

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主编 杨国桢　副主编 程福臻

光　学



（第二版）

崔宏滨　李永平　康学亮　编著

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书
主　编　杨国桢　　副主编　程福臻

光　　学

（第二版）

崔宏滨　李永平　康学亮　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书讲授大学物理课程中的光学部分，内容包括波动光学、几何光学以及光的量子性导论. 全书以光学实验为基础，从光的物理模型出发，对光线的传播、光学成像、光的干涉、光的衍射、光的偏振与双折射、光与物质的相互作用、光的量子性等问题进行了较全面和深入的阐释，并介绍了光学的发展及其在各个领域中的应用. 对于光学中基本的实验现象，说明详细；对于光学中基本的物理概念，阐述准确；对于光学的理论体系，推导严谨. 附有较多的例题和练习题，有利于读者掌握处理光学问题的方法和加深对光学概念的理解，便于读者自学.

本书可作为理工科以及师范院校物理类专业的本科生教材，也可供理工科非物理类有关专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

光学/崔宏滨，李永平，康学亮编著. —2 版. —北京：科学出版社，2015.7
(中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书/杨国桢主编)
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
ISBN 978-7-03-045012-8

Ⅰ.①光… Ⅱ.①崔…②李…③康… Ⅲ.①光学-高等学校-教材
Ⅳ.①O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 130818 号

责任编辑：窦京涛 王 刚 / 责任校对：彭 涛
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 7 月第 二 版 印张：26 1/4
2015 年 7 月第八次印刷 字数：529 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版丛书序

2008年这套丛书正式出版，至今使用已五年，回想当初编书动机，有一点值得一提. 我初到中国科学技术大学理学院担任院长，一次拜访吴杭生先生，向他问起科大的特点在哪里，他回答在于它的本科教学，数理基础课教得认真，学生学得努力，特别体现在十年CUSPEA考试(中美联合招收赴美攻读物理博士生考试)中，科大学生表现突出. 接着谈起一所大学对社会最重要的贡献是什么，他认为是培养出优秀的学生，当前特别是培养出优秀的本科生. 这次交谈给了我很深的印象和启示. 后来一些参加过CUSPEA教学的老教师向我提出，编一套科大物理类本科生物理教材，我便欣然同意，并且在大家一致的请求下担任了主编. 我的期望是，通过编写这套丛书将CUSPEA教学的一些成果能保留下来，进而发扬光大.

应该说这套书是在十年CUSPEA班的教学内容与经验基础上发展出来的，它所涵盖的内容有相当的深度与广度，系统性与科学的严谨性突出；另外，注重了普通物理与理论物理的关联与融合、各本书物理内容的相互呼应. 但是，使用了五年后，经过教师的教学实践、与学生的互动，发现了一些不尽如人意的地方和错误，这次能纳入“‘十二五’普通高等教育本科国家级规划教材”是个很好的修改机会，同时大家也同意出版配套的习题解答，也许更便于校内外的教师选用. 为大学本科生教学做一点贡献是我们的责任，也是我们的荣幸. 盼望更多的使用本套书的老师和同学提出宝贵建议.



2013年10月于合肥

第一版丛书序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年. 值此筹备校庆之际,由几位长年从事基础物理教学的老师建议,编著一套理科基础物理教程,向校庆五十周年献礼. 这一建议在理学院很快达成了共识,并受到学校的高度重视和大力支持. 随后,理学院立即组织了在理科基础物理教学方面有丰富教学经验的老师,组成了老、中、青相结合的班子,着手编著这套丛书,并以此进一步推动理科基础物理的教学改革与创新.

中国科学技术大学在老一辈物理学家、教育家吴有训先生、严济慈先生、钱临照先生、赵忠尧先生、施汝为先生的亲自带领和指导下,一贯重视基础物理教学,历经五十年如一日的坚持,现已形成良好的教学传统. 特别是严济慈和钱临照两位先生在世时身体力行,多年讲授本科生的力学、理论力学、电磁学、电动力学等基础课. 他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带领出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生. 这套丛书的作者,应该说都直接或间接受到过两位先生的教诲. 出版这套丛书也是表达作者对先生的深深感激和最好纪念.

这套丛书共九本:《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》、《光学》、《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学　热力学与统计物理(上、下)》. 每本约40万字,主要是为物理学相关专业本科生编写的,也可供工科专业物理教师参考. 每本书的教学学时约为72学时. 可以认为,这套丛书系列不仅是普通物理与理论物理横向关联、纵向自洽的基础物理教程,同时更加适合我校理科人才培养的教学安排,并充分考虑了与数学教学的相互配合. 因此,在教材的设置上,《力学与理论力学(上、下)》、《电磁学与电动力学(上、下)》中,上册部分分别是普通物理内容,而下册部分为理论物理内容. 还要指出的是,在《原子物理与量子力学(上、下)》、《热学　热力学与统计物理(上、下)》中,考虑到普通物理与理论物理内容的界限已不再那样泾渭分明,而比较直接地用现代的、实用的概念、物理图像和理论来阐述,这确实不失为一种有意义的尝试.

这套丛书在编著过程中,不仅广泛吸取了校内老师的经验,采纳了学生的意见,而且还征求了中国科学院许多相关专家的意见和建议,体现了"所系结合"的特点. 同时,还聘请了兄弟院校及校内有丰富教学经验的教授进行双重审稿,期望将其错误概率降至最低.

历经几年，在科学出版社大力支持下，这套丛书终于面世，愿她能在理科教学改革与创新中起到一点作用，成为引玉之砖，共同来促进物理学教学水平的提高及其优秀人才的培养，并望广大师生及有关专家们继续提出宝贵意见和建议，以便改进. 最后，对方方面面为这套丛书编著与出版的完成所付出艰辛努力及其给予关心、帮助的同志表示深切感谢！

中国科学技术大学理学院院长


院士

2007 年 10 月

第二版前言

本书第一版自2008年发行以来，被国内多所大学选为教材. 此次再版，根据教学实践和读者的建议，编著者对本书的结构和内容进行了以下修订：

(1) 调整了全书的结构. 第一版全书共11章，第二版调整为9章.

(2) 调整、合并了部分章节. 第一版中“第10章几何光学的近轴理论”，调整为“第2章光线与几何光学”；第一版中“第2章光的叠加原理”与“第4章光的相干叠加”合并为“第3章光的相干叠加与非相干叠加”；第一版中“第3章光的偏振”与“第8章光在晶体中的双折射”合并为“第7章光的偏振及双折射”.

(3) 增删了部分内容. 主要是增加了部分例题，删除了类型重复的习题.

(4) 更正了第一版中的错误.

作为一本物理学教材，一方面要能够体现物理学理论体系的严谨和完整；另一方面要便于在课堂教学中使用和读者自学. 有时这两方面是相互矛盾的，所以要权衡利弊，并有所取舍. 从另一个角度看这个问题，很容易得出这样的结论：任何一本物理教材都做不到完美. 既然如此，编著者在修订的过程中，力求使本书更有特色，更能体现光学的特点.

教材的作用是将已有的科研成果和科学体系介绍给读者，使其能够在最短的时间内对这一学科的理论体系有最清晰的认识，对研究成果有最深刻的理解，对研究方法有最正确的掌握. 相对于科学研究，编写教材不是原创性的工作，而是对前人工作和已有知识的总结和介绍. 但是这样的总结和介绍，是基于编著者对已有成果的掌握和对知识体系的理解，所以物理教材的特色就是编著者对物理定律、物理概念、物理方法掌握和理解程度的体现.

在几何光学的理论体系中，最重要的概念就是光线. 所谓“三大实验定律”就是关于光线的传播、反射和折射的规律，而光学成像也是基于“物点发出光线束”、“光学元件对光线束进行变换”和“光线束会聚成像点”这样的物理思想. 实验定律是对实际光线(实光线)的方向的描述，成像过程中实物点发出实光线，实光线会聚成实像点. 从逻辑上看，可以引入“虚光线”，这是一条与实光线共线但实际上并不存在的光线. 引入虚光线的概念后，成像过程中“虚物”、“虚像”就显得非常自然，而费马原理的适用范围就能扩展到虚物成像和成虚像的情形. 这样做就使得几何光学的逻辑体系更加完整.

波动光学涉及光的干涉、衍射与偏振问题，这些问题都采用波的叠加原理进行处理，有些是相干叠加，有些是非相干叠加. 光的相干性是波动光学的核心概念. 编

著者的观点是，与其泛泛讨论光的相干性，不如弄明白获得相干光的具体方法. 这就要先搞清楚光波与机械波、无线电波的区别. 通过对杨氏干涉的深入探究，能够揭示获得相干光的方法，并准确地理解光的相干性. 掌握了这些基本的概念，则很容易将波动光学的各部分内容用叠加原理这条主线贯串起来，读者就能很容易理解波动光学的理论体系.

虽然新版进行了较大的调整，但本书的特色依然保持，相信新版本更便于读者阅读.

全书由崔宏滨执笔，中国科学技术大学吴强教授、北京大学王若鹏教授和清华大学蒋硕副教授审阅了此书稿，作者在此表示衷心的感谢.

崔宏滨　李永平　康学亮

2014 年 11 月 18 日

第一版前言

本书由编者在中国科学技术大学理学院的光学讲稿修改补充而成.

根据编者多年教学工作的经历,光学是大学物理系列中一门较有特色的课程.一方面,对于已经稔熟力学、热学和电磁学等经典物理的读者,光学显得不那么“经典”,因为无论是几何光学还是波动光学,都要用到不少近似的处理方法,通过列方程而得到严格解的情况在光学领域倒是不多.另一方面,光学中的主要概念“光线”“光波”“光量子”看起来互不相关,各有各的处理方法,但是内容又相互渗透,例如,几何光学中涉及光在介质中的色散时,就需要借用波长的概念,而波长只有在波动光学中才能定义,等等.

正是基于光学的特点,编者在本书中对光学中常用的傍轴条件、远场条件以及这些近似条件的具体应用进行了比较详细的说明,同时又强调和突出了“光线”、“光波”、“光子”这些光的物理模型,并通过具体的实例说明这些模型的内在联系.

第1章～第9章是波动光学部分,介绍光的波动模型、光的叠加原理、光的偏振、光的相干叠加、光的干涉衍射、傅里叶变换光学与全息照相、在晶体中的双折射以及光与物质的相互作用.第10章为几何光学,重点讨论光的成像理论.第11章为光的量子性导论,从实验事实出发,探讨光的波粒二象性.

关于成像的几何光学是光学中最早发展起来的分支,这是一套唯象的理论体系,较少涉及光的本质,所以并没有受到惠更斯和牛顿波粒之争的影响,因而很多光学教材都以几何光学部分作为开篇.本书将几何光学置于波动光学之后,并强调几何光学是波动光学(衍射)的零级近似,这样做的目的一方面要指出衍射是无处不在的,另一方面也是使读者不至于将几何光学看成一个孤立的分支.在最后一章探讨光的量子学说建立的过程中,对黑体辐射的实验规律和理论研究进行了较详细的介绍,黑体辐射长波部分的规律可以用波动理论说明,而短波部分只能用量子理论才能解释,之所以这样做,就是试图使读者体会到波长越短,量子性越显著,而且从物理特征上,光波到光量子是一种自然的过渡,从整个物理学的体系上,光学也是经典物理学向量子物理学发展和过渡的桥梁和纽带.

大学阶段的光学课程中,波动光学是整个光学的核心内容.而贯穿整个波动光学的主线则是光波的叠加原理.传统的方法是将光的干涉、衍射、偏振分别讲述,这样做自有好处,无论教还是学都很方便,但是,缺点在于往往容易使初学者混淆干涉、衍射的区别和联系,也不容易区分相干叠加与非相干叠加.其实干涉、衍射都是光的相干叠加,在处理方法上,前者可以直接应用光波的叠加原理将几列波的振动

或复振幅直接相加，而后者则需要通过求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式；在实验装置上，干涉是将光分束，而衍射则无需如此. 在分析光的偏振特性时，往往是将正交的光矢量进行叠加，这是一种非相干叠加. 因而本书在章节次序上，先介绍了用非相干叠加方法处理光的偏振，接着将杨氏干涉和菲涅耳、夫琅禾费衍射在同一章中讲授. 在读者了解了干涉、衍射、偏振的原理之后，分别对具体的干涉装置、衍射光栅和光在晶体中的双折射进行了介绍.

本书强调物理概念的清晰和准确，因而对诸如偏振态的分析、干涉的物理过程、衍射积分的运算、双折射导致偏振态的改变等问题进行了尽可能详细的讨论. 书中的例题大多具有一定的难度，目的是引导读者掌握处理光学问题的正确方法.

光学世界绚丽多彩，形象生动，授课过程中要用到大量的图片，为此，编者特意制作了一套多媒体课件，其中包括光学系统的图解、演示实验等，便于课堂教学和读者自行浏览，许多受到篇幅限制而难以在书中展示的内容，也与上述课件一并收录在随书的光盘中.

北京大学钟锡华教授和中国科学技术大学吴强教授所著的光学教材长期被本书编者用作讲课的范本，本书编者之一更是不止一次面聆两位教授的指导. 这次幸得两位专家评审本书，发现并纠正了书稿中的许多讹误和纰漏. 中国科学院物理研究所傅盘铭研究员也为本书写出了详细中肯的评阅意见，使编者大受裨益. 这套丛书的主编杨国桢院士和副主编程福臻教授多次听取本书编者汇报，为本书确定了编写的基本原则. 对于他们付出的心血，编者在此表示由衷的感谢.

编者诚恳希望读者指出书中的不足之处，以便我们有机会改正.

崔宏滨　李永平　段开敏

2008 年 4 月 21 日

第 3 章　光的相干叠加与非相干叠加 …… 102
3.1　光波的叠加原理 …… 102
3.1.1　光波的独立传播定律 …… 102
3.1.2　光波的叠加原理 …… 102
3.2　同频率、同振动方向光波叠加的方法 …… 103
3.2.1　代数法 …… 103
3.2.2　复数法 …… 104
3.2.3　振幅矢量法 …… 105
3.3　光波叠加的强度 …… 106
3.3.1　光波叠加的特点 …… 106
3.3.2　光波叠加强度的计算方法 …… 107
3.3.3　光波的相干叠加与非相干叠加 …… 107
3.3.4　光波的相干条件 …… 110
3.4　波包与群速度 …… 114
3.5　杨氏干涉与相干光的获得 …… 118
3.5.1　干涉装置 …… 118
3.5.2　杨氏干涉的物理过程 …… 119
3.5.3　相干光的获得 …… 121
3.6　干涉图样与干涉强度 …… 121
3.6.1　杨氏双孔干涉 …… 121
3.6.2　杨氏双缝干涉 …… 124
3.6.3　干涉条纹的可见度 …… 125
3.6.4　两列平面光波的干涉 …… 125
3.7　惠更斯-菲涅耳原理 …… 127
3.7.1　次波模型 …… 127
3.7.2　次波的线性叠加:惠更斯-菲涅耳原理 …… 130
3.8　菲涅耳衍射 …… 133
3.8.1　衍射装置与现象 …… 133
3.8.2　用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射 …… 134
3.8.3　半波带方程 …… 141
3.8.4　一般情形下的波带 …… 142
3.8.5　菲涅耳半波带的应用——波带片 …… 144
3.9　夫琅禾费单缝和矩孔衍射 …… 146
3.9.1　夫琅禾费单缝衍射装置 …… 146

3.9.2 单缝衍射强度分布 …… 147
3.9.3 单缝衍射图样的特点 …… 152
3.9.4 单缝衍射的应用 …… 155
3.9.5 夫琅禾费矩孔衍射 …… 156
3.10 夫琅禾费圆孔衍射 …… 158
3.10.1 圆孔衍射强度 …… 158
3.10.2 衍射图样的特点 …… 160
3.11 衍射的 0 级近似与几何光学 …… 164
3.11.1 衍射中央主极大的特殊性 …… 164
3.11.2 衍射与孔径的关系 …… 165
3.11.3 几何光学是衍射的 0 级近似 …… 166
3.11.4 望远镜的分辨本领与衍射极限 …… 166
第 4 章 干涉仪与光的时空相干性 …… 170
4.1 分波前的干涉装置 …… 170
4.1.1 菲涅耳双面镜 …… 171
4.1.2 劳埃德镜 …… 174
4.1.3 菲涅耳双棱镜 …… 175
4.1.4 对切透镜 …… 176
4.2 光的空间相干性 …… 179
4.2.1 光源的非相干性 …… 179
4.2.2 扩展光源对相干性的影响 …… 182
4.3 光的时间相干性 …… 185
4.3.1 非单色光的干涉 …… 185
4.3.2 相干时间 …… 187
4.4 光波在界面处的复振幅 …… 188
4.4.1 菲涅耳公式 …… 188
4.4.2 出现半波损失的特例 …… 192
4.4.3 斯托克斯倒逆关系 …… 195
4.5 薄膜干涉 …… 196
4.5.1 等倾干涉 …… 196
4.5.2 等厚干涉 …… 202
4.6 分振幅的干涉装置 …… 204
4.6.1 迈克耳孙干涉仪 …… 204
4.6.2 马赫-曾德尔干涉仪 …… 209

4.6.3 干涉滤波片 …… 210
4.6.4 牛顿环(圈) …… 212
4.7 法布里-珀罗干涉仪 …… 214
4.7.1 多光束干涉 …… 214
4.7.2 多光束干涉的光强 …… 214
4.7.3 干涉场的特性 …… 218
第5章 衍射光栅与光谱仪 …… 223
5.1 多缝夫琅禾费衍射 …… 223
5.1.1 衍射强度 …… 224
5.1.2 双缝衍射 …… 234
5.1.3 光栅衍射的特点 …… 235
5.1.4 干涉与衍射的区别和联系 …… 237
5.2 光栅光谱 …… 237
5.2.1 谱线的角宽度和光栅的色分辨本领 …… 238
5.2.2 光栅的色散与自由光谱范围 …… 239
5.3 闪耀光栅 …… 241
5.3.1 问题的提出与解决方案 …… 241
5.3.2 闪耀光栅的结构 …… 242
5.3.3 闪耀光栅衍射的一般性分析 …… 243
5.3.4 两种常用的照明方式 …… 245
5.4 单色仪与光谱仪 …… 245
5.5 正弦光栅 …… 247
5.6 X射线在晶体中的衍射 …… 249
5.6.1 晶格点阵 …… 249
5.6.2 X射线在晶体中的衍射 …… 250
5.6.3 晶体X射线衍射的实验方法 …… 252
第6章 傅里叶变换光学 …… 255
6.1 衍射屏对波前的变换 …… 255
6.1.1 衍射系统的屏函数 …… 255
6.1.2 简单光波场的波前光场 …… 256
6.1.3 透镜的相位变换函数 …… 257
6.1.4 光楔的相位变换函数 …… 260
6.2 接收场的傅里叶变换 …… 261
6.2.1 衍射积分的近似 …… 261

6.2.2 衍射系统的傅里叶变换 …… 263
6.3 夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析 …… 263
6.3.1 屏函数的傅里叶变换 …… 263
6.3.2 周期性屏函数的傅里叶变换 …… 265
6.3.3 非周期性的屏函数的傅里叶变换 …… 267
6.4 阿贝成像原理 …… 269
6.4.1 阿贝成像原理的数学验证 …… 269
6.4.2 阿贝成像原理的实验验证 …… 271
6.4.3 图像处理 …… 273
6.4.4 θ 调制 …… 275
6.5 相衬显微镜 …… 276
6.6 全息照相 …… 277
6.6.1 全息照相的基本原理 …… 277
6.6.2 全息照相的装置 …… 280
第 7 章 光的偏振与双折射 …… 281
7.1 光的偏振特性 …… 281
7.1.1 横波的偏振性 …… 281
7.1.2 起偏与检偏 …… 283
7.2 光的偏振态 …… 284
7.2.1 自然光 …… 284
7.2.2 部分偏振光 …… 284
7.2.3 平面偏振光 …… 285
7.2.4 圆偏振光 …… 286
7.2.5 椭圆偏振光 …… 288
7.3 反射、折射所引起的偏振态的改变 …… 293
7.3.1 偏振态的改变 …… 293
7.3.2 垂直入射的情形 …… 293
7.3.3 布儒斯特定律 …… 294
7.3.4 玻璃片堆和布儒斯特窗 …… 294
7.4 光在晶体中的双折射 …… 296
7.5 单轴晶体中光的波面 …… 300
7.5.1 晶体中 o 光和 e 光的波面 …… 300
7.5.2 单轴晶体的惠更斯作图法 …… 302
7.5.3 几种特例 …… 303

7.6 晶体光学器件 …… 304
7.6.1 偏振棱镜 …… 304
7.6.2 波片 …… 306
7.6.3 相位补偿器 …… 308
7.7 波片对光的偏振态的改变 …… 309
7.7.1 光在波晶片中的传播引起的相位差 …… 309
7.7.2 经过波片后光的偏振态的改变 …… 311
7.7.3 偏振态的实验鉴定 …… 317
7.8 偏振光的干涉 …… 319
7.8.1 平行偏振光的干涉装置 …… 319
7.8.2 干涉分析与实验现象 …… 319
7.8.3 偏振光干涉的应用——光测弹性 …… 321
7.9 电光效应 …… 322
7.9.1 克尔效应 …… 322
7.9.2 泡克尔斯效应 …… 323
7.9.3 电光效应的应用 …… 325
7.10 旋光 …… 326
7.10.1 自然旋光 …… 326
7.10.2 磁致旋光 …… 331
7.10.3 磁致旋光的应用 …… 332
第 8 章 光波与物质的相互作用 …… 335
8.1 光的吸收 …… 335
8.1.1 吸收的实验定律 …… 335
8.1.2 吸收系数与波长的关系 …… 336
8.2 光的色散 …… 338
8.3 光的散射 …… 340
8.3.1 散射现象 …… 340
8.3.2 散射定律 …… 340
8.4 强光在介质中的非线性电极化效应 …… 342
第 9 章 光的量子性 …… 345
9.1 黑体辐射 …… 345
9.1.1 热辐射 …… 345
9.1.2 黑体辐射的实验规律 …… 347
9.2 光量子 …… 352

9.2.1 普朗克能量分立的谐振子 …… 353
9.2.2 光量子 …… 354
9.2.3 康普顿效应 …… 356
9.2.4 物质的波粒二象性 …… 358
9.3 激光 …… 360
9.3.1 爱因斯坦的辐射理论 …… 360
9.3.2 粒子数反转与光放大 …… 362
习题与答案 …… 365
参考文献 …… 402

第 1 章　光的波动模型

1.1　光　　波

1.1.1　可见光

电磁波，也称电磁辐射，通常按照波长将其分为不同的波段. 如图 1.1.1 所示，其中波长大于 1mm、频率低于 300GHz 的部分称为**射频波**(radio wave，也称**无线电波**). 射频波中的短波部分，即波长在 1mm～1m、频率在 300MHz～300GHz 范围内的波段称为**微波**(microwave). 与微波毗邻的短波部分是**红外线**(infrared ray)，波长范围为 760nm～1mm，频率范围为 430THz～300GHz. 红外线又可细分为**近红外**(near infrared，0.76～1.4μm)、**短波红外**(short-wave infrared，1.4～3μm)、**中红外**(middle infrared，3～8μm)、**长波红外**(long-wave infrared，8～15μm)和**远红外**(far infrared，15μm～1mm). 能够使人产生视觉的电磁辐射，波长范围为 380～760nm，对应的频率范围为 790～390THz，这就是**可见光**(visible light). 比可见光波长更短的是**紫外线**(ultraviolet ray)，波长范围为 10～380nm. 紫外线极易被介质吸收，其中 100～200nm 波段的光被空气强烈吸收，只能在真空中传播，因而被称为**真空紫外**(vacuum ultraviolet，VUV). 波长更短的电磁辐射，还有 **X 射线**(X-ray，波长范围 0.01～10nm)和 **γ 射线**(γ-ray，波长短于 0.01nm).

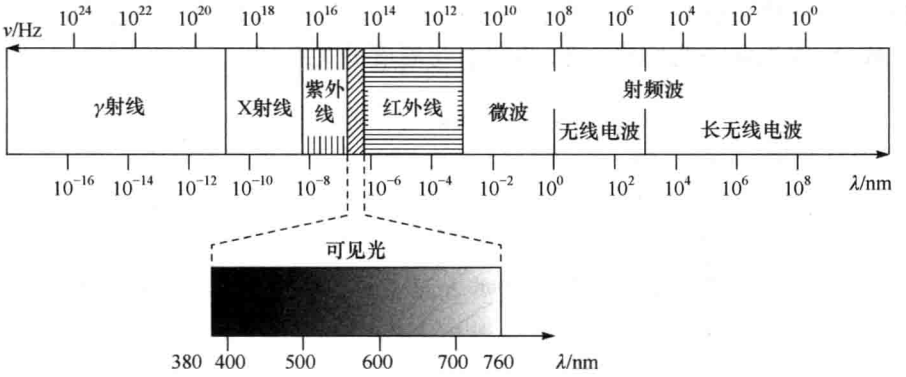


图 1.1.1　可见光在电磁辐射谱中的波段

其实，电磁辐射的区分，并不仅是依据其波段，更主要的是要依据其产生的物理机制. 例如，无线电波是由电磁振荡产生的，而红外线则是分子的热运动或跃迁

产生的，所以它们的频谱存在交叠. 同样的道理，X 射线是由原子中的内壳层电子跃迁产生的，γ 射线则来源于原子核的衰变，因而短波 X 射线与能量较低的 γ 射线也会有频谱交叠.

我们所说的光，通常是指可见光. 光学研究的范围通常还包括红外线中的短波部分和紫外线中的长波部分，在成像、干涉、衍射(diffraction)等物理过程中，它们具有与可见光相似的特性.

1.1.2 光波产生的物理机制

可见光是由于带电粒子的运动而产生的，这里所谓的带电粒子既包括净电荷不为零的离子，也包括电中性的原子、分子等. 由带正电荷的原子核和带负电荷的核外电子所构成的原子中，由于内部的运动，其正电荷中心与负电荷中心通常是不重合的，因而原子的电荷分布类似于电偶极子，核子数较大的原子、分子的电荷分布比电偶极子更复杂.

原子、分子发光的物理过程主要有以下两种.

1. 热辐射

原子、分子都有热运动，热运动是单个粒子随机无规则的运动，热运动过程中，每个粒子的运动状态不断变化，而带电粒子运动状态发生变化，就会向外辐射电磁波. 热运动的剧烈程度、每个粒子运动状态变化的频度，决定了电磁辐射的特征，因而这种由热运动导致的电磁辐射被称为**热辐射**(thermal radiation). 日光、白炽灯光、火光等都属于热辐射.

从统计的观点看，一方面，粒子热运动的速度分布、速度变化的频度都与温度有关，所以不同温度下物体的热辐射光谱是不同的；另一方面，在每一温度下，总会有一定比例的粒子，其热运动的速度极高或极低，相应地，其速度变化的频度极高或极低，因而热辐射光谱中总会有波长很短和波长很长的辐射. 所谓光谱是指光的波长成分，即光强随波长的分布. 热辐射与温度的关系如图 1.1.2 所示.

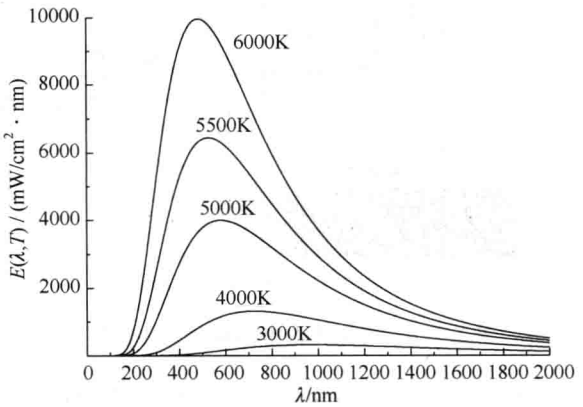


图 1.1.2 物体的热辐射谱

由于热辐射谱是由辐射体的温度决定的，在可见波段，所呈现的颜色与温度对应，因而可以用温度作为光源的颜色特性，这就是所谓的“色温”.

2. 荧光辐射

按照玻尔模型，原子吸收能量后可以跃迁到激发态，由于激发态不稳定，所以原子很快会从激发态跃迁回基态或低激发态，在跃迁的过程中，原子多余的能量以电磁辐射的形式释放，这样的过程就是辐射跃迁. 跃迁的过程与温度无关，因而这样的过程被称为**发光**(luminescence)或**荧光**(fluorescence). 例如，氢原子的 H_α 线、钠原子的黄线(D线)以及汞灯、日光灯的光谱等都是以这种方式发光的. 图 1.1.3 是产生氢的 H_α 线(波长约为 656.3nm 的 5 条谱线)、钠的 D 线(波长分别为 589.593nm 和 588.996nm 的 2 条谱线)的能级和跃迁.

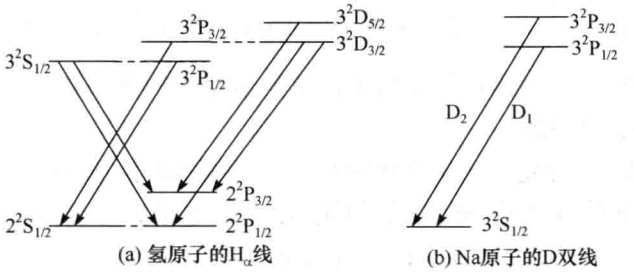


图 1.1.3　氢原子 H_α 线和钠原子 D 双线的能级和跃迁

常见的电弧光也是原子的辐射跃迁，电极的间隙很小时，其间的强电场可以将气体电离，电子和正离子在强电场中获得很大的动能，与其他原子碰撞并将其激发，从而导致跃迁发光.

原子辐射跃迁是一种自发过程，光源中的哪个处于激发态的原子在何时跃迁，是完全无法预计的.

光源中原子的数量是十分巨大的. 例如，一般的凝聚态物质，原子的数密度约为 $10^{20}\,mm^{-3}$，因此，即使体积只有 $1mm^3$ 的光源，某一瞬间其中只有百万分之一的原子发光，那么发光的原子数也有 10^{14} 之多. 而每个原子发光的过程又是随机的，因而任何一个实际的光源(激光器除外)在任何时刻所发出的都是数量巨大的、毫无关联的光波.

所以，尽管都是电磁辐射，但是可见光与无线电波有着极大的差别. 无线电波都是导体(天线)中的自由电子在外界电磁场作用下振荡而产生的，这是大量自由电子同步的集体行为. 可以通过控制加在天线中的电磁场来控制无线电波的发射. 例如，通过调整电磁振荡的频率以控制无线电波的频率. 而光波的频率高达 $10^{14}\,Hz$，电子由于有质量而有惯性，不可能以如此高的频率作集体振荡. 也正是由于这样的原因，不可能用电子设备以共振的方式直接测量光波的频率. 也正是由于产生的机

制不同，无线电波的研究方法不能直接应用于光波中.

1.1.3 产生光波的偶极振子模型

在量子理论产生之前，荷兰物理学家**洛伦兹**(Hendrik Antoon Lorentz，1853～1928)首先提出了原子由于其中电荷振荡而发光的物理模型.

由于原子内部电荷的运动，其中正电荷中心与负电荷中心并不重合，所以可以简单地将原子视为电偶极子. 原子若由于某种原因吸收能量，则正负电荷中心之间的距离将会增大，即电偶极矩增大，而库仑引力又能够使两者间距离减小，即电偶极矩减小，于是电偶极子便会产生振荡，从而产生电磁辐射. 原子很小，因而原子内部正负电荷间的库仑力很大，振荡过程中的回复力系数 k 也非常大. 若参考弹性振子频率的关系式 $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$，可见这样的电偶极子振动的频率是很高的，所发出的电磁辐射的频率也很高，因而原子振荡所发出的是不同于射频波的光波. 这就是原子发光的偶极振子模型.

按照这一模型，发光是原子个体的行为. 不同的原子，具有各自的偶极振动固有频率，因而每种原子都有独特的发射光谱. 吸收能量而受到激发的原子，在不同的激发态下，偶极矩不同，振荡的模式也会有不同，所以能够发出一系列不同的光谱线.

将发光的机制与射频波产生的机制进行对比，可以看出两者具有显著的不同.

第一，射频波是由于回路中的自由电子集体作受迫振动而产生的，所以一个稳定的振荡回路产生一列稳定的电磁辐射. 对于沿 z 方向传播的射频波，可将其表示为 $\psi=\psi_0\cos(kz-\omega t+\varphi_0)$，即一列稳定的射频电磁波，具有稳定的初相位 φ_0. 光波是由于各个原子的自发偶极振荡产生的，每个原子独自振荡，所发出的沿 z 方向传播的光波，可表示为 $\psi_i=\psi_{i0}\cos(k_iz-\omega_it+\varphi_{i0})$. 由于不同原子的振荡没有关联，所以即使这些原子振荡的频率相同，初相位 φ_{i0} 也是随机的. 因此，虽然看起来一个稳定的光源发出稳定的光波，但光波其实是由大量的随机的波列组成的，不同的波列由不同的原子发出，不同的波列的相位是随机的、无关联的.

第二，只要回路持续振荡，其所发出的射频波就是一个持续的很长的波列. 而光源中的每个原子，每次受激发后，经过短暂的振荡过程，由于将所吸收的能量通过辐射而释放，会停止振荡发光；只有再次受到激发才能进行下一次振荡过程. 因而即使是稳定的光源，其中每个原子的发光过程都是断续的，每列光波都是较短的波列.

尽管光波是电磁辐射，但读者一定要对光波与射频波(即普通的无线电波)的上述差别有清醒的认识，否者就很难理解为什么射频波的干涉、衍射很容易产生，而光波的干涉、衍射总需要特殊的装置. 也正是因为具有上述的差别，不能将射频

波段的电磁波的理论和方法照搬过来分析光波的行为，而要单独建立并发展一套波动光学的理论体系.

读者其实能够意识到，并不能将所有的原子视为电偶极子. 所以，关于原子的发光，还有更复杂的磁偶极子模型、电四极子模型等. 若采用量子理论讨论原子的发光，则认为原子经历一次跃迁，发出一个光子，这样可以得到更好的结果. 不过，按照牛顿的观点，物理学的理论是“自然哲学的数学原理”，物理学的每个分支是以各自的物理模型为出发点而建立起来的理论体系. 光子属于量子光学的范畴，在波动光学的理论体系中，采用原子振荡发光的模型，可将光限于电磁波，从而避免引入光子所导致的物理模型的不一致性.

1.1.4 光波的周期性

“波是振动的传播”，这是对机械波准确而形象的定义.

在弹性介质中，一个物体如果做往复的机械运动，则将带动其周围的物体一起做同频率的往复运动. 这样一来，波源的**振动**(vibration)就在介质中传播，从而形成了**机械波**(mechanical wave). 波源也被称为振动中心. 机械波是振动的质点所形成的一个场. 场中的每一点都作振动，即每个质点的位移都随着时间周期性变化；而在每一时刻，整个波场中质点的位移在空间呈现周期性分布.

对于电磁波，既无机械振动，也无需介质. 电磁波是相关联的电场和磁场在空间的传播，是交变的电磁场. 在波场中，随着时间周期性变化的是每一点的电场强度和磁感应强度；每一时刻，在空间呈周期性分布的也是电场强度和磁感应强度. 所以，在涉及电磁波的情形，所谓振动指的是电场强度、磁感应强度随时间的周期性变化，这种变化也可以用“扰动”一词来形容.

作为物理学的一个名词，波在不同的场合中所描述的对象是不同的. 除了机械波和电磁波之外，还有“引力波”，即引力随时间的变化和在空间的分布具有波的特征；还有在量子力学中的粒子的“波动性”. 如果说机械波、电磁波和引力波分别用来描述位移、场强、力这些矢量随时间的周期性变化和在空间的周期性分布，那么这些类型的波还能称得上是实际形态的波. 至于量子力学中“波动性”所指的波，则不具有任何实际的形态，因为这种波没有横波或纵波的特点，它们既不是机械波，也不是电磁波. 这种所谓的波指的是实物粒子在空间出现的概率具有波的特点，因而被称为“概率波”.

所以，从更一般的意义上来说，物理学中的波指的是某些物理量(有时也被称为“力学量”)具有波的特征；或者说，波就是一些物理量(既可以是矢量，也可以是标量)在空间的周期性分布和随时间的周期性变化. 这就是波的共性. 既然波具有共性，那么它们的数学表达式也就具有相似的特点，尽管波的类型是不同的.

1. 波的时间周期性

在波场中的每一点，都有扰动. 对于机械波，这种扰动就是机械振动，即质点的位置($\boldsymbol{r}$)或位移($\Delta\boldsymbol{r}$)作周期性的变化；对于电磁波，这种扰动就是该点的电场强度($\boldsymbol{E}$，通常称为电场分量)、磁感应强度($\boldsymbol{B}$，通常称为磁场分量)作周期性的变化. 这种变化是随时间的变化，可以用**周期**(period)T 或者**频率**(frequency)$\nu\left(\nu=\dfrac{1}{T}\right)$来表示. 用坐标图表示，横轴是时间，纵轴是相应物理量的量值. 这就是波场的时间周期性. 这种时间周期性就是(波场中每一点)振动的周期性. 波场中的某一点 z_0 如果作简谐振动，则其时间的周期性可以用图 1.1.4 表示.

2. 波的空间周期性

对于整个空间或整个波场，物理量是作周期性分布的，即每间隔一定空间距离的点，其位移(对于机械波)、电场强度、磁感应强度(对于电磁波)等物理量都有相同的量值或相同的变化趋势. 这种周期性是空间周期性. 反映这种周期性的物理量是**波长**(wavelength)λ，或者波长的倒数，$\tilde{\nu}=\dfrac{1}{\lambda}$. $\tilde{\nu}$ 称为**波数**(wave number)，就是空间周期性的频率. 如果用坐标图表示，则横轴就是空间的位置或相对距离，纵轴就是相应的物理量的量值. 正弦波(波场中各点都是同频率、同振幅的简谐振动)的空间周期性可以用图 1.1.5 表示.



图 1.1.4　波的时间周期性

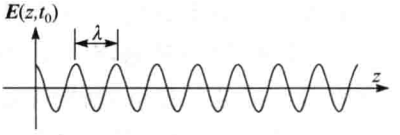


图 1.1.5　波的空间周期性

所以，光或者光波场，或者一般的波或波场，同时具有时间和空间两重周期性. 而实际上，由于受表达方式的限制，图 1.1.4 和图 1.1.5 都是对波场特征的不完整描述，只是分别反映了波场中某一点(图 1.1.4)以及某一时刻(图 1.1.5)物理量的特征.

3. 波的数学表达式

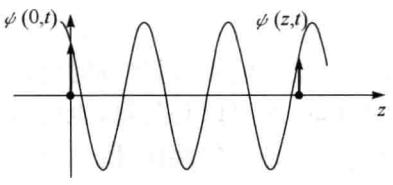


图 1.1.6　t 时刻的一维波

由于波具有时间和空间两重周期性，所以波的数学表达式必须能够同时反映这两重周期性. 或者说，波的数学表达式必须是时间和空间的周期性函数. 以下就以简单的一维波为例(图 1.1.6)，根据振动导出波的数学表达式.

在坐标原点处，物理量随时间的变化可以用余弦函数表示为

$$\psi(0,t)=\psi_0\cos(\varphi_0-2\pi\nu t) \tag{1.1.1}$$

式中，ν 为振动的频率；ψ_0 为振幅；φ_0 为原点处 0 时刻振动的相位，即所谓初相位(initial phase).

原点振动所形成的波沿 $+z$ 方向传播，若振动传播的速度为 v，则根据图 1.1.7，从原点传到 z 点所需的时间为 $\Delta t=\dfrac{z}{v}$，即 t 时刻 z 处的振动，是比 t 早 Δt 时刻 $z=0$ 处的振动，也就是说，z 处的振动比原点滞后的时间为 Δt，则 z 点处振动表达式为

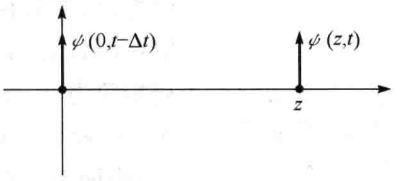


图 1.1.7　t 时刻波场中的物理量

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos[\varphi_0-2\pi\nu(t-\Delta t)]$$

由于波长 λ 是经历一个振动周期 T 振动传过的距离，所以 $\lambda=vT=\dfrac{v}{\nu}$. 对上式作恒等变换，可得

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos\left(\varphi_0+2\pi\nu\frac{z}{v}-2\pi\nu t\right)=\psi_0\cos\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{\lambda}z-2\pi\nu t\right)$$

记

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.1.2}$$

$$\omega=2\pi\nu \tag{1.1.3}$$

则有

$$\psi(z,t)=\psi_0\cos(kz-\omega t+\varphi_0) \tag{1.1.4}$$

由于波数 $\tilde{\nu}=\dfrac{1}{\lambda}$ 所表示的是波的空间频率，即波在单位空间长度内的周期数，所以 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 表示的就是空间中 2π 个单位长度内波的周期数，因而 k 也表示空间频率，被称为**圆波数**(circular wave number)或**角波数**(angular wave number)；频率 ν 表示单位时间内波振动的次数，则 $\omega=2\pi\nu$ 表示 2π 个单位时间内波振动的次数，所以 ω 也是时间频率，被称为**圆频率**(circular frequency)或**角频率**(angular frequency).

式(1.1.4)表示了波场中任一点在任一时刻物理量的量值，因而就是波的表达式.

对于形如式(1.1.1)和式(1.1.4)的表达式，读者也许会感到疑惑. 习惯上，总是将原点处振动的表达式写为 $\psi(0,t)=\psi_0\cos(\omega t+\varphi_0)$，相应的波的表达式为 $\psi(z,t)=\psi_0\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$. 本书为何要采用不同的数学形式？

对于这一问题，作者作以下的回答.

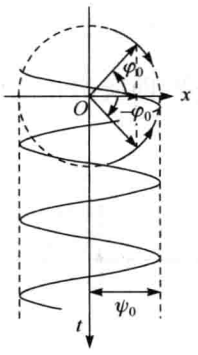


图 1.1.8　用投影表示振动

第一，本书采用这样的形式，是为了使波的余弦式表达式和复振幅表达式的相位一致.

第二，如图 1.1.8 所示，振幅为 ψ_0 的振动可以用长度为 ψ_0、以匀角速度 ω 绕圆心旋转的矢径在 x 轴上的投影表示. 可以看出，若其初始位置的角度（这就是所谓的初相角）为 φ_0，并以顺时针方向转动，则投影表示为 $\psi(0,t)=\psi_0\cos(\varphi_0-\omega t)$；若其初相角为 $-\varphi_0$，并以逆时针方向转动，则投影表示为 $\psi(0,t)=\psi_0\cos(\omega t-\varphi_0)$. 这其实也是由于余弦函数是偶函数的结果. 可见，两种形式都是同一个振动的等价的表达式，只不过初相位互为相反数而已.

由于复数的指数式

$$\tilde{\psi}(z,t)=\psi_0 e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)} \tag{1.1.5}$$

的实部就是 $\psi(z,t)=\psi_0\cos(kz-\omega t+\varphi_0)$，而复指数表达式同样能体现波的时间周期性和空间周期性，所以也可以用以表达波动.

例 1.1

真空中可见光波长 λ 的范围为 380～760nm，计算可见光的频率范围及波数范围.

解　真空中的光速为 $c=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}$，根据 $\nu=\dfrac{c}{\lambda}$，可得

长波限（红光）频率　$\nu_R=\dfrac{3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}}{760\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\approx3.95\times10^{14}$　Hz

波数　$\tilde{\nu}_R=\dfrac{1}{\lambda_R}=\dfrac{1}{760\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\approx1.32\times10^6\,\mathrm{m^{-1}}=1.32\times10^4$　$\mathrm{cm^{-1}}$

短波限（紫光）频率　$\nu_V=\dfrac{3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}}{380\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\approx7.89\times10^{14}$　Hz

波数　$\tilde{\nu}_V=\dfrac{1}{\lambda_V}=\dfrac{1}{380\times10^{-9}\,\mathrm{m}}\approx2.63\times10^6\,\mathrm{m^{-1}}=2.63\times10^4$　$\mathrm{cm^{-1}}$

可见光的频率的量级为 $10^{14}\,\mathrm{Hz}$，这是一个非常高的频率.

习惯上，波数的单位常采用 $\mathrm{cm^{-1}}$，$1\mathrm{cm^{-1}}$ 称为 1 个波数.

1.1.5　简谐光波

一般的光波往往是非常复杂的，这种复杂性可以从两方面来分析：

第一，波源的复杂性. 正如之前所指出的，任何实际的光源，其中发光原子的数

量是非常巨大的，每一瞬间，所发出的波列数也是非常巨大的，而且由于光源发光的过程是随机的，所以这些波列之间也没有关联，因而使得整个光波场中，物理量的分布和变化情况非常复杂.

第二，空间的复杂性. 波场中的介质分布往往非常复杂，因而波与介质的相互作用也非常复杂，而且，即使是同一种介质，与不同波长、不同振幅的波也有不同的作用，因而也使得波场的特征变得非常复杂.

但是，从实际研究和应用的角度看，人们总是尽量避免上述复杂的情形，而是设法在特定的条件下对光波进行研究和利用. 因此，我们应当找出最具有典型特征同时又是最简单的波进行研究.

光学中的多数情形都是光波在真空中或在电介质(非金属介质)中传播或相互作用，研究的问题大多是无源场的问题，即光波场中既没有净电荷，也没有电流. 而且总是在某一接收屏上观察光的现象，这样一来，就是在有限的时间和空间中对光进行研究. 尽管每一列光波在传播过程中振幅等物理量可能会出现变化，但由于光速很高，在其通过接收屏的过程中，由于时间极短，每列光波是比较稳定的.

因此，可以用定态的模型代替实际上复杂的光波，这就是**简谐光波**(simple harmonic optical wave). 有些教材中，也将这样的光波称为**定态光波**(stationary wave).

具有下述性质的波场称为简谐波场(或定态波场)：

(1) 波场中，各点的扰动是同频率的简谐振动，即波场中各点具有相同的振动频率.

(2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化，从而在空间形成一个稳定的振幅分布. 即波场中各点的振幅，会随着空间位置而不同，但不会随时间而变化.

如果光波的电矢量(即电场强度矢量)的表达式为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，对于简谐光波，振幅不随时间变化，则振幅可以写为 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ 或者 $\boldsymbol{E}_0(P)$，其中，$\boldsymbol{r}$ 为空间点 P 的**位矢**(position vector). 又由于波场中各点的振动频率相同，而且每一点都作简谐振动，于是光波场中每点的振动都可写为 $\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0]$ 的形式，其中，$\varphi(P)$ 是相位中只与空间位置有关的部分，表示相位在空间的分布. 则一列简谐光波的表达式可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0] \tag{1.1.6}$$

或者简单地写为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}[\varphi(P),t] \tag{1.1.7}$$

实际上，从光源发出的一列孤立光波，由于在空间中传播和弥散，其能量密度一定会持续衰减直至消失. 所以，如果要维持一列光波在空间某一点的振幅不变，则该列光波必须持续地从光源发出，从另一角度看，这列光波应当充满整个空间，即波列的长度是无限长的. 所以，严格说来，简谐光波是无限长的单色波列，而实际

上这样的光波是不存在的.

但是,结合实际的情形,若一列有限长的光波在通过接收屏的过程中没有显著的变化,对于研究者,就可以将其视为定态的. 所以,当光波的的持续时间比其扰动周期长得多时,可将其当成简谐光波来处理. 这样一来,原子发出的每一列光波,都等效于简谐光波.

另外,稳定的光源持续发光,尽管发出大量随机的波列,但从平均效果看,波场中的物理量总是稳定的,所以实际光源的每一单色成分可以作为简谐光波处理.

任何复杂的非单色波(nonmonochromatic wave,或者 nonmonochromatic light)都可以分解为一系列单色波(monochromatic wave,或者 monochromatic light)的叠加.

需要指出的是,正弦波是一种最简单的简谐光波,但简谐光波不仅限于正弦波,波场空间各点的振幅可以随空间位置而不同.

1.1.6 光矢量

光是电磁波,因而是一种**矢量波**(vector wave),电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$、波的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 都是矢量,如图 1.1.9 所示.

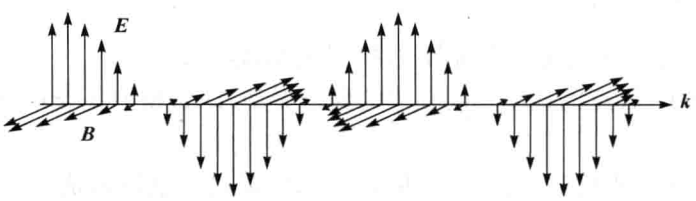


图 1.1.9 光波场的电场分量和磁场分量及传播方向

表示光波传播方向的矢量是**波矢**(wave vector),波矢的定义如下:

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s} \tag{1.1.8}$$

其中,λ 为光的波长;$\boldsymbol{s}$ 为光的传播方向上的单位矢量. 波矢的数值为 $\frac{2\pi}{\lambda}$,即式(1.1.2)所定义的角波数.

光波是横波,在真空和各向同性介质中,电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$、波矢 $\boldsymbol{k}$ 是两两正交的. 三者之间的关系为

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \tag{1.1.9}$$

而且在取定坐标轴的情形下,电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 是同相位(相位相等或相差 2π 的整数倍)或反相位(相位相差 π 的奇数倍)的.

光波的电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$(简称**电场分量**)、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$(简称**磁场分量**)都被称为**光矢量**,在更多的情形下,光矢量特指电场分量 $\boldsymbol{E}$.

1.1.7 光强

光波具有能量,而且传输能量,首先介绍与光波能量相关的物理量.

1. 光波的能量密度

光波场中单位体积中的能量称为光的能量密度.

按照电磁理论,在各向同性介质中,能量密度的表达式为

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.10}$$

其中,$\boldsymbol{D}$ 为介质中的电位移矢量,$\boldsymbol{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}$,$\varepsilon_r$ 为介质的相对介电常量;$\boldsymbol{H}$ 为介质中的磁场强度,$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_r\mu_0}$,$\mu_r$ 为介质的相对磁导率. 式(1.1.10)也可用标量表示为

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_r\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_r\mu_0}\right)$$

再利用式(1.1.9)可得 $\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0}E=\dfrac{B}{\sqrt{\mu_r\mu_0}}$,于是有

$$w=\varepsilon_r\varepsilon_0E^2 \tag{1.1.11}$$

2. 光波的辐射通量

光波单位时间内传输过某一截面的能量称为光波的**辐射通量**.

如图 1.1.10 所示,在光波场中垂直于波矢方向取一面积为 A 的截面,单位时间内通过该截面的能量就是辐射通量. 显然,截面越大,辐射通量越大.

辐射通量也被称为**能流**(energy flux),由于其含义是光波传输的功率,所以也被称为**光功率**.

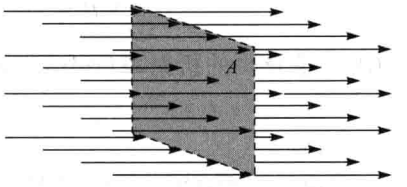


图 1.1.10 光波的辐射通量

由于单位时间内光传输的距离为 $c\cdot1$,而体积为 $c\cdot1\cdot A$ 的均匀光束所储存的能量为 $c\cdot1\cdot A\cdot w$,所以光的辐射通量为

$$P=wcA \tag{1.1.12}$$

3. 光波的强度

光波单位时间内传输过单位截面的能量称为**光强**(intensity of light).

光强也被称为**能流密度**(energy flux density),或**功率密度**.

由上述定义可以看出,能流密度实际上是一个矢量,其方向表示电磁场能量传输的方向. 由电磁学理论,能流密度若以 $\boldsymbol{S}$ 表示,则

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1.1.13}$$

$\boldsymbol{S}$称为**坡印亭矢量**(Poynting vector),其量值也可以用光波的能量密度w和速度v表示为

$$S=w\cdot v=\frac{v}{2}(\varepsilon_r\varepsilon_0E^2+\mu_r\mu_0H^2) \tag{1.1.14}$$

由于光具有极高的时间频率(10^{14} Hz),所以实验中所测量到的总是能流密度在一段时间内的平均值.因此,光强就是光波场平均能流密度的绝对值,就是平均坡印亭矢量的模,可表示为

$$I=\langle|\boldsymbol{S}|\rangle=\langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle \tag{1.1.15}$$

例如,对于各向同性无源介质中的简谐平面波,利用$\boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{H}$,得到

$$I=\langle|\boldsymbol{S}|\rangle=\langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle=\left\langle\left|\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_r\mu_0}\right|\right\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{k}{\omega\mu_r\mu_0}E^2\,\mathrm{d}t$$

而$\frac{k}{\omega}=\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}$,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0)}$,所以有

$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{k}{\omega\mu_r\mu_0}E^2\,\mathrm{d}t&=\int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E^2\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\int_0^TE_0^2\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0)\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\frac{T}{2}E_0^2\end{aligned}$$

即

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2=\frac{1}{2\mu_r\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}E_0^2=\frac{n}{2c\mu_r\mu_0}E_0^2 \tag{1.1.16}$$

其中,n是介质的**折射率**(refractive index).上面的推导过程中,利用了$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$,$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$.

在可见光范围中,一般情况下介质的磁导率$\mu_r\approx1$,故

$$I\approx\frac{n}{2c\mu_0}E_0^2 \tag{1.1.17}$$

如果不考虑光强的量纲,而只关心其相对数值,则可略去式(1.1.17)中的常量c和μ_0,得到

$$I\propto nE_0^2 \tag{1.1.18}$$

如果光只是在同一种介质中传播,通常取

$$I=E_0^2 \tag{1.1.19}$$

即可以用电场分量振幅的平方表示光强.这里需要指出的是,E_0^2的量纲与光强是

不相同的，在光学中以振幅的平方 E_0^2 代表光强，只是反映了光强与振幅之间的关系，可以在相同的条件下比较光的相对强度，所以 E_0^2 仅表示光强的相对值.

在可见光波段，一方面，多数透明介质的磁导率 $\mu_r \approx 1$，即对于光波的磁场分量，在介质中与在真空中并无区别；另一方面，无论是人的感官，还是记录影像的照相底片或电子元件，都只对光波的电场分量有所响应，测量光强的器件，都是光电器件，即通过其中电子与光波的电场分量的相互作用而推知光强. 所以，光学中往往只需要研究光波的电场分量即可. 光的电场强度也被称为光矢量.

1.1.8 光的传播

光的传播，就是将光波场中的物理量以及这些物理量的振动从空间的一点传播到另一点. 对于正弦波 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t+\varphi_0)}$ 而言，就是将其电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$（电场分量）从空间的某一点传播到另一点. 例如，每经过时间 T，光波的每一峰值都会传过一个波长的距离. 而物理量的值取决于波场的相位 $\varphi(z,t)=kz-\omega t+\varphi_0$，即波场的量值由相位决定，所以也可以说振动的传播其实就是相位的传播，在振动传播的过程中，相位保持不变.

例如，在 t 时刻，空间点 z 处的物理量 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 经过时间 Δt 后，传播到了空间另一点 $z'=z+\Delta z$，如图 1.1.11 所示，则振动传播的表达式可以写为 $\boldsymbol{E}(z',t')=$

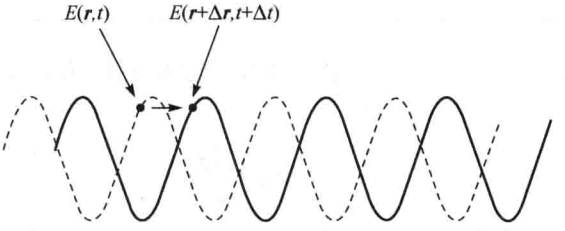


图 1.1.11 振动与相位的传播

$\boldsymbol{E}(z,t)$ 或 $\varphi(\boldsymbol{r}',t')=\varphi(\boldsymbol{r},t)$，即

$$k(z+\Delta z)-\omega(t+\Delta t)+\varphi_0=kz-\omega t+\varphi_0$$

对上式整理后得到 $k\Delta z-\omega\Delta t=0$，即 $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=\dfrac{\omega}{k}$. 而 $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 就是物理量 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 在空间传播的速度，或者振动传播的速度，即所谓的波速. 所以

$$v_p=\frac{\omega}{k} \tag{1.1.20}$$

表示单色波沿 $+z$ 方向传播的速度. 由于式(1.1.20)反映了相位传播的速度，所以也称为**相速度**(phase velocity).

值得注意的是，如果波的表达式为 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{E}_0 e^{i(kz+\omega t+\varphi_0)}$，则得到

$$v_p=\frac{dz}{dt}=-\frac{\omega}{k} \tag{1.1.21}$$

表示沿$-z$方向传播的正弦波.

1.1.9 光程差与相位差

1. 光程与光程差

波矢的表达式为$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi n}{\lambda_0}$,其中,$\lambda_0$为真空中的波长,$n$为介质的折射率.光从真空进入各向同性的介质中,频率不变,而波长改变,光波经过一个振动周期所传过的距离也不同,即光的相速度不同.表1.1.1给出了Na黄光在一些介质中的折射率.

表1.1.1 Na黄光(589.3nm)在介质中的折射率

介质	n
空气	1.00028
水	1.333
各种玻璃	1.5～2.0
金刚石	2.417

以沿着z方向传播的一维平面波为例,若设初相位为φ_0,则0时刻z处的相位为

$$\varphi(z)=kz=\frac{2\pi}{\lambda_0}nz \tag{1.1.22}$$

其中,nz称为均匀介质中光波的**光程**(optical path length,OPL),即光走过的路程与路径中介质折射率的乘积.由式(1.1.22),相距Δz的两点间的相位差为$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_0}n\Delta z$.$n\Delta z$就是两点之间的**光程差**.一般地,记$k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}$,即光在真空中的波矢,$\Delta L=n\Delta z$,即两点间的光程差,则两点之间相位差与光程差的关系为

$$\Delta\varphi=k_0\Delta L \tag{1.1.23}$$

2. 相位的超前与滞后

在光学中,时常要用到诸如“相位超前”(phase advance)或“相位滞后”(phase lag)等说法,这种超前或滞后的含义是什么?

超前或滞后都是相比较而言的,对此可通过举例来加以解释.

如图1.1.12所示,沿着z方向传播的光波,z轴上有P、O两点,P点在O点的右侧.

P 点的振动是由原点 O 传播过来的，即 P 点的振动比 O 点滞后.

如原点的振动用 $U(O,t)=A\cos(\varphi_0-\omega t)$ 表示，而 P 点比 O 点延迟了时间 $\Delta t(\Delta t=\overline{OP}/v=z/v)$. 则 t 时刻 P 点的振动为 $U(P,t)=A\cos(kz-\omega t+\varphi_0)$. 与 O 点的相位相比，增大了 kz. 空间相位 φ 与光程成正比，光程大，则要落后，所以相位值大表示滞后.

但是，在有些著作中，由于习惯的原因，简谐波的表达式往往写成如下形式：

$$U(P,t)=A(P)\cos(\omega t-kz+\varphi_0)$$

在这种表达式中，情况则正好相反，相位的数值大表示超前.

若两列光波，在原点 O 具有相同的相位，假设从 O 点开始沿着相同的方向传播，设第一列波的速度较慢. 经过时间 t 后，由于波的速度不同，两列波分别到达了 P_1 和 P_2 点，如图 1.1.13 所示. 即波列 1 比波列 2 滞后；或者，在相同的位置 P，波列 2 的相位为 $\varphi_2=k_2z-\omega t=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}z-\omega t$，而波列 1 的相位为 $\varphi_1=k_1z-\omega t=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}z-\omega t$. 显然，由于 $\lambda_1<\lambda_2$，所以 $\varphi_1>\varphi_2$. 相位小表示超前，与第一种情况在表达方式上是相同的. 或者，如图 1.1.14 所示，从 S 发出的一列光波，通过挡板上的两个缝 S_1、S_2 后分成两列，到达 P 点，若两列波所经过路径的光程 $L_2>L_1$，则在 P 点，经过 S_2 的光波比经过 S_1 的光波相位滞后，两者的相位差 $\Delta\varphi(P)=k(L_2-L_1)$.

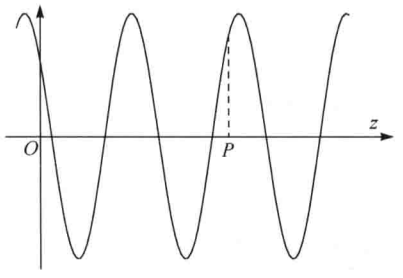


图 1.1.12　P 点的振动比 O 点滞后

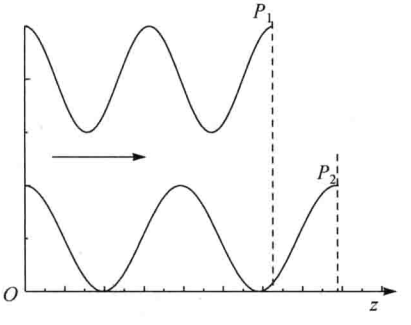


图 1.1.13　波列 1 比波列 2 滞后

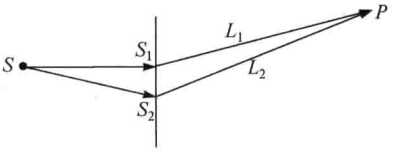


图 1.1.14　波列 2 比波列 1 滞后

例 1.2

一厚度为 d、折射率为 n 的平板玻璃片，使其法线与平行光线成 i_1 角插入光线中，试比较插入前后，光线的相位改变多少.

解 在这种情况下，只需要比较一下空间的同一波面在插入前后的相位差即可.

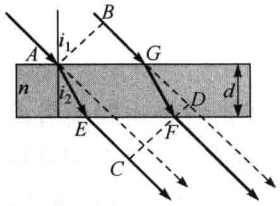


图 1.1.15　例 1.2 图

如图 1.1.15 所示，插入前，波面 CD 与 AB 间的光程差为 BD.

插入后，光线在玻璃中的折射角为 i_2，$n\sin i_2=\sin i$. 由于 $\overline{GF}=d/\cos i_2$，上述两波面间光程差为 $\overline{BG}+n\overline{GF}$，而

$$\overline{GD}=\overline{GF}\cos(i_1-i_2)=d\cos(i_1-i_2)/\cos i_2$$

插入前后的光程差改变为

$$\Delta L=n\overline{GF}-\overline{GD}=nd/\cos i_2-d\cos(i_1-i_2)/\cos i_2=d/\cos i_2[n-\cos(i_1-i_2)]$$

$$=d\frac{n-\cos i_1\cos i_2-\sin i_1\sin i_2}{\cos i_2}=d\left(\frac{n}{\cos i_2}-\cos i_1-\frac{\sin i_1\sin i_1}{n\cos i_2}\right)$$

$$=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2-\sin^2 i_1}{n\cos i_2}\right)=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2\cos^2 i_2}{n\cos i_2}\right)=d(-\cos i_1+n\cos i_2)$$

$$=d(n\sqrt{1-\sin^2 i_2}-\cos i_1)=d(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos i_1)$$

插入后 CD 波面相位的改变为 $\Delta\varphi=k\Delta L=\dfrac{2\pi d}{\lambda}(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos i_1)$，比插入前滞后.

1.2　简谐光波的数学表示

1.2.1　矢量表示与标量表示

光是矢量波，电场分量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁场分量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$、波的传播方向(波矢)$\boldsymbol{k}$ 都是矢量，应该用矢量描述光波的物理特征.

但是，用矢量描述光波，给数学上的表示和推导都带来了许多不便. 而事实上，由于光源的发光机制，在多数情况下，尤其是在真空和各向同性介质中，光波电矢量在横向，即垂直于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向上是均匀和对称的，如图 1.2.1 所示，因而在上述于波矢垂直的平面中任意选定一个方向之后，电矢量在这一方向的特征与其他方向并没有区别，所以只需要用标量对波的特征进行描述即可.

因此，在光学中，用标量方法处理矢量波，是一种常用的手段. 当采用标量表达式处理光波时，有时也将研究对象称为**“标量波”**(scalar wave).

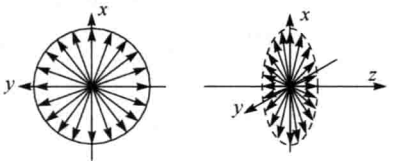


图 1.2.1 光波振动矢量的对称性

1.2.2 简谐光波的描述

对符合上述条件的简谐光波，通常用标量表达式描述. 光波的标量式可以用余弦函数表示为

$$E(P,t)=E_0(P)\cos[\varphi(P)-\omega t] \tag{1.2.1}$$

式中，P 表示空间中的任一点，则 $E_0(P)$ 是振幅的空间分布，$\varphi(P)$ 是相位的空间分布，均与时间 t 无关.

在光学中，所讨论的对象通常是光的电场分量，即光矢量，记为 E(电场强度)、E_0(电场强度的振幅)等，但由于习惯的原因，在许多文献中，往往也采用 U、ψ 等符号表示电场分量，A、U_0、ψ_0 等符号表示振幅.

1.2.3 简谐光波按波面分类

光波场是三维分布的空间场，对于简谐光波，时刻 t，空间点 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 处的电场强度矢量可以表示为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0]$. 可以看出，在某一时刻 t，光波场的特征由空间相位 $\varphi(P)$ 决定.

空间中相位 $\varphi(P)$ 相同的点所组成的面，被称为**波面**(wave surface). 波面就是光波的等相位面(cophasal surface，或 surface of constant phase)，也被称为**波阵面**.

可根据波面的形状将简谐光波作简单的分类.

具有相同相位的空间点应满足下述方程(在相同时刻)：

$$\varphi(P)=\text{const} \tag{1.2.2}$$

1. 球面波

球面波(spherical wave)的波面是球面.

点光源发出的光波，在真空中或者各向同性的均匀介质中传播，在所有的方向上，传播特性相同，波场中的物理量只与场点到光源的距离有关，而与方向无关. 由于每一列光波的通量不变，所以光强与面积成反比. 距离光源越远的球面上，光强越弱. 因而球面波的振幅和相位具有以下特点.

(1) 振幅与距离成反比，即

$$A(P)=\frac{a}{r} \tag{1.2.3}$$

场点 P 处的振幅与该点到波源的距离成反比，即振幅随着 r 衰减. 请注意，

式(1.2.3)中的 a 不是振幅，a/r 才是振幅.

(2) 空间相位是球对称分布的，即

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0 \tag{1.2.4}$$

均匀介质中，从一个点光源发出的是球面波(图 1.2.2)，从各个方向向同一点会聚的光波也是球面波(图 1.2.3)，平行光束经过透镜后也成为球面波，其焦点是会聚或发散的中心(图 1.2.4).

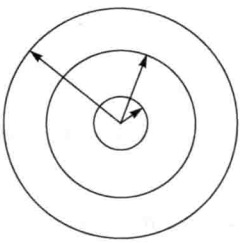


图 1.2.2　发散球面波

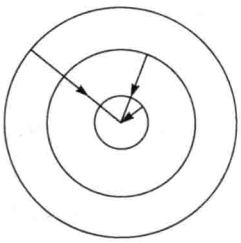
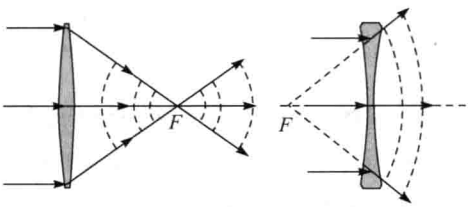


图 1.2.3　会聚球面波



(a) 凸透镜　　(b) 凹透镜

图 1.2.4　平行光束经透镜变为球面波

例如，如果波源为 $O(0,0,0)$，波面的相位为 $\varphi(P)=kr-\omega t+\varphi_0$，沿着球面的任一法线方向，波面传播中，有 $kr-\omega t+\varphi_0=k(r+\mathrm{d}r)-\omega(t+\mathrm{d}t)+\varphi_0$. 波面传播速度为 $v_p=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}$，这是从原点发出的发散球面波.

如波面表达式为 $\varphi(P)=kr+\omega t+\varphi_0$，则波面传播速度为 $v_p=-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\omega}{k}$，这是向中心传播的球面波，即向原点会聚的球面波.

对于球面波，其在某点的振幅和相位只与该点到源点的距离 r 有关，而与场点相对于源点的方位无关，所以在球面波的表达式化简和变换的过程中，应该注意这一点.

2. 平面波

顾名思义，平面波(plane wave)的等相位面是平面.

严格来说，球面波传播到无穷远处，其波面成为平面，因而平面波应当是充满整个空间的，其能量不再扩散，因而波场各处的光强相等. 从透镜焦点处发出的光

波，经透镜变换后，成为平行光束，平行光束近似于平面波，若光束不再进一步发散，则光强也保持不变.

平面波具有确定的传播方向，在直角坐标系中，波矢可以表示为 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{e}_x+k_y\boldsymbol{e}_y+k_z\boldsymbol{e}_z$. 波面是垂直于波矢的平面，同一波面上任一点的位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 在波矢上的投影都相等，如图 1.2.5 所示.

因此，平面波具有下列特征：

(1) 振幅 A 为常数，即波场各处的振幅相等；

(2) 空间相位 $\varphi(P)$ 为直角坐标的线性函数.

平面波空间相位 $\varphi(P)$ 的分布可以按以下方法得到.

如图 1.2.6 所示，作出平面波在原点 O 处的波面 Σ_0 和任一场点 P 处的波面 Σ，设平面波在原点的相位为 φ_0. 由于两波面之间的光程差为 $\Delta L=\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$，于是两波面间的相位差为 $\Delta\varphi=k\Delta L=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}$. 于是波面 Σ 的相位，即 P 处的相位为

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=k_xx+k_yy+k_zz+\varphi_0 \tag{1.2.5}$$

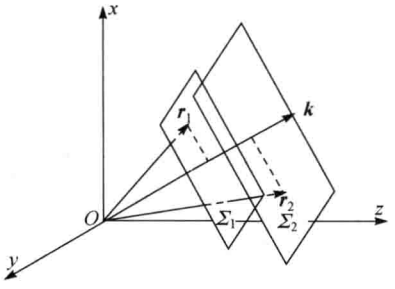


图 1.2.5 平面波

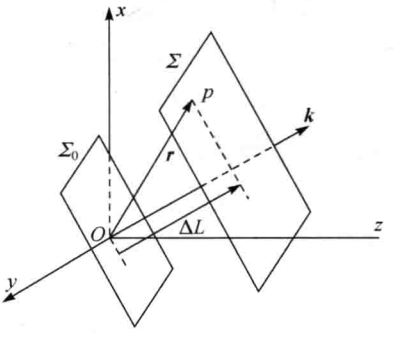


图 1.2.6 平面波的相位

平面波的余弦表达式为

$$E(\boldsymbol{r},t)=A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0) \tag{1.2.6}$$

平面波传播的方向以波矢表示，在直角坐标系中，波矢的方向既可以用该矢量与三个坐标轴间的夹角 (α,β,γ) 表示，也可以用该矢量与三个坐标平面间的夹角 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 表示，如图 1.2.7 所示. 由于 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\beta$，$\theta_3=\dfrac{\pi}{2}-\gamma$，波矢可以表示为

$$\boldsymbol{k}=k(\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\beta\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma\boldsymbol{e}_z) \tag{1.2.7}$$

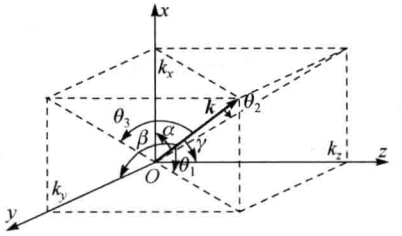


图 1.2.7 波矢的方向表示

或

$$\boldsymbol{k}=k(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\boldsymbol{e}_z) \tag{1.2.8}$$

空间点 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 处的相位为

$$\varphi(x,y,z)=k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)+\varphi_0$$

或

$$\varphi(x,y,z)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2+z\sin\theta_3)+\varphi_0$$

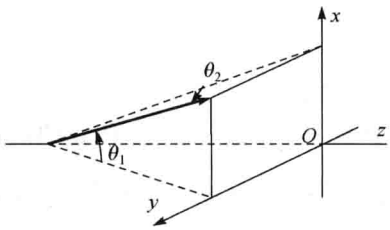


图 1.2.8　平面上的相位

由于光学中的探测器或接收屏往往是一个平面，所以通常总是研究波场中一个平面上的相位分布. 可以取该平面位于坐标系中 $z=0$ 处，如图 1.2.8 所示. 由于 $z=0$ 平面上 $\boldsymbol{r}(x,y)=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$，而波矢为 $\boldsymbol{k}=k(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\boldsymbol{e}_z)$，于是相位分布为

$$\varphi(x,y,0)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)+\varphi_0$$

式中，φ_0 为原点处的相位.

可以根据简单的原则取定坐标系，以使平面波在接收屏的振动表达式最简单. 例如，若取 $+z$ 方向与波矢的方向一致，即平面波沿着 $+z$ 方向传播，其波面垂直于 z 轴. 在 $z=0$ 的接收屏上，相位 $\varphi(x,y,0)=\varphi_0$ 为常数.

例 1.3

一列平面波的波矢平行于 xOz 平面，与 z 轴成 θ 角，如图 1.2.9 所示，求 $z=0$ 平面上光波的表达式.

解 $z=0$ 平面上某一场点的位矢为 $\boldsymbol{r}(x,y)=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$，入射波的波矢在 x 轴和 z 轴上的分量分别为 $k_x=k\sin\theta$ 和 $k_z=k\cos\theta$，则波矢为 $\boldsymbol{k}=k(\boldsymbol{e}_x\sin\theta+\boldsymbol{e}_z\cos\theta)$. 若原点处的相位为 φ_0，则 $z=0$ 平面上的相位为 $\varphi(x,y,0)=kx\sin\theta+\varphi_0$，波动为

$$\begin{aligned}E(x,y,0)&=E_0\cos(kx\sin\theta-\omega t+\varphi_0)\\&=E_0\cos[2\pi(x\sin\theta/\lambda-\nu t)+\varphi_0]\end{aligned}$$

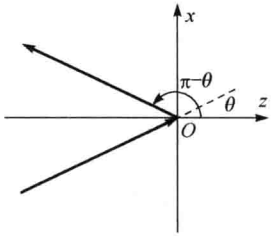


图 1.2.9　例 1.3 图

该列波若被平面反射，反射波的方向与 z 轴的夹角为 $\pi-\theta$，波矢为 $\boldsymbol{k}'=k(\boldsymbol{e}_x\sin\theta-\boldsymbol{e}_z\cos\theta)$，$z=0$ 平面上的相位为 $\varphi(x,y,0)=kx\sin\theta+\varphi_0'$. 由于反射会导致相位突变，所以反射波的初相位表示为 φ_0'.

3. 柱面波

波面为圆柱面的光波是柱面波(cylindrical wave)，图 1.2.10 表示轴线沿 y 方

向的柱面波. 很长的线光源发出的光波，或者通过一条很细的狭缝出射的光波，就具有这样的特征. 柱面波具有轴对称性，柱面波的表达式是整数阶的贝塞尔函数，在 r 很大的条件下，可用其渐近式表达.

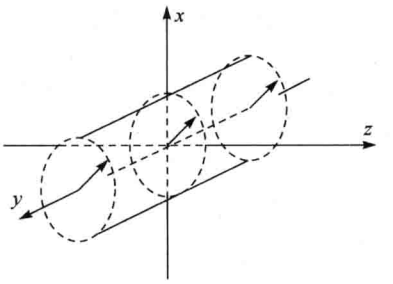


图 1.2.10 柱面波

(1) 振幅

$$A(P)=a/\sqrt{r} \tag{1.2.9}$$

(2) 相位

$$\varphi(P)=kr+\varphi_0 \tag{1.2.10}$$

振动表达式为

$$E(r,t)=\frac{a}{\sqrt{r}}\cos(kr-\omega t+\varphi_0) \tag{1.2.11}$$

由于与 y 轴垂直的任何一个平面都是等价的，所以只需要在 xz 平面中对其进行分析即可.

