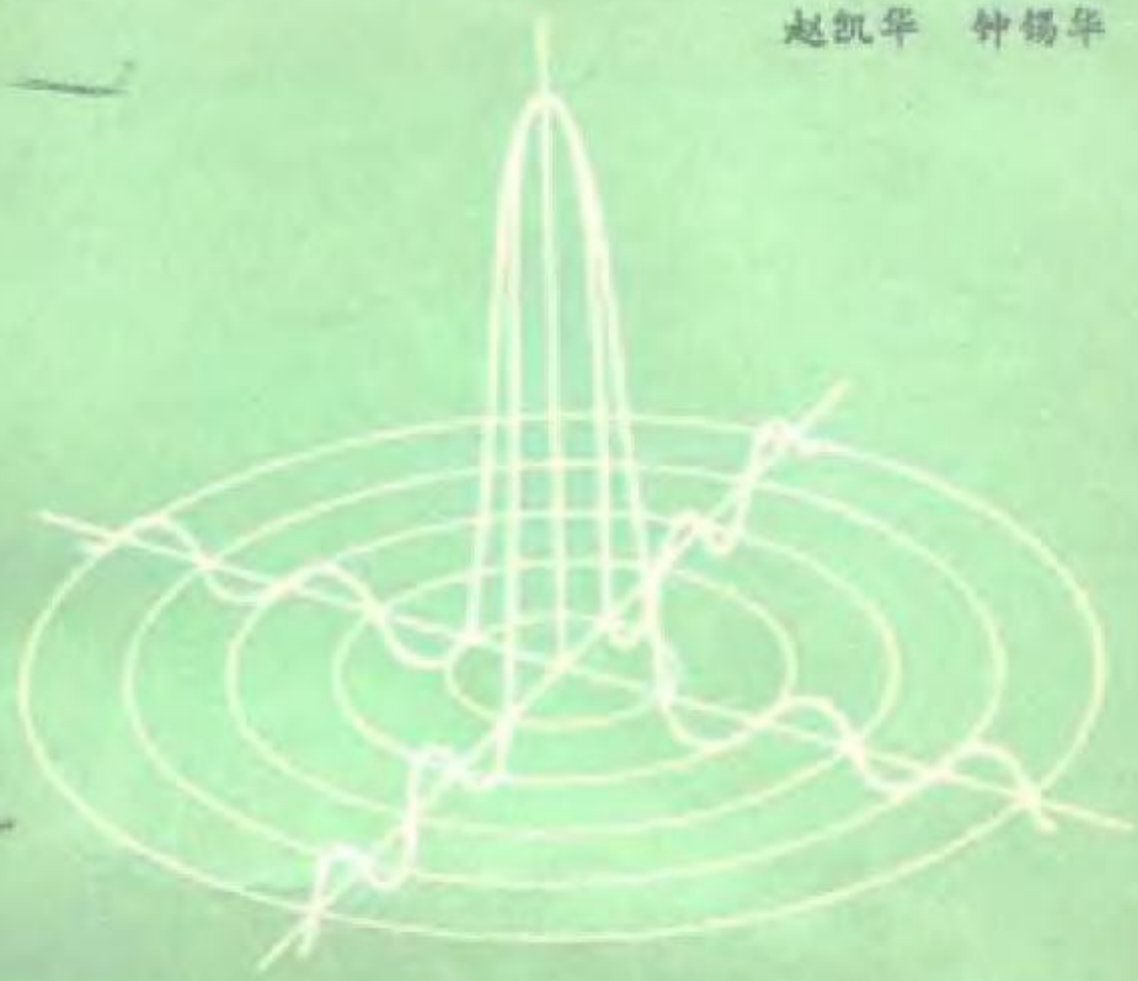
OPTICS

赵凯华　钟锡华



下　册

光学

O4-
1-2

光　　学

下　册

赵凯华　钟锡华

北京大学出版社

光　学 上、下册

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

新华书店北京发行所发行

1202工厂印刷

850×1168毫米 32开本 21.75印张 530千字

1984年1月第一版　1984年1月第一次印刷

印数 1—40,000册

统一书号：13209·75　定价：2.75元

043
S.2

253380

内 容 提 要

本书是根据作者在北京大学物理系讲授光学课程的讲义修改补充而成。本书内容丰富，以波动光学为重点，并以“波前”这一概念为纽带联接现代变换光学与传统光学，反映了本学科的现代面貌。书中附有较多的思考题和习题。

全书分上、下两册。上册主要内容：几何光学、波动光学基本原理、干涉装置和光场的时空相干性。下册主要内容：衍射光栅、傅里叶变换光学、全息照相、光在晶体中的传播、光的吸收、色散和散射、光的量子性和激光。

本书可作为高等院校物理专业光学课程教材，也可供其他专业有关师生及工程技术人员参考。

O430/15

常用物理常数

真空中光速(定义值)	$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
普朗克常数	$h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot S}$
基本电荷	$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
	$= 4.803 \times 10^{-10}\,\mathrm{CGSE}$
玻耳兹曼常数	$k = 1.3806 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} = 8.617 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$
阿伏伽德罗数	$N = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$
电子质量	$m_e = 9.109 \times 10^{-28}\,\mathrm{g} = 0.510\,\mathrm{MeV}/c^2$
质子质量	$M_p = 1.6725 \times 10^{-24}\,\mathrm{g} = 638.28\,\mathrm{MeV}/c^2$
中子质量	$M_n = 1.6747 \times 10^{-24}\,\mathrm{g} = 939.55\,\mathrm{MeV}/c^2$
电子康普顿波长	$\lambda_C = h/m_e c = 2.426 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$
玻尔半径	$a = \varepsilon_0 h^2/\pi m e^2 = 0.5292 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$
电子经典半径	$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2 = 2.8178 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$
里德伯常数	$R_H = 109677.576\,\mathrm{cm}^{-1}$
	$R_\infty = 109737.31\,\mathrm{cm}^{-1}$
斯特藩-玻耳兹曼常数	$\sigma = 2\pi^5 k^4/15ch^3 = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$
维恩位移常数	$b = 0.2014hc/k = 2.898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$
电子伏	$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
	相当的温度 $1.1605 \times 10^{4}\,\mathrm{K}$
	相当的频率 $2.418 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$
	相当的波数 $0.8066 \times 10^{4}\,\mathrm{cm}^{-1}$
	$1\,\mathrm{g} = 5.610 \times 10^{26}\,\mathrm{MeV}/c^2$
最大光功当量(定义值)	$K_M = 683\,\mathrm{lm/W}$

下 册 目 录

（带*号的章节为小字部分）

第四章　衍射光栅……（1）

§ 1　多缝夫琅和费衍射……（2）

1.1实验装置和衍射图样（2）　1.2 N缝衍射的振幅分布和强度分布（4）　1.3缝间干涉因子的特点（7）　1.4单缝衍射因子的作用（9）　1.5复振幅的计算　黑白光栅和正弦光栅（11）　思考题（15）　习题（16）

§ 2　光栅光谱仪……（18）

2.1光栅的分光原理（18）　2.2光栅的色散本领和色分辨本领（18）　2.3量程与自由光谱范围（22）　2.4闪耀光栅（23）　*2.5棱镜光谱仪的色分辨本领（27）　思考题（29）　习题（30）

*§ 3　三维光栅——X射线在晶体上的衍射……（31）

3.1晶体点阵（31）　3.2X射线（31）　3.3X射线在晶体上的衍射——布喇格条件（32）　3.4劳厄相和德拜相（37）　思考题（38）

第五章　傅里叶变换光学……（39）

§ 1　衍射系统的屏函数和相因子判断法……（40）

1.1衍射系统及其屏函数（40）　1.2相因子判断法（42）　1.3透镜的作用及其位相变换函数（45）　*1.4高斯光束经透镜后的变换（49）　1.5棱镜的位相变换函数（50）　习题（52）

§ 2　正弦光栅的衍射……（53）

2.1空间频率概念（53）　2.2正弦光栅（55）　2.3正弦光栅的衍射图样（56）　2.4正弦光栅的组合（58）　2.5任意光栅的屏函数及其傅里叶级数展开（60）　*2.6过高频信息产生的衰逝波（64）　2.7对夫琅和费衍射的再认识（65）　思考题（67）　习题（67）

§ 3　阿贝成像原理与相衬显微镜……（70）

3.1阿贝成像原理（70）　3.2空间滤波概念（73）　3.3阿贝-波特空间滤波实验（75）　3.4相衬显微镜（77）　思考题（80）

习题(81)
*§ 4 夫琅和费衍射场的标准形式 …… (81)
4.1接收夫琅和费衍射场的实验装置(82) 4.2夫琅和费衍射积分的标准形式(83) 4.3结论和意义(85) 思考题(86) 习题(86)
*§ 5 傅里叶变换 δ函数 …… (87)
5.1傅里叶积分变换(87) 5.2几种典型函数的频谱(90) 5.3傅里叶变换的性质(96) 5.4 δ函数(102) 5.5 δ函数的性质(104) 5.6 δ函数的傅里叶变换(105) 习题(110)
*§ 6 空间滤波和信息处理 …… (112)
6.1用夫琅和费衍射实现屏函数的傅里叶变换(112) 6.2相干光学图像处理系统(4F系统)(117) 6.3空间滤波实验(123) 思考题(126) 习题(127)
*§ 7 点扩展函数与光学传递函数 …… (128)
7.1光学系统的像质评价问题(128) 7.2点扩展函数(129) 7.3等晕区内像面与物面上强度分布的卷积关系(131) 7.4简谐信息是空不变系统(等晕区)的本征信息(132) 7.5光学传递函数(135) 7.6传递函数在像质评价上的意义(139) 7.7小结(139) 思考题(140) 习题(140)
第六章 全息照相 …… (142)
§ 1 全息照相的过程与特点 …… (142)
§ 2 全息照相的原理 …… (145)
2.1惠更斯-菲涅耳原理的实质——无源空间边值定解(145) 2.2波前的全息记录(147) 2.3物光波前的再现(149) 2.4线性和二次位相变换函数的作用(152) *2.5体全息(155) 2.6小结(155) 思考题(156) 习题(157)
*§ 3 全息术应用简介 …… (159)
3.1全息电影和全息电视(159) 3.2全息显微技术(159) 3.3全息干涉技术(159) 3.4红外、微波及超声全息照相技术(160) 3.5全息照相存储技术(161)
*§ 4 傅里叶全息图及其应用举例 …… (162)

4.1傅里叶全息图(162)　4.2特征字符识别(162)
第七章　光在晶体中的传播 …… (165)
§ 1　双折射 …… (165)
1.1双折射现象和基本规律(165)　1.2单轴晶体中的波面(167)　1.3晶体的惠更斯作图法(169)　*1.4法线速度(相速)与射线速度　波法面与射线面(172)　*1.5折射率椭球(175)　*1.6双轴晶体(178)　思考题(180)　习题(181)
§ 2　晶体光学器件 …… (182)
2.1晶体偏振器(182)　2.2波晶片——位相延迟片(184)　思考题(186)　习题(187)
§ 3　圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验…… (187)
3.1垂直振动的合成(187)　3.2圆偏振光和椭圆偏振光的获得(191)　3.3圆偏振光和椭圆偏振光通过检偏器后强度的变化(193)　3.4通过波晶片后光束偏振状态的变化(194)　3.5圆偏振光和椭圆偏振光的检验(197)　思考题(199)　习题(201)
§ 4　偏振光的干涉及其应用 …… (202)
4.1偏振器间的波晶片(202)　4.2显色偏振(205)　4.3偏振光的干涉条纹(206)　4.4光测弹性(207)　4.5克尔效应与泡克耳斯效应(209)　*4.6会聚偏振光的干涉(211)　思考题(213)　习题(214)
§ 5　旋光 …… (215)
5.1石英的旋光现象(215)　5.2菲涅耳对旋光性的解释(217)　5.3旋光晶体内的波面(220)　5.4量糖术(222)　5.5磁致旋光——法拉第旋转(223)　思考题(225)　习题(226)
第八章　光的吸收、色散和散射 …… (228)
§ 1　光的吸收 …… (228)
1.1吸收的线性规律(228)　1.2复数折射率的意义(230)　1.3光的吸收与波长的关系(230)　1.4吸收光谱(231)　习题(234)
§ 2　色散 …… (234)
2.1正常色散(234)　2.2反常色散(235)　2.3一种物质的全部色散曲线(237)　*2.4经典色散理论(238)　习题(244)

§ 3 群速 …… (244)
思考题(249) 习题(249)
§ 4 光的散射 …… (249)
4.1散射与媒质不均匀性尺度的关系(249) 4.2瑞利散射定律(251) 4.3散射光强的角分布和偏振状态(253) 4.4喇曼散射(254) 思考题(257) 习题(257)
第九章 光的量子性 激光 …… (258)
§ 1 热辐射 …… (258)
1.1热辐射的一般特征及辐射场的定量描述(258) 1.2基尔霍夫定律(261) 1.3绝对黑体和黑体辐射(263) 1.4斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩位移定律(266) 1.5维恩公式和瑞利-金斯公式(267) 1.6普朗克公式和能量子假说(269) *1.7光源的发光效率(271) *1.8光测高温法(273) 思考题(274) 习题(274)
§ 2 光的粒子性和波粒二象性 …… (276)
2.1光电效应(276) 2.2爱因斯坦光子假说与光电效应的解释(279) 2.3康普顿效应(281) 2.4波粒二象性(285) 思考题(289) 习题(290)
§ 3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论 …… (291)
3.1原子结构经典理论的困难(291) 3.2氢原子光谱中的谱线系(293) 3.3玻尔假说(295) 3.4粒子数按能级的统计分布(297) 3.5自发辐射、受激辐射和受激吸收(298) 3.6粒子数反转与光放大(301) 3.7能级的寿命(302) 习题(303)
§ 4 激光的产生 …… (304)
4.1激光概述(304) 4.2激活介质中反转分布的实现(306) 4.3增益系数(308) 4.4谐振腔的作用(309)
§ 5 激光器对频率的选择 …… (314)
5.1由谐振腔决定的纵模间隔和单模线宽(315) 5.2由激活介质辐射决定的线宽(317) 5.3小结(318)
§ 6 激光的特性及应用 …… (319)
6.1激光光束的特性(319) *6.2激光的应用(322) 6.3光速的测量与长度单位"米"的定义(324) *6.4非线性光学效应(327)

第四章　衍射光栅

广义地说，具有周期性的空间结构或光学性能(如透射率、折射率)的衍射屏，统称光栅．例如在一块不透明的障板上刻划出一系列等宽又等间隔的平行狭缝(见图0-1(a))，就是一种简单的一维多缝光栅．在一张透明胶片上因曝光而记录的一组等宽又等间隔的平行干涉条纹，便是一块一维的正弦光栅．又例如在一块很平的铝面上刻上一系列等间隔的平行槽纹(见图0-1(b))，就是一种反射光栅．晶体由于内部原子排列具有空间周期性而成为天然的三维光栅．光栅的种类很多，有透射光栅和反射光栅，有平面

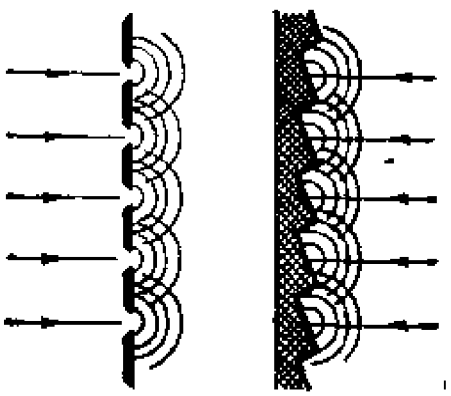


图 0-1　光　　栅

光栅和凹面光栅，有黑白光栅和正弦光栅，有一维光栅、二维光栅和三维光栅，等等．我们曾记得，参与相干迭加的单元越多，则迭加后光场的方向性越强，单色性越好．由一系列衍射单元重复排列而成的光栅正是利用了这一点，光栅的衍射场鲜明地表现出"多光束干涉"的基本特征．所以利用光栅衍射可以分析光谱，

也可以分析结构．正弦光栅的衍射在现代光学中具有新的意义，本章略加介绍，下一章我们将以它作为光学变换概念的基础详加讨论．

§1 多缝夫琅和费衍射

1.1 实验装置和衍射图样

实验装置如图 1-1 所示，S 为点光源或与纸面垂直的狭缝光源，它位于透镜L_1的焦面上，幕放在物镜L_2的焦面上．这个装置与第二章图 7-8 所示的单缝衍射装置唯一不同的地方，是衍射屏上一系列等宽等间隔的平行狭缝代替了单缝．设这里每条缝的宽度仍为 a，缝间不透明部分的宽度为 b，则相邻狭缝上对应点(例如上边缘和上边缘，下边缘和下边缘或中点和中点)之间的距离为 $d=a+b$．

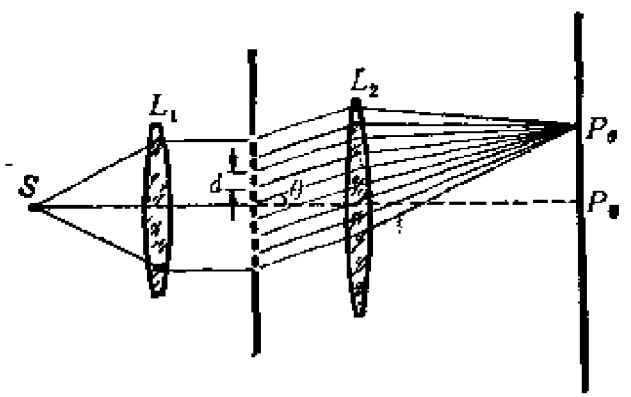
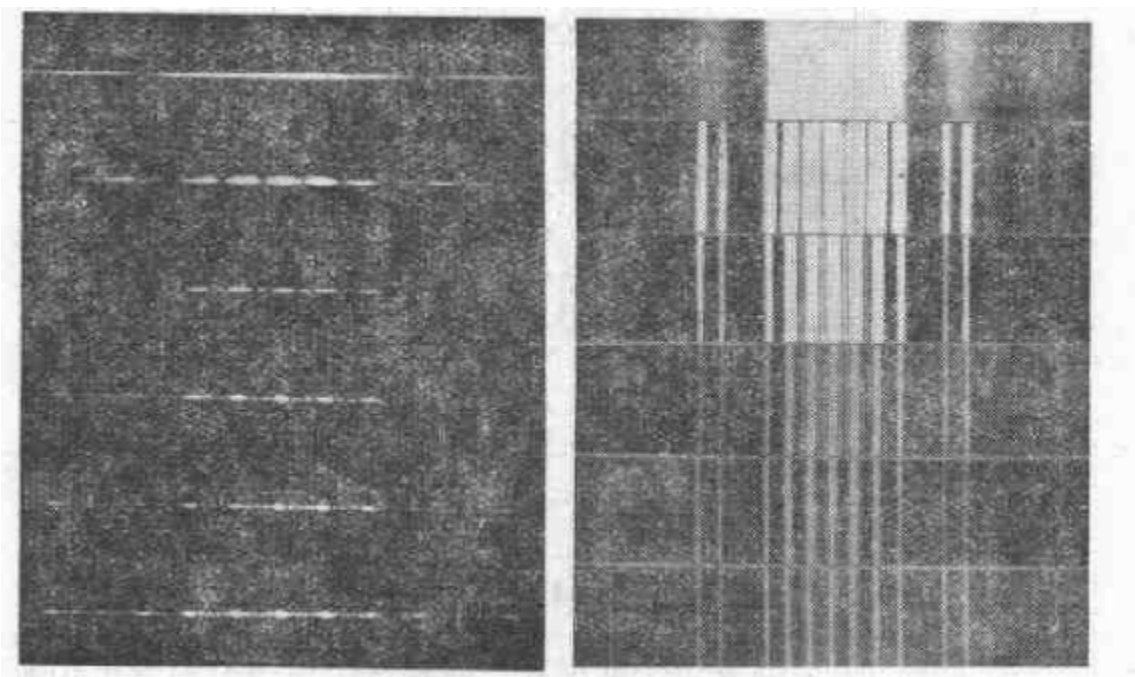


图 1-1 多缝夫琅和费衍射的实验装置

图1-2给出了不同数目的狭缝在幕上形成衍射花样的照片，其中图(a)是点光源照明的；图(b)是缝光源照明的．图 1-3 给出相应的相对强度分布曲线．这里所谓“相对”，是指强度 I 与中央最

大强度I_0之比，最上面是我们已熟悉的单缝情形，以下顺次序分别是缝数$N=2,3,4,5,6$的情形。从这里我们看到强度分布有如下一些主要特征：（1）与单缝衍射花样相比，多缝的衍射花样中出现了一系列新的强度极大和极小，其中那些较强的亮线叫做主极强，较弱的亮线叫做次极强；（2）主极强的位置与缝数N无关，但它们的宽度随N减小；（3）相邻主极强间有$N-1$条暗纹和$N-2$个次极强；（4）强度分布中都保留了单缝衍射的痕迹，那就是曲线的包络（外部轮廓）与单缝衍射强度曲线的形状一样。



（a）点光源　　（b）缝光源

图1-2　多缝夫琅和费衍射花样

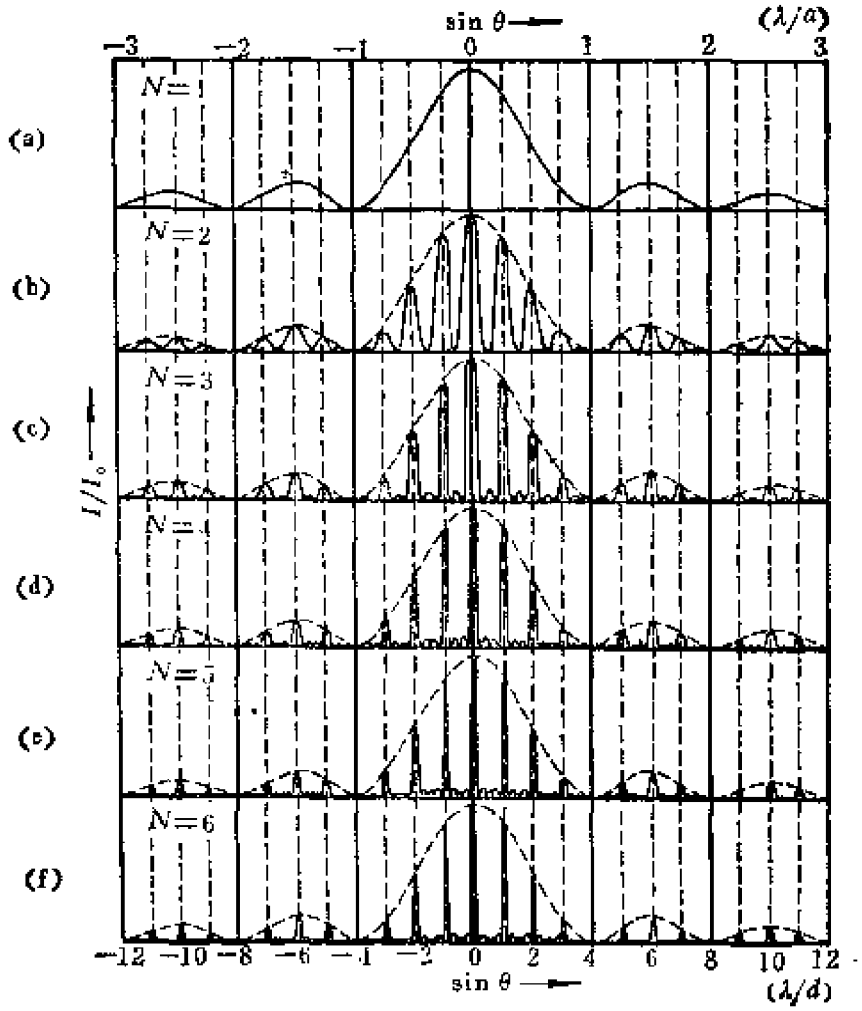


图 1-3　多缝夫琅和费衍射强度曲线

1.2　N 缝衍射的振幅分布和强度分布

现在我们采用矢量法计算N缝夫琅和费衍射的振幅分布和强度分布.

我们先设想，在图 1-1 的装置中把衍射屏上的各缝除某一条之外都遮住．这时接收屏幕上呈现的是单缝衍射图样，其振幅分布和强度分布分别为

$$a_\theta = a_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad I_\theta = a_\theta^2 = a_0^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \tag{1.1}$$

其中

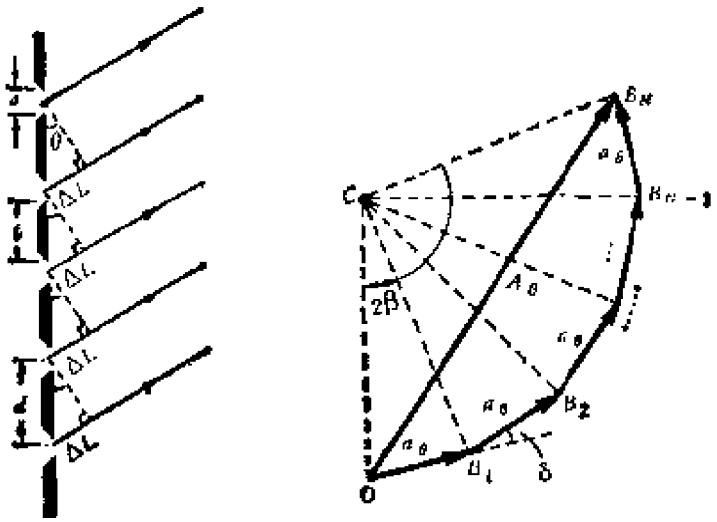
$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta, \qquad (1.2)$$

以上是我们在第二章§7中已知的结果．在该节有过一个思考题，即单缝上下平移时，幕上衍射图样不动．因此，若我们让图1-1装置中的N条缝轮流开放，幕上获得的衍射图样将是完全一样的．假如N条缝彼此不相干，当它们同时开放时，幕上的强度分布形式仍与单缝一样，只是按比例地处处增大了N倍．然而，N条缝实际上是相干的，且它们之间有位相差，因此幕上实际的衍射图样将与单缝大不相同，这在图1-2中的照片里已可明显看出．由于多缝之间的干涉，幕上的强度发生了重新分布．

如图1-1，考虑沿某一任意方向θ的各衍射线，它们有的来自同一狭缝中不同部分，有的来自不同的狭缝，经物镜L_2的聚焦都会合在幕上同一点P_θ．P_θ点的振动是所有这些衍射线相干迭加的结果．在计算时我们可以先把来自每条狭缝的次波迭加起来，得到N个合成振动，然后再把这N个合成振动迭加起来，即得到P_θ点的总振动．因为来自每条狭缝的衍射线的合成振幅a_θ早已计算过了，剩下的问题只是这N个合成振动的迭加．计算来自N缝合成振动的迭加，需要计算它们之间的位相差，而合成振动间的位相差同N缝对应点发出的衍射线间的位相差是一样的．按照以前在第二章§7中采用的作光束垂线的办法不难看出，对应点衍射线间的光程差ΔL和位相差δ分别为(参见图1-4(a))

$$\Delta L = d\cdot\sin\theta, \qquad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta.$$

幕上总振幅A_θ可用矢量图1-4(b)来计算．图中$\overrightarrow{OB_1}$，$\overrightarrow{B_1B_2}$，…，$\overrightarrow{B_{N-1}B_N}$各矢量的长度都是单缝的合成振幅$a_\theta$，方向逐个相差$\delta$角，所以折线$OB_1B_2\cdots B_N$是等边多边形的一部分．令$C$代表这个多边形的中心，即$\overline{OC}=\overline{B_1C}=\overline{B_2C}=\cdots=\overline{B_NC}$．由于等腰三角形$OCB_1$的顶角$\delta=2\beta$，故$2\overline{OC}\sin\beta=\overline{OB_1}=a_\theta$，于是



(a) 光程差　　(b) 矢量图

图 1-4　缝间干涉因子的计算

$$\overline{OC}=\frac{a_\theta}{2\sin\beta},$$

又由于等腰三角形 OCB_N 的顶角 $N\delta=2N\beta$，故代表总振动的矢量 $\overrightarrow{OB_N}$ 的长度为

$$\overline{OB_N}=2\overline{OC}\sin N\beta,$$

这就是 N 缝的总振幅 A_θ，将以上两式结合起来，即得

$$A_\theta=a_\theta\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}, \tag{1.3}$$

取上式的平方，即可得 N 缝的强度分布公式

$$I_\theta=a_\theta^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2. \tag{1.4}$$

把 a_θ 的表达式(1.1)代入上面二式，最后得到

$$A_\theta=a_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}, \tag{1.5}$$

$$I_\theta=a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2, \tag{1.6}$$

其中

$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta,\qquad \beta=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta. \tag{1.7}$$

式(1.5)和(1.6)便是N缝衍射的振幅分布和强度分布公式．各式都有两个随θ变化的因子：$\sin\alpha/\alpha$或$(\sin\alpha/\alpha)^2$来源于单缝衍射，所以叫单缝衍射因子；$\sin N\beta/\sin\beta$或$(\sin N\beta/\sin\beta)^2$来源于缝间的干涉，所以叫缝间干涉因子．下面我们分别研究两个因子的特点和作用．

1.3 缝间干涉因子的特点

图1-5中给出几条不同缝数缝间干涉因子的曲线．为了便于比较，纵坐标缩小了N^2倍，即它代表因子$(\sin N\beta/(N\sin\beta))^2$．它们有以下一些特点：

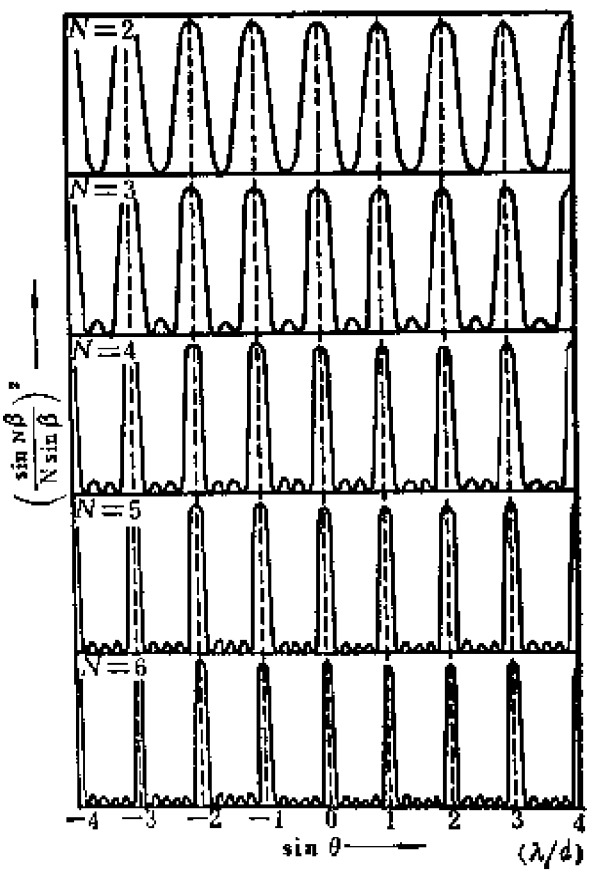


图 1-5 缝间干涉因子曲线

（1）主极强峰值的大小、位置和数目

当 $\beta = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$时，$\sin N\beta = 0$，$\sin\beta = 0$，但它们的比值 $\sin N\beta / \sin\beta = N$，这些地方是缝间干涉因子的主极大．$\beta = k\pi$ 意味着衍射角 θ 满足下列条件：

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d}. \tag{1.8}$$

这就是说，凡是在衍射角满足式(1.8)的方向上，出现一个主极强，它的强度是单缝在该方向强度的N^2倍．式(1.8)还表明，主极强的位置与缝数N无关．

此外由于衍射角的绝对值 $|\theta|$ 不可能大于90°，$|\sin\theta|$ 不可能大于 1，这就对主极强的数目有了限制．式(1.8)表明，主极强的最大级别 $|k| < d/\lambda$，例如当$\lambda = 0.4d$ 时，只可能有$k = 0, \pm 1, \pm 2$级的主极强，而没有别的更高级主极强；如果$\lambda \geqslant d$，则除 0 级外别无其它主极强．

（2）零点的位置、主极强的半角宽度和次极强的数目

当$N\beta$等于 π 的整数倍但 β 不是 π 的整数倍时，$\sin N\beta = 0$，$\sin\beta \neq 0$，这里是缝间干涉因子的零点．用公式来表示，零点在下列位置：

$$\beta = \left(k + \frac{m}{N}\right)\pi \quad \text{即} \quad \sin\theta = \left(k + \frac{m}{N}\right)\frac{\lambda}{d}, \tag{1.9}$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$；$m = 1, \cdots, N-1$．

所以每两个主极强之间有$N - 1$条暗线(零点)，相邻暗线间有一个次极强，故共有$N - 2$个次级强．

图 1-3 表明，主极强亮线的宽度随N减小．这一点在光栅光谱中具有重要的实际意义．如何来规定主极强的宽度呢？可以认为每个主极强的宽度是以它两侧的暗线为界的，它的中心到邻近的暗线之间的角距离就是它的半角宽度 $\Delta\theta$．对于那些偏离幕中央不远的主极强，θ较小，$\sin\theta \simeq \theta$．k 级主极强的角位置近似为 $\theta \simeq k\lambda/d$，而相邻暗线的位置近似为 $\theta + \Delta\theta \simeq (k + 1/N)\lambda/d$，

于是半角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{1.10}$$

如果主极强的位置较偏，则不能认为 $\sin\theta \simeq \theta$，可以证明，普遍的半角宽度公式应为①

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cdot \cos\theta_k}. \tag{1.11}$$

式(1.10)或(1.11)表明，主极强的半角宽度 $\Delta\theta$ 与 Nd 成反比，Nd 越大，$\Delta\theta$ 越小，这意味着主极强的锐度越大．反映在幕上，就是主极强亮纹越细．

以上我们分析了 N 缝干涉因子的全部主要特征，§2 中我们将把这些结果用于光栅上，由于光栅的缝数 N 总是很大的，近代光栅每毫米内可以有上千条刻痕，总缝数 N 达 10^5 的数量级，在这种情况下次极强是很弱的，它们完全观察不到．所以上述各条结论中最重要的只是两条，即主极强的位置和半角宽度，它们分别由式(1.8)和(1.11)决定．

1.4 单缝衍射因子的作用

上面我们只分析了缝间干涉因子的特征，实际的强度分布还要乘上单缝衍射因子．在图 1-5 中所示的缝间干涉因子上乘以图 1-3(a)所示的单缝衍射因子，就得到图1-3(b),(c),(d),(e),(f)中所示的强度分布．从这里可以看出，乘上单缝衍射因子后得到的实际强度分布中各级主极强的大小不同，特别是刚好遇到单缝衍射因子零点的那几级主极强消失了，这现象叫做缺级．

---

① 在 $\sin\theta$ 不能用 θ 来近似代替时，我们应该写

$$\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{d}, \quad \sin(\theta_k + \Delta\theta) = \left(k + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d},$$

而$\Delta\theta$总是很小的，$\sin(\theta_k + \Delta\theta) - \sin\theta_k \simeq \left(\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_k} \cdot \Delta\theta = \cos\theta_k \cdot \Delta\theta$，这样就得到式(1.11)．

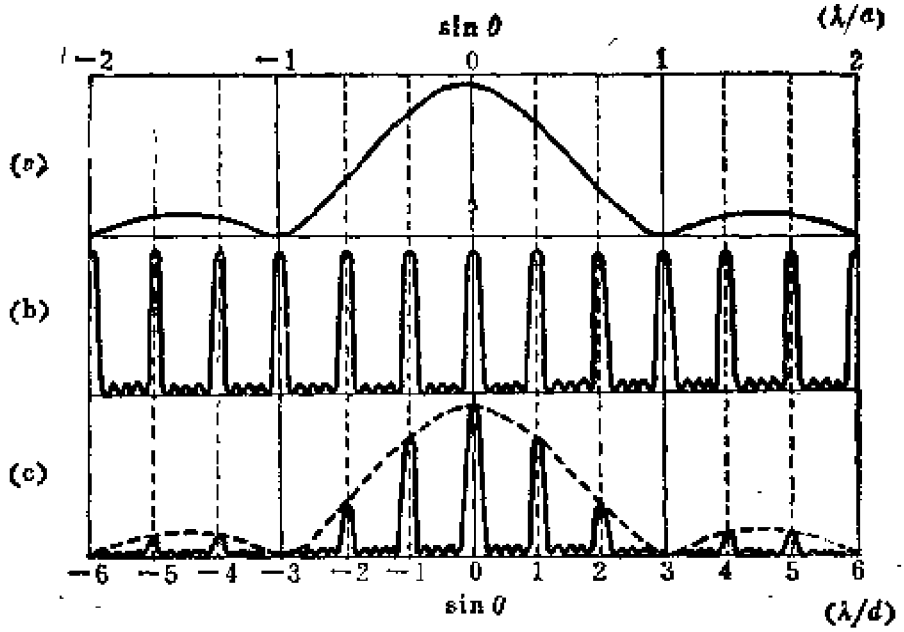


图 1-6　单缝衍射因子的作用

为了具体起见，我们看一个简单的特例．设缝数$N = 5$，而$d = 3a$.这时的单缝衍射因子和缝间干涉因子的曲线示于图1-6(a)和(b)，它们乘积的曲线示于图1-6(c)．单缝衍射因子在 $\sin\theta = \lambda/a$ 的地方是零点，而λ/a 刚好等于$3\lambda/d$，这里正是缝间干涉因子第 3 级主极强的位置，两因子乘起来以后使这一级消失了．同理，－3级、±6级等也是缺级．

总之，在给定了缝的间隔 d 之后，主极强的位置就定下来了．这时单缝衍射因子并不改变主极强的位置和半角宽度，只改变各级主极强的强度．或者说，单缝衍射因子的作用仅在于影响强度在各级主极强间的分配．

在这里我们顺便提一下“干涉”和“衍射”两词的区别和联系．首先，从根本上讲，它们都是波的相干迭加的结果，没有原则上的区别．二者主要的区别来自人们的习惯．当某个仪器将光波分割为有限几束或彼此离散的无限多束，而其中每束又可近似地按几何光学的规律来描写时，人们通常把它们的相干迭加叫做“干涉”，这样的仪器叫做“干涉装置”．理论运算时，

干涉的矢量图解是个折线，复振幅的迭加是个级数．“衍射”一词则指连续分布在波前上的无限多个次波中心发出的次波的相干迭加，这些次波线并不服从几何光学的定律．理论运算时，衍射的矢量图解是光滑曲线，复振幅的迭加需用积分．然而，实际装置中干涉效应和衍射效应往往同时存在，混杂在一起，这时干涉条纹的分布要受到单元衍射因子的调制．上述光栅是个例子，第三章§1中介绍的各种分波前的干涉仪器中也都有这个问题．

1.5 复振幅的计算 黑白光栅和正弦光栅

现在我们利用菲涅耳衍射积分公式(第二章式(5.11))计算一下复振幅分布$\widetilde{U}(\theta)$，由此可重新获得上面的强度分布公式．但这里我们并不想简单地重复上面的计算，而是考虑更普遍些的情形．设衍射屏具有一维的周期性结构，即在该处的波前Σ上光瞳函数$\widetilde{U}_0(x)$是沿x方向的周期性函数．设空间周期为d，我们把Σ分割为宽度为d的N个窄条$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_N$(见图1-7)，以各窄条作为衍射单元．考虑某个给定方向θ的衍射线，它们会聚于透镜焦面上的P_θ点．由各单元的中心引一条到P_θ的衍射线，用$L_1,\cdots,L_N$代表它们的光程．不难看出

$$L_2 = L_1 + \Delta L,\quad L_3 = L_1 + 2\Delta L,\quad \cdots,$$
$$L_N = L_1 + (N-1)\Delta L,$$

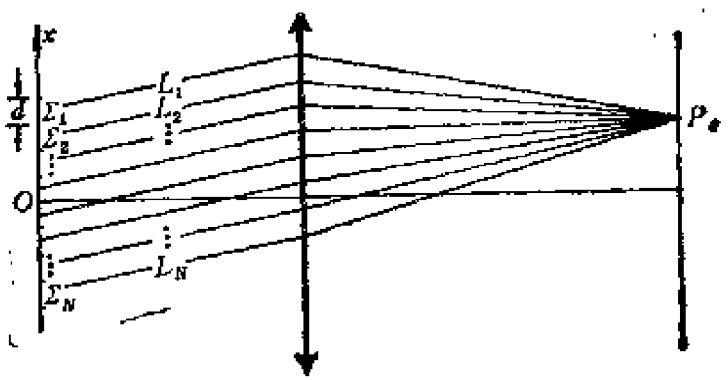


图1-7 一维周期性结构的衍射

其中$\Delta L = d\sin\theta$. 按照菲涅耳衍射公式，P_θ点的总复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta) &= C\int_{(\Sigma)}\widetilde{U}_0(x)e^{ikr}dx \\ &= \sum_{j=1}^{N} C\int_{(\Sigma_j)}\widetilde{U}_0(x_j)\exp(ikr_j)dx_j,\end{aligned} \tag{1.12}$$

其中$r_j = L_j - x_j\sin\theta$，而$x_j$是从各单元的中心算起的，故

$$\begin{aligned}\int_{(\Sigma_j)}\widetilde{U}_0(x_j)\exp(ikr_j)dx_j &= e^{ikL_j}\int_{(\Sigma_j)}\widetilde{U}_0(x_j)\exp(-ikx_j\sin\theta)dx_j \\ &= e^{ikL_j}\int_{-d/2}^{d/2}\widetilde{U}_0(x)\exp(-ikx_j\sin\theta)dx,\end{aligned} \tag{1.13}$$

由于$\widetilde{U}_0(x)$的周期性，上面的积分对各单元都是一样的，故可将x_j的下标j略去，代入式(1.12)后还可作为公共因子从求和号中提出来. 于是

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta) &= C\left(\sum_{j=1}^{N}e^{ikL_j}\right)\int_{-d/2}^{d/2}\widetilde{U}_0(x)\exp(-ikx_j\sin\theta)dx \\ &= \widetilde{N}(\theta)\widetilde{u}(\theta).\end{aligned} \tag{1.14}$$

其中

$$\widetilde{u}(\theta) = C\int_{-d/2}^{d/2}\widetilde{U}_0(x)\exp(-ikx_j\sin\theta)dx \tag{1.15}$$

称为单元衍射因子，而

$$\begin{aligned}\widetilde{N}(\theta) &= \sum_{j=1}^{N}e^{ikL_j} \\ &= e^{ikL_1}(1 + e^{ik\Delta L} + e^{2ik\Delta L} + \cdots + e^{(N-1)ik\Delta L})\end{aligned} \tag{1.16}$$

称为N元干涉因子.

仍用式(1.7)引入的符号$\beta = \pi d\sin\theta/\lambda$，则$k\Delta L = 2\beta$，按等

比级数公式①，得

$$\widetilde{N}(\theta)=e^{ikL_1}(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}+\cdots+e^{2(N-1)i\beta})$$

$$=e^{ikL_1}\frac{1-e^{2Ni\beta}}{1-e^{2i\beta}}=e^{ikL_1}e^{(N-1)i\beta}\frac{e^{-Ni\beta}-e^{Ni\beta}}{e^{-i\beta}-e^{i\beta}},$$

令位相 $\varphi(\theta)=kL_1+(N-1)\beta=kL_0(\theta)$，这里 $L_0(\theta)=L_1+(N-1)\beta/k$ 是光栅中心 O 到场点 P_θ 的光程，于是 $\widetilde{N}(\theta)$ 最后写为

$$\widetilde{N}(\theta)=e^{i\varphi(\theta)}N(\theta)\quad 而\quad N(\theta)=\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}. \qquad (1.17)$$

上式的 $N(\theta)$ 就是我们前面得到的缝间干涉因子．从这里的推导看出，这个因子的形式是很普遍的，它只依赖于 N 单元的空间周期排列，与个别单元内部的性质毫无关系．这就是说，它不仅与单缝的缝宽 a 无关，与每个单元是否简单地为一条缝也无关．

普遍地说，衍射单元的性质要用波前上的光瞳函数 $\widetilde{U}_0(x)$ 来表征．对于一条宽度为 a 的缝来说，光瞳函数的形式如图1-8(a)所示，在 $-a/2<x<a/2$ 范围内(透光部分) $\widetilde{U}_0(x)$ 是个常数，在此范围外(遮光部分) $\widetilde{U}_0(x)=0$．亦即此时 $\widetilde{U}_0(x)$ 是一个矩形阶跃函数．对于这种光瞳函数，单元衍射因子为

$$\widetilde{u}(\theta)\propto\int_{-a/2}^{+a/2}e^{-ikx\sin\theta}dx$$

$$=\frac{1}{ik\sin\theta}\left(e^{ika\sin\theta/2}-e^{-ika\sin\theta/2}\right)$$

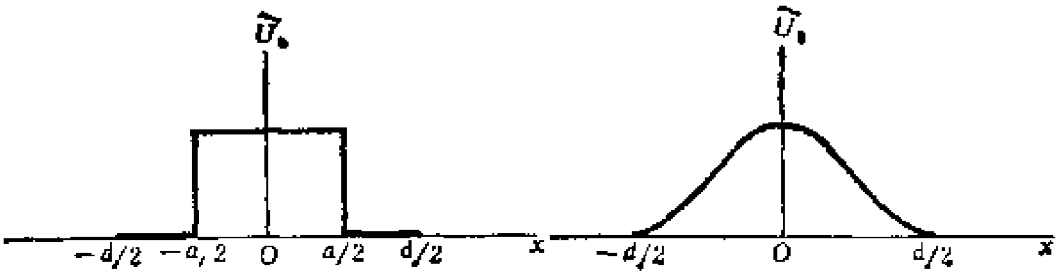
$$\propto\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (1.18)$$

其中 $\alpha=ka\sin\theta/2=\pi a\sin\theta/\lambda$．这便是前面得到的单缝衍射因

---

① 等比级数公式为：

$$n\text{项级数和}=首项\times\frac{1-(公比)^n}{1-公比}.$$



(a) 黑白型　　(b) 正弦型

图 1-8　衍射单元的光瞳函数

正弦型衍射单元的光瞳函数如图1-8(b)所示，它正比于$[1+\cos(2\pi x/d)]$．可以设想这时衍射屏是一张间隔为 d 的干涉条纹的照相底片，它的透光率具有上述函数形式．对于这种“正弦光栅”，单元衍射因子为

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\theta) &\propto \int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{d}\right)e^{-ikx\sin\theta}dx \\ &= \int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\frac{1}{2}e^{i2\pi x/d}+\frac{1}{2}e^{-i2\pi x/d}\right)e^{-ikx\sin\theta}dx \\ &\propto \frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

其中 $\beta = kd\sin\theta/2 = \pi d\sin\theta/\lambda$．可以看出，它由三项组成，每项的函数形式与单缝衍射因子一样，只是缝宽和中心位置不同，三项的中心分别位于$\beta=0,\pm\pi$处，这正是$\tilde{N}(\theta)$的 0 级和±1级的主极强所在处(见图1-9(a),(b))．除此之外，所有$\tilde{N}(\theta)$的其它主极强都与$\tilde{u}(\theta)$的零点重合．所以$\tilde{N}(\theta)$和$\tilde{u}(\theta)$相乘的结果，只剩下0,±1三级主极强．±1级主极强的振幅为 0 级主极强之半强度为它的 1/4(见图1-9(c))．这些结论我们将在第五章中到①．

① 第五章我们将用非常简捷的方法(相因子判断法)得到这些结论．

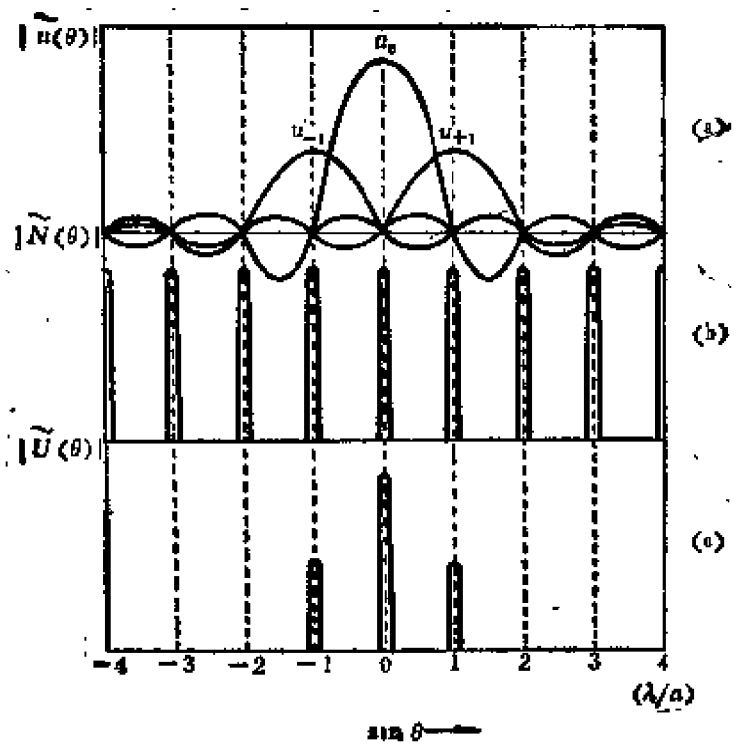


图 1-9　正弦光栅的振幅分布

思　考　题

1．为什么 $d\sin\theta = k\lambda$ 是缝间干涉因子的主极强条件，而 $a\sin\theta = k\lambda$ 却是单缝衍射的暗纹条件？

2．设缝宽 a 与缝间距离 d 之比 $a/d = m/n$(不可简约的分数)，讨论缺级情况．$a/d = 1$ 的情况应怎样理解？

3．多缝衍射屏有缝宽 a，缝距 d，缝数 N 等三个结构参数，试分别讨论每一个参数的变化是如何影响主极强的位置、主极强的半角宽度和主极强的强度的．

4．N缝衍射装置中入射光能流比单缝大N倍，而主极强却大 N^2倍，这违反能量守恒律吗？

5．画出下列三种情况下的夫琅和费衍射强度曲线，并比较它们的特点：

(1) 宽度为 a 的单缝；

(2) 宽度为 $2a$ 的单缝；

(3) 宽度为 a，间距 $d=2a$ 的双缝。

6. 比较一下本节讨论的夫琅和费双缝衍射和第二章§4讨论的杨氏双缝干涉。

7. 在第三章图 1-3 所示的菲涅耳双棱镜干涉条纹的照片中可以看到各级条纹强度不等，它们按一定的规律起伏。试解释这类现象。

8. 衍射屏上有大量缝宽 a 相同、但间距 d 作无规分布的缝，它的夫琅和费衍射图样该是什么样的？

9. 第二章8.1节中介绍过，圆孔的夫琅和费衍射强度分布函数为

$$I(\theta)=I_0\left[\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2,$$

其中 $k=2\pi/\lambda$，a 为圆孔半径，θ 是场点的角半径，J_1 代表一阶贝塞耳函数。当衍射屏上有很大数目(N个)孔径相同但位置无规分布的圆孔时，衍射强度分布的函数表达式为何？

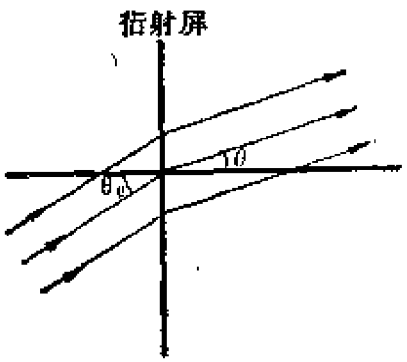
10. 在玻璃板上撒上大量无规分布的不透明球形颗粒，设颗粒半径相同，求衍射强度分布的函数表达式。由此启发，你能想到一种测定颗粒半径和密度的方法吗？

11. 在太阳或月亮的周围有时出现彩色晕圈，你能解释这种现象吗？

12. 正入射时单缝衍射 0 级与缝间干涉 0 级重合，斜入射能将两个 0 级分离吗？

习　题

1. 用坐标纸绘制 $N=2, d=3a$ 的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取 $\sin\theta$，至少画到第 7 级主极强，并计算第一个主极强与单缝主极强之比。



习题 3 图

2. 用坐标纸绘制 $N=6$，$d=1.5a$ 的夫琅和费衍射强度分布曲线，横坐标取 $\sin\theta$，至少画到第 4 级主极强，并计算第 4 级主极强与单缝主极强之比。

3. 导出斜入射时夫琅和费多缝衍射强度分布公式：

$$I_{\text{多}}=I_0\left(\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta'}{\sin\beta'}\right)^2.$$

其中

$$\alpha' = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

$$\beta' = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

θ_0为入射线与光轴的夹角(见图).

4. 导出斜入射时主极强位置公式、第k级主极强的半角宽度公式及缺级情况，并注意与正入射情况作比较.

5. 有三条平行狭缝，宽度都是a，缝距分别为d和$2d$(见图)，证明正入射时其夫琅和费衍射强度分布公式为

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)],$$

其中$\alpha = \pi a \sin\theta/\lambda$，$\beta = \pi d \sin\theta/\lambda$.

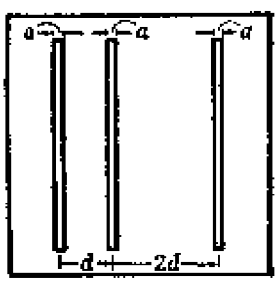
6. 导出不等宽双缝的夫琅和费衍射强度分布公式，缝宽分别为a和$2a$，缝距$d = 3a$(见图).

7. 有$2N$条平行狭缝，缝宽相同都是a，缝间不透明部分的宽度作周期性变化：$a, 3a, a, 3a, \cdots$(见图). 求下列各种情形中的衍射强度分布，

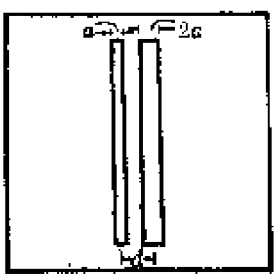
(1) 遮住偶数缝；

(2) 遮住奇数缝；

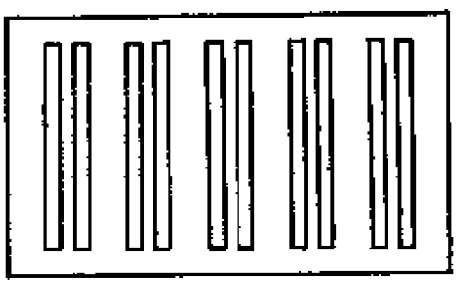
(3) 全开放.



习题5图



习题6图



习题7图

§2 光栅光谱仪

2.1 光栅的分光原理

上节的式(1.8)

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{d} \quad 或 \quad d\sin\theta = k\lambda$$

称为光栅公式．它表明，不同波长的同级主极强出现在不同方位．长波的衍射角大，短波的衍射角小．如果入射光里包含几种不同波长 λ，λ'，…的光，则除 0 级外各级主极强位置都不同（图 2-1(a)），因此用缝光源照明时，我们看到的衍射图样中有几套不同颜色的亮线，它们各自对应一个波长（图2-1(b)）．这些主极强亮线就是谱线，各种波长的同级谱线集合起来构成光源的一套光谱．如果光源发出的是具有连续谱的白光，则光栅光谱中除 0 级仍近似为一条白色亮线外，其它级各色主极强亮线都排列成连续的光谱带．

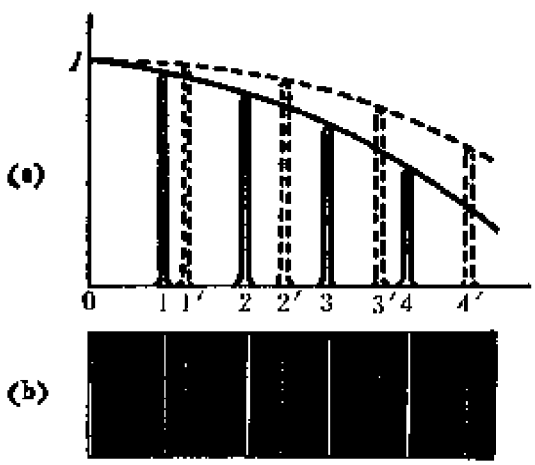


图 2-1 光栅光谱

可以看出，光栅光谱与棱镜光谱有个重要区别，就是光栅光谱一般有许多级，每级是一套光谱，而棱镜光谱只有一套．

2.2 光栅的色散本领和色分辨本领

近代光谱仪中的光栅是一种十分精密的分光元件．同一切分光元件一样，光栅性能的主要标志有二：一是色散本领，二是色分辨本领．两者都是要说明最终能够被仪器（包括接收器）所分辨

的最小波长间隔 $\delta\lambda$ 有多少.

（1）色散本领

实际中很关心的问题之一，是对于一定波长差 $\delta\lambda$ 的两条谱线，其角间隔 $\delta\theta$ 或在靠上的距离 δl 有多大，这就是仪器的色散本领问题. 角色散本领定义为

$$D_\theta \equiv \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}, \tag{2.1}$$

线色散本领定义为

$$D_l \equiv \frac{\delta l}{\delta\lambda}. \tag{2.2}$$

设光栅后面聚焦物镜的焦距为 f，则 $\delta l = f\delta\theta$，所以线色散本领与角色散本领之间的关系是

$$D_l = f D_\theta. \tag{2.3}$$

现在来计算光栅的色散本领. 仍从光栅公式出发，取它两端的微分，得

$$\cos\theta\ \delta\theta = k\frac{\delta\lambda}{d},$$

于是得光栅的角色散本领

$$D_\theta = \frac{k}{d\cdot\cos\theta_0} \tag{2.4}$$

和线色散本领

$$D_l = \frac{kf}{d\cdot\cos\theta_0}. \tag{2.5}$$

上面结果表明，光栅的角色散本领与光栅常数 d 成反比，与级数 k 成正比，此外，线色散本领还与焦距 f 成正比. 但色散本领与光栅中衍射单元的总数 N 无关. 为了增大角色散本领，近代光栅的缝是很密的，每毫米数百条到上千条，即 $d\simeq 10^{-2}$—10^{-3}mm，这时对于 1 级光谱（$k=1$）来说 $D_\theta \sim 0.1'/\text{Å}$—$1'/\text{Å}$. 为了增大线色散本领，光栅的焦距 f 常达数米，这样其线色散本领 D_l 可

达 0.1—1mm/Å以上．对于级别更高的光谱，色散本领还可进一步加大①．

例题 1 钠黄光包括 $\lambda = 5890.0$ Å 和 $\lambda' = 5895.9$ Å 两条谱线．使用15cm、每毫米内有1200条缝的光栅，1级光谱中两条谱线的位置、间隔和半角宽度各多少？

解 光栅的缝间距离(光栅常数)为

$$d = \frac{1}{1200}\text{mm} = \frac{1}{12000}\text{cm},$$

根据光栅公式，一级谱线的衍射角为

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda}{d} = \sin^{-1}(0.7068) = 44°58.5'.$$

光栅的角色散本领为

$$D_\theta = \frac{k}{d\cdot\cos\theta_k} = 1.7\times10^{-4}\text{rad/Å} = 0.57'/\text{Å},$$

所以波长差 $\delta\lambda = 5.9$ Å 的钠双线的角间隔为

$$\delta\theta = D_\theta\,\delta\lambda = 0.57'\times5.9 = 3.4'.$$

又因光栅总宽度 $Nd = 15$cm，所以双线中每条谱线的半角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cdot\cos\theta} = \frac{5.89\times10^{-5}\text{cm}}{15\text{cm}\times\cos44°58.5'}$$

$$= 5.55\times10^{-6}\text{rad} = 0.019'.$$

(2) 色分辨本领

色散本领只反映谱线(主极强)中心分离的程度，它不能说明两条谱线是否重迭．所以只有色散本领大还是不够的，要分辨波长很接近的谱线，仍需每条谱线都很细．如图2-2所示，在(a)，(b)，(c)三种情形里的色散本领都一样，即波长分别为 λ 和 $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ 的两条谱线的角间隔 $\delta\theta$ 一样，但每条谱线的半角宽度 $\Delta\theta$ 不

① 在实用中人们习惯于用"Å/mm"来表示光栅色散的能力，这相当于线色散本领的倒数．

同．在图(a)中$\Delta\theta>\delta\theta$，两条谱线的合成强度如粗线所示，看起来和一条粗谱线无异，因此无法分辨它们本来有两条谱线．在图(c)中$\Delta\theta<\delta\theta$，合成强度在中间有个很明显的极小．我们可以分辨出这是两条谱线．和第二章§6中讨论光学仪器的像分辨本领时一样，通常规定$\Delta\theta=\delta\theta$(图(b))是两谱线刚好能分辨的极限，这便是所谓"瑞利判据".

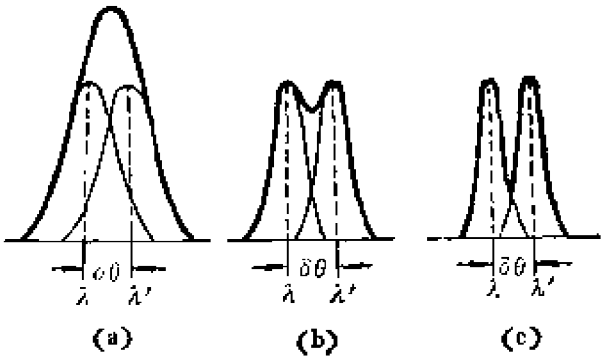


图 2-2 瑞利判据

对于每个光栅，谱线的半角宽度$\Delta\theta$是一定的，它由式(1.11)决定，即

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cdot\cos\theta}.$$

根据瑞利判据，这也就是能够分辨的两条谱线的色散角$\delta\theta$，由此可以推断出能够分辨的最小波长差

$$\delta\lambda=\frac{\delta\theta}{D_\theta}=\frac{\Delta\theta}{D_\theta}=\frac{d\cdot\cos\theta}{k}\cdot\frac{\lambda}{Nd\cdot\cos\theta}$$

$$=\frac{\lambda}{kN}.$$

$\delta\lambda$越小，说明仪器的色分辨本领越大，通常一个分光仪器的色分辨本领定义为

$$R\equiv\frac{\lambda}{\delta\lambda}. \tag{2.6}$$

由此求得光栅的色分辨本领公式

$$R=kN, \tag{2.7}$$

上式表明，光栅的色分辨本领正比于衍射单元总数N和光谱的级别k，与光栅常数d无关．

例题 2 一个15cm 宽的光栅，每毫米内有1200个衍射单元，在可见光波段的中部($\lambda\sim5500$ Å)此光栅能分辨的最小波长差为多少?

解 $d=(1/1200)$mm，$N=15\text{cm}\times1200/\text{mm}=18\times10^4$. 由式(2.7)得一级光谱的色分辨本领为

$$R=18\times10^4.$$

所以，在 $\lambda\sim5500$ Å 附近能分辨的最小波长间隔

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{R}=0.03\text{ Å}.$$

例题 3 用以上例题中的光栅作为分光元件，组成一台光栅光谱仪. 如果用照相底片摄谱，由于乳胶颗粒密度的影响，感光底片的空间分辨本领为 200条/mm，为了充分利用光栅的色分辨本领，这台光谱仪器的焦距至少要有多长?

解 根据题意，应当要求光栅的线色散本领能将波长差 $\delta\lambda=0.03$Å 的两条谱线分开到(1/200)mm的线距离，即

$$D_l=\frac{1}{200\times0.03}\text{mm/ Å}=0.16\text{mm/ Å}.$$

仪器的焦距应为

$$f=D_l\,d\cos\theta_k/k=D_l\sqrt{d^2-(d\sin\theta_k)^2}/k$$
$$=D_l\sqrt{d^2-(k\lambda)^2}/k=1.0\text{m}.$$

以上几个例题告诉我们，角色散本领、线色散本领以及色分辨本领三者是光谱仪器三个独立的性能指标，各有各的作用，彼此不能替代，而应当互相匹配得当. 这对光谱仪的设计者来说是必须综合考虑的基本问题，对于使用者来说，懂得这一点也是很有好处的.

2.3 量程与自由光谱范围

由于衍射角最大不超过 90°，根据光栅公式，最大待测波长 λ_M不能超过光栅常数d，即

$$\lambda_M < d.$$

因此，工作于不同波段的光栅光谱仪要选用光栅常数适当的光栅备件.

光栅光谱仪中可能发生邻级光谱重迭的现象. 例如8000Å的一级谱线与4000Å的二级谱线正好重合. 显然在实际测量时应避免发生这种情况，在红外或紫外波段无法用肉眼判断颜色时，这个问题就尤为突出了. 因此，光栅光谱仪工作波段的上限(长波) λ_M与下限(短波) λ_m受到自由光谱范围(即不重迭的光谱范围)的限制. 对一级光谱来说，要求

$$\lambda_m > \lambda_M/2.$$

2.4 闪耀光栅

前面讲的透射光栅有很大缺点，就是衍射图样中无色散的 0 级主极强总占有总光能的很大一部分，其余的光能也分散在各级光谱中，以致每级光谱的强度都比较小. 造成这种状况的原因是单元衍射因子与单元间干涉因子主极强重迭. 实际中使用光栅时只利用它的某一级光谱，我们需要设法把光能集中到这一级光谱上来. 用闪耀光栅可以解决这个问题.

目前闪耀光栅多是平面反射光栅. 以磨光了的金属板或镀上金属膜的玻璃板为坯子，用劈形钻石刀头在上面刻划出一系列锯齿状槽面(见图2-3). 槽面与光栅(宏观)平面之间的夹角，或者说它们的法线 n 和 N 之间的夹角 θ_b，叫做闪耀角. 闪耀角的大小可由刻制时刀口的形状来控制. 下面我们来分析，这种平面反射光栅的单槽衍射 0 级是怎样与槽间干涉 0 级错开，从而把光能转移并集中到所需的一级光谱上的.

可供选择的照明方式有两种，分别示于图2-3的(a)和(b)中. 第一种照明方式(图(a))，是平行光束沿槽面法线 n 方向入射，单槽衍射的 0 级是几何光学的反射方向，即沿原方向返回. 对于槽间干涉来说，相邻槽面之间在这方向有光程差 $\Delta L = 2d\sin\theta_b$. 满

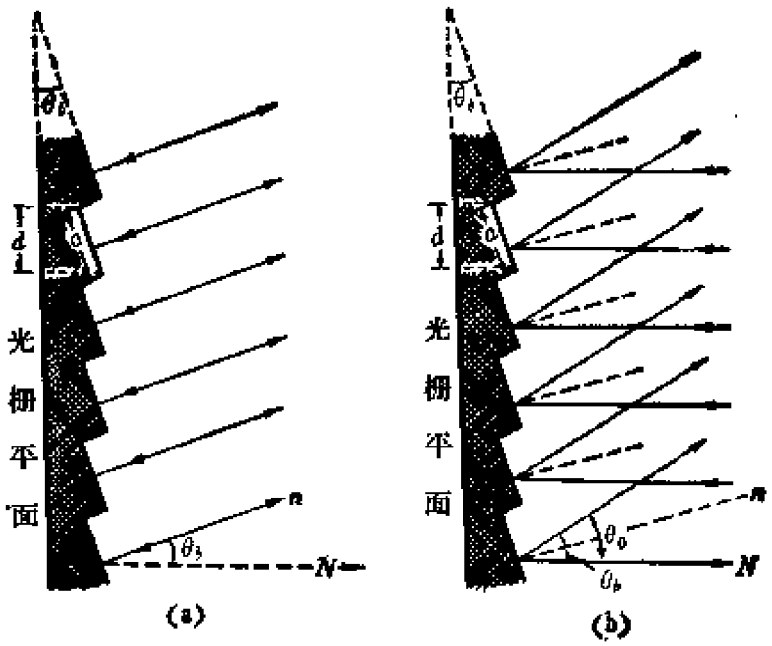


图 2-3　闪耀光栅

足下式的 λ_{1b} 叫做 1 级闪耀波长：

$$2d\sin\theta_b = \lambda_{1b},$$

光栅的单槽衍射 0 级主极强正好落在 λ_{1b} 光波的 1 级谱线上（图 2-4）．又因闪耀光栅中的 $a \approx d$，λ_{1b} 光谱的其它级（包括 0 级）都几乎落在单槽衍射的暗线位置形成缺级（见图 2-4 (c)）．这样一来，80%—90%的光能集中到 λ_{1b} 光的 1 级谱线上，使其强度大大增加．显然，λ_{1b} 光的闪耀方向不可能严格地又是其它波长的闪耀方向，不过由于单槽衍射 0 级主峰有一定宽度，它可容纳 λ_{1b} 附近一定波段内其它波长的 1 级谱线，使它们也有较大的强度，同时这些波长的其它级谱线也都很弱．此外，用同样的办法我们可以把光强集中到 2 级闪耀波长 λ_{2b} 附近的 2 级光谱中去．λ_{2b} 满足

$$2d\sin\theta_b = 2\lambda_{2b}.$$

总之，我们可以通过闪耀角 θ_b 的设计，使光栅适用于某一特定波段的某级光谱上．

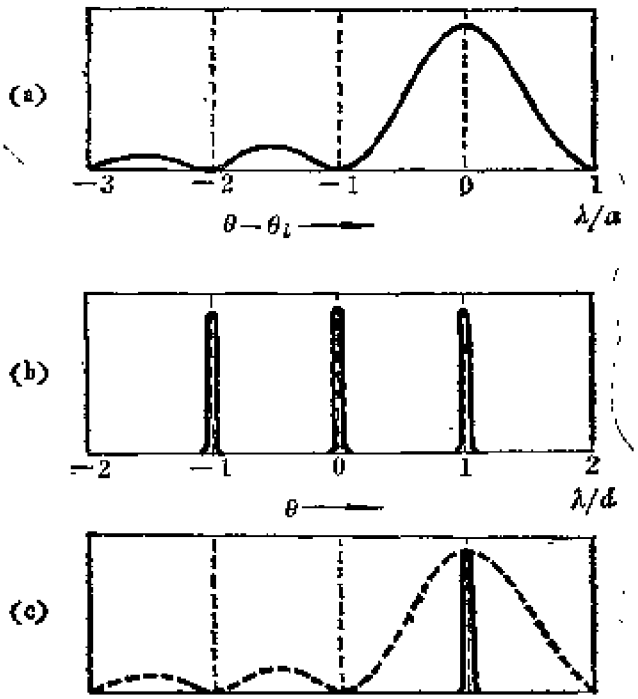


图 2-4　单槽衍射(图(a))的 0 级与槽间干涉(图(b))的 1 级重合，将光强集中到 1 级光谱中去(图(c))

第二种照明方式(图(b))，是平行光束沿光栅平面法线 N 入射，经槽面反射的几何光线与入射方向有 $2\theta_b$ 的夹角．这时相邻槽面间的光程差将为 $\Delta L = d\sin 2\theta_b$．有关这种照明方式衍射图样的分析与第一种类似，只是需采用斜入射的公式(见 § 1 习题 3)．这里我们不仔细交代了，留给感兴趣的读者自己处理．

例题 4　分析红外波段 $10\mu m$ 附近的 1 级光谱，决定选用闪耀角为30°的光栅，问光栅的刻槽密度应为多少？

解　令 $\lambda_{1b} = 10\mu m$，

$$\frac{1}{d} = \frac{2\sin\theta_b}{\lambda_{1b}} = 100\text{条/mm}.$$

实际的光栅光谱仪装置并不象原理性装置图 1-1 所示那样用透镜聚焦，而是用凹面反射镜(见图2-5)．这样既可避免吸收和色差，又可缩短装置的长度．在像面上既可一次曝光获得光谱图，也可采用出射狭缝来提取不同的谱线，用光电元件(如光电倍增

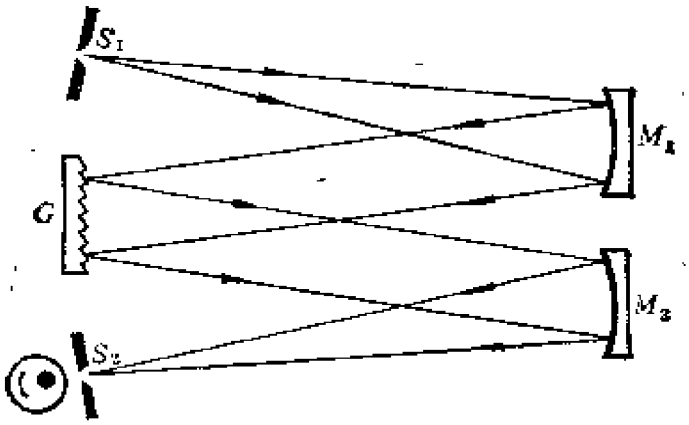


图 2-5　反射式光栅光谱仪的装置

管)接收，把光谱强度转化为电讯号指示出来.通常闪耀光栅光谱仪的设置如图2-5所示，其中S_1为入射狭缝，S_2为出射狭缝，G是光栅，M_1,M_2为凹面反射镜．为了操作方便，实际光栅光谱仪中狭缝S_1,S_2,光源和光电元件都固定不动，而光栅平面的方位是可调节的．通过光栅平面的转动，把不同波长的谱线调节到出射狭缝S_2上去．这样做就必须采用上述第一种照明方式，以便光栅上的几何反射线方向变动不大，不太影响单槽衍射的 0 级位置．闪耀光栅也可作为独立的分光元件使用，这时因光栅宏观平面的法线 N 比较容易辨认，可使用第二种照明方式．

与棱镜光谱仪一样，光栅光谱仪既可用于分析光谱，也可以当作一台单色仪使用，即把它的出射狭缝当作具有一定波长的单色光源．

光栅与棱镜相比，容易获得较大的色散，而且色散也比较均匀．但由于透射光栅的光谱强度比棱镜弱得多,过去在需要考虑光谱的强度问题时，还是得用棱镜．近三十年来，情况发生了变化，由于制造光栅技术上的进步，出现了制造方便、成本低廉、质量很好的平面反射式的闪耀光栅．铝在近红外区域和可见区域的反射系数都比较大，而且几乎是常数；更重要的是它在紫外区域的反射系数比金和银都大，此外它还比较软，便于刻划．而制造透红外线或紫外线的棱镜有各种困难，如石英在红外区域色散

太小，食盐怕潮等等．由于以上种种原因，克服了光谱强度弱的缺点的铝制平面反射闪耀光栅，已在目前制造的各种分光仪器中，逐渐取代了棱镜的地位．更令人注目的是近十几年来随着全息技术的发展，位相型的透射式全息闪耀光栅已有商品问世，其前景也是不可低估的．下面仅就传统的刻线光栅谈谈制作问题．

目前广泛应用的平面反射光栅，是在玻璃坯上镀一层铝膜，然后用金刚石在铝膜上刻划出很密的平行刻槽而成．当前我国大量生产的平面反射光栅每毫米刻槽600条或1200条，最密的达1800条．刻划一块精密光栅的要求是很高的，不但要保持每条刻痕都很直，而且还要求刻痕的间隔 d 十分均匀，深度和剖面形状很一致，它们的精确度都是以光波的几分之一或几十分之一来衡量的．因而光栅刻划机的元件，如钻石刀头、丝杠、齿轮、导轨和轴承等都要非常精密．而且在刻划过程中还要防止震动和温度变化，刻划的动作要慢，每分钟刻6线，刻一块90000条线的光栅，昼夜不停，需一星期．由于机件的误差，在光栅光谱中就会出现一些多余的亮线，以假乱真．这种不代表真实谱线的亮线叫做鬼线．好的光栅要求鬼线的强度应小于真实谱线强度的百分之几或千分之几，这对机件允许的误差要求是很高的．所以，刻划一块精密的光栅是件很繁重的工作，不过一旦刻好一块母光栅，就可以用它作模型进行复制，复制光栅的成本就大大降低了．

*2.5 棱镜光谱仪的色分辨本领

在第一章8.7节讨论过棱镜光谱仪的色散本领问题，这里复习一下，并补充它的色分辨本领．

第一章式(8.11)给出的角色散本领公式为

$$D_\theta = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda},$$

它又可写为

$$D_\theta = \frac{b}{a} \cdot \frac{dn}{d\lambda}, \tag{2.8}$$

式中 b 是棱镜底边长度，a 是光束的宽度(见图2-6)．式(2.8)不难从最小偏向角公式①得到，请读者自己将它推导出来．式中色散率 $dn/d\lambda$ 的数值可

① 第一章式(1.13)．

以查表．各种光学玻璃和石英在可见光波段从长到短，$-dn/d\lambda$ 值大致在 $(0.3-1.3)\times10^{-5}$/Å范围内．

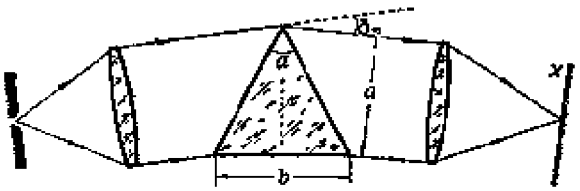


图 2-6　棱镜光谱仪的色散本领与分辨本领

棱镜对光束的限制作用相当于矩孔，它产生矩孔衍射，色分辨本领问题由此引起．我们只关心沿图 2-6 纸面 x 方向的衍射，由第二章7.5节知道，宽度为 a 的光束的衍射半角宽度为 $\Delta\theta=\lambda/a$．另一方面因波长差 $\delta\lambda$ 引起谱线的角位置为 $\delta\theta=D_\theta\delta\lambda$．按照瑞利判据，令 $\Delta\theta=\delta\theta$，导出棱镜的色分辨本领为

$$R\equiv\frac{\lambda}{\delta\lambda}=b\frac{dn}{d\lambda}. \tag{2.9}$$

其中 $\delta\lambda$ 是棱镜在光波长 λ 附近可能分辨的最小波长差．

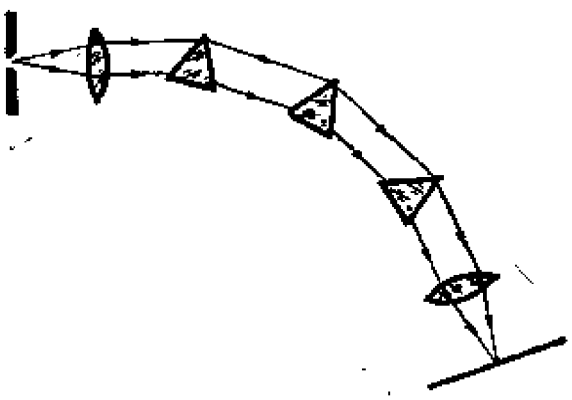


图 2-7　将多个小棱镜联合起来以增大底边的有效长度

第一章的式(8.11)和这里的式(2.8)，(2.9)告诉我们，棱镜顶角 a 越大，或 b/a 越大，则色散本领越大；棱镜的底边 b 越长，则色分辨本领越大．总之，大棱镜的分光性能好．为了避免制作大块均匀光学玻璃的困难，可采用多个小棱镜联合工作，以增大底边的有效长度(图2-7)．也可在棱镜的一个侧面镀上反射膜，使入射光束在棱镜内往返两次，以提高色散本领(图2-8)．

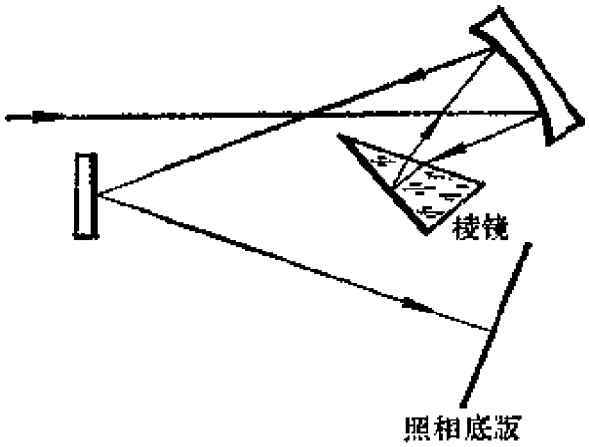


图 2-8　一台典型的棱镜摄谱仪光路结构

思　考　题

1．在光谱仪中为什么人们爱用反射镜(平面、凹面)，而不大喜欢用透镜？

2．为了提高光栅的色散本领和分辨本领，既要求光栅刻线很密(即d小)，又要求刻线总数很多(即N大)．怎样理解N增大并不能提高光栅的色散本领？怎样理解d减小时虽然扩大两条谱线的角间隔，却不能提高分辨本领？

3．现有一台光栅光谱仪备有同样大小的三块光栅：1200条/mm；600条/mm；90条/mm．试问：

(1) 当光谱范围在可见光部分，应选用那块光栅？为什么？

(2) 当光谱范围在红外 3μm—10μm 波段，应选用那块光栅，为什么？

4．(1) 试由$R=kN$导出光栅分辨本领公式的另一形式：

$$R=D\sin\theta/\lambda,$$

其中$D=Nd$，$D\sin\theta$的物理意义是什么？

(2) 现代光栅的最大宽度$D\sim25$cm，在波长0.5μm附近其极限分辨本领R和相应的可分辨的最小波长间隔$\delta\lambda$各多少？

(3) 有人认为光栅光谱仪的分辨本领受照明光束的时间相干性限制，你觉得这看法有道理吗？

5．导出光栅色散本领公式的另一形式

$$D_\theta = \tan\theta/\lambda.$$

6. 导出棱镜光谱仪色散本领的公式(2.8).

7. 色散型光谱仪加上出射狭缝，就成为一台单色仪. 由光栅光谱仪作成的单色仪，其输出光束的单色性好坏由什么因素决定？怎样才算充分利用了光栅元件的分辨本领？增大光栅的宽度 $D=Nd$，能改善输出光束的单色性吗？

习　题

1. 波长为6500Å的红光谱线，经观测发现它是双线，如果在9×10^5条刻线光栅的第3级光谱中刚好能分辨此双线，求其波长差.

2. 若要50条/mm的光栅在第2级光谱中能分辨钠双线λ_1(5890Å)和λ_2(5896Å)，光栅宽度应选多少？

3. 绿光5000Å正入射在光栅常数为2.5×10^{-4}cm，宽度为3cm的光栅上，聚光镜的焦距为50cm.

(1) 求第1级光谱的线色散；

(2) 求第1级光谱中能分辨的最小波长差；

(3) 该光栅最多能看到第几级光谱？

4. 一束白光正入射在600条/mm的光栅上，第1级可见光谱末端与第2级光谱始端之间的角间隔有多少？

5. 国产31WI型一米平面光栅摄谱仪的技术数据表中列有：

物镜焦距……1050mm
光栅刻划面积……60mm×40mm
闪耀波长……3650Å(1级)
刻线……1200条/mm
色散……8Å/mm
理论分辨率……72000(1级)

试根据这些数据求计算一下：

(1) 该摄谱仪能分辨的谱线间隔的最小值为多少？

(2) 该摄谱仪的角色散本领为多少(以Å/′(弧分)为单位)？

(3) 光栅的闪耀角为多大？闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大角度？

6. 底边长度为6 cm的棱镜，在光波长为0.6μm附近能分辨的最小

波长间隔为多少？以棱镜材料的色散 $dn/d\lambda$ 值为0.4×10^{-5}/Å来估算.

7. 根据以下数据比较光栅、棱镜、法-珀干涉仪三者的分光性能：(1) 分辨本领；(2) 色散本领；(3) 自由光谱范围.

光栅宽度 $D=5$cm；刻线密度$1/d=600$条/mm；棱镜底边 $b=5$cm；顶角 $\alpha=60°$；折射率 $n=1.5$；色散率 $dn/d\lambda=0.6\times10^{-5}$/Å；法-珀腔长 $h=5$cm；反射率$R=0.99$.

*§3 三维光栅——X射线在晶体上的衍射

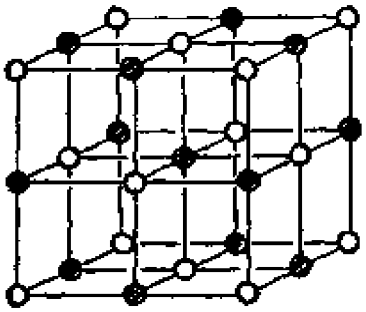
前面讨论的光栅都是一维的，即衍射屏的结构只在空间的一个方向上有周期性. 除一维光栅外，还可以有二维光栅、三维光栅. 固体的晶格在三维空间里有周期性的结构，它对于波长较短的X射线来说，是一个理想的三维光栅，这方面的研究工作至今已发展成为一门比较成熟的技术——X射线结构分析. 下面先对晶体点阵和X射线分别作些简单的介绍，然后讨论X射线在晶体上的衍射规律.

3.1 晶体点阵

晶体的特点是外部具有规则的几何形状，内部原子具有周期性的排列，两者互为表里. 例如，大家熟悉的食盐(NaCl)，其晶粒的宏观外形总是具有直角棱边，其微观结构则是由钠离子(Na^+)与氯离子(Cl^-)彼此相间整齐排列而成的立方点阵(图3-1). 在三维空间里无论沿哪个方向看，离子的排列都有严格的周期性. 这种结构，晶体学上叫做晶格，或晶体的空间点阵. 晶体中相邻格点的间隔 a_0 叫做晶格常数，它通常具有10^{-8}cm，即Å的数量级. 例如经测定，NaCl晶体中相邻的Na^+、Cl^-离子间隔$a_0=5.627$Å.

