中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主　编　杨国桢　副主编　程福臻

光学

崔宏滨　李永平　段开敏　编著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3229.0101)

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主　编　杨国桢　副主编　程福臻

■ 力学与理论力学（上册）	杨维纮	
■ 力学与理论力学（下册）	秦　敢	向守平
■ 电磁学与电动力学（上册）	胡友秋　程福臻	叶邦角
■ 电磁学与电动力学（下册）	胡友秋　程福臻	
■ 光学	崔宏滨　李永平	段开敏
■ 原子物理与量子力学（上册）	朱栋培　陈宏芳	石名俊
■ 原子物理与量子力学（下册）	朱栋培　陈宏芳	石名俊
■ 热学　热力学与统计物理（上册）	曹烈兆　周子舫	
■ 热学　热力学与统计物理（下册）	周子舫　曹烈兆	

高等教育出版中心·数理出版分社
联系电话：010-64015178
E-mail：mph@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-022245-9

9 787030 222459 >

定 价：35.00 元(含光盘)

附光盘
043
66
西安理工大学图书馆
C827813-9
043
66

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书
主　编　杨国桢
副主编　程福臻

光　学

崔宏滨　李永平　段开敏　编著

中文样本图书

西安理工大学
图书馆藏书

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书讲述普通物理课程中的光学部分，内容包括波动光学、几何光学以及光的量子性导论．全书以光与物质相互作用的实验事实为基础，从光的物理模型出发，对光学的现象和规律作了较全面的讨论，并介绍了光学的发展及其在各个领域中的应用．对于光学中重要的物理概念和实验现象，本书进行了严格的推导和详细的说明．书后附有较多例题，便于读者理解．另外，编者特意制作多媒体光盘随书发行，其中包含大量光学现象的演示图片和动画．

本书可作为理工科以及师范院校物理类专业的本科生教材，也可供理工科非物理类有关专业的学生使用．

图书在版编目(CIP)数据

光学/崔宏滨，李永平，段开敏编著．—北京：科学出版社，2008
（中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书/杨国桢主编）
ISBN 978-7-03-022245-9

Ⅰ．光… Ⅱ．①崔…②李…③段… Ⅲ．光学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 081942 号

责任编辑：胡云志 唐保军 / 责任校对：包志虹
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张：21 1/4
印数：1—4 000 字数：398 000

定价：35.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

丛 书 序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年.值此筹备校庆之际,由几位长年从事基础物理教学的老师建议,编著一套理科基础物理教程,向校庆五十周年献礼.这一建议在理学院很快达成了共识,并受到学校的高度重视和大力支持.随后,理学院立即组织了在理科基础物理教学方面有丰富教学经验的老师,组成了老、中、青相结合的班子,着手编著这套丛书,并以此进一步推动理科基础物理的教学改革与创新.

中国科学技术大学在老一辈物理学家、教育家吴有训先生、严济慈先生、钱临照先生、赵忠尧先生、施汝为先生的亲自带领和指导下,一贯重视基础物理教学,历经五十年如一日的坚持,现已形成良好的教学传统.特别是严济慈和钱临照两位先生在世时身体力行,多年讲授本科生的力学、理论力学、电磁学、电动力学等基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带领出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.这套丛书的作者,应该说都直接或间接受到过两位先生的教诲.出版这套丛书也是表达作者对先生的深深感激和最好纪念.

这套丛书共九本:《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》、《光学》、《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学　热力学与统计物理(上、下)》.每本约40万字,主要是为物理学相关专业本科生编写的,也可供工科专业物理教师参考.每本书的教学学时约为72学时.可以认为,这套丛书系列不仅是普通物理与理论物理横向关联、纵向自洽的基础物理教程,同时更加适合我校理科人才培养的教学安排,并充分考虑了与数学教学的相互配合.因此,在教材的设置上,《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》中,上册部分分别是普通物理内容,而下册部分为理论物理内容.还要指出的是,在《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学　热力学与统计物理(上、下)》中,考虑到普通物理与理论物理内容的界限已不再那样泾渭分明,而比较直接地用现代的、实用的概念、物理图像和理论来阐述,这确实不失为是一种有意义的尝试.

这套丛书在编著过程中,不仅广泛吸取了校内老师的经验,采纳了学生的意见,而且还征求了中国科学院许多相关专家的意见和建议,体现了"所系结合"的特点.同时,还聘请了兄弟院校及校内有丰富教学经验的教授进行双重审稿,期望将其错误概率降至最低.

历经几年,在科学出版社大力支持下,这套丛书终于面世,愿她能在理科教学

改革与创新中起到一点作用，成为引玉之砖，共同来促进物理学教学水平的提高及其优秀人才的培养，并望广大师生及有关专家们继续提出宝贵意见和建议，以便改进. 最后，对方方面面为这套丛书编著与出版的完成所付出艰辛努力及其给予关心、帮助的同志表示深切感谢！

中国科学技术大学理学院院长

杨国桢 院士

2007 年 10 月

前　言

本书由编者在中国科学技术大学理学院的光学讲稿修改补充而成.

根据编者多年教学工作的经历,光学是大学物理系列中一门较有特色的课程.一方面,对于已经稔熟力学、热学和电磁学等经典物理的读者来说,光学显得不那么“经典”,因为无论是几何光学还是波动光学,都要用到不少近似的处理方法,通过列方程而得到严格解的情况在光学领域倒是不多;另一方面,光学中的主要概念“光线”、“光波”、“光量子”看起来互不相关,各有各的处理方法,但是内容又相互渗透,如几何光学中涉及光在介质中的色散时,就需要借用波长的概念,而波长只有在波动光学中才能定义等.

正是基于光学的特点,编者在本书中对光学中常用的傍轴条件、远场条件以及这些近似条件的具体应用作了比较详细的说明,同时又强调和突出了“光线”、“光波”、“光子”这些光的物理模型,并通过具体的实例说明这些模型的内在联系.

第1～9章是波动光学部分,介绍了光的波动模型、光的叠加原理、光的偏振、光的相干叠加、光的干涉衍射、傅里叶变换光学与全息照相、在晶体中的双折射以及光与物质的相互作用.第10章为几何光学,重点讨论了光的成像理论,第11章为光的量子性导论,从实验事实出发,探讨了光的波粒二象性.

关于成像的几何光学是光学中最早发展起来的分支,这是一套唯象的理论体系,较少涉及光的本质,所以并没有受到惠更斯和牛顿波粒之争的影响,因而很多光学教材都以几何光学部分作为开篇.本书将几何光学置于波动光学之后,并强调几何光学是波动光学(衍射)的零级近似,这样做的目的一方面要指出衍射是无处不在的,另一方面也是为了使读者不至于将几何光学看成是一个孤立的分支.最后一章在探讨光的量子学说建立的过程中,对黑体辐射的实验规律和理论研究作了较详细的介绍,黑体辐射长波部分的规律可以用波动理论说明,而短波部分只能用量子理论才能解释,之所以这样做,就是试图使读者体会到波长越短,量子性越显著,而且,从物理特征上光波到光量子是一种自然的过渡,从整个物理学的体系上,光学也是经典物理学向量子物理学发展和过渡的桥梁和纽带.

大学阶段的光学课程中,波动光学是整个光学的核心内容.而贯穿整个波动光学的主线则是光波的叠加原理.传统的方法是将光的干涉、衍射、偏振分别讲述,这样做自有好处,无论教还是学都很方便,但是,缺点在于往往容易使初学者混淆干涉、衍射的区别和联系,也不容易区分相干叠加与非相干叠加.其实干涉衍射都是光的相干叠加,在处理方法上,前者可以直接应用光波的叠加原理将几列波的振动或复振幅直接相加,而后者则需要通过求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式;在实

验装置上，干涉是将光分束，而衍射则无需如此. 在分析光的偏振特性时，往往是将正交的光矢量进行叠加，这是一种非相干叠加. 因而本书在章节次序上，先介绍了用非相干叠加方法处理光的偏振，接着将杨氏干涉和菲涅耳、夫琅禾费衍射在同一章中讲授. 在读者了解了干涉、衍射、偏振的原理之后，分别对具体的干涉装置、衍射光栅和光在晶体中的双折射进行了介绍.

本书强调物理概念的清晰和准确，因而对诸如偏振态的分析、干涉的物理过程、衍射积分的运算、双折射导致偏振态的改变等问题作了尽可能详细的讨论. 书中的例题大多具有一定的难度，目的是引导读者掌握处理光学问题的正确方法.

光学世界绚丽多彩，形象生动，授课过程中要用到大量的图片，为此，编者特意制作了一套多媒体课件，其中包括光学系统的图解、演示实验等，便于课堂教学和读者自行浏览，许多受到篇幅限制而难以在书中展示的内容，也与上述课件一并收录在随书的光盘中.

北京大学钟锡华教授和中国科学技术大学吴强教授所著的光学教材长期被本书编者用作讲课的范本，本书编者之一更是不止一次面聆两位教授的指导. 这次幸得两位专家评审本书，发现并纠正了书稿中的许多讹误和纰漏. 中国科学院北京物理所傅盘铭研究员也为本书写出了详细、中肯的评阅意见，使编者大受裨益. 这套丛书的主编杨国桢院士和副主编程福臻教授多次听取本书编者汇报，为本书确定了编写的基本原则. 对于他们付出的心血，编者在此表示由衷的感谢.

编者诚恳希望读者指出书中的错误和不足，以便我们有机会改正.

崔宏滨　李永平　段开敏

2008 年 4 月 21 日

目　录

丛书序

前言

引言 …… 1

第 1 章　光的波动模型 …… 9

1.1　光波场 …… 9

1.1.1　光是交变电磁场 …… 9

1.1.2　光波场的周期性 …… 10

1.1.3　定态光波 …… 12

1.1.4　光是矢量波 …… 13

1.1.5　光强 …… 14

1.1.6　光的传播 …… 15

1.2　定态光波的数学表示 …… 17

1.2.1　矢量表示与标量表示 …… 17

1.2.2　定态光波的描述 …… 18

1.2.3　定态光波按波面分类 …… 18

1.2.4　光波的复振幅描述 …… 23

1.2.5　有关光波的几个概念 …… 24

1.3　光程与相位 …… 25

1.3.1　光程 …… 25

1.3.2　相位的超前与滞后 …… 28

1.4　傍轴条件与远场条件 …… 30

1.4.1　轴上物点的傍轴条件和远场条件 …… 30

1.4.2　轴外物点的近轴条件和远场条件 …… 31

第 2 章　光的叠加原理 …… 33

2.1　光波的叠加原理及其成立的条件 …… 33

2.1.1　光波的独立传播定律 …… 33

2.1.2　光波的叠加原理 …… 33

2.2　光波的叠加方法 …… 34

2.2.1　代数法(瞬时值法) …… 34
2.2.2　复数法 …… 34
2.2.3　振幅矢量法 …… 35
2.3　光波的叠加强度 …… 35
2.3.1　光波叠加的特点 …… 35
2.3.2　光波的叠加强度的计算 …… 36
2.3.3　光波的相干叠加与非相干叠加 …… 36
2.3.4　振动方向相互垂直的光波的叠加 …… 38
2.3.5　两列不同频率单色光波的叠加 …… 38
2.3.6　光的相干条件 …… 39
2.4　波包与群速度 …… 40
2.5　光速的测量 …… 43
第3章　光的偏振 …… 46
3.1　光的偏振特性 …… 46
3.1.1　横波的偏振性 …… 46
3.1.2　起偏与检偏 …… 48
3.2　光的偏振态 …… 48
3.2.1　普通光源的发光机制 …… 48
3.2.2　自然光 …… 50
3.2.3　平面偏振光(线偏振光) …… 51
3.2.4　部分偏振光 …… 53
3.2.5　圆偏振光 …… 53
3.2.6　椭圆偏振光 …… 55
3.3　菲涅耳公式 …… 59
3.3.1　光矢量的分解 …… 60
3.3.2　菲涅耳公式的表述 …… 60
3.3.3　反射率与透射率 …… 61
3.3.4　相位关系 …… 63
3.4　反射折射所引起的偏振态的改变 …… 64
3.4.1　偏振态的改变 …… 64
3.4.2　垂直入射 …… 65
3.4.3　布儒斯特定律 …… 66
3.4.4　玻璃片堆和布儒斯特窗 …… 67

3.5　斯托克斯倒逆关系 …… 69
第 4 章　光的相干叠加 …… 70
4.1　杨氏干涉与相干光的获得 …… 70
4.1.1　托马斯·杨 …… 70
4.1.2　普通光源的相位 …… 72
4.1.3　相干光的获得 …… 72
4.1.4　杨氏干涉 …… 72
4.1.5　干涉的特点 …… 73
4.2　两列相干光的干涉花样 …… 73
4.2.1　两个点光源的干涉 …… 73
4.2.2　两个线光源的干涉(双缝干涉) …… 76
4.2.3　干涉条纹的可见度(反衬度) …… 76
4.2.4　两列平行光的干涉 …… 77
4.3　惠更斯-菲涅耳原理 …… 78
4.3.1　次波模型 …… 78
4.3.2　次波的相干叠加——惠更斯-菲涅耳原理 …… 80
4.4　菲涅耳衍射(圆孔、圆屏) …… 85
4.4.1　衍射现象 …… 85
4.4.2　用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射 …… 86
4.5　夫琅禾费单缝和矩孔衍射 …… 93
4.5.1　夫琅禾费衍射装置 …… 93
4.5.2　单缝衍射强度分布 …… 95
4.5.3　单缝衍射花样的特点 …… 98
4.5.4　单缝衍射的应用 …… 100
4.5.5　夫琅禾费矩孔衍射 …… 101
4.6　夫琅禾费圆孔衍射 …… 102
4.6.1　衍射强度 …… 102
4.6.2　衍射花样的特点 …… 103
4.6.3　望远镜的分辨本领 …… 104
4.6.4　几何光学是衍射光学的大尺度近似 …… 105
第 5 章　光的干涉装置与光波场的相干性 …… 106
5.1　光的干涉装置概述 …… 106
5.2　分波前的干涉装置 …… 107

5.2.1 菲涅耳双面镜 …… 107
5.2.2 劳埃德镜 …… 108
5.2.3 菲涅耳双棱镜 …… 109
5.3 半波损失 …… 110
5.4 薄膜干涉 …… 111
5.4.1 等倾干涉 …… 112
5.4.2 等厚干涉 …… 116
5.5 分振幅的干涉装置 …… 119
5.5.1 迈克耳孙干涉仪 …… 119
5.5.2 马赫-曾德尔干涉仪 …… 124
5.5.3 干涉滤波片 …… 125
5.5.4 牛顿环 …… 126
5.6 多光束干涉——法布里-珀罗干涉仪 …… 128
5.6.1 干涉装置 …… 128
5.6.2 光强分布 …… 128
5.6.3 光波场特性 …… 130
5.7 光的空间相干性与时间相干性概论 …… 134
5.7.1 光波场的空间相干性 …… 135
5.7.2 光场的时间相干性 …… 141
第 6 章 衍射光栅 …… 144
6.1 多缝夫琅禾费衍射 …… 144
6.1.1 衍射强度 …… 145
6.1.2 双缝衍射 …… 150
6.1.3 衍射花样的特点 …… 151
6.1.4 干涉与衍射的区别和联系 …… 152
6.1.5 光栅方程 …… 153
6.2 光栅光谱 …… 154
6.2.1 谱线的角宽度和光栅的色分辨本领 …… 154
6.2.2 光栅的色散与自由光谱范围 …… 156
6.3 闪耀光栅 …… 157
6.3.1 问题的提出与解决方案 …… 157
6.3.2 闪耀光栅的原理 …… 157
6.3.3 两种常用的照明方式 …… 158

6.4　单色仪与光谱仪 …… 159
6.5　正弦光栅 …… 160
6.6　X 射线在晶体中的衍射 …… 162
6.6.1　晶格点阵 …… 162
6.6.2　X 射线在晶体中的相干叠加 …… 163
6.6.3　晶体 X 射线衍射的实验方法 …… 164
第 7 章　傅里叶变换光学与全息照相 …… 166
7.1　衍射系统的傅里叶变换 …… 166
7.1.1　衍射系统的屏函数 …… 166
7.1.2　接收场 …… 167
7.1.3　衍射系统的傅里叶变换方法 …… 167
7.1.4　波前相因子分析法 …… 169
7.2　透镜和棱镜的屏函数 …… 169
7.2.1　透镜的相位变换函数 …… 169
7.2.2　棱镜的相位变换函数 …… 171
7.3　夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析 …… 171
7.3.1　屏函数的傅里叶变换 …… 171
7.3.2　周期性屏函数的傅里叶变换 …… 174
7.3.3　非周期性的屏函数的傅里叶变换 …… 176
7.4　阿贝成像原理 …… 177
7.4.1　阿贝成像原理的数学推导 …… 177
7.4.2　阿贝成像原理的实验验证 …… 179
7.4.3　图像处理 …… 181
7.4.4　相衬显微镜 …… 182
7.5　全息照相 …… 183
7.5.1　全息照相的基本原理 …… 183
7.5.2　全息照相的装置 …… 185
第 8 章　光在晶体中的双折射 …… 187
8.1　光在晶体中的传播 …… 187
8.1.1　晶体的光学特征 …… 187
8.1.2　双折射现象与双折射晶体 …… 187
8.2　单轴晶体中光的波面 …… 190
8.2.1　o 光和 e 光的波面 …… 190

8.2.2 单轴晶体的惠更斯作图法 …… 191
8.2.3 几种特例 …… 192
8.3 晶体光学器件 …… 193
8.3.1 偏振棱镜 …… 193
8.3.2 波晶片 …… 195
8.3.3 相位补偿器 …… 196
8.4 波片与光的偏振态 …… 198
8.4.1 光在波晶片中的传播引起的相位差 …… 198
8.4.2 经过波片后光的偏振态的改变 …… 199
8.5 偏振光的干涉 …… 202
8.5.1 平行光的干涉装置 …… 202
8.5.2 实验现象及分析 …… 203
8.6 电光效应 …… 205
8.6.1 克尔效应(二级电光效应) …… 205
8.6.2 泡克耳斯效应(一级电光效应) …… 206
8.6.3 电光效应的应用 …… 207
8.7 旋光 …… 208
8.7.1 自然旋光 …… 208
8.7.2 磁致旋光 …… 211
8.7.3 磁致旋光的应用 …… 211
8.8 偏振态的矩阵表示 …… 212
8.8.1 琼斯矢量 …… 213
8.8.2 正交偏振 …… 215
8.8.3 琼斯矩阵 …… 216
第 9 章 光波与物质的相互作用 …… 220
9.1 光的吸收 …… 220
9.1.1 吸收的实验规律(线性吸收) …… 220
9.1.2 吸收系数与波长的关系 …… 221
9.1.3 吸收光谱 …… 221
9.2 光的色散 …… 222
9.3 吸收和色散的经典理论 …… 224
9.3.1 经典的电偶极子模型 …… 224
9.3.2 单一本征频率 …… 225

9.3.3 多个本征频率 …… 226
9.4 光的散射 …… 226
9.4.1 散射现象 …… 226
9.4.2 散射定律 …… 227
9.5 强光在介质中的非线性电极化效应 …… 228
第 10 章 几何光学的近轴理论 …… 231
10.1 衍射的零级近似 …… 231
10.2 几何光学的基本概念 …… 232
10.2.1 几何光学是关于成像的理论 …… 232
10.2.2 几何光学的实验定律 …… 233
10.3 反射与折射的应用 …… 236
10.3.1 光在平面上的反射 …… 236
10.3.2 光在平面上的折射 …… 237
10.4 变折射率光学 …… 240
10.5 近轴光在单球面上的成像 …… 243
10.5.1 物与像的虚实性 …… 243
10.5.2 近轴光在单球面上的折射 …… 244
10.6 薄透镜成像 …… 250
10.6.1 薄透镜 …… 250
10.6.2 薄透镜成像公式 …… 250
10.6.3 薄透镜成像的作图法 …… 254
10.7 理想共轴球面系统的成像 …… 256
10.7.1 共轴球面系统的基点和基面 …… 257
10.7.2 共轴球面系统的物像关系 …… 258
10.7.3 基点和基平面的确定 …… 259
10.7.4 光具组的阿贝正弦条件与齐明点 …… 261
10.8 光线转换矩阵 …… 263
10.8.1 光线状态的矩阵表示 …… 263
10.8.2 成像矩阵的计算 …… 265
10.9 几何光学仪器 …… 266
10.9.1 人眼 …… 266
10.9.2 放大镜 …… 267
10.9.3 目镜与物镜 …… 268

10.9.4 显微镜 …… 269
10.9.5 望远镜 …… 270
10.9.6 照相机 …… 272
第 11 章 光的量子性 …… 276
11.1 辐射场 …… 276
11.1.1 辐射场的物理参数 …… 276
11.1.2 热辐射 …… 276
11.2 黑体辐射的实验规律 …… 277
11.2.1 斯特藩-玻耳兹曼定律 …… 278
11.2.2 维恩位移定律 …… 278
11.2.3 瑞利-金斯定律 …… 278
11.3 光量子假说 …… 280
11.3.1 普朗克对黑体辐射的解释 …… 280
11.3.2 爱因斯坦光量子与光的波粒二象性 …… 282
11.3.3 康普顿效应 …… 282
11.3.4 德布罗意波 …… 284
习题与答案 …… 285
中英人名对照 …… 317
名词索引 …… 319
教学进度和作业布置 …… 324

引　言

细推物理须行乐，何用浮名绊此身？

——杜甫《曲江二首》之一

人每时每刻都在呼吸着，所以并不觉得呼吸是一种幸福. 但如果不能呼吸了，将会怎样？物理学对于我来说就像呼吸一样.

——李政道

起初，上帝创造天地……上帝说："要有光"，于是就有了光……这是头一日.

——《圣经·创世纪》

一、光是什么？

任何一门物理学科，都必须解决关于研究对象的两个问题：研究对象的本质是什么？研究对象具有怎样的运动规律？

人来到世间，睁开眼就看到了光，光伴随一个人的终生. 那么，如果问"光是什么？"可以肯定不同的人将有不同的回答.

例如：

光是视觉，是眼睛所见.

光是光线.

光是一种电磁波.

光是能量子.

……

对于上述种种答案，既可以说是对的，又可以说不是完全对的. 那么，光到底是什么呢？或者我们站在物理学的角度问，光的本质是什么？

我们常说，要了解一个人，应当"察其言而观其行"，也就是说，要通过对其表现的观察，来判断他到底是一个什么样的人. 那么，对于光，也可以按照这一原则进行研究.

人们对事物的本质和规律的认识，都是从认识其现象开始的. 而现象，则是通过该事物与周围环境和其他事物的相互作用而表现出来的. 于是就可以从光与其他物质相互作用所产生的效果进行研究，以此来推断光的物理本质.

首先，光能够对眼睛产生刺激并由此在头脑中形成图像. 人眼可以感觉到光的颜色、光的方向和光源的位置. 人能够看到物体，是由于物体所发出的光，即包含各种颜色、来自各个地点、具有各种角度的光进入人们眼睛的原因. 人眼所见的物体要么本身发光，要么反射来自其他物体的光. 除此之外，光还能使物体发热，说明光

还具有能量.这是人们在日常生活中对光的认识,这当然是肤浅的.如果仅仅限于对所观察到现象的描述,还不能成为一门科学.

其次,可以发现光是遵循着一定的规律进行传播、反射和折射的,这种规律可以用几何上的线,即光线,进行描述.

如果再深入进行观察,将会发现,光会出现干涉、衍射等现象,而干涉和衍射是波的特征.那么,光无疑又是一种波.

但是,研究又发现,如果仅仅将光视作电磁波,则无法解释诸如黑体辐射、光电效应等实验现象.于是,光的量子说出现了,并得到认可.而且,从光量子的角度,也能够解释干涉、衍射等波动现象.

有了更加准确的光量子学说,是否意味着在此之前的光线、光波等概念是错误的,而应该加以摒弃呢?

在回答这个问题之前,我们应该想一下,光量子的学说难道就是对于光最本质的解释吗?

事实上,无论是光线理论、波动理论还是光量子理论,既反映了在不同的历史阶段人们对于光的认识,也反映了光在与不同物质相互作用时所表现出来的不同特性.在研究光的反射、折射和成像等问题时,用光线理论是最简单实用的;而在处理光的衍射、干涉等问题时,采用光的波动理论则最合适;对于诸如光电效应、黑体辐射等问题,则只有采用光量子理论来解决.所以,直到目前为止,上述三种理论仍然是组成光学的重要内容,都在不断地获得发展,并在应用中取得了巨大的成功.

所以,可以这么说,光线、光波、光量子,都是为了研究光而引入的物理模型.

二、光的物理模型

在物理学中,人们要建立一门学科,总要先定义一些物理概念.物理概念是对某种物质或现象的本质的描述和概括,反映了人们对事物认识的程度.因而在不同的阶段,同一概念所包含的内容可能会有所不同.例如,现在人们所说的分子、原子的内容和含义,就与一百多年前这些概念刚刚建立时有着较大的差异.

为了使物理概念形象化,人们往往建立物理模型来反映研究对象.例如,分子、原子、电子都是模型,电磁波也是模型;力学中,宏观物体的平动可以用质点运动模型来描述,微观粒子的运动可以用量子模型描述等.由于概念不断变化,反映概念的模型也不断改进更新.对于光的认识,也是这样的一个过程.一方面,随着研究的深入,光的物理模型发生了变化;另一方面,由于光与不同物质相互作用时表现出不同的特性,也可以用不同的物理模型来描述光.

描述光的一个重要物理量是光的波长,可以用光的波长作为一种度量的尺度或标准.光在与不同尺度的物体作用时,表现出截然不同的特征,因而可以用不同的物理模型来描述.

1. 光的宏观表现

如果观察光与宏观物体,即尺度比光的波长大得多的物体相互作用,则可以用

光线这一模型来描述其规律.光在均匀介质中的直线传播定律、在界面处的反射定律、折射定律等就是关于光线的定律,由此构成了几何光学.几何光学中最基本的概念是光线,即认为光是由一条、或一束几何上的线组成.

几何光学是一个关于光的唯象理论,只是利用几何线来描述光在介质中的传播、反射和折射,主要用来处理光的成像问题.对于光的物理本质并不涉及.所以,在几何光学的范畴中,无法从理论上说明光是如何传播的,也无法定义和导出诸如光速、波长等物理概念.

2. 光与小尺度物体的作用

光与介观尺度的物体,即尺度与其波长可以比拟的物体相互作用时,则表现出典型的波动特性.例如,光只有通过很细小的缝或孔时,才表现出干涉、衍射的特征.在这种情况下,用光波这一模型来描述光的物理特征.描述光的波动性的理论被称作波动光学.通常所说的物理光学,就是波动光学.

波动光学是经典光学的核心内容,就是认为光是电磁辐射频谱的一段,即光就是电磁波,从麦克斯韦方程组出发,可以解决波动光学中诸如干涉、衍射、偏振、散射、色散等问题,当然,也可以用光的波动理论来解决光的传播、反射、折射成像等几何光学领域的问题.但是,用波动理论处理传播、反射、折射等问题,特别是光的成像问题,远没有直接采用几何光学理论简单.

3. 光在原子尺度上的表现

由黑体辐射导致的"紫外灾难",在1900年由普朗克用能量分立的谐振子假设解决.

1905年,爱因斯坦用光量子假说成功地解释了光电效应.

1921年,康普顿用光量子模型解释了X射线与电子之间的散射.

从此以后,光的量子理论开始登上历史舞台,并获得了极大的成功.光的量子理论的核心是光具有波粒二象性——一切量子现象的基本属性.但这里的"波动"和"粒子"的含义与最初惠更斯所提出的波动性和牛顿所提出的粒子性是根本不同的.

综上所述,光线、光波、光量子,都是光的物理模型,以这些物理模型作为最基本的假设和出发点,分别建立了几何光学、波动光学和量子光学.它们都是光学的重要分支,构成了现代光学的基本内容,既相互关联,遵循相同的物理规律;又相对独立,各有不同的应用领域和适用范围.在实际中,往往要根据具体的情况,按照简捷实用的原则,采用不同的模型和理论处理不同的问题.

三、光学的发展及其成就

光学是物理学的一个重要组成部分,也是物理学的一门基础学科.

但是,很久以前,即使是在真正意义上的物理学诞生之前,人们就已经根据所积累的经验和实践知识对光的现象进行了研究和利用.

最早的记录光学知识的著作是中国的《墨经》,成书于公元前4～前3世纪.据

后人研究，其中有 8 条论述涉及了几何光学知识①. 阐述了影、小孔成像、平面镜、凹面镜、凸面镜成像，还说明了焦距和物体成像的关系. 但由于年代久远，散佚严重，真讹难辨.

另一著作为《光学》，或译作《反射光学》，成书于公元前 3～前 2 世纪，古希腊欧几里得(Euclid of Alexandria，公元前 330～前 275)著. 书中已指出光在平面上反射时，入射角等于反射角. 其后研究了光的折射等成像规律，并制成了一些光学器件.

几何光学的最初发展就是源于天文学和解剖学的需要. 因为光学仪器在天文学和解剖学的研究中有着重要作用，在人们不断研究、制造光学仪器的过程中，几何光学形成了.

阿拉伯学者阿勒·哈增(Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham，965～1040)在视觉生理学方面进行过深入的研究. 他认为，人的视觉是在玻璃体中得到，“网膜”、“角膜”、“玻璃状体”、“前房液”等术语都是阿勒·哈增的发明. 阿勒·哈增从希腊人那里学到了反射角的定律，并对光在球面和其他曲面镜上的反射作了进一步的研究，他指出，入射线、反射线以及法线都位于同一平面上. 1572 年，阿勒·哈增的光学专著《光学全书》被译成拉丁文出版.

17 世纪初，德国天文学家开普勒(Johannes Kepler，1571～1630)由于革新天文望远镜的实际需要对几何光学进行了研究. 1604 年他发表了一篇论文，对光的反射现象、光的折射现象及视觉现象作了初步的理论解释. 1611 年，他又出版了一部光学著作《折射光学》，其中记载了他的两个重要试验，对几何光学作了进一步的理论探讨，提出了焦点、光轴等几何光学概念，并发现了全反射.

继开普勒之后，荷兰物理学家和数学家斯涅尔(Willebrord Snell，1580～1626)对几何光学作出了系统的、数学的分析. 斯涅尔通过实验与几何分析，发现了光的反射定律和光的折射定律. 但斯涅尔在世时并没有发表这一成果. 直到 70 年后，他的遗稿被惠更斯(Christaan Huygens，1629～1695，荷兰)读到后才正式发表. 折射定律的确立，促进了几何光学的迅速发展.

法国的笛卡儿(René Descartes，1596～1650)对光的反射、折射和色散等现象进行了研究，1637 年，他出版了《屈光学》一书，首先将斯涅尔的折射结果用数学公式表达出来，并提出了自己的观点.

1661 年，法国的费马(Pierre de Fermat，1601～1665)把数学家赫里贡(Pierre Hérigone，1580～1643，法国)提出的数学方法用于折射问题，推导出了折射定律，于是费马根据光的传播、反射和折射定律，提出了著名的费马原理：光沿着所需时间最短的路径传播.

牛顿(Isaac Newton，1642～1727，英国)受到笛卡儿等的著作的启示，在 1672

① 见钱临照《释墨经中之光学、力学诸条》，最初发表于 1940 年的《李石曾先生六十岁寿辰纪念论文集》，后又发表于《科学通报》，2 卷 8 期，1951.

年成功地进行了分光实验，一束白光经三棱镜折射后，不同颜色的光沿不同角度出射，形成彩色光带.

17 世纪，几何光学初步形成并得到了蓬勃的发展.

随着几何光学的发展，光的本质问题成了研究和争论的焦点.

1704 年牛顿在其《光学》一书中提出微粒说，认为光是由一个个粒子(corpuscle)组成的，每个粒子可看成一个质点，遵守质点运动的规律，提出了完整的微粒说理论，并得到牛顿学派二百多年的支持.

格里马第(Francesco Maria Grimaldi，1618～1663，意大利)是光的波动说的提出者，胡克(Robert Hooke，1635～1792，英国)是他的支持者，惠更斯继承并完善了胡克的观点. 惠更斯在 1678 年所出版的《论光》一书中完整地阐述了波动说. 认为光以波的形式存在和传播，遵循波动的规律. 1809 年，马吕斯(Etienne-Louis Malus，1775～1812，法国)在实验中发现了光的偏振现象. 1811 年，布儒斯特(David Brewster，1781～1868，英国)在研究光的偏振现象时发现了光偏振现象的实验定律.

另外在光的波粒说之争中，光速的测定曾给双方提供重要的依据. 在相当长的时期内，许多人进行了测量光速的试验，事件排列如下：

1607 年，伽利略(Galileo Galilei，1564～1643，意大利)，第一次尝试在一段 7.5km 的距离上测量光速，但由于方法简单，没有获得结果.

1676 年，天文学家罗默(Ole Rømer，1644～1710，丹麦)，采用天文学方法，通过测量木星的一颗卫星被木星遮挡的时间与轨道的关系，测得光速为 215000km/s，第一次提出了有效的光速测量方法.

1725 年，英国天文学家布莱德雷(James Bradley，1693～1762)发现了恒星的“光行差”现象，他用地球公转的速度与光速的比例估算出了太阳光到达地球需要 493s. 这个数值较罗默法测定的要精确一些.

1849 年，斐索(Armand-Hippolyte-Louis Fizeau，1819～1896，法国)首次在陆地上(实验室中)，采用齿轮法，测出光速为 315000km/s. 1851 年，他用自己发明的干涉仪器，测量了地球相对于光的速度，试图证明以太(ether)的存在.

1862 年，傅科(Jean-Bernard-Leon Foucault，1819～1869，法国，长期与斐索合作)，用旋转棱镜(或反射镜)的方法，测得光速为(298000±500)km/s，且发现在水中光的传播速度比真空(空气)中低.

1928 年，卡娄拉斯(August Karolus，1893～1972，德国)和米太斯塔德(Otto Mittelstaedt)首先提出利用克尔盒法来测定光速.

1972 年，埃文森测得了目前真空中光速的最佳数值：(299792457.4±0.1)m/s[①].

除在波粒之争中的作用之外，光速的测定本身在光学的研究历程中也有着重

① 参见 Evenson K M，Wells J S，Petersen F R，et al. Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabi-lized laser. Phys. Rev. Lett.，1972.(29)：1346～1349.

要的意义.但是,对光的波动学说的建立起到决定性作用的还是光的干涉实验.

1801 年,托马斯·杨(Thomas Young,1773～1829,英国)在光通过双孔的实验中,首次观察到了与水波的干涉现象相似的光的干涉现象.光经过双孔后,由于干涉,光能量在空间重新分布,出现了一系列明暗相间的条纹.这一实验称为杨氏干涉.杨氏干涉实验证明了光的波动性.

托马斯·杨进行光的干涉试验,第一次提供了测定波长的方法.法国科学家菲涅耳(Augustin～Jean Fresnel)在 1817 年向巴黎科学院提交的论文中,阐述了用波动理论对衍射的分析,获得成功.其后,德国物理学家夫琅禾费(Joseph von Fraunhofer,1787～1826)对太阳光谱作了认真的检验,并向慕尼黑科学院展示了他自己绘编的太阳光谱图(后来被称作夫琅禾费线),另外他还发明了衍射光栅.此后,人们逐渐对光谱的性质重视起来.

1859 年,基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff,1824～1887,德国)对光谱进行了深入研究,他发现了物体吸收和发射本领之间的联系.他和本生(Robert Wihelm Bunsen,1811～1899,德国)研究了各种火焰光谱和火花光谱,并在研究碱金属的光谱时发现了铯和铷.他们发明了为光谱学的蓬勃发展打下坚实基础的光谱分析,发明了光谱的可见光部分、紫外部分和红外部分的光谱学测量方法.随后,用光谱方法人们又发现了几种金属元素.光谱分析对鉴定化学成分的巨大意义,使光谱研究工作迅速发展.1868 年,埃格斯特朗(Anders Angström,1814～1874,瑞典)发表了“标准太阳光谱”,记有上千条夫琅禾费线的波长,数字十分精确,为光谱工作者提供了极有价值的资料.

在这一形势下,许多物理学家都试图寻求光谱的规律.1884 年,瑞士的一位中学数学教师巴耳末(Johann Jakob Balmer,1825～1898)报告了他发现的氢光谱公式,这就是著名的巴尔末公式,正是由于这个公式的启发,使玻尔提出了著名的氢原子模型.从此光谱规律陆续总结出来,原子光谱逐渐成为了一门系统的学科.

1865 年,麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831～1879,英国)提出光的电磁波理论,后来光被证实是电磁波.

至此,光的波动学说建立起来,形成了一个完整的理论体系.在那个年代,物理学的其他分支,如力学、热学、电磁学也已经有了完备的理论体系,以至于很多著名的物理学家,都认为物理学不可能再有新的突破.然而,两个光学实验改变了这一局面:一个是关于黑体辐射的研究;另一个是迈克耳孙测量光速的试验.

黑体辐射早就有了很精确的实验结果,但是,当人们试图用物理学的理论对这一结果进行解释时,却遇到了难以逾越的障碍,这一情况当时被称作“紫外灾难”,由于已有的理论无法解释黑体在短波段的辐射规律,物理学似乎面临着灭顶之灾.在这一时期,1887 年,赫兹(Heinrich Rudolf Hertz,1847～1894,德国)发现了光电效应,光电效应同样也无法用已有的理论进行解释.1900 年,普朗克提出了能量分立的谐振子假说,解决了黑体辐射的“紫外灾难”,1905 年,爱因斯坦用光量子的学说,成功地解释了光电效应.

从1887年起，当迈克耳孙(Michelson，1852～1931)和莫雷(Morley，1838～1923)测量了光在通过以太沿着地球运动的方向与地球方向成直角的速度，发现光的速度都是一样的，迈克耳孙因此认为这个结果表明以太是随着地球运动的.可是1893年洛奇(Lodge，1851～1940)在伦敦发现，光通过两块快速转动的巨大钢盘时，速度并不改变，表明钢盘并不把以太带着转.恒星的光行差也显示以太并不随着地球转动，这样一来，那种认为空间弥漫着一种物质以太可以传递光波振动的见解，就因迈克耳孙和莫雷的实验结果而被人放弃了.这一实验导致后来爱因斯坦在1905年提出了相对论.

量子理论和相对论的提出，标志着现代物理学的建立.在现代物理学建立的过程中，光学发挥了巨大的作用，功不可没.所以我们说，光学是经典物理学向现代物理学发展和过渡的纽带和桥梁.

必须强调的是，尽管光的量子理论已经完全确立，但是几何光学和波动光学并没有没落，相反，即使到目前，它们都在不断发展，无论是基础理论还是实际应用，都取得了很大的成就.

几何光学理论，最初仅仅用于平面和球面成像，现在，各种非球面的消像差成像镜头获得了越来越广泛的应用.

从20世纪三四十年代起，波动光学在衍射和光信息处理领域中获得了极大的发展：相衬方法(1935年)和全息术(1945年)发展起来；近场光学也获得了广泛的应用；利用电光和磁光效应，研制出了大量的光电子器件；结合了波动光学和量子理论的激光更是极大地改变了我们的生活.

光电子学、光子学、非线性光学等许多基于波动光学和量子光学的新学科也获得了飞快的发展.

四、光学的特色与研究方法

1. 物理学离我们有多近

物理学是一门自然科学，而且是一门非常重要的基础科学.我们在中学阶段已经学过了物理学中关于力学、热学、光学和电磁学的内容，现在在大学里又要学习，而且在许多著名的大学，物理学是作为一门公共必修课来学的.也就是说，物理学是必须学习和反复学习的.这是为什么？

让我们先来看看一个简单的例子.计算机是集合了最先进科技的产品.如果对计算机的硬件加以简单的分析，我们将得到如下结论：

首先看CPU和内存，它们是超大规模集成电路.要实现超大规模集成电路，从材料上说，要有半导体，而人们认识和发现半导体，是量子力学的结果.从制备工艺上说，要有超微细的光刻，即利用激光或X射线对材料加工，而激光和X射线也都离不开量子力学.

再看磁盘，当然是磁性材料，是磁学的成果.光盘是光电子学的成果.显示器的扫描电子束和荧光粉也都是物理学的成果.

也就是说，计算机的绝大部分都是物理学的成果. 没有物理学，特别是没有量子力学，是不会有计算机的. 单从这一点来看，物理学在社会的发展和我们的生活中充当了多么重要的角色. 在现代社会中，认为物理学是一门纯粹的基础科学，离我们的生活很遥远的说法显得多么幼稚！

2. 物理学的研究方法

1）物理学是一门实验科学

物理学是一门实验科学，因为物理学的研究对象是实实在在的物质，而不是抽象的逻辑. 所以必须通过观察得到结论. 一切结论都是建立在物理实验的基础之上的，而且一切结论都必须经过实验的检验，光学也不例外.

2）物理学的理论体系

牛顿发表于 1686 年的《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)，被认为是物理学的基石和建立的标志. 从那时起，物理学的科学体系开始建立，物理学的研究对象被确定，物理学的研究方法逐步完善.

仅仅从该书的名字中我们可以得到如下启示：

物理学的研究对象——自然的原理，物理学是自然哲学.

物理学的理论体系——数学，用严格的数学逻辑阐述、推导和研究物理学的规律.

可以说，物理学就是将自然界的原理用数学理论加以阐述的科学体系，当然，这些原理都是建立在实验的基础之上的.

3）物理模型

物理学中，为了概括事物的本质和特征，需要建立研究对象的模型. 所谓模型，就是模拟真实的一种形象化的构型. 如质点、原子、电子等，都是对真实的模拟. 有了模型，就可以对研究对象的特征进行描述、加以数学上的分析和推导，从而很容易得出新的结论. 所得到的结论同实验上的结果进行对比，如果一致，说明模型是正确的，即“自洽”；否则，就要对模型进行修正. 光学的发展过程正体现了这一特点. 从“光线”模型，到“光波”模型，再到“光子”模型，对光的认识越来越深入，对光的描述越来越准确. 所以说，新模型的建立，标志着新理论的建立，模型不断被修正，标志着物理学不断发展、前进.

第 1 章　光的波动模型

1801 年，托马斯·杨在光通过双孔的实验中，首次观察到了与水波的干涉现象相似的光的干涉现象，即光经过双孔后，由于干涉，光能量在空间重新分布，显示为明暗交错的条纹，这些条纹被称作干涉条纹. 这一实验称为杨氏干涉，杨氏干涉证明了光的波动性.

后来人们又观察到了光的衍射及偏振现象，由此建立了波动光学.

1865 年，英国物理学家麦克斯韦总结出了关于电磁场规律的方程组，提出了电磁波理论. 根据这一理论，可以得出电磁波的传播速度为 $v=1/\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}$. 当时，德国物理学家韦伯(Wilhelm Eduard Weber，1804～1891)等通过测量磁导率和介电常量，计算所得出的电磁波的速度竟然与已经测量到的光的速度相一致，麦克斯韦推测光就是电磁波. 1887 年，德国卡尔斯鲁厄工学院(Karlsruhe Polytechnic)教授赫兹(Heinrich Rudolf Hertz，1847～1894)利用自己发明的探测器和振荡器，研究了波长足够短的电磁波的反射、折射等物理性质，实验结果显示这些性质与光相同. 麦克斯韦的推测被赫兹的实验所证实，而此时麦克斯韦已去世 8 年.

1.1　光　波　场

1.1.1　光是交变电磁场

光是电磁波，这是当今公认的结论，或者说，光是电磁辐射频谱的一段，如图 1.1.1 所示. 我们所说的光，通常是指可见光(visible light)，即波长在 400～760nm 的一段电磁辐射. 在光学中，研究的范围通常还包括波长较长的红外光(infrared light，IR)和波长较短的紫外光(ultraviolet light，UV).

波反映了一些力学量(物理量)在空间的分布. 例如，对于我们所熟悉的机械波来说，就是由于机械振动在空间的传播所引起的波动，与空间各点振动相关的力学量，就是质点偏离平衡位置的位移(displacement)、振幅(amplitude)、频率(frequency)或周期(period)、相位(phase)等. 这些物理量(力学量)在空间的分布，可以用场的概念来描述. 所以，波与场是等价的物理概念. 或者说，我们既可以从振动的传播这一观点看待波，也可以从场，即物理量在空间的分布这一观点看待波.

从物理本质上看，光是电磁波，就是与电场和磁场有关的物理量在空间的分布，这些物理量包括电场强度(electric field intensity)矢量、磁感应强度(magnetic induction intensity)矢量等. 而且，这些物理量的量值是随着时间而变化的. 所以，光或者光波，就是交变的电磁场. 光波的物理特征，以及光波与物质的相互作用，都

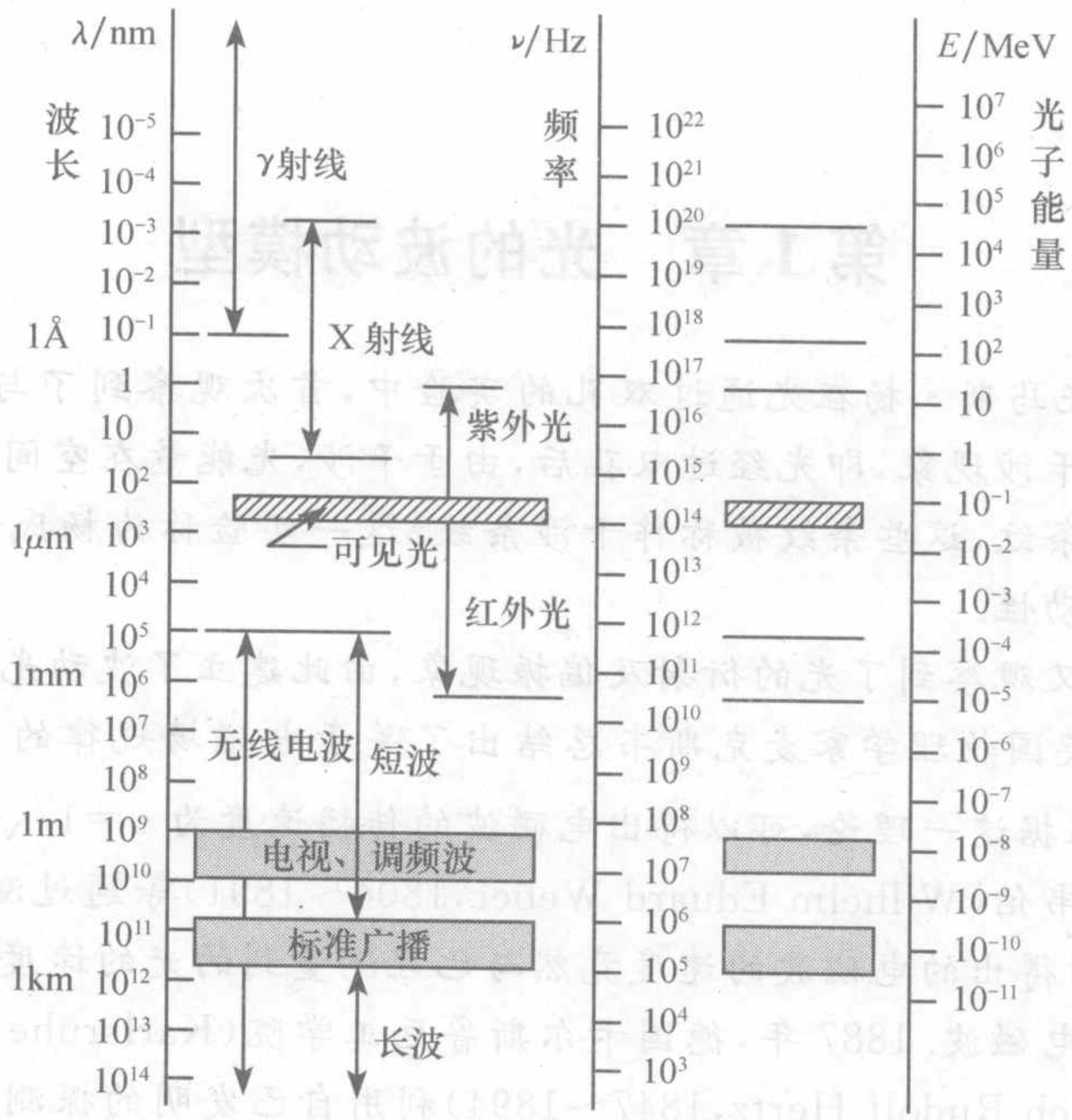


图 1.1.1 电磁辐射谱

可以用电磁理论描述.

从一般意义上看,光波与机械波或者普通的电磁波(即通常所说的无线电波)之间有许多共同的规律,因而,我们可以直接将力学或电磁学中的某些结论用于对光波的理解和描述.

1.1.2 光波场的周期性

周期性是波动的基本特征,其所反映的就是物理量随时间的周期性变化或在空间的周期性分布.虽然我们常说波是由振动(机械振动、电磁振动等)所引起的,但波的周期性与振动的周期性是不同的.

1. 波的时间周期性

在波场中的每一点,都有扰动.对于机械波来说,这种扰动就是机械振动,即质点的位置(r)或位移(Δr)呈周期性的变化;对于电磁波,这种扰动就是该点的电场强度($\boldsymbol{E}$,通常称作电场分量)、磁感应强度($\boldsymbol{B}$,通常称作磁场分量)呈周期性的变化.这种变化是随时间的变化,可以用周期 T 或者频率 ν($\nu=1/T$)来表示.如果用坐标图表示,则横轴就是时间坐标,纵轴就是相应的物理量.这是波场的时间周期性.这种时间周期性就是(波场中每一点)振动的周期性.波场中的某一点 z 如果做简谐振动,则其时间的周期性可以用图 1.1.2 表示.

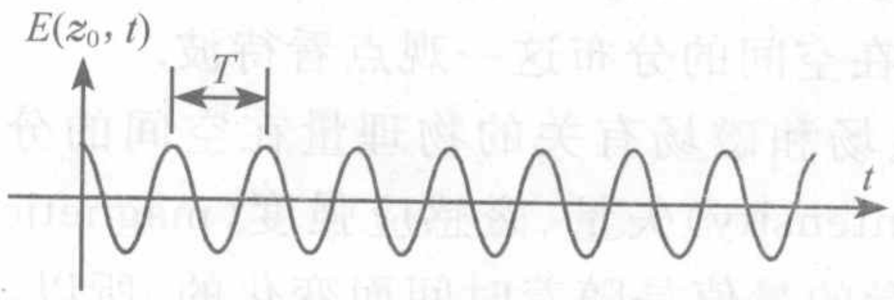


图 1.1.2 波的时间周期性

2. 波的空间周期性

对于整个空间或整个波场而言，物理量是作周期性分布的，即间隔一定空间距离的点，其位移(对于机械波)、电场强度、磁感应强度(对于电磁波)等物理量都有相同的量值. 这种周期性就是空间的周期性，是反映波场特征的最基本物理参数. 反映这种周期性的物理量是波长 λ(wavelength)，或者波长的倒数，记作 $\tilde{\nu}$ $\left(\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}\right)$，称作波数(wave number)，就是空间周期性的频率. 如果用坐标图表示，则横轴就是空间的位置或距离，纵轴就是相应的物理量. 正弦波(波场中各点都是同频率、同振幅的简谐振动)的空间周期性可以用图 1.1.3 表示.

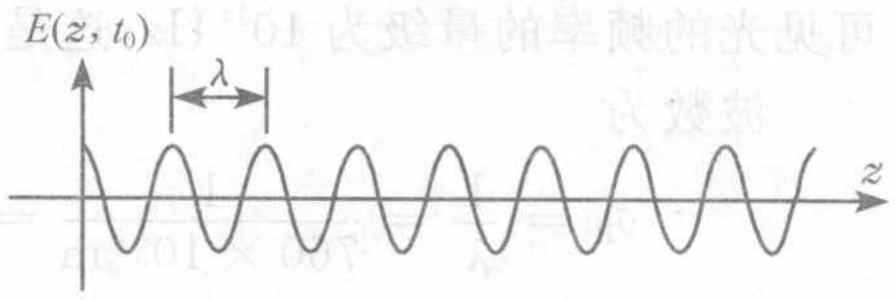


图 1.1.3　波的空间周期性

所以，光或者光波场，或者一般的波或波场，同时具有时间和空间两重周期性. 而实际上，由于受表达方式的限制，上述图 1.1.2 和图 1.1.3 都是对波场特征的不完整描述，只是分别反映了波场中某一点(图 1.1.2)以及某一时刻(图 1.1.3)波场的特征.

由此也可以认识到，波的数学表达式，必须能够同时反映这两重周期性. 或者说，波的数学表达式必须是时间和空间的周期性函数. 例如，沿 $+z$ 方向传播的正弦波，设在原点初相位为 0，可以用余弦函数表示为

$$E(z,t)=E_0(z)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{v}\right)=E_0(z)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right) \tag{1.1.1}$$

其中，T 为波场中每一点随时间振动的周期，v 为波的传播速度，λ 为波长.

或者

$$E(z,t)=E_0(z)\cos(\omega t-kz+\varphi_0) \tag{1.1.2}$$

也可以用复指数表达式表示为

$$E(z,t)=E_0(z)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\omega t-kz+\varphi_0)} \tag{1.1.3}$$

其中，φ_0 为这列波的初相位(initial phase)，即零时刻($t=0$)、原点($z=0$)的相位.

在式(1.1.2)、式(1.1.3)中

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.1.4}$$

$$\omega=2\pi\nu \tag{1.1.5}$$

由于波数 $\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}$ 所表示的是波的空间频率，即波在单位空间长度内的周期数，因而，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 表示的就是空间 2π 个单位长度内波的周期数，因而 k 也称作圆波数(circular wave number)或角波数(angular wave number)；频率 ν 表示单位时间内波振动的次数，则 $\omega=2\pi\nu$ 表示 2π 个单位时间内波振动的次数，所以 ω 也称作圆频率(circular frequency)或角频率(angular frequency).

例 1.1.1 计算可见光的频率范围，及其在真空中的波数.

解 真空中可见光波长 λ 的范围为 400～760nm，光速 c 为 $3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，于是由 $\nu=\dfrac{c}{\lambda}$ 可得

$$\nu_R=\frac{3\times10^8\,\mathrm{m/s}}{760\times10^{-9}\,\mathrm{m}}=3.9\times10^{14}\,\mathrm{Hz},\quad \nu_V=\frac{3\times10^8\,\mathrm{m/s}}{400\times10^{-9}\,\mathrm{m}}=7.5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

可见光的频率的量级为 $10^{14}\,\mathrm{Hz}$，这是一个非常高的频率.

波数为

$$\tilde{\nu}_R=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{760\times10^{-9}\,\mathrm{m}}=1.32\times10^6\,\mathrm{m^{-1}}=1.32\times10^4\,\mathrm{cm^{-1}}$$

$$\tilde{\nu}_V=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{400\times10^{-9}\,\mathrm{m}}=2.5\times10^6\,\mathrm{m^{-1}}=2.5\times10^4\,\mathrm{cm^{-1}}$$

习惯上，波数的单位常采用 $\mathrm{cm^{-1}}$，$1\mathrm{cm^{-1}}$ 称作 1 个波数.

1.1.3 定态光波

一般的机械波或电磁波(包括光波)都是非常复杂的，这种复杂性可以从两方面来分析：

第一，波源的复杂性. 来自不同扰动源的多列波在空间同时存在，各个波源的特征互不相同，而且通常每一个波源的扰动特征也非常复杂，因而使整个波场的振动情况非常复杂.

第二，空间的复杂性. 波场中的介质分布往往非常复杂，因而波与介质的相互作用也非常复杂，而且，即使是同一种介质，与不同波长、不同振幅的波也有不同的作用，因而也使波场的特征变得非常复杂.

但是，从应用的角度看，人们总是设法避免上述复杂的情形，而是设法在特定的条件下利用自然现象. 因而，我们必须从中找出最具有典型特征同时又是最简单的波进行研究.

光学中研究的问题大多是无源场的问题，或者说是在自由空间中研究光的特征，波场中没有电荷或电流分布. 而且总是在有限的时间和空间中对光进行研究，如光电探测器的响应时间可以达到纳秒(ns，10^{-9} s)、皮秒(ps，10^{-12} s). 因而，引出了定态光波(stationary wave)的概念.

具有下述性质的波场称为定态波场：

(1) 波场空间中，各点的扰动是同频率的简谐振动，即波场中各点具有相同的振动频率 ν.

(2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间形成一个稳定的振幅分布. 即波场中各点的振幅，只与空间位置有关，而与时间无关.

如果光波电矢量(即电场强度矢量)的表达式为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，对于定态光波，振幅与时间无关，则振幅可以写作 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ 或者 $\boldsymbol{E}_0(P)$，其中 $\boldsymbol{r}$ 为空间点 P 的位矢(position vector). 又由于波场中各点的振动频率相同，则每一点都做简谐振动，于是

每点的振动都可写作 $\cos[\omega t-\varphi(P)+\varphi_0]$的形式，其中 $\varphi(P)$是相位中只与空间位置有关的部分，称作空间相位. 则一个定态光波场的表达式可以写作

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\omega t-\varphi(P)+\varphi_0] \tag{1.1.6}$$

或者简单地写作

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}[\varphi(P),t] \tag{1.1.7}$$

满足上述要求的光波应当充满全空间，即空间各点都有相同频率的简谐振动，这就是无限长的单色波列. 而实际上这样的光波是无法得到的. 但是，当波列的持续时间比其扰动周期长得多时，可将其当作无限长的波列来处理.

任何复杂的非单色波(nonmonochromatic wave，或者 nonmonochromatic light)都可以分解为一系列单色波(monochromatic wave，或者 monochromatic light)的叠加.

需要指出的是，正弦波是一种最简单的定态光波，但定态光波不仅限于正弦波，波场空间各点的振幅可以不同.

1.1.4　光是矢量波

光是电磁波，因而是一种矢量波(vector wave)，电场分量、磁场分量、波的传播方向，都是矢量. 应该用矢量描述光波的物理特征.

波的传播方可以用一个矢量表示，这就是波矢(wave vector)，如图 1.1.4 所示. 波矢的定义如下：

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s} \tag{1.1.8}$$

其中，λ 为光的波长，$\boldsymbol{s}$ 为光的传播方向上的单位矢量. 即波矢的方向为波的传播方向，数值为$\frac{2\pi}{\lambda}$，就是式(1.1.4)所定义的 k.

光波是横波，在真空和各向同性介质中，电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$、波矢 $\boldsymbol{k}$ 是两两正交的，而且电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 是同相位(即同步)的，如图 1.1.5 所示.

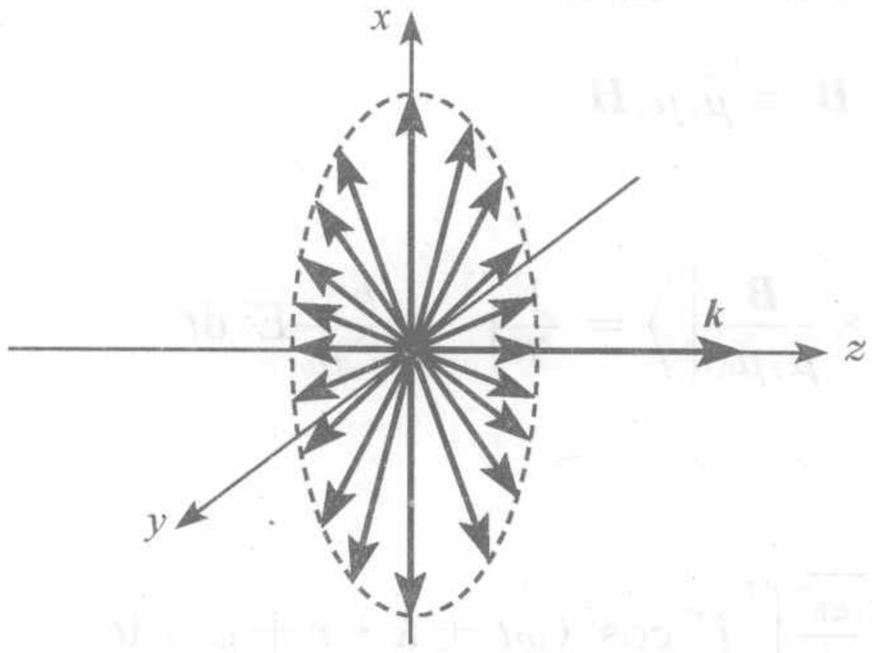


图 1.1.4　波矢

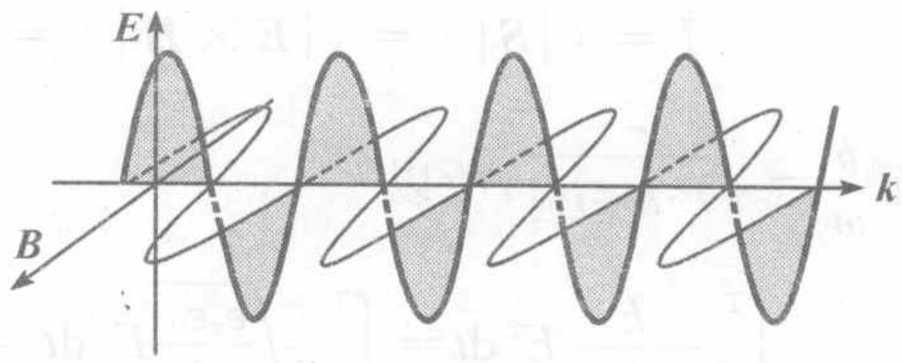


图 1.1.5　光波是横波

电场分量的振幅、磁场分量的振幅、波长、频率等是标量.

简单的平面波(planar wave)和球面波(spherical wave)的矢量表达式如下：

平面波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)} \tag{1.1.9}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)} \tag{1.1.10}$$

球面波

$$\boldsymbol{E}(r,t) = \frac{\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r})}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr+\varphi_0)} \tag{1.1.11}$$

$$\boldsymbol{B}(r,t) = \frac{\boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{r})}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr+\varphi_0)} \tag{1.1.12}$$

1.1.5 光强

电磁场具有能量，而且传输能量，电磁场的能量可以用能流密度(energy flux density)描述.

能流密度指单位时间内通过垂直于传播方向单位面积的能量.

由上述定义可以看出，能流密度实际上是一个矢量，其方向表示电磁场能量传输的方向. 由电磁学理论，可以得到

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1.1.13}$$

$\boldsymbol{S}$ 称为坡印廷矢量(Poynting vector). 也可以用电磁波的能量密度 w 和波的速度 v 表示为

$$S = wv = \frac{v}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

由于光具有极高的时间频率，所以在实验中所测量到的实际上总是在一定时间内能流密度的平均值. 光的强度(光强，intensity of light)是光波场平均能流密度的绝对值，就是平均坡印廷矢量的绝对值，按照电磁理论，为

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle = \langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle \tag{1.1.14}$$

例如，对于各向同性无源介质中的简谐平面波，利用

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t\pm\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)},\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t\pm\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)},$$

$$\boldsymbol{B} = \pm\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B} = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0\boldsymbol{H}$$

得到

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle = \langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle = \left\langle\left|\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}\right|\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{k}{\omega\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}E^2\,\mathrm{d}t$$

而 $\dfrac{k}{\omega} = \sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}$，所以

$$\int_0^T\frac{k}{\omega\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}E^2\,\mathrm{d}t = \int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}}E^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}}\int_0^T E_0^2\cos^2(\omega t\pm\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0}}\,\frac{T}{2}E_0^2$$

即

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2=\frac{1}{2\mu_r\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r\mu_0\varepsilon_0}E_0^2=\frac{n}{2c\mu_r\mu_0}E_0^2 \tag{1.1.15}$$

其中，n 为介质的折射率(refractive index)．在可见光范围中，一般情况下介质的磁导率(magnetic permeability)$\mu_r\approx1$，故

$$I\approx\frac{n}{2c\mu_0}E_0^2 \tag{1.1.16}$$

如果不考虑光强的量纲，而只关心其相对数值，则可略去式中的物理学常数 c 和 μ_0，得到

$$I\propto nE_0^2 \tag{1.1.17}$$

如果光只是在同一种介质中传播，通常取

$$I=E_0^2 \tag{1.1.18}$$

即可以用电场分量振幅的平方表示光强．这里需要指出的是，E_0^2 的量纲与光强的量纲不同，两者是不相同的，在光学中以振幅的平方 E_0^2 代表光强，只是反映了光强与振幅之间的关系，可以在相同的条件下比较光的相对强度．实际上应该用下式表示：

$$I\propto E_0^2 \tag{1.1.19}$$

例 1.1.2　一台 3kW 的 CO_2 激光器发出的光束被聚焦成直径为 10μm 的光斑，求在焦点处的光强 I 以及光场的振幅值 E_0(假设空气的折射率 $n=1$，不计光束的损失)．

解　光强

$$I=\frac{W}{\Delta S}=\frac{3\text{kW}}{\pi(10/2\mu\text{m})^2}=3.82\times10^{13}\text{J}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$$

由 $I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2$，得

$$E_0^2=2I\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=2\times3.82\times10^{13}\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}=2.88\times10^{16}$$

所以

$$E_0=1.70\times10^8\text{V/m}$$

在可见光波段，多数透明介质的磁导率 $\mu_r\approx1$，即电磁波的磁场分量通常不会导致介质物理性质的改变，因而，只要研究光波的电场分量即可，光的电场强度，也称作光矢量．

1.1.6　光的传播

光的传播，就是将光波场中物理量的振动从空间的一点传播到另一点．例如，对于正弦波 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}$，就是将其电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$(电场分量)从空间的某一点传播到另一点．在没有吸收等其他损耗的情况下，就是将该物理量以不变的量值传播．而该物理量的值取决于波场的相位 $\varphi(z,t)=kz-\omega t+\varphi_0$，即波场的量值由相位决定，所以也可以说振动的传播其实就是相位的传播，在振动传播的过程

中，相位保持不变.

例如，在 t 时刻，空间点 z 处的物理量 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 经过时间 Δt 后，传播到了空间另一点 $z'=z+\Delta z$，如图 1.1.6 所示，则振动传播的表达式可以写作

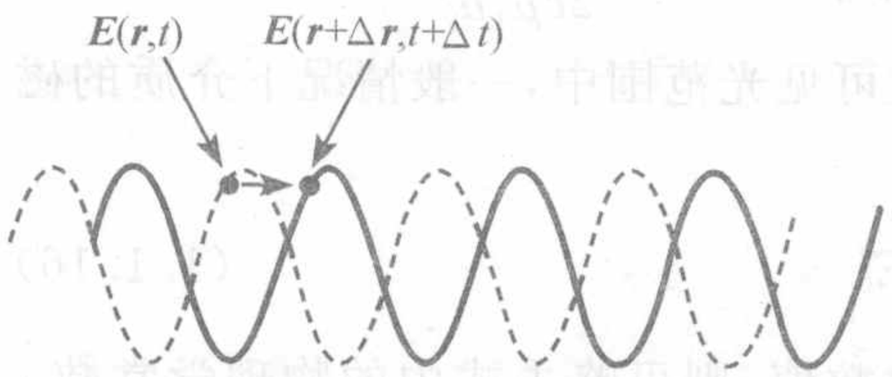


图 1.1.6 振动与相位的传播

$$\boldsymbol{E}(z',t')=\boldsymbol{E}(z,t) \tag{1.1.20}$$

或

$$\varphi(\boldsymbol{r}',t')=\varphi(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.21}$$

即

$$z(z+\Delta z)-\omega(t+\Delta t)+\varphi_0=kz-\omega t+\varphi_0$$

整理得到

$$k\Delta z-\omega\Delta t=0$$

即

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega}{k}$$

而 $\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 就是物理量 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 在空间传播的速度，或者振动传播的速度，即波速.

所以

$$v=\frac{\omega}{k} \tag{1.1.22}$$

表示沿 $+z$ 方向传播的正弦波的速度. 由于式(1.1.22)反映了相位传播的速度，所以也称作相速度(phase velocity).

值得注意的是，如果波的表达式为 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz+\omega t+\varphi_0)}$，则得到

$$v=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{k} \tag{1.1.23}$$

表示沿 $-z$ 方向传播的正弦波.

例 1.1.3 设有两个一维简谐平面波的波函数为

$$E_1(z,t)=4\cos 2\pi(3t-0.2z),\quad E_2(z,t)=\frac{1}{2.5}\cos(3.5t+7z)$$

其中，位移以 cm 为单位，时间以 s 为单位，距离以 m 为单位，试分别求它们的振幅、频率、周期、波长、相速度、传播方向.

解 波的表达式为

$$E(z,t)=A\cos(\omega t\pm kz+\varphi_0)$$

对于 $E_1(z,t)=4\cos 2\pi(3t-0.2z)$，有

(1) 振幅 $A=4\mathrm{cm}$;

(2) 频率 $\nu=3\mathrm{Hz}$;

(3) 周期 $T=\frac{1}{\nu}=0.33\mathrm{s}$;

(4) 波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{1}{0.2}=5(\mathrm{m})$;

(5) 相速度　$v_P=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{3}{0.2}=15(\mathrm{m/s})$;

(6) 波的传播方向　$+z$

同样,对于 $E_2(z,t)=\dfrac{1}{2.5}\cos(3.5t+7z)$,有

(1) 振幅　$A=\dfrac{1}{2.5}\mathrm{cm}=0.4\mathrm{cm}$;

(2) 频率　$\nu=\dfrac{3.5}{2\pi}=0.557(\mathrm{Hz})$;

(3) 周期　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=0.180(\mathrm{s})$;

(4) 波长　$\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{7}=0.9(\mathrm{m})$;

(5) 相速度　$v_P=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{3.5}{7}=0.5(\mathrm{m/s})$;

(6) 波的传播方向　$-z$.

1.2　定态光波的数学表示

1.2.1　矢量表示与标量表示

光是矢量波,电场分量、磁场分量、波的传播方向(波矢),都是矢量,应该用矢量描述光波的物理特征,则有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

但是,用矢量描述光波,给数学上的计算和推导都带来了许多不便. 而事实上,由于光源的发光机制,在多数情况下,尤其是在真空和各向同性介质中,光波电矢量在横向、即垂直于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向上是均匀和对称的,因而在上述于波矢垂直的平面中任意选定一个方向之后,电矢量在这一方向的特征与其他方向并没有区别,所以只需要用标量对波的特征进行描述即可. 即使电矢量的分布是非对称的,通常也可以采用正交分解的方法,得到 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z$,对于各个分量 E_x、E_y 和 E_z,都可以用标量表示,如图 1.2.1 所示.

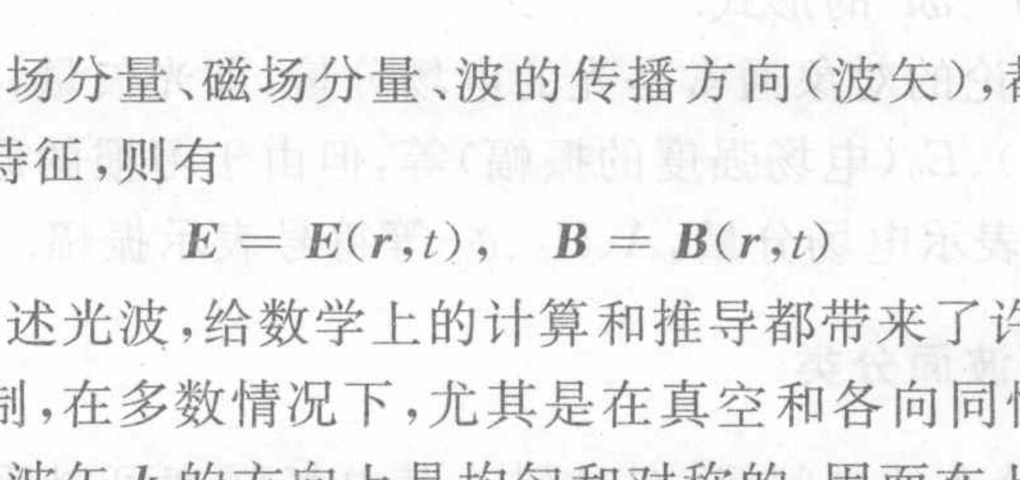


图 1.2.1　光波振动矢量的对称性和正交分解

因而，在光学中，用标量方法处理矢量波，是一种常用的手段. 当采用标量表达式处理光波时，有时也将研究对象称作“标量波”(scalar wave).

1.2.2 定态光波的描述

对符合上述条件的定态光波，如果不考虑其偏振性，即假设在空间某一点 P，垂直于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的平面内，其电场分量在各个方向都是相同的，则通常用标量表达式描述. 这样做，其实是在一个取定的平面内描述定态光波在某一方向上的振动. 其标量式可以用余弦函数表示为

$$E(P,t) = E_0(P)\cos[\varphi(P) - \omega t] \tag{1.2.1}$$

P 表示空间中的任一点，则 $E_0(P)$ 是振幅的空间分布，$\varphi(P)$ 是相位的空间分布，均与时间 t 无关.

由于余弦函数是偶函数，所以也可以表示为

$$E(P,t) = E_0(P)\cos[\omega t - \varphi(P)] \tag{1.2.2}$$

在不同的光学教材和光学著作中，光波余弦表达式的形式往往不同，例如，在一维情形，波函数可按式(1.1.2)写作 $E(z,t)=E_0(z)\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$，也可按式(1.1.3)写成复数形式 $E(z,t)=E_0(z)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\omega t-kz+\varphi_0)}$. 通常指数取负号，则变为 $E(z,t)=E_0(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\varphi_0')}=E_0(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(z)-\omega t]}$. 因此其相位或者为 $\varphi(P)-\omega t$，或者为 $\omega t-\varphi(P)$. 为了与光波的后面引入的光波的复振幅表达式一致，以后本书中光波的相位多采用 $\varphi(P)-\omega t$ 的形式.

在光学中，所讨论的对象通常是光的电场分量，即光矢量，所以在表达式中，应当记作 E(电场强度)、E_0(电场强度的振幅)等，但由于习惯的原因，在许多文献中，往往用 U、ψ 等符号表示电场分量，A、U_0、ψ_0 等符号表示振幅.

1.2.3 定态光波按波面分类

光波场是三维分布的空间场，在时刻 t，其电场强度可以用矢量式表示为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z,t)$，空间任意点 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 处，有一个确定的电场强度；或者，对于定态光波，可以用电场强度表示为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0]$. 可以看出，在某一时刻 t，电场的特征由空间相位 $\varphi(P)$ 决定. 即空间相位相等的地方，电场强度，即电矢量值和变化趋势相同. 因而引入了波面(wave surface)的概念.

定态光波场，空间中相位 $\varphi(P)$ 相同的点所组成的平面或曲面，这是光波的等相位面(cophasal surface，surface of constant phase)，称作波面或波阵面.

可根据波面的形状将定态光波做简单的分类.

具有相同相位的空间点应满足下述方程(在相同时刻)

$$\varphi(P) = \text{const.} \tag{1.2.3}$$

场点 P 可以用直角坐标表示为 $P(x,y,z)=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$；或者用球坐标表示为 $P(r,\theta,\varphi)$；或者用柱坐标表示为 $P(r,z,\varphi)$.

1. 平面波(波面是平面)

平面波(plane wave)具有下列特征：

(1) 振幅 $A(P)$为常数；

(2) 空间相位 $\varphi(P)$为直角坐标的线性函数，即

$$\varphi(P) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0 \tag{1.2.4}$$

常数 φ_0 为初相位，即时刻 $t=0$ 时原点的相位.

波的余弦表达式为

$$E(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) \tag{1.2.5}$$

波面的条件为 $\varphi(P)=\text{const.}$，即

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = \text{const.}$$

上式表示与波矢垂直的一系列平面，如图 1.2.2 所示.

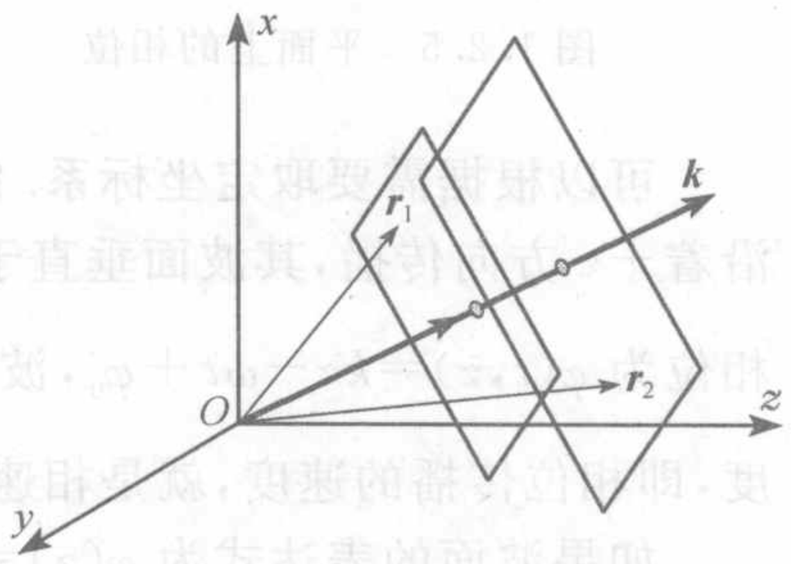


图 1.2.2　平面波

关于平面波波矢的方向角表示，在数学中常用方向余弦表示矢量的方向，即用矢量与坐标轴间的夹角的余弦表示.

波矢的方向可以表示为(α,β,γ)，其中的三个角度分别是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x,y,z 轴的夹角.则波矢可以用矢量式表示为

$$\boldsymbol{k} = k(\cos\alpha \boldsymbol{e}_x + \cos\beta \boldsymbol{e}_y + \cos\gamma \boldsymbol{e}_z) \tag{1.2.6}$$

在光学中，我们习惯上用上述三个角的余角表示波矢的方向，即 $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$，$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \beta, \theta_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma$. 则$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$就分别是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 yOz、xOz 和 xOy 三个坐标平面的夹角(图 1.2.3、图 1.2.4).

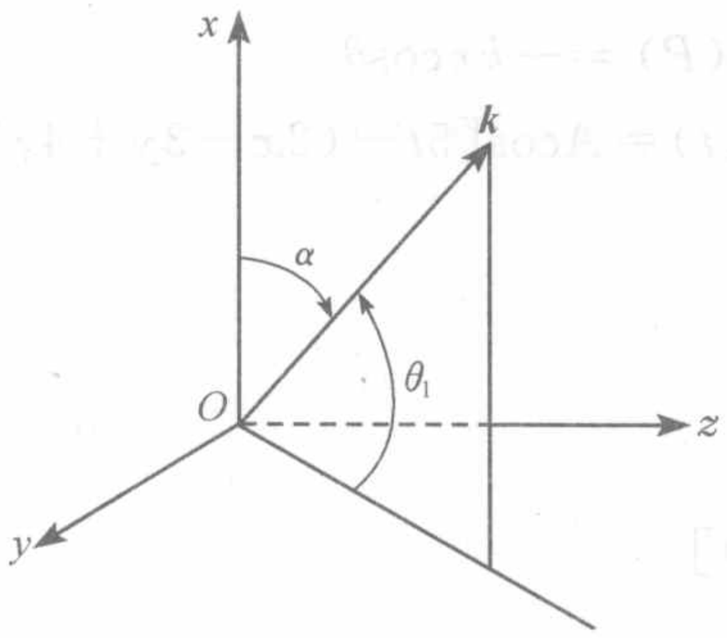


图 1.2.3　用方向余弦角或与平面间的角表示波矢

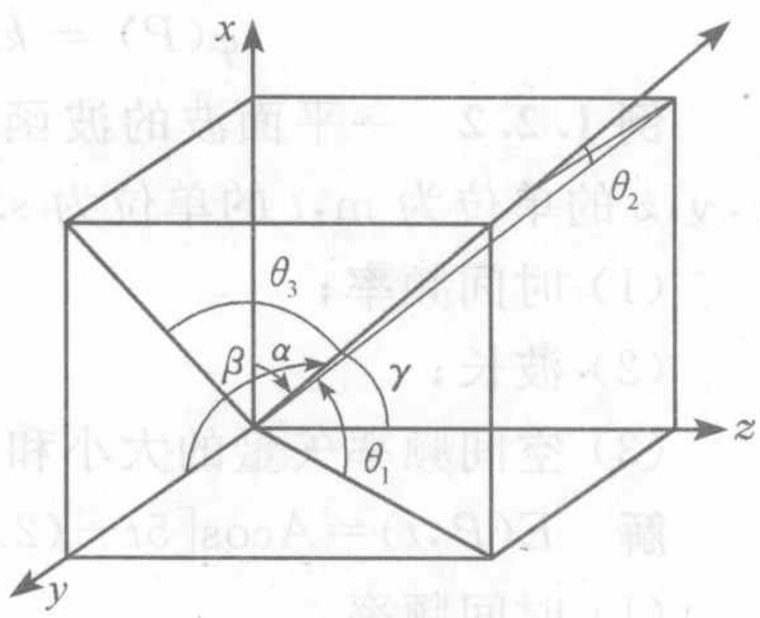


图 1.2.4　波矢的方向表示

则上述波矢表示式变为

$$\boldsymbol{k} = k(\sin\theta_1 \boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_y + \sin\theta_3 \boldsymbol{e}_z) \tag{1.2.7}$$

空间点 $P(x,y,z)$处的相位为

$$\varphi(x,y,z) = k(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2 + z\sin\theta_3) + \varphi_0 \tag{1.2.8}$$

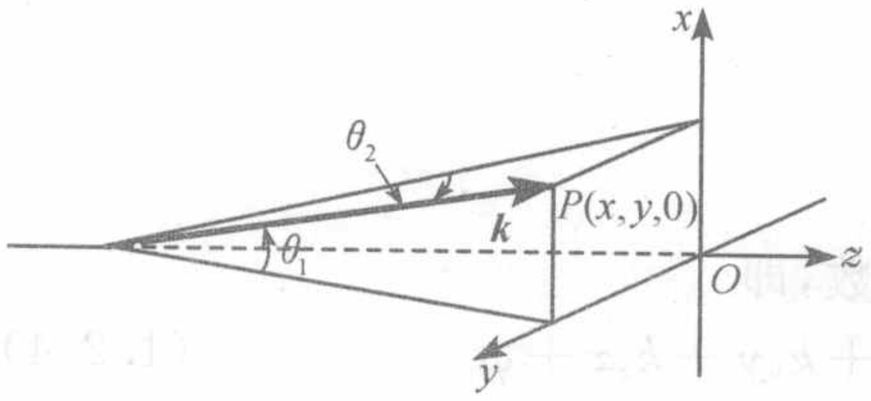


图 1.2.5 平面上的相位

由于光学中的探测器或接收屏往往是一个平面，所以通常总是研究波场中一个平面上的电场分量分布或者相位分布. 可以取该平面位于坐标系中 $z=0$ 处，如图 1.2.5 所示，则该平面上的相位分布为

$$\varphi(x,y,0)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)+\varphi_0 \tag{1.2.9}$$

可以根据需要取定坐标系. 例如，通常将波矢的方向取作 $+z$ 方向，即平面波沿着 $+z$ 方向传播，其波面垂直于 z 轴. 如果在 t 时刻，坐标轴上某一点 z 处波面的相位为 $\varphi(t,z)=kz-\omega t+\varphi_0$，波面传播的速度为 $v=\dfrac{\omega}{k}$，该速度为波面传播的速度，即相位传播的速度，就是相速度.

如果波面的表达式为 $\varphi(z)=-kz-\omega t+\varphi_0$，或者 $\varphi(z)=kz+\omega t+\varphi_0$，其相速度为 $v=-\dfrac{\omega}{k}$，向 $-z$ 方向传播.

例 1.2.1 一列平面波在 xOz 平面传播，并以 θ 角入射到 xOy 平面上，如图 1.2.6 所示.

则入射波的波矢为

$$\boldsymbol{k}=k(\boldsymbol{e}_x\cos\theta+\boldsymbol{e}_z\sin\theta)$$

反射波的波矢为

$$\boldsymbol{k}'=k(-\boldsymbol{e}_x\cos\theta+\boldsymbol{e}_z\sin\theta)$$

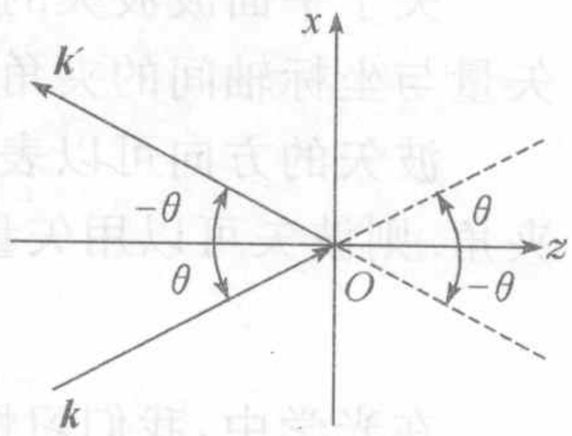


图 1.2.6 例 1.2.1 图

相位分别为

$$\varphi(P)=k(x\cos\theta+z\sin\theta) \quad 和 \quad \varphi'(P)=k(-x\cos\theta+z\sin\theta)$$

在 xOy 平面上，由于 $z=0$，则有

$$\varphi(P)=kx\cos\theta,\quad \varphi'(P)=-kx\cos\theta$$

例 1.2.2 一平面波的波函数为 $E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$，式中 x,y,z 的单位为 m，t 的单位为 s. 试求：

(1) 时间频率；

(2) 波长；

(3) 空间频率矢量的大小和方向.

解 $E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$

(1) 时间频率

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{5}{2\pi}=0.796\text{Hz}$$

(2) 波长

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=1.17\text{cm}$$

(3) 空间频率 $\tilde{\nu}=\dfrac{1}{\lambda}=0.86\text{cm}^{-1}$，方向

$$\frac{\boldsymbol{k}}{k}=\frac{2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{29}}$$

2. 球面波(波面是球面)

球面波(spherical wave)有以下两个主要的特征：

(1) 振幅

$$A(P)=\frac{a}{r} \tag{1.2.10}$$

场点 P 处的振幅与该点到波源的距离成反比，即振幅随着 r 衰减.

(2) 空间相位是球面对称的

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0 \tag{1.2.11}$$

球面波的余弦表达式为

$$E(\boldsymbol{r},t)=E_0(r)\cos(kr-\omega t+\varphi_0) \tag{1.2.12}$$

波面 $\varphi(P)=kr+\varphi_0=\text{const.}$，即 $r=$常数，代表一个球面.

球面光可以看成是从某一点光源发出的(图 1.2.7)，或是向某一点会聚的波(图 1.2.8).

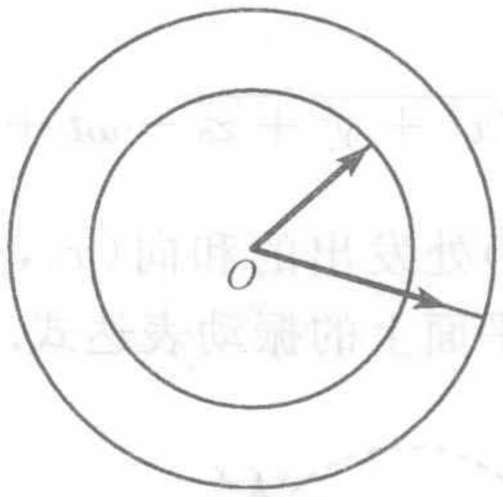


图 1.2.7　发散球面波

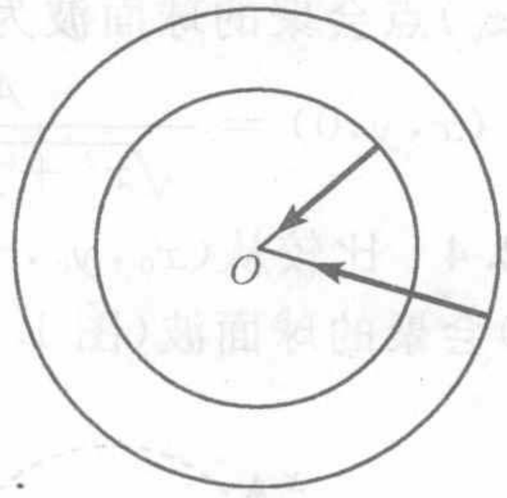


图 1.2.8　会聚球面波

例如，如果波源为 $O(0,0,0)$，波面的相位为 $\varphi(p)=kr-\omega t+\varphi_0$，沿在球面的任一法线方向，波面传播中，有

$$kr-\omega t+\varphi_0=k(r+\mathrm{d}r)-\omega(t+\mathrm{d}t)+\varphi_0$$

从原点发出的发散球面波的波面传播速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}$$

如波面表达式为 $\varphi(P)=-kr-\omega t+\varphi_0$，或 $\varphi(P)=kr+\omega t+\varphi_0$，则波面传播速度为

$$v=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{k}$$

为向中心传播的球面波，即向原点会聚的球面波.

例 1.2.3　比较从 $(0,0,-z_0)$ 和 $(0,0,z_0)$ 处发出的和向 $(0,0,-z_0)$ 和 $(0,0,$

z_0)会聚的球面波，如图 1.2.9 所示. 在 $z=0$ 平面上的振动表达式.

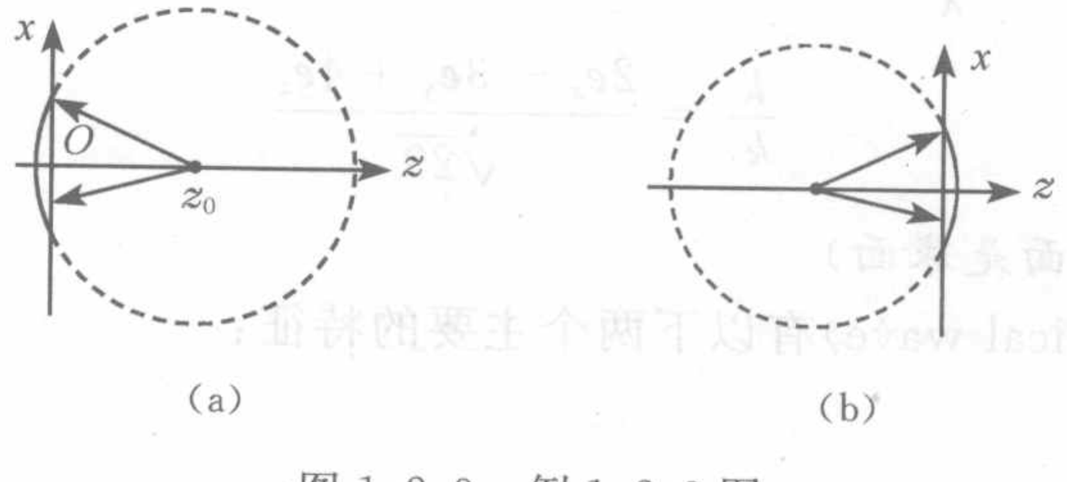


图 1.2.9 例 1.2.3 图

解 $(0,0,z_0)$出发出的球面波在$(x,y,0)$平面上的振动为

$$U_+(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0)$$

$(0,0,-z_0)$出发出的球面波在$(x,y,0)$平面上的振动亦为

$$U_-(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0)$$

向$(0,0,z_0)$点会聚的球面波为

$$U_+^*(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos(-k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0)$$

向$(0,0,-z_0)$点会聚的球面波为

$$U_-^*(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos(-k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0)$$

例 1.2.4 比较从$(x_0,y_0,-z_0)$和(x_0,y_0,z_0)处发出的和向$(x_0,y_0,-z_0)$和(x_0,y_0,z_0)会聚的球面波(图 1.2.10)在$(x,y,0)$平面上的振动表达式.

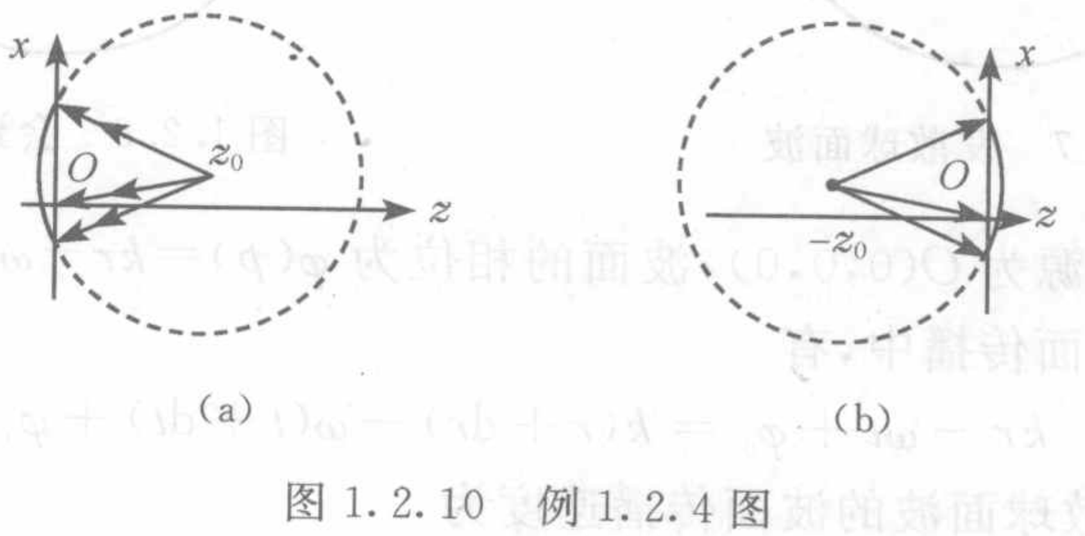


图 1.2.10 例 1.2.4 图

解 点如果点光源在$(x_0,y_0,\pm z_0)$，则发出和会聚的球面波分别为

$$U_\pm(x,y,0)$$

$$=\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}\cos[k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0]$$

$$U_\pm^*(x,y,0)$$

$$=\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}\cos[-k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0]$$

对于球面波，其在某点的振幅和相位只与该点到源点的距离 r 有关，而与场点相对于源点的方位无关，所以在球面波的表达式化简和变换的过程中，应该注意这一点.

3. 柱面波

柱面波的波面为圆柱面(图 1.2.11)，在柱坐标系中振幅和相位的特征为

(1) 振幅

$$A(P)=\frac{a}{\sqrt{r}} \tag{1.2.13}$$

(2) 相位

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0 \tag{1.2.14}$$

振动表达式为

$$E(r,t)=\frac{a}{\sqrt{r}}\cos(kr-\omega t+\varphi_0) \tag{1.2.15}$$

可以看成是无限长的线光源发出的光在各向同性空间中所形成的光波场.

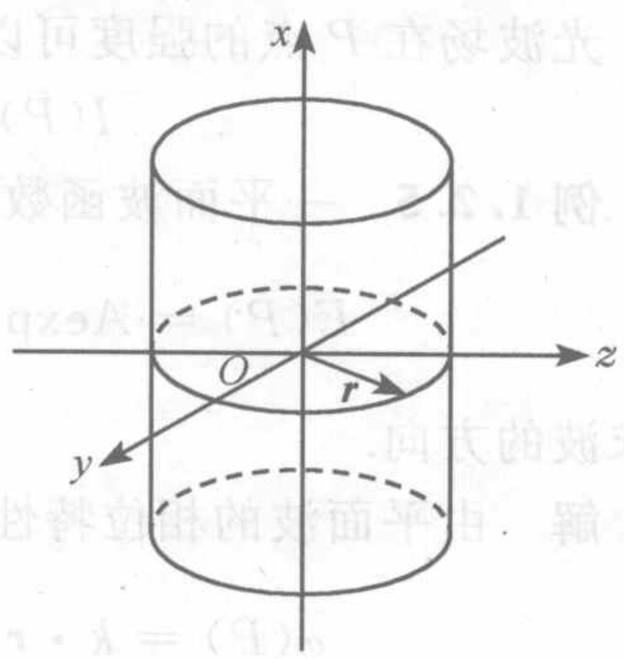


图 1.2.11　柱面波(cylindrical wave)

4. 高斯光束

在实际中，并没有非常简单的平面波、球面波或柱面波，而是非常复杂的非均匀的光波场. 例如，在激光器的谐振腔中，稳定的光波可以用高斯型函数表示，即振幅和相位在横向(x,y)的分布都是高斯型函数，如图 1.2.12 所示.

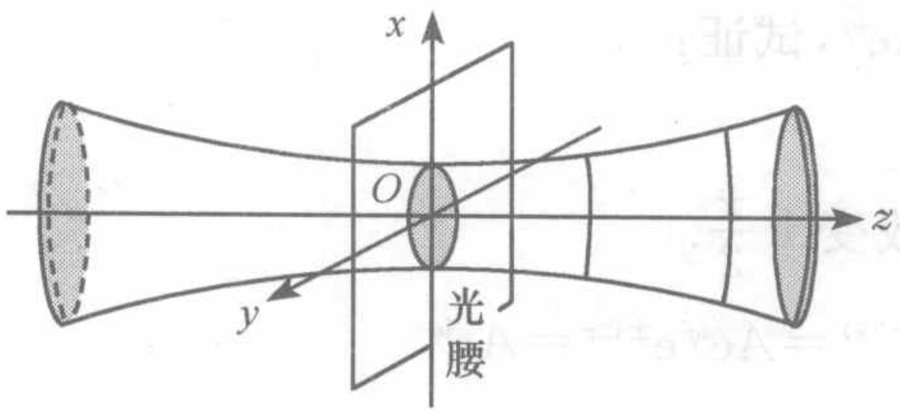


图 1.2.12　高斯光束

(1) 振幅

$$A(P)=\frac{A_0}{\omega(z)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}\right] \tag{1.2.16}$$

(2) 相位

$$\varphi(P)=k\left[z+\frac{x^2+y^2}{2r(z)}\right]+\varphi_0 \tag{1.2.17}$$

在原点处，波面为平面，此处称作“光腰”，振幅和相位为

$$A(x,y,0)=\frac{A_0}{\omega(0)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{\omega^2(0)}\right] \tag{1.2.18}$$

$$\varphi(x,y,0)=\varphi_0 \tag{1.2.19}$$

在光腰之外，波面都是球面，但各处球面的曲率不等，越远处曲率越大.

1.2.4　光波的复振幅描述

波动的表达式，既可以用余弦函数或正弦函数表示，也可以用复指数表示. 用复数表示，则为

$$\widetilde{U}(P,t)=A(P)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}[\varphi(P)-\omega t]}=A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(P)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\quad(\text{取正指数}) \tag{1.2.20}$$

定态光波的频率都是相等的，则在表达式中，与时间有关的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 可以略

去不写. 剩余的定态部分,即与时间无关部分为称为复振幅(complex amplitude),为

$$\widetilde{U}(P) = A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(P)} \tag{1.2.21}$$

复振幅包含了振幅 $A(P)$和相位 $\varphi(P)$的空间分布,直接表示了光波在空间 P 点的振动,或者说复振幅表示了定态光波在空间的分布情况. 所以,对于定态光波,凡是需要用振动描述的地方,都可以用复振幅描述.

光波场在 P 点的强度可以直接从复振幅求得

$$I(P) = A^2(P) = \widetilde{U}^*(P)\widetilde{U}(P) \tag{1.2.22}$$

例 1.2.5 一平面波函数的复振幅为

$$\widetilde{E}(P) = A\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{k}{\sqrt{14}}x + \frac{2k}{\sqrt{14}}y + \frac{3k}{\sqrt{14}}z\right)\right],$$

试求波的方向.

解 由平面波的相位特性

$$\varphi(P) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = -\mathrm{i}\left(\frac{k}{\sqrt{14}}x + \frac{2k}{\sqrt{14}}y + \frac{3k}{\sqrt{14}}z\right)$$

波矢为

$$\boldsymbol{k} = k\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x + \frac{-2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y + \frac{-3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

方向为

$$\frac{\boldsymbol{k}}{k} = -\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y + \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

例 1.2.6 平面波函数的复振幅为 $\widetilde{E}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,试证:

(1) 当相位改变 2π 时,$\widetilde{E}$ 保持不变;

(2) 用 $\pm\mathrm{i}$ 乘波函数 $\widetilde{E}$,等效于它的相位改变 $\pm\frac{\pi}{2}$.

证明 (1) $\widetilde{E}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\widetilde{E}(\varphi\pm2\pi)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm2\pi)}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

(2) $\pm\mathrm{i}\widetilde{E}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm\frac{\pi}{2})}$

1.2.5 有关光波的几个概念

除了波面之外,光学中常常用下述物理概念描述光波场.

1. 波前(wave front)

光波场中的任一平面或曲面. 实际上,波前有时也被称为波阵面,波阵面一词来自 wave front,这一名称最初的含义是指一列波最靠前的波面,在空气动力学中,仍然使用这一概念,但光学中,这一名词的含义已发生了变化.

由于光学器件的接收面往往是平面,如照相机的底片、探测器的窗口等,所以,在光学中,波前更多情况下指的是光波场中的一个平面.

2. 波前函数(wave front function)

光波场中某一个波前(往往是接收平面)上的振动表达式或复振幅表达式. 通常

选取坐标系，使波前就是 $z=0$ 的平面，这种情况下，波前函数的表达式比较简单.

3. 等幅面

振幅相等的空间点构成的曲面.

4. 共轭波(conjugate wave)

在某一波前上，复振幅互为共轭的波，即波前函数互为共轭的波.

互为共轭的波，其传播方向应该是相关联的. 例如，球面波 $\widetilde{U}=\frac{A}{r}\exp\left[\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right]$，为从 (x_0,y_0,z_0) 点发出的波. 其共轭波 $\widetilde{U}^*=\frac{A}{r}\exp\left[-\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right]$ 则是向 (x_0,y_0,z_0) 点会聚的.

波矢相反的平面波，其复振幅一定是共轭的，即 $E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 和 $E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 互为共轭. 但反过来则不尽然. 例如，在 xOz 平面中沿 θ_1 方向传播的平面波，其复振幅在 $z=0$ 的波前上表示为 $\widetilde{U}(x,y,0)=A\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta_1)$，其共轭波为 $\widetilde{U}^*(x,y,0)=A\exp[\mathrm{i}kx\sin(-\theta_1)]$，则是沿 $-\theta_1$ 方向传播的，如图 1.2.13 所示.

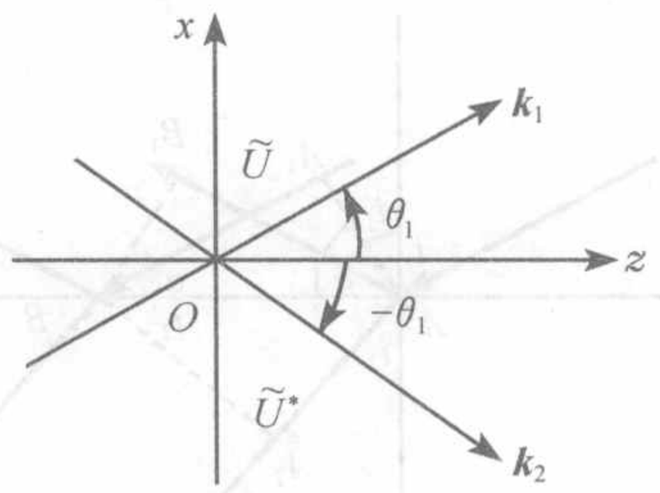


图 1.2.13　共轭波

5. 波线

波线(wave line)与波面垂直的直线，表示波的传播方向. 波线与波矢的方向是相同的. 波线就是几何光学中的光线.

1.3　光程与相位

1.3.1　光程

虽然“光程”(optical path length，OPL)这一概念并不是在光的波动理论中最先被提出来的，但这却是波动光学中极为重要的一个概念.

例如，对于平面波，其空间相位表示为 $\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=k_xx+k_yy+k_zz+\varphi_0$，而波矢为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi n}{\lambda_0} \tag{1.3.1}$$

其中，λ_0 为真空中的波长，n 为介质的折射率. 在折射率不同的介质中，光经过一个振动周期所传过的距离不同，即光的波长不同. 表 1.3.1 给出了 Na 黄光在不同介质中的折射率.

表 1.3.1　Na 黄光(589.3nm)在介质中的折射率

介　质	n	介　质	n
空气	1.00028	各种玻璃	1.5～2.0
水	1.333	金刚石	2.417

以沿着 z 方向传播的一维平面波为例，并设初相位 $\varphi_0=0$，则其相位为

$$\varphi(z)=kz=\frac{2\pi}{\lambda_0}nz=\frac{2\pi}{\lambda_0}ns \tag{1.3.2}$$

$nz=ns$ 称作介质中光波的光程，即光走过的路径（路程）与介质折射率的乘积. 由式(1.3.2)可见，相位由光程决定. 即对于定态光波，在同一时刻，空间中光程相同的点，其相位也相同，因而振动也相同. 或者说，光程相等的空间点所构成的面，即等光程面，就是等相位面，即波面.

波的反射、折射都可以用光程与波面的关系解释. 下面以平面波为例说明.

如图 1.3.1 所示，设入射光的波面为 AA_1，反射光的波面为 BB_1，由于两个波面上的各个点之间必须保持等光程，于是有 $\overline{AB_1}=\overline{BA_1}$，即 $\alpha'=\alpha$，入射角等于反射角，就是几何光学中的反射定律. 对于折射波而言，要求 $n_2\ \overline{AA_2}=n_1\ \overline{AB_1}$，即 $n_2\ \overline{AB}\sin i_2=n_1\ \overline{AB}\sin i_1$，即 $n_2\sin i_2=n_1\sin i_1$，就是几何光学中的折射定律.

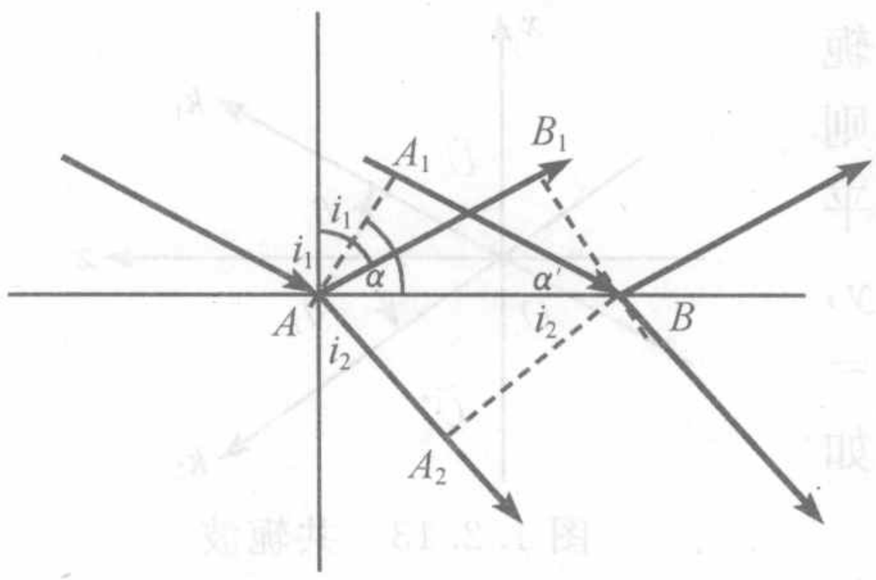


图 1.3.1 平面波的反射和折射

平面波通过棱镜或透镜，将发生折射. 折射后，光的方向和波面都会发生改变. 棱镜、透镜的原理都可以从光程的变化进行解释.

例如，在图 1.3.2 中，设平面波正射入棱镜之前，波面为 ABC，从棱镜的另一个面上的不同点射出时，经过的光程分别为 $n'\overline{AA_1}$，$n'\overline{BB_1}$，$n'\overline{CC_1}$，等等，各不相同，这时的波面，即等相位面，必须处于 $A'B'C'$ 的方位，才能使 $n'\overline{AA_1}+\overline{A_1A'}=n'\overline{BB_1}+\overline{B_1B'}=n'\overline{CC'}$. 从 C 处入射的光到达棱镜的另一侧表面上 C' 点时，从 C 点以上 x 处的 A 点入射的光应该到达距离另一侧表面上的出射点 A_1 为 $nx\tan\alpha$ 的球面上. 由于出射后波面到棱镜的距离是 x 的线性函数，故波面仍是平面. 由图可以看出，在波面 $A'B'C'$ 处，光程 $\overline{A_1A'}=\frac{x}{\cos\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta\right)$，而经 C' 点的光程为 $n'\overline{C_0C'}=n'x\tan\alpha$. 由于 $\overline{A_1A'}=n'\overline{C_0C'}$，即得 $n'\sin\alpha=\sin(\alpha+\theta)$，注意到 α 是入射角，而 $\alpha+\theta$ 是折射角，这就是折射定律.

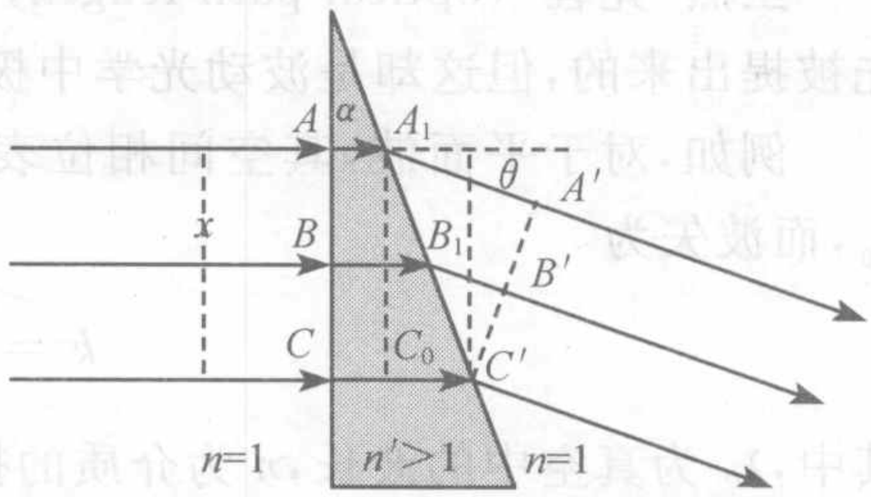


图 1.3.2 棱镜的折射

对于球面透镜，由于球面的形状是二次曲面的形式，所以平面波经过后，波面的形状发生改变. 经过中央厚边缘薄的凸透镜，其波面如图 1.3.3 所示；而经过边缘厚中央薄的凹透镜，薄面则变为图 1.3.4 所示的形状. 可以证明，在满足近轴条件时，上述光波变为会聚或者发散的球面波.

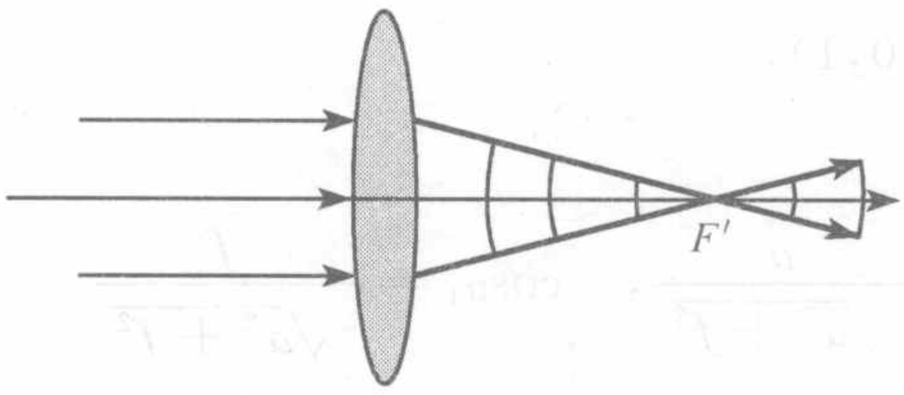


图 1.3.3　凸透镜的折射

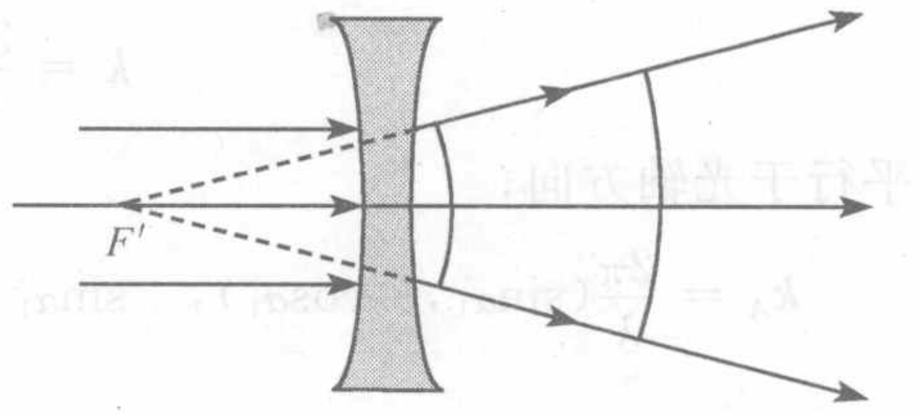


图 1.3.4　凹透镜的折射

对于平面波，如果空间两点的光程差(optical path difference，OPD)$\Delta = j2\pi$时，其振动是相同的. 设想在平凸透镜中，如果将其分成一系列厚度为波长或波长整倍数的薄片，则在各个薄片的相应位置上，平面波的振动完全相同. 所以，矩形薄片除了增加光程之外对折射并无贡献. 可以将其去掉，只保留各个薄片两端上带有球面的部分，然后将它们放在同一个平面上，经过该透镜的平面光即平行光束仍将会聚在原来的像方焦点上. 根据这一原理做成的透镜称为菲涅耳透镜(Fresnel lens)，如图 1.3.5 所示.

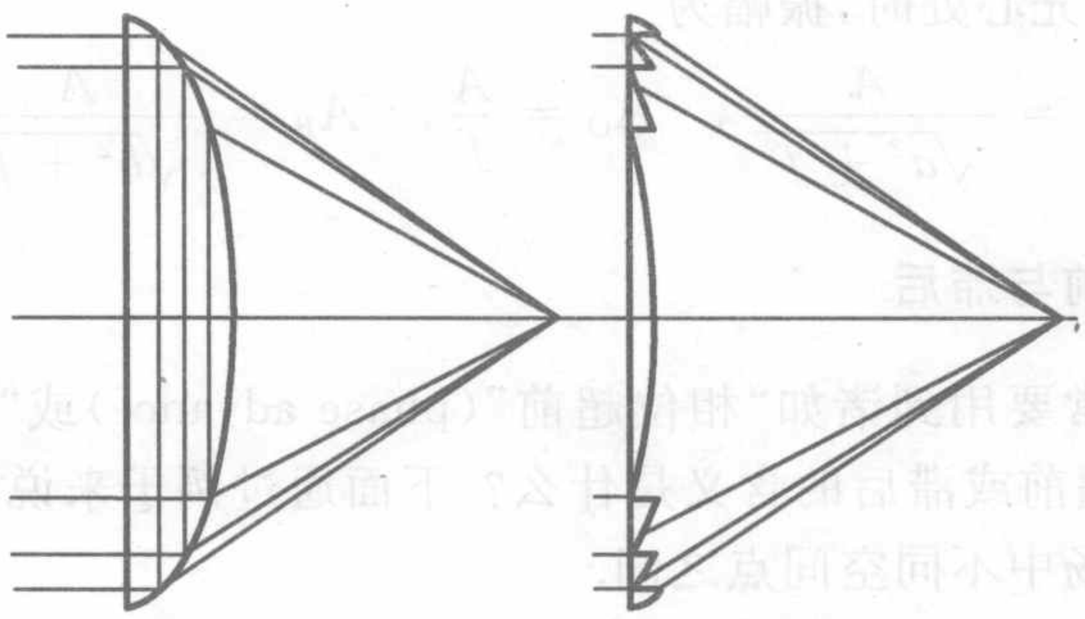


图 1.3.5　菲涅耳透镜

例 1.3.1　如图 1.3.6 所示，在一薄透镜的物方焦平面上有三个点光源 O、A、B，试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后，在像方焦平面上产生的复振幅分布函数(设三列波的波长均为 λ).

解　设在物方焦平面上的物点具有相同的相位，根据凸透镜的性质，物方焦平面上各点发出的光到像方焦点的光程相等，于是，三个点光源发出的球面波经过透镜后变为平面波，而且三列波在像方焦点处具有相等的相位，不妨将光波在像方焦点 O' 处的相位设为 φ_0.

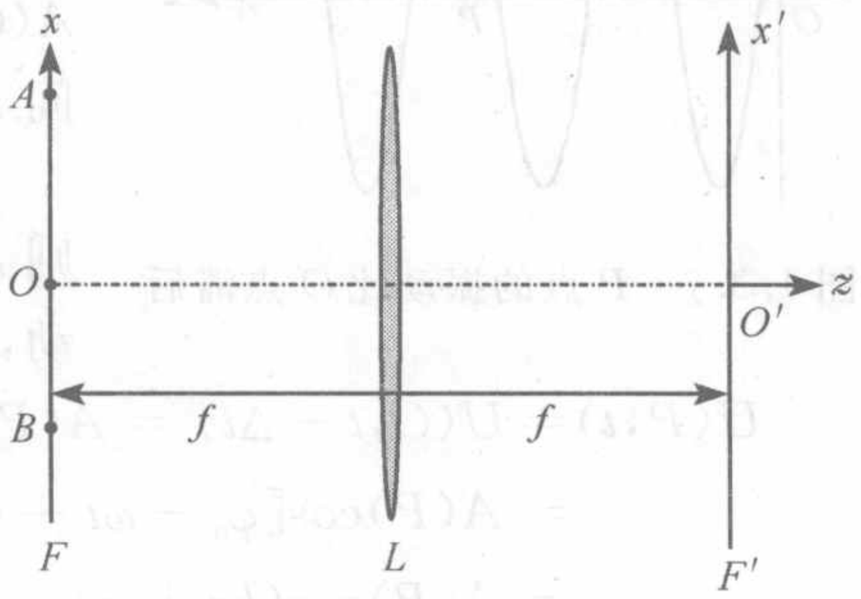


图 1.3.6　例 1.3.1 图

平面波的复振幅表达式为

$$\widetilde{U}(P) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)},$$

其中三列波的波矢分别为

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}(0,0,1),$$

平行于光轴方向；

$$\boldsymbol{k}_A=\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha_1,0,\cos\alpha_1),\quad \sin\alpha_1=-\frac{a}{\sqrt{a^2+f^2}},\quad \cos\alpha_1=\frac{f}{\sqrt{a^2+f^2}}$$

$$\boldsymbol{k}_B=\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha_2,0,\cos\alpha_2),\quad \sin\alpha_2=\frac{b}{\sqrt{b^2+f^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{f}{\sqrt{b^2+f^2}}$$

其中，α_1、α_2 为平面波的方向，即平面波的波矢与水平面 yOz 平面间的夹角.

而屏上任一点的位矢 $\boldsymbol{r}=x'\boldsymbol{e}_x+y'\boldsymbol{e}_y+0\boldsymbol{e}_z$，则有

$$\widetilde{U}_O(P)=A_O\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_O\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)}=A_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_O}$$

$$\widetilde{U}_A(P)=A_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_A\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)}=A_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi ax'}{\lambda\sqrt{a^2+f^2}}+\varphi_A\right)}$$

$$\widetilde{U}_B(P)=A_B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_B\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)}=A_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi bx'}{\lambda\sqrt{b^2+f^2}}+\varphi_B\right)}$$

由于在(0,0,0)处，上述三列波的相位均为 φ_0，可得 $\varphi_A=\varphi_B=\varphi_0$

各列球面波传播到光心处时，振幅为

$$A_A=\frac{A}{\sqrt{a^2+f^2}},\quad A_O=\frac{A}{f},\quad A_B=\frac{A}{\sqrt{b^2+f^2}}$$

1.3.2 相位的超前与滞后

在光学中，时常要用到诸如“相位超前”(phase advance)或“相位滞后”(phase lag)等说法，这种超前或滞后的含义是什么？下面通过例子来说明.

第一，同一波场中不同空间点之间.

如图 1.3.7 所示，一维平面波，沿着 z 方向传播，z 轴上有 P、O 两点，P 点在 O 点的右侧.

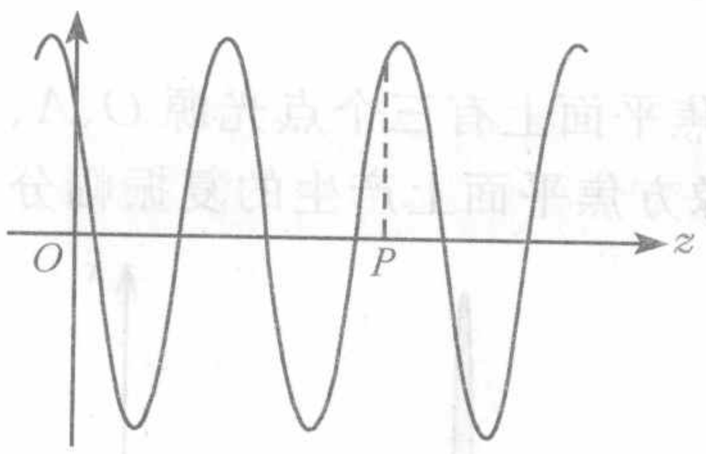


图 1.3.7 P 点的振动比 O 点滞后

P 点的振动是由原点 O 传播过来的，即 P 点的振动比 O 点滞后. 如原点的振动用 $U(O,t)=A(O)\cos(\varphi_0-\omega t)$ 描述，而 P 点比 O 点延迟了时间 $\Delta t(\Delta t=OP/v=z/v)$.

如果不考虑振幅的变化，即设 $A(O)=A(P)$，则 t 时刻 P 点的振动应当为 $t-\Delta t$ 时刻 O 点的振动，即

$$\begin{aligned}U(P,t)=U(O,t-\Delta t)&=A(P)\cos[\varphi_0-\omega(t-z/v)]\\&=A(P)\cos[\varphi_0-\omega t+(\omega/v)z]=A(P)\cos[\varphi_0-\omega t+(2\pi/\lambda)z]\\&=A(P)\cos(kz+\varphi_0-\omega t)=A(P)\cos[\varphi(P)-\omega t]\end{aligned}$$

其中，$\varphi(P)-\omega t=kz+\varphi_0-\omega t$ 为 P 点的相位，与 O 点的相位比，增大了 kz. P 点的相位比 O 点滞后 kz. 在上述表达式中，相位大的为滞后，即在复数表达式或复振幅表达式中，相位数值大表示滞后. 可以理解为，空间相位 φ 与光程成正比，光程大，

则要落后，所以相位值大表示滞后.

但是，在有些著作中，由于习惯的原因，定态波的表达式往往写作如下形式

$$U(P,t)=A(P)\cos[\omega t-\varphi(P)+\varphi_0]$$

在这种表达式中，情况则正好相反，相位的数值大表示超前.

第二，不同波在同一空间点.

有两列波，在原点 O 具有相同的相位，假设从 O 点开始沿着相同的方向传播，设第一列波的速度较慢. 经过时间 t 后，由于波的速度不同，两列波分别到达了 P_1 和 P_2 点，如图 1.3.8 所示. 即波列 1 比波列 2 滞后；或者，在相同的位置 P，波列 2 的相位为 $\varphi_2=k_2z-\omega t=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}z-\omega t$，而波列 1 的相位为 $\varphi_1=k_1z-\omega t=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}z-\omega t$. 显然，由于 $\lambda_1<\lambda_2$，因而 $\varphi_1>\varphi_2$. 相位小表示超前，与第一种情况在表达方式上是相同的.

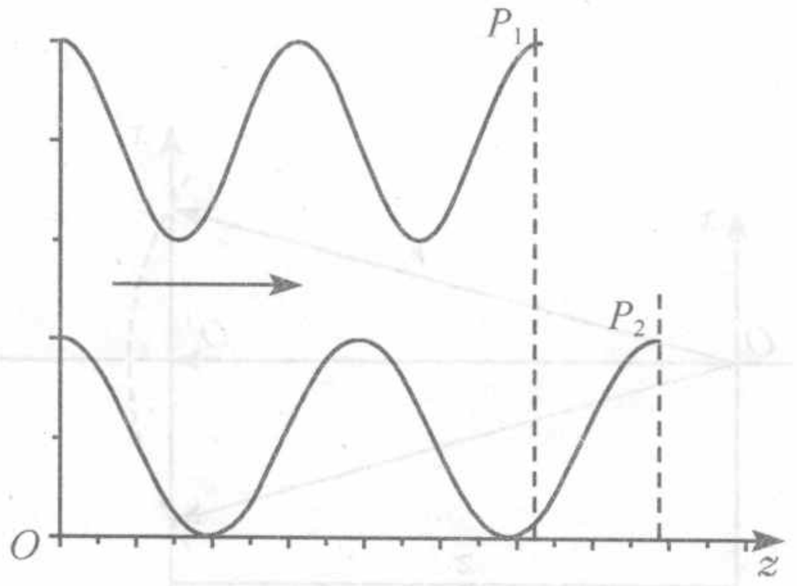


图 1.3.8　波列 1 比波列 2 滞后

例 1.3.2　频率为 6×10^{14} Hz，相速度为 3×10^8 m/s 的光波，在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少？

解　由相位的表达式，可以得到

$$\Delta z=\frac{\Delta\varphi}{k}=\frac{\Delta\varphi v_{\mathrm{P}}}{\omega}=\frac{\Delta\varphi v_{\mathrm{P}}}{2\pi\nu}=\frac{\frac{\pi}{3}\times3\times10^8}{2\pi\times6\times10^{14}}=8.33\times10^{-8}(\mathrm{m})=83.3(\mathrm{nm})$$

例 1.3.3　将一厚度为 d、折射率为 n 的平板玻璃片，使其法线与平行光线成 i 角地插入光线中（图 1.3.9），试比较插入前后，光线的相位改变多少？

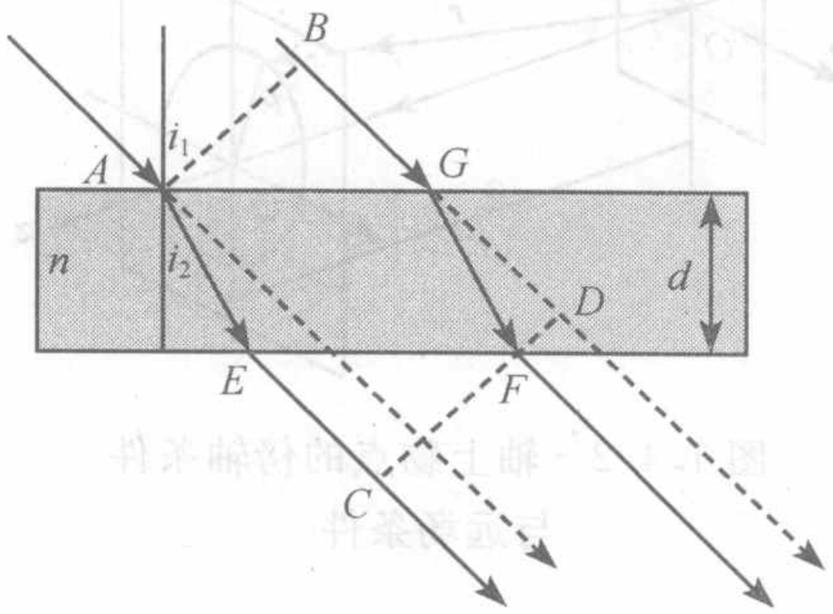


图 1.3.9　例 1.3.3 图

解　在这种情况下，只需要比较一下空间的同一波面在插入前后的相位差即可. 插入前，波面 CD 与 AB 间的光程差为 BD. 插入后，$\overline{GF}=d/\cos i_2$，两波面间光程差为 $\overline{BG}+n\overline{GF}$，而

$$\overline{GD}=\overline{GF}\cos(i_1-i_2)=d\cos(i_1-i_2)/\cos i_2$$

插入前后的光程差改变为

$$\Delta L=n\overline{GF}-\overline{GD}=\frac{nd}{\cos i_2}-\frac{d\cos(i_1-i_2)}{\cos i_2}=\frac{d}{\cos i_2[n-\cos(i_1-i_2)]}$$

$$=d\frac{n-\cos i_1\cos i_2-\sin i_1\sin i_2}{\cos i_2}=d\left(\frac{n}{\cos i_2}-\cos i_1-\frac{\sin i_1\sin i_1}{n\cos i_2}\right)$$

$$=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2-\sin^2 i_1}{n\cos i_2}\right)=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2\cos^2 i_2}{n\cos i_2}\right)$$

$$= d(-\cos i_1 + n\cos i_2) = d(n\sqrt{1-\sin^2 i_2} - \cos i_1)$$
$$= d(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1} - \cos i_1)$$

插入后 CD 波面相位的改变为 $\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{2\pi d}{\lambda}(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1} - \cos i_1)$，比插入前滞后.

1.4 傍轴条件与远场条件

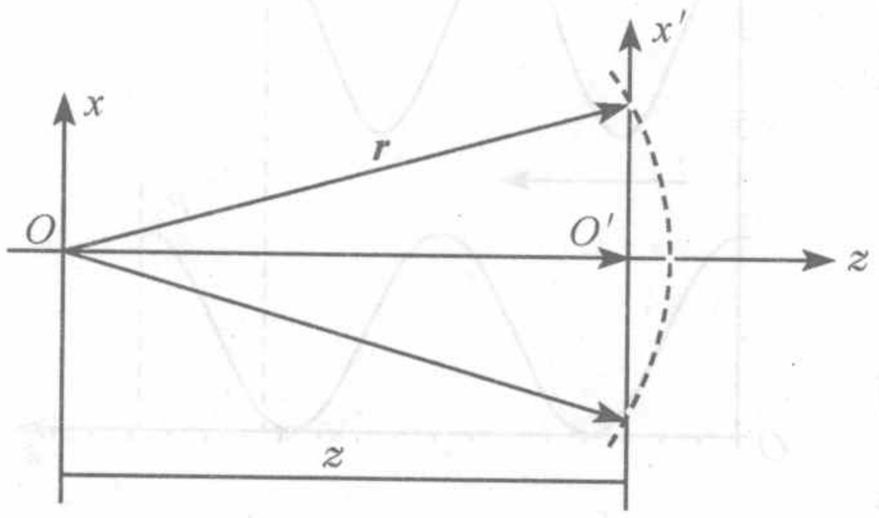


图 1.4.1 平面波前上的球面波

实际中往往需要知道光波在一个平面波前上的光强、振动以及相位的分布，即平面上的波前函数，如成像平面(照相底片)或者探测器表面. 这时，如果是平面波，则表达式非常简单. 但在实际中，遇到的往往是球面波，如图 1.4.1 所示. 在一个平面上，球面波的相位并不相同，波前函数的表达式相当复杂，因而往往需要在一定条件下，将球面波近似为平面波处理.

1.4.1 轴上物点的傍轴条件和远场条件

如图 1.4.2 所示，发光的物点在 $Oxyz$ 坐标平面的原点，接收屏 $x'O'y'$ 与物平面 xOy 距离为 z，在接收屏上的任一点 P，记 $\overline{O'P}=\rho$，$OP=r$，则有

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{1.4.1}$$
$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} \tag{1.4.2}$$

球面波在接收屏上 P 点的振幅为

$$A(P) = \frac{a_0}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{a_0}{\left[|z|\sqrt{1+(\rho/z)^2}\right]}$$
$$= \frac{a_0}{\left[|z|\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho}{z}\right)^2+\cdots\right)\right]}$$

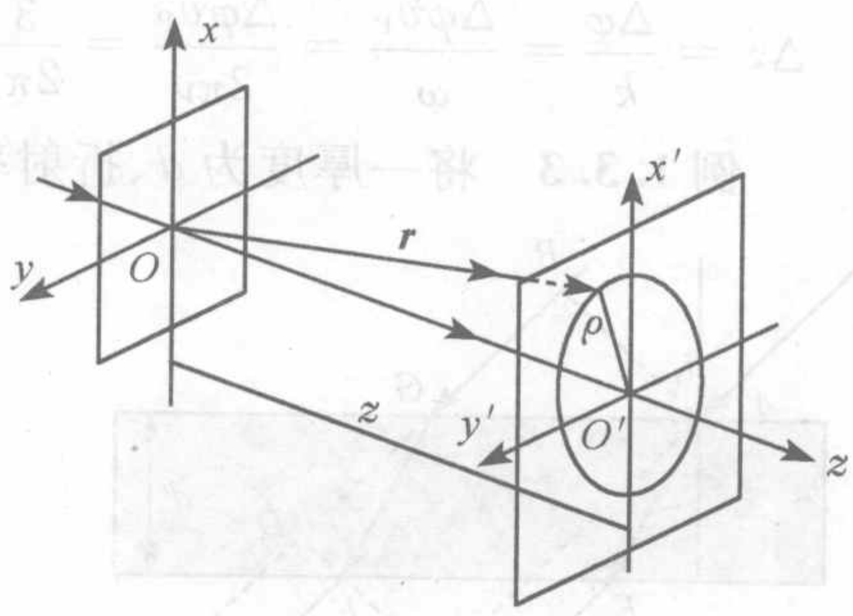


图 1.4.2 轴上物点的傍轴条件与远场条件

如果满足

$$\rho^2 \ll z^2 \tag{1.4.3}$$

则 $(\rho/z)^2$，以及高次项可以忽略，有

$$A(P) = \frac{a_0}{|z|} \tag{1.4.4}$$

即在平面波前 $x'O'y'$ 上，各点的振幅均相等.

$\rho^2 \ll z^2$ 称为傍(近)轴条件(paraxial condition)，上述近似称作傍轴近似(paraxial approximation).

球面波在接收屏 $x'O'y'$ 上的相位为

$$\varphi(P) = k\sqrt{z^2+\rho^2} = k(|z|+\rho^2/2|z|+\cdots)$$

如果有

$$|z| \gg \rho^2/\lambda \tag{1.4.5}$$

则 $\rho^2/|z| \ll \lambda$，即 $k\rho^2/2|z| \ll k\lambda/2=\pi$，即 $\rho^2/2|z|$ 可以忽略. 此时

$$\varphi(P) = kz \tag{1.4.6}$$

即在平面波前 $x'O'y'$ 上，各点的相位均相等.

$|z| \gg \rho^2/\lambda$ 称为远场条件(far field condition). 上述近似称作远场近似(far field approximation).

由于实际中光波的波长总是很小的，即 $\lambda=|z|$ 总可满足，所以由远场条件可得

$$\rho^2 \ll \lambda|z| = |z||z| = z^2$$

这就是近轴条件式(1.4.3). 即远场条件必然包含近轴条件.

近轴条件下，轴上物点发出的球面波可以简化为

$$\tilde{U}(x',y',0) = \frac{E_0}{|z|}\exp\left[ik\left(z+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)+i\varphi_0\right] \tag{1.4.7}$$

远场条件下，轴上物点发出的球面波可以进一步简化为

$$\tilde{U}(x',y',0) = \frac{E_0}{|z|}\exp(ikz+i\varphi_0) \tag{1.4.8}$$

满足远场条件时，在接收屏上，球面波可以作为平面波处理. 例如，设单色点光源发出的球面波的波长 λ 为 500nm，波前的横向宽度 ρ 为 1mm，实际情况下，只要按 10～100 倍的数量级估算即可，由式(1.4.3)，傍轴条件为 $\rho^2=z^2$，取 $z^2=50\rho^2$，可得 $z_1=7$mm 即满足傍轴条件. 由式(1.4.5)，远场条件为 $|z| \gg \rho^2/\lambda$，取 $z=50\rho^2/\lambda$，可得 $z_2=100$m 即满足远场条件.

1.4.2　轴外物点的近轴条件和远场条件

物平面上有一物点，在 $Q(x,y,0)$，场点在平面 $x'O'y'$ 上，为 $P(x',y',z)$，如图 1.4.3 所示. 场点到物点的间距

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} \tag{1.4.9}$$

场点与物平面中心的间距

$$r_0 = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x'^2+y'^2+z^2} \tag{1.4.10}$$

接收屏中心与物点的间距

$$r_0' = \sqrt{\rho_0^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.4.11}$$

物点 Q 到物平面中心 O 的距离

$$\rho_0 = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.4.12}$$

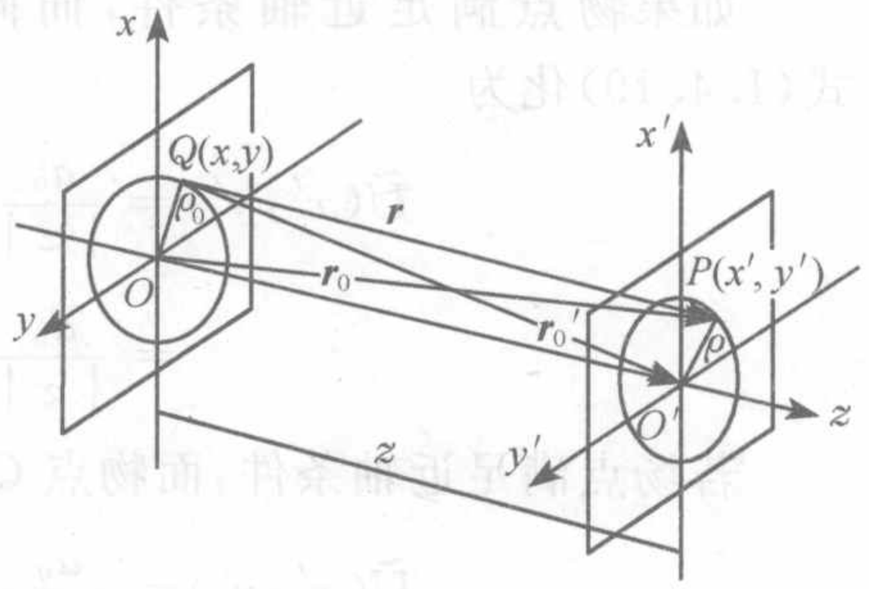


图 1.4.3　轴外物点的近轴条件和远场条件

当物点和场点都满足近轴条件时，即 $\rho^2 \ll z^2$，$\rho_0^2 \ll z^2$，有

$$r_0 = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} \tag{1.4.13}$$

$$r'_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \tag{1.4.14}$$

可以得到

$$r = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \tag{1.4.15}$$

或

$$r = r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \tag{1.4.16}$$

或者

$$r = r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \tag{1.4.17}$$

则接收屏上的复振幅为

$$\widetilde{U}(x', y') = \frac{a_0}{|z|}\exp\left[ik\left(r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right]\exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \tag{1.4.18}$$

或

$$\widetilde{U}(x', y') = \frac{a_0}{|z|}\exp\left[ik\left(r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)\right]\exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \tag{1.4.19}$$

物点的远场条件为 $|z| \gg \frac{\rho_0^2}{\lambda}$，即 $\frac{x^2}{\lambda} \ll z$，$\frac{y^2}{\lambda} \ll z$；场点的远场条件为 $|z| \gg \frac{\rho^2}{\lambda}$，即 $\frac{x'^2}{\lambda} \ll z$，$\frac{y'^2}{\lambda} \ll z$.

如果物点满足近轴条件，而同时场点 P 再满足远场条件，此时 $r'_0 = z$，式(1.4.19)化为

$$\widetilde{U}(x', y') = \frac{a_0}{|z|}\exp\left[ikr'_0 - ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{|z|}e^{ikz}\exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \tag{1.4.20}$$

若场点满足近轴条件，而物点 Q 再满足远场条件，$r_0 = z$，则式(1.4.18)化为

$$\widetilde{U}(x', y') = \frac{a_0}{|z|}\exp\left[ikr_0 - ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{|z|}e^{ikz}\exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \tag{1.4.21}$$

式(1.4.20)和式(1.4.21)都是平面波.

第 2 章　光的叠加原理

2.1　光波的叠加原理及其成立的条件

光波场中各点的电场强度都作周期性变化，这种变化称作光矢量的振动，可以用周期性的函数来描述. 虽然电磁场的振动与机械波的振动机制不同，但是它们所遵循的规律是相同的.

2.1.1　光波的独立传播定律

如果两个实物粒子发生碰撞，则它们的运动状态都将改变，都会偏离原来的运动方向. 但是，如果两列波相遇，情况将有所不同.

例如，两列水波相遇时，尽管在相互重叠的区域，波的状态会有明显的改变，但相遇之后，则还能保持各自的状态不变；夜空中的两探照灯的光束相遇后，并没有改变光束的方向和强度；在交响乐演奏中，我们仍能分辨出乐队中各种乐器发出的不同音调等. 所有这些事实都告诉我们，波在相遇的过程中和相遇之后，并没有因为彼此之间的相互作用而改变其固有的特征. 这就是波的独立传播定律.

光波的独立传播定律　从不同振源（扰动源）发出的波在空间相遇时，如果振动不十分强烈，各个波将保持各自的特性不变，继续传播，相互之间没有影响.

波的独立传播定律是波动的最基本定律之一，无论对于机械波或电磁波，含义都是相同的. 不同的波之间，只要在振动不十分强烈的情况下，就不会相互影响，这一点与我们在力学中所熟悉的实物粒子间的相互作用是不同的.

2.1.2　光波的叠加原理

不同的波列在相遇的区域，振动将互相叠加（superposition）. 对于机械波，机械振动的叠加遵循力学定律；对于电磁波，是电场强度、磁感应强度的叠加，其叠加的过程将遵循电磁学原理. 这种叠加过程可以用波的叠加原理描述.

光波的叠加原理　几列波在相遇点所引起的合振动是各个波独自在该点所引起的振动的矢量叠加.

机械波、电磁波（包括光波）的叠加都遵循相同的原理，因为机械波、电磁波都是矢量，都按矢量合成的方法进行叠加. 但波的叠加原理只有在一定的条件下才能成立.

成立的条件　在线性介质中，而且振动不是十分强烈时.

在振动很强烈时，线性介质会变为非线性的.

应当注意，波的叠加，不是强度的叠加，也不是振幅的简单相加，而是振动矢量的叠加.

需要指出的是，虽然上述波的叠加原理阐述的是一般性的原理，适用于普遍的情况，但是在光学中往往用来处理分立、有限的几个波列(wave train)，或无限但可数的波列叠加的情况.

2.2 光波的叠加方法

2.2.1 代数法(瞬时值法)

光的叠加，就是振动的叠加，即各列光波的电场强度矢量的叠加. 对于没有偏振特性的光波，可以用标量的方法处理其叠加问题. 如果仅从叠加原理看，光波与机械波和普通电磁波并没有区别，所以，可以直接应用以前的结论讨论光的叠加.

首先讨论同频率、同振动方向的单色光的叠加. 这是一种最简单，也是光学中最常见的情况，可以用一维表达式描述叠加的情况.

设两列波在相遇点的振动表示为

$$\Psi_1 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t) \tag{2.2.1}$$

和

$$\Psi_2 = A_2\cos(\varphi_2 - \omega t) \tag{2.2.2}$$

从数学上可知，这样的两个振动相加后，仍为简谐振动. 则有

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t) + A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)\\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t\\ &= A(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t) = A\cos(\varphi - \omega t)\end{aligned}$$

即合振动为

$$\Psi = A\cos(\varphi - \omega t) \tag{2.2.3}$$

其中

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{2.2.4}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{2.2.5}$$

2.2.2 复数法

如果将上述两列光波的振动用复指数表示，则为

$$\tilde{\Psi}_1 = A_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)} = \tilde{U}_1 e^{-i\omega t},\quad \tilde{\Psi}_2 = A_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)} = \tilde{U}_2 e^{-i\omega t}$$

其中，$\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$，$\tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$，是两列波在相遇点的复振幅. 其合振动为

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= \tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2 = A_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)} + A_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})e^{-i\omega t}\\ &= (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)e^{-i\omega t} = \tilde{U}e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

合振动的复振幅为

$$\widetilde{U}=\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}+A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

由复数的运算法则，可得 A^2 及 φ 表达式，与式(2.2.4)和式(2.2.5)相同，即合振动的复振幅等于两列光波的复振幅的和，就是将两列波的复振幅直接相加.

2.2.3　振幅矢量法

复振幅 $\widetilde{U}_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$，$\widetilde{U}_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ 都是复数，可以用复平面上的矢量表示，如图 2.2.1 所示. 求 $\widetilde{U}=\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2$，就是求复数 $\widetilde{U}_1$、$\widetilde{U}_2$ 所对应的两个矢量的和，即 $\widetilde{U}$ 可以按照矢量求和的方法得到.

这种方法比较直观，特别是对于多列波的叠加，处理起来更加方便. 如果求

$$\widetilde{U}=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{U}_j$$

其中 $\widetilde{U}_j=A_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$，可以让各个矢量依次首尾相接，相邻两矢量 $\widetilde{U}_j$、$\widetilde{U}_{j+1}$ 之间的夹角就是它们之间的相位差 $\Delta\varphi_{j+1,j}=\varphi_{j+1}-\varphi_j$，如图 2.2.2 所示. 合振幅 $\widetilde{U}$ 所对应的矢量从第一矢量的起点指向最后一个矢量的终点.

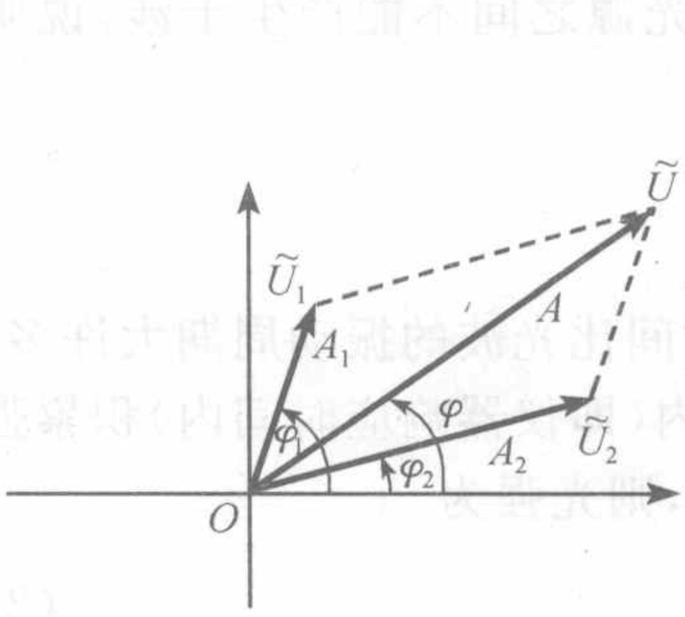


图 2.2.1　两个振幅矢量相加

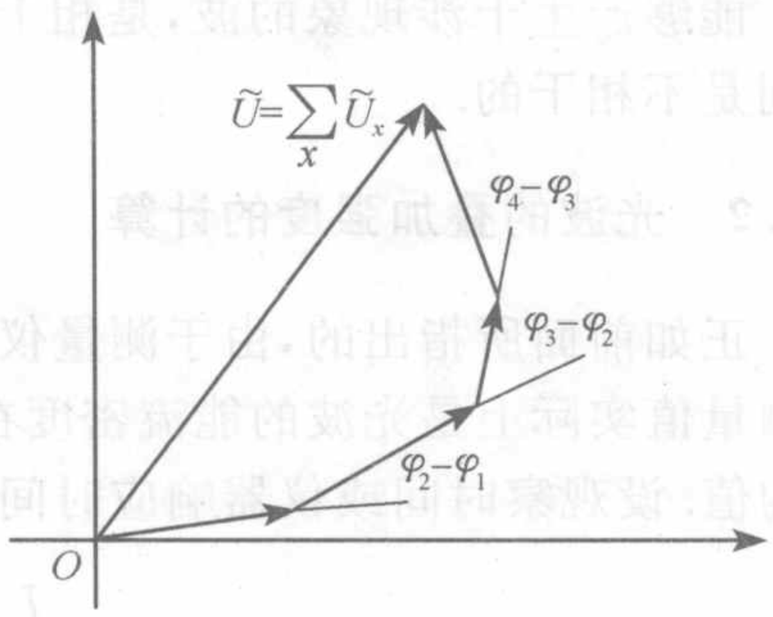


图 2.2.2　多个振幅矢量相加

2.3　光波的叠加强度

2.3.1　光波叠加的特点

光波的数学表达式和光波的叠加方法与其他类型的矢量波并没有区别，但是，叠加的结果却大不相同. 例如，一般的机械波或电磁波叠加时，很容易观察到由于叠加而引起的干涉现象，即在一列波的波峰(wave crest)与另一列波的波谷(wave trough)相遇的地方，振动相互抵消，这一点合振动的振幅最小；而在两列波的波峰(或波谷)相遇处，振动加强，合振动的振幅最大. 叠加的结果，使波场中某些地方振动增强(即合振动的振幅增大)，而某些地方振动减弱(即合振动的振幅减小)，波场的能量由于波的叠加而重新分布，这就是所谓的波的干涉(interference of waves).

我们可以用肉眼直接观察到机械波的波动过程，以及它们之间的干涉，如水波的干涉；对于无线电波，也可以借助简单的仪器观察到电磁振荡及其相互干涉的过程. 如在示波器上可以观察到交流电信号的波形，以及它们叠加所产生的各种物理图像，这就是李萨如图形(Lissajou figures). 从波动的角度看，虽然光与机械波和普通电磁振荡没有本质的区别，但是，却几乎无法观察到普通光源之间的干涉，例如，无论是两盏灯发出的光，或是两只蜡烛发出的光，都没有明显的干涉.

也就是说，第一，我们无法直接观察或测量光波电矢量周期性变化的情况；第二，普通的光也无法产生干涉. 这到底是为什么？

对于第一点，是比较容易理解的. 光的波长在 400～760nm，其频率约是 10^{14} Hz，这样短的变化周期，不仅比人眼的响应时间要短得多，也比普通电子仪器的响应时间短得多，所以，我们无法直接感受到光的振动情况，即光矢量周期变化的情况.

对于第二点，干涉的结果，表现为叠加后波场振幅的变化，两列波在相遇点，如果相位是相同或相近的，则引起的合振动的振幅就大，因而强度增大；如果相位相反，则合振动的振幅就要减小，因而强度也要变弱. 普通的光不能产生干涉，说明光波之间的相位有着某种特殊性. 下面就对这一点进行讨论.

能够产生干涉现象的波，是相干的. 普通的光源之间不能产生干涉，说明它们之间是不相干的.

2.3.2 光波的叠加强度的计算

正如前面所指出的，由于测量仪器的响应时间比光波的振动周期大许多，光强的测量值实际上是光波的能流密度在一定时间内(即仪器响应时间内)积累强度的平均值. 设观察时间或仪器响应时间为 $\tau(\tau \gg T)$，则光强为

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2 \mathrm{d}t \tag{2.3.1}$$

而根据前面推导的结果，两列振动方向相同、频率相同的单色光，

$$\Psi_1 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t), \quad \Psi_2 = A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)$$

按照光的叠加原理，所引起的合振动为

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A\cos(\varphi - \omega t)$$

合振动的振幅由以下关系确定

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

则上述两列光叠加后的强度为

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]\mathrm{d}t \tag{2.3.2}$$

2.3.3 光波的相干叠加与非相干叠加

由于 Ψ_1、Ψ_2 的振幅 A_1、A_2 是常数，因而式(2.3.2)变为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\frac{1}{\tau}\int\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\mathrm{d}t$$

记 $\Delta\varphi(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$，是两列波在相遇点 P 的相位差(phase difference). 以下针对相位差的不同特点，分别进行讨论：

1. 如果相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 在观察时间内不是稳定值，而是随时间做无规则、随机的改变

在这种情况下，由于 $\cos\Delta\varphi$ 在(−1，+1)范围内随机取值，则有

$$\int_0^\tau \cos\Delta\varphi \mathrm{d}t = 0 \tag{2.3.3}$$

于是得到

$$I = A_1^2 + A_2^2 = I_1 + I_2 \tag{2.3.4}$$

这是两列光的强度简单相加，相加的结果，使光波重叠的区域具有相等、均匀的强度，就是我们通常观察到的现象. 这种情况下，两列光之间是没有干涉的. 或者说，由于这两列光波之间的相位是没有关联的，因而它们是非相干光(incoherent light).

2. 如果 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 在观察时间内不随时间改变，而是一个稳定的数值

这种情况下有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\Delta\varphi \mathrm{d}t = \cos\Delta\varphi \tag{2.3.5}$$

因而

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \tag{2.3.6}$$

对于式(2.3.6)而言，一般情况下，$I\neq I_1+I_2$.

实际上，对于定态光波而言，相位差 $\Delta\varphi(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$ 是由空间的位置决定的. 在空间不同的位置，两列波有不同的相位差，叠加后，由于 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ 取不同的值，将会有不同的强度，即在光波的重叠区域，光强变得不均匀了，有些地方光强增大，比其中每一列光单独的产生的强度的和还要大；而另一些地方光强减弱. 因而光场中出现了明暗交错的情况，即出现干涉现象. 这就是干涉图样，或称作干涉花样(interference pattern). 而

$$2A_1A_2\cos\Delta\varphi \tag{2.3.7}$$

被称为干涉项(interference term).

如果每一列光都是定态光波，$\varphi_1(P)$、$\varphi_2(P)$ 是它们的空间相位，即只与空间位置有关，所以相位差 $\Delta\varphi(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$ 也只与空间位置有关，即不同的空间点具有不同的相位差，因而有不同的干涉项的数值，而且干涉项由于与时间无关，因而干涉图样是稳定的.

(1) 当 $\Delta\varphi=2j\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi=1$

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1+A_2)^2 > I_1 + I_2 \tag{2.3.8}$$

光强取最大值，称作相长干涉(constructive interference).

(2) 当 $\Delta\varphi=(2j+1)\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi=-1$

$$I = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1-A_2)^2 < I_1 + I_2 \tag{2.3.9}$$

光强取最小值，称作相消干涉(destructive interference). 即两列波在空间相遇，如

果有固定的相位差，便会出现干涉现象，使光的能量重新分布. 能够产生干涉的光，是由于两列光波的相位是相互关联的，称为相干光(coherent light).

2.3.4 振动方向相互垂直的光波的叠加

若光波的振动，即电矢量 $\boldsymbol{\psi}_1$，$\boldsymbol{\psi}_2$ 相互垂直，则可以直接应用矢量叠加的方法，得到合振动矢量，如图 2.3.1 所示.

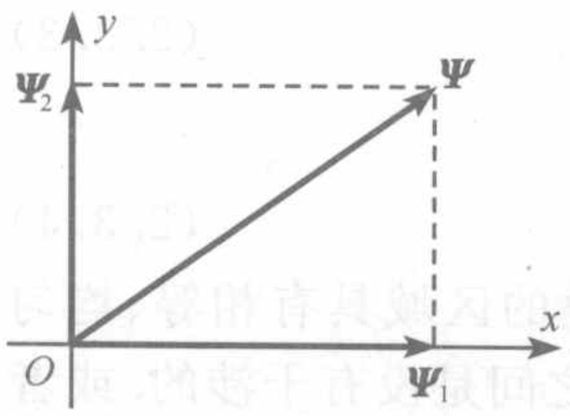


图 2.3.1 相互垂直的电矢量的叠加

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2 \tag{2.3.10}$$

要得到叠加的强度，就要算出合振动的振幅，即 $\boldsymbol{\psi}$ 的模. 对式(2.3.10)两端取模的平方，因为 $\boldsymbol{\psi}_1 \perp \boldsymbol{\psi}_2$，故 $\boldsymbol{\psi}_1 \cdot \boldsymbol{\psi}_2^* = \boldsymbol{\psi}_1^* \cdot \boldsymbol{\psi}_2 = 0$，于是有

$$|\boldsymbol{\psi}|^2 = |\boldsymbol{\psi}_1|^2 + |\boldsymbol{\psi}_2|^2 \tag{2.3.11}$$

即

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.3.12}$$

在这种情况下，两列波叠加后的光强就是它们各自光强的简单相加，不会出现干涉现象，因而可以说，振动方向相互垂直的光是非相干的.

如果两列波的振动既不平行，也不垂直，则可将其中一列波的振动矢量(电矢量)正交分解，分解后的两个分量分别平行和垂直于另一个振动矢量，如图 2.3.2 所示，然后再进行叠加. 设振动矢量 $\boldsymbol{\psi}_1$ 沿 y 方向，将 $\boldsymbol{\psi}_2$ 正交分解，即得到

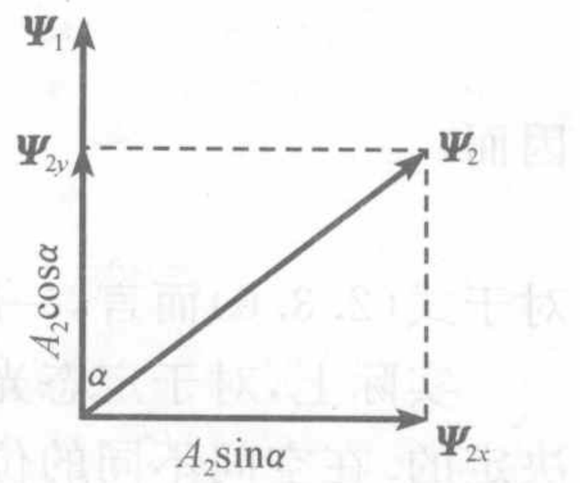


图 2.3.2 电矢量的正交分解

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2 = (\Psi_1 + \Psi_{2y})\boldsymbol{e}_y + \Psi_{2x}\boldsymbol{e}_x$$

光强为

$$\begin{aligned} I &= A_1^2 + A_{2y}^2 + 2A_1A_{2y}\cos\Delta\varphi + A_{2x}^2 \\ &= I_1 + I_2 + 2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

其中，α 为两列波振动方向间的夹角，$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 为两列波的相位差，由于干涉项 $2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$ 的存在，这两列光波也能产生干涉.

2.3.5 两列不同频率单色光波的叠加

从数学上看，频率不同的两余弦函数相加，其结果不能化简为一个简谐函数，即两列不同频率的单色波(定态光波)叠加，其结果不再是定态光波. 下面一个简单的例子可以说明这一点.

考虑振动方向相同、传播方向相同、振幅相同，频率不同的两列波，即

$$\Psi_1 = A_0\cos(k_1z - \omega_1t), \quad \Psi_2 = A_0\cos(k_2z - \omega_2t)$$

合振动

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 \\ &= 2A_0\cos\frac{(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t}{2} \end{aligned}$$

$$= 2A_0\cos(k_m z - \omega_m t)\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) \tag{2.3.14}$$

其中

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2},\quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},\quad k_m = \frac{k_1 - k_2}{2},\quad \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

显然，$k_m < \bar{k}$，$\omega_m < \bar{\omega}$，即因子 $\cos(k_m z - \omega_m t)$ 随时间和空间的变化都比 $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 慢.

如果将 $2A_0\cos(k_m z - \omega_m t)$ 看成是简谐部分 $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 的振幅，则由于该振幅将随时间振荡，所以，合成后的光波场不再是定态的，如图 2.3.3 所示.

但是，如果这两列波的频率（波长）相差不大，即 $\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$，$\bar{k} \approx k_1 \approx k_2$，因而 $\omega_m = \bar{\omega}$，$k_m = \bar{k}$，于是，波场 $2A_0\cos(k_m z - \omega_m t)\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 就相当于缓慢变化的因子 $\cos(k_m z - \omega_m t)$ 对 $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 的振幅起调制作用，或者频率为 $\bar{\omega}$ 的波的振幅较缓慢地随时间变化，如图 2.3.4 所示.

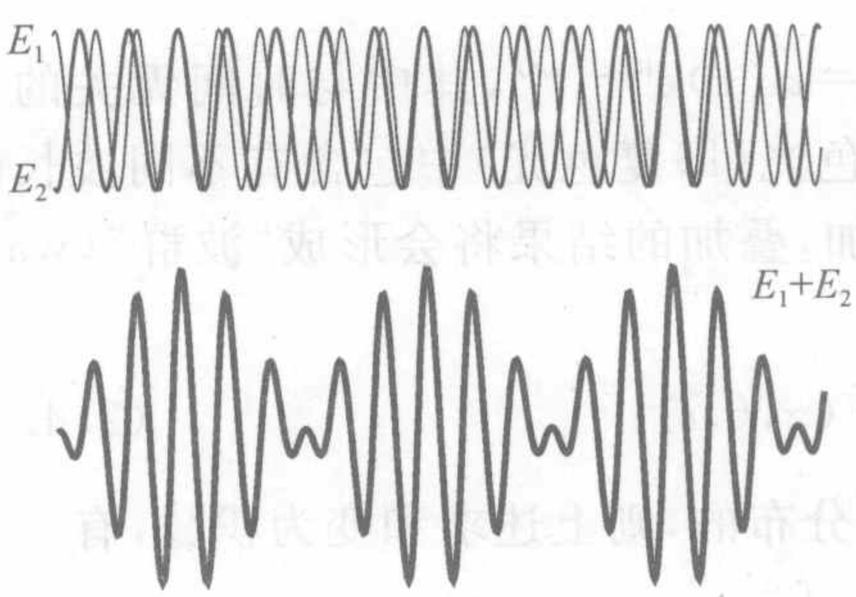


图 2.3.3　不同频率的光波的叠加

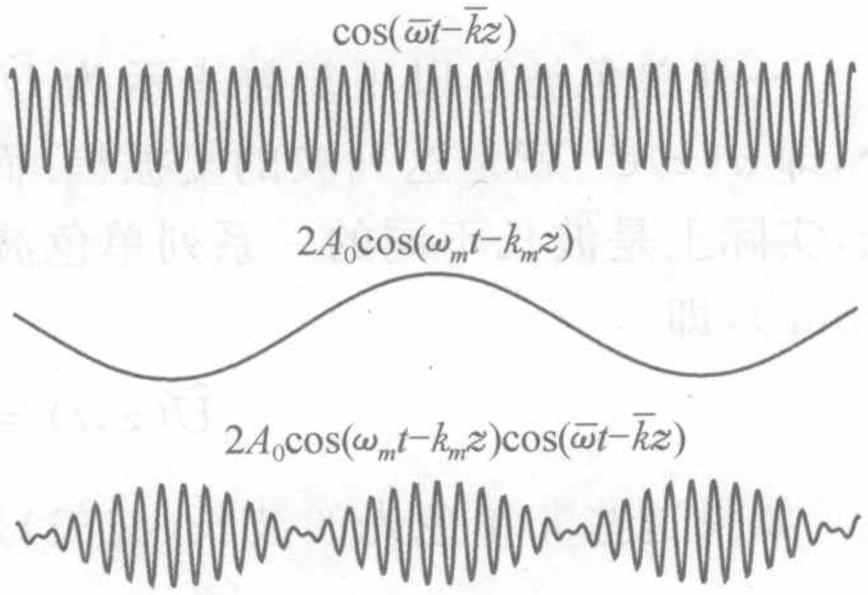


图 2.3.4　振幅调制

由于 ω_m、k_m 很小，因而测量光强时，可以得到光强数值随时间的变化. 根据上面的分析，可得到光强为

$$I = 4A_0^2\cos^2(\omega_m t - k_m z) = 2A_0^2[1 + \cos^2(\omega_m t - k_m z)] \tag{2.3.15}$$

叠加之后，光波场在空间的强度分布随时间变化，并不是一个稳定的干涉场，这就是光学拍（optical beat）. 拍频（beat frequency）为 $2\omega_m = \omega_1 - \omega_2$，就是波场中某一点光强变化的时间频率.

可以得到以下结论：

（1）不同频率的光是不相干的；

（2）频率相近的单色光叠加形成光学拍；

（3）不同频率的定态光波叠加得到非定态光.

2.3.6　光的相干条件

结合 2.3.3 节、2.3.4 节和 2.3.5 节的结果，我们知道，只有满足下列条件的光，才是相干光：

（1）$\Delta\varphi$ 稳定；

（2）ω 相同；

（3）存在相互平行的振动分量.

上述三个条件，称作相干条件(coherent condition).

重新考察 2.3.4 节中的例题，当两列波在叠加时，如果振动矢量间有一夹角，则叠加后的振动为

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2 = (\Psi_1 + \Psi_{2y})\boldsymbol{e}_y + \Psi_{2x}\boldsymbol{e}_x$$

光强为

$$I = A_1^2 + A_{2y}^2 + 2A_1A_{2y}\cos\Delta\varphi + A_{2x}^2 = I_1 + I_2 + 2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$$

由于光强表达式中含有干涉项 $2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$，这两列波也是相干的. 实际上，上式中 $\boldsymbol{\psi}_1$ 与 Ψ_{2y} 进行相干叠加，$\boldsymbol{\psi}_2$ 在 x 方向的分量 Ψ_{2y}，没有参与干涉，这一部分的强度 A_{2x}^2 只是作为干涉后的背景出现在总的强度中.

2.4 波包与群速度

一列单色波可以用复数表示为 $\widetilde{U}(z,t) = a(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$，其中与时间无关的部分，即 $a(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 就是这列波的复振幅. 而非单色光(即复色光)中包含有不同波长的光，实际上是波长不同的一系列单色波的叠加，叠加的结果将会形成“波群”(wave group)，即

$$\widetilde{U}(z,t) = \sum_k \widetilde{U}(z,k,t) \tag{2.4.1}$$

如果这些非单色光的波长(波矢)是连续分布的，则上述求和变为积分，有

$$\widetilde{U}(z,t) = \int_0^\infty \widetilde{U}(z,k,t)\mathrm{d}k = \int_0^\infty a(z,k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\,\mathrm{d}k \tag{2.4.2}$$

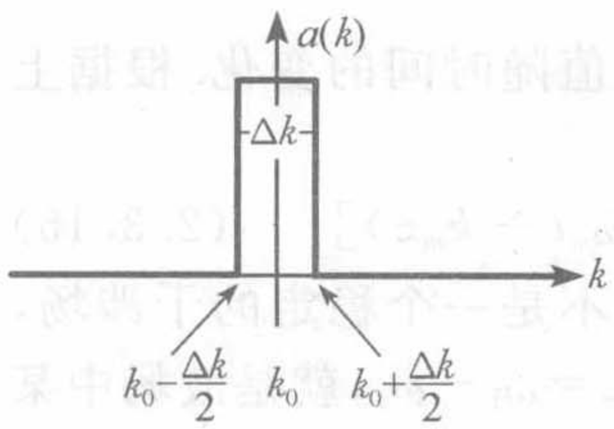


图 2.4.1 准单色波

其中，$a(z,k)$ 为非单色光中波矢为 k 的成分在空间 z 点的振幅，也就是常说的振幅的谱密度. 设波矢的分布范围为 $k_0 \pm \Delta k/2$，为计算简单，可以假设其中的各个单色成分有相等的振幅，如图 2.4.1 所示，即

$$a(z,k) = A/\Delta k \tag{2.4.3}$$

假设非单色波的波长范围 $\Delta\lambda$ 或 Δk 相当有限，即 $\Delta\lambda \ll \lambda_0$，或 $\Delta k \gg k_0$，是所谓的“准单色波”(quasi-monochromatic light). 对于准单色波，由于其波长范围很小，可以将 $\omega = \omega(k)$ 用泰勒公式展开，并取到 1 级近似，有

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}(k-k_0) \tag{2.4.4}$$

记

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} = v_{\mathrm{g}}$$

则

$$\begin{aligned} kz - \omega t &= kz - \left[\omega(k_0) + \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}(k-k_0)\right]t \\ &= (k-k_0)z - v_{\mathrm{g}}(k-k_0)t + k_0z - \omega(k_0)t \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

积分式(2.4.2)化为

$$\widetilde{U}(z,t)=\frac{A}{\Delta k}\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k-k_0)z-v_{\mathrm{g}}(k-k_0)t]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0z-\omega(k_0)t]}\mathrm{d}k$$

记 $k-k_0=k'$，$\omega(k_0)=\omega_0$，则有

$$\widetilde{U}(z,t)=\frac{A}{\Delta k}\left[\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'(z-v_{\mathrm{g}}t)}\mathrm{d}k\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}=\frac{A}{\Delta k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}}{\mathrm{i}(z-v_{\mathrm{g}}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}$$

$$=\frac{A}{\Delta k}\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\mathrm{i}(z-v_{\mathrm{g}}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}=A\frac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}$$

上述有一定波长分布范围的非单色波叠加的结果，可以用图 2.4.2 表示，是具有不同频率的两部分的乘积：高频部分的角频率为 $\omega(k_0)$，波矢为 k_0；低频部分的角频率为 $\frac{1}{2}v_{\mathrm{g}}\Delta k$，波矢为 $\frac{\Delta k}{2}$. 由于低频部分变化缓慢，可以将其并入振幅部分. 则总的效果相当于波矢为 k_0，频率为 $\omega(k_0)$，振幅为 $A\dfrac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}$ 的波，即

$$\widetilde{U}(z,t)=\left[A\frac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}\tag{2.4.6}$$

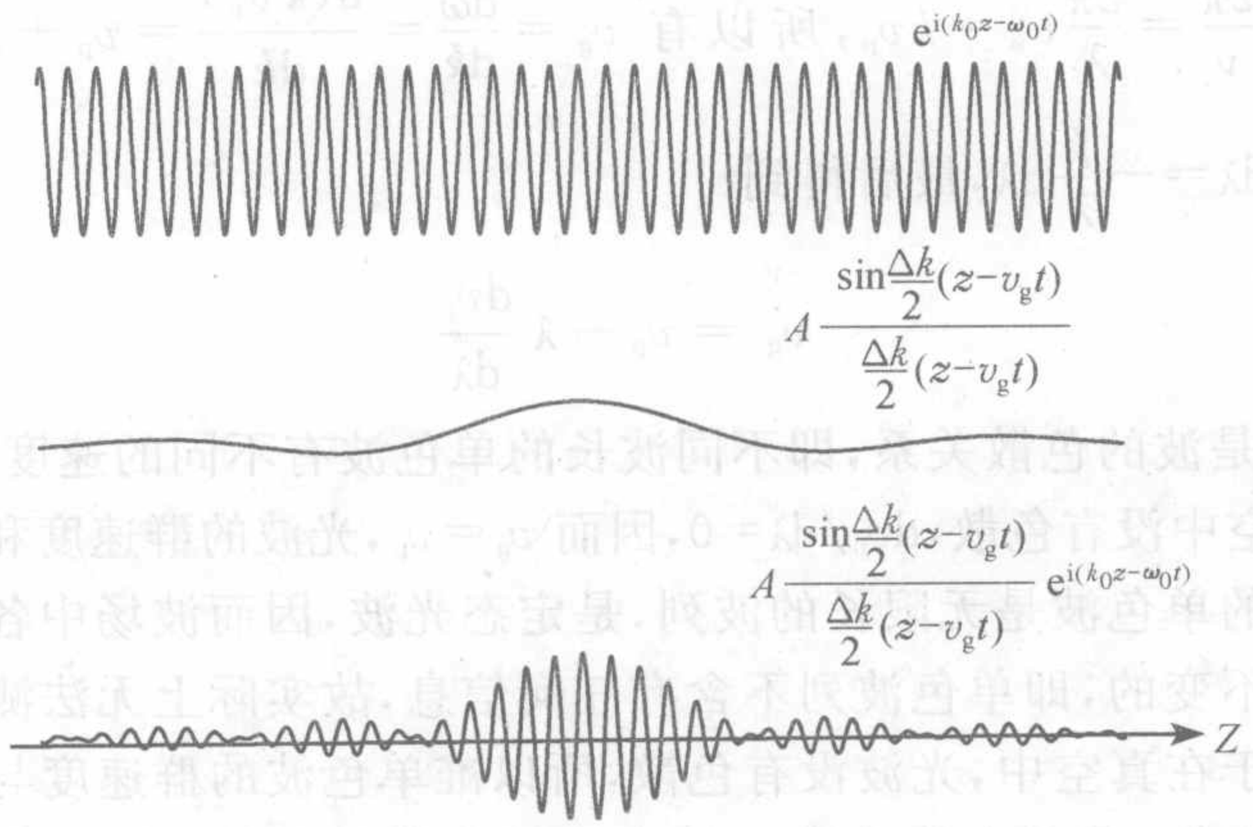


图 2.4.2　准单色波的叠加

由于振幅在空间是震荡衰减的，实际上，合成波的有效部分，只是图 2.4.2 中的中央部分，这一部分称作中央主极大；而其余部分由于振幅小得多，效果不明显. 这样，不同频率的波叠加的结果，就形成了一个波包(wave packet). 其主极大值的位置为 $z_0=v_{\mathrm{g}}t$，相邻极小值的位置由 $\frac{\Delta k}{2}(z_{\pm1}-v_{\mathrm{g}}t)=\pi$ 决定，即 $z_{\pm1}=v_{\mathrm{g}}t\pm\frac{2\pi}{\Delta k}$. 波

包的大小就是上述中央主极大的有效分布区域，即中央极大分布区域的一半为

$$\Delta Z = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{2.4.7}$$

这就是波包，或非单色波列的有效长度

$$L_0 = \Delta Z = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{2.4.8}$$

将上式中的波长用频率代替

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2\nu^2}{\Delta\nu c} = \frac{c}{\Delta\nu} \tag{2.4.9}$$

则波包的有效长度也可以表示为

$$L_0 = \frac{c}{\Delta\nu} \tag{2.4.10}$$

波包的速度就是中央主极大传播的速度，由式(2.4.6)，为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{2.4.11}$$

就是这些不同频率的单色波叠加之后所形成的波群或波包传播的速度，称为群速度(group velocity).

对于其中每一个单色成分 $\widetilde{U}(z,k,t)=a(z,k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$，其速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{2.4.12}$$

这是该成分振动传播的速度，也就是相位传播的速度，即相速度(phase velocity).

由于 $\omega=\frac{2\pi}{\nu}=\frac{2\pi}{\lambda}v_p=kv_p$，所以有 $v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}(kv_p)}{\mathrm{d}k}=v_p+k\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}k}$，而 $\mathrm{d}k=\mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)=-\frac{2\pi}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=-\frac{k}{\lambda}\mathrm{d}\lambda$，最后得到

$$v_g = v_p - \lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.4.13}$$

$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda$ 反映的是波的色散关系，即不同波长的单色波有不同的速度.

由于在真空中没有色散，$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda=0$，因而 $v_g=v_p$，光波的群速度和相速度相等.

由于理想的单色波是无限长的波列，是定态光波，因而波场中各点的强度等物理量总是保持不变的，即单色波列不含有任何信息，故实际上无法测量单色波的相速度. 但是，由于在真空中，光波没有色散，所以准单色波的群速度与其中每一波长成分的相速度相等. 真空中的光速 c 其实就是光的相速度，也是准单色波的群速度，是一个不变的数值.

但是，在色散介质中，$\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\lambda\neq0$，因而 $v_g\neq v_p$.

如果 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}>0$，则 $v_g<v_p$；如果 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}<0$，$v_g>v_p$. 通常情况下，由于短波的折射率较大，所以 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}>0$，$v_g<v_p$，即群速度小于相速度.

由于非单色波的能量主要集中在波包中，因而波包的速度，即群速度，就是波所携带的能量传播的速度，也就是实验上测得的波的速度. 严格的单色波实际上是不存在的，而介质通常都是有色散的，所以在介质中测量所得到的光速，都是群速度. 只有在真空中，由于 $v_g = v_p$，测得的光速才与相速度相等. 目前公认光速的数值，是 1983 年第十七届国际计量大会通过的，其值为

$$c = 299792458\text{m/s}$$

就是真空中准单色光的群速度.

2.5　光速的测量

正如 2.4 节所指出的，测量光速，实际上是测量光的群速度. 几百年来，人们进行了各种尝试，以求获得最精确的光速. 表 2.5.1 列出了在不同年代所进行的测量光速代表性的实验.

表 2.5.1

年　代	科学家	方　法	结果/(km/s)
1667	Galileo Galilei	信号灯	333.5
1676	Ole Rømer	木星的卫星	220000
1726	James Bradley	光行差	301000
1834	Charles Wheatstone	旋转反射镜	402336
1838	Francis Arago	旋转反射镜.	
1849	Armand Fizeau	旋转齿轮	315000
1862	Leon Foucault	旋转反射镜	298000±500
1868	James Clerk Maxwell	理论计算	284000
1875	Marie-Alfred Cornu	旋转棱镜	299990
1879	Albert Michelson	旋转棱镜	299910
1888	Heinrich Rudolf Hertz	电磁波	300000
1889	Edward Bennett Rosa	介电常量、磁导率的测量	300000
1890	Henry Rowland	光谱测量	301800
1907	Edward Bennett Rosa Noah Dorsey	介电常量、磁导率的测量	299788
1923	Andre Mercier	介电常量、磁导率的测量	299795
1926	Albert Michelson	旋转反射镜（干涉仪）	299798
1928	August Karolus Otto Mittelstaedt	克尔盒快门	299778
1933	Michelson, Pease	旋转反射镜（干涉仪）	299774±2
1947	Louis Essen	空腔谐振	299792±1
1949	Carl I. Aslakson	近程导航雷达	299792.4
1951	Keith Davy Froome	射频干涉仪	299792.75
1973	Kenneth M. Evenson	激光	299792.4574±0.0011
1978	Peter Woods 研究组	激光	299792.4588±0.0002
1980	Baird 研究组	稳频激光器	299792.4581±0.0019

第一个试图测量光速的学者是伽利略，1607 年的某个夜晚，他与助手在两座相距 7.5km 的山顶上，每人携带一盏灯，两人约定：其中第一人先打开灯罩，同时开始计时，第二人看见灯光后，立刻打开灯罩，第一人看见第二盏灯的光后，再计时. 虽然意识到光速是极快的，但结果的误差却大得足以让他们得不出结论，这样的方法根本无法测量光速.

丹麦天文学家罗默，采用天文学方法，通过测量木星的一颗卫星被木星遮挡的时间与轨道的关系测量光速. 由于任何周期性的变化过程都可当作时钟，罗默在测量时所用的时钟就是木星每隔一定周期所出现的一次卫星蚀. 他注意到：连续两次卫星蚀相隔的时间，当地球背离木星运动时，要比地球迎向木星运动时要长一些，这一现象说明光的传播速度是有限的. 光从木星发出（实际上是木星的卫星发出），当地球离开木星运动时，光必须追上地球，因而从地面上观察木星的两次卫星蚀相隔的时间，要比实际相隔的时间长一些；当地球迎向木星运动时，这个时间就短一些. 因为卫星绕木星的周期不大（约为 1.75 天），所以上述时间差数，在最合适的时间不致超过 15s（地球的公转轨道速度约为 30km/s）. 为了取得可靠的结果，观察曾在一整年中连续地进行. 罗默通过观察卫星蚀的时间变化和地球轨道直径求出了光速，由于当时只知道地球轨道半径的近似值，故测得光速为 215000km/s，这个结果尽管离光速的准确值相差甚远，但却第一次提出了有效的光速测量方法. 后来人们用照相方法测量木星卫星蚀的时间，并在地球轨道半径测量准确度提高后，用罗默法求得的光速为 (299840 ± 60)km/s.

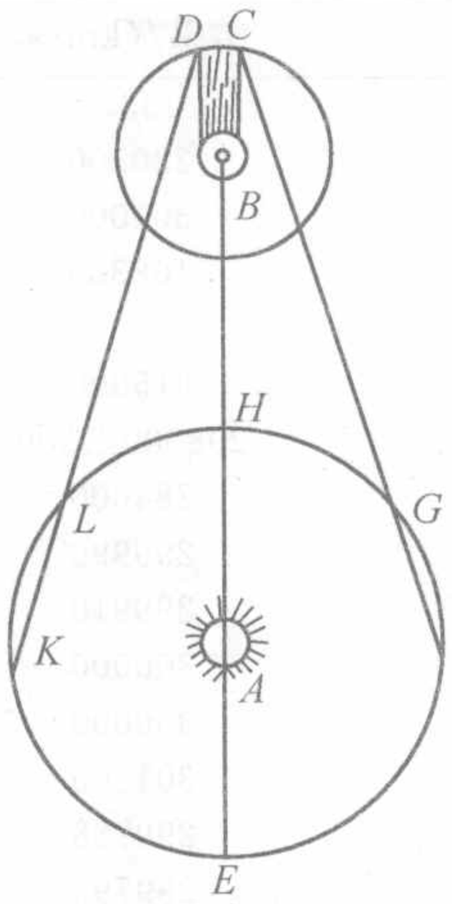


图 2.5.1　利用光行差测量光速

英国天文学家布莱德雷发现了恒星的“光行差”现象. 他注意到，在地球上观察恒星时，恒星的视位置在不断地变化，一年之内，所有恒星似乎都在天顶上绕着半长轴相等的椭圆运行了一周. 他认为这种现象的产生是由于恒星发出的光传到地面时需要一定的时间，而在此时间内，地球已因公转而发生了位置的变化. 他用地球公转的速度与光速的比例（图 2.5.1）估算出了太阳光到达地球需要 493s，并由此测得光速为 299930km/s. 这个数值较罗默法测定的要精确一些，与实际的光速值比较接近.

斐索首次在陆地上（实验室中），采用如图 2.5.2 所示的齿轮法，从光源发出的光经透镜会聚后射到半镀银的镜面（分光板）上，再经透镜达到反射镜，反射后又通过分光板射入观察者的眼睛. 设光从分光板到反射镜再被反射回到分光板所经过的为时间 Δt. 在分光板前放置一个旋转的齿轮，齿轮旋转时，轮齿挡住光路而齿隙不挡住光路，并将齿轮的表面涂黑，使之不反射光. 从分光板反射的光如果射在齿上，则观察者看不见光；如果恰从齿隙通过，则可以到达反射镜并被反射回来. 当齿轮的转速较低时，在 Δt 时间内，反射回来的光会通过同一个齿隙，观察者可以看见光. 当转速增加到一定值时，反射光将被与该齿隙相邻的齿遮住，则看不

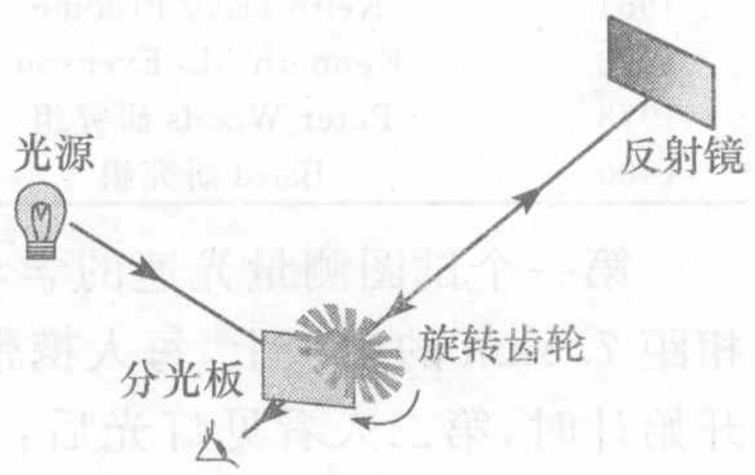


图 2.5.2　齿轮法测光速

见光. 转速进一步增加，反射光又可以从下一个齿隙通过，则观察者第二次看见光；当齿轮转动得更快，反射光又被另一个齿遮断时，光又消失. 这样，当齿轮转速由零而逐渐加快时，在观察着在齿轮后将看到闪光. 在斐索所做的实验中，当具有 720 齿的齿轮，光往复反射一次的路程为 13.74km，当齿轮转速为 12.67 周/s 时，光首次被挡住而消失，因此测出光速为 315000km/s. 1851 年，斐索还用自己发明的干涉仪器，测量了地球相对于光的速度，试图证明以太(ether)的存在.

傅科用旋转反射镜的方法(图 2.5.3)，测量了光速. 从 S 发出的光线射到绕轴 O 高速均匀旋转的反射镜上 M_1，再射到一个固定的反射镜 M_2 上. 如果在这一段时间内，旋转镜转过了 α 角，则反射的光线则相对于入射光线转过 2α 角，并由此引起反射光点移动到 S'. 图中，两反射镜间的光程为 s_2，光源到 M_1 的光程为 s_1，M_1 的角速度为 ω，则光在两镜面间往返一次的时间 $\Delta t=\dfrac{2s_2}{c}$，这一时间内，M_1 转过的角度 $\alpha=\omega\Delta t=\dfrac{2\omega s_2}{c}$，反射光相对于入射光的移动 $\Delta l=2\alpha s_1=\dfrac{4\omega s_1 s_2}{c}$，于是求出光速 $c=\dfrac{4\omega s_1 s_2}{\Delta l}$. 在傅科的实验中，$s_1=4\text{m}$，$s_2=2.6\text{m}$，$\Delta l=0.7\text{mm}$，$\omega=800$ 周/s，于是测的光速值为(298000+500)km/s. 另外，傅科还利用这个实验装置，首次测出了光在介质(水)中的速度 $v<c$，且发现在水中光的传播速度比真空(空气)中低.