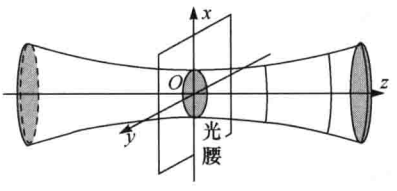


图 1.2.11 高斯光束

4. 高斯光束(Gaussian beam)

在实际中，并没有严格的平面波、球面波或柱面波，而是非常复杂的非均匀的光波场. 例如，在轴向为 z 的激光器的谐振腔中，稳定的光波可以用高斯型函数表示，即振幅和相位在横向(x,y)的分布都是高斯型函数，其波面如图 1.2.11 所示.

(1) 振幅

$$A(x,y,z)=\frac{A_0}{w(z)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right] \tag{1.2.12}$$

其中，$w(z)$为 z 处光斑的半径.

(2) 相位

$$\varphi(x,y,z)=k\left[z+\frac{x^2+y^2}{2r(z)}\right]+\varphi_0 \tag{1.2.13}$$

其中，$r(z)$为 z 处球面的曲率半径；$\varphi_0=\varphi(x,y,0)$为 $z=0$ 处的相位.

在 $z=0$ 处，波面为平面，此处称为“光腰”. 光腰处的振幅为

$$A(x,y,0)=\frac{A_0}{w(0)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{w^2(0)}\right]$$

在光腰之外，波面都是球面，但各处球面的曲率不等，越远处曲率越大.

1.2.4 光波的复振幅表示

波动的表达式，既可以用余弦或正弦函数表示，也可以用复指数表示. 用复数表示，则为

$$\widetilde{U}(P,t)=A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(P)-\omega t]}=A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(P)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

简谐光波的频率都是相等的，则在表达式中，与时间有关的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 可以略去不写，剩余的简谐部分

$$\widetilde{U}(P)=A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(P)} \tag{1.2.14}$$

与时间无关，称为光波的**复振幅**(complex amplitude).

复振幅包含了振幅 $A(P)$ 和相位 $\varphi(P)$ 的空间分布，包含了波场中物理量在空间的信息.

然而，由于从实验上测量，物理量都是实数，而复振幅是复数，所以很难把复振幅与光波场的量值对应起来. 但是，复振幅的模是振幅，而辐角则是相位的相对大小，可以通过比较不同位置辐角的大小了解各点振动的超前或滞后.

光波场在 P 点的强度可以直接从复振幅求得

$$I(P)=A^2(P)=\widetilde{U}^*(P)\widetilde{U}(P) \tag{1.2.15}$$

例 1.4

一平面波函数的复振幅为

$$\widetilde{E}(P)=A\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{k}{\sqrt{14}}x+\frac{2k}{\sqrt{14}}y+\frac{3k}{\sqrt{14}}z\right)\right]$$

试求波的方向.

解 由平面波的相位特性

$$\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=-\left(\frac{k}{\sqrt{14}}x+\frac{2k}{\sqrt{14}}y+\frac{3k}{\sqrt{14}}z\right)$$

波矢为

$$\boldsymbol{k}=k\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x+\frac{-2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y+\frac{-3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

方向为

$$\frac{\boldsymbol{k}}{k}=-\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

1.2.5 有关光波的几个概念

除了波面之外，光学中常用下述物理概念描述光波场.

1. 波前

光波场中的任一平面或曲面称为波前.

实际上,波前有时也被称为**波阵面**. 波前或波阵面一词来自 wave front,这一名称最初的含义是指一列波最靠前的波面,在空气动力学中,仍然使用这一概念,但光学中,这一名词的含义已发生了变化.

由于光学装置的接收面往往是平面,如照相机的底片、探测器的窗口等,所以在光学中,波前更多情况下指的是光波场中的一个平面.

2. 波前光场

光场中某一个波前(往往是接收平面)上的波动表达式或复振幅表达式称为波前光场(optical field at wave front),在有些教材中,也被称为波前函数(wave front function). 波前光场有时简称波函数,波前上的相位分布函数有时也称为波函数.

由于接收屏通常是平面型的,所以在选取坐标系时,习惯上取波前为 $z=0$ 的平面,这种情况下,波前光场的表达式比较简单.

3. 等幅面

振幅相等的空间点构成的面称为等幅面.

球面波的等幅面是球面,平面波各处振幅相等,并没有特定的等幅面.

4. 共轭波

在某一波前上,复振幅互为共轭的两列光波称为共轭波(conjugate wave).

由于光学往往只关注接收屏上的波场,所以共轭波特指波前函数互为共轭的光波,而不是整个空间中处处共轭的光波.

只有复函数才有相互共轭的函数,因而讨论共轭波要针对光的复振幅表达式.

互为共轭的简谐光波,其传播方向应该是相关联的. 下面通过具体的实例加以说明.

按照本书的表述方式,复振幅为 $\widetilde{U}=\dfrac{a}{r}\exp[\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}]$ 的球面波,是从点源(x_0,y_0,z_0)点发出的. 这列光波在 $z=0$ 的波前函数为

$$\widetilde{U}(x,y,0)=\frac{a}{r}\exp[\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}]$$

其共轭波为 $\widetilde{U}^*(x,y,0)=\dfrac{a}{r}\exp[-\mathrm{i}k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}]$,根据例 1.5,可判断这是向$(x_0,y_0,z_0)$点会聚的球面光波.

沿$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$方向的平面光波,在 $z=0$ 的波前函数为 $\varphi(x,y,0)=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)+\varphi_0$. 参见图 1.2.12. 其共轭波的相位为

$$\varphi'(x,y,0)=-k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)-\varphi_0=k[x\sin(-\theta_1)+y\sin(-\theta_2)]-\varphi_0$$

式中,θ_1、θ_2 是波矢与 yz 平面、xz 平面间的夹角.

更简单地，若取坐标系，使波矢平行于 xz 平面，则$(\theta_1,0,0)$方向平面波的共轭波沿$(-\theta_1,0,0)$，如图 1.2.13 所示.

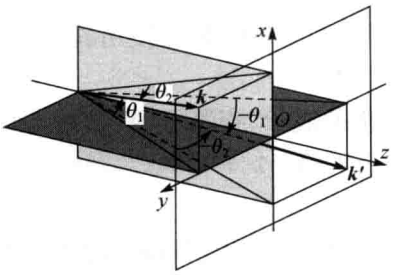


图 1.2.12　共轭的平面光波

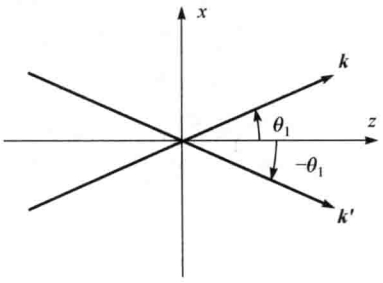


图 1.2.13　波矢在 xz 平面内的共轭光波

5. 波线

与波面垂直的直线称为波线(wave line).

平面波、球面波、柱面波的波线与其波矢方向一致，表示波的传播方向.

但在各向异性介质中，如双折射晶体中的 e 光，其波面为旋转椭球面，波线与波矢的方向不一致，也不代表光传播的方向.

波线就是几何光学中的光线.

1.3　傍轴条件与远场条件

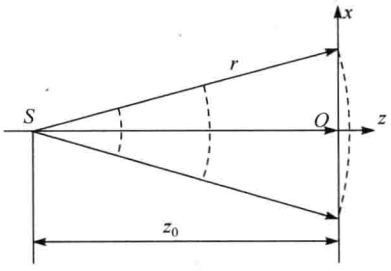


图 1.3.1　平面波前上的球面光波

光学中往往需要知道光波在一个平面波前上的相位、振动以及强度的分布，即平面上的波前函数. 如果是平面波，则表达式非常简单. 但在实际中，遇到的往往是球面波，如图 1.3.1 所示. 在一个平面上，球面波的相位并不相同，波前函数的表达式相当复杂，因而往往需要在一定条件下，对球面波作近似处理.

1.3.1　轴上物点的傍轴条件和远场条件

如图 1.3.2 所示，点光源 S 在 z 轴上，到接收屏 xOy 的距离为 z_0，在接收屏上，以原点为中心的圆周上各点到光源的距离相等，因而有相等的相位和振幅. 对任一点$P(x,y)$，记$\overline{OP}=\rho,\overline{SP}=r$，则有 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$r=\sqrt{z_0^2+\rho^2}$. 球面波在接收屏上 P 点的振幅为

$$A(P)=\frac{a_0}{\sqrt{z_0^2+\rho^2}}=\frac{a_0}{z_0\sqrt{1+(\rho/z_0)^2}}$$

$$=\frac{a_0}{z_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{z_0}\right)^2+\cdots\right]}$$

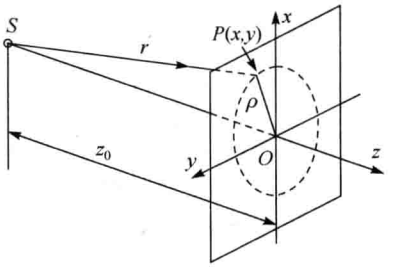


图 1.3.2 轴上物点的傍轴条件与远场条件

如果满足

$$\rho^2\ll z_0^2 \tag{1.3.1}$$

则上式中的$(\rho/z_0)^2$以及其他的高次项均可以忽略,有

$$A(P)\approx\frac{a_0}{z_0} \tag{1.3.2}$$

即在平面波前 xOy 上,各点的振幅均相等.

球面波在接收屏 xOy 上的相位为

$$\varphi(P)=k\sqrt{z_0^2+\rho^2}=\frac{2\pi}{\lambda}\left(z_0+\frac{\rho^2}{2z_0}-\frac{\rho^4}{4z_0^3}+\cdots\right)=\frac{2\pi}{\lambda}z_0+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z_0}\left(1-\frac{\rho^2}{2z_0^2}+\cdots\right)$$

由于$\rho^2\ll z_0^2$,上式成为

$$\varphi(P)\approx\frac{2\pi}{\lambda}z_0+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z_0} \tag{1.3.3}$$

$\rho^2\ll z_0^2$ 称为**傍轴条件**(paraxial condition,也称**近轴条件**),式(1.3.2)和式(1.3.3)的近似称为**傍轴近似**(paraxial approximation).

进一步,如果有

$$z_0\gg\frac{\rho^2}{\lambda} \tag{1.3.4}$$

则$\frac{\rho^2}{z_0\lambda}\ll 1$,即 $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z_0}\ll\pi$,式(1.3.3)变为

$$\varphi(P)\approx\frac{2\pi}{\lambda}z_0 \tag{1.3.5}$$

即在平面波前 xOy 上,各点的相位均相等.

$z_0\gg\rho^2/\lambda$ 称为**远场条件**(far field condition). 式(1.3.5)的近似称为**远场近似**(far field approximation).

由于光波长总是很小的,即 $\lambda\ll z_0$ 总可满足,所以由远场条件可得

$$\rho^2\ll\lambda z_0\ll z_0 z_0=z_0^2$$

这就是傍轴条件(1.3.3),即远场条件必然包含傍轴条件.

傍轴条件下,轴上物点发出的球面波可以简化为

$$\widetilde{U}(x,y,0)=\frac{a_0}{z_0}\exp\left[\mathrm{i}k\left(z_0+\frac{x^2+y^2}{2z_0}\right)+\mathrm{i}\varphi_0\right] \tag{1.3.6}$$

远场条件下，轴上物点发出的球面波可以进一步简化为

$$\widetilde{U}(x,y,0)=\frac{a_0}{z_0}\exp(\mathrm{i}kz_0+\mathrm{i}\varphi_0) \tag{1.3.7}$$

满足远场条件时，在接收屏上，球面波可以作为平面波处理.

需要指出的是，傍轴条件不可写为 $\rho\ll z_0$. 如果 ρ/z_0 是一阶小量，则 ρ^2/z_0^2 是二阶小量，可以忽略而不会引起较大的误差. 实际上，$\rho\ll z_0$ 是更严苛的条件. 通常 ρ^2/z_0^2 为 10^{-2} 即可忽略，而此时只要 ρ/z_0 为 10^{-1} 即可. 例如，设单色点光源发出的球面波的波长 λ 为 500nm，波前的横向宽度 ρ 为 1mm，实际情况下，只要按 10～100 倍的数量级估算即可，由式(1.3.1)，傍轴条件为 $\rho^2\ll z_0^2$，取 $z_1^2=100\rho^2$，可得 $z_1=10$mm即满足傍轴条件. 由式(1.3.4)，远场条件为 $z_0\gg\rho^2/\lambda$，取 $z_2=100\rho^2/\lambda$，可得 $z_2=200$m 才能满足远场条件.

1.3.2 轴外物点的傍轴条件和远场条件

设点光源在距接收屏为 z_0 的平面上，该平面称为物平面. 物平面上有一点光源，在 $Q(x_0,y_0,z_0)$，场点在平面 xOy 上以 ρ 为半径的圆周上，为 $P(x,y,0)$，如图 1.3.3 所示. 场点到物点(光源)的间距为 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}$，场点与物平面中心的间距为 $r_0=\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}$. 记光源 Q 到物平面中心 O 的距离为 $\rho_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，接收屏中心与光源的间距为 $r_0'=\sqrt{\rho_0^2+z_0^2}$.

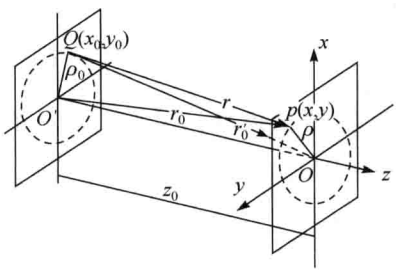


图 1.3.3 轴外物点的傍轴条件和远场条件

当物点和场点都满足傍轴条件时，即 $\rho_0^2=x_0^2+y_0^2\ll z_0^2$，$\rho^2=x^2+y^2\ll z_0^2$，有

$$r_0'\approx z_0+\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0},\quad r_0\approx z_0+\frac{x^2+y^2}{2z_0}$$

而

$$\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2-2(x_0x+y_0y)}\\&=z_0\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z_0^2}+\frac{x_0^2+y_0^2}{z_0^2}-\frac{2(x_0x+y_0y)}{z_0^2}}\end{aligned}$$

则

$$r\approx z_0+\frac{x^2+y^2}{2z_0}+\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0}-\frac{x_0x+y_0y}{z_0} \tag{1.3.8}$$

或者

$$r=r_0'+\frac{x^2+y^2}{2z_0}-\frac{x_0x+y_0y}{z_0} \tag{1.3.9}$$

或者

$$r=r_0+\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0}-\frac{x_0x+y_0y}{z_0} \tag{1.3.10}$$

则接收屏上的复振幅为

$$\widetilde{U}(x,y)=\frac{a_0}{z_0}\exp\left[\mathrm{i}k\left(r_0+\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0}\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x_0x+y_0y}{z_0}\right) \tag{1.3.11}$$

相对于接收屏，光源的远场条件为 $z_0\gg\rho_0^2/\lambda$，即$\frac{x_0^2}{\lambda}\ll z_0$，$\frac{y_0^2}{\lambda}\ll z_0$；相对于光源，场点的远场条件为 $z_0\gg\rho^2/\lambda$，即$\frac{x^2}{\lambda}\ll z_0$，$\frac{y^2}{\lambda}\ll z_0$.

如果场点满足傍轴条件，而光源 Q 满足远场条件，光源上各点到 P 点的光程相等，$r\approx r_0$，$r\approx z_0+\frac{x^2+y^2}{2z_0}$，则式(1.3.11)化为

$$\widetilde{U}(x,y,0)\approx\frac{a_0}{z_0}\exp\left(\mathrm{i}kz_0+\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z_0}\right)=\frac{a_0}{z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \tag{1.3.12}$$

傍轴条件和远场条件是为了将球面波的波前函数简化，这样得到的波前函数的近似表达式在分析干涉和衍射等问题时经常用到.

第 2 章　光线与几何光学

2.1　几何光学的物理基础

任何一个学科都是自洽的逻辑体系，而学科的基础，无非是指该逻辑体系的出发点. 对于物理学的每个分支，其物理基础，首先就是实验定律，因为物理学是实验科学，其次是根据物理实验所概括出的用以描述研究对象性质的物理概念.

例如，力学的实验基础是牛顿三定律、万有引力定律和能量守恒定律，力学中的概念包括力、质量、加速度、动量、能量、功等. 整个力学的理论体系就是建立在这些基础之上的.

本章首先介绍几何光学中关于光的实验定律和基本概念.

2.1.1　光线模型

光是电磁波，在处理光的干涉、衍射等问题中，波动理论得到了很好的应用. 因而容易联想，对于光的传播、反射、折射等问题，似乎也应当采用波动理论来处理. 或者说，所有光学问题，都无法回避光的衍射. 然而，如果缝、孔、反射面的空间尺度远大于光的波长，衍射几乎可以忽略，可以认为光波保持原有的方向传播，将不会在空间由于衍射而散开.

没有衍射，则在光的传播过程中，其方向不变，这时就可以用几何上的线描述光的传播特征. 这就是几何光学中光的物理模型，即**光线**(light ray)**模型**. 从光线模型出发，而根据实验构建的光学理论体系，就是**几何光学**(geometrical optics).

当然，任何实际的缝、孔、面等光学孔径的大小总是有限的，所以实际上衍射现象总是存在的. 正如将要在本书第 3 章所指出的，衍射零级就是通过衍射屏的入射光经透镜所成的像. 所以，也可以说，几何光学就是衍射的零级近似.

2.1.2　光线的实验定律

几何光学的所有定律都是建立在实验的基础之上的，几何光学中的物理概念也是从实验中总结和概括出来的. 尽管我们已经对这些定律和概念十分熟悉，但是从一个新的的角度对它们重新认识还是很有必要的.

事实上，不需要复杂和精密的实验仪器，仅依靠我们的经验，也能得到关于这些定律和概念的精髓.

1. 光的直线传播定律

在均匀介质中，光是沿着直线的方向传播的.

设想在介质均匀分布的空间中，如空气中，有 P、Q 两点，如果 P 点有一光源，则在 Q 点的观察者可以看到其发出的光. 由于从 P 到 Q 有无数条路径，那么 P 点的光是沿什么样的路径到达 Q 点的呢？可以用一个简单的实验来研究，如图 2.1.1 所示. 用一个不透光的挡板，放在 P、Q 间的任一处，将会发现，只有挡板处在连接上述两点的直线上时，才能遮住 P 点发出的光，即 Q 点的观察者看不见 P 点，所以可以得到结论：P 点的光是沿直线传到 Q 点的.

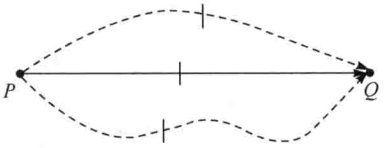


图 2.1.1 验证光的直线传播

如果介质是非均匀的，则光的传播将会发生偏折，即不再沿着一条直线传播，但是总可以设法发现光传播的路径，这条路径是折线或曲线.

根据这一事实，也可以得出这样的结论，既然在介质中，光总是沿直线、折线或曲线传播，那么就可以用一条几何上的线来描述和研究光的传播，这就是“光线”.

光线的传播定律可以把表述如下：

在均匀介质中，光线的传播路径是一条直线；在非均匀介质中，光的传播路径不再是直线.

2. 光的反射定律

如图 2.1.2 所示，反射现象随处可见. 可以利用光线传播的特点对光的反射过程进行一个判断，如图 2.1.3 所示，在光源 P 和观察者 Q 之间放一个不透光的挡板，那么 Q 点的观察者将无法直接看到 P. 但是，如果在旁边放置一块平面反光镜 M，Q 点的观察者又可以通过 M 看见 P，只是这时的 P 处在了与原来对称的位置上，观察者看到的是 P 经过平面镜 M 所成的像 P'. 也就是说，P 点发出的光，经平面镜 M 后，方向反转，然后到达 Q 点，这就是**光的反射**(reflection of light). 那么，光究竟是沿哪一条路径到达 Q 点的？

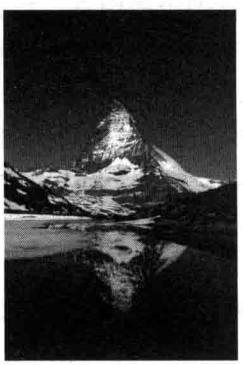


图 2.1.2 雪山在水面上的倒影

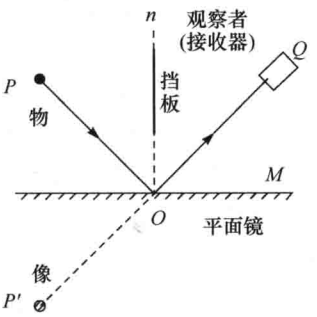


图 2.1.3 验证光的反射

在 Q 点的观察者看来，光好像是从 P' 点发出的，而 P' 点正好处于与 P 点关于反射镜平面的对称位置. 由于已经证明了光在均匀介质中的直线传播定律，所以光只能是沿着直线 $P'Q$ 传播的. 用一条直线连接 P' 点和 Q 点，该直线与反射镜平面的交点为 O，即到达 Q 点的光一定经过 M 点. 但真实的光线是从 P 点发出的，则从 P 点发出的光是在反射镜面上的 O 点被反射然后到达 Q 点的，O 点被称为光线的**入射点**(incident point). 过 O 点作平面 M 的法线 $\boldsymbol{n}$，直线 PO 就是**入射光线**(incident ray)，入射光线与入射点的法线所构成的平面称为**入射面**(plane of incidence)，PO 与法线的夹角称为**入射角**(angle of incidence) i，OQ 就是**反射光线**(reflected ray)，OQ 与法线的夹角称为**反射角**(angle of reflection) i'. 由于一条入射光线只有唯一的一条反射光线，所以从几何关系中可以得到：P、P'、O、Q 诸点在同一入射面内，而且光线的反射角 i' 与入射角 i 是相等的.

光的反射定律可以表述如下：

反射光线在入射面内，反射光线与入射光线分别位于入射点法线的两侧，且反射角等于入射角. 即在图 2.1.4 中，有

$$i'=i \tag{2.1.1}$$

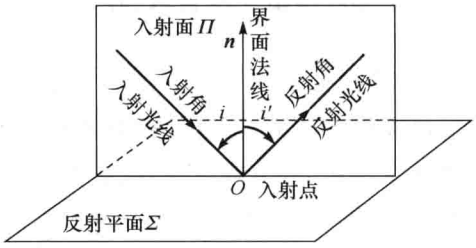


图 2.1.4　入射面、入射角、反射角

3. 光线的折射定律

物(光源)和观察者分别处在不同的介质中，两种介质有分界面，则光的传播方向会出现偏折，如图 2.1.5 所示. 可以设想，在一个空的容器中有一物 P，然后向容器中加入水. 此时，从水面上看，物的位置发生了改变，从原来的 P 点移到了 P' 点，如图 2.1.6 所示. 即在介质 1 中的观察者 Q 看来，光源是处在另一点 P'(像点)，而不是其实际位置 P 点. 这说明 P 点发出的光线在传播过程中发生了偏折，这就是**光线的折射**(refraction of light). 由于光在均匀介质 1 和 2 中都是沿直线传播的，所以发生偏折的位置只能在两种介质的分界面上. 直线 $P'Q$ 与界面交点为 O，光线在 O 点发生折射. 即实际上光的传播路径是 PO 和 OQ. 过入射点 O 作分界面的法线 $\boldsymbol{n}$，则入射光线 PO 与法线的夹角为入射角 i_1，OQ 为**折射光线**(refracted ray)，OQ 与法线的夹角为**折射角**(angle of refraction) i_2. 实验研究表明，比值 $\sin i_1/\sin i_2$ 与光线的角度无关，只与两种介质有关，即只要两种介质不变，上述比

值就是常数，这一常数被称为介质 2 相对于介质 1 的折射率，并记为

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=n_{21} \tag{2.1.2}$$

n_{21} 简称**相对折射率**(relative index of refraction).



图 2.1.5　水中光的折射

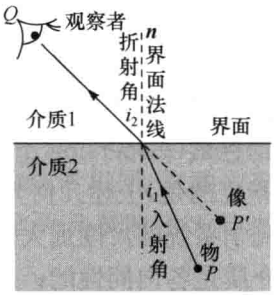


图 2.1.6　验证光的折射

可以将相对折射率 n_{21} 表示为两种介质光学特征的比值，并记为

$$n_{21}=\frac{n_2}{n_1} \tag{2.1.3}$$

n_1、n_2 分别仅与介质 1、介质 2 的光学性质有关，也表示介质对光的折射性质，称为介质的绝对折射率，简称为折射率.

然而仅从这一比例式是无法确定折射率的数值的，所以规定光在真空中的折射率为 1. 则光线从真空射入某种介质时，通过测量 $\sin i_1/\sin i_2$，即可确定该介质的折射率.

若光线从真空以角度 i_0 分别射入介质 1 和介质 2，相应的折射角分别为 i_1 和 i_2，则有 $\frac{\sin i_0}{\sin i_1}=n_1$ 和 $\frac{\sin i_0}{\sin i_2}=n_2$，于是 $\frac{\sin i_2}{\sin i_1}=\frac{n_1}{n_2}$.

如图 2.1.7 所示，Σ 为两种介质的分界面. 光线由介质 1 入射到介质 2 中，发生折射，入射角和折射角分别为 i_1 和 i_2，而且一条入射光线的折射光线是唯一的，折射光在入射面 Π 内.

光线的折射定律可以表述如下：

折射光线在入射面内，折射光线与入射光线分别位于入射点法线的两侧，且有

$$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2 \tag{2.1.4}$$

折射定律被称为斯涅耳(Willebrord Snell，1580～1626，荷兰)定律(1621 年)，也称为笛卡儿定律.

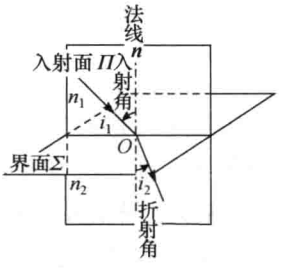


图 2.1.7　折射光线与折射角

由于光在不同的介质中会发生折射，那么如果在

光传播的路径上，介质的情况比较复杂，或者说，介质的折射率是连续变化的，则光的路径，或者光线，就不是一条直线，而会成为曲线. 所以光线就是光的路径，用几何上的线表示，可以是直线、折线或任意形状的曲线.

实验证明，对于同一种透明介质，不同波长的光具有不同的折射率，即 $n=n(\lambda)$. 因此，一束平行的白光(复色光)从一种介质(如真空或空气)射入另一种介质时，只要入射角不等于 0，则折射角 $i_2(\lambda)=\arcsin\left[\dfrac{1}{n_2(\lambda)}\sin i_1\right]$ 与波长有关，即不同波长(颜色)的光具有不同的折射角，于是不同波长的光就在空间分散开来，这种现象称为光的**色散**(dispersion of light).

需要指出的是，上述几何光学定律只有在一定的条件下才能成立，即

(1) 光学系统的尺度远大于光波的波长；

(2) 介质是各向同性的；

(3) 光强不是很大.

2.2 几何光学的基本原理

2.2.1 光传播的可逆性原理

在均匀介质中，光可以从 P 点沿直线传播到 Q 点，则必定可以沿相反的路径从 Q 点传播到 P 点. 如果介质是不均匀的，则从 P 点传播到 Q 点的光线是曲线，光可以沿同样的路径从 Q 点传播到 P 点. 在光的反射和折射中，光线如果沿反射和折射的方向入射，则相应的反射光和折射光将沿原来的入射光的方向，如图 2.2.1 所示，即光路是可逆的. 这就是**光路可逆性原理**.

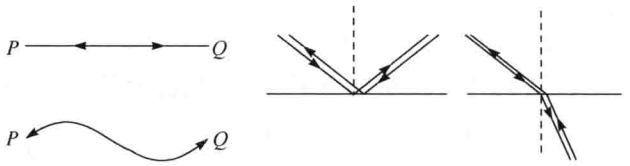


图 2.2.1 光路的可逆性

从光路可逆性原理出发，如图 2.2.2 所示的成像情形，如果物点 P 发出的光线经光学系统后在 Q 点成像，则 Q 点发出的光线经同一系统后必然会在 P 点成像，即**物像之间是共轭的**.

如果考虑到反射折射后光强的改变，例如在图 2.2.3 中，设入射光强为 I，经界面后，反射光和折射光的强度分别为 I_1、I_2，如图 2.2.3(a)所示. 如果反过来使这两部分光各自沿原来反射、折射的路径入射，如图 2.2.3(b)所示，则最后总的效



图 2.2.2 物像之间是共轭的

果是只在原来入射方向出现强度为 I 的光，这是从界面折射和反射的两部分光叠加的结果. 而在界面的另一侧，虽然也各有一束反射光和折射光，但这两部分叠加之后则相互抵消了，总的效果与图 2.2.3(a)所示的情形相同. 这种情况说明不仅光路是可逆的，光的通量也是可逆的. 或者说，这是更具普遍意义的**光的可逆性原理**.

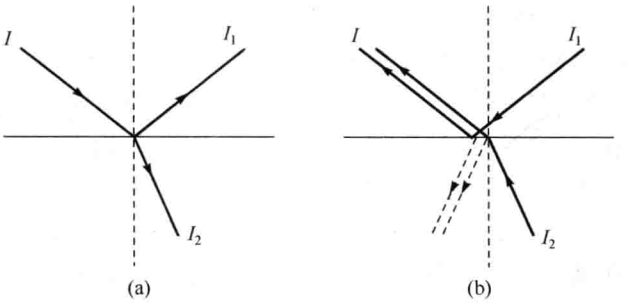


图 2.2.3 一般意义上光的可逆性

光的直线传播、反射和折射定律是几何光学的三大实验定律，它们构成了几何光学的基础. 从上面的讨论可以看出，只要引入了光线的物理模型，上述定律便能够得到严格的检验和描述.

2.2.2 费马原理

光线的直线传播定律、反射定律和折射定律是实验研究的结果，人们试图找出它们的内在联系，并用一个更基本的规律来概括和描述它们. 正如所前面指出的那样，由于几何光学不涉及光的物理本质，所以无法从最基本的物理模型推导出上述定律，但是用一个更加广义的原理对它们进行概括还是可行的，这就是**费马原理**.

费马(Pierre de Fermat，1601～1665，法国)是在 1657 年提出这一原理的，他指出：光沿着所需时间为极小值的路径传播(“The actual path between two points taken by a beam of light is the one which is traversed in the least time.”).

均匀介质中，光程等于折射率与光所经过的路程的乘积. 若记 n 为折射率，

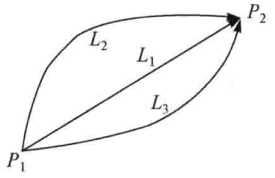


图 2.2.4　不同路径的光程

s 为沿光的路径的距离，则光程即为 $L=ns$. 图 2.2.4 表示了光沿不同路径传播时的光程.

费马原理可以表述如下：

两点之间光的实际路径，是光程最小的路径.

在数学上，费马原理可用变分表示为

$$\delta(\widehat{P_1P_2}) = \delta\left(\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s\right) = 0 \qquad (2.2.1)$$

请注意，式(2.2.1)是路径积分.

有一些物理结论，不是建立在实验基础上的定律，也不是从数学上导出的定理，而是一个最基本的假设. 可以将这一假设作为一切理论的出发点，则一切定理和定律都建立在它的基础之上，这就是所谓的原理. 原理是理论体系中最基本的假设. 费马原理不是定理，也不是定律，它是几何光学理论体系中的一个最基本假设.

在有些教材中，将费马原理表述为**“两点之间光的实际路径，是光程平稳的路径”**. 这一表述中，平稳的含义是光程可以取极值(极大、极小)或恒定值. 实际上，光程极小是光线传播的基本性质，光线的直线传播定律、反射定律和折射定律都是光程极小的情形. 在某些特殊的情形下. 例如，光学成像时，物点与像点之间所有的路径光程相等；或者如图 2.2.5 所示的情形，从椭球面的一个焦点发出的光线，经椭球面反射后到另一个焦点，这些路径的光程是相等的；或者如图 2.2.6 所示的情形，过某一光线在椭球面的入射点 M 作一个与椭球相切的小球面，则从 F_1 发出经此小球面反射到 F_2 的实际光线是光程最大的.

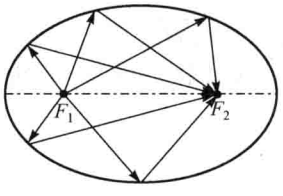


图 2.2.5　光程相等

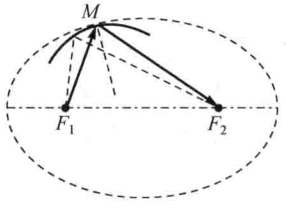


图 2.2.6　光程最大

2.3　棱镜与光纤

2.3.1　棱镜对光的折射

三棱镜是一种常用的折射器件，其横截面是三角形，光从一个侧面入射，再从另一侧面出射，连续经过了两次折射. 出射光线相对于入射光线转过的角度，称为偏向角，如图 2.3.1 所示.

光线的偏向角为 $\delta=(i_1-i_1')+(i_2-i_2')=(i_1+i_2)-(i_1'+i_2')$. 从图 2.3.1 中

可以看出，由于法线与两侧面垂直，因而有

$$i_1'+i_2'=\alpha \tag{2.3.1}$$

所以偏向角为

$$\delta=i_1+i_2-\alpha \tag{2.3.2}$$

可以证明，当 $i_1=i_2$，$i_1'=i_2'$时，有最小偏向角 δ_m，如图 2.3.2 所示. 此时，$\alpha=2i_1'$，$\delta_m=2i_1-\alpha$，即 $i_1'=\alpha/2$，$i_1=(\delta_m+\alpha)/2$. 由折射定律 $\sin i_1=n\sin i_1'$，即可得到

$$n=\frac{\sin i_1}{\sin i_1'}=\frac{\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \tag{2.3.3}$$

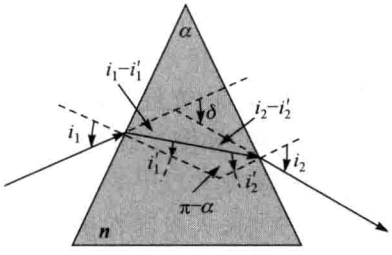


图 2.3.1　光在三棱镜中的折射

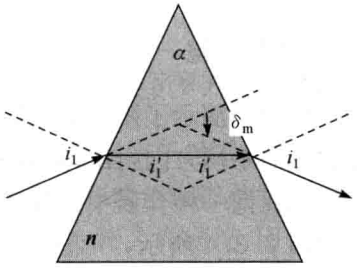


图 2.3.2　最小偏向角

通过测量 α 和 δ_m，即可得到棱镜材料的折射率. 这是一种测量透明介质折射率的方法.

例 2.1

证明上述光经过棱镜折射出现最小偏向角的条件.

证明　根据式(2.3.2)，最小偏向角的条件为 $\dfrac{d\delta}{di_1}=\dfrac{d(i_1+i_2-\alpha)}{di_1}=1+\dfrac{di_2}{di_1}=0$，即

$$\frac{di_2}{di_1}=-1 \tag{1}$$

在棱镜的两侧面，折射角与入射角之间的关系为 $\sin i_1=n\sin i_1'$ 和 $\sin i_2=n\sin i_2'$，于是有

$$d(\sin i_1)=\cos i_1\,di_1=n\,d(\sin i_1')=n\cos i_1'\,di_1'$$
$$d(\sin i_2)=\cos i_2\,di_2=n\,d(\sin i_2')=n\cos i_2'\,di_2'$$

即

$$\frac{di_1'}{di_1}=\frac{\cos i_1}{n\cos i_1'},\quad \frac{di_2}{di_2'}=\frac{n\cos i_2'}{\cos i_2}$$

而根据式(2.3.1),可得 $\mathrm{d}i_1'=-\mathrm{d}i_2'$,于是式(1)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1}=\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1'}\frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}i_1}=-\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_2'}\frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}i_1}=-\frac{\cos i_1}{n\cos i_1'}\frac{n\cos i_2'}{\cos i_2}$$

$$=-\frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i_1'}}\frac{\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i_2'}}{\cos i_2}=-1$$

即

$$\frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}}=\frac{\cos i_2}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_2}} \tag{2}$$

式(2)成立的条件为 $i_1=i_2$,相应地,$i_1'=i_2'$.

2.3.2 色散棱镜

牛顿最早演示了阳光通过玻璃三棱镜之后的色散现象,白光经过棱镜后,不同颜色的光向不同方向射出,在空间散开成一个彩色的光带,如图 2.3.3 所示. 不同波长的光在同一种介质中的折射率不同,是造成色散的原因.

如图 2.3.4 所示,一束白光从三棱镜的一个侧面入射,入射线在该侧面法线的下方,设入射角为 i. 则其中波长为 λ 的成分在棱镜内部的折射角为 $i_1'(\lambda)=\arcsin\left[\dfrac{\sin i}{n(\lambda)}\right]$,一般情况下,波长越短的光,折射率越大,折射角越小,因而波长最短的紫光向棱镜底面偏折的角度最大,波长最长的红光的偏折角最小. 在棱镜的另一侧面,紫光的入射角最大,红光的入射角最小. 设波长为 λ 的成分在该侧面的入射角和折射角分别为 $i_2'(\lambda)$ 和 $i_2(\lambda)$,则有 $\sin i_2(\lambda)=n(\lambda)\sin i_2'(\lambda)$. 由于紫光的入射角和折射率都是最大的,而红光的入射角和折射率都是最小的,可见这双重因素导致不同波长的光从棱镜出射时,在空间分开了足够的角度,因而很容易观察到色散.

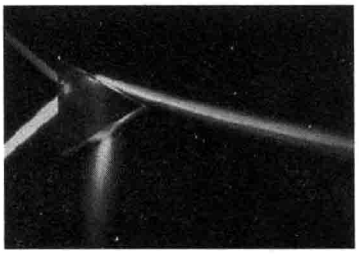


图 2.3.3 光通过棱镜产生色散

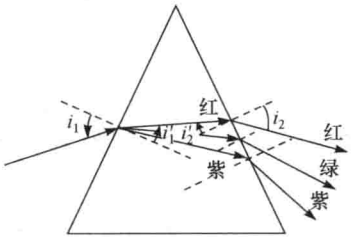


图 2.3.4 棱镜中光线的角度与波长有关

若使光束从棱镜一侧法线的上方入射,则会有如图 2.3.5 所示的折射过程,在另一侧面,折射率最大的紫光,入射角最小,而折射率最小的红光,入射角最大,这

两种因素起相反的作用，因而不容易观察到色散.

同样，第一种情形下，棱镜内部的光有少部分被侧面反射而从底面出射，这样的光也不会产生明显的色散，如图 2.3.6 所示.

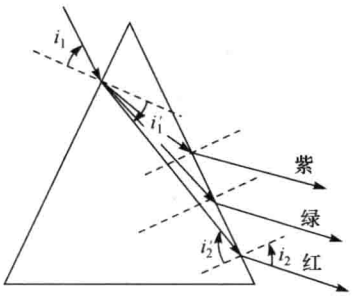


图 2.3.5　另一种入射方式不易获得色散

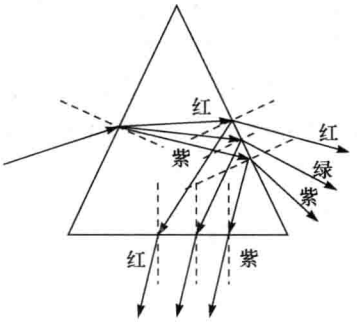


图 2.3.6　从棱镜底面出射的光不易获得色散

组成非单色光的各个波长成分被称为光谱. 色散现象可用于光谱分析，利用色散，也可以从非单色光中获取单色光. 因而早期的光谱仪和单色仪都是用棱镜制成的. 光谱仪和单色仪其实是同一种仪器，用于光谱分析时，称为光谱仪；用于获取单色光时，称为单色仪.

光束以特定的入射角 i 射入棱镜，波长为 λ 的成分从棱镜出射的方向 $i_2(\lambda)$ 有确定的值，因而光谱仪是根据出射光的方向测定波长的. 光谱既可以采用以照相的方式记录，也可以用光电探测器记录. 若光的波长是连续分布的，则记录到的光谱也是连续的；若光由分立的波长成分组成，则记录到的光谱是一条条分立的、不连续的线，称为光谱线.

实际上，光谱仪以如下的方式工作（图 2.3.7）：光通过狭缝 S_1 射到棱镜的一侧，从另一侧出射的光射向另一个狭缝 S_2. 两个狭缝的位置是固定的，转动棱镜，则可使不同波长的光依次射到 S_2 上，并从光谱仪射出. S_1、S_2 分别称为入射狭缝、出射狭缝. 入射狭缝、出射狭缝分别位于棱镜 L_1、L_2 的焦平面上.

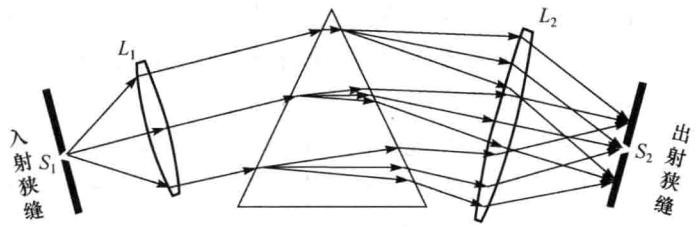


图 2.3.7　棱镜光谱仪的结构和工作方式

由于衍射光栅具有更高的分辨本领，所以现在的光谱仪基本都是采用光栅作

为色散原件. 光栅的原理将在本书第 5 章加以阐述.

2.3.3 全反射棱镜

光在介质界面处的折射角与入射角和介质的折射率有关，$\sin i_2=(n_1/n_2)\sin i_1$. 若 $n_1>n_2$，即光从折射率较大的光密介质射向折射率较小的光疏介质，则折射角大于入射角，如图 2.3.8 所示 . 当入射角逐渐增大到某一值时，折射角会增大到 90°，这种情形下，光线将不会穿过界面进入另一介质，而全部反射回原有的介质，这种情况就是全反射.

出现全反射时的入射角的临界值称为全反射临界角，记作 i_c，如图 2.3.9 所示，则

$$i_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{2.3.4}$$

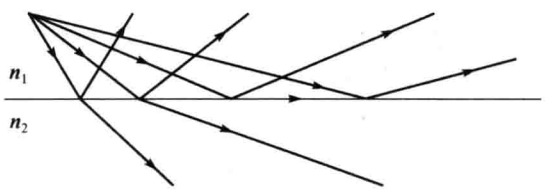


图 2.3.8　从光密介质射向光疏介质，折射角比入射角大

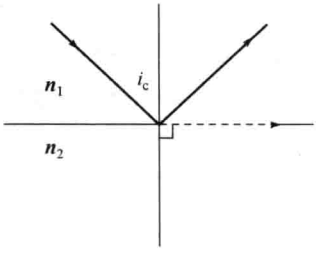


图 2.3.9　全反射临界角

可见光从水中射向空气，或从玻璃射向空气，会发生全反射，这种情形也被称为“全内反射”. 波长很短的电磁辐射，如 X 射线，在真空或空气中的折射率等于 1，而在其他介质中的折射率小于 1，因而对于 X 射线，空气或真空是光密介质，而玻璃是光疏介质，所以从真空射向玻璃或其他物质的表面时，会出现全反射，这种情形被称为“全外反射”.

全反射是 100%的反射，光不会越过界面射出. 但是光是电磁波，发生全反射时，在界面另一侧的一个很小的深度内，仍会有光波场，只是这样的光波不会继续向前传播，而是随着深度增加迅速消逝（实际上是折返回来），因而这样的光波被称为“隐失波”（evanescent wave）. 光在一个棱镜的界面发生全反射时，若将另一棱镜的表面紧贴上述界面，尽管两棱镜表面之间还有空气，但光将会进入另一棱镜，如图 2.3.10 所示，这就是验证隐失波的实验.

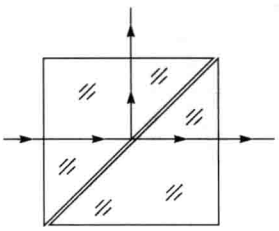


图 2.3.10　紧贴的棱镜使全反射消失

光学玻璃的折射率基本在 1.5～1.7，所以从玻璃

到真空(空气)的全反射临界角为36°～42°.直角三棱镜是最常见的全反射棱镜,如图2.3.11所示.

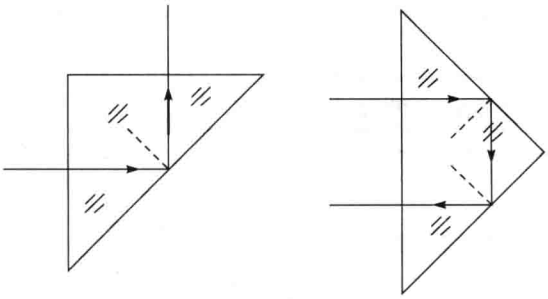


图2.3.11 光在三棱镜中的全反射

在器具表面镀膜也能起到反光的作用,但这种膜对光不能100%反射,而且膜还会由于种种原因破损或脱落,所以全反射棱镜有着非常广泛的应用.图2.3.12～图2.3.14是光学仪器中常见的一些全反射棱镜,单镜头反射式照相机中的屋脊形五棱镜,可使像转过90°,显微镜、望远镜中的珀罗组合棱镜,既可使光线在有限的空间中传过较长的距离,又可使倒立的像成为正立的.

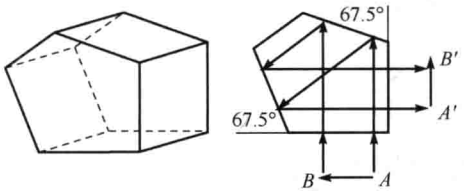


图2.3.12 单反相机中的屋脊形五棱镜

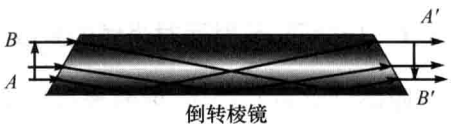


图2.3.13 用于正像的倒转棱镜

2.3.4 光纤

光纤是利用全内反射原理制成的光线传输元件.光纤的结构如图2.3.15所示,通常有三层结构,中心是折射率较高的玻璃纤维,外面是一层低折射率的材料,其外还有一层包膜.由于玻璃纤维的直径很小,而外面的两层通常都是有机材料,因而光纤一般都可以很容易弯曲.

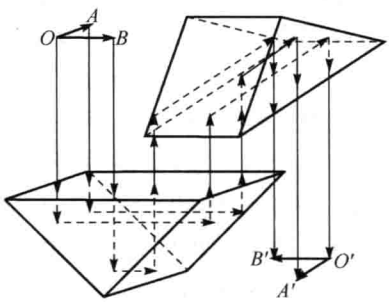


图2.3.14 珀罗组合棱镜

因为只有大于临界角时才能产生全反射,所以从端面射入光纤的光线,对于光纤轴线的张角必须限制在一个范围之内,如

图 2.3.15左端的虚线间的夹角.

光纤可以弯曲,其中的全反射过程不会改变(图 2.3.16).但是由于光纤很细,所以单根光纤无法传输图像,而是利用集束光纤传输光学图像,如图 2.3.17 所示.

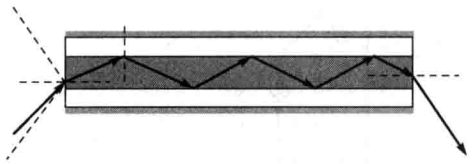


图 2.3.15　光纤中的全反射



图 2.3.16　可以弯曲的光纤

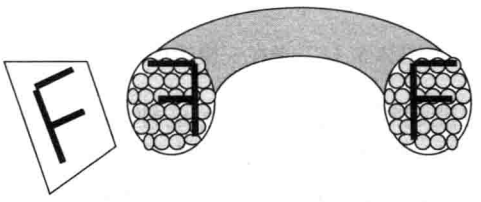


图 2.3.17　集束光纤传输光学图像

2.4　单球面成像

2.4.1　折射面、反射面对光线的变换

眼睛能够看到物体,说明来自物体的光在眼中形成了与物体同样形状的像.只有在有光的条件下,眼睛才能视物;在黑暗中,虽然物体依然存在,但眼睛却看不见,这就说明眼中的像是由光形成的.

眼睛也可以看到水面映出的白云、琥珀中的昆虫、窗外的景物等,说明物光线通过反射面、折射面也能够成像.光线经过反射、折射,方向都要发生变化,因而可以认为,成像的过程就是通过反射、折射对光线进行变换的过程.

成像过程中的光线,有些情况下是其自身发出的,例如,电视屏幕、太阳、火焰等这些发光的对象,更多的情况下是物体反射辐照到其表面的光.为了叙述方便,往往将"来自物体的光线"说成"从物体发出的光线".

以下讨论一些与成像有关的物理概念.

1. *物方与像方*

从物体发出的光线,经过面的反射、折射后成像,因而这些用于成像的反射面、折射面被称为成像元件,具有两个折射面的薄透镜也是成像元件.

如图 2.4.1 所示,光线经成像元件变换后成像,没有经过成像元件的光线是来自物的光线,简称物光线;经过成像元件变换的光线是形成像的,简称像光线.

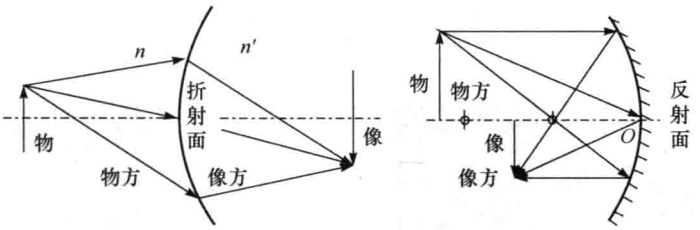


图 2.4.1 折射面、反射面的物方与像方

光线在空间传播，因而成像元件将空间分为两部分：物光线所在的空间称为物方空间，简称物方；像光线所在的空间称为像方空间，简称像方.

折射成像的情形中，物方、像方位于成像元件（就是折射面）的两侧；反射成像的情形中，物方、像方位于成像元件（就是反射面）的同侧.

在此，作者特别强调，物方指的是没有经过成像元件变换的物光线所在的空间，像方是指已经经过成像元件变换的像光线所在的空间，而不是物所在的空间或像所在的空间. 当然，很多情形中，物在物方，像在像方. 但也有例外，因为在成像光学体系中，有些“物”和“像”并不是实际的物和实际的像. 所以区分物方和像方依据往往不是根据物和像的位置，而是依据成像元件.

2. 同心光束

物体朝向成像元件的面才能成像，而面是由点构成的，因而成像就是光学元件将物面上的每个点（物点）变换为像面上对应的点（像点），而变换是对光线的变换.

每个物点发出的光线，是以物点为中心的光束，形成像点的光线，是以像点为中心的光束，如图 2.4.1 所示，这样的光束被称为**同心光束**（concentric beam，homocentric beam，也被形象地称为 pencil）.

物方同心光束的出发点是物点，像方同心光束的会聚点是像点. 物方的每个同心光束经成像元件变换后成为像方的同心光束，或者说，保持光束的同心性，是成像的必要条件.

2.4.2 物与像的虚实性

1. 实像与虚像

经过光学元件变换的光束，在像方会聚，则成为像点，这样的像点是“**实光线**”（real light ray）会聚而成的，所以是实像点，实像点构成的像是**实像**（real image），如图 2.4.2(a)所示.

但是，在有些情形下，像方光束是发散的，不能会聚成像点. 若将这些发散的光束反向延长，则可以会聚，说明变换过程依然保持了光束的同心性，这些发散光束的反向延长线不是实光线，可称其为“**虚光线**”（virtual light ray），虚光的线会聚点

不是实像点，称其为虚像点；虚像点构成的像是**虚像**(vertical image)；虚像不在像方，如图 2.4.2(b)所示.

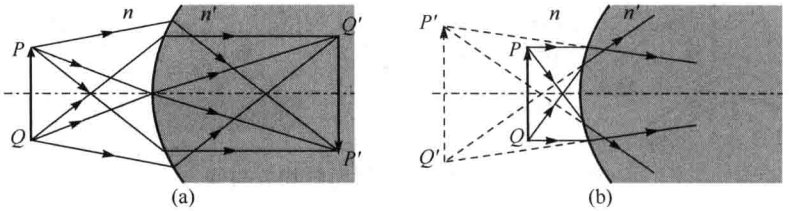


图 2.4.2　(a)像方实光线会聚成实像；(b)像方实光线发散，反向延长，虚光线会聚成虚像

在像平面处放置接收屏幕，可以显示实像，而虚像却杳无踪影，因而从光线成像的角度看，虚像不是像，因为虚像处没有成像的光线. 但是，若从经过成像元件变换的像方光束仍能保持同心性就可构成像的观点看，将虚像作为像，在物理逻辑上是没有任何问题的.

2. *实物与虚物*

对成像元件，来自物点的光束是发散的，这是**实物**(real object)的物方光线. 在某些情形下，从物方射向成像元件的光束也可以是会聚的，如图 2.4.3 所示，物上 P_0 点发出的光线经过成像球面 Σ_1 折射的光束原本要向 P 点会聚，但在会聚之前，由于被成像球面 Σ_2 折射，最终会聚成像点 P'. 对于折射球面 Σ_2，物方的光线是会聚的同心光束，而且光束的中心并不在其物方，但这些光线却是物光线，因而将这些光束沿正向延长，就得到物方光线的虚光线，这些虚光线的会聚点称为虚物点，虚物点构成**虚物**(vertical object)，虚物不在物方.

既然形成虚物点的光束也是同心光束，所以这些光束经成像元件后依然是同心光束，形成实像点，如图 2.4.3(a)所示，或虚像点，如图 2.4.3(b)所示. 所以，将虚物作为物，也是成像光学逻辑体系的必然结果.

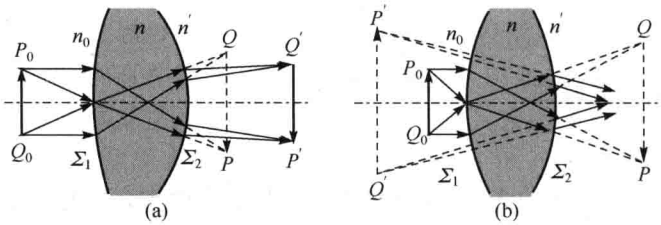


图 2.4.3　(a)虚物成实像；(b)虚物成虚像

上述物理概念是研究成像的基本要素，成像元件的作用就是将物方的同心光束变换为像方的同心光束，从而实现成像. 于是，对成像元件或者由成像元件构成的光学成像系统，有物必有像，有像必有物. 物和像，既可以是实的，也可以是虚的.

例 2.2

折射率为 n、厚度为 d 的透明平板外部介质的折射率为 n_0，如图 2.4.4 所示，在位于平板右侧的观察者看来，本来向 Q 点会聚的同心光束，以及从 Q 点发出的同心光束，会聚点在何处？

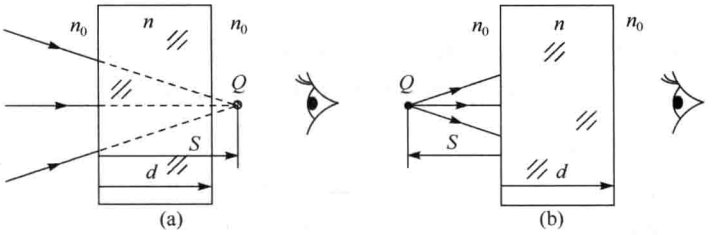


图 2.4.4　求同心光束经过透明平板折射后的会聚点

解 光线折射的情况如图 2.4.5 所示，由于平板两侧面相互平行，从平板出射的光线与另一侧入射的光线相互平行.

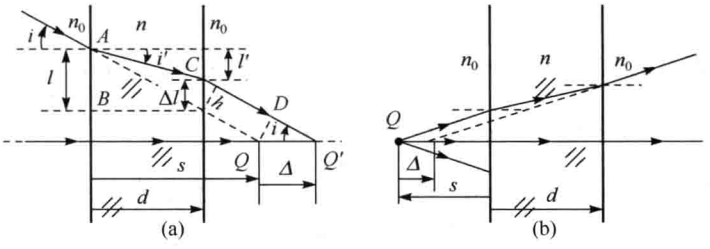


图 2.4.5　光线经过透明平板折射的情况

先讨论图 2.4.5(a)中的情况. 取一条在入射界面处入射角为 i 的光线，设该光线在平板内的折射角为 i'，与正入射的光线交于 Q' 点.

设上述光线在两侧面的入射点分别为 A 和 C，利用图中的几何关系，可得 $l=d\tan i$，$l'=d\tan i'$. 则光线在另一侧面的出射点相对于未折射的光线的移动为

$$\Delta l=l-l'=d(\tan i-\tan i')$$

出射光线相对于入射光线的平移为

$$h=\Delta l\cos i=d(\tan i-\tan i')\cos i$$

则出射光线的会聚点 Q' 相对于未经平板折射的会聚点 Q 移动为

$$\Delta=\frac{h}{\sin i}=\frac{d(\tan i-\tan i')\cos i}{\sin i}=d\left(1-\frac{\sin i'}{\sin i}\frac{\cos i}{\cos i'}\right)$$

根据折射定律，有 $n_0\sin i=n\sin i'$，上式化为

$$\Delta=d\left(1-\frac{n_0\cos i}{n\cos i'}\right)$$

而 $n\cos i'=n\sqrt{1-\sin^2 i'}=\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i'}=\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}$，于是

$$\Delta=d\left(1-\frac{n_0\cos i}{\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}}\right)$$

可见，沿不同方向射向 Q 点的光线，入射角 i 不同，因而与正入射光线的交点 Q' 的位置也不同，所以严格来说，经过平板折射后，不再是同心光束.

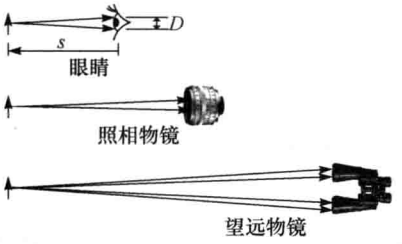


图 2.4.6　实际情形中成像光束的张角

但是，进入眼睛的光线才能被看到. 而眼睛瞳孔直径的调节范围为 1～8mm，明视距离为 25cm，所以眼睛注视 25cm 处的物点时，能够进入眼睛成像的光束，发散角是很小的. 不妨取瞳孔的直径为 $D=5$mm，物距 $s=25$cm，如图 2.4.6 所示，则进入眼睛的光束的张角约为

$$\Delta\theta=\frac{D}{s}=\frac{5}{250}=0.02=1.2^\circ$$

结合观察者的实际情况，在成像光束发散角很小的情况下，式中的入射角 i 和折射角 i' 都为小角. 因而有 $\cos i\approx1-\frac{i^2}{2}$，$\cos i'\approx1-\frac{i'^2}{2}$. 由于 i^2、i'^2 为更高阶的小量，可略去，所以有 $\cos i\approx1$，$\cos i'\approx1$. 因此 Q' 点相对于 Q 点的移动为

$$\Delta=\left(1-\frac{n_0}{n}\right)d \tag{1}$$

常见的情形是光从空气射向透明平板，这时 $n_0=1$，$n>1$，则

$$\Delta=\left(1-\frac{1}{n}\right)d \tag{2}$$

Δ 为正值，说明 Q' 点相对于 Q 点向光的入射方向移动. 如果 $n<n_0$，则 Δ 为负值，意味着相对于 Q 点，Q' 点向靠近平板一侧移动.

由于光路是可逆的，因而对于图 2.4.5(b)中的情形，有类似的结果. 两种情形中，像点总是向着光线传播的方向移动距离 Δ.

需要注意的是，图 2.4.5(a)相当于位于 Q 点的虚物在 Q' 点处成实像，对应地，图 2.4.5(b)相当于位于 Q 点的实物在 Q' 点处成虚像，如图 2.4.7 所示. 因而在应用“光路是可逆的”、“物像是共轭的”这类原则时，一定要考虑到物与像的虚实性.

本例中，近似是在成像的光束张角很小的条件下采用的，这是在实际成像中经常能够满足的条件，称为“傍轴条件”，而在这一条件下所作的近似称为“傍轴近

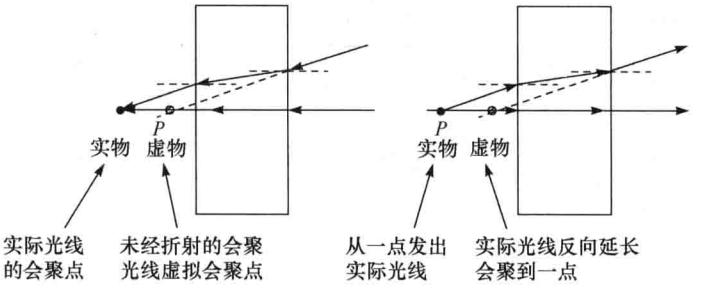


图 2.4.7 两种成像情形中物像的虚实要对应

似". 所谓的"轴"不一定如本例那样是界面的法线,通常是指具有一定发散角的同心光束的中心线.

实际上,除了眼睛之外,照相机、望远镜等成像仪器都满足傍轴条件,如图 2.4.5所示. 例如,照相机的标准镜头的光瞳(即有效的通光孔径)最大是 $D=50\text{mm}$,拍摄对象(即成像中所谓的"物")通常距镜头 $s=2\text{m}$,则物上每一点发出的成像光束的张角最大约为

$$\Delta\theta=\frac{D}{s}=\frac{50}{2000}=0.025=1.4^\circ$$

望远镜的光瞳通常也是 50mm,而物往往在 1km 之外,则光束的张角为

$$\Delta\theta=\frac{D}{s}=\frac{50}{1\times10^6}=5\times10^{-5}=0.003^\circ$$

2.4.3 傍轴光在单球面上的折射成像

1. 轴上物点成像

在图 2.4.8 中,球心为 C、半径为 r 的球面 Σ 是介质的界面,球面两侧,物方、像方的折射率分别为 n、n',物点为 Q,连接球心和物点得到直线 CQ,CQ 与球面交于 O 点,称为球面 Σ 的**顶点**(vertex). 对物点 Q,直线 CO 是该成像系统的对称轴,称该对称轴为**光轴**(optical axis),则 Q 就是轴上的物点.

Q 点沿光轴发出的光线,经过球面后方向不变,依然沿光轴传播;沿任意方向发出的另一条光线,在球面上的入射点为 M. 经折射后,与光轴在 Q' 点相交. Q' 点就是 Q 点发出的两条光线在像方的会聚点.

记 $\overline{OQ}=s$,$\overline{OQ'}=s'$,s、s' 分别称为**物距**(object distance)、**像距**(image distance). 半径就是球面的法线,光线在 M 点的入射角、折射角分别为 i、i'. 半径 CM 与光轴的夹角为 φ,并

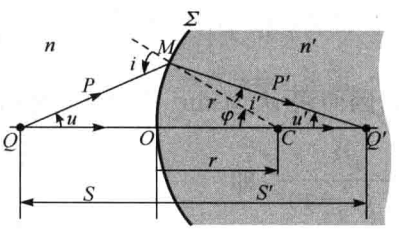


图 2.4.8 轴上物点经单球面折射成像

记$\overline{QM}=p,\overline{Q'M}=p'$.

在$\triangle QMC$和$\triangle Q'MC$中,根据正弦定理,分别有$\frac{p}{s+r}=\frac{\sin\varphi}{\sin i}$和$\frac{p'}{s'-r}=\frac{\sin\varphi}{\sin i'}$,这两式可进一步化为$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{\sin\varphi}{n\sin i}$和$\frac{p'}{n'(s'-r)}=\frac{\sin\varphi}{n'\sin i'}$. 依据折射定律$n\sin i=n'\sin i'$,可以得到

$$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{p'}{n'(s'-r)} \tag{2.4.1}$$

同样,在$\triangle QMC$和$\triangle Q'MC$中,根据余弦定理,分别有$p^2=(s+r)^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi$和$p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi$. 这两式可进一步化为

$$\begin{aligned}p^2&=s^2+2rs+r^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi\\&=s^2+2r(s+r)(1-\cos\varphi)=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\\p'^2&=s'^2-2rs'+r^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi\\&=s'^2-2r'(s'-r)(1-\cos\varphi)=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

将p^2和p'^2的表达式代入式(2.4.1)中,可得

$$\frac{s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n'^2(s'-r)^2}$$

整理后有

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=-\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{4r}{n^2(s+r)}+\frac{4r}{n'^2(s'-r)}\right] \tag{2.4.2}$$

由式(2.2.4)可以看出,s'是s和φ的函数. 也就是说,同一物点,沿不同方向所发出的光线(即φ不同),折射后与光轴的交点是不同的,即物方同心光束经球面折射后,失去同心性.

欲使折射光线保持同心性,则要求式(2.4.2)中s'仅是s的函数而与φ无关. 只有在满足下述两种条件之一时,这一要求才能满足.

(1) 等式右端为0.

如果φ很小,则$\sin\frac{\varphi}{2}\approx\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3\approx\frac{\varphi}{2}$,于是$\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$是更高阶的小量,因而可认为$\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx0$. 此时式(2.4.2)右端为0,由此可得$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}$,即

$$\frac{n(s+r)}{s}=\pm\frac{n'(s'-r)}{s'} \tag{2.4.3}$$

当 φ 很小时，物方光线、像方光线与光轴的夹角 u 和 u' 都很小，所有成像的光线都临近光轴，这样的光线称为**傍轴光线**或**近轴光线**(paraxial rays).

对于图 2.4.8 所示的情况，式(2.4.3)中应当取正号. 整理后得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r} \tag{2.4.4}$$

记

$$\Phi=\frac{n'-n}{r} \tag{2.4.5}$$

Φ 称为折射球面的**光焦度**(focal power). 光焦度的量纲为长度的倒数，按国际标准单位制，其单位为 m^{-1}，称为**屈光度**(diopter，符号为 D). 光焦度是折射球面的基本光学参数，该参数由球面的曲率半径和球面两侧的折射率差决定.

若像方光束在无穷远处会聚成像，即 $s'=\infty$，相当于折射光线与光轴平行，这种情形的物距为

$$s=\frac{nr}{n'-n}=f \tag{2.4.6}$$

物点 Q 所在位置为**物方焦点**(object focus)，也称**第一焦点**，该焦点到球面顶点的距离 f 称为**物方焦距**(object focal length，或者 first focal length)，也称为**第一焦距**，如图 2.4.9 所示.

若物在无穷远处，即 $s=\infty$，相当于物方入射光线与光轴平行，这时的像距为

$$s'=\frac{n'r}{n'-n}=f' \tag{2.4.7}$$

像点 Q' 所在位置为**像方焦点**(image focus)，也称第二焦点；该焦点到球面顶点的距离 f' 称为**像方焦距**(image focal length，或者 second focal length)，也称为**第二焦距**，如图 2.4.10 所示.

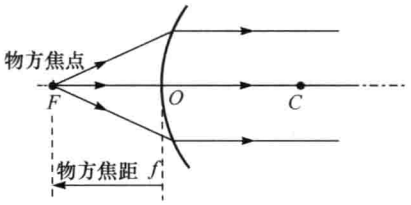


图 2.4.9 物方焦点与物方焦距

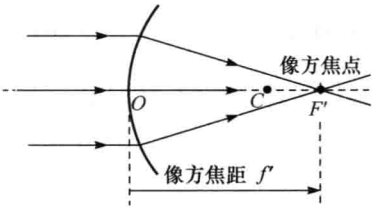


图 2.4.10 像方焦点与像方焦距

定义了焦距 f 和 f' 之后，物像公式(2.4.4)亦可写为

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{2.4.8}$$

式(2.4.4)和式(2.4.8)均被称为**高斯公式**(高斯，Carl Friedrich Gauss，

1777～1855，德国）. 按照上述方式建立起来的傍轴光线的成像理论体系被称为**高斯光学**(Gaussian Optics).

(2) 等式两端均等于 0.

由于式(2.4.2)中，分子中的物距和像距可以取任意值，所以只有 $r=\infty$，$n'^2=n^2$，同时 $s'^2=s^2$ 才能满足这一条件. 在这一条件下，对于任意的角度 φ，式(2.4.2)都能够成立，并不仅限于傍轴光线.

$r=\infty$，表示界面为平面. 至于 $n'^2=n^2$ 的含义，可以这样看：如果 $n'=n$，则两侧是同一种介质，该界面没有任何物理意义；只有当 $n'=-n$ 时，界面才有意义，这其实是将反射作为折射特例的情形.

这样一来，$r=\infty$ 同时 $n'=-n$ 就是平面反射镜，物像关系为

$$s'=-s \tag{2.4.9}$$

像距取负值，表示成像于反射镜的另一侧，像不在像方. 成像公式中的符号，后面将作详细的讨论.

通过上面的分析，读者可进一步看出，平面反射镜是唯一能够严格成像的几何光学器件.

2. 轴外物点成像

实际的物体总有一定的空间尺度，多数物点总是在光轴之外. 轴外物点发出的光线成像规律又是怎样的呢？

球面的对称性是最高的，凡是过球心的直线都是其对称轴，也就是所谓的光轴. 如果将光轴绕球心 C 旋转，则物点和像点相应旋转并划出一段圆弧，如图 2.4.11 所示，其中圆弧 QQ_1 的像就是圆弧 $Q'Q_1'$，即圆弧 QQ_1 和圆弧 $Q'Q_1'$ 相互共轭.

不妨将原来的光轴(即图 2.4.11 中水平方向的光轴)称为**主光轴**，设物是一段垂直于主光轴的直线，如图 2.4.12 所示，则轴外的物点 P，其物距比 Q 点要大一些，按物像公式 $\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$ 或高斯公式 $\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$，物距 s 越大，像距 s' 越小. 则在满足傍轴条件时，像 $\overset{\frown}{P'Q'}$ 应当是进一步向球心弯曲的弧线(注意，不是圆弧).

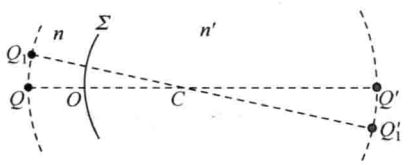


图 2.4.11　轴外物点成像

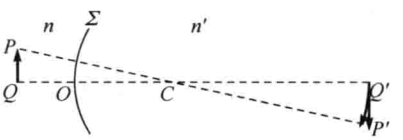


图 2.4.12　傍轴条件下的物与像，弧线近似为直线

如果物、像都满足傍轴条件，这时曲线 $\overset{\frown}{P'Q'}$ 近似为垂轴的直线. 因此，在满足傍轴条件时，垂轴直线所成的像也是垂轴直线. 图 2.4.12 中仅画出了一个过光轴

的平面，而实际上，垂轴平面所成的像也是垂轴平面. 所以物所在的垂轴平面就是**物平面**(object plane)，而对应的像所在的垂轴平面就是**像平面**(image plane).

从轴外物点成像的特点可以看出，所谓的傍轴光线，不仅是指临近光轴或主光轴的光线束，例如，轴外物点的光线束不临近主光轴. 广义的傍轴光线是指发散角不是很大的光线束. 同样，也不是很小的物、像才满足成像的傍轴条件，由于成像元件的通光孔径总是有限的，所以远处很大的物所发出的成像光线也是傍轴光线.

3. 像的横向放大率

如图 2.4.13 所示，垂轴物 PQ 的像为 $P'Q'$，满足傍轴条件时，$P'Q'$ 也与光轴垂直. 由于 P 点发出的光线经折射后都会聚于 P' 点，则过球面顶点 O 的 PO 和 OP' 是一对入射光线和折射光线，入射角和折射角就是光线与光轴间的夹角，于是像与物横向(即垂直于光轴的方向)大小之比为

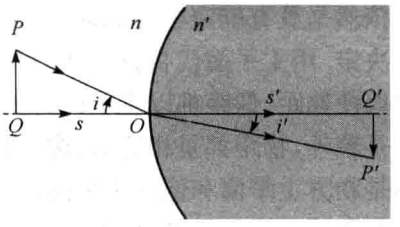


图 2.4.13 像的横向放大率

$$\gamma=\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\frac{s'\tan i'}{s\tan i}\approx\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=\frac{ns'}{n's} \tag{2.4.10}$$

γ 称为像的**横向放大率**(transverse magnification).

4. 焦平面与主平面

将光轴绕球心旋转，则该光轴上的焦点也一同转动，两个焦点的空间轨迹是两个同心的球面. 任一光轴与这两个球面的交点就是该光轴的两个焦点，因而可以说这两个球面就是焦点构成的面，简称焦面. 在满足傍轴条件时，球面近似为平面. 这样一来，两个焦面就成了与主光轴垂直的**焦平面**(focal plane)，分别称为**物方焦平面**(第一焦平面)和**像方焦平面**(第二焦平面).

焦平面上的任一点都是过该点光轴的焦点，通过该点的所有光线在另一方都与该光轴平行；反之，与该光轴平行的所有光线在另一方都将通过该光轴的焦点，如图 2.4.14 和图 2.4.15 所示.

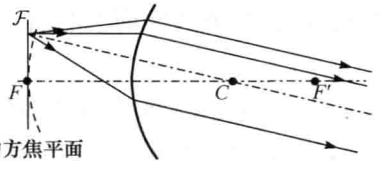


图 2.4.14 物方焦平面及其光学性质

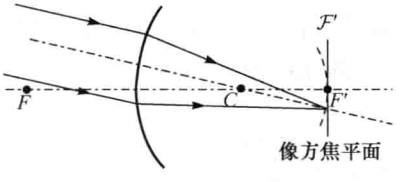


图 2.4.15 像方焦平面及其光学性质

于是焦平面具有如下性质：

通过物方焦平面上同一点的光线，在像方成为相互平行的光线；相互平行的物

方光线，必通过像方焦平面上的同一点. 由于光路是可逆的，物像是共轭的，反之亦然.

在傍轴条件下，成像球面也可近似为平面，对于主光轴，球面近似为过其顶点的垂轴平面，这一平面称为**主平面**(principal plane)，主平面与光轴的交点称为**主点**(principal point).

需要明确指出的是，用焦平面取代焦点构成的球面是在傍轴条件下忽略微小的物距、像距所引起的误差而作的一种合理近似. 引入主平面后，成像元件的折射面依然是具有确定半径的球面，光线折射的方向仍由球面的特性决定，而不是由平面决定. 用主平面代替折射球面，也只是忽略了傍轴条件下微小的距离误差，从而可以使物距、像距都以主平面为度量基准. 这样，对于垂轴的物上的各点，无论轴上还是轴外，物距都是相等的；像也是这样. 其实，主平面也像焦平面一样有两个，分别是物方主平面和像方主平面，但是对于只有单个折射面、反射面的成像元件，距离都从同一平面量起，所以物方和像方的主平面位置是重合的. 薄透镜的两个折射面相距很近，物方、像方的两个主平面也是重合的.

焦点、焦平面、主点、主平面是描述成像元件光学特征的基本物理概念，称为成像元件的基点(cardinal point)和基平面(cardinal plane). 在引入了这些概念后，单个折射球面的光学参数用图 2.4.16 概括.

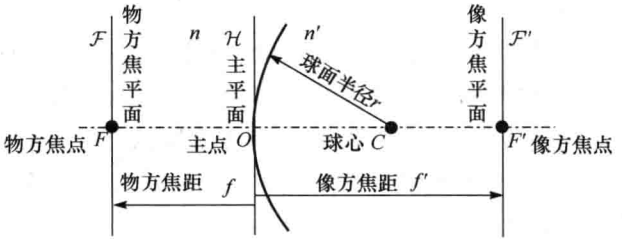


图 2.4.16　折射球面的参数

折射球面对光线的变换作用如图 2.4.17 所示，其中经过物方焦点的光线，在像方与光轴平行；与光轴平行的物方光线，经过像方焦点；经过物方焦平面上同一点的光线，在像方相互平行；物方相互平行的光线，经过像方焦平面上的同一点.

5. 物像的虚实与倒正

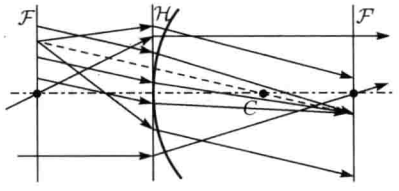


图 2.4.17　折射球面对光线的变换

如图 2.4.18 所示，将垂轴实物**正立**(erect)放置，按照傍轴光线成像的规律，若像方光束是会聚的，则光轴上物点的像一定还在光轴上，光轴上方物点的像一定在光轴下方，光轴下方物点的像一定在光轴的上方. 因此，实物所成的实像，一定是**倒立**(inverted)的.