3.2 X射线

X射线又称伦琴射线(W. K. Röntgen, 1895年)，它是一种电磁波. 在电磁波谱的整个序列中10Å—10^{-2}Å的波长范围属于X射线波段. 产生X射线的机器——X光机，其核心部件是X射线管，其结构见示意图3-2. 在抽空的玻璃管中装有阴极K和阳极A，阴极由钨丝制成螺旋状，并由低压电源加热. 阳极靶由钼、钨或铜等金属制成. 在阳极和阴极之间加几万伏



●Na^+ ○Cl^-

图 3-1　氯化钠晶体

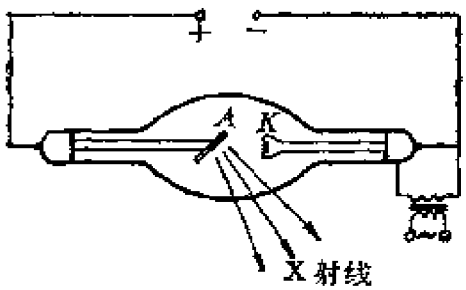


图 3-2　X 射线管

或几十万伏的直流高压．阴极发射的热电子流被高电压加速，以很大的速度轰击在阳极靶上而骤然停止，电子流的动能立即转变为 X 射线波段的电磁辐射能①从管壁或窗口穿出．这样，我们便得到了X射线．

与可见光或紫外线相比，X 射线的特点是波长短，穿透力强．它很容易穿过由氢、氧、碳、氮等较轻元素组成的肌肉组织，但不易穿透骨骼．医学上用X射线检查人体生理结构上的病变，就是X射线最早的应用之一．随着加速电压的增高，获得的X射线波长更短，穿透力更强，它可以穿过一定厚度的金属材料或部件，由此发展起来一个新技术领域，这就是X 射线探伤学②．

我们这里将讨论的只是X射线在晶体上的衍射问题．一般 X 光机发出的X射线波长都在Å的数量级或更短．要使这样短的电磁波产生明显的衍射效应，用普通机械刻痕的光栅是不行的，原因就是其光栅常数 $d \gg \lambda$．前面看到，晶体内部的原子间隔 $a_0 \approx \lambda$，它们能使 X 射线发生明显的衍射效应，是理想的X射线的衍射光栅．

3.3　X 射线在晶体上的衍射——布喇格条件

现在来分析X射线进入晶体以后所产生的衍射效果．如图3-3，处在格点上的原子或离子，其内部的电子在外来电磁场的作用下做受迫振动，成

① 当然不可避免地还有一部分能量转化为热能．

② 30万伏的X光机将产生中心波长在0.96Å附近的X射线，它能穿过 4 cm 厚的铝板而强度只降低为原来的三分之一，如果再辅助其它措施，还可以使穿透的最大厚度提高几倍．

为一个新的波源，向各个方向发射电磁波。也就是说，在X射线照射下，晶体中的每个格点成为一个散射中心。这些散射中心在空间周期性地排列着，它们发射的电磁波频率与外来X射线的频率相同，而且这些散射波是彼此相干的，将在空间发生干涉。这同多缝光栅问题很相似，在那里，是入射光被大量周期性排列的单缝所衍射，同时发生缝间干涉。与单缝相当的，在这里是晶格的格点，两者都是衍射单元；与光栅常数 d 相当的，在这里是晶格常数，两者都反映的是衍射屏的空间周期。区别主要在于一个是一维的，一个是三维的。

象一维衍射光栅那样计算单缝衍射因子的工作，目前可省略掉，这是因为实际中关心的是主极强的位置。象一维光栅那样处理缝间干涉的工作，在目前要复杂一些，这是因为晶体点阵是三维的。这个问题可分解为两步来处理：第一步，是处理一个晶面中各个格点之间的干涉——点间干涉；第二步，再处理不同晶面之间的干涉——面间干涉。

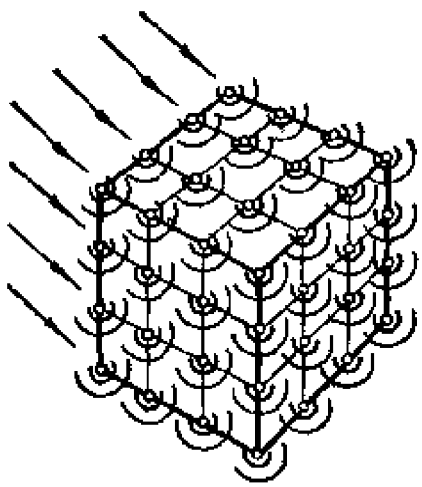


图 3-3　晶体对X光的衍射

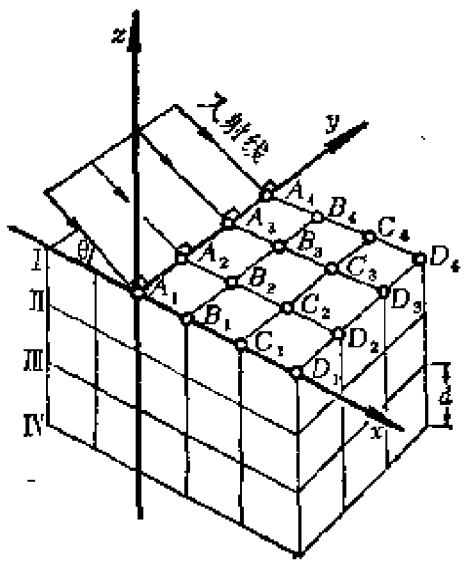


图 3-4　晶体点阵由晶面组成

（1）点间干涉

如图3-4，整个晶体点阵可以看成是由一族相互平行的晶面Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，…组成。设这些晶面平行于 x-y 面，入射的X射线垂直于 y 轴(因此平行于 z-x 面)，并与晶面族成 θ 角(称为掠射角)。现考虑某一晶面上各个格点 $A_1,A_2,A_3,A_4,\cdots$、$B_1,B_2,B_3,B_4,\cdots$、$C_1,C_2,C_3,C_4,\cdots$、$D_1,D_2,$

$D_3, D_4, \cdots$发出的散射波(或者说衍射波)的相干迭加。这些格点构成一个二维的点阵，对它来说，入射线是倾斜的。我们首先讨论这个二维点阵衍射的0级主极强方向，即沿此方向所有的衍射线之间没有光程差。这个问题又可以分解为两步来考虑：首先找出沿 y 方向排列的格点发出的衍射线之间零程差的条件，然后再讨论 x 方向排列的格点发出的衍射线之间零程差的条件，同时满足这两个条件的衍射方向就是二维点阵衍射的0级主极强方向。

如图3-5，$A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$是一组沿 y 方向排列的格点。因入射线 1,2,3,4,…与 y 轴垂直，它们到达格点时彼此之间没有光程差。由图不难看出，任何一组相互平行的衍射线，只要仍保持与 y 轴垂直，它们之间就没有光程差。换句话说，由 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$发出的衍射线的零程差条件是它们与入射线一样位于与 z-x 面平行的平面(即入射面)内。图中所示的 $1', 2', 3', 4', \cdots$就是这样一组可能的衍射线。

现在来研究沿 x 方向排列的格点(譬如$A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots$)发出的衍射线之间的零程差条件。考虑到上述沿 y 方向的零程差条件，这里只讨论平行于 z-x 面的衍射线。如图3-6所示，$a, b, c, d, \cdots$为一组平行的入射线，它们的掠射角为θ，$a', b', c', d', \cdots$为一组平行的衍射线，它们与 x 轴的夹角为θ'。由A_1和D_1分别作入射线和衍射线的垂线A_1M和D_1N。则 d, a 两条入射线之间的光程差为$\Delta L = \overline{MD_1} = \overline{A_1D_1}\cos\theta$，而 a'，d'两条衍射线之间的光程差为

$$\Delta L' = \overline{A_1N} = \overline{A_1D_1}\cos\theta'.$$

由此可见，零程差的条件是$\theta' = \theta$。

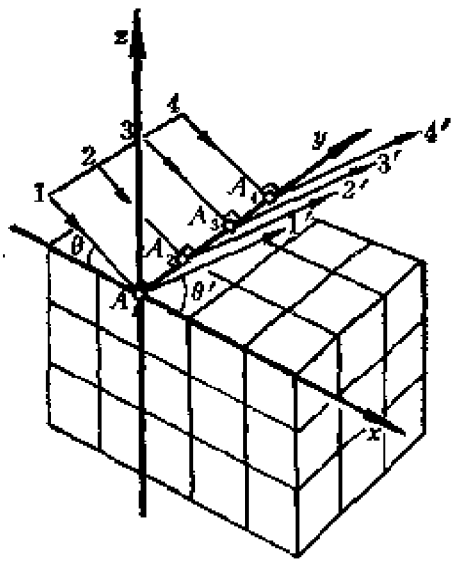


图 3-5　晶面内沿 y 方向排列的格点上衍射波的零程差条件

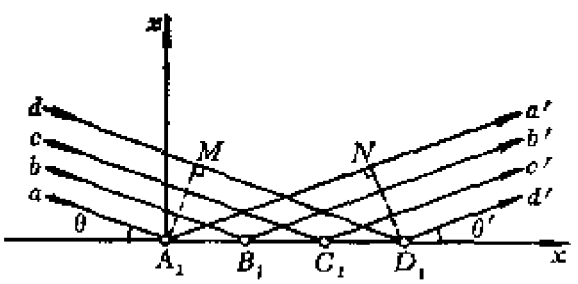


图 3-6　晶面内沿 x 方向排列的格点上衍射波的零程差条件

总之，同时考虑二维点阵中两个方向的零程差条件，衍射线应在$z-x$面（入射面）内，且衍射角等于入射的掠射角．换句话说，二维点阵的0级主极强方向，就是以晶面为镜面的反射线方向．

与一维光栅一样，在$\lambda<d$的条件下，二维点阵是有更高级主极强的．然而下面我们将看到，在讨论面间干涉时只考虑在反射方向上的0级主极强就够了①．

（2）面间干涉

上面已确定，每个晶面衍射的主极强沿反射方向，我们还要考虑不同晶面上的反射线之间的干涉．图3-7中的$1'$，$2'$，$3'$，$4'$，…分别是晶面Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，…的反射线．这平行的线束迭加起来是加强还是削弱，取决于相邻反射线之间的光程差．考虑晶面Ⅰ，Ⅱ上对应点P_1，P_2的反射线$1'$和$2'$．由P_1分别作入射线和反射线的垂线P_1M和P_1N，则光线1—$1'$和2—$2'$之间的光程差为

$$\Delta L=\overline{MP_2}+\overline{P_2N}=2d\sin\theta,$$

式中d为晶面间隔，θ为掠射角．要使各晶面的反射线迭加起来产生主极强，光程差ΔL必须是λ的整数倍，即面间干涉的主极强条件为

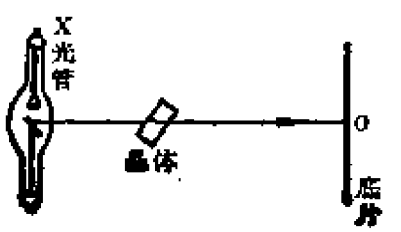
$$2d\sin\theta=k\lambda, \qquad (3.1)$$

式中k为正整数，这就是通常说的晶体衍射的布喇格条件（W．L．Bragg，1913年，布喇格父子因使用X射线研究晶体结构而获得1915年的诺贝尔物理学奖金）．应当指出，对布喇格条件的理解要与一维光栅的主极强条件（即光栅公式$d\sin\theta=k\lambda$）有所不同．这里有两个重要区别：

（i）在一块晶体内部有许多晶面族．图3-8中就画出了三个可能的晶面族．不同的晶面族有不同的取向和间隔（如d_1，d_2，d_3，…），对于给定的入射方向来说有不同的掠射角，如θ_1，θ_2，θ_3，…（见图3-9(a)，(b)，(c)）．对应

---

① 除反射线外，沿原入射延长线方向的透射线显然也是等光程的，因此沿此方向也有一个0级主极强，它在与照相底片的交点O处产生一个亮斑（见图）．这亮斑的位置是反映入射线方向的，在实际中是确定其它亮斑位置的一个参考基点．不过由于它的方向与晶体的取向无关，在下面讨论中不必考虑．



于每个晶面族有一个布喇格条件：$2d_1\sin\theta_1 = k_1\lambda$，$2d_2\sin\theta_2 = k_2\lambda$，$2d_3\sin\theta_3 = k_3\lambda$，…。这就是说，给定了入射方向，不仅有一个，而是有一系列布喇格条件。而在一维光栅的情形是，对于给定的入射方向只有一个光栅公式。

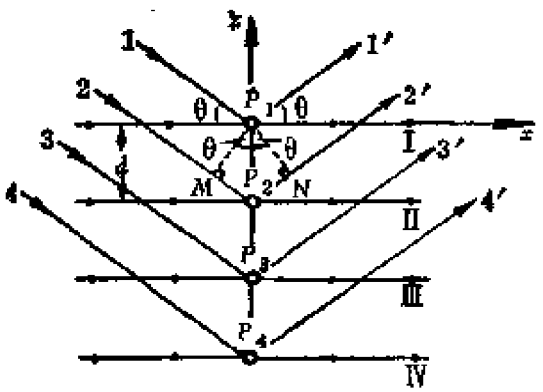


图 3-7　布喇格条件

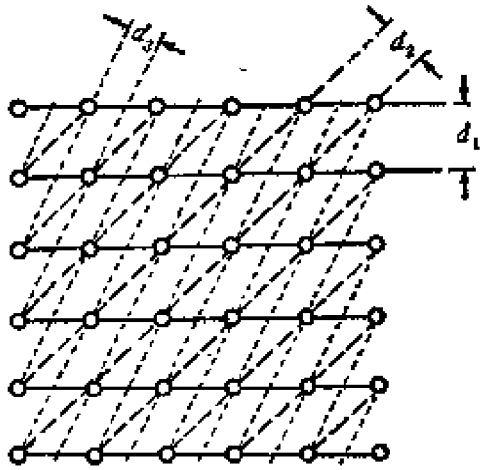


图 3-8　各晶面族

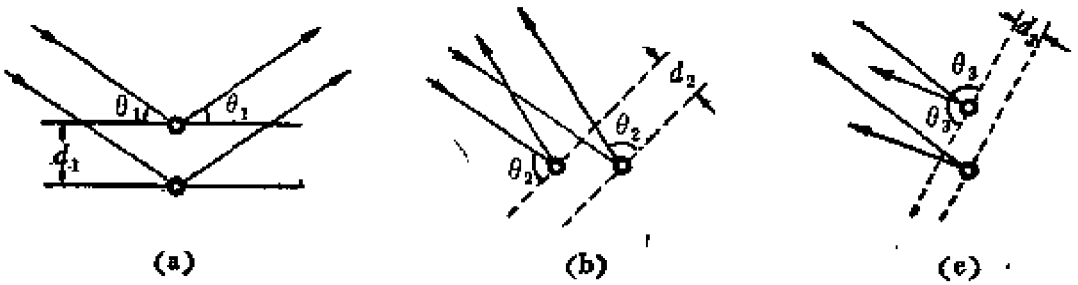


图 3-9　对每一晶面族有一布喇格条件

上面我们对每个给定的晶面内发生的点间干涉只取了 0 级反射主极强。可以证明，如果取高级主极强，所得的面间干涉主极强条件，恰好相当于另一取向的晶面族的布喇格条件。亦即，对某一晶面族取各级面内点间干涉的主极强，与对各个可能的晶面族只取 0 级反射主极强，两种方法是等效的。后一方法使问题大为简化。

(ii) 在一维光栅公式中 θ 是衍射角，对于一定的波长 λ，总有一些衍射角满足光栅公式。在三维晶体光栅的情形里，θ 是掠射角。当入射方向和晶体取向给定之后，所有晶面族的布喇格条件中 d 和 θ 都已限定，对于随便的一个波长 λ 来说，它也许会刚巧满足一个或几个晶面族的布喇格条件，

但一般说来，很可能一个也不满足．如果它满足某一晶面族的布喇格条件，在相应的反射方向上将出现主极强；不满足，就没有主极强．总之，在入射方向、晶体取向和入射波长三者都给定了之后，一般情况下很可能根本就没有主极强．

3.4 劳厄相和德拜相

鉴于晶体(三维)衍射出现主极强的条件要求相当苛刻，要获得一张 X 射线的衍射图就不应该同时限定入射方向、晶体取向和光的波长．这可以有两种做法．

（1）劳厄法(M. von Laue, 1912年)：用连续谱的X射线照在单晶体上，这时给定了晶体的取向但不给定波长，每个晶面族的布喇格条件都可从入射光中选择出满足它的波长来，从而在所有晶面族的反射方向上都出现主极强．如果象图3-10所示那样用照相底片来接收衍射线，则在每个主极强方向上出现一个亮斑，即所谓劳厄斑．这样的一张图样叫做劳厄相(图3-11)．用劳厄相可以确定晶轴的方向．劳厄因这方面的工作荣获1914年的诺贝尔物理学奖金．

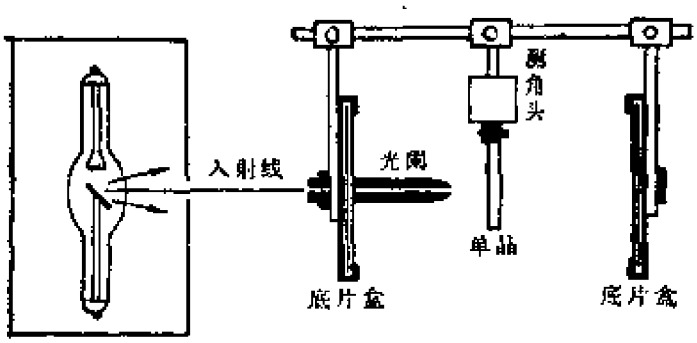


图 3-10 拍摄劳厄相的装置

（2）粉末法：用单色的 X 射线照在多晶粉末上，这时给定了波长但不限定晶体取向，大量取向无规的晶粒为射线提供了满足布喇格条件的充分可能性．用这种方法在照片上得到的叫做德拜相(图3-12)．用德拜相可以确定晶格常数．

利用 X 射线的劳厄相或德拜相可以作晶体的结构分析．反之，在晶体结构已知的情况下，利用这类照片可以确定 X 射线的光谱，这对研究原子的内层结构是很重要的．

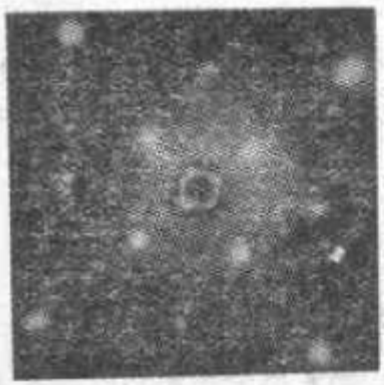


图 3-11　NaCl单晶的劳厄相

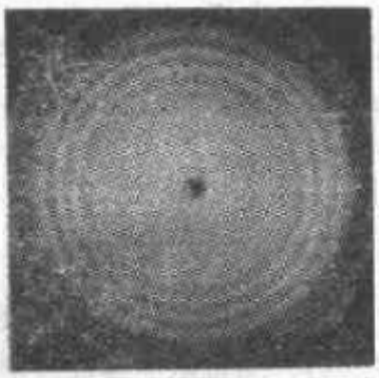


图 3-12　ZrO_2晶体粉末的德拜相

有关X射线在晶体上衍射的许多细致问题超出本课的范围，这里不作介绍了。

思　考　题

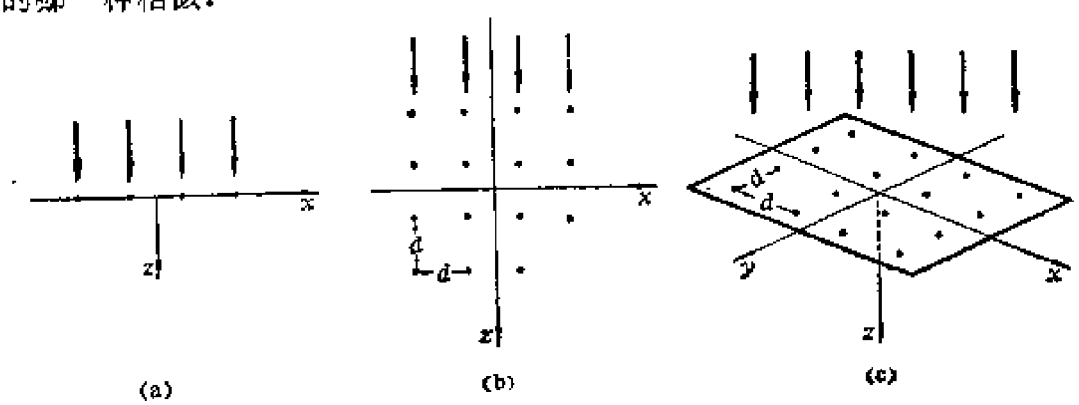
分别就图(a),(b)两种光栅模型分析 x-z 平面内夫琅和费衍射主极大条件，并回答下列问题：

(1) 设入射波长连续分布，光栅(a),(b)对产生极大的波长有无限制？

(2) 设入射波长满足 $d=10\lambda$，光栅(a)中衍射极大共有几级？哪些能在光栅(b)中保留下来？

(3) 设光栅(b)中入射波长连续，试求主极大衍射角 θ 从90°往下的任意三个值。

(4) 如果衍射单元是在 x-y 平面内的点阵(图(c))，试分析衍射线平行于 x-z 平面的夫琅和费衍射的主极大条件。这种情形与上述(a)或(b)中的哪一种相似。



(a)　(b)　(c)

思考题图

第五章　傅里叶变换光学

在物理学的几门基础学科中，光学几乎与力学一样的古老，相对来说电磁学要年轻得多．然而从本世纪四十年代后期开始的三十余年间，光学在理论方法上和实际应用上都有许多重大的突破和进展．因此，“现代光学”的提法目前颇为流行．1948年全息术的提出，1955年作为像质评价的传递函数的兴起，1960年新型光源——激光器——的诞生，它们是现代光学中有重要意义的三件大事．连同六十年代以后由于有了激光的重新装备而迅速发展起来的薄膜光学、纤维光学、集成光学等应用光学诸方面，使光学这门历史悠久的学科焕发了青春，它正以自身深刻的变革和日益扩展的应用领域，引人注目地活跃在现代物理学和现代科学技术的广阔舞台上．

现代光学的重大进展之一是引入“变换”的概念，由此逐渐发展出光学的一个新分支——傅里叶变换光学，简称变换光学，或傅里叶光学．目前的变换光学大体指两类内容．一是傅里叶光谱仪中存在的那类变换关系：

$$\boxed{\text{干涉图}} \rightleftharpoons \boxed{\text{光谱图}}$$

它从干涉强度的空间频谱中提取光源辐射的时间频谱（即通常说的光谱）．另一类是相干成像系统和不相干成像系统中存在的变换关系：

$$\boxed{\text{物}} \rightleftharpoons \boxed{\text{像}}$$

这第二类光学变换的内容相当丰富，它包括光学空间滤波和信息处理，光学系统的脉冲响应和传递函数，波前再现和全息术等等．变换光学的基本思想是用空间频谱的语言分析光信息，用改变频

谱的手段处理相干成像系统中的光信息，用频谱被改变的眼光评价不相干成像系统(光学仪器)中像的质量(像质).

现代变换光学的基本规律并未超出传统波动光学的范围，它仍然以经典波动光学原理为基础，它是干涉和衍射的综合和提高，它与衍射，特别是与夫琅和费衍射息息相关．因此，我们将从衍射问题开始，逐步引出它的概念和方法．

§1 衍射系统的屏函数和相因子判断法

1.1 衍射系统及其屏函数

对于"衍射"问题，我们曾有过几种不同深度的认识．最初我们说，当光在传播过程中遇到障碍物时发生偏离直线传播，或更广泛一些，偏离几何光学的传播规律，这种现象叫做衍射．在把惠更斯-菲涅耳原理运用到圆孔、圆屏、单缝、多缝等衍射问题后，我们意识到，衍射的发生，是由于光在传播过程中波面受到某种限制，亦即自由波面发生破损．现在我们要说，当光在传播过程中，由于种种原因而改变了波前的复振幅分布(包括振幅分布或位相分布)，后场不再是自由传播时的光波场，这便是衍射．以上各种说法都是可取的，它们反映了人们对衍射现象的认识在逐步深入，其中最后一种说法对衍射现象因果关系的概括更为普遍和本质，它也是从菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式所能作出的最广泛的直接推论．

凡能使波前上复振幅发生改变的物，统称衍射屏．衍射屏可以是反射物，也可以是透射物．透射式衍射屏有圆孔、矩孔、单缝等一类；有小球、细丝、玻璃上的墨点、小颗粒等一类；有黑白光栅、菲涅耳波带片等一类；有一幅景物的底片、一张图像、一页数码字符等一类；也有如透镜这类透明的位相型衍射物．

以衍射屏为界，整个衍射系统被分成前后两部分．前场为照

明空间，充满照明光波场；后场为衍射空间，充满衍射光波场．一般说来，照明光波比较简单，它常是球面波或平面波，这两种典型波的等相面和等幅面是重合的，在其波场中没有因强度起伏而出现的亮暗图样．衍射波则比较复杂，它不是单纯的球面波或平面波，这种复杂的波的等相面和等幅面一般不重合，属于非均匀波，波场中常有因强度起伏而形成的衍射图样．

在一个衍射系统中，我们特别要考虑三个波前上的场分布．如图1-1，衍射屏之前是照明光波前 $\widetilde{U}_1(x,y)$，它称为入射场；衍射屏之后是衍射光波前 $\widetilde{U}_2(x,y)$，它称为透射场(或反射场)；最后还有一个接收场 $\widetilde{U}(x',y')$．把波前 $\widetilde{U}_1(x,y)$ 转化为波前 $\widetilde{U}_2(x,y)$ 是衍射屏的作用，从波前 $\widetilde{U}_2(x,y)$ 导出波前 $\widetilde{U}(x',y')$ 是光的传播问题．两步合起来成为衍射．可以说，衍射就是波前变换．

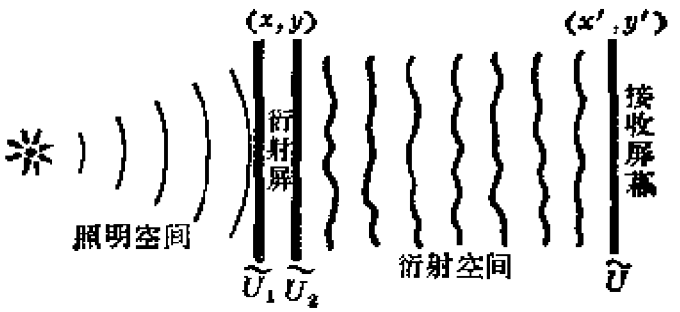


图 1-1　衍射系统中的三个波前

衍射屏的作用可集中地用如下一个函数来表征：

$$\widetilde{t}(x,y)=\frac{\widetilde{U}_2(x,y)}{\widetilde{U}_1(x,y)}, \tag{1.1}$$

对于透射屏，它称为复振幅透过率函数；对于反射屏，它称为复振幅反射率函数．二者统称屏函数．

屏函数一般也是复数，它包括模和辐角两部分．$\widetilde{t}(x,y)$ 的辐角为常数的衍射屏称为振幅型的；$\widetilde{t}(x,y)$ 的模为常数的衍射屏称为位相型的．

任何形状的孔或遮光屏是最简单的振幅型衍射屏，其屏函数的形式为

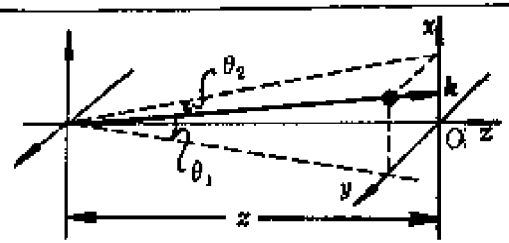
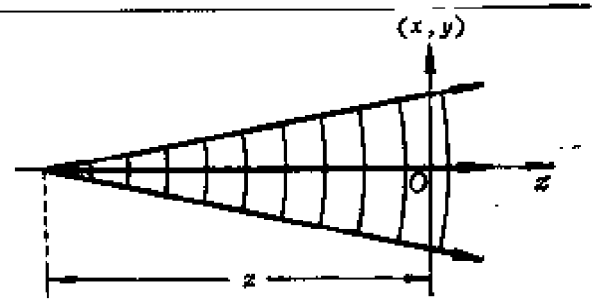
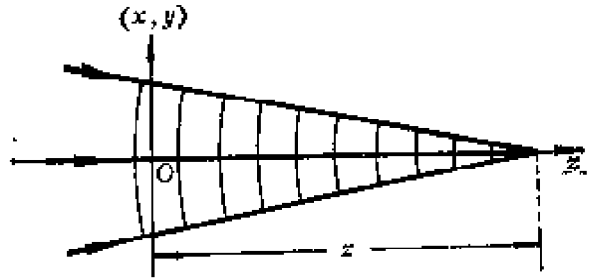
$$\widetilde{t}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{透光部分;}\\ 0, & \text{遮光部分.}\end{cases}$$

透镜则是最常见的位相型衍射屏．有关透镜的屏函数，我们将在1.3节中介绍．

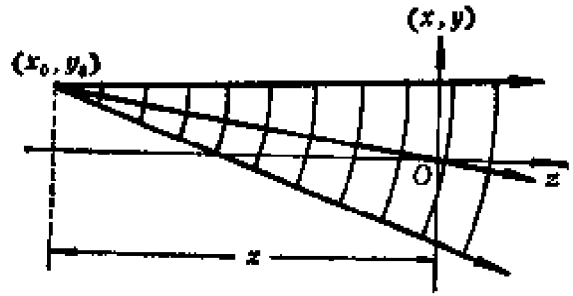
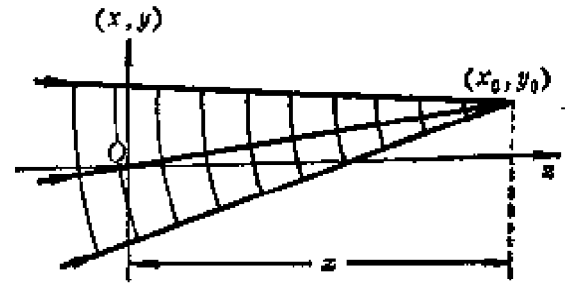
1.2 相因子判断法

从原则上讲，依据菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式，可以由一个波前导出另一个波前，譬如由衍射屏的输出场 $\widetilde{U}_2(x,y)$ 导出接收屏幕上的衍射场 $\widetilde{U}(x',y')$．但实际上这种积分的运算往往很复杂，总需在一定条件下作近似处理．即使如此，能给出定量结果的情形也为数不多．不过，我们应注意到，波场的主要特征体现在波前函数的相因子中．如果能将一个复杂的波场中复振幅的相因子与平面波或球面波的相因子作一比较，使之联系起来，则复杂波场即可分解为一系列平面波或球面波成分，从而使我们比较容易从概念上去掌握它．复杂波场中各成分（不同方向的平面波和不同聚散中心的球面波）还可用透镜和棱镜等元件进行实际上的分离，这就便于人们对波前作进一步的处理．所谓“相因子判断法”，简言之，即根据波前函数的相因子来判断波场的性质，分析衍射场的主要特征．须知，在很多场合，我们只需掌握衍射场的主要特征就已够用了，在全息术中尤其如此．这时用相因子判断法将比衍射积分运算简捷得多．为了使用相因子判断法，我们先要熟悉两件事：一是平面波和几种典型情况下球面波在波前上的相因子；另一是几种常用光学元件——透镜、棱镜的位相变换函数．第一件事已在第二章§2中解决了，现在只是将那里的重要结果加以整理、归纳和补充，列成表Ⅴ-1，表中的球面波都取傍轴近似，位相函数中只保留与波前上的坐标x,y有关的部分，$k=2\pi/\lambda$．第二件事将在1.3节中讨论．

表 V-1　平面波和球面波在波前上的相因子

波的类型	特征	相因子	图解
(1) 平面波	传播方向 (θ_1,θ_2) 当 $\theta_1=\theta_2=0$ 时	$\exp[ik(\sin\theta_1 x+\sin\theta_2 y)]$ 1	
(2) 发散球面波	中心在轴上 坐标 $(0,0,-z)$	$\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$	
(3) 会聚球面波	中心在轴上 坐标 $(0,0,z)$	$\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$	

续表

波的类型	特征	相因子	图解
(4) 发散球面波	中心在轴外 坐标 $(x_0, y_0, -z)$	$\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}\right)\right]$	
(5) 会聚球面波	中心在轴外 坐标 (x_0, y_0, z)	$\exp\left[-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}\right)\right]$	

1.3 透镜的作用及其位相变换函数

在成像光学系统中，透镜起两方面的作用。一方面它是光瞳，限制着波面，仅提取入射光波中央一部分波面Σ_1进入光学系统；另一方面它变换波面，把一种波面变换为另一种。例如，在理想成像的情况下，凸透镜把发散的球面波 Σ_1变换为会聚的 球面波 Σ_2。较为实际的情况是，它把入射波面变换为偏离球面的像差波面 Σ_2'(参见图1-2)。以往我们分别用有限孔径引起的衍射和透镜本身的几何像差来描述上述两种作用。其实，从纯粹波动光学的观点，对透镜引入一个复振幅透过率函数 $\tilde{t}(x,y)$，即可把透镜的上述两方面的性质全部反映出来。

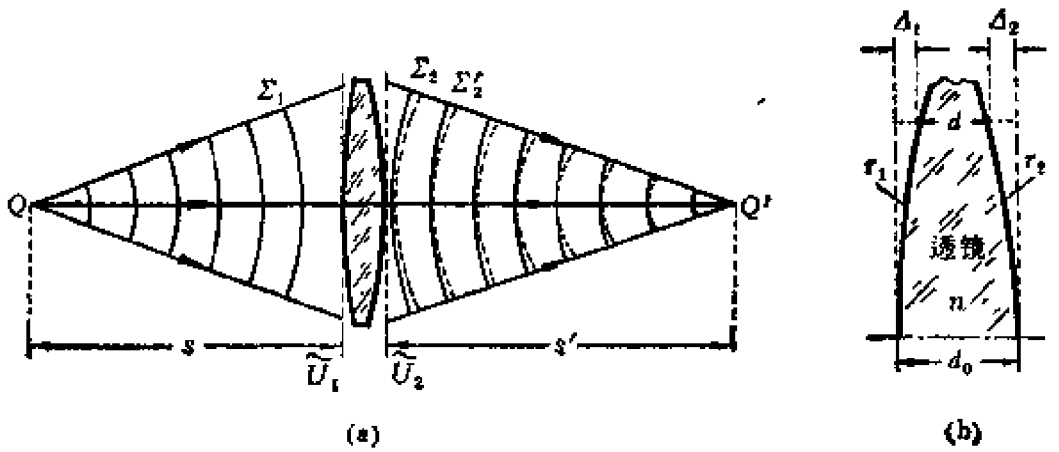


图 1-2　把透镜看作一种位相型透射屏

如图1-2，在透镜前后各取一个平面，设在它们上面的入射波前和透射波前分别为

$$\begin{cases}\tilde{U}_1(x,y)=A_1(x,y)\exp[i\varphi_1(x,y)],\\ \tilde{U}_2(x,y)=A_2(x,y)\exp[i\varphi_2(x,y)].\end{cases}$$

透镜的透过率函数为

$$\tilde{t}_L(x,y)=\frac{A_2}{A_1}\exp[i(\varphi_2-\varphi_1)]=\begin{cases}a(x,y)e^{i\varphi(x,y)}, & r<\dfrac{D}{2},\\ 0, & r>\dfrac{D}{2}.\end{cases}\tag{1.2}$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，D是透镜直径．设透镜材料对入射光波是透明的，忽略透镜对光的吸收、反射等能量的损耗，则$A_2=A_1$，

$$a(x,y)=A_2(x,y)/A_1(x,y)=1,$$

于是，在透镜的孔径内

$$\tilde{t}_L(x,y)=\exp[i\varphi_L(x,y)],\tag{1.3}$$

其中

$$\varphi_L(x,y)=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y),$$

称$\tilde{t}_L$为透镜的位相变换函数．

严格求透镜的位相变换函数是困难的，下面在傍轴条件下计算薄透镜的位相变换函数．由于透镜很薄，入射点与出射点的坐标相近，光程可近似地沿平行于光轴方向计算．如图1-2(b)，有

$$\varphi_L(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+n\,d(x,y)]①$$

$$=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(\Delta_1+\Delta_2),\tag{1.4}$$

其中

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0,$$

φ_0是与x，y无关的常数，它不影响波前上位相的相对分布，常可略去不写．式(1.4)中重要的是第二项，在傍轴条件下其中的Δ_1和Δ_2可写为

$$\Delta_1(x,y)=r_1-\sqrt{r_1^2-(x^2+y^2)}\simeq\frac{x^2+y^2}{2r_1},$$

① 按照我们以前的约定(第二章1.3节)，位相落后为正．

$$\Delta_2(x,y)=(-r_2)-\sqrt{(-r_2)^2-(x^2+y^2)}$$
$$\simeq-\frac{x^2+y^2}{2r_2},$$

式中 r_1,r_2 分别是透镜前后两表面的曲率半径①. 代入式(1.4)，略去 φ_0 不写，得

$$\varphi_L(x,y)=-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)$$
$$=-k\frac{x^2+y^2}{2F},\qquad(1.5)$$

式中

$$F=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)},\qquad(1.6)$$

而 $k=2\pi/\lambda$. 于是透镜的透过率函数(位相变换函数)为

$$\widetilde{t}_L(x,y)=\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right].\qquad(1.7)$$

我们看到，式(1.6)中给出的 F 正是以前用几何光学理论导出的透镜焦距②.

下面我们将利用表 V-1 由已知相因子求后场中波的类型和特征.

例题 1 平行于光轴的单色平行光束入射在透镜上，试用屏函数公式(1.7)判断后场中波的类型和特征.

解 对于正入射的平面波，$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1$(常数)，故

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\widetilde{t}_L(x,y)$$
$$=A_1\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right],$$

① 按照第一章5.1节的约定(Ⅲ)，此处曲率半径 $r_1>0$，$r_2<0$.

② 参见第一章6.1节磨镜者公式(6.5). 本章中我们将用 f 代表空间频率(见§2)，故透镜焦距改用 F 表示.

从相因子看，这是会聚到透镜后距离为F处的球面波①．以上正是几何光学理论所预期的．

例题2　试用透镜的屏函数导出透镜的物像距公式．

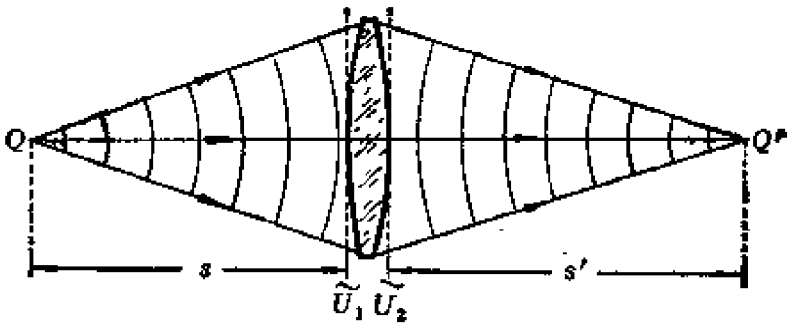


图 1-3　例题2——利用透镜屏函数推导物像距公式

解　如图1-3，设想在透镜前距离为 s 处有一发光物点Q，它发出的球面波在透镜上造成的波前为②

$$\tilde{U}_1(x,y)=A_1\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2s}\right].$$

故从透镜输出的波前为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_2(x,y)&=\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_L(x,y)\\&=A_1\exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2s}\right]\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right]\\&=A_1\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)\right],\end{aligned}$$

从相因子看，这是会聚的球面波③，会聚中心(像点)Q'在透镜后，距离为

$$s'=\frac{1}{\frac{1}{F}-\frac{1}{s}},$$

① 见表Ⅴ-1(3)．
② 见表Ⅴ-1(2)．
③ 见表Ⅴ-1(3)．

或

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{F}.$$

这正是几何光学给出的透镜物像距公式.

*1.4 高斯光束经透镜后的变换

在第二章 2.3 节里曾介绍过激光器谐振腔中的高斯光束，在把激光用于准直、定向、聚焦等场合，需要知道透镜对高斯光束的变换作用. 可以

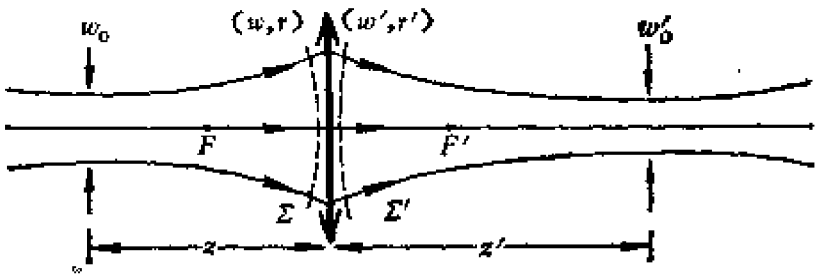


图 1-4 高斯光束经透镜后的变换

用这样的方式提出问题：已知入射高斯光束的腰粗为 w_0，腰与透镜的距离为 z，求出射高斯光束的腰粗 w_0'和位置z'(见图1-4)，解决这个问题需用第二章2.3节里的公式. 首先利用该节的式(2.22)和(2.23) 确定入射波面 Σ 的有效半径 $w(z)$ 和曲率半径 $r(z)$

$$\begin{cases} w(z)=w_0\left(1+\dfrac{\lambda^2z^2}{\pi^2w_0^4}\right)^{1/2}, \\ r(z)=z\left(1+\dfrac{\pi^2w_0^4}{\lambda^2z^2}\right). \end{cases}$$

薄透镜将球面波面 Σ 变换为另一球面波面 Σ'，而波面的有效半径近乎不变，波面的曲率半径 r'与 r 满足薄透镜的物像距关系，即

$$\begin{cases} w'=w, \\ \dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{F}. \end{cases}$$

这里的 w'和 r'应理解为 $w'(z')$和 $r'(z')$，反之用第二章2.3节的上述两式于透镜的像方，可得出射光束的腰粗 w_0' 和位置 z' 如下，

$$\begin{cases} w_0' = w'\left(1 + \dfrac{\pi^2 w'^4}{\lambda^2 r'^2}\right)^{-1/2}, \\ z' = r'\left(1 + \dfrac{\lambda^2 r'^2}{\pi^2 w'^4}\right)^{-1}. \end{cases}$$

对于短焦距透镜，设 $r \gg F$，于是 $r' \simeq F$，但出射光束的腰并不在后焦点，而是在 $z' \simeq F(1 + \lambda^2 F^2/\pi^2 w'^2)^{-1}$ 处．若同时有 $\lambda^2 F^2 \ll \pi^2 w'^4$，才有 $z' \simeq F$．

1.5 棱镜的位相变换函数

棱镜的作用不是成像，而是偏折，它将一个方向的平行光束变换为另一方向的平行光束．因平面波的相因子是线性的，故可预料，棱镜的位相变换函数在指数上的因子将是线性的．仿照前面的推导，对于楔形薄棱镜可近似认为光线在两个界面上等高．

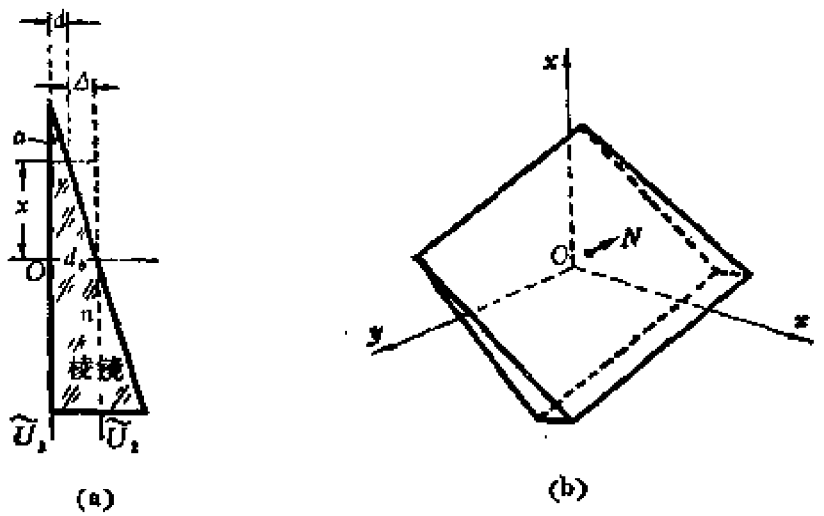


图 1-5　楔形薄棱镜的位相变换函数和透过率函数

设楔角为 α，折射率为 n，则位相差为

$$\varphi_P(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + nd) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta,$$

式中 $\varphi_0 = (2\pi/\lambda)nd_0$，$d_0$为中心厚度，$\Delta = \alpha x$(见图1-5(a))，略

去φ_0不写，则

$$\varphi_P(x,y) = -k(n-1)\alpha x, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{t}_P(x,y) = \exp[-ik(n-1)\alpha x]. \tag{1.9}$$

刚才的计算针对棱镜棱边平行于y轴的情形，如果交棱在x-y面内任意取向，可用斜面法线N(图1-5(b))的两个方向角的余角α_1和α_2来表征

$$\widetilde{t}_P(x,y) = \exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]. \tag{1.10}$$

例题 3　轴上一物点Q与棱镜的距离为s(图1-6)，求从Q点发出的傍轴球面波经棱镜折射后出射波的特征。

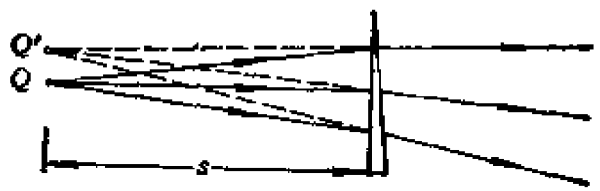


图 1-6　例题 3 ——楔形棱镜的折射

解　出射波前函数为

$$\widetilde{U}_2(x,y) = \widetilde{U}_1(x,y)\,\widetilde{t}_P(x,y)$$

$$= A_1 \exp\left\{ik\left[\frac{x^2+y^2}{2s} - (n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)\right]\right\}. \tag{1.11}$$

参照表Ⅴ-1(4)可以看出，它是轴外点源发出的发散球面波，点源Q'的位置可由线性相因子的系数定出

$$\begin{cases} x_0 = (n-1)\alpha_1 s, \\ y_0 = (n-1)\alpha_2 s, \\ z_0 = s. \end{cases}$$

我们看到，透镜的位相变换函数是坐标x,y的二次函数，而棱镜的位相变换函数则是线性的．有趣的是，我们可以倒过来看问题，波前函数中每出现一个线性的相因子，即可把它看成是受

到某个等效棱镜的偏折；每出现一个二次相因子，则可看成是受到某个等效透镜的作用．例如式(1.11)所代表的波，可看成是正入射的平面波（振幅为常数 A_1）经一个焦距 $F=-s$ 的等效凹透镜

$$\tilde{t}_L=\exp[-ik(x^2+y^2)/2F]$$
$$=\exp[ik(x^2+y^2)/2s]$$

和楔角为 α 的棱镜

$$\tilde{t}_p=\exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]$$

作用的结果．这样一来，我们就可利用较熟悉的几何光学知识去想象出射波的特征．

从以上各例可以看出，根据相因子判断衍射场的分布是一种十分简捷的方法．不过应当指出，表Ⅴ-1中给出的相因子与波的对应关系，只有在波前无穷大时才严格成立．但实际衍射屏上的波前总是有限的，这时衍射场中出现的并非严格的平面波或球面波，边缘的衍射效应将产生一定的衍射弥散角．在衍射屏光瞳较大时，这弥散角很小．作为很好的近似，下面我们将主要使用上述方法来分析衍射场的特征．必要时，我们也要根据第二章和第四章给出的理论和公式来估算衍射弥散角的半角宽度，作为上述方法的补充．

习　题

1．设薄透镜由折射率为 n_L 的材料作成，物方和像方的折射率分别是 n 和 n'，导出其位相变换函数(用透镜的焦距表示出来)．

2．用薄透镜的位相变换函数，导出傍轴条件下的横向放大率公式．

3．用楔形棱镜的位相变换函数式(1.9)导出傍轴光束斜入射时产生的偏向角 δ．

§2 正弦光栅的衍射

2.1 空间频率概念

衍射屏可以是各式各样的，其屏函数的具体形式也各不相同。从傅里叶变换的眼光来看问题，最基本的屏函数是具有空间周期性的函数。描述空间周期函数的重要概念是“空间频率”，这概念已在第二章4.3节中讨论两光束的干涉场时简单地提到过。鉴于它在变换光学中的重要性，我们在此再作些解说。

读者对时间周期性函数，如简谐交流电，是较为熟悉的。与之对比，空间周期性函数应不难理解。下面我们对二者各举一例，且将对应的概念并列在一起。

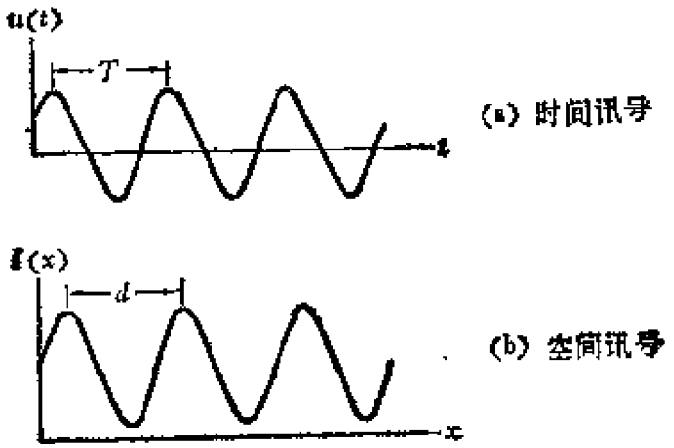


图 2-1 时间周期性讯号和空间周期性信息的类比

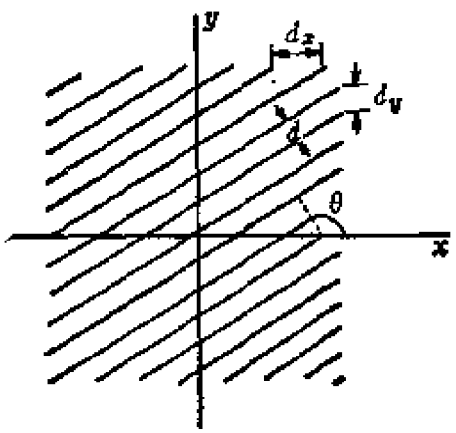


图 2-2 二维空间周期性函数具有两个空间频率

简谐交流电压

$$U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$
$$=U_0\cos(2\pi\nu t+\varphi_0)$$
$$=U_0\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right).$$

两光束干涉的强度分布

$$I(x)=I_0[1+\gamma\cos(qx+\varphi_0)]$$
$$=I_0[1+\gamma\cos(2\pi fx+\varphi_0)]$$
$$=I_0\left[1+\gamma\cos\left(\frac{2\pi x}{d}+\varphi_0\right)\right].$$

类比　　时间周期T ⟷ 空间周期d,

时间频率 $\nu=\frac{1}{T}$ ⟷ 空间频率 $f=\frac{1}{d}$,

时间圆频率 $\omega=2\pi\nu$ ⟷ 空间圆频率 $q=2\pi f$.

对干涉场来说，空间周期d就是干涉条纹的间隔，空间频率f就是单位长度内的条纹数目．由此可见，空间频率的概念本应比时间频率更为直观具体，但问题的复杂性来自空间的维数．波场是三维的，其中的一个波前也有二维，因此空间频率不应当只是一个标量．上面举的例子是平行于y轴的条纹，在一般情况下当它的法线具有倾角θ时(见图2-2)，干涉强度分布应写为

$$I(x,y)=I_0[1+\gamma\cos(q_xx+q_yy+\varphi_0)],\qquad(2.1)$$

其中$q_x=q\cos\theta$，$q_y=q\sin\theta$分别是沿x,y方向的空间圆频率，它们可看成是一个二维矢量q的分量．沿x,y方向的空间频率f_x,f_y和条纹间隔d_x,d_y分别为

$$f_x=q_x/2\pi,\qquad f_y=q_y/2\pi,$$
$$d_x=2\pi/q_x=1/f_x,\qquad d_y=2\pi/q_y=1/f_y,$$

相邻条纹的最小间隔为

$$d=2\pi/\sqrt{q_x^2+q_y^2}=2\pi/q.$$

光学中常见的空间分布函数(光学信息)有两类：一是光强分

布函数$I(x,y)$，这是不小于0的二维实函数；二是波前上的复振幅分布函数$\tilde{U}(x,y)$，这是二维的复函数．在不相干成像系统中关心前者；在相干成像系统中关心后者．上面我们只是以第一类的空间分布函数为例来说明空间频率的概念．对于第二类，空间频率的概念也是如此．

2.2 正弦光栅

复振幅透过率具有如下函数形式的衍射屏称为正弦光栅：

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+t_1\cos(q_x x+q_y y+\varphi_0). \qquad (2.2)$$

可以看出，这函数的形式与两光束干涉场的强度分布函数(2.1)十分相似，所以实际制备一块正弦光栅，就是拍摄一张两平行光束干涉条纹的照相底片(具体装置参见图2-3)．不过为了保证振幅

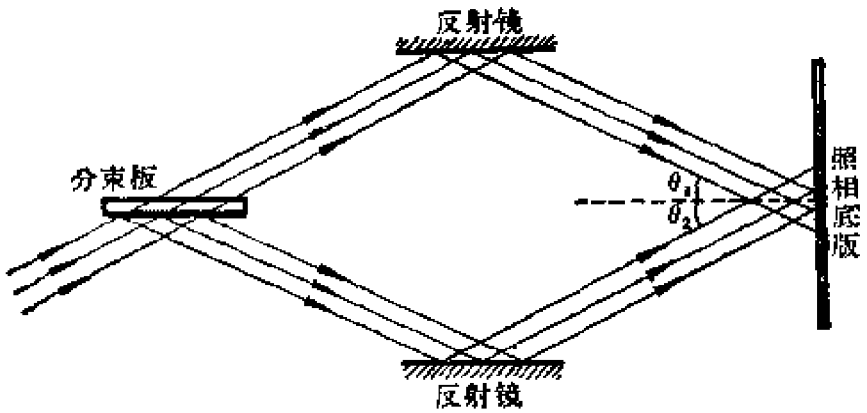


图2-3 正弦光栅的制备

透过率函数$\tilde{t}(x,y)$与当初曝光时的光强$I(x,y)$成线性关系，必须进行"线性冲洗"．要做到线性冲洗，必须按照底片的类型，适当选择显影液和显影时间，在工艺上是有一番讲究的，此处不去细说了．在线性冲洗后，$\tilde{t}(x,y)$与$I(x,y)$具有如下关系：

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+\beta I(x,y),$$

式中β是某个常数．这时若把式(2.1)代入，即可看出$\tilde{t}(x,y)$符

合正弦光栅的定义(2.2).

应当指出，理论上正弦光栅应具有无限大的面积，但任何照相底片却都是有限大的，亦即它们不是理论中的正弦光栅．这个差异所带来的后果将在后面谈到．

2.3 正弦光栅的衍射图样

平行光正入射在正弦光栅上，这时入射波前为 $\widetilde{U}_1 = A_1$，从而透射波前为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x,y) &= \widetilde{U}_1(x,y)\,\widetilde{t}\,(x,y)\\ &= A_1[t_0 + t_1\cos(2\pi f x + \varphi_0)].\end{aligned}$$

利用欧拉公式

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x,y) &= A_1 t_0 + \frac{1}{2}A_1 t_1\{\exp[i(2\pi f x+\varphi_0)]\\ &\quad + \exp[-i(2\pi f x+\varphi_0)]\}\\ &= \widetilde{U}_0(x,y) + \widetilde{U}_{+1}(x,y) + \widetilde{U}_{-1}(x,y).\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{U}_0(x,y) = A_1 t_0,$$

$$\widetilde{U}_{+1}(x,y) = \frac{1}{2}A_1 t_1\exp[i(2\pi f x+\varphi_0)],$$

$$\widetilde{U}_{-1}(x,y) = \frac{1}{2}A_1 t_1\exp[-i(2\pi f x+\varphi_0)].$$

亦即，从正弦光栅输出的是三列波．根据相因子判断，指数都是线性的，它们都是平面波，其中$\widetilde{U}_0$是沿原方向的，$\widetilde{U}_{+1}$和$\widetilde{U}_{-1}$是一对共轭波，从表Ⅴ-1(1)可以看出它们的方向角θ_{+1}和θ_{-1}分别满足下式：

$$\sin\theta_{\pm 1} = \pm f\lambda. \qquad (2.3)$$

如果在透镜的后焦面上接收，我们得到三个亮斑，它们分别是0级和±1级衍射斑．这正好是第四章1.5节中计算出的结果，这里我们用简捷得多的方法重新得到了它．

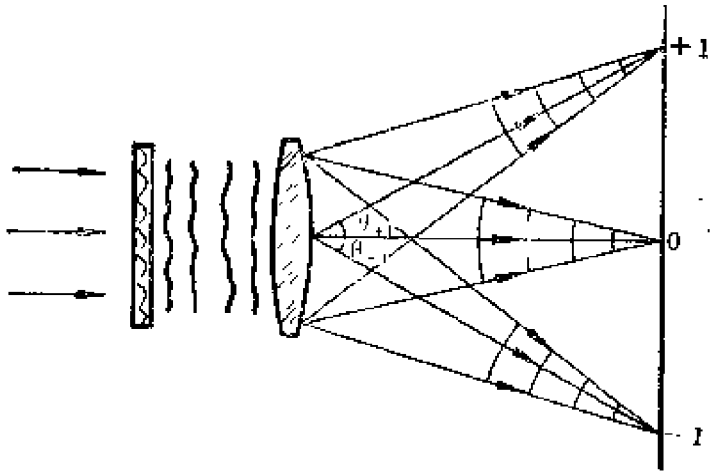


图 2-4　正弦光栅的夫琅和费衍射

在上面的分析中未考虑光栅的有限宽度D.考虑到这一点，后场便是三列孔径受限的平面衍射波，结果是各级衍射斑都有一定的半角宽度．根据第四章的式(1.10)和(1.11)，半角宽度为

$$\Delta\theta_{\parallel}=\frac{\lambda}{D},\qquad \Delta\theta_{\pm1}=\frac{\lambda}{D\cos\theta_{\pm1}}. \tag{2.4}$$

从傅里叶分析的角度来看，正弦光栅是任何周期性衍射屏[①]的基本组成部分，因而它的夫琅和费衍射具有特殊的重要意义．现把上面得到的结论列成表格，以便今后查考．

表Ⅴ-2　正弦光栅夫琅和费衍射特征

光学信息	衍射斑			
$\widetilde{U}_2(x)=\widetilde{U}_1(x)t(x)$	级别	方向角 (θ)	振幅	半角宽度$(\Delta\theta$
$=A_1[t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)]$	0级	$\sin\theta_0=0$	$\propto DA_1t_0$	λ/D
空间频率 f				
直流成分 A_1t_0	+1级	$\sin\theta_{+1}=f\lambda$	$\propto DA_1t_1/2$	$\lambda/D\cos\theta_{+1}$
交流成分 A_1t_1				
光栅宽度 D	-1级	$\sin\theta_{-1}=-f\lambda$	$\propto DA_1t_1/2$	$\lambda/D\cos\theta_{-1}$

① 在§5中我们将看到，正弦光栅也是非周期性衍射屏的基本组成部分．

2.4 正弦光栅的组合

利用上面的表Ⅴ-2，可以十分简便地分析由几个不同频率或不同取向的正弦信息的组合所造成的夫琅和费衍射场．下面看若干例子．

例题 1 将两正弦光栅 G，G' 纹理平行地迭放在一起（平行密接），设它们的透过率函数分别是

$$\begin{cases} G:\ t(x)=t\ +t_1\cos 2\pi f x, \\ G':\ t'(x)=t'_0+t'_1\cos 2\pi f' x. \end{cases}$$

用平行光正入射，求夫琅和费衍射场．

解 正入射时 $\widetilde{U}_1=A_1$，合成透过率是 $t(x)$ 和 $t'(x)$ 相乘，故

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_2(x)&=\widetilde{U}_1 t(x)t'(x) \\ &=A_1[t_0t'_0+t_1t'_0\cos 2\pi f x+t_0t'_1\cos 2\pi f' x \\ &\quad +t_1t'_1\cos 2\pi f x\cos 2\pi f' x] \\ &=A_1[t_0t'_0+t_1t'_0\cos 2\pi f x+t_0t'_1\cos 2\pi f' x \\ &\quad +\frac{1}{2}t_1t'_1\cos 2\pi(f-f')x \\ &\quad +\frac{1}{2}t_1t'_1\cos 2\pi(f-f')x]. \end{aligned}$$

上面的推导过程中用了三角函数的积化和差公式．上式五项中除第一项是常数外，其余四项分别与不同频率的正弦光栅相当，它们总共产生九列平面衍射波，其方向角分别为

$$\sin\theta=\begin{cases} 0 & (0\text{ 级}), \\ \pm f\lambda & (f\text{ 的}\pm 1\text{ 级}), \\ \pm f'\lambda & (f'\text{ 的}\pm 1\text{ 级}), \\ \pm(f-f')\lambda & (\text{差频的}\pm 1\text{ 级}), \\ \pm(f+f')\lambda & (\text{和频的}\pm 1\text{ 级}). \end{cases}$$

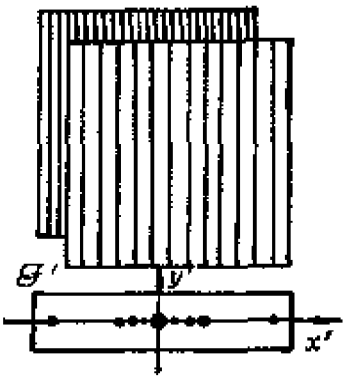


图 2-5　例题 1——正弦光栅平行密接(相乘)

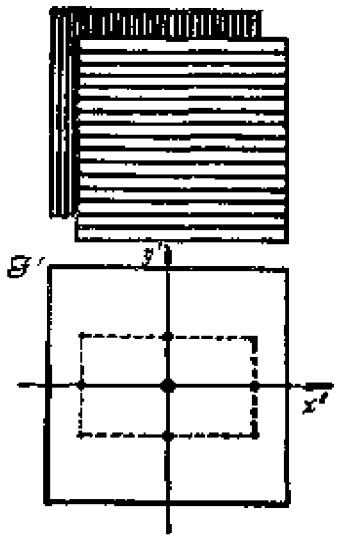


图 2-6　例题 2——正弦光栅正交密接(相乘)

例题 2　将上题中的两正弦光栅 G，G' 纹理垂直地迭放在一起(正交密接)，用平行光正入射，求夫琅和费衍射场。

解　这时透过率函数应写为

$$\begin{cases} G: & t(x) = t_0 + t_1\cos 2\pi f x, \\ G': & t'(y) = t'_0 + t'_1\cos 2\pi f' y. \end{cases}$$

正入射时 $\tilde{U}_1 = A_1$，故

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x,y) &= \tilde{U}_1 t(x)t'(y) \\ &= A_1[t_0 t'_0 + t_1 t'_0\cos 2\pi f x + t_0 t'_1\cos 2\pi f' y \\ &\quad + t_1 t'_1\cos 2\pi f x\cos 2\pi f' y] \\ &= A_1[t_0 t'_0 + t_1 t'_0\cos 2\pi f x + t_0 t'_1\cos 2\pi f' y \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1 t'_1\cos 2\pi(f x - f' y) \\ &\quad + \frac{1}{2}t_1 t'_1\cos 2\pi(f x + f' y)]. \end{aligned}$$

除第一项外，其余的每项相当于一块特定频率的正弦光栅而产生一对平面波，后场共有九列平面衍射波，它们的方向角分别为

$$(\sin\theta_1,\sin\theta_2)=\begin{cases}(0,0) & (0\text{级}),\\ (\pm f\lambda,0) & (f\text{的}\pm 1\text{级}),\\ (0,\pm f'\lambda) & (f'\text{的}\pm 1\text{级}),\\ \pm(f\lambda,-f'\lambda)\\ \pm(f\lambda,f'\lambda)\end{cases}\}(\text{交叉项的}\pm 1\text{级}).$$

例题 3 经分析，一张图片的振幅透过率函数为

$$t(x)=t_0+t_1\cos 2\pi f x-t'\cos 2\pi f' x,$$

求正入射条件下夫琅和费衍射场.

解 由于衍射系统是相干光学系统，复振幅满足线性迭加关系，所以这张图片可以看作是两张独立的正弦光栅之和，它们各自有三列平面衍射波，因 0 级是重合在一起的，故后场总共有五列平面衍射波，方向角分别为

$$\begin{cases}\sin\theta_0=0 & (0\text{级}),\\ \sin\theta_{\pm 1}=\pm f\lambda & (f\text{的}\pm 1\text{级}),\\ \sin\theta'_{\pm 1}=\pm f'\lambda & (f'\text{的}\pm 1\text{级}).\end{cases}$$

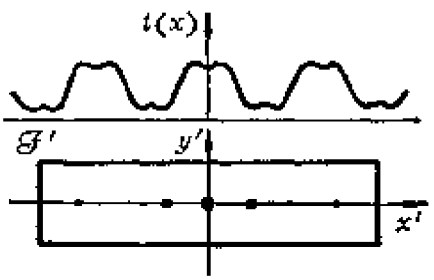


图 2-7 例题 3——不同频率正弦信息相加

本题中两种频率信息相加的这种组合方式可通过两次曝光一次冲洗的方法制备出来．讨论这种相加组合的理论意义在于屏函数的傅里叶展开，即任意周期函数的信息可展开为一系列不同空间频率的正弦信息之和.

2.5 任意光栅的屏函数及其傅里叶级数展开

凡屏函数是严格空间周期性函数的衍射屏(透射式或反射式

的），统称为光栅．为简单起见，这里只考虑一维光栅，即其屏函数只依赖于一个坐标变量 x．图 2-8 给出了几种一维光栅的屏函数．普遍地说一个函数具有严格的周期性，是指它有如下性质：对于任意 x，有

$$\tilde{t}(x+d)=\tilde{t}(x).$$

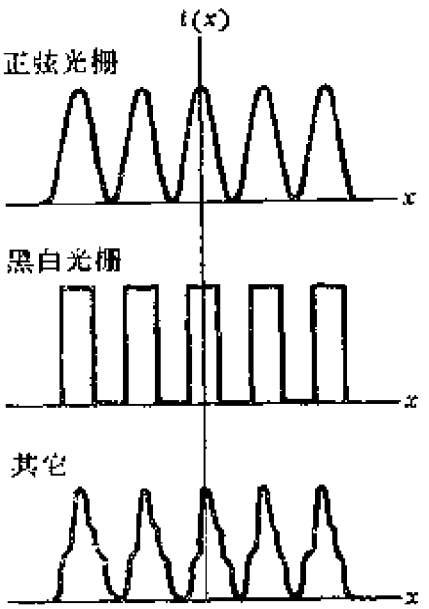


图 2-8　各种光栅的屏函数

理论上的光栅应是无穷长的，但任何一块实际光栅的有效尺寸 D 总是有限的．换句话说，上式只能在 $|x|\leqslant D/2$ 范围内成立；超出此范围，$t(x)=0$．不过，只要光栅内包含的单元总数 $N=D/d\gg 1$，我们可近似地把它看成是周期的．这种只在一定的、但较大的范围内具有周期性的函数，称为准周期函数．下面我们在理论上计算时都先把光栅看成具有严格周期性的，然后在必要的时候再考虑有限尺寸 D 带来的修正①．

数学上处理周期性函数早有一套办法，就是将它作傅里叶级数展开．下面就来介绍这个问题．至于把任意光栅的屏函数展成傅里叶级数的物理依据，我们将在适当的地方详细论述．

傅里叶级数展开式通常有三种写法：

（1）正弦余弦式

$$t(x)=t_0+\sum_{n>0}a_n\cos 2\pi f_n x+\sum_{n>0}b_n\sin 2\pi f_n x, \qquad (2.5)$$

式中 n 是整数．频率 $f_1=1/d$ 是基频，$f_n=nf_1$ 是基频的整数倍，称为 n 次谐波的频率，上式后两项皆对所有正整数求和．傅里叶系数由以下积分式给出：

① 这种作法，正像力学中处理简谐振子时往往先忽略阻尼，而把振荡看成在时间上无限延续一样．

$$t_0 = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)dx, \tag{2.6}$$

$$a_n = \frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\cos 2\pi f_n x\, dx, \tag{2.7}$$

$$b_n = \frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\sin 2\pi f_n x\, dx. \tag{2.8}$$

（2）余弦相移式(见图2-9)

$$t(x) = t_0 + \sum_{n>0} c_n \cos(2\pi f_n x - \varphi_n), \tag{2.9}$$

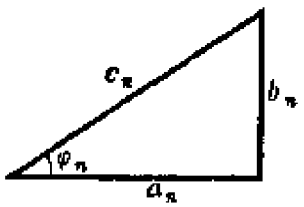


图 2-9 a_n ,b_n 与 c_n , φ_n 之间的关系

其中： $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$， $\varphi_n = \tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n}$。

（3）指数式

$$t(x) = t_0 + \sum_{n\neq 0} t_n e^{i(2\pi f_n x - \varphi_n)}$$

$$= t_0 + \sum_{n\neq 0} \tilde{t}_n e^{i2\pi f_n x}. \tag{2.10}$$

这里

$$\tilde{t}_n = t_n e^{-i\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \tag{2.11}$$

注意，在式(2.10)中的求和已换为对所有非零的整数求和．复数傅里叶系数 $\tilde{t}_n$ 可直接由以下积分式给出：

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\exp(-i2\pi f_n x)dx. \tag{2.12}$$

如果 $t(x)$ 为实函数(振幅型屏函数)，则

$$\tilde{t}_n = \tilde{t}_{-n}^{*} \quad 或 \quad \tilde{t}_{-n} = \tilde{t}_n^{*}.$$

以上三种表示式各有特点，可根据方便任意选用．在我们这里为了处理夫琅和费衍射问题，选用指数式将是最方便的．

傅里叶系数 $\tilde{t}_n$ 的集合告诉我们原函数 $t(x)$ 中各种空间频率的成分占多大的比例，通常把这叫做傅里叶频谱，或简称频谱．一般说来，频谱可以是连续的(频率连续取值)，也可以是分立的

(频率只取某些分立值). 上面看到，周期函数展成傅里叶级数，其频率只取基频 f 整数倍的数值，故周期函数的频谱总是分立的. §5中将看到，非周期性函数也可作傅里叶分析，但其频谱是连续的.

任意二维周期函数 $t(x,y)$ 的傅里叶级数展开式为

$$t(x,y)=t_0+\sum_{n,\,m\neq 0}\tilde{t}_{nm}\exp[2\pi i(nf_x x+mf_y y)], \qquad (2.13)$$

其中 n,m 为非零整数，傅里叶系数为

$$\tilde{t}_{nm}=\frac{1}{d_x d_y}\int_{-d_x/2}^{d_x/2}dx\int_{-d_y/2}^{d_y/2}dy\ t(x,y)\times\exp[-2\pi i(nf_x x+mf_y y)], \qquad (2.14)$$

式中 $t_0=\tilde{t}_{00}$，而 $f_x=1/d_x$ 和 $f_y=1/d_y$ 分别是沿 x,y 方向的基频.

例题 4 求黑白光栅屏函数的傅里叶级数展开式.

解 设光栅常数为 d，宽为 a，则

$$t(x)=\begin{cases}1, & |x|<a/2,\\ 0, & a/2<|x|<d/2.\end{cases}$$

代入式(2.12)，得傅里叶系数为

$$\tilde{t}_0=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}dx=\frac{a}{d}.$$

$$\tilde{t}_n=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}\exp(-i2\pi f_n x)dx=\frac{a}{d}\frac{\sin\pi f_n a}{\pi f_n a}$$

$$=\frac{a}{d}\frac{\sin n\pi fa}{n\pi fa}=\frac{a}{d}\frac{\sin(n\pi a/d)}{n\pi a/d}. \qquad (2.15)$$

我们看到，上式与我们熟悉的单缝衍射因子在形式上相当接近，其中的联系即将在下面看到.

例题 5 用傅里叶分析的手段重新处理黑白光栅的夫琅和费衍射.

解 当平行光正入射时，$\widetilde{U}_1 = A_1$，

$$\widetilde{U}_2(x) = \widetilde{U}_1 \widetilde{t}(x) = A_1 \widetilde{t}(x) = A_1 t_0 + A_1 \sum_{n\neq 0} \widetilde{t}_n e^{i2\pi nfx}.$$

由相因子可以得知，n 级平面衍射波的方向角为

$$\sin\theta_n = nf\lambda = n\lambda/d,$$

这就是我们以前给出的光栅公式．n 级主极强的振幅正比于 $\widetilde{t}_n$，光强正比于 $|\widetilde{t}_n|^2$，利用式(2.15)可以写成

$$I \propto |\widetilde{t}_n|^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}\right)^2,$$

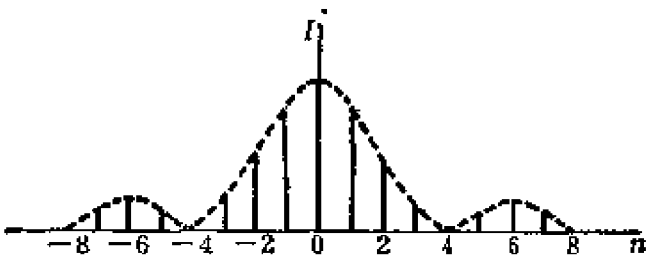


图 2-10 黑白光栅的分立谱

这里 $\alpha_n = \pi a \sin\theta_n/\lambda$，上式正是我们熟悉的单缝衍射因子．由于在上面的计算中未考虑光栅的有限尺寸 D，故我们得到的是严格的分立谱(图2-10)．若计及有限尺寸，每个谱斑的振幅正比于 D，但有一半角宽度 $\Delta\theta = \lambda/D\cos\theta$，当 $D \gg d$ 时，$\Delta\theta$ 远小于相邻谱斑的间隔，这时衍射谱仍可近似地看成是分立的，或者说，它是准分立谱．

*2.6 过高频信息产生的衰逝波

在光栅的衍射系统中，照明光波的波长 λ 和光栅的空间周期 $d = 1/f$ 两个量是互相独立的，不要混淆．对于 $d < \lambda$ 或者说 $f > 1/\lambda$ 的那些过高频信息来说，衍射斑的方向角满足

$$\sin\theta = f\lambda > 1, \qquad (2.16)$$

这应如何理解？形式上看，我们可以说上式的 θ 只有虚数解，没有物理意

义，从而不存在与之相应的衍射波和衍射斑．但要把这里发生了什么物理过程搞清楚，需要从二维的波前脱出来，回到三维空间的波场中去．波前函数中具有相因子$\exp[ik\sin x]$的一项，对应衍射场中一列平面波

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x,y,z) &= A\ \exp[ik(\sin\theta x+\cos\theta y)]\\ &= A\ \exp[i(k_x x+k_z z)],\end{aligned}\tag{2.17}$$

这里$k_x=k\sin\theta$和$k_z=k\ \cos\theta$是波矢$\boldsymbol{k}$的两个分量：

$$k=\sqrt{k_x^2+k_z^2},$$

已知$k=2\pi/\lambda$和$\sin\theta$，可以求出k_z来：

$$\begin{aligned}k_z &= \sqrt{k^2-k_x^2}=k\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(f\lambda)^2}.\end{aligned}$$

由此可见，$\sin\theta=f\lambda>1$意味着k_z为纯虚数，令$k_z=i\kappa$，代回式(2.17)，其中$k_x x=k\sin\theta x=kf\lambda x=2\pi fx$，得

$$\widetilde{U}(x,y,z)=A\ \exp(-\kappa z)\exp(i2\pi fx),\tag{2.18}$$

它从x方向右足行波，沿z方向振幅按指数律急剧衰减，从而波不可能达到远场．这正足我们在第二章10.7节研究全反射时遇到的那种衰逝波．

从傅里叶分析的眼光看，一幅图像可能包含从低频到高频各种空间频率的信息．上面的讨论告诉我们，若用波长为λ的光波对此图像的结构进行衍射分析的话，它足不能把$f>1/\lambda$的高频信息携带到衍射场里来的．换句话说，用衍射方法分析图像结构的空间分辨率只能达到照明波长的数量级．例如，可见光能达到的空间分辨率为10^{-5}cm 量级，而用X光则可达到10^{-8}cm 量级．

2.7 对夫琅和费衍射的再认识

在数学上可以将一个复杂的函数作傅里叶展开，从这种观点出发，可以认为一张复杂的图片是由许多不同空间频率的单频信息组成的．如果仅至于此，傅里叶分解只停留在概念上．为了将这种分解在物理上付诸实现，还需有相应的装置和适当的措施．这两节的内容告诉我们，理想的夫琅和费衍射系统是一种傅里叶频谱的分析器．当单色光正入射在待分析的图像上时，通过夫琅和费衍射，一定空间频率的信息就被一对特定方向的平面衍射波

输送出来.这些衍射波在近场区彼此交织在一起.到了远场区它们彼此分离，从而达到"分频"的目的．不过更常用的作法是利用透镜把不同方向的平面衍射波会聚到后焦面$\mathscr{F}'$的不同位置上，形成一个个衍射斑(见图2-11)．$\mathscr{F}'$上每一对衍射斑代表原图像中一种单频成份，频率越高的成分衍射角越大，在$\mathscr{F}'$上离中心越远．各衍射斑的强度正比于傅里叶系数$\tilde{f}_n$的平方．总之一句话，原图像的

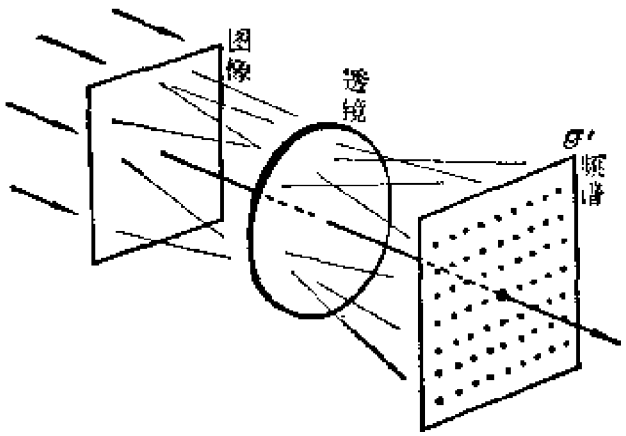


图 2-11　夫琅和费衍射系统是傅里叶频谱分析器

傅里叶频谱形象而直观地反映在夫琅和费衍射系统的后焦面上．这焦面就是原图像的傅里叶频谱面，或简称傅氏面．所以，夫琅和费衍射装置就是傅里叶频谱分析器——这就是现代光学对夫琅和费衍射的新认识．这种新认识给光学和数学两方面都带来了好处：它给了光学一种强有力的数学手段——傅里叶分析，同时也为数学上进行傅里叶变换的运算创立了一门新技术——光学计算技术．

为什么夫琅和费衍射系统能够成为傅里叶频谱的分析器？这里必须分析两个条件：第一，系统必须是线性的，这样才有可能把复杂的信息分解成为彼此独立的简单信息，系统对前者的响应(总输出)等于对后者响应的迭加；第二，系统的本征信息必须与傅里叶分解一致，是单频的简谐信息．夫琅和费衍射系统的线性一般条件下是不成问题的．所谓某种系统的"本征信息"，是指这样的一类"简单"信息，它们进入该系统时不再被分解，而当其它类型的信息进来时将被分解成这类"简单"信息．注意：信息是否"简

单”，是相对系统而言的，不同系统的“简单”信息可以不同．我们知道，夫琅和费衍射装置中的透镜把不同方向的平面波分离，并显示在焦面上，而平面波的波前函数是简谐式的，这就决定了所有夫琅和费衍射系统的本征信息是简谐信息．上述两个条件具有更为广泛的意义，是现代系统论信息论中的一个重要概念，它指明运用傅里叶分析的数学手段是要有一定的物理条件来保证的．

思 考 题

1． 在本章§1开头我们曾对“什么是衍射”问题给出先后几种不同的说法．在学习了这两节的内容以后，总结一下你在这方面的体会．

2． 单纯的时间讯号，如简谐交流电压，可用复数表示为$\widetilde{U}=U_0e^{i\omega t}$，或用$\widetilde{U}=U_0e^{-i\omega t}$，这里“正频”和“负频”纯粹是个约定，没什么本质差别．为什么2.3节中将正弦光栅的出射波前函数作傅里叶分解时，正频项和负频项具有独立而不同的物理意义？三维空间里定态光波的复振幅表达式正、负空间频率具有独立而不同的物理意义吗？

3． 正弦光栅在自身所在平面内平移或转动时，对夫琅和费衍射场或透镜后焦面上的衍射斑有什么影响？

习 题

1.(1) 长长的一行树，相邻两棵的间隔为10m，这行树的空间频率(基频)为多少？一架高空摄影机对准这行树拍照，在长度为10cm的胶卷上出现200棵树的像，胶卷上图像的空间频率为多少？

(2) 在一张白纸上等间隔地画上许多等宽的平行黑条纹，设黑条纹宽度3cm，白地宽度5cm，这张图案的空间频率(基频)为多少？

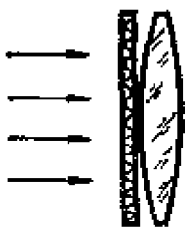
2.(1) 一列平面波，波长为6328Å，方向角$\alpha=30°$，$\beta=75°$，求其复振幅的空间频率f_x,f_y,f_z．

(2) 这列平面波中沿什么方向的空间频率最高？最高空间频率为多少？相应的最短空间周期为多少？

(3) 在光谱学中常使用“波数”$\widetilde{\nu}=1/\lambda$的概念，它与平面波场中的空间频率有什么联系和区别？

3． 如图，将一正弦光栅与一薄透镜迭放在一起，试写出此组合系统

的屏函数，并分析此装置的正入射夫琅和费衍射。



习题3图



习题4图

4. 设正弦光栅的复振幅透过率函数为

$$t(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0),$$

(1) 一束平行光正入射于这正弦光栅上，求透射场复振幅分布函数 $\widetilde{U}_2(x,y)$ 的空间频率。

(2) 求透射场强度分布函数 $I_2(x,y)=\widetilde{U}_2^*\widetilde{U}_2$ 的空间频率。

(3) 利用图2-3所示的装置制备正弦光栅，所用照明光波的波长为6328 Å，$\theta_1=\theta_2=30°$，算出这样制出的正弦光栅在(1)和(2)两问中空间频率的具体数值。

(4) 用此正弦光栅按图所示方法再制备一张新的光栅：将记录介质(感光底片)H 紧贴在正弦光栅 G 的下面，用一束平行光照明(见图)，然后对曝了光的记录介质进行线性冲洗，这张新光栅的复振幅透过率函数包含有几种空间频率成分？

5. 讨论上题中复制光栅 H 的正入射夫琅和费衍射。

6. 一正弦光栅的屏函数为

$$t(x,y)=t_0+t_1\cos2\pi fx,$$

现将它沿 x 方向分别平移 $\Delta x=d/6,\ d/4,\ d/2,\ d,\ 3d/2$，写出移动后的屏函数表达式。

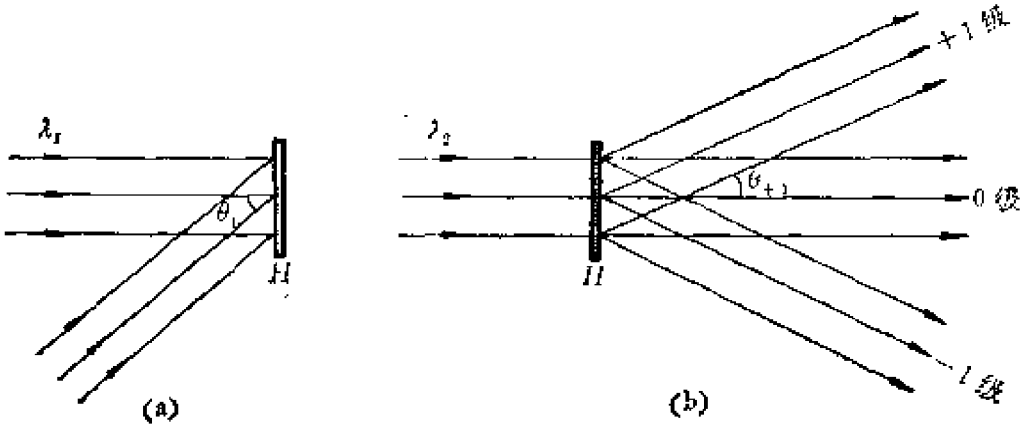
7. 正弦光栅的屏函数为

$$t(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi f_x x+2\pi f_y y),$$

现将它沿斜方向平移 $\Delta r=(\Delta x,\Delta y)$，写此移动后的屏函数表达式。

8. 讨论斜入射的正弦光栅夫琅和费衍射，证明衍射斑方向角的公式与正入射时的差别仅在于把 $\sin\theta$ 换为 $\sin\theta-\sin\theta_0$，这里 θ_0 为入射光的倾角。

9. 如图(a)，制备正弦光栅时所用的两束平行光的波长为 λ_1，其中一束正入射，另一束倾角为 θ_1，用此制成的光栅作夫琅和费衍射实验时，照明光束正入射，波长为 λ_2(图(b))，



习题9图

(1) 证明

$$\frac{\sin\theta_{+1}}{\sin\theta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

其中θ_{+1}是+1级衍射斑的方向角.

(2) 如果两光束干涉时用红外光 $\lambda_1=10.6\mu m$ (CO_2激光)，衍射时用可见光 $\lambda_2=6328\text{Å}$(He-Ne激光)，$\theta_1=20°$，求 θ_{+1}值.

10. 设光栅的复振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x)=t_0+t_1\cos 2\pi fx+t_1\cos\left(2\pi fx+\frac{\pi}{2}\right),$$

这块光栅的夫琅和费衍射场中将出现几个衍射斑？各斑的中心强度与0级斑的比值是多少？

11. 算出下列黑白光栅的前10个傅里叶系数：$t_0,\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_9$

(1) $a:d=1:3$；　　(2) $a:d=1:2$.

§3 阿贝成像原理与相衬显微镜

3.1 阿贝成像原理

一百多年前，德国人阿贝(E.Abbe，1874 年)在蔡司光学公司任职期间研究如何提高显微镜的分辨本领问题时，提出了关于相干成像的一个新原理．现在看来，当初的阿贝成像原理已为现代变换光学中正在兴起的空间滤波和信息处理的概念奠定了基础．因为任何图像都可作傅里叶展开，最基本的图像是正弦光栅．下面我们就以正弦光栅为物，说明并论证阿贝成像原理．

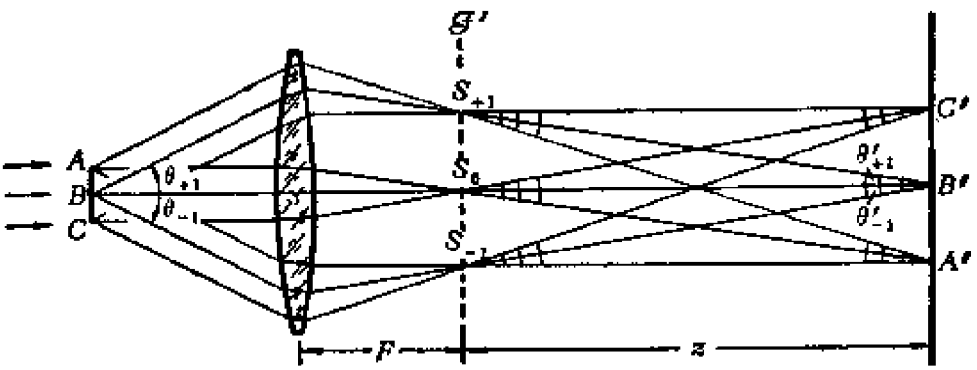


图 3-1 阿贝成像原理

如图3-1，用平行光照明傍轴小物ABC，使整个系统成为相干成像系统，像成于$A'B'C'$．如何看待这个系统的成像过程呢？

一种观点着眼于点的对应：物是点A,B,C等的集合，它们都是次波源，各自发出球面波，经透镜后会聚到像点A',B',C'等．物与像成点点对应关系：

$$\text{物}\left\{\begin{array}{l} A\longrightarrow A' \\ B\longrightarrow B' \\ C\longrightarrow C' \end{array}\right\}\text{像}$$

这是几何光学的观点．

另一种观点着眼于频谱的转换：物是一系列不同空间频率信

息的集合，相干成像过程分两步完成．第一步是入射光经物平面(x,y)发生夫琅和费衍射，在透镜后焦面$\mathcal{F}'$上形成一系列衍射斑；第二步是干涉，即各衍射斑发出的球面次波在像平面(x',y')上相干迭加，像就是干涉场．此种两步成像的理论是波动光学的观点，这就是阿贝成像原理．

下面我们用单频信息的物(即正弦光栅)作为特例，论证上述两种观点的等效性．设物光波前为

$$\widetilde{U}_O(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos 2\pi fx), \tag{3.1}$$

如果由它产生三列平面衍射波能被透镜接收，则在其后焦面上形成三个衍射斑S_{+1},S_0,S_{-1}．

下一步我们把S_{+1},S_0,S_{-1}看成三个点源，考察它们在像平面上产生的干涉场$\widetilde{U}_I(x',y')$．从表Ⅴ-2可以查出，这三个次波点源的振幅分别为：$A_{\pm1}\propto A_1t_1/2$；$A_0\propto A_1t_0$．关于它们的位相，则需追溯到第四章1.5节，那里指出，$\varphi(\theta)=kL_0(\theta)$，$L_0(\theta)$是光栅中心(这里是$B$点)到衍射场点的光程，即$\varphi(\theta_{\pm1})=k(BS_{\pm1})$，$\varphi(\theta_0)=k(BS_0)$．于是三个次波点源$S_{+1},S_0,S_{-1}$的复振幅可以写成

$$\begin{cases}\widetilde{A}_{+1}\propto\dfrac{1}{2}A_1t_1\exp[ik(BS_{+1})],\\ \widetilde{A}_0\propto A_1t_0\exp[ik(BS_0)],\\ \widetilde{A}_{-1}\propto\dfrac{1}{2}A_1t_1\exp[ik(BS_{-1})].\end{cases} \tag{3.2}$$

计算三个球面次波在像平面(x',y')上的波前$\widetilde{U}_{+1}(x',y')$，$\widetilde{U}_0(x',y')$和$\widetilde{U}_{-1}(x',y')$时，我们假设傍轴条件，这时可利用第二章2.2节和2.3节的现成公式(2.10)和(2.16′)，在其中$z=(S_0B')$，$r_0'=(S_{\pm1}B')$，(x,y)是点源的坐标，对于$S_{\pm1}$，$(x,y)\approx(z\sin\theta_{\pm1}',\ 0)$；对于$S_0$，$(x,y)=(0,0)$．于是

$$\widetilde{U}_0(x',y') \propto \widetilde{A}_0 e^{ik(B_0S')}\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)$$

$$\propto A_1 t_0 e^{ik(BS_0B')}\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{z}\right).$$

$$U_{\pm1}(x',y')$$

$$\propto \widetilde{A}_{\pm1} e^{ik(S_{\pm1}B')}\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)\exp(-ik\sin\theta'_{\pm1}x')$$

$$\propto A_1 t_1 e^{ik(BS_{\pm1}B')}\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)\exp(-ik\sin\theta'_{\pm1}x').$$

由于物像之间的等光程性，$(BS_0B')=(BS_{+1}B')=(BS_{-1}B')\equiv(BB')$，故上面的第一个位相因子是相同的．第二个位相因子$\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)$本来已是相同的，现把这两个共同位相因子归并在一起，写成$\exp[i\varphi(x',y')]$.于是三波迭加，得像面上的干涉场

$$\widetilde{U}_i(x',y') = \widetilde{U}_0(x',y') + \widetilde{U}_{+1}(x',y') + \widetilde{U}_{-1}(x',y')$$

$$= A_1 e^{i\varphi(x',y')}\left\{t_0 + \frac{t_1}{2}[\exp(-ik\sin\theta'_{+1}x')\right.$$

$$\left.+\exp(-ik\sin\theta'_{-1}x')]\right\}.$$

根据阿贝正弦条件①

$$\frac{\sin\theta'_{\pm1}}{\sin\theta_{\pm1}} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{V},$$

V是成像系统的横向放大率，于是有

$$k\sin\theta'_{\pm1}x' = k\sin\theta_{\pm1}x'/V,$$

这里 $k=2\pi/\lambda$，$\sin\theta_{\pm1}=\pm f\lambda$②，故

---

① 见第一章10.4节式(10.1)，这里取 $n=n'=1$.

② 见表Ⅴ-2.

$$k\sin\theta_{\pm1}=\pm2\pi f.$$

代入$\widetilde{U}_I$的表达式，得

$$\widetilde{U}_I(x',y')\propto A_1e^{i\varphi(x',y')}[t_0+t_1\cos(2\pi fx'/V)] \qquad (3.3)$$

$$\propto A_1e^{i\varphi(x',y')}[t_0+t_1\cos(2\pi fx'/V)]. \qquad (3.4)$$

将物面上的波前$\widetilde{U}_O(x,y)$与像面上波前$\widetilde{U}_I(x',y')$对比一下，可以看出两表达式是相似的．公共的相因子$e^{i\varphi(x',y')}$不反映在强度分布中，由其余部分可得到如下结论：

（1）空间频率$f\to f/V$，或者说空间周期$d\to Vd$，这表示几何放大，不影响像质．

（2）决定像质的是反衬度γ，它可由交流成分和直流成分系数之比求出，对于物和像都有

$$\gamma_O=\gamma_I=\frac{t_1}{t_0},$$

故

$$\frac{\gamma_I}{\gamma_O}=1,$$

这就是说，像的反衬度没有下降．

附带说明一下，以上的结果似乎十分理想，这是因为我们未考虑衍射斑的半角宽度．计及这一点，干涉场仍然是严格的单频信息，但反衬度要下降一些．

这样，我们就以正弦光栅为例，证明了阿贝成像原理．对于更复杂的物的图像，我们可用傅里叶分析的方法把它展成单频信息的迭加．

3.2 空间滤波概念

用频谱语言来表达，阿贝成像原理的基本精神是把成像过程分成两步：第一步衍射起“分频”作用，第二步干涉起“合成”作用．许多有意义的事就将发生在这频谱一分一合的过程之中．

过去我们熟悉的一大类成像光学仪器(如显微镜、照相机)要求图像尽可能还原，亦即我们希望所成的像除几何尺寸放大或缩小外，尽可能与原物相似．从阿贝成像原理的眼光来看，这要求在分频与合成的过程中尽量不使频谱改变．如果物平面包含一系列从低频到高频的信息，由于实际透镜的口径总是有限的，频率超过一定限度的信息将因衍射角过大而从透镜边缘之外漏掉(见图3-2)，所以透镜本身总是一个"低通滤波器"．丢失了高频信息的频谱再合成到一起时，图像的细节将变得有所模糊．因此要提高系统成像的质量，就应该扩大透镜的口径．这是在第二章§8中分析光学仪器的像分辨本领时早已得到的结论，不用阿贝成像原理我们也知道它①．然而图像还原并非所有光学仪器的要求，人们还有更积极的需要，那就是改造图像．阿贝成像原理的真正价值在于它提供了一种新的频谱语言来描述信息，启发人们用改变频谱的手段来改造信息．现代变换光学中的空间滤波技术和光学信息处理，就概念来说，都起源于阿贝成像原理．

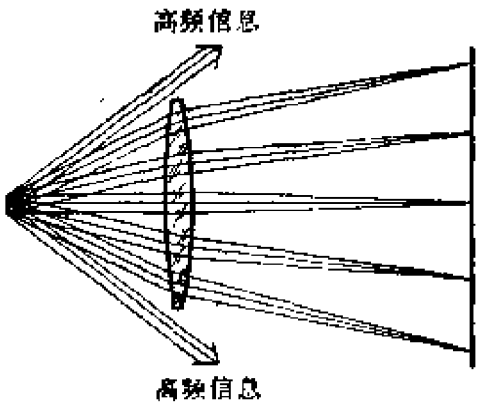
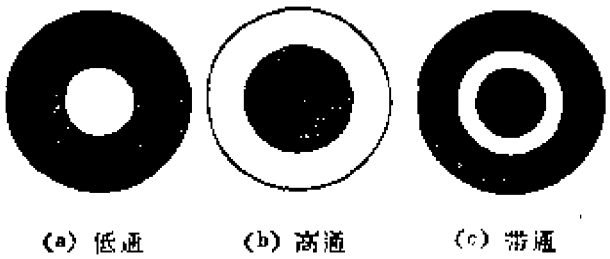


图 3-2　光瞳的低通滤波作用

空间滤波的具体作法如下．阿贝成像原理告诉我们，物信息的频谱展现在透镜的后焦面(傅氏面)上．我们可在这平面上放置不同结构的光阑，以提取(或摒弃)某些频段的物信息，亦即我们可主动地改变频谱，以此来达到改造图像的目的．用频谱分析的眼光来看，傅氏面上的光阑起着"选频"的作用．广义地说，凡是能够直接改变光信息空间频谱的器件，通称空间滤波器，或光学滤

① 在第二章§8中分析的是不相干成像系统中衍射效应带来的影响，而阿贝成像原理是对相干成像系统而言的，二者稍有区别．运用频谱的语言去分析不相干成像系统的问题，见本章§7．

波器．图3-3是一组具有不同频率特性的简单空间滤波器．下面我们介绍一些简单的空间滤波实验．



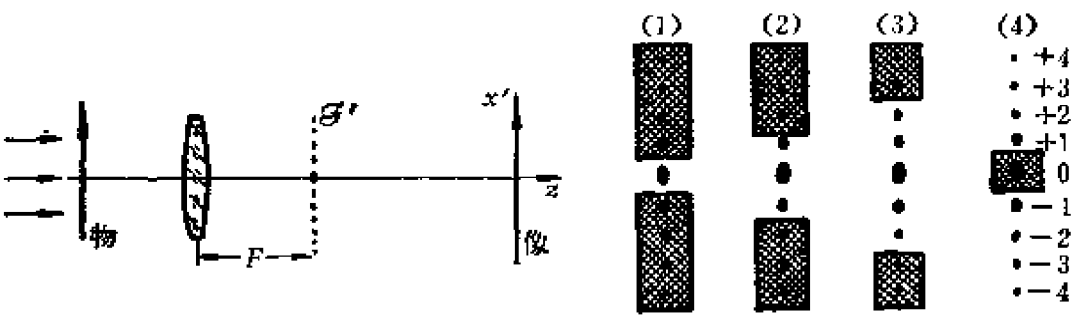
(a) 低通　　(b) 高通　　(c) 带通

图 3-3　简单的空间滤波器

3.3　阿贝-波特空间滤波实验

空间滤波实验是对阿贝成像原理最好的验证和演示．

用一块黑白光栅作物，将它置于前焦面附近．用一束强的单色平行光照明光栅，经透镜在较远处形成一个实像．在透镜的后焦面 $\mathscr{F}'$ 上安置一个可调的单缝作为光阑，以提取不同的衍射斑（见图3-4），借助于目镜观测像面上图像的变化．



(a) 光路　　(b) 傅氏面上的光阑

图 3-4　空间滤波实验装置

黑白光栅的振幅透过率函数 $\tilde{t}(x)$ 及其频谱是我们早已熟悉的（见图3-5(a)，(b)），前者是方波，后者是准分立谱，各级主极强受单缝因子的调制．我们按以下步骤作观察实验：

（1）调整傅氏面上单缝的宽度，只让0级通过(见图3-4(b)(1))，则像面上呈现一片均匀照明，丢失了全部周期性的交流信息.

（2）展宽单缝，让0级和±1级通过，挡掉其余衍射斑，则像面上的振幅分布 $\widetilde{U}_I(x')$ 如图3-5(c)左所示，是基频和直流成分的迭加，二者的比例与光栅中 a(缝宽)与 d(间隔)之比有关．当交流成分的振幅大过直流成分时，就会出现负值．此时像面上强度分布 $I(x')$ 如图3-5(d)左所示，在相邻的亮纹之间出现另一套细小的亮纹．条纹的黑白界限没有原物那样明锐.

（3）再展宽单缝，让0级，±1级和±2级通过，挡掉其余衍射斑，则二倍频信息也参加成像，振幅分布更接近方波形状，黑白界限比实验(2)清晰.

（4）设法挡掉0级，而让其它所有衍射斑通过.这时像面上的振幅分布差不多仍是方波，只是没有直流成分(见图3-5(c)右)，由于很高次的谐波实际上被透镜边缘挡掉，波型的棱角或多或少变得圆滑了一些．强度分布如图3-5(d)右所示，除原物透光部分

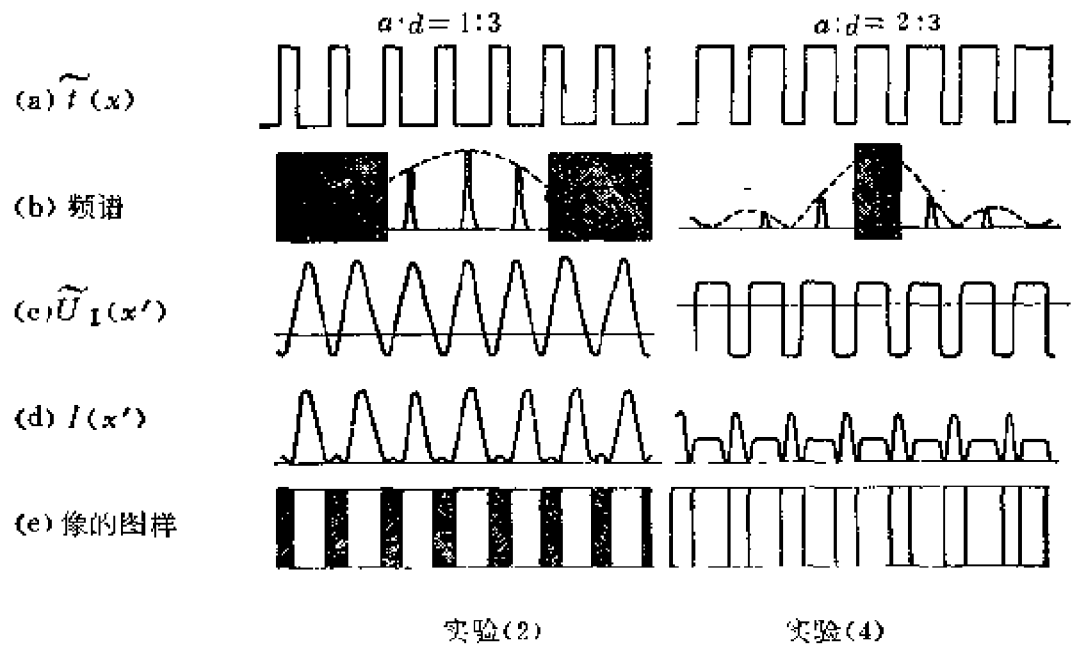


图 3-5　频谱、复振幅和强度的变化

仍是亮的外，原来不透光部分也是亮的．在一定的 a 与 d 的比例下，后者比前者还可能更亮．这种现象叫做反衬度反转①．

上述一类实验首先是阿贝于1874年报导的，后来波特（A．B．Porter，1906年）也报导了这类实验．这些实验以其简单的装置十分明确地验证了阿贝成像原理，而且为光学信息处理提供了深刻的启示．但由于它属于相干光学的范畴，在实际中推广需要有强的单色光，故而直到1960年激光问世后，它才重新振兴起来．从那时起空间滤波技术和光学信息处理才得以迅速发展，并成为现代光学中的一个热门．

例题 设黑白光栅50条/mm，入射光波长6328Å，为了使傅氏面上至少能够获得 ±6 级衍射斑，并要求相邻衍射斑的间隔不小于2mm，透镜焦距及直径至少要有多大？

解 相邻衍射斑的角间隔为 $\Delta\theta\approx\lambda/d$，线距离为 $\Delta l\approx\Delta\theta F$，所以焦距应为

$$F\geqslant\frac{\Delta l}{\Delta\theta}=\frac{\Delta l d}{\lambda}\approx 64\text{mm}.$$

6 级衍射斑的衍射角为

$$\sin\theta_6=6\lambda/d\approx 0.2.$$

由于物平面在前焦面附近，要使 6 倍频信息进入透镜，其直径 D 应满足

$$D\geqslant 2F\sin\theta_6\approx 26\text{mm}.$$

3.4 相衬显微镜

如果样品是无色透明的生物切片或晶片，它们的透过率函数是位相型的：

$$\tilde{t}(x,y)=e^{i\varphi(x,y)},\qquad(3.5)$$

其绝对值的平方为 1，用普通的显微镜观察这类样品时，图像的

① 这里的反衬度反转是不完全的，即原来亮的地方未变得全暗．反衬度完全反转的例子见§6．

反衬很小，难以看清楚.泽尼克(F.Zernike，1935年)基于阿贝成像原理提供的空间滤波概念，提出一个方法——位相反衬法（简称相衬法）以改善透明物体的像的反衬度．具体的作法，是在一块玻璃基片的中心滴上一小滴液体，设液滴的光学厚度为nh，从而引起零级相移$\delta=2\pi nh/\lambda$．这就制成了一块位相板，将它放置在显微物镜的后焦面$\mathcal{F}'$上，当作空间滤波器使用(图3-6)①.