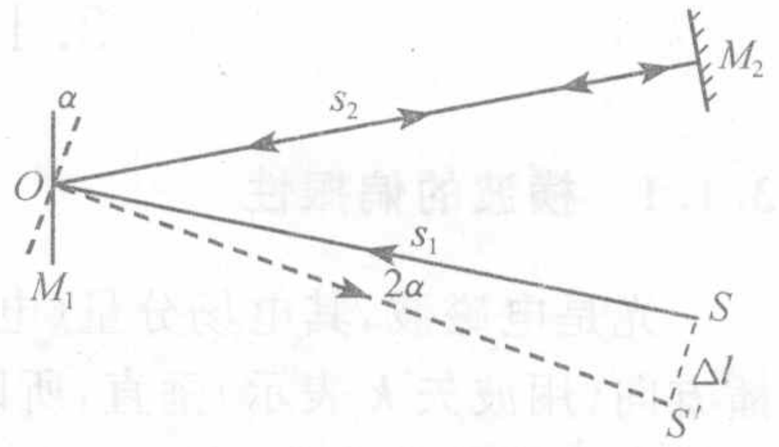


图 2.5.3　旋转镜法测光速

1927 年迈克耳孙又改进了斐索和傅科的装置，采取旋转八面镜的方法，很大地提高了测量的准确度.

在对信号的发出和返回接收时刻能作自动记录的遮断法除旋转齿轮法外，在现代还采用克尔盒法. 1928 年，卡娄拉斯(August Karolus，1893～1972，德国)和米太斯塔德(Otto Mittelstaedt)首先提出利用克尔盒法来测定光速.

1941 年安德孙用克尔盒法测得 $c=(299776\pm6)$km/s，1951 年贝格斯格兰又用克尔盒法测得 $c=(299793.1\pm0.3)$km/s.

1973 年，埃文森测得了精确的光速值[①]，为(299792.457±0.0011)m/s. 1983 年，胡德斯小组测得了目前真空中光速的最佳数值(299792.4588±0.0002)m/s.

起初，是以米原尺或波长作为长度的基准对光速进行标定的. 根据相对论，真空中的光速是恒定值，而且对光速的测量已经足够精确，于是，1975 年第 15 届国际计量大会确认上述光速值作为国际推荐值使用. 1983 年第 17 届国际计量大会通过决议，用光速作为长度的基准，1m 的定义是光在真空中经过 1/299792.458s 所传播的距离.

① 参见 Evenson K M, Wells J S, Petersen F R, et al. Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser. Phys. Rev. Lett., 1972(29): 1346～1349.

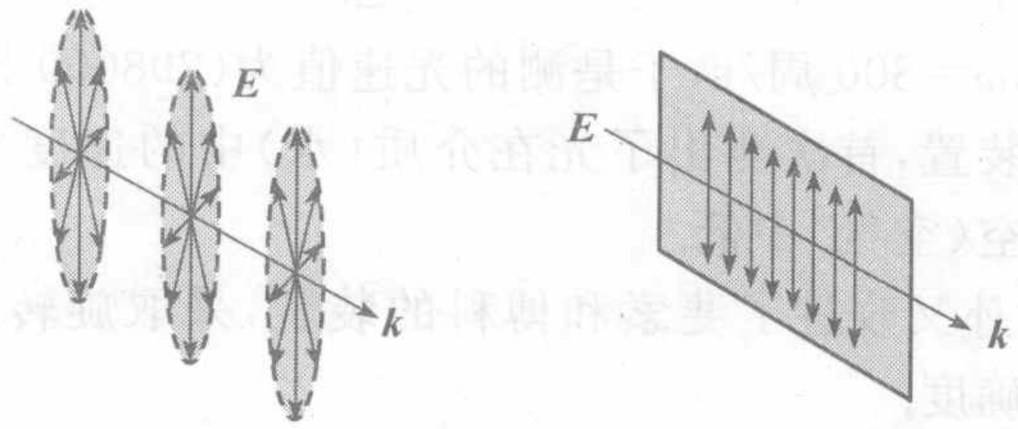
第3章　光的偏振

3.1　光的偏振特性

3.1.1　横波的偏振性

光是电磁波，其电场分量（电场强度）$\boldsymbol{E}$、磁场分量（磁感应强度）$\boldsymbol{B}$ 都与光的传播方向（用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表示）垂直，所以光波是横波. 在可见光波段的电磁波不会引起大多数介质磁性的变化，即 $\mu_r=1$，所以只考虑其电矢量（光矢量）.

由于横波的振动方向与传播方向垂直，所以往往会表现出具有偏振（polarization）特性. 所谓偏振，指的就是振动方向相对于传播方向的不对称性. 如图 3.1.1 所示，虽然在与传播方向垂直的各个方向都有振动，但不同方向的振幅却各不相同，如图 3.1.1(a)所示；或者，电矢量只在一个平面内有振动，如图 3.1.1(b)所示.



(a) 振动的振幅各方向不等　　(b) 在一个平面内振动

图 3.1.1　光的偏振性

其实，早在麦克斯韦电磁波理论建立之前，人们就已经通过实验观察，意识到了光是横波. 光的双散射实验装置如图 3.1.2 所示，一束光经散射体后，散射光向各个方向传播. 如果设光是横波，即振动方向始终与传播方向垂直，则第一次散射后，在各个方向仍有光. 但在与入射光垂直的方向上传播的光，其振动只有单一的方向. 再经过第二次散射后，在与振动平行的方向上，则没有光，而其他方向上仍可以测到光强. 实验事实验证了上述假设.

马吕斯（Etienne-Louis Malus，1775～1812，法国）通过另一种实验证实了光是横波，并研究了光的偏振特性（1809 年）. 他通过电气石晶体观察由其他物体表面反射的光，结果发现，将电气石晶体绕着光束转动时，透过晶体的光的强度会发生改变；晶体转动一周，重新回到原来的位置时，透过晶体的光强也回到原来的数值. 这说明光是横波，而且，从介质表面反射的光，振动矢量相对于传播方向的分布是不对称的. 电气石晶体是一种二向色性（dichroism）晶体，这类晶体有一个特殊的

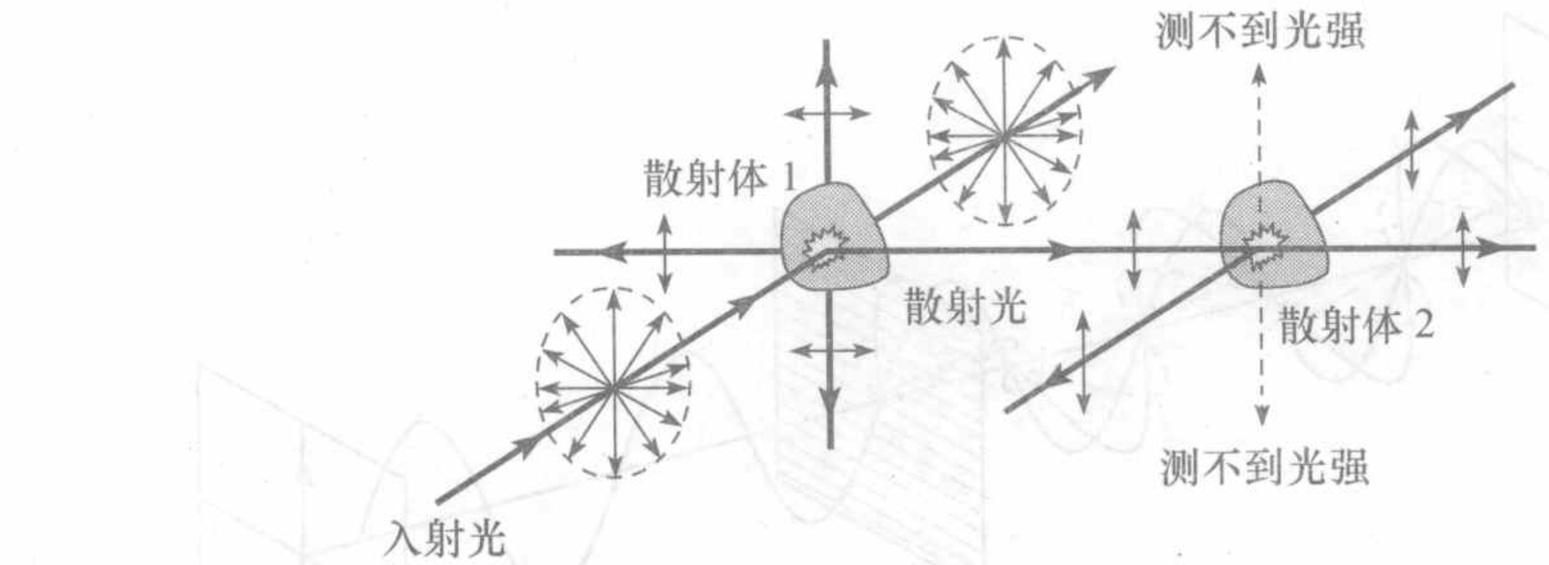


图 3.1.2　光的双散射实验

方向，凡是从晶体中透射出来的光，振动矢量（电场强度矢量）都沿着该方向，这个特殊的方向称作晶体的透振方向，也称作透光轴，如图 3.1.3 所示. 或者说，只有振动方向与透振方向平行的光，才能从晶体透射；振动方向与透振方向垂直的光，是无法透过该晶体的. 除了电气石晶体之外，硫酸碘奎宁晶体也是一种典型的二向色性晶体.

除了用天然的二向色性晶体获得或检验光的横波性和偏振特性外，还可以采用人工的方法.

最初的器件是用拉直的细导线做成的密排线栅（图 3.1.4，金质线栅，金线间隔 $d=5.08\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$）. 光通过这种线栅时，金线中的电子由于吸收了电磁场的能量而作相应的振动，这种振动由于受到金线尺度的限制，而只能沿着金线进行. 因而，与导线（金线）平行的电场分量将被吸收，如图 3.1.5 所示. 由于与导线同方向的电场被吸收，只有电矢量振动方向与导线垂直的光可以从线栅透过.

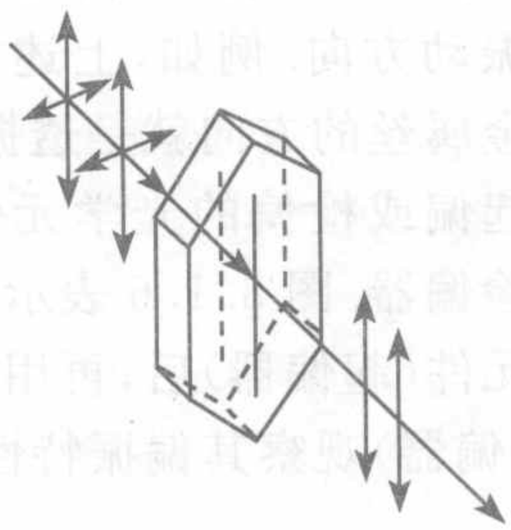


图 3.1.3　光通过二向色性晶体

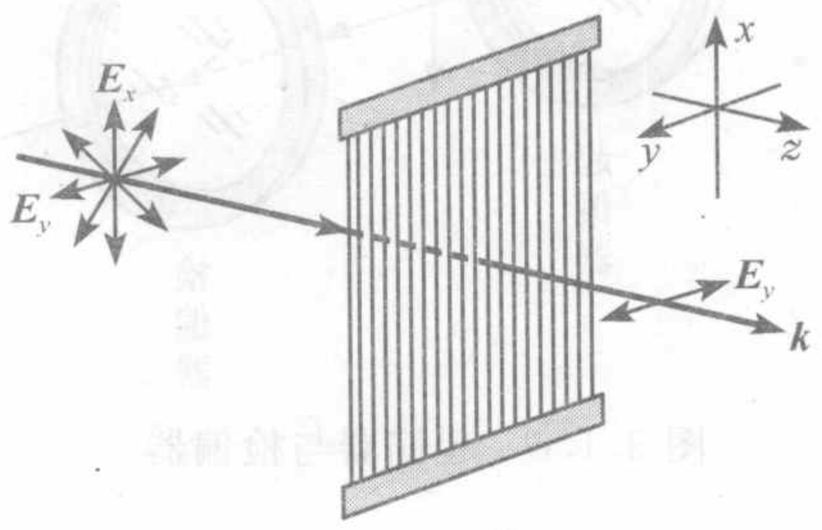


图 3.1.4　金质线栅

1928 年，美国哈佛大学的学生兰德（Edwin Herbert Land，1909～1991）发明了一种人造偏振片. 将聚乙烯醇薄膜在碘溶液中浸一段时间，然后从碘液中提出，并沿着聚乙烯醇分子链的方向拉伸. 由于碘原子吸附在聚乙烯醇的分子链上，拉伸后，碘原子就沿着被拉直的分子链整齐而密集地排列起来. 碘原子中的电子较容易脱离其束缚成为自由电子，因此，在外电场的作用下，电子就可以沿着分子链自由运动. 这样就用有机分子链制成了导电的线栅，而分子链的间隔比导线做成的密排线栅要小得多，因而，浸碘的聚乙烯醇膜对光的振动的吸收更加充分. 这就是 J 型

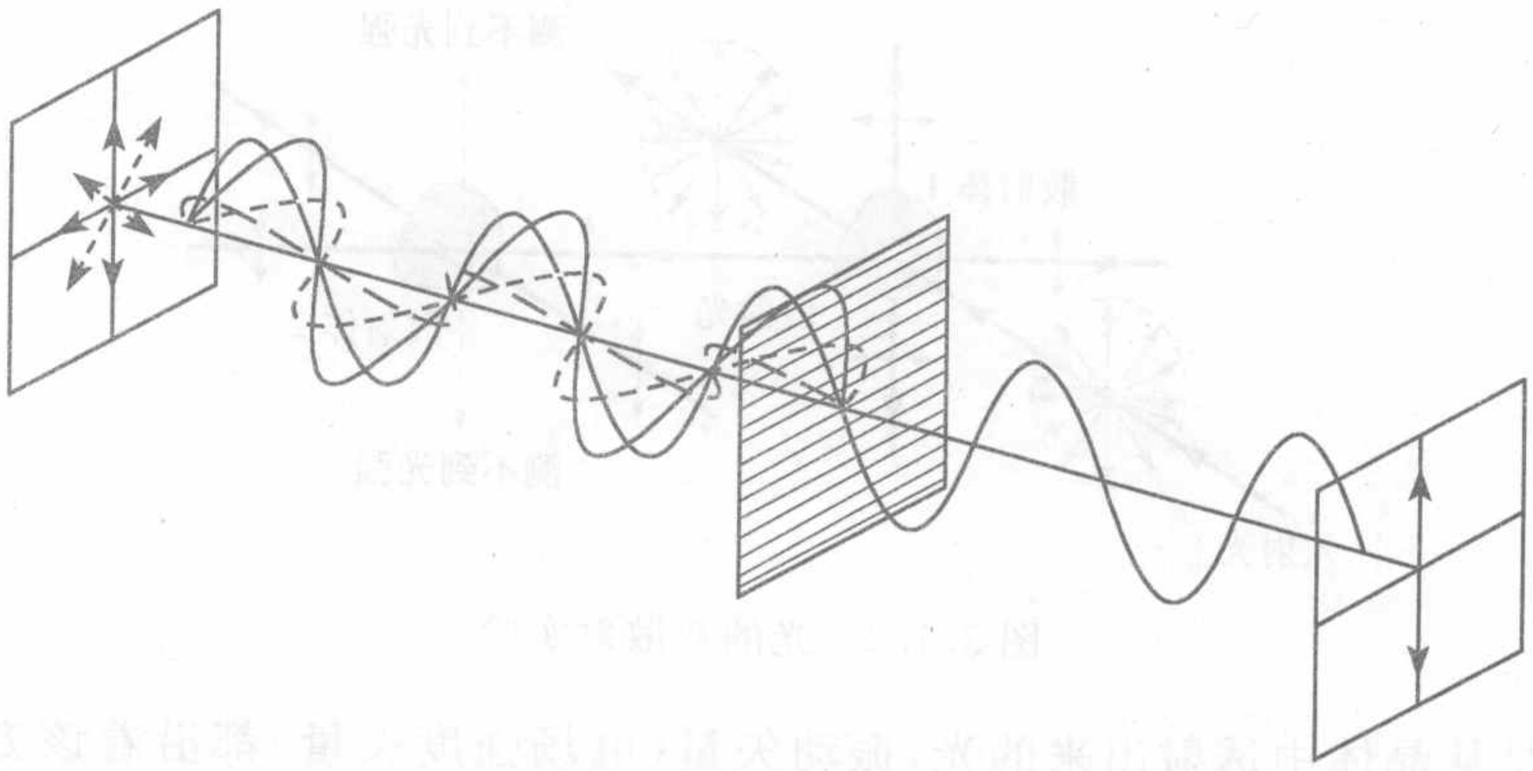


图 3.1.5　光通过金质线栅后光矢量振动的变化

偏振片(polaroid J-sheet). 到 1938 年,兰德又发明了 H 型偏振片(polaroid H-sheet),原理与 J 型偏振片相同.

3.1.2　起偏与检偏

在偏振光中,有几个重要而常见的概念,如起偏、检偏、起偏器、检偏器等,以下做简单的定义和解释.

起偏　通过某种方法或使用某种光学元件,使光变为具有偏振特性.

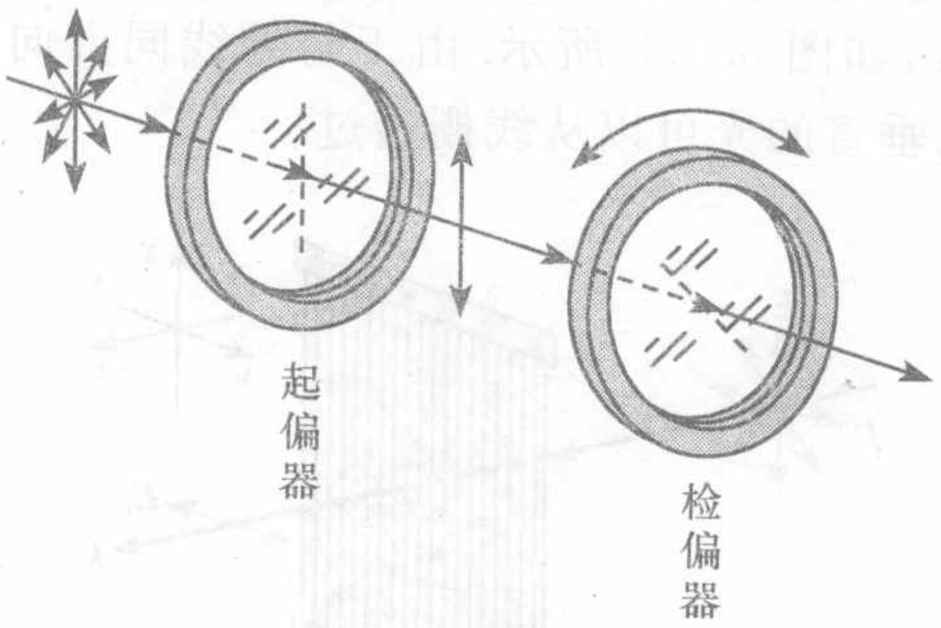


图 3.1.6　起偏器与检偏器

检偏　通过某种方法或使用某种光学元件,检验光的偏振特性.

透振方向　从偏振器件通过的光的电矢量的振动方向. 例如,上述金属线栅中垂直于金属丝的方向就是透振方向.

用来起偏或检偏的光学元件被称作起偏器或检偏器. 图 3.1.6 表示光经过第一个偏振元件(起偏器)后,再用另一个偏振元件(检偏器)观察其偏振特性.

3.2　光的偏振态

3.2.1　普通光源的发光机制

光是电磁波,从前面的讨论,我们似乎得到了这样的结论,在考虑光的传播、叠加等物理过程时,光波与普通的电磁波没有什么区别,甚至可以将机械波的各种结论直接应用到光波之中.

但是,如果稍加留意,我们将会发现光波具有非常明显的独立特征.

第一,从物理特征看,光波的频率非常高,对于可见光,频率基本上是 10^{14} Hz.

对于一般的机械波，由于都是由机械振动产生的，所以时间频率都不高，以最常见的声波为例，人耳可听见的声波，频率在 20Hz～20kHz，频率高于 20kHz 的机械振动，被称作超声波. 而普通的电磁波，其波长通常范围通常为微米到米的量级，甚至可以达到几个千米的量级，所以，其频率一般低于 10^7 Hz. 可见，光波的频率远远大于普通的电磁波和机械波的频率. 对于较低频率的振动，可以用机械或电子装置观察或记录其振动过程，例如，我们可以在示波器上看到低频振动的过程；但对于高达 10^{14} Hz 的振动，远远大于电子的固有振动频率，无法用电子仪器直接观察或记录其瞬时过程.

第二，从产生的机制看. 机械波由机械振动产生，如音叉的振动、弦的振动、簧片的振动，声带的振动等，由于振动的过程是可控的，所以，由此而产生的机械波是可控的，即波的传播方向、振动方向、振幅、频率、相位都是可控的. 电磁波由电磁振荡产生，而电磁振荡也是可以通过电路的参数控制的，所以，普通的电磁波也是可控的.

但是，光波产生的机制是完全不同的.

按照玻尔(Niels Bohr，1885～1962，丹麦)的辐射理论，光是由原子或离子在跃迁过程中产生的. 由量子理论，原子可以处于一系列不同的能量状态，这些状态往往是分立的、不连续的，被称作能级. 当原子不受外界因素干扰或激发时，其状态是稳定的，这一稳定的状态具有最低的能量，称作“基态”. 当原子受到干扰，如从外界吸收能量后，就具有较高的能量，其状态发生变化，跃迁到某一高能量状态(高能级)，这就是某个激发态，如图 3.2.1 所示. 但激发态往往是不稳定的，经过或长或短的一段时间后，原子将会重新跃迁到基态，在跃迁过程中，将会以某种方式将自身具有的能量释放一部分. 这一部分能量，往往会以电磁波(光波)的形式释放. 用爱因斯坦的辐射关系式表示，则为

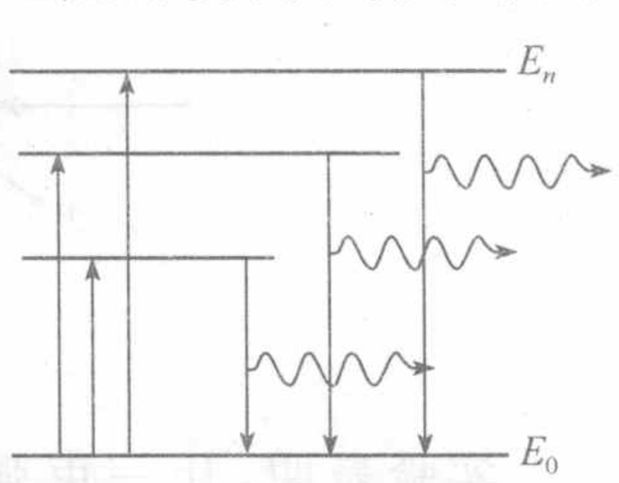


图 3.2.1　原子的辐射跃迁

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu \tag{3.2.1}$$

其中，E_2、E_1 为跃迁前(激发态)和跃迁后(基态)的能量，ΔE 为跃迁前后的能量差，也就是发出的电磁辐射，即光子的能量 $h\nu$.

所以，发光是原子或离子在不同的能量状态(能级)之间跃迁的结果.

光源中总是包含大量的原子，如对于固态物质而言，原子的数密度约为 $10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$，假设其中发光的原子占 0.1%～1%，则发光中心的数密度约为 $10^{20}\,\mathrm{cm}^{-3}$，数目非常多. 所以，总是有大量的原子同时发光，即在每一个任意小的时间间隔内，总是有大量的原子进行辐射跃迁，这种辐射跃迁往往是自发的，则各个发光原子之间是没有任何关联的，所以，这种辐射跃迁过程是随机的. 不同原子所发的光波，都有随机的传播方向、振动方向、初相位和频率. 所以，不同原子在同一时刻所发出的光波是没有关联的；同一原子在不同时刻所发出的光波也是没有关联的，即普通光源所发的光都是没有关联的.

3.2.2 自然光

如前所述，普通光源的自发辐射过程是不受控制和干扰的随机过程，因而，尽管在极短的时间内，有大量光波由于原子的跃迁而发射，但是，这些光波之间没有任何关联. 也就是说，这些光波的传播方向、电矢量的振动方向、相位等物理量都是随机的，相互之间没有固定的关系.

如果采用透镜或反射镜等相应的光学装置，可以将这些光波变成沿着相同方向传播的平行波列. 但是，在这些大量的随机波列中，各列波的振动方向是随机的，在各个方向是均等的，因而总的来看，电矢量是相对于波矢对称分布的；同时，由于各个波列之间的相位差是随机的，因而是不相干的，光波叠加的结果是各个波列的强度相加. 这种光就是自然光(natural light)，日光、灯光、热辐射光等任何自发辐射光源所发出的光都是自然光.

自然光是大量原子同时发出的光波的集合. 其中的每一列是由一个原子发出的，有一个偏振方向和相位，但光波之间是没有任何关系的. 所以，它们的集合，就是在各个方向振动相等、相位差随机的自然光. 自然光电矢量(光矢量)的分布如图 3.2.2 所示.

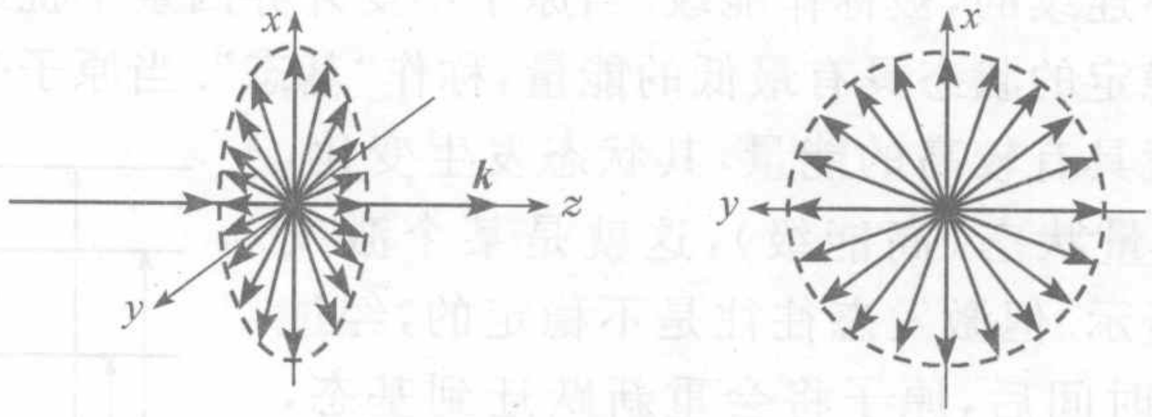


图 3.2.2 自然光

实验表明，让一束强度为 I_0 的自然光通过吸收可以忽略的起偏器，如图 3.2.3 所示，不论起偏器的透振方向怎样旋转，透射光的光强都不发生改变，在起偏器后的光强

$$I = \frac{1}{2} I_0 \tag{3.2.2}$$

上述实验上观察到的结果可以很容易地从理论上证明. 设自然光沿着 z 轴方向传播，其在任一方向的振幅都等于 A_0. 其中任一列光，振动方向与 x 轴夹角为 θ，则该振动在 x 方向振动分量的振幅为 $A_x^\theta = A_0 \cos\theta$，如图 3.2.4 所示. 由于自然光

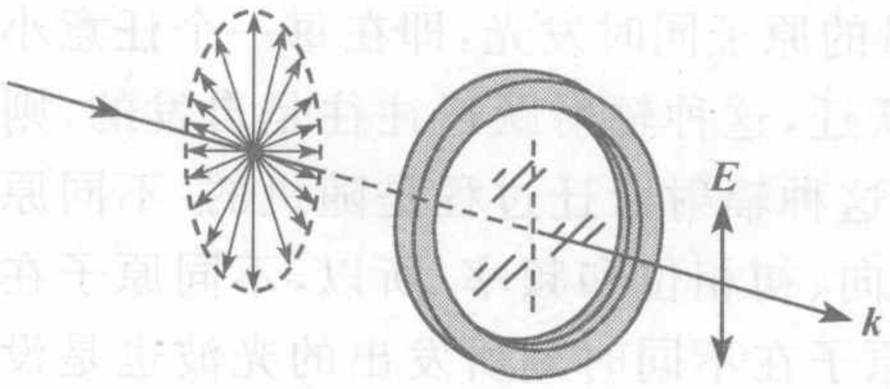


图 3.2.3 自然光经过偏振片后光矢量的改变

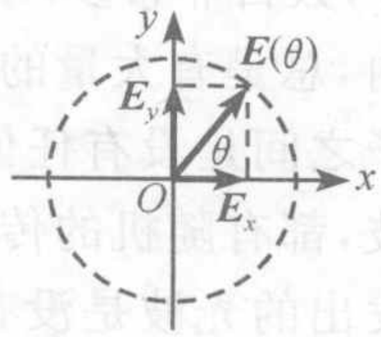


图 3.2.4 光矢量正交分解

中的各个波列是不相干的，所以按强度进行叠加，故有

$$I_x = \int_0^{2\pi} (A_x^\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} A_0^2 \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi A_0^2$$

同理

$$I_y = \pi A_0^2$$

而总光强

$$I = \int_0^{2\pi} A_0^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi A_0^2,$$

故

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0$$

即自然光通过起偏器后，如果不考虑起偏器对光强的吸收，则透射光强为入射光强的一半.

3.2.3　平面偏振光(线偏振光)

自然光经过起偏器(二向色性晶体、偏振片等)后，由于只有平行于起偏器透振方向的电矢量能够通过，因而透射光只包含单一振动方向的电矢量. 这种电矢量始终在一个平面内振动的光，或者电矢量振动的投影是一条直线的光，就是平面偏振光(plane-polarized light)或线偏振光(linearly polarized light).

如果使平面偏振光垂直地射向偏振片，而该偏振片的透振方向与入射光的偏振平面之间的夹角为 θ，如图 3.2.5 所示.

这时可以将电矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 正交分解为平行于偏振片透振方向的矢量 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和垂直于偏振片透振方向的矢量 $\boldsymbol{E}_{\perp}$，而只有 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 可以通过，因而透射光的光强为

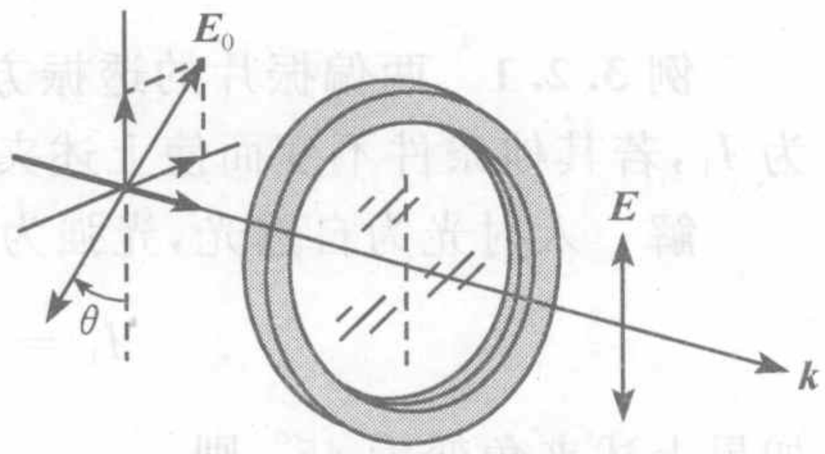


图 3.2.5　平面偏振光通过偏振片图

$$I_\theta = \langle |\boldsymbol{E}_{/\!/}|^2 \rangle = \langle |\boldsymbol{E}_0|^2 \rangle \cos^2\theta = I_0 \cos^2\theta \tag{3.2.3}$$

这就是马吕斯定律.

任何一个平面偏振光，都可以分解为两个振动面相互正交的平面偏振光，如图 3.2.6 所示，在直角坐标系中，可以将任意方向的振动矢量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\cos(kz - \omega t)$，分解为 $\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_x + \boldsymbol{E}_y = E_x \boldsymbol{e}_x + E_y \boldsymbol{e}_y \tag{3.2.4}$$

其中，

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(kz - \omega t) \\ E_y = A_y \cos(kz - \omega t) \end{cases} \tag{3.2.5}$$

或者

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(kz - \omega t) \\ E_y = -A_y \cos(kz - \omega t) = A_y \cos(kz - \omega t + \pi) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

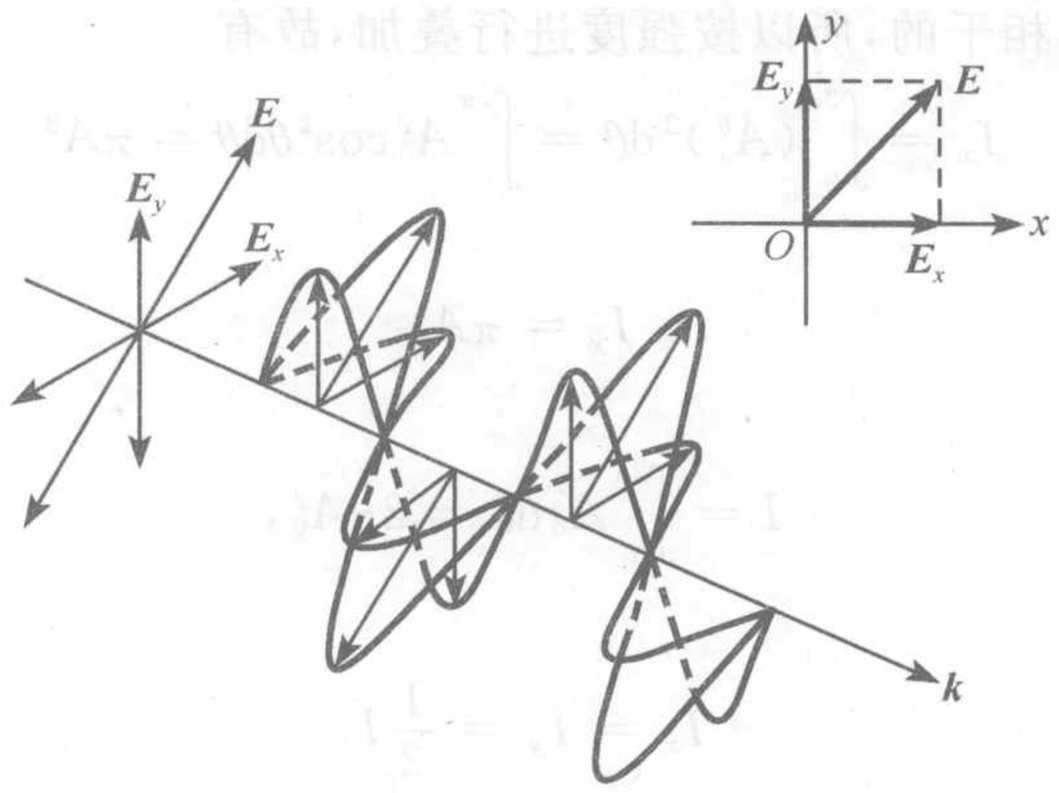


图 3.2.6 平面偏振光的分解

而 $A_x=A\cos\theta, A_x=A\sin\theta$. 式(3.2.5)中,两个正交分量是等相位的(同相),表示光矢量在Ⅰ、Ⅲ象限,式(3.2.6)中,两个正交分量的相位差是 π 的(反相),表示光矢量在Ⅱ、Ⅳ象限.

用偏振片可以获得平面偏振光. 可以用消光比来衡量偏振仪器(起偏器)的起偏效果,定义为

$$\text{消光比}=\frac{\text{最小透射光强}}{\text{最大透射光强}}$$

例 3.2.1 两偏振片的透振方向成 30°夹角时,自然光入射,此时透过的光强为 I_1,若其他条件不变而使上述夹角变为 45°,透射光强如何变化?

解 入射光为自然光,光强为 I_0,则

$$I_1=\frac{1}{2}I_0\cos^2 30^\circ=\frac{3}{8}I_0$$

如果上述夹角变为 45°,则

$$I_2=\frac{1}{2}I_0\cos^2 45^\circ=\frac{1}{4}I_0=\frac{2}{3}I_1$$

例 3.2.2 欲使一平面偏振光的振动面旋转 90°,则

(1) 只用两块理想的偏振片,怎样做到这一点?

(2) 如果用两理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转了 90°,最大的光强为原来的多少倍?

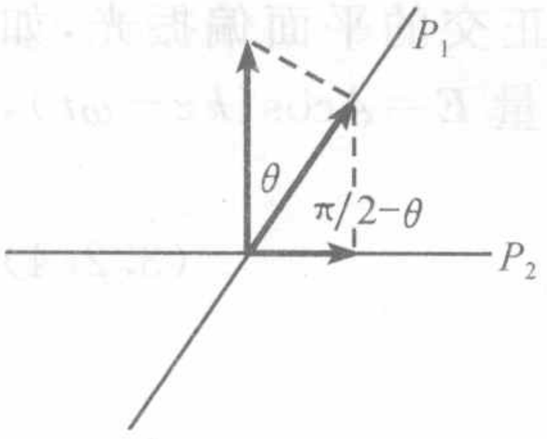


图 3.2.7 例 3.2.2 图

解

(1) 使第二片的透振方向与平面偏振光的振动方向保持垂直,同时第一片的透振方向与平面偏振光的振动方向不垂直即可.

(2) 如果第一片与平面偏振光的振动方向夹角为 θ(图 3.2.7),则

$$I=I_0\cos^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\overset{\theta=\pi/4}{=}\frac{1}{4}I_0$$

3.2.4　部分偏振光

如果光的偏振特性介于自然光和线偏光之间，则被称作部分偏振光，如图 3.2.8 所示. 这种偏振光的电矢量的振幅在不同的方向有不同的大小，其中有两个相互垂直的方向，在这两个方向上，电矢量的振幅分别取最大值 A_{max} 和最小值 A_{min}，用偏振片检验透过的光强，则在某个方向，透射光强最大，记为 I_{max}；在与其垂直的方向，透射光强最小，记为 I_{min}. 则部分偏振光的偏振度定义为

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{3.2.7}$$

偏振度 $0\leqslant P\leqslant 1$. 如果 $I_{max}=I_{min}$，就是自然光，偏振度 $P=0$；如果 $I_{min}=0$，就是平面偏振光，偏振度 $P=1$.

也可以将部分偏振光看成是自然光与平面偏振光的叠加，如图 3.2.9 所示.

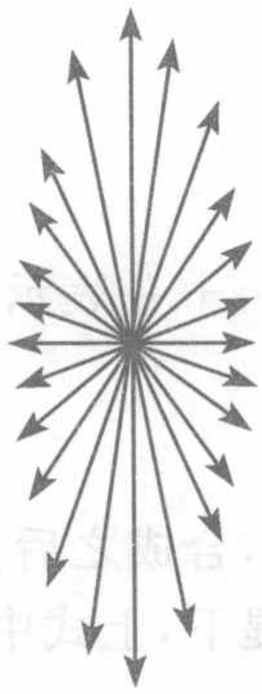


图 3.2.8　部分偏振光

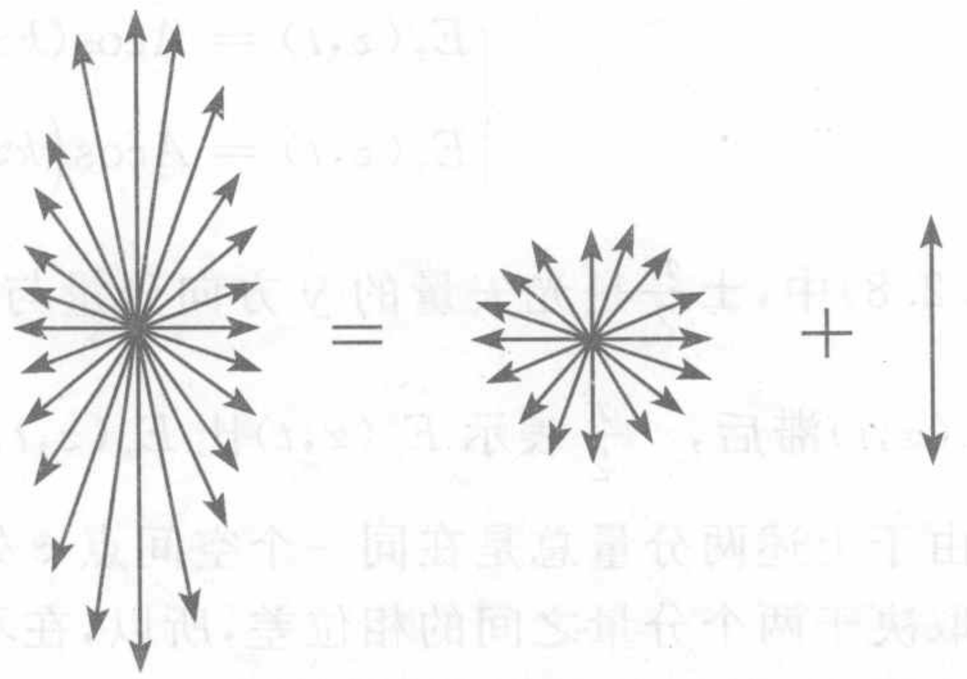


图 3.2.9　部分偏振光是自然光与平面偏振光的叠加

例 3.2.3　一束自然光和平面偏振光的混合光，通过一个可旋转的理想偏振片后，光强随着偏振片的取向可以有 5 倍的改变. 求混合光中各个成分光强的比例.

解　自然光透过偏振片后，光强变为原来的一半；线偏光有一个可以消光的位置. 所以

$$\frac{1}{2}I_1+I_2=5\times\frac{1}{2}I_1$$

得到

$$I_2=2I_1$$

即自然光占 66.7%，线偏光占 33.3%.

3.2.5　圆偏振光

在一个与光的波矢垂直的平面内观察其电矢量，如果光的电矢量不是在一个固定的平面内振动，而是绕着传播的方向匀速旋转，且旋转中电矢量的大小保持不

变，则其端点轨迹为圆(图 3.2.10)，这就是圆偏振光(circular polarized light).

由波的矢量叠加可以判断，圆偏振光可以分解为两个振幅相等的相互垂直的平面偏振光，这两个平面偏振光具有$\frac{\pi}{2}$的相位差，如图 3.2.11 所示.

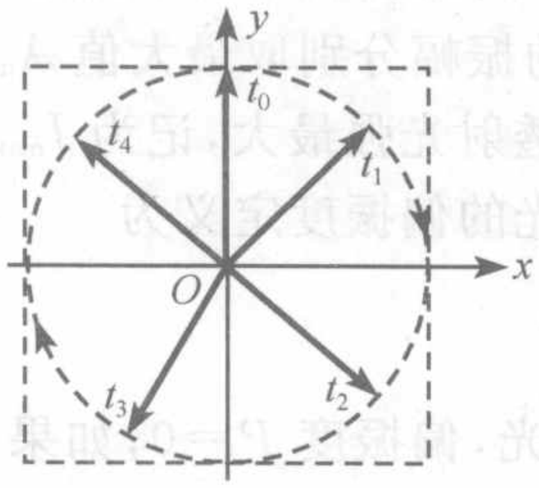


图 3.2.10 圆偏振光

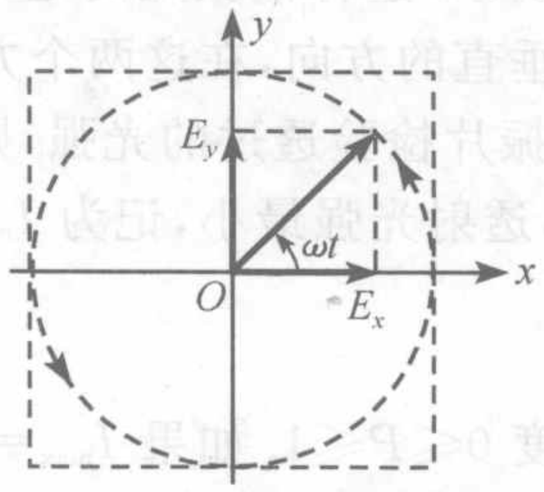


图 3.2.11 圆偏振光正交分解

也可表示为

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos(kz-\omega t) \\ E_y(z,t) = A\cos\left(kz-\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{3.2.8}$$

式(3.2.8)中，$\pm\frac{\pi}{2}$是光矢量的 y 方向分量与 x 分量的相位差，$+\frac{\pi}{2}$表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$滞后，$-\frac{\pi}{2}$表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$超前.

由于上述两分量总是在同一个空间点 z 处进行合成，而且，合成之后光的偏振特性取决于两个分量之间的相位差，所以，在不引起混淆的前提下，上式中的 kz 通常略去不写.则上述两式可以简写为

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos\omega t \\ E_y(z,t) = A\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{3.2.9}$$

或者

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos\omega t \\ E_y(z,t) = A\cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{3.2.10}$$

其中，$\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$.

这时，式(3.2.10)中的 $\Delta\varphi$ 则表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$超前，要注意与式(3.2.8)中相位差含义有所区别.

迎着光的传播方向观察，如果电矢量是顺时针方向旋转的，则称为右旋圆偏振光(right-circularly polarized)；如果电矢量逆时针方向旋转，则称为左旋圆偏振光(left-circularly polarized).容易从圆偏振光的分量表达式判断出电矢量的旋转方向，如 $\Delta\varphi=-\frac{\pi}{2}$，则可以得到 $t=0$，$t=\frac{\pi}{4\omega}$，$t=\frac{\pi}{2\omega}$，$t=\frac{3\pi}{4\omega}$，…时刻光矢量的位置，如图 3.2.12 所示，从而判断这是一个左旋的圆偏光，即

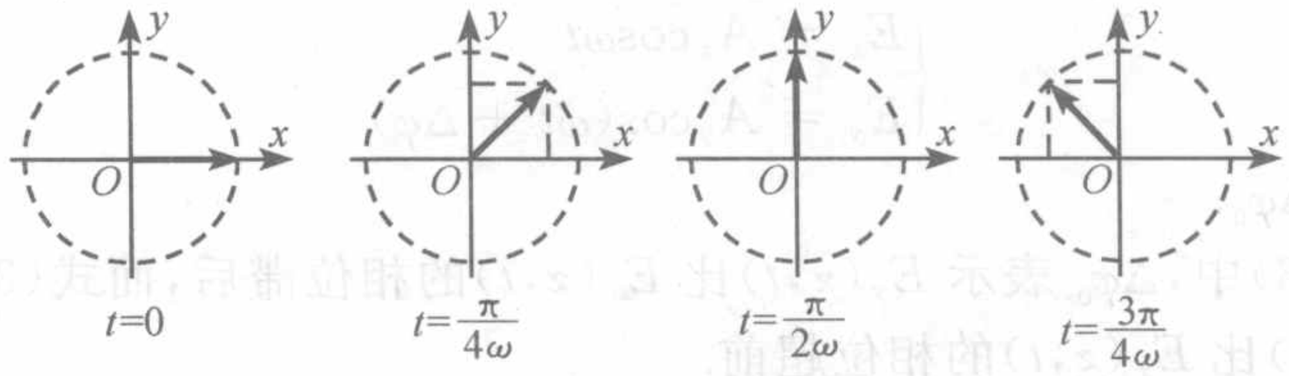


图 3.2.12　$\Delta\varphi=-\frac{\pi}{2}$时圆偏振光电矢量的旋转方向

$$\begin{cases}\Delta\varphi=+\dfrac{\pi}{2}, & \text{右旋}\\[2ex] \Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{2}, & \text{左旋}\end{cases}\tag{3.2.11}$$

圆偏振光正确的物理图像应该这样描述:在一个与波矢垂直的固定平面内,其光矢量(电矢量)以固定的角速度绕波矢旋转.但实际上,这一现象是无法直接观测的,因为电矢量旋转的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,就是其正交分量简谐振动的周期,是一个非常小的数值,约为 10^{-14} s,这么小的周期,是难以测量的.

用偏振片检验,圆偏光与自然光相同.即无论偏振片的透振方向如何,出射光的强度总是相等的.

3.2.6　椭圆偏振光

光矢量绕传播方向旋转,但其数值作周期性变化,矢量端点的轨迹为椭圆,如图 3.2.13 所示,就是椭圆偏振光(elliptical polarized light).

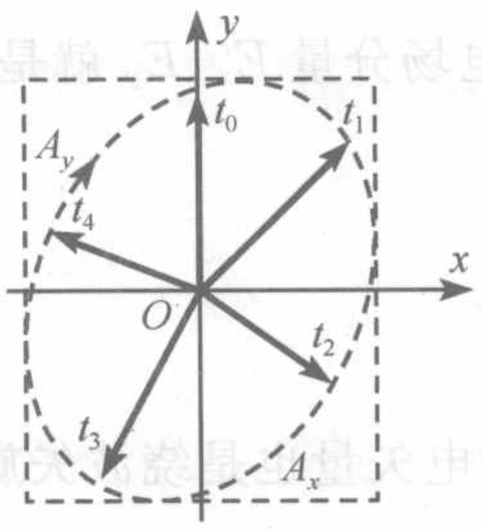


图 3.2.13　椭圆偏振光

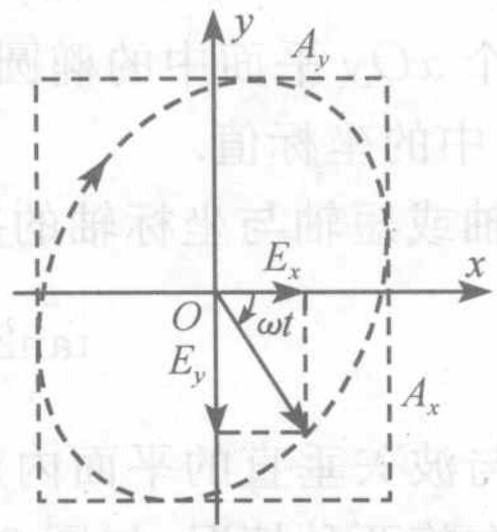


图 3.2.14　椭圆偏振光电矢量的正交分解

如图 3.2.14 所示,椭圆偏振光的电矢量可正交分解为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y=A_x\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x+A_y\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi_0)\boldsymbol{e}_y\tag{3.2.12}$$

即

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos(kz-\omega t)\\ E_y=A_y\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi_0)\end{cases}\tag{3.2.13}$$

同样略去相位中的空间部分 kz,或者使 $z=0$,得到

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos\omega t \\ E_y = A_y \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{3.2.14}$$

其中，$\Delta\varphi = -\Delta\varphi_0$.

式(3.2.13)中，$\Delta\varphi_0$ 表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$的相位滞后，而式(3.2.13)中，$\Delta\varphi$ 则表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$的相位超前.

在式(3.2.14)中，可以消去参量 t，而得到两正交分量 E_x、E_y 的方程. 将式(3.2.14)化为

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos\omega t \\ \dfrac{E_y}{A_y} = \cos\omega t\cos\Delta\varphi + \sin\omega t\sin\Delta\varphi \end{cases}$$

则得到

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos\omega t \\ \dfrac{1}{\sin\Delta\varphi}\left(\dfrac{E_y}{A_y} - \cos\omega t\cos\Delta\varphi\right) = \sin\omega t \end{cases}$$

将第二式中 $\cos\omega t$ 以 E_x/A_x 替换，即可在上述方程中消去参量 t，有

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left[\frac{1}{\sin\Delta\varphi}\left(\frac{E_y}{A_y} - \frac{E_x}{A_x}\cos\Delta\varphi\right)\right]^2 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

最后得到

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi \tag{3.2.15}$$

这是一个 xOy 平面中的椭圆方程. 上述公式中的电场分量 E_x、E_y 就是直角坐标系 E_xOE_y 中的坐标值.

椭圆长轴或短轴与坐标轴的夹角为

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\Delta\varphi$$

在一个与波矢垂直的平面内观察时，椭圆偏振光的电矢量也是绕波矢旋转的，也有右旋和左旋两种情况，如图 3.2.15 所示.

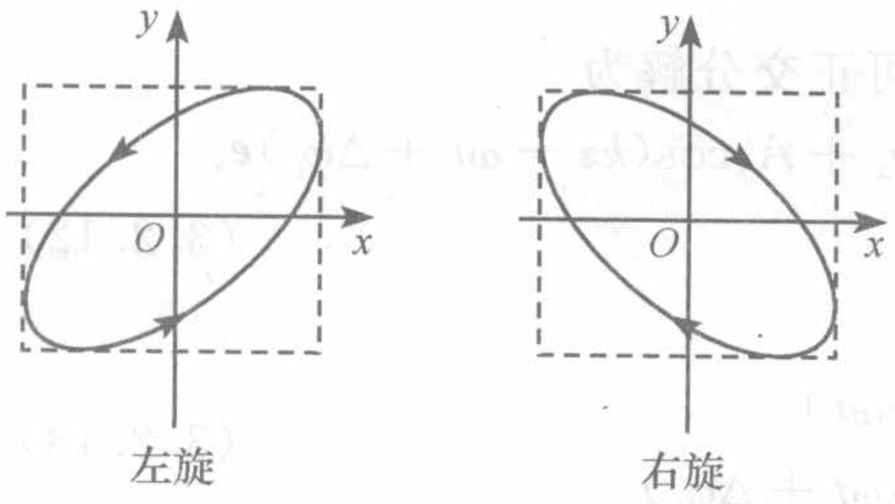


图 3.2.15 左旋和右旋椭圆偏振光

电矢量的椭圆长短轴的取向以及旋转方向是由相位差 $\Delta\varphi$ 决定的，例如，当 $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{4}$，处于第Ⅰ象限时，分别在 $t=0$，$t=\dfrac{\pi}{2\omega}-\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$，$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$，$t=\dfrac{\pi}{\omega}-\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$等时刻作出电矢量的位置，即可看出它是右旋的(图 3.2.16). 同样地，如果 $\Delta\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$，或 $\Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，即处

于第Ⅳ象限时，画出在 $t=0$，$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$，$t=\dfrac{\pi}{2\omega}-\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$，$t=\dfrac{\pi}{\omega}$等时刻电矢量的位置，可看出它是左旋的(图 3.2.17).

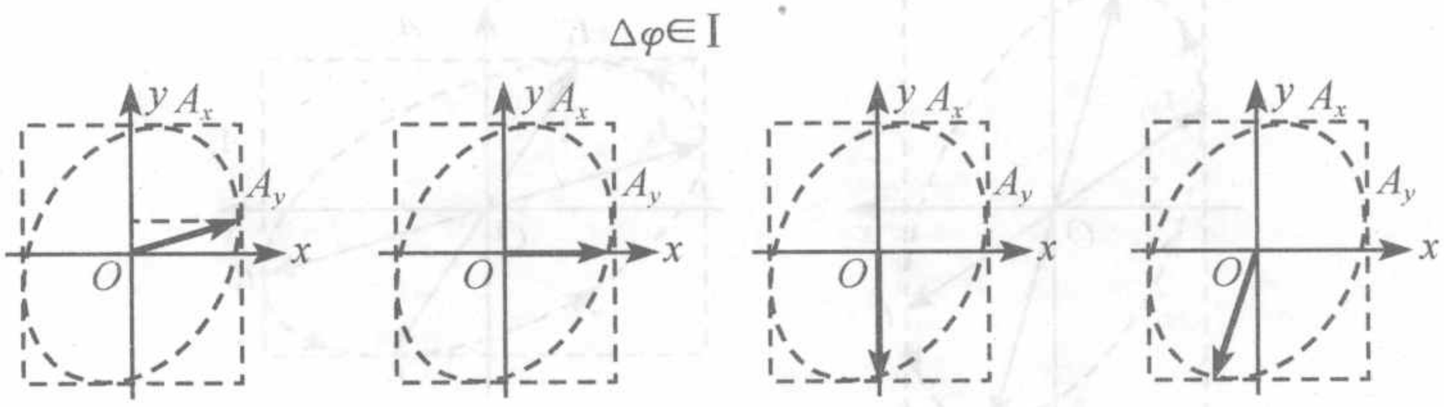


图 3.2.16　$\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{4}$时电矢量的旋转方向(右旋)

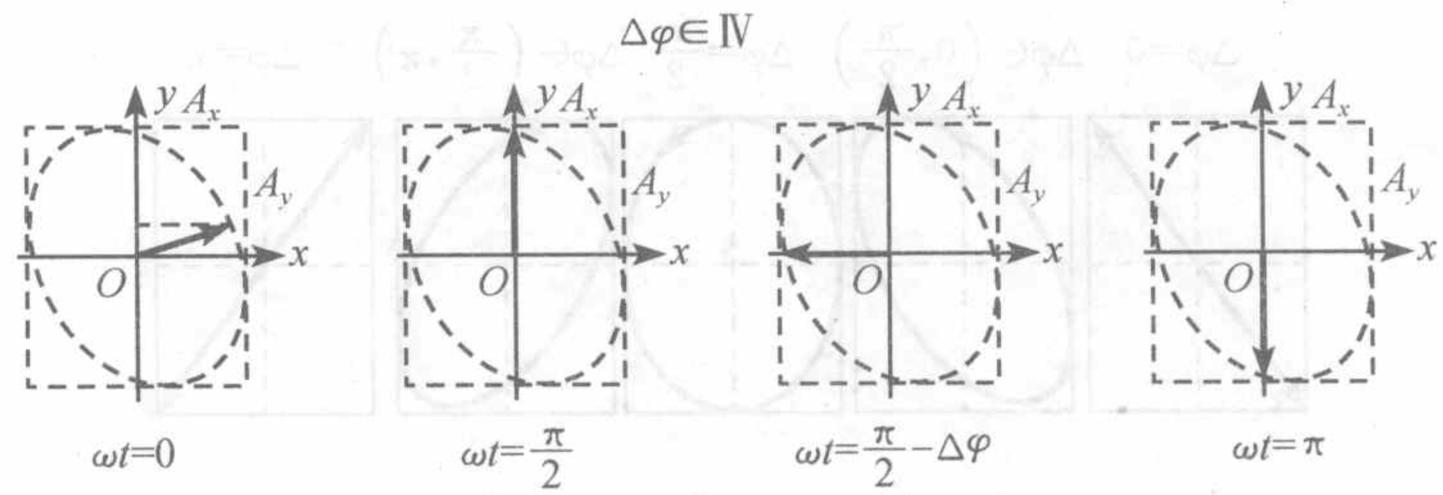


图 3.2.17　$\Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$时电矢量的旋转方向(左旋)

容易得到电矢量的旋转方向与两正交分量相位差之间的关系，即

$$\begin{cases}\Delta\varphi\in\ \text{Ⅰ},\text{Ⅱ}, & \text{右旋}\\ \Delta\varphi\in\ \text{Ⅲ},\text{Ⅳ}, & \text{左旋}\end{cases}$$

相位差 $\Delta\varphi$ 的取值范围还决定了椭圆长短轴的取向. 例如，画出一个四边形，其边长分别为两正交分量的振幅 A_x、A_y，则椭圆与其相切. 当 $\Delta\varphi$ 处于第Ⅱ象限，从 $t=0$ 时刻开始，电矢量的椭圆与四边形相切的时刻依次为 $\omega t=0$、$\omega t=\pi-\Delta\varphi$、$\omega t=\pi$、$\omega t=2\pi-\Delta\varphi$，在这些切点处，两分量的取值如下：

$$\begin{cases}E_x \xlongequal{\omega t=0} A_x>0,\\ E_y=A_y\cos\Delta\varphi<0,\end{cases}\quad \text{切点在第 Ⅳ 象限}$$

$$\begin{cases}E_x \xlongequal{\omega t=\pi-\Delta\varphi} A_x\cos(\pi-\Delta\varphi)>0,\\ E_y=-A_y<0,\end{cases}\quad \text{切点在第 Ⅳ 象限}$$

$$\begin{cases}E_x \xlongequal{\omega t=\pi} -A_x<0,\\ E_y=A_y\cos(\pi+\Delta\varphi)>0,\end{cases}\quad \text{切点在第 Ⅱ 象限}$$

$$\begin{cases}E_x =\xlongequal{\omega t=2\pi-\Delta\varphi} A_x\cos\Delta\varphi<0,\\ E_y=A_y>0,\end{cases}\quad \text{切点在第 Ⅱ 象限}$$

分别就 $A_x > A_y$、$A_x < A_y$ 画出如图 3.2.18 所示椭圆，可见其长轴总是在Ⅱ、Ⅳ象限.

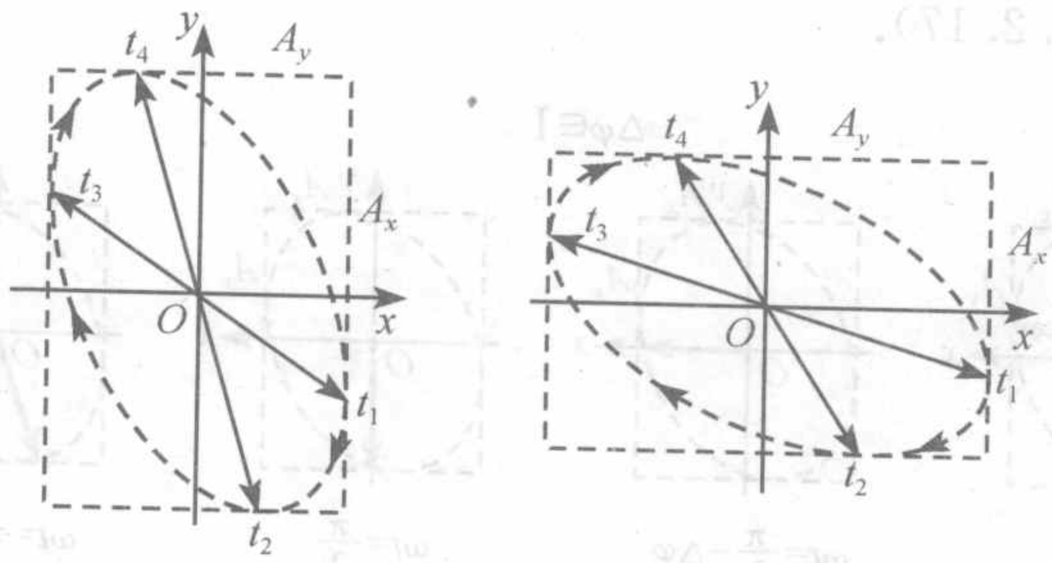


图 3.2.18　$\Delta\varphi$ 处于第Ⅱ象限时椭圆长轴的取向

椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系用图 3.2.19 表示.

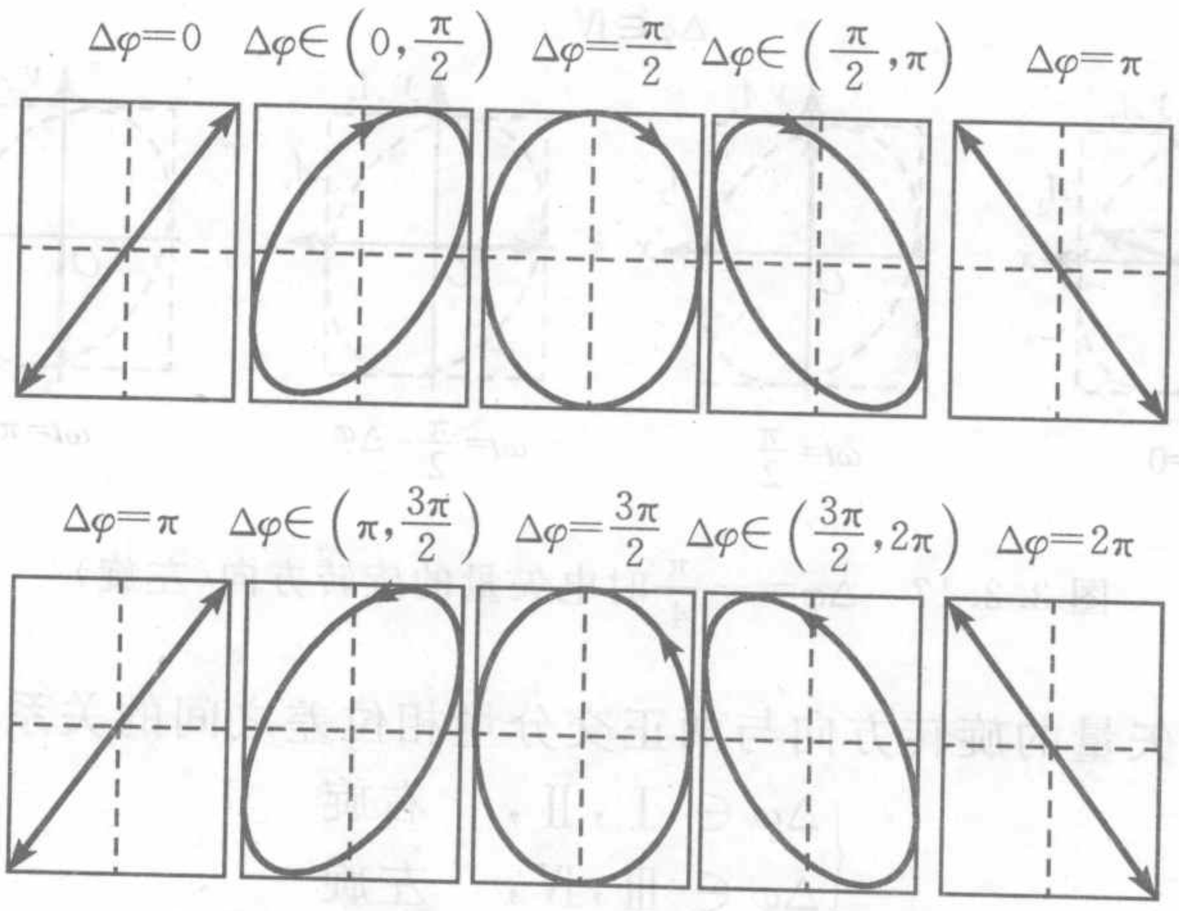


图 3.2.19　椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系

当 $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 时，椭圆的长短轴沿坐标的方向，是所谓的正椭圆. 当 $A_y=A_x$ 时，正椭圆演化为圆.

通过上面的讨论，可以看出，平面偏振、圆偏振和椭圆偏振的光矢量都可以看作是为两个正交分量叠加，分量的一般形式的表达式为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t+\Delta\varphi) \end{cases}$$

当 $\Delta\varphi=0,\pi$ 时，为平面偏振光；$\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 且 $A_y=A_x$ 时，为圆偏振光；当 $\Delta\varphi\neq 0,\pi$ 时，为椭圆偏振光. 所以，可以把椭圆偏振光看成是最一般的偏振态，在一定条件下，可以演变为圆偏振或平面偏振，正如图 3.2.19 所示.

当光矢量的分量用复指数表示的时候，由于 ωt 前面取得是负号，即

$$E = Ae^{i(kz+\Delta\varphi_0-\omega t)},$$

其复振幅表达式为 $E=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz+\Delta\varphi_0)}$，因而与前面的表达式 $E_y=A_y\cos(\omega t+\Delta\varphi)$ 相比，$\Delta\varphi=-\Delta\varphi_0$，这一点需要注意，在不同形式的表达式中，两正交分量的相位差的含义有所不同.

例 3.2.4　一束椭圆偏振光通过一偏振片，透射光的强度将随着偏振片透振方向的转动而变化，若测得最大的透射光强和最小的透射光强分别为 $I_{\max}$ 和 $I_{\min}$. 问当透射方向与光强最大透射方向间夹角为 θ 时，透射光强为多少？

解　取坐标系，x 轴沿椭圆长轴方向，y 轴沿椭圆短轴方向(图 3.2.20)，则上述椭偏光可用分量表示为

$$\begin{cases} E_x = \sqrt{I_{\max}}\cos\omega t \\ E_y = \sqrt{I_{\min}}\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

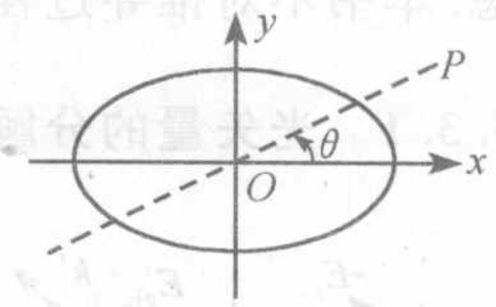


图 3.2.20　例 3.2.4 图

当透射方向与光强最大透射方向间夹角为 θ 时，透射光的振幅

$$E_\theta = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta = \sqrt{I_{\max}}\cos\theta\cos\omega t + \sqrt{I_{\min}}\sin\theta\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

这是两列相位差为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$ 的平面偏振光的相干叠加，强度为

$$I_\theta = I_{\max}\cos^2\theta + I_{\min}\sin^2\theta$$

例 3.2.5　一束椭圆偏振光与自然光的混合光沿 z 轴方向传播，通过一偏振片. 当偏振片的透振方向沿 x 轴时，透射光强度最大，为 $1.5I_0$；透振方向沿 y 轴时，透射光强度最小为 I_0. 求：当透振方向与 x 轴成 θ 角时，透射光强是多少？与入射光中的无偏振部分相关吗？

解　椭圆的长轴沿 x 方向. 设自然光的光强为 I_1，而椭偏光的分量振幅为 A_x，A_y. 则

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}I_1 + A_x^2 = 1.5I_0 \\ \dfrac{1}{2}I_1 + A_y^2 = I_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_x^2 = 1.5I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \\ A_y^2 = I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \end{cases}$$

P 与 x 轴成 θ 角，透过光强

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2}I_1 + A_x^2\cos^2\theta + A_y^2\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}I_1 + \left(1.5I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\cos^2\theta + \left(I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\sin^2\theta \\ &= 1.5I_0\cos^2\theta + I_0\sin^2\theta = I_0(1+0.5\cos^2\theta) \end{aligned}$$

可见，与入射光中无偏振部分，即自然光的光强 I_1 无关.

3.3　菲涅耳公式

入射光在媒质界面处分为反射和折射两部分，反射波、折射波的情况与介质的

光学常数(optical constant,即折射率)、入射角,以及入射波振动矢量的方向都有关系.这种关系,最初是菲涅耳(Augustin-Jean Fresnel,1788～1827,法国)表达出来的,因而被称作菲涅耳公式(Fresnel formula).

菲涅耳公式可以通过在一定的边界条件下求解麦克斯韦方程组得到,是电动力学的基本关系.菲涅耳公式给出了反射波和折射波的电场强度、磁场强度与入射波的电场强度、磁场强度间的关系.由于光学仅讨论电场强度,故磁场部分不予考虑.本书不对推导过程作介绍,只将其结果进行应用.

3.3.1 光矢量的分解

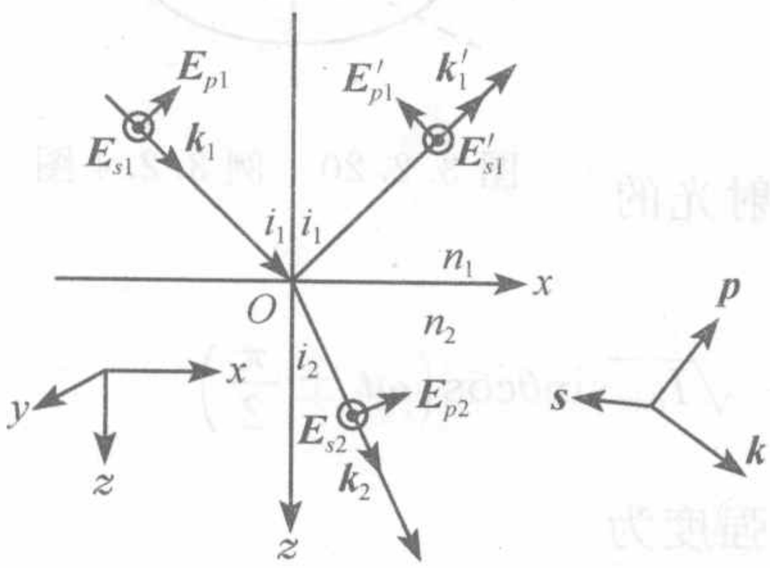


图 3.3.1 电矢量的分解

设入射波从折射率为 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质,入射角为 i_1,折射角为 i_2,电矢量为 $\boldsymbol{E}_1$,波矢为 $\boldsymbol{k}_1$.反射波、折射波的电矢量和波矢分别记为 $\boldsymbol{E}'_1$、$\boldsymbol{k}'_1$,$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{k}_2$.将振动矢量分解为垂直于入射面的 s 分量和平行于入射面的 p 分量.p 分量、s 分量和波矢 $\boldsymbol{k}$ 构成右手系.规定 s 分量沿 $+y$ 方向为正.如图 3.3.1 所示为各个分量的正方向.

3.3.2 菲涅耳公式的表述

在入射点处,反射、折射瞬间电矢量与入射电矢量之间的关系可以用以下数学式表达:

反射光

$$\frac{E'_{s1}}{E_{s1}}=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)} \tag{3.3.1}$$

$$\frac{E'_{p1}}{E_{p1}}=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)} \tag{3.3.2}$$

折射光

$$\frac{E_{s2}}{E_{s1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)} \tag{3.3.3}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)} \tag{3.3.4}$$

菲涅耳公式描述了电场强度的各个分量的振动矢量之间的关系,而不是振幅间的关系.但是,对于平面单色波,由于振动可以用复数表示为

$$E=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

而其角频率 ω 为不变量,因而有 $E\propto A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,而 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 为复振幅,所以菲涅耳公式也是各个分量复振幅之间的关系式.

3.3.3　反射率与透射率

从菲涅耳公式可以直接得到反射率(reflectivity)和透射率(transmissivity).

(复)振幅反射率

$$\tilde{r}_s = \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} = \frac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)} \tag{3.3.5}$$

$$\tilde{r}_p = \frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \tag{3.3.6}$$

(复)振幅透射率

$$\tilde{t}_s = \frac{E_{s2}}{E_{s1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} = \frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)} \tag{3.3.7}$$

$$\tilde{t}_p = \frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2} = \frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)\cos(i_1 - i_2)} \tag{3.3.8}$$

光强反射率

$$R_s = |\ r_s\ |^2 \tag{3.3.9}$$

$$R_p = |\ r_p\ |^2 \tag{3.3.10}$$

光强透射率

$$T_p = \frac{n_2}{n_1}|\ t_p\ |^2 \tag{3.3.11}$$

$$T_s = \frac{n_2}{n_1}|\ t_s\ |^2 \tag{3.3.12}$$

光强是能流密度,而能流等于光强与光束截面的乘积. 由于反射角等于入射角,反射光的光束截面保持与入射光相同,所以能流的反射率就等于光强的反射率.

而折射角不等于入射角,所以折射光束的截面积与入射光不同. 两者间的关系为$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}$,见图 3.3.2. 故对于折射光(透射光),能流透射率为

$$\frac{I_{s2}S_2}{I_{s1}S_1} = |\ t_{s2}\ |^2\frac{\cos i_2}{\cos i_1} \tag{3.3.13}$$

$$\frac{I_{p2}S_2}{I_{p1}S_1} = |\ t_{p2}\ |^2\frac{\cos i_2}{\cos i_1} \tag{3.3.14}$$

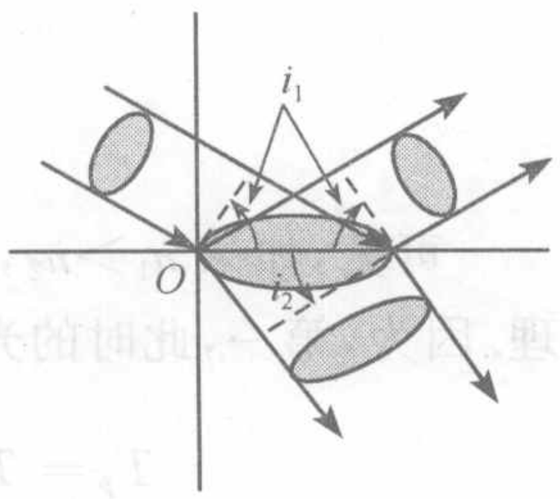


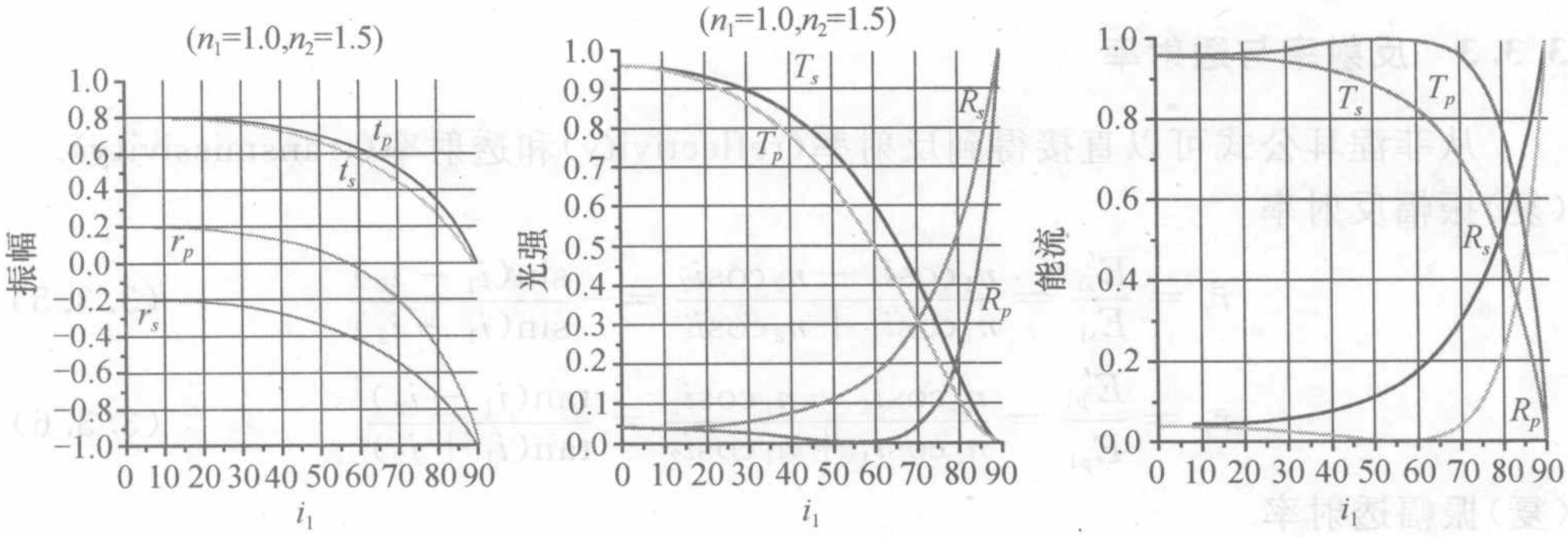
图 3.3.2　折射后光束横截面的变化

图 3.3.3 表示了在某些情况下反射率、透射率与入射角的关系.

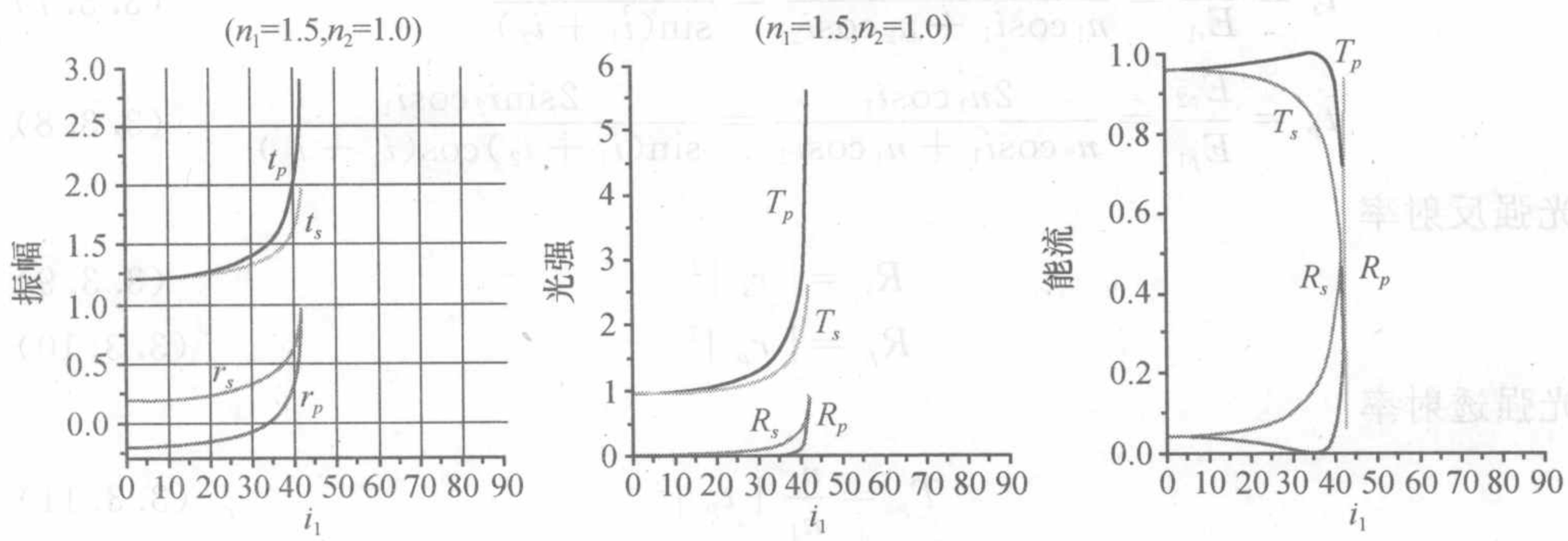
在垂直入射时,入射角、折射角都为 0,于是得到复振幅反射率为

$$\frac{E'_{s1}}{E_{s1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{3.3.15}$$

$$\frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tag{3.3.16}$$



(a) 从空气射向玻璃



(b) 从玻璃射向空气

图 3.3.3 振幅、光强以及能流的反射率、透射率与入射角的关系

而复振幅的透射率为

$$\frac{E_{s2}}{E_{s1}}=\frac{2n_1}{n_1+n_2} \tag{3.3.17}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}}=\frac{2n_1}{n_2+n_1} \tag{3.3.18}$$

可见，如果 $n_1>n_2$，则复振幅的透射率可以大于 1，但这并不违反能量守恒原理. 因为，第一，此时的光强透射率为

$$T_p=T_s=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_2+n_1}\right)^2=\frac{4n_1n_2}{(n_2+n_1)^2}$$

$$=\frac{4n_1n_2}{(n_2+n_1)^2}<1,\quad(\text{由于 } n_1^2+n_2^2>2n_1n_2)$$

更重要的是，第二，光强是能流密度，即单位面积的光功率，并不是能流.

例 3.3.1 图 3.3.4 为一全反射棱镜，$n_2=1.6$，空气折射率 $n_1=1$，计算由于反射而损失的能量.

分析 在棱镜的两个直角边处，由于反射，会使入射光损失部分能量，利用菲涅耳公式求解本题.

解　在界面处入射，由于是垂直入射，$i_1=i_2=0$. 入射光为自然光，p、s 分量的强度相等，于是能流的透过率为

$$T_1=\frac{w_1}{w_0}=\frac{I_1}{I_0}\frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1}=\frac{n_2}{n_1}\frac{A_{1p}^2+A_{1s}^2}{A_{0p}^2+A_{0s}^2}=\frac{n_2}{n_1}t^2=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1+n_2}\right)^2$$

$$=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{4\times 1.6}{(1+1.6)^2}=0.9467$$

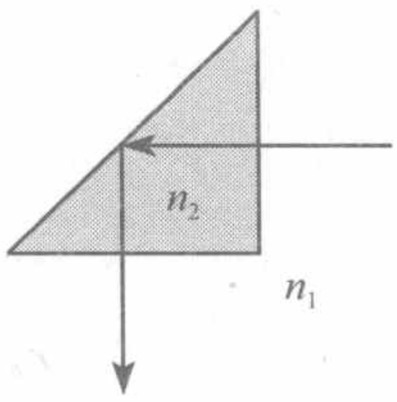


图 3.3.4　例 3.3.1 图

在斜面处，由于全反射，无能量损失.

在出射界面处，能流透射率为

$$T_2=\frac{w_2}{w_1}=\frac{I_2}{I_1}\frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1}=\frac{n_1}{n_2}\frac{A_{2p}^2+A_{2s}^2}{A_{1p}^2+A_{1s}^2}=\frac{n_1}{n_2}t'^2=\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{2n_2}{n_1+n_2}\right)^2$$

$$=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{4\times 1.6}{(1+1.6)^2}=0.9467$$

总透射率为

$$T=T_1T_2=0.9467^2=0.8963$$

能量损失

$$1-0.8963=0.1037=10.37\%$$

3.3.4　相位关系

如果将菲涅耳公式中的振动量用复振幅代替，则反射率、透射率即为反射波、透射波的复振幅与入射波的复振幅的比值，如对于反射波的 s 分量，为

$$r_s=\frac{E'_{s1}}{E_{s1}}=\frac{A'_{s1}e^{i\varphi'_{s1}}}{A_{s1}e^{i\varphi_{s1}}}=\frac{A'_{s1}}{A_{s1}}e^{i(\varphi'_{s1}-\varphi_{s1})}=\frac{A'_{s1}}{A_{s1}}e^{i\Delta\varphi'_s}\tag{3.3.19}$$

反射波的相位比入射波滞后，按照本书前面的约定，$\varphi'_{s1}>\varphi_{s1}$，相位差 $\Delta\varphi'_s=\varphi'_{s1}-\varphi_{s1}$ 应为正值. 对于两个复数的比值而言，其幅角便是相应两列波的相位差，即反射波、透射波与入射波间的相位关系为

$$\Delta\varphi(r)=\arg(r)\tag{3.3.20}$$

$$\Delta\varphi(t)=\arg(t)\tag{3.3.21}$$

从菲涅耳公式可以看出，无论何种情况，透射率总是正实数，则其幅角为 0. 说明折射光与入射光在入射、折射的瞬间相位是相同的，即没有因为折射而出现额外的相位的突变.

但反射波的情况却较为复杂. 一方面，反射率可以取正值也有可能取负值；甚至当 $i_1+i_2=\pi/2$ 时，$\tan(i_1+i_2)=\infty$，还会出现 $r_p=0$；另一方面，光从光密介质向光疏介质入射时，还会出现全反射. 以下分别作具体讨论：

s 分量

$$r_s=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)}\begin{cases}>0, & \text{当 } n_1>n_2 \text{ 时}\\ <0, & \text{当 } n_1<n_2 \text{ 时}\end{cases}$$

p 分量

$$r_p=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}\begin{cases}>0\begin{cases}\text{当 } n_1<n_2,\ i_1+i_2<\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\\ \text{当 } n_1>n_2,\ i_1+i_2>\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\end{cases}\\ 0,\quad \text{当 } i_1+i_2=\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\\ <0\begin{cases}\text{当 } n_1<n_2,\ i_1+i_2>\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\\ \text{当 } n_1>n_2,\ i_1+i_2<\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\end{cases}\end{cases}$$

对于上述 p 分量而言，当 $i_1+i_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan(i_1+i_2)\to\infty$，$r_p=0$，反射光中 p 分量为零，只有 s 分量. 这是一个特殊的入射角，称为布儒斯特角，记为 i_B. 当入射角 $i_1=i_B$ 时，由折射定律 $n_1\sin i_B=n_2\sin i_2=n_2\cos i_B$，即可得到

$$i_B=\arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{3.3.22}$$

当 $n_1>n_2$ 时，会出现全反射，此时 $i_2=\frac{\pi}{2}$ 时，可得

$$i_1=i_C=\arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{3.3.23}$$

是全反射临界角.

$$i_C>i_B.$$

反射波与入射波在反射瞬间的相位差可以用表 3.3.1 说明.

表 3.3.1 反射波与入射波在反射瞬间的相位差

介质情况	p 分量	s 分量
$n_1<n_2,\ i_1<i_B$	0，相位不变	π，相位反相
$n_1<n_2,\ i_1>i_B$	π，相位反相	π，相位反相
$n_1>n_2,\ i_1<i_B$	π，相位反相	0，相位不变
$i_B<i_1<i_C$	0，相位不变	0，相位不变
$i_1>i_C$	0～π	0～π

3.4 反射折射所引起的偏振态的改变

3.4.1 偏振态的改变

光在介质的分界面上发生反射折射时，复振幅的变化可以用本节所介绍的菲涅耳公式(3.4.1)～式(3.4.4)描述.

菲涅耳公式是用电矢量的瞬时值或复振幅写出的表达式，如果只考虑绝对值的改变，而忽略相位的改变，则上述公式也可以理解为振幅的改变.

由菲涅耳公式可以看出，反射光、折射光的 p 分量、s 分量都将发生改变，因而会引起偏振态的改变. 一般情况下，自然光经过反射、折射后，都成为部分偏振光；因而，要拍摄商店橱窗内的物体时，往往要在照相机前加一面偏振滤光镜，目的就是消除橱窗玻璃的反射光，而使橱窗玻璃后的物体清晰成像. 同样，由于大气层的作用，空气中的光也是部分偏振的，在拍摄空中的景象时，为了突出蓝天白云，使用偏振滤光片也能获得很好的效果.

例 3.4.1　振动面平行和垂直于入射面的平面偏振光分别以 45°入射到折射率为 1.52 的平行平面玻璃片上，经折射后透射的光强变为原来的多少？

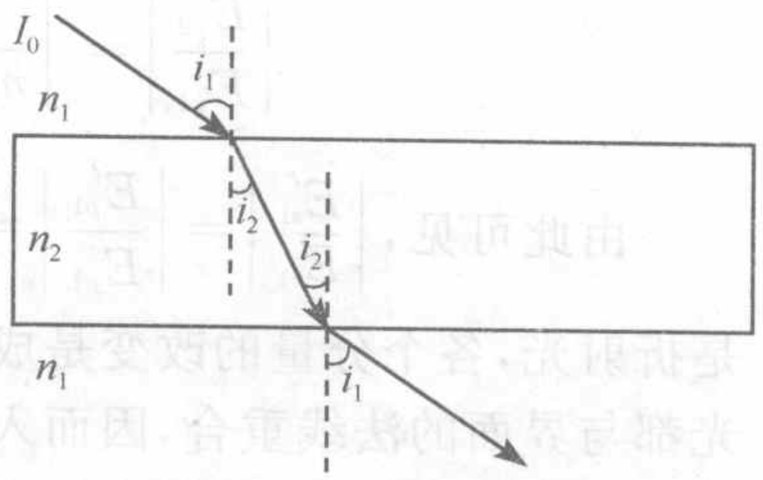


图 3.4.1　例 3.4.1 图

解　振动面平行于入射面偏的平面光，就是 p 分量；振动面垂直于入射面的平面偏振光，就是 s 分量. 应用菲涅耳公式，得到

$$\frac{E_{s2}}{E_{s1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}$$

$$\frac{I}{I_0}=T_1T_2$$

而

$$T_{1s}T_{2s}=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{s1}}{E_{s0}}\right)^2\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{s2}}{E_{s1}}\right)^2=\left[\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)}\,\frac{2\sin i_1\cos i_2}{\sin(i_1+i_2)}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sin 2i_1\sin 2i_2}{2\sin^2(i_1+i_2)}\right]^2$$

$$T_{1p}T_{2p}=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{p1}}{E_{p0}}\right)^2\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{p2}}{E_{p1}}\right)^2$$

$$=\left[\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}\,\frac{2\sin i_1\cos i_2}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_2-i_1)}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\sin 2i_1\sin 2i_2}{2\sin^2(i_1+i_2)\cos^2(i_1-i_2)}\right]^2$$

$$i_1=\frac{\pi}{4},\quad n_2=1.52,\quad \sin i_2=\frac{1}{n_2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}/2}{1.53}=0.4622,\quad \cos i_2=0.8852$$

可得 s 分量透过率为 81.59%，p 分量透过率为 98.14%. 可见两正交分量的透射光强并不相等.

在特殊的条件下，自然光经过反射、折射可以得到平面偏振光. 以下具体讨论：

3.4.2　垂直入射

由菲涅耳公式，当垂直入射时，$i_1=0$ 时，$i_2=0$，因而

$$\left|\frac{E'_{s1}}{E_{s1}}\right| = \left|\frac{n_1\cos 0 - n_2\cos 0}{n_1\cos 0 + n_2\cos 0}\right| = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|,$$

$$\left|\frac{E'_{p1}}{E_{p1}}\right| = \left|\frac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}\right| = \left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right|,$$

$$\left|\frac{E_{s2}}{E_{s1}}\right| = \left|\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}\right| = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

$$\left|\frac{E_{p2}}{E_{p1}}\right| = \left|\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}\right| = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

由此可见，$\left|\frac{E'_{s1}}{E_{s1}}\right| = \left|\frac{E'_{p1}}{E_{p1}}\right| = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|$，$\left|\frac{E_{s2}}{E_{s1}}\right| = \left|\frac{E_{p2}}{E_{p1}}\right| = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$，无论反射光还是折射光，各个分量的改变是成比例的. 由于在垂直入射的情形，入射、反射、折射光都与界面的法线重合，因而入射面不唯一，也就是说上述的 p 分量、s 分量是任意的. 因而反射光和折射光的偏振特性不变.

3.4.3 布儒斯特定律

要想使得反射光或折射光变为平面偏振光，则必须要使其中的某一个分量为 0.

只有当 $i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} = 0$$

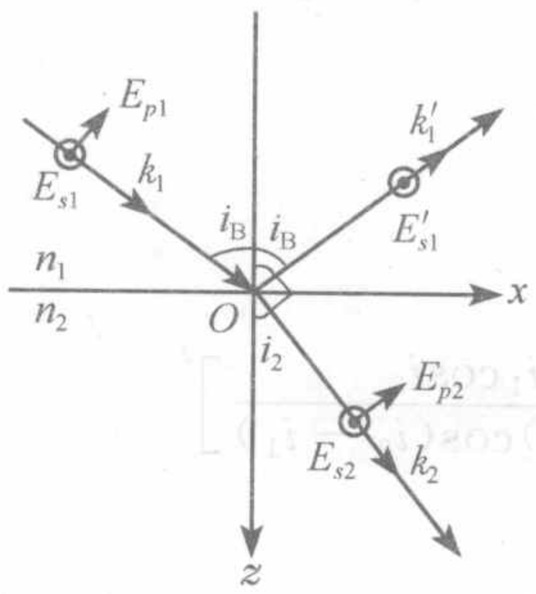


图 3.4.2 以布儒斯特角入射的自然光，反射光为线偏光

在这种情形下，反射光中只包含 s 分量，为线偏光，如图 3.4.2 所示. 由折射定律，可知此时必须有 $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2 = n_2\cos i_1$，即 $\tan i_1 = \frac{n_2}{n_1}$，将这种情形下的入射角记为 i_B，则

$$i_B = \arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{3.4.1}$$

上述公式称为布儒斯特定律，i_B 称为布儒斯特角.

当入射角为布儒斯特角时，无论入射光的偏振态如何，反射光都是平面偏振光，只有与入射面垂直的 s 分量.

例 3.4.2 自然光入射到玻璃(折射率为 1.5)表面上，要使反射光为平面偏振光，入射角为多大？该角度是否与波长有关？折射光的偏振度是多大？

解 由布儒斯特定律，可以算得此时的布儒斯特角为

$$i_B = \arctan\frac{n}{n_a} = \arctan\frac{1.5}{1} = 56.31°$$

因为光的色散，该角度与波长有关，即对于同一介质，不同波长的光有不同的布儒斯特角.

此时折射光为部分偏振光，其振幅为

$$(A_{p2})^{(1)} = A_{p1}\frac{2\sin^2 i_2}{\sin 2i_2} = A_{p1}\tan i_2, \quad (A_{s2})^{(1)} = A_{s1}\cdot 2\sin^2 i_2$$

光强为

$$(I_{p2})^{(1)} = \frac{n_1}{n_2}\frac{I_0}{2}\tan^2 i_2, \quad (I_{s2})^{(1)} = \frac{n_1}{n_2}\frac{I_0}{2}\cdot 4\sin^4 i_2$$

按偏振度的定义

$$P = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} = \frac{\tan^2 i_2 - 4\sin^4 i_2}{\tan^2 i_2 + 4\sin^4 i_2} = \frac{1-4\sin^2 i_2\cos^2 i_2}{1+4\sin^2 i_2\cos^2 i_2}$$

$$= \frac{1-4\sin^2 i_B\cos^2 i_B}{1+4\sin^2 i_B\cos^2 i_B}$$

而

$$\sin^2 i_B = \frac{\tan^2 i_B}{1+\tan^2 i_B} = \frac{(n_2/n_1)^2}{1+(n_2/n_1)^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2+n_2^2}, \quad \cos^2 i_B = \frac{n_1^2}{n_1^2+n_2^2}$$

于是

$$P = \frac{1-\dfrac{4n_2^2n_1^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}}{1+\dfrac{4n_2^2n_1^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}} = \frac{(n_1^2-n_2^2)^2}{n_1^4+6n_2^2n_1^2+n_2^4} = \frac{(1-1.5^2)^2}{1+6\times 1.5^2+1.5^4} = 0.07987$$

3.4.4　玻璃片堆和布儒斯特窗

如果自然光以布儒斯特角入射，由于反射光中只有 s 成分，则显然折射光中的 s 成分将小于 p 成分，所以折射光为部分偏振光，其中 s 分量较弱.

利用菲涅耳公式作进一步的讨论，则有

p 分量的振幅

$$\left|\frac{E_{s2}}{E_{s1}}\right| = \frac{2\sin i_2\cos i_B}{\sin(i_2+i_B)} = \frac{2\sin(\pi/2-i_B)\cos i_B}{\sin\pi/2} = 2\cos^2 i_B,$$

s 分量的振幅

$$\left|\frac{E_{p2}}{E_{p1}}\right| = \frac{2\sin i_2\cos i_B}{\sin(i_B+i_2)\cos(i_B-i_2)} = \frac{2\sin i_2\sin i_2}{\sin(\pi/2)\cos(\pi/2-i_2-i_2)}$$

$$= \frac{2\sin^2 i_2}{\sin(2i_2)} = \tan i_2 = \frac{n_1}{n_2}$$

将上面的表达式以振幅 A 表示，由于这是第一次折射的结果，所以可以记成

$$(A_{s2})^{(1)} = A_{s1}2\cos^2 i_B, \quad (A_{p2})^{(1)} = A_{p1}\tan i_2 = A_{p1}\frac{n_1}{n_2}$$

如果有一个如图 3.4.3 所示的玻璃平板，则经过一对平行面的透射光，其分量的振幅变化如下：

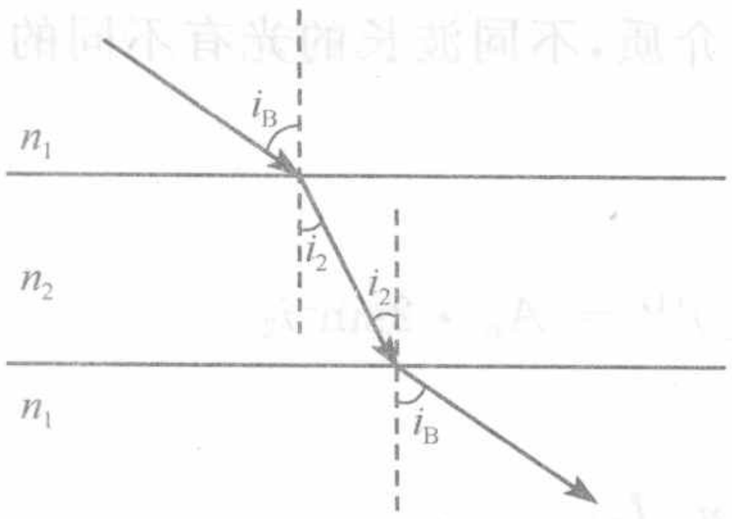


图 3.4.3 两次折射

p 分量，第一次，上表面透射，

$$(A_{p2})^{(1)} = A_{p1}\tan i_2$$

第二次，下表面透射，

$$(A_{p2})^{(2)} = (A_{p1}\tan i_2)\tan i_B$$

$$= A_{p1}\tan i_2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = A_{p1}$$

即 p 分量全透射.

s 分量，第一次，上表面透射，

$$(A_{s2})^{(1)} = A_{s1}2\sin^2 i_2$$

第二次，下表面透射，

$$(A_{s2})^{(2)} = (A_{s1}2\sin^2 i_2)2\sin^2 i_B = A_{s1}(2\sin i_2 \cos i_2)^2 = A_{s1}\sin^2(2i_2)$$

由于 $$\sin^2 2i_2 \leqslant 1, \quad (A_{s2})^{(2)} \leqslant A_{s1}$$

上述推导说明，以布儒斯特角入射的自然光经过一个表面相互平行的玻璃平板后，p 分量保持不变，全部透射；而 s 分量将会减小.

如果通过 n 对这样的相互平行的表面，则

$$(A_{s2})^{(2n)} = A_{s1}\sin^{2n}(2i_2)$$

当 $n\to\infty$，$(A_{s2})^{(2n)}\to 0$，透射光中没有 s 分量，但由于 $(A_{p2})^{(2n)} = A_{p1}$，透射光中 p 分量保持不变，即透射光中只有 p 分量，是平面偏振光，振动方向与入射面平行.

依据这样的原理，可以用玻璃片堆(图 3.4.4)得到平面偏振的透射光.

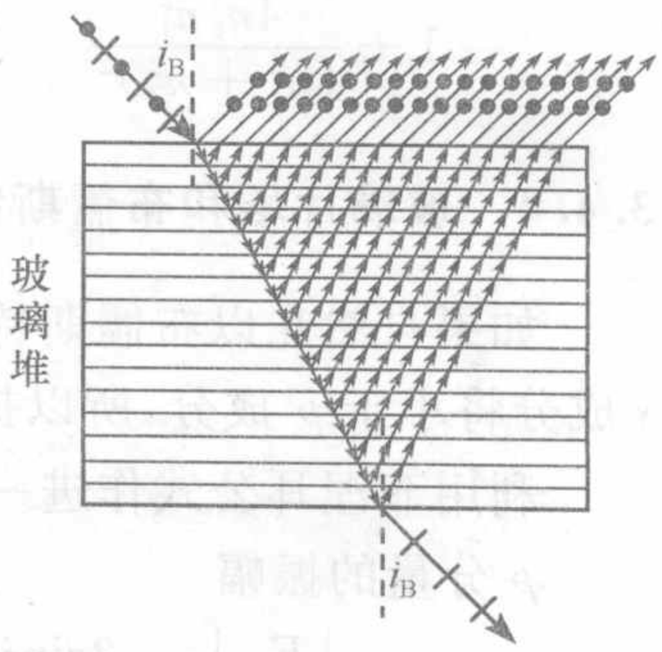


图 3.4.4 玻璃片堆

激光就是利用上述原理获得的很好的平面偏振光，如图 3.4.5 所示为激光器的光学结构示意. 由一个反射镜和一个透反射镜构成的法布里—珀罗腔就是激光器的谐振腔；激光腔内有一对光学平行板玻璃，玻璃板的法线与谐振腔的轴线间的夹角就是布儒斯特角，这样的一对玻璃板称作布儒斯特窗或者布氏窗. 激光器介质受激辐射发出的光在谐振腔中反复振荡，每振荡一次，就四次通过布氏窗，结果就只有 p 分量从透反射镜(激光器的窗口)出射，而 s 分量则被布氏窗反射. 因而激光是具有 p 分量的平面偏振光.

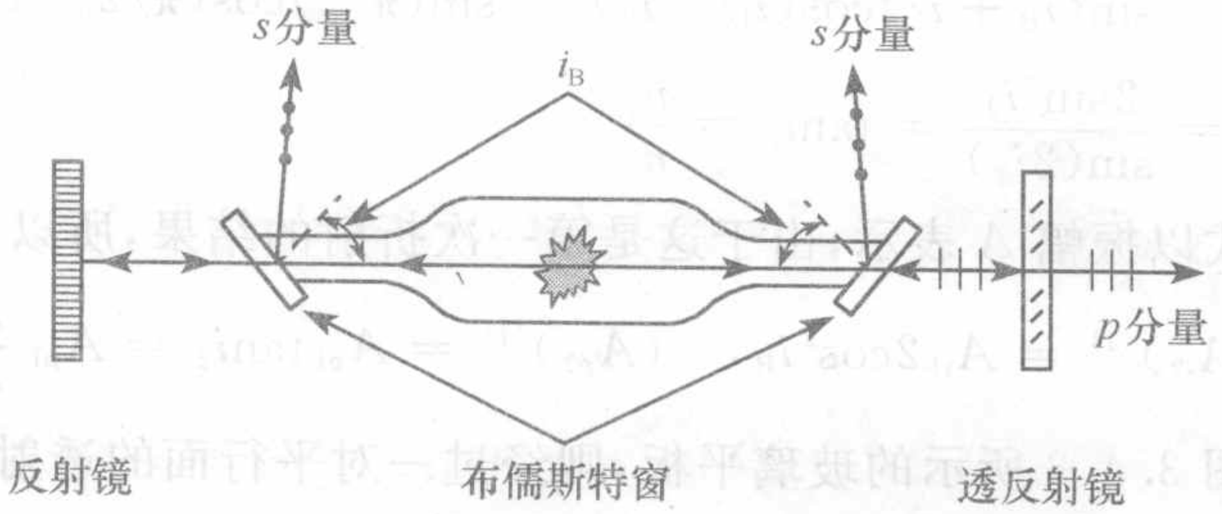


图 3.4.5 激光器中的布儒斯特窗

3.5　斯托克斯倒逆关系

一列波在介质的分界面上，将分为反射和折射两部分. 设界面对于复振幅的反射率和透射率分别为 $\tilde{r},\tilde{t}$，入射波复振幅为 $\widetilde{U}$，则反射波、透射波的复振幅为如图 3.5.1 所示.

$$\widetilde{U}_r=\widetilde{U}\tilde{r},\quad \widetilde{U}_t=\widetilde{U}\tilde{t}$$

如果将上述情形反过来，即一列复振幅为 $\widetilde{U}_r$ 的波和一列复振幅为 $\widetilde{U}_t$ 的波分别沿着反射波和折射波的路径射过来，从光路可逆性原理可以判断，总的效果应该是只有一列沿着原来入射路径的波列 $\widetilde{U}$，可以由公式表示为

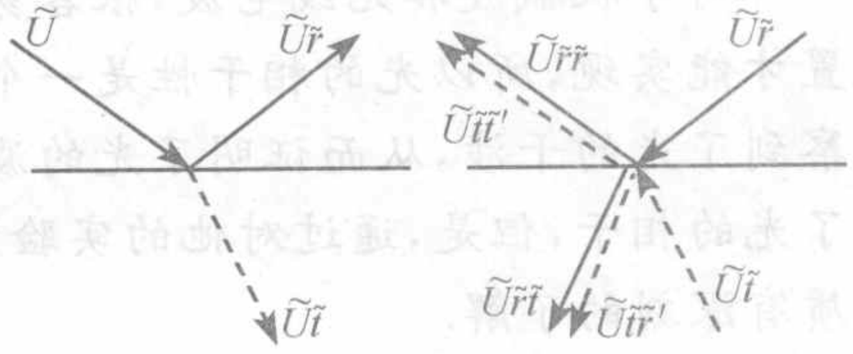


图 3.5.1　光路可逆与斯托克斯关系

$$\begin{cases}\widetilde{U}r^2+\widetilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{t}'=\widetilde{U}\\ \widetilde{U}\tilde{r}\cdot\tilde{t}+\widetilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{r}'=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}r^2+\tilde{t}\cdot\tilde{t}'=1\\ \tilde{r}\cdot\tilde{t}+\tilde{t}\cdot\tilde{r}'=0\end{cases}\tag{3.5.1}$$

由此可以得到

$$r=-r'\tag{3.5.2}$$

或

$$r^2=r'^2\tag{3.5.3}$$

以及

$$\tilde{t}\cdot\tilde{t}'=1-r^2\tag{3.5.4}$$

上述关系式(3.5.3)、式(3.5.4)称作斯托克斯(Sir George Gabriel Stokes，1819～1903，英国)倒逆关系(Stokes Relations).

第4章　光的相干叠加

对于机械波和无线电波，很容易实现相干，而光波的相干却只有采用特殊的装置才能实现，所以光的相干性是一个非常重要的概念. 1801 年，托马斯·杨首次观察到了光的干涉，从而证明了光的波动性. 我们无法知道是怎样的灵感驱使他实现了光的相干，但是，通过对他的实验装置的分析，我们可以对光的相干性的物理本质有深刻的了解.

4.1　杨氏干涉与相干光的获得

4.1.1　托马斯·杨

1801 年，托马斯·杨（Thomas Young，1773～1829，英国）成功地进行了光的双缝干涉实验，第一次以直接的实验事实证明了光的波动性（图 4.1.1），从而结束了以惠更斯（Christaan Huygens，1629～1695，荷兰）为代表的波动说和以牛顿（Isaac Newton，1642～1727，英国）为代表的微粒说长达 100 余年的争论，从此确立了光的波动说. 虽然在此之前，1851 年，傅科已经用旋转棱镜法测量了光速，且发现在水中光的传播速度比空气中低，但干涉是波动的直接证据.

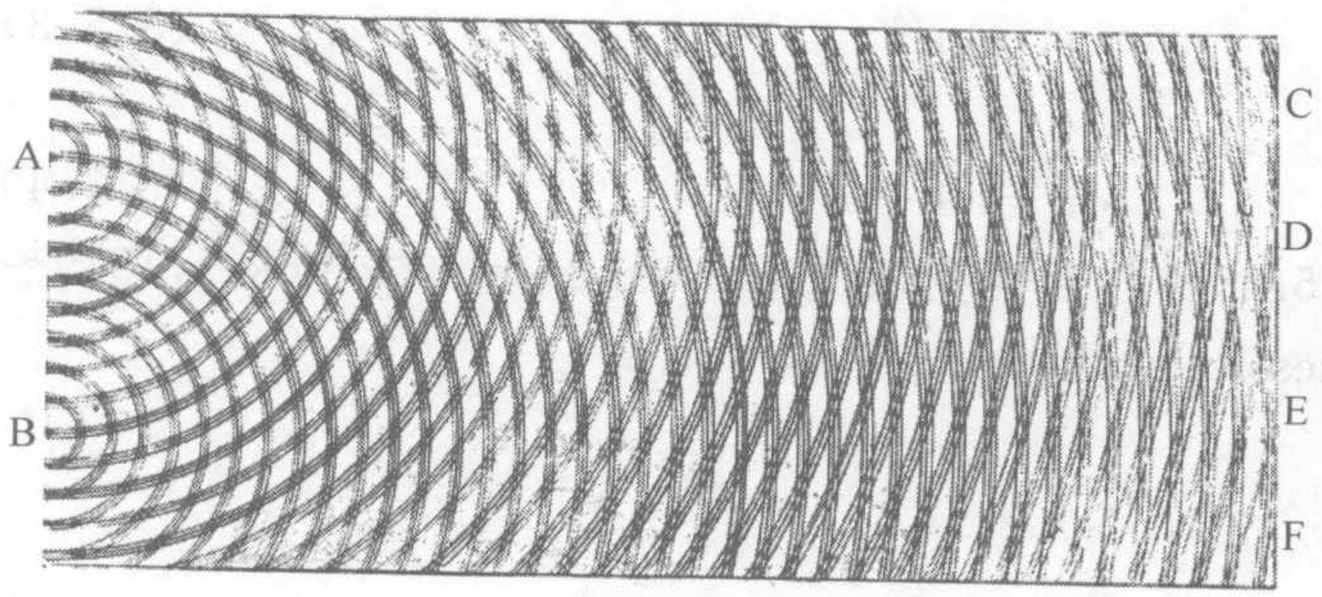


图 4.1.1　托马斯·杨绘制的说明光波干涉的原理图



图 4.1.2　托马斯·杨

托马斯·杨（图 4.1.2）1773 年 6 月 13 日出生于英国萨默塞特郡米尔弗顿一个富裕的家庭，是 10 个孩子中的老大. 他自幼就显示了超常的聪颖，两岁就学会了看书，十四岁时用拉丁文写过一篇自传，在中学时期，已经掌握了多种语言，能够阅读拉丁文、希腊文、意大利文和法文等，他甚至还学会了希伯来语、波斯语、阿拉伯语等东方语言. 他还学习过牛顿的《原理》、拉瓦锡的《化学纲要》以及其他的一些科学著作.

19 岁时，杨来到伦敦学习医学. 1794 年他发表了关于生理光学的论文《对视觉

过程的观察》,研究了眼睛对距离的调节问题,并证明眼睛是靠改变眼球水晶体的曲度来适应不同距离的,他因此而成为皇家学会会员,这年他 21 岁.他也花了许多时间研究物理.托马斯·杨在物理学上最杰出的贡献是在声学和光学领域.他爱好音乐,几乎能演奏当时的所有乐器,这种才能与他对声波振动的深入研究是分不开的.光会不会也和声音一样,是一种波? 杨做了著名的光的干涉实验,为光的波动说奠定了基础:让通过一个小针孔的一束光,再通过两个小针孔 A 和 B,变成两束光.结果就在接收屏上看见了明暗相间的干涉图样;后来,又以狭缝代替针孔,进行了双缝实验,得到了更明亮的干涉条纹.

1801 年他向皇家学会提出了《在声和光方面的实验和问题》的报告.在这篇报告中,他叙述了他所发现的"简单而普遍的规律":同一束光的两个不同部分,以不同的路径要么完全一样地,要么在方向上十分接近地进入眼睛,在光线的路程差是某个长度的整数倍的地方,光就增强,而在干涉区域的中间部分,光将最强.对于不同颜色的光束来说,这个长度是不同的.他认为,声和光都是波的传播,光是在充满整个空间的以太流体中传播的弹性振动,由于以太极稀薄,所以光是以"纵波"形式传播的.他提出了光波的频率和波长的概念,认为光的不同颜色和声音的不同频率是类似的.他指出,在解释强光源和弱光源发出的光以同样的速度传播的问题上,用波动说比粒子说更容易,因为,光粒子为什么只以一个不变的速度运动,这是很难理解的.

他也解释了牛顿环形成的原因.他指出,牛顿环的明暗条纹,就是由不同界面反射出的光互相重合产生"干涉"的结果.相位相反的振动叠加起来就互相抵消,相位相同的则互相加强.他用实验的办法确证了他所提出的这一假设.他用紫外光投射到薄层上,使紫外光从上下两个界面反射产生干涉.由于紫外光是人眼所看不见的,他就让反射光落在涂有氯化银溶液的纸上,结果出现了黑环,从而证明了他的干涉原理.他精确地确定了各种色光的波长值.他指出:"根据各种实验的比较,组成极端红光的波的宽度,在空气中,似应假定约为三万六千分之一英寸①,极端紫光的约为六万分之一英寸."

在 1803 年 11 月 24 日的报告中,托马斯·杨把干涉原理应用于解释衍射现象.他知道,光能绕过不透明物体的边缘产生有色的影子,并认为这种衍射条纹是直接通过衍射缝的光和边界波的干涉产生的.在这篇论文中,他用光从较密介质反射时的半波损失,补充了他关于薄板颜色的理论.

上述这些实验和理论的研究,被托马斯·杨综合入 1807 年出版的《自然哲学讲义》中.但是,他的理论却没有立即得到重视,而且由于认为光是纵波,这给他的理论带来了很大的弱点.他的理论受到了尊崇牛顿学说的英国学术界的非议,如英国政治家布鲁厄姆(Lord Brougham)尖刻地讥讽杨的波动学说为"荒唐"和"不合逻辑".杨为此撰写了一篇论文予以反驳,不过论文无处发表,只好印成小册子,据

① 1 英寸=0.3048 米,下同.

说发行后“只卖出了一本”.杨在论文中勇敢地反击:“尽管我仰慕牛顿的大名,但是我并不因此而认为他是万无一失的.我遗憾地看到,他也会弄错,而他的权威有时甚至可能阻碍科学的进步.”但仍未获得科学界的理解和承认.这个自牛顿以来在物理光学上最重要的成果,就这样被缺乏科学讨论气氛的守旧的舆论压制埋没了将近二十年.直到菲涅耳提出他的波动理论后,托马斯·杨才获得了应有的荣誉.

人们不禁要问,惠更斯、牛顿、胡克(Robert Hooke,1635～1792,英国)等,都是取得巨大成就的物理学家,而光的双缝干涉实验的装置和方法又是如此的简单,为什么在经历了百年之久才得以实现呢?

这是由于光的特性和光源的发光机制所决定的.

4.1.2 普通光源的相位

正如3.2.1节所指出的,当原子从较高的能量状态跃迁到较低的能量状态时,则可以通过发光的形式释放能量,即发光是原子在不同的能量状态之间跃迁的结果.

光源中总是包含大量的原子,总是有大量的原子同时发光,不同原子所发的光波,都有随意的传播方向、振动方向、相位和频率.即使所有的原子都在相同的能级之间跃迁发光,所发出的光具有相同的频率,但他们的相位却是无关的.所以,光源中大量不同原子在同一时刻所发出的大量的光波之间,由于相位差都是随机的,因而是不相干的;同一原子在不同时刻所发出的光波也是不相干的,即普通光源所发的光都是不相干的.所以,在通常情况下看不到光的干涉,即普通光源所发的光在相遇时总是强度相加,不会由于干涉而出现光强的重新分布.

4.1.3 相干光的获得

对于普通的光源,要想得到相干光,只有一种方法,就是采用分光波的装置,设法将同一个原子在同一时刻所发出的一列光波分为几部分,这几部分光波由于来自同一列光波,所以具有相同的频率、固定的相位差,而且存在相互平行的振动分量,就是相干的,这就是干涉的物理本质.所以,也可以说,干涉是一列光波自己和自己的干涉,也只有自己和自己之间才有可能发生干涉.

4.1.4 杨氏干涉

杨氏干涉实验装置可以用图4.1.3表示,普通光源,如日光、灯光,甚至烛光等,先经过一个不透光挡板的狭缝,再经过一个不透光挡板的双狭缝,则在双缝之后的接收屏上,就可以观察到明暗交错的干涉条纹.

可以将单狭缝看成是很细的缝光源或线光源,发出的一列光波到达双缝,则被分成两部分,或者,双缝可以看成是两个新的线光源.但是,由于这两个光源所发出的光波都是从一列光波中分出来的,因而是相干的,即双缝是两个相干的光源.

杨氏干涉的物理过程可以这样描述:光源所发出的大量光波,其中的每一列经

过上述装置后，便为两列相干光，进行相干叠加，形成一个干涉花样，即形成一个光强的分布，这是第一个过程，可以用数学表达式表示如下：

在时刻 t，光源中第 i 个原子跃迁发出的波记为 U_i，该列波经分光装置后分为 U_{i1}、U_{i2} 两部分. 这两部分到达场点 P 时振幅为 A_{i1}、A_{i2}，相位差为 $\Delta\varphi_i$，按照式(2.3.6)，这两个相干的波列在 P 点的干涉强度为 $I_i=A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi_i$.

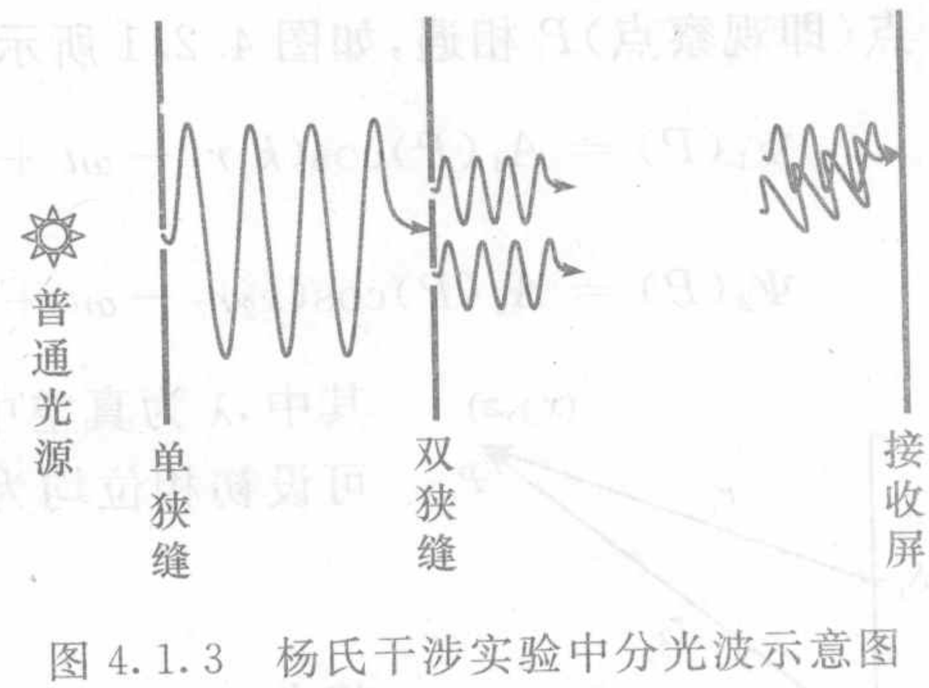


图 4.1.3　杨氏干涉实验中分光波示意图

但是，同一时间总是有大量的原子跃迁，并发出大量的互不相干的波列. 每一个波列，到达场点 P 都经历一个自我干涉的过程. 不同的光波之间，由于是不相干的，则直接进行光强相加，这是第二个过程，即 $I=\sum_{i=1}^{N}I_i$.

由干涉装置可以看出，式中的相位差 $\Delta\varphi_i$ 取决于单缝、双缝、场点 P 的相对位置，所以，在同一个干涉装置中，对于所有的波列，上述 $\Delta\varphi_i$ 都是相同的，即可表示为 $\Delta\varphi_i=\Delta\varphi$. 所有原子发出的光波在 P 点形成的总的干涉强度为

$$\begin{aligned} I=\sum_{i=1}^{N}I_i &= \sum_{i=1}^{N}(A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N}(A_{i1}^2+A_{i2}^2)+2\cos\Delta\varphi\sum_{i=1}^{N}A_{i1}A_{i2} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

就是各自干涉后所形成的干涉花样的强度的叠加.

4.1.5　干涉的特点

在对上述杨氏干涉过程的分析中，我们将屏上的每一个小孔(或狭缝)看成是一个新的点光源(或线光源)，即认为每一个孔(或狭缝)是足够小的，其中只有一个光源，发出一列光波. 由此也可以得出以下结论：

干涉是一列一列分立的光波之间的相干叠加；

干涉是一列光波自己和自己的干涉；

干涉的结果，使得光的能量在空间重新分布，形成一系列明暗交错的干涉条纹；

干涉之后的光波场仍然是定态波场.

4.2　两列相干光的干涉花样

4.2.1　两个点光源的干涉

设有两个相干的点光源 S_1、S_2，各自发出球面波，如杨氏干涉中的双孔，在场

点(即观察点)P 相遇,如图 4.2.1 所示,则在 P 点两列波各自的振动为

$$\Psi_1(P)=A_1(P)\cos(k_1r_1-\omega t+\varphi_{01})=A_1(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_1r_1-\omega t+\varphi_{01}\right)$$

$$\Psi_2(P)=A_2(P)\cos(k_2r_2-\omega t+\varphi_{02})=A_2(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2r_2-\omega t+\varphi_{02}\right)$$

其中,λ 为真空中的波长.

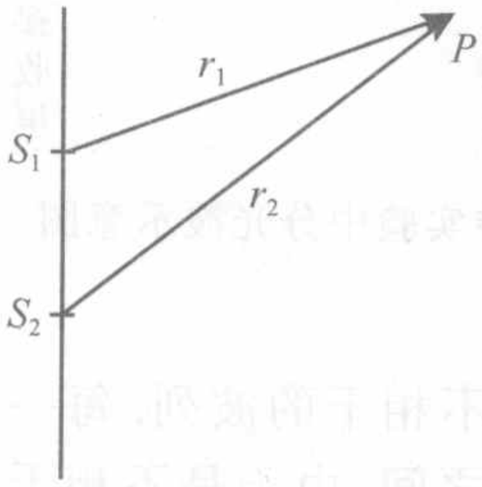


图 4.2.1 点光源到场点 P 的光程

可设初相位均为零,则相位差

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2-n_1r_1) \tag{4.2.1}$$

其中,n_2r_2、n_1r_1 为光程,则 $n_2r_2-n_1r_1$ 就是两列光波的光程差,记作

$$\Delta L=n_2r_2-n_1r_1 \tag{4.2.2}$$

如果是在真空中,$n_2=n_1=1$,则

$$\Delta L=r_2-r_1,\quad \Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

由式(2.3.6),于是干涉的光强为

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

由于空间各处的光程差不等,则在干涉场中会出现明暗交错的干涉条纹(interference fringe).

在满足 $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=2j\pi$ 处,干涉相长,出现亮条纹. 即

$$\Delta L=r_2-r_1=j\lambda \tag{4.2.3}$$

其中,$j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4L$,被称作干涉级数(order of interference).

在满足 $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=(2j+1)\pi$ 处,干涉相消,出现暗条纹. 即

$$\Delta L=r_2-r_1=(2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{4.2.4}$$

由式(4.2.3)和式(4.2.4)可知,亮条纹和暗条纹在空间形成一系列的双叶旋转双曲面,或者称作双叶旋转双曲面族,如图 4.2.2 所示. 在平面接收屏上为一组双叶双曲线,明暗交错分布. 干涉条纹为非定域的,因为在空间各处均可见到.

下面讨论满足傍轴条件时,干涉花样的特征.

如图 4.2.3 所示,对于距离为 d 的两个点光源的干涉,如果物点和场点都满足近轴条件,依据式(1.4.17),注意到此时 $z=D$,$x=\pm d/2$,$y=0$. 则两点发出的光波在屏上的复振幅分别为

$$\widetilde{U}_1(x',y')=\frac{A}{D}\exp\left\{ik\left[D+\frac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right]\right\}\exp\left(\frac{-ikd}{2D}x'\right)$$

$$\widetilde{U}_2(x',y')=\frac{A}{D}\exp\left\{ik\left[D+\frac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right]\right\}\exp\left(\frac{ikd}{2D}x'\right)$$

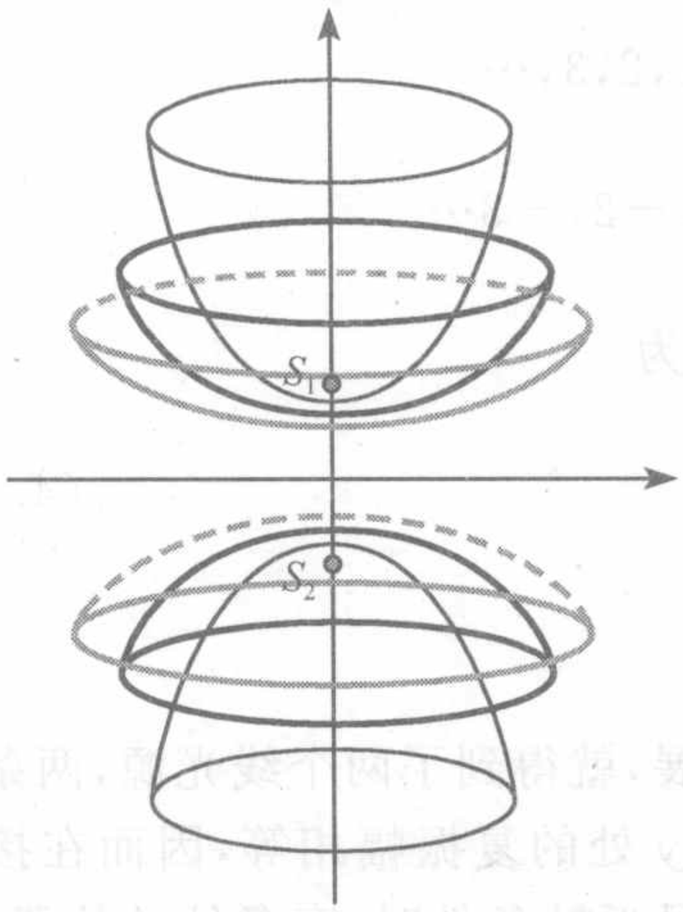


图 4.2.2　双叶旋转双曲面族

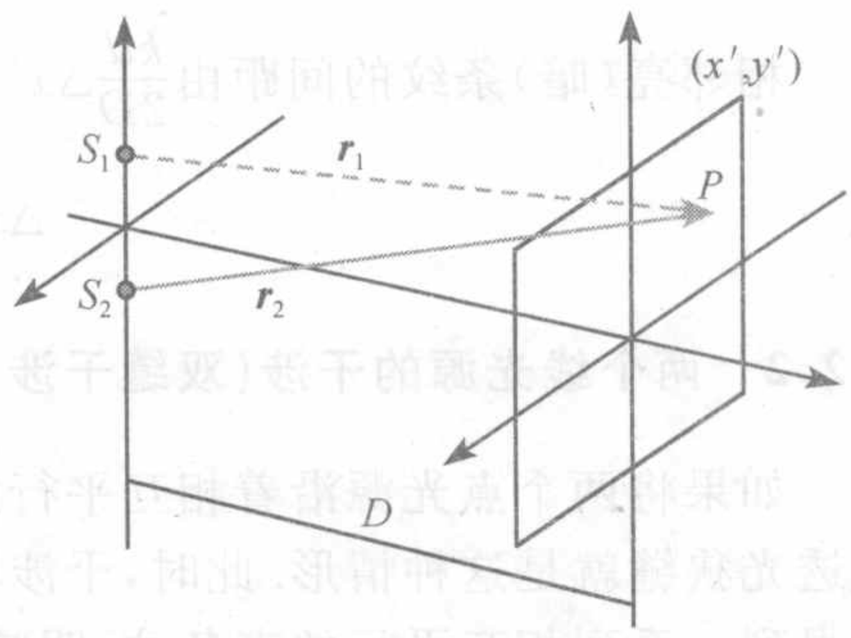


图 4.2.3　傍轴条件下的双孔干涉

合成的复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(x',y') &= \widetilde{U}_1(x',y')+\widetilde{U}_2(x',y')\\ &= \frac{A}{D}\exp\left\{ik\left[D+\frac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right]\right\}\left[\exp\left(\frac{-ikd}{2D}x'\right)+\exp\left(\frac{ikd}{2D}x'\right)\right]\\ &= \frac{2A}{D}\exp\left\{ik\left[D+\frac{(d/2)^2+x'^2+y'^2}{2D}\right]\right\}\cos\left(\frac{kd}{2D}x'\right)\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

强度分布为

$$I=\left(\frac{2A}{D}\right)^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)=4\left(\frac{A}{D}\right)^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)=4I_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) \tag{4.2.6}$$

其中，

$$I_0=\left(\frac{A}{D}\right)^2 \tag{4.2.7}$$

为从一个孔中出射的球面光波满足近轴条件时在接收屏上的强度.

式(4.2.6)说明，在接收屏上一个不大的区域内，干涉花样是一系列等间隔的平行直条纹(图 4.2.4).亮条纹的中心位置由$\frac{kd}{2D}x'=j\pi$决定，即

$$x'_j=j\frac{D}{d}\lambda \tag{4.2.8}$$

暗条纹的中心位置由$\frac{kd}{2D}x'=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi$决定，即

$$x'=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda \tag{4.2.9}$$

注意，亮条纹的 0 级在干涉装置的中心处，而暗条纹如果也要对称分布的话，应该

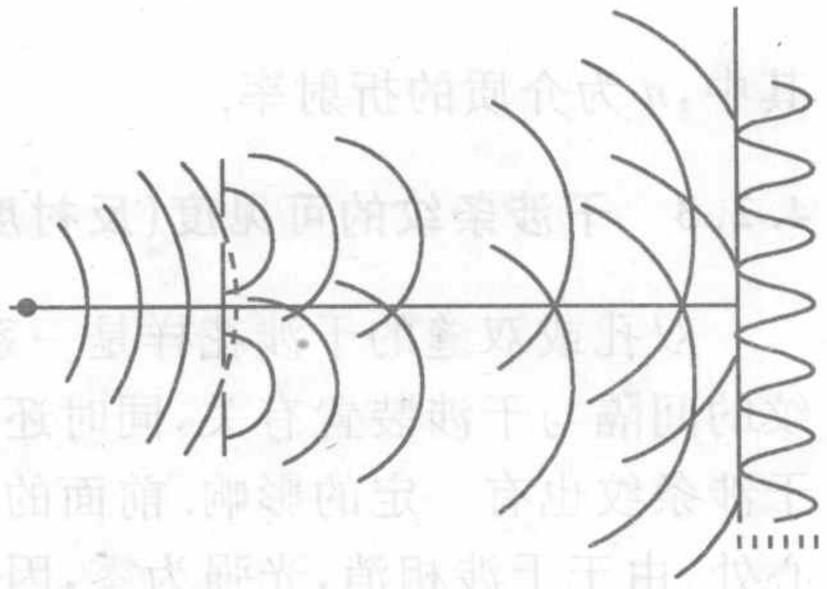


图 4.2.4　杨氏干涉的光强分布

有

$$x'=\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda\,,j=1,2,3,\cdots$$

$$x'=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda\,,j=-1,-2,-3\cdots.$$

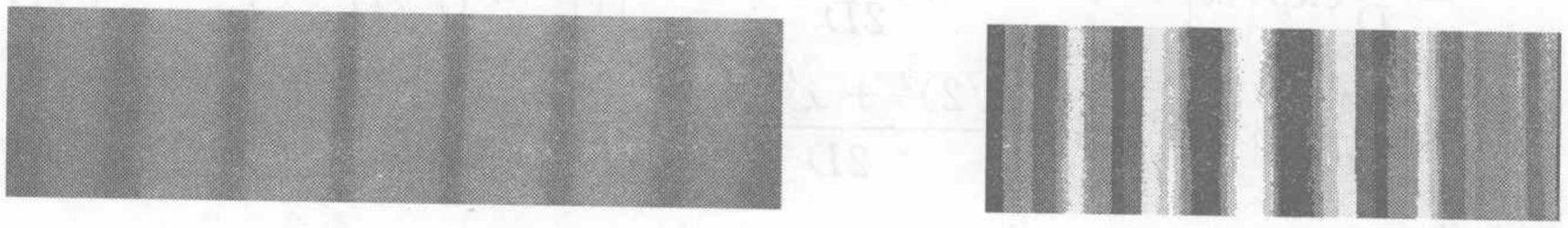
相邻亮(暗)条纹的间距由$\frac{kd}{2D}\Delta x'=\pi$决定,为

$$\Delta x'=\frac{D}{d}\lambda \tag{4.2.10}$$

4.2.2 两个线光源的干涉(双缝干涉)

如果将两个点光源沿着相互平行的直线扩展,就得到了两个线光源,两条平行的透光狭缝就是这种情形.此时,干涉场中不同 y 处的复振幅相等,因而在接收屏上得到一系列相互平行的直条纹,明暗交错.满足近轴条件时,亮条纹的位置、暗条纹的位置、亮(暗)条纹间距分别由式(4.2.8)～式(4.2.10)决定.

与双孔干涉不同的是,由于缝可以使更多的光透过,因而干涉花样要比双孔明显得多,而且双缝干涉的条纹是一系列等间隔的平行直条纹,沿着缝的方向可以延伸得较长.图 4.2.5 分别表示单色光和白光的杨氏双缝干涉花样.



(a) 红光入射的杨氏双缝干涉照片　　(b) 白光入射的杨氏双缝干涉照片

图 4.2.5　单色光和白光的杨氏双缝干涉花样

例如,设接收屏到双缝的距离为 $D=2\text{m}$,双缝间距为 $d=1\text{mm}$,对于 $\lambda=500\text{nm}$ 的光,干涉条纹的间隔为 $\Delta x'=\frac{2\times10^3}{1}\times500\times10^{-6}=1(\text{mm})$.

如两列波初相位不为零,则条纹形状不变,只是整体沿上、下方向移动.

如光源和接收屏之间充满介质,因为光程 $x'=j\pi\frac{2D}{kd}=j\frac{D}{d}\frac{\lambda}{n}$,则条纹间距为

$$\Delta x=\frac{D}{d}\frac{\lambda}{n} \tag{4.2.11}$$

其中,n 为介质的折射率.

4.2.3 干涉条纹的可见度(反衬度)

双孔或双缝的干涉花样是一系列明暗交错的条纹,由前面的推导可以看出,条纹的间隔与干涉装置有关,同时还应当注意,如果两相干光源的强度不相等时,对干涉条纹也有一定的影响.前面的推导是假设两光源强度相等,因而在暗条纹的中心处,由于干涉相消,光强为零,因而干涉花样明暗反差很大,条纹清晰可辨.但是,如果两缝的情况不相同,如缝宽不等,或对光的透过率不同,则从每一缝出射的光

的复振幅也不相等，则此时暗条纹处光强不再为零，干涉花样的亮暗条纹就不再那么明显. 为了衡量干涉花样的明暗反差程度，引入了可见度(visibility)的概念.

可见度的定义：在接收屏上一选定的区域中，取光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min}，则可见度为

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{4.2.12}$$

可见度也被称作反衬度. 而由干涉的特性，可得到

$$I_{max} = (A_1 + A_2)^2, \quad I_{min} = (A_1 - A_2)^2$$

则有

$$\gamma = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\dfrac{A_1}{A_2}}{1 + \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2} \tag{4.2.13}$$

当 $A_1 = A_2$ 时，$\gamma = 1$，即两列光的强度相当时，可见度最大；当 $A_1 \gg A_2$ 或 $A_1 \ll A_2$ 时，则 $\gamma \approx 0$，即两列光的强度相差悬殊时，可见度最小.

如果记 $I_0 = I_1 + I_2 = A_1^2 + A_2^2$，则屏上各处条纹的强度可表示为

$$\begin{aligned} I &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \\ &= (A_1^2 + A_2^2)\left(1 + \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2}\cos\Delta\varphi\right) = I_0(1 + \gamma\cos\Delta\varphi) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

4.2.4　两列平行光的干涉

两列同频率单色光，振幅分别为 A_1、A_2；初相位分别为 φ_{10}，φ_{20}，波矢方向分别用角度表示为 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$，$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

如图 4.2.6 所示，在 $z = 0$ 的波前，即 xOy 平面上，上述两列波的相位分布为

$$\varphi_1(x, y) = k(\cos\alpha_1 x + \cos\beta_1 y + \cos\gamma_1 \cdot 0) + \varphi_{10}$$

$$\varphi_2(x, y) = k(\cos\alpha_2 x + \cos\beta_2 y + \cos\gamma_2 \cdot 0) + \varphi_{20}$$

可求得在点 $P(x, y)$ 处的相位差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y) = {} & k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)x \\ & + k(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \end{aligned}$$

$P(x, y)$ 处的强度为

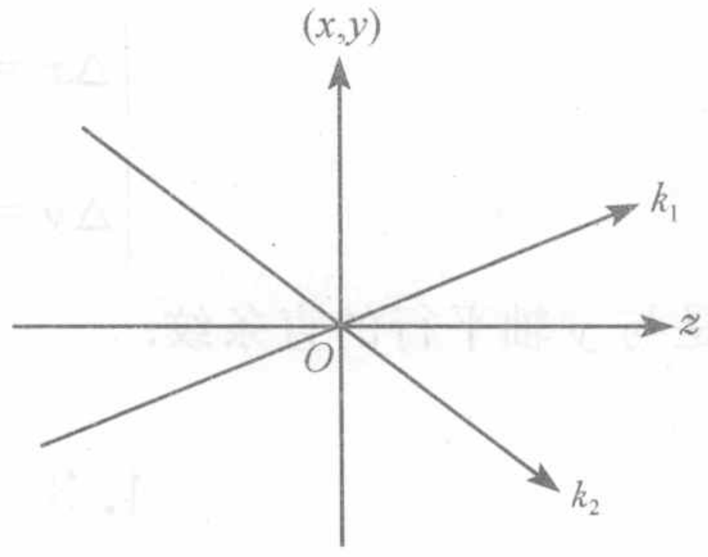


图 4.2.6　平行光在波前 $z = 0$ 叠加

$$I(x, y) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi = (A_1^2 + A_2^2)[1 + \gamma\cos\Delta\varphi(x, y)]$$

由相位差可确定出现亮暗干涉条纹的条件为

$$k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)x + k(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \begin{cases} 2j\pi \\ (2j+1)\pi \end{cases} \tag{4.2.15}$$

即亮、暗条纹都是等间隔的平行直线，形成平行直线族，斜率为

$$-\frac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}{\cos\beta_2-\cos\beta_1} \tag{4.2.16}$$

条纹间隔为

$$\begin{cases}\Delta x=\dfrac{2\pi}{k(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)}=\dfrac{\lambda}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\\ \Delta y=\dfrac{2\pi}{k(\cos\beta_2-\cos\beta_1)}=\dfrac{\lambda}{\cos\beta_2-\cos\beta_1}\end{cases} \tag{4.2.17}$$

或条纹的空间频率为

$$\begin{cases}f_x=\dfrac{1}{\Delta x}\\ f_y=\dfrac{1}{\Delta y}\end{cases} \tag{4.2.18}$$

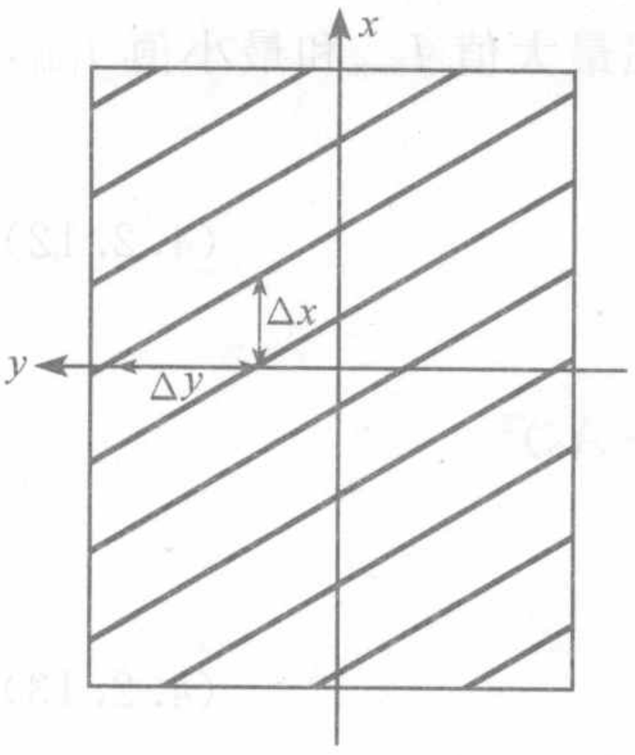


图 4.2.7 平行光的干涉条纹

如图 4.2.7 所示.

例 4.2.1 如图 4.2.8 所示,一束 He-Ne 激光(波长 632.8nm)经过分光板后,被对称放置的反射镜分为两束,射向一接收屏,设图中射向接收屏的平行光束与接收屏法线夹角 $\theta=30°$,求屏上干涉条纹的间隔.

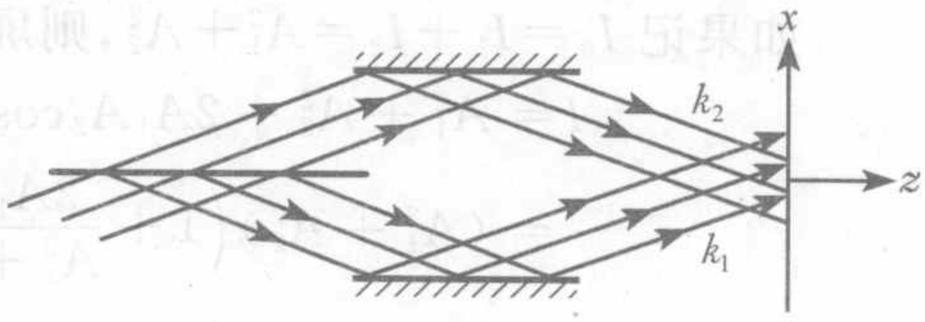


图 4.2.8 例 4.2.1

解 在这种情况下,入射光线与各坐标轴的夹角分别为

$$\alpha_1=60°,\quad \alpha_2=120°,\quad \beta_1=\beta_2=0°,\quad \gamma_1=30°,\quad \gamma_2=150°$$

代入式(4.2.17)可得

$$\begin{cases}\Delta x=\dfrac{\lambda}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}=632.8\text{nm}\\ \Delta y=\dfrac{\lambda}{\cos\beta_2-\cos\beta_1}=\infty\end{cases}$$

是与 y 轴平行的直条纹.

4.3 惠更斯-菲涅耳原理

4.3.1 次波模型

1. 光的衍射现象

在没有障碍物的自由空间中,波总是沿着直线传播的.当有障碍物时,则会有衍射现象,即波会传播到障碍物的“阴影”区域,仿佛绕过了障碍物,如图 4.3.1 所示.“衍射”通常被解释为“绕射”,其实这并不是很准确的理解.

对于机械波,衍射是常见的现象.但是,光波的衍射却不容易观察到,通常我们说,光是沿直线传播的,当光波遇见障碍物时,阴影区域通常是没有光的,如

图 4.3.2 所示. 正因如此，我们可以很容易地遮挡光线.

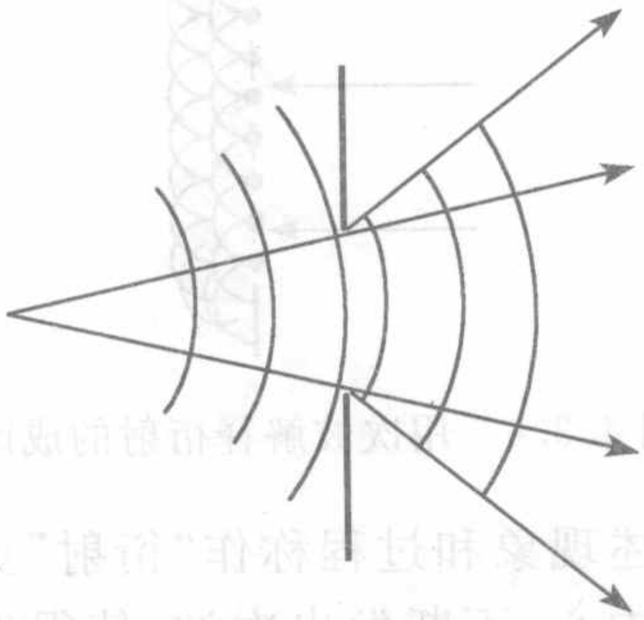


图 4.3.1　波由于衍射而进入阴影区域

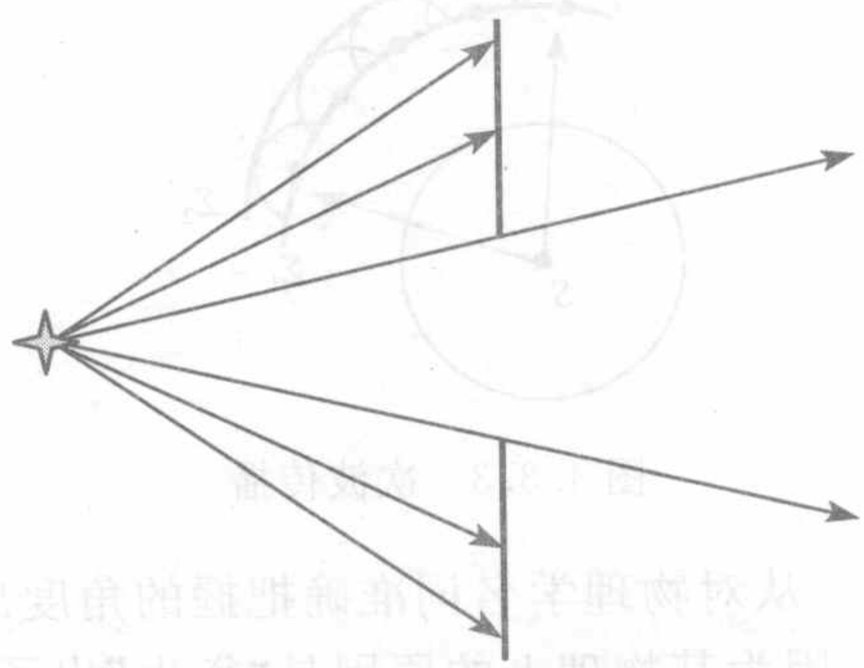


图 4.3.2　光的直进现象

衍射是波的基本特征，但是，明显的衍射现象只发生在衍射障碍物的空间尺度与波长相当的情况下. 而日常生活中的墙壁、窗口、树木等，它们的尺寸($\sim 10^{0}$ m)要比光的波长($\sim 10^{-7}$ m)大得多，所以光的衍射现象并不明显. 如果障碍物的尺度很小，比如让光通过很细的狭缝，或很小的孔，或者在平直的挡板边缘，如果仔细观察的话，还是可以看到光的衍射现象的.

2. 次波

为了解释光的衍射，惠更斯提出了“次波”的概念(1678 年). 光波在空间传播，是振动的传播，波在空间各处都引起振动. 除了真实的光源之外，波前上的任一点都可视为新的振动中心，这些振动中心进一步发出新的球面光波，称为次波(secondary wavelet). 后续的波面(或波前)就是这些球面次波的包络面(envelope). 上述波前上的振动中心称之为次波中心. 这些理解后来被称作惠更斯原理(Huygens principle).

按照惠更斯的观点，可以将光传播的过程看成是次波不断传播的过程. 任何一个次波中心发出的次波，又在其周围引起新的振动，即次波又可以产生新的振动中心，形成新的次波中心，这些次波中心继续发出次波，由此使得光波不断地向前传播，如图 4.3.3 所示. 或者说，次波是由波场中的振动中心“衍生”出来的，而任何一个次波中心又进一步衍生出新的次波. 这就是“衍射”一词的准确含义. 如果实际的光源为点光源 S，发出球面波. 波场中球面 Σ_1 就是一个波面，即等相位面. Σ_1 上有无数个次波中心，发出新的次波，经过一段时间后，这些次波的包络面就是球面 Σ_2. 新的波面 Σ_2 上又有无数个新的次波中心，发出新的次波，不断向前传播.

用次波的模型可以很容易解释光的衍射现象. 如图 4.3.4 所示，为一个带狭缝的挡板，狭缝出的平面，是波场中的一个波前. 该波前上有无数个次波中心，这些中心所发出的次波又衍生出的次波中心，所发出的次波将会在空间不断地扩展，于是振动就延伸到了被障碍物遮挡的区域，即产生所谓的“衍射”现象.

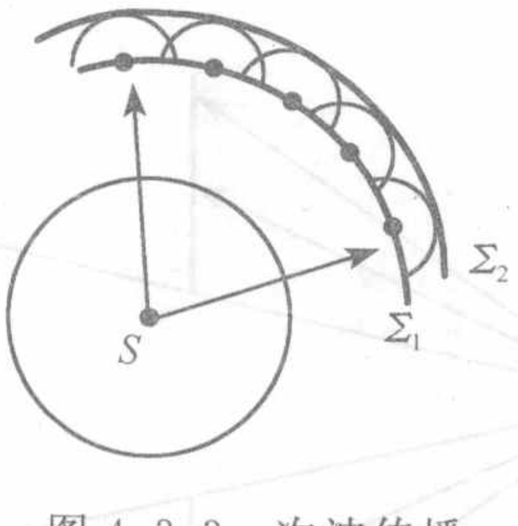


图 4.3.3 次波传播

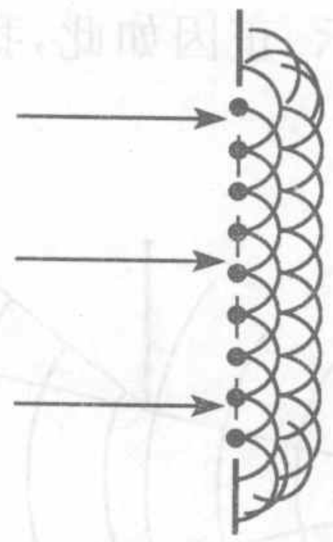


图 4.3.4 用次波解释衍射的成因

从对物理学名词准确把握的角度出发，将上述现象和过程称作“衍射”更加准确，因为其物理上的原因是“衍生”出了新的次波中心，不断发出次波，使得波在空间弥散开来.

波前上任一点都是一个次波中心，即一个点光源，发出球面次波，按照这一模型，即使是平行光束，也将由于衍射而逐渐扩展. 所以，从波动的观点看，是没有“光线”或“光束”之类的概念的.

4.3.2 次波的相干叠加——惠更斯-菲涅耳原理

1. 次波引起的振动

在波场中任意取定一个面 Σ，这就是波场中的一个波前，该波前上各个次波中心发出的次波将在波场中某一点 P 引起振动，设 Σ 上某个次波中心 Q 点的复振幅为 $\tilde{U}_0(Q)$，P 点的复振幅记为 $\tilde{U}(P)$. 在 Q 周围取一个面元 $d\Sigma$，由于面积元足够小，可以认为上面的次波中心具有相同的特征. 这一面元上的次波在 P 点所引起的复振幅为 $d\tilde{U}(P)$，则存在以下关系：

$d\tilde{U}(P)\propto\tilde{U}_0(Q)$，$\tilde{U}_0(Q)$ 为 Q 点的复振幅，称为瞳函数；

$d\tilde{U}(P)\propto\dfrac{e^{ikr}}{r}$，$Q$ 点为点光源，发出球面次波；

$d\tilde{U}(P)\propto d\Sigma$，$d\Sigma$ 为次波中心周围面元的面积.

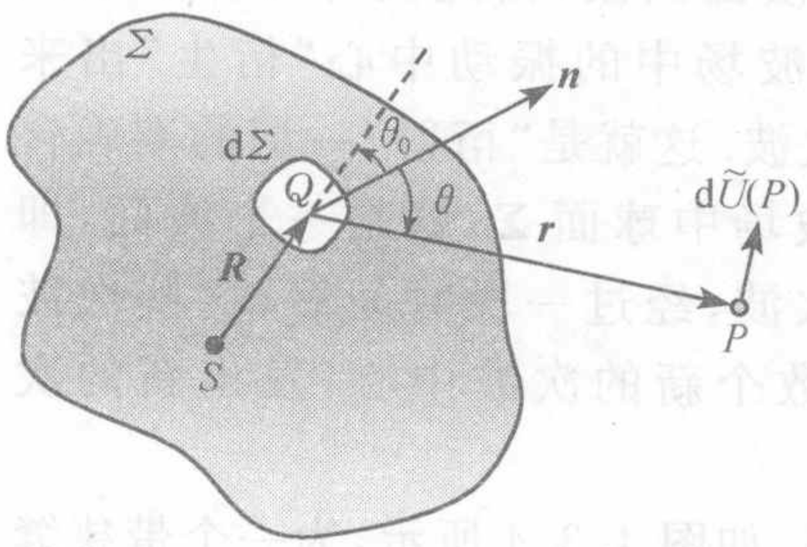


图 4.3.5 次波的复振幅

设实际的光源中心在 S 点，则 P 点的复振幅还与面元 $d\Sigma$ 的方向有关，如图 4.3.5 所示. 可以用函数关系表示为

$$d\tilde{U}(P)\propto F(\theta_0,\theta)$$

其中，θ_0、θ 分别为源点 S 和场点 P 相对于次波面元 $d\Sigma$ 的方位角. θ_0 为面元法线与 S、Q 连线间的夹角，θ 为面元法线与 Q、P 连线间的夹角，$F(\theta_0,\theta)$ 称为倾斜因子(obliquity 或 inclination factor).

上述 $\tilde{U}_0(Q)$、$\dfrac{e^{ikr}}{r}$、$d\Sigma$ 以及 $F(\theta_0,\theta)$ 可称为次波复振幅的四要素.

综合考虑上述所有因素，可以得到一个总的表达式

$$\mathrm{d}\widetilde{U}(P) = KF(\theta_0,\theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{4.3.1}$$

K 为比例常数. 这就是一个微分面元发出的次波所引起的元振幅.

2. 次波的相干叠加

波场中某一点的振动，就是某一波前上发出的所有次波在该点的合振动. 将波前 Σ 上所有次波中心发出的次波在 P 点的振动相干叠加，即可以得到该波前发出的次波传播到 P 点时所引起的合振动，即

$$\widetilde{U}(P) = K\sum_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{4.3.2}$$

这就是惠更斯-菲涅耳原理(Huygens-Fresnel principle).

由于次波中心在波前上是连续分布的，上述求和应当用积分计算.

3. 菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

如果取一个封闭的空间曲面 Σ，即一个封闭的波前，由于从光源发出的所有方向的波都将通过此波前，而且只通过此波前一次，所以光源在任一场点 P 所引起的复振幅与该波前所发出的全部次波在该点所引起的复振幅等价，如图 4.3.6 所示. 由于波前是一连续分布的曲面，所有次波中心发出的次波在 P 点的复振幅就是以下曲面积分

$$\widetilde{U}(P) = K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{4.3.3}$$

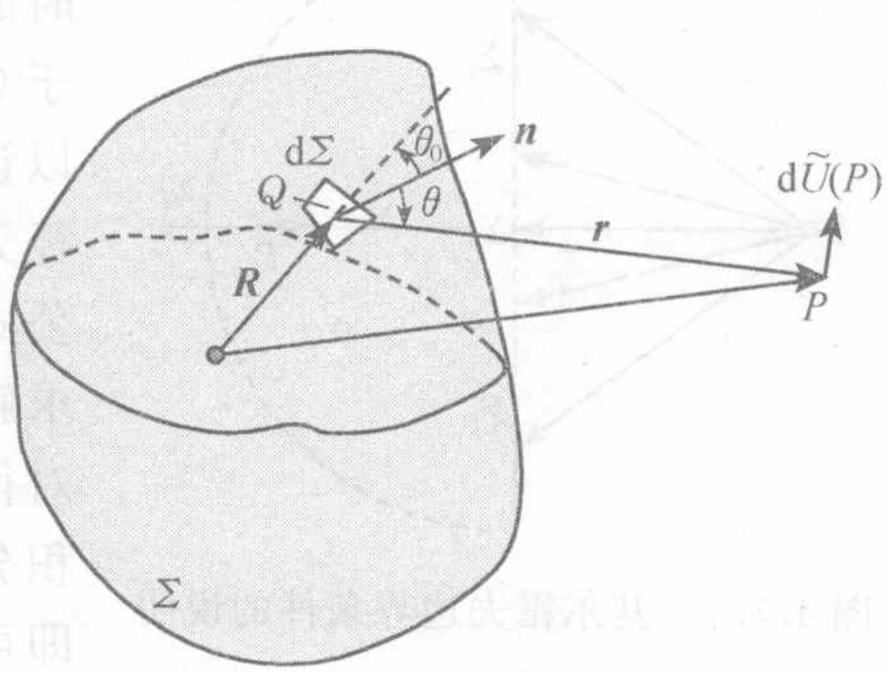


图 4.3.6　封闭空间曲面上次波的复振幅

即

$$\widetilde{U}(x,y) = K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(x',y')F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{4.3.4}$$

这就是菲涅耳衍射积分公式.

经过基尔霍夫(Kirchhoff)用光的电磁理论加以严格的论证，菲涅耳根据物理直觉所建立的积分公式基本上是正确的. 需要修正的只是波前可以为任意形状的封闭曲面，而且导出了积分公式中的比例常数和倾斜因子的表达式，其中

$$K = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\lambda} \tag{4.3.5}$$

$$F(\theta_0,\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta) \tag{4.3.6}$$

比例常数中的相位因子不为 0，而是 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\lambda}$，即有一个 $\pi/2$ 的相位超前，说明等

效次波源的相位不等于波前上 Q 点扰动的相位. 而倾斜因子的表达式说明向后倒退的次波也对 P 点的复振幅产生作用，只有在波前取为球面的情况下，$\theta_0=0$，$F(\theta_0,\theta)=1/2(1+\cos\theta)$，此时 $\theta=\pi$，才有 $F(\theta_0,\theta)=0$.

将上述表达式(4.3.5)、式(4.3.6)代入式(4.3.3)，得到

$$\widetilde{U}(P)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\lambda}\iint_{\Sigma}(\cos\theta_0+\cos\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{4.3.7}$$

经过基尔霍夫修正的上述积分公式被称作菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(Fresnel-Kirchhoff formula). 处理光的衍射问题，都可以归结为求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式.

当波场中有障碍物，即有衍射屏时，可以自然地将波前取在衍射屏的位置，此时封闭的空间曲面由三部分构成，如图 4.3.7 所示，衍射屏上的透光部分 Σ_0，不透光的光屏部分 Σ_1，以及在空间扩展的半个曲面 Σ_2. 可以忽略 Σ_0 与 Σ_1 的相互影响，认为在透光部分的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 取作自由传播时的数值，而不透光部分的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 自然等于 0. 相对于光的波长，衍射屏的不透光部分也可以认为是无限大的，所以第三部分可以取一个半径无穷大的半球面，经过严格的数学证明，积分公式在该球面上的积分值等于 0，不必考虑. 则在求解 Fresnel-Kirchhoff 衍射积分公式时，只需要对衍射屏的光孔部分作积分就可以了，即将曲面积分的范围局限于光孔(也可称为有效波前)Σ_0 即可. 这种做法，称作基尔霍夫边界条件.

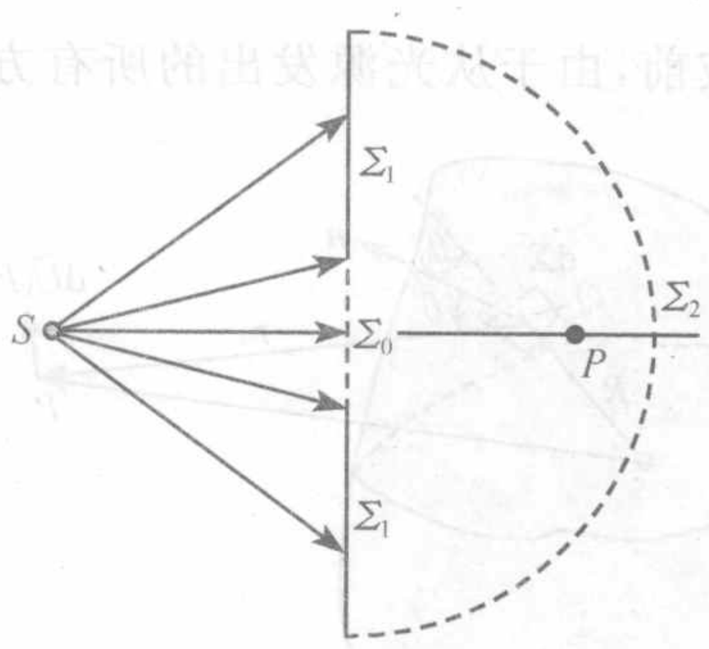


图 4.3.7 基尔霍夫边界条件的说明

积分公式可以化为

$$\widetilde{U}(P)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\lambda}\iint_{\Sigma_0}(\cos\theta_0+\cos\theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{4.3.8}$$

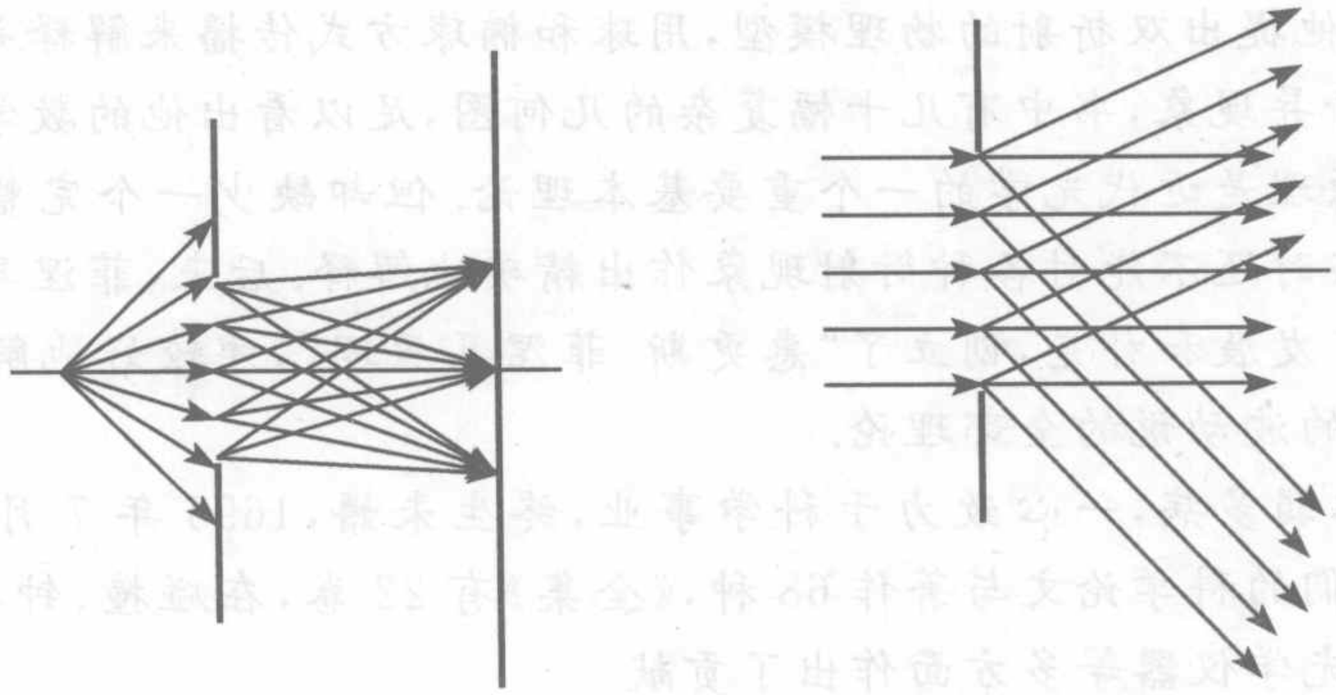
在特定的实验条件下，应用近轴条件和远场条件，积分公式可以得到简化，并给出很好的结果.

4. 衍射的分类

根据衍射障碍物(衍射屏)到光源和接收屏的距离，可以将衍射分类，并采用不同的方法进行处理.

距离有限的，或至少一个是有限的，如图 4.3.8 所示，为菲涅耳衍射(Fresnel diffraction). 此时，波前通常为球面，在接收屏上的任一点，是来自不同方向的次波进行相干叠加.

距离无限的，即平行光入射、出射，如图 4.3.8 所示，为夫琅禾费衍射(Fraunhofer diffraction). 此时波前为平面，相互平行的光在无穷远处相干叠加. 事实上，在衍射屏后置一凸透镜，而将接收屏置于透镜的像方焦平面处，相互平行的光经过透镜后会聚在接收屏上，进行相干叠加.



菲涅耳衍射　　夫琅禾费衍射

图 4.3.8　菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

求解衍射问题，就变成了求解上述积分公式的问题. 但是，由于积分计算的复杂性，在大多数情况下，上述积分是无法严格求解的，所以，总是在一定条件下将菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式简化为可以求解的形式.

惠更斯与菲涅耳

克里斯蒂安 · 惠更斯(Christiaan Huygens)(图 4.3.9)，1629 年 4 月 14 日出生于荷兰海牙. 父亲是大臣和诗人，与笛卡儿等学界名流交往甚密. 惠更斯自幼聪慧，13 岁时曾自制一台车床，表现出很强的动手能力. 1645～1647 年在莱顿大学学习法律与数学，1647～1649 年转入布雷达学院深造. 受古希腊的科学著作的影响及笛卡儿等科学家的引导，他致力于力学、光学、天文学及数学的研究，并在上述各个领域都获得了非凡的成就. 发明了摆钟，在天文仪器的设计、弹性体碰撞和光的波动理论等方面都有突出成就. 1663 他被聘为英国皇家学会第一个外籍会员，1666 年刚成立的法国皇家科学院选他为院士.

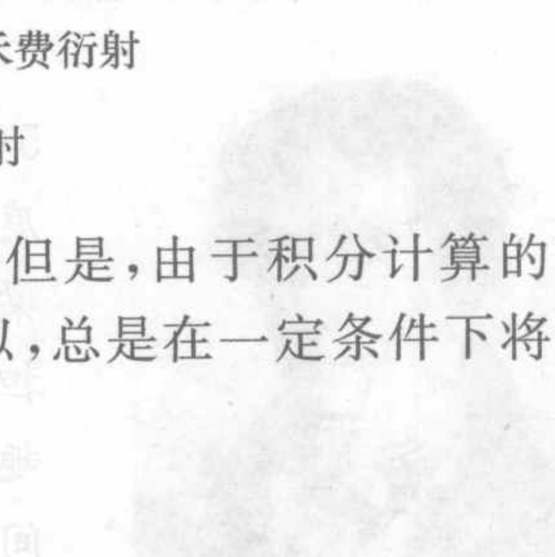


图 4.3.9　克里斯蒂安 · 惠更斯

惠更斯在巴黎工作期间曾致力于光学的研究. 1678 年，他在法国科学院的一次演讲中公开反对了牛顿的光的微粒说. 他说，如果光是微粒性的，那么光在交叉时就会因发生碰撞而改变方向. 可当时人们并没有发现这现象，而且利用微粒说解释折射现象，将得到与实际相矛盾的结果. 在 1690 年发表的《论光》一书中，他较系统地阐述了光的波动原理，这一原理后来被称作惠更斯原理. 他认为每个发光体的微粒把脉冲传给邻近一种弥漫媒质(“以太”)微粒，每个受激微粒都变成一个球形次波的中心. 他从弹性碰撞理论出发，认为这样一群微粒虽然本身并不前进，但能同时传播向四面八方因而光束彼此交而不相互影响，并在此基础上用作图法解释了光的反射、折射、衍射等现象.《论光》中最精彩部分是对冰洲石所产生的双折射

现象的解释，他提出双折射的物理模型，用球和椭球方式传播来解释寻常光和非常光所产生的奇异现象，书中有几十幅复杂的几何图，足以看出他的数学功底.

惠更斯原理是近代光学的一个重要基本理论.但却缺少一个完整的数学表达式，因而，在当时还不能对各种衍射现象作出精确地解释.后来，菲涅耳对惠更斯的光学理论作了发展和补充，创立了“惠更斯-菲涅耳原理”，才较好地解释了衍射现象，完成了光的波动说的全部理论.

惠更斯体弱多病，一心致力于科学事业，终生未婚，1695 年 7 月 8 日卒于海牙.他留给人们的科学论文与著作 68 种，《全集》有 22 卷，在碰撞、钟摆、离心力和光的波动说、光学仪器等多方面作出了贡献.



图 4.3.10 奥古斯丁·菲涅耳

菲涅耳(Augustin～Jean Fresnel)(图 4.3.10)1788 年 5 月 10 日生于法国诺曼底的布罗利耶城的一个建筑师家庭.1806 年毕业于巴黎工艺学院，1809 年又毕业于巴黎桥梁与公路学校，成为一名工程师，此后即在法国的各部门担任道路修建工作.大约从 1814 年开始，对光学产生了兴趣，并对它进行了研究.开始，他的科学研究都是在业余时间自费进行的.

他的主要成就集中在光的衍射和偏振方面.他的研究工作的特点是：精心设计实验，并将实验结果和波动说理论进行比较，进而建立完善的理论，再由实验和计算加以验证.可以说，他的一生，为波动光学从实验到理论的建立起了不可磨灭的作用.

菲涅耳开始进行光学研究时并不知道托马斯·杨的工作.他从实验和理论两方面对干涉和衍射现象进行了广泛而深入的研究.例如，用菲涅耳双面镜等实验阐述干涉原理：“以极小的角度相交的两束光线的振动，在一方的节与另一方的腹相合时就相互削弱.”他对圆孔、相屏、直边等各种情况进行了衍射实验研究和理论计算.”后人称为菲涅耳衍射.1815 年他向巴黎科学院提交了第一篇论文《光的衍射》这篇论文一开头他就批评了微粒说，认为它引进的种种假设如微粒因色而异、突变等说明不了光为什么具有一定速度，而光的波动说则不需要任何假设.论文中提出了他的衍射理论及其实验根据.1816 年，他又陆续提交了关于反射光栅和半波带法的论文.

菲涅耳的研究工作获得普遍的承认是在 1817 年.这年的 3 月，巴黎科学院决定将衍射理论作为 1819 年数理科学的悬奖题目.5 人评审委员会中拉普拉斯、比奥和泊松是微粒说的支持者，盖-吕萨克中立，只阿拉果一人支持波动说.在安培和阿拉果的鼓励下，菲涅耳改变了对悬赏不感兴趣的态度，于 1818 年 4 月提交了论文.论文用严格的数学证明将惠更斯原理发展为后来的所谓“惠更斯-菲涅耳原理”，即进一步考虑了各个次波叠加时的相位关系.这就圆满地解释了光的反射、折射、干涉、衍射等现象，消除了波动说的最大困难是对光的直进现象的解释.此外，

论文中还用半波带法给出各种实验结果的积分计算. 支持微粒说的泊松发现了菲涅耳未注意的推论：圆屏衍射时，屏的阴影中心应该是一亮点. 阿拉果立即用实验证实了这一推论. 菲涅耳本人也根据泊松提出对圆孔的其他补充问题顺利地用实验给出了回答，科学院一反初衷，决定将奖金授予菲涅耳. 由此，波动说取得了巨大胜利.

但还需要用波动说进一步解释偏振现象. 在这方面，菲涅耳受杨氏双缝干涉实验的启发，和阿拉果合作进行了各种实验，发现了偏振光的干涉现象，从而进一步论证了光的横波性(1821)；发现了光的圆偏振和椭圆偏振现象，并从波动观点加以解释；用波动说解释了光的偏振面的旋转(即旋光)(1823)；他还用光的横波性及弹性理论导出了关于反射光和折射光振幅的著名公式即菲涅耳公式，从而解释了法国物理学家马吕斯所发现的光在反射时的偏振现象和双折射现象，为晶体光学奠定了基础.

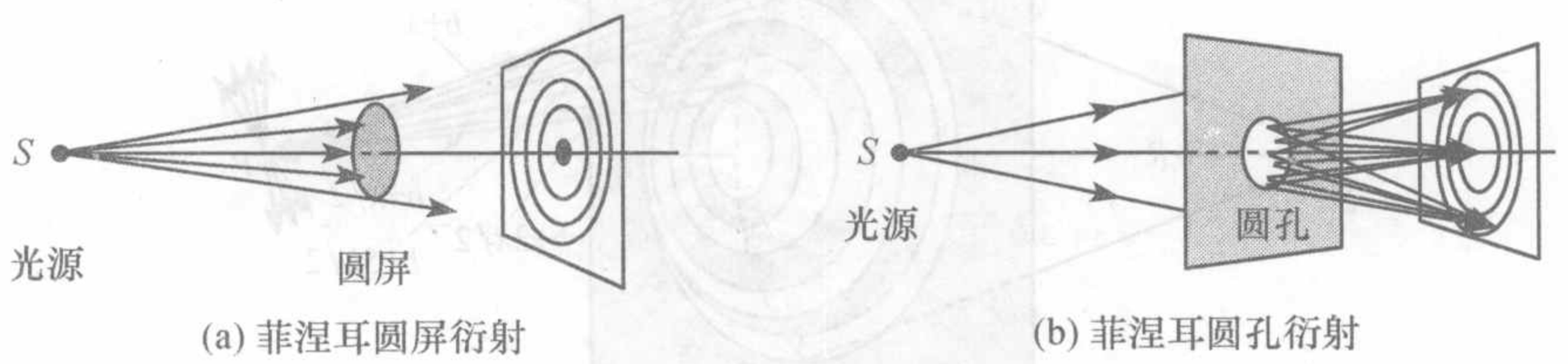
另外，他对地球是否拖曳以太的问题进行过研究；利用多级透镜的仪器，对灯塔照明系统作了改进.

菲涅耳 1823 年(35 岁)被选为法国科学院院士，1825 年当选为英国伦敦皇家学会会员，1827 年获伦敦皇家学会授予的伦福德奖章. 1827 年 7 月 14 日因肺病卒于巴黎附近的阿夫赖城，年仅 39 岁，在他这短暂的一生中，为物理学做出了多方面的贡献. 菲涅耳由于在物理光学研究中的重大成就，被誉为“物理光学的缔造者”.

4.4　菲涅耳衍射(圆孔、圆屏)

4.4.1　衍射现象

典型的菲涅耳衍射是圆孔衍射或圆屏衍射，光源通常都是点光源，接收屏在衍射障碍物(即圆孔或圆屏衍射屏)的另一侧，如图 4.4.1 所示.

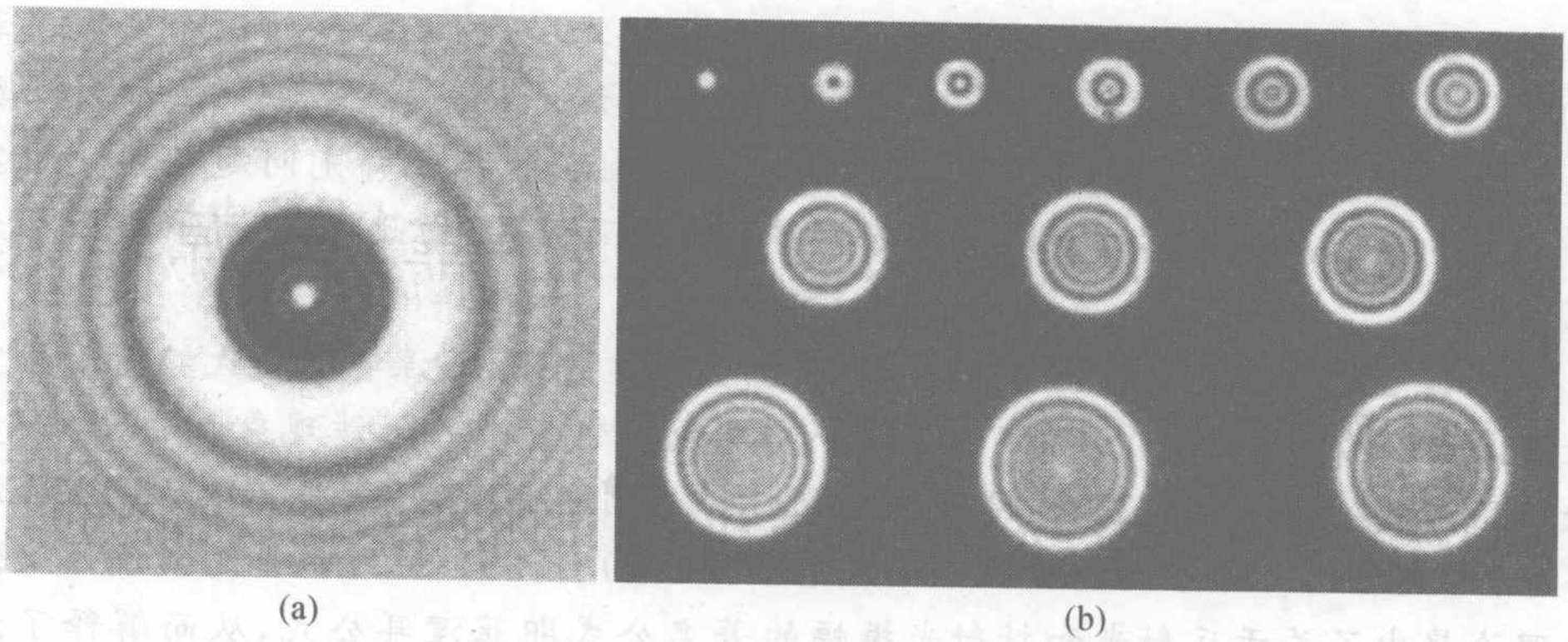


(a) 菲涅耳圆屏衍射　　(b) 菲涅耳圆孔衍射

图 4.4.1　菲涅耳衍射图

圆屏衍射　屏上可见同心圆环. 与圆孔衍射不同的是，当圆屏直径改变，或接收屏沿轴向移动时，圆环中心永远是亮点[图 4.4.2(a)].

圆孔衍射　接收屏上可以看见明暗交替的同心圆环. 当圆孔的半径改变时，衍射图样圆环中心明暗迅速交替变化；当接收屏沿着系统做轴向移动时，圆环中心明暗缓慢交替变化[图 4.4.2(b)].



(a) (b)

图 4.4.2 菲涅耳圆屏衍射与圆孔衍射花样

4.4.2 用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射

1. 菲涅耳半波带

从理论上解决上述圆孔或圆屏衍射问题，应当设法求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(4.3.8)，但是，由于得到上述曲面积分的严格解析表达式几乎是不可能的. 菲涅耳采用巧妙的方法，将复杂的衍射积分经过近似化为了简单的求和的形式.

菲涅耳是这样解决问题的：将圆孔处的波前(球面)划分为一系列的同心圆环带，并使每一带的中心到轴上场点 P 的距离依次相差半个波长(图 4.4.3). 这些圆环带称为菲涅耳半波带(half-period zone).

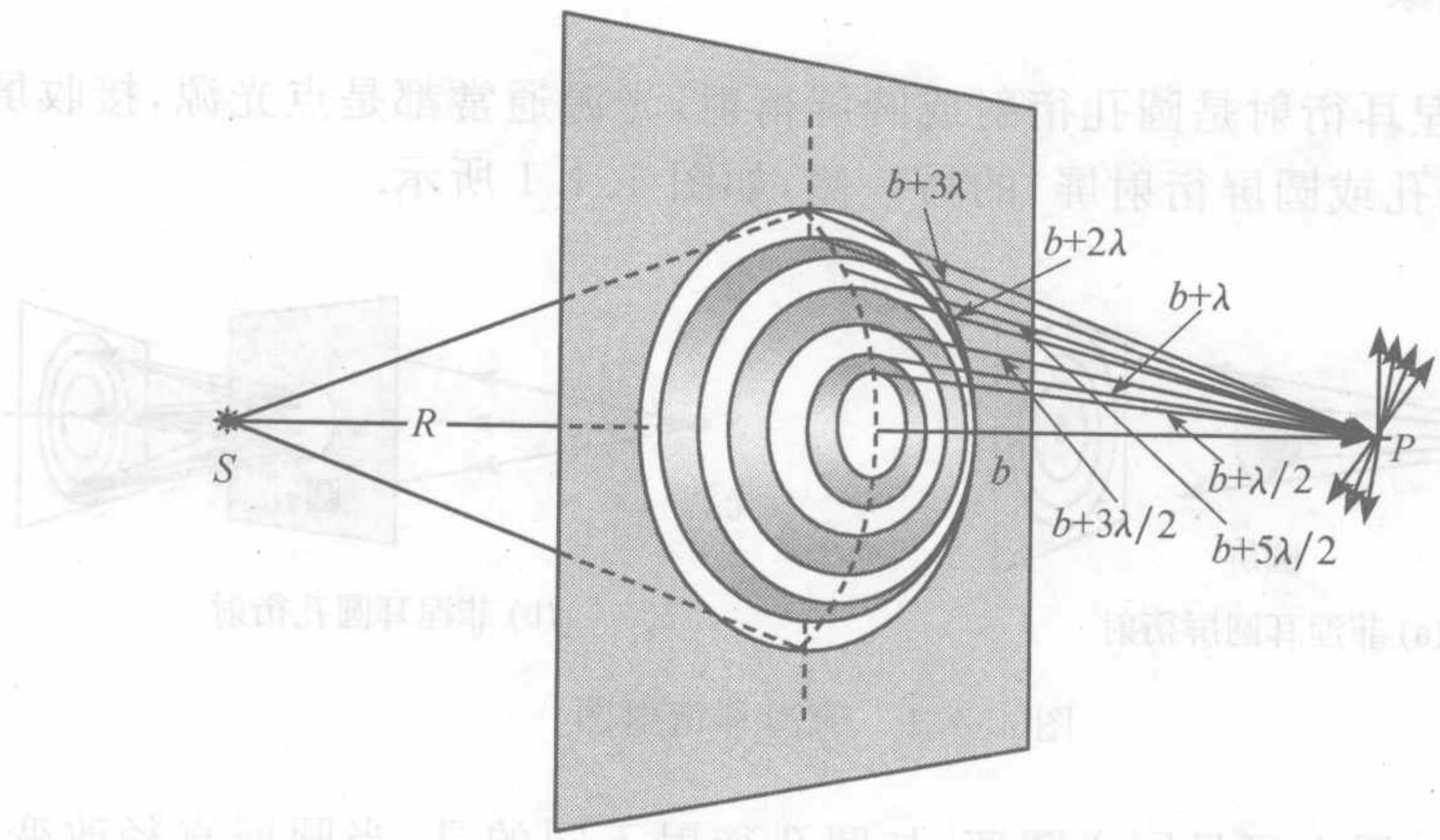


图 4.4.3 菲涅耳半波带的划分

按照上述方法所得到的第 m 个半波带的外边缘到场点 P 的光程为 $r_m = r_0 + m\frac{\lambda}{2}$，其中 r_0 为球面波的顶点到 P 点的光程. 由于相邻半波带到 P 点的距离相差

半个波长，所以半波带实际上是非常细的圆环，因而，可以近似认为每一个半波带上所有的点在 P 点的复振幅都相同.