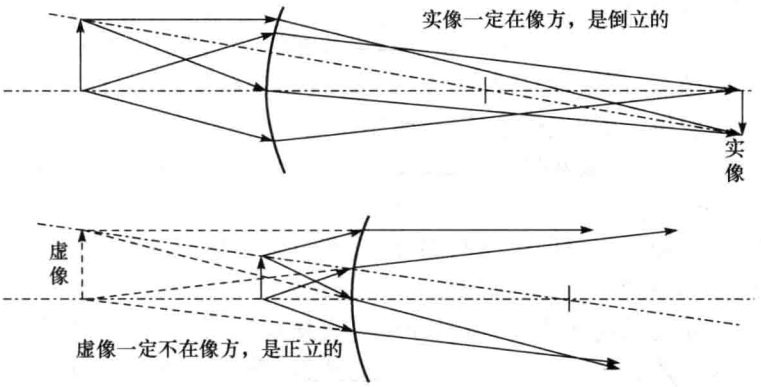


图 2.4.18 实像、虚像的位置和倒正

若像方是发散的同心光束，则不能成实像，而会成一个虚像. 光轴上物点的虚像一定还在光轴上，光轴上方物点的虚像一定在光轴上方，光轴下方物点的虚像一定在光轴的下方. 因此，正立实物所成的虚像，一定是正立的.

从光路可逆以及物像共轭不难得出类似的结论：虚物所成的实像，一定是正立的；虚物所称的虚像，一定是倒立的.

6. 拉格朗日-亥姆霍兹恒等式

记垂轴物、像的高度分别为 y、y'，一对任意共轭光线在球面上的入射点为 M，与光轴的夹角分别为 u、u'，如图 2.4.19 所示. 从 M 点向光轴作垂线，垂足为 D，记 $\overline{DM}=h$，$\overline{OD}=d$. 傍轴条件下，$d\ll s$，$d\ll s'$. 则

$$\frac{u'}{u}\approx\frac{\tan u'}{\tan u}=\frac{h/(s'-d)}{h/(s+d)}\approx\frac{s}{s'}$$

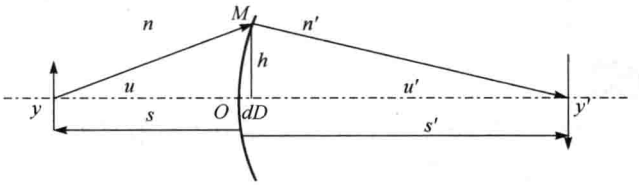


图 2.4.19 共轭的物像之间的高度、光线角度、折射率的关系

由像横向放大率公式 $\frac{y'}{y}=\frac{ns'}{n's}$ 可得 $\frac{s}{s'}=\frac{ny}{n'y'}$，因而上式变为

$$ynu=y'n'u' \tag{2.4.11}$$

式(2.4.11)被称为拉格朗日-亥姆霍兹(Lagrange-Helmhotz)恒等式. 该恒等式表明，对于每个成像单元，ynu 在每一次成像变换中都保持不变，因而被称为拉格朗日-亥姆霍兹不变量.

7. 成像过程中的费马原理

像点与物点是一一对应的，即从物点发出的所有光线，经过成像元件后，一定会到达对应的像点. 依据费马原理，光的实际传播的路径，光程是平稳的，即实际路径的光程应当取极大值、或极小值、或恒定值. 由于从物点到共轭的像点间的路径是无数的，而极大值或极小值只能是其中之一，所以这些路径的光程只能取恒定值，因而有以下结论：

共轭的物点和像点之间的所有路径，光程一定是相等的.

这就是费马原理在成像过程中的一个推论.

实物与实像之间是实光线，费马原理可直接应用. 若涉及虚物、虚像，则相应的光线都是实际光线延长之后的虚光线. 没有光线，费马原理也无从谈起. 为了使费马原理在虚物、虚像的情形下也能够应用，可以按照本书之前的做法，认为虚光线的折射率是实光线所在空间折射率的负值，这样一来，在虚物、虚像的情形下，上述推论也是成立的.

8. 成像作图法

成像元件的光学特征可以用主点、主平面、焦点、焦平面这些基点和基平面加以概括，在上述基点、基平面确定的情况下，任何一对共轭光线的关系都是确定的. 因此，也可以直接画出相应的光线，用作图法处理成像问题.

每一条物方光线都有唯一的一条像方光线，根据光的可逆性原理，这条像方光线反向入射，必将沿入射线的反向射出，因而说两者之间是**共轭**的. 用作图法可以方便而直观地表示光线的折射和物像之间的关系.

利用特殊光线的共轭性表示物像关系，是作图法的基本原则. 基本的共轭光线如下：

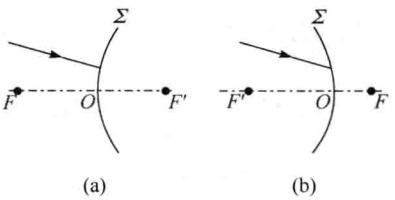
(1) 平行于光轴的光线←→经过另一方焦点的光线；

(2) 相互平行的光线束←→经过另一方焦平面上同一点的光线束.

作图法的应用通过以下的例子来说明.

例 2.3

用作图法画出图 2.4.20 中入射光线经球面之后的折射光线，其中，(a)的焦距为正值，而(b)的焦距为负值.



(a) (b)

图 2.4.20 用作图法求出图中入射光线的像方共轭光线

解 物像关系是在傍轴条件下获得的，因而作图时，光线在球面上的入射点应当画在主平面上.

利用焦平面的特性，可以很容易地解决问题.

(a) 解法 1：如图 2.4.21 所示，作出物方焦平面 $\mathscr{F}$，过 $\mathscr{F}$ 与入射光线的交点 A 作一条平行于光轴的辅助光线 1，该光线的像方共轭光线 $1'$ 经过像方焦点 F'，则入射光线的像方光线必定平行于 $1'$.

解法 2：如图 2.4.22 所示，作出像方焦平面 $\mathscr{F}'$，作一条与入射光线平行且过物方焦点 F 的辅助光线 2，2 的共轭光线平行于光轴且与 $\mathscr{F}'$ 交于 B 点，则入射光线的共轭光线必经过 B 点.

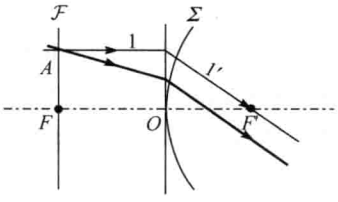


图 2.4.21 (a)的解法 1

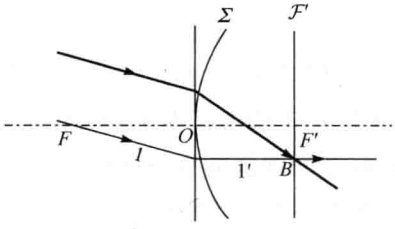


图 2.4.22 (a)的解法 2

(b) 焦距为负值的折射球面，其物方焦点在像方，而像方焦点在物方.

解法 1：延长入射光线，与物方焦平面 F 的交点为 A；作一条辅助光线 1，平行于光轴且射向 A，则上述两条入射光线经过物方焦平面上同一点，在像方相互平行，如图 2.4.23 所示.

解法 2：作一条与入射光线平行且射向物方焦点 F 的辅助光线 2，则这两条光线的像方光线必射向像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 上的同一点 B，如图 2.4.24 所示.

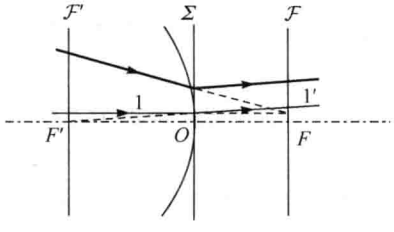


图 2.4.23 (b)的解法 1

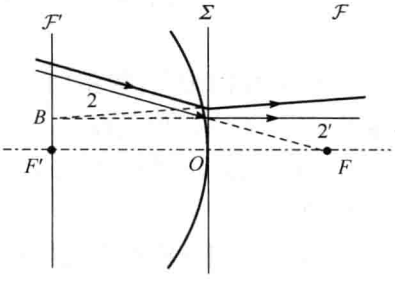


图 2.4.24 (b)的解法 2

如果已知物 PQ，则可以按图 2.4.25 的方法求出像 $P'Q'$.

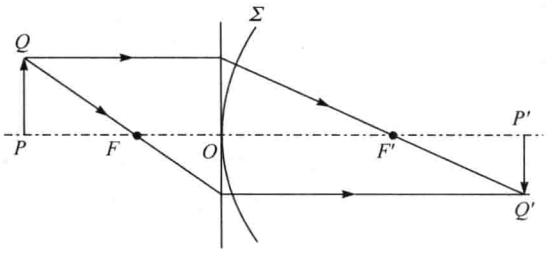


图 2.4.25　用作图法求折射球面的像

2.4.4　高斯光学中的符号约定

1. 各种类型的成像

读者可以看出，2.4.1 节中所得到的成像公式(2.4.3)是在向物方的凸球面且物方折射率小于像方折射率的条件下得到的. 而折射球面既可以是凸球面，也可以是凹球面，球面两侧的折射率也可以有不同的类型；另外，物和像都有虚实性.

2. 成像公式中各物理量的符号约定

根据前面的讨论，成像过程中会涉及物像的虚实、倒正，球面的取向等问题. 如果要用一个成像公式概括所有的不同情况，距离、高度、角度、球面半径等与成像有关的物理量必须按一定的规则取正值或负值，这一规则就是成像光学的符号约定.

符号规则决定了物像公式的形式，但规则的确定完全可以因人而异，无关优劣. 因而这样的规则被称为约定. 本书采用以下的符号约定.

(1) 关于物方和像方：对于每个成像元件，入射光线所在的一方为物方，出射光线所在的一方为像方.

(2) 关于球面半径：向物方的凸球面，半径为正值；向物方的凹球面，半径为负值.

(3) 关于物、像的虚实：物在物方，为实物，像在像方，为实像；反之，不在物方的物是虚物，不在像方的像是虚像.

(4) 关于距离：距离都从各自的主平面量起. 实物、实像，距离为正值；虚物、虚像，距离为负值.

(5) 关于高度：用垂轴直线段的长度或垂轴平面正投影的长度表示物像的高度. 自下而上的高度为正值；自上而下的高度为负值. 高度为正值，称为正立的；高度为负值，称为倒立的.

(6) 关于角度：角度从入射点的法线或光轴量起，逆时针方向为正，顺时针方向为负.

在采用上述符号约定之后，像的横向放大率公式应当表示为

$$\gamma=-\frac{ns'}{n's} \tag{2.4.12}$$

例 2.4

如图 2.4.26 所示，一个厚度为 2cm 的透镜，两侧都是曲率半径为 3cm 的凸球面，将其放在水面上，计算两成像球面的光焦度. 若透镜下 4cm 处有一长度为 0.5cm 的小物 PQ，计算 PQ 经该透镜所成像的位置、方向和大小. 已知玻璃和水的折射率分别为 1.50 和 1.33.

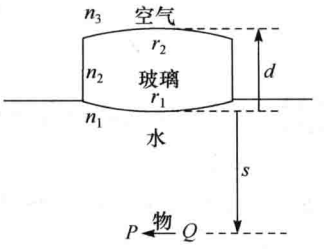


图 2.4.26 水面上的厚透镜

解 物发出的光线依次经过了两个球面的折射，最后成像. 可以先算出第一次成像的位置，再把这个像作为第二个球面的物，第二次成像，这就是逐次成像法.

首先确定两个成像球面的光焦度. 按符号约定，$r_1=3\text{cm}$，$r_2=-3\text{cm}$. 折射率 $n_1=1.33$，$n_2=1.50$，$n_3=1.00$. 于是

$$\Phi_1=\frac{n_2-n_1}{r_1}=\frac{1.50-1.33}{0.03}=5.67(\text{m}^{-1})$$

$$\Phi_2=\frac{n_3-n_2}{r_2}=\frac{1.00-1.50}{-0.03}=16.7(\text{m}^{-1})$$

第一次成像，按物像公式 $\frac{n_2}{s_1'}+\frac{n_1}{s}=\Phi_1$，可得像距

$$s_1'=\frac{n_2}{\Phi_1-\frac{n_1}{s}}=\frac{1.50}{5.67-\frac{1.33}{0.04}}=-0.054(\text{m})$$

像距是负值，说明像的位置在物方，是虚像，即在水面下 5.4cm 处.

第一次的横向放大率为 $\gamma_1=-\frac{n_1 s_1'}{n_2 s}=1.20$.

第二次成像时，将第一个球面的像作为物，该像位于第二球面的物方，因而是实物，物距为

$$s_2=d-s_1'=0.02+0.054=0.074(\text{cm})$$

物像公式为 $\frac{n_3}{s'}+\frac{n_2}{s_2}=\Phi_2$，算得像距为

$$s'=\frac{n_3}{\Phi_2-\frac{n_2}{s_2}}=\frac{1.00}{16.7-\frac{1.50}{0.074}}=-0.280(\text{m})$$

像距为负值，说明仍是虚像，在第二球面下 28.0cm 处. 即该像在水面之下，到前镜面的距离为 26.0cm.

第二次的横向放大率为 $\gamma_2=-\dfrac{n_2 s'}{n_3 s_2}=5.86$.

总的横向放大率为 $\gamma=\gamma_1\gamma_2=7.03$.

像的长度为 $7.03\times 0.5\text{cm}=3.5\ \ \text{cm}$，$P$ 在 Q 的左侧.

例 2.5

如图 2.4.27 所示，计算物体经过顶角为 α 的光楔所成的像.

解 所谓光楔就是顶角很小的玻璃三棱镜. 记物到光楔一个侧面的距离为 s.

如图 2.4.28 所示，自物点向光楔左侧面作垂线，第一次折射所成的像在该垂线上，因而该垂线可作为平面折射成像的光轴.

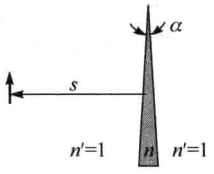


图 2.4.27　光楔成像

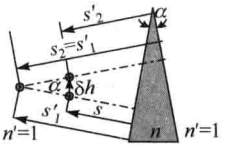


图 2.4.28　不平行平面的逐次成像

显然所成为虚像，像距为 $s_1'=-\dfrac{n}{n'}s=-\dfrac{n}{1}s=-ns$.

这个虚像处于第二折射面的物方，因而是光楔右侧面成像的实物.

自像向光楔右侧面作垂线，这是右侧面成像的光轴，第二次所成的像在这一光轴上.

由于光楔很薄，所以第二次成像的物距就是 $s_2=0-s_1'=ns$，算得像距为 $s_2'=-\dfrac{n'}{n}s_2=-\dfrac{1}{n}ns=-s$，与物到光楔的距离相同.

由图 2.4.28 可见，由于光楔两侧面不平行，故最后的像会向楔尖方向稍微移动，移动的距离为

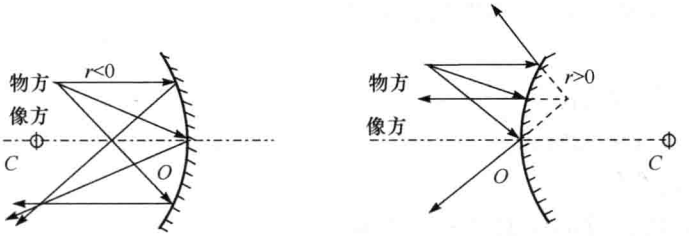
$$\Delta h=(ns-s)\alpha=(n-1)s\alpha$$

2.4.5　傍轴光在单球面上的反射成像

球面反射镜（通常简称为球面镜）也是一种成像元件，反射面可以是凹球面，也

可以是凸球面，相应地，被称为**凹面镜**(concave spherical mirror)和**凸面镜**(convex spherical mirror).

与折射球面不同的是，反射面的物方、像方在反射面的同一侧，如图 2.4.29 所示. 另外，由于光线的反射与介质的折射率无关. 因此，无论反射面一侧是何种介质，成像的情况都是相同的.



(a) 凹面镜　　(b) 凸面镜

图 2.4.29　球面镜及其对入射光线的反射

1. 球面镜的物像公式

在作了符号约定的前提下，可以将反射定律表示为折射定律 $n_2\sin i_2=n_1\sin i_1$ 的形式.

参考图 2.1.4 和图 2.1.7，光线的入射角、折射角、反射角都从界面的法线度量，按照本书的符号约定，角度沿逆时针方向为正，则入射角 i_1 和折射角 i_2 为正值，反射角 i_2 应当为负值，这样一来，用折射定律所表示的反射公式就成了 $n_2\sin(-i_1)=n_1\sin i_1$，于是有 $n_2=-n_1$. 反射光线与入射光线在同一种介质中，当然不能认为反射光线所在介质的折射率为 $-n_1$. 其实，折射定律的表达式中，入射光线与出射光线分别在界面的两侧，所以在反射的情形下，也可以反射面另一侧光线(即反射光线的反向延长线)的方向表示反射光线的方向. 反射光线的反向延长线是与反射光线所对应的虚光线. 于是，若将反射看成折射的特例，则说明反射光线的虚光线所在空间介质的折射率为 $-n_1$.

这样一来，可以将单球面折射的物像公式变换为单球面反射的物像公式. 但需要对式中物理量作相应的变换.

首先，对于球面，反射面的像方与折射面的像方正好相反，也就是说，折射面成实像的情形，对应于反射面的虚像，因而要将折射物像公式中的像距 s' 置换为 $-s'$.

其次，将反射光线的方向用其虚光线代替，而反射光线与入射光线在同一介质中，因而要将折射公式中像方的折射率置换为 $-n$.

则对 $\dfrac{n}{s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{r}$ 作了 $\begin{cases}n'\Leftrightarrow -n\\ s'\Leftrightarrow -s'\end{cases}$ 置换后，即可得到 $\dfrac{-n}{-s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{-n-n}{r}=$

$-\frac{2n}{r}$，即

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r} \tag{2.4.13}$$

也可以直接用反射定律在傍轴条件下得到上述物像公式.

对于平面反射镜，$r=\infty$，物像公式为

$$s'=-s$$

在镜面对称的位置成像.

2. 球面镜成像的特点

1) 球面镜的焦距

根据公式可得球面反射镜的焦距为

$$f=f'=-\frac{r}{2} \tag{2.4.14}$$

由于反射镜的物方、像方均在反射面的同一侧，所以其物方焦距和像方焦距相等.

凹面镜的焦距为正值，其物方焦点、像方焦点都位于反射面一侧(图 2.4.30). 凸面镜的焦距为负值，其物方焦点、像方焦点都位于反射面的另一侧(图 2.4.31).

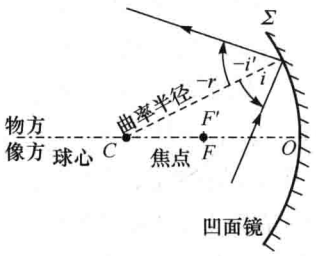


图 2.4.30　凹面镜

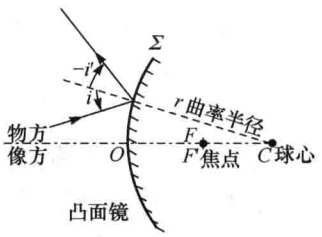


图 2.4.31　凸面镜

虽然球面反射镜的焦距与折射率无关，但是对于处在折射率为 n 的介质中的反射镜，其光焦度通常仍然写为 $\Phi=-\frac{2n}{r}$，这样，焦距仍可用光焦度表示为 $f=\frac{n}{\Phi}=\frac{n}{-\frac{2n}{r}}=-\frac{r}{2}$.

球面镜的共轭光线如图 2.4.32 和图 2.4.33 所示.

凹面镜中，由于焦点在物(像)方，所以光线可以通过焦点. 而凸面镜的焦点在反射镜后侧，光线无法经过，这种情形下，所谓“经过焦点的光线”是指延长线经过焦点，或者瞄向焦点的光线.

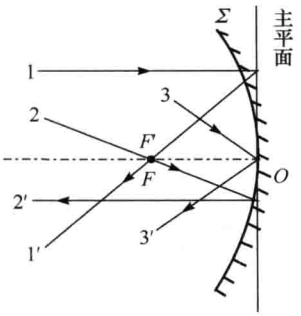


图 2.4.32 凹面镜中的特殊共轭光线

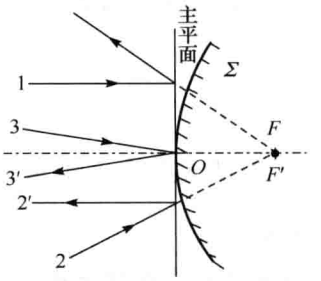


图 2.4.33 凸面镜中的特殊共轭光线

反射镜中，由于物方、像方的折射率相反，所以经过球面顶点的两条共轭光 3 和 3′线角度相反.

2) 球面镜成像的横向放大率

按式(2.4.12)，球面折射成像横向放大率公式为 $\gamma=\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{ns'}{n's}$，按照符号约定，$n'$以$-n$代替，同时将 s'改成$-s'$，可得球面反射成像的横向放大率为

$$\gamma=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \tag{2.4.15}$$

对平面镜，$s'=-s$，所以横向放大率总是 $\gamma=+1$，成等大小正立的像.

3) 球面镜成像的特点

实物成像，物距总是正值，即 $s>0$，所以球面镜成像的特点如图 2.4.34 所示.



(a)凹面镜可以成倒立实像或正立放大虚像



(b)凸面镜只能成正立缩小虚像，物距越远，像越小

图 2.4.34 凹面镜、凸面镜成像的特点

(1) 凹面镜，$r<0$，$f>0$.

$s>-\dfrac{r}{2}$，$s'>0$，成实像，既可以是放大的，也可以是缩小的，像总是倒立的.

$s<-\frac{r}{2}$，$s'<0$，成虚像，横向放大率 $\gamma=-\frac{s}{s'}=\frac{r}{2s+r}>+1$，虚像总是正立放大的.

(2) 凸面镜，$r>0$，$f<0$.

$s'<0$，只能成虚像. 而且横向放大率 $\gamma=-\frac{s'}{s}=\frac{r}{2s+r}$，$0<\gamma<+1$，只能是正立缩小的虚像.

3. 球面镜成像的作图法

可以利用球面镜中特殊的共轭光线作图分析反射球面对光线的变换和成像. 图 2.4.35 和图 2.4.36 显示了用作图法所得到的任意一条入射光线分别经凹面镜、凸面镜反射后的共轭光线. 作图中利用了焦平面的性质.

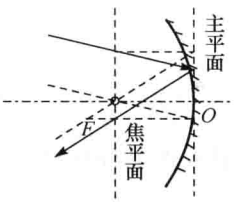


图 2.4.35　凹面镜作图

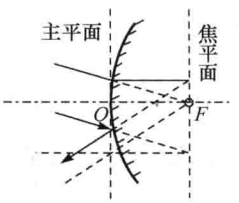


图 2.4.36　凸面镜作图

例 2.6

如图 2.4.37 所示，一块球面透镜，厚度很薄，玻璃的折射率为 n，球面的曲率半径分别为 r_1 和 r_2，右侧球面上镀有反射膜. 求该光学元件焦点的位置.

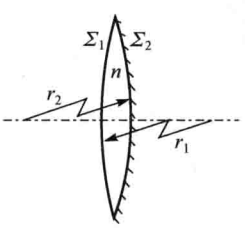


图 2.4.37　一侧为反射面的薄透镜

解　对于物上发出的光线，该元件有三次成像过程：①左侧球面折射；②右侧球面反射；③左侧球面折射. 则逐次成像过程为 Σ_1 折射(空气→玻璃)→Σ_2 反射(玻璃→玻璃)→Σ_1 反射(玻璃→空气).

平行光经球面 Σ_1 折射(空气→玻璃)，像距为 Σ_1 的右焦距，即 $s_1'=\frac{nr_1}{n-1}$.

该像作为反射球面的物，物距为 $s_2=-s_1'=-\frac{nr_1}{n-1}$.

再经球面 Σ_2 反射(玻璃→玻璃)，像距为

$$s_2'=-\frac{r_2 s_2}{r_2+2s_2}=\frac{r_2 s_1'}{r_2-2s_1'}$$

反射面的像作为物，最后经球面 Σ_1 折射(玻璃→空气)，物距为 $s_3=-s_2'$，像距为

$$s_3'=-\frac{s_3 r_1}{(1-n)s_3+nr_1}$$

s_3'是元件焦点到球面 Σ_1 的距离，记为 f，即

$$f=\frac{\frac{r_2 f_1'}{r_2-2f_1'}r_1}{-(1-n)\frac{r_2 f_1'}{r_2-2f_1'}+nr_1}=\frac{r_2 f_1' r_1}{-(1-n)r_2 f_1'+nr_1(r_2-2f_1')}$$

$$=\frac{r_2\frac{nr_1}{n-1}r_1}{-(1-n)r_2\frac{nr_1}{n-1}+nr_1\left(r_2-2\frac{nr_1}{n-1}\right)}=\frac{nr_1 r_2}{-(1-n)nr_2+n[(n-1)r_2-2nr_1]}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r_1 r_2}{n(r_2-r_1)-r_2}$$

2.5 薄透镜成像

2.5.1 逐次成像法

透镜的两个表面都是折射面，在透镜成像的过程中，物方光线先经第一表面折射进入透镜中，进入透镜的光线再经第二表面折射进入像方. 当然可以根据折射定律计算出光线的方向，从而确定物像之间的关系. 不过完全没有必要这样做，因为前面已经证明了在傍轴条件下光束的同心仍能保持，那么，同心光束从物方进入透镜的过程，是一次成像过程，透镜中的光束仍是同心光束，这样的同心光束再从透镜进入像方，是第二次成像过程. 则物经第一表面所成的像，就是第二表面的物；该物经第二表面所成的像，就是透镜最终的像. 这种方法也用来处理光束依次经过多个光学元件的成像问题，是成像光学的基本方法，被称为逐次成像法.

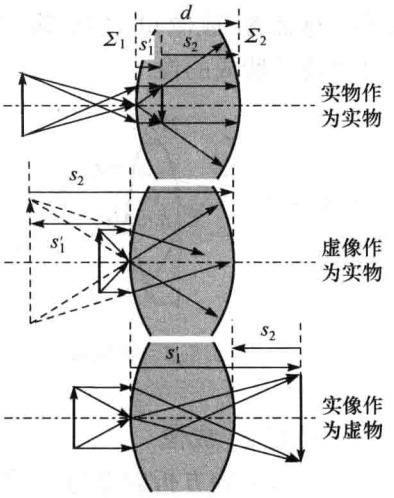


图 2.5.1 逐次成像法中每次成像的物距

逐次成像法中，最关键的是确定每次成像的物距. 图 2.5.1 中，物经两个相邻的折射面 Σ_1 和 Σ_2 成像，Σ_1 和 Σ_2 之间的距离为 d. 物经

Σ_1 的像距为 s_1'. 若 Σ_1 所成的是位于 Σ_1 和 Σ_2 之间实像，则 $s_1'>0$. 对于 Σ_2，该像就是实物，物距为

$$s_2=d-s_1' \tag{2.5.1}$$

若 Σ_1 所成的是虚像，该像对于 Σ_2 仍是实物，而由于 $s_1'<0$，所以到透镜的物距仍可用式(2.5.1)算得.

若 Σ_1 所成的是位于 Σ_2 像方的实像，对于 Σ_2，该像就一定是虚物，由于 $s_1'>0$，且 $s_1'>d$，式(2.5.1)所表示的正是虚物到 Σ_2 的物距.

可见无论何种情况，都可以利用式(2.5.1)根据相邻两成像面的距离和前一次的像距算得后一次成像的物距.

2.5.2 薄透镜的物像公式

1. 薄透镜的物像关系

如图 2.5.2 所示，薄透镜的两个表面 Σ_1 和 Σ_2 的曲率半径分别为 r_1 和 r_2，物方和像方介质的折射率分别为 n 和 n'，而透镜的折射率为 n_L. 通过两折射球面球心 C_1 和 C_2 的直线就是透镜的光轴，两折射球面的顶点 O_1、O_2 间的距离记为 d，用 d 表示该透镜的厚度.

如果满足条件 $d\ll r_1, r_2, |s|, |s'|$，即透镜的厚度比折射球面的半径小得多，同时也比物距和像距小得多，这样的透镜就是薄透镜. 由于厚度很薄，所以可以认为 $d=0$，这样一来，两球面顶点 O_1、O_2 也可以认为是重合的，重合点就是透镜光轴的中心，记为 O，称为薄透镜的**光心**(optical center).

用逐次成像法确定物经透镜后的像，在图 2.5.3 中，左侧(即物方)物点 Q 先经第一球面 Σ_1 成像 Q_1'，然后将 Q_1' 作为物点，再经第二折射面 Σ_2 成像 Q'，Q' 即为 Q 经透镜后所成的像.

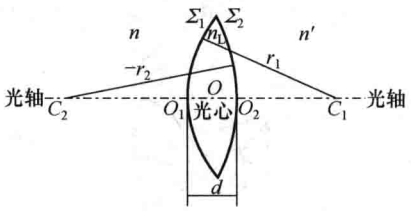


图 2.5.2 薄透镜

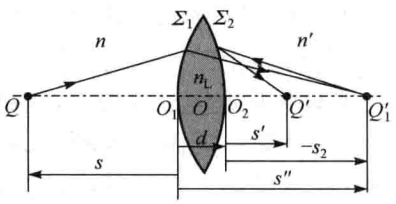


图 2.5.3 薄透镜的逐次成像

1) Q 经 Σ_1 成像

物距为 s，物方折射率为 n，像方折射率为 n_L，应用式(3.4.8)，得到

$$\frac{n_L}{s''}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1} \tag{2.5.2}$$

像距为 s''，该像位于折射率为 n_L 的介质中.

记 $\Phi_1=\dfrac{n_L-n}{r_1}$，为第一折射球面 Σ_1 的光焦度.

2) 再经 Σ_2 成像

将经 Σ_1 所成的像作为 Σ_2 的物，按照本书的符号约定，物距为 $d-s''$，由于是薄透镜，所以 $d-s''\approx -s''$. 此时物方折射率为 n_L，像方折射率为 n'，再次应用式(3.4.8)，得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n_L}{-s''}=\frac{n'-n_L}{r_2} \tag{2.5.3}$$

记 $\Phi_2=\dfrac{n'-n_L}{r_2}$ 为第二折射球面 Σ_2 的光焦度. 式(2.5.2)、式(2.5.3)相加，有

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}=\Phi_1+\Phi_2=\Phi \tag{2.5.4}$$

这就是薄透镜的物像公式. 其中

$$\Phi=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2} \tag{2.5.5}$$

为薄透镜的光焦度.

2. 薄透镜的焦点与焦平面

薄透镜同样有焦点与焦平面，如图 2.5.4 所示.

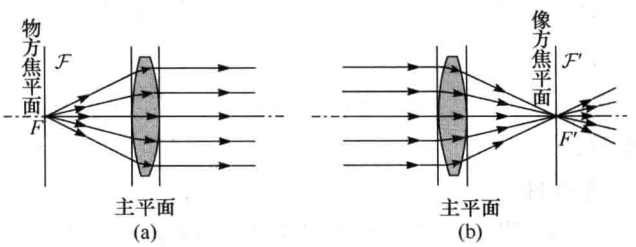


图 2.5.4 薄透镜的焦点与焦平面、主点与主平面

薄透镜的焦点和焦平面的定义与单个球面相同. 令 $s'=\infty$，得到薄透镜的物方焦距

$$f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n}{\Phi} \tag{2.5.6}$$

令 $s=\infty$，得到薄透镜的像方焦距

$$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n'}{\Phi} \tag{2.5.7}$$

形式上与单球面类似.

如果透镜置于空气中,取 $n=n'=1$,有

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} \tag{2.5.8}$$

式(2.5.8)称为磨镜者公式.

3. 薄透镜的主点与主平面

薄透镜同样有主平面,由于两球面间距很近,所以物方、像方的两个主平面紧靠在一起,就是通过透镜光心的垂轴平面,而主点就是光心.

将上述焦距的表达式(2.5.6)、(2.5.7)代入式(2.5.4),则得到薄透镜的高斯公式

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{2.5.9}$$

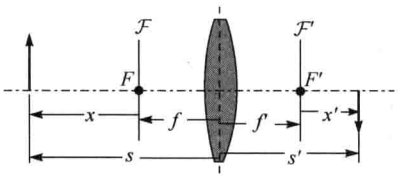


图 2.5.5 牛顿公式和高斯公式中的物距、像距

高斯公式中,物距和像距都是以光心为基点(即以主平面为基准)度量的,如果用焦点作为度量的基准点,用到焦点的距离表示物像的位置,如图 2.5.5 所示,即 $s=x+f$,$s'=x'+f'$,高斯公式可写为$\frac{f'}{x'+f'}+\frac{f}{x+f}=1$,整理得到 $xf'+ff'+x'f+f'f=x'x+x'f+f'x+f'f$. 即有

$$xx'=ff' \tag{2.5.10}$$

这就是牛顿物像公式.

4. 正透镜与负透镜

由磨镜者公式可以看出,空气中,薄透镜焦距的正负取决于两球面的曲率半径,由于

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

如果 r_1 为正,r_2 为负,则焦距 f,f' 为正,这是典型的**双凸透镜**(bi-convex lens),中间厚边缘薄;如果 r_1 为负,r_2 为正,则焦距 f,f' 为负,这是普通的**双凹透镜**(bi-concave lens),中间薄边缘厚.

如果 r_1 为正,r_2 为正,且 $r_1<r_2$,则焦距 f,f' 为正;如果 r_1 为负,r_2 为负,且 $|r_1|>|r_2|$,则焦距 f,f' 亦为正. 这是**弯月形正透镜**(meniscus-convex lens),中间厚边缘薄. 若一侧为平面,则称**普兰纳正透镜**(Planar-convex lens).

如果 r_1 为正,r_2 为正,且 $r_1>r_2$,则焦距 f,f' 为负;如果 r_1 为负,r_2 为负,且

$|r_1|<|r_2|$，则焦距 f，f' 亦为负，这是**弯月形负透镜**(meniscus-concave lens)，中间薄边缘厚. 若一侧为平面，则称**普兰纳负透镜**(Planar-concave lens).

$f=f'>0$，像方焦点在透镜右侧，为会聚透镜，称为**正透镜**(convex，positive 或 converging)，正透镜具有实焦点；$f=f'<0$，像方焦点在透镜左侧，为发散透镜，称为**负透镜**(concave，negative 或 diverging)，负透镜具有虚焦点.

综上所述，空气中，凡是中间厚边缘薄的透镜都是会聚的正透镜；反之是发散的负透镜，如图 2.5.6 所示.

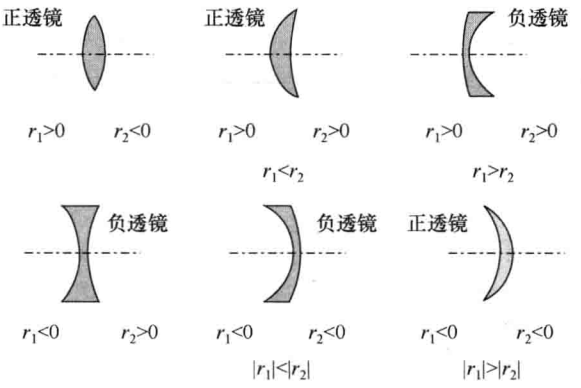


图 2.5.6 正透镜与负透镜

如果将薄透镜置于折射率大的介质中，如玻璃中的气泡或水中的气泡所形成的透镜，则上述透镜的正负恰好相反.

如果用费马原理分析，则上述结论是当然的.

5. 经过光心的光线

如图 2.5.7 所示，由于对称性，在光心附近，可以认为透镜的两个表面相互平行，又由于透镜很薄，$d\approx 0$，因而经过透镜光心的光线可以看成透过了很薄的平行平板，在透镜两侧介质折射率相等时，通过薄透镜光心的光线不改变方向.

6. 从费马原理看透镜成像

依据费马原理，可以证明空气中的正透镜必定是中间厚边缘薄；负透镜必定是中间薄边缘厚.

所谓正透镜是指物方焦点在其物方，而像方焦点在其像方，如图 2.5.8 所示.

平行光自左侧入射，会聚到正透镜右侧焦点. 光线越远离光轴，光路所经过距离越长.

为使各个路径的光程相等，则远离光轴的光线，其在透镜中的距离必须较短(由于透镜的折射率大于空气的折射率). 所以正透镜的

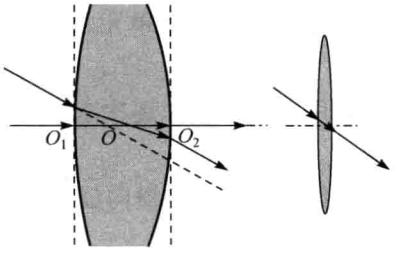


图 2.5.7 经过透镜光心的光线

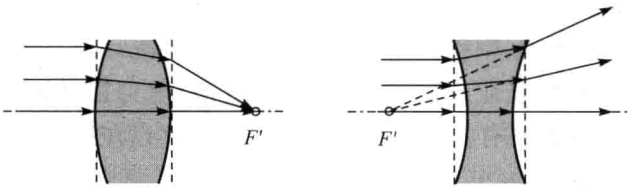


图 2.5.8　用费马原理解释正负透镜的结构特征

形状，必须越远离中心轴线，厚度越薄，即必定是中间厚边缘薄的结构.

负透镜使入射平行光在像方发散，在透镜物方成虚像. 虚光线的光程为负值. 远离光轴的虚光线，其光程值较大. 按费马原理，实光线在透镜中的光程＋虚光线的虚光程＝0，为使各个路径的光程相等，则远离光轴的光线，其在透镜中的距离必须较长，所以负透镜的形状，必定是中间薄边缘厚的结构.

7. 薄透镜的横向放大率

因为是经过两个密接球面逐次成像，第二面的物距与第一面像距间的关系为 $s_2=0-s''=-s''$，所以总放大率为两次成像的放大率的乘积，即

$$\gamma=\gamma_1\gamma_2=\left(-\frac{ns''}{n_Ls}\right)\left(-\frac{n_Ls'}{-n's''}\right)=-\frac{ns'}{n's} \tag{2.5.11}$$

8. 拉格朗日-亥姆霍兹恒等式

容易看出，在逐次经过各个球面依次成像的过程中，拉格朗日-亥姆霍兹恒等式始终成立，即

$$ynu=y''n_Lu''=y'n'u' \tag{2.5.12}$$

2.5.3　光具组成像

由透镜、反射镜等成像元件所构成的成像系统是光具组. 实际的成像光学仪器都是光具组.

采用逐次成像法处理光具组的成像问题，即将前一个成像元件的像作为后一个成像元件的物. 例如，设光具组中第 i 个单元的像已知，像距为 s_i'，与该单元相邻的是第 $i+1$ 个单元，从第 i 个单元的主平面到第 $i+1$ 个单元主平面的距离为 $d_{i,i+1}$，则对第 $i+1$ 个单元，物距就是

$$s_{i+1}=d_{i,i+1}-s_i'$$

利用上式就可以逐次求出各个单元所成的像，最后得到物经整个光具组所成的像.

若第 i 次成像的横向放大率为 γ_i，则光具组总的横向放大率为

$$\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_i\cdots$$

光具组成像，既可以采用计算法处理，也可以采用作图法处理. 两种方法基于

相同的原理，因而是等价的，结果也是一致的.

以下通过几个例子说明处理光具组成像问题的要点.

例 2.7

如图 2.5.9 所示，L_1 和 L_2 为薄透镜，L_1 的焦距为 4cm，L_2 材料的折射率为 1.5，球面半径为 12cm，球面上镀有反射膜. L_1 和 L_2 间距为 10cm，物在 L_1 左前 5.6cm 处，求物最后成像的位置.

解 题中的透反射镜的反射面内侧是玻璃，可以将该元件看成一个平凸透镜与一个凹面镜的组合，两镜之间有一层等厚的、薄薄的空气，这样的空气层对光线的折射不起作用. 这样一来，就可认为透镜 L_2 和球面镜 M 都在空气中.

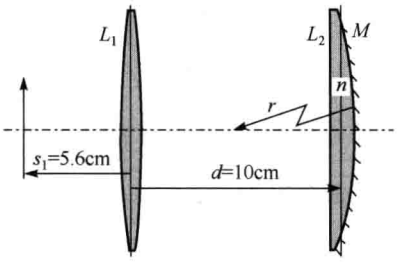


图 2.5.9 例 2.7 中的光具组

透镜 L_2 的焦距为 $f_2=f_2'=\dfrac{1}{0+\dfrac{1-1.5}{-12}}=24\text{cm}$，球面镜的焦距为 $f_3=-\dfrac{-12\text{cm}}{2}=6\text{ cm}$.

物经该光具组共有 5 次成像过程，可以按照逐次成像的方法求解.

物经 L_1 成像，像距为

$$s_1'=\frac{s_1f_1}{s_1-f_1}=\frac{5.6\times4}{5.6-4}=14(\text{cm})$$

该像在 L_2 右侧，是 L_2 的虚物，物距为 $s_2=d-s_1'=-4\text{cm}$，再经 L_2 成像，像距为

$$s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}=\frac{-4\times24}{-4-24}=\frac{24}{7}(\text{cm})$$

该像在 L_2 的右侧，是反射镜 M 的虚物，物距 $s_3=0-s_2'=-\dfrac{24}{7}\text{cm}$. 经 M 成像，像距为

$$s_3'=\frac{s_3f_3}{s_3-f_3}=\frac{-\dfrac{24}{7}\times6}{-\dfrac{24}{7}-6}=\frac{24}{11}(\text{cm})$$

这是实像，在 M 的左侧. 由于反射光还要依次经过 L_2、L_1，所以对于 L_2，这是虚物，物距 $s_4=-\dfrac{24}{11}\text{cm}$. 所以反射光再经 L_2 成像，像距为

$$s_4'=\frac{s_4 f_2}{s_4-f_2}=\frac{-\frac{24}{11}\cdot 24}{-\frac{24}{11}-24}=2(\text{cm})$$

这是实像，在 L_2 左侧，对 L_1，是实物，物距 $s_5=d-s_4'=8\text{cm}$，像距

$$s_5'=\frac{s_5 f_1}{s_5-f_1}=\frac{8\times 4}{8-4}=8(\text{cm})$$

在 L_1 左侧 8cm 处.

本例题中，对一侧有反射膜的 L_2，也可以采用例 2.6 的方法处理，其成像过程依次为折射、反射、折射. 或者，由于一侧有反射膜的透镜实际上是密接成像元件的组合，总的光焦度是各个元件光焦度之和. 可以将其视为空气中的薄透镜与球面镜的组合. 本例题空气中透镜的光焦度为 $\Phi_2=\frac{1}{24}\text{cm}^{-1}$，空气中球面镜的光焦度为 $\Phi_3=\frac{1}{6}\text{cm}^{-1}$，由于成像过程依次为透镜、球面镜、透镜，则总光焦度为 $\Phi=\Phi_2+\Phi_3+\Phi_2=\frac{1}{24}\ \text{cm}^{-1}+\frac{1}{6}\ \text{cm}^{-1}+\frac{1}{24}\ \text{cm}^{-1}=\frac{1}{4}\ \text{cm}^{-1}$. 也可以将其视为折射面与反射面的组合，本题折射面为平面，光焦度 $\Phi_2'=0$，而反射面的光焦度 $\Phi_3'=-\frac{2\times 1.5}{-12\text{cm}}=\frac{1}{4}\ \text{cm}^{-1}$. 需要注意，尽管反射面成像与折射率无关，但焦距与光焦度的关系为 $f=\frac{n}{\Phi}$，所以反射面的光焦度与折射率是有关的. 于是总光焦度为 $\Phi=\Phi_2'+\Phi_3'+\Phi_2'=0+\frac{1}{4}\ \text{cm}^{-1}+0=\frac{1}{4}\ \text{cm}^{-1}$.

例 2.8

一种潜望镜的设计方案如图 2.5.10 所示，其中有两个全反射棱镜，试说明各个元件的作用.

解 潜望镜的作用相当于望远镜，其竖直镜筒是可以伸缩的，而且要求在伸缩过程中，不需调节各光学部件，也能看清远处物体.

因此，最前部的透镜组 L_1、L_2 应当不仅能够起到聚光的作用，还要将远处的平行光束依然变换为平行光束，这样就能够使光束以全反射的方式经过棱镜组 P_1、P_2，保持足够的光通量达到透镜组 L_3、L_4.

透镜 L_1 的像方焦点与透镜 L_2 的物方焦点重合，这种组合方式称为望远镜结构. 为增大光通量，L_1 的孔径尽量大，因而要使焦距 $f_1 > f_2$，这样可使光束变细而不损失通量，这是一种收缩光束的结构. 由于平行光束经过棱镜组后依然是平行光束，对于透镜 L_3，就相当于物在无穷远处，经 L_3 后在其像方焦平面成像 I_o. I_o 作为透镜 L_4 的物，成一个像，作为眼睛的物. 由于正常视力的人眼对距离 25cm 处的物体观察起来很轻松，而且眼睛是贴着 L_4 观察的，所以 I_o 经 L_4 成一个像距为 -25cm 的虚像即可. 透镜组 L_3、L_4 相当于一个望远镜.

可以看出，最终所成的是一个倒立的像，如图 2.5.11 所示.

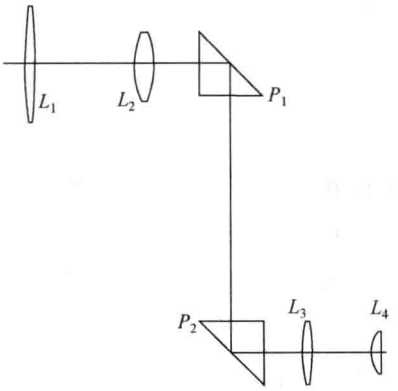


图 2.5.10　潜望镜

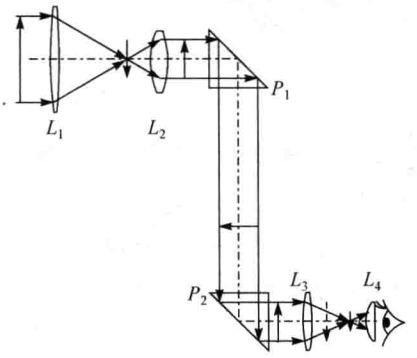


图 2.5.11　潜望镜的成像过程

2.5.4　薄透镜成像的作图法

由薄透镜焦点和光心的特性，可知下列的特殊光线之间有一一对应的物像关系：

平行于光轴的物方入射光线⇔经过像方焦点的光线；

经过物方焦点的入射光线⇔平行于光轴的像方光线；

经过光心的物方入射光线⇔经过光心并与入射光线方向相同的像方光线.

上述三对特殊的光线之间是物像关系，因而称它们是相互共轭的. 如图 2.5.12 和图 2.5.13 所示.

值得注意的是，对于负透镜，其物方焦点实际上位于像方，而像方焦点实际上位于物方.

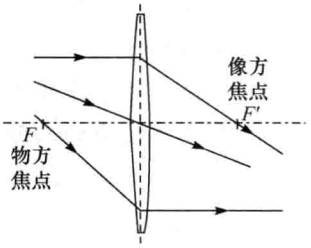


图 2.5.12　凸透镜的共轭光线

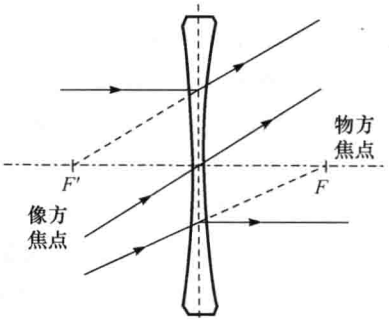


图 2.5.13　凹透镜的共轭光线

例 2.9

用逐次成像的方法求图 2.5.14 中最后的像.

解 在本例题中应用作图法，会发现，L_1 的像成在第二透镜的像方，即对于 L_2，L_1 的像是虚物. 虚物是不能作为物发光成像的. 因而需要特殊处理.

第一种方法，对 L_1 的成像光线，利用焦平面的特性，作出经 L_2 的共轭光线，以确定经 L_2 的像，如图 2.5.15 所示.

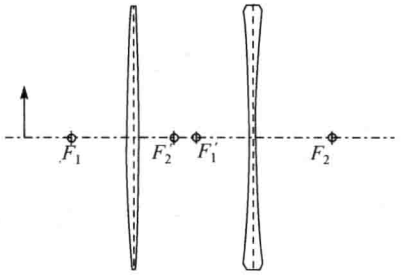


图 2.5.14　作图求出像

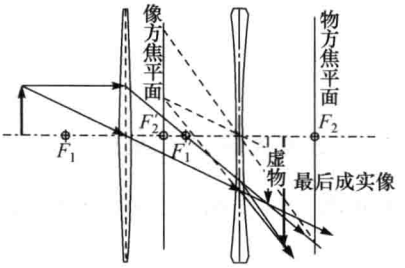


图 2.5.15　对 L_2 的任意光线作出其共轭光线

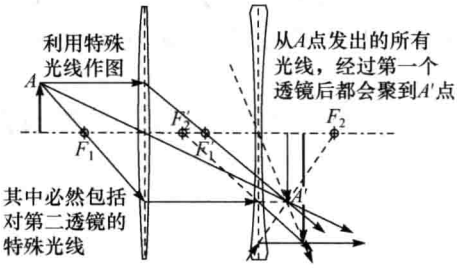


图 2.5.16　全部利用特殊光线作图

第一种方法比较麻烦，可以采用第二种方法，如图 2.5.16 所示，射向 L_2 的光线，都是要会聚到虚物处的，因而可以任意选两条或更多的特殊的光线，本例题选了射向第一透镜的实像，并且经过 L_2 物方焦点的、平行于光轴的和经过光心的三条光线，则很容易就确定了折射后的共轭光线，并求出了最后的像.

2.6 理想共轴光具组成像的高斯定理

2.6.1 理想光具组

由多个球面透镜、反射球面或折射球面共轴放置所组成的成像系统，就是**共轴球面系统**，由遵循高斯成像公式的元件构成的成像系统，也称**理想光具组**.

只能使傍轴光成像的薄透镜并不是实用的成像元件，通常只有理论上的意义. 实际上，为了获得优质的像，照相镜头、望远镜、显微镜、投影镜头等几乎所有的成像系统都采用了多个共轴的透镜和反射镜，其中的透镜都是厚透镜，这些厚透镜的组合能够消除各种像差. 这样的系统应用广泛，因而对其物像关系的研究是十分必要的.

首先，这样的系统中，每个按照高斯光学理论成像的折射球面成了基本的成像单元，每个厚透镜有两个折射球面.

其次，光具组的成像是一种逐次的过程，不仅整个光具组是这样，每个厚透镜也是如此. 因而可以采用逐次成像法得出系统的物像关系.

但是，如果对每一个不同的系统，都反复这样计算，显然是不合适的，因而有必要找出复杂系统成像的基本特性和共同规律.

本节讨论的共轴光具组是一种可以完美成像的理想光学系统. 该系统应当满足如下的要求：

(1) 物方每一个点对应于像方的一个点，两者是一对共轭点；

(2) 物方每一条直线对应于像方的一条直线点，两者是一对共轭直线；

(3) 物方每一个平面对应于像方的一个平面，两者是一对共轭平面；

(4) 光轴上任何一点的共轭点仍在光轴上；

(5) 任何垂直于光轴的平面，其共轭面仍与光轴垂直；

(6) 在垂直于光轴的同一个平面内，横向放大率相同；

(7) 在垂直于光轴的不同平面内，横向放大率一般不同；但是，如果有两个垂轴平面内的横向放大率相同，则该系统内横向放大率处处相同. 这样的系统称为望远系统.

正是基于上述要求，可以定义理想共轴光学系统的基点和基面.

对于上述的要求中的第(3)条，可以以下例子加以说明.

例 2.10

确定单个成像元件中横向放大率为+1的一对共轭平面.

解 设光学元件的物方和像方焦距分别为 f 和 f'，共轭平面的物距和像距分别为 s 和 s'，则由高斯公式 $\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$，可得 $s'=\frac{sf'}{s-f}$，横向放大率为 $\gamma=-\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}=-\frac{n}{n'}\frac{f'}{s-f}=-\frac{n}{n'}\frac{1}{\frac{s}{f'}-\frac{f}{f'}}=+1$，由此可得

$$s=f'\left(\frac{f}{f'}-\frac{n}{n'}\right)=f'\left(\frac{n}{n'}-\frac{n}{n'}\right)=+0$$

上式中结果表示为+0，是强调实物的物距由正值而趋于0. 而像距

$$s'=\frac{sf'}{s-f}=\frac{1}{\frac{1}{f'}-\frac{f}{sf'}}=\frac{1}{\frac{1}{f'}-\frac{n}{n'}\frac{1}{s}}=\frac{1}{-\infty}=-0$$

式中的结果表示为−0，是因为实物成像，分母为$-\infty$，强调实物所成的是虚像.

这就是单个成像元件，即单个折射面、单个反射面或单个薄透镜的主平面. 即单个成像单元中横向放大率为+1的一对共轭平面是重合的.

反之，若是虚物成像，则物距为−0，而像距为+0是指虚物所成为实像.

从上述计算过程可以看出，横向放大率为+1的共轭平面是唯一的.

例 2.11

讨论焦平面的共轭平面.

解 如图 2.6.1 所示，从无穷远处一点发出的光线，到达透镜时，可以认为相互平行.

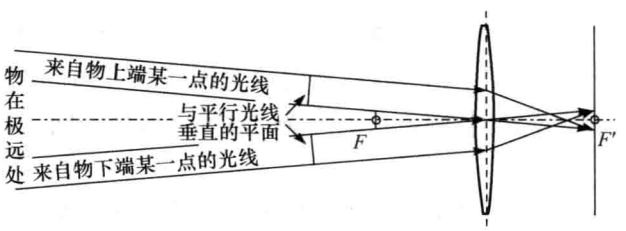


图 2.6.1 焦平面的共轭平面

相互平行的物方光线会聚于像方焦平面上，则无穷远处的物平面，其像平面就是像方焦平面.

相应地，物方焦平面与无穷远处的像方平面共轭.

如果作上述平行光线的垂面，则从无穷远处的物点到该平面上光点的距离（光程）是相等的. 而物点到像点的光程也是相等的，因而从上述垂面上各点到焦平面上的像点的光程是相等的. 这是一个在波动光学中处理干涉衍射问题时经常被引用的一个结论.

2.6.2 共轴球面系统的基点和基面

对于薄透镜，只要知道了光心位置以及物方和像方的焦点位置，则可以用物像公式方便地解决任何光线的成像问题. 同样，对于共轴的球面系统，确定了基本的点和面后，也可以完全确定物像关系.

共轴球面系统的基点和基面如下.

1. 焦点

物方无穷远处的物点在像方的共轭点就是像方焦点，记为 F'；像方无穷远处的像点在物方的共轭点就是物方焦点，记为 F.

焦点就是平行于系统光轴的光束的共轭点.

2. 焦平面

与无穷远处的像平面共轭的物平面为物方焦平面，记为 $\mathscr{F}$；与无穷远处的物平面共轭的像平面为像方焦平面，记为 $\mathscr{F}'$.

也就是说，平行光束，其实就是来自无穷远处的一列同心光束，将会聚在像方焦平面上的一个点；从物方焦平面上一点发出的同心光束，将会聚于无穷远处，其实就是像方的平行光束. 即中心在焦面上的同心光束，其共轭光束就是平行光束.

3. 主平面

横向（垂轴）放大率等于+1 的一对共轭平面为主平面. 物方主平面记为 $\mathscr{H}$，像方主平面记为 $\mathscr{H}'$.

对于薄透镜，通过光心且与光轴垂直的平面，是物方和像方的分界面，既处于物方也处于像方，而且横向放大率为+1，所以就是其主平面.

距离凸透镜 $2f$ 的一对共轭面，其横向放大率为−1，所以不是主平面.

同样，单个反射球面，或折射球面，其主平面就是过球面顶点的垂轴平面.

4. 主点

主平面与主光轴的交点为**主点**（principal point）. 物方主点记为 H，像方主点记为 H'.

如果是厚透镜，或者是一般的共轴光具组，其物方和像方的主平面往往是分离

的. 那么，应当如何确定呢？下面通过具体的例子进行讨论.

例 2.12

如图 2.6.2 所示，两个已知的透镜，相对位置确定，共轴放置，确定该光具组的焦平面和主平面.

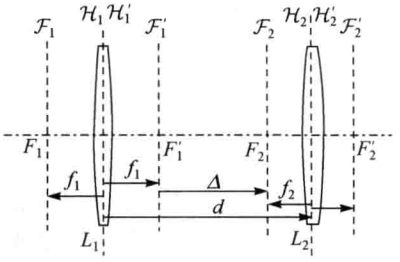


图 2.6.2　透镜组

解　图 2.6.2 中已标出了每个透镜的主平面和焦平面. 第二透镜主平面 $\mathcal{H}_2$ 到第一透镜主平面 $\mathcal{H}_1'$ 的距离为 d，而第二透镜物方焦平面 $\mathcal{F}_1$ 到第一透镜像方焦平面 $\mathcal{F}_2'$ 的距离为 Δ，Δ 称为光学间隔. 按照符号约定，F_2 在 F_1' 右侧，$\Delta>0$；$\mathcal{F}_2$ 在 $\mathcal{F}_1'$ 左侧，$\Delta<0$. 且

$$\Delta=d-f_1-f_2$$

首先确定光具组的主平面. 为了求出光具组的主平面，只要求出其中一对横向放大率为 $+1$ 的共轭平面即可.

设物方主平面到第一透镜主平面 $\mathcal{H}_1$ 的物距为 s_1，则该平面经 L_1 成像，由高斯公式 $\dfrac{1}{s_1'}+\dfrac{1}{s_1}=\dfrac{1}{f_1}$，得到像距为 $s_1'=\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}$.

再经 L_2 第二次成像，物距为 $s_2=d-s_1'=d-\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}$，像距为

$$s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}=\frac{\left(d-\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}\right)f_2}{d-\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}-f_2}$$

两次成像的总横向放大率为

$$\gamma=\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)=\frac{f_1}{s_1-f_1}\frac{f_2}{d-\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}-f_2}=\frac{f_1f_2}{ds_1-df_1-s_1f_1-s_1f_2+f_1f_2}=+1$$

整理，得到 $s_1(d-f_1-f_2)-df_1+f_1f_2=f_1f_2$，解得

$$s_1=\frac{df_1}{d-f_1-f_2} \tag{1}$$

这是物方主平面 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的距离. 由于这是一个线性方程的解，因而解是唯一的，即物方主平面是唯一的.

同理可得像方主平面 $\mathcal{H}'$ 到第二透镜主平面 $\mathcal{H}_2'$ 的距离为

$$s_2'=\frac{df_2}{d-f_1-f_2} \tag{2}$$

透镜组的物方和像方主平面如图 2.6.3 所示.

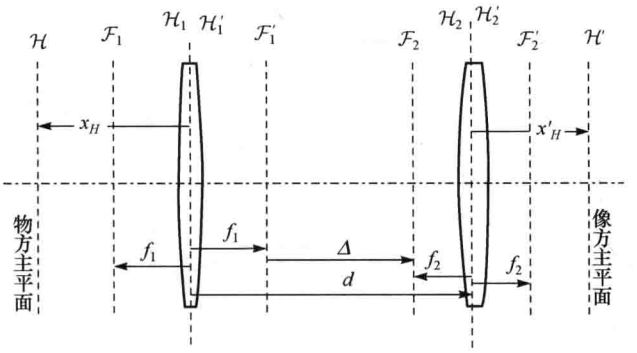


图 2.6.3 透镜组的主平面

将式(1)和式(2)写为如下形式:

$$x_H=\frac{df_1}{\Delta} \tag{3}$$

$$x_H'=\frac{df_2}{\Delta} \tag{4}$$

下面再确定光具组的焦平面. 与光轴平行的入射光线经过光具组之后与光轴的交点就是像方焦点.

平行光经 L_1 成像于 L_1 的像方焦点 F_1'处,像距为 $s_1'=f_1$. 再经 L_2 第二次成像,物距为

$$s_2=d-s_1'=d-f_1$$

像距为

$$s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}=\frac{(d-f_1)f_2}{d-f_1-f_2}$$

像点就是光具组的像方焦点 F'. 上述距离是 F'到 L_2 主平面 $\mathscr{H}_2'$的距离. 若像方的距离都从像方主平面 $\mathscr{H}'$算起,则像方焦平面 $\mathscr{F}'$到像方主平面 $\mathscr{H}'$的距离为

$$s_2'-x_H'=\frac{(d-f_1)f_2}{d-f_1-f_2}-\frac{df_2}{d-f_1-f_2}=-\frac{f_1f_2}{d-f_1-f_2}=-\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

定义上述距离为光具组的像方焦距 f',则

$$f'=-\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

同理可得光具组的物方焦距,即物方焦平面 $\mathscr{F}$到物方主平面 $\mathscr{H}$的距离为

$$f=-\frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

如图 2.6.4 所示.

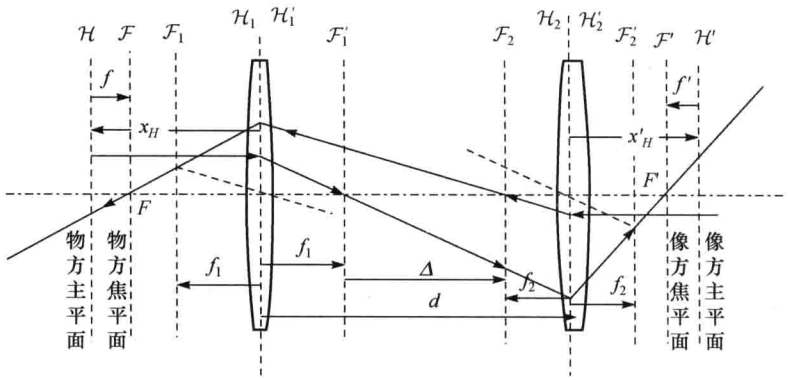


图 2.6.4　透镜组的焦平面

由于透镜组在空气中，其物方焦距与像方焦距相等.

也可以据此得到透镜组的光焦度，为

$$\Phi=\frac{n}{f}=-\frac{d-f_1-f_2}{f_1 f_2}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2}=\Phi_1+\Phi_2-d\Phi_1\Phi_2$$

也可以用作图法求出透镜组的主平面和焦平面，如图 2.6.5 所示.

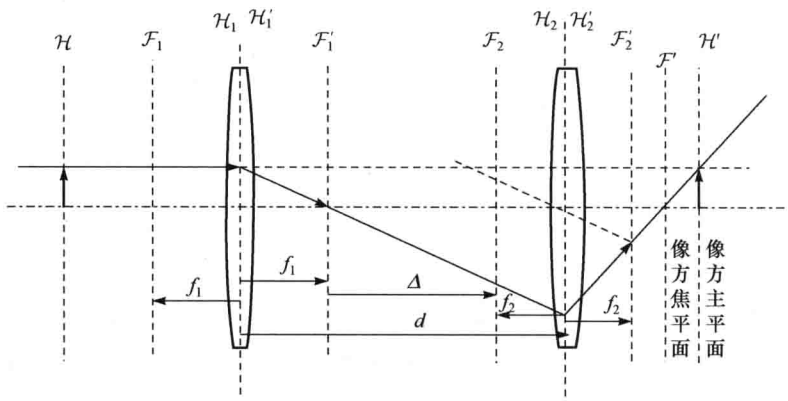


图 2.6.5　用作图法求透镜组的主平面和焦平面

图 2.6.5 中，物方一条与光轴平行的入射光线，按作图法可得到其像方光线，像方光线与光轴的交点就是像方焦点 F'，据此得到像方焦平面 $\mathscr{F}'$.

由于主平面是横向放大率为 +1 的一对共轭平面，即在主平面上，物与像等高. 上述物方的入射光线一定经过物方主平面上的一点，该点一定在像方出射光线

上，在该处对应的像点与物点等高. 于是可以将入射光线延长，延长线与出射光线的交点就是该物点在像方的像点. 由于像方主平面是唯一的，所以上述交点一定在像方主平面 $\mathscr{H}'$ 上.

同理可以求出物方焦平面 $\mathscr{F}$ 和物方主平面 $\mathscr{H}$.

对于一般的情形，可按以下方法处理.

系统的焦点、焦平面可以按定义直接得到. 在仅知道了焦点的情况下，可以用作图法求出其主平面. 假设已知主平面 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}'$，其上有一对共轭点 M 和 M'，如图 2.6.6 所示. 则从 M 作两条光线：经过物方焦点 F 的 1 和平行于光轴的 2.1 的共轭光线 $1'$ 必经过 M' 点且平行于光轴；同样，2 的共轭光线 $2'$ 必须过 M' 点和像方焦点 F'，在无法确定系统组成的情况下，则 $2'$ 只能是从 M' 到 F' 的连线. 由于两个主平面 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}'$ 上的横向放大率为 $+1$，则 M' 与 M 等高，或者 M' 与 M 的连线平行于光轴.

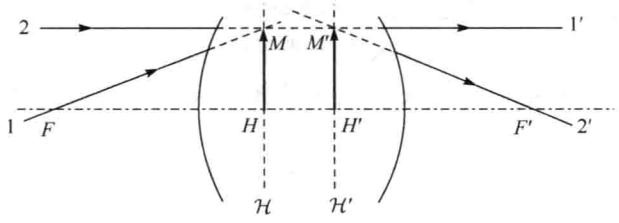


图 2.6.6　光具组主平面的确定

从上述过程也可以得到确定系统主面的方法：过物方焦点的光线与其平行于光轴的共轭光线的交点，就是物方主平面上的一点，过此点的垂轴平面就是物方主平面. 平行于光轴的入射光线与过像方焦点的共轭线的交点，就是像方主平面上的一点，过此点的垂轴平面就是像方主平面.

5. 节点

如图 2.6.7 所示，1 和 $1'$ 是一对共轭光线，这两条光线与光轴的夹角分别为 u 和 u'，与光轴的交点分别为 N 和 N'. 如果 $u'=u$，则 N 和 N' 被称为**节点**(nodal point). 需要指出的是，1 和 $1'$ 是任意的一对共轭光线.

因而节点的定义应当是：光轴上角放大率等于 1 的一对共轭点. 其中，物方节点记为 N，像方节点记为 N'.

对于两侧介质相同的薄透镜，物方节点、像方节点重合，就是其光心.

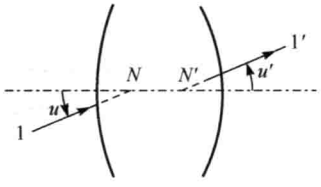


图 2.6.7　光具组的节点

2.6.3　共轴球面系统的物像关系

对于已知基点和基面的共轴球面光学系统，可

以用简单的方法获得其物像关系.

1. 作图法

如图 2.6.8 所示,已知光具组的基点和基面,物 PQ 发出的光线射到物方主平面 $\mathscr{H}$ 上,由于主平面的横向放大率恒等于+1,则 $\mathscr{H}$ 上的入射点与像方主平面 $\mathscr{H}'$ 上的出射点对于光轴等高. 这样,再根据系统焦点的定义,可以得到两条像方共轭光线,方便地确定像 $P'Q'$ 的位置、方向和大小.

与单个光学元件,如折射球面、反射球面、薄透镜等相比,复杂的理想共轴光具组往往物方主平面 $\mathscr{H}$ 和像方主平面 $\mathscr{H}'$ 相互分离,甚至可能位置交错,例如,物方主平面比像方主平面更靠近像方. 物方焦平面 $\mathscr{F}$ 和像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 相对于主平面 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{H}'$ 的分布也不是对称的.

同样,对已知基点的光具组,则可以方便地求得任何一条入射光线的像方光线,例如,图 2.6.9 中所示的情形,既可以作一条平行于光轴且与入射光线通过物方焦平面 $\mathscr{F}$ 上同一点的辅助光线 1,1 的共轭光线 1′通过像方焦点 F' 且与入射光线的像方光线平行;也可以利用与入射光线平行且通过物方焦点 F 的辅助光线 2,其共轭光线 2′平行于光轴且与入射光线的像方光线交于像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 上的同一点.

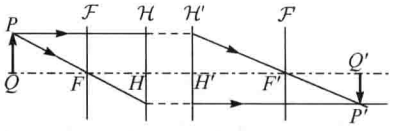


图 2.6.8　共轴球面系统作图法

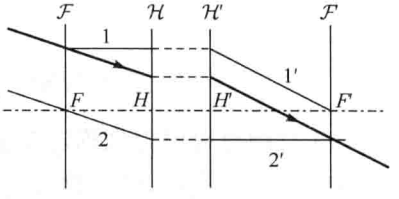


图 2.6.9　共轴球面系统中的共轭光线

2. 计算法

对于上述用作图法获得的物像关系,也可以用公式表达.

图 2.6.10 中,所有的距离(物距、像距、焦距等)既可以从主平面算起,也可以

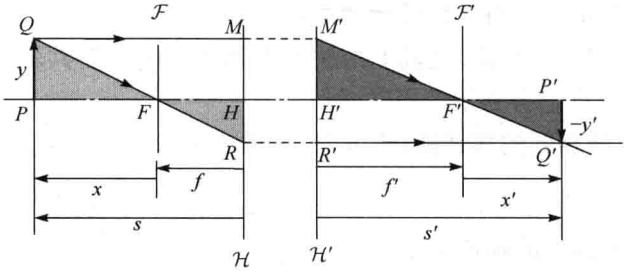


图 2.6.10　理想光具组的物像公式

从焦平面算起，而且仍然按照本章前面的符号约定，记$\overline{HR}=\overline{P'Q'}=-y'$，$\overline{M'H'}=\overline{PQ}=y$，$\overline{PF}=x$，$\overline{P'F'}=x'$. 系统的物方焦距 $f=\overline{HF}$，像方焦距 $f'=\overline{H'F'}$，物距 $s=\overline{HP}$，像距 $s'=\overline{H'P'}$.

$\triangle PFQ\sim\triangle HFR$，所以$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{HR}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{FH}}$，即$\dfrac{y}{-y'}=\dfrac{x}{f}=\dfrac{s-f}{f}$；

$\triangle P'F'Q'\sim\triangle H'F'M'$，所以$\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{H'M'}}=\dfrac{\overline{P'F'}}{\overline{F'H'}}$，即$\dfrac{y}{-y'}=\dfrac{f'}{x'}=\dfrac{f'}{s'-f'}$.

则有$\dfrac{s-f}{f}=\dfrac{f'}{s'-f'}$，以及$\dfrac{x}{f}=\dfrac{f'}{x'}$. 整理后可得到

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1 \tag{2.6.1}$$

$$xx'=ff' \tag{2.6.2}$$

式(2.6.1)形式上与薄透镜的高斯公式一样，这就是理想共轴球面光学系统的高斯公式. 只是物距、物方焦距要从物方主点 H 或物方主平面 $\mathscr{H}$ 算起，而像距、像方焦距要从像方主点 H' 或像方主平面 $\mathscr{H}'$ 算起.

式(2.6.2)就是理想光具组的牛顿公式，物距从物方焦点 F 或物方焦平面 $\mathscr{F}$ 算起，而像距要从像方焦点 $\mathscr{F}'$ 或像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 算起.

对已知参数的共轴球面系统，无论用作图法还是计算法，其原理和步骤都与单个薄透镜的成像情况相同.

2.6.4 基点和基平面的确定

由已知的系统的基点和基平面求整个系统的基点和基平面.

1. 作图法

利用已知系统的基点和基平面，求出整个系统的基点和基平面.

例如，已知两个光学系统的基点，如图 2.6.11 所示，作一条平行于光轴的入射线 1，经系统 1 后，成为过该系统的像方焦点 F_1' 的光线 1′，为确定这一光线经过系统 2 后的方向，过系统 2 的物方焦点 F_2 作辅助线 2//1′，经过系统 2 后，2 的共轭光线与 1′的共轭光线在系统 2 的像方焦平面相交，由此作出 1′的共轭光线 1″. 1″与

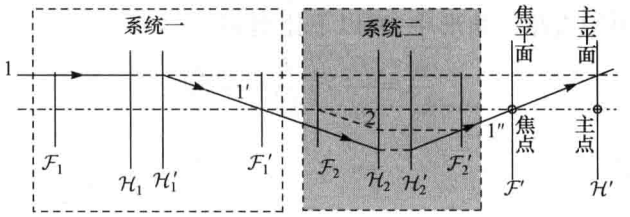


图 2.6.11 用作图法确定光具组的基点和基平面

光轴的交点就是整个系统的像方焦点 F'，像方光线 $1''$ 与物方光线 1 的延长线的交点，是等高线，即向放大率等于 $+1$，所以该点必是像方主平面 $\mathscr{H}'$ 上的一点.

由此可以求出系统像方焦平面、像方焦点、像方主平面、像方主点.

按相同的步骤，可以求出系统的物方焦平面、物方焦点、物方主平面、物方主点.

2. 计算法

如图 2.6.12 所示的两个理想光具组，为了表示这两个系统的相对位置，可以这样做：①记第一系统像方焦点到第二系统物方焦点间距 $\overline{F_1'F_2}=\Delta$，$\Delta$ 称为两系统的间隔；②记第一系统像方主点到第二系统物方主点间距 $\overline{H_1'H_2}=d$. 其中 Δ 和 d 的正负值规定与本书的符号系统一致. 可见两者之间的关系为

$$\Delta=d-f_1'-f_2 \tag{2.6.3}$$

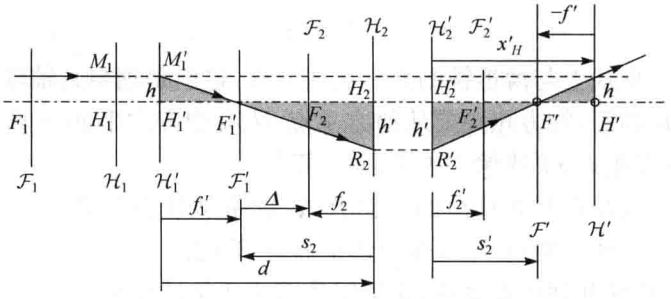


图 2.6.12　光具组基点位置的计算

作一条平行于光轴的入射光线，该光线的共轭光线经过系统 1 的像方焦点 F_1'，再经过系统 2 后，共轭光线与光轴的交点就是整个系统的像方焦点 F'，与入射光线的交点在整个系统的像方主平面 $\mathscr{H}'$ 上.

整个系统的像方焦距为 $f'=\overline{H'F'}$，而整个系统的像方主平面 $\mathscr{H}'$ 的位置可以用系统 2 的像方主平面 $\mathscr{H}_2'$ 到 $\mathscr{H}'$ 的距离标记，为 $x_H'=\overline{H_2'H'}$.

对于系统 2，由于 F_1' 与 F' 共轭，有 $\dfrac{f_2'}{s_2'}+\dfrac{f_2}{s_2}=1$，可得到

$$s_2'=\frac{f_2's_2}{s_2-f_2}=\frac{f_2's_2}{\Delta} \tag{2.6.4}$$

在两对对顶的直角三角形中，有以下比例关系：

$$\frac{h}{h'}=\frac{f_1'}{s_2},\quad \frac{h}{h'}=\frac{-f'}{s_2'}$$

则 $\dfrac{f_1'}{s_2}=\dfrac{-f'}{s_2'}$，即

$$s_2'=-\frac{s_2f'}{f_1'} \tag{2.6.5}$$

由式(2.6.4)和式(2.6.5)可得$-\frac{s_2 f'}{f_1'}=\frac{f_2' s_2}{\Delta}$. 可解得整个系统的像方焦距$\overline{H'F'}$为

$$f'=-\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

又根据式(2.6.5),得

$$s_2'=-\frac{s_2 f'}{f_1'}=\left(-\frac{\Delta+f_2}{f_1'}\right)\left(-\frac{f_1' f_2'}{\Delta}\right)=\frac{(\Delta+f_2)f_2'}{\Delta}$$

而

$$x_H'=\overline{H_2'H'}=s_2'-f'=\frac{(\Delta+f_2)f_2'}{\Delta}+\frac{f_1' f_2'}{\Delta}=\frac{(f_1'+\Delta+f_2)f_2'}{\Delta}$$

即可得到整个系统像方主平面的位置

$$x_H'=\frac{d f_2'}{\Delta} \tag{2.6.6}$$

而像方焦距也可以表示为

$$f'=-\frac{f_1' f_2'}{\Delta}=-\frac{f_1'}{d}x_H' \tag{2.6.7}$$

整个系统的物方主平面$\mathscr{H}$的位置用 H 到系统 1 的物方主平面$\mathscr{H}_1$的距离表示,记为x_H,物方焦距f定义为物方焦点F到物方主平面$\mathscr{H}$的距离. 则根据理想光学系统的共轭性,只需要将式(2.6.6)和式(2.6.7)中相应的共轭量作对换,即可得系统的物方焦平面和物方主平面的位置,即$f_1'\Leftrightarrow f_2$,$f_2'\Leftrightarrow f_1$,$f'\Leftrightarrow f$,$x_H'\Leftrightarrow x_H$,有

$$x_H=\frac{d f_1}{\Delta} \tag{2.6.8}$$

$$f=-\frac{f_1 f_2}{\Delta}=-\frac{f_2}{d}x_H \tag{2.6.9}$$

在望远镜、显微镜中常用的**惠更斯目镜**由两片凸透镜组成,结构如图 2.6.13(a)所示. 其中朝向视场的一片称为向场镜(简称场镜),朝向眼睛的一片称为接目镜.