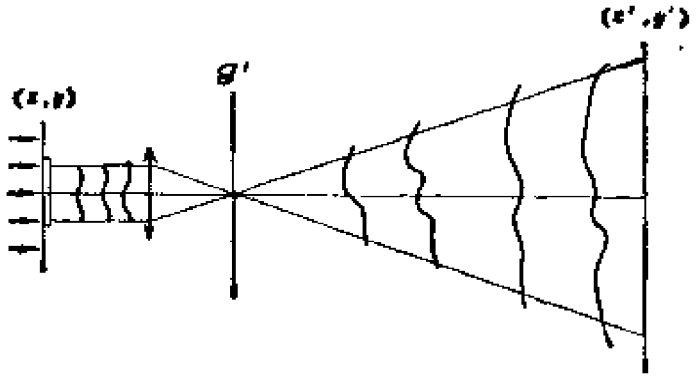


图 3-6　相衬法原理性光路

先分析不加位相板时的光场．在正入射的相干光照明下，物平面的复振幅分布为

$$\widetilde{U}_0(x,y)=A_1\widetilde{t}(x,y)=A_1\exp[i\varphi(x,y)]$$

$$=A_1\left[1+i\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots\right]. \qquad (3.6)$$

第一项是直流成分，代表沿光轴传播的平面衍射波，它在傅氏面$\widetilde{\mathcal{F}}'$上是集中于焦点的0级衍射斑．式(3.6)级数中其它各项代表复杂的波前，它们的频谱弥漫在傅氏面上各处．在加入位相板后，傅氏面上的0级斑(从而像面上的直流成分)相移δ，而其它频谱成分改变不大，可以忽略．所以像面上的复振幅分布与式(3.6)的差别，除了将$\varphi(x,y)$改成$\varphi(x',y')$外，仅仅是第一项1改为

① 图3-6所示的方法适用于激光照明．过去在没有这样强的平行光束时，显微镜都是用会聚光照明的，相衬显微镜的实际结构与图3-6有些不同，限制照明光的光阑和位相板都做成环形.

$e^{i\delta}$①，

$$\tilde{U}_I(x',y') = A_1[e^{i\delta} + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{i}{3!}\varphi^3 + \cdots]$$

$$= A_1\{(e^{i\delta} - 1) + \exp[i\varphi(x',y')]\}.$$

于是像面上的光强分布为

$$I(x',y') = \tilde{U}_I(x',y')\cdot\tilde{U}_I^*(x',y)$$

$$= A_1^2\{3 + 2[\cos(\varphi - \delta) - \cos\varphi - \cos\delta]\}$$

$$= A_1^2[3 + 2(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta - \cos\varphi\delta - \cos)]. \qquad (3.7)$$

显然，这时像面上不再是一片均匀照明了，出现了与物的位相信息相关的黑白图像.在 $\varphi(x',y') \ll 1$ 的情况下，$\cos\varphi \simeq 1$，$\sin\varphi \simeq \varphi$，上式化为

$$I(x',y') = A_1^2[1 + 2\sin\delta\varphi(x',y)], \qquad (3.8)$$

这时像面上的强度分布与样品的位相信息成线性关系，即样品的位相分布调制了像面上的光强分布，式中的线性系数$2\sin\delta$反映了调制的程度.但是应当注意，当$\varphi \ll 1$时式(3.8)中第二项远小于第一项，即像面上仍然有较强的本底．不过在工艺上还可想些办法来减弱本底以提高底片的反衬度.

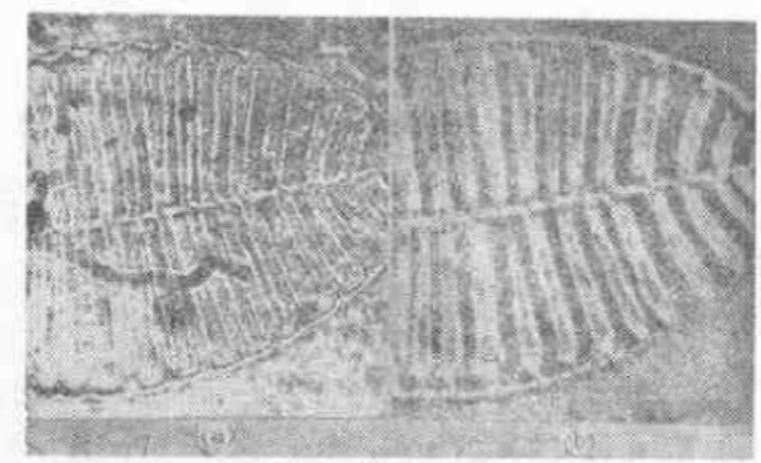
一般书上往往强调δ应等于$\pi/2$，诚然，此时上述线性系数最大，但从式(3.8)不难看出，为了实现位相信息对像面强度的线性调制，对δ的取值实在不必苛求.

图3-7(a),(b)分别是用普通显微镜和相衬显微镜拍摄的硅藻的照片比较，这里反衬度的变化是明显的.

泽尼克的相衬法用改变频谱面上位相分布的手段，巧妙地实现了强度的位相调制，成为实际应用信息处理的先声，因此而获得了1953年度的诺贝尔物理学奖金.

---

① 在讨论这类问题时，照例总是设横向放大率为1，把注意力集中在分布函数及其反衬度的变化上.

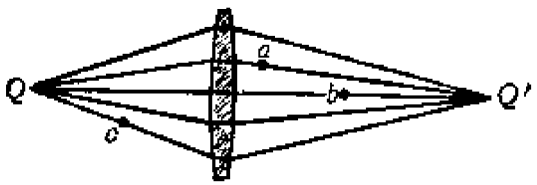


(a)　　(b)

图 3-7　普通显微镜和相对显微镜拍摄的照片

思　考　题

1．如图，设透镜理想成像．证明在成像光束中任意几个次波源（如图中的a,b,c）在像点Q'产生的扰动是同位相的．如果在光路中设有衍射屏，以上结论是否成立？



思考题 1 图

2．证明在傍轴条件下傅氏面上士n级衍射斑相对 0 级的位相为

$$\varphi_{\pm n}=-k\frac{(na)^2}{2z},$$

式中z是傅氏面到像面的距离，a为相邻衍射斑中心间的距离．

3．通常在一台光栅光谱仪的焦面上获得的光谱是时间频谱还是空间频谱？

4．仿照图 3-3，但把a与d的比例左右对调一下，画出相应的各种曲线．

5．经空间滤波器改造了的频谱是否为实场函数的空间频谱？试论证

你的结论。

6. (1) 在相衬法中 $\varphi(x,y)\ll 1$ 这个条件有什么好处?

(2) 为了保证 $\varphi(x,y)$ 小，是否要求样品厚度 d 必须很小? 在什么条件下样品可以比较厚，同时又能做到 $\varphi(x,y)\ll 1$?

(3) 一厚度均匀折射率不均匀的位相型物体，$n(x,y)=n_0+\Delta n(x,y)$，最大相对起伏 $\Delta n/n_0\simeq 0.01$。为使 $\varphi\ll 1$ 满足，允许该样品的厚度有多大?

7. (1) 若位相板中心液滴的光学厚度为 $3\lambda/4$，写出任意大小的 φ 和 $\varphi\ll 1$ 时像面函数的表达式。

(2) 这时像的图样与液滴的光学厚度为 $\lambda/4$ 时有何不同?

(3) 若考虑液滴对光的吸收，设其强度透射率为 $\tau<1$，像面上强度分布有何变化? 反衬度有何变化?

8. 观察位相型物体的另一种方法是"中心暗场法"，即在傅氏面的中心设置一个细小的不透明屏。假定物体的位相变换函数 $\varphi\ll 1$，写出像面上强度的分布，并与相衬法的优劣作一比较。

习　题

1. 在一相干成像系统中，镜头(作为入射光瞳)的相对孔径为1/5，求此系统的截止频率(mm^{-1})。设物平面在前焦面附近，照明波长为 $0.5\mu m$。

2. 利用阿贝成像原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式，并同非相干照明的最小分辨距离公式比较。

*§4 夫琅和费衍射场的标准形式

应该说，通过上面三节的学习，我们已经确立了现代变换光学中的许多重要概念，如简谐信息是夫琅和费衍射的本征信息，物信息的傅里叶级数展开，夫琅和费衍射场是物信息的频谱面，相干成像是两步成像，空间滤波和信息处理等等，这已经体现了相干光学信息处理的主要精神，并包含了分析问题所需的基本概念和手段。但是，由于前面我们只讨论了周期性的物信息，这在理论上是不够普遍的；此外，对不相干成像的问题尚未触及。本章今后各节将讨论这些问题。为此本节和下节分别在光学和数学上完作些准备。光学上的准备主要是对夫琅和费衍射再深入一步的讨论，数学上的准备是傅里叶积分变换。

4.1 接收夫琅和费衍射场的实验装置

通常按光源、衍射屏、接收场三者之间的距离是有限远还是无限远，将衍射装置分为菲涅耳和夫琅和费两大类。其实，由平面波照明衍射屏，并在无限远接收的装置，只能算作夫琅和费衍射的定义装置。还有其它几种装置，它们在一定条件下接收到的同样是夫琅和费衍射场。

在图4-1中①，装置(a)是定义装置，它在概念上倒是朴素的，能直观地将夫琅和费衍射与菲涅耳衍射区别开来，但在实验上却是抽象的。其意

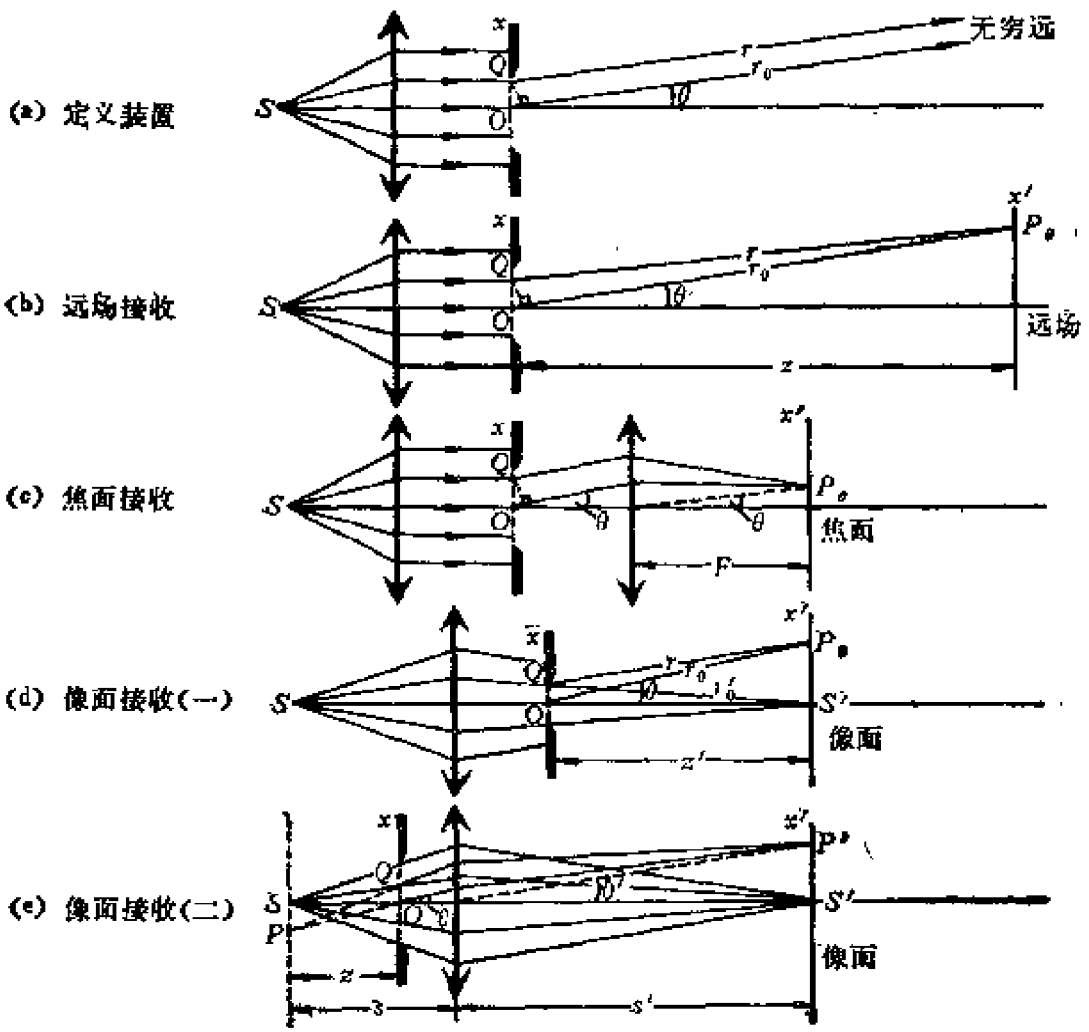


图 4-1 各种夫琅和费衍射装置

① 为了简单，我们把图4-1画成一维衍射装置，在4.2节中推导公式时，我们需要把这些图想象成相应的二维衍射装置。

义是强调衍射场的角分布，把复杂的衍射场分解成一系列平面衍射波，它给出夫琅和费衍射积分的标准形式．装置(b)由平面波照明衍射屏，在远场条件下接收衍射场．它是定义装置的近似体现．这种装置比较简单，自从有了激光光源以后，它已在教学实验中经常使用．装置(c)也用平面波照明衍射屏，在透镜后焦面接收衍射场．这是我们很熟悉的装置，与装置(b)相比，其优点是可以大大缩短装置的长度．不过严格说来，此装置对透镜的要求是较高的，当然若只是为了教学上的演示，对透镜无需苛求．装置(d)和(e)都用球面波照明，在点光源的像面上接收衍射场．衍射屏既可置于透镜后方(如图(d))，也可置于透镜前方(如图(e))．这种装置只要求傍轴条件，无需远场条件，装置也还紧凑．第二章8.3节中我们曾用几何光学的方式论证过，这类装置接收到的也属于夫琅和费衍射场．

我们把以上各种装置统归之于夫琅和费衍射，是因为它们的衍射场具有相同的函数形式，因而也就具有相同的衍射图样．下面对它们逐个加以证明．

4.2 夫琅和费衍射积分的标准形式

在普遍情形下，衍射场由菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式给出①：

$$\widetilde{U}(x',y')=-\frac{i}{2\lambda}\iint(\cos\theta_0+\cos\theta)\widetilde{U}_2(x,y)\frac{e^{ikr}}{r}dxdy,$$

式中$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\widetilde{t}(x,y)$是衍射屏上的透射波前．以上几种实验装置都满足傍轴条件，故有$\cos\theta_0\simeq1$，$\cos\theta\simeq1$，$1/r\simeq$常数，于是上式简化为

$$\widetilde{U}(x',y')\simeq C\iint\widetilde{U}_2(x,y)e^{ikr}dxdy. \tag{4.1}$$

在定义装置(a)中，平行光正入射，$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1$．对于一束平行的衍射线有②

$$kr=kr_0-k\sin\theta_1x-k\sin\theta_2y,$$

无限远处的衍射场是衍射角θ_1,θ_2的函数

---

① 参见第二章5.2节式(5.10)．

② 这里和下面有关二维夫琅和费衍射线光程差的计算，参考第二章7.3节(矩孔衍射)和那里的图7-6，这里所用的符号，如θ_1,θ_2的意义与那里相同．

$$\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)=CA_1e^{ikr_0}\iint\tilde{t}(x,y)\exp[-i(k\sin\theta_1 x+k\sin\theta_2 y)]dxdy, \tag{4.2}$$

这便是夫琅和费衍射积分的标准形式，它的特征是被积函数由两个因子组成：反映衍射屏的透过率函数 $\tilde{t}(x,y)$ 和线性相因子 $\exp[-i(k\sin\theta_1 x+k\sin\theta_2 y)]$. 今后不论什么装置、怎样照明、何处接收，只要衍射场的积分表达式具有这种形式，我们就称之为夫琅和费衍射.

装置(b)中会聚到接收屏幕上同一点 P 的衍射线虽不是严格的平行光，但当衍射屏不太大时，所有物点满足远场条件. 按照第二章式(2.17)，有

$$\tilde{U}(x',y')=CA_1e^{ikr_0}\iint\tilde{t}(x,y)\exp\left[\frac{-ik}{z}(xx'+yy')\right]dxdy, \tag{4.3}$$

式中 $r_0=z+(x'^2+y'^2)/(2z)$. 因衍射角 $\sin\theta_1\approx x'/z$, $\sin\theta_2\approx y'/z$, 式(4.3)与(4.2)是一致的.

装置(c)我们很熟悉，会聚于接收屏幕同一点的衍射线是严格平行的，故衍射场可以写为

$$\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)=CA_1e^{ikL_0}\iint\tilde{t}(x,y)\exp[-i(k\sin\theta_1 x+k\sin\theta_2 y)]dxdy, \tag{4.4}$$

式中 L_0 是衍射屏中心 O 点到场点 P 的光程. 它显然也符合标准形式(4.2).

需要着重讨论的是装置(d)和(e). 由于这里是球面波照明，衍射屏不再是入射波的等相面. 设

$$\tilde{U}_1(x,y)=A_1\exp[i\varphi_1(x,y)],$$

在傍轴条件下，上式里忽略了振幅 A_1 随 x,y 的变化，$\varphi_1(x,y)$ 是点光源 S 与衍射屏上任一点 $Q(x,y)$ 之间的位相差①. 先考虑装置(d)，在傍轴条件下按照第二章式(2.16′)应有

$$\tilde{U}(x',y')=C\iint\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\exp\left[ik\left(r_0'+\frac{x'^2+y'^2}{2z'}\right)\right]$$

$$\times\exp\left[\frac{-ik}{z'}(xx'+yy')\right]dxdy$$

① 也可以是相对另一参考点(例如像点 S') 的位相差，这里重要的是 x-y 平面上的位相分布.

$$= CA_1 \exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{2z'}\right)\iint \tilde{t}(x,y)\exp[i\varphi_1(x,y)+ikr_0']$$

$$\times \exp\left[\frac{-ik}{z'}(xx'+yy')\right]dxdy,$$

式中z'是衍射屏到像面的距离. 注意, $\varphi_1(x,y)=k(SQ)$, 而$r_0'=(QS')$, 故上式中

$$\varphi_1(x,y)+kr_0' = k[(SQ)+(QS')] = k(SQS').$$

由于物像间的等光程性, 光程(SQS')与$Q(x,y)$点的位置无关, 可把它写成一个常数L_0, 并将这个相因子从积分号内提出来, 于是有

$$\tilde{U}(x',y') = CA_1\exp(ikL_0)\exp\left(ik\frac{x'^2+y'^2}{2z'}\right)$$

$$\times\iint \tilde{t}(x,y)\exp\left[\frac{-ik}{z'}(xx'+yy')\right]dxdy. \tag{4.5}$$

不难看出,式(4.5)中的积分与式(4.3)中的一样,从而它也符合标准形式. 式(4.5)也适用于装置(e), 不过其中z'应换为衍射屏到物面的距离z, (x',y')换为$(x',y')/V$(V为横向放大率). 这一结论请读者自己论证. 总之, 这里我们通过傍轴条件下光程的具体计算, 从波动理论上严格地证明了第二章8.3节的结论: 球面波照明、像面接收的装置也是夫琅和费衍射装置.

4.3 结论和意义

(1) 确认了夫琅和费衍射积分的标准形式(4.2): 被积函数是屏函数乘以线性相因子. 这给了实际衍射装置一个统一的判断标准, 将夫琅和费衍射与菲涅耳衍射从本质上区别开来.

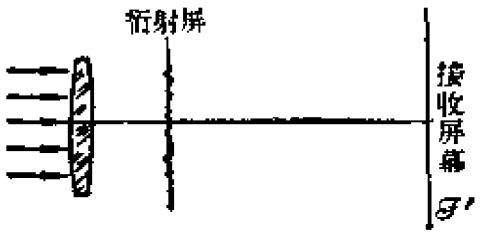
(2) 分析了多种可在一定条件下实现夫琅和费衍射场的衍射装置, 使我们可以根据不同需要, 灵活安排光路. 图4-1所示的五种装置, 可统一地概括成在照明光源的像面上接收到的衍射场就是夫琅和费衍射场, 与衍射屏插在什么地方无关. 所以无论望远镜和显微镜的中间像都是由物点经物镜后的夫琅和费衍射斑组成的, 它们的像分辨本领都要用夫琅和费圆孔衍射公式来计算.

(3) 熟悉傅里叶积分变换的人一眼就可看出,夫琅和费衍射积分的标

准形式(4.2)就是傅里叶变换，这表明夫琅和费衍射场是屏函数的傅里叶变换式①．由此深入下去，可导致现代光学成像系统中引进一整套傅里叶分析的手段．

思 考 题

1． 装置如图所示，在后焦面$\mathcal{F}'$上接收衍射场，



思考题 1 图

(1) 这种装置能否接收夫琅和费衍射场？如果能，需要什么条件？夫琅和费衍射场的范围有多大？

(2) 前后移动衍射屏，对衍射图样有何影响？

(3) 此装置与衍射屏放置在透镜前时有何不同？

2． 在式(4.4)中积分号外有一个与场点的坐标(x', y')有关的相因子$\exp(ikL_0)$用什么方法可使这个相因子成为与场点坐标无关的常数？

习 题

1． 采用远场装置(图4-1(b))接收单缝的夫琅和费衍射场，设单缝宽度约为100μm，入射光波长6328Å，

(1) 接收屏幕至少应放在多远？

(2) 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅和费衍射场？

(3) 0 级半角宽度为多少？

(4) 在接收屏幕上 0 级的线宽度有多少？

2． 采用像面接收装置(图4-1(d)或(e))接收单缝的夫琅和费衍射场，设单缝宽度约为 1mm，入射光波长 4880Å，物距 40cm，像距80cm．

---

① 严格地说，这里与傅里叶变换式相比，在积分号外多了一个与场点坐标x', y'有关的相因子．这问题可暂时不必计较，§6再详细交待．

(1) 如果单缝置于透镜后方，要求在像面1cm范围内准确地接收到夫琅和费衍射场，单缝距像面至少多远？

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧，求0级半角宽度和接收屏幕上0级的线宽度；

(3) 如果单缝离透镜40cm远，求0级半角宽度及它在幕上的线宽度；

(4) 如果单缝置于透镜前方，紧贴在其左侧，情形如何？

3. 对图4-1(e)所示装置，推导出傍轴条件下它的衍射场表达式，并论证它符合夫琅和费衍射场的标准形式。

【提示：利用场点P'的共轭点P(见图4-1(e)).】

*§5 傅里叶变换 δ函数

这一节我们将以简明的格式较全面地罗列傅里叶变换和δ函数的主要性质，着重分析这些数学公式和数学定理的物理背景，并通过若干例子加以示范。至于公式的推导和定理的证明，请读者查阅有关的数学书籍。当然，这些公式和定理之间是互相关联的，承认前者也有可能导出后者。

5.1 傅里叶积分变换

本章2.5节中已介绍过周期函数的傅里叶级数展开，非周期函数相当于频率$f\to 0$的周期函数。2.5节中介绍过傅里叶级数的三种形式：正弦余弦式，余弦相移式和指数式，这里我们采用指数式进行$f\to 0$的过渡。

设函数$g(x)$为周期函数，空间周期为L。在图5-1中只画了它在$\pm L/2$之间一个周期内的曲线。按照1.4节式(1.17)，我们把它展成指数式的傅里叶级数：

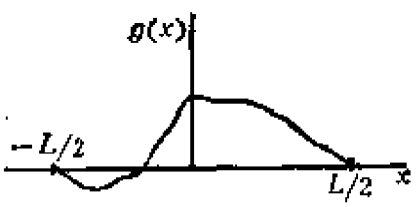


图5-1 非周期函数是周期$L\to\infty$的极限

$$g(x)=g_0+\sum_{n\neq 0}\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx}, \tag{5.1}$$

式中 $f=1/L$ 是基频，傅里叶系数为

$$\tilde{g}_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi nfx}dx. \tag{5.2}$$

改换一下变量，令 $f_n=nf=n/L$，$G(f_n)=L\tilde{g}_n$，则上两式分别化为

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(f_n)e^{i2\pi f_n x}\Delta f, \tag{5.3}$$

$$G(f_n)=\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi f_n x}dx. \tag{5.4}$$

式中 $\Delta f=f_{n+1}-f_n=1/L$，现取 $f\to 0$，即 $L\to\infty$ 的极限，此时 $\Delta f\to 0$，把 f_n 看成连续变量 f，式(5.3)中的求和可化为积分，两式分别化为①

$$\begin{cases} g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)e^{i2\pi fx}df, & (5.5)\\ G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx. & (5.6)\end{cases}$$

式(5.5)叫做傅里叶积分变换，或傅里叶变换；式(5.6)称为傅里叶逆变换。为了书写方便，$g(x)$ 和 $G(f)$ 之间的这种关系常缩写为

---

① 在各种书籍和文献中，傅里叶变换式(5.5)和逆变换式(5.6)往往还有以下几种不同写法，如

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(q)e^{iqx}dq,\\ G(q)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-iqx}dx; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G(q)e^{iqx}dq,\\ G(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-iqx}dx; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(q)e^{iqx}dq,\\ G(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-iqx}dx. \end{cases}$$

式中 $q=2\pi f$。在各种不同的写法中 $G(q)$ 的定义彼此相差一个常数因子。

$$\begin{cases} G(f)=\mathscr{F}\{g(x)\}, \\ g(x)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f)\}. \end{cases} \tag{5.7}$$

意即$G(f)$是 $g(x)$ 的傅里叶变换式，$g(x)$是$G(f)$的傅里叶逆变换式．或索性再简单一些，写成

$$g(x)\rightleftharpoons G(f).$$

傅里叶变换式$G(f)$在物理中代表原函数的频谱．频谱函数的形式取决于原函数，反之亦然．在下面 5.2 节中我们将给出一些重要函数的频谱，这里先指出傅里叶变换的两点共同特征：

（1）非周期性函数有连续谱（f连续取值）．频谱的有效宽度Δf与原函数有效宽度 Δx 成反比：

$$\Delta f\cdot\Delta x=\text{常数}, \tag{5.8}$$

此常数的数量级为1．这意味着原函数越窄，其频谱就越宽．所以时间的脉冲讯号或空间的点信息有很宽的频谱．

（2）频谱$G(f)$一般是复函数．若原函数$g(x)$是实函数，则$G(f)$有如下的对称性：

$$G(-f)=G^{*}(f). \tag{5.9}$$

这一点不难从式 (5.6)看出．式(5.9)表明，频谱的模是 f 的偶函数，相对 $f=0$ 的点左右对称，辐角是 f 的奇函数，相对 $f=0$ 的点左右反对称，即数值相等，正负号相反．

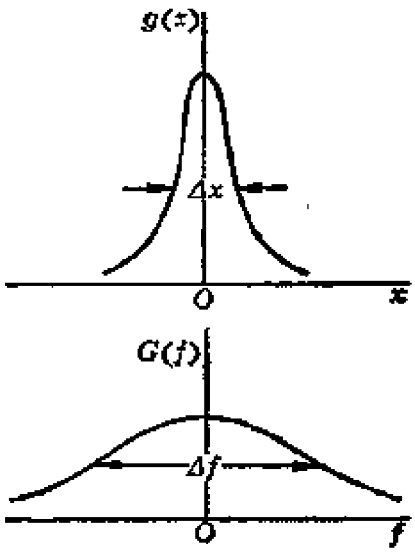


图 5-2　非周期性函数及其连续谱的有效宽度

最后给出二维的傅里叶变换及其逆变换的写法：

$$\begin{cases} g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(f_x,f_y)\exp[i2\pi(f_xx+f_yy)]df_xdf_ydxdy. & (5.10) \\ G(f_x,f_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\exp[-i2\pi(f_xx+f_yy)]dxdy. & (5.11) \end{cases}$$

简写为

$$\begin{cases} G(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{g(x,y)\}, \\ g(x,y)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f_x,f_y)\}, \end{cases} \tag{5.12}$$

或

$$g(x,y)\rightleftharpoons G(f_x,f_y).$$

5.2 几种典型函数的频谱

下面把几种典型函数 $g(x)$ 及其频谱 $G(f)$ 的表达式、图形、有效宽度 $\Delta x, \Delta f$ 列成表Ⅴ-3①。

现在对表Ⅴ-3中所列的函数作些解释。

方垒函数(1)相当于平行光正入射于单缝上时造成的复振幅分布，其频谱是单缝衍射因子。函数(1′)相当于平行光斜入射于单缝，它的频谱与正入射相比，整个曲线沿 f 坐标平移。这一特点不限于单缝，它具有普遍意义。

准单色函数(2)相当于一段有限长波列在某一时刻的瞬时空间分布。这里波长 $\lambda_0 = 1/f_0$ 应远小于波列长度 L。如果将此函数看作定态波场的复振幅，则不要忘记，按照我们第二章 1.3 节里的约定，波的瞬时值的复数表示还应乘以 $e^{-i\omega t}$，即

$$A\cos 2\pi f_0 x e^{-i\omega t} = \frac{A}{2}\{\exp[-i(\omega t - 2\pi f_0 x)] + \exp[-i(\omega t + 2\pi f_0 x)]\},$$

上式两项分别代表向正、反两个方向传播的波。频谱函数在 $\pm f_0$ 处的两个尖峰恰好反映了这两列波。总之，定态波场中的正负空间频率成分代表沿不同方向传播的波。但是，若准单色函数所代表的是与时间无关的纯空间信息，或与空间无关的纯时间讯号，则正负两支频谱无独立的物理意义，我们应把它们合起来看作一支。频谱的有限宽度 $\Delta f = 1/L$ 表明，有限长波列必然是非单色的，其谱线宽度与波列长度成反比。如果用波长 $\lambda = 1/f$ 来表示谱线宽度，则 $\Delta f = \Delta\lambda/\lambda^2$(只管数值，不管正负号)，故有

$$L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \tag{5.13}$$

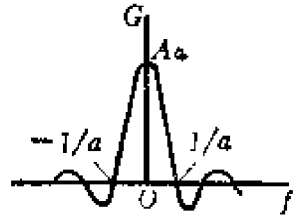
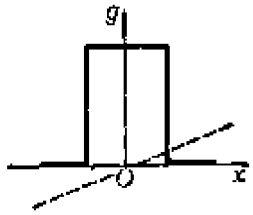
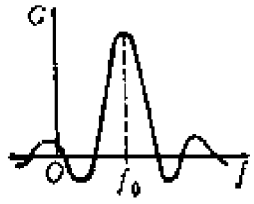
这正是第三章中的式(4.14)。

正向准单色函数(3)相当于正弦光栅上的复振幅分布，它是方垒函数(1)与准单色函数(2)之和，故有 $f = 0, \pm f_0$ 三支频谱，这正好与正弦光栅的三个衍射斑对应。在§1，§2中分析这些衍射斑的半角宽度时，还需借助第四章的结果。现在我们看到，有了非周期性函数的傅里叶变换，就可自动给出因光栅有限尺寸引起的谱线宽度。

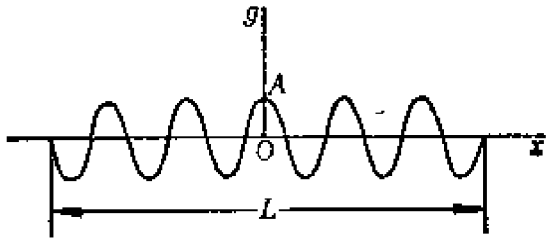
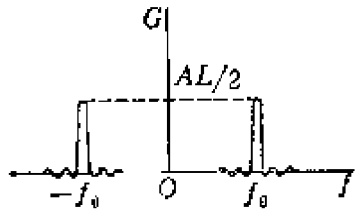
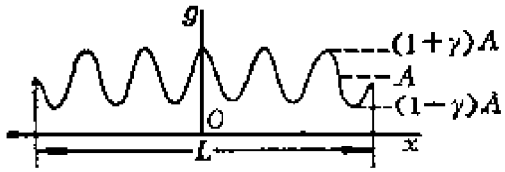
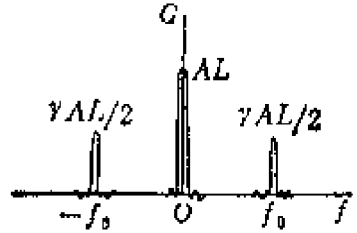
---

① 这里有效宽度 Δx 和 Δf 没有一个确切的定义，其确切的定义参看下面例题。

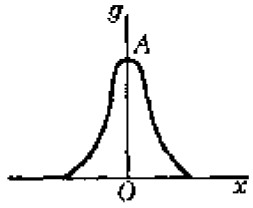
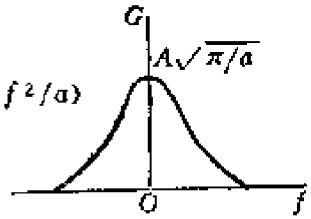
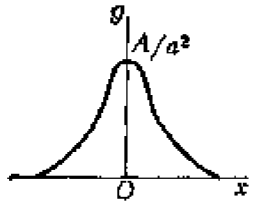
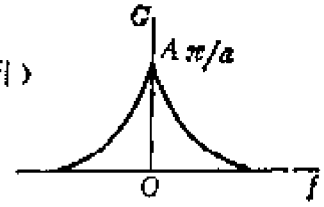
表 V-3　典型函数的傅里叶变换*

原　　函　　数	频　　谱	有 效 宽 度
（1）方垒函数 $g(x)=\begin{cases}A, & \text{当}\lvert x\rvert<a/2\\ 0, & \text{当}\lvert x\rvert>a/2\end{cases}$ 	$G(f)=Aa\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\alpha=\pi f a$ 	$\Delta x=a$ $\Delta f=1/a$ $\Delta f\,\Delta x=1$
(1′) $g(x)=\begin{cases}Ae^{i2\pi f_0 x}, & \text{当}\lvert x\rvert<a/2\\ 0, & \text{当}\lvert x\rvert>a/2\end{cases}$ 	$G(f)=Aa\,\frac{\sin\alpha'}{\alpha'}$ $\alpha'=\pi(f-f_0)a$ 	

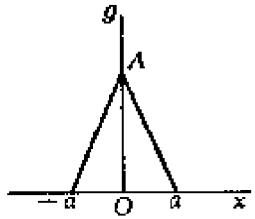
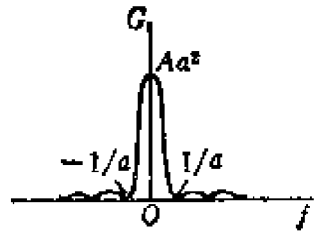
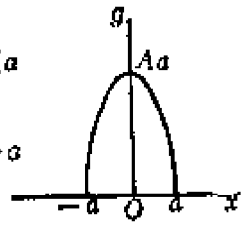
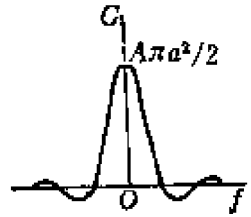
续表

原　　函　　数	频　　谱	有 效 宽 度
（2）准单色函数 $g(x)=\begin{cases}A\cos 2\pi f_0 x, & \text{当}\lvert x\rvert<L/2\\ 0, & \text{当}\lvert x\rvert>L/2\end{cases}$ 	$G(f)=\frac{1}{2}AL\left(\frac{\sin\alpha_+}{\alpha_+}+\frac{\sin\alpha_-}{\alpha_-}\right)$ $\alpha_\pm=\pi(f\mp f_0)L$ 	$\Delta x=L$ $\Delta f=1/L$ $\Delta f\,\Delta x=1$
（3）正向准单色函数 $g(x)=\begin{cases}A(1+\gamma\cos 2\pi f_0 x), & \text{当}\lvert x\rvert<L/2\\ 0, & \text{当}\lvert x\rvert>L/2\end{cases}$ 	$G(f)=AL\left[\frac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sin\alpha_+}{\alpha_+}+\frac{\sin\alpha_-}{\alpha_-}\right)\right]$ $\alpha_0=\pi fL,\alpha_\pm=\pi(f\mp f_0)L$ 	$\Delta x=L$ $\Delta f=1/L$ $\Delta f\,\Delta x=1$

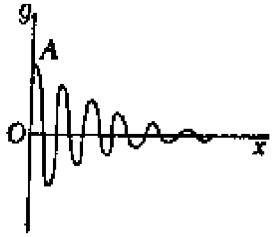
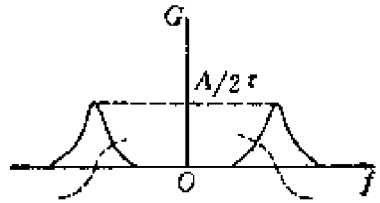
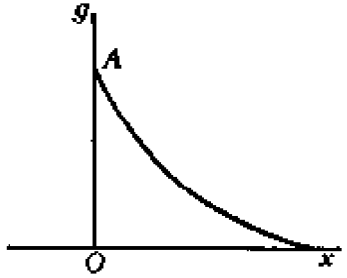
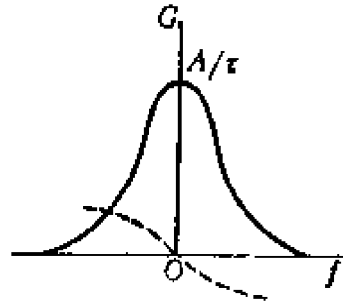
续表

原　　函　　数	频　　谱	有 效 宽 度
（4）高斯函数 $g(x)=A\ \exp(-ax^2)$ 	$G(f)=A\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\pi^2 f^2/a)$ 	$\Delta x=2/\sqrt{a}$ $\Delta f=2\sqrt{a}/\pi$ $\Delta f\ \Delta x=4/\pi$
（5）洛仑兹函数 $g(x)=\frac{A}{a^2+x^2}$ 	$G(f)=\frac{A\pi}{a}\exp(-2\pi a\lvert f\rvert)$ 	$\Delta x=2a$ $\Delta f=1/a\pi$ $\Delta f\ \Delta x=2/\pi$

续表

原　　函　　数	频　　谱	有 效 宽 度
（6）角形函数 $g(x)=\begin{cases}A\left(1-\dfrac{\lvert x\rvert}{a}\right), & \text{当 } \lvert x\rvert<a\\ 0, & \text{当 } \lvert x\rvert>a\end{cases}$ 	$G(f_x)=Aa^2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ $\alpha=\pi fa$ 	$\Delta x=a$ $\Delta f=1/a$ $\Delta f\ \Delta x=1$
（7）椭圆形函数 $g(x)=\begin{cases}A\sqrt{a^2-x^2}, & \text{当 } \lvert x\rvert<a\\ 0, & \text{当 } \lvert x\rvert>a\end{cases}$ 	$G(f)=A\pi a^2\dfrac{J_1(\alpha)}{\alpha}$ $\alpha=2\pi fa$ J_1为一阶贝塞耳函数 	$\Delta x=2a$, $\Delta f=0.6/a$ $\Delta f\ \Delta x=1.2$

续表

原　　函　　数	频　　谱	有　效　宽　度
（8）阻尼振荡函数 $g(x)=\begin{cases}A e^{-\tau x}\cos 2\pi f_0 x, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 	$G(f)=\frac{A}{2}\left[\frac{1}{\tau+i2\pi(f-f_0)}+\frac{1}{\tau+i2\pi(f+f_0)}\right]$ 	$\Delta x=1/\tau$ $\Delta f=\tau/2\pi$ $\Delta f\,\Delta x=1/2\pi$
（9）过阻尼函数 $g(x)=\begin{cases}A e^{-\tau x}, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 	$G(f)=\frac{A}{\tau+i2\pi f}$ 	$\Delta x=1/\tau$ $\Delta f=\tau/2\pi$ $\Delta f\,\Delta x=1/2\pi$

* 虚线代表辐角，实线代表模量。

高斯函数(4)的频谱仍是高斯型的，这是唯一一个经傅里叶变换后形式不变的独特函数。它与洛仑兹函数(5)都是重要的光谱线型，因温度造成的谱线展宽是高斯型的，阻尼谐振子发射的谱线是洛仑兹型的。

阻尼振荡函数(8)的频谱在 $f=\pm f_0$ 处各有一个尖峰，而过阻尼函数(9)的频谱只在 $f=0$ 处有一个尖峰。这些峰的线型都是洛仑兹型的。

以上九种函数大体上可以分为两类：前五种算一类，后四种算另一类。前一类的共同特点是原函数在有限远的地方被"切断"，它们的频谱都是衰减振荡型的。后一类原函数在远处连续衰减到0，没有硬性的棱角，它们谱线的两侧都是单调下降的。前一类谱线的高频部分所以会出现多次起伏，其作用正是为了反复矫正原函数中的棱角。因而当一部分高频信息遭到损失时，各傅里叶分量再次合成后，原函数中的棱角将被"磨掉"一些。

5.3 傅里叶变换的性质

设有两个原函数 $g(x)$ 和 $h(x)$，它们的频谱分别为 $G(f)$ 和 $H(f)$，即

$$g(x)\rightleftharpoons G(f),$$

$$h(x)\rightleftharpoons H(f).$$

(1) 线性定理(即傅里叶变换是线性变换)

$$ag(x)\pm bh(x)\rightleftharpoons aG(f)+bH(f), \tag{5.14}$$

式中 a,b 是常数，它们可以是实数或复数。

(2) 守恒定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|G|^2df. \tag{5.15}$$

现在对此定理的物理意义作些说明。

如果原函数是时间讯号，例如电流 $i(t)$，则 $i^2(t)$ 具有瞬时焦耳功率的意义，i^2dt 具有能量 dW 的意义，即

$$W\propto\int i^2dt,$$

守恒定理告诉我们，能量也可以按频谱来计算：

$$W\propto\int|G|^2df,$$

这里 G 是 $i(t)$ 的频谱：$i(t)\rightleftharpoons G(f)$。上式表明，$|G|^2$ 相当于单位频率

间隔内的能量，亦即能量的谱密度。$|G|^2$ 的曲线称为能谱(图)。

如果原函数是空间信息，例如定态波前上的复振幅分布，则 $|\widetilde{U}|^2$ 代表光强(即光功率密度)，二维的守恒定理告诉我们，光强也可以按频谱来计算：

$$I \propto \iint |\widetilde{U}|^2 dxdy = \iint |G|^2 df_x df_y,$$

这里 $\widetilde{U}(x,y) \rightleftharpoons G(f_x, f_y)$。$|G|^2$ 相当于单位频率范围内的光强，亦即光功率的谱密度。

不过，在不相干系统中原函数常是光强分布函数，此时 I^2 和它的谱函数平方 $|G|^2$ 没有直观的物理意义，守恒定律成为单纯的数学形式。

(3) 尺度缩放定理

$$g(ax) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} G(f/a). \tag{5.16}$$

即当原函数曲线在横方向上的尺度压缩若干倍时，频谱曲线在横方向上扩大同一倍数，且在纵方向上压低同一倍数。

(4) 相移定理

$$g(x \pm x_0) \rightleftharpoons \exp(\pm i2\pi f x_0) G(f), \tag{5.17}$$

反之，

$$\exp(\pm i2\pi f_0 x) g(x) \rightleftharpoons G(f \mp f_0), \tag{5.18}$$

即当原函数平移时，频谱产生线性相移；反之，当原函数有线性相移时，频谱产生平移。表Ⅴ-3中的(1′)就是式(5.18)的一个例子。

(5) 共轭关系

$$g^*(x) \rightleftharpoons G^*(-f), \tag{5.19}$$

$$g^*(-x) \rightleftharpoons G^*(f). \tag{5.20}$$

(6) 微积分运算

$$\frac{dg(x)}{dx} \rightleftharpoons i2\pi f G(f), \tag{5.21}$$

$$\int g(x)dx \rightleftharpoons \frac{1}{i2\pi f} G(f). \tag{5.22}$$

由此可见，运算操作 $d/dx \rightleftharpoons i2\pi f$，$\int dx \rightleftharpoons 1/i2\pi f$。

（7）卷积定理

函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的卷积定义为

$$g(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x')h(x-x')dx'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-x')h(x')dx'=h(x)*g(x).$$

(5.23)

可见卷积运算服从交换律．可以证明，卷积的频谱等于频谱的乘积，即

$$g(x)*h(x)\rightleftharpoons G(f)H(f),\qquad(5.24)$$

反之，乘积的频谱等于频谱的卷积，

$$g(x)h(x)\rightleftharpoons G(f)*H(f).\qquad(5.25)$$

以后会看到，我们常常需要计算两个函数的卷积．这时先求每个函数的频谱，并相乘，然后再作傅里叶逆变换即可．这是求卷积的一种较方便的方法．

（8）相关定理

函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的相关函数定义为

$$g(x)\bigstar h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x')h(x+x')dx'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x'-x)h(x')dx'.\qquad(5.26)$$

$g(x)$的自相关函数定义为

$$g(x)\bigstar g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x')g(x+x')dx'$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x'-x)g(x')dx',\qquad(5.27)$$

可见相关运算不服从交换律．可以证明，相关函数的频谱与原函数的频谱有如下关系：

$$g(x)\bigstar h(x)\rightleftharpoons G^*(f)H(f),\qquad(5.28)$$
$$g(x)\bigstar g(x)\rightleftharpoons|G(f)|^2.\qquad(5.29)$$

如何把以上各定义和定理推广到二维情形是显而易见的，这里从略．

例题1　由有限个单元排列成的周期函数称为栅函数(图5-3(a))．求栅函数的振幅频谱．

解　设单元函数为$g(x)$，由N个这样的函数以空间周期 d 排列而成的栅函数可写成

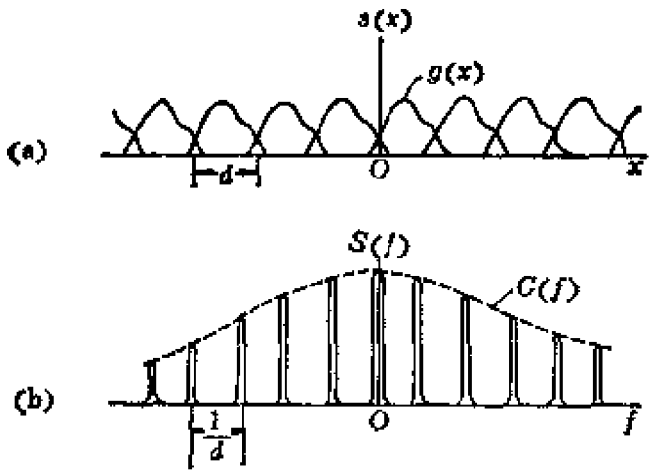


图 5-3　例题 1 ——栅函数及其频谱

$$s(x)=\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} g(x+nd). \qquad ①$$

设

$$g(x)\rightleftharpoons G(f),$$

据相移定理

$$g(x+nd)\rightleftharpoons e^{i2\pi f nd}\,G(f),$$

所以栅函数的频谱为

$$s(x)\rightleftharpoons S(f)=G(f)\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{i2\pi f nd}$$

$$=G(f)\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}, \qquad (5.30)$$

式中 $\beta=\pi fd$，前后两因子恰好相当于光栅中的单元衍射因子和 N 元干涉因子．$S(f)$的曲线参见图5-3(b)．

为了让读者对相关和卷积有个较形象化的理解，我们安排下面一组例题．

例题2　设 $g(x)$为单位方垒函数(图5-4(a))

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|<a/2,\\ 0, & \text{当 } |x|>a/2.\end{cases}$$

求自相关函数 $g(x)\bigstar g(x)$．

① 这里设N为奇数．对于偶数N，下面的推导只需稍作修改．

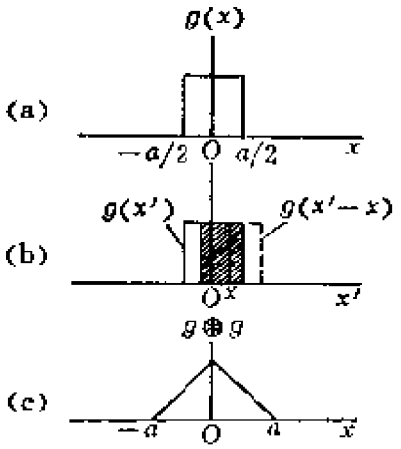


图 5-4　例题2——方垒函数的自相关

解　对于实函数，$g^*=g$。$g^*(x'-x)=g(x'-x)$代表$g(x')$的函数曲线平移距离x。自相关函数

$$g(x)\bigstar g(x)=\int g(x'-x)g(x')dx'$$

在x处的数值是$g(x')$和$g(x'-x)$两曲线重迭区的宽度(见图5-4(b))。当$|x|>a$时，它等于0，当$|x|<a$时，它等于$a-|x|$，故$g(x)\bigstar g(x)$为图5-4(c)所示的角形函数，尖峰在$x=0$，即两曲线完全重合处。

例题3　$g(x)$的定义同上题，$h(x)$的定义为

$$h(x)=\sum_{i=1}^{N}g(x-x_i),$$

其中x_i是若干个在x轴上离散分布的固定点(见图5-5(b))，求相关函数$g(x)\bigstar h(x)$。

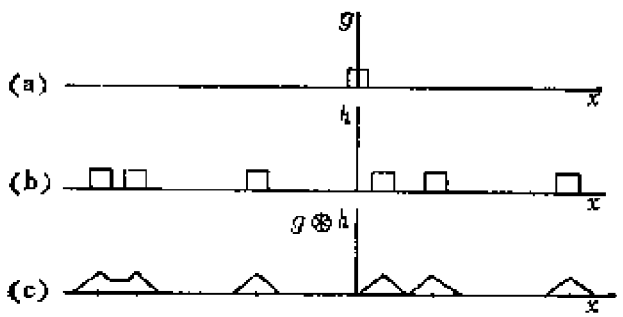


图 5-5　例题3——相关函数的"搜索"作用

解　g,h都是实函数，

$$g(x)\bigstar h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x'-x)h(x')dx'$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x'-x)g(x'-x_i)dx'.$$

作变量代换：$x''=x'-x_i$，则

$$g(x)\bigstar h(x)=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x''+x_i-x)g(x'')dx''$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} g[x'' - (x - x_i)] g(x'') dx''$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c(x - x_i),$$

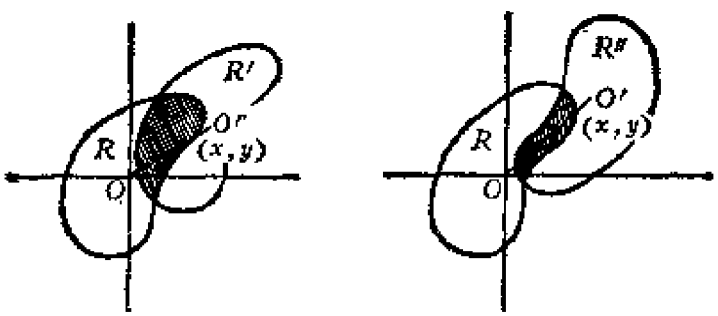
其中$c(x) = g(x) \bigstar g(x)$，即上题中得到的那个角形函数。上述相关函数的图形如图5-5(c)所示，凡原来在$h(x)$中有一个方垒的地方，$g(x) \bigstar h(x)$中就有一个尖峰。尖峰位置正是各离散点的中心。

例题2表明，粗略地说，相关函数是两函数重迭程度的描述。在完全重合处，相关有一极大值。一般说来，由于相同的函数曲线才能完全重迭，故它们的自相关往往比不同函数间的互相关强得多。例题3表明，当$h(x)$代表一些相同信息$g(x)$的离散排列时，相关函数$g(x) \bigstar h(x)$的意义类似于用$g(x)$在$h(x)$中去搜索。凡遇到与自身相同的信息之处记录下来一个信号峰。

以上图像可推广到二维的开孔函数

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当}(x,y)\text{在}R\text{内}, \\ 0, & \text{当}(x,y)\text{在}R\text{外}. \end{cases}$$

这里R是x-y平面内的一个区域(窗口)，如图5-6(a)，将R由原点平移至(x,y)点，把平移后的区域叫R'，则自相关$g(x,y) \bigstar g(x,y)$等于R和R'重迭的面积。



(a) 自相关　　(b) 卷积

图 5-6　二维开孔函数的自相关和卷积

开孔函数与自身卷积$g(x,y) * g(x,y)$的意义与自相关类似，差别仅在于平移之外还要反转(即在平面内绕自身中心转180°)，然后再计算重迭面积(见图5-6(b))。为什么是这样？请读者自己考虑。

以上各题中的原函数都是黑白型的(取值非0即1)，其它类型函数的卷积或相关的情况要更复杂一些，这里不讨论了。

5.4 δ函数

δ函数是狄拉克在量子力学中首先引用的一种广义函数，其定义为①

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases} \tag{5.31}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1. \tag{5.32}$$

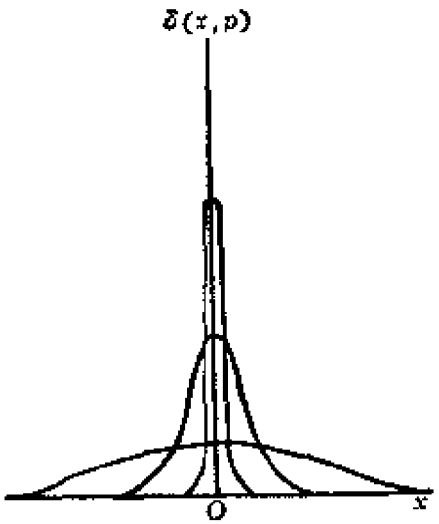


图5-7 δ函数

同时具备上述性质的"函数"，称为δ函数。可以看出δ函数不是普通意义下的函数，而是一系列单脉冲型函数的极限。如图5-7，设有一单脉冲函数$\delta(x,p)$，这里p是个参量。随着p值的无限增大，或趋于0，$\delta(x,p)$在$x=0$处的峰值无限增大，但宽度无限缩小，而保持曲线下的面积为1：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,p)dx=1$（归一化条件）。对于任何具有上述性质的单脉冲函数$\delta(x,p)$，都可认为，δ函数是它们在$p\to\infty$或0时的极限

$$\delta(x)=\lim_{p\to\infty\text{或}0}\delta(x,p). \tag{5.33}$$

函数$\delta(x,p)$的选取可以有多种多样，下面举些典型的例子。

(1) 单缝衍射因子

$$\delta(x,p)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin px}{x},$$

$$\delta(0,p)=\frac{p}{\pi},\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin px}{x}dx=1.$$

① 今后更常遇到的δ函数形式为$\delta(x-x_0)$，这只不过是把式(5.31)中的坐标原点移至$x=x_0$处。

当 $p\to\infty$ 时它满足上述所有条件，故可以认为

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{\sin px}{x}. \tag{5.34}$$

值得注意的是，上面的 $\delta(x,p)$ 可以写成积分形式

$$\delta(x,p)=\int_{-p/2\pi}^{p/2\pi}e^{\pm i2\pi fx}df,$$

因此 δ 函数可写为

$$\delta(x)=\lim_{p\to\infty}\delta(x,p)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\pm i2\pi fx}df, \tag{5.35}$$

即 $\delta(x)$ 是常数频谱 $G(f)=1$ 的傅里叶逆变换式。反之，常数 $g(x)=1$ 的傅里叶变换式为 $\delta(f)$，即

$$1\rightleftharpoons\delta(f),\qquad \delta(x)\rightleftharpoons 1. \tag{5.36}$$

（2）方垒 $\delta(x,p)=\begin{cases}p, & \text{当 } |x|<1/2p,\\ 0, & \text{当 } |x|>1/2p.\end{cases}$

此函数显然满足上述条件，故而 δ 函数也可看作是它在 $p\to\infty$ 时的极限。

（3）高斯函数

$$\delta(x,p)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-px^2),$$

$$\delta(0,p)=\sqrt{p/\pi},\qquad \sqrt{p/\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-px^2)dx=1.$$

故可认为

$$\delta(x)=\lim_{p\to\infty}\sqrt{\frac{p}{\pi}}\exp(-px^2). \tag{5.37}$$

（4）洛仑兹函数

$$\delta(x,p)=\frac{p}{\pi}\frac{1}{p^2+x^2},$$

$$\delta(0,p)=\frac{1}{\pi p},\qquad \frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{p^2+x^2}=1.$$

故可认为

$$\delta(x)=\lim_{p\to 0}\frac{p}{\pi}\frac{1}{p^2+x^2}. \tag{5.38}$$

（5）尖脉冲

$$\delta(x,p)=\frac{p}{2}e^{-p|x|},$$

$$\delta(0,p)=\frac{p}{2};\qquad \frac{p}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-p|x|}dx=1.$$

故可认为

$$\delta(x)=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{2}e^{-p|x|}. \tag{5.39}$$

我们知道，物理学中许多领域的基本原理都建筑在点模型的基础上，如力学中的质点，电学中的点电荷，光学中的点光源、物点及像点等等皆是.从上面的讨论可以看出，δ函数正是这类点模型的数学写照.在§1－§3中研究过的分立谱，也可用δ函数来描述．故有了δ函数的概念，使傅里叶变换的应用范围扩大，它把这些带有"奇异性"的物理模型也包括进去.

5.5 δ函数的性质

（1）δ函数是偶函数，即

$$\delta(x)=\delta(-x). \tag{5.40}$$

（2）δ函数的选择性，即对于任意连续函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0),$$

更普遍些，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0). \tag{5.41}$$

（3）与δ函数的卷积

$$f(x)*\delta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')\delta(x-x')dx'=f(x). \tag{5.42}$$

故任意函数$f(x)$可看成是它自身与δ函数的卷积．同理可以导出

$$f(x)*\delta(x-x_0)=f(x-x_0), \tag{5.43}$$

这相当于δ函数具有"扫描性能".

（4）尺度的缩放

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{5.44}$$

5.6 δ函数的傅里叶变换

δ函数的傅里叶频谱是常数

$$\delta(x) \rightleftharpoons 1 \tag{5.45}$$

这一点已在式(5.35)中反映出来。表Ⅴ-4中给出一些与δ函数有关的傅里叶变换公式和相应的图解。

例题4 求无限长正弦光栅透过率函数的频谱。

解

$$t(x) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f_0 x$$

$$\rightleftharpoons t_0 \delta(f) + \frac{t_1}{2}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)].$$

这是没有半角宽度的严格分立谱。

例题5 证明例题1中栅函数的谱在 $N \to \infty$ 时的极限为

$$S(f) = G(f)\frac{1}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{d}\right), \tag{①}$$

式中 $G(f)$ 是单元函数 $g(x)$ 的傅里叶变换式

$$g(x) \rightleftharpoons G(f).$$

证 在 $\beta = n\pi$ 处 $\sin N\beta/\sin\beta = N$，这里有个半宽度 $\Delta\beta = \pi/N$ 的尖峰。计算表明，每个尖峰下的面积为 π：

$$\int_{n\pi-\Delta\beta}^{n\pi+\Delta\beta}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \pi,$$

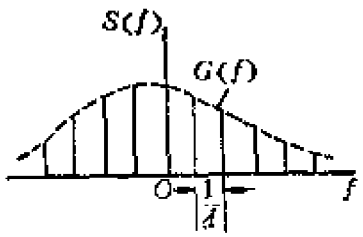


图 5-8 例题5——无限长光栅的严格分立谱

故当 $N \to \infty$ 时，这里出现一个δ函数。所以

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\beta - n\pi),$$

因 $\beta = kd/2$，利用δ函数的尺度缩放公式(5.44)，得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{d}\,\delta\left(f - \frac{n}{d}\right).$$

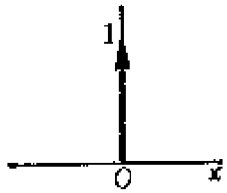
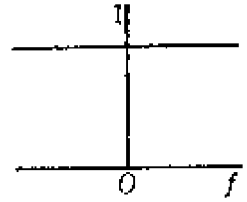
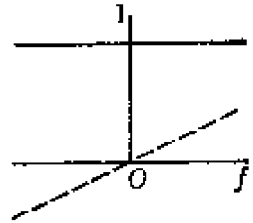
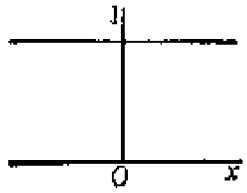
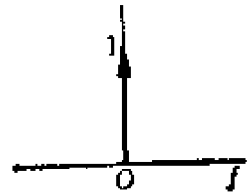
从而式(5.30)化为

$$s(x) \rightleftharpoons S(f) = G(f)\frac{1}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{n}{d}\right).$$

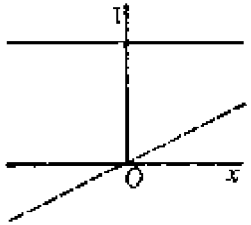
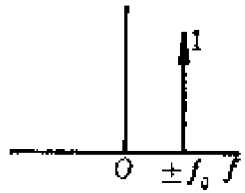
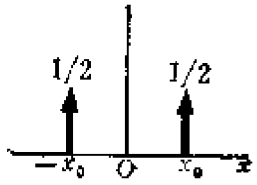
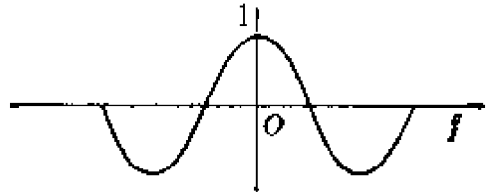
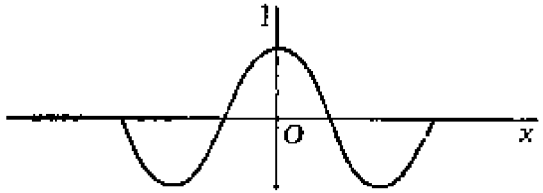
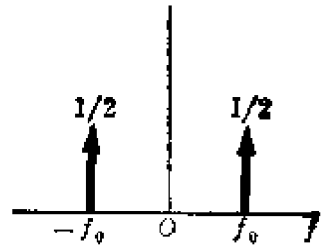
---

① 这就是表Ⅴ-4(7)所给的公式。

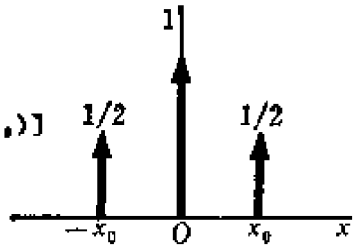
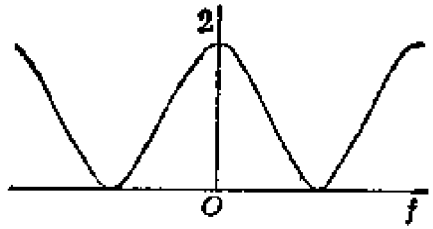
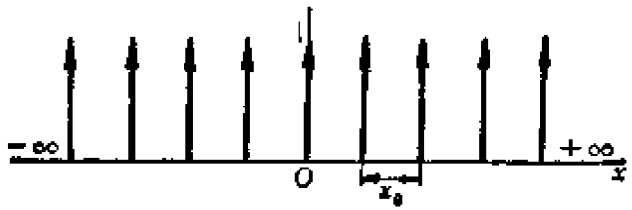
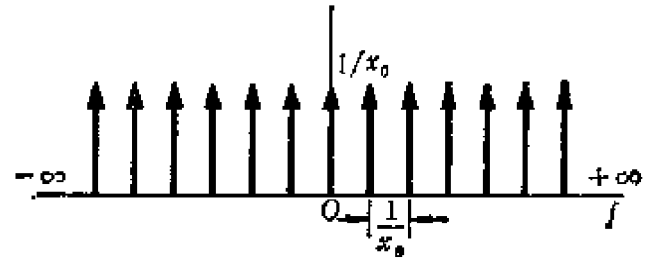
表 V-4　δ 函数的傅里叶变换*

	原　函　数		频　谱	
(1)	$\delta(x)$		1	
(1′)	$\delta(x \pm x_0)$		$\exp(\pm i2\pi f x_0)$	
(2)	1		$\delta(f)$	

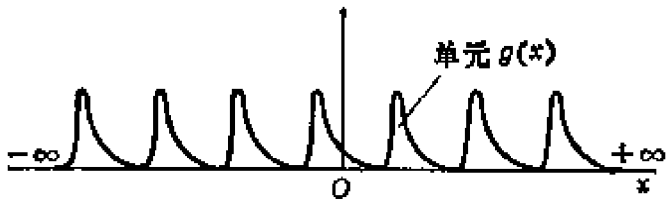
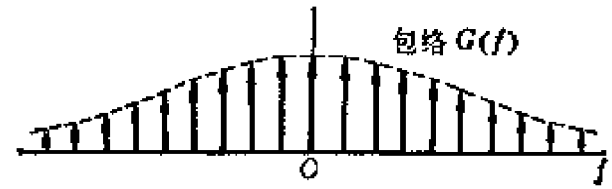
续表

原　　函　　数	频　　谱
(2′) $\exp(\pm i2\pi f_0 x)$ 	$\delta(f \mp f_0)$ 
(3) $\frac{1}{2}[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)]$ 	$\cos 2\pi x_0 f$ 
(4) $\cos 2\pi f_0 x$ 	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ 

续表

原　　函　　数	频　　谱
(5) $\delta(x)+\frac{1}{2}[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)]$ 	$1+\cos 2\pi x_0 f$ 
(6) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0)$ 	$\frac{1}{x_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{x_0}\right)$ 

续表

原　　函　　数	频　　谱
(7) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x-nx_0)$  	$\frac{1}{x_0} G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{x_0}\right)$ 

* 用竖直箭头代表 δ 函数，高度代表其积分值。

即$N\to\infty$时准分立谱过渡到严格的分立谱．这结果和用傅里叶级数展开是等价的．

例题6 证明傅里叶变换中原函数的有效宽度与频谱的有效宽度成反比．

证 原函数$g(x)$和它的频谱函数$G(f)$的有效宽度Δx和Δf可分别定义为

$$\Delta x=\frac{1}{g(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx,$$

$$\Delta f=\frac{1}{G(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)df,$$

因

$$G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}dx,\qquad g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)e^{i2\pi fx}df,$$

故

$$G(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx,\qquad g(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)df,$$

于是

$$\Delta x=G(0)/g(0),\qquad \Delta f=g(0)/G(0),$$

故

$$\Delta f\,\Delta x=1.$$

即Δx与Δf成反比．这正是5.1节中已指出的傅里叶变换的普遍特性之一．

习　题

1．证明(1) 当$g(x)$为实函数时，

$$\widetilde{G}(f)=\widetilde{G}^{*}(-f),$$

$$G^{*}(f)=\widetilde{G}(-f).$$

(2) 当$\widetilde{g}(x)$为偶函数时，

$$\widetilde{G}(f)=2\int_{0}^{\infty}\widetilde{g}(x)\cos(2\pi fx)dx,$$

$$\widetilde{g}(x)=2\int_{0}^{\infty}\widetilde{G}(f)\cos(2\pi fx)df.$$

2．尽你的可能计算表Ⅴ-3中给出的各种函数的频谱函数．

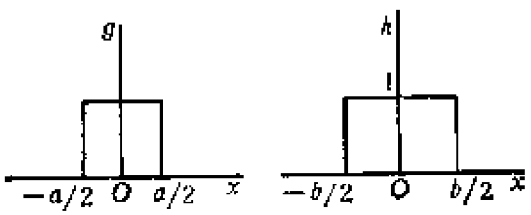
3．证明式(5.21)，(5.22)，以及

$$-i2\pi x g(x) \rightleftharpoons \frac{dG(f)}{df},$$

$$\frac{g(x)}{-i2\pi x} \rightleftharpoons \int G(f)\,df.$$

4. 证明$g \bigstar g = g * g^*$.

5. 如图，$g(x)$和$h(x)$是宽度分别为a和b的单位方垒函数，求它们的卷积。



习题5图

6. 证明两高斯函数

$$g(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\exp(-ax^2), \qquad h(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\exp(-bx^2)$$

的卷积仍为高斯函数

$$g(x) * h(x) = \sqrt{\frac{c}{\pi}}\exp(-cx^2),$$

其中$c = ab/(a+b)$.

7. 证明两洛仑兹函数

$$g(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}, \qquad h(x) = \frac{b}{\pi}\frac{1}{b^2+x^2}$$

的卷积仍为洛仑兹函数

$$g(x) * h(x) = \frac{c}{\pi}\frac{1}{c^2+x^2},$$

其中$c = a+b$.

8. 试推导卷积和相关函数的傅里叶变换公式(5.24)和(5.26)。

9. 一质量为m的质点位于空间(x_0, y_0, z_0)处，试用δ函数写出空间里的密度分布函数$\rho(x,y,z)$。

10. 点电荷q位于坐标原点，写出静电场所满足的泊松方程。

11. 导出5.5节罗列的δ函数性质(1)—(5)。

12. 求$\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)\}$及其模的平方$\mathscr{F}\mathscr{F}^*$.

13. 求$\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)+\delta(x-2x_0)+\delta(x-3x_0)\}$及$\mathscr{F}\mathscr{F}^*$.

14. 大量点源无规地分布在x轴上，其振幅分布可写为

$$\widetilde{U}(x)=\sum_{n=1}^{N}\delta(x-x_n),$$

(1) 求$\mathscr{F}\{\widetilde{U}(x)\}$,

(2) 试论证 $\mathscr{F}\mathscr{F}^*=N$.

*§6 空间滤波和信息处理

6.1 用夫琅和费衍射实现屏函数的傅里叶变换

在本章2.7节中已指出，夫琅和费衍射装置就是傅里叶频谱分析器.不过在那里只讨论了空间周期函数及其分立谱，而且没有强调位相频谱.在§4和§5两节我们分别从物理上和数学上讨论了普遍情况下的夫琅和费衍射和傅里叶变换，现将两者进行比较.夫琅和费衍射积分的标准形式为

$$\widetilde{U}(\theta_1,\theta_2)=CA_1\exp[i\varphi(\theta_1,\theta_2)]\times\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}(x,y)\exp[-i(k\sin\theta_1 x+k\sin\theta_2 y)]dxdy,$$

或

$$\widetilde{U}(x',y')=CA_1\exp[i\varphi(x',y')]\times\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}(x,y)\exp\left[\frac{-ik}{z}(xx'+yy')\right]dxdy.$$

而屏函数的傅里叶变换式为

$$T(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}=\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}(x,y)\exp[-i2\pi(f_x x+f_y y)]dxdy,$$

对比一下，可以看出，两者积分的形式是一样的，它们的被积函数都是屏函数与线性相因子的乘积，如果让它们相因子指数上的线性系数相等，即

$$2\pi(f_x,f_y)=(k\sin\theta_1,k\sin\theta_2) \quad 或 \quad 2\pi(f_x,f_y)=\frac{k}{z}(x',y'). \tag{6.1}$$

则有

$$\widetilde{U}(\theta_1,\theta_2)=CA_1\exp[i\varphi(\theta_1,\theta_2)]\mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}, \tag{6.2}$$

或

$$\widetilde{U}(x',y')=CA_1\exp[i\varphi(x',y')]\mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}. \tag{6.3}$$

式(6.2)和(6.3)中的常系数CA_1对于衍射场的相对分布是无关紧要的，今后除非必要，我们总将它略去不写．此外，积分前面还有一个与场点位置有关的相因子$\exp[i\varphi(\theta_1,\theta_2)]$或$\exp[i\varphi(x',y')]$，这并非在任何时候都是无关紧要的．它的存在表明，夫琅和费衍射场中的复振幅分布尚不完全是屏函数的傅里叶频谱函数．对此，应分以下两种情况区别对待．

如果我们在一次衍射后就直接接收夫琅和费衍射场的强度分布，则上述相因子不起作用，即夫琅和费衍射场的强度分布等于屏函数的功率谱．

$$\begin{aligned} I(x',y')&=\widetilde{U}(x',y')\widetilde{U}^*(x',y')\\ &=\mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}\mathscr{F}^*\{\widetilde{t}(x,y)\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

换句话说，对于一次衍射问题，例如不相干成像问题，对衍射屏的位置勿须严格限制．

如果我们的问题涉及二次衍射(相干系统的两步成像过程就是如此)，则傅氏面上的位相分布在第二次相干迭加时是要起作用的．在普遍的情况下当此相因子与场点坐标(x',y')有关时，问题就比较复杂．为了避免这个困难，应该设计一个等光程的光路，使从衍射屏中心到达不同场点的衍射线等光程：

$$\varphi(x',y')=kL_0(x',y')$$
$$=常数.$$

如图6-1，把衍射屏放在透镜的前焦面$\mathscr{F}$上即可满足上述要求．这时式(6.3)积分前的常数相因子也可略去不写了，后焦面上的复振幅分布准确地成为屏函数的傅里叶频谱：

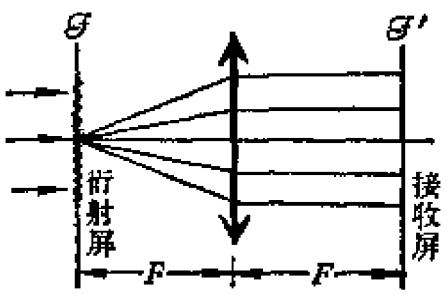


图 6-1　等光程的夫琅和费衍射装置

$$\widetilde{U}(x',y')=\mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\},\tag{6.5}$$

这时傅里叶变换式中的变量 f_x,f_y 为①

$$(f_x,f_y)=\frac{k}{2\pi F}(x',y')=\frac{1}{\lambda F}(x',y'),\tag{6.6}$$

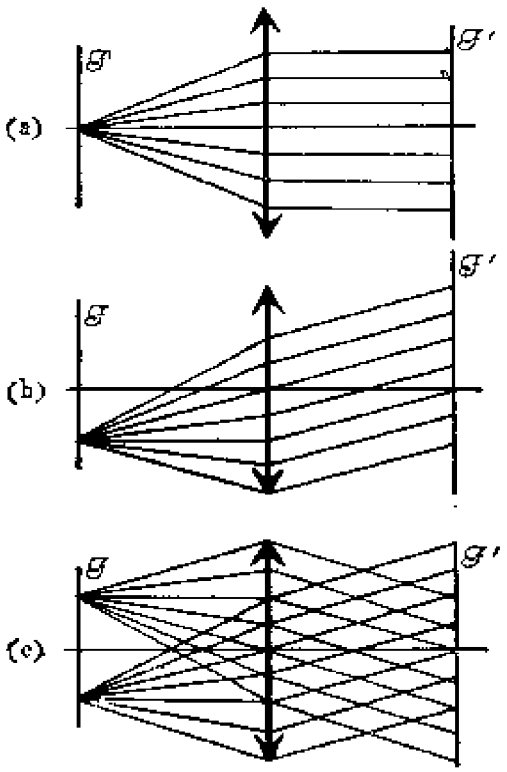


图 6-2　例题 1 ——几种点源配置的夫琅和费衍射

其中 F 为透镜的焦距，λ 为照明光波长。

总之，把衍射屏放在透镜的前焦面上，在后焦面上的夫琅和费衍射场就准确地实现屏函数的傅里叶变换，其中空间频率与场点坐标满足替换关系式(6.6)。这一点，无论从数学上看还是从物理上看，都是一件有重要意义的事情。从数学上看，抽象的数学运算变成了实实在在的物理过程，由此开拓出来一个新的技术领域——相干光学计算技术。从物理上看，为分析夫琅和费衍射找到了一种有力的数学手段，有关傅里叶变换的许多数学定理就可以直接移植过来作为分析夫琅和费衍射场以及光学信息处理的理论指导。

例题1　求下列各情形里的 $\widetilde{U}(x',y')$ 和 $I(x',y')$。

(1) $\widetilde{t}(x,y)=\delta(x)\delta(y)$;

(2) $\widetilde{t}(x,y)=\delta(x+x_0)\delta(y+y_0)$;

(3) $\widetilde{t}(x,y)=\delta\left(x+\frac{d}{2}\right)\delta(y)+\delta\left(x-\frac{d}{2}\right)\delta(y)$.

它们各代表什么意思?

解　(1)
$$\widetilde{U}(x',y')=\mathscr{F}\{\delta(x)\delta(y)\}\propto 1,$$
$$I(x',y')\propto 1.$$

此题表示置于前焦点的点源产生正向平面波，均匀照明后焦面(图6-2(a))。

① 见式(6.1)，其中 $z=F$.

(2) $$\widetilde{U}(x',y')=\mathscr{F}\{\delta(x+x_0)\delta(y+y_0)\}$$
$$\propto \exp[i2\pi(f_x x_0+f_y y_0)],$$
$$I(x',y')\propto 1,$$

式中$(f_x,f_y)=(x',y')/\lambda F$.此题表示置于前焦面上$(-x_0,-y_0)$处的点源产生斜向的平面波，均匀照明后焦面(见图6-2(b))。

(3) $$\widetilde{U}(x',y')=\mathscr{F}\left\{\left[\delta\left(x+\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x-\frac{d}{2}\right)\right]\delta(y)\right\}$$
$$\propto \exp(i\pi f_x d)+\exp(-i\pi f_x d)$$
$$\propto \cos(\pi f_x d)=\cos(\pi d x'/\lambda F),$$
$$I(x',y')\propto \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda F}x'\right).$$

此题表示置于前焦面上$(\mp d/2,0)$处的两个相干点源在后焦面上的干涉条纹(见图6-3(c))。

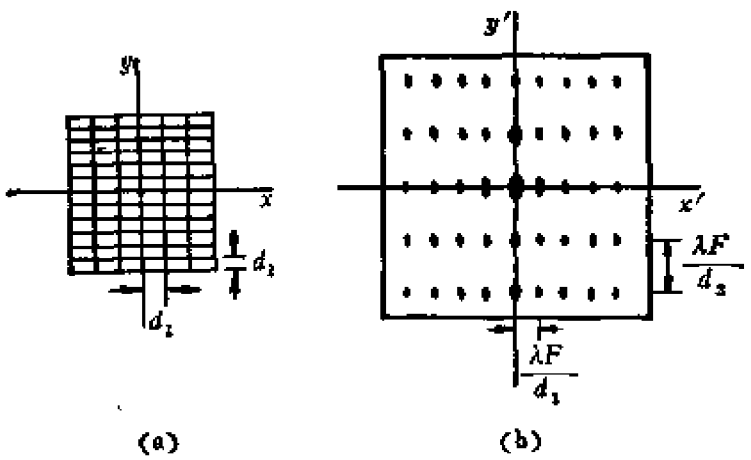
以上例题形象地告诉我们，5.6节表Ⅴ-4(1),(1′)和(3)给出的傅里叶变换公式可以具有怎样的物理意义。

复振幅频谱的模和辐角分别称为振幅频谱和位相频谱。从以上例题的(1)，(2)两问可以看出位相频谱的重要意义，因为有些差别，如点源的平移，并不反映在振幅频谱中，只有从位相频谱中才看得出来。

例题2 求正交网格的夫琅和费衍射场的$\widetilde{U}(x',y')$和$I(x',y')$。

解 如图6-3(a)，正交网格相当于两块黑白光栅的正交密接，透过率函数是二者相乘，

$$\tilde{t}(x,y)=\tilde{t}_1(x)\tilde{t}_2(y),$$



(a) (b)

图 6-3 例题2——正交网格的夫琅和费衍射

其中

$$\begin{cases} \widetilde{t}_1(x) = \sum\limits_{n=-(N_1-1)/2}^{(N_1-1)/2} g_1(x+nd_1), \\ \widetilde{t}_2(y) = \sum\limits_{m=-(N_2-1)/2}^{(N_2-1)/2} g_2(y+md_2). \end{cases}$$

式中 g_1, g_2 分别为宽度等于 a_1, a_2 的方垒函数. 在傅里叶频谱面上

$$\widetilde{U}(x',y') = \mathscr{F}\{\widetilde{t}(x,y)\} = \mathscr{F}\{\widetilde{t}_1(x)\}\mathscr{F}\{\widetilde{t}_2(y)\}$$

$$= G_1(f_x)\frac{\sin N_1\beta_1}{\sin\beta_1} G_2(f_y)\frac{\sin N_2\beta_2}{\sin\beta_2}, \quad ① \qquad (6.7)$$

其中

$$\begin{cases} G_1(f_x) = \mathscr{F}\{g_1(x)\} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}, \\ G_2(f_y) = \mathscr{F}\{g_2(y)\} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\alpha_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pi a_1 f_x = \dfrac{\pi a_1}{\lambda F} x', \\ \alpha_2 = \pi a_2 f_y = \dfrac{\pi a_2}{\lambda F} y', \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \pi d_1 f_x = \dfrac{\pi d_1}{\lambda F} x', \\ \beta_2 = \pi d_2 f_y = \dfrac{\pi d_2}{\lambda F} y', \end{cases}$$

$$I(x',y') = \left(\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\ \frac{\sin N_1\beta_1}{\sin\beta_1}\right)^2\left(\frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2}\ \frac{\sin N_2\beta_2}{\sin\beta_2}\right)^2. \qquad (6.8)$$

衍射图样如图6-3(b)所示，是正交的二维点阵，衍射斑在 x', y' 方向的间隔分别与 d_1, d_2 成反比.

例题3 如果用斜入射的平行光照射图6-1中的衍射屏，式(6.5)应作怎样的修改?

① 见§5式(5.30).

解 若入射的是斜向的平面波，

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\exp[ik(\sin\theta_{10}x+\sin\theta_{20}y)].$$

在式(6.5)的$\widetilde{t}(x,y)$上应乘以上式中的线性相因子：

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x',y')&=\mathcal{F}\{\widetilde{t}(x,y)\exp[ik(\sin\theta_{10}x+\sin\theta_{20}y)]\}\\&=\mathcal{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}*\mathcal{F}\{\exp[ik(\sin\theta_{10}x+\sin\theta_{20}y)]\}\\&\propto\mathcal{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}*\delta\left(f_x-\frac{1}{\lambda}\sin\theta_{10}\right)\delta\left(f_y-\frac{1}{\lambda}\sin\theta_{20}\right),\end{aligned}$$

上式中$\mathcal{F}\{\widetilde{t}(x,y)\}=\widetilde{U}_{正}(x',y')$为正入射时的衍射场，因$(f_x,f_y)=(x',y')/\lambda F$，故又可写为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x',y')&=\widetilde{U}_{正}(x',y')*\delta(x'-F\sin\theta_{10})\delta(y'-F\sin\theta_{20})\\&=\widetilde{U}_{正}(x'-F\sin\theta_{10},\ y'-F\sin\theta_{20}).\end{aligned}\tag{6.9}$$

从而光强分布为

$$\begin{aligned}I(x',y')&=\widetilde{U}(x',y')\widetilde{U}^*(x',y')\\&=I_{正}(x'-F\sin\theta_{10},y'-F\sin\theta_{20}),\end{aligned}\tag{6.10}$$

亦即斜入射的效果仅仅是把衍射波前上的复振幅$\widetilde{U}$和强度I分布函数中的自变量(x',y')换成$(x'-F\sin\theta_{10},y'-F\sin\theta_{20})$。有时用衍射角$(\theta_1,\theta_2)$来表达更方便，因$x'=F\sin\theta_1,y'=F\sin\theta_2$，我们的结论又可表达为斜入射的效果是把$(\sin\theta_1,\sin\theta_2)$换为$(\sin\theta_1-\sin\theta_{10},\sin\theta_2-\sin\theta_{20})$。上述代换意味着，衍射图样随着几何像点$(F\sin\theta_{10},F\sin\theta_{20})$作整体平移。

本例题的结论我们不应感到陌生，在第二章§7的习题1中就遇到过斜入射的单缝夫琅和费衍射问题。那里的结论是正入射时的单缝因子$\sin\alpha/\alpha$中的$\alpha=\pi a\sin\theta/\lambda$应换为$\alpha'=\pi a(\sin\theta-\sin\theta_0)/\lambda$。这正是本题的一个特例。本题利用傅里叶变换、$\delta$函数和卷积定理等概念对这种代换作了普遍的证明①，今后我们就可把它运用到所有夫琅和费衍射的问题上了。

6.2 相干光学图像处理系统(4F系统)

正如在§3中已看到的，用夫琅和费衍射来实现图像的频谱分解，最重要的意义是为空间滤波创造了条件。由于衍射场就是屏函数的傅里叶频谱

① 用经典光学中的常规手段完全可以作出这个普遍证明。不过既然我们为了学习现代光学已引进了那么多的"现代化武器"，我们就不妨多用用，以便熟悉它们。

面，空间频率(f_x, f_y)与衍射场点位置(ξ, η)一一对应①，使得人们可以从改变频谱入手来改造图像，进行信息处理。为此设计了图6-4所示的图像处理系统。

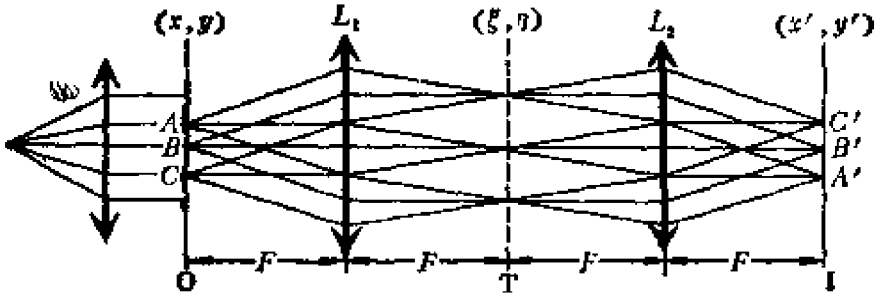


图 6-4　4F 图像处理系统

在此系统中，两个透镜L_1, L_2成共焦组合，L_1的前焦面(x, y)为物平面O，图像由此输入，L_2的后焦面(x', y')为像平面 I，图像在此输出。共焦平面(ξ, η)称为变换平面 T，在此可以安插各种结构和性能的屏(空间滤波器)。

当平行光照射在物平面上时，整个 OTI 系统成为相干成像系统。由于变换平面上空间滤波器的作用，使输出图像得以改造，所以 OTI 系统又是一个相干光学信息处理系统。这里先研究它的成像问题。

§ 3 中我们已介绍过阿贝成像原理，OTI 系统的情况完全类似。着眼于光的波动行为，服务于光学信息处理这个目的，我们将相干光学系统的成像过程看作两步：第一步，从 O 面到 T 面，是第一次夫琅和费衍射，它起分频作用。第二步，从 T 面到 I 面，又一次夫琅和费衍射，它起合成作用，即综合频谱输出图像。在这样的两步中，变换平面 T 处于关键地位，若在此处设置光学滤波器，就能起到选频作用。要想作到图像的严格复原，T 面必须完全畅通无阻。此处的 4F 系统，每次衍射都是从焦面到焦面，如 6.1 节所述，这就保证了复振幅的变换是纯粹的傅里叶变换，从而使计算比 § 3 简单得多，下面先来证明，如果光波能够自由通过变换平面 T，图像将完全还原。

如图6-5，在物平面 O 上，$\widetilde{U}_O(x, y) \propto \widetilde{t}_0(x, y)$；设在变换面 T 上 $\widetilde{t}_T(\xi, \eta) = 1$，从而$\widetilde{U}_2(\xi, \eta) = \widetilde{U}_1(\xi, \eta)$，记作 $\widetilde{U}_1(\xi, \eta)$；在像平面 I 上复

① 见式(6.6)，这里的(ξ, η)相当于该式中的(x', y').

振幅分布为 $\widetilde{U}_I(x',y')$。如6.1节所述，在两次夫琅和费衍射过程中，复振幅的变换都是傅里叶变换：

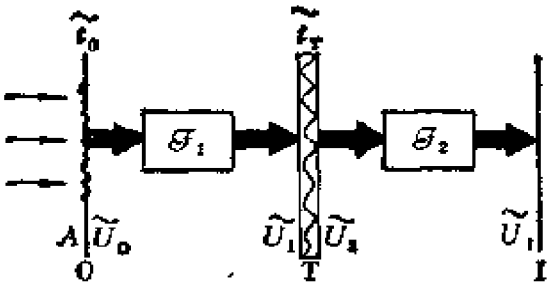


图 6-5　相干成像滤波系统工作原理方框图

$$\widetilde{U}_T(\xi,\eta)=\mathscr{F}_1\{\widetilde{U}_O(x,y)\},$$

$$\widetilde{U}_I(x',y')=\mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_T(\xi,\eta)\}.$$

略去一切数值系数不写，上两式的具体表达式为

$$\widetilde{U}_T(\xi,\eta)\propto\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}_O(x,y)\exp\left[\frac{-ik}{F}(x\xi+y\eta)\right]dxdy,$$

$$\widetilde{U}_I(x',y')\propto\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{U}_T(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-ik}{F}(\xi x'+\eta y')\right]d\xi d\eta.$$

将前式代入后式，得

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_I(x',y')\propto&\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}_O(x,y)\exp\left\{\frac{-ik}{F}\left[\xi(x+x')\right.\right.\\&\left.\left.+\eta(y+y')\right]\right\}d\xi d\eta dxdy\\=&\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}_O(x,y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{-ik(x+x')}{F}\xi\right]d\xi\right\}\\&\times\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{-ik(y+y')}{F}\eta\right]d\eta\right\}dxdy\\\propto&\iint_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{t}_O(x,y)\delta(x+x')\delta(y+y')dxdy\text{①}\end{aligned}$$

① 参见§5式(5.35)。

$$= \widetilde{t}_O(-x', -y') \propto \widetilde{U}_O(-x', -y'). \qquad (6.11)$$

亦即输出图像与输入图像完全一样，上式中 x'，y' 前的负号只表示像是倒立的.

上面的计算表明，连续两次的傅里叶变换，函数的形式基本复原，只是自变量变号，即图像倒置. 我们也可以说，上述第二次傅里叶变换 $\widetilde{U}_I = \mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_T\}$ 是一次傅里叶逆变换加图像倒置. 其实这个结论无需上述运算，只把傅里叶变换和逆变换放在一起对比一下即可得到：

$$\widetilde{U}_O(x,y) = \mathscr{F}_1^{-1}\{\widetilde{U}_T(\xi,\eta)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int \widetilde{U}_T(\xi,\eta)\exp[i2\pi(f_x x + f_y y)]df_x df_y$$

$$\propto \int_{-\infty}^{+\infty}\int \widetilde{U}_T(\xi,\eta)\exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda F}(\xi x + \eta y)\right]d\xi d\eta. \qquad (6.12)$$

$$\widetilde{U}_I(x',y') = \mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_T(\xi,\eta)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int \widetilde{U}_T(\xi,\eta)\exp\left[-i2\pi(f_x'\xi + f_y'\eta)\right]d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int \widetilde{U}_T(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda F}(x'\xi + y'\eta)\right]d\xi d\eta. \qquad (6.13)$$

式中 $(f_x, f_y) = \frac{1}{\lambda F}(x,y)$，$(f_x', f_y') = \frac{1}{\lambda F}(x',y')$. 可以看出，将式(6.12)右端的积分作如下变量代换

$$(x,y) \longrightarrow (-x', -y'),$$

它就与式(6.13)右端的积分一样，因此得知

$$\widetilde{U}_I(x',y') \propto \widetilde{U}_O(-x,-y), \qquad ①$$

这便是上面的式(6.11).

在上述未经滤波的特例里，在频谱面上

---

① 由于我们从头起就把菲涅耳衍射积分公式中的比例系数省略未写，故这里只能用正比符号“$\propto$”. 其实若计及原有的和计算中所出现的所有比例系数，可以证明这式中的比例系数就是 1.

$$\widetilde{U}_2 = \widetilde{U}_1,$$

在有滤波器的情况下

$$\widetilde{U}_2 = \widetilde{U}_1 \widetilde{t}_T \fallingdotseq \widetilde{U}_1,$$

这里 $\widetilde{t}_T$ 为滤波器的透过率函数，这时经第二次傅里叶变换后，函数形式不再是复原加图像倒置，但我们仍可对 $\widetilde{U}_2$ 作傅里叶逆变换，然后将图像倒置，以此来代替第二次傅里叶变换的运算。从物理概念上可以这样理解：对 $\widetilde{U}_2$ 作傅里叶逆变换，是寻求这样一个假想的物波前，它可不经滤波，在频谱面上直接给出 $\widetilde{U}_2$。此物波前的倒置就应是像面上的波前。

在今后的运算中，我们将根据情况，傅里叶正、逆两种变换的方法交替使用。

例题4 如果如图6-4所示的 $4F$ 系统变换平面 T 上放一块正弦光栅，会产生什么后果？

解 采用上面的符号，这里的区别仅在于 $\widetilde{t}_T(\xi,\eta) \fallingdotseq 1$。从而 $\widetilde{U}_2(\xi,\eta) \fallingdotseq \widetilde{U}_1(\xi,\eta)$。复振幅的逐次变换如下：

$$\widetilde{U}_1(\xi,\eta) = \mathscr{F}_1\{\widetilde{U}_O(x,y)\}, \quad \text{其中} \widetilde{U}_O(x,y) = \widetilde{t}_O(x,y),$$

$$\widetilde{U}_2(\xi,\eta) = \widetilde{U}_1(\xi,\eta)\,\widetilde{t}_T(\xi,\eta), \text{ 其中 } \widetilde{t}_T(\xi,\eta) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f_0 \xi,$$

$$\widetilde{U}_I(x',y') = \mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_2(\xi,\eta)\} = \mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\widetilde{t}_T(\xi,\eta)\}$$

$$= \mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\} * \mathscr{F}_2\{\widetilde{t}_T(\xi,\eta)\}.$$

上面最后一步运算利用了式(5.25)这条性质：原函数乘积的频谱是频谱的卷积。第一个因子 $\mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\}$ 与自由通过频谱面时一样，故而直接引入上面的结果 $\mathscr{F}_2\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\} \propto \widetilde{t}_O(-x',-y')$。

正弦光栅的频谱可引用§5例题4的结果，注意那里的 f 相当于这里的 $x'/\lambda F$，于是

$$\mathscr{F}_2\{\widetilde{t}_T(\xi,\eta)\} \propto t_0\delta\left(\frac{x'}{\lambda F}\right) + \frac{t_1}{2}\left[\delta\left(\frac{x'}{\lambda F} - f_0\right) + \delta\left(\frac{x'}{\lambda F} + f_0\right)\right].$$

故

$$\widetilde{U}_I(x',y') \propto \widetilde{t}_O(-x',-y') * \left\{t_0\delta\left(\frac{x'}{\lambda F}\right) + \frac{t_1}{2}\left[\delta\left(\frac{x'}{\lambda F} - f_0\right) + \delta\left(\frac{x'}{\lambda F} + f_0\right)\right]\right\}.$$

利用 δ 函数卷积的性质(5.43)，得

$$\widetilde{U}_I(x',y') \propto t_0 \widetilde{t}_O(-x',-y') \qquad (0\text{级像})$$

$$+\frac{t_1}{2}\widetilde{t}_O(-x'+\lambda F f_0,-y') \qquad (+1\text{级像})$$

$$+\frac{t_1}{2}\widetilde{t}_O(-x'-\lambda F f_0,-y') \qquad (-1\text{级像}),$$

上式中的三项代表三个像，0级像仍在中心，± 1 级像分别沿 x' 方向移位 $\pm\lambda F f_0$.

以上结论其实也可经过简单的推论得到：物平面的图像可看成是点源的集合，每个点源发出的波经正弦光栅衍射后在像面上产生 0，± 1 级三个斑，故所有物点发出的波在像面上集合为 0，± 1 级三个像。

例题5 若将上题中的正弦光栅沿 ξ 方向平移一个距离 Δ，会产生什么后果？

解 与例题 3 唯一的差别是 $\widetilde{t}_T(\xi,\eta)$ 的表达式应改为

$$\widetilde{t}_T(\xi,\eta) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f_0(\xi-\Delta),$$

从而在其傅里叶变换式中出现附加相因子 $\exp\left(\frac{-ikx'}{F}\Delta\right)$[①]，

$$\mathscr{F}_2\{\widetilde{t}_T(\xi,\eta)\} \propto \left\{t_0\delta\left(\frac{x'}{\lambda F}\right)+\frac{t_1}{2}\left[\delta\left(\frac{x'}{\lambda F}-f_0\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\delta\left(\frac{x'}{\lambda F}+f_0\right)\right]\right\}\exp\left(\frac{-ikx'}{F}\Delta\right).$$

取卷积后，得

$$\widetilde{U}_I(x',y') \propto t_0 \widetilde{t}_O(-x',-y') \qquad (0\text{级像})$$

$$+\frac{t_1}{2}\widetilde{t}_O(-x'+\lambda F f_0,-y')\exp(-i2\pi f_0\Delta) \qquad (+1\text{级像})$$

$$+\frac{t_1}{2}\widetilde{t}_O(-x'-\lambda F f_0,-y')\exp(i2\pi f_0\Delta) \qquad (-1\text{级像}),$$

---

① 参见式(5.17)，那里的 f 相当于这里的 $x'/\lambda F$.