在所选定的球面上，各个次波波源的初相位相等. 相邻半波带发出的次波，到达 P 点时，光程差为半个波长，相位差为 π，即相位相反，因而振动方向相反，相互抵消.

下面计算各个半波带的面积 Σ_m.

如图 4.4.4 所示，设球面半径为 R，球冠对光源的张角为 φ，高度为 h，则球冠的面积为

$$S = 2\pi Rh = 2\pi R^2(1-\cos\varphi)$$

上式两端求微分，则有

$$\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \qquad (4.4.1)$$

这是由于张角的改变所引起的球冠面积的改变. 对于 $\triangle SMP$，利用余弦公式，得

$$\cos\varphi = \frac{R^2 + (R+r_0)^2 - r_m^2}{2R(R+r_0)}$$

两端求微分，则有

$$\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{r_m}{R(R+r_0)}\mathrm{d}r_m \qquad (4.4.2)$$

将式(4.4.1)和式(4.4.2)结合，得到

$$\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \frac{r_m}{R(R+r_0)}\mathrm{d}r_m$$

按照半波带的定义，当 $\mathrm{d}r_m = \lambda/2$ 时，$\mathrm{d}S = \Sigma_m$，Σ_m 为第 m 个半波带的面积. 于是上式变为

$$\frac{\Sigma_m}{r_m} = \frac{\pi R}{R+r_0}\lambda \qquad (4.4.3)$$

对于各个半波带，上述比值为常数.

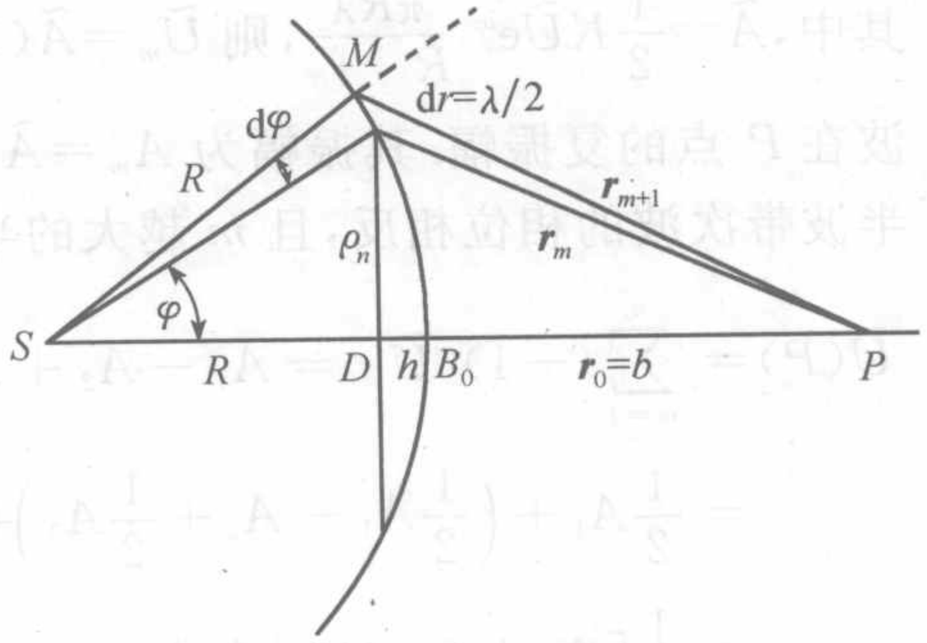


图 4.4.4　半波带的面积

2. 衍射积分公式求解

将波面划分为一系列的半波带之后，衍射积分公式可以近似地化为对于各个半波带的次波求和，即

$$\tilde{U}(P) = K\iint_{\Sigma_0}\tilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \approx K\sum_{m=1}^{n}\tilde{U}(Q_m)F_m(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_m}}{r_m}\Sigma_m = \sum_{m=1}^{n}\tilde{U}_m$$

$\tilde{U}_m$ 为第 m 个半波带在 P 点的复振幅. 由于对于每一个半波带，到 P 点的光程近似为相等，上述求和公式中，各半波带的光程都从其外侧边缘算起，即第一个半波带的光程为 $r_0+\frac{\lambda}{2}$，第 m 个半波带的光程为 $r_m = r_0 + \frac{m\lambda}{2}$. 设共有 n 个半波带，由于是球面波，因而 $\theta_0 = 0$，瞳函数 $\tilde{U}(Q_m)$ 为常数，记作 $\tilde{U}$.

$$\widetilde{U}(P)=K\sum_{m=1}^{n}\widetilde{U}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(r_0+m\frac{\lambda}{2}\right)}\frac{\Sigma_m}{r_m}=K\widetilde{U}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_0+m\pi)}$$

$$=K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi}=K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos\theta_m)(-1)^m$$

$$=\widetilde{A}\sum_{m=1}^{n}(1+\cos\theta_m)(-1)^m \tag{4.4.4}$$

其中，$\widetilde{A}=\frac{1}{2}K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}$，则 $\widetilde{U}_m=\widetilde{A}(1+\cos\theta_m)(-1)^m$ 为第 m 个半波带发出的次波在 P 点的复振幅. 其振幅为 $A_m=\widetilde{A}(1+\cos\theta_m)$，相位因子为 $(-1)^m$. 可见，相邻半波带次波的相位相反，且 m 越大的半波带，振幅越小. 于是总的复振幅可表示为

$$\widetilde{U}(P)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\widetilde{U}_m=A_1-A_2+A_3-A_4+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}A_1+\left(\frac{1}{2}A_1-A_2+\frac{1}{2}A_3\right)+\left(\frac{1}{2}A_3-A_4+\frac{1}{2}A_5\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2}A_n$$

$$=\frac{1}{2}[A_1+(-1)^{n-1}A_n] \tag{4.4.5}$$

式(4.4.5)中，虽然求和式中的第一项 $(-1)^1\widetilde{U}_1=-\widetilde{U}_1$，但是并不代表第一个半波带在 P 点的复振幅是负值，事实上，半波带的取法只是让相邻半波带的次波在 P 点相位相反. 所以，为便于表述，不妨假设第一个半波带在 P 点的复振幅为正值，则通项 $\widetilde{U}_n$ 的相位因子相应地改为 $(-1)^{n-1}$ 即可. 由于倾斜因子是连续、缓慢变化的，所以可以认为某一个半波带的振幅是与其相邻的两个半波带振幅的平均值，即 $\frac{1}{2}A_1-A_2+\frac{1}{2}A_3=0\cdots$

3. 衍射现象的解释

从式(4.4.5)，可以得到

圆孔衍射，如果露出的半波带数 n 为奇数，则 $\widetilde{U}(P)=\frac{1}{2}[A_1+A_n]$，亮点；

如果露出的半波带数 n 为偶数，则 $\widetilde{U}(P)=\frac{1}{2}[A_1-A_n]$，暗点；

自由传播，相当于 $n\to\infty$，而 $A_n\to0$，所以 $A(P)=\frac{1}{2}A_1$，始终亮点；

圆屏衍射，就是相当于前面 n 个半波带被遮住，则 $\widetilde{U}(P)=\sum_{n+1}^{\infty}A_m=\frac{1}{2}A_{n+1}$，因而总是亮点.

也可以用振幅矢量方法分析菲涅耳衍射，如图 4.4.5 所示，设奇数的半波带在 P 点的振幅用向上的矢量表示，则偶数的半波带的振幅用向下的矢量表示，由于倾斜因子的作用，随着 n 的增大，振幅逐渐减小，即越靠外的半波带，其振幅越小. 这些矢量合成的结果，与上述分析完全一致.

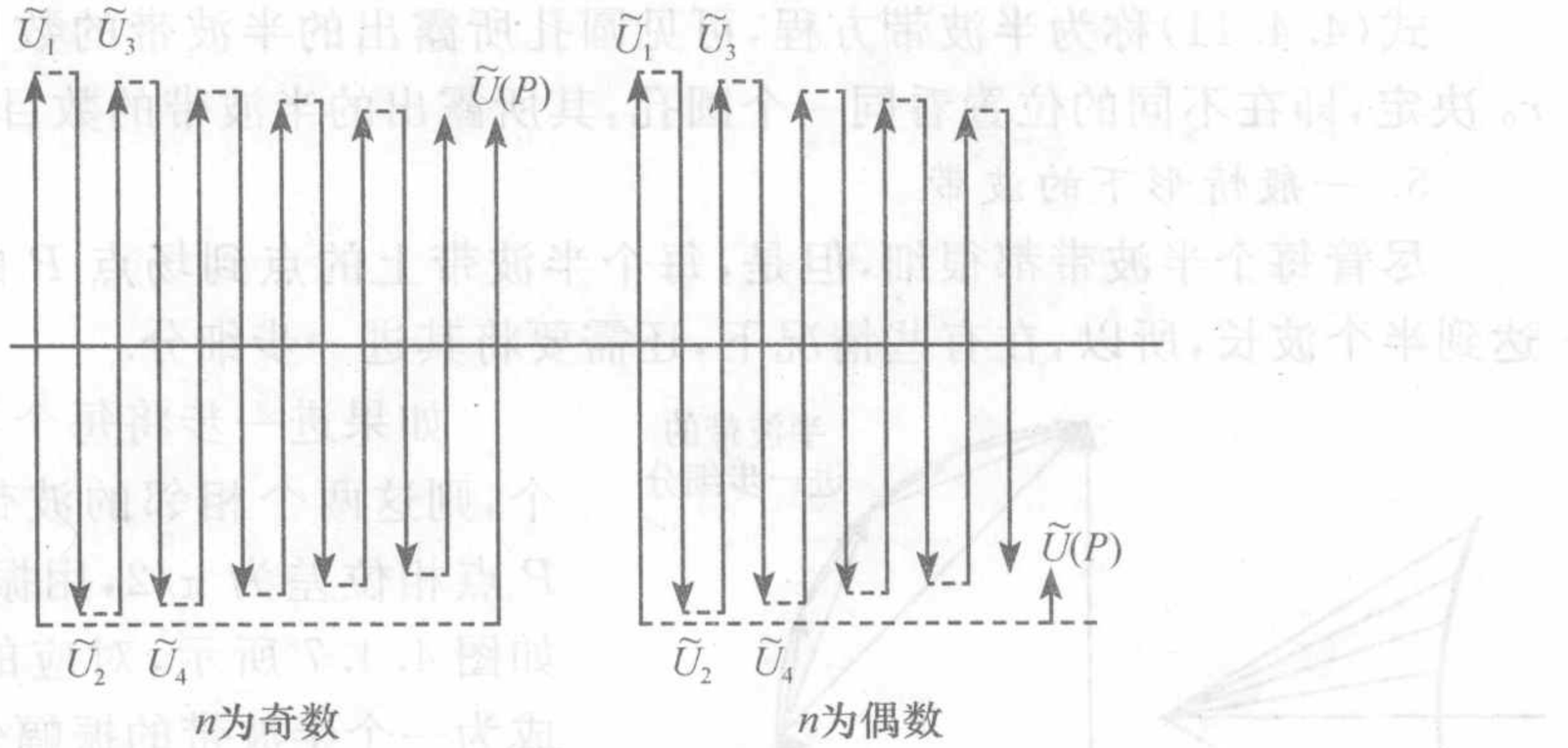


图 4.4.5　振幅矢量法求菲涅耳衍射的振幅

4. 半波带方程

由上述分析可知，轴上一点 P 的振幅或者光强取决于圆孔所露出的半波带的数目 n，下面讨论 n 与各个因素的数学关系.

此时，由于需要知道圆孔所露出的完整的半波带的数目，因而半波带到场点 P 的光程要从各个半波带的外边缘算起，即

$$r_n = r_0 + n\frac{\lambda}{2}$$

$$r_n^2 - r_0^2 = \left(r_0 + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2 = nr_0\lambda + \left(\frac{n}{2}\lambda\right)^2 \approx n\lambda r_0 \tag{4.4.6}$$

如图 4.4.6 所示，在$\triangle MDP$ 中，记圆孔的半径为 ρ_n，则

$$\rho_n^2 = r_n^2 - (r_0 + h)^2 = r_n^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2 \tag{4.4.7}$$

在$\triangle MDS$ 中

$$\rho_n^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2 \tag{4.4.8}$$

由式(4.4.6)，式(4.4.7)可得

$$r_n^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2 = 2Rh - h^2$$

求出 h 的表达式，并利用式(4.4.6)，得到

$$h = \frac{r_n^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} = \frac{nr_0}{2(R + r_0)}\lambda \tag{4.4.9}$$

利用式(4.4.9)的结果，并考虑到 $h \ll r_0$，式(4.4.7)可以进一步化为

$$\rho_n^2 = r_n^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2 \approx n\lambda r_0 - 2r_0h \tag{4.4.10}$$

将式(4.4.9)代入式(4.4.10)，有 $\rho_n^2 = n\lambda r_0 - \frac{n\lambda r_0^2}{R + r_0} = \frac{nr_0R}{R + r_0}\lambda$，整理后，得到

$$n = \frac{\rho^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}\right) \tag{4.4.11}$$

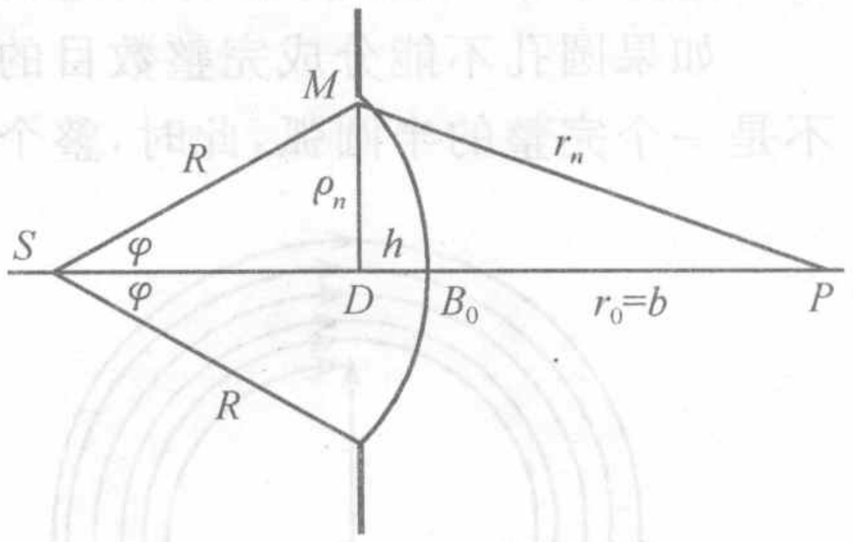


图 4.4.6　半波带方程的推导

式(4.4.11)称为半波带方程,可见圆孔所露出的半波带的数目 n 的奇偶性由 r_0 决定,即在不同的位置看同一个圆孔,其所露出的半波带的数目是不同的.

5. 一般情形下的波带

尽管每个半波带都很细,但是,每个半波带上的点到场点 P 的光程差仍可以达到半个波长,所以,在有些情况下,还需要将其进一步细分.

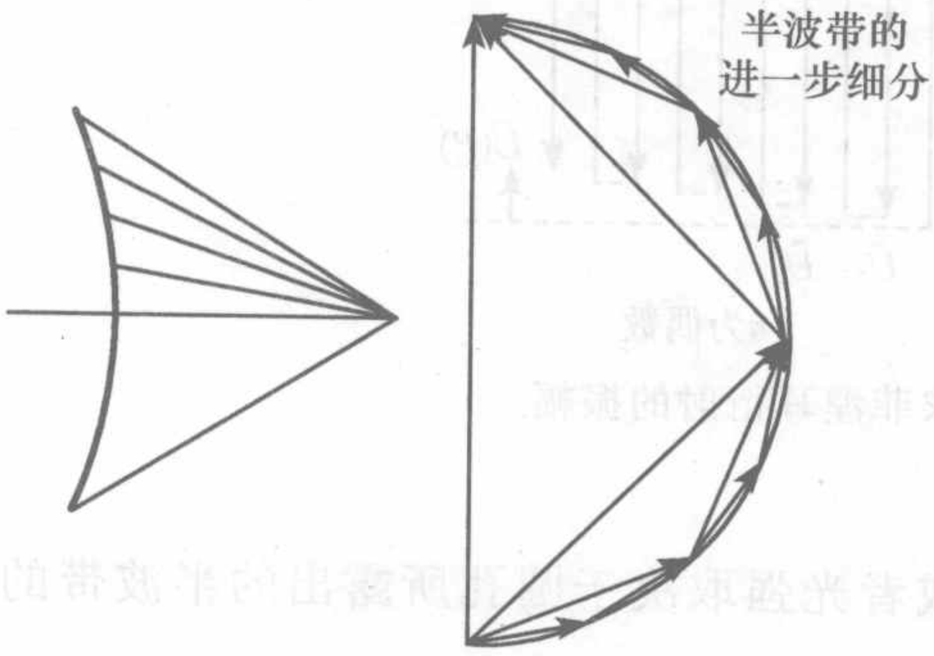


图 4.4.7 将一个半波带进一步细分

如果进一步将每个半波带划分为两个,则这两个相邻的波带发出的次波在 P 点相位差为 $\pi/2$,用振幅矢量法表示,如图 4.4.7 所示,对应的复振幅矢量合成为一个半波带的振幅矢量.

再将上述每一个波带进一步细分,则新得到的两个波带的振幅矢量的相位差为 $\pi/4$,….

可以将任何一个半波带进一步细分为 m 个,得到更多的波带,相邻波带间的光程差为 $\lambda/2m$,相位差为 π/m. m 很大时,相位差变得很小,用振幅矢量法,原来的每个半波带的复振幅波矢由一条直线变为由 m 个小波矢组成的多边形,当 m 很大时,这个多边形就演变成了一段半圆弧,如图 4.4.7 所示. 严格地说,由于序号大的波带所对应的光程更大,同时倾斜因子更小,所以这些半圆不是严格的半圆弧,而是由曲率半径逐渐减小的弧线构成的一段螺旋线,如图 4.4.8 所示.

如果圆孔不能分成完整数目的半波带,则最后一个波带所对应的振幅矢量将不是一个完整的半圆弧,此时,整个振幅矢量将是倾斜的,如图 4.4.9 所示.

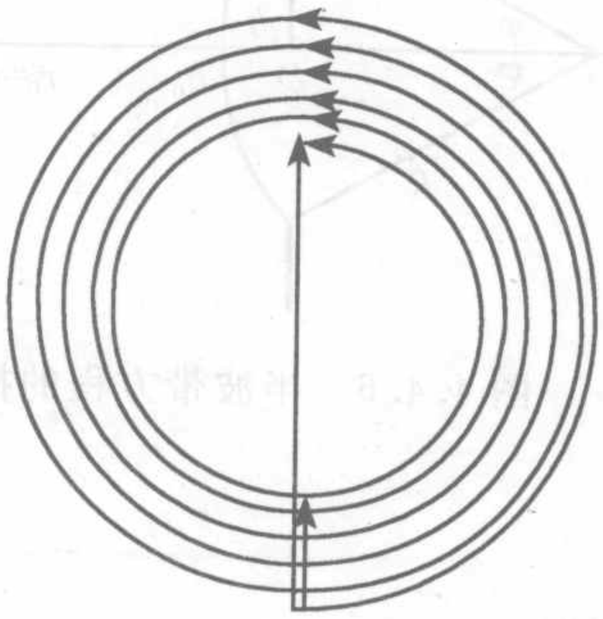


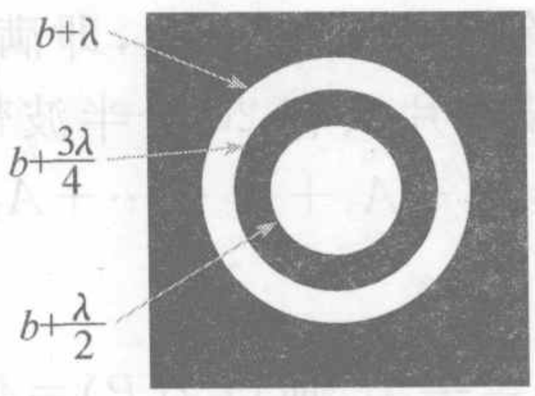
图 4.4.8 恰好整数个半波带



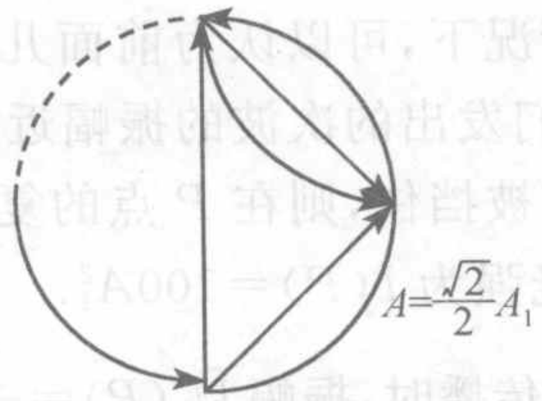
图 4.4.9 不是整数个半波带

例 4.4.1 关于菲涅耳半波带方法应用的几个例题,求图 4.4.10 所示圆孔在光轴上的光强.

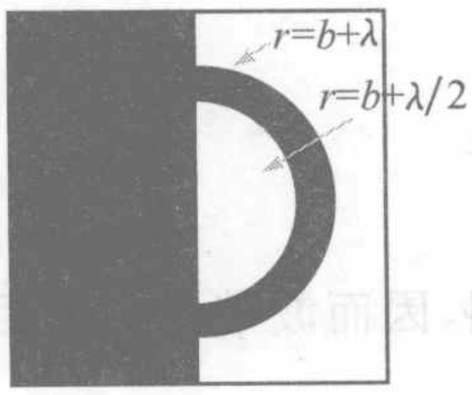
解 (1) 只露出第一个半波带和第二个半波带的外半圆. 用矢量方法,第二半波带的后一半为 1/4 圆弧,合成结果如下:$I=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A_1\right)^2=\frac{1}{2}A_1^2=2I_0$,其中



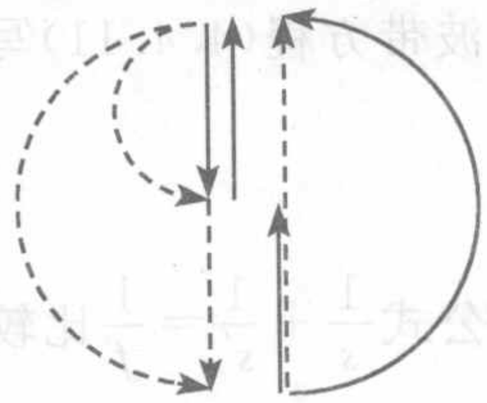
(a) 例 4.4.1(1)图



(b) 例 4.4.1(1)的振幅矢量



(c) 例 4.4.1(2)图



(d) 例 4.4.1(2)的振幅矢量

图 4.4.10　例 4.4.1 图

$$I_0 = \left(\frac{1}{2}A_1\right)^2 = \frac{1}{4}A_1^2$$

(2) 如果沿角度方向对称地遮住衍射屏的一半，则仅是振幅变为原来的一半. 原因是由于面积的减小，每一个小波带的次波的振幅都变为原来的一半，故合成后的半圆的大小为原来的一半.

$$A = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = A_1, \quad I = A_1^2 = 4I_0$$

6. 菲涅耳半波带的应用——波带片

用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数(或偶数)半波带透光，即可以制成菲涅耳波带片(Fresnel zone plate)，见图 4.4.11. 透过波带片的光，在光轴上的场点相位相同，振动方向相同，则合振动的振幅大大增强.

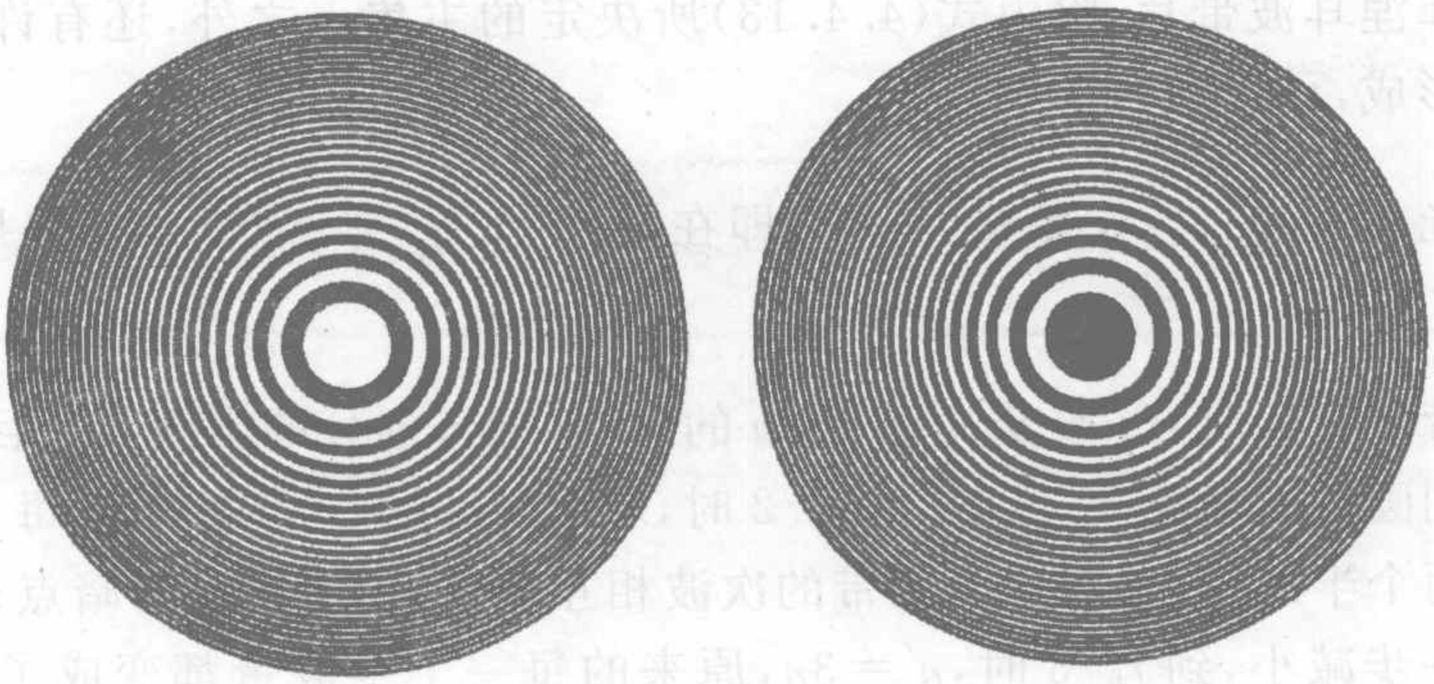


图 4.4.11　菲涅耳波带片

一般情况下，可以认为前面几个半波带的倾斜因子相差不大，即满足近轴条件，所以它们发出的次波的振幅近似相等. 例如，波带片共有 20 个半波带，其中偶数的半波带被挡住，则在 P 点的复振幅为 $\tilde{U}(P)=A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{19}\approx 10A_1$，因而 P 点光强为 $I(P)=100A_1^2$.

而自由传播时，振幅 $\tilde{U}_0(P)=\frac{1}{2}A_1$，光强 $I_0(P)=\frac{1}{4}A_1^2$，所以 $I(P)=400I_0(P)$. 两者相差 400 倍，可见波带片具有使光会聚的作用.

可以将半波带方程(4.4.11)写成如下形式

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{r_0}=\frac{k\lambda}{\rho_n^2} \tag{4.4.12}$$

同透镜的高斯公式 $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$ 比较，形式上相同，因而波带片的焦距为

$$f=\frac{\rho_n^2}{k\lambda} \tag{4.4.13}$$

对平行入射光而言，由于 $R=\infty$，所以波带片为平面的.

从式(4.4.13)看出，任何一个波带片，通常都只适用于一个波长，其焦距是固定的. 但其实并非如此，见下例.

例 4.4.2 一菲涅耳波带片对 900.0nm 的红外光的主焦距为 30cm，改用 632.8nm 的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解 由于波带片不变，各个半波带的半径和序号都不改变，因而

$$f\lambda=\frac{\rho_n^2}{k}$$

不变，即

$$f_1\lambda_1=f_2\lambda_2$$

所以

$$f_1=f_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=80\times\frac{9000}{6328}=113\text{cm}$$

一个菲涅耳波带片，除由式(4.4.13)所决定的主焦点之外，还有许多次焦点. 次焦点的形成，可以证明如下：

平行光入射，$R=\infty$，有 $n=\frac{\rho_n^2}{\lambda}\frac{1}{r_0}$，即在距离 r_0 处，半径为 ρ_n 的带是第 n 个半波带.

当波带片不变时，r_0 改变，会引起 n 的改变，即可划分的半波带数目改变.

场点到圆孔的距离 r_0 减小，到 $r_0/2$ 时，$n'=2n$，即相当于原来的每一个半波带都变成了两个半波带，这两个半波带的次波相互抵消，因而该点为暗点；

r_0 进一步减小，到 $r_0/3$ 时，$n'=3n$，原来的每一个半波带都变成了三个，其中两个半波带的次波相互抵消后，还余下一个半波带的次波，因而该点为亮点. 但是

每一个半波带的面积只有约原来的 1/3，所以亮度比主焦点要暗一些，因此称作次焦点；

r_0 进一步减小，到 $r_0/4$ 时，$n'=4n$，暗点；

……

所以有一系列次焦点，相应的焦距可以表示为

$$f'=\frac{f}{3},\frac{f}{5},\cdots,\frac{f}{2m+1}\cdots,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{4.4.14}$$

当 $m=0$ 时，为主焦点的焦距.

除了圆环形的波带片之外，还有其他形式的波带片，如图 4.4.12 所示.

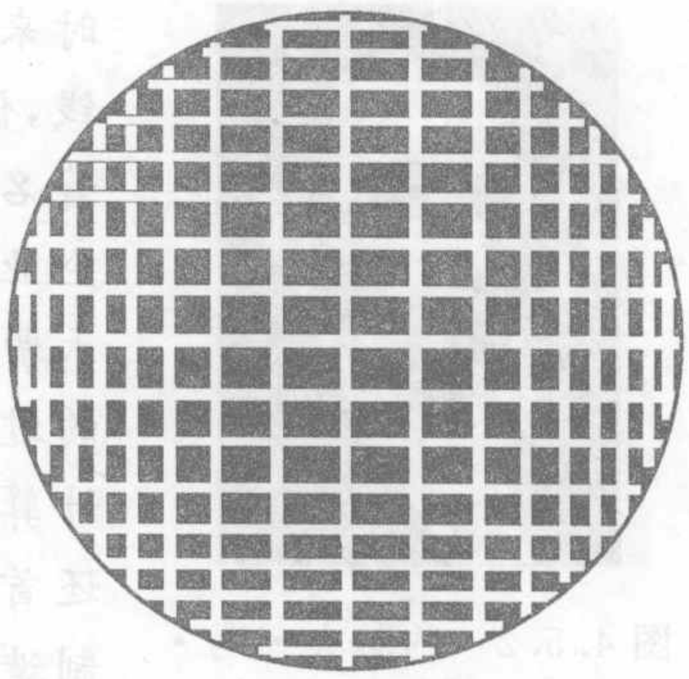
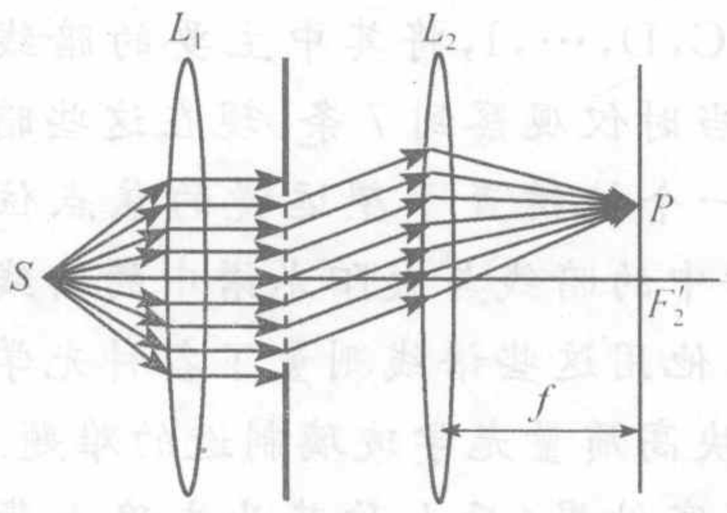


图 4.4.12　可以将入射平行光会聚成十字形的波带片

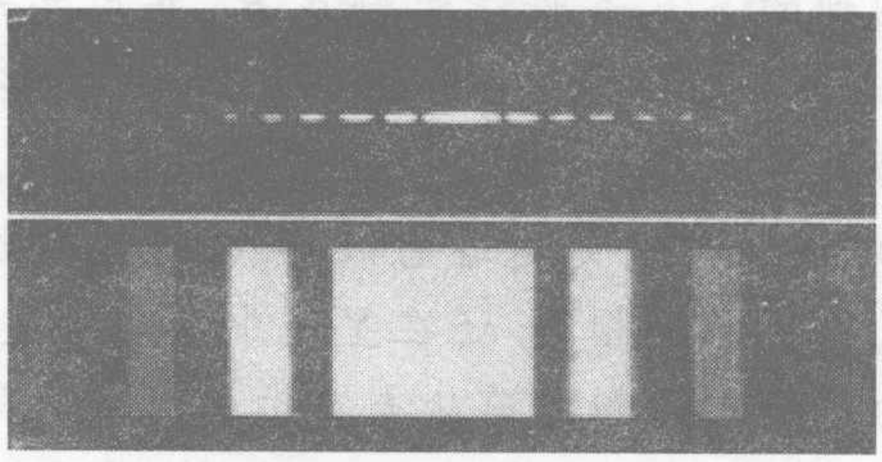
4.5　夫琅禾费单缝和矩孔衍射

4.5.1　夫琅禾费衍射装置

衍射屏上有一单狭缝，宽度为 a，该狭缝也称作衍射孔径；平行光入射；在衍射屏之后，置一凸透镜 L_2，接收屏处于透镜的像方焦平面，如图 4.5.1 所示. 对于透镜 L_2 而言，只有相互平行的光才能会聚到其焦平面上的同一点，所以，在接收屏上得到的是从单缝出射的相互平行的次波相干叠加的结果.



(a) 夫琅禾费单缝装置



(b) 点光源、线光源照明狭缝的夫琅禾费衍射花样

图 4.5.1　夫琅禾费衍射装置

单缝衍射屏除了可以做成这种透射式的之外，还可以做成反射式的，即衍射屏上只有一条窄的反射面，其余部分不反射. 这用反射式衍射屏的原理和分析方法与透射式的衍射屏完全相同.

约瑟夫·冯·夫琅禾费(Joseph von Fraunhofer)(图 4.5.2)1787 年 3 月 6 日生于慕尼黑附近的斯特劳宾，是一位玻璃匠的第 11 个儿子. 他的父母都非常贫穷，而且没有文化，而他也仅仅在学校里呆了几年，1806 年他开始在巴伐利亚的贝内迪克特博伊伦的光学工厂当学徒，他 11 岁时就成了孤儿，夫琅禾费 14 岁时，有一天他正在其中工作的建筑物突然倒塌，把他压在了瓦砾下面. 这次事件竟使他突然



图 4.5.2 约瑟夫·冯·夫琅禾费

时来运转.巴伐利亚的一位贵族出于怜悯,给了他足够的钱,使他得以进入学校学习.这位贵族还把他推荐给一位著名的工业家和政治家乌泽什乃德,乌泽什乃德办了许多企业,其中有一家光学工厂.在乌泽什乃德光学工厂,夫琅禾费的才能得到了充分的施展,夫琅禾费把制作光学仪器的过程从只凭经验的手工操作发展到了依靠精密的科学计算工艺,他用几何光学理论设计和制造了消色差透镜,还首先用牛顿环检查光学表面加工精度及透镜形状.他所制造的大型折射望远镜等光学仪器,负有盛名,多帕特折射望远镜有一个直径 24cm 的透镜,质量为 1000kg,就是他的杰作之一.这些成就,使得他的光学成就举世闻名,无人能超过他.乌泽什乃德认识到了他的技术才能的巨大价值,让他在 1818 年成为自己的合伙人.乌泽什乃德和夫琅禾费合办的光学研究所雇用了五十多名工作人员,成为世界上最先进的光学公司.这些努力的结果,使当时光学技术的中心由英国转移到了德国,推动了精密光学工业的发展.夫琅禾费是把光学理论、玻璃制造技术、精密机械和卓越才能结合起来的范例,对德国的光学工业产生了长远的影响.许多著名光学家,如佩茨瓦耳、斯坦海尔、阿贝和一些光学公司诸如蔡司和莱茨等,都是直接或间接地从夫琅禾费传下来的.夫琅禾费的贡献受到了巴伐利亚国王的赏识,封他为贵族.

夫琅禾费对光学和光谱学作出了重要贡献.1814 年用自己改进的分光系统,发现并仔细研究了太阳光谱中的若干条暗线,并利用衍射原理测出它们的波长,将观测到的 576 条暗线编制成表,并用字母 A,B,C,D,…,I,将其中主要的暗线命名.沃拉斯顿在 12 年前曾观察到这种暗线,但他当时仅观察到 7 条.现在这些暗线称为夫琅禾费线,已经发现了一万多条.他还将一个棱镜置于望远镜的焦点位置上,以便让星的光通过它散射.他观察到恒星光谱中的暗线与太阳光谱中的暗线的样式并不完全相同.还在星光中发现了某些谱线.他用这些谱线测量了各种光学玻璃的折射率达到以前从未有过的精度,解决了大块高质量光学玻璃制造的难题.

1821 年,他发表了平行光通过单缝衍射的研究结果(后人称其为夫琅禾费衍射),做了光谱分辨率的试验,第一个定量地研究了衍射光栅,制成 260 条平行线组成的光栅(图 4.5.3),用它测量了光的波长.1823 年他又用金刚石刀刻制了玻璃光栅,给出了至今通用的光栅方程.

1823 年担任慕尼黑科学院物理陈列馆馆长和慕尼黑大学教授,后来德国埃朗根大学和英国、丹麦都赠予他荣誉称号.

1826 年 6 月 7 日,不到 40 岁的夫琅禾费因肺结核在慕尼黑逝世.他自学成才,勤奋刻苦,终身未婚,他的墓碑上刻着“他接近了恒星”.

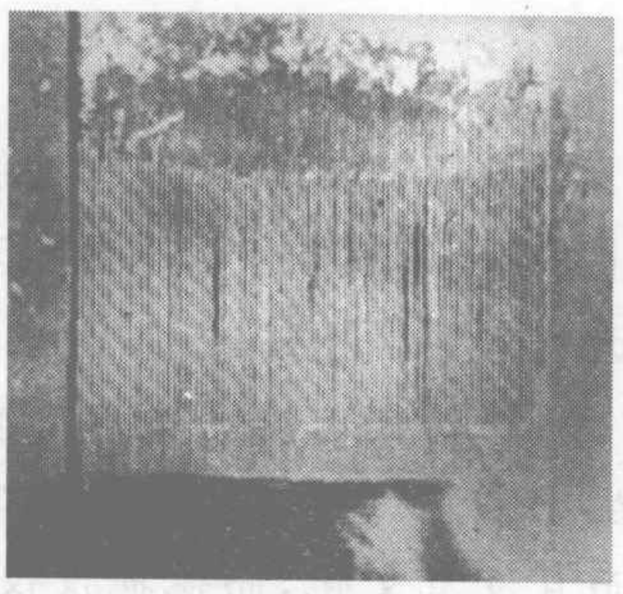


图 4.5.3 夫琅禾费于 1821 年第一次制成的衍射光栅

4.5.2　单缝衍射强度分布

求解接收屏上的衍射强度分布，应该先通过求解衍射积分公式，得到屏上的复振幅分布，然后再计算光强分布. 然而，由于严格计算积分非常复杂，所以要在一定的条件下采取近似.

由于衍射孔径，即单缝是比较小的，因而可以认为衍射光是满足近轴条件的.

求解夫琅禾费衍射通常可以采用振幅矢量法和数值积分法，前者简单直观，适用于处理形状较为简单的衍射屏，后者则可以处理形状较复杂的衍射屏. 下面分别介绍.

1. 用振幅矢量方法求解

由于入射光是平行光，则波场中任一波前上各点的振幅相等. 如图 4.5.4 所示，设入射光沿 θ_0 方向；对于衍射光，沿 θ 方向的次波，会聚到 P 点. 过狭缝上端 A 作一个与 θ 方向衍射光垂直的平面，则该平面与 P 点间的光程是相等的. 从狭缝上下端两个次波中心发出的次波光程差和相位差分别为

$$\Delta L = a(\sin\theta \pm \sin\theta_0) \tag{4.5.1}$$

和

$$\Delta \Phi = ka(\sin\theta \pm \sin\theta_0) \tag{4.5.2}$$

上面两式中，入射光和衍射光位于光轴的同一侧时，取“+”；否则，取“−”.

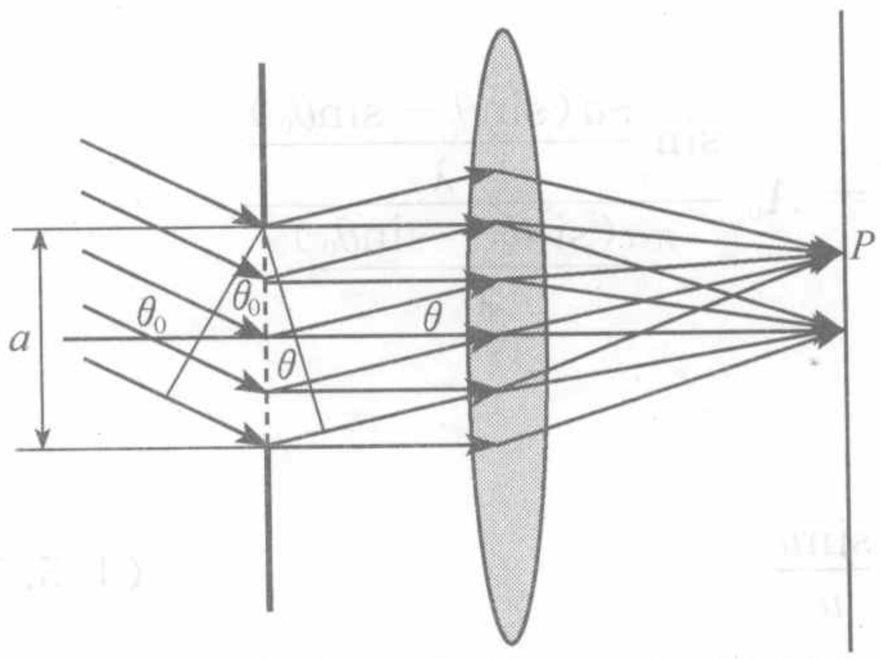


图 4.5.4　任意入射角的振幅矢量方法示意

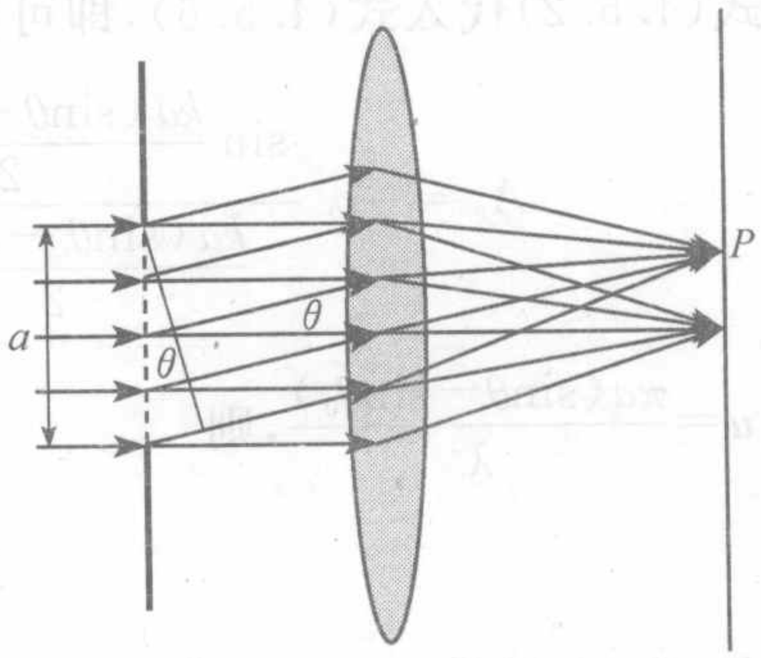


图 4.5.5　正入射的振幅矢量方法示意

若将狭缝均分为 N 个平行的部分，则相邻两部分的光程差和相位差分别为

$$\Delta l = \frac{\Delta L}{N} = \frac{a(\sin\theta \pm \sin\theta_0)}{N} \tag{4.5.3}$$

和

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta \Phi}{N} = \frac{ka(\sin\theta \pm \sin\theta_0)}{N} \tag{4.5.4}$$

如果 $\theta=\theta_0$，则 $\Delta\varphi=0$，各个次波的波矢相互平行，此时合振动矢量的振幅为记为 A_0.

如果 $\theta\neq\theta_0$，在满足近轴条件时，忽略倾斜因子的影响，即不同方向的次波波矢

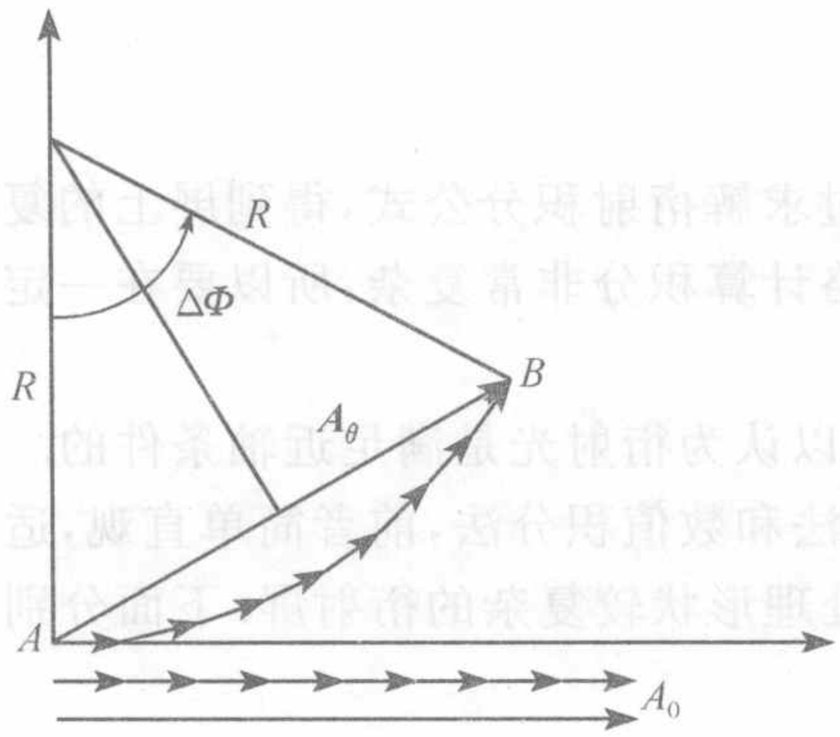


图 4.5.6 振幅矢量相加

大小相等. 狭缝上各个部分发出的次波波矢相等，具有相等的振幅，相邻波矢间夹角为 $\Delta\varphi$，这 N 个矢量首尾相接，而且一个矢量相对于前一个矢量转过 $\Delta\varphi$ 的角度，构成了半径为 R 的圆上的一段折线，就是该圆的 N 段弦，每一段弦所张的圆心角为 $\Delta\varphi$，这 N 段弦所张的总圆心角为 $N\Delta\varphi=\Delta\Phi$. 所有这些波矢的合矢量为 $\boldsymbol{A}_\theta$，其振幅为记为 A_θ（图 4.5.6）.

如果对狭缝作无限细的划分，则 $N\to\infty$，上述折线渐变一段圆弧，圆弧的长度就是各段弦的长度之和，为 A_0，合矢量为弦 $\boldsymbol{A}_0$，圆心角为 $\Delta\Phi$，即

$$R=\frac{A_0}{\Delta\Phi} \tag{4.5.5}$$

而 $A_\theta=2R\sin(\Delta\Phi/2)$，即

$$A_\theta=A_0\frac{\sin\dfrac{\Delta\Phi}{2}}{\dfrac{\Delta\Phi}{2}} \tag{4.5.6}$$

将式(4.5.2)代入式(4.5.6)，即可得到

$$A_\theta=A_0\frac{\sin\dfrac{ka(\sin\theta-\sin\theta_0)}{2}}{\dfrac{ka(\sin\theta-\sin\theta_0)}{2}}=A_0\frac{\sin\dfrac{\pi a(\sin\theta-\sin\theta_0)}{\lambda}}{\dfrac{\pi a(\sin\theta-\sin\theta_0)}{\lambda}}$$

记 $u=\dfrac{\pi a(\sin\theta-\sin\theta_0)}{\lambda}$，则

$$A_\theta=A_0\frac{\sin u}{u} \tag{4.5.7}$$

其中，A_0 为沿着 $\theta=\theta_0$ 方向上所有次波合振动的振幅，也就是入射光在透镜的焦平面上几何像点处的振幅.

2. 用积分方法求解

P 点光来自同一方向，倾斜因子相同，满足近轴条件，倾斜因子为常数 1，即所有 $F(\theta_0,\theta)\equiv1$. 狭缝上各点的瞳函数有相等的振幅，记作 A_0，如果设狭缝中心处 O 点的相位为 φ_0，则

$$\widetilde{U}_0(Q)=\widetilde{U}_0(x)=A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta_0} \tag{4.5.8}$$

记 $K_0=KA_0$，则上式化为

$$\widetilde{U}(P)=K\iint_\Sigma\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma=K_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x \tag{4.5.9}$$

从 O 点到 P 点的光程记作 r_0，则 x 点到 P 点的光程为 $r=r_0+\Delta r$，由图 4.5.7 可见，$\Delta r=-x\sin\theta$. 于是衍射积分公式为

$$\widetilde{U}(P)=K_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx(\sin\theta+\sin\theta_0)}\,\mathrm{d}x$$

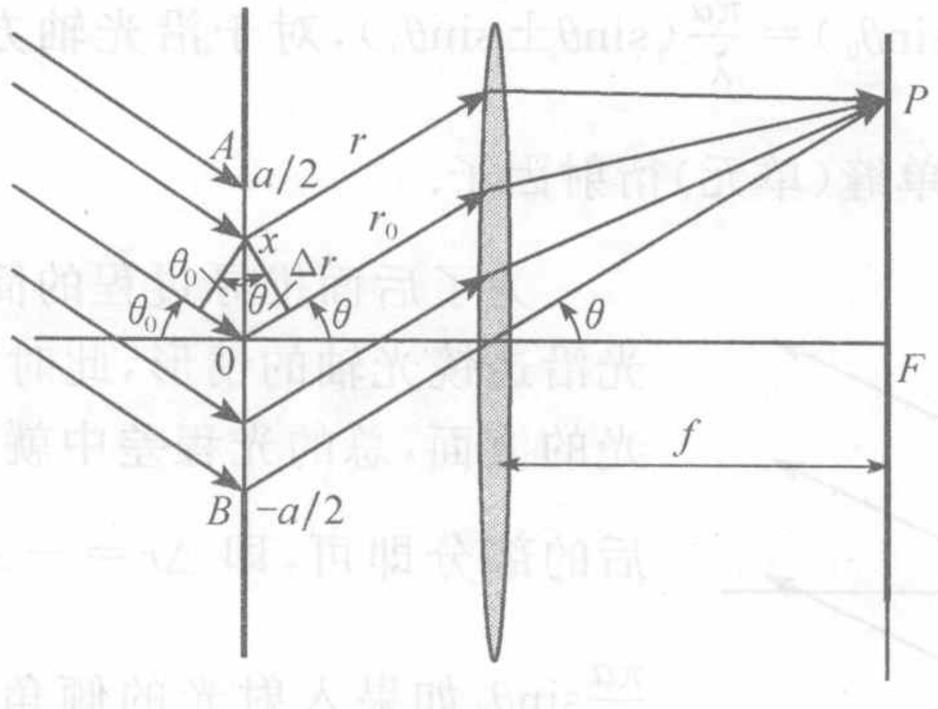


图 4.5.7　积分方法示意

近轴条件下，各次波中心所发出的球面波的振幅相等，即上述积分公式中表示球面波振幅的因子 $1/r$ 为常数，记作 $1/r_A$，积分公式进一步化为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(P)&=K_0\frac{1}{r_A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\frac{\mathrm{i}}{-\mathrm{i}k(\sin\theta+\sin\theta_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{a}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{a}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)}\right]\\&=K_0\frac{1}{r_A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\frac{-2\mathrm{i}\sin\left[\frac{ka}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)\right]}{-\mathrm{i}k(\sin\theta+\sin\theta_0)}\\&=KA_0a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_A}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}ka(\sin\theta+\sin\theta_0)\right]}{\frac{1}{2}ka(\sin\theta+\sin\theta_0)}=\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}\end{aligned}\tag{4.5.10}$$

与采用振幅矢量法得到的结果(4.5.7)一致.

关于 r_A 的讨论：

r_A 应该是点光源发出的球面波的光程，但是，由于经过透镜后，发散的球面波转化为会聚的球面波，所以 r_A 的取值在这里变得相当复杂. 实际是，由于透镜的孔径比狭缝大得多，所以从狭缝出射的光可以认为全部都被会聚到接收屏上，那么，r_A 就不必认为是球面波的光程. 也就是说在透镜和狭缝之间，不必考虑球面波的振幅随距离的衰减. 那么，只需要考虑透镜到接收屏的距离即可. 因而，$r_A\approx f$.

其中，$KA_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}$ 为狭缝上 Q 点附近单位宽度光源发出的沿光轴方向的次波在光轴上的 F 点(焦点)所引起的复振幅，$\widetilde{U}_0=KA_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}$，为通过整个狭缝的、沿光轴

方向传播时在光轴上的焦点所引起的振动，即复振幅. 则 $I_0=\widetilde{U}_0\widetilde{U}_0^*$ 为光轴上焦点处的光强.

强度分布

$$I(P)=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{4.5.11}$$

$u=\frac{1}{2}ka(\sin\theta\pm\sin\theta_0)=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta\pm\sin\theta_0)$，对于沿光轴方向入射的光，$\theta_0=0$，$u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$. $\widetilde{U}_0\ \frac{\sin u}{u}$为单缝(单元)衍射因子.

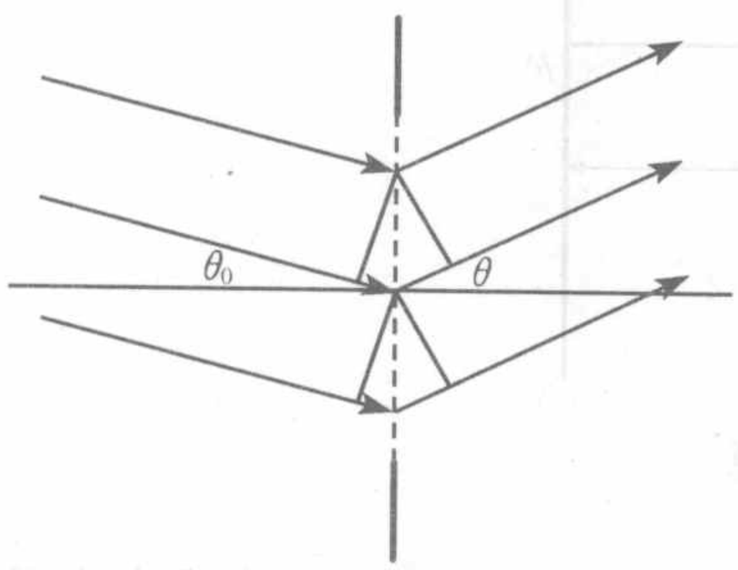


图 4.5.8　光程差的计算

为了后面推导过程的简洁，可以只讨论入射光沿透镜光轴的情形，此时积分的波前即是入射光的波面，总的光程差中就只要计算在衍射屏之后的部分即可，即 $\Delta r=-x\sin\theta$，$u=\frac{1}{2}ka\sin\theta=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$. 如果入射光的倾角为 θ_0，如图 4.5.8 所示，则在计入衍射屏之前的光程差后，有

$$\Delta r=\pm x\sin\theta_0-x\sin\theta=-x(\sin\theta_0\mp\sin\theta),$$

$$u=\frac{1}{2}ka(\sin\theta_0\pm\sin\theta)=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0\pm\sin\theta)$$

光在法线同侧，取＋；异侧，取－.

4.5.3　单缝衍射花样的特点

如图 4.5.9 所示，是一系列明暗交错的条纹，当缝宽越大时，衍射条纹越细锐. 由于单缝在 y 方向的线度较大，所以，光沿着 x 方向发生衍射，即衍射条纹只在 x 方向有一定的宽度，在 y 方向的光，没有衍射，由于透镜的会聚作用，是相当窄的.

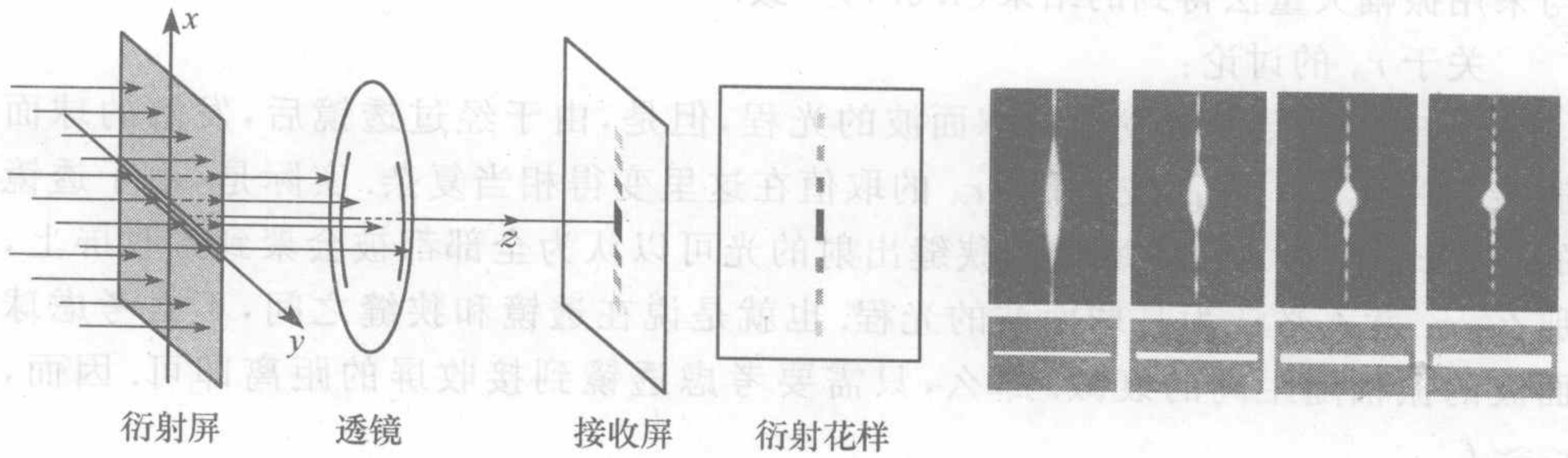


图 4.5.9　单缝衍射装置与衍射花样

衍射光强可以由式(4.5.11)得到，从图 4.5.10 可以看出式中的 θ 就是焦平面上的点对透镜中心的张角，单缝衍射的光强分布如图 4.5.11 所示.

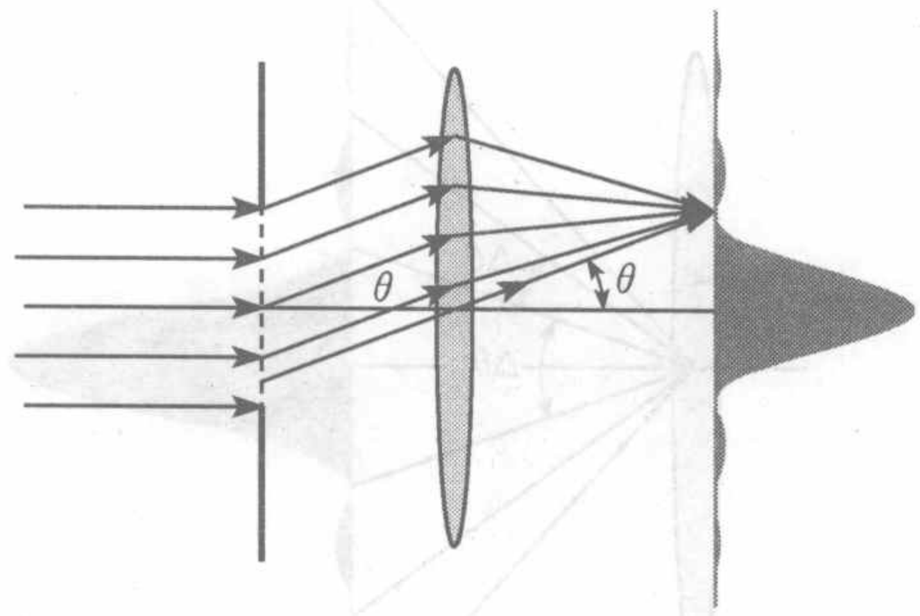


图 4.5.10　衍射的角是对透镜光心的张角

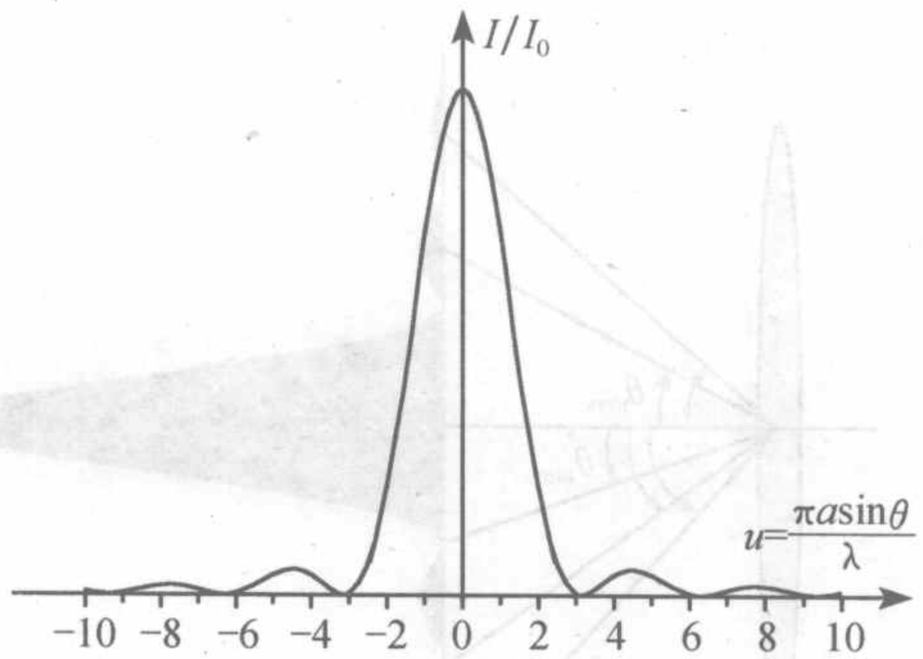


图 4.5.11　单缝衍射的光强分布曲线

1. 极值点

由于光强分布为 $I(P)=I_0\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$，其极大值点可以按 $\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)'=0$ 求得，结果为

$$\frac{u\cos u-\sin u}{u^2}=0,\quad \text{即}\quad \tan u=u$$

这是一个超越方程，如图 4.5.12 所示，其数值解为

$$\sin\theta=\pm 1.43\frac{\lambda}{b},\pm 2.46\frac{\lambda}{b},\pm 3.47\frac{\lambda}{b},\cdots$$

光强公式中分子为 0 的点为极小值点，极小值点满足

$$u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=j\pi,$$

同时 $j\neq 0$，即

$$\sin\theta=\pm 1\frac{\lambda}{b},\pm 2\frac{\lambda}{b},\pm\cdots,\pm j\frac{\lambda}{b},\pm(j+1)\frac{\lambda}{b},\cdots$$

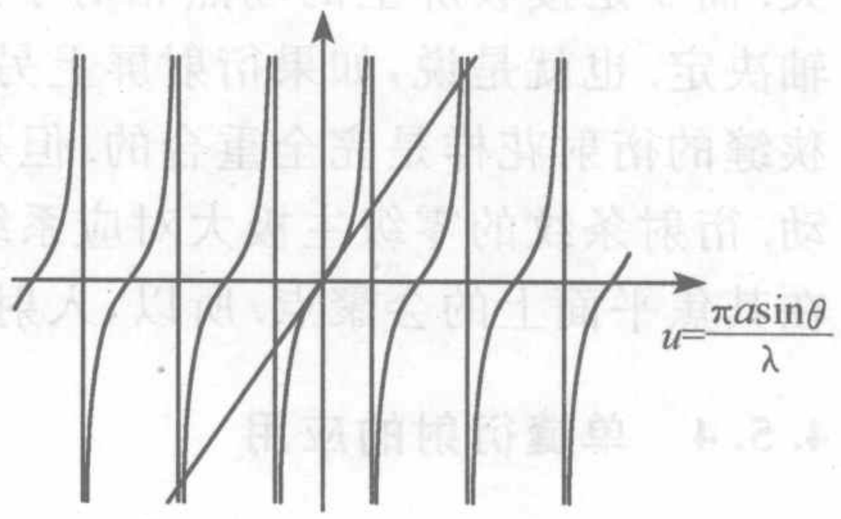


图 4.5.12　超越方程的数值解

2. 亮条纹角宽度

可以用相邻暗条纹之间的角距离来描述亮条纹的角宽度，在近轴条件下，由于 $\sin\theta\approx\theta$，因而有（图 4.5.13）

$$\theta\approx\pm 1\frac{\lambda}{b},\pm 2\frac{\lambda}{b},\pm\cdots,\pm j\frac{\lambda}{b},\pm(j+1)\frac{\lambda}{b},\cdots$$

所以零级主极大，即中央主极大（central maximum）的角宽度为

$$\Delta\theta_0=2\frac{\lambda}{b}$$

而其他高级次条纹的角宽度为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{b}$$

可见亮条纹的角宽度与狭缝的宽度成反比，所以上述关系称作衍射的反比关系（图 4.5.14）.

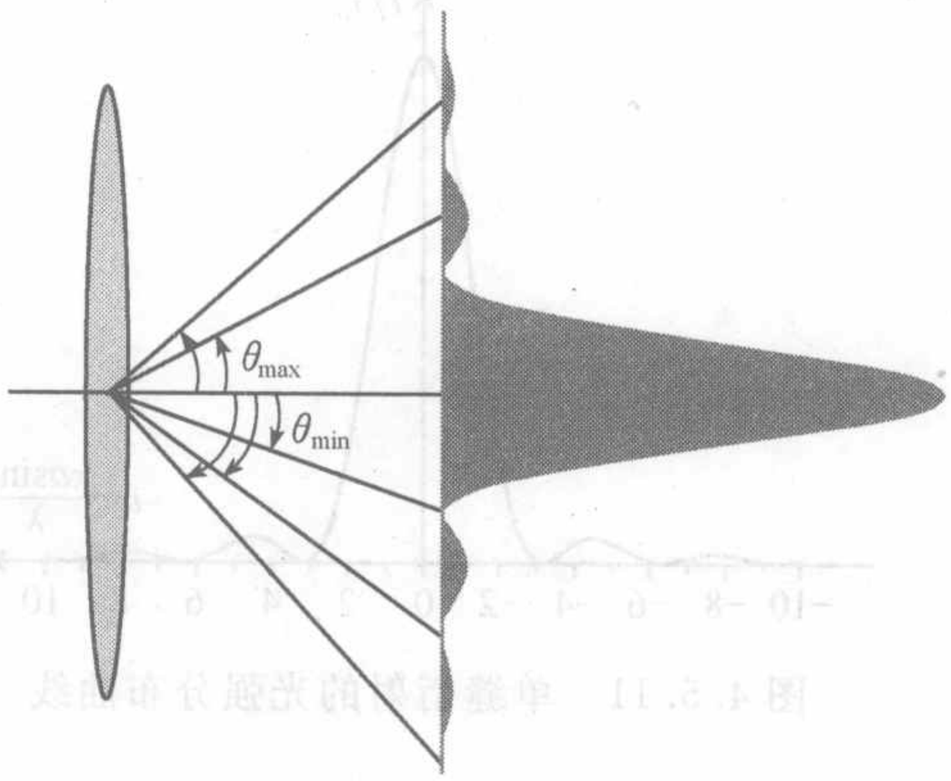


图 4.5.13 角位置

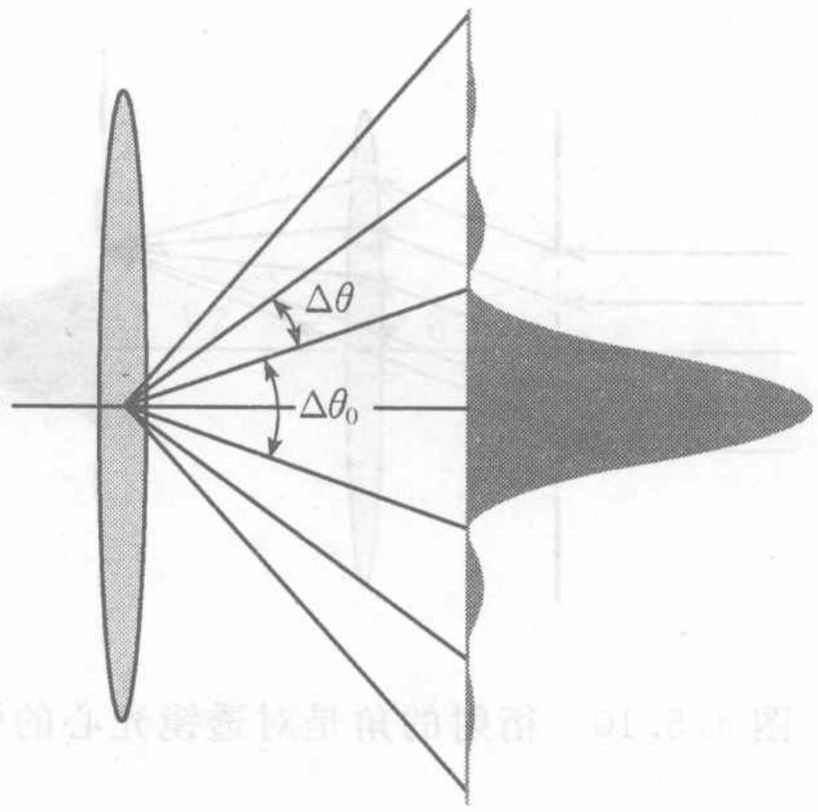


图 4.5.14 角宽度

3. 衍射屏与透镜的相对位置

衍射屏上下移动时，衍射花样不变，这是因为衍射强度分布只与衍射方向 θ 有关. 而 θ 是接收屏上的场点相对于透镜光心的张角，因而，条纹的位置由透镜的光轴决定. 也就是说，如果衍射屏上另外有一条狭缝，则这条狭缝的衍射花样与原来狭缝的衍射花样是完全重合的. 但是，当透镜移动时，衍射条纹随着透镜的光轴移动. 衍射条纹的零级主极大对应系统的几何像点，就是入射的平行光经过透镜之后在其焦平面上的会聚点. 所以，入射光方向改变，衍射花样整体平移.

4.5.4 单缝衍射的应用

两个互补屏，$\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma$，透光部分相加等于无衍射屏，如图 4.5.15 所示.

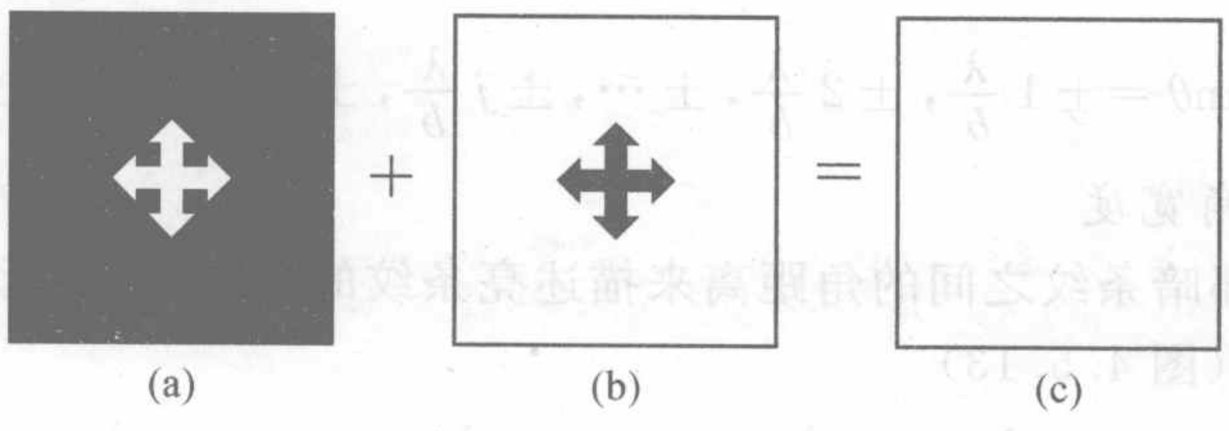


图 4.5.15 互补屏

两个互补的衍射屏，在相同的衍射装置中，积分公式为

$$\tilde{U}_a(P)=K\iint_{\Sigma_a}\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma \quad 和 \quad \tilde{U}_b(P)=K\iint_{\Sigma_b}\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

则

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=K\iint_{\Sigma_a}\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma+\iint_{\Sigma_b}\tilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

$$= K\iint_{\Sigma_a+\Sigma_b} \widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma = \widetilde{U}_0(P)$$

这就是没有衍射障碍物，自由传播的情况.

上述结果称作巴比涅(Jacques Babinet，1794～1872 法国)原理.

在没有衍射屏时，按几何光学原理成像，除像点之外，处处振动为零.

于是有

$$\widetilde{U}_a(P) = -\widetilde{U}_b(P),\quad I_a(P) = I_b(P)$$

即细丝与狭缝的衍射花样，除零级中央主极大外，处处相同. 这就是激光测径仪的原理(图 4.5.16).

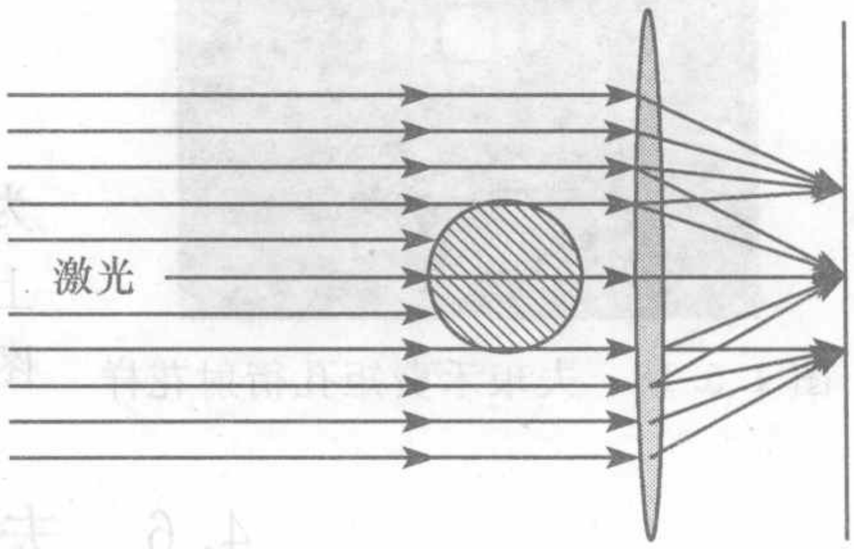


图 4.5.16　激光测径仪

4.5.5　夫琅禾费矩孔衍射

如图 4.5.17 所示，矩孔 $a\times b$，其上任一点 $Q(x,y)$ 发出沿 $\boldsymbol{k}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 方向的次波，其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 为波矢与 yOz 平面，xOz 平面和 xOy 平面的夹角，即 $\alpha+\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$\beta+\theta_2=\frac{\pi}{2}$，其中，$\alpha,\beta,\gamma$ 为波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向余角. 则矩孔发出的次波在 P 点的复振幅为

$$\widetilde{U}(P) = K\iint\widetilde{U}_0(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}dxdy$$

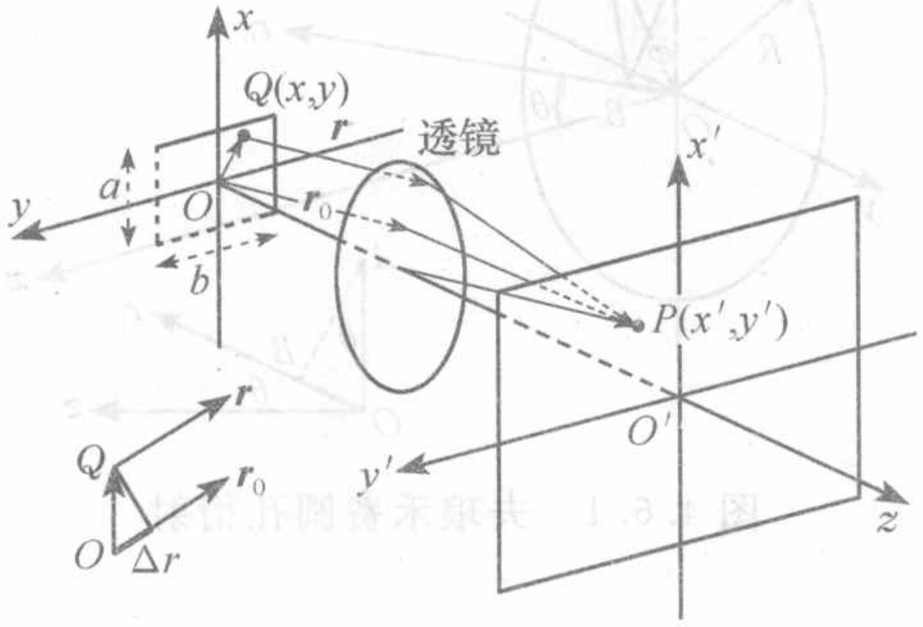


图 4.5.17　夫琅禾费矩孔衍射

Q 点到 P 点的光程为 r. 从中心处 O 点引一条与 $\boldsymbol{k}$ 同方向直线，其到 P 点的光程为 r_0，r 与 r_0 的光程差即为矢量 OQ 在 $\boldsymbol{r}_0$ 上的投影. 即

$$\Delta r = -OQ\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0} = -(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y)\cdot(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\boldsymbol{e}_y + \sin\theta_3\boldsymbol{e}_z)$$

$$= -(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)$$

则 $r = r_0 + \Delta r = r_0 - (x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)$. 上述积分中，同方向的衍射光，倾斜因子相同. 在近轴条件下，积分化为

$$\widetilde{U}(P) = KF(\theta_0,\theta)\widetilde{U}_0(0,0)\iint_{\Sigma}\frac{e^{ikr_0-ik(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)}}{r}dxdy$$

$$= KF\widetilde{U}_0(0,0)\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-ikx\sin\theta_1}dx\int_{-b/2}^{b/2}e^{-iky\sin\theta_2}dy$$

$$= KF\widetilde{U}_0(0,0)ab\frac{e^{ikr_0}}{f}\frac{\sin u_1}{u_1}\frac{\sin u_2}{u_2}$$

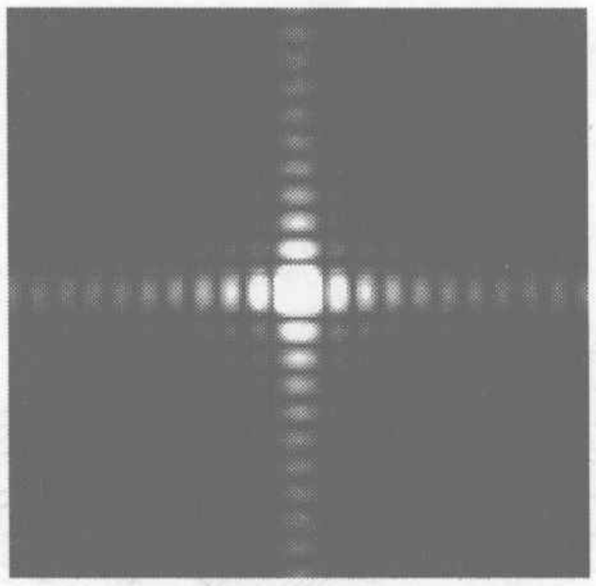


图 4.5.18 夫琅禾费矩孔衍射花样

其中，$u_1=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1$，$u_2=\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2$，

强度分布 $$I(P)=I_0\left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2$$

$$I_0=\left|KF\widetilde{U}_0(0,0)ab\,\frac{e^{ikr_0}}{f}\right|^2$$

为矩孔发出的光波沿(0,0)方向达到焦点，即轴上 F 点的光强. 具有二维衍射强度分布，如图 4.5.18 所示.

4.6 夫琅禾费圆孔衍射

4.6.1 衍射强度

如图 4.6.1 所示，Q 点发出沿任意方向光线 $\boldsymbol{r}$，与光轴间的夹角为 θ. 过中心 O 点作与 $\boldsymbol{r}$ 同方向光线 $\boldsymbol{r}_0$，取坐标系如下：$\boldsymbol{r}_0$ 和轴线所在平面为 xOz 平面，z 为光轴. 过 Q 作与 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}_0$ 垂直的平面，与 $\boldsymbol{r}_0$ 和 x 轴分别交于 B、A 点. 则 AB 与 $\boldsymbol{r}_0$ 垂直. $\boldsymbol{r}_0$ 与 yOz 平面的夹角为 θ，A，Q 两点发出的次波是等光程的. 则任一点 Q 点发出的次波与中心点 O 发出的次波间的光程差为 $\overline{OA}$ 在 $\boldsymbol{r}_0$ 上的投影，即

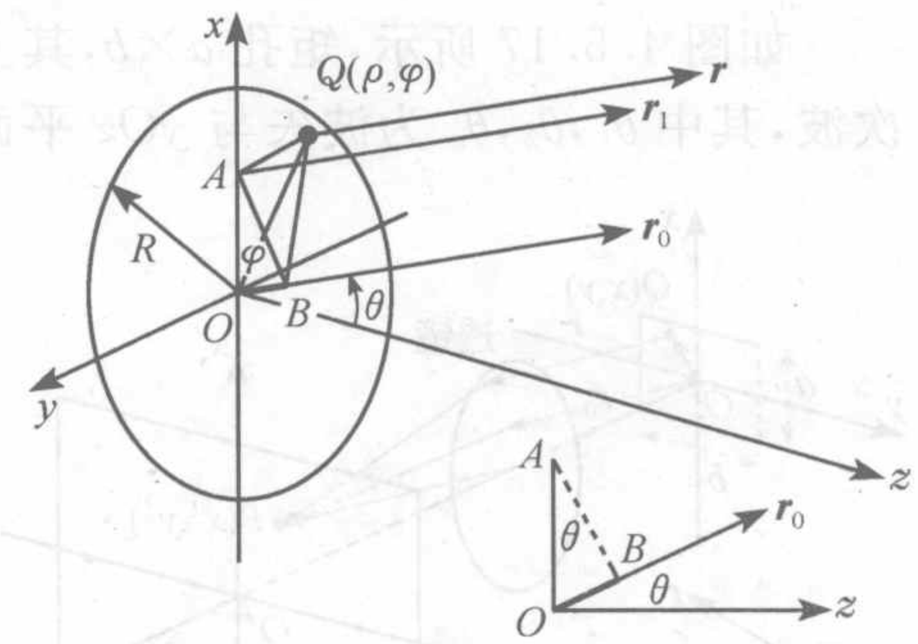


图 4.6.1 夫琅禾费圆孔衍射

$$\Delta r=-\overline{AO}\sin\theta=-\overline{OQ}\cos\varphi\sin\theta$$
$$=-\rho\cos\varphi\sin\theta$$

在近轴条件下，焦平面上 P 点的复振幅为

$$\widetilde{U}(P)=K\iint_\Sigma\widetilde{U}_0(\rho,\varphi)F(\theta_0,\theta)\,\frac{e^{ikr_0-ik\rho\cos\varphi\sin\theta}}{r}d\Sigma$$

$$=K\widetilde{U}_0(0,0)\,\frac{e^{ikr_0}}{f}\iint_\Sigma e^{-ik\rho\cos\varphi\sin\theta}\rho\,d\varphi d\rho \quad (\text{取实部})$$

$$=K\widetilde{U}_0(0,0)\,\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_0^R\rho d\rho\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho\cos\varphi\sin\theta\right)d\varphi$$

令

$$m=\frac{2\pi R\sin\theta}{\lambda}=kR\sin\theta$$

上式化为

$$\widetilde{U}(P)=K\widetilde{U}_0(0,0)\,\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_0^R\rho d\rho\int_0^{2\pi}\cos(m\rho\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= K\tilde{U}_0(0,0)\pi R^2 \frac{e^{ikr_0}}{f} \times \frac{2J_1(m)}{m}$$

$J_1(m)$为一阶贝塞尔函数.

$$\frac{2J_1(m)}{m} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}!}{(k'+1)!k'!}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k'}$$

$$= \frac{m}{2}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^3}{2!}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^4}{3!}\right]^2 + \cdots\right\}$$

光强

$$I(P) = I_0\left[\frac{2J_1(m)}{m}\right]^2 \tag{4.6.1}$$

衍射花样和强度分布如图 4.6.2、图 4.6.3 所示.

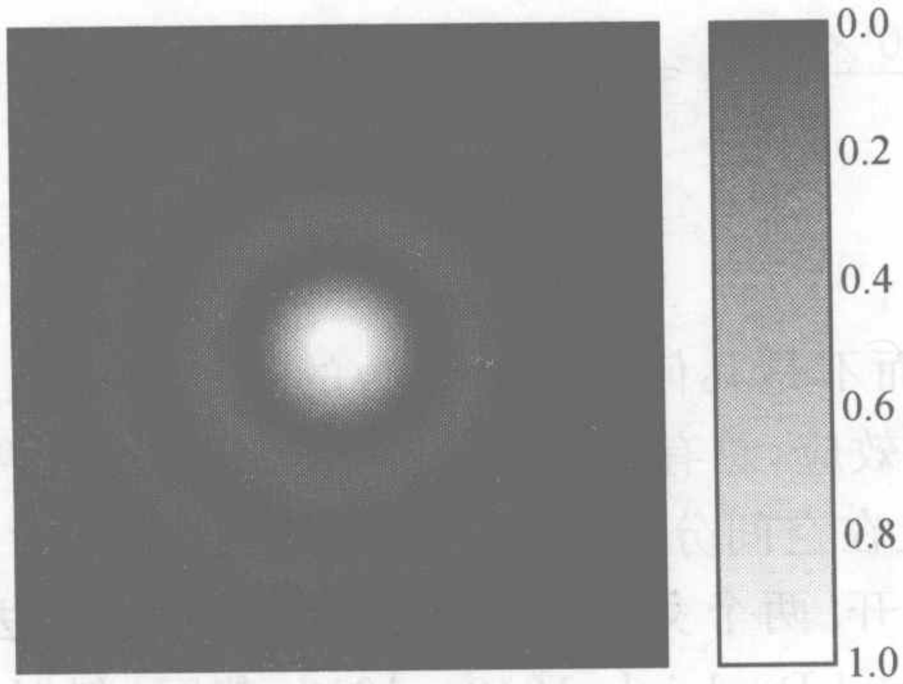


图 4.6.2　夫琅禾费圆孔衍射花样(艾里斑)

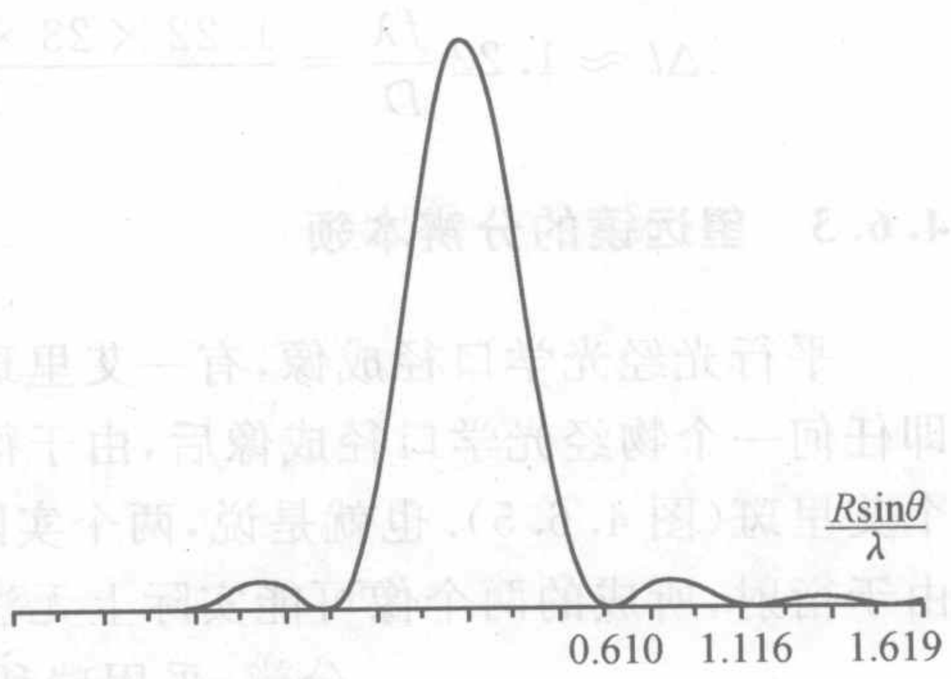


图 4.6.3　夫琅禾费圆孔衍射强度分布

4.6.2　衍射花样的特点

(1) 同心圆环,明暗交错,不等距.

(2) 中央主极大(零级斑)为一圆形亮斑,其能量约占衍射光总能量的 84%,称作艾里斑(Airy disk,George Biddell Airy,1801～1892,英国). 研究表明,艾里斑的半角宽度(图 4.6.4)为

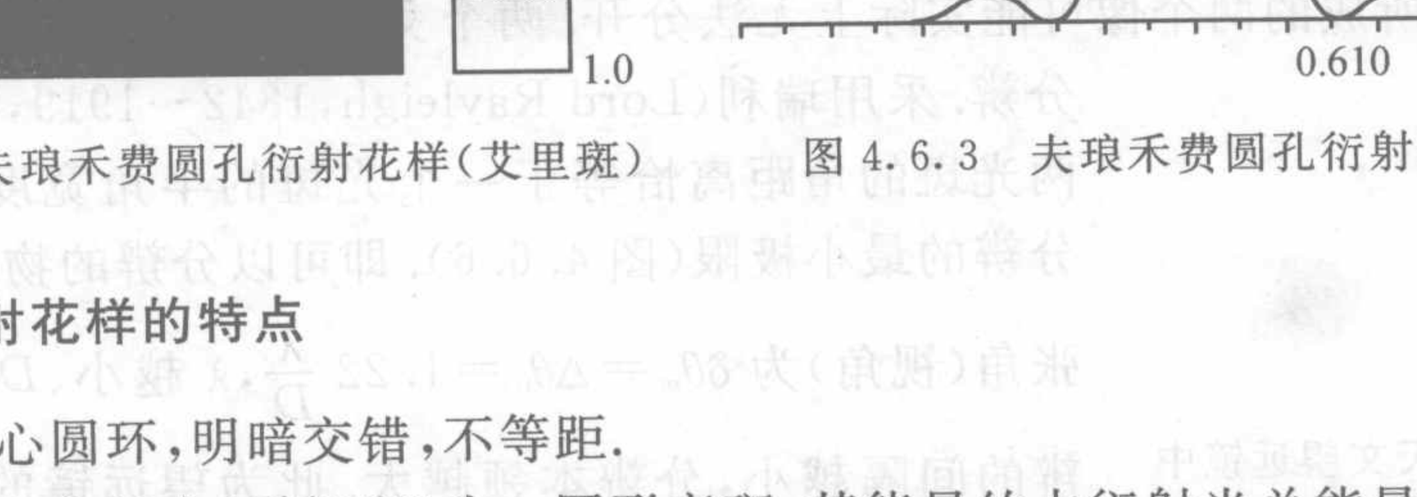


图 4.6.4　夫琅禾费圆孔衍射花样的中央主极大

$$\Delta\theta_0 = 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{4.6.2}$$

其中，D 为衍射屏上圆孔的直径. 当平行光直接通过透镜时，也可以把透镜的通光孔径作为衍射屏的孔径，则艾里斑半径为

$$\Delta l = f\tan\theta_0 \approx 1.22\frac{f\lambda}{D} \tag{4.6.3}$$

这就是平行光通过透镜后的衍射斑的大小.

例 4.6.1 设观察太阳时，人眼的瞳孔直径 1mm，焦距 23mm，计算视网膜上所形成的太阳光斑的大小.

解 由于地球到太阳的距离足够远，而瞳孔的孔径又足够小，所以，可以认为射入眼镜的太阳光都是平行光. 这时，可以将眼镜会聚太阳光的过程看成是夫琅禾费圆孔衍射. 因而

$$\Delta l \approx 1.22\frac{f\lambda}{D} = \frac{1.22\times 23\times 500\times 10^{-6}}{1} = 1.4\times 10^{-2}(\text{mm})$$

4.6.3 望远镜的分辨本领

平行光经光学口径成像，有一艾里斑，而不是几何光学所认为的一个几何点. 即任何一个物经光学口径成像后，由于衍射效应，总有一个艾里斑. 两束光，则有两个艾里斑(图 4.6.5). 也就是说，两个实际上在空间分开的物，经光学系统成像后，由于衍射，所成的两个像可能实际上无法分开. 两个艾里斑如果靠得很近，则无法分辨. 采用瑞利(Lord Rayleigh，1842～1919，英国)判据：两光斑的角距离恰等于一个光斑的半角宽度时，为可以分辨的最小极限(图 4.6.6). 即可以分辨的物点间的最小张角(视角)为 $\delta\theta_m = \Delta\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$，$\lambda$ 越小、D 越大，可分辨的间隔越小，分辨本领越大. 此为望远镜的分辨本领，与放大本领不同.

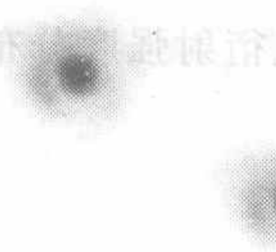


图 4.6.5 天文望远镜中双星的艾里斑

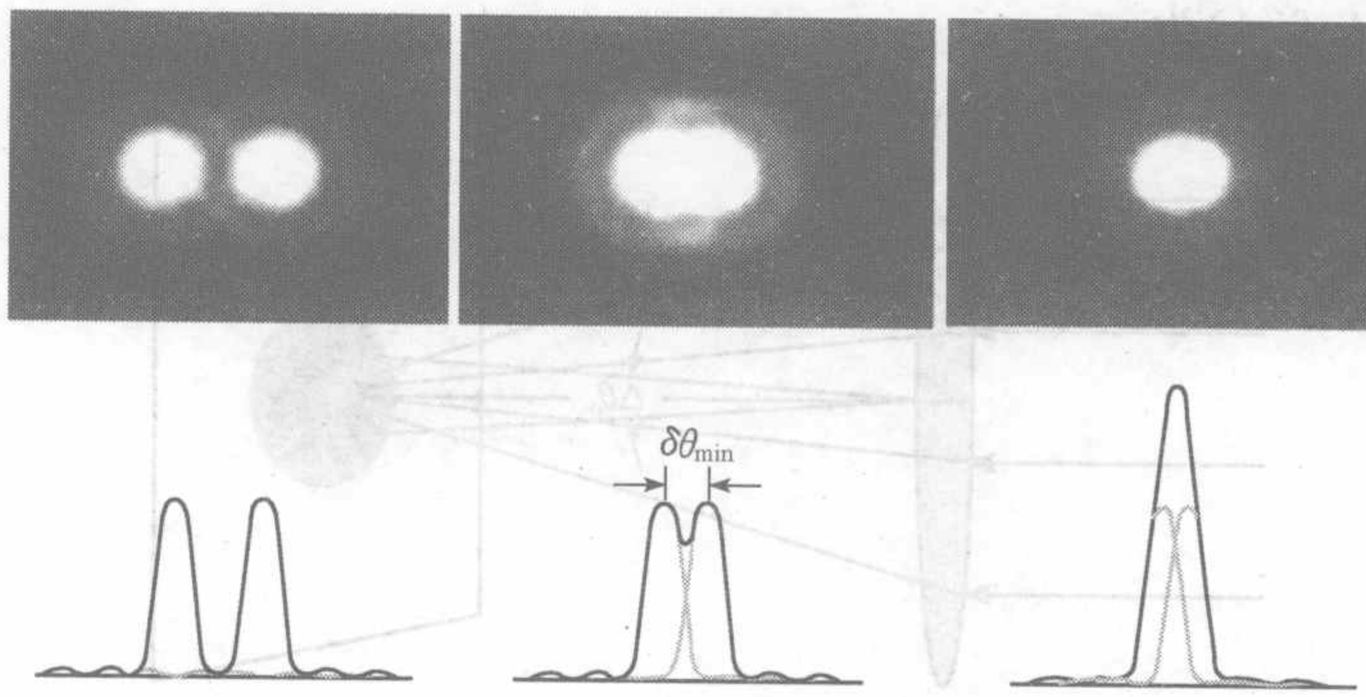


图 4.6.6 瑞利判据

4.6.4　几何光学是衍射光学的大尺度近似

对于单缝衍射的中央主极大，有 $\Delta\theta_0=\lambda/b$；对于圆孔衍射的中央主极大，亦有 $\Delta\theta_0=1.22\lambda/D$，其中 b 和 D 是衍射孔径的几何尺度，即中央衍射光斑的半角宽度都与衍射孔径的尺度成反比. 如果衍射孔径比光的波长大得多，则 $\Delta\theta_0\approx0$，说明此时中央衍射斑将会聚为一个几何点(图 4.6.7)，而其他高级次的衍射角宽度也等于 0，即没有衍射. 这就相当于几何光学的情况. 可见，只要衍射孔径的尺度比光的波长大得多，衍射的效果将不显著，几何光学的规律将起主导作用，即如果没有凸透镜的话，光将沿直线传播.

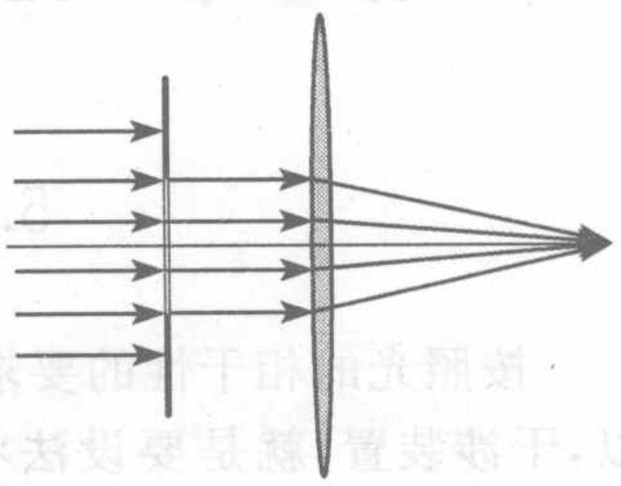


图 4.6.7　平行光向焦点会聚

如果衍射孔径是一个反射面(图 4.6.8)，入射光的方向为 θ_0，对于衍射屏上距离为 Δx 的两个次波中心，沿 θ 方向的衍射光，其光程差为 $\Delta x(\sin\theta\pm\sin\theta_0)$，则相应地有，$u=\dfrac{1}{2}ka(\sin\theta_0\pm\sin\theta)=\dfrac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0\pm\sin\theta)$，衍射的中央主极大的方向为 $\theta=\theta_0$. 在满足 $a\gg\lambda$ 时，反射定律成立. 如果衍射孔径在折射率不同的透射介质的分界面处(图 4.6.9)，则衍射屏上距离为 Δx 的两个次波中心，沿 θ 方向的衍射光，其光程差为 $\Delta x(n_2\sin\theta\pm n_2\sin\theta_0)$，则相应地有，$u=\dfrac{1}{2}ka(n_2\sin\theta\pm n_1\sin\theta_0)=\dfrac{\pi a}{\lambda}(n_2\sin\theta\pm n_1\sin\theta_0)$，衍射的中央主极大的方向为 $n_2\sin\theta=n_1\sin\theta_0$，同样，几何光学的折射定律成立.

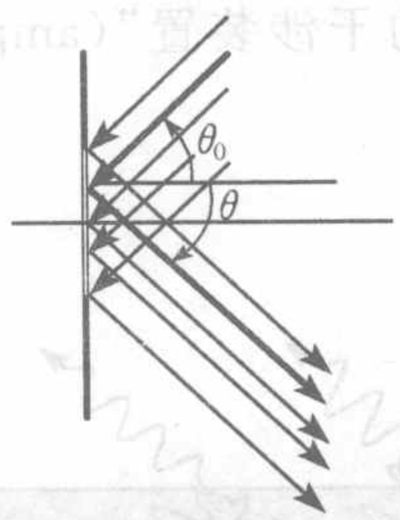


图 4.6.8　反射

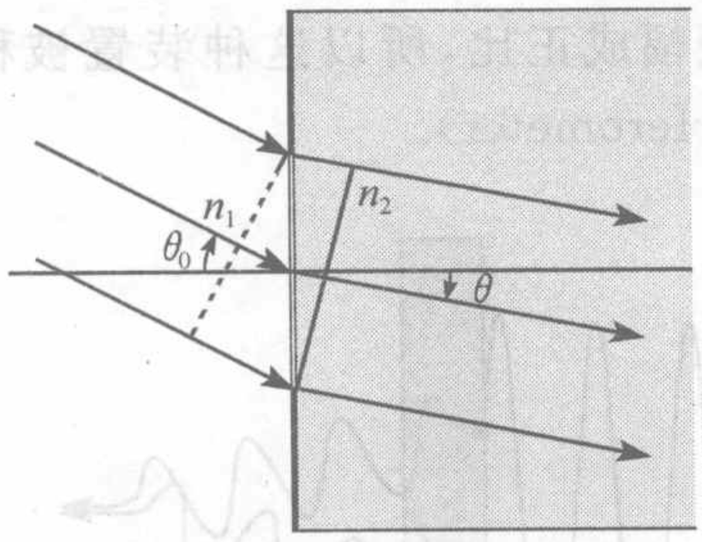


图 4.6.9　折射

综上所述，当 $a\gg\lambda$ 时，衍射光学可以相当准确地用几何光学替代.

第5章　光的干涉装置与光波场的相干性

5.1　光的干涉装置概述

按照光的相干性的要求及光源的特点，一列光只有和它自身才是相干的. 所以，干涉装置，就是要设法将一列波分解为相干的几个部分，然后才能进行相干叠加.

将光波进行分解的方法有许多种，第一种，就是在光波场中的一个波列上取两个或几个点，如图 5.1.1 所示，将这些点作为新的光源，这些新光源可以取在一列波(平面波、球面波等)的波面上，即等相位面上，但一般情况下，不容易也不必要这样做. 由于光场中的任意一个面都被称作波前，我们可以将这些点所在的面(可能是平面，也可能是曲面)，看作一个波前，只要这个波前处在同一列波上即可. 那么，这种将波前分解、然后获得相干光的装置就被称作“分波前的干涉装置(wave-front-splitting interferometer)”. 杨氏双孔或双缝干涉就是最典型的分波前的干涉装置.

另一种是将整个波列分解，如利用光波在介质分界面的反射和折射，将入射光分为入射和折射(透射)两部分，这两部分往往不能相遇，因而，需要经过多次的反射和透射，如图 5.1.2 所示. 这种分解方式是将光的能量分为几个部分，而光的能量与其振幅成正比，所以这种装置被称作“分振幅的干涉装置”(amplitude-splitting interferometer).

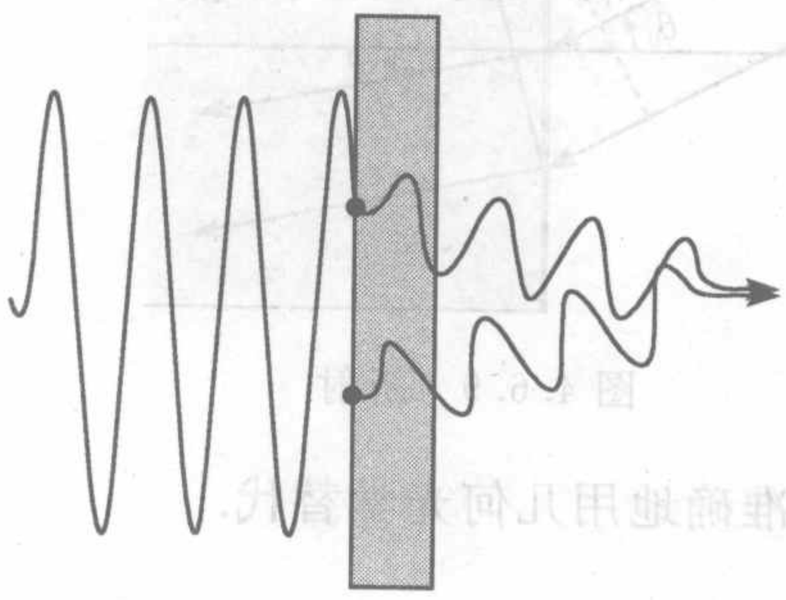


图 5.1.1　分波前的干涉装置

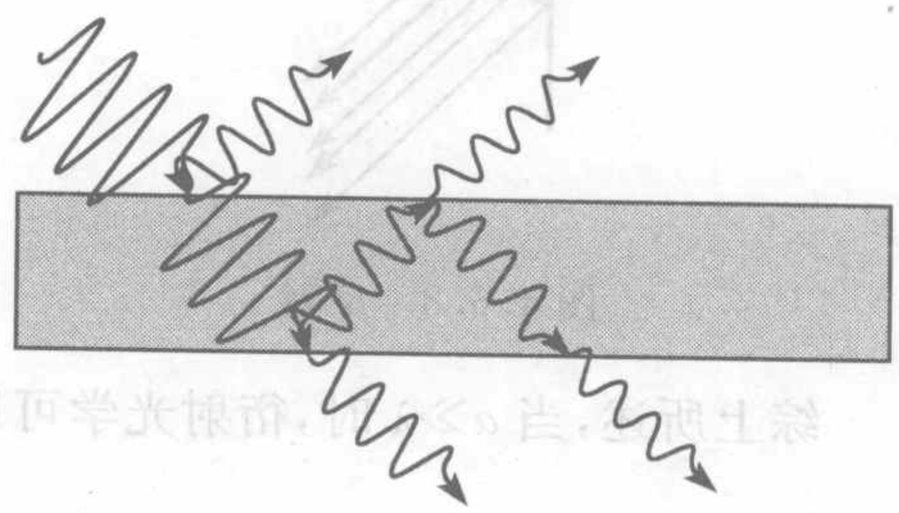


图 5.1.2　分振幅的干涉装置

两种分光的方法相比，不难看出，由于杨氏双孔或双缝干涉分波前的方法只利用了入射光的一小部分，其余的能量都被遮挡掉了，所以效率是比较低的，虽然在物理上有较好的意义，但多数情况并不适用，所以，实际应用的分波前干涉装置都

是在杨氏装置的基础上改进的. 而分振幅的装置，由于有相当大的一部分光的能量用以产生干涉，因而可以充分利用入射光的能量，所以在实际中有极广泛的应用.

5.2　分波前的干涉装置

5.2.1　菲涅耳双面镜

如图 5.2.1 所示，两个反射镜 M_1，M_2 之间有较小的夹角 ε，光源 S 位于两反射镜的上方. 在光源与接收装置（如接收屏）间有一个不透光的挡板，使得光不能直接射到接收屏幕上，而只有经过两镜反射的光才能到达屏幕. 对于屏幕而言，经反射镜 M_1，M_2 射过来的光，就相当于分别是从 S 的像 S_1、S_2 射过来的，而 S_1、S_2 是同一个光源的像，因而是相干的. 这两列反射光在屏幕上的交叠区域，进行相干叠加，产生干涉条纹.

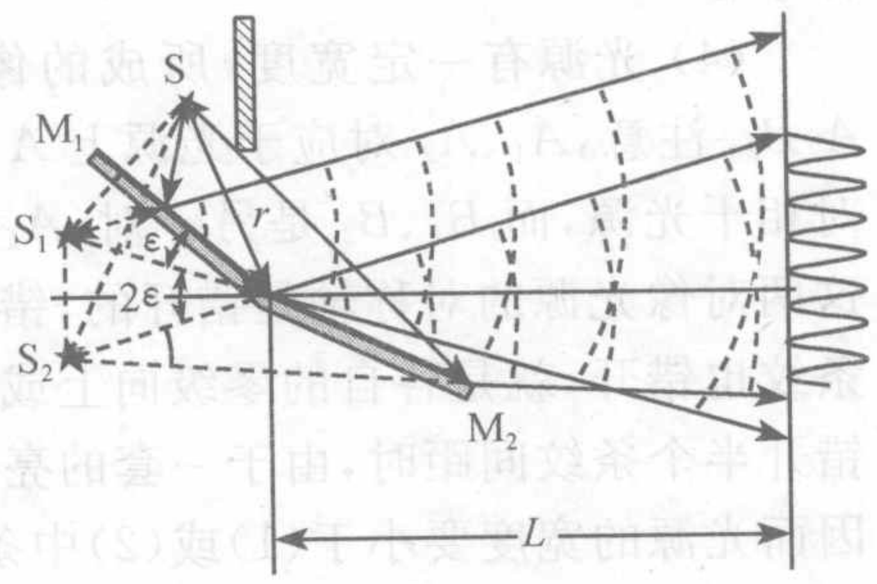


图 5.2.1　菲涅耳双面镜

因为反射镜的大小总是有限的，所以反射光只能照射屏幕上有限大小的区域，而两列光的交叠区域还要小，因而只能在屏幕上一个较小的区域内产生干涉.

经过简单的几何推算，可以得到，两相光源 S_1、S_2 对反射镜交线的张角等于反射镜之间夹角的两倍，即 2ε. 如果两镜交线到光源 S 的距离为 r，到屏幕的距离为 L，则像光源到屏幕的距离为 $L+r\cos\varepsilon$，而两像光源间的距离为 $2r\sin\varepsilon$，将该装置与杨氏双缝干涉比较，在满足近轴条件时，相当于双缝间距 $d=2r\varepsilon$，双缝到接收屏的距离，$D=L+r$，所以条纹间距为

$$\Delta x=\frac{L+r}{2r\varepsilon}\lambda \tag{5.2.1}$$

例 5.2.1　如图 5.2.2 所示，设菲涅耳双面镜的夹角为 $20'$，缝光源距两镜交线 10cm，接受屏幕与光源的两个像点的连线平行，且与两镜连线间的距离为 210cm，光波长为 600.0nm，问：

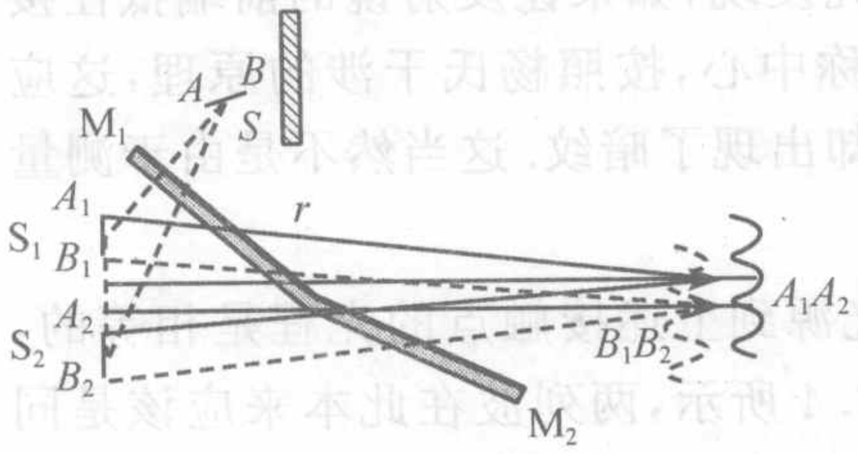


图 5.2.2　题 5.2.1

（1）干涉条纹的间距为多少？

（2）如果光源到两镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有何变化？

（3）如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有何变化？

（4）如果要在屏幕上观察到有一定反衬度的干涉条纹，所允许的缝光源的最大宽度是多少？

解　（1）利用式(5.2.1)，可得

$$\Delta x = \frac{L+r}{2r\varepsilon}\lambda = \frac{210+10}{2\cdot 10\cdot \frac{20}{60}\cdot \frac{\pi}{180}}\cdot 600.0\text{nm} = 1.13\text{mm}$$

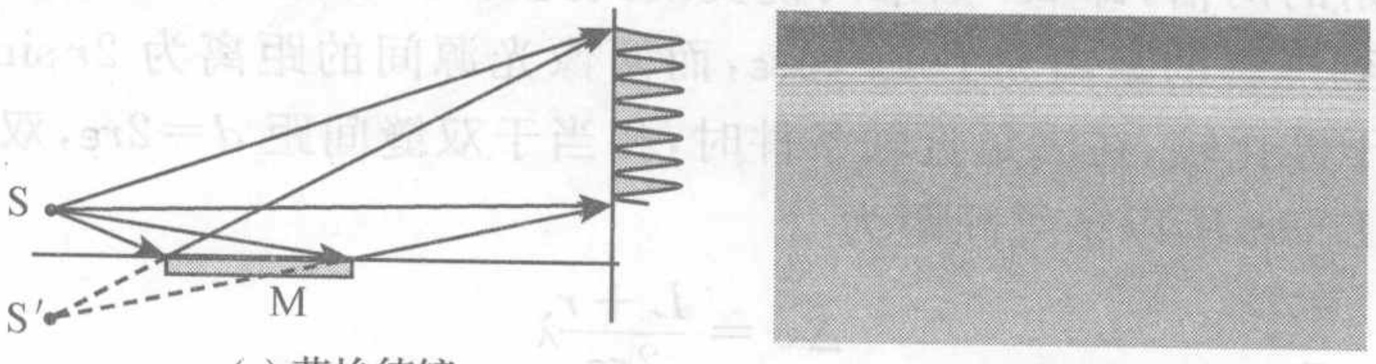
(2) $$\Delta x' = \frac{L+r'}{2r'\varepsilon}\lambda = \frac{210+20}{2\cdot 20\cdot \frac{20}{60}\cdot \frac{\pi}{180}}\cdot 600.0\text{nm} = 0.59\text{mm}$$

(3) 光源做横向移动时，由于距离 r 保持不变，所以干涉条纹的间距没有变化. 但是，由于光源的移动引起了两个像光源的整体平移，所以屏上的条纹也会整体平移.

(4) 光源有一定宽度，所成的像亦有一定宽度，即光源 AB 的像为 A_1B_1 和 A_2B_2. 注意，A_1、A_2 对应于光源上 A；而 B_1、B_2 对应于光源上 B，所以 A_1、A_2 是一对相干光源，而 B_1、B_2 是另一对，A_1、A_2 和 B_1、B_2 之间是不相干的. 由图题可见，这两对像光源的对称轴是错开的，错开的间距等于缝光源的宽度，因而各自的干涉条纹也错开，就是各自的零级向上或向下移动了半个缝光源的宽度. 当两套干涉纹错开半个条纹间距时，由于一套的亮纹恰与另一套的暗纹重叠，则条纹不可分辨. 因而光源的宽度要小于(1)或(2)中条纹间距的一半.

5.2.2 劳埃德镜

在平面反射镜的上方有一光源，则光源发出的光，一部分直接到达接收屏，另一部分经镜面反射后到达接收屏. 在它们重叠的区域，产生干涉. 光源 S 与它的几何像 S′，等效于杨氏干涉装置中的双孔或双缝，如图 5.2.3 所示.



(a) 劳埃德镜　　(b) 劳埃德镜花样

图 5.2.3　劳埃德镜及其花样

与菲涅耳双面镜相比，干涉光中，有一列没有经过镜面反射，而是直接到达了屏幕. 这样一来，就产生了不同的结果. 实验研究发现，如果让反射镜的前端抵住接收屏，则镜与幕的接触点应该是整个装置的对称中心，按照杨氏干涉的原理，这应该是 0 级亮条纹的位置. 然而，实验表明，这里却出现了暗纹. 这当然不是由于测量上的误差而产生的，而是有物理上的原因.

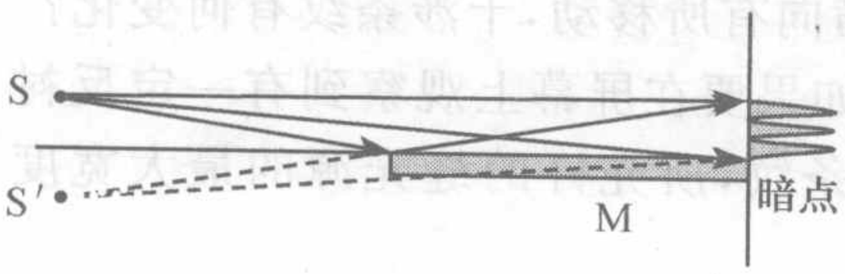


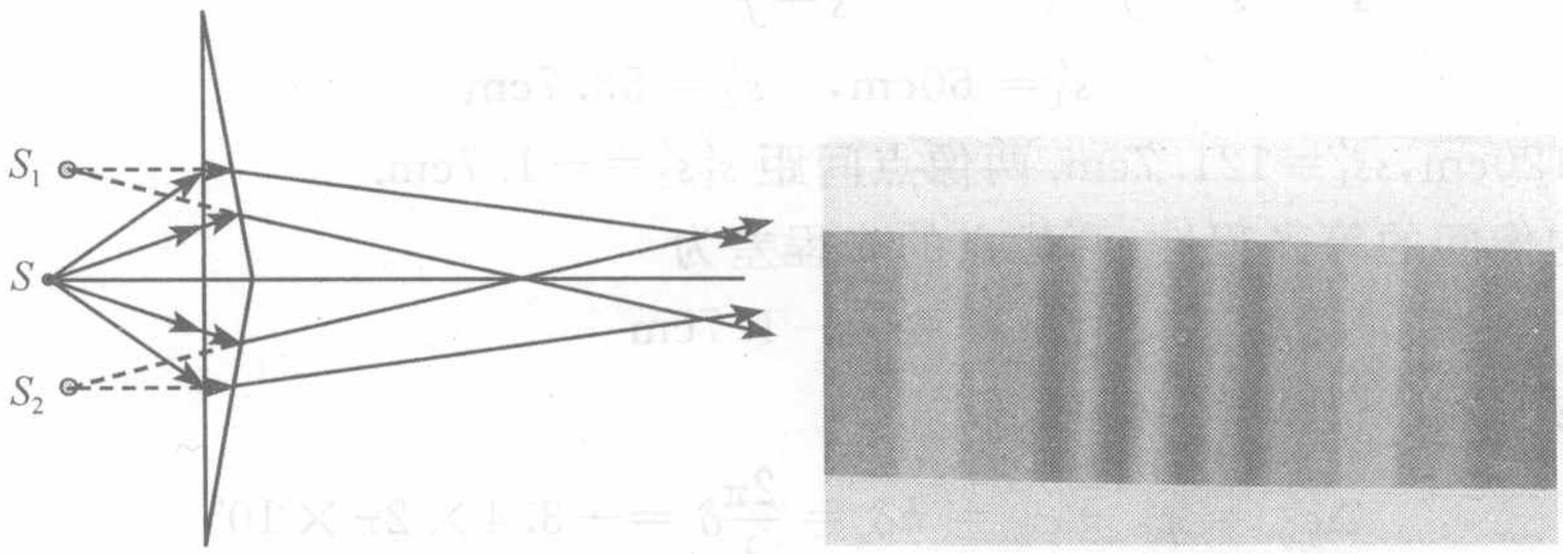
图 5.2.4　劳埃德镜干涉的半波损失

两光源到上述接触点的光程是相等的，如图 5.2.4 所示，两列波在此本来应该是同相的，而事实上出现了暗纹，说明两列波的相位相反，相当于实际的光程相差半个波长. 而这半个波长的光程差只能是由于其中

的一列波反射而产生的，因而称其为“半波损失”(half wave loss)，意思是其中一个波列由于反射而损失了(当然也可以说是额外增加了)半个波长的光程. 半波损失的原因在之后的一节中将给予说明.

5.2.3　菲涅耳双棱镜

将两个完全相同的三棱镜的底面相对，黏合起来，就组成了一个菲涅耳双棱镜. 从光源 S 发出的光经棱镜折射后，就相当于是从两个虚像点 S_1、S_2 射过来的，在重叠区域产生干涉，如图 5.2.5 所示，这种装置被称作菲涅耳双棱镜. 实际上，并不需要先做好两块一模一样的棱镜再将其黏合，而是用一块薄的等腰三棱镜即可.



(a) 菲涅耳双棱镜　　(b) 菲涅耳双棱镜花样

图 5.2.5　菲涅耳棱镜及其花样

在图 5.2.5 所示的情形，虚光源相当于 S 在竖直方向上下移动了 $(n-1)\alpha l$，l 为 S 到棱镜的距离.

如果是平行光入射，设棱镜的顶角为 α，玻璃的折射率为 n，如图 5.2.6 所示，由于 $\sin i = n\sin\alpha$，而 α 是小角，$\sin i = n\sin\alpha \approx n\alpha$，故折射光的倾角为

$$\theta = i - \alpha = (n-1)\alpha \qquad (5.2.2)$$

等效于平行光的干涉.

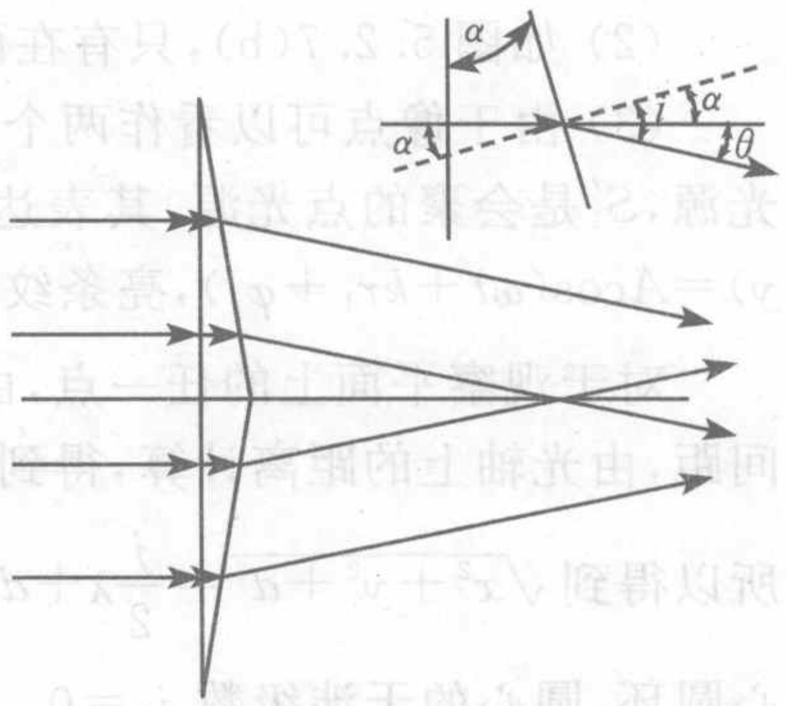


图 5.2.6　平行光射向菲涅耳双棱镜

例 5.2.2　如图 5.2.7(a)所示，一凸透镜的焦距 $f=30\text{cm}$，将其剖开为两部分，记为 L_1 和 L_2，再沿光轴将两半错开 8.0cm，光轴上有一光源，与 L_1 间距 60cm，波长为 500nm. S_1'、S_2' 分别为 S 经 L_1、L_2 的像点. 设光波在 S_1' 的初相位为 $\varphi_1=0$.

(1) 求出光波在像点 S_2' 处的初相位 φ_2；

(2) 如果在 $S_1'S_2'$ 的中点处取一垂直于光轴的平面，在图上标出干涉条纹出现的区域；

(3) 说明在此平面上干涉条纹的形状，并计算相邻亮条纹的间距.

分析　点光源经上述透镜后成两个像，可以看成是两个相干的点光源. 于是在这两个点光源所发出的球面波的交叠区域，就可产生干涉.

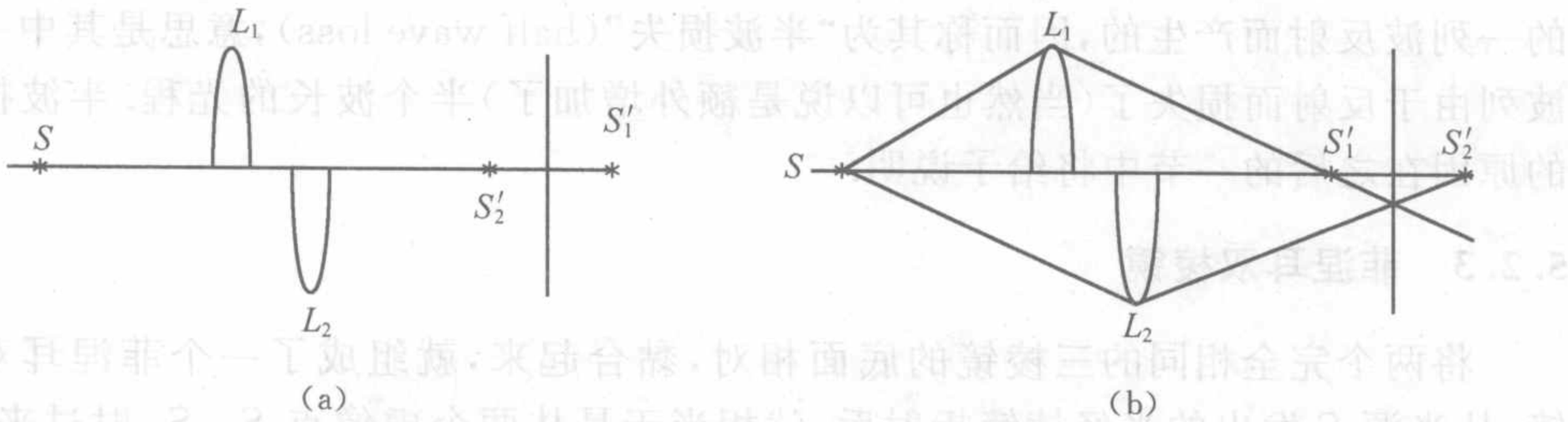


图 5.2.7 例 5.2.2 图

解 (1) 由$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$,得到$s'=\frac{sf}{s-f}$,算得像距

$$s_1'=60\text{cm},\quad s_2'=53.7\text{cm}$$

即$ss_1'=120\text{cm}$,$ss_1'=121.7\text{cm}$. 两像点间距$s_1's_2'=-1.7\text{cm}$.

由物像间的等光程性,两像点的光程差为

$$\delta=-1.7\text{cm}$$

相位差为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2=k\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\delta=-3.4\times2\pi\times10^6$$

说明S_2'的相位比S_1'超前,如果用余弦函数表示,其S_2'的初相位为

$$\varphi_2=-3.4\times2\pi\times10^6$$

(2) 如图 5.2.7(b),只有在两列波的交叠区域才能出现干涉.

(3) 由于像点可以看作两个相干的点光源,但是在观察平面处,S_2'是发散的点光源,S_1'是会聚的点光源,其表达式分别为$U_2(x,y)=A\cos(\omega t-kr_2+\varphi_2)$和$U_1(x,y)=A\cos(\omega t+kr_1+\varphi_1)$,亮条纹满足的条件为$\Delta\varphi=k(r_1+r_2)+(\varphi_1-\varphi_2)=2j\pi$.

对于观察平面上的任一点,由于$r_1=r_2=r=\sqrt{x^2+y^2+d^2}$,其中$2d$为两像点间距,由光轴上的距离计算,得到$\Delta\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2=-2kd$.

所以得到$\sqrt{x^2+y^2+d^2}=\frac{j}{2}\lambda+d$,即$x^2+y^2=\left(\frac{j}{2}\lambda+d\right)^2-d^2$,可见干涉条纹是同心圆环,圆心的干涉级数$j_0=0$.

亮条纹半径$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,即$\rho=\sqrt{\left(\frac{j}{2}\lambda+d^2\right)^2-d^2}=\sqrt{\frac{j^2\lambda^2}{4}+j\lambda d}$,由于$\lambda\ll d$,所以有$\rho\approx\sqrt{j\lambda d}$.

5.3 半 波 损 失

在 3.3.2 中,所列出的菲涅耳公式(3.3.1)~式(3.3.4),表达了在入射点处,反射、折射瞬间电矢量与入射电矢量之间的关系,可以用来解释半波损失.

设光波由光疏介质射向光密介质,即$n_1<n_2$.

1. 掠入射

此时，$i_1, i_2 \approx \frac{\pi}{2}$，而且 $i_1 - i_2 > 0$，$\frac{\pi}{2} < i_1 + i_2 < \pi$，由菲涅耳公式，可得

$$\frac{E'_{s1}}{E_{s1}} < 0, \quad \frac{E'_{p1}}{E_{p1}} < 0, \quad \text{且} \quad \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} \approx \frac{E'_{p1}}{E_{p1}}$$

即

$$\frac{E'_{s1}}{E'_{p1}} \approx \frac{E_{s1}}{E_{p1}} \approx -1$$

说明反射光中，p、s 分量的方向均在反射瞬间反转. 逆着 x 轴方向观察，可见振动方向反转如图 5.3.1 所示.

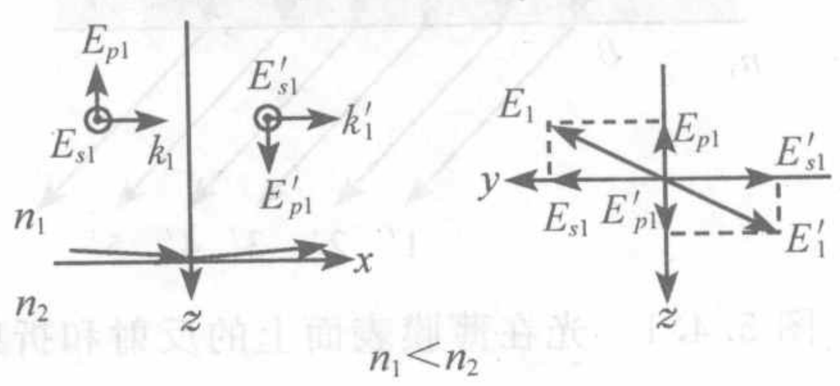


图 5.3.1　掠入射

2. 垂直入射

此时，$i_1, i_2 \approx 0$，则可得到

$$\frac{E'_{s1}}{E_{s1}} < 0, \quad \frac{E'_{p1}}{E_{p1}} > 0, \quad \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} \approx -\frac{E'_{p1}}{E_{p1}}, \quad \text{即} \quad \frac{E'_{s1}}{E'_{p1}} = -\frac{E_{s1}}{E_{p1}}$$

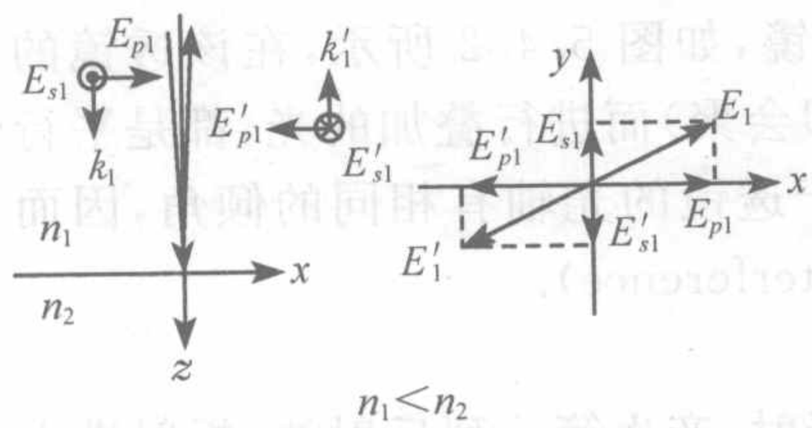


图 5.3.2　垂直入射

反射光中的 s 分量在反射瞬间反转，p 分量也反转. 沿 z 轴方向观察，发现振动反转，如图 5.3.2 所示.

以上两种情况说明由于反射使得光的振动方向有突变，转到相反的方向，相当于光的相位突然有 π 的改变. 对应到光程上，相当于有半个波长的突变. 故称半波损失.

3. 光透过薄膜

在薄膜反射和入射的情况(图 5.3.3)，如果上下部分有相同的折射率，则第一列透射光不会出现半波损失，第二列透射光由于有两次相同的反射，总的效果不需要考虑半波损失；第一列反射光发生反射的条件与其后的第二列反射光的情况正好相反，两者之间要计入半波损失；但第三列波、第四列波……的情况与第二列相似，都经过了偶数次相同的反射，因而它们之间不计半波损失. 所以在考虑各个反射光间的光程差时，可以认为第一列波产生了半波损失，或者后面的所有波列都产生了半波损失.

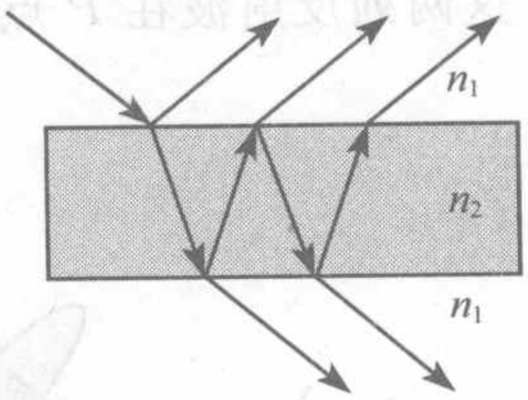


图 5.3.3　光在薄膜上的半波损失

5.4　薄膜干涉

薄膜有上下两个界面，一般情况下，可设薄膜上部介质的折射率为 n_1，下部折射率为 n_3，而薄膜本身的折射率为 n_2，如图 5.4.1 所示. 一列光波，在薄膜的上表

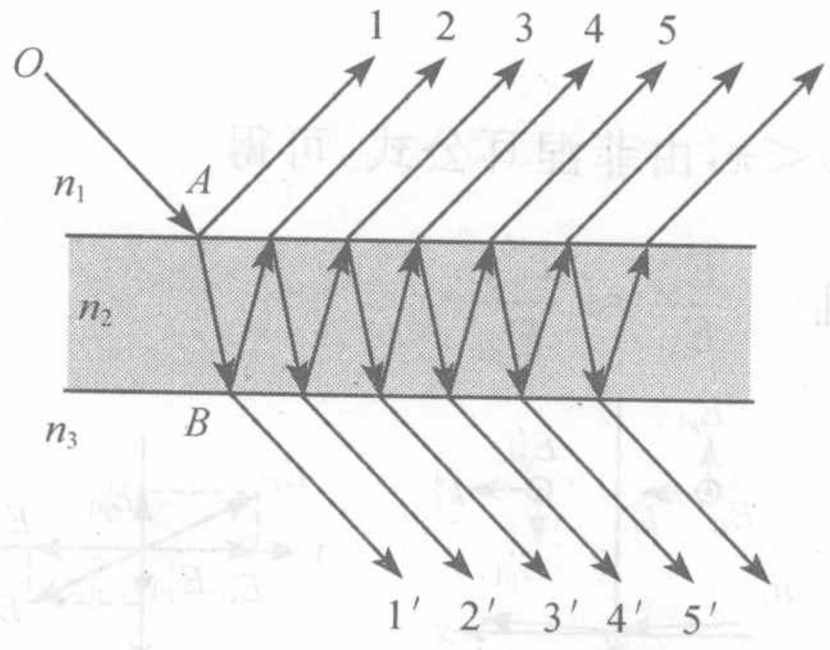


图 5.4.1 光在薄膜表面上的反射和折射

面处分为反射和折射两部分，折射部分在下表面又产生反射和折射，其中反射光到达上表面又有反射与折射……在 n_1 介质中，就有 1,2,…一系列光波，介质 n_3 中，也有一系列的透射波. 由于这些光都是从同一列光分得的，所以是相干的；这些光是将原入射光的能量(振幅)分为几部分得到的，就是分振幅的干涉.

从上表面反射的光，可以向任意方向传播，从薄膜内部透射出来的光，同样也可以向任意方向传播，所以在空间各处都可以产生干涉. 采用不同的光学装置，可以在不同的区域观察光的干涉.

5.4.1 等倾干涉

在所有的反射光和透射光中，相互平行的光将会聚在无穷远处，则它们的干涉也将在无穷远处发生. 如果在薄膜上面置一凸透镜，如图 5.4.2 所示，在该透镜的焦平面处置一观察屏，则凡是在屏上能够相遇(即会聚)而进行叠加的光，都是平行地射向透镜的，或者说，这些进行干涉的光相对于透镜的光轴有相同的倾角，因而这种干涉被称作“等倾干涉”(equal inclination interference).

1. 干涉级

如图 5.4.3 所示，在入射点 A，出现反射和折射，产生第一列反射波；折射进入薄膜的光波在下表面 B 处反射，又经过上表面 C 处射出，这是第二列反射波. 如果过 C 点做一个与光束垂直的平面 CD，则 CD 上各点到会聚点 P 是等光程的，因而这两列反射波在 P 点的光程差为

$$n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\,\overline{AD}$$

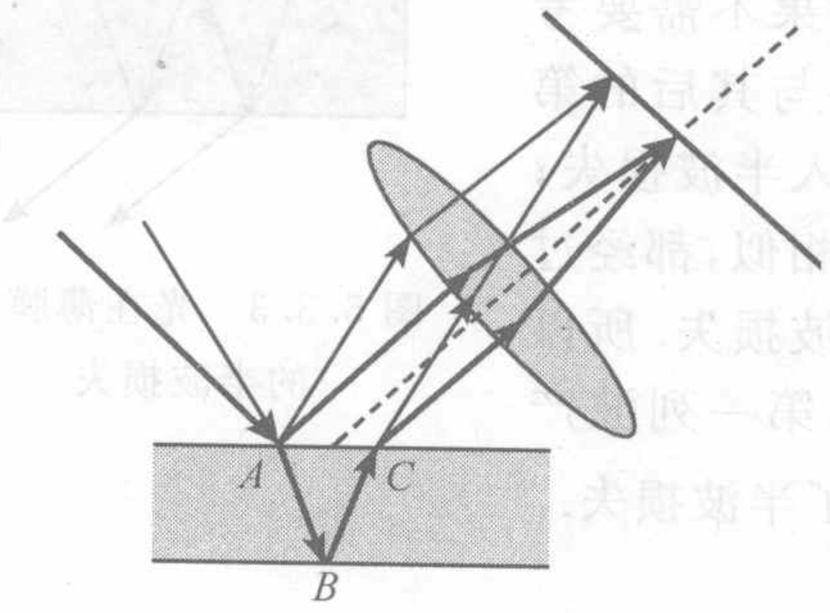


图 5.4.2 等倾干涉

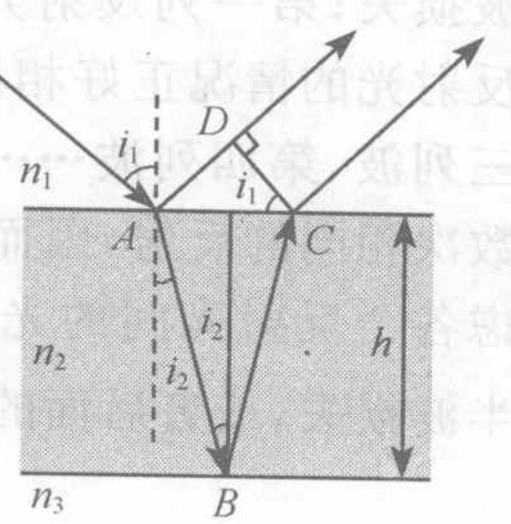


图 5.4.3 等倾干涉的光程差

而

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{2h}{\cos i_2},\quad \overline{AD}=\overline{AC}\sin i_1=2h\tan i_2\sin i_1$$

所以

$$\delta = 2h\left(\frac{n_2}{\cos i_2} - n_1 \tan i_2 \sin i_1\right) = \frac{2h}{\cos i_2}(n_2 - n_2 \sin^2 i_2)$$

$$= \frac{2n_2 h}{\cos i_2}(1 - \sin^2 i_2) = 2n_2 h \cos i_2 = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \qquad (5.4.1)$$

这两列波之间要计入半波损失 $\lambda/2$，则

$$\delta' = 2n_2 h \cos i_2 \pm \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2} \qquad (5.4.2)$$

$$2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \quad 或 \quad 2n_2 h \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (5.4.3)$$

干涉相长；

$$2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \quad 或 \quad 2n_2 h \cos i_2 = j\lambda \qquad (5.4.4)$$

干涉相消.

由上式可以看出，等倾干涉中，入射角相同，则光程差相同，对应同一干涉级，也就是同一级干涉条纹.

2. 干涉条纹与光源大小的关系

点光源. 如图 5.4.4 所示，无论点光源处于什么位置，经薄膜的两个面反射后，具有相等倾角的光在接收屏上形成一个圆环，这些圆环的中心位于透镜的光轴上.

扩展光源. 如图 5.4.5 所示，两个不同的发光点，发出球面波，其中凡是具有相同倾角的光，都将会聚到屏上的同一点，而又具有相等的光程差，故干涉条纹的形态与只有一个点光源是一样的. 那么，对于扩展光源，条纹的形态也与只有一个点光源相同. 而且，由于扩展光源的强度比点光源大，所以，实际上使用的都是扩展光源，如图 5.4.6 所示.

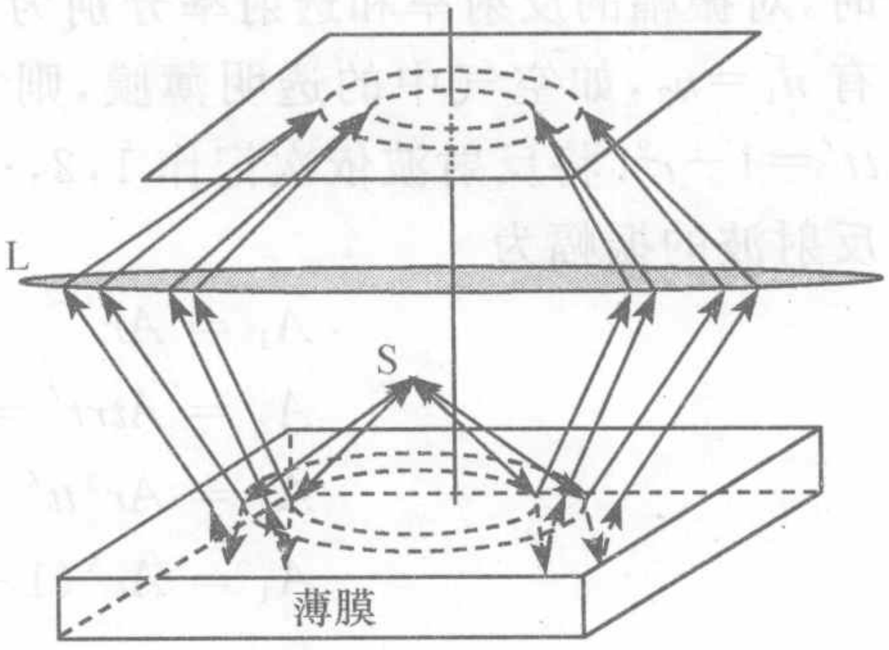
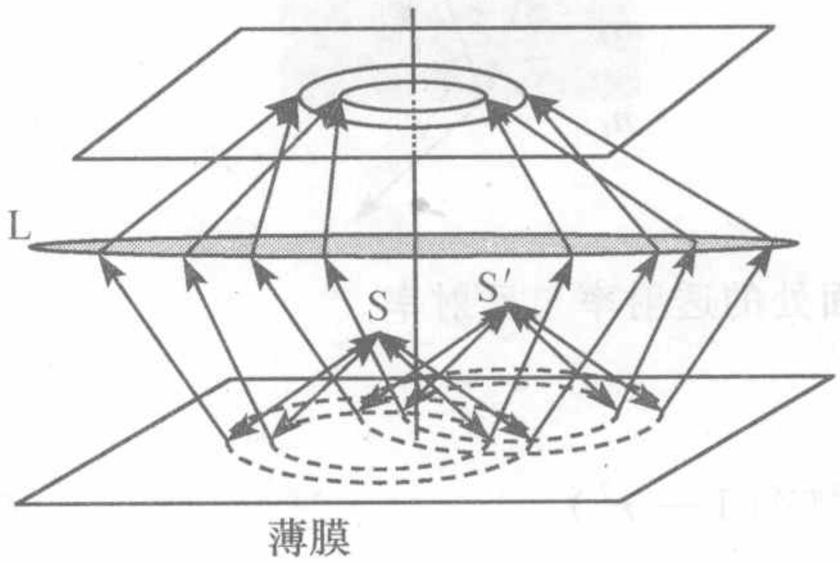


图 5.4.4　点光源的等倾条纹



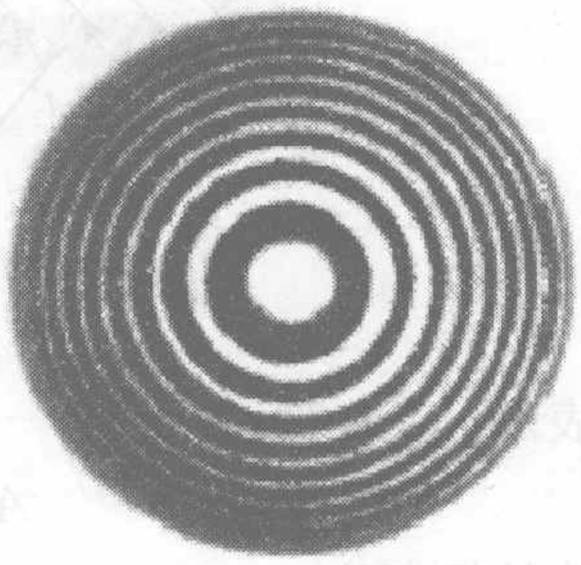


图 5.4.5　扩展光源的等倾条纹

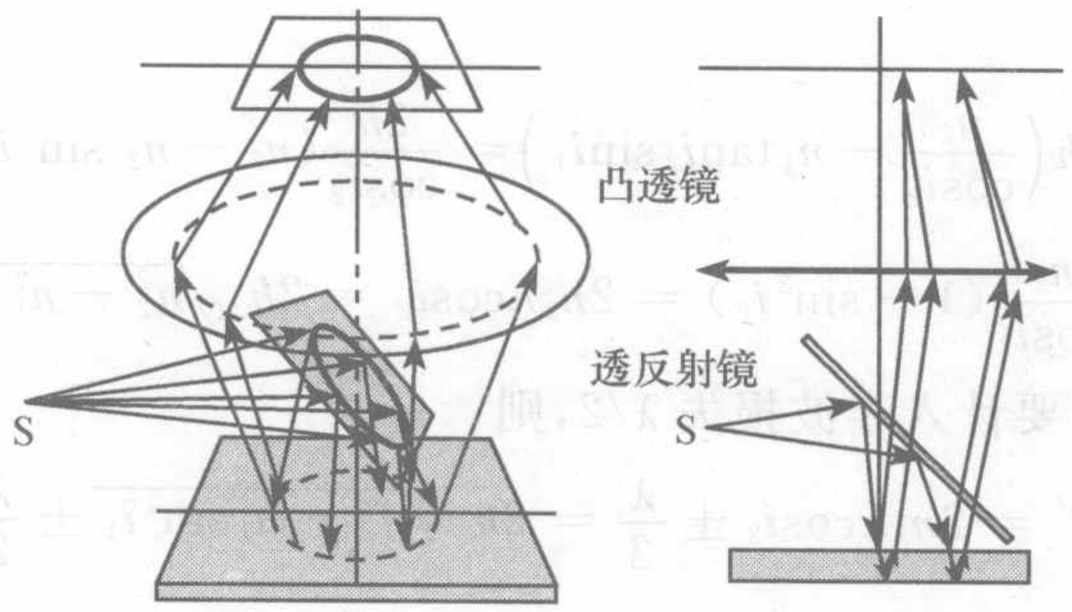


图 5.4.6 等倾干涉的观察装置

3. 其他反射波、透射波间的干涉

薄膜的上表面，有不止两列反射波；同样，也有许多列透射波从薄膜的下表面射出，它们之间会有怎样的干涉呢？我们将进行如下的讨论.

射入射波的振幅为 A，从上表面入射时，即从折射率为 n_1 向折射率为 n_2 的介质入射时，对振幅的反射率为 r，透射率为 t；而从薄膜的内部向上表面入射、即从折射率为 n_2 向折射率为的 n_1 介质入射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r' 和 t'；在薄膜的下表面，从内向外入射时，即从折射率为 n_2 向折射率为的 n_3 介质入射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r_2 和 t_2，如图 5.4.7 所示. 一般情况下，往往有 $n_1=n_3$，如空气中的透明薄膜，则 $r'=r_2$，$t'=t_2$. 由 Stocks 倒逆关系，$r'=-r$，$tt'=1-r^2$. 将反射波依次记作 1，2，…；而透射光记作 1′，2′，…，可以计算出各列反射波的振幅为

$$\begin{aligned} A_1 &= Ar \\ A_2 &= Atrt' = Artt' = Ar(1-r^2) \\ A_3 &= Ar^3tt' = Ar^3(1-r^2) \\ A_4 &= Ar^5(1-r^2) \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

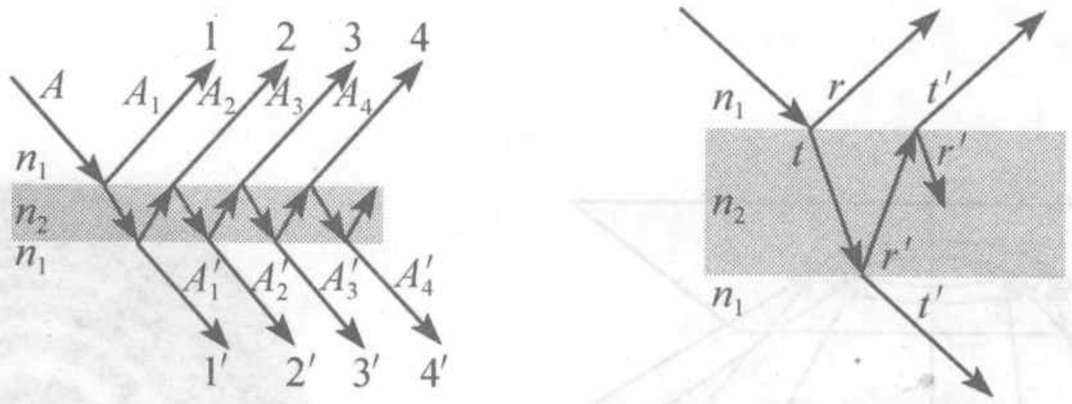


图 5.4.7 薄膜表面处的透射率与反射率

用通式表示，$n>1$ 时，有

$$A_n = Ar^{2n-3}(1-r^2) \tag{5.4.6}$$

而透射波的振幅为

$$A'_1 = Att' = A(1-r^2)$$

$$A_2' = Ar^2(1-r^2)$$

$$A_3' = Ar^4(1-r^2)$$

通式为

$$A_n' = Ar^{2(n-1)}(1-r^2) \tag{5.4.7}$$

对透明介质，$r \ll 1$，很小，因而，反射波中 $A_1 \approx A_2 \gg A_3 \gg A_4 \gg \cdots$；所以只有第一列和第二列反射波之间有显著的干涉，其他的波列，由于强度太小而对总的干涉效果无甚贡献，可以忽略. 而透射波中，$A_1' \gg A_2' \gg A_3' \gg \cdots$，因而不能产生有效的干涉效应，即透射光的干涉条纹可见度极小. 因而，对于透明的薄膜，只需要考虑第 1、第 2 列反射光的干涉即可.

当然，如果薄膜的反射率较高，即 $r \approx < 1$，则要计算所有的透射波间的干涉，对于反射波亦然. 这一问题我们将在后面处理.

例 5.4.1　沿着与肥皂膜的法线成 35° 角的方向观察膜呈绿色（$\lambda = 500.0\text{nm}$），设肥皂水的折射率为 1.33，求：

（1）薄膜的厚度；

（2）如果垂直注视时，膜呈何种颜色？

解　（1）看到的是从薄膜两个表面反射光干涉的结果，这是等倾干涉. 膜所呈现的颜色，是反射光中干涉相长的波长成分的颜色. 反射光干涉相长的条件为

$$2nh\cos i_2 = \frac{(2j+1)\lambda}{2} \tag{1}$$

可得到膜厚为

$$h = \frac{(2j+1)\lambda}{4n\cos i_2} = \frac{2j+1}{4n\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}}\lambda = (2j+1)1.0417\times 10^{-7}\,\text{m} \tag{2}$$

计算中，光在膜的上表面的入射角、反射角 $i_1 = 30°$.

（2）垂直注视时，反射角为零度，即此时 $i_1 = i_2 = 0$，式(1)变为

$$2nh = \frac{(2j+1)\lambda}{2}$$

得到

$$\lambda = \frac{4nh}{2j+1} = \frac{4\times 1.33\times(2j+1)}{2j+1} = 554.2(\text{nm})$$

4. 等倾干涉条纹的特征

1）中央条纹

亮条纹应满足

$$2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i_1} = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{5.4.8}$$

或

$$2n_2 h\cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{5.4.9}$$

中央条纹对应的角度 $i_1=0$，即 $i_1=i_2=0$，垂直入射，$\cos i_2=0$，j 取最大值，即中央条纹的干涉级数最大，由 n_2h 决定.

2）薄膜厚度的影响

对同一 j，当 h 增大时，i_2 增大，相应地，i_1 增大，即圆环膨胀；h 减小，i_1 减小，圆环收缩.

3）薄膜厚度对干涉条纹间距的影响

相邻两条纹间的角距离记作 Δi，即 j 改变所引起的角度的改变量，因为 $2nh\sin i_2\Delta i_2=-\lambda$，可求得

$$\Delta i_2=-\frac{\lambda}{2nh\sin i_2} \tag{5.4.10}$$

厚度 h 大，条纹的间隔小. 即薄膜厚度增加时，条纹将变得比较密.

4）条纹角宽度

亮条纹并非一条几何上的亮线，而是有一定强度分布的宽带. 由于干涉条纹的强度分布公式为

$$I(i)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

而

$$A_1=Ar,\quad A_2=Atrt'=Artt'=Ar(1-r^2)$$

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta'=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2\pm\pi \tag{5.4.11}$$

故有

$$I(i)=Ar^2\left[1+(1-r^2)^2+2(1-r^2)\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2\right)\right]$$

可以将两相邻暗纹间的角度差（角距离）作为亮条纹的角宽度，即

由于

$$2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2},\quad 2n_2h\cos(i_2+\Delta i_2)=j\lambda$$

故

$$2n_2h\sin i_2\Delta i_2=\frac{\lambda}{2}$$

即

$$\Delta i_2=\frac{\lambda}{4n_2h\sin i_2} \tag{5.4.12}$$

厚膜条纹较密集；同时，中心处，角度小，Δi_2 大，即条纹中心疏，周围密.

5.4.2 等厚干涉

如果薄膜上、下两表面不平行，而是有一夹角 α，如图 5.4.8 所示. 则在光波相交处均有干涉，整个空间都有干涉条纹.

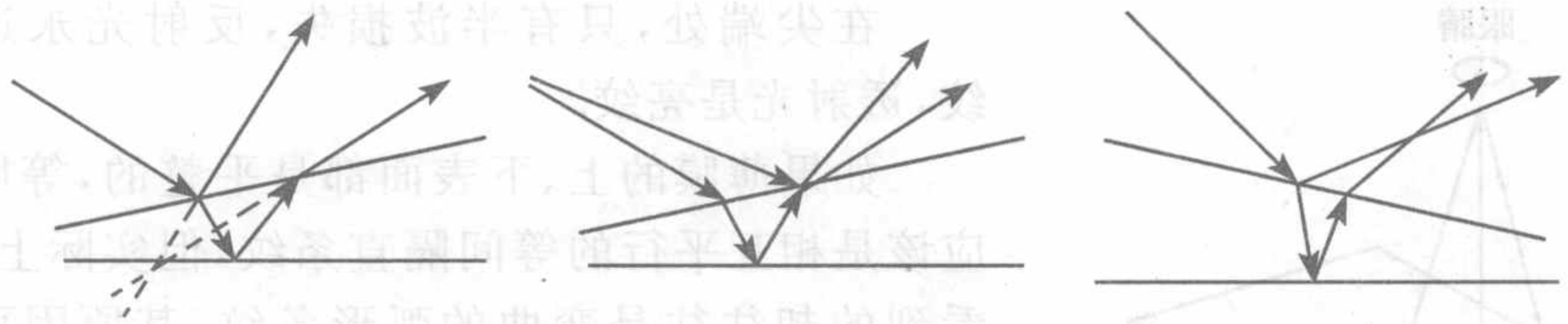


图 5.4.8　薄膜上下两表面不平行时，干涉的非定域性

如图 5.4.9 所示，由于薄膜两表面的夹角往往很小，所以，两列反射波的光程差 $n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\ \overline{DC}$ 的计算，可以直接引用等倾干涉的结果.

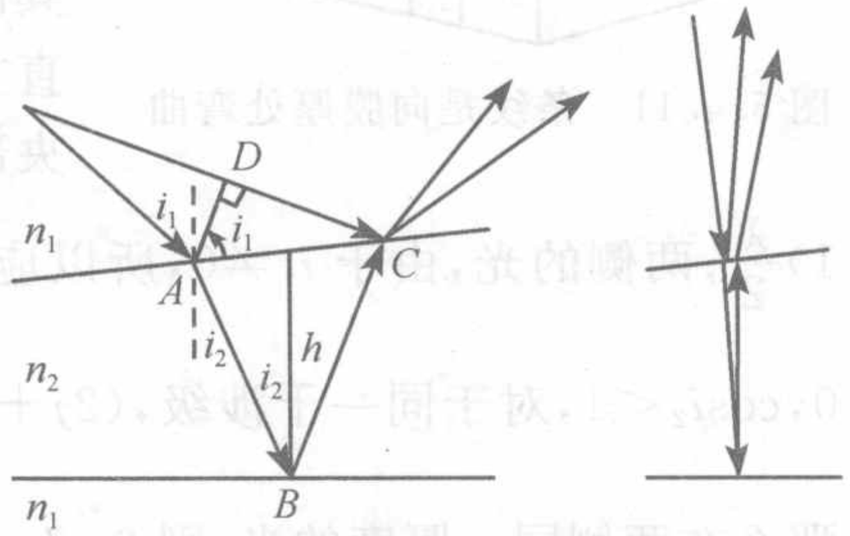


图 5.4.9　等厚干涉的光程差

则亮条纹的条件为

$$2h\ \sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=(2j+1)\ \frac{\lambda}{2}$$

或

$$2n_2h\cos i_2=(2j+1)\ \frac{\lambda}{2};$$

暗条纹的条件为

$$2h\ \sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=j\lambda,\quad \text{或}\quad 2n_2h\cos i_2=j\lambda,$$

干涉相消.

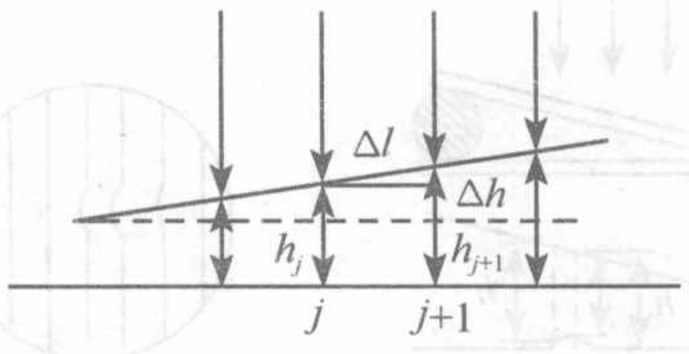


图 5.4.10　楔形薄膜条纹的横向间距

使入射垂直入射，则上表面的第 1、第 2 列反射波将重合，因而能进行相干叠加，如图 5.4.10 所示. 如果仅仅观察薄膜上表面处的干涉，则两列波间的光程差为 $2n_2h$，如果计入半波损失，则在薄膜的上表面，两列波的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\pm\pi$，则亮条纹出现的条件是

$$2n_2h=(2j+1)\ \frac{\lambda}{2} \tag{5.4.13}$$

暗条纹出现的条件是

$$2n_2h=j\lambda \tag{5.4.14}$$

由于同一级(条)亮纹出现在薄膜厚度相等的地方，因而这种干涉被称作“等厚干涉”(equal thickness interference).

对于图 5.4.10 所示的楔形薄膜(wedge film)，相邻两根亮条纹间的厚度差为

$$\Delta h=\frac{\lambda}{2n_2} \tag{5.4.15}$$

如果楔角为 α，在表面上，亮条纹的间距为

$$\Delta l=\frac{\Delta h}{\sin\alpha}=\frac{\lambda}{2}n_2\sin\alpha \tag{5.4.16}$$

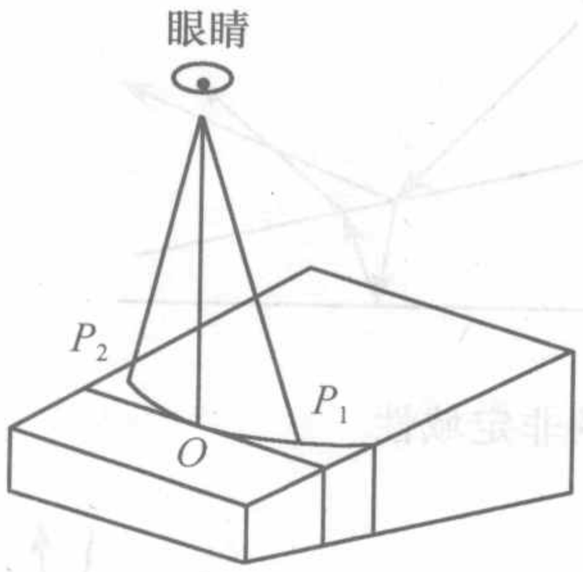


图 5.4.11 条纹是向膜厚处弯曲

在尖端处，只有半波损失，反射光永远是暗纹，透射光是亮纹.

如果薄膜的上、下表面都是平整的，等厚条纹应该是相互平行的等间隔直条纹，但实际上，我们看到的却往往是弯曲的弧形条纹，其原因可以用图 5.4.11 说明. 观察者处于薄膜正上方时，进入其瞳孔的光的角度是不同的，中央部分的光沿竖直方向进入，而两侧的光只有倾斜才能进入. 即中央部分的光，其角度 $i_1=0$，条纹满足 $2n_2h=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$；两侧的光，由于 $i_1\neq0$，所以应该采用公式 $2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，由于 $i_2\neq0$，$\cos i_2<1$，对于同一干涉级，$(2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 是不变的，而中央部分，$2n_2h=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，那么在两侧同一厚度的光，则 $2n_2h\cos i_2<(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，不满足亮条纹出现的条件，只有在膜增加一定厚度的地方，才有 $2n_2(h+\Delta h)\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，而且，越靠边，$i_2$ 越大，Δh 就越大，所以，看到的条纹是向膜厚的地方弯曲.

P_1，P_2 点入射角比中央 O 点大，故 h 必须增加才能使得满足干涉相长条件，故条纹向厚的一端弯曲.

可用于检测表面平整，确定凸凹. 如图 5.4.12 所示，如果观察到如右图所示弯曲的干涉纹，则可判断待测表面的中央部分有一凸起，理由如下：

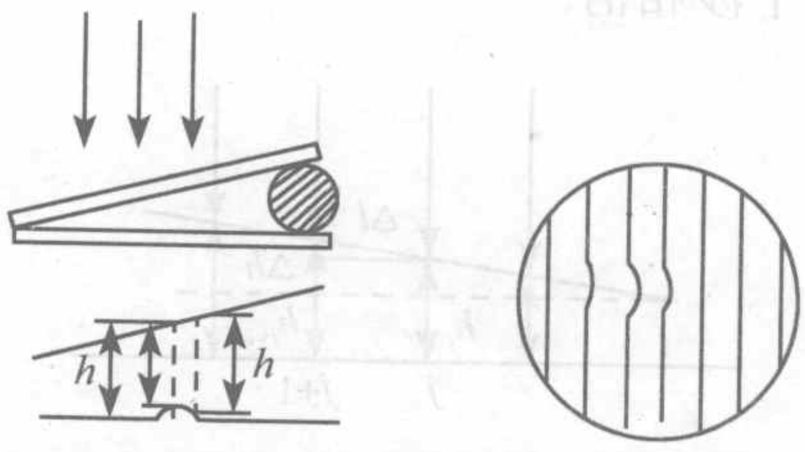


图 5.4.12 检测表面平整

直纹说明表面是平整的，设此处厚度为 h，若中央有一凸起，则厚度小于 h，不满足亮纹的条件，而同级亮纹只能出现在厚度为 h 的地方，向右端移动一段距离，则会有厚度恰等于 h 的地方，则亮纹在这里出现，这一部分的条纹因而向楔形的后部弯曲. 条纹弯曲的区域对应于凸起的区域，而条纹弯曲的程度对应于凸起的高度.

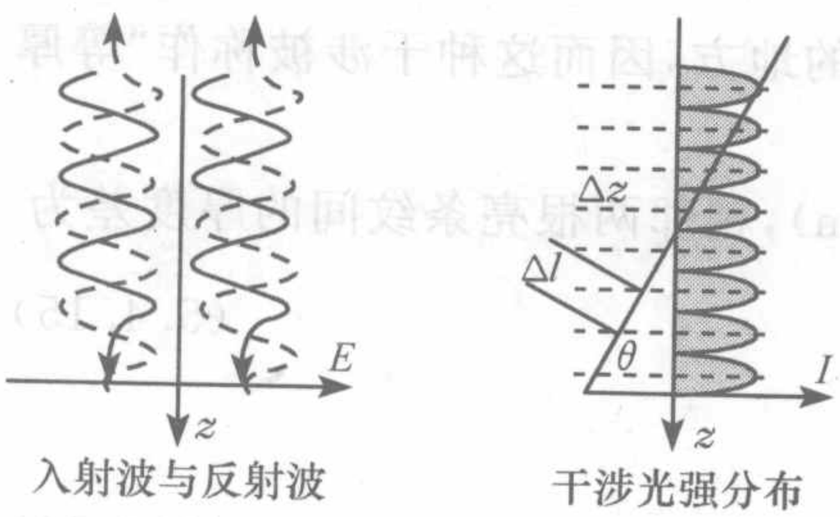


图 5.4.13 维纳驻波的干涉

例 5.4.2 维纳驻波的干涉如图 5.4.13 所示，一列单色平行光垂直射向反射面，求反射波与入射波所形成的干涉条纹；如果在反射面上方放一半透半反的平行板，该板与反射面间夹角为 θ，求板上干涉条纹间距. 设反射面对光的反射率为 100%.

解 入射波

$$\Psi_1=A_1\cos(kz-\omega t)$$

设反射波的振幅与入射波相等，表示为

$$\Psi_2 = A_2\cos(-kz-\omega t+\varphi) = A_2\cos(kz+\omega t-\varphi)$$

设 $A_1=A_2$，则合振动

$$\Psi = \Psi_1+\Psi_2 = A\cos(kz-\omega t)+A\cos(kz+\omega t-\varphi)$$

$$= 2A\cos\left(\omega t-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kz-\frac{\varphi}{2}\right)$$

在上述表达式中，时间因子 ωt 与空间因子 kz 分开，这种形式的波动无法在空间传播，而只能在原位振动，因而形成驻波(standing wave). 实验表明，在 $z=0$ 处，$I=0$，说明 $\varphi=\pi$，即反射时有半波损失. 则 $\Psi=-2A\sin\omega t\sin kz$，光强 $I=4A^2\sin^2 kz$. $z=0$ 处，$I=0$，为极小值.

可以由 $k\Delta z=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta z=\pi$ 求得暗纹间隔，即 $\Delta z=\frac{\lambda}{2}$.

板 G 上条纹间隔为 $\Delta l=\Delta z/\sin\theta=\lambda/2\sin\theta$.

斜入射时，将波矢分解为平行和垂直于 z 的两部分. 与 z 平行部分无反射波，不发生干涉.

5.5　分振幅的干涉装置

依据分振幅干涉的原理，制成了多种干涉装置.

5.5.1　迈克耳孙干涉仪

1. 干涉仪的结构与原理

图 5.5.1 为早期的迈克耳孙干涉仪(Michelson interferometer)的外观，图 5.5.2 为光路及原理示意. 图 5.5.3 为实用的迈克耳孙干涉仪构造，图 5.5.4 显示了调节机构. 其中主要的原件如下.

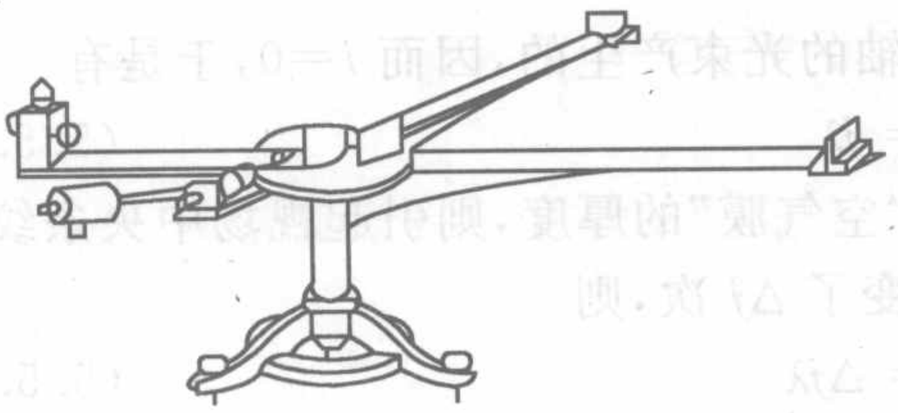


图 5.5.1　早期的迈克耳孙干涉仪

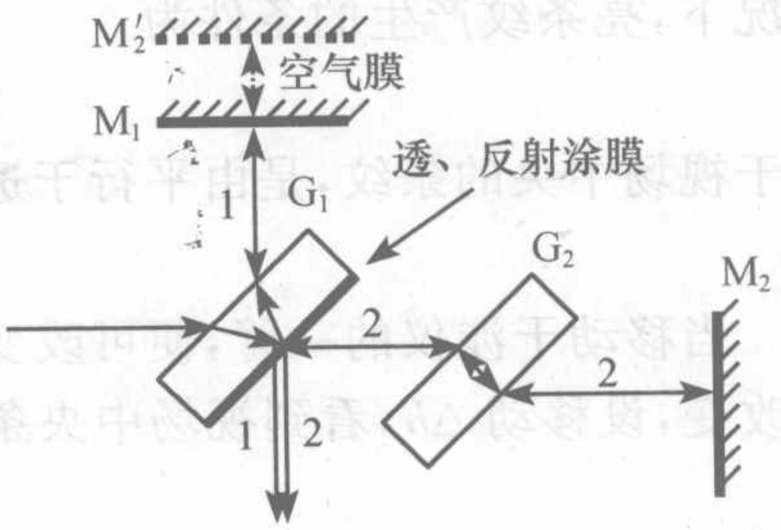


图 5.5.2　迈克耳孙干涉仪的光路

G_1 为分光板(beam splitter)，其背面涂敷半透半反膜；G_2 为补偿板(compensating plate)；M_1、M_2 为反光镜. 其中，M_1、M_2 相互垂直，G_1 与 G_2 平行，且与 M_1，M_2 成 45°角.

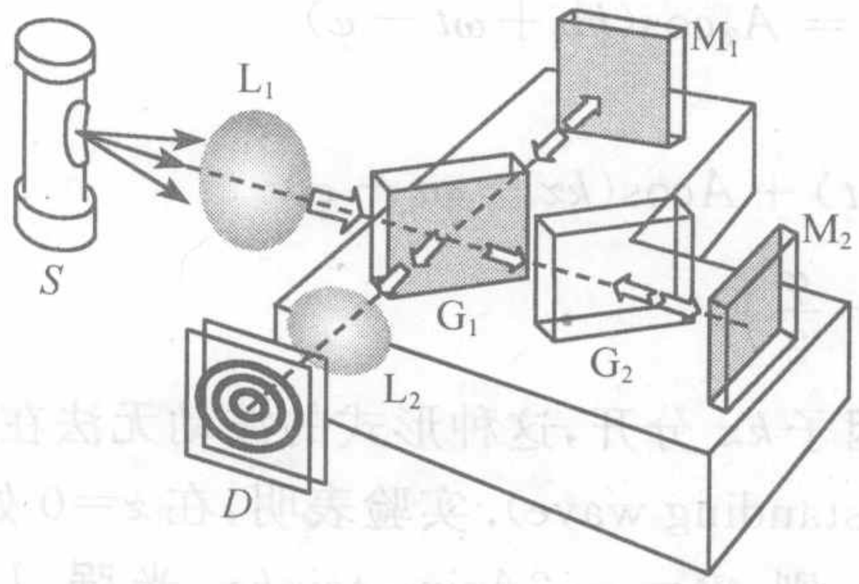


图 5.5.3 迈克耳孙干涉仪的构造

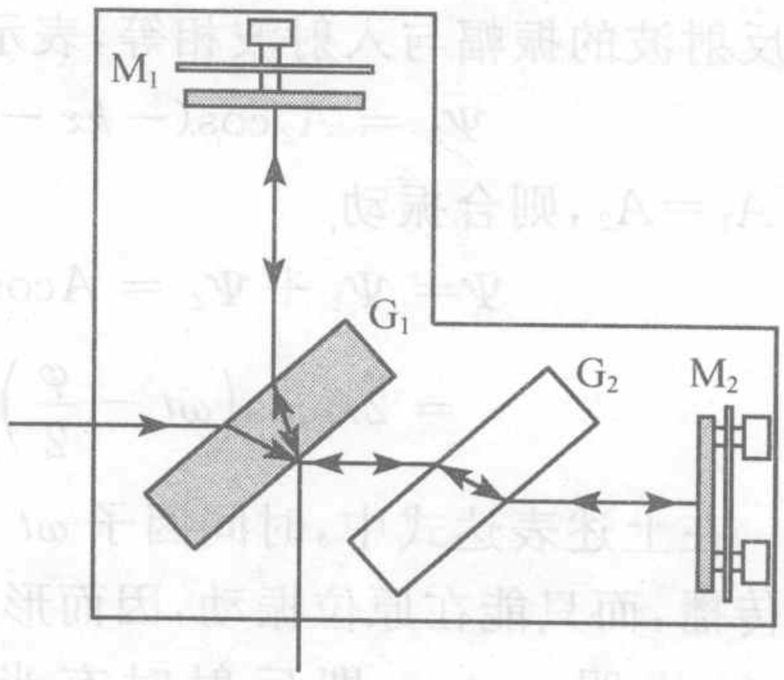


图 5.5.4 迈克耳孙干涉仪的调节机构

入射波在分光板的涂膜处分为两部分，分别射向 M_1、M_2，在图 5.5.2 中记为 1，2 被 M_1，M_2 反射后，沿原路返回到分光板的涂膜上. 由 M_1 反射的波 1 透过涂膜；而由 M_2 反射的波 2 被涂膜反射. 1、2 两列波进行相干叠加，产生干涉条纹. 补偿板与分光板由相同的材料制成，形状也完全一样，只是没有涂膜. 则 1、2 两列波都各自经涂膜反射、透射一次、经玻璃板透射三次、被反光镜反射一次，只是在空气中经过的路程不同，因而光程差就是由于两反射镜到涂膜层的距离不同而造成的. 在两列光波所经过的路径上，需要注意的是，1、2 各被反光镜反射一次，因而半波损失的情况一致. 但是，在分光板处，光束 1 由玻璃射向涂膜被反射，而光束 2 由空气射向涂膜被反射，因此这两次反射的情况不尽相同，所以不能认为有相同的半波损失，而要针对具体的情况进行讨论. 好在我们关注的是条纹整体移动变化的情况，所以不必考虑半波损失的细节.

如图 5.5.2 所示，M_2 相对于涂膜有一个镜像 M_2'，光波 2 相当于从 M_2' 反射过来的，而 M_2' 与 M_1 构成了一个空气薄膜，所以迈克耳孙干涉仪就相当于“空气膜”的干涉. 两列波的光程差就是 M_2' 与 M_1 间距的 2 倍. M_1 与 M_2' 间或平行，或不平行，就能产生等倾或等厚干涉. 此时，由于 $n_1 = n_2$，$i_1 = i_2$，所以，在不计半波损失的情况下，亮条纹产生的条件为

$$2h\cos i = j\lambda \tag{5.5.1}$$

处于视场中央的条纹，是由平行于透镜光轴的光束产生的，因而 $i=0$，于是有

$$2h = j\lambda \tag{5.5.2}$$

当移动干涉仪的一臂，便可改变上述“空气膜”的厚度，则引起视场中央条纹级数改变，设移动 Δh，看到视场中央条纹改变了 Δj 次，则

$$2\Delta h = \Delta j\lambda \tag{5.5.3}$$

则宏观的长度 Δh 与微观的波长 λ 通过 Δj 联系起来，式(5.5.3)可用于精确长度测量.

2. 条纹的形状(图 5.5.5)

(1) $M_1 // M_2'$，即 $M_1 \perp M_2$，为等倾干涉，同心圆环，圆心在视场中央.

(2) M_1 不平行于 M_2'，为等厚干涉. 此时，条纹的形状与 M_1、M_2' 间的距离

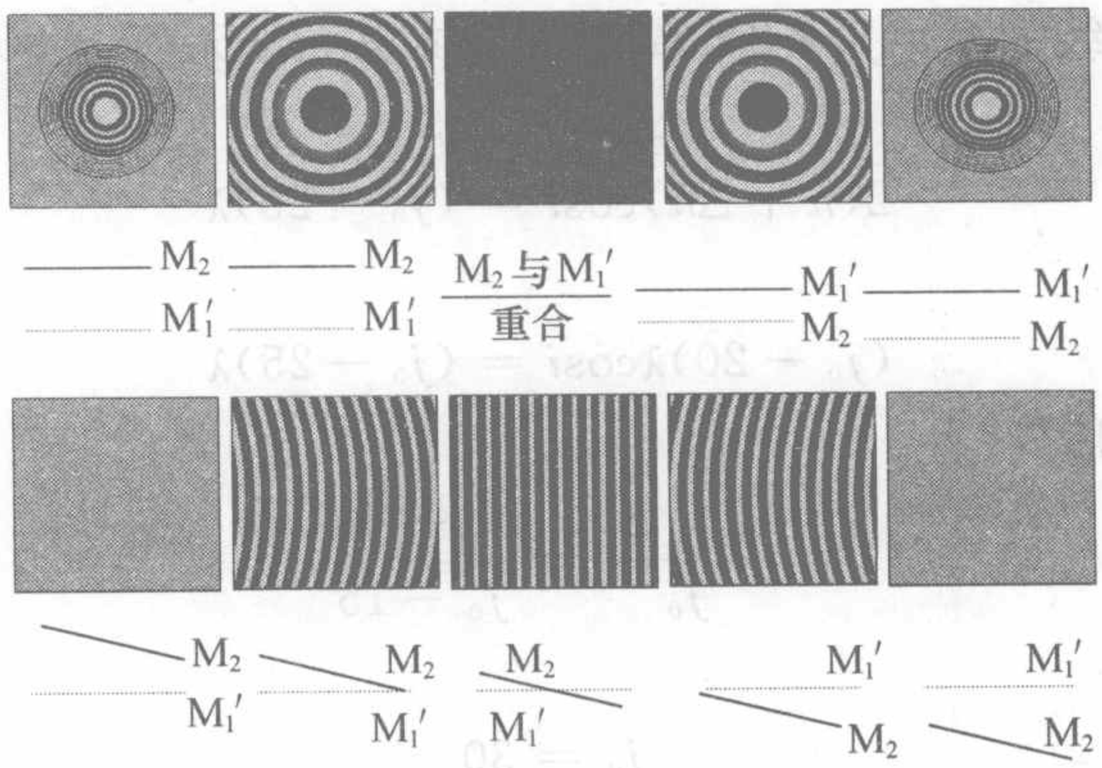


图 5.5.5　迈克耳孙干涉仪观察到的条纹

有关.

例 5.5.1　用钠光的 589.3nm 谱线观察迈克耳孙干涉条纹，先看到干涉场中有 16 个亮环(包括中心亮斑)，且中心是亮的；移动平面镜 M_1 后，看到中心吞(吐)了 20 环，干涉场中心还剩 6 个亮环(包括中心亮斑)，中心仍是亮的. 试求：

(1) M_1 移动的距离；

(2) 开始时中心亮斑的干涉级；

(3) M_1 移动后，干涉场中最外亮环的干涉级.

分析　视场中心，光线的入射角为 0，视场的外边缘，即最外干涉环所对应的角度，在 M_1 移动过程中是不变的.

解　(1) 迈克耳孙干涉仪，等倾干涉时，其中心条纹

$$2h = j_0\lambda \tag{1}$$

最外条纹

$$2h\cos i = j_1\lambda \tag{2}$$

上两式相减，得到

$$2h(1-\cos i) = (j_0 - j_1)\lambda \tag{3}$$

$(j_0 - j_1)$为干涉场(视场)中条纹的数目.

由于 M_1 移动后，市场中条纹减少，因而 h 减小.

吞入了 20 环，说明中心级次减小 20. 由式(1)，得到

$$2\Delta h = \Delta j\lambda = -20\lambda \tag{4}$$

即 M_1 移动距离

$$\Delta h = \Delta j\lambda/2 = -20\lambda/2 = -5.893\mu\text{m}$$

(2) 设开始时中心斑的级次为 j_0，最外条纹的级次为 j_0-15，则有

$$2h = j_0\lambda \tag{5}$$

$$2h\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{6}$$

即

$$j_0\lambda\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{7}$$

结束时，中心条纹级数 $j_0'=j_0-20$，最外的条纹为 $j_0'-5=j_0-25$，有

$$2(h+\Delta h)=(j_0-20)\lambda \tag{8}$$

$$2(h+\Delta h)\cos i=(j_0-25)\lambda \tag{9}$$

有

$$(j_0-20)\lambda\cos i=(j_0-25)\lambda \tag{10}$$

由式(7)和(10)，可得

$$\frac{j_0-20}{j_0}=\frac{j_0-25}{j_0-15}$$

即

$$j_0=30$$

$$j_0-25=30-25=5 \tag{3}$$

视场中还有 5 条亮纹.

迈克耳孙



图 5.5.6 A. A. 迈克耳孙

阿尔伯特·亚伯拉罕·迈克耳孙(Albert Abrahan Michelson)(图 5.5.6)1852 年 12 月 19 日出生于普鲁士斯特雷诺(现属波兰)，迈克耳孙童年随父母定居美国.1869 年被选拔到美国安纳波利斯海军学院学习.毕业后曾任该校物理和化学讲师.1880～1882 年先后到柏林大学、海德堡大学、法兰西学院学习.1883 年任俄亥俄州克利夫兰市开斯应用科学学院物理学教授，1889 年成为麻省伍斯特的克拉克大学的物理学教授，1892 年改任芝加哥大学物理学教授，后任该校第一任物理系主任，1910～1911 年担任美国科学促进会主席，1923～1927 年担任美国科学院院长.