根据光具组基点的公式 ,可算得惠更斯目镜的基点和基平面,并标于图 2.6.13(b)中,基平面的参数为

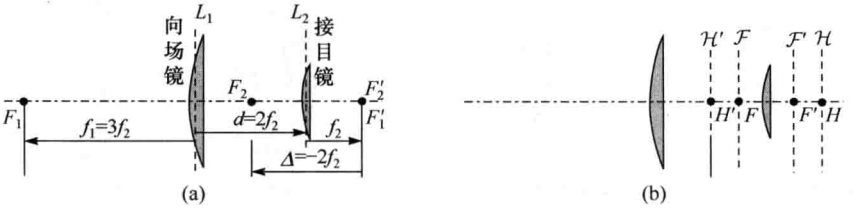


图 2.6.13 惠更斯目镜

$$x'_H=\frac{df'_2}{\Delta}=-f_2,\quad x_H=\frac{df_1}{\Delta}=-3f_2,\quad f=f'=-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}=\frac{3}{2}f_2$$

可见，对于目镜之外的物，惠更斯目镜只能成缩小的实像，而目镜的作用是要成一个放大的虚像以便于观察，所以这种目镜不能用于观察实物，而是用在显微镜中，观察物镜所成的实像，该实像位于目镜的物方焦平面处.

图 2.6.14 所示为另一种目镜的结构，即**冉斯登目镜**. 这种目镜的基点为

$$x'_H=\frac{df'_2}{\Delta}=-f_2,\quad x_H=\frac{df_1}{\Delta}=-f_2,\quad f=f'=-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}=f_2$$

冉斯登目镜可用于观察实物，贴近向场镜的实物经目镜成一个放大的虚像，但其主要用途与惠更斯目镜一样，用作显微镜和望远镜的目镜.

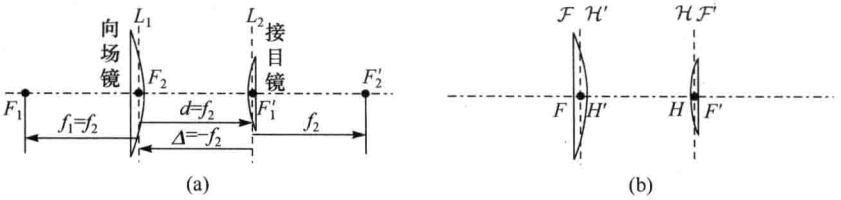


图 2.6.14　冉斯登目镜

图 2.6.15～图 2.6.18 中给出了一些典型厚透镜主平面的大致位置，读者可自行验证.

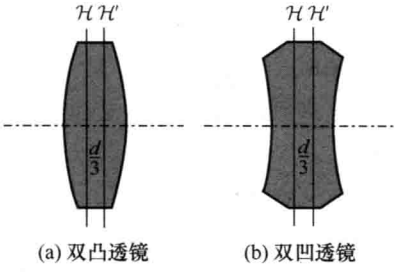


图 2.6.15　对称型厚透镜

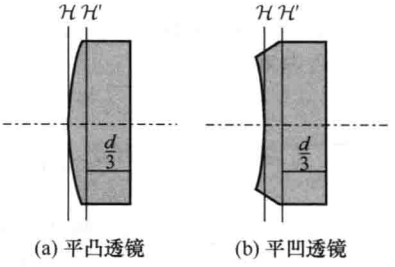


图 2.6.16　平凸和平凹厚透镜

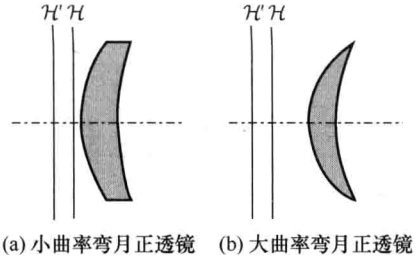


图 2.6.17　弯月形正厚透镜

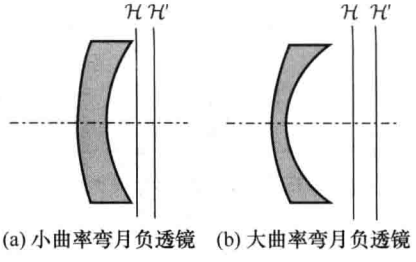


图 2.6.18　弯月形负厚透镜

2.7 非傍轴光线的阿贝正弦条件与齐明点

球面镜、薄透镜等成像元件对傍轴光线才能很好地保持同心光束的同心性不变，即要求光线束的发散角不能很大，因而限制了成像过程中的光通量. 本节讨论非傍轴光成像的条件，以及对非傍轴光成像的透镜.

2.7.1 透镜组的阿贝正弦条件

如图 2.7.1 所示，$P'Q'$为傍轴小物 PQ 的像，设该像已经消除了球差，光具组物方、像方的折射率分别为 n,n'. 其中各条光线满足以下条件：$PS//$光轴；$PN//QM$；$PR\perp QM$；$P'R'\perp M'Q'$；R,R'为垂足.

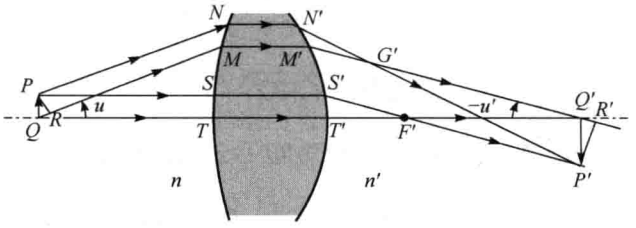


图 2.7.1 非傍轴光线成像

由于 $P'Q'$为傍轴小像，因而线段的长度有

$$\overline{F'Q'}\approx\overline{F'P'},\quad \overline{G'R'}\approx\overline{G'P'}$$

又由于物像间的等光程性，各条路径的光程满足

$$\overset{\frown}{QMM'Q'}=\overset{\frown}{QTT'Q'},\quad \overset{\frown}{PNN'P'}=\overset{\frown}{PSS'P'}$$

由于 $PS//$光轴，$PN//QM$，所以有

$$\overset{\frown}{PSS'F'}=\overset{\frown}{QTT'F'},\quad \overset{\frown}{PNN'G'}=\overset{\frown}{RMM'G'}$$

$$\begin{aligned}\overline{QR}&=\overset{\frown}{QMM'Q'}-\overset{\frown}{RMM'G'}-\overline{G'Q'}=\overset{\frown}{QTT'Q'}-\overset{\frown}{PNN'G'}-\overline{G'R'}+\overline{Q'R'}\\&=\overset{\frown}{QTT'F'}+\overline{F'Q'}-\overset{\frown}{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overset{\frown}{PSS'F'}+\overline{F'P'}-\overset{\frown}{PNN'P'}+\overline{Q'R'}\\&=\overset{\frown}{PSS'P'}-\overset{\frown}{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overset{\frown}{PNN'P'}-\overset{\frown}{PNN'P'}+\overline{Q'R'}=\overline{Q'R'}\end{aligned}$$

注意，上述推导过程中，线段符号上为横线，表示长度；符号上为弧线，表示光程. 即 $n\overline{QR}=n'\overline{Q'R'}$，而$\overline{QR}=\overline{PQ}\sin u$，$\overline{Q'R'}=\overline{P'Q'}\sin(-u')$.

记物高$\overline{PQ}=y$，像高$\overline{P'Q'}=-y'$，则有

$$ny\sin u=n'y'\sin u' \tag{2.7.1}$$

式(2.7.1)称为**阿贝正弦条件**(阿贝，Ernst Karl Abbe，1840～1905，德国).

阿贝正弦条件是在轴上已消除球差的前提下，傍轴物点的一个大口径光束成像的充分必要条件. 即阿贝正弦条件可以不要求光线满足傍轴条件.

2.7.2 齐明透镜与齐明点

一个半径为 r、折射率为 n 的透明介质球，球内有一物点 Q，球外介质的折射率为 n'（图 2.7.2）. 球心 C 与点 Q 的连线就是该透明球的一个光轴.

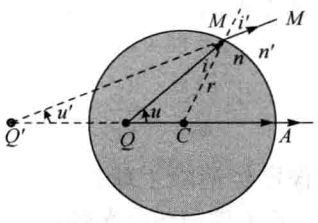


图 2.7.2　透明球的齐明点

自 Q 点沿任意方向发出一条光线，在球面上的入射点为 M，折射光线为 MN，折射角和入射角之间的关系可由折射定律 $n'\sin i'=n\sin i$ 确定. 由于像方的折射光束是发散的，不可能会聚成实像. 将折射光线 MN 反向延长后，与光轴交于 Q' 点，MN 为虚光线. 若所有的折射光线，无论是否满足傍轴条件，都构成关于 Q' 点的同心光束，则 Q' 点为 Q 的虚像点. 按费马原理，物像之间的所有路径都是等光程的，于是应有

$$n\overline{QM}-n'\overline{MQ'}=0 \tag{2.7.2}$$

在 $\triangle MCQ'$ 和 $\triangle QCM$ 中，注意到 $\angle CMQ'=i'$，按正弦定理，分别有 $\dfrac{\overline{MQ'}}{\sin\angle C}=\dfrac{\overline{CQ'}}{\sin i'}$，$\dfrac{\overline{QM}}{\sin\angle C}=\dfrac{\overline{CQ}}{\sin i}$，两式两端相除，得到 $\dfrac{\overline{MQ'}}{\overline{QM}}=\dfrac{\overline{CQ'}}{\overline{CQ}}\dfrac{\sin i}{\sin i'}=\dfrac{n'\overline{CQ'}}{n\overline{CQ}}$. 而由式(2.7.2)，可得到 $\dfrac{\overline{MQ'}}{\overline{QM}}=\dfrac{n}{n'}$，于是有

$$\frac{\overline{CQ'}}{\overline{CQ}}=\frac{n^2}{n'^2} \tag{2.7.3}$$

满足式(2.7.3)的 Q 点和 Q' 点，是非傍轴光线经折射球面成为一对共轭的物像点的必要条件.

这样共轭的物像点当然不只一对. 由于观察者始终在球的一侧，而 Q 点又在球内，所以实际上 $\overline{CQ}<r$.

选择一对特殊的物像点，使其满足以下关系

$$\begin{cases}\overline{CQ}=\dfrac{n}{n'}r\\ \overline{CQ'}=\dfrac{n}{n'}r\end{cases} \tag{2.7.4}$$

由于 $\overline{CM}=r$，则 $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CM}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CQ'}}=\dfrac{n}{n'}$，于是 $\triangle QCM\sim\triangle MCQ'$，这时 $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MQ'}}=\dfrac{n}{n'}$，式(2.7.2)当然能够成立.

这样的一对共轭物像点被称为**齐明点或不晕点**(aplanatic point). 以这种方式

成像的透明球被称为**齐明透镜**(aplanatic lens).

若长度为 y 的小物位于 Q 点,在 Q' 点成一个长度为 y' 的像,如图 2.7.3 所示,则 $\frac{y'}{y}=\frac{\overline{CQ'}}{\overline{CQ}}$,即

$$\frac{y'}{y}=\frac{n^2}{n'^2} \tag{2.7.5}$$

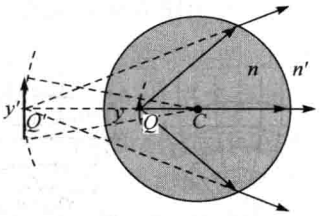


图 2.7.3 齐明点处物像的横向放大率

在 $\triangle MCQ'$ 和 $\triangle QCM$ 中,由于 $\sin u=\frac{r}{\overline{CQ}}\sin i$,$\sin u'=\frac{r}{\overline{CQ'}}\sin i'$,于是 $\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{CQ'}}{\overline{CQ}}\frac{\sin i}{\sin i'}$,即 $\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{n}{n}$. 由式(2.7.5),可得 $\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{\sin u}{\sin u'}$,即 $ny\sin u=n'y'\sin u'$,这正是阿贝正弦条件.

可见齐明点是单球面折射时满足阿贝正弦条件的一对共轭点.

实际成像时,当然不可能将物置于玻璃球之内的齐明点处,而是采用"油浸物镜". 如图 2.7.4 所示,将一滴折射率与玻璃相等的透明油滴在样品上,再将玻璃半球浸入油滴中,若样品位于球面的一个齐明点处,则成像于另一齐明点处.

高倍的显微物镜的工作原理正是如此.

图 2.7.5 中所示的弯月形透镜是另一种齐名透镜. 其中,大球面 Σ_1 的球心为 C_1,位于 C_1 的物点 Q,经球面 Σ_1 折射后仍成虚像于 C_1 点. 而该虚像是小球面 Σ_2 的实物,处于折射率为 n 的介质中. 如果 C_1 恰好是球面 Σ_2 的一个齐明点,则在另一齐明点处成像 Q'.

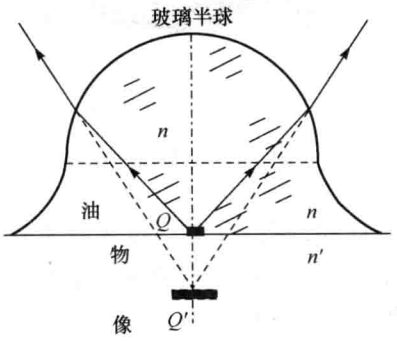


图 2.7.4 油浸物镜的齐明点

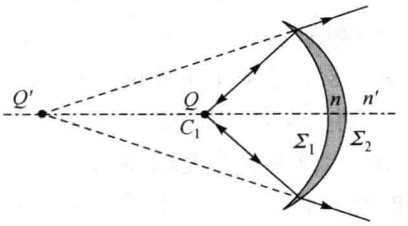


图 2.7.5 弯月形齐明透镜的原理

2.7.3 齐明透镜组

齐明透镜主要用作高倍显微物镜. 由于每个齐明透镜的齐明点位置是确定的,而每次成像的横向放大率也是确定的,不可能很大. 所以为了获得较高的放大倍

数，往往要采用齐明透镜组，每个透镜所成的像都恰好位于下一个透镜的齐明点处，如图 2.7.6 所示. 这样一方面也已获得较高的放大倍数，同时也可充分利用进入透镜的光通量，使像的亮度尽量高. 由于齐明透镜每次成像都使像距进一步增大，则光束的发散角进一步减小. 所以，经过几个齐明透镜之后，成像光束已满足傍轴条件，后续的成像过程，用普通的球面透镜即可保证像的精度和亮度.

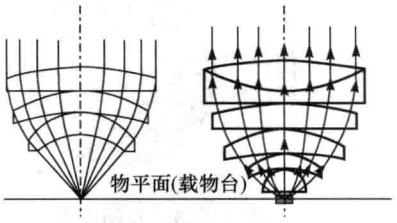


图 2.7.6　齐明透镜组的结构示意

2.8　几何光学仪器

2.8.1　眼睛

1. 眼睛的光学特性

眼睛的解剖学结构如图 2.8.1 所示，眼球的最外部是一层坚韧的包膜，前部是透明的角膜，其余不透明部分是巩膜. 晶状体将眼球分为前后两个区域. 前面的前房中充满水状液体，折射率为 1.336；之后是虹膜，虹膜中心是瞳孔，孔径可在 1.4～8mm 调节. 后面是黏性的玻璃体，折射率亦为 1.336；玻璃体之后是视网膜. 视网膜上分布着视神经末梢，视神经细胞有圆柱状和圆锥状两种，圆柱细胞仅能分辨亮暗，而圆锥细胞则能分辨色彩和影像的细节. 所有视神经集束后进入大脑，因而在视网膜上形成一个没有神经末梢的小区域，这是一个视觉盲区，称盲点或盲斑. 图 2.8.2 是常用来验证盲点存在的图案. 读者可闭上左眼，以右眼注视左侧图形，并前后移动，则会在某一位置处发现右侧图形消失，这是因为此时该图形恰成像于右眼的盲点处，同理可验证左眼盲点的存在. 据此可以判断，右眼的盲点在晶状体光轴左侧，左眼的盲点在光轴右侧，而图 2.8.1 是(右侧)眼睛的水平剖面.

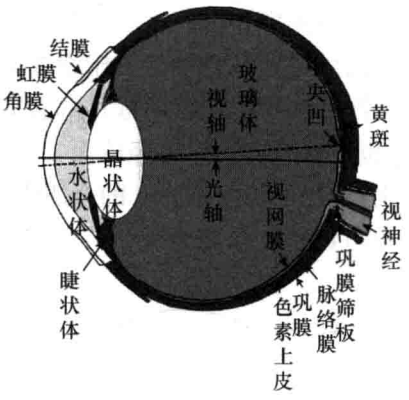


图 2.8.1　眼睛的结构



图 2.8.2　验证盲点的存在

盲点附近有一个黄色的扁圆斑，称为黄斑，黄斑中心有一个水平方向约

0.3mm、竖直方向约 0.2mm 的凹坑，称为中央凹. 中央凹区域几乎全是圆锥细胞，因而是视觉最灵敏的区域. 观察物体时，总是通过眼球的旋转，使像成在中央凹. 因而眼睛的光轴(解剖学对称轴)与视轴(通过中央凹与晶状体中心的轴线)是不重合的.

晶状体的外观犹如一个双凸透镜，是眼睛的成像元件，是由折射率不同的组织分层构成的，总的来说，晶状体的折射率约为 1.386. 通过睫状体肌肉的伸缩，改变晶状体两侧球面的曲率半径，从而可以将不同距离的物清晰地成像于视网膜上，如图 2.8.3 所示. 因而晶状体等效于一个可变焦距的凸透镜.

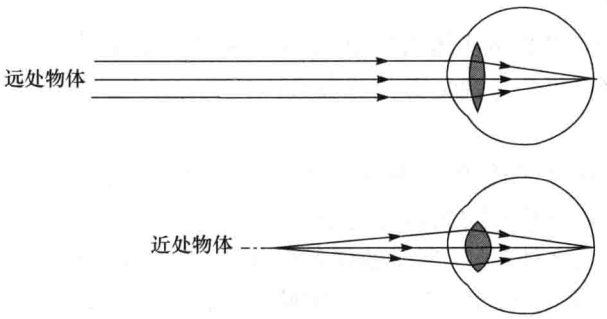


图 2.8.3　晶状体改变球面曲率半径以观察不同距离的物体

晶状体的对称轴，即眼睛的光轴. 光轴的长度，即人眼的前后径约为 24.3mm (成年人的平均值). 视网膜到光心的距离仅可以进行微小的调节. 观察远处物体时，该距离最短，等于晶状体对无穷远处聚焦时像方的焦距；观察近处物体时，眼球的前后径略微增大. 通常，人眼对物距为 25cm 的物体很容易看清楚，所以该距离被称为**明视距离**，本书将明视距离记为 $s_0=25\text{cm}$.

也可以用一个简单的光学系统表示人眼的结构，如图 2.8.4 所示，折射球面的曲率半径为 5.7mm，物方焦距和像方焦距分别为 17.1mm 和 22.8mm. 这种模型称为简化眼.

如果用更加准确的模型表示人眼，则其中应包括多个折射球面，如图 2.8.5 所示，这就是所谓的示意眼，示意眼的光学参数列在表 2.8.1 中.

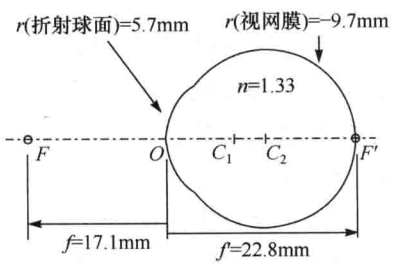


图 2.8.4　简化眼的光学参数

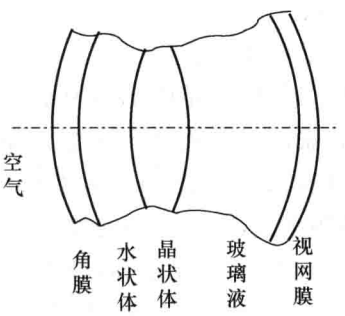


图 2.8.5　示意眼的光学参数

表 2.8.1　示意眼的光学参数

	厚度/mm	折射率	球面半径/mm
角膜	0.5	1.376	7.7
水状液	3.1	1.336	6.8
晶状体	3.6	1.386	10.0 −6.0
玻璃液	17.2	1.336	−9.7

2. 视力的矫正

通过调节机构改变晶状体的焦距，正常的眼睛可以看清不同距离处的物体. 以下定义远点和近点两个与视觉有关的参数.

1) 远点

当睫状肌松弛时，晶状体的曲率半径最大，焦距也最长，这时能够在视网膜上清晰成像的物体到眼睛的距离就是远点.

当物体在远点之外时，所成像的像距较短，如果眼睛的前后径较大，虽尽力调节，这时视网膜到晶状体的距离仍大于眼睛的焦距(就是这时的像距)，则视网膜上是模糊的像，因而对于远点之外的景物是难以分辨细节的，如图 2.8.6(a)所示.

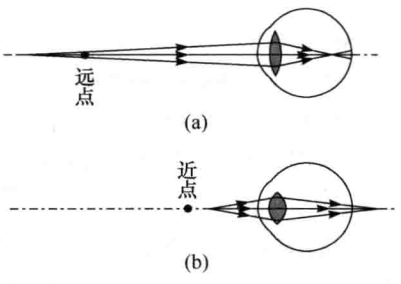


图 2.8.6　远点与近点

医学上将远点在无限远处的眼睛作为正视眼，正视眼的像方焦点在视网膜上.

2) 近点

观察近处的物体，睫状肌收缩，压迫晶状体使其曲率半径变小，当肌肉收缩和晶体变形到达极限时，晶状体的曲率半径最小，焦距也最短，这时能够在视网膜上清晰成像的物体到眼睛的距离就是近点.

物体再移近，像距增大，超过眼睛最大的前后径，则所成的像在视网膜之外，难以看清，图 2.8.6(b)显示了物在近点之内成像的情形.

3) 近视及其矫正

所谓近视，就是由于各种原因导致眼球的径向变长，或角膜及晶状体的曲率变大，或是眼内介质折射率异常. 当物体较远时，所成的像在视网膜之前，如图 2.8.7 所示；只有物在有限远处，才能在视网膜上成像，即近视眼的远点不在无限远处.

要矫正近视，必须设法使无限远处的物移至该眼的远点处. 为了做到这一点，可以在眼前加一个负透镜，使无限远处的物体在远点成一虚像即可.

例如，远点是 1m 的近视眼，要佩戴焦距 $f=-1\text{m}$ 的眼镜，镜片的光焦度 $\Phi=-1\text{D}(1\text{D}=1\text{m}^{-1})$，也就是 100 度的近视镜.

4）远视及其矫正

所谓远视就是眼球的径向变短，或视网膜距晶状体太近，在睫状肌完全放松的状态下，无限远处的物体成像于视网膜之后，或者，要看清远处的物体，睫状肌也要收缩；在明视距离以内的物体，即使睫状肌收缩到极限，也成像于视网膜之后，越来越看不清楚，如图 2.8.8 所示. 相比正视眼，远视眼的近点太远.

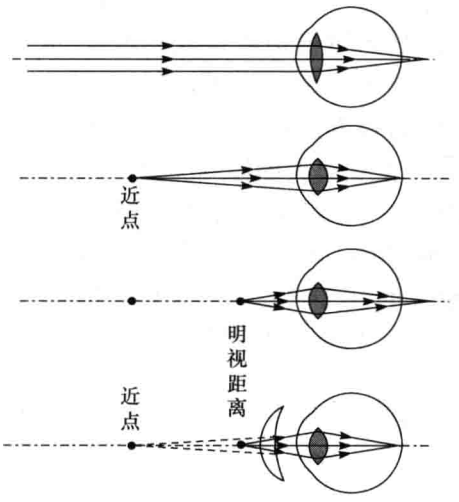


图 2.8.7　近视及其矫正

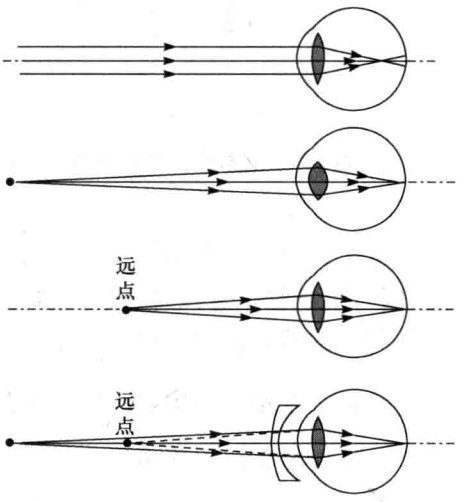


图 2.8.8　远视及其矫正

要矫正远视，就必须设法将明视距离以内的物移至近点处. 那就要在眼前加一个正透镜，使近处的物体在其近点成一虚像.

例如，近点是 2.5m 的远视眼，只需将物距 $s=0.25\text{m}$ 的物成虚像于 -2.5m 即可，由此可算得透镜的焦距为

$$f=\frac{ss'}{s+s'}=\frac{-2.5\times0.25}{-2.5+0.25}=0.278(\text{m})$$

镜片的光焦度 $\Phi=\dfrac{1}{f}=3.6D$，即 360 度的远视镜.

2.8.2　目镜

目镜的作用是在明视距离处成一个虚像，便于眼睛观察，目镜的放大率大于 1. 显微镜、望远镜的目镜通常有较复杂的结构，而放大镜则非常简单，往往只是一个双凸透镜.

1. 放大镜

放大镜是一个凸透镜，当物位于放大镜的物方焦点之内时，可以成一个放大、正立的虚像，便于眼睛观察. 当所成的虚像处在眼睛的明视距离处时，眼睛的观察

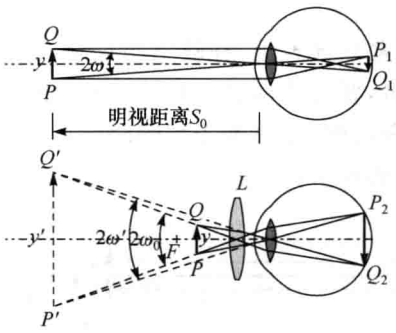


图 2.8.9　放大镜对物的成像

效果较好.

如图 2.8.9 所示，眼睛直接观察高度为 y 的物体时，通常将其置于明视距离 s_0 处. 此时物对眼睛的张角为 $2\omega=\dfrac{y}{s_0}$.

放大镜就是一个凸透镜，用放大镜观察，则要求物在眼的明视距离处成一虚像. 为了获得尽量大的放大率，常将物置于放大镜物方焦点的内侧较靠近焦点处. 物体在物方焦点内侧，成一正立放大虚像. 此时物对透镜的张角和虚像对透镜的张角是同一个角，记为 $2\omega_0$，虚像对眼睛的张角记为 $2\omega'$，ω_0 与 ω' 是不相等的. 但当物尽量靠近透镜的焦点、同时眼镜紧贴透镜时，像对眼睛的张角是最大的，这时 $2\omega_0$ 与 $2\omega'$ 基本相等（当然任何人都不可能以这种方式使用放大镜，所以 $2\omega'$ 只是用来作为一个指标，表示可能的最大张角）. 虚像对眼的最大张角为 $2\omega'=\dfrac{y}{s}\approx\dfrac{y}{f}$.

于是透镜角放大率为

$$M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{s_0}{f}=\frac{25}{f} \tag{2.8.1}$$

也可以对角放大率作严格的计算. 由于放大镜的虚像要成在眼睛的明视距离处，而此时眼睛紧贴放大镜，则放大镜所成像的像距为 $s'=-s_0$，物距应当为 $s=\dfrac{s_0 f}{s_0-f}$. 此虚像对眼睛（也是放大镜）的张角为 $2\omega_i=\dfrac{y'}{s_0}=\dfrac{y}{s}=\dfrac{y(s_0-f)}{s_0 f}$. 则角放大率应当为

$$M_0=\frac{\omega_i}{\omega}=\frac{\dfrac{y(s_0-f)}{s_0 f}}{\dfrac{y}{s_0}}=\frac{s_0-f}{f}=\frac{25}{f}-1$$

与式(2.8.1)的结果有所不同. 实际上，在观察时，使用者为了获得尽量大的放大效果，不一定使像成在明视距离处，而是往往成在更远处，所以采用式(2.8.1)表示角放大率，更接近实际效果.

短焦距透镜具有较大的放大率. 但由于短焦距透镜的球面曲率半径较小，这类透镜往往无法满足傍轴条件，像差较大，同时孔径又很小，所以并不适用. 单个透镜的放大率不能很大. 可以用组合透镜，既可以使焦距很短，又没有像差，这类组合透镜被称为**目镜**.

从图 2.8.9 中可以看出，眼睛的物对晶状体的张角，等于在视网膜上所成的像

对晶状体的张角，而眼轴的长度几乎不变，因而角放大率的含义其实就是通过放大镜所看到的物与直接用裸眼所看到的物在视觉上的大小的比值.

2. 显微镜和望远镜中的目镜

在望远镜、显微镜等光学仪器中，整个光学系统通常可分为物镜和目镜两部分，它们的作用各不相同. 使这两部分恰当地组合，才能得到良好的视觉效果.

物体通过物镜成一个实像，用眼睛直接观察实像是相当困难的. 而且，如果物距很大，通常是成一个缩小的实像；物距很小，尽管可以成一个放大的实像，但往往放大倍数有限，所以还要使物镜所成的像经目镜再成一个正立放大的虚像. 通过目镜观察物镜所成的像，与通过放大镜观察实物的原理是一样的. 但目镜不是一个简单的放大镜，正如前面所指出的，单个放大镜的角放大率十分有限，而且会有像差. 所以，实用的目镜都是经过专门设计的具有独特结构的透镜组. 显微镜和望远镜的目镜原理和结构都是一样的，下面就以本书 2.6.4 中介绍过两种目镜——惠更斯目镜和冉斯登目镜为例加以讨论.

惠更斯目镜的焦点在目镜内部，因而只能用来观察物镜所成的位于目镜物方焦平面附近的实像. 实际上，物镜所成的像对于场镜是虚物，该虚物经场镜后成实像于接目镜的物方焦平面处. 如图 2.8.10 所示. 所以，如果要在惠更斯目镜的物平面上放置叉丝或标尺，应当将其放在接目镜的物方焦平面处. 但是，由于叉丝或标尺仅经过接目镜成像，所以会有明显的色像差.

冉斯登目镜的物方焦点在向场镜处，严格说来也只能观察像，但可以将其结构略作改变，使向场镜和接目镜的间距 $d=(2/3)f_2$，由此算得 $\Delta=-4f_2/3$，$x_H=-f_2/2$，$x'_H=-f_2/2$，$f=f'=3f_2/4$. 这样目镜的物方焦点就前移到了向场镜之外 $(1/4)f$ 处，如图 2.8.11 所示，改进后的冉斯登目镜因而也可以直接观察实物. 同时，为便于测量，可以在冉斯登目镜的物平面(即物方焦平面附近)上放置十字叉丝或标尺，观察时，叉丝或标尺与物镜所成的像一同放大，而不会像惠更斯目镜那样产生色像差.

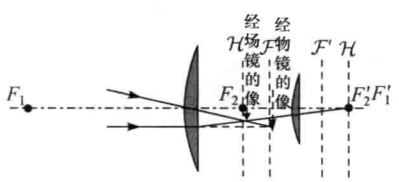


图 2.8.10 惠更斯目镜中的成像过程

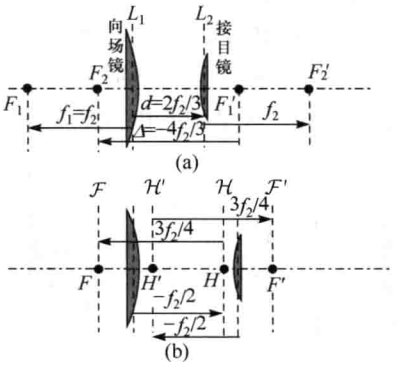


图 2.8.11 改进后的冉斯登目镜及其基平面



图 2.8.12　惠更斯、冉斯登目镜的改进(凯尔纳型)

惠更斯目镜、冉斯登目镜是最简单的目镜,为了提高成像质量,高档目镜的结构要复杂得多. 图 2.8.12 是惠更斯目镜和冉斯登目镜的简单改进型(称凯尔纳型),接目镜由两片透镜组成,可以单独起到消色差的作用,使得惠更斯目镜中也可放置叉丝.

而图 2.8.13 和图 2.8.14 中的目镜是三组式 Periplan 目镜,可以很好地消除各种像差和色差.

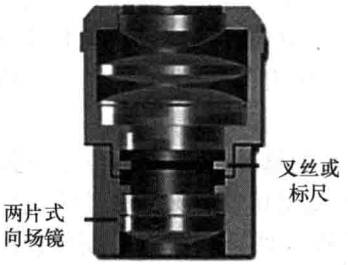


图 2.8.13　三组式 Periplan 目镜



图 2.8.14　屈光度可调的 10×消像差目镜

2.8.3　物镜

物镜用在照相机、望远镜、显微镜等光学仪器中,电影放映机和投影仪的镜头也是物镜. 物镜的作用是成实像.

照相物镜对成像的清晰度和准确度要求最高,投影物镜的要求与照相物镜相同,而望远物镜则是简化的长焦距照相物镜. 显微物镜则要求有尽量高的横向放大率,同时,由于是用来观察微小的对象,所以显微物镜的孔径都很小,尤其是高倍的显微物镜.

1. 照相物镜

目前在照相机中使用的各类镜头有上百种,大多都是精心设计反复改进并经过长期应用的成熟产品,能够很好地消除各类像差和色差,并有尽可能大的光阑. 图 2.8.15～图 2.8.22 列出了部分经典的照相物镜.

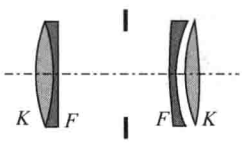


图 2.8.15　佩茨瓦尔物镜

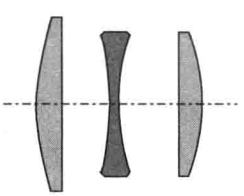


图 2.8.16　柯克物镜

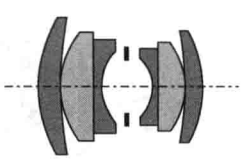


图 2.8.17　双高斯物镜

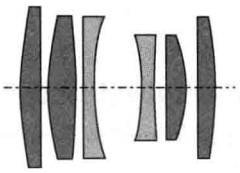


图 2.8.18 六片式普兰纳物镜

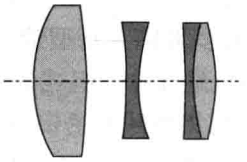


图 2.8.19 天塞物镜

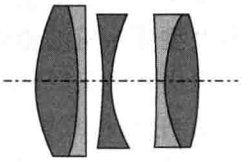


图 2.8.20 海里亚物镜

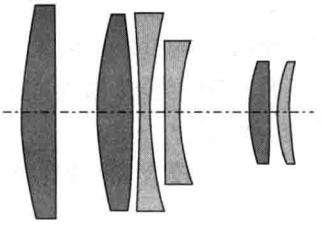


图 2.8.21 松纳物镜

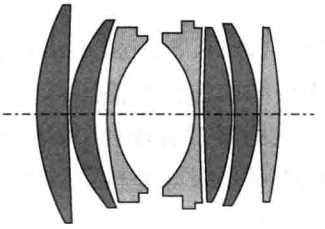


图 2.8.22 七片式普兰纳物镜

这些物镜有些是非对称式镜头，就是光圈前、后两方的光学结构彼此不对称. 有些是对称式镜头，所谓对称式镜头是指镜头中间设置光圈，在光圈前后由相同的两组透镜以对称式结构组成.

其中，非对称式镜头有：

佩茨瓦尔镜头(Petzval lens)，是匈牙利数学家佩茨瓦尔(J. M. Petzval)于1841年第一个用数学计算方法设计出来的，用于拍摄人像. 该镜头系四片三组，第一组是凹凸二透镜黏合而成为正光透镜，第二组和第三组分别为单片凹透镜和单片凸透镜. 在第一、二组之间装有光圈. 最大相对孔径为 1∶3.4，视角约 25°. 该镜头对球面像差和色差的校正很好，但却存在严重的像场弯曲现象.

柯克镜头(Cooke triplet lens)，是三片三组式的结构，由英国的泰勒·哈勃森公司(TAYLOR HOBSON)的泰勒(H. D. Tealor)于 1894 年设计. 该镜头由三片分立的透镜组成，前后两组均为单片凸透镜，由钡冕玻璃制成，中间一组为单片凹透镜，由火石玻璃制成.

三片三组式柯克镜头属于正光摄影镜头. 此镜头的光学结构是能够校正全部六种初级像差的最简单结构，但对像差的校正仍不完善.

天塞镜头(Tessar lens)，是由三片三组式的柯克镜头演变而成的，即将柯克镜头中最后一组的单片凸透镜变为凹、凸透镜各一片胶合而成的正透镜组，它是由德国卡尔·蔡司光学公司(CARL ZEISS)的鲁道夫(P. Rudolph)于 1902 年设计的.

四片三组式天塞镜头由于引入了胶合透镜，使三片式柯克镜头剩余的高级像散和轴外球差得到了部分校正，从而使成像质量得到改善. 其视场角也稍微增大.

天塞镜头问世后被世界各国光学工厂广为仿制，并成为世界最著名的镜头. 我国部分普及型照相机的摄影镜头大多采用天塞型镜头结构.

海里亚镜头(Helior lens)，是五片三组式的结构，也是由三片式柯克镜头演变而来的. 它将柯克镜头中前后两组单片凸透镜改为凹、凸透镜各一片胶合而成的正光摄影镜头. 该镜头有较平直的像场，基本上克服了像散现象，与天塞镜头相比，成像质量有进一步的提高，视场角也进一步增大，所以在航空和人像摄影中应用较多.

松纳镜头(Zeiss Sonnar lens)，最早由德国卡尔·蔡司公司的别鲁泰列设计，属于非对称型结构的正光摄影镜头. 它也是由三片式柯克镜头演变而成的，其结构上的最大特点是第二组特别厚，常由三片透镜胶合而成.

松纳镜头对高级球差校正的效果较好，有效孔径也较大，而且有很大的视场.

对称式镜头有：

双高斯镜头(double Gauss lens)，是六片四组式的结构，1896 年由德国卡尔·蔡司公司的鲁道夫设计. 该镜头属于对称型正光镜头，它由六片四组透镜组成，光圈位于第二、三组之间.

该镜头的结构能同时增大像场，相对孔径很大，视角中等. 它很容易对像差作校正，并且使球差、像散、场曲、色差也得到了很好的校正，因而该镜头成像质量很高. 由于镜头的上述特点，它被广泛应用于高档和中档照相机及专业电影摄影机的摄影镜头上.

许多镜头都是从双高斯镜头演变而来的，如普兰纳物镜(Zeiss Planar lens)，具有更大的光圈.

上述物镜基本上都是焦距在 50mm 附近的标准镜头，成像的效果与人眼观察的效果相似，可很好地用于人像摄影和近处景物的拍摄. 除此之外，还有视场范围很大的广角镜和用于远摄的长焦镜.

图 2.8.23 是一个典型的对称式广角镜头，焦距很短. 图 2.8.24 是另一种非对称式的广角镜头.

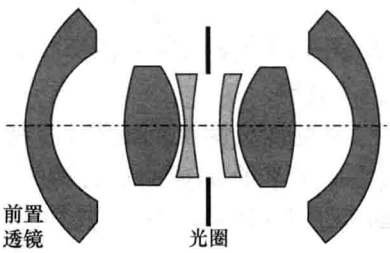


图 2.8.23　对称式广角镜头

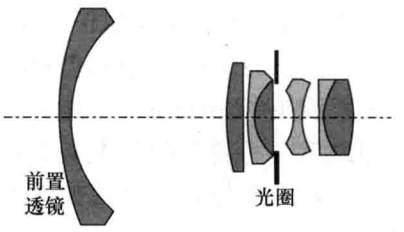


图 2.8.24　非对称式广角镜头

图 2.8.25 是一种望远镜头.

2. 显微物镜

显微物镜的作用是成一个尽可能大的实像,由于显微镜筒的长度不可能很长,所以要求成像时物距尽量短,以获得一个横向放大率很大的实像. 这样,就要求其焦距很短. 所以放大倍数越高的显微物镜,其焦距越短.

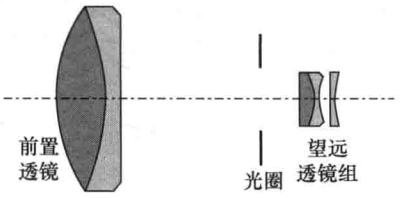


图 2.8.25 一种望远镜头

倍数更高的显微物镜由于距离物非常近,成像光线已不能满足傍轴条件,所以是齐明透镜或齐明透镜组.

2.8.4 显微镜

1. 显微镜的结构

显微镜的光路如图 2.8.26 所示,由物镜、镜筒和目镜组成(图 2.8.27). 由于显微镜的作用是得到放大倍数(或角放大率)尽量大的像,所以物镜焦距很短,在使用时,应使物距尽量小,也就是使物在物镜的物方焦点外附近. 这样,经物镜就可以成一放大倒立实像,该实像位于目镜的物方焦点内侧附近.

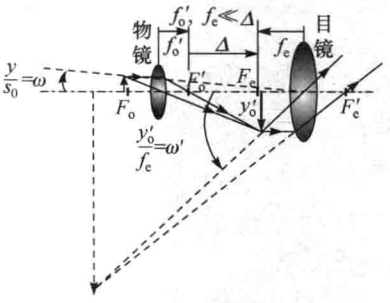


图 2.8.26 显微镜的光学原理



图 2.8.27 显微镜的光学结构

镜筒的长度为 $l=f'_o+\Delta+f_e$,f'_o为物镜的像方焦距(也等于其物方焦距),f_e为目镜的物方焦距(也等于其像方焦距),$f'_o, f_e \ll \Delta$. 则对于物镜,物距 $s_1 \approx f'_o$,像距 $s'_1 \approx \Delta + f'_o \approx \Delta$. 记 y 为物高,则物镜所成的实像的高度为

$$y'_1 = -\frac{s'_1}{s_1} y \approx -\frac{\Delta}{f'_o} y \tag{2.8.2}$$

即物镜所成像的横向放大率为

$$\gamma_o = -\frac{\Delta}{f'_o} \tag{2.8.3}$$

该实像位于目镜物方焦点内侧，再经目镜成一放大虚像，该虚像位于人眼的明视距离处. 眼睛一般紧贴在目镜处观察，所以像对目镜光心的张角即等于对眼镜的张角. 由此可得显微镜的角放大率为

$$M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\frac{y_0'}{f_e}}{\frac{y}{s_0}}=\frac{y_0'}{y}\frac{s_0}{f_e}=\gamma_0 M_e \tag{2.8.4}$$

其中

$$M_e=\frac{s_0}{f_e} \tag{2.8.5}$$

为目镜的角放大率.

2. 显微镜的标识

每一台显微镜往往配有一组物镜和目镜，通过物镜与目镜的组合得到各种不同的放大倍数或角放大率. 每一个镜头的特定参数都标在明显的位置.

显微目镜的参数主要有角放大率 M_e 和目视场直径 Φ，Φ 的单位是 mm，通常标识为 $M_e\times/\Phi$ 的形式，例如，10×/18，表示放大倍率 10，视场 18mm. 图 2.8.28 是一些显微目镜的实物.

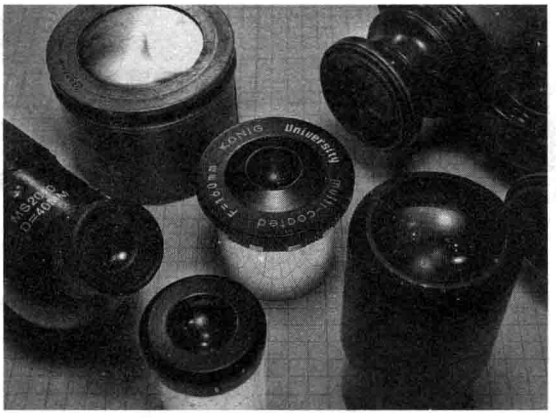


图 2.8.28　显微目镜

图 2.8.29 和图 2.8.30 是显微物镜的标识及其含义，主要参数为透镜组的结构类型、横向放大率、数值孔径 NA、机械筒长(mm)、盖玻片厚度等. 例如，标识为 Apo 40/0.95 160/0.17，意味着这是复消色差物镜，放大倍数 40，数值孔径 0.95，机械筒长 160mm，盖玻片厚度 0.17mm；Plan 10/0.25 Ph ∞/0.17，是指平场消色差物镜，放大倍数 10，数值孔径 0.25，机械筒长 ∞ ，盖玻片厚度 0.17mm. 图 2.8.31 画出了不同类型物镜的数值孔径所对应的入射光束的张角.



图 2.8.29 显微物镜



图 2.8.30 显微物镜的标识

除了上述标识之外，物镜上还有不同的色环(图 2.8.32)，表示不同的放大倍数，如表 2.8.2 所示.

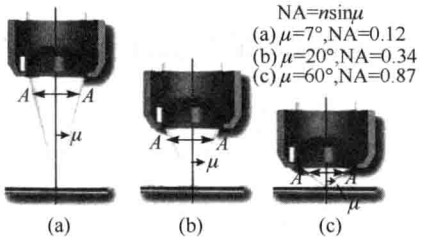


图 2.8.31 不同显微物镜的数值孔径

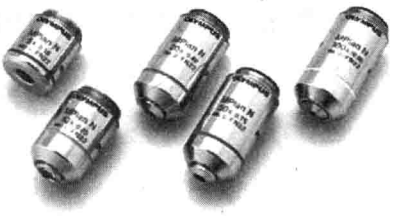


图 2.8.32 不同倍率显微物镜及其色环

表 2.8.2 显微物镜色环的含义

倍率	1×	2×	4×	10×	20×	40×	60×	100×
色环	黑	茶	红	黄	绿	浅蓝	深蓝	白

2.8.5 望远镜

望远镜用以观察远处的物体，并使远处的物体在眼睛的明视距离处成一个虚像，便于眼睛观察. 远处的物体往往很大，如天体、山脉等，所以望远镜的作用并不是成一个放大的像. 远处的物体对眼睛的张角 ω 很小，因此细节不能分辨，望远镜就是将光线相对于光轴的夹角放大.

最典型的两种望远镜的光学原理如图 2.8.33 和图 2.8.34 所示. 其中物镜为一个长焦距的正透镜(往往是正透镜组)，由于观察对象往往物距很大，几乎可视为在无限远处，所以物镜的焦距较长，物体经物镜后成一个尽量大的倒立实像，该实像几乎位于物镜的像方焦平面处. 通过目镜将物镜的像进一步放大，得到一个虚

像. 所以，望远镜物镜的像方焦点与目镜的物方焦点几乎重合，镜筒的长度 $L=f'_o+f_e$.

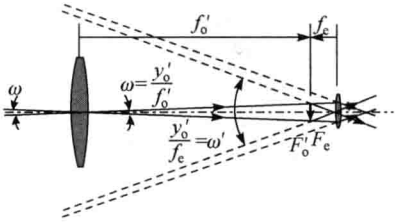


图 2.8.33　开普勒望远镜

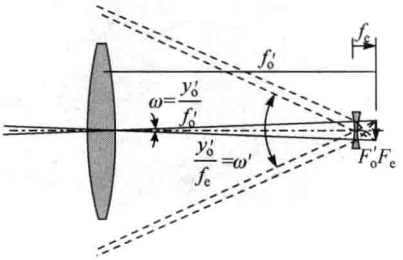


图 2.8.34　伽利略望远镜

开普勒望远镜的目镜为正透镜，最后所成虚像为倒立；伽利略望远镜的目镜是负透镜，物镜的像对于目镜是虚物，最后经目镜成正立的虚像.

由于物很远，所以物对眼睛的张角几乎等于对物镜的张角，也就是实像对物镜的张角，即

$$\omega=\frac{y'_o}{f'_o} \tag{2.8.6}$$

而由图 2.8.33 或图 2.8.34 可以看出，虚像对眼睛的张角等于物镜的像对目镜的张角，于是

$$\omega'=\frac{y'_o}{f_e} \tag{2.8.7}$$

则望远镜的角放大率为

$$M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{-y'_o/f_e}{y'_o/f'_o}=-\frac{f'_o}{f_e} \tag{2.8.8}$$

因此，物镜的焦距比目镜的焦距大得越多，则角放大率越大. 因而高倍数的望远镜的镜筒往往很长.

与显微镜不同，望远镜，尤其是便携式望远镜，其中物镜、目镜是不可更换的. 望远镜的参数标识为 $M\times D$，D 为物镜的孔径. 例如，7×50 望远镜，指角放大倍数为 7，物镜孔径为 50mm.

图 2.8.35 所示的双筒望远镜中有一对组合全反射三棱镜，即珀罗组合棱镜，该组合棱镜一方面将光路折返，相当于使镜筒增长；另一方面使倒像转为正像. 带有珀罗组合棱镜的望远镜，从外观上看目镜与物镜不共轴. 还有另外一类便携式双筒望远镜，如图 2.8.36 所示，其中采用阿贝-科尼组合棱镜，同样起到折叠光路和正像的作用，但目镜和物镜是共轴的.

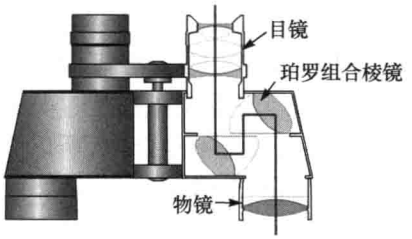


图 2.8.35 带有珀罗组合棱镜的望远镜

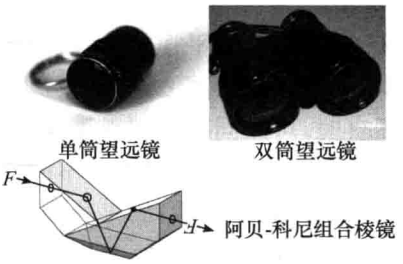


图 2.8.36 带有阿贝-科尼组合棱镜的望远镜

2.8.6 照相机

照相机是让物体发出的光线经过镜头后在底片上成像的光学仪器. 因为底片对光线感光并进行记录,所以不能记录虚像. 因而要求物体经照相物镜(镜头)在底片上成一倒立实像.

高级照相机的镜头是很精密的光具组,为了消除各种像差,是由各种不同形状的透镜组合而成. 其作用相当于一个无像差的理想薄透镜.

为了获得清晰的图像与合适的构图,照相机都有对焦和取景机构. 按照取景方式的不同,光学照相机主要有单镜头反光式(single lens reflector,SLR)(图 2.8.37)和旁轴取景式(view finder)(图 2.8.38)两种.

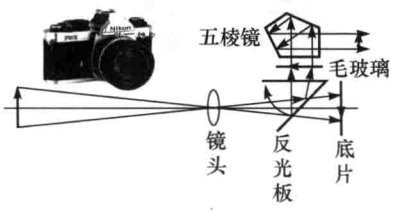


图 2.8.37 单镜头反光相机

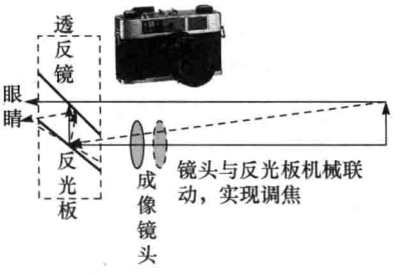


图 2.8.38 旁轴取景相机

单镜头反光式(单反)照相机的光路中有一块可以绕轴转动的反光板,取景对焦时,反光板处于 45°位置,像成在反光板上方的磨砂玻璃上,屋脊形五棱镜可以将磨砂玻璃上的像转过 90°,使眼睛通过取景窗看到正立的像. 通过移动镜头就可以得到一个清晰的像. 而照相底片的位置和磨砂玻璃是关于反光板对称的,如果升起反光板并同时开启遮挡在底片前的快门,则像就成在了底片上,照相过程就完成了. 单反相机的成像光路与调焦(测距)光路合而为一,底片与毛玻璃相对于反光镜对称,毛玻璃上的像与底片上的像是一样的. 这种照相机可以根据需要更换不同的

镜头.

旁轴取景器式(平视取景)照相机,成像光路与调焦光路独立.取景器包括一个半透半反的分光镜(图 2.8.38 所标的透反镜)和一个可以转动的反光镜.眼睛在取景窗观察时,可以同时看到直接透过分光镜射来的光和经过反光板再经过分光镜反射的光.一般来说,通过两条不同的光路进入眼睛的光线是不重合的,所以眼睛看到的是两个分开的像;如果这两条光线重合,则看到的两个像是重合的.当物体较远时,进入取景器的光线基本上是平行光,如果反光板和分光镜相互平行,这时,经过反光板反射到分光镜的光和直接透过分光镜的光是重合的.如果物移近,则两条光线不再平行,像也不重合,但转动反光板,可以使两个像重合.反光板的转动与成像镜头的前后移动是通过机械装置联动的.当取景器的两个像重合时,在底片上成的像也是清晰的.这种机械联动的成像机构是在照相机的设计中已设定好的.所以通过这种方式也可以获得清晰的照片.这种照相机由于取景光路与成像光路分离,而且取景窗处在镜头光轴的侧边,所以被称为旁轴取景式照相机.

与单镜头反光式相机相比,这种旁轴式相机结构简单,轻便耐用,但由于取景必须与固定的镜头联动,因而一般情况下镜头不能更换,而且由于取景窗位于镜头的旁轴,对较近物体拍摄时,取景会产生偏差.

现代数码相机的光路与传统相机相似,只是用 CCD(电荷耦合器件)取代感光胶片,并将 CCD 上的图像输出到显示屏上,观察显示屏上的像,即可准确判断取景和对焦的情况.除了显示屏之外,数码相机也有与传统相机相似的光学取景窗.由于 CCD 不同于仅能一次曝光的感光胶片,所以取景时,相机的快门是处于开启状态的.

为了获得较好的效果,照相机的镜头结构都比较复杂,往往是由多片、多组共轴的凸透镜和凹透镜构成的,以达到消除色差、像差、畸变的效果,而且每一片镜头上都要涂敷增透膜.

根据镜头焦距的不同,一般分为广角镜头(28mm$<f<$50mm)、标准镜头($f\sim$50mm)、长焦镜头($f>$50mm),焦距更短的镜头($f\ll$28mm)称为鱼眼镜头.

如图 2.8.39 所示,由于景物到相机的距离往往较大,所以像距基本与镜头的焦距相当,即镜头光心到底片的距离基本上等于像方焦距,因而焦距越长,像的横向放大率越大.

如图 2.8.40 所示,由于底片大小是一定的,当像距短时,画面的张角较大,故短焦距镜头视角较大.

短焦距镜头的视角比长焦距镜头视角要大,因为 $\omega=\dfrac{L}{f'}$. L 为胶片宽度,对于 35mm 照相机,底片为 36mm$\times$24mm,L 的范围为 24$\sim$36mm,$f=50$mm 时,$\omega=\dfrac{36}{50}=0.72=41°$.

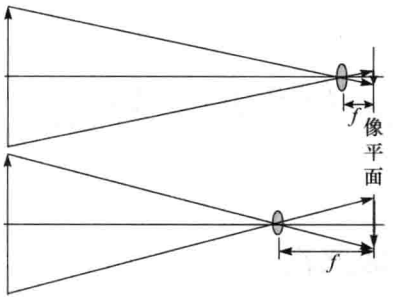


图 2.8.39 镜头焦距与像的大小

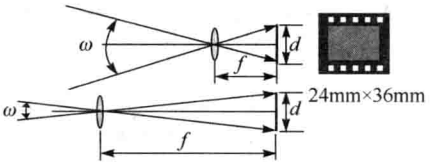


图 2.8.40 镜头的视野与焦距的大小

当镜头的光阑(光圈)很小时,由于只有严格的傍轴(傍轴)光线才能进入,所以可以获得较好的成像质量. 照相机可以通过改变光阑而改变进光量,以实现对底片的正确曝光(图 2.8.41).

进光量∝光阑面积∝(镜头孔径)^2.

定义光圈数,也称为 F 数,F 数$=f/D$. f 为镜头焦距,D 为镜头光瞳的直径. 可见进光量与 F 数的平方成反比.

F 数可取一系列值,22,16,11,8,5.6,4,2.8,2,1.4,…相邻 F 数的光圈,通光量相差一倍(图 2.8.42).

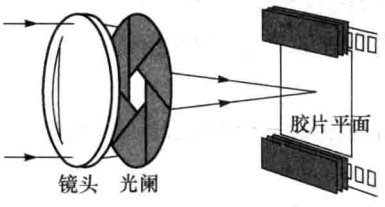


图 2.8.41 镜头的光阑(光圈)

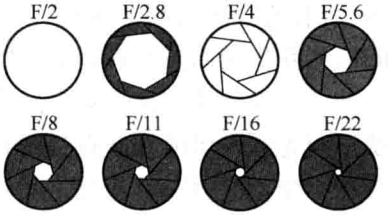


图 2.8.42 不同 F 数的光阑大小

如前所述,不同的光圈有不同的景深.

同时也可以通过设定和控制快门的速度,即快门打开的时间来控制曝光量. 照相机上所标的快门速度$=1/$快门曝光时间.

照相机的快门挡位分为 B 门(手控),1,2,4,8,16,30(32), 60(64), 125(128), 250(256),500(512),1000(1024),2000(2048),4000(4096),8000(8192),…单位为 s^{-1}.

快门依构造分为中心式和帘幕式(横向布帘,纵向钢帘). 前者中心处曝光时间较边缘处长,后者的闪光同步摄影速度不能很高.

第3章　光的相干叠加与非相干叠加

3.1　光波的叠加原理

光波场中各点的电场强度都作周期性变化，这种变化称为光矢量的振动，可以用周期性的函数来描述. 虽然电磁场的振动与机械波的振动机制不同，但是它们所遵循的叠加规律是相同的.

3.1.1　光波的独立传播定律

如果两个实物粒子发生碰撞，则它们的运动状态都将改变，都会偏离原来的运动方向. 但是，如果两列波相遇，情况将有所不同.

例如，两列水波相遇时，尽管在相互重叠的区域，波的状态会有明显的改变，但相遇之后，则还能保持各自的状态不变；夜空中探照灯的光束相遇后，并没有改变光束的方向和强度；在交响乐演奏中，我们仍能分辨出乐队中各种乐器发出的不同音调等. 所有这些事实都告诉我们，波在相遇的过程中和相遇之后，并没有因为彼此之间的相互作用而改变其固有的特征. 这就是波的独立传播定律.

光波的独立传播定律可以表述为：

从不同光源发出的光波在空间相遇时，如果振动不十分强烈，各列波将保持各自的特性不变，继续传播，相互之间没有影响.

波的独立传播定律是波动的最基本定律之一，无论对于机械波或电磁波，含义都是相同的. 不同的波之间，只要在振动不十分强烈的情况下，就不会相互影响，这一点与我们在力学中所熟悉的实物粒子间的相互作用是不同的.

3.1.2　光波的叠加原理

不同的波列(wave train)在相遇的区域，振动将互相叠加(superposition). 对于机械波，是机械运动(位移)的叠加；对于电磁波，是电场强度、磁感应强度的叠加.

光波的叠加原理可以表述为：

几列波在相遇点所引起的合振动，即总的光矢量，是各列光波独自在该点所引起的振动的矢量和，是在该点各个光矢量的矢量和.

机械波、电磁波(包括光波)的叠加都遵循相同的原理，因为机械波、电磁波都是矢量，都按矢量合成的方法进行叠加.

光波的叠加原理只有在以下条件下才能成立：

(1) 在线性介质中.

(2) 光强不是很大. 如果光强很大，在强电磁场的作用下，线性介质会变为非线性的.

应当注意，波的叠加，不是强度的叠加，也不是振幅的简单相加，而是振动矢量的叠加.

需要指出的是，虽然上述波的叠加原理阐述的是一般性的原理，适用于普遍的情况，但是在光学中往往用来处理分立、有限的几个波列，或无限但可数的波列的叠加.

3.2 同频率、同振动方向光波叠加的方法

3.2.1 代数法

光的叠加，就是振动的叠加，即各列光波的电场强度矢量的叠加. 对于振动方向相互平行的光波，可以用标量的方法处理其叠加问题.

如果仅从叠加原理看，光波与机械波和普通电磁波并没有区别，所以可以直接应用以前的结论讨论光的叠加.

首先讨论同频率、同振动方向的单色光的叠加. 这是一种最简单，也是光学中最常见的情形. 可以用一维表达式进行讨论.

设两列波在相遇点的波函数分别为 $\psi_1=A_1\cos(\varphi_1-\omega t)$ 和 $\psi_2=A_2\cos(\varphi_2-\omega t)$，按照叠加原理，合振动为

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_1+\psi_2=A_1\cos(\varphi_1-\omega t)+A_2\cos(\varphi_2-\omega t)\\&=A_1(\cos\varphi_1\cos\omega t+\sin\varphi_1\sin\omega t)+A_2(\cos\varphi_2\cos\omega t+\sin\varphi_2\sin\omega t)\\&=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t+(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t\end{aligned}$$

设 $A=\sqrt{(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)^2+(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)^2}$，可以进一步化为

$$\psi=A\left(\frac{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}{A}\cos\omega t+\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A}\sin\omega t\right)$$

再设 $\cos\varphi=\dfrac{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}{A}$，$\sin\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A}$，则

$$\psi=A(\cos\varphi\cos\omega t+\sin\varphi\sin\omega t)=A\cos(\varphi-\omega t)$$

即相遇点的合振动为

$$\psi=A\cos(\varphi-\omega t) \tag{3.2.1}$$

可见，叠加之后，相遇点的振动是与两列波同频率的简谐振动，两列波叠加之后，是同频率的简谐光波. 叠加之后的振幅和空间相位分别是

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) \tag{3.2.2}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \tag{3.2.3}$$

由于采用光波的代数式进行叠加，这种方法被称为**代数法**(the algebraic method)，又因为代数式是光波的瞬时值表达式，所以这种方法也被称为**瞬时值法**.

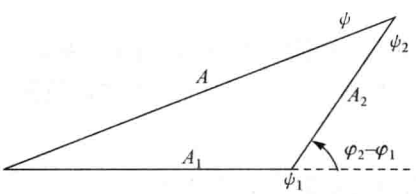


图 3.2.1　合振动振幅的三角形法则

不难看出，式(3.2.2)与三角形的余弦定理形式一致，因而也可以采用如图 3.2.1 所示的方法求出两列简谐光波合振动的振幅. 用两列波的振幅 A_1、A_2 和**相位差**(phase difference) $\varphi_2-\varphi_1$ 构成一个三角形，另一条边的长度就对应合振动的振幅. 这种方法与后面要讨论的振幅矢量法的原理一致.

3.2.2　复数法

如果将上述两列光波的振动用复指数表示，则为

$$\tilde{\psi}_1=A_1e^{i(\varphi_1-\omega t)}=A_1e^{i\varphi_1}e^{-i\omega t}=\widetilde{U}_1e^{-i\omega t},\quad \tilde{\psi}_2=A_2e^{i(\varphi_2-\omega t)}=A_2e^{i\varphi_2}e^{-i\omega t}=\widetilde{U}_2e^{-i\omega t}$$

其中，$\widetilde{U}_1=A_1e^{i\varphi_1}$，$\widetilde{U}_2=A_2e^{i\varphi_2}$，是两列波在相遇点的复振幅.

按叠加原理，其合振动的复数值为

$$\tilde{\psi}=\tilde{\psi}_1+\tilde{\psi}_2=A_1e^{i(\varphi_1-\omega t)}+A_2e^{i(\varphi_2-\omega t)}=(A_1e^{i\varphi_1}+A_2e^{i\varphi_2})e^{-i\omega t}=(\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2)e^{-i\omega t}=\widetilde{U}e^{-i\omega t}$$

即合振动的复振幅为

$$\widetilde{U}=\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2=A_1e^{i\varphi_1}+A_2e^{i\varphi_2}=Ae^{i\varphi}$$

由复数的运算法则，可得 A^2 及 φ 表达式，与式(3.2.2)和式(3.2.3)相同.

所以，两列光波所引起的合振动的复振幅等于各自的复振幅的和，就是将两列波的复振幅直接相加. 所以这种方法称为**复数法**(the complex method).

若是多列同频率的简谐光波叠加，则只要将它们的复振幅相加，即可得到合振动的复振幅，即

$$\begin{aligned}\widetilde{U}&=\sum_{m=1}^{N}\widetilde{U}_m=\sum_{m=1}^{N}A_me^{i\varphi_m}=\sum_{m=1}^{N}A_m(\cos\varphi_m+i\sin\varphi_m)\\&=\sum_{m=1}^{N}A_m\cos\varphi_m+i\sum_{m=1}^{N}A_m\sin\varphi_m=A(\cos\varphi+i\sin\varphi)=Ae^{i\varphi}\end{aligned}$$

其中，合振动振幅为

$$\begin{aligned}A^2&=\Big(\sum_{m=1}^{N}A_m\cos\varphi_m\Big)^2+\Big(\sum_{m=1}^{N}A_m\sin\varphi_m\Big)^2\\&=\sum_{m=1}^{N}A_m^2\cos^2\varphi_m+2\sum_{j=1,j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N}A_mA_j\cos\varphi_m\cos\varphi_j\\&\quad+\sum_{m=1}^{N}A_m^2\sin^2\varphi_m+2\sum_{j=1,j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N}A_mA_j\sin\varphi_m\sin\varphi_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{N} A_m^2(\cos^2\varphi_m + \sin^2\varphi_m) + 2\sum_{j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N} A_m A_j(\cos\varphi_m\cos\varphi_j + \sin\varphi_m\sin\varphi_j)$$

即

$$A^2 = \sum_{m=1}^{N} A_m^2 + 2\sum_{j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N} A_j A_m\cos(\varphi_m - \varphi_j) \tag{3.2.4}$$

合振动的相位为

$$\tan\varphi = \frac{\sum_{m=1}^{N} A_m\sin\varphi_m}{\sum_{m=1}^{N} A_m\cos\varphi_m} \tag{3.2.5}$$

3.2.3 振幅矢量法

复振幅 $\widetilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$，$\widetilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ 都是复数，可以用复平面上的矢量表示，如图 3.2.2 所示. 求 $\widetilde{U}=\widetilde{U}_1+\widetilde{U}_2$，就是求复数 $\widetilde{U}_1$、$\widetilde{U}_2$ 在复平面上所对应的两个矢量的和，即 $\widetilde{U}$ 可以按照矢量求和的方法得到. 这种方法就是**振幅矢量法**(phasor addition).

振幅矢量法简单直观，不需要计算就能形象地表示合振动振幅的大小. 更值得一提的是，对于多列光波叠加情形，若用解析式表示叠加结果，则计算和表达非常繁琐，但是采用与复数求和对应的矢量法处理，则十分简单.

多列波叠加的复振幅可写为

$$\widetilde{U} = \sum_{m=1}^{n} \widetilde{U}_m$$

其中，$\widetilde{U}_m = A_m e^{i\varphi_m}$，是其中一列光波的复振幅. 按照复数的求和规则，将每个复振幅用矢量表示，让各个矢量依次首尾相接，相邻两矢量 $\widetilde{U}_m$、$\widetilde{U}_{m+1}$ 之间的夹角就是它们的辐角之差，也就是两列光波的相位差 $\Delta\varphi_{m+1,m}=\varphi_{m+1}-\varphi_m$，如图 3.2.3 所示. 最后，合矢量 $\widetilde{U}$ 的模就对应合振动的振幅.

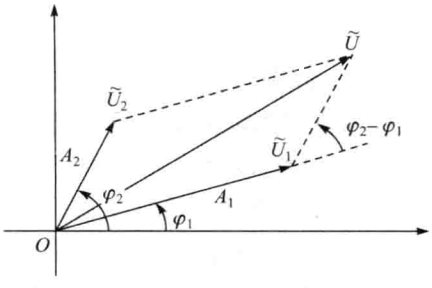


图 3.2.2 振幅矢量法

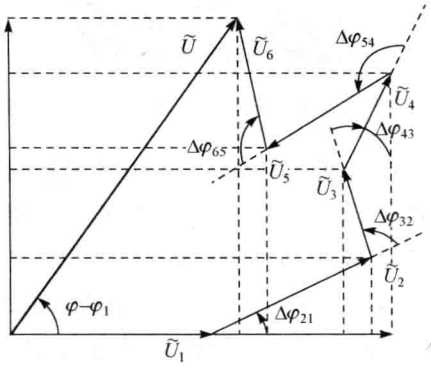


图 3.2.3 多列波的振幅矢量相加，得到合振动的振幅

振幅矢量法不仅可以求得合振动的振幅，也能求得合振动的相位，图 3.2.3 中，合矢量 $\tilde{U}$ 与 $\tilde{U}_1$ 之间的夹角就是两者的相位差 $\varphi-\varphi_1$.

根据复数的运算规则和图 3.2.3 所示的叠加过程，可以看出，可以将各个振幅矢量正交分解后求得合振动的振幅矢量；而且叠加所得合振动的振幅不是取决于各列光波的相位，而是取决于各列光波的相位差.

3.3 光波叠加的强度

3.3.1 光波叠加的特点

光波的数学表达式和光波的叠加方法与其他类型的矢量波并没有区别，但是实际叠加的结果却大不相同. 例如，一般的机械波或电磁波叠加时，很容易观察到由于叠加而引起的干涉现象. 即在一列波的波峰(wave crest)与另一列波的波谷(wave trough)相遇的地方，振动相互抵消，这一点合振动的振幅最小；而在两列波的波峰(或波谷)相遇处，振动加强，合振动的振幅最大. 叠加的结果，使得波场中某些地方振动增强(即合振动的振幅增大)，而某些地方振动减弱(即合振动的振幅减小)，如图 3.3.1 和图 3.3.2 所示波场的能量由于波的叠加而重新分布，这就是所谓的**波的干涉**(interference of waves).

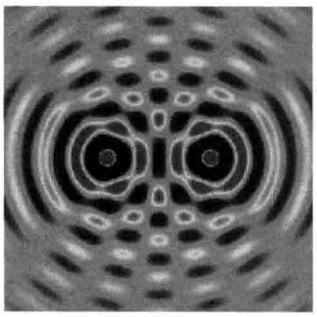


图 3.3.1 振子引起两列水波的干涉

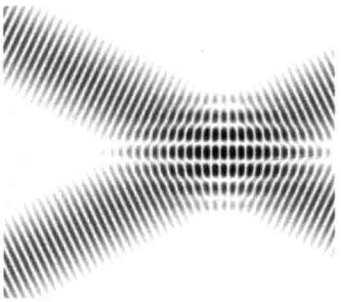


图 3.3.2 平面波的干涉图样

我们可以用肉眼直接观察到机械波的波动过程，以及它们之间的干涉. 例如，水波的干涉；对于无线电波，也可以借助简单的仪器观察到电磁振荡及其相互干涉的过程. 例如，在示波器上可以观察到交流电信号的波形，以及它们叠加所产生的各种物理图像，这就是李萨如图形(Lissajou figures). 从波动的形式上看，虽然光与机械波和普通电磁振荡没有太大的区别，但是几乎无法观察到普通光源之间的干涉. 例如，无论是两盏灯发出的光，或是两台激光器发出的光，相遇后都无法观察到干涉.

光波有两个与射频段电磁波不同的特征. 第一,我们无法直接观察或测量光波电矢量周期性变化的情况;第二,从两个实际光源发出的光波不能产生干涉. 这到底是为什么?

对于第一点,是比较容易理解的. 光的波长在 400～760nm,其频率约是 10^{14} Hz,这样短的变化周期,不仅比人眼的响应时间要短得多,也比普通电子仪器的响应时间短得多,所以我们无法直接感受到光的振动情况,即光矢量周期变化的情况.

对于第二点,与光波产生的机制有关. 干涉的结果,表现为叠加后波场振幅的变化,两列波在相遇点,如果相位是相同或相近的,则引起的合振动的振幅就大,因而强度增大;如果相位相反,则合振动的振幅就要减小,因而强度也要变弱. 普通的光不能产生干涉,说明光波的相位有着某种特殊性.

既然干涉的结果表现为波的强度(即功率密度)在空间的分布,下面就从分析叠加之后光强的特点入手,讨论一般的光波为什么不能产生干涉,在何种条件下能够产生干涉.

3.3.2 光波叠加强度的计算方法

正如前面所指出的,由于测量仪器的响应时间比光波的扰动周期大许多,光强的测量值实际上是光波的能流密度在一定时间内(即仪器响应时间内)积累强度的平均值. 设观察时间或仪器响应时间为 $\tau(\tau \gg T)$,则光强为 $I=\dfrac{1}{\tau}\int_0^{\tau}A^2\mathrm{d}t$. 两列光波 $\psi_1=A_1\cos(\varphi_1-\omega t)$ 和 $\psi_2=A_2\cos(\varphi_2-\omega t)$ 叠加后,所引起的合振动为 $\psi=\psi_1+\psi_2=A\cos(\varphi-\omega t)$,合振动的振幅为 $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$. 则这样两列光波叠加后的强度为

$$I=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}A^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}[A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]\mathrm{d}t \qquad (3.3.1)$$

3.3.3 光波的相干叠加与非相干叠加

1. 实际的光源与光波

物理学是实验科学,物理问题都是实际的问题,所以在对式(3.3.1)计算之前,应当先讨论清楚它的实际含义和适用条件.

不妨思考以下几个问题.

第一,光波真的能够用如此简单的数学式表达吗?

十分确定的是,只有简谐光波才能写成上述的表达式,也只有简谐光波叠加后才有上述形式的振幅表达式.

正如前面所指出的,严格的简谐光波是不存在的,但是一个稳定的实际光源,

既然发出的光波在空间中的每一点、在接收屏上的每一点，都能形成稳定的光强分布，说明可以将其发出的光波视为简谐光波，或者，只要波列的持续时间比起周期大得多，可以认为它就是简谐的. 因而将实际的波场中每一列单色光波作为简谐光波处理，没有什么问题.

第二，一个光源真的只发出一列光波吗？

如果一个稳定的光源每一时刻只发出一列光波，那么这样的光源就与机械振子和电磁波的天线中集体同步振荡的电子没有什么区别，光源之间的干涉应该可以很容易实现，正如水波的干涉和无线电波的干涉那样. 但实际上并非如此. 像惠更斯、牛顿这样的天才人物，都不能做出光的干涉实验，来佐证或否定光的波动说或粒子说，说明光源发光并不是这样简单的过程.

在本书第 1 章中已经说明，发光的过程是光源中原子热运动或辐射跃迁的结果，而每个光源中原子的数量是巨大的，因而每一瞬间所发出的光波的数量也是巨大的. 所以，每个发光的原子才是真正意义上的光源，而通常所谓的“光源”并不是真正意义上的单个发光中心.

正是由于每个光源实际上并不是单个发光中心，所以实际中，光波的叠加也就不可能与机械波或无线电波的叠加有类似的过程，当然也就不是那么容易实现光波的干涉. 这也就是为什么光的波动说和微粒说针锋相对争论了一百年之久都不能有一方胜出. 这也反过来证明了看似简单的杨氏双缝干涉实验中一定包含着深刻的智慧和难以被人觉察的物理玄机.