上式表明，正弦光栅平移的后果是引起相移．0级无相移，±1级相移量等值反号，量值为$2\pi f_0\Delta$．

对于非正弦光栅，还将出现更高级的像．可以证明±n级像的相移为

$$\Delta\varphi = \mp 2\pi n f_0 \Delta. \tag{6.14}$$

这些相因子的出现并不影响像面上的强度分布．这一点是我们比较熟悉的，甚至是印象较深的．但在必要的时候请不要忘记，滤波器（光栅）的平移要在各级衍射斑的复振幅中引起不同的相移．

6.3 空间滤波实验

3.3节中我们曾介绍过一些空间滤波实验，这里再介绍几类更有趣的空间滤波实验．这些实验都可在$4F$系统中作出．

（1）网格实验

输入图像是一正交的网格（正交密接黑白光栅）．在变换平面T上的频谱如图6-6(a)所示，是二维的矩形点阵（准分立谱）①．T面上无阻挡时像面上输出的网格图像完全复原②．如果按图6-6(b)所示，遮掉T面上除中央一纵列外所有其余的衍射斑，则输出面上只剩下横向网纹．反之，若按图6-6(c)所示，只让中央一横行衍射斑通过，则输出的只有纵向网纹．保留中央一斜排的情况（图6-6(d)）也类似．这些现象如何说明的问题，留给读者自己考虑．

最有趣的是图6-6(e)所示实验．这里输入图像除正交网格外，还有散乱的若干污点．我们的任务是通过信息处理的手段去识别或抹掉这些污点．

由于污点的空间信息是无规的非周期分布，它们的频谱弥漫地分布在傅氏面T上；而网格的频谱如前所述，是二维的矩形点阵，它是准分立谱．

设想我们先用一纯净的同样网格为物，在傅氏面上直接安放照相底片，将它的频谱拍摄下来，得到一张负片（即黑点阵）．再以这张负片为光学滤波器，去处理有污点网格的图像．这时网格的准分立频谱就被全部滤

① 见本节例题2．

② 严格说来，由于透镜的有限孔径，高频信息总要被截掉一些，输出的网格图像的黑白边界会变得不如原来清晰．

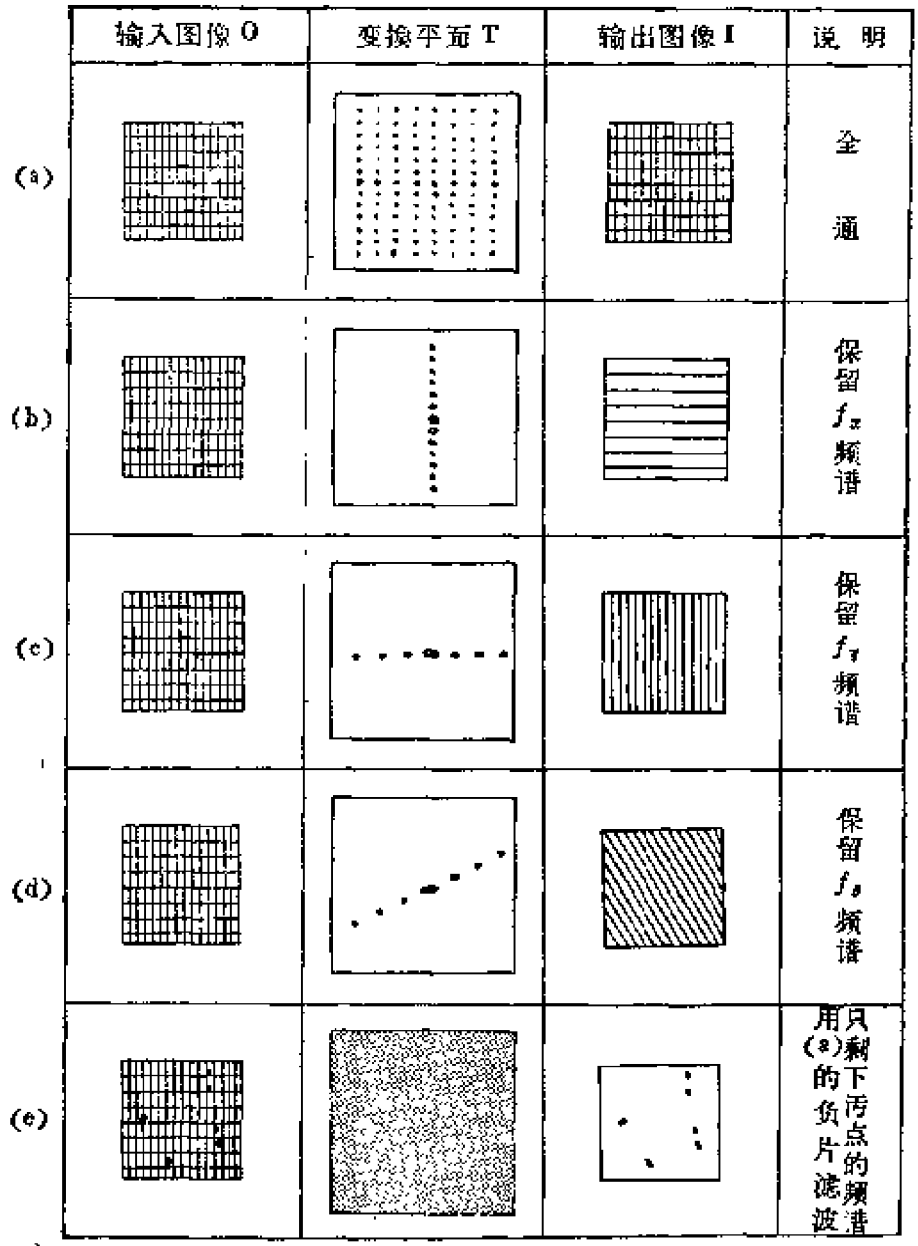


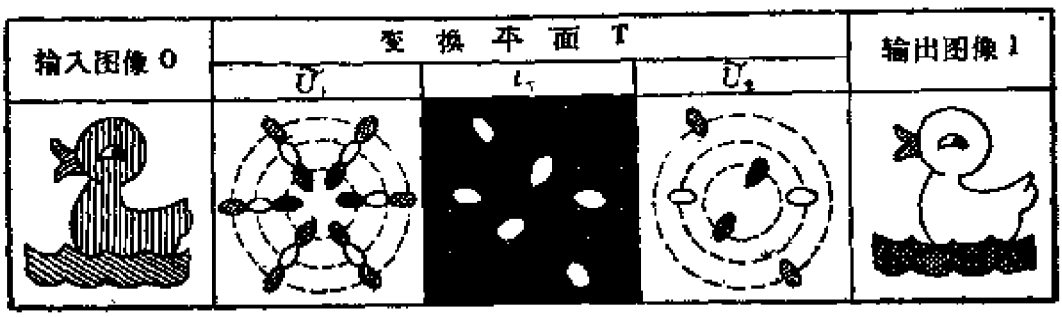
图 6-6 网格的空间滤波实验

掉；但污点的频谱经负片滤波虽也丢失一些，但因它是弥漫分布的，绝大部分被保留下来．这样，在输出像面上网格全部隐去，只剩下污点的信息．用这种方法，我们可以从网格图像中把散乱的污点大体识别出来．如果我们把负片翻印为正片(即白点阵)，用它作光学滤波器去处理那个有污点的网格图像，在输出的像面上我们将得到去掉污点的较为纯净的网格．

总之，如要从输入图像中提取或排除某种信息，就要事先研究这类信息的频谱特征，然后针对它制备相应的空间滤波器置于变换平面．经第二次衍射合成后，即可达到预期的效果．光学信息处理的精神大体就是如此．

(2) θ 调制实验(分光滤波实验)

这是一类用白光照明透明物体，而在输出平面上得到彩色图像的有趣实验．透明物由几块不同形状的光栅片拼成，这些光栅片是在50/mm或100/mm的一张光栅上剪裁下来的．拼图时利用光栅的不同取向把准备"着上"不同颜色的部位区分开来．当一束白光照射到这透明物上时，在变换平面上呈现的是沿不同方向铺展的彩色斑．用黑纸或熏烟的玻璃板遮在变换平面上，并在适当的地方开些透明窗口，把所需颜色的 ± 1 级衍射斑提取出来．这样，在输出平面上得到的就是符合我们期望的彩色图像．



深色表示兰，浅色表示红，白色表示黄．

图 6-7 θ 调制实验

(3) 反衬度反转实验(加减法运算)

如图6-8，以正弦光栅作为滤波器，将它插在频谱面T处．物平面O上

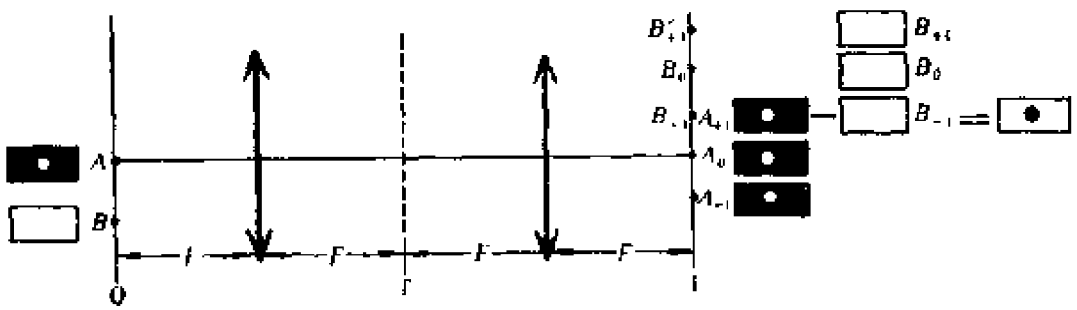


图 6-8 反衬度反转实验

有两块光屏，其中A代表待处理的图像，B是一个开孔．按照本节例题1的分析，在像平面Ⅰ上应呈现每个光屏的三个像：A_0，A_{+1}，A_{-1}和B_0，B_{+1}，B_{-1}．调节物面上A，B的距离，使像面上A_{+1}与B_{-1}重合．如果两者之间没有位相差，则此处实现了相加的运算．要进行相减的运算，需要设法使两者之间产生位相差π．这可通过正弦光栅的平移来实现．如本节例题2中所分析的，正弦光栅平移时，+1级和−1级像的位置不变，但产生相反的相移，当滤波器平移的距离Δ合适，例如$\Delta = d/4$（d为光栅常数），使A_{+1}与B_{-1}分别产生$\pm\pi/2$的相移时，两者的振幅就相减了．相减的结果，原来A内振幅大的地方变小了，振幅小的地方变大了（见图6-9），实现了反衬度的完全反转．如果我们继续移动光栅，每隔$d/2$的距离就重复出现一次这种景象．

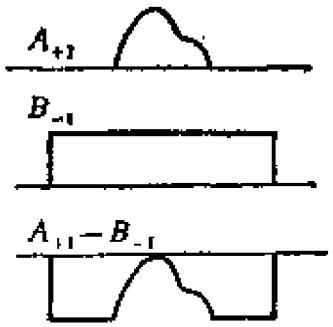


图 6-9　振幅的减法

作本实验时若不易获得正弦光栅，也可用一块$d/a = 2$的黑白光栅代替．

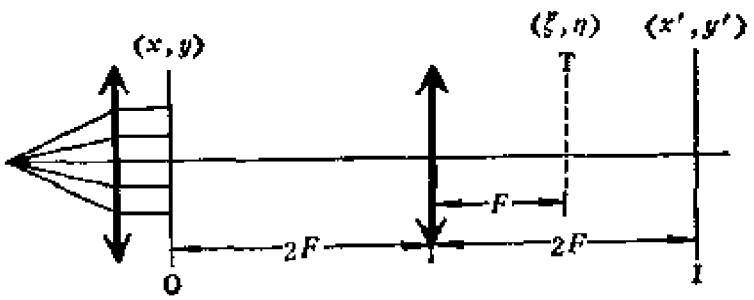
思　考　题

1．讨论图6-3所示的相干光学图像处理系统：

（1）如果L_1，L_2两透镜的焦距不等，系统的性能有什么变化？

（2）如果两个透镜不是共焦组合，系统的性能有什么变化？

2．如图所示的系统是否成为一个相干光学图像处理系统？它与$4F$系统比较有什么不同？哪个系统的性能更好？

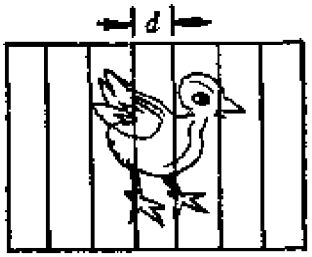


思考题2图

3. 解释正文中的网格实验。

4. 解释正文中的θ调制实验。

5. 如图，一张图上画有一只小鸟关在牢笼中，用怎样的光学滤波器能够去掉栅网，把它"释放"出来？



思考题5图

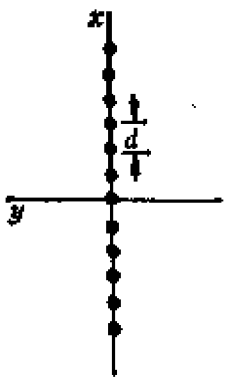
6. 一张底片的本底有灰雾，用什么样的光学滤波器可以使之改善？

7. (1) 以一张黑白图案作光学滤波器，并在黑的地方开个孔。这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过率函数的积还是和？

(2) 若在上述图案中白的地方点上一点黑，其透过率函数是图案与黑点的透过率函数的积还是和？

8. 如果读者熟悉滤波器电路，将相干成像系统中的空间滤波与它作一比较，看看两者之间有什么共同和不同之处？

习　题



习题1图

1. 在透镜的前焦面上有一系列同位相的相干光源等距排列在x轴上，形成一维点阵(见图)。用傅里叶变换法求后焦面上的夫琅和费衍射场。

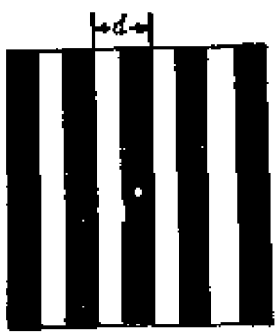
2. 设透镜直径$D=5\text{cm}$，焦距$F=60\text{cm}$，图像（衍射屏）线度$l=2\text{cm}$，入射光波长$\lambda=0.6\mu\text{m}$。

(1) 分别算出后焦面上$(x',y')=(0,0),(0,1),(1,0),(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(0.5,2),(3,-5),(-10,-15)$（单位皆为mm）等地点所对应的空间频率$(f_x,f_y)$的具体数值(单位皆为$\text{mm}^{-1}$)。

(2) 计算系统的截止频率。

3. 用一块正弦光栅（或$d:a=2:1$的黑白光栅)作为$4F$系统的滤波器，设物波前为$\widetilde{U}_O$，

(1) 经过变换平面中心的是不透光的黑条纹(见图)，求像面上的复振幅分布。



习题3图

(2) 在光栅的正中央黑条纹上开一个小洞，求此时像面上的复振幅分布。

(3) 这一装置能否实现反衬度完全反转？

*§7 点扩展函数与光学传递函数

7.1 光学系统的像质评价问题

对于显微镜、望远镜、照相机一类光学仪器，人们要求它们尽可能完善地成像，即要求像面上的光强分布尽可能准确地反映物面上的光强分布。怎样评价像质的优劣，这是一个很复杂的问题。在几何光学中，人们用光线追迹的手段，研究各种几何像差。但在实际成像过程中，即使是较简单的三级像差理论给出的五种像差，也是同时并存的。人们又曾在波动光学中根据衍射的理论讨论过仪器的像分辨本领，用能分辨测试板上两条刻线的最小极限距离来衡量镜头的好坏。然而实际问题是复杂的，镜头某一两个简单的指标都不足以全面地评价它的性能。例如影响仪器能否分辨两刻线的因素是多方面的：图像的反衬，照明的方式(相干与否)，接收器的性能等。又如物平面上有一黑白图案，在仪器的像面上可能出现几种状态：黑白边缘依然分明，或相当模糊，或边缘有细微毛刺，或图案变形等等。显然上述这些情况的出现及其评价，已经越出分辨两条刻线的那种范畴了。

总之，在传统光学中虽已在一定程度上触及像质的评价问题，但尚缺少一个综合的客观的统一标准。一个好的像质评价标准应既能反映像的本质特征，又能为人们在各种实际需要中提高像质作出有效的指导，而它本身又是可以被测量的。从本世纪五十年代开始，人们开始用光学传递函数来评价像质。光学传递函数抓住了不相干成像系统在等晕区内是一个空间不变性的光强线性系统这一本质特征，将电讯网络理论中的一套概念、术语和研究方法移植过来，它不仅把像质评价工作向前推到一个崭新的阶段，而且对整个现代光学的兴起来说，也起了不可磨灭的促进作用。

7.2 点扩展函数①

理想成像要求物面和像面点点对应，像质的变坏都是由点物不能成点像引起的，系统对点物的响应由点扩展函数来描述．用(x,y)和(x',y')分别代表物面和像面上点的坐标．在物面上位于(x,y)处的一个点源造成的像面强度分布$I(x',y')$，就是物点的扩展函数，我们将它记作h．由于不同位置物点的扩展函数不一定相同，h除了是x',y'的函数外，还依赖于x,y，故应写成$h(x,y;x',y')$．使用点扩展函数的概念时，常给它加上归一化条件：

$$\iint h(x,y;x',y')dx'dy' = 1\,. \tag{7.1}$$

这相当于说，h是光功率为一个单位的点源造成的点扩展函数．显然，这里不考虑系统的光能流损耗．

一般地计算点扩展函数h是困难的．如果不考虑因波面畸变而引起的几何光学像差，仅考虑光瞳的衍射效应，我们可以给出在傍轴条件下透镜点扩展函数的普遍表达式，具体推导如下．

本章§4证明了，凡是像面上接收的衍射，皆为夫琅和费衍射．6.1节中又论证了，在一次衍射后就直接接收夫琅和费衍射场的强度分布，则对衍射屏的位置没有特殊要求，像面上的强度$I(x',y')$由式(6.4)决定．在这里衍射屏就是光瞳，它所在平面即透镜平面，其上点的坐标用(ξ,η)表示(见图7-1)，设屏函数为$\tilde{t}(\xi,\eta)$．按照定义，式(6.4)中的$I(x',y')$就是轴

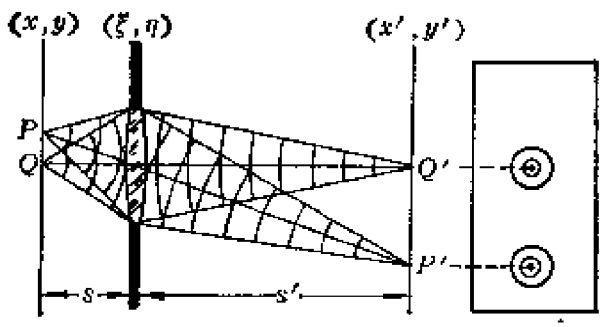


图 7-1　透镜光瞳衍射的点扩展函数

① 点扩展函数 (Point Spread Functions)．相当于无线电技术中的脉冲响应函数．在有的文献中用缩写 PSF 表示．

上物点 Q 的点扩展函数，故有

$$h(0,0;x',y')=\mathscr{F}\{\tilde{t}(\xi,\eta)\}\mathscr{F}^{*}\{\tilde{t}(\xi,\eta)\}. \tag{7.2}$$

在傅里叶变换中空间频率为①

$$(f_\xi,f_\eta)=\frac{1}{\lambda s'}(x',y'),$$

其中s'为像距，将式(7.2)具体写明，则有

$$h(0,0;x',y')=\left|\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda s'}(x'\xi+y'\eta)\right]d\xi d\eta\right|^2. \tag{7.3}$$

对于轴外物点P，仿照本节例题3的办法可以证明，将式(7.3)作如下变量代换即可，

$$(x',y')\longrightarrow(x'-Vx,y'-Vy), \tag{7.4}$$

其中$V=s'/s$为横向放大率．于是得到

$$h(x,y;x',y')=\left|\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(\xi,\eta)\exp\left\{-\frac{i2\pi}{\lambda s'}[(x'-Vx)\xi+(y'-Vy)\eta]\right\}d\xi d\eta\right|^2. \tag{7.5}$$

以上便是傍轴区域内光瞳衍射造成的点扩展函数的一般表达式．

在光学仪器中，光瞳一般为开孔型的，即

$$\tilde{t}(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \text{瞳内;}\\ 0, & \text{瞳外.}\end{cases}$$

圆形光瞳的公式已在第二章8.1节中给出，不过该处的式(8.3)只限于轴上物点．对于轴外物点，可通过变量代换(7.4)得到．下面给出结果：

$$h(x,y;x',y')\propto\left[\frac{2J_1(a)}{a}\right]^2, \tag{7.6}$$

式中J_1是一阶贝塞耳函数，

$$a=\frac{2\pi a}{\lambda s'}\sqrt{(x'-Vx)^2+(y'-Vy)^2}, \tag{7.7}$$

① 参见式(4.5)，该式中的z'相当于这里的s'。

式中 a 为圆孔半径.

从上面的讨论可以看出，即使对理想透镜这种简单的情形，点扩展函数 $h(x,y;\ x',y')$ 的表达式已较复杂，要求在各种实际情况下写出它的具体表达式是难以做到的，因为光瞳的衍射效应仅是使像点扩展的一个因素，而光学系统中导致像点扩展的因素是多种多样的.如透镜本身造成的波面畸变(即过去所说的各种几何像差)，镜头的内部不均匀，表面的沾污，长程传输途中大气的不稳定等等.点扩展函数 h 是所有这些因素的综合反映.下面我们的任务不是去求 h 的具体表达式，而是以笼统的 h 函数为出发点去研究光学系统成像的性能，看看它与 h 函数将是一种怎样的关系.

7.3 等晕区内像面与物面上强度分布的卷积关系

在不相干的线性成像系统中，各物点在像面上造成的强度分布是直接迭加的.设物面上的强度分布为 $I_O(x,y)$，面元 $dxdy$ 发出的光功率为 $I_O(x,y)dxdy$. 按照点扩展函数的定义，这面元在像面上引起的强度分布为

$$I_O(x,y)h(x,y;x',y')dxdy.$$

从而整个物面在像面上造成的强度分布为

$$I_I(x',y')=\iint_{(物面)} I_O(x,y)h(x,y;x',y')dxdy. \qquad (7.8)$$

为了把理论向前推进一步，现在我们引进一个重要概念——空间平移不变性（简称空不变）.对于像质评价的问题，像的大小、正倒是无关紧要的，因此今后我们总取 $V=+1$，这意味着，我们设想可以把物面和像面迭在一起对比.若真是能够理想成像，则二者点点对应，两张图像完全重合.实际上对应于每个物点(x,y)，在像面上形成一个晕斑.当我们把1:1的物像两张图像迭在一起时，每个物点引起的晕斑分布在它的周围(见图7-2).我们要问，当物点处在平面上不同位置时，它周围晕斑的形状和强度分布是否一样？如果一样，

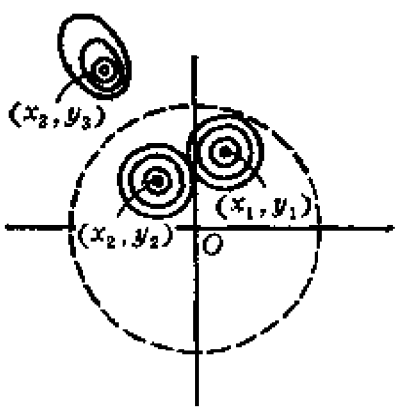


图 7-2　等晕区

我们就说这是空间平移不变的；否则，我们就说是"空变的"。共轭面上空不变的区域称为等晕区。一般说来，透镜的傍轴区往往是等晕的，在此区域内围绕任意两点（如图7-2中的(x_1,y_1)和(x_2,y_2)）周围的晕斑分布形式相同；此区域以外的点(x_3,y_3)周围的晕斑就可能不同了。

点扩展函数$h(x,y;x',y')$是描述物点(x,y)周围晕斑分布情况的。空不变条件如何反映在h函数中？为了更好地描述晕斑在物点周围的分布，我们把h函数中的独立变量换为相对于中心（即几何光学像点）的坐标$(x'-x,y'-y)$和中心坐标(x,y)。如果是空不变的，则h只依赖于前者，它不随后者而变，即我们可以把点扩展函数写为$h(x'-x,y'-y)$①。其实，$V=+1$时式(7.5)和(7.6)中的h函数就具有此种形式。因此在等晕区内式(7.8)化为

$$I_I(x',y')=\iint I_O(x,y)h(x'-x,y'-y)dxdy=I_O*h. \tag{7.9}$$

亦即，在等晕区内像面强度（输出信息）是物面强度（输入信息）与点扩展函数的卷积。这一结论具有深刻的意义，它为像质评价工作带来重大的简化。

7.4 简谐信息是空不变系统（等晕区）的本征信息

设物信息是反衬度为γ_O的正弦光栅：

$$I_O(x,y)=1+\gamma_O\cos 2\pi(f_x x+f_y y), \tag{7.10}$$

在等晕区内，像面上的强度分布可写成如下卷积：

$$I_I(x',y')=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint h(x,y)\{1+\gamma_O\cos 2\pi[f_x(x'-x)+f_y(y'-y)]\}dxdy.$$

因

---

① 换过自变量后，从数学上看，这已是一个新函数（它是二元函数，而不再是四元函数了），本应用不同的符号代表。但因它仍代表同一物理量，我们将不改变符号h。

$$\cos 2\pi[f_x(x'-x)+f_y(y'-y)]$$
$$=\cos 2\pi(f_x x'+f_y y')\cos 2\pi(f_x x+f_y y)$$
$$+\sin 2\pi(f_x x'+f_y y')\sin 2\pi(f_x x+f_y y),$$

故

$$\begin{aligned} I_I(x',y') &= 1+\gamma_O[H_c\cos 2\pi(f_x x'+f_y y')\\ &\quad +H_s\sin 2\pi(f_x x'+f_y y')]\\ &= 1+\gamma_O H[\cos\Phi\cos 2\pi(f_x x'+f_y y')\\ &\quad +\sin\Phi\sin 2\pi(f_x x'+f_y y')]\\ &= 1+\gamma_I\cos[2\pi(f_x x'+f_y y')-\Phi]. \end{aligned} \tag{7.11}$$

其中

$$\begin{cases} H_c=H_c(f_x,f_y)=\iint h(x,y)\cos[2\pi(f_x x+f_y y)]dxdy, & (7.12)\\ H_s=H_s(f_x,f_y)=\iint h(x,y)\sin[2\pi(f_x x+f_y y)]dxdy, & (7.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H=H(f_x,f_y)=\sqrt{H_c^2+H_s^2}, & (7.14)\\ \Phi=\Phi(f_x,f_y)=\tan^{-1}\dfrac{H_s}{H_c}, & (7.15) \end{cases}$$

从而

$$H_c=H\cos\Phi,\qquad H_s=H\sin\Phi, \tag{7.16}$$

此外

$$\gamma_I=H\gamma_O, \tag{7.17}$$

在导出式(7.11)的运算中还用到了归一化条件(7.1)，式(7.14)到(7.16)中各量的关系见图7-3.

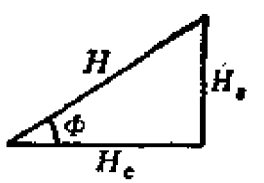


图7-3 H_c,H_s与H,Φ的关系

式(7.11)表明，不管点扩展函数具有何种形式，只要满足空不变性，像面上输出的仍然是简谐信息，且它们的空间频率和取向与输入的物信息相同. 这就是说，简谐信息是任何空不变系统的本征信息. 若整个光学系统并非空不变的，则至少在等晕区内如此. 广义上说，不论是光学成像系统还是电学通讯网络，只要它们是线性不变系统，则简谐函数是其本征函数.

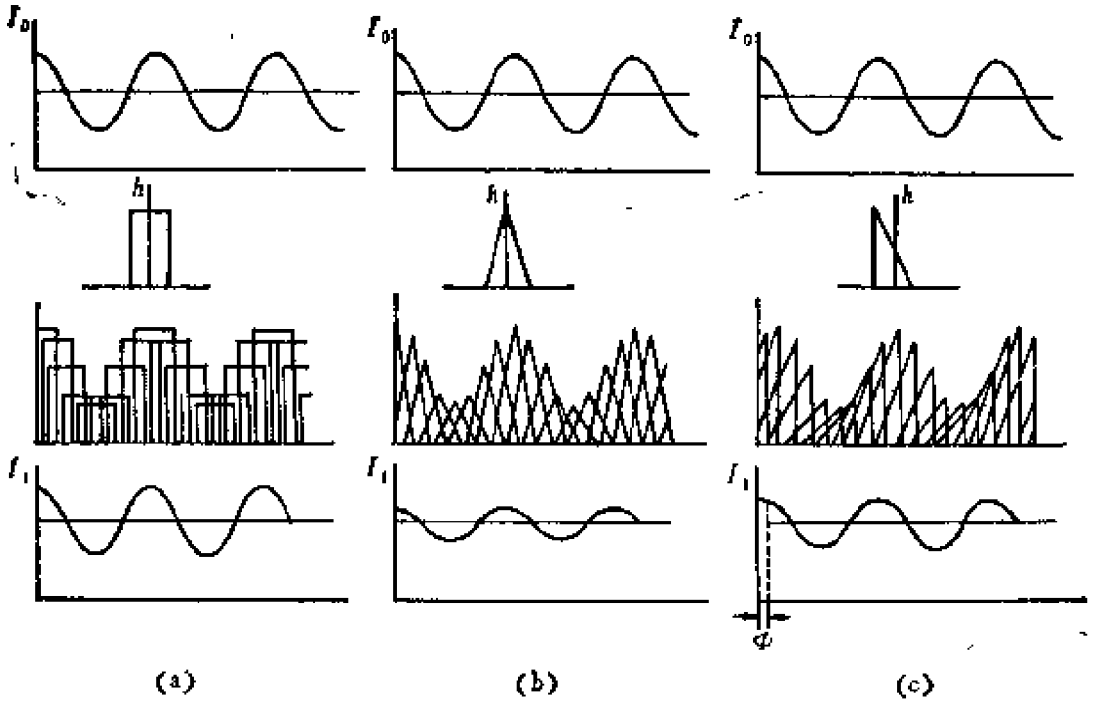


图 7-4　各种 h 函数下的卷积运算

上面的卷积运算可通过图7-4形象地表现出来。图中(a),(b),(c)代表三个不同 h 函数的情形。所谓卷积 $I_O * h$,就是将 h 函数的曲线平移,乘以当地的I_O值，得到一个放大或缩小的曲线图形。最后把所有这样的图形迭加起来。此图再一次显示，不管 h 函数如何，当输入信息为简谐时，输出信息的确仍保持简谐的形式。

输出信息与输入信息相比，可能有两点变化：一是反衬度变化（衰减)；另一是当 h 不对称时（见图7-4(c)）会发生相移（即图形平移)。式(7.14)中的H描述的是各种空间频率下反衬度(或者说调制度）的衰减①：

$$H(f_x, f_y) = \frac{\gamma_I}{\gamma_O}, \tag{7.18}$$

它称为调制传递函数(Modulation Transfer Function,缩写为MTF)，相移量 $\Phi(f_x, f_y)$称为位相传递函数(Phase Transfer Function，缩写为PTF)。

① 见式(7.17)。

7.5 光学传递函数

看到卷积，我们本应立即想到，下一步该作傅里叶变换了．式(7.9)是个卷积公式，现取式中各量的傅里叶变换式：

$$\widetilde{I}_O(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{I_O(x,y)\},$$
$$\widetilde{I}_I(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{I_I(x,y)\},$$
$$\widetilde{H}(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{h(x,y)\}.$$

则卷积公式(7.9)化为傅里叶变换式的乘积：

$$\widetilde{I}_I(f_x,f_y)=\widetilde{H}(f_x,f_y)\widetilde{I}_O(f_x,f_y),$$

或

$$\widetilde{H}(f_x,f_y)=\frac{\widetilde{I}_I(f_x,f_y)}{\widetilde{I}_O(f_x,f_y)}. \tag{7.19}$$

$\widetilde{H}(f_x,f_y)$称为光学传递函数(Optical Transfer Function，缩写为OTF)．它是像面强度分布与物面强度分布的频谱比值．按定义，它是点扩展函数$h(x,y)$的傅里叶变换式：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(f_x,f_y)&=\mathscr{F}\{h(x,y)\}\\&=\iint h(x,y)\exp[-i2\pi(f_xx+f_yy)]dxdy\\&=\iint h(x,y)[\cos2\pi(f_xx+f_yy)\\&\qquad-i\sin2\pi(f_xx+f_yy)]dxdy\\&=H_c(f_x,f_y)-iH_s(f_x,f_y),\end{aligned} \tag{7.20}$$

可见，分别由式(7.12)，(7.13)定义的H_c和$-H_s$是OTF的实部和虚部，从而分别由式(7.14)，(7.15)定义的H和$-\Phi$分别是OTF的模量和辐角：

$$\widetilde{H}(f_x,f_y)=H(f_x,f_y)\exp[-i\Phi(f_x,f_y)]. \tag{7.21}$$

即MTF是OTF的模量，PTF加负号是OTF的辐角．

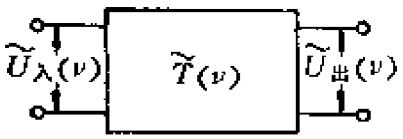


图7-5 与四端网络的类比

“光学传递函数”这一术语，是从线性网络理论中借用而来的。如图7-5所示，当一个单频的简谐讯号输入一个线性的四端网络时，输出的将是同频的简谐讯号。令$\widetilde{U}_{入}(\nu)$和$\widetilde{U}_{出}(\nu)$分别代表频率为ν的输入和输出的复电压，则它们之比

$$\widetilde{T}(\nu)=\frac{\widetilde{U}_{出}(\nu)}{\widetilde{U}_{入}(\nu)} \tag{7.22}$$

定义为网络的电压传递系数，它是时间频率ν的函数。式(7.19)和(7.22)的相似性是明显的，“传递函数”一词就源于此。如果说$\widetilde{T}(\nu)$是电路的时间频率响应函数，则$\widetilde{H}(f_x,f_y)$就是光学系统的空间频率响应函数。光学系统与网络的对比还可再发展一步。当我们在电路中输入一个非简谐的时间讯号$u_{入}(t)$时，输出的也将是一个非简谐的时间讯号$u_{出}(t)$。$u_{出}(t)$与$u_{入}(t)$两者有什么关系？我们可将时间讯号作频谱分解：

$$u_{入}(t)=\int\widetilde{U}_{入}(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu,$$

$$u_{出}(t)=\int\widetilde{U}_{出}(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu. \quad ①$$

亦即$u_{入}(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_{入}(\nu)\}$，$u_{出}(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_{出}(\nu)\}$，利用式(7.9)，有

$$u_{出}(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{T}(\nu)\widetilde{U}_{入}(\nu)\}=\mathscr{F}\{\widetilde{T}(\nu)\}*\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_{入}(\nu)\}$$

$$=\int u_{入}(t')T(t-t')dt', \tag{7.23}$$

其中$T(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{T}(\nu)\}$是电压传递系数的傅里叶逆变换式。此式与式(7.8)一样，以卷积的形式出现。两者的相似性也是明显的②。这就是说，$T(t)$与光学系统中的点扩展函数$h(x,y)$对应。为了进一步阐明$T(t)$的物

① 通常的习惯，作时间傅里叶变换与空间傅里叶变换时，指数取相反的正负号。

② 式(7.8)成卷积形式，是因为有空不变条件，式(7.23)也成卷积形式，是因为网络有时间的稳定性，即其中各参量(如电阻、电容等)不随时间变化。

理意义，设输入讯号为极短的脉冲，即 $u_{入}(t)=\delta(t)$．代入式（7.23），得输出讯号为

$$u_{出}(t)=\int\delta(t')T(t-t')dt'=T(t),\qquad(7.24)$$

可见，$T(t)$的物理意义为“脉冲响应”．因此，光学系统的点扩展函数$h(x,y)$相当于电路的脉冲响应．

例题1 设透镜理想成像（即不考虑几何像差），试给出仅由衍射效应引起的 OTF．

解 7.2节中已得到圆形光瞳的点扩散函数公式(7.6)，本题只需对该式进行傅里叶变换即可．但这样计算并不简单，我们采取另外更加直接的方法．按照6.1节的式(6.4)，物面中心点源在像面上造成的分布为

$$\begin{aligned}h(x',y')&=\widetilde{U}(x',y')\widetilde{U}^{*}(x',y')\\&=\mathscr{F}\{\widetilde{t}(\xi,\eta)\}\mathscr{F}^{*}\{\widetilde{t}(\xi,\eta)\}\\&=\mathscr{F}\{\widetilde{t}(\xi,\eta)\bigstar\widetilde{t}(\xi,\eta)\},\end{aligned}$$

傅里叶变换中$(f_\xi,f_\eta)=\frac{1}{\lambda F}(x',y')$，这就是未经归一化的点扩展函数．再次对它进行傅里叶变换，则函数形式复还，自变量加负号（见 6.2节），故OTF实为光瞳屏函数的自相关：

$$\widetilde{H}(f_x,f_y)\propto\widetilde{t}(\xi,\eta)\bigstar\widetilde{t}(\xi,\eta),$$

其中$(f_x,f_y)=-\frac{1}{\lambda s'}(\xi,\eta)$．设$\widetilde{t}(\xi,\eta)$是圆孔函数：

$$\widetilde{t}(\xi,\eta)=\begin{cases}1,&\text{当}\xi^2+\eta^2<a^2;\\0,&\text{当}\xi^2+\eta^2>a^2.\end{cases}$$

如 5.3 节所述，$\widetilde{t}(\xi,\eta)\bigstar\widetilde{t}(\xi,\eta)$是两圆心错开距离$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$时的重迭面积(图7-6(a))，考虑到归一化条件，得

$$\widetilde{H}(f_x,f_y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\frac{\rho}{2a}-\frac{\rho}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{2a}\right)^2}\right],&\text{当}\rho<2a;\\0,&\text{当}\rho\geqslant2a.\end{cases}$$

其中$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\lambda s'\sqrt{f_x^2+f_y^2}$．函数形式示于图7-6(b)．

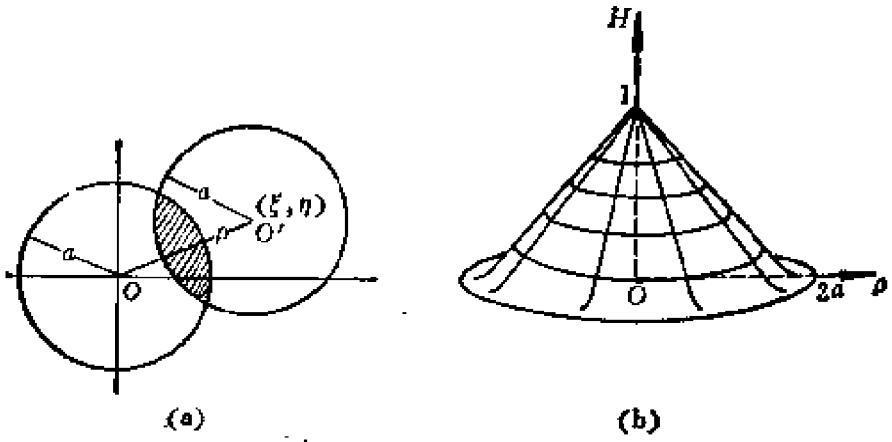


图 7-6　例题 1——圆形光瞳的 OTF

例题 2　计算矩形光瞳的 OTF（仅考虑衍射效应）。

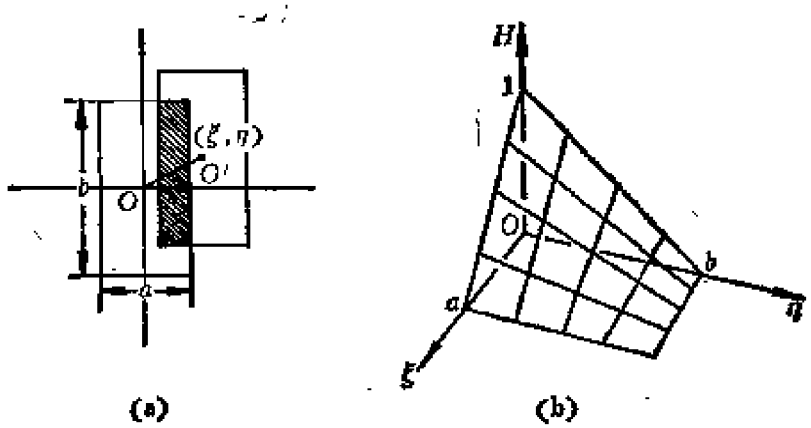


图 7-7　例题 2——矩形光瞳的 OTF

解

$$\tilde{t}(\xi,\eta)=\begin{cases}1, & \text{当}|\xi|<a/2,\ |\eta|<b/2,\\ 0, & \text{其余地方.}\end{cases}$$

$$\tilde{H}(f_x,f_y)\propto\tilde{t}(\xi,\eta)\bigstar\tilde{t}(\xi,\eta),$$

$$\tilde{H}(f_x,f_y)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|\xi|}{a}\right)\left(1-\dfrac{|\eta|}{b}\right), & \text{当}|\xi|<a,\ |\eta|<b,\\ 0, & \text{其余地方,}\end{cases}$$

其中 $\xi=-\lambda s' f_x$，$\eta=-\lambda s' f_y$。函数形式示于图7-7(b)。

7.6 传递函数在像质评价上的意义

如7.1节所述，单纯靠一两个指标，如最小分辨距离，是不能全面评价像质的。这里我们举个例子。图7-8所示是两个光学系统Ⅰ，Ⅱ的MTF曲线(为了简化我们的讨论，只考虑一维问题)。每条MTF曲线有一个截止频率f_c，它的倒数大体上相当最小分辨距离。我们说"大体上"相当，因为两条刻线是否能分辨，还取决于刻线的反衬度，而输出信息的反衬度除与MTF有关外，还依赖于输入信息的反衬度。此外，对反衬度的要求有多高还依赖于光能接收器的性能，例如对于肉眼，按瑞利标准，要求γ_I不小于

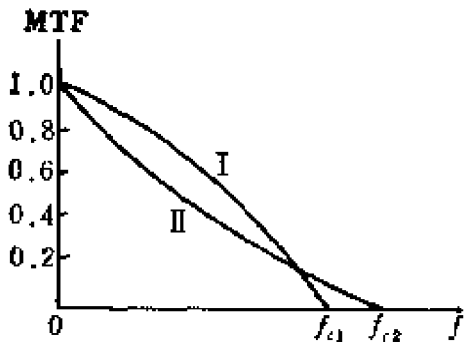


图7-8 MTF与像质评价

22%。单纯从截止频率f_c来看，图7-7中的曲线Ⅱ优于曲线Ⅰ，但对于较低的频率，曲线Ⅰ比曲线Ⅱ给出较高的反衬度。究竟孰优孰劣，要根据系统的使用目的来权衡。例如对电视摄像用的镜头，它并不需要很高的分辨本领，却要求能对较低反衬度的景物获得层次尽可能丰富的像，为此以曲线Ⅰ所代表的镜头为好。但是对用于光刻的镜头，因它的目的物都是反衬度很高的黑白线条或图案(如印刷电路)，而对于像的要求主要是期望分辨本领尽可能地高，为此，用曲线Ⅱ所代表的镜头为宜。

实际的像质评价问题是很复杂的，需要在二维的频谱空间来进行，这些自有专门的书籍讨论。我们只想通过上述简单的例子来说明，光学传递函数使用人们在电路理论中早已熟悉的"频谱"语言，为全面的客观的像质评价工作提供了一个统一的标准和有力的手段。

7.7 小结

(1) 点扩展函数和光学传递函数互为傅里叶变换式，它们是评价像

质的两种不同但是等价的描述方法．但用光学传递函数有独特的优点．

（2）用 OTF 评价像质的主要优点，是它将光学系统的分析工作提高到信息论的水平．信息要用频谱的语言来描述才是准确的，像质用频谱之比来评价才反映本质．

（3）笼统地要求光学系统在很宽的频段内都有很高的 OTF 值是不现实的，但光学系统的设计者可参照OTF曲线，按实际用途把注意力集中于最关切的频段内，研究如何提高和改善系统的性能．

（4）OTF还有一些其它的优点，如便于处理联合光学系统和光电结合系统(如电视)的像质评价问题，因为联合系统的OTF是相乘的．

（5）OTF概念只适用于空不变系统，或者说光学系统的等晕区．如何评价空变系统的像质问题，仍需进一步研究，目前的一种做法是"分区等晕处理"，在像面上的不同区域用不同的OTF．

思 考 题

1. 如果光学系统真的实现了点物成点像，其OTF曲线应该怎样？

2. 是否凡线性系统的本征信息都是简谱信息？线性系统可以是空变的吗？

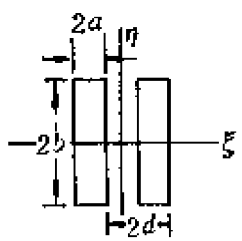
3. 为什么例题 1和2 中给出的$\widetilde{H}(f_x,f_y)$在$f_x=f_y=0$处都等于1？OTF 的值可能大于 1 吗？

习 题

1. 具体推导出式(7.5)．

2. 试利用式(7.19)证明简谱信息是空不变系统的本征信息．

3. 画出正方形光瞳的一组 OTF 曲线，以 ρ/a 为横坐标（$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，a为光瞳边长），$\theta=0°$，$30°$，$45°$（参考例题 2）．



习题 5 图

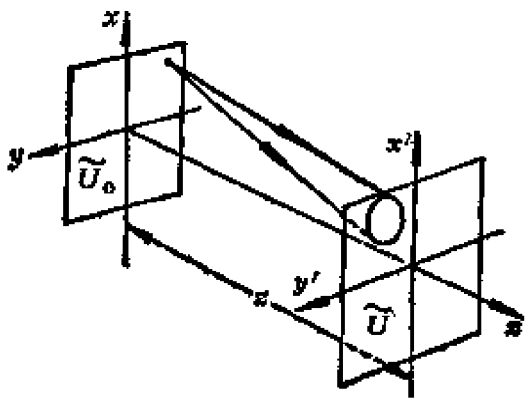
4. 具体推导例题 1 给出的圆形光瞳的 OTF表达式．

5. 双缝光瞳(尺寸与间隔见图)的 OTF 的表达式，并画出沿 ξ 方向的 OTF 曲线．

6. 实际上像点的扩展不仅发生在光波通过光学系统的传输过程中，而且也发生在最后的接收器件上，如乳胶底片、荧光屏、光

学纤维面板等.设透镜系统的OTF为$\widetilde{H}_0$,像面接收器的点扩展函数为h_1,求这台光学仪器总的 OTF.

7. 点扩展函数 h 的概念不仅可以用于非相干系统的光强，也可用于相干系统的复振幅. 如图，由一个波前$\widetilde{U}_0(x,y)$求另一个波前$\widetilde{U}(x',y')$本是光的传播的基本问题，这问题要由惠更斯-菲涅耳原理来计算.



习题 7 图

(1) 试说明，菲涅耳衍射积分公式可以写成如下形式：

$$\widetilde{U}(x',y')=\iint \widetilde{U}_0(x,y)h(x,y;x',y')dxdy.$$

(2) 这里的点扩展函数 $h(x,y;x',y')$满足等晕条件吗？保证空不变性需要什么条件？

(3) 写出在傍轴区域内 h 函数和 OTF 的表达式.

第六章　全息照相

早在激光出现以前，1948年伽伯（D. Gabor）为了提高电子显微镜的分辨本领而提出全息原理，并开始了全息照相的研究工作，但在五十年代里这方面工作的进展一直相当缓慢．1960年以后出现了激光，它的高度相干性和大强度为全息照相提供了十分理想的光源，从此以后全息技术的研究进入了一个新阶段，相继出现了多种全息方法，不断开辟了全息应用的许多新领域．最近十多年全息技术的发展非常迅速，它已成为科学技术的一个新领域．伽伯也因此而获得1971年度的诺贝尔物理学奖金．

全息照相可以再现物体的立体形象，并具有其它一系列独特的优点，无论拍摄和观察方法，还是基本原理，都与普通照相根本不同．在本章中我们主要介绍两点，全息照相的过程和全息照相的原理．这里充分利用前几章学习过的干涉衍射作为基础，着重于物理本质的说明，尽量避免复杂的数学推导．

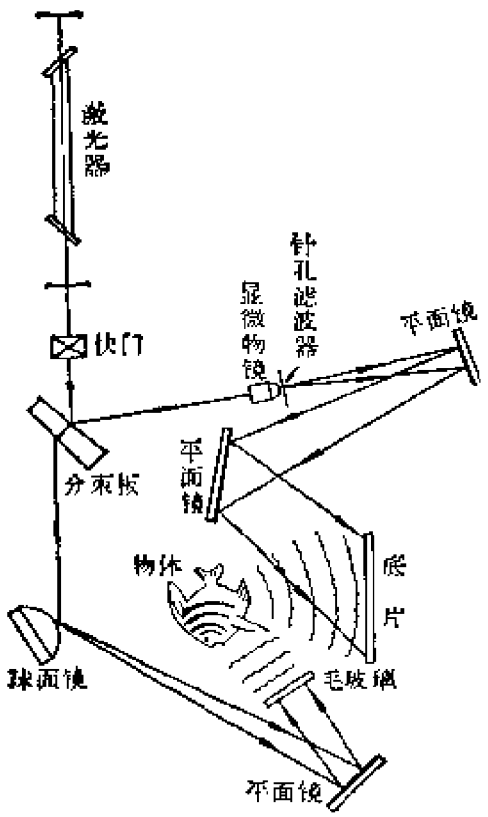


图1-1　全息照相装置

§1　全息照相的过程与特点

全息照相分两步：记录和再现．

第一步全息记录．实验装置略图如图1-1．将激光器输出的

光束分为两束，一束投射到记录介质(即感光底片)上，称为参考光束R，另一束投射到物体上，经物体反射或透射以后，产生物光束O，也到达记录介质。参考光束同物光束的相干迭加，在记录介质上形成干涉条纹，这就是一张全息图(见图1-2(a)和图1-3(a))。可见全息图不是别的，就是一张干涉花样图，它不同于普通照相的底片，用肉眼直接观察全息底片，它只是一张灰蒙蒙的片子，

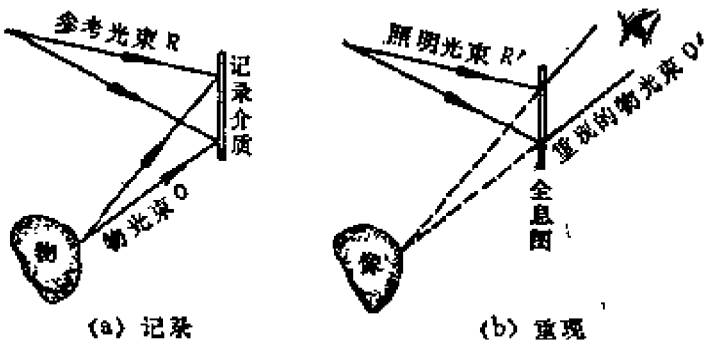


图 1-2　用球面波进行全息照相

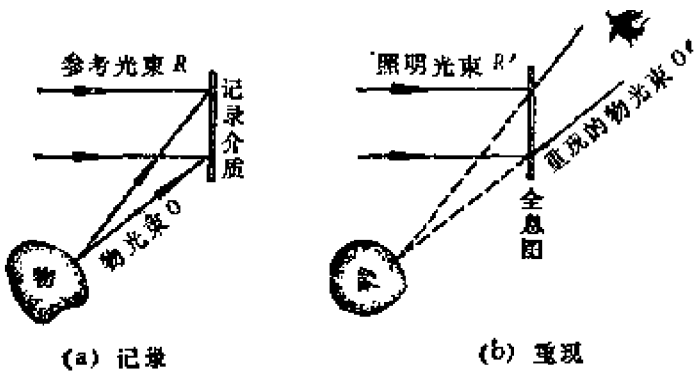


图 1-3　用平面波进行全息照相

并不直接显示被照物体的任何形象。在显微镜下可观察到它上面布满细密的亮暗条纹，这些条纹形状与原物形象也没有任何几何上的相似性。但是，全息图已经通过干涉的方法微妙地记录了物光波前上各点的全部光信息，包括振幅和位相，这就是所谓波前的全息记录。

第二步波前再现．如图1-2(b)和图1-3(b)，用一束同参考光束的波长和传播方向完全相同的光束R'①照射全息图，则用眼睛可以观察到一幅非常逼真的原物形象，悬空地再现在全息图后面原来的位置上．全息图如同一个窗口，当人们移动眼睛从不同角度观察时，就好象面对原物一样看到它的不同侧面的形象，甚至在某个角度上被物遮住的东西也可以在另一个角度上看到它（如图1-4）．可见，全息图再现的是一幅逼真的立体图像．更有意思的是，如果挡住全息图的一部分，只露出另一部分，这时再现的物体形象仍然是完整的，并不残缺．因此，即使它碎了，拿来其中一片，仍然可使整个原物再现．

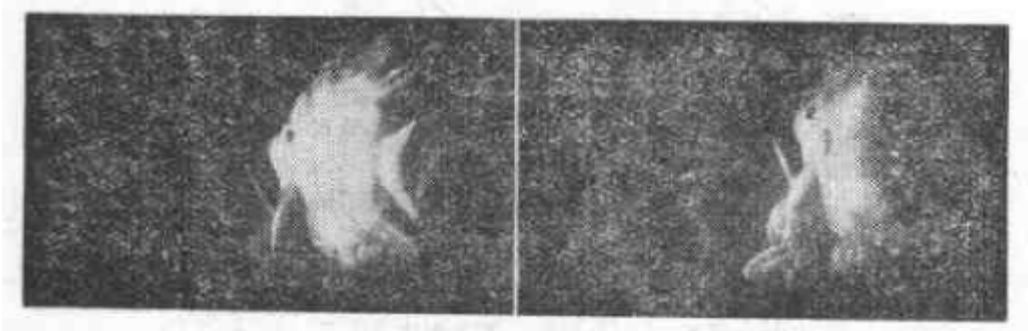


图 1-4　从不同角度观察到的全息再现像

在再现过程中，布满干涉条纹的全息图起一块复杂光栅的作用，照明光束经全息底片衍射以后，产生了复杂的衍射场，其中包含有原物的波前，人们在全息图前面看到的就是这个再现波前所产生的虚像．可见，波前再现过程就是衍射过程．所有这些问题我们还要在下面讲全息原理时详细论述．

有了上述对全息照相过程的一般了解以后，我们可以拿它同普通照相进行对比，概括出它们各自的特点：

（1）普通照相过程是以几何光学的规律为基础的．全息照

① 实际上再现时用的照明光束的波长和传播方向不一定与参考光束相同，这时仍然能观察到一幅逼真的立体形象，再现在全息图后面，但再现像的大小、位置将与原物不同，而且将带来一定的像差。

相过程分记录、再现两步，它是以干涉衍射等波动光学的规律为基础的。

（2）普通照相底片所记录的仅是物体各点的光强（或振幅），而全息图所记录的是物体各点的全部光信息，包括振幅和位相。

（3）普通照相过程中物像之间是点点对应的关系，即一个物点对应像平面中的一个像点。而全息照相过程中物体与底片之间是点面对应的关系，即每个物点所发射的光束直接落在记录介质整个平面上。反过来说，全息图中每一局部都包含了物体各点的光信息。

（4）普通照相得到的只能是二维的平面图像，而全息图能完全再现原物的波前，因而能观察到一幅非常逼真的立体图像。

（5）两者对光源的要求不同。普通照相只是像的强度记录，并不要求光源的相干性，用普通光源就可以了。全息照相是干涉记录，要求参考光束与各个物点的物光束彼此都是相干的。因此要求光源有很高的时间相干性和空间相干性。光源的相干长度越长、波前上的相干区越大，就能越有效地实现全息照相，尤其在被照物体很大的情况下更是如此。激光，作为一种有很高相干性的强光光源，十分理想地满足了这些要求。

下面将要讨论全息原理，并介绍全息应用。回过头来，将会使我们对这里所列举的全息照相一系列特点的由来和意义有更深刻的理解。

§2 全息照相的原理

2.1 惠更斯-菲涅耳原理的实质——无源空间边值定解

为了更好的领悟全息原理，让我们再一次重温大家已经相当熟悉的惠更斯-菲涅耳原理。惠更斯-菲涅耳原理的内容是波前上

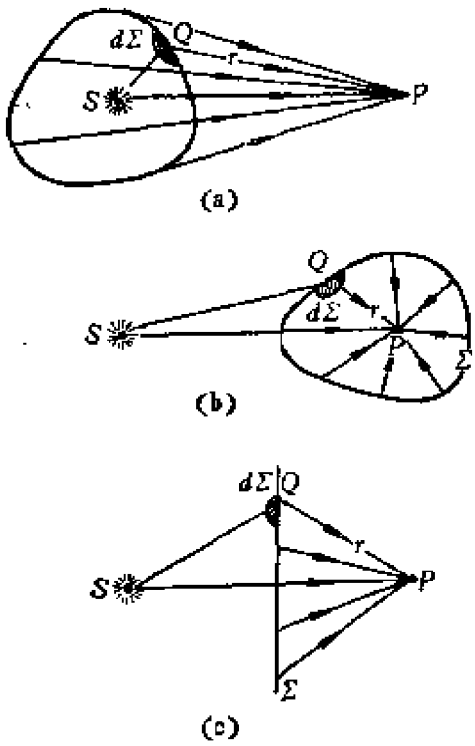


图 2-1　波前的分布决定着无源空间里波场的分布

次波的相干迭加决定着光场的分布，其实质是无源空间边值定解。

运用惠更斯－菲涅耳原理时的通常作法是用一个闭合曲面 Σ（波前）把源点 S 和场点 P 隔开（图2-1），把波前上每个面元 $d\Sigma$ 看成是次波中心，由此发出的次波在场点相干迭加，决定着场点的振动。这个思想集中地凝聚在菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式中①：

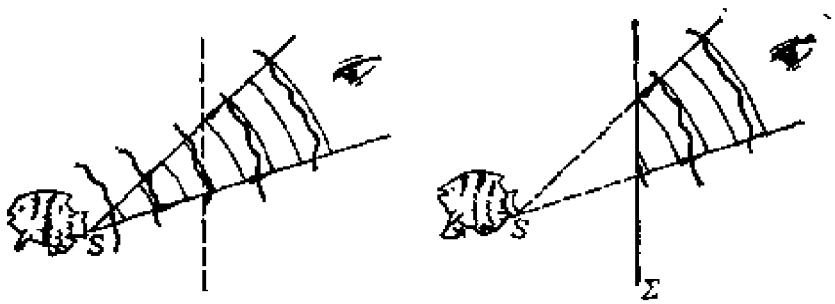
$$\tilde{U}(P)=\frac{-i}{2\lambda}\iint_{(\Sigma)}(\cos\theta_0+\cos\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma,$$

式中 Q 代表波前 Σ 上的任意点，$\tilde{U}_0(Q)$ 是波前上的复振幅分布函数，简称波前函数或波前。上式充分说明，被波前 Σ 隔开的那部分无源的场空间里，任一点 P 的振动 $\tilde{U}(P)$ 由波前上 $\tilde{U}_0(Q)$ 的分布唯一地确定。用数学的语言来说，这就是无源空间的边值定解问题。以上所述意味着：

（1）一旦波前 $\tilde{U}_0(Q)$ 发生改变，即边值条件有了改变，则无源空间内的光场就有一个重新分布。这就是衍射的实质（见第五章1.1节）。

（2）一旦波前再现，即使原物不复存在，根据边值定解的唯一性，无源空间中的光场也就再现。这就是说，在光场中一切观测的效果将会如同实物存在时那样逼真。如图2-2(a)所示，原

① 第二章式(5.10)。



(a) 实物的光波　　(b) 波前再现实物的光波

图 2-2　波前的再现意味着一切观测效果的再现

物上每一点 S 发出一列球面波，整个物体发出(经常是反射出)一个复杂的光波，传入我们的眼睛，使我们观察到它的位置和形状．现用一个波前 Σ 把物和观察者隔开，并设法把物光波在波前上造成的分布记录下来，并在移去原物时使波前上的振动分布重现出来，观察者将会在原来的地方看到与原物一模一样的形象(图 2-2(b))．产生这种奇异的效果，就是波前再现的深刻意义．

下面我们顺次介绍波前的记录和再现的方法．

2.2　波前的全息记录

全息记录就是要记录波前上光波的全部信息．照明波经物体反射或透射后，变成复杂的波场．这种波场可以看作是以物体上各点为中心的大量球面波的迭加．它可用一个复变函数来描述：

$$\widetilde{U}_O(Q) = \sum_{\text{物点}n} \widetilde{u}_n(Q) = A_O(Q)e^{i\varphi(Q)},$$

式中 Q 是波前上的点，其位置可用坐标(x,y)来表示．$\widetilde{U}_O$ 包含振幅A_O和位相 φ 两部分．传统照相术是以不相干光照明的，记录的是光强，即振幅的平方，它只反映物体的明暗，但不包含物点立体分布的信息．物点位置的信息包含在波前的相因子中，我们从第五章2.1节开始多次使用的相因子判断法，就说明了这一点．仅仅根据波前上相因子的函数形式，我们就可以判断它是平

面波还是球面波，判断平面波的传播方向和球面波的发散或会聚中心的位置．一句话，相因子告诉我们波源之所在．由此可见位相信息的重要性．可惜的是，在传统的照相技术中把它们都丢掉了．我们必须设法把波前上的这类信息记录下来，才有可能使物光波前完整地再现．

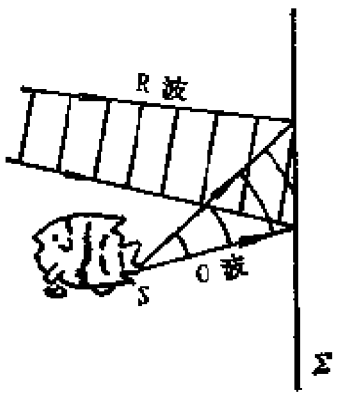


图 2-3　波前的记录

记录波前的办法靠干涉．如图2-3，用一束参考光波 R 和物光波 O 作相干迭加，在波前 Σ 上形成干涉条纹．干涉条纹的形状、间隔等几何特征反映了位相分布，条纹的反衬度反映着振幅的大小．

设波前上物光波 O 的复振幅为 $\tilde{U}_O$，参考光波 R 的复振幅为 $\tilde{U}_R$，前者往往是个很复杂的光波，后者多采用平面波或球面波．二者相干迭加后，在波前上造成的强度分布为

$$\begin{aligned} I(Q) &= (\tilde{U}_O + \tilde{U}_R)(\tilde{U}_O^* + \tilde{U}_R^*) \\ &= \tilde{U}_R\tilde{U}_R^* + \tilde{U}_O\tilde{U}_O^* + \tilde{U}_R^*\tilde{U}_O + \tilde{U}_R\tilde{U}_O^* \\ &= A_R^2 + A_O^2 + \tilde{U}_R^*\tilde{U}_O + \tilde{U}_R\tilde{U}_O^*, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 A_R 和 A_O 分别是 R 波和 O 波的振幅．上式表明，光强 $I(Q)$ 中包含了 $\tilde{U}_O$ 和 $\tilde{U}_O^*$，亦即包含了物光波及其共轭波的全部信息．

现将记录介质（感光底版）放在波前 Σ 的位置上进行曝光，把干涉条纹拍摄下来，进行线性冲洗①后，就得到一张全息图．全息图的透过率函数 $\tilde{t}(Q)$ 与曝光时的光强 $I(Q)$ 成线性关系：

$$\begin{aligned} \tilde{t}(Q) &= t_0 + \beta I(Q) \\ &= t_0 + \beta(A_R^2 + A_O^2 + \tilde{U}_R^*\tilde{U}_O + \tilde{U}_R\tilde{U}_O^*). \end{aligned} \tag{2.2}$$

① 见第五章2.2节．

对于负片，$\beta<0$；对于正片，$\beta>0$．上式表明，通过干涉曝光和线性冲洗两步，我们确实把物光波前$\widetilde{U}_O$及其共轭波$\widetilde{U}_O^*$的全部信息记录下来了．但事情并不那么单纯，即全息图并不那么"干净"，除物光波外，其中还混杂着参考光波的许多信息．如何将它们理清楚，并在再现时把物信息分离出来的问题，下面接着讨论．

2.3 物光波前的再现

如图2-4，用一束光波R'（照明波）照明全息底片．设入射的照明波波前为$\widetilde{U}'_R$，则从全息图输出的透射波前为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_T &= \widetilde{U}'_R\widetilde{t}\\ &= (t_0+\beta A_R^2+\beta A_O^2)\widetilde{U}'_R+\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R^*\widetilde{U}_O+\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R\widetilde{U}_O^*\\ &= (t_0+\beta A_R^2+\beta A_O^2)\widetilde{U}'_R+\beta A'_R A_R\{\exp[i(\varphi'_R-\varphi_R)]\widetilde{U}_O\\ &\quad+\exp[i(\varphi'_R+\varphi_R)]\widetilde{U}_O^*\}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

上式中各项都代表怎样的波场？这可由波前函数，特别是它的相因子作出判断．

通常参考波采用均匀照明，亦即它为平面波或傍轴球面波，A_R与波前上场点的位置无关，从而式(2.3)中$A_R^2=$常数，故前两项$(t_0+\beta A_R^2)\widetilde{U}'_R$与照明波前$\widetilde{U}'_R$只差一个常数因子，它们代表照明波$R'$按几何光学直线前进的透射波，我们称之为0级波．$A_O^2$是拍摄全息图时物光波在底片上造成的强度分布，它是不均匀的，故$\beta A_O^2\widetilde{U}'_R$一项代表振幅受到调制的照明波前，由于衍射，它表现为杂散的"噪声"信息．但可预期，在通常的条

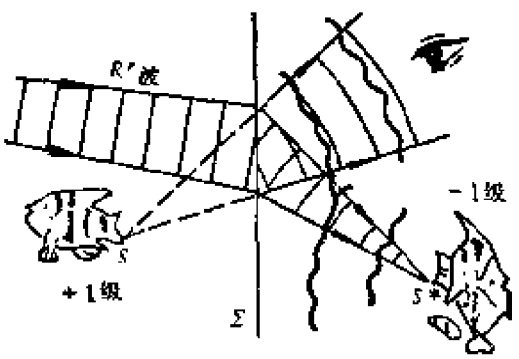


图2-4 波前的再现

件下 R' 波的衍射角不致太大，即此波的能流分布不会偏离 0 级波太远①，从物光波前再现的角度来看，以上三项都是我们不感兴趣的，在下面的讨论中暂且不去管它们。

现在看式(2.3)中的最后两项．一项正比于物光波前$\widetilde{U}_o$，另一项正比于它的共轭$\widetilde{U}_o^*$．通常照明波R'也是平面波或傍轴的球面波，即$A_R'=$常数，从而$\beta A_R A_R'$是个常数因子，较麻烦的倒是相因子$\exp[i(\varphi_R'-\varphi_R)]$和$\exp[i(\varphi_R'+\varphi_R)]$．不过适当地选择参考波 R 和照明波 R'，可使这些相因子之一或二者全部消失，那时式(2.3)中最后两项的物理意义就比较单纯了．正比于$\widetilde{U}_o$的一项称为 + 1 级波，它是发散波，在拍摄的原位置上形成物体的虚像．正比于$\widetilde{U}_o^*$ 的一项称为 − 1 级波，它是会聚波，在与原物对称的位置上形成实像．2.4节中我们将看到，附加在波前函数$\widetilde{U}_o$和$\widetilde{U}_o^*$ 前相因子的作用是使像的位置和大小发生变化．这里先看看不存在这些相因子的条件．

（1）当 R 波和 R' 波都是正入射平面波时，$\varphi_R=\varphi_R'=0$，±1级波中都无附加的相因子．

（2）当 R' 波与 R 波相同时②，$\varphi_R'=\varphi_R$，+1 级波中无附加相因子，−1 级波中有相因子$\exp(i2\varphi_R)$．

（3）当R'波是R波的共轭波时，$\varphi_R'=-\varphi_R$，−1级波中无附加相因子，+1级波中有相因子$\exp(-i2\varphi_R)$．

上述三种情况是最简单的，但实际中对 R 波和 R' 波的选择不必有什么限制和联系，它们可以一个是平面波，另一个是球面波，甚至用不同的波长．这样产生的效果不过是再现的虚像和实

---

① $|A_O|^2$ 是物体上各点发出的球面波在波前上相干迭加造成的强度分布，故它是极复杂的干涉条纹．不过它所包含空间频率的上限，可按物体上相距最远的两点在波前上产生的干涉条纹间隔来估计．按杨氏实验来计算，干涉条纹的间隔 $d\approx\lambda/\alpha$，其中 α 为物体上最远点，或者说整个被拍摄物的横向线度对场点所张的角度(视场角)．最大衍射角可用正弦光栅的衍射公式来计算：$\sin\theta\approx\lambda/d\approx\alpha$，即杂散噪声的衍射角数量级不超过被拍摄物体的视场角，在离轴的全息装置中是可以将它躲开的．

② 关键是$\widetilde{U}_R'$和$\widetilde{U}_R$具有相同的相因子，振幅是否相等是无关紧要的．

像移位和缩放.重要的是下列事实，即全息图的衍射场中有三列波：照明光照直前进的几何光学透射波(0级波)和产生一对孪生虚、实像的±1级衍射波．这个特点是带有普遍意义的．从实际的角度看，需要设法使三列波在空间上分离，互不干扰，以利于观测．为此应该采用离轴装置实现全息记录，让R波与O波有较大的夹角．图1-1是一种反射物的离轴全息记录装置，图2-5是一种透射物的离轴全息记录装置①。

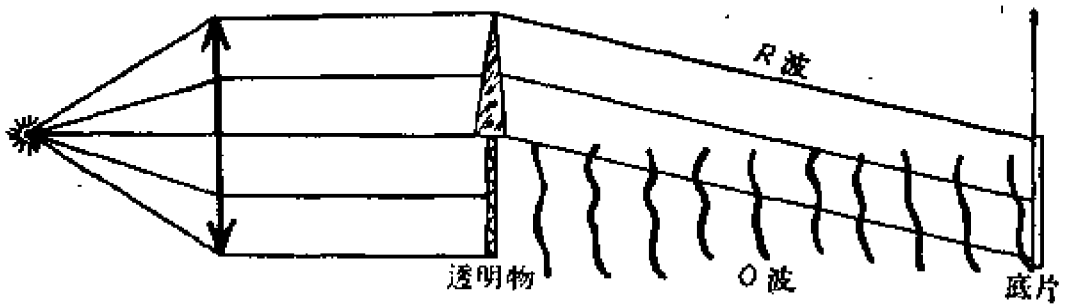


图 2-5　离轴全息记录装置

最后，有兴趣地指出，我们并非在本章中第一次遇到全息照相．第五章2.2和2.3节内讲的正弦光栅的制备和衍射，实际上就是全息照相的一个简单特例．如图2-6(a)是制备正弦光栅的装置，也可以说是全息记录装置，这里物光波是个平面波．图2-6

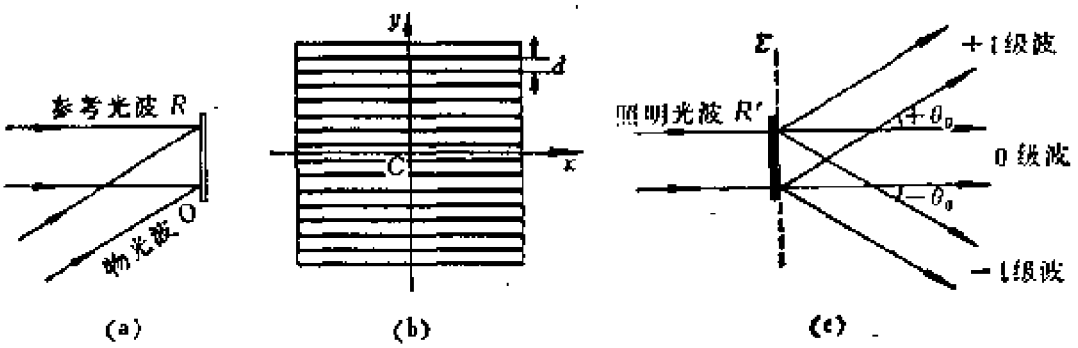


图 2-6　正弦光栅与全息照相

① 1962年出现了离轴全息装置，解决了原先共轴系统所存在的许多麻烦问题，是六十年代中全息技术迅速发展的一个重要原因．离轴全息装置要求光源的相干性好，使用激光是一很有利的条件．

(b)是制成的正弦光栅，也可以说是记录了平面物光波的全息图．图2-6(c)是正弦光栅的衍射，也可以说是全息图的再现装置，其中0级是照明光波R'的几何光学透射波，+1级衍射波相当于物光波的再现，而-1级衍射波正是它的共轭波．

从过去学过的内容中间，我们还可以再找出一个与全息术有关的事例．如图2-7(a)，以轴上物点发出的球面波为物光波，参考波R是正入射的平面波．这样拍摄的全息图如图2-7(b)所示，是一系列同心圆．读者可以计算一下，它们半径的比例与菲涅耳波带片①一致．图2-7(c)是这张全息图的再现装置，照明光波R'仍为正入射的平面波，±1级的衍射波所成的像正好是菲涅耳波带片的虚、实焦点．在第二章6.4节中我们曾说，菲涅耳波带片有一系列虚的和实的焦点，但这里只出现一对焦点．造成这区别的原因何在？原来第二章6.4节讨论的是"黑白"菲涅耳波带片，而这里的波带片(干涉条纹)是正弦型的．

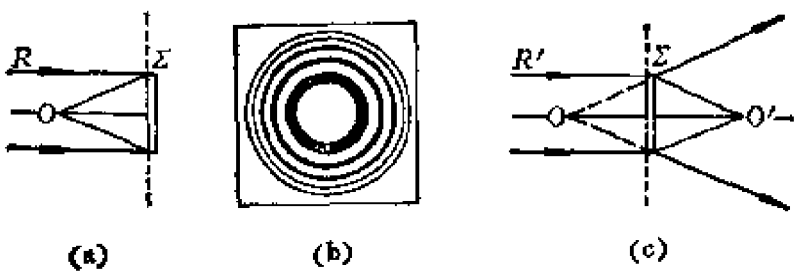


图2-7　菲涅耳波带片与全息图

2.4　线性和二次位相变换函数的作用

前面在讨论全息图物光波的再现时遇到这样一类问题：乘在一个波前函数$\widetilde{U}$上的附加相因子起什么作用？波前函数本身相因子的涵义我们应该比较熟悉了，因为自从第五章1.2节引入相因子判断法以来，我们曾多次反复使用它．现在面临的问题是再乘

① 见第二章6.4节．

上一个相因子，这是什么意思？正如第五章1.4节指出的，这相当于一个位相型的屏函数，其作用等效于让已知的波$\tilde{U}$通过某个位相型的衍射屏，如透镜、棱镜等。

第五章式(1.10)告诉我们，一个楔形棱镜的位相变换函数为

$$\varphi_p = -k(n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y), \tag{2.4}$$

它是x,y的线性函数。因此任何一个线性相因子的作用就等效于一个棱镜，棱镜的参量$(n-1)(\alpha_1,\alpha_2)$可由相应的线性系数定出。

第五章1.3节中给出的薄透镜位相变换函数为

$$\varphi_L = -k\frac{x^2+y^2}{2F}, \tag{2.5}$$

这是x,y的二次函数。任何一个二次相因子的作用将与一个薄透镜等效，透镜的焦距F可由相应的二次系数定出。

上面的讨论是泛泛而论的。若结合全息图的再现问题，可以看出，因平面的R波或R'波引起的附加相因子是线性的，其作用等效于一个楔形棱镜，使光束产生离轴的偏折。球面波在傍轴条件下的相因子在一般情况下包含线性和二次两部分，从而它等效于一个棱镜和一个透镜的联合作用(图2-8)，既使光束产生离轴的偏折，又使它发散或会聚。

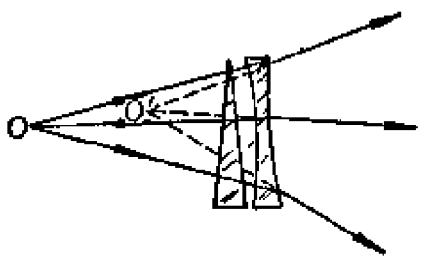
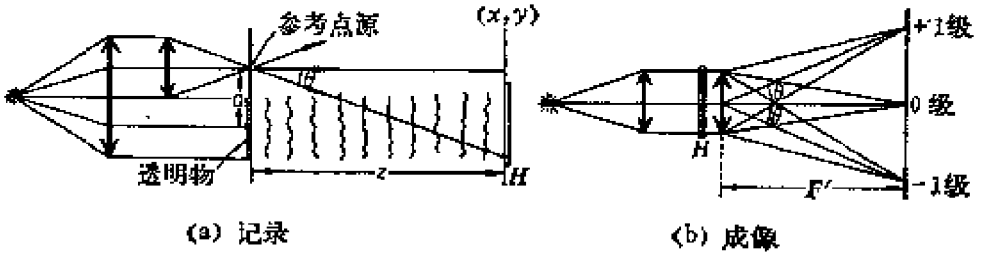


图2-8 球面R波或R'波相因子的作用

例题 图2-9(a)所示是一种共面照明的全息记录装置，其特点是再现时0，±1三级衍射波都是平面波，可用一个透镜同时会聚到后焦面上(图2-9(b))。试论证这个结论。

解 按式(2.3)再现±1级像的波前函数为

$$\begin{cases}\widetilde{U}_{+1}=\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}^*_R\ \widetilde{U}_O=\beta A_R A'_R\exp[i(\varphi'_R-\varphi_R)]\widetilde{U}_O,\\ \widetilde{U}_{-1}=\beta\widetilde{U}'_R\widetilde{U}_R\widetilde{U}^*_O=\beta A_R A'_R\exp[i(\varphi'_R+\varphi_R)]\widetilde{U}^*_O.\end{cases}$$



(a) 记录　　(b) 成像

图 2-9　例题——共面照明全息装置

如图所示，R波的中心与物共面，设它在此面内的坐标为$(a,0)$. 在傍轴条件下，R 波在底片x-y面上的波前函数为

$$\varphi_R=\frac{k}{2z}(a^2+x^2+y^2)-\frac{k}{z}ax.$$

因照明波 R'是正入射的平行光，$\varphi'_R=0$，从而摆在 $\widetilde{U}_O$,$\widetilde{U}^*_O$前面的相因子分别为 $\exp(\mp i\varphi_R)$，若无此相因子，再现的 +1级像本应在物的原始位置及其镜像对称位置上. $\widetilde{U}_O$ 前相因子$\exp(-i\varphi_R)$的作用有二：二次项$-k(x^2+y^2)/2z$相当于焦距为$F=z$的凸透镜，原来的物平面是它的前焦面，于是 +1 级 衍射波经它作用成像于无穷远；一次项 kax/z 相当于一个顶角在下的 棱 镜，把光束向上偏折一个角度 θ，其中 $\sin\theta=a/z$.（常数项$ka^2/2z$无关紧要.）$\widetilde{U}^*_O$前相因子$\exp(i\varphi_R)$的作用恰好相反，它等效于一个凹透镜和一个顶角在上的棱镜，本来是会聚的 −1 级 波所成的实像成了这个等效联合光具组的虚物，经过此光具组后成像于无穷远，且向下偏折同一角度θ. 所以如果我们采用图 2-9(b)装置，在全息图右侧再放置一个实际的会聚透镜，则上述出现于无穷远的±1级衍射波将成像于透镜的后焦面，这样我们便得到原物的两个实像.

*2.5 体全息

最后，简单提一下广为应用的体全息图．我们知道，全息图是落在记录介质上的，全息图中的干涉条纹有一定的间距 d，而记录介质的感光层也有一定厚度 l．当 $d \gg l$ 时，记录介质就相当于一薄层，在其厚度方向没有干涉条纹，所以这时构成一幅平面全息图．当 $d \ll l$ 时，在记录介质的厚度方向就将布满干涉条纹，于是就构成一幅体全息图．体全息图内部由于感光而析出的银粒分布也将是三维的，如同晶体点阵一样，它对于照明光束的衍射就是一块三维光栅的作用，只有满足布喇格条件 $2d\sin\theta = k\lambda$ 时才存在"再现"像．这里需要区别下述两种情况．当照明光束为单色光时，只有在某些特定的角度才能观察到再现像．或者，当照明光束为白光时，固定观察方向，可以有某些特定的波长满足布喇格条件而产生再现像．这就是通常所说的体全息图的角度选择性和波长选择性，以及体全息图的白光再现问题．

2.6 小结

（1）全息照相过程分全息记录和波前再现两步．

（2）全息记录依据的是干涉原理，物光波与参考光波相干迭加而产生了干涉条纹，干涉条纹的反衬度记录了物光波前的振幅分布，干涉条纹的几何特征（包括形状、间距、位置）记录了物光波前的位相分布．就是说，全息图上的强度分布记录了物光波的全部信息——振幅分布和位相分布，它们分别反映了物体的亮暗和位置等方面的特征．应当指出，任何感光底片都只能记录振幅（或者说强度）的分布，而不能直接记录位相分布．全息照相之所以能够记录位相分布，是利用了参考光波把它转化成了干涉条纹的强度分布．假如没有参考光波，或者它与物光波不相干，波前上的位相分布是不可能记录下来的．所以确切地说，全息照相记录下来的是两光波之间位相差的分布，或者用无线电技术的术语来说，全息图的记录过程是通过物光波对参考光波的调制来完成的．要想再现物光波前，还需进行解调．全息图再现过程，实

质上就是这种解调过程.

（3）波前再现的过程是光的衍射过程，照明光波经全息图衍射后出现一个复杂的光波场．在干涉底片作线性处理的条件下，全息图的衍射场总含有三种主要成分，即物光波的再现（+1级波），物光波的共轭波（-1级波），照明光波的照直前进（0级波）．在离轴记录和重现的全息照相装置中，这三列衍射波在空间彼此分离，互不干扰，便于人们用眼睛或镜头观测物光波的虚像或其共轭波的实像．

（4）无源空间边值定解是惠更斯-菲涅耳原理的实质，它是理解全息图衍射波引起观测效果的理论基础．波前函数的相因子判断法，也是分析全息图衍射场的一种有效手段．

（5）作为一门技术，全息照相还有许多重要问题值得研究讨论，如成像质量问题，放大率问题，体全息图、二次曝光全息图、时间平均全息图、以及拍摄一张高质量的全息图所必须保证的一系列实验条件等，这里就不作介绍了．

思 考 题

1．试将全息图波前的再现与平面镜成像进行比较，其中有何相同和不同之处？

2．为什么全息术对光源的时间相干性有较高的要求？在布置全息记录的光路时，人们常常注意让参考光路与物光路到达记录介质的光程尽量相近，这是为什么？为什么全息台要有很好的防震设备？

3．全息图破损就意味着丢失了一些信息，为什么再现的像仍然完整无缺？这时再现像中包含的信息没有减少吗？如果残留的全息图太小了，对再现像有什么影响？试说明理由．

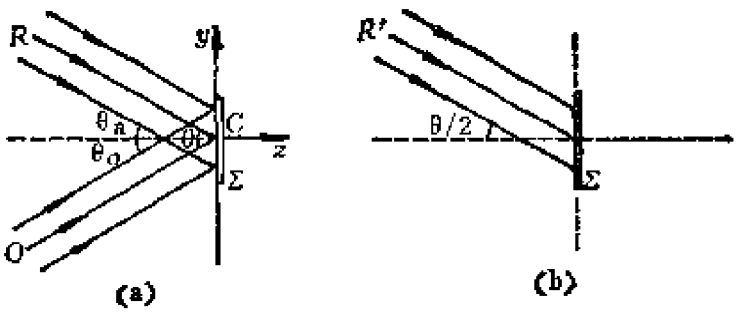
4．若制备全息图时未能作到线性冲洗，非线性效应会造成什么后果？

5．怎样配置参考光波与再现时用的照明光波，才能使再现的±1级像与原物大小一样，位置相对全息图面成镜像对称？

6．一对孪生波均为发散波（两个虚像）或均为会聚波（两个实像）是可能的吗？试设计出现此种情况的照明条件．

习　题

1. 如图(a)，参考光束R和物光束O均为平行光，对称地斜入射于记录介质Σ上，即$\theta_R=-\theta_O$，二者间的夹角$\theta=2\theta_O$.



习题1图

(1) 试说明全息图上干涉条纹的形状.

(2) 试分别写出物光波和参考光波在Σ平面上的位相分布$\varphi_O(y)$和$\varphi_R(y)$.

(3) 试证明全息图上干涉条纹的间距公式为

$$d=\frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}.$$

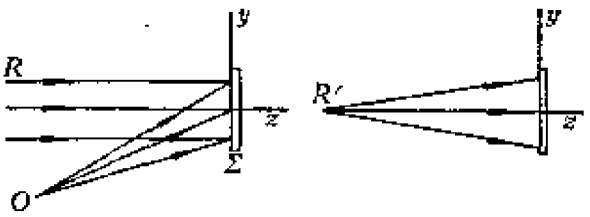
(4) 试计算，当夹角$\theta=1°$时，间距d为多少？当夹角$\theta=60°$时，间距d为多少？(采用He-Ne激光记录，$\lambda=6328\text{Å}$.)

(5) 某感光胶片厂生产一种可用于全息照相的记录干版，其性能为：感光层厚度8μm，分辨率为3000条/mm以上．利用题(4)所得数据，试说明：当夹角$\theta=60°$时，用该记录干版是否构成一张体全息图？当夹角$\theta=60°$时，该记录干版的分辨率是否匹配？

(6) 如图(b)，采用与参考光束R同样波长同样倾角的照明光束R'照射该张全息图，试分析0级，+1级，-1级三个衍射波都出现在什么方向上，并在图上画出.

2. 若在上题中改为用正入射的平面波再现，±1级衍射波各发生什么变化？

3. 如图(a)，用正入射的平面参考光波记录轴外物点O发出的球面波，



习题 8 图

(1) 如图(b)所示，用轴上的点源R'发出的球面波来再现波前，求±1级两像点的位置。

(2) 用与记录全息图时不同波长的正入射平面波照明，求±1级两像点的位置。

4. (1) 求图2-7(a)所示装置制备的全息图中各级干涉条纹的半径，并证明它们与一张菲涅耳波带片相符。

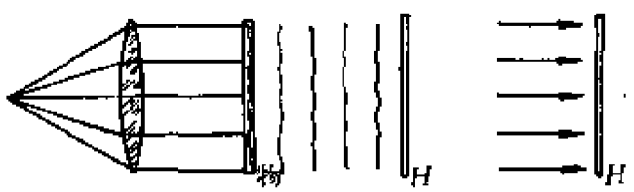
(2) 验证用图2-7(c)方式再现的两个像点O,O'确是菲涅耳波带片的一对焦点。

5. 图所示是全息术的创始者伽伯最初设计的一类共轴全息装置。设物是高度透明的，其振幅透过率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=t_0+\Delta\tilde{t}(x,y),$$

其中

$$|\Delta\tilde{t}|<t.$$



(a) 记录　　(b) 再现

习题 5 图

(1) 求记录时全息底片H上的振幅与光强分布，

(2) 线性冲洗后全息图的振幅透过率函数，

(3) 分析再现的波场，

(4) 讨论这种共轴系统的缺点与局限性。

*§3 全息术应用简介

全息照相根本不同于普通照相，它具有一系列独特的优点．全息照相可能应用的范围很广，潜力很大，但目前多数还处于实验阶段，到直接应用还有大量的工作要做．下面简单地介绍几种可能的应用．

3.1 全息电影和全息电视

由于全息照相再现像的立体感很强，因此很自然地就想到把它应用到电影和电视中去．利用体全息图的角度选择性和颜色选择性，可以在一张体全息图中贮存许多景物信息，这只须在拍摄每一景物时，把全息照片的位置转动一下．再现时，只须将全息照片放在激光光束中转动，便能把各景物互不干扰地相继显示出来，在照片的后面就可以看到活动的立体景物，这就是立体电影．观众就不必象观看用偏振光效应所摄制的立体电影那样，戴上一付讨厌的偏振眼镜了．

假如把全息图记录在电视摄像机的感光面上，然后电视台把信号发射出去，当电视接收机收了这些信号，并用激光照明时，就能再现所摄的景象，这就是立体电视．

3.2 全息显微技术

在科学实验中常常遇到要测量样品中浮动粒子的大小、分布及其它性质．由于这些粒子在不停地运动，所以观测时根本来不及将显微镜调焦到这些粒子上．有的还要求在某一时刻把体积中的粒子全部拍摄下来．一般这类问题是无法直接观测的，只能用统计的方法进行推算．应用全息照相，就能很方便地解决这个问题．如果用短脉冲激光来照明样品，拍摄一定体积内粒子的运动状况，再现时就可以将粒子的大小、粒子的瞬时分布状况用显微镜层层聚焦、逐次观察．这方面的发展就是全息显微技术．全息照相的想法当初就是为了改进电子显微镜的分辨本领而提出的．

3.3 全息干涉技术

利用二次曝光或连续曝光全息图可以将物体变化状况记录在同一张全息照片上(图3-1)．再现时就得到相互交迭的像，这两个或多个光波就会发

生干涉，从干涉条纹的分析中可以得出物体的变化情况．这方面的发展就是全息干涉技术．利用这一技术，可以研究物体的微小形变或微小振动、高速运动的现象、封闭容器内的爆炸过程，等等．利用全息干涉技术于精

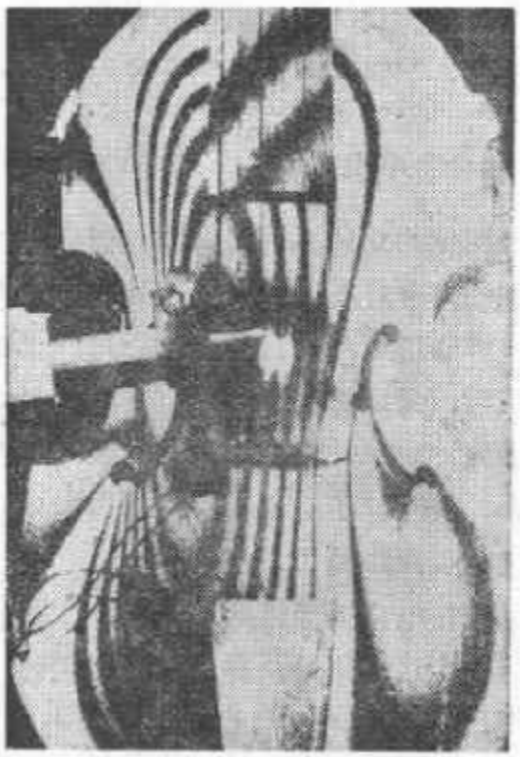


图 3-1　提琴振动的连续曝光全息照相

密计量工作中，可以克服以前干涉计量技术只能分析简单的干涉图案的限制，也不需要很规则的测量对象和高质量的光学部件，而可对任意形状、任意表面进行研究，例如可以对凝聚物、岩石样品、金属物件、电子元件以及在风洞中的冲击波和流线等高速运动现象进行干涉计量研究．

3.4　红外、微波及超声全息照相技术

全息照相在军事观察、侦察和监视上具有重要意义．我们知道，一般的雷达系统只能探测到目标的距离、方位、速度等，而全息照相则能提供目标的立体形象，这对于及时识别飞机、导弹、舰艇等有很大作用，因而受到人们的重视．但是可见光在大气及水中传播时衰减较大，在不良的气候条件下甚至无法工作．为了克服这个困难，发展出红外、微波及超声全息技术，也就是用相干的红外光、微波及超声波拍摄全息照片，然后用相

干可见光再现物像．这种全息技术在原理上和可见光全息照相完全一样，技术上的关键问题是寻找灵敏的记录介质和合适的再现方法．

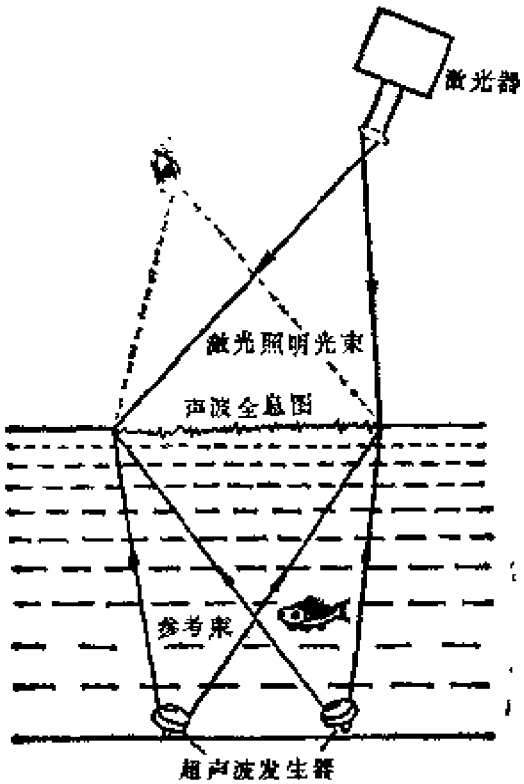


图 3-2　用激光束再现超声全息图

超声全息照相能再现潜伏于水下物体的三维图像，可以用来进行水下侦察和监视(如图3-2)，因而受到极大重视．由于对可见光不透明的物体往往对超声波"透明"，超声全息照相也能用于医疗透视诊断，还可以在工业上用作无损探伤．

3.5　全息照相存储技术

存储器是电子计算机中的重要部分．它在计算机中的作用，就象人的大脑那样，起记忆数字、信息、中间结果的作用．目前计算技术发展很快，运算速度已达每秒10^8次，而且容量也很大．这就要求有高速度、大容量而且可靠性很高的存储器与之相配合．全息存储器是目前正在大力发展的几种存储器之一．体全息具有很大的信息存储量，在一张全息图上可

以并存许多全息图，利用角度选择性可以依次读出不同的信息．目前已试制成的全息照相存储器，可在1cm²的胶片上存10^7个信息，比目前使用的其它存储器要高一到两个数量级．工作周期约为50ns．由于这种存储器是用照相的方法将信息固定在全息图上的，所以保存信息的可靠性很高，不易失去．

全息照相用于信息处理和信息显示，也是目前正在大力发展的一个重要的应用方向．

*§4 傅里叶全息图及其应用举例

4.1 傅里叶全息图

物体或图像的光信息既直接表现在它的波前函数上，也包含在它的频谱中．对物光波波前的全息记录和再现手段，同样可以用来记录和再现物光波的频谱，这就是所谓傅里叶变换全息图．

物频谱的全息记录装置可按图4-1所示安排，将透射物置于透镜的前焦面上，用正入射的平行光照明．由于透镜的傅里叶变换功能，在后焦面上获得物频谱．在透射物所在的平面内设置一个参考点源，它提供一个斜入射平面参考光波，照射在底片H上与物频谱波相干迭加，实现物频谱的全息记录．经线性冲洗，即得到一张傅里叶变换全息图．

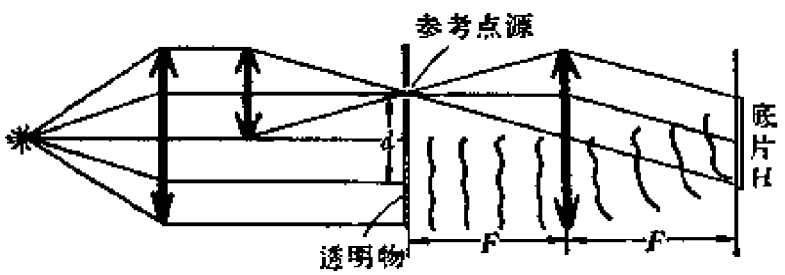


图 4-1 物频谱的全息记录装置

4.2 特征字符识别

下面介绍一个傅里叶全息图的应用——特征字符识别．

在一张图片上可能存在我们感兴趣的某种特征信息．例如一页纸上有

许多字母(图4-2左)，现欲将其中某个特定的字母A 鉴别出来．为此我们先按图4-1的方式制备这个特征信息(字母A)的傅里叶全息图，然后将此傅里叶全息图插入 $4F$ 系统(见第五章6.2节)的变换平面，作滤波器使用(匹配滤波器)．待识别的图像置于$4F$系统的输入平面，经系统信息处理的结果，在输出平面上除了几何光学像和一些杂乱的斑块外，还可能出现若干离散的亮斑．这些亮斑的分布反映了物平面上存在特征信息(字母A)的部位．

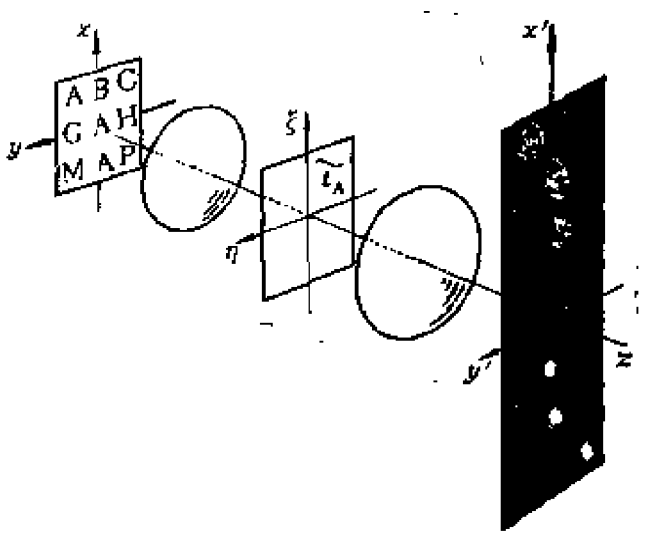


图 4-2　特征字符识别

特征字符识别的原理简述如下．先分析匹配滤波器的透过率 $\tilde{t}_A$，设图4-1中参考点源在 x-y平面内的坐标为$(d,0)$．特征字符的信息为$a(x,y)$，它们的频谱分别为

$$\delta(x-d,y)\rightleftharpoons\exp(-i2\pi f_x d) \tag{4.1}$$

$$a(x,y)\rightleftharpoons A(f_x,f_y), \tag{4.2}$$

其中$(f_x,f_y)=(x',y')/\lambda F$．后焦面上的记录介质经线性冲洗后，其透过率函数 $\tilde{t}_A(x',y')$正比于干涉强度 $I(x',y')$

$$\begin{aligned}\tilde{t}_A(x',y')&\propto I(x',y')\\&=[\exp(-i2\pi f_x d)+A(f_x,f_y)][\exp(i2\pi f_x d)+A^*(f_x,f_y)]\\&=1+AA^*+A\exp(i2\pi f_x d)+A^*\exp(-i2\pi f_x d).\end{aligned} \tag{4.3}$$

现将此全息图置于$4F$系统的变换平面上．设物信息为 $\tilde{U}_0(x,y)$，入射在变换平面上的衍射场为$\tilde{U}_1(\xi,\eta)=\mathscr{F}\{\tilde{U}_0(x,y)\}$，经匹配滤波器透射出来的波前为

$$\widetilde{U}_2(\xi,\eta)=\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\widetilde{t}_A(\xi,\eta)$$
$$=\widetilde{U}_1(\xi,\eta)[1+AA^*+A\ \exp(i2\pi f_x d)+A^*\exp(-i2\pi f_x d)], \tag{4.4}$$

其中$(f_x,f_y)=(\xi,\eta)/\lambda F$.