在迈克耳孙的时代，人们认为光和一切电磁波必须借助绝对静止的“以太”进行传播，而“以太”是否存在以及是否具有静止的特性，在当时还没有实验上的依据.有人试图测量地球对静止“以太”的运动所引起的“以太风”，来证明以太的存在和具有静止的特性，但由于仪器精度所限，遇到了困难.迈克耳孙 1881 年在柏林大学亥姆霍兹实验室工作期间，发明了高精度的迈克耳孙干涉仪，进行了著名的以太漂移实验.他认为若地球绕太阳公转相对于以太运动时，其平行于地球运动方向和垂直地球运动方向上，光通过相等距离所需时间不同，因此在仪器转动 90°时，前后两次所产生的干涉必有 0.04 条条纹移动.当年，迈克耳孙用干涉仪进行了实验，得出了否定结果.1884 年在瑞利、开尔文等的鼓励下，他和化学家莫雷(Morley Edward Williams，1838～1923)合作，提高干涉仪的灵敏度，得到的结果仍然是否定的.1887 年他们继续改进仪器，将光路增加到 11m，花了整整 5 天时间，仔细地观察地球沿轨道与静止以太之间的相对运动，结果仍然是否定的.这一实验引起科

学界的关注，试验结果与黑体辐射的“紫外灾难”并称为“科学史上的两朵乌云”. 对以太的否定，导致了爱因斯坦提出了相对论.

迈克耳孙的另一项重要贡献是对光速的测定. 1879 年他在海军学院工作时，就开始光速的测定工作. 他是继菲索、傅科、科纽之后，第四个在地面测定光速的. 他用八角棱镜代替傅科实验中的旋转镜，由此使光路延长 600m. 返回光的位移达 133mm，提高了精度. 他多次进行光速的测定，其中最精确的测定值是在 1924～1926 年，在南卡罗来纳山间 22 英里[①]长的光路上进行的，其值为(299796±4)km/s. 迈克耳孙从不满足已达到的精度，总是不断改进，反复实验，孜孜不倦，精益求精，整整花了半个世纪的时间，1931 年 5 月 9 日，他在一次精心设计的光速测定过程中，不幸因中风而去世，终年 79 岁. 后来由他的同事发表了这次测量结果.

迈克耳孙在基本度量方面也作出了贡献. 1893 年，他用自己设计的干涉仪测定了镉红线的波长，实验说明当温度为 15℃，气压在 760mmHg[②] 产生的压强时，镉红线在干燥空气中的波长为 6438.4696Å，于是，他提出用此波长为标准长度，这一长度基准被世界所公认，一直沿用到 1960 年.

在光谱学方面，迈克耳孙发现了氢光谱的精细结构以及水银和钕光谱的超精细结构，这一发现在现代原子理论中起了重大作用. 迈克耳孙还运用自己发明的“可见度曲线法”对谱线形状与压力的关系、谱线展宽与分子自身运动的关系作了详细研究，其成果对现代分子物理学、原子光谱和激光光谱学等新兴学科都发生了重大影响. 1898 年，他发明了一种阶梯光栅来研究塞曼效应，其分辨本领远远高于普通的衍射光栅.

因发明精密光学仪器和借助这些仪器在光谱学和度量学的研究工作中所作出的贡献，被授予了 1907 年度诺贝尔物理学奖.

迈克耳孙是一位出色的实验物理学家，他所完成的实验都以设计精巧、精确度高而闻名，爱因斯坦曾赞誉他为“科学中的艺术家”.

3. 傅里叶变换光谱仪

在迈克耳孙干涉仪中，当入射光是具有一定光谱分布的非单色光时，可以让进行干涉的两束光 1、2 的强度相等，即它们的振幅相等，这里记为 $A(k)$，如果此时两列波的光程差位 δ，则它们的干涉强度可以用光程差表示为

$$I(k) = 2A^2(k)[1+\cos\Delta\varphi(k)] = 2A^2(k)[1+\cos(k\delta)]$$

而仪器(图 5.5.7)接收到的光强为各种波长的强度之和，即

$$I(\delta) = \int_0^\infty I(k)\mathrm{d}k$$

$$= \int_0^\infty 2A^2(k)[1+\cos(k\delta)]\mathrm{d}k$$

---

① 1 英里＝1.609 千米. 下同.

② 1mmHg＝133.322Pa，下同.

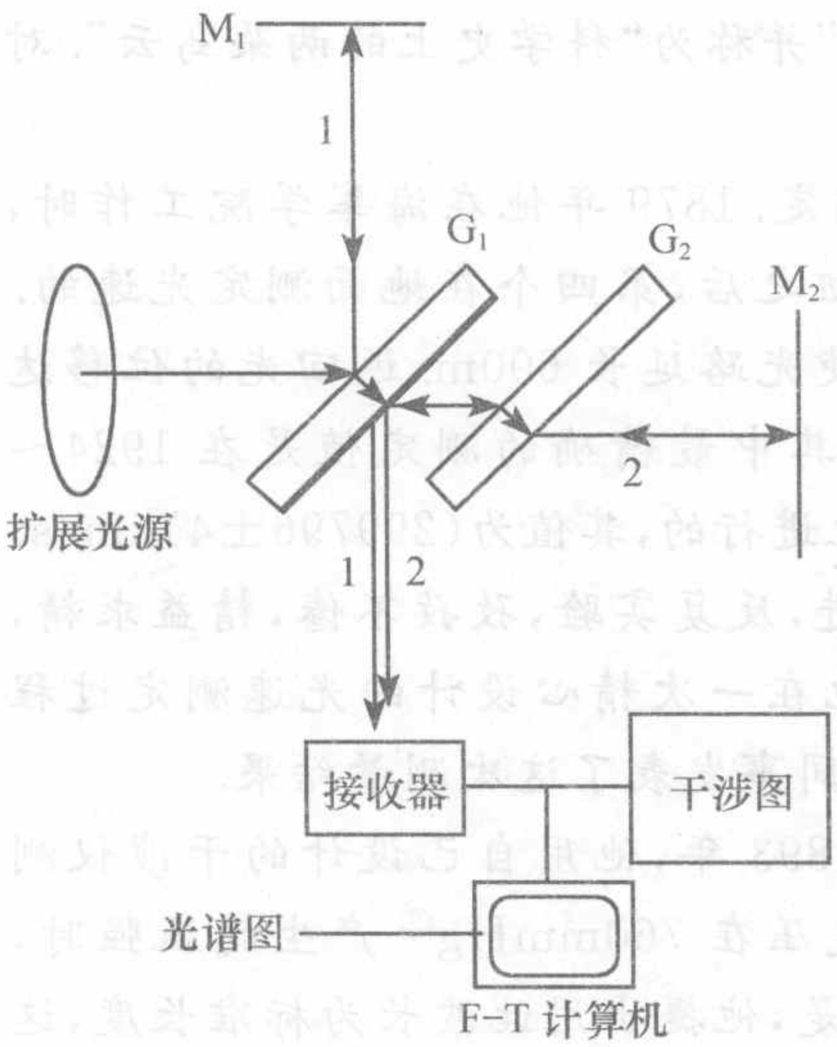


图 5.5.7 傅里叶变换光谱仪

$$= \int_0^\infty 2A^2(k)\mathrm{d}k + \int_0^\infty 2A^2(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k$$

$$= I_0 + \int_0^\infty 2A^2(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k$$

$$= I_0 + \int_0^\infty i(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k$$

其中 $i(k)=2A^2(k)$，就是入射光强按波长的分布，也就是入射光的光谱. 即有

$$\int_0^\infty i(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k = I(\delta) - I_0$$

I_0 与波长无关，是光程差为零时的光强；而后面的积分是一个傅里叶余弦变换的表达式. 其逆变换为

$$i(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [I(\delta) - I_0]\cos(k\delta)\mathrm{d}\delta \tag{5.5.4}$$

在迈克耳孙干涉仪中，光程差 δ 即为两反光镜之间距离的两倍，即 $2h$，所以，只要在一系列不同的位置上记录到衍射光强，即可通过傅里叶变换得到光源的光谱分布. 由此可以得到光源的光谱分布 $i(k)$ 或 $i(\lambda)$.

5.5.2 马赫-曾德尔干涉仪

如图 5.5.8 所示，采用两个反射镜 M_1、M_2，以及两个分束镜 BS_1、BS_2 就可以组成一种分振幅的反射装置，称作马赫-曾德尔干涉仪（Mach-Zehnder interferometer）. 在其中的一条光路中，可以置入样品，如受力的透明介质、气体或则等离子体等，则可以通过测量干涉条纹的变化获得样品的光学参数，图 5.5.9 为测量到的等离子体的干涉条纹. 该装置近年来更是被用于量子密钥通信.

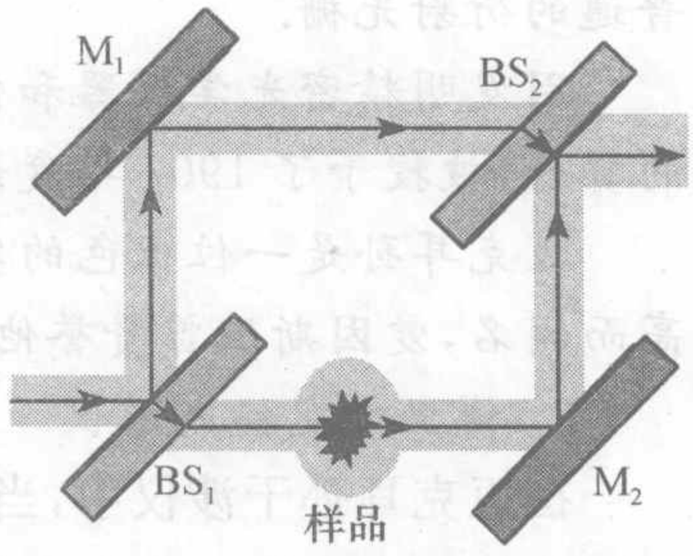


图 5.5.8 马赫-曾德尔干涉仪

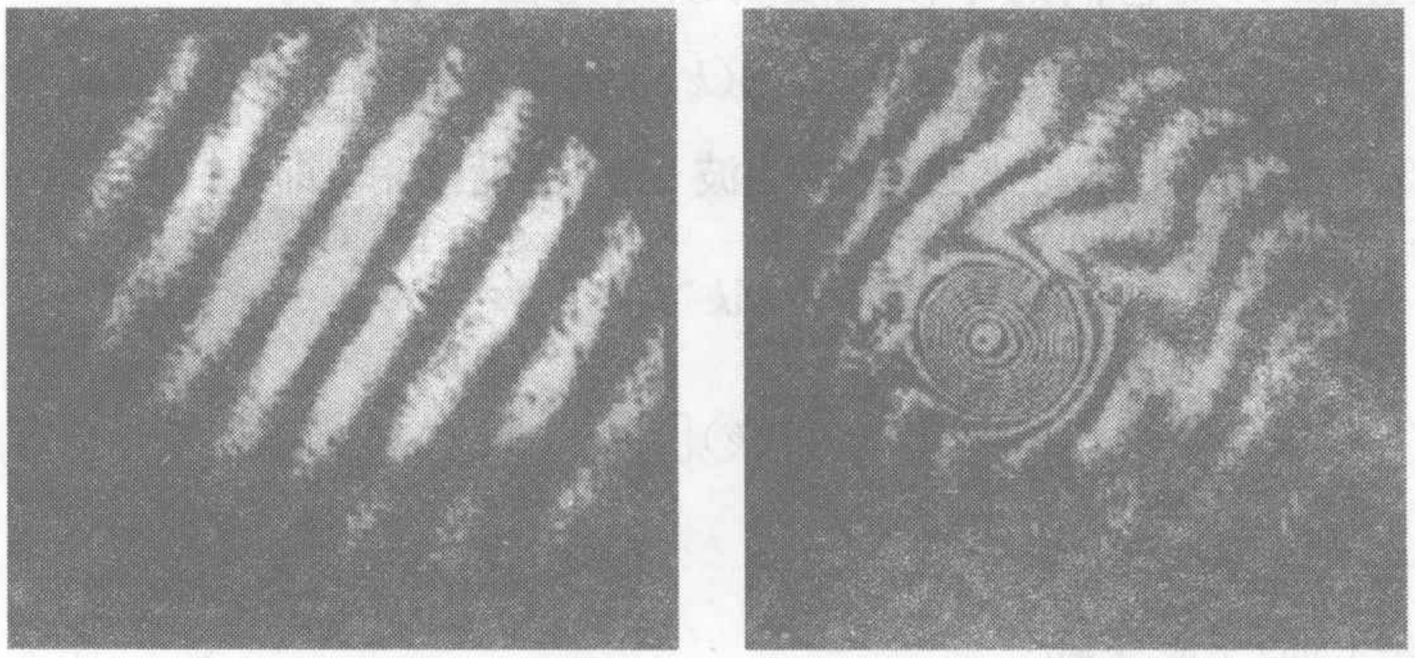


图 5.5.9 马赫-曾德尔干涉仪干涉花样

5.5.3　干涉滤波片

利用薄膜干涉相长或干涉相消原理，可以对某些波长增透或增反. 如在玻璃板上镀一层薄膜(图 5.5.10)，则入射光中满足干涉相长的波长被反射，其他的波长则由于干涉而减弱，可以只让特定波长的光被反射，起到滤光的作用. 也可以在光学仪器的镜头表面镀(涂)膜，使得透射光由于干涉而得到增强，这种膜称作增透膜. 现在使用的照相机、望远镜、显微镜，由于都采用了较复杂的透镜组，透镜较多，每个透镜的表面都会反射一部分光，因而造成的光能量损失比较严重. 在每一个镜头的表面镀上增透膜，可以大大降低入射光能量的损失.

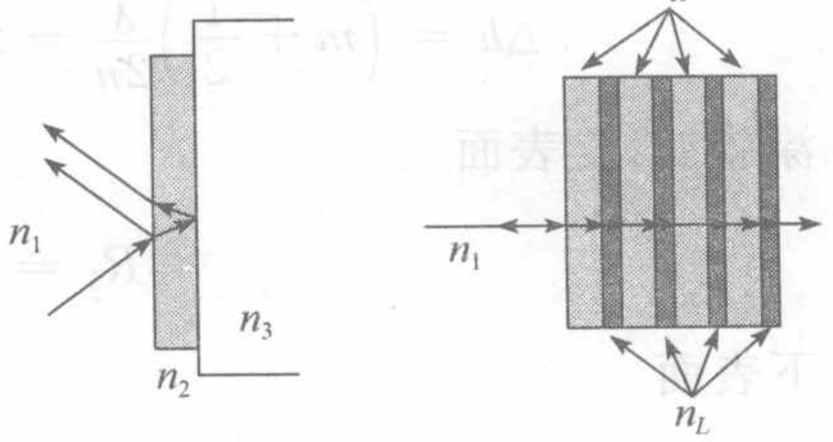


图 5.5.10　干涉滤波片

由于仅有一层增透膜或增反膜还不能充分起作用，所以现在往往采用多层膜. 将光学常数(折射率)不同的材料按一定的次序和厚度镀在镜头表面，其效果比仅有一层薄膜要好得多.

例 5.5.2　为了减少玻璃的反射，经常的做法是在玻璃表面上涂一层很薄的透明薄膜(增透膜). 其结构如图 5.5.11 所示，膜上方为空气($n_1=1$)，膜下方是玻璃($n_2=1.5$)，膜的折射率 $n=1.3$.

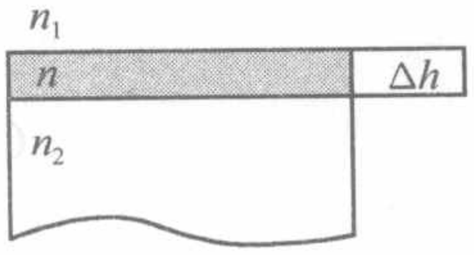


图 5.5.11　例题 5.5.2 图

(1) 不涂增透膜时，玻璃的光强反射率是多少？一个由六片透镜构成的镜头，其光强透过率为多少？

(2) 若想使波长为 600.0nm 的反射光减小到最小，应涂多厚的膜？涂膜后光强反射率为多少？

(3) 要想使反射光完全干涉相消，增透膜的折射率应取多少？

分析　涂膜后，由于在膜的上、下表面，反射光干涉相消，因而可以提高透过率. 透、反射率可以由菲涅耳公式计算. 但一般情况下，由于两列光的振幅不相等，所以不能完全相消. 只有膜的折射率满足一定条件时，才能使干涉完全相消，即两列光既有相反的相位、又有相同的光强(振幅).

解　(1) 光线由空气向玻璃正入射时，或从玻璃向空气正入射时，光强反射率为

$$R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=4\%$$

光透过 6 片透镜，即经过 12 个表面的反射，每个表面的透射率为

$$T=1-R=96\%$$

因而总的透射率为

$$T_{\text{total}}=T^{12}=0.96^{12}=0.607=60.7\%$$

(2) 由于膜的折射率 $n=1.3$,介于空气($n_1=1$)和玻璃($n_2=1.5$)之间,故没有半波损失,于是干涉相消的条件是

$$2n\Delta h=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

膜厚

$$\Delta h=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}=230.8\left(m+\frac{1}{2}\right)\text{nm},\quad m=0,1,2,\cdots$$

涂膜后,上表面

$$R_1=\left(\frac{n_1-n}{n_1+n}\right)^2=1.7\%$$

下表面

$$R_2=\left(\frac{n_2-n}{n_2+n}\right)^2=0.5\%$$

(3) 此时应使两列反射光的振幅相等,即

$$E_1=\frac{n_1-n}{n_1+n}E_0,\quad E_2=\frac{2n_1}{n_1+n}\frac{n_2-n}{n_2+n}\frac{2n}{n_1+n}E_0$$

$$\left|\frac{n_1-n}{n_1+n}\right|=\left|\frac{2n_1}{n_1+n}\frac{n_2-n}{n_2+n}\frac{2n}{n_1+n}\right|$$

$$n^3-(4n_1-n_2)n^2+n_1(4n_2-n_1)n-n_1^2n_2=0$$

或者

$$n^3+(4n_1+n_2)n^2-n_1(4n_2+n_1)n-n_1^2n_2=0$$

化简为

$$n^3-2.5n^2+5n-1.5=0 \tag{1}$$

及

$$n^3+5.5n^2-7n-1.5=0 \tag{2}$$

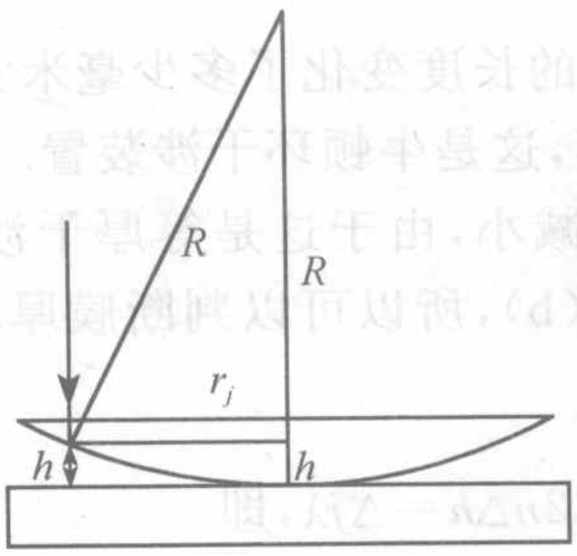
在 1～3 范围内,式(1)无合理解;式(2)解为 $n\approx1.22$.

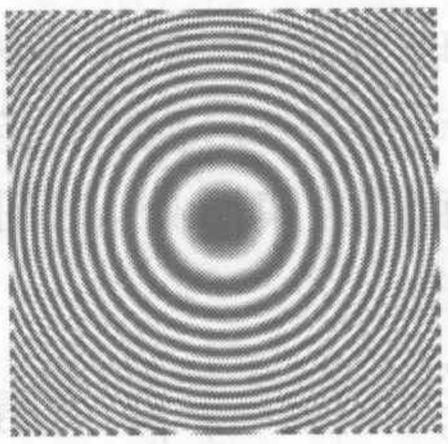
实际上,尚未发现 $n\approx1.22$ 的透明薄膜,使用氟化镁涂膜,其折射率为 1.38.

5.5.4 牛顿环

如图 5.5.12 所示,在一玻璃平板上放一平凸透镜,则两者之间就形成了一层空气薄膜.从上方垂直入射的光,由于分别被空气膜的上下两个表面反射,于是就产生了干涉.在空气膜的上表面或下表面观察,由于空气膜的形状取决于透镜球面的形状,这是一种等厚干涉装置,称作牛顿环(Newton ring)干涉.可以判断,干涉条纹的形状是一系列的同心圆环.这些圆环被称作牛顿环(圈).图 5.5.13 为实际的观察牛顿环装置的原理图.

观察反射光在空气膜上表面的干涉,一列在球面(玻璃—空气界面)被反射,没有半波损失;而另一列在平面(空气玻璃界面)被反射,有半波损失.于是亮条纹产生的条件为 $\Delta L=2h\pm\lambda/2=j\lambda$,$\Delta L$ 为光程差,即 $2h=j\lambda\pm\lambda/2$.设球面半径为 R,在





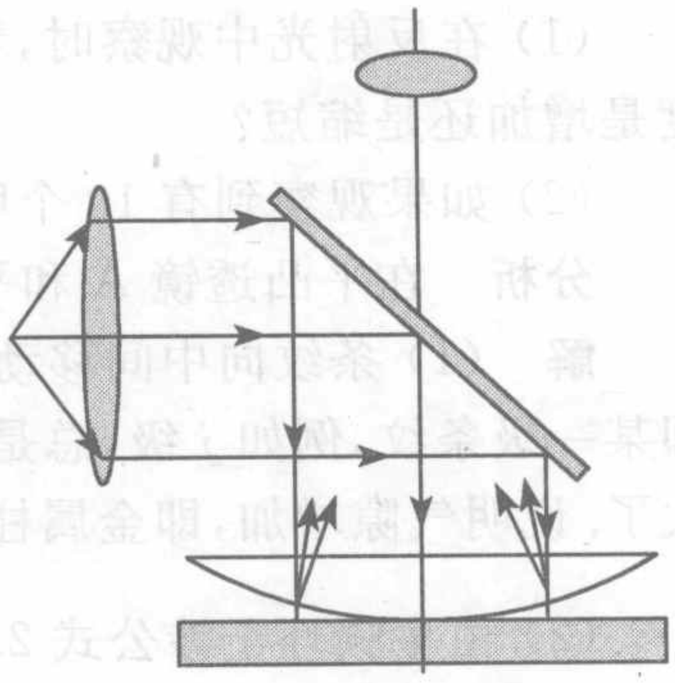


图 5.5.12　牛顿环的产生及干涉条纹　　图 5.5.13　牛顿环的观察装置

空气膜厚度为 h 处干涉条纹的半径为 r，由相交弦定理，则有 $h(2R-h)=r^2$，$2Rh-h^2=r^2$. 由于 $R\gg h$，$h=r^2/2R$，牛顿环半径为

$$r_j=\sqrt{(j+1/2)\lambda R},\quad j=0,1,2\cdots \tag{5.5.5}$$

对于透射光在空气膜下表面的干涉，一列直接透过，另一列在平面和球面间反射后透过，由于两次反射，无半波损失. 这种情况下，光程差为 $\Delta L=2h=j\lambda$，透射光牛顿环的半径为

$$r_j=\sqrt{j\lambda R},\quad j=0,1,2,3,\cdots \tag{5.5.6}$$

可利用式(5.5.5)、式(5.5.6)检验、测量球面透镜的质量和曲率半径 R 如图 5.5.14 所示.

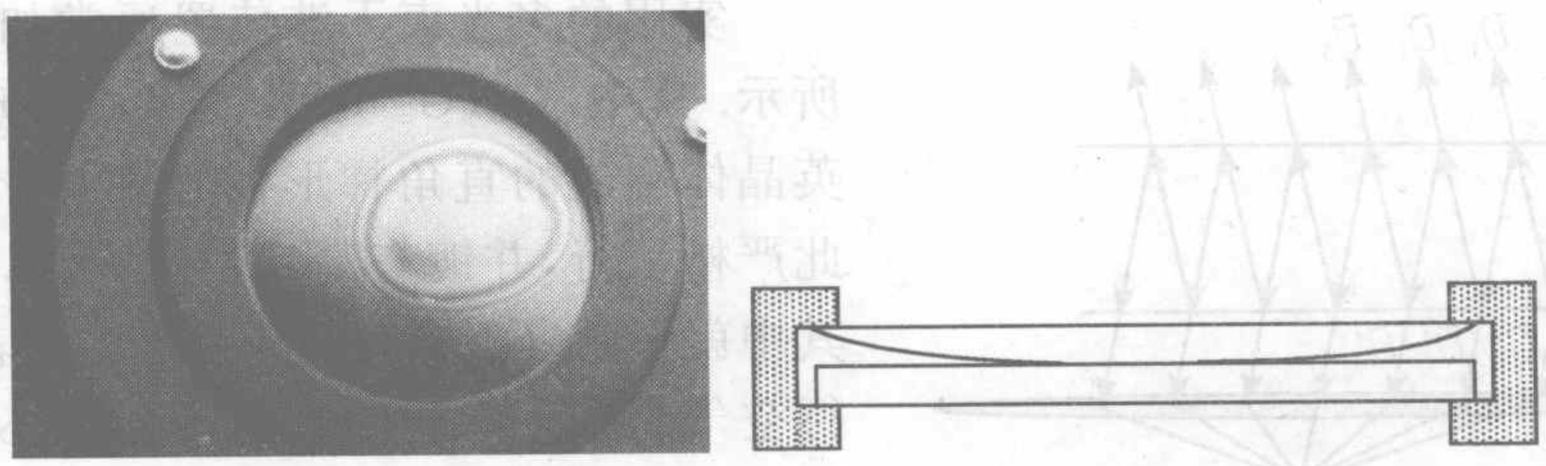


图 5.5.14　用牛顿环检验、测量球面透镜

例 5.5.3　如图 5.5.15 所示，A 为平凸透镜，B 为平板玻璃，C 为金属柱，D 为框架，A、B 之间留有气隙，而 A 被固结在框架的边缘上. 温度变化时，C 发生伸缩，而假设 A、B、D 都没有伸缩. 现用波长为 $\lambda=632.8\text{nm}$ 的激光垂直照射，试求：

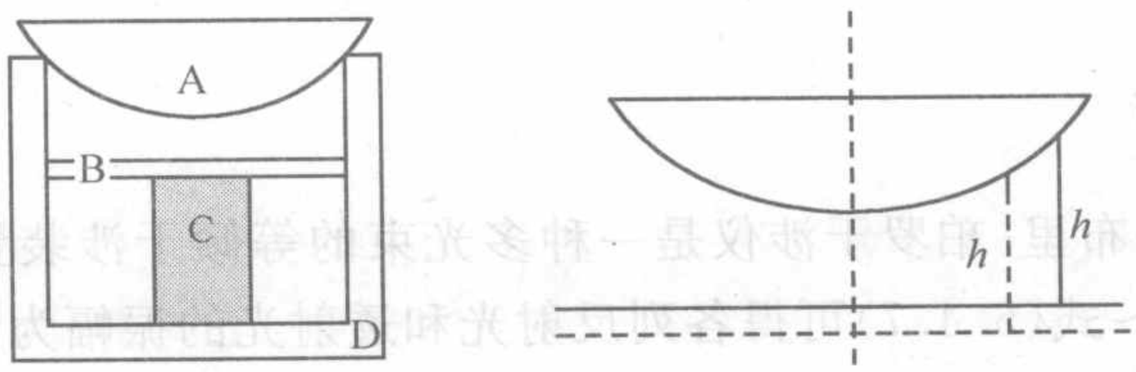


图 5.5.15　例 5.5.3 图

(1) 在反射光中观察时,看到牛顿环的条纹都移向中央,这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短?

(2) 如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失,C 的长度变化了多少毫米?

分析 在平凸透镜 A 和平板玻璃 B 之间,是空气膜,这是牛顿环干涉装置.

解 (1) 条纹向中间移动,即第 j 级干涉环的半径减小,由于这是等厚干涉,即某一级条纹,例如 j 级,总是处在相同的膜厚处,见图(b),所以可以判断膜厚增大了.说明气隙增加,即金属柱 C 缩短.

(2) 由牛顿环干涉公式 $2nh=\dfrac{nr_j^2}{R}=\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$,可得 $2n\Delta h=\Delta j\lambda$,即

$$\Delta h=\frac{\Delta j\lambda}{2n}=\frac{10\times 632.8}{2}\text{nm}=3164\text{nm}=3.164\mu\text{m}$$

5.6 多光束干涉——法布里-珀罗干涉仪

5.6.1 干涉装置

在薄膜干涉装置中,如果膜的两个表面对光的反射率很高,则各列反射光的强度相差不是很大,这时,除了第 1、第 2 列之外,其他的反射波列对干涉的贡献就不可忽略;同样,所有的透射波列之间,也会产生明显的干涉.因而,在这种情况下,就必须计算多光束的干涉(multiple beam interference).

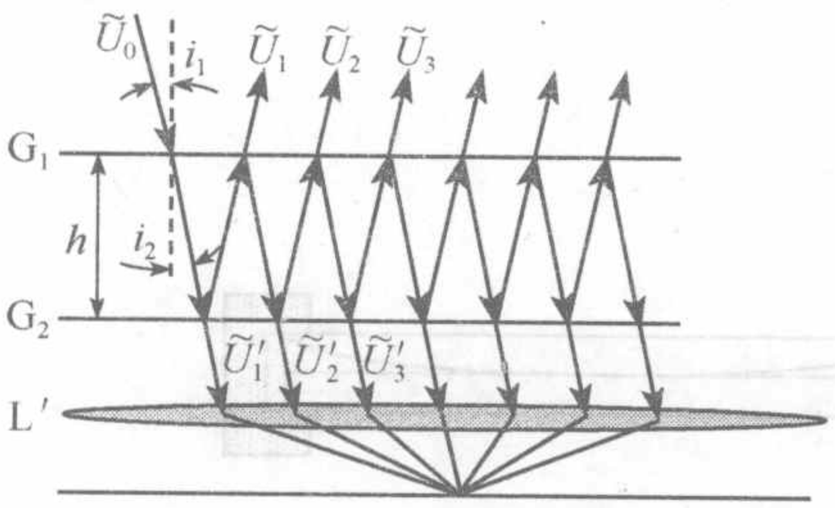


图 5.6.1 法布里-珀罗干涉仪

实用的多光束干涉装置通常如图 5.6.1 所示.其中,G_1、G_2 是两块用光学玻璃或石英晶体制成的直角梯形,相对的两个表面彼此严格平行,并镀有高反射率薄膜.这样,在其中就形成了一个具有高反射率表面的平行空气薄膜.经过准直的平行光从一端射入,在另一端就可以得到相干的平行波列.这种装置称作法布里-珀罗干涉仪(Fabry-Perot interferometer).干涉仪中,两反射面 G_1、G_2 的间距是可以进行精确地调整的.如果 G_1、G_2 的间距是固定不变的,则被称作法布里-珀罗标准具,用来对长度进行精确的标定.

5.6.2 光强分布

容易判断,法布里-珀罗干涉仪是一种多光束的等倾干涉装置,条纹为同心圆环.由式(5.4.5)~式(5.4.7)可得各列反射光和透射光的振幅为(图 5.6.2)

第一列反射光的振幅为 $A_1=Ar$,$n>1$ 时,$A_n=Ar^{2n-3}(1-r^2)$;而透射光的振幅为

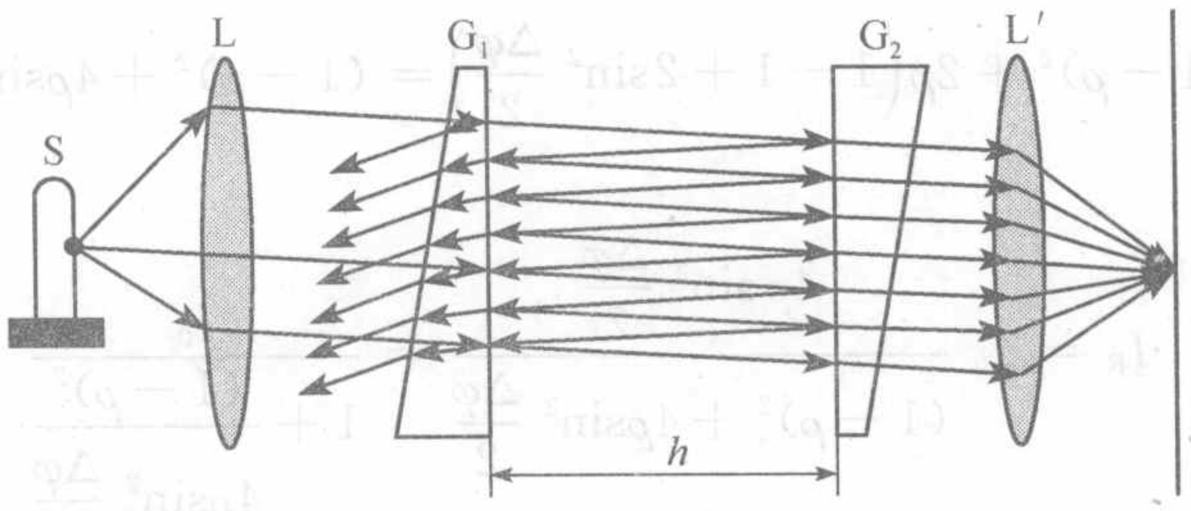


图 5.6.2　多光束相干叠加

$$A'_n = Ar^{2(n-1)}(1-r^2)$$

除第一列反射光要计入额外光程(±λ/2,半波损失)外,其余相邻两列反射光间有相同光程差,相邻两列透射光也有相同光程差和相位差,为

$$\Delta L = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i_1} \tag{5.6.1}$$

相位差为

$$\Delta\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L \tag{5.6.2}$$

设在入射点处的相位为 φ_0,则第一列反射光的相位为 $\varphi_0+\pi$,第 n 列反射光的相位为 $\varphi_0+(n-1)\Delta\varphi$,即有

$$\widetilde{U}_1 = A_1 e^{i(\pi+\varphi_0)} = Are^{i(\pi+\varphi_0)} = A\rho^{1/2}e^{i(\varphi_0+\pi)} \tag{5.6.3}$$

其中,$\rho=|r|^2=|r'|^2$,为对光强的反射率.

$$\widetilde{U}_n = Ar^{2n-3}(1-r^2)e^{i[\varphi_0+(n-1)\Delta\varphi]} = A\rho^{n-3/2}(1-\rho)e^{i[\varphi_0+(n-1)\Delta\varphi]} \tag{5.6.4}$$

相干叠加

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_R &= A\rho^{1/2}e^{i(\varphi_0+\pi)} + \sum_{n=2}^{N} A\rho^{n-3/2}(1-\rho)e^{i[\varphi_0+(n-1)\Delta\varphi]} \\
&= -A\rho^{1/2}e^{i\varphi_0} + A\rho^{-1/2}(1-\rho)e^{i\varphi_0}\sum_{n=2}^{N}\rho^{n-1}e^{i(n-1)\Delta\varphi} \\
&= -A\rho^{1/2}e^{i\varphi_0} + A\rho^{-1/2}(1-\rho)e^{i\varphi_0}\sum_{n=1}^{N-1}\rho^{n}e^{in\Delta\varphi} \\
&= -A\rho^{1/2}e^{i\varphi_0} + A\rho^{-1/2}(1-\rho)e^{i\varphi_0}\frac{\rho e^{i\Delta\varphi}\left[1-\rho^{N-1}e^{(N-1)\Delta\varphi}\right]}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}} \\
&\overset{N\to\infty}{=} A\rho^{1/2}e^{i\varphi_0}\left[-1+\frac{(1-\rho)e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}}\right] = A\rho^{1/2}e^{i\varphi_0}\left(\frac{-1+e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}}\right)
\end{aligned}$$

$$I_R = \widetilde{U}_R\widetilde{U}_R^* = A^2\rho\left(\frac{-1+e^{i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{i\Delta\varphi}}\right)\left(\frac{-1+e^{-i\Delta\varphi}}{1-\rho e^{-i\Delta\varphi}}\right)$$

$$= A^2\rho\frac{1-e^{i\Delta\varphi}-e^{-i\Delta\varphi}+1}{1-\rho(e^{i\Delta\varphi}-e^{-i\Delta\varphi})+\rho^2} = \frac{2A^2\rho(1-\cos\Delta\varphi)}{1-2\rho\cos\Delta\varphi+\rho^2}$$

由于

$$1-\cos\Delta\varphi = 1-1+2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$1-2\rho\cos\Delta\varphi+\rho^2 = (1-\rho)^2+2\rho-2\rho\cos\Delta\varphi$$

$$= (1-\rho)^2 + 2\rho\left(1-1+2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = (1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

所以

$$I_R = I_0\frac{4\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{I_0}{1+\dfrac{(1-\rho)^2}{4\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}} \tag{5.6.5}$$

对于透射光，振幅可表示为 $A'_n = Ar^{2(n-1)}(1-r^2) = A(1-r^2)r^{-2}r^{2n} = A_0\rho^{n-1}$，其中 $A_0 = A(1-r^2)$，$\rho = r^2$ 为对光强的反射率.

第 n 列透射光的复振幅为

$$\widetilde{U}'_n = A_0\rho^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)\Delta\varphi]} \tag{5.6.6}$$

其中 φ'_0 为第一列透射波的相位. 相干叠加

$$\widetilde{U}_T = \sum_{n=1}^{N} A_0\rho^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi'_0+(n-1)\Delta\varphi]} = A_0\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'_0}\sum_{n=0}^{N-1}\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Delta\varphi}$$

$$= A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'_0}\frac{1-\rho^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\Delta\varphi}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\varphi}}$$

当 $N\to\infty$ 时，$\widetilde{U}_T = \dfrac{A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'_0}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\varphi}}$，则透射光强为

$$I_T = \widetilde{U}\widetilde{U}^* = \frac{A_0^2}{(1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\varphi})(1-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi})}$$

$$= \frac{{A_0}^2}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\varphi}-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\varphi}+\rho^2} = \frac{A_0^2}{1-2\rho\cos\Delta\varphi+\rho^2}$$

而 $A_0^2 = A^2(1-\rho)^2 = I_0(1-\rho)^2$，于是得到

$$I_T = \frac{I_0}{1+\dfrac{4\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{(1-\rho)^2}} \tag{5.6.7}$$

式(5.6.7)也可以利用反射光强分布公式(5.6.5)直接求得

$$I_T = I_0 - I_R = \frac{I_0}{1+\dfrac{4\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{(1-\rho)^2}}$$

在不同的反射率下，所得到的透射光强分布如图 5.6.3 所示. 将该图反过来，就是反射光的强度分布. 可以看出，当反射率较高时，透射光是一系列明亮细锐的同心圆环，而反射光的亮环较宽，暗环细锐. 反射、透射的干涉花样是互补的.

5.6.3 光波场特性

为了衡量干涉条纹的细锐程度，通常采用半值宽度(也称半峰半宽，half width at half maximum).

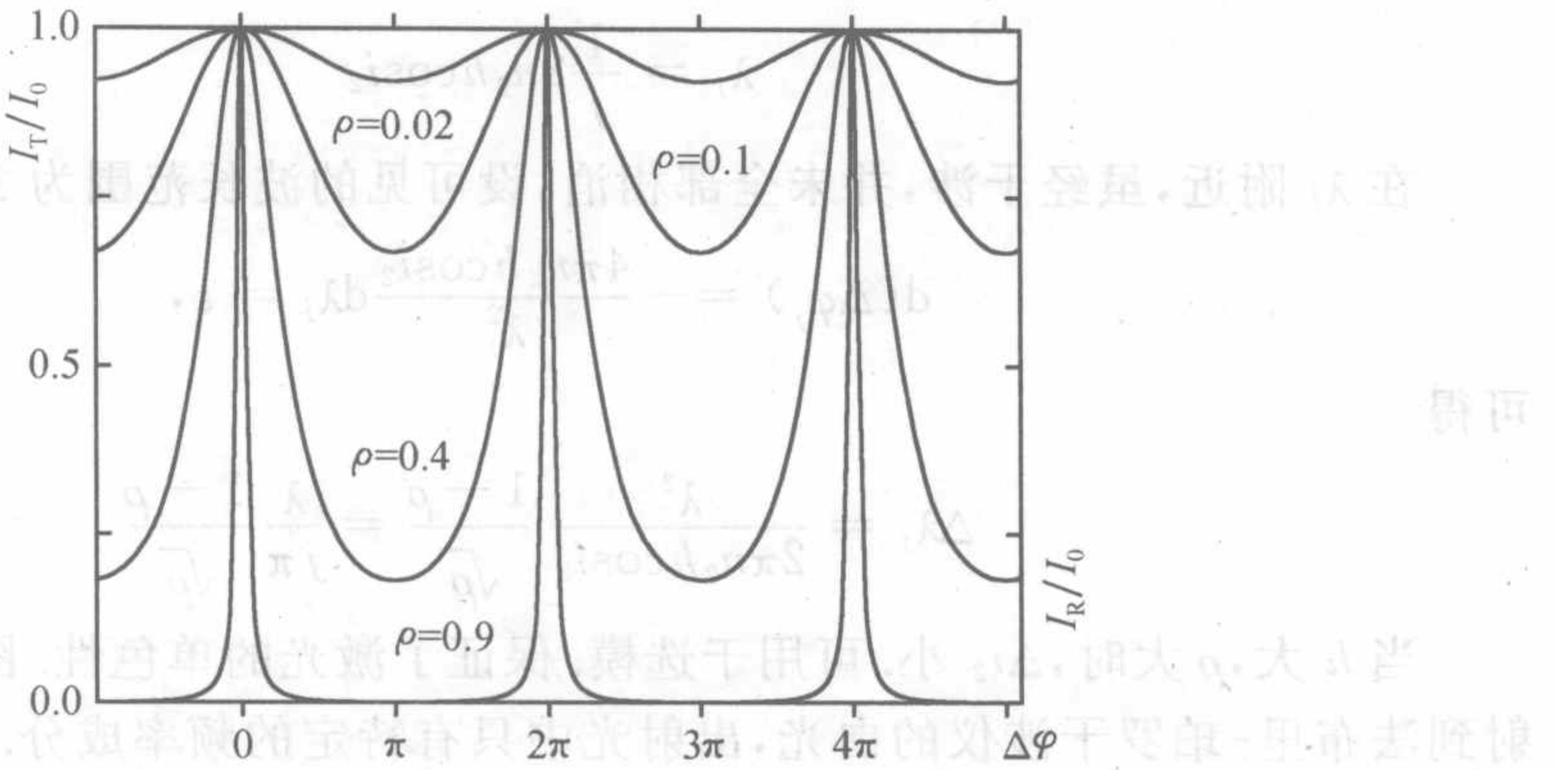


图 5.6.3　多光束干涉的透射光强与反射光强分布

半值宽度指光强降为峰值一半时峰的宽度，如图 5.6.4 所示. 在峰值 $2j\pi$ 附近，当 $\Delta\varphi$ 的数值改变 $\pm\varepsilon/2$ 时，$I_T/I_0=1/2$，可得

$$\frac{4\rho\sin^2\dfrac{2j\pi\pm\varepsilon}{2}}{(1-\rho)^2}=1$$

而

$$\frac{4\rho\sin^2\dfrac{\varepsilon}{4}}{(1-\rho)^2}\approx\frac{4\rho\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^2}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho\varepsilon^2}{4(1-\rho)^2}=1$$

得到

$$\varepsilon=\frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}} \tag{5.6.8}$$

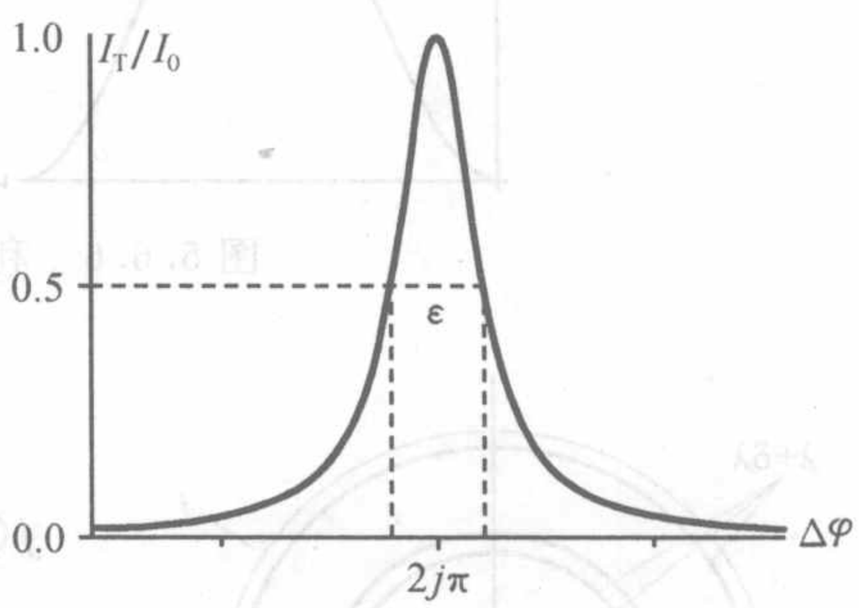


图 5.6.4　半值宽度

ρ 越大，ε 越小，条纹越锐.

1. 条纹角分布

$$\Delta\varphi_j=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L=4\pi n_2 h\cos i_2/\lambda,\quad \mathrm{d}(\Delta\varphi_j)=-\frac{4\pi n_2 h\sin i_2}{\lambda}\mathrm{d}i_2$$

当 $\mathrm{d}(\Delta\varphi_j)=\varepsilon$ 时，$\mathrm{d}i_2=\Delta i_j$，条纹半角宽度

$$\Delta i_j=\frac{\lambda\varepsilon}{4\pi n_2 h\sin i_2}=\frac{\lambda}{2\pi n_2 h\sin i_2}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{5.6.9}$$

ρ 大，h 长，Δi 小，条纹锐，中央条纹宽，周围细锐. 图 5.6.5 为法布里-珀罗干涉仪的条纹.

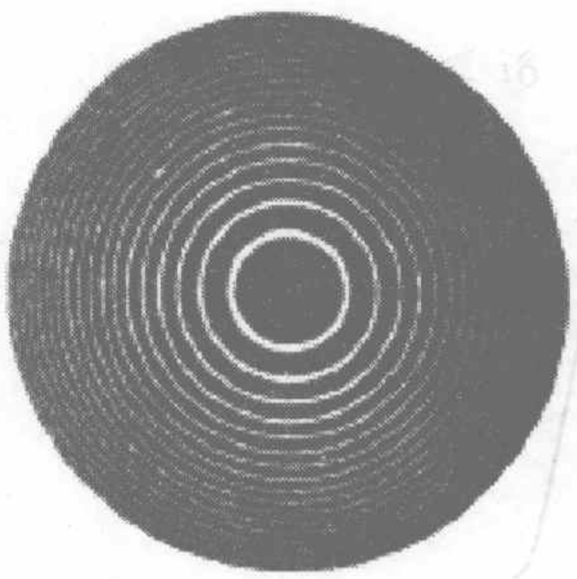


图 5.6.5　法布里-珀罗干涉仪的细锐的条纹

而普通的薄膜干涉，即双光束干涉时，$\Delta i_2=\lambda/4n_2 h\sin i_2$，可见法布里-珀罗条纹锐得多，即出射的条纹发散角很小，保证了激光的平行性.

2. 频率(波长)分布

只有特殊的波长满足极大条件，即

$$\lambda_j = \frac{1}{j} 2n_2 h\cos i_2 \tag{5.6.10}$$

在 λ_j 附近，虽经干涉，并未全部相消，设可见的波长范围为 $\Delta\lambda_j$，则有

$$\mathrm{d}(\Delta\varphi_j) = -\frac{4\pi n_2 h\cos i_2}{\lambda_j^2}\mathrm{d}\lambda_j = \varepsilon,$$

可得

$$\Delta\lambda_j = \frac{\lambda^2}{2\pi n_2 h\cos i_2}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{5.6.11}$$

当 h 大，ρ 大时，Δi_2 小. 可用于选模. 保证了激光的单色性. 图 5.6.6 显示了入射到法布里-珀罗干涉仪的白光，出射光中只有特定的频率成分.

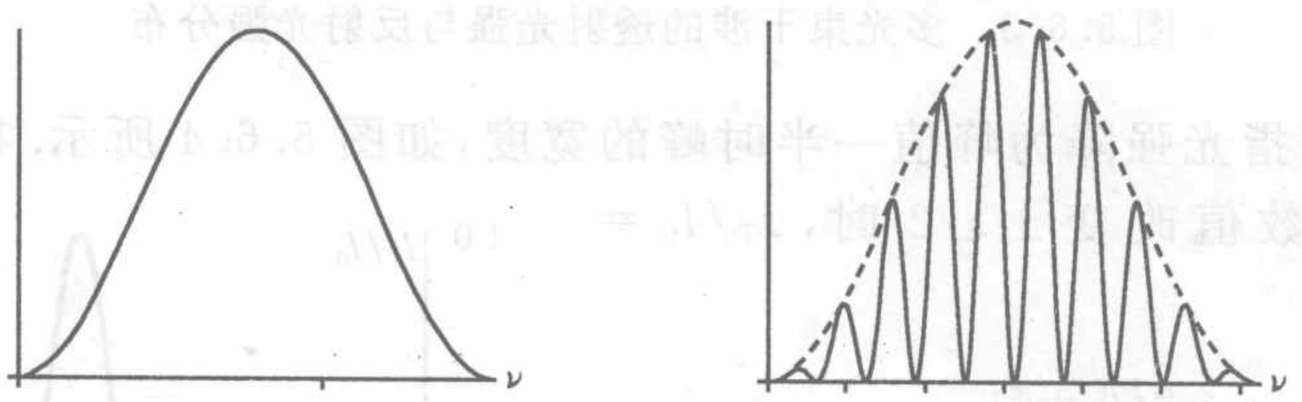


图 5.6.6 利用法布里-珀罗干腔选模

3. 光谱的精细结构分析

由 $2nh\cos i_j = j\lambda$，得到 $2nh\cos(i_j+\delta i) = j(\lambda+\delta\lambda)$，即 $-2nh\sin i_j \mathrm{d}i_j = j\mathrm{d}\lambda$，所以波长改变引起的角度变化为 $\delta i = \dfrac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda$. 这就是波长差为 $\delta\lambda$ 的同一级亮条纹的角距离. 与薄膜干涉相同，但由于条纹锐得多，所以靠得很近的条纹也可以分辨清楚(图 5.6.7).

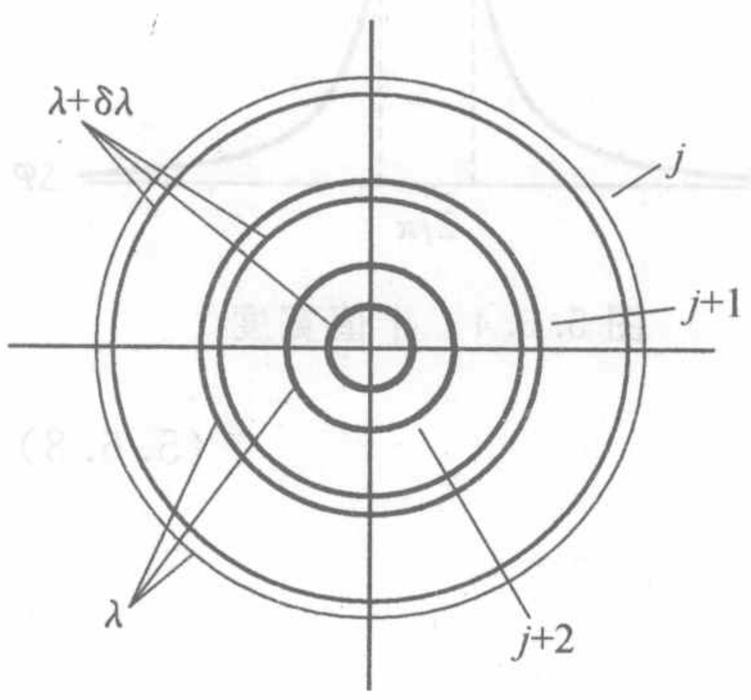


图 5.6.7 条纹分辨

当 $\delta i = \Delta i$ 时，即相邻的不同波长的两条纹的角距离等于每一个条纹的半角宽度时，为可以分辨的极限. 此为泰勒判据(图 5.6.8).

$$\delta i = \frac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda, \quad \Delta i = \frac{\lambda}{2\pi n_2 h\sin i_2}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}, \quad \delta i \geqslant \Delta i$$

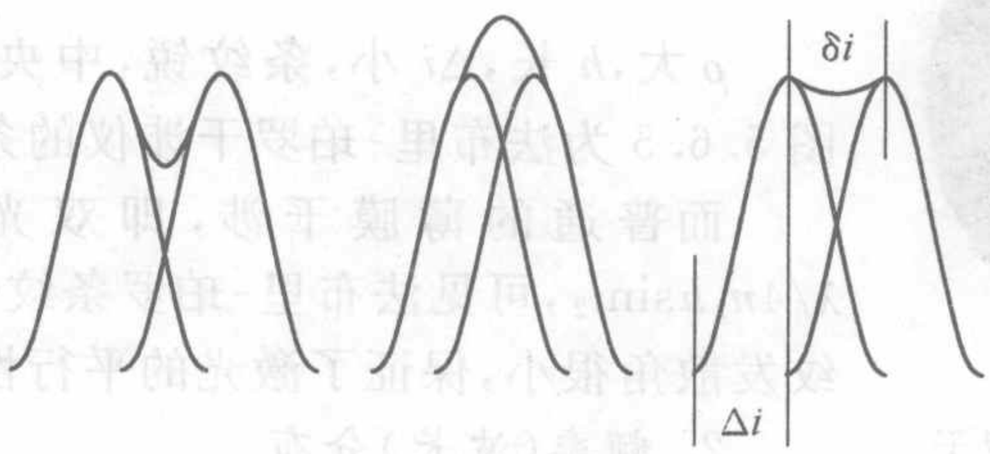


图 5.6.8 泰勒判据

因而

$$\frac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda}{2\pi n_2 h\sin i_2}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

即

$$\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

可得分辨最小波长间隔

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{5.6.12}$$

色分辨本领，即波长分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}j\pi \tag{5.6.13}$$

例 5.6.1　设法布里-珀罗腔(F-P 腔)长 5cm，用扩展光源做实验，光波波长 $\lambda=600.0\text{nm}$，问：

(1) 中心干涉级数是多少？

(2) 在倾角为 1°附近，干涉环的半角宽度是多少？(设反射率 $R=0.98$).

(3) 如果用该 F-P 腔分辨谱线，其色分辨本领有多大？可分辨的最小波长间隔是多少？

(4) 如果用其对白光进行选频，透射最强的谱线有几条？每条的谱线宽度是多少？

(5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5}(相对值)，则谱线的漂移量是多少？

分析　法布里-珀罗干涉仪是一种多光束干涉装置，其透射光强为

$$I_T = \frac{I_0}{1+\dfrac{4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-R)^2}} \tag{1}$$

其中，R 为光强反射率，δ 为相邻两列光的相位差，有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos i \tag{2}$$

$\delta=2j\pi$ 时为亮条纹出现的位置.

解　(1) 中心处，$i=0$，由式(2)，得

$$2h = j_0\lambda$$

中心干涉级数

$$j_0 = \frac{2h}{\lambda} = \frac{2\times 5\times 10^4\,\mu\text{m}}{0.6\,\mu\text{m}} = 166666$$

(2) 半角宽度为

$$\Delta i_j = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{(1-0.98)\times 0.6}{2\pi\times 5\times 10^4\sin 1^\circ\sqrt{0.98}} = 2.21\times 10^{-6}$$

(3) 色分辨本领为

$$A=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}j\pi=\frac{\sqrt{0.98}}{1-0.98}\times 16666\pi=2.59\times 10^{7}$$

可分辨的最小波长间隔是

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{A}=\frac{600}{2.59\times 10^{6}}=2.32\times 10^{-5}(\text{nm})$$

(4) $\lambda=\frac{1}{j}2nh$, $j=\frac{2nh}{\lambda}=131578\sim 250000$, 共 118422 条

$$\Delta\lambda_j=\frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

或

$$\Delta\nu_j=\frac{c}{\pi j\lambda_j}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=\frac{c}{2n\pi h}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=1.93\times 10^{7}\,\text{Hz}$$

(5) 由 $2h=j_0\lambda$, 得到 $2\Delta h=j_0\Delta\lambda=\frac{2h}{\lambda}\Delta\lambda$, 即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta h}{h},$$

因而

$$\Delta\lambda=\lambda\frac{\Delta h}{h}=600\times 10^{-5}\,\text{nm}=6\times 10^{-3}\,\text{nm}$$

或者

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta h}{h}=\frac{600\times 10^{-5}}{600.0}=1\times 10^{-5}$$

5.7 光的空间相干性与时间相干性概论

在前面的各个部分, 凡是涉及光的叠加, 通常采用相干叠加或非相干叠加的方法进行处理. 例如, 对于两列光波, 如果是相干的, 则叠加之后干涉项 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi\neq 0$; 如果是非相干的, 则干涉项 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi=0$. 或者说, 在数学处理上, 对于相干光, 叠加时复振幅相加, $\tilde{U}(\boldsymbol{r})=\tilde{U}_1(\boldsymbol{r})+\tilde{U}_2(\boldsymbol{r})$, $|\tilde{U}(\boldsymbol{r})|^2$ 的交叉项 $\tilde{U}_1(\boldsymbol{r})\tilde{U}_2^*(\boldsymbol{r})+\tilde{U}_1^*(\boldsymbol{r})\tilde{U}_2(\boldsymbol{r})$就是干涉项; 而对于非相干光, 由于干涉项为零, 叠加时光强直接相加, $I(\boldsymbol{r})=I_1(\boldsymbol{r})+I_2(\boldsymbol{r})$.

上述对于光的相干性作简单分类, 仅仅是为了数学处理上的方便. 只是两种极端的特例.

判断光是否相干的依据是本书 2.3.6 节所列出的三个条件. 满足这三个条件的光, 则是相干光, 或完全相干光; 不满足这三个条件的光, 被称作非相干光, 或完全非相干光. 相干光的三个条件是非常严格的, 而实际的光波通常都不能满足, 也就是说, 实际的光源和光波场都不是严格相干的, 但也能产生干涉. 例如, 太阳光、

或普通光源发出的光，经过杨氏双孔或双缝后，也能在接收屏上产生较明显的干涉条纹. 那么，这些实际存在的、能够产生干涉的、又不严格满足相干条件的光，则被称作部分相干光.

5.7.1　光波场的空间相干性

1. 光源宽度对干涉条纹可见度的影响

在杨氏干涉装置中，如果 S 是点光源，那么，从理论上说，该光源所有的发光中心都处于空间的一个几何点上. 则 S 发出的每一列光波，都是单色(或准单色波)，经过双孔或双缝后，就分成了两个相干的部分，则两部分是严格相干的，因而可以产生确定的干涉条纹.

而实际上，光源都有一定的空间大小，其中含有大量的发光原子(发光中心)，通常，分开一定距离(只要该距离超过光的波长)的两个发光中心之间是没有任何关联的，即它们发光的过程相互独立，因而发出的光波是非相干的. 如图 5.7.1 所示的在扩展光源上的 O_1，O_2，O_3，…. 虽然任意一个中心发出的光波经过双孔或双缝之后都能在接收屏上由于干涉而形成干涉强度分布，但由于各个发光中心在光源 S 上的位置不同，因而在接收屏上所形成的干涉花样的位置也不同，如上述 O_1，O_2，O_3 所形成的干涉花样的零级条纹的位置分别为 P_1，P_2，P_3. 不同的光源所发出的光波之间，不能干涉，因而只能将干涉强度简单相加，也就是不同的干涉花样会相互重叠.

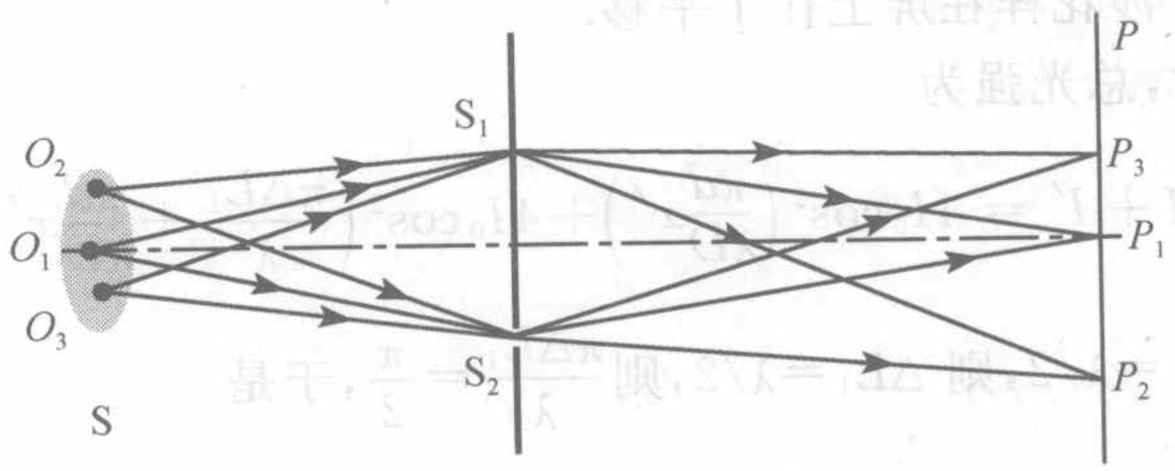


图 5.7.1　杨氏干涉中扩展光源的零级干涉条纹

上述物理过程可以如下的数学方法表述：

将在扩展光源上的任意两个不重合的发光点记作 O_1、O_2，记 $\tilde{U}_1(O_1,\boldsymbol{r})$ 为光源 O_1 发出的、经过第一个圆孔的光波在空间点 $\boldsymbol{r}$ 引起的复振幅，简记为 $\tilde{U}_1(O_1)$；$I(O_1,\boldsymbol{r})$ 为光源 O_1 发出的光波在空间点 $\boldsymbol{r}$ 的光强，简记作 $I(O_1)$，则

$$\tilde{U}(O_1)=\tilde{U}_1(O_1)+\tilde{U}_2(O_1)$$

$$\begin{aligned} I(O_1)&=\tilde{U}(O_1)\cdot\tilde{U}^*(O_1)\\ &=|\tilde{U}_1(O_1,\boldsymbol{r})|^2+|\tilde{U}_2(O_1)|^2+\tilde{U}_1(O_1)\tilde{U}_2^*(O_1)+\tilde{U}_1^*(O_1)\tilde{U}_2(O_1)\\ &=I_1(O_1)+I_2(O_1)+2\mathrm{Re}[\tilde{U}_1(O_1)\tilde{U}_2^*(O_1)] \end{aligned}$$

同样，点光源 O_2 在空间点 $\boldsymbol{r}$ 的复振幅和光强分别为

$$\tilde{U}(O_2)=\tilde{U}_1(O_2)+\tilde{U}_2(O_2)$$

$$I(O_2)=\tilde{U}(O_2)\cdot\tilde{U}^*(O_2)$$

$$=I_1(O_2)+I_2(O_2)+2\mathrm{Re}[\tilde{U}_1(O_2)\tilde{U}_2^*(O_2)]$$

总光强

$$I(\boldsymbol{r})=I(O_1,\boldsymbol{r})+I(O_2,\boldsymbol{r})$$

例 5.7.1 在杨氏双缝实验中，除了原有的光源缝 S 外，再在 S 的正上方开一狭缝 S'，如图 5.7.2 所示. 问：

(1) 若使 $S'S_2-S'S_1=\dfrac{\lambda}{2}$，试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布；

(2) 若 $S'S_2-S'S_1=\lambda$，S 和 S' 同时打开时，屏上的光强分布如何？

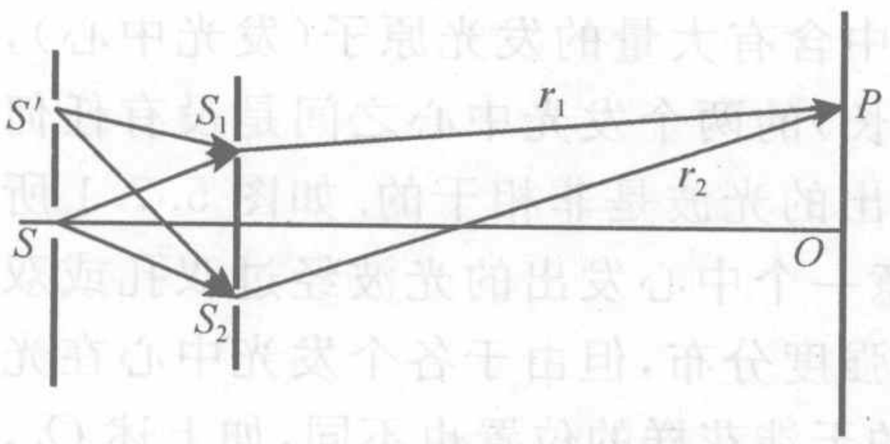


图 5.7.2 例 5.7.1 图

解 (1) 单独打开中央缝，光强为

$$I=4I_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

单独打开旁边缝，则计入双缝前的光程差 ΔL_1，两列光在 P 点的总相位差为

$$k\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta L_1+x'\frac{d}{D}\right)$$

光强为

$$I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

相当于 S 点的干涉花样在屏上作了平移.

两缝同时打开时，总光强为

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

如果 $S'S_2-S'S_1=\lambda/2$，则 $\Delta L_1=\lambda/2$，则 $\dfrac{\pi\Delta L_1}{\lambda}=\dfrac{\pi}{2}$，于是

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

$$=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)=4I_0$$

屏上没有干涉条纹.

(2) $S'S_2-S'S_1=\lambda$，$\Delta L_1=\lambda$，$\dfrac{\pi\Delta L_1}{\lambda}=\pi$，于是

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\pi+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)=8I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

屏上亮条纹强度增加 1 倍，即反衬度增加了 1 倍.

在杨氏干涉装置中，如果保持其他部分不变，而仅仅使光源 S 移动，则干涉条纹将作相应的移动. 如果有两个点光源 S，S'，其中 S 处在中心轴线上，而 S' 在轴线

之外，则每一个光源发出的光经过双缝后，各自形成一套干涉花样. 这两套干涉条纹相互交叠，如果一套的两条纹正好处在另一套的暗条纹位置，将会使总的干涉花样的反衬度大大降低，甚至无法观察到明显的明暗条纹分布，如图 5.7.3 所示. 这种情况就是我们要讨论的光波场的空间相干性的问题.

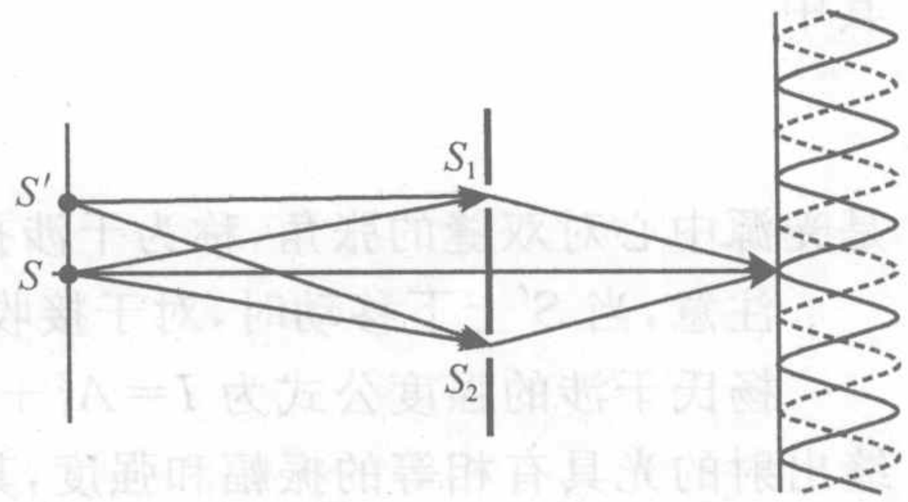


图 5.7.3　两个点光源的干涉条纹重叠，使可见度降低

在图 5.7.4 中，对于由 S' 点发出的光波，到达 P 点时，光程差包括两部分：

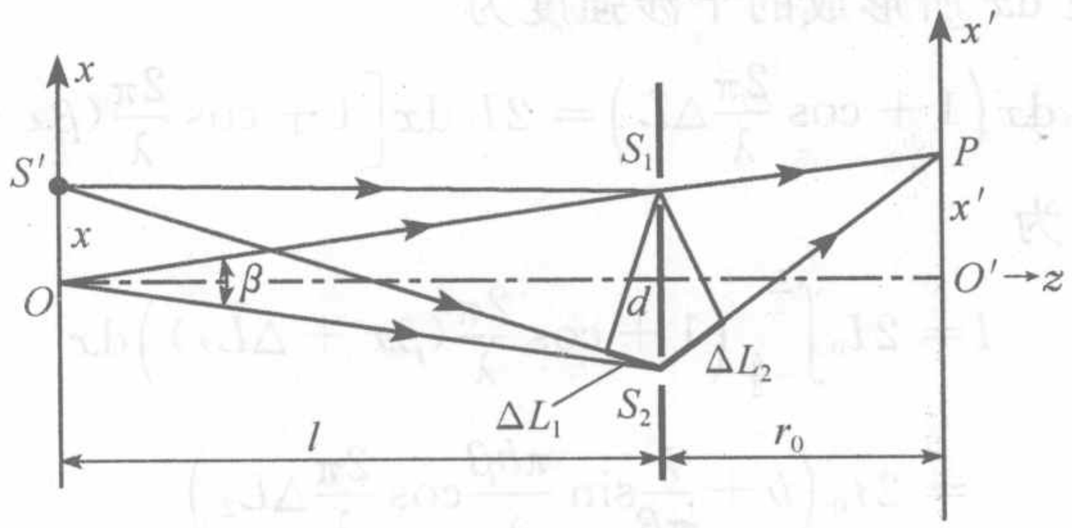


图 5.7.4　扩展光源上任一点光程的计算

在双缝之前，有

$$\Delta L_1 = \overline{S_2S'} - \overline{S_1S'};$$

在双缝之后，有

$$\Delta L_2 = \overline{PS_2} - \overline{PS_1}.$$

总的光程差为

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

当光源位置改变时，ΔL_1 变化，而 ΔL_2 保持不变.

设 S' 的坐标为 x，设光源具有较大的宽度，同时距双缝较远，如恒星等天体，则 $b, x \gg d$，同时 l 也很大，$l \gg b, x$，于是可得到

$$\overline{S'S_1} = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 + x^2 - xd + \frac{d^2}{4}} \approx \sqrt{l^2 + x^2 - xd}$$

$$\approx \sqrt{l^2 + x^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{xd}{l^2 + x^2}\right)$$

$$\overline{S'S_2} = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 + x^2 + xd + \frac{d^2}{4}}$$

$$\approx \sqrt{l^2 + x^2 + xd} \approx \sqrt{l^2 + x^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{xd}{l^2 + x^2}\right)$$

$$\Delta L_1 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = x\frac{d}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx x\frac{d}{l} = x\beta \tag{5.7.1}$$

其中

$$\beta = \frac{d}{l} \tag{5.7.2}$$

是光源中心对双缝的张角，称为干涉孔径(角).

注意，当 S' 上下移动时，对于接收屏上的固定点 P，ΔL_2 保持不变.

杨氏干涉的强度公式为 $I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$，设双缝宽度相等，即从双缝出射的光具有相等的振幅和强度，其中，$A_1 = A_2$，$I_1 = I_2 = I_0$，可以化为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi)$$

其中，I_0 为只打开一条狭缝时(没有干涉，同时忽略单缝的衍射)，接收屏上的光强.

如果有一宽度为 b 的扩展光源，即分布范围为 $(-b/2, b/2)$ 的一段光源，其中位于 x 附近的一段 $\mathrm{d}x$ 所形成的干涉强度为

$$\mathrm{d}I = 2I_0\mathrm{d}x\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right) = 2I_0\mathrm{d}x\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x + \Delta L_2)\right]$$

总的干涉场的强度为

$$\begin{aligned} I &= 2I_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x + \Delta L_2)\right)\mathrm{d}x \\ &= 2I_0\left(b + \frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_2\right) \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

在屏上形成干涉花样，最大光强和最小光强分别为

$$I_{\max} = 2I_0 b + 2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right| \tag{5.7.4}$$

$$I_{\min} = 2I_0 b - 2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right| \tag{5.7.5}$$

于是干涉花样的可见度为

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|}{\frac{\pi b\beta}{\lambda}} \tag{5.7.6}$$

接收屏上条纹可见度与光源宽度可用图 5.7.5 表示.

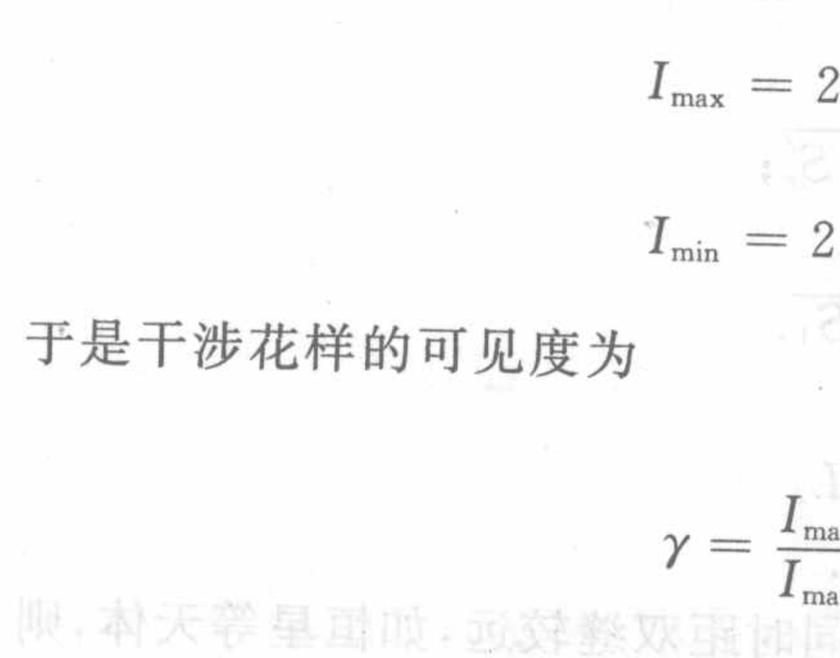


图 5.7.5 扩展光源杨氏干涉的可见度

将式(5.7.2)$\beta = d/l$ 代入式(5.7.6)，则得到

$$\gamma = \frac{\left|\sin\frac{\pi bd}{\lambda l}\right|}{\frac{\pi bd}{\lambda l}} \tag{5.7.7}$$

可以看出，随着光源宽度 b 或者双缝间距 d 的增大，干涉花样的可见度迅速减小.

实际上，由于每一条狭缝都有一定的宽度，记为 a，则在上述计算过程中，还应当记入每一缝的衍射效应，即在光强的表达式中还应该含有单元衍射因子

$$\widetilde{U}(x')=\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}=\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)}{\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'} \tag{5.7.8}$$

而

$$\Delta L_2=\frac{x}{r_0}d \tag{5.7.9}$$

于是接收屏上的光强分布为

$$I=2I_0\left(b+b\gamma\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{r_0}x'\right)\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)^2}$$

$$=2bI_0\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)^2}\left(1+\gamma\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{r_0}x'\right) \tag{5.7.10}$$

记

$$\bar{I}=2bI_0 \tag{5.7.11}$$

则

$$\frac{I}{\bar{I}}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda r_0}x'\right)^2}\left(1+\gamma\cos\frac{2\pi d}{\lambda r_0}x'\right) \tag{5.7.12}$$

实验测量与理论计算的结果如图 5.7.6 所示. 由图中可以看出，当双缝宽度 d 增大时，屏上某点 P 的光强会迅速减少；同样，在保持双缝宽度不变的条件下，随着 x' 的增大，光强也会迅速减小，即在屏的对称轴线附近，亮暗条纹的强度反差较大；而在远离对称轴线的区域，亮暗条纹的强度反差很小，难以分辨. 这其实就是我们在杨氏双缝干涉实验中看到的现象.

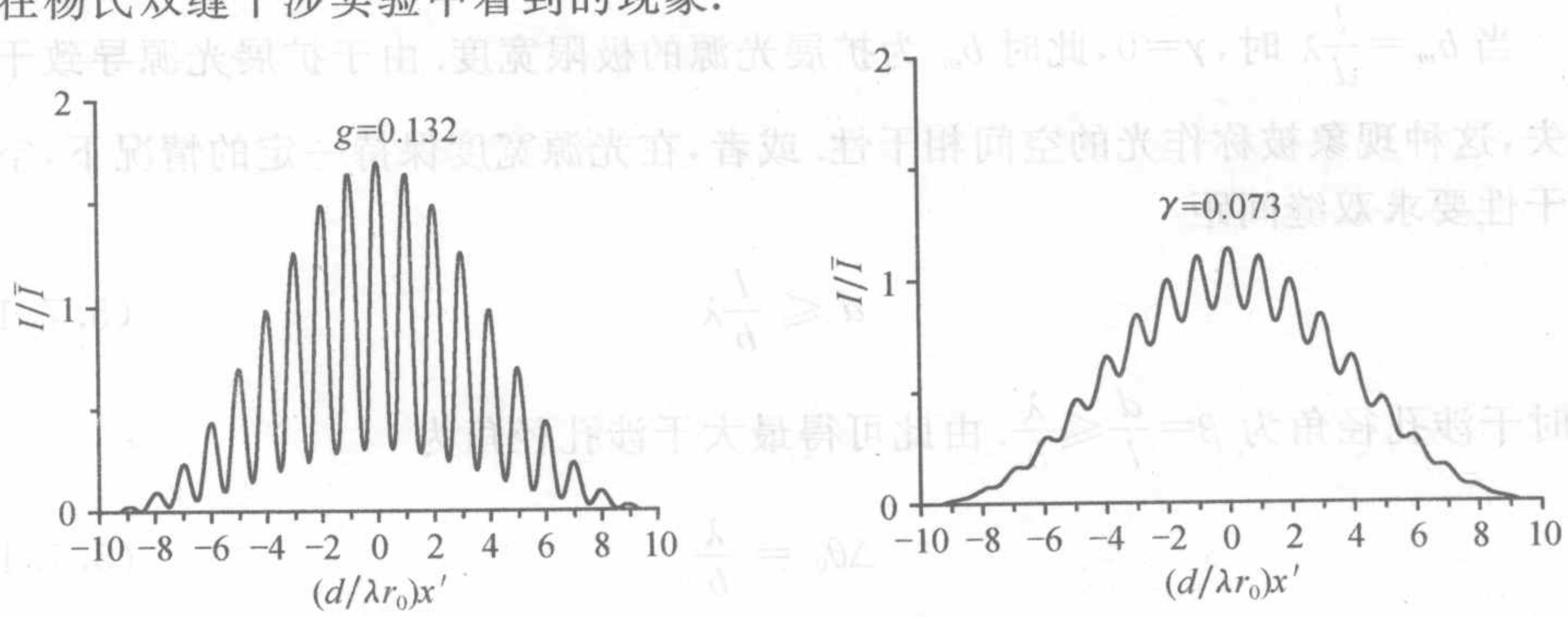


图 5.7.6　扩展光源杨氏干涉的强度分布

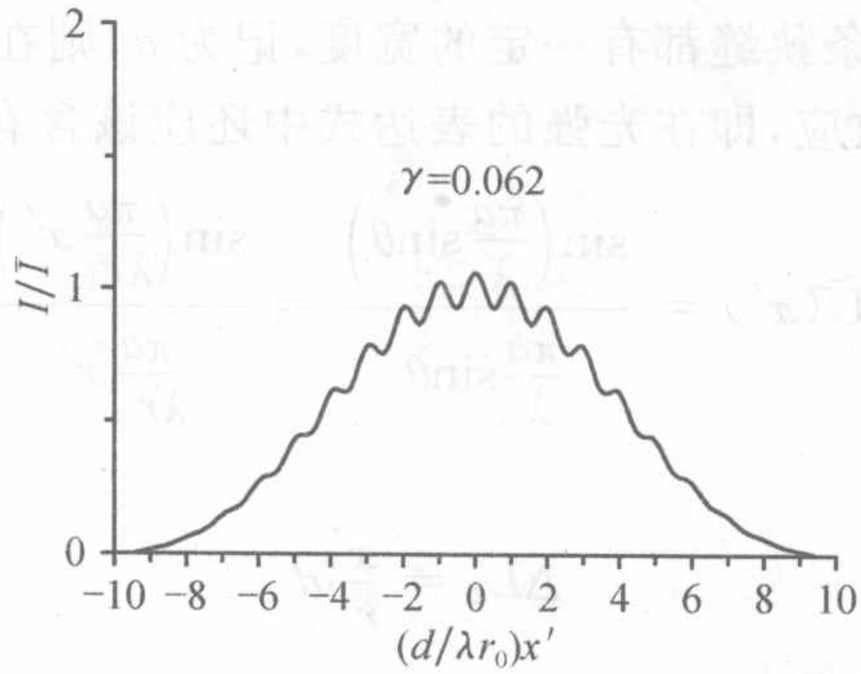


图 5.7.6 扩展光源杨氏干涉的强度分布(续)

2. 相干孔径与空间相干性

在扩展光源的条件下,杨氏干涉的可见度是一个振荡衰减的函数. 当$\frac{b\beta}{\lambda}=0$时,可见度函数取得极大值$\gamma=1$,相当于$b\ll\lambda$,即光源可视作一个几何点;随着$\frac{b\beta}{\lambda}$的增大,可见度迅速衰减,到$\frac{b\beta}{\lambda}=1$时,$\gamma=0$;此后,虽然随着$\frac{b\beta}{\lambda}$的增大,γ的值还会有一定幅度的起伏变化,但是数值很小,可见度很低. 所以,通常认为当$\frac{b\beta}{\lambda}\geqslant 1$时,干涉条纹的反衬度已经很小,这种情况下,就是由于光源在空间的扩展,导致了干涉的消失.

于是,能够产生明显干涉的条件是$\frac{b\beta}{\lambda}<1$,由此可以得到

$$b<\frac{\lambda}{\beta}=\frac{l}{d}\lambda \tag{5.7.13}$$

上式就是与双缝间距d对应的扩展光源的尺度范围,以保证有一定反衬度的干涉场可供观测.

当$b_m=\frac{l}{d}\lambda$时,$\gamma=0$,此时b_m为扩展光源的极限宽度. 由于扩展光源导致干涉消失,这种现象被称作光的空间相干性. 或者,在光源宽度保持一定的情况下,空间相干性要求双缝间距

$$d\leqslant\frac{l}{b}\lambda \tag{5.7.14}$$

此时干涉孔径角为$\beta=\frac{d}{l}\leqslant\frac{\lambda}{b}$. 由此可得最大干涉孔径角为

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{b} \tag{5.7.15}$$

$\Delta\theta_0$称作相干孔径(角). 只有处于这一角度范围之内的光,是相干的.

也可以将式(5.7.15)改写为

$$b\Delta\theta_0 = \lambda \tag{5.7.16}$$

称作空间相干性的反比公式. $\beta < \Delta\theta_0$ 才有干涉，即当双缝对光源中心的张角，即干涉孔径(角)，小于相干孔径(角)时，才有干涉，也就是说，当双缝处于相干孔径角之内时，可出现干涉，否则无干涉，如图 5.7.7 所示.

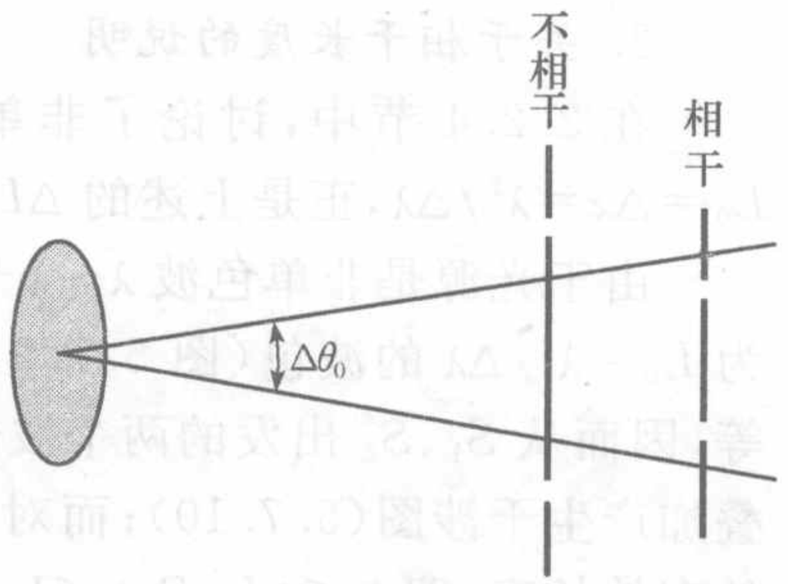


图 5.7.7　相干孔径的说明

有时也用面积表示空间相干的尺度，采用相干面积的概念. 相干面积的定义为

$$S = d^2 \tag{5.7.17}$$

5.7.2　光场的时间相干性

1. 非单色光的干涉

光的相干性要求各个波列是波长相等的单色光，而实际上，任何光源所发出的光，都具有一定的波长范围 $\Delta\lambda$，可以表示为 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$，$\Delta\lambda$ 称作带宽.

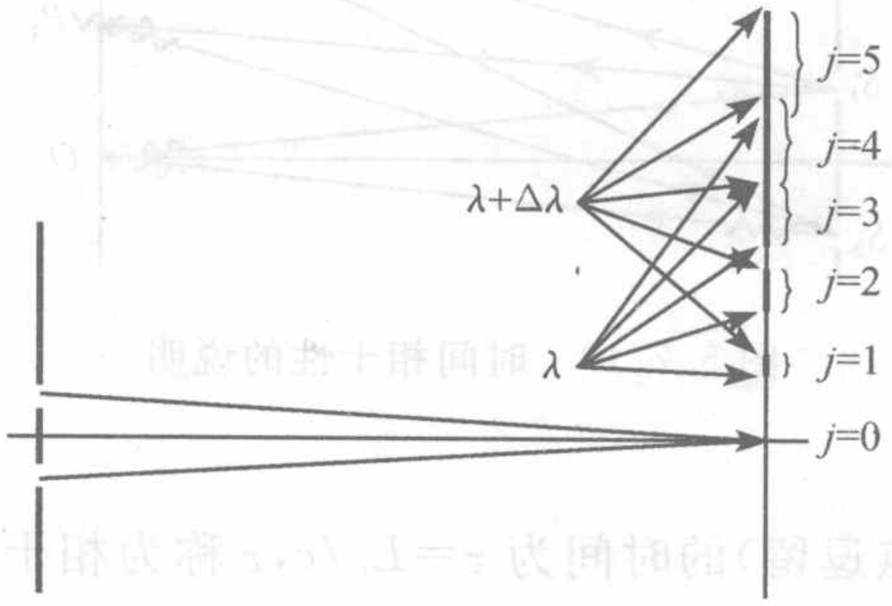


图 5.7.8　非单色光的杨氏干涉

光源的非单色性对干涉的影响可以用杨氏干涉加以说明.

入射光波长范围为 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$，其中的任一个波长成分都可以形成一套干涉条纹(图 5.7.8).

第 j 级亮条纹，波长为 λ 的成分的亮条纹中心在屏上位置为 $x = j\frac{r_0}{d}\lambda$；波长为 $\lambda + \Delta\lambda$ 的成分的亮条纹中心在屏上位置为 $x = j\frac{r_0}{d}(\lambda + \Delta\lambda)$.

除 $j = 0$ 级之外，由于入射光的波长由一定的范围 $\Delta\lambda$，则第 j 级亮纹在接收屏上扩展开来，为一条从 $x(\lambda) = j\frac{r_0}{d}\lambda$ 到 $x(\lambda + \Delta\lambda) = j\frac{r_0}{d}(\lambda + \Delta\lambda)$ 的宽带. 第 j 级亮条纹的宽度为 $\Delta x_j(\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda) = j\frac{r_0}{d}\Delta\lambda \propto j$. 干涉级数越高，其宽度也越大. 在某一个 j 值处，如果亮带的宽度足够大时，不同级次的条纹将会重叠. 也就是说，大于 j 的级次全部被亮纹覆盖，无法分辨，干涉消失.

当长波限 $\lambda + \Delta\lambda$ 的 j 级与短波限 λ 的 $j+1$ 级重合时，干涉消失. 即

$$j(\lambda + \Delta\lambda) = (j+1)\lambda$$

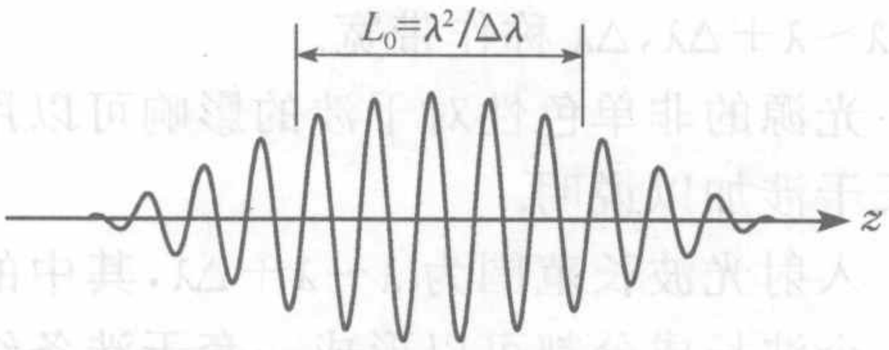
可得 $j = \lambda/\Delta\lambda$，最大相干级数.

对应的光程差 $\Delta L_{\max} = j(\lambda + \Delta\lambda) = (j+1)\lambda = \lambda^2/\Delta\lambda + \lambda \approx \lambda^2/\Delta\lambda$，被称作最大相干光程差，也叫相干长度.

2. 关于相干长度的说明

在 2.2.4 节中，讨论了非单色光叠加产生波包的问题. 波包的有效长度为 $L_0=\Delta z=\lambda^2/\Delta\lambda$，正是上述的 ΔL_{max}，于是对上述现象可以作如下解释：

由于光源是非单色波 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$，则就是非定态光波，在空间是一个有效长度为 $L_0=\lambda^2/\Delta\lambda$ 的波包(图 5.7.9). 对于屏上的中心点 O，到双缝 S_1、S_2 的光程相等，因而从 S_1、S_2 出发的两个波包总是同时达到 O 点，在 O 点总能相遇，于是相干叠加产生干涉图(5.7.10)；而对于 P_1 点，到双缝的光程差不相等，但是小于波包的有效长度，即 $0<\Delta L(P_1)<L_0$，于是，上述两个波包虽然是先后到达 P_1 点，但在该点能够相遇，于是也能相干叠加产生干涉；但是，对于 P_2 点，由于 $\Delta L(P_2)=L_0$，当第二个波包到达该点时，第一个波包恰好离开，则两者不能相遇，因而不能产生干涉，仅仅是将该点照明. P_2 点之外的所有区域，都是 $\Delta L(P)>L_0$ 而不能产生干涉. 正是由于波包到达空间某点时间上的差异，而是干涉不能发生，因而称作时间相干性.



带宽为$\Delta\lambda$的准单色波所形成的波包

图 5.7.9 非单色光叠加所形成的波包

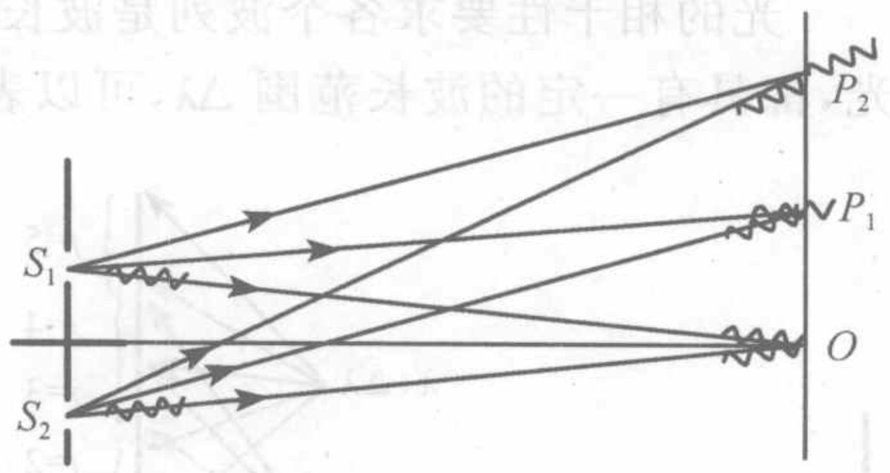


图 5.7.10 时间相干性的说明

3. 相干时间

一个波包经过空间某一点(或者说在该点逗留)的时间为 $\tau=L_0/c$，τ 称为相干时间(图 5.7.11). 而波包的长度可以用频率表示为 $L_0=\lambda^2/\Delta\lambda=\left(\frac{c}{v}\right)^2\Big/\left(\frac{c}{v^2}\Delta v\right)=c/\Delta v$，所以，$\tau=L_0/c=1/\Delta v$，即

$$\tau\Delta v=1 \tag{5.7.18}$$

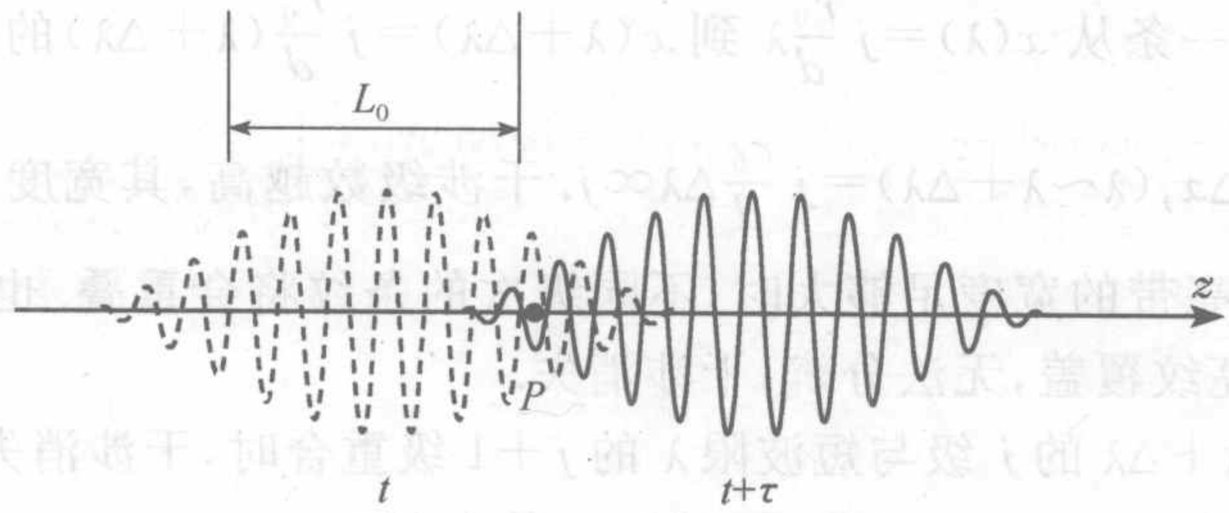


图 5.7.11 波包经过一个点所用的时间为相干时间

4. 时间相干性

波长范围为 Δk 的准单色波叠加所形成的波列的复振幅可以表示为

$$\widetilde{U}(z,t)=\left[A\frac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}$$

该波列的振幅为 $A\dfrac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_{\mathrm{g}}t)}$，与定态光波不同的是，它在空间某一点 z 所引起的扰动会随着时间 t 的增加而快速衰减. 可以从其振幅表达式计算出扰动衰减到一定程度，例如 1/2 或 1/e 所经历的时间 τ，在这一时间内，波列对该点的扰动有影响，超过这一时间，该点将不受波列的影响. 由于非单色波是一个有限长度的波包，也可以从波包在空间传播的角度看，当波包穿过该点后，对该点的影响将消失，那么这一时间其实就是相干时间 τ. 所以相干时间的物理意义也可以理解为有限波列在空间点所引起的扰动的有效持续时间.

空间中沿着波线有两个不同的点 P_1、P_2，两者间的距离为 r_{12}，如图 5.7.12 所示. 那么，容易理解，如果 $r_{12}<L_0$，这两点的扰动是由一个波列(实际是一个波包)所引起的，因而是相干的；反之，如果 $r_{12}>L_0$，则这两点的扰动不是由一个波列引起，因而是不相干的.

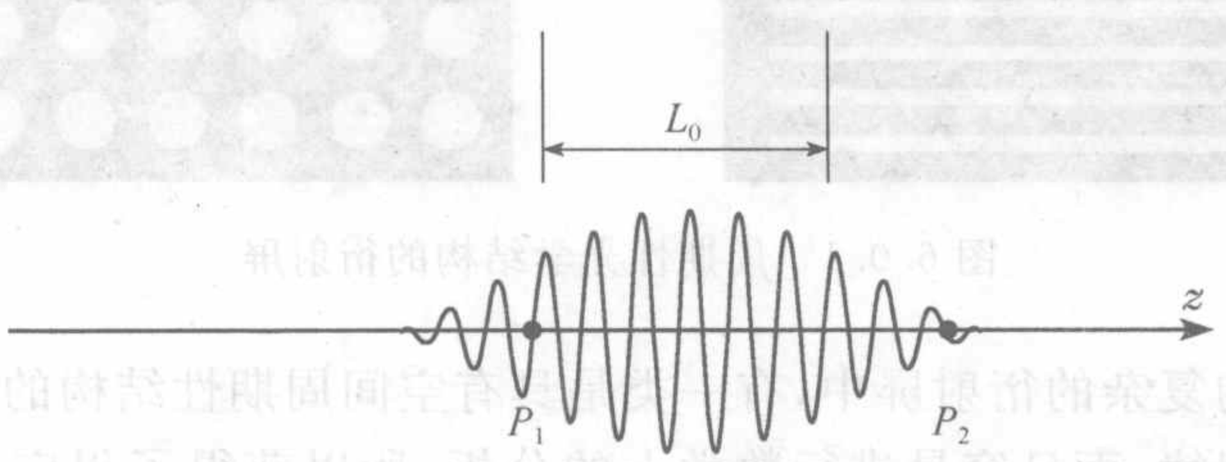


图 5.7.12　相干长度与相干时间

那么，无论从时间上看(对空间中的同一点)，还是从空间距离上看(在同一时刻)，相干时间 τ 和相干长度 L_0 都反映了光波场的时间相干性.

而式(5.7.18) $\tau\cdot\Delta v=1$ 被称为时间相干性的反比公式.

例 5.7.2　若用波长范围 $\lambda=589.0\sim589.6\mathrm{nm}$ 光照明 Michelson 干涉仪，首先调整干涉仪，得到清晰的干涉条纹，然后移动 M_1，干涉图样为什么会逐渐变得模糊？第一次视场中干涉条纹消失时，M_1 移动了多少距离？

分析　由于不同波长的干涉条纹分布不同，因而会相互重叠，导致反衬度下降，直至看不见条纹.

解　这是非单色光的时间相干性问题. 非单色波的相干长度，即波列有效长度为 $L=\dfrac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$，要求经过两镜的光波能够相遇，必须 $L\geqslant2h$，于是 $h\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}=0.289\mathrm{mm}$.

第6章　衍射光栅

如果光波在其传播路径上遇到某种障碍物，则将产生衍射，从一般意义上，光路上障碍物被定义为衍射屏. 衍射屏的作用，就是破坏原有自由空间的波前并重新构建波前，从而使光波场，即衍射场重新分布. 前面讨论的具有圆孔、单缝、矩孔等空间结构的障碍物都是衍射屏.

除了上述结构简单的衍射屏之外，还有许多空间结构比较复杂的衍射屏，如图 6.0.1 所示的具有多条狭缝或多个圆孔的衍射屏.

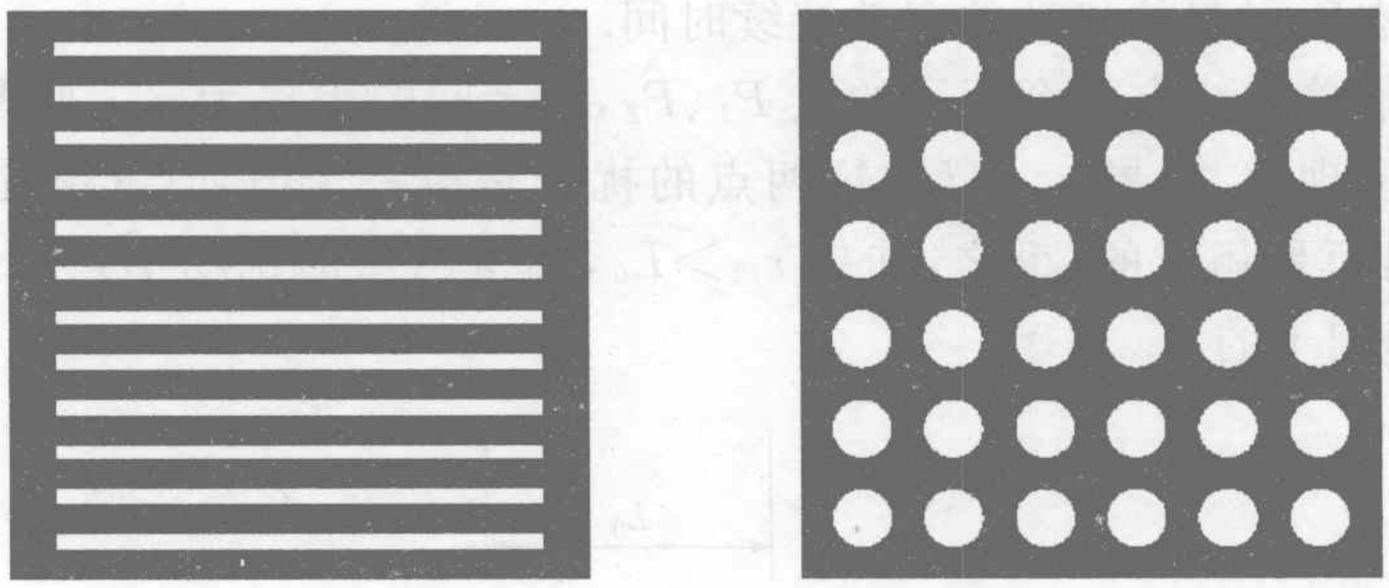


图 6.0.1　周期性光学结构的衍射屏

在种种结构复杂的衍射屏中，有一类是具有空间周期性结构的，其衍射的结果有比较简单的规律，而且容易进行数学上的分析，所以获得了很广泛的应用. 这种衍射屏就是衍射光栅.

衍射光栅指具有周期性光学结构的衍射屏.

衍射光栅可以具有反射或透射结构，可以按不同的透射或反射率分为黑白光栅、正弦光栅等. 这类光栅由于使透射光或反射光的振幅改变，因而统称为振幅光栅.

还有一类光栅，对于入射光而言，是全透或全反的，但是透射光或反射光的相位将被改变，因而被称作相位光栅.

6.1　多缝夫琅禾费衍射

在一个不透光的屏上，周期性地分布着一系列透光狭缝，这就是一种最简单的平面型透射式光栅，如图 6.1.1 所示. 相邻两缝的距离为 d，狭缝的宽度为 a，不透光部分的宽度为 b，则 $a+b=d$，d 是光栅的结构周期，称作光栅常数，如图 6.1.2 所示. 由于这类光栅仅在一个方向上具有周期性结构，所以是一种一维光栅.

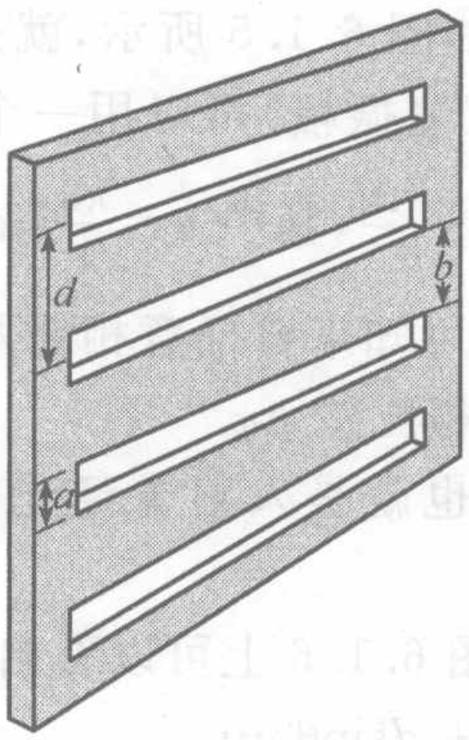


图 6.1.1　透射光栅及其周期

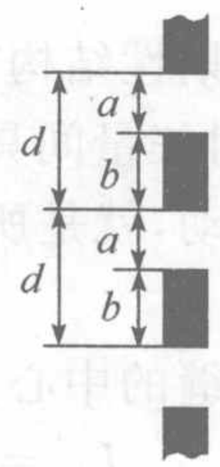


图 6.1.2　光栅常数

采用夫琅禾费衍射方式，平行光向光栅入射，光栅之后，有一焦距为 f 的会聚透镜，将衍射光会聚到位于透镜焦平面处的接收屏上.

6.1.1　衍射强度

在讨论单缝夫琅禾费衍射时，我们曾经指出，如果单缝沿着衍射屏平移，而衍射装置的其他部分保持不变，则衍射的强度分布将不发生改变，因为位于透镜焦平面上的光强只与衍射光的方向有关. 因而，对于多缝衍射屏来说，其中每一个单缝，即每一个衍射单元在接收屏上所产生的衍射条纹都是相同的.

但是，来自不同狭缝的光，由于是相干的，因而相互之间也要进行相干叠加，如图 6.1.3、图 6.1.4 所示. 这实际上是一种干涉过程，而不是简单的光强相加. 对于衍射光栅来说，既有来自每一个衍射单元的波列各自的衍射，也有来自不同单元（狭缝）的波列之间的干涉.

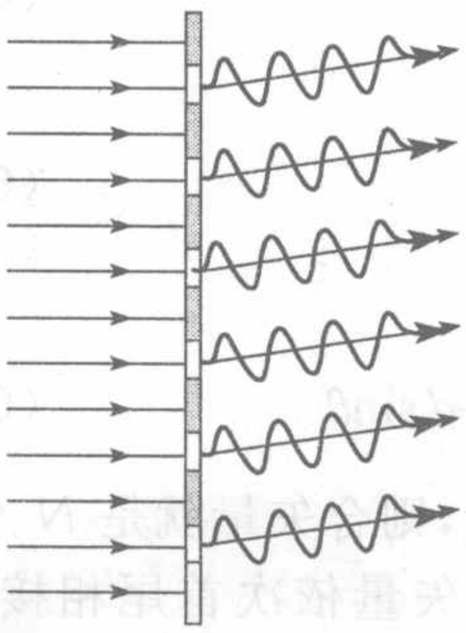


图 6.1.3　透过光栅的光波相干叠加

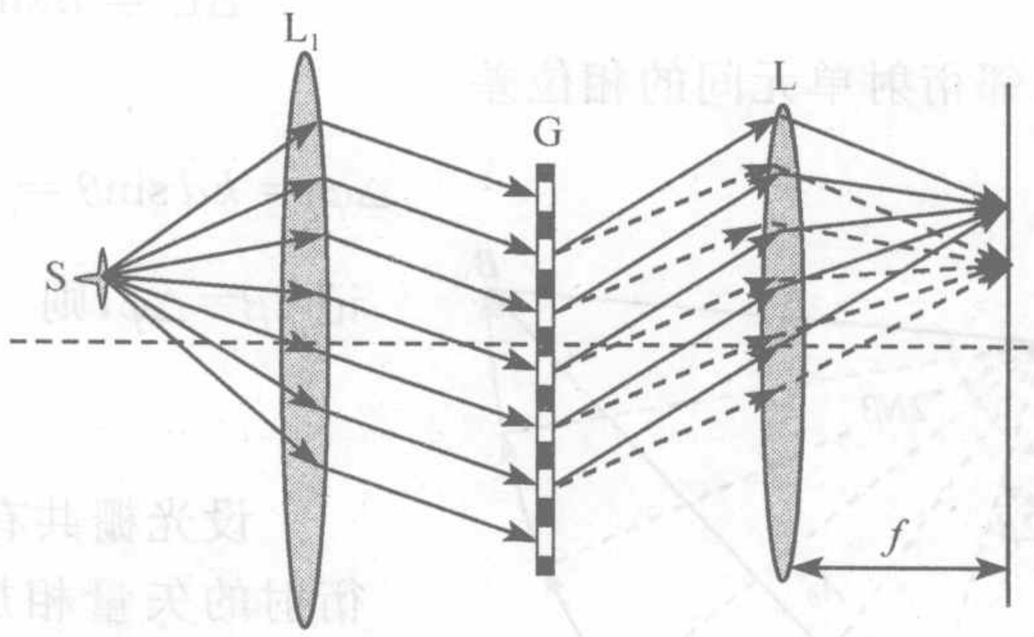


图 6.1.4　用透镜将光波会聚到焦平面上进行叠加

对于光栅的每一个单元，按衍射分析；不同的单元之间，按干涉分析.

可以采用振幅矢量方法或者积分方法求得衍射强度分布，以下分别加以说明.

1. 用矢量法分析

沿着与光轴夹角为 θ 方向的衍射光，经过透镜后，都将会聚到焦平面上的某一

点 P. P 点的方位角可以由透镜成像的规律得到，如图 6.1.5 所示，就是 θ. 由光栅上第 n 个衍射单元(光缝)射出的光在 P 点的振动(复振幅)可以用一个矢量表示，记为 $\tilde{a}_{n\theta}$. 由夫琅禾费单缝衍射结果，可知 $|\tilde{a}_{n\theta}|=a_\theta\dfrac{\sin u}{u}$，其中 $u=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$.

由光栅的周期性结构和夫琅禾费衍射的特征，可知来自任意相邻两个单元(即相邻两缝)的衍射矢量间具有相等的光程差 ΔL 和相位差 $\Delta\varphi$.

P 点的合振动，就是所有单元衍射的矢量和，也就是入射光经光栅衍射的复振幅.

设第 n 个狭缝的中心到 P 点的光程为 L_n，由图 6.1.6 上可以看出

$$L_2=L_1+d\sin\theta,\quad L_3=L_2+d\sin\theta,\cdots$$

即

$$L_n=L_1+(n-1)d\sin\theta \tag{6.1.1}$$

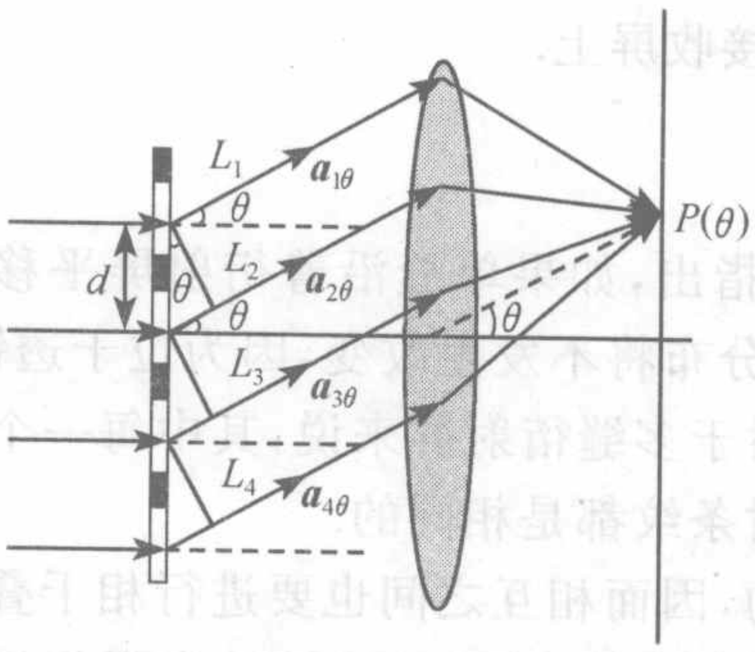


图 6.1.5 透过每个狭缝的光所对应的振幅矢量

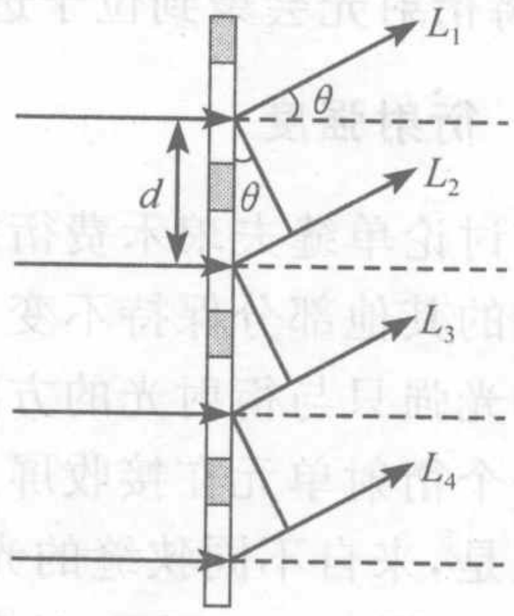


图 6.1.6 相邻两狭缝出射光的光程差

相邻衍射单元间的光程差

$$\Delta L=d\sin\theta \tag{6.1.2}$$

相邻衍射单元间的相位差

$$\Delta\varphi=kd\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{6.1.3}$$

记 $2\beta=\Delta\varphi$，则

$$\beta=\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{6.1.4}$$

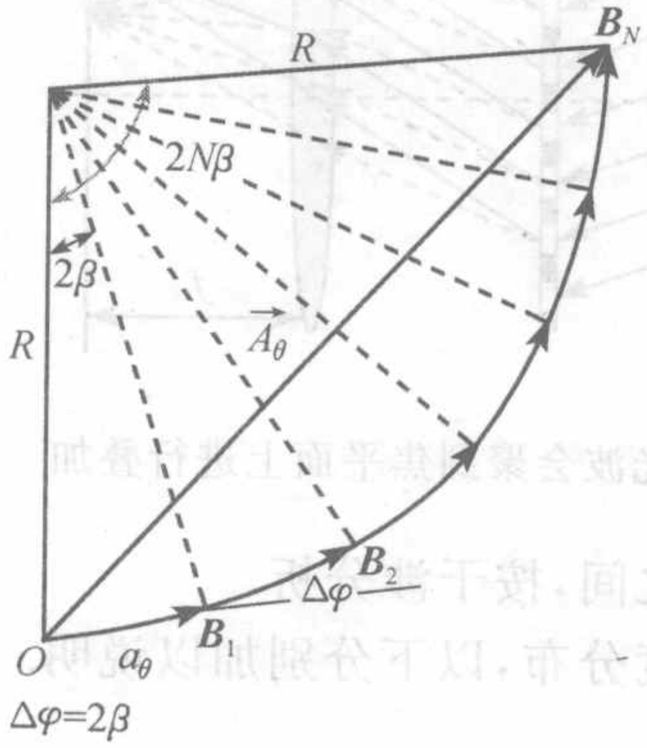


图 6.1.7 振幅矢量的叠加

设光栅共有 N 条狭缝，则合矢量就是 N 个单元衍射的矢量相加. 将 N 个矢量依次首尾相接，而且第 n 个矢量相对于第 $n-1$ 个矢量转过 $\Delta\varphi$，即 2β. 如图 6.1.7 所示，则

$$\boldsymbol{A}_\theta=\boldsymbol{a}_{1\theta}+\boldsymbol{a}_{2\theta}+\boldsymbol{a}_{3\theta}+\cdots+\boldsymbol{a}_{n\theta}$$

即

$$A_\theta=OB_N=2R\sin N\beta=2\frac{a_\theta/2}{\sin\beta}\sin N\beta=a_\theta\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

用复振幅表示为

$$\widetilde{U}_\theta = \widetilde{U}_0 \frac{\sin u}{u} \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} \tag{6.1.5}$$

衍射光强为

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \tag{6.1.6}$$

例 6.1.1　如图 6.1.8 所示三条平行狭缝，宽为 a，缝距分别为 d 和 $2d$，求正入射时夫琅禾费衍射分布.

解　用矢量方法求解.

如图 6.1.9 所示，这是三个等长矢量，$A = U_0 \frac{\sin u}{u}$，夹角依次为 $\Delta\varphi$、$2\Delta\varphi$，$\Delta\varphi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta = 2\beta$

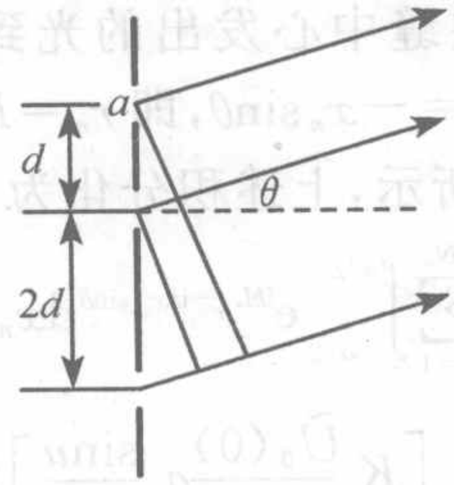


图 6.1.8　例题 6.1.1

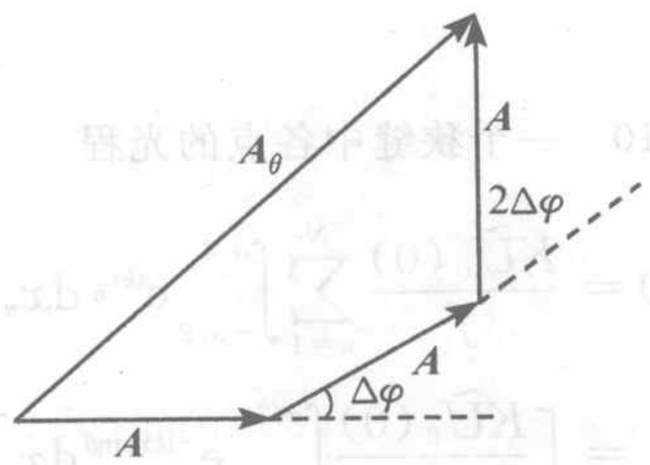


图 6.1.9　振幅矢量图解

合矢量为 $\boldsymbol{A}_\theta$，分量为

$$\begin{aligned}
A_{\theta x} &= A + A\cos\Delta\varphi + A\cos(3\Delta\varphi) \\
A_{\theta y} &= A\sin\Delta\varphi + A\sin(3\Delta\varphi) \\
A_\theta^2 &= A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2 \\
&= [A + A\cos\Delta\varphi + A\cos(3\Delta\varphi)]^2 + [A\sin\Delta\varphi + A\sin(3\Delta\varphi)]^2 \\
&= A^2 + A^2\cos^2\Delta\varphi + A\cos^2(3\Delta\varphi) + 2A^2\cos\Delta\varphi + 2A^2\cos3\Delta\varphi \\
&\quad + 2A^2\cos\Delta\varphi\cos3\Delta\varphi \\
&\quad + A^2\sin^2\Delta\varphi + A^2\sin^2(3\Delta\varphi) + 2A^2\sin\Delta\varphi\sin(3\Delta\varphi) \\
&= 3A^2 + 2A^2\cos\Delta\varphi + 2A^2\cos3\Delta\varphi + 2A^2\cos2\Delta\varphi \\
&= A^2(3 + 2\cos\Delta\varphi + 2\cos2\Delta\varphi + 2\cos3\Delta\varphi) \\
&= I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 (3 + 2\cos2\beta + 2\cos4\beta + 2\cos6\beta)
\end{aligned}$$

2. 用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式分析

平行光入射，满足近轴条件，倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)=1$，$1/r$ 为常数，记为 $1/r_0$.

$$\widetilde{U}(P) = K\iint_\Sigma \widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma = K\frac{1}{f}\iint_\Sigma \widetilde{U}_0(Q)e^{ikr}d\Sigma \tag{6.1.7}$$

瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$具有周期性的数值，透光部分，$\widetilde{U}_0(Q)=\widetilde{U}_0(0)$；不透光部分的 $\widetilde{U}_0(Q)=0$，所以仅对衍射屏透光部分求积分，有

$$\widetilde{U}(P)=\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\left[\int_{\Sigma_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}\,\mathrm{d}\Sigma_1+\int_{\Sigma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}\,\mathrm{d}\Sigma_2+\cdots+\int_{\Sigma_N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_N}\,\mathrm{d}\Sigma_N\right]$$

$$=\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{\Sigma_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n}\,\mathrm{d}\Sigma_n\right)$$

对每一个狭缝的积分是求得入射光经该狭缝后的衍射在 P 点引起的振动，即复振幅，为光的衍射；对所有狭缝的求和是将每一个狭缝射出的光在 P 点引起的振动即复振幅进行叠加，自然是相干叠加，为光的干涉. 物理过程为：每一个单狭缝的光在 P 点先进行衍射，衍射后的复振幅再进行干涉.

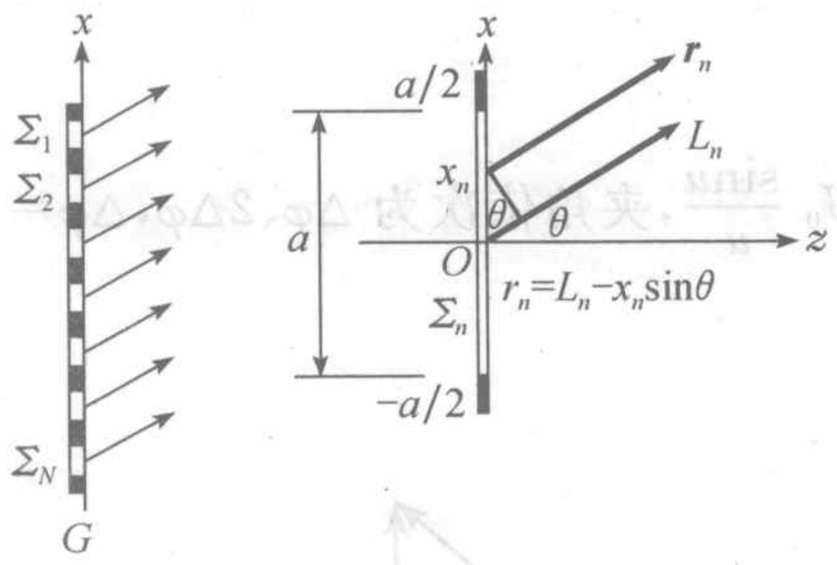


图 6.1.10 一个狭缝中各点的光程

在第 n 个狭缝中，位置在 x_j 的点光源发出的光与狭缝中心发出的光到达 P 点的光程差为 $\Delta r_n=-x_n\sin\theta$，即 $r_n=L_n-x_n\sin\theta$，如图 6.1.10 所示，上述积分化为

$$\widetilde{U}(P)=\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\sum_{n=1}^{N}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n}\,\mathrm{d}x_n=\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\sum_{n=1}^{N}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_n-\mathrm{i}kx_n\sin\theta}\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\left[\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\,\mathrm{d}x\right]\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_n}\right)=\left[K\frac{\widetilde{U}_0(0)}{f}a\,\frac{\sin u}{u}\right]\left(\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_n}\right)\tag{6.1.8}$$

$\dfrac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\displaystyle\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\,\mathrm{d}x$ 就是单缝衍射的复振幅，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_n}$ 就是多光束干涉的结果.

$$\frac{K\widetilde{U}_0(0)}{f}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\,\mathrm{d}x=\frac{Ka\widetilde{U}_0(0)}{f}\,\frac{\sin u}{u}=\frac{Ka\widetilde{U}_0(0)}{f}\,\frac{\sin\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$$

为单元(单缝)衍射因子，由瞳函数决定.

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_n}=\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(n-1)d\sin\theta}=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkd\sin\theta}=\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\beta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\beta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\,\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta}N(\theta)\tag{6.1.9}$$

其中，$\beta=kd\sin\theta=\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$；$N(\theta)$为 N 元干涉因子.

最后得到

$$\widetilde{U}(P)=\widetilde{U}_0U(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)}N(\theta)\tag{6.1.10}$$

衍射光强为

$$I(P) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

与振幅矢量法得到的结果一致.

从上述两种不同的推导过程,能够很清楚地看出光栅衍射光强分布公式中各个参数的物理含义.其中 $I_0=|\widetilde{U}_0|^2$,而 $\widetilde{U}_0$ 为衍射屏处的瞳函数,即光栅狭缝处的瞳函数,其含义与单缝夫琅禾费衍射相同.

光强分布公式可以用图 6.1.11 表示.图(a)为单缝衍射,图(b)为多缝干涉,而图(c)所示总的光强相当于单缝衍射因子对多缝干涉因子的调制.可以看出,只有在单缝衍射的中央主极大内,才有比较强的光强分布.

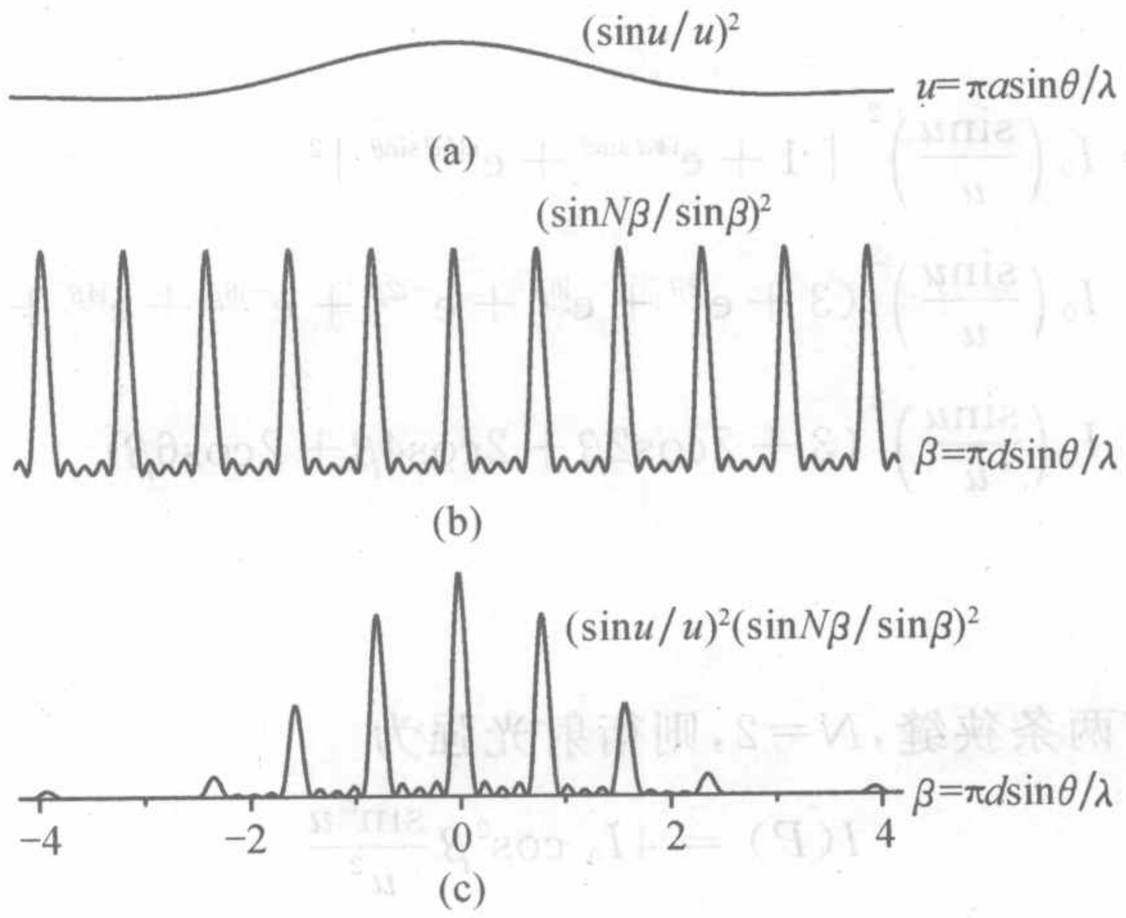


图 6.1.11　光栅的衍射光强分布

上面以透射光栅为例,求出了衍射的光强分布.除了透射式光栅(图 6.1.12),还有反射式光栅(图 6.1.13),就是先在平面上镀一层反射膜,然后在反射膜上刻出或腐蚀出一系列平行等间隔的划痕,则被刻蚀的地方不反光,保留下来的部分将入射光反射.对于反射式光栅,方法和结果都是相同的.

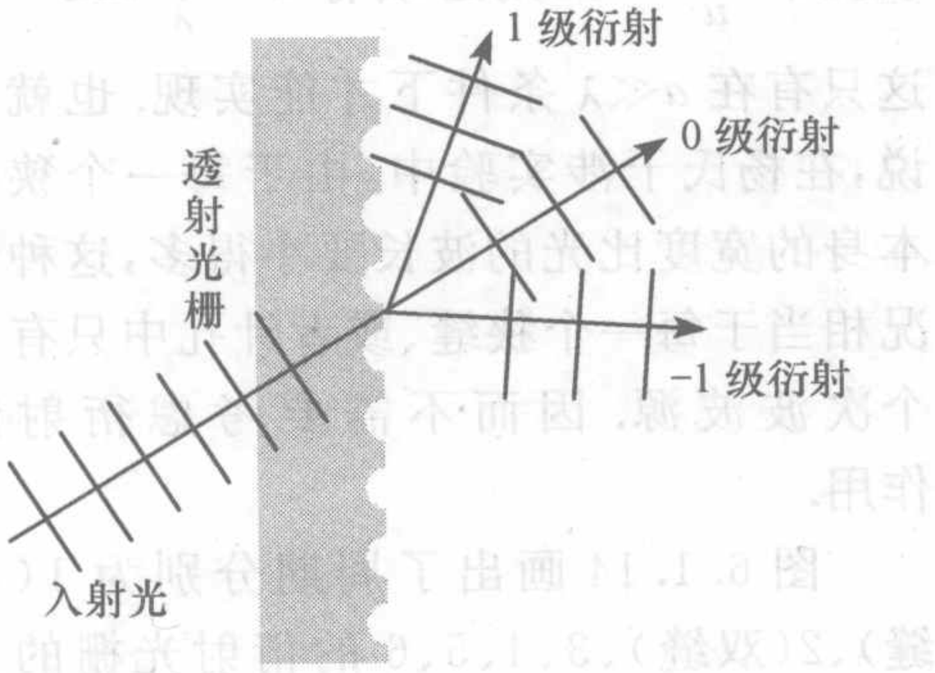


图 6.1.12　透射光栅

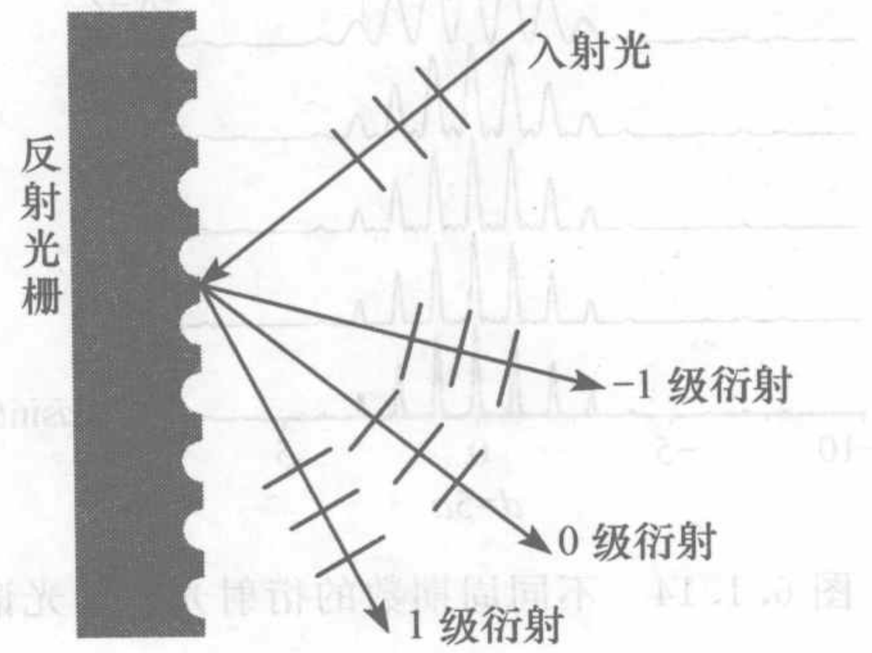


图 6.1.13　反射光栅

同样可以利用积分方法解上述例题.

$$L_2 = L_1 + d\sin\theta,\quad L_3 = L_1 + 3d\sin\theta,\quad r_j = L_j - x\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(P) &= KF\left(\int_{\Sigma_1}\tilde{U}_0\frac{e^{ikr}}{r}dx + \int_{\Sigma_2}\tilde{U}_0\frac{e^{ikr}}{r}dx + \int_{\Sigma_3}\tilde{U}_0\frac{e^{ikr}}{r}dx\right)\\ &= KF\tilde{U}_0 a\frac{\sin u}{u}\left(\frac{e^{ikL_1}}{r_0}+\frac{e^{ikL_2}}{r_0}+\frac{e^{ikL_3}}{r_0}\right)\\ &= KF\tilde{U}_0 a\frac{\sin u}{u}\frac{e^{ikL_1}}{r_0}\left[1+e^{ik(L_2-L_1)}+e^{ik(L_3-L_1)}\right]\\ &= KF\tilde{U}_0 a\frac{\sin u}{u}\frac{e^{ikL_1}}{r_0}(1+e^{ikd\sin\theta}+e^{i3kd\sin\theta})\end{aligned}$$

强度分布

$$\begin{aligned}I(\theta) &= I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left|1+e^{ikd\sin\theta}+e^{i3kd\sin\theta}\right|^2\\ &= I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2(3+e^{i2\beta}+e^{i6\beta}+e^{-i2\beta}+e^{-i6\beta}+e^{i4\beta}+e^{-i4\beta})\\ &= I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2(3+2\cos2\beta+2\cos4\beta+2\cos6\beta)\end{aligned}$$

6.1.2 双缝衍射

如果光栅只有两条狭缝，$N=2$，则衍射光强为

$$I(P) = 4I_0\cos^2\beta\frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{6.1.11}$$

而双缝的杨氏干涉强度分布为

$$I = I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)\right] = I_0(1+\cos2\beta) = 4I_0\cos^2\beta \tag{6.1.12}$$

比较发现，两者的区别在于一个衍射因子$\frac{\sin^2 u}{u^2}$，这当然是由于杨氏干涉中不考虑单缝衍射的结果. 或者，认为在杨氏干涉装置中$\frac{\sin u}{u}=1$，则必须有 $u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=0$，这只有在 $a\ll\lambda$ 条件下才能实现. 也就是说，在杨氏干涉实验中，由于每一个狭缝本身的宽度比光的波长要小得多，这种情况相当于每一个狭缝、或者针孔中只有一个次波波源. 因而不需要考虑衍射的作用.

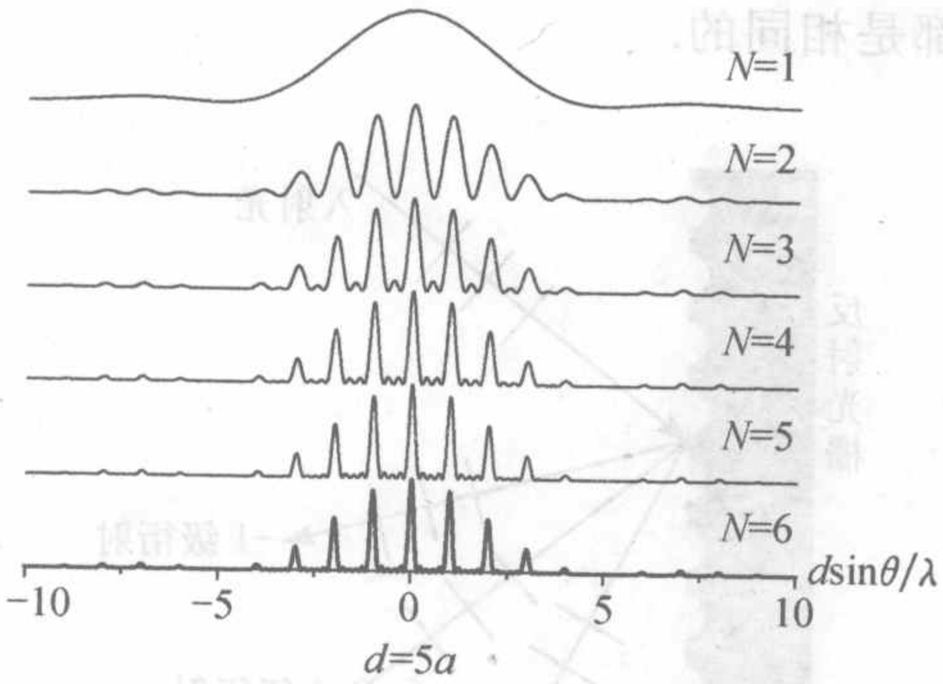


图 6.1.14 不同周期数的衍射光栅的光谱

图 6.1.14 画出了周期分别为 1(单缝)、2(双缝)、3、4、5、6 的衍射光栅的光强分布.

6.1.3　衍射花样的特点

由图 6.1.14、图 6.1.15 可以看出，因为衍射强度是单元衍射和 N 元干涉的乘积，总的光强是由一系列细锐的衍射峰组成，包括主极大和次极大.

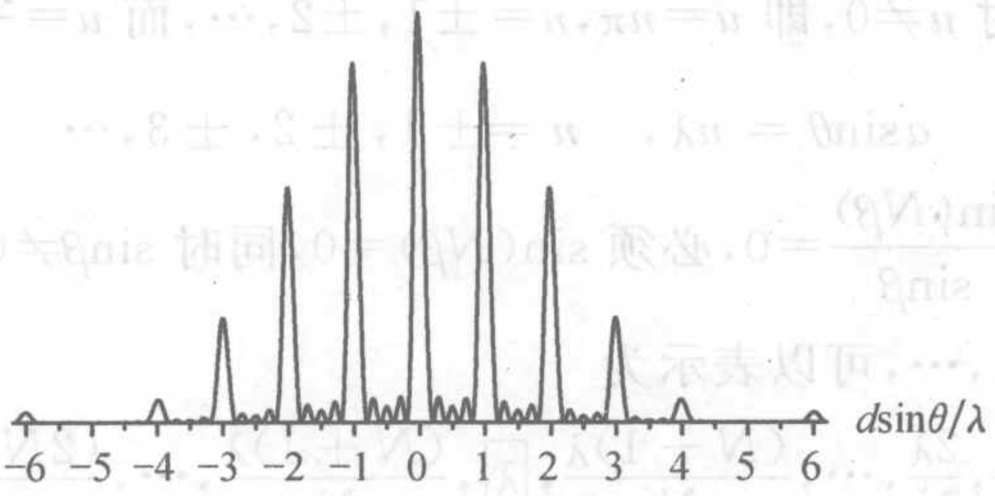


图 6.1.15　干涉光谱

光强的极值由缝间干涉因子 $N(\theta)=\dfrac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}$ 决定，对 $N(\theta)$ 求微分，即可得到取极值的位置.

$$N(\theta)'=\left(\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\right)'=\frac{N\cos(N\beta)\sin\beta-\cos\beta\sin(N\beta)}{\sin^2\beta}=0$$

得到

$$N\tan\beta=\tan(N\beta) \tag{6.1.13}$$

这是一个超越方程，可以从图 6.1.16 中看出，在每一个$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$区间内，除去 $N-1$ 个位于$(2m+1)\dfrac{\pi}{2N}$奇点之外，共有 $N-1$ 个解，都是极大值点.

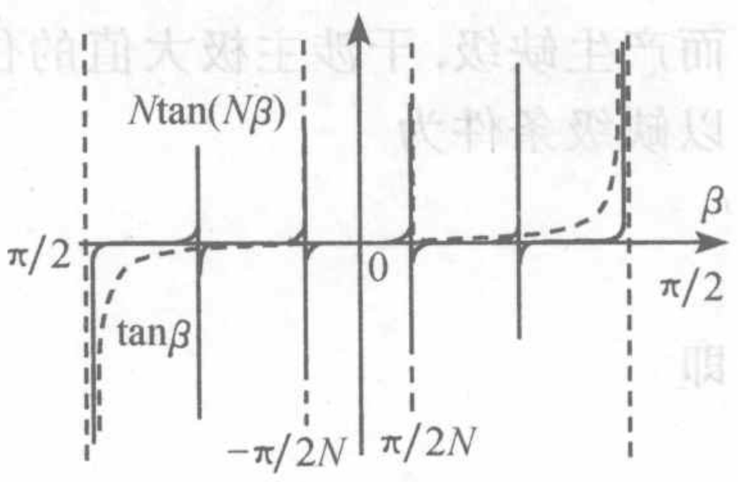


图 6.1.16　$N\tan\beta=\tan(N\beta)$的解

以下详细讨论极大值和极小值的位置.

1. 衍射主极大值位置

$\beta=j\pi$ 为超越方程 $N\tan\beta=\tan(N\beta)$的一组解，或者 $N(\theta)=\dfrac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}$的分子、分母同时为 0 时，$N(\theta)$取极大值，$N(\theta)=N$，则光强为

$$I=N^2I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{6.1.14}$$

而 $\beta=\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$，所以

$$d\sin\theta=j\lambda,\quad j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{6.1.15}$$

每一个主极大值代表接收屏上的一根亮条纹，因而有一系列的亮条纹，这就是衍射光谱线，j 为谱线级数.

由式(6.1.15)可见，光谱线的位置与 N 无关，由 d，j，λ 决定，谱线位置与衍射

因子无关. 谱线强度与 N^2 成正比,同时受到衍射因子调制.

2. 极小值位置

当衍射因子,或缝间干涉因子为 0 时,强度都是极小值. 要使衍射因子 $\frac{\sin u}{u}=0$,只有 $\sin u=0$,同时 $u\neq 0$,即 $u=n\pi, n=\pm 1,\pm 2,\cdots$,而 $u=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$,于是得到

$$a\sin\theta = n\lambda, \quad n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots \tag{6.1.16}$$

要使干涉因子 $\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}=0$,必须 $\sin(N\beta)=0$,同时 $\sin\beta\neq 0$,即 $d\sin\theta=\frac{j}{N}\lambda, j=1,2,\cdots,N-1,N+1,\cdots$,可以表示为

$$d\sin\theta = \boxed{0},\frac{\lambda}{N},\frac{2\lambda}{N},\cdots,\frac{(N-1)\lambda}{N},\boxed{\lambda},\frac{(N+1)\lambda}{N},\cdots,\frac{(2N-1)\lambda}{N},\boxed{2\lambda},\cdots \tag{6.1.17}$$

可见,每两个相邻的主极大值之间,有 $N-1$ 个极小值.

3. 次极大值

在任意两个主极大值 $d\sin\theta_j=j\lambda, d\sin\theta_{j+1}=(j+1)\lambda$ 之间,有 $N-1$ 个极小值;而每两个极小值之间还有一个次极大值,所以每两个主极大值之间还有 $N-2$ 个次极大值. 次极大值的位置由超越方程 $N\tan\beta=\tan(N\beta)$ 的另一组解所决定.

4. 谱线的缺级

在干涉的主极大值与衍射的极小值重合的位置,由于干涉的极大值不能出现而产生缺级. 干涉主极大值的位置为 $d\sin\theta=j\lambda$,衍射极小的位置为 $a\sin\theta=n\lambda$,所以缺级条件为

$$\frac{j}{d}=\frac{n}{a}$$

即

$$j = n\frac{d}{a}, \quad n\neq 0 \tag{6.1.18}$$

具有上述级数的谱线由于衍射而缺失.

6.1.4 干涉与衍射的区别和联系

干涉和衍射都是波的相干叠加,因而其物理本质都是相同的,所以无论是直接应用光的叠加原理还是采用惠更斯-菲涅耳衍射积分公式,都遵循振动矢量叠加的原理. 如果仅从这一点来看的话,实在没有必要将干涉和衍射加以区分. 之所以区分,无非是基于以下几种考虑:

(1) 从实验采用的装置和方法看,两者有区别;

(2) 从采用的数学手段上看,两者有区别;

(3) 从物理结果上看,两者有区别.

干涉是“光束”之间的相干叠加,因而要求每一条“光束”都要足够细,因而,杨

氏干涉实验装置中，每一个狭缝或针孔都要足够小，以至于可以认为其中仅包含有一个振动源. 这些光束是有限条，或虽然有无限多条，但是光束之间是离散的、不连续的、可数的.

而衍射则是连续分布的无限多个点光源（次波中心）发出的光波的相干叠加. 所以每一个衍射单元可以比较大，如菲涅耳圆孔、夫琅禾费单缝、圆孔、矩孔等，其中每一个衍射单元中包含有许多（无限多）个扰动源.

由于干涉的“光束”是离散的，因而其叠加的过程可以在数学上用求和的方法解决，即可以直接应用波的叠加原理；而衍射的扰动源是连续分布的，则在数学上必须采用积分（曲面积分）的方法求解，所以需要求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式.

从最后的效果看，干涉之后光的能量在空间均匀分布，无论杨氏干涉还是薄膜干涉，各级亮条纹有相差不大的空间角宽度和强度；而衍射所产生的一系列亮条纹中，光强有着显著的差别. 其中只有一个条纹具有较大的强度，如夫琅禾费圆孔衍射的艾里斑、单缝衍射的零级条纹，这个特殊的衍射级其实就是系统的几何像点，因而衍射的结果更接近于几何成像的情况，或者，几何光学就是衍射的零级近似.

6.1.5　光栅方程

前面推导光栅衍射的复振幅及强度分布时，为了表达简单，假设入射光是沿着平行于系统的光轴方向入射的. 实际上，入射光可以沿任意方向，设入射光与系统光轴的夹角为 θ_0，如图 6.1.17 所示，则对于透射式光栅：

斜入射时，光程差

$$\Delta L = -d(\sin\theta_0 \pm \sin\theta) = j\lambda$$

入射、出射在光栅平面法线同侧

$$d(\sin\theta_0 + \sin\theta) = j\lambda \tag{6.1.19}$$

入射、出射在光栅平面法线同侧

$$d(\sin\theta_0 - \sin\theta) = j\lambda \tag{6.1.20}$$

反射式光栅，如图 6.1.18 所示，同样有 $d(\sin\theta \pm \sin\theta_0) = j\lambda$，同侧取“+”，异侧取“−”.

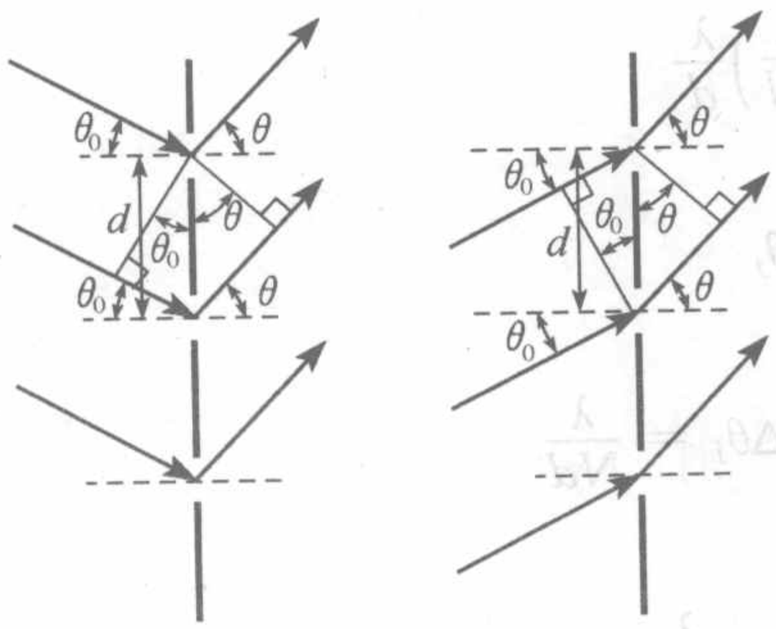


图 6.1.17　透射式光栅

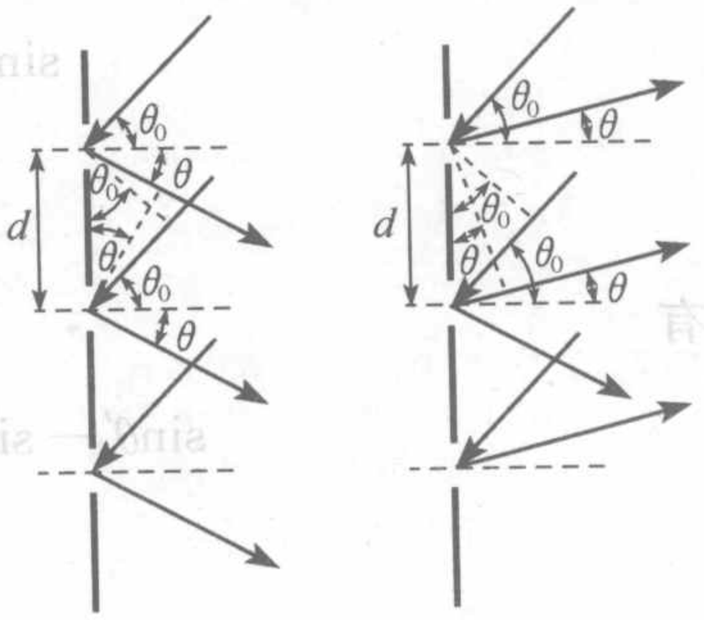


图 6.1.18　反射式光栅

正入射时，$d\sin\theta = j\lambda, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

6.2 光栅光谱

由光栅方程 $d\sin\theta = j\lambda$ 可以看出，一方面，对于单色光，经过衍射，不同的衍射级次具有不同的衍射角(图 6.2.1)；另一方面，对于复色光(通常所说的白光)，在同一级衍射谱中，不同的波长具有不同的衍射角(图 6.2.2)，即 $\theta = \theta(\lambda) = \arcsin(j\lambda/d)$，不同波长的光经光栅后会在空间散开，这说明光栅具有色散能力.

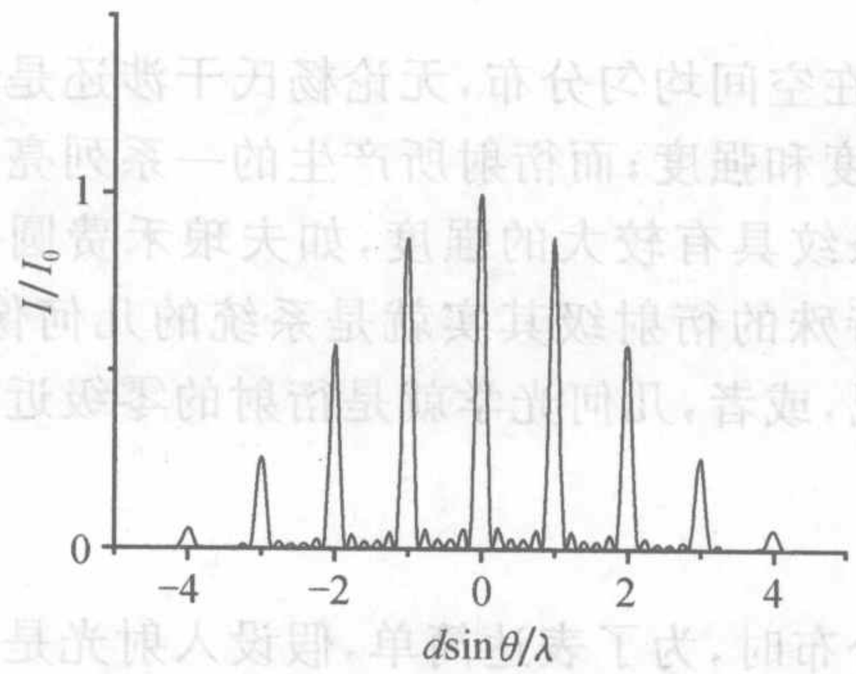


图 6.2.1 单色光经光栅后的光强分布

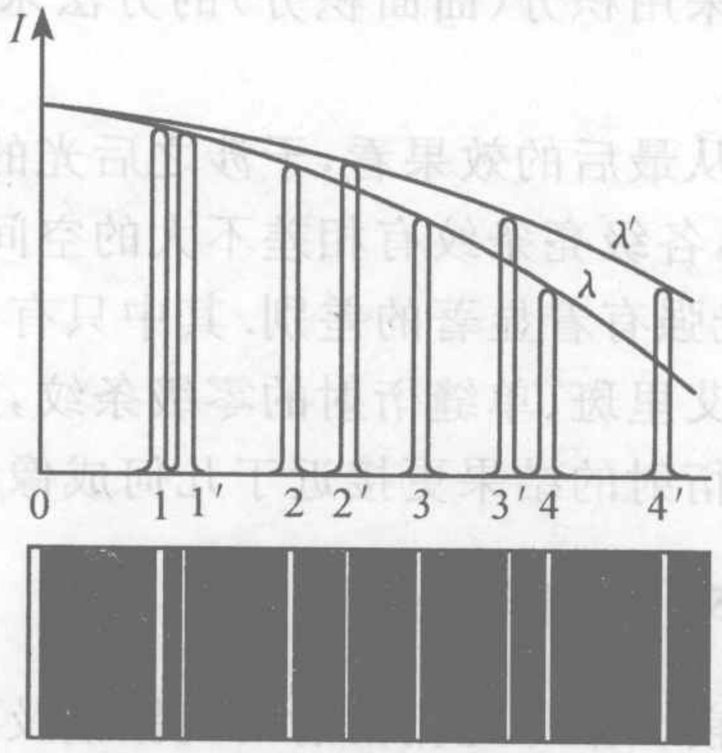


图 6.2.2 光栅的色散

6.2.1 谱线的角宽度和光栅的色分辨本领

1. 谱线的角宽度

经过光栅衍射的每一级光谱线，在空间都有一定的角宽度，通常用谱线的极大值与相邻极小值的角度差表示谱线的角宽度，有时也称作“半角宽度”.

极大值的位置由光栅方程决定，为

$$\sin\theta_j = j\frac{\lambda}{d}$$

而相邻的最小值的位置为

$$\sin\theta'_j = \left(j + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

其中

$$\theta'_j = \theta_j + \Delta\theta_j$$

因而有

$$\sin\theta'_j - \sin\theta_j = \cos\theta_j \Delta\theta_j = \frac{\lambda}{Nd}$$

可得

$$\Delta\theta_j = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_j} = \frac{\lambda}{L\cos\theta_j} \tag{6.2.1}$$

其中，光栅的周期数与光栅常数的乘积

$$L = Nd \tag{6.2.2}$$

就是光栅的有效宽度.

光谱线的角宽度与光栅的有效宽度成反比，也与衍射角(即衍射级数)有关，衍射角大，则角宽度也较大. 但是，由于光栅系统基本上都满足近轴条件，也就是说，通常都是小角度衍射，因而衍射角度对谱线的角宽度的影响并不大.

2. 光栅的分辨本领

入射光是白光，则同一级衍射谱中，不同的波长成分有不同的衍射角. 但是，由于每一根衍射光谱都有一定的空间分布角宽度，这时，如果波长差为 $\delta\lambda$ 的两根光谱线靠得较近，则有可能相互重叠而无法分辨.

设波长差为 $\delta\lambda$ 的同级衍射光谱线的空间的角距离为 $\delta\theta$，则由光栅方程 $d\sin\theta = j\lambda$，可以得到 $d\cos\theta\,\delta\theta = j\delta\lambda$，即

$$\delta\theta = j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta} \tag{6.2.3}$$

用瑞利判据(图 6.2.3)，当 $\delta\theta \geqslant \Delta\theta$ 时，可以认为 λ 与 $\lambda+\delta\lambda$ 的谱线是可以分辨的，因而，由式(6.2.1)和式(6.2.3)，有 $j\dfrac{\delta\lambda}{d\cos\theta} \geqslant \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta}$，得到

$$\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda}{jN} \tag{6.2.4}$$

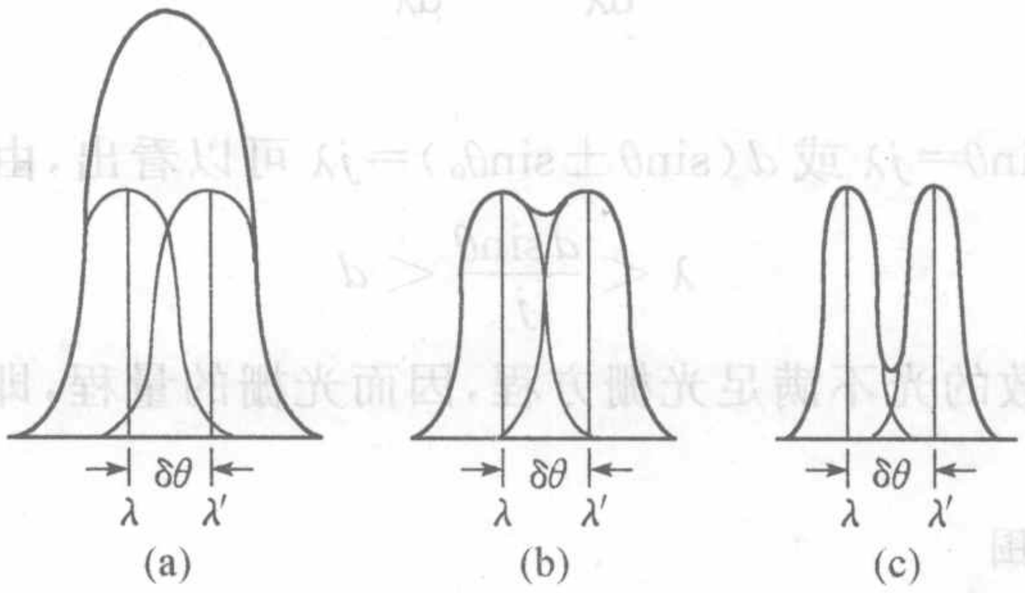


图 6.2.3　瑞利判据

只有波长差大于式(6.2.4)所表示的数值，才可以分辨. 或者，可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{jN} \tag{6.2.5}$$

一般用分辨本领表示光栅对不同波长光谱线的分辨能力，分辨本领的定义是

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = jN \tag{6.2.6}$$

分辨本领是针对波长的分辨，因而也称作色分辨本领. 由式(6.2.6)可见，N 越大，j 越大，分辨本领越大；分辨本领与光栅常数 d 无关.

6.2.2 光栅的色散与自由光谱范围

1. 光栅的色散

不同波长的光在空间分开称为色散，通常用数学式 $\theta=\theta(\lambda)$ 表示色散. 光栅具有色散能力.

$\frac{d\theta}{d\lambda}$，角色散率，光栅的分光能力. 定义为两条纯数学的光谱线在空间分开的角距离. 由光栅方程，可以得到

$$\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{j}{d\cos\theta} \tag{6.2.7}$$

由色散率的定义和光栅衍射特征，可以得到：

(1) 当 $j=0$ 时，$d\theta/d\lambda=0$，零级光谱无色散，即所有不同波长的零级光谱线都集中于同一位置，原因是零级谱的干涉的光程差等于零.

(2) 当 θ 很小时，$d\theta/d\lambda=j/d$，对于固定的衍射级数 j，角色散率为常数.

角色散率与 N 无关.

(3) 线色散率 $\frac{dl}{d\lambda}$，光谱线在焦平面上分开的距离. 对于夫琅禾费衍射，线色散率与角色散率的关系为

$$\frac{dl}{d\lambda}=f\frac{d\theta}{d\lambda} \tag{6.2.8}$$

2. 光栅的量程

由光栅方程 $d\sin\theta=j\lambda$ 或 $d(\sin\theta\pm\sin\theta_0)=j\lambda$ 可以看出，由于 $|\sin\theta|<1$，所以

$$\lambda<\frac{d\sin\theta}{j}<d \tag{6.2.9}$$

即波长大于光栅常数的光不满足光栅方程，因而光栅的量程，即可以测量的最长波长为光栅的周期 d.

3. 自由光谱范围

将入射光的波长范围表示为 $\lambda_m\sim\lambda_M=\lambda_m+\Delta\lambda$，则经光栅衍射后有 $d\sin\theta_m(j)=j\lambda_m$，$d\sin\theta_M(j)=j\lambda_M=j(\lambda_m+\Delta\lambda)$，为了使光谱线不重叠，即第 j 级的长波 λ_M 的谱线与第 $j+1$ 级的短波 λ_m 的谱线不重叠，就要求 $\theta_M(j)<\theta_m(j+1)$，由上式可以得到，$j(\lambda_m+\Delta\lambda)<(j+1)\lambda_m$，$\Delta\lambda<\lambda_m/j$，即

$$\lambda_M-\lambda_m<\frac{\lambda_m}{j} \tag{6.2.10}$$

入射光的波长范围必须满足式(6.2.10)，才能保证第 j 级光谱不与第 $j+1$ 级光谱重叠，这一波长范围，称作自由光谱范围，即光栅可以自由工作的波长范围.

对于一级光谱($j=1$)，可以从光的短波端 λ_m 计算出光栅的自由光谱范围，$\lambda_M-\lambda_m=\Delta\lambda<\lambda_m$，所以一级光谱的自由光谱范围为($\lambda_m$，$2\lambda_m$). 同样也可以从其长波端确定此范围，对于一级光谱，有 $\Delta\lambda<\lambda_m=\lambda_M-\Delta\lambda$，即 $\Delta\lambda<\lambda_M/2$，一级光谱的自由光

谱范围为$(\lambda_M/2,\lambda_M)$. 光栅的量程要求$\lambda_M<d$,当$\lambda_M=d$时,自由光谱范围为$(d/2,d)$.

例 6.2.1　一光栅,光栅常数为 4μm 总宽度为 10cm,波长为 500.0nm 和 500.01nm 的平面波正入射,光栅工作在二级光谱,问这双线分开多大角度? 能否分辨?

解　焦距离 $\delta\theta=j\dfrac{\delta\lambda}{d\cos\theta}=\dfrac{2\delta\lambda}{d\cos\theta}$,考虑到

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(j\lambda/d)^2}=\sqrt{1-4(\lambda/d)^2}$$

$$\delta\theta=j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta}=\frac{2\delta\lambda}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}}=\frac{2\times 0.01\text{nm}}{\sqrt{4^2-4\times 0.5^2}\,\mu\text{m}}=5.16\times10^{-6}$$

光栅的刻线数 $N=W/d=10\text{cm}/4\mu\text{m}=2.5\times10^4$,由瑞利判据

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{jN}=\frac{5000}{2\times2.5\times10^4}=0.1(\text{Å}),\text{恰可分辨.}$$

6.3　闪 耀 光 栅

6.3.1　问题的提出与解决方案

前面所讨论的平面型光栅,无论是透射式的还是反射式的,$j=0$ 级的色散为零,但该衍射级的能量却是最大的,如图 6.3.1 所示.

必须注意到,能量集中是衍射的结果,即大部分能量都集中在几何像点上. 而色散是干涉的结果,来自不同狭缝的光具有不同的光程. 对于平面型光栅,单元衍射零级的位置与缝间干涉的零级的位置恰好是重合的. 如果让干涉零级与衍射的零级在空间上分开,则可以使衍射的绝大部分能量集中在一个有色散的衍射级上. 即让光的几何像点偏离光栅平面的法线即可.

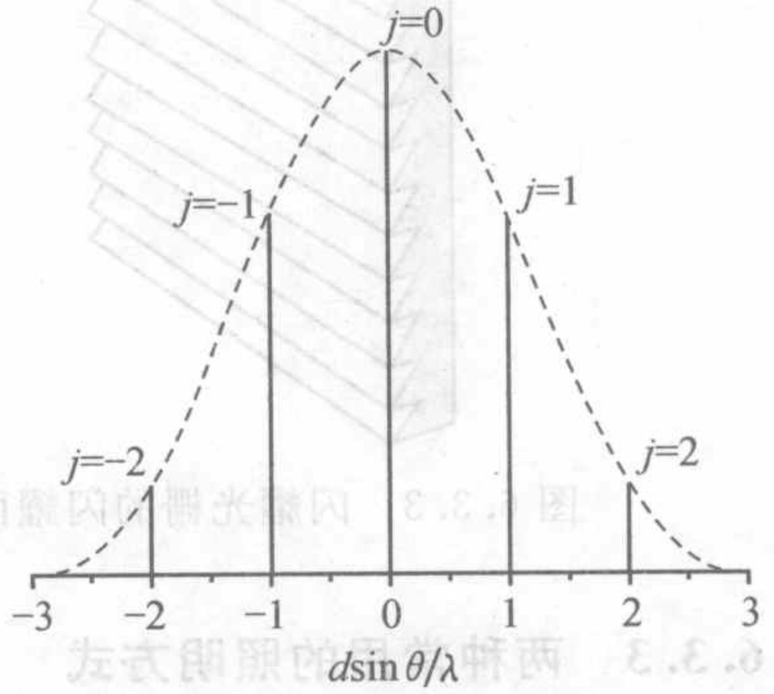


图 6.3.1　无色散的零级干涉与衍射的零级重合

6.3.2　闪耀光栅的原理

闪耀光栅具有这种能力. 如果让光栅的反射面与光栅平面之间保持一定的夹角,如图 6.3.2 所示则入射光相对于光栅平面法线的夹角为 θ_0,而相对于反射面(即衍射单元平面)法线的夹角为 θ_0',则各个反射面的反射光进行干涉(即缝间干涉)的结果,$j=0$ 级出现在与反射面法线夹角为 θ_0'的方向;而对于每一个反射面,衍射的结果,其主极大,即中央 0 级衍射出现在与光栅平面法线夹角为 θ_0 的方向,即反射面的几何像方向. 这两者是不重合的,因而,干涉的零级光谱不占据光强最大的位置,而是另外的 $j\neq0$ 的谱线处于中央主极大处,如图 6.3.4 所示. 这种反射面与光栅平面不平行、而是保持一定夹角的光栅称作闪耀光栅. 闪耀光栅同样也具

有周期性结构，每一个反射面被称作闪耀面(图 6.3.3)，闪耀面与光栅平面间的夹角称为闪耀角，记作 θ_B.

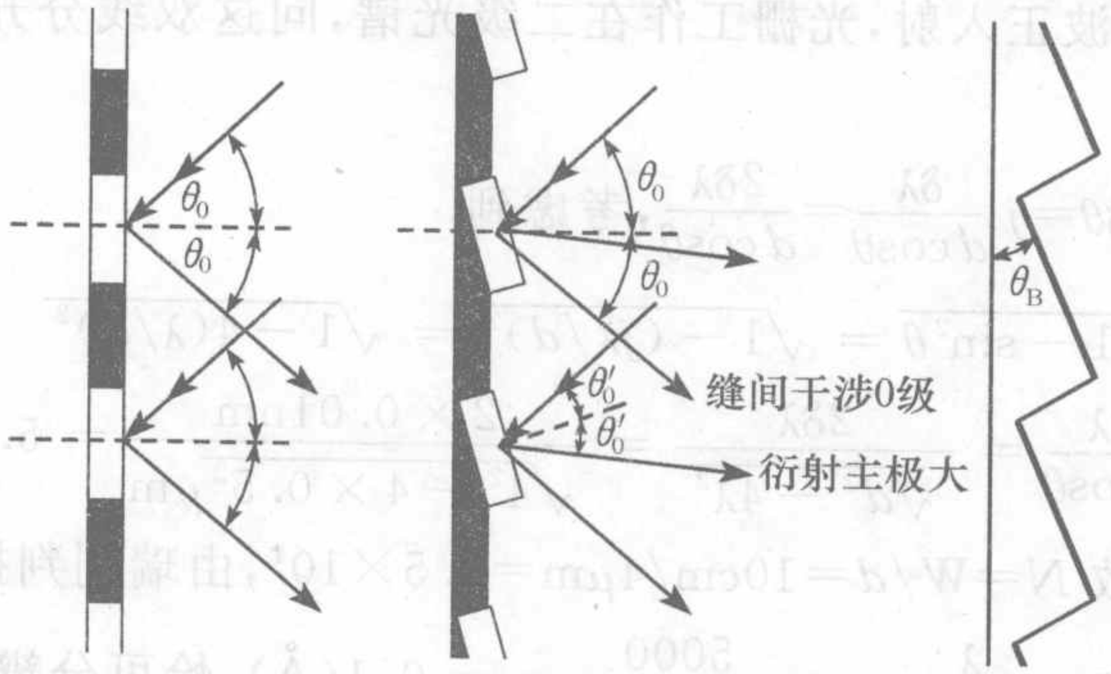


图 6.3.2 平面光栅与闪耀光栅比较

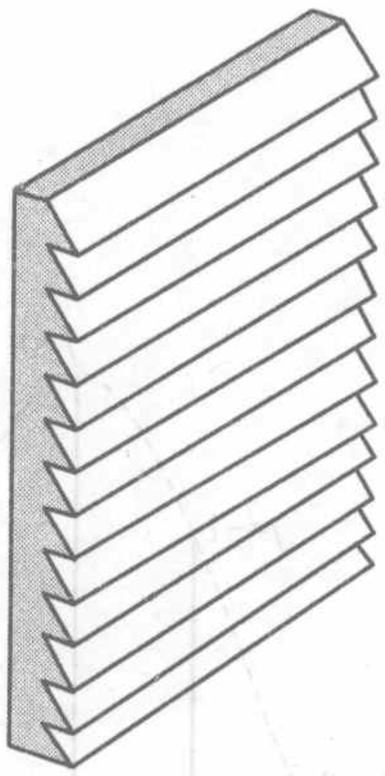


图 6.3.3 闪耀光栅的闪耀面

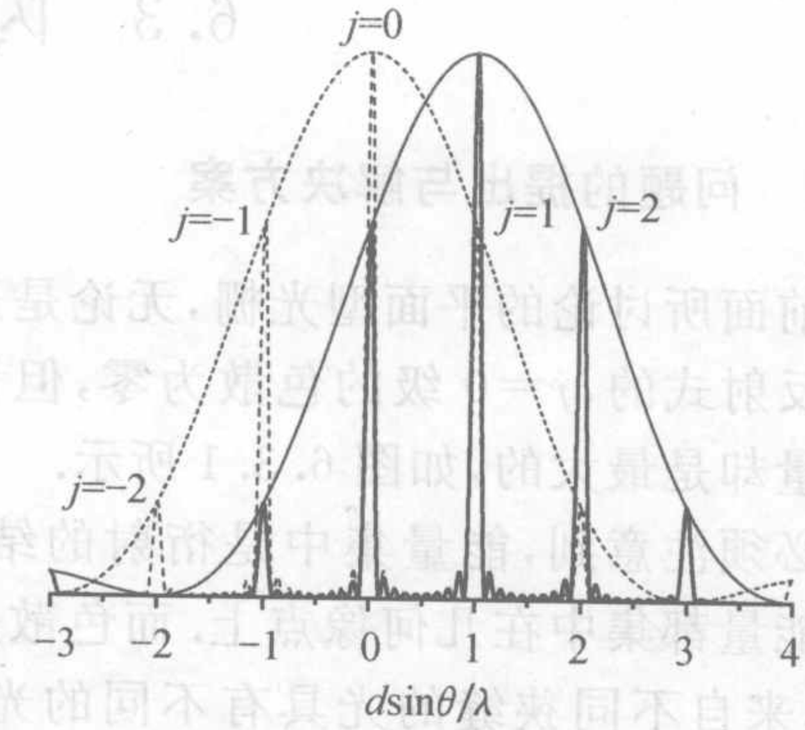
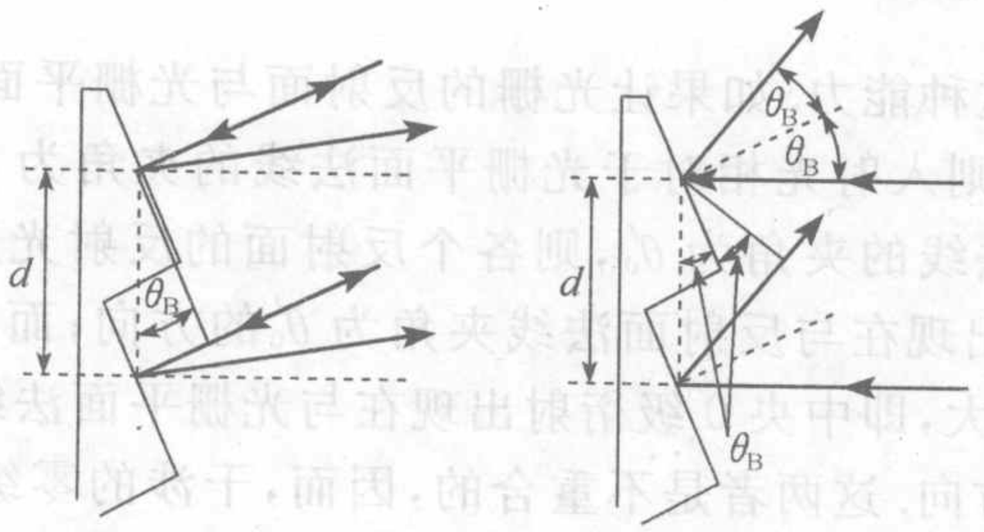


图 6.3.4 衍射零级移动

6.3.3 两种常用的照明方式

对于闪耀光栅，入射光通常采以特殊的角度入射，这种入射方式被称作闪耀光栅的照明方式.

通常采用图 6.3.5 所示的两种方式入射(照明).



第一种照明方式　　第二种照明方式

图 6.3.5 闪耀光栅两种常用的照明方式

第一种方式，光沿着闪耀面的法线入射，在反射光的方向上，缝间干涉的光程差为 $\delta=2d\sin\theta_B$，在这一方向上的光谱线满足的条件是 $2d\sin\theta_B=j\lambda$，当 $j=1$ 时，衍射最强的波长为 $\lambda_{1B}=2d\sin\theta_B$，$\lambda_{1B}$ 称作一级闪耀波长.

其他波长的一级光谱出现在闪耀波长附近. 由于衍射的零级有很大的宽度，所以，其他波长的一级谱线也有足够的强度（图 6.3.6）.

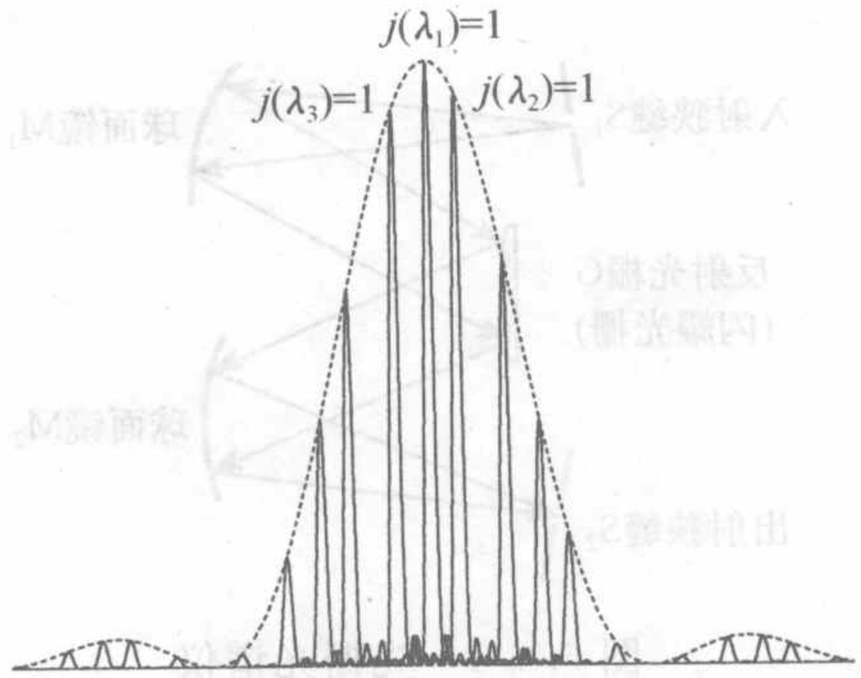


图 6.3.6　闪耀光栅不同波长的一级光谱

第二种方式，光沿着光栅平面的法线入射，入射光与反射面（即闪耀面）简单夹角为 θ_B，则反射光与入射光之间的夹角为 $2\theta_B$，因而，在反射光的方向上，相邻两个单元干涉的光程差为 $\Delta L=d\sin2\theta_B$，因而在反射方向上，有 $d\sin2\theta_B=j\lambda$，一级闪耀波长为 $\lambda_{1B}=d\sin2\theta_B$.

具有一级闪耀波长的谱线会出现在衍射 0 级的方向，而波长为 $\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 的谱线将出现在 $2d\sin(\theta_B+\delta\theta)=\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 处（在采用第一种中照明方式时），由于 $\delta\theta$ 并不是很大，所以该谱线依然有足够的强度. 同理，如采用第一种中照明方式，波长为 $\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 的谱线将出现在 $d\sin(2\theta_B+2\delta\theta)=\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 处.

6.4　单色仪与光谱仪

衍射光栅具有色散能力，平行入射到光栅上的白光，经过光栅的色散，具有不同的波长的谱线将会出现在空间不同的位置上，即 $\theta=\theta(\lambda)$. 如果保持整个系统不变，而只让某一个具有特定衍射角的谱线出射，则从系统中出射的光具有单一的波长，这种仪器就是单色仪. 如果转动光栅，从而使不同波长的谱线能够在某个方位一次出射，就是光谱仪. 其实，单色仪与光谱仪是同一种仪器，只是根据使用目的不同而有不同的名称. 现在的光栅光谱仪或单色仪中，几乎都采用闪耀光栅作为色散元件.

光栅光谱仪的结构可用图 6.4.1 说明. 入射狭缝 S_1 和出射狭缝 S_2 是位置是固定的，而缝宽可以调节. 球面反射镜 M_1 的焦点就是入射狭缝，入射光经 M_1 变为平行光，射向光栅 G，衍射光经过球面反射镜 M_2 会聚后，射向出射狭缝 S_2. 转动光栅 G，不同波长的谱线就可以从 S_2 射出. 在 S_2 处，连接探测器，如光电倍增管等，即可以测得射入 S_1 的光谱.

如果将光栅 G 固定在某一角度保持不变，则从 S_2 出射的光，就具有固定的波长，就可以通过该装置从入射的白光中获得单一波长的出射光.

为了提高光谱仪的分辨本领，往往在其中安置两块衍射光栅，如图 6.4.2 所示（其中将光栅与球面反射镜画作一体）. 经过第一块光栅 G_1 色散的光再入射到第

二块光栅 G_2 上，进一步色散，则最后从狭缝 S_2 出射的光，单色性将进一步提高. 双光栅单色仪的色分辨本领为

$$A = A_1 A_2 = j_1 j_2 N_1 N_2$$

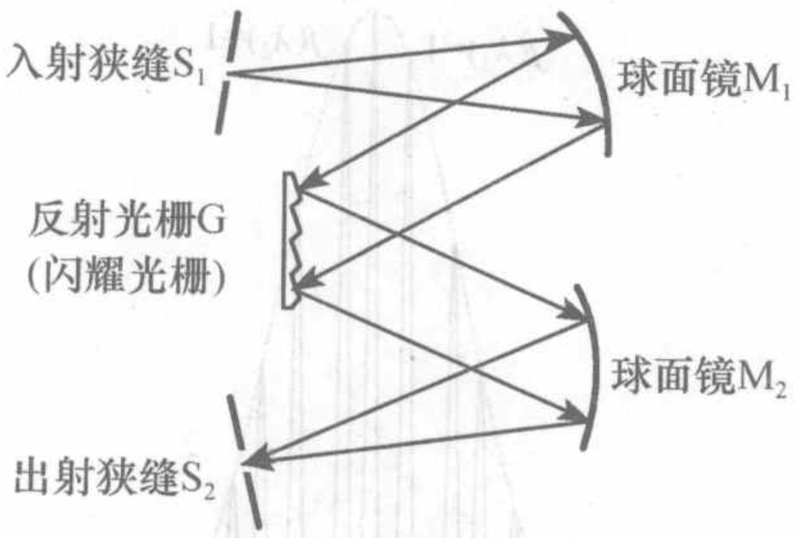


图 6.4.1 光栅光谱仪

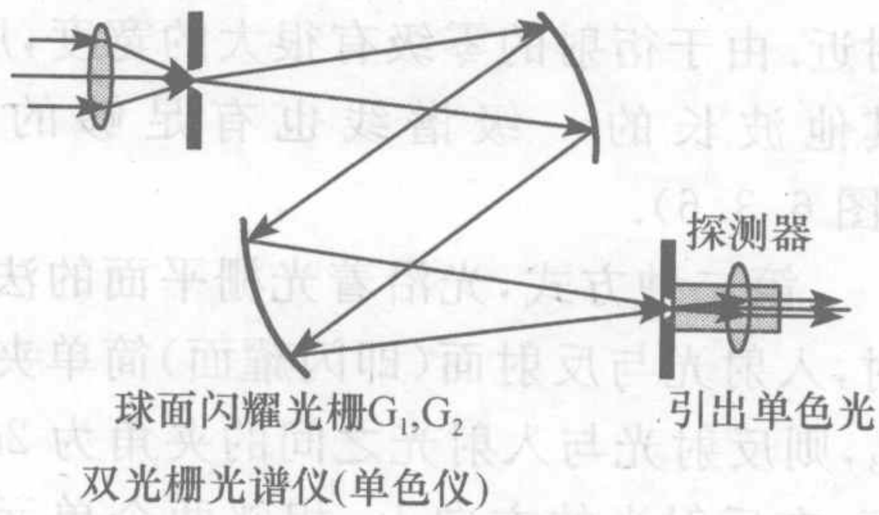


图 6.4.2 双光栅单色仪

其中，A_1、N_1、j_1 和 A_2、N_2、j_2 分别是第一块光栅和第二块光栅的色分辨本领、光栅刻线数、各谱线级数.

6.5 正弦光栅

前面讨论的光栅称作黑白型光栅，即透光部分与遮光部分截然分开，狭缝处，透过率为 1，其他部分，透过率为 0. 与黑白型光栅不同，正弦光栅的具有可以用正弦或余弦函数表示的振幅透过率，其透过率往往表示为 $t \propto 1+\cos\frac{2\pi}{d}x$，其中，$d$ 为光栅的空间周期.

则在衍射屏上，其瞳函数为

$$\widetilde{U}_0(x) = \widetilde{U}_0\left(1+\cos\frac{2\pi}{d}x\right) \tag{6.5.1}$$

单元衍射因子为

$$\tilde{u}(\theta) = K\widetilde{U}_0\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{d}x\right)e^{-ikx\sin\theta}dx$$

$$= K\widetilde{U}_0\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{d}x}+\frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{d}x}\right)e^{-ikx\sin\theta}dx$$

$$= K\widetilde{U}_0\frac{e^{ikr_0}}{f}\int_{-d/2}^{d/2}\left[e^{-ikx\sin\theta}+\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}+\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}\right]dx$$

而

$$\int_{-d/2}^{d/2}\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}dx = \frac{d}{2}\frac{\sin\left[\left(\pi-k\frac{d}{2}\sin\theta\right)\right]}{\pi-k\frac{d}{2}\sin\theta} = \frac{d}{2}\frac{\sin(\pi-\beta)}{\pi-\beta}$$

$$\int_{-d/2}^{d/2}\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}dx = \frac{d}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}$$

于是

$$\tilde{u}(\theta)=K\tilde{U}_0 d\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}\right] \tag{6.5.2}$$

相当于具有三个不同的夫琅禾费单缝衍射因子，缝宽为 d，狭缝中心分别在 0，π，$-\pi$ 处，正是多元衍射因子 $\tilde{N}(\theta)$ 的 0 级和 ±1 级的位置，其余的级次全部抵消，所以只有这三级衍射，如图 6.5.1 所示.