第三，时间平均的含义是什么？

既然原子发出的光波都可视为简谐光波，而简谐光波在某一场点的振幅、空间相位都是不随时间改变的，也就是说式(3.3.1)中被积函数实际上是不含时的，则一定有

$$I=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}A^2\mathrm{d}t=A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

然而，正如前面所分析的，波场中根本不可能只有两列波，甚至不可能有可数的、有限数目的波列. 所以，“从两个光源发出两列光波”或者“两列光波在光波场中某点相遇”之类的说法都是错误的. 这样一来，用两列同频率简谐光波的叠加计算光强的式(3.3.1)就没有什么实际的意义了. 那么，就让我们结合实际的情况讨论光波叠加的强度.

一方面，光源中原子的数量是巨大的，每一瞬间所发出的光波的数量也是巨大的，所以不管是否有其他的光源，来自一个光源的光波列会相互叠加. 利用式(2.2.4)，设光源共发出 N 列同频率的光波，在某相遇点叠加后，有

$$A^2=\sum_{m=1}^{N}A_m^2+2\sum_{j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N}A_jA_m\cos(\varphi_m-\varphi_j)$$

另一方面，每个原子发光的过程是自发的、随机的过程，因而从统计的观点看，任意两列光波之间的相位差 $\Delta\varphi_{mj}=\varphi_m-\varphi_j$ 是随机取值的，则 $\cos(\varphi_m-\varphi_j)$ 就是 $(-1,+1)$ 的随机值. 则

$$\sum_{j>m}^{N}\sum_{m=1}^{N}A_jA_m\cos(\varphi_m-\varphi_j)=0 \tag{3.3.2}$$

所以，叠加的结果就是

$$A^2=\sum_{m=1}^{N}A_m^2 \tag{3.3.3}$$

既然每个实际的光源都发出大量的、无关联的光波，那么一个个不同的光源发出的光波列之间的相位差也是随机取值的，这些光波之间的叠加也一定有式(3.3.2)和式(3.3.3)那样的结果. 因此，若共有 K 个同频率的单色光源，其中第 j 个光源发出的共计 N_j 列光波在波场中某点(称为**场点**)叠加后的总振幅记为 A_j，则该光源单独在该场点产生的强度为 $A_j^2=\sum_{m_j=1}^{N_j}A(j)_{m_j}^2$，其中 $A(j)_{m_j}$ 表示第 j 个光源发出的第 m_j 列光波在该场点的振幅. 于是，K 个光源发出的共计 $N_1+N_2+\cdots+N_K$ 列光波在该场点进行叠加，记合振幅为 A，则有

$$A^2=\sum_{m_1=1}^{N_1}A(1)_{m_1}^2+\sum_{m_2=1}^{N_2}A(2)_{m_2}^2+\cdots=A_1^2+A_2^2+\cdots+A_K^2 \tag{3.3.4}$$

所以，式(3.3.1)所表示的“对时间求平均值”的含义，实质是对数量巨大的、随机的、无关联的光波进行统计平均. 统计平均的结果，对于每个光源，所产生的光强就是其中大量原子发出的所有光波的光强相加；对于多个光源，所产生的光强就是各个光源所产生的光强相加.

2. 非相干光与非相干叠加

无论是客观现象还是物理实验，与上面分析的结果都是相一致的，光波叠加的结果都是各自的光强相加. 若每个光源都在空间有均匀的光强，则多个光源共同辐照的空间，光强依然是均匀的，并不会出现干涉现象，即不会出现某些区域光强增大而某些区域光强减小从而形成交错分布的亮暗条纹的情况.

所以实际的光源是**非相干的**(incoherent)，所发出的光波是**非相干光**(incoherent light).

非相干光源所发出的光波之间的叠加是**非相干叠加**(incoherent superposition).

非相干叠加，只是各列光波强度的直接相加.

3. 相干光与相干叠加

若真的能够设法获得两列(或者有限的多列)简谐光波，则可以实现光的干涉. 不妨以两列光为例，利用式(3.3.1)分析光的干涉. 由于光波是简谐的，则光

强为

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

记 $\Delta\varphi(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$，是两列波在相遇点 P 的相位差. 可见，一般情况下，$I\neq I_1+I_2$，即两列光波干涉所形成的光强不是各列波的光强相加.

设 j 为任意整数.

(1) 当 $\Delta\varphi=2j\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi=1$.

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2=(A_1+A_2)^2>I_1+I_2 \tag{3.3.5}$$

这种情况下，光强取最大值，称为**相长干涉**(constructive interference).

(2) 当 $\Delta\varphi=(2j+1)\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi=-1$.

$$I=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2=(A_1-A_2)^2<I_1+I_2 \tag{3.3.6}$$

这种情况下，光强取最小值，称为**相消干涉**(destructive interference).

在波场空间中不同的位置，即不同的场点，两列光波的相位差不同，因而 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ 的值不同. 这样一来，有些场点的光强是极大值，有些场点的光强是极小值，即在光波的重叠区域，光强变得不均匀了，有些地方光强增大，比每一列光的强度之和还要大；而另一些地方光强减弱. 因而光场中会出现明暗交错的情况，这就是光的干涉. 由于干涉所形成的明暗交错的条纹，被称为**干涉图样**(interference pattern)，或**干涉花样**.

与非相干叠加相比，干涉是由于 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ 没有抵消，而且在不同的场点有不同的取值，因而 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ 被称为干涉项(interference term).

由于每一列光波都是简谐光波，$\varphi_1(P)$、$\varphi_2(P)$是它们的空间相位，即只与空间位置有关，所以相位差 $\Delta\varphi(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$也只与空间位置有关，与时间无关，因而干涉图样是稳定的.

干涉的结果，使得光的能量重新分布，光强分布不再是各处均匀的.

能够产生干涉的光，被称为**相干光**(coherent light).

相干光的叠加，不是光强相加，而是各列波按相位差的叠加. 这种相干光之间的叠加被称为**相干叠加**(coherent superposition).

3.3.4 光波的相干条件

前面是采用标量方法讨论波长相同光波(即所谓单色波)间的干涉，而光是矢量波，光的波长更是不尽相同，以下分析光矢量方向不同和波长不同条件下是否会产生干涉.

1. 相互垂直的光矢量的叠加

若光波的电矢量 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ 相互垂直，如图 3.3.3 所示，则必须用矢量叠加的方法进行分析. 合振动矢量为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$.

先考虑以下两种特殊的情况.

第一种，两列光波的传播方向平行，即 $\boldsymbol{k}_1 // \boldsymbol{k}_2$，如图 3.3.4 所示.

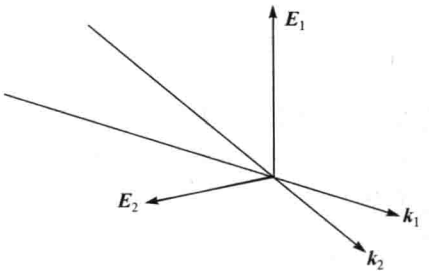


图 3.3.3 $\boldsymbol{E}_1 \perp \boldsymbol{E}_2$

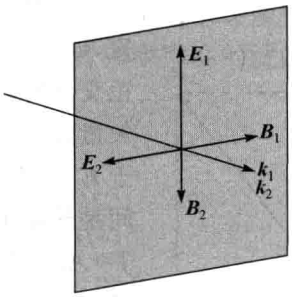


图 3.3.4 $\boldsymbol{k}_1 // \boldsymbol{k}_2$

由于光是横电磁波，则必然有 $\boldsymbol{B}_1 \perp \boldsymbol{B}_2$，即两列光波的磁场方向亦相互垂直.

可以将这两列波的电场强度和磁场强度分别表示为 $\boldsymbol{E}_{1x}$、$\boldsymbol{H}_{1y}$；$\boldsymbol{E}_{2y}$，$\boldsymbol{H}_{2x}$. 由于光强为能流密度的平均值，用坡印亭矢量表示，第一列光波的强度为 $I_1 = \langle |\boldsymbol{S}_1| \rangle = \langle |\boldsymbol{E}_{1x} \times \boldsymbol{H}_{1y}| \rangle$，第二列光波的强度为 $I_2 = \langle |\boldsymbol{S}_2| \rangle = \langle |\boldsymbol{E}_{2x} \times \boldsymbol{H}_{2y}| \rangle$. 叠加后，总的电场强度为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{1x} + \boldsymbol{E}_{2y}$，总的磁场强度为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{1y} + \boldsymbol{H}_{2x}$. 则合振动的能流密度，即坡印亭为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{E}_{1x} + \boldsymbol{E}_{2y}) \times (\boldsymbol{H}_{1y} + \boldsymbol{H}_{2x}) \\ &= \boldsymbol{E}_{1x} \times \boldsymbol{H}_{1y} + \boldsymbol{E}_{1x} \times \boldsymbol{H}_{2x} + \boldsymbol{E}_{2y} \times \boldsymbol{H}_{1y} + \boldsymbol{E}_{2y} \times \boldsymbol{H}_{2x} = \boldsymbol{E}_{1x} \times \boldsymbol{H}_{1y} + \boldsymbol{E}_{2y} \times \boldsymbol{H}_{2x} \\ &= \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 分别为两列波各自的能流密度. 因而合振动的光强为

$$I = \langle |\boldsymbol{S}| \rangle = \langle |\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2| \rangle = \langle |\boldsymbol{S}_1| \rangle + \langle |\boldsymbol{S}_2| \rangle = I_1 + I_2$$

在这种情况下，两列波叠加后的光强就是它们各自光强的简单相加，因而不会出现干涉现象. 所以，振动方向相互垂直的光波是非相干的，叠加的光强是两列光的强度相加.

第二种，两列光波的传播方向垂直，即 $\boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{k}_2$，如图 3.3.5 所示.

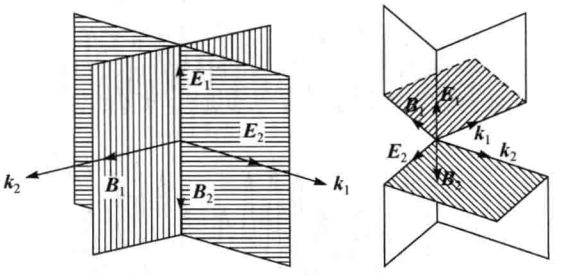


图 3.3.5 $\boldsymbol{k}_1 \perp \boldsymbol{k}_2$

则依然有 $\boldsymbol{B}_1 \perp \boldsymbol{B}_2$，叠加的结果与第一种情况相同.

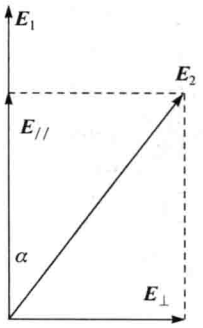


图 3.3.6　光矢量的正交分解

当然，一般的情况是两列光波电矢量既不平行，也不垂直，如图 3.3.6 所示. 这种情况下，可将其中一列波的电矢量正交分解，分解后的两个分量分别平行和垂直于另一个振动矢量，例如，将 $\boldsymbol{E}_2$ 正交分解为 $\boldsymbol{E}_{//}$ 和 $\boldsymbol{E}_\perp$，然后再进行叠加. 由于 $\boldsymbol{E}_{//}$ 与 $\boldsymbol{E}_1$ 同方向，两者之间是相干叠加，而 $\boldsymbol{E}_\perp$ 与 $\boldsymbol{E}_{//}$、$\boldsymbol{E}_1$ 之间是非相干叠加. 光强为

$$I=A_1^2+A_{//}^2+2A_1A_{//}\cos\Delta\varphi+A_\perp^2=I_1+I_2+2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$$

其中，α 为两列波振动方向间的夹角；$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$，为两列波的相位差. 由于干涉项 $2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$ 的存在，这两列光波也能产生干涉.

2. 不同频率光波间的叠加

从数学上看，频率不同的两余弦函数相加，其结果不能化简为一个简谐函数，即两列不同频率的单色波（简谐光波）叠加，其结果不再是简谐光波. 下面通过一个简单的例子对此加以说明.

为了便于用解析式计算，不妨设两列光波的频率不同，而振幅相同，即 $\psi_1=A_0\cos(k_1z-\omega_1t)$，$\psi_2=A_0\cos(k_2z-\omega_2t)$. 这两列波叠加的结果为

$$\psi=\psi_1+\psi_2=2A_0\cos\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

$$=2A_0\cos(k_mz-\omega_mt)\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$$

其中，$\bar{k}=\dfrac{k_1+k_2}{2}$；$\bar{\omega}=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$；$k_m=\dfrac{k_1-k_2}{2}$；$\omega_m=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$.

显然，$k_m<\bar{k}$，$\omega_m<\bar{\omega}$，即因子 $\cos(k_mz-\omega_mt)$ 随时间和空间的变化都比 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$ 慢.

如果将 $2A_0\cos(k_mz-\omega_mt)$ 看成简谐部分 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$ 的振幅，则由于该振幅将随时间振荡，所以合成后的光波场不再是简谐的，如图 3.3.7 所示.

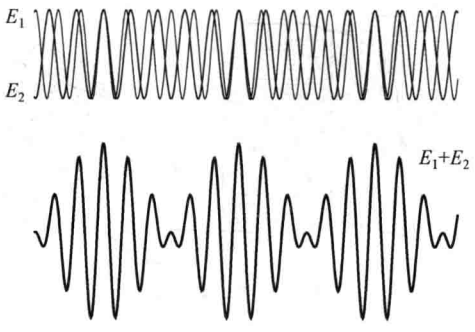


图 3.3.7　不同频率的光波的叠加

但是，如果这两列波的频率（波长）相差不大，即 $\bar{\omega}\approx\omega_1\approx\omega_2$，$\bar{k}\approx k_1\approx k_2$，因而 $\omega_m\ll\bar{\omega}$，$k_m\ll\bar{k}$，于是，波场 $2A_0\cos(k_m z-\omega_m t)\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$ 就相当于缓慢变化的因子 $\cos(k_m z-\omega_m t)$ 对 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$ 的振幅起调制作用，或者频率为 $\bar{\omega}$ 的波的振幅较缓慢地随时间变化，如图 3.3.8 所示.

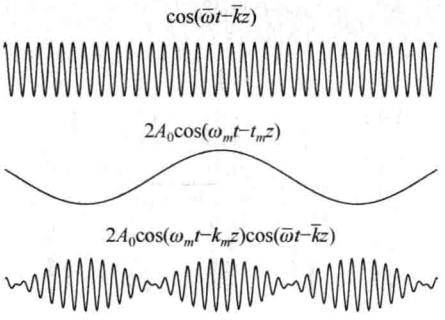


图 3.3.8　振幅调制

由于 ω_m、k_m 很小，所以测量光强时，可以得到光强数值随时间的变化. 根据上面的分析，可得到光强为

$$I=4A_0^2\cos^2(\omega_m t-k_m z)=2A_0^2[1+\cos2(\omega_m t-k_m z)] \tag{3.3.7}$$

叠加之后，每一场点的强度都会随时间变化，因而并不是一个稳定的干涉场，这就是**光学拍**(optical beat). **拍频**(beat frequency)为 $2\omega_m=|\omega_1-\omega_2|$，这就是场点光强随时间变化的频率.

上述推导过程中，为了得到简单的解析表达式，假设两列光波振幅相等. 实际上，只要两列波的波长不等，叠加后一定会形成光学拍. 如图 3.3.9 所示，设某一瞬间，这两列波在空间点 P 同相位，则该点的合振动振幅最大，从 P 点向前向后的各点，由于相位不同甚至相反，则合振动振幅逐渐减小. 如果记波长 λ_1 和 λ_2 的最小公倍数为 λ_m，则在距离 P 点等于 $n\lambda_m$ 处的各点，两列波的相位又相同，合振动的振幅又会出现极大值. 结果同样也能形成光学拍.

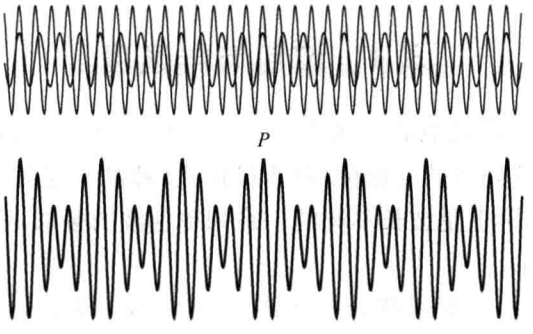


图 3.3.9　两列频率、振幅均不等的光波的叠加

因而，从一般意义上分析，无论参与叠加的光波数目如何，只要各列波的波长 λ_i 都取分立的、确定的数值，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_i,\cdots$ 一定有最小公倍数 λ_m，都可以形成光学拍，如图 3.3.10 所示.

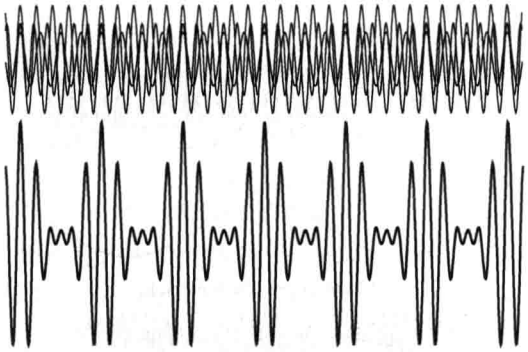


图 3.3.10　三列频率、振幅均不等的光波的叠加

所以有以下结论：

(1) 不同频率的光是不相干的；

(2) 频率相近的单色光叠加形成光学拍；

(3) 不同频率的简谐光波叠加得到非简谐光.

3. 光的相干条件

综合前面的讨论，可以得到结论，只有满足下列条件的光波，才是相干光.

(1) 频率 ω 相同的单色光；

(2) 相位差 $\Delta\varphi$ 确定的简谐光波；

(3) 光矢量 $\boldsymbol{E}$ 有相互平行的分量.

上述三个条件，称为**相干条件**(coherent condition).

以上仅是从理论上对产生干涉的条件进行了分析，在实验上实现相干才是最重要的.

3.4　波包与群速度

一列单色波可以用复数表示为 $\widetilde{U}(z,t)=a(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$，其中与时间无关的部分，即 $a(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 就是这列波的复振幅. 而非单色光(即波长连续分布的复色光)中包含不同波长的光，实际上是波长不同的一系列单色波的叠加，叠加的结果将会形成**“波群”**(wave group).

如果非单色光由一系列波长不等的波列组成，其中第 j 列波的振动记为 $\widetilde{U}_j(z,\lambda_j,t)$，则按照光波的叠加原理，合振动可表示为

$$\widetilde{U}(z,t)=\sum_j \widetilde{U}_j(z,\lambda_j,t)$$

这里讨论波长连续分布的非单色光，则上述求和变为积分，即

$$\widetilde{U}(z,t)=\int_0^\infty \widetilde{U}(z,\lambda,t)\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty a(z,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\mathrm{d}\lambda \tag{3.4.1}$$

其中，$a(z,\lambda)$为非单色光中波长为 λ 附近的单位波长间隔内的光波成分在空间 z 点的振幅，也就是常说的振幅的谱密度. 由于 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$，对波长 λ 的积分也可以化为对波矢 k 的积分，即

$$\widetilde{U}(z,t)=\int_0^\infty \widetilde{U}(z,k,t)\mathrm{d}\lambda=\int_0^\infty a(z,k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\mathrm{d}k \tag{3.4.2}$$

需要指出的是，此处的 $a(z,k)$与式(3.4.1)中的 $a(z,\lambda)$不同，一个是单位波矢间隔的振幅，一个是单位波长间隔的振幅，$\dfrac{k^2}{2\pi}a(z,k)=-a(z,\lambda)$.

设波矢的分布范围为 $k_0\pm\Delta k/2$，为计算简单，可以假设其中的各个单色成分有相等的振幅，如图 3.4.1 所示，即振幅可表示为

$$a(z,k)=\frac{A}{\Delta k} \tag{3.4.3}$$

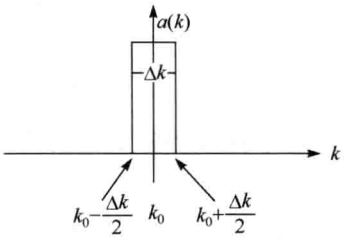


图 3.4.1 准单色波

假设非单色波的波长范围 $\Delta\lambda$ 或 Δk 相当有限，即 $\Delta\lambda\ll\lambda_0$ 或 $\Delta k\ll k_0$，是所谓的**“准单色波”**(quasi-monochromatic light). 由于准单色波的波长范围很小，可以将 $\omega=\omega(k)$用泰勒公式展开，并取到 1 级近似，有

$$\omega(k)=\omega(k_0)+\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}(k-k_0)=\omega(k_0)+v_\mathrm{g}(k-k_0)$$

其中，$\left(\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}=v_\mathrm{g}$. 则可得到

$$kz-\omega t=kz-[\omega(k_0)+v_\mathrm{g}(k-k_0)]t=(k-k_0)z-v_\mathrm{g}(k-k_0)t+k_0z-\omega(k_0)t$$

积分(3.4.2)化为

$$\widetilde{U}(z,t)=\frac{A}{\Delta k}\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k-k_0)z-v_\mathrm{g}(k-k_0)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0z-\omega(k_0)t]}\mathrm{d}k$$

记 $\omega(k_0)=\omega_0$，并作积分变量的代换 $k-k_0=k'$，则有

$$\widetilde{U}(z,t)=\frac{A}{\Delta k}\left[\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'(z-v_\mathrm{g}t)}\mathrm{d}k'\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}=\frac{A}{\Delta k}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Delta k}{2}(z-v_\mathrm{g}t)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Delta k}{2}(z-v_\mathrm{g}t)}}{\mathrm{i}(z-v_\mathrm{g}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}$$

$$=\frac{A}{\Delta k}\frac{2\mathrm{i}\sin\dfrac{\Delta k}{2}(z-v_\mathrm{g}t)}{\mathrm{i}(z-v_\mathrm{g}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}=A\frac{\sin\dfrac{\Delta k}{2}(z-v_\mathrm{g}t)}{\dfrac{\Delta k}{2}(z-v_\mathrm{g}t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega_0t)}$$

上述有一定波长分布范围的准单色波叠加的结果，是具有不同频率的两部分的乘积：高频部分的角频率为 $\omega(k_0)$，波矢为 k_0；低频部分的角频率为 $\frac{1}{2}v_g\Delta k$，波矢为 $\frac{\Delta k}{2}$. 叠加的结果也可以用图 3.4.2 表示.

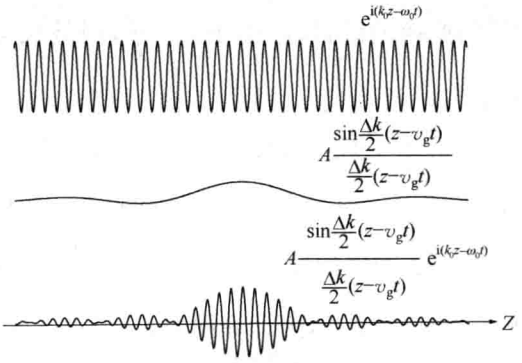


图 3.4.2　准单色波的叠加

由于低频部分变化缓慢，可以将其并入振幅部分，则总的效果相当于波矢为 k_0、频率为 $\omega(k_0)$、振幅为 $A\dfrac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_gt)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_gt)}$ 的波. 即

$$\widetilde{U}(z,t)=\left[A\frac{\sin\frac{\Delta k}{2}(z-v_gt)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_gt)}\right]e^{i(k_0z-\omega_0t)} \tag{3.4.4}$$

由于振幅在空间是振荡衰减的，实际上，合成波的有效部分，只是图 3.4.2 中的中央部分，这一部分是主极大；而其余部分由于振幅小得多，所产生的效应不明显. 这样，不同频率的波叠加的结果，就形成了一个在空间传播的**波包**(wave packet). 时刻 t，其主极大值的位置为 $z_0=v_gt$，以速度 v_g 在空间传播. 相邻极小值的位置由 $\frac{\Delta k}{2}(z_{\pm1}-v_gt)=\pi$ 决定，即 $z_{\pm1}=v_gt\pm\frac{2\pi}{\Delta k}$.

波包的大小就是上述主极大的有效分布区域，通常取 $z_{+1}-z_{-1}$ 长度的一半. 可以算得

$$L_0=\frac{z_{+1}-z_{-1}}{2}=\frac{2\pi}{\Delta k}=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{3.4.5}$$

这就是波包的大小，或非单色波列叠加后的有效长度.

如果将式(3.4.5)中的波长用频率代替，由于$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}=\frac{\lambda^2\nu^2}{\Delta\nu c}=\frac{c}{\Delta\nu}$，波包的有效长度也可以表示为

$$L_0=\frac{c}{\Delta\nu} \tag{3.4.6}$$

波包的速度就是中央主极大(Ghtral maximum)传播的速度，为

$$v_g=\frac{d\omega}{dk} \tag{3.4.7}$$

v_g 就是准单色光叠加之后所形成的波群或波包传播的速度，称为**群速度**(group velocity).

而其中每一个单色成分 $\widetilde{U}(z,k,t)=a(z,k)e^{i(kz-\omega t)}$，独自传播的速度为 $v_p=\frac{\omega}{k}$. 而 $v_p=\frac{\omega}{k}$是该成分振动传播的速度，也就是相位传播的速度，即相速度.

由于 $\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{\lambda}v_p=kv_p$，所以有 $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(kv_p)}{dk}=v_p+k\frac{dv_p}{dk}$，而 $dk=d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)=-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda=-\frac{k}{\lambda}d\lambda$，最后得到

$$v_g=v_p-\lambda\frac{dv_p}{d\lambda} \tag{3.4.8}$$

其中，$\frac{dv_p}{d\lambda}$反映的是介质中单色光速度随波长的变化关系，实际上，由于介质中的光速与折射率 n 有关，即 $v_p=\frac{c}{n}$，所以$\frac{dv_p}{d\lambda}$是光的色散关系.

由于在真空中没有色散，$\frac{dv_p}{d\lambda}=0$，所以 $v_g=v_p$，即光波的群速度和相速度相等.

由于理想的单色波是无限长的波列，是简谐光波，因而波场中各点的强度等物理量总是保持不变的，即单色波列不含有任何信息，故实际上无法测量单色波的相速度. 但是，由于在真空中，光波没有色散，所以准单色波的群速度与其中每一波长成分的相速度相等. 真空中的光速 c 其实就是光的相速度，也是准单色波的群速度，是一个不变的数值.

但是，在介质中，光出现色散，$\frac{dv_p}{d\lambda}\neq0$，因而 $v_g\neq v_p$.

如果$\frac{dv_p}{d\lambda}>0$，则 $v_g<v_p$；如果$\frac{dv_p}{d\lambda}<0$，$v_g>v_p$. 通常情况下，由于短波的折射率较大，所以$\frac{dv_p}{d\lambda}>0$，$v_g<v_p$，即群速度小于相速度.

由于非单色波的能量主要集中在波包中，因而波包的群速度，就是波所携带的能量传播的速度，也就是实验上测得的波的速度. 严格的单色波实际上是不存在的，而介质通常都是有色散的，所以若采用“时间-距离”法测量速度，在介质中测量所得到的光速，都是群速度. 只有在真空中，由于 $v_g=v_p$，测得的光速才与相速度相等. 目前公认光速的数值，是 1983 年第 17 届国际计量大会通过的，其值为

$$c=299\ 792\ 458\text{m/s}$$

就是真空中准单色光的群速度.

上述光速值已经作为物理学中的一个基本的定义常量. 1983 年的第 17 届国际计量大会规定：米是(1/299792458)s 的时间间隔内光在真空中行程的长度. 而 1967 年的第 13 届国际计量大会规定：铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁相对应辐射的 9192631770 个周期所持续的时间为 1s. 可见长度是由光速和时间这两个定义量根据式 $\Delta l=c\Delta t$ 而导出的.

3.5 杨氏干涉与相干光的获得

3.5.1 干涉装置

杨氏干涉通常指光通过双孔或双缝的干涉，装置如图 3.5.1 和图 3.5.2 所示.

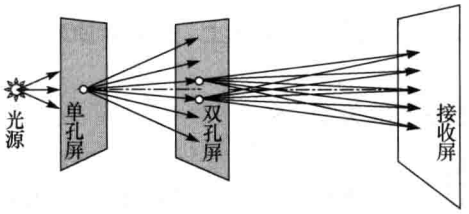


图 3.5.1　杨氏双孔干涉装置图

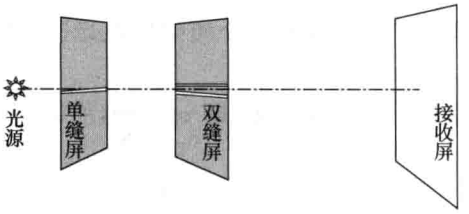


图 3.5.2　杨氏双缝干涉装置

图 3.5.1 所示的双孔干涉装置中，光源之后依次是单孔屏、双孔屏和接收屏. 单孔屏中央有一很小的透光孔，从光源发出的光透过小孔投射到双孔屏上. 双孔屏上有两个紧挨着的透光小孔，透过两个小孔的光就可以在接收屏上形成一系列相互交错的亮条纹和暗条纹. 图 3.5.2 是双缝干涉装置，由光源、单缝屏、双缝屏、接收屏依次排列构成. 光通过双缝，同样在接收屏上形成一系列相互交错的亮条纹和暗条纹. 接收屏上明暗交错的条纹，就是杨氏干涉图样.

装置中孔径和缝宽都很小，所以对于双孔屏，单孔就相当于一个点光源，对于接收屏，双孔就相当于两个靠得很近的点光源. 同样，对于双缝屏，单缝等效于一个线光源，对于接收屏，双缝等效于两个紧挨着的线光源. 小孔、细缝的作用都是限制

光源的空间尺度. 实验表明,孔或缝越细小,接收屏上亮暗条纹的对比就越显著,干涉图样就越清晰.

对于接收屏,双孔或双缝相当于两个光源. 既然能够产生干涉,说明屏上的双孔或双缝是相干的光源. 看起来,这样的光源也是普通的,事实上,如果将双孔中的一个遮挡,仅让一个孔透光,接收屏上不会出现干涉条纹(interference fringe),与普通光源照射到屏上没有什么区别.

之前的分析表明,实际的光源是不相干的. 为什么这样的两个光源就是相干的? 就能够产生干涉?

3.5.2 杨氏干涉的物理过程

不妨以双孔为例分析杨氏干涉实验中光波微观的物理过程.

小孔的作用当然不仅是限制光源的空间尺度,更重要的是,双孔屏起到了分光的作用,射到双孔屏上的光波,通过屏上的两个孔到达接收屏. 也就是说,到达接收屏上任何一点的光波,一部分通过孔 S_1 射来,另一部分通过孔 S_2 射来. 或者说,来自光源的每一列光波,大部分被屏挡住,其余的,一部分通过 S_1,另一部分通过 S_2,在接收屏上相遇并进行叠加,如图 3.5.3 所示.

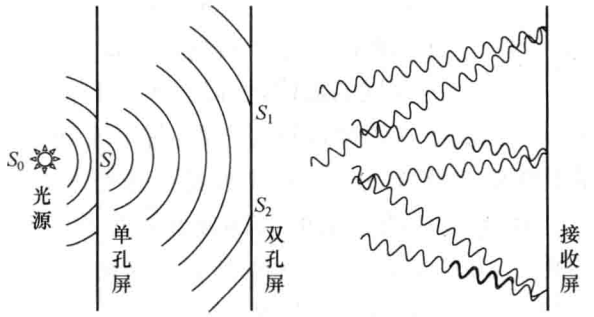


图 3.5.3 杨氏双孔干涉实验中分光波过程

例如,某一时刻 t,从光源发出 N 列光波通过 S_1、S_2 到达接收屏上 P 点. 对于其中的第 i 列波,由于是从同一列波分出来的,频率当然相同,设为 ω,通过孔的两部分在屏上 P 点的振幅分别为 $A_{i1}(P)$、$A_{i2}(P)$,相位分别为 $\varphi_{i1}(P)$、$\varphi_{i2}(P)$,则光矢量可分别表示为

$$\psi_{i1}(P)=A_{i1}(P)\cos[\varphi_{i1}(P)-\omega t],\psi_{i2}(P)=A_{i2}\cos[\varphi_{i2}(P)-\omega t]$$

光波在 P 点叠加,则有

$$\begin{aligned}\psi(P) &= \sum_i[\psi_{i1}(P)+\psi_{i2}(P)] = \sum_i[A_{i1}\cos(\varphi_{i1}-\omega t)+A_{i2}\cos(\varphi_{i2}-\omega t)] \\ &= \sum_i A_i(P)\cos[\varphi_i(P)-\omega t] \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

式中，$A_i(P)$、$\varphi_i(P)$分别为第 i 列光波通过双孔分出的两部分在 P 点的振幅和相位，其中

$$A_i^2(P)=A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos(\varphi_{i2}-\varphi_{i1}) \tag{3.5.2}$$

$$\varphi_i(P)=\arctan\frac{A_{i1}\sin\varphi_{i1}+A_{i2}\sin\varphi_{i2}}{A_{i1}\cos\varphi_{i1}+A_{i2}\cos\varphi_{i2}} \tag{3.5.3}$$

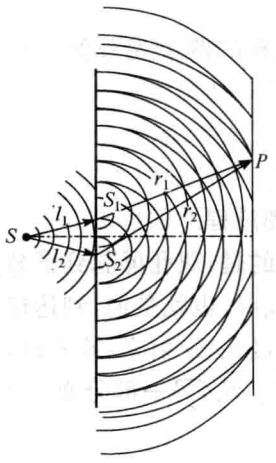


图 3.5.4　杨氏干涉中两列光波的光程

从图 3.5.4 可知，P 点的相位可以由光程表示为

$$\varphi_{i1}=k(l_1+r_1),\quad \varphi_{i2}=k(l_2+r_2)$$

则相位差 $\Delta\varphi_i=\varphi_{i2}-\varphi_{i1}$ 可以由光程差表示为

$$\Delta\varphi_i=k[(l_2+r_2)-(l_1+r_1)]=k(\Delta l+\Delta r)$$

由于光源 S 和孔 S_1、S_2 的空间尺度很非常小，所以它们都可以被视为点光源，这样，每一列从光源 S 发出的光波，经过 S_1、S_2 分出的两部分，到达 P 点时，都具有相同的相位差，即

$$\Delta\varphi(P)=k(\Delta l+\Delta r) \tag{3.5.4}$$

式(3.5.2)可写成

$$A_i^2(P)=A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi(P) \tag{3.5.5}$$

在时刻 t，有大量光波从光源发出，由于从每一列光波分出的两部分在 P 点的相位差都相同，干涉项 $\cos\Delta\varphi(P)$ 都有相同的数值，所以干涉项不会抵消.

所以可以这样看待杨氏干涉的微观物理过程：每个波列分出的两部分是相干的，在 P 点进行相干叠加，得到如式(3.5.5)所表示的光强 $I_i(P)=A_i^2(P)$. 而从式(3.5.3)可以看出，由于每列波分出的两部分叠加所形成的简谐光波 $A_i(P)\cos[\varphi_i(P)-\omega t]$ 的相位 $\varphi_i(P)$ 是各不相同的，所以不同的波列之间是不相干的，所以在 P 点进行光强相加，最后 P 点的光强就是

$$I(P)=\sum_i I_i(P)=\sum_i A_i^2(P)=\sum_i[A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi(P)] \tag{3.5.6}$$

其中，$\Delta\varphi(P)$ 与究竟是哪一列光波无关，而仅与从光源 S 通过两孔 S_1、S_2 到 P 点的光程差有关，即只与 P 点的位置有关.

由于干涉项 $\cos\Delta\varphi(P)$ 只与接收屏上各点的位置有关，所以在屏上不同的位置，光强不同，形成一定形式的干涉图样.

在看似简单的杨氏干涉中，既有同一列光波之间的相干叠加，也有不同光波之间的非相干叠加. 由于每列光波单独在接收屏上形成的干涉图样都是相同的，不同的光波之间又是不相干的，它们之间的叠加仅是光强相加. 因此，对于接收屏，光源中的发光中心都是相同的，从 S_1 出射的光波都是相同的，从 S_2 出射的光波也都是

相同的，这样一来，也可以认为从 S_1、S_2 各出射一列光波，而这两列光波是相干的，即只要认为 S_1、S_2 是两个相干的光源即可. 单位时间内从 S 发出的光波数越多（即光源的强度越高），通过 S_1、S_2 的波列数越多（即通光孔径越大），在接收屏看来，相当于光源 S_1、S_2 越强.

3.5.3 相干光的获得

从上面对杨氏干涉微观过程的分析可以看出，从一列光波分出的两个部分或几个部分之间才是相干的.

所以，将每一列光波分为几部分，就可以获得相干光.

再设法使这样得到的光波相遇，它们之间就能进行相干叠加，产生干涉.

所有的光波干涉装置都是基于这一思想而构建的.

3.6 干涉图样与干涉强度

3.6.1 杨氏双孔干涉

可以将屏上的双孔视为两个相干的点光源 S_1、S_2，每个孔各自发出球面光波，在场点（即观察点）P 相遇，如图 3.6.1 所示，则在 P 点两列波的光矢量为

$$\psi_1(P)=\frac{a_1}{r_1}\cos(k_1r_1-\omega t+\varphi_{01})=\frac{a_1}{r_1}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_1r_1-\omega t+\varphi_{01}\right)$$

$$\psi_2(P)=\frac{a_2}{r_2}\cos(k_2r_2-\omega t+\varphi_{02})=\frac{a_2}{r_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2r_2-\omega t+\varphi_{02}\right)$$

式中，φ_{01}、φ_{02} 是光波在双孔处的初相位；n_1、n_2 为从孔 S_1、S_2 到 P 点间介质的折射率；λ 为光在真空中的波长.

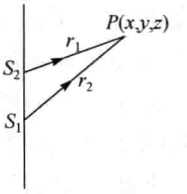


图 3.6.1 双孔到场点 P 的光程

记初相位差为 $\Delta\varphi_0=\varphi_{02}-\varphi_{01}$，则两列光波在 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_2r_2-n_1r_1)+\Delta\varphi_0 \tag{3.6.1}$$

其中，n_2r_2、n_1r_1 为两列光波各自的光程，则 $n_2r_2-n_1r_1$ 就是两列光波的光程差，记为

$$\Delta L=n_2r_2-n_1r_1 \tag{3.6.2}$$

如果是在真空或空气中，$n_2=n_1=1$，则 $\Delta L=r_2-r_1$，$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$.

P 点的光矢量为

$$\psi(P)=\psi_1(P)+\psi_2(P)=\frac{a_1}{r_1}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_1r_1-\omega t+\varphi_{01}\right)+\frac{a_2}{r_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2r_2-\omega t+\varphi_{02}\right)$$

记$\frac{a_1}{r_1}=A_1(P)$，$\frac{a_2}{r_2}=A_2(P)$，$n_1r_1=L_1$，$n_2r_2=L_2$，则上式可表示为

$$\psi(P)=A_1(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L_1-\omega t+\varphi_{01}\right)+A_2(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L_2-\omega t+\varphi_{02}\right)$$

于是 P 点的干涉光强为

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L+\Delta\varphi_0\right) \quad (3.6.3)$$

一般情形下，干涉装置都是在空气中，$n_2=n_1\approx1$，则光程差 $\Delta L=r_2-r_1$.

由于空间各处的光程差不等，则在干涉场中会出现明暗交错的**干涉条纹**.

在满足$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=2j\pi$ 处，干涉相长，出现亮条纹，即

$$\Delta L=r_2-r_1=j\lambda \quad (3.6.4)$$

其中，$j=0$，±1，±2，±3，±4，…被称为**干涉级数**(order of interference).

在满足$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=(2j'+1)\pi$ 处，干涉相消，出现暗条纹，即

$$\Delta L=r_2-r_1=(2j'+1)\frac{\lambda}{2} \quad (3.6.5)$$

由式(3.6.4)和式(3.6.5)可知，亮条纹和暗条纹在空间形成一系列的双叶旋转双曲面，或者称为双叶旋转双曲面族，如图 3.6.2 所示. 由于干涉在空间各处均可发生，干涉图样在空间各处均可观察到，所以这种干涉被称为非定域的，即形成的干涉场是非定域的.

如果在干涉场中插入一个平面，空间双曲面与平面相交，得到一系列明暗交错分布的曲线，这就是杨氏双孔干涉在接收屏上的干涉图样.

下面讨论满足傍轴条件时，干涉图样的特征.

如图 3.6.3 所示，接收屏为 xy 平面，接收屏上 P 点的坐标为$(x,y,0)$，双孔的

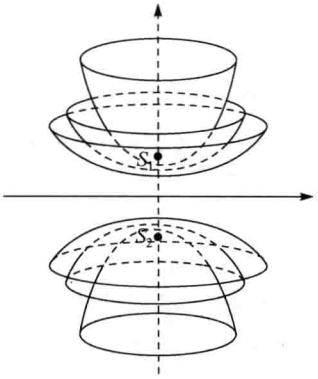


图 3.6.2　双叶旋转双曲面族

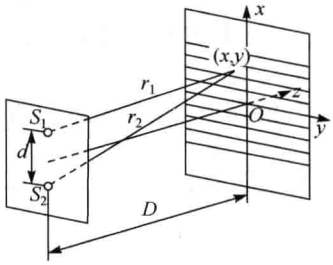


图 3.6.3　傍轴条件下的双孔干涉

间距为 d，到屏的距离均为 D，空间坐标分别为 $(x_1,y_1,z_1)=\left(\frac{d}{2},0,-D\right)$ 和 $(x_2,y_2,z_2)=\left(-\frac{d}{2},0,-D\right)$. 则

$$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+D^2}$$

$$=\sqrt{D^2+x^2+y^2+\frac{d^2}{4}-dx}=D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{D^2}+\frac{d^2}{4D^2}-\frac{dx}{D^2}}$$

若 S_1 满足傍轴条件，即 $\left(\frac{d}{2}\right)^2\ll D^2$，在接收屏上满足傍轴条件的区域中，即 $x^2+y^2\ll D^2$，有

$$r_1\approx D\left(1+\frac{x^2+y^2}{2D^2}+\frac{d^2}{8D^2}-\frac{dx}{2D^2}\right) \tag{3.6.6}$$

用同样的方法，可求得

$$r_2\approx D\left(1+\frac{x^2+y^2}{2D^2}+\frac{d^2}{8D^2}+\frac{dx}{2D^2}\right) \tag{3.6.7}$$

则 P 点的光程差为

$$\Delta L=r_2-r_1\approx\frac{dx}{D} \tag{3.6.8}$$

若双孔处的光强相等，则 $A_1=A_2=A_0$. P 点的干涉光强公式(3.6.3)成为

$$I(P)=2A_0^2+2A_0^2\cos\left(\frac{2\pi dx}{\lambda D}+\Delta\varphi_0\right)=4A_0^2\cos^2\left(\frac{\pi dx}{\lambda D}+\frac{\Delta\varphi_0}{2}\right)$$

记 $I_0=A_0^2$，这就是单个孔在接收屏上傍轴区域的光强. 各级亮条纹中心的位置为

$$x_j=\left(j-\frac{\Delta\varphi_0}{2\pi}\right)\frac{\lambda D}{d} \tag{3.6.9}$$

若初相位差 $\Delta\varphi_0=0$，则

$$x_j=j\frac{\lambda D}{d} \tag{3.6.10}$$

暗条纹的的中心位置为

$$x_j=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda \tag{3.6.11}$$

说明在接收屏上一个不大的区域内，干涉图样是一系列等间隔的平行直条纹，如图 3.6.4 所示. 相邻亮(暗)条纹的间距由 $\frac{\pi d\Delta x}{\lambda D}=\pi$ 决定，为

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda \tag{3.6.12}$$

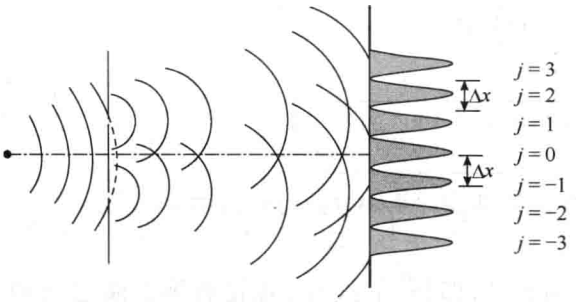


图 3.6.4　杨氏干涉的光强分布

3.6.2　杨氏双缝干涉

如果将两个点光源沿着相互平行的直线扩展，就得到了两个线光源，两条平行的透光狭缝就是这种情形. 此时，干涉场中不同 y 值处的复振幅相等，因而在接收屏上得到一系列相互平行的直条纹，明暗交错. 满足傍轴条件时，亮条纹的位置、暗条纹的位置、亮(暗)条纹间距分别由式(3.6.10)～式(3.6.12)决定.

与双孔干涉不同的是，由于缝可以使更多的光透过，所以干涉图样要比双孔明显得多，而且双缝干涉的条纹是一系列等间隔的平行直条纹，沿着缝的方向可以延伸得较长. 图 3.6.5 分别表示单色光和白光的杨氏双缝干涉图样.



(a) 红光入射的杨氏双缝干涉照片　　(b) 白光入射的杨氏双缝干涉照片

图 3.6.5　单色光和白光的杨氏双缝干涉图样

例如，设接收屏到双缝的距离为 $D=2\text{m}$，双缝间距为 $d=1\text{mm}$，对于 $\lambda=500\text{nm}$ 的光，干涉条纹的间隔为 $\Delta x=\dfrac{2\times10^{3}}{1}\times500\times10^{-6}=1(\text{mm})$.

如两列波初相位改变，则条纹形状不变，只是整体沿 x 方向移动.

如光源和接收屏之间充满折射率为 n 的介质，因为介质中光的波长为 $\dfrac{\lambda}{n}$，所以亮条纹的位置为 $x_j=j\dfrac{D}{d}\dfrac{\lambda}{n}$，条纹间距为

$$\Delta x=\frac{D}{d}\frac{\lambda}{n} \tag{3.6.13}$$

3.6.3 干涉条纹的可见度

双孔或双缝的干涉图样是一系列明暗交错的条纹，由前面的推导可以看出，条纹的间隔与干涉装置有关，同时还应当注意，两相干光源的相对强度，对干涉条纹也有一定的影响. 前面的推导是假设两光源强度相等，因而在暗条纹的中心处，由于干涉相消，光强为零，所以干涉图样明暗反差很大，条纹清晰可辨. 但是，如果两缝的情况不相同，如缝宽不等，或对光的透过率不同，则从每一缝出射的光的复振幅也不相等，则此时暗条纹处光强不再为零，干涉图样的亮暗条纹就不再那么明显. 为了衡量干涉图样的明暗反差程度，引入了可见度(visibility)的概念.

可见度的定义：在接收屏上一选定的区域中，取光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min}，则可见度为

$$V=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{3.6.14}$$

可见度也被称为反衬度. 若干涉在两列光波之间发生，则可得到 $I_{max}=(A_1+A_2)^2$，$I_{min}=(A_1-A_2)^2$，于是有

$$V=\frac{2A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}=\frac{2\dfrac{A_1}{A_2}}{1+\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2} \tag{3.6.15}$$

当 $A_1=A_2$ 时，$V=1$，即两列光的强度相当时，可见度最大；当 $A_1\gg A_2$ 或 $A_1\ll A_2$ 时，则 $V\approx 0$，即两列光的强度相差悬殊时，可见度最小.

如果记 $I_0=I_1+I_2=A_1^2+A_2^2$，则屏上各处条纹的强度可表示为

$$\begin{aligned} I&=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi \\ &=(A_1^2+A_2^2)\left(1+\frac{2A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}\cos\Delta\varphi\right)=I_0(1+V\cos\Delta\varphi) \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

3.6.4 两列平面光波的干涉

采用图 3.6.6 所示的装置，用分光板将入射平面光分为反射、透射两部分，这样分出的两部分再各自通过反射镜，就能够在接收屏上相遇并产生干涉. 当然也可以采用其他的方式获得两列相干的平面光波. 与杨氏干涉中的球面或柱面光波比较，平面光波更为简单. 但有些情形下，并不知道分光的起始位置，因而不能也不必采用通过计算光程的方式分析干涉图样.

设两列频率为 ω 的单色光，振幅分别为 A_1、A_2. 按方便的原则选定坐标系，使

y 轴与两列光的波矢垂直，如图 3.6.7 所示. 则波矢分别为 $\boldsymbol{k}_1=k(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\cos\theta_1\boldsymbol{e}_z)$，$\boldsymbol{k}_2=k(\sin\theta_2\boldsymbol{e}_x+\cos\theta_2\boldsymbol{e}_z)$. 接收屏在 $z=0$ 处，波前上任一点的位矢为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$. 则两列波在接收屏上的波前函数为

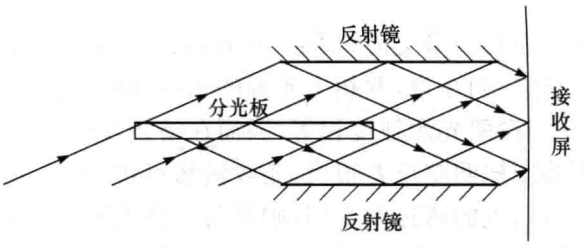


图 3.6.6　将入射平面光波分为相干的两列进行干涉

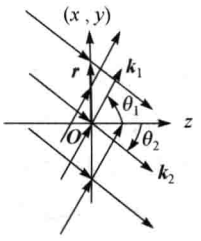


图 3.6.7　两列平面波的波矢

$\varphi_1(x,y)=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{10}=kx\sin\theta_1+\varphi_{10}$，　$\varphi_2(x,y)=\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{20}=kx\sin\theta_2+\varphi_{20}$

其中，φ_{10}、φ_{20} 为两列波在原点处的相位，也就是初相位.

接收屏上两列光波的相位差为 $\Delta\varphi(x,y)=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)=kx(\sin\theta_2-\sin\theta_1)+\varphi_{20}-\varphi_{10}=\dfrac{2\pi x(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\lambda}+\Delta\varphi_0$，其中，$\Delta\varphi_0=\varphi_{20}-\varphi_{10}$ 为两列光波的初相位差. 相干叠加（干涉）的亮条纹由 $\Delta\varphi(x,y)=2j\pi$ 确定，即 $x_j=\dfrac{j\lambda-[\Delta\varphi_0/(2\pi)]\lambda}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}$，这是一系列沿 y 轴的等间隔平行直条纹，相邻亮条纹的间隔为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{\sin\theta_2-\sin\theta_1} \tag{3.6.17}$$

更一般地，若 y 轴与两列光的波矢不垂直，方向分别为 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$，$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$，波矢分别为 $\boldsymbol{k}_1=k(\cos\alpha_1\boldsymbol{e}_x+\cos\beta_1\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma_1\boldsymbol{e}_z)$，$\boldsymbol{k}_2=k(\cos\alpha_2\boldsymbol{e}_x+\cos\beta_2\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma_2\boldsymbol{e}_z)$，则接收屏上的相位分布为

$$\varphi_1(x,y)=k(\cos\alpha_1 x+\cos\beta_1 y+\cos\gamma_1\cdot 0)+\varphi_{10}$$
$$\varphi_2(x,y)=k(\cos\alpha_2 x+\cos\beta_2 y+\cos\gamma_2\cdot 0)+\varphi_{20}$$

相位差为

$$\Delta\varphi(x,y)=k(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)x+k(\cos\beta_2-\cos\beta_1)y+(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

$P(x,y)$ 处的强度为

$$I(x,y)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi=(A_1^2+A_2^2)[1+\gamma\cos\Delta\varphi(x,y)]$$

由相位差可确定出现亮暗干涉条纹的条件为

$$k(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)x+k(\cos\beta_2-\cos\beta_1)y+(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\begin{cases}2j\pi\\(2j+1)\pi\end{cases}$$

即亮、暗条纹都是等间隔的平行直线，形成平行直线族，如图 3.6.8 所示. 斜率为 $-\dfrac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}{\cos\beta_2-\cos\beta_1}$，条纹间隔为

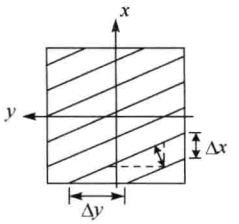


图 3.6.8　平行光的干涉条纹

$$\begin{cases}\Delta x=\dfrac{2\pi}{k(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)}=\dfrac{\lambda}{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1}\\ \Delta y=\dfrac{2\pi}{k(\cos\beta_2-\cos\beta_1)}=\dfrac{\lambda}{\cos\beta_2-\cos\beta_1}\end{cases}$$

或条纹的空间频率为

$$\begin{cases}f_x=\dfrac{1}{\Delta x}\\ f_y=\dfrac{1}{\Delta y}\end{cases}$$

3.7　惠更斯-菲涅耳原理

3.7.1　次波模型

1. 光的衍射现象

在没有障碍物的自由空间中，光波总是沿着直线传播的，例如，人们总是根据光射过来的方向判断光源的位置. 当有障碍物时，机械波、电磁波则会有**衍射**(diffraction)现象，即波会传播到障碍物的“阴影”区域，仿佛绕过了障碍物，如图 3.7.1所示. “衍射”通常被解释为“绕射”，其实这并不是很准确的理解.

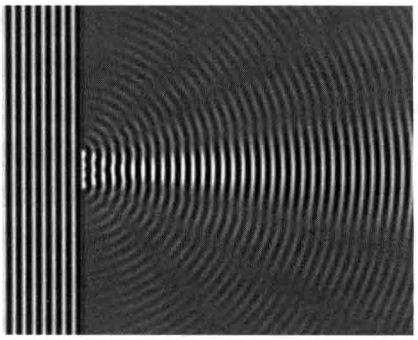


图 3.7.1　波由于衍射而进入阴影区域

对于机械波，衍射是常见的现象. 但是，光波的衍射却不容易观察到，通常我们说，光是沿直线传播的，当光波遇见障碍物时，阴影区域通常是没有光的，如

图 3.7.2 所示. 正因如此，我们可以很容易地遮挡光线.

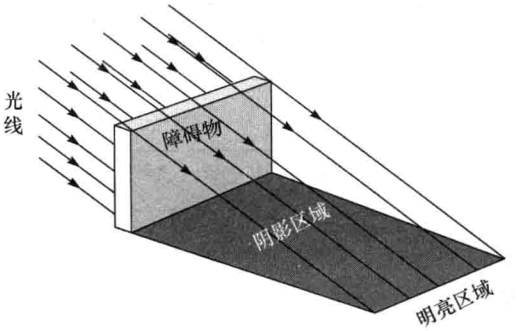


图 3.7.2　光的直进现象

我们知道，衍射是波的基本特征，但是明显的衍射现象只发生在衍射障碍物的空间尺度与波长相当的情况下. 而日常生活中的墙壁、窗口、树木等，它们的尺寸($\sim 10^{0}$m)要比光的波长($\sim 10^{-7}$m)大得多，所以光的衍射现象并不明显. 如果障碍物的尺度很小，如让光通过很细的狭缝，或很小的孔，或者在平直的挡板边缘，如果仔细观察，还是可以看到光的衍射现象的.

2. 次波

为了解释衍射，惠更斯在 1678 年提出了“次波”(secondary wavelet)的概念.

惠更斯认为，波在空间的传播，是扰动的传播，波在空间各处都引起扰动. 除了真实的光源之外，波场中的一个面(后来被称为波前)上的任一点都可视为新的扰动中心，这些扰动中心进一步所发出的波，称为**次波**，由于扰动中心是一个一个的点源，所以发出的次波可视为球面波. 后续的波面(或波前)就是这些球面次波的**包络面**(envelope). 在包络面上的各点，又可以被视为新的扰动中心，又在其周围引起新的扰动，即次波又可以产生新的扰动中心，继续发出次波，由此使得扰动不断地向前传播. 波场中除波源之外的扰动中心称为**次波中心**. 这种以次波的不断传播并衍生出新的次波的分析方法后来被称为**惠更斯原理**(Huygens's Principle).

如图 3.7.3 所示，实际的波源为点源 S，发出球面波. 波场中的球面 Σ_1 是一个波面，即等相位面. Σ_1 上有无数个次波中心，发出新的次波，经过一段时间后，这些次波的包络面是球面 Σ_2. 新的波面 Σ_2 上又有无数个新的次波中心，发出新的次波，不断向前传播.

按照惠更斯的观点，可以将波遇到障碍物出现衍射的过程看成次波不断衍生并传播的过程.

如图 3.7.4 所示，波场中有一个带有缝隙的挡板(即障碍物，称为衍射屏)，在缝隙处取一个面(即将缝隙取为波前)，则该面上有许多次波中心，发出球面次波. 在缝隙边缘处的球面次波则可以将扰动传播到障碍物后面的“阴影”处，于是平面

上的次波中心所发出的次波所形成的包络面就不再是平面. 这个包络面比缝隙处的平面增大了,上面的次波中心增多了,于是又发出更多的次波,形成更大的包络面,衍生出更多的次波中心,逐渐地,扰动就在障碍物后面的阴影区域传播开来,这样就形成了衍射.

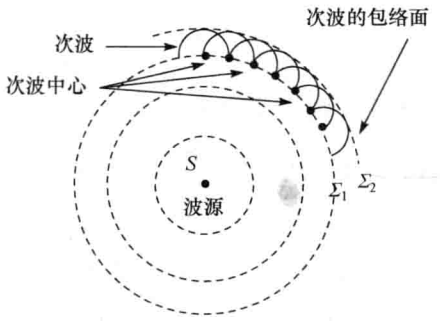


图 3.7.3 次波衍生出新的次波传播

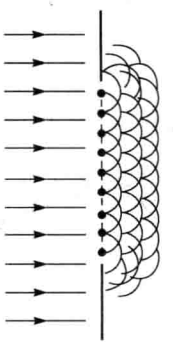


图 3.7.4 用次波解释衍射的成因

从上面分析的过程可以看出,按照惠更斯原理,次波是由波场中的扰动中心"衍生"出来的,次波的包络面上又有更多的次波中心,这样不断衍生出新的次波中心,并使扰动偏离最初入射方向的物理过程,用"衍射"一词描述是十分准确和恰当的.

关于惠更斯原理,有以下几点值得在此进行讨论.

第一,用次波模型解释弹性介质中的机械波的传播和衍射没有问题,因为机械波是介质中质点的振动,并带动其近邻的质点振动,振动的传播形成波. 这种振动从一个质点传到到其近邻质点的过程可以用次波的传播加以描述. 但电磁波是在真空中传播的,无需介质,所以看起来次波似乎失去了依附. 然而,从电磁感应的观点看,电磁波是交变的电磁场,即空间某一点处,交变的电场激发出交变的磁场,交变的磁场又激发出交变的电场,而"场"本身就是空间的一个区域,因而这样看来,认为次波是波场中持续激发出的小区域中的交变电磁场也没有什么不妥之处.

第二,按惠更斯原理,次波中心发出的是球面次波. 一般而言,从点源发出的是球面波,但次波并不是完全的球面波. 原因之一,是次波不应向后传播;原因之二,是次波在不同的方向上传播的强度是不相等的. 究其原因,次波毕竟是真实的扰动源引起的,因而在真实波源传播的方向上,强度最大,越偏离原来的传播方向,强度越小. 或者说,次波不是真正的波,当然不具有真正球面波的全部属性.

第三,次波只是用来分析衍射的一个物理模型,只是在有衍射屏的情形下,才能应用这一模型进行分析. 若光源到场点之间是自由空间,则可以直接计算出光源在场点的扰动,不必费力用次波进行分析.

3.7.2 次波的线性叠加:惠更斯-菲涅耳原理

1. 次波的光矢量

实际的点光源为 S,在 S 所产生的光波场中的某一点 Q 周围取一个面元 $d\Sigma$,考察该面元所发出的次波在某一场点 P 处的复振幅 $d\widetilde{U}(P)$ 和光强 $dI(P)$,如图 3.7.5所示.

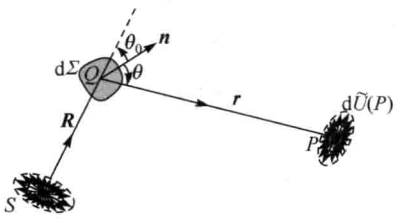


图 3.7.5 面元发出的次波在场点的光矢量

面元 $d\Sigma$ 上的每个点是一个次波中心,发出球面次波,则 P 点处的复振幅符合球面波的特征,即 $d\widetilde{U}(P)\propto\dfrac{\widetilde{U}_0(Q)e^{ikr}}{r}$,其中,$r$ 为场点到面元的光程.

由于面元很小,上面各个次波中心是相同的,所以 $d\widetilde{U}(P)$ 正比于面元上次波中心的数目,而次波中心的数目又正比于面元的面积,即 $d\widetilde{U}(P)\propto d\Sigma$.

考虑到光是横波,并且具有偏振的特性,因而 P 点的复振幅还与面元的相对取向有关.具体说来,设光源为 S,Q 相对于光源 S 的位矢 $\overrightarrow{SQ}$ 记为 $\boldsymbol{R}$,场点 P 相对于 Q 的位矢 $\overrightarrow{QP}$ 记为 $\boldsymbol{r}$,面元的法线记为 $\boldsymbol{n}$,则 $d\widetilde{U}(P)$ 的大小还与 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角 θ_0、$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ 有关,这种关系可以用函数 $F(\theta_0,\theta)$ 表示,即 $d\widetilde{U}(P)\propto F(\theta_0,\theta)$. $F(\theta_0,\theta)$ 称为**倾斜因子**(obliquity 或 inclination factor).菲涅耳根据直觉判断,随着角度 θ_0、θ 的增大,倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)$ 会逐渐减小.

上述 $\widetilde{U}_0(Q)$、$\dfrac{e^{ikr}}{r}$、$d\Sigma$ 以及 $F(\theta_0,\theta)$ 可称为次波复振幅的四要素.综合考虑上述所有因素,可以得到一个总的表达式

$$d\widetilde{U}(P)=KF(\theta_0,\theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma \tag{3.7.1}$$

其中,K 为比例常数.式(3.7.1)中的 $d\widetilde{U}(P)$ 所表示的就是一个微分面元发出的次波在场点 P 处所引起的元振幅.

从理论上说,面元 $d\Sigma$ 足够小,是取在某一列波上的,因而该面元上所有的次波中心是相同的.

2. 次波的相干叠加

通过衍射屏的光波在波场中某一点所引起的振动,就是与衍射屏相关的某一波前上发出的所有次波在该点的合振动.

由于各个次波中心实际上是取在同一列光波上,因而波前所发出的各列次波是相干的,场点 P 的合振动是波前上所有次波中心发出的次波的相干叠加,即

$$\widetilde{U}(P)=K\sum_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{3.7.2}$$

由于次波中心在波前上是连续分布的，每个面元无限小，面元的数目就是无限多，每个面元在场点的复振幅就无限小. 对无限多个无限小量求和，实际上就是求积分. 式(3.7.2)应当用积分计算，即

$$\widetilde{U}(P)=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{3.7.3}$$

式(3.7.3)就是**惠更斯-菲涅耳原理**(Huygens-Fresnel Principle).

惠更斯-菲涅耳原理是计算合振动的另一种方法，因而是波的叠加原理的另一种形式. 或者说，处理分立波列的合振动，可以直接用加法计算，这是干涉问题；处理连续分布的波列的合振动，则要用积分计算，成了衍射问题.

3. 菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

惠更斯-菲涅耳原理是菲涅耳根据惠更斯次波的思想进行直观的推理而得到的，尽管当时用于解释某些形式的衍射屏所引起的衍射现象获得了成功，但是这一原理并没有经过严格的数学论证，因而没有对倾斜因子的表达式、比例常数的取值、波前 Σ 选取的原则加以说明.

经过基尔霍夫(Gustau Kirchhoff，1824～1887，德国，1882 年)用光的电磁理论加以严格的论证，菲涅耳根据物理直觉所建立的积分公式基本上是正确的.

基尔霍夫的论证可以用图 3.7.6 进行说明. 衍射屏取在点光源和场点之间，选取包含衍射屏的封闭空间曲面 Σ，该曲面由三部分构成：衍射屏上的透光部分 Σ_0，不透光部分 Σ_1，以及在空间扩展的半球面 Σ_2，即 $\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2$. 可以忽略 Σ_1 对 Σ_0 处光波场分布的影响，即衍射屏上透光部分 Σ_0 的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 取为自由传播时的数值，而不透光部分 Σ_1 的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 自然等于 0. 相对于光的波长，衍射屏的不透光部分也可以认为是无限大的，所以第三部分 Σ_2 可以取一个半径无穷大的半球面，经过基尔霍夫严格的数学证明，积分公式(3.7.3)在球面 Σ_2 上的积分值等于 0，不必考虑. 则在求解衍射积分公式(3.7.3)时，只需要对衍射屏的透光部分 Σ_0 作积分就可以了，即将曲面积分的范围局限于光孔(也可称为有效波前)Σ_0 即可. 这种做法，称为衍**射积分的基尔霍夫边界条件**.

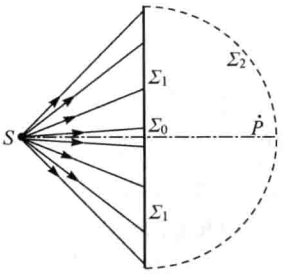


图 3.7.6 基尔霍夫边界条件的说明

基尔霍夫也推导出了积分公式中的比例常数和倾斜因子的表达式，其中

$$K=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\lambda} \tag{3.7.4}$$

$$F(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta) \tag{3.7.5}$$

比例常数中的相位因子不为0，而是$\frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}$，即对于次波，相当于有一个$\frac{\pi}{2}$的相位超前，说明等效次波源的相位不等于波前上$Q$点扰动的相位. 而倾斜因子的表达式说明向后倒退的次波也对P点的复振幅产生作用，只有在波前取为球面的情况下，$\theta_0=0$，$F(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$，此时$\theta=\pi$，才有$F(\theta_0,\theta)=0$.

将上述表达式(3.7.4)和式(3.7.5)代入式(3.7.3)，即可得到

$$\widetilde{U}(P)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\lambda}\iint_{\Sigma_0}\widetilde{U}_0(Q)(\cos\theta_0+\cos\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma \tag{3.7.6}$$

经过基尔霍夫修正的式(3.7.6)被称为**菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式**(Fresnel-Kirchhoff Formula). 处理光的衍射问题，都可以归结为求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式.

式(3.7.6)是一个空间曲面的积分，在直角坐标系下，平面接收屏位于z处，屏上的场点为$P(x,y)$，衍射屏上Q点的波前函数(即瞳函数)表示为$\widetilde{U}_0(x',y',z')$，将具体的参数代入，则积分表示为

$$\widetilde{U}(x,y)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\widetilde{U}_0(x',y')(\cos\theta_0+\cos\theta)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy' \tag{3.7.7}$$

可以看出，这是一个比较复杂的空间曲面积分，事实上，这样的积分是无法求解的，不能得到一个明确的解析表达式.

4. 衍射的分类

根据前面的讨论，求解衍射问题，就变成了求解上述积分公式(3.7.7)的问题. 但是，由于积分计算的复杂性，上述积分是无法严格求解的，因而总是在一定条件下将菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式简化为可以求解的形式.

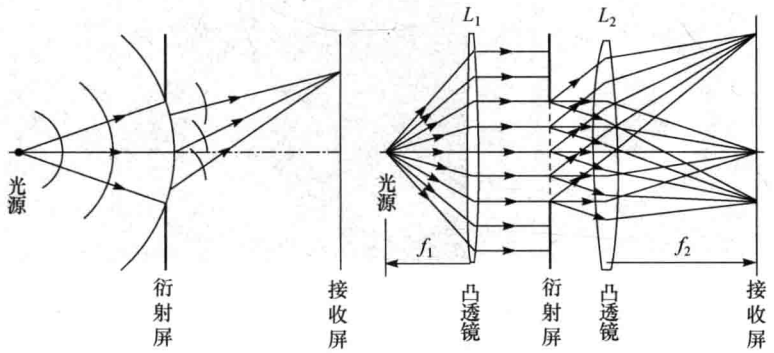
为了求解积分公式(3.7.7)，需要根据实际情况作一些近似，这些近似，一方面基于光波场的传播特征，另一方面可以采用特定的实验条件，根据实验条件进行合理的近似. 在采取了一定的近似处理之后，积分公式可以得到简化，并给出很好的结果.

正是出于通过近似求解衍射积分公式的需要，可以通过系统的配置，将衍射分为两类. 大体来说，是根据衍射屏到光源和接收屏的距离将衍射进行分类的，对不同类别的衍射系统，采用不同的近似方法以求解衍射积分公式.

如图3.7.7(a)所示，衍射屏到光源的距离是有限的，到接收屏的距离也是有限的，或者上述距离中至少一个是有限的，这种衍射称为**菲涅耳衍射**(Fresnel

diffraction). 此时，波前通常为球面，在接收屏上的任一点，是来自波前上不同点的球面次波进行相干叠加.

若衍射屏到光源的距离和到接收屏的距离都是无限远的，则被称为**夫琅禾费衍射**(Fraunhofer diffraction). 这种情况，相当于平行光入射到衍射屏上，从波前上发出的相互平行的次波进行相干叠加. 事实上，在衍射屏前后各放置一个凸透镜 L_1、L_2，并将光源置于 L_1 的焦点处或焦平面上，而将接收屏置于透镜 L_2 的像方焦平面处，如图 3.7.7(b)所示. 这样一来，射向衍射屏的是平面波，而在接收屏上能够相遇而进行叠加的次波，都是从波前上发出的相互平行的次波.



(a) 菲涅耳衍射　　(b) 夫琅禾费衍射

图 3.7.7　菲涅耳衍射(a)和夫琅禾费衍射(b)

3.8　菲涅耳衍射

3.8.1　衍射装置与现象

典型的菲涅耳衍射是圆孔衍射或圆屏衍射，光源通常都是点光源，接收屏在衍射障碍物(即圆孔或圆屏衍射屏)的另一侧.

如图 3.8.1 所示，在圆孔衍射中，接收屏上可以看见明暗交替的同心圆环，如图 3.8.3(a)所示. 当圆孔的半径改变时，衍射图样圆环中心明暗迅速交替变化；当接收屏前后移动时，圆环中心明暗缓慢交替变化.

如图 3.8.2 所示，在圆屏衍射中，接收屏上同样呈现同心圆环形的明暗条纹. 但与圆孔衍射不同的是，当圆屏直径改变，或接收屏沿轴向移动时，圆环中心永远是亮点，不会出现暗纹，如图 3.8.3(b)所示.

图 3.8.3 是一些圆孔或圆屏的衍射图样.

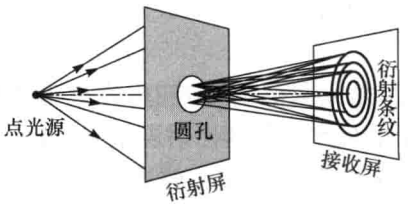


图 3.8.1　菲涅耳圆孔衍射

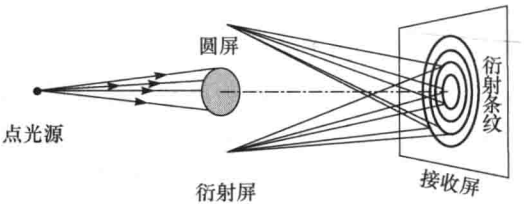
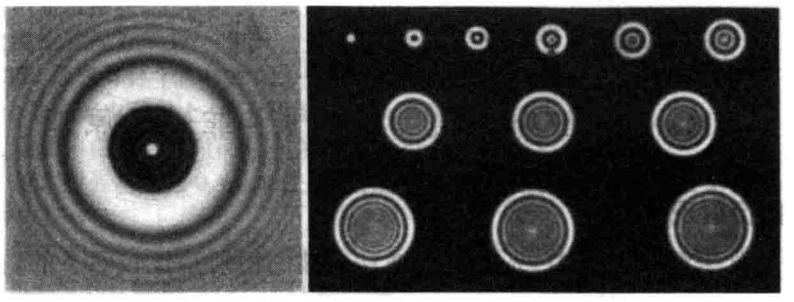


图 3.8.2　菲涅耳圆屏衍射



(a)　　(b)

图 3.8.3　菲涅耳圆孔衍射图样(a)与圆屏衍射图样(b)

3.8.2　用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射

1. 菲涅耳半波带

对于菲涅耳圆孔衍射系统，通常是点光源发出的球面光波入射，因而考虑通过圆孔的次波叠加时，一般将次波中心取在恰好露出圆孔的一个球面上，该球面就是入射波的一个波面，设这样的球面波前的半径为 R，球面顶点到位于轴上的场点 P 的距离(光程)为 b，圆孔的半径为 ρ，如图 3.8.4 所示.

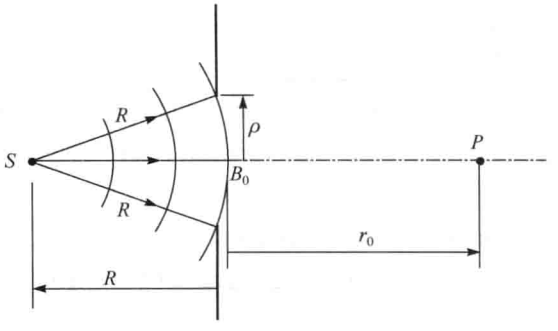


图 3.8.4　菲涅耳圆孔衍射系统的物理参数

从理论上解决上述圆孔或圆屏衍射问题，应当设法求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式. 既然将波前取在圆孔处的一个波面上，则积分公式中瞳函数是常量. 尽管如此，也不能对积分公式严格求解. 菲涅耳采用巧妙的方法，将复杂的衍射积分经过近似化为了简单的求和的形式.

菲涅耳是这样解决求解衍射积分问题的：将露出圆孔的波前（球面）划分为一系列的同心圆环带，并使各个带的边缘到轴上场点 P 的距离（光程）依次相差半个波长，例如，第一个环带的中心到 P 的光程为 $r_0=b$，其外缘到 P 的光程为 $r_1=r_0+\frac{\lambda}{2}$，第二个环带的外缘到 P 的光程为 $r_2=r_0+\lambda$，…第 m 个半波带的外边缘到场点 P 的光程为 $r_m=r_0+m\frac{\lambda}{2}$，如图 3.8.5 所示. 这样在球面上划分出的环带称为**菲涅耳半波带**(Fresnel half-period zone).

两个相邻的半波带上，有一系列的对应点（其实是对应的圆环），如图 3.8.6 所示，它们到场点 P 的光程差为$\frac{\lambda}{2}$，因而在 P 点振动的相位差为 π，相位相反，振动方向也相反，因而振动相互抵消.

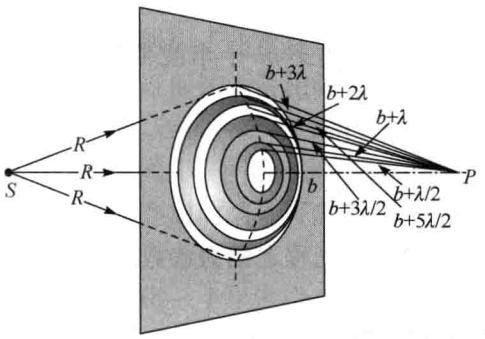


图 3.8.5　菲涅耳半波带的划分

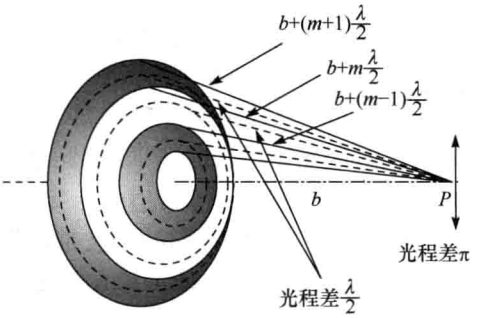


图 3.8.6　相邻半波带的合振动

2. 半波带的面积与到场点的光程

由于相邻半波带到 P 点的距离相差半个波长，所以半波带实际上是非常细的环，每一个半波带的面积也是很小的，下面首先计算每个半波带的面积 Σ_m.