最后我们求$4F$系统像面上的输出，这既可求上式的傅里叶变换式，又可求它的傅里叶逆变换式，二者只在坐标变量上相差一正负号，它反映了$4F$系统是横向放大率$V=-1$的成像系统（参看第五章6.2节）．这里我们采用傅里叶逆变换，回到物平面去讨论问题．利用傅里叶变换的卷积定理和相关定理，式(4.4)中各项的傅里叶逆变换为

$$\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)\}=\widetilde{U}_O(x,y), \tag{4.5}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)AA^*\}=\widetilde{U}_O(x,y)*a(x,y)\bigstar a(x,y), \tag{4.6}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)A\ \exp(i2\pi f_x d)\}=\widetilde{U}_O(x,y)*a(x,y)*\delta(x+d)$$
$$=\widetilde{U}_O(x,y)*a(x+d,y), \tag{4.7}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)A^*\exp(-i2\pi f_x d)\}=\mathscr{F}^{-1}\{\widetilde{U}_1(\xi,\eta)[A\exp(i2\pi f_x d]^*\}$$
$$=[a(x,y)*\delta(x+d)]\bigstar\widetilde{U}_O(x,y)$$
$$=a(x+d,y)\bigstar\widetilde{U}_O(x,y). \tag{4.8}$$

式(4.5)反映到像面上就成为几何光学像；式(4.6)是迭加在其上的一些杂散分布；式(4.7)和(4.8)分别是卷积项和互相关项，由于当初参考点源是离轴的，致使目前这两项分别出现在像面的上部和下部．其中最重要的是互相关项，它将给出反映特征字符位置的亮斑．理由大致可用第五章§5例题3中所说相关函数的"搜索"作用来解释．因为对于黑白字符，相关的意义就是重迭面积的大小．只有相同字符才能完全重合，即它们的相关最强，不同字符的相关要弱得多．式(4.8)中的相关函数意味着用特征字符A的信息在物平面的复杂信息中搜索，一旦遇到与自身相同的字符时，就给出一个强烈的信号(亮斑)①.

① 式(4.7)中的卷积相当于用倒转的特征字符去搜索，一般已不能与原字符完全重合了.

第七章　光在晶体中的传播

本章讨论光在各向异性媒质中的传播．在各向异性媒质中我们主要讨论晶体，但也不完全限于晶体．对于光本身，在这里突出的是它的偏振态的改变问题．

§1　双　折　射

1.1　双折射现象和基本规律

取一块冰洲石(方解石的一种，化学成分是$CaCO_3$)，放在一张有字的纸上，我们将看到双重的像(见图1-1左方)．平常我们把一块厚玻璃砖放在字纸上，我们只看到一个像(图1-1右方)，这个像好象比实际的物体浮起了一点，这是因为光的折射引起的，折射率越大，像浮起来的高度越大．我们可以看到，在冰洲石内的两个像浮起的高度是不同的，这表明，光在这种晶体内成了两束，它们的折射程度不同．这种现象叫做双折射．下面我们通过一系列实验来说明双折射现象的特点和规律．



图 1-1　冰洲石双折射现象的照片

（1）o光和e光　如图1-2，让一束平行的自然光束正入射在冰洲石晶体的一个表面上，我们就会发现光束分解成两束．按照光的折射定律，正入射时光线不应偏折．而上述两束折射光中的一束确实在晶体中沿原方向传播，但另一束却偏离了原来的方向，后者显然是违背普通的折射定律的．如果进一步对各种入射方向进行研究，结果表明，晶体内的两条折射线中一条总符合普通的折射定律，另一条却常常违背它．所以晶体内的前一条折射线叫做寻常光(简称o光)，后一条折射线叫做非常光(简称e光)①．应当注意，这里所谓o光和e光，只在双折射晶体的内部才有意义，射出晶体以后，就无所谓o光和e光了．

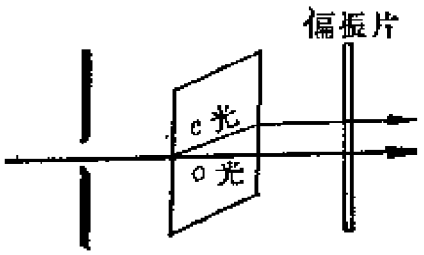


图1-2　o光和e光及其偏振状态的演示

（2）晶体的光轴　在冰洲石中存在着一个特殊的方向，光线沿这个方向传播时o光和e光不分开(即它们的传播速度和传播方向都一样)，这个特殊方向称为晶体的光轴②．为了说明光轴的方向，我们稍详细地研究一下冰洲石的晶体．冰洲石的天然晶体，如图1-3所示，它呈平行六面体状，每个表面都是平行四边形．它的一对锐角约为78°，一对钝角约为102°．读者对照冰洲石晶体的实物或其模型可以看出，每三个表面会合成一个顶点，在八个顶点中有两个彼此对着的顶点(图中的A，B)是由三个钝角面会合而成的．通过这样的

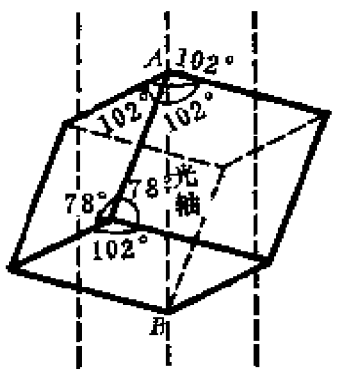


图1-3　冰洲石的光轴

① o和e源于英语ordinary(寻常)和extraordinary(不寻常)两字第一字母．
② 注意不要与几何光学中透镜的光轴混淆起来，这完全是两回事．

顶点并与三个界面成等角的直线方向，就是冰洲石晶体的光轴方向.我们总是强调“方向”二字，因为“光轴”不是指一条线，晶体中任何与上述直线平行的直线，都是光轴．光轴代表晶体中的一个特定方向．如图1-4所示，如果我们把冰洲石晶体的这两个钝顶角磨平，使出现两个与光轴方向垂直的表面，并让平行光束对着这表面正入射，光在晶体中将沿光轴方向传播，不再分解成两束．

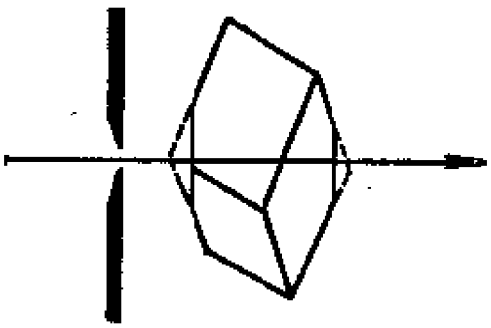


图 1-4　晶体光轴的演示

（3）主截面　光线沿晶体的某界面入射，此界面的法线与晶体的光轴组成的平面，称为主截面．当入射线在主截面内，即入射面与主截面重合时，两折射线皆在入射面内；否则，非常光可能不在入射面内．

（4）双折射光的偏振　如果在图1-2所示的实验中用检偏器来考察从晶体射出的两光束时，就会发现它们都是线偏振光，且两光束的振动方向相互垂直．

1.2　单轴晶体中的波面

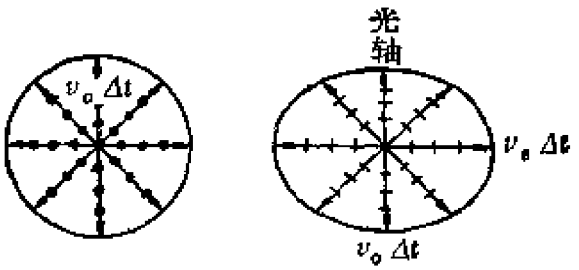
除冰洲石外，许多晶体具有双折射的性能．双折射晶体有两类，象冰洲石、石英、红宝石、冰等一类晶体只有一个光轴方向，它们叫做单轴晶体；象云母、蓝宝石、橄榄石、硫磺等一类晶体有两个光轴方向，它们叫做双轴晶体．光在双轴晶体内的传播规律比1.1节描述的更为复杂，将在1.6节介绍，这里只讨论单轴晶体．

在第一章§2中我们利用惠更斯的波面作图法讨论了光束在各向同性媒质中传播和折射的规律．要研究光在各向异性的双折射晶体中传播和折射的规律，也需要知道波面的情况．

我们知道，在各向同性媒质中的一个点光源(它可以是真正的点光源，也可以是惠更斯原理中的次波中心)发出的波沿各方向传播的速度 $v=c/n$ 都一样，经过某段时间Δt 后形成的波面是

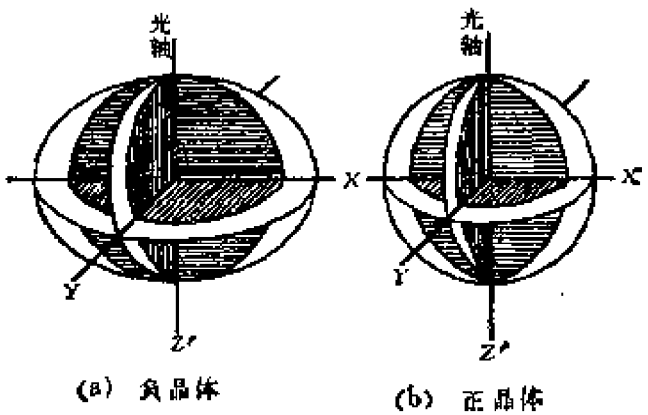
一个半径为 $v\Delta t$ 的球面.

在单轴晶体中的 o 光传播规律与普通各向同性媒质中一样，它沿各方向传播的速度v_o相同，所以其波面也是球面(图1-5(a))。但e光沿各个方向传播的速度v不同.沿光轴方向的传播速度与o光一样，也是v_o，垂直光轴方向的传播速度是另一数值v_e. 在经过Δt时间后e光的波面如图1-5(b)所示，是围绕光轴方向的回转椭球面. 把两波面画在一起，它在光轴的方向上相切(见图1-6)。



(a) o 光　　(b) e 光

图 1-5　单轴晶体中的波面



(a) 负晶体　　(b) 正晶体

图 1-6　负晶体与正晶体

为了说明o光和e光的偏振方向，我们引入主平面的概念，晶体中某条光线与晶体光轴构成的平面，叫做主平面. 图1-5 的纸平面就是其上画出各光线的主平面. o 光电矢量的振动方向与主平面垂直，e 光电矢量的振动方向在主平面内.

单轴晶体分为两类：一类以冰洲石为代表，$v_e > v_o$，e光的波面是扁椭球，这类晶体叫做负晶体．另一类以石英①为代表，$v_e < v_o$，e光的波面是长椭球，这类晶体叫做正晶体．

我们知道，真空中光速 c 与媒质中光速 v 之比，等于该媒质的折射率 n，即 $n = c/v$．对于 o 光，晶体的折射率 $n_o = c/v_o$．但对 e 光，因为它不服从普通的折射定律，我们不能简单地用一个折射率来反映它折射的规律．但是通常仍把真空光速 c 与 e 光沿垂直于光轴传播时的速度 v_e 之比叫做它的折射率，即 $n_e = c/v_e$．这个 n_e 虽不具有普通折射率的含义，但它与 n_o 一样是晶体的一个重要光学参量．n_o 和 n_e 合称为晶体的主折射率．下面将看到，n_e 和 n_o 一起，再加上光轴的方向，可以把 e 光的折射方向完全确定下来．

对于负晶体，$n_o > n_e$；对于正晶体，$n_o < n_e$．冰洲石和石英对于几条特征谱线的 n_o，n_e 值列于表Ⅶ-1内．

表Ⅶ-1　单轴晶体的 n_o 与 n_e

元　　素	谱线波长	方解石（冰洲石）		水　晶（即石英）	
		n_o	n_e	n_o	n_e
Hg	4046.56 Å	1.68134	1.49694	1.55716	1.56671
	5460.72 Å	1.66168	1.48792	1.54617	1.55535
Na	5892.90 Å	1.65836	1.48641	1.54425	1.55336

1.3　晶体的惠更斯作图法

第一章§2中讲过用惠更斯原理求各向同性媒质中折射线方向的方法，在晶体中求 o 光和 e 光的折射方向也需用这个方法．下面我们先把该节中讲的惠更斯作图法的基本步骤归纳一下．如图1-7(a)所示：

① 石英晶体中波面的性质比这里描述的情况要复杂些，详见后面§5．

（1）画出平行的入射光束，令两边缘光线与界面的交点分别为 A, B'.

（2）由先到界面的 A 点作另一边缘入射线的垂线 AB，它便是入射线的波面．求出 B 到 B' 的时间 $t=\overline{BB'}/c$，c 为真空或空气中的光速．

（3）以 A 为中心、vt 为半径（v 为光在折射媒质中的波速）在折射媒质内作半圆（实际上是半球面），这就是另一边缘入射线到达 B' 点时由 A 点发出的次波面．

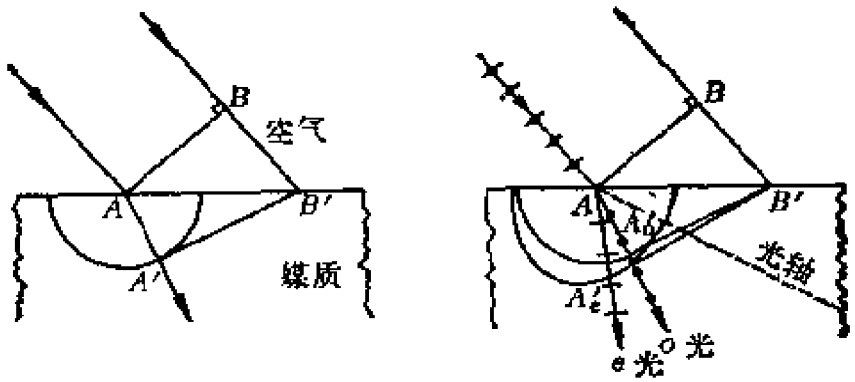


图 1-7　用惠更斯作图法求折射线

（4）通过 B' 点作上述半圆的切线（实际上为切面，即第一章§2中所说的包络面），这就是折射线的波面．

（5）从 A 联接到切点 A' 的方向便是折射线的方向．

现在把这一方法应用到单轴晶体上（图1-7(b)），这里情况唯一不同之处是从 A 点发出的次波面不简单地是一个半球面，而有两个，一是以 $v_o t$ 为半径的半球面（o 光的次波面），另一是与它在光轴方向上相切的半椭球面，其另外的半主轴长为 $v_e t$（e 光的次波面）．作图法的（1）和（2）两步同前，第（3）步中应根据已知的晶体光轴方向作上述复杂的次波面．第（4）步中要从 B' 点分别作 o 光和 e 光次波面的切面，这样得到两个切点 A_o' 和 A_e'，从而

在第(5)步中得到两根折射线AA_o'和AA_e'，它们分别是o光和e光的光线。

应当注意，在图1-7(b)中给的主截面与入射面重合（即纸平面），从而切点A_o'，A_e'和两折射线都在此同一平面内。根据定义，这平面也是两折射线的主平面。这样，我们就可以判知两折射光的偏振方向：o光的振动垂直纸面，e光的振动在纸平面内。

下面我们讨论几个较简单但有重要实际意义的特例。

例1 光轴垂直于界面，光线正入射(图1-8)。

在正入射的情况下，两边缘光线同时到达界面上的A，B点，这时我们需要同时作A，B两点发出的次波波面(它们的大小一样)，并作它们的共同切面(即包络面)，这时切点A_o'和A_e'重合于A'，B_o'和B_e'重合于B'，由切点位置可确定折射线的方向。由图可以看出，在此情形里，折射线的传播方向未变，仍与界面垂直(即沿光轴方向)，且o光和e光的波面重合(它们都是$A'B'$)，这意味着两折射线的速度一样都是v_o，也就是说，没有发生双折射(按照光轴的定义，也正应如此)。

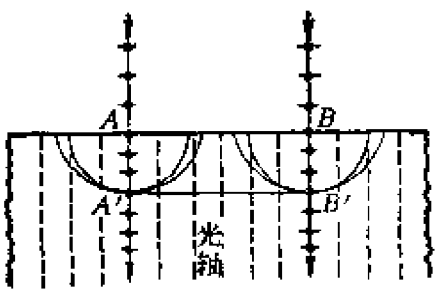


图 1-8 例 1

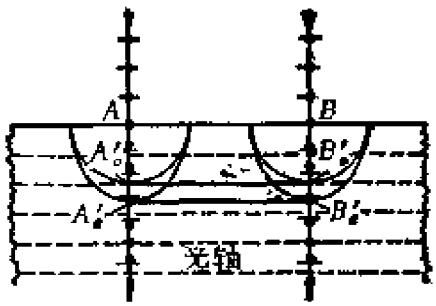


图 1-9 例 2

例2 光轴平行于界面，光线正入射(图1-9)。

这时o光和e光的次波波面与包络面的切点A_o'和A_e，B_o和B_e'不再重合。两折射线的传播方向虽然仍未变(与界面垂直)，但o光的波速为v_o，e光的波速为v_e，二者不同。我们说这时还是隐含了双折射。o光、e光波速的差异引起的效果，我们将在§2里提到。

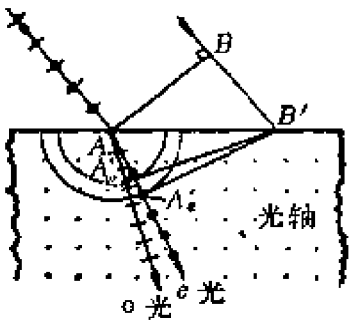


图 1-10　例 3

例 3　光线斜入射，光轴垂直于入射面(即纸面，见图1-10)．

这时由 A 点发出的次波波面在纸平面内的截线是同心圆，o 光、e 光分别以波速 v_o，v_e 传播．在这特殊情形里两折射线都服从普通的折射定律，只不过折射率分别为 n_o 和 n_e．

在普遍的情形里，光轴既不与入射面平行也不与它垂直，这时 e 光次波面与包络面的切点 A_e' 和 e 光本身都不在入射面内，我们就不能用一张平面图来表示了．

*1.4　法线速度(相速)与射线速度　波法面与射线面

过去我们在研究波在各向同性媒质中传播的问题时，有关波面、波的传播方向和传播速度等概念，都只引进了唯一的一种："波面"是指等位相面；传播方向用波矢 $\boldsymbol{k}$ 来表征，其方向沿波面的法线，它既是波面向前推移的方向，也是波所携带能流的方向；谈到波速，就是指波面沿法向向前推移的速度 $v=\lambda/T=\omega/k$，它称为相速．在各向异性媒质中，上述各种概念都复杂化了，我们通过一个例子来说明．

通常在使用双折射晶体时，往往把它磨成前后表面平行的晶片，令平面波从它的一个表面正入射(见图1-11)．下面专门考察 e 光，即振动电矢量在主平面内分量的传播．用惠更斯作图法不难看出，这时晶体内 e 光的波面保持与晶体表面平行，它们向前推移的方向仍沿其法线 $\overrightarrow{ON}$ 和 $\overrightarrow{O'N'}$，但光线的方向沿 $\overrightarrow{OR}$ 和 $\overrightarrow{O'R'}$，这里 R 和 R' 是包络面与次波面的切点．当光轴与法线间的夹角 θ 不为 0 或 90° 时，$\overrightarrow{OR}$ 的方向总与 $\overrightarrow{ON}$ 不同，令其间夹

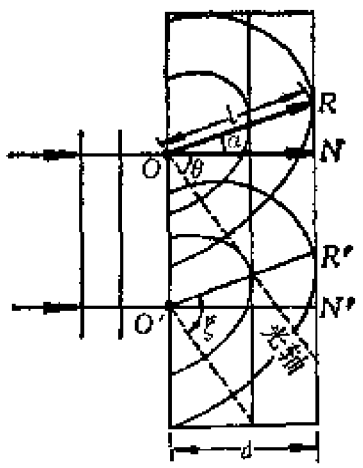


图 1-11　法线速度与射线速度

角为α．用$d=\overline{ON}$代表晶片的厚度，l 代表光线$\overline{OR}$的长度，则 $l\cos\alpha=d$．设波面由O传播到N的时间为t，在此同一时间内光线从O传播到包络面切点R．前一传播速度叫法线速度，即相速，用v_p表示；后一传播速度叫射线速度，用v_r表示；

$$v_p=\frac{d}{t},\qquad v_r=\frac{l}{t}.$$

二者的关系是

$$v_p=v_r\cos\alpha. \tag{1.1}$$

用电磁理论可以证明，射线的方向沿能流密度矢量$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$的方向；在无色散媒质中，$v_r$等于能量传播的速度．

在各向异性媒质中，e光的法线速度v_p和射线速度v_r都随相对于光轴的取向而改变．从晶体中任一点O(次波中心)引各方向的v_p矢量，其端点描绘的轨迹，叫做波法面．同样，从O引各方向的v_r矢量，其端点描绘的轨迹，叫做射线面．使用相速和波法面的概念来计算比较方便，但物理意义比较具体的是射线速度和射线面，它们是与能量的传播方向联系在一起的．在1.3节惠更斯作图法中使用的次波面(等位相面)，正是射线面的几何相似形．

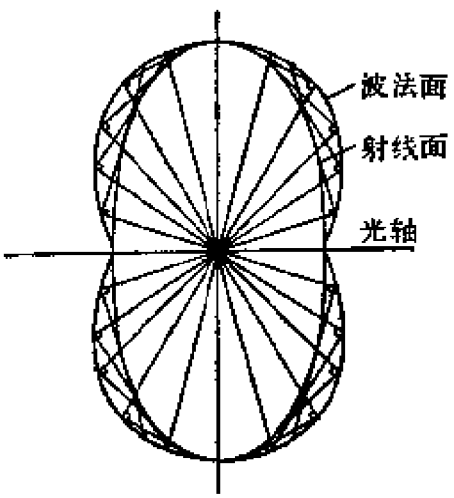


图 1-12　e光的波法面与射线面

波法面和射线面二曲面的几何关系示于图1-12，通过波法面每个矢径的端点作一个垂面，这些垂面的包络面即为射线面．或者反过来，通过射线面上每一点作切面，并由中心O引切面的垂线，垂足的轨迹即为波法面．理论上可以证明，对于无色散的单轴晶体的e光来说，它们的方程分别为

$$\begin{cases}\text{波法面}\left(\dfrac{v_p}{c}\right)^2=\dfrac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{n_e^2}, & (1.2)\\[2ex] \text{射线面}\left(\dfrac{c}{v_r}\right)^2=n_o^2\cos^2\xi+n_e^2\sin^2\xi. & (1.3)\end{cases}$$

这里θ和ξ分别是v_p和v_r与光轴的夹角($\xi=\theta+\alpha$，图1-11)．可以看出，射线面是二次曲面(回旋椭球面)．波法面是四次曲面(回旋卵形面)①．波法面和射线面在平行和垂直光轴的方向上相切，在这些方向上v_p和v_r没有区别．o光和各向同性媒质中的光线一样，其波法面和射线面重合在一起，二者都是球面．

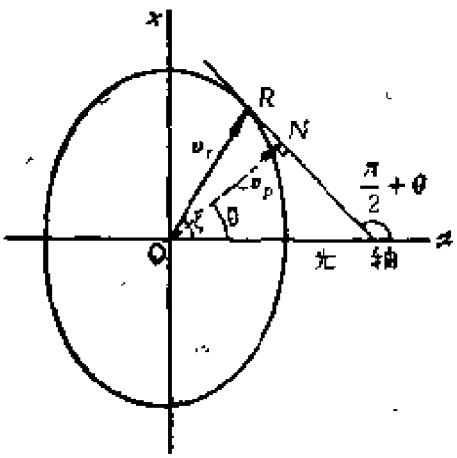


图1-13 v_r的倾角ξ与v_p的倾角θ的关系

根据上述波法面和射线面之间的关系，我们不难求出v_r的倾角ξ和v_p的倾角θ之间的关系．图1-13所示是射线面在$x-y$面上的剖面图，其中x方向是光轴．射线面是以v_r/c为矢径的，把式(1.3)中的$(v_r/c)\cos\xi=v_{r,z}/c$和$(v_r/c)\sin\xi=v_{r,x}/c$分别写成z和x，则$z-x$剖面的椭圆方程写为

$$n_o^2z^2+n_e^2x^2=1,$$

取微分，得

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{n_o^2z}{n_e^2x}.$$

由图1-13可知，$z/x=\cot\xi$，$dx/dz=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$，代入上式即得

$$\cot\theta=\frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi. \tag{1.4}$$

此式给出ξ和θ的对应关系．

在各向异性媒质中，任意方向e光的折射率通常定义为真空中光速c与该方向的相速之比②，因此它是θ角的函数

$$n(\theta)=\frac{c}{v_p(\theta)}. \tag{1.5}$$

---

① 实际中n_e和n_o差别没有图1-12中画的那样大，从而波法面与射线面的差别也没有那样突出．波法面的外貌还是很象一个椭球面的．

② 有时也用c/v_r之比来定义折射率，这种折射率叫做射线折射率，用$n_r(\xi)$表示．

根据式(1.2)，得

$$n^2(\theta)=\frac{n_o^2\,n_e^2}{n_e^2\cos^2\theta+n_o^2\sin^2\theta}. \tag{1.6}$$

例题 ADP(磷酸二氢铵，$NH_4H_2PO_4$)晶体，是单轴负晶体，$n_o=1.5246$，$n_e=1.4792$，切割成如图 1-14 所示的晶片，光轴与表面成 45°角．厚度 $d=1\text{cm}$．光线正入射，求(1) e 光的偏向角 α，(2) o，e两光束穿过晶片后的光程差．

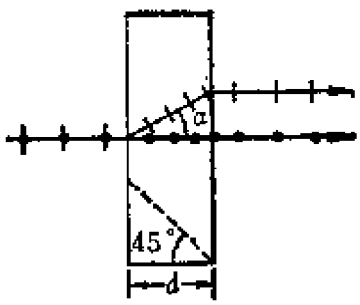


图 1-14 例题——ADP晶片

解 (1)

$$\theta=45^\circ$$

$$\cot\xi=\frac{n_e^2}{n_o^2}\cot\theta=\left(\frac{1.4792}{1.5246}\right)^2\cot 45^\circ=0.9413,$$

故

$$\xi=46^\circ44',\qquad \alpha=\xi-45^\circ=1^\circ44'.$$

(2)
$$n(45^\circ)=\frac{1.4792\times1.5246}{\sqrt{(1.4792)^2\cos^2 45^\circ+(1.5246)^2\sin^2 45^\circ}}$$

$$=1.5014.$$

e 光的光程 $L_e=n(45^\circ)d$，o 光的光程 $L_o=n_od$，光程差

$$\Delta L=[n(45^\circ)-n_o]d=(1.5014-1.5246)\times 1\text{ cm}$$
$$=-0.0232\text{ cm}.$$

*1.5 折射率椭球

我们不可能在本课中对晶体光学的电磁理论作详尽的介绍，这里只想提及其中某些重要的概念和结论．

在各向同性媒质中电位移矢量$\boldsymbol{D}$与电场强度$\boldsymbol{E}$的关系是

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E},$$

这里 ε 是相对介电常数，光学中的折射率 $n\approx\sqrt{\varepsilon}$(在光学波段中，总可以假定相对磁导率 $\mu=1$)．上式表明，$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{E}$ 的方向一致．然而在各向异性媒质中，$\boldsymbol{D}$与在一般情况下方向是不一致的，它们满足如下张量关系：

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{xx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{xy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{xz}\varepsilon_0 E_z, \\ D_y = \varepsilon_{yx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{yy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{yz}\varepsilon_0 E_z, \\ D_z = \varepsilon_{zx}\varepsilon_0 E_x + \varepsilon_{zy}\varepsilon_0 E_y + \varepsilon_{zz}\varepsilon_0 E_z. \end{cases} \tag{1.7}$$

存在着相互垂直的三个方向，若沿着它们选取坐标系。可使上述张量式“对角化”：

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_a\varepsilon_0 E_x, \\ D_y = \varepsilon_b\varepsilon_0 E_y, \\ D_z = \varepsilon_c\varepsilon_0 E_z. \end{cases} \tag{1.8}$$

一般说来$\varepsilon_a \neq \varepsilon_b \neq \varepsilon_c$。这就是双轴晶体；若其中两个相等，譬如$\varepsilon_a = \varepsilon_b$，但与另一个$\varepsilon_c$不相等，是为单轴晶体。单轴晶体具有轴对称性，这对称轴(这里是 z 轴)就是光轴①。

在晶体中麦克斯韦方程也是成立的：

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \tag{1.9}$$

考虑平面波的解：

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{E}} = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \\ \widetilde{\boldsymbol{D}} = \widetilde{\boldsymbol{D}}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \\ \widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{H}}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \end{cases} \tag{1.10}$$

而$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \widetilde{\boldsymbol{H}}$。代入麦克斯韦方程，得

$$\begin{cases} i\omega \boldsymbol{B} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}, \\ -i\omega \boldsymbol{D} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}, \end{cases} \tag{1.11}$$

这些公式表明，$\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D} \perp \boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{H}$，这要求$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{k}$共面(图1-15)。可以看出，与波法线 $\boldsymbol{k}$ 垂直的电矢量是$\boldsymbol{D}$而不是$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$不与 $\boldsymbol{k}$ 垂直。坡印廷矢量$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$也在同一平面内，其方向与波法线 $\boldsymbol{k}$ 不一致，按照1.4节所述，这是射线的方向。故 $\boldsymbol{E}$ 矢量是与射线垂直的。

---

① 七个晶系中三斜、单斜、正交三晶系是双轴晶体($n_a \neq n_b \neq n_c$)，三角、四角、六角三晶系是单轴晶体($n_a = n_b \neq n_c$)，立方晶系是各向同性的($n_a = n_b = n_c$)。

给定一个波法线方向 k，求双折射晶体中两光束的偏振方向和传播速度(或者说折射率 $n(\theta)$)——这是一个求本征振动的问题.在这里我们仅介绍一种实际工作中常用的几何作图法，而不给出理论推导. 此法需引进折射率椭球的概念，它由下列方程所描述①：

$$\frac{x^2}{n_a^2}+\frac{y^2}{n_b^2}+\frac{z^2}{n_c^2}=1. \tag{1.12}$$

其中 $n_a=\sqrt{\varepsilon_a}$，$n_b=\sqrt{\varepsilon_b}$，$n_c=\sqrt{\varepsilon_c}$ 称为晶体的主折射率. 对于单轴晶体，$n_a=n_b=n_o$，$n_c=n_e$，式(1.12)化为

$$\frac{x^2+y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1, \tag{1.13}$$

这里 z 是光轴. 用电磁理论可证明折射率椭球具有如下性质：由其中心 O 引任意方向的波矢 k，过O点作一平面与 k 垂直，它在折射率椭球上截出一个椭圆（图1-16）. 这椭圆的长短轴方向 D'，D'' 就是两个本征振动 D 矢量的方

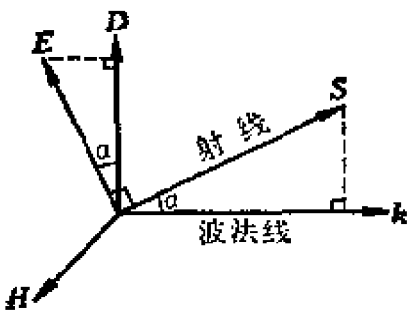


图 1-15 D,E,H,k,S 各矢量的方向

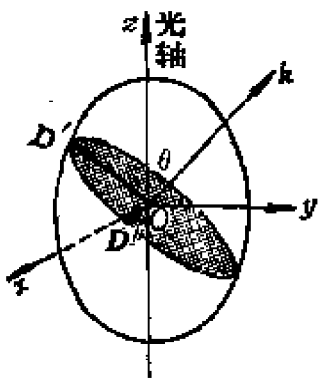


图 1-16 折射率椭球

向，D' 和 D'' 的长度分别等于它们的折射率. 对于单轴晶体来说，D' 和 D'' 中必有一个与 z 轴和 k 构成的平面(主平面)垂直，这是 o 振动；另一在主平面内，是为 e 振动. 不难从式(1.13)得到验证，这样得出的 $n(\theta)$ 表达式正是式(1.6).

① 注意，不要把折射率椭球和前面引入的任何一种曲面(波法面、射线面)混淆起来. "折射率椭球"是个抽象的几何概念和运算工具.

*1.6 双轴晶体

根据电磁理论可以算出，双轴晶体的波面(射线面)具有如图1-17所示的复杂形式．它在三个坐标面上的剖面都由一个圆和一个椭圆组成(图1-18)①．在这些图中x,y,z轴是按$\varepsilon_o,\varepsilon_b,\varepsilon_e$增大的顺序选取，在$z$-$x$平面的每个象限内两层波面相交于一点$R_0$，波面在此处形成一个“酒窝”．当光线沿$\overrightarrow{OR_0}$方向传播时，各光束的射线速度相同．$\overrightarrow{OR_0}$方向叫做晶体的射线轴．为了在射线面的图中寻找光轴的方向，只需在z-x剖面图中作圆和椭圆的公切线(见图1-19)，令它与圆的切点为N_0，$\overrightarrow{ON_0}$方向称为晶体的光轴，因为当波法线k沿此方向时，各光束的相速相同．可以看出，在z轴两侧各有一条光轴和射线轴，故晶体具有两条光轴和两条射线轴．

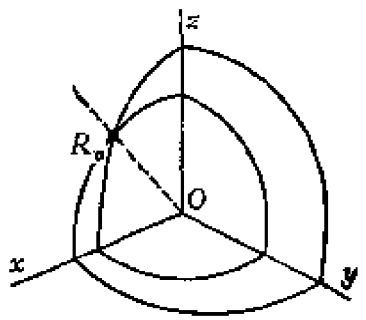


图 1-17 双轴晶体的波面
($\varepsilon_o<\varepsilon_b<\varepsilon_e$)

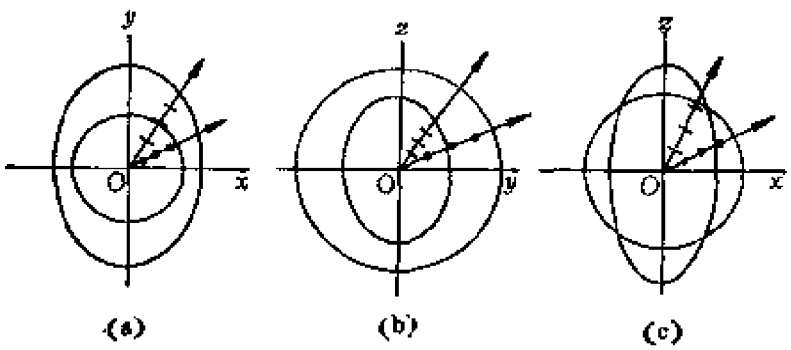


图 1-18 双轴晶体波面的剖面图

特别有趣的是在晶体内当波法线沿光轴传播时光线的传播方向．从z-x剖面图中看，公切面与波面切于N_0和M两点，亦即有两条光线，分别沿

① 波法面的剖面图与图1-18相似，只是椭圆应换为四次的卵形线．在z-x平面的每个象限内两层波法面也相交于一点，中心到此点联线的方向正是光轴．

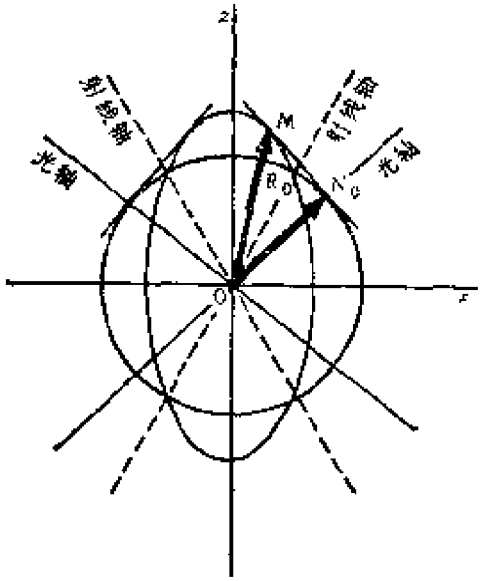


图 1-19　射线轴与光轴

$\overrightarrow{ON_0}$和$\overrightarrow{OM}$方向传播．但是在三维空间里，这公切面与波面在“酒窝”R_0周围的整个一个圆上接触．若如图1-20，垂直于光轴切割出一块晶片来，当自然光正入射于其上时，折射线不是两条，而是连续分布在一个空心的圆锥面上．这种现象叫做锥形折射①．

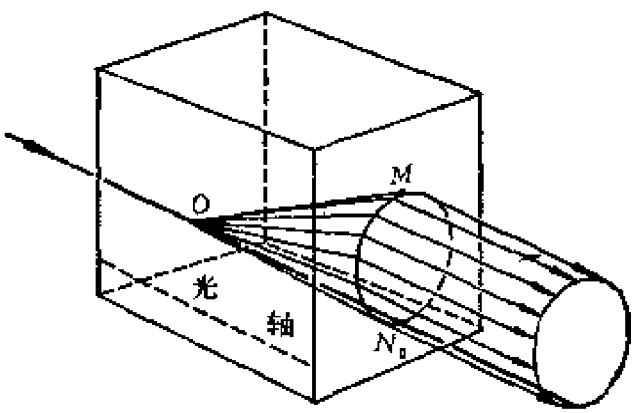


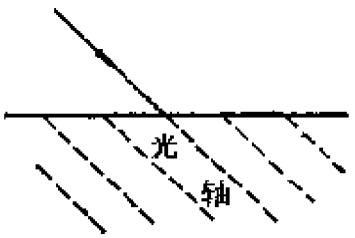
图 1-20　锥形折射

① 这是内锥形折射．当在晶体内沿射线轴传播的光线透射出晶体时也会发生锥形折射，称为外锥形折射．

双轴晶体中两折射光束的偏振方向也可用折射率椭球来定．不过这时折射率椭球的三个主轴都不等长．解析几何会告诉我们，用通过中心的平面去切割这种椭球时，得到的截面一般是椭圆，只在两个特殊方向上截面退化为圆．这两个特殊方向就是晶体的光轴．对于任意的 k 方向来说，图1-16中椭圆截面长短轴的方向 D'，D''，已没有象单轴晶体中那样的简单规律．

思 考 题

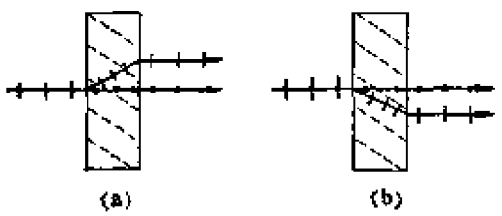
1． 在白纸上画一个黑点，上面放一块冰洲石，即可看到两个淡灰色的像，其中一个的位置比另一个高．转动晶体时，一个像不动，另一个像围绕着它转．试解释这个现象．在这个实验中哪个像点是看起来较高的？



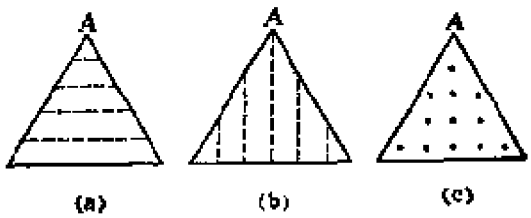
思考题2图

2． 当单轴晶体的光轴与表面成一定角度时，一束与光轴方向平行的光入射到晶体表面之内时（见图），它是否会发生双折射？

3． 在图中虚线代表光轴，试根据图中所画的折射情况判断晶体的正负．



思考题3图



思考题4图

4． 用单轴晶体制成三棱镜三块，光轴方向分别由图(a)，(b)，(c)所示，图中 A 代表顶角．若采用最小偏向角法测折射率，使用哪块棱镜可测得 n_e，哪块可测得 n_o？

5． 图1-20所示锥形折射光束中各光线在晶体中经历的光程相等吗？

6． 令 $\hat{s}$ 和 $\hat{k}$ 分别代表光线和法线（波矢）方向的单位矢量．通常把平面波写成，

$$\begin{cases} E = E_0 \exp[-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] \\ \quad = E_0 \exp\left[-i\omega\left(t - \dfrac{\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}}{v_p}\right)\right], \end{cases}$$

这里 v_p 是法向速度(相速)．把此式写成

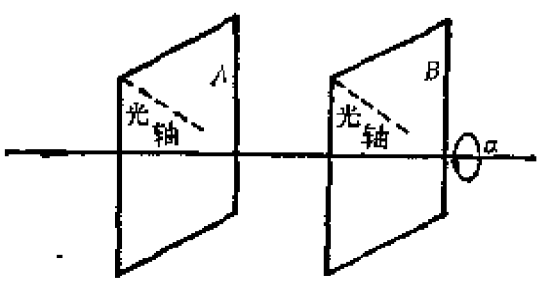
$$E = E_0 \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{r}}{v_r}\right)\right],$$

式中 v_r 为射线速度，对吗？为什么？

习　题

1．一束线偏振的钠黄光垂直射入一块方解石晶体，振动方向与晶体的主平面成20°角，试计算 o,e 两光束折射光的相对振幅和强度．

2．两大小相同的冰洲石晶体 A,B 前后排列，强度为 I_0 的自然光垂直于晶体 A 的表面入射后相继通过 A，B（见图）．A，B 的主截面之间夹角为 α（图中 α 为 0）．求 $\alpha = 0°, 45°, 90°, 180°$ 时由 B 射出光线的数目和每个的强度（忽略反射、吸收等损失）．



习题2图

3．一水晶平板厚0.850 mm，光轴与表面平行．用水银灯的绿光(5461 Å)垂直照射，求（1）o,e 两光束在晶体中的光程；（2）二者的位相差(用度表示)．

4．一束钠黄光以 50° 的入射角射到冰洲石平板上，设光轴与板表面平行，并垂直于入射面，求晶体中 o 光和 e 光的夹角．

5．一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上，光轴与入射面垂直，平板厚度为 4.20mm，求 o 光和 e 光射到平板对面上两点的间隔．已知对于钠黄光冰的 $n_o = 1.3090$，$n_e = 1.3104$．

6. 用ADP晶体制成50°顶角的棱镜，光轴与折射棱平行，n_o和n_e数据参见本节例题．试求(1) o光和e光的最小偏向角，(2) 二者之差．

7. 设一水晶棱镜的顶角为60°，光轴平行于折射棱．钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射，用焦距为1 m的透镜聚焦，o光和e光两谱线的间隔为多少？

8. 求冰洲石晶体中光线和波法线间的最大夹角．

9. 图1-7(b)中，设入射光是钠黄光，晶体为方解石，光轴与晶体表面成30°角，入射角为45°，求(1) o光和e光的方向；(2) e光的折射率．

§2 晶体光学器件

2.1 晶体偏振器

双折射现象的重要应用之一是制做偏振器件．因o和e光都是100%的线偏振光，这一点比前面讲过的几种偏振器(偏振片和玻片堆)性能更优越．利用o光和e光折射规律的不同可以将它们分开，这样我们就可以得到很好的线偏振光．用双折射晶体制做的偏振器件(双折射棱镜)种类很多，我们不打算在这里全面介绍，只举出几种为例来说明其原理．

(1) 洛匈棱镜和渥拉斯顿棱镜

图2-1是洛匈(Rochon)棱镜的结构和光路．它是由两块冰洲石的直角三棱镜粘合而成的．光轴的方向如图所示，相互垂直．当自然光正入射到第一块棱镜上时，由于光轴与晶体表面垂直(属于1.3节中例1的情形)，各方向振动的波速都是v_o，不发生双折射．到了第二块棱镜，由于光轴与入射面垂直(属于1.3节中例3的情形)，光线将服从普通的

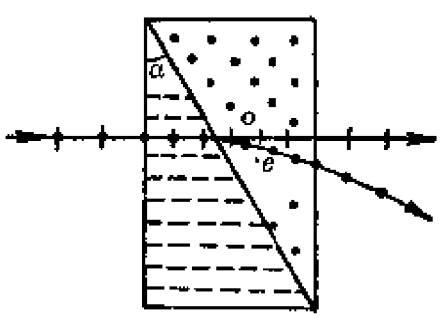


图2-1 洛匈棱镜

折射定律．不过对于 o 光两棱镜的折射率都是 n_o，它仍沿原方向前进；但对于 e 光，折射率由 n_o 变到 n_e，因为在冰洲石（负晶体）内 $n_e<n_o$，它将朝背离第二块棱镜的底面方向偏折．于是最后 o 光和 e 光分开了．遮掉其中一束（譬如 e 光），即得到一束很好的线偏振光．

图2-2 所示是渥拉斯顿（W．H．Wollaston）棱镜，它和洛匈棱镜不同之处只在于第一块冰洲石棱镜的光轴与入射界面平行．o 光和 e 光在棱镜内折射的情况已在图中画出，为什么是这样，留给读者自己分析．

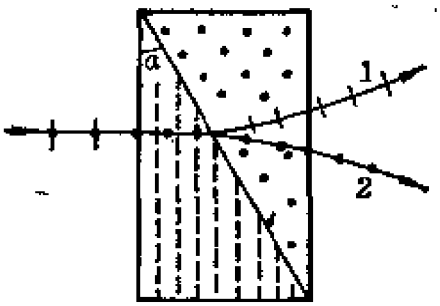


图 2-2　渥拉斯顿棱镜

（2）尼科耳棱镜

尼科耳棱镜（W．Nicol，1828年）是用得最广泛的双折射偏振器件，对它的结构我们介绍得稍详细一些．如图2-3(a)，取一冰洲石晶体，长度约为宽度的三倍．按定义，包含光轴和入射界面法线

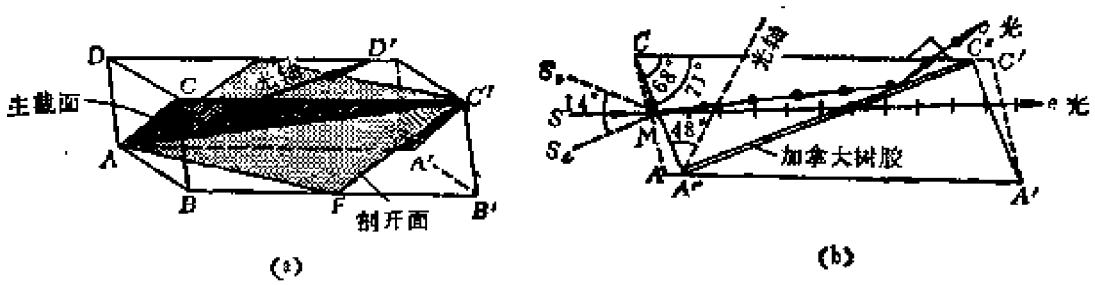


图 2-3　尼科耳棱镜

的平面为主截面．若以端面 $ABCD$ 为入射界面，$ACC'A'$ 便是一个主截面．在天然晶体中此主截面的对角 $\angle C$ 和 $\angle A'$ 原为71°，将端面磨去少许，使得新的对角 $\angle C''$ 和 $\angle A''$ 变为68°（见图2-3(b)）．将晶体沿垂直主截面 $ACC'A'$ 且过对角线 $A''C''$ 的平面 $A''EC''F$ 剖开磨平，然后再用加拿大树胶粘合．加拿大树胶是一种折射率

n 介于冰洲石 n_o 和 n_e 之间的透明物质．对于钠黄光，$n_o=1.65836$，$n_e=1.48641$ 而 $n=1.55$．按照上述设计，平行于棱边 AA' 的入射光进入晶体后，o 光将以大于临界角 $\sin^{-1}(n/n_o)\simeq 69°$ 的入射角投在剖面 $A''EC''F$ 上，它将因全反射而偏折到棱镜的侧面，在那里或者用黑色涂料将它吸收，或者用小棱镜将它引出．至于 e 光，由于它与光轴的夹角足够大，在晶体内的折射率仍小于加拿大胶内的 n，从而不发生全反射．于是从尼科耳棱镜另一端射出的将是单一的线偏振光．

尼科耳棱镜的一个缺点是入射光束的会聚角不得过大．设想图2-3(b)中的入射线 SM 向上偏离，则 o 光投在剖面上的入射角减小．当入射线达到某一位置 S_oM 时，o 光将不发生全反射；若 SM 向下偏离，则 e 光与光轴的夹角变小，从而折射率变大，且投在剖面上的入射角也增大．当入射线达到某一位置 S_eM 时，e 光也被全反射掉．计算表明，入射光线上、下两方的极限角 $\angle S_oMS\simeq\angle SMS_e=14°$①，使用尼科耳棱镜时，入射光束的会聚角不能超过此限．

由于加拿大树胶吸收紫外线，故尼科耳棱镜对此波段不适用，这时可使用洛匈棱镜或渥拉斯顿棱镜．

2.2 波晶片——位相延迟片

用双折射晶体除了可以制做偏振器外，另一重要用途是制做波晶片．波晶片是从单轴晶体(如石英②)中切割下来的平行平面板，其表面与晶体的光轴平行(见图2-4)．这样一来，当一束平行光正入射时，分解成的 o 光和 e 光传播方向虽然不改变，但它们在波晶片内的速度 v_o，v_e 不同③，或者说波晶片对于它们的折射率

① 上述将晶体端面磨掉一些的目的，便是为了保证上、下两个极限角差不多大小．这样可使入射会聚光束的中心光线平行于 AA' 棱，调节起来较方便．

② 云母很容易按其天然解理面撕成薄片，它虽是双轴晶体，但两光轴都和解理面差不多平行，所以波晶片常用云母片来做．

③ 参见1.3节中的例2．

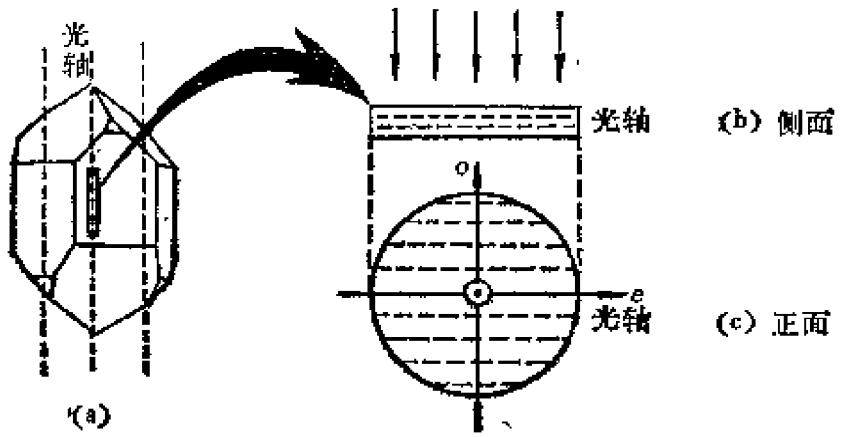


图 2-4 波晶片

$n_o = c/v_o$，$n_e = c/v_e$不同．设波晶片的厚度为 d，则 o 光和 e 光通过波晶片时的光程也不同：

$$o\text{ 光的光程}\quad L_o = n_o d,$$

$$e\text{ 光的光程}\quad L_e = n_e d.$$

同一时刻两光束在出射界面上的位相比入射界面上落后如下数值：

$$o\text{光}\quad \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} n_o d,$$

$$e\text{光}\quad \varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda} n_e d,$$

这里 λ 是光束在真空中的波长．这样一来，当两光束通过波晶片后 o 光的位相相对于 e 光多延迟了

$$\delta \equiv \varphi_o - \varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d. \qquad (2.1)$$

δ 除与折射率之差$(n_o - n_e)$成正比外，还与波晶片厚度 d 成正比．适当地选择厚度 d，可以使两光束之间产生任意数值的相对位相延迟 δ．在无线电技术中起这种作用的器件叫位相延迟器，所以波晶片也可以叫位相延迟片．在实际中最常用的波晶片是四分之一波长片(简称$\lambda/4$片)，其厚度 d 满足关系式$(n_o - n_e)d = \pm\lambda/4$，

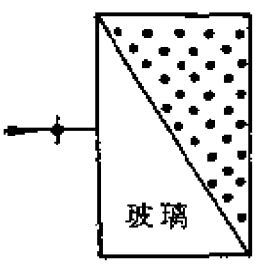
于是 $\delta = \pm\pi/2$①；其次是二分之一波长片(简称 $\lambda/2$ 片)和全波片，它们的厚度分别满足 $(n_o - n_e)d = \pm\lambda/2$ 和 λ，即 $\delta = \pm\pi$ 和 2π.

现在来考察 o 光和 e 光的振动方向.如前所述，折射线与光轴构成的平面叫主平面(图2-4(a)，(b)的纸平面就是主平面)，o 振动与主平面垂直，e 振动与主平面平行. 在波晶片的特定条件下(光轴平行于表面，光线正入射)，e 振动与光轴在同一方向上. 为了更清楚地说明 o 振动、e 振动和光轴的方向，我们作波晶片的正面投影图2-4(c)，三者都在此图纸平面内，e 振动与光轴一致，o 振动与光轴垂直.今后我们就在此平面内以 e 振动为横轴、o 振动为纵轴取一直角坐标系. 沿任何方向振动的光正入射到波晶片表面上时，其振动都按此坐标系分解成 o 分量和 e 分量，两分量各有各的速度和光程，最后出射时彼此间产生附加位相延迟.

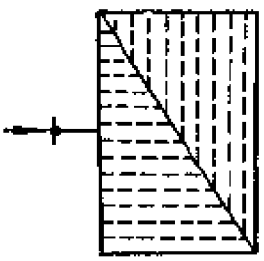
思 考 题

1. 分别就下列三种情形确定自然光经过图中的棱镜后双折射光线的传播方向和振动方向. 设晶体是负的，玻璃的折射率为 n.

(1) $n = n_o$；(2) $n = n_e$；(3) $n_o > n > n_e$；(4) $n > n_o$.



思考题 1 图



思考题 2 图

2. 确定自然光经过图中的棱镜后双折射光线的传播方向和振动方向，设晶体是正的.

---

① 更确切地说，是 $(n_o - n_e)d = (2k+1)\lambda/4$，$\delta = (2k+1)\pi/2$，这里 k 是任意整数. $\lambda/2$ 片和全波片的情况也是这样. 因此，对于一块 $\lambda/4$ 片，其附加的有效位相差有 $\pm\pi/2$ 两种可能，这与晶体的正负并没有必然的联系.

3. 分析渥拉斯顿棱镜(见图 2-2)中双折射光线的传播方向和振动方向.

习 题

1. 当图2-2中渥拉斯顿棱镜的顶角 $\alpha=15°$ 时，两出射光线间的夹角为多少?

2. 设图2-3(b)所示的尼科耳棱镜中 $\angle CA''C''$ 为直角，光线 SM 平行于 $A''A'$.计算 $\angle S_0MS$.

3. 用方解石和石英薄板作对钠黄光的 $\lambda/4$ 波片，它们的最小厚度各为多少?

4. 两尼科耳棱镜主截面的夹角由30°变到45°，透射光的强度如何变化? 设入射自然光的强度为 I_0.

5. 单色线偏振光垂直射入方解石晶体，其振动方向与主截面成 30° 角，两折射光再经过置于方解石后的尼科耳棱镜，其主截面与原入射光的振动方向成50°角，求两条光线的相对强度.

6. 经尼科耳棱镜观察部分偏振光，当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过60°时，光强减为一半，求光束的偏振度.

§3 圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验

在第二章 9.5，9.6 节里我们已引进圆偏振光和椭圆偏振光的概念. 那里曾看到，它们都可看成是相互垂直并有一定位相关系的两个线偏振光的合成. 为了进一步详细研究这两种偏振光，必须对垂直简谐振动的合成问题比较熟悉. 读者可能已在力学课中学过这个问题，下面我们用一小节的篇幅结合光学内容复习一下将是有益的.

3.1 垂直振动的合成

在光波的波面中取一直角坐标系，将电矢量 $\boldsymbol{E}$ 分解为两个分量 E_x 和 E_y，它们是同频的，设 E_y 相对于 E_x 的位相差为 δ，即

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t, \\ E_y = A_y\cos(\omega t + \delta). \end{cases} \tag{3.1}$$

下面讨论不同情况下的合成振动.

（1）$\delta = 0$ 或 π 情形

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t, \\ E_y = \pm A_y\cos\omega t. \end{cases}$$

由此得

$$E_y = \pm\frac{A_y}{A_x}E_x.$$

这是直线方程.由于 E_x和 E_y的变化范围分别限制在$\pm A_x$和$\pm A_y$之间，电矢量端点的轨迹是以 $E_x = \pm A_x$，$E_y = \pm A_y$为界的矩形的对角线.$\delta = 0$时取正号，轨迹是一、三象限的对角线(图3-1(a))；$\delta = \pi$ 时，取负号，轨迹是二、四象限的对角线(图3-1(b)).在这

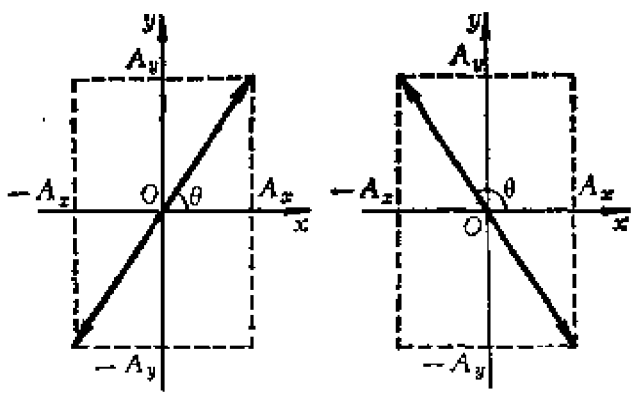


图 3-1　垂直振动合成之一

两种情况下，合成的偏振态仍是线偏振的，其振幅为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},$$

振动方向由下式决定：

$$\tan\theta = \pm\frac{A_y}{A_x}.$$

（2）$\delta=\pm\pi/2$ 情形

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos\omega t,\\ E_y=\mp A_y\sin\omega t.\end{cases}$$

消去 t，得

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}=1.$$

这是标准的椭圆方程，其主轴分别沿 x，y方向，与上述矩形框内切(见图3-2)。

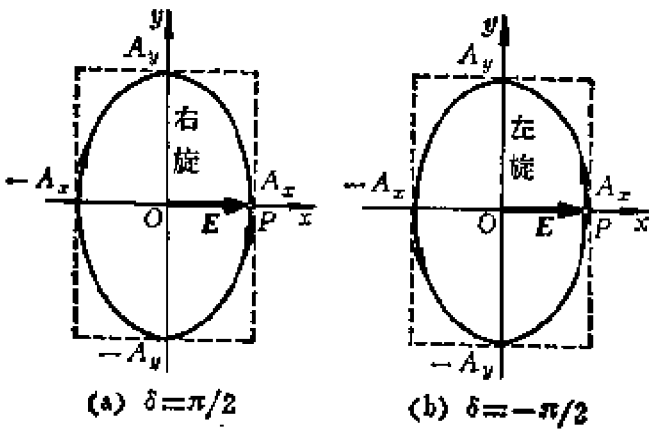


图 3-2　垂直振动合成之二

当 $A_x=A_y=A$ 时，矩形框变为正方形框，椭圆退化为与此方框内切的圆(见图3-3)。

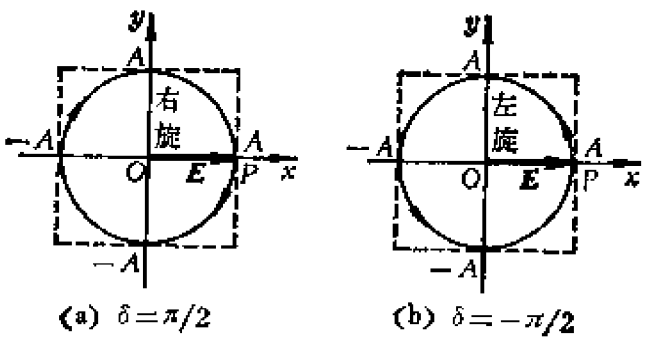


图 3-3　垂直振动合成之三

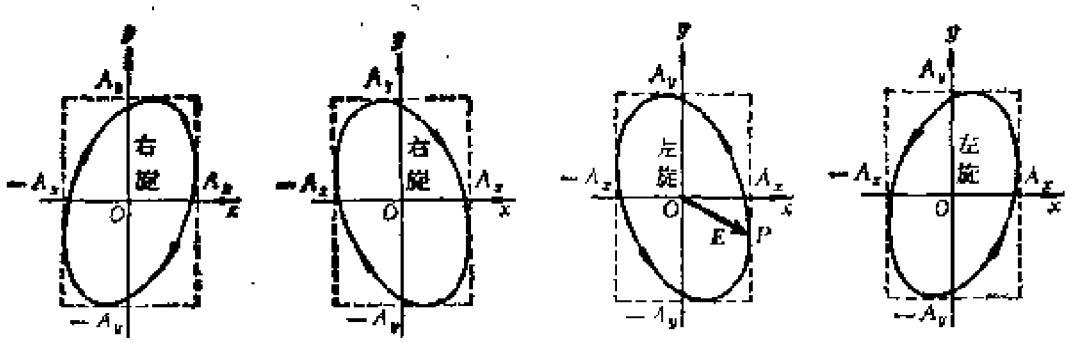
虽然 $\delta=\pm\pi/2$时的轨迹一样，但旋转方向是相反的.为了考察旋转方向，我们可看 $t=0$ 时刻的情况，这时 $E_x=A_x\cos\omega t=A_x$，$E_y=\mp A_y\sin\omega t=0$，即电矢量的端点处在图3-2或图3-3中$P$点的位置．我们设想此后过了一短时间 Δt,这时若 $\delta=+\pi/2$，则 $E_y=-A_y\sin\omega\Delta t<0$；若 $\delta=-\pi/2$，则 $E_y=+A_y\sin\omega\Delta t>0$．这就是说，$\delta=+\pi/2$ 时电矢量的端点自P点向下移，沿顺时针方向旋转(右旋)；$\delta=-\pi/2$时电矢量的端点自P点向上移，沿逆时针方向旋转(左旋)．

（3）普遍情形

由式(3.1)中的两式消去 t，得轨迹方程

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}-\frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta=\sin^2\delta. \qquad (3.2)$$

这是个一般椭圆方程，它也与以 $E_x=\pm A_x$，$E_y=\pm A_y$为界的矩形相内切，不过其主轴可以是倾斜的(图3-4)．主轴究竟朝哪一边倾斜，以及是左旋还是右旋，与 δ 在哪一象限有关．图3-4(a)—(d)分别给出 δ 在四个象限里的情形．我们以 δ 在第三象限为例来说明．



δ 在第一象限　δ 在第二象限　δ 在第三象限　δ 在第四象限

(a)　(b)　(c)　(d)

图 3-4　垂直振动合成之四

先看 $t=0$ 的时刻，此时 $E_x=A_x\cos\omega t=A_x$，它表明电矢量端点位置P处在椭圆轨迹与 $E_x=A_x$ 的直线相切的切点上，若 δ

在第三象限，则 $E_y = A_y\cos(\omega t + \delta) = A_y\cos\delta < 0$，它表明这切点在 x 轴的下方．所以椭圆必如图 3-4 (b)或(c)所示，其长轴朝第二、四象限倾斜．现在再考虑过了时间 Δt 以后的情况，这时 $E_y = A_y\cos(\omega\Delta t + \delta)$．由于 δ 在第三象限，在此象限内余弦函数是负的，其绝对值随角度的增加而减小．这就是说，电矢量端点的位置由P点向上移，亦即运动是逆时针的(左旋)．可见，δ 在第三象限时电矢量端点的运动属于图 3-4(c)而不是3-4(b)所示的情况．

综合以上所述，我们将 δ 从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 整个区间合成运动的变化情况作系列图于图 3-5 中，这便是我们在第二章§9 中已给过的图9-10．应当注意，当 $A_x = A_y = A$ 和 $\delta = \pm\pi/2$ 时，椭圆退化为圆．

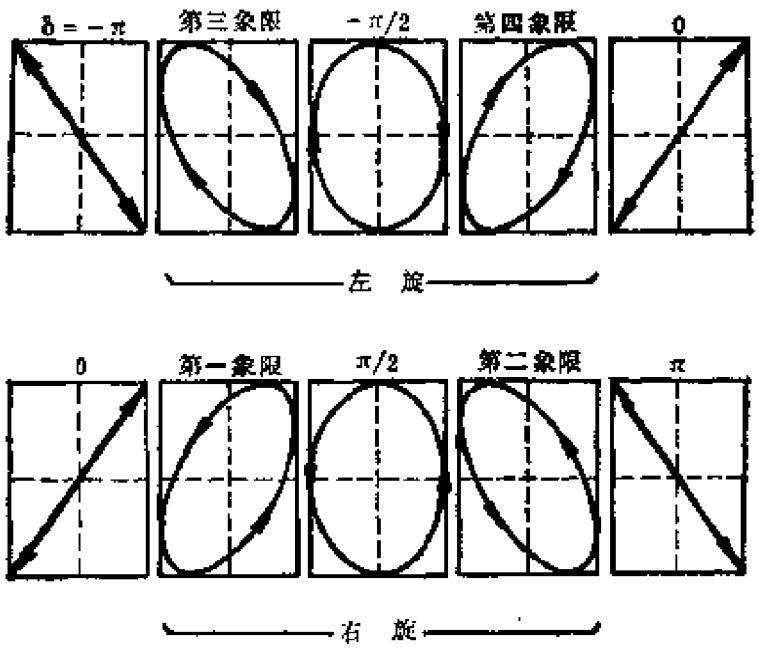


图 3-5 各种位相差的椭圆运动

3.2 圆偏振光和椭圆偏振光的获得

自然界的大多数光源发出的是自然光，但有时也发出圆或椭

圆偏振光．例如处在强磁场中的物质，电子作拉摩回旋运动，它们发出的电磁辐射就是圆或椭圆偏振的．这里所谓圆或椭圆偏振光的“获得”，是指利用偏振器件把自然光改造成圆或椭圆偏振光．

获得一般的椭圆偏振光并不难，只需令自然光通过一个起偏器和一个波晶片即可．如图3-6所示，由起偏器出射的线偏振光射到波晶片中去时，被分解成E_o和E_e两个振动，它们在晶体内传播速度不同，穿过晶片时产生一定附加的位相差δ．射出晶片之外后两光束速度恢复到一样，合成在一起一般得到椭圆偏振光．只有在一定条件下才成为圆偏振光或仍为线偏振光．保证出射光是圆偏振的条件有二：

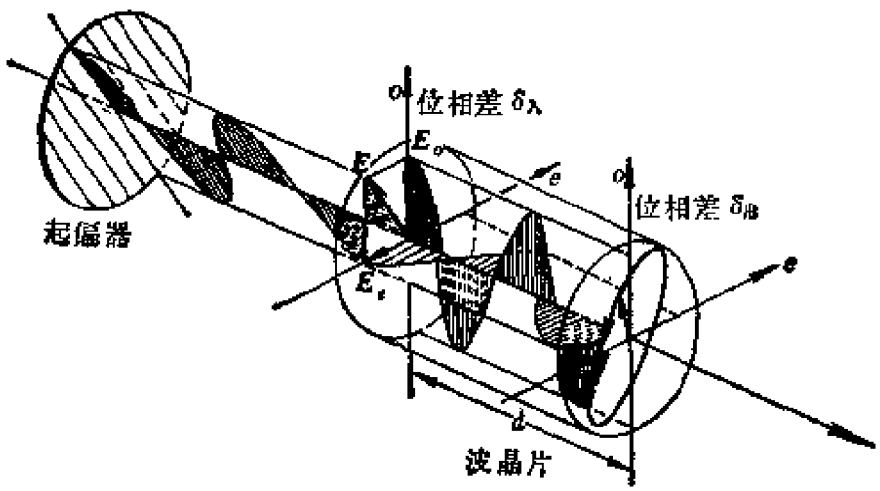


图 3-6　产生椭圆偏振光的装置

（1）E_e和E_o之间的位相差$\delta'' = \delta + \delta' = \pm\pi/2$．这里$\delta'$是入射到波晶片上线偏振光的电矢量在$e$，$o$两轴上投影时可能引起的位相差．例如图 3-7 所示，当入射的线偏振光的振动在第一、三象限里$\delta' = 0$（图(a)），在第二、四象限里$\delta' = \pi$（图(b)）．$\delta = (2\pi/\lambda)(n_o - n_e)d$是波晶片本身引起的，它与波晶片的厚度$d$

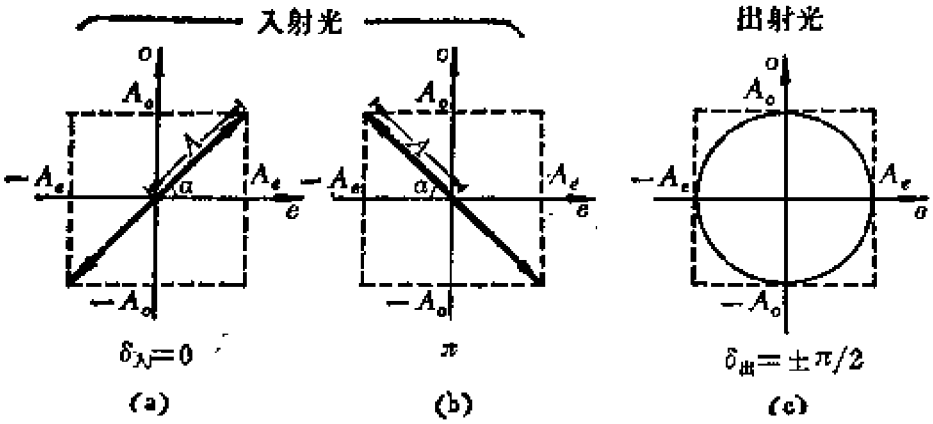


图 3-7　获得圆偏振光的条件

有关．要想使$\delta''=\pm\pi/2$，必须使 $\delta=\pm\pi/2$①，也就是说，我们必须选用四分之一波长片．

（2）$\boldsymbol{E}_e$ 和 $\boldsymbol{E}_o$ 的振幅 $A_e=A_o$．设入射的线偏振光的振幅为 A，其振动方向与 e 轴的夹角为 α，则 $A_e=A\cos\alpha$，$A_o=A\sin\alpha$．要使 $A_e=A_o$，必须 $\alpha=45^\circ$．

总之，令一束线偏振光通过一波晶片，一般说来我们得到一束椭圆偏振光；只有通过 $\lambda/4$ 片，而且 $\lambda/4$ 片的光轴与入射光的振动面成 45° 角时，我们才得到一束圆偏振光．

3.3　圆偏振光和椭圆偏振光通过检偏器后强度的变化

设有一椭圆偏振光，其半长轴为 A_1，半短轴为 A_2．在偏振片上取直角坐标系，其 x 轴平行于透振方向，y 轴与透振方向垂直．当椭圆偏振光射到（作为检偏器用的）偏振片时，电矢量就被分解成 E_x，E_y 两个分量，E_x 分量通过，E_y 分量被阻挡．这时出射光的强度 $I=A_x^2$（A_x 是 E_x 的振幅）．如果偏振片转到图3-8(a)所示的位置，其 x 轴与椭圆长轴平行，则 $A_x=A_1$，强度 $I=A_1^2$．如果偏振片转到图3-8(b)所示的位置，其 x 轴与椭圆的短轴平行，则为

① $\pm\pi/2+0=\pm\pi/2$，$\pm\pi/2+\pi=\pi/2$ 或 $3\pi/2$，而 $3\pi/2=2\pi-\pi/2$，它与 $-\pi/2$ 是一样的．

$A_x = A_2$，强度$I = A_2^2$．当偏振片的 x 轴相对椭圆主轴处于任意倾斜位置时(图3-8(c))，计算 A_x 的大小是个比较繁的数学问题，但是定性的结论完全可以用下列方法得出．作一个两边分别与 x, y 轴平行的矩形框同椭圆外切(见图 3-8(c)中的虚线)，这矩形两边的长度之半就是椭圆在此坐标系上投影的振幅 A_x 和 A_y．由图上不难看出，这时$A_2 < A_x < A_1$，从而$A_2^2 < I < A_1^2$．

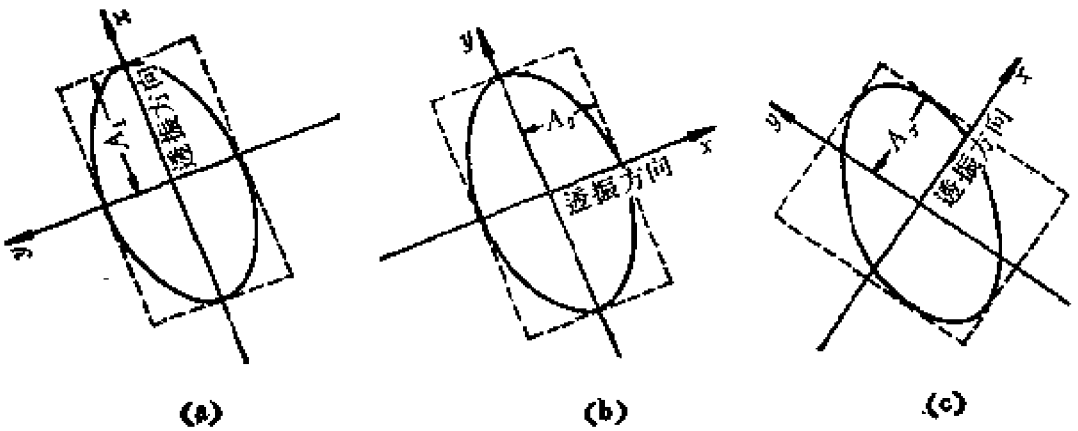


图 3-8　椭圆偏振光通过检偏器后强度的变化

综上所述，如果入射光是椭圆偏振的，转动检偏器的透光方向时，透射光的强度在极大值$I = A_1^2$ 和极小值$I = A_2^2$ 之间变化，但不会发生消光现象．这一特点与部分偏振光相似．

如果入射光是圆偏振的，转动检偏器的透光方向时，透射光的强度不变，其特点与自然光无异．以上结论请读者自己分析．

由此看来，只靠一个检偏器，我们不能区分椭圆偏振光和部分偏振光，也不能区分圆偏振光和自然光．为了分辨出入射光是否圆偏振光和椭圆偏振光，还需借助于 $\lambda/4$ 片．

3.4　通过波晶片后光束偏振状态的变化

现在让我们系统地分析一下，具有各种偏振结构的光束经过

$\lambda/4$ 片后偏振态的变化.

关于入射光是线偏振光的情况，我们已在 3.2 节里作过初步分析. 所用的方法可归结为如下几步，它们对讨论其它偏振态的入射光也大体适用.

（1）将入射光的电矢量按照波晶片的 e 轴和 o 轴分解，求出其振幅 A_e，A_o 和入射点的位相差 $\delta_{入}$. 对于线偏振光，已如图 3-7 所示，$A_e = A\cos\alpha$，$A_o = A\sin\alpha$，$\delta_{入} = 0$ 或 π. 对于椭圆或圆偏振光，如何求 A_e，A_o 和 $\delta_{入}$，则需对照3.1节中的图3-5来分析，详见下面的例题.

（2）由波晶片出射光的振幅仍为 A_e 和 A_o，从而电矢量端点的轨迹与边长为 $2A_e$，$2A_o$ 的矩形框内切，矩形的各边分别与 e，o 轴平行. 出射光两分量间的位相差 $\delta_{出} = \delta + \delta_{入}$，这里 $\delta = (2\pi/\lambda) \times (n_o - n_e)d$ 是波晶片引起的位相差，对 $\lambda/4$ 片它等于 $\pm\pi/2$. 出射光电矢量端点的轨迹要根据 $\delta_{出}$ 的大小对照着3.1节中的图3-5来具体分析.

下面我们举一个例题.

例题 入射光为右旋椭圆偏振光，波晶片为 $\lambda/4$ 片(设 $\delta = +\pi/2$)，α 代表其光轴与椭圆长轴的夹角，问 $\alpha = 0°$，$90°$，$45°$ 时出射光的偏振状态.

解 如图 3-9，作各边分别与 e，o 轴平行的矩形框同椭圆外切，此矩形框的边长即为 $2A_e$ 和 $2A_o$. 将图3-9中的入射光电矢量端点轨迹与3.1节的图3-5对比，就可知道，$\alpha = 0°$，$90°$，$45°$ 时的 $\delta_{入}$ 分别为 $\pi/2$，$\pi/2$ 和第二象限内的某个角度. 加上 $\delta = \pi/2$ 后，即得 $\delta_{出} = \pi$，π 和第三象限内的某个角度. 再次对照 3.1 节的图 3-5可判知，出射光的偏振状态将如图 3-9 所示，$\alpha = 0°$，$90°$ 时为第二、四象限内的线偏振光，$\alpha = 45°$ 时为左旋斜椭圆偏振光(所谓"正"和"斜"，当然是相对于 e，o 坐标轴来说的). 请读者自己分析一下，如果入射光是圆偏振的，则无论 $\lambda/4$ 片的光轴方向如何，出射光总是线偏振的.

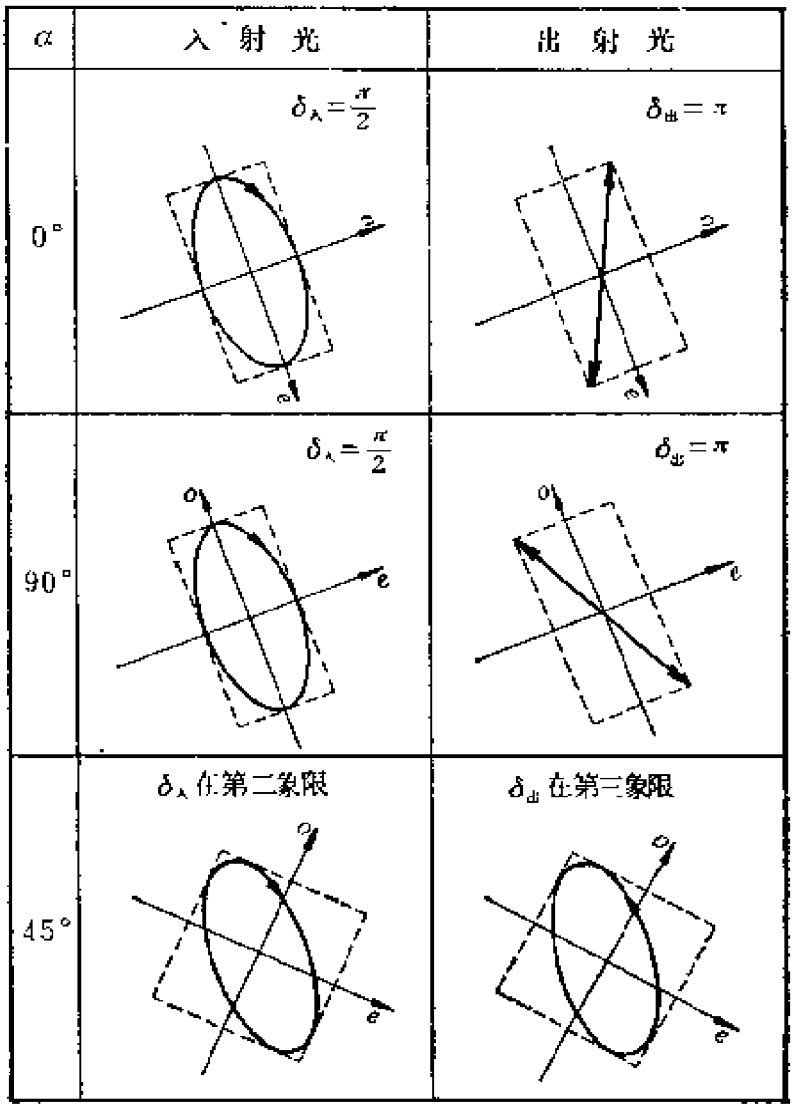


图 3-9 例题——经过 $\lambda/4$ 片后偏振态的变化

现在我们把各种偏振光经过 $\lambda/4$ 片后发生的变化总结成表Ⅶ-2。

表Ⅶ-2　各种偏振光经过 $\lambda/4$ 后偏振态的变化

入射光	$\lambda/4$ 片位置	出射光
线偏振	e 轴或 o 轴与偏振方向一致*	线偏振
	e 轴与 o 轴与偏振方向成 45° 角	圆偏振
	其它位置	椭圆偏振
圆偏振	任何位置	线偏振
椭圆偏振	e 轴与 o 轴与椭圆主轴一致	线偏振
	其它位置	椭圆偏振

* 由于沿这两个特殊方向振动的线偏振光在波晶片内根本不分解，它们从波晶片射出时仍然是沿原振动方向的线偏振光.

由于自然光和部分偏振光是一系列偏振方向不同的线偏振光组成的，它们经过 $\lambda/4$ 片后有的仍是线偏振光，有的是圆偏振光，而大部分是长短轴比例各不相同的椭圆偏振光，这时出射光在宏观上仍是自然光或部分偏振光.

3.5　圆偏振光和椭圆偏振光的检验

现在我们全面地来讨论偏振光的检验方法. 假定入射光有五种可能性，即自然光、部分偏振光、线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光. 我们已看到，利用一块偏振片(或其它检偏器)可以将线偏振光区分出来，但对于自然光和圆偏振光、部分偏振光和椭圆偏振光不能区分. 而利用一块 $\lambda/4$ 片可以把圆偏振光和椭圆偏振光变为线偏振光，但不能把自然光和部分偏振光变为线偏振光. 把偏振片和 $\lambda/4$ 片两者结合起来使用，就可以把上述五种光完全区分开来了. 检验的步骤通过表 Ⅶ-3 来说明，装置参见图3-10.

表Ⅶ-3 偏振光的检验

第一步	令入射光通过偏振片Ⅰ，改变偏振片Ⅰ的透振方向P_1，观察透射光强度的变化(图3-10(a))				
观察到的现象	有消光	强度无变化		强度有变化，但无消光	
结论	线偏振	自然光或圆偏振		部分偏振或椭圆偏振	
第二步		a. 令入射光依次通过$\lambda/4$片和偏振片Ⅱ，改变偏振片Ⅱ的透振方向P_2，观察透射光的强度变化(图3-10(b))		b. 同a，只是$\lambda/4$片的光轴方向必须与第一步中偏振片Ⅰ产生的强度极大或极小的透振方向重合	
观察到的现象		有消光	无消光	有消光	无消光
结论		圆偏振	自然光	椭圆偏振	部分偏振

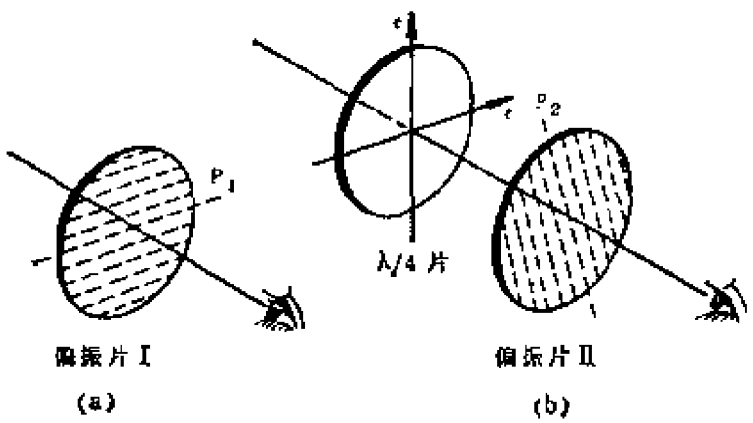


图 3-10 偏振态的检验

对于表 Ⅶ-3 我们做些简单的说明．如果入射光是线偏振光，经过第一步就已经可以判断出来了，其标志是通过偏振片Ⅰ会产生消光现象．如果第一步观察结果是没有消光现象，入射光有可能是圆或椭圆偏振的，如果确实如此，我们就可能利用 $\lambda/4$ 片把它变成线偏振光．对于椭圆偏振光来说，变成线偏振光的条件是$\lambda/4$

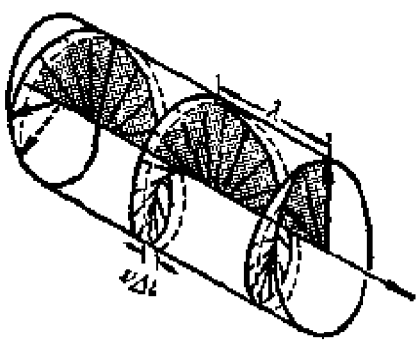
片的光轴与椭圆的主轴平行，后者就是第一步中偏振片Ⅰ产生强度极大或极小时的透振方向(对于圆偏振光则无需此条件)．经过$\lambda/4$片是否变成线偏振光，是进一步区分椭圆偏振光和部分偏振光(或区分圆偏振光和自然光)的标志，这一点通过偏振片Ⅱ就可以检验出来．

最后应当指出的是，实际上在实验室中用的偏振片和$\lambda/4$片上透光方向和光轴常常是不标明的，这就使我们在第二步判断椭圆偏振光和部分偏振光时发生困难．解决的办法留待读者在实验课中去研究(参见思考题5,6)．

思 考 题

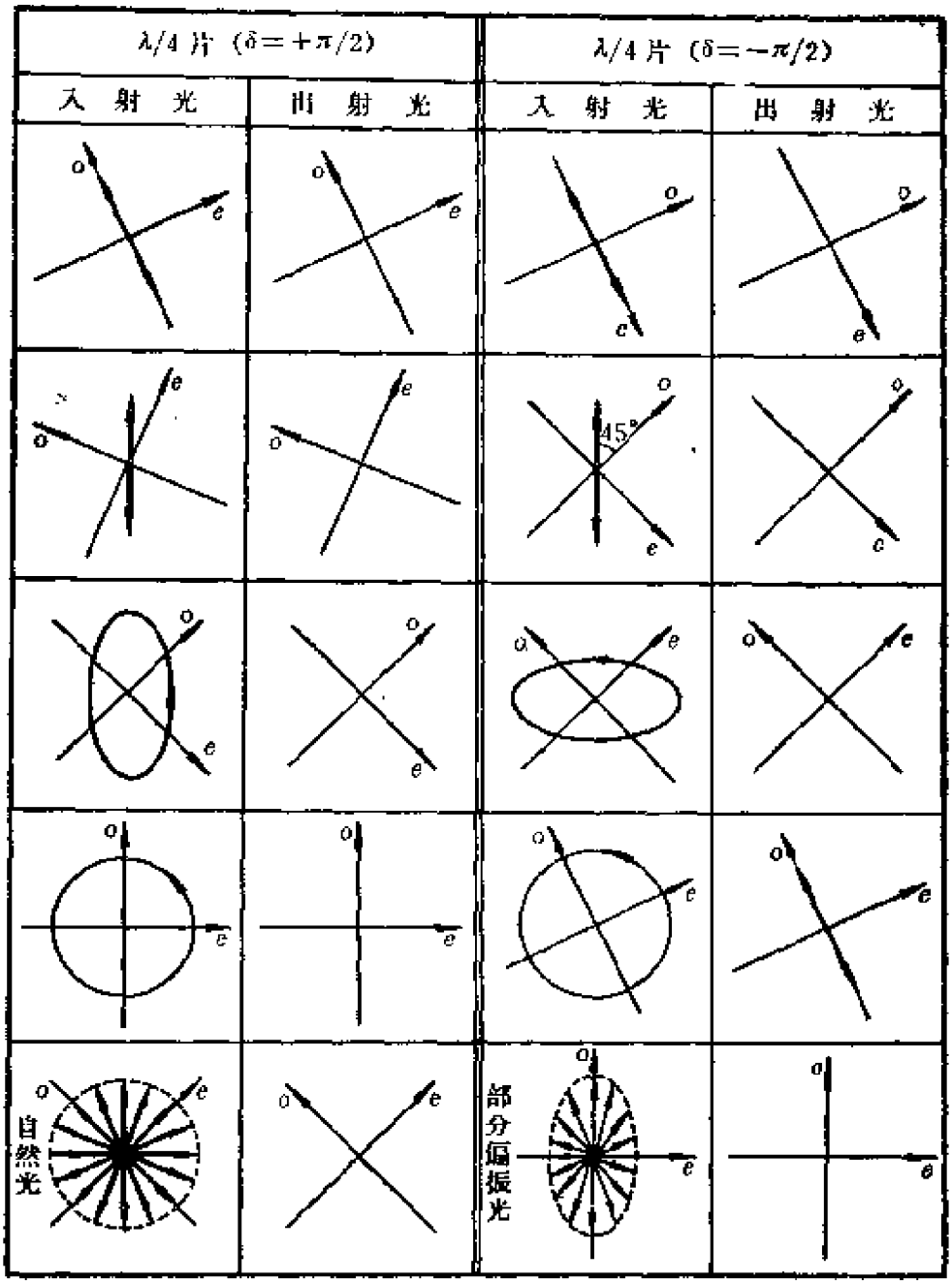
1． 圆偏振光中电矢量的大小为A，它的强度$I=?$经过偏振片后其强度I'变为多少？(设偏振片是理想的，即对沿透振方向分量的透射率为100%．)

2． 图所示为一椭圆偏振光的电矢量沿波线的瞬时分布图．此椭圆偏振光是左旋还是右旋的？



思考题2图

3． 画出图中各情形出射光的偏振状态．



思考题 3 图

4. 将上题中的 $\lambda/4$ 片换成 $\lambda/2$ 片，各情形出射光的偏振状态怎样？

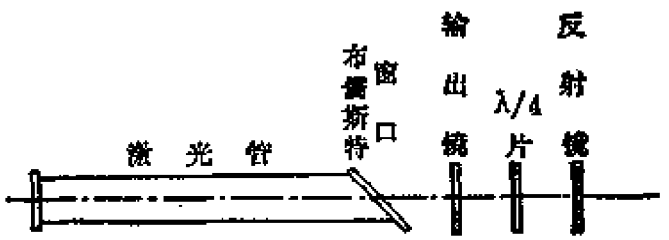
5. 在一对正交的偏振片之间放一块 $\lambda/4$ 片，以自然光入射。

(1) 转动 $\lambda/4$ 的光轴方向时，出射光的强度怎样变化？有无消光现象？

(2) 如果有强度极大和消光现象，它们在 $\lambda/4$ 片的光轴处于什么方向时出现？这时从 $\lambda/4$ 片射出的光的偏振状态如何？

6. 如本节末尾指出，在实验中偏振片和 $\lambda/4$ 片上透振方向和光轴方向都未标出，而在检验椭圆偏振光的第二步中需要将 $\lambda/4$ 片的光轴对准椭圆的三轴之一。你能根据上题的原理设计出一个方案，利用两块偏振片和一块 $\lambda/4$ 片做到这一点吗？

7. 激光器中的布儒斯特窗口是其法线与管轴夹角等于布儒斯特角(全偏振角)的玻璃窗口。有布儒斯特窗口的激光器发出的光是线偏振的。如图所示，在使用激光器发出的线偏振光进行各种测量时，为了避免激光返回谐振腔，在激光器输出镜端放一块 $\lambda/4$ 片，并且其主截面与光的振动平面成 45° 角。试说明此波片的作用。



思考题 7 图

习　题

1. 线偏振光通过波晶片，其主截面与起偏器的主截面成 α 角，它产生的位相延迟为 δ，求

(1) 所得椭圆偏振光两半轴之比；

(2) 波晶片主截面与椭圆半长轴间的夹角。

2. 用一块 $\lambda/4$ 片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光。达到消光位置时，$\lambda/4$ 片的光轴与偏振片透振方向相差 22°，求椭圆长短轴之比。

3. 两尼科耳棱镜主截面夹角为60°，中间插入一块水晶的 $\lambda/4$ 片，其主截面平分上述夹角，光强为 I_0 的自然光入射，试问：

(1) 通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振状态；

(2) 通过第二尼科耳棱镜的光强。

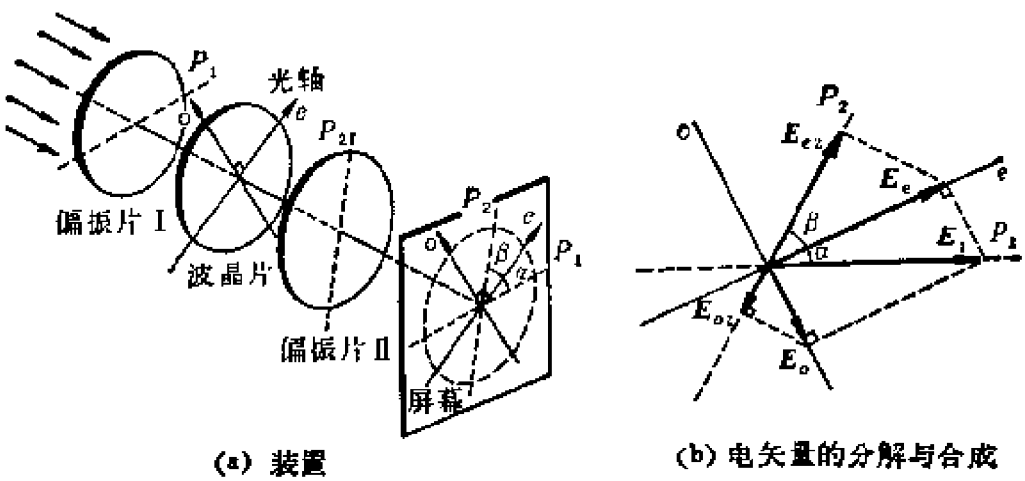
4. 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过 $\lambda/4$ 片(此 $\lambda/4$片由方解石做成，o 光和 e 光在晶片中的光程差刚好是 $\lambda/4$)，然后再经过一块主截面相对于 $\lambda/4$ 片光轴向右旋 15°的尼科耳棱镜，求最后出射的光强(忽略反射、吸收等损失)。

§4 偏振光的干涉及其应用

偏振光的干涉现象在实际中有许多应用，它的基本原理可以通过一个典型装置——两偏振器间放一块波晶片来说明。

4.1 偏振器间的波晶片

如图4-1(a)所示，在两偏振片①Ⅰ，Ⅱ之间插入一块厚度为 d 的波晶片，三元件的平面彼此平行，光线正入射到这一系统上，直接用眼睛或屏幕观察其强度随各元件取向的变化。图4-1(b)是各元件的光轴在幕上的投影图。



(a) 装置　　(b) 电矢量的分解与合成

图 4-1 偏振片间的波晶片

① 这里可用任何其它的偏振器，如尼科耳棱镜。

我们先在这装置上做几个实验，实验的内容和现象如下：

（1）当波晶片的厚度均匀时，单色光入射，幕上照度是均匀的，转动任何一个元件，幕上的强度都会变化；

（2）白光入射时，幕上出现彩色，转动任何元件时，幕上颜色发生变化；

（3）如果波晶片厚度不均匀(例如是尖劈状的)，幕上出现干涉条纹，白光照明时条纹带有彩色；

（4）用一块透明塑料代替波晶片，可能有干涉条纹，也可能没有，但给塑料加应力后，就出现干涉条纹，条纹随所加应力的大小而改变着．下面我们通过计算来解释这些现象．

入射光经偏振片Ⅰ变成沿其透振方向 P_1 振动的线偏振光，设其振动矢量为 $\boldsymbol{E}_1$，振幅为 A_1，此线偏振光投射到波晶片上以后分解为 e 振动 $\boldsymbol{E}_e$ 和 o 振动 $\boldsymbol{E}_o$，设 e 轴与 P_1 轴的夹角为 α，$\boldsymbol{E}_e$ 和 $\boldsymbol{E}_o$ 的振幅分别是

$$A_e = A_1\cos\alpha, \qquad A_o = A_1\sin\alpha.$$

光线从波晶片穿出射到偏振片Ⅱ上，e 分量和 o 分量中都只有它们在其透振方向 P_2 上的投影 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 才能通过．设 P_2 与 e 轴的夹角是 β，则 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 的振幅分别为

$$A_{e2} = A_e\cos\beta = A_1\cos\alpha\cos\beta, \quad A_{o2} = A_o\sin\beta = A_1\sin\alpha\sin\beta.$$

最后从偏振片Ⅱ射出的光线，其强度应是 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 这两个同方向振动相干迭加的结果．设 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 的合成振动为 $\boldsymbol{E}_2$ 即

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{e2} + \boldsymbol{E}_{o2}.$$

由于两振动之间是有位相差的，设此位相差为 $\delta_{\text{出}}$，则根据同方向简谐振动合成的原理，$\boldsymbol{E}_2$ 的振幅应为

$$A_2 = \sqrt{A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\delta_{\text{出}}},$$

从而强度为

$$\begin{aligned} I_2 = A_2^2 &= A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\delta_{\text{出}} \\ &= A_1^2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\ &\quad + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\delta_{\text{出}}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

式(4.1)表明，I_2与α,β有关，这就说明了实验(1)中强度与偏振片Ⅰ，Ⅱ和波晶片的取向有关的事实.