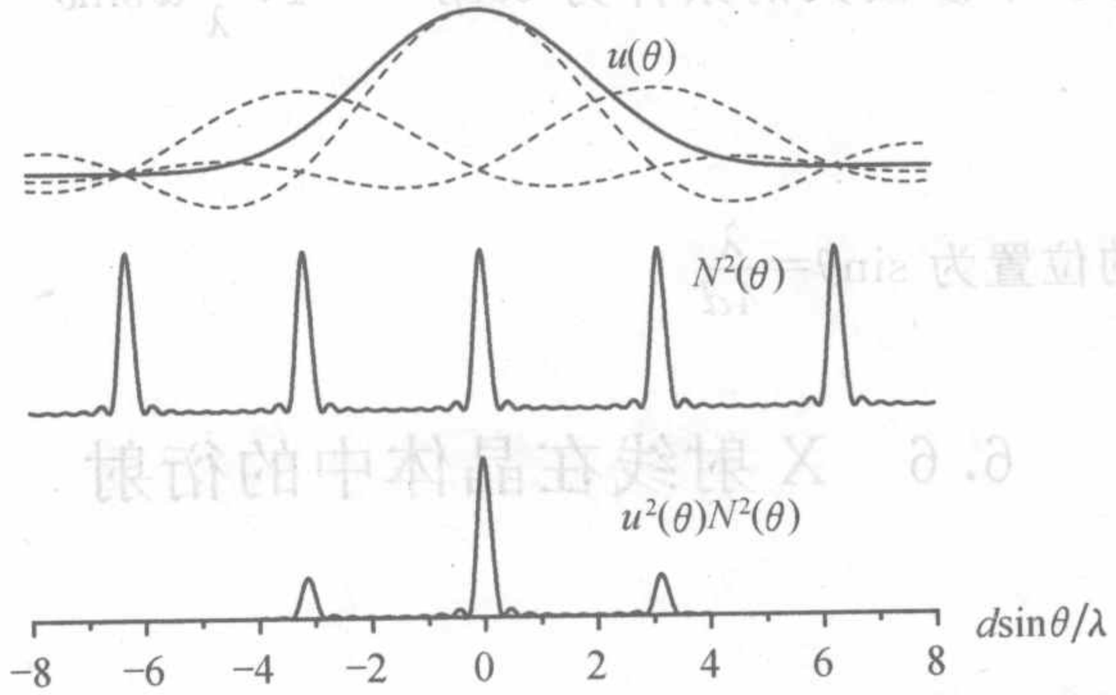


图 6.5.1　正弦光栅的光谱

振幅型衍射屏使得光的振幅发生变化，上述各种黑白光栅和正弦光栅都属于振幅型光栅；除此之外，还有一种光栅，通过改变光的相位，使波前变化，从而重新构建光波场. 具有周期性变化的相位因子的衍射屏就是相位光栅. 其实，闪耀光栅就是一种相位型光栅.

例如，将光学玻璃做成阶梯形结构，每一阶都有相等高度 d 和宽度 a，设玻璃的折射率为 n，则从玻璃相邻台阶射出的光，光程差为 $\Delta l=(n-1)a$，相位差为

$$\Delta\varphi=k\Delta L=\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda}.$$

例 6.5.1　三狭缝衍射屏，缝宽均为 a，彼此间距为 d，中间缝盖有可以引起 180°相位改变的滤光片，波长为 λ 的单色光正入射，计算下列各种情况下的角度：

(1) 第一衍射极小；

(2) 第一干涉极小；

(3) 第一干涉极大.

解　(1) 衍射只与单缝有关，由于是等宽狭缝，所以各个缝的衍射花样完全重叠，则第一衍射极小出现在 $\sin\theta=j\,\dfrac{\lambda}{a}\overset{j=1}{=}\dfrac{\lambda}{a}$

(2) 干涉由缝间光的相干叠加决定，干涉因子为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+kd\sin\theta\pm\pi)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+2kd\sin\theta)}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+kd\sin\theta)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta}-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(2\cos\beta-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{aligned}$$

光强

$$I(\theta)=(2\cos\beta-1)^2$$

极小值条件为 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，即 $\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=j\pi\pm\frac{\pi}{3}$，于是得到

$$\sin\theta=\left(j\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\lambda}{2d}$$

即第一干涉极小的位置为 $\sin\theta=\frac{\lambda}{6d}$

(3) 干涉极大，干涉极大的条件为 $\cos\beta=-1$，$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=(2j+1)\pi$，$\sin\theta=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2d}$

1 级干涉极大值的位置为 $\sin\theta=\frac{\lambda}{4d}$

6.6 X 射线在晶体中的衍射

6.6.1 晶格点阵

晶体具有周期性的空间结构，这是由于晶体中的原子、分子或离子在空间作周期性排列的结果，图 6.6.1 所示为 NaCl 中两种离子在空间周期性排列所形成的结构. 晶体的这种周期性可以用晶格描述. 晶体的每一个结构单元，是仅包含一个原子、分子，或离子基团的最小单元，称作晶体的原胞. 将这些原胞在空间周期性排列，就组成了晶体.

在晶体结构学上，通常将一个原胞用一个点表示，则原胞的排列就变成了点的排列. 由于每一个点代表一个原胞，所以这些点就构成了与晶体结构一致的三维空间网格，这种反映晶体结构的网格被称作晶格，或晶格点阵如图 6.6.2 所示.

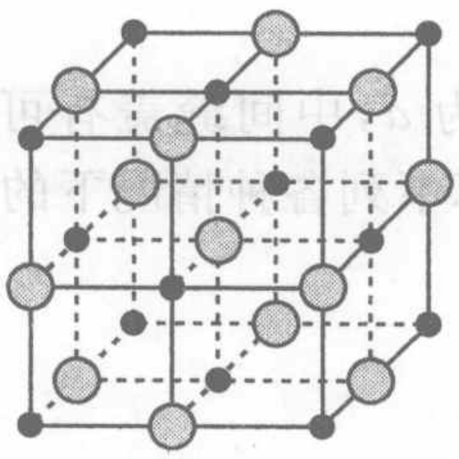


图 6.6.1 NaCl 的结构示意图

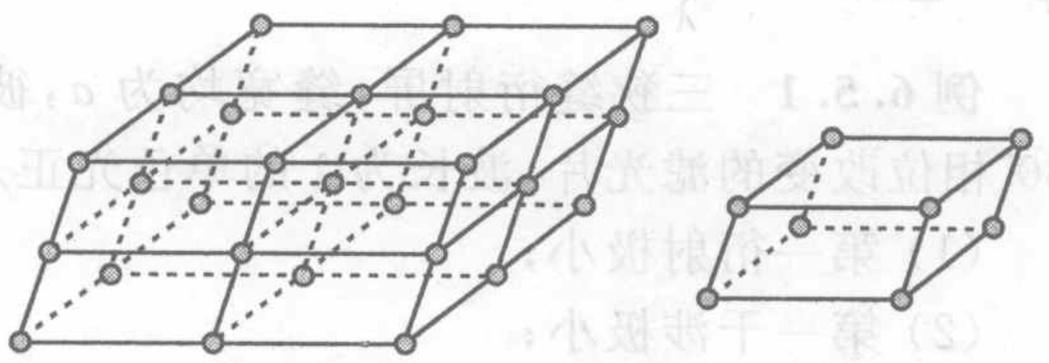


图 6.6.2 晶格点阵、原胞

每一个格点都是由若干原子、分子、或离子基团组成，入射到晶体中的 X 射线，被其中的带电粒子所散射. 因而入射到格点的电磁波将会向各个方向散射，散射波遵循波的叠加原理进行叠加. 散射的过程可能是相干的，也可能是非相干的. 对于相干散射，散射波进行相干叠加，叠加的结果，使得沿某些方向散射的波得到增强，而某些方向的散射波则显著减弱. 这种过程实际上就是衍射. 因而具有空间周期性结构的晶体可以作为衍射光栅，这是一种三维的光栅.

6.6.2　X 射线在晶体中的相干叠加

但是晶体的结构周期，即相邻格点的间距、晶格常数，通常是 nm 或 0.1nm 的数量级，比可见光的波长小得多，所以可见光不能在晶体中出现衍射.

而 X 射线的波长较短，与晶格常数匹配，因而 X 射线在晶体中可以发生衍射. 入射的 X 射线可以被其中的每一个格点散射，各个格点的散射波进行相干叠加，产生衍射，有一系列的衍射极大值，衍射极大值的方向就是 X 射线出射的方向.

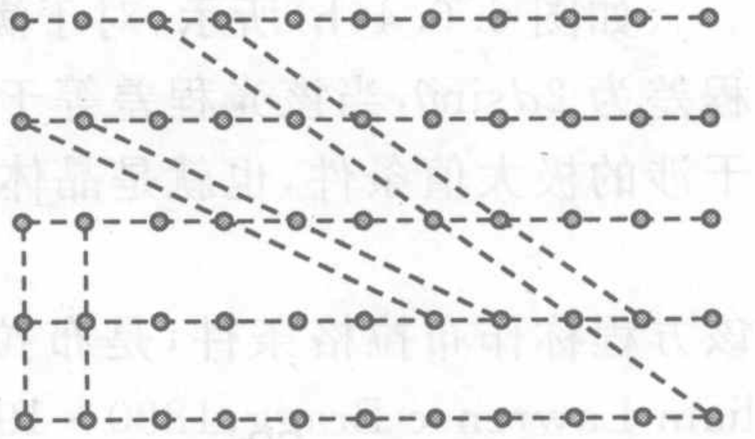


图 6.6.3　同一晶格中不同的晶面族

晶体中有很多的晶面族(图 6.6.3)，不同的晶面族有不同的间距，即晶格常数，用 d_{hkl}，其中下标 hkl 不同的晶面族.

1. 衍射的极大值条件

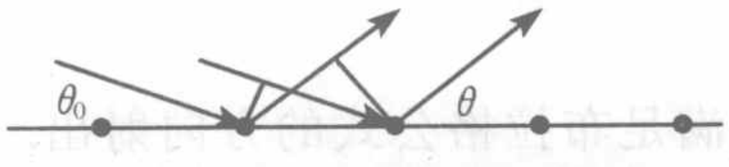
可以将晶格中每一个格点作为一个散射单元. 散射光是可以沿着任意方向的，但是，这些光都是相干光，因而要进行相干叠加，叠加的结果，只有在某些特殊的方向上得到加强，而其他方向上的散射光，由于叠加，强度很弱，这就是衍射的过程. 所以，从晶体中射出的 X 射线，其衍射的极大值条件取决于其晶格点阵的结构，也就是取决于晶体的空间周期性. 由于晶体具有三维的周期性结构，相当于一个三维的光栅，因而对其衍射过程的分析，比起前面讲过的具有一维结构的光栅要复杂一些.

从衍射的角度，可以将晶体看成是由一系列的晶面构成的，因而，我们可以先求出在同一个晶面上散射光相干叠加出现极大值的条件，再进一步讨论不同晶面的衍射光相干叠加出现极大值的条件.

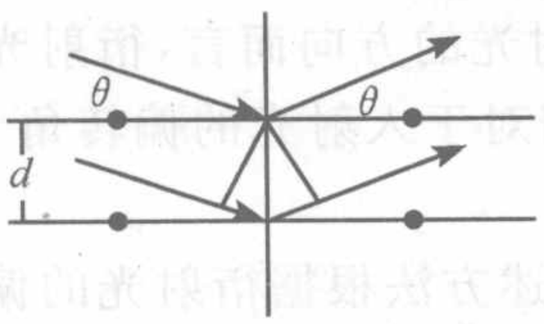
2. 同一个晶面上的衍射

首先计算每一个晶面上不同点间的散射光的相干叠加，即点间干涉，或称为晶面的衍射.

记入射 X 射线相对于晶面的夹角为 θ，而散射光相对于晶面的夹角为 θ'，如图 6.6.4(a)所示. 相对于晶面的入射角、散射角都是掠射角.



(a) 同一晶面上散射X射线的叠加



(b) 不同晶面上散射X射线的叠加

图 6.6.4　X 射线叠加图

一个晶面上各个格点都对入射光散射，其中相邻两个格点沿 θ 方向散射光的光程差为

$$\Delta L_1 = a(\cos\theta' - \cos\theta) \qquad (6.6.1)$$

如果上述光程差满足

$$\Delta L_1 = a(\cos\theta' - \cos\theta) = j\lambda \qquad (6.6.2)$$

则散射光相干叠加，将会出现极大值. 然而，晶格沿不同方向的散射光的强度并不相同，只有 $j=0$ 的方向光强最大，其他方向的散射光，即使满足干涉相长的条件，强度也要弱得多. 因而，每一个

晶面的散射光，相干叠加的极大条件为

$$\theta' = \theta \tag{6.6.3}$$

这类似于衍射的情形，相当于晶面的反射，即衍射的大部分能量集中在中央主极大.

3. 晶面间干涉

如图 6.6.4(b)所示，对于满足式(6.6.3)的衍射光，相邻晶面对应格点间的光程差为 $2d\sin\theta$，当该光程差等于波长整倍数时，相干叠加后，有极大值. 因此晶面间干涉的极大值条件，也就是晶体衍射的条件为

$$2d\sin\theta = j\lambda \tag{6.6.4}$$

该方程称作布拉格条件，是布拉格父子(William Henry Bragg，1862～1942；William Lawrence Bragg，1890～1971，英国)首先发现的.

X 射线经过晶体衍射后，在空间形成一系列的衍射极大值分布. 对于周期性很好的单晶体，由于这种晶体光栅是三维的，因而衍射花样与一维的光栅是不同的，并没有一根根的衍射条纹，而是一系列的衍射斑点(图 6.6.5)，但是，在某些情况下，如多晶体的衍射，也可以得到圆环形的衍射条纹(图 6.6.6).

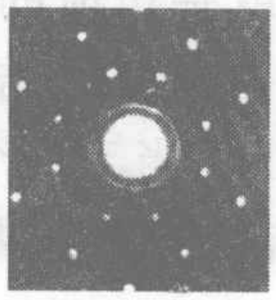


图 6.6.5 单晶的衍射斑

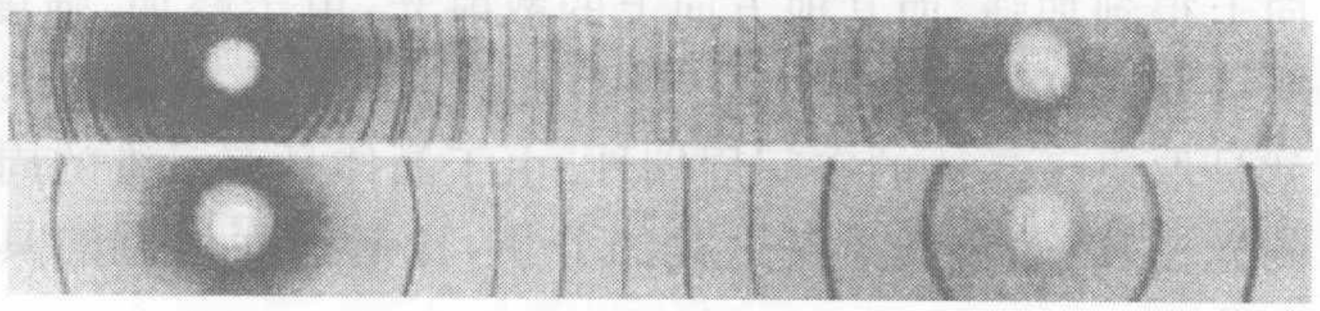


图 6.6.6 多晶体的圆环形衍射条纹

6.6.3 晶体 X 射线衍射的实验方法

1. 劳厄照相法

对于晶格常数未知的单晶体，可以采用具有连续谱的 X 射线衍射，用照相底版或其他探测器测量并记录衍射光的强度和方位，这是劳厄(Max von Laue，1879～1960，德国)照相法.

由于入射光的波长有很大的取值范围，所以，总可以有某些特定的波长 λ 和角度 θ 满足布拉格方程(6.6.4).

如图 6.6.7 所示，射入晶体中的 X 射线，从各个满足布拉格公式的方向射出. 对于晶体中的某一个晶面族，如果发生衍射的掠入射角为 θ，则衍射光向对于该晶面族的掠射角也是 θ，如图 6.6.8 所示，那么，相对于入射光的方向而言，衍射光偏转了 2θ 角；换言之，在不知晶面族的方向时，从衍射光相对于入射光的偏转角 2θ，可以确定衍射角为 θ，进而确定晶面的取向.

用照相法获得的单晶体 X 射线衍射图样，可以由上述方法根据衍射光的偏转角确定发生衍射的掠入射角 θ，进而确定发生衍射的晶面族的取向以及晶面间距.

对于单晶体，也可以采用衍射仪测量晶面取向以及晶格常数. 这种装置中，入

射光的方向是不变的，晶体放在可以绕轴转动的样品台上，而 X 射线探测器则处在以转轴为中心的一个圆周上. 从探测器处在 X 射线的入射方向，即 $\theta=0$，然后两者的转角保持联动，即样品转过 θ 角，探测器同时转过 2θ 角，如图 6.6.9 所示. 这种“θ-2θ”扫描方式，可以测得各级衍射光，进而得到晶格常数 d.

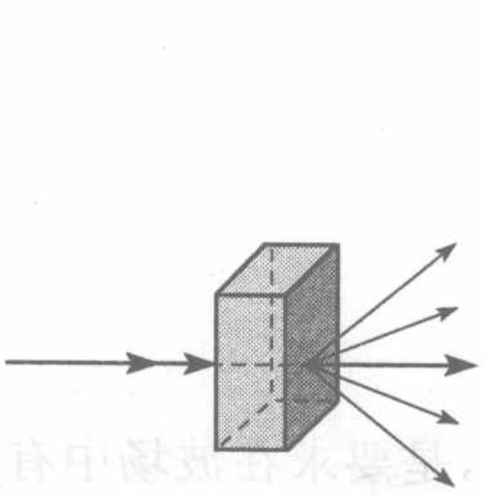


图 6.6.7　劳厄照相法

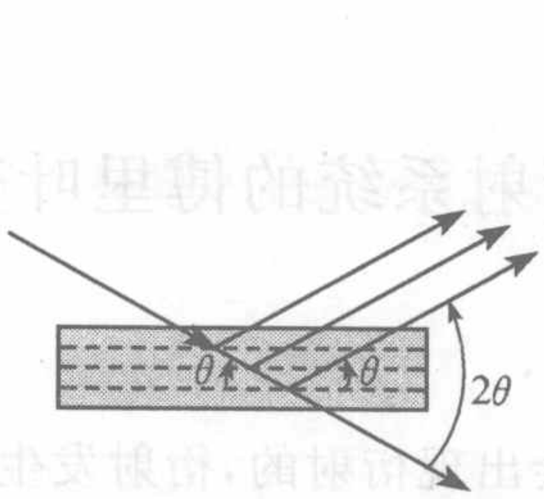


图 6.6.8　X 射线在单晶体中的衍射

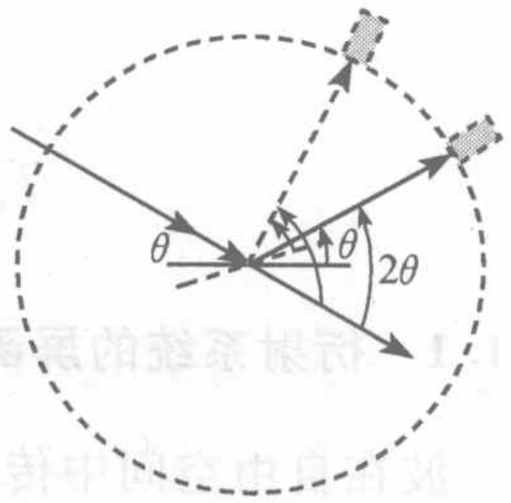


图 6.6.9　“θ-2θ”扫描示意

2. 德拜粉末法

除了有严格周期性的单晶体，实际中大量存在的是非晶体和多晶体. 多晶体是由很多个细小的单晶颗粒组成的，其中的各个小颗粒是任意取向的，如图 6.6.10 所示，用上述的劳厄方法无法得到好的衍射花样. 为了得到多晶样品的衍射花样，可以将多晶体压制成粉末，并制成细棒状. 在粉末样品中，多晶粒的晶面可取向更加均匀，也就是相对于固定方向入射的单色 X 射线，不同晶粒的掠入射角有相当大的取值范围，其中总有一部分晶粒的掠入射角满足布拉格方程 $2d\sin\theta=j\lambda$. 满足方程的衍射光，相对于入射光转过 2θ 角，而与入射光成 2θ 角的直线在空间构成了一个圆锥面，该圆锥的顶角为 4θ. 所以采用图 6.6.11 的照相装置，将照相底片安装在一个以样品棒为中心的圆筒壁上，衍射光在就照相底版上形成了以入射光为中心的一系列的同心圆环(图 6.6.12). 为了使得晶粒的取向更充分，可以让棒状的样品绕轴旋转，这种衍射装置也被称作德拜(Petrus Josephus Wilhelmus Debye，1884～1966，荷兰)照相机. 根据各个德拜圆环的半径，可以计算出发生衍射的掠入射角，进一步得到粉末样品的晶格常数 d.

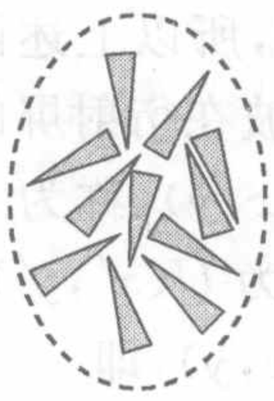


图 6.6.10　粉末样品中的小晶粒

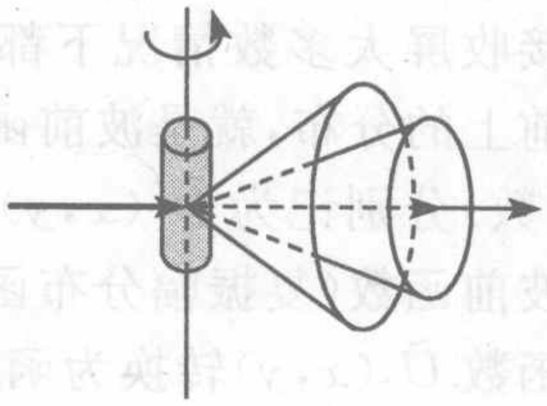


图 6.6.11　德拜照相法

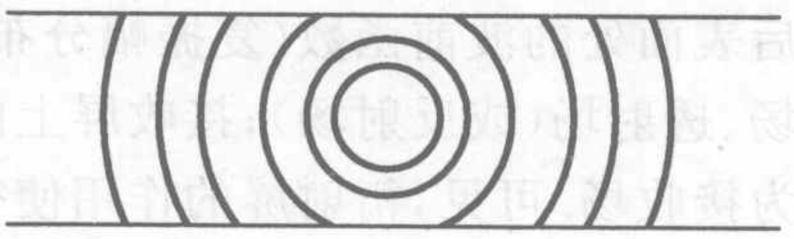


图 6.6.12　德拜照相法的衍射图样

晶体的 X 射线衍射，成了确定材料空间结构的重要手段，生物 DNA 分子的双螺旋结构，就是根据其 X 射线衍射的结果确定的.

第 7 章　傅里叶变换光学与全息照相

7.1　衍射系统的傅里叶变换

7.1.1　衍射系统的屏函数

波在自由空间中传播是不会出现衍射的，衍射发生的条件，是要求在波场中有障碍物. 衍射障碍物的存在，使得经过衍射障碍物后的波面发生改变，或者说波面的复振幅分布发生了变化. 所以，把能使波前的复振幅发生改变的物，统称为衍射屏. 单缝、圆孔、光栅等是我们熟悉的衍射屏，透镜、棱镜等，也是衍射屏.

衍射屏将波所在的空间分为前场和后场两部分，前场为照明空间，后场为衍射空间，如图 7.1.1 所示.

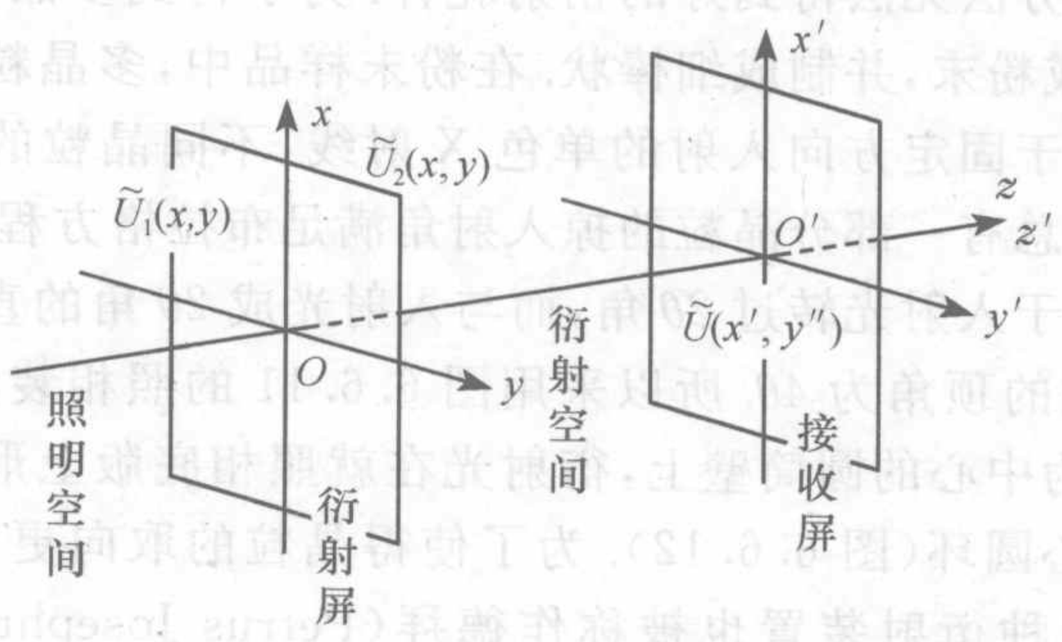


图 7.1.1　衍射系统

在衍射屏和接收屏处分别建立坐标系 $Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$，用函数来描写光波场的分布特征，由于其中的衍射屏、接收屏大多数情况下都是平面，所以上述函数都是波场的复振幅在某一个平面波前上的分布，就是波前函数. 将波在衍射屏的前后表面处的波前函数(复振幅分布函数)分别记为 $\tilde{U}_1(x,y)$ 和 $\tilde{U}_2(x,y)$，称为入射场、透射场(或反射场)；接收屏上的波前函数(复振幅分布函数)记为 $\tilde{U}(x',y')$，称为接收场. 可见，衍射屏的作用使得函数 $\tilde{U}_1(x,y)$ 转换为函数 $\tilde{U}_2(x,y)$，即

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{U}_2(x,y)}{\tilde{U}_1(x,y)}=\frac{A_2(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,y)}}{A_1(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,y)}}=\frac{A_2(x,y)}{A_1(x,y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)]} \tag{7.1.1}$$

其中，$\tilde{t}(x,y)$ 为透过率或反射率函数，是由衍射屏的特性决定的，称为屏函数.

屏函数为复数，一般情况下可以写成

$$\tilde{t}(x,y)=t(x,y)\exp[\mathrm{i}\varphi_t(x,y)] \tag{7.1.2}$$

屏函数的模 $t(x,y)$ 和幅角 $\varphi_t(x,y)$ 都是空间位置 (x,y) 的函数，其中模 $t(x,y)=\dfrac{A_2(x,y)}{A_1(x,y)}$，表示振幅的透过率，而幅角 $\varphi_t(x,y)=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)$ 表示衍射屏所引起的相位的改变. 有些特殊的衍射屏，其屏函数的模 $t(x,y)$ 为常数，这类衍射屏称为相位型的，如不计吸收和反射的透镜、棱镜等；有些衍射屏，其屏函数的幅角 $\varphi_t(x,y)$ 为常数，如黑白光栅、正弦光栅、单缝、圆孔等，这类衍射屏称为振幅型的. 但大多数衍射屏都是相幅型的，即模和幅角都不是常数.

7.1.2　接收场

在入射场已知的情况下，要想确定接收场至少还要经过以下两个步骤：

第一，求出透射场. 如果屏函数已知，则可以得到透射场为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)$$

第二，求出接收场. 要利用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_2(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

总的过程用公式表达，就是

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式中的积分区域只要取在衍射屏处就可，而实际的衍射屏的大小总是有限，所以积分式为

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.1.3}$$

其中，$r\overset{z'=0}{=}\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}$，$z$ 为接收屏到衍射屏的距离.

7.1.3　衍射系统的傅里叶变换方法

1. 积分公式的简化

对于夫琅禾费衍射系统，设入射光为 xOz 平面内的平面光，即 $\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\theta_0}$，衍射屏函数记为 $\tilde{t}(x,y)$，设系统满足近轴条件，即倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)\approx1$，在接收屏上的复振幅为

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r}}{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\Delta\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0+kx\sin\theta$，上式也可写作

$$\widetilde{U}(x',y')=\frac{KA_1}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}\iint\tilde{t}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\sin\theta_0+\sin\theta)x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于一般情形下的衍射，正如第 4 章中所指出的，严格求解上述积分(7.1.3)几乎是不可能的，因而，总是在一定的条件下，采取近似，才能求解.

衍射中常采用的近似方法主要有傍轴(近轴)条件和远场条件，由此将衍射分

为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射，傅里叶变换方法主要用于解决夫琅禾费衍射问题.

在应用了上述近似条件后，衍射积分公式中的各个因子都被简化，被积函数的形式将变得比较简单，可以求解.

其中的积分如果可以化为如下的形式

$$\iint \tilde{t}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_1x+f_2y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.1.4}$$

这就是数学上的傅里叶变换. 所以，求解夫琅禾费衍射问题，就变成了屏函数的傅里叶变换问题.

2. 衍射场的近似条件

1）菲涅耳衍射

如果接收屏距离衍射屏较近，在近轴条件下，即 $z^2 \gg (x'-x)^2+(y'-y)^2$ 时，积分公式中的因子 $\dfrac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}$ 可以化为如下形式

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}=z\sqrt{1+\left(\frac{x'-x}{z}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{z}\right)^2}$$

$$\approx z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}$$

并注意到分母中的 r 可以用 z 代替. 于是积分公式(7.1.4)化为

$$\tilde{U}(x',y')=K\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}\iint_{\Sigma}\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\exp\left\{ik\left[\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这就是菲涅耳衍射积分公式.

2）夫琅禾费衍射

如果接收屏距离衍射屏较远，满足远场条件，即 $z\gg\dfrac{x^2+y^2}{\lambda}$，由于

$$kr\approx k\left[z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}\right]=k\left[z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right]$$

$$=k\left(z-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)+\frac{\pi(x^2+y^2)}{z\lambda}$$

$$\approx k\left(z-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

衍射积分化为

$$\tilde{U}(x',y')=K\frac{\mathrm{e}^{ik\left(z+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)}}{z}\iint_{\Sigma}\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\exp\left(-ik\frac{x'x+y'y}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这就是夫琅禾费衍射积分公式.

可见，对于夫琅禾费衍射，由于入射波 $\tilde{U}_1(x,y)$ 是平面波，积分公式可化为 $\iint\tilde{t}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(f_1x+f_2y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的形式，因而夫琅禾费衍射，就是对于屏函数的傅里叶变换.

7.1.4　波前相因子分析法

如果知道了衍射屏的屏函数，就可以确定已知入射场经过衍射屏之后的衍射场的复振幅变换情况，进而完全确定接收场. 但由于衍射屏的复杂性以及衍射积分求解的困难，完全确定屏函数通常较困难，或者说几乎是不可能的. 所以只能采取一定的近似方法获取衍射场的主要特征. 如果能够确定屏函数的相位，则可以通过研究波的相位改变来确定波场的变化. 这种方法称为波前相因子分析法，或者称作相因子判断法.

7.2　透镜和棱镜的屏函数

7.2.1　透镜的相位变换函数

薄透镜的中心厚度为 d_0，透镜的有效口径为 D. 即光束被限制在直径为 D 的范围内.

如图 7.2.1 所示，在透镜前后各取一个平面，入射波和透射波的复振幅分别为

$$\tilde{U}_1(x,y)=A_1\exp[\mathrm{i}\varphi_1(x,y)] \quad 和 \quad \tilde{U}_2(x,y)=A_2\exp[\mathrm{i}\varphi_2(x,y)]$$

透镜的透过率函数为

$$\tilde{t}_{\mathrm{L}}=\frac{A_2}{A_1}\exp[\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)]=\begin{cases}a(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{L}}(x,y)}, & r<\dfrac{D}{2}\\ \text{不透}, & r=\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & r>\dfrac{D}{2}\end{cases}$$

忽略透镜的吸收和反射，即 $a(x,y)=A_2/A_1=1$，有

$$\tilde{t}_{\mathrm{L}}(x,y)=\exp[\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{L}}(x,y)]=\exp[\mathrm{i}(\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))] \tag{7.2.1}$$

式(7.2.1)就是透镜的相位变换函数.

对于薄透镜，采取傍轴近似，可以认为镜中的光线平行于光轴. 根据图 7.2.2 可以求得经透镜后的相位差为

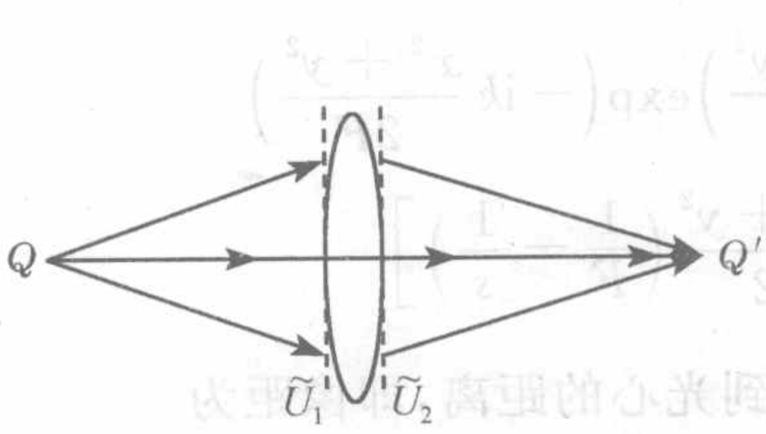


图 7.2.1　透镜的入射波与透射波

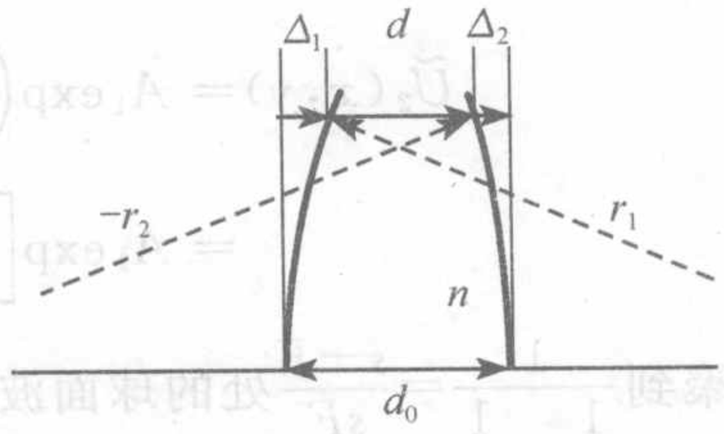


图 7.2.2　薄透镜的相位变换

$$\varphi_{\mathrm{L}}(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+nd(x,y)]$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+n(d_0-\Delta_1-\Delta_2)]=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(\Delta_1+\Delta_2)$$

其中，$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$ 为常数，可以略去. 在近轴条件下，

$$\Delta_1(x,y)=r_1-\sqrt{r_1^2-(x^2+y^2)}=r_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r_1^2}}\right)\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1}$$

$$\Delta_2(x,y)=-r_2-\sqrt{r_2^2-(x^2+y^2)}\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}$$

于是得到

$$\varphi_L(x,y)=-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)=-k\frac{x^2+y^2}{2F}\tag{7.2.2}$$

其中

$$F=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\tag{7.2.3}$$

就是薄透镜的焦距.

可得透镜的相位变换函数为

$$\tilde{t}_L(x,y)=\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)\tag{7.2.4}$$

其相因子为 $-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}$.

可以用上述函数得到几何光学的物像公式. 例如，平行光正入射，入射波在透镜平面处的复振幅为 $\tilde{U}_1=A_1$，透射波为

$$\tilde{U}_2(x,y)=\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_L(x,y)=A_1\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

可见，这是会聚到透镜后 F 处的球面波. 透镜焦距为 F.

类似地，如果入射波是透镜前 s 处的球面波，则

$$\tilde{U}_1(x,y)=A_1\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)$$

衍射波

$$\tilde{U}_2(x,y)=A_1\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

$$=A_1\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)\right]$$

为会聚到 $\frac{1}{\frac{1}{F}-\frac{1}{s}}=\frac{s-F}{sF}$ 处的球面波. 会聚点到光心的距离，即像距为

$$s'=1\Big/\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)=\frac{sF}{s-F}$$

即物像公式为

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{F}\tag{7.2.5}$$

当 $s=F$ 时，球面波经过透镜后变为平面波.

7.2.2　棱镜的相位变换函数

在棱镜前后各取一相互平行的平面(图 7.2.3)，入射波和透射波在两平面上的复振幅各为

$$\widetilde{U}_1(x,y) = A_1\exp[\mathrm{i}\varphi_1(x,y)]$$

$$\widetilde{U}_2(x,y) = A_2\exp[\mathrm{i}\varphi_2(x,y)]$$

对于薄的楔形棱镜，可以得到

$$\varphi_P(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd_0-n\Delta)$$

$$=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta \tag{7.2.6}$$

其中，$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$，为常数，相当于从棱镜中部(光轴处)通过的光的相位滞后. 如果棱镜前后两面的交棱，即楔角处的棱与 y 轴平行，楔角为 α，则 $\Delta=x\alpha$. d_0 为棱镜中心处的厚度. 于是得到

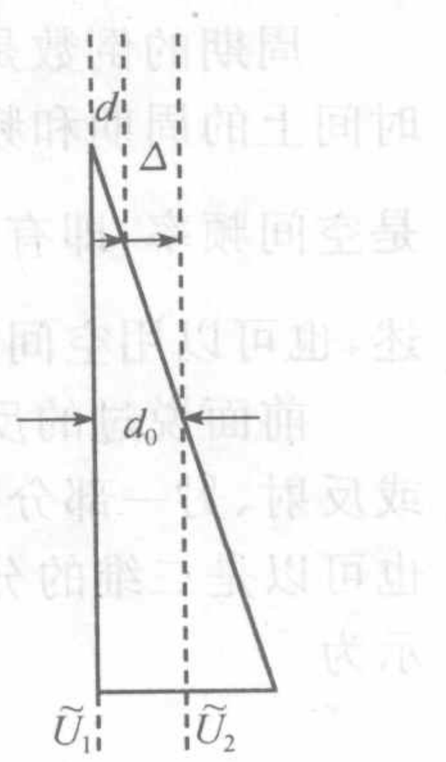


图 7.2.3　棱镜的相位变换

$$\varphi_P(x,y) = -k(n-1)\alpha x \tag{7.2.7}$$

如果棱镜的前表面保持在 xy 平面内，而前后两面的交棱在 xy 平面内沿任意方向，即相当于棱镜绕光轴转过一个角度. 可以用斜面法线的方向余弦角 α_1，α_2 表征，则有

$$\tilde{t}_P(x,y) = \exp[-\mathrm{i}k(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]$$

例如，轴上一物点到棱镜的距离为 s，则其发出的球面波经过棱镜后出射的波前可以按以下方法求得

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_P(x,y)$$

$$=A_1\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\exp[-\mathrm{i}k(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]$$

$$=A_1\exp\left\{\mathrm{i}k\left[\frac{x^2+y^2}{2s}-(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)\right]\right\}$$

由式(1.4.17)可知，等效于轴外物点发出的球面波，点源的位置为 $x_0=(n-1)\alpha_1 s$，$y_0=(n-1)\alpha_2 s$，$z_0=s$.

透镜和棱镜仅仅是相位型的衍射屏，只对波的相位起变换作用，是一种简单的变换装置.

7.3　夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析

7.3.1　屏函数的傅里叶变换

1. 空间频率的概念

单缝、距孔、圆孔或者光栅，都是衍射屏，其作用是使入射波的波前改变，可以

用屏函数表示衍射屏的作用.有一类应用广泛的衍射屏是衍射光栅,即具有周期性结构的衍射屏.

衍射光栅具有空间的周期性,无论是黑白型的光栅还是正弦型的光栅,其周期都可以用光栅常数 d 表示.

周期的倒数是频率,如对于振动,其振动周期 T 的倒数是振动的频率 ν,这是时间上的周期和频率.同样,在空间上也可以定义周期和频率,空间周期的倒数就是空间频率,即有 $f=\frac{1}{d}$,f 称为空间频率.周期性的衍射屏,既可以用空间周期描述,也可以用空间频率描述.

前面说过的反射、透射光栅,可以认为是"黑白型"的,即一部分使光全部透射或反射、另一部分全部不透光,其透过率函数可表示如图 7.3.1 所示;透过率函数也可以是二维的分布的(图 7.3.2),这些都是典型的振幅型衍射屏,其屏函数表示为

$$\tilde{t}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{透光部分}\\ 0, & \text{遮光部分}\end{cases} \tag{7.3.1}$$

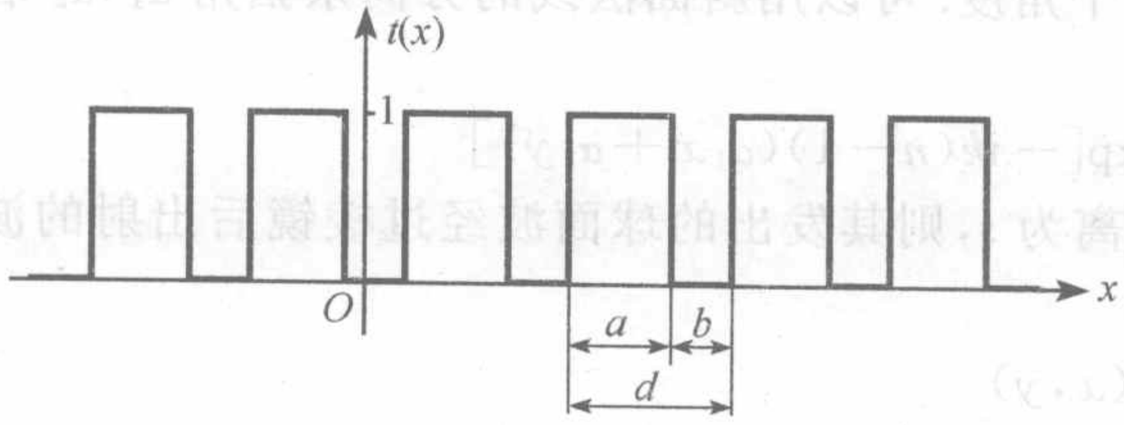


图 7.3.1 振幅型光栅的透过率函数

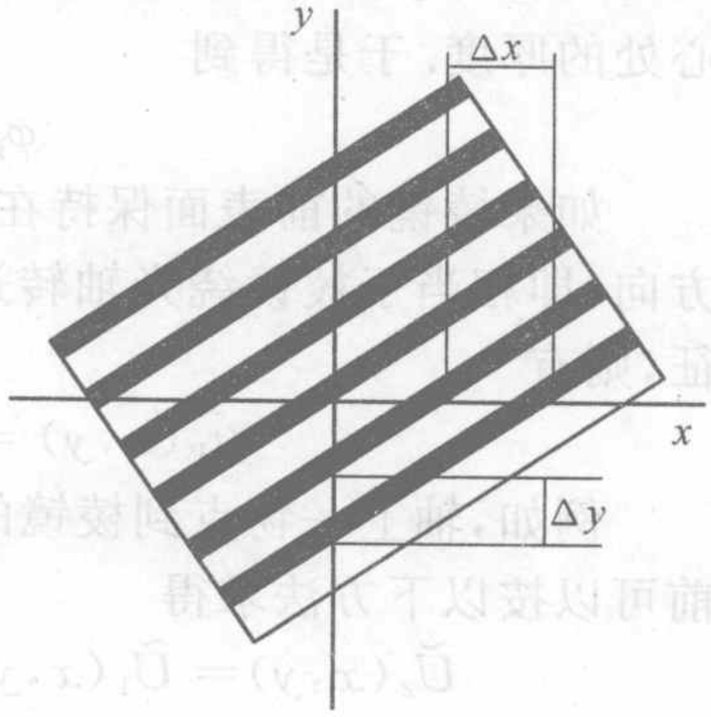


图 7.3.2 二维振幅型光栅

严格的周期函数,应该是定义域为整个 xy 平面的周期函数,而实际的光栅总是有限大小的.

如果 x 方向的透过率表示为

$$\tilde{t}(x)=\begin{cases}1, & x_0+nd<x<x_0+nd+a\\ 0, & x_0+nd+a<x<x_0+(n+1)d\end{cases},\quad x\in(-\infty,+\infty) \tag{7.3.2}$$

该透过率函数的周期性表示为 $\tilde{t}(x)=\tilde{t}(x+nd)$,$d$ 为最小的空间周期,即空间周期,空间频率为 $f=\frac{1}{d}$.

如果光栅的透过率是三角函数形式,即余弦或正弦型的,称为正弦光栅.

2. 正弦光栅的傅里叶变换

正弦光栅,如果光栅刻线与 y 轴平行,则其透过率在 x 方向作周期性变化,周

期为 d，空间频率为 f，$f=1/d$. 其屏函数可以写成

$$\tilde{t}(x) = t_0 + t_1\cos(2\pi fx + \varphi_0) \tag{7.3.3}$$

如果平行光正入射，由于 $\widetilde{U}_1(x)=A_1$，则透射波的复振幅为

$$\widetilde{U}_2(x) = \widetilde{U}_1(x)\tilde{t}(x) = A_1[t_0 + t_1\cos(2\pi fx + \varphi_0)]$$

而

$$\cos(2\pi fx + \varphi_0) = \frac{1}{2}\{\exp[\mathrm{i}(2\pi fx + \varphi_0)] + \exp[-\mathrm{i}(2\pi fx + \varphi_0)]\}$$

所以

$$\widetilde{U}_2(x) = A_1t_0 + \frac{1}{2}A_1t_1\{\exp[\mathrm{i}(2\pi fx + \varphi_0)] + \exp[-\mathrm{i}(2\pi fx + \varphi_0)]\} \tag{7.3.4}$$

即

$$\widetilde{U}_2(x) = \widetilde{U}_0(x) + \widetilde{U}_{+1}(x) + \widetilde{U}_{-1}(x) \tag{7.3.5}$$

透射波实际上变为三列平面波.

关于上述三列透射波的方向，可作如下讨论：

$\widetilde{U}_{+1}(x)=\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]$，为平面波，其波矢在 x 方向的分量为 $k_x^{+1}=2\pi f$，方向角为 $\sin\theta_1^{+1}=\frac{k_x^{+1}}{k^{+1}}=\frac{2\pi f}{2\pi/\lambda}=f\lambda$，其余两列波的方向角分别为 $\sin\theta_1^0=0$，$\sin\theta_1^{-1}=-f\lambda$，如图 7.3.3 所示.

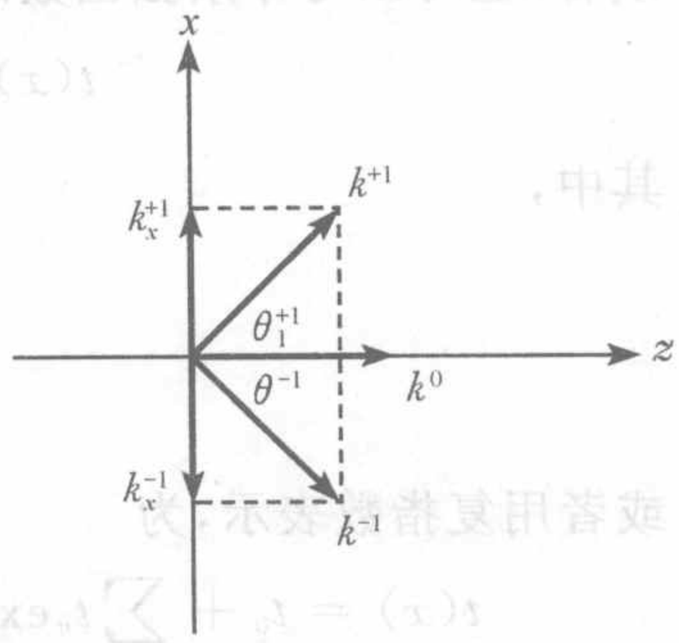


图 7.3.3　平面波透过正弦光栅后的方向

$\widetilde{U}_0(x)=A_1t_0$，0 级波，直流成分，方向 $\sin\theta_0=0$

$\widetilde{U}_{+1}(x)=\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]$，+1 级波，方向 $\sin\theta_{+1}=f\lambda$

$\widetilde{U}_{-1}(x)=\frac{1}{2}A_1t_1\exp[-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]$，−1 级波，方向 $\sin\theta_{-1}=-f\lambda$

上述结果与前面(6.5 节中)用衍射积分公式得到的结果是不一样的，积分公式的结果是

$$\widetilde{U}(x) = KF\widetilde{U}_0d\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\left[\frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}\right]$$

不同的原因是由于光栅的宽度是有限的，所以 6.5 节中的屏函数或透过率函数实际上不是严格的周期性函数，因而每一列波都有相应的半角宽度

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{D},\quad \Delta\theta_{\pm1} = \frac{\lambda}{D\cos\theta_{\pm1}}$$

其中，D 为光栅的有效宽度.

7.3.2 周期性屏函数的傅里叶变换

1. 一般的周期性函数的傅里叶变换

对于一般的周期性的屏函数，可以用傅里叶级数将其展开为一系列正弦和余弦函数的和.

如果周期函数为 $t(x)$，其周期为 d，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $t(x)$ 可以用傅里叶级数表示，即

$$t(x)=t_0+\sum_{n>0}a_n\cos 2\pi f_n x+\sum_{n>0}b_n\sin 2\pi f_n x \tag{7.3.6}$$

其中，$f_1=1/d$，是基频，$f_n=nf_1=n/d$. 而相应的傅里叶系数为

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\mathrm{d}x \tag{7.3.7}$$

$$a_n=\frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\cos(2\pi f_n x)\mathrm{d}x \tag{7.3.8}$$

$$b_n=\frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\sin(2\pi f_n x)\mathrm{d}x \tag{7.3.9}$$

或者，也可以写作余弦函数的形式

$$t(x)=t_0+\sum_{n>0}c_n\cos(2\pi f_n x-\varphi_n) \tag{7.3.10}$$

其中，

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{7.3.11}$$

$$\varphi_n=\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} \tag{7.3.12}$$

或者用复指数表示，为

$$t(x)=t_0+\sum_{n\neq 0}t_n\exp[\mathrm{i}(2\pi f_n x-\varphi_n)]=t_0+\sum_{n\neq 0}\tilde{t}_n\exp[\mathrm{i}(2\pi f_n x)] \tag{7.3.13}$$

其中，

$$\tilde{t}_n=t_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{i}b_n) \tag{7.3.14}$$

傅里叶系数 $\tilde{t}_n$ 可以直接求出，为

$$\tilde{t}_n=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\exp(-2\mathrm{i}\pi f_n x)\mathrm{d}x \tag{7.3.15}$$

波动光学中，用复数表示有简单明了的优点，所以上述的复数表达式具有代表性.

2. 屏函数的傅里叶频谱

$\tilde{t}_n$ 是将周期性函数展开为傅里叶级数后频率为 f_n 成分的系数，实际上表示了每一个频率成分所占的比重. 如果从波的角度看，将 $\tilde{t}_n\exp[\mathrm{i}(2\pi f_n x)]$ 视为波的复振幅，则 $\tilde{t}_n$ 表示的就是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_n x}$ 的振幅.

$\tilde{t}_n$ 的集合称为傅里叶频谱，即空间频率为 f_n 的成分的振幅. 对于周期性的屏函数，$\tilde{t}_n$ 的取值是分立的，而非周期性的屏函数，由于必须以傅里叶积分的形式表示，则 $\tilde{t}_n$ 的取值为连续的.

从傅里叶变换的角度来看，任何形式的衍射屏或物体，即任何形式的屏函数，都可以将其看成是一系列具有空间周期性的函数的线性叠加，即空间频谱的线性叠加. 每一个周期函数的相因子可以表示为 $\varphi_n = 2\pi f_n x$，单色平面波照射到这些物体上，由于平面波的相位因子也是线性的，即 $\varphi(x,y) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$，所以透射波也是一系列具有空间周期性函数的线性叠加，其每一成分的周期与 f_n 和屏函数的周期有关，该成分的相因子为 $\varphi'_n = \varphi(x,y) + \varphi_n = k_x x + k_y y + k_z z + 2\pi f_n x + \varphi_0$，则分解成为一系列向不同方向出射的单色平面波，或者是分立的，或者是连续的.

3. 傅里叶面

每一个空间频谱代表一个衍射波，该衍射波是平面波. 用透镜可以将不同方向的平面衍射波会聚到其像方焦平面上的不同位置，则得到一系列的衍射斑，则焦平面就是入射波经过衍射屏之后形成的空间频谱面，即衍射屏，或原图像的傅里叶频谱面，简称为傅里叶面. 夫琅禾费衍射装置实际上就是傅里叶频谱分析器.

4. 黑白型光栅屏函数的傅里叶级数与衍射场

一维情形，即光栅的刻线方向与坐标轴平行，设与 y 轴平行，屏函数是在 x 方向的周期性函数，其周期性屏函数可以表示为 $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x + nd)$，设 $x \in (-\infty, +\infty)$，n 为整数. 可以直接用傅里叶级数表示为

$$\tilde{t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nfx}$$

则其中的傅里叶频谱为

$$a_n = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nfx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nfx}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{d\mathrm{i}2\pi nf}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi nfa} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi nfa}) = \frac{\sin(\pi nfa)}{d\pi nf} = \frac{a}{d}\frac{\sin(\pi nfa)}{\pi nfa} = \frac{a}{d}\frac{\sin(\pi na/d)}{\pi na/d}$$

其方向为

$$\sin\theta_n = nf\lambda = \frac{n}{d}\lambda$$

即

$$d\sin\theta_n = n\lambda$$

上式为光栅方程.

n 级谱的强度为

$$I_n = |a_n|^2 = \left[\frac{a}{d}\frac{\sin(\pi na/d)}{\pi na/d}\right]^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\pi}\sin\theta_n\right)^2}{\left(\frac{\pi a}{\pi}\sin\theta_n\right)^2} \tag{7.3.16}$$

为单元衍射因子对应的强度分布.

例如，对于 $a=d/2$ 的光栅，其屏函数的傅里叶展开式为

$$t(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(2\pi fx)-\frac{2}{3\pi}\cos(2\pi\cdot 3fx)+\frac{2}{5\pi}\cos(2\pi\cdot 5fx)-\cdots$$

或用指数表示为

$$\tilde{t}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(e^{i2\pi fx}-e^{-i2\pi fx})-\frac{1}{3\pi}(e^{i2\pi\cdot 3fx}-e^{-i2\pi\cdot 3fx})+\frac{1}{5\pi}(e^{i2\pi\cdot 5fx}-e^{-i2\pi\cdot 5fx})-\cdots$$

其二、四、六等衍射级次缺级.

7.3.3 非周期性的屏函数的傅里叶变换

非周期性的函数，相当于 $f=\frac{1}{d}=0$，$(d=\infty)$的周期性函数.

如对于定义域为$(-L/2,L/2)$函数 $g(x)$，如图 7.3.4 所示，可以将上述定义域作为函数的周期，其空间周期为 L，取其在一个周期，即$(-L/2,L/2)$间的一段，展开为

$$g(x)=g_0+\sum_{n\neq 0}\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx} \tag{7.3.17}$$

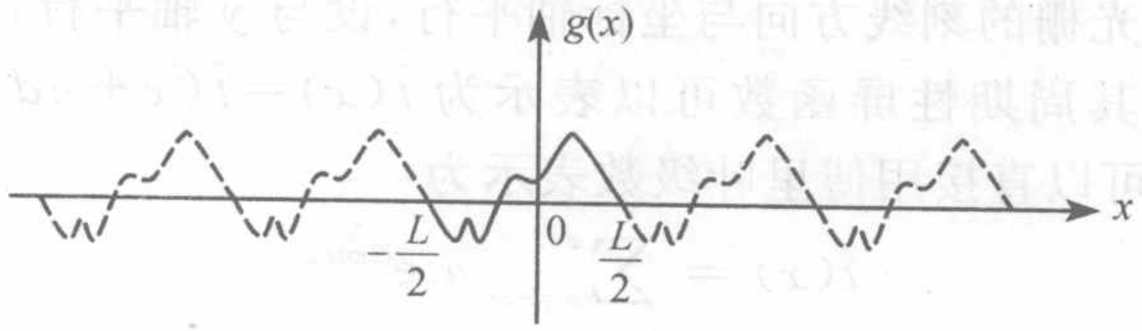


图 7.3.4 非周期性的函数

其中，$f=1/L$，为基频. 其傅里叶系数为

$$\tilde{g}_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi nfx}\,dx \tag{7.3.18}$$

其中 $f_n=nf$. 相应有

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx}\,\frac{1}{L}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx}(f_{n+1}-f_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\tilde{g}_n e^{i2\pi f_n x}\Delta f_n \tag{7.3.19}$$

如 $L=\infty$，上述求和化为积分，有

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\tilde{g}_n e^{i2\pi f_n x}\Delta f_n=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi f_n x}\,df_n=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi fx}\,df \tag{7.3.20}$$

反变换，即傅里叶系数为

$$G(f)=L\tilde{g}_n=\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi fx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}\,dx \tag{7.3.21}$$

即对于非周期性函数的傅里叶积分变换，或傅里叶变换，可以用积分表示其频谱，为

$$\begin{cases} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx} \mathrm{d}f \\ G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx} \mathrm{d}x \end{cases}$$

可见，非周期函数的频谱 $G(f)$ 为连续谱.

例如，对于单缝衍射屏，其屏函数为 $g(x)=\begin{cases} A & |x|<a/2 \\ 0 & |x|>a/2 \end{cases}$，作傅里叶变换，有

$$G(f)=\int_{-a/2}^{a/2} A\exp(-\mathrm{i}2\pi fx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{-\mathrm{i}2\pi f}\int_{-a/2}^{a/2} A\exp(-\mathrm{i}2\pi fx)\mathrm{d}(-\mathrm{i}2\pi fx)=\frac{A}{-\mathrm{i}2\pi f}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi fa}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi fa})$$

$$=A\frac{-\mathrm{i}2\sin(\pi fa)}{-\mathrm{i}2\pi f}=aA\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中，$\alpha=\pi fa$.

如果平面波正入射 $\widetilde{U}_1(x)=A_1$，屏函数中 $A=1$，透射波为

$$\widetilde{U}_2(x)=\widetilde{U}_1(x)g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} aA_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} aA_1\frac{\sin\pi fa}{\pi fa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x$$

透射波中空间频率为 f 的部分，即方向为 $\sin\theta=\frac{2\pi f}{k}=f\lambda$ 的成分，透射波为 $G(f)=aA_1\frac{\sin\pi fa}{\pi fa}$，将其中的空间频率 f 以方向表示，$f=\frac{\sin\theta}{\lambda}$，则有 $G(f)=aA_1\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$，即为单元衍射因子.

7.4　阿贝成像原理

7.4.1　阿贝成像原理的数学推导

用单色平行相干光照明近轴小物 ABC，该物经透镜后成像于 A′B′C′，由于入射光是相干的，因而这便构成了一个相干成像系统. 对于成像过程，可以用几何光学的物像关系理解，也可以从频谱转换的角度解释.

物可以看成是一系列不同空间频谱的集合. 图 7.4.1 所示的相干成像分两步完成. 第一步是物上的光发生夫琅禾费衍射，在透镜的后焦平面上形成一系列的衍射斑. 第二步是将各个衍射斑作为新的光源，其发出的各个球面次波在像平面上进行相干叠加，像是干涉的结果，即干涉场. 这就是相干成像的阿贝(Ernst Karl Abbe，1840～1905，德国)原理. 阿贝成像原理可以用数学方法说明.

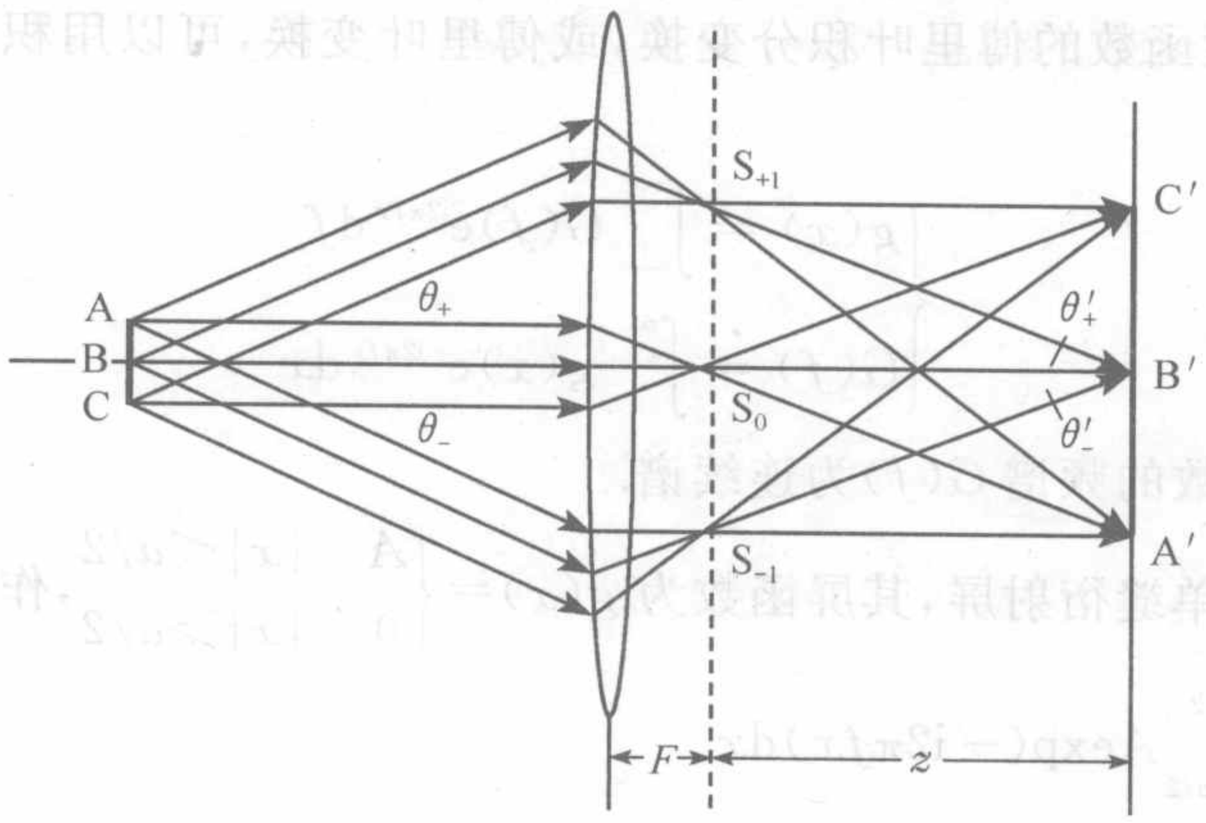


图 7.4.1 阿贝成像原理的数学推导

不妨设物为正弦光栅，其发出的光波为 $\widetilde{U}_O(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos 2\pi fx)$，为三列平面波. 三列平面衍射波在透镜的像方焦平面上形成三个衍射斑 S_{+1}，S_0，S_{-1}，就是三个点光源. 三个衍射斑作为三个点光源，发出的球面波在像平面上进行相干叠加. 在像平面上，应用衍射积分公式，其瞳函数振幅为分别为 $A_{\pm1}\propto A_1t_1/2$，$A_0\propto A_1t_0$，初相位分别为 $\varphi(\theta)=kL_0(\theta)$，$L_0(\theta)$ 为光栅(物)中心到衍射场点，即焦平面上衍射斑点的光程. 分别表示为 $\overline{BS}_{\pm1}$ 和 $\overline{BS}_0$，则三个次波光源的复振幅可写为

$$\widetilde{U}_{+1}\propto\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_{+1})]$$

$$\widetilde{U}_0\propto A_1t_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_0)]$$

$$\widetilde{U}_{-1}\propto\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_{-1})]$$

在像平面(x',y')的复振幅可以按如下方法求得：

对于轴上物点 S_0，在像平面的复振幅为

$$\widetilde{U}_0(x',y')\propto\widetilde{U}_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_0B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

$$\propto A_1t_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS_0B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

对于轴外物点 $S_{\pm1}$，由于$(x,y)\approx(z\sin\theta'_{\pm1},0)$，其相因子中有

$$-\mathrm{i}k\frac{x'x_0+y'y_0}{z}=-\mathrm{i}k\frac{x_{\pm1}}{z}x'=-\mathrm{i}k\sin\theta'_{\pm1}x'$$

所以有

$$\widetilde{U}_{\pm1}(x',y')\propto\widetilde{U}_{\pm1}\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x'x_0+y'y_0}{z}\right)$$

$$=\widetilde{U}_{\pm1}\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp[-\mathrm{i}k(\sin\theta'_{\pm1})x']$$

$$\propto \frac{1}{2}A_1 t_1 \exp[\mathrm{i}k(\overline{BS_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp[-\mathrm{i}k(\sin\theta'_{\pm1})x']$$

由于物像之间的等光程性，$(\overline{BS_0B'})=(\overline{BS_{\pm1}B'})$，可以把前两个相位因子合写作 $\varphi(x',y')$，即 $\varphi(x',y')=k(\overline{BS_0B'})+k\dfrac{x'^2+y'^2}{2z}=k(\overline{BS_{\pm1}B'})+k\dfrac{x'^2+y'^2}{2z}$

三列波在像平面上相干叠加的干涉场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{\mathrm{I}}(x',y')&=\widetilde{U}_0(x',y')+\widetilde{U}_{+1}(x',y')+\widetilde{U}_{-1}(x',y')\\&=A_1\exp[\varphi(x',y')]\left\{t_0+\frac{t_1}{2}[\exp(\mathrm{i}k(\sin\theta'_{+1}x')+\exp(-\mathrm{i}k\sin\theta'_{-1}x')]\right\}\end{aligned}$$

根据阿贝正弦条件 $\sin\theta'_{\pm1}/\sin\theta_{\pm1}=y/y'=1/V$，$V$ 为像的横向放大率，于是有 $\sin\theta'_{\pm1}=\sin\theta_{\pm1}/V$，即 $k\sin\theta'_{\pm1}x'=k\sin\theta_{\pm1}x'/V$，而

$$k\sin\theta_{\pm1}=\frac{2\pi}{\lambda}(\pm f\lambda)=\pm 2\pi f$$

代入 U_{I} 的表达式，有

$$\widetilde{U}_{\mathrm{I}}(x',y')\propto A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x',y')}\left[t_0+t_1\cos\left(2\pi\frac{f}{V}x'\right)\right]$$

而物光波为 $\widetilde{U}_{\mathrm{O}}(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos 2\pi fx)$

两者除相因子 $\varphi(x',y')$ 之外，有相似的表达式. 而相因子在强度表达式中不出现，故像与物有相同的光强分布，即物像之间是相似的. 此外，有两点需要说明：

(1) 物的空间频率为 f，而像的空间频率为 f/V，或空间周期由 d 变为 Vd，表示像的几何放大或缩小，不影响像的质量.

(2) 像质的反衬度可以通过交流部分与直流部分的比值体现，对于物像，都有 $\gamma_{\mathrm{O}}=\gamma_{\mathrm{I}}=\dfrac{t_1}{t_0}$，即 $\dfrac{\gamma_{\mathrm{I}}}{\gamma_{\mathrm{O}}}=1$，即像的反衬度没有下降.

对于任意的物，都可以通过傅里叶变换，使之成为一系列正弦光栅的和，所以上述证明具有普遍的意义.

7.4.2　阿贝成像原理的实验验证

1. 关于空间滤波

前面已经说明，正弦光栅的 ±1 级波的方向为 $\sin\theta_{\pm}=\pm f\lambda=\pm\lambda/d$，$f=1/d$ 为衍射屏或物的空间频率，即空间频率与波的衍射角相关，所以可以据此做成低通、高通或带通的滤波装置，见图 7.4.2.



图 7.4.2　空间滤波装置

对于正弦光栅，仅有 0，±1 级，而对于其他类型的周期或非周期的光栅，则存在一系列的分立或连续的空间频率. 每一个频率都有相对应的衍射角，不同频率的波将会聚到透镜的像方焦平面，即傅里叶面上. 则在傅里叶面上采用不同的装置可以起到空间滤波的效果，可以有低通、带通或高通的滤波器. 实际的物包含各种信息，即具有

各种从低到高的空间频率，但透镜的口径总是有限的，所以会滤掉一些高频信息. 但有时，需要对图像进行改造，这就要采取一些措施，进行滤波.

2. 阿贝-波特空间滤波实验

实验装置如图 7.4.3 所示，以黑白光栅为物，在傅里叶面上加一可调狭缝，观察像的变化，图 7.4.4 和图 7.4.5 显示了该滤波实验中黑白光栅的透过率函数 $\tilde{t}(x)$、空间频谱、像平面上的复振幅分布 $\widetilde{U}(x')$、像平面上的光强分布 $I(x')$，以及像的图样. 对结果的说明如下：

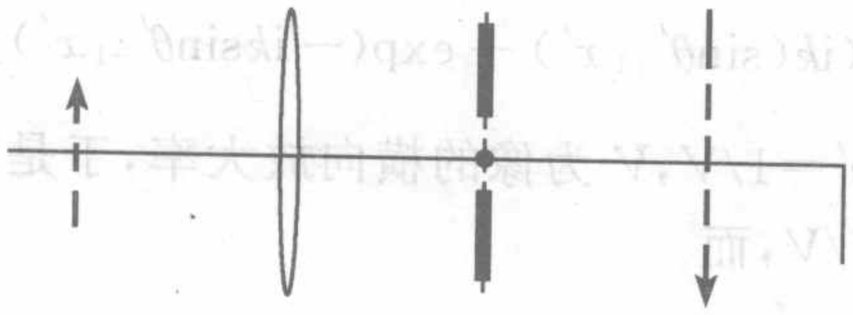


图 7.4.3 阿贝-波特空间滤波实验装置

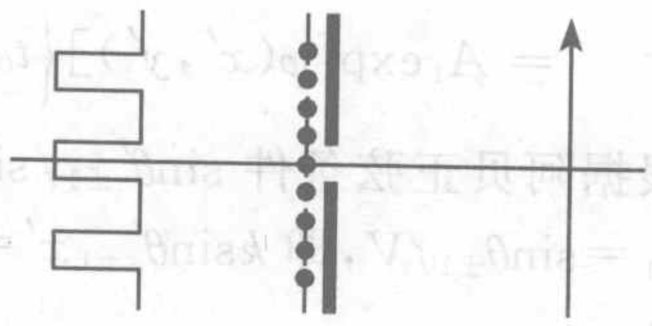


图 7.4.4 阿贝-波特空间实验装置中傅里叶面上的可调节狭缝

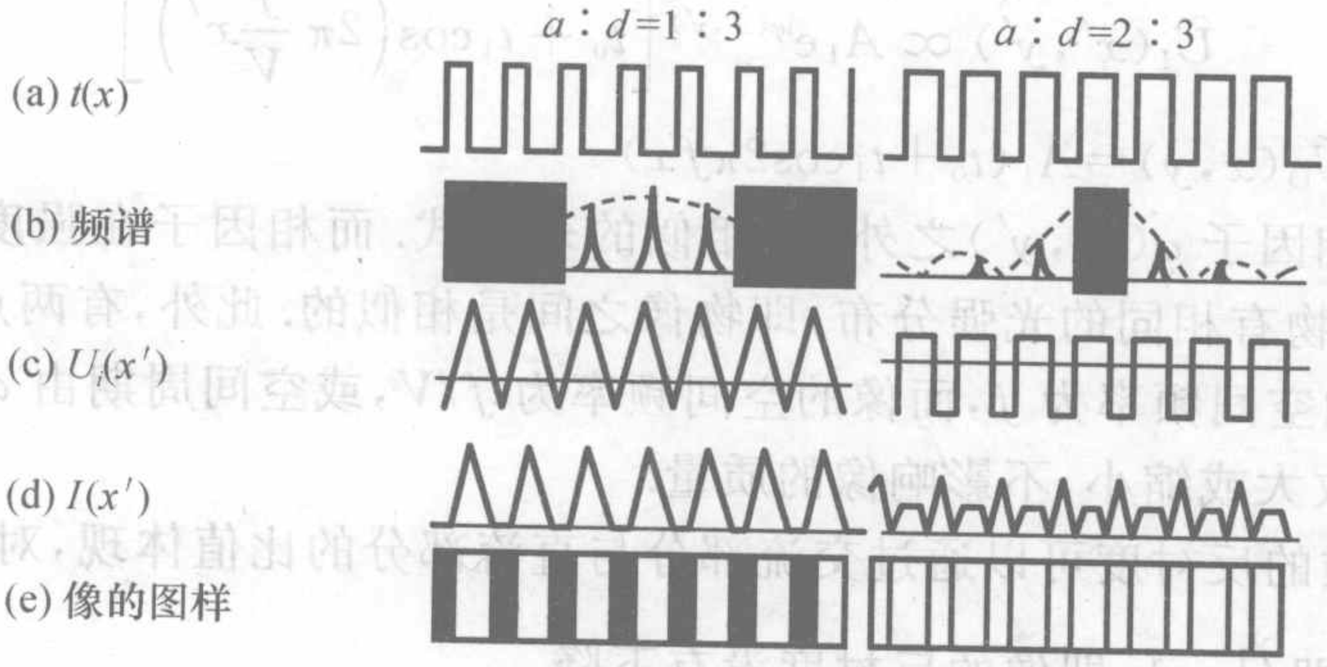


图 7.4.5 阿贝-波特空间滤波实验的结果

(1) 只让 0 级，即直流成分通过，如图 7.4.4 所示，则像平面被 0 级斑发出的球面波照明. 在近轴条件下，像平面被均匀照明.

(2) 让 0 级和 ±1 级通过，则傅里叶面上的频谱如图 7.4.5(b)左所示，而像平面上是 0 和 ±1 三个衍射斑发出的次波的相干叠加. 在像平面上的复振幅如图 7.4.5(c)左所示，光强以及像的图样为左侧下面两幅.

由于在像平面上，上述三列次波的复振幅可表示为

$$a_0 \exp\left[ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right], \quad a_1 \exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_{\pm1}+yy_{\pm1}}{z}\right)\right]$$

叠加

$$\widetilde{U}_1(x,y)=\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\left\{a_0+a_1\left[\exp\left(-ik\frac{xx_{+1}+yy_{+1}}{z}\right)+\exp\left(-ik\frac{xx_{-1}+yy_{-1}}{z}\right)\right]\right\}$$

由于 x_{+1} 和 x_{-1} 的对称性，以及在 y 方向（水平方向）上都是相同的，故可取 $y=0$，上式变为

$$\widetilde{U}_{\mathrm{I}}(x,y)=\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\left\{a_0+a_1\left[\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{xx_1}{z}\right)+\exp\left(\mathrm{i}k\frac{xx_1}{z}\right)\right]\right\}$$

$$=\left[\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\right]\left[a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)\right]$$

其中前面的因子是共有的，则像面上的波的特征由振幅 $\left[a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)\right]$ 决定.

值得注意的是，交流成分的空间频率为 $f_1=\frac{k}{2\pi}\frac{x_1}{z}=\frac{x_1}{\lambda z}$，即高级次的衍射斑的空间频率高. 交流与直流的相对振幅由 a_0 与 $2a_1$ 的相对大小决定. 如果 $2a_1>a_0$，上式可以出现负值.

(3) 进一步展宽狭缝，使 0，±1 和±2 级都通过，则有

$$\widetilde{U}_{\mathrm{I}}=\left[\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\right]\left[a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)+2a_2\cos\left(k\frac{x_2}{z}x\right)\right]$$

由于更多的高频信号加入，这时复振幅的分布更接近于方波，而像的黑白界限更清晰.

(4) 使 0 级之外的所有衍射斑都通过狭缝，这时傅里叶面上的频谱、像平面上的振幅和光强分布如图 7.4.5 右侧的(b)、(c)、(d)所示. 像平面的复振幅为

$$\widetilde{U}_{\mathrm{I}}=2\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}kx^2}{2z}\right)\right]\left[a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)+a_2\cos\left(k\frac{x_2}{z}x\right)+a_3\cos\left(k\frac{x_3}{z}x\right)+\cdots\right]$$

可见，与实验(2)、(3)相比，原来不透光的部分也是亮的.

7.4.3　图像处理

由阿贝原理，成像系统总是先在傅里叶面上形成衍射斑，然后衍射斑作为新的光源，发出的光在像平面上相干叠加而形成物的像，如图 7.4.6 所示. 因而，通过对傅里叶面的处理，可以对图像进行处理.

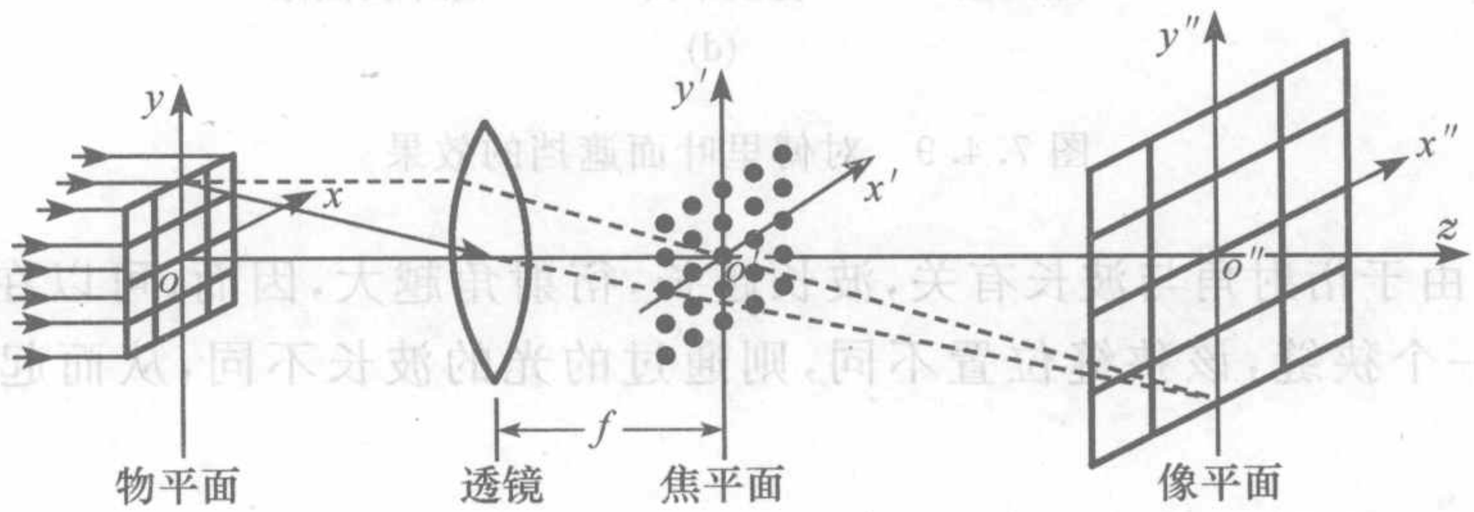


图 7.4.6　成像系统中的物平面、傅里叶面（透镜的焦平面）以及像平面

例如，如果物是矩形网格，则其夫琅禾费衍射频谱就是二维的点（图 7.4.7）；物是直线，则衍射斑为一维的点（图 7.4.8）. 此时，如果在频谱面上，即傅里叶面

上，采用相应的空间滤波装置，就可以遮挡频谱中的某些成分，从而改变像.

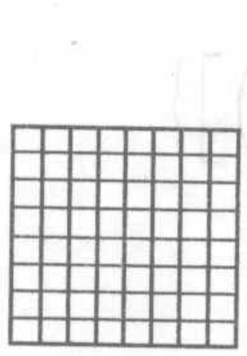


图 7.4.7 矩形网格的空间频谱

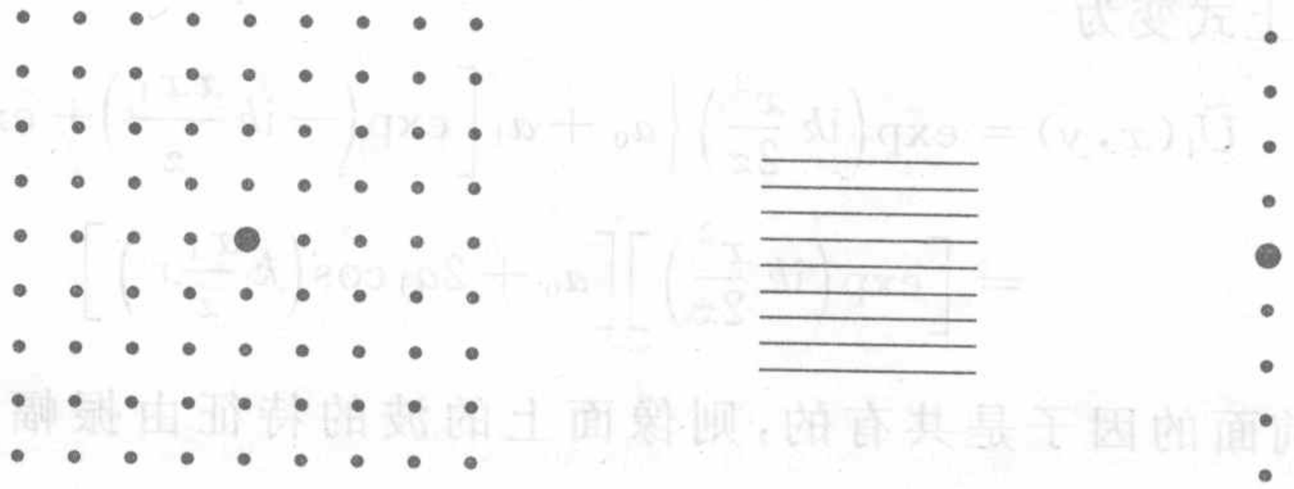


图 7.4.8 平行直线的空间频谱

这种图像处理可以有两种不同的方式. 第一，可以采用通过遮挡频谱中某些成分的方式，将图像中的某些部分去掉. 例如，网格形的物，其傅里叶面上的频谱是二维分布的衍射斑，如果用竖直狭缝将其他部分遮挡，而只让中央一列衍射斑通过，则像平面上就只剩下水平方向的直线[图 7.4.9(a)]；用水平狭缝将其他部分遮挡，而只让中央一排衍射斑通过，则像平面上就只剩下竖直方向的直线[图 7.4.9(b)]；如果狭缝是倾斜的，则只剩下斜着分布的像点构成的倾斜直线[图 7.4.9(c)]；要是拍摄到了笼中的小鸟，则可以通过在傅里叶面上放置[图 7.4.9(d)]的滤波装置将网格去掉等. 这时傅里叶面起到了变换平面的作用.

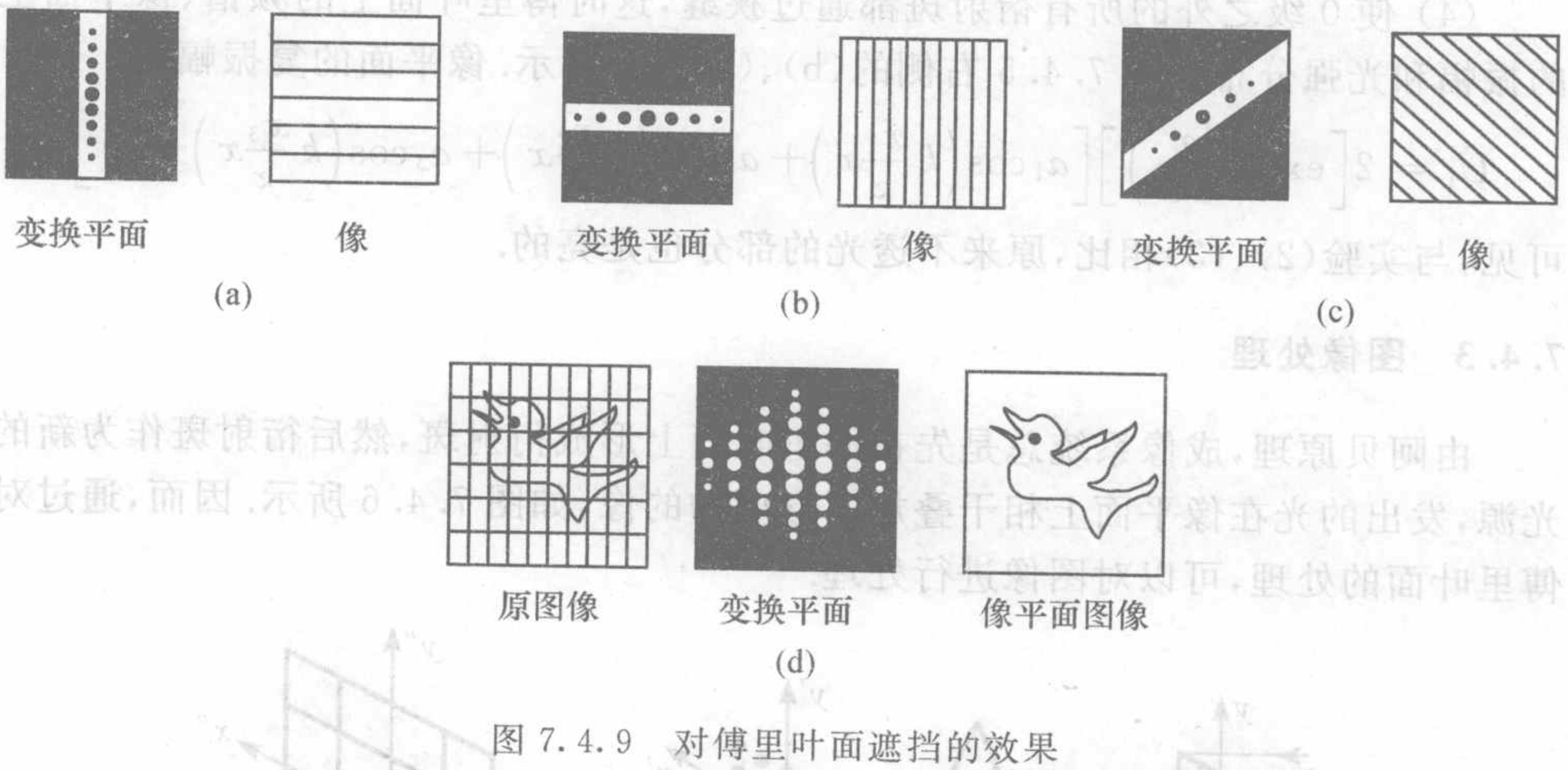


图 7.4.9 对傅里叶面遮挡的效果

第二，由于衍射角与波长有关，波长越长，衍射角越大，因而，可以在每一衍射斑上设置一个狭缝，该狭缝位置不同，则通过的光的波长不同，从而起到滤色的作用.

7.4.4 相衬显微镜

普通显微镜容易观察不同位置处透射率或反射率相差较大的样品，即振幅型样品. 但是对于均匀透明的样品，即透过率函数是相位型的样品，则由于反衬度太

小而无法观察.

可以采用附加相移的办法改变透过率.

设相位型样品的屏函数为 $\tilde{t}(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}$,对振幅或光强的透过率没有变化,因此,在普通显微镜下显示一片均匀的亮度,看不清样品的结构.设物平面发出的光波为 $\widetilde{U}_{\mathrm{O}}=A_1\tilde{t}(x,y)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}$.依泰勒展开

$$\widetilde{U}_{\mathrm{O}}=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}=A_1\left(1+\mathrm{i}\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{\mathrm{i}}{3!}\varphi^3+\cdots\right)$$

若在显微镜物镜的傅里叶面处加一相位板,即在一玻璃板的中心加一小滴液体.该液体由于处于傅里叶面上零级斑的位置,只能使直流成分产生附加的相位 δ,δ 称作相移.透过相位板的光波,即进入像面的光波变为

$$\widetilde{U}_{\mathrm{I}}=\widetilde{U}_{\mathrm{O}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\overset{\text{仅作用于0级}}{=}A_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots\right)$$

$$=A_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-1+1+\mathrm{i}\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{\mathrm{i}}{3!}\varphi^3+\cdots\right)=A_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$$

通过相位板的光强为

$$\begin{aligned}I(x,y)&=A_1^2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})\\&=A_1^2\{3+2[\cos(\varphi-\delta)-\cos\varphi-\cos\delta]\}\\&=A_1^2[3+2(\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta-\cos\varphi-\cos\delta)]\end{aligned}$$

此时光强与相位 φ、δ 的空间分布有关,因而在显微镜下能够分辨样品由于相位分布不同而呈现的空间结构.

一般所使用的显微样品的厚度都很小,因而 $\varphi\ll1$,此时 $\sin\varphi\approx\varphi$,$\cos\varphi\approx1$,上式变为

$$I=A_1^2[3+2(\varphi\sin\delta+\cos\delta-1-\cos\delta)]=A_1^2[1+2\varphi(x',y')\sin\delta]$$

$\sin\delta$ 为就是观察到的像的反衬度.如果使相移等于 $\pi/2$,则可以得到最大的反衬度.

上述方法称为相位反衬法,即相位法,由泽尼克(Frederik Zernike,1888～1966,荷兰)于 1935 年提出,1953 年获得诺贝尔物理学奖.按照这一原理制成的光学显微装置,就是相衬显微镜.

7.5　全息照相

7.5.1　全息照相的基本原理

1. 全息照相的原理

照相是一种记录方式,是通过光学系统将物体的像保存在记录介质中.但是,普通的照相方法,只是记录了物光波的光强,或者说振幅.但任何光波场既有振幅,也有相位.所以普通的照相方法是对光波场信息不完整的记录,没有办法记录和反映光波场相位的情况.能够记录光波场的振幅分布和相位分布的照相方法就是全

息照相. 全息,就是指光波场振幅、相位的全部信息. 容易理解,全息照相就是一定要采用相干叠加的方法,或者,要采用相干光作为光源.

那么,如何记录光波场的全部信息呢? 更进一步说,记录的目的当然是为了再现,那么,怎样才能使光波场再现呢?

设想一个发光物体,从物体上各个点所发出的光在空间形成了一个光波场. 根据惠更斯-菲涅耳原理,场点 P 的振动,即复振幅是由波前上的振动情况(复振幅分布)决定的. 而波前上的复振幅分布,是由光源决定的. 所以,只要确定了波前上的复振幅,则振动在波场中的分布是可以确定的. 或者说,波前上的波前函数和实际物体上的各个发光点对光波场的作用是等效的,如果设法将某个波前函数全部复制下来,那么,即使将物体移走,该波前函数仍可以将原来的光波场再现,总的效果,就像物还在那里一样.

可以用某种方法记录波前,再用另一种方法使波前再现. 当波前再现时,在场点 P 看来,就相当于光源,即发出光波的实物被再现了. 由于实物再现时,其光波场的所有因素,振幅、相位等均出现,即光波场的全部信息都再现了,所以这种记录波前的方法称作全息照相.

全息照相再现的是一个立体的实物.

2. 波前函数的记录

如图 7.5.1 所示,设在场点 Q,物体所发出的光波(简称物光波,记作 O 光)和另一束参考光波(记作 R 光)的复振幅分别为

$$\tilde{U}_{\mathrm{O}}(Q) = A_{\mathrm{O}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{O}}(Q)} \tag{7.5.1}$$

$$\tilde{U}_{\mathrm{R}}(Q) = A_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}}(Q)} \tag{7.5.2}$$

上述两列波相干叠加,即

$$\tilde{U}(Q) = \tilde{U}_{\mathrm{O}}(Q) + \tilde{U}_{\mathrm{R}}(Q) = A_{\mathrm{O}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{O}}(Q)} + A_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}}(Q)}$$

Q 点处物光波和参考光波相干叠加(干涉)的光强为

$$\begin{aligned} I(Q) &= |\tilde{U}|^2 = (\tilde{U}_{\mathrm{O}} + \tilde{U}_{\mathrm{R}})(\tilde{U}_{\mathrm{O}} + \tilde{U}_{\mathrm{R}})^* = \tilde{U}_{\mathrm{O}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^* + \tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}^* + \tilde{U}_{\mathrm{O}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}^* + \tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^* \\ &= A_{\mathrm{O}}^2 + A_{\mathrm{R}}^2 + \tilde{U}_{\mathrm{O}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}^* + \tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^* \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

在波场中放置记录介质,如照相底片,在记录介质上的记录的就是由 O 光和 R 光干涉产生的光强分布,就是式(7.5.3)中的 $I(Q)$. $I(Q)$是干涉场的光强分布,其中含有关于振幅和相位的信息,故底片所记录的是全息图(hologram),全息图是一张干涉花样的照片,从上面看不出物的形貌.

3. 全息图的处理

全息图记录了物光波与参考光波干涉的强度分布,在底片上,必须使感光介质所呈现光学性质(透光率)与光强成正比,保持线形关系,所以要进行线性冲洗.

经线性冲洗,全息图的透过率函数是干涉强度分布的线性函数,可表示为

$$t(Q) = t_0 + \beta I(Q) = t_0 + \beta(A_{\mathrm{O}}^2 + A_{\mathrm{R}}^2 + \tilde{U}_{\mathrm{O}}\tilde{U}_{\mathrm{R}}^* + \tilde{U}_{\mathrm{R}}\tilde{U}_{\mathrm{O}}^*) \tag{7.5.4}$$

4. 光波场的再现

用一束单色光 $\tilde{U}'_{\mathrm{R}} = A'_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'_{\mathrm{R}}}$ 照射全息图,如图 7.5.2 所示,则从全息图上的透射

的光的复振幅为

$$\widetilde{U}_{\mathrm{T}}=\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}t=(t_0+\beta A_{\mathrm{R}}^2+\beta A_{\mathrm{O}}^2)\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}+\beta A'_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}-\varphi_{\mathrm{R}})}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}+\varphi_{\mathrm{R}})}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}^*] \tag{7.5.5}$$

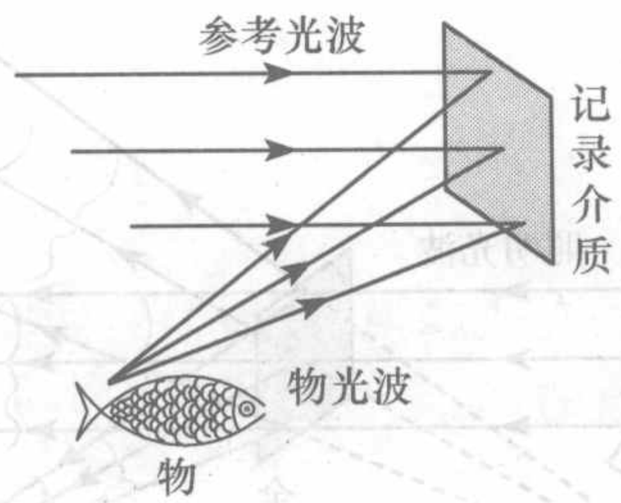


图 7.5.1　记录物光波

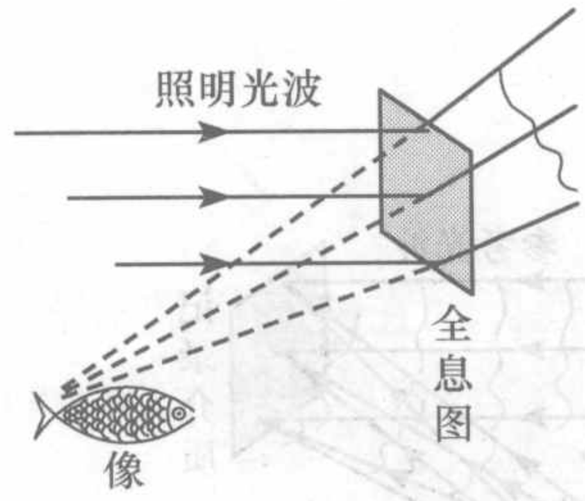


图 7.5.2　再现物光波

经过全息图后的光波分成了三个部分.$(t_0+\beta A_{\mathrm{R}}^2+\beta A_{\mathrm{O}}^2)\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}$为透射波,由于$t_0+\beta A_{\mathrm{R}}^2+\beta A_{\mathrm{O}}^2$为实数,它就是入射的照明光波振幅被调制后的透射,方向、相位分布没有改变.其中$(t_0+\beta A_{\mathrm{R}}^2)\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}$部分,在参考光波是平面波的情况下,$\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}$的系数为实常数(由于$t_0$、$\beta$、$A_{\mathrm{R}}$都是常数,在全息图上各处都一样),称为 0 级波,而$\beta A_{\mathrm{O}}^2\widetilde{U}'_{\mathrm{R}}$中,$A_{\mathrm{O}}^2$为物光波的振幅,有一个空间分布,在全息图上各处不相等,因而称为调制波.$\beta A'_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}-\varphi_{\mathrm{R}})}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}$是物光波的再现,是振幅和初相位改变了的物光波,是发散的光波.由于其系数中$\beta,A'_{\mathrm{R}},A_{\mathrm{R}},\varphi'_{\mathrm{R}},\varphi_{\mathrm{R}}$都与物光波的分布无关,在参考波、照明波都是平面波的情况下,是实常数,所以这列波看起来就相当于实物的光强发生了变化($\beta A'_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}$的作用),空间位置发生了平移($\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}-\varphi_{\mathrm{R}})}$的作用),这列波也称作+1 级波.$\beta A'_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}+\varphi_{\mathrm{R}})}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}^*$是物光波的共轭波乘以系数$\beta A'_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi'_{\mathrm{R}}+\varphi_{\mathrm{R}})}$,前面已经讨论过,这个系数在参考波、照明波都是平面波的情况下,是常数,所以这列波通常是向另一方向会聚的光波,也称作−1 级波.+1 级和−1 级波被称为孪生波,其中+1 级波再现了实物.在这一过程中,全息图的作用就是衍射屏,再现的过程,就是照明光波经过全息图衍射的过程.

从前面的分析可以看出,全息照相记录和再现的过程都是相干叠加的过程,因而要求物光波、参考光波、照明光波都是很好的相干光,即要求光源的时间相干性好,最好是单色光,因而通常都使用激光进行全息照相.对记录介质也有较高的要求,记录介质对光强的反应是线性的,如使用照相底版,必须用线性的底版,并采用线性的冲洗工艺.

7.5.2　全息照相的装置

1. 记录装置

如图 7.5.3 所示,用分束板将相干光分为两部分,一束直接照射到记录介质上,这就是参考光波 R;另一束照射到物体上,作为物体的照明光,经物体反射后,照射到记录介质上,这就是物光波 O,与参考光进行干涉.

2. 再现装置

如图 7.5.4 所示，用照明光波（也要求相干性好）照射全息图，经过全息图的光波，分为＋1 级波、0 级波和－1 级波，其中＋1 级波就是再现的物光波.

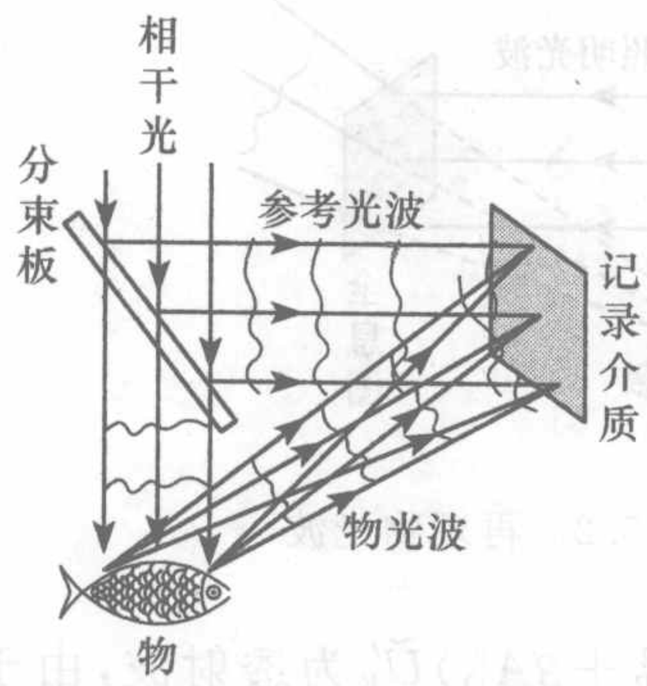


图 7.5.3 记录装置

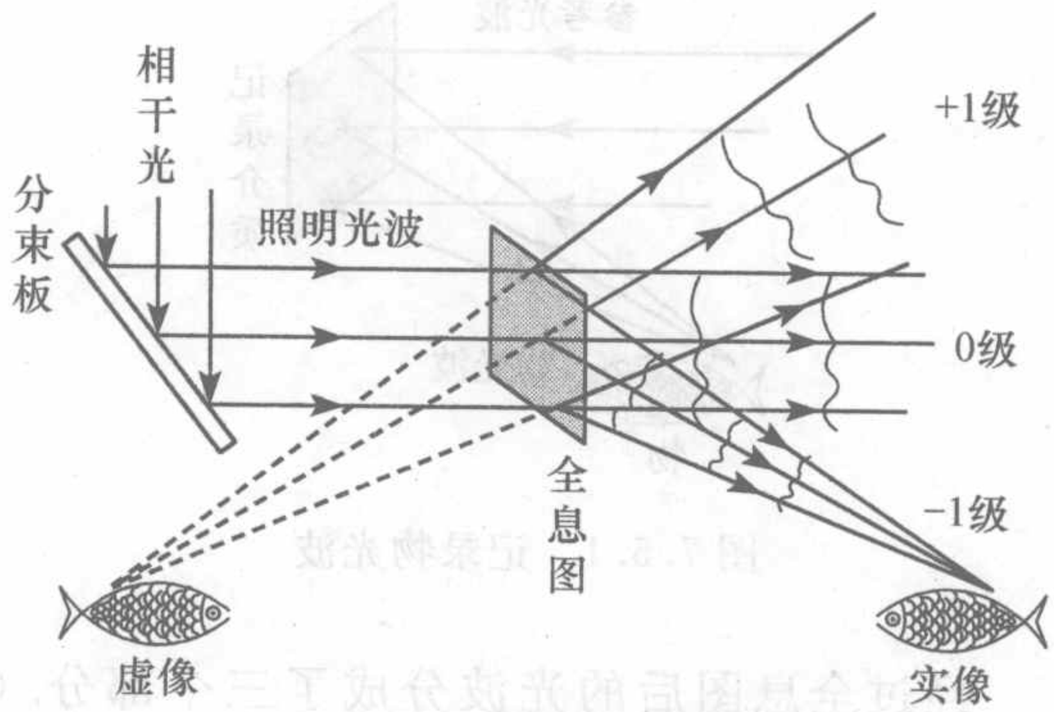


图 7.5.4 再现装置

3. 离轴全息装置

要想得到不受干扰的物光波，应使透射波（0 级波）和会聚波（－1 级波）与再现的物光波（＋1 级波）在空间上分开，在照相时，设法使物光波和参考光波以较大的夹角射向记录介质，这样的装置称作采用离轴全息装置.

全息照相的原理是由伽博（Dennis Gabor，1900～1979）在 1948 年提出的，1960 年激光发明后，由于有了优质的相干光源，全息照相技术或得了广泛的应用. 伽博于 1971 年获得诺贝尔物理学奖.

第 8 章　光在晶体中的双折射

8.1　光在晶体中的传播

8.1.1　晶体的光学特征

晶体是具有周期性空间结构的一类凝聚态物质，在固体物理学中，这种周期性可以用对称性表示，这种对称性包括平移对称性、旋转对称性和反演对称性. 这种对称性当然是由晶体的晶格在空间排列所决定的. 晶体结构上的对称性导致其物理性质是各向异性的. 在晶体中，沿不同的方向，晶体具有不同的介电常量、电导率、磁导率、热传导系数、热膨胀系数等，对于透光的晶体，其光学性质也是各向异性的. 按照对称性，将晶体分为 14 种布拉菲格子；这 14 种布拉菲格子又可以归类为 7 大晶系. 如果按照光学性质，可以将晶体分为三类：

第一类，有三个相互正交的等效的结晶学方向，这就是结晶学上的立方晶系. 对于这种晶系，由于上述三个相互正交的方向是等效的，因而具有相同的介电常量，其光学性质是各向相同的(isotropic)，与非晶体相同.

第二类，有两个或两个以上的等效结晶学方向可以取在同一个平面内，而该平面与晶体的 3、4、6 重对称轴垂直. 这就是结晶学上的三角晶系、四角晶系、六角晶系. 上述对称轴是这类晶体的一个特殊方向，称作晶体的光轴，这类晶体称作单轴晶体(uniaxial crystal).

第三类，这类晶体中不存在两个等效的结晶学方向，包括正交晶系、单斜晶系和三斜晶系. 这类晶体被称作双轴晶体(biaxial crystal).

8.1.2　双折射现象与双折射晶体

1. 双折射现象

光在上述单轴晶体或双轴晶体中传播时，表现出双折射特性. 一束入射到介质中的光经折射后变为两束，称为双折射(birefringence)，如图 8.1.1 所示. 研究发现，折射后的两束光都是平面偏振光，其中一束光的折射与在各向同性介质中相同，遵循折射定律，因而称为寻常光(ordinary ray，o 光)；而另一束光则不遵循折射定律，称为非常光(extraordinary ray，e 光).

2. 双折射晶体

很多晶体都能够产生双折射. 方解石是一种典型的双折射晶体，亦称冰洲石晶体，成分为 $CaCO_3$，是碳酸钙的三角晶系. 图 8.1.2 是一块双折射的方解石晶体. 石英(水晶)、红宝石、冰等也是双折射晶体. 云母、蓝宝石、橄榄石、硫黄等是另一类

双折射晶体.

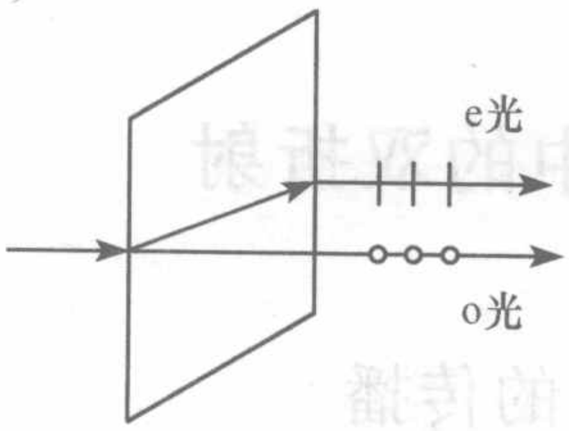


图 8.1.1　光在晶体中的双折射

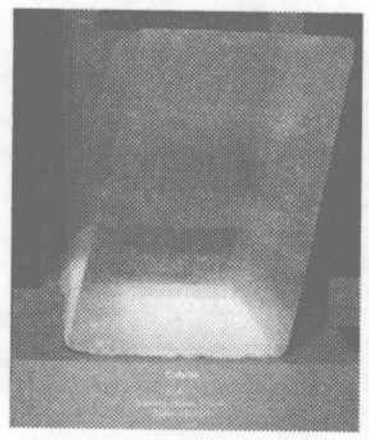


图 8.1.2　碳酸钙晶体的双折射

3. 晶体双折射特征的表示

具有双折射特性的晶体,都具有各向异性的结构,可以用晶体的特殊方向和面作为其特征.

1) 晶体的光轴

在双折射晶体中有一个特殊的方向,光沿此方向入射时不发生双折射,这个方向就被称作晶体的光轴(optical axis of crystal).

按光轴可以将具有双折射特性的晶体分为单轴晶体(方解石晶体、石英、红宝石、冰等)、双轴晶体(云母、蓝宝石、橄榄石、硫黄等).

例如,天然方解石晶体的外观是平行六面体,它的每一个表面都是一个角度为102°和78°的平行四边形,如图 8.1.3 所示.在方解石晶体的八个顶点中,有一对顶点是由三个 102°的钝角构成,称为钝顶点.过钝顶点并且与该顶点的三条棱有相等夹角的直线就是方解石的光轴.由于晶体具有平移对称性,因而所有与上述光轴平行的直线也是该晶体的光轴.

2) 主截面

晶体表面的法线与光轴所构成的平面,就是晶体的主截面(principal section).同样由晶体的平移对称性可知,每一个表面实际上有一个平行的主截面族.对于方解石而言,由于其外形是平行六面体,因而每一组相对的面都有相同的主截面而相邻的表面有不同的主截面,图 8.1.4 画出了晶体上、下表面的主截面.主截面是与晶体相关的.

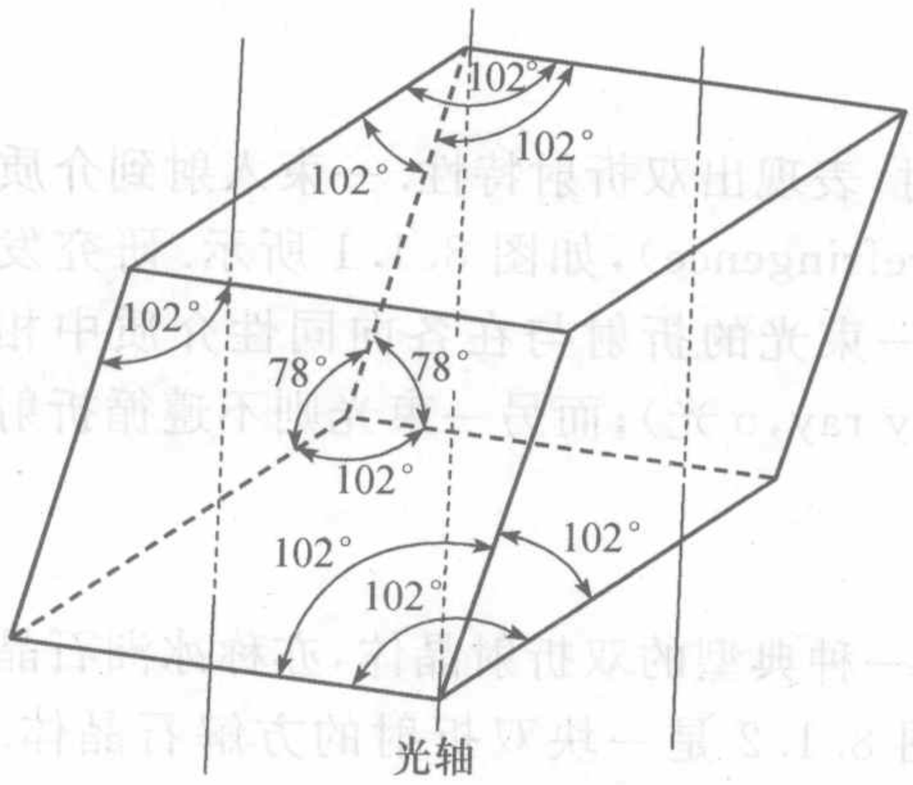


图 8.1.3　方解石晶体的光轴

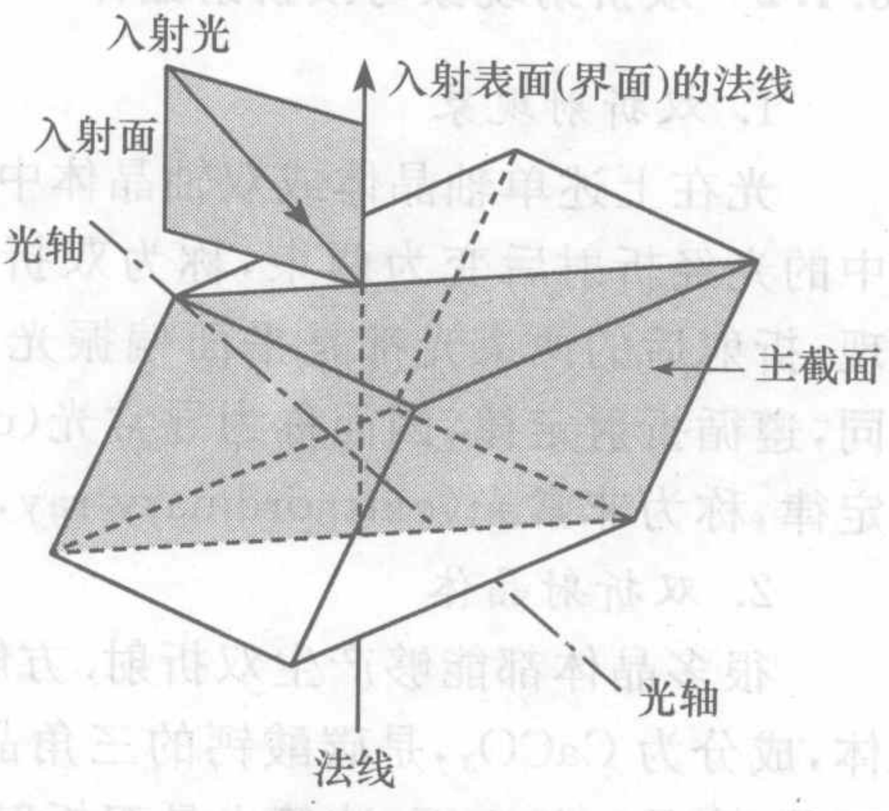


图 8.1.4　晶体中的光轴和主截面

3）主平面

晶体中的光线与晶体的光轴所构成的平面成为主平面(principal plane). 在晶体中,由于双折射而产生了 o 光和 e 光,而 o 光和 e 光往往是分开的,因而 o 光与光轴构成的平面就是 o 光主平面;e 光与光轴构成的平面就是 e 光主平面. 图 8.1.5 画出了晶体中的 o 光主平面和 e 光主平面. 实验研究表明,o 光、e 光具有如下特征:

o 光　电矢量的振动方向垂直于其主平面,因而 o 光的电矢量垂直于光轴.

e 光　电矢量的振动方向平行于其主平面,即 e 光的电矢量在 e 光主平面内.

一般情况下,光以任意的角度射入晶体,则入射面(即入射光线与晶体表面法线构成的平面)、主截面、o 光主平面、e 光主平面是不重合的.

但是,通过选择合适的入射方向,可以使入射面与主截面重合,即光轴处于入射面之中. 此时,o 光主平面、e 光主平面重合,且均与主截面重合(图 8.1.6).

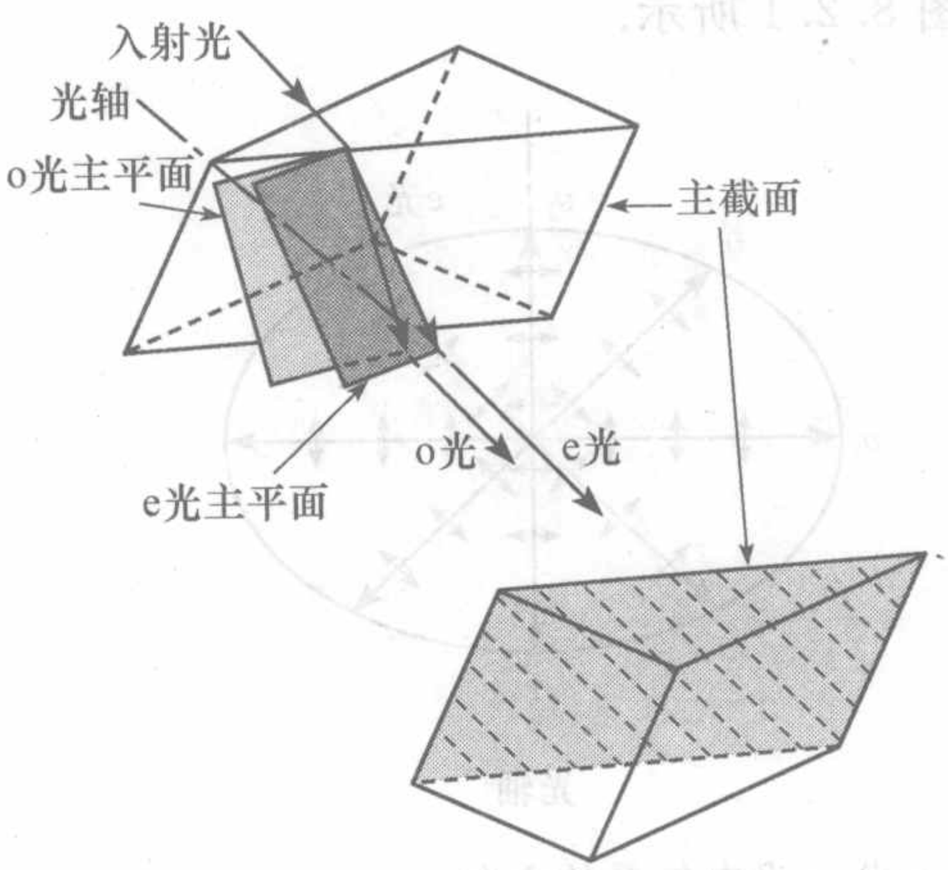


图 8.1.5　晶体中 o 光和 e 光的主平面

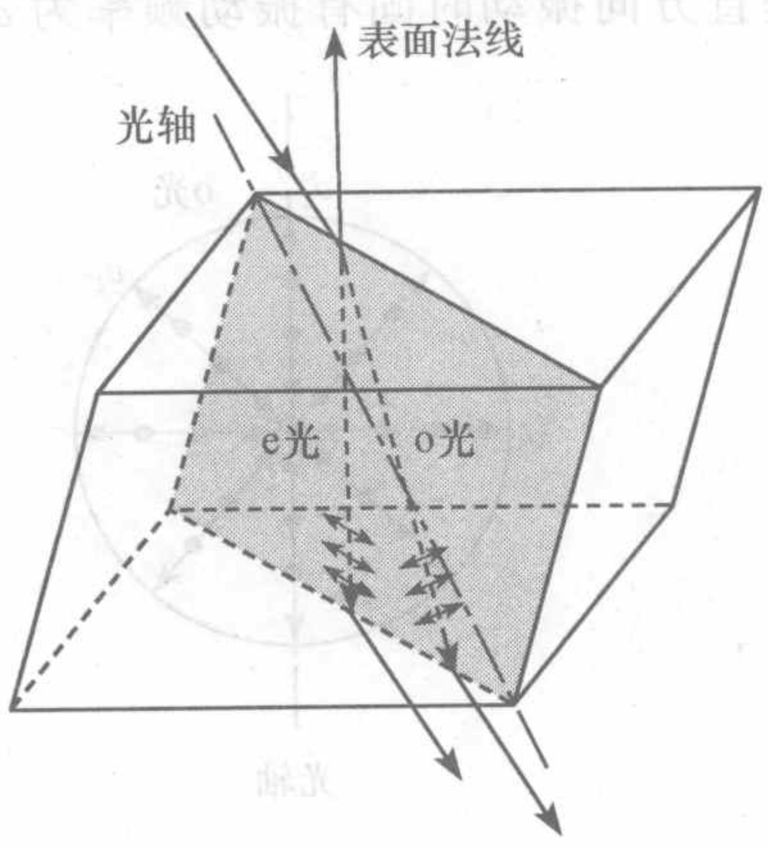


图 8.1.6　与主截面平行的入射光在晶体中的主平面

4. o 光、e 光的光强

在入射面与主截面重合的条件下,晶体中 o 光的主平面、e 光的主平面都与晶体的主截面重合,则可以计算两束光的相对强度. 如果入射光是自然光,则在晶体中,o 光、e 光由于具有不同的折射率,所以两者的光强并不相等;在特殊情况下,即垂直入射时,由于 o 光、e 光的入射角都等于 0,则在晶体中,虽然也产生了双折射,但是两束光却并没有分开,则当它们从晶体中射出时,相对强度是确定的. 如图 8.1.7 所示,设入射平面偏振光的振动平面与晶体的主截面间夹角为 θ,则正交分解所得的 o 光、e 光的振幅分别为

$$A_o = A\sin\theta \tag{8.1.1}$$

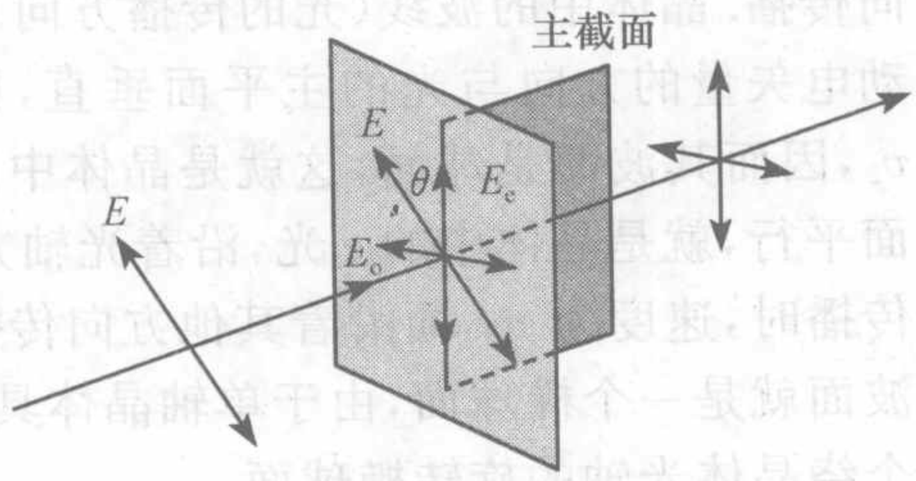


图 8.1.7　晶体中 o 光、e 光的光强

$$A_e = A\cos\theta \tag{8.1.2}$$

光强为

$$I_o = I\sin^2\theta \tag{8.1.3}$$

$$I_e = I\cos^2\theta \tag{8.1.4}$$

其中，θ 为入射光的偏振方向与主截面夹角.

8.2 单轴晶体中光的波面

8.2.1 o 光和 e 光的波面

单轴晶体中，光轴是一个特殊的方向，而与光轴垂直的各个方向是等效的，因而可以认为，其中的电子沿着光轴方向振动时固有振动频率为 ω_1，而沿着与光轴垂直方向振动时固有振动频率为 ω_2，如图 8.2.1 所示.

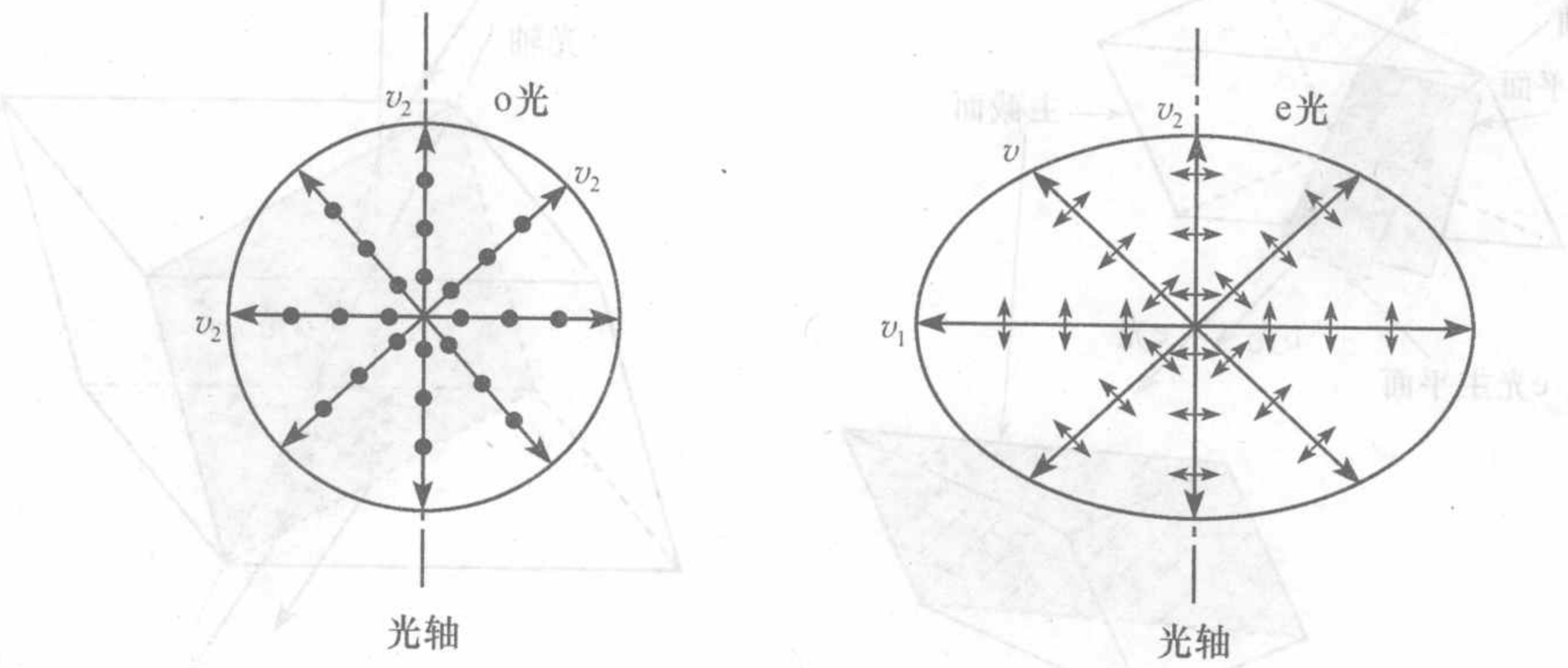


图 8.2.1 单轴晶体中 o 光、e 光电矢量的方向

由于沿着不同的方向有不同的固有振动频率，因而，光在单轴晶体中传播时，沿着不同的方向，就会有不同的速度. 光是横波，沿着光轴方向传播时，由于其振动矢量总是与光轴垂直的，因而其相速度受 ω_2 控制，速度为 v_2；而沿着与光轴垂直的方向传播时，其振动矢量总是与光轴平行，其速度受 ω_1 控制，速度为 v_1；沿着其他方向传播时，速度是介于上述 v_1 和 v_2 之间.

光的波面是等相位面，如果单轴晶体中有一个扰动点源，则会将扰动向各个方向传播. 晶体中的波线(光的传播方向)与晶体的光轴就构成了光的主平面. 如果扰动电矢量的方向与光的主平面垂直，则该扰动沿着各个方向传播的速度均等于 v_2，因而其波面是球面，这就是晶体中的 o 光；如果扰动电矢量的方向与光的主平面平行，就是晶体中的 e 光，沿着光轴方向传播时，速度为 v_2，沿着与光轴垂直方向传播时，速度为 v_1，而沿着其他方向传播时，相速度介于 v_1 和 v_2 之间，因而 e 光的波面就是一个椭球面，由于单轴晶体具有绕光轴的旋转对称性，因而该椭球面是一个绕晶体光轴的旋转椭球面.

由于 o 光、e 光沿着光轴方向传播时具有相同的速度 v_2，因而它们在同一时刻

的波面在光轴处总是相切的.

由于 e 光在不同方向传播速度不同,折射率也不同. 定义 e 光的主折射率如下:

e 光沿着与光轴垂直方向传播的速度为 v_e,则其主折射率为

$$n_e = \frac{c}{v_e} \tag{8.2.1}$$

o 光的折射率与方向无关,为

$$n_o = \frac{c}{v_o} \tag{8.2.2}$$

表 8.2.1 给出了方解石和石英对某些波长的 n_o 和 n_e.

表 8.2.1　方解石与石英晶体的 n_o 和 n_e

谱线波长/nm		方解石		石英	
		n_o	n_e	n_o	n_e
Hg	546.072	1.68134	1.49694	1.55716	1.56671
	404.656	1.66168	1.48792	1.54617	1.55535
Na	589.290	1.65836	1.48641	1.54425	1.53336

根据两种光折射率的相对大小,将晶体分为正晶体和负晶体. $v_o > v_e$,为正晶体;$v_o < v_e$,为负晶体. 正晶体中,$n_o < n_e$;负晶体中,$n_o > n_e$. 图 8.2.2 给出了正负晶体中 o 光 e 光的波面. 方解石为负晶体,石英为正晶体.

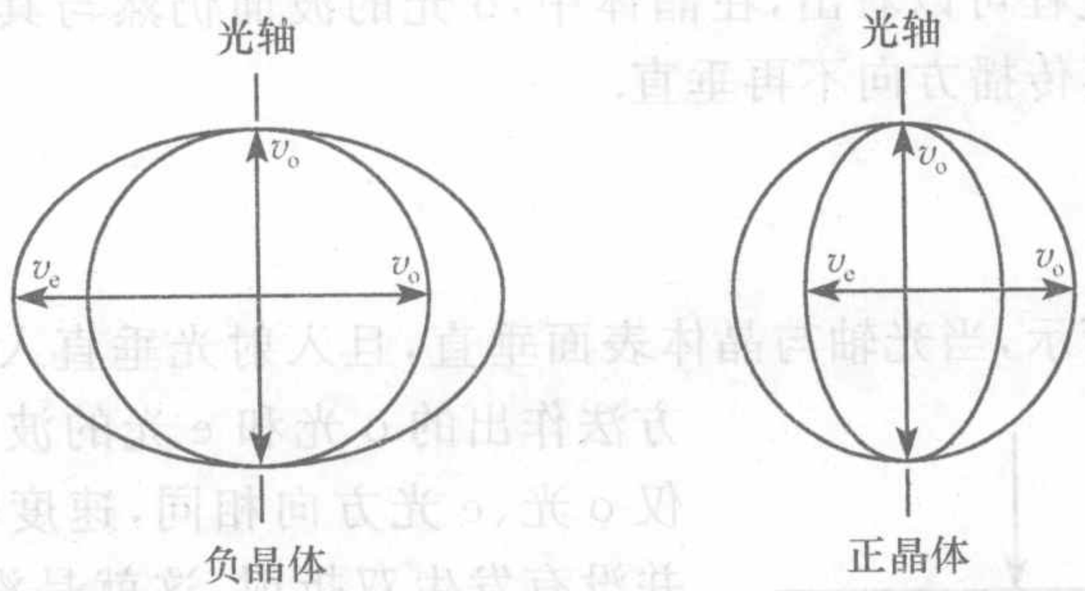


图 8.2.2　单轴晶体中 o 光、e 光的波面

8.2.2　单轴晶体的惠更斯作图法

根据单轴晶体中 o 光、e 光的波面特征,可以利用惠更斯作图法确定晶体中 o 光、e 光的方向. 针对光轴在入射面内的情形,惠更斯作图法可以用下述步骤表述,参见图 8.2.3.

设入射光的波面为 AB,晶体中 o 光、e 光的波面分别为 A'_oB'、A'_eB'.

(1) 将入射光束用一对平行线画出,这两条平行线分别与晶体的表面交于 A 点和 B' 点. 过 A 点作平行线的垂线 AB,则 AB 即为入射光的波面. 入射光由 B 点

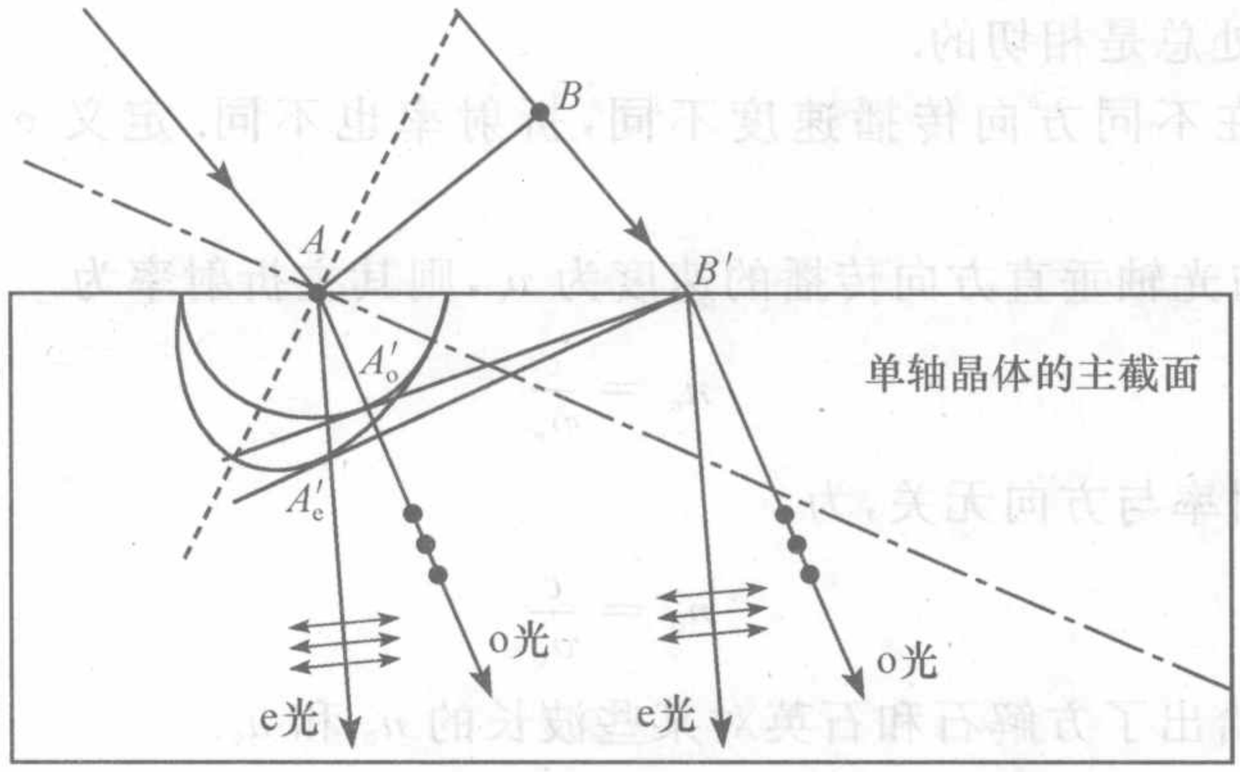


图 8.2.3 双折射的惠更斯作图法

传播到 B' 点的时间为 $\Delta t=\overline{BB'}/c$. 则在 Δt 内，A 点的光将在晶体中传播过一定的距离.

(2) 由于 o 光的波面为球面，作 o 光波面：以 A 为中心，$v_o\Delta t$ 为半径作球面，该球面即为 o 光的波面. 过 B' 点作该球面的切平面，切点为 A'_o，则 A'_oB' 就是 o 光在晶体中的波面，即 AA'_o 就是 o 光的传播方向.

(3) 由于 e 光的波面为旋转椭球面，作 e 光的波面：光轴为椭球面的一个轴，e 光的波面与 o 光的波面在光轴上相切；椭球的另一轴与该轴垂直，半轴长度为 $v_e\Delta t$. 从 B' 点作椭球面的切平面，切点为 A'_e，则 AA'_e 即为 e 光的方向.

由上述作图过程可以看出，在晶体中，o 光的波面仍然与其传播方向垂直，但是 e 光的波面与其传播方向不再垂直.

8.2.3 几种特例

如图 8.2.4 所示，当光轴与晶体表面垂直，且入射光垂直入射. 则按照惠更斯方法作出的 o 光和 e 光的波面是重合的，即不仅 o 光、e 光方向相同，速度也是相同的，这时并没有发生双折射. 这就是沿着光轴方向入射的特殊情形.

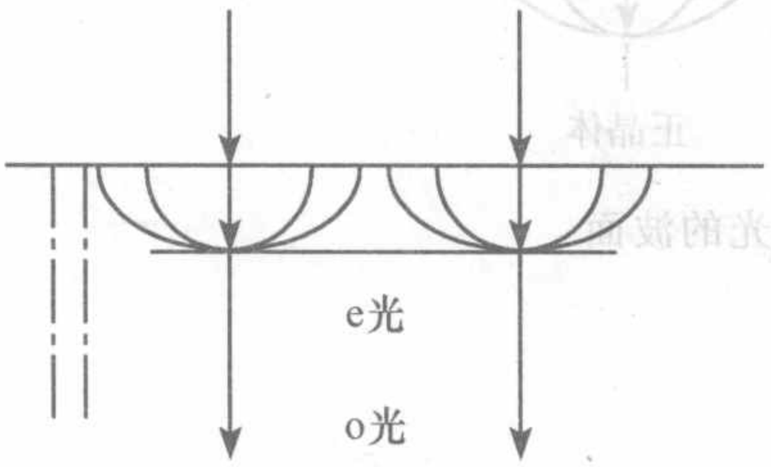


图 8.2.4 沿光轴入射的光不发生双折射

如果光轴与晶体表面平行，则由于在与光轴垂直的方向上，o 光、e 光速度不同，则 o 光、e 光的波面虽然相互平行，但是已经在空间分离，见图 8.2.5. 说明虽然 o 光、e 光的方向相同，但传播速度不同，因而，发生了双折射.

如果入射面与光轴垂直，如图 8.2.6 所示，则球面和椭球面在入射面的投影都是圆，由于 o 光、e 光的速度不同，两圆的半径不同，因而发生双折射，o 光、e 光不仅方向不同，速度也不同. 但是，这时，e 光的波面与其传播方向垂直.

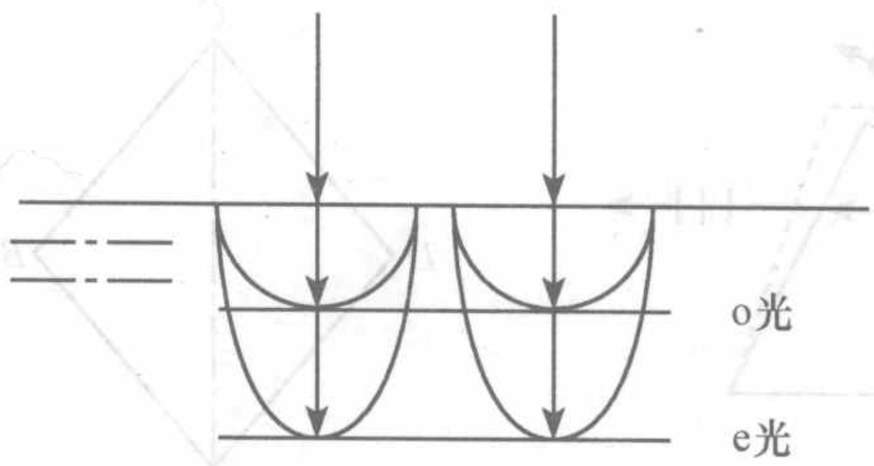


图 8.2.5　o 光、e 光虽然方向相同，但发生了双折射

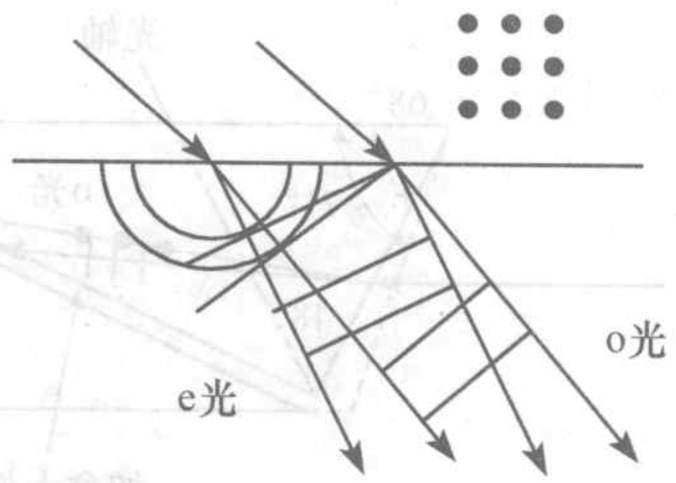


图 8.2.6　用惠更斯作图法确定 o 光、e 光的方向

8.3　晶体光学器件

光在晶体中的双折射产生了两种不同的结果，其一，o 光、e 光都是平面偏振光；其二，由于 o 光、e 光的速度不同，一列光相对于另一列光有一定的相位滞后. 利用这两点，可以用双折射晶体制成偏振棱镜和相位延迟波晶片.

8.3.1　偏振棱镜

1. 尼科耳棱镜

尼科耳(William Nicol，1770～1851，英国)棱镜用方解石晶体制成. 首先对晶体切割，使长为宽的三倍，如图 8.3.1 所示. 晶体的光轴过 A 顶点，对于表面 $ABCD$ 而言，主截面为 $ACC'A'$，对于天然晶体，此主截面中，$\angle A=\angle C'=71°$. 将两相对面磨去一部分，使得 $\angle C=71°\Rightarrow\angle C''=68°$. 再用一个与主截面垂直的平面 $A''EC''F$ 将晶体剖开为相等的两部分，之后用加拿大树胶将剖面黏合. 在晶体中 o 光和 e 光有不同的折射率，但对加拿大树胶，由于是各向同性的，其折射率相同. 例如，对于 Na 黄光，有 $n_e=1.48641<n=1.55<n_o=1.65836$，在用加拿大树胶黏合处，如果角度合适的话，可以使 o 光全反射，e 光透射，因而两列平面偏振光分开，如图 8.3.2 所示. 但加拿大树胶吸收紫外线，所以尼科耳棱镜不能用于紫外波段.

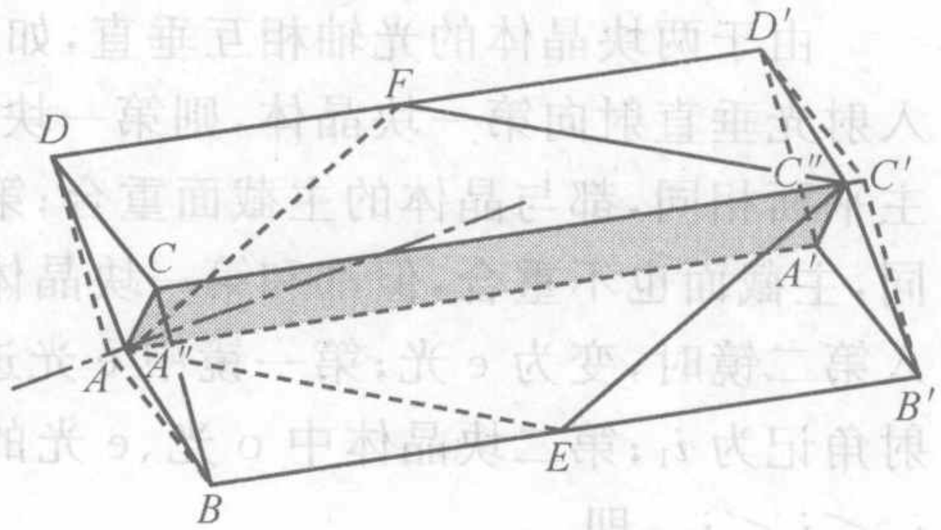


图 8.3.1　由方解石制作尼科耳棱镜

2. 格兰-汤普森棱镜

格兰-汤普森棱镜(Glan-Thompson prism)的结构如图 8.3.3 和图 8.3.4 所示，是由两块方解石的直角三棱镜组成，而且两棱镜的光轴相互平行. 两棱镜的斜面既可以用胶黏合，也可以直接接触(中间有空气层). 由于胶对紫外光有强烈的吸收，所以直接接触的格兰-汤普森棱镜可以透射紫外光. 容易看出，在两块棱镜的分界面处，o 光发生全反射，从另一侧面透出，而 e 通过接触面后直接射出.

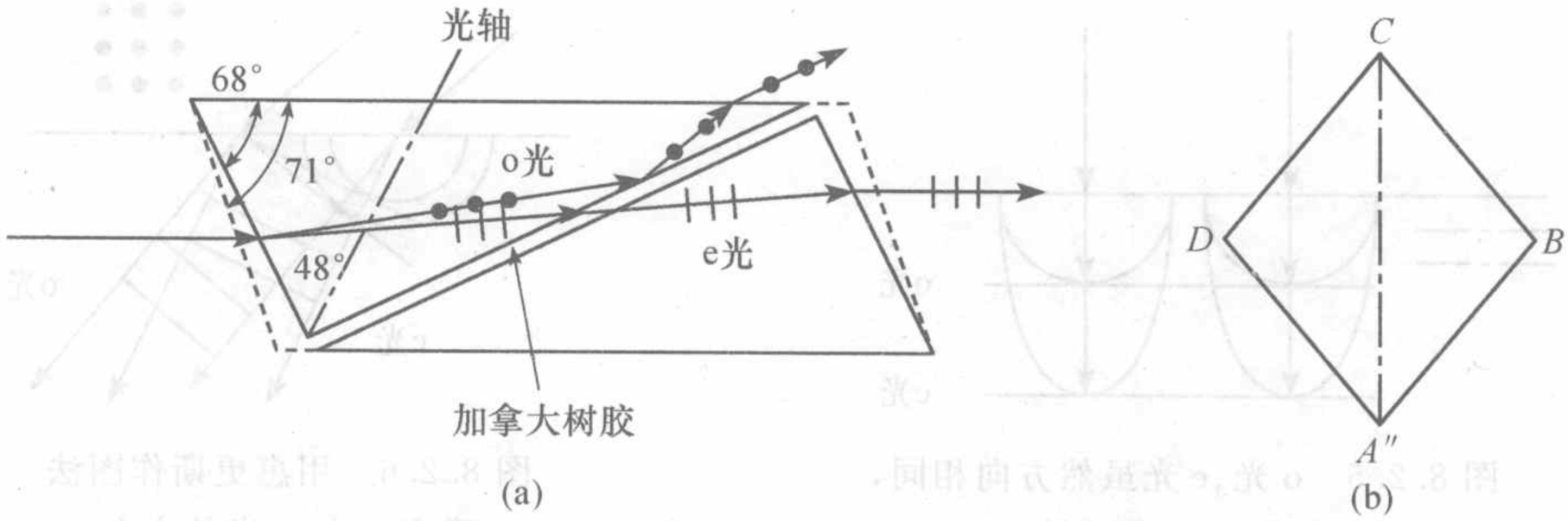


图 8.3.2 尼科耳棱镜的结构

(a) 从尼科耳棱镜获得平面偏振光;(b) 尼科耳棱镜的主截面

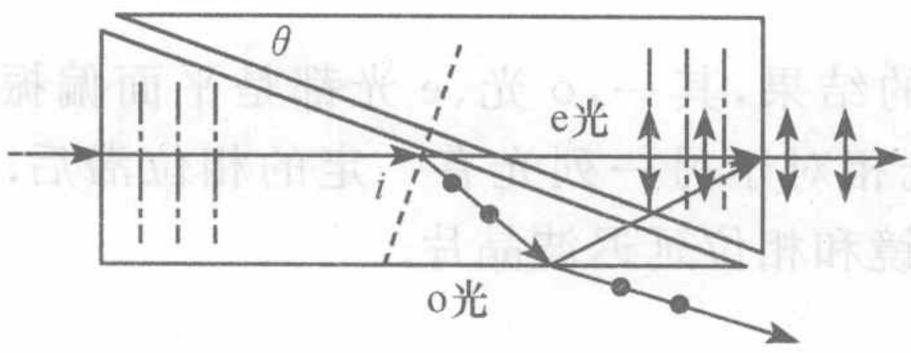


图 8.3.3 格兰-汤普森棱镜(1)

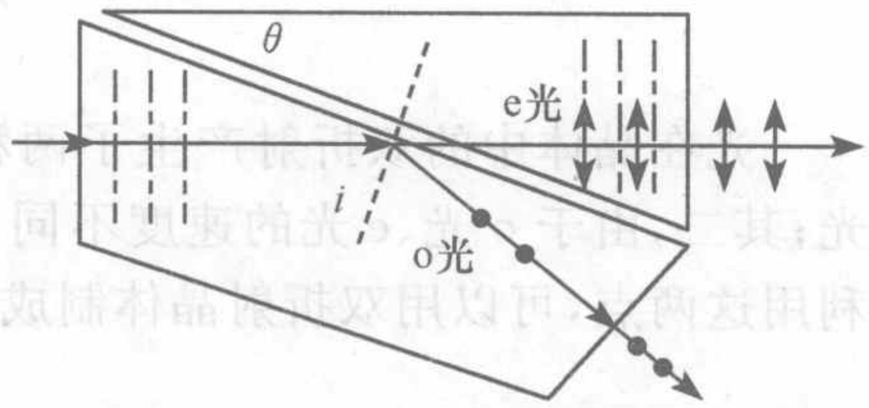


图 8.3.4 格兰-汤普森棱镜(2)

由于 o 光在棱镜的底面有一部分会被反射,反射光会从另一端面与 e 光一起射出(图 8.3.3),所以,往往将其底面涂黑;或采用图 8.3.4 所示的结构,保证出射光有好的偏振度.

3. 渥拉斯顿棱镜

渥拉斯顿(William Hyde Wollaston,1766～1828,英国)棱镜用两块方解石的直角三棱镜制成. 两棱镜的光轴相互垂直,斜面相对组合在一起,如图 8.3.5 所示.

由于两块晶体的光轴相互垂直,如果入射面与第一块棱镜的光轴垂直,且保持入射光垂直射向第一块晶体,则第一块晶体中,由于 o 光、e 光的方向相同,它们的主平面相同,都与晶体的主截面重合;第二块晶体中,由于折射,o 光、e 光的方向不同,主截面也不重合,但都和第一块晶体中光的主截面垂直. 因而,第一镜中 o 光进入第二镜时,变为 e 光;第一镜中 e 光进入第二镜时,变为 o 光. 在分界面处,将入射角记为 i_1;第二块晶体中 o 光、e 光的折射角记为 i_{2o}、i_{2e}. 由于 $n_o > n_e$,于是有,$i_{2o} < i_1 < i_{2e}$,即

$$\begin{cases} n_o \sin i_1 = n_e \sin i_{2e} \\ n_e \sin i_1 = n_o \sin i_{2o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin i_{2e} = \dfrac{n_o}{n_e} \sin i_1 > \sin i_1 \\ \sin i_{2o} = \dfrac{n_e}{n_o} \sin i_1 < \sin i_1 \end{cases} \tag{8.3.1}$$

o 光、e 光分开.

4. 洛匈棱镜

洛匈棱镜(Rochon prism)的结构与渥拉斯顿棱镜有些相似,如图 8.3.6 所示,

仍然由两个光轴相互垂直的方解石直角三棱镜制成，但第一棱镜的光轴与光入射的表面垂直. 当光垂直入射时，在第一镜中无双折射，第二镜中有双折射. 可以看出经过棱镜后，由双折射使得两列光的折射角为

$$\begin{cases} n_o \sin i_1 = n_o \sin i_{2o} \\ n_o \sin i_1 = n_e \sin i_{2e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{2o} = i_1 \\ \sin i_{2e} = \dfrac{n_o}{n_e} \sin i_1 > \sin i_1 \end{cases} \Rightarrow i_{2e} > i_{2o} \tag{8.3.2}$$

因而 o 光、e 光分开.

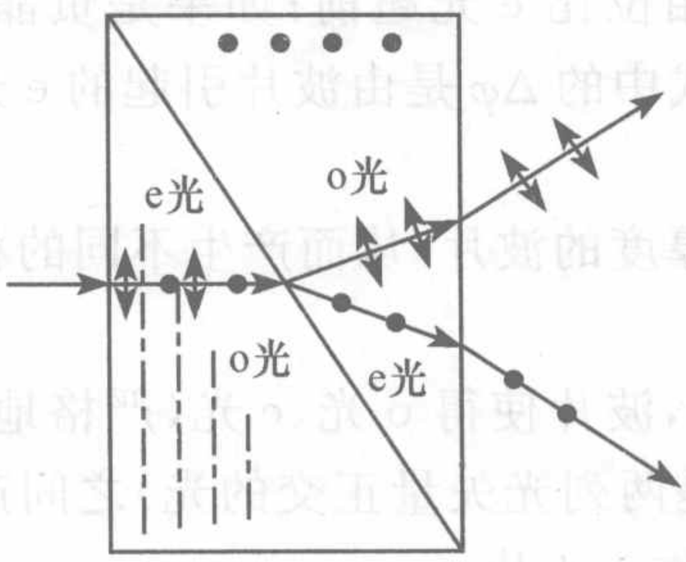


图 8.3.5　渥拉斯顿棱镜

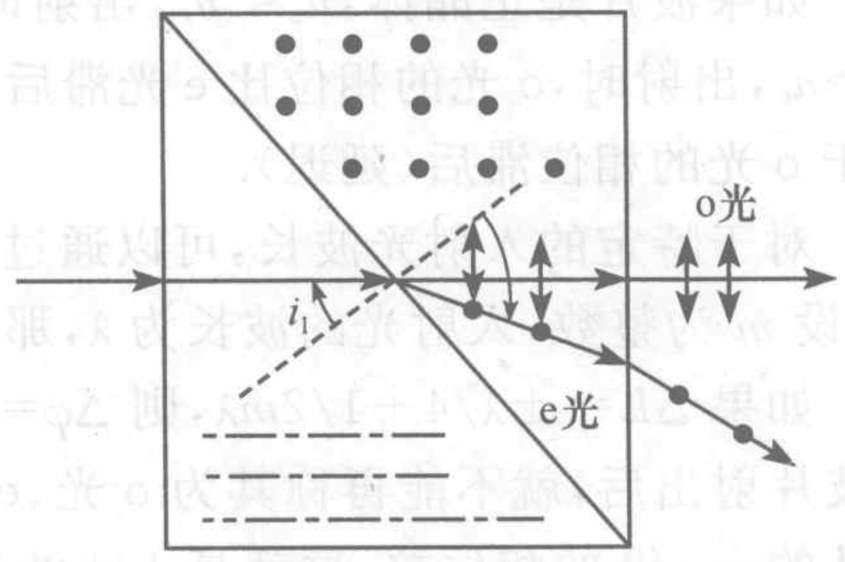


图 8.3.6　洛匈棱镜

上述偏振棱镜，利用了晶体的双折射性质，可以得到偏振度很好的平面偏振光.

8.3.2　波晶片

波晶片(wave plate)通常用石英制成，也称作波片，是从石英晶体中切割出来的薄片. 薄片的两个表面相互平行，而且石英的光轴也与表面平行，如图 8.3.7 所示. 当平行光正入射时，在波片中，虽然有双折射，但是 o 光、e 光的方向一致，只是速度不同，有的超前，有的滞后. 我们也可以将传播速度快、相位超前的光称作“快光”，而传播速度慢、相位滞后的光称作“慢光”.

在图 8.3.7 所示的波片中，由于 e 光沿光轴方向振动，而 o 光的振动方向与光轴垂直，则光轴的方向也被称作 e 轴、而与光轴垂直的方向被称作 o 轴，e 轴是波片中 e 光电矢量的方向，而 o 轴是波片中 o 光电矢量的方向. 那么可以建立一个直角坐标系，通常取 z 轴为光的入射、出射方向，即波矢的方向，xOy 平面与波片的表面平行，为了表示得方便，通常取坐标轴的方向与 o 轴，e 轴的方向平行.

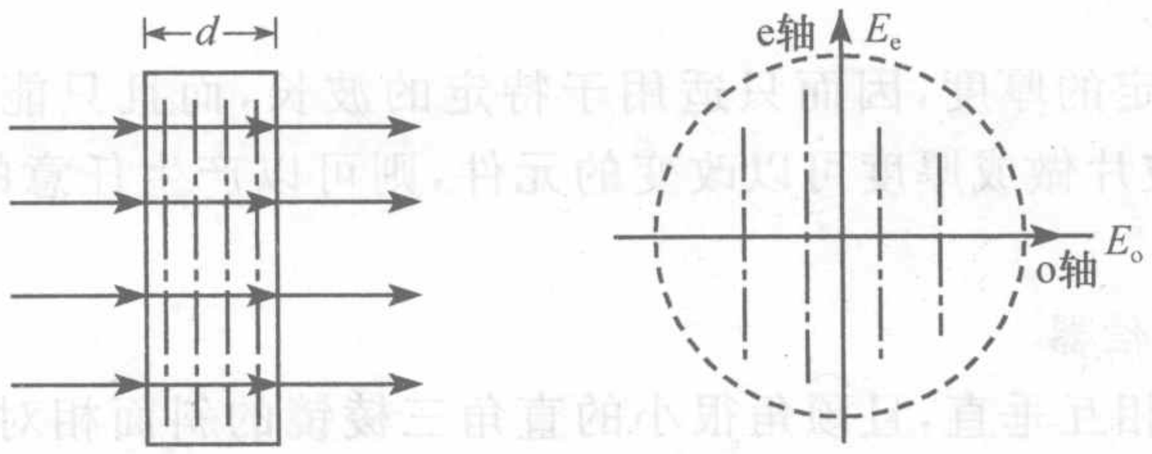


图 8.3.7　波片和波片中的双折射

o 轴，e 轴在波片中的折射率不同，由于 e 光的传播方向与光轴垂直，所以，e 光的折射率就是其主折射率，设波片的厚度为 d，则 o 光、e 光在波晶片中的光程分别为 $L_o=n_o d$，$L_e=n_e d$，当光从波片出射时，由此引起的光程差为

$$\Delta L = L_e - L_o = (n_e - n_o)d \tag{8.3.3}$$

相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d \tag{8.3.4}$$

如果波片是正晶体，$n_o<n_e$，出射时，o 光的相位比 e 光超前；如果是负晶体，$n_o>n_e$，出射时，o 光的相位比 e 光滞后. 所以，上式中的 $\Delta\varphi$ 是由波片引起的 e 光相对于 o 光的相位滞后(延迟).

对于特定的入射光波长，可以通过选择不同厚度的波片，从而产生不同的相位差. 设 m 为整数，入射光的波长为 λ，那么

如果 $\Delta L=\pm\lambda/4+1/2m\lambda$，则 $\Delta\varphi=2m\pi\pm\pi/2$，波片使得 o 光、e 光(严格地说，从波片射出后，就不能再称其为 o 光、e 光了，而是两列光矢量正交的光)之间产生额外的 $\pm\pi/2$ 的相位差，这就是 1/4 波片，也可记作 $\lambda/4$ 片；

如果 $\Delta L=\pm\lambda/2+m\lambda$，则 $\Delta\varphi=2m\pi\pm\pi$，从波片处射的两列光矢量正交的光之间产生额外 π 的相位差，这种波片被称作 1/2 波片，或记作 $\lambda/2$ 片；

如果 $\Delta L=\pm m\lambda$，则 $\Delta\varphi=\pm 2m\pi$，即相位差是 2π，这就是全波片.

由于晶体中 e 光、o 光的速度，或者相位是超前还是滞后取决于晶体的正负，因而习惯有“快轴”、“慢轴”的说法.

快轴指晶体中传播速度较快的光的振动方向(轴). 负晶体的 e 轴，正晶体的 o 轴都是快轴.

慢轴指传播速度慢的光的振动方向(轴). 负晶体的 o 轴，正晶体的 e 轴都是慢轴.

具有偏振特性(平面偏振光、圆偏光和椭圆偏振光)的单色平行光束正入射到波片上，从波片的另一侧出射的光，方向相同，但由于双折射，成为具有一定相位差、且电矢量相互垂直的两部分，其偏振特性将发生改变. 而自然光和部分偏振光，由于其正交分量之间的相位差是随机无规的，因而经过波片后，仍然是自然光和部分偏振光，即波片对这两种光不起作用.

8.3.3 相位补偿器

波片具有固定的厚度，因而只适用于特定的波长，而且只能产生固定的相位差. 如果设法将波片做成厚度可以改变的元件，则可以产生任意的相位差，这种元件就是补偿器.

1. 巴比涅补偿器

将两块光轴相互垂直，且顶角很小的直角三棱镜的斜面相对接触，组合起来，就做成了巴比涅(Jacques Babinet，1794～1872，法国)补偿器，如图 8.3.8 所示. 该

补偿器的结构实际上与渥拉斯顿棱镜相同，区别仅在于该补偿器很薄，棱镜斜面处光近似垂直入射，因此使得透过的光并没有分开，还基本保持原有的方向，也避免了全反射的发生.

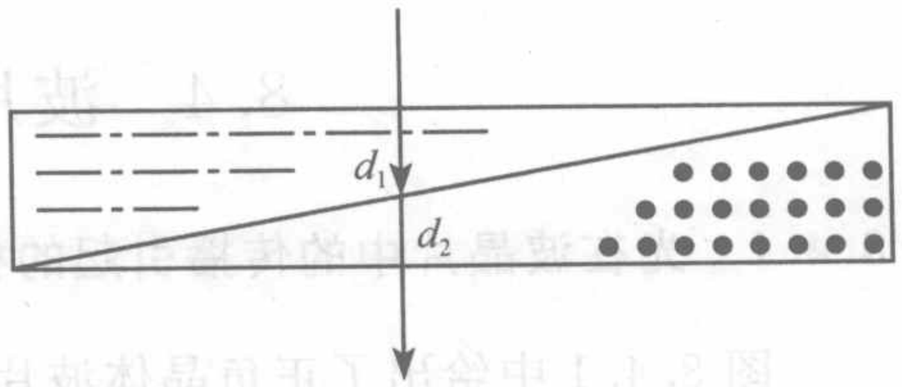


图 8.3.8　巴比涅补偿器

由于上下两部分的光轴相互垂直，第一块晶体中的 o 光，进入第二块晶体后，就变成了 e 光；同样，第一块晶体中的 e 光，进入第二块晶体后，就变成了 o 光. 在光的路径上，设第一块晶体的厚度为 L_1，第二块晶体的厚度为 L_2，于是其中 o 光、e 光的光程分别为

$$L_{o1} = n_o d_1, \quad L_{e1} = n_e d_1; \quad L_{o2} = n_o d_2, \quad L_{e2} = n_2 d_2$$

从补偿器出射的光之间的光程差为

$$\Delta L = (n_o d_1 + n_e d_2) - (n_e d_1 + n_o d_2) = (n_o - n_e)(d_1 - d_2) \tag{8.3.5}$$

因此，改变光入射的位置，就可以使得$(d_1 - d_2)$的数值改变，从而改变处射光得相位差，即

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2) \tag{8.3.6}$$

由于$(d_1 - d_2)$有很大的取值范围，因而出射光的相位差的取值范围也可以很大，起到相位补偿的作用.

如果用上下两块晶体材料相同，光轴方向也相同，则有 $L_o = n_o d$，$L_e = n_e d$，于是 $\Delta L' = (n_o - n_e)d$，这时，看起来只要将上下两块晶体相对滑动，即可改变出射光的相位差. 但是，由于 $d \gg d_1 - d_2$，所以 $\Delta L' \gg \Delta L$，即光程差要大得多，而实际的光总部是严格的非单色波，而是准单色波，如果该光程差超出波列的长度，受到时间相干性的限制，出射的两列电矢量正交的光已经无法叠加.

巴比涅补偿器的缺点在于，由于光束的截面不可能是无限小的，因而，一束光经过补偿器后，光束中不同的部分，所经历的厚度 d_1、d_2 都不相同，因而相位差也不相同；同时由于光在斜面处总有折射，快光和慢光的传播方向也会相互偏离. 所以，这种补偿器仅仅适用于足够细的光束.

2. 所列尔补偿器(Soleil compensator)

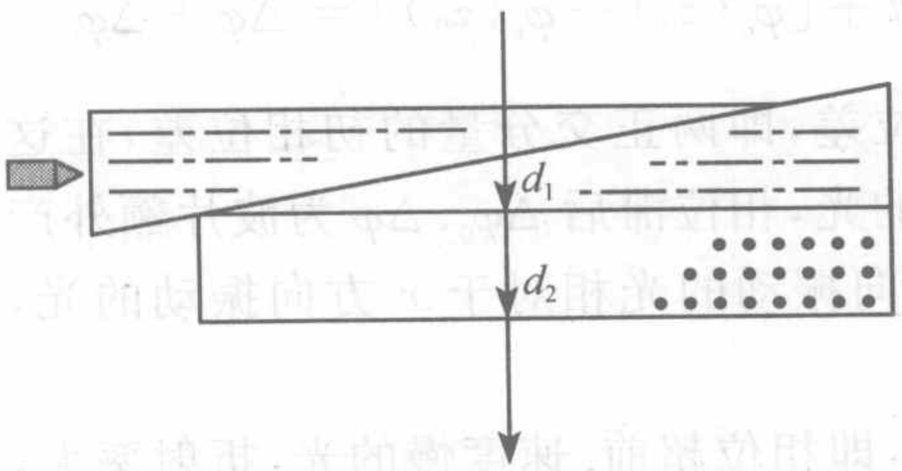


图 8.3.9　所列尔补偿器

结构如图 8.3.9 所示，由两块光轴方向一致的三棱镜和一块光轴与它们垂直的平板晶体构成. 上面两块晶体可以沿斜面相对滑动，以改变其厚度 d_1，这种补偿器克服了巴比涅补偿器的缺点，由于上下两块晶体等效于平行平板，因而宽光束入射时，也能产生相同的相位差，且光的传播方向不会改变.

8.4 波片与光的偏振态

8.4.1 光在波晶片中的传播引起的相位差

图 8.4.1 中给出了正负晶体波片中 o 光、e 光的波面以及相对传播速度. 波片中 o 光、e 光的光矢量的方向如图 8.4.2 所示.

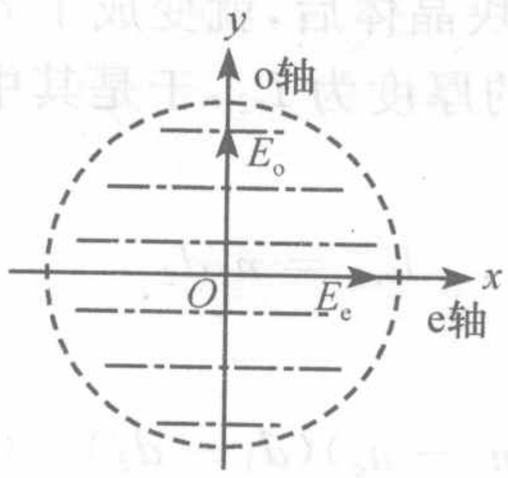


图 8.4.1 波片中 o 光、e 光的传播速度

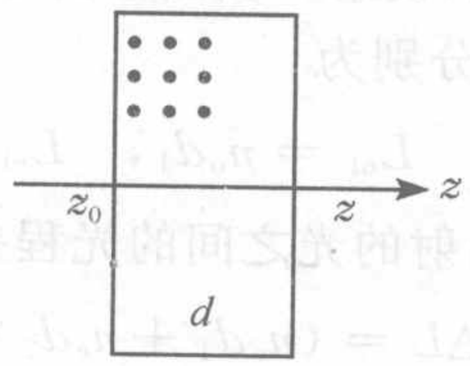


图 8.4.2 波片中 o 光、e 光的光矢量的方向

具有某种偏振态的光射入波片，在波片中，o 光、e 光的振动相互垂直，从波片射出后，这两个相互垂直的、同方向的波列之间会产生一个相位差，因而合成后，所得到的光可以具有各种偏振态，以下作具体分析.

首先取定坐标系，取 z 轴沿光的传播方向，不妨设 x 轴与光轴平行，为 e 轴，则 y 轴为 o 轴. 设在入射点 z_0 处，o 光、e 光的相位分别为 $\varphi_o(z_0)$、$\varphi_e(z_0)$，即入射光可以用两个正交分量表示为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos[\omega t - kz_0 + \varphi_o(z_0)] \\ E_y = A_y\cos[\omega t - kz_0 + \varphi_e(z_0)] \end{cases} \tag{8.4.1}$$

同一时刻，在波片后表面出射点 z 处，两正交分量的相位为

$$\varphi_o(z) = \omega t - kz_0 - \frac{2\pi}{\lambda}n_o d + \varphi_0(z_0) \tag{8.4.2}$$

$$\varphi_e(z) = \omega t - kz_0 - \frac{2\pi}{\lambda}n_e d + \varphi_e(z_0) \tag{8.4.3}$$

它们之间的相位差为

$$\Delta\varphi(z) = \varphi_o(z) - \varphi_e(z) = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + [\varphi_o(z_0) - \varphi_e(z_0)] = \Delta\varphi + \Delta\varphi_0$$

其中，$\Delta\varphi_0$ 为在波片前表面处 o 光、e 光的相位差，即两正交分量的初相位差，在这里，就是 y 方向振动的光相对于 x 方向振动的光，相位滞后 $\Delta\varphi_0$. $\Delta\varphi$ 为波片额外产生的 o 光、e 光的相位差，则经过波片后，y 方向振动的光相对于 x 方向振动的光，相位超前为 $\Delta\varphi+\Delta\varphi_0$.

速度快的光，折射率小，在 z 点的相位大，即相位超前. 速度慢的光，折射率大，在 z 点的相位小，即相位滞后.

8.4.2　经过波片后光的偏振态的改变

1. 自然光经波晶片

由于 o 光和 e 光的初相位在 z_0 点是任意的，经波晶片后的相位差仍是任意的，所以仍是自然光.

2. 线偏光经波晶片

1) $\lambda/4$ 片

(1) 光矢量沿任意方向

在选定的坐标系中，入射光的电矢量可能在Ⅰ、Ⅲ象限，分解后两分量间的相位差为 0；也可能在Ⅱ、Ⅳ象限，则分解后两分量间的相位差为 π，如图 8.4.3 所示，即总可以写作

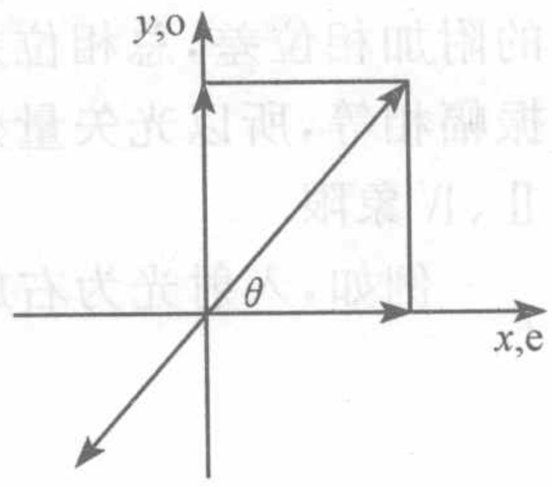


图 8.4.3　入射光为线偏振光

$$\begin{cases} E_x = A\cos\theta\cos\omega t = A_x\cos\omega t \\ E_y = \pm A\sin\theta\cos\omega t = \pm A_y\cos\omega t \end{cases}$$

两正交分量的振幅 $A_x = A\cos\theta$，$A_y = A\sin\theta$，其中 θ 为入射光的电矢量与光轴(x 轴)间的夹角. 经 $\lambda/4$ 片后，将引起 $\pm\pi/2$ 的附加相位差为，则从波片出射的光，两分量间的相位差为 $\pi/2$ 或 $\pi+\pi/2$，合成后，为右旋或左旋的椭圆偏振光，是正椭圆.

例如，入射光的电矢量在Ⅱ、Ⅳ象限，正交分解后，其分量可写作

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

式中 E_y 的相位写作 π 或 $-\pi$ 并无区别，都是表示两个分量是反相的.

设波片的快轴沿 x 方向，即在波片中，E_y 是慢光，则从波片出射后，y 方向光矢量的相位与 x 方向光矢量的相位之间相差 $\pi-\pi/2=\pi/2$，表示为

$$\begin{cases} E'_x = A_x\cos\omega t \\ E'_y = A_y\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

这是右旋的正椭圆偏振光，椭圆的长短轴与坐标轴平行.

经过波片的光，其电矢量旋转的方向与入射光电矢量的方向、晶体快、慢轴的方向都有关系，要具体分析.

(2) 光矢量与 x 轴的夹角 $\theta=\pi/4$

如果上述 $\theta=\pi/4$，则 $A_x=A_y$，出射光为圆偏振光. 例如光矢量在Ⅰ、Ⅲ象限，且波片快轴沿 x 方向，则出射光 y 方向的相位滞后 $\pi/2$，即

$$\begin{cases} E'_x = A_x\cos\omega t \\ E'_y = A_x\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

这是左旋的圆偏振光.

2）λ/2 片

产生 π 的附加相位差，导致出射光两正交分量间总的相位差为 0 或 π，为线偏光，由于 π 的相位差的作用，导致光矢量变到与原来对称的方向.

例如，入射光的光矢量在Ⅱ、Ⅳ象限，经过波片后，又产生了 π 的附加相位差，导致两正交分量间的相位差为 0，变为Ⅰ、Ⅲ象限的平面偏振光.

3. 圆偏振光、椭圆偏振光经波晶片

1）λ/4 片

入射光为圆偏振光，则两正交分量间的相位差为 $\pm\pi/2$，经 λ/4 片，引起 $\pm\pi/2$ 的附加相位差，总相位差为 0 或 π，变为平面偏振光，而且由于这两个正交分量的振幅相等，所以光矢量处在坐标轴的角平分线方向上，或者在Ⅰ、Ⅲ象限，或者在Ⅱ、Ⅳ象限.

例如，入射光为右旋圆偏光，则两正交分量为

$$\begin{cases} E_x = A\cos\omega t \\ E_y = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

如果晶体的快轴为 y 轴，则出射后，两正交分量为

$$\begin{cases} E'_x = A\cos\omega t \\ E'_y = A\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = -A\cos\omega t \end{cases}$$

这是Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光.

如果入射光为椭圆偏振光，则两正交分量为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t + \Delta\varphi_0) \end{cases}$$

其中 $\Delta\varphi_0$ 为任意值，出射后为

$$\begin{cases} E'_x = A_x\cos\omega t \\ E'_y = A_y\cos\left(\omega t + \Delta\varphi_0 \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

由于 $\Delta\varphi_0 \pm \dfrac{\pi}{2}$ 仍然是任意值，所以，一般情况下，出射光仍然是椭圆偏振光. 至于电矢量的旋转方向，要通过具体的计算才能确定.

例如，左旋正椭圆偏振光入射，有

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

设波片的快轴沿 x 方向，则经过 λ/4 片后，有

$$\begin{cases} E'_x = A_x\cos\omega t \\ E'_y = A_y\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = A_y\cos(\omega t - \pi) \end{cases}$$

为Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光.

2) λ/2 片

增加 π 的附加相位差,则两分量的相位差与入射光相比,正好相反.则电矢量的旋转方向也相反.即右旋的光,将变为左旋的;左旋的光,将变为右旋的.

例如,设入射为左旋椭圆偏振光,即

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos\omega t \\ E_y = A_y \cos(\omega t + \Delta\varphi_0) \end{cases}$$

其中,$\Delta\varphi_0 \in$ Ⅲ、Ⅳ象限,经过快轴沿 y 方向的 λ/2 片后,

$$\begin{cases} E'_x = A_x \cos\omega t \\ E'_y = A_y \cos(\omega t + \Delta\varphi_0 + \pi) \end{cases}$$

其中,$\Delta\varphi_0 + \pi \in$ Ⅰ、Ⅱ象限,则变为右旋椭圆偏振光.

4. 光的偏振态的鉴定

如果使一束光通过一偏振器,如尼科耳棱镜,则变为线偏振光.这时,再使之经过一个线偏振检偏器,并且使检偏器的透振方向绕光线旋转,则对不同的入射光,将观察到不同的现象:

自然光,光强不变;

平面偏振光,光强改变,并会在两个位置出现消光;

部分偏振光,光强改变,在两个相互垂直的位置,出现极大值和极小值;

圆偏振光,光强不变;

椭圆偏振光,光强改变,在两个相互垂直的位置,出现极大值和极小值.

于是,仅仅通过上述装置,可以鉴定平面偏振光,但自然光和圆偏振光的表现相同;部分偏振光和椭圆偏振光的表现也相同,无法将它们进一步区分.所以,还需要用其他光学元件作进一步的鉴别.

如果在检偏器前放置一 λ/4 片,则由于圆偏振光经过 λ/4 片后变为线偏振光,而自然光经过 λ/4 片还是自然光,因而可以将自然光、圆偏振光区别.

但是,在一般情况下,椭圆偏振光经过 λ/4 片后仍是椭圆偏振光,则无法将椭圆偏振光与部分偏振光区别.

设想将坐标系建在波片上,并使 x 轴或 y 轴与波片的光轴平行,那么,一般情况下,入射的是一个倾斜的椭圆偏振光,即 x、y 方向的分量之间的相位差是任意值;但是如果入射的是一个正椭圆偏振光,即椭圆的长短轴与坐标轴重合,则上述相位差就是 $\pm\pi/2$,这样的偏振光经过 λ/4 片,变为平面偏振光.所以,可以使 λ/4 片的光轴绕着入射光束旋转,并同时转动检偏器,则部分偏振光不会消光,椭圆偏振光会在特殊的位置消光,从而可以将椭圆偏振光与部分偏振光区别.

可以将上述鉴定方法用表 8.4.1 加以概括.

表 8.4.1 鉴别光的偏振态

光的种类	仅使用偏振器，并使其旋转	λ/4 片＋偏振器
自然光	光强不变，不消光	光强不变，不消光
圆偏振光	光强不变，不消光	消光
线偏光	光强改变，消光，可以鉴定	
部分偏振光	光强改变，但不消光	光强改变，但不消光
椭圆偏振光	光强改变，但不消光	消光

8.5 偏振光的干涉

存在相互平行的振动分量，是光的相干条件之一. 在波片中，由于 o 光、e 光都是平面偏振光，而且电矢量相互垂直，因而是不相干的. 但是，可以通过电矢量振动面的变换，使得它们进行相干叠加.

8.5.1 平行光的干涉装置

相互平行的偏振光的干涉装置如图 8.5.1 所示，由两偏振片和位于其间的双折射晶体(波晶片)组成. 从线偏振器 P_1 出射的平面偏振光，正入射到晶体中，分为 o 光和 e 光，从晶体出射后，再使它们经过一个偏振片 P_2，从 P_2 射出的光，相互平行，进行相干叠加.

光波经过各个元件后，光矢量的方向和大小如图 8.5.2 所示，设晶体的 e 轴、o 轴分别沿 x、y 方向，P_1 的透振方向(透光轴)与 x 轴夹角为 α，P_2 的透光轴与 y 轴的夹角为 β.

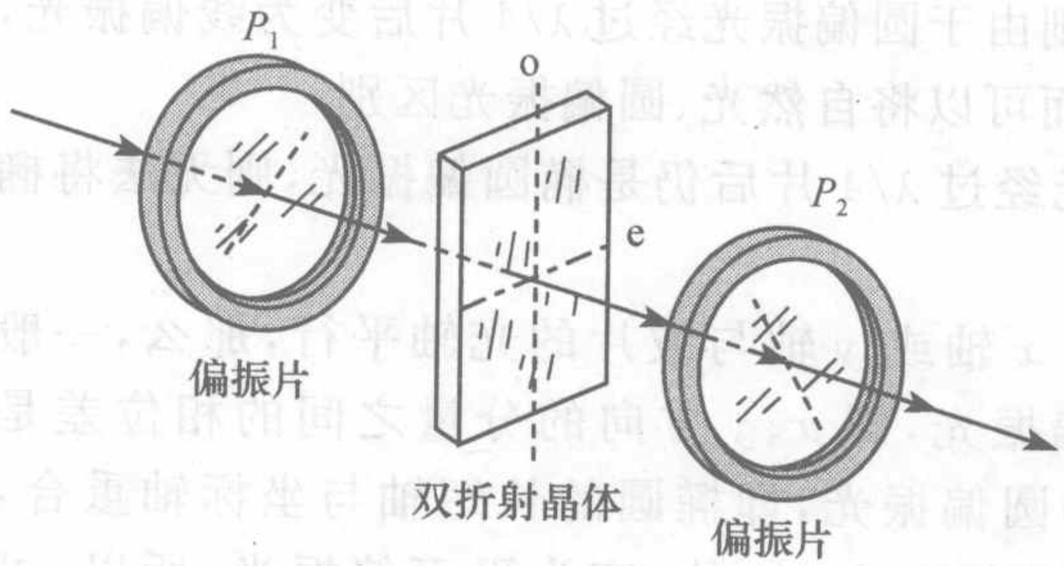


图 8.5.1

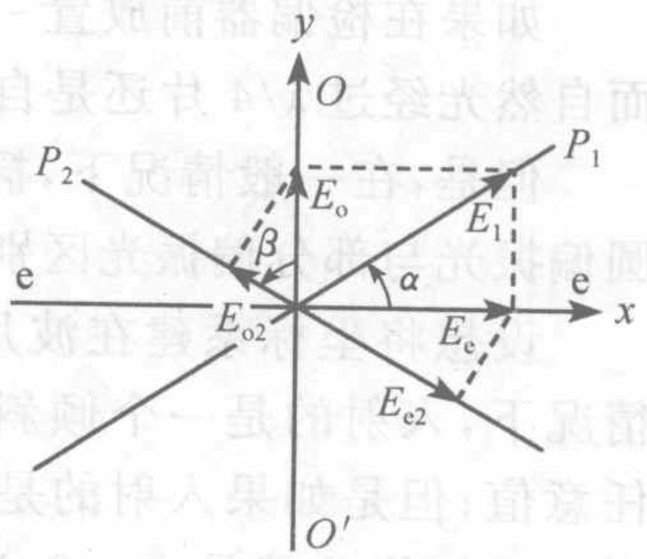


图 8.5.2

可以看出这种装置中，偏振光的干涉与自然光干涉的区别主要有：

(1) 干涉光为线偏光，振动面相互平行.

(2) 光程差由波晶片厚度及波晶片光轴与 P_1，P_2 夹角决定，不同于双缝或薄膜干涉.

8.5.2　实验现象及分析

1. 分析

如图 8.5.2 所示，设经 P_1 后的线偏光的电矢量和振幅分别为 E_1 和 A_1. 在波晶片中，e 光、o 光的振幅为

$$A_e = A_1\cos\alpha \tag{8.5.1}$$

$$A_o = A_1\sin\alpha \tag{8.5.2}$$

从波晶片射出的光再经过 P_2，相应的振幅为

$$A_{e2} = A_1\cos\alpha\cos\beta \tag{8.5.3}$$

$$A_{o2} = A_1\sin\alpha\sin\beta \tag{8.5.4}$$

这时，相干叠加可表示为 $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{e2} + \boldsymbol{E}_{o2}$，干涉的光强为

$$\begin{aligned} I &= A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\Delta\varphi \\ &= A_1^2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\Delta\varphi) \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

$\Delta\varphi$ 为两列光的相位差，由以下因素决定：

(1) P_1 透光轴的方向所引起的相位差，记作 $\Delta\varphi_1 = 0, \pi$. 当其透光轴在Ⅰ、Ⅲ象限[图 8.5.3(a)]，$\Delta\varphi_1 = 0$；而当其透光轴在Ⅱ、Ⅳ象限[图 8.5.3(b)]，$\Delta\varphi_1 = \pi$.

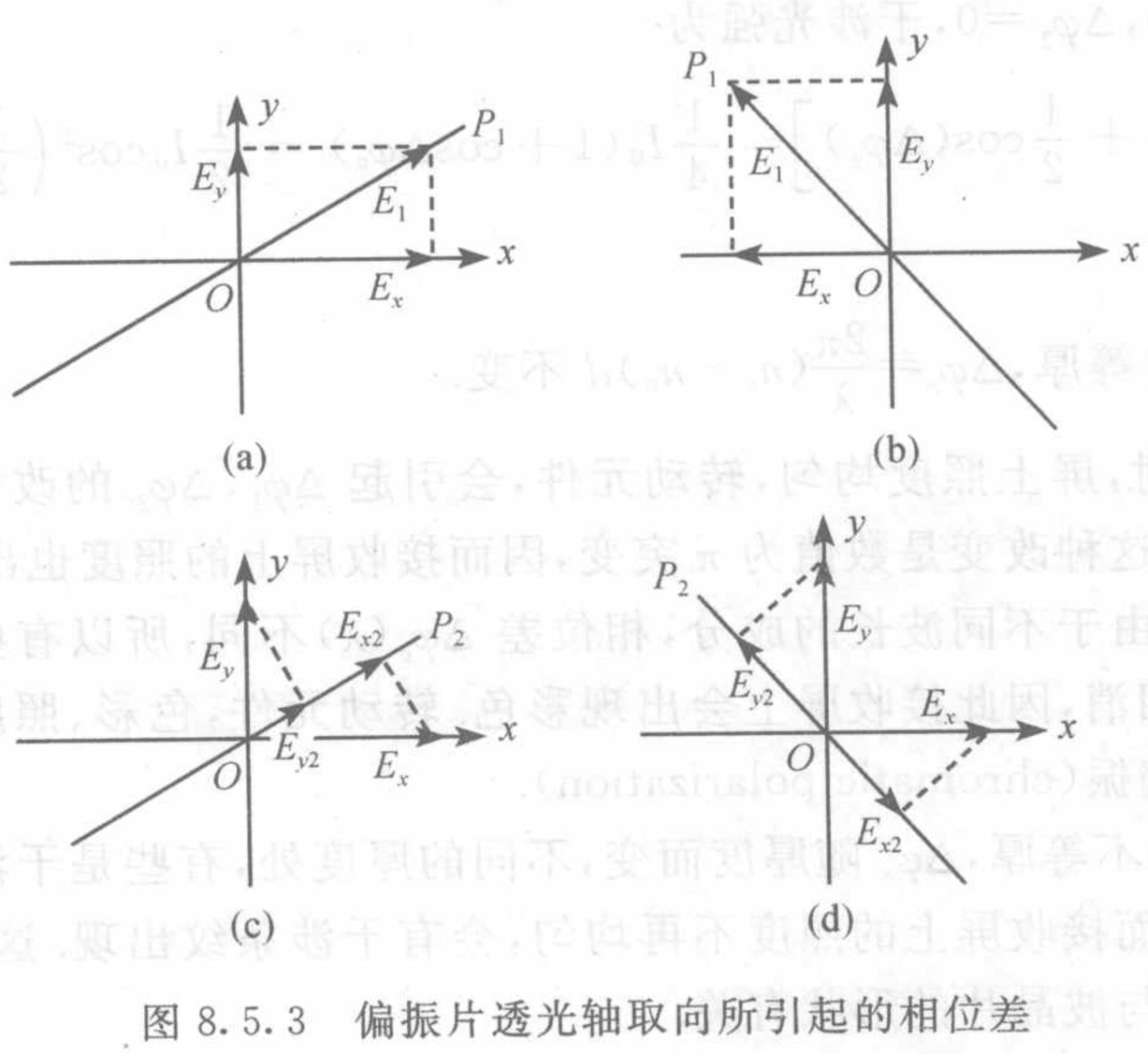


图 8.5.3　偏振片透光轴取向所引起的相位差

(2) 波晶片引起的 $\Delta\varphi_c = \dfrac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$.