如图 3.8.7 所示，设露出圆孔的球面上某一球冠对光源的张角为 φ，该球冠的高度为 h，则球冠的面积为 $S=2\pi Rh=2\pi R^2(1-\cos\varphi)$，对该式两端求微分，则有

$$\mathrm{d}S=2\pi R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{3.8.1}$$

这是由于张角改变 $\mathrm{d}\varphi$ 所引起的球冠面积的改变.

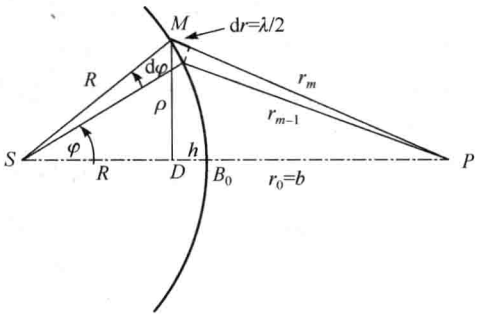


图 3.8.7　半波带面积的计算

对于图 3.8.7 中的△SMP，利用余弦公式，得到 $\cos\varphi=\dfrac{R^2+(R+r_0)^2-r_m^2}{2R(R+r_0)}$，两端求微分，则有

$$\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{r_m}{R(R+r_0)}\mathrm{d}r_m \tag{3.8.2}$$

将式(3.8.1)和式(3.8.2)结合，得到

$$\mathrm{d}S=2\pi R^2\,\frac{r_m}{R(R+r_0)}\mathrm{d}r_m$$

按照半波带的定义，当 $\mathrm{d}r_m=\lambda/2$ 时，$\mathrm{d}S=\Sigma_m$，Σ_m 为第 m 个半波带的面积. 于是上式变为 $\Sigma_m=\dfrac{\pi R r_m}{R+r_0}\lambda$，即

$$\frac{\Sigma_m}{r_m}=\frac{\pi R}{R+r_0}\lambda \tag{3.8.3}$$

可见，对于各个不同的半波带，其面积与到场点的光程之比为常数.

3. 单个半波带在轴上场点的复振幅

要求出一个半波带在场点 P 的振动，就要将其发出的所有次波在点 P 的振动进行叠加.

每一个半波带尽管很小，上面各点所发出的次波到场点 P 处的光程还是不同的，因而还要将每一个半波带作进一步的细分.

如图 3.8.8 所示，若将每个半波带分为两个波带，使其到 P 点的光程相差 $\dfrac{\lambda}{4}$，则这两个波带在 P 点的相位相差 $\dfrac{\pi}{2}$；若将每个半波带细分为 4 个波带，使各个波带到 P 点的光程依次相差 $\dfrac{\lambda}{8}$，则各个波带在 P 点的相位依次相差 $\dfrac{\pi}{4}$，…将每个半波带细分为 m 个波带，使各个波带到 P 点的光程依次相差 $\dfrac{\lambda}{2m}$，则各个波带在 P 点

的相位依次相差$\frac{\pi}{m}$. 用振幅矢量法计算合振动，则是 m 个矢量依次首尾相接，每个矢量相对于前一个矢量转过的角度为$\frac{\pi}{m}$，最后一个矢量相对于第一个矢量转过的角度为 π，如图 3.8.9 所示.

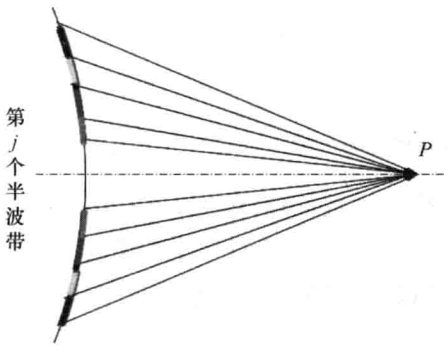


图 3.8.8　将一个半波带分为 m 份

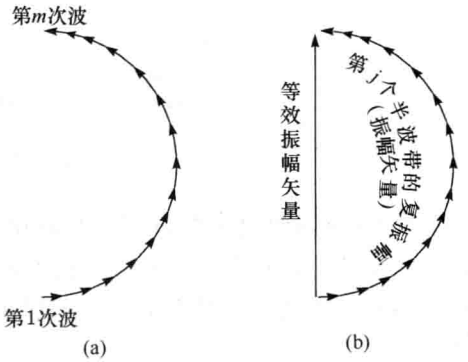


图 3.8.9　一个半波带的振幅矢量

需要指出的是，由于这些矢量对应的是一个小波带所发出的次波的复振幅，各列次波的倾斜因子非常接近，光程也相差不大(最多相差半个波长)，因而这些复振幅的大小可近似认为是相等的，所以图 3.8.9 中的各个矢量的长度相等.

进一步，若将一个半波带无限细分，则上述矢量将变为无穷多个，同时每个矢量将变得无限小，于是上述折线将演变为一个半圆弧. 即一个完整半波带所有次波的振幅矢量叠加的结果可近似地用一个半圆弧表示，这样的振幅矢量就是上述圆弧直径所代表的矢量.

如果将每一个半波带都用上述方法分析，则可得到各个半波带在场点 P 处的振幅矢量，相邻的半波带的振幅矢量由于相位相反(相位差为 π)，矢量的方向也相反，再考虑倾斜因子的影响，易知靠外的半波带，其振幅矢量将逐渐减小. 但是，由于相邻的半波带的倾斜因子十分接近，所以相邻的振幅矢量的大小也十分接近，如图 3.8.10 所示.

4. 衍射积分公式求解

按照惠更斯-菲涅耳原理，每个半波带在场点 P 的复振幅等于该半波带上发出的所有次波在 P 点振动的叠加，仍然需要通过求解衍射积分公式获得，即

$$\widetilde{U}_m(P) = K\iint_{\Sigma_m}\widetilde{U}(Q_m)F_m(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

其中，$\widetilde{U}_m(P)$ 为第 m 个半波带所发出的所有次波在场点所引起的合振动的复振幅，可简写为 $\widetilde{U}_m$. $\widetilde{U}(Q_m)$ 为第 m 个半波带上的瞳函数，由于波前取在球面波的一

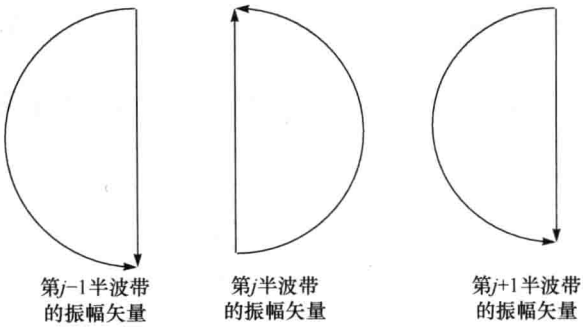


图 3.8.10　相邻半波带的振幅矢量

个波面上，所以所有半波带的瞳函数相等，可作为常数处理，记为 $\widetilde{U}$. $F_m(\theta_0,\theta)$ 为第 m 个半波带的倾斜因子，由于是球面波前，所以 $\theta_0=0$. 尽管每个半波带都很小，但由于从带上不同点到场点的光程不尽相同，所以不同的次波在 P 点的复振幅也不尽相等.

如果比较相邻两个半波带所引起的合振动，则可以发现，由于两带上对应圆环上的光源发出的次波到在 P 点振动的相位差为 π，所以这两个波带在 P 点的合振动的相位差也是 π，即振动方向相反，同时由于这两个半波带是近邻的，所以它们合振动振幅的大小也十分接近.

即相邻半波带发出的次波，到达 P 点时，光程差为半个波长，相位差为 π，由于相位相反，所以振动方向相反，振动相互抵消.

将波面划分为一系列的半波带之后，衍射积分公式可以化为对于各个半波带的次波的复振幅求和，设共有 n 个半波带，则有

$$\widetilde{U}(P)=K\iint_{\Sigma_0}\widetilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma=K\sum_{m=1}^{n}\iint_{\Sigma_m}\widetilde{U}_m(Q)F_m(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma=\sum_{m=1}^{n}\widetilde{U}_m$$

其中，$\widetilde{U}_m$ 为第 m 个半波带所发出的所有次波在场点所引起的合振动的复振幅. 既然前面已经用振幅矢量法求出了各个半波带的振幅矢量，也分析了相邻振幅矢量之间的关系，则只需将所有半波带的振幅矢量相加即可.

当然，也可以从数值分析的入手得到 P 点合振动振幅的表达式.

上述求和公式中，各半波带的光程都从其内侧边缘算起，即第一个半波带的光程为 r_0，第二个半波带的光程为 $r_0+\dfrac{\lambda}{2}$，…，第 m 个半波带的光程为 $r_m=r_0+(m-1)\dfrac{\lambda}{2}$ 等. 由于相邻的两个半波带在 P 点复振幅的相位差是 π，所以不妨将 $\widetilde{U}_m$ 写为下面的形式：

$$\widetilde{U}_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(m-1)\pi+\varphi_1]}A_m$$

其中，φ_1 为第一个半波带在 P 点复振幅的相位. 根据式(3.8.3)，$\frac{\Sigma_m}{r_m}=\frac{\pi R}{R+r_0}\lambda$，则

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(P) &= K\sum_{m=1}^{n}\widetilde{U}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left[r_0+(m-1)\frac{\lambda}{2}\right]}\frac{\Sigma_m}{r_m} = K\widetilde{U}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_1+(m-1)\pi]}\\ &= K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}F(\theta_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)\pi} = K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos\theta_m)(-1)^{m-1}\\ &= \widetilde{A}\sum_{m=1}^{n}(1+\cos\theta_m)(-1)^{m-1}\end{aligned}$$

其中，$\widetilde{A}=\frac{1}{2}K\widetilde{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}$，则 $\widetilde{U}_m=\widetilde{A}(1+\cos\theta_m)(-1)^{m-1}$ 为第 m 个半波带发出的次波在 P 点的复振幅. 其振幅的大小为 $A_m=\frac{1}{2}K|\widetilde{U}|\frac{\pi R\lambda}{R+r_0}(1+\cos\theta_m)$，相位为 $(-1)^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$. 可见，相邻半波带次波的相位相反，且 m 较大的半波带，由于 θ_m 较小，振幅也较小. 于是总的复振幅可表示为

$$\widetilde{U}(P)=\sum_{m=1}^{n}\widetilde{U}_m=(A_1-A_2+A_3-A_4+\cdots)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \tag{3.8.4}$$

振幅为

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}A_1+\left(\frac{1}{2}A_1-A_2+\frac{1}{2}A_3\right)+\left(\frac{1}{2}A_3-A_4+\frac{1}{2}A_5\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2}A_n\\ &= \frac{1}{2}[A_1+(-1)^{n-1}A_n]\end{aligned} \tag{3.8.5}$$

由于倾斜因子是连续、缓慢变化的，所以可以认为某一个半波带的振幅是与其相邻的两个半波带振幅的平均值，即 $\frac{1}{2}A_1-A_2+\frac{1}{2}A_3=0,\cdots$

5. 衍射现象的解释

从式(3.8.5)，可以得到以下结论：

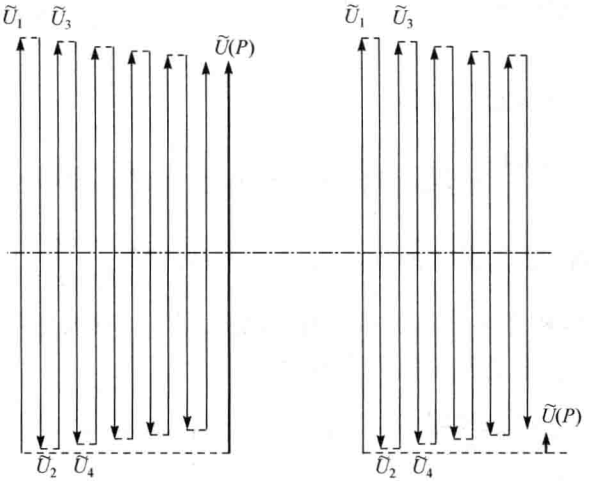
在圆孔衍射中，如果露出的半波带数 n 为奇数，则 $\widetilde{U}(P)=\frac{1}{2}(A_1+A_n)$，为亮点；

如果露出的半波带数 n 为偶数，则 $\widetilde{U}(P)=\frac{1}{2}(A_1-A_n)$，为暗点；

自由传播，相当于 $n\to\infty$，而 $A_n\to 0$，所以 $A(P)=\frac{1}{2}A_1$，始终亮点；

在圆屏衍射中，相当于前面 n 个半波带被遮住，则 $\widetilde{U}(P)=\sum_{n+1}^{\infty}A_m=\frac{1}{2}A_{n+1}$，因而总是亮点.

也可以用振幅矢量方法分析菲涅耳衍射，如图 3.8.11 所示，设奇数的半波带在 P 点的振幅用向上的矢量表示，则偶数的半波带的振幅用向下的矢量表示，由于倾斜因子的作用，随着 n 的增大，振幅逐渐减小，即越靠外的半波带，其振幅越小. 这些矢量合成的结果，与上述分析完全一致.



(a) 奇数个半波带　　(b) 偶数个半波带

图 3.8.11　菲涅耳半波带合振动的振幅矢量

6. 轴外物点的衍射

由于对称性，光轴上的点的衍射比较容易分析. 轴外的物点，分析起来比较复杂，但也可以定性地进行说明.

如图 3.8.12 所示，轴外一点 Q 与光源 S 的连线与圆孔处的波面交于 M 点，可以以 M 为中心在波面上作出一系列的半波带.

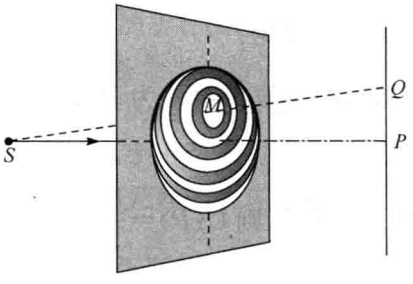


图 3.8.12　轴外观察点半波带的划分

这样划分的半波带，不是每个都能完整露出来，如图 3.8.13 所示，不完整的半波带，面积有较大的差别，所以也能在轴外形成亮暗交替分布的条纹. 由于衍射装

置是轴对称的，所以衍射图样也是轴对称分布的，是一系列的同心圆环.

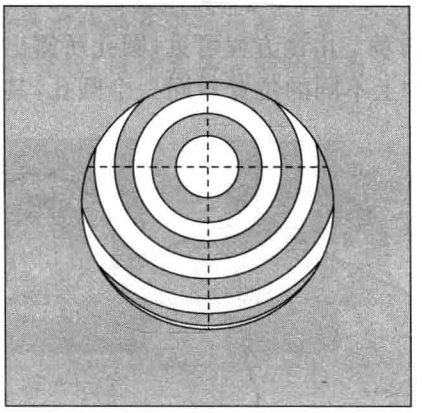


图 3.8.13 轴外观察点露出的半波带

3.8.3 半波带方程

由上述分析可知，轴上一点 P 的振幅或者光强取决于圆孔所露出的半波带的数目 n，下面讨论 n 与各个因素的数学关系.

此时，由于需要知道圆孔所露出的完整的半波带的数目，所以半波带到场点 P 的光程要从各个半波带的外边缘算起，即 $r_n=r_0+n\dfrac{\lambda}{2}$.

$$r_n^2-r_0^2=\left(r_0+n\frac{\lambda}{2}\right)^2-r_0^2=nr_0\lambda+\left(\frac{n}{2}\lambda\right)^2\approx n\lambda r_0 \tag{3.8.6}$$

如图 3.8.14 所示，记圆孔的半径为 ρ_n，在$\triangle MDP$ 中，有

$$\rho_n^2=r_n^2-(r_0+h)^2=r_n^2-r_0^2-2r_0h-h^2 \tag{3.8.7}$$

在$\triangle MDS$ 中，有

$$\rho_n^2=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2 \tag{3.8.8}$$

可得到

$$r_n^2-r_0^2-2r_0h=2Rh$$

求出 h 的表达式，并利用式(3.8.6)，得到

$$h=\frac{r_n^2-r_0^2}{2(R+r_0)}\approx\frac{nr_0}{2(R+r_0)}\lambda \tag{3.8.9}$$

考虑到 $h\ll r_0$，式(3.8.7)可以进一步化为

$$\rho_n^2\approx n\lambda r_0-2r_0h \tag{3.8.10}$$

将式(3.8.9)代入式(3.8.10)，有 $\rho_n^2=n\lambda r_0-\dfrac{n\lambda r_0{}^2}{R+r_0}=\dfrac{nr_0R}{R+r_0}\lambda$，整理后，得到

$$n=\frac{\rho_n^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R}\right) \tag{3.8.11}$$

式(3.8.11)称为**半波带方程**. 由该方程可见,圆孔所露出的半波带的数目 n 及其奇偶性由 r_0 决定,即在轴上不同的位置看同一个圆孔,其所露出的半波带的数目是不同的.

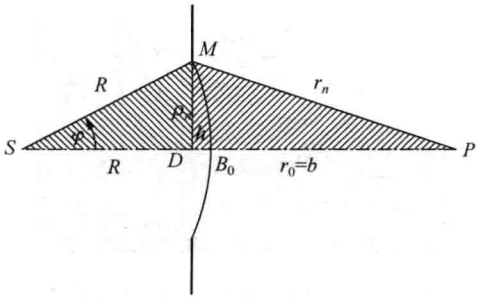


图 3.8.14　半波带方程的推导

3.8.4　一般情形下的波带

在一般情形下,一个圆孔所划分出的半波带往往不是整数个,这时就需要对最外的不是完整的半波带作进一步的细分. 如何细分半波带,以及细分后的半波带的振幅矢量已经在前面讨论过.

每个完整半波带所引起的复振幅都可以用一段转过 π 角的弧形矢量表示,圆孔衍射的振幅矢量就可以用许多个逐渐缩小的弧线形矢量依次首尾相接表示,不仅可以表示整数个半波带的合振动(图 3.8.15),也可以方便地表示最后一个波带不是完整半波带的情形(图 3.8.16),如果圆孔不能分成完整数的半波带,则最后一个波带所对应的振幅矢量将不是一个完整的半圆弧,此时,整个振幅矢量将是倾斜的,但光强只与矢量的长度有关.

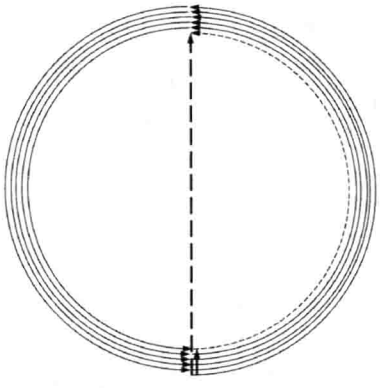


图 3.8.15　恰好整数个半波带的振幅矢量

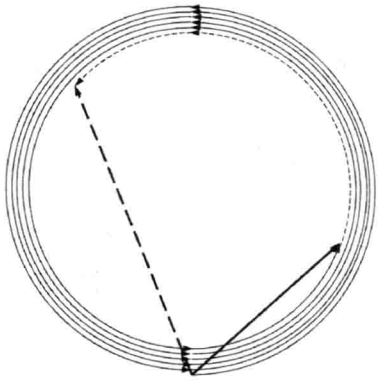


图 3.8.16　不是整数个半波带的振幅矢量

例 3.1

图 3.8.17 为两个特殊形状的菲涅耳衍射装置，阴影部分不透光，其中标出了各个圆环到轴上场点的光程，试计算场点处的衍射光强. 设无衍射屏时，场点的光强为 I_0.

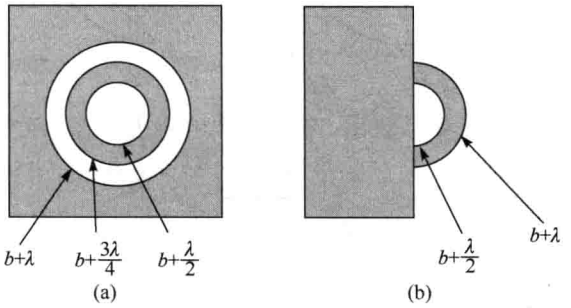


图 3.8.17 特殊形状的菲涅耳衍射装置

解 图 3.8.17(a) 中第一个半波带是全开放的，第二个半波带，沿径向前一半不透光，而后一半开放，其余部分全部不透光.

用振幅矢量法. 若圆孔中心的次波在场点的相位为 0，第一个半波带的振幅是整个半圆弧，第二个半波带后一半所发出次波在场点的相位为 $\frac{3\pi}{2}\sim 2\pi$，故仅是后 1/4 弧. 于是可得各个透光部分的振幅矢量及其合成结果，如图 3.8.18(a) 所示. 注意到自由传播时的光强为 $I_0=\left(\frac{A_1}{2}\right)^2=\frac{A_1^2}{4}$，则

$$I=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A_1\right)^2=\frac{1}{2}A_1^2=\frac{1}{2}\times 4I_0=2I_0$$

图 3.8.17(b) 中，第一、第三以及其后所有波带都被沿角度遮挡了一半，因而每个半波带中次波中心的数量减少了一半，但它们的相位依然是从 $0\sim\pi$，$2\pi\sim 3\pi$ 等. 所以振幅都是完整半波带的一半，即半圆弧的直径缩小一半.

第三以及其后所有波带的衍射，合振动振幅为 $\frac{1}{2}A_3=\frac{1}{2}A_1$，因而各振幅矢量及其合成结果如图 3.8.18(b) 所示 . 光强为

$$I=\left(\frac{3}{4}A_1\right)^2=\frac{9}{4}I_0$$

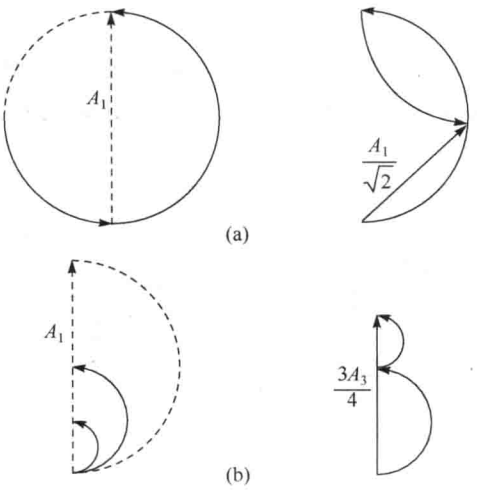


图 3.8.18　振幅矢量及其合成

3.8.5　菲涅耳半波带的应用——波带片

用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数(或偶数)半波带透光，即可以制成**菲涅耳波带片**(Fresnel zone plate)，如图 3.8.19 所示. 透过波带片的光，在光轴上的场点有相同的相位，振动方向相同，则合振动的振幅大大增强.

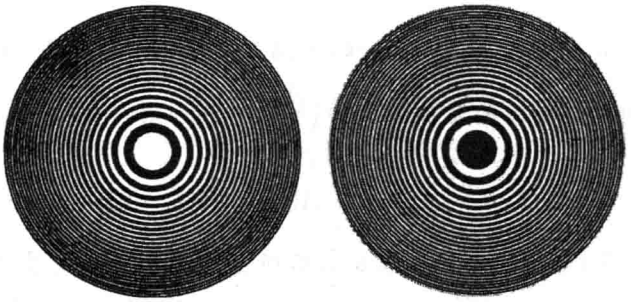


图 3.8.19　菲涅耳波带片

一般情况下，可以认为前面几个半波带的倾斜因子相差不大，即满足傍轴条件，所以它们发出的次波的振幅近似相等. 例如，波带片共有 20 个半波带，其中偶数的半波带被挡住，则在 P 点的复振幅为 $\widetilde{U}(P)=A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{19}\approx 10A_1$，因而 P 点光强为 $I(P)=100A_1^2$.

而自由传播时，振幅 $\widetilde{U}_0(P)=\dfrac{1}{2}A_1$，光强 $I_0(P)=\dfrac{1}{4}A_1^2$，所以 $I(P)=400I_0(P)$，两者相差 400 倍，可见波带片具有使光会聚的作用.

可以将半波带方程(3.8.11)写成如下形式：

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{r_0}=\frac{n\lambda}{\rho_n^2} \tag{3.8.12}$$

同透镜的高斯公式$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$比较，形式上相同，因而波带片的焦距为

$$f=\frac{\rho_n^2}{n\lambda} \tag{3.8.13}$$

经过波带片之后，衍射光在焦点出会聚，出现一个光强的极大值.

对于平行入射光，由于$R=\infty$，所以对平面波的波带片应当制成平面形状的.

从式(3.8.13)看出，任何一个波带片，通常都只适用于一个波长，其焦距是固定的. 但其实并非如此，见例3.2.

例3.2

一菲涅耳波带片对900.0nm的红外线的主焦距为30cm，改用632.8nm的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解 由于波带片不变，各个半波带的半径和序号都不改变，所以$f\lambda=\frac{\rho_n^2}{n}$不变，即$f_1\lambda_1=f_2\lambda_2$.

因此

$$f_1=f_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=80\times\frac{9000}{6328}=113(\text{cm})$$

一个菲涅耳波带片，除由式(3.8.13)所决定的主焦点之外，还有许多次焦点. 次焦点的形成，可以证明如下：

平行光入射，$R=\infty$，有$n=\frac{\rho_n^2}{\lambda}\frac{1}{r_0}$，即在距离$r_0$处，半径为$\rho_n$的带是第$n$个半波带.

当波带片不变时，r_0改变，会引起n的改变，即可划分的半波带数目改变.

如图3.8.20所示，场点到圆孔的距离r_0减小到$r_0/2$时，$n'=2n$，即相当于原来的每一个半波带都变成了两个半波带，这两个半波带的次波相互抵消，因而该点为暗点.

r_0进一步减小，到$r_0/3$时，$n'=3n$，原来的每一个半波带都变成了三个，其中两个半波带的次波相互抵消后，还余下一个半波带的次波，因而该点为亮点. 但是每一个半波带的面积只有约原来的1/3，同时倾斜因子的影响将更加显著，所以亮度比主焦点要暗，因此称为次焦点.

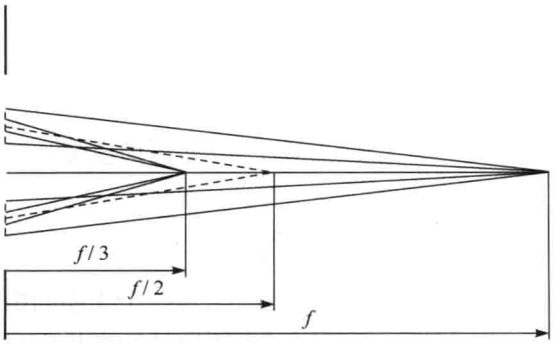


图 3.8.20　场点改变，半波带数目改变

r_0 进一步减小，到 $r_0/4$ 时，$n'=4n$，暗点；

……

所以有一系列次焦点，相应的焦距可以表示为

$$f'=\frac{f}{3},\frac{f}{5},\cdots,\frac{f}{2m+1},\cdots \quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{3.8.14}$$

当 $m=0$ 时，为主焦点的焦距.

除了圆环形的波带片之外，还有其他形式的波带片，如图 3.8.21 所示.

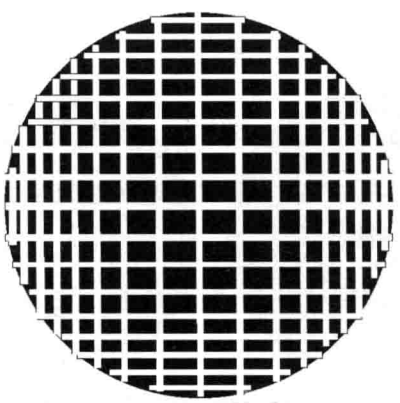


图 3.8.21　可以将入射平行光会聚成十字形的波带片

3.9　夫琅禾费单缝和矩孔衍射

3.9.1　夫琅禾费单缝衍射装置

夫琅禾费单缝衍射装置如图 3.9.1 所示，平行光入射，衍射屏上有一宽度为 a 的单狭缝，在衍射屏之后，置一凸透镜 L_2，接收屏位于透镜的像方焦平面.

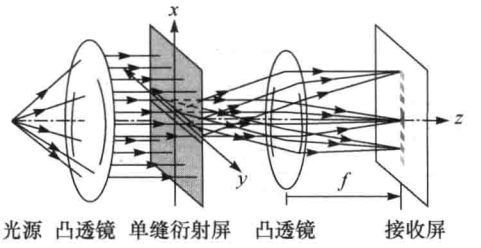


图 3.9.1 夫琅禾费单缝衍射装置

单缝衍射屏除了可以做成这种透射式的之外，还可以做成反射式的，即衍射屏上只有一条窄的反射面，其余部分不反射. 这种反射式衍射屏的原理和分析方法与透射式的衍射屏完全相同.

夫琅禾费单缝衍射图样如图 3.9.2 所示.

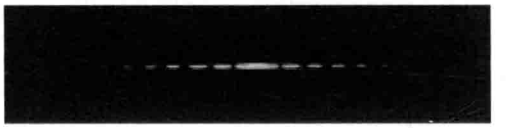


图 3.9.2 夫琅禾费单缝衍射图样

在这样的衍射装置中，由于只有在透镜物方相互平行的光才能会聚到其焦平面上的同一点，所以在接收屏上得到的是从单缝出射的相互平行的次波相干叠加所形成的条纹.

3.9.2 单缝衍射强度分布

求解接收屏上的衍射强度分布，应该先通过求解衍射积分公式，得到屏上的复振幅分布，然后再计算光强分布. 然而，由于严格计算积分非常复杂，所以要在一定的条件下采取近似.

由于衍射孔径，即单缝是比较小的，所以可以认为衍射光是满足傍轴条件的.

求解夫琅禾费衍射通常可以采用振幅矢量法和数值积分法，前者简单直观，适用于处理形状较为简单的衍射屏，后者则可以处理形状较复杂的衍射屏. 下面分别介绍.

1. 用振幅矢量方法求解

取狭缝处的平面为次波源所在的波前，射向单缝的平行光，既可以是垂直于狭缝平面的(正入射，图 3.9.3)，也可以是不垂直于狭缝平面的(斜入射，图 3.9.4). 在正入射的情形中，狭缝处的波前就是入射光的波面，即等相位面，斜入射的情形中，狭缝不是等相位面.

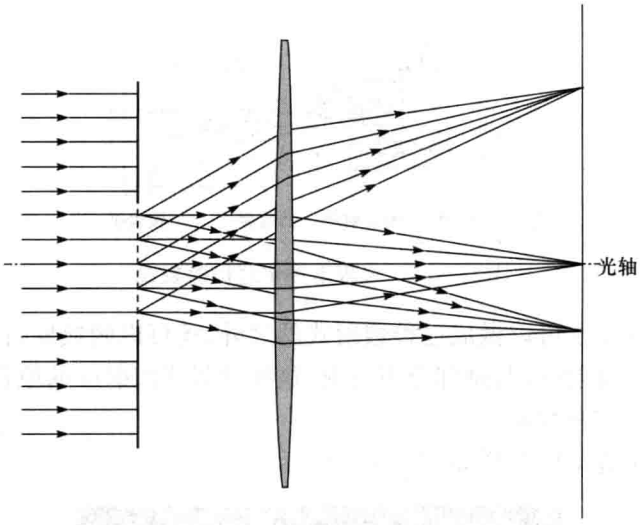


图 3.9.3　正入射到衍射屏

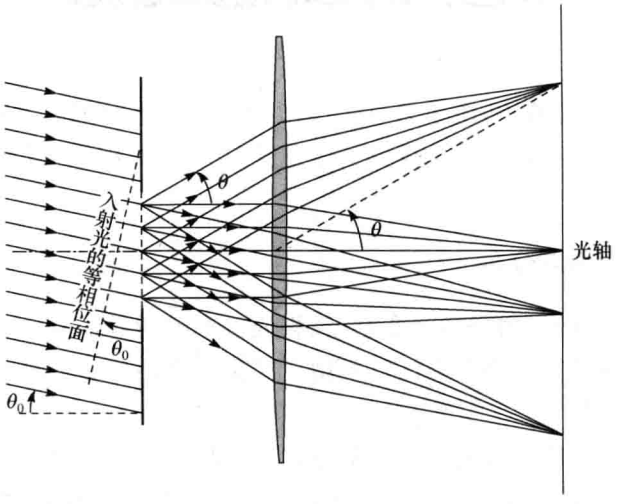


图 3.9.4　任意角入射到衍射屏

由于只有相互平行的次波才能在接收屏上相遇于同一点并进行叠加，所以只需讨论从狭缝上的次波源发出的相互平行的光波之间的光程差即可. 如图 3.9.5 所示，沿 θ 方向的次波在接收屏上的会聚点，对透镜光心的张角也是 θ. 过狭缝上端 A 作一个与 θ 方向衍射光垂直的平面，则该平面上各点到会聚点的光程是相等的，则狭缝上下两端 A、B 处波源到会聚点的光程差为 $a\sin\theta$.

对于沿 θ_0 方向的入射光，A、B 两点间的光程差为 $a\sin\theta_0$，则经狭缝上下端的两列次波到接收屏上会聚点的光程差和相位差分别(即包含缝前和缝后两部分的

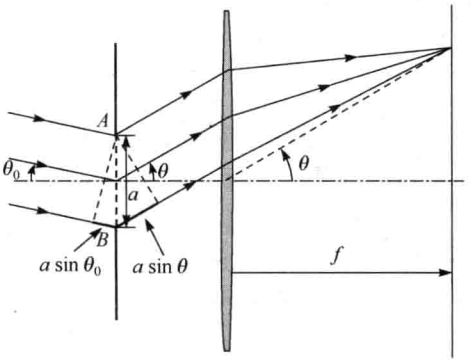


图 3.9.5 狭缝两端点处沿 θ 方向次波的光程差

光程差和相位差)为

$$\Delta L=a(\sin\theta\pm\sin\theta_0),\quad \Delta\Phi=ka(\sin\theta\pm\sin\theta_0)$$

式中,入射光和衍射光位于光轴的同一侧时,取"+";否则取"−".

如图 3.9.6 所示,若将狭缝均分为 N 个单元,各个单元的次波在接收屏上的振幅矢量分别记为$\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(1)},\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(2)},\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(m)},\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(N)}$,其中,下标 θ 表示次波的方向,上标(m)表示发出次波的单元的序号,如图 3.9.6 所示,每个单元发出次波的复振幅可以表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(m)} &= K\iint_{\Sigma_m}\widetilde{U}(Q_m)F_m(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma\\ &= K\widetilde{U}(Q_m)F_m(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_m}}{r_m}\frac{a}{N}\end{aligned}$$

则相邻两部分次波的光程差和相位差分别为

$$\Delta l=\frac{\Delta L}{N}=\frac{a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{N},\quad \Delta\varphi=\frac{\Delta\Phi}{N}=\frac{ka(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{N}$$

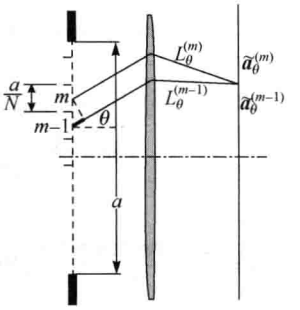
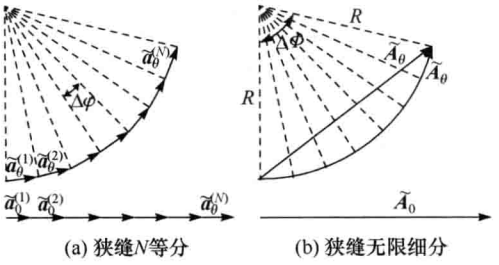


图 3.9.6 N 等分狭缝上相邻单元次波的光程差

由于是平面波,波前上各点具有相等的振幅,即 $|\widetilde{U}(Q_m)|$ 为常数;在满足傍轴条件时,忽略倾斜因子的影响,$F_m(\theta_0,\theta)=1$. 所以可认为狭缝上各个部分发出的所有次波在接收屏上都具有相等的振幅,即上述每个单元的振幅矢量是等长的. 相邻的振幅矢量之间的夹角为 $\Delta\varphi$.

整个狭缝发出的次波的合振动矢量就是这 N 个矢量的合成,即 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\theta=\sum_{m=1}^{N}\tilde{\boldsymbol{a}}_\theta^{(m)}$,如图 3.9.7(a)中上部所示,$N$ 个矢量首尾相接,并且依次转过 $\Delta\varphi$ 的角度,就是该圆的 N 段弦,每一段弦所张的圆心角为 $\Delta\varphi$,这 N 段弦所张的总圆心角为 $N\Delta\varphi=\Delta\Phi$. 所有这些波矢的合矢量为$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\theta$,其振幅为记为 A_θ. 如果 $\theta=\theta_0$,则 $\Delta\varphi=0$,各个次

波的振幅矢量相互平行，构成一段直线，合振动矢量为$\widetilde{\boldsymbol{A}}_0$，如图 3.9.7(a)中下部所示，振幅的数值为记为 A_0.



(a) 狭缝N等分　　(b) 狭缝无限细分

图 3.9.7　单缝衍射的合振幅矢量

如果对狭缝作无限细的划分，即 $N\to\infty$，则上述 N 段折线渐变为一段圆弧，该圆弧的圆心角为 $\Delta\Phi$，如图 3.9.7(b)所示. 圆弧的长度就是 $\Delta\varphi=0$ 时直线矢量的长度 A_0. 圆弧的半径为 $R=\dfrac{A_0}{\Delta\Phi}$，于是 $A_\theta=2R\sin(\Delta\Phi/2)$，即

$$A_\theta=A_0\frac{\sin\dfrac{\Delta\Phi}{2}}{\dfrac{\Delta\Phi}{2}} \tag{3.9.1}$$

将 $\Delta L=a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)$ 代入式(3.9.1)，即可得到

$$A_\theta=A_0\frac{\sin\dfrac{ka(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{2}}{\dfrac{ka(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{2}}=A_0\frac{\sin\dfrac{\pi a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{\lambda}}{\dfrac{\pi a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{\lambda}}$$

记 $u=\dfrac{\pi a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{\lambda}$，则

$$A_\theta=A_0\frac{\sin u}{u} \tag{3.9.2}$$

其中，A_0 为沿着 $\theta=\theta_0$ 方向上所有次波合振动的振幅，也就是入射光在透镜的焦平面上几何像点处的振幅.

衍射的光强为

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{3.9.3}$$

其中，I_0 为焦平面上几何像点处的光强.

2. 用积分方法求解

这种方法就是直接求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式 $\widetilde{U}(P)=K\iint_{\Sigma_0}\widetilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$.

在焦平面上，P 点对透镜光心的方位角为 θ，在该点会聚的光波都是次波源发出的沿 θ 方向的光波，倾斜因子相同. 又因为满足傍轴条件，即可以认为所有 $F(\theta_0,\theta)\equiv 1$. 狭缝上各点的瞳函数有相等的振幅，记为 A_0，如果设狭缝中心处 O 点的相位为 φ_0，则 x 点处的瞳函数可以表示为

$$\widetilde{U}(x)=A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta_0+\mathrm{i}\varphi_0}$$

记 $K_0=KA_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$，则衍射积分公式化为

$$\widetilde{U}(\theta)=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x=K_0\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr-\mathrm{i}kx\sin\theta_0}}{r}\mathrm{d}x$$

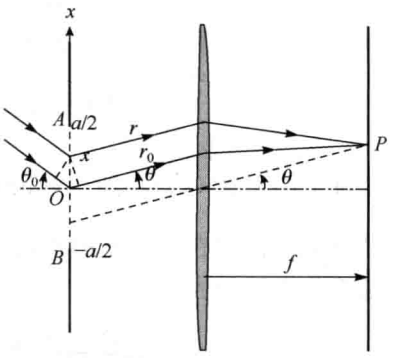


图 3.9.8 积分方法示意

从 O 点到 P 点的光程记为 r_0，则 x 点到 P 点的光程为 $r=r_0+\Delta r$，由图 3.9.8 可见，$\Delta r=-x\sin\theta$. 于是衍射积分公式为

$$\widetilde{U}(\theta)=K_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx(\sin\theta+\sin\theta_0)}}{r}\mathrm{d}x$$

傍轴条件下，各次波中心所发出的球面波在接收屏上的振幅相等，即上述积分公式中表示球面波振幅的因子 $\frac{1}{r}$ 为常数，记为 $\frac{1}{r_A}$，积分公式进一步化为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta)&=K_0\frac{1}{r_A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\frac{1}{-\mathrm{i}k(\sin\theta+\sin\theta_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{a}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{a}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)}\right]\\&=K_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_A}\frac{-2\mathrm{i}\sin\left[\frac{ka}{2}(\sin\theta+\sin\theta_0)\right]}{-\mathrm{i}k(\sin\theta+\sin\theta_0)}\\&=KA_0a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0+\mathrm{i}\varphi_0}}{r_A}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}ka(\sin\theta+\sin\theta_0)\right]}{\frac{1}{2}ka(\sin\theta+\sin\theta_0)}\end{aligned}$$

记 $KA_0a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0+\mathrm{i}\varphi_0}}{r_A}=\widetilde{U}_0$，即可得到

$$\widetilde{U}(\theta)=\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}\tag{3.9.4}$$

与采用振幅矢量法得到的结果式(3.9.2)一致.

关于 r_A 的讨论：

r_A 应该是点光源发出的球面波到场点 P 的光程，但是由于经过透镜后，发散的球面波转化为会聚的球面波，所以 r_A 的取值在这里变得相当复杂. 实际是，由于透镜的孔径比狭缝大得多，所以从狭缝出射的光可以认为全部都被会聚到接收屏上，那么 r_A 就不必认为是球面波的光程. 也就是说在透镜和狭缝之间，不必考虑球面波的振幅随距离的衰减. 那么，只需要考虑透镜到接收屏的距离即可. 因而 $r_A \approx f$.

其中，$KA_0\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0+\mathrm{i}\varphi_0}}{f}$ 为狭缝上 x 点附近单位宽度光源发出的沿光轴方向的次波在光轴上的 F 点(焦点)所引起的复振幅，$\widetilde{U}_0=KA_0\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0+\mathrm{i}\varphi_0}}{f}$，为通过整个狭缝的、沿光轴方向传播时在光轴上的焦点(F 点)所引起的振动，即复振幅，则 $I_0=\widetilde{U}_0\widetilde{U}_0^*$ 为光轴上焦点处的光强.

$\widetilde{U}_0\dfrac{\sin u}{u}$ 被称为**单缝衍射因子**.

对于沿光轴方向入射的光，$\theta_0=0$，$u=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$. 因此，为了后面推导过程的简洁，可以只讨论入射光沿透镜光轴的情形，此时积分的波前即入射光的波面，总的光程差中就只要计算在衍射屏之后的部分即可，即 $\Delta r=-x\sin\theta$，$u=\dfrac{1}{2}ka\sin\theta=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$.

如果入射光的倾角为 θ_0，则在计入衍射屏之前的光程差后，有

$$\Delta r=\pm x\sin\theta_0-x\sin\theta=-x(\sin\theta_0\mp\sin\theta)$$

$$u=\frac{1}{2}ka(\sin\theta_0\pm\sin\theta)=\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0\pm\sin\theta)$$

在上述 u 的表达式中，光在法线同侧，取＋；异侧，取－.

3.9.3 单缝衍射图样的特点

单缝衍射图样如图 3.9.9 所示，是一系列明暗交错的条纹. 而且衍射图样与单缝的宽度有关，当缝宽越大时，衍射条纹越细锐. 在图 3.9.1 中，由于单缝在 y 方向的线度较大，所以光沿着 x 方向发生衍射，即衍射条纹只在 x 方向有一定的宽度，在 y 方向的光，由于没有衍射，经过透镜的会聚，变得相当窄.

衍射的复振幅和光强分布图可以按照式(3.9.4)和式(3.9.3)得到，如图 3.9.10所示.

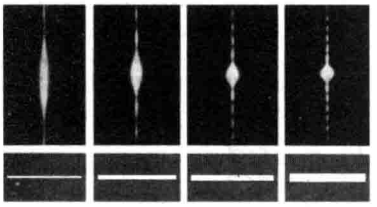


图 3.9.9 不同缝宽的单缝衍射图样

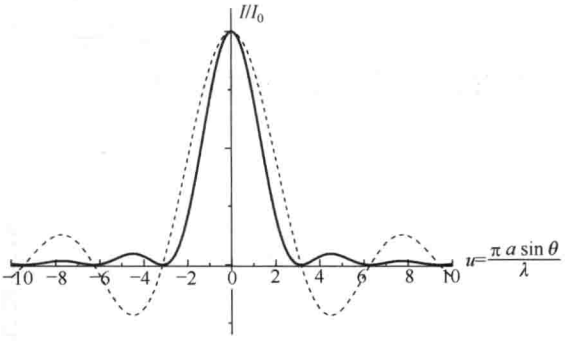


图 3.9.10 单缝衍射的光强分布曲线

下面分析单缝衍射的特征.

1. 极值点

由于光强分布为 $I_\theta=I_0\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$，其极值点可以按 $\left(\dfrac{\sin^2 u}{u^2}\right)'=2\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)'=0$ 求得，结果为 $\dfrac{\sin u}{u}\dfrac{u\cos u-\sin u}{u^2}=0$，即得 $\dfrac{\sin u}{u}=0$，以及

$$\tan u=u \tag{3.9.5}$$

式(3.9.5)是一个超越方程，可以根据图 3.9.11求得其数值解：

$$\sin\theta=0,\pm 1.43\frac{\lambda}{a},\pm 2.46\frac{\lambda}{a},\pm 3.47\frac{\lambda}{a},\cdots \tag{3.9.6}$$

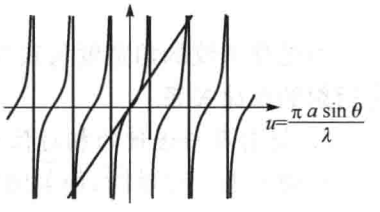


图 3.9.11 超越方程的数值解

而 $\dfrac{\sin u}{u}=0$ 表示单元衍射因子为 0，这是极小值点. 极小值点满足 $u=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=j\pi$，同时 $j\neq 0$，即

$$\sin\theta=\pm 1\frac{\lambda}{a},\pm 2\frac{\lambda}{a},\cdots,\pm j\frac{\lambda}{a},\pm(j+1)\frac{\lambda}{a},\cdots \tag{3.9.7}$$

2. 亮条纹角宽度

可以用相邻暗条纹之间的角距离来描述亮条纹的角宽度，在傍轴条件下，由于 $\sin\theta\approx\theta$，所以暗条纹的角位置分别为(图 3.9.12)

$$\theta\approx\pm 1\frac{\lambda}{a},\pm 2\frac{\lambda}{a},\cdots,\pm j\frac{\lambda}{a},\pm(j+1)\frac{\lambda}{a},\cdots$$

因此零级主极大，即**中央主极大**的角宽度为

$$\Delta\theta_0 = 2\frac{\lambda}{a} \tag{3.9.8}$$

而其他高级次条纹的角宽度为(图 3.9.13)

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{3.9.9}$$

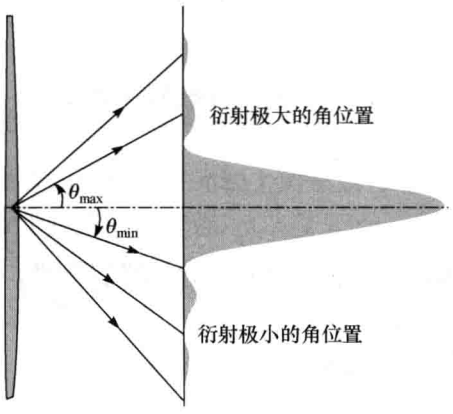


图 3.9.12　角位置

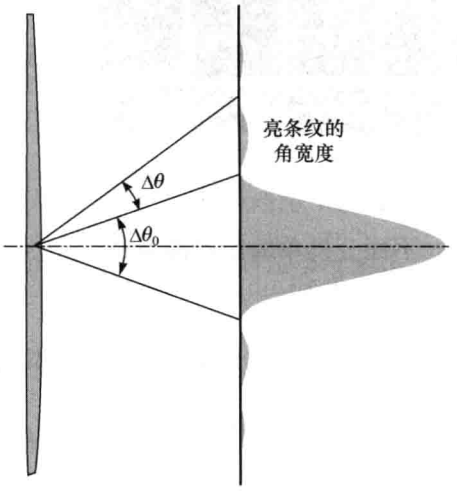


图 3.9.13　角宽度

可见亮条纹的角宽度与狭缝的宽度成反比,所以式(3.9.8)和式(3.9.9)被称为**衍射的反比关系**.

3. 衍射屏与透镜的相对位置

衍射屏上下移动时,衍射图样不变. 这是因为衍射强度分布只与衍射方向 θ 有关. 而 θ 是接收屏上的场点相对于透镜光心的张角. 因此,条纹的位置由透镜的光轴决定. 也就是说,如果衍射屏上另外有一条狭缝,则这条狭缝的衍射图样与原来狭缝的衍射图样是完全重合的,如图 3.9.14 所示.

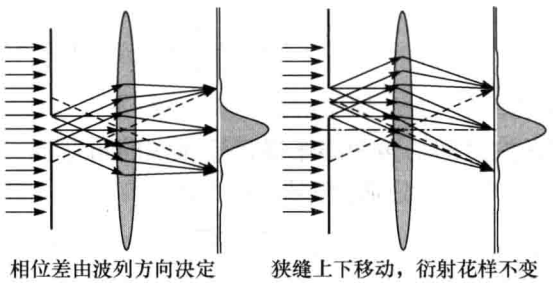


图 3.9.14　狭缝上下移动,衍射图样不变

但是，当透镜移动时，衍射条纹随着透镜的光轴移动.

衍射条纹的零级主极大对应系统的几何像点，就是入射的平行光经过透镜之后在其焦平面上的会聚点. 所以，入射光方向改变，衍射图样整体平移，如图 3.9.15所示.

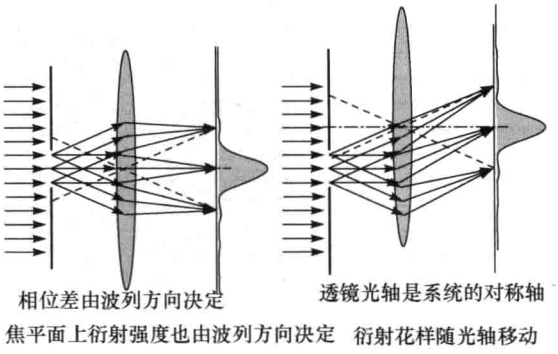


图 3.9.15　衍射图样随透镜的光轴移动

3.9.4　单缝衍射的应用

两个互补屏，$\Sigma_1+\Sigma_2=\Sigma$，透光部分相加等于无衍射屏，如图 3.9.16 所示.

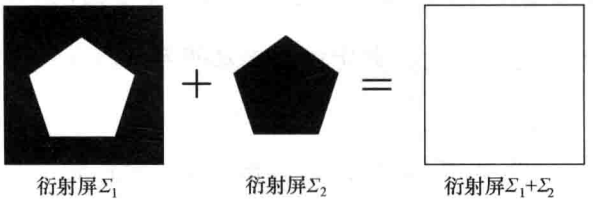


图 3.9.16　互补屏

两个互补的衍射屏，在相同的衍射装置中，积分公式为

$$\widetilde{U}_1(P)=K\iint_{\Sigma_1}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma,\quad \widetilde{U}_2(P)=K\iint_{\Sigma_2}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

则

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1(P)+\widetilde{U}_2(P)&=K\iint_{\Sigma_1}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma+\iint_{\Sigma_2}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma\\&=K\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma\end{aligned}$$

这就是没有衍射障碍物，自由传播的情况.

上述结果称为**巴比涅原理**(巴比涅，Jacques Babinet，1794～1872，法国).

在没有衍射屏时，按几何光学原理成像，除像点之外，接收屏上处处振动为零. 于是有 $\widetilde{U}_1(P)=-\widetilde{U}_2(P)$，即 $I_1(P)=I_2(P)$. 即细丝与狭缝的衍射图样，除零级中央主极大外，处处相同. 这就是激光测径仪的原理(图 3.9.17).

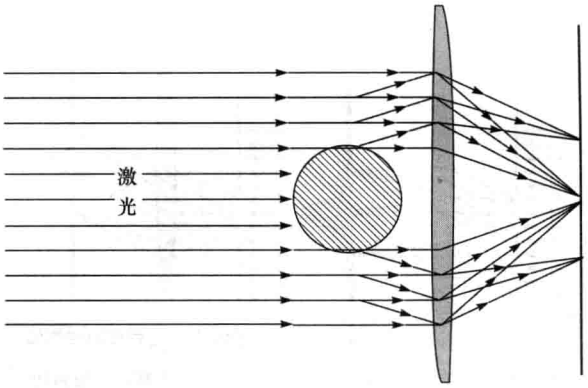


图 3.9.17　激光测径仪

3.9.5　夫琅禾费矩孔衍射

如图 3.9.18 所示，衍射屏上有一个 $a\times b$ 矩孔，其上任一点 $Q(x,y)$ 发出沿 $\boldsymbol{k}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ 方向的次波，其中，$\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 为波矢与 yOz 平面，xOz 平面和 xOy 平面的夹角，即 $\alpha+\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$，$\beta+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$，其中，$\alpha,\beta,\gamma$ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向余角. 则矩孔发出的次波在 P 点的复振幅为

$$\widetilde{U}(P)=K\iint\widetilde{U}_0(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

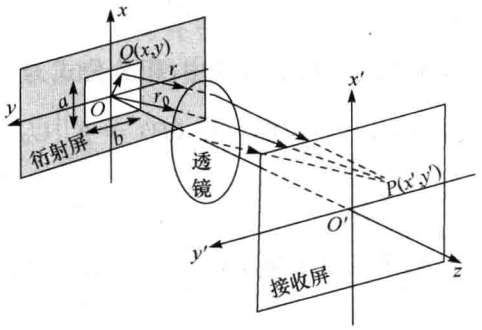


图 3.9.18　夫琅禾费矩孔衍射装置

Q 点到 P 点的光程为 r. 从中心处 O 点引一条与 $\boldsymbol{k}$ 同方向直线，其到 P 点的光程为 r_0，r 与 r_0 的光程差即为矢量 $\overrightarrow{OQ}$ 在 $\boldsymbol{r}_0$ 上的投影，如图 3.9.19 所示. 而在直

角坐标系 $Oxyz$ 中，矢量 $\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$，$\dfrac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}=\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\boldsymbol{e}_z$，则上述光程差为

$$\begin{aligned}\Delta r &= -OQ\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}=-(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y)\cdot(\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\boldsymbol{e}_z)\\ &=-(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)\end{aligned}$$

即 $r=r_0+\Delta r=r_0-(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)$. 上述积分中，同方向的衍射光，倾斜因子相同. 在傍轴条件下，积分化为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(P) &= KF(\theta_0,\theta)\widetilde{U}_0(0,0)\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0-\mathrm{i}k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= KF\widetilde{U}_0(0,0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta_1}\,\mathrm{d}x\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky\sin\theta_2}\,\mathrm{d}y\\ &= KF\widetilde{U}_0(0,0)ab\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\frac{\sin u_1}{u_1}\frac{\sin u_2}{u_2}\end{aligned}$$

其中，$u_1=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1$；$u_2=\dfrac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2$.

强度分布

$$I(P)=I_0\left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2$$

其中，$I_0=\left|KF\widetilde{U}_0(0,0)ab\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\right|^2$，为矩孔发出的光波沿(0,0)方向到达焦点，即轴上 F 点的光强.

衍射图样具有二维衍射强度分布，如图 3.9.20 所示.

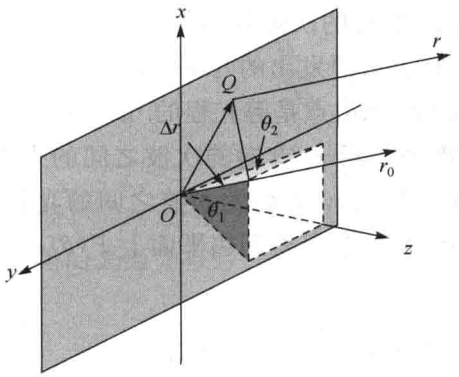


图 3.9.19　矩孔衍射光程差的计算

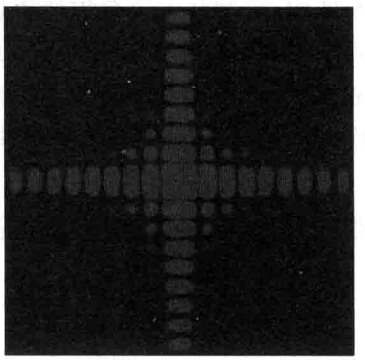


图 3.9.20　夫琅禾费矩孔衍射图样

3.10 夫琅禾费圆孔衍射

3.10.1 圆孔衍射强度

夫琅禾费圆孔衍射装置如图 3.10.1 所示，圆孔上任一点 Q 点发出沿任意方向光线 $\boldsymbol{r}$，与光轴间的夹角为 θ. 由于整个装置是轴对称的，所以可以断定接收屏上衍射光的复振幅和强度分布亦是轴对称的，因此，只需要讨论在任意一个包含光轴的平面内的衍射情况即可.

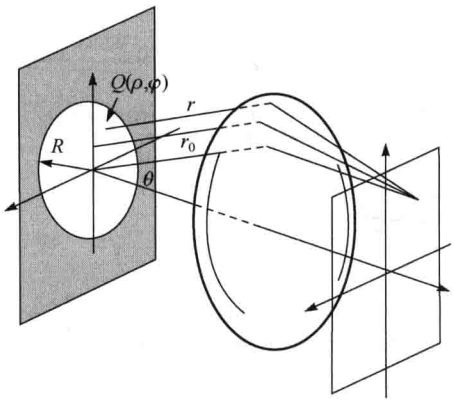


图 3.10.1 夫琅禾费圆孔衍射装置

如图 3.10.2 所示，从圆孔中心 O 点发出的次波的方向以 $\boldsymbol{r}_0$ 表示，$\boldsymbol{r}_0$ 在竖直平面 xOz 内，与光轴夹角为 θ，经透镜后到达接收屏(焦平面处)上 $P(\theta)$点，该点也在 xOz 平面内，则圆孔上所有传播方向与 $\boldsymbol{r}_0$ 平行的次波都会聚到 $P(\theta)$点. 由于对称性，在衍射屏上建立极坐标系，任一点 $Q(\rho,\varphi)$发出的与 $\boldsymbol{r}_0$ 平行的次波路径记为 $\boldsymbol{r}$. 过 Q 作与 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}_0$ 垂直的平面，该平面到 $P(\theta)$点是等光程的. 该平面与 x 轴交点的次波的路径记为 $\boldsymbol{r}_1$，沿 $\boldsymbol{r}_1$ 方向的次波与沿 $\boldsymbol{r}_0$ 方向的次波之间的光程差为 $\Delta r=-\rho\cos\varphi\sin\theta$，$\Delta r$ 也是沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的次波与沿 $\boldsymbol{r}_0$ 方向的次波之间的光程差. 在傍轴条件下，按菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式，可得到焦平面上 $P(\theta)$点的复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta) &= K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(\rho,\varphi)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0-\mathrm{i}k\rho\cos\varphi\sin\theta}}{r}\mathrm{d}\Sigma \\ &= K\widetilde{U}_0(0,0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\cos\varphi\sin\theta}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

不妨取上述复振幅的实部，即

$$U(\theta)=K\frac{U_0(0,0)}{f}\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\rho\cos\varphi\sin\theta\right)\mathrm{d}\varphi$$

令 $m=2\pi R\sin\theta/\lambda=kR\sin\theta$，上式化为

$$U(\theta)=K\frac{U_0(0,0)}{f}\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos(m\rho\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

积分计算的结果为

$$U(\theta)=KU_0(0,0)\frac{\pi R^2}{f}\times\frac{2\mathrm{J}_1(m)}{m}$$

或者用复振幅表示为

$$\widetilde{U}(\theta)=K\widetilde{U}_0(0,0)\pi R^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\times\frac{2\mathrm{J}_1(m)}{m}\tag{3.10.1}$$

其中，$\mathrm{J}_1(m)$为一阶贝塞尔函数，可以用级数表示为

$$\frac{2\mathrm{J}_1(m)}{m}=\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}!}{(k'+1)!k'!}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k'}$$

$$=\frac{m}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^3}{2!}\right]^2-\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^4}{3!}\right]^2+\cdots\right\}$$

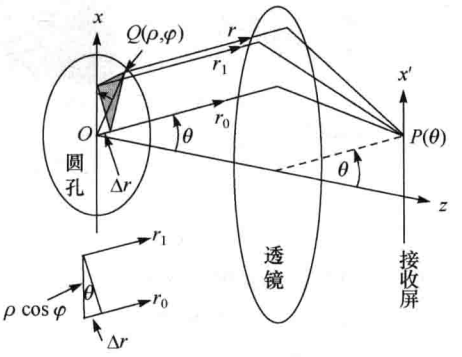


图 3.10.2　圆孔衍射次波间的光程差计算

复振幅 $\widetilde{U}(\theta)$的分布可以用曲线表示，如图 3.10.3 所示.

而衍射的光强分布为

$$I(\theta)=I_0\left[\frac{2\mathrm{J}_1(m)}{m}\right]^2\tag{3.10.2}$$

衍射强度分布如图 3.10.4 所示. 而图 3.10.5 为衍射图样的图片.

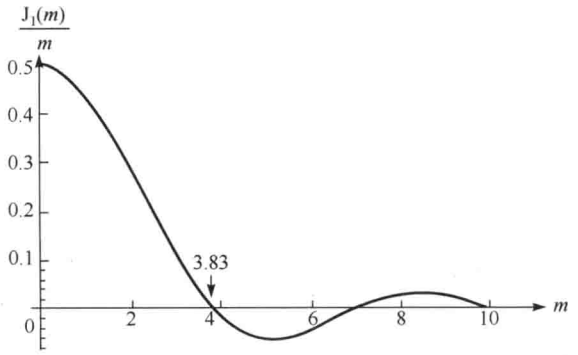


图 3.10.3　夫琅禾费圆孔衍射的复振幅分布

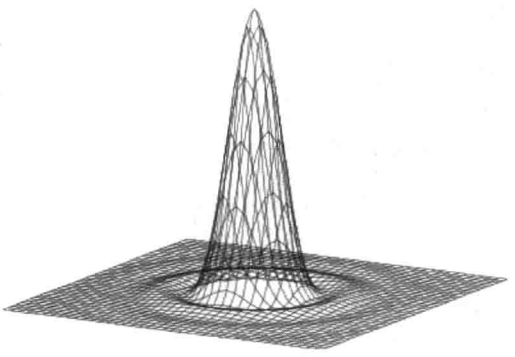


图 3.10.4　夫琅禾费圆孔强度分布

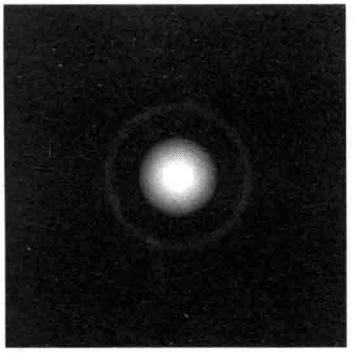


图 3.10.5　夫琅禾费圆孔衍射衍射图样

3.10.2　衍射图样的特点

根据上述理论计算和实验测量的结果，夫朗禾费圆孔衍射图样有以下特点：

(1) 在接收屏上的衍射条纹是一系列的同心圆环，明暗交错.

(2) 中央是 0 级衍射斑，级次越大的条纹的角半径越大.

(3) 不同级次的圆环之间的角距离不相等.

(4) 不同级次的衍射亮纹的辐射通量并不相等. 其中，中央主极大(零级斑)为一圆形亮斑，其通量约占衍射总通量的 84%，如图 3.10.6 所示.

零级斑亦被称为**艾里斑**(Airy disk，艾里，George Biddell Airy，1801～1892，英国). 研究表明，在衍射的第一极小值处，$m=3.83$，即 $2\pi R\sin\theta_1/\lambda=3.83$，第一极小值所对应的角半径为

$$\theta_1\approx\sin\theta_1=\frac{3.83\lambda}{2\pi R}=\frac{0.61\lambda}{R}$$

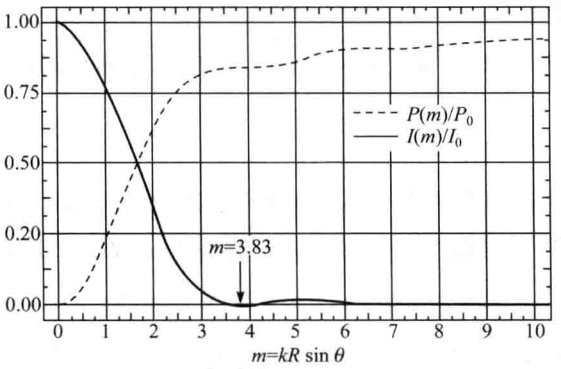


图 3.10.6　衍射强度与光通量的分布

则艾里斑的半角宽度，即中央极大值到第一极小值的角半径(图 3.10.7)为

$$\Delta\theta_0 = 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{3.10.3}$$

其中，D 为衍射屏上圆孔的直径. 当平行光直接通过透镜时，也可以把透镜的通光孔径作为衍射屏的孔径，则艾里斑的半径为

$$\Delta l = f\Delta\theta_0 = 1.22\frac{f\lambda}{D} \tag{3.10.4}$$

这就是平行光通过孔径为 D 透镜后的衍射所成的零级斑的半径.

由于艾里斑中心光强大，边缘处光强为零，也就是整个光斑的强度并不是均匀的，所以通常用“半值宽度”表示斑的大小，即把强度降为峰值一半处作为艾里斑的有效边界.

计算表明，上述半值宽度与半角宽度相差不大，所以就以半角宽度替代半值宽度，即从视觉上看，艾里斑的角宽度就是式(3.10.3)中的 $\Delta\theta_0$，如图 3.10.7 中所标示，而艾里斑的半径就是式(3.10.4)中的 Δl.

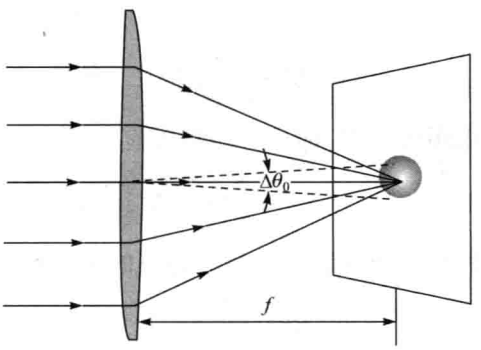


图 3.10.7　夫琅禾费圆孔衍射图样中央主极大的半角宽度

例 3.3

设观察太阳时，人眼的瞳孔直径 1mm，焦距 23mm，计算视网膜上所形成的太阳光斑的大小.

解 由于地球到太阳的距离足够远，而瞳孔的孔径又足够小，所以可以认为射入眼睛的太阳光都是平行光. 这时，可以将眼睛会聚太阳光的过程看成夫琅禾费圆孔衍射. 因而

$$\Delta l \approx 1.22\frac{f\lambda}{D}=\frac{1.22\times 23\times 500\times 10^{-6}}{1}=1.4\times 10^{-2}(\text{mm})$$

例 3.4

针孔相机是一个带有小孔的暗盒. 成像平面在针孔的对面，到针孔的距离为 L. 用针孔相机拍摄太阳，孔径 D 为何值才能使像最清晰?

解 针孔相机的成像原理可以用图 3.10.8 表示. 由于没有透镜，从一个物点发出的同心光束，经针孔后散开，在成像屏上形成一个像斑. 物 AB 经针孔所成的像即为 $A'B'$.

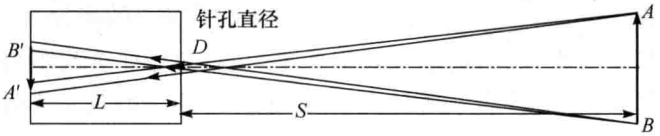


图 3.10.8　针孔相机的成几何像的原理

设物到针孔的距离为 S，根据图中的相似三角形，可以算出每个物点所成像斑的直径为

$$\Delta l=\frac{S}{L+S}D$$

由于物距往往比像距大得多，即 $S\gg L$，所以有

$$\Delta l\approx\frac{S}{S}D=D$$

即每个像斑的大小与针孔相当. 相应地，每个物点的像斑对针孔中心的张角为

$$\Delta\theta=\frac{\Delta l}{L}=\frac{D}{L} \tag{1}$$

这就是针孔相机所成的几何像的特性.

实际上，由于衍射，每个物点在像平面都将形成一个艾里斑，该艾里斑对针孔中心的张角为

$$\Delta\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{2}$$

这就是衍射像的特征.

比较式(1)和式(2)，可以看出，几何像与衍射像的特征恰恰相反：为了获得清晰的几何像，针孔应当尽量小；而为了消除衍射的限制，针孔应当尽量大. 因此，为了使像尽可能清晰，则只有使两者相等，即 $\Delta\theta=\Delta\theta_0$，于是得到 $\frac{D}{L}=1.22\frac{\lambda}{D}$，算得

$$D=\sqrt{1.22L\lambda}$$

当然还有另外一种判断的方法：一个物点在像平面上所成的像斑是几何斑和衍射斑重叠而成的，总像斑对针孔中心的张角不超过 $\Delta\theta+\Delta\theta_0$，则该张角最小时，像最清晰，即 $\frac{D}{L}+1.22\frac{\lambda}{D}$ 取最小值即可，由此得到 $\frac{1}{L}-1.22\frac{\lambda}{D^2}=0$，同样可得

$$D=\sqrt{1.22L\lambda}$$

利用例 3.3 的方法和结论，可以估算昆虫复眼的结构特征. 如图 3.10.9 所示，复眼是由许多小眼一个个密集排放在眼睛的整个表面上所构成的. 每个小眼顶部有一个透光的圆形集光装置，叫角膜镜；下面连着圆锥形的透明晶体，使得外部入射的光线会聚到圆锥顶点处的感光细胞上，从而形成一个像点，也就是所谓的像素. 正如成语所说，管中窥豹，只见一斑. 不同的小眼，指向不同的方向，这样，不同方向的景物分别经不同的小眼形成一个像斑，所有小眼的影像点就拼接起来，形成了一个范围宽广的视场完整的像. 因此，尽管昆虫的复眼不能像哺乳动物的眼睛那样转动，但却有很大的视角，能够同时观察到各个方位的物体.

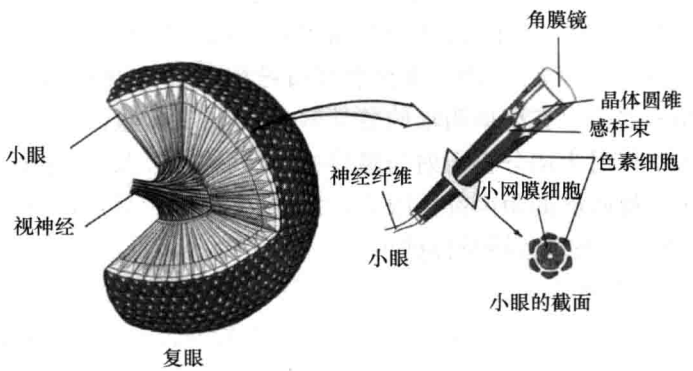


图 3.10.9　昆虫的复眼及小眼

费曼假设蜜蜂复眼的半径，也就是每个小眼的长度为 2mm，对 400nm 的光最敏感，由此算出最合适的小眼的孔径为 35μm(参见《费曼物理学讲义》).

3.11 衍射的0级近似与几何光学

前面对衍射的讨论，都是以惠更斯的次波模型为基础，通过求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式而进行的. 从次波的观点来看光的传播，衍射总是时时处处存在的. 当然，对于在没有障碍物的自由空间中传播的光波，完全没有必要再用次波进行分析，因为这样的光波场在空间各点都有振动，如果说各处的复振幅或强度有区别，这种区别也是平缓而均匀的，或者说光波场中的任何一个波前上没有显著的明暗条纹分布. 例如，所谓的“平面波”，从理论上说，波面是平面，而自由空间中的任何平面都是无穷大的，因而只能认为各处的振幅和光强都相等；所谓的“球面波”，波场中任一点的振幅和强度与该点到中心的距离呈现反比和平方反比的关系，即光波场中的能量密度是球对称分布的.

然而，实际中，人们总会注意到似乎没有衍射的情形. 例如，探照灯的光束、激光的光束都像是一条直线；光的阴影也像是光沿着直线传播而造成的. 因此，在很多情况下，用光线的模型，以及直线传播定律、反射定律、折射定律分析各种光的现象总是能够获得成功的.

这样的结果往往会给读者带来困惑：光既然是电磁波，就应当遵循波的传播规律. 从波的观点看，所谓的“光线直线传播”、“光线反射”、“光线折射”等概念都是不存在的. 或者说几何光学的基本规律是违背光波的基本特性的. 而在很多情形下，几何光学无疑又是正确的. 那么，如何从波的观点理解几何光学的规律呢？

3.11.1 衍射中央主极大的特殊性

根据前面各节的讨论，光经过诸如单缝、矩孔还是圆孔的衍射屏之后，能量在空间的分布是不均匀的，其中，大部分光通量处于衍射的零级亮斑中，而其他级次的亮斑的光通量要小得多. 因而0级衍射亮斑被称为“中央主极大”.

由于夫朗禾费衍射有简单明晰的数学解，便于进行定量的讨论，以下就以各种类型的夫朗禾费衍射为例分析衍射与障碍物孔径的关系. 其实，弗朗禾费衍射要求衍射屏与光源和接收屏的距离都无限大，对应到实际的装置，就是在没有透镜的情况下，光学系统只要满足远场条件即可.

1. 中央主极大的位置

如图3.11.1所示，衍射0级是所有次波的光程差为0的方向，对于单缝衍射，由于缝上次波间的光程差为 $\delta l=\dfrac{a(\sin\theta\pm\sin\theta_0)}{N}$，因而衍射0级的方向为 $\theta=\theta_0$，与入射光的方向一致，就是几何光学中光的直线传播定律；如果衍射屏是反射式的，衍射0级的方向依然为 $\theta=\theta_0$，就是几何光学中的反射定律；如果衍射屏两侧介质

的折射率不同，分别为 n_1 和 n_2，则上述光程差为 $\delta l=\dfrac{a(n_2\sin\theta\pm n_1\sin\theta_0)}{N}$，衍射 0 级的方向为 $\sin\theta=\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_0$，就是几何光学中折射光的方向. 可见，衍射 0 级，即中央主极大的方向恰是几何光学中光线传播、反射或折射的方向，因而 0 级衍射亮斑往往被称为“几何像点”.

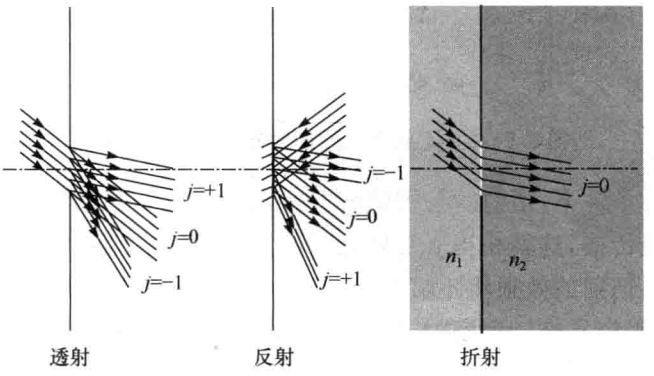


图 3.11.1　衍射 0 级的方向

2. 中央主极大的角宽度

衍射 0 级的半角宽度及其所包含的辐射通量是衡量衍射程度的一个重要参数. 无论是单缝衍射、矩孔衍射还是圆孔衍射，都存在所谓“衍射的反比关系”，即衍射的半角宽度与衍射孔径的大小成反比，例如，在单缝衍射中，中央主极大的半角宽度为 $\Delta\theta_0=\dfrac{\lambda}{a}$；对于圆孔衍射的中央主极大，亦有 $\Delta\theta_0=1.22\dfrac{\lambda}{D}$，其中，$a$ 和 D 是衍射孔径的几何尺度. 据此推断，如果衍射孔径比波长大得多，则中央主极大的半角宽度将趋于 0，这时，衍射光的辐射通量主要集中在入射光的方向上，其他方向，即偏离入射的方向上的辐射通量很小.