现在我们来分析干涉强度交叉项中的位相差$\delta_{出}$的大小. 考虑到入射波晶片的光有各种可能的偏振态，$\delta_{出}$应由三个因素决定:

(1) 入射在波晶片上的光e,o分量间的位相差$\delta_{入}$. 在本节讨论的装置里，波晶片之前是一个起偏器P_1，故入射在其上的光总是线偏振的，因而$\delta_{入}=0$或π. 在普遍的情况下，入射光也可能是圆偏振或椭圆偏振的，$\delta_{入}$的值应由§3中讲述的方法来判断.

(2) 由于波晶片引起的位相差δ. $\boldsymbol{E}_e$和$\boldsymbol{E}_o$通过波晶片时产生附加位相差$\delta=(2\pi/\lambda)(n_o-n_e)d$，它与波晶片的厚度成正比.

(3) 坐标轴投影引起的位相差δ'. 若e轴和o轴的正向对P_2轴的两个投影分量方向一致，则$\delta'=0$；若两个投影分量方向相反，则$\delta'=\pi$.

$\boldsymbol{E}_{e2}$和$\boldsymbol{E}_{o2}$间总的位相差$\delta_{出}$是$\delta_{入},\delta$与δ'三者之和，即

$$\delta_{出}=\delta_{入}+\delta+\delta'=\delta_{入}+\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\begin{cases}0,\\ \pi,\end{cases} \tag{4.2}$$

在本节讨论的各例中假定$\delta_{入}=0$，下面将它略去不写. 将式(4.2)代入式(4.1)，就得到出射光强度I_2的普遍公式.

下面我们看两个简单的特例: (1) P_1与P_2垂直①，e轴为它们的分角线(图4-2(a))；(2) P_1,e轴不动，将P_2转到与P_1平行(图4-2(b)). 在这两种情形里$\alpha=\beta=45°$，但前者$\delta'=\pi$，后者$\delta'=0$，所以

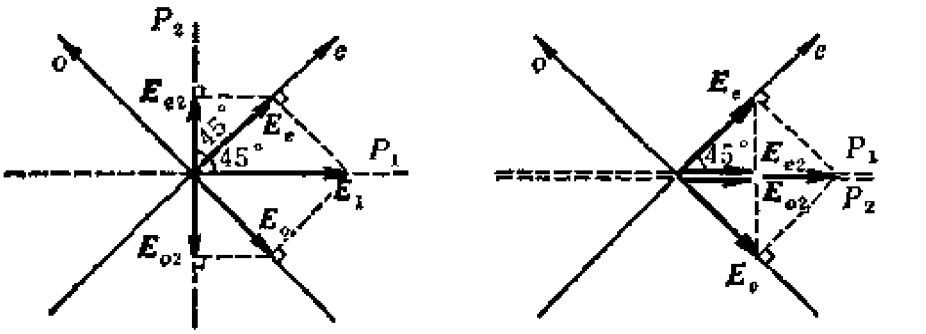
① 今后我们把"P_1与P_2的透振方向垂直(平行)"，就说成"P_1与P_2垂直(平行)"，或写成"$P_1\perp P_2$($P_1\parallel P_2$)".

$$\begin{cases} P_1 \perp P_2 \text{时}, \ I_2 = \dfrac{A_1^2}{2}[1+\cos(\delta+\pi)] = \dfrac{A_1^2}{2}(1-\cos\delta), \\ P_1 \parallel P_2 \text{时}, \ I_2 = \dfrac{A_1^2}{2}(1+\cos\delta), \end{cases} \tag{4.3}$$

式中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

是纯粹由波晶片产生的位相差．影响这个量大小的因素是多方面



(a) $P_1 \perp P_2$，光轴成 45° 角　　(b) $P_1 \parallel P_2$，光轴成 45 °角

图 4-2　两个简单特例的电矢量图

的，如 λ，d，$n_o - n_e$ 等，下面我们分别讨论它们的后果．

4.2　显色偏振

白光是各种波长的单色光组成的．如果其中缺了某种颜色(例如红色)的光，则呈现出它的互补色(绿色)来．

对于给定的波晶片，它具有一定的$(n_o - n_e)$和d，如果某单色光的波长 λ_1满足下式时：

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}(n_o - n_e)d = 2k\pi \ \ (k = \text{整数}),$$

这时 $\cos\delta_1 = 1$，由式(4.3)可知

$$\begin{cases} P_1 \perp P_2 \text{时}, \ I_2 = 0 \quad (\text{消光}), \\ P_1 \parallel P_2 \text{时}, \ I_2 = A_1^2 \quad (\text{极大}). \end{cases}$$

但对于另外一种波长为λ_2的单色光，可能

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}(n - n_e)d = (2k+1)\pi \quad (k = \text{整数}),$$

这时 $\cos\delta_2 = -1$，由式(4.3)可知

$$\begin{cases} P_1 \perp P_2 \text{时}, \ I_2 = A_1^2 \quad (\text{极大}), \\ P_1 \parallel P_2 \text{时}, \ I_2 = 0 \quad (\text{消光}). \end{cases}$$

如果入射光中同时包含波长为λ_1和λ_2的光，则 $P_1 \perp P_2$时显示出波长为 λ_1的颜色，$P_1 \parallel P_2$时显示出波长为 λ_2的颜色．白光中包含各种可能的波长，随着 P_2的转动，将显示出各种色彩的变换来．这便是实验(2)中描述的现象，这现象叫做显色偏振．

4.3 偏振光的干涉条纹

以上讨论的几种情况，幕上的干涉场中只有均匀的亮暗颜色的变化，但没有出现干涉条纹，这是因为晶片的厚度是均匀的．如果换一块厚度不均匀的晶片，例如一块尖劈形晶片(见图4-3)，

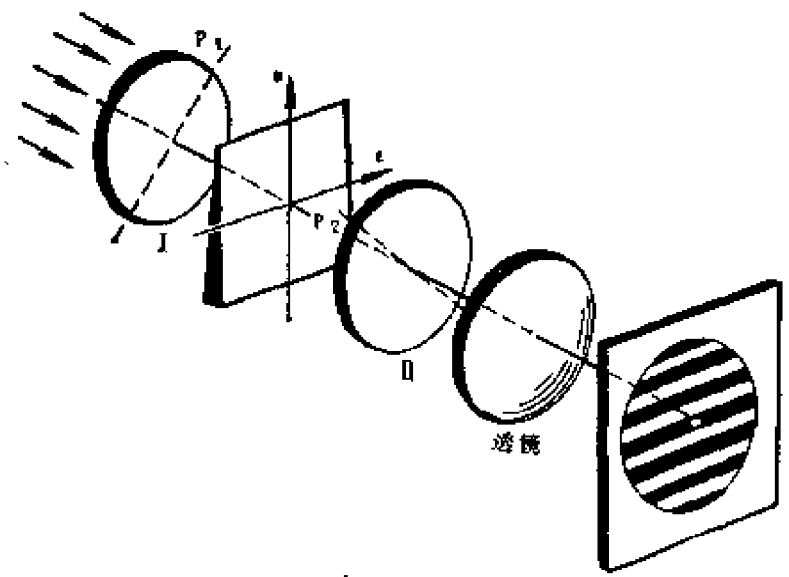


图 4-3 尖劈形晶片的等厚干涉条纹

则由于各处厚度 d 不同位相差 δ 也不同，用透镜将晶片的出射表面成像于幕上则幕上相应点的强度也不同，于是就出现等厚干涉条纹。波长为 λ 的单色光正入射且 $P_1 \perp P_2$ 时，在那些厚度 d 满足

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = 2k\pi$$

的地方，$\cos\delta = 1$，$I_2 = 0$，出现暗纹；在那些厚度 d 满足

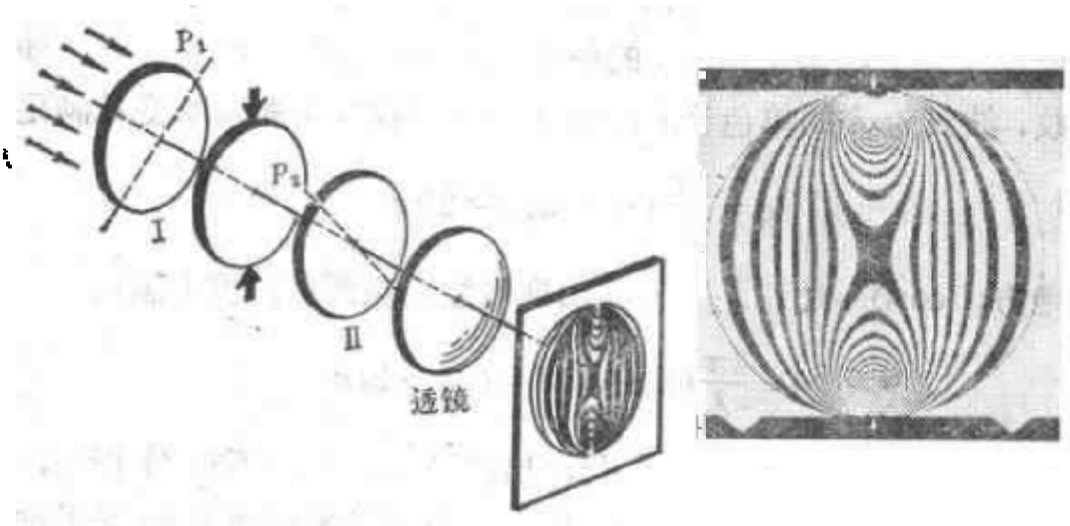
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = (2k+1)\pi$$

的地方，$\cos\delta = -1$，$I_2 = A_1^2$，出现亮纹。同样不难分析出，把 P_2 转到与 P_1 平行时的情形。用白光照明时各种波长的光干涉条纹不一致，在某种颜色的光出现暗纹的地方就显示出它的互补色来，这样，幕上就出现彩色条纹。以上便是实验(3)中观察到的现象。

4.4 光测弹性

折射率之差 $(n_o - n_e)$ 也是一个影响位相差 δ 的因素。玻璃或塑料，若经过很好地退火，是各向同性的。若退火不好，就会有些局部应力"凝固"在里边。内应力会产生一定程度的各向异性，从而产生双折射。换句话说，这种有内应力的透明媒质中 $n_o - n_e \neq 0$，它与应力分布有关。这样一来，把这种媒质做成片状插在两偏振片之间，不同的地点因 $(n_o - n_e)$ 不同而引起 o 光、e 光间不同的位相差 δ，幕上也会出现反映这种差别的干涉花样来。制造各种光学元件(如透镜、棱镜)的玻璃中不应有内应力，因为内应力会大大影响光学元件的性能。以上所述是检查光学玻璃退火后是否有残存内应力的一种有效方法。

如果一块玻璃或塑料，其中本来没有应力。当我们给它一个外加的应力时，它在两偏振片间也会出现干涉条件(图4-4)。应力越集中的地方，各向异性越强，干涉条纹越细密。这就是以上实验(4)中观察到的现象。光测弹性仪就是利用这种原理来检查



(a) 装置　　(b) 干涉条纹

图 4-4　光测弹性装置和干涉条纹

应力分布的仪器，它在实际中有很广泛的应用．例如为了设计一个机械工件、桥梁或水坝，可用透明塑料板模拟它们的形状，并根据实际工作状况按比例地加上应力，然后用光测弹性仪显示出其中的应力分布来．图 4-5 就是模拟一个火车挂钩的光测弹性照

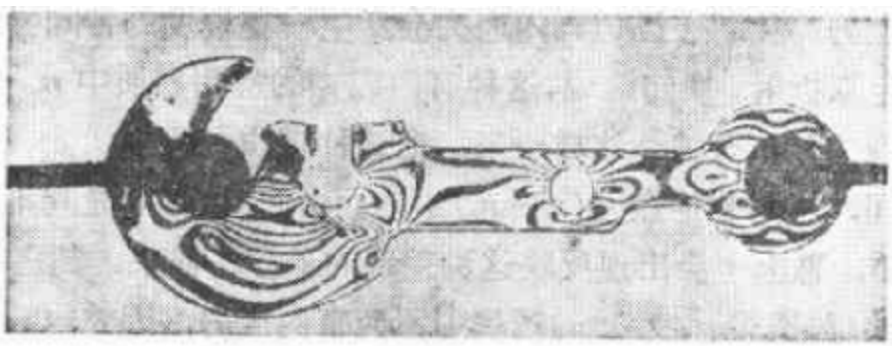


图 4-5　光测弹性照片

片．又如在矿井中为了预报可能的冒顶事故，可在坑道的壁上嵌入一块玻璃镜，前面放一偏振片，使入射光和反射光都通过它，因而这一块偏振片就起着光测弹性仪中两块偏振片的作用．在冒顶事故将发生前，玻璃镜中的应力必然很大，我们将从干涉条纹

中及时看到，从而可以采取预防措施．近年来我国还将光测弹性仪用于地震预报上．在地震将发生前，岩层内将出现很大的应力集中．在广阔的地区逐点勘测应力集中的区域，工作量是很大的．如果我们在某一地区的边缘上测得岩层应力的数据，然后用透明塑料板模拟该地区的形状和岩层构造，然后在板的边缘上按测得的数据模拟实际的应力分布，即可从光测弹性仪中找到应力最集中的地方，于是便可以在这些地方进行深入细致的实地勘测和考察．

4.5 克尔效应与泡克耳斯效应

除了外加应力外，电场也可以使某些物质产生双折射．

如图4-6在一个有平行玻璃窗的小盒内封着一对平行板电极，

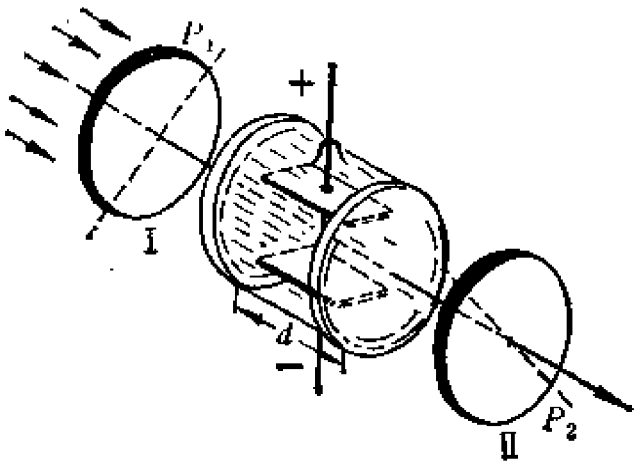


图 4-6 克尔盒

盒内充有硝基苯($C_6H_5NO_2$)的液体．两偏振片的透振方向垂直($P_1 \perp P_2$)，极间电场与它们成45°．电极间不加电压时，没有光线射出这对正交的偏振片，这表明盒内液体没有双折射效应($\delta = 0$)．当两极板间加上适当大小的强电场时($E \sim 10^4$ V/cm)，就有光线透过这个光学系统．这表明，盒内液体在强电场作用下变成了双折射物质，它把进来的光分解成 e 光和 o 光，使它们之间产生附加位相差，从而使出射光一般成为椭圆偏振光．这种现象叫

做克尔效应(J.Kerr,1875年).

实验表明，在克尔效应中$(n_o-n_e)\propto E^2$，从而

$$\frac{\delta}{2\pi}=\frac{(n_e-n_o)d}{\lambda}\propto\frac{E^2d}{\lambda}$$

或写成等式

$$\frac{\delta}{2\pi}=B\frac{E^2d}{\lambda},\qquad(4.4)$$

比例系数B称为该物质的克尔常数．硝基苯对于钠黄光($\lambda=5893$ Å)的克尔常数$B=220\times10^{-7}$CGSE单位．克尔效应不是硝基苯独有的，即使普通的物质(如水、玻璃)也都有克尔效应，不过它们的克尔常数要小2—3个数量级．值得注意的是，克尔效应与电场强度E的平方成正比，所以δ与电场的正、负取向无关．

硝基苯克尔效应的弛豫时间(即电场变化后δ跟随变化所需的时间)极短，约为10^{-9}s的数量级．所以用硝基苯的克尔盒来做高速光闸(光开关)、电光调制器(利用电讯号来改变光的强弱的器件)，在高速摄影、光束测距、激光通讯、激光电视等方面有广泛的应用．

克尔盒有很多缺点，例如对硝基苯液体的纯度要求很高（否则克尔常数下降，弛豫时间变长)、有毒、液体不便携带等．近年来随着激光技术的发展，对电光开关、电光调制的要求越来越广泛、越来越高．克尔盒逐渐为某些具有电光效应的晶体所代替，其中最典型的是KDP晶体，它的化学成分是磷酸二氢钾(KH_2PO_4)．这种晶体在自由状态下是单轴晶体，但在电场的作用下变成双轴晶体，沿原来光轴的方向产生附加的双折射效应．这效应与克尔效应不同，附加的位相差δ与电场强度的一次方成正比．这效应叫泡克耳斯效应(F.Pockels, 1893年)或晶体的线性电光效应．利用KDP晶体来代替克尔盒，除了可以克服上述缺点外，另一优点是所需电压比起克尔效应要低些．

*4.6 会聚偏振光的干涉

迄今为止，我们只讨论了平行偏振光的干涉，那时位相差随晶片的厚度而变．对于厚度均匀的晶片来说，位相差也可随光线的倾角而变　会聚偏振光的干涉条纹就是这样产生的．实验装置如图 4-7 所示，P_1，P_2是正

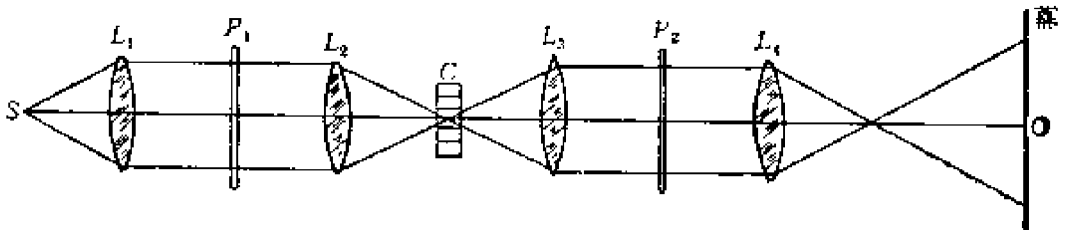
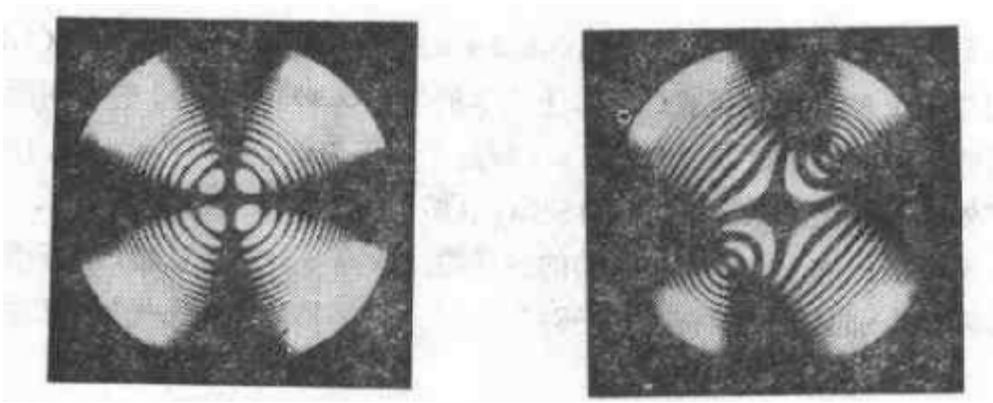


图 4-7　会聚偏振光的干涉装置

交偏振片，L_1，L_2，L_3，L_4是透镜，C是晶片，其光轴与表面垂直．短焦距的透镜 L_2把经 P_1后产生的平行线偏振光高度会聚地射到晶体上，然后再由同样的透镜L_3转化为平行光经过P_2．最后透镜 L_4把 L_3的后焦面成像于幕上．换句话说，以相同方向通过晶体 C 的光线最后会聚到幕上同一点．用这种装置产生的干涉图样示于图 4-8．在白光照明下，这些干涉图样都是彩色的．下面对它们作些解释．



(a) 单轴晶体　　(b) 双轴晶体

图 4-8　干涉图样

看单轴晶体情形．如图4-9(a)所示，沿光轴中心光线中 o 光 e 光间的位相差 $\delta = 0$，δ 是随通过晶体 C 时光线的倾角而增大的．如前所述，装

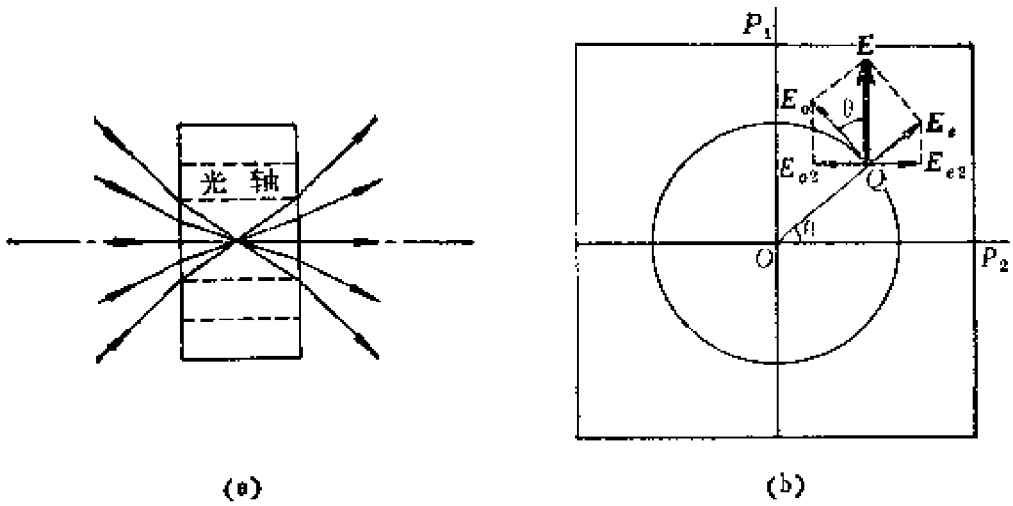


图 4-9　会聚偏振光的位相差和电矢量图

置的设计将保证以不同倾角通过 C 的光线落在幕上不同半径的圆周上，从而在幕上 $\delta=$ 常数的轨迹是同心圆.

考虑射在幕上 Q 点的光线. 对这些光线来说，晶体的主平面沿半径方向. 射到晶体 C 上的光线中电矢量 E 平行于 P_1，在 C 中 E 分解为 E_o 和 E_e，它们分别沿切线和半径(见图 4-9 (b))，振幅分别是 $A_o=A\cos\theta$，$A_e=A\sin\theta$. 经 P_2 再次投影时，振幅变为 $A_{o2}=A_o\sin\theta=A\cos\theta\sin\theta$，$A_{e2}=A_e\cos\theta=A\sin\theta\cos\theta$. 相干迭加后，幕上的强度分布为

$$I=A_{o2}^2+A_{e2}^2+2A_{o2}A_{e2}\cos(\delta+\pi)=A\sin2\theta(1-\cos\delta), \quad (4.5)$$

位相差加 π 的原因参见式(4.2). 上式中的 $(1-\cos\delta)$ 因子是 δ 的周期函数，它说明干涉条纹应该是同心圆；$\sin2\theta$ 这个因子表明，在 $\theta=0°, 90°, 180°, 270°$ 处 $I=0$，这便是干涉图样4-8(a)中那个黑十字形"刷子"的由来.

双轴晶体的干涉图样4-8(b)的解释要复杂得多，此处从略. 但应指出，干涉图样中那具有鲜明特征的一对"猫眼"，正是晶体的两条光轴方位之所在.

观察会聚偏振光干涉的方式多种多样，晶体的光轴和偏振器的取向都可与这里所述的不同，所得干涉图样也是千变万化的. 会聚偏振光干涉的最重要应用在矿物学中，人们在偏光显微镜下根据干涉图样来鉴定各种矿物标本.

思 考 题

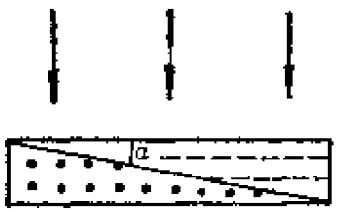
1. 任何干涉装置中都需要有分光束器件，本节所描述的装置中的分光束器件是什么？

2. 以前(第三章)讲过分波前和分振幅的干涉装置，本节所描述的干涉装置，是按什么分割光束的？

3. 本节所描述的干涉装置中，偏振器Ⅰ，Ⅱ对保证相干条件来说各起什么作用？撤掉偏振器Ⅰ或Ⅱ能否产生干涉效应？为什么？

4. 在4.1和4.2节描述的实验中并没有干涉条纹，你认为这时是否发生了光的干涉？为什么？

5. 巴俾涅补偿器的结构如图所示，它由两个楔形的石英棱镜组成，光轴方向如图。



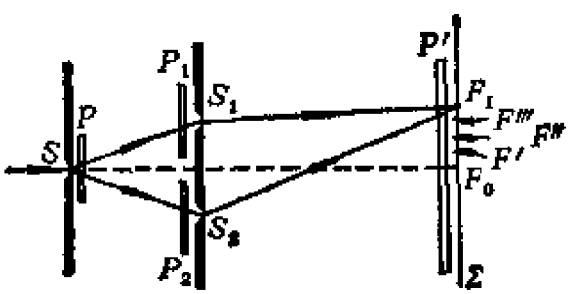
思考题5图

(1) 当单色线偏振光、椭圆偏振光、自然光通过巴俾涅补偿器时，通过检偏器观察，将分别看到什么图样？

(2) 干涉暗纹的距离与顶角 α 有什么关系？

(3) 用白光入射时，观察到的图样如何？

6. 图所示为杨氏干涉装置，其中 S 为单色自然光源，S_1 和 S_2 为双孔。



思考题6图

(1) 如果在 S 后放置一偏振片 P，干涉条纹是否发生变化？有何变化？

(2) 如果在 S_1，S_2 之前再各放置一偏振片 P_1，P_2，它们的透振方向相互垂直，并都与 P 的透振方向成45°角，幕 Σ 上的强度分布如何？

(3) 在 Σ 前再放置一偏振片 P'，其透振方向与 P 平行，试比较在这种情形下观察到的干涉条纹与 P_1，P_2，P' 都不存在时的干涉条纹有何不同？

(4) 同(3)，如果将 P 旋转 90°，幕上干涉条纹有何变化？

(5) 同(3)，如果将 P 撤去，幕上是否有干涉条纹？

(6) 类似(2)的布置，屏幕Σ上的F_0和F_1分别是未加P_1，P_2时0级和1级亮纹所在处，F'，F''，F'''是F_0F_1的四等分点．试说明F_0，F_1及F'，F''，F'''各点的偏振状态．

习　题

1．平行于光轴切割一块方解石晶片，放置在主截面成35°角的一对尼科耳棱镜之间，晶片的光轴平分此角，求

(1) 从方解石晶片射出的o光和e光的振幅和光强；

(2) 由第二个尼科耳棱镜射出时o光和e光的振幅和光强．

设入射自然光的光强为$I_0=A^2$，反射和吸收等损失可忽略．

2．强度为I_0的单色平行光通过正交尼科耳棱镜．现在两尼科耳棱镜之间插入一$\lambda/4$片，其主截面与第一尼科耳棱镜的主截面成60°角．求出射光的强度(忽略反射、吸收等损失)．

3．一块0.025mm厚的方解石晶片，表面平行于光轴，放在正交尼科耳棱镜之间，晶片的主截面与它们成45°角，试问：

(1) 在可见光范围内哪些波长的光不能通过？

(2) 如果将第二个尼科耳棱镜的主截面转到与第一个平行，哪些波长的光不能通过？

4．楔形水晶棱镜顶角0.5°，棱边与光轴平行，置于正交尼科耳棱镜之间，使其主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成45°角，以水银的4047Å紫色平行光正入射，

(1) 通过第二尼科耳棱镜看到的干涉图样如何？

(2) 相邻暗纹的间隔d等于多少？

(3) 若将第二尼科耳棱镜的主截面转90°，干涉图样有何变化？

(4) 维持两尼科耳棱镜正交，但把晶片的主截面转45°，使之与第二尼科耳棱镜的主截面垂直，干涉图样有何变化？

5．将巴俾涅补偿器(见思考题5)放在正交偏振片之间，光轴与它们的透振方向成45°角，你将看到什么现象？若楔角$\alpha=2.75°$，用平行的钠黄光照明，求干涉条纹的间隔．转动补偿器的光轴，对干涉条纹有什么影响？

6．以线偏振光照在巴俾涅补偿器上(见思考题5)，通过偏振片观察

时在中央两楔形棱镜厚度 $d_1 = d_2$ 处有一暗线，与中央暗线距离 a 处又有一暗线．今以一同样波长的椭圆偏振光照在此巴俾涅补偿器上，发现暗线移至离中央 b 处．

(1) 求椭圆偏振光在补偿器晶体中分解成的两个振动分量的初始位相差与 a，b 的关系．

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两楔形棱镜的光轴平行，试证此时 $b = a/4$．

(3) 设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ，找出 θ 与(2)问中椭圆长短轴比值的关系．

§5 旋　光

5.1 石英的旋光现象

如§1所述，在普通的单轴晶体（如冰洲石）中光线沿光轴传播时不发生双折射，即 o 光和 e 光的传播方向和波速都一样．因此，如果我们在这种晶体内垂直于光轴方向切割出一块平行平面晶片(图5-1(a))，并将它插在一对正交的偏振片Ⅰ，Ⅱ之间(图5-1(b))，由于从偏振片Ⅰ透射出来的线偏振光经过此晶片时偏振状

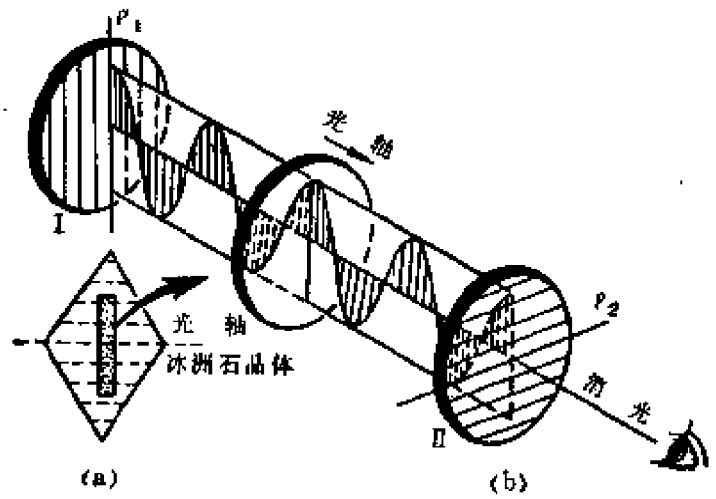


图 5-1　冰洲石无旋光效应

态不发生任何改变，在偏振片Ⅱ后面仍然消光．但是若用石英代替冰洲石来做上述实验(图5-2)，我们就会发现，把这样一块垂直于光轴的平行平面晶片插入正交偏振片Ⅰ，Ⅱ之间，在单色光的照射下从偏振片Ⅱ后看去视场变亮了(图5-2(b))．这时若把偏振片Ⅱ透振方向向左或右旋转一个角度 ψ 时，又复消光(图5-2(c))．这表明，从石英晶片透射出来的光仍是线偏振的，不过其振动面向左或向右旋转了一个角度 ψ．这种现象叫做旋光．

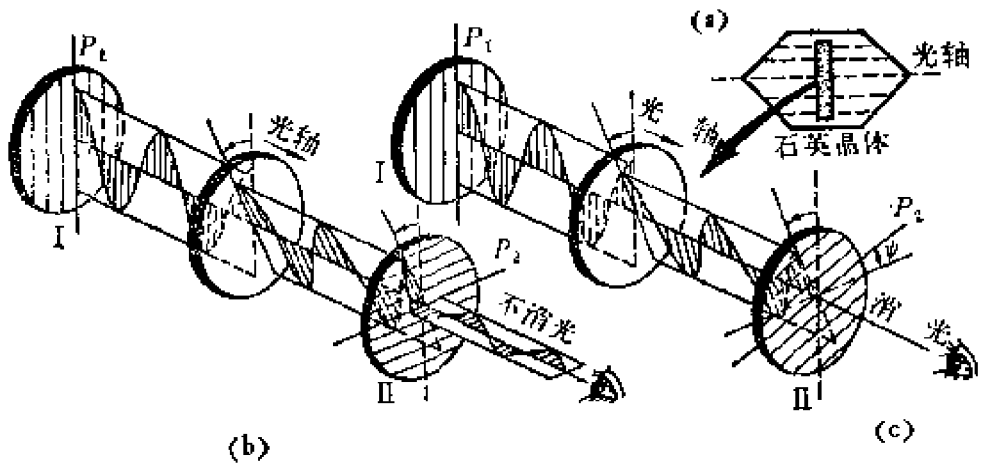


图 5-2　石英的旋光效应

实验表明，振动面旋转角度 ψ 与石英晶片的厚度 d 成正比：

$$\psi = \alpha d, \qquad (5.1)$$

比例系数 α 叫做石英的旋光率．旋光率的数值因波长而异(见表Ⅶ-4)，因此在白光照射下，不同颜色的振动面旋转的角度不同．

表Ⅶ-4　石英的旋光率与波长的关系

波　长　(Å)	7947.6	7604	7281	6708	6562	5890	5461
α(°(度)/mm)	11.589	12.668	13.924	16.535	17.318	21.749	25.538
波　长　(Å)	4861	4307	4047	3820	3441	2571	1750
α(°(度)/mm)	32.773	42.604	48.945	55.625	70.587	143.266	453.5

由于各种颜色的光不能同时消光，我们在偏振片Ⅱ后面观察到的将是色彩的变化．这种现象叫做旋光色散．

振动面究竟向左还是向右旋转，与石英晶体的结构有关．石英晶体有左旋和右旋两种变体，它们的外形完全相似，只是一种是另一种的镜像反演(图5-3)．两种晶体使振动面旋转的方向相反．

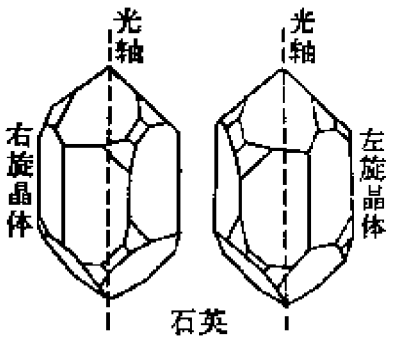


图 5-3　石英的右旋与左旋晶体

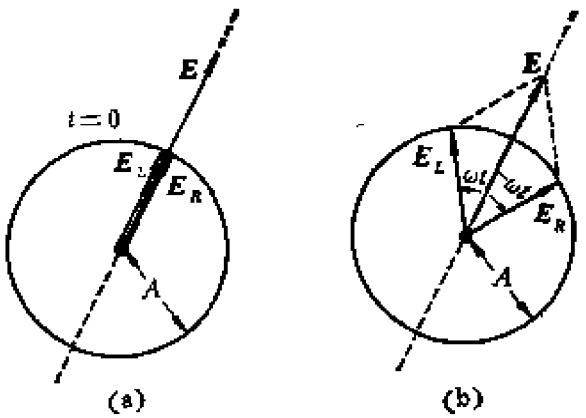


图 5-4　左右旋圆运动合成直线简谐运动

5.2　菲涅耳对旋光性的解释

（1）直线上的简谐振动可以分解成左、右旋圆运动

为了说明旋光现象是怎样产生的，需要先讲一点预备知识．在 4.1 节中我们讨论了两个同频的垂直简谐振动合成为一个圆运动的问题．或者反过来说，一个圆运动可以分解成一对相互垂直的同频简谐振动．这里我们要讨论的问题是一个直线简谐振动可以分解成一对圆运动．如图5-4，$\boldsymbol{E}_L$和$\boldsymbol{E}_R$是两个大小相等(皆为A)而不变的旋转矢量，它们的角速度($\pm\omega$)大小相等方向相反．设在 $t=0$ 时刻它们沿某一方向重合(图5-4(a))，由于过任意时间 t 后两个矢量的角位移($\pm\omega t$)也大小相等方向相反，它们的合矢量 $\boldsymbol{E}$ 总保持在原来的方向上(图5-4(b))．这时 $\boldsymbol{E}$ 的瞬时值为

$$E=2A\cos\omega t.$$

由此可见，E_L，E_R两个旋转矢量合成一个沿直线作简谐振动的矢量E，其振幅为$2A$，方向永远在E_L，E_R瞬时位置的分角线上.

上述结论也可以反过来叙述，即一个沿直线作简谐振动的矢量E可以分解成一对左、右旋的旋转矢量E_L和E_R，它们的大小是矢量E的振幅之半，角速度的大小是矢量E的角频率ω.

运用这原理到光学，就是线偏振光可以分解成左、右旋圆偏振光，而左、右旋圆偏振光可以合成为线偏振光.

（2）旋光性的解释

为了解释旋光性，菲涅耳作了如下假设：在旋光晶体中线偏振光沿光轴传播时分解成左旋和右旋圆偏振光（L光和R光），它们的传播速度v_L，v_R略有不同，或者说二者的折射率$n_L=c/v_L$，$n_R=c/v_R$不同，因而经过旋光晶片时产生不同的位相滞后：

$$\varphi_L=\frac{2\pi}{\lambda}n_Ld,\qquad \varphi_R=\frac{2\pi}{\lambda}n_Rd,$$

式中λ为真空中波长，d为旋光晶片的厚度.下面我们就根据这个假设来解释旋光现象.

应注意，圆偏振光的位相即旋转电矢量的角位移，位相滞后即角度倒转.当圆偏振光经过晶片时，在出射界面Ⅱ上电矢量E_L，E_R的瞬时位置（见图5-5(b)）比同一时刻入射界面Ⅰ上的位置（图5-5(a)）分别落后一个角度φ_L和φ_R.对于L光，E_L在界面Ⅱ上的位置处于同一时刻在界面Ⅰ上位置的右边，即它需要经过一段时间向左转过φ_L的角度才是此时刻界面Ⅰ上的位置.同理，R光中E_R在界面Ⅱ上的位置处于同一时刻在界面Ⅰ上位置的左边，相差一个角度φ_R.这一点请读者密切注意，不要搞错！

为了简便，设入射的线偏振光的振动面在竖直方向，并取它在入射界面Ⅰ上的初位相为0，即在$t=0$时刻入射光中电矢量E的方向朝上并具有极大值.因此将它分解为左、右旋圆偏振光后，E_L，E_R此时刻的瞬时位置都与E一致，也是朝上的（图5-5(a)）.现在我们来考虑同一时刻出射界面Ⅱ上的情形，在这里E_L和E_R分

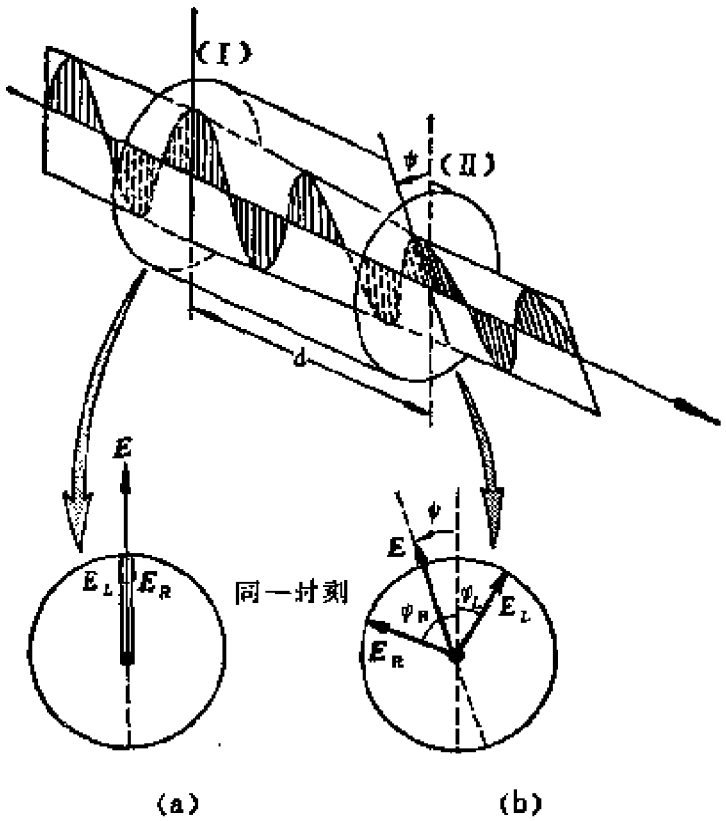


图 5-5　旋光性的解释

别位于竖直方向的右边和左边一个角度 φ_L 和 φ_R(图5-5(b))．当光束穿出晶片后左、右旋圆偏振光的速度恢复一致，我们又可以将它们合成起来考虑．如前所述，它们合成为一个线偏振光，其偏振方向在 $\boldsymbol{E}_L$，$\boldsymbol{E}_R$ 瞬时位置的分角线上．从图5-5(b)不难看出，此方向相对于原来的竖直方向转过了一个角度 ψ，其大小为

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L) = \frac{\pi}{\lambda}(n_R - n_L)d. \qquad (5.2)$$

上式表明，偏振面转动的角度 ψ 是与旋光晶片的厚度 d 成正比的．当 $n_R > n_L$ 时，$\psi > 0$，晶体是左旋的；当 $n_R < n_L$ 时，$\psi < 0$，晶体是右旋的．这样，晶体的旋光性便得到了解释．

（3）菲涅耳假设的实验验证

菲涅耳在提出上述假设的同时，设计了如图 5-6 所示的复合

棱镜验证了它。他起初企图用单个石英棱镜来观察石英中线偏振光分解为左、右旋圆偏振光的双折射现象，但由于 n_R 与 n_L 的差别太小而未获成功。于是他就用左、右旋晶体制成棱镜，交替排列起来，成为图5-6中的复合棱镜，其中横线代表光轴方向。如果线偏振光在石英晶体中确实分解为速度不同的左、右旋圆偏振光，在这种装置中光线每次遇到倾斜的棱镜界面时，R 光和 L 光传播方向的差别都会进一步增大(这一点留给读者自己分析)。最后用§3所述的办法来检验出射的两光束的偏振状态，证明它们确是左、右旋的圆偏振光。

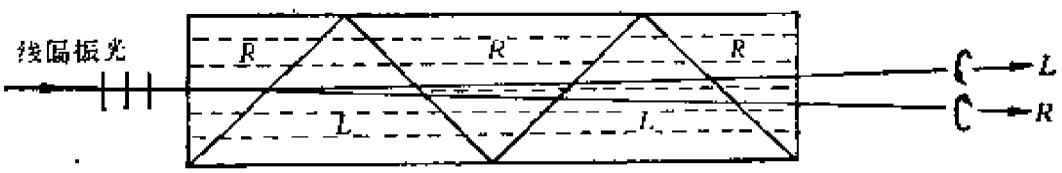


图 5-6　菲涅耳复合棱镜

5.3　旋光晶体内的波面

在§1中讲过，石英是一种正的单轴晶体，实际上作为旋光物质，其中波面的形状和电矢量的本征振动情况，与该节中描述的还有些不同：(1)两层波面在与光轴交点处并不相切，(2)只有垂直于光轴传播时两光线才是线偏振的，即前面所说的 o 光和 e 光；沿光轴传播时，它们分别是左、右旋圆偏振光，即 L 光和 R 光。(3)当光线沿任意倾斜方向传播时，两光线都是椭圆偏振光。图 5-7 所示为一右旋石英晶体中两波面上偏振态随传播方向的逐渐演化，这里 R 光是快光，它经 R_o(长轴垂直主平面的椭圆光)过渡到较快的 o 光；L 光是慢光，它经 L_e(长轴在主平面内的椭圆光)过渡到 e 光。在左旋石英中情况与图中所示相反，L 光是快光，它经 L_o 过渡到 o 光；R 光是慢光，它经 R_e 过渡到 e 光。

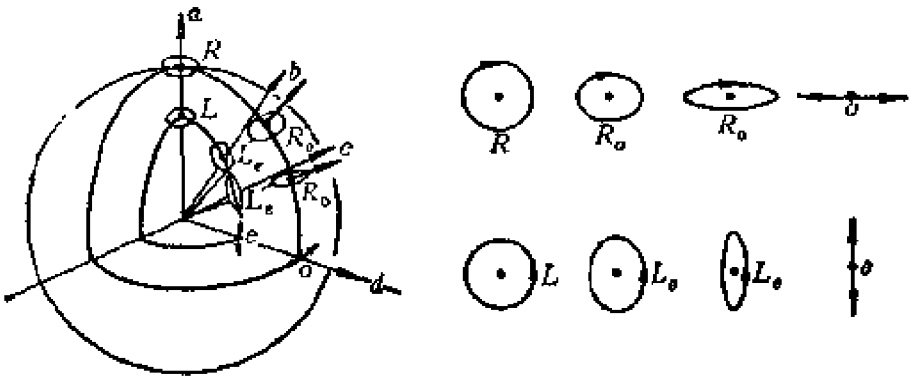


图 5-7　石英晶体中的波面

由此可见，若将石英晶体切成垂直光轴的晶片，它具有旋光性；切成平行于光轴的晶片，它与普通无旋光的晶体无异，可制成 $\lambda/4$，$\lambda/2$ 等位相延迟器。如果倾斜切割，我们将获得椭圆偏振的双折射光。

读者也许会发生这样的疑问：有时要把圆和椭圆偏振光分解成线偏振光（o 光、e 光），有时又要把线偏振光分解成圆偏振光（L 光、R 光）。究竟是纯粹为了处理问题的方便，还是其中有什么客观依据？我们说，这不是主观任意的数学游戏，而是以光和物质相互作用的具体规律为依据的。在第二章 §10 和本章各节中介绍的许多光学器件都有这样的特性，即某两种特定偏振状态的光束通过它们时，其偏振状态不变。如沿 p 方向或 s 方向线偏振的光束经透明媒质表面反射或折射后，仍分别为沿 p 方向或 s 方向的线偏振光；沿 o 方向或 e 方向线偏振的光束经波晶片后，仍分别为沿 o 方向或 e 方向的线偏振光；左旋或右旋的圆偏振光经旋光晶片，仍分别为左旋或右旋的圆偏振光，等等。经某种光学器件后怎样的光不改变偏振状态，是光学器件本身固有的特征，而不是我们主观任意规定的。所以我们可以把这种经某光学器件后不发生变化的振动方式，叫做该光学器件的本征振动。如两种透明媒质的界面的本征振动是 p 振动和 s 振动，波晶片的本征振动是 o 振动和 e 振动，旋光晶片的本征振动是 L 振动和 R 振动，及上面说的 R_o 和 L_e 振动，R_e 和 L_o 振动等等，都是在一定条件下的本征振动。入射光的振动方式符合光学器件的本征振动之一，它就能够通过它而不发生变化，否则其振动方式（偏振状态）就要起变化。为了讨论那些不符合光学器件本征振动的入射光经过该器件后发生怎样的变化，我们总是在刚进入器

件之前将它按照该器件的两个本征振动分解，出射后再将两个分量合成，看它变成了怎样的偏振状态．读者可以回顾一下，我们在讨论偏振态的变化时，许多地方处理问题的方法都是沿着这一线索进行的．

5.4 量糖术

除了石英晶体外，许多有机液体或溶液也具有旋光性，其中最典型的是食糖的水溶液．如图5-8所示，在一对偏振器之间加入一根带有平行平面窗口的玻璃管，管内充糖溶液，这种装置叫做量糖计．从偏振器可以检验出来，光线经过管内溶液时有旋光现象．实验表明，振动面的转角 ψ 与管长 l 和溶液的浓度 N 成正比：

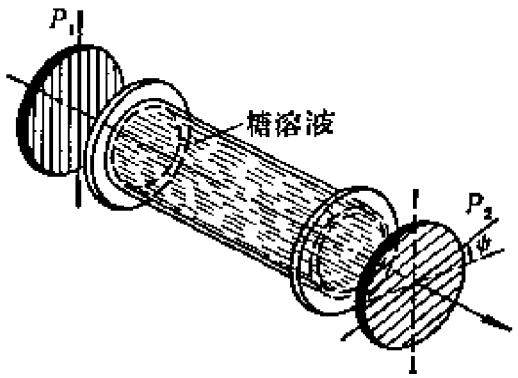


图 5-8 量糖计

$$\psi = [\alpha] N l, \qquad (5.3)$$

比例系数 $[\alpha]$ 叫做该溶液的比旋光率．通常 l 的单位用dm (1dm = 10cm)，N 的单位用 g/cm³，于是 $[\alpha]$ 的单位是°(度)/dm·(g/cm³)．蔗糖的水溶液在20℃ 的温度下对于钠黄光的比旋光率 $[\alpha] = 66.46°/\text{dm}\cdot(\text{g/cm}^3)$ ($[\alpha]>0$表示右旋①)．测得比旋光率后，我们就可以根据量糖计测得的转角 ψ 求出溶液的浓度 N 来．这种测浓度的方法既迅速又准确，在制糖工业中有广泛的应用．

除糖溶液外，许多有机物质(特别是药物)也具有旋光性，并且和石英晶体一样，同一种物质常常有左、右两种旋光异构体．例如氯霉素本是从一种链丝菌培养液中提出的抗菌素，天然品为左旋．工业上主要用人工合成，合成品为左、右旋各半的混合旋化合物，通常称为“合霉素”．在两种旋光异构体中只有左旋有疗

① 在量糖术中习惯上规定旋角 ψ 的正负与通常采用的极坐标系相反，它以顺时针(右旋)为正，逆时针(左旋)为负．故比旋光率 $[\alpha]>0$ 和 <0 分别代表右旋和左旋．

效，故合霉素的效价仅为天然品的一半．从合霉素中分出的左旋品也称“左霉素”，效价与天然品同．驱虫药四咪唑也有同样的问题，直接生产出来的是左、右旋的混合物，而其中有效的是左旋成分．分析和研究液体的旋光异构体，也需要利用量糖计，相应的方法通常都广义地叫做“量糖术”．所以量糖术在化学、制药等工业中也有广泛的应用．

5.5 磁致旋光——法拉第旋转

正如用人工的办法（应力、电场等）可以产生双折射一样（参见§1），用人工办法也可以产生旋光效应，其中最重要的是磁致旋光效应，通常称为法拉第旋转效应(M.Faraday,1845年)．

观察法拉第旋转的装置如图5-9所示，由起偏器 P_1 产生线偏

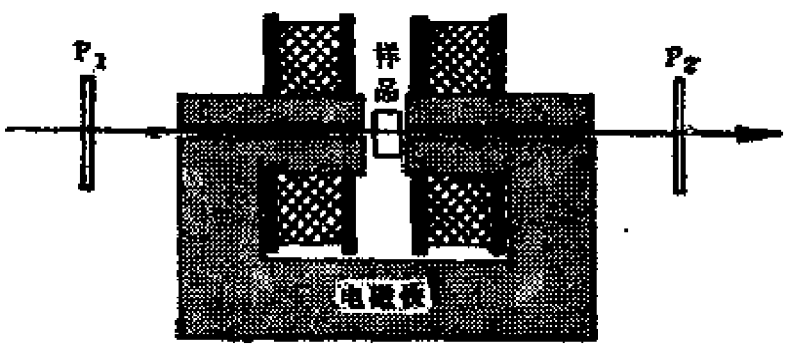


图 5-9 磁致旋光

振光，光线穿过带孔的电磁铁（或螺线管），沿着（或逆着）磁场方向透过样品．当励磁线圈中没有电流时，令检偏器 P_2 的透振方向与 P_1 正交，这时发生消光现象，它表明，振动面在样品中没有旋转．通入励磁电流产生强磁场后，则发现必须将 P_2 的透振方向转过 ψ 角，才出现消光．这表明，振动面在样品中转了角度 ψ，这就是磁致旋光或法拉第旋转效应．

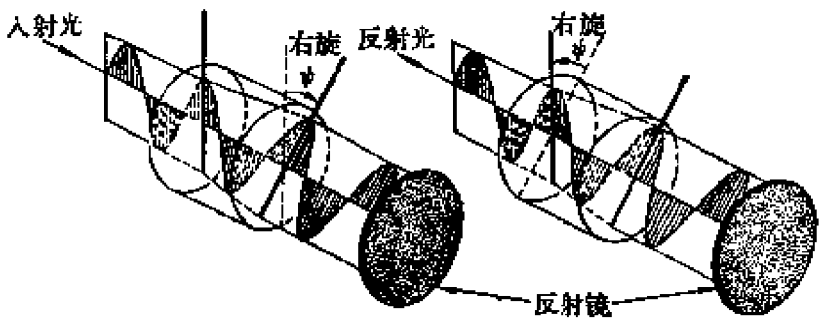
实验表明，法拉第旋转效应有如下规律：

（1）对于给定的介质，振动面的转角 ψ 与样品的长度 l 和磁感应强度 B 成正比

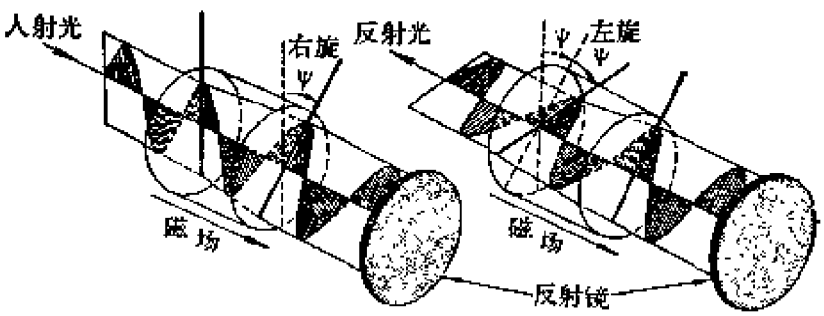
$$\psi = VlB, \tag{5.4}$$

比例系数 V 叫做维尔德(Verdet)常数．一般物质的维尔德常数都很小，相对来说，液体中 V 值较大的有二硫化碳（CS_2），$V = 0.042'/cm \cdot Gs$，固体中某些重火石玻璃的 V 可达 $0.09'/cm \cdot Gs$．

（2）光的传播方向反转时，法拉第旋转的左右方向互换．这一点是与自然旋光物质很不同的，那里左右旋是由旋光物质决定的，与光的传播方向是否反转无关．举例来说，例如当线偏振光通过右旋的自然旋光物质时，无论光束沿正反方向传播，迎着传播方向看去，振动面总是向右旋转．因此如果透射光沿原路返回，其振动面将回到初始位置(参见图5-10(a))．但是当线偏振光



(a) 自然旋光



(b) 磁致旋光

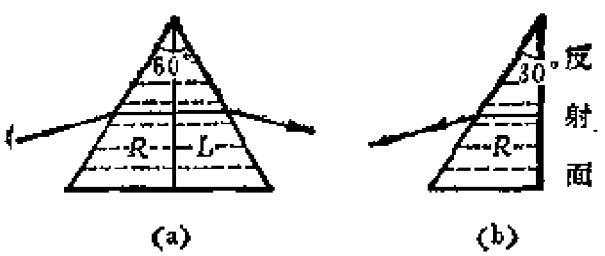
图 5-10　自然旋光与磁致旋光的比较

通过磁光介质时，如果沿磁场方向传播，振动面向右旋；当光束沿反方向传播时，迎着传播方向看去振动面将向左旋．所以，如果光束由于反射一正一反两次通过磁光介质后，振动面的最终位置与初始位置比较，将转过 2ψ 的角度(参见图5-10(b))．

利用法拉第旋转的以上特点可制成光隔离器，即只允许光从一个方向通过而不能从反方向通过的"光活门"．这在激光的多级放大装置中往往是必要的，因为光学放大系统中有许多界面，它们都会把一部分光反射回去，这对前级的装置会造成干扰和损害．装了光隔离器就可避免这一点．

思 考 题

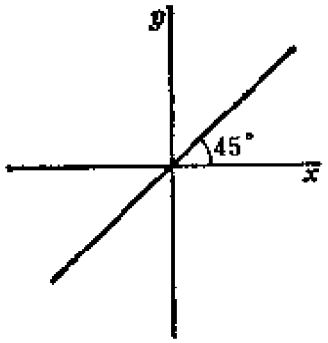
1．图(a)所示的棱镜叫做科纽(M.A.Cornu)棱镜，它是两半个石英晶体做成，一半是右旋晶体，另一半是左旋晶体，光轴如图中虚线所示．这种石英晶体棱镜是为摄谱仪设计的，它有什么优点？实际的摄谱仪中多采用图(b)所示的半个科纽棱镜，中垂面上镀银或铝，将光束沿原路反射回去．这样的装置是否能达到整个科纽棱镜的作用？为什么？



思考题1图

2．法拉第旋转隔离器的装置就是在一磁光介质棒的前后各放置一个偏振器 P_1 和 P_2．为了达到光隔离的目的，通过磁感应强度的大小和介质棒长度的选择，应使振动面的偏转角 ψ 等于多少？两偏振器 P_1，P_2 的透振方向应有多大夹角？为什么？

3．有四个滤光器件：Ⅰ是各向同性的滤光片，使各种偏振态的光强



思考题 8 图

都滤掉一半；Ⅱ和Ⅲ都是线起偏器，透振方向分别为水平方向（x 轴）和 $+45°$（见图）；Ⅳ是圆起偏器，它让右旋圆偏振光全部通过，把左旋圆偏振光全部吸收掉．把各滤光器件分别放在要研究的光路中，测量透射出来的光强．设入射光强为 I_0，透过Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的光强分别为 I_1, I_2, I_3, I_4，斯托克斯引入下列四个参量来描述电磁波的偏振状态：

$$\begin{cases} S_0 = 2I_1, \\ S_1 = 2(I_2 - I_1), \\ S_2 = 2(I_3 - I_1), \\ S_3 = 2(I_4 - I_1). \end{cases}$$

这便是斯托克斯参量的操作定义(G.Stokes,1852年)．人们还常把这些参量归一化，即用 I_0 除一下，把得到的四个数 $S_0/I_0, S_1/I_0, S_2/I_0, S_4/I_0$ 写成一组，用来描写入射光的偏振状态．例如对于自然光，$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_0/2$，故描述它的归一化斯托克斯参量为(1,0,0,0)．写出下列偏振态的斯托克斯参量：(1)水平(x方向)线偏振；(2)垂直(y方向)线偏振；(3)$+45°$线偏振；(4)$-45°$线偏振；(5)右旋圆偏振；(6)左旋圆偏振；(7)部分偏振，极大在 x 方向，偏振度 50%；(8)部分偏振，极大在 y 方向，偏振度 50%．

习　题

1．已知水晶对钠黄光的旋光率 $\alpha = 21.75°/\text{mm}$，求左、右旋圆偏振光折射率之差 Δn．

2．在两尼科耳棱镜之间插一块石英旋光晶片，以消除对眼睛最敏感的黄绿色光($\lambda = 5500\text{Å}$)，设对此波长的旋光率为 $24°/\text{mm}$，求下列情形下晶片的厚度：

(1) 两尼科耳棱镜主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜主截面平行．

3．一石英棒长 5.639cm，端面垂直于光轴，置于正交偏振器间，沿

轴方向输入白光，用光谱仪观察透射光。

（1）用一大张坐标纸，画出可见光范围(4000—7600Å)振动面的旋转角与波长的曲线，旋光率数据可参照表Ⅷ-4。

（2）从这曲线看，哪些波长的光在光谱仪中消失？

（3）在这些丢失的波长中，振动面的最大和最小旋转角各是多少？

4. 一块表面垂直光轴的水晶片恰好抵消10cm长浓度20%的麦芽糖溶液对钠光振动面所引起的旋转。对此波长水晶的旋光率$\alpha = 21.75°/mm$，麦芽糖的比旋光率$[\alpha] = 144°/dm\cdot(g/cm^3)$，求此水晶片的厚度。

5. 15cm长的左旋葡萄糖溶液使钠光的振动面转了25.6°，已知$[\alpha] = -51.4°/dm\cdot(g/cm^3)$，求溶液浓度。

6. 将14.50g的蔗糖溶于水，得到60cm^{3}的溶液。在15cm的量糖计中测得钠光振动面旋转角为向右16.8°，已知$[\alpha] = 66.5°/dm\cdot(g/cm^3)$。这蔗糖样品中有多少比例的非旋光性杂质？

7. 钠光以最小偏向角条件射入顶角为60°的石英晶体棱镜中，棱镜中光轴与底平行。求出射的左、右旋偏振光之间的夹角(所需数据在本章给出的表格中查找)。

第八章　光的吸收、色散和散射

以上各章主要讨论的是光的传播，自本章起将更多地讨论光和物质的相互作用．研究这类现象，一方面有助于对光的本性的了解，另一方面还可得到许多有关物质结构的重要知识．

§1　光 的 吸 收

除了真空，没有一种媒质对电磁波是绝对透明的．光的强度随穿进媒质的深度而减少的现象，称为媒质对光的吸收．仔细的研究表明：这里还应区分真吸收和散射两种情况，前者是光能真被媒质吸收后转化为热能，后者则是光被媒质中的不均匀性散射到四面八方．

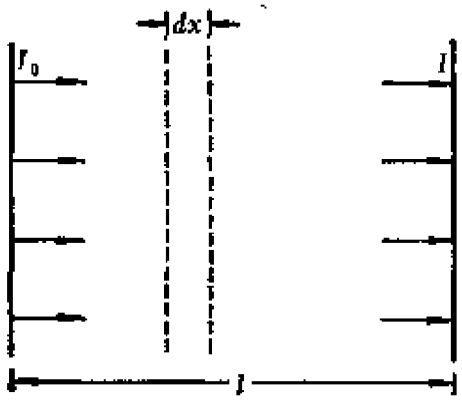


图 1-1　光的吸收

1.1　吸收的线性规律

令单色平行光束沿 x 方向通过均匀媒质(图1-1)．设光的强度在经过厚度为 dx 的一层媒质时强度由 I 减为 $I-dI$．实验表明，在相当广阔的光强范围内，$-dI$ 正比于 I 和 dx，有

$$-dI=\alpha I dx, \tag{1.1}$$

式中 α 是个与光强无关的比例系数，称为该物质的吸收系数．

为了求出光束穿过厚度为 l 的媒质后强度的改变，只需将上式改写如下：

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx,$$

并在 0 到 l 区间对 x 积分，即得

$$\ln I - \ln I_0 = -\alpha l,$$

或

$$I = I_0 e^{-\alpha l}, \tag{1.2}$$

式中 I_0 和 I 分别为 $x=0$ 和 $x=l$ 处的光强．α 的量纲是长度的倒数，α^{-1}的物理意义是光强因吸收而减到原来的 $e^{-1}\simeq 36\%$时所穿过媒质的厚度．式(1.2)称为布格尔定律 (P.Bouguer,1729年)或朗伯定律(J.H.Lambert, 1760年)．因式(1.1)中的 α 与 I 无关，该式是光强 I 的线性微分方程，故布格尔定律是光的吸收的线性规律．在激光未被发明之前，大量实验证明，这定律是相当精确的．然而激光的出现，使人们能够掌握的光强比原来大了几个乃至十几个数量级，光和物质的非线性相互作用过程显示出来了，并成为人们研究的重要领域．在非线性光学领域内，吸收系数 α 将和其它许多系数(如折射率)一样，依赖于电、磁场或光的强度，布格尔定律不再成立．

实验证明，当光被透明溶剂中溶解的物质所吸收时，吸收系数 α 与溶液的浓度 C 成正比

$$\alpha = AC, \tag{1.3}$$

其中 A 是一个与浓度无关的新常数．这时式(1.2)可以写成

$$I = I_0 e^{-ACl}. \tag{1.4}$$

这规律称为比尔定律(A.Beer,1852年)．比尔定律表明，被吸收的光能是与光路中吸收光的分子数成正比的，这只有每个分子的吸收本领不受周围分子影响时才成立．事实也正是这样，当溶液浓度大到足以使分子间的相互作用影响到它们的吸收本领时，就会发生对比尔定律的偏离．在比尔定律成立的情况下，可根据式(1.3)来测定溶液的浓度．这就是吸收光谱分析的原理．

1.2 复数折射率的意义

透明媒质折射率的本意是 $n=c/v$，即真空光速 c 与媒质中光速 v 之比．在媒质中沿 x 方向传播的平面电磁波中电场强度可写作如下复数形式：

$$\tilde{E}=\tilde{E}_0\exp[-i(\omega t-x/v)]=\tilde{E}_0\exp[-i\omega(t-nx/c)], \tag{1.5}$$

这里 n 是实数，电磁波不随距离衰减．如果我们形式地把折射率看成是复数，并记作

$$\tilde{n}=n(1+i\kappa), \tag{1.6}$$

其中 n 和 κ 都是实数，则式(1.5)化为

$$\begin{aligned}\tilde{E}&=\tilde{E}_0\exp[-i\omega(t-\tilde{n}x/c)]\\&=\tilde{E}_0e^{-n\kappa\omega x/c}\exp[-i\omega(t-nx/c)],\end{aligned} \tag{1.7}$$

而光强则为

$$I\propto\tilde{E}^*\tilde{E}=|E_0|^2e^{-2n\kappa\omega x/c}, \tag{1.8}$$

此式和式(1.2)形式相同，代表一个随距离 x 衰减的平面波，故 κ 称为衰减指数．将式(1.8)与(1.2)加以比较，即可看出，衰减指数 κ 与吸收系数 α 的关系是

$$\alpha=2n\kappa\omega/c=4\pi n\kappa/\lambda, \tag{1.9}$$

这里 λ 是真空中波长．由此可见，媒质的吸收可归并到一个复数折射率 $\tilde{n}$ 的概念中去，$\tilde{n}$ 的虚部反映了因媒质的吸收而产生的电磁波衰减．

1.3 光的吸收与波长的关系

若物质对各种波长 λ 的光的吸收程度几乎相等，即吸收系数 α 与 λ 无关，则称为普遍吸收．在可见光范围内的普遍吸收意味着光束通过媒质后只改变强度，不改变颜色．例如空气、纯水、无色玻

璃等媒质都在可见光范围内产生普遍吸收.

若物质对某些波长的光的吸收特别强烈，则称为选择吸收. 对可见光进行选择吸收，会使白光变为彩色光. 绝大部分物体呈现颜色，都是其表面或体内对可见光进行选择吸收的结果.

从广阔的电磁波谱来考虑，普遍吸收的媒质是不存在的. 在可见光范围内普遍吸收的物质，往往在红外和紫外波段内进行选择吸收，故而选择吸收是光和物质相互作用的普遍规律. 以空气为例，地球大气对可见光和波长在 3000 Å 以上的紫外线是透明的，波长短于3000 Å 的紫外线将被空气中的臭氧强烈吸收. 对于红外辐射，大气只在某些狭窄的波段内是透明的. 这些透明的波段称为"大气窗口". 这里的主要吸收气体是水蒸汽，所以大气的红外窗口与气象条件有密切关系.

制作分光仪器中棱镜、透镜的材料必须对所研究的波长范围是透明的. 由于选择吸收，任何光学材料在紫外和红外端都有一定的透光极限(参见表Ⅷ-1).紫外光谱仪中的棱镜需用石英制作，红外光谱仪中的棱镜则常用岩盐或 CaF_2、LiF 等晶体制成.

表Ⅷ-1 常用光学材料的透光极限

物质	透光极限 (波长Å)	
	紫外	红外
冕玻璃	3500	20000
火石玻璃	3800	25000
石英 (SiO_2)	1800	40000
萤石 (CaF_2)	1250	95000
岩盐 (NaCl)	1750	145000
氯化钾 (KCl)	1800	230000
氟化锂 (LiF)	1100	70000

1.4 吸收光谱

观察物质对光的选择吸收的装置如图1-2所示，令具有连续谱

的光(白光)通过吸收物质后再经光谱仪分析，即可将不同波长的光被吸收的情况显示出来，形成所谓"吸收光谱".

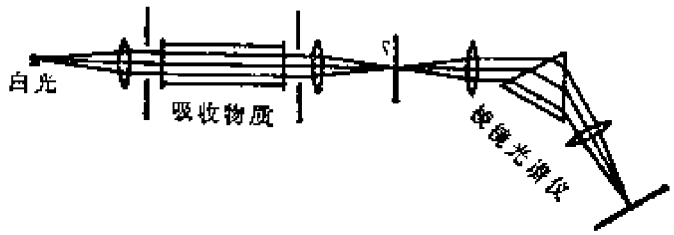


图1-2 观察吸收光谱的实验装置

物质的发射光谱有多种——线光谱、带光谱、连续光谱等.大致说来，原子气体的光谱是线光谱，而分子气体、液体和固体的光谱多是带光谱.吸收光谱的情况也是如此.值得注意的是,同一物质的发射光谱和吸收光谱之间有相当严格的对应关系.图1-3所示是铁的发射光谱和吸收光谱.可以看出,发射光谱(a)中的亮线与吸收光谱(b)中的暗线一一对应.这就是说,某种物质自身发射哪些波长的光，它就强烈地吸收那些波长的光.



图1-3 铁的发射光谱与吸收光谱

太阳光谱是典型的暗线吸收光谱，在其连续光谱的背景上呈现有一条条的暗线.这些暗线是夫琅和费首先发现并用字母A，B，C，…来标志的，称为夫琅和费(J. von Fraunhofer)谱线(参见表Ⅷ-2).这些谱线是处于温度较低的太阳大气中的原子对更加炽热的内核发射的连续光谱进行选择吸收的结果.将这些吸收谱线的波长与地球上已知物质发射的原子光谱对比一下，就可知道太阳表面层中包含哪些化学元素.现已查明，这些元素主要是氢(体积占80%)，其次是氦(18%)，此外还有钠、氧、铁、钙等60多种元素.

表Ⅷ-2　较强的夫琅和费谱线

代　号	波　长　(Å)	吸收物质	代　号	波　长　(Å)	吸收物质
A	7594—7621*	O_2	b_4	5167.343	Mg
B	6867—6884*	O_2	c	4957.609	Fe
C	6562.816	H	F	4861.327	H
α	6276—6287*	O_2	d	4668.140	Fe
D_1	5895.923	Na	e	4383.547	Fe
D_2	5889.953	Na	G′	4340.465	H
D_3	5875.618	He	G	4307.906	Fe
E_2	5269.541	Fe	G	4307.741	Ca
b_1	5183.618	Me	g	4226.728	Ca
b_2	5172.699	Mg	h	4101.735	H
b_3	5168.901	Fe	H	3968.468	Ca^+
b_4	5167.491	Fe	K	3933.666	Ca^+

* 实为地球大气中氧分子的吸收带.

特别有趣的是氦元素的发现. 1868 年法国人严森(J.P. Jensen)在太阳光谱中发现一些不知来源的暗线；英国天文学家洛克厄(J.N.Lockyer)把这一现象解释为存在一种未知的元素，并将它取名为helium(氦)，词源于希腊文，helios为太阳之意. 此元素直到1894年才为英国化学家莱姆赛(W.Ramsay)从钇铀矿物蜕变出的气体中发现，说明地球上也存在氦.

由于原子吸收光谱的灵敏度很高，混合物或化合物中极少量原子含量的变化，会在光谱中反映出吸收系数很大的改变. 历史上就曾靠这种方法发现了铯、铷、铊、铟、镓等多种新元素，近几十年来，原子吸收光谱在化学的定量分析中有着广泛的应用.

由于光的吸收与色散有密切的联系，有关它们的理论解释，将在下节内一并介绍.

习　题

1. 有一媒质，吸收系数 $a=0.32\ \mathrm{cm}^{-1}$，透射光强分别为入射光强的10%，20%，50%及80%时，媒质的厚度各若干？

2. 一玻璃管长3.50 m，内贮标准大气压下的某种气体．若这气体在此条件下的吸收系数为 $0.1650\ \mathrm{m}^{-1}$，求透射光强的百分比．

§2 色　散

2.1 正常色散

光在媒质中的传播速度 v（或者说折射率 $n=c/v$）随波长 λ 而异的现象，称为色散．1672年牛顿首先利用三棱镜的色散效应把日光分解为彩色光带．他还曾利用交叉棱镜法将色散曲线非常直观地显示出来．交叉棱镜装置如图2-1所示，棱镜 P_1 和 P_2 的棱边相互垂直，从 S 发出的白光经透镜 L_1 变为平行光束，通过 P_1 后沿水平方向偏折．如果在光路中不放置棱镜 P_2，光束由 P_1 经透镜 L_2 后将在幕上形成水平的彩色光带 ab．插入棱镜 P_2 时，各色光束还要向下偏折，但偏折的程度随波长而异，于是幕上显现倾斜的光带 $a'b'$．如果制做棱镜 P_1 和 P_2 材料的色散规律（即 n 与 λ 的依赖关系）不同，倾斜光带 $a'b'$ 将是弯曲的，它的形状直观地反映了两种材料色散性能的差异．

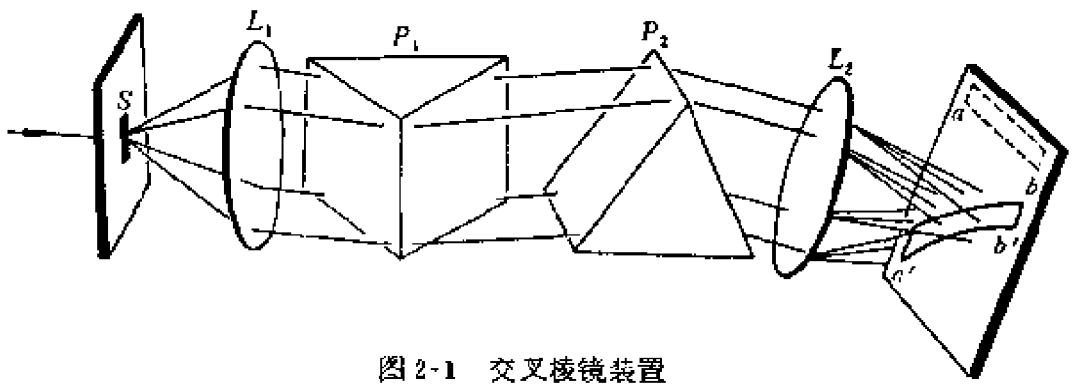


图 2-1　交叉棱镜装置

测量不同波长的光线通过棱镜的偏转角，就可算出棱镜材料的折射率 n 与波长 λ 之间的依赖关系曲线，即色散曲线．实验表明：凡在可见光范围内无色透明的物质，它们的色散曲线形式上很相似(见图2-2)，其间有许多共同特点，如 n 随 λ 的增加而单调下降，且下降率在短波一端更大，等等．这种色散称为正常色散．

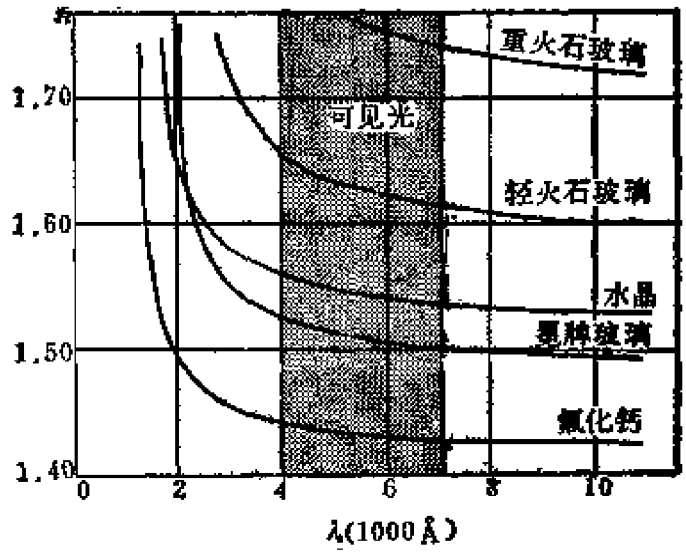


图 2-2　几种光学材料的色散曲线

1836年科希(A.L.Cauchy)给出一个正常色散的经验公式：

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \tag{2.1}$$

式中 A, B, C 是与物质有关的常数，其数值由实验数据来确定．当 λ 变化范围不大时，科希公式可只取前两项，即

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}. \tag{2.2}$$

2.2　反常色散

实验表明，在强烈吸收的波段，色散曲线的形状与正常色散曲线大不相同，伍德(R.W.Wood，1904年)曾用交叉棱镜法观察

了钠蒸汽的色散.他的装置如图2-3所示，其中钠蒸汽的棱镜V由水平钢管制成，两端装有水冷的玻璃窗，此容器底部堆放一些金属钠，并抽成真空．如果从下部加热此容器，金属钠就会蒸发．钠蒸汽扩散到管的上部遇冷而凝结，从而在管内形成下部密度大上

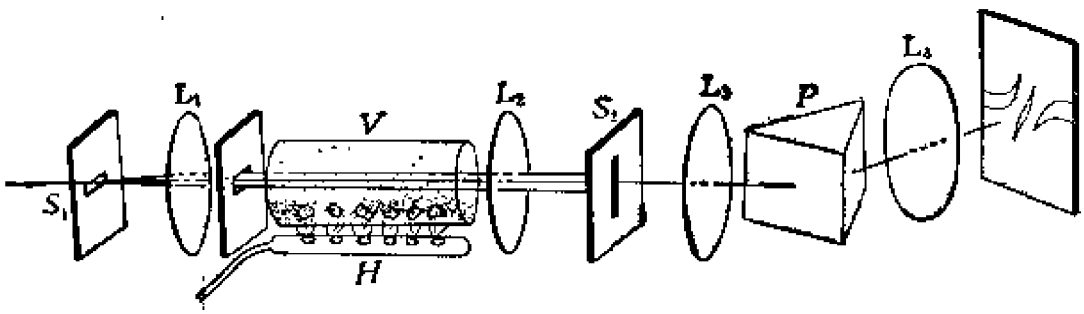


图 2-3　观察钠蒸汽反常色散的实验装置

部密度小的水平钠蒸汽柱，它和一个棱边在上(与管轴垂直)底部在下的"棱镜"等效．令一束白光从水平狭缝S_1穿出，经透镜L_1变为平行，再由透镜L_2聚焦在分光仪的竖直狭缝S_2上．这分光仪由狭缝S_2，透镜L_3，L_4和棱镜P组成，P的棱边是竖直的．当钢管V未加热时，其内只有均匀气体，光线经过它时不发生偏折．由S_1发出的白光经S_2进入分光仪后，在焦面上形成一水平光谱带．当钠被蒸发时，由于管V内蒸汽的色散作用，不同波长的光不同程度地向下偏折，在钠的吸收线附近，分光仪焦面上的水平光谱带被严重扭曲和割断，变成图 2-3 中所示的样子．这种现象叫做反常色散．

"反常色散"的名称是历史上沿用下来的①，其实反常色散是任何物质在吸收线(或吸收带)附近所共有的现象，本来无所谓"正常"和"反常"．图 2-4 所示为一种在可见光区域内透明的物质(如石英)在红外区域中的色散曲线．在可见光区域内色散是正常的，曲线(PQ段)满足科希公式．若向红外区域延伸，并接近吸

① "反常色散"的名称是1862年勒鲁(Le Roux)提出的，一直沿用至今．

收带时，色散曲线开始与科希公式偏离(见图中R点)．在吸收带内因光极弱，很难测到折射率的数据．过了吸收带，色散曲线(ST段)又恢复正常的形式，并满足科希公式，不过式中的常数A，B，C等换为新的数值．

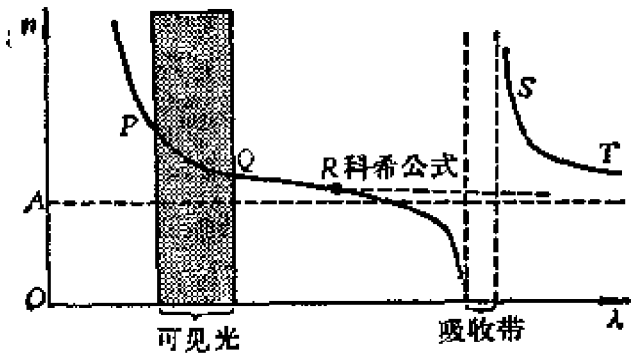


图 2-4　一种透明物质(如石英)在红外区域中的反常色散

2.3　一种物质的全部色散曲线

虽然各种物质的色散曲线各不相同，若考察它们从$\lambda=0$到几百米的广阔范围内的全部色散曲线（图 2-5），就会发现它们有些共同的特性：在相邻两个吸收线(带)之间n单调下降，每次经过

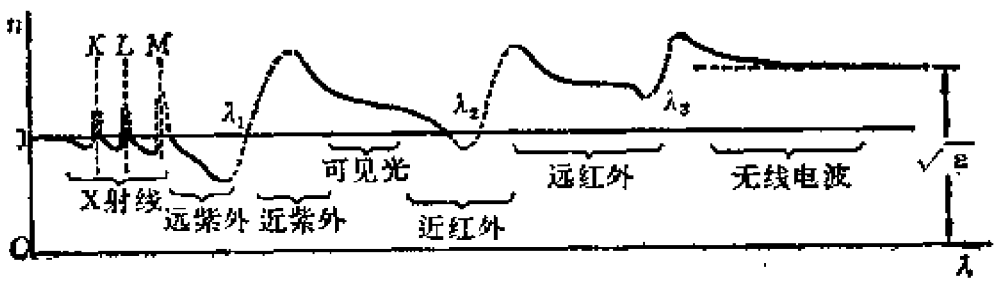


图 2-5　一种媒质的全部色散曲线

一个吸收线(带)，n急剧加大．总的趋势是曲线随λ的增加而抬高，即各正常色散区所满足的科希公式中常数A加大．$\lambda=0$时，任何物质的折射率n都等于1，对于极短波（γ射线和硬X射线）

n 略小于 1，它表明这时从真空射向其外表面的电磁波可以发生全反射.

*2.4 经典色散理论

光的发射、吸收与色散是紧密相关的. 下面我们以原子气体为例来说明它们的关系.

我们知道，气体原子光谱的主要特征是它由一系列细锐的分立谱线组成. 从经典的电磁理论看来，能够发射单一频率电磁波的体系只有弹准弹性力维系的电偶极子，它有一定的固有圆频率 ω_0. 这种电偶极子一旦被外部能源所激发后，将以固有圆频率 ω_0 作简谐振动，并向周围空间发出同一频率的单色电磁波. 因此，在经典理论中很自然地要把原子看成是一系列弹性偶极振子的组合，其中每个振子的固有频率对应一条光谱线. 这就是原子的经典振子模型.

用经典振子模型可以说明，为什么同一物质的发射光谱和吸收光谱中谱线的波长(或者说频率)一一对应. 这是因为当包含各种频率的白光照射在原子上时，只有那些频率与原子的固有频率一致的电磁波会引起谐振. 电磁波中的电场对于偶极振子来说是一个周期性的策动力，使它作受迫振动. 频率满足谐振条件的那些电磁波比起其它频率的电磁波，电场对振子作的功突出得多，这时能量大量由电磁波传递给振子，从而满足谐振条件的电磁波本身的强度大大减小，也就是说，这些频率的电磁波被原子强烈地吸收了，于是在吸收光谱中形成一根根频率与原子固有频率对应的暗谱线.

除了光的发射和吸收外，经典振子模型也可以说明色散现象(正常色散和反常色散). 这要做些定量的推导. 振子在无外场时的运动方程为

$$m\ddot{r} + g\dot{r} + kr = 0.$$

式中 m 为电子质量，r 为位移，第三项为弹性恢复力，第二项为阻尼力，它正比于速度 $\dot{r}$. 当 $g \to 0$ 时，电子以固有圆频率 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 作简谐振动；$g \neq 0$ 时作阻尼振动. 有圆频率为 ω 的外来电磁波时，振子的运动方程为

$$m\ddot{r} + g\dot{r} + kr = -eE_0 e^{-i\omega t},$$

其中 $-e$ 为电子电荷，E_0 为电场的幅值. 上式又可写为

$$\ddot{r}+\gamma\dot{r}+\omega_0^2 r=-\frac{eE_0}{m}e^{-i\omega t}, \tag{2.3}$$

其中 $\gamma=g/m$ 称为阻尼常数. 式(2.3)的特解为

$$r=\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega\gamma}e^{-i\omega t}, \tag{2.4}$$

此式描述的是电子所作的受迫振动，振幅是复数表明位移 r 与场强 E 之间有一定的位相差. 共振时，$\omega^2-\omega_0^2=0$，$r=(-ieE_0/\omega\gamma)e^{-i\omega t}$，此时位移的位相与力 $-eE_0e^{-i\omega t}$ 差 $\pi/2$，速度 $\dot{r}=(-eE_0/\gamma)e^{-i\omega t}$ 的位相与力相同，这些特征应是读者在力学中已熟悉的内容. 下面我们要把位移 r 与折射率联系起来，以便解释色散现象.

电子的位移将引起介质的极化. 设介质单位体积内有 N 个原子，每个原子有 Z 个电子，因每个位移为 r 的电子产生电偶极矩 $-er$，故介质的极化强度为

$$\tilde{P}=-NZer=-\frac{NZe^2}{m}\frac{\tilde{E}}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega\gamma}, \tag{2.5}$$

式中 $\tilde{E}=E_0e^{-i\omega t}$.