(3) P_2 透光轴的方向所引起的相位差，记作 $\Delta\varphi_2 = 0, \pi$. 当其透光轴在Ⅰ、Ⅲ象限[图 8.5.3(c)]，$\Delta\varphi_2 = 0$；而当其透光轴在Ⅱ、Ⅳ象限[图 8.5.3(d)]，$\Delta\varphi_2 = \pi$.

总的相位差为

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_c + \Delta\varphi_2 \tag{8.5.6}$$

各个元件的方向固定时，$\Delta\varphi_1$、$\Delta\varphi_2$ 固定不变.

例如，$P_1 \perp P_2$，且波晶片光轴平分 P_1，P_2 的夹角，如图 8.5.4(a)所示，则有 $\alpha=\beta=\pi/4$，$\Delta\varphi_1=\pi$，$\Delta\varphi_2=0$，干涉光强为

$$I = A_1^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi+\Delta\varphi_c)\right]=\frac{1}{4}I_0(1-\cos\Delta\varphi_c)=\frac{1}{2}I_0\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \tag{8.5.7}$$

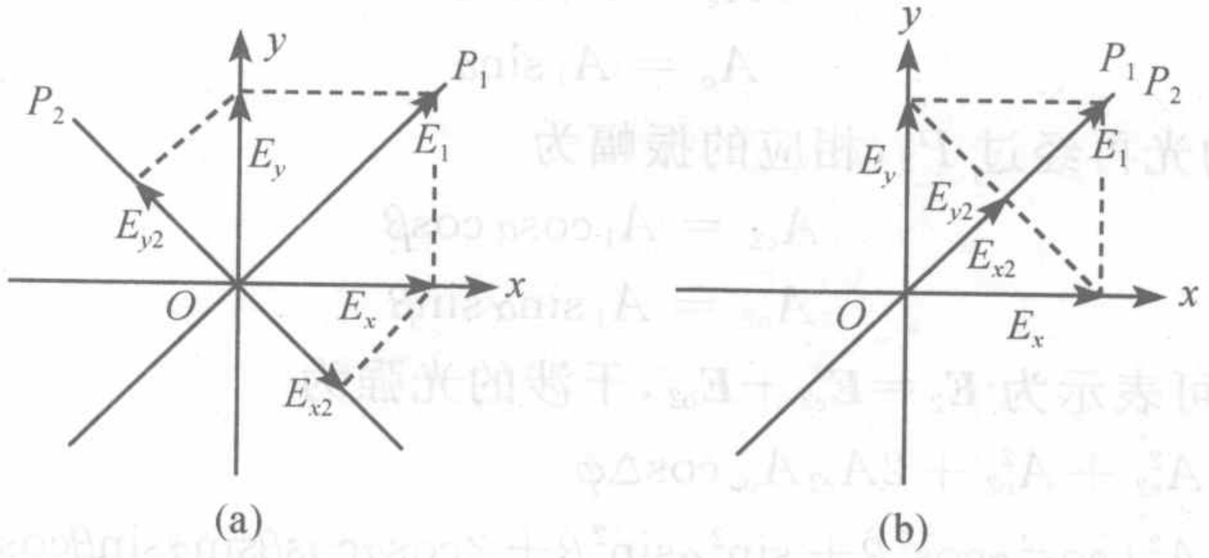


图 8.5.4 偏振片与光轴成 45°角的情况

如果 $P_1 /\!/ P_2$，且波晶片光轴平分 P_1，P_2 的夹角，如图 8.5.4(b)所示，则有 $\alpha=\beta=\pi/4$，$\Delta\varphi_1=0$，$\Delta\varphi_2=0$，干涉光强为

$$I = A_1^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\Delta\varphi_c)\right]=\frac{1}{4}I_0(1+\cos\Delta\varphi_c)=\frac{1}{2}I_0\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \tag{8.5.8}$$

2. 现象

(1) 波晶片等厚，$\Delta\varphi_c=\dfrac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d$ 不变.

单色光入射，屏上照度均匀，转动元件，会引起 $\Delta\varphi_1$、$\Delta\varphi_2$ 的改变，接收屏上的照度改变. 由于这种改变是数值为 π 突变，因而接收屏上的照度也出现突变.

白光入射，由于不同波长的成分，相位差 $\Delta\varphi_c(\lambda)$ 不同，所以有些是干涉相长，而有些是干涉相消，因此接收屏上会出现彩色. 转动元件，色彩、照度都改变. 这种现象就是显色偏振(chromatic polarization).

(2) 波晶片不等厚，$\Delta\varphi_c$ 随厚度而变，不同的厚度处，有些是干涉相长，而有些是干涉相消，因而接收屏上的照度不再均匀，会有干涉条纹出现. 这些干涉条纹的分布和形状，都与波晶片的形状有关.

3. 偏振光干涉的应用——光测弹性(photoelasticity)

金属制成的柱、梁、钓钩等机件，受外力时，内部有一定的应力分布. 但是，由于金属是不透明的，因而，其内部应力往往难以直接观察到. 为了研究其中的应力分布，可以将透明的塑料制成与机件相同的形状，然后仿照机件的受力，在塑料件上施加相应的外力. 塑料是各向同性介质，不受外力时，没有双折射现象，但是，加外力后，其内部的应力分布不均匀，会在应力方向产生光轴，出现双折射现象，研究表明，由应力所引起的折射率差与盈利的大小成正比，即

$$(n_o - n_e)d = cpd \tag{8.5.9}$$

其中，p 为应力，c 为材料系数，d 为沿应力方向材料的厚度.

这种情况下，采用适当的装置，可以观察到偏振光的干涉(图 8.5.5)，由干涉条纹的分布，可以知道折射率差在塑料中的分布，从而分析应力分布.

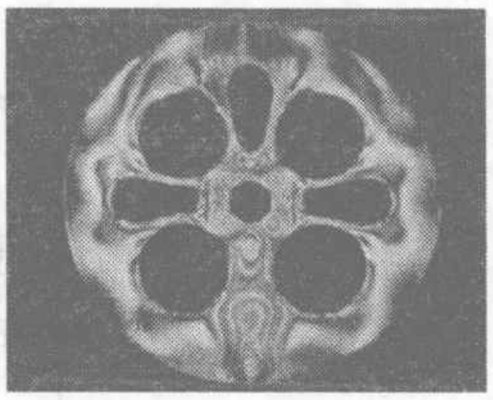


图 8.5.5　光测弹性照片

8.6　电 光 效 应

某些材料在电场作用下，可以产生双折射效应. 例如，有些液体，本来是各向同性的，没有双折射，但在外加电场的作用下，光在其中产生双折射；一些晶体，光沿其光轴入射时，本来不会发生双折射，但加上电场后，沿这一方向的光也发生双折射. 这种现象，都是电场引起了介质光学性质的变化，称作电光效应(electro-optic effect)，也称作人工双折射.

8.6.1　克尔效应(二级电光效应)

如图 8.6.1 所示，将液态硝基苯($C_6H_5NO_2$)封入有着一对平行玻璃窗口的小盒中，盒中有一对平行的电极板，这就是克尔盒. 将小盒置于两个透光轴正交的线偏振片之间，在没有外电场时，光是无法通过这一系统的，但是，如果在极板上加电压(偏振片透光轴与电场的方向之间成 45°夹角)，便有光透过这个系统，说明盒内的液体在外电场的作用下，变成了双折射物质，光轴沿着电场的方向，光在其中分解成了 o 光和 e 光，e 光的电矢量沿着光轴方向(y 方向)，而 o 光的电矢量垂直于光轴，沿着 x 方向，如图 8.6.2 所示，这一现象被称作克尔效应(Keer effect). 电场的方向与光的传播方向垂直，这是一种横向电场.

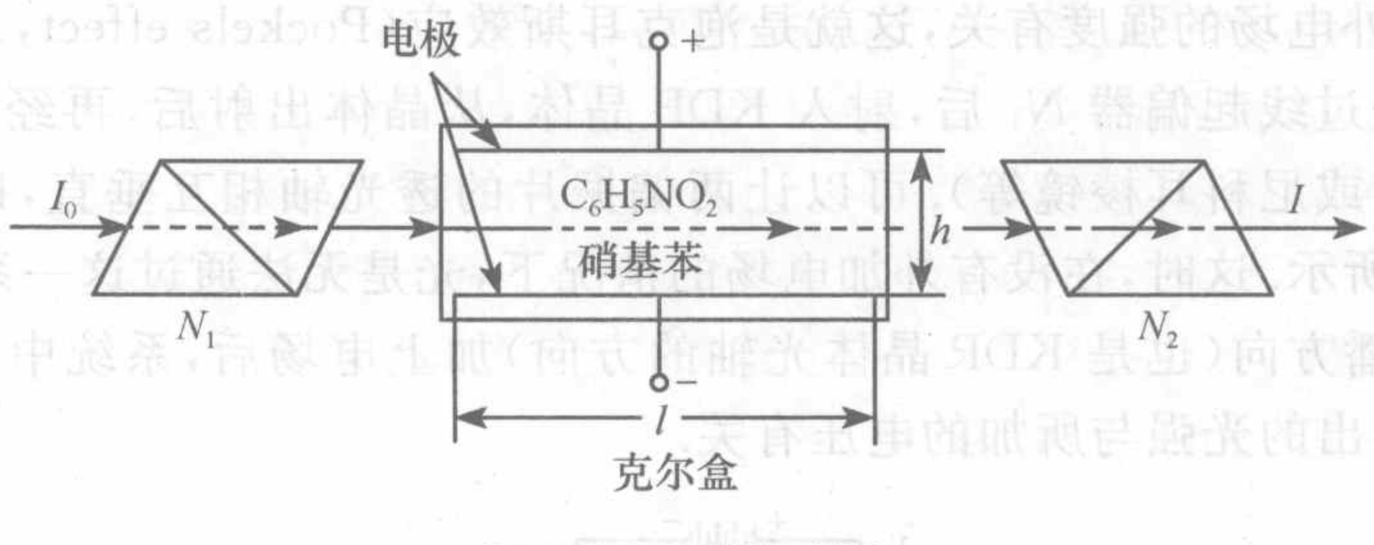
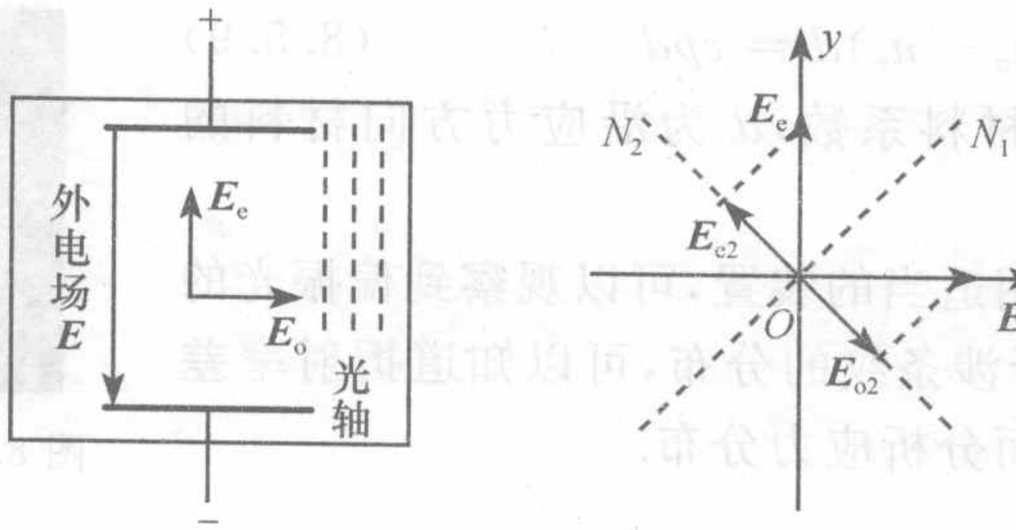


图 8.6.1　克尔效应

实验表明，在液体中 o 光和 e 光的折射率差 $n_{/\!/} - n_{\perp}$ 与外电场有关，称作感生折射率差，可表示为

$$\Delta n = n' - n'' = n_{/\!/} - n_{\perp} = kE^2 \tag{8.6.1}$$

其中，k 为克尔常量. 例如，硝基苯对钠黄光(D 线，$\lambda = 589.3\text{nm}$)的克尔常量为 $k = 220\times10^7$(CGSE 单位). 由于式(8.6.1)为电场强度的二次式，所以克尔效应也称



(a) (b)

图 8.6.2 克尔效应中，o 光、e 光的电矢量及其分解

作二次电光效应.

在 $N_1 \perp N_2$ 且与外电场 $\boldsymbol{E}$ 成 $\pi/4$ 角时，由式(8.5.7)，出射光的强度为

$$I = I_0 \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\Delta\varphi_c}{2} = I_0 \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{k\Delta n}{2}\right) = I_0 \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}dE^2\right)$$

而 $E=\dfrac{V}{h}$，于是得到

$$I = I_0 \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d\frac{V^2}{h^2}\right) \tag{8.6.2}$$

可以通过改变加在极板上的电压控制输出的光强.

硝基苯有剧毒，而且液态的克尔盒使用不很方便.

8.6.2 泡克耳斯效应(一级电光效应)

某些晶体，其中最典型的是 KDP 晶体，即磷酸二氢钾(KH_2PO_4)晶体，在没有外电场时，为单轴晶体，但是，在外加电场的作用下，变为双轴晶体. 当入射光沿着原来的光轴方向入射时，光在晶体中分为 o 光和 e 光. 在这种晶体中，o 光和 e 光的折射率差与外电场的强度有关，这就是泡克耳斯效应(Pockels effect，1893 年). 例如，入射光经过线起偏器 N_1 后，射入 KDP 晶体，从晶体出射后，再经过另一个检偏器(偏振片或尼科耳棱镜等). 可以让两偏振片的透光轴相互垂直，即 $N_1 \perp N_2$，如图 8.6.3 所示. 这时，在没有外加电场的情况下，光是无法通过这一系统的. 但是沿着光的传播方向(也是 KDP 晶体光轴的方向)加上电场后，系统中立刻就有光输出，而且输出的光强与所加的电压有关.

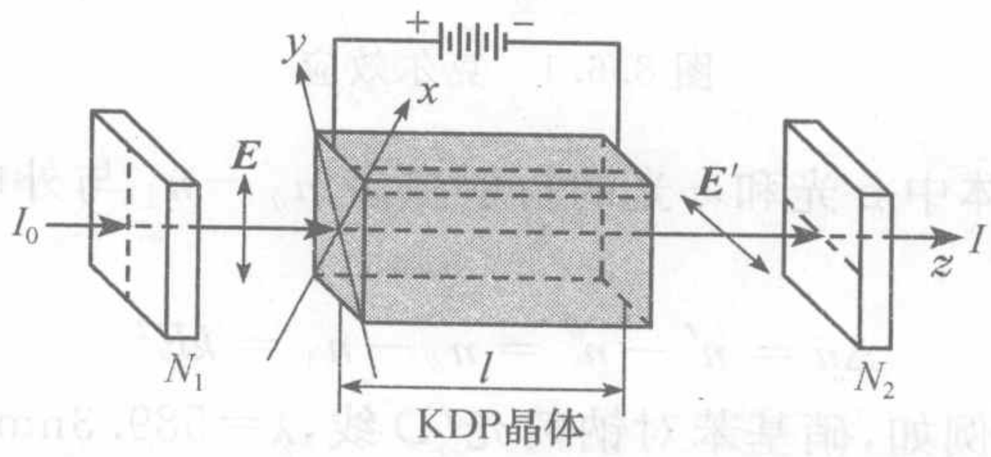


图 8.6.3 泡克耳斯效应(纵向电场)

如果所加电场为纵向，即电场与光的传播方向平行，在相互垂直的 x、y 方向的感生折射率分别为 n'，n''，沿 x、y 方向振动的 o 光、e 光的传播速度分别为 v'，v''.

泡克耳斯效应的感生折射率差为

$$n' - n'' = n_o^3 \gamma E \tag{8.6.3}$$

其中，n_o 是对 o 光的折射率，γ 为介质的电光系数.

沿 x、y 方向振动的光的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n' - n'')d = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma V \tag{8.6.4}$$

其中，d 为晶体的纵向长度，V 为晶体两端的电压.

由式(8.5.7)，出射光的强度为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma V \right) \tag{8.6.5}$$

如果加横向电场(图 8.6.4)，则

$$n' - n'' = n_o^3 \gamma' E \tag{8.6.6}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n' - n'')l = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma' E l = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \gamma' V \left(\frac{l}{h} \right) \tag{8.6.7}$$

其中，h 为晶体横向的线度.

使相位差等于 $\pi/2$ 的电压称作半波电压(图 8.6.5)，记作 $V_{\lambda/2}$，式(8.6.7)中，由于通常 $l > h$，与纵向电场相比，可降低半波电压.

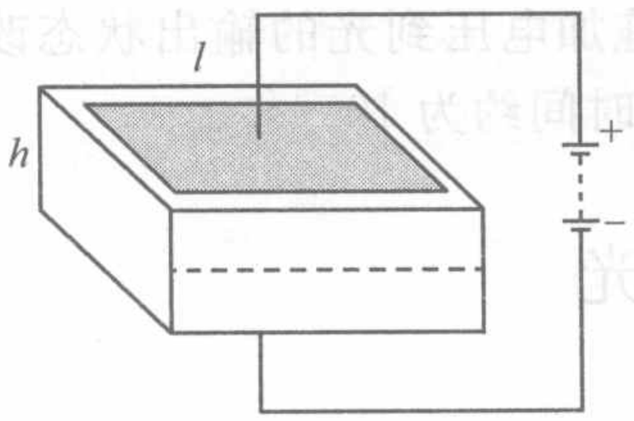


图 8.6.4　横向电场

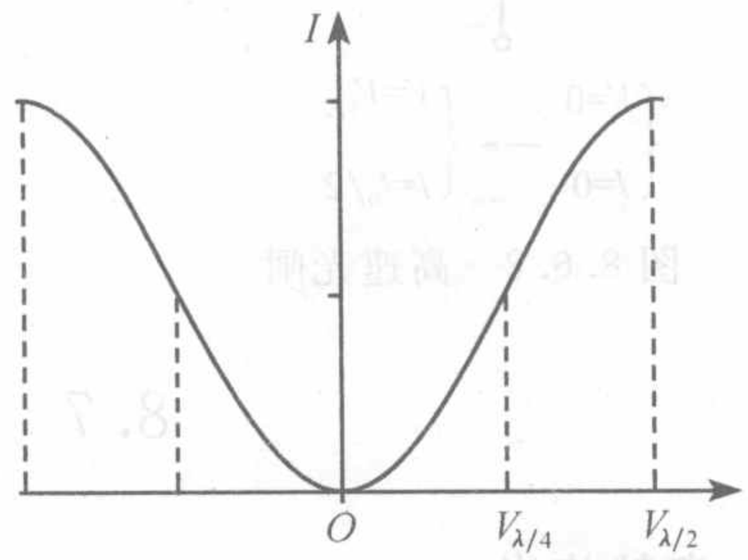


图 8.6.5　半波电压

8.6.3　电光效应的应用

1. 激光光强调制

从式(8.6.5)可以看出，改变加在 KDP 晶体上的电压，输出光强相应改变. 在 $\Delta\varphi = \pi/4$ 附近的一个小的范围中，光强电压的关系近似为线性的(图 8.6.5)，即 $\Delta I \propto \Delta V$，这一区域称作线性区，使 $\Delta\varphi = \pi/4$ 的电压称作 $\lambda/4$ 电压，记作 $V_{\lambda/4}$.

如果先在 KDP 晶体上施加 $V_{\lambda/4}$ 电压，使其处于线性区，再加上一个幅度较小的调制电压 $\tilde{V} = a\sin\omega t$(图 8.6.6)，则输出光的强度将会随着调制电压便变化，即

$$\Delta I \propto \Delta V = a\sin\omega t \tag{8.6.8}$$

这样，就可以实现用正弦波对输出光强进行调制，例如，调制激光器的输出光

强. 如果调制电压是某种信号，则可以将信号加载在激光上，以实现激光通信(图 8.6.7).

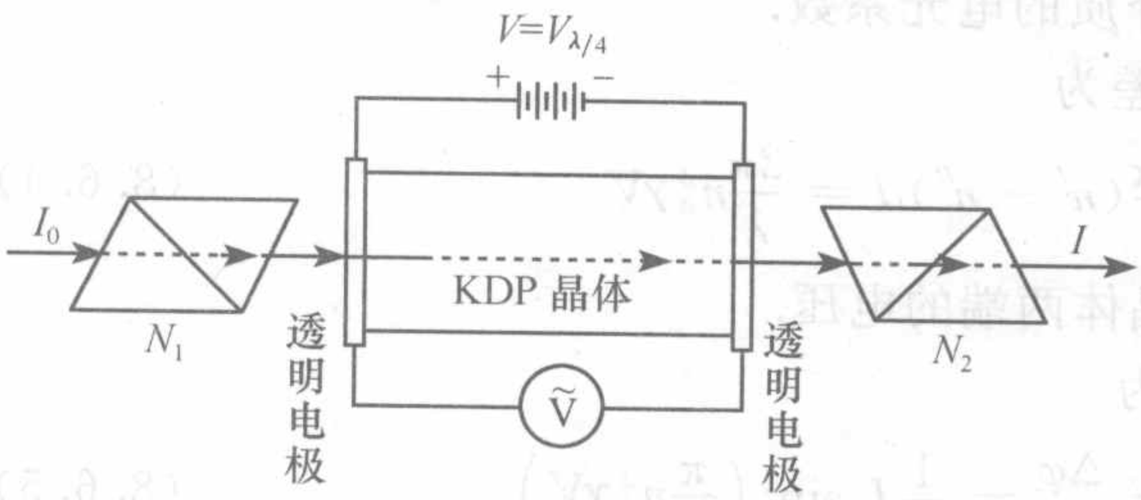


图 8.6.6 在 KDP 晶体上加调制电压 $\tilde{V}$

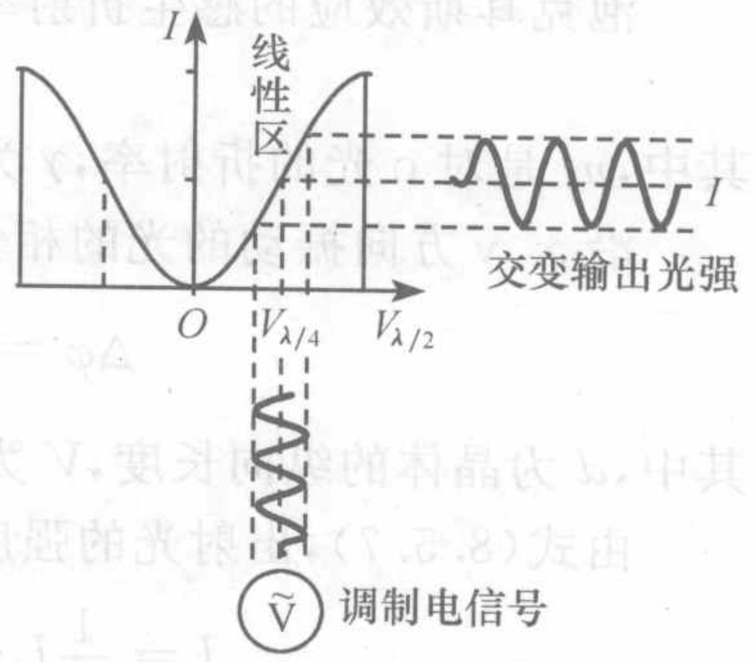


图 8.6.7 加载调制信号

2. 高速光闸

克尔盒，或者 KDP 晶体，对外加电压的响应非常快，例如硝基苯克尔效应的弛豫时间约为 10^{-9} s 的数量级. 所以，除了用作光强调制，还可以作为高速光闸(高速光开关)使用.

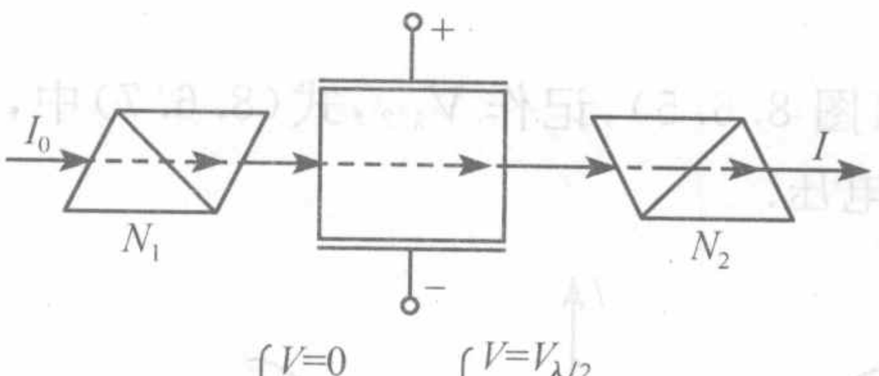


图 8.6.8 高速光闸

由式(8.6.2)或式(8.6.5)可知，当 $V=0$ 时，没有光输出，系统处于对光截止状态(关)；当 $V=V_{\lambda/2}$ 时，输出光强最大，系统对光处于开通状态(开)，如图 8.6.8 所示. 而从施加电压到光的输出状态改变，所用的响应时间约为 10^{-9} s.

8.7 旋 光

8.7.1 自然旋光

1. 石英晶体

将石英晶体加工成光轴垂直于表面薄片，线偏光沿着其光轴方向入射，发现出射光的振动面旋转. 这一现象称作旋光(optical activity，optical rotation opticity)，如图 8.7.1 所示.

转过的角度与晶体的厚度成正比，即

$$\theta = \alpha l \tag{8.7.1}$$

其中，α 为与晶体有关的常数，称作旋光本领，或旋光率(specific rotation). 该常数通常与光的波长有关，即

$$\alpha = \alpha(\lambda) \tag{8.7.2}$$



图 8.7.1 旋光

石英旋光率随波长的变化如表 8.7.1 表示. 这样，如果白光入射，则出射光中不同的波长成分，旋转的角度不同，用检偏器观察，发现在不同的角度处，有不同颜色的光射出，这一现象称作旋光色散.

表 8.7.1　石英旋光率随波长的变化

波长/nm	旋光率/[(°)/mm]	波长/nm	旋光率/[(°)/mm]	波长/nm	旋光率/[(°)/mm]
175.0	453.5	430.7	42.604	589.3	21.724
226.5	210.9	435.8	41.458	643.8	18.023
250.3	153.9	467.8	35.601	670.8	16.535
303.4	95.02	486.1	32.761	728.1	13.924
340.4	72.45	508.6	29.728	760.4	12.668
404.7	48.945	546.1	25.535	794.8	11.589

实验还发现，线偏光通过石英晶体，既可能左旋，也可能右旋. 进一步的研究表明，这与石英晶体结构有关，据此，可以将石英分为左旋石英和右旋石英(图 8.7.2).

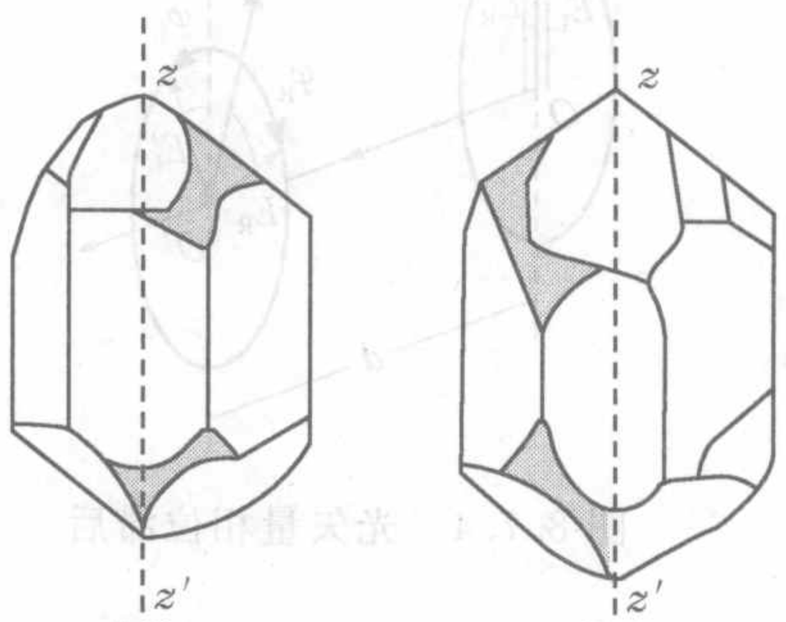


图 8.7.2　左旋石英和右旋石英

2. 溶液

某些溶液也有明显的旋光特性，如蔗糖溶液中，线偏光的光矢量转过的角度可表示为

$$\theta = \alpha N l \tag{8.7.3}$$

其中，α 与溶液的种类有关，称作比旋光率(specific rotatory power)，而 N 为溶液的浓度，如室温下，蔗糖的水溶液对 Na 黄光的比旋光率 $\alpha = 66.46°/[\mathrm{dm}\cdot(\mathrm{g/cm^3})]$，$\alpha>0$，取正值表示右旋. 由于溶液都是各向同性的，因而，同一种类的溶液，使光矢量都向同一方向旋转.

由于光矢量旋转的角度可以反映蔗糖溶液的浓度，因而通过测量旋光，就可以知道溶液的浓度，这就方法称作“量糖术”(saccharimetry).

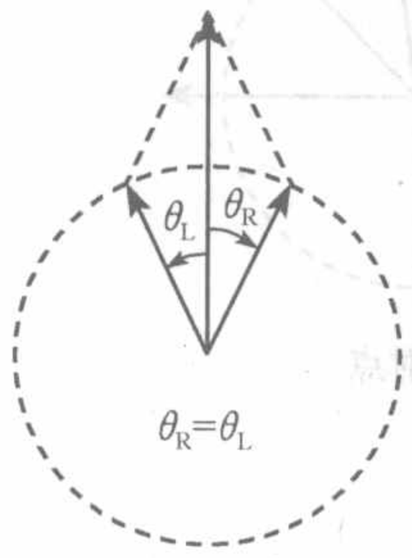


图 8.7.3　圆振偏光合成平面偏振光

3. 解释

对旋光现象的解释，应当采用量子理论，通过光子与介质中的电荷的相互作用进行分析. 但是，也可以采用菲涅耳的唯象理论进行简单的分析. 菲涅耳认为，线偏光可以看成是两列同方向传播的旋转方向相反的圆偏振光的合成，如图 8.7.3 所示. 射入旋光介质中，左旋和右旋的圆偏振光传播的速度不同，即它们的折射率分别是 n_L 和 n_R，如表 8.7.2 所示.

表 8.7.2　右旋石英的折射率

波长(nm)	n_L	n_R	n_o	n_e
396.8	1.55810	1.55821	1.55815	1.56771
762.0	1.53914	1.53920	1.53917	1.54811

在介质中距离为 d 的两点 O 和 O'，由于 O' 比 O 时间滞后，所以相对于 O 点的光，O' 点处左旋和右旋圆偏光的相位滞后分别为 $\varphi_L = k_L d = \frac{2\pi}{\lambda} n_L d$ 和 $\varphi_R = k_R d = \frac{2\pi}{\lambda} n_R d$. 即 O' 点的光矢量还没有旋转到 O 点处的位置，相当于相对于原来的电矢量分别转过了 $-\varphi_L$ 和 $-\varphi_R$ 角，如图 8.7.4 所示. 由于 $\varphi_L \neq \varphi_R$，导致合成后的线偏光振动面旋转，如图 8.7.5 所示.

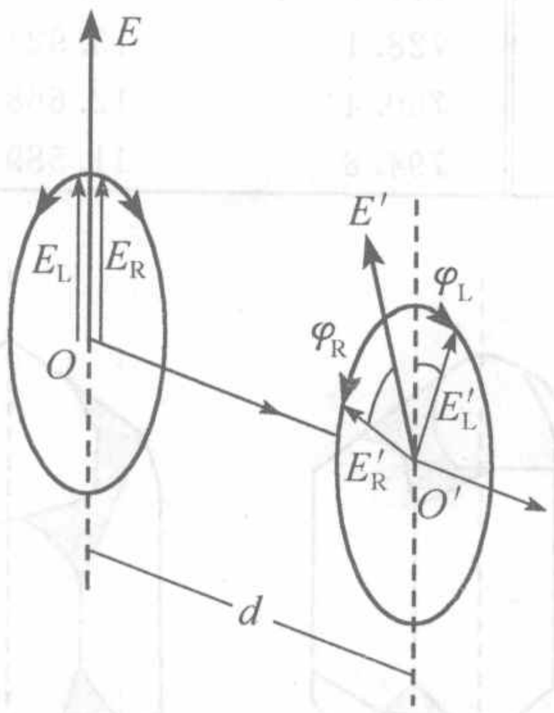


图 8.7.4 光矢量相位滞后

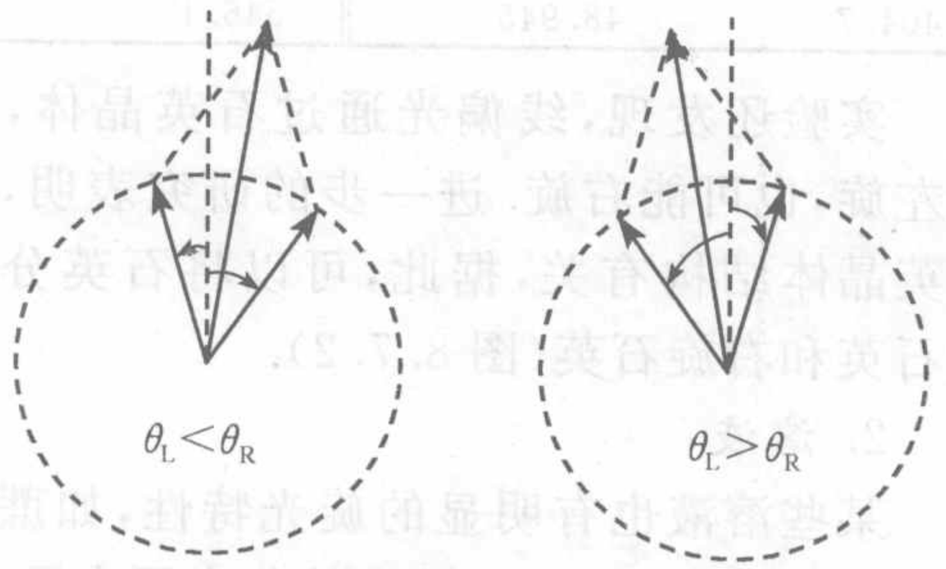


图 8.7.5 右旋和左旋

光的电矢量到底是左旋、还是右旋，取决于 n_L 和 n_R 的相对大小，如图 8.7.6 所示.

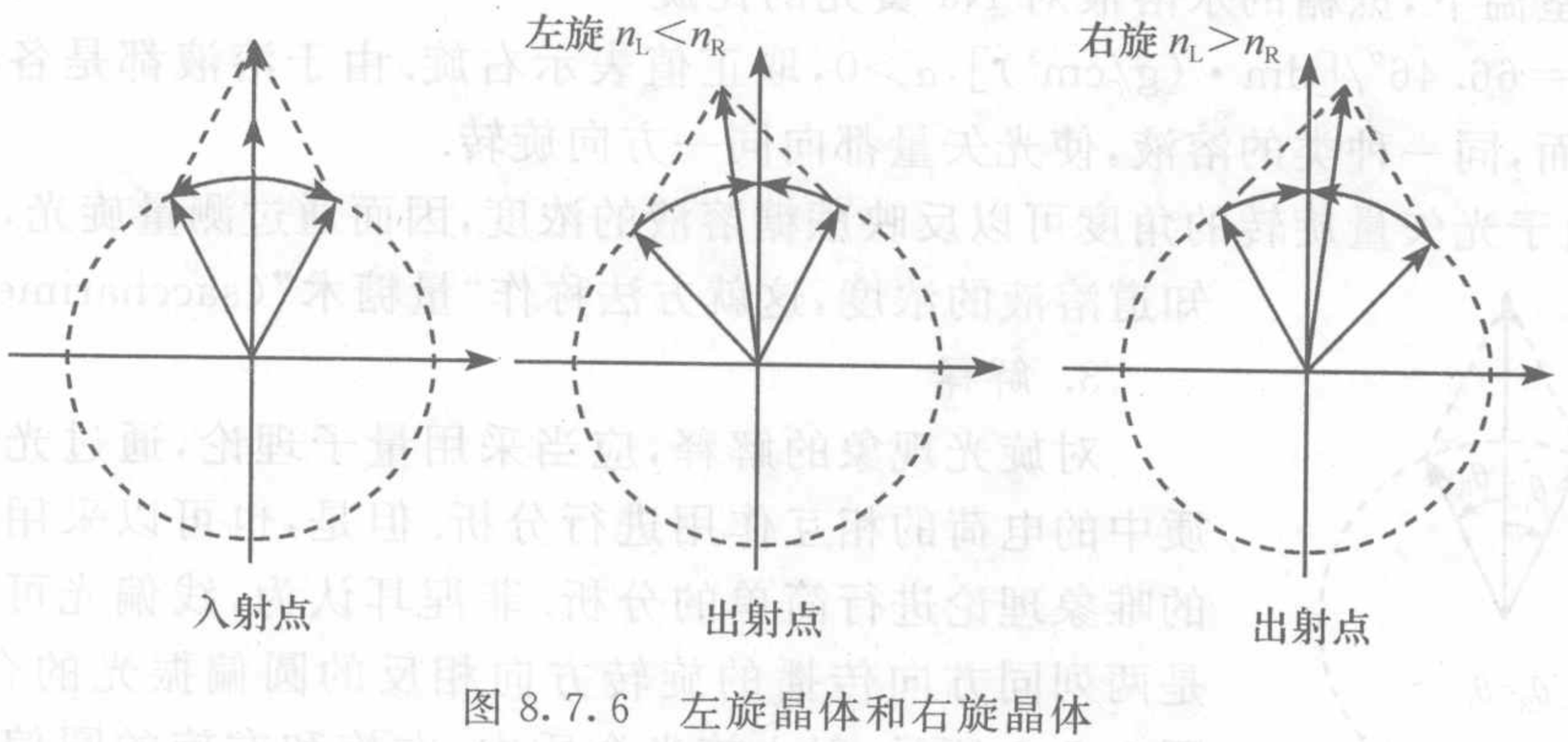


图 8.7.6 左旋晶体和右旋晶体

菲涅耳巧妙地采用图 8.7.7 所示的复合棱镜，验证上述假设.

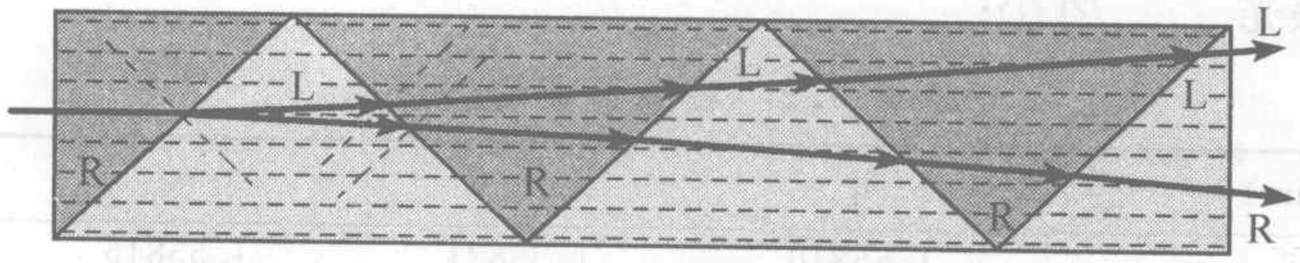


图 8.7.7 菲涅耳复合棱镜

将左旋晶体和右旋晶体制成三棱镜的形状，并按图组合起来. 如平面偏振光从左端面入射到右旋晶体中，对于观察者来说，其左旋光、右旋光的折射率分别为 n_L、n_R. 而进入第二块左旋晶体后，原来的左旋光对该晶体是左旋的，折射率变为 n_R，而原来的右旋光对于晶体是左旋的，折射率变为 n_L，因此在两块晶体的界面处发生折射. 由于两列光折射率变化的情况正好相反，于是向相反的方向折射. 依次进入后面的晶体中，这种现象不断出现，使得两束光进一步分开.

8.7.2　磁致旋光

1. 法拉第效应(Faraday magneto-optics effect)

当某些介质处于外磁场中时，这些介质具有旋光性，如图 8.7.8 所示，平面偏振光沿着磁场方向通过介质后，其振动平面发生偏转，实验测得偏转角

$$\theta = VBl \tag{8.7.4}$$

其中，B 为外磁场的磁感应强度，l 为磁场区域的长度，而 V 为与介质有关的常数，称作维尔德(Verdet)常量. 一般物质的维尔德常量都很小，例如，液体中二硫化碳的 V 值较大，为 $V = 0.042'/(\text{cm} \cdot \text{Gs}^{①})$，而固体中重火石玻璃的 V 可达 $V = 0.09'/(\text{cm} \cdot \text{Gs})$.

实验研究表明，电矢量振动平面的旋转方向与光的传播方向有关. 图 8.7.8 中，如果从左端入射时，电矢量左旋，则从右端入射时，电矢量右旋.

2. 科顿-莫顿效应

各向同性介质，在磁场作用下产生双折射现象，如图 8.7.9 所示.

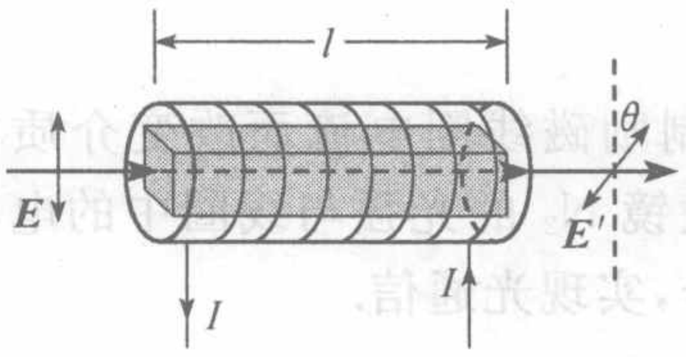


图 8.7.8　法拉第效应

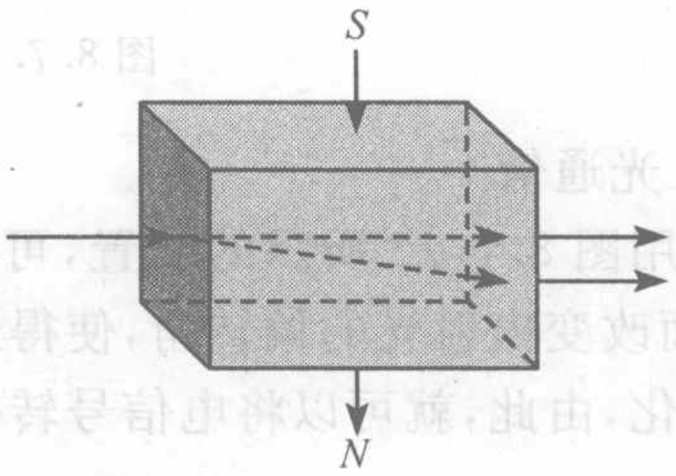


图 8.7.9　介质在磁场中的科顿-莫顿效应

8.7.3　磁致旋光的应用

1）单通光闸

如图 8.7.10 所示，自然光经过一个尼科耳棱镜后，得到平面偏振光. 该平面偏振光通过磁场中的介质后，振动平面转过 45°，被平面镜 M 反射后，沿原路返回，再次通过介质，由于法拉第效应中光矢量旋转的方向与光的传播方向有关，于是光矢

① $1\text{Gs} = 10^{-4}\text{T}$，下同.

量有转过 45°,则反射回来的光矢量相对于入射光恰转过 90°,不能通过尼科耳棱镜,这就是单通光闸(也称作磁光隔离器).

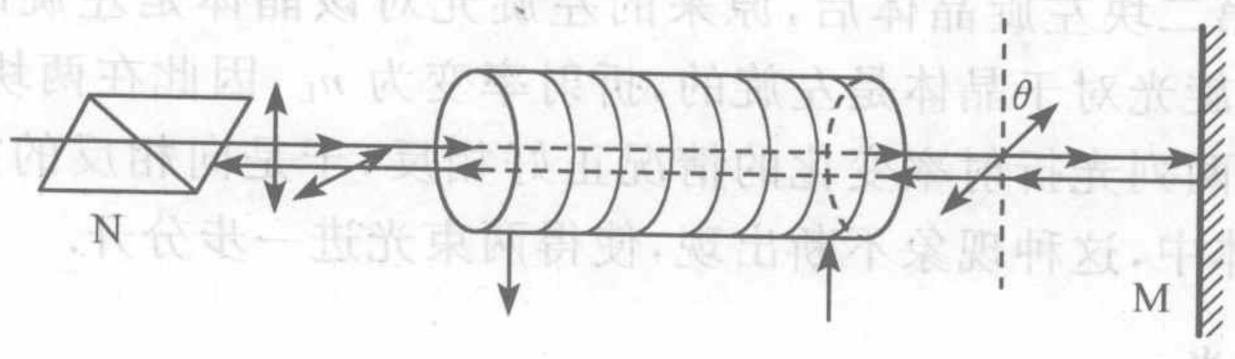


图 8.7.10 单通光闸

2) 溶液浓度的控制

工业生产中要求某溶液维持在某一特定的浓度,如果该溶液具有旋光性,则可以利用这一特性和磁光效应实现溶液浓度的自动控制. 如图 8.7.11 所示,一束光经过尼科耳棱镜 N_1 后,再经过溶液. 设标准浓度的溶液使得入射光左旋 θ,则使光在经过一个右旋 θ 的法拉第旋光装置,该装置后是一尼科耳棱镜 N_2,两尼科耳棱镜的主截面相互垂直,则光不能透过 N_2. 如果溶液的浓度发生改变,则引起角度 θ 的改变,则光可以透过 N_2,N_2 后面的光电探测器就会响应.

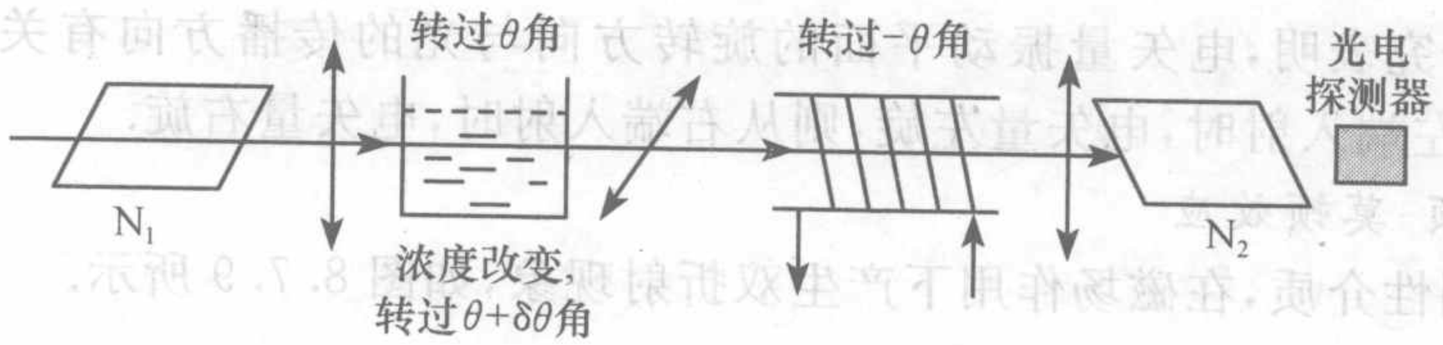


图 8.7.11 溶液浓度的控制

3) 光通信

利用图 8.7.12 所示的装置,可以通过控制励磁线圈电流而改变介质中的磁场,从而改变出射光的偏转角,使得通过偏振棱镜 N_2 的光强与线圈中的电流做同步的变化,由此,就可以将电信号转化为光信号,实现光通信.

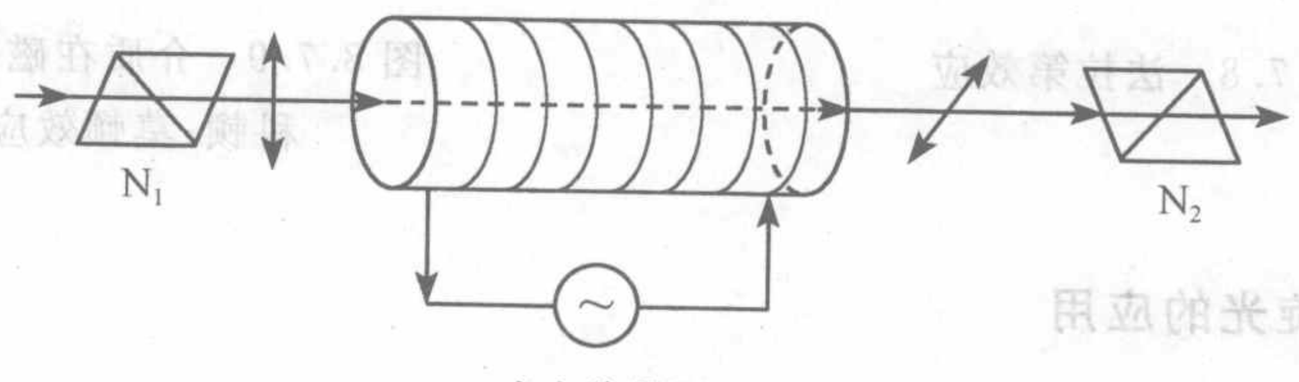


图 8.7.12 利用法拉第效应实现光通信

8.8 偏振态的矩阵表示

在计算机技术已经普及的今天,使用矩阵可以使大量重复的计算变得十分简

洁. 对于光的偏振态，以及偏振元件的偏振特性，都可以用矩阵表示. 通过矩阵的计算，可以方便地判断光学系统的特性和光的偏振状态. 这种方法早在 1941 年最先由琼斯(R. C. Jones，美国)提出.

8.8.1　琼斯矢量

光有平面偏振、圆偏振和椭圆偏振三种偏振态，每一种偏振态的光矢量都可用相互垂直的两个分量表示，其一般形式为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz-\omega t+\varphi_{0x}) \\ E_y = A_y\cos(kz-\omega t+\varphi_{0y}) \end{cases}$$

或者写成复指数形式

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i(kz-\omega t+\varphi_{0x})} = A_x e^{i(kz+\varphi_{0x})}e^{-i\omega t} = A_x e^{i\varphi_x(z)}e^{-i\omega t} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i(kz-\omega t+\varphi_{0y})} = A_y e^{i(kz+\varphi_{0y})}e^{-i\omega t} = A_y e^{i\varphi_y(z)}e^{-i\omega t} \end{cases}$$

可以去掉公因子 $e^{-i\omega t}$，则得到两分量的复振幅，即

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i\varphi_z(z)} \end{cases} \tag{8.8.1}$$

上述光矢量可以用一个 2×1 的矩阵的表示，其两分量的复振幅可以就是该矩阵的矩阵元，即

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{bmatrix} \tag{8.8.2}$$

这个矩阵称作偏振光的琼斯矢量(Jones vector).

形如式(8.8.2)琼斯矢量一般为椭圆偏振光，实际上，椭圆偏振光的分量式是最普遍的偏振表达，而当 $\varphi_y(z)=\pm\varphi_x(z)$ 时，就是平面偏振光；而 $A_y=A_x$，且 $\varphi_y(z)=\varphi_x(z)\pm\pi/2$ 时，就是圆偏振光.

光强就是光矢量复振幅模的平方，即

$$I = |\boldsymbol{E}|^2 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* = \tilde{E}_x\tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y\tilde{E}_y^* = A_x^2 + A_y^2$$

由于上述偏振光的强度为 $I=|\tilde{E}_x|^2+|\tilde{E}_y|^2=A_x^2+A_y^2$，也可以将琼斯矢量写成归一化的形式

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{bmatrix} \tag{8.8.3}$$

归一化的琼斯矢量，其模为 1，即 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*=1$.

由于光的偏振态，实际上取决于两分量的相位差和振幅之比，所以，可以将各个矩阵元的公因子提出，写成更简洁的形式，即

$$\boldsymbol{E} = A_x e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{A_y}{A_x}e^{i(\varphi_y-\varphi_x)} \end{bmatrix} = A_x e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \gamma e^{i\varphi} \end{bmatrix} \tag{8.8.4}$$

其中，$\gamma=A_y/A_x$，为两正交分量振幅之比，$\varphi=\varphi_y-\varphi_x$，为两正交分量的相位差.

例如，光矢量沿 x 轴的平面偏振光的归一化琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{A_x}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x}\\0\end{bmatrix}=e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，可得到非常简洁的形式 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

同样，光矢量与 x 轴夹角为 θ 的平面偏振光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x(z)}\\A_y e^{i\varphi_x(z)}\end{bmatrix}=\frac{e^{i\varphi_x}}{A\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\begin{bmatrix}A\cos\theta\\A\sin\theta\end{bmatrix}=e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，得到 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$

圆偏振光

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\begin{bmatrix}A_x e^{i\varphi_x}\\A_y e^{i\varphi_y}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}A}\begin{bmatrix}Ae^{i\varphi_x}\\Ae^{i\varphi_x\pm\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{e^{i\varphi_x}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$$

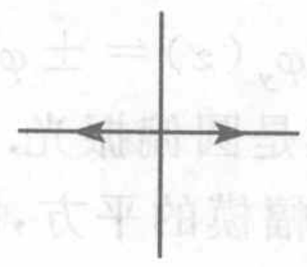
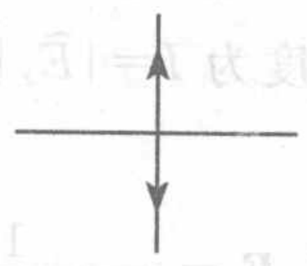
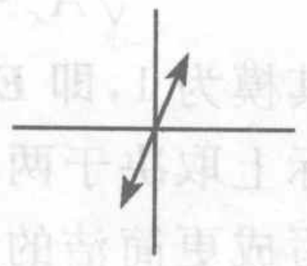
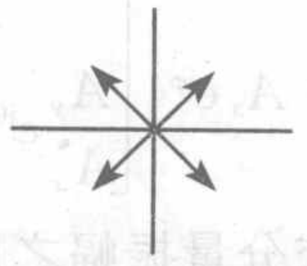
简化后，为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm i\end{bmatrix}$$

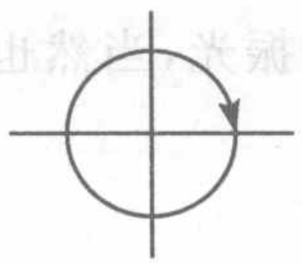
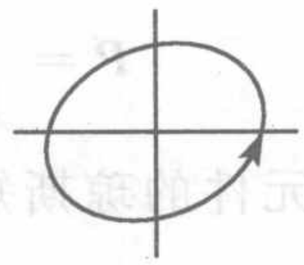
当第二个矩阵元取“＋”时，为左旋圆偏光；取“－”时，为右旋圆偏光.

各种偏振态的琼斯矢量列在表 8.8.1 中.

表 8.8.1 各种偏振态的琼斯矢量

光的偏振态		图 示	琼斯矢量
平面偏振光	$\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 沿 y 轴		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴夹角为 θ		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm1\end{bmatrix}$

续表

光的偏振态		图　示	琼斯矢量
圆偏振光	右旋		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	左旋		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$
椭圆偏振光			$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\\gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{bmatrix}$

对于椭圆偏振光，当两分量的相位差 φ 处于Ⅰ、Ⅱ象限时，为左旋；处于Ⅲ、Ⅳ象限时，为右旋. 当 $\varphi=\pm\pi/2$，且 $\gamma\neq1$ 时，为正椭圆，其长短轴与坐标轴平行.

8.8.2　正交偏振

如果两列光波的光矢量 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\tilde{E}_{1x}\\\tilde{E}_{1y}\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\tilde{E}_{2x}\\\tilde{E}_{2y}\end{bmatrix}$之间满足以下关系式

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*=\tilde{E}_{1x}\tilde{E}_{2x}^*+\tilde{E}_{1y}\tilde{E}_{2y}^*=0 \tag{8.8.5}$$

则这两列光波是正交偏振的，其中 $\boldsymbol{E}_2^*$ 为 $\boldsymbol{E}_2$ 复共轭矢量.

例如，两平面偏振光 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\\sin\theta_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\cos\theta_2\\\sin\theta_2\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\\sin\theta_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\end{bmatrix}=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$=\cos(\theta_1-\theta_2)=0$$

即得到 $\theta_2=\theta_1+\pi/2$，说明两列偏振光的光矢量相互垂直. 因此，相互正交的平面偏振光的一般形式可写作 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$

左旋的圆偏振光$\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$与右旋的圆偏振光$\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$是相互正交的；同样，左旋的椭圆偏振光$\begin{bmatrix}2\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$与右旋的椭圆偏振光也是正交的$\begin{bmatrix}1\\-2\mathrm{i}\end{bmatrix}$.

由于任何偏振光都可以分解为两个正交的偏振光，所以任何一种偏振态都可

以写作两个正交偏振的琼斯矢量的和. 例如，$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$是平面偏振光的分解为两个正交的平面偏振光，当然也可以将其分解为两正交的圆偏振光$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\frac{A+\mathrm{i}B}{2}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}+\frac{A-\mathrm{i}B}{2}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$.

8.8.3 琼斯矩阵

为了计算用琼斯矢量表示的偏振光通过偏振元件后偏振态的变化，就要求偏振元件也用矩阵表示，这类矩阵应该是一个 2×2 矩阵，一般形式为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix} \tag{8.8.6}$$

式(8.8.6)称作线形光学元件的琼斯矩阵(Jones matrix). 如果入射的光矢量为$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}$，从偏振器件出射的光矢量为$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}$，则偏振元件的变换作用可以用下面的运算表示为

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}\tilde{E}_x+p_{12}\tilde{E}_y\\ p_{21}\tilde{E}_x+p_{22}\tilde{E}_y\end{bmatrix} \tag{8.8.7}$$

即

$$\begin{cases}\tilde{E}'_x=p_{11}\tilde{E}_x+p_{12}\tilde{E}_y\\ \tilde{E}'_y=p_{21}\tilde{E}_x+p_{22}\tilde{E}_y\end{cases} \tag{8.8.8}$$

如果光依次通过多个偏振元件，而这些元件的琼斯矩阵分别为$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$，则出射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{P}_n\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E} \tag{8.8.9}$$

例如，λ/2 片，其快轴沿 x 方向，慢轴沿 y 方向，则通过该波片后，与入射光相比，会在 y 方向额外产生 π 的相位滞后，即如果入射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix},$$

则出射光的琼斯矢量应当为

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ -\tilde{E}_y\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\tilde{E}'_x=1\cdot\tilde{E}_x+0\cdot\tilde{E}_y\\ \tilde{E}'_y=0\cdot\tilde{E}_x+(-1)\cdot\tilde{E}_y\end{cases},$$

因而可以推算出该波片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{+\lambda/2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

快轴沿 y 方向的 $\lambda/2$ 片的琼斯矩阵同样是 $\boldsymbol{P}_{-\lambda/2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

对于快轴沿 x 方向的 $\lambda/4$ 波片，其作用是使得 y 方向的振动分量额外增加 $\pi/2$ 的相位滞后，因而出射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x\\ \widetilde{E}_y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x\\ \mathrm{i}\widetilde{E}_y\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\widetilde{E}'_x=1\cdot\widetilde{E}_x+0\cdot\widetilde{E}_y\\ \widetilde{E}'_y=0\cdot\widetilde{E}_x+\mathrm{i}\cdot\widetilde{E}_y\end{cases},$$

于是该波片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{-\lambda/4}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$$

用于起偏的偏振片，是将光变为平面偏振光，针对一般的情形，设偏振片的透振方向（透光轴）与 x 轴的夹角为 θ（相对于 x 轴转过 θ 角），设入射光、出射光的琼斯矢量分别为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x\\ \widetilde{E}_y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\widetilde{E}'_x\\ \widetilde{E}'_y\end{bmatrix}$$

从图 8.8.1 上可以看出，出射光矢量的大小等于入射光两正交分量在偏振片透振方向上的投影，即

$$|\boldsymbol{E}'|=\widetilde{E}_x\cos\theta+\widetilde{E}_y\sin\theta,$$

则

$$\begin{cases}\widetilde{E}'_x=(\widetilde{E}_x\cos\theta+\widetilde{E}_y\sin\theta)\cos\theta=\widetilde{E}_x\cos^2\theta+\widetilde{E}_y\sin\theta\cos\theta\\ \widetilde{E}'_y=(\widetilde{E}_x\cos\theta+\widetilde{E}_y\sin\theta)\sin\theta=\widetilde{E}_x\sin\theta\cos\theta+\widetilde{E}_y\sin^2\theta\end{cases}$$

用矩阵运算表示，为

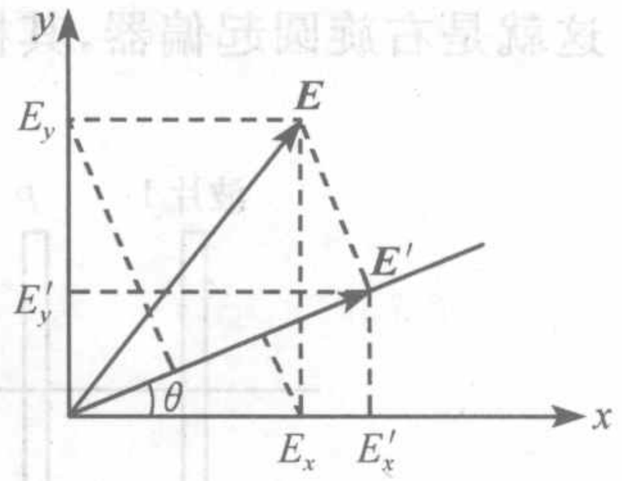


图 8.8.1　线偏振器

$$\begin{bmatrix}\widetilde{E}'_x\\ \widetilde{E}'_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x\\ \widetilde{E}_y\end{bmatrix}$$

于是该偏振片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

自然光透过上述偏振片后变为平面偏振光（线偏振光），所以偏振片也称作线起偏器. 如果让自然光依次通过一个偏振片和一个 $\lambda/4$ 波片，则可以变为圆偏振光，则这种起偏器被称作圆起偏器. 右旋的圆起偏器，要求将输入的自然光变为右旋圆偏振光，以下求出这类圆起偏器的琼斯矩阵.

这时，偏振片的透振方向应当与波片的光轴间成 $\pi/4$ 角. 从偏振片透射的线偏光的琼斯矢量是 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \pm 1\end{bmatrix}$，设透振方向在Ⅰ、Ⅲ象限，则琼斯矢量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. 再经过 $\lambda/4$ 波片，其快轴沿 y 方向，则出射光的偏振态为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

为右旋圆偏振光.

则此时的组合元件的琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

但是，这样的装置还不能算是完整的右旋圆起偏器，因为还要求右旋圆起偏器同时还能阻挡左旋圆偏振光输出. 所以，要设法将到达偏振片之前的左旋圆偏振光变为Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光. 为此，还需要在偏振片之前再放置一个 $\lambda/4$ 波片，这一波片对自然光不起作用. 在逆着 z 轴的正方向看来，左旋圆偏光的 y 分量相位滞后 $\pi/2$，为此，需要它经过波片后 y 方向的分量额外再滞后 $\pi/2$，故此波片的慢轴应当在 y 方向. 这样，左旋圆偏光通过该波片后，变为Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光，被偏振片截止. 于是琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$$

这就是右旋圆起偏器，其构成如图 8.8.2 所示.

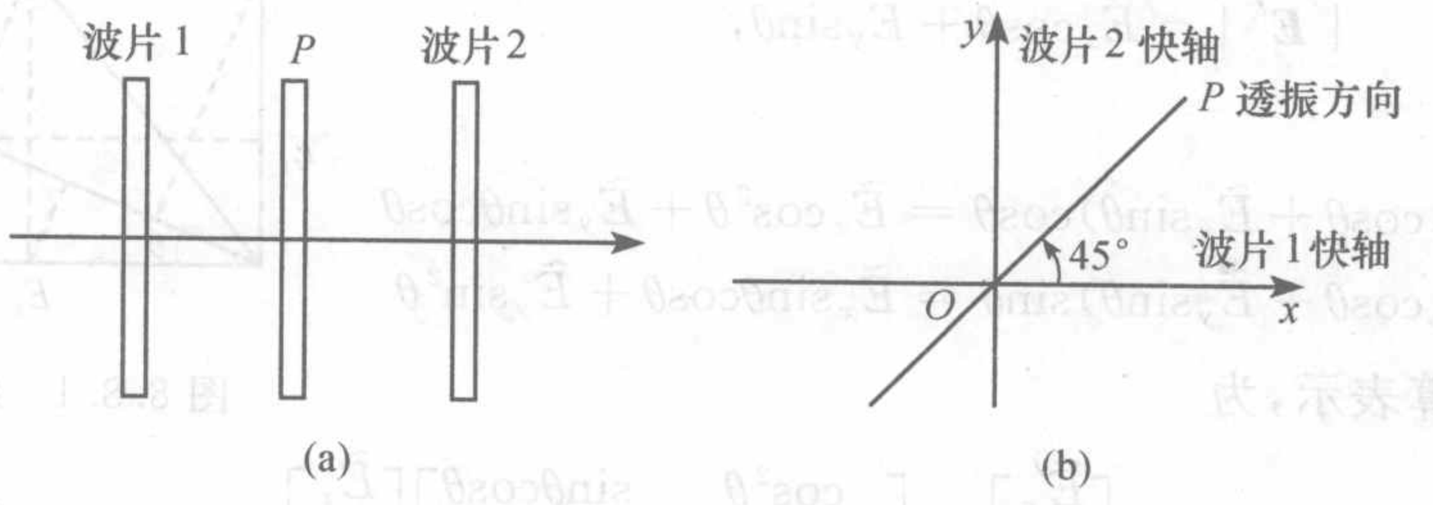


图 8.8.2 右旋圆起偏器

如果自然光从右侧入射，这时，将坐标系的 z 方向为自右向左，于是偏振片的透振方向在Ⅱ、Ⅳ象限，则透射光的琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

依然是右旋圆偏振光.

可以将各种偏振元件的琼斯矩阵分类排列如表 8.8.2 所示：

表 8.8.2　各种偏振元件的琼斯矩阵

偏振元件		琼斯矩阵
起偏器	透振方向为 x	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
	透振方向为 y	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
	透振方向与 x 轴夹角为 θ	$\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2}\\ \frac{\sin 2\theta}{2} & \sin^2\theta\end{bmatrix}$
	透振方向与 x 轴夹角为 $\pi/4$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$
$\lambda/4$ 波片	快轴沿 x 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴沿 y 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴夹角为 $\pm\pi/4$	$\begin{bmatrix}1 & \pm\mathrm{i}\\ \pm\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
$\lambda/2$ 波片	快轴沿 x 或 y 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴夹角为 $\pm\pi/4$	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$
圆偏振器	右旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\-\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
	左旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$

例 8.8.1　右旋椭圆偏振光射入 $\lambda/4$ 波片，用 θ 表示该椭圆长轴与波片快轴间的夹角，问当 $\theta=0$ 和 $\theta=45°$ 时，出射光的偏振态怎样？

解　为表达方便，可取坐标轴的方向与椭圆长短轴的方向一致，不妨使椭圆长轴沿 x 方向，则此时右旋椭圆偏振光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ \gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix},\quad \gamma<1$$

$\theta=0$ 时，波片的琼斯矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$，

出射光为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ \gamma\end{bmatrix}$，为Ⅰ、Ⅲ象限的平面偏振光.

$\theta=0$ 时，波片的琼斯矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$，

出射光为 $\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1+\gamma\\ \mathrm{i}(1-\gamma)\end{bmatrix}$，而 $1-\gamma>1$，为左旋椭圆偏振光.

第 9 章　光波与物质的相互作用

光与物质的相互作用，从微观机制上看，是入射的电磁波与介质中的带电粒子之间的相互作用. 表现为光的吸收、色散、散射，还有其他的非线性效应等.

9.1　光 的 吸 收

9.1.1　吸收的实验规律(线性吸收)

实验研究表明，当光强不是很大时，在透明介质中，被吸收的光强与吸收体的厚度成正比.

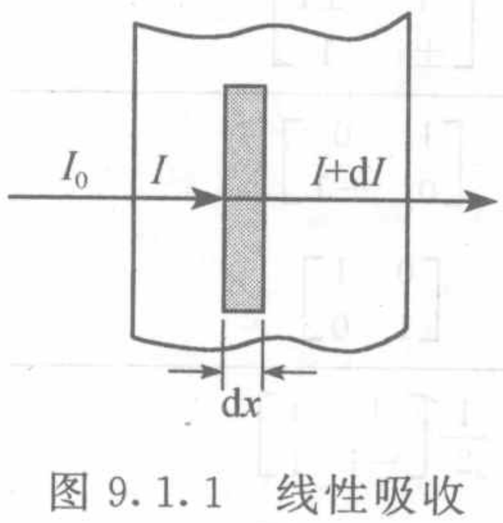


图 9.1.1　线性吸收

如图 9.1.1 所示，在各向同性均匀介质中取一薄层，厚度为 $\mathrm{d}x$，光射入薄层前的强度记为 I，从薄层射出后，强度为 $I+\mathrm{d}I$，$\mathrm{d}I$ 为负值，则有

$$-\mathrm{d}I = \alpha I \,\mathrm{d}x$$

解得

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{9.1.1}$$

其中，α 为与介质有关的常数，称为吸收系数. 这一规律称作布格尔(Pierre Bouguer，1698～1758，法国，1729 年发现)定律或朗伯(Johann Heinrich Lambert 1728～1777，德国，1760 年发现)定律.

在溶液中，上述吸收定律依然成立，但是吸收系数与溶液的浓度成正比，即

$$\alpha = AC \tag{9.1.2}$$

因而

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-ACx} \tag{9.1.3}$$

其中，A 为与溶液(溶质、溶剂等)有关的常数，C 为溶液的浓度. 这一定律称作比尔(August Beer，1825～1863，德国，1852 年发现)定律.

光在介质中由于吸收而衰减的情况，可以用光波的振动表达式来表示. 介质中，电磁波的表达式可以写作

$$\widetilde{U} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = A_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}nx}$$

如果表达式中的 n 是实数，则波在介质中传播时，振动不会衰减，这就是我们在前面讨论中常见的简谐波的形式，这是不考虑吸收和其他衰减因素的情况. 如果因为介质的吸收而使光损失能量，则振幅将会衰减. 这时，可以将折射率写为复数形式，即 $\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$，则介质中波的表达式为

$$\widetilde{U} = A_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}n(1+\mathrm{i}\kappa)x} = A_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}nx} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x},$$

即

$$\widetilde{U} = A_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x} e^{-i\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}nx\right)} \tag{9.1.4}$$

其中，虚数指数表示平面波，而实数指数则表示波的振幅 $A_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x}$ 随距离的衰减.

这种情况下，光强的表达式变为

$$I = |\widetilde{U}|^2 = A_0^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa x} = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa x} = I_0 e^{-\alpha x} \tag{9.1.5}$$

可以看出，吸收系数为

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda}n\kappa \tag{9.1.6}$$

复折射率 $\tilde{n}=n(1+i\kappa)$ 的虚部 $n\kappa$ 反映了由于介质对波的吸收而引起的衰减.

9.1.2　吸收系数与波长的关系

实验研究表明，同一种介质，往往对不同的波长有不同程度的吸收，也就是吸收系数与波长有关. 大体可以分为下述两种情况：

1. 普遍吸收

吸收系数与波长无关，吸收后所有成分的光强都有相同的改变.

例如，不含杂质的玻璃，对于可见光的各个波长成分都有几乎相同的吸收，白光通过后，所有的成分的光强都将减弱.

但是，对所有波段的光波都普遍吸收的介质是不存在的. 例如，玻璃对紫外和更短波长的光有较强烈的吸收. 空气也是如此，其中的臭氧分子对波长小于 300nm 的紫外线有强烈的吸收，因而保护了地球上的生命不受强紫外线的照射. 对于红外光，大气层只是在一些狭窄的波段是透明的，这些对红外光吸收较小的波段称作“大气窗口”.

2. 选择吸收

介质的吸收系数与光的波长有关，只强烈地吸收某些波长成分的光.

这是由于介质中的原子，由于其能级差正好与入射光中的某些波长的能量对应，而强烈地吸收这些波长成分. 这种吸收也称作共振吸收，与吸收波长对应的光谱线称作共振线.

9.1.3　吸收光谱

1. 吸收光谱

白光（连续波长）入射后，被吸收的光显示为光谱中的暗线. 吸收光谱是吸收物质中的原子吸收入射光能量的结果，因而可作成分分析.

吸收光谱都是采用透射方式测量的，所以有时也称透射光谱. 图 9.1.2 所示为吸收光谱的实验装置示意图，图 9.1.3 所示为钠的吸收光谱，其中 589.59nm 和 588.99nm 的两条黄色光谱线就是钠光谱的 D 线.

2. 物体的颜色

物体由于对光的吸收不同，而呈现出不同的颜色. 例如，金子是黄色的，那是由

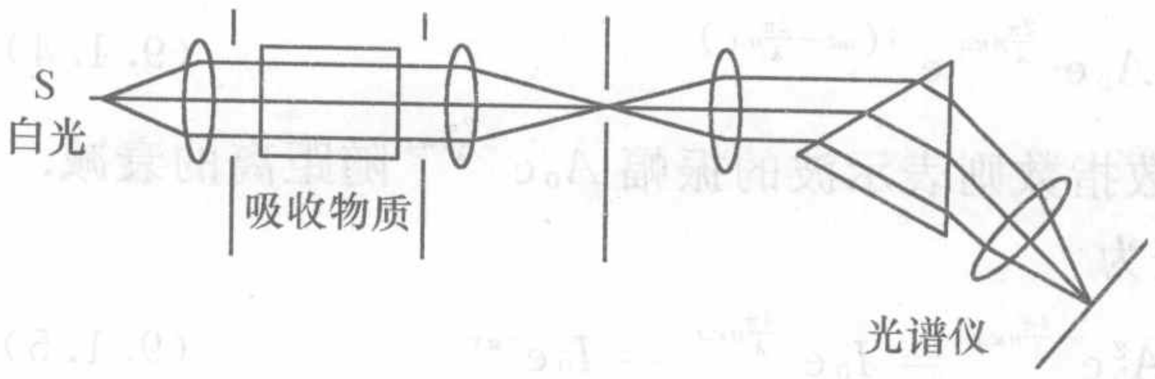


图 9.1.2 测量吸收光谱的实验装置

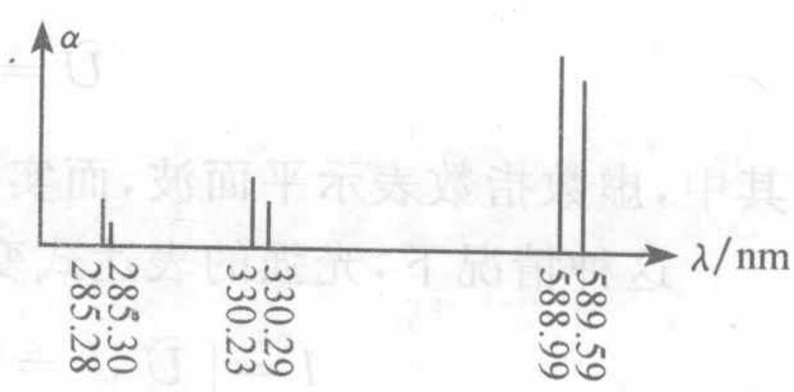


图 9.1.3 钠蒸汽的吸收光谱

于其中的金原子对其他成分的光波吸收较强，则由其表面反射的光只剩下了黄色的成分. 这是体色，也称表面色. 但是，如果将其打制成极薄的金箔，则其反射光仍是黄色的，但透射光却是绿色的. 这是由于金箔厚度极小，因而对光的吸收很小，因而，除了反射黄色之外，不同颜色的光将从金箔透射，这些不同颜色的透射光混合的结果，对眼睛呈现绿色.

发光体由于辐射波长范围的不同，也呈现出不同的颜色. 例如，纯的 Al_2O_3 是无色透明的，这就就是刚玉或白宝石. 但含有其他杂质 Al_2O_3 则有其他的颜色，$Al_2O_3:Cr^{3+}$ 呈红色，是其中含有铬离子的缘故；而 $Al_2O_3:Fe^{3+},Ti^{3+}$ 呈蓝色，是蓝宝石，$Al_2O_3:Fe^{3+},Ni^{3+}$ 呈黄色.

9.2 光的色散

1. 色散现象

白光通过透明介质后，不同颜色的光会以不同的角度射出，从而在空间分开，这是牛顿最先发现的. 由于不同颜色的光在空间散开了，所以这种现象称作光的色散.

这当然是由于不同波长的光具有不同折射率的缘故. 即

$$n = n(\lambda) \tag{9.2.1}$$

图 9.2.1 是一些媒质的折射率与波长的关系. 某些典型光学玻璃的色散情况如表 9.2.1 所示.

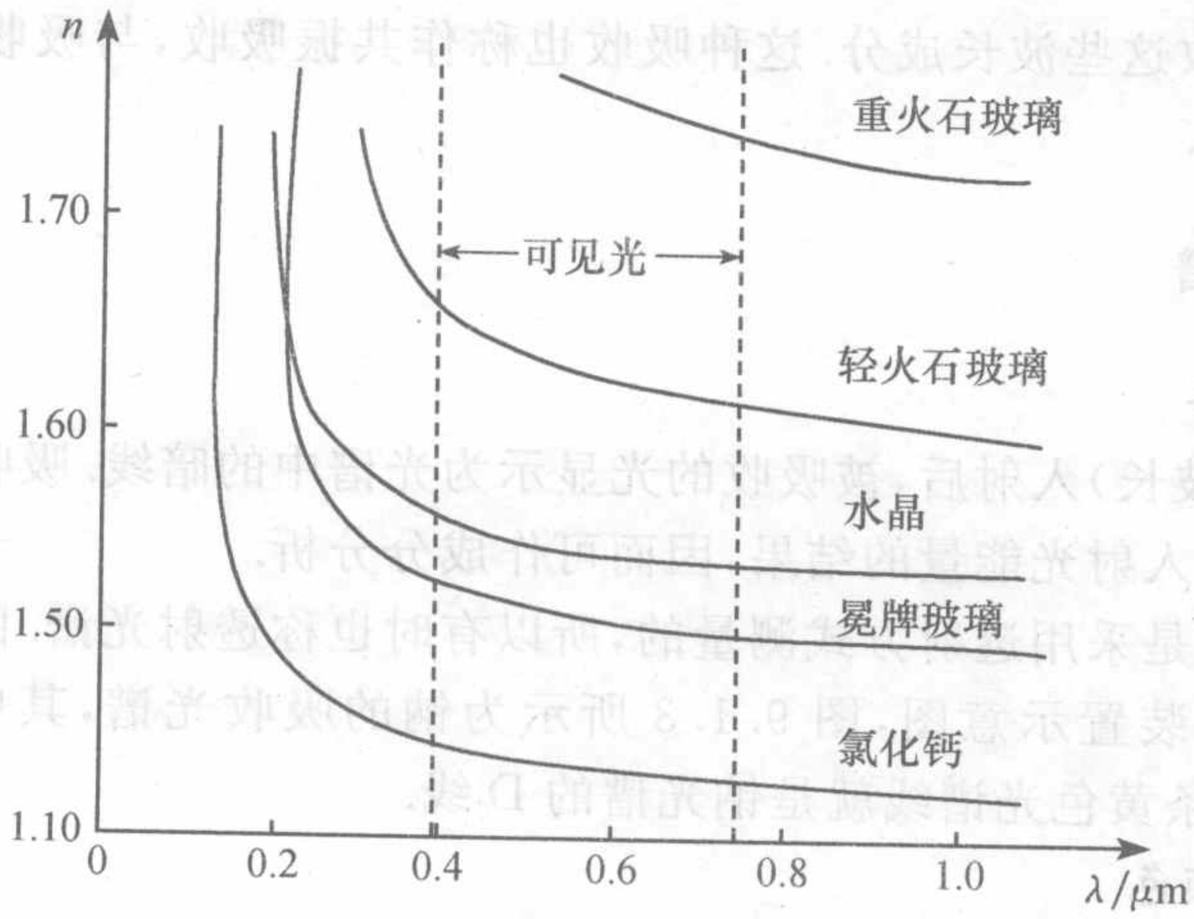


图 9.2.1 媒质的色散曲线

表 9.2.1　典型光学玻璃的色散

光谱线 /nm	冕牌玻璃 (K9)	钡冕牌玻璃 (BaK7)	重冕牌玻璃 (ZK6)	轻火石玻璃 (QF3)	钡火石玻璃 (BaF1)	重火石玻璃 (ZF1)
365.0	1.53582	1.59417	1.63862	1.61197	1.57371	1.70022
404.7	1.52982	1.58620	1.63049	1.59968	1.56553	1.68229
435.8	1.52626	1.58154	1.62573	1.59280	1.56080	1.67245
486.1	1.52195	1.57597	1.61999	1.58481	1.55518	1.66119
546.1	1.51826	1.57130	1.51519	1.57832	1.55050	1.65218
589.3	1.51630	1.56880	1.61260	1.57490	1.54800	1.64750
656.3	1.51389	1.56582	1.60949	1.57089	1.54502	1.64207
766.5	1.51104	1.56238	1.60592	1.56638	1.54160	1.62609
853.0	1.50918	1.56023	1.60268	1.56366	1.33946	1.63254
950.8	1.50778	1.55866	1.60206	1.56172	1.53791	1.63007

光在媒质中的传播速度也会随波长改变，因而色散也可表示为

$$v = v(\lambda) \tag{9.2.2}$$

通常用色散率$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$表示折射率随波长变化的幅度.

2. 色散规律

可以用牛顿正交棱镜实验非常形象地显示介质的色散规律，如图 9.2.2 所示，透过狭缝的白光经过透镜后，平行地射向第一块棱镜，经该棱镜色散后，不同波长的光沿水平方向散开，红光在外侧，蓝光靠里侧. 这些光再射入第二块棱镜，由于第二块棱镜与第一块棱镜的棱相互垂直，因而，在第二块棱镜中，色散出现在竖直方向上，里侧的蓝折射率大，从下方射出，而外侧的红光由于折射率小，从上方射出，因而在屏幕上自然形成一条彩色的曲线，得到折射率 n 随波长 λ 的分布. 图 9.2.3 则是测量气态原子色散的装置.

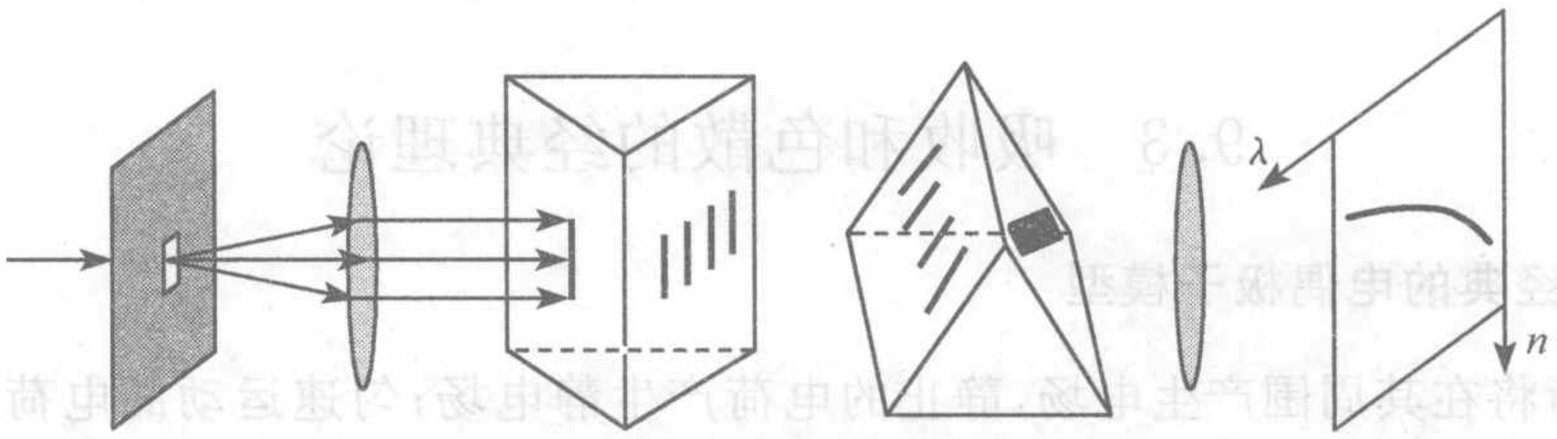


图 9.2.2　牛顿正交棱镜实验装置

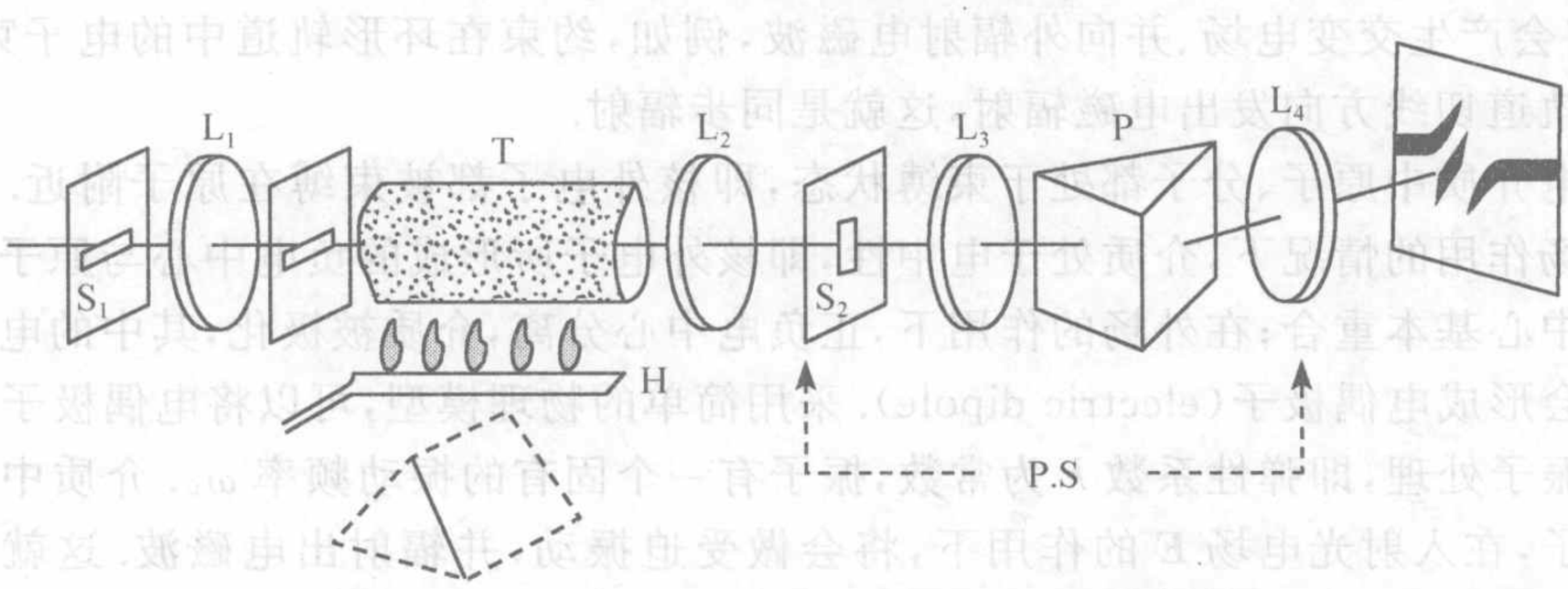


图 9.2.3　气态原子色散的牛顿正交棱镜实验装置

实验研究表明，折射率 n 随波长 λ 的增大而减小，而且在波长小的地方减小得快.

根据实验测得的数据，可以得到正常色散的柯西(Augustin-Louis Cauchy，1789～1857，法国)公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \tag{9.2.3}$$

其中，A、B、C 分别为与介质有关的常数，需要由实验测定. 柯西公式是一个经验公式，在波长范围不是很大时，可以只取前两项，即

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{9.2.4}$$

但是，实验表明，一般情况下，物质存在一个吸收带，也就是在某一个波长范围内，光由于被介质强烈吸收，而不能通过介质，所以无法测量这一波长范围内介质的折射率，光的色散在这一区域的表现被称为反常色散，如图 9.2.4 所示.

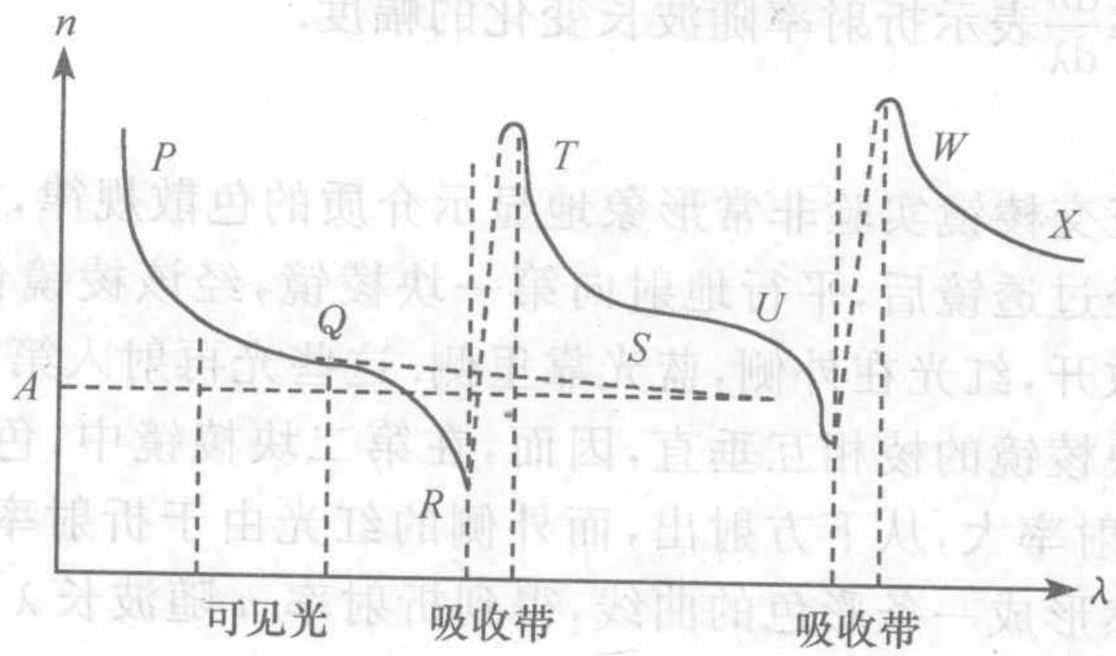


图 9.2.4 正常色散与反常色散

9.3 吸收和色散的经典理论

9.3.1 经典的电偶极子模型

电荷将在其周围产生电场，静止的电荷产生静电场；匀速运动的电荷，产生稳恒的磁场，如导线中的直流电；做加速运动的电荷，即当电荷的运动速度、方向改变时，将会产生交变电场、并向外辐射电磁波，例如，约束在环形轨道中的电子束团，将沿轨道切线方向发出电磁辐射，这就是同步辐射.

电介质中原子、分子都处于束缚状态，即核外电子都被束缚在原子附近. 在没有外场作用的情况下，介质处于电中性，即核外电子所形成的负电中心与原子核的正电中心基本重合；在外场的作用下，正负电中心分离，介质被极化，其中的电子与离子会形成电偶极子(electric dipole). 采用简单的物理模型，可以将电偶极子作为弹性振子处理，即弹性系数 k 为常数，振子有一个固有的振动频率 ω_0. 介质中的电偶极子，在入射光电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，将会做受迫振动，并辐射出电磁波. 这就是经典的受激原子发光的模型，最初由洛伦兹(Hendrik Antoon Lorentz，1853～1928，

荷兰)提出,因而也称作洛伦兹模型.

设电偶极子在外场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下做受迫振动,考虑到带电粒子的环境,按照电磁学的理论,其运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + g\dot{\boldsymbol{x}} + k\boldsymbol{x} = -e\boldsymbol{E} \tag{9.3.1}$$

其中,$\boldsymbol{x}$ 为介质中的电子偏离平衡位置的距离,即位移,$g\dot{\boldsymbol{x}}$ 为阻尼项,g 为阻力系数,$k\boldsymbol{x}$ 为准弹性项,表示回复力.式(9.3.1)可以进一步化为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m} - \omega_0^2\boldsymbol{x} - \gamma\dot{\boldsymbol{x}} \tag{9.3.2}$$

其中,$\omega_0 = \sqrt{k/m}$,为电子的固有(本征)振动频率,$\gamma = g/m$ 为阻尼常数.设外电场的频率为 ω,即 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$,求解上述常微分方程,可得到

$$\boldsymbol{x} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}e^{-i\omega t} \tag{9.3.3}$$

9.3.2　单一本征频率

首先讨论最简单的情形,设介质中的束缚电子只有单一的固有频率.

此时,在入射电磁场的作用下,使带电粒子的位移,导致介质的极化,极化强度为

$$\boldsymbol{P} = -NZe\boldsymbol{x}$$

其中,N 为原子的数密度,Z 为每个原子中参与形成电偶极子的核外电子数.则极化率为

$$\chi = \frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0\boldsymbol{E}}$$

由相对介电常量的定义,得到 $\varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + \dfrac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}$

以及折射率与介电常量的关系 $n = \sqrt{\varepsilon_r}$,可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{n}^2 = \varepsilon_r &= 1 + \frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \\ &= 1 + \frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} + i\frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

而复折射率为 $\tilde{n} = n(1 + i\kappa)$,因而

$$\tilde{n}^2 = n^2(1 - \kappa^2) + i2n^2\kappa \tag{9.3.5}$$

$\tilde{n}^2$ 的实部和虚部分别为

$$n^2(1 - \kappa^2) = 1 + \frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{9.3.6}$$

$$2n^2\kappa = \frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{9.3.7}$$

这就是电介质折射率的亥姆霍兹方程.其中 κ 反映了波在介质中的损耗.

在损耗很低的情况下,即 $\kappa = 1$,式(9.3.6)为

$$n^2 = 1 + \frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

可见，介质的折射率可能大于 1，也可能小于 1，甚至可能是负值.

下面针对不同的入射光频率进行讨论：

(1) 当 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_0$ 时，这时 $n>1$，且 n 随 ω 的增加而增加，这是正常色散区域. 此时，如果忽略吸收，同时不计阻尼，即 $\gamma=0$，则

$$n^2(1-\kappa^2)=1+\frac{ZNe^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{9.3.8}$$

(2) 当 $\omega=\omega_0$ 时，n 达最大值，产生共振吸收，在吸收区 MN 内，n 随 ω 的增加而减少——反常色散区域.

(3) 当 $\omega_0\leqslant\omega\leqslant\infty$ 时，这时 $n<1$，这也是正常色散区域.

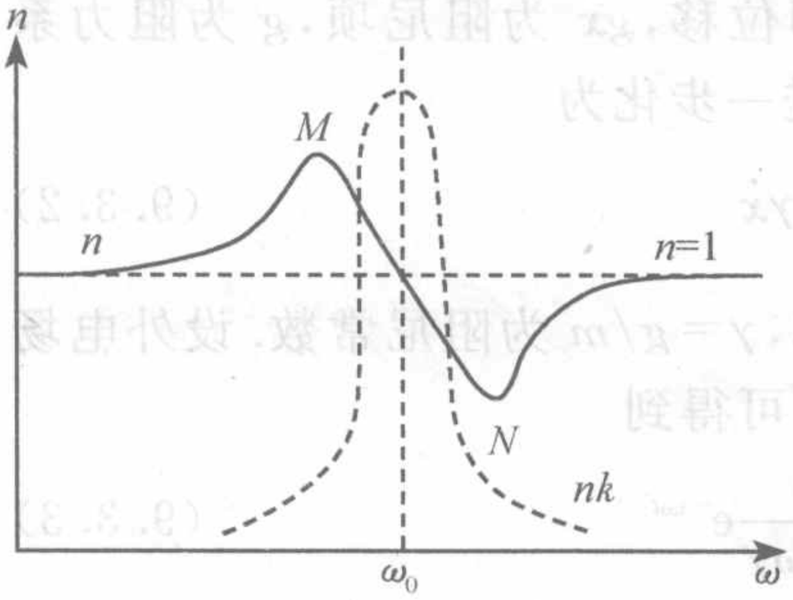


图 9.3.1 折射率与频率的关系

上述结果可以用图 9.3.1 表示.

9.3.3 多个本征频率

事实上，介质中的原子体系往往不只有一个本征振动频率，设每一个原子系统有一系列本征频率为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_j,\cdots$，阻尼常数为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\cdots,\gamma_j,\cdots$，相应的振子个数为 $f_1,f_2,f_3,\cdots,f_j,\cdots$，则 $\sum_j f_j=Z, N\sum_j f_j=NZ$. 仿照单一本征频率下的推导过程，可以得到

$$\varepsilon_r=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{(\omega_j^2-\omega^2)+i\omega\gamma_j}$$

类似地，有

$$n^2(1-\kappa^2)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{\omega_j^2-\omega^2}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+(\gamma_j\omega)^2}$$

$$2n^2\kappa=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{\gamma_j\omega}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+(\gamma_j\omega)^2}$$

在其中每一个本征频率 ω_j 附近，由于求和的各项中只有一项有较大的数值，会产生共振吸收，其色散曲线与图 9.3.1 相似，而总的色散曲线就是由一段段这样的曲线连接起来.

9.4 光的散射

9.4.1 散射现象

入射光与介质中的带电粒子相互作用，带电粒子在入射光的激发下做受迫振动，发出电磁波，这是有真实扰动源的光波，有时也被称作次波，但与惠更斯所引入的次波是不同的. 如果介质是均匀的，则所发出的电磁波经叠加后，总是有确定的

方向，即除了沿着入射光原来的方向有光继续传播之外，其他的方向是没有光的；但如果介质是不均匀的，则从介质中发出的次波在其他方向不能完全抵消，可以向任意方向传播，这就是散射，所以，光在密度不均匀的媒质中总能产生散射.

根据散射机制的不同，主要有：

(1) 悬浮质点的散射. 均匀分布或悬浮在媒质中的质点，如空气中的尘埃，溶液中的胶体等.

(2) 分子散射. 虽然介质是均匀的，但是由于分子的热运动，会在其中产生密度的起伏，从而产生散射.

9.4.2　散射定律

1. 瑞利散射

当散射体的尺寸小于波长时，入射光中不同的波长成分有不同的散射，实验和理论研究表明，散射光强与入射光波长的四次方成反比，即 $I \propto \lambda^{-4}$.

例如，大气中的分子以及其中细小的尘埃颗粒，会对日光产生明显的散射. 如果没有大气，空中没有散射光，则天空的背景应当是黑的，这就是宇航员在大气层外和月球上所见到的景象. 我们在白昼之所以看得见明亮的天空，就是由于日光受到大气的散射，而这些被散射后的光从四面八方进入我们眼睛的缘故. 晴朗的天空呈现蓝色，是因为白光中的短波成分散射较强，因而，在偏离太阳直射的方向，总是蓝紫色的成分要比红黄色的成分要多. 而旭日和落日之所以是红彤彤的，那是由于早晚太阳斜射向地面，所经历的大气层的厚度要比正午时分厚得多，因而日光中的短波被大量散射，沿着原来方向前进的主要是其中的长波成分. 相比较而言，正午时分，太阳直射地面，阳光所经过的大气层的厚度比较薄，对短波的散射没有早晚强烈，因而太阳是耀眼的白色.

2. 米-德拜散射

当散射体颗粒度大于波长时，散射光强对波长的依赖性不强，各个波长成分的散射光强差别不大.

云雾由水滴组成，这些水滴的直径可以与光的波长相比，因而对光的散射不再遵循瑞利散射定律，而要服从米-德拜散射的规律，因而我们看到的云是白色的. 当空气中的悬浮颗粒较多时，米-德拜散射起的作用也比较大，这时也看不见湛蓝的天空了，而是白蒙蒙的. 注意观察吸烟者，会发现从烟头处冒出的是缕缕青烟(蓝色)，而从吸烟者口鼻出来的则是白烟，这也是因为烟头冒出的烟中，所含多是燃烧后的分子，引起瑞利散射；而从口鼻出来的烟中则含有大量的水汽，导致米-德拜散射.

散射光强与波长以及散射物大小的关系可用图 9.4.1 表示，其中 a 为散射体的线度.

当 $a<0.3\dfrac{\lambda}{2\pi}$ 时，$\dfrac{2\pi}{\lambda}a=ka<0.3$，瑞利散射；

当 $a<0.3\dfrac{\lambda}{2\pi}$ 时，$ka>0.3$，米-德拜散射.

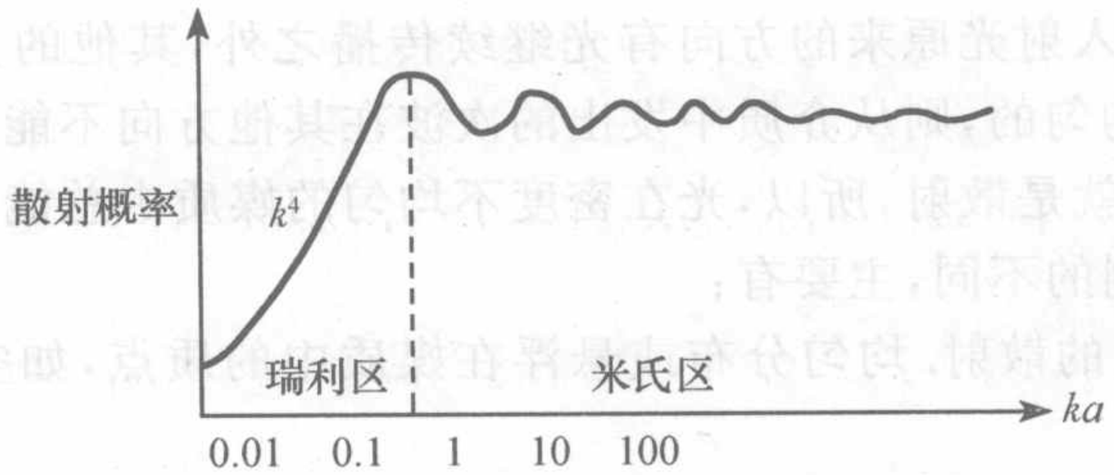


图 9.4.1 瑞利散射与米-德拜散射

9.5 强光在介质中的非线性电极化效应

当光强不是很大时，光与介质之间的相互作用是线性的，即介质的极化强度与入射光的电场分量之间是线性关系

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$$

但是，如果入射光强较大，则上述线性关系不再成立，实验和理论研究表明，介质的极化强度与入射场的关系为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 [\chi^{(1)} \boldsymbol{E} + \chi^{(2)} \boldsymbol{EE} + \chi^{(3)} \boldsymbol{EEE} + \cdots] = \boldsymbol{P}^{(1)} + \boldsymbol{P}^{(2)} + \boldsymbol{P}^{(3)} + \cdots \quad (9.5.1)$$

是非线性关系.

其中 $\boldsymbol{P}^{(1)}$ 代表电极化强度矢量，表示式中与光波场的电场强度矢量成线性关系的分量，而 $\boldsymbol{P}^{(2)}$ 代表与光波场强度成二次幂关系的分量，$\boldsymbol{P}^{(3)}$ 代表与光波场强度成三次幂关系的分量……相应地，$\chi^{(1)}$，$\chi^{(2)}$，$\chi^{(3)}$，…分别是介质的线性电极化率，非线性的二次电极化率、非线性的三次电极化率、……. 研究表明，$\frac{\chi^{(2)} E}{\chi^{(1)}} \approx \frac{\chi^{(3)} E}{\chi^{(2)}} \approx \cdots \approx \frac{E}{\bar{E}_a}$，其中 $\bar{E}_a$ 为介质中的原子(或分子)维持价电子运动平衡的内部平均电场强度，其数量级约为 $10^{11}\,\mathrm{V/m}$，这是一个很大的场强. 一般情况下，入射光强不是很大时，总有 $E = \bar{E}_a$，因而高次的极化可以忽略.

对于一般的各向异性介质，上述表达式是非常复杂的张量形式. 为了便于讨论，我们仅仅从形式对上述表达式进行讨论.

将式(9.5.1)写成标量的形式，为

$$P = \varepsilon_0 [\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \cdots] = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \cdots$$

设频率为 ω 单色强光入射光为，即入射光随时间扰动的表达式为

$$E = E_0 \cos \omega t$$

则在上述电场的作用下，介质中除了线性电极化强度 $P^{(1)} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos \omega t$(称作基波)之外，还会有二次、三次非线性的电极化强度.

介质的二次非线性电极化强度为

$$P^{(2)} = \chi^{(2)} E^2 = \chi^{(2)} [E_0 \cos(\omega t)]^2 = \frac{\chi^{(2)} E_0^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \quad (9.5.2)$$

式(9.5.2)说明由于二次非线性电极化效应，在电极化强度表达式中出现了时间频

率为 2ω 高频交流成分，以及直流成分. 其中频率为 2ω 的辐射称作二次谐波.

如果入射光是频率分别为 ω_1、ω_2 的强光，则此时介质的二次非线性电极化强度为

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \chi^{(2)} E^2 = \chi^{(2)} (E_{01}\cos\omega_1 t + E_{01}\cos\omega_1 t)^2 \\ &= \chi^{(2)} (E_{01}^2 \cos^2\omega_1 t + 2E_{01}E_{02}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t + E_{02}^2 \cos^2\omega_2 t) \\ &= \chi^{(2)} \left[\frac{E_{01}^2}{2}(1+\cos 2\omega_1 t) + \frac{E_{02}^2}{2}(1+\cos 2\omega_2 t)\right] \\ &\quad + \chi^{(2)} E_{01}E_{02}[\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t] \end{aligned} \tag{9.5.3}$$

电极化强度表达式中不仅出现了直流成分和二倍频成分 $2\omega_1$、$2\omega_2$，还有频率为 $\omega_1+\omega_2$ 的和频成分，以及频率为 $\omega_1-\omega_2$ 的差频成分.

以此类推，若进一步考虑三次非线性电极化效应的贡献，则在单一频率的强光作用下，介质中可产生三次谐波(三倍频)；在三种不同频率的强光作用下，按照频率组合的方式，介质中可产生更多新频率的辐射.

因此，强光可以在介质中产生不同于入射波的其他频率的扰动，这些扰动就产生新的辐射. 例如，单一频率强光入射，可产生二次谐波辐射、三次谐波辐射；不同频率强光入射，则会产生和频、差频的辐射. 这些效应已经获得了实际的应用.

要产生光学二次谐波，对工作物质有相应的要求，既要满足相位匹配条件或折射率匹配条件，表示为

$$n(\omega) = n(2\omega) \tag{9.5.4}$$

由于光在介质中的色散效应，上式是不容易得到满足的. 但是在双折射晶体中，由于 o 光和 e 光的折射率有着较大的差异，即偏振态决定了其折射率，而折射率的大小与光波的传播方向有关，同时也与晶体的温度有关. 因此，可以使入射的基波和产生的二次谐波具有不同的偏振态，然后沿晶体的特定的入射方向，或者使晶体保持在特定的温度，以达到晶体折射率的色散效应被其双折射效应正好抵消的目的，从而使得对于基波和二次谐波有相同的折射率，以满足相位匹配条件. 这种相位匹配的方式称作角度控制或温度控制.

常用的非线性工作晶体，即倍频晶体，均是人工生长的优质晶体，如 KDP(磷酸二氢钾)、ADP(磷酸二氢胺)、$LiIO_3$(碘酸锂)等，主要用于波长较长的红外激光入射，而产生较近红外区的二次谐波输出辐射，如 CO_2 激光器输出的 10.6μm 激光，可产生 5.3μm 的二次谐波.

除了相位匹配之外，还要选取一定的激励耦合方式，即既可以将晶体放在激光器之外，使得行波单次通过晶体，也可以将晶体放在激光器的谐振腔内，使得基波光束多次通过晶体.

产生二次谐波的实验装置如图 9.5.1

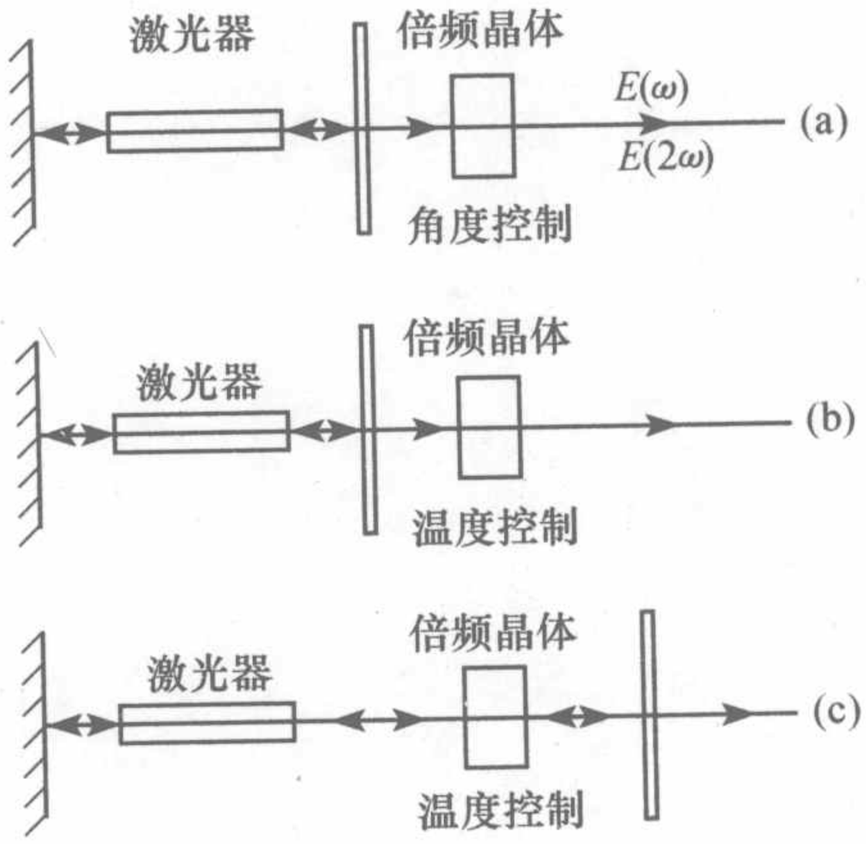


图 9.5.1　产生二次谐波的实验装置

所示.

要产生光学和频与差频,同样要满足一定的相位匹配条件,其装置可用图 9.5.2 表示.

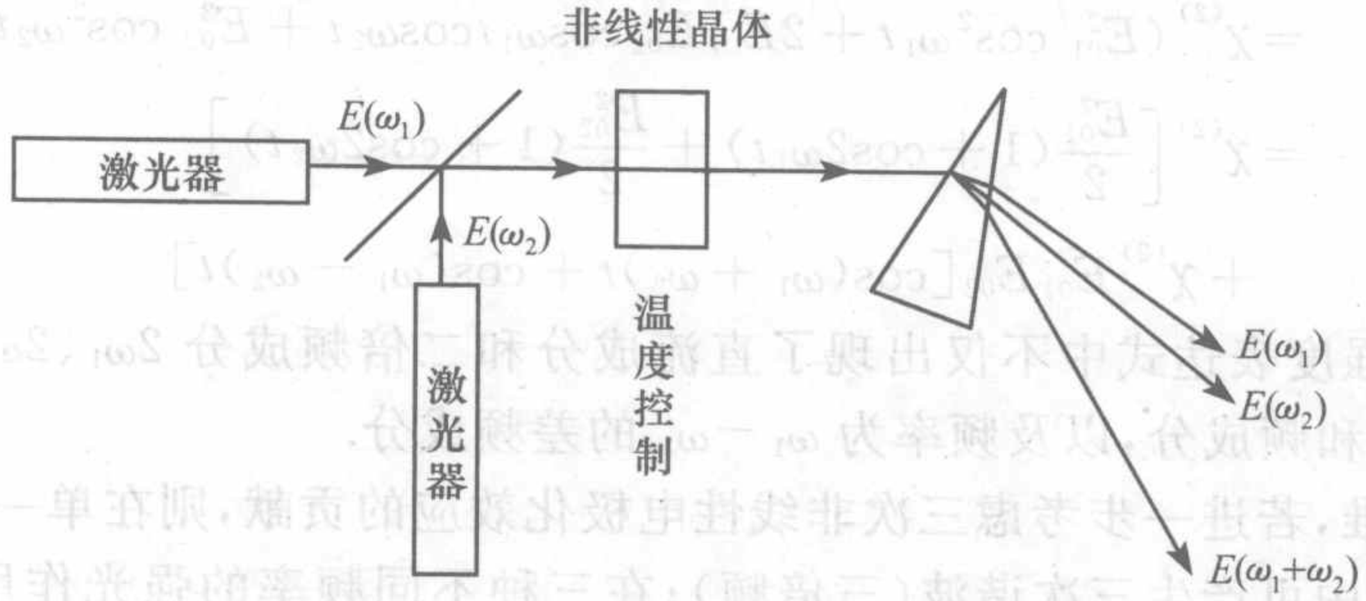


图 9.5.2 产生光学和频的实验装置

第 10 章　几何光学的近轴理论

几何光学研究光在媒质中传播和在不同媒质的界面处反射、折射的问题，目的是处理光的成像，是一种唯象的理论. 它不涉及光的物理本质，而只是把光的现象用“光线”这一非常简单的模型来处理，研究光线的反射、折射以及沿直线的传播.

由于不涉及光的波动性和量子性，所以，在几何光学的领域，是无法定义诸如“波长”、“光速”等物理概念的，而且，这些概念看起来也是不必要的. 但是，有些问题虽然是波动光学或量子光学的研究对象，却是几何光学所无法回避的. 例如，几何光学不可避免地要面对色散的问题，这时，人们仅仅是借用一下波长的名称，或者说不同颜色的光具有不同的折射率就可以很好地处理这一问题.

10.1　衍射的零级近似

光是电磁波，在处理光的干涉、衍射等问题中，电磁理论得到了很好的应用. 因而容易联想，对于光的传播、反射、折射等问题，似乎也应当采用波动理论来处理. 或者说，所有光学问题，都无法回避光的衍射. 然而，在有些情况下，光并没有表现出明显的波动性.

例如，光通过单缝时，由于衍射，光强分布可以用式(4.4.11)表示为

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

其中，

$$u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

根据对于衍射特性的讨论，衍射的大部分能量集中于衍射零级. 对于夫琅禾费单缝衍射，零级的角宽度为 $\Delta\theta_0 = 2\dfrac{\lambda}{a}$，当缝宽较大时，即 $a \gg \lambda$ 时，$\Delta\theta_0 \approx 0$；同时，在 $\theta \neq 0$ 的地方，由于 $u \gg \sin u$，$I(P) \approx I_0$，即其他的衍射级次的能量几乎为零. 这种情况下，入射光仍沿着原来的方向传播. 这时可以认为没有衍射，如图 10.1.1 所示为 $a = \lambda$(虚线)和 $a = 10\lambda$(实线)时衍射的光强分布，可见，当狭缝

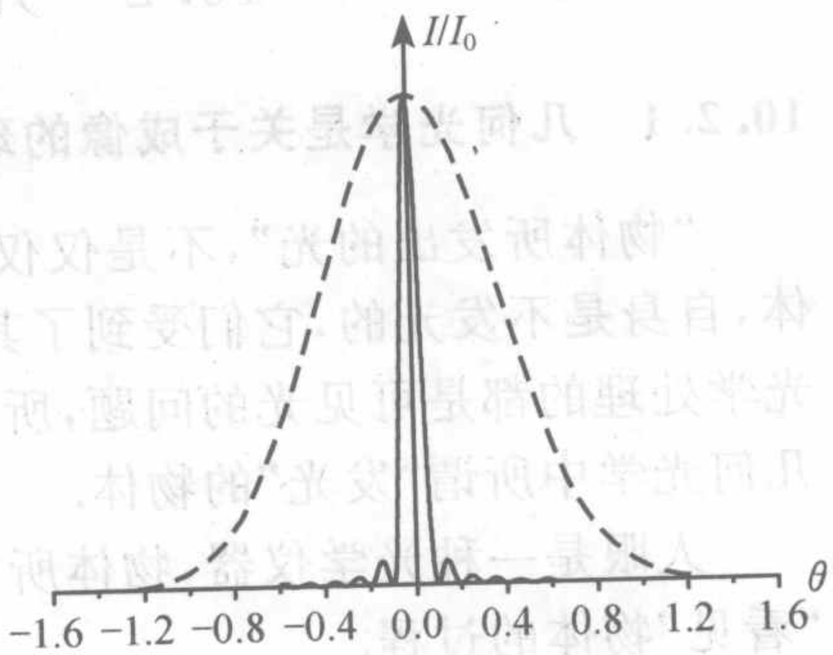


图 10.1.1　不同缝宽时的衍射光强分布

的宽度较大时，衍射的效应要小得多.

对于夫琅禾费圆孔衍射，有类似的情形，艾里斑的角半径 $\Delta\theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$，当圆孔的孔径远大于光的波长时，$\Delta\theta_0 \sim 0$，光波保持直线传播. 如果上述的缝、孔都是反射型的，情况不变.

对于菲涅耳圆孔衍射，可以用半波带的方法进行分析，得到的复振幅表达式为 $\widetilde{U}(P)=\dfrac{1}{2}[A_1+(-1)^{n-1}A_n]$，其中 n 为从场点所见的最外缘的半波带的序号. 当圆孔很大时，n 很大，而且当 $n\to\infty$，$A_n\to 0$，所以 $A(P)=\dfrac{1}{2}A_1$，这时，各个场点的光强没有明暗交替变化，即光波场的能量分布是均匀的，也没有衍射. 这就是一个球面波的光波场.

通过上述分析，可以看到，如果缝、孔、反射面的空间尺度远大于光的波长时，衍射几乎可以忽略，可以认为光波保持原有的方向传播，将不会在空间由于衍射而散开，如图 10.1.2 所示.

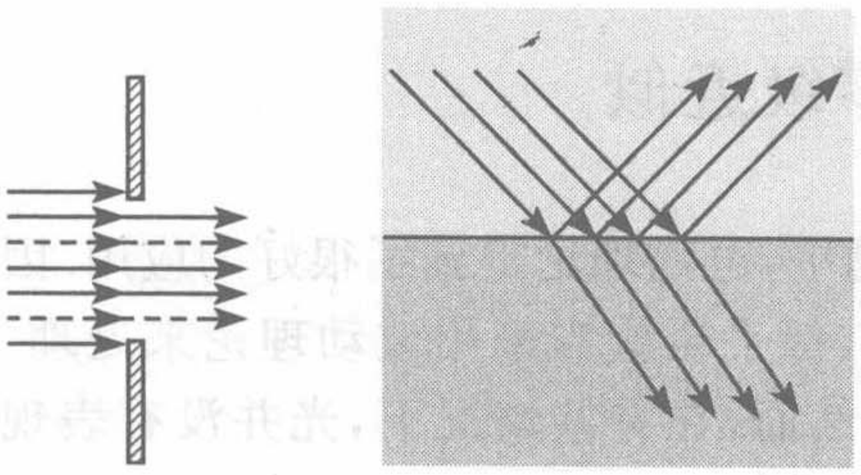


图 10.1.2 当孔径或反射表面的尺度远大于光的波长时，衍射效应可以忽略

没有衍射，则在光的传播过程中，其方向不变，这时，就可以用几何上的线描述光的传播特征. 这就是几何光学中光的物理模型，即光线模型. 从光线模型出发，而构建的光学体系，就是几何光学.

当然，任何实际的缝、孔、面等光学孔径的大小总是有限的，所以实际上衍射现象总是存在的，实际应用中，如果忽略其他高次衍射，仅仅利用零次衍射，这就是衍射的零级近似. 正如本书中第 4 章所指出的，衍射零级就是通过衍射屏的入射光的被透镜所成的像. 所以，也可以说，几何光学就是衍射的零级近似.

10.2 几何光学的基本概念

10.2.1 几何光学是关于成像的理论

“物体所发出的光”，不是仅仅局限于那些自身可以发光的物体. 有大量的物体，自身是不发光的，它们受到了其他光源的照明，而显示出自身的轮廓. 由于几何光学处理的都是可见光的问题，所以我们可以这样说，凡是人眼可见的物体，都是几何光学中所谓“发光”的物体.

人眼是一种光学仪器，物体所发的光经眼球后，在视网膜上成像，这就是人眼“看见”物体的过程.

几何光学所讨论的是发光物体经过各种光学系统后成像的理论，研究光在均匀透明媒质中的传播，在媒质分界面处的反射、折射，而不涉及光的物理本质，所

以，几何光学仅仅是一种唯象的理论.

10.2.2　几何光学的实验定律

几何光学的所有定律都是建立在实验的基础之上的，几何光学中的物理概念也是从实验中总结和概括出来的. 尽管我们已经对这些定律和概念十分熟悉，但是，站在一个较高的角度对它们重新认识还是很有必要的.

事实上，不需要复杂和精密的实验仪器，仅仅依靠我们的经验，也能得到关于这些定律和概念的精髓.

1. 光的直线传播定律

在均匀媒质中，光沿直线传播.

设想在均匀媒质的空间中，如空气中，有 P、Q 两点，如果 P 点有一光源，则在 Q 点的观察者可以看到其发出的光. 由于从 P 到 Q 有无数条路径，那么，P 点的光是沿什么样的路径到达 Q 点的呢？可以用一个简单的实验来研究，如图 10.2.1 所示. 用一个不透光的挡板，放在 P、Q 间的任一处，将会发现，只有挡板处在连接上述两点的直线上时，才能遮住 P 点发出的光，即 Q 点的观察者看不见 P 点，所以，可以得到结论：P 点的光是沿直线传到 Q 点的，即在均匀媒质中，光是沿直线传播的.

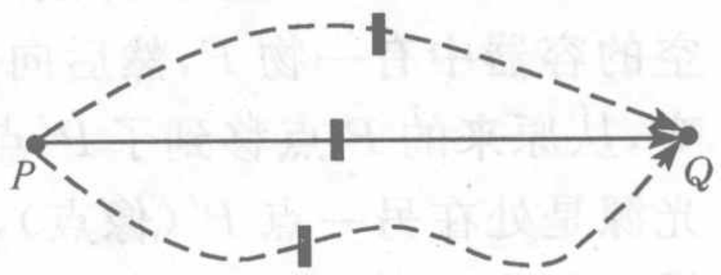


图 10.2.1　验证光的直线传播

如果介质是非均匀的，则光的传播将会发生偏折，即不再沿着一条直线传播，但是，总可以设法发现光传播的路径，这条路径是折线或曲线.

根据这一事实，也可以得出这样的结论，既然在媒质中，光总是沿直线、折线或曲线传播，那么就可以用一条几何上的线来描述和研究光的传播，这就是“光线”.

2. 光的反射定律

在光源 P 和观察者 Q 之间放一个不透光的挡板，如图 10.2.2 所示，那么，Q 点的观察者将无法看到 P. 但是，如果在旁边放置一块平面反光镜 M 的话，Q 点的观察者又可以看见 P，只是这时的 P 处在了与原来对称的位置上，观察者看到的是 P 经过平面镜 M 所成的像 P'. 也就是说，P 点发出光，经平面镜 M 反射后到达 Q 点. 那么，光是沿哪一条路径到达 Q 点的？

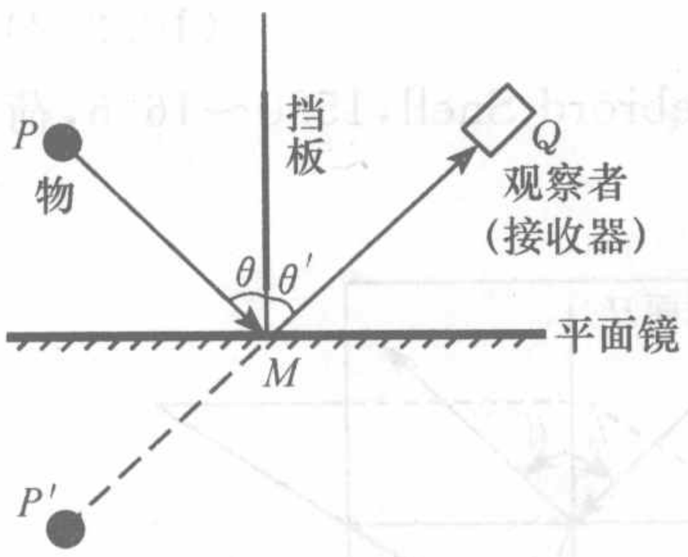


图 10.2.2　验证光的反射

在 Q 点的观察者看来，光是从 P' 点发出的，而 P' 点正好处于与 P 点关于反射镜平面的对称位置. 由于已经证明了光在均匀媒质中的直线传播定律，所以光只能是沿着直线 $P'Q$ 传播的. 用一条直线连接 P' 点和 Q 点，该直线与反射镜平面的交点为 M，即到达 Q 点的光一定经过 M 点. 但真实的光线是从 P 点发出

的，则从 P 点发出的光是在反射镜面上的 M 点被反射然后到达 Q 点的. 过 M 点作平面 M 的法线，PM 与法线的夹角 θ 称为入射角，QM 与法线的夹角 θ' 称为反射角. 从几何关系上可以立刻得到：P、P'、M、Q 诸点在同一平面内，而且光线的反射角 θ' 与入射角 θ 是相等的.

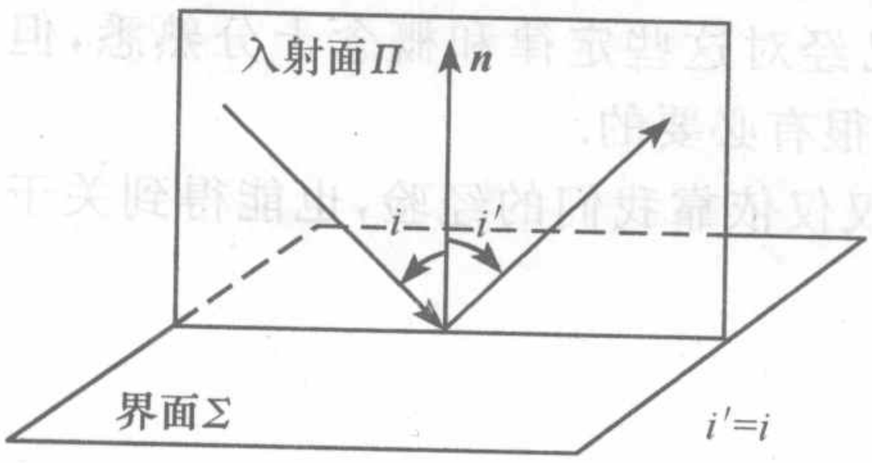


图 10.2.3 入射面、入射角、反射角

光的反射定律可以表述如下：

O 点处的法线为 $\boldsymbol{n}$，由入射光线和 $\boldsymbol{n}$ 构成的平面 Π 为入射面，入射光线、反射光线与法线 $\boldsymbol{n}$ 的夹角分别为入射角 i 和反射角 i'，如图 10.2.3 所示，则反射光线在入射面内，而且

$$i' = i \tag{10.2.1}$$

3. 光的折射定律

物(光源)和观察者分别处在不同的媒质中，两种媒质有分界面. 例如，在一个空的容器中有一物 P，然后向容器中加入水. 此时，从水面上看，物的位置发生了改变，从原来的 P 点移到了 P' 点，如图 10.2.4 所示. 即在媒质 1 中的观察者 Q 看来，光源是处在另一点 P'(像点)，而不是其实际位置 P 点. 这说明 P 点发出的光在传播过程中发生了偏折. 由于光在均匀媒质 1 和 2 中都是沿直线传播的，所以发生偏折的位置只能在两种媒质的分界面上. 直线 $P'Q$ 与界面交点为 O，光线在 O 点发生折射，即实际上光的传播路径是 PO 和 OQ. 过 O 点作分界面的法线，定义 PO 与法线的夹角为入射角 i_1，OQ 与法线的夹角与折射角 i_2，则实验表明 $\sin i_1/\sin i_2$ 的数值只与两种媒质有关. 如果用折射率表征媒质的这种特性，并记为 n，则有 $\sin i_1/\sin i_2 = n_2/n_1$. 可以知道，仅仅从这一比例式是无法确定折射率的数值的. 所以规定真空的折射率的数值为 1，则其他媒质的折射率可以参照真空获得.

如图 10.2.5 所示，Σ 为两种媒质的分界面. 光线由介质 1 入射到介质 2 中，发生折射，入射角和折射角分别为 i_1 和 i_2，则折射光在入射面 Π 内，且有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{10.2.2}$$

n_1 和 n_2 分别为两种媒质的折射率. 此为斯涅尔(Willebrord Snell，1580～1626，荷兰，)定律(1621 年)，在法国，也称其为笛卡儿定律.

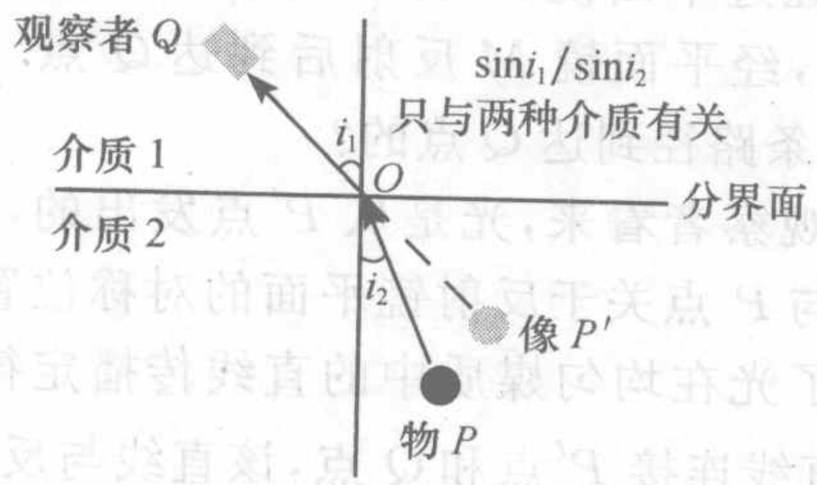


图 10.2.4 验证光的折射

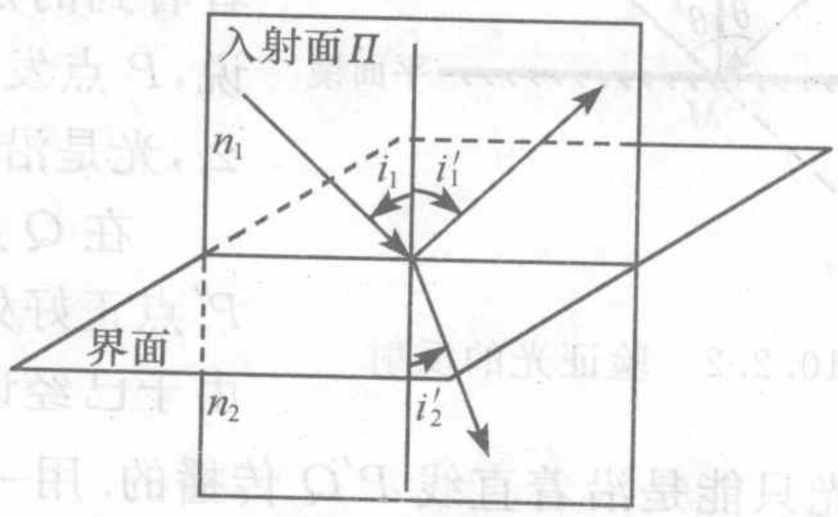


图 10.2.5 入射面、入射角、反射角、折射角

由于光在不同的媒质中会发生折射，那么，如果在光传播的路径上，媒质的情况比较复杂，或者说，媒质是连续变化的，则光的路径（或者光线）就不是一条直线，而会成为曲线. 所以，光线实际上就是光的路径，用几何上的线表示，可以是直线、折线或任意形状的曲线.

实验证明，对于同一种透明媒质，不同波长的光具有不同的折射率，即 $n=n(\lambda)$. 因而，一束平行的白光（复色光）从一种媒质（例如真空或空气）射入另一种媒质时，只要入射角不等于 0，则折射角 $i_2(\lambda)=\arcsin\left[\dfrac{1}{n_2(\lambda)}\sin i_1\right]$ 与波长有关，即不同波长（颜色）的光具有不同的折射角，于是不同波长的光就在空间分散开来，这种现象称作色散.

4. 光路可逆原理

在光的传播、反射和折射中，光线如果沿反射和折射方向入射时，则相应的反射和折射光将沿原来的入射光的方向，如图 10.2.6 所示，即光路是可逆的.

图 10.2.7 中，如果物点 Q 发出的光线经光学系统后在 Q' 点成像，则 Q' 点发出的光线经同一系统后必然会在 Q 点成像，即物像之间是共轭的.

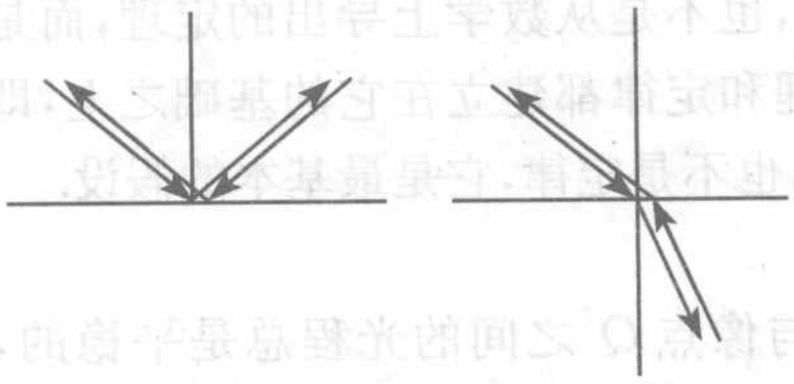


图 10.2.6　光路可逆原理

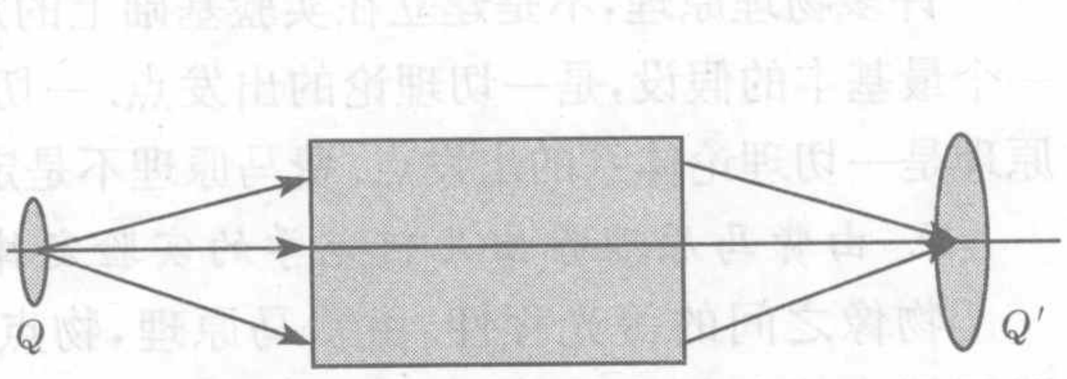


图 10.2.7　物像之间是共轭的

光的直线传播、反射和折射定律是几何光学的三大实验定律，它们构成了几何光学的基础. 从上面的讨论可以看出，只要引入了光线的物理模型，上述定律便能够得到严格的检验和描述.

5. 几何光学中光的物理模型

根据前面对于光在媒质中的传播和在媒质分界面处的反射、折射实验定律的讨论，可以得到一个直观的认识，那就是光的传播、反射和折射都可以用直线来表示. 于是，在涉及光的传播、反射和折射等问题时，可以用几何上的“线”来表示光，这就是“光线”，关于光线的理论被称作几何光学.

光线　任意一点可以向任一方向发出直线，或者说射线，称为光线. 光的直线传播、反射和折射都可以用直线段及其方向的改变表示.

对于光线，由于是几何学上的概念，是无法从物理上定义其速度.

6. 费马原理

上述关于几何光学的定律是实验的结果，人们试图找出它们的内在联系，并用一个更基本的规律来概括和描述它们. 正如我们前面指出的那样，由于几何光学不涉及光的物理本质，所以无法从最基本的物理模型推导出上述定律. 但是，从一个更加广义的数学原理对它们进行概括还是可行的. 这就是费马（Pierre de Fermat，

1601～1665,法国)原理.

费马最初是根据经济原则提出这一原理的,他指出:光沿着所需时间为极小值的路径传播("The actual path between two points taken by a beam of light is the one which is traversed in the least time").

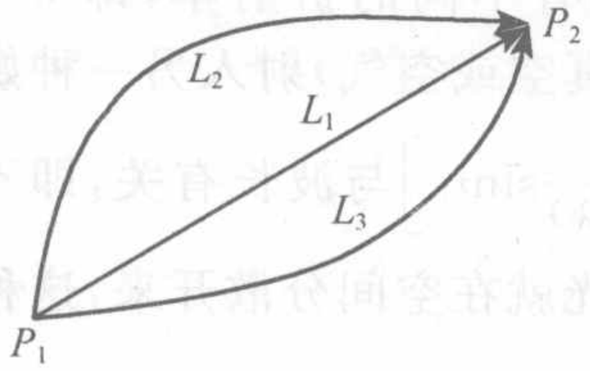


图 10.2.8 不同路径的光程

费马首先引入了光程的概念.

(1) 光程=折射率×光所经过的路程,即 nS,n 为折射率,或光学常数;S 为沿光的路径的距离,如图 10.2.8 所示.

(2) 费马原理指,两点间光的实际路径,是光程平稳的路径(1657 年).

平稳的含义是可以取极值(极大、极小)或恒定值.在数学上,用变分表示为

$$\delta(\widehat{P_1P_2}) = \delta\left[\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s\right] = 0 \tag{10.2.3}$$

请注意,式(10.2.3)是路径积分.

许多物理原理,不是建立在实验基础上的定律,也不是从数学上导出的定理,而是一个最基本的假设,是一切理论的出发点.一切定理和定律都建立在它的基础之上,即原理是一切理论体系的出发点.费马原理不是定理,也不是定律,它是最基本的假设.

7. 由费马原理导出几何光学的实验定律

物像之间的等光程性.由费马原理,物点 Q 与像点 Q' 之间的光程总是平稳的,即不管光线经何路径,凡是 Q 通过同样的光学系统到达 Q' 的光线,都是等光程的.

8. 几何光学定律成立的条件

(1) 光学系统的尺度远大于光波的波长;

(2) 介质是各向同性的;

(3) 光强不是很大.

10.3 反射与折射的应用

10.3.1 光在平面上的反射

如图 10.3.1 所示,设反射平面上方有一发光物点 A,所发出光线 AB_1,AB_2,…,反射后是发散的,在平面的上方无法会聚,但是,对于上方的观察者来说,看起来好像是从平面的下方 A' 点发出的,由反射定律可知,A' 是 A 关于平面 M 地对称点.或者说,经平面反射后,A 点在 A' 点成像.

由于光线并没有进入平面的下方,所

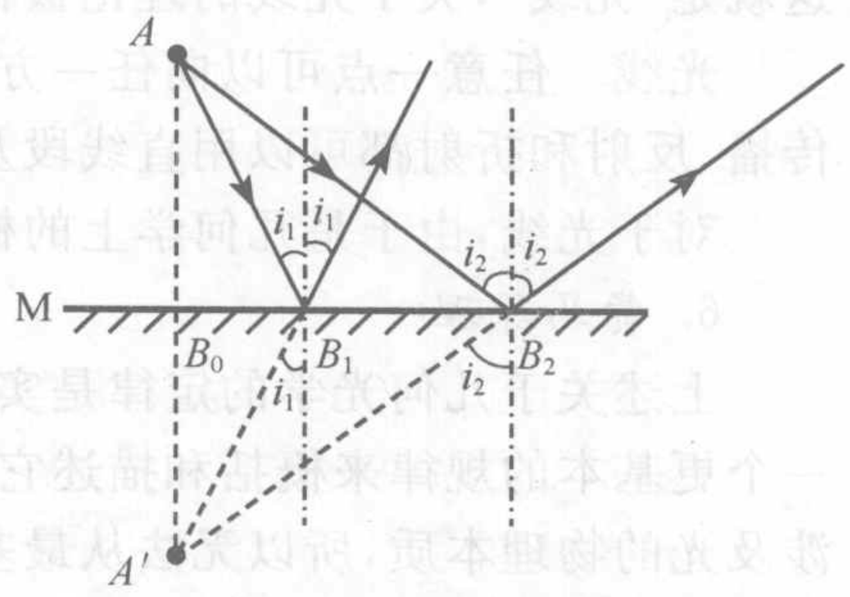


图 10.3.1 反射镜所成的虚像

以，A'并不是真实光线会聚而成的，而是视觉上将反射光线方向延长后会聚形成的，所以，反射光线的反向延长线是“虚光线”，则 A'就是“虚像”.

按照费马原理，物像之间应该是等光程的，在“虚像”的情况下，就要求

$$n\overline{AB_1}+n'\overline{B_1A'}=n\overline{AB_2}+n'\overline{B_2A'}$$

其中，n、n'分别为平面上下两方的折射率. 显然上式对任意方向光线成立的条件为等式的值为 0，即

$$n\overline{AB_1}=-n'\overline{B_1A'}$$

$$n\overline{AB_2}=-n'\overline{B_2A'}$$

即虚光线的光程为负值. 而$\overline{AB_1}=\overline{B_1A'}$、$\overline{AB_2}=\overline{B_2A'}$，如果平面上方的折射率为 n，则平面下方的折射率为

$$n'=-n \tag{10.3.1}$$

虚光线的光程称作虚光程.

10.3.2　光在平面上的折射

1. 折射光

光入射到两种透明媒质的分界面上，一部分反射，另一部分折射，反射光与折射光同时存在. 可以根据折射定律确定折射光的方向，并根据菲涅耳公式计算出反射光、折射光的光强和能流.

来自同一点光源的入射光，经平面折射后，可以按照折射定律计算出每一折射光线的方向，由 $\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1$，可以看出，不同方向的入射光线，经折射后，其折射光线的反向延长线不再会聚于同一点，如图 10.3.2 所示. 因而严格说来，平面折射是不能成像的.

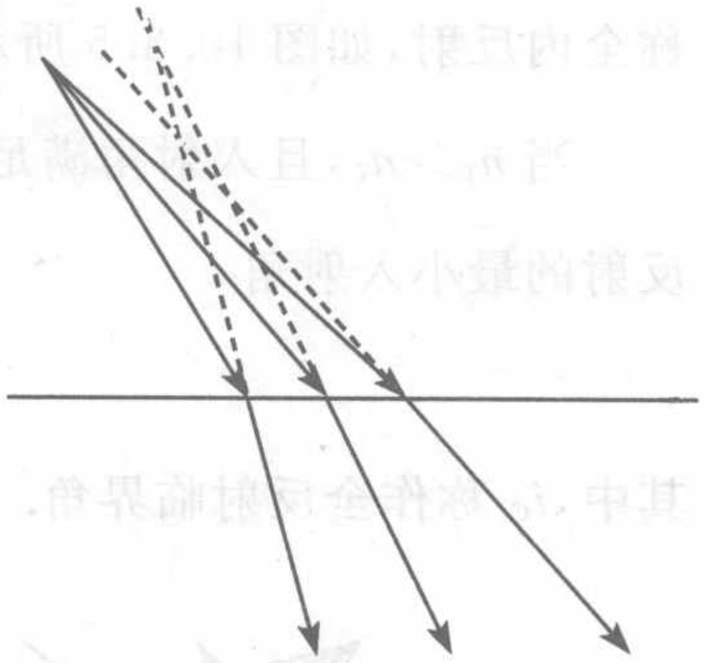


图 10.3.2　折射不能严格成像

2. 棱镜

三棱镜是一种常用的折射器件，其横截面是三角形，光从一个侧面入射，再从另一侧面出射，经过了两次折射. 出射光线相对于入射光线转过的角度，称作偏转角，如图 10.3.3 所示.

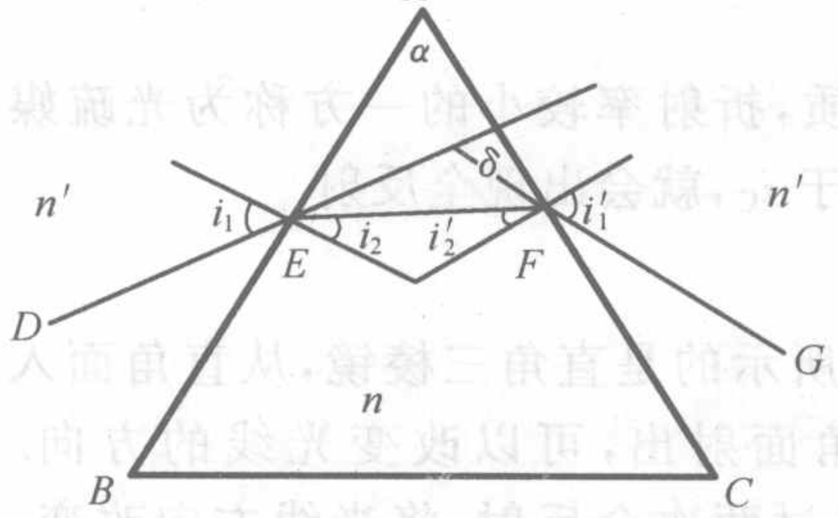


图 10.3.3　光在三棱镜中的折射

光线的偏转角为 $\delta=(i_1-i_2)+(i_1'-i_2')=(i_1+i_1')-(i_2+i_2')$. 图 10.3.3 中，由于法线与两侧面垂直，因而棱镜的顶角

$$\alpha=i_2+i_2' \tag{10.3.2}$$

所以

$$\delta=i_1+i_1'-\alpha \tag{10.3.3}$$

可以证明，当 $i_1=i_1'$，$i_2=i_2'$ 时，有最小偏转角 δ_m. 此时，$\alpha=2i_2$，$\delta_m=2i_1-\alpha$. 由折射定律 $\sin i_1=n\sin i_2$，即可得到

$$n=\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=\frac{\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \tag{10.3.4}$$

通过测量 α 和 δ_m，即可得到棱镜材料的折射率. 这是一种早期在实验室中广泛应用采用纯粹几何光学手段测量透明介质折射率的方法.

由于经过两次折射，出射光的偏转角比较大，因而用三棱镜可以容易观察到不同波长的光经过它之后的色散现象，如图 10.3.4 所示.

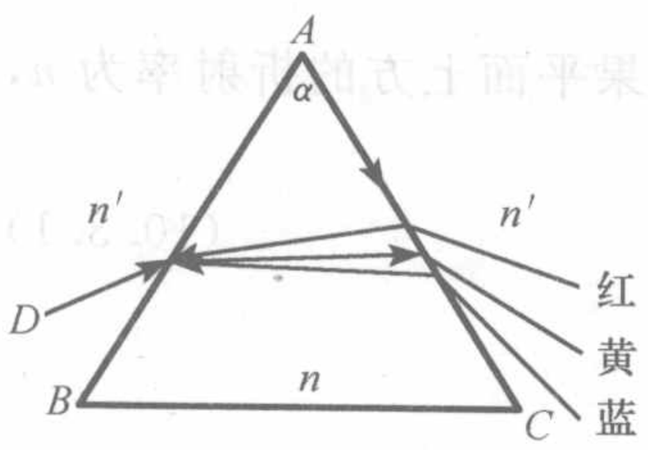


图 10.3.4 三棱镜的色散

3. 全反射

由折射定律 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$，可得 $\sin i_2=\dfrac{n_1}{n_2}\sin i_1$. 如果 $n_1>n_2$，则有可能 $\dfrac{n_1}{n_2}\sin i_1\geqslant 1$，但 $\sin i_2\leqslant 1$，所以，当 $\sin i_1\geqslant\dfrac{n_2}{n_1}$ 时，折射光实际上不存在，只有反射光，这种情况就是全反射，也称全内反射，如图 10.3.5 所示.

当 $n_1>n_2$，且入射角满足 $i_1\geqslant\arcsin\dfrac{n_2}{n_1}$，就会出现全反射(图 10.3.6). 出现全反射的最小入射角

$$i_C=\arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{10.3.5}$$

其中，i_C 称作全反射临界角.

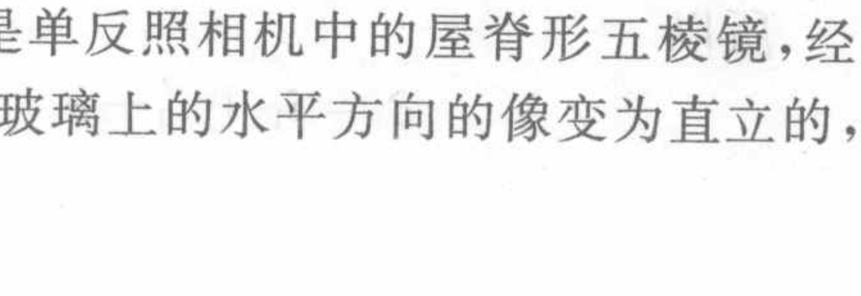


图 10.3.5 从光密介质射向光疏介质，折射角比入射角大

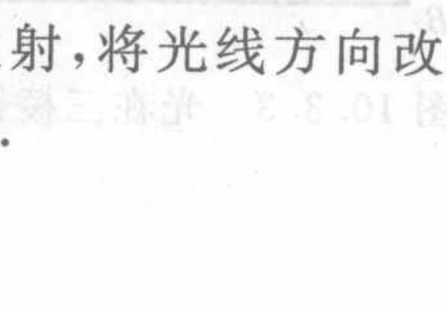


图 10.3.6 全反射

两种媒质，折射率较大的一方称为光密媒质，折射率较小的一方称为光疏媒质. 当光从光疏媒质射向光密媒质时，入射角大于 i_C，就会出现全反射.

4. 全反射棱镜

全反射棱镜有极其广泛的应用，图 10.3.7 所示的是直角三棱镜，从直角面入射的光线，在斜面处发生全反射，从另一直角面射出，可以改变光线的方向. 图 10.3.8 是单反照相机中的屋脊形五棱镜，经过两次全反射，将光线方向改变，使得成在毛玻璃上的水平方向的像变为直立的，与景物一致.

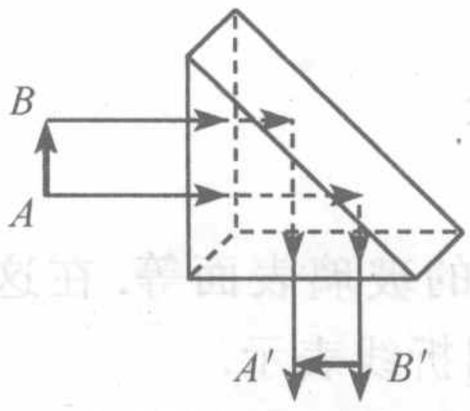


图 10.3.7　全反三棱镜

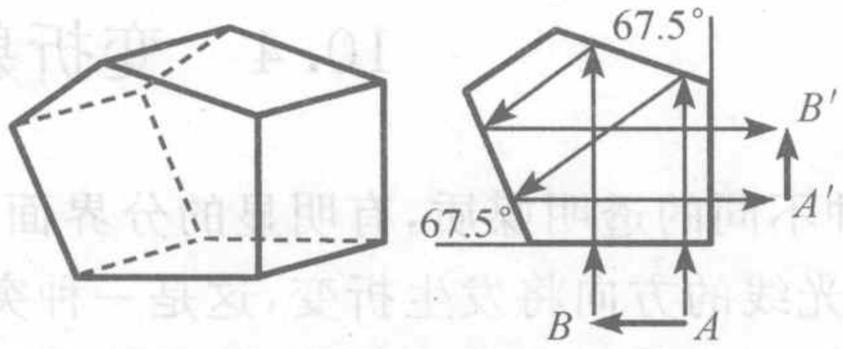


图 10.3.8　屋脊形五棱镜

图 10.3.9 是一种倒转棱镜，可以使像倒转.

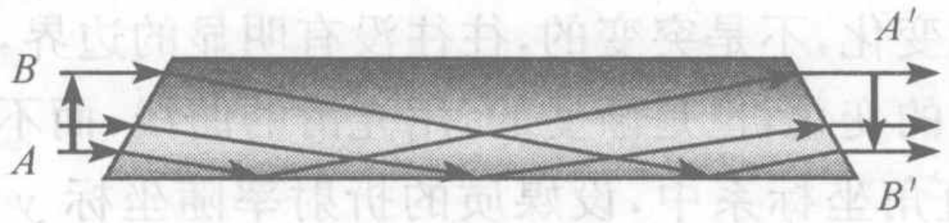


图 10.3.9　倒转棱镜

5. 全反射光纤

光纤是利用全内反射原理制成的光线传输元件. 光纤的结构如图 10.3.10 所示，通常有三层结构，中心是折射率较高玻璃纤维，外面是一层低折射率的材料，其外还有一层包膜. 由于玻璃纤维的直径很小，而外面的两层通常都是有机材料，因而光线一般都可以很容易弯曲.

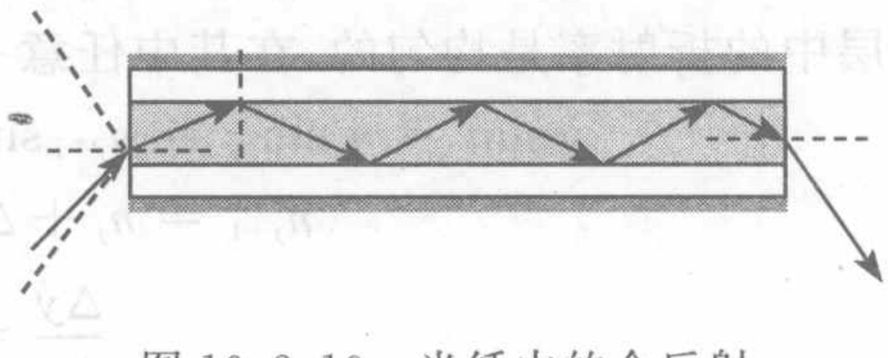


图 10.3.10　光纤中的全反射

因为只有大于临界角时才能产生全反射，因而，从端面射入光纤的光线，对于光纤轴线的张角必须限制在一个范围之内，如图 10.3.10 所示左端的虚线间的夹角.

光纤可以弯曲，其中的全反射过程不会改变(图 10.3.11). 但是由于光纤很细，所以单根光纤无法传输图像，而是利用集束光纤传输光学图像，如图 10.3.12 所示.

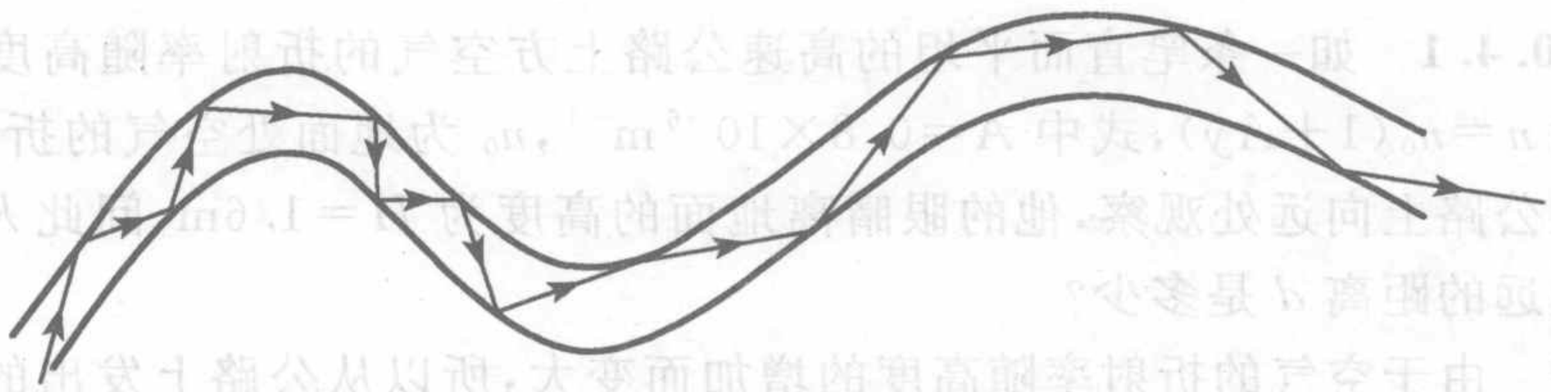


图 10.3.11　可以弯曲的光纤

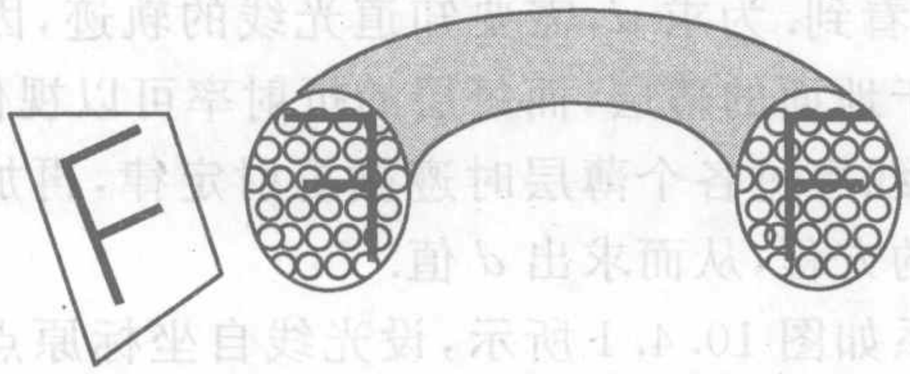


图 10.3.12　集束光纤传输光学图像

10.4 变折射率光学

两种不同的透明媒质，有明显的分界面，如空气中的玻璃表面等. 在这样的分界面处，光线的方向将发生折变，这是一种突变，可以用折线表示.

但是，还有另外一种透明媒质，即使是同一种媒质中，各处的折射率也不相同，如大气，由于受重力和温度的影响，在不同的环境、不同的高度，大气的密度不同，因而引起折射率不同. 另外，由于大气压强分布而引起的空气的流动，也会造成折射率的不同. 这种折射率的变化，不是突变的，往往没有明显的边界，而是渐变的. 那么，在这种情况下，光线方向的变化，也是渐变的，用光滑的曲线，而不是折线表示.

例如，在选定的直角坐标系中，设媒质的折射率随坐标 y 改变，用函数表示为

$$n = n(y)$$

其中的任意一条光线在某一点 (x_0, y_0) 的方向已知，那么，如何确定光线在媒质中的传播路径？

可以采用微分学中常用的方法，将媒质分成一系列厚度为 $\mathrm{d}y$ 的薄层，设每一层中的折射率是均匀的. 在其中任意一层的界面上，应用折射定律

$$n\sin i = n_j \sin i_j = n_{j+1}\sin i_{j+1} = n(y_0)\sin i(y_0) = n_0 \sin i_0$$

$$n_{j+1} = n_j + \Delta n_j, \quad i_{j+1} = i_j + \Delta i_j$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot i$$

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 i}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} = \frac{n_0}{n}\sin i_0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2 - n_0^2 \sin^2 i_0}{n_0^2 \sin^2 i_0} \tag{10.4.1}$$

例 10.4.1 如一条笔直而平坦的高速公路上方空气的折射率随高度 y 的变化规律为 $n = n_0(1+Ay)$，式中 $A = 0.8\times10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}$，$n_0$ 为地面处空气的折射率. 一个人站在公路上向远处观察，他的眼睛离地面的高度为 $H = 1.6\mathrm{m}$，问此人能看到公路上最远的距离 d 是多少？

分析 由于空气的折射率随高度的增加而变大，所以从公路上发出的光线将向上弯曲传播. 如果从远处公路表面发出的光线传播到人所在的位置时，其高度超过人眼的位置，则无法看到. 为求 d，需要知道光线的轨迹，因此，可将公路上方的空气划分为许多平行于地面的薄层，而每层的折射率可以视作不变量，而相邻两层的折射率略有变化. 光线穿过各个薄层时遵循折射定律，再加上相应的几何关系，就可以得到光线轨迹的方程，从而求出 d 值.

解 取直角坐标系如图 10.4.1 所示，设光线自坐标原点发出，将公路上方的空气划分为一系列平行于地面的薄层，各层的折射率为 $n_0, n_1, n_2, \cdots$，从原点发出

的光线几乎沿着公路表面传播，则光线经过各个空气层折射时满足下列关系：

$$n_0 = n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = \cdots = n\sin\theta \tag{1}$$

其中 θ 为光线在任一薄层中传播时光线与该薄层界面的夹角. 由上式及题意可得

$$n_0 = n\sin\theta = n_0(1+Ay)\sin\theta \tag{2}$$

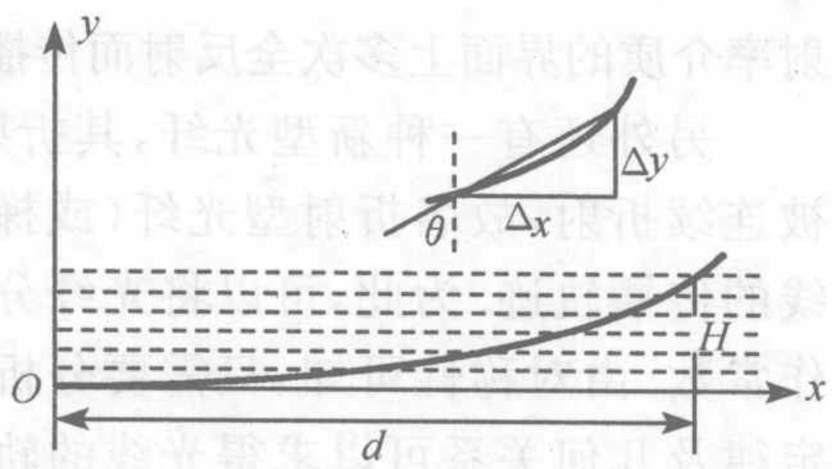


图 10.4.1　例 10.4.1 图

如图 10.4.1 所示，由几何关系 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot\theta$，可得

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

代入式(2)，有 $1+Ay=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$

上式两端平方，可得

$$1+2Ay+A^2y^2 = 1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

由于 $A=0.8\times10^{-6}\,\mathrm{m}^{-1}$，可以将 A^2y^2 略去，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2Ay \tag{3}$$

式(3)即是光线满足的微分方程，也可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2A}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

两端积分，得到

$$2\sqrt{y} = \sqrt{2A}x + C$$

由初始条件 $x=0$ 时，$y=0$，可知积分常数 $C=0$. 于是光线轨迹为

$$y = \frac{A}{2}x^2 \tag{5}$$

当 $y=H$ 时，有

$$d = \sqrt{\frac{2H}{A}} = 2\times10^3\,\mathrm{m}$$

即此人最远能看到 2000m 长的公路.

例 10.4.2　设光纤的折射率分布满足 $n^2(r)=n^2(0)(1-\alpha^2r^2)$，式中 α 为比 1 小得多的常数，$n(0)$为光纤轴线中心的折射率，r 为光纤中一点到其轴线的距离. 试求传导光线的轨迹方程，并证明：在近轴光线条件下，光纤有自聚焦的特性.

分析　光学纤维分两类，一类称阶跃型光纤，其折射率沿径向呈阶梯形分布，这种光纤的传输机制是全反射原理，故又称全反射光纤. 进入光纤端面的光线在不同折

射率介质的界面上多次全反射而传播到另一端.光纤可以黏合、弯曲,用于图像传输.

另外还有一种新型光纤,其折射率从轴线沿径向连续变小,光线在这种光纤中被连续折射,故名折射型光纤(或梯度型光纤).本题讨论的即是这种新型光纤中光线的传播轨迹.为此,可以将光纤分割成许多同轴薄圆筒,将每层圆筒的折射率看作常数.由对称性可知,只需要分析含光纤轴线的截面内的光线轨迹即可.由折射定律及几何关系可以求得光线的轨迹.

解 设 Oz 表示光纤轴线,Or 垂直于 Oz,表示光线的半径方向.现沿径向将光纤分为一系列薄层,相应的折射率记作 $n_1, n_2, n_3, \cdots$,光线在光纤中连续折射,沿轴向传播,见图 10.4.2、图 10.4.3.按折射定律,有

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \cdots = \text{常量}$$

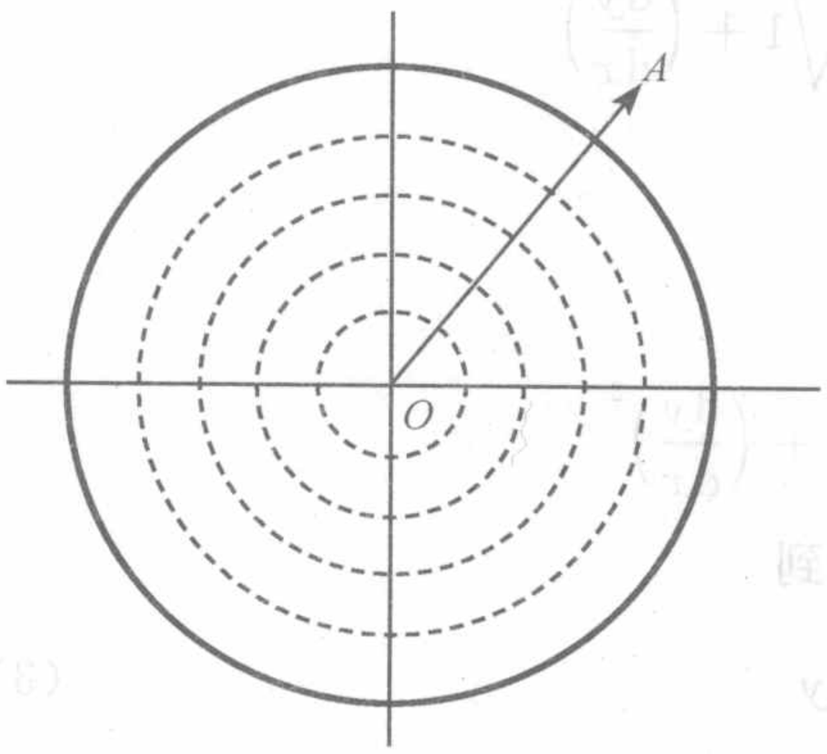


图 10.4.2 折射形光纤的横截面

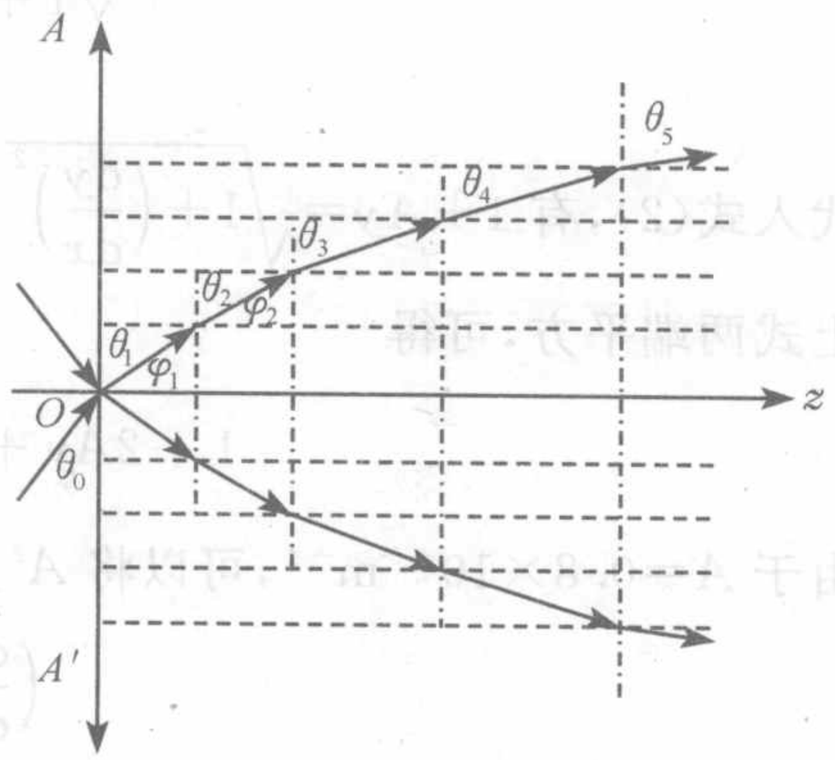


图 10.4.3 折射形光纤中的光线

因此对于折射率连续分布的情况,则有

$$n(r)\sin\theta = n(r)\cos\varphi = n(0)\cos\varphi_1 = \text{常量} \tag{1}$$

其中,θ 为光线在距轴线 r 处的切线方向与半径的夹角,φ 为其余角.另外,$n(0)$、φ_1 分别为光纤轴线上的折射率和光线与轴线的夹角.

为了求光线轨迹的方程,先考虑光线轨迹上的任一点的斜率

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \tan\varphi = \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right)^{1/2} \tag{2}$$

将式(1)代入式(2),整理后得到

$$\mathrm{d}z = \frac{n(0)\cos\varphi_1 \,\mathrm{d}r}{\left[n^2(r) - n^2(0)\cos^2\varphi_1\right]^{1/2}} \tag{3}$$

将 $n^2(r) = n^2(0)(1-\alpha^2 r^2)$ 代入式(3),并积分,得

$$z = \int_0^r \frac{n(0)\cos\varphi_1 \,\mathrm{d}r}{\left[n^2(r) - n^2(0)\cos^2\varphi_1\right]^{1/2}} = \frac{\cos\varphi_1}{\alpha}\arcsin\left(\frac{\alpha r}{\sin\varphi_1}\right)$$

可求出 r 的表达式

$$r = \frac{\sin\varphi_1}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha r}{\cos\varphi_1}z\right) \tag{4}$$

式(4)表明光的路径为正弦曲线. 振幅 $\sin\varphi_1/\alpha$ 与初始条件 φ_1 有关. 设 L 表示该正弦曲线的空间周期，则应有

$$\frac{2\pi}{L}=\frac{\alpha}{\cos\varphi_1} \tag{5}$$

假定光线自光纤端面 $r=0$ 处入射，且入射角为 θ_0，因此，由折射定律，有

$$\sin\theta_0 = n(0)\sin\theta_1$$

代入式(5)，可得

$$\frac{2\pi}{L}=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\theta_0}{n^2(0)}}}$$

显然，从不同方向入射的光线，其 θ_0 不同，L 也不同. 但当小角度入射时(傍轴近似)，$\cos\varphi_1\approx1$，所有光线有相同的 $L=2\pi/\alpha$.

它们的轨迹如图 10.4.4 所示，这意味着光线在光纤中传播时有自聚焦效应. 自聚焦光纤可用来成像，称为自聚焦透镜，它的直径很小，焦距很短，能沿弯曲路径成像，分辨率高，被广泛应用在光纤通信和工业诊断的内窥镜等方面.

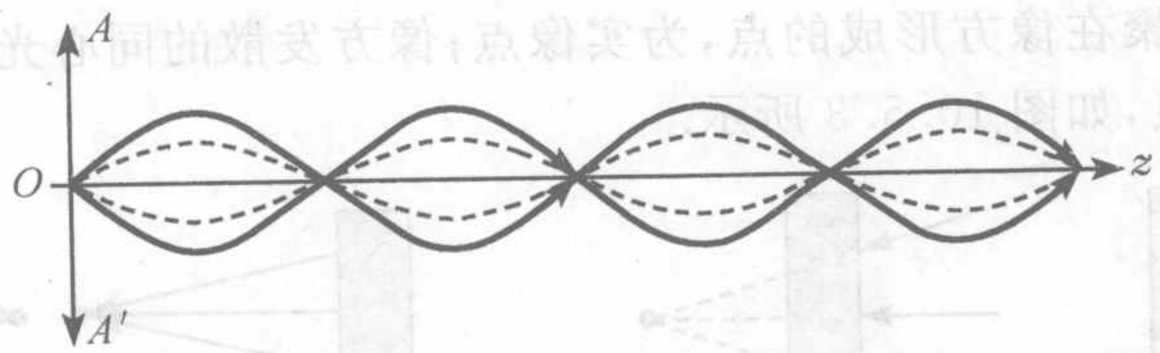


图 10.4.4　折射形光纤中的自聚焦

10.5　近轴光在单球面上的成像

10.5.1　物与像的虚实性

由于几何光学只讨论光的传播、反射和折射等问题，所以，可以将“物”、“像”等都用光线代替.

1. 同心光束

从同一点发出的或会聚到同一点的光线，称为同心光束(concentric beam，homocentric beam). 如图 10.5.1 所示.



图 10.5.1　同心光束

物和像都是由一系列的点构成的，物点和像点一一对应，于是就得到了对应的物和像. 从光线的性质看，物上的每一点都发出同心光束，而对应的像点都由同心

光束会聚得到，所以成像的最基本条件是要满足同心光束的不变性. 当然，这仅仅是对点成像的要求. 从整个物和像的对应关系看，还必须要满足物像间的相似性，即空间上各个点之间的相互位置要一一对应，同时每一对物像点的颜色，即光的波长要一一对应，这就要求成像的光学系统不产生畸变，没有像差、色差等.

2. 光具组

一系列的成像光学器具，从对光线的作用看，它们是由若干反射面或折射面组成的光学系统. 光具组(optical system)的对称轴就是光轴.

3. 理想光具组

使同心光束保持其同心性不变的光具组.

理想光具组是成像的必要条件.

4. 物方和像方

物点所在的空间为物方空间，像点所在的空间为像方空间.

5. 实物与虚物，实像与虚像

发出同心光束的物点，为实物点；物方同心光束延长后会聚所成的点，为虚物点(图 10.5.2).

同心光束会聚在像方形成的点，为实像点；像方发散的同心光束反向延长后会聚的点，为虚像点，如图 10.5.3 所示.

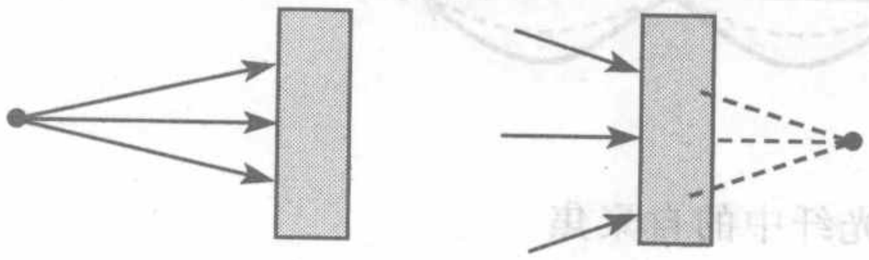


图 10.5.2　实物点与虚物点

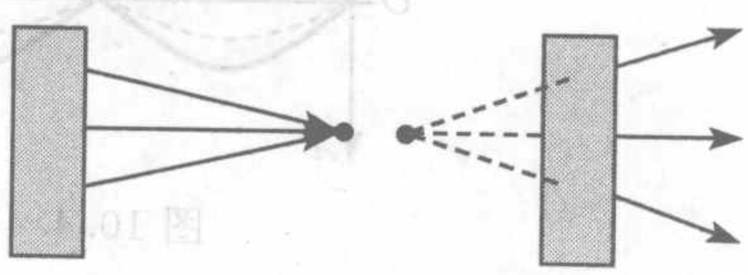


图 10.5.3　实像点与虚像点

成像过程中物、像的虚实关系如图 10.5.4 所示.

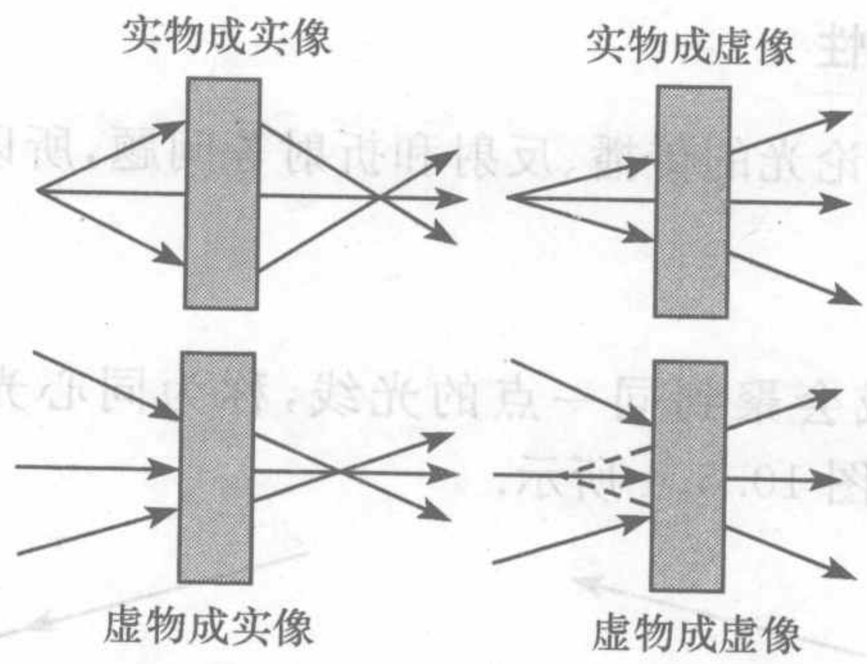


图 10.5.4　成像过程中物、像的虚实关系

10.5.2　近轴光在单球面上的折射

1. 轴上物点成像

在图 10.5.5 中，球面 Σ 两侧的折射率分别为 n、n'，Q 点发出的一条光线入射到

球面上的 M 点，经折射后，与光轴在 Q' 点相交. 由于从 Q 发出沿着光轴射向球面的光线在经过球面后方向不变，仍沿光轴方向，所以，Q' 点就是 Q 点发出的两条不同方向光线的会聚点.

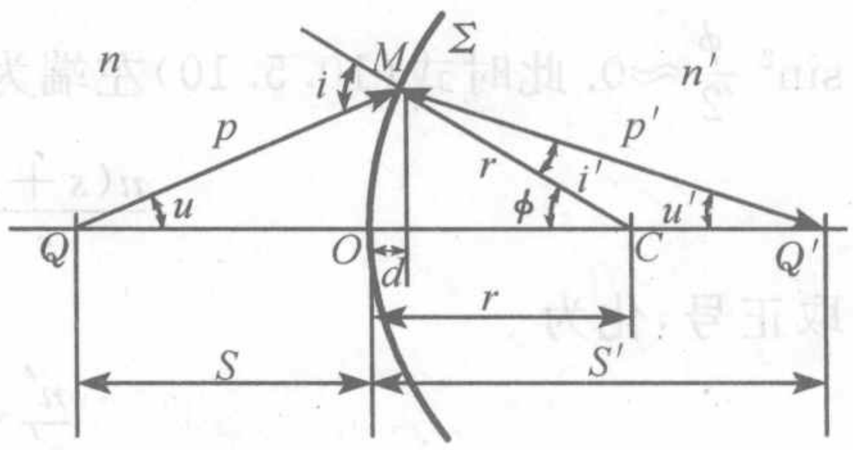


图 10.5.5　轴上物点经单球面折射成像

在 $\triangle QMC$ 和 $\triangle Q'MC$ 中，有折射定律和以下几何关系

$$n\sin i = n'\sin i' \tag{10.5.1}$$

正弦定理

$$\frac{p}{\sin\phi} = \frac{s+r}{\sin i} \tag{10.5.2}$$

$$\frac{p'}{\sin\phi} = \frac{s'-r}{\sin i'} \tag{10.5.3}$$

余弦定理

$$p^2 = (s+r)^2 + r^2 - 2r(s+r)\cos\phi \tag{10.5.4}$$

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\phi \tag{10.5.5}$$

由式(10.5.1)～式(10.5.3)可得

$$\frac{p}{n(s+r)} = \frac{\sin\phi}{n\sin i} = \frac{\sin\phi}{n'\sin i'} = \frac{p'}{n'(s-r)}$$

即

$$\frac{p^2}{n^2(s+r)^2} = \frac{p'^2}{n'^2(s-r)^2} \tag{10.5.6}$$

式(10.5.4)和式(10.5.5)分别化为

$$\begin{aligned} p^2 &= s^2 + 2rs + r^2 + r^2 - 2r(s+r)\cos\phi \\ &= s^2 + 2s(s+r)(1-\cos\phi) = s^2 + 4r(s+r)\sin^2\frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{10.5.7}$$

$$\begin{aligned} p'^2 &= s'^2 - 2rs' + r^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\phi \\ &= s'^2 - 2s'(s'-r)(1-\cos\phi) = s'^2 - 4r(s'-r)\sin^2\frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{10.5.8}$$

由式(10.5.6)～式(10.5.8)，可得

$$\frac{s^2 + 4r(s+r)\sin^2\dfrac{\phi}{2}}{n^2(s+r)^2} = \frac{s'^2 - 4r(s'-r)\sin^2\dfrac{\phi}{2}}{n'^2(s'-r)^2} \tag{10.5.9}$$

即

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = -\sin^2\frac{\phi}{2}\left[\frac{4r}{n^2(s+r)} + \frac{4r}{n'^2(s'-r)}\right] \tag{10.5.10}$$

由式(10.5.10)可见，同一物点，光线方向不同时，即 ϕ 不同时，折射后的光线与主光轴的交点是不同的. 即同心光束经球面折射后，失去同心性.

欲使折射光线保持同心性，必须满足近轴(傍轴)条件，即 ϕ 很小，$\phi \approx 0$，

$\sin^2\frac{\phi}{2}\approx 0$. 此时式(10.5.10)左端为 0,有

$$\frac{n(s+r)}{s}=\pm\frac{n'(s'-r)}{s'}$$

取正号,化为

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r} \tag{10.5.11}$$

记

$$\Phi=\frac{n'-n}{r} \tag{10.5.12}$$

称为折射球面的光焦度,由球面的曲率半径和球面两侧的折射率差决定.

平行光入射,$s=\infty$,得

$$s'=\frac{n'r}{n'-n}=f' \tag{10.5.13}$$

称作像方焦距(focal length),像点 Q' 所在位置为像方焦点(focus),如图 10.5.6 所示.

折射光为平行光,$s'=\infty$,得

$$s=\frac{nr}{n'-n}=f \tag{10.5.13'}$$

称作物方焦距,物点 Q 所在位置为物方焦点,如图 10.5.7 所示.

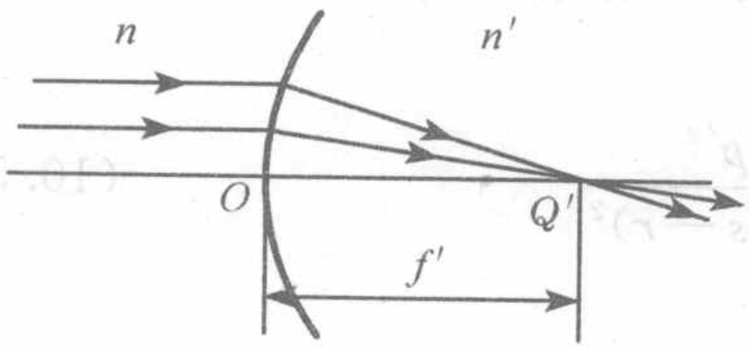


图 10.5.6 像方焦点、像方焦距

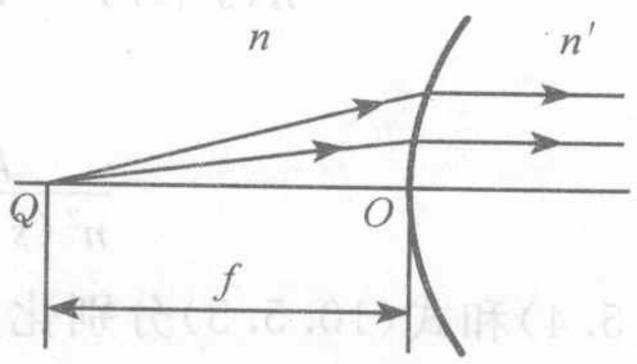


图 10.5.7 物方焦点、物方焦距

上式亦可写为

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{10.5.14}$$

称为高斯(Carl Friedrich Gauss,1777～1855,德国)公式.