3.11.2　衍射与孔径的关系

图 3.11.2 表示正入射的单色光波经不同宽度狭缝后的衍射情况，图中的曲线对应不同方向的强度，而曲线下的面积则是衍射光的辐射通量. 从图中可见，当衍射孔径（即缝宽）a 比波长 λ 小得多时，从狭缝出射的光在不同方向的通量相差很小，这就类似于点光源所发出的球面波；当 a 与 λ 接近时，衍射现象仍然明显，即在偏离入射的方向上，仍有显著的辐射通量；而当 a 比 λ 大很多时，出射光基本上局限在入射方向上（即图中 0°附近），在偏离入射的方向上，辐射通量几乎可以忽略，说明衍射已不显著.

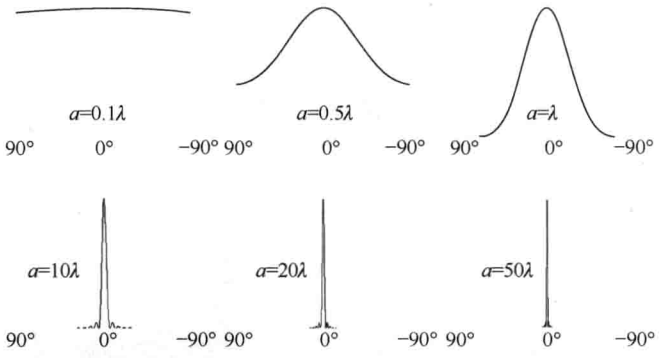


图 3.11.2　不同孔径的衍射光强在空间的分布

在 $a \gg \lambda$ 的条件下，衍射的各种效应几乎可以忽略，可以认为光沿着入射方向传播，即沿直线传播，这就相当于几何光学的情况. 可见，只要衍射孔径的尺度比光的波长大得多，衍射的效果将不显著，几何光学的规律将起主导作用.

上述结果很容易推广到反射、折射的情况，并可得到类似的结论，即在 $a \gg \lambda$ 的条件下，衍射光的通量集中在反射、折射的方向上.

3.11.3　几何光学是衍射的 0 级近似

从前面的讨论可以看出，在夫琅禾费衍射中，即在远场条件下，无论是透射、反射还是折射，衍射 0 级的方向都与几何光学的实验规律一致.

如果仅考虑衍射 0 级，当然可以认为几何光学的规律也是成立的，但是，在 $a \ll \lambda$ 和 $a \approx \lambda$ 的情形下，在 0 级主极大中偏离几何光学的方向上，光的辐射通量依然很大，而且这时其他高级次的衍射也占有显著的比例. 所以这时并不能将几何光学的定律用于所有级次的衍射.

而在衍射障碍物的空间尺度比光的波长大很多时，即 $a \gg \lambda$ 时，衍射光中，衍射 0 级的辐射通量基本上都集中于符合几何光学规律的方向上，而高级次的衍射通量几乎为 0. 在这种情形下，绝大部分衍射通量都集中于衍射 0 级.

因而可以说，在 $a \gg \lambda$ 的条件下，几何光学就是衍射的 0 级近似，衍射光学可以相当准确地用几何光学替代.

3.11.4　望远镜的分辨本领与衍射极限

根据几何光学的规律，平行光经过透镜后，将在其焦平面上会聚成一个像点. 这个所谓的像点，是没有大小的数学点或几何点. 如果将透镜的口径 D 作为衍射孔径，从波动光学出发，通过对圆孔的夫琅禾费衍射分析，却发现在焦平面上是由一系列同心圆环所构成的衍射斑. 即使仅考虑衍射的 0 级，也是一个有一定大小的

艾里斑，其角半径为 $\Delta\theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$，而不是几何光学所认为的一个几何点. 只有在 $D \gg \lambda$ 时，几何光学的结论才是正确的.

也就是说，任何一个物经有一定大小的光学孔径成像后，由于衍射效应，在几何像点的位置上，总会有一个艾里斑. 远处的两个物，沿不同角度投射过来两束光，则会有两个艾里斑(图 3.11.3). 这两个艾里斑如果靠得很近，则有可能由于相互重叠而无法分辨，如图 3.11.4 和图 3.11.5 所示.

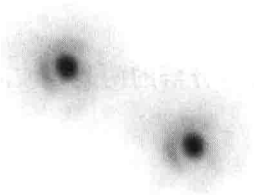
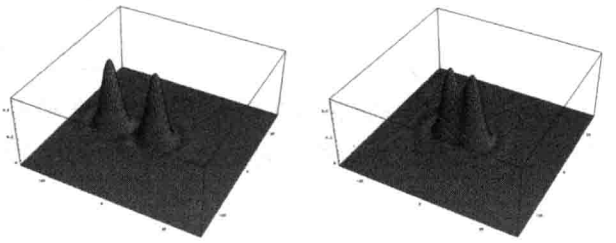


图 3.11.3 天文望远镜中双星的艾里斑



(a) 相距较远的艾里斑　　(b) 靠得较近的艾里斑

图 3.11.4 两个艾里斑相互重叠

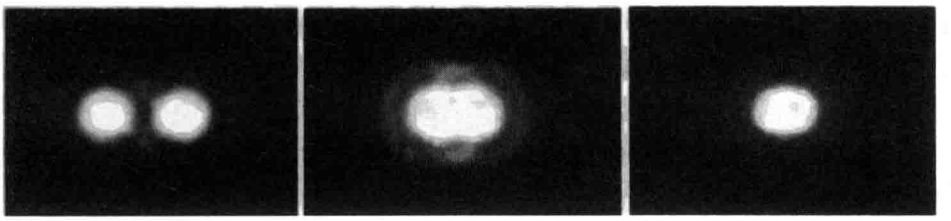


图 3.11.5 两个艾里斑相互重叠的光学图像

这样一来，两个实际上在空间分开的物，经光学系统成像后，由于衍射，所成的两个像可能由于靠得很近而在实际上无法分开. 对于这种情况，通常采用瑞利(Lord Rayleigh，1842～1919，英国)的方法来判断他们能否分辨. 图 3.11.6 表示两个艾里斑由于重叠而光强相加的情况，由于实际中这两列光波的波长往往相差不大，所以这是两个光强分布相同的光斑，用 $\Delta\theta_0$ 表示艾里斑的半角宽度，$\delta\theta$ 表示两个艾里斑分开的角距离. 当 $\delta\theta > \Delta\theta_0$ 时，两者重叠部分的光强小于任一光斑的中心光强，因而可以分辨；当 $\delta\theta < \Delta\theta_0$ 时，重叠部分的光强大于任一光斑的中心光强，因而不能分辨；而 $\delta\theta = \Delta\theta_0$ 时，重叠部分的光强略小于任一光斑的中心光强，恰好可以分辨. 这种方法被称为**瑞利判据**(Rayleigh criterion).

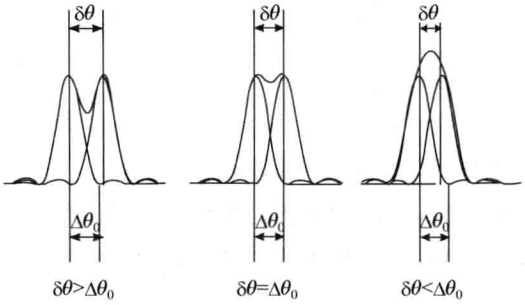


图 3.11.6　瑞利判据

因此，按照瑞利判据，在望远镜的光学孔径为 D 时，可以分辨的两列光波间的最小夹角，或远处两个物点间的最小张角（视角）为

$$\delta\theta_{\min}=\Delta\theta_0=1.22\frac{\lambda}{D} \tag{3.11.1}$$

λ 越小、D 越大，可分辨的间隔越小，分辨本领越大.

式(3.11.1)常用来表征望远镜的分辨本领.

望远镜的分辨本领是根据夫朗禾费衍射的特点得到的，对于普通的光学仪器，如照相机、显微镜等，上述结果仍然适用，因为这些几何光学仪器都是应用在 $D\gg\lambda$ 和远场条件下，作为估算，往往将式(3.11.1)写成下列形式：

$$\delta\theta_{\min}\sim\frac{\lambda}{D} \tag{3.11.2}$$

由于分辨受到限制的根源是衍射，所以式(3.11.1)或式(3.11.2)也被称为分辨的衍射极限，这是在远场条件下无法克服的.

需要指出的是，分辨本领与放大本领不同，光学仪器在将像放大的过程中，艾里斑也相应被放大，在物距不变的条件下，是通过增大像距来增大放大率的，对于望远镜，就是增大焦距，但是两个光斑的角距离和角宽度并没有改变，即 $\delta\theta$ 和 $\Delta\theta_0$ 保持不变，所以分辨本领仍然不变.

为了提高分辨本领，首先可以采用增大光学孔径的方法. 大光圈的照相镜头，其成像质量要好得多. 例如，位于美国加利福尼亚洛杉矶附近的威尔逊山天文台的胡克反射式望远镜，孔径为 100in(1in=0.0254m). 但是，由于受到技术条件的限制，单个望远镜的孔径不能做得很大，所以用多个望远镜组成阵列，联合起来使用，这就等效于增大了孔径，可以大大提高分辨本领.

还可以通过减小波长的方式提高分辨本领，比可见光波长更短的是紫外线和X射线，然而，紫外线在玻璃中的吸收系数很大，X射线在介质中的折射率几乎等于1，没有折射，所以它们并不适合用于成像. 由于粒子具有波粒二象性，按照德布

罗意物质波的公式，$\lambda=h/p$，其中，$h=6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$，是普朗克常量(planck constant)，p 是粒子的动量. 可见动量大的粒子，其德布罗意波长很短，所以可以将电子加速，用于探测物质的微观结构，这就是电子显微镜.

由于衍射源于光的波动性，是相干叠加的结果，如果接收屏距离衍射屏很近，两者间距小于光的波长，在这种情况下衍射就不再出现，当然上述衍射极限也就无从谈起，这就是所谓的“近场光学”，利用这一原理制成的近场光学显微镜，可以突破衍射极限，分辨本领大大提高.

第4章　干涉仪与光的时空相干性

4.1　分波前的干涉装置

按照光的相干性要求及光源的特点，一列光只与其自身才是相干的. 因此，干涉装置就是要设法将一列波分解为相干的几个部分，然后再进行叠加.

将光波进行分解的方法有许多种，第一种，就是在光波场中的一个波列上取两个或几个点，如图 4.1.1 所示，将这些点作为新的光源，这些新光源可以取在一列波(平面波、球面波等)的波面上，即等相位面上，但一般情况下，不容易也不必要这样做. 由于光场中的任意一个面都被称为波前，我们可以将这些点所在的面，可能是平面，也可能是曲面，看成一个波前，只要这个波前处在同一列波上即可. 那么，这种将波前分解，然后获得相干光的装置就被称为**分波前的干涉装置**(wavefront-splitting interferometer). 杨氏双孔或双缝就是最典型的分波前的干涉装置.

第二种，是将整个波列分解，例如，利用光波在介质分界面的反射和折射，将入射光分为入射和折射(透射)两部分，这两部分往往不能相遇，因而需要经过多次反射和透射，如图 4.1.2 所示. 这种分解方式是将光按强度分为几个部分，而光的强度与其振幅有关，所以这种装置被称为**分振幅的干涉装置**(amplitude-splitting interferometer).

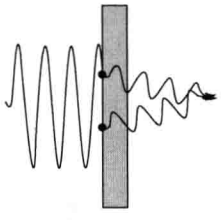


图 4.1.1　分波前的干涉装置

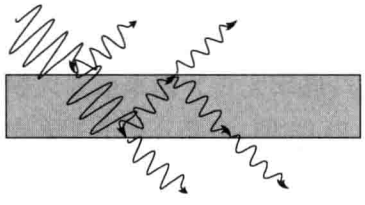


图 4.1.2　分振幅的干涉装置

比较两种分光的方法，不难看出，由于杨氏双孔或双缝干涉分波前的方法只利用了入射光的一小部分，其余的通量都被遮挡掉了，所以效率是比较低的，虽然在物理上有较好的意义，但多数情况并不适用. 所以实际应用的分波前干涉装置都是在杨氏装置的基础上改进的. 而分振幅的装置，由于有相当大的一部分通量用以产生干涉，可以充分利用入射光，所以很容易被观察到，并在实际中有很广泛的应用.

本节首先讨论各种分波前的干涉装置.

4.1.1 菲涅耳双面镜

如图 4.1.3 所示，将两个平面反射镜 M_1、M_2 对接，并保持两镜面之间有较小的夹角 ε，空间尺度很小的光源 S 位于两反射镜的上方. 在光源与接收装置(如接收屏)间有一个不透光的挡板，使得光不能直接射到接收屏幕上，而只有经过两镜反射的光才能到达屏幕. 对于屏幕，经反射镜 M_1、M_2 射过来的光，相当于分别从 S 经 M_1、M_2 所成的像 S_1、S_2 射过来的，而 S_1、S_2 是同一个光源的两个像光源，因而是相干的，这种装置就是**菲涅耳双面镜**(Fresnel bimirror). 这样的装置看起来与杨氏的干涉装置相似，只是由于反射面使较大通量的光波参与干涉，干涉条纹有更高的亮度. 这两列反射光在屏幕上的交叠区域进行相干叠加，产生干涉条纹.

反射镜的大小总是有限的，所以反射光只能照射屏幕上有限大小的区域，两列光的交叠区域还要小，因而只能在屏幕上一个较小的区域内产生干涉.

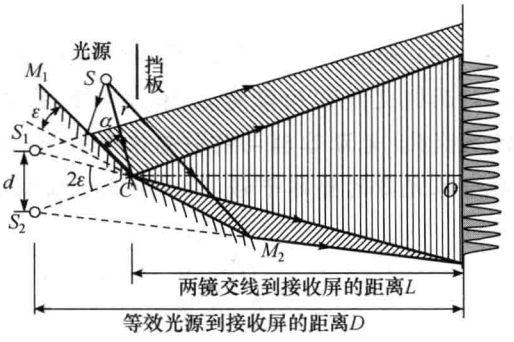


图 4.1.3 菲涅耳双面镜

图 4.1.3 中，C 为两镜面的交线，记 SC 与镜面 M_1 间的夹角 $\angle SCM_1=\alpha$，则 $\angle SCS_1=2\alpha$，$\angle SCS_2=2\alpha+2\varepsilon$，于是两像光源 S_1、S_2 对两镜交线 C 的张角为 $\angle S_1CS_2=2\varepsilon$.

如果两镜交线 C 到光源 S 的距离为 $\overline{SC}=r$，到屏幕的距离为 $\overline{CO}=L$，则像光源到屏幕的距离为 $L+r\cos\varepsilon$. 而两像光源间的距离为 $2r\sin\varepsilon$，将该装置与杨氏双缝干涉比较，在满足傍轴条件时，相当于双缝间距 $d=2r\sin\varepsilon\approx 2r\varepsilon$，双缝到接收屏的距离 $D=L+r\cos\varepsilon\approx L+r$，所以屏上相邻亮条纹间距为屏上相邻条纹间距为

$$\Delta x=\frac{L+r}{2r\varepsilon}\lambda \tag{4.1.1}$$

例 4.1

设菲涅耳双面镜的夹角为 $20'$，缝光源距两镜交线 10cm，接收屏幕与光源的两个像点的连线平行，且与两镜交线间的距离为 210cm，光波长为 600.0nm，问：

(1) 干涉条纹的间距为多少？

(2) 如果光源到两镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有何变化？

(3) 如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有何变化？

(4) 如果要在屏幕上观察到有一定可见度的干涉条纹，所允许的缝光源的最大宽度是多少？

解 (1) 利用式(4.1.1)，可得

$$\Delta x'=\frac{L+r}{2r\varepsilon}\lambda=\frac{210+10}{2\cdot 10\cdot\dfrac{20}{60}\cdot\dfrac{\pi}{180}}\cdot 600.0=1.13(\text{mm})$$

(2) 光源到两镜交线的距离增大一倍，即 $r'=2r$，可得

$$\Delta x'=\frac{L+r'}{2r'\varepsilon}\lambda=\frac{210+20}{2\cdot 20\cdot\dfrac{20}{60}\cdot\dfrac{\pi}{180}}\cdot 600.0=0.59(\text{mm})$$

(3) 如图 4.1.4 所示，光源作横向移动时，由于距离 r 保持不变，像光源 S_1、S_2 对两镜交线 C 的张角 2ε 保持不变，即 S_1、S_2 间距不变，所以干涉条纹的间距没有变化. 光源 S 移动前引起像光源 S_1、S_2 的移动，但是由于光源的移动引起了两个像光源的整体平移，所以屏上的条纹也会整体平移.

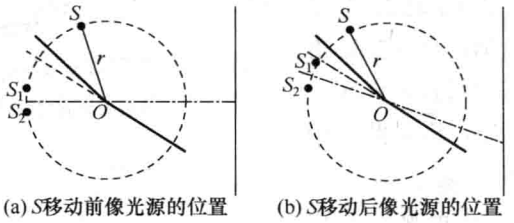


图 4.1.4　光源 S 移动前引起像光源 S_1、S_2 的移动

(4) 光源有一定宽度，所成的像亦有一定宽度，即光源 AB 的像光源为 A_1B_1 和 A_2B_2，如图 4.1.5 所示. 由于两平面镜之间的夹角很小，所以两个像几乎是相互平行的.

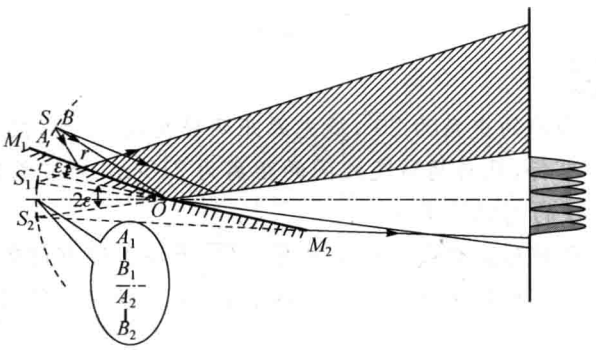


图 4.1.5　光源 AB 的像 A_1B_1 和 A_1B_1 及其干涉条纹

但是必须注意到，A_1、A_2 对应于光源上的点 A；而 B_1、B_2 对应于光源上的 B 点. 所以，A_1、A_2 是一对相干光源，而 B_1、B_2 是另一对. 由于光源上不同的点是不相干的，所以像上的非对应点之间也不相干.

由图 4.1.5 可见，A_1、A_2 与 B_1、B_2 相互错开，因而它们各自所形成的干涉条纹也是相互错开的. 这样就会导致干涉条纹由于相互重叠而使可见度降低.

以下对干涉强度及可见度进行计算.

如图 4.1.6(a)所示，在坐标系中，两个单位宽度的对称的相干点光源在屏上的干涉强度为

$$I(x')=4\left(\frac{A}{D}\right)^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)=4I_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)$$

宽度为 $\mathrm{d}x$ 的一对光源，干涉强度为

$$\mathrm{d}I(x')=4i_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)\mathrm{d}x$$

其中，i_0 为单个单位宽度光源发出的光波在屏上的强度.

如图 4.1.6(b)所示，距离上述光源为 x 的一对光源，相当于其对称轴移动了 x，原来坐标系中的 x' 点在移动了 z 轴的新坐标系中的位置成为 $x'-x$，这样一对光源在屏上 x' 点的干涉强度为

$$\mathrm{d}I(x')=4i_0\cos^2\left[\frac{kd}{2D}(x'-x)\right]\mathrm{d}x$$

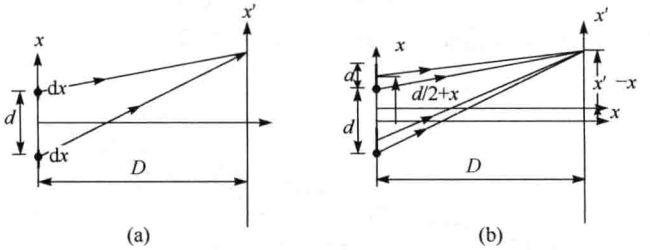


图 4.1.6　不同位置的相干光源的干涉强度

由于不相干的光波之间是强度叠加，所以宽度为 a 的像光源 A_1B_1 和 A_2B_2 在接收屏上的光强为

$$\begin{aligned}I(x') &= 4i_0\int_0^a\cos^2\left[\frac{kd}{2D}(x'-x)\right]\mathrm{d}x\\ &= 2i_0\left\{a+\frac{D}{kd}\left[\sin\frac{kd}{D}(x'-a)-\sin\frac{kd}{D}x'\right]\right\}\end{aligned}$$

式中，$\frac{D}{kd}\left[\sin\frac{kd}{D}(x'-a)-\sin\frac{kd}{D}x'\right]$ 是代表屏上光强周期改变形成明暗条纹的因

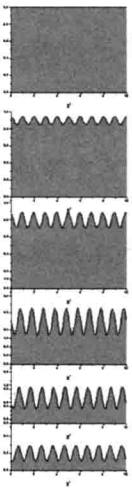


图 4.1.7　光源宽度引起的条纹可见度变化

素，量值在$\pm\frac{2D}{kd}$之间. 当$\frac{kd}{D}a=2m\pi$，即光源宽度为$a=m\frac{D}{d}\lambda=m\Delta x$时，可见度为 0. 其中$\Delta x$为点光源所形成的干涉条纹间隔. 但是随着$a$的增大，背景光增强，明暗条纹的反差迅速减小，即条纹的可见度降低，如图 4.1.7 所示.

不妨作如下估算：$I_{\max}=2i_0\left(a+\frac{2D}{kd}\right)$，$I_{\min}=2i_0\left(a-\frac{2D}{kd}\right)$，则可见度为

$$V\approx\frac{\frac{D}{kd}}{a}=\frac{D\lambda}{2\pi ad}=\frac{\Delta x}{2\pi a}$$

4.1.2　劳埃德镜

如图 4.1.8 所示，在平面反射镜M的上方有一光源S，从光源发出的光，一部分直接到达接收屏，另一部分经镜面反射后到达接收屏. 在它们重叠的区域，产生干涉. 这种装置被称为**劳埃德镜**(Lloyd mirror). 光源S与它的几何像S'，等效于杨氏干涉装置中的双孔或双缝.

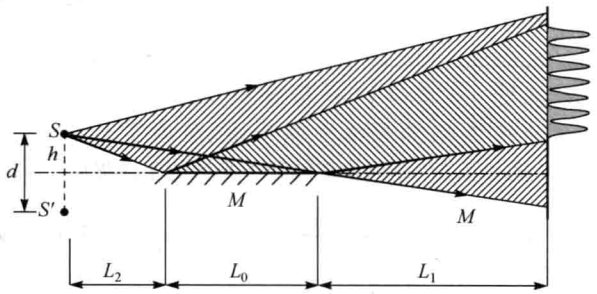


图 4.1.8　劳埃德镜

劳埃德镜的干涉图样与杨氏干涉相似，图 4.1.9 就是一个劳埃德镜的干涉图样.

与菲涅耳双面镜相比，干涉光中，有一列没有经过镜面反射，而是直接到达了屏幕，所以参与干涉的两列光是不对称的. 实验研究发现，如果让反射镜的前端抵住接收屏，则镜与幕的接触点是整个装置的对称中心，按照杨氏干涉的原理，这本

应该是0级亮条纹的位置. 然而,实验表明,这里却出现了暗纹. 这当然不是由于测量上的误差而产生的,而是有物理上的原因.

实际光源与其像光源到上述接触点的光程是相等的,如图4.1.10所示,两列波在此本来应该是同相的,而事实上出现了暗纹,说明两列波的相位相反,相当于实际的光程相差半个波长. 而这半个波长的光程差只能是由于其中的一列波反射而产生的,因而称其为**半波损失**(half wave loss),意思是其中一个波列由于反射而损失了(当然也可以说是额外增加了)半个波长的光程. 半波损失的原因在下文将给予说明.

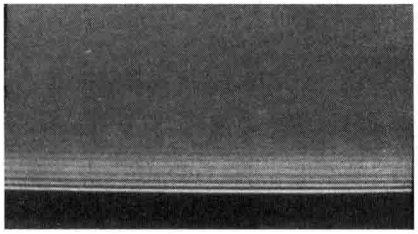


图4.1.9 劳埃德镜干涉图样

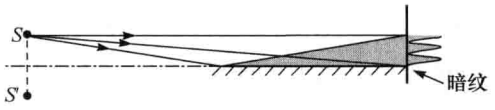


图4.1.10 劳埃德镜干涉中反射波的半波损失

4.1.3 菲涅耳双棱镜

将两个完全相同的三棱镜的底面相对,黏合起来,就组成了一个**菲涅耳双棱镜**(Fresnel biprism). 从光源S发出的光经棱镜折射后,就相当于从两个虚像点S_1、S_2射过来,在重叠区域产生干涉,如图4.1.11所示. 图4.1.12是菲涅耳双棱镜的干涉图样. 实际上,并不需要先做好两块一模一样的棱镜再将其黏合,而是用一块薄的等腰三棱镜即可. 由于菲涅耳双棱镜的顶角α很小,只要将一块光学玻璃的两侧磨出方向略有差别的平面即可.

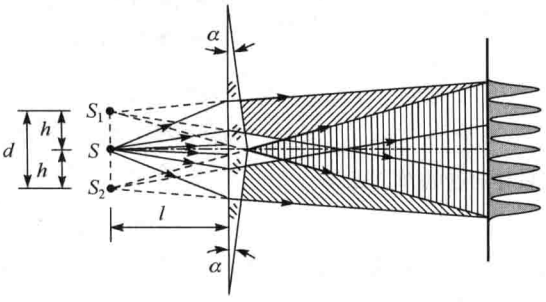


图4.1.11 菲涅耳双棱镜及其干涉

在图4.1.11所示的情形,虚光源相当于S在竖直方向上下移动了$(n-1)\alpha l$,l为S到棱镜的距离.

如果是平行光入射，设棱镜的顶角为 α，玻璃的折射率为 n，如图 4.1.13 所示，折射定律为 $\sin i = n\sin\alpha$，而 α 是个小角，所以 $i \approx n\alpha$，故经棱镜后，光的偏转角为

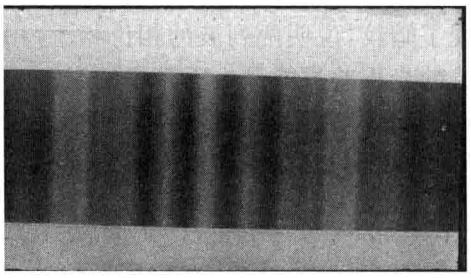


图 4.1.12　菲涅耳双棱镜图样

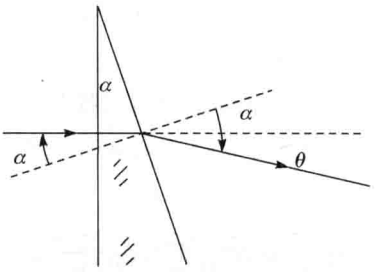


图 4.1.13　平行光射向菲涅耳双棱镜

$$\theta = i - \alpha = (n-1)\alpha \tag{4.1.2}$$

这就是两列平面波的干涉.

4.1.4　对切透镜

一个发光点经过透镜可以成一个像，若将一个透镜切开并分离，则得到两个透镜. 一个光源经过这样的分离透镜后可形成两个像光源，毫无疑问这两个像光源是相干的，因而这样的对切透镜也可以作为干涉装置使用.

1. 比耶对切透镜

如图 4.1.14 所示，将一个完整的透镜从中间对称地切去高度为 $2a$ 的部分，再将剩余的两部分黏合起来，就制成了**比耶对切透镜**(Billet split lens).

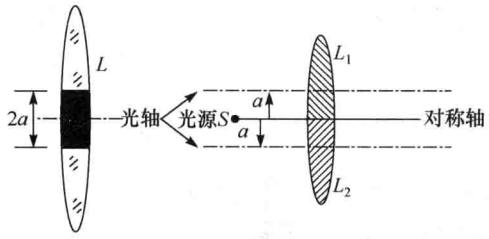


图 4.1.14　比耶对切透镜及其光轴

比耶对切透镜看起来像一个透镜，但是该透镜的对称轴并不是光轴，上半部分的光轴在对称轴下 a 处，而下半部分的光轴在对称轴上 a 处. 因而这样的透镜实际上是两个光轴上下错开的透镜. 一个物点(光源)经过这样的透镜，将会成两个对称的像.

实际上，将透镜对切，然后使两部分上下稍微分离，也能得到一对光轴分开的半透镜，这也是一种比耶对切透镜.

在图 4.1.15 所示的情形中，一个光源 S 经过比耶透镜的上下两部分后分别成虚像 S_1 和 S_2，对于透镜的物方，就是有两列中心分别在 S_1 和 S_2 的球面光波，这两列光波都是从中心在 S 处的光波分出来的，因而是相干的. 在两列波的重叠区域的波前上，会出现干涉条纹，与杨氏干涉类似，是两列发散球面波的干涉.

当光源 S 在物方焦点外侧，则光波经透镜后在物方是两列分别向 S_1 和 S_2 会聚的球面波，如图 4.1.16 所示，就是 S 成实像于 S_1 和 S_2. 对比两种情况，可以看出，实像的干涉区域比虚像要小得多.

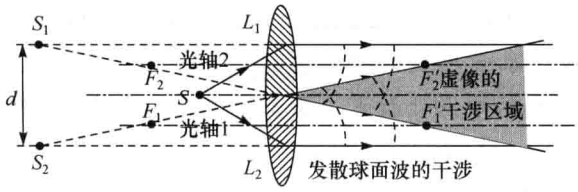


图 4.1.15　比耶对切透镜：虚像的干涉

2. 梅斯林对切透镜

如图 4.1.17 所示，将一个透镜沿其直径对称地剖开为两部分，然后将这两部分相互错开放置，一个光源 S 经上一半 L_1 成像于 S_1，经下一半 L_2 成像于 S_2，在物方，就形成了两列分别向 S_1 和 S_2 会聚的球面波，在这两列波的重叠区域会出现干涉. 这种干涉装置称为**梅斯林对切透镜**(Meslin split lens).

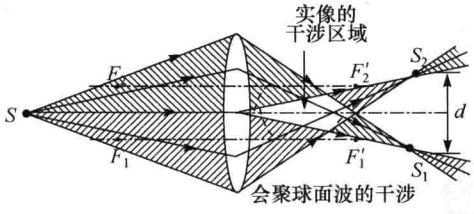


图 4.1.16　比耶对切透镜：实像的干涉

对于位于两列波重叠区域的接收屏，两列光的情况是不一样的：S_2 是发散球面波的中心，其波前函数为 e^{ikr_2}；而 S_1 是会聚球面波的中心，其波前函数为 $e^{-ikr_1+i\varphi_0}$，其中，φ_0 为 S_1 相对于 S_2 的相位滞后.

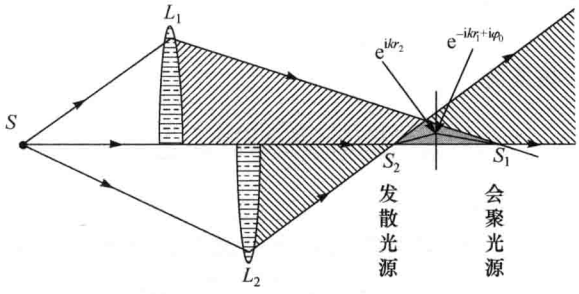


图 4.1.17　梅斯林透镜及其干涉

例 4.2

如图 4.1.18 所示，一凸透镜的焦距 $f=30\text{cm}$，将其剖开为两部分，记为 L_1 和 L_2，再沿光轴将两半错开 8.0cm，光轴上有一光源，与 L_1 间距 60cm，波长为 500nm. S_1'、S_2' 分别为 S 经 L_1、L_2 的像点. 设光波在 S_1' 的初位相为 $\varphi_1=0$.

(1) 求出光波在像点 S_2' 处的初位相 φ_2；

(2) 如果在 $S_1'S_2'$ 的中点处放置一垂直于光轴的平面，在图上标出干涉条纹出现的区域；

(3) 说明在此平面上干涉条纹的形状，并计算相邻亮条纹的间距.

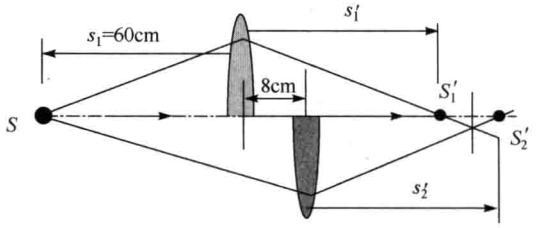


图 4.1.18　例 4.2 图

解 (1) 由 $\dfrac{1}{s'}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{f}$，得到 $s'=\dfrac{sf}{s-f}$，算得像距

$$s_1'=60\text{cm},\quad s_2'=53.684\text{cm}$$

即 $\overline{SS_1'}=120\text{cm}$，$\overline{SS_2'}=121.684\text{cm}$. 两像点间距 $\overline{S_1'S_2'}=1.684\text{cm}$.

由于物像间是等光程的，所以可以根据沿着光轴的路径计算两像点的光程差. 对于沿着光轴的光波，到两像点的光程差为

$$\Delta L=1.684\text{cm}$$

S_1'、S_2' 间的位相差为

$$\Delta\varphi_0=\varphi_2-\varphi_1=k\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L=3.368\times 2\pi\times 10^6$$

说明 S_2' 的位相比 S_1' 滞后.

(2) 如图 4.1.18 所示，只有在两列波的交叠区域才能出现干涉.

(3) 由于像点可以看成两个相干的点光源，如图 4.1.19 所示. 但是在观察平面处，S_2' 是发散的点光源，S_1' 是会聚的点光源，其表达式分别为 $\widetilde{U}_2(r_2)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_2+\mathrm{i}\varphi_2}$ 和 $\widetilde{U}_1(r_1)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}$，即屏上的点，相位比 S_2' 超前，比 S_1' 滞后. 屏上亮条

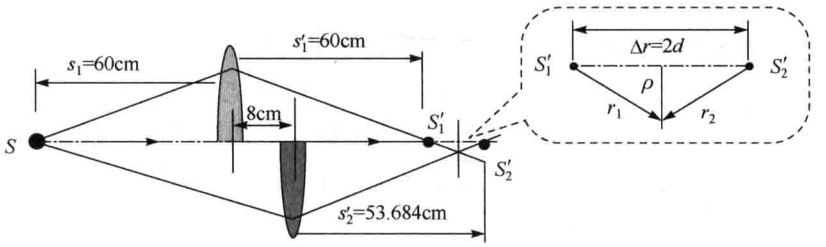


图 4.1.19 相干光源的位置及相位差

纹满足的条件为 $\Delta\varphi=k(r_1+r_2)+(\varphi_1-\varphi_2)=2j\pi$.

对于观察平面上的距离轴线为 ρ 的点，由于 $r_1=r_2=r=\sqrt{\rho^2+d^2}$，其中，$2d$ 为两像点间距，由光轴上的距离计算，得到 $\Delta\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2=-2kd$.

于是有

$$\sqrt{\rho^2+d^2}=\frac{j}{2}\lambda+d$$

即 $\rho^2=\left(\frac{j}{2}\lambda+d\right)^2-d^2$，可见干涉条纹是同心圆环，圆心的干涉级数 $j_0=0$.

亮条纹半径 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，即 $\rho=\sqrt{\left(\frac{j}{2}\lambda+d^2\right)^2-d^2}=\sqrt{\frac{j^2\lambda^2}{4}+j\lambda d}$，由于 $\lambda\ll d$，所以有 $\rho\approx\sqrt{j\lambda d}$.

以上的种种干涉装置，虽然都可以与杨氏干涉类比的方式理解其获得相干光的原理和干涉方式，但是由于每种装置的反射面、折射面以及透镜的孔径都有实际的大小，所以，干涉区域都有一定的限制，只有在一定的区域内，才能够产生干涉，因此，这类装置的干涉是“定域的”.

4.2 光的空间相干性

本章前面所介绍的几种干涉装置，都是在理想条件下工作的，例如，杨氏双缝干涉装置，假设光源是单色的线光源. 而实际情况，光源通常是有一定大小，而且所发出的也不可能是严格的单色光. 本节针对这类实际的问题进行讨论.

4.2.1 光源的非相干性

图 4.2.1 表示是的一个扩展光源的杨氏干涉，在扩展光源上，发光的原子很多，各个原子独自发光，因而光源本身是非相干的.

1. 两个不相干点光源经杨氏装置的干涉

不妨在光源上任取两个点分析对干涉的影响. 图 4.2.2 中,点光源 O_1 和 O_2 所发的光波经过双缝各自形成一套干涉图样. 由于 O_1 和 O_2 的位置不同,所以在接收屏上两套干涉图样 0 级亮纹的位置也不同. 如果一套图样的亮纹恰与另一套图样的暗纹重合,则在屏上两套图样重叠,就不再有明显的亮暗条纹,各处光强变得均匀了,就观察不到干涉现象了.

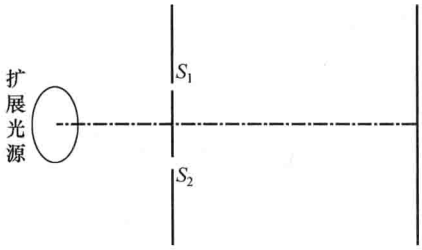


图 4.2.1 扩展光源的杨氏干涉

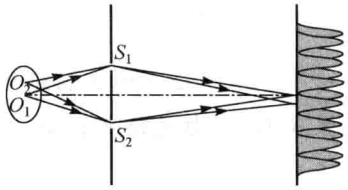


图 4.2.2 扩展光源导致干涉图样重叠

可以通过下面的例题对上述分析加以定量的计算.

例 4.3

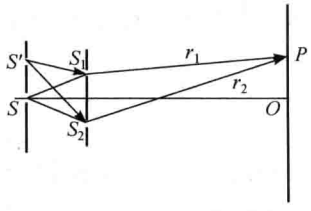


图 4.2.3 例 4.3

在杨氏双缝实验中,除了原有的光源缝 S 外,再在 S 的正上方开一狭缝 S',如图 4.2.3 所示. 问:

(1) 若使 $S'S_2-S'S_1=\dfrac{\lambda}{2}$,试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布.

(2) 若 $S'S_2-S'S_1=\lambda$,S 和 S' 同时打开时,屏上的光强分布如何?

解 (1) 单独打开中央缝,光强为 $I=4I_0\cos^2\left(\dfrac{kd}{2D}x'\right)=4I_0\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$,0 级亮纹的位置为 $x_0'=0$,亮纹间隔为 $\Delta x=\dfrac{D\lambda}{d}$.

单独打开旁边缝,则计入双缝前的光程差 ΔL_1,两列光在 P 点的总位相差为 $k\Delta L=\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta L_1+x'\dfrac{d}{D}\right)$,光强为

$$I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

相当于 S 点的干涉图样在屏上作了平移. 0 级亮纹的位置由 $\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'=0$ 确定，为 $x_0''=-\frac{D}{d}\Delta L_1$.

如果 $S'S_2-S'S_1=\lambda/2$，则 $\Delta L_1=\lambda/2$，$x_0''=-\frac{D\lambda}{2d}=-\frac{\Delta x}{2}$，向下移动了半个条纹间隔.

两缝同时打开时，总光强为

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

由于 $\Delta L_1=\lambda/2$，$\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}=\frac{\pi}{2}$，于是

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

$$=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)=4I_0$$

这时屏上光强均匀分布，没有干涉条纹.

(2) $S'S_2-S'S_1=\lambda$，$\Delta L_1=\lambda$，$\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda}=\pi$，于是

$$I+I'=4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)+4I_0\cos^2\left(\pi+\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)=8I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

这是由于两套图样恰好错开一个条纹间隔，亮纹重叠，屏上亮条纹强度增加 1 倍.

2. 扩展光源的干涉

对于扩展光源，上面的发光点不仅只有两个，而是有无穷多个，所以由此所引起的对干涉图样的影响与例 4.3 有所不同，应当进一步分析.

如图 4.2.4 所示，扩展光源上的任意一点 S' 点发出的光波，经过双缝到达 P 点时，光程差包括两部分：在双缝之前，$\Delta L_1=\overline{S_2S'}-\overline{S_1S'}$；在双缝之后，$\Delta L_2=\overline{PS_2}-\overline{PS_1}$. 总的光程差为 $\Delta L=\Delta L_1+\Delta L_2$.

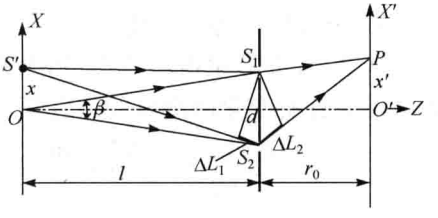


图 4.2.4 扩展光源上任一点光程的计算

当光源位置改变时，P 点的 ΔL_1 变化，而 ΔL_2 保持不变.

设 S' 的坐标为 x，设光源具有较大的宽度，同时距双缝较远，如恒星等天体，则 $b,x\gg d$，同时 l 也很大，$l\gg b,x$，即光源

也满足傍轴条件，则仿照屏后光程差 ΔL_2 的计算方法，可得

$$\Delta L_1=\overline{S'S_2}-\overline{S'S_1}\approx x\frac{d}{l}=x\beta \tag{4.2.1}$$

其中

$$\beta=\frac{d}{l} \tag{4.2.2}$$

是光源中心对双缝的张角，称为**干涉孔径(角)**.

注意，当 S' 上下移动时，对于接收屏上的固定点 P，ΔL_2 保持不变.

杨氏干涉的强度公式为 $I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi$，设双缝宽度相等，即从双缝出射的光具有相等的振幅和强度，上式中 $A_1=A_2$，$I_1=I_2=I_0$，可以化为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi=2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$$

其中，I_0 为只打开一条狭缝时(没有干涉，同时忽略单缝的衍射)，接收屏上的光强.

如果有一宽度为 b 的扩展光源，即分布范围为 $\left(-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$ 的一段光源，其中位于 x 附近的一段 $\mathrm{d}x$ 光源在屏上所形成的干涉强度为

$$\mathrm{d}I=2I_0\mathrm{d}x\left(1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right)=2I_0\mathrm{d}x\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x+\Delta L_2)\right]$$

由于光源上不同的点是不相干的，所以将其光强进行叠加. 整个光源的干涉场的强度为

$$I=2I_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x+\Delta L_2)\right]=2I_0\left(b+\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_2\right) \tag{4.2.3}$$

在傍轴条件下，双缝到接收屏上 x' 点的两条路径的光程差，即缝后光程差为 $\Delta L_2=\frac{dx'}{D}$.

4.2.2 扩展光源对相干性的影响

1. 干涉图样的可见度

从式(4.2.3)中可以看出，当光源宽度 b 增大时，$2bI_0$ 是接收屏上的背景光强，随位置而有所变化的部分的强度是

$$\left(2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_2\right)I_0=\left(2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi dx'}{\lambda D}\right)I_0$$

这一部分强度在 $\pm2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}I_0$ 之间变化，相当于在一个亮背景上分布着干涉条纹，光源宽度增大，背景光强持续增大，从而使干涉图样的可见度持续下降.

在屏上形成干涉图样，最大光强和最小光强分别为

$$I_{\max}=2I_0b+2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|,\quad I_{\min}=2I_0b-2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|$$

于是干涉图样的可见度为

$$V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|}{\frac{\pi b\beta}{\lambda}}\qquad(4.2.4)$$

接收屏上条纹可见度与光源宽度可用图 4.2.5 表示.

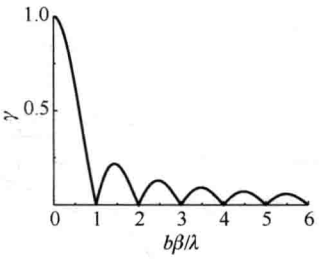


图 4.2.5 扩展光源杨氏干涉的可见度

将 $\beta=\frac{d}{l}$ 代入式(4.2.4),则得到

$$V=\frac{\left|\sin\frac{\pi bd}{\lambda l}\right|}{\frac{\pi bd}{\lambda l}}\qquad(4.2.5)$$

可以看出,随着光源宽度 b 或者双缝间距 d 的增大,干涉图样的可见度迅速减小.

2. 相干孔径与空间相干性

在扩展光源的条件下,杨氏干涉的可见度是一个振荡衰减的函数. 当 $\frac{b\beta}{\lambda}=0$ 时,可见度函数取得极大值 $V=1$,相当于 $b\ll\lambda$,即光源可视为一个几何点;随着 $\frac{b\beta}{\lambda}$ 的增大,可见度迅速衰减,到 $\frac{b\beta}{\lambda}=1$ 时,$V=0$;此后,虽然随着 $\frac{b\beta}{\lambda}$ 的增大,V 的值还会有一定幅度的起伏变化,但是数值很小,可见度很低. 所以,通常认为当 $\frac{b\beta}{\lambda}\geqslant1$ 时,干涉条纹的可见度已经很小. 这种情况下,就是光源在空间的扩展,导致了干涉的消失.

于是,能够产生明显干涉的条件是 $\frac{b\beta}{\lambda}<1$,由此可以得到

$$b<\frac{\lambda}{\beta}=\frac{l}{d}\lambda\qquad(4.2.6)$$

式(4.2.6)就是与双缝间距 d 对应的扩展光源的尺度范围,以保证有一定可见度的干涉场可供观测.

当 $b_m=\frac{l}{d}\lambda$ 时,可见度 $V=0$,此时 b_m 为扩展光源的极限宽度.

由于扩展光源导致干涉消失,这种现象被称为光的空间相干性.

或者,在光源宽度保持一定的情况下,空间相干性要求双缝间距

$$d \leqslant \frac{l}{b}\lambda \tag{4.2.7}$$

此时干涉孔径角为 $\beta=\frac{d}{l} \leqslant \frac{\lambda}{b}$. 由此可得最大干涉孔径角为

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{b} \tag{4.2.8}$$

能够产生显著干涉的最大的 $\Delta\theta_0$ 称为**相干孔径(角)**,这是双缝对光源的张角,只有处于这一角度范围之内的光,是相干的.

也可以将式(4.2.8)改写为

$$b\Delta\theta_0 = \lambda \tag{4.2.9}$$

式(4.2.9)称为空间相干性的反比公式.

$\beta < \Delta\theta_0$ 才有干涉,即当双缝对光源中心的张角,即干涉孔径(角)小于相干孔径(角)时,才有干涉. 也就是说,当双缝处于相干孔径角之内时,可出现干涉,否则无干涉,如图 4.2.6 所示.

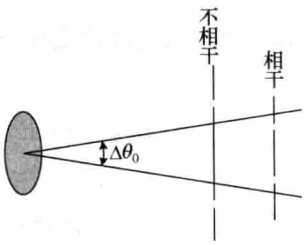


图 4.2.6 相干孔径的说明

有时也用面积表示空间相干的尺度,采用相干面积的概念. 相干面积的定义为

$$S = d^2 \tag{4.2.10}$$

3. 迈克耳孙测星干涉仪

空间相干性的一个重要应用就是迈克耳孙测星干涉仪.

如图 4.2.7 所示,在双缝干涉装置的前端光路上对称地安装两对平面镜 M_1、M_2 和 M_3、M_4,其中 M_2 和 M_3 的间距固定,与双缝间距相等,而 M_1 和 M_4 的间距 h 可调. 从遥远恒星发出的光经平面镜反射后,通过双缝 S_1、S_2 进行干涉. 由于双缝 S_1 和 S_2 经反射镜的像分别为 S_1' 和 S_2',则 S_1 和 S_2 的相干性与 S_1' 和 S_2' 的相干性相同. 所以对于恒星,双缝的间距是 S_1' 和 S_2' 的间距 h. 若恒星的宽度为 b,到干涉仪的距离为 l,则空间相干性的条件为 $h \leqslant \frac{\lambda}{b}l$,由此可得 $\frac{b}{l} \leqslant \frac{\lambda}{h}$. 若测出干涉条纹消失时的 h,即可得到恒星的张角为 $\alpha = \frac{b}{l} = \frac{\lambda}{h}$.

图 4.2.8 为安装在 100in 口径的胡克望远镜构架之上的 20ft(1ft=0.3048m)迈克耳孙干涉仪(1920 年). 100in 胡克望远镜,位于美国洛杉矶的威尔逊天文台,1917 年建成.

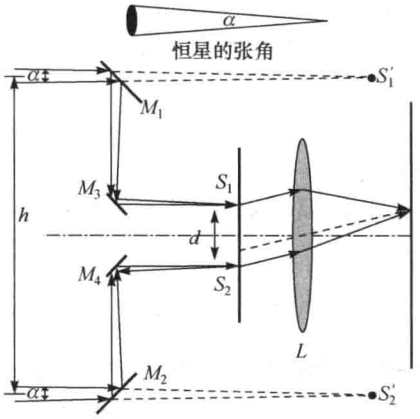


图 4.2.7 迈克耳孙测星干涉仪原理

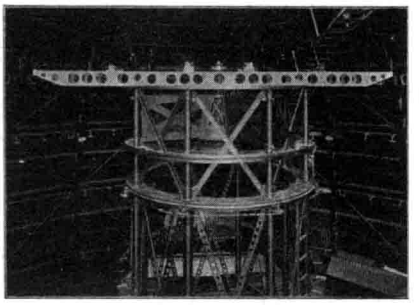


图 4.2.8 胡克望远镜上的迈克耳孙干涉仪

4.3 光的时间相干性

4.3.1 非单色光的干涉

光的相干性要求各个波列是波长相等的单色光，而实际上，任何光源所发出的光，都具有一定的波长范围 $\Delta\lambda$，可以表示为 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$.

1. 非单色光干涉图样

下面以杨氏干涉为例分析光源的非单色性对干涉的影响.

入射光波长范围为 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$，其中的任一个波长成分都可以形成一套干涉条纹.

如图 4.3.1 所示，第 j 级亮条纹中，波长为 λ 的成分的亮条纹中心在屏上位置为 $x=j\dfrac{r_0}{d}\lambda$；波长为 $\lambda+\Delta\lambda$ 的成分的亮条纹中心在屏上位置为 $x=j\dfrac{r_0}{d}(\lambda+\Delta\lambda)$

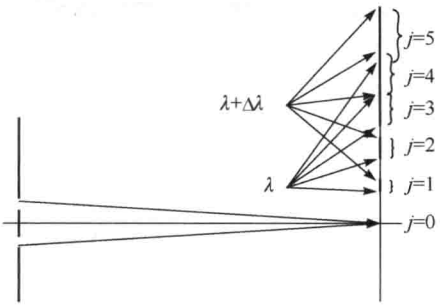


图 4.3.1 非单色光的杨氏干涉

除 $j=0$ 级之外，由于入射光的波长有一定的范围 $\Delta\lambda$，则第 j 级亮纹在接收屏上扩展开来，为一条从 $x(\lambda)=j\dfrac{r_0}{d}\lambda$ 到 $x(\lambda+\Delta\lambda)=j\dfrac{r_0}{d}(\lambda+\Delta\lambda)$的宽带. 第 j 级亮条纹的宽度为 $\Delta x_j(\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda)=j\dfrac{r_0}{d}\Delta\lambda\propto j$. 干涉级数越高，其宽度也越大. 在某一个 j 值处，如果亮带的宽度足够大，不同级次

的条纹将会重迭. 也就是说，大于 j 的级次全部被亮纹覆盖，无法分辨，干涉消失.

当长波限 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 j 级与短波限 λ 的 $j+1$ 级重合时，干涉消失，即

$$j(\lambda+\Delta\lambda)=(j+1)\lambda$$

可得最大相干级数为

$$j_{\max}=\lambda/\Delta\lambda \tag{4.3.1}$$

对应的光程差 $\Delta L=j(\lambda+\Delta\lambda)=(j+1)\lambda=\lambda^2/\Delta\lambda+\lambda\approx\lambda^2/\Delta\lambda$，即最大相干光程差为

$$\Delta L_{\max}=\lambda^2/\Delta\lambda \tag{4.3.2}$$

$\Delta L_{\max}$ 也叫**相干长度**.

2. 相干长度物理含义

在第 2 章中，讨论了非单色光叠加产生波包的问题. 并且计算出非单色光叠加后所形成的波包的有效长度为 $L_0=\Delta Z=\lambda^2/\Delta\lambda$，波包的长度正是上述的最大相干长度 $\Delta L_{\max}$，于是对上述非相干光的干涉可以作如下解释：

由于光源所发出的是波长在 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$ 范围内的非单色波，叠加后是非定态光波，在空间是一个有效长度为 $L_0=\lambda^2/\Delta\lambda$ 的波包(图 4.3.2). 在图 4.3.3 中，屏上的中心点 O 到双缝 S_1、S_2 的光程相等，因而从 S_1、S_2 出发的两个波包总是同时达到 O 点，在 O 点总能相遇，于是相干叠加产生干涉；而对于 P_1 点，到双缝的的光程不相等，但是光程差小于波包的有效长度，即 $0<\Delta L(P_1)<L_0$，于是上述两个波包虽然是先后到达 P_1 点，但在该点能够相遇，于是也能相干叠加产生干涉；但是，对于 P_2 点，由于 $\Delta L(P_2)=L_0$，当第二个波包到达该点时，第一个波包恰好离开，则两者不能相遇，因而不能产生干涉，相当于从 S_1、S_2 发出的光波先后照射该点. P_2 点之外的所有区域，都是 $\Delta L(P)>L_0$，两列相干的光波总是先后到达，由于不能相遇而不能产生干涉. 正是空间长度有限的波包到达空间某点时间上的差异，而使干涉不能发生，因而被称为**时间相干性**.

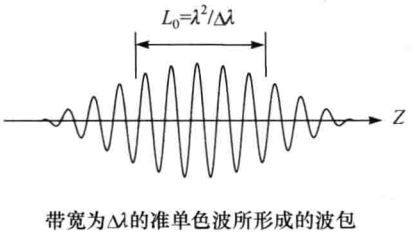


图 4.3.2　非单色光叠加所形成的波包

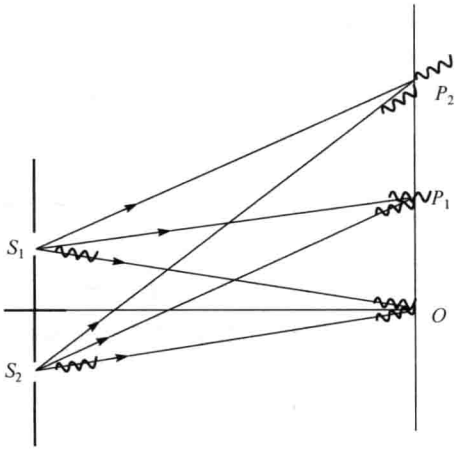


图 4.3.3　时间相干性的说明

4.3.2 相干时间

若将波包想象为一列火车，则该火车通过铁道上一个交叉点的时间为$\tau=L_0/c$，两列火车先后通过该交叉点. 若到达该点的时刻间隔较长，大于 τ，这两列火车就不会相撞；若是到达该交叉点的时刻间隔小于 τ，则会相撞.

因此，波包经过空间某一点（或者说在该点逗留）的时间为 $\tau=L_0/c$，是干涉产生的最大时刻间隔（图 4.3.4），τ 被称为**相干时间**.

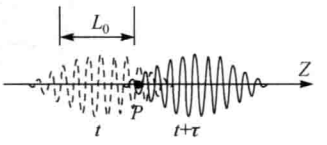


图 4.3.4 波包经过一个点所用的时间为相干时间

将波包的长度用频率表示，$L_0=\lambda^2/\Delta\lambda=\left(\frac{c}{\nu}\right)^2\Big/\left(\frac{c}{\nu^2}\Delta\nu\right)=c/\Delta\nu$，所以 $\tau=L_0/c=1/\Delta\nu$，即

$$\tau\Delta\nu=1 \tag{4.3.3}$$

式(4.3.3)被称为**时间相干性的反比公式**.

入射光为非单色光时，除了 0 级亮纹，在接收屏上不同波长的同一级亮纹不重合，一方面会产生彩色的条纹，另一方面亮纹的扩散会使暗纹消失，在接收屏上难以观察到明显的条纹. 通过对接收屏上的光强分布进行计算可以得到具体的结果. 易知波矢为 k 的单色成分经双缝干涉所形成的强度分布为

$$i(k)=4\left(\frac{A}{D}\right)^2\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)=4I_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)$$

式中，$4I_0$ 为单位波长范围的光波在接收屏上的强度.

由于只有相同波长的光才能进行相干叠加，不同波长的光是不相干的，按强度叠加，则

$$I=\int_{k_0}^{k_0+\Delta k}i(k)\mathrm{d}k=4I_0\int_{k_0}^{k_0+\Delta k}\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)\mathrm{d}k=2I_0\int_{k_0}^{k_0+\Delta k}\left[1+\cos\left(\frac{kd}{D}x'\right)\right]\mathrm{d}k$$

$$=2I_0\left[\Delta k+\frac{D}{x'd}\sin\frac{(k_0+\Delta k)\mathrm{d}x'}{D}-\frac{D}{x'd}\sin\frac{k_0\mathrm{d}x'}{D}\right]$$

当 $\lambda=500\mathrm{nm}$，$\Delta\lambda=50\mathrm{nm}$ 时，接收屏上的强度分布如图 4.3.5 所示.

当 $\frac{\Delta kdx'}{D}>2\pi$ 时，屏上明暗条纹相差较小，已不容易分辨，所以对于非单色光，接收屏上有效的干涉范围为 $x'<2\pi\frac{D}{\Delta kd}$，即

$$x'<\frac{D}{\lambda d}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\Delta x'\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

与亮条纹的公式 $x'_j=j\frac{D}{d}\lambda=j\Delta x'$ 比较，可知能够出现的最大干涉级数为

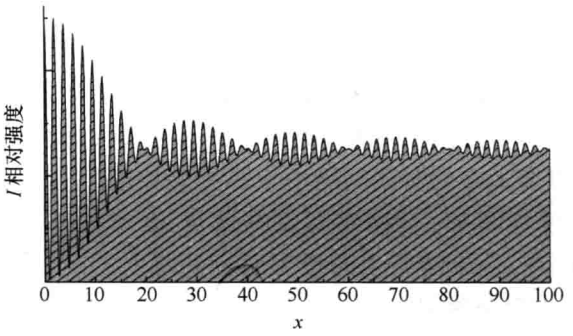


图 4.3.5　非单色光双缝干涉的强度分布

$$j_{\max}=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

4.4　光波在界面处的复振幅

分振幅的干涉是利用光波的反射、折射实现的. 为了便于理解这类干涉，本节先介绍在界面处反射光波、折射光波与入射光波的关系.

4.4.1　菲涅耳公式

1. 光波电矢量的分解

光波是横波，电矢量 $\boldsymbol{E}$ 与波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直. 在介质的界面处，入射光分为反射光和折射光. 将各列波的电场分量分解为平行于入射面的 P 分量和垂直于入射面的 S 分量，这样一来，每一列光的 P 分量、S 分量和波矢 $\boldsymbol{k}$ 由于两两垂直而构成一个直角坐标系，但各列波的坐标轴并不平行. 为了便于比较各列光波电矢量的方向，可使 P 分量 、S 分量和波矢 $\boldsymbol{k}$ 构成右手系，例如，可取 P 分量 、S 分量和波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向分别为 x、y、z 轴，并规定 $+y$ 方向垂直入射面向外，如图 4.4.1 所示.

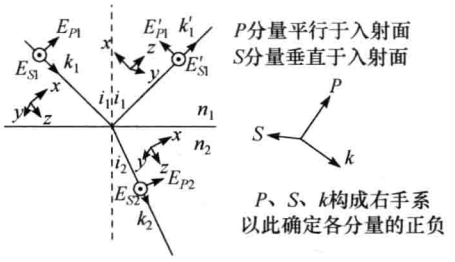


图 4.4.1　电矢量的分解

2. 菲涅耳公式的表述

根据电磁理论可得，在入射点处，反射波、折射波的电矢量与入射波的电矢量之间有如下关系：

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1-\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_2}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_2},\quad \frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_1-\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_2}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_1+\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_2}$$

$$\frac{E_{S2}}{E_{S1}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_2},\quad \frac{E_{P2}}{E_{P1}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_1+\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_2}$$

以上各式是针对透明的电介质的关系式，在导出的过程中已作了近似 $\mu_r\approx1$，所以有 $\sqrt{\varepsilon_{r1}}\approx n_1$，$\sqrt{\varepsilon_{r2}}\approx n_2$. 利用折射定律，可将上述关系式变换为另一种形式. 例如，对第一式作如下变换可得到

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1-\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_2}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos i_1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos i_2}=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{\frac{n_1}{n_2}\cos i_1-\cos i_2}{\frac{n_1}{n_2}\cos i_1+\cos i_2}$$

$$=\frac{\frac{\sin i_2}{\sin i_1}\cos i_1-\cos i_2}{\frac{\sin i_2}{\sin i_1}\cos i_1+\cos i_2}=\frac{\sin i_2\cos i_1-\sin i_1\cos i_2}{\sin i_2\cos i_1+\sin i_1\cos i_2}=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)}$$

则上述各式可写为如下形式：

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)} \tag{4.4.1}$$

$$\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)} \tag{4.4.2}$$

$$\frac{E_{S2}}{E_{S1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)} \tag{4.4.3}$$

$$\frac{E_{P2}}{E_{P1}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)} \tag{4.4.4}$$

式(4.4.1)～式(4.4.4)称为**菲涅耳公式**.

菲涅耳公式中的各个物理量是电场强度的瞬时值，所描述的是同一点(即入射点)、同一时刻(入射瞬间)不同波列的电场强度之间的关系，而不是在任意位置处的关系，一般情况下，也不是各列波振幅之间的关系. 但对于平面波，若不考虑正负号，也可作为各列波振幅之间的关系.

在式(4.4.1)和式(4.4.2)中，比值可能会出现负值，这说明反射光的 S 分量可能与入射光的 S 分量振动方向相反. 由于反射光的 P 分量与入射光的 P 分量正方向的规定并不一致，比值出现负值，只是表明与规定的正方向相反. 但是，对于折射的光波，只要不出现全反射，由于式(4.4.3)和式(4.4.4)的比值总是正的，所以折射波的 S 分量总是与入射光的 S 分量方向相同，P 分量总是与规定的正方向一致.

3. 反射率与透射率

1）复振幅的反射率和透射率

对于定态光波，由于电场强度可以用复数表示为 $E=Ae^{i\varphi}e^{-i\omega t}=\widetilde{U}e^{-i\omega t}$，而 $\widetilde{U}=Ae^{i\varphi}$ 为复振幅，则 $\dfrac{E_2}{E_1}=\dfrac{\widetilde{U}_2}{\widetilde{U}_1}$，所以菲涅耳公式也是反射波、折射波与入射波的复振幅之间的关系式. 从菲涅耳公式可以直接得到复振幅的**反射率**(reflectivity)和**透射率**(transmissivity)，即复振幅的反射率和透射率可以用菲涅耳公式表示为

$$\tilde{r}_S=\frac{\widetilde{U}'_{S1}}{\widetilde{U}_{S1}}=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)},\quad \tilde{r}_P=\frac{\widetilde{U}_{P1}}{\widetilde{U}_{P1}}=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}$$

$$\tilde{t}_S=\frac{\widetilde{U}_{S2}}{\widetilde{U}_{S1}}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)},\quad \tilde{t}_P=\frac{\widetilde{U}_{P2}}{\widetilde{U}_{P1}}=\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}$$

通过对上述各式的分析可以看出，$\tilde{t}_S$、$\tilde{t}_P$ 总是正实数(在不发生全反射时)，所以复振幅的透射率其实就是振幅的透射率. 而 $\tilde{r}_S$、$\tilde{r}_P$ 可以是正实数或负实数，但其绝对值也是振幅反射率.

2）光强反射率和透射率

光强是能流密度，即通过单位截面的光功率. 按照电磁理论，光强 $I=\dfrac{n}{2c\mu_r\mu_0}E_0^2$，所以利用菲涅耳公式可以直接得到光强的反射率和透射率为

$$R_S=r_S^2=\frac{\sin^2(i_1-i_2)}{\sin^2(i_1+i_2)},\quad R_P=r_P^2=\frac{\tan^2(i_1-i_2)}{\tan^2(i_1+i_2)}$$

$$T_P=\frac{n_2}{n_1}t_P^2=\frac{n_2}{n_1}\frac{4\sin^2 i_2\cos^2 i_1}{\sin^2(i_1+i_2)},\quad T_S=\frac{n_2}{n_1}t_S^2=\frac{n_2}{n_1}\frac{4\sin^2 i_2\cos^2 i_1}{\sin^2(i_1+i_2)\cos^2(i_1-i_2)}$$

3）能流的反射率和透射率

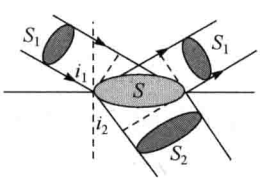


图 4.4.2　折射后光束横截面的变化

能流是光的辐射通量，等于光强与光束截面的乘积.

如图 4.4.2 所示，设入射光束在界面上的投影面积为 S，由于反射角等于入射角，所以反射光的光束截面保持与入射光相同，均为 $S_1=S\cos i_1$，因而能流的反射率就等于光强的反射率，即

$$R_S=r_S^2,\quad R_P=r_P^2$$

而折射角不等于入射角，所以折射光束的截面积与入射光不同，$S_2=S\cos i_2$，所以两者间的关系为 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\cos i_2}{\cos i_1}$. 能流透射率为

$$T_S=\frac{I_{S2}S_2}{I_{S1}S_1}=t_S^2\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1},\quad T_P=\frac{I_{P2}S_2}{I_{P1}S_1}=t_P^2\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}$$

在垂直入射时，入射角、折射角都为0，于是得到复振幅的反射率和透射率分别为

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\quad \frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1},\quad \frac{E_{S2}}{E_{S1}}=\frac{2n_1}{n_1+n_2},\quad \frac{E_{P2}}{E_{P1}}=\frac{2n_1}{n_2+n_1}$$

可见，如果 $n_1>n_2$，则复振幅的透射率可以大于1，但这并不违反能量守恒原理. 因为，第一，此时的光强透射率为

$$T_P=T_S=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_2+n_1}\right)^2=\frac{4n_1n_2}{(n_2+n_1)^2}=\frac{4n_1n_2}{(n_2+n_1)^2}<1\quad (\text{由于 } n_1^2+n_2^2>2n_1n_2)$$

更重要的是，第二，光强是能流密度，即单位面积的光功率，并不是能流.

例 4.4

图 4.4.3 为一全反射棱镜，$n_2=1.6$，空气折射率 $n_1=1$，计算由于界面反射而损失的能量.

分析：在棱镜的两个直角边处，由于反射，入射光损失部分能量，利用菲涅耳公式求解本题.

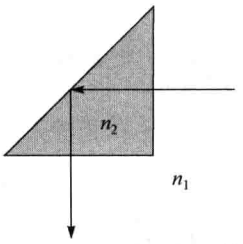


图 4.4.3 透过全反射棱镜的光波

解 在入射界面处，由于是垂直入射，$i_1=i_2=0$. 入射光为自然光，P、S 分量的强度相等，于是能流的透过率为

$$T_1=\frac{w_1}{w_0}=\frac{I_1}{I_0}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=\frac{n_2}{n_1}\frac{A_{1P}^2+A_{1S}^2}{A_{0P}^2+A_{0S}^2}=\frac{n_2}{n_1}t^2=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1+n_2}\right)^2$$

$$=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{4\times1.6}{(1+1.6)^2}=0.9467$$

在斜面处，由于全反射，无能量损失.

在出射界面处，能流透射率为

$$T_2=\frac{w_2}{w_1}=\frac{I_2}{I_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}=\frac{n_1}{n_2}\frac{A_{2P}^2+A_{2S}^2}{A_{1P}^2+A_{1S}^2}=\frac{n_1}{n_2}t'^2=\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{2n_2}{n_1+n_2}\right)^2$$

$$=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{4\times1.6}{(1+1.6)^2}=0.9467$$

总透射率为

$$T=T_1T_2=0.9467^2=0.8963$$

能量损失为 $1-0.8963=0.1037=10.37\%$.

4.4.2 出现半波损失的特例

光波在均匀介质中传播，相位随着传过的光程变化. 但是，在不同介质的界面处，由于反射，会出现相位的突变，半波损失就是光波在反射过程中产生的. 泛泛讨论反射引起的相位变化没有什么意义，以下结合实际的干涉装置讨论半波损失出现的原因和条件.

1. 掠入射

掠入射的情况下，入射光、反射光几乎贴着界面传播，它们波矢的方向几乎是平行的.

设光波由光疏介质射向光密介质，即 $n_1<n_2$. 此时，$i_1, i_2\approx\dfrac{\pi}{2}$，而且 $i_1-i_2>0$，$\dfrac{\pi}{2}<i_1+i_2<\pi$，由菲涅耳公式，可得

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}<0,\quad \frac{E'_{P1}}{E_{P1}}<0$$

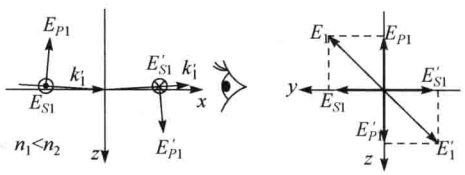


图 4.4.4　掠入射时反射光相位及电矢量方向的突变

说明反射光中，P，S 分量的方向均在反射瞬间反转. 如图 4.4.4 所示，如果逆着 x 轴方向观察，看到入射光的 P 分量指向 $-z$，S 分量指向 $+y$，而反射光中，P 分量指向 $+z$，S 分量指向 $-y$，合矢量 $\boldsymbol{E}'_1$ 恰好与 $\boldsymbol{E}_1$ 相反，可见反射波电矢量的振动方向瞬间反转，相当于有 π 的相位突变，或者说反射光有半波损失.

当光波由光密介质射向光疏介质，即 $n_1>n_2$ 时，在这种情形下已经出现了全反射，无法依据菲涅耳公式讨论半波损失.

这正是劳埃德镜所对应的情况，反射光相当于从像光源发出，但由于反射导致电矢量反向，因此，与另一列直接射向接收屏的光波相比，这列光的等效光程是像点到场点的光程减去半个波长. 在菲涅耳双面镜中，由于两列光波都经过镜面的反射，所以就不需要计入额外的光程了.

2. 垂直入射

此时，反射光的方向与入射光几乎反向，$i_1, i_2\sim 0$，当 $n_1<n_2$ 时，可得到

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}<0,\quad \frac{E'_{P1}}{E_{P1}}>0$$

这就意味着，反射光中，S 分量在反射瞬间反转，P 分量也反转. 如图 4.4.5 所示，沿 z 轴方向观察，看到入射光的 P 分量指向 $+x$，S 分量指向 $+y$，而反射光的

P 分量指向 $-x$，S 分量指向 $-y$，合矢量 $\boldsymbol{E}'_1$ 恰好与 $\boldsymbol{E}_1$ 相反，可见反射波电矢量的振动方向瞬间反转，反射光有半波损失.

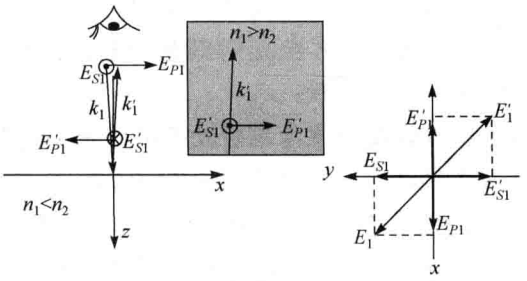


图 4.4.5　垂直入射时反射光相位及电矢量方向的突变

当 $n_1>n_2$ 时，如图 4.4.5 中阴影部分所示，这时反射光没有半波损失.

其实，在接近垂直入射的情况下，有时反射光的电矢量方向并没有倒转，也被视为产生了半波损失. 例如，如果入射光只有 P 分量，$n_1<n_2$，从菲涅耳公式中可得到 $\dfrac{E'_{P1}}{E_{P1}}>0$，这恰恰意味着反射光的电矢量没有倒转，其方向与入射光中电矢量一致，如图 4.4.6 所示. 但是如果将反射光与入射光对比，则在界面处，两者的电矢量方向确实是相反的，所以这种情况也被归为有半波损失. 这与掠入射是不同的，在掠入射的情况下，由于反射光与入射光的方向基本一致，只有两个分量都发生倒转，才能出现半波损失.

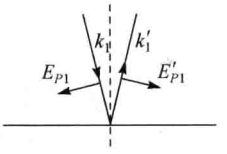


图 4.4.6　反射光与入射光 P 分量方向相反

例 4.5

波长为 λ 的单色光从空气垂直入射到电介质表面上，讨论在界面上方附近反射光与入射光的干涉图样.

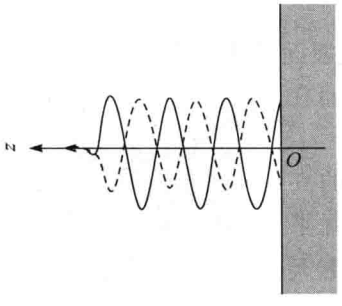


图 4.4.7　入射波与反射波叠加

解　如图 4.4.7 所示，取反射波的方向为 $+z$，则沿 $-z$ 方向的入射光波可表示为

$$U_1=A\cos(kz+\omega t+\varphi_0)$$

其中，φ_0 是入射光在表面处的初相位. 由于有半波损失，反射光波可表示为

$$U_2=A\cos(kz-\omega t+\varphi_0+\pi)$$

叠加后，有

$$U=U_1+U_2=A[\cos(kz+\omega t+\varphi_0)-\cos(kz-\omega t+\varphi_0)]=2A\sin kz\sin(\omega t+\varphi_0)$$

叠加之后的表达式中，空间相位与时间相位分开，相当于振幅为 $2A\sin kz$、频率为 ω 的振动，由于振幅随空间位置周期性变化，也称为波. 但这种形式的波不能在空间传播，只能在原位振动，就是所谓的“**驻波**”. 所形成的光强分布为 $(2A\sin kz)^2$，表面处强度为 0，是暗纹.

为了便于表达，本题假设反射波与入射波振幅相等. 其实，振幅不相等，也能形成类似的驻波. 若设反射波的振幅为 A'，则叠加之后，合振动的表达式为

$$U=U_1+U_2=(A-A')\cos(kz+\omega t+\varphi_0)+2A'\sin kz\sin(\omega t+\varphi_0)$$

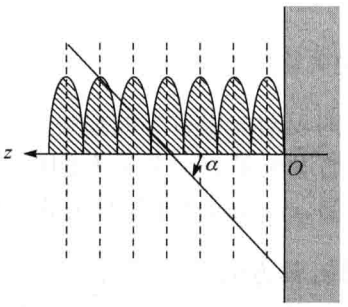


图 4.4.8　叠加形成的驻波的强度分布

其中，$(A-A')\cos(kz+\omega t+\varphi_0)$ 为正常的波，形成强度为 $(A-A')^2$ 的背景；另一部分 $2A'\sin kz\sin(\omega t+\varphi_0)$ 为驻波，形成的光强分布为 $(2A'\sin kz)^2$.

如图 4.4.8 所示，驻波的亮纹满足 $kz_j=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi$，即 $z_j=(2j-1)\frac{\lambda}{4}$，这些位置被称为驻波的波腹. 而纹满足 $kz'_j=j\pi$，即 $z'_j=j\frac{\lambda}{2}$，这些位置被称为驻波的波节.

z 方向上的条纹间距为 $\Delta z=\lambda/2$. 如果在波场中插入一半透半反的薄片作为接收屏，屏的表面与 z 方向成 α 角，则屏上条纹间距为

$$\Delta=\frac{\lambda}{2\cos\alpha}$$

这种干涉被称为**维纳驻波干涉**.

3. 薄膜的反射

如图 4.4.9 所示，光波入射到透明薄膜上，在上表面发生反射和折射，进入薄膜的光波还会在内侧表面发生多次反射和折射，因而在上表面有多列反射波，下表面有多列透射波.

如果薄膜的上下表面相互平行，或者有较小的夹角，则各列反射波几乎相互平行，各列透射波也相互平行. 在这种情况下，可以方便地比较各列平行光波电矢量的方向.