因电极化率 $\tilde{\chi}_e=\tilde{P}/\varepsilon_0\tilde{E}$，(相对)介电常数 $\tilde{\varepsilon}=1+\tilde{\chi}_e$①，由式(2.5)得

$$\tilde{\varepsilon}=1-\frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2+i\omega\gamma}. \tag{2.6}$$

因折射率 $\tilde{n}=\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$②，故上式也是 $\tilde{n}^2$ 的表达式. 按式(1.6)我们应有 $\tilde{n}^2=n^2(1-k^2)-i2n^2k$，代入式(2.6)的左端，然后把右端的实部与虚部也分开，令它们分别与左端的相等，得

$$\begin{cases} n^2(1-k^2)=1-\dfrac{NZe^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\gamma)^2}, \\ 2nk^2=\dfrac{NZe^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{\omega\gamma}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\gamma)^2}. \end{cases}$$

我们可以假定，振子的阻尼是很小的，即 $\gamma\ll\omega_0$，在此情况下 $k\ll1$，上式可简化为

---

① 参见赵凯华、陈熙谋，《电磁学》，人民教育出版社，上册第二章§3.

$$n^2 = 1 - \frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2}, \tag{2.7}$$

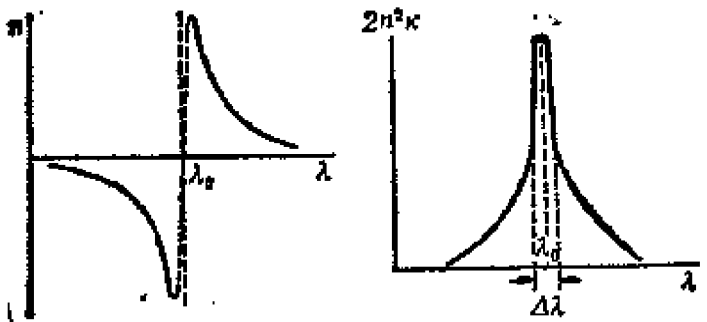
$$2n^2 k = \frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2}. \tag{2.8}$$

按光谱学的习惯，将上式改用真空中的波长 $\lambda = 2\pi c/\omega$ 和 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ 来表示：

$$n^2 = 1 + \frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\lambda_0^2 \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)}{(2\pi c)^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \gamma^2 \lambda_0^4 \lambda^2}, \tag{2.9}$$

$$2n^2 k = \frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{2\pi c} \frac{\gamma \lambda_0^4 \lambda^3}{(2\pi c)^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \gamma^2 \lambda_0^4 \lambda^2}. \tag{2.10}$$

在共振波长 λ_0 附近 n 和 $2n^2k$ 变化的情况示于图2-6。可以看出，它们具有



(a) 色散曲线　　(b) 吸收峰

图2-6　振子的色散与共振吸收曲线

实验中观察到的反常色散与共振吸收的一切特征。由于强烈的吸收，色散曲线中间那段徒然上升的部分(虚线)是很难观察到的。如前所述，$2n^2k$ 与吸收系数 α 成正比。由式(2.10)不难证明，吸收峰的高度反比于 γ，而半值宽度 $\Delta\lambda$ 正比于 γ。

在上面的讨论中我们把问题过于简化了，即认为介质中电子只有一个固有频率。更正确的模型应是每个原子中有多种振子。设它们的固有圆频率和阻尼常数分别为 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 和 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$，它们的数目为 $f_1, f_2, \cdots$。这样一来，式(2.5)应推广为如下形式：

$$\widetilde{P}=-\frac{Ne^2}{m}\sum_j\frac{f_j\widetilde{E}}{\omega^2-\omega_j^2+i\omega\gamma_j},\tag{2.11}$$

这里下标 j 是振子类型的标号，$\sum_j$ 是对一个原子中所有振子的类型求和。显然应有

$$\sum_j f_j=Z.\tag{2.12}$$

下面的推导与上述单个谐振频率情形完全类似，这里直接给出相应的结果：

$$\widetilde{n^2}=\widetilde{\varepsilon}=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{\omega^2-\omega_j^2+i\omega\gamma_j}.\tag{2.13}$$

$\kappa\ll 1$时，上式的实部与虚部分别为

$$n^2=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j(\omega^2-\omega_j^2)}{(\omega^2-\omega_j^2)^2+(\omega\gamma_j)^2},\tag{2.14}$$

$$2n^2\kappa=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j\omega\gamma_j}{(\omega^2-\omega_j^2)^2+(\omega\gamma_j)^2},\tag{2.15}$$

改用 λ 和 $\lambda_j=2\pi c/\omega_j$ 表示，

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j\lambda_j^2\lambda^2(\lambda^2-\lambda_j^2)}{(2\pi c)^2(\lambda^2-\lambda_j^2)^2+\gamma_j^2\lambda_j^4\lambda^2},\tag{2.16}$$

$$2n^2\kappa=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{2\pi c}\sum_j\frac{f_j\gamma_j\lambda_j^3\lambda^3}{(2\pi c)^2(\lambda^2-\lambda_j^2)^2+\gamma_j^2\lambda_j^4\lambda^2}.\tag{2.17}$$

在每个共振波长 λ_j 附近，上式求和号内各项中只有一项起主要作用。曲线的行为都与图 2-6 所示类似。这样一个一个的共振吸收曲线衔接起来，就成了图2-5所示的那种样子。

为了导出正常色散区域的科希公式，可忽略式(2.11)中的 γ_j，于是 n^2 的表达式可写为

$$n^2=1+\sum_j\frac{a_j\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_j^2}.\tag{2.18}$$

其中 $a_j=\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{f_j\lambda_j^2}{(2\pi c)^2}>0$ 是与 λ 无关的常数。

现在讨论两种典型情况：

（1）入射波段处于两条吸收线之间。我们设

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1}\ll\lambda_i\ll\lambda\ll\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\cdots,$$

上式可近似写成

$$n^2 \simeq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + \frac{a_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda^2_j}$$

$$\simeq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + a_j \left[1 + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)^2 + \cdots\right],$$

开方后再作近似展开，得

$$n \simeq A + \frac{B}{\lambda^2} + \cdots,$$

其中 $A = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_j}$，$B = a_j \lambda_j^2 / 2A$，以上便是科希公式，这里还证明了常数 A 随 j 增大的特点。

（2）在极短波段，即 λ 远小于所有共振波长 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 时，式(2.13)可近似写成

$$n^2 = 1 - \frac{a_1 \lambda^2}{\lambda_1^2} < 1, \quad \text{从而} \quad n < 1.$$

当 $\lambda \to 0$ 时，

$$n^2 \to 1, \qquad n \to 1,$$

这些也都是我们在 2.3 节中描述过的色散曲线的一般特征。如果用频率来表示这一特征的话，就是当 ω 远大于所有共振频率 ω_j 时，式(2.13)或(2.14)化为

$$\varepsilon = n^2 \simeq 1 - \frac{Ne^2}{e_0 m} \sum_i \frac{f_j}{e^2} = 1 - \frac{NZe^2}{e_0 m \omega^2}$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{2.19}$$

这里 $\omega_p = \sqrt{NZe^2/e_0 m}$ 是该媒质的等离子体振荡角频率。式(2.19)清楚表明，在此高频波段，当 $\omega > \omega_p$ 时，$0 < \varepsilon < 1$，$0 < n < 1$，电磁波将在超过一定临界角 $i_c = \sin^{-1} n$ 时在媒质外表面发生全反射。式(2.19)还表明，$\omega \to \infty$ 时 $\varepsilon \to 1$，$n \to 1$。

上面的推导不仅适用于电介质(绝缘体)，也适用于导体(例如金属)。导体的特点是其中有一部分电子是自由的。在式(2.8)中我们可形式上令 $\omega_1 = 0$，用 $j = 1$ 的项代表自由电子：

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \frac{Nf_1 e^2}{e_0(\omega^2 + i\omega\gamma_1)} - \frac{Ne^2}{e_0 m} \sum_{j>1} \frac{f_j}{\omega^2 - \omega_j^2 + i\omega\gamma_j}. \tag{2.20}$$

对于稳恒电场，$\omega\to 0$，我们有

$$\tilde{\varepsilon}=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_{j>1}\frac{f_j}{\omega_j^2}+i\frac{Nf_1e^2}{\varepsilon_0 m\gamma_1\omega}=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}. \tag{2.21}$$

其中

$$\varepsilon=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_{j>1}\frac{f_j}{\omega_j^2} \tag{2.22}$$

是$\tilde{\varepsilon}$的实部，它代表束缚电子对介电常数的贡献，而

$$\sigma=\frac{Nf_1e^2}{m\gamma_1} \tag{2.23}$$

组成$\tilde{\varepsilon}$的虚部，它实际上是自由电子的电导率①．$\omega\to 0$时$\tilde{\varepsilon}$的虚部按$1/\omega$的方式趋于无穷，这便是人们有时说的，金属的介电常数为∞．应注意，采用这种说法时，已经把自由电子和束缚电子等同起来，这已与我们通常在静电学中采用的定义不同了．如果撇开自由电子不算，则金属在稳恒场下的介电常数由式(2.22)给出，它和普通电介质的介电常数在数量级上没什么区别．

对于极高频场，即ω远大于所有ω_j时，自由电子和束缚电子的区别已不重要，所有的项合并起来给出式(2.19)．从物理机制上看，这是因为在高频策动力的作用下，电子只在平衡点附近作极小幅度的振动，此时准弹性束缚力可以忽略，所有电子都可看成是自由的了．由此可见，对于极高频场，区分自由电子和束缚电子的作法是没有意义的．这时我们必须把静电学中介电常数的概念加以扩大，把自由电子包括进去，用一个复数介电常数$\tilde{\varepsilon}$来描述电介质的行为．

以上是有关色散和共振吸收的经典电子论．这理论是个宏唯象的定性理论，它不能正确地告訴我们某种媒质中应有怎样的共振频率ω_j和相应的振子数目f_j，准弹性振子的图像也不符合原子的有核模型，对上述问题的正确回答要靠量子力学．不过经典理论给出的$\tilde{\varepsilon}$的表达式(2.13)在形式上是正确的，量子力学给出同一形式的表达式，只是对ω_j,γ_j,f_j等参

---

① 金属经典电子论给出电导率的公式为：$\sigma=\frac{ne^2\bar{\lambda}}{m\bar{v}}=\frac{ne^2}{m\bar{\nu}}$，式中$\bar{\nu}=\bar{v}/\lambda$是电子的平均碰撞频率，$n$相当于式(2.23)里的$Nf_1$，是自由电子的数密度．这里我们撇开了一个可能出现的因子1/2．统计平均的方法不同，它也可以不出现．式(2.23)表明，自由电子的阻尼常数γ_1应与$\bar{\nu}$相当．

量的理解与经典理论不同．实际上原子中的束缚电子并不作简谐振动，ω_j 应是两个量子能级间共振跃迁的频率；f_j 亦非整数，它正比于跃迁几率，从而正比于谱线强度．人们喜欢用“振子强度”一词来称呼它，不再叫它做“振子数”．有关量子论的初步概念，将在下一章介绍．

习　题

1．一块光学玻璃对水银灯蓝、绿谱线 $\lambda=4358$ Å和5461 Å 的折射率分别为 1.65250 和 1.62450，用此数据定出科希公式(2.2)中的 A，B 两常数，并用它计算对钠黄线 $\lambda=5893$ Å的折射率 n 及色散率 $dn/d\lambda$．

2．利用第一章表 I-2 中冕玻璃 K9 对F，D，C 三条谱线的折射率数据定出科希公式(2.1)中的 A,B,C 三常数，用它计算该表中给出的其它波长下折射率数据，并与表中实测数值比较．

3．一棱镜顶角50°，设它的玻璃材料可用二常数科希公式(2.2)来描写，其中 $A=1.53974$，$B=4.6528\times10^5$Å^2．求此棱镜对波长 5500Å 调到最小偏向角时的色散本领．

4．根据式(2.10)证明吸收峰的高度反比于 γ_j，半值宽度 $\Delta\lambda$ 正比于 γ_j．

5．一块玻璃对波长 0.70Å 的 X 射线的折射率比1小1.600×10^{-6}．求 X 射线能在此玻璃外表面发生全反射的最大掠射角．

6．估计一下铜的等离子体振荡角频率 ω_p 的数量级．

§3 群　速

第一章2.3节中曾提到，根据光的微粒说，光在两种媒质界面上折射时，$\sin i_1/\sin i_2=v_2/v_1$，而根据光的波动说(惠更斯原理)，$\sin i_1/\sin i_2=v_1/v_2$，傅科(J.B.L.Foucault，1862年)做实验测定空气和水中光速之比近于 4:3，此数值与空气到水的折射率相符，从而判定光的波动说的正确性．虽然在傅科实验完成之前，光的波动说已为大量事实(如干涉、衍射、偏振等)所证明，但傅科的实验仍被认为是对惠更斯原理最直接和最有力的支持．然而随着测定光速方法的改进，问题又复杂化了．1885年迈

克耳孙（A.A.Michelson）以较高的精密度重复了傅科实验的同时，还测定了空气和CS_2中光速之比为1.758，但是用折射法测定的CS_2折射率为1.64．两数相差甚大，绝非实验误差所致．这矛盾直到瑞利（Lord J.W.S.Rayleigh）提出“群速”的概念之后才解决．

迄今为止，对于各向同性媒质本书在提到波速时，都指的是波面（等位相面）传播的速度，即相速．在惠更斯原理中如此，在波函数的表达式中也如此．本节中将用v_p代表它．

在真空中所有波长的电磁波以同一相速c传播．在色散媒质中只有理想的单色波具有单一的相速．然而理想的单色波是不存在的，波列不会无限长．在第五章5.2节中已看到，一列有限长的波相当于许多单色波列的迭加，通常把由这样一群单色波组成的波列叫做波包．当波包通过有色散的媒质时，它的各个单色分量将以不同的相速前进，整个波包在向前传播的同时，形状亦随之改变．我们把波包中振幅最大的地方叫做它的中心，波包中心前进的速度叫做群速，记作v_g．下面来推导有关群速的公式．

为简单起见，我们考虑由两列波组成的“波包”．设两列波分别为

$$\begin{cases} U_1(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x), \\ U_2(x,t) = A\cos(\omega_2 t - k_2 x). \end{cases}$$

令

$$\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2, \quad \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2;$$
$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2, \quad k_0 = (k_1 + k_2)/2.$$

并设

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0, \quad |\Delta k| \ll k_0,$$

即两波的频率（或波长）很接近，它们合成的波列为

$$U(x,t)=U_1(x,t)+U_2(x,t)$$
$$=\underbrace{2A\cos(\Delta\omega t-\Delta kx)}_{\text{低频包络}}\underbrace{\cos(\omega_0 t-k_0 x)}_{\text{高频波}}.$$
(3.1)

此波的瞬时图像如图 3-1 所示，是振幅受到低频调制的高频波

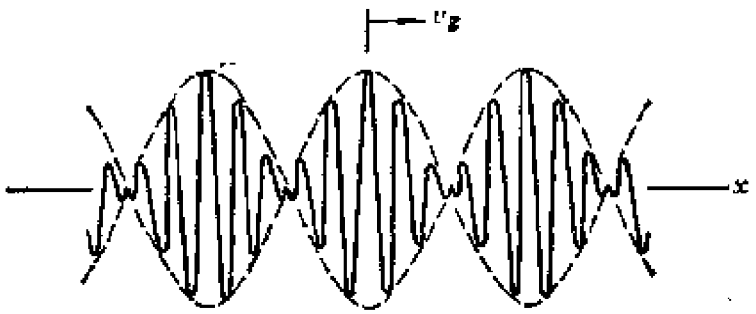


图 3-1 相速与群速

列．这调制波列有一系列的最大值，因而它还算不得是一个典型的波包．要得到一个真正的波包，需有更多频率和波长相近的波迭加在一起①．不过由上述两列波合成的调制波已可推导出正确的群速公式了．式 (3.1) 中高频波的传播速度为 ω_0/k_0，它相当于"波包"的相速 v_p；低频包络的传播速度为 $\Delta\omega/\Delta k$，这就是"波包"的群速 v_g 了．将 $\Delta\omega$，Δk 改写成微分，我们有

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}.$$
(3.2)

这便是最常用的群速表达式．

较严格地推导群速公式 (3.2)，应将波包 $U(x,t)$ 展成傅里叶积分：

$$\tilde{U}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}A(k)e^{-i(\omega t-kx)}\,dk.$$
(3.3)

对于准单色波包，频谱范围 Δk 很小，上式中可取

$$A(k)\simeq A(k_0),$$

把它当作常数提到积分号外．$\omega=\omega(k)$ 是 k 的函数，令 $k'=k-k_0$，将

① 参见下面小字．

$\omega(k)$作泰勒展开，只保留前两项：

$$\omega \simeq \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} k'.$$

式(3.3)中的指数可写为

$$\exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)]\exp\left[-i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)k'\right],$$

其中 $\omega_0 = \omega(k_0)$. 于是

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x,t) &= A(k_0)\exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] \\ &\quad \times \int_{-\Delta k}^{+\Delta k} \exp\left[-i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)k'\right]\frac{dk'}{2\pi} \\ &= \frac{A(k_0)}{\pi}\underbrace{\frac{\sin\left[\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk}t - x}}_{\text{包络因子}}\underbrace{\exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)]}_{\text{高频波}} \quad (3.4)\end{aligned}$$

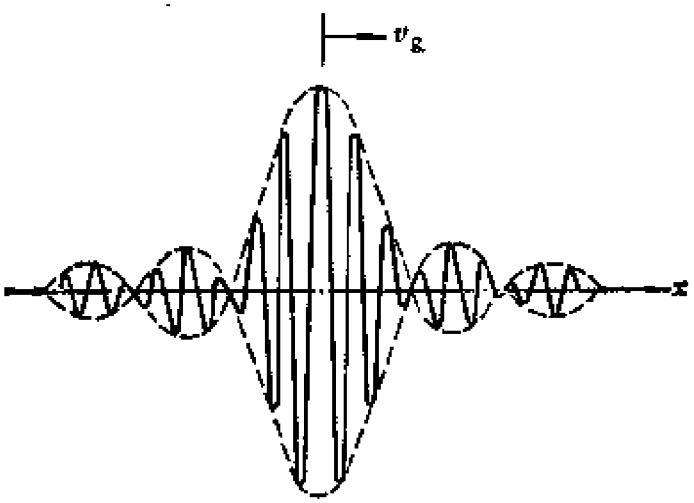


图 3-2　波包及其群速

这一波包的瞬时图像如图3-2所示，由式(3.4)可以看出，它的包络因子的最大处前进的速度为 $d\omega/dk$，这便是波包的群速 v_g.

下面我们推导群速与相速之间的一个关系式．因 $\omega = kv_p$ 取对 k 的微商，我们有

$$v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}, \qquad (3.5)$$

最后一步运算用到了$k = 2\pi/\lambda$的关系①. 式(3.5)是瑞利的群速公式，它表明$dv_p/d\lambda > 0$时，$v_g < v_p$，群速小于相速；$dv_p/d\lambda < 0$时，$v_g > v_p$，群速大于相速；无色散时，$dv_p/d\lambda = 0$，$v_g = v_p$，群速与相速没有区别.

群速的公式还可表示为一些其它形式，如因$v_p = c/n$，代入式(3.5)，得

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right), \qquad (3.6)$$

若已知折射率的色散关系$n = n(\lambda)$，可用此式计算群速.

除了根据惠更斯原理用折射率法测出媒质中的光速是相速外，大多数其它方法测出的都是光的信号速度，或者粗略地说，是能量传播速度. 我们知道，波动携带的能量是与振幅的平方成正比的，故波包中振幅最大的地方，也是能量最集中的地方. 可以认为，群速代表能量的传播速度，或信号速度②. 这样，上述傅科和迈克耳孙实验的矛盾就得到了解释：原来他们所测的都是空气和媒质中光的群速之比，而折射率等于相速之比. 由于水的色散率不大，群速与相速的差别不明显. 但CS_2的色散率较大，测量的结果就发生了较大的分歧. 群速公式(3.6)可近似地写成

$$\frac{c}{v_g} \simeq n - \lambda\frac{dn}{d\lambda},$$

可以看出，用钠黄光($\lambda = 5893$ Å)对CS_2作精确的测量表明：速度法给出$c/v_g = 1.722$，折射率法给出$n = c/v_p = 1.624$，色散率的

① 应注意，通常我们用λ代表真空中的波长，但$k = 2\pi/\lambda$中的λ是媒质中的波长，故式(3.5)，(3.6)中的λ也是如此.

② 严格说来，信号速度、能量传播速度、群速三者之间还有一些细微的差别. 群速的概念只适用于吸收系数很小的媒质. 理论上可以证明，这时它和能量传播速度相等. 光的反常色散经常伴随着强烈的吸收，这时群速的概念失去意义，能量传播速度不能再用本节给出的群速公式来计算.

测量给出 $\lambda\, dn/d\lambda = -0.102$，于是 $n - \lambda\, dn/d\lambda = 1.624 + 0.102 = 1.726$．这些实验数据与上式符合得相当好，这是对群速理论的一个有力的支持．

最后指出，相对论原理要求：任何信号速度不能超过真空中的光速 c，否则因果律会遭到破坏．波的相速并不受此限制．在有的场合，波的相速 v_p 是会大于 c 的，但波的信号速度(它经常等于群速)总小于 c．

思 考 题

投石于平静的湖面，激起一列波澜．设想一下，如果水面波的色散规律分别是 $dv_p/d\lambda > 0$ 和 $dv_p/d\lambda < 0$，你能观察到什么现象？实地观察一下，水面波的色散属于哪种情况．

习 题

1．求§2 习题 2 中冕玻璃 K9 对 D 双线的群速．

2．试计算下列各情况下的群速：

(1) $v_p = v_0$(常数)(无色散媒质，如空气中的声波)．

(2) $v_p = \sqrt{\dfrac{\lambda}{2\pi}\left(g + \dfrac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho}\right)}$ (水面波，g 为重力加速度，T 为表面张力，ρ 为液体的密度)．

(3) $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$ (正常色散媒质中光波的科希公式)．

(4) $\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$ (波导中的电磁波，ω_c 为截止角频率)．

§4 光的散射

4.1 散射与媒质不均匀性尺度的关系

光线通过均匀的透明媒质(如玻璃、清水)时，从侧面是难以看到光线的．如果媒质不均匀，如有悬浮微粒的浑浊液体，我们便可从侧面清晰地看到光束的轨迹．这是媒质中的不均匀性使光线朝四面八方散射的结果．光的散射与不均匀性的尺度有很大

关系，下面我们就这个问题作稍细的解释．

我们知道，按照几何光学，光线在均匀媒质中沿直线传播，除了正对着光线的方向外，其它方向应是看不到光亮的．从分子理论来看，当入射光波射在媒质上时，将激起其中电子作受迫振动，从而发出相干的次波来．注意，这与惠更斯-菲涅耳原理中所假设的次波稍有不同，这里的次波有真实的振源．理论上可以证明，只要分子的密度是均匀的，次波相干迭加结果，只剩下遵从几何光学规律的光线，沿其余方向的振动完全抵消．从微观的尺度（10^{-8}cm）来看，任何物质都由一个个分子、原子组成，没有物质是均匀的．这里所谓“均匀”分布，是以光波的波长（10^{-5}cm）为尺度来衡量的，即在这样大小的范围内密度的统计平均是均匀的．

如果媒质的均匀性遭到破坏，即尺度达到波长数量级的邻近媒质小块之间在光学性质上（如折射率）有较大差异，在光波的作用下它们将成为强度差别较大的次波源，而且从它们到空间各点已有不可忽略的光程差，这些次波相干迭加的结果，光场中的强度分布将与上述均匀媒质情形有所不同．这时，除了按几何光学规律传播的光线外，其它方向或多或少也有光线存在，这就是散射光．由此可见，尺度与波长可比拟的不均匀性引起的散射，也可看作是它们的衍射作用．如果媒质中不均匀团块的尺度达到远大于波长的数量级，散射又可看成是在这些团块上的反射和折射了．例如，图 4-1 右方的小障碍物使波发生散射，左方的

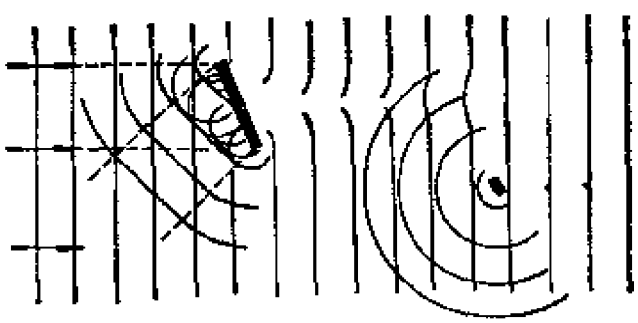


图 4-1　散射、衍射和反射

较大物体使波发生反射，边缘部分发生衍射。

按不均匀团块的性质、散射可分为两大类：

（1）悬浮质点的散射：如胶体、乳浊液、含有烟、雾、灰尘的大气中的散射属于此类。

（2）分子散射：即使十分纯净的液体或气体，也能产生比较微弱的散射。这是由于分子热运动造成密度的局部涨落引起的。这种散射，称为分子散射。物质处在临界点时密度涨落很大，光线照射在其上，就会发生强烈的分子散射。这种现象叫做临界乳光。

4.2 瑞利散射定律

为了解释天空为什么呈蔚蓝色，瑞利研究了细微质点的散射问题，提出了散射光强与 λ^4 成反比的规律，这就是有名的瑞利散射定律（Lord Rayleigh，1871年）。瑞利定律的适用条件是散射体的尺度比光的波长小。在这条件下作用在散射体上的电场可视为交变的均匀场，散射体在这样的场中极化，只感生电偶极矩而无更高级的电矩。按照电磁理论，偶极振子的辐射场强 E 正比于 $\omega^2 p/r$（ω—角频率，p—偶极矩，r—距离），故辐射功率 $\propto E^2 \propto \omega^4 p^2/r^2$。瑞利认为，由于热运动破坏了散射体之间的位置关联，各次波不再是相干的，计算散射时应将次波的强度而不是振幅迭加起来。于是感生偶极辐射的机制就导致了正比于 ω^4 或 $1/\lambda^4$ 的规律。

较大颗粒对光的散射不遵从瑞利的 λ^4 反比律。米（G.Mie，1908年）和德拜（P.Debye，1909年）以球形质点为模型详细计算了电磁波的散射。他们的计算适用于任何大小的球体。图4-2给出了计算的结果，这里球的半径 a 和波长 λ 之比是用参量 ka 来表征的（$ka=2\pi a/\lambda$）。米-德拜的散射理论证明：只有 $ka<0.3$ 时，瑞利的 λ^4 反比律是正确的。当 ka 较大时，散射强度与波长的依赖关系就不十分明显了。

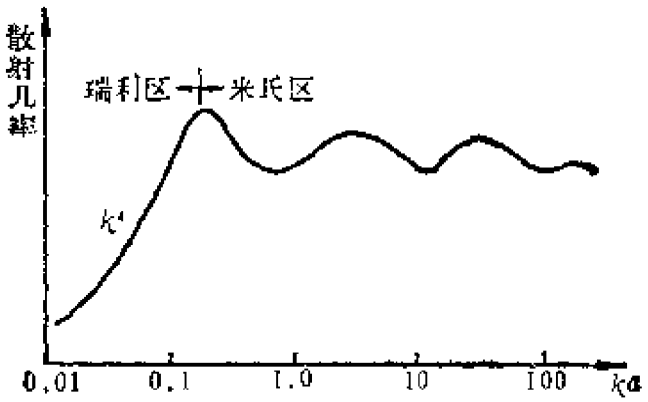


图 4-2　瑞利散射和米氏散射

用以上的散射理论可以解释许多我们日常熟悉的自然现象，如天空为什么是蓝的？旭日和夕阳为什么是红的？以及，云为什么是白的？等等.

首先，白昼天空之所以是亮的，完全是大气散射阳光的结果. 如果没有大气，即使在白昼，人们仰观天空，将看到光辉夺目的太阳悬挂在漆黑的背景中. 这景象是宇航员司空见惯了的. 由于大气的散射，将阳光从各个方向射向观察者，我们才看到了光亮的天穹. 按瑞利定律，白光中的短波成分(蓝紫色)遭到的散射比长波成分（红黄色）强烈得多，散射光乃因短波的富集而呈蔚蓝色. 瑞利曾对天空中各种波长的相对光强作过测量，发现与 λ^4 反比律颇相吻合. 大气的散射一部分来自悬浮的尘埃，大部分是密度涨落引起的分子散射. 后者的尺度往往比前者小得多，瑞利 λ^4 反比律的作用更加明显. 所以每当大雨初霁、玉宇澄清了万里埃的时候，天空总是蓝得格外美丽可爱. 其道理就在这里.

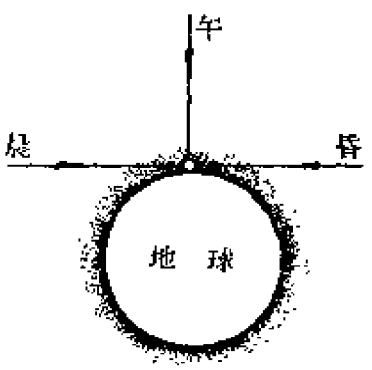


图 4-3　旭日和夕阳的颜色

旭日和夕阳呈红色，与天空呈蓝色属于同一类现象. 由于白光中的短波成分被更多地散射掉了，在直射的日光中剩余较多的自然是长波成分了. 如图4-3

所示，早晚阳光以很大的倾角穿过大气层，经历大气层的厚度要比中午时大得多，从而大气的散射效应也要强烈得多，这便是旭日初升时颜色显得特别殷红的原因.

白云是大气中的水滴组成的，因为这些水滴的半径与可见光的波长相比已不算太小了，瑞利定律不再适用. 按米-德拜的理论，这样大小的物体产生的散射与波长的关系不大，这就是云雾呈白色的缘故.

4.3 散射光强的角分布和偏振状态

如图4-4取球坐标的极轴 z 沿入射波的波矢 $\boldsymbol{k}_0$ 方向，散射波波矢 $\boldsymbol{k}_s$ 的方向（即观测方向）用 (θ,φ) 来表征. 入射波的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 必在 x-y 平面内（横波），设它与 x 轴的夹角为 ψ，与 $\boldsymbol{k}_s$ 的夹角为 Θ. 按照电磁理论，$\boldsymbol{E}$ 激发的偶极振子发出的次波中，振幅正比于 $\sin\Theta$，强度正比于 $\sin^2\Theta$（见图4-5(a)），偏振方向由横波性所决定（图4-5(b)）. 若入射光是自然光，散射光强的角分布应对 ψ 平均. 因

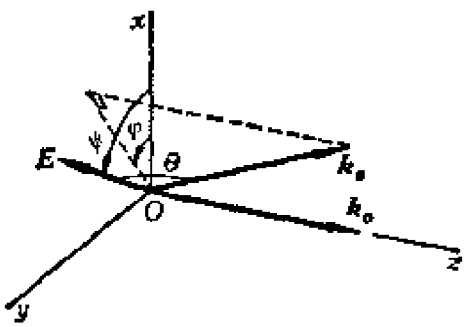


图 4-4 $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_s$, $\boldsymbol{E}$ 各矢量的方向

$$\sin^2\Theta = 1-\cos^2\Theta = 1-\sin^2\theta\cos^2(\psi-\varphi),$$

故

$$\overline{\sin^2\Theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1-\sin^2\theta\cos^2(\psi-\varphi)]\,d\psi = \frac{1}{2}(1+\cos^2\Theta),$$

这分布示于图4-5(c). 在此自然光入射情形，偏振态相当于将图4-5(b)绕 z 轴旋转，取各种可能的方位后重迭在一起（图4-5(d)只画出两个相互垂直的特殊方位）. 可以看出，在垂直于入射光的方向上（$\theta=\pi/2$），散射光是线偏振的，在原入射方向或其逆方向上（$\theta=0$ 或 π），散射光仍是自然光. 前者的强度正好为后者的一

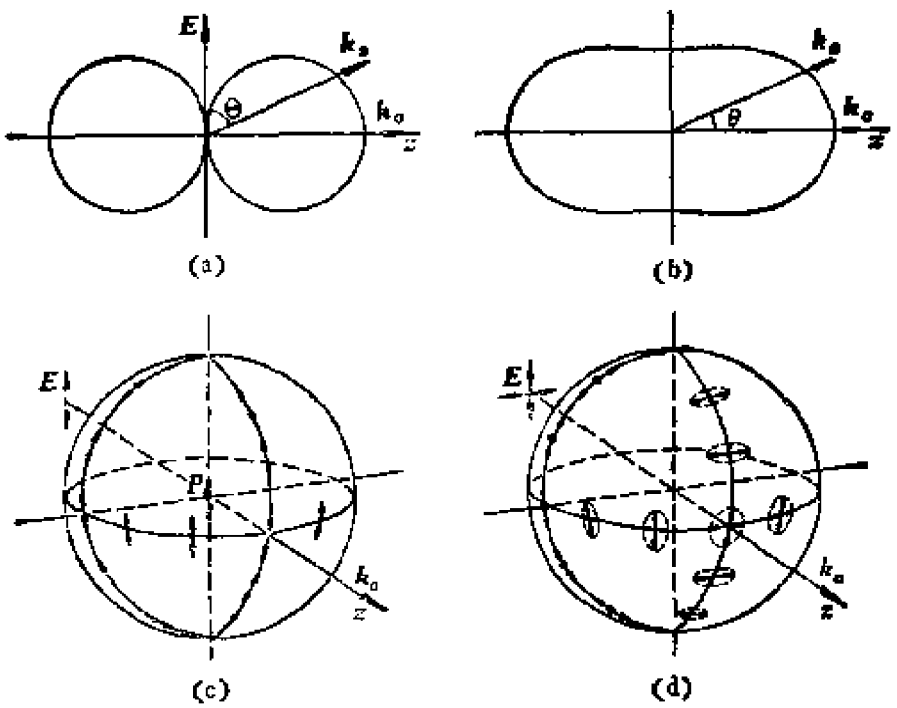


图 4-5　散射光强的角分布与偏振

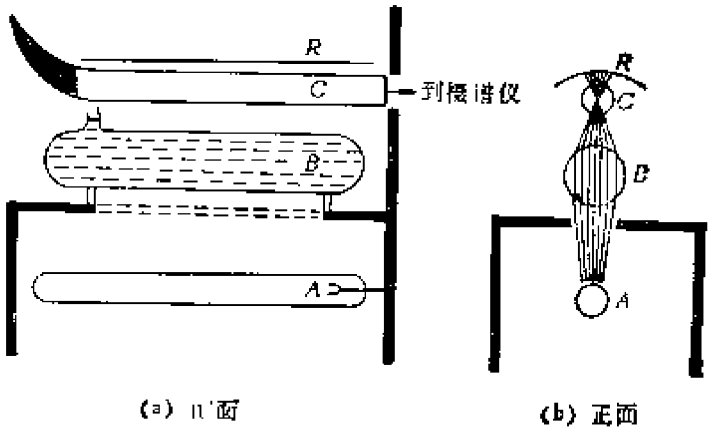
半．在其它倾斜方向上，散射光是部分偏振的，强度介于前两个极端之间．

以上描绘的散射光特点，都可以从大气散射中得到验证．不过当空气中悬浮了过多较大的灰尘颗粒或水滴时，上面的结论将不适用．

4.4　喇曼散射

瑞利散射不改变原入射光的频率．1928年喇曼(C.V.Raman)和曼杰利什塔姆（Л.И.Мандельштам）在研究液体和晶体内的散射时，几乎同时发现散射光中除与入射光的原有频率 ω_0 相同的瑞利散射线外，谱线两侧还有频率为 $\omega_0\pm\omega_1$，$\omega_0\pm\omega_2$，…等散射线存在．这种现象称为喇曼散射(苏联人称之为联合散射)．

观察喇曼散射的装置如图 4-6 所示，其中 A 是一水平的汞弧



(a) 侧面　　(b) 正面

图 4-6　喇曼散射实验装置

灯，它装在一暗箱内，上部有一与灯管平行的长开口．B 是盛满水的玻璃管，它起一个柱形透镜的作用，把汞弧光聚焦在 C 管的管轴上．C 管充有散射物质(如四氯化碳)．散射光经设置在 C 的一端的平面窗口射入摄谱仪进行光谱分析．C 管的另一端拉尖并涂黑，以防反射光进入摄谱仪．在 C 管之上覆盖一反射镜 R 以增强 C 内的照明．

喇曼光谱(图4-7)的特征可归纳如下：

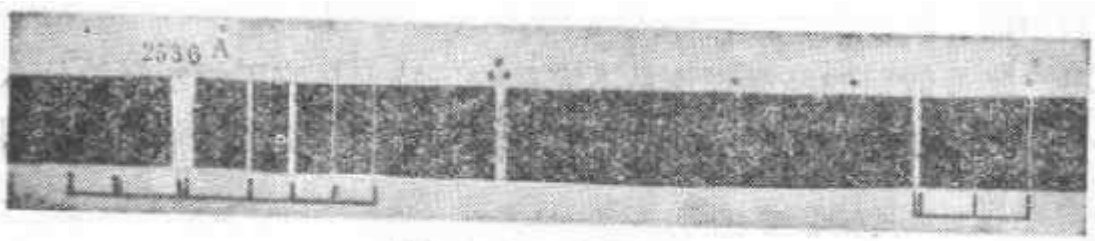


图 4-7　氢的喇曼光谱

(1) 在每条原始入射谱线(频率ω_0)两旁都伴有频率差 ω_j($j=1$，2，…)相等的散射谱线，在长波一侧的(频率为$\omega_0-\omega_j$)称为红伴线或斯托克斯线；在短波一侧的(频率为 $\omega_0+\omega_j$)称为紫伴线或反斯托克斯线①．

① 这名称来源于荧光(光致发光)效应中的斯托克斯定则(G.Stokes,1852年)，发射的荧光波长比入射光的波长要长些．

（2）频率差 $\omega_j(j=1,2,\cdots)$ 与入射光的频率 ω_0 无关，它们与散射物质的红外吸收频率对应，表征了散射物质的分子振动频率.

喇曼效应也可用经典理论解释. 在入射光电场 $E=E_0\cos\omega_0 t$ 的作用下，分子获得感应电偶极矩 p，它正比于场强 E：

$$p=\alpha\varepsilon_0 E,$$

α 称为分子极化率. 如果分子极化率 α 是一与时间无关的常数，则 p 以频率 ω_0 作周期性变化，这便是上面讨论过的瑞利散射. 如果分子以固有频率 ω_j 振动着，且此振动影响着极化率 α，使它也以频率 ω_j 作周期性变化①，

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_j\cos\omega_j t,$$

于是

$$\begin{aligned}p&=\alpha_0\varepsilon_0 E_0\cos\omega_0 t+\alpha_j\varepsilon_0 E_0\cos\omega_0 t\cos\omega_j t\\&=\alpha_0\varepsilon_0 E_0\cos\omega_0 t\\&\quad+\frac{1}{2}\alpha_j\varepsilon_0 E_0[\cos(\omega_0-\omega_j)t+\cos(\omega_0+\omega_j)t],\end{aligned}$$

即感应电矩的变化频率有 ω_0 和 $\omega_0\pm\omega_j$ 三种，后两种正是喇曼光谱中的伴线.

喇曼散射的经典理论是不完善的，特别是它不能解释为什么反斯托克斯线比斯托克斯线弱得多这一事实. 完善的解释要靠量子理论.

如前所述，喇曼散射是有分子振动参与的光散射过程. 在晶体中的振动有较高频的光学支和低频的声学支两种，前者参与的光散射就是喇曼散射，后者参与的光散射叫布里渊散射（L. Brillouin，1921年）. 其实，任何元激发，如磁介质中的自旋波、半导体中的螺旋波均可参与光的散射过程.

---

① 这是一种参量效应，在某种意义下也可说是一种非线性效应. 以交流电路作对比，当电容器的极板以频率 ω_j 振动时，电容值 C（这是电路中的一个参量）将类似这里的 α，有周期性变化. 此时输入一个频率为 ω_0 的讯号时，被调制的输出讯号中将出现和频与差频 $\omega_0\pm\omega_j$.

也可认为这些都是广义的喇曼散射或布里渊散射过程①.

喇曼散射的方法为研究分子结构提供了一种重要的工具，用这种方法可以很容易而且迅速地定出分子振动的固有频率，也可以用它来判断分子的对称性、分子内部的力的大小以及一般有关分子动力学的性质．分子的光谱本来在红外波段，喇曼效应把它转移到可见和紫外波段来研究，在很多情形下，它已成为分子光谱学中红外吸收方法的一个重要补充．

在出现激光之前，喇曼散射光谱已成为光谱学的一个分支．激光问世以来，当光强达到一定水平时，还可出现受激喇曼散射等非线性效应．有关问题将在下章§6中谈到．

思 考 题

1．为什么由点燃的香烟冒出的烟是淡蓝的，而吸烟者口中吐出的烟却呈白色？

2．将一块透明塑料板(如直尺或三角板)立放在光滑桌面或玻璃板上，迎着窗口看它的倒影．有时你会在倒影中看到一些彩色条纹．试解释这个现象．

习 题

1．摄影者知道用橙黄色滤色镜拍摄天空时，可增加蓝天和白云的对比．设照相机的镜头和底片的灵敏度将光谱范围限制在3900Å到6200Å之间，并设太阳光谱在此范围内可看成是常数．若滤色镜把波长在5500Å以下的光全部吸收，天空的散射光被它去掉了百分之几？

2．苯(C_6H_6)的喇曼散射中较强的谱线与入射光的波数差607，992，1178，1586，3047，3062cm^{-1}．今以氩离子激光(λ = 4880Å)入射，计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长．

---

① 按习惯，频移波数在50～1000 cm^{-1}间的叫喇曼散射，在0.1～2 cm^{-1}间的叫布里渊散射．

第九章　光的量子性　激光

迄今为止，我们一直是按经典物理学的观点来描述光的．本章将从一系列实验事实出发，逐步引入光的量子性的概念．

§1　热　辐　射

1.1　热辐射的一般特征及辐射场的定量描述

把铁条插在炉火中，它会被烧得通红．起初在温度不太高时，我们看不到它发光，却可感到它辐射出来的热量．当温度达到500℃左右时，铁条开始发出可见的光辉．随着温度的升高，不但光的强度逐渐增大，颜色也由暗红转为橙红．以上是我们日常生活中熟知的现象，它们反映了热辐射的一般特征，即随着温度的升高，(1)辐射的总功率增大；(2)强度在光谱中的分布由长波向短波转移．热辐射不一定需要高温，实际上，任何温度(室温或更低)的物体都发出一定的热辐射，只不过在低温下辐射不强，且其中包含的主要是波长较长的红外线．用红外夜视仪侦查军事目标，就利用了这个原理．

按照热力学原理，热量要从高温的物体自发地流向低温物体．热量的传递方式有多种，热辐射是其中的一种．在物体和物体之间的空间里总存在一定的辐射场，即各种频率的电磁波．每个物体通过发射与吸收的过程与周围的辐射场交换能量．在非平衡态下，温度较高的物体失多于得，温度较低的物体得大于失，能量便这样通过辐射场由前者传递给后者．

为了定量地描述辐射场和它与物体间发生的各种能量转移过

程，下面我们将引入一系列物理量．辐射场中包含各种频率和沿各个方向传播的电磁波．最细致地描述辐射场，需要用一个辐射能的分布函数 $f(\nu,\hat{s},r,t)$，其中 ν 是频率，$\hat{s}$ 代表沿传播方向的单位矢量，r 是空间点的坐标矢量，t 是时间．这函数的物理意义如下：在 t 时刻空间 r 点附近单位体积内的辐射场中，分布在(i)以 ν 为中心的频段 $d\nu$ 内(ii)以 $\hat{s}$ 方向为轴的立体角元 $d\Omega$ 内的能量为

$$f(\nu,\hat{s},r,t)d\nu\,d\Omega. \tag{1.1}$$

若辐射场是均匀的，f 与 r 无关；若辐射场是稳恒的，f 与 t 无关；若辐射场是各向同性的，f 与 $\hat{s}$ 无关．

利用分布函数 f 可导出许多物理量，它们各自以不同的细致程度描述着辐射场某些方面的性质．描述辐射场本身的物理量有：

（1）辐射场的能量密度 U（单位体积内的辐射能）及其谱密度 $u(\nu)$

$$U(r,t)=\int u(\nu,r,t)d\nu, \tag{1.2}$$

$$u(\nu,r,t)=\oint\!\!\oint f(\nu,\hat{s},r,t)d\Omega \tag{1.3}$$

$$=4\pi f(\nu,r,t)\ \text{（各向同性情形）}. \tag{1.3'}$$

$U(r,t)$ 的单位是焦耳/米^3(J/m^3)或尔格/厘米^3(erg/cm^3)．

（2）辐射场的亮度 B（沿 $\hat{s}$ 方向单位立体角内的辐射能流密度）及其谱密度 $b(\nu)$

$$B(\hat{s},r,t)=\int b(\nu,\hat{s},r,t)d\nu, \tag{1.4}$$

$$b(\nu,\hat{s},r,t)=c\,f(\nu,\hat{s},r,t)\ (c\text{为光速}). \tag{1.5}$$

$B(\hat{s},r,t)$ 的单位是瓦/米^3·球面度（W/m^3·sr）或瓦/厘米^3·球面度(W/cm^3·sr)．

（3）通过面元 ΔS 的辐射通量 $\Delta\Psi$ 及其谱密度 $\Delta\psi(\nu)$

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},t)=\int\Delta\psi(\nu,\mathbf{r},t)d\nu, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi(\nu,\mathbf{r},t)&=\int_{(2\pi)}\int b(\nu,\hat{\boldsymbol{s}},\mathbf{r},t)\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\Delta\boldsymbol{S}d\Omega\\&=\int_{(2\pi)}\int cf(\nu,\hat{\boldsymbol{s}},\mathbf{r},t)\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\Delta\boldsymbol{S}d\Omega \qquad (1.7)\\&=\pi cf(\nu,\mathbf{r},t)\ (\text{各向同性情形}). \qquad (1.7')\end{aligned}$$

上式中对立体角的积分局限于面元 ΔS 的一侧(2π)．为了得到式(1.7′)，可取以面元的法线方向ΔS为极轴的球坐标，用 θ,φ 来表示传播方向 $\hat{\boldsymbol{s}}$，于是 $\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\Delta S\cos\theta$，$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$，在 2π 立体角内积分后即得(见图1-1)．

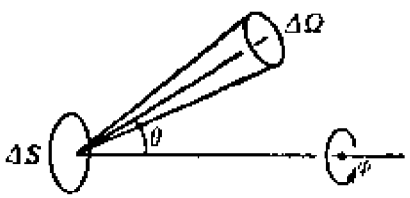


图 1-1　辐射场的描述

$\Delta\Psi(\mathbf{r},t)$的单位为瓦(W)．

描述辐射场与物体间能量交换关系的物理量有：

(1) 辐射本领 R (从物体单位表面积发出的辐射通量)及其谱密度 $r(\nu)$

$$R=\int r(\nu)d\nu, \tag{1.8}$$

$$r(\nu)=\frac{d\psi(\nu)}{dS}, \tag{1.9}$$

这里 $d\psi(\nu)$ 是从面元 dS 发出的辐射通量谱密度．R 的单位为瓦/米^2(W/m^2)或瓦/厘米^2(W/cm^2)．

(2) 辐射照度E(照射在物体表面单位面积上的辐射通量)及其谱密度 $e(\nu)$

$$E=\int e(\nu)d\nu, \tag{1.10}$$

$$e(\nu)=\frac{d\psi'(\nu)}{dS}, \tag{1.11}$$

这里 $d\psi'(\nu)$ 是照射在面元 dS 上的辐射通量谱密度．E 的单位亦为瓦/米^2(W/m^2)或瓦/厘米^2(W/cm^2)．

比较一下式(1.3′)和(1.7′)可以看出，在各向同性情形里我们有

$$e(\nu)=\frac{c}{4}u(\nu). \tag{1.12}$$

（3）吸收本领 $a(\nu)$

$$a(\nu)=\frac{d\psi''(\nu)}{d\psi'(\nu)}, \tag{1.13}$$

这里 $d\psi'(\nu)$ 和$d\psi''(\nu)$分别是照射在物体上和被它吸收的辐射通量谱密度．$a(\nu)$是无量纲的量．按定义显然总有

$$0\leqslant a(\nu)\leqslant 1.$$

1.2 基尔霍夫定律

上面引进各个描述辐射场的量无论对热平衡和非热平衡情况都适用．下面着重研究热平衡态下的辐射场．

同一物体的辐射本领 $r(\nu)$ 和吸收本领 $a(\nu)$ 之间有着内在联系．图1-2(a)是一块白底黑花瓷片的照片，图(b)是它在高温下发出热辐射的情况．可以看出，原来是黑花纹的地方($a(\nu)$大)发的



(a) (b)

图 1-2 辐射本领与吸收本领的关系

光强($r(\nu)$大)，原来的白底($a(\nu)$小)发的光弱($r(\nu)$小)．上面比较的是不同温度下的 $r(\nu)$ 和 $a(\nu)$，在此情况下二者间没有普遍的定量关系．然而在同一温度下它们是严格成正比的，这规律称为基尔霍夫热辐射定律(G.Kirchhoff，1859年)．定律的表述如下：

任何物体在同一温度 T 下的辐射本领 $r(\nu,T)$ 与吸收本领 $a(\nu,T)$ 成正比，比值只与 ν 和 T 有关，即

$$\frac{r(\nu,T)}{a(\nu,T)}=F(\nu,T), \tag{1.14}$$

$F(\nu,T)$ 是一个与物质无关的普适函数．

基尔霍夫的热辐射定律可通过图 1-3 所示的理想实验从热力学原理导出．设想在密封容器 C 内放置若干物体 A_1，A_2，…，它们可以是不同质料做成的．将容器内部抽成真空，从而各物体间只能通过热辐射来交换能量．设容器壁为理想反射体，如是则包含在其中的物体 $A_1,A_2,\cdots$ 和辐射场一起组成一个孤立系．按照热力学原理，这体系的总能量守恒，且经过内部热交换，最后各物体一定趋于同一温度 T，即达到热力学平衡态．

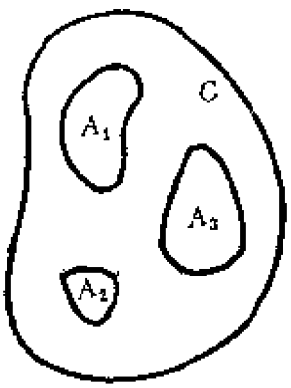


图 1-3　基尔霍夫定律的推导

首先看热平衡态下的辐射场，此时它应是均匀、稳恒和各向同性的，其能谱密度 $u_T(\nu)$ 在各处应具有相同的函数形式和数值，亦即 $u_T(\nu)$ 必为 ν,T 唯一地决定，不可能因与之平衡的物体质料而异，否则这辐射场是不可能与不同质料的物体共处于平衡态的．这就是说，$u_T(\nu)$ 是一个与物质无关的普适函数，它称为热辐射的标准能谱．

其次看各物体与辐射场之间的能量交换．在平衡态下从每个物体单位面积上发出的能量 $r(\nu,T)$ 和吸收的能量 $a(\nu,T)e(\nu,T)$ 相等，即

$$r_1(\nu,T)=a_1(\nu,T)e_1(\nu,T),$$
$$r_2(\nu,T)=a_2(\nu,T)e_2(\nu,T),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

此外，按式(1.12)，我们有

$$e_1(\nu,T)=e_2(\nu,T)=\cdots=\frac{c}{4}u_T(\nu),$$

于是

$$\frac{r_1(\nu,T)}{a_1(\nu,T)}=\frac{r_2(\nu,T)}{a_2(\nu,T)}=\cdots=\frac{c}{4}u_T(\nu). \qquad (1.15)$$

这便是基尔霍夫定律．式(1.15)告诉我们，式(1.14)中的普适函数$F(\nu,T)$就是热辐射标准能谱 $u_T(\nu)$的 $c/4$ 倍．

1.3 绝对黑体和黑体辐射

上面的讨论告诉我们，在平衡态下热辐射的能谱具有标准形式 $u_T(\nu)$．这普适函数的具体形式是怎样的？这是下面我们要研究的中心问题．首先是如何用实验方法来测量它，然后是如何从理论上来说明实验的结果．

我们设想这样一种物体，它在任何温度下都把照射在其上任何频率的辐射能完全吸收，亦即这物体的吸收本领$a(\nu,T)$与ν,T无关，恒等于 1．这种物体称为绝对黑体．令基尔霍夫定律(1.15)中的 $a(\nu,T)=1$，得绝对黑体的辐射本领 $r_0(\nu,T)$ 为

$$r_0(\nu,T)=\frac{c}{4}u_T(\nu). \qquad (1.16)$$

即 $r_0(\nu,T)$ 与标准能谱 $u_T(\nu)$ 之间只差一个常数因子 $c/4$．若能测得 $r_0(\nu,T)$，即可知道 $u_T(\nu)$．问题是怎样获得绝对黑体．

绝对黑体是理想化的物体，实际中任何物质都不是真正的绝对黑体．譬如我们可以做这样一个实验，用墨将一个纸盒子的表面涂黑，然后用各种颜色的光照射它，我们或多或少地还能够分辨出照射在上面光的颜色．这表明盒子表面还是反射了一些光．此

外，即使我们用肉眼看起来是黑色的物体，只表明它对可见光强烈吸收，还不能说它对不可见光（红外线、紫外线）都强烈吸收。实际上很多看起来是"黑色"的物体在红外、紫外波段并不全吸收。这是否说我们就没办法制造一个绝对黑体了呢？办法还是有的。还拿上面谈到的那个纸盒来说吧，我们在盒子上开一个小孔，看上去这是漆黑的一个洞。再用颜色光照上去时，它比周围涂了墨的盒子表面显得"黑"得多，这里再也不能分辨出入射光的颜色了。这说明，用任何物体做的空腔，在它很小的开口处就是一个相当理想的"绝对黑体"。这是因为当光线射进这个小孔后，需经过内壁的很多次反射，才有一些可能从小孔重新射出（见图 1-4(a)）。

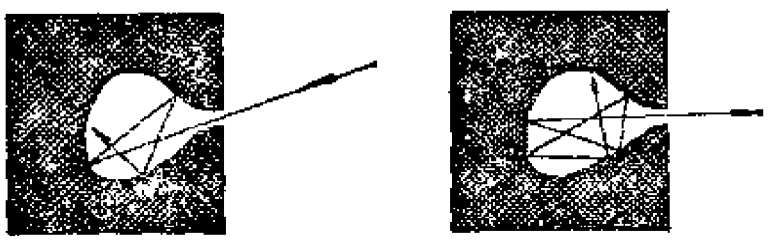


图 1-4　空腔小孔

这样，不管内壁的吸收本领怎样，经过多次反射，重新射出小孔的光是十分微弱的，孔越小越是这样。为了加强吸收的效果，人们还在空腔器壁上装有许多带孔的横壁（见图 1-5 中的空腔辐射器），使得自小孔射入的光线更不容易直接反射出去。用这种办法人们可以制造出非常理想的"绝对黑体"。当我们将这样的辐射器

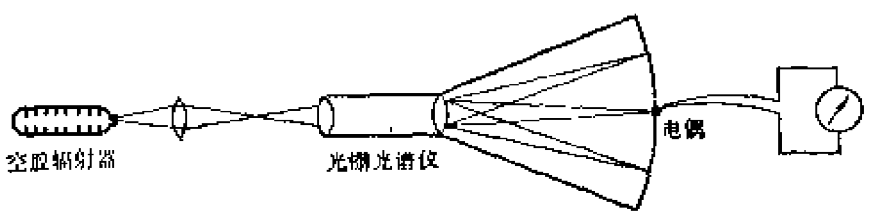


图 1-5　空腔辐射的测量装置

维持在一定的温度T时，由此容器内壁发出的辐射也是经过多次反射才从小孔射出的．这样，在小孔处观察到的已不是器壁材料的辐射谱$r(\nu,T)$，按照基尔霍夫定律，它应是绝对黑体的辐射谱$r_0(\nu,T)$①．

实际测量的装置如图 1-5 所示，空腔辐射器是用耐火材料做成的，可以用电炉加热到各种温度．由小孔发出的辐射经分光系统(光栅)按频率(或者说波长)分开，用涂黑的热电偶探测各频段辐射能的强度，并记录下来．因为实际测量黑体辐射谱时都用的是空腔辐射器，黑体辐射又称空腔辐射．

在光谱学中习惯于用真空中的波长λ来表示，而不常用频率ν．所有上面的谱表示都需改写一下．例如$R=\int r(\nu)d\nu$应改写成$R=\int r(\lambda)d\lambda$．因 $\nu=c/\lambda$，$d\nu=-(c/\lambda^2)d\lambda$，将 $r(\nu)$ 换算成 $r(\lambda)$时，除宗量代换外，还应乘以 c/λ^2．

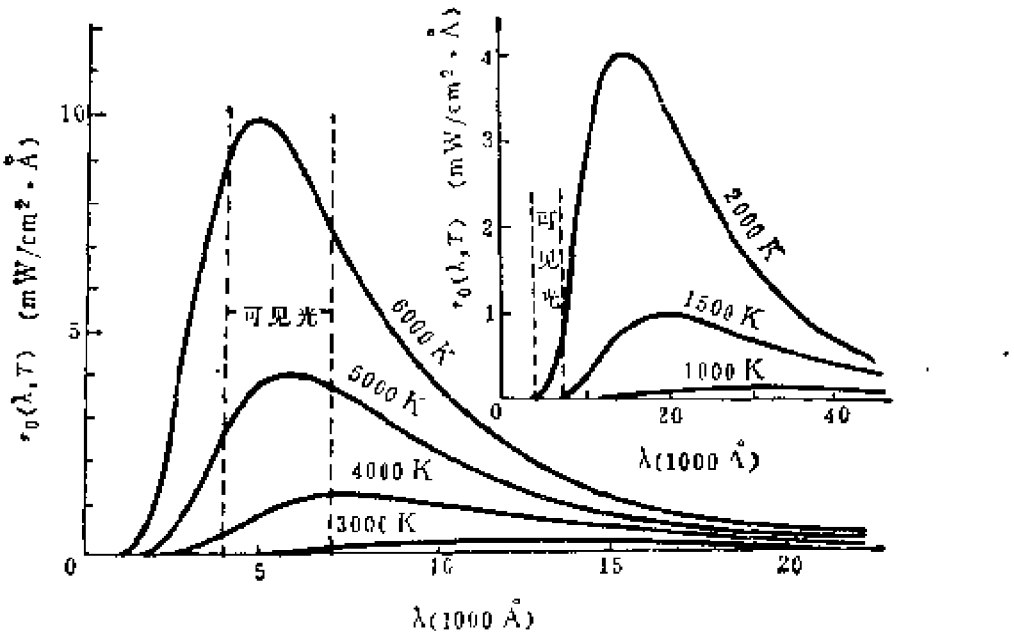


图 1-6　黑体辐射谱

① 参看图1-4(b)和习题 1．

图 1-6 是在各种温度下实测的黑体辐射谱 $r_0(\lambda,T)$，它们都是用 λ 来表示的. 曲线下的面积代表辐射本领 R. 可以看出，它们是符合1.1节中所总结的一般特征的，即：(1) R 随着 T 单调地增加；(2) T 增高时，光谱中能量的分布由长波向短波转移. 下面的两条定律正好定量地概括了这两个特征.

1.4 斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩位移定律

在实际测得黑体辐射谱后，建立其函数表达式的问题，在历史上是逐步得到解决的.

维恩根据热力学原理证明，黑体辐射谱必有如下的函数形式：

$$r_0(\nu,T)=c\nu^3\psi\left(\frac{\nu}{T}\right) \text{ 或 } r_0(\lambda,T)=\frac{c^5}{\lambda^5}\varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right), \quad (1.17)$$

其中 ψ 和 φ 的函数形式尚不能最终确定. 利用式(1.17)，可得以下两条定律(具体推导留作习题)：

(1) 黑体辐射的辐射本领 $R_T=\int r_0(\lambda,T)d\lambda$ 与绝对温度 T 的四次方成正比，即

$$R_T=\sigma T^4, \quad (1.18)$$

实验测得上式中的比例常数为

$$\sigma=5.67\times10^{-12}\mathrm{W/cm^2\cdot K^4},$$

它是个普适常数. 这规律叫做斯特藩-玻耳兹曼定律(J. Stefan, 1879年；L. Boltzmann, 1884年)，σ 叫做斯特藩-玻耳兹曼常数.

(2) 图 1-6 中的曲线表明，任何温度下 $r_0(\lambda,T)$-λ 曲线都有一极大值，令这极大值所对应的波长为 λ_M，则 λ_M 与 T 成反比：

$$\lambda_M T=b, \quad (1.19)$$

实验测得

$$b=0.288 \text{ cm}\cdot\text{K},$$

b 也是个普适常数. 这规律称为维恩位移定律(W. Wien, 1893年)，

b 称为维恩常数. 此定律表明，随着T的增高，λ_M向左方位移. 下表给出不同温度下 λ_M 的数值.

表Ⅸ-1 维恩位移定律

T (K)	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
λ_M (Å)	57600	28800	14400	9600	7200	5800	4800	4100	3600

维恩位移定律将热辐射的颜色随温度变化的规律定量化了. 在温度不太高时，热辐射中绝大部分是肉眼不能见的红外线，其中包含一小部分长波的可见光，即红光. 计算表明，当温度达到3800K 左右时，λ_M 达到可见光谱红端的边缘 7600 Å. 当温度在5000—6000K范围内时，λ_M位于可见光波段的中部，这时热辐射中全部可见光都较强，它引起人眼的感觉是白色，照明技术中把具有这种光谱的光叫做白光. 太阳光谱中的连续部分极大值位于 $\lambda_M = 4600$ Å(青色)的地方，这约相当于 $T = 6000$K的黑体辐射光谱①，所以太阳光是白光. 通常白炽灯丝的温度只有两千多度，λ_M还在红外波段，所发的光与日光相比，颜色黄得多. 用白炽灯产生接近日光的热辐射是不可能的，必须另寻途径，例如日光灯管是靠气体放电和荧光等非平衡的辐射过程来产生接近日光的白色光的.

1.5 维恩公式和瑞利-金斯公式

单纯从热力学原理出发，而不对辐射机制作任何具体的假设，是不能将式(1.17)中 ψ 和 φ 的函数形式进一步具体化的. 历史上在这个问题获得最终的正确答案之前，有过下列两个公式，它们对揭露经典物理的矛盾起了重大的作用.

① 由于大气的散射和吸收，地面上看到的太阳的表观温度比这要低些.

（1）维恩假设气体分子辐射的频率 ν 只与其速度 v 有关(这一假设看来是没什么根据的)，从而得到与麦克斯韦速度分布律形式很相似的公式：

$$r_0(v,T)=\frac{\alpha v^3}{c^2}e^{-\beta v/T} \quad 或 \quad r_0(\lambda,T)=\frac{\alpha c^2}{\lambda^5}e^{-\beta c/\lambda T}, \tag{1.20}$$

式中 α,β 为常数. 此公式称为维恩公式(W. Wien, 1896年).

（2）瑞利从能量按自由度均分定律出发，得到以下公式：

$$r_0(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2kT \quad 或 \quad r_0(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^4}kT, \tag{1.21}$$

式中 k 为玻耳兹曼常数，$k=1.38\times10^{-23}\mathrm{J/K}$. 此公式称为瑞利-金斯公式(Lord Rayleigh, 1900年; J. Jeans, 1905年).

以上两个公式都符合普遍形式(1.17). 与实验数据比较，在短波区域维恩公式符合得很好，但在长波范围则有虽不太大但却是系统的偏离. 瑞利公式与之相反，在长波部分符合得较好，但在短波波段偏离非常大(见图1-7). 不仅如此，由式(1.21)可见，

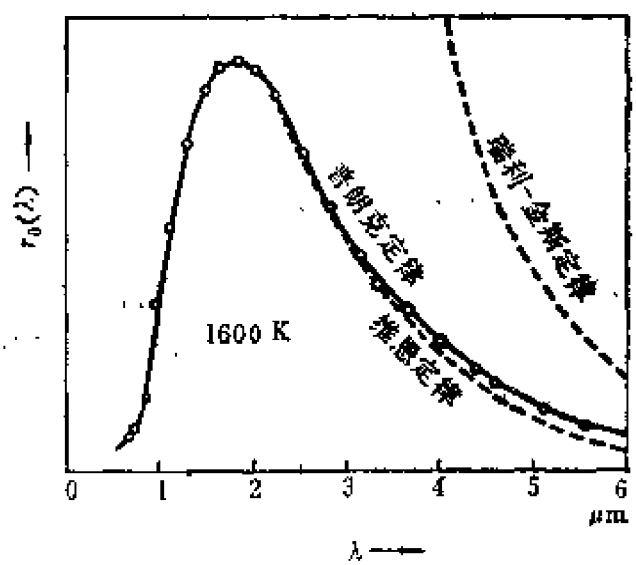


图 1-7　各黑体辐射公式与实验的比较

当 $\lambda \to 0$ 时，$r_0(\lambda, T) \to \infty$，亦即波长极短的辐射(光谱的紫外部分)能量趋于∞，从而总辐射本领 R_T 也趋于∞．这显然是荒谬的．瑞利之后，金斯作过各种努力，企图绕过瑞利的结论．然而他发现，只要坚持经典的统计理论(能均分定律)，瑞利公式(1.21)以及上述荒谬结论就是不可避免的．经典物理的这一错误预言是如此严重，历史上被人们称为"紫外灾难"．

1.6 普朗克公式和能量子假说

正确的黑体辐射公式是普朗克给出的：

$$r_0(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{1.22}$$

或

$$r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}, \tag{1.22'}$$

式中 k 是玻耳兹曼常数，$h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s 为一普适常数，称为普朗克常数，式(1.22)或(1.22′)称为普朗克公式(M.Planck，1900年)．不难看出，普朗克公式也符合(1.17)给出的普遍形式．此外，对于短波，$h\nu \gg kT$，$e^{h\nu/kT} \gg 1$，普朗克公式蜕化为维恩公式(1.20)；对于长波，$h\nu \ll kT$，$e^{h\nu/kT} \simeq 1 + h\nu/kT$，普朗克公式过渡到瑞利-金斯公式(1.21)．在所有的波段里，普朗克公式与实验符合得很好(见图1-7)．

普朗克公式的得来，起初是半经验的，即利用内插法将适用于短波的维恩公式和适用于长波的瑞利-金斯公式衔接起来．在得到了上述公式之后，普朗克才设法从理论上去论证它．

由于与任何物体系处于热平衡的辐射场，其能谱皆为标准谱 $u_T(\nu)$，为了推导简单，我们选择由大量包含各种固有频率 ν 的谐振子组成的系统①．通过发射和吸收，谐振子与辐射场交换能

① 这里的谐振子不一定代表自然界中某种现实的物体，如分子，原子等．既然在这里可以选取任何物体，我们也可以选取抽象化的模型，只要假定它们遵从的物理规律(力学的、热力学的、电磁学的，等等)与现实物体相同即可．

量．仔细计算辐射场与谐振子之间的能量交换，可以证明它们达到热平衡的条件为（证明从略）

$$u_T(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\varepsilon}(\nu,T), \tag{1.23}$$

从而黑体辐射本领为

$$r_0(\nu,T)=\frac{c}{4}u_T(\nu)=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\bar{\varepsilon}(\nu,T), \tag{1.24}$$

这里$\bar{\varepsilon}(\nu,T)$是频率为ν的谐振子在温度为T的平衡态中能量的平均值．

下面我们来计算$\bar{\varepsilon}(\nu,T)$．在热平衡态中能量为ε的几率正比于$e^{-\varepsilon/kT}$（玻耳兹曼正则分布律）．按照经典物理学的观念，谐振子的能量ε在0到∞间连续取值，从而

$$\bar{\varepsilon}(\nu,T)=\frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon}=kT,$$

将此结果代入式(1.24)，得到的就是导致紫外灾难的瑞利-金斯公式．为了摆脱困难，普朗克提出如下一个非同寻常的假设：谐振子能量的值只取某个基本单元ε_0的整数倍，即

$$\varepsilon=\varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ 3\varepsilon_0,\ \cdots,$$

这样一来，

$$\bar{\varepsilon}(\nu,T)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-n\varepsilon_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon_0/kT}}=\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\varepsilon_0\beta}\right)\right]_{\beta=-\frac{1}{kT}},$$

利用等比级数的求和公式，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\varepsilon_0\beta}=1-e^{-\varepsilon_0\beta},$$

代入前式，不难求得

$$\bar{\varepsilon}(\nu,T)=\frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT)-1},$$

将上式代入式(1.24)，得

$$r_0(\nu,T)=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT)-1},$$

要使此式符合式(1.17)给出的普遍形式，必须令 ε_0 正比于 ν，即 $\varepsilon_0=h\nu$，这里 h 是一个应由实验来确定的比例系数．这样，上式化为

$$r_0(\nu,T)=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1},$$

这便是普朗克公式(1.22)，其中的 h 就是前面已提到的普朗克常数．

综上所述，我们看到，为了推导出与实验相符的黑体辐射公式，人们不得不作这样的假设：频率为 ν 的谐振子，其能量取值为 $\varepsilon_0=h\nu$ 的整数倍，$\varepsilon_0=h\nu$ 称为能量子，这个假设称为普朗克能量子假说．从经典物理学的眼光来看，这个假设是如此的不可思议，就连普朗克本人也感到难以相信．他曾想尽量缩小与经典物理学之间的矛盾，宣称只假设谐振子的能量是量子化的（即不连续取值），而不必认为辐射场本身也具有不连续性．然而正如我们将在§2中看到的，许多实验事实将迫使我们承认，辐射场也是量子化的．

普朗克因阐明光量子论而获得1918年诺贝尔物理学奖金．

*1.7 光源的发光效率

在结束本节之前，让我们涉猎一下有关热辐射的实际应用方面．首先看照明光源的发光效率问题．

任何光源发出的辐射中，总有相当一部分不在可见光波段内，它们不起照明作用．光源的发光效率 η 定义为它所发射的光通量与辐射能通量之比：

$$\eta = \frac{K_M \int_0^\infty r(\lambda) V(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty r(\lambda) d\lambda}, \qquad (1.25)$$

式中$V(\lambda)$是视见函数，$K_M = 683$ lm/W是最大光功当量①，$r(\lambda)$是该光源辐射本领的谱密度.

如果光源是绝对黑体，其辐射本领$r_0(\lambda, T)$由普朗克公式(1.22′)所决定.将它代入上式，即可得不同温度下绝对黑体的发光效率(见表Ⅸ-2).

表Ⅸ-2 绝对黑体的发光效率

T (K)	2000	3000	5000	6000	8000
η (lm/W)	15.2	19.2	74	84	78

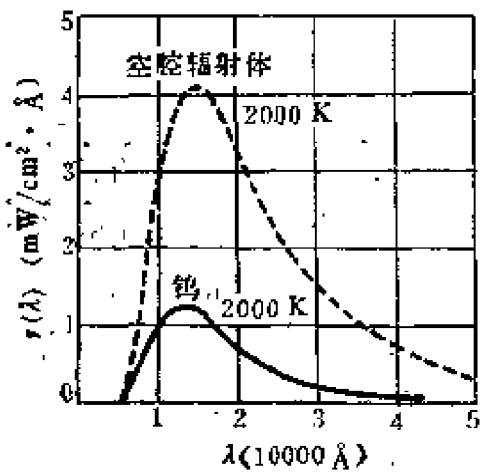


图1-8 钨的辐射本领

可以看出，$T = 6000$K 左右时黑体的发光效率最高.这是我们可以预料的，因为按照维恩位移定律，也正是在这个温度附近，λ_M落在可见光波段的中部(参见表Ⅸ-1).

实际的物体不是绝对黑体，它们的吸收本领$a(\lambda, T)$小于绝对黑体的吸收本领$a_0(\lambda, T) \equiv 1$②，按照基尔霍夫热辐射定律，它们的辐射本领$r(\lambda, T)$也小于绝对黑体(空腔辐射体)在同温度下的辐射本领$r_0(\lambda, T)$.图1-8给出2000K下钨丝的辐射本领和黑体辐射本领曲线.可以看出，前者比后者小很多.但这并不意味着，钨丝的发光效率一定比同温度的黑体小.由于辐射具有一些选择性，钨丝的发光效率还略高些，但总的说来，在此温度下热辐射的发光效率是很低的.固体的熔点最高在3000K

① 见第一章§11.

② 若$a(\lambda, T) < 1$，且对λ无明显的选择性，则称为灰体.

左右，尽管辐射有一定的选择性，发光效率不超过 20 lm/W的量级．要提高光源的发光效率，必须增大辐射在可见光区的选择性．某些金属蒸汽在可见光波段有很强的谱线，用它们作光源，发光效率可以很高（例如钠光灯的 η 可达 200 lm/W）．但这种光源往往是有色的，对有些场合的照明不太适用．水银蒸汽在紫外波段有很强的谱线，利用荧光物质可将紫外线转变为可见光，这样就可使发光效率大大提高．日光灯就是利用这种原理制成的，它的发光效率很高，所发的光又接近于日光（白色），既可节约电能，又能得到正确的色调，是一种比较理想的照明光源．

*1.8 光测高温法

黑体辐射的规律为我们提供了一种重要的测量高温的方法——光测高温法．对于2000—3000K以上的高温，这几乎是唯一的方法．天体的温度，差不多都是用光学方法测量出来的．

光测高温的方法有几种，它们都以黑体辐射的某条定律为基础．

（1）色温法：测量辐射能谱中极大值所对应的波长 λ_M，利用维恩位移定律求得温度．用此法测得的温度，称为色温度，记作 $T_色$．

（2）亮温法：按照黑体辐射定律，温度相同的黑体亮度相同．比较亮度的装置如图 1-9 所示，将特制的灯丝放在望远镜物镜的像方焦面上，因而它与被测物体的中间像重合．调节灯丝电流，当其亮度与被测物体的亮度一样时，通过目镜看去，灯丝就从被测物的背景中消失（所以这种装置叫做消丝高温计）．电流计的读数可以事先按灯丝的温度校准，这样就可将待测物体的温度直接读出．用此法测得的温度，称为亮温度，记作 $T_亮$．

（3）辐射温度法：如图1-10，用光具组将辐射体成像于热电偶的感

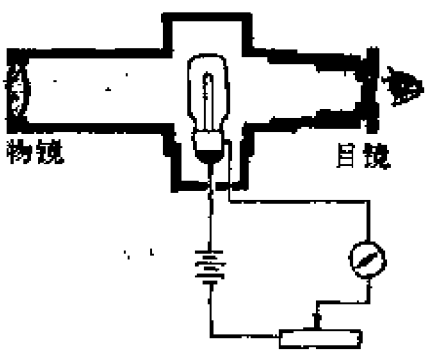


图 1-9 消丝高温计

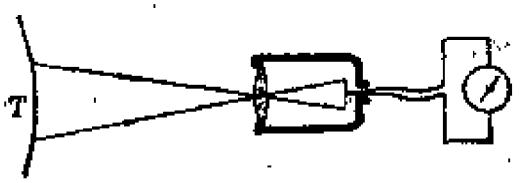


图 1-10 辐射高温计

温端．热电偶接受的辐射能正比于像的辐射照度，而像的辐射照度又正比于物的辐射亮度，即R_T，按照斯特藩-玻耳兹曼定律，后者又正比于T^4．只要事先经过校准，用此仪器(称为辐射高温计)可测出物体的温度．用此法测得的温度，称为辐射温度，记作$T_{辐}$．

以上各种方法都以黑体辐射定律为基础的．对于绝对黑体应有$T_{色}=T_{光}=T_{辐}=T$(物体的实际温度)．但被测物体并非绝对黑体，往往是$T_{色}\fallingdotseq T_{光}\fallingdotseq T_{辐}\fallingdotseq T$．故无论用上述哪种方法测温，若对测量的精确度要求较高，都需要根据辐射体的性质加一定的修正，才能得到物体的真正温度T．

思 考 题

1．一块金属在1100K发出红色的光辉，而此同样温度下，一块石英毫不发光．这是为什么？

2．猎戶α和猎戶β是猎戶座中最亮的两颗星，看起来前者是橘红色的，后者白中略带蓝色．它们的温度比太阳高还是低？

3．天狼星是天空中最亮的星，温度大约11000℃，你能设想它的颜色是怎样的吗？

4．估计一下人体热辐射最强的波长．若人眼对此波长的灵敏度与对绿光差不多，会发生怎样的情况？

5．如果计算一下不同温度下热辐射中可见光所占的百分比，就会发现在太阳的温度(~6000K)下比例最高．此外，太阳光谱中辐射能最大的波长与人眼最灵敏的波长大体相符．你认为这些都是偶然的巧合吗？其中有什么因果关系？

习 题

1．一空腔辐射器的内外器壁一样，在某温度T时器壁材料的(单次)辐射亮度为$b(\nu,T)$，吸收本领为$a(\nu,T)$．设器壁是理想的漫射体(即朗伯体，见第一章§11)．试证明：

(1) 由于多次反射，腔内任何面元上的辐射照度$e_0(\nu,T)$和辐射亮度$b_0(\nu,T)$分别为

$$\begin{cases} e_0(\nu,T)=\dfrac{\pi b(\nu,T)}{a(\nu,T)}, \\ b_0(\nu,T)=\dfrac{b(\nu,T)}{a(\nu,T)}. \end{cases}$$

(2) 小孔处辐射场的亮度亦为上式所决定的 $b_0(\nu,T)$，它像绝对黑体一样，比外器壁的亮度 $b(\nu,T)$ 大 $1/a(\nu,T)$ 倍.

【提示：首先证明，不管空腔形状如何，内器壁接收第 n 次反射光的照度 $e_n(\nu,T)$ 与第 n，$n+1$ 次反射光的亮度 $b_n(\nu,T)$，$b_{n+1}(\nu,T)$ 有如下关系(可参考第一章 § 11 习题 3 的作法)：

$$e_n(\nu,T)=\pi b_n(\nu,T),$$

$$b_{n+1}(\nu,T)=\frac{1}{\pi}e_n(\nu,T)[1-a(\nu,T)],$$

而

$$e_0(\nu,T)=\sum_n e_n(\nu,T), \qquad b_0(\nu,T)=\sum_n b_n(\nu,T). \quad 】$$

2. 太阳常数(太阳在单位时间内垂直照射在地球表面单位面积上的能量)为 1.94 cal/cm²·min，日地距离约为 1.50×10^8 km，太阳的角半径为 0.00465 rad，以这些数据来估算一下太阳的温度.

3. 设空腔处于某温度时 $\lambda_M=6500$ Å，如果腔壁的温度增加，以致总辐射本领加倍时，λ_M 变为多少?

4. 热核爆炸中火球的瞬时温度达 10^7 K，

(1) 辐射最强的波长；

(2) 这种波长的能量子 $h\nu$ 是多少?

5. 利用普朗克公式证明斯特藩-玻耳兹曼常数

$$\sigma=2\pi^5k^4/15c^2h^3.$$

[提示：$\int_0^\infty \dfrac{x^3dx}{e^x-1}=\dfrac{\pi^4}{15}$.]

6. 利用普朗克公式证明维恩常数

$$b=0.2014\ hc/k.$$

【提示：$e^{-x}+x/5=1$ 的解为 $x=4.965$.】

§2 光的粒子性和波粒二象性

2.1 光电效应

当光束照射在金属表面上时，使电子从金属中脱出的现象，叫做光电效应．利用光电效应做成的器件，叫做光电管．图2-1所示是一种最简单的真空光电管．在一个不大的抽空玻璃容器中装有阴极 K 和阳极 A．阴极 K 的表面涂有感光金属层．在两极之间加数百伏的电压．平时 K，A 之间绝缘，电路中没有电流．当光束照射在阴极 K 上时，电路中就出现电流（称为光电流），这是因为阴极 K 在光束照射下发射出电子来（称为光电子）．用于不同波段的光电管，阴极涂不同材料的感光层，如用于可见光的涂碱金属 Li，K，Na 等，用于紫外线的涂 Hg，Ag，Au 等．光电管中往往充有某种低压的惰性气体，由于光电子使气体电离，增大管内的导电性．所以充气光电管的灵敏度较真空光电管大．真空光电管的灵敏度约为 $10\mu A/mW$ 光功率，而充气光电管的灵敏度可大 6—7 倍．

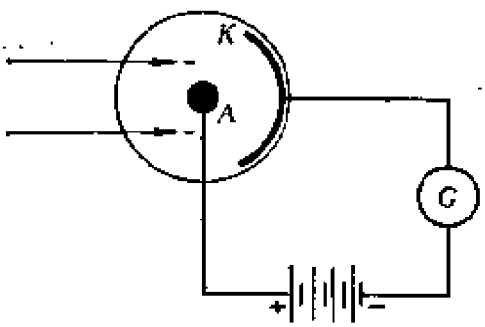


图2-1 光电管

在上述光电效应中电子逸出金属，所以这种光电效应可以叫做外光电效应．除外光电效应之外，还有另一类所谓“内光电效应”，目前的应用更为广泛．半导体材料的内光电效应较为明显，当光照射在某些半导体材料上时将被吸收，并在其内部激发出导电的载流子（电子-空穴对），从而使得材料的电导率显著增加（所谓“光电导”）；或者由于这种光生载流子的运动所造成的电荷积累，使得材料两面产生一定的电位差（所谓“光生伏特”）．这些现

象统称内光电效应．硫化镉光敏电阻、硫化铅光敏电阻、硒光电池、硅光电池、硅光电二极管等就是利用这种内光电效应制成的器件．

光电效应已在生产、科研、国防中有广泛的应用．在有声电影、电视和无线电传真技术中都用光电管或光电池把光信号转化为电信号，在光度测量、放射性测量时也常常用光电管或光电池把光变为电流并放大后进行测量，光电计数、光电跟踪，光电保护等多种装置在生产自动化方面的应用更为广泛．

研究光电效应的实验装置如图2-2所示，K是光电阴极，A是阳极，二者封在真空玻璃管内．光束通过窗口照射在阴极上(如果用紫外线，窗口必须用石英来做)．实验结果表明，光电效应有如下基本规律．

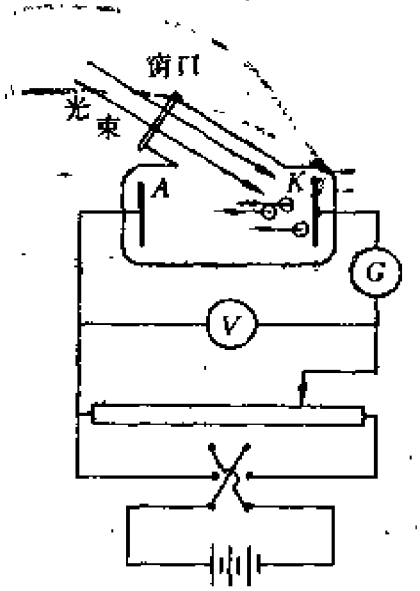


图 2-2　研究光电效应的实验装置

（1）饱和电流　光电流I随加在光电管两端电压V变化的曲线，叫做光电伏安特性曲线．在一定光强照射下，随着V的增大，光电流I趋近一个饱和值(参见图2-3)．实验表明，饱和电流与光强成正比，例如图2-3中曲线a比曲线b对应的光强较大．电流达到饱和意味着单位时间内到达阳极的电子数等于单位时间内由阴极发出的电子数．因此上述实验表明，单位时间内由阴极发出的光电子数与光强成正比．

（2）遏止电位　如果将电源反向，两极间将形成使电子减速的电场．实验表明，当反向电压不太大时，仍存在一定的光电流．这说明从阴极发出的光电子有一定的初速，它们可以克服减速电场的阻碍到达阳极．当反向电压大到一定数值V_0时，光电流完全减少到零．V_0叫做遏止电位．实验还表明，遏止电位V_0与

光强无关，例如图 2-3 中曲线 a,b 对应的光强虽不同，但光电流在同一反向电压 V_0 下被完全遏止.

遏止电位的存在，表明光电子的初速有一上限 v_0，与此相应地动能也有一上限，它等于：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0, \tag{2.1}$$

其中 m 是电子的质量，$e>0$ 是电子电荷的绝对值.

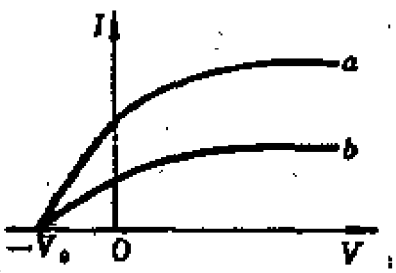


图 2-3 光电伏安特性曲线

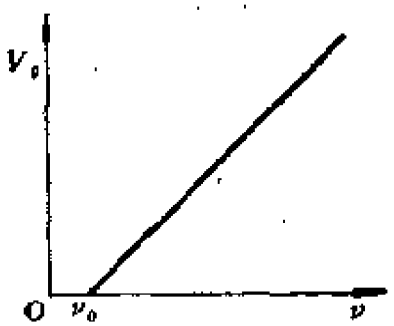


图 2-4 截止频率

（3）截止频率(红限) 当我们改变入射光束的频率 ν 时，遏止电位 V_0 随之改变. 实验表明，V_0 与 ν 成线性关系(图2-4)，ν 减小时 V_0 也减小；当 ν 低于某频率 ν_0 时，V_0 减到零. 这时不论光强多大，光电效应不再发生. 频率 ν_0 称为光电效应的截止频率或频率的红限①. 截止频率 ν_0 是光电阴极上感光物质的属性，也与光强无关. 有时用波长来表示红限，波长的红限 $\lambda_0 = c/\nu_0$.

表IX-3 光电效应的红限

金　　属	钾	钠	锂	汞	铁	银	金
λ_0(Å)	5500	5400	5000	2735	2620	2610	2650

（4）弛豫时间 当入射光束照射在光电阴极上时，无论光强怎样微弱，几乎在开始照射的同时就产生了光电子，弛豫时间

① 红色光是可见光中波长最长、频率最低的光，通常往往用“红”字代表长波或低频，“红限”的意思是长波或低频一端的界限，它不一定真在红色可见光波段内.

最多不超过10^{-9}s.

2.2 爱因斯坦光子假说与光电效应的解释

上述光电效应的实验规律是光的波动理论完全不能解释的. 为了说明二者之间的矛盾，我们先分析一下光电子的能量. 每种金属有一定的脱出功(或称功函数)A，电子从金属内部逸出表面，至少要耗费数量上等于A的能量. 如果电子从光束中吸收的能量是W则它在逸出金属表面后具有的动能，$mv^2/2 < W - A$[①]，或者说，动能最多不超过$mv_0^2/2 = W - A$. 根据式(2.1)，$mv_0^2/2$可由测量的遏止电位V_0算出，故W可根据下式来估算：

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 + A = eV_0 + A. \qquad (2.2)$$

下面我们将看到，上式根本无法用光的波动理论来解释：

（1）按照光的电磁波理论，当光束照射在金属上时，其中电子作受迫振动，直到电子的振幅足够大时脱离金属而逸出. 电子每单位时间内吸收的能量应与光强I成正比. 设光开始照射t秒后电子的能量积累到W并逸出金属，则W应该与It成正比. 我们暂且假设光电效应的弛豫时间t都一样，则W应与光强I成正比. 但是实验证明V_0与光强无关，根据式(2.2)，W也应与光强无关. 这是一个矛盾.

（2）按照光的波动理论，不论入射光的频率ν多少，只要光强I足够大，总可以使电子吸收的能量W超过A，从而产生光电效应. 但实验表明，光频ν<红限ν_0，无论光强多大，也没有光电效应. 这又是一个矛盾.

（3）如果放弃弛豫时间t不变的假设，而认为光强大时电子能量积累的时间短，光强小时，能量积累的时间长. 那么就来

① 这里我们完全忽略了电子的热运动动能，因为脱出功A的数量级是eV，而室温下电子的平均热运动动能只有10^{-1}eV的数量级.

估计一下所需的时间吧！有人以光强为 $0.1\mathrm{pW/cm^2}$ 的极弱紫色光(波长4000Å)做实验，根据实测的 V_0 求出 W 来，并按照波动理论来估算，得 $t = 50\mathrm{min}$①. 但实验中几乎在光束照射的同时(最多不超过 $10^{-9}\mathrm{s}$)即观察到了光电效应.

可以看出，光的波动理论与光电效应的实验结果之间存在着多么尖锐的矛盾！

为了说明上述所有关于光电效应的实验结果，爱因斯坦(A. Einstein)于1905年提出了如下假设：当光束在和物质相互作用时，其能流并不象波动理论所想象的那样，是连续分布的，而是集中在一些叫做光子(或光量子)的粒子上. 但对这种粒子仍保持着频率(及波长)的概念，光子的能量正比于其频率 ν，即

$$E = h\nu, \tag{2.3}$$

其中 h 为普朗克常数. 爱因斯坦的这个假说，是普朗克假说的发展. 普朗克起初把能量量子化的概念局限于谐振子及其发射或吸收的机制，而爱因斯坦却建议，辐射能本身一粒一粒地集中存在.

按照爱因斯坦光子假说，当光束照射在金属上时，光子一个个地打在它的表面. 金属中的电子要么吸收一个光子，要么完全不吸收. 吸收时式(2.2)中的 W 总等于 $h\nu$，从而

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_0^2 + A = eV_0 + A. \tag{2.4}$$

上式称为爱因斯坦公式. 这公式全部解释了上述所有实验结果：入射光的强弱意味着光子流密度的大小. 光强大表明光子流密度大，在单位时间内金属吸收光子的电子数目多，从而饱和电流大. 但不管光子流的密度如何，每个电子只吸收一个光子，所以电子获得的能量 $W = h\nu$ 与光强无关，但与频率 ν 成正比. 于是根据式(2.4)便可说明，为什么遏止电位与频率成线性关系. 此外，当 ν

① 按照电动力学原理，电子能吸收光能的有效截面为波长平方的量级，这里就是这样估算的.

趋于红限 ν_0时，V_0趋于 0，这时 $h\nu_0 = A$；而当 $\nu < \nu_0$ 时，每个光子的能量 $h\nu < A$，电子吸收后获得的能量小于脱出功，所以光电效应不能发生．值得提起的是，爱因斯坦在1921年获得诺贝尔物理学奖金，并非由于他在相对论方面的伟大贡献，而主要是因光电效应方面的工作．

在爱因斯坦公式提出后十余年，1916 年它被密立根 (R.A. Milikan)的精密实验光辉地证实了．密立根研究了Na，Mg，Al，Cu 等金属，得到了 V_0与 ν 之间严格的线性关系，由直线的斜率测得普朗克常数 h 的精确数值，并与热辐射或其它实验中测得的 h 值很好地符合．密立根因他在测量电子电荷和光电效应方面的研究而获得1923年诺贝尔物理学奖金．

2.3 康普顿效应

光子不仅有能量，也有动量．光子的动量 p 与能量E之间的关系为

$$p = \frac{E}{c}, \tag{2.5}$$

此式可从相对论或电磁理论导出．因 $E = h\nu$，故

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{2.6}$$

虽然经典的电磁理论也预言有光压存在，但光压可更直接地用光子具有动量来解释．

除光电效应外，光量子理论的另一重要实验证据是康普顿效应，对此效应的理论解释涉及光子在电子上散射时能量和动量的守恒定律．

观察康普顿效应的实验装置如图2-5所示．经过光阑D_1D_2射出的一束单色的X 射线为某种散射物质所散射．散射线的波长用布喇格晶体的反射来测量，散射线的强度用检测器(如电离室)来测量．实验结果归结如下：

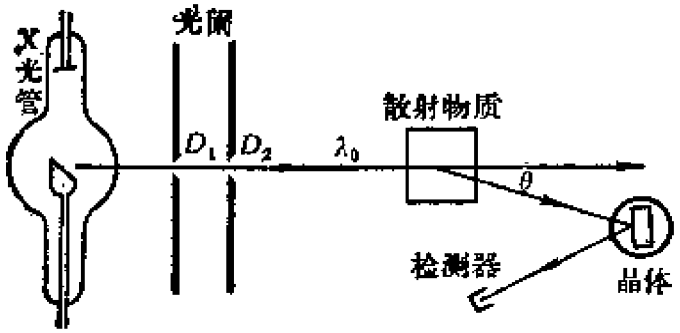
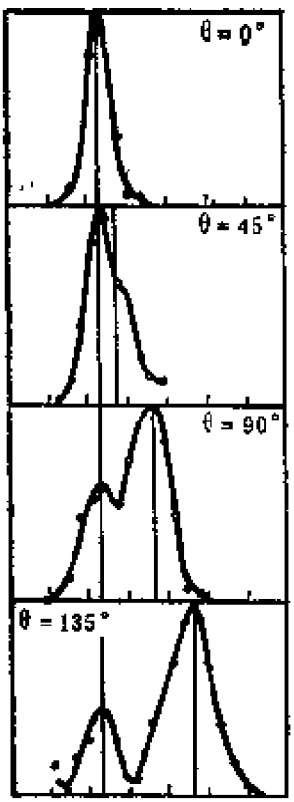


图 2-5　康普顿效应实验装置



$\lambda_0 = 0.712605$ Å
（钼谱线）
散射物质——石墨

图 2-6　康普顿散射与角度的关系

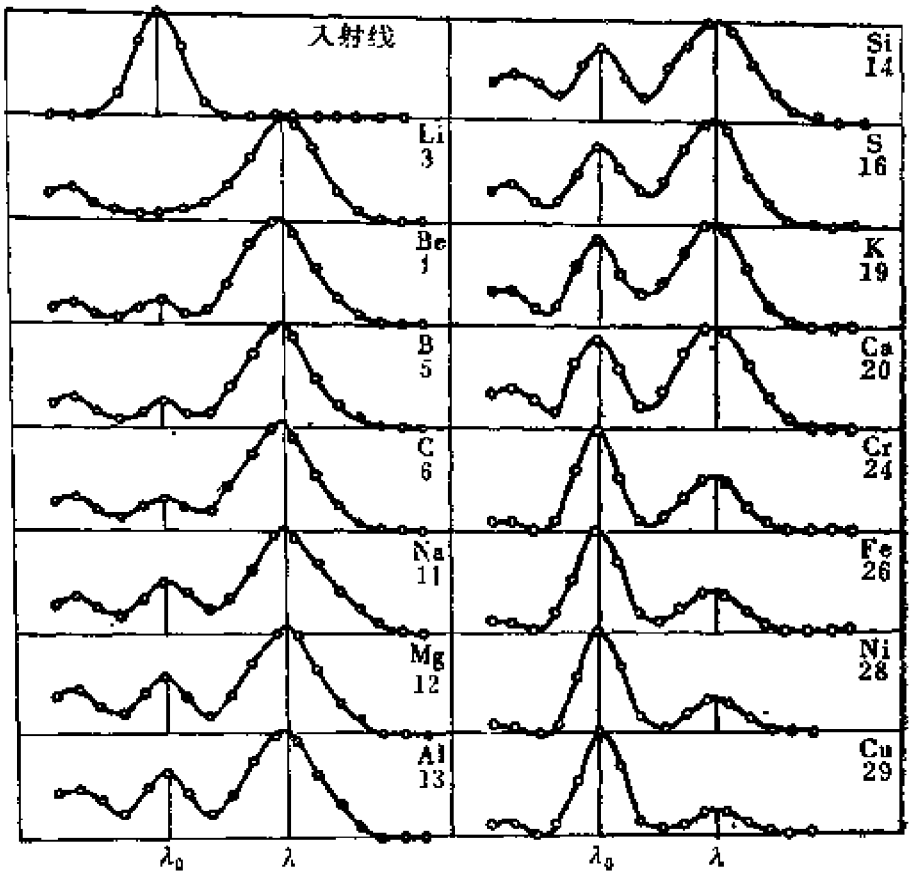
（1）设入射线的波长为 λ_0，沿不同方向的散射线中，除原波长外都出现了波长 $\lambda > \lambda_0$ 的谱线。

（2）波长差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随散射角 θ 的增加而增加；原波长谱线的强度随 θ 的增加而减小，波长为 λ 的谱线强度随 θ 的增加而增加(参见图2-6)。

（3）若用不同元素作为散射物质，则 $\Delta\lambda$ 与散射物质无关；原波长谱线的强度随散射物质原子序数的增加而增加，波长为 λ 的谱线强度随原子序数增加而减小(参见图2-7)。

以上现象叫做康普顿效应（A. H. Compton，1923 年），康普顿因发现此效应而获得1927年诺贝尔物理学奖金。这种X射线的散射效应与我们在第八章中讨论过的瑞利散射很不同。按照经典理论，瑞利散射是一种共振吸收和再发射的过程，散射波的频率(波长)总与入射波相同。但在这里，散射线中出现了

不同的频率(波长)．康普顿散射很容易用光量子理论予以解释①．



λ_0=0.56267 Å(银谱线)
元素符号下的数字为原子序数

图 2-7　康普顿散射与原子序数的关系

首先我们把散射原子中的电子看成是自由和静止的．康普顿散射可看作是X射线中的光子和自由电子间的弹性碰撞过程，在此过程中能量和动量守恒的方程为：

$$\begin{cases} h\nu_0 = h\nu + \dfrac{1}{2}mv^2, & (2.7) \\ p_0 = p + mv\ , \quad ② & (2.8) \end{cases}$$

① 在喇曼效应中，散射光谱里也出现了不同频率的光(伴线)，但该现象仍可用经典理论作一定的解释．可是康普顿效应里的频移只能用量子理论解释．

② 严格说来，电子的能量和动量的表达式应采用相对论形式．考虑到读者不一定熟悉，这里写成非相对论形式，它们在 $v \ll c$ 的条件下适用．

其中$p_0=|\boldsymbol{p}_0|=h\nu_0/c$，$p=|\boldsymbol{p}|=h\nu/c$，$\nu_0$和$\nu$分别是碰撞前后光子的频率，$\boldsymbol{p}_0$和$\boldsymbol{p}$分别是碰撞前后光子的动量，$m$为电子的静止质量，$v$为碰撞后电子的反冲速度．由上述动量守恒方程(2.8)可得

$$(mv)^2=\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2-2\left(\frac{h}{c}\right)^2\nu\nu_0\cos\theta, \qquad (2.9)$$

式中θ为$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{p}_0$间的夹角(图2-8)．令$\Delta\nu=\nu_0-\nu$，由式(2.7)得$v^2=2h\Delta\nu/m$．代入式(2.9)，略去$\Delta\nu$平方项，可得

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0\nu}\simeq\frac{\Delta\nu}{\nu^2}=\frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta)=\frac{2h}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

由于$\lambda=c/\nu$，$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=c\Delta\nu/\nu^2$，于是

$$\Delta\lambda=2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (2.10)$$

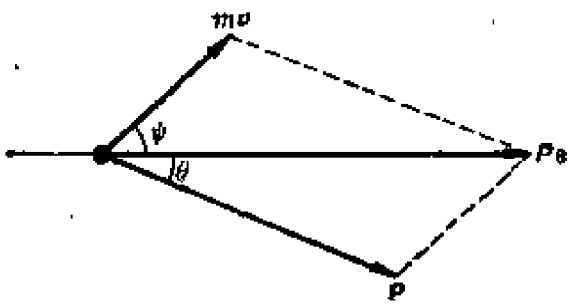


图 2-8　康普顿散射时动量守恒

这里$\lambda_c=h/mc=0.0241$Å，它是一个具有长度量纲的常数，称为康普顿波长．式(2.10)表明，$\Delta\lambda$与物质无关，随θ的增大而增大．它不仅定性地解释了上面的一些实验结果，计算表明，在定量上也是符合的．

若将动量守恒方程(2.8)写成分量形式：

$$\begin{cases}\dfrac{h\nu_0}{c}=\dfrac{h\nu}{c}\cos\theta+mv\cos\psi, & (2.11)\\[2ex] \dfrac{h\nu}{c}\sin\theta=mv\sin\psi, & (2.12)\end{cases}$$

这里 ψ 代表电子反冲的方向与入射线方向的夹角（见图2-8）. 由以上两式可以解得

$$\tan\psi = \frac{\nu \sin\theta}{\nu_0 - \nu\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{\nu_0}{\nu} - \cos\theta}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\lambda_c \nu_0}{c}\right)\tan\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \qquad (2.1\text{3})$$

此式在云室实验中得到证实.

以上的计算中认为电子是自由的，实际并不尽然，特别是重原子中内层电子被束缚得较紧. 光子与这种电子碰撞时，实际上是在和一个质量很大的原子交换动量和能量，从而光子的散射只改变方向，能量几乎不变. 这便是散射光中总存在原波长 λ_0 这条谱线的缘故. 波长为 λ_0 和 λ 的两条谱线强度随原子序数消长的情况，也不难由此得到解释.

2.4 波粒二象性

本书用了大部分篇幅介绍光的波动性，目前，显示光的波动性的一些实验现象，如干涉、衍射、偏振，早已成为众所周知的了. 本章以上各节又介绍了一些奇特的现象，特别是光电效应和康普顿散射，为了解释它们，却不得不引入光的粒子模型. 这便是所谓光的波粒二象性.

波粒二象性并非光子所特有，1923年德·布洛意(L. de Broglie)提出，伴随着所有实物粒子，如电子、质子、中子等，都有一种物质波，其波长与粒子的动量成反比：

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (2.14)$$

式中 h 为普朗克常数. 这种波现称为德·布洛意波，由上式所决定的波长叫做德·布洛意波长. 在一定的场合下，微观粒子的这种波动性就会明显地表现出来. 例如用电子束轰击晶体表面发生散

射时，观察到的电子束强度分布，和X光在晶体上发生的衍射图样十分相似(见图2-9).电子显微镜便是利用电子衍射的原理制成的.

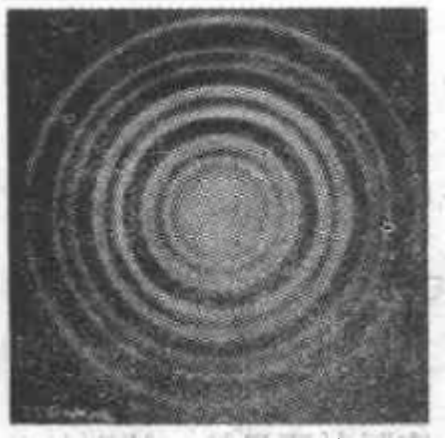


图2-9　电子在晶体上的衍射图样

在人们的概念里，波动是连续的，扩展于空间的；而粒子是离散的，集中于一点的．如何把这两种截然相反的属性赋予同一个实体？初看起来，这很难以想象．下面我们用单电子干涉实验来回答这个问题.