2. 轴外物点成像

图 10.5.8 中,物点 Q_1 在主光轴之外. 连接 Q_1 和球面中心 C,则 Q_1C 也可以

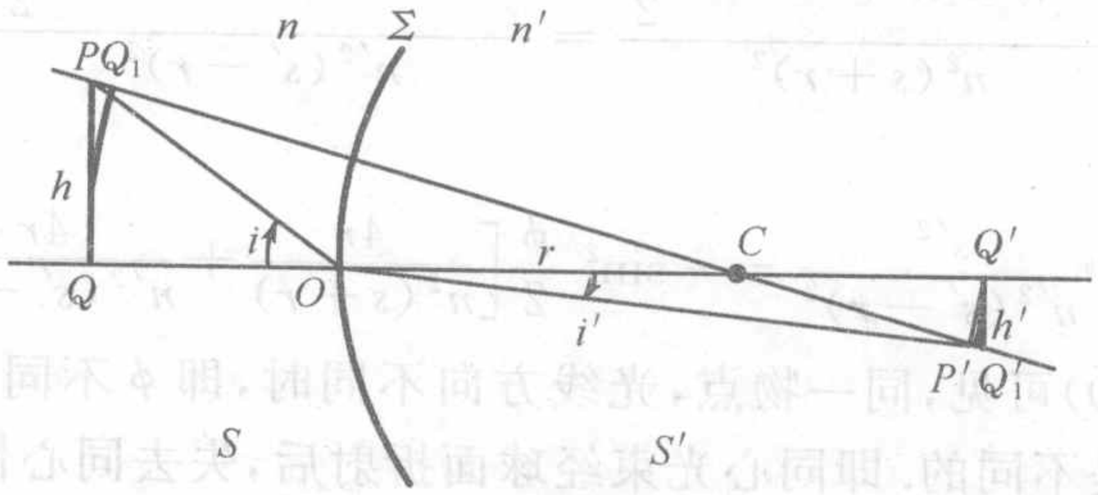


图 10.5.8 轴外物点成像

看作是球面的一条与主光轴完全相同的光轴. Q_1 的像 Q_1' 在 Q_1C 的连线上. 相当于主光轴绕 C 点旋转一个角度，同时物点和像点旋转，圆弧 QQ_1 的像为圆弧 $Q'Q_1'$.

即圆弧 QQ_1 和圆弧 $Q'Q_1'$ 相互共轭. 过 Q 点作垂直于主光轴的直线 QP，用上述方法可得到 PQ 的像为曲线 $\overset{\frown}{P'Q'}$. 在满足近轴条件时，圆弧 $\overset{\frown}{QQ_1}$ 和圆弧 $\overset{\frown}{Q'Q_1'}$ 可作为直线，即圆弧 $\overset{\frown}{QQ_1}$ 和垂直于主光轴的直线 QP 重合，同时圆弧 $\overset{\frown}{Q'Q_1'}$ 与曲线 $\overset{\frown}{P'Q'}$ 重合，都是垂直于主光轴的直线，且相互共轭.

像的横向放大率为

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\frac{s'\tan i'}{s\tan i}\approx\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=\frac{ns'}{n's} \tag{10.5.15}$$

如果物距为无限远，像的位置在像方焦点处. 或者说，平行于 PP' 的入射光线，将会聚于光轴 PCP' 的像方焦点上. PP' 绕 C 旋转时，其像点的轨迹亦绕 C 旋转成为圆弧. 近轴条件下，圆弧近似为过像方焦点 F' 的直线，该直线所在的位置即位像方焦平面(focal plane)，如图 10.5.9 所示. 同理，过物方焦点 F 的平面为物方焦平面.

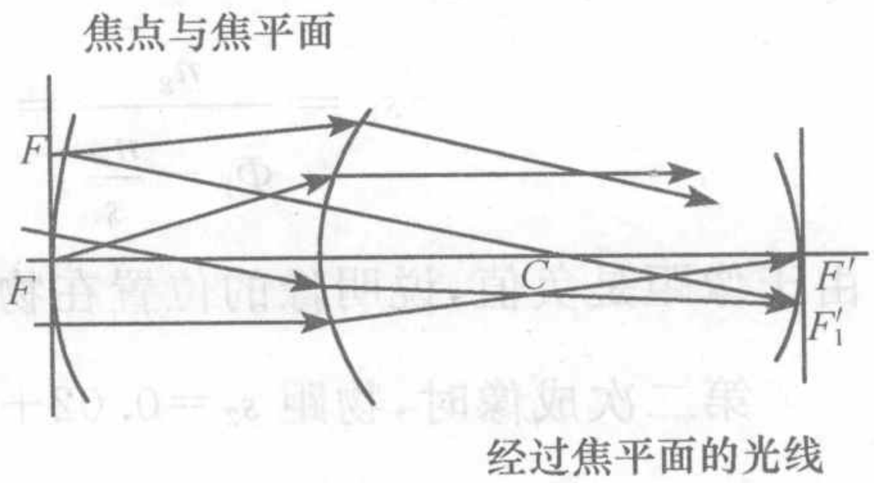


图 10.5.9　焦平面

由此可以得到求任一光线经球面折射后的方向的作图方法. 对于沿任意方向的入射光线，都可以做出与该光线平行的光轴，即与入射光线平行的且通过球心的直线. 相对于已经取定的光轴，可以把这条新做的光轴称为次光轴. 在满足近轴条件下，次光轴与像方焦平面的交点即是这条次光轴的焦点，与次光轴平行的入射光线由于会通过该次光轴的焦点，即次光轴与像方焦平面的交点.

从上述推导可以看出，光线的近轴条件，即 $\phi\approx0$，以及物点的近轴条件，即 $y\approx0$，是球面成像的充分和必要条件. 这样就可以保持光束的同心性和物像的相似性. 这就要求用于成像的折射球面的口径不能很大，同时物的线度也不能很大. 这样一来，就对成像系统，包括光具组和物都有了极大的限制，几乎无法得到实用的球面成像系统. 实际上，真正“严格”的成像系统是无法实用化的，实用的系统都是在满足一定条件下尽可能把上述两个近轴条件的限制放宽的结果.

单个折射球面的光学参数如图 10.5.10 所示.

例 10.5.1　如图 10.5.11 所示，一个等曲率双凸透镜，放在水面上. 球面半径

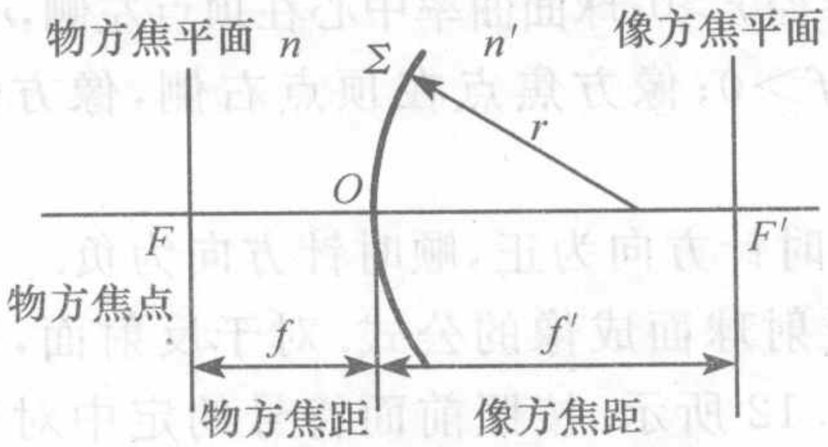


图 10.5.10　单个折射球面的光学参数

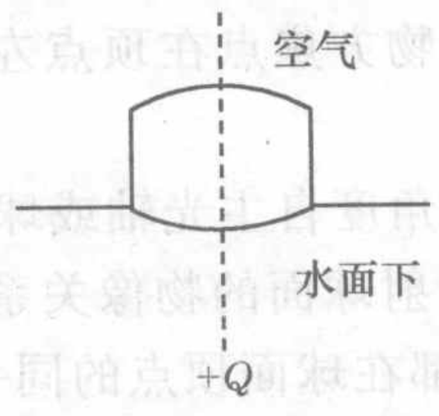


图 10.5.11　例 10.5.1 图

为 3cm，中心厚度 2cm，玻璃和水的折射率分别为 1.50 和 1.33. 透镜下 4cm 处物点 Q. 计算两曲面的光焦度，并计算 Q 点像的位置.

解 物点发出的光线经过了两个球面的折射，最后成像，可以先算出第一次成像的位置，再把这个像作为第二个球面的物，第二次成像，这是逐次成像法.

$$\Phi_1 = \frac{n_g - n_w}{r_1} = \frac{1.50 - 1.33}{0.03} = 5.67\mathrm{m}^{-1},$$

$$\Phi_2 = \frac{n_a - n_g}{r_2} = \frac{1.00 - 1.50}{-0.03} = 16.7\mathrm{m}^{-1}$$

Q 第一次成像由 $\frac{n_g}{s_1} + \frac{n_w}{s} = \Phi_1$，得

$$s_1 = \frac{n_g}{\Phi_1 - \frac{n_w}{s}} = \frac{1.50}{5.67 - \frac{1.33}{0.04}} = -0.054\mathrm{m}.$$

由于像距是负值，说明像的位置在物方，是虚像.

第二次成像时，物距 $s_2 = 0.02 + 0.054 = 0.074\mathrm{m}$，由 $\frac{n_a}{s'} + \frac{n_g}{s_2} = \Phi_2$，得

$$s' = \frac{n_a}{\Phi_2 - \frac{n_g}{s_2}} = \frac{1.00}{16.7 - \frac{1.50}{0.074}} = -0.280\mathrm{m}.$$

在前镜面下 0.26cm 处.

3. 几何光学的符号约定

从前面的叙述可以看出，几何光学就是应用折反射定律计算光线的方向等问题，在这种情况下，对于其中所涉及的诸如距离和角度等几何参量的正负以及赋予正负值的含义进行约定是非常必要的. 应该指出，这种约定并没有一致的标准，只是一种根据习惯而定出的符号法则而已. 本书采用以下的符号规定：

假设光线自左向右入射，物点在球面顶点的左侧，像点在球面顶点的右侧. 即规定物方在折射面的左侧，而像方在折射面的右侧. 线段和角度的符号规定如下：

(1) 物点在顶点左侧，物距 $s>0$；物点在球面右侧，物距 $s<0$.

(2) 对于折射球面，像点在顶点右侧，像距 $s'>0$；像点在顶点左侧，像距 $s'<0$. 对于反射球面，像点在顶点右侧，像距 $s'<0$；像点在顶点左侧，像距 $s'>0$.

(3) 线段在主光轴之上，$y>0$；线段在主光轴之下，$y<0$.

(4) 球面曲率中心在顶点右侧，其曲率半径 $r>0$；球面曲率中心在顶点左侧，$r<0$.

(5) 物方焦点在顶点左侧，物方焦距 $f>0$；像方焦点在顶点右侧，像方焦距 $f'>0$.

(6) 角度自主光轴或球面法线算起，逆时针方向为正，顺时针方向为负.

用折射球面的物像关系，也可以得到反射球面成像的公式. 对于反射面，则像方、物方都在球面顶点的同一侧，如图 10.5.12 所示. 按照前面符号约定中对于角度的规定，可以得到反射定律为 $i' = -i$. 也可以将反射看成是折射的特例处理，于

是将反射定律写成斯涅尔折射定律的形式，为 $n\sin i=n'\sin i'$，则必须有 $n'=-n$. 且由于光线反射，像方在球面顶点的左侧，所以像距的符号与折射时相反. 用物像公式表示反射面的成像，则写作 $\frac{-n}{-s'}+\frac{n}{s}=\frac{-n-n}{r}=-\frac{2n}{r}$，即 $\frac{n}{s'}+\frac{n}{s}=-\frac{2n}{r}$，进一步简化，就得到球面反射的物像公式为

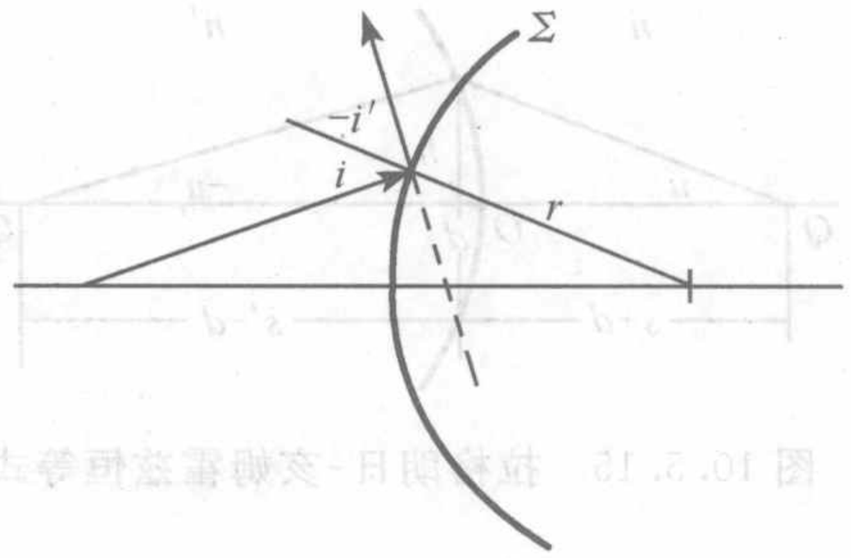


图 10.5.12　球面反射镜

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r} \tag{10.5.16}$$

焦距为

$$f=f'=-\frac{r}{2} \tag{10.5.17}$$

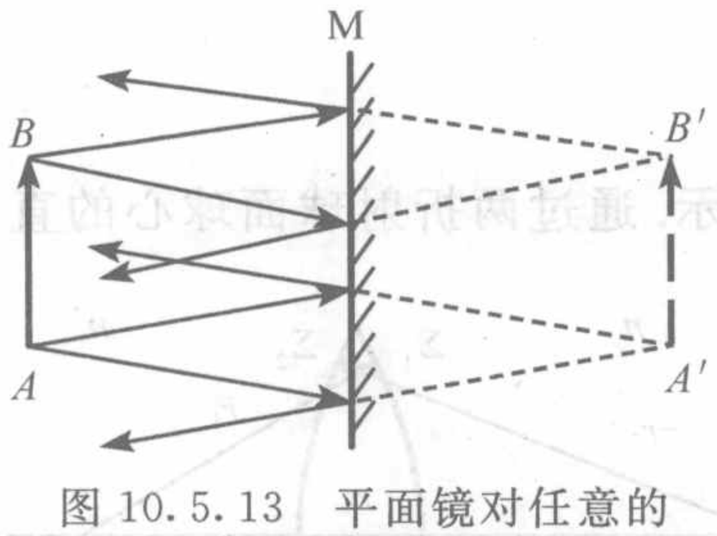


图 10.5.13　平面镜对任意的光线都可以严格成像

对于球面反射镜，在本书的符号系统中，凸面镜的焦距为负值，而凹面镜的焦距为正值.

式(10.5.10)严格成立只有一个条件，那就是 $r=\infty$，同时 $n^2=n'^2$，显然 $n=n'$ 是没有物理意义的，则只有 $n=-n'$，即 Σ 为反射平面，即只有平面镜对任意的光线都可以严格成像(图 10.5.13). 此时式(10.5.10)化为 $s'=-s$，为平面镜的物像公式.

例 10.5.2　一凸球面镜浸没在折射率为 1.33 的水中，高为 1cm 的物在在凸面镜前 40cm 处，像在镜后 8cm 处. 求像的大小、正倒、虚实以及凸面镜的曲率半径和光焦度.

解　$\frac{n}{s'}+\frac{n}{s}=-\frac{2n}{r}$，已知 $s=40\text{cm}$，$s'=-8\text{cm}$，虚像.

所以求得 $r=20\text{cm}$，$y'=y\frac{n}{-n}\frac{s'}{s}=0.2\text{cm}$，正立.

光焦度 $\Phi=-\frac{2n}{r}=-\frac{2n}{0.2}=-13.3\text{m}^{-1}$

4. 像的横向放大率

如图 10.5.14 所示，记物、像的高度为 y，$-y'$，由于是近轴光成像，入射角、折射角都很小. 则经过球面后，像的横向放大率为

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{s'\tan i'}{s\tan i}\approx-\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=-\frac{ns'}{n's} \tag{10.5.18}$$

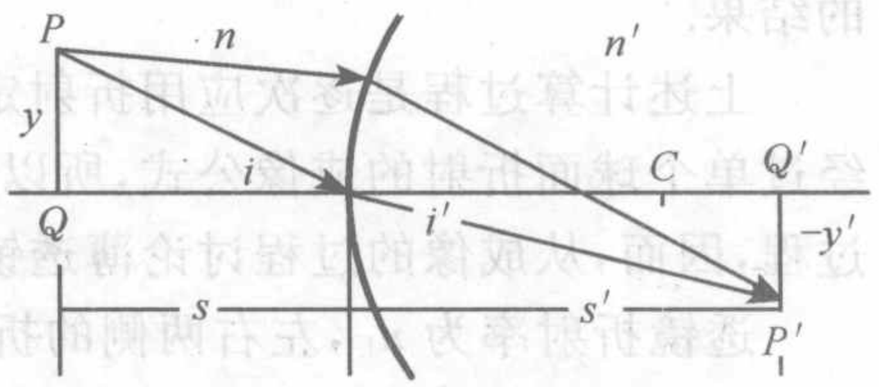


图 10.5.14　像的横向放大率

5. 拉格朗日-霍姆赫兹恒等式

如图 10.5.15 所示，将一物紧贴折射球

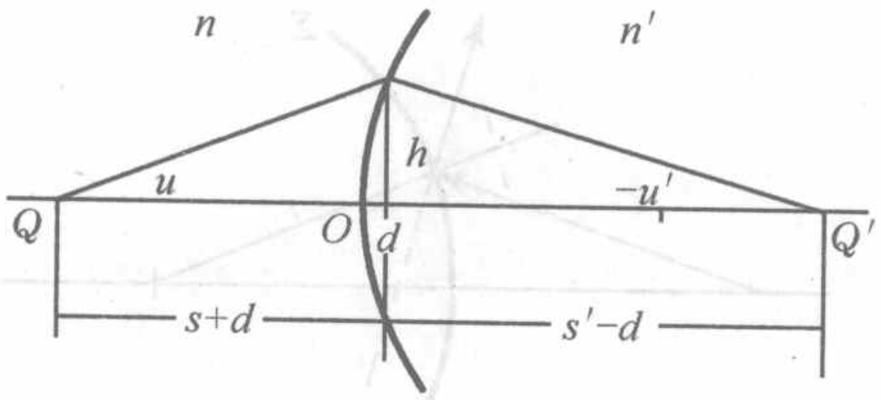


图 10.5.15 拉格朗日-亥姆霍兹恒等式

面放置，则在满足傍轴条件时，横向放大率为 1，即 $V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}=1$，对光线的角放大率为

$$\gamma=\frac{-u'}{u}\approx\frac{\tan(-u')}{\tan u}$$

$$=\frac{h/(s'-d)}{h/(s+d)}\approx\frac{s}{s'}=-\frac{ny}{n'y'}$$

上式变换为

$$ynu=y'n'u' \tag{10.5.19}$$

此为拉格朗日-亥姆霍兹(Lagrange-Helmhotz)恒等式.

10.6 薄透镜成像

10.6.1 薄透镜

透镜是由两个折射球面组成的，如图 10.6.1 所示. 通过两折射球面球心的直线就是透镜的光轴，两折射球面的顶点 O_1、O_2 间的距离记为 d，用 d 表示该透镜的厚度. 如果满足条件 $d\ll r_1, r_2, |s|, |s'|$，即透镜的厚度比折射球面的半径小得多，同时也比物距和像距小得多，这样的透镜就是薄透镜. 由于厚度很薄，所以可以认为 $d=0$，这样一来，两球面顶点 O_1、O_2 也可以认为是重合的，重合点就是透镜光轴的中心，记为 O，称为薄透镜的光心.

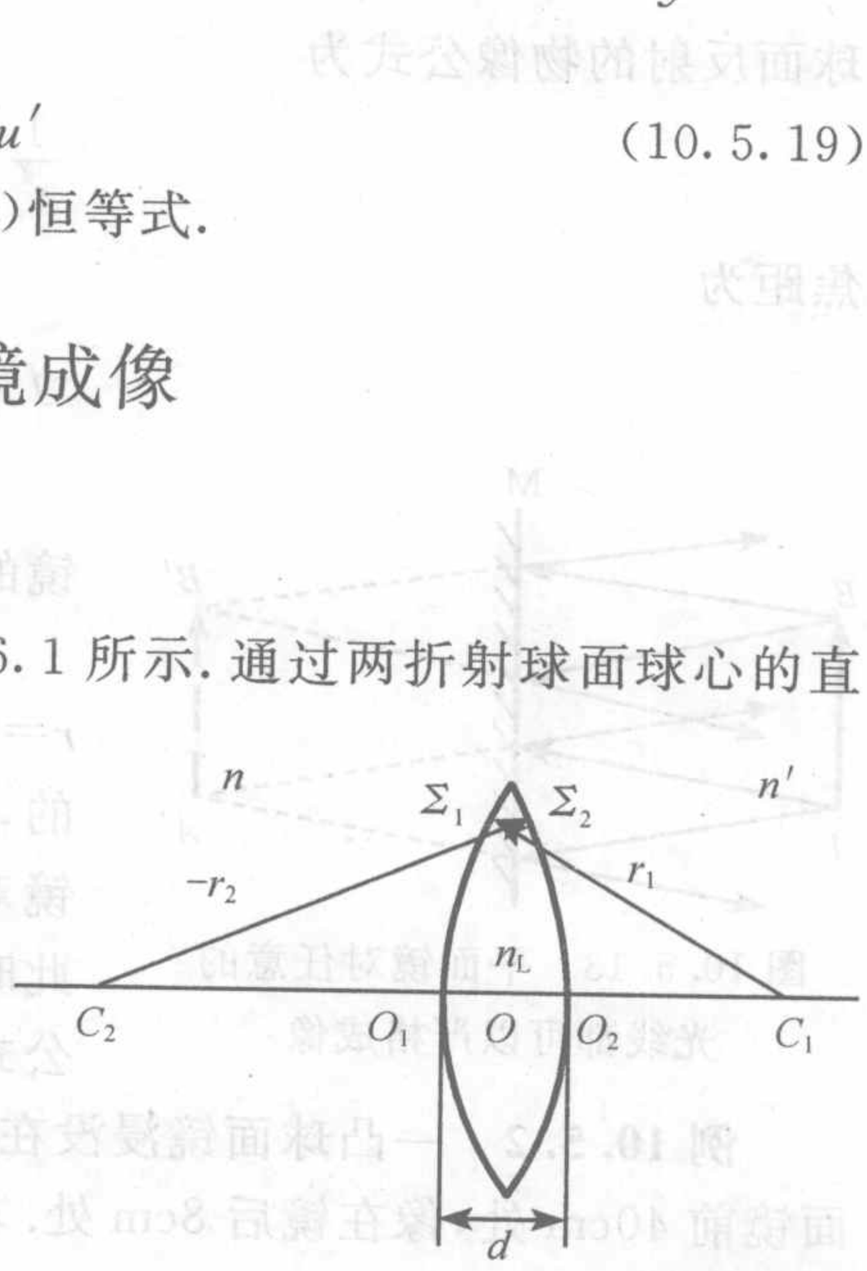


图 10.6.1 薄透镜

10.6.2 薄透镜成像公式

1. 逐次成像法

物所发出的光线经薄透镜折射成像的过程是这样的，首先，光线在第一球面处发生折射，然后经过透镜的介质，最后经第二球面折射成像. 因此，要得到物像之间的关系，当然可以针对上述过程，依次计算光线经两球面折射的情况，以得到最后的结果.

上述计算过程是逐次应用折射定律，略显繁琐. 前面我们已经得到了近轴光线经过单个球面折射的成像公式，所以，上述的每一次折射过程，当然就是一次成像过程，因而，从成像的过程讨论薄透镜的问题，也是可以的.

透镜折射率为 n_L，左右两侧的折射率为 n 和 n'. 左侧(即物方)物点 Q 先经第一球面 Σ_1 成像 Q_1'，然后，将 Q_1' 作为物点，再经第二折射面 Σ_2 成像 Q'，Q' 即为 Q 经

透镜后所成的像. 这种让光线依次通过多个折射(或反射)球面成像的方法称为逐次成像法(图 10.6.2).

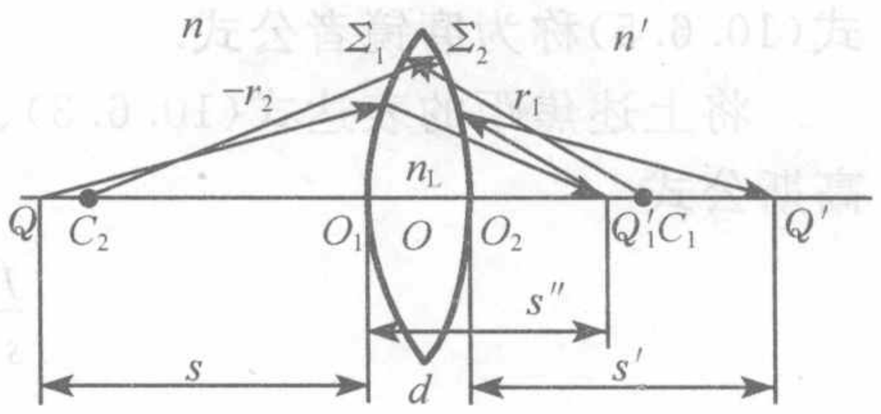


图 10.6.2　薄透镜的逐次成像

(1) Q 经 Σ_1 成像.

物距为 s,物方折射率为 n,像方折射率为 n_L,应用公式(10.5.11),得到

$$\frac{n_L}{s''}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}$$

像距为 s'',像位于折射率为 n_L 的介质中.

记 $\Phi_1=\dfrac{n_L-n}{r_1}$,为第一折射球面 Σ_1 的光焦度.

(2) 再经 Σ_2 成像.

将经 Σ_1 所成的像作为 Σ_2 的物,按照本书的符号约定,物距为 $d-s''$,由于是薄透镜,因而 $d-s''\approx -s''$. 此时物方折射率为 n_L,像方折射率为 n',再次应用公式(10.5.11),得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n_L}{-s''}=\frac{n'-n_L}{r_2}$$

记 $\Phi_2=\dfrac{n'-n_L}{r_2}$,为第二折射球面 Σ_2 的光焦度. 两式相加,有

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}=\Phi_1+\Phi_2=\Phi \tag{10.6.1}$$

这就是薄透镜的物像公式. 其中

$$\Phi=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2} \tag{10.6.2}$$

为薄透镜的光焦度.

2. 薄透镜的焦点与焦平面

令 $s'=\infty$,得到薄透镜的物方焦距

$$f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n}{\Phi} \tag{10.6.3}$$

令 $s=\infty$,得到薄透镜的像方焦距

$$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n'}{\Phi} \tag{10.6.4}$$

形式上与单球面类似.

薄透镜的焦点和焦平面的定义与单个球面相同.

如果透镜置于空气中,取 $n=n'=1$,有

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)} \tag{10.6.5}$$

式(10.6.5)称为磨镜者公式.

将上述焦距的表达式(10.6.3)、式(10.6.4)代入式(10.6.1),则得到薄透镜的高斯公式

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{10.6.6}$$

高斯公式中,物距和像距都是以光心为基点度量的,如果用焦点作为度量的基准点,用到焦点的距离表示物像的位置,如图 10.6.3 所示,即 $s=x+f$,$s'=x'+f'$,高斯公式可写作 $\frac{f'}{x'+f'}+\frac{f}{x+f}=1$,整理得到 $xf'+ff'+x'f+f'f=x'x+x'f+f'x+f'f$. 即有

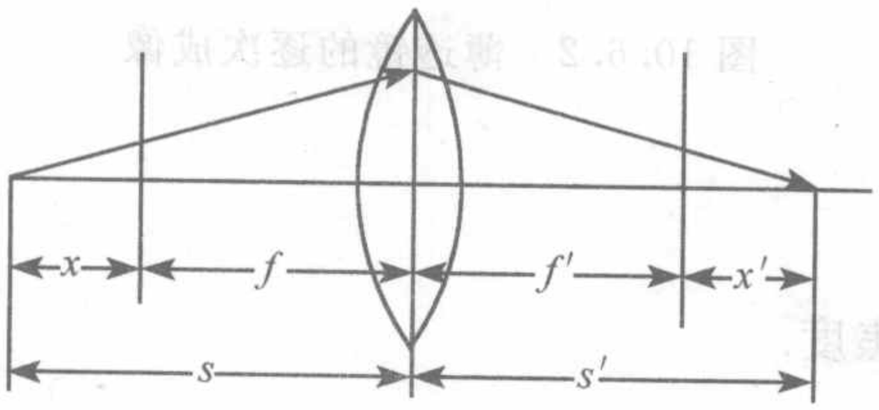


图 10.6.3 牛顿公式和高斯公式中的物距、像距

$$xx'=ff' \tag{10.6.7}$$

这就是牛顿物像公式.

由磨镜者公式可以看出,空气中,薄透镜焦距的正负取决于两球面的曲率半径,由于

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

如果 r_1 为正,r_2 为负,则焦距 f,f' 为正,这是普通的双凸透镜,中间厚边缘薄;如果 r_1 为负,r_2 为正,则焦距 f,f' 为负,这是普通的双凹透镜,中间薄边缘厚;

如果 r_1 为正,r_2 为正,且 $|r_1|>|r_2|$ 则焦距 f,f' 为正;如果 r_1 为负,r_2 为负,且 $|r_1|>|r_2|$ 则焦距 f,f' 为正,这是月牙形透镜,中间厚边缘薄;

如果 r_1 为负,r_2 为负,且 $|r_1|<|r_2|$,则焦距 f,f' 为负,中间薄边缘厚;

$f=f'>0$,像点在透镜右侧,为会聚透镜,称为正透镜,实焦点;$f=f'<0$,像点在透镜左侧,为发散透镜,称为负透镜,虚焦点.

综上所述,空气中,凡是中间厚边缘薄的透镜都是会聚的正透镜;反之是发散的负透镜,如图 10.6.4 所示.

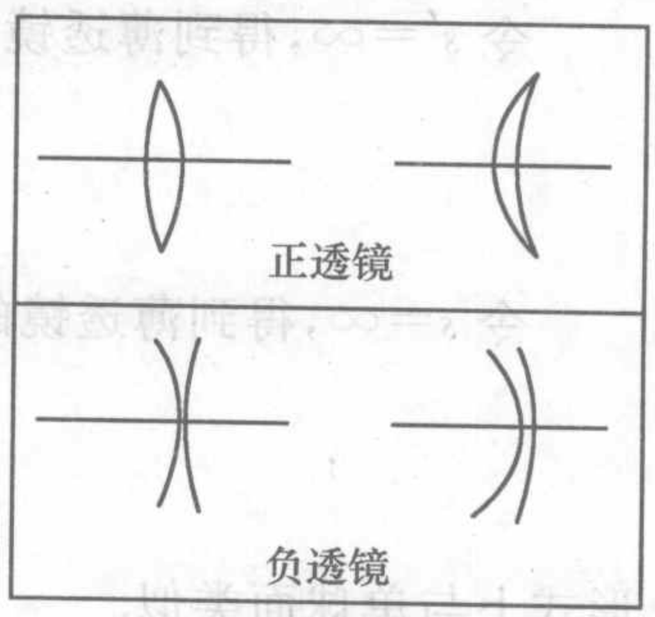


图 10.6.4 正透镜与负透镜

如果将薄透镜至于折射率大的介质中,如玻璃中的气泡,或水中的气泡所形成的透镜,则上述透镜的正负恰好相反.

如果从透镜对波面形状改变的观点来看,则上述结论是当然的.

3. 经过光心的光线

由于对称性,在光心处,可以认为透镜的两个表面相互平行,又由于透镜很薄,

$d\approx 0$，因而经过透镜光心的光线可以看作是透过了很薄的平行平板，故通过薄透镜光心的光线不改变方向.

例 10.6.1　L_1 和 L_2 为薄透镜，L_1 的焦距为 4cm，L_2 材料的折射率为 1.5，球面半径为 12cm，球面上镀有反射膜. L_1 和 L_2 间距为 10cm，如图 10.6.5，物在 L_1 左侧 5.6cm 处，求物最后成像的位置.

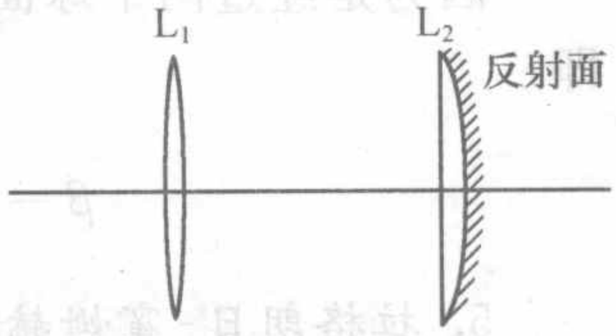


图 10.6.5　例 10.6.1

解　可以将第二个透镜看成是平凸透镜与凹面镜密接，则由于凹面镜的反射，共有 5 次成像过程，可以按照逐次成像的方法求解.

第二透镜的焦距为

$$f_2=\frac{1}{0+\dfrac{1-1.5}{-12}}=24(\mathrm{cm}),\quad f_2'=\frac{1}{0+\dfrac{1-1.5}{-12}}=24(\mathrm{cm}).$$

经第一透镜镜，像距为

$$s_1'=\frac{s_1f_1}{s_1-f_1}=\frac{5.6\times 4}{5.6-4}=14(\mathrm{cm})$$

在第二透镜右侧，是第二透镜的虚物，对第二透镜而言，物距为 $s_2=-4\mathrm{cm}$.

再经第二透镜成像

$$s_2'=\frac{s_2f_2'}{s_2-f_2}=\frac{-4\times 24}{-4-24}=\frac{24}{7}(\mathrm{cm}).$$

该像在反射球面之右，是反射镜的虚物，物距 $s_3=-\dfrac{24}{7}(\mathrm{cm})$.

反射镜成像. 由 $\dfrac{1}{s_3'}+\dfrac{1}{s_3}=-\dfrac{r_2}{2}$，得到

$$s_3'=-\frac{s_3\cdot\dfrac{r_2}{2}}{s_3+\dfrac{r_2}{2}}=-\frac{-\dfrac{24}{7}\times\dfrac{-12}{2}}{-\dfrac{27}{7}-\dfrac{12}{2}}=\frac{24}{11}(\mathrm{cm})$$

在反射球面的左侧，由于反射光还要依次经过 L_2、L_1，对于 L_2 而言，这是虚物，则物距 $s_4=-\dfrac{24}{11}(\mathrm{cm})$.

再经过第二透镜，设此时物方在右侧，

$$s_4'=\frac{s_4f_2'}{s_4-f_2}=\frac{-\dfrac{24}{11}\cdot 24}{-\dfrac{24}{11}-24}=2(\mathrm{cm})$$

在第二透镜的左侧.

最后再经过 L_1 成像，对于 L_1，有 $s_5=8\mathrm{cm}$，$s'=\dfrac{s_5f_1'}{s_5-f_1}=\dfrac{8\times 4}{8-4}=8(\mathrm{cm})$，在系统

左侧 8cm 处.

4. 像的横向放大率

因为是经过两个球面逐次成像,所以总放大率为两次成像的放大率的乘积,即

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \left(-\frac{ns''}{n_L s}\right)\left(-\frac{n_L s'}{-n's''}\right) = -\frac{ns'}{n's} \tag{10.6.8}$$

5. 拉格朗日-霍姆赫兹恒等式

容易看出,在逐次经过各个球面依次成像的过程中,拉格朗日-霍姆赫兹恒等式始终成立,即

$$ynu = y''n_L u'' = y'n'u' \tag{10.6.9}$$

10.6.3 薄透镜成像的作图法

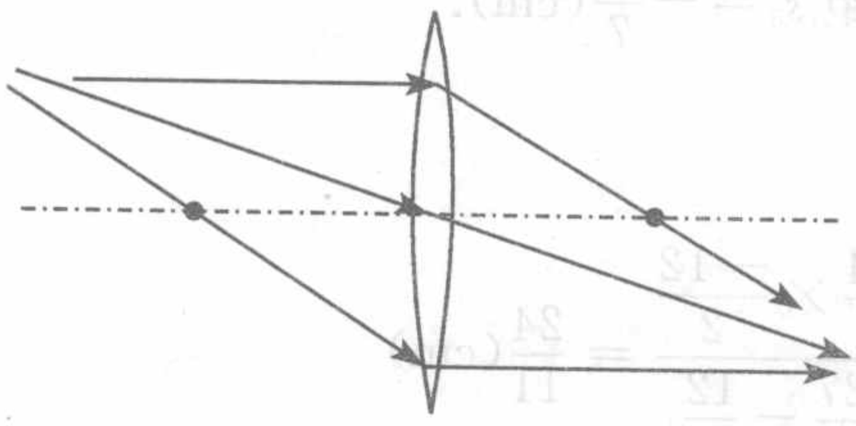
由薄透镜焦点和光心的特性,可知下列的特殊光线之间有一一对应的物像关系:

平行于光轴的物方入射光线⇔经过像方焦点的光线;

经过物方焦点的入射光线⇔平行于光轴的像方光线;

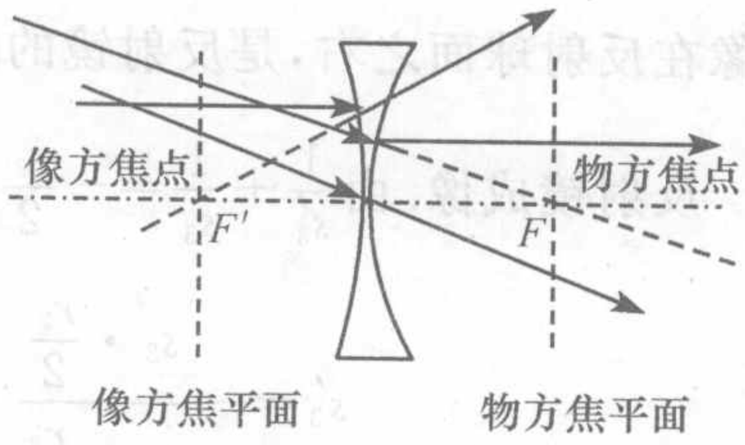
经过光心的物方入射光线⇔经过光心并与入射光线方向相同的像方光线.

上述三对特殊的光线之间是物像关系,因而称它们是相互共轭的. 如图 10.6.6、图 10.6.7 所示.



薄凸透镜作图法:三对基本光线的折射

图 10.6.6 凸透镜的共轭光线



薄凹透镜作图法:三对基本光线的折射

图 10.6.7 凹透镜的共轭光线

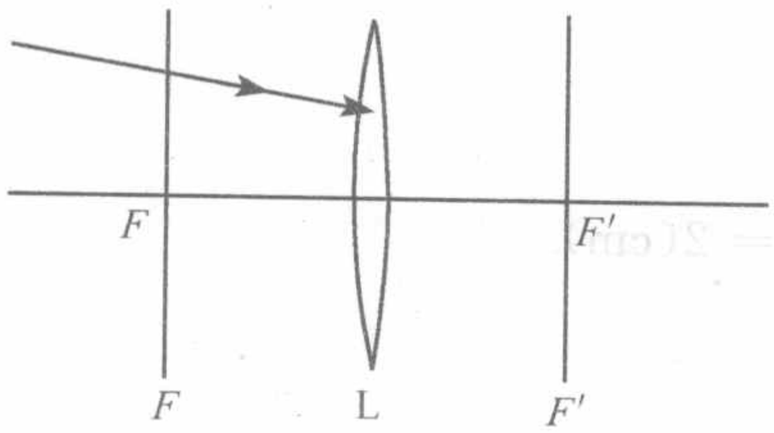


图 10.6.8 例 10.6.2 图

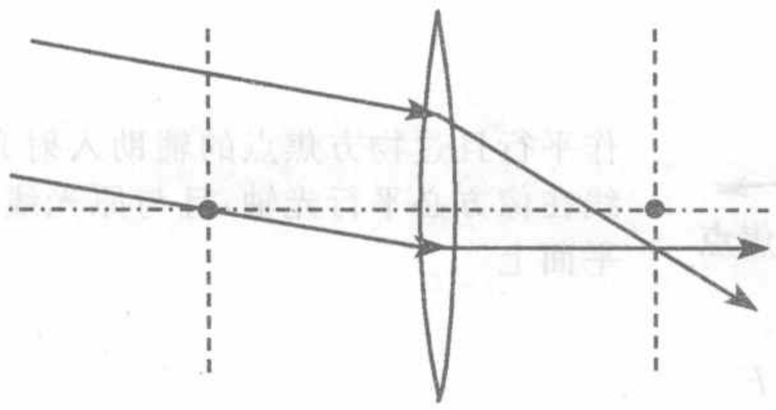
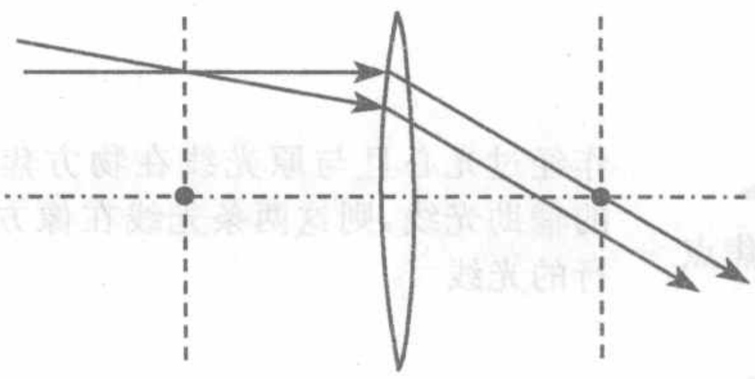
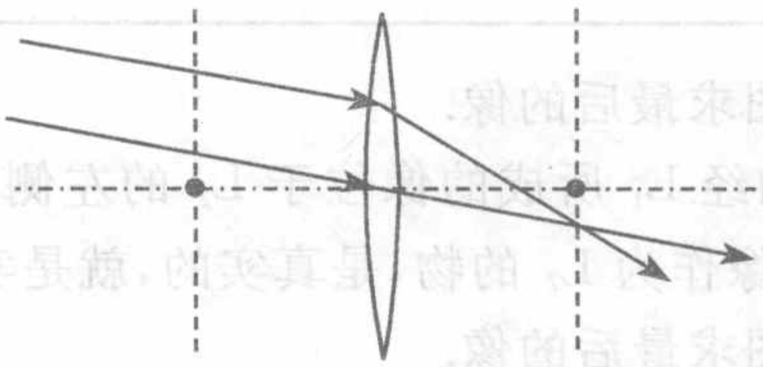
值得注意的是,对于负透镜,其物方焦点实际上位于像方,而像方焦点实际上位于物方.

下面通过具体的实例说明薄透镜成像的作图方法.

例 10.6.2 如图 10.6.8 所示,作出任意入射光线经凸透镜折射后的共轭光线.

三种作图法如表 10.6.1 所示.

表 10.6.1　例 10.6.2 的三种作图解法

方　法	作　图	说　明
1		作与该光线平行的入射光线，并使之过物方焦点，则其在像方为平行于光轴的光线，相互平行的入射光线必相交于像方焦平面上
2		作平行于光轴的入射光线，并与原入射光线在物方焦平面相交，则辅助光线经过像方焦点且与待求光线平行
3		作通过光心且与原光线平行的入射光线，则辅助光线在像方方向不变，且与待求光线在像方焦平面相交

例 10.6.3　将上题中的凸透镜换为凹透镜(图 10.6.9)，求共轭光线.

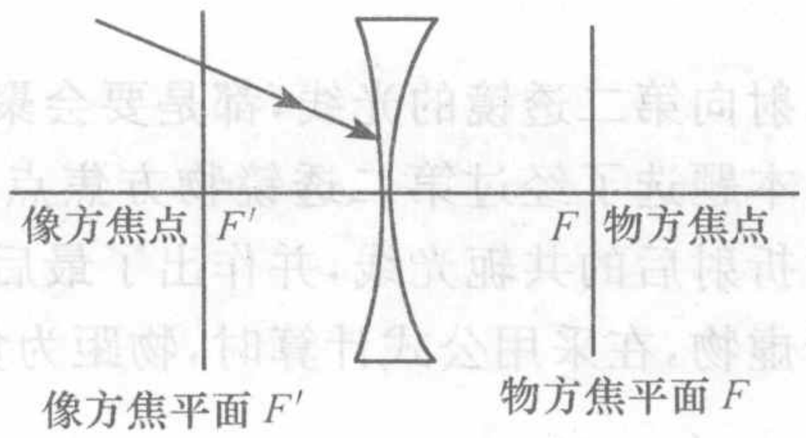
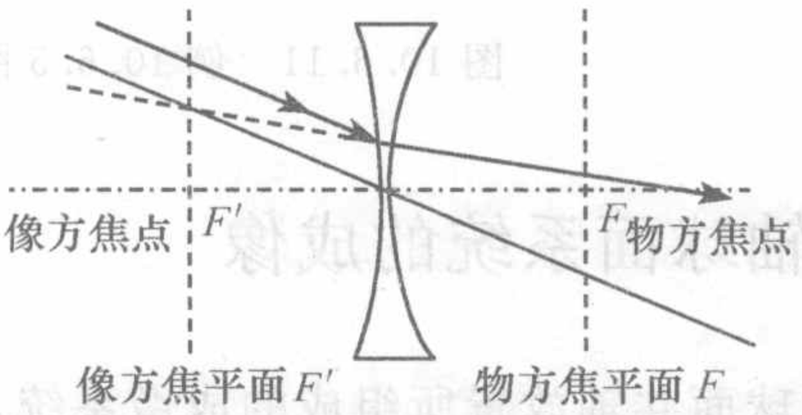


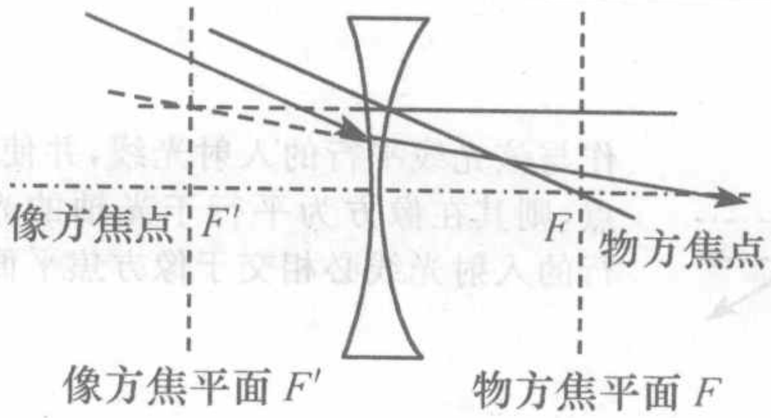
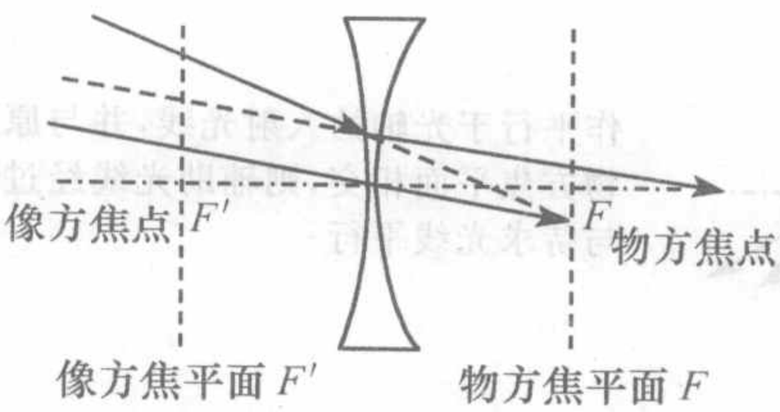
图 10.6.9　例 10.6.3 图

三种作图法如表 10.6.2 所示.

表 10.6.2　例 10.6.3 的三种作图解法

方　法	作　图	说　明
1		作平行且过光心的入射光线，则两光线必交于像方焦平面上，如图所示，由于像方焦平面位于物方(光线入射一方)，实际是折射光线的反向延长线在像方焦平面上相交

续表

方 法	作 图	说 明
2		作平行且过物方焦点的辅助入射光线，则辅助线在像方必平行光轴，且与原光线交于像方焦平面上
3		作经过光心且与原光线在物方焦平面上相交的辅助光线，则这两条光线在像方必是相互平行的光线

例 10.6.4 用逐次成像的方法作图求最后的像.

解 如图 10.6.10 所示，本题中，物经 L_1 所成的像位于 L_2 的左侧(物方)，即在经过 L_2 之前已经成一实像，因此，该像作为 L_2 的物，是真实的，就是实物.

例 10.6.5 用逐次成像的方法作图求最后的像.

在本题应用作图法，会发现，第一透镜的像成在第二透镜的像方，即对于第二透镜来说，第一透镜的像是“虚物”. 虚物是不能作为物发光成像的，因而需要特殊处理.

如图 10.6.11 所示，射向第二透镜的光线，都是要会聚到虚物处的，因而，可以任意选两条特殊的光线，本题选了经过第二透镜物方焦点的和平行于光轴的两条光线，则很容易就确定了折射后的共轭光线，并作出了最后成像的位置.

需要说明的是，对于虚物，在采用公式计算时，物距为负值.

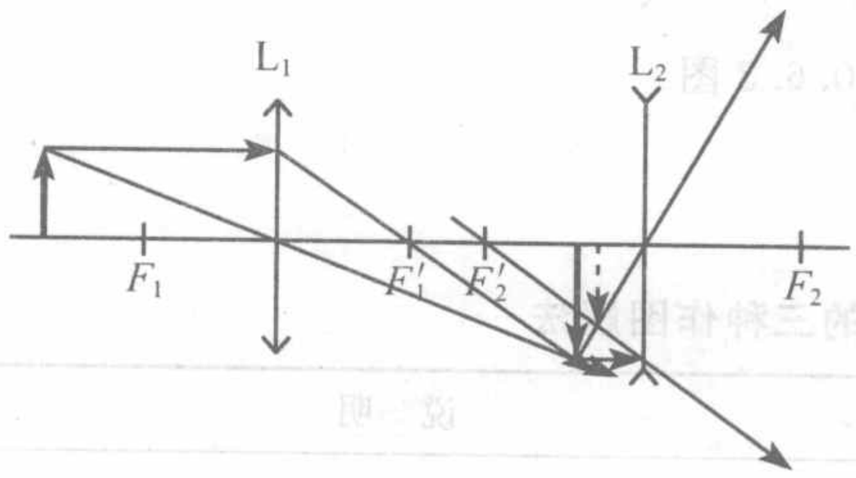


图 10.6.10 例 10.6.4 图

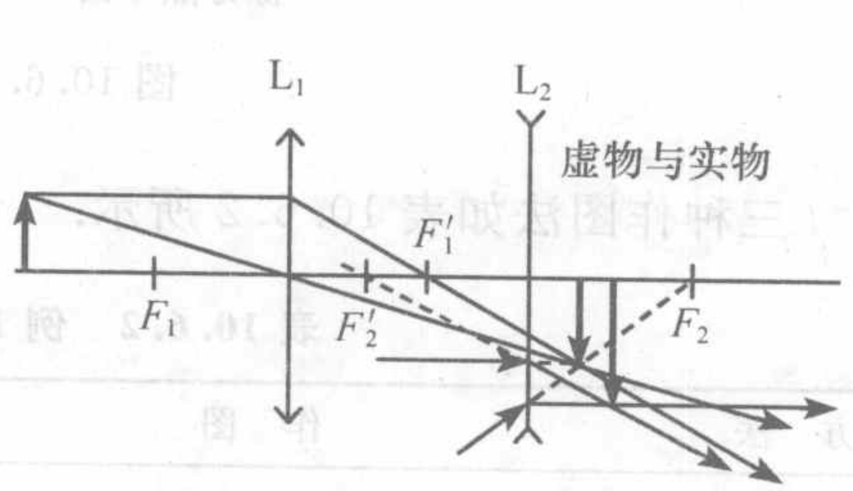


图 10.6.11 例 10.6.5 图

10.7 理想共轴球面系统的成像

由多个球面透镜、反射球面或折射球面共轴放置所组成的成像系统，就是共轴

球面系统.

为了获得优质的像,照相镜头、望远镜、显微镜、投影镜头等几乎所有的成像系统都采用了多个共轴的透镜和反射镜,这样的系统应用广泛,因而对其物像关系的研究是十分必要的.

这样的系统中,成像是一种逐次的过程,因而可以采用逐次成像法得出系统的物像关系.但是,如果对每一个不同的系统,都反复这样计算,显然是不合适的,因而,有必要找出复杂系统成像的基本特性和共同规律.

本节讨论的共轴光具组是一种可以完美成像的理想光学系统.该系统应当满足如下的要求:

(1) 物方每一个点对应于像方的一个点,两者是一对共轭点;

(2) 物方每一条直线对应于像方的一条直线点,两者是一对共轭线;

(3) 物方每一个平面对应于像方的一个平面,两者是一对共轭平面;

(4) 光轴上任何一点的共轭点仍在光轴上;

(5) 任何垂直于光轴的平面,其共轭面仍与光轴垂直;

(6) 在垂直于光轴的同一个平面内,横向放大率相同;

(7) 在垂直于光轴的不同平面内,横向放大率一般不同;但是,如果有两个垂轴平面内的横向放大率相同,则该系统内横向放大率处处相同.这样的系统称作望远系统.

正是基于上述要求,可以定义理想共轴光学系统的基点(cardinal point)和基面(cardinal plane).

10.7.1　共轴球面系统的基点和基面

对于薄透镜,只要知道了光心位置以及物方和像方,则可以用物像公式方便地解决任何光线的成像问题.同样,对于共轴的球面系统,确定了基本的点和面后,也可以完全确定物像关系.

共轴球面系统的基点和基面如下:

1. 焦点

物方无穷远处的物点在像方的共轭点就是像方焦点,记为 F';像方无穷远处的像点在物方的共轭点就是物方焦点,记为 F.

焦点就是平行于系统光轴的光束的共轭点.

2. 焦平面

与无穷远处的像平面共轭的物平面为物方焦平面,记为 F;与无穷远处的物平面共轭的像平面为像方焦平面,记为 F'.

也就是说,平行光束,其实就是来自无穷远处的一列同心光束,将会聚在像方焦平面上的一个点;从物方焦平面上一点发出的同心光束,将会聚于无穷远处,其实就是像方的平行光束,即中心在焦面上的同心光束,其共轭光束就是平行光束.

3. 主平面

横向(垂轴)放大率等于 1 的一对共轭平面为主平面(principal plane).物方主

平面记为 H，像方主平面记为 H'.

对于薄透镜而言，通过光心且与光轴垂直的平面，是物方和像方的分界面，既处于物方，也处于像方，而且横向放大率为 1，所以，就是其主平面. 距离凸透镜 $2f$ 的一对共轭面，其横向放大率为 -1，所以不是主平面. 同样，单个反射球面，或折射球面，其主平面就是过球面顶点的垂轴平面.

如果是厚透镜，或者是一般的共轴光具组，其物方和像方主平面往往是分离的. 那么，应当如何确定呢？

系统的焦点、焦平面可以按定义直接得到. 在仅仅知道了焦点的情况下，可以用作图法求出其主平面. 假设已知主平面 H 和 H'，其上有一对共轭点 M 和 M'，如图 10.7.1 所示. 则从 M 做两条光线：经过物方焦点 F 的 1 和平行于光轴的 2. 而 1 的共轭光线 $1'$ 必经过 M' 点且平行于光轴；同样，2 的共轭光线 $2'$ 必须过 M' 点和像方焦点 F'，在无法确定系统组成的情况下，则 $2'$ 只能是从 M' 到 F' 的连线. 由于两面上横向放大率为 1，则 M' 与 M 等高，或者 M' 与 M 的连线平行于光轴.

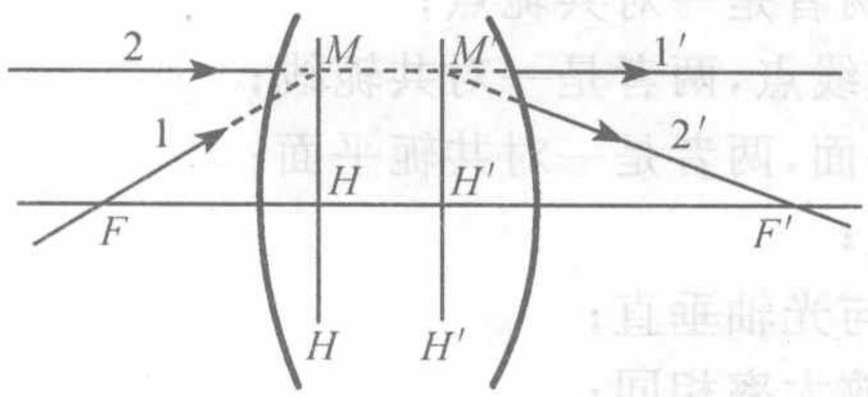


图 10.7.1 确定光具组的主平面

从上述过程也可以得到确定系统主面的方法：过物方焦点的光线与其平行于光轴的共轭光线的交点，就是物方主平面上的一点，过此点的垂轴平面就是物方主平面. 平行于光轴的入射光线与过像方焦点的共轭线的交点，就是像方主平面上的一点，过此点的垂轴平面就是像方主平面.

4. 主点

主平面与主光轴的交点为主点(principal point). 物方主点记作 H，像点主点记作 H'.

5. 节点

光轴上角放大率等于 1 的一对共轭点称为节点(nodal point)，如图 10.7.2 所示. 其中物方节点记作 N，像方节点记作 N'.

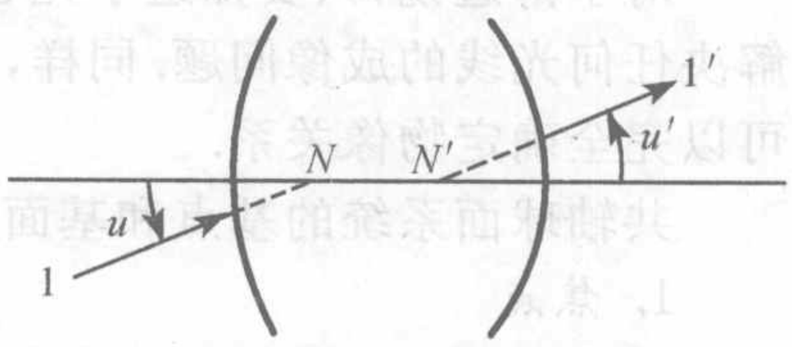


图 10.7.2 光具组的节点

10.7.2 共轴球面系统的物像关系

对于基点和基面已知的共轴球面光学系统，可以用简单的方法获得其物像关系.

1. 作图法

如图 10.7.3 所示，已知光具组的基点和基面，物 PQ 经光具组后，根据焦点、主平面的特性，容易用作图法求的成像为 $P'Q'$.

2. 计算法

对于上述用作图法获得的物像关系，也可以用公式表达. 图 10.7.3 中，所有的距离(物距、像距、焦距等)都从主平面算起，而且仍然按照本章前面的符号约定.

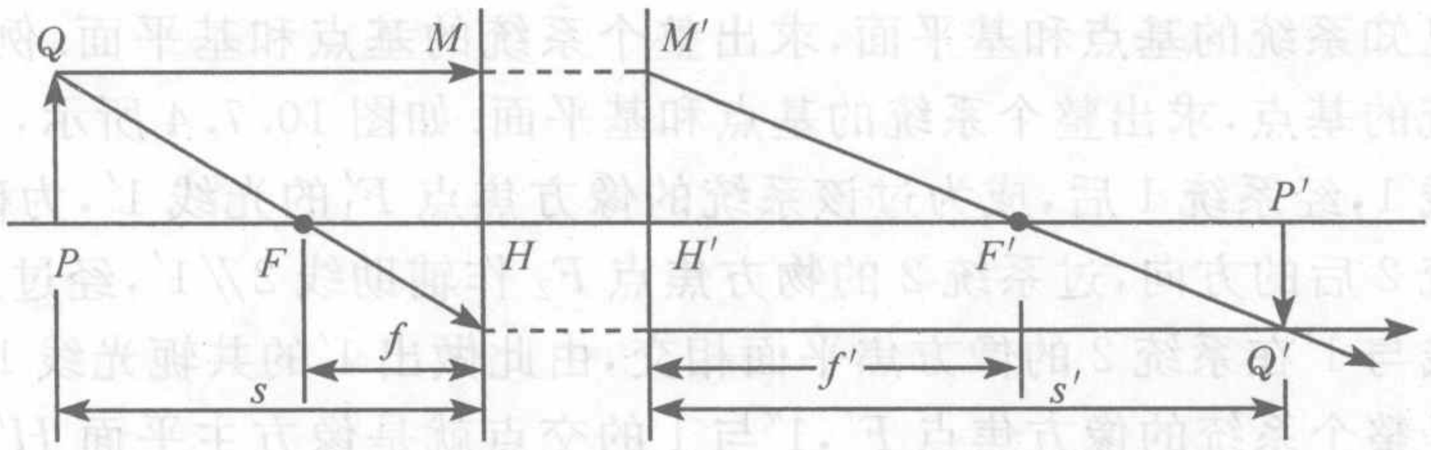


图 10.7.3　共轴球面系统作图法

由于$\triangle PFQ\sim\triangle HFR$,所以,

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{FH}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{HR}} \tag{10.7.1}$$

同样,$\triangle P'F'Q'\sim\triangle H'F'R'$

$$\frac{\overline{P'F'}}{\overline{F'H'}}=\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{M'H'}} \tag{10.7.2}$$

而$\overline{HR}=\overline{P'Q'}=y'$,$\overline{M'H'}=\overline{PQ}=y$

式(10.7.1)与式(10.7.2)相乘,得到

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{FH}}\frac{\overline{P'F'}}{\overline{F'H'}}=1,$$

即

$$\frac{s-f}{f}\frac{s'-f'}{f'}=1$$

整理后可得到

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1$$

形式上与薄透镜的高斯公式一样,这就是理想共轴球面光学系统的高斯公式.

同样,如果物距从焦平面算起,可得理想光具组的牛顿公式 $xx'=ff'$.

对已知参数的共轴球面系统,无论用作图法还是计算法,其原理和步骤都与单个薄透镜的成像情况相同.

10.7.3　基点和基平面的确定

由已知的系统的基点和基平面求整个系统的基点和基平面.

1. 作图法

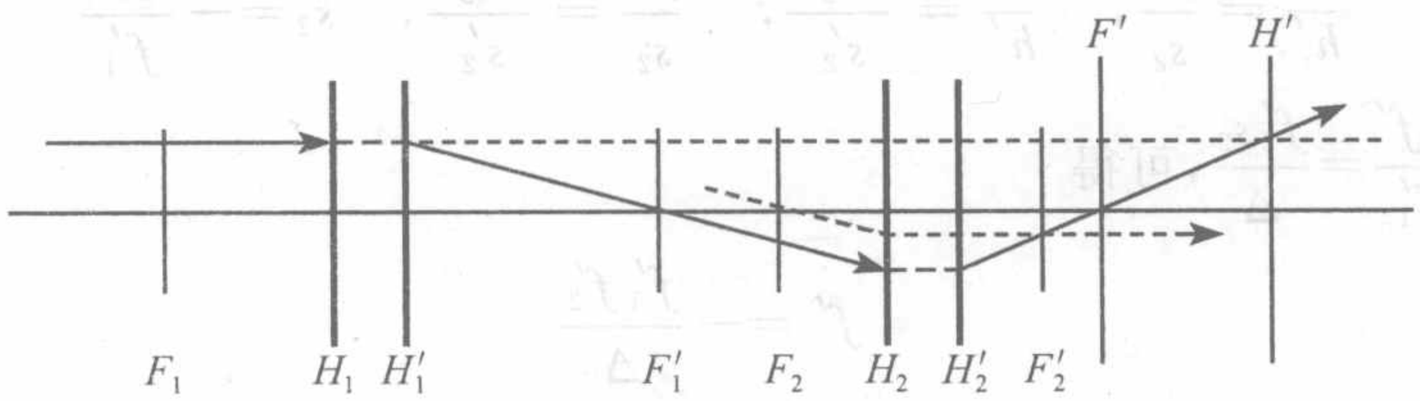


图 10.7.4　确定光具组的基点和基平面

利用已知系统的基点和基平面，求出整个系统的基点和基平面. 例如，已知两个光学系统的基点，求出整个系统的基点和基平面. 如图 10.7.4 所示，一平行于光轴的入射线 1，经系统 1 后，成为过该系统的像方焦点 F_1' 的光线 1′，为确定这一光线经过系统 2 后的方向，过系统 2 的物方焦点 F_2 作辅助线 2//1′，经过系统 2 后，2 的共轭光线与 1′在系统 2 的像方焦平面相交，由此做出 1′的共轭光线 1″. 1″与光轴的交点就是整个系统的像方焦点 F'，1″与 1 的交点就是像方主平面 H' 上的一点. 由此可以求出系统像方焦平面、像方焦点、像方主平面、像方主点. 按相同的步骤，可以求出系统的物方焦平面、物方焦点、物方主平面、物方主点.

2. 计算法

如图 10.7.5 所示，记第一系统像方焦点到第二系统物方焦点间距 $\overline{F_1'F_2}=\Delta$，$\Delta$ 称作两系统的间隔. 记第一系统像方主点到第二系统物方主点间距 $\overline{H_1'H_2}=d$，可见

$$\Delta = d - f_1' - f_2 \tag{10.7.3}$$

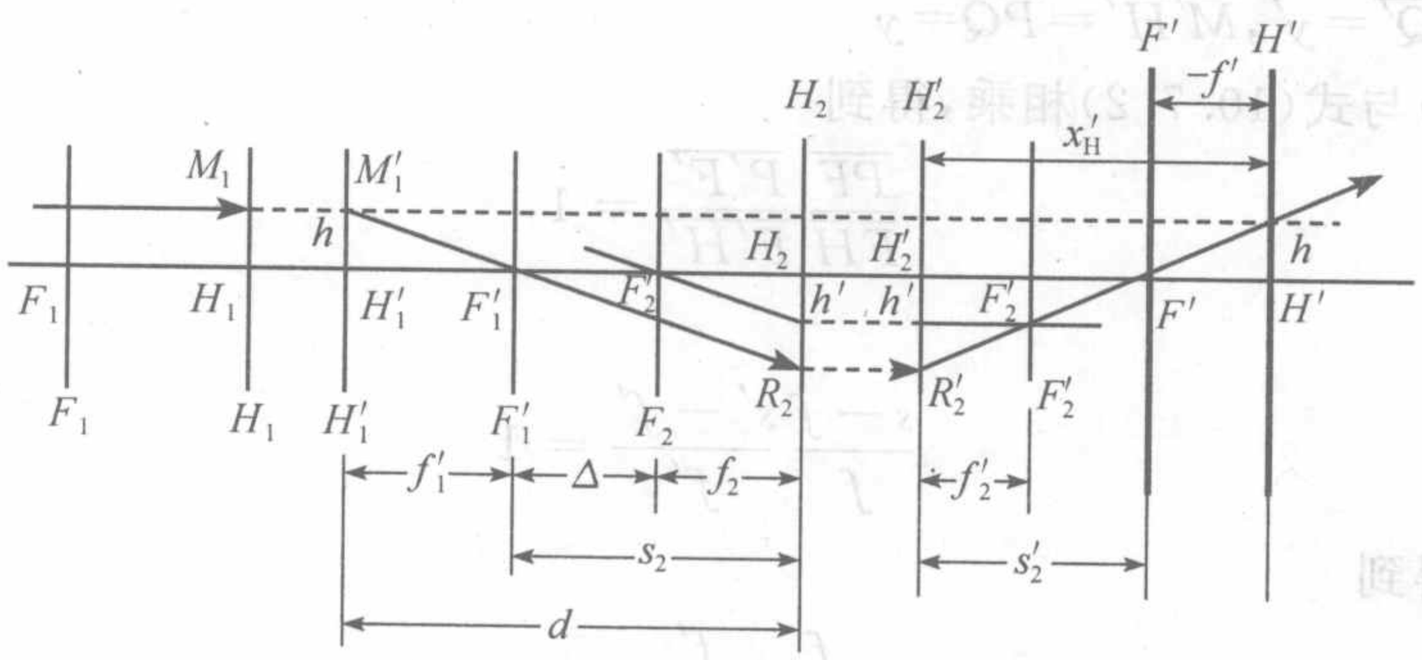


图 10.7.5 关于基点位置的计算

对于系统 2，F_1' 与 F' 共轭，有

$$\frac{f_2'}{s_2'}+\frac{f_2}{s_2}=1$$

得到

$$s_2' = \frac{f_2' s_2}{s_2 - f_2} = \frac{f_2' s_2}{\Delta}$$

在两对对顶的直角三角形中，有以下比例关系

$$\frac{h}{h'}=\frac{f_1'}{s_2},\quad \frac{h}{h'}=\frac{-f'}{s_2'},\quad \frac{f_1'}{s_2}=\frac{-f'}{s_2'},\quad s_2'=-\frac{s_2 f'}{f_1'}$$

即 $s_2'=-\dfrac{s_2 f'}{f_1'}=\dfrac{f_2' s_2}{\Delta}$，可得

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \tag{10.7.4}$$

又

$$s_2'=-\frac{s_2 f'}{f_1'}=\left(-\frac{\Delta+f_2}{f_1'}\right)\left(-\frac{f_1' f_2'}{\Delta}\right)=\frac{(\Delta+f_2')f_2'}{\Delta}$$

$$x'_{\mathrm{H}}=s_2'-f'=\frac{(\Delta+f_2)f_2'}{\Delta}-\frac{f_1' f_2'}{\Delta}=\frac{(f_1'+\Delta+f_2)f_2'}{\Delta}$$

即

$$x'_{\mathrm{H}}=\frac{df_2'}{\Delta} \tag{10.7.5}$$

如果将上式中相应的共轭量作变换，即可得系统的物方焦平面和物方主平面的位置，即

$$f_1'\Leftrightarrow f_2,\quad f_2'\Leftrightarrow f_1,\quad f'\Leftrightarrow f,\quad x'_{\mathrm{H}}\Leftrightarrow x_{\mathrm{H}}$$

有

$$f=-\frac{f_1 f_2}{\Delta} \tag{10.7.6}$$

$$x_{\mathrm{H}}=\frac{df_1}{\Delta} \tag{10.7.7}$$

如果上述系统由两个薄透镜组成，且物方和像方都是空气，即透镜都置于空气中，故 $f_1'=f_2$，$f_2'=f_1$. 于是有

$$f=-\frac{f_1 f_2}{\Delta}=-\frac{f_1 f_2}{d-f_1-f_2}$$

光焦度为

$$\Phi=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2}=\Phi_1+\Phi_2-\Phi_1\Phi_2 d$$

对于两个薄透镜的组合，$f_1'=f_1$，$f_2'=f_2$，即有

$$f=f'=-\frac{f_1 f_2}{\Delta},\quad x_{\mathrm{H}}=\frac{df_1}{\Delta},\quad x'_{\mathrm{H}}=\frac{df_2}{\Delta}$$

10.7.4　光具组的阿贝正弦条件与齐明点

如图 10.7.6 所示，$P'Q'$ 为傍轴小物 PQ 的像，设该像已经消除了球差，光具组物方、像方的折射率分别为 n，n'. 其中各条光线满足以下条件：

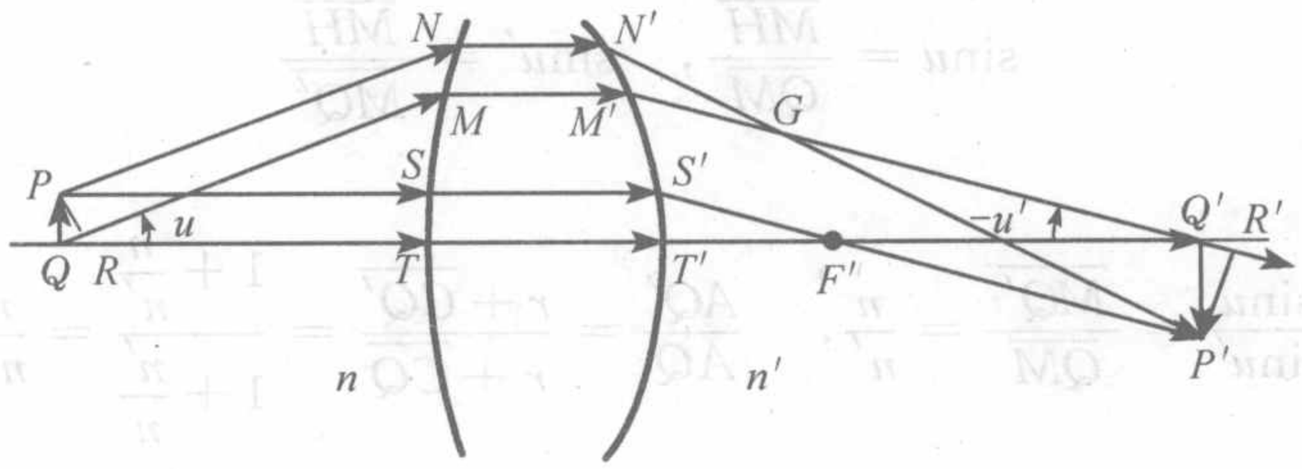


图 10.7.6

PS // 光轴，PN // QM，$PR\perp QM$，$P'R'\perp M'Q'$，R，R' 为垂足.

由于满足傍轴条件，有$\overline{F'Q'}\approx\overline{F'P'}$，$\overline{G'R'}\approx\overline{G'P'}$.

又由于物像间的等光程性，有$\overbrace{QMM'Q'}=\overbrace{QTT'Q'}$，$\overbrace{PNN'P'}=\overbrace{PSS'P'}$

由于 PS // 光轴，PN // QM，所以有

$$\overbrace{PSS'F'}=\overbrace{QTT'F'}\,,\overbrace{PNN'G'}=\overbrace{RMM'G'}$$

$$\overline{QR}=\overbrace{QMM'Q'}-RMM'G'-\overline{G'Q'}=\overbrace{QTT'Q'}-\overbrace{PNN'G'}-\overline{G'R'}+\overline{Q'R'}$$

$$=\overbrace{QTT'F'}+\overline{F'Q'}-\overbrace{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overbrace{PSS'F'}+\overline{F'P'}-\overbrace{PNN'P'}+\overline{Q'R'}$$

$$=\overbrace{PSS'P'}-\overbrace{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overbrace{PNN'P'}-\overbrace{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overline{Q'R'}$$

即 $n\overline{QR}=n'\overline{Q'R'}$，而$\overline{QR}=\overline{PQ}\sin u$，$\overline{Q'R'}=\overline{P'Q'}\sin(-u')$

记物高$\overline{PQ}=y$，像高$\overline{P'Q'}=-y'$，则有

$$ny\sin u=n'y'\sin u' \tag{10.7.8}$$

这就是阿贝正弦条件.

这是在轴上已消除球差的前提下，傍轴物点的一个大口径光束成像的充分必要条件，即阿贝正弦条件可以不要求光线满足傍轴条件. 满足阿贝正弦条件的一对共轭点，称作齐明点.

例如，折射率为 n 的球体，处于折射率为 n' 的环境中(图 10.7.7)，轴上物点 Q，发出任意方向光线，与球面交于点 M，折射光线反向延长后，与光轴交于 Q' 点. 由于 Q' 点为虚像点，所以物像间的光程为 $n\overline{QM}-n'\overline{MQ'}$.

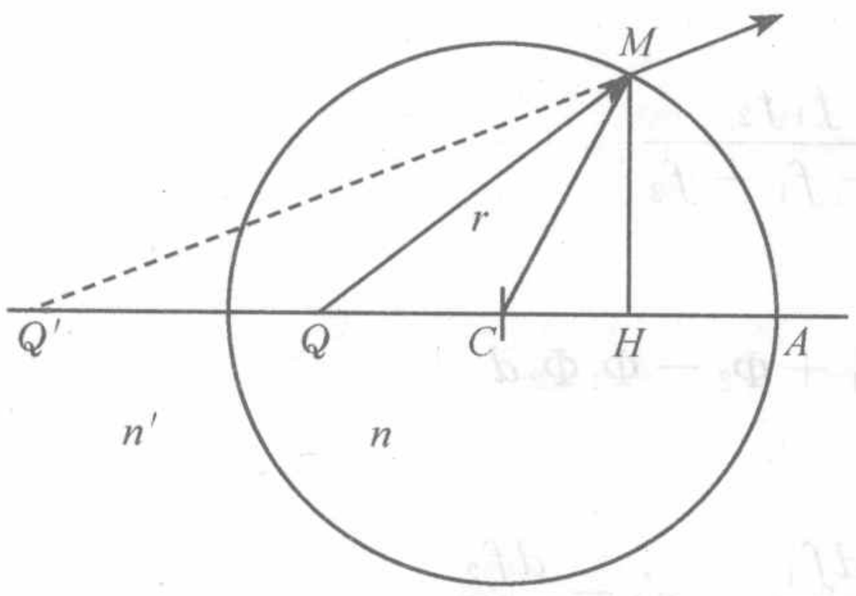


图 10.7.7 透明球的齐明点

如果满足关系$\overline{QC}=\frac{n'}{n}r$，$\overline{Q'C}=\frac{n}{n'}r$，则有

$$\frac{\overline{QC}}{r}=\frac{n'}{n}=\frac{r}{\overline{Q'C}},\quad \triangle QCM\sim\triangle MQ'C$$

于是，$\frac{\overline{QM}}{\overline{MQ'}}=\frac{\overline{QC}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{QC}}{r}=\frac{n'}{n}$，$n\overline{QM}=n'\overline{MQ'}$

Q、Q' 间光程为 $n\overline{QM}-n'\overline{MQ'}=0$. 即对于任意的 M 点，物像间都是等光程的. 它们是折射球面的一对齐明点.

同时，由于

$$\sin u=\frac{\overline{MH}}{\overline{QM}},\quad \sin u'=\frac{\overline{MH}}{\overline{MQ'}}$$

而

$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{MQ'}}{\overline{QM}}=\frac{n}{n'},\quad \frac{AQ'}{AQ}=\frac{r+\overline{CQ'}}{r+\overline{CQ}}=\frac{1+\frac{n}{n'}}{1+\frac{n'}{n}}=\frac{n}{n'}$$

所以有

$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}}$$

10.8　光线转换矩阵

10.8.1　光线状态的矩阵表示

光线的特征可以用其方向和线上一点的位置表示. 可用其相对于主光轴的角度表示其方向，用线上一点到主光轴的距离表示该点的位置. 光线经过球面后，方向改变，上述角度和高度的数值会发生改变.

1. 单球面的折射和反射

如图 10.8.1 所示，光线满足近轴条件，则折射定律可写作

$$ni = n'i' \tag{10.8.1}$$

图中，$i=\alpha-\beta, i'=\alpha'-\beta, -\beta=y/x$，式(10.8.1)变为

$$n(\alpha+y/x)=n'(\alpha'+y/x),$$

注意 $x=r$，则

$$n'\alpha'=n\alpha-\frac{n'-n}{r}y=n\alpha-\Phi y \tag{10.8.2}$$

其中 $\Phi=\dfrac{n'-n}{r}$，为单球面的光焦度.

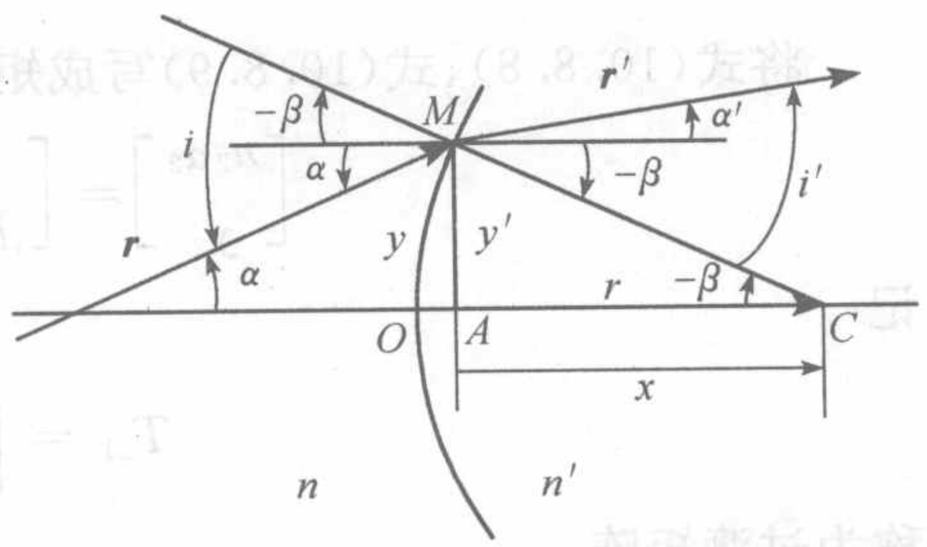


图 10.8.1　光线的状态表示

$$y'=y=0+y \tag{10.8.3}$$

式(10.8.2)、式(10.8.3)用矩阵表示，可写成

$$\begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \tag{10.8.4}$$

记

$$r=\begin{bmatrix} n\alpha \\ y \end{bmatrix} \tag{10.8.5}$$

$$r'=\begin{bmatrix} n'\alpha' \\ y' \end{bmatrix} \tag{10.8.6}$$

表示光线入射前后的状态，称为光线的状态矩阵. 而

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.8.7}$$

表示折射球面的作用，称为球面的折射矩阵.

对于反射球面，由于，$n'=-n=-1, \Phi=-\dfrac{2}{r}$.

2. 过渡矩阵

如图 10.8.2 所示，在两折射球面处，

$$y_2=y_1'+d_{21}\alpha_1'=\left(\frac{d_{21}}{n_1'}\right)n_1'\alpha_1'+y_1' \tag{10.8.8}$$

$$n_2\alpha_2 = n_1'\alpha_1' + 0 \tag{10.8.9}$$

其中，$n_1' = n_2$，为过渡空间的折射率 d_{21} 为过渡空间的长度.

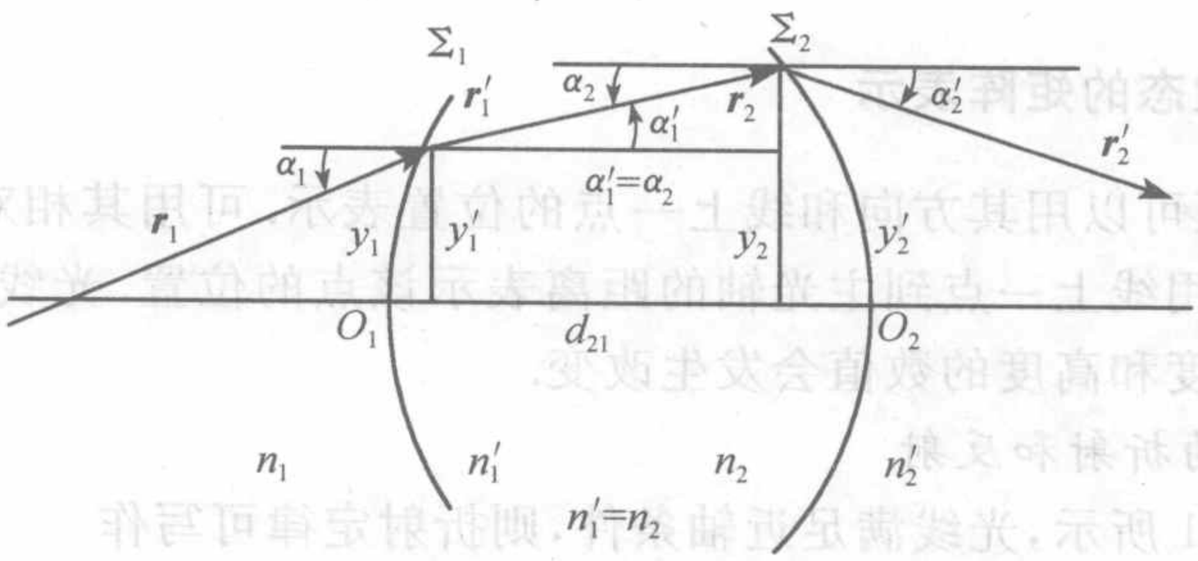


图 10.8.2 光线在折射球面间的过渡

将式(10.8.8)、式(10.8.9)写成矩阵，就是

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1'\alpha_1' \\ y' \end{bmatrix} \tag{10.8.10}$$

记

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix} \tag{10.8.11}$$

称为过渡矩阵.

则射向第二球面的光线状态为

$$r_2 = T_{21}r_1' = T_{21}R_1r_1$$

从第二球面出射的光线状态为

$$r_2' = R_2r_2 = R_2T_{21}R_1r_1 \tag{10.8.12}$$

式(10.8.12)反映了光线状态从 r_1 变为 r_2 所经历的矩阵运算，即由球面的折射矩阵 R_1 和 R_2、以及球面间的过渡矩阵 T_{21}，可以算出光线的状态.

$$S = R_2T_{21}R_1 \tag{10.8.13}$$

称为系统矩阵.

S 为 2×2 矩阵，可表示为 $S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$，有系统矩阵的定义式(10.8.13)，可以得到

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_1' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_1 \\ d_{21}/n_1' & -\Phi_1 d_{21}/n_1' + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\Phi_2 d_{21}/n_1' & -(\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2 d_{21}/n_1') \\ d_{21}/n_1' & 1-\Phi_1 d_{21}/n_1' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10.8.14}$$

系统矩阵的各个矩阵元为

$$S_{11} = 1 - \Phi_2 d_{21}/n_1' \tag{10.8.15}$$

$$S_{12} = -\left(\Phi_1 + \Phi_2 - \frac{\Phi_1 \Phi_2 d_{21}}{n_1'}\right) \tag{10.8.16}$$

$$S_{21} = \frac{d_{21}}{n_1'} \tag{10.8.17}$$

$$S_{22} = 1 - \frac{\Phi_1 d_{21}}{n_1'} \tag{10.8.18}$$

系统的光焦度

$$\Phi = -S_{12} \tag{10.8.19}$$

对于 n 个共轴球面系统，其系统矩阵一般可表示为

$$S = R_n T_{n,n-1} R_{n-1} \cdots R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1 \tag{10.8.20}$$

10.8.2　成像矩阵的计算

如图 10.8.3 所示，Q 点的物经过光具组后在 Q' 点成像，光线的状态矩阵为

$$r_Q = \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{bmatrix}, \quad r'_{Q'} = \begin{bmatrix} n'_m \alpha'_m \\ y' \end{bmatrix},$$

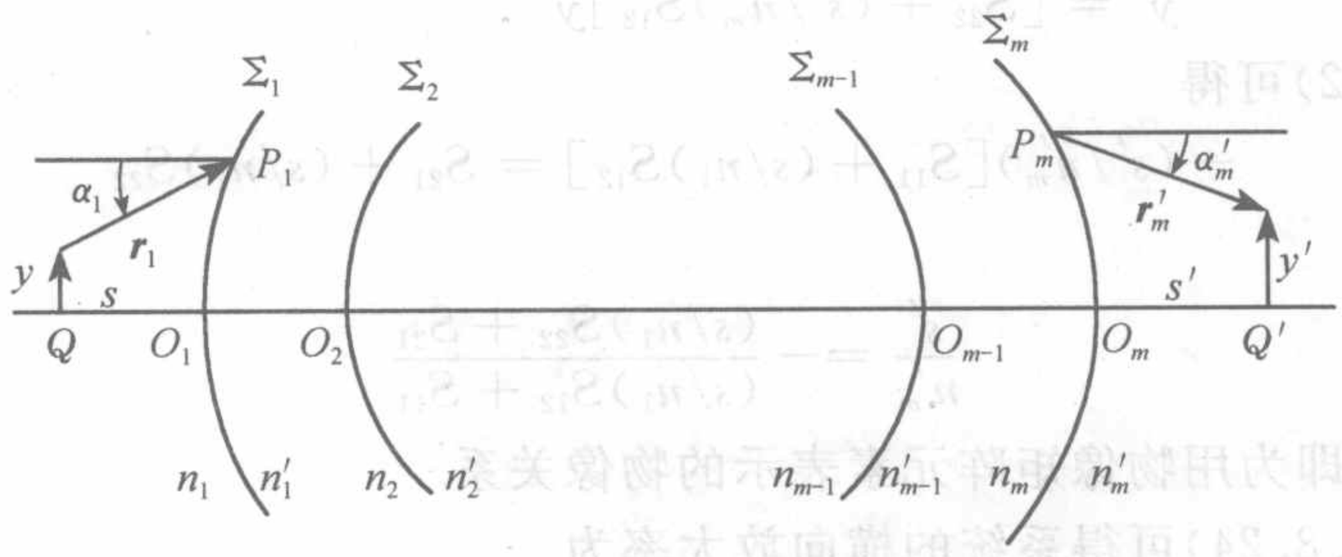


图 10.8.3　计算成像矩阵

从物方到第一个球面，即从 Q 到 P_1 处的过渡矩阵为

$$T_{1Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix}$$

从最后一个球面到像点，即从 P_m 到 Q' 处的过渡矩阵为

$$T_{Q'm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix}$$

Q 到 Q' 的光线的矩阵变换为 $r'_{Q'} = T_{Q'm'} S T_{1Q} r_Q$

则光线的变换用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} n'_m \alpha'_m \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s'/n'_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} + (s/n_1) S_{12} & S_{12} \\ S_{21} + (s/n_1) S_{22} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} S_{11}+(s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21}+(s/n_1)S_{22}+(s'/n'_m)S_{11}+(ss'/n_1n'_m)S_{12} & S_{22}+(s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} [S_{11}+(s/n_1)S_{12}]n_1\alpha_1+S_{12}y \\ [S_{21}+(s/n_1)S_{22}+(s'/n'_m)S_{11}+(ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1+[S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}]y \end{bmatrix}$$

记矩阵

$$A=\begin{bmatrix} S_{11}+(s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ S_{21}+(s/n_1)S_{22}+(s'/n'_m)S_{11}+(ss'/n_1n'_m)S_{12} & S_{22}+(s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix} \tag{10.8.21}$$

称为物像矩阵，其行列式的值等于 1.

$$y'=[S_{21}+(s/n_1)S_{22}+(s'/n'_m)S_{11}+(ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1+[S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}]y$$

近轴条件下，y'与 α_1 无关，

$$[S_{21}+(s/n_1)S_{22}+(s'/n'_m)S_{11}+(ss'/n_1n'_m)S_{12}]n_1\alpha_1=0 \tag{10.8.22}$$

物像矩阵化为

$$A=\begin{bmatrix} S_{11}+(s/n_1)S_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{22}+(s'/n'_m)S_{12} \end{bmatrix} \tag{10.8.23}$$

$$y'=[S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}]y \tag{10.8.24}$$

由式(10.8.22)可得

$$-(s'/n'_m)[S_{11}+(s/n_1)S_{12}]=S_{21}+(s/n_1)S_{22}$$

即

$$\frac{s'}{n'_m}=-\frac{(s/n_1)S_{22}+S_{21}}{(s/n_1)S_{12}+S_{11}} \tag{10.8.25}$$

式(10.8.25)即为用物像矩阵元素表示的物像关系.

由式(10.8.24)可得系统的横向放大率为

$$\beta=\frac{y'}{y}=S_{22}+(s'/n'_m)S_{12} \tag{10.8.26}$$

由式(10.8.23)可得

$$[S_{11}+(s/n_1)S_{12}][S_{22}+(s'/n'_m)S_{12}]=0$$

于是横向放大率亦可表示为

$$\beta=1/[S_{11}+(s/n_1)S_{12}] \tag{10.8.27}$$

故系统的物像矩阵可记为

$$A=\begin{bmatrix} 1/\beta & -\Phi \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{10.8.28}$$

10.9 几何光学仪器

10.9.1 人眼

眼球的结构如图 10.9.1 所示，它等效于一个可变焦距的凸透镜. 视网膜到光

心的距离等于眼睛对无穷远处聚焦时像方的焦距.通常,对物距为 25cm 的物体很容易看清楚.所以该距离被称为明视距离,记为 $s_0=25\text{cm}$.

也可以用一个简单的光学系统表示人眼,如图 10.9.2 所示,折射球面的曲率半径为 5.7mm,物方焦距和像方焦距分别为 17.1mm 和 22.8mm.这种模型称作简化眼.

如果用更加准确的模型表示人眼,则其中应包括多个折射球面,如图 10.9.3 所示,示意眼的光学参数列在表 10.9.1 中.

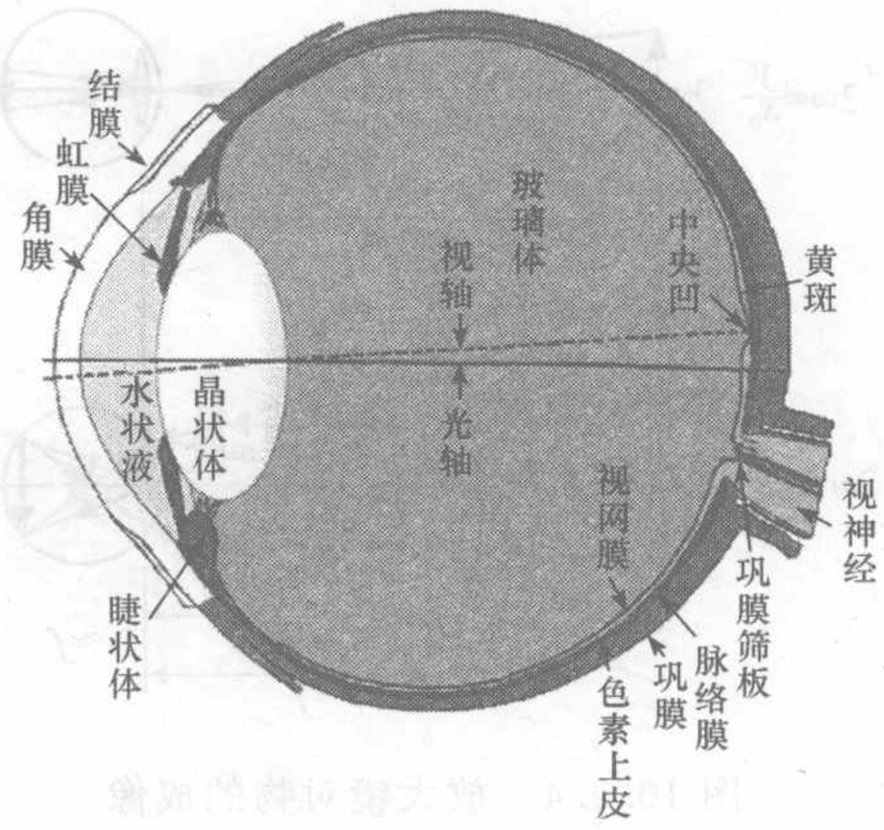


图 10.9.1　人眼的结构

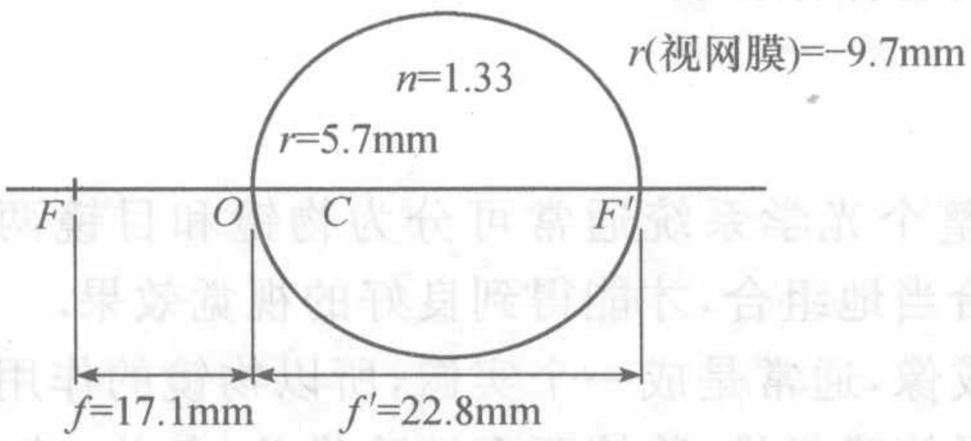


图 10.9.2　简化眼的光学参数

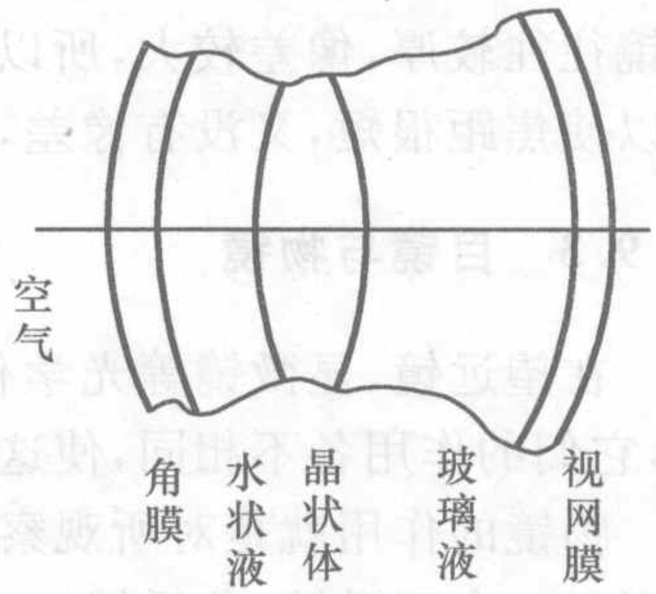


图 10.9.3　示意眼

表 10.9.1　示意眼光学参数

	厚度/mm	折射率	球面半径/mm
角膜	0.5	1.376	7.7
水状液	3.1	1.336	6.8
晶状体	3.6	1.386	10.0
玻璃液	17.2	1.336	−6.0 −9.7

10.9.2　放大镜

放大镜是一个凸透镜,当物处于放大镜的物方焦点之内时,可成一个放大、正立的虚像,便于眼睛观察.当所成的虚像处在眼睛的明视距离处时,眼睛的观察效果较好.

如图 10.9.4 所示,眼睛直接观察高度为 y 的物体时,通常将其置于明视距离 s_0 处.此时物对眼睛的张角为

$$2\omega=\frac{y}{s_0} \tag{10.9.1}$$

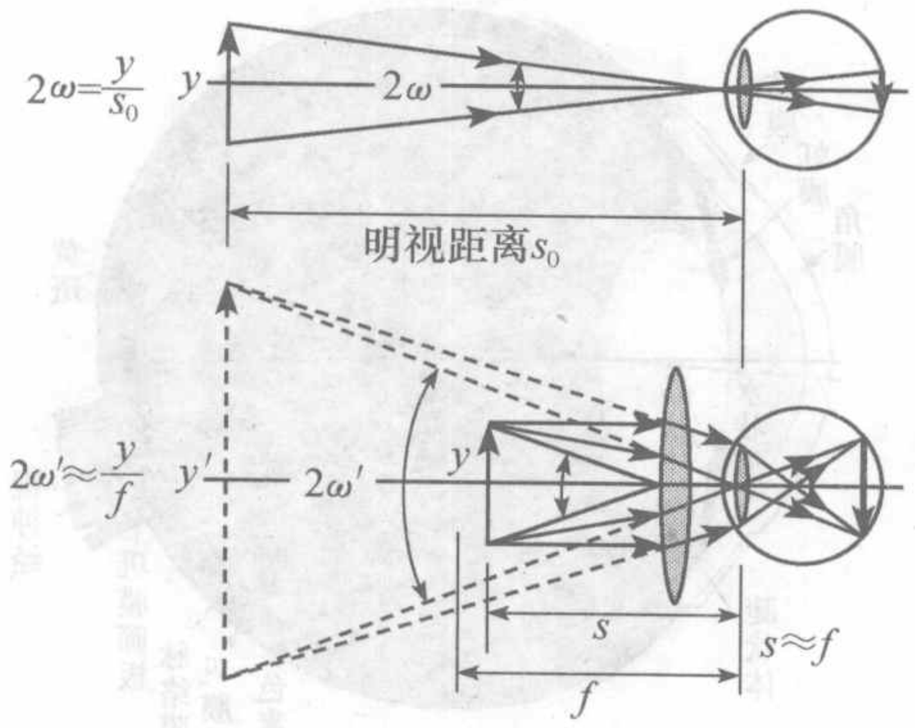


图 10.9.4 放大镜对物的成像

放大镜就是一个凸透镜，用放大镜观察，则要求物在眼的明视距离处成一虚像. 为了获得尽量大的放大率，常将物置于放大镜物方焦点的内侧较靠近焦点处. 物体在物方焦点内侧，成一正立放大虚像. 此时物对透镜的张角和虚像对眼睛的张角基本相等，则虚像对眼的张角为

$$2\omega' = \frac{y}{s} \approx \frac{y}{f} \qquad (10.9.2)$$

于是，角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{s_0}{f} = \frac{25}{f} \qquad (10.9.3)$$

短焦距透镜具有较大的放大率. 但由于短焦距透镜的球面曲率半径较小，这类透镜往往较厚，像差较大，所以，单个透镜的放大率不能很大. 可以用组合透镜，既可以使焦距很短，又没有像差，这类透镜被称作目镜.

10.9.3 目镜与物镜

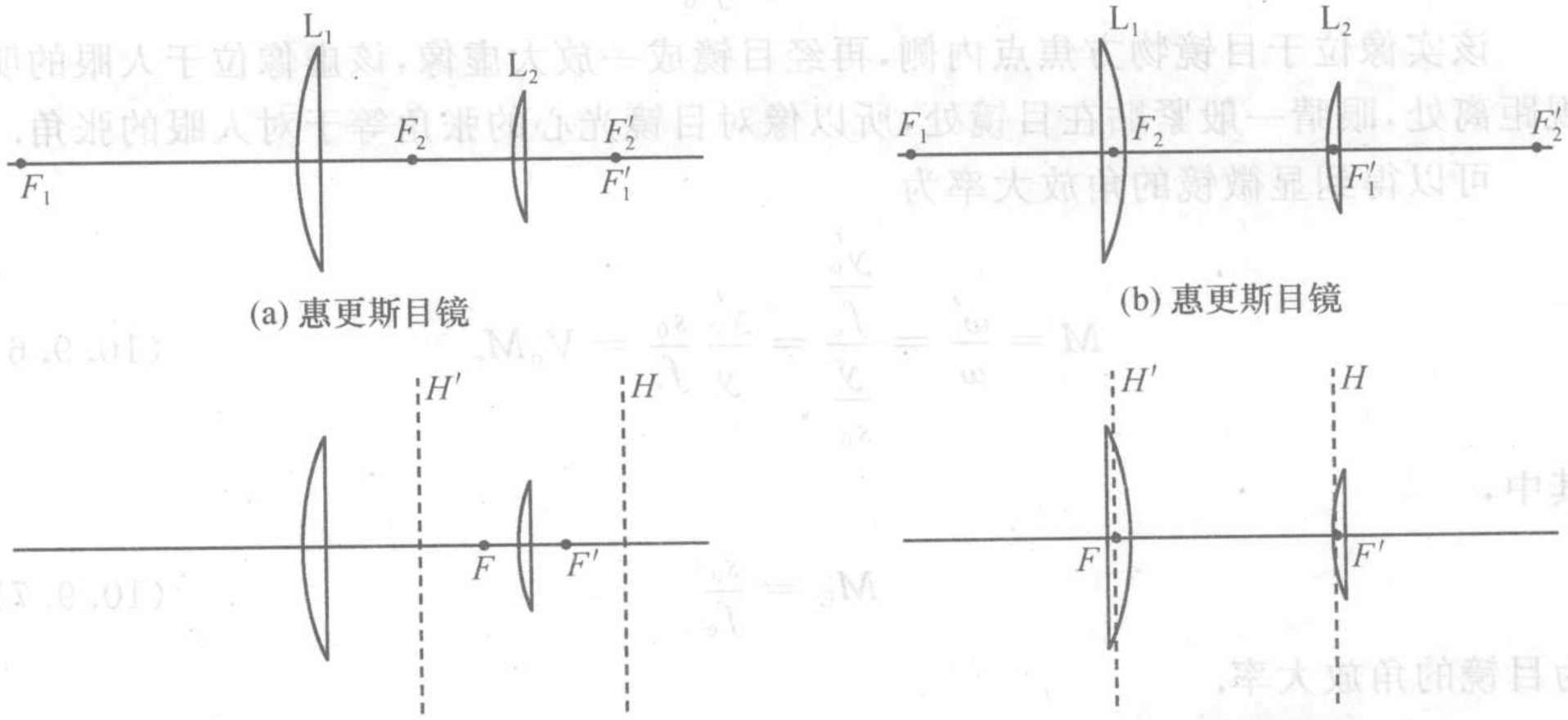
在望远镜、显微镜等光学仪器中，整个光学系统通常可分为物镜和目镜两部分，它们的作用各不相同，使这两部分恰当地组合，才能得到良好的视觉效果.

物镜的作用就是对所观察的物体成像，通常是成一个实像，所以物镜的作用就相当于一个正透镜(凸透镜). 当然，为了精确成像，物镜要有消除像差、色差、畸变、彗差等功能，所以好的物镜通常都是由多片凸透镜、凹透镜所构成的透镜组，而且，为了获得尽可能大的光通量，每一镜片的表面上都要涂以增透膜.

目镜的作用是将物镜所成的实像再成虚像于人眼的明视距离处，以获得清晰准确的视觉. 从这一角度出发，则放大镜(单片凸透镜)就是一个最简单的目镜，但是，为了消除各种视差，并获得尽可能大的放大倍数，实用的目镜也是由一组镜片所构成的透镜组. 而且，目镜的焦点必须与物镜的像保持特定的相对位置，即目镜与物镜间的光学距离要依据使用目的进行适当的组合. 常用的目镜是惠更斯目镜和冉斯登目镜.

惠更斯目镜不能用来观察实物，而只能观察物镜所成的像，即只能对虚物成像. 如图 10.9.5(a)所示，由两片平凸透镜组成，$f_1' = 3f_2'$，且两镜间隔 $d = (f_1' + f_2')/2$，则平行光入射，经第一透镜成像于第二透镜的像方焦点处，对于第二透镜而言，这是虚物，物距为 $-f_2'$，再一次成像，像距为 $s_2' = \frac{s_2 f_2'}{s_2 - f_2'} = \frac{f_2'}{2}$，即该目镜的像方焦点位于第二透镜右方 $\frac{f_2'}{2}$ 处，同样可得到其物方焦点在第一透镜右方 $\frac{f_1'}{2}$ 处. 或由利用理想光具组的公式 $x_H' = \frac{df_2'}{\Delta}$，$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$，$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$，$x_H = \frac{df_1}{\Delta}$ 计算，其中

$d=2f_2'$，$\Delta=-2f_2'$，可以得到 $x_H'=-f_2'$，$x_H=-f_1$，$f'=\dfrac{3f_2'}{2}$，$f=\dfrac{f_1}{2}$. 即物方主平面在 L_2 右侧 $f_2'/2$ 处，物方焦点在 L_1 右侧 $f_1'/2$ 处；像方主平面在 L_2 左侧 $f_2'/2$ 处，像方焦点在 L_2 右侧 $f_2'/2$ 处，如图 10.9.5(b)所示.



(a) 惠更斯目镜　　(b) 惠更斯目镜

(c) 冉斯登目镜　　(d) 冉斯登目镜

图 10.9.5　惠更斯目镜与冉斯登目镜

冉斯登目镜如图 10.9.5(c)所示，也是由两片平凸透镜组成，$f_1'=f_2'$，且两镜间隔 $d=(f_1'+f_2')/2$，$\Delta=-f_2'$. 同样可得到 $x_H'=-f_2'$，$x_H=-f_1$，$f'=f_2'$，$f=f_1$，如图 10.9.5(d)所示.

10.9.4　显微镜

显微镜由物镜、镜筒和目镜组成. 物镜焦距很短如图 10.9.6 所示. 物在物镜焦点外附近，成一放大倒立实像，像高为

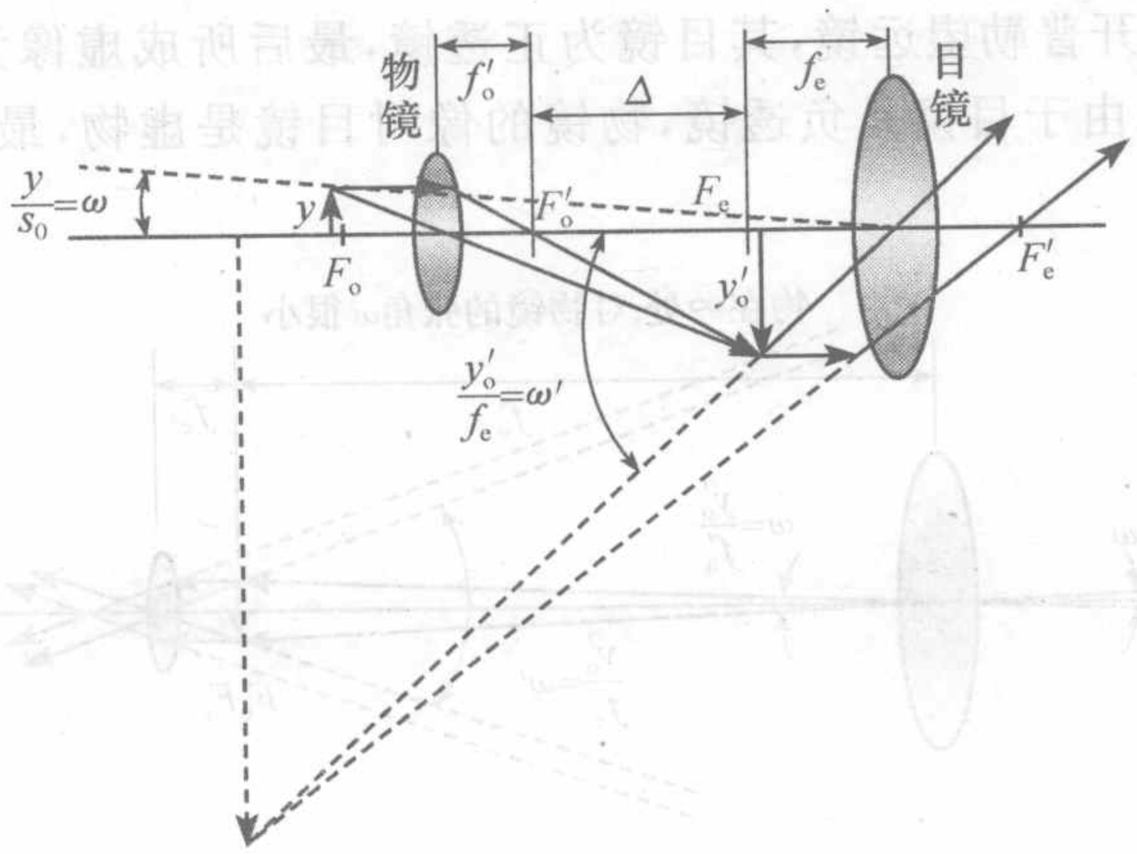


图 10.9.6　显微镜的光路

$$y_1' = -\frac{f_o' + \Delta}{f_o'} y \approx -\frac{\Delta}{f_o'} y \tag{10.9.4}$$

即物镜的角放大率为

$$V_o = -\frac{\Delta}{f_o'} \tag{10.9.5}$$

该实像位于目镜物方焦点内侧，再经目镜成一放大虚像，该虚像位于人眼的明视距离处，眼睛一般紧贴在目镜处，所以像对目镜光心的张角等于对人眼的张角.

可以得到显微镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\dfrac{y_o'}{f_e}}{\dfrac{y}{s_0}} = \frac{y_o'}{y}\frac{s_0}{f_e} = V_o M_e \tag{10.9.6}$$

其中，

$$M_E = \frac{s_0}{f_e} \tag{10.9.7}$$

为目镜的角放大率.

通常显微物镜的参数标识为 $V_o \times N.A.$，其中 $N.A.$ 是物镜的数值孔径.

10.9.5 望远镜

望远镜用以观察远处的物体，并使远处的物体在眼睛的明视距离处成一个虚像，便于眼睛观察. 远处的物体往往很大，如天体、山脉等，所以望远镜的作用并不是成一个放大的像. 远处的物体，对眼睛的张角 ω 很小，因此细节不能分辨. 望远镜就是将光线相对于光轴的夹角放大.

远处物体通过物镜在其像方焦点附近外侧成一倒立实像. 望远镜的物镜的像方焦点和目镜的物方焦点重合. 故该实像在目镜的焦点内侧，经目镜成一放大虚像.

图 10.9.7 为开普勒望远镜，其目镜为正透镜，最后所成虚像为倒立；图 10.9.8 为伽利略望远镜，由于目镜是负透镜，物镜的像对目镜是虚物，最后经目镜所成为正立的虚像.

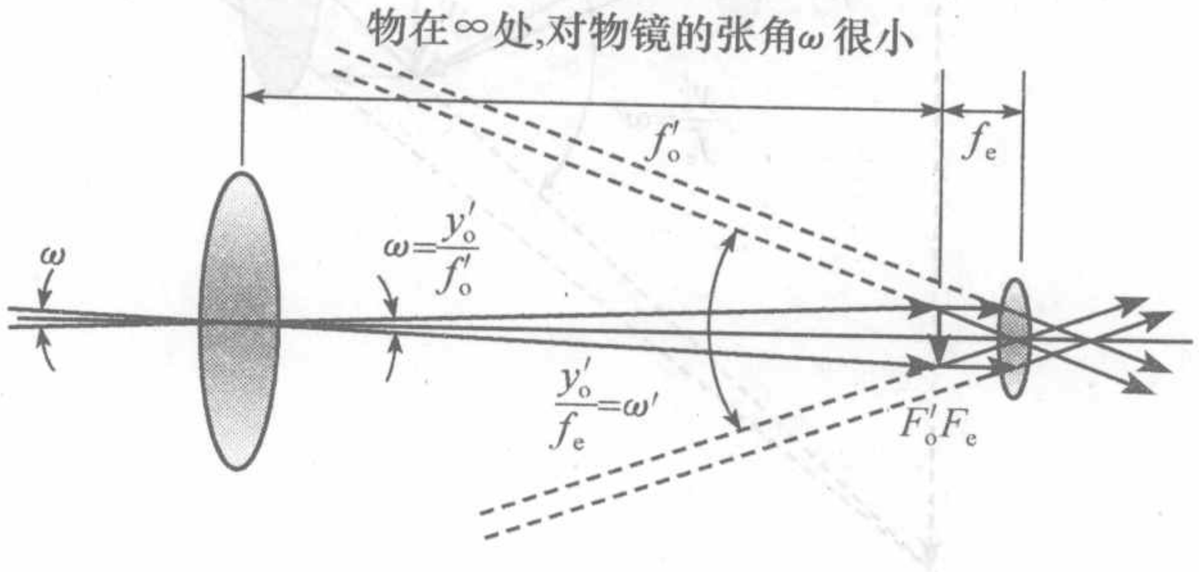


图 10.9.7 开普勒望远镜

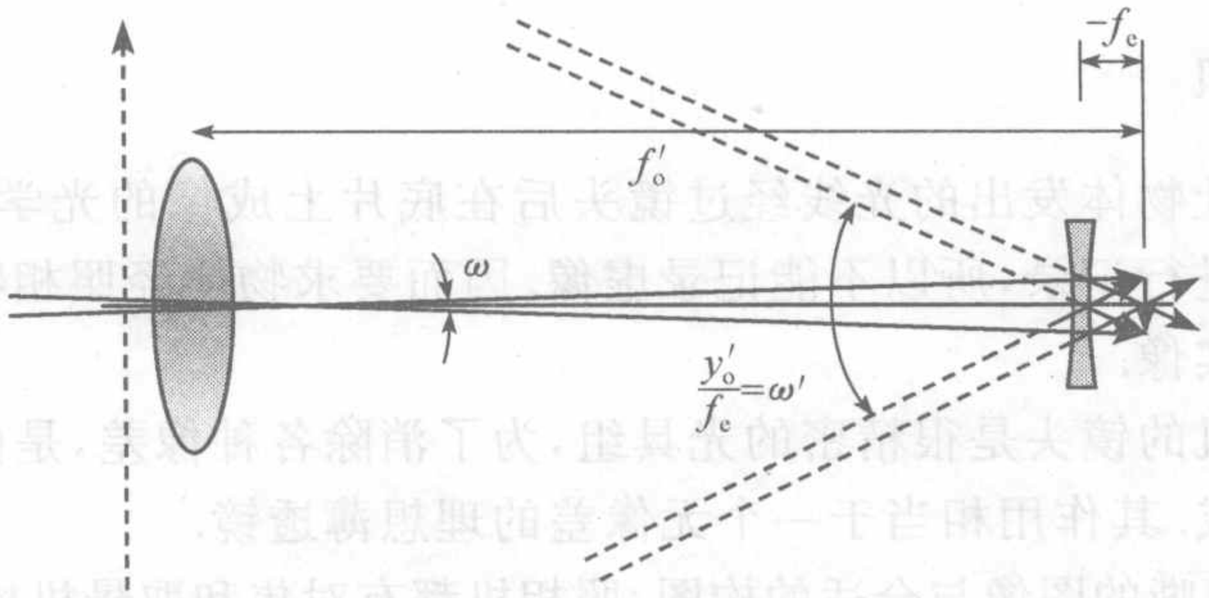


图 10.9.8　伽利略望远镜

由于物很远，所以物对眼睛的张角，等于对物镜的张角，也就是实像对物镜的张角

$$\omega = \frac{y'_o}{f'_o} \tag{10.9.8}$$

而由图 10.9.7 或图 10.9.8 可以看出，虚像对眼睛的张角等于物镜的像对目镜的张角，于是

$$\omega = \frac{y'_o}{f_e} \tag{10.9.9}$$

则望远镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{-y'_o/f_e}{y'_o/f'_o} = -\frac{f'_o}{f_e} \tag{10.9.10}$$

因此，物镜的焦距比目镜的焦距大得越多，则角放大率越大. 因而，高倍数的望远镜的镜筒往往很长.

望远镜的参数标识为 $M\times D$，D 为物镜的孔径.

双筒望远镜（图 10.9.9）中有一对组合全反射三棱镜，即玻罗组合棱镜（图 10.9.10）. 一方面折返的光路相当于使镜筒增长，另一方面使倒像转为正像.

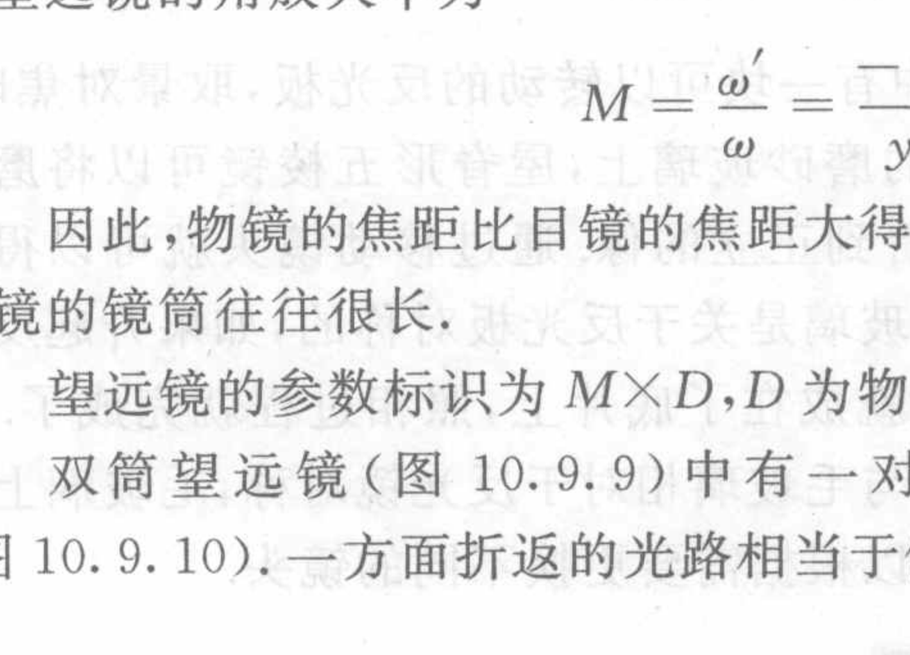


图 10.9.9　双筒望远镜

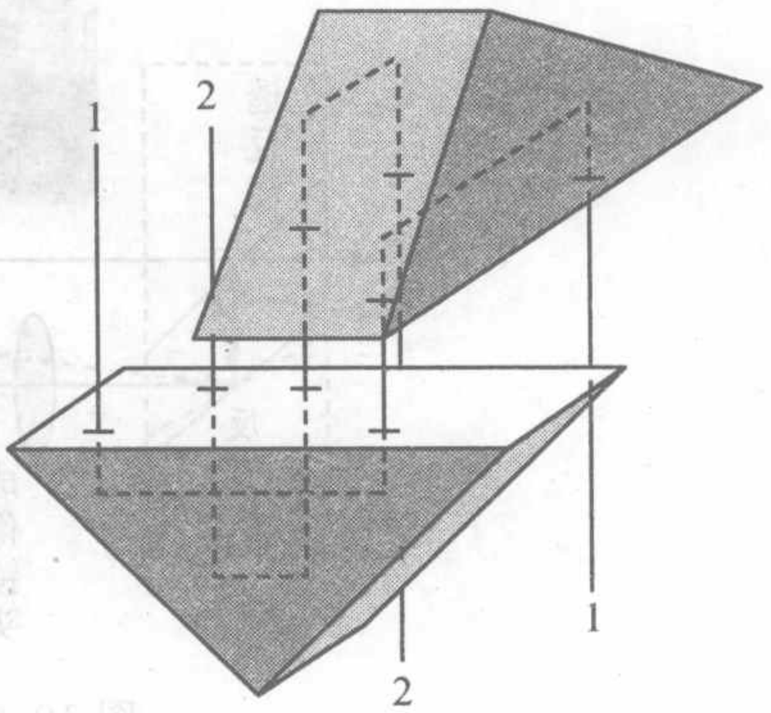


图 10.9.10　玻罗组合棱镜

10.9.6 照相机

照相机是让物体发出的光线经过镜头后在底片上成像的光学仪器. 因为底片对光线感光并进行记录,所以不能记录虚像. 因而要求物体经照相物镜(镜头)在底片上成一倒立实像.

高级照相机的镜头是很精密的光具组,为了消除各种像差,是由各种不同形状的透镜组合而成. 其作用相当于一个无像差的理想薄透镜.

为了获得清晰的图像与合适的构图,照相机都有对焦和取景机构. 按照取景方式的不同,光学照相机主要有单镜头反光式(图 10.9.11)和旁轴取景式(图 10.9.12)两种.

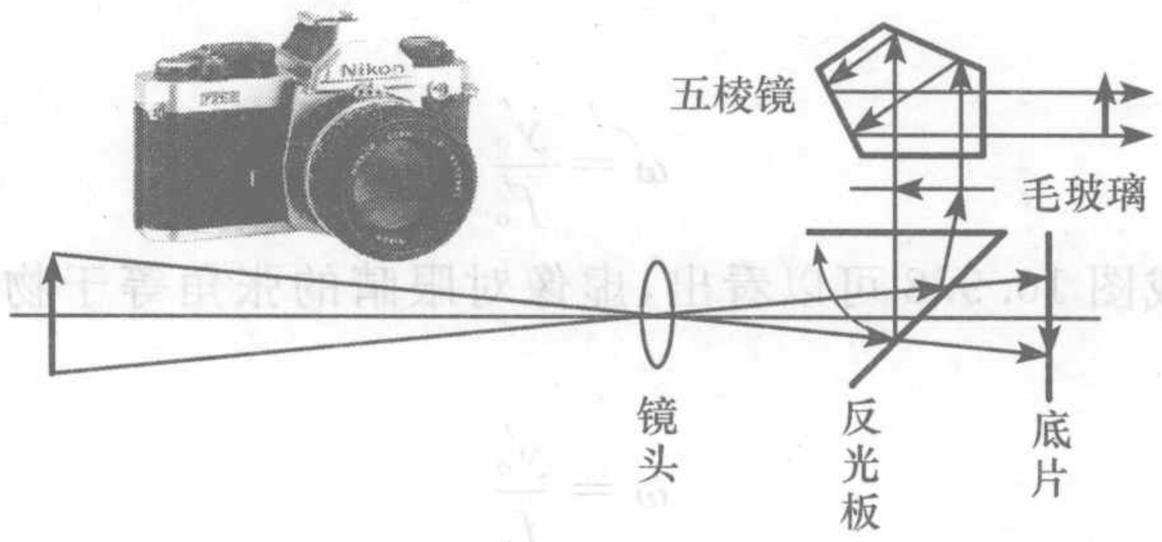


图 10.9.11 单镜头反光相机

单镜头反光式(SLR)照相机的光路中有一块可以转动的反光板,取景对焦时,反光板处于 45°位置,像成在反光板上方的磨砂玻璃上,屋脊形五棱镜可以将磨砂玻璃上的像转过 90°,使眼睛通过取景窗看到正立的像. 通过移动镜头就可以得到一个清晰的像. 而照相底片的位置和磨砂玻璃是关于反光板对称的,如果升起反光板并同时开启遮挡在底片前的快门,则像就成在了底片上,照相过程就完成了. 成像光路与调焦(测距)光路合二为一,底片与毛玻璃相对于反光镜对称,毛玻璃上的像与底片上的像是一样的,这种照相机可以根据需要更换不同的镜头.

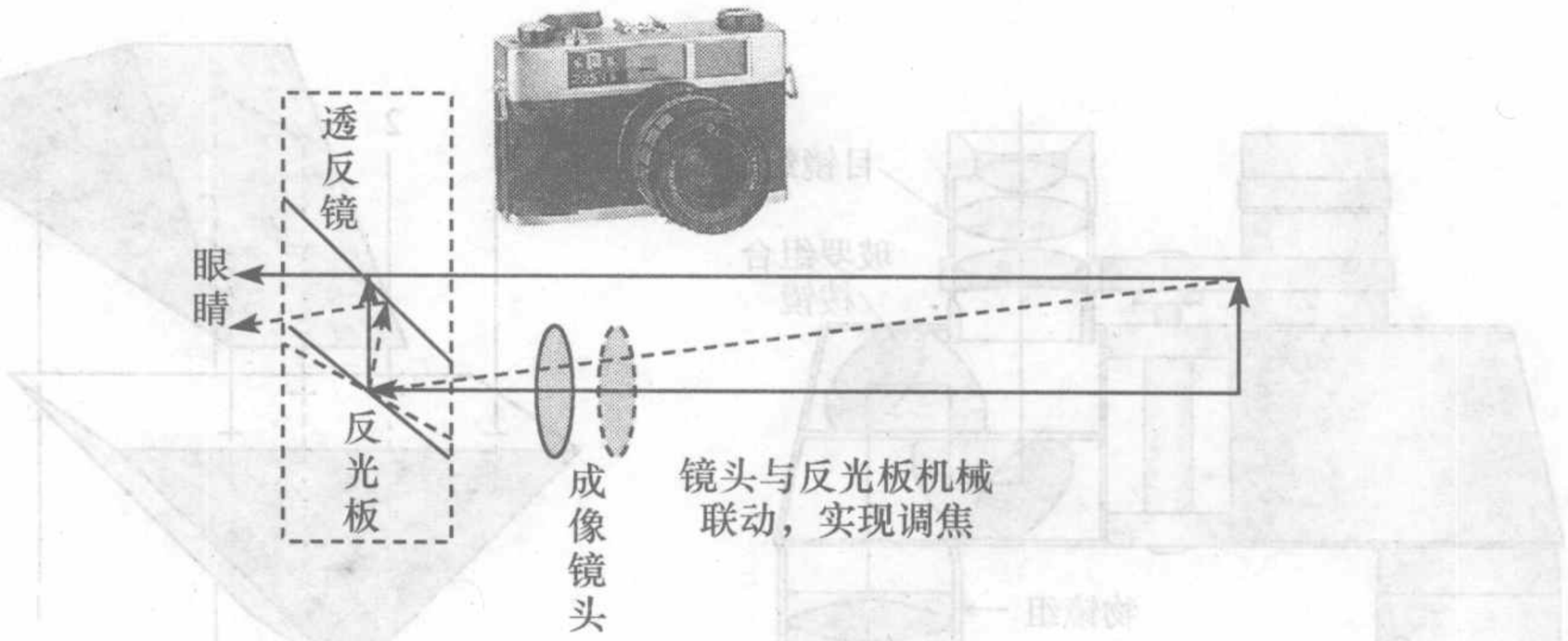


图 10.9.12 旁轴取景相机

旁轴取景器式(平视取景)照相机,成像光路与调焦光路独立. 取景器包括一个

半透半反的分光镜(图 10.9.12 所标的透反镜)和一个可以转动的反光镜.眼睛在取景窗观察时,可以同时看到直接透过分光镜射来的光和经过反光板再经过分光镜反射的光.一般来说,通过两条不同的光路进入眼睛的光线是不重合的,所以眼睛看到的是两个分开的像;如果这两条光线重合,则看到的两个像是重合的.当物体较远时,进入取景器的光线基本上是平行光,如果反光板和分光镜相互平行,这时,经过反光板反射到分光镜的光和直接透过分光镜的光是重合的.如果物移近,则两条光线不再平行,像也不重合,但转动反光板,可以使两个像重合.反光板的转动与成像镜头的前后移动是通过机械装置联动的.当取景器的两个像重合时,在底片上成的像也是清晰的.这种机械联动的成像机构是在照相机的设计中已设定好的.所以通过这种方式也可以获得清晰的照片.这种照相机由于取景光路与成像光路分离,而且取景窗处在镜头光轴的侧边,所以被称作旁轴取景式照相机.

与单镜头反光式相机相比,这种旁轴式相机结构简单,轻便耐用,但由于取景必须与固定的镜头联动,因而一般情况下镜头不能更换,而且由于取景窗位于镜头的旁轴,对较近物体拍摄时,取景会产生偏差.

为了获得较好的效果,照相机的镜头结构都比较复杂,往往是由多片、多组共轴的凸透镜和凹透镜构成的,以达到消除色差、像差、畸变的效果,而且,每一片镜头上都要涂敷增透膜.

根据镜头焦距的不同,一般分为广角镜头($28\text{mm}<f<50\text{mm}$),标准镜头($f\approx 50\text{mm}$),长焦镜头($f>50\text{mm}$),焦距更短的镜头($f=28\text{mm}$)称作鱼眼镜头.

如图 10.9.13 所示,由于景物到相机的距离往往较大,所以像距基本与镜头的焦距相当,即镜头光心到底片的距离基本上等于像方焦距,因而焦距越长,像的横向放大率越大.

如图 10.9.14 所示,由于底片大小是一定的,当像距短时,画面的张角较大,故短焦距镜头视角较大.

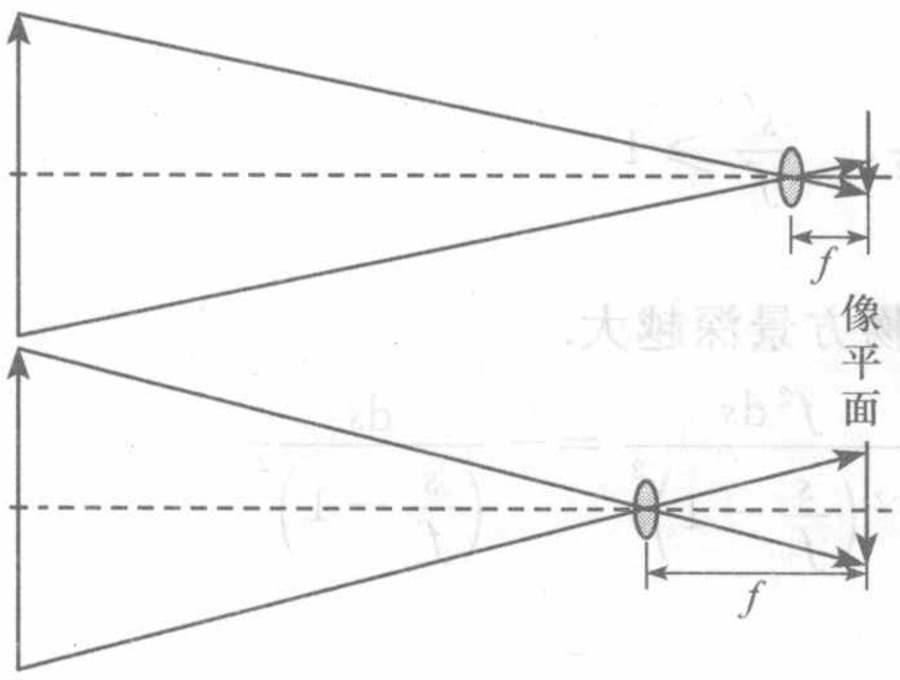


图 10.9.13　镜头焦距与像的大小

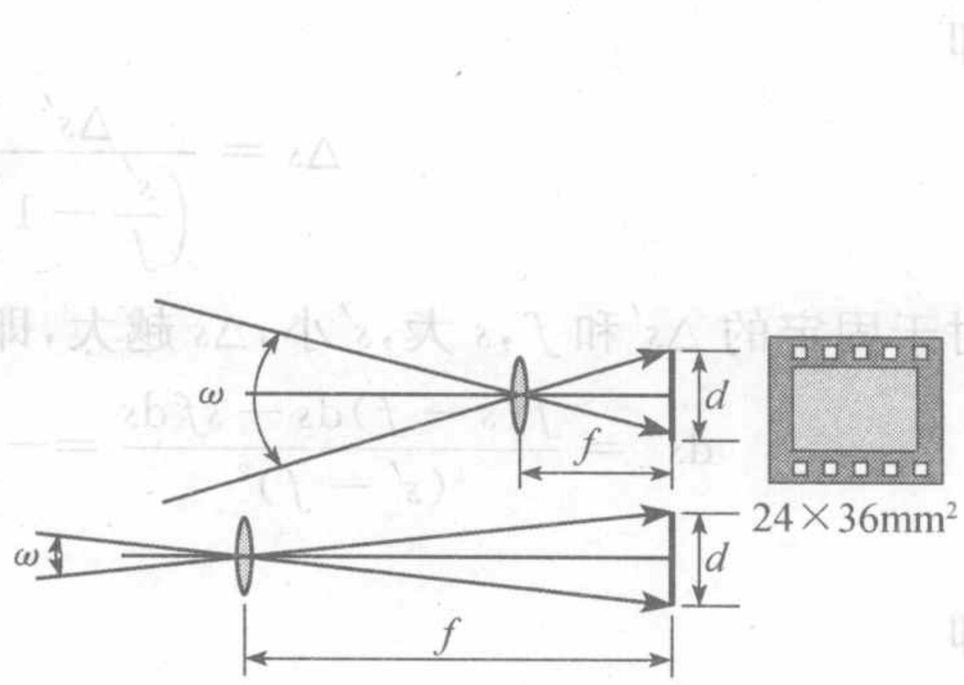


图 10.9.14　镜头的视野与焦距的大小

短焦距镜头的视角比长焦距镜头视角要大,因为 $\omega=L/f'$,L 为胶片宽度,对于 35mm 照相机,底片为 35mm×24mm,L 的范围为 24～42mm,$f=50\text{mm}$ 时,$\omega=42/50=0.84=48°$.

关于景深:对于固定的物距 s,像平面在像距 s' 处.即对于理想镜头,像平面上是同心光束的会聚点.但是,在像平面附近的一个很小的范围内,光线的发散范围不大,也可以认为像都是清晰的(图 10.9.15),该范围 $\Delta s'$ 被称为像方景深.同样,照相时,空间上前后分布的物,在底片上不能同时清晰成像,如果物点在底片上所成的像点发散不大,也可以认为是清晰的,所以,在底片上能够清晰成像的物距范围称作物方景深.景深与镜头的焦距和光圈(光阑)有关(图 10.9.16).

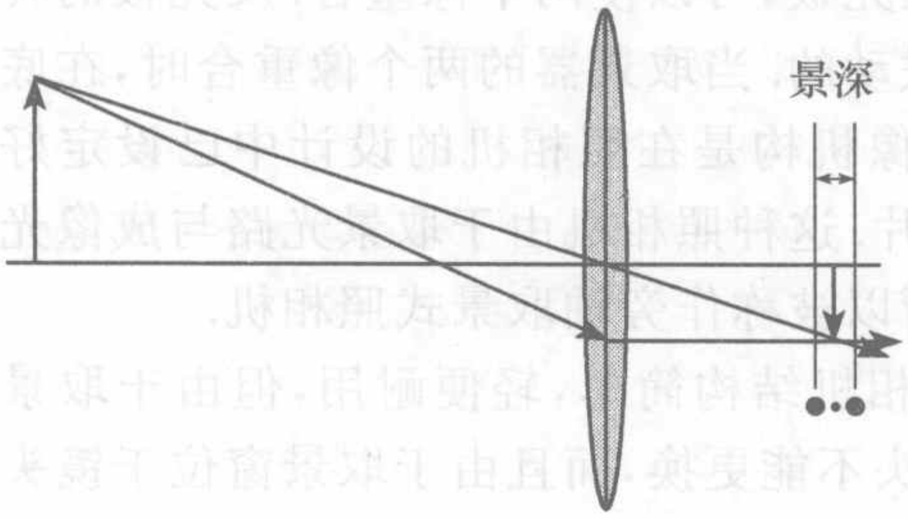


图 10.9.15 景深的含义

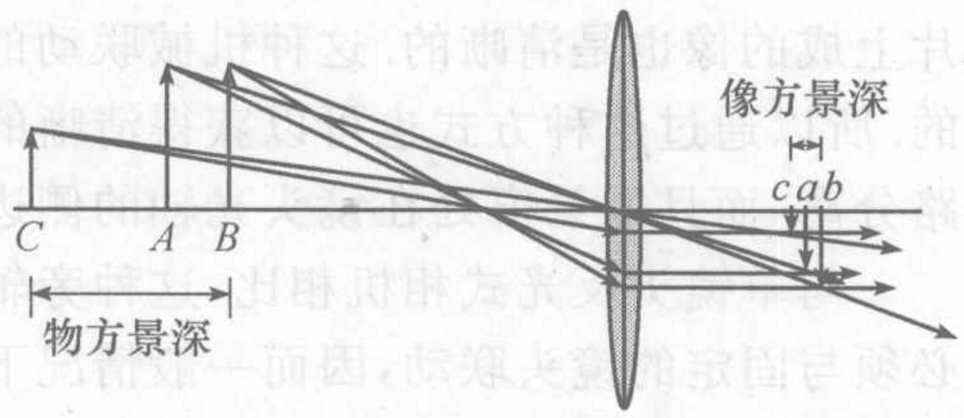


图 10.9.16 物方景深与像方景深

由

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$$

可得

$$s=\frac{s'f}{s'-f}$$

取微分,有

$$\mathrm{d}s=\frac{f(s'-f)\mathrm{d}s'-s'f\,\mathrm{d}s'}{(s'-f)^2}=-\frac{f^2\mathrm{d}s'}{f^2\left(\frac{s'}{f}-1\right)^2}=-\frac{\mathrm{d}s'}{\left(\frac{s'}{f}-1\right)^2}$$

即

$$\Delta s=\frac{\Delta s'}{\left(\frac{s'}{f}-1\right)^2},\quad \frac{s'}{f}\geqslant 1$$

对于固定的 $\Delta s'$ 和 f,s 大,s' 小,Δs 越大,即物方景深越大.

$$\mathrm{d}s'=\frac{f(s-f)\mathrm{d}s-sf\,\mathrm{d}s}{(s'-f)^2}=-\frac{f^2\mathrm{d}s}{f^2\left(\frac{s}{f}-1\right)^2}=-\frac{\mathrm{d}s}{\left(\frac{s}{f}-1\right)^2}$$

即

$$\Delta s'=\frac{\Delta s}{\left(\frac{s}{f}-1\right)^2}$$

对于固定的 Δs 和 s,f 大,$\Delta s'$ 大,相同物距的物体,其像距增大,相当于景深变小.

当光圈很小时,由于只有严格的近轴(傍轴)光线才能进入,因而可以获得较好

的成像质量，相应地，像方景深也比较大；光圈较大时，近轴条件不能很好满足，成像质量降低，景深也比较小.

照相机通过可以改变进光量(光阑)实现对底片的正确曝光(图 10.9.17).

进光量∝光阑面积∝(镜头孔径)^2.

定义光圈数，也称作 F 数

$$F\text{数} = f/D$$

其中，f 为镜头焦距，D 为镜头光瞳的直径. 可见进光量与 F 数的平方成反比.

F 数可取一系列值，22，16，11，8，5.6，4，2.8，2，1.4，…. 相邻的 F 数通光量相差一倍. 如前所述，不同的光阑有不同的景深(图 10.9.18).

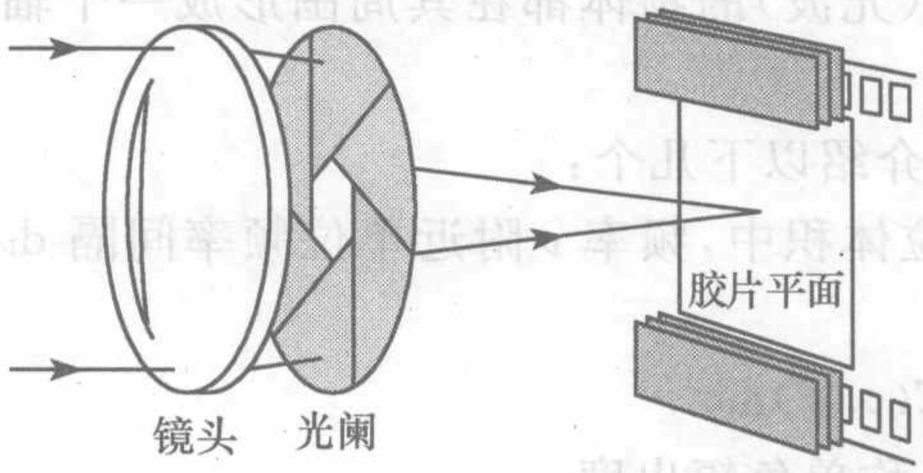


图 10.9.17　镜头的光阑(光圈)

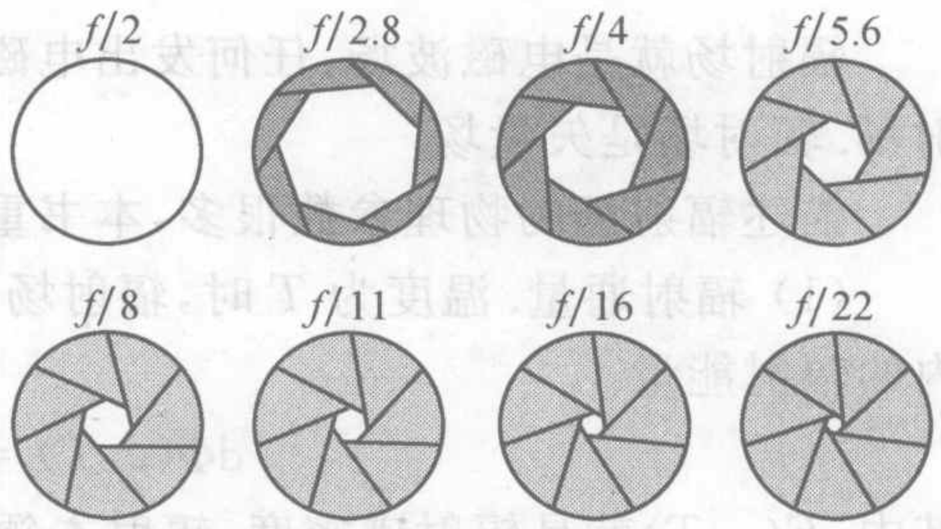


图 10.9.18　不同 F 数的光阑大小

同时也可以通过设定和控制快门的速度，即快门打开的时间来控制曝光量. 照相机上所标的快门速度＝1/快门曝光时间. 照相机的快门挡位分为 B 门(手控)，1，2，4，8，16，30(32)，60(64)，125(128)，250(256)，500(512)，1000(1024)，2000(2048)，4000(4096)，8000(8192)，…单位为 1/s. 快门依构造分为中心式和帘幕式(横向布帘，纵向钢帘). 前者中心处曝光时间较边缘处长，后者的闪光同步摄影速度不能很高.

第 11 章　光的量子性

11.1　辐　射　场

11.1.1　辐射场的物理参数

辐射场就是电磁波场，任何发出电磁波（光波）的物体都在其周围形成一个辐射场. 辐射场是矢量场.

描述辐射场的物理参数很多，本书重点介绍以下几个：

（1）辐射通量. 温度为 T 时，辐射场单位体积中，频率 ν 附近单位频率间隔 $d\nu$ 内的辐射能量.

$$d\Phi(\nu,T)=E(\nu,T)d\nu$$

其中，$E(\nu,T)$就是辐射谱密度、辐射本领，也称单色辐出度.

（2）吸收本领. 照射到物体上的通量记为 $d\Phi(\nu,T)$，其中被物体吸收的通量记为 $d\Phi'(\nu,T)$，则比例 $A(\nu,T)=\dfrac{d\Phi'(\nu,T)}{d\Phi(\nu,T)}$称为吸收本领或吸收比.

11.1.2　热辐射

1. 物体间的热交换

如图 11.1.1 所示，与外界隔绝的几个物体，起初温度各不相同. 假设相互间只能以热辐射的形式交换能量，则每一个物体都向外辐射能量，同时也吸收其他物体辐射到其表面的能量. 温度低的物体，辐射较小，吸收较大；而温度高的，辐射较大，吸收较小. 经过一个过程后，所有物体的温度相同，达到了热平衡状态. 热平衡时，每一个物体辐射的能量等于其吸收的能量，即热平衡状态下，吸收本领大的物体，其辐射本领也大.

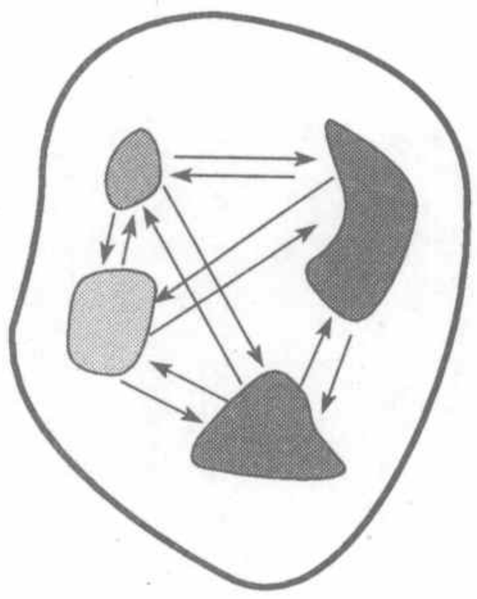


图 11.1.1　物体间通过辐射交换能量

2. 基尔霍夫热辐射定律

热平衡状态下物体的辐射本领与吸收本领成正比，比值只与 ν,T 有关，即

$$\frac{E(\nu,T)}{A(\nu,T)}=f(\nu,T) \tag{11.1.1}$$

其中，$f(\nu,T)$为普适函数，与物质无关. 如果通过知道了 $f(\nu,T)$的规律，则可以对物体的热辐射性质进行全面深入的研究.

应当通过实验测量 $f(\nu,T)$，必须同时测量 $E(\nu,T)$和 $A(\nu,T)$，但是这样会使研究变得比较复杂，因为吸收本领是 $A(\nu,T)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi'(\nu,T)}{\mathrm{d}\Phi(\nu,T)}$，并不容易测量. 如果设法使 $A(\nu,T)\equiv1$，则 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$，只需要测量单色辐出度，就可以得到普适函数 $f(\nu,T)$. $A(\nu,T)\equiv1$，表明物体对辐照到它上面的能量全部吸收，没有反射，用通俗的语言说，由于它不反光，可以认为它是黑的. $A(\nu,T)\equiv1$ 的物体，称作绝对黑体.

但实际上并不存在表面不反光的绝对黑体，实验中用的绝对黑体都是专门制作的. 一个开有小孔的空腔，对射入其中的光几乎可以全部吸收，如图 11.1.2 所示，等效于绝对黑体. 这时，只要测量空腔开口处的辐射本领，即可以得到 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$. 黑体辐射的测量装置如图 11.1.3 所示.

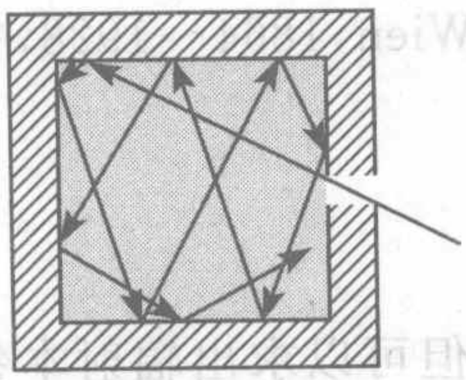


图 11.1.2　绝对黑体

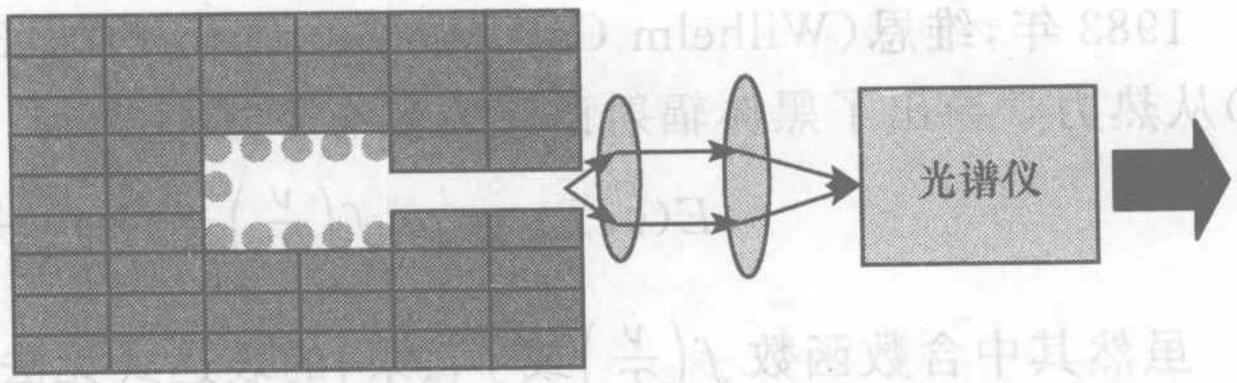


图 11.1.3　黑体辐射的测量装置

11.2　黑体辐射的实验规律

实验测量得到的黑体辐射的光谱如图 11.2.1 所示，表明在不同的温度下，黑体的辐射本领不同，同时，在不同的波长(频率)处，辐射本领也不同.

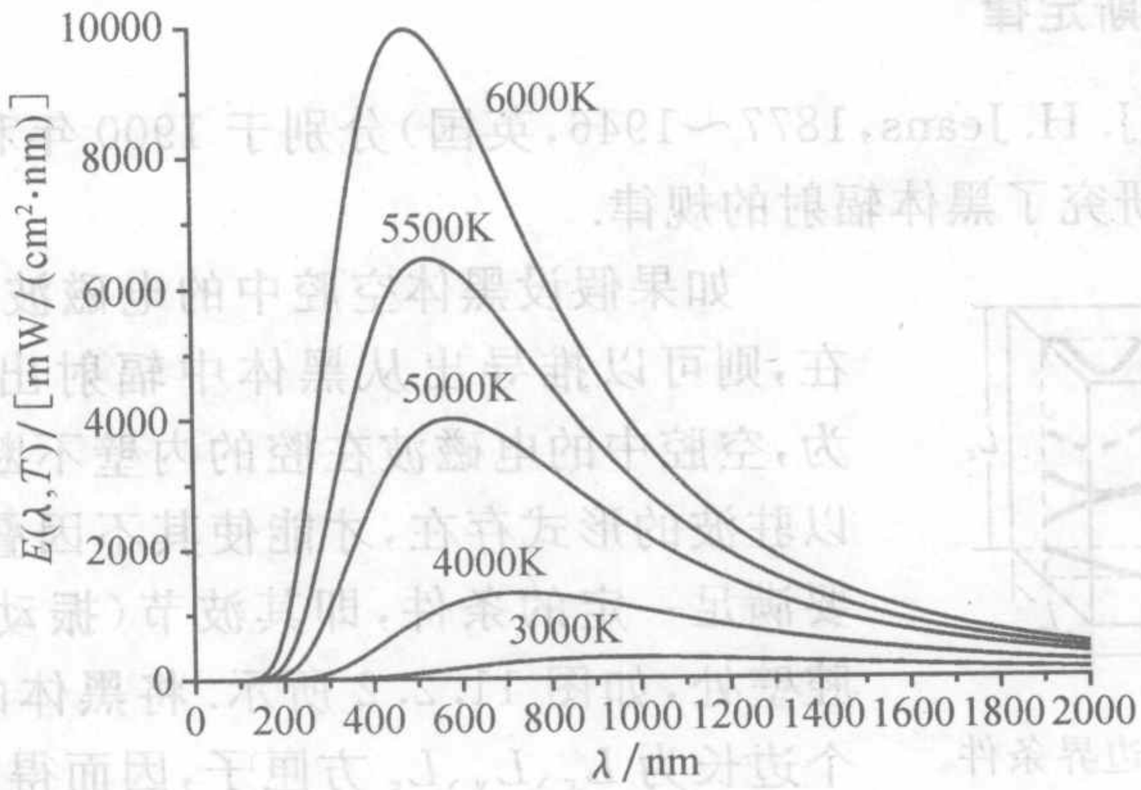


图 11.2.1　黑体辐射的测量结果

许多人对黑体辐射进行了较深入的研究，从实验和理论上总结出了和体辐射的规律.

11.2.1 斯特藩-玻耳兹曼定律

斯特藩(J. Stefan,1835～1893,奥地利)和玻尔兹曼(L. E. Boltzmann,1844～1906,奥地利)分别于1879年和1884年发表了对黑体辐射的研究结果.

实验结果中每一条曲线下的面积,表示黑体的辐射通量,即某一温度下总的辐射本领,该辐射本领与温度的四次方成正比,即

$$\Phi(T)=\int_0^{\infty}E(\nu,T)d\nu=\sigma T^4 \tag{11.2.1}$$

这就是斯特藩-玻尔兹曼定律.其中 $\sigma=5.67032\times10^{-18}\ \mathrm{W/m^2K^4}$,为斯特藩-玻尔兹曼常量.

11.2.2 维恩位移定律

1983年,维恩(Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien,1864～1928,德国)从热力学导出了黑体辐射谱应当具有下述形式

$$E(\nu,T)=\alpha\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)=\frac{c^5}{\lambda^5}f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

虽然其中含数函数 $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ 或 $f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ 的表达式无法得到,但可以求出辐射本领极大值的关系式,表示为

$$T\lambda_m=b \tag{11.2.2}$$

其中,λ_m 为辐射本领最大的波长,$b=2.8978\times10^{-3}\ \mathrm{mK}$.式(11.2.2)称作维恩位移定律.维恩位移定律在实际中有广泛的应用,在无法进行接触测温的情况下,通过观察物体的辐射谱,可以得到物体的温度.例如,在炼钢厂中,人们通过观察高炉中钢水的颜色,能够判断出钢水的温度.

11.2.3 瑞利-金斯定律

瑞利和金斯(J. H. Jeans,1877～1946,英国)分别于1900年和1905年用经典的统计物理方法研究了黑体辐射的规律.

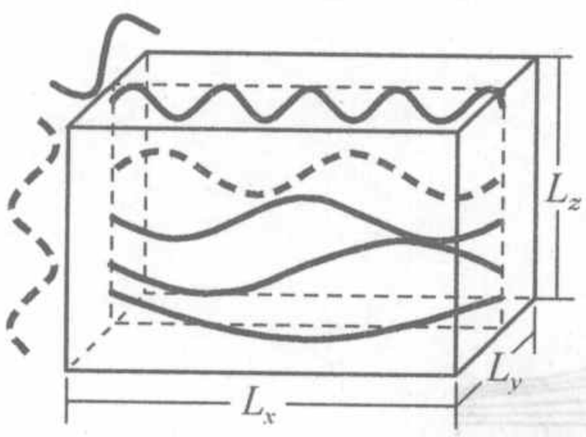


图 11.2.2 驻波的边界条件

如果假设黑体空腔中的电磁波以驻波的形式存在,则可以推导出从黑体中辐射出的能量.瑞利认为,空腔中的电磁波在腔的内壁不断地反射,则只有以驻波的形式存在,才能使其不因叠加而湮灭.驻波要满足一定的条件,即其波节(振动为零处)必须在腔壁处,如图11.2.2所示.将黑体的空腔看作是一个边长为 L_x、L_y、L_z 方匣子,因而得到

$$\begin{cases}\sin(k_xL_x)=0\\ \sin(k_yL_y)=0\\ \sin(k_zL_z)=0\end{cases} \tag{11.2.3}$$

所以必须有

$$\begin{cases} k_x = n_x \pi / L_x \\ k_y = n_y \pi / L_y \\ k_z = n_z \pi / L_z \end{cases} \tag{11.2.4}$$

其中，n_x、n_y、n_z 都是整数.

驻波的波矢为

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z = \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z} \right)^2 \right] \tag{11.2.5}$$

利用关系式

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$$

则式(11.2.5)化为

$$1 = \left(\frac{n_x}{\omega L_x / \pi c} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{\omega L_y / \pi c} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{\omega L_z / \pi c} \right)^2 \tag{11.2.6}$$

由于 n_x、n_y、n_z 都是整数，所以，对于一个确定的频率 ω，这三个整数的不同组合(n_x, n_y, n_z)是有限的个数的. 每一个组合，虽然所决定的波矢大小$|\boldsymbol{k}|$都是相同的，但由于波矢在空腔中的方向可以有多种取向，因而，代表了不同的驻波. 整数(n_x, n_y, n_z)的每一个组合，称作一个驻波模式.

式(11.2.6)是椭球面的方程，可以看作是以三个整数 n_x、n_y、n_z 为直角坐标轴的椭球面，如图 11.2.3 所示. 0～ω 的驻波模式(n_x, n_y, n_z)数就是第一象限球面内的所有整数点，这些点是其中所有单位体积方格的顶点，顶点数等于其中的单位体积的方格数，由于每个方格的体积为 1，所以定点的数目就是第一象限内所有方格的体积，这些体积的总和与椭球在第一象限的体积相等. 该体积为

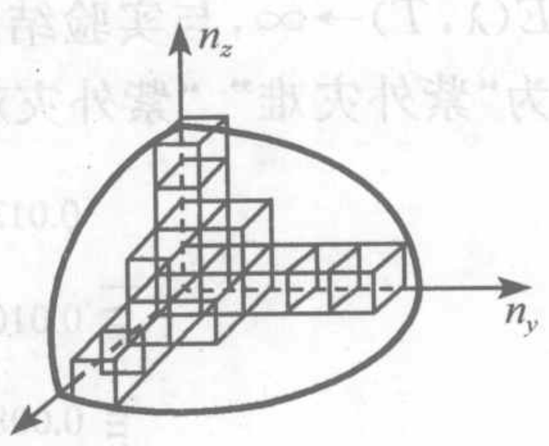


图 11.2.3　整数组合(n_x, n_y, n_z)的数目

圆频率小于 ω 的总的模式数为椭球的体积

$$\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{\omega L_x}{\pi c} \frac{\omega L_y}{\pi c} \frac{\omega L_z}{\pi c} = \frac{1}{6} \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} V \tag{11.2.7}$$

其中，$V = L_x L_y L_z$ 为黑体腔的体积.

由于每一 n_x、n_y、n_z 都可以取正值和负值，因而驻波的模式数应当是式(11.2.7)的 2 倍，即

$$n_\omega = \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} V = \frac{8\pi}{3} \frac{\nu^3}{c^3} V \tag{11.2.8}$$

单位体积内、频率在 ν～$\nu + \mathrm{d}\nu$ 间的驻波数为

$$\mathrm{d}n_\omega = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \mathrm{d}\nu$$

也可表示为

$$\rho \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \mathrm{d}\nu \tag{11.2.9}$$

而从小孔辐射出的驻波数(即分子运动论中的泄流数)为

$$\Gamma = \frac{1}{4}c\rho \tag{11.2.10}$$

每一个驻波模式,就是一个经典的谐振子,每个谐振子的能量为

$$\varepsilon = kT \tag{11.2.11}$$

辐射出的能量,即辐射本领为

$$E(\nu, T) = \Gamma kT = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT \tag{11.2.12}$$

或以波长表示为

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4}kT \tag{11.2.13}$$

式(11.2.12)和式(11.2.13)就是瑞利-金斯定律.

从经典物理学的角度看,瑞利-金斯定律是无懈可击的,它从辐射场的性质出发,得出了黑体空间中单位体积驻波的谱密度,进而求出从小孔辐射出的驻波(谐振子)的数目和能量.

图 11.2.4 画出了维恩定律、瑞利-金斯定律与实验结果的比较. 容易看出,在波长较大的波段,瑞利-金斯定律与实验结果一致,符合得较好,但是,在短波区域,当 $\lambda \to 0$, $E(\lambda, T) \to \infty$,与实验结果严重偏离. 由于这种偏离出现在波长较短的区域,所以被称为"紫外灾难". "紫外灾难"说明,用经典物理学的理论,无法解释黑体辐射的规律.

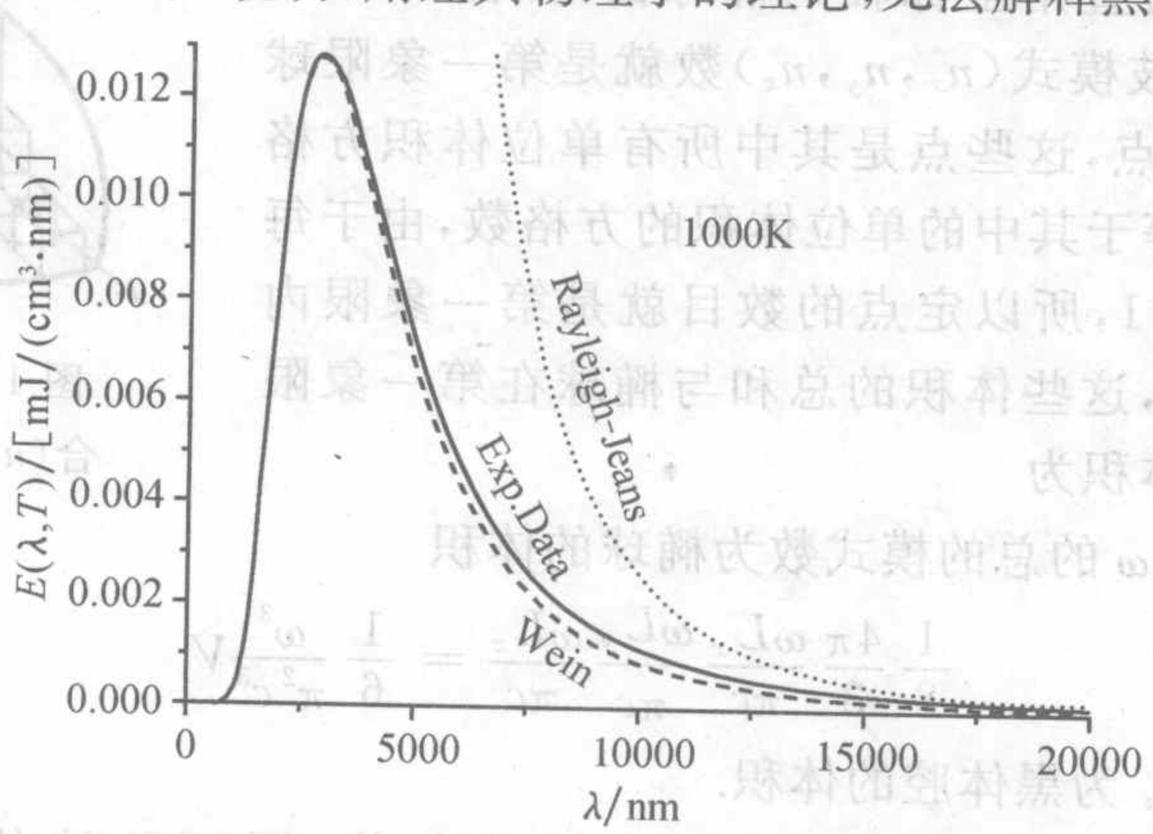


图 11.2.4 维恩曲线(虚线)、瑞利-金斯曲线(点)与实验曲线(实线)的比较

虽然从图上看起来维恩公式与实验结果的符合比瑞利-金斯定律还要好,但是,维恩公式与实验的偏离却是系统的,即从物理的观点看,它的偏离比瑞利-金斯定律还要严重.

11.3 光量子假说

11.3.1 普朗克对黑体辐射的解释

1900 年,普朗克(Max Planck,1858～1947,德国)从黑体辐射曲线的形状,

“猜”出了辐射本领所应有的数学表达式，为了从理论上推导出这样的表达式，他做了一个假设：黑体空腔中的谐振子的能量不能任意取值，而只能取一系列不连续的、分立的数值，可以设这些能量值为

$$\varepsilon = 0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, 4\varepsilon_0, \cdots$$

而且

$$\varepsilon_0 = h\nu \tag{11.3.1}$$

其中，ν 为谐振子的频率.

由于不同频率的谐振子能量不同，从统计的角度看，一个谐振子处于不同能量状态的概率也不相同，即一个谐振子处于能量 $E_n = n\varepsilon_0$ 态的概率为 $e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}$.

空腔内每一个驻波，即每一个谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum\limits_n n\varepsilon_0 e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}}{\sum\limits_n e^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}} = \frac{\sum\limits_n n\varepsilon_0 e^{-n\varepsilon_0\beta}}{\sum\limits_n e^{-n\varepsilon_0\beta}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon_0\beta}\right) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\frac{1}{1-e^{-\varepsilon_0\beta}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1-e^{-\varepsilon_0\beta}) = \frac{\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0\beta}}{1-e^{-\varepsilon_0\beta}}\frac{e^{\varepsilon_0\beta}}{e^{\varepsilon_0\beta}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0\beta}-1}$$

即每个普朗克谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{11.3.2}$$

这与瑞利-金斯的假设式(11.2.11)不相同，即 $\bar{\varepsilon} \neq kT$.

利用谐振子的谱密度公式(11.2.9)，可以算出黑体的辐射本领为

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{11.3.3}$$

可以对公式(11.3.3)作进一步的分析. kT 实际上是谐振子热运动的动能，在长波段，谐振子的能量较小，即 $h\nu \ll kT$，这时

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \approx \frac{1}{1+\frac{h\nu}{kT}-1} = \frac{kT}{h\nu}$$

于是辐射本领为

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}h\nu^3\frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT$$

与瑞利-金斯符合.

在短波段，谐振子的能量较大，即

$$h\nu \gg kT, \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$$

式(11.3.3)化为

$$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{11.3.4}$$

即在短波波段(即所谓的“紫外”)随着频率的增加,即随着波长的减小,辐射本领迅速减小,并趋近于0,这与实验结果一致.

普朗克的分立能量谐振子假设虽然解释了黑体辐射的实验规律,解决了“紫外灾难”,但是,由于这一假设看起来没有什么依据,在当时并没有得到认可.

11.3.2 爱因斯坦光量子与光的波粒二象性

受到普朗克分立能量谐振子假设的启发,1905年,爱因斯坦(Albert Einstein,1879～1955,美国)更进一步提出了“能量子”的概念,并成功地解释了光电效应.

按照爱因斯坦的“能量子”假说,光辐射中每一个能量子所携带的能量为

$$E=h\nu \tag{11.3.5}$$

即光辐射中,每一个“能量子”都是分立的,这就是光的粒子性,后来,“能量子”被称作光子.

密立根(Robert Andrews Millikan,1868～1953,美国),用了10年的时间,从实验上验证了爱因斯坦的光量子假说,并且测量了式(11.3.5)中 h 的数值,$h=6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$,称作普朗克常量,是一个基本的物理学常数.

11.3.3 康普顿效应

1921年,康普顿(Arthur Holly Compton,1892～1962,美国)发现了X射线在材料中的非相干散射现象. 如图11.3.1所示,单色X射线被材料散射后,散射光中,一部分波长不变,是相干散射;另一部分波长变长,是非相干散射. 康普顿还注意到,对于同一种元素,在不同的角度上,非相干散射的波长改变不同;而在同一角

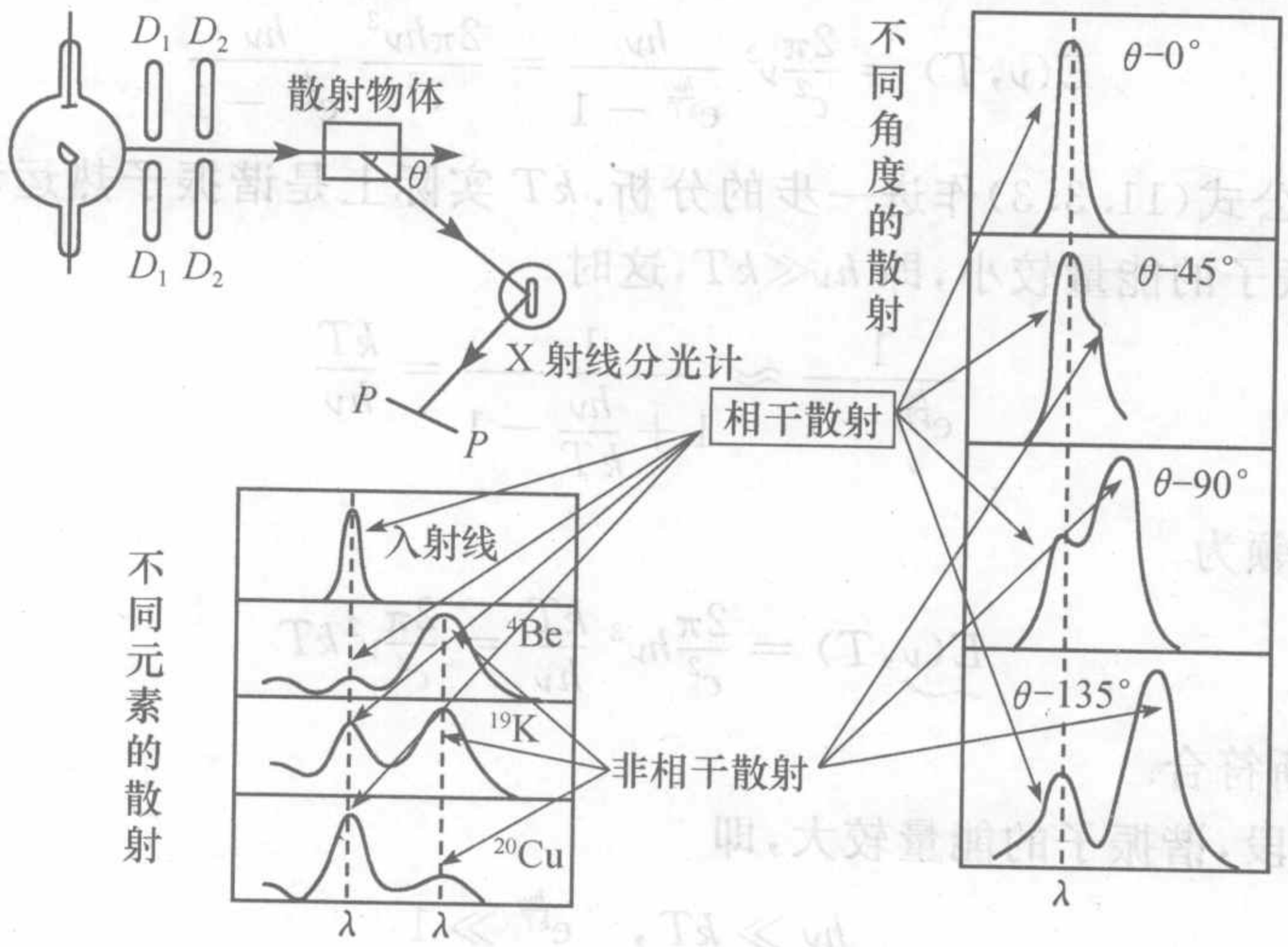


图11.3.1 康普顿散射

度上，不同的元素非相干散射所占的比例不同，元素序数较小的轻原子非相干散射的成分较大，而元素序数较大的重原子，相干散射的成分较大. 上述实验现象称作康普顿效应(Compton effect). 康普顿利用光子模型，成功地解释了这一现象.

入射的 X 射线光子，具有能量和动量. 对于光子而言，由于能量 $E=h\nu$，利用爱因斯坦质能关系 $E=mc^2$，以及动量的表达式 $p=mc$，可以得到光子的动量表达式为

$$p=\frac{h\nu}{c} \tag{11.3.6}$$

入射的 X 射线光子与电子发生弹性碰撞，在碰撞过程中，动量和能量是守恒的，如图 11.3.2 所示，即

$$\begin{cases} h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + m\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{11.3.7}$$



图 11.3.2　光子与电子的弹性碰撞

将式(11.3.7)中第一式变为

$$mc^2 = h\nu - h\nu' + m_0c^2 \tag{11.3.8}$$

而将式(11.3.7)中第二式写作标量表达式，得到

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta \tag{11.3.9}$$

式(11.3.8)两端平方

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2m_0c^2h(\nu-\nu') \tag{11.3.10}$$

式(11.3.9)作如下的数学变换

$$m^2c^2v^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta \tag{11.3.11}$$

式(11.3.10)减式(11.3.11)

$$m^2\left(1-\frac{\nu^2}{c^2}\right)c^4 = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) + 2m_0hc^2(\nu-\nu') \tag{11.3.12}$$

由于 $m\sqrt{1-\frac{\nu^2}{c^2}}=m_0$，式(11.3.12)变为

$$m_0^2c^4 = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta) + 2m_0hc^2(\nu-\nu')$$

进一步整理，得到

$$\lambda'-\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

即

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\theta) \tag{11.3.13}$$

其中，

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 0.0242621\text{Å}$$

称作康普顿波长，对应于静止电子的波长.

用式(11.3.13)可以解释对同一种元素，在不同的角度上非相干散射的波长不同的现象.而对于不同元素的散射，则可以这样理解：由于康普顿的散射模型中假设电子是自由电子，但实际上，在材料中，还有一些成键的束缚电子，如每个原子的内壳层电子.这些束缚电子由于受到原子核的束缚，其动量能量在碰撞(散射)前后变化很小，因而光子在与束缚电子的散射过程中，动量和能量的变化也很小，可以认为是相干散射.在轻原子中，束缚电子的数目相对较少，因而非相干散射的光子数目较多；而重的原子中，束缚电子数目较多，因而相干散射的光子数目较多.

11.3.4 德布罗意波

光子具有动量，每个光子的动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{11.3.14}$$

也可以将式(11.3.14)写作

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{11.3.15}$$

式(11.3.14)和式(11.3.15)将反映粒子性的动量和反映波动性的波长结合起来，表明波动性、粒子性是物质不可分割的两种基本属性.这就是德布罗意(Louis Victor de Broglie，1892～1987，法国)所提出的“物质波”的概念.

作为粒子，光子具有质量

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{11.3.16}$$

这是光子的运动质量，而光子的静止质量 $m_0 = 0$.

光的粒子性表现在光与物质的相互作用方面，波长越短，光子的能量越高，其粒子性越显著，如电离气体、光电效应、康普顿效应、荧光效应、单光子记录等.

光的波动性表现在光的传播，干涉、衍射以及散射、反射、折射等方面，波长较长的光，有着显著的波动性.

普朗克 1918 年由于“发现基本相互作用量子，从而对物理学的发展做出了巨大的贡献”而获得了诺贝尔物理奖；爱因斯坦因为“在数学物理方面的成就，尤其是发现了光电效应的规律”而获得 1921 年诺贝尔物理奖；密立根则是“因为基本电荷及光电效应方面的工作”而获得 1923 年诺贝尔物理奖.

习题与答案

第 1 章习题

1.1 一列一维波的振动表示为 $E(P,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]$，$\frac{z}{v}$的含义是什么？如果将其表示为 $E(P,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{\omega z}{v}\right)$，$\frac{\omega z}{v}$的含义是什么？

1.2 太阳光垂直射向地面，测得能流密度为 1.35kW/m^2，计算地面上太阳光电场强度的振幅. 如果用一个直径 5cm 的透镜将太阳光聚成面积 1mm^2 的光斑，计算光斑上的能流密度和电场强度的振幅.

答：$10^3\,\text{N/C}$，$10.5\times10^3\,\text{kW/m}^2$，$8.9\times10^4\,\text{N/C}$.

1.3 在玻璃中 z 方向上传播的单色平面波的波函数为

$$E(P,t)=10^2\exp\left\{-\text{i}\left[\pi\times10^{15}\left(t-\frac{z}{0.65c}\right)\right]\right\}$$

其中，c 为真空中的光速，时间以 s 为单位，电场强度以 V/m 为单位，距离以 m 为单位，试求：

(1) 光波的振幅和时间频率；

(2) 玻璃的折射率；

(3) z 方向的空间频率；

(4) 在 xz 平面内与 x 轴成 45°角方向上的空间频率.

答：(1) $10^2\,\text{V/m}$，$5\times10^{14}\,\text{Hz}$　(2) 1.54　(3) $2.56\times10^6\,\text{m}^{-1}$　(4) $1.82\times10^6\,\text{m}^{-1}$

1.4 一束波长为 λ 的平行光，其波矢的方向可以用与坐标轴的方向余弦角表示为 (α,β,γ)，已知 $\alpha=30°$，$\beta=75°$.

(1) 写出这列波的波函数 $\widetilde{U}(x,y,z)$，可设振幅为 A，原点相位为 0；

(2) 写出其波前函数 $\widetilde{U}(x,y)$；

(3) 若方向角 β 改为 $\beta=90°$，$\beta=150°$，分别求其波前函数 $\widetilde{U}_1(x,y)$，$\widetilde{U}_2(x,y)$.

1.5 一平面波的波函数为 $E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$，式中 x,y,z 的单位为 m，t 的单位为 s. 试求：

(1) 时间频率；

(2) 波长；

(3) 波矢的大小和方向；

(4) 在 $z=0$ 和 $z=1$ 波前上的相位分布.

答：(1) 0.796Hz；(2) 1.17cm；(3) 0.86cm^{-1}，$\boldsymbol{k}=(2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z)$；(4) $2x-3y$，$2x-3y+4$.

1.6 一列单色波在折射率为 n 的介质中由 A 点传播到 B 点，其相位改变了 2π，问光程改变了多少？从 A 到 B 的路程是多少？

答：λ，λ/n.

1.7 频率为 6×10^{14} Hz，相速度为 3×10^{8} m/s 的光波，在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少？

答：83.3nm.

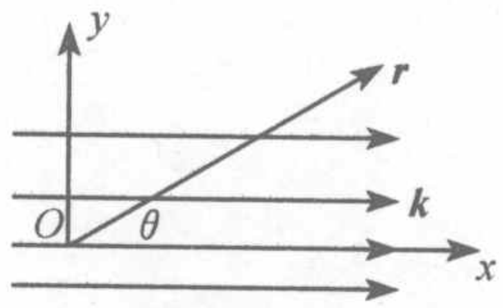
1.8 写出 1.5 题中平面波的复振幅表达式($Ae^{i(2x-3y+4z)}$).

1.9 如附图所示，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ，设 $x=0$ 的点的相位 $\varphi_0=0$.

(1) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(2) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$；

(3) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$.



习题 1.9 图

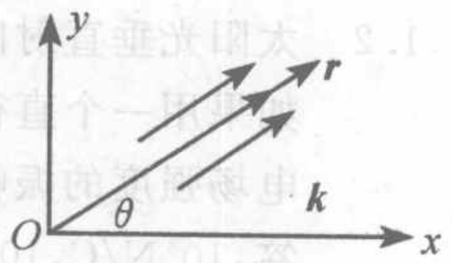
答：(1) $\varphi(x)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=kx$；(2) $\varphi(y)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}=0$；(3) $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kx\cos\theta$.

1.10 如附图所示，一平面简谐波沿 r 方向传播，波长为 λ，设 $r=0$ 的点的相位为 φ_0，

(1) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$；

(2) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

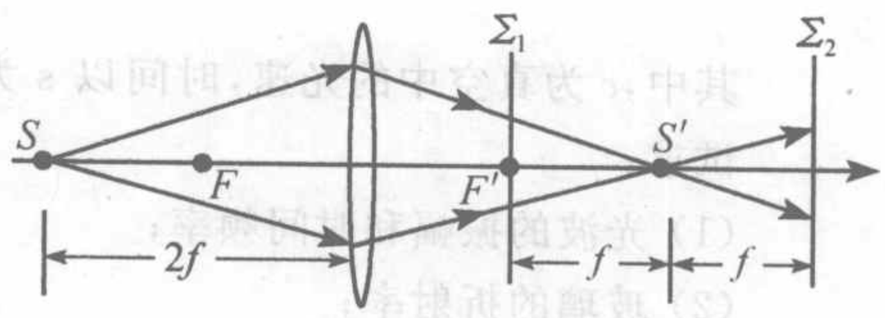
(3) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$.



习题 1.10 图

答：(1) $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=kr+\varphi_0$；(2) $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\varphi_0=kx\cos\theta+\varphi_0$；(3) $\varphi(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}+\varphi_0=ky\sin\theta+\varphi_0$.

1.11 一单色物点置于凸透镜物方(左侧)2 倍焦距处，如附图所示，计算该物点发出的光波经透镜后，在像方(右侧)会聚点前、后 1 倍焦距处平面 Σ_1 和 Σ_2 上的波前函数(认为透镜的孔径很小，光波满足傍轴条件. 可设会聚点处的初相位为 0).



习题 1.11 图

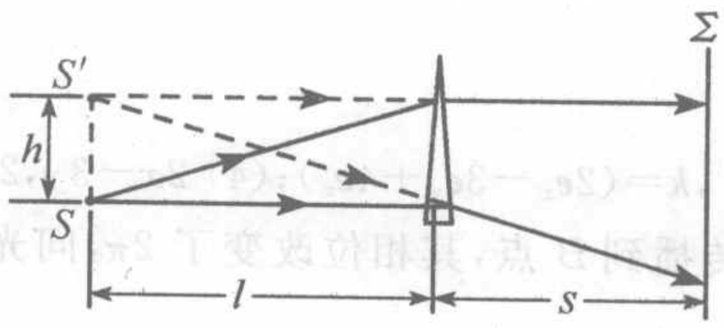
答：$\frac{A}{r}e^{ikr}$，$\frac{A}{r}e^{-ikr}$，$r=(x^2+y^2+f^2)^{1/2}$

1.12 一个顶角 α 很小的三棱镜(光楔)折射率为 n，可以使光线发生折射，如附图所示. 计算表明，当单色点光源 S 距离光楔为 l 时，从另一侧看到光源 S' 位于 S 的正上方 $h=(n-1)\alpha l$ 处. 计算在光楔右侧距离 s 处平面 Σ 上的波前函数.

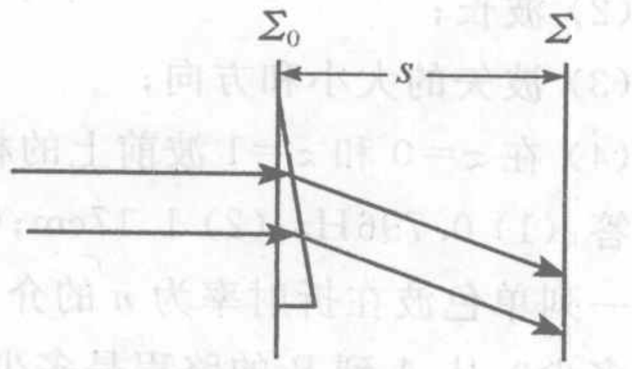
答：$\frac{A}{s+l}e^{ikr}$，$r=[x^2+y^2+(l+s)^2]^{1/2}$.

1.13 一个顶角 α 很小的三棱镜(光楔)折射率为 n，可以使平面光发生折射，计算表明方向偏转 $\delta=(n-1)\alpha$，如附图所示. 求在光楔右侧距离入射的一侧波前 Σ_0 为 s 处平面 Σ_1 上的波前函数.