杨氏双缝实验(图2-10)是最典型

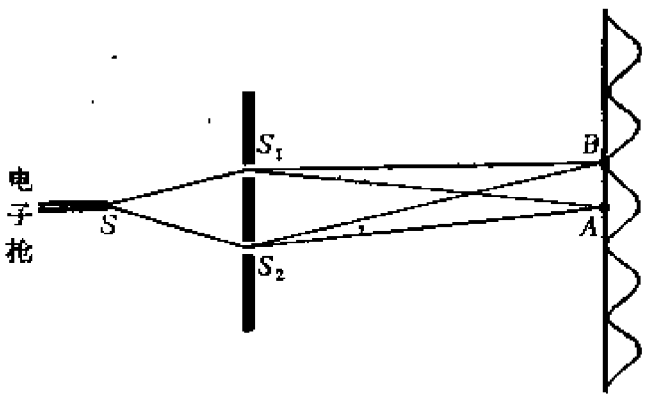


图 2-10　单电子杨氏双缝干涉实验

的干涉实验．这里用的不是光源，而是电子枪．电子束从电子枪 S 射出后经过双缝 S_1 和 S_2 打在屏幕上．实验的结果示于图2-11；

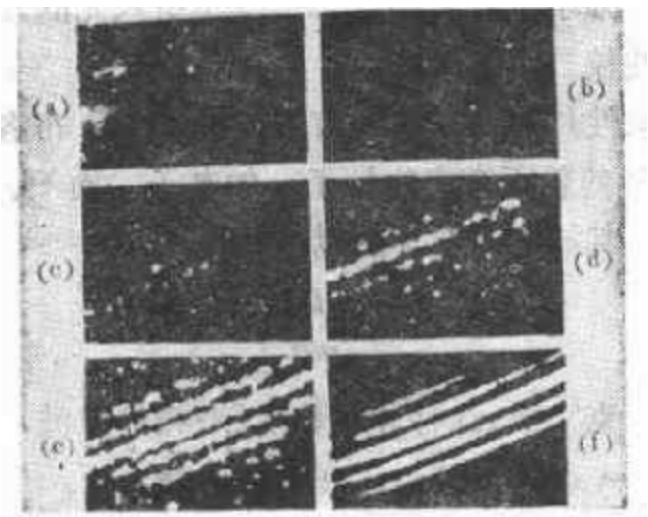


图 2-11　电子的双棱镜干涉图样

图中给出的一组照片是梅尔立等人于1976年发表的①. 在低电子流密度时(图(a))只出现几颗亮点，随着电子流密度的增加(图(c)到(e))，干涉条纹隐约可见，电子流密度很大时(图(f))，可以看到清晰的干涉条纹. 这个实验表明，当少量电子通过仪器落在屏上时，其分布看起来毫无规律，并不形成暗淡的干涉条纹，这显示了电子的"粒子性". 但大量电子通过仪器时，则在屏上形成了清晰的干涉条纹，这又显示了电子的"波动性".

根据上面所述实验，我们是否可以这样说：正象大量枪弹打在靶上有一定的统计分布一样，屏幕上的干涉图样反映了大量电子的统计分布. 但是难于理解的是如下事实：在杨氏实验中如果我们关闭 S_2，让电子束通过 S_1 打在屏幕上，造成一定的密度分布 $n_1(x,y)$. 如关闭 S_1，打开 S_2，让电子束通过它打在屏幕上，造成另一密度分布 $n_2(x,y)$. 从经典的观点看，两缝同时开放时，屏幕上电子的密度分布应为 $n(x,y)=n_1(x,y)+n_2(x,y)$. 但事实并非如此. 实验表明，开一条缝，打在屏幕上的电子按单缝衍射的强度因子分布；两缝同时开放，打在屏幕上电子的分布函数还要乘上双缝干涉因子. 我们知道，后者不等于前者的迭加. 那么，是否可以这样看，分别通过两缝的电子之间发生了某种相互作用(譬如碰撞)，致使打在屏幕上的电子密度发生了重新分布？早就有人做过的单电子衍射实验又否定了这种看法. 毕柏曼等人曾用极微弱的电子流作电子衍射实验②. 在他们的实验中，就平均而言，相继发射两个电子的时间间隔比电子穿过仪器所需时间大 3×10^4 倍. 几乎可以肯定，电子是一个个地通过仪器的，故而这类实验可称之为单电子衍射实验. 在单电子衍射实验中长时间以后获得的衍射图样，与比它强 10^7 倍的电子流在短时间内

---

① 参见P.G.Merli, G.F.Missikoli, G.Pozzi, *Am.J.Phys.* 44(1976), 306. 他们所作的是电子双棱镜干涉实验，但这在原理上与双缝干涉实验是一样的.

② Л.Бибермаи, Н.Сушкин, В.Фабрикант, Док.Акад.Наук СССР, LXVI(1949), 185.

得到的衍射图样完全一样．这表明，衍射图样的产生绝非大量电子相互作用的结果．上述结论应同样适用于双缝干涉．

单电子干涉、衍射实验表明，波动性是每个电子本身的固有属性，电子的干涉(密度的重新分布)是自身的干涉，而不是不同电子间的干涉．或者说，波动性和粒子性一样，是每个电子的属性，而不是大量电子在一起时才有的属性．这点从经典物理学的观点当然是很难理解的，但实验事实迫使我们承认它．

也许会有读者提出更尖锐的问题：干涉是通过两缝的波相干迭加，而单个电子只能通过一个缝，怎么可能自身发生干涉呢？我们说，实验无法肯定电子究竟通过了哪条缝(也许本来就不该这样提问题)，只能说，它通过每条缝的几率各占50%，干涉正是发生在这两部分"几率波"之间．一旦我们关闭了一条缝，使电子以100%的几率通过另一缝时，缝间的干涉效应也就不存在了．几率波的干涉这一概念是经典统计学中从未听说过的．经典的几率可以迭加，但它相当于"强度"的迭加．但要发生干涉，必须是"振幅"迭加．什么是"几率振幅"？这对经典的统计学来说又是一个新鲜的名词．总之，微观客体的波粒二象性绝不能用经典的概念去理解．谁这样做，则每当他得到一个似乎可以说服自己的看法时，他就会在新的实验事实面前陷入窘境．

虽然前面我们一直说的是电子，上述各种实验结果和物理图像对光子完全适用．只是类似图2-11所示的那一类记录单个电子打在屏幕上的照片，尚未能在光子实验中获得①．但其它方面的实验佐证还是大量存在的．

综上所述，我们对光的波粒二象性得到如下的物理图像：光是由光子组成的，光子在很多方面具有经典粒子的属性，但它们出现的几率(振幅和强度)却是按照波动光学的预言来分布的．由

① 早年(1932—42)瓦维洛夫(С.И.Вавилов)曾宣称，他所领导的实验小组作过许多微弱光流的涨落实验，用适应于黑暗环境的肉眼观察了个别光子的行为．遗憾的是，这类实验无法以客观的记录作为凭证公诸于世．

于普朗克常数极小，频率不十分高的光子能量和动量很小，在很多情况下个别光子不易显示出可观测的效应．人们平时看到的是大量光子的统计行为，这将与波动光学所预言的无异．只有在一些特殊场合，尤其是牵涉到光的发射和吸收等过程时，个别光子的粒子性会明显地表现出来．因为光子的能量和动量都正比于频率 ν（或者说反比于波长 λ），可以期望，越是短波，粒子性将越明显．这一点我们已在黑体辐射的问题中看到了．由于X射线和 γ 射线的波长极短，它们的粒子性是相当鲜明的，康普顿散射就是这方面的典型例子．

思 考 题

1．在图 2-3 的光电伏安特性曲线中，当外电压稍微正于遏止电压 $-V_0$ 时，光电流为什么不垂直地上升到它的饱和值？

2．为什么即使入射光是单色的，射出的光电子却有一定的速率分布？

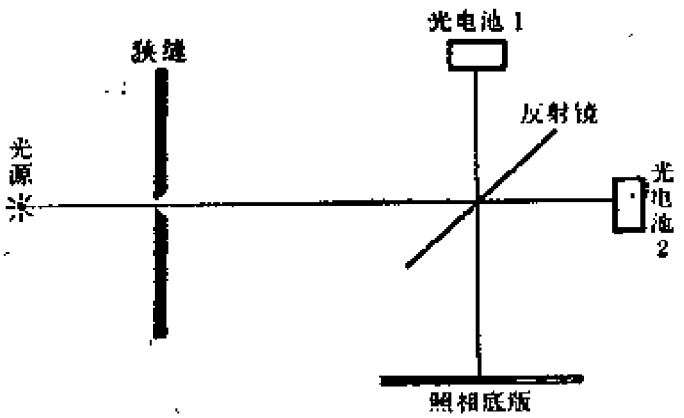
3．为什么光电测量对于光电极的表面性质非常敏感？

4．今有如下一些材料（括号内表示其功函数值）：钯（4.2 eV）、钨（4.5 eV）、铝（4.2 eV）、钡(2.5 eV)、锂(2.3 eV)，如果要制造用可见光工作的光电池，应选取那种材料？

5．可以用可见光来做康普顿散射实验吗？为什么？

6．在康普顿散射实验中的自由电子能够只吸收入射光子而不发射散射光子吗？为什么光电效应中的电子能够如此？

7．如图，一束单色光射在半反射镜上之后，一半能流反射到光电池 1 上，另一半能流透射到光电池 2 上．令入射光的频率为 ν，两光电池的截止频率皆为 ν_c，且 $\nu > \nu_c > \nu/2$．每



思考题 7 图

当光电池产生一个光电子时，记录器就会发出卡塔一声．现设想我们利用这一装置做微弱光流实验，即光源如此之弱，同时只有一个光子通过仪器到达光电池．试问：

(1) 到达每个光电池的光子能量是多少（$h\nu$ 还是 $h\nu/2$ 或 0)？频率是 ν 还是$\nu/2$？

(2) 两光电池是否会同时发出卡塔声？实际情况应该怎样？

(3) 如果把图中两光电池都换为全反射镜，以组成一台迈克耳孙干涉仪，仍让光子一个一个地通过仪器，在照相底版上能否记录到干涉条纹？

习　题

1．(1) 从钠中取去一个电子所需的能量为 2.3 eV．钠是否会对 $\lambda=6800$ Å的橙黄色光表现光电效应？

(2) 从钠表面光电发射的截止波长是多少？

2．波长为 2000 Å 的光照到铝表面，对铝来说，移去一个电子所需的能量为 4.2 eV，试问：

(1) 出射的最快光电子的能量是多少？

(2) 出射的最慢光电子的能量是多少？

(3) 遏止电压为多少？

(4) 铝的截止波长为多少？

(5) 如果入射光强度为 2.0 W/m^2，单位时间打到单位面积上的平均光子数为多少？

3．某光电阴极对于$\lambda=4910$ Å的光，发射光电子的遏止电压为0.71 V．当改变入射光波长时，其遏止电压变为 1.43 V，今问此对应的入射光波长为多少？

4．有光照射到照相底版上，如果在版上分解出 AgBr 分子，则光就被记录下来．分解一个 AgBr 分子所需的最小能量约为 10^{-19} J，求截止波长(即大于该波长的光将不被记录)．

5．一个空腔辐射器处于 6000K 的温度，它壁上小圆孔的直径是 0.10mm，计算每秒从此孔发出的波长在 5500—5510 Å之间的光子数．

6．太阳光以每秒1340 W/m^2的辐射率照到垂直于入射线的地球表面上，假如入射光的平均波长为5500 Å，求每秒每平方米上的光子数．

7. 在理想条件下正常人的眼睛接收到5500Å的可见光时，每秒光子数达100个时就有光的感觉，问与此相当的功率是多少？

8. 单色电磁波的强度是$Nh\nu$，其中N是每单位时间通过单位面积的光子数。问照射在全反射镜面上的辐射压强是多少？

9. 由式(2.11),(2.12)导出式(2.13)。

10. 试证明，康普顿散射中反冲电子的动能K和入射光子的能量E之间的关系为

$$\frac{K}{E}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}=\frac{2\lambda_c\sin^2(\theta/2)}{\lambda+2\lambda_c\sin^2(\theta/2)},$$

其中$\lambda_c=h/mc$为康普顿波长，θ角见图2-8。

11. 今有：(1) 波长为1.00Å的X射线束；(2) 从铯Cs^{137}样品得到的波长为1.88×10^{-2}Å的γ射线束与自由电子碰撞。现从入射方向成90°角的方向去观察散射线，问每种情况的(1) 康普顿波长偏移是多少？(2) 给予反冲电子的动能为多少？(3) 入射光在碰撞时失去的能量占总能量的百分之几？

§3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论

为了下面学习激光原理，必须对原子的结构以及它与电磁辐射相互作用的方式有些初步的了解，本节就来介绍这些方面的问题。

3.1 原子结构经典理论的困难

1909年卢瑟福(E.Rutherford)和他的合作者做的α粒子散射实验证明，原子中心有个很小的核，即原子是由带正电的原子核和带负电的电子组成，它们之间存在着静电的吸引力。按照库仑定律，静电力服从平方反比律，这和天体间的万有引力服从的规律是一样的。按照经典力学的原理(牛顿三定律)，我们必然得到如下几点结论：

(1) 原子中的电子应象太阳系中的行星绕日旋转那样，围

绕着原子核沿圆或椭圆轨道不断地旋转.

（2）电子绕核旋转，必须具有一定的动能．动能越大轨道的半径或半长轴就越大；没有动能时，它就会被静电力吸引到原子核上去．

（3）电子轨道运动的周期 T 正比于半径或半长轴 a 的 3/2 次方，即 $T \propto a^{3/2}$（开普勒第三定律）．轨道越小，周期越短．

经典理论在处理这样一个原子结构模型的电磁辐射问题时，它就漏洞百出了．因为根据经典的电动力学原理，我们必然还要得到如下几点结论：

（1）任何作加速运动的带电粒子都要发射电磁波．而电子沿圆或椭圆的轨道旋转是一种加速运动，它必然要不断地发射电磁波．

（2）电磁波要带走一部分能量，这能量来源于带电粒子本身，所以在发射电磁波的同时，带电粒子本身必然会受到阻力而减速．这阻力叫做辐射阻尼力．既然电子不断发射电磁波，它必然会在电磁阻尼力的作用下不断减速，其动能不断被消耗掉．如果没有能量补充，每个电子的轨道都要不断缩小，最后被吸引到原子核上去．

（3）若电子运动的周期是 T，则它发射的电磁波的周期也是 T，或者说，电磁波的频率 $\nu = 1/T$．在电子轨道不断缩小的过程中周期不断减小，它发射的电磁波的频率要不断增大．从大量原子平均来看，它们发射的电磁波谱应是连续的．

但是事实上电子可以在核的周围处于无辐射状态，此外原子的光谱不是连续谱，而是线状的分立谱．这和经典理论直接冲突．

我们在第八章介绍过另一种经典原子模型——振子模型，即假设原子是由一系列偶极振子组成，每个振子的固有频率对应一条谱线．这个模型可以解释原子光谱中谱线分立的特点，并从受迫谐振的角度说明了吸收光谱与发射光谱中谱线为什么一一对应．但是这里也有不可克服的困难：

（1）原子中存在着原子核这一点已为实验所证实，而在这情况下电

子受到的是 $f \propto 1/r^2$ 形式的库仑力，可是简谐振子的模型要求 $f \propto -r$ 形式的弹性恢复力。

（2）按照数学中傅里叶级数的原理，任何频率为 ν 的周期运动都可分解为一系列频率为 ν，2ν，3ν，…的简谐振动的迭加。如果仍旧认为电子绕核作圆或椭圆运动，它在每个方向的投影都可作傅里叶分解。这样似乎可为振子模型找到一些根据，但是下面我们即将看到，实际在原子光谱中观察到的谱线序列并不是整数倍序列，这又是上述理论所无法解释的了。

总之，和黑体辐射、光电效应等问题一样，这里经典理论和实验事实之间也存在着尖锐的矛盾，一个新的理论将在分析大量实验事实的基础上诞生。

3.2 氢原子光谱中的谱线系

实际光谱中的谱线序列有怎样的规律呢？我们以最简单的原子——氢原子的光谱为例来说明。在长期的研究中人们首先发现氢原子光谱中可见光波段内有一个谱线序列，它们的波长 λ 可用下列经验公式表示：

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),\quad n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots.$$

其中 $R_{\mathrm{H}} = 109677.6\ \mathrm{cm}^{-1}$ 为一常数，称为氢的里德伯常数（J.R. Rydberg）。当我们以 $n = 3,4,5,6$ 代入上式算出来的波长分别是氢光谱中观察到的 H_α，H_β，H_γ，H_δ 谱线的波长。此外在紫外线区还拍摄到对应 $n = 7,8$ 等几条谱线 H_ε，H_ζ，…。下表分别列出由上式计算出的和实验观测出的这一谱线序列的波长值，可以看出二者的数值是符合得很好的。

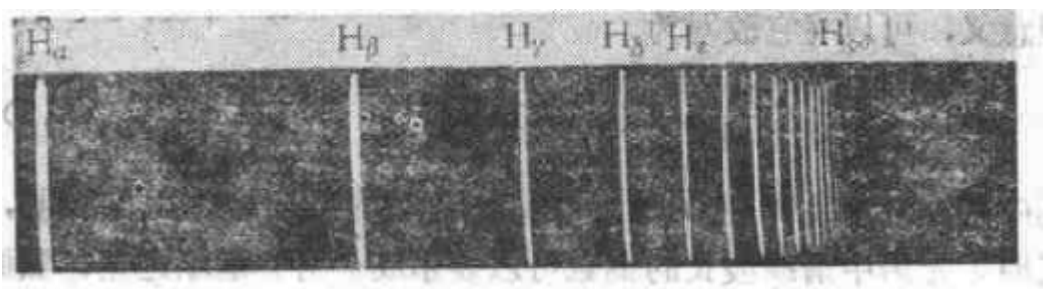


图 3-1 氢原子光谱中的线系

表IX-4 巴耳末线系

n	谱 线	λ(Å)		n	谱 线	λ(Å)	
		计算值	观测值			计算值	观测值
3	H_α	6562.80	6562.81	6	H_δ	4101.78	4101.74
4	H_β	4861.38	4861.33	7	H_ε	3970.11	3970.07
5	H_γ	4340.51	4340.47	8	H_ξ	3889.09	3889.06

这个谱线序列叫做巴耳末线系(J. J. Balmer)。

除上述谱线序列外，在氢原子光谱中还发现另外一些谱线序列，它们的波长可用以下经验公式表示：

赖曼线系： $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 2,3,\cdots$; 紫外区

帕邢线系： $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 4,5,\cdots$;

布喇开线系： $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 5,6,\cdots$; } 红外区

普逢德线系： $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 6,7,\cdots$.

综上所述，我们可以用一个更普遍的公式来表示氢原子光谱中各线系的波长：

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{3.1}$$

其中 m,n 都是正整数，而 $n>m$. 为了使式(3.1)具有更鲜明的物理意义，可以将它改写为

$$\frac{1}{\lambda} = T(m) - T(n), \tag{3.2}$$

其中 $T(m) = R_H/m^2$ 和 $T(n) = R_H/n^2$ 称为光谱项. 式(3.2)表明，氢原子光谱中谱线波长的倒数可以表示成一对光谱项之差. 氢原子光谱的这一特点，也为其它原子光谱所共有，只不过光谱项具

有更复杂的形式罢了．按照经典理论，谱线系的这种规律性是根本无法理解的．

3.3 玻尔假说

在前人大量的实验工作和理论工作(特别是普朗克、爱因斯坦的假说和卢瑟福实验)的基础上，1913年玻尔(N.Bohr)提出如下两点假说，为原子结构的量子理论奠定了基础，为此他获得1922年的诺贝尔物理学奖金．

（1）原子存在某些定态，在这些定态中不发出也不吸收电磁辐射能．原子定态的能量只能采取某些分立的值 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，而不能采取其它值．这些定态能量的值叫做能级．

（2）只有当原子从一个定态跃迁到另一定态时，才发出或吸收电磁辐射．

按照光子假设，电磁辐射的最小单元是光子，它的能量为 $h\nu$．所以根据能量守恒定律，原子在一对能级 E_m, E_n 间发生跃迁时，只能发出或吸收满足下式的特定频率的单色电磁辐射：

$$h\nu = E_n - E_m \quad 或 \quad \nu = \frac{E_n - E_m}{h}, \tag{3.3}$$

上式称为玻尔频率条件，式中 h 为普朗克常数．

不难看出，用玻尔频率条件就可以解释光谱线系的公式(3.2)了，因为 $\nu = c/\lambda$，代入式(3.3)后，即得

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m \quad 或 \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{E_n - E_m}{hc}.$$

将上式与(3.2)式比较一下就可看出光谱项的物理意义，即 $T(m) = -E_m/hc$；$T(n) = -E_n/hc$，它们分别与能级 E_m, E_n 成正比①．

① 负号表示原子中的能级是负的，这是因为原子的能量包括静电位能(由于电子与原子核带异号电，以二者相距无穷远为基准来计算，它是负的)和电子的动能(是正的)，而对于未电离的原子来说电子动能的数值应小于静电位能的绝对值(否则电子就可以摆脱原子核的束缚而电离了)，所以原子的总能量是负的．

按照玻尔假说，氢原子的能级应为

$$E_n = -hcT(n) = -\frac{hcR_H}{n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

n 叫做(主)量子数。氢原子光谱中各线系对应的跃迁过程如图3-2所示，应分别为

赖曼线系：$E_2, E_3, \cdots, \to E_1$；

巴耳末线系：$E_3, E_4, \cdots, \to E_2$；

帕邢线系：$E_4, E_5, \cdots, \to E_3$；

布喇开线系：$E_5, E_6, \cdots, \to E_4$；

普逢德线系：$E_6, E_7, \cdots, \to E_5$。

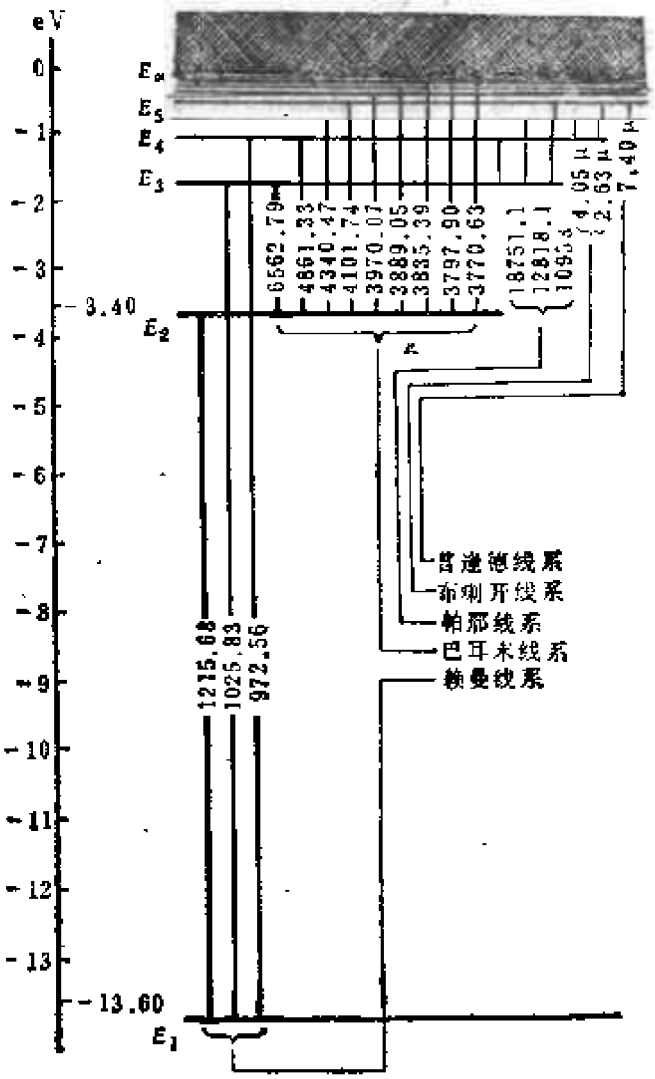


图 3-2 氢原子的能级与谱线系

以上是从高能级向低能级的跃迁，它们相当于光的发射过程．与每个发射过程对应地都有一个从低能级向高能级的跃迁，即光的吸收过程．两个相反的过程都满足同一频率条件(3.3)，这就说明了发射谱和吸收光谱中谱线一一对应的关系．

原子能级中能量最低的叫做基态，其余的叫做激发态．图3-2中E_1是基态，其余的自下而上依次为第一激发态、第二激发态等等．

以上便是原子结构以及原子与电磁辐射相互作用的量子图像，它能够很好地说明实验事实，但与经典理论不相容．这表明经典理论不适用于原子这样的微观客体，必须用量子理论来代替它．

3.4 粒子数按能级的统计分布

在气体中，个别原子处在哪个能级上，是带有偶然性的，并且通过相互碰撞以及与电磁辐射的相互作用而不断发生跃迁．但是达到热平衡态后，各能级上原子数目的多少服从一定的统计规律．设原子体系的热平衡温度为T，在能级E_n上的原子数为N_n，则

$$N_n \propto e^{-\frac{E_n}{kT}}, \qquad (3.4)$$

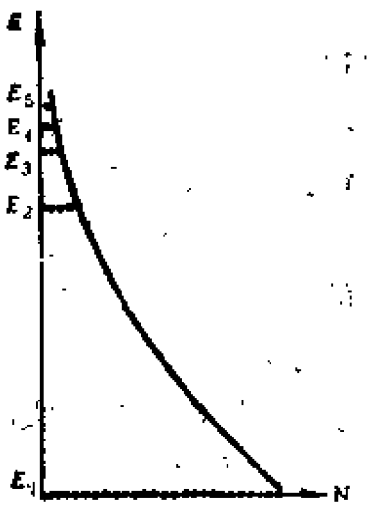


图 3-3 玻耳兹曼正则分布律

式中k为玻耳兹曼常数，这个统计规律叫做玻耳兹曼正则分布律．它表明，随着能量E_n的增高，粒子数N_n按指数律递减．

设E_1和E_2为任意两个能级($E_2 > E_1$)，按玻耳兹曼分布律，两能级上原子数之比为

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} < 1, \qquad (3.5)$$

这表明，在热平衡态中高能级上的原子数N_2总小于低能级上的

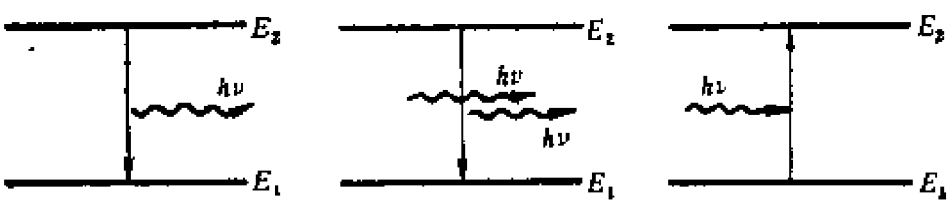
原子数N_1，两者之比由体系的温度决定。在给定温度下，E_2-E_1这一差值越大，N_2比N_1就相对地越小。例如氢原子的第一激发态$E_2=-3.40\text{eV}$，基态$E_1=-13.60\text{eV}$，$E_2-E_1=10.20\text{eV}$。在常温$T=300\text{K}$下（$kT\simeq0.026\text{ eV}$），$N_2/N_1=e^{-10.20/0.026}\simeq e^{-400}\simeq10^{-170}$。可见在常温的热平衡状态下，气体中几乎全部原子处在基态。

3.5 自发辐射、受激辐射和受激吸收

如前所述，从高能级E_2向低能级E_1跃迁相当于光的发射过程，相反的跃迁是光的吸收过程。两过程都满足同一频率条件

$$\nu=\frac{E_2-E_1}{h}.$$

进一步的深入研究发现，光的发射过程实际上有两种，一是在没有外来光子的情况下处在高能级的原子有一定的几率自发地向低能级跃迁，从而发出一个光子来，这种过程叫做自发辐射过程（图3-4(a)）。另一发射过程是在满足上述频率条件的外来光子的激励下高能级的原子向低能级跃迁，并发出另一个同频率的光子来，这种过程叫做受激辐射过程(图3-4(b))。自发辐射是个随机过程，处在高能级的原子什么时候自发地发射光子带有偶然性，所以气体中各原子在自发辐射过程中发出的光子(也可以说是光波)，其位相、偏振状态、传播方向都没有确定的联系。换句话说，



(a) 自发辐射　　(b) 受激辐射　　(c) 受激吸收

图 3-4　三种跃迁过程

自发辐射的光波是非相干的．然而受激辐射的光波，其频率、位相、偏振状态和传播方向都与外来的光波相同．

光的吸收过程(参见图3-4(c))与受激辐射过程一样，都是在满足上述频率条件的外来光子的激励下才发生的跃迁过程，所以吸收过程也叫受激吸收过程，或简称吸收过程．由于气体中原子在各能级上有一定的统计分布，所以在满足上述频率条件的外来光束照射下，两能级间受激吸收和受激辐射这两个相反的过程总是同时存在、相互竞争，其宏观效果是二者之差．当吸收过程比受激辐射过程强时，宏观看来光强逐渐减弱；反之，当受激辐射过程比吸收过程强时，宏观看来光强逐渐增强．具体地回答这个问题必须分析两种过程的几率，下面就来讨论这个问题．

仍考虑任意两个能级E_1，$E_2(E_2>E_1)$，设体系在某时刻t处于这两个能级的原子数分别是N_1和N_2，既然两个受激跃迁过程是由外来光子引起的，单位时间内每个原子的受激跃迁几率都与满足频率条件的外来光子数密度，或者说原子周围该频率的辐射能密度的谱密度$u(\nu)$成正比．而单位时间内发生的每种跃迁过程的原子数(dN/dt)还应正比于始态的原子数N．因此对于受激辐射过程$(E_2\to E_1)$

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{受激}=B_{21}\,u(\nu)\,N_2, \tag{3.6}$$

而对于受激吸收过程$(E_1\to E_2)$

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{吸收}=B_{12}\,u(\nu)\,N_1, \tag{3.7}$$

自发辐射过程$(E_2\to E_1)$的几率只与始态E_2上的粒子数N_2有关，与外来辐射能的密度无关，于是单位时间内发生自发辐射跃迁过程的原子数可写成

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{自发}=A_{21}N_2. \tag{3.8}$$

(3.6)，(3.7)，(3.8)三式中引入的系数B_{21}，B_{12}，A_{21}，称为

爱因斯坦系数，它们都是原子本身的属性，与体系中原子按能级的分布状况无关．正因如此，我们可以利用细致平衡条件，推导出三者之间的比例关系．所谓细致平衡，是指在每对能级之间粒子的交换都达到平衡．在热平衡态中，$u(\nu)$ 等于标准能谱 $u_T(\nu)$，单位时间内由能级 E_2 跃迁到能级 E_1 的原子数为

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{受激}+\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{自发}=B_{21}\,u_T(\nu)N_2+A_{21}N_2,$$

由能级 E_1 跃迁到能级 E_2 的原子数为

$$\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{吸收}=B_{12}\,u_T(\nu)N_1.$$

达到细致平衡时二者相等

$$\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{受激}+\left(\frac{dN_{21}}{dt}\right)_{自发}=\left(\frac{dN_{12}}{dt}\right)_{吸收},$$

或

$$B_{21}\,u_T(\nu)N_2+A_{21}N_2=B_{12}\,u_T(\nu)N_1,$$

由此解出 $u_T(\nu)$，得

$$u_T(\nu)=\frac{A_{21}N_2}{B_{12}N_1-B_{21}N_2}=\frac{A_{21}}{B_{12}\dfrac{N_1}{N_2}-B_{21}}.\qquad(3.9)$$

按正则分布律和玻尔条件

$$\frac{N_1}{N_2}=e^{\frac{E_2-E_1}{kT}}=e^{\frac{h\nu}{kT}},$$

另一方面，按普朗克公式

$$u_T(\nu)=\frac{4}{c}r_t(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

将所有这些代入式(3.9)，得

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}=\frac{A_{21}}{B_{12}e^{h\nu/kT}-B_{21}}.$$

要上式两端对任何 $h\nu/kT$ 之值均成立，必须系数分别相等，即

253380

$$\frac{A_{21}}{B_{12}}=\frac{A_{21}}{B_{21}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

或

$$\begin{cases}B_{12}=B_{21}, & (3.10)\\ A_{21}=\dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}=\dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{12}. & (3.11)\end{cases}$$

以上便是三个爱因斯坦系数之间的比例关系，它们表明，从下面越难激发上去的能级，从上面自发地跃迁下来的几率也越小．我们再次强调，虽然式(3.10),(3.11)是由细致平衡条件导出的，由于A_{21},B_{21},B_{12}与分布状况无关，这些关系式都是普遍成立的．

以上理论是爱因斯坦(A.Einstein)于1917年提出来的，它为后来激光(受激辐射的光放大)的发明奠定了理论基础．

3.6 粒子数反转与光放大

如前所述，自发辐射是不相干的，而受激辐射是相干的．要获得相干性很强的光，就得利用受激辐射产生光放大．下面我们来研究光放大的条件．

当一束光射入媒质时，受激吸收和受激发射两个过程同时发生，互相竞争．在光束经历一段过程后，若被吸收的光子数多于受激辐射的光子数，则宏观效果是光的吸收；反之，若受激辐射的光子数多于被吸收的光子数，则宏观效果是光的放大．

在时间 dt 内受激辐射的光子数为

$$dN_{21}=B_{21}\,u(\nu)N_2\,dt,$$

受激吸收的光子数为

$$dN_{12}=B_{12}\,u(\nu)N_1\,dt,$$

考虑到 $B_{12}=B_{21}$，两者之差为

$$dN_{21}-dN_{12}=B_{21}\,u(\nu)\,(N_2-N_1)\,dt\propto N_2-N_1.$$

由此可见，当高能级 E_2上的粒子数 N_2多于低能级 E_1上的粒子数N_1时，$dN_{21}-dN_{12}>0$，受激辐射占优势，表现出宏观上的

光放大。热平衡时，按照玻耳兹曼正则分布律，高能级E_2上的粒子数 N_2总是小于低能级 E_1上的粒子数N_1，$dN_{21}-dN_{12}<0$，此时，光在介质中的传播，总是受激吸收占优势，表现在宏观上总是光的吸收。N_2大于N_1的分布被称为反转分布，以区别于N_2小于 N_1 的正则分布。能造成粒子数反转分布的介质称为激活介质（也就是激光器的工作物质），以区别于粒子数呈正则分布的通常介质。

总之，造成粒子数反转分布是产生激光首先必须具备的条件。如何实现这一条件，将在§4中介绍。

3.7 能级的寿命

能级寿命的概念对激光的研究也是十分重要的，我们先在这里介绍一下。

设能级 E_2 上的粒子数为N_2，由于自发辐射N_2将随时间减少。设时间 dt 内的 N_2 的改变量为 dN_2，则

$$dN_2 = -dN_{21} = -A_{21}N_2\,dt,$$

或

$$\frac{dN_2}{N_2} = -A_{21}dt,$$

积分后得

$$N_2 = N_{20}\exp(-A_{21}t), \tag{3.12}$$

式中 N_{20} 是 $t=0$ 时的N_2值．上式表明，N_2减少的快慢与几率系数 A_{21} 的大小有关，A_{21} 越大，则 N_2 减少得越快．不难看出，A_{21}具有时间倒数的量纲，它的倒数为

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}。 \quad ① \tag{3.13}$$

① 这公式只适用于能级E_2下面只有一个能级 E_1 的情况，如果它下面有许多能级E_1，E'_1，E''_1，…，令A_{21}，A'_{21}，A''_{21}，…分别代表从 E_2 自发跃迁到这些能级的几率系数，则能级E_2的寿命为

$$\tau = \frac{1}{A_{21}+A'_{21}+A''_{21}+\cdots}。$$

式(3.12)可改写为

$$N_2 = N_{20}\, e^{-t/\tau}, \tag{3.14}$$

τ 反映了粒子平均说来在能级 E_2 上停留时间的长短，它叫做粒子在该能级上的平均寿命，或简称寿命(平常更简单些，就说该能级的平均寿命或寿命)。按照式(3.12)，寿命 τ 也可理解为在能级 E_2 上的粒子数减少到初始时的 $1/e$ (约36%) 所经历的时间。

各种原子的各个能级的寿命 τ 与原子的结构有关，一般激发态能级的寿命数量级为 10^{-8} s。也有一些激发态的能级寿命特别长，可达10^{-3} s甚至 1 s，这种寿命特别长的激发态叫亚稳态。在下节里将看到，亚稳态在激光的产生过程中起着特殊的重要作用。

以上讲的只是与自发跃迁过程对应的寿命，更确切地应叫它为能级的自然寿命。实际上由于原子间的碰撞或其它外界干扰，都会使原子的跃迁几率大大增加，从而能级的实际寿命一般比自然寿命(10^{-8} s)小几个数量级。在第二章§3中讲过，原子每次发射光波持续的时间远小于10^{-8} s，这里所说的"持续时间"，就是相应能级的实际寿命。

习　题

1. (1) 不考虑电磁辐射，试证明氢原子中电子以半径 r 绕核作圆周运动时，经典理论给出原子的能量(动能+静电位能)为(用MKSA单位制表示)：

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

式中ε^0为真空介电常数，e为基本电荷。

(2) 验证一下，普朗克常数 h 具有角动量的量纲。

(3) 设(1)中电子绕核的角动量为 p_φ，玻尔的"量子化条件"是 p_φ 取如下分立值：

$$p_\varphi = nh/2\pi \quad (n = 1,2,\cdots)\ . \tag{3.15}$$

证明此时电子轨道的半径亦取分立值：

$$r = n^2 a, \tag{3.16}$$

式中 $a=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$（$m$为电子质量，$a$ 称为玻尔半径）.

(4) 证明氢原子能级 E_n 和里德伯常数 R_H 的表达式分别为

$$E_n=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}, \tag{3.16}$$

$$R_H=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}. \tag{3.17}$$

(5) 计算玻尔半径 a 和里德伯常数 R_H的具体数值.

(6) 量子数 $n\to\infty$ 意味着什么?

2、设一个两能级系统能级差 $E_2-E_1=0.01\ \mathrm{eV}$,

(1) 分别求 $T=10^2\mathrm{K},10^3\mathrm{K},10^5\mathrm{K},10^8\mathrm{K}$ 时粒子数 N_2与 N_1之比.

(2) $N_2=N_1$的状态相当于多高的温度?

(3) 粒子数发生反转的状态相当于怎样的温度?

(4) 我们姑且引入"负温度"的概念来描述粒子数反转的状态，你觉得 $T=-10^8\mathrm{K}$ 和 $T=+10^8\mathrm{K}$ 两个温度中哪一个更高? $T=-10^4\mathrm{K}$ 和 $T=-10^8\mathrm{K}$ 两个温度中哪一个更高?

§4 激光的产生

4.1 激光概述

激光是六十年代初出现的一种新型光源.

我们常见的普通光源有照明用的，如蜡烛、白炽灯、日光灯、炭弧、高压水银灯、高压氙灯、太阳等等；有光谱实验和计量等技术上用的，如钠灯、水银灯、镉灯、氪灯等等. 与普通光源比较，激光具有一系列独特的优点. 激光作为一种方向性好和单色性好的强光光束，它一出现，就引起了人们普遍的重视，并很快在生产和科学技术中得到广泛的应用. 自从1960年在实验室中制成第一台激光器(红宝石激光器)以来的二十多年里，各种激光器的研制和各种激光技术的应用突飞猛进地发展，其形势可以同五十年代中半导体技术的发展相媲美.至今，作为激光器的工作

物质已经相当广泛，有固体、气体、液体、半导体、染料等，种类繁多.各种激光器发射的谱线分布在一个很宽的波长范围内，短至0.24μm以下的紫外，长至774μm的远红外，中间包括可见光、近红外、红外各个波段；输出功率低的到几微瓦(10^{-6}W)，高的达几兆兆瓦(10^{12}W).如高功率的激光器中有CO_2激光器，其连续输出功率可达10^4W；钕玻璃激光器的脉冲输出功率可达10^{13}W，钇铝石榴石(YAG)激光器，连续输出功率达10^3W，脉冲输出功率达10^6W；在计量技术和实验室中经常使用的氦氖(He-Ne)激光器，发射波长为6328Å，1.15μm和3.39μm，连续输出功率1—100mW.

为了使读者在讨论激光的产生和特性之前对激光器有一个大概的了解，下面我们先介绍一台红宝石激光器的一些具体知识，其基本结构如图 4-1 所示. 工作元件是一根淡红色的红宝石棒

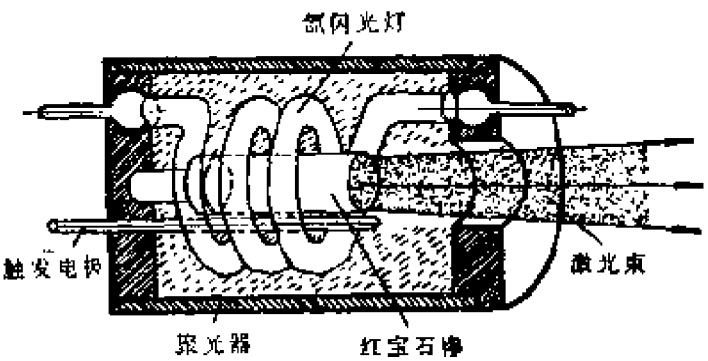


图 4-1 红宝石激光器

(Al_2O_3晶体)，其中掺 0.05%的铬离子(Cr^{3+}).这些铬离子作为激活离子均匀地分布在基质(即Al_2O_3晶体)中，浓度大约为 $1.62\times10^{19}cm^{-3}$，它们替代了晶格中一部分铝离子(Al^{3+})的位置，红宝石激光器有关的能级和光谱性质都来源于Cr^{3+}.红宝石棒长10cm，直径1cm. 两个端面精磨抛光，平行度在1′(弧分)以内，其中一个端面镀银，成为全反射面，另一个端面半镀银，成为透射率 10%的部分反射面.激励能源是光源——螺旋形脉冲氙灯(现经常采用直管氙灯)，灯内氙的气压为125Torr (1Torr即 0℃ 时 1 mmHg).

氙灯在绿色和蓝色的光谱段有较强的光输出，这正好同红宝石的吸收光谱对应起来.由氙闪光灯发出的光照射到红宝石的侧面，外有聚光器加强照射效果。闪光灯通常一次工作几毫秒，输入能量1000—2000J，这相当于容量为100μF、电压为几千伏的高压脉冲电容器所储存的能量。闪光灯的大部分输入能量耗散为热，只有一部分变成光能为红宝石所吸收，并转移到其中Cr^{3+}的相应能级上。当由氙灯输入的能量超过激光器的阈值时，则每激励一次，就有一束相干光从红宝石的半镀银面射出，其波长为6943Å（红光），谱线宽度小于0.1Å。

这样一台激光器的基本结构包括三个组成部分：(1)工作物质(红宝石)；(2)光学谐振腔(两个高度平行的镀银面之间形成的空间)；(3)激励能源(脉冲氙灯)。任何其它激光器，其结构也都是由这样三个基本部分组成(图4-2)。

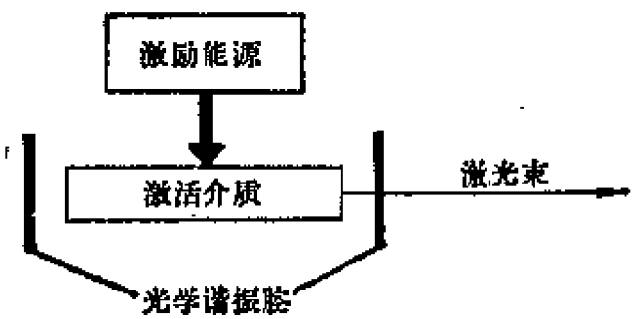


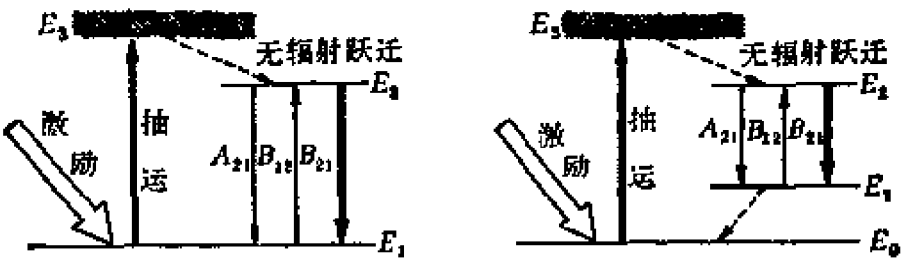
图 4-2　激光器的基本组成部分

下面分别介绍各部分(主要是前两部分)的作用。

4.2　激活介质中反转分布的实现

对于不同种类的激光器，实现反转分布的具体方式是不同的，但都可以用图4-3所概括的基本过程来说明.在图4-3(a)中，E_1为基态，E_3和E_2为激发态，其中E_2为亚稳态，粒子在E_2上的寿命比粒子在E_3上的寿命要长得多。一般激发态的寿命在10^{-11}—10^{-8}s，而亚稳态的寿命长达10^{-3}s，甚至1s。

在外界能源(电源或光源)的激励下，基态E_1上的粒子被抽运到激发态E_3上，因而E_1上的粒子数N_1减少。由于E_3态的寿命很短，粒子将通过碰撞很快地以无辐射跃迁的方式转移到亚稳态E_2上。由于E_2态寿命长，其上就累积了大量粒子，即N_2不断增加。一方面是N_1减少，另一方面是N_2增加，以致N_2大于N_1，于是实现了亚稳态E_2与基态E_1间的反转分布。利用处在这种状态下的激活介质，就可以制成一台激光放大器，当有外来光讯号输入时，其中频率为$\nu=(E_2-E_1)/h$的成分就被放大①。



(a) 三能级图　　(b) 四能级图

图 4-3　激活介质的工作模式图

红宝石激光器发射的6943Å谱线，就是红宝石晶体中铬离子(Cr^{3+})的亚稳态与基态之间的反转分布所造成的受激发射。显然，要直接造成亚稳态与基态之间的反转分布是比较困难的，这是因为热平衡时基态几乎集中了全部粒子，只有当激励能源很强，进行快速抽运，才可能实现反转分布。是否可以使反转分布的下能级E_1不在基态，而在激发态呢？这个设想现在已经实现，很多激光器，例如He-Ne，CO_2等激光器，它们当中出现反转分布的两个特定能级如图4-3(b)所示，其中下能级E_1不是基态，而是激发态，其上的粒子占有数本来就很少，只要亚稳态E_2上稍有粒子积累，就较容易地实现反转分布。当E_3上的粒子向E_2转移得越

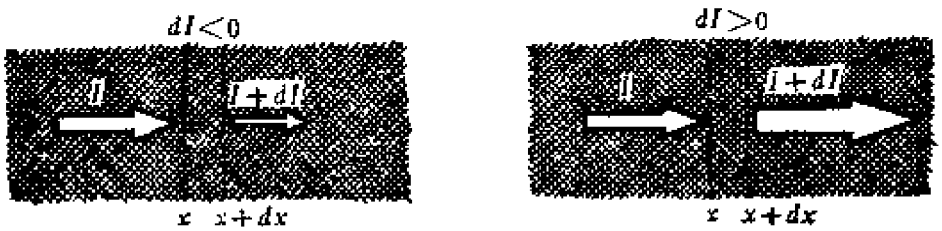
① 在没有外来光源照射的条件下，激活介质内部本来就存在E_1与E_2之间自发辐射(A_{21})所产生的光子，它们也可以作为"外来光子"而激励粒子，造成E_2与E_1之间的受激辐射压倒受激吸收。不过，由于没有谐振腔的选择作用，这种条件下的光放大，在宏观上仍是随机的。

快，以及当 E_1 上的粒子向 E_0 过渡得越快，则工作效率就越高。

不论三能级图或四能级图，共同说明一个问题：要出现反转分布，必须内有亚稳态，外有激励能源(也称泵浦)，粒子的整个输运过程必定是一个循环往复的非平衡过程。激活介质的作用就是提供亚稳态。所谓三能级图或四能级图，并不是激活介质的实际能级图，它们只是对造成反转分布的整个物理过程所作的抽象概括。实际能级图要比它们复杂，而且一种激活介质内部，可能同时存在几对特定能级间的反转分布，相应地发射几种波长的激光，例如 He-Ne激光器就可以发射 6328 Å，1.15μm，3.39μm等多种波长的激光。又例如氩离子 (Ar^+) 激光器，能输出很多种波长，其中最强的是4800 Å(蓝光)和 5145 Å(绿光)，这两个波长目前在激光彩色电视中选为基色。

4.3 增益系数

正象介质对光的吸收能力用吸收系数a来描述一样(见第八章§1)，介质对光的放大能力用增益系数(简称增益)G 来描写。如图4-4所示，当一束光射入介质后，设它在 x 处的光强为 I，经历



(a) 光的吸收　　(b) 光的放大

图 4-4　吸收与增益

一段距离到达 $x+dx$ 的地方后，光强变为 $I+dI$。在吸收的情况下，$dI<0$，我们写成

$$dI = -aIdx,$$

在放大的情况下，我们写成

$$dI = GIdx, \tag{4.1}$$

增益系数G的意义可理解为光在单位距离内光强增加的百分比.

光在激活介质中传播一段距离(从0到x)后，出射光强$I(x)$与入射光强I_0的关系可由式(4.1)经积分得到:

$$\int_{I_0}^{I(x)} \frac{dI}{I} = \ln \frac{I(x)}{I_0} = \int_0^x G dx.$$

假如这段距离内增益G的变化可忽略，则

$$\int_0^x G dx = Gx,$$

上式可写成

$$I = I_0 e^{Gx}. \tag{4.2}$$

即$I(x)$随x按指数增长. 这公式我们将在下面用到.

增益G的大小与频率ν和光强I都有关系. 典型增益曲线的大致轮廓如图4-5，它随光强增加而下降. 这一点可解释如下：增益G随粒子数反转程度(N_2-N_1)的增加而上升，在同样的抽运条件下，光强I越强，意味着单位时间内从亚稳态上向下跃迁的粒子数就越多，从而导致反转程度减弱，因此增益也随之下降.

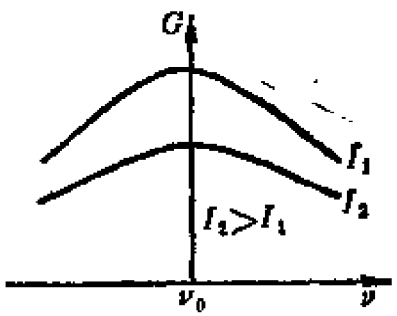


图4-5 增益曲线

4.4 谐振腔的作用

实现了反转分布的激活介质，可以做成光放大器，但只有激活介质，本身还不成为一台激光器，这是因为在激活介质内部来源于自发辐射的初始光信号是杂乱无章的，宏观看来传播方向是各向同性的，在这些光信号的激励下得到放大的受激辐射，这一过程总体上看仍是随机的(图4-6). 怎样在其中选取有一定传播

方向和一定频率的光信号，使它享有最优越的条件进行放大，而将其它方向和频率的光信号抑止住，最后获得方向性和单色性很好的强光——激光呢？为了达到这个目的，必须在激活介质的两端安置相互平行的反射面(图4-7)。这对反射面构成了光学谐振腔，它对激光的形成和光束的特性有着多方面的影响，是激光器中一个十分重要的组成部分。

在理想的情况下，谐振腔的两个反射面之一的反射率应是100%，而为了让激光输出，另一个是部分反射的，但反射率也要相当高。一般地说，两反射面既可以是平面，也可以是凹球面，或一平一凹。为了简单起见，在这里我们只讨论平面谐振腔的情况。下面先介绍光学谐振腔对光束方向的作用。

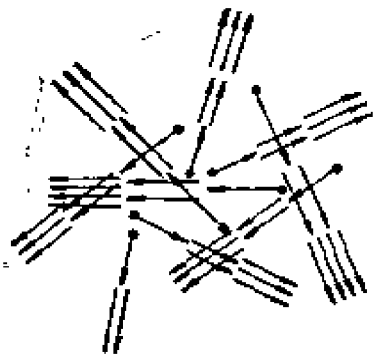


图 4-6　无谐振腔时受激辐射的方向是随机的

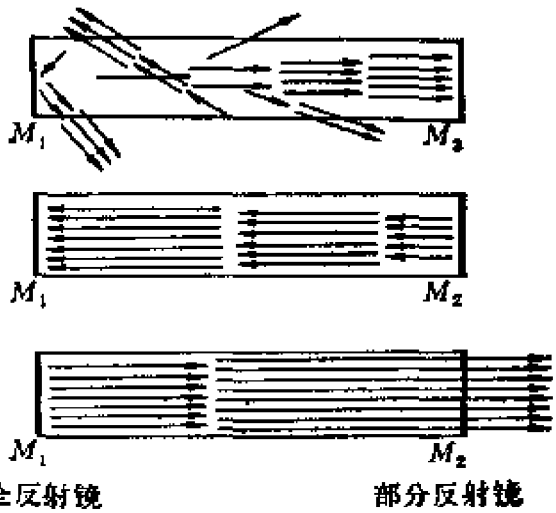


图 4-7　谐振腔对光束方向的选择性

如图 4-7，一对互相平行的反射镜 M_1 和 M_2 组成平面谐振腔。显然，只有与反射镜轴向平行的光束能在激活介质内来回反射，连锁式地放大，最后形成稳定的强光光束，从部分反射镜 M_2面输出。凡偏离轴向的那些光线，则或者直接逸出腔外，或者经几次来回，最终地要跑出去，它们不可能成为稳定的光束保持下来。总之，谐振腔对光束方向具有选择性，使受激辐射集中于特定的方向，激光光束很高的方向性就来源于此。

当然，即使对于平面谐振腔，其输出的光束也不是绝对的平行光束，它总有一定的发散角，这主要是由端面的衍射而引起的．例如，He-Ne 激光管的发散角只有几分，对于砷化镓(GaAs)激光管，由于受激辐射被局限于只有几微米的 pn 结深范围内，所以其输出光束在相应方向上的发散角达10°左右．

现在进一步要问：是不是只要有一块激活介质，两端再装上反射镜，就一定能出激光呢？不一定．这是因为光在谐振腔内来回反射的过程中，对光强变化的影响存在着两个对立的因素：一个是激活介质中光的增益，它使光强变大；另一个是端面上光的损耗，包括光在端面上的衍射、吸收、以及透射，它使光强变小．由于光的损耗，镜面 M_1 的反射率 R_1 总不可能是100%，而对于输出端 M_2 来说，还有意制成部分透射的，反射率 R_2 有时甚至选为70—80%．所以，要使光强在谐振腔内来回反射的过程中不断地得到加强，必须使增益大于损耗．下面定量地细说一下这个问题．

如图4-8，考虑一束光在谐振腔内沿轴向往返传播时强度变化的情况(为了便于说明，该图中的光束只好拉开，实际上光束总是在镜面的轴向来回传播，在 M_1，M_2 的同一点反射或透射)．

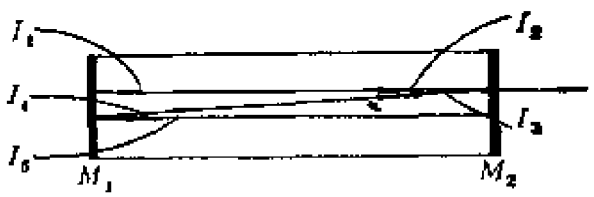


图 4-8　谐振腔内光的损耗与阈值增益

设从镜面 M_1 出发的光强为 I_1．经过腔长为 L 的激活介质的放大，按照式 (4.2)，到达镜面 M_2 时的光强变为

$$I_2 = I_1 e^{GL}.$$

经 M_2 反射以后，光强降为

$$I_3 = R_2 I_2 = R_2 I_1 e^{GL}.$$

在回来的路上又经过激活介质的放大，光强增加为

$$I_4 = I_3 e^{GL} = R_2 I_1 e^{2GL}.$$

再经 M_1 反射，光强降为

$$I_5 = R_1 I_4 = R_1 R_2 I_1 e^{2GL}.$$

至此光束往返一周，完成一个循环。究竟光强 I_5 与 I_1 相比是变大了，还是变小了？这要看比值

$$\frac{I_5}{I_1} = R_1 R_2 e^{2GL}$$

大于1还是小于1．若 $R_1 R_2 e^{2GL} > 1$，则 $I_5 > I_1$，即光在谐振腔内来回传播的过程中不断增强；若 $R_1 R_2 e^{2GL} < 1$，则 $I_5 < I_1$，即光在谐振腔内来回传播的过程中不断减弱；若

$$R_1 R_2 e^{2GL} = 1, \tag{4.3}$$

则 $I_5 = I_1$，即光在谐振腔内来回传播的过程中强度维持稳定．

对于给定的谐振腔，R_1，R_2和 L 固定，上述决定光强增减的 $R_1 R_2 e^{2GL}$这个量的大小随增益 G 的增加而增加．这就是说，只有当增益 G 大过一定的最低数值 G_m时，才可能使 $R_1 R_2 e^{2GL}$大于1．增益 G 必须大过的这个最低数值 G_m，叫做谐振腔的阈值增益．显然阈值增益 G_m就是满足式(4.3)的 G 值，所以式(4.3)叫做谐振腔的阈值条件，而根据它，阈值增益应为

$$G_m = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2L} \ln (R_1 R_2). \tag{4.4}$$

只有使激活介质的实际增益 G 大于式(4.4)所给出的谐振腔的阈值增益 G_m，光在谐振腔内来回传播的过程中才能不断增强．而一台激光器的实际增益 G 取决于激励能源的强弱和激活介质的状态，所以上述阈值条件就给激励能源和激活介质提出了相应的要求．当然在 $G > G_m$ 时光强也不会无限制地增长下去．因为随着光强的增大，激活介质的实际增益 G 将下降，当 G 下降到等于 G_m值时，光强就维持稳定了．

总之，考虑到激光器中光能的损耗，对激活介质的增益有一个起码的要求．阈值条件是继反转分布条件之后的又一个产生激光的必要条件．尽量减少不必要的损耗，就可以降低阈值，这在实际激光器的设计和生产中是必须考虑的．

上面所谓"光能的损耗"，其中包括了一部分从 M_2 透射出去的光能输出，这是必要的，因为这正是我们需要的激光能量．应当尽量减少的是其余一些不必要的损耗．在上面的讨论中我们并未把全部损耗考虑进去，在实际的激光器中还有一些其它损耗，如光在激活介质中的散射损耗等．此外，在外腔式激光器中还多了一重激光管封口的反射损耗．减少这些损耗，是降低激光器的阈值、提高它的发光效率的关键．外腔式激光器的布儒斯特窗就是为此而设计的一个典型例子，下面我们专门来谈谈它．

如图4-9，在外腔式激光器中，作为谐振腔的两个反射镜M_1和M_2有意识地安置在 He-Ne 激光管的外部，好处是便于调节和进行科学实验．但是这种装置就多了激光管本身的两个封口 b_1和 b_2，因而它比内腔式激光器多了一重反射损耗．如不采取措施，这种损耗是不小的，光束每次经过一片玻璃封口，先后遭遇两次反射，光能损耗至少在 8 %以上．不过我们知道，光在介质表面反射时，存在一个全偏振角(布儒斯特角)

$$i_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}, \tag{4.5}$$

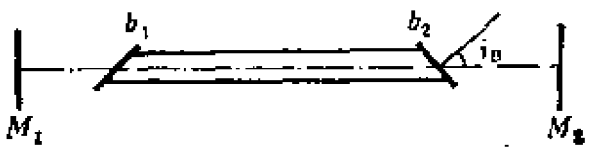


图 4-9　布儒斯特窗

当光线以 i_B 角入射时，反射光中的 p 振动分量为0，这就是说，对于 p 光反射损耗完全被消除了，它可全部透射过去，对于 s 光，它

仍然有较高的反射率，反射损耗可达14%左右．所以，当封口 b_1，b_2 按布儒斯特角 i_B 倾斜时（这叫布儒斯特窗），对于 s 光，由于损耗过大，压倒了增益，从而被抑制，不能成长为激光．对于 p 光，布儒斯特窗是完全透明的窗口，没有带来新的损耗，其增益容易满足阈值条件．可见，安置布儒斯特窗的外腔式激光器对光的偏振状态还具有选择性，它所产生的激光是线偏振的，其振动面是窗口法线与管轴所组成的平面．

当然，引进两个窗口，由于角度误差以及表面光洁度和清洁度的影响，总不可能使 p 光的反射率绝对为 0，多少还有些光能损失，从而降低了激光器的输出功率．

总之，产生激光的机理有两方面的问题：光在激活介质内的传播和光学谐振腔的作用，前者产生光的放大，后者维持光的振荡．“激光”一词英文为“Laser”（莱塞），是 “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation” 词组中各词第一字母的缩写，直译应为 “辐射的受激发射的光放大”．其实，作为激光器，其中必有谐振腔，所以实际上是一个“受激辐射光振荡器”．放大和振荡两方面合起来，激光器就成为一个光的讯号源，向外输出光束．

§5 激光器对频率的选择

激活介质和谐振腔结合在一起，在满足阈值条件下就成为一台激光器，在外界能源的激励下，可以发出激光．激光有很好的方向性这一特点来源于谐振腔的作用．那么，激光有很好的单色性这一特点是怎样形成的呢？有人说，这是由于激活介质内亚稳态的寿命长．有人说，这是由于谐振腔对振荡频率具有选择性．其实这两种看法都有一定的道理，但都不全面，激活介质和谐振腔两者，各自从不同方面影响着激光的谱线宽度．

第三章 §5中讨论过谐振腔的选频作用．概括地说，谐振腔的

作用使得激光器内可能出现的振荡频率不是任意的，而是有一定间隔$\Delta\nu_m$的准分立谱$\nu_1,\nu_2,\nu_3,\cdots$(图5-1(a))，频谱中每条谱线的宽度$\Delta\nu_c$也是由于谐振腔的作用而变得很窄．频谱中每个谐振频率称为一个振荡纵模①，$\Delta\nu_m$称为纵模间隔，$\Delta\nu_c$称为谐振腔作用下的单模线宽．不过，频谱不可能是无限延伸的，因为激活介质本身的谱线有一定的半值宽度$\Delta\nu$(图5-1(b))，输出激光的频谱为激活介质的线宽$\Delta\nu$所限制．一般$\Delta\nu$比$\Delta\nu_m$大得多，因此比值$N=\Delta\nu/\Delta\nu_m$就是输出激光的频谱中包含的纵模个数(图5-1(c))．

下面我们依次具体地说明由谐振腔决定的纵模间隔$\Delta\nu_m$和单模线宽$\Delta\nu_c$，以及激活介质本身的谱线宽度$\Delta\nu$．

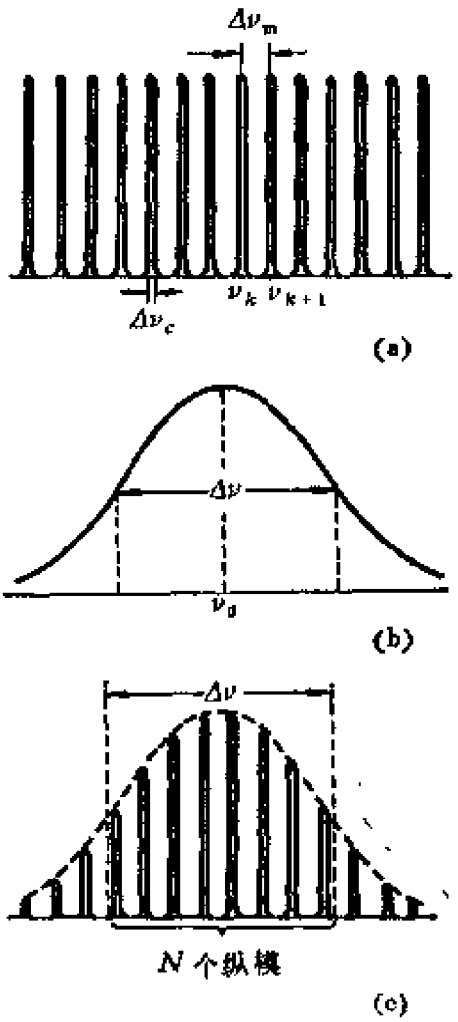


图 5-1 谐振腔的纵模

5.1 由谐振腔决定的纵模间隔和单模线宽

纵模间隔和单模线宽的公式分别由第三章§5中的式(5.13)和(5.15)给出，

$$\Delta\nu_m=\frac{c}{2nL},\tag{5.1}$$

$$\Delta\nu_c=-\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda_c=\frac{c(1-R)}{2\pi nL\sqrt{R}},\tag{5.2}$$

① 沿轴向(即纵向)传播的振动模式叫做"纵模"．这里我们只讨论纵模．

免得与普朗克常数混淆，这里我们把腔长 h 改用 L 代表，并取 $\theta = 0$.

式(5.1)给出了腔长 L 对纵模间隔 $\Delta\nu_m$ 的影响. 缩短腔长，将拉开纵模间隔；腔长不稳定，就会引起激光的频率漂移. 在激光测长中对激光的单色性要求很高，所以采用较短的 He-Ne 激光管 ($L = 10$—20 cm)，而且还需用某些措施来稳定腔长，并进一步选择单模，以便于单模稳频输出.

表Ⅸ-5中给出 He-Ne 激光器腔长与纵模间隔的某些数据.

表Ⅸ-5 He-Ne激光器的腔长与纵模间隔

纵模间隔 / 腔长 L(cm)	$\Delta\nu_m = \frac{c}{2nL}$ (Mc) ($n = 1.0$)	$\Delta\lambda_m = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu_m$ (Å) ($\lambda = 6328$Å)
100	150	2×10^{-3}
50	300	4×10^{-3}
10	1500	2×10^{-2}

式(5.2)表明，腔长 L 越大，以及反射率 R 越高，单模线宽 $\Delta\nu_c$ 就越窄. 举个数字例子，当 $L = 20$cm，$R = 98\%$，$n = 1.0$时，

$$\Delta\nu_c = \frac{3\times10^{10}\times0.02}{2\pi\times1.0\times20\times\sqrt{0.98}} = 4.8\ \text{Mc}.$$

对于 He-Ne 激光 $\lambda = 6328$ Å，$\Delta\nu_c = 4.8$ Mc，这相当于

$$\Delta\lambda_c = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu_c = \frac{(6.328\times10^{-5})^2}{3\times10^{10}}\times4.8\times10^6 = 6.4\times10^{-5}\ \text{Å}.$$

最后应当指出，考虑到激光器是一个振荡源，而不是一个无源的法-珀腔，其单模线宽远比仅由法-珀腔决定的单模线宽公式(5.2)所给出的数值小. 例如对于功率大约为 1 mW，腔长 $L = 100$ cm，反射率 $R = 98\%$，反转程度 $N_2/(N_2 - N_1) = 100$ 的

He-Ne激光器，其单模线宽理论上可达 $\Delta\lambda_c = 10^{-12}$ Å，目前的技术水平已达到10^{-8} Å.

5.2 由激活介质辐射决定的线宽

来自激活介质一对能级 E_2 与 E_1 之间的辐射本身就有一定的线宽，谱线中心频率为 $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$，整个谱线强度曲线轮廓如图5-1(b)所示，呈覆钟形.

有几个因素影响着物质辐射的线宽 $\Delta\nu$:

（1）自然线宽　粒子在激发态 E_2 上停留的时间总是有限的，其平均寿命 τ 是自发跃迁几率A_{21}的倒数. 能级寿命 τ 实际上就是持续发射波列的时间，即相干时间(参见第三章4.6节):

$$\tau = \frac{L_0}{c} = \frac{\Delta L_M}{c} = \frac{1}{c}\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

而 $\Delta\nu$ 与 $\Delta\lambda$ 的关系是

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

(因为这里只着重数量级的分析，式中的负号可以不管它)，故

$$\tau\Delta\nu = 1. \qquad (5.3)$$

利用上式我们可以来估算由于能级寿命 τ 引起的谱线宽度 $\Delta\nu$，这线宽叫做自然线宽. 上式表明，τ 越长，$\Delta\nu$ 越窄. 由于激光是来自亚稳态上的受激辐射，所以其自然线宽较窄. 亚稳态的寿命大于10^{-3} s，故 $\Delta\nu$ 在千周的量级，甚至更小.

（2）碰撞展宽　大量粒子之间的相互碰撞，加速了激发态上的粒子向低能级跃迁，这相当于缩短了能级的寿命，导致谱线展宽，即所谓碰撞展宽. 对于气体介质，碰撞的频率取决于压强，所以谱线的碰撞展宽也叫做压力展宽. 在He-Ne混合气体中，在 1 — 2 mmHg 的压强下，Ne 原子的 6328Å 谱线的碰撞展宽为 100—200 Mc，这远远大于其自然线宽.

（3）多普勒展宽　由于热运动，大量粒子的速度具有一定的统计分布，这带来了辐射的多普勒频移效应．也就是说，处于高能级上的粒子，一方面在不停地热运动，一方面又向低能级跃迁而发射光波．所以对接收器，例如光谱仪来说，这些粒子是运动的光源．即使它们发射单一频率 ν_0 的光波，由于多普勒效应，向着接收器方面运动的粒子的辐射，接收到的频率 ν 高于 ν_0，离开接收器方向运动的粒子的辐射，接收到的频率 ν 低于 ν_0，从而接收的频谱展宽了．这就是所谓多普勒展宽．由于气体粒子的热运动服从麦克斯韦速率分布，所以谱线的多普勒展宽的轮廓与麦克斯韦分布函数曲线很相似，是高斯型的．粒子的热运动速率分布取决于温度，在室温下 He-Ne 激光器的 6328Å 谱线的多普勒展宽约为 1300 Mc，它比碰撞展宽还大一个数量级．

综上所述，物质的大量粒子在两个特定能级间的跃迁引起的辐射总有一定的线宽，它由自然线宽、碰撞展宽、多普勒展宽几种成分构成．对于不同的光源，其线宽的主要来源可能不同．对于 He-Ne 激光器的 6328Å 线，在室温和 1 — 2 mmHg 的压强下，多普勒展宽是它的线宽 $\Delta\nu$ 的主要来源．这时 $\Delta\nu = 1300$ Mc，这相当于 $\Delta\lambda \simeq 1.8 \times 10^{-2}$ Å．

5.3　小结

最后，我们以 He-Ne 激光器的 6328Å 谱线为例，将其辐射线宽 $\Delta\nu$ 与由谐振腔决定的纵模间隔 $\Delta\nu_m$ 和单模线宽 $\Delta\nu_s$ 作一比较，就可以清楚地看出激活介质和谐振腔各自是怎样影响激光的单色性的．

由此可见，$\Delta\nu_m/\Delta\nu \simeq 10$，即在辐射线宽 $\Delta\nu$ 中包含近 10个纵模，当然，考虑到阈值条件的限制，实际中可能出现的纵模个数会比这要少些，包在这些纵模外部的轮廓线是多普勒展宽的高斯线型（参见图5-1(c)）．尽管每个单模的线宽 $\Delta\nu_s$ 很窄，但如果不采取特别措施，象在一般实验室中那样拿来激光器就用，则输出光束

表IX-6 He-Ne 激光器的各种参数

条　　件	频　　率	波　　长
$T=300\mathrm{K}, P=1\text{—}2\ \mathrm{mm\ Hg}$	辐射线宽 $\Delta\nu=1300\ \mathrm{Mc}$	$\Delta\lambda\simeq 1.8\times10^{-3}$Å
$L=100\ \mathrm{cm}$	纵模间隔 $\Delta\nu_m=150\ \mathrm{Mc}$	$\Delta\lambda_m\simeq 2\times10^{-4}$Å
$L=100\ \mathrm{cm}, R=98\%$	单模线宽 $\Delta\nu_c=1\ \mathrm{Mc}$*	$\Delta\lambda_c\simeq 1.3\times10^{-4}$Å

* 如前所述，这里尚未计及有源谐振腔的影响，这因素还要使 $\Delta\nu_c$ 进一步缩小好几个数量级.

是多模的，其单色性由激活介质的辐射线宽 $\Delta\nu$ 所决定，这并不比普通在同样能级间跃迁的光源的单色性好得太多。须知激光的单色性好表现在其单模上，因此要使激光真正表现出很高的单色性来，在技术上还需解决两个问题，一是从多模中提取单模，二是稳定住单模的频率，这就是所谓单模稳频技术。在某些方面的应用中(特别是激光测长仪中)对单色性要求很高，就必须采取这些措施。单模稳频这类技术比较专门，这里就不讲了。

§6 激光的特性及应用

6.1 激光光束的特性

从前面两节的介绍里，我们已经看到，由于激光产生的机理与普通光源很不相同，使得它具有一系列普通光源所没有的优异特性。激光的特性归纳起来有：

（1）能量在空间高度集中

由于谐振腔对光束方向的选择作用，使激光器输出的光束发散角很小，即光束的方向性很强．激光的这一特性又带来两个后果，一是光源表面的亮度很高，二是被照射的地方光的照度很大．在这方面我们曾在第一章11.3节中给过一个He-Ne激光器的例子，它以10mW的功率产生了比太阳大几千倍的亮度．这样亮的光源在屏幕上形成很小的光斑，可以在幕上得到极大的照度．所以方向性好、亮度高、照度大三者是同一性质的三种表现，它们可归纳为一点，即激光光束的能量在空间高度集中．如果再用调制技术使其能量在时间上也高度集中起来，我们就可获得极高的脉冲功率密度．这将如虎添翼，威力很大．

（2）时间相干性高

如§5所述，激光能量在频谱上也是高度集中的，也就是说，它的谱线宽度很窄，单色性很好，或者说，它的时间相干性很高．

在普通光源中，单色性最好的是作为长度基准器的氪灯(Kr^{86})，它的谱线宽度为4.7×10^{-2}Å．激光中单色性最好的是气体一类的激光器产生的激光．如He-Ne激光器发射的6328Å谱线，线宽只有10^{-8}Å，甚至更小．

（3）光束具有空间相干性

从激光器端面输出的光束是相干光束，在其传播的波场空间中，波前上的各点是相干的，也就是说，激光光束与普通光源（它们总是面光源）发出的光束相比，其空间相干性很高．激光的这一特点可通过图6-1所示的双缝干涉实验清楚地显示出来．用普通光源（如钠灯、水银灯）作双缝干涉实验时，必须在实际光源与双缝之间加单缝S来限制光源的宽度（图(a)）．如取走单缝S，用普通的光源直接照射双缝，则干涉条纹立即消失（图(b)）；用激光光源（如He-Ne激光器）来作双缝干涉实验时，则情况大不相同，可以在没有单缝S的条件下让激光直接照射双缝，同样能够出现干涉条纹，而且比普通光源形成的干涉条纹更明亮清晰（图(c)）．

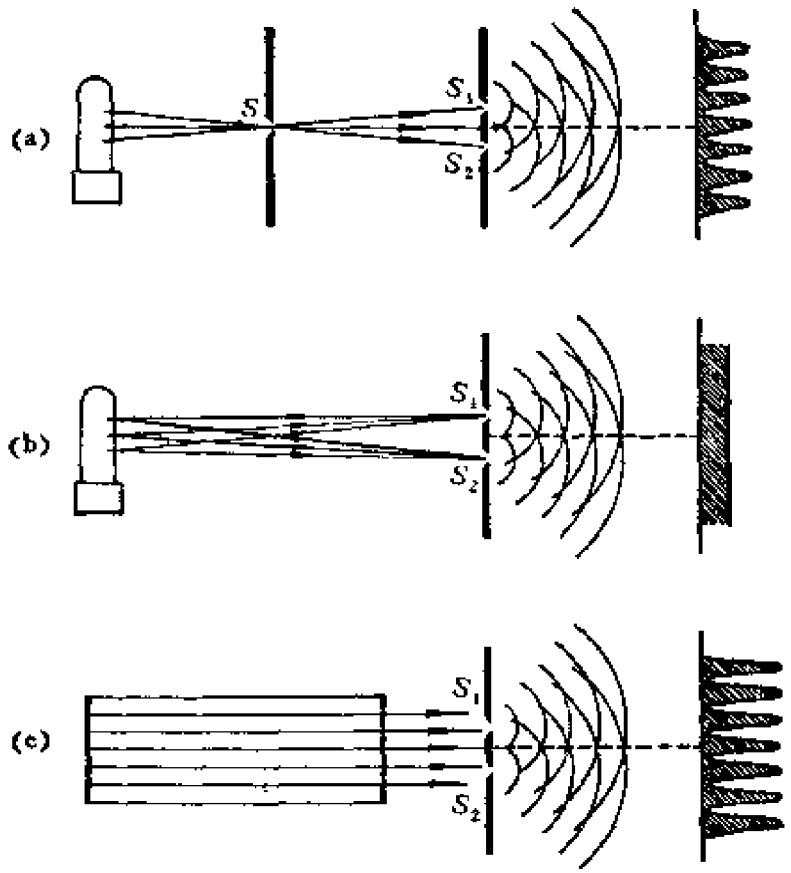


图 6-1　普通光源和激光器空间相干性的比较

激光是相干光束这一特点，是由于产生激光的内部机理所决定的．在激光器内有一个统一的光讯号在激活介质中一边传播一边放大，又经过两个高反射率的端面反射而形成稳定的光振荡，因此在激光器内部各发光中心的自发性和独立性被大大抑制，而相互激励相互强化成为主导方面．这样，从激光器端面输出的就是一束步调一致的光束，在其波场空间中每一点有确定的传播方向，在其波前上各点之间有固定的位相关系．因此，激光光束截面上各部分作为次波源是符合相干条件的．

上述激光光束的三条基本特性，从应用的角度还可以进一步概括成两个方面，即一方面它是定向的强光光束，这是指它的能量很集中，功率密度可以很大；另一方面它是单色的相干光束，

这是指时间相干性和空间相干性都很高．激光在各个技术领域中的广泛应用都是利用了这两方面的特性．例如激光通讯、激光测距、激光定向、激光准直、激光雷达、激光切削、激光手术、激光武器、激光显微光谱分析、激光受控热核反应等方面的应用，主要是利用激光第一方面的特性；而激光全息、激光测长、激光干涉、激光测流速等领域，主要是利用激光第二方面的特性．当然激光两方面的特性往往不能截然分开，有的应用(如非线性光学)与激光的两方面特性都有关．由于激光的应用十分广泛，下面只能就一些方面举例介绍．

*6.2 激光的应用

（1）激光测距

根据光束往返的时间可以测定目标的距离．然而普通光束的发散角较大，光强也比较小，距离大了，返回的光束十分微弱．巨脉冲红宝石激光器可在20 ns的时间内发射4J的能量，脉冲功率达2×10^{8}W，而发散角经透镜的进一步会聚可小至5″．利用这样一束定向的强光束已经精确地测定了地球到月球之间的距离，在平均为40万公里的距离上测量误差只有3 m，这是以往其它方法所无法实现的．

（2）激光加工

由于激光束高度平行，通过透镜可使之聚焦于很小的一点，在这里产生高温，使材料熔化或汽化，靠急剧膨胀的冲击波还可穿透工件．利用这个原理可进行打孔、切割、焊接等加工工艺．激光加工装置示于图6-2．

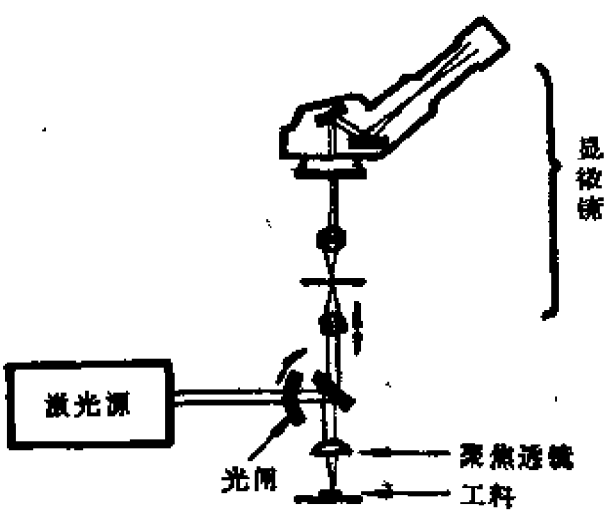


图 6-2 激光加工装置

激光加工有如下特点：(i) 激光加工是无接触加工，加工机可适当地与加工料分离．因此有可能对零件中复杂曲折的微

细部分进行加工，在磁场中也能同样加工．(ii) 脉冲激光加工消耗的能量较少，而且能量是在短时间内供给的，因此能避免对加工点外的热影响．又由于加工时间短，有可能对运动中的物体加工．(iii) 激光加工适用于多种材料的微型加工，与机械加工相比，实现自动控制较容易．

（3）激光在医学上的应用

激光对有机物产生光、热、压力、电磁等多方面的作用，它在医学研究以及医疗上的应用，正广泛地试行着，其中有的已接近实用，多数还处在动物实验等方面的基础研究阶段．比较成熟的是用激光治疗视网膜脱落．为了治这种病，可从外部用很强的光线照射眼睛，利用眼球内水晶体的聚焦作用，将光能集中在网膜的微小点上，靠它的热效应使组织凝结，将脱落的网膜熔接到眼底上．一种红宝石激光的光凝结装置示于图6-3．

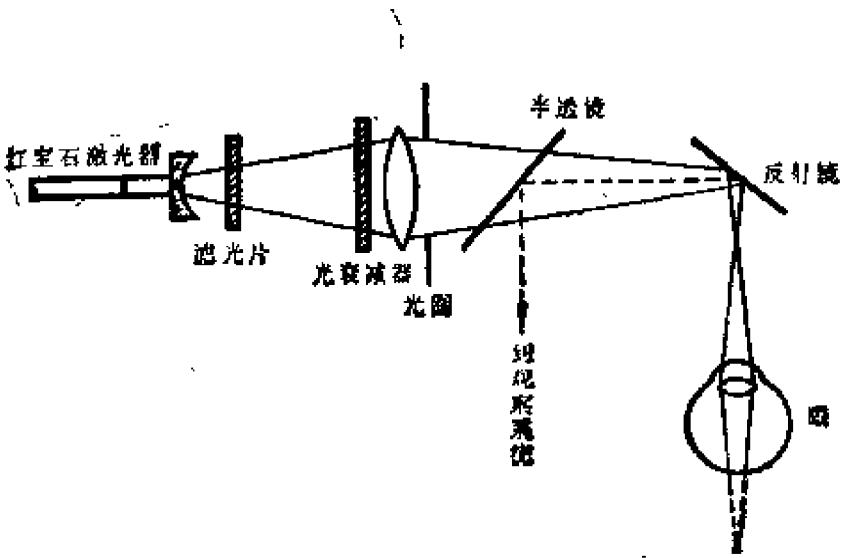


图 6-3　激光光凝结装置

（4）激光核聚变

轻原子核(氢、氘、氚核等)聚合为较重的原子核，并释放出大量核能的反应，称为核聚变反应．核聚变反应需要在10^7—10^9K以上的高温才能有效地进行．受控核聚变目前有两大途径：磁约束和惯性约束．在各种惯性约束手段中，激光核聚变是研究得较深入的一种．

将激光分成多束，从各个方向均衡地照射在氘、氚混合体作的小靶丸上，巨大的脉冲功率密度使靶丸在很短的时间内高度压缩，并产生高温，

在它还来不及飞散之前[①]完成核聚变反应．以上便是激光核聚变的大体过程．激光核聚变要求激光器有极大的脉冲能量和功率密度，现有的激光器都还有相当差距．表Ⅸ-7和Ⅸ-8分别给出目前世界上最大的和正在建造的核聚变激光器．

表Ⅸ-7　现有的最大核聚变激光器

地　　点	装置名称	激光器种类	束　数	脉冲宽度	输出能量
美国，洛伦斯·利弗莫尔实验室	Shiva	钕玻璃激光器	20	100 ps* 1 ns	10 kJ 15 kJ
美国，洛斯·阿拉莫斯实验室	Helios	CO_2 激光器	8	1 ns	5 kJ

* $1ps=10^{-12}s$，$1ns=10^{-9}s$．

表Ⅸ-8　正在建造的核聚变激光器

地　　点	装置名称	激光器种类	束　数	功　　率	输出能量	预计运转时间
美国，洛伦斯·利弗莫尔实验室	Nova-Ⅰ	钕玻璃激光器	12	100 TW*	100 kJ	1982年
	Nova-Ⅱ	同　前	24	300 TW	300 kJ	1983年
美国，洛斯·阿拉莫斯实验室	Antars	CO_2 激光器	24		40 kJ	1984年

* $1\,TW=10^{12}\,W$．

6.3　光速的测量与长度单位“米”的定义

真空中光速 c 不仅是重要的光学常数，也是整个物理学以及天文学中几个最基本的普适常数之一，对其数值的精确测定，无疑是具有十分重大意义的．光速的测量可以追溯几百年的历史．

① “惯性约束”之名由此而来．

早在1679年天文学家勒默从观察木星的卫星蚀第一个测出光的速度．另一个天文学方法是1728年布喇德雷用的光行差法．在地面上进行光速测定的工作直到十九世纪上半叶才开始，特别值得提起的有斐索的齿轮法，傅科的旋转镜法和迈克耳孙的旋转棱镜法．鉴于光速这一基本常数的重要性，对它的测量工作几十年来从未中断，在此期间方法不断改进，精确度不断提高．表Ⅸ-9中列出直到1958年光速测量的重要结果．

表Ⅸ-9　激光出世前的光速测量值

年　代	作　　者	方　　法	数值（km/s）
1679	勒默(O.Rõmer)	本卫蚀法	215000
1728	布喇德雷(J.Bradley)	光行差法	303000
1849	斐索(A.H.L.Fizeau)	齿轮法	315000
1862	傅科(J.B.L.Foucalt)	旋转镜法	298000±500
1902	珀罗汀(Perotin)	齿轮法	299870±50
1902	迈克耳孙(A.A.Michelson)	旋转棱镜法	299890±60
1926	迈克耳孙	旋转棱镜法	299796±4
1935	迈克耳孙，皮斯(F.G.Pease)等	旋转棱镜法	299774±2
1940	许特(A.Hüttel)	克尔盒法	299768±10
1941	安德孙(W.C.Anderson)	克尔盒法	299776±6
1950	玻耳(K.Bol)	谐振腔法	299789.3±0.4
1950	埃森(L.Essen)	谐振腔法	299792.5±3.0
1951	伯斯特兰(E.Berstrand)	克尔盒法	299793.1±0.2
1951	阿斯拉克孙(C.I.Aslakson)	雷达法	299794.2±1.9
1951	弗鲁姆(K.D.Froome)	微波干涉仪法	299792.6±0.7
1958	弗鲁姆	微波干涉仪法	299792.500±0.100

自从1958年弗鲁姆利用微波干涉仪法得到当时公认的光速值 $c=299792.5\pm0.1\,km/s$ 以来，所有的光速精密测量均以公式 $c=\lambda\nu$ 为基础，即电磁波在真空中的传播速度等于其频率与相应真空波长之乘积．当时的不确定度是 3×10^{-7}，其主要原因是使用的波长较长（4 mm），因此波长测量的准确度较低，衍射效应带来的

误差也较大.

激光器的出现把光速的测量推向一个新阶段. 特别是饱和吸收技术的采用，使我们可以得到频率的稳定性和复现性均十分优良的激光辐射. 并且由于波长可以比原来微波干涉仪法中用的小三个量级(微米量级)，使波长测量的准确度大为提高. 甲烷稳定的3.39μm氦氖激光系统(He-Ne:CH_4)和碘稳定的633nm氦氖激光系统(He-Ne:I_2)输出的波长，比现行的"米"定义^{86}Kr辐射波长的复现性高百倍以上，因此这不仅是光速的测量问题了，重新改变"米"的定义问题提上议事日程.

基于各国许多研究所的大量实验结果间的一致性，国际计量局米定义谘询委员会1973年第五次会议建议使用He-Ne:CH_4和He-Ne:I_2两种激光器所产生的单色辐射作为波长基准：前者在真空中的波长为3392231.40×10^{-12}m，后者在真空中的波长为632991.399×10^{-12}m. 该次会议还推荐在主要取自美国标准局(NBS)埃文森(K.M.Evenson)等人测量的He-Ne:CH_4激光的频率值88376181627±50kHz，并公布了由它的波长和频率之积得到的新光速值：

$$c = 299792458\ \mathrm{m/s},$$

不确定度为4×10^{-9}. 此推荐值立即得到了1973年召开的国际天文联合会的承认和推荐.

天文学家是利用光速值作为长度测量的参考的，因此他们希望有一个不变的光速值. 为此，米定义谘询委员会保证，不管长度和时间单位的定义将来是否改变，光速值将保持不变. 上述光速的推荐值于1975年在第十五届国际计量大会上得到正式通过. 从此就有可能利用激光辐射或光速重新定义长度的单位"米". 1975年第十五届国际计量大会和1979年第十六届国际计量大会都慎重地讨论了重新定义米的问题.

考虑到今后计量学的发展趋势是将物理量的基准建立在基本物理常数的基础上，米定义谘询委员会通过了一项建议，要求国

际计量委员会考虑一个新的米定义，于1983年提交第十七届国际计量大会讨论．这个定义是：

“米是平面电磁波在（1/299792458）秒的持续时间内在真空中传播行程的长度．”

*6.4 非线性光学效应

激光出现之前的光学基本上研究的是弱光束在介质中的传播、反射、折射、干涉、衍射、线性吸收与线性散射等现象．这些现象是满足波的迭加原理的．现在称之为线性光学．强光在介质中将出现很多新现象，如谐波的产生、光参量振荡、光的受激散射、光束自聚焦、多光子吸收、光致透明和光子回波等，研究这些现象的学科称为非线性光学，在这里波的迭加原理不再成立．光的非线性效应一般是比较弱的，只有激光这样强大的光源出现后，非线性光学研究的大力开展才有可能．下面挑选一些非线性光学效应作简单的介绍．

（1）倍频和混频

在第八章2.4节中我们已经看到，因折射率$n=\sqrt{\varepsilon}$，介质的光学性质完全由极化率$\chi_e=\varepsilon-1$决定．对于各向同性的线性介质，极化强度与电场强度成正比：

$$P=\chi_e\varepsilon_0E,$$

或简写为$P=\alpha E$．这规律实际上只限场强E不太大的时候，当E很大时，P还与E的高次方有关：

$$P=\alpha E+\beta E^2+\gamma E^3+\cdots, \quad ① \tag{6.1}$$

式中的系数$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$逐次减小，它们的数量级之比约为

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\cdots=\frac{1}{E_{原子}},$$

其中$E_{原子}$为原子中的电场，其量级为10^8 V/cm．因此，当$E\ll E_{原子}$时，式(6.1)中的非线性项βE^2，γE^3，…都不重要，介质只表现出线性光学的性质．线性光学的基本性质是输出振荡的频率总与输入的讯号相同，不同

① 通常用的非线性光学晶体都是各向异性的，P和E之间遵从很复杂的张量关系．不过倍频、混频等非线性效应已包含在(6.1)这个甚为简化的标量式中了，用它来作些粗浅的说明还是可以的．

频率的讯号彼此独立，不会混合。但非线性项起作用时便不是这样了。例如我们看式(6.1)中的平方项 βE^2，当 E 为单频的简谐振荡时：

$$E = E_0 \cos\omega t,$$

则平方项对 P 的贡献为

$$P^{(2)} = \beta E^2 = \beta E_0^2 \cos^2\omega t = \beta \frac{E_0^2}{2}(1 + \cos 2\omega t),$$

这里出现了直流成分和二倍频项 $\cos 2\omega t$，即二次谐波。不难看出，从更高次的非线性可以导出更高次的谐波来。

最初的光学二倍频实验是1960年夫兰肯(P.A.Franken)等人完成的。他们的实验装置如图6-4所示，光源用的是红宝石激光器，$\lambda = 0.694\mu m$，聚焦在石英晶体上产生了微弱的 $0.347\mu m$ 二次谐波光束。

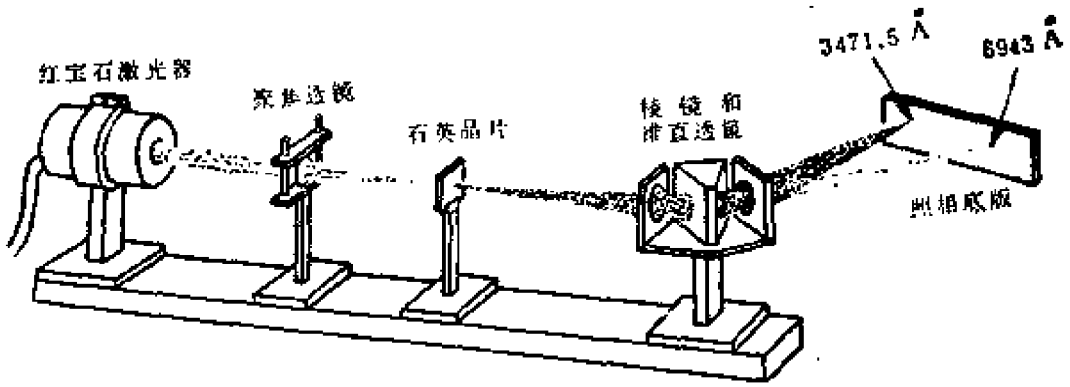


图 6-4　最早的产生二次谐波实验

现在讨论混频问题，设输入的是两种不同频率的振荡：

$$E = E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t,$$

则

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \beta E^2 = \beta(E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t)^2 \\ &= \beta E_1^2 \cos^2\omega_1 t + \beta E_2^2 \cos^2\omega_2 t + 2\beta E_1 E_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t \\ &= \frac{\beta E_1^2}{2}(1 + \cos 2\omega_1 t) + \frac{\beta E_2^2}{2}(1 + \cos 2\omega_2 t) \\ &\quad + \beta E_1 E_2[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \end{aligned}$$

这里除了直流成分和二倍频外，还出现了和频项 $\cos(\omega_1 + \omega_2)t$ 和差频项 $\cos(\omega_1 - \omega_2)t$。

倍频和混频在激光技术中有着广泛的应用．常用的非线性光学晶体有磷酸二氢钾(KDP，KH_2PO_4)，磷酸二氢铵(ADP，$NH_4H_2PO_4$)，磷酸二氘钾(DKDP，KD_2PO_4)等．近年来新研制的一些非线性系数更大的晶体，如铌酸锂($LiNbO_3$)，铌酸钡钠($Ba_2NaNb_5O_{15}$)等，颇引人注目．

（2）受激喇曼散射

第八章4.4节讲的喇曼散射是自发喇曼散射，散射光强 I_s 的增加正比于入射光强 I_0，它是不相干的．当入射光束是很强的相干激光光束时，就有可能产生受激喇曼散射．这时散射光强 I_s 的增加正比于 I_0 和 I_s 的乘积：

$$dI_s = \alpha I_0 I_s dx,$$

积分后得 I_s 随距离 x 增长的情况：

$$I_s(x) = I_s(0)\exp(\alpha I_0 x) = I_s(0)e^{Gx},$$

这里增益 $G = \alpha I_0$ 正比于入射光强，上式描述的与激活介质中的光放大过程无异．可见，受激喇曼散射与自发喇曼散射的差别正如受激辐射与自发辐射的差别一样，受激喇曼散射光具有很高的空间相干性和时间相干性，其强度也比自发喇曼散射光大得多．用这种方法可以获得多种新波长的相干辐射．受激喇曼散射的用途之一是测量大气污染．

（3）自聚焦与光致透明

非线性光学中常出现一些自作用，如自聚焦、自散焦、自位相调制和非线性吸收等．

自聚焦是在强光作用下媒质的折射率随光强而增大引起的．激光光束的强度具有高斯分布，轴线上光强最大，若光强大的地方折射率也大，光束就会向轴上会聚．达到平衡时，自聚焦作用与衍射散焦作用抵消．

当激光很强时，物质的吸收系数也与光强有关．如固体激光 Q 开关染料在弱光下不透明，强光下物质中的分子一半处于激发态．吸收系数正比于上、下能级粒子数之差，所以此时吸收系数为 0．这种现象称为光致透明．