答：$Ae^{ikx\sin\delta}$.



习题 1.12 图



习题 1.13 图

1.14 一平面波的复振幅为 $\tilde{E}(P)=A\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k}{5}(3x-4z)\right]$，试求波的方向，并写出在 xy 平面上的相位.

答：$\boldsymbol{k}=-\frac{2\pi}{5\lambda}(3\boldsymbol{e}_x-4\boldsymbol{e}_z)$，$-\frac{3}{5}kx$.

1.15 钠黄光(钠原子的 D 双线)的波长分别为 $\lambda_1=589.0\mathrm{nm}$，$\lambda_2=589.6\mathrm{nm}$，设 $t=0$ 时刻两列波的波峰在原点 $z=0$ 处重合，求

(1) 在传播路径上的哪些位置两列波的波峰还能重合？

(2) 经过多长时间，两列波的波峰又可以在原点重合？

答：(1) $17.36\times10^2\,\mu\mathrm{m}$；(2) $11.40\mu\mathrm{m}$.

1.16 波长为 404.7nm 的蓝光在重火石玻璃中的折射率为 1.682，而波长为 766.5nm 的红光在重火石玻璃中的折射率为 1.636，分别求出它们在这种玻璃中的波长，以及相速度. 如果这两种光在玻璃中的某一点相位相同，经过多少距离后，有 π 的相位差？这时哪种光的相位超前？

答：240.6nm，468.5nm，247.3nm，红光超前.

1.17 在波前 xOy 平面上，分别出现了以下的波前函数的相位

$$\tilde{U}_1\propto\exp\left(\mathrm{i}5k\frac{x^2+y^2}{D}\right);\quad \tilde{U}_2\propto\exp\left[\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2D}\right];$$

$$\tilde{U}_3\propto\exp\left(\mathrm{i}4k\frac{x^2+y^2}{2D}\right)\cdot\exp\left(-\mathrm{i}4k\frac{5x+8y}{2D}\right);$$

其中 k 为波数，$D>0$. 请根据这些波前函数判断波场的类型和特征.

1.18 (1) 从太阳上的一点发出的球面光波到达地球，估算在地面上一个多大的范围内，可以作为平面波处理. 已知太阳距地球 $1.8\times10^8\mathrm{km}$，对于其所发出的可见光中心波长 550nm 的光波而言.

(2) 月亮上一点发出的球面波到地球上，估算在地面上一个多大的范围内，可以作为平面波处理. 已知月亮距地球 $3.8\times10^5\mathrm{km}$，对于其所发出的可见光中心波长 550nm 的光波而言.

1.19 一射电源距地面高度约 300km，向地面发射波长 20cm 的微波，接收器的孔径为 2m，问这种情况下，是否满足远场条件？

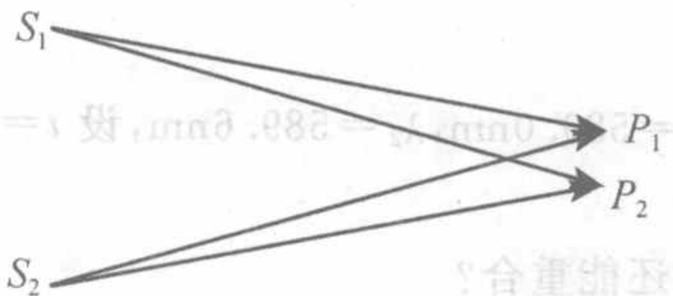
第 2 章习题

2.1 设两个单色光波在空间某一点的振动分别为 $E_1=4\cos(2\pi\times10^{15}t)$ 和 $E_2=6\cos\left(2\pi\times10^{15}t+\frac{\pi}{6}\right)$，求该点的合振动.

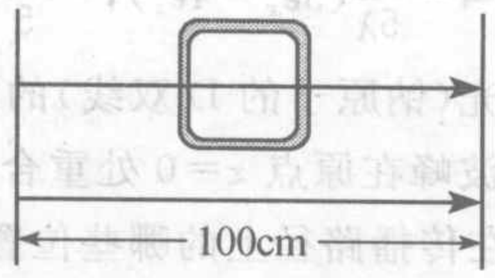
2.2 四列同方向振动的单色波在 P 点的振动分别为 $E_1=5\cos(2\pi\times10^{14}t)$，$E_2=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{6}\right)$，$E_3=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$E_4=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{2}\right)$，计算该点的合振幅及初相位.

2.3 如附图所示，从 S_1 和 S_2 各发出波长为 10m 的电磁波，在彼此靠近的两个点 P_1 和 P_2 测得电磁波的强度分别为 $9\mathrm{W/m^2}$ 和 $16\mathrm{W/m^2}$，若 $S_1P_1=2560\mathrm{m}$，$S_1P_2=2450\mathrm{m}$，$S_2P_1=3000\mathrm{m}$，$S_2P_2=2555\mathrm{m}$，问 S_1 和 S_2 处电磁波的强度为多少？(设两列波从 S_1 和 S_2 发出时同相位，可以不考虑这些波的电矢量间的夹角)

2.4 如附图所示，两列波长 500nm 的单色波传过 100cm 的距离，由 A 到达 B 处，其中一列波穿过盛水的玻璃杯，玻璃杯壁厚 0.5cm，内壁间距 10cm，设两列波在 A 同相位，求在 B 处的相位差. 已知玻璃和水的折射率为 1.52 和 1.33.



习题 2.3 图



习题 2.4 图

2.5 求两列波 $E_1=A\cos(kz-\omega t)$，$E_2=-A\cos(kz-\omega t)$ 的合振动.

2.6 用振幅矢量法证明

$\cos(kz-\omega t)+4\sin(kz-\omega t)=5\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi)$，并确定 $\Delta\varphi$ 的值.

2.7 一列驻波的表达式为 $E=100\sin\dfrac{2}{3}z\cos5\pi t$，找出可以合成这种驻波的两列单色波.

2.8 载有信号的波列 $E=A(1+a\cos\omega_m t)\cos\omega_c t$，是频率为 ω_c 的单色波的振幅被频率为 ω_m 的单色波调制. 证明这列载波是频率为 ω_c、$\omega_c+\omega_m$ 和 $\omega_c-\omega_m$ 的三列单色波叠加的结果.

2.9 真空中沿 z 方向传播的两列单色波

$E_1=A\cos2\pi\left(\nu t-\dfrac{z}{\lambda}\right)$，$E_2=A\cos2\pi\left[(\nu+\Delta\nu)t-\dfrac{z}{\lambda-\Delta\lambda}\right]$，其中 $\Delta\nu=3\times10^8\,\mathrm{Hz}$

试求这两列波叠加所形成的波的振幅、强度变化的空间周期.

2.10 对于光波，证明 $\dfrac{1}{v_g}=\dfrac{n}{c}+\dfrac{\omega}{c}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$.

2.11 在液体表面下比波长大许多的深度中传播的表面波的相速度为 $v_p=\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}+\dfrac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$，其中 γ 为液体的表面张力，ρ 为液体的密度. 计算在长波极限下，一个脉冲(准单色波)的群速度.

2.12 证明 $v_g=\dfrac{c}{n}+\dfrac{\lambda c}{n^2}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

2.13 一列波在周期性结构中传播，其频率为 $\omega=2\omega_0\sin(kl/2)$，求出这列波的相速度和群速度的表达式.

2.14 设等离子体中，电磁波的色散关系为 $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$，其中 ω_p 为常数，求出相速度和群速度的表达式，并证明 $v_p v_g=c^2$.

2.15 在激光出现之前，单色性最好的光源是氪同位素 Kr^{86} 放电管发出的波长为 605.7nm 的红光，其波列长约 700mm，求其波长分布范围和频率分布范围.

2.16 测量二硫化碳的折射率的实验数据为波长为 589.0nm 时，折射率为 1.629；波长为 656.0nm 时，折射率为 1.620；求波长为 589.9nm 时，光波在其中的相速度、群速度以及群速折射率.

答：$1.840\times10^8\,\mathrm{m/s}$；$1.751\times10^8\,\mathrm{m/s}$；1.708.

第 3 章习题

3.1 一束自然光和平面偏振光的混合光，通过一个可旋转的理想偏振片后，光强随着偏振变的取向可以有 5 倍的改变. 求混合光中各个成分光强的比例.

答：2∶1

3.2 两偏振片的透振方向成30°夹角时，透过的光强为I_1，若其他条件不变而使上述夹角变为45°，透射光强如何变化.

答：$\frac{2}{3}I_1$

3.3 欲使一平面偏振光的振动面旋转90°，则

(1) 若只用两块理想的偏振片，怎样做到这一点？

(2) 如果用两理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转旋转了90°，最大的光强为原来的多少倍？

答：(1) 使第二片的透振方向与平面偏振光的振动方向保持垂直，而且第一片的透振方向与平面偏振光的振动方向不垂直即可；(2) 1/4

3.4 假定在两个固定的正交理想偏振片之间插入第三个理想偏振片，其透振方向以角速度ω旋转，试证明透射的光强满足如下关系式$I=\frac{1}{8}I_0(1-\cos 4\omega t)$.

3.5 一束椭圆偏振光与自然光的混合光沿z轴方向传播，通过一偏振片. 当偏振片的透振方向沿x轴时，透射光强度最大，为$1.5I_0$；透振方向沿y轴时，透射光强度最小为I_0.

(1) 当透振方向与x轴成θ角时，透射光强是多少？与入射光中的无偏振部分相关吗？

(2) 如果入射光先通过一个$\lambda/4$片，再通过偏振片，$\lambda/4$片的光轴沿x轴，而偏振片的透振方向与x轴成30°角时透射光强最大，求此最大光强值，以及入射光中两成分的强度比例.

答：(1) $I_0(1+0.5\cos^2\theta)$；(2) $\frac{7}{4}I_0$，1.5∶1.

3.6 四个理想偏振片堆叠起来，每一片相对于前一片顺时针转过30°角，自然光入射，最后出射的光强为原来的多少倍？

答：$\frac{27}{128}I_0$.

3.7 一对起偏器和检偏器的取向使透射光强为最大，当检偏器转过(1)30°；(2)45°；(3)60°时，透射光强各减小至最大光强的多少？

答：(1) 3/4；(2) 1/2；(3) 1/4.

3.8 起偏器和检偏器的透振方向之间夹角是$\theta=30°$

(1) 如果没有吸收，透射光强变为原来的多少？

(2) 如果它们各吸收了10%的光强，透射光强又变为原来的多少？

答：(1) $\frac{3}{8}$；(2) $\frac{243}{800}$.

3.9 在两个正交偏振片之间插入第三个偏振片，求：

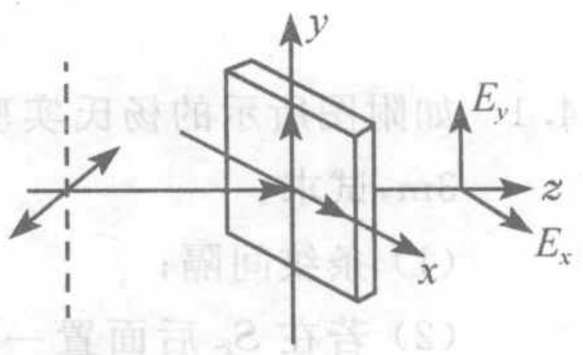
(1) 透射光强变为入射光强的1/8时，第三偏振片的方位角；

(2) 如何放置才能使最后的透射光强为零？

(3) 是否可以使透射光强变为入射的自然光强的1/2？

答：(1) $\theta=\frac{\pi}{4}$；(2) $\theta=0,\frac{\pi}{2}$；(3) 不可能.

3.10 有一类光学元件，可以使一列射入其中的平面偏振光分为振动方向相互垂直的两列，且这两列光由于传播速度不同而产生相位差. 如附图所示，入射光电矢量在上述元件中分为振幅相等的两个正交分量，当从元件另一侧出射时，y方向的相位超前，试讨论相位超前分别为(1)$\pi/2$；(2)π；



习题3.10图

(3)$3\pi/2$;(4)2π 时,出射光的偏振态.

答:(1) 右旋圆偏光;(2) 平面偏振光,光矢量在Ⅱ、Ⅳ象限;(3) 左旋圆偏光;(4) 平面偏振光,光矢量与入射光平行.

3.11 在 3.10 题中,y 方向的相位超前分别为(1)$\pi/4$;(2)$7\pi/4$ 时,出射光的偏振态如何?

答:(1) 右旋椭圆偏振光;(2) 左旋椭圆偏振光.

3.12 在 3.11 题中,如果 E_x 分量的振幅为 $A\cos\theta$,而 E_y 分量的振幅为 $A\sin\theta$,讨论 y 方向的相位超前分别为(1)$\pi/4$;(2)$\pi/2$ 时,出射光的偏振态.

3.13 一束自然光入射到折射率为 1.72 的火石玻璃上,发现反射光是平面偏振光,试求光在该火石玻璃中的折射角.

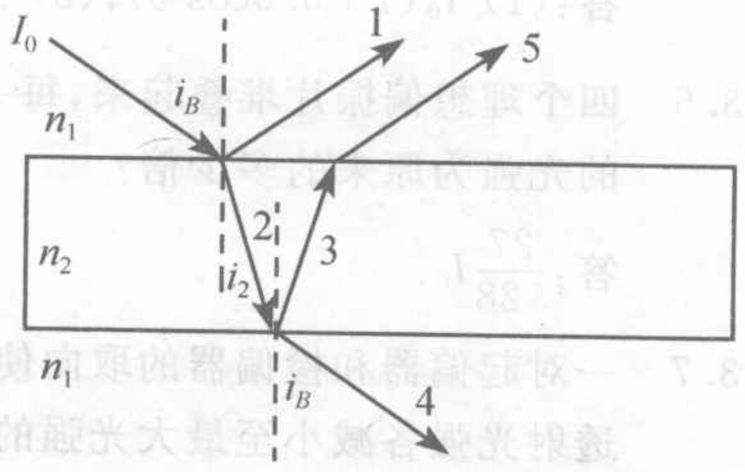
3.14 有一空气-玻璃分界面,已知光从空气一侧射入玻璃时,其布儒斯特角为 57°,计算这种光从玻璃一侧射入空气时的布儒斯特角.

3.15 自然光以 57°角入射到空气-玻璃的分界面上,玻璃的折射率为 1.54,通过计算可知 S 分量和 P 分量的振幅透过率分别为 59.3%和 64.9%,计算反射光和透射光的偏振度.

3.16 自然光以布儒斯特角射入由 8 块平行平板玻璃组成的玻璃片堆,忽略玻璃对光的吸后,计算通过该玻璃片堆后光的偏振度.

3.17 线偏光电矢量的振动面与入射面之间的夹角称作振动的方位角,设入射线偏光的方位角为 α,入射角为 i,分界面两侧介质的折射率分别为 n_1、n_2,求反射光和折射光的方位角 α_1、α_2.

3.18 自然光以 θ_B(布儒斯特角)入射到折射率为 1.5 的平行平面玻上,不计吸收,计算附图中各处标示的光强值.



习题 3.18 图

答:$I_1=0.0740I_0$,$I_2=0.6174I_0$,$I_3=0.0336I_0$,$I_4=0.8630I_0$,$I_5=0.0537I_0$.

3.19 波长为 546.1nm 的绿光在 K9 玻璃中的折射率为 1.518,在空气中的折射率为 1.000,计算一束绿光垂直透过一块 K9 玻璃后光强损失了多少?某种照相镜头由 16 片薄透镜构成,试估算绿光透过这样的镜头后,光强是原来的百分之几(不考虑玻璃对光的吸收).

3.20 要使玻璃(折射率为 1.5)的反射光为平面偏振光,入射角为多大?该角度是否与波长有关?折射光的偏振度是多大?

答:56.31°,0.07987.

3.21 一块 K9 玻璃平板,两表面相互平行.黄光(波长 589.3nm)以 45°角入射,进入玻璃后,在两个表面之间可以多次反射、折射,设入射光只有 p 分量,光强为 I_0,求从上表面和下表面射出的前三列波的强度.

第 4 章习题

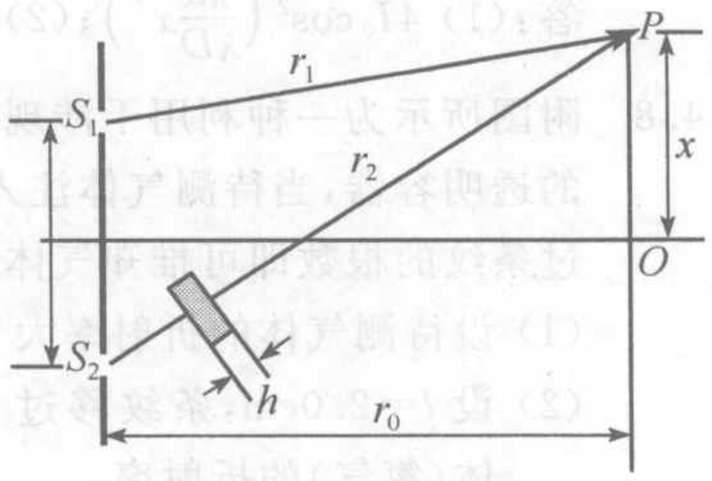
4.1 如附图所示的杨氏实验装置中,若单色光源的波长 $\lambda=5000\text{Å}$,$d=S_1S_2=0.33\text{cm}$,$r_0=3\text{m}$,试求:

(1) 条纹间隔;

(2) 若在 S_2 后面置一厚度 $h=0.01\text{mm}$ 的平行平面玻璃片,若在 S_2 后面置一厚度 $h=0.01\text{mm}$ 的平行平面玻璃片,试确定条纹移动方向和计算位移的公式;假设一直条纹

的位移为 4.73mm，试计算玻璃的折射率.

答：(1) 0.5mm；条纹向下移动；(2) j 级亮纹的位置 $x\dfrac{d}{r_0}+(n-1)h=j\lambda$；(3) 1.52.



习题 4.1 图

4.2 用很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝装置中的一条缝上，这时，光屏上的中心为原来的第七级亮纹所占据，若 $\lambda=5500\text{Å}$，则云母片有多厚？

答：6.64μm.

4.3 在双缝的情况下，证明

(1) 屏幕上的光强为 $I_P=4A_0^2\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)=I_0\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$；

(2) 第一极小出现在 $\theta_1=\dfrac{\lambda}{2d}$.

4.4 设有两个点光源 S_1、S_2，相距为 t，接收屏垂直于 S_1S_2 连线放置，垂足为接收屏上的原点，接收屏至 S_1、S_2 中点的距离为 D，且 $D\gg t$、x. 问在接收屏上生成的干涉图像是什么形状？并证明第 k 级亮纹至屏原点的距离为

$$\rho=D\sqrt{2\left(1-\frac{j\lambda}{t}\right)}$$

4.5 波长为 λ 的平行单色光以小倾角 θ 斜入射到间距为 t 的双缝上，设接收屏到双缝距离为 D.

(1) 求零级主极大的位置；

(2) 假设在屏上到双缝距离都相等的地方恰好出现暗条纹，倾角 θ 必须满足什么条件？

答：(1) $x_0=D\sin\theta$；(2) $\theta\approx\sin\theta=\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{t}$.

4.6 考虑如附图所示的三缝干涉，假设三狭缝的宽度相同($\leqslant\lambda/2$).

(1) 第一主极大的 θ 角是多少？(即从三狭缝出来的子波同相位)；

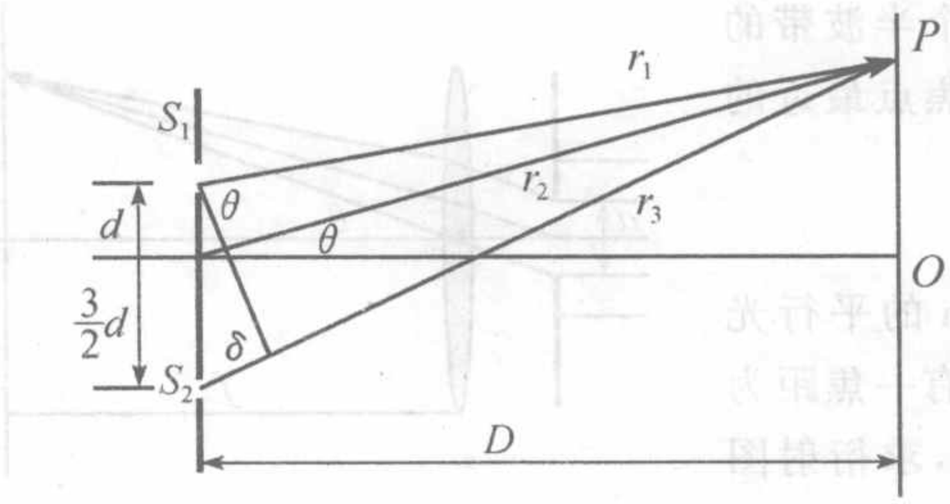
(2) 把(1)的结果写为 θ_1，在零级主极大($\theta=0$)方向的能流可写为 F_0. 在 $\theta_1/2$ 方向上的能流是多少？(以 F_0 为单位，设 $\lambda\ll d$).

答：(1) $\theta=\dfrac{x}{D}=2\dfrac{\lambda}{d}$；(2) $\dfrac{F_0}{9}$.

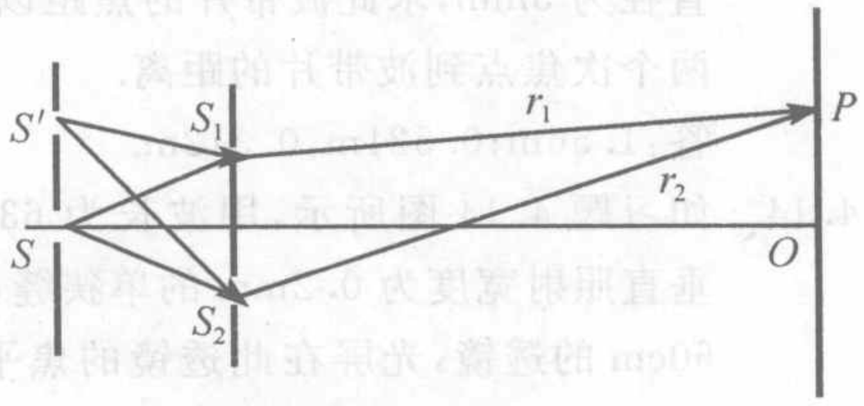
4.7 在杨氏双缝实验中，除了原有的光源缝 S 外，再在 S 的正上方开一狭缝 S'，如附图所示.

(1) 若使 $S'S_2-S'S_1=\dfrac{\lambda}{2}$，试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布.

(2) 若 $S'S_2-S'S_1=\dfrac{\lambda}{2}$，$S$ 和 S' 同时打开时，屏上的光强分布如何？



习题 4.6 图



习题 4.7 图

答：(1) $4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$；(2) $4I_0\cos^2\left[\pi\left(\frac{x}{l}+\frac{x'}{D}\right)\frac{d}{\lambda}\right]$；两缝同时打开 $I+I'$.

4.8 附图所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性装置，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器，当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹会聚移动，由移过条纹的根数即可推知气体的折射率. 试求：

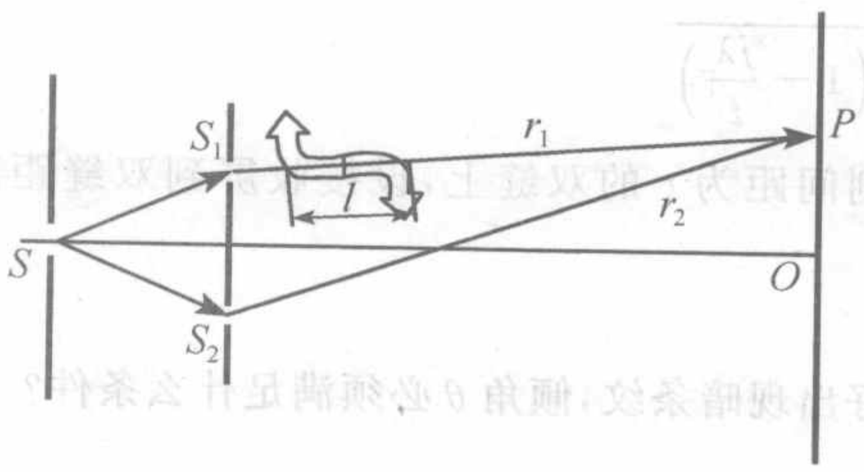
(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率，干涉条纹如何移动？

(2) 设 $l=2.0$cm，条纹移过 20 根，光波长 589.3nm，空气折射率为 1.000276，求待测气体(氯气)的折射率.

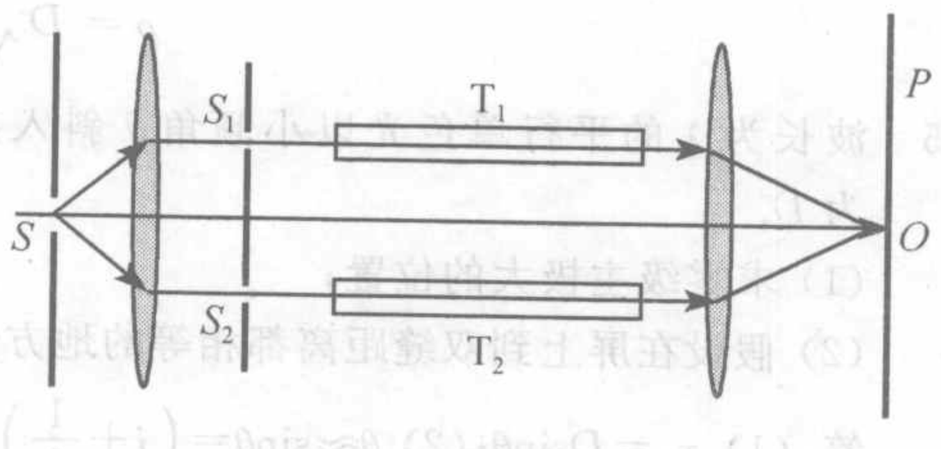
答：(1) 条纹上移；(2) 1.0008653.

4.9 瑞利干涉仪的结构和使用原理如下(参见附图)：以钠光灯作为光源置于透镜 L_1 的前焦面，在透镜 L_2 的后焦面上观测干涉条纹的变动，在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管 T_1 和 T_2. 实验开始时，T_2 管充以空气，T_1 管抽成真空，此时开始观察干涉条纹. 然后逐渐使空气进入 T_1 管，直到它与 T_2 管的气压相同位置. 记下这一过程中条纹移过的数目. 射光波长为 589.3nm，管长 20cm，条纹移过 98 根，求空气的折射率.

答：1.000289.



习题 4.8 图



习题 4.9 图

4.10 波长为 632.8nm 的激光垂直入射在有一半径为 1.25mm 的衍射屏上，为了观察 Fraunhofer 衍射，观察屏大约要放多远？

答：2.47m.

4.11 在 Fresnel 圆孔衍射实验中，保持其他条件不变，而使圆孔的半径连续增大，大致画出观察点 P 处光强随圆孔半径变化的曲线.

4.12 波长为 $\lambda=5633$Å 的单色光从远处的光源发出，经过一个直径 $D=2.6$mm 的圆孔，在距孔 1m 处放一屏幕，问：

(1) 幕上正对孔中心的点 P 是亮的还是暗的？

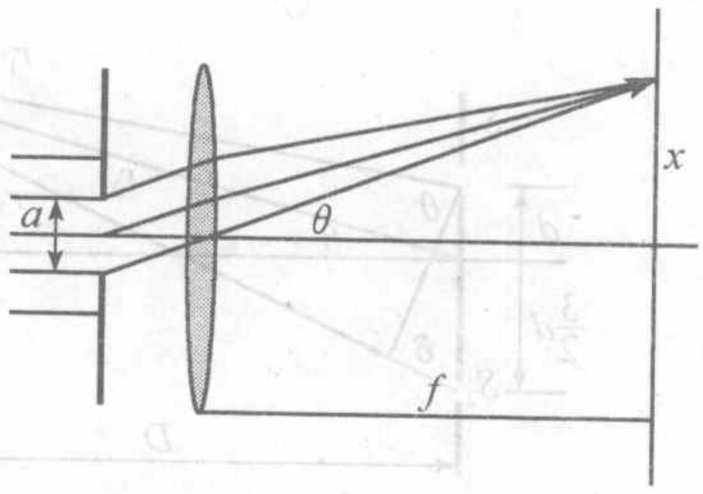
(2) 要使 P 点的明暗变成与(1)相反的情况，至少要将屏幕移动多少距离？

答：(1) P 为亮点；(2) 前移 0.25m 或后移 0.5m.

4.13 对于波长为 500nm 的光，波带片的第 8 个半波带的直径为 5mm，求此波带片的焦距以及距焦点最近的两个次焦点到波带片的距离.

答：1.56m；0.521m，0.312m.

4.14 如习题 4.14 图所示，用波长为 632.8nm 的平行光垂直照射宽度为 0.2mm 的单狭缝，缝后有一焦距为 60cm 的透镜，光屏在此透镜的焦平面上，求衍射图样中心到第二条暗纹的距离.



习题 4.14 图

答:0.038mm.

4.15 若将一个 Fresnel 波带片的前 5 个偶数半波带挡住,其余全开放,衍射场中心的强度与自由传播时相比扩大了多少倍?

答:121.

4.16 若将一个 Fresnel 波带片的前 50 个奇数半波带挡住,其余全开放,衍射场中心的强度与自由传播时相比扩大了多少倍?

答:9801.

4.17 一硬币半径为 1.2cm,据波长 500nm 的点光源 10cm,求在两者的中心连线上,硬币后 10cm 处的光强表示式 $\left(\frac{a_{k+1}}{2}\right)^2$ 中 k 的数值.

答:48.

4.18 平行光正入射到单圆孔衍射屏上,在轴上距离孔 L 处记录光强变化,发现光强随孔径的增加呈振荡型变化

(1) 求第一极大时圆孔的半径 r_a;

(2) 求第一极小时圆孔的半径 r_b;

(3) 上述两半径趋于无限大时,两者光强的比值;

(4) 如果用半径为 r_a 的不透光圆屏代替衍射屏,此时的强度如何?

答:$r_a=\sqrt{L\lambda}$;$r_b=\sqrt{2L\lambda}$.

4.19 波长为 500.0nm 的单色光垂直入射到直径为 4mm 的圆孔上,确定轴线上光强极大和极小值点的位置.

答:$\begin{cases}\dfrac{8}{2m+1}(\mathrm{m}), & \text{亮},\\ \dfrac{4}{m}(\mathrm{m}), & \text{暗}.\end{cases}$

4.20 波长为 500.0nm 的单色光垂直入射到直径为 4mm 的圆孔上,接收屏在圆孔后 1.5m 处,问孔的轴线与屏的焦点处是两点还是暗点?如果要使该点的光强发生相反的变化,孔的直径要改变多少?

答:暗点;$\rho=1.88\sqrt{2m+1}\mathrm{mm}$.

4.21 波长为 632.8nm 的平行光垂直入射到圆孔衍射屏上,屏后轴上距离 1m 处出现一个亮点,设此时圆孔恰好仅露出第一个半波带,试求:

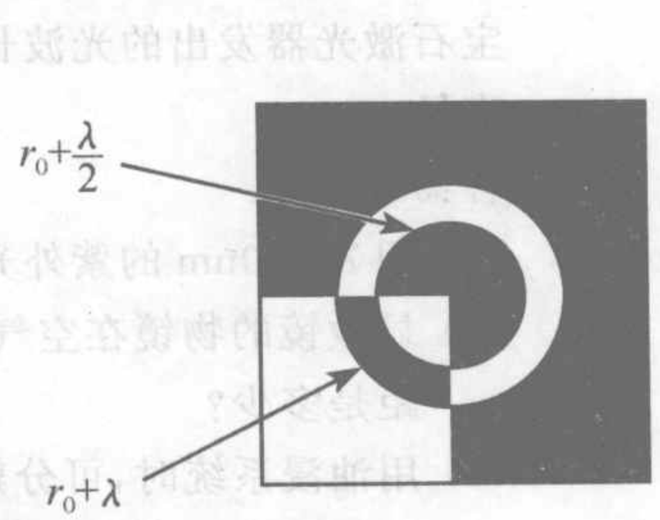
(1) 圆孔的半径;

(2) 由该点向衍射屏移动多远可以出现第一个暗点?

答:(1) 0.795mm;(2) 0.5m.

4.22 平行光照射附图所示的衍射屏,图中标出的是观察点到屏上的光程,在近轴条件下用矢量方法求出观察点的光强(用自由传播时该点的光强表示).

答:$\frac{9}{16}I_0$.



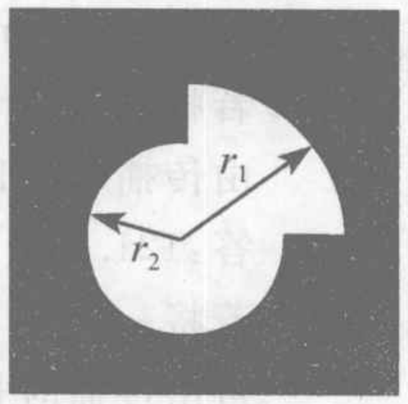
习题 4.22 图

4.23 针孔相机没有透镜,而是用一个前后相距 10cm 的带针孔的暗盒构成.用它拍摄太阳时要得到最清晰明亮的像,针孔的直径应该多大?

答:0.224mm.

4.24 500.0nm 的光正入射到附图所示衍射屏上，$r_1=\sqrt{2}$mm，$r_2=1$mm，轴上观察点距衍射屏 2m. 计算该点的振幅和强度.

答：$\frac{3}{4}A_1$；$\frac{9}{4}I_0$.



习题 4.24 图

4.25 波带片第 5 环的半径为 1.5mm，对于 500.0nm 的光，其焦距和第一环的半径是多少？若在波带片和屏幕间充以折射率为 n 的介质，将发生什么变化？

答：0.9m；0.67mm；$f_2=nf_1$.

4.26 一菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1=5.0$mm.

(1) 若用波长为 1.06μm 的单色平行光照明，求其主焦距；

(2) 若要求对此波长主焦距缩短为 25cm，需要将此波带片缩小或放大多少？

4.27 当缝宽分别是 1λ、5λ、10λ 时，单缝 Fraunhofer 衍射的半强角宽度是多大？（半强角宽度是光强等于中央衍射主极大光强一半处的衍射角宽度）

答：0.4429；0.0886；0.0443

4.28 平行单色光以 θ 角入射到有一单缝的衍射屏上，屏后有一透镜，设透镜无限大. 求：

(1) 后焦面上的光强分布；

(2) 如果将上述狭缝换为长板条，强度又如何？

答：(1) $I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$；(2) $I'(\theta_0)=I(\theta)=(K-1)^2I_0$.

4.29 波长 480nm 的平行单色光垂直入射到缝宽 0.4mm 的单缝衍射屏上，缝后透镜焦距为 60cm，计算当屏上一点到缝两端的相位差分别为 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 时，该点到焦点的距离分别是多少？

答：0.018cm；0.006cm.

4.30 平行白光正入射到 0.320mm 宽的狭缝上，缝后 1m 远处有一小的分光镜的入射缝正对该狭缝，对图样进行分光研究. 如果狭缝沿着垂直方向移动 1.250cm，分光镜中所见如何？

答：可见 9 条紫色条纹（即紫光出现 9 次），红光出现 5 次，其他颜色的光出现的次数介于两者之间.

4.31 阿波罗 11 号登月后，在月球上将 100 块阿波罗小棱镜排成方阵，用来精确测量月地之间距离的变化. 不采用整块大棱镜的原因有二：一是月球温差大，大棱镜易变形；二是月地间有相对运动，返回光束将偏离元发射地. 为此将每一个小棱镜置于一个保护圆筒中，利用衍射使返回的光束在地面上有一展布直径罩住发射地. 若该直径需要 10.67 英里，红宝石激光器发出的光波长为 694.3nm，月地间距离为 2.4×10^5 英里，请设计保护圆筒的直径.

答：38.1mm.

4.32 (1) 用 275.0nm 的紫外光比用 550.0nm 的可见光，显微镜的分辨本领可以增大多少倍？

(2) 显微镜的物镜在空气中的数值孔径为 0.9，若用紫外光，可以分辨的两条线的最小间距是多少？

(3) 用油浸系统时，可分辨的最小间距又是多少？油的折射率为 1.6；

(4) 照相底片上感光微粒的大小约为 0.5mm，问当油浸系统的紫外光显微镜的横向放大率是多少时，底片上恰能分辨？

答：(1) 2 倍；(2) 186nm；(3) 116nm；(4) 4.3×10^3.

4.33 一反射式天文望远镜的通光孔径为 2.5m，求可以分辨的双星的最小夹角. 与人眼相比，分辨本领提高了多少倍？人眼瞳孔的直径约为 2mm.

4.34 双星之间的角距离为 1×10^{-6} rad，辐射波长为 577.0nm 和 579.0nm，要分辨此双星，望远镜的孔径至少多大？

答：1250.

第 5 章习题

5.1 设菲涅耳双面镜的夹角 $\varepsilon=10^{-3}$ rad，有一单色狭缝光源 S 与两镜相交处 C 的距离 r 为 0.5m，单色波的波长 $\lambda=5000$Å. 在距两镜相交处的距离为 $L=1.5$m 的屏幕 Σ 上出现明暗干涉条纹.

(1) 求屏幕 Σ 上两相邻明条纹之间的距离；

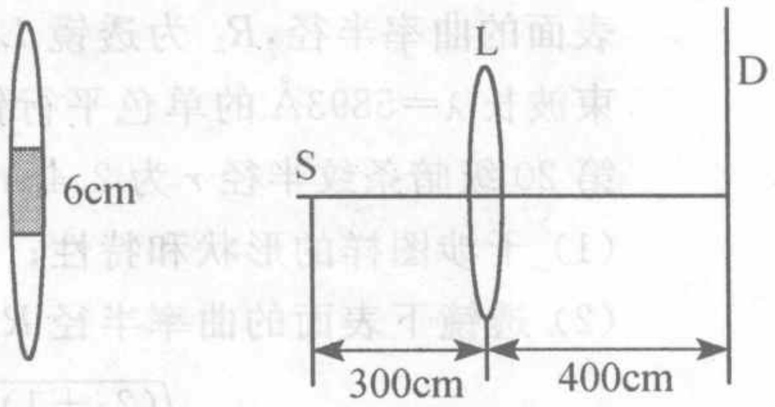
(2) 问在屏幕 Σ 上最多可以看到多少明条纹？

答：(1) 1.00mm；(2) 如果仅考虑屏幕上部，则包括 0 级，可以看见 4 条，下半部分也应该有一些，但考虑到反射镜的遮挡，会少一些.

5.2 如附图(a)和(b)所示，将一焦距 f' 为 50cm 的会聚透镜的中央部分截取 6mm，把余下的上下两部分再黏合在一起，成为一块透镜 L. 在透镜 L 的对称轴上，左边 300cm 处有一波长 $\lambda=5000$Å 的单色点光源 S，右边 450cm 处置一光屏 D. 试分析并计算：

(1) S 发出的光经过透镜 L 后的成像情况，如所成之像不止一个，计算各像之间的距离；

(2) 在光屏 D 上能否观察到干涉条纹？如能观察到干涉条纹，相邻明条纹的间距是多少？



习题 5.2 图

答：(1) 7.12mm.

5.3 波长 λ 为 0.5μm 的平行单色光垂直入射到双缝平面上，已知双缝间距 d 为 0.5mm，在双缝另一侧 5cm 远处，正放置一枚像方焦距 f' 为 10cm 的理想透镜 L，在 L 右侧 12cm 远处放置一屏幕. 问屏幕上有无干涉条纹？若有，则条纹间距是多少？

答：0.11mm.

5.4 波长 λ 为 0.5μm 的平行单色光垂直入射到双孔平面上，已知双孔间距 t 为 0.5mm，在双孔屏另一侧 5cm 远处，正放置一枚像方焦距 f' 为 5cm 的理想薄透镜 L，并在 L 的像方焦平面处放置接收屏. 求：

(1) 干涉条纹的间距等于多少？

(2) 将透镜往左移近双孔 2cm，接收屏上干涉条纹的间距又等于多少？

答：(1) 50μm；(2) 58μm.

5.5 一束波长 500nm 的平行光正如射到菲涅耳双棱镜上，已知棱镜顶角为 3.5′，折射率为 1.5，距棱镜 5.0m 处有一接收屏，

(1) 求屏上干涉条纹间距；

(2) 求屏上出现的条纹数.

答：(1) 0.5mm；(2) 10.

5.6 一劳埃德镜面宽度为 5.0cm，一缝光源在其左侧，离镜边缘 2.0cm，比镜面高出 0.5mm，接收屏幕在镜右侧，距其边缘 300cm，射入射光波长 589nm，求：

(1) 幕上的条纹间距以及出现的条纹数;

(2) 若缝光源上下平移以改变其到镜面的高度,幕上条纹将如何变化?

5.7 沿着与肥皂膜的法线成35°角的方向观察膜呈绿色($\lambda=5000$Å),设肥皂水的折射率为1.33,求:

(1) 薄膜的厚度;

(2) 如果垂直注视时,膜呈何种颜色?

答:(1) $(2j+1)1.0417\times10^{-7}$m;(2) 554.2nm.

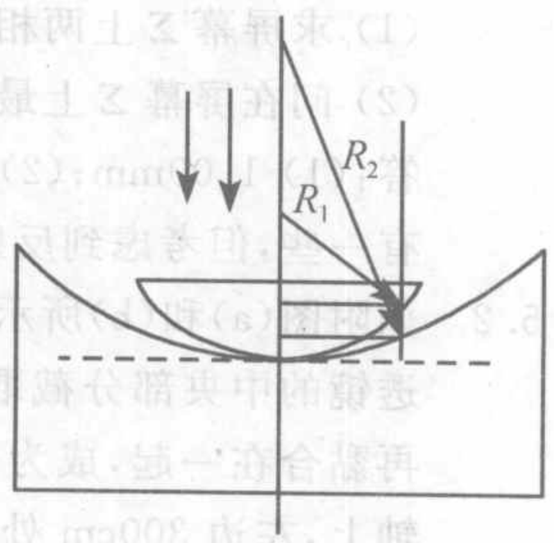
5.8 一束白光垂直照射厚度为0.4μm的玻璃片,玻璃的折射率为1.5,在可见光谱范围内($\lambda=4000$Å到$\lambda=7000$Å),反射光的哪些波长成分将被加强?

答:4800Å.

5.9 白光以45°角射在肥皂($n=1.33$)膜上,试求使反射光呈黄色($\lambda=6100$Å)的最小膜厚度.

答:13.54μm.

5.10 如附图所示为一观察干涉条纹的实验装置.R_1为透镜L_1下表面的曲率半径,R_2为透镜L_2上表面的曲率半径,今用一束波长$\lambda=5893$Å的单色平行钠光垂直照射,由反射光测得第20级暗条纹半径r为2.4cm,又已知$R_2=2.5$cm,试求:



习题5.10图

(1) 干涉图样的形状和特性;

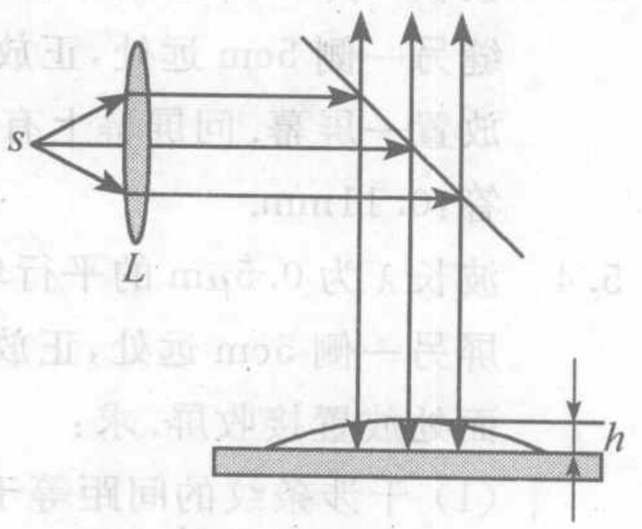
(2) 透镜下表面的曲率半径R_1是多少?

答:(1) 亮条纹$r_j=\sqrt{\dfrac{(2j+1)\lambda R_1R_2}{2(R_2-R_1)}}$,暗条纹$r'_j=\sqrt{\dfrac{j\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}}$;(2) 192.73cm.

5.11 如附图所示的实验装置,在一洁净的玻璃片的上表面上放一滴油,当油滴展开成油膜时,在波长$\lambda=6000$Å的单色光垂直照射下,从反射光中观察到油膜所形成的干涉条纹.实验中,是由读数显微镜向下观察油膜所形成的干涉条纹.如果油膜的折射率$n=1.20$,玻璃的折射率$n'=1.50$,试求:

(1) 当油膜中心的最高点与玻璃片的上表面相距$h=12000$Å时,描述所观察到的条纹的形状,即可以观察到几条亮条纹,亮条纹所在处油膜的厚度是多少?中心点的明暗程度又如何?

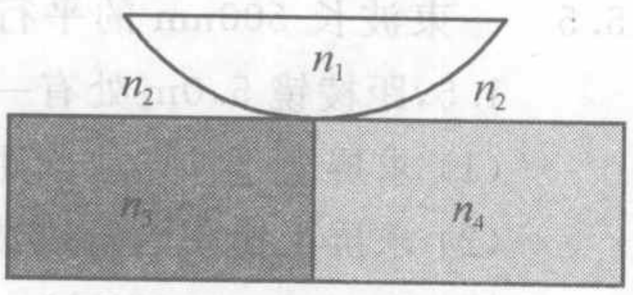
(2) 当油膜逐渐扩展时,所看到的条纹将如何变化?



习题5.11图

答:(1) 可见5条亮纹,$h_1=j\dfrac{\lambda}{2n}$;(2) 油膜扩展,看见亮条纹向中心收缩并消失,同时可见油膜新扩展的区域有心条纹出现.

5.12 如附图所示是Newton环的干涉装置,平凸透镜球面的曲率半径$R=1.00$m,折射率$n_1=1.50$,平板玻璃由左右两部分组成,折射率分别是$n_3=1.50$和$n_4=1.75$,平凸透镜的顶点在这两部分玻璃的分界处,中间充以折射率$n_2=1.62$的二硫化碳液体,若用单色光垂直照射,在反射光中测得右边j级明条纹的半径$r_j=4$mm,$j+5$级明条纹的半径$r_{j+5}=6$mm,试求:



习题5.12图

(1) 入射光的波长；

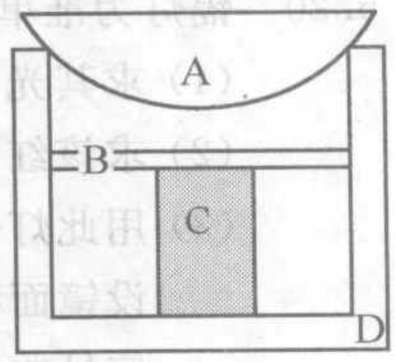
(2) 观察到的干涉图样.

答：(1) 648nm；(2) 同一高度处，两侧条纹正好明暗错开.

5.13 如附图所示，A 为平凸透镜，B 为平板玻璃，C 为金属柱，D 为框架，A、B 之间留有气隙，而 A 被固结在框架的边缘上. 温度变化时，C 发生伸缩，而假设 A、B、D 都没有伸缩. 现用波长为 $\lambda=6328\text{Å}$ 的激光垂直照射，试求：

(1) 在反射光中观察时，看到 Newton 环的条纹都已向中央，这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短？

(2) 如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失，C 的长度变化了多少毫米？



习题 5.13 图

答：(1) 金属柱 C 缩短；(2) 3.164μm.

5.14 一个 Michelson 干涉仪被调节，当用波长 $\lambda=5000\text{Å}$ 扩展光源照明时会出现同心圆环形条纹，若要移动其中一臂而使圆环中心处相继出现 1000 条条纹，则该臂要移动多少？若中心是亮的，计算第一个暗环的角半径.（要求用两臂的路径距离差和波长表示）

答：250μm；$i=\sqrt{\dfrac{\lambda}{2h}}$.

5.15 在傍轴条件下，等倾条纹的半径与干涉级有什么样的依赖关系？Newton 环的情况又怎样？能够将二者区别吗？如何区别？

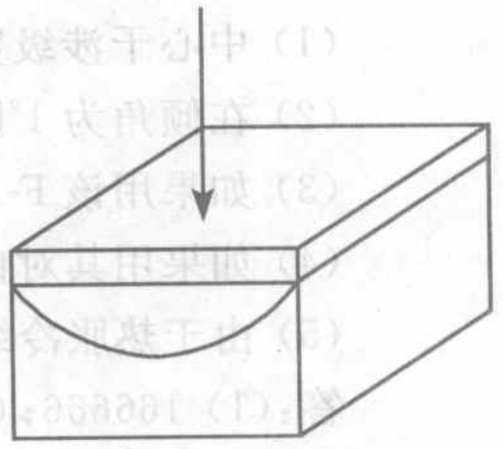
5.16 将光滑的平板玻璃覆盖在柱形平凹透镜上，如附图所示，试求：

(1) 用单色光垂直照射时，画出反射光中干涉条纹分布的大致情况；

(2) 若圆柱面的半径为 R，且中央为暗纹，问从中央数第 2 条暗纹与中央暗纹的距离是多少？

(3) 连续改变入射光的波长，在 $\lambda=5000\text{Å}$ 和 $\lambda=6000\text{Å}$ 时，中央均为暗纹，求柱面镜的最大深度；

(4) 若轻压上玻璃片，条纹如何变化？


习题 5.16 图

答：(1) 是平行于柱面轴线的直条纹；(2) $d'=\sqrt{2\lambda R}$；(3) 1.5μm；(4) 条纹间距变大，且中心有条纹被吞入.

5.17 玻璃板上有一层油膜，波长可连续改变的单色光正入射，在 $\lambda=6000\text{Å}$ 和 $\lambda=6000\text{Å}$ 时，观察到反射光干涉相消，并且在这两波长之间再无其他波长的光相消.

(1) 证明油膜的折射率一定小于 1.5（玻璃的折射率 1.5）；

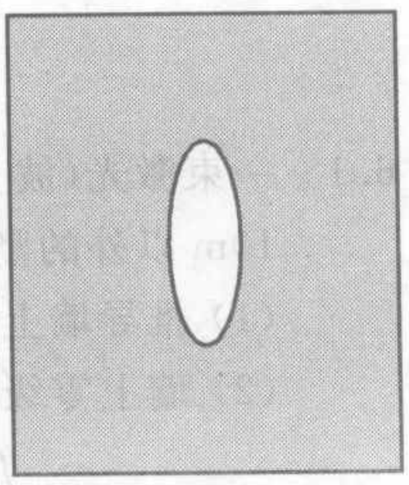
(2) 若油的折射率为 1.3，求油膜的厚度.

答：(2) 673nm.

5.18 如附图所示，在一厚玻璃中有一气泡，形状类似球面透镜，用单色光从玻璃的左侧垂直入射

(1) 在右侧看到的干涉条纹的特点，即形状、间距、级数和边界处的条纹特点；

(2) 若均匀用力挤压玻璃的左右两侧，条纹有何变化？


习题 5.18 图

答：(1) 干涉条纹是同心圆环；(2) 挤压，则圆环被吞入中心.

5.19 用迈克耳孙干涉仪精密侧长，以 He-Ne 激光器的 632.8nm 谱线作光源，其谱线宽度为 0.0001nm，对干涉强度讯号测量的灵敏度可

达 1/8 个条纹.

(1) 这台干涉仪的测场精度是多少?

(2) 该测长仪一次测长的量程是多少?

答:(1) 40nm;(2) 2m.

5.20 镉灯为准单色光源,其红色谱线的中心波长为 642.8nm,谱线宽度为 0.001nm,

(1) 求其光场的相干长度和相干时间;

(2) 求该红色谱线的频宽;

(3) 用此灯作为迈克耳孙干涉仪的光源,用镜面移动来观测干涉场输出的光信号曲线,设镜面移动速度为 0.5mm/s,试估算需要多长时间可以获得显示有两个波包形状的信号曲线?

答:(1) 41cm,1.4×10^{-9}s;(2) 7.1×10^{2}MHz;(3) 800s.

5.21 如果 Fabry-Poret 干涉仪两反射面间距为 1.00cm,用波长 500nm 的绿光做实验,干涉条纹中心正好是一亮斑,求第 10 个亮环的角直径.

答:0.042.

5.22 两条光谱线,中心为 600nm,波长差 10^{4}nm,现在要用法布里-珀罗干涉仪将其分辨,问法布里-珀罗干涉仪的镜面间距至少要多长? 设每一个镜面的反射率为 95%.

答:3cm.

5.23 设 Fabry-Poret 腔(F-P 腔)长 5cm,用扩展光源做实验,光波波长 $\lambda=6000$Å,问:

(1) 中心干涉级数是多少?

(2) 在倾角为 1°附近,干涉环的半角宽度是多少?(设反射率 $R=0.98$).

(3) 如果用该 F-P 腔分辨谱线,其色分辨本领有多大? 可分辨的最小波长间隔是多少?

(4) 如果用其对白光进行选频,透射最强的谱线有几条? 每条的谱线宽度是多少?

(5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5}(相对值),则谱线的漂移量是多少?

答:(1) 166666;(2) 2.21×10^{-6};(3) 2.59×10^{7};2.32×10^{-5}nm;(4) 共 118422 条;1.93×10^{7}Hz;(5) 6×10^{-5}nm.

5.24 在杨氏双缝实验中,双缝间距为 0.5mm,接收屏距双缝 1m,点光源距双缝 30cm,它发射波长 $\lambda=5000$Å 的单色. 试求:

(1) 屏上干涉条纹间距;

(2) 若点光源由轴上向下平移 2mm,屏上干涉条纹向什么方向移动? 移动多少距离?

(3) 如点光源发出的光波为(500.0±2.5)nm 的准单色光,求屏上能看到的干涉极大的最高级次;

(4) 若光源具有一定的宽度,屏上干涉条纹消失时,它的临界宽度是多少?

答:(1) 1.00mm;(2) 上移 6.7mm;(3) 100;(4) 0.3mm.

第 6 章习题

6.1 一束激光(波长为 630nm)掠入射于一钢尺上(最小刻度为 1/16 英寸),反射的光投射到 10m 以外的竖立墙壁上.

(1) 推导墙上干涉极大处的角度 θ. 为简单起见,设入射激光束平行于钢尺表面.

(2) 墙上零级和 1 级干涉图样的垂直分布又如何?

答:(1) $\theta=\sqrt{\dfrac{2j\lambda}{d}}$;(2) 0,28.2cm.

6.2 导出不等宽双狭缝的夫琅禾费衍射强度分布公式，设缝宽分别为 a 和 $2a$，缝距 $d=3a$.

答：$I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2[1+4\cos^2 u+2\cos u\cdot 2\cos(6u)]$.

6.3 $2N$ 条平行狭缝，缝宽为 a，缝间不透明部分周期性变化，间距为 $a,3a,a,3a,\cdots$，求下列各种情形的衍射强度分布：

(1) 遮住偶数条；

(2) 遮住奇数条；

(3) 全开放.

答：全开放 $A^2=A_1^2(\theta)[2+2\cos(2u)]$.

6.4 三狭缝衍射屏，缝宽均为 a，彼此间距为 d，中间缝盖有可以引起 180°相位改变的滤光片，波长为 λ 的单色光正入射，计算下列各种情况下的角度：

(1) 第一衍射极小；

(2) 第一干涉极小；

(3) 第一干涉极大.

答：(1) $\sin\theta=j\frac{\lambda}{a}\overset{j=1}{=}\frac{\lambda}{a}$；(2) $\sin\theta=\frac{\lambda}{6d}$；(3) $\sin\theta=\frac{\lambda}{4d}$.

6.5 已知光栅缝宽为 1.5×10^{-4}cm，波长为 600nm 的单色光垂直入射，发现第 4 级缺级，透镜焦距为 1m，试求：

(1) 屏幕上第 2 级亮条纹与第 3 级亮条纹的距离；

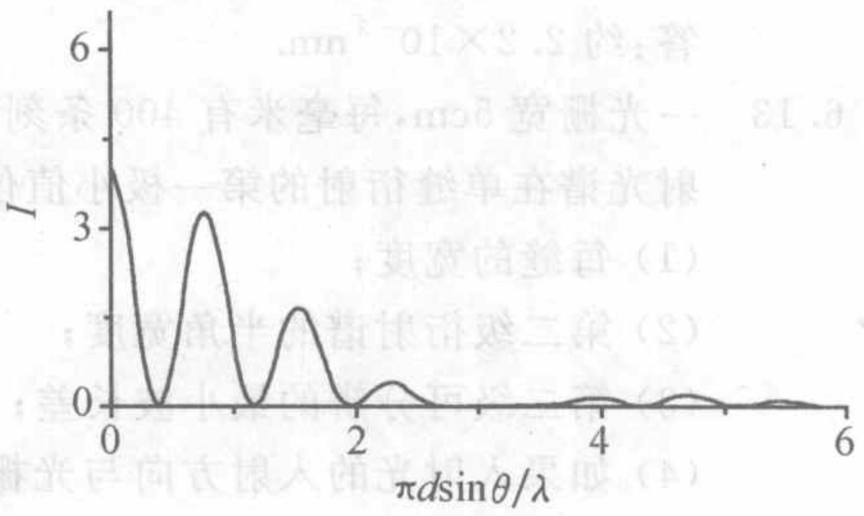
(2) 幕上所呈现的全部亮条纹数.

答：(1) 1；(2) 13 条.

6.6 三缝衍射屏，缝宽为 a，缝间不透光部分宽度为 b，薄透镜焦距为 2m.

(1) 把中间缝关闭，平行单色光垂直照射. 在透镜焦平面上得到习题 6.6 图所示的衍射条纹，在图上画出三缝均打开时的衍射条纹分布；

(2) 若打开三缝，用 400nm、600nm 的双色平行光入射，在屏上 $x=10$cm 处，同时观察到 400nm 的 k 级主极大和 700nm 的 $k+1$ 级主极大，则三缝的 a、b 各是多大？



习题 6.6 图

6.7 有一四缝衍射屏，缝宽为 a，缝间不透光部分宽度为 b，且 $a=b$，如习题 6.7 图(a)所示，其中缝 1 一直打开，其他缝可以关闭，单色平行光正入射，试求：

(1) 打开缝_____可得到图(b)的强度分布；

(2) 画出 4 个缝全打开时的强度分布；

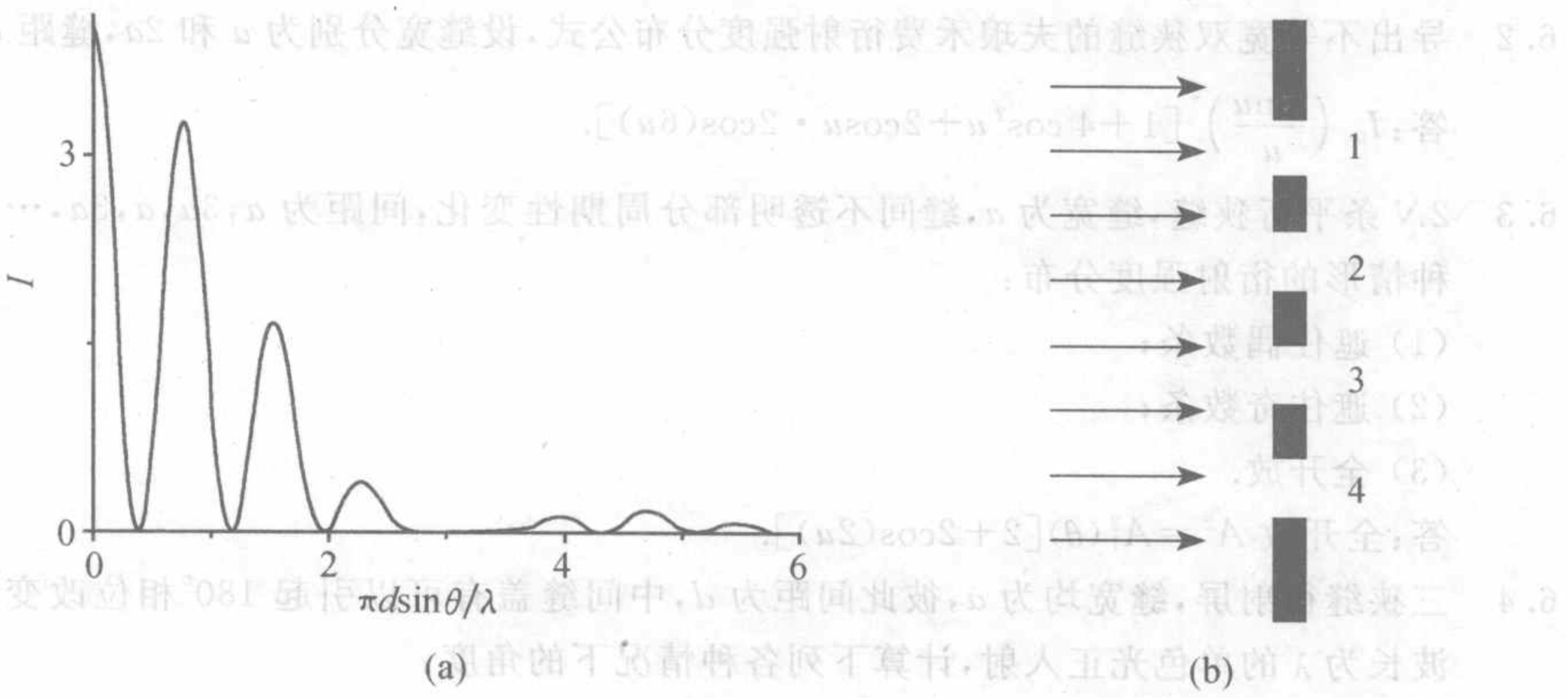
(3) 若缝 1、3 打开，d 不变，而 a 减小至 $a\ll b$，画出强度分布曲线；

(4) 按(2)的情况，中央最大光强为 $I=$_____ I_0，I_0 为图(b)中的中央最大光强.

6.8 为了能分辨第二级钠光谱的双线，长度为 10cm 的平面光栅的常数是多少？

答：0.2mm.

6.9 将一块随手撒上大量粉笔灰的玻璃放在感光底片上，先曝光一次，微微移动后再曝光一次，经过两次曝光后的底片冲洗后作为衍射屏，用单色平行光照明时，接收屏上得到什么图样？解释其形成的原因.



(a) (b)

习题 6.7 图

6.10 平行光正入射到宽度为 6cm 的平面透射光栅上，在 30°的衍射角方向上的恰可分辨的两谱线的频率差 $\Delta\nu$ 是多少？

答：1×10^{10} Hz.

6.11 一光栅，光栅常数为 4μm 总宽度为 10cm，波长为 500.0nm 和 500.01nm 的平面波正入射，光栅工作在二级光谱，问这双线分开多大角度？能否分辨？

答：恰可分辨.

6.12 某光源发射波长为 650nm 的红光，用刻线数为 10^5 的光栅测量发现这是双线，在该光栅的第三级光谱中刚好能分辨此双线，求这两条谱线的波长差.

答：约 2.2×10^{-3} nm.

6.13 一光栅宽 5cm，每毫米有 400 条刻线. 波长为 500nm 的平行光正入射时，光栅的第 4 级衍射光谱在单缝衍射的第一极小值位置. 试求：

(1) 每缝的宽度；

(2) 第二级衍射谱的半角宽度；

(3) 第二级可分辨的最小波长差；

(4) 如果入射光的入射方向与光栅平面的法线成 30°角，光栅能分辨的最小波长差又是多少？

答：(1) 6.25×10^{-4} mm；(2) 1.09×10^{-5}；(3) 0.125Å；(4) 0.003nm.

6.14 绿光波长 500.0nm，正入射在光栅常数为 2.5×10^{-3} mm、宽度为 30mm 的光栅上，聚光镜的焦距为 500mm，求：

(1) 第一级光谱的线色散率；

(2) 第一级光谱中能分辨的最小波长差；

(3) 该光栅最多能看到第几级光谱？

答：(1) 0.2mm/nm；(2) 0.042nm；(3) 4 级.

6.15 国产 31WI 型 1m 平面光栅摄谱仪的技术数据如下：物镜焦距 1050mm，光栅刻画面积 60×40mm^2，闪耀波长 635.0nm(1 级)，刻线 1200 条/mm，色散(现色散率的倒数) 0.8nm/mm，理论分辨率 72000(1 级)

(1) 该摄谱仪能分辨的最小波长间隔；

(2) 摄谱仪的角色散本领是多少？

(3) 光栅的闪耀角是多大？闪耀方向与光栅平面地发现方向成多大的角度？

答：(1) 0.005mm；(2) 0.244nm/(′)；(3) 12°39′.

第7章习题

7.1 设薄透镜由折射率为 n_L 的材料做成，其物方、像方的折射率分别为 n 和 n'，导出其相位变换函数.

答：$\exp\left[-\frac{ik}{2}\left(\frac{n_L-n}{r_1}-\frac{n_L-n'}{r_2}\right)(x^2+y^2)\right]$.

7.2 用薄透镜的相位变换函数导出傍轴条件下的横向放大率公式.

7.3 用劈形棱镜的相位变换函数导出傍轴光束斜入射时所产生的偏向角.

7.4 用变折射率材料做成如附图所示的微透镜，其折射率变化呈抛物线型，为

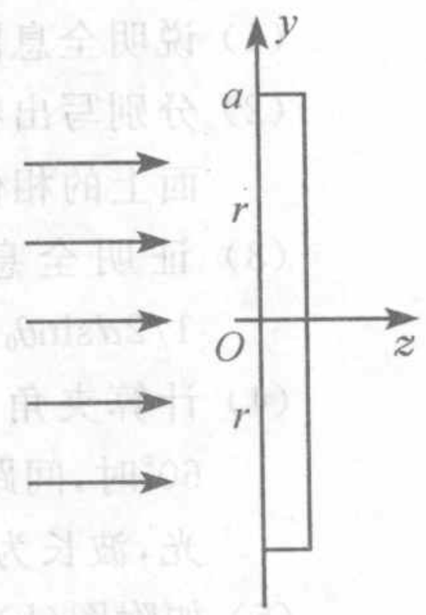
$$n(r)=n_0\left(1-\frac{1}{2}ar^2\right),\quad r^2=x^2+y^2,$$

(1) 写出其屏函数，设其厚度为 d，孔径为 a，且 $a\gg d\gg\lambda$；

(2) 用相因子分析法导出其焦距为

$$F=\frac{1}{an_0d}\quad 或\quad F=\frac{a^2}{2(n_0-n)d}$$

(3) 若要求 $F\approx 1$mm，问折射率系数 a 的值应为多少？设 $d\approx 10\mu$m，$a\approx 100\mu$m，$n_0\approx 1.68$.



习题 7.4 图

答：(3) $a\approx 60\text{mm}^{-2}$.

7.5 一块条状余弦光栅，其栅条密度 $1/d_0$ 为 300 线/mm，现将其作为衍射屏被一平行光照射，而在后焦面 (x',y') 上接收其夫琅禾费衍射场，设焦距 F 为 200mm，光波长为 500nm.

(1) 当栅条平行于 x 轴方向时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率 (f_x,f_y) 的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标 (x',y') 的值，并画出图示.

(2) 当栅条逆时针转过 45°而处于 xy 平面的Ⅰ、Ⅲ象限时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率 (f_x,f_y) 的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标 (x',y') 的值，并画出图示.

(3) 当栅条顺时针转过 30°而处于 (xy) 平面的Ⅱ、Ⅳ象限时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率 (f_x,f_y) 的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标 (x',y') 的值，并画出图示.

答：(1) $(300\text{mm}^{-1},0)$；$(0,0)$，$(36\text{mm},0)$，$(-36\text{mm},0)$. (2) $(212\text{mm}^{-1},-212\text{mm}^{-1})$；$(0,0)$，$(25.5\text{mm},-25.5\text{mm})$，$(-25.5\text{mm},25.5\text{mm})$.

7.6 在一相干成像系统中，作为入射光瞳的镜头的相对孔径为 1/5，求此系统的截止频率(mm^{-1}). 设物平面在前焦面附近，照明波长为 500nm.

答：200mm^{-1}.

7.7 采用远场装置接收单缝的夫琅禾费衍射场，设单缝宽约 100μm，入射光波长 632.8nm，

(1) 接收屏幕至少应放在多远？

(2) 在接收屏幕上的多大范围内才算是夫琅禾费衍射场？

(3) 0 级半角宽度为多少？

(4) 在接收屏幕上，0 级的线宽度为多少？

答：(1) 48cm；(2) 5cm 内；(3) $6.3\times10^{-3}\text{rad}=21'42''$；(4) 6.3mm.

7.8 采用像面接收装置接收单缝的夫琅禾费衍射场，见图 7.4.6，设单缝宽约 1mm，入射光波长 488.0nm，物距 40cm，像距 30cm，

(1) 如果单缝至于透镜后方，要求在像面 1cm 范围内准确地接收到夫琅禾费衍射场，单缝

离像面至少多远?

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧,求 0 级半角宽度和接收屏幕上 0 级的线宽度;

(3) 如果单缝离透镜 40cm 远,求 0 级半角宽度和接收屏幕上 0 级的线宽度;

(4) 如果单缝置于透镜前方,紧贴在其左侧,情况如何?

答:(1) 大于 5cm;(2) 半角宽度 4.9×10^{-4} rad$=1'42''$,0 级线宽 0.78mm;(3) 半角宽度 4.9×10^{-4} rad$=1'42''$,0 级线宽 0.39mm;(4) 半角宽度 4.9×10^{-4} rad$=1'42''$,0 级线宽 0.78mm.

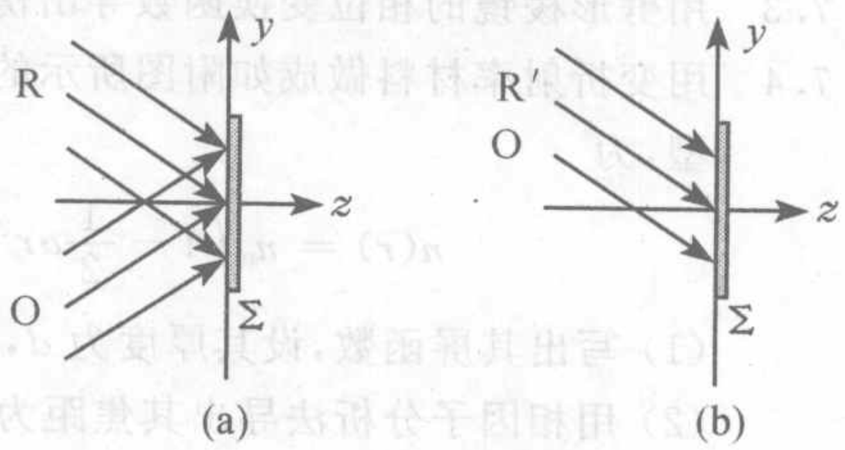
7.9 如附图(a)所示,参考光束 R 和物光束 O 均为平行光,对称地斜入射于记录介质上,二者间夹角为 $\theta=2\theta_0$

(1) 说明全息图上干涉条纹的形状;

(2) 分别写出物光波和参考光波在记录介质平面上的相位分布 $\varphi_O(y)$和 $\varphi_R(y)$;

(3) 证明全息图上干涉条纹的间距为 $d=1/2d\sin\theta_0$

(4) 计算夹角 $\theta=1°$时,间距为多少? 夹角 $\theta=60°$时,间距为多少? 设入射光为 He-Ne 激光,波长为 632.8nm.



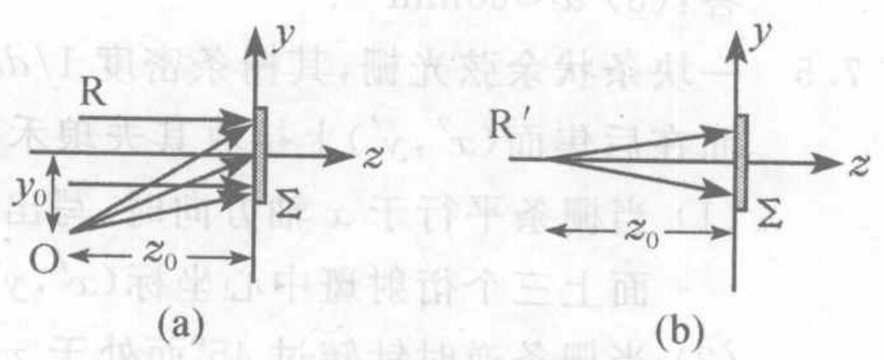
习题 7.9 图

(5) 如附图(b)所示,如果物光波和参考光波是同方向同波长的,分析 0 级、+1 级、−1 级三个衍射波出现在什么方向上,画图说明.

7.10 若在 7.9 题中用正入射的平面波再现,+1 级波和−1 级波各发生什么变化?

7.11 如附图(a)所示,用正入射的平面参考光波 R 记录轴外物点 O 发出的球面波

(1) 如附图(b)所示,用轴上的点光源发出的球面波来重建波前,求+1 级和−1 级两像点的位置;



习题 7.11 图

(2) 用与记录全息图时波长不同的正入射平面光波照明,求+1 级和−1 级两像点的位置.

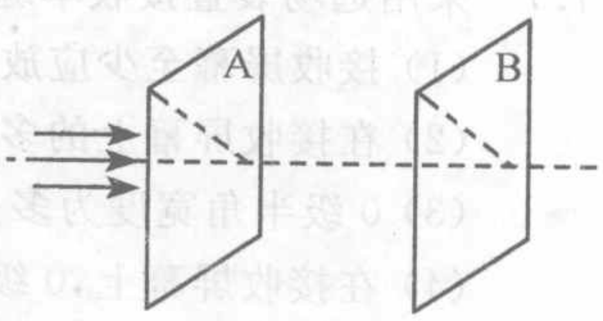
第 8 章习题

8.1 一束线偏振的钠黄光垂直射入一方解石晶体,其光矢量的振动方向与晶体的主截面成 20°角,计算出现双折射的两束光的相对振幅和强度.

答:0.364;0.132.

8.2 如附图所示为两块相同的冰洲石晶体 A、B 前后排列,强度为 I 的自然光垂直于 A 的表面入射之后依次通过 A、B. A、B 的主截面之间夹角为 α. 求 $\alpha=0°,45°,90°,180°$时由 B 射出的光束的数目和每束光的强度.

答:2 束,光强相等;4 束,光强相等;2 束,光强相等;1 束.



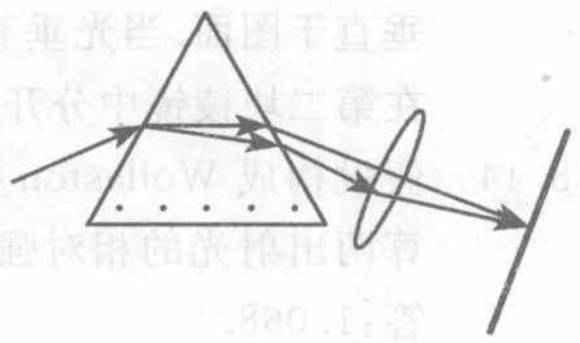
习题 8.2 图

8.3 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上,其光轴与入射面垂直,平板厚度为 4.2mm,求平板对面上 o 光与 e 光两出射点的间隔. 已知对于钠黄光,冰的折射率为 $n_o=1.3090$,$n_e=1.3104$.

答：1.27×10^{-2}mm.

8.4 一水晶棱镜的顶角为 60°，如附图所示，光轴与棱镜的截面垂直，钠黄光以最小偏向角的方向入射，用焦距为 1m 的透镜聚焦，o 光和 e 光两谱线的间隔是多少？

答：14.1mm.

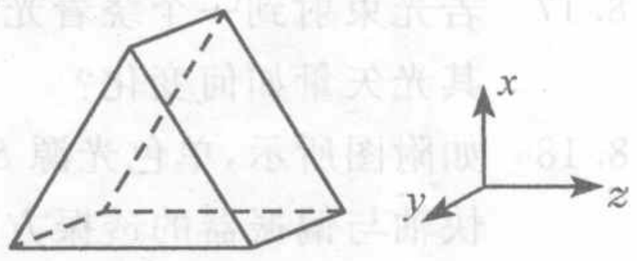


习题 8.4 图

8.5 钠黄光以 50°角入射到方解石制成的波片上，对于钠黄光（波长为 588.0nm）方解石的折射率为 $n_o=1.658$，$n_e=1.486$. 若其光轴垂直于入射面且平行于晶片表面，求两束光在晶体内的夹角. 若晶片厚 1mm，求出射后两束光间的垂直距离是多少？

答：0.0532mm.

8.6 如附图所示，一束光从方解石三棱镜的左边入射，晶体的光轴可以有 x、y、z 三种取向，分析每一种情况下出射光束的偏振特征，以及如何测定 n_o、n_e.



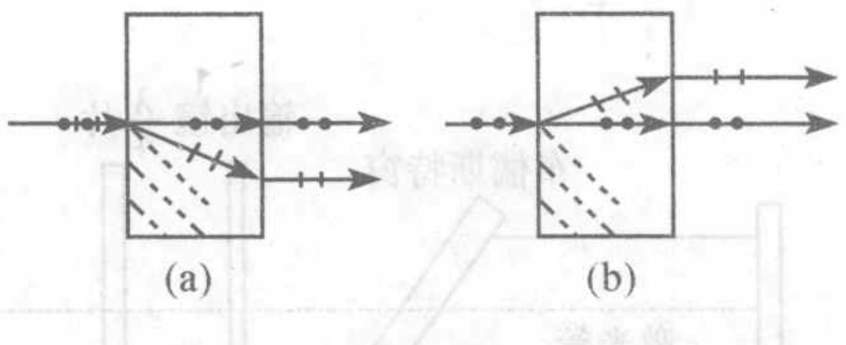
习题 8.6 图

8.7 将方解石分割为厚度相等的两块，并移开一点距离，则一束自然光通过它们后将变为几条？为什么？

8.8 试根据图中所画的情况，判断晶体的正负.

答：(a) 正晶体；(b) 负晶体.

8.9 一棱镜由一个负晶体的直角三棱镜（光轴垂直于图面）和玻璃直角三棱镜（折射率为 n）组成，自然光垂直入射，如附图所示，讨论以下几种情况双折射光束的传播方向：(1) $n=n_o$；(2) $n=n_e$；(3) $n>n_o$；(4) $n_o>n>n_o$.

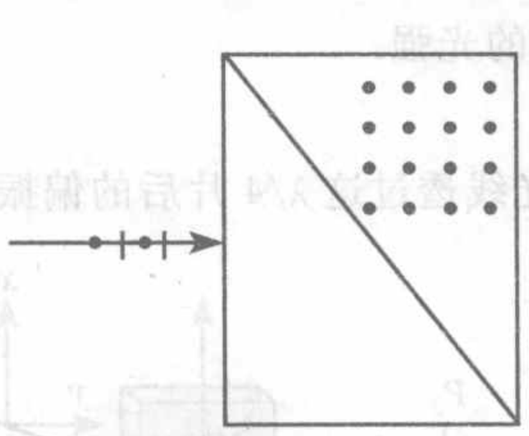


习题 8.8 图

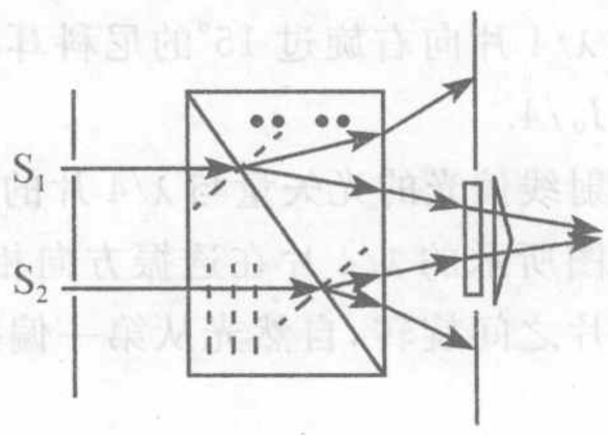
8.10 一束右旋圆偏光正入射到玻璃表面，反射光是右旋的还是左旋的？

答：左旋

8.11 如附图所示是偏振光度计. 从光源 S_1 和 S_2 射来的光都被 Wollaston 棱镜 W 分为两束线偏振光，但其中一束被挡住，只有一束进入视场. 来自 S_1 的偏振光的电矢量在图面内，来自 S_2 的偏振光的电矢量垂直于图面. 转动偏振片 P，直到视场两半的两度相等. 设此时偏振片的透振方向与图面夹角为 θ，试证明光源的强度比为 $\tan^2\theta$.



习题 8.9 图



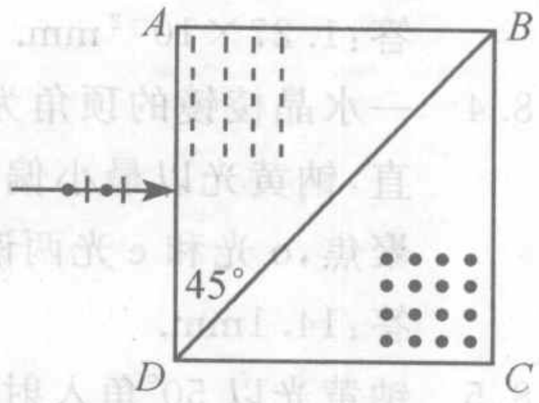
习题 8.11 图

8.12 单色线偏光垂直射入方解石晶体，其振动方面与晶体的主截面成 30°角，两折射光再经过方解石后面的尼科耳棱镜，棱镜的主截面与入射光最初的振动面有 50°夹角. 求两条光线的相对强度.

答：22.8 或 0.095.

8.13 图中棱镜 $ABCD$ 是由 45°方解石棱镜组成，棱镜 ABD 的光轴平行于 AB，棱镜 BCD 的光轴

垂直于图面. 当光垂直于 AB 入射时，说明为什么 o 光和 e 光在第二块棱镜中分开，并在图中画出它们的波面和振动方向.



习题 8.13 图

8.14 假设构成 Wollaston 棱镜的直角三棱镜的顶角为 $\alpha=30°$，计算两出射光的相对强度.

答：1.068.

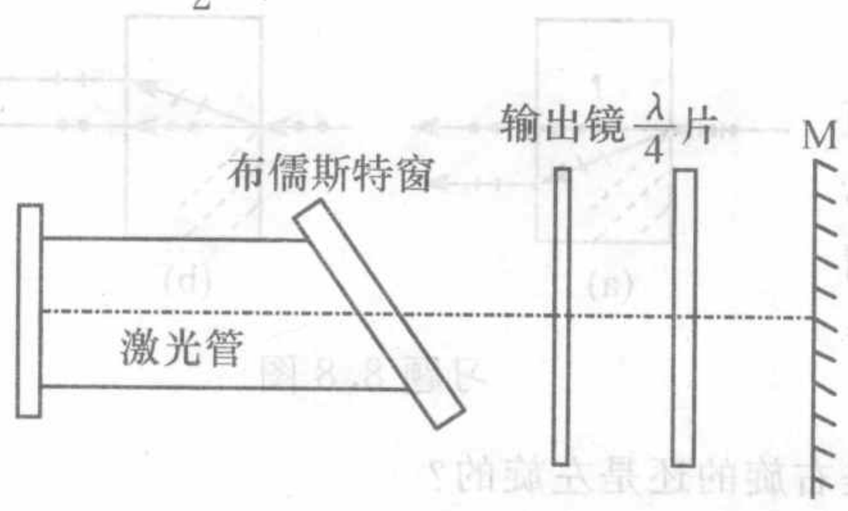
8.15 用什么方法区分 $\frac{\lambda}{2}$ 片和 $\frac{\lambda}{4}$ 片？

8.16 如附图所示，在使用激光器的平面偏振光的各种测量仪器上，为避免激光返回谐振腔，在激光器输出窗口外放一 $\lambda/4$ 片，且其主截面与出射激光的振动面间有 45°夹角，说明此波片的作用.

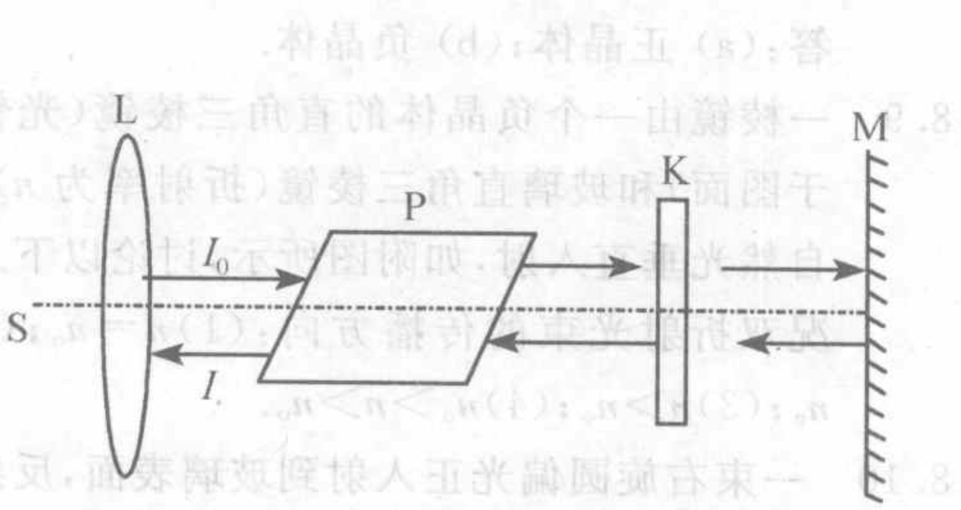
8.17 若光束射到一个绕着光束旋转的半波片上，其旋转的角速度为 ω_0，出射光的偏振态如何？其光矢量如何变化？

8.18 如附图所示，单色光源 S 置于透镜 L 的焦点处，P 为偏振器，K 为此单色光的 $\lambda/4$ 片，其快轴与偏振器的透振方向成 α 角，M 为平面反射镜. 已知入射到偏振器的光强为 I_0，分析光束经过各个元件后的偏振态，计算返回 L 处的光强（不计反射、吸收的光强损失）.

答：$\frac{1}{2}I_0\cos^2(2\alpha)$.



习题 8.16 图



习题 8.18 图

8.19 用一块 $\lambda/4$ 片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光，达到消光位置后，$\lambda/4$ 的光轴与偏振片的透振方向相差 22°，求椭圆长短轴之比.

答：0.404.

8.20 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过一 $\lambda/4$ 片（快轴沿 y 轴），然后再经过一块主截面相对于 $\lambda/4$ 片向右旋过 15°的尼科耳棱镜，求最后出射的光强.

答：$3I_0/4$.

8.21 当入射线偏光的光矢量与 $\lambda/4$ 片的快轴成 30°角时，光线透过这 $\lambda/4$ 片后的偏振状态如何？

8.22 如附图所示的 $\lambda/4$ 片在透振方向相互正交的两偏振片之间旋转，自然光从第一偏振片处入射，求：

(1) 每经过一个元件后光的性质，并用方程表示；

(2) 讨论当 $\lambda/4$ 片旋转时，出射光的强度如何变化；

(3) 如果用 $\lambda/2$ 片代替 $\lambda/4$ 片，出射光的强度又如何变化？

习题 8.22 图

8.23 如果一个(1)λ/2 片,(2)λ/4 片的光轴与起偏器的透振方向成 30°角,讨论从波片透射的光的偏振态.

答:(1) 线偏光;(2) 椭偏光.

8.24 一椭圆偏振光入射到一个偏振片上,转动其透振方向,测出最大光强 I_{max} 和最小光强 I_{min},然后再偏振片之前放一块 λ/4 片,使其 e 轴平行于最大光强时偏振片的透振方向,求此时从偏振片透射的光强.

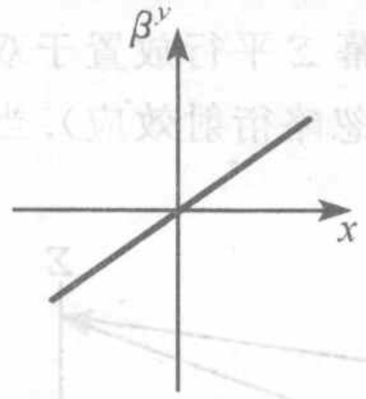
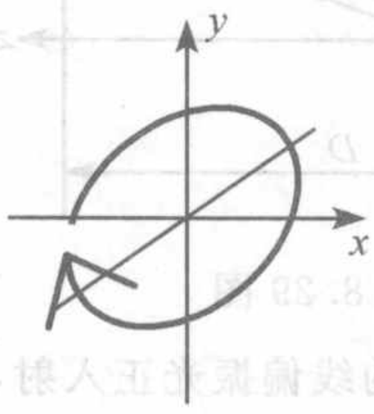
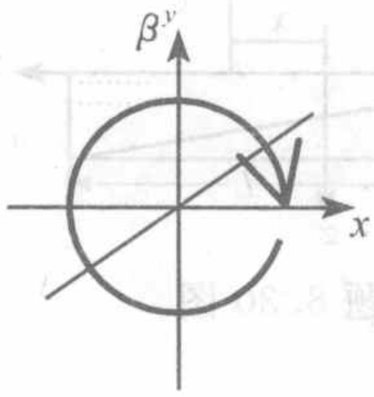
答:I_{max}.

8.25 用一石英薄片来产生一束椭圆偏振光,要使椭圆的长轴或短轴在其光轴方向,且长、短轴的比值为 1∶2,左旋,石英片如何放置?厚度是多少?(对于 $\lambda=589.3\text{nm}$,$n_o=1.5442$,$n_e=1.5533$).

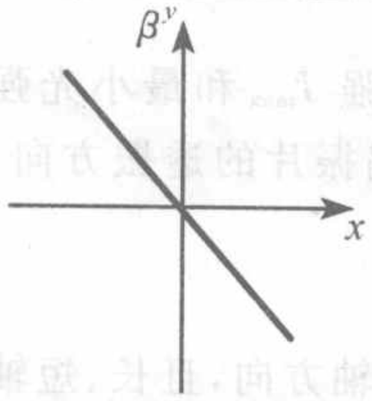
答:$\dfrac{j\lambda-\dfrac{\lambda}{4}}{0.0091}$,或 $d=\dfrac{j\lambda+\dfrac{3\lambda}{4}}{0.0091}$.

8.26 如表所示,已知正入射偏振光的偏振态,画出其经过方解石制成的各种波片后出射光的偏振态.

习题 8.26 表

入射光的偏振态	经 λ/8 波片后	经 λ/4 波片后	经 λ/2 波片后	经全波片后
				
				
				
				

续表

入射光的偏振态	经 λ/8 波片后	经 λ/4 波片后	经 λ/2 波片后	经全波片后
				

8.27 实验中常用半波片改变圆偏振光和椭圆偏振光的旋转方向，说明理由，并指出波片如何放置.

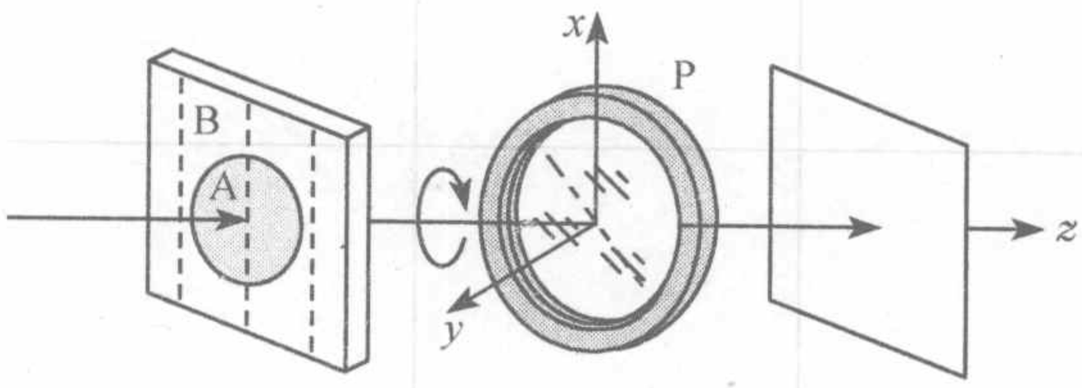
8.28 平行右旋圆偏光，正入射到一块两表面平行的方解石晶片上，且照射整个晶片，镜片的光轴平行于其表面(图中 y 方向)，晶片的 A 部分为 $\lambda/2$ 片，B 部分为 $\lambda/4$ 片，如附图所示.

(1) 分别划出经过镜片两部分的光的偏振态；

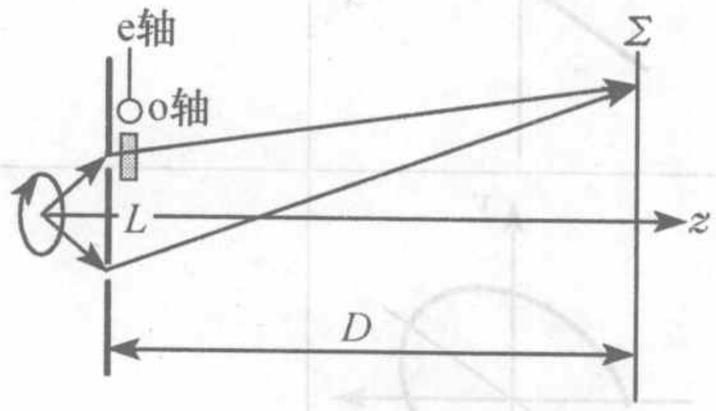
(2) 从晶片射出的光如果再经过一个透振方向与 y 成 45°角的偏振片，在屏上将见到什么现象？

(3) 将偏振片绕光线方向旋转 360°的过程中，屏上的光强发生什么变化？

8.29 用圆偏振光照射一具有等宽双狭缝的屏，双缝间距为 L(见图)，厚度为 d 的双折射晶体薄片放在其中一缝上，使其 o 轴与狭缝平行，o 轴垂直于狭缝. 另一屏幕 Σ 平行放置于双缝屏后距离 $D \gg L$ 处. 设一个狭缝被挡住时，屏幕 Σ 上的总光强为 I_0(忽略衍射效应). 当两狭缝都打开时，屏幕 Σ 上的干涉图样如何？



习题 8.28 图

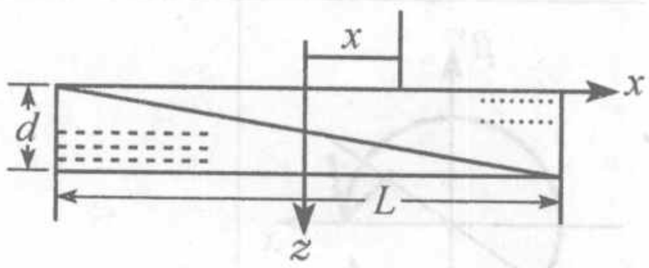


习题 8.29 图

8.30 Babinet 补偿器由两个光轴相互垂直的劈形石英组成. 现有一束极窄的线偏振光正入射，其偏振方向与 x 轴成 45°角，光束偏离补偿器的中心线 x，

(a) 用 n_o、n_e、λ、L、d、x 表示出射光束中 x，y 分量间的相对相移；

(b) x 取什么样的值时可以得到线偏光或圆偏光？



习题 8.30 图

8.31 写出 8.26 题中第一、三、五种入射偏振光的琼斯矢量.

答：$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$.

8.32 用琼斯矩阵方法证明 8.26 题.

8.33 试求左旋圆起偏器的琼斯矩阵，并证明右旋圆偏振光不能通过左旋起偏器.

8.34 在正交偏振片之间放一 $\lambda/4$ 片，以自然光入射，当波带片光轴与偏振片 P_1 透振方向垂直时，将发生消光现象，试用矩阵法证明之.

8.35 从尼科耳棱镜透射的线偏振光，垂直射到一块石英的 $\lambda/4$ 片上，光的振动面与石英光轴成 30°角，然后又经过第二个尼科耳棱镜，两棱镜的主截面夹 60°角，求最后的透射光强，射入射光强为 I_0.

答：$\frac{5}{16}I_0$ 或 $\frac{1}{8}I_0$.

8.36 将一棱角 $\alpha=0.33°$ 的石英尖劈，放在一对正交的尼科耳棱镜之间，石英尖劈的光轴平行于棱，当波长为 656.3nm 的红光通过之后产生干涉，计算相邻条纹间的距离，对于波长为 656.3nm 的红光，石英的折射率 $n_o=1.54190$，$n_e=1.55093$.

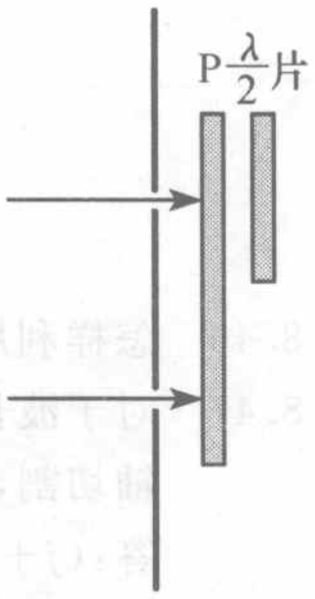
答：12.6mm

8.37 如附图所示，平行自然单色光正入射到杨氏双缝，在幕上得到一组干涉条纹. 试求：

(1) 若在双缝后放一偏振片 P，条纹将如何变化？

(2) 在(1)的情况下，偏振片的透振方向与图面成怎样的角度才能使幕上的暗条纹是最暗的？

(3) 若在 P 后再放一 $\lambda/2$ 片，使其只挡住一条狭缝射出的光，且其光轴与 P 的透振方向间成 45°角，则幕上的条纹又将如何变化？



习题 8.37 图

8.38 两偏振片之间有一 $\lambda/2$ 片，波片的快轴与 P_1 的透振方向成 38°角. 设波长为 632.8nm 的光垂直入射到 P_2 上，要使透射光最强，P_2 应如何放置？若晶片的折射率 $n_o=1.52$，$n_e=1.48$，计算此晶片的最小厚度.

答：P_2 的透振方向应与 P_1 成 $2\times38°=76°$；7.91×10^{-6} m

8.39 一块厚度为 0.04mm 的方解石晶片，光轴与表面平行，将其插入正交偏振片之间，且使主截面与第一偏振片的透振方向成 $\theta\left(\theta\neq0,\frac{\pi}{2}\right)$ 角，问白光中哪些波长成分不能通过此装置？

8.40 两个正交偏振片之间有一个石英 Babinet 补偿器($n_o=1.54190$，$n_e=1.55093$)，石英的光轴与偏振片的透振方向均成 45°角. 问：

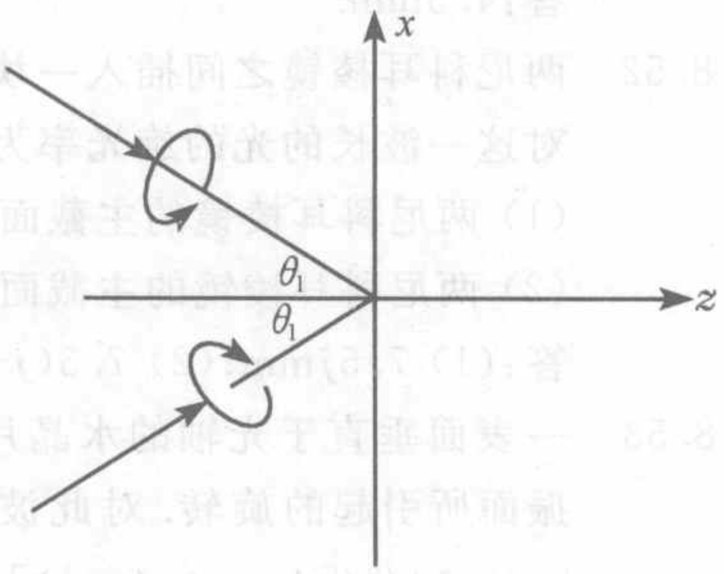
(1) 用平行钠光照明，在第二个偏振片的后面能看到什么现象？

(2) 若楔角 $\alpha=2.75°$，求干涉条纹间距.

(3) 云母是双轴晶体，很薄时可以按单轴晶体处理，令一云母片的快慢轴与补偿器的快慢轴方向一致，将其放在补偿器上，所有暗条纹移动了 1/4 的条纹间距，求云母片所产生的光程差.

8.41 将引起 650nm 光程差的晶片，置于正交偏振片之间，用白光照明，透射光是什么颜色？

8.42 如附图所示，一束强度为 I_1 的左旋圆偏振光以 θ_1 倾角射向 xy 平面，另一束强度为 I_2 的左旋圆偏振光以 θ_2 倾角射向 xy 平面，分析这两束平行光之间的干涉.



习题 8.42 图

8.43 用单色线偏振光、椭圆偏振光和自然光分别通过正交偏振片间有一 Babinet 补偿器的装置，在透射光中将看到什么现象？

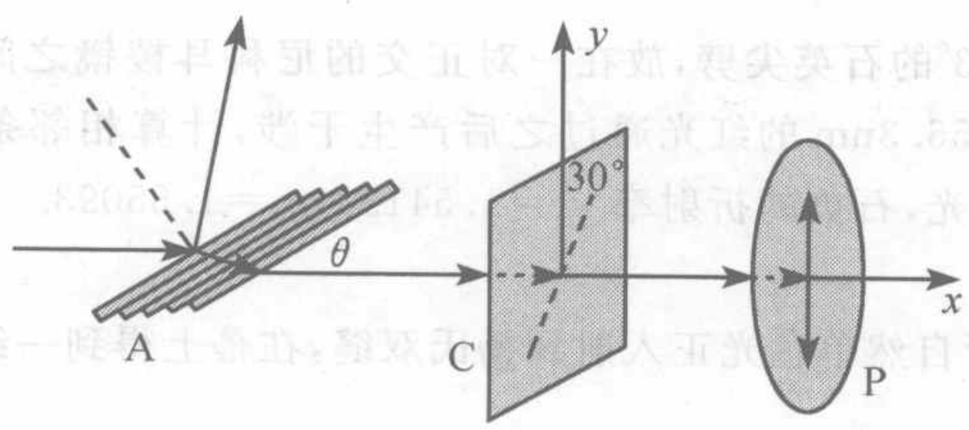
8.44 有哪些方法可以使一束线偏光的振动面旋转 90°？

8.45 如附图所示，玻璃片堆 A，折射率为 n，半波片 C 的光轴与 y 轴夹角为 30°，偏振片 P 的偏振化方向沿 y 轴，自然光沿水平方向入射.

(1) 要使反射光为完全线平振光，玻璃片堆 A 的倾角 θ 应该是多大？

(2) 若将 A 出射的部分偏振光看成是自然光和部分偏振光的叠加，则经过 C 后线偏光的振动面有何变化？说明理由.

(3) 若 A 的透射光中自然光的强度为 I，线偏振光的强度为 $3I$，计算从 P 出射的光强.



习题 8.45 图

8.46 怎样利用两个偏振片和白光光源区分垂直于光轴和平行于光轴切出的两个石英晶片？

8.47 对于波长为 588.3nm 的钠黄光，石英的旋光率为 21.7°/mm，若将一石英晶片垂直于光轴切割，置于两平行偏振片之间. 问当石英片的厚度多少时，没有光透过第二个偏振片？

答：$(j+1)8.29$mm.

8.48 纯蔗糖溶液的比旋光率为 $[\alpha]=6.65°/[\text{cm}\cdot(\text{g/cm}^3)]$，今有不知纯度的蔗糖溶液，溶度为 20%（即每 100cm^3 中有 20g 蔗糖），溶液的厚度为 20cm，使一线偏光的振动面旋转 25°，求这种蔗糖的纯度（即纯糖占蔗糖的百分比）.

答：93.98%.

8.49 在两个透振方向平行的偏振片间放一半波片，其主截面沿着 P_1 的透振方向向右旋转 27°，半波片后再放一右旋石英片，其旋光率为 $\alpha=18°/\text{mm}$，单色光正入射到 P_1. 要使 P_2 后消光，石英片的最小厚度是多少？

答：2mm.

8.50 厚度为 1mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在正交偏振片之间，为什么无论入射光的波长为何值时，晶片总是亮的？

8.51 厚度为 1mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在平行的尼科耳棱镜之间，对某一波长的光偏振面旋转 20°，问当石英晶片的厚度为多少时，该波长的光将完全消失？

答：4.5mm.

8.52 两尼科耳棱镜之间插入一块石英旋光片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光（550nm），石英对这一波长的光的旋光率为 24°/mm，求下列情形下晶片的厚度为：

(1) 两尼科耳棱镜的主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜的主截面平行.

答：(1) $7.5j$mm；(2) $7.5(j+0.5)$mm.

8.53 一表面垂直于光轴的水晶片恰好抵消 10cm 长度的浓度为 20%的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转. 对此波长水晶的旋光率为 $\alpha=21.75°/\text{mm}$，麦芽糖的比旋光率为 $[\alpha]=144°/[\text{dm}\cdot(\text{g/cm}^3)]$，求此水晶片的厚度.

答：$1.324+8.726j$mm.

8.54 将 14.5g 的蔗糖溶于水，得到 60cm^3 的溶液. 在 15cm 的量糖计中测得钠光偏振面的旋转角为向右 16.8°，已知 $[\alpha]=6.65°/[\text{cm}\cdot(\text{g/cm}^3)]$，该蔗糖样品中有多大比例的非旋光杂质？

答：30.3%.

8.55 钠光以最小偏向角射入顶角为60°的石英晶体棱镜，棱镜的光轴与底平行.求出射的左、右旋圆偏光之间的夹角.

答：右旋石英，$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4n_L^2-n_R^2}-\frac{n_R}{4}\right)-\arcsin\frac{n_R}{2}$；左旋石英，$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4n_R^2-n_L^2}-\frac{n_L}{4}\right)-\arcsin\frac{n_L}{2}$.

第9章习题

9.1 一均匀媒质的吸收系数为 $\alpha=0.32/\text{cm}$，求出射光强变为入射光强0.1，0.2，0.5倍时媒质的厚度.

答：7.169cm；5.029cm；2.166cm.

9.2 设海水的吸收系数为 $\alpha=2/\text{m}$，而人眼能感受到的光强为太阳光强的 10^{-18}.试问在海面下多深处，人眼还能看见光？

答：20.72m.

9.3 证明当介质厚度 $l=1\text{cm}$，而吸收系数又很小时，吸收率 $G=\frac{I_0-I}{I_0}$ 在数值上就等于吸收系数本身.

9.4 用 $A=1.53974$，$B=4.6528\times10^5\,\text{Å}$ 的玻璃做成50°棱角的棱镜，当其对550.0nm的入射光处于最小偏向角位置时，求其角色散率是多少 rad/Å.

答：$-6.272\times10^{-6}\,\text{rad/Å}$.

9.5 某种玻璃对不同波长的折射率在 $\lambda_1=400.0\text{nm}$ 时，$n_1=1.63$；$\lambda_2=500.0\text{nm}$ 时，$n_2=1.58$.假定科希公式 $n=A+\frac{B}{\lambda^2}$ 适用，求此种玻璃在600.0nm时的 $\frac{dn}{d\lambda}$.

答：$-2.058\times10^{-5}/\text{Å}$.

9.6 一块玻璃对波长为0.070nm的X射线的折射率比1小 1.600×10^{-6}，求X射线能在此玻璃的外表面发生全反射(全外反射)的最大掠射角.

答：0.102°.

9.7 同时考虑介质对光的吸收和散射时，吸收系数 $\alpha=\alpha_0+\alpha_s$，其中 α_0 是真正的吸收系数，而 α_s 为散射系数.朗伯定律为 $I=I_0e^{-(\alpha_0+\alpha_s)L}$，若光经过一定厚度的某种介质后，只有20%的光强通过，已知该介质的散射系数为真正吸收系数的1/2，若消除散射，透射光强可增加多少？

答：$0.142I_0$.

9.8 计算波长为253.6nm和546.1nm的两条谱线的瑞利散射强度之比.

答：21.50.

第10章习题

10.1 光线以入射角 i 射到折射率为 n 的物体上，设反射光与折射光线成直角，问入射角与折射率之间的关系如何？

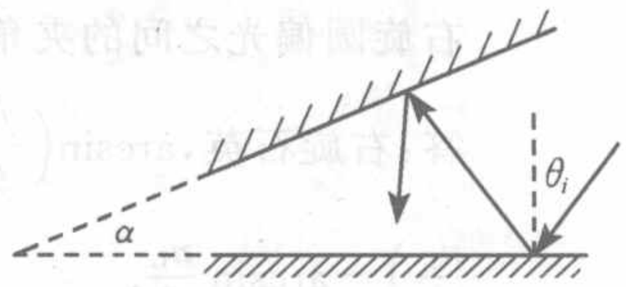
10.2 把一片玻璃板放在装满水的玻璃杯上，光线应以什么样的角度射到玻璃板上才能够在玻璃板和水的分界面上发生全反射？玻璃的折射率为1.5，水的折射率为1.33，能接收到这束全反射光吗？

10.3 红光和紫光对同种玻璃的折射率分别是1.51和1.53.当这些光线射到玻璃和空气的分界面上时，全反射的最小角度是多少？当白光以41°的角入射到玻璃和空气的界面上时，

将会有什么现象发生?

10.4 如附图所示,以光线射入镜面间并反射 n 次,最后沿入射时的光路返回,试写出 θ_i 与 α 间的关系表达式.

答:$\theta_i=(n-1)\alpha/2$.



习题 10.4 图

10.5 证明:当一条光线通过平板玻璃时,出射光线方向不变,只产生侧向平移.当入射角 i_1 很小时,位移 $\Delta x=\dfrac{n-1}{n}i_1 t$.

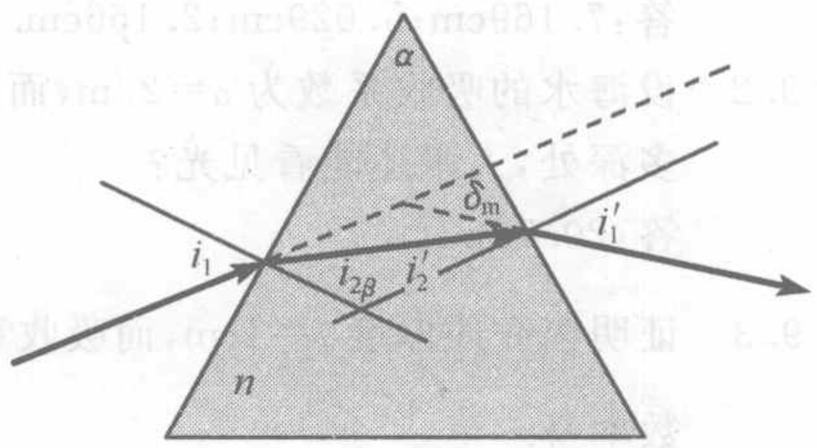
其中,n 为玻璃的折射率,t 为玻璃板的厚度.

10.6 如附图所示,一条光线通过一顶角为 α 的棱镜.

(1) 证明出射光线相对于入射光线的偏向角为 $\delta=i_1+i_1'-\alpha$;

(2) 证明在 $i_1=i_1'$ 时,有最小偏向角 δ_m,而且,$n=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$,其中,$n$ 为棱镜材料的折射率,在已知 α 的情况下,通过测量 δ_m,利用上式可以算出棱镜材料的折射率;

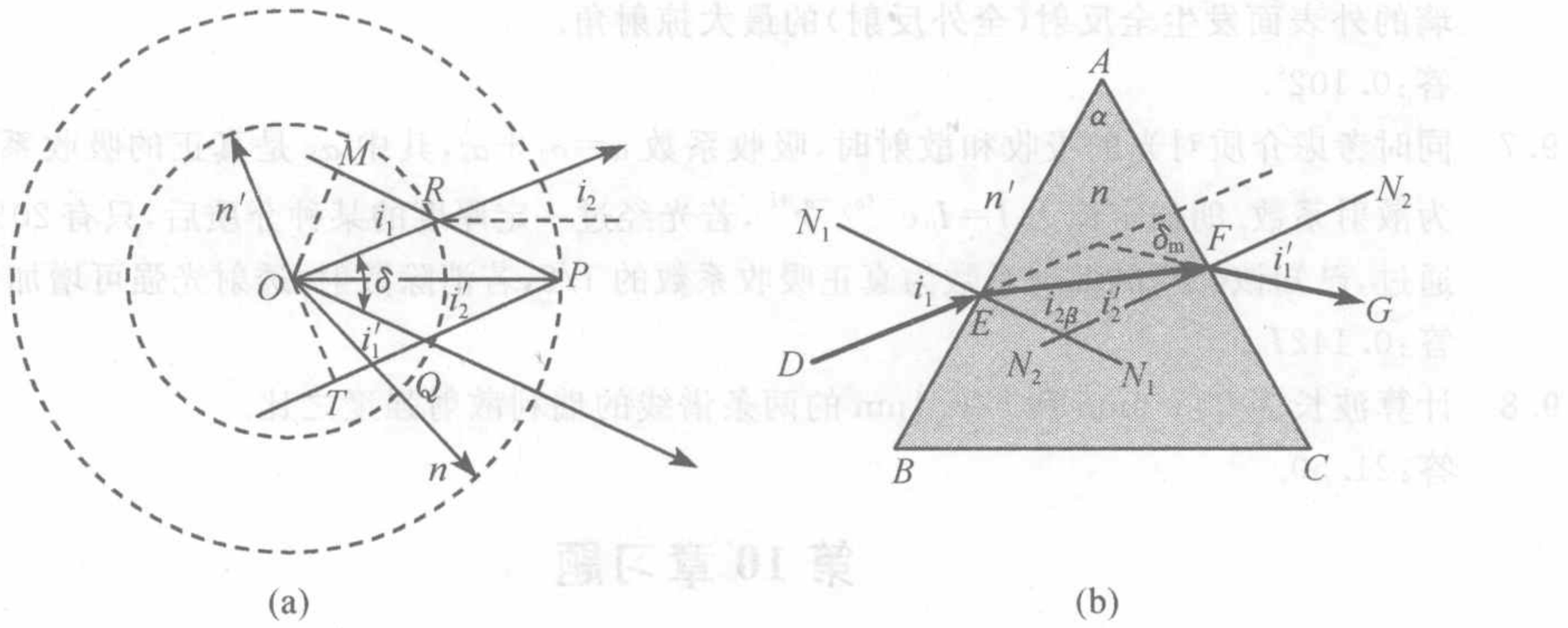
(3) 顶角 α 很小的棱镜称为光楔,证明对小角入射光楔产生的偏向角为 $\delta=(n-1)\alpha$.



习题 10.6 图

10.7 顶角为 50°的棱镜的 $\delta_m=35°$,如果浸入水中,最小偏向角等于多少? 水的折射率为 1.33.

10.8 附图是一种求折射线方向的追迹作图法.例如,为了求光线通过棱镜的路径,可如图(a)以 O 为中心做二圆弧,其半径正比于折射率 n,n'.作 OR 平行于入射线 DE,作 RP 平行于棱镜第一界面的法线 N_1N_1,则 OP 的方向即为第一次折射后光线的方向.再作 QP 平行于第二界面的法线 N_2N_2,则 OQ 的方向即为出射线 FG 的方向,从而 $\angle ROQ=\delta$ 即为偏向角,证明此法的依据.



(a) (b)

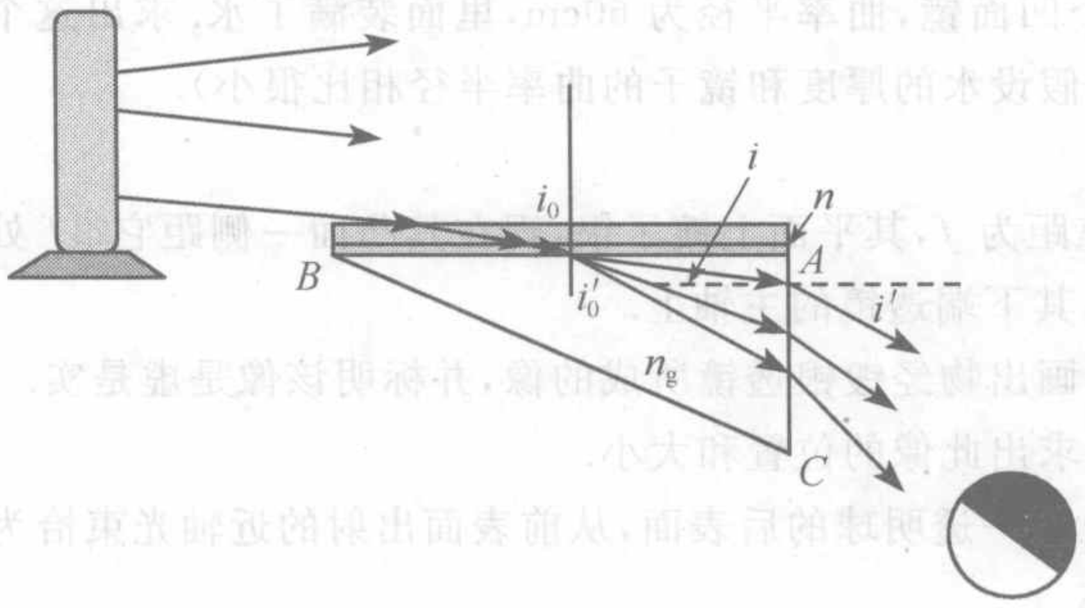
习题 10.8 图

10.9 组合玻罗棱镜由两块 45°角直角棱镜组成,利用两块直角棱镜的四个直角面上产生的全反射,使像倒转于凸透镜成实像的情况一致,试证明之.

10.10 极限法测液体折射率的装置如附图所示,ABC 是直角棱镜,其折射率 n_g 已知,将待测液体涂一薄层于其上表面 AB,再覆盖一块毛玻璃.用扩展光源在掠入射的方向上照明.从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一个下限 i'.如用望远镜观察,则在视场中出现

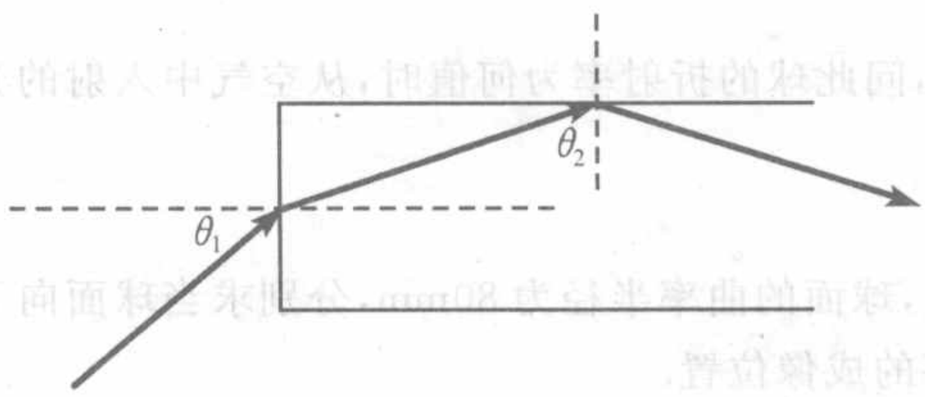
有明显分界线的半明半暗区.证明待测液体的折射率可以由下式算出:$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}$.用这种方法测量液体的折射率,测量范围受什么限制?

10.11 光从塑料棒的一端射入,若要保证射入的光总是在棒内全反射传播,其折射率至少是多大?

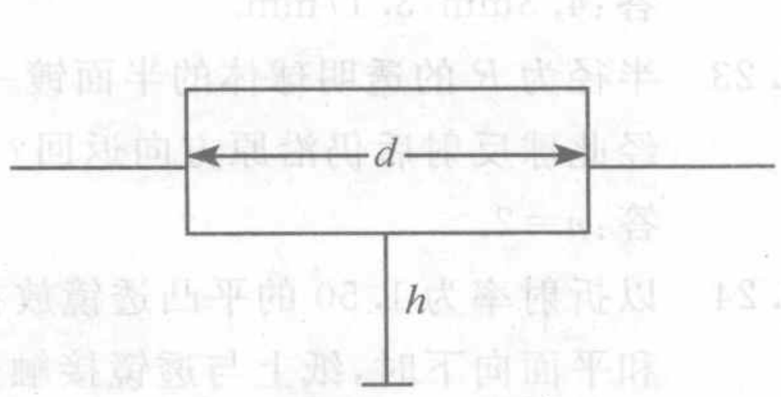


习题 10.10 图

10.12 在圆形木塞中心垂直插入一大头针,然后将其倒放浮于水面上,调节大头针露出的长度,使观察者从水面上无论何种角度都恰好看不到水下的大头针.如果测得大头针露出木塞得长度为 h,木塞直径为 d,求水的折射率.



习题 10.11 图



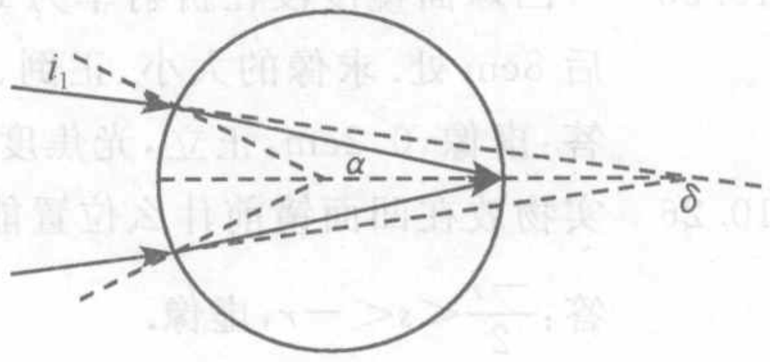
习题 10.12 图

10.13 如附图所示,一束光线以入射角 i 射入折射率为 n 的球形水滴,求:

(1) 此光线在水滴内另一侧球面的入射角 α,这条光线是被全反射还是部分反射?

(2) 偏向角 δ 的表示式;

(3) 偏向角最小时的入射角 i.

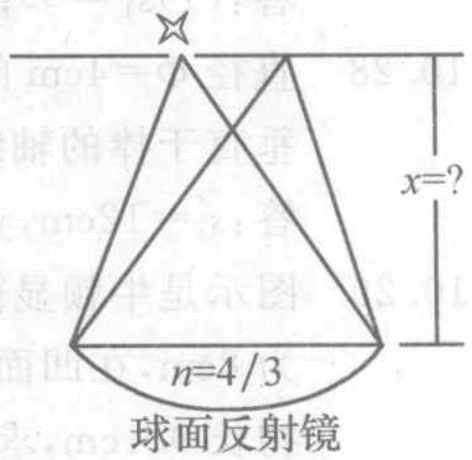


习题 10.13 图

10.14 水槽中盛水,深 20cm,底部有一光源,水面上放一不透光纸片.要使从水面上任何角度都看不到光源,纸片的形状和面积应怎样?

10.15 一玻璃杯,底部为凸球面,球面下嵌一画,空杯看去,与普通酒杯无异;注入酒后,则底部呈现美丽画面,请解释.

10.16 一球面反射镜将平行光会聚在 $x_0=20\text{cm}$ 处;将水(折射率约为 4/3)注满球面,光通过一张白纸片上的针孔射向反射镜,如附图所示,距离 x 为多大时在纸片上成清晰的像?



球面反射镜

习题 10.16 图

10.17 使一束向 P 点会聚的光在达到 P 点之前通过一玻璃平板,玻璃板垂直于光束的轴线.问会聚点如何移动?移动多少?设玻璃板厚度为 d,折射率为 n.

答:向远离玻璃板方向移动,移动距离$\approx d\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

10.18 眼睛和物体间有一折射率为 $n=1.5$ 的玻璃平板，厚度 $d=30\text{cm}$. 求人眼看到的像和物之间的距离是多少？

答：10cm.

10.19 水平放着一个凹面镜，曲率半径为 60cm，里面装满了水. 求出这个镜子的焦距，水的折射率为 4/3.（假设水的厚度和镜子的曲率半径相比很小）.

答：22.5cm.

10.20 一平凸透镜焦距为 f，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它 $2f$ 处，垂直于主轴放置一高为 H 的物，其下端透镜的主轴上.

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚是实.

(2) 用计算法求出此像的位置和大小.

10.21 一发光物点位于一透明球的后表面，从前表面出射的近轴光束恰为平行光，求此透明球材料的折射率.

答：$n=2$.

10.22 已知一个凹透镜的两球面的光焦度分别为 5m^{-1} 和 -10m^{-1}，透镜的直径为 30mm，中心厚 2mm. 问用以制造该透镜的平板玻璃（折射率为 1.5）至少应用多厚？该透镜的边缘有多厚？

答：4.3mm，3.17mm.

10.23 半径为 R 的透明球体的半面镀一反射膜，问此球的折射率为何值时，从空气中入射的光经此球反射后仍沿原方向返回？

答：$n=2$.

10.24 以折射率为 1.50 的平凸透镜放在纸面上，球面的曲率半径为 80mm，分别求当球面向下和平面向下时，纸上与透镜接触处的文字的成像位置.

答：距纸面 5.5mm，在纸面下；距纸面 6.7mm，在纸面下.

10.25 一凸球面镜浸没在折射率为 1.33 的水中，高为 1cm 的物放在凸面镜前 40cm 处，像在镜后 8cm 处. 求像的大小、正倒、虚实以及凸面镜的曲率半径和光焦度.

答：虚像，0.2cm，正立，光焦度 $-13.3/\text{m}$.

10.26 实物放在凹面镜前什么位置能成倒立的放大像？为什么？是实像还是虚像？

答：$\frac{-r}{2}<s<-r$，虚像.

10.27 一玻璃半球的曲率半径为 R，折射率为 1.5，其平面的一侧镀银（见图），有一物高为 h，放在曲面顶点前 $2R$ 处，求：

(1) 由曲面所成的第一个像的位置；

(2) 该光具组最后所成像的位置.

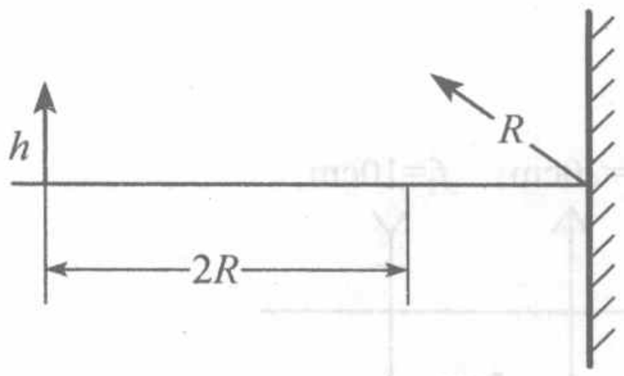
答：(1) $s_1'=\infty$；(2) 像仍在 $2R$ 处.

10.28 直径 $\Phi=4\text{cm}$ 的长玻璃棒的一端磨成曲率半径为 $R=2\text{cm}$ 的半球形，长为 0.1cm 的物垂直于棒的轴线，距球面顶点 8cm 处，如图所示. 求像的位置、大小、并作图.

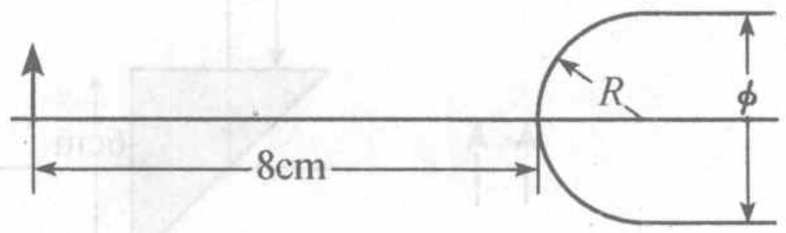
答：$s'=12\text{cm}$，$y'=-0.1\text{cm}$.

10.29 图示是牛顿显微物镜的原理图：在凹面反射镜中心开一个小孔，凹面反射镜的曲率半径为 8cm，在凹面镜中心右侧 2cm 处有一小平面镜 M. 若凹面镜左方距小孔 1cm 处有一物长 0.1cm，求物体经此光学系统后成像的位置及像的大小，并作出光路图.

答：反射镜右方 20cm，0.4cm，实像.



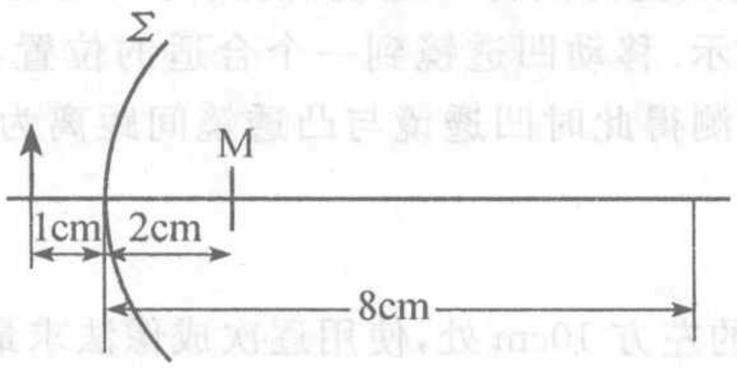
习题 10.27 图



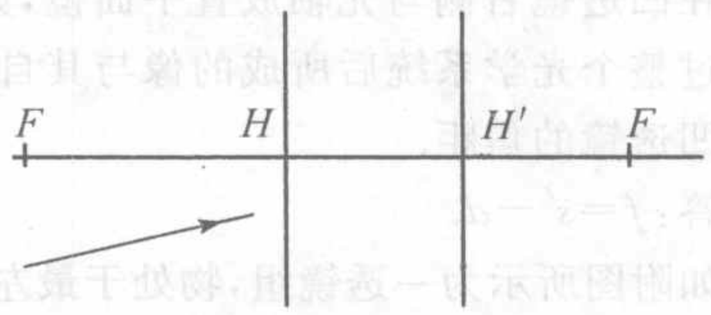
习题 10.28 图

10.30 (1) 用作图法求图示中光线 1 的光轭光线；

(2) 用作图法求图中光具组的节点的位置.



习题 10.29 图



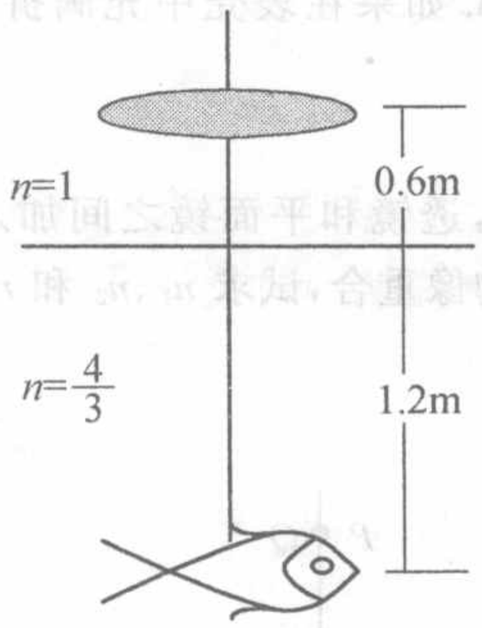
习题 10.30 图

10.31 一个在空气中的透镜系统，光焦度为 Φ，主平面间距 $HH'=d$. 求证：放大率为 -1 的两共轭面之间的距离为 $d+4/\Phi$.

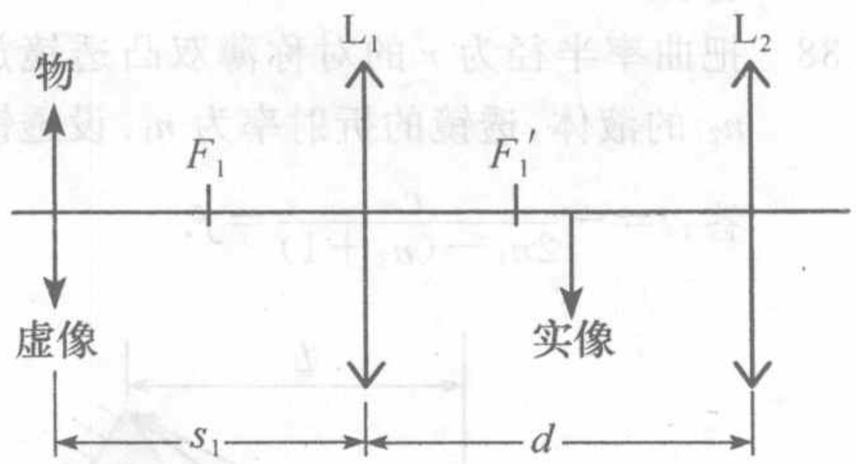
10.32 透过焦距为 9cm 的会聚透镜，观察在平静水面下 1.2m 处的一条小鱼(如附图所示)，若透镜位于水面上方 0.6m，看到的小鱼位于何处？(假设鱼在透镜光轴上，$n_{空气}=1$，$n_{水}=4/3$)

答：虚像仍在原处，$s'=-1.8$m.

10.33 设计并解释这样一个透镜组，它由两个会聚透镜组成，并能在物体所在的位置成一个与物体大小相同的倒立虚像.



习题 10.32 图

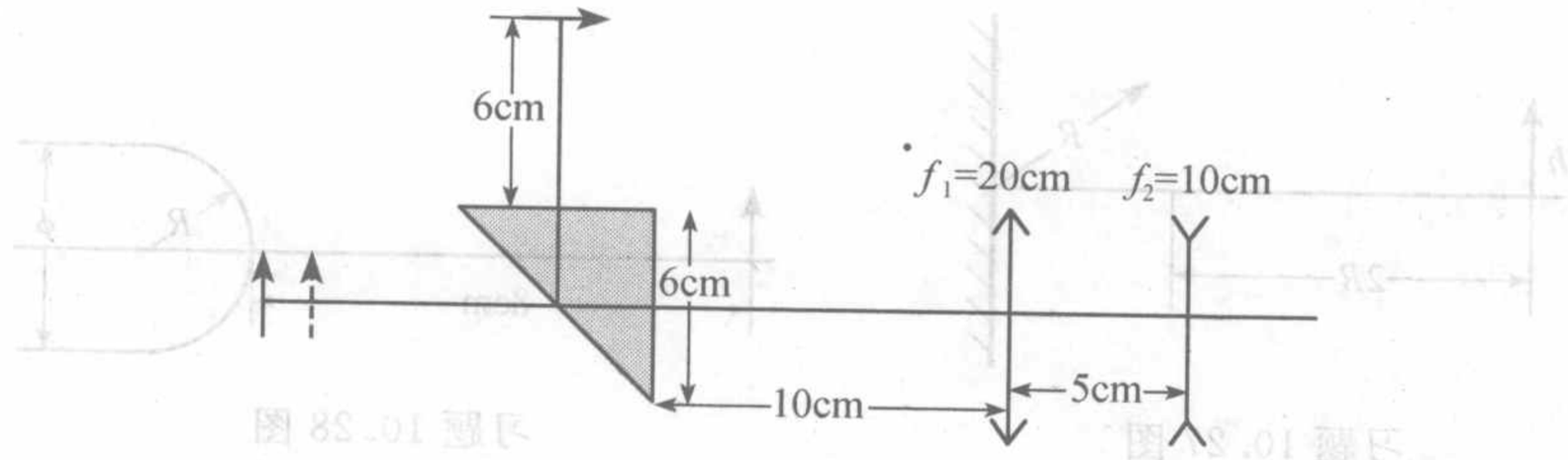


习题 10.33 解

答：$d=\dfrac{2f_1 s_1}{s_1-2f_1}$，$f_2=\dfrac{f_1 s_1^2}{(s_1-2f_1)^2}$.

10.34 如附图所示为一个等腰直角三棱镜($n=1.5$)和两个薄透镜所组成的光学系统. 求图中物体最后成像的位置和像的大小. 设物体长为 1cm.

答：最终像的大小为 0.5m，正立、虚像.



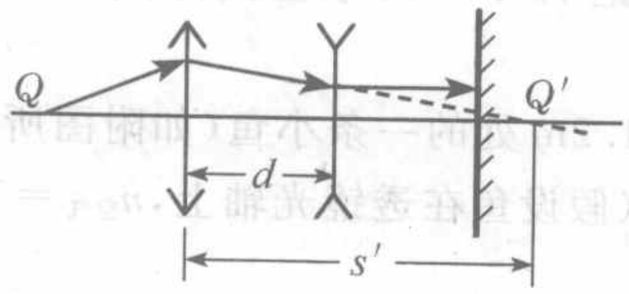
习题 10.34 图

10.35 用凸透镜和平面镜可以测凹透镜的焦距. 方法是:先让点光源 Q 经凸透镜成实像于 Q' 点,测得像距 s'. 然后,在凸透镜与 Q' 点之间放置待测得凹透镜,使其与凸透镜共轴,并在凹透镜右侧与光轴放置平面镜,如附图所示. 移动凹透镜到一个合适的位置,使 Q 经过整个光学系统后所成的像与其自身重合. 测得此时凹透镜与凸透镜间距离为 d,计算凹透镜的焦距.

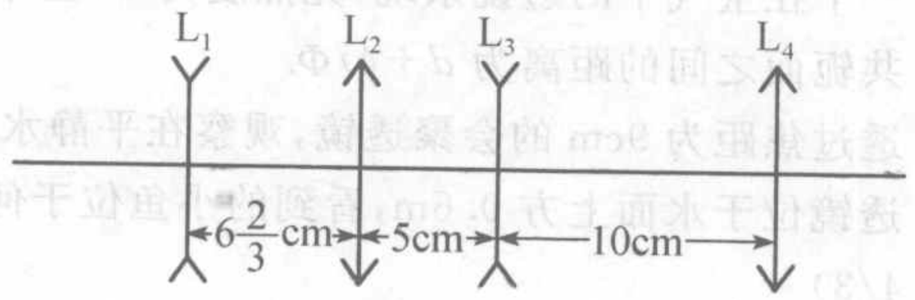
答:$f=s'-d$.

10.36 如附图所示为一透镜组,物处于最左端透镜的左方 10cm 处,使用逐次成像法求最后的成像位置. 已知四个薄透镜均处于空气中,像方焦距分别为 $f_1'=f_3'=-5\text{cm}$,$f_2'=f_4'=5\text{cm}$.

答:最后成像的位置在 L_4 右侧 5cm 处,即 L_4 的像方焦点上.



习题 10.35 图



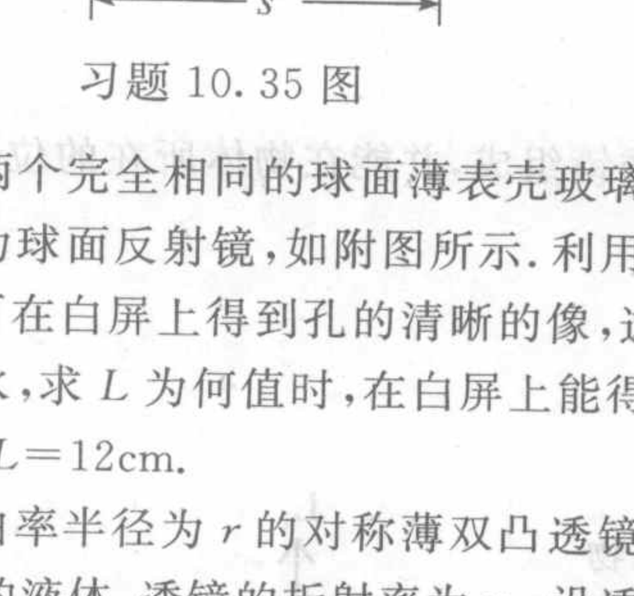
习题 10.36 图

10.37 由两个完全相同的球面薄表壳玻璃胶合在一起,中间是空气,其中一块玻璃的表面镀银成为球面反射镜,如附图所示. 利用准直法,即让灯泡发出的光通过白屏上的针孔,调节 L 可在白屏上得到孔的清晰的像,这时测得 $L=20\text{cm}$. 如果在表壳中充满折射率为 4/3 的水,求 L 为何值时,在白屏上能得到空的清晰像?

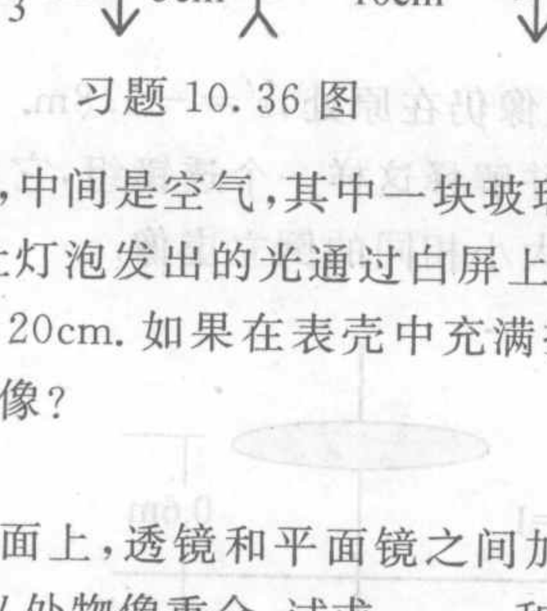
答:$L=12\text{cm}$.

10.38 把曲率半径为 r 的对称薄双凸透镜放在水平镜面上,透镜和平面镜之间加入折射率为 n_2 的液体,透镜的折射率为 n_1. 设透镜上方距离 l 处物像重合,试求 n_1、n_2 和 r 间的关系.

答:$l=-\dfrac{r}{2n_1-(n_2+1)}=f$.



习题 10.37 图

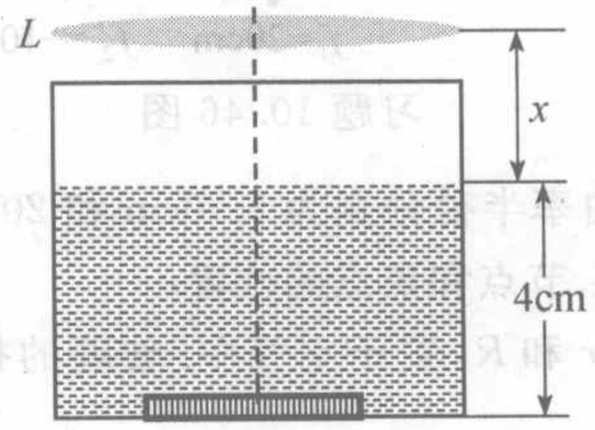


习题 10.38 图

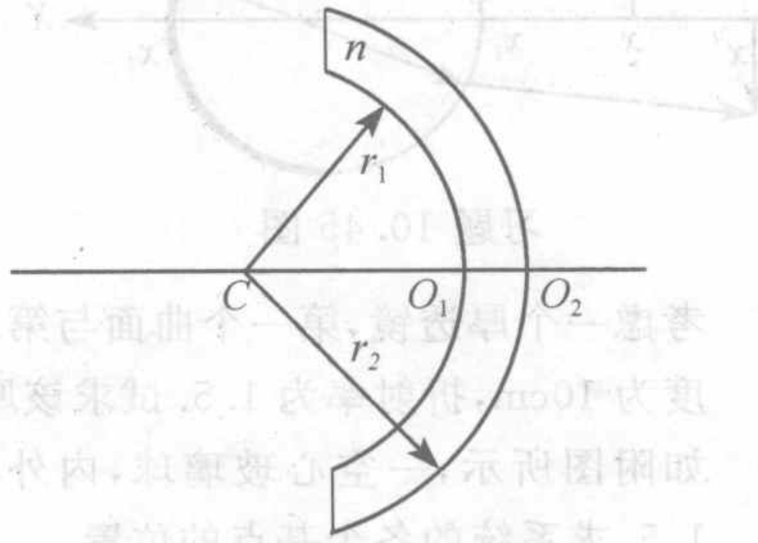
10.39 如附图所示一烧杯内水深 4cm，杯底有一枚硬币，水面上放置一焦距为 30cm 的薄透镜，硬币的中心位于透镜的光轴上. 若透镜上方的观察者(通过透镜)看到硬币还在原处，求透镜应放于距离水面多高的位置.

答：透镜位于水面上方 1cm 处.

10.40 共心透镜两球面的曲率半径分别为 r_1、r_2，如附图所示. 透镜材料的折射率为 n，厚度为 d. 试求该透镜主点的位置.

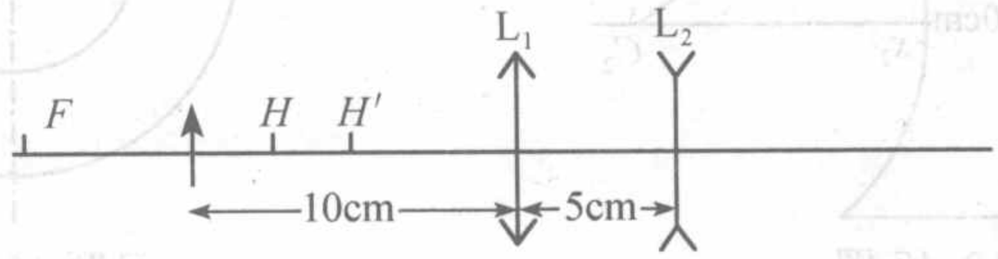


习题 10.39 图



习题 10.40 图

10.41 两薄透镜共轴，一个是会聚透镜，焦距为 $f_1=-10$cm；另一个为发散透镜，$f_2=15$cm，两者相距 5cm(见图). 若将一物体放在会聚透镜左侧 10cm 处. 试求透镜组的焦点、主点的位置，以及像的位置、大小、虚实和正倒.

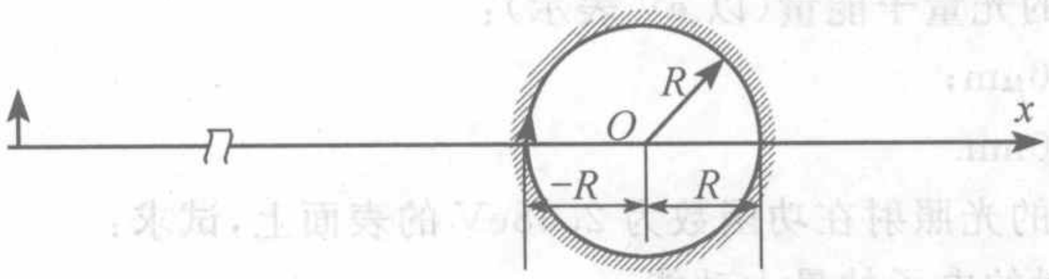


习题 10.41 图

10.42 物体浸于水中，发出的光线横穿过一个半径为 R 的球形空气泡，水的折射率为 4/3.

(1) 当物体离气泡很远时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实；

(2) 当物体位于气泡的左侧表面时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实.

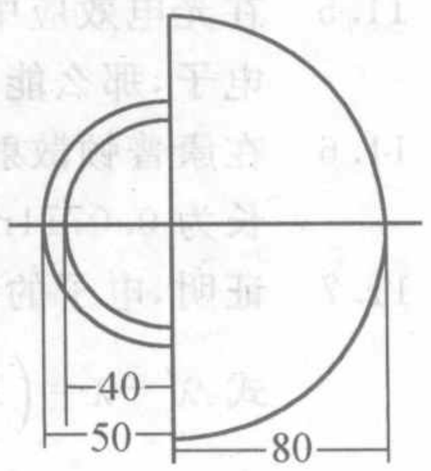


习题 10.42 图

10.43 折射率为 1.5 的共心透镜与凹面镜的球心重合于 C 点，置于空气中，透镜的曲率半径分别为 50cm 和 40cm. 凹面镜的曲率半径为 −80cm，求反射系统的基点，并讨论其特性.

10.44 空气中一复合透镜，球面曲率半径分别为 −1.0m，1.5m，−1.0m，厚度分别为 4cm，5cm，两镜介质的折射率分别为 1.632 和 1.5，用矩阵方法求复合透镜的光焦度.

10.45 在一个半径为 r、折射率为 n 的透明球的后半个表面镀以反射膜，构成一个向后反射器(见图)，

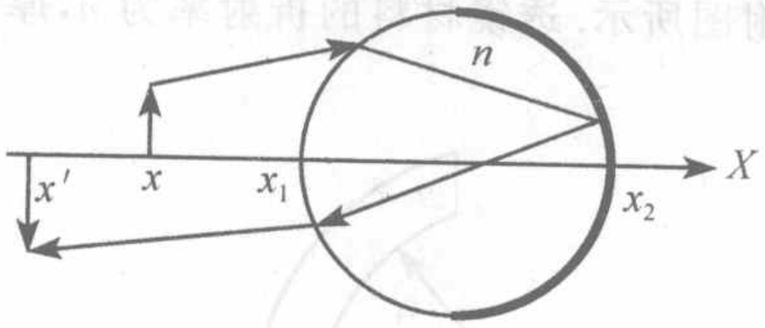


习题 10.43 图

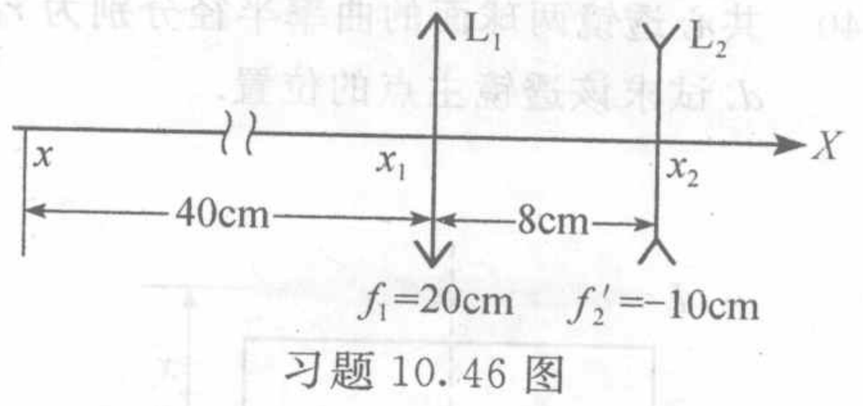
(1) 试求反射器的系统矩阵;

(2) 若 x_1 左侧 r 处有一物高 1mm,求像的大小与位置(设$r=1$cm,$n=1.5$).

10.46 如附图所示,考虑一双透镜系统,一个高为 1cm 的物体位于凸透镜左侧 40cm 处,计算像的大小和位置.



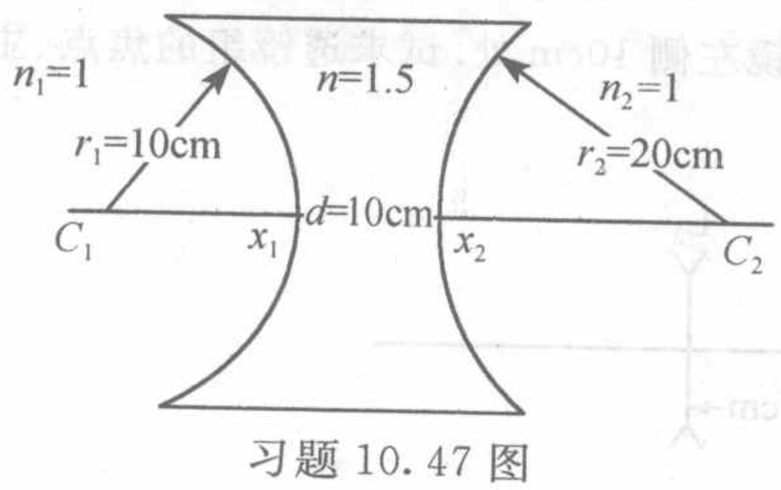
习题 10.45 图



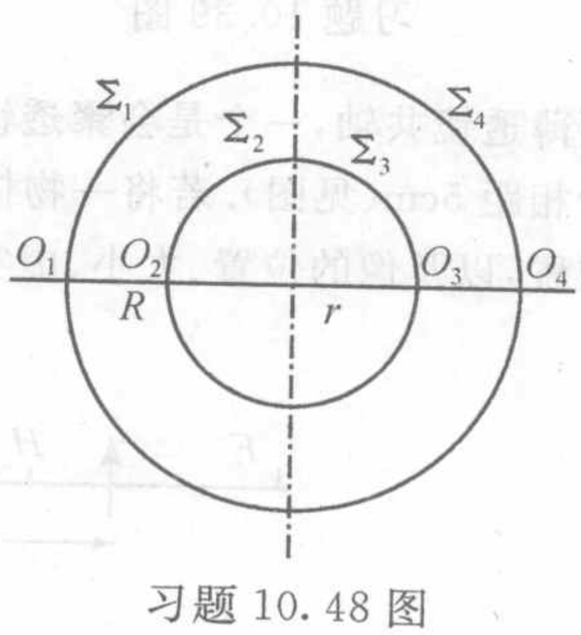
习题 10.46 图

10.47 考虑一个厚透镜,第一个曲面与第二个曲面的曲率半径分别为 −10cm 和 20cm. 透镜厚度为 10cm,折射率为 1.5. 试求该厚透镜的主点、节点和焦点的位置.

10.48 如附图所示,一空心玻璃球,内外半径分别为 r 和 R,置于空气中. 玻璃的折射率 $n=1.5$,求系统的各个基点的位置.



习题 10.47 图



习题 10.48 图

第 11 章习题

11.1 假设来自太阳的光,其峰值波长为 475nm,试求太阳表面的温度.

11.2 人的正常体温是 37℃,求人体辐射的峰值波长.

11.3 计算下列波长的光量子能量(以 eV 表示):

(1) 红外光,2.0μm;

(2) 紫外光,250nm.

11.4 波长为 400nm 的光照射在功函数为 2.48eV 的表面上,试求:

(1) 该表面发射的电子的最大动能;

(2) 光的截止波长是多少?

11.5 在光电效应中,一个光子完全被一个电子所吸收. 试证明:如果吸收该光子的是一个自由电子,那么能量守恒和动量守恒不可能同时满足.

11.6 在康普顿散射实验中,证明光子能量损失的比例随着波长的减小而增加,并分别计算波长为 0.0711nm 和 0.0022nm 的光子的能量损失.

11.7 证明,电子的动能若取非相对论的表达式(即 $E_k=p^2/2m$),那么康普顿移动有以下表达式:$\lambda'-\lambda=\left(1-\frac{h\nu-h\nu'}{2mc^2}\right)^{-1}\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$,并证明当发射电子的速度远小于 c 时,上述方程与 $\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$一致.

中英人名对照

A

阿勒·哈增(Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham,965～1040)　阿拉伯学者
阿贝(Ernst Karl Abbe,1840～1905)　德国物理学家
艾里(George Biddell Airy,1801～1892)　英国物理学家
爱因斯坦(Albert Einstein,1879～1955)　美国物理学家

B

巴耳末(Johann Jakob Balmer 1825～1898)　瑞士中学教师
比尔(August Beer,1825～1863)　德国物理学家
玻耳兹曼(L. E. Boltzmann,1844～1906)　奥地利物理学家
布格尔(Pierre Bouguer,1698～1758)　法国物理学家
布儒斯特(Sir David Brewster,1781～1868)　苏格兰物理学家
H. 布拉格(Sir William Henry Bragg,1862～1942)　英国物理学家
L. 布拉格(William Lawrence Bragg,1890～1971)　英国物理学家

C

康普顿(Arthur Holly Compton,1892～1962)　美国物理学家

D

德布罗意(Louis Victor de Broglie,1892～1987)　法国物理学家
德拜(Petrus Josephus Wilhelmus Debye,1884～1966)　荷兰物理学家
笛卡儿(René Descartes,1596～1650)　法国数学家、物理学家、哲学家

F

费马(Pierre de Fermat,1601～1665)　法国数学家、物理学家
菲涅耳(Augustin-Jean Fresnel,1788～1827)　法国物理学家
斐索(Armand-Hippolyte-Louis Fizeau,1819～1896)　法国天文学家
夫琅禾费(Joseph von Fraunhofer,1787～1826)　德国物理学家
傅科(Jean-Bernard-Leon Foucault,1819～1869)　法国天文学家

G

高斯(Carl Friedrich Gauss,1777～1855)　德国数学、家物理学家

H

赫兹(Heinrich Rudolf Hertz,1847～1894)　德国物理学家
惠更斯(Christaan Huygens,1629～1695)　荷兰物理学家、数学家

J

伽利略(Galileo Galilei,1564～1643)　意大利物理学家

伽博(Dennis Gabor,1900～1979) 英国物理学家(原籍匈牙利)
基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff,1824～1887) 德国物理学家
金斯(Sir James Hopwood Jeans,1877～1946) 英国物理学家、数学家

K

开普勒(Johannes Kepler,1571～1630) 德国天文学家、物理学家
柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789～1857) 法国数学家、物理学家

L

朗伯(Johann Heinrich Lambert 1728～1777) 德国物理学家
劳厄(Max von Laue,1879～1960) 德国物理学家
兰德(Edwin Herbert Land,1909～1991) 美国科学家、企业家
罗默(Ole Rømer,1644～1710) 丹麦天文学家

M

马吕斯(Etienne-Louis Malus,1775～1812) 法国物理学家
麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831～1879) 英国物理学家
迈克耳孙(Michelson,1852～1931) 美国物理学家
密立根(Robert Andrews Millikan,1868～1953) 美国物理学家
莫雷(Edward Williams Morley,1838～1923) 美国化学家

N

牛顿(Isaac Newton,1642～1727) 英国物理学家

P

普朗克(Max Planck,1858～1947) 德国物理学家

S

斯涅尔(Willebrord Snell,1580～1626) 荷兰物理学家和数学家
斯托克斯(Sir George Gabriel Stokes,1819～1903) 英国物理学家
斯特藩(Josef Stefan,1835～1893) 奥地利物理学家

T

托马斯·杨(Thomas Young,1773～1829) 英国物理学家

Z

泽尼克(Frederik Zernike,1888～1966) 荷兰物理学家

名词索引

N元干涉因子(interference factor for N silts) 6.1.1

A

阿贝正弦条件(Abbe sine condition) 10.7.4
阿贝成像原理(Abbe principle of image formation) 7.4.1
艾里斑(Airy disk) 4.6.2
阿贝-波特空间滤波实验(Abbe-Porter experiment) 7.4.2

B

巴比涅补偿器(Babinet compensator) 8.3.3
巴比涅原理(Babinet principle) 4.5.4
半波带方程(half-wave zone equation) 4.4.2
半波损失(half wave loss) 5.2.2,5.3
半值宽度(width at half maximum) 5.6.3
半峰半宽(half width at half maximum) 5.6.3
傍轴条件(paraxial approach) 1.4.1
比尔定律(Beer law) 9.1.1
比旋光率(specific rotatory power) 8.7.1
变折射率介质 10.4.1
倍频晶体(frequency doubling crystal) 9.5
波包(wave packet) 2.4
波晶片(wave plate) 8.3.2
波面(wave surface) 1.2.3
波前函数(wave front function) 1.2.5
波前(wave front) 1.2.5
玻璃片堆(pile of glass plates) 3.4.4
坡印廷矢量(Poyinting vector) 1.1.5
波矢(wave vector) 1.1.4
波数(wave number) 1.1.2
波长(wavelength) 1.1.2
波线(wave line) 1.2.5
布拉格条件(Bragg condition) 6.6.2
部分偏振光(partially polarized light) 3.2.4
布格尔定律(Bouguer law) 9.1.1
布儒斯特定律(Brewster law) 3.4.3
布儒斯特角(Brewster angle) 3.4.3
布儒斯特窗(Brewster window) 3.4.4

C

差频(difference frequency) 9.5
康普顿效应(Compton effect) 11.3.3
参考光波(reference wave) 7.5.1
成像矩阵(imaging matrix) 10.8.2
初相位(initial phase) 1.1.2
次波(secondary wavelet) 4.3.1
磁致旋光(magnetic rotation) 8.7.2

D

代数法(瞬时值法)(the algebraic method) 2.2.1
倒转棱镜(inverting prism) 10.3.2
单色波(monochromatic wave,monochromatic light) 1.1.3
单色辐出度 11.1.1
单轴晶体(uniaxial crystals) 8.1.1
单轴晶体的惠更斯作图法 8.2.2
单通光闸 8.7.2
多缝干涉因子(interference factor for N slits) 6.1.1
单缝衍射因子(diffraction factor for single slit) 4.5.2
等倾干涉(equal inclination interference) 5.4.1
等厚干涉(equal thickness interference)

5.4.2
电矢量 1.1.5
电光效应(electro-optic effect) 8.6
电偶极子(electric dipole) 9.3.1
笛卡儿定律(Descartes law) 10.2.2
叠加(superposition) 2.1
定态光波(stationary wave) 1.2.2
多光束的干涉(multiple beam interference) 5.6.1

E

二次谐波(second harmonic) 9.5
二向色性晶体(dichroism crystal) 5.6.1

F

法布里-珀罗干涉仪(Fabry-Perot interferometer) 5.6.1
法布里-珀罗标准具(Fabry-Perot etalon) 5.6.1
法拉第效应(Faraday magneto-optics effect) 8.7.2
反常色散(anormalous dispersion) 9.2
反衬度 4.2.3
反射球面成像的公式 10.5.2
放大镜(magnifier) 10.9.2
非常光(extraordinary ray,e光) 8.1.2
非单色波(nonmonochromatic wave, nonmonochromatic light) 1.1.3
非相干叠加(incoherent superposition) 2.3.3
非相干光(incoherent light) 2.3.3
菲涅耳公式(Fresnel formula) 3.3.2
菲涅耳衍射积分公式 4.3.2
菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(Fresnel-Kirchhoff formula) 4.3.2
菲涅耳复合棱镜(Fresnel multiple prism) 8.7.1
菲涅耳双面镜(Fresnel bimirror) 5.2.1
菲涅耳衍射(Fresnel diffraction) 4.4
菲涅耳半波带(Fresnel half-period zone) 4.4.2
菲涅耳波带片(Fresnel zone plate) 4.4.2
波带片的主焦点,次焦点 4.4.2
夫琅禾费衍射(Fraunhofer diffraction) 4.4.1
夫琅禾费单缝衍射(Fraunhofer single slit diffraction) 4.4.1
夫琅禾费矩孔衍射(Fraunhofer rectangular aperture diffraction) 4.4.5
夫琅禾费圆孔衍射(Fraunhofer circular aperture diffraction) 4.6.1
费马原理(Fermat principle) 10.2.2
分波前的干涉装置(wavefront-splitting interferometer) 5.2
分振幅的干涉装置(amplitude-splitting interferometer) 5.5
菲涅耳双棱镜(Fresnel biprism) 5.2.3
傅里叶面(Fourier surface) 7.3.2
傅里叶变换(Fourier transform) 7.3.1
傅里叶变换光谱仪(Fourier transform spectrograph) 5.5.1
辐射通量(radiation flux) 11.1.1
辐射本领 11.1.1
辐射谱密度(radiation frequency spectrum) 11.1.1
复数法(the complex method) 2.2.2
复振幅(complex amplitude) 1.2.4
复折射率 9.1.1

G

高斯光束(Gaussian beam) 1.2.3
高斯公式(Gaussian formula) 10.5.2, 10.6.2
高速光闸(high-speed light gate) 8.6.3
干涉(interference) 2.3.3
干涉项(interference term) 2.3.3
干涉花样(interference pattern) 2.3.3
干涉条纹(interference fringe) 4.2.1
干涉级数(order of interference) 4.2.1
干涉滤波片(interference filter) 5.5.3
格兰-汤普森棱镜(Glan-Thompson prism) 8.3.1

共轭波(conjugate wave) 1.2.5
光波的叠加原理 2.1.2
光波的独立传播定律 2.1.1
光程(optical path length,OPL) 1.3.1
光程差(optical path difference) 1.3.1
光测弹性(photoelasticity) 8.5.2
光的折射定律 10.2.2
光的反射定律 10.2.2
光焦度(focal power) 10.5.2
光具组(optical system) 10.5.1
光路可逆原理(principle of optical path reversibility) 10.2.2
光强(intensity of light) 1.1.5
光栅常数(grating constant) 6.1.1
光栅方程(grating equation) 6.1.5
光矢量 1.1.4
光纤(optical fiber) 10.3.2
光学拍(optical beat) 2.3.5
光线矩阵(light ray matrix) 10.8.1
过渡矩阵(transition matrix) 10.8.1

H

和频成分(sum frequency) 9.5
黑体辐射(black body radiation) 11.1.2
惠更斯目镜(Huygens eyepiece) 10.7.3
惠更斯-菲涅耳原理 4.3.2

J

基尔霍夫边界条件 4.3.2
基尔霍夫热辐射定律 11.1.2
检偏器(analyzer) 3.1.2
节点(nodal point) 10.7.1
基点(cardinal point) 10.7.1
基面(cardinal plane) 10.7.1
激光测径仪 4.5.4
基波(fundamental wave) 9.5
近轴条件(paraxial condition) 1.4.1
近轴近似(paraxial approximation) 1.4.1
焦距(focal length) 10.5.2
焦点(focus) 10.5.2
角波数(angular wave number) 1.1.2
角频率(angular frequency) 1.1.2
角色散率 6.2.2
晶体的光轴(optical axis of crystal) 8.1.1
绝对黑体 11.1.2

K

科顿-莫顿效应(Cotton-Mouton effect) 8.7.2
可见度(visibility) 4.2.3
柯西公式(Cauchy formula) 9.2
克尔效应(Keer effect) 8.6.1
空间频率(spatial frequency) 7.3.1
空间相干性(spatial coherence) 5.7.1
空间相干性的反比公式 5.7.1
快轴(fast axis) 8.3.2

L

拉格朗日-霍姆赫兹恒等式(Lagrange-Helmhotz) 10.5.2,10.6.2
劳埃德镜(Lloyd's mirror) 5.2.2
朗伯定律(Lambert law) 9.1.1
棱镜(prism) 10.3.2
理想光具组(perfect opticalsystem) 10.7.1
离轴全息装置(off-axis holography) 7.5.2
量糖术(saccharimetry) 8.7.2
洛匈棱镜(Rochon prism) 8.3.1

M

马赫-曾德尔干涉仪(Mach-Zehnder interferometer) 5.5.2
迈克耳孙干涉仪(Michelson interferometer) 5.5.1
慢轴(slow axis) 8.3.2
米-德拜散射(Mie-Debye Scattering) 9.4.2

N

尼科耳棱镜(Nicol prism) 8.3.1
牛顿环(Newton ring) 5.5.4

P

泡克耳斯效应(Pockels effect) 8.6.2

偏振(polarization) 3.1.1
偏振度(degree of polarization) 3.2.4
偏振棱镜(polarization prism) 8.3.1
频率(frequency) 1.1.2
平面波(plane wave) 1.2.3
平面偏振光(plane-polarized light) 3.2.3
普遍吸收 9.1.2

Q

齐明点(aplanatic point) 10.7.4
起偏器(polarizer) 3.1.2
强度(intensity of light) 1.1.5
全反射棱镜 10.3.2
全反射临界角 10.3.2
全反射(total reflection) 10.3.2
全息图(hologram) 7.5.1
全息照相(holograph) 7.5.1
倾斜因子(obliquity, inclination factor) 4.3.2
球面波(spherical wave) 1.2.3
缺级(order missing) 6.1.3
琼斯矢量(Jones vector) 8.8.1
琼斯矩阵(Jones matrix) 8.8.3
群速度(group velocity) 2.4

R

冉斯登目镜 10.7.3
瑞利判据(Rayleigh criterion) 4.6.3,6.2.1
瑞利-金斯定律 11.2.3
瑞利散射(Rayleigh Scattering) 9.4.2

S

三次谐波(third harmonic) 9.5
闪耀光栅(blazed grating) 6.3.2
闪耀角(blazed angle) 6.3.2
闪耀面(blazed surface) 6.3.2
实物(real object) 10.5.1
实像(real image) 10.5.1
时间相干性(temporal coherence) 5.7.2
时间相干性的反比公式 5.7.2
斯涅尔定律(Snell law) 10.2.2
斯特藩-玻尔兹曼定律 11.2.1
斯托克斯倒逆关系(Stokes relations) 3.5
双缝干涉(double slit interference) 4.1.3
双轴晶体(biaxial crystals) 8.1.1
双折射(birefringence) 8.1.1
所列尔补偿器(Soleil compensator) 8.3.3

T

泰勒判据(Taylor criterion) 5.6.3
瞳函数(pupil function) 4.3.2
透振方向(axis of transmission) 3.1.2
透光轴 3.1.2
同心光束(concentric beam, homocentric beam) 10.5.1
椭圆偏振光(elliptical polarized light) 3.2.6

W

望远镜(telescope) 10.9.5
望远镜的分辨本领 4.6.3
维恩位移定律 11.2.2
维尔德常量(Verdet constant) 8.7.2
物方(object side) 10.5.1
渥拉斯顿棱镜(Wollaston prism) 8.3.1
物方焦点(focal point in the space side) 10.5.2
物光波(object wave) 7.5.1
物质波(matter wave) 11.3.2

X

线偏振光(linearly polarized light) 3.2.3
线色散率 6.2.2
线性冲洗 7.5.1
像方(image side) 10.5.1
系统矩阵(system matrix) 10.8.1
吸收系数(absorption coefficient) 9.1.1
显微镜(microscope) 10.9.4
显色偏振(chromatic polarization) 8.5.2
相衬显微镜(phase contrast microscope) 7.4.3
相长干涉(constructive interference) 2.3.3
相消干涉(destructive interference) 2.3.3

相干叠加(coherent superposition) 2.3.3
相干光(coherent light) 2.3.3
相干条件(coherent condition) 2.3.6
相干孔径(角)(coherent aperture angle) 5.7.1
相干面积(coherent area) 5.7.1
相干长度(coherent length) 5.7.2
相干时间(coherent time) 5.7.2
相速度(phase velocity) 1.1.6
相位(phase) 1.1.2
相位型光栅(phase grating) 6.5
相位匹配条件 344
相因子分析法(phase factor analyse) 7.1.4
相因子判断法 7.1.4
消光比(extinction ratio) 3.2.3
选择吸收 9.1.2
虚物(virtual object) 10.5.1
虚像(virtual image) 10.5.1
寻常光(ordinary ray,o光) 8.1.2
旋光(optical activity,optical rotation opticity) 8.7.1
旋光本领(rotation power) 8.7.1
旋光率(specific rotation) 8.7.1
旋光色散(rotatory dispersion) 8.7.1

Y

衍射(diffraction) 4.3.1
衍射的反比关系 4.5.3
衍射屏函数(screen function) 7.1.1
圆孔衍射(circular aperture diffraction) 4.4.1
圆屏衍射(circular disk diffraction) 4.4.1
一级闪耀波长(1 order blaze wavelength) 6.3.3
圆波数(circular wave number) 1.1.2
圆起偏器(circular polarizer) 8.8.3
圆偏振光(circular polarized light) 3.2.5
圆频率(circular frequency) 1.1.2
远场条件(far field condition) 1.4.1
远场近似(far field approximation) 1.4.1
衍射光栅(diffraction grating) 6.1

Z

增透膜(reflection reducing coating) 5.5.3
正弦光栅(sinusoidal grating) 6.5
正交偏振(cross polarition) 8.8.2
正常色散(normal dispersion) 9.2
折射率匹配条件 9.5
振幅矢量法(phasor addition) 2.2.3
自聚焦光纤(self-focusing fiber) 10.4
自然光(natural light) 3.2.2
自由光谱范围(free spectrum range) 6.2.2
准单色波(quasi-monochromatic light) 2.4
主点(principal point) 10.7.1
主平面(principal plane) 8.1.2
主截面(principal section) 8.1.2
柱面波(cylindrical wave) 1.2.3
驻波模式(mode of standing wave) 11.2.3

教学进度和作业布置

章	节	学 时	题 次
1	**第 1 章　光的波动模型**	**4～6**	
	1.1　光波场	1	1.1～1.3
	1.2　定态光波的数学表示	1.5	1.4～1.11
	1.3　光程与相位	0.5	1.12～1.17
	1.4　傍轴条件与远场条件	1	1.18～1.19
2	**第 2 章　光的叠加原理**	**4**	
	2.1　光波的叠加原理及其成立的条件	0.5	
	2.2　光波的叠加方法	1	2.1～2.6
	2.3　光波的叠加强度	1	2.7～2.9
	2.4　波包与群速度	1	2.10～2.16
	2.5　光速的测量	0.5	
3	**第 3 章　光的偏振**	**5**	
	3.1　光的偏振特性	0.5	
	3.2　光的偏振态	1	3.1～3.13
	3.3　菲涅耳公式	1	
	3.4　反射折射所引起的偏振态的改变	2	3.13～3.21
	3.5　斯托克斯倒逆关系	0.5	
4	**第 4 章　光的相干叠加**	**7**	
	4.1　杨氏干涉与相干光的获得	0.5	4.1～4.3
	4.2　两列相干光的干涉花样	1	4.3～4.9
	4.3　惠更斯-菲涅耳原理	1	4.10
	4.4　菲涅耳衍射(圆孔、圆屏)	2	4.11～4.26
	4.5　夫琅禾费单缝和矩孔衍射	2	4.27～4.31
	4.6　夫琅禾费圆孔衍射	0.5	4.32～4.33
5	**第 5 章　光的干涉装置与光波场的相干性**	**12**	
	5.1　光的干涉装置概述	1	
	5.2　分波前的干涉装置	2	5.1～5.6
	5.3　半波损失	1	
	5.4　薄膜干涉	2	
	5.5　分振幅的干涉装置	2	5.7～5.20
	5.6　多光束干涉——法布里-珀罗干涉仪	2	5.21～5.23
	5.7　光的空间相干性与时间相干性概论	2	5.24
6	**第 6 章　衍射光栅**	**8**	
	6.1　多缝夫琅禾费衍射	2	6.1～6.4
	6.2　光栅光谱	2	6.5～6.14
	6.3　闪耀光栅	0.5	
	6.4　单色仪与光谱仪	0.5	6.15
	6.5　正弦光栅	1	
	6.6　X 射线在晶体中的衍射	2	

续表

章	节	学 时	题 次
7	**第 7 章 傅里叶变换光学与全息照相**	**6**	
	7.1 衍射系统的傅里叶变换	0.5	
	7.2 透镜和棱镜的屏函数	1	7.1～7.4
	7.3 夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析	11	7.5～7.7
	7.4 阿贝成像原理	0.5	7.8
	7.5 全息照相	11	7.9～7.11
8	**第 8 章 光在晶体中的双折射**	**10**	
	8.1 光在晶体中的传播	1	8.1～8.6
	8.2 单轴晶体中光的波面	1	8.7～8.9
	8.3 晶体光学器件	1	8.10～8.15
	8.4 波片与光的偏振态	2	8.16～8.23
	8.5 偏振光的干涉	1	8.24～8.43
	8.6 电光效应	1	
	8.7 旋光	1	8.44～8.55
	8.8 偏振态的矩阵表示	2	8.31～8.34
9	**第 9 章 光波与物质的相互作用**	**3**	
	9.1 光的吸收	0.5	9.1～9.3
	9.2 光的色散	0.5	9.4～9.6
	9.3 吸收和色散的经典理论	1	
	9.4 光的散射	0.5	9.7～9.8
	9.5 强光在介质中的非线性电极化效应	0.5	
10	**第 10 章 几何光学的近轴理论**	**10**	
	10.1 衍射的零级近似	0.5	
	10.2 几何光学的基本概念	1	
	10.3 反射与折射的应用	0.5	10.1～10.12
	10.4 变折射率光学	0.5	
	10.5 近轴光在单球面上的成像	1.5	10.13～10.23
	10.6 薄透镜成像	2	10.24～10.32
	10.7 理想共轴球面系统的成像	1	10.33～10.44
	10.8 光线转换矩阵	2	10.45～10.49
	10.9 几何光学仪器	1	
11	**第 11 章 光的量子性**	**3**	
	11.1 辐射场	0.5	
	11.2 黑体辐射的实验规律	2	11.1～11.3
	11.3 光量子假说	0.5	11.4～11.7

共计 72～74 学时

[General Information]
书名=光学
作者=崔宏滨，李永平，段开敏编著
页数=325
SS号=12089827
出版日期=2008.7

封面
书名
版权
前言
目录
引言
第1章　光的波动模型
1．1光波场
1．1．1光是交变电磁场
1．1．2光波场的周期性
1．1．3定态光波
1．1．4光是矢量波
1．1．5光强
1．1．6光的传播
1．2定态光波的数学表示
1．2．1矢量表示与标量表示
1．2．2定态光波的描述
1．2．3定态光波按波面分类
1．2．4光波的复振幅描述
1．2．5有关光波的几个概念
1．3光程与相位
1．3．1光程
1．3．2相位的超前与滞后
1．4傍轴条件与远场条件
1．4．1轴上物点的傍轴条件和远场条件
1．4．2轴外物点的近轴条件和远场条件
第2章　光的叠加原理
2．1光波的叠加原理及其成立的条件
2．1．1光波的独立传播定律
2．1．2光波的叠加原理
2．2光波的叠加方法
2．2．1代数法（瞬时值法）
2．2．2复数法
2．2．3振幅矢量法
2．3光波的叠加强度
2．3．1光波叠加的特点
2．3．2光波的叠加强度的计算
2．3．3光波的相干叠加与非相干叠加
2．3．4振动方向相互垂直的光波的叠加
2．3．5两列不同频率单色光波的叠加
2．3．6光的相干条件
2．4波包与群速度
2．5光速的测量
第3章　光的偏振
3．1光的偏振特性
3．1．1横波的偏振性
3．1．2起偏与检偏
3．2光的偏振态
3．2．1普通光源的发光机制
3．2．2自然光
3．2．3平面偏振光（线偏振光）
3．2．4部分偏振光

3．2．5 圆偏振光
3．2．6 椭圆偏振光
3．3 菲涅耳公式
3．3．1 光矢量的分解
3．3．2 菲涅耳公式的表述
3．3．3 反射率与透射率
3．3．4 相位关系
3．4 反射折射所引起的偏振态的改变
3．4．1 偏振态的改变
3．4．2 垂直入射
3．4．3 布儒斯特定律
3．4．4 玻璃片堆和布儒斯特窗
3．5 斯托克斯倒逆关系
第4章 光的相干叠加
4．1 杨氏干涉与相干光的获得
4．1．1 托马斯·杨
4．1．2 普通光源的相位
4．1．3 相干光的获得
4．1．4 杨氏干涉
4．1．5 干涉的特点
4．2 两列相干光的干涉花样
4．2．1 两个点光源的干涉
4．2．2 两个线光源的干涉（双缝干涉）
4．2．3 干涉条纹的可见度（反衬度）
4．2．4 两列平行光的干涉
4．3 惠更斯-菲涅耳原理
4．3．1 次波模型
4．3．2 次波的相干叠加——惠更斯-菲涅耳原理
4．4 菲涅耳衍射（圆孔、圆屏）
4．4．1 衍射现象
4．4．2 用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射
4．5 夫琅禾费单缝和矩孔衍射
4．5．1 夫琅禾费衍射装置
4．5．2 单缝衍射强度分布
4．5．3 单缝衍射花样的特点
4．5．4 单缝衍射的应用
4．5．5 夫琅禾费矩孔衍射
4．6 夫琅禾费圆孔衍射
4．6．1 衍射强度
4．6．2 衍射花样的特点
4．6．3 望远镜的分辨本领
4．6．4 几何光学是衍射光学的大尺度近似
第5章 光的干涉装置与光波场的相干性
5．1 光的干涉装置概述
5．2 分波前的干涉装置
5．2．1 菲涅耳双面镜
5．2．2 劳埃德镜
5．2．3 菲涅耳双棱镜
5．3 半波损失
5．4 薄膜干涉
5．4．1 等倾干涉
5．4．2 等厚干涉

5．5分振幅的干涉装置
5．5．1迈克耳孙干涉仪
5．5．2马赫-曾德尔干涉仪
5．5．3干涉滤波片
5．5．4牛顿环
5．6多光束干涉——法布里-珀罗干涉仪
5．6．1干涉装置
5．6．2光强分布
5．6．3光波场特性
5．7光的空间相干性与时间相干性概论
5．7．1光波场的空间相干性
5．7．2光场的时间相干性
第6章　衍射光栅
6．1多缝夫琅禾费衍射
6．1．1衍射强度
6．1．2双缝衍射
6．1．3衍射花样的特点
6．1．4干涉与衍射的区别和联系
6．1．5光栅方程
6．2光栅光谱
6．2．1谱线的角宽度和光栅的色分辨本领
6．2．2光栅的色散与自由光谱范围
6．3闪耀光栅
6．3．1问题的提出与解决方案
6．3．2闪耀光栅的原理
6．3．3两种常用的照明方式
6．4单色仪与光谱仪
6．5正弦光栅
6．6　X射线在晶体中的衍射
6．6．1晶格点阵
6．6．2　X射线在晶体中的相干叠加
6．6．3晶体X射线衍射的实验方法
第7章　傅里叶变换光学与全息照相
7．1衍射系统的傅里叶变换
7．1．1衍射系统的屏函数
7．1．2接收场
7．1．3衍射系统的傅里叶变换方法
7．1．4波前相因子分析法
7．2透镜和棱镜的屏函数
7．2．1透镜的相位变换函数
7．2．2棱镜的相位变换函数
7．3夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析
7．3．1屏函数的傅里叶变换
7．3．2周期性屏函数的傅里叶变换
7．3．3非周期性的屏函数的傅里叶变换
7．4阿贝成像原理
7．4．1阿贝成像原理的数学推导
7．4．2阿贝成像原理的实验验证
7．4．3图像处理
7．4．4相衬显微镜
7．5全息照相
7．5．1全息照相的基本原理

7．5．2 全息照相的装置
第8章 光在晶体中的双折射
8．1 光在晶体中的传播
8．1．1 晶体的光学特征
8．1．2 双折射现象与双折射晶体
8．2 单轴晶体中光的波面
8．2．1 o光和e光的波面
8．2．2 单轴晶体的惠更斯作图法
8．2．3 几种特例
8．3 晶体光学器件
8．3．1 偏振棱镜
8．3．2 波晶片
8．3．3 相位补偿器
8．4 波片与光的偏振态
8．4．1 光在波晶片中的传播引起的相位差
8．4．2 经过波片后光的偏振态的改变
8．5 偏振光的干涉
8．5．1 平行光的干涉装置
8．5．2 实验现象及分析
8．6 电光效应
8．6．1 克尔效应（二级电光效应）
8．6．2 泡克耳斯效应（一级电光效应）
8．6．3 电光效应的应用
8．7 旋光
8．7．1 自然旋光
8．7．2 磁致旋光
8．7．3 磁致旋光的应用
8．8 偏振态的矩阵表示
8．8．1 琼斯矢量
8．8．2 正交偏振
8．8．3 琼斯矩阵
第9章 光波与物质的相互作用
9．1 光的吸收
9．1．1 吸收的实验规律（线性吸收）
9．1．2 吸收系数与波长的关系
9．1．3 吸收光谱
9．2 光的色散
9．3 吸收和色散的经典理论
9．3．1 经典的电偶极子模型
9．3．2 单一本征频率
9．3．3 多个本征频率
9．4 光的散射
9．4．1 散射现象
9．4．2 散射定律
9．5 强光在介质中的非线性电极化效应
第10章 几何光学的近轴理论
10．1 衍射的零级近似
10．2 几何光学的基本概念
10．2．1 几何光学是关于成像的理论
10．2．2 几何光学的实验定律
10．3 反射与折射的应用
10．3．1 光在平面上的反射

10.3.2 光在平面上的折射
10.4 变折射率光学
10.5 近轴光在单球面上的成像
10.5.1 物与像的虚实性
10.5.2 近轴光在单球面上的折射
10.6 薄透镜成像
10.6.1 薄透镜
10.6.2 薄透镜成像公式
10.6.3 薄透镜成像的作图法
10.7 理想共轴球面系统的成像
10.7.1 共轴球面系统的基点和基面
10.7.2 共轴球面系统的物像关系
10.7.3 基点和基平面的确定
10.7.4 光具组的阿贝正弦条件与齐明点
10.8 光线转换矩阵
10.8.1 光线状态的矩阵表示
10.8.2 成像矩阵的计算
10.9 几何光学仪器
10.9.1 人眼
10.9.2 放大镜
10.9.3 目镜与物镜
10.9.4 显微镜
10.9.5 望远镜
10.9.6 照相机
第11章 光的量子性
11.1 辐射场
11.1.1 辐射场的物理参数
11.1.2 热辐射
11.2 黑体辐射的实验规律
11.2.1 斯特藩-玻耳兹曼定律
11.2.2 维恩位移定律
11.2.3 瑞利-金斯定律
11.3 光量子假说
11.3.1 普朗克对黑体辐射的解释
11.3.2 爱因斯坦光量子与光的波粒二象性
11.3.3 康普顿效应
11.3.4 德布罗意波
习题与答案
中英人名对照
名词索引
教学进度和作业布置