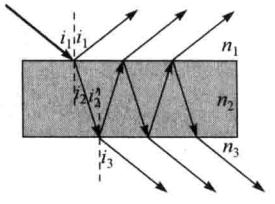


图 4.4.9　光在薄膜上的半波损失

根据公式 $\tilde{r}_S=-\dfrac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)}$ 和 $\tilde{r}_P=\dfrac{\widetilde{U}_{P1}}{\widetilde{U}_{P1}}=\dfrac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}$，当 $i_1>i_2$ 时，$\tilde{r}_S<0$；当 $i_1<i_2$ 时，$\tilde{r}_S>0$；而 $\tilde{r}_P$ 的正负不仅取决于 i_1 和 i_2 的相对大小，还与 i_1+i_2 的大小有关. 在薄膜的每个界面处，两侧的折射率有各种可能，以下分别加以考虑.

(1) 薄膜两侧折射率相等.

这种情形下，$i_2'=i_2$，$i_3=i_1$. 在上下两个界面处，$i_1+i_2=i_2'+i_3$，即在外侧面反射的 $\tilde{r}_S$、$\tilde{r}_P$ 与内侧面反射的 $\tilde{r}_S$、$\tilde{r}_P$ 的符号正好相反.

因而可以确定，第一列透射波没有经历过反射，没有半波损失，而其余各列透射波都经历过偶数次相同(光密到光疏，或光疏到光密)的反射，要么都没有半波损失，要么半波损失可以抵消，所以所有透射波都不用考虑有半波损失.

第一列反射波在界面外侧反射，其余各列反射波经历了奇数次界面内侧的反射，所以如果第一列反射波有半波损失，其余各列都没有；如果第一列反射波没有半波损失，其余各列都有. 也就是说，在考虑各列反射波的相位差时，必须在第一列和其余各列之间计入 π 的额外相位.

(2) 薄膜两侧折射率不等，但薄膜的折射率最大(或最小).

相似地，这种情形下，外侧面反射的 $\tilde{r}_S$ 与内侧面反射的 $\tilde{r}_S$ 的符号正好相反，同时，由于 $i_2'\approx i_2$，所以 $i_1+i_2\approx i_2'+i_3$，因此多数情况下，外侧面反射的 $\tilde{r}_P$ 与内侧面反射的 $\tilde{r}_P$ 的符号也相反. 所以半波损失的情况与第一种情形相似.

(3) 折射率依次增大，即 $n_1<n_2<n_3$.

这时，$i_2'\approx i_2$，$i_2'>i_3$，通常的情况下，只考虑第一列和第二列反射波，入射角较小时(这是实际中最常遇到的情形)，都有(相对来说等于没有)半波损失.

(4) 折射率依次减小，即 $n_1>n_2>n_3$.

对于第一列和第二列反射波，入射角较小时，都没有半波损失.

4.4.3 斯托克斯倒逆关系

一列波在介质的分界面上，将分为反射和折射两部分. 设界面对于复振幅的反射率和透射率分别为 $\tilde{r}$，$\tilde{t}$，在入射点处，入射波复振幅为 $\widetilde{U}$，如图 4.4.10(a)所示，则反射波、透射波的复振幅分别为 $\widetilde{U}_r=\widetilde{U}\tilde{r}$ 和 $\widetilde{U}_t=\widetilde{U}\tilde{t}$.

如果将上述情形反过来，即一列复振幅为 $\widetilde{U}_r$ 的波和一列复振幅为 $\widetilde{U}_t$ 的波分别沿着反射波和折射波的路径射过来，如图 4.4.10(b)所示. 从光的可逆性原理可以判断，总的效果应该是只有一列沿着原来入射路径的波列 $\widetilde{U}$，可以用公式表示为

$$\begin{cases}\widetilde{U}r^2+\widetilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{t}=\widetilde{U}\\ \widetilde{U}\tilde{r}\cdot\tilde{t}+\widetilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{r}'=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}r^2+\tilde{t}\cdot\tilde{t}'=1\\ \tilde{r}\cdot\tilde{t}+\tilde{t}\cdot\tilde{r}'=0\end{cases}\text{，由此可以得到}$$

$$r=-r' \tag{4.4.5}$$

或

$$r^2=r'^2 \tag{4.4.6}$$

以及

$$\tilde{t}\cdot\tilde{t}'=1-r^2 \tag{4.4.7}$$

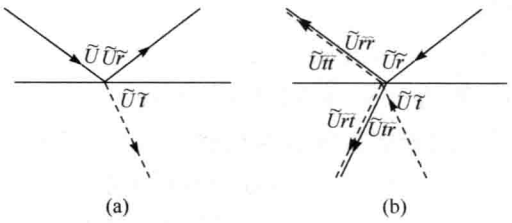


图 4.4.10　光的可逆性与斯托克斯倒逆关系

上述关系式(4.4.6)和式(4.4.7)称为**斯托克斯倒逆关系**(Stokes relations, Sir George Gabriel Stokes,1819～1903,英国).

4.5　薄膜干涉

薄膜有上下两个界面,一般情况下,可设薄膜上部介质的折射率为 n_1,下部折射率为 n_3,而薄膜本身的折射率为 n_2,如图 4.5.1 所示. 一列光波,在薄膜的上表面处分为反射和折射两部分,折射部分在下表面又产生反射和折射,其中反射光到达上表面又有反射与折射,……在 n_1 介质中,就有 1,2,…一系列光波,介质 n_3 中,也有一系列的透射波. 由于这些光都是从同一列光分得的,所以是相干的;这些光是将原入射光的能量(振幅)分为几部分得到的,就是分振幅的干涉.

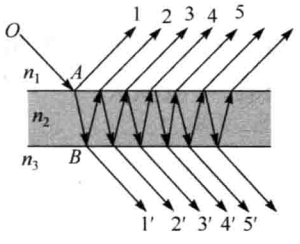


图 4.5.1　光在薄膜表面上的反射和折射

从上表面反射的光波,可以向任意方向传播,从薄膜内部透射出来的光波,同样也可以向任意方向传播,所以在空间各处都可以产生干涉. 采用不同的光学装置,可以在不同的区域观察光的干涉.

4.5.1　等倾干涉

在所有的反射光和透射光中,相互平行的光将会聚在无穷远处,则它们的干涉也将在无穷远处发生. 如果在薄膜上方置一凸透镜,如图 4.5.2 所示,在该透镜的焦平面处置一观察屏,则凡是在屏上能够相遇(即会聚)而进行叠加的光波列,都是平行地射向透镜的,或者说,这些进行干涉的光相对于透镜的光轴有相同的倾角,

因而这种干涉被称为**等倾干涉**(equal inclination interference).

1. 干涉光的光程差

如图 4.5.3 所示,在入射点 A,出现反射和折射,产生第一列反射波;折射进入薄膜的光波在下表面 B 处反射,又经过上表面 C 处射出,这是第二列反射波. 如果过 C 点作一个与光束垂直的平面 CD,则 CD 上各点到会聚点 P 是等光程的,因而这两列反射波在 P 点的光程差为 $n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\overline{AD}$,而 $\overline{AB}+\overline{BC}=2h/\cos i_2$,$\overline{AD}=\overline{AC}\sin i_1=2h\tan i_2\sin i_1$,所以

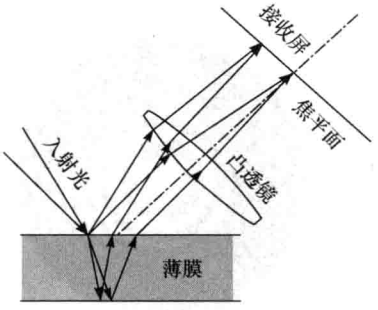


图 4.5.2 等倾干涉

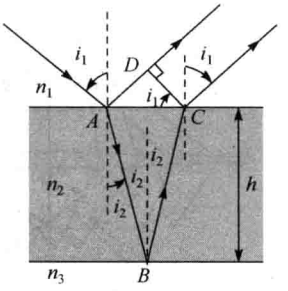


图 4.5.3 等倾干涉的光程差

$$\delta=2h\left(\frac{n_2}{\cos i_2}-n_1\tan i_2\sin i_1\right)=\frac{2h}{\cos i_2}(n_2-n_2\sin^2 i_2)$$

$$=\frac{2n_2h}{\cos i_2}(1-\sin^2 i_2)=2n_2h\cos i_2=2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}$$

这两列波之间要计入半波损失 $\lambda/2$,则

$$\delta'=2n_2h\cos i_2\pm\lambda/2=2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}\pm\lambda/2 \tag{4.5.1}$$

干涉相长的条件是

$$2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}\text{ 或 }2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{4.5.2}$$

干涉相消的条件是

$$2h\sqrt{n_2^2-n^2{}_1\sin^2 i_1}\text{ 或 }2n_2h\cos i_2=j\lambda \tag{4.5.3}$$

由上式可以看出,等倾干涉中,入射角相同,则光程差相同,对应同一干涉级,也就是同一级干涉条纹.

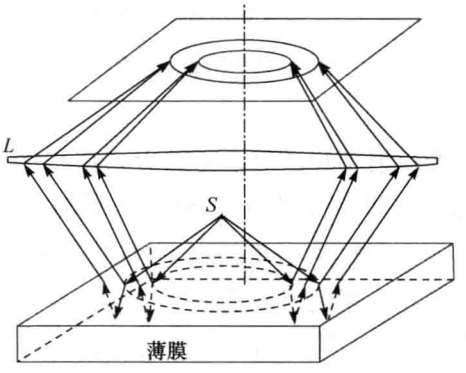


图 4.5.4 点光源的等倾条纹

2. 干涉条纹与光源大小的关系

首先看点光源的情形.

如图 4.5.4 所示，无论点光源处于什么位置，经薄膜的两个面反射后，具有相等倾角的光在接收屏上形成一个圆环，这些圆环的中心位于透镜的光轴上.

再讨论扩展光源的情形.

如图 4.5.5 所示，两个不同的发光点，发出球面波，其中凡是具有相同倾角的光，都将会聚到屏上的同一点，而又具有相等的光程差，故干涉条纹的形态与只有一个点光源是一样的. 那么，对于扩展光源，条纹的形态也与只有一个点光源相同. 而且，由于扩展光源的强度比点光源大，所以实际上使用的都是扩展光源，如图 4.5.6所示.

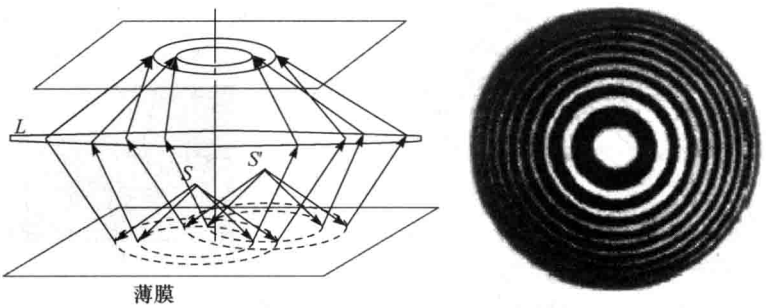


图 4.5.5　扩展光源的等倾条纹

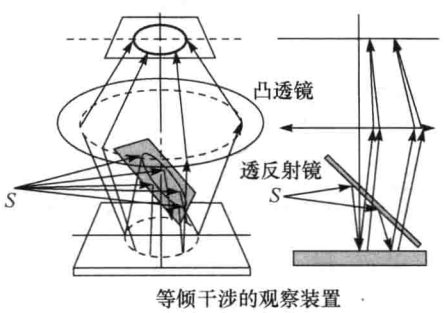


图 4.5.6　等倾干涉的观察装置

3. 各列反射波、透射波的振幅大小

薄膜的上表面，有不止两列反射波；同样，也有许多列透射波从薄膜的下表面射出，它们之间会有怎样的干涉呢？我们将进行如下的讨论.

设入射波的振幅为 A，从上表面入射，即从折射率为 n_1 向折射率为 n_2 的介质入射时，对振幅的反射率为 r，透射率为 t；而从薄膜的内部向上表面入射，即从折射率为 n_2 向折射率为的 n_1 介质入射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r' 和 t'；在薄膜的下表面，从内向外入射，即从折射率为 n_2 向折射率为 n_3 的介质入射时，对振幅的反射率和透射率分别为 r_2 和 t_2. 如图 4.5.7所示. 一般情况下，往往有 $n_1=n_3$，如空气中的透明薄膜，则 $r'=r_2$，$t'=t_2$. 由斯托克斯倒逆关系，$r'=-r$，$tt'=1-r^2$. 将反射波依次记作 1、2、…；而透射光记作 1′、2′、…第一列反射波的振幅为

$$A_1=Ar \tag{4.5.4}$$

其他各列反射波的振幅为

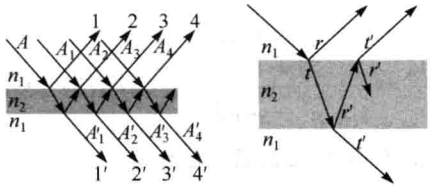


图 4.5.7 薄膜表面处的透射率与反射率

$$A_2=Atr't'=-Artt'=-Ar(1-r^2),A_3=Ar'^3tt'=-Ar^3(1-r^2),A_4=-Ar^5(1-r^2),\cdots$$

用通式表示，$n>1$ 时，有

$$A_n=-Ar^{2n-3}(1-r^2) \tag{4.5.5}$$

式中，负号表示第一列反射波与其他各列反射波之间应计入半波损失.

而透射波的振幅为

$$A'_1=Att'=A(1-r^2),\quad A'_2=Ar^2(1-r^2),\quad A'_3=Ar^4(1-r^2)$$

通式为

$$A'_n=Ar^{2(n-1)}(1-r^2) \tag{4.5.6}$$

对透明介质，$r\ll1$，很小，因而反射波中 $A_1\approx A_2\gg A_3\gg A_4\gg\cdots$；所以只有第一列和第二列反射波之间有显著的干涉，其他的波列由于强度太小而对总的干涉效果几乎没有贡献，可以忽略. 而透射波中，$A'_1\gg A'_2\gg A'_3\gg\cdots$，因而不能产生有效的干涉效应，即透射光的干涉条纹可见度极小. 因此，对于透明的薄膜，只需要考虑第一、二列反射光的干涉即可.

当然，如果薄膜的反射率较高，即 $r\approx<1$，则要计算所有的透射波间的干涉，对于反射波亦然. 这一问题我们将在后面处理.

例 4.6

沿着与肥皂膜的法线成 35°角的方向观察膜呈绿色($\lambda=500.0$nm)，设肥皂水的折射率为 1.33，求：

(1) 薄膜的厚度；

(2) 如果垂直注视时，膜呈何种颜色？

解 (1) 看到的是从薄膜两个表面反射光干涉的结果，这是等倾干涉. 膜所呈现的颜色，是反射光中干涉相长的波长成分的颜色. 反射光干涉相长的条件为

$$2nh\cos i_2=(2j+1)\lambda/2 \tag{1}$$

可得到膜厚为

$$h=\frac{(2j+1)\lambda}{4n\cos i_2}=\frac{2j+1}{4\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}}\lambda=(2j+1)1.0417\times10^{-7}m \qquad (2)$$

计算中，光在膜的上表面的入射角、反射角 $i_1=35°$.

(2) 垂直注视时，反射角为零度，即此时 $i_1=i_2=0$，式(1)变为

$$2nh=(2j+1)\lambda/2$$

得到

$$\lambda=\frac{4nh}{2j+1}=\frac{4\times1.33\times(2j+1)}{2j+1}=554.2(\text{nm})$$

4. 等倾干涉条纹的特征

1) 条纹的级数与角半径

亮条纹应满足 $2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$ 或 $2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，中央条纹对应的角度为 $i_1=0$，是沿薄膜法线和透镜光轴的光波的会聚点，$\sin i_1=0$，$2n_2h=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，对应的 j 取最大值，即中央条纹的干涉级数最大，$j=\frac{2n_2h}{\lambda}-\frac{1}{2}$. 越是外侧的条纹，级数越小.

由于光波与透镜光轴的夹角 i_1 就是干涉环对光心张角的一半，所以 i_1 被称为条纹的角半径. 根据公式可以看出，膜厚 h 增大，每一级圆环的角半径也相应增大，观察到的现象就是在膜厚增大的过程中，不断有圆环从屏幕的中心冒出并向周围扩散，而在膜厚减小的过程中，每一个圆环都向中心收缩并消失(被“吞入”).

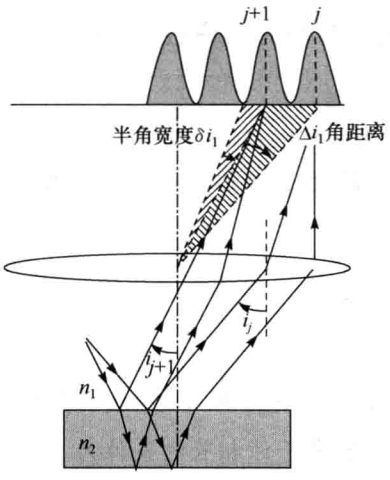


图 4.5.8 等倾干涉图样

2) 干涉条纹的间距

如图 4.5.8 所示，相邻两条纹的倾角记为 $i_1(j)$ 和 $i_1(j+1)$，这两个角就是干涉圆环的角半径. 由于 $2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1(j)}=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，$j$ 改变所引起的角度改变就是干涉条纹之间的角距离，记为 Δi，即 j 改变所引起的角度的改变量. 也可以用薄膜中折射角的改变衡量条纹间的角距离. 因为 $2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$，所以有

$2nh\sin i_2\Delta i_2=-\lambda$，可求得

$$\Delta i_2=-\frac{\lambda}{2nh\sin i_2} \tag{4.5.7}$$

Δi_2 不是圆环实际的角距离 Δi_1，但两者有相同的变化趋势.

从式(4.5.7)可以看出，中心处的条纹，i_2 较小，条纹的角距离较大；而边缘处的条纹，i_2 较大，所以角距离很小. 即条纹的分布是中央稀疏而边缘紧密. 另外，厚度 h 增大，条纹的角距离变小，即较厚的薄膜，其条纹将比较密，不容易观察，而较薄的膜，干涉条纹稀疏，清晰可辨.

3) 条纹角宽度

每一根亮条纹并非一条几何上的亮线，而是有一定的强度分布的宽带. 由于干涉条纹的强度分布公式为

$$I(i)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

而 $A_1=Ar, A_2=Atrt'=Artt'=Ar(1-r^2)$，$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2\pm\pi$，故有

$$I(i)=A^2r^2\left[1+(1-r^2)^2+2(1-r^2)\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2\right)\right]$$

可以将两根相邻暗纹间的角度差(角距离)作为亮条纹的半角宽度 δi. 由于第 j 级亮条纹和与之相邻的暗条纹分别满足下述公式：

$$2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2},\quad 2n_2h\cos(i_2+\delta i_2)=j\lambda$$

故有 $2n_2h\sin i_2\delta i_2=\lambda/2$，即

$$\delta i_2=\frac{\lambda}{4n_2h\sin i_2} \tag{4.5.8}$$

中央的亮条纹的角宽度大，看起来较宽；边缘的亮条纹角宽度小，看起来细锐.

另外，膜厚减小，条纹变得较宽，而膜厚增大，条纹变得较细锐.

等倾干涉条纹的特征列于表 4.5.1 中，以便于读者对其有一个全面的了解.

表 4.5.1 等倾干涉条纹的特征

参数	分布		薄膜厚度的影响	
	中央	边缘	薄	厚
角半径			小	大
角距离	大	小	大	小
角宽度	大	小	大	小

4.5.2 等厚干涉

如果薄膜上下两表面不平行，而是有一夹角，如图 4.5.9 所示，则在入射光波与反射光波的相遇处均有干涉，整个空间都有干涉条纹.

为了研究两列相干光波的光程差，如图 4.5.10 所示，由于薄膜两表面的夹角往往很小，所以两列反射波的光程差 $n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\overline{DC}$，可以直接引用等倾干涉的结果进行计算，即

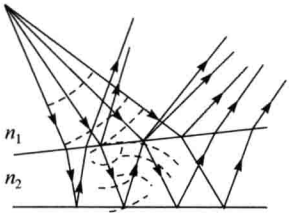


图 4.5.9 薄膜上下两表面不平行时，干涉的非定域性

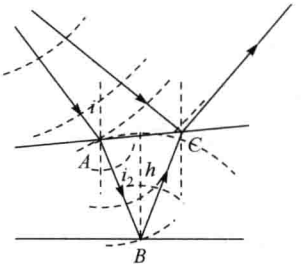


图 4.5.10 等厚干涉的光程差

$$\Delta L=2n_2h\cos i_2=2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}$$

则亮条纹满足的条件为

$$2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=(2j+1)\frac{\lambda}{2},\text{或 } 2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$$

暗条纹满足的条件为

$$2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=j\lambda,\text{或 } 2n_2h\cos i_2=j\lambda$$

对于垂直入射的光波，则在薄膜的上表面处，第一列与第二列反射波几乎重合，因而能进行相干叠加. 这时两列波间的光程差为 $2n_2h$，如果计入半波损失，则在薄膜的上表面，两列波的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\pm\pi$，则亮条纹出现的条件是

$$2n_2h=(2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{4.5.9}$$

暗条纹出现的条件是

$$2n_2h=j\lambda \tag{4.5.10}$$

由于同一级(条)亮纹出现在薄膜厚度相等的地方，所以这种干涉被称为**等厚干涉**(equal thickness interference).

对于图 4.5.11 所示的楔形薄膜(wedge film),相邻两根亮条纹间的厚度差为

$$\Delta h=\lambda/(2n_2) \quad (4.5.11)$$

如果楔角为 α,在表面上,亮条纹的间距为

$$\Delta l=\Delta h/\sin\alpha=\lambda/(2n_2\sin\alpha) \quad (4.5.12)$$

在尖端处,只有半波损失,反射光永远是暗纹,透射光是亮纹.

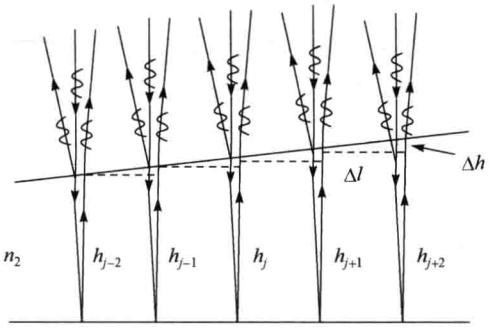


图 4.5.11 楔形薄膜条纹的横向间距

如果薄膜的上下表面都是平整的,等厚条纹应该是相互平行的等间隔直条纹,如图 4.5.12 所示. 但实际上,我们看到的往往是弯曲的弧形条纹,其原因可以用图 4.5.13 说明. 观察者处于薄膜正上方时,进入其瞳孔的光的角度是不同的,中央部分的光沿竖直方向进入,而两侧的光只有倾斜才能进入. 即中央部分的光,其角度 $i_1=0$,条纹满足 $2n_2h=(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$;两侧的光,由于 $i_1\neq0$,所以应该采用公式 $2n_2h\cos i_2=(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$,由于 $i_2\neq0$,$\cos i_2<1$,对于同一干涉级,$(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 是不变的,而中央部分,$2n_2h=(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$,那么在两侧同一厚度的光,则 $2n_2h\cos i_2<(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$,不满足亮条纹出现的条件,只有在膜增加一定厚度的地方,才有 $2n_2(h+\Delta h)\cos i_2=(2j+1)\dfrac{\lambda}{2}$,而且,越靠边,$i_2$ 越大,Δh 就越大,所以看到的条纹是向膜厚的地方弯曲.

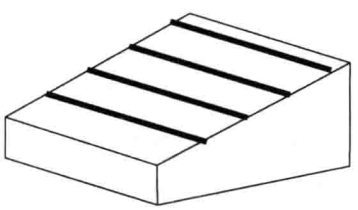


图 4.5.12 楔形薄膜上干涉形成的等间隔平行直条纹

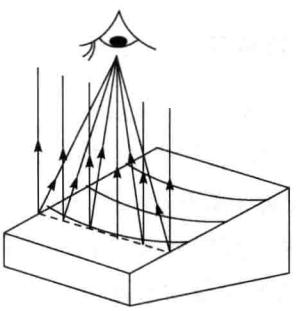


图 4.5.13 条纹是向膜厚处弯曲

由于同一根干涉条纹只在厚度相等处出现，图 4.5.14 所示的等厚干涉可用于检测工件表面的平整度，并可以确定凸凹.

如图 4.5.15 所示，如果观察到如图所示弯曲的干涉纹，则可判断待测表面的中央部分有一凸起，理由如下：

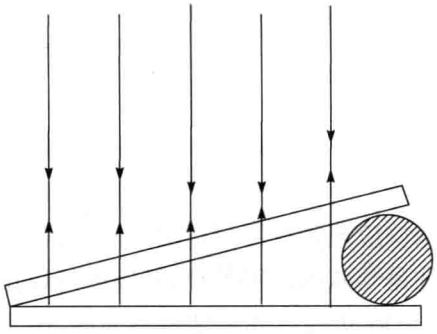


图 4.5.14　检测表面平整

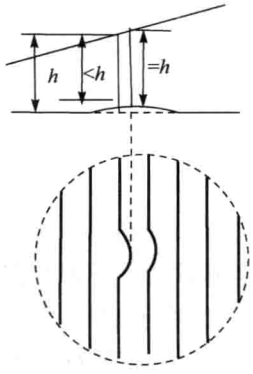


图 4.5.15　表面局部凸起所引起的等厚条纹弯曲

直纹说明表面是平整的，设此处厚度为 h，若中央有一凸起，则厚度小于 h，不满足亮纹的条件，而同级亮纹只能出现在厚度为 h 的地方，向右端移动一段距离，则会有厚度恰等于 h 的地方，则亮纹在这里出现，这一部分的条纹因而向楔形的后部弯曲. 条纹弯曲的区域对应于凸起的区域，而条纹弯曲的程度对应于凸起的高度.

4.6　分振幅的干涉装置

利用分振幅的方式获得相干光，可以设计出各种干涉仪.

4.6.1　迈克耳孙干涉仪

1. 干涉仪的结构与原理

迈克耳孙干涉仪(Michelson interferometer)的光路结构如图 4.6.1 所示，图 4.6.2为干涉仪的实际构成.

入射光波射入分光板(beam splitter)G_1，G_1的背面涂敷有半透半反膜，光在分光板的涂膜处分为两部分，被反射回 G_1的光从其中射出后，射向平面镜 M_1；出射的光射向平面镜 M_2，在 G_1和 M_2之间有一块补偿板(compensating plate)G_2，G_2的材质和形状与 G_1相同，只是没有涂膜. 两列光被 M_1、M_2反射后，又各自沿原路返

回到 G_1 的涂膜上，其中光束 1 透过涂膜，光束 2 被涂膜反射，这两列波进行相干叠加. 这样，两列波都各自经涂膜反射、透射一次，经玻璃板透射三次，被反光镜反射一次，只是在空气中经过的路程不同，因而光程差就是由于两反射镜到涂膜层的距离不同而造成的. 调节好的干涉仪，M_1、M_2 相互垂直，G_1 与 G_2 平行，且与 M_1、M_2 成 45°角.

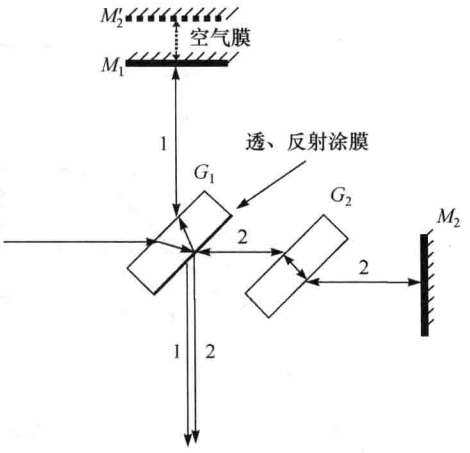


图 4.6.1　迈克耳孙干涉仪的光路图

需要注意的是，光束 1、2 各被平面镜反射一次，因而半波损失的情况一致. 但是，在分光板处，光束 1 由玻璃射向涂膜被反射，而光束 2 由空气射向涂膜被反射，因此这两次反射的情况恰好相反，即两列波的反射角、折射角互换，如图 4.6.3 所示，所以两列波之间会产生半波损失. 其实有无半波损失仅会影响到干涉条纹的具体位置，而不会影响到整个干涉图样以及条纹之间的距离，好在通常受关注的是条纹整体移动变化的情况，所以不必考虑半波损失的细节.

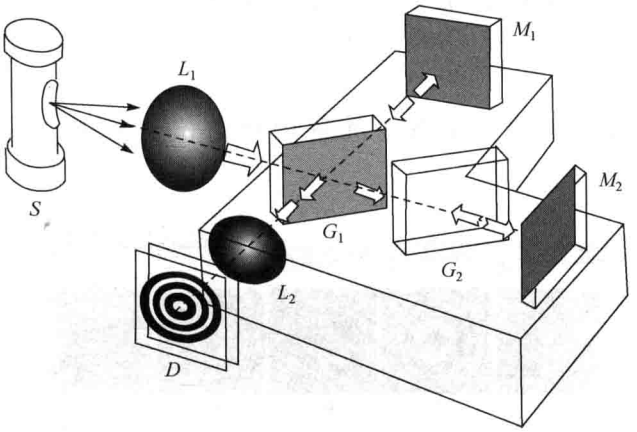


图 4.6.2　迈克耳孙干涉仪的构造

平面镜 M_2 相对于涂膜有一个镜像 M_2'，光波 2 相当于从 M_2' 反射过来，而 M_2' 与 M_1 构成了一个空气薄膜，所以迈克耳孙干涉仪就相当于“空气膜”的干涉. 两列波的光程差就是 M_2' 与 M_1 间距的 2 倍. M_1 与 M_2' 间或平行、或不平行，就能产生等倾或等厚干涉. 此时，由于 $n_1=n_2$，$i_1=i_2$，所以在计入半波损失的情况下，亮条纹产生的条件为

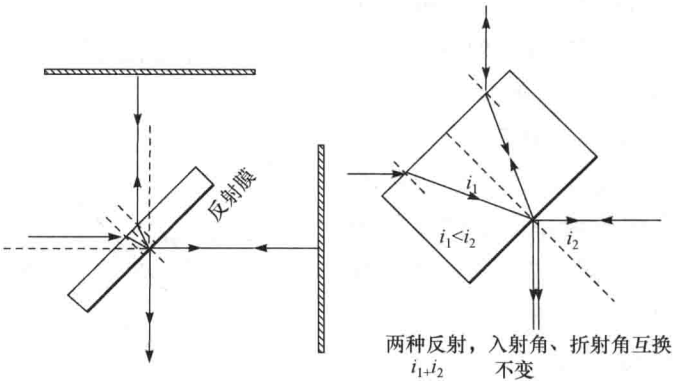


图 4.6.3　两列光之间半波损失的产生

$$2h\cos i=(2j+1)\lambda/2 \tag{4.6.1}$$

处于视场中央的条纹，是由平行于透镜光轴的光束产生的，因而 $i=0$，于是有

$$2h=(2j+1)\lambda/2 \tag{4.6.2}$$

当移动干涉仪的一臂，便可改变上述“空气膜”的厚度，则引起视场中央条纹级数改变，设移动 Δh，看到视场中央条纹改变了 Δj 次，则

$$2\Delta h=\Delta j\lambda \tag{4.6.3}$$

则宏观的长度 Δh 与微观的波长 λ 通过 Δj 联系起来，式(4.6.3)可用于精确长度测量.

2. 条纹的形状

干涉条纹的特征与其中各个元件的相对位置有关，分以下几种情况(图 4.6.4)：

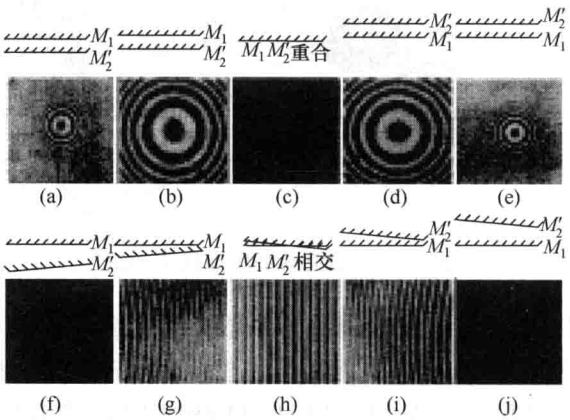


图 4.6.4　迈克耳孙干涉仪观察到的条纹

(1) 若 $M_1 \perp M_2$，即 $M_1 // M_2'$，为等倾干涉，条纹是同心圆环，圆心在视场中央.

(2) M_1 不平行于 M_2'，为等厚干涉. 此时，条纹的形状与 M_1、M_2' 间的距离有关.

例 4.7

用钠光的 589.3nm 谱线观察迈克耳孙干涉条纹，先看到干涉场中有 16 个亮环(包括中心亮斑)，且中心是亮的；移动平面镜 M_1 后，看到中心吞(吐)了 20 环，干涉场中心还剩 6 个亮环(包括中心亮斑)，中心仍是亮的. 试求：

(1) M_1 移动的距离；

(2) 开始时中心亮斑的干涉级；

(3) M_1 移动后，干涉场中最外亮环的干涉级.

分析：视场中心，光线的入射角为 0，视场的外边缘，即最外干涉环所对应的角度，在 M_1 移动过程中是不变的.

解 (1)若不计入半波损失，迈克耳孙干涉仪，等倾干涉时，其中心条纹和最外条纹分别由 $2h=j_0\lambda$ 和 $2h\cos i=j_1\lambda$ 决定. 两式相减，得到

$$2h(1-\cos i)=(j_0-j_1)\lambda$$

式中，(j_0-j_1) 为干涉场(视场)中条纹的数目.

由于 M_1 移动后，视场中条纹减少，所以 h 减小. 说明吞入了 20 环，中心级次减小 20，即

$$2\Delta h=\Delta j\lambda=-20\lambda$$

M_1 移动距离为

$$\Delta h=\Delta j\lambda/2=-20\lambda/2=-5.893\mu\text{m}$$

(2) 只有在不计入半波损失时，干涉级数才有意义. 设开始时中心斑的级次为 j_0，最外条纹的级次为 j_0-15，则分别有 $2h=j_0\lambda$ 和 $2h\cos i=(j_0-15)\lambda$，即

$$j_0\lambda\cos i=(j_0-15)\lambda \tag{1}$$

结束时，中心条纹级数 $j_0'=j_0-20$，最外的条纹为 $j_0'-5=j_0-25$，则 $2(h+\Delta h)=(j_0-20)\lambda$，$2(h+\Delta h)\cos i=(j_0-25)\lambda$，即

$$(j_0-20)\lambda\cos i=(j_0-25)\lambda \tag{2}$$

比较式(1)和式(2)，可得 $\dfrac{j_0-20}{j_0}=\dfrac{j_0-25}{j_0-15}$，即

$$j_0=30$$

(3) $j_0-25=30-25=5$，视场中还有 5 条亮纹.

例 4.8

钠灯的D线有两根谱线，波长分别为 $\lambda_1=589.0\text{nm}$ 和 $\lambda_2=589.6\text{nm}$. 用该谱线照明迈克耳孙干涉仪. 首先调整干涉仪，得到清晰的干涉条纹，然后移动 M_1，干涉图样为什么会逐渐变得模糊？问第一次视场中干涉条纹消失时，M_1 移动了多少距离？

分析：由于不同波长的干涉条纹分布不同，所以会相互重叠，导致可见度下降，直至看不见条纹.

解 这涉及非单色光叠加的问题.

钠灯的两根波长不同的谱线各自形成一套干涉图样. 调节干涉仪得到清晰的干涉图样时，意味着两根谱线的相差 m 级的干涉条纹恰好重合，即

$$2h\cos i=(j+m)\lambda_1,\quad 2h\cos i=j\lambda_2$$

由于视场中只能见到有限的几根条纹，且某级条纹重合时，近邻的干涉条纹虽然不是完全重合，但相互错开的距离比较小，所以看起来还是清晰的.

改变两反射镜间的距离，上述重合的条纹逐渐错开，直至一根谱线的亮纹与另一根谱线的暗纹重合，这时干涉图样会变得模糊. 不妨使两镜间距增大，则视场中每根干涉环的半径都将增大，只是不同波长的干涉环增大的速度不同. 即

$$2h'\cos i'=(j+m+l)\lambda_1$$

该位置处是长波的暗纹，即

$$2h'\cos i'=(j+l-\frac{1}{2})\lambda_2$$

由以上四式，可得 $(j+m)\lambda_1=j\lambda_2$，$(j+m+l)\lambda_1=\left(j+l-\frac{1}{2}\right)\lambda_2$. 解得

$$l=\frac{\lambda_2}{2(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda}$$

说明增大两反射镜间距引起干涉环变化了 l 根，与此对应的光程差的变化为（由于 $\lambda_1\approx\lambda_2$）

$$\Delta L=l\lambda_1=\frac{\lambda_1^2}{2\delta\lambda}\approx l\lambda_2=\frac{\lambda_2^2}{2\delta\lambda}$$

即 M_1 移动的距离为 $\frac{\Delta L}{2}=\frac{\lambda_1^2}{4\delta\lambda}=0.145\text{mm}$. 每移动这样长的距离，干涉图样就经历一次从清晰到模糊的过程.

需要指出的是，这是双谱线的干涉图样可见度的变化，不同于带宽为 $\Delta\lambda$ 的波长连续分布的非单色光的干涉.

3. 傅里叶变换光谱仪

在迈克耳孙干涉仪中，当入射光是具有一定光谱分布的非单色光时，可以让进行干涉的两束光1、2的强度相等，即它们的振幅相等，这里记为 $A(k)$，如果此时两列波的光程差为 δ，则它们的干涉强度可以用光程差表示为

$$I(k)=2A^2(k)[1+\cos\Delta\varphi(k)]=2A^2(k)[1+\cos(k\delta)]$$

而仪器(图4.6.5)接收到的光强为各种波长的强度之和，即

$$\begin{aligned}I(\delta)&=\int_0^\infty I(k)\mathrm{d}k=\int_0^\infty 2A^2(k)[1+\cos(k\delta)]\mathrm{d}k\\&=\int_0^\infty 2A^2(k)\mathrm{d}k+\int_0^\infty 2A^2(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k=I_0+\int_0^\infty 2A^2(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k\\&=I_0+\int_0^\infty i(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k\end{aligned}$$

其中，$i(k)=2A^2(k)$，是入射光强按波长的分布，也就是入射光的光谱. 即有

$$\int_0^\infty i(k)\cos(k\delta)\mathrm{d}k=I(\delta)-I_0$$

其中，I_0 与波长无关，是光程差为零时的光强；而后面的积分是一个傅里叶余弦变换的表达式. 其逆变换为

$$i(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[I(\delta)-I_0]\cos(k\delta)\mathrm{d}\delta \tag{4.6.4}$$

在迈克耳孙干涉仪中，光程差 δ 为两反光镜之间距离的两倍，即 $2h$，所以只要在一系列不同的位置上记录到衍射光强，即可通过傅里叶变换得到光源的光谱分布 $i(k)$ 或 $i(\lambda)$.

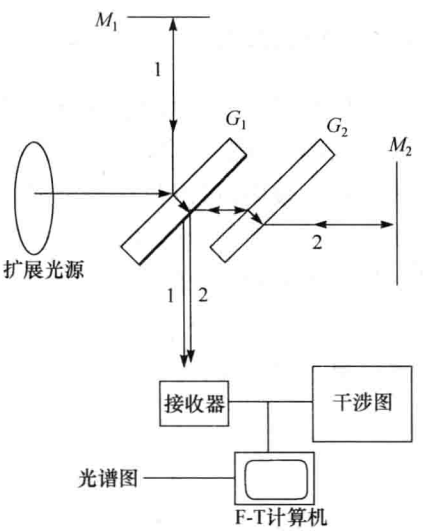


图 4.6.5 傅里叶变换光谱仪

4.6.2 马赫-曾德尔干涉仪

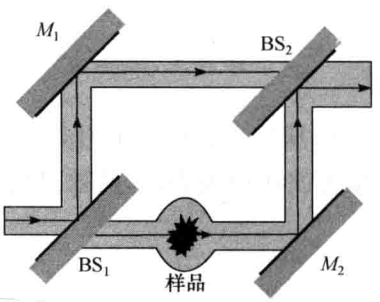


图 4.6.6 马赫-曾德尔干涉仪

如图4.6.6所示，采用两个反射镜 M_1、M_2，以及两个分束镜 BS_1、BS_2 就可以组成一种分振幅的反射装置，称为马赫-曾德尔干涉仪(Mach-Zehnder interferometer). 在其中的一条光路中，可以置入样品，如受力的透明介质、气体或者等离子体等，则可以通过测量干涉条纹的变化获得样品的光学参数，图4.6.7为测量到的等离子体的干涉条纹. 该装置近年来更是

被用于量子密钥通信.

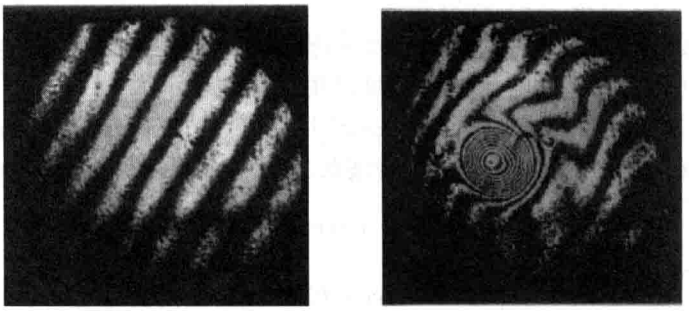


图 4.6.7　马赫-曾德尔干涉仪干涉图样

4.6.3　干涉滤波片

利用薄膜干涉相长或干涉相消原理,可以对某些波长增透或增反. 如在玻璃板上镀一层薄膜(图 4.6.8),则入射光中满足干涉相长的波长被反射,其他的波长则由于干涉而减弱,可以只让特定波长的光被反射,起到滤光的作用. 也可以在光学仪器的镜头表面镀(涂)膜,使得透射光由于干涉而得到增强,这种膜称为增透膜. 现在使用的照相机、望远镜、显微镜,由于都采用了较复杂的透镜组,透镜较多,每个透镜的表面都会反射一部分光,所以造成的光能量损失比较严重. 在每一个镜头的表面镀上增透膜,可以大大降低入射光能量的损失.

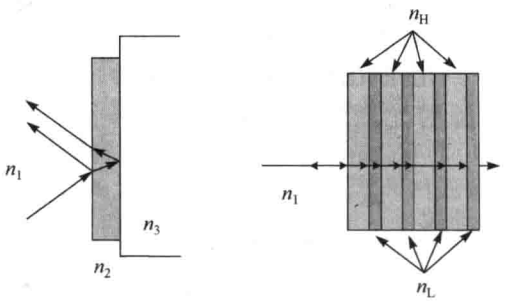


图 4.6.8　干涉滤波片

由于仅有一层增透膜或增反膜还不能充分起作用,所以现在往往采用多层膜. 将光学常数(折射率)不同的材料按一定的次序和厚度镀在镜头表面,其效果比仅有一层薄膜要好得多.

例 4.9

为了减少玻璃的反射，经常的做法是在玻璃表面上涂一层很薄的透明薄膜(增透膜). 其结构如图 4.6.9 所示，膜上方为空气($n_1=1$)，膜下方是玻璃($n_2=1.5$)，膜的折射率 $n=1.3$.

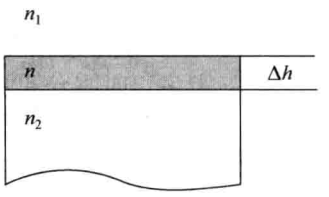


图 4.6.9 例 4.9 图

(1) 不涂增透膜时，玻璃的光强反射率是多少？一个由六片透镜构成的镜头，其光强透过率为多少？

(2) 若想使波长为 600.0nm 的反射光减小到最小，应涂多厚的膜？涂膜后光强反射率为多少？

(3) 要想使反射光完全干涉相消，增透膜的折射率应取多少？

分析：涂膜后，由于在膜的上下表面，反射光干涉相消，所以可以提高透过率. 透、反射率可以由菲涅耳公式计算. 但一般情况下，由于两列光的振幅不相等，所以不能完全相消. 只有膜的折射率满足一定条件时，才能使干涉完全相消，即两列光既有相反的相位，又有相同的光强(振幅).

解 (1)光线由空气向玻璃正入射，或从玻璃向空气正入射时，光强反射率为

$$R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=4\%$$

光透过 6 片透镜，即经过 12 个表面的反射，每个表面的透射率为

$$T=1-R=96\%$$

因而总的透射率为

$$T_{\text{total}}=T^{12}=0.96^{12}=0.607=60.7\%$$

(2) 由于膜的折射率 $n=1.3$，介于空气($n_1=1$)和玻璃($n_2=1.5$)之间，故没有半波损失，于是干涉相消的条件是

$$2n\Delta h=(m+\frac{1}{2})\lambda$$

膜厚 $\Delta h=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}=230.8\left(m+\frac{1}{2}\right)\text{nm},\quad m=0,1,2,\cdots$

涂膜后，上表面

$$R_1=\left(\frac{n_1-n}{n_1+n}\right)^2=1.7\%$$

下表面

$$R_2=\left(\frac{n_2-n}{n_2+n}\right)^2=0.5\%$$

(3) 此时应使两列反射光的振幅相等，即

$$E_1=\frac{n_1-n}{n_1+n}E_0,\quad E_2=\frac{2n_1}{n_1+n}\frac{n_2-n}{n_2+n}\frac{2n}{n_1+n}E_0$$

$$\left|\frac{n_1-n}{n_1+n}\right|=\left|\frac{2n_1}{n_1+n}\frac{n_2-n}{n_2+n}\frac{2n}{n_1+n}\right|$$

$$n^3-(4n_1-n_2)n^2+n_1(4n_2-n_1)n-n_1^2n_2=0$$

或者

$$n^3+(4n_1+n_2)n^2-n_1(4n_2+n_1)n-n_1^2n_2=0$$

化简为

$$n^3-2.5n^2+5n-1.5=0\quad(1)$$

及

$$n^3+5.5n^2-7n-1.5=0\quad(2)$$

在1～3范围内，式(1)无合理解；式(2)解为 $n\approx1.22$.

实际上，尚未发现 $n\approx1.22$ 的透明薄膜，使用氟化镁涂膜，其折射率为1.38.

4.6.4 牛顿环(圈)

如图4.6.10所示，在一玻璃平板上放一平凸透镜，则两者之间就形成了一层空气薄膜. 从上方垂直入射的光，由于分别被空气膜的上下两个表面反射，于是就产生了干涉. 在空气膜的上表面或下表面观察，由于空气膜的形状取决于透镜球面的形状，这是一种等厚干涉装置，称为牛顿环(Newton ring)干涉. 可以判断，干涉条纹的形状是一系列的同心圆环. 这些圆环被称为牛顿环. 图4.6.11为实际的观察牛顿环装置的原理图.

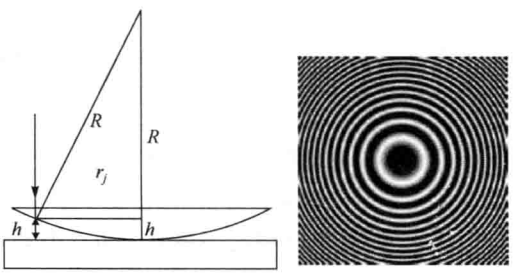


图4.6.10 牛顿环的产生及干涉条纹

观察反射光在空气膜上表面的干涉，一列在球面(玻璃-空气界面)被反射，没有半波损失；而另一列在平面(空气玻璃界面)被反射，有半波损失. 于是亮条纹产生的条件为 $\Delta L=2h\pm\lambda/2=j\lambda$，$\Delta L$ 为光程差，即 $2h=j\lambda\pm\lambda/2$. 设球面半径为 R，在空气膜厚度为 h 处干涉条纹的半径为 r，由相交弦定理，则有 $h(2R-h)=r^2$，$2Rh-h^2=r^2$. 由于 $R\gg h$，$h=r^2/(2R)$，牛顿环半径为

$$r_j=\sqrt{(j+1/2)\lambda R},\quad j=0,1,2,\cdots \tag{4.6.5}$$

对于透射光在空气膜下表面的干涉，一列直接透过，另一列在平面和球面间反射后透过，由于两次反射，无半波损失. 这种情况下，光程差为 $\Delta L=2h=j\lambda$，透射光牛顿环的半径为

$$r_j=\sqrt{j\lambda R},\quad j=0,1,2,\cdots \tag{4.6.6}$$

可利用式(4.6.5)和式(4.6.6)检验、测量球面透镜的质量和曲率半径 R，如图 4.6.12所示.

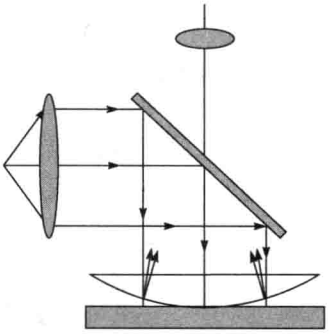


图 4.6.11　牛顿环的观察装置

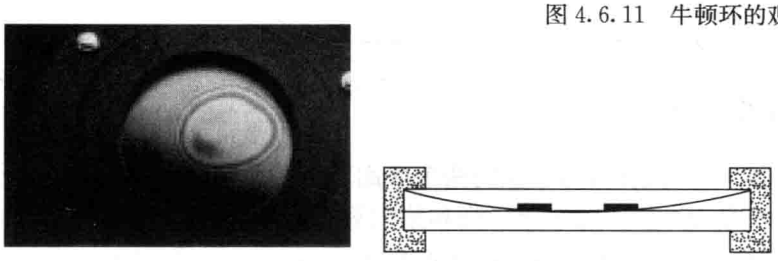


图 4.6.12　用牛顿环检验、测量球面透镜

例 4.10

如图 4.6.13 所示，A 为平凸透镜，B 为平板玻璃，C 为金属柱，D 为框架，A、B 之间留有气隙，而 A 被固结在框架的边缘上. 温度变化时，C 发生伸缩，而假设 A、B、D 都没有伸缩. 现用波长为 $\lambda=632.8\text{nm}$ 的激光垂直照射，试求：

(1) 在反射光中观察时，看到牛顿环的条纹都移向中央，这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短？

(2)如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失，C 的长度变化了多少毫米？

分析：在平凸透镜 A 和平板玻璃 B 之间是空气膜，这是牛顿环干涉装置.

解 (1) 条纹向中间移动，即第 j 级干涉环的半径减小，由于这是等厚干涉，即某一级条纹，如 j 级，总是处在相同的膜厚处，如图 4.6.14 所示，所以可以判断膜厚增大了.

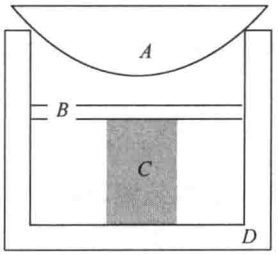


图 4.6.13　例 4.10 图

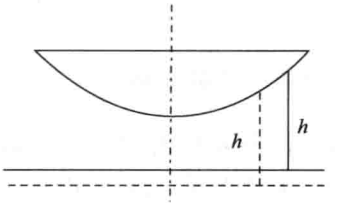


图 4.6.14

说明气隙增加，即金属柱 C 缩短.

(2) 由牛顿环干涉公式 $2nh=\dfrac{nr_j^2}{R}=\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$，可得 $2n\Delta h=\Delta j\lambda$，即

$$\Delta h=\frac{\Delta j\lambda}{2n}=\frac{10\times 632.8}{2}=3164(\text{nm})=3.164(\mu\text{m})$$

4.7 法布里-珀罗干涉仪

4.7.1 多光束干涉

在薄膜干涉装置中，如果膜的两个表面对光的反射率很高，则各列反射光的强度相差不是很大，这时，除了第一列和第二列，其他的反射波列对干涉的贡献也不可忽略；同样，所有的透射波列，由于振幅接近，每一列也会对干涉有贡献. 这种情况，就是**多光束干涉**(multiple beam interference).

在图 4.7.1 所示多光束干涉装置中，G_1、G_2 是两块用光学玻璃制成的直角梯形，相对的两个表面彼此严格平行，并镀有高反射率薄膜. 这样，在其中就形成了一个具有高反射率表面的空腔，这种装置称为**法布里-珀罗腔**. 如果两反射面 G_1、G_2 的间距是可以调整的，就是**法布里-珀罗干涉仪**(Fabry-Perot interferometer)；如果 G_1、G_2 的间距是固定不变的，则被称为**法布里-珀罗标准具**(Fabry-Perot etalon).

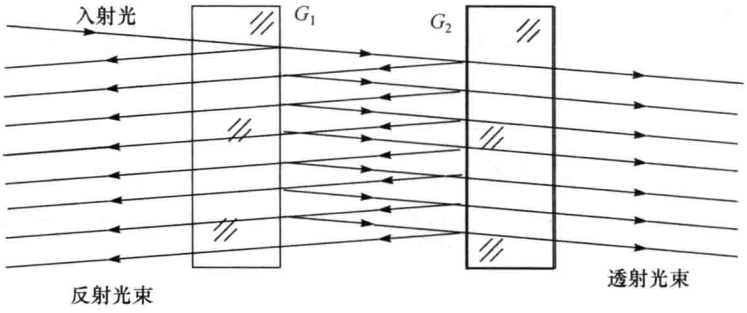


图 4.7.1 法布里-珀罗腔产生的多光束相干叠加

4.7.2 多光束干涉的光强

容易判断，法布里-珀罗腔是一种多光束的等倾干涉装置，在如图 4.7.2 所示的干涉仪中，条纹为同心圆环. 由式(4.4.5)～式(4.4.7)可得第一列反射光的振幅为 $A_1=Ar$，$n>1$ 时，$A_n=Ar^{2n-3}(1-r^2)$；而透射光的振幅为 $A'_n=Ar^{2(n-1)}(1-r^2)$.

相邻的两列透射光之间、相邻的两列反射光之间有相同光程差，为

$$\Delta L=2nh\cos i$$

其中，n 为腔内介质(真空或空气)的折射率；i 为腔内光束与法线的夹角，也是干涉仪透镜焦平面上的干涉环对透镜光轴的角半径. 第一列反射光与其他各列反射光之间要计入额外光程$\left(\pm\dfrac{\lambda}{2}\right.$，半波损失$\left.\right)$.

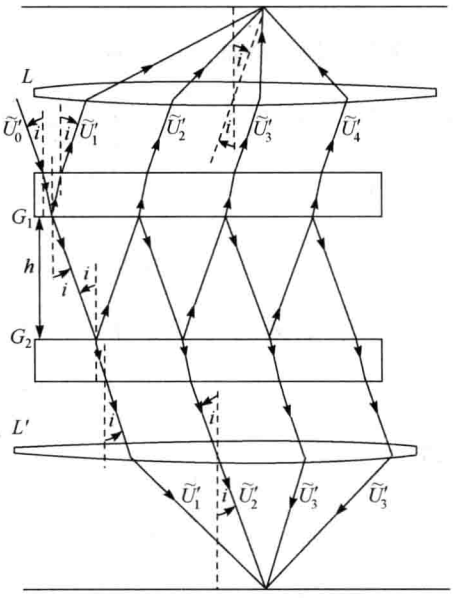


图 4.7.2　多列平行光束的相干叠加

除第一、二列反射波之外，其余相邻两列波的相位差为

$$\delta=k\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L=\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$$

设在反射光的相遇处，第一列反射波的位相为 φ_1，其复振幅表达式为

$$\widetilde{U}_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}=Ar\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \tag{4.7.1}$$

其中，$\rho=|r|^2=|r'|^2$，为 G_1 对光强的反射率.

第 n 列反射光的位相为 $\varphi_n=\varphi_1+\pi+(n-1)\delta$，复振幅表达式为

$$\widetilde{U}_n=Ar^{2n-3}(1-r^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_1+\pi+(n-1)\delta]}=-A\rho^{n-3/2}(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_1+(n-1)\delta]} \tag{4.7.2}$$

所有反射光波进行相干叠加，有

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_{\mathrm{R}}&=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}-\sum_{n=2}^{N}A\rho^{n-3/2}(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_1+(n-1)\delta]}\\&=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}-A\rho^{-1/2}(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\sum_{n=2}^{N}\rho^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\delta}\\&=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}-A\rho^{-1/2}(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\sum_{n=1}^{N-1}\rho^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\delta}\\&=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}-A\rho^{-1/2}(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\left[1-\rho^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\delta}\right]}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\\&\overset{N\to\infty}{=}A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\left[1-\frac{(1-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\right]=A\rho^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\right)\end{aligned}$$

即

$$\widetilde{U}_R=A\rho^{1/2}e^{i\varphi_1}\left(\frac{1-e^{i\delta}}{1-\rho e^{i\delta}}\right) \tag{4.7.3}$$

反射光相干叠加后的光强为

$$I_R=\widetilde{U}_R\widetilde{U}_R^*=A^2\rho\left(\frac{1-e^{i\delta}}{1-\rho e^{i\delta}}\right)\left(\frac{1-e^{-i\delta}}{1-\rho e^{-i\delta}}\right)=A^2\rho\,\frac{1-e^{i\delta}-e^{-i\delta}+1}{1-\rho(e^{i\delta}-e^{-i\delta})+\rho^2}=\frac{2A^2\rho(1-\cos\delta)}{1-2\rho\cos\delta+\rho^2}$$

由于

$$1-\cos\delta=1-1+2\sin^2\frac{\delta}{2}=2\sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$\begin{aligned}1-2\rho\cos\delta+\rho^2&=(1-\rho)^2+2\rho-2\rho\cos\delta\\&=(1-\rho)^2+2\rho\left(1-1+2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)=(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

所以

$$I_R=I_0\,\frac{4\rho\sin^2(\delta/2)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2(\delta/2)}=\frac{I_0}{1+\dfrac{(1-\rho)^2}{4\rho\sin^2(\delta/2)}} \tag{4.7.4}$$

设第一列透射光在相遇点的相位为 φ_1'，第 n 列透射光的相位为 $\varphi_n'=\varphi_1'+(n-1)\delta$，振幅为 $A_n'=A(1-r^2)r^{2(n-1)}=A_0\rho^{n-1}$，其中 $A_0=A(1-r^2)$.

则第 n 列透射光的复振幅为

$$\widetilde{U}_n'=A_0\rho^{n-1}e^{i[\varphi_1'+(n-1)\delta]} \tag{4.7.5}$$

相干叠加后的复振幅为

$$\widetilde{U}_T=\sum_{n=1}^{N}A_0\rho^{n-1}e^{i[\varphi_1'+(n-1)\delta]}=A_0e^{i\varphi_1'}\sum\nolimits_{n=0}^{N-1}\rho^n e^{in\delta}=A_0e^{i\varphi_1'}\,\frac{1-\rho^N e^{iN\delta}}{1-\rho e^{i\delta}}$$

当 $N\to\infty$ 时，有

$$\widetilde{U}_T=\frac{A_0e^{i\varphi_0'}}{1-\rho e^{i\delta}} \tag{4.7.6}$$

则透射光强为

$$I_T=\widetilde{U}\widetilde{U}^*=\frac{A_0^2}{(1-\rho e^{i\delta})(1-\rho e^{-i\delta})}=\frac{A_0^2}{1-\rho e^{i\delta}-\rho e^{-i\delta}+\rho^2}=\frac{A_0^2}{1-2\rho\cos\delta+\rho^2}$$

而 $A_0^2=A^2(1-\rho)^2=I_0(1-\rho)^2$，于是得到

$$I_T=\frac{I_0}{1+\dfrac{4\rho\sin^2(\delta/2)}{(1-\rho)^2}} \tag{4.7.7}$$

式(4.7.7)也可以利用反射光强分布公式(4.7.4)直接求得，即 $I_T=I_0-I_R$，结

果相同.

若记

$$F=\frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \tag{4.7.8}$$

并定义

$$A(i)=1+F\sin^2(\delta/2) \tag{4.7.9}$$

为**艾里函数**(Airy function),则以上两式可分别写作

$$\frac{I_R}{I_0}=\frac{F\sin^2(\delta/2)}{1+F\sin^2(\delta/2)} \tag{4.7.10}$$

$$\frac{I_T}{I_0}=\frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)} \tag{4.7.11}$$

在不同的反射率下,所得到的透射光强分布如图 4.7.3 所示,图中的横坐标是相邻两列光波的相位差 $\Delta\varphi=\delta=\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$,光的波长 λ、光的方向 i、膜厚 h 的改变都会引起相位差的改变.若是单色光入射,则图 4.7.3 中的曲线就是反射光的强度随角度的分布,这是一系列明暗交错的干涉圆环.由于反射率很高,第一列反射光很强,所以多光束叠加的结果,是亮环较宽,暗环细锐,即亮背景上的一系列细锐的暗环.

由于 $I_T=I_0-I_R$,将图 4.7.3 反过来,即可得透射光的强度分布曲线,如图 4.7.4所示.从图中可以看出,当反射率很高时,尽管每一列透射光的强度都很小,但波列的数目极多,所以也能形成清晰干涉图样,透射光是在黑暗背景上一系列的明亮细锐的同心圆环,而且反射、透射的干涉图样是互补的.

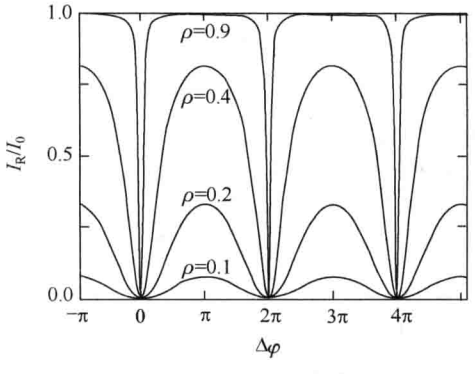


图 4.7.3 多光束干涉的反射光强分布

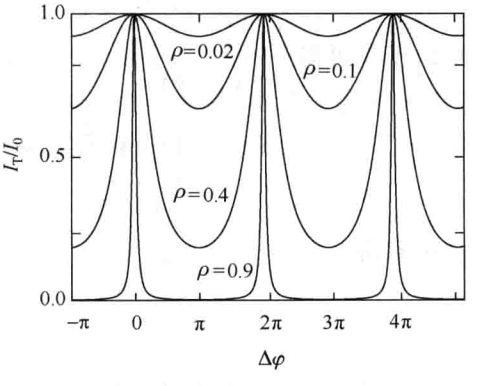


图 4.7.4 多光束干涉的透射光强分布

需要指出的是，上述干涉图样是在光源处于腔外(如图 4.7.1 所示的情形)的条件下形成的. 之所以这样，主要是由于薄膜的反射率很高，第一列反射光的强度为 $I_1=\rho I_0$，比其他所有波列的强度之和还要大得多，所以反射光的背景很强. 如果将光源安置在腔内，并使一侧镜面的反射率为 100%，则从光源所发出的光会全部从另一侧出射，这就是无限多列弱光的相干叠加，干涉图样依然是强度很大的细锐圆环，依然可以用前面所推导的透射光的强度公式来描述.

4.7.3 干涉场的特性

1. 亮条纹的半值宽度

为了衡量干涉条纹的细锐程度，通常采用**半值宽度**(half width)这一概念.

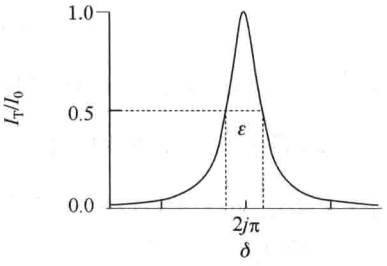


图 4.7.5 半值宽度

半值宽度的定义是光强降为峰值一半时的宽度，如图 4.7.5 所示. 在光强的极大值附近，若相位差改变 $\pm\frac{\varepsilon}{2}$，光的强度降为峰值的一半，则 ε 就是用相位差所表示的亮条纹半值宽度.

强度降低是由于波列之间的相位不同步(相位差不是 $2j\pi$)，而相位差既与光程差有关，也与光的波长有关，即 $\delta=\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$. 所以这样的半值宽度既可以用相位差 δ 的数值表示，也可以用条纹在空间角度分布 Δi 的数值表示，或者用光的波长分布范围 $\Delta\lambda$ 表示.

在峰值 $2j\pi$ 附近，当 δ 的数值改变 $\pm\varepsilon/2$ 时，光强变为峰值的一半，即 $I_T/I_0=1/2$，于是可得 $\frac{4\rho\sin^2\frac{2j\pi\pm\varepsilon/2}{2}}{(1-\rho)^2}=1$，而由于条纹很细锐，$\varepsilon$ 很小，$\sin\frac{\varepsilon}{2}\approx\frac{\varepsilon}{2}$，于是有

$$\frac{4\rho\sin^2\frac{\varepsilon}{4}}{(1-\rho)^2}\approx\frac{4\rho\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho\varepsilon^2}{4(1-\rho)^2}=1$$

从中解得

$$\varepsilon=\frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}=\frac{4}{\sqrt{F}} \tag{4.7.12}$$

可见 ρ 越大，ε 就越小，条纹也就越细锐. 若用 $\varepsilon/2$ 表示条纹的细锐程度，则称为**半值半宽**(half width at half maximum，HWHM).

2. 亮条纹的角分布

由于 $\delta=\dfrac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$，光波在空间方向的改变可以引起相位差改变，即

$$\mathrm{d}\delta=-\frac{4\pi nh\sin i}{\lambda}\mathrm{d}i$$

当 $\mathrm{d}\delta=\varepsilon$ 时，$\mathrm{d}i=\Delta i_j$，就是亮条纹空间角度的半值宽度

$$\Delta i_j=\frac{\lambda\varepsilon}{4\pi nh\sin i}=\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{4.7.13}$$

ρ 大，h 长，Δi 小，条纹锐. 中央条纹宽，周围细锐. 图 4.7.6 为一组法布里-珀罗干涉仪的干涉条纹.

而普通的薄膜干涉，即双光束干涉时，$\Delta i=\lambda/(4nh\sin i)$，可见法布里-珀罗条纹锐得多. 即出射的条纹发散角很小，通常将法布里-珀罗腔作为激光器的谐振腔，这样可获得很好平行光.



图 4.7.6 法布里-珀罗干涉仪的细锐的条纹

3. 亮条纹的频率(波长)分布

在固定的方向上，只有特殊的波长才能满足干涉相长的极大值条件，即 j 级亮纹的中心波长为

$$\lambda_j=\frac{1}{j}2nh\cos i \tag{4.7.14}$$

在中心波长 λ_j 附近，虽经干涉，并未全部相消，设与半值宽度 ε 所对应的波长范围为 $\Delta\lambda_j$，则波长改变所引起的相位差改变为 $\mathrm{d}\delta=-(4\pi nh\cos i/\lambda_j^2)\mathrm{d}\lambda_j=\varepsilon$，注意到 $j=\dfrac{2nh\cos i}{\lambda}$，于是可得

$$\Delta\lambda_j=\frac{\lambda^2}{2\pi nh\cos i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=\frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{4.7.15}$$

当 h 大，ρ 大时，$\Delta\lambda$ 小. 可将法布里-珀罗腔用于激光选模，保证了激光的单色性. 图 4.7.7 显示了入射到法布里-珀罗干涉仪的白光，出射光中只有特定的频率成分.

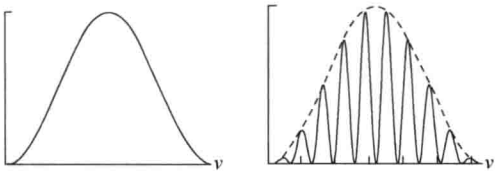


图 4.7.7 利用法布里-珀罗腔选模

若用频率范围表示，则有

$$\Delta\nu=\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right)=\frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}=\frac{c}{2\pi nh\cos i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{4.7.16}$$

实际的法布里-珀罗干涉仪，反射面的大小总是有限的，因而要实现多光束干涉，波列的入射角总是很小的，即 $i\approx 0$，所以通常可以用以下两式衡量出射光的单色性

$$\Delta\lambda\approx\frac{\lambda^2}{2\pi nh}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}},\quad \Delta\nu\approx\frac{c}{2\pi nh}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

4. 光谱的精细结构分辨

两列不同波长的光波，经过同一个多光束干涉装置，由于干涉相长的条件为 $2nh\cos i_j=j\lambda$，所以不同波长的光，其亮条纹的位置不同，即亮环的角半径不同. 根据干涉相长的条件，波长改变所导致的亮环角半径的改变可用公式表示为 $2nh\cos(i_j+\delta i)=j(\lambda+\delta\lambda)$，即

$$-2nh\sin i_j\,\mathrm{d}i_j=j\,\mathrm{d}\lambda$$

所以波长改变 $\delta\lambda$ 所引起的角度变化为

$$\delta i=\frac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda \tag{4.7.17}$$

这就是波长差为 $\delta\lambda$ 的同一 j 级亮条纹分开的角距离. 事实上，多光束干涉的 δi 与普通透明薄膜双光束干涉所形成的条纹的 δi 是相同的，但由于多光束干涉的条纹要细锐得多，所以靠得很近的两根条纹也可以分辨清楚，如图 4.7.8 所示.

当 $\delta i=\Delta i$ 时，即相邻的不同波长的两条纹的角距离等于每一个条纹的半角宽度时，为可以分辨的极限，这就是所谓的泰勒判据，如图 4.7.9 所示. 由式(4.7.13)和式(4.7.17)，当 $\delta i\geqslant\Delta i$ 时，有

$$\frac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda\geqslant\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

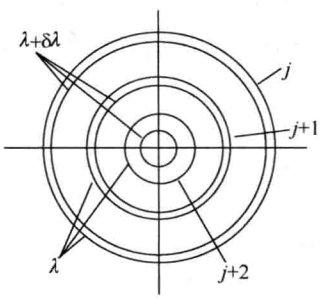


图 4.7.8　条纹分辨

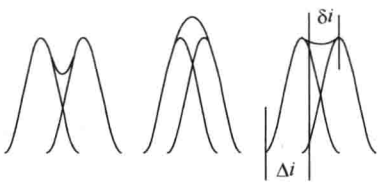


图 4.7.9　泰勒判据

即 $\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$，可分辨最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{\lambda^2}{2\pi nh\cos i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{4.7.18}$$

通常用分辨本领表示仪器对波长的分辨能力，而分辨本领的定义是 $A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=\frac{\nu}{\delta\nu}$，于是法布里-珀罗干涉仪的分辨本领为

$$A = \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}j\pi = \frac{2\pi nh\cos i}{\lambda}\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho} \tag{4.7.19}$$

$i\approx 0$，而且腔中是空气或真空，所以式(4.7.18)和式(4.7.19)变为

$$\delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi h}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}, \quad A \approx \frac{2\pi h}{\lambda}\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

例 4.11

设法布里-珀罗腔长 5cm，用扩展光源做实验，光波波长 $\lambda=600.0\text{nm}$，问：

(1) 中心干涉级数是多少？

(2) 在倾角为 1°附近，干涉环的半角宽度是多少？(设反射率 $R=0.98$).

(3) 如果用该法布里-珀罗腔分辨谱线，其色分辨本领有多大？可分辨的最小波长间隔是多少？

(4) 如果用其对白光进行选频，透射最强的谱线有几条？每条的谱线宽度是多少？

(5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5}(相对值)，则谱线的漂移量是多少？

分析：法布里-珀罗干涉仪是一种多光束干涉装置，其透射光强为

$$I_T = \frac{I_0}{1+\dfrac{4\rho\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-\rho)^2}} \tag{1}$$

其中，ρ 为光强反射率；δ 为相邻两列光的位相差.

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos i \tag{2}$$

$\delta=2j\pi$ 时为亮条纹出现的位置.

解 (1) 中心处，$i=0$，由式(2)，得

$$2h=j_0\lambda$$

中心干涉级数

$$j_0=2h/\lambda=2\times5\times10^4\,\mu\text{m}/0.6\,\mu\text{m}=166666$$

(2) 半角宽度为

$$\Delta i_j=\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=\frac{(1-0.98)\times0.6}{2\pi\times5\times10^4\sin1^\circ\sqrt{0.98}}=2.21\times10^{-6}$$

(3) 色分辨本领为 $A=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}=\dfrac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}j\pi=\dfrac{\sqrt{0.98}}{1-0.98}\times16666\pi=2.59\times10^7$

可分辨的最小波长间隔是

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{A}=\frac{600}{2.59\times10^6}=2.32\times10^{-5}\,\text{nm}$$

(4) $\lambda=\dfrac{1}{j}2nh$，$j=\dfrac{2nh}{\lambda}=131578\sim250000$，共 118422 条.

$$\Delta\lambda_j=\frac{\lambda}{j\pi}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$

或

$$\Delta\nu_j=\frac{c}{\pi j\lambda_j}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=\frac{c}{2n\pi h}\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=1.93\times10^7\,\text{Hz}$$

(5) 由 $2h=j_0\lambda$，得到 $2\Delta h=j_0\Delta\lambda=\dfrac{2h}{\lambda}\Delta\lambda$，即 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}=\dfrac{\Delta h}{h}$，因而

$$\Delta\lambda=\lambda\frac{\Delta h}{h}=600\times10^{-5}\,\text{nm}=6\times10^{-3}\,\text{nm}$$

或者

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta h}{h}=\frac{600\times10^{-5}}{600.0}=1\times10^{-5}$$

第5章　衍射光栅与光谱仪

如果光波在其传播路径上遇到某种障碍物，则将产生衍射，从一般意义上，光路上障碍物被定义为衍射屏. 衍射屏的作用，就是破坏原有自由空间的波前并重新构建波前，从而使光波场，即衍射场重新分布，前面讨论的具有圆孔、单缝、矩孔等空间结构的障碍物都是衍射屏.

除了上述结构简单的衍射屏之外，还有许多空间结构比较复杂的衍射屏，例如，图 5.0.1 所示的具有多条狭缝或多个圆孔的衍射屏.

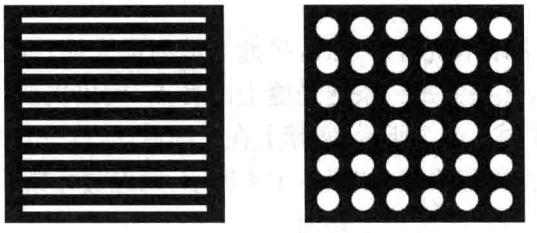


图 5.0.1　周期性光学结构的衍射屏

在种种结构复杂的衍射屏中，有一类是具有空间周期性结构的，其衍射的结果有比较简单的规律，而且容易进行数学上的分析，所以获得了很广泛的应用，这种衍射屏就是衍射光栅.

衍射光栅可以被定义成具有周期性光学结构的衍射屏.

衍射光栅可以具有反射或透射结构. 可以按不同的透射或反射率分为黑白光栅、正弦光栅等. 这类光栅由于使透射光或反射光的振幅改变，所以统称为**振幅光栅**(transmission or reflection amplitude grating).

还有一类光栅，对于入射光，是全透或全反的，但是透射光或反射光的相位将被改变，因而被称为**相位光栅**(transmission or reflection phase grating).

5.1　多缝夫琅禾费衍射

在一个不透光的屏上，周期性地分布着一系列透光狭缝，这就是一种最简单的平面型透射式光栅，如图 5.1.1 所示. 相邻两缝的距离为 d，狭缝的宽度为 a，不透光部分的宽度为 b，则 $a+b=d$，d 是光栅的结构周期，称为**光栅常数**(grating constant)，如图 5.1.2 所示. 由于这类光栅仅在一个方向上具有周期性结构，所以是一种一维光栅.

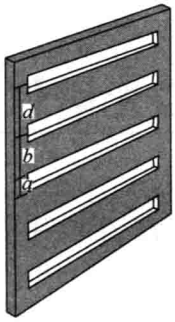


图 5.1.1　透射光栅及其周期

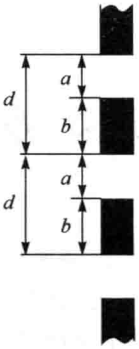


图 5.1.2　光栅的参数

5.1.1　衍射强度

光栅通常采用夫琅禾费衍射方式，平面光波射向光栅；通过光栅的光波，用惠更斯次波模型分析：光栅的每一条透光缝上的各点，发出次波，方向相互平行的次波进行相干叠加，如图 5.1.3 所示. 实际上在光栅后面，有一焦距为 f 的会聚透镜，接收屏位于透镜的像方焦平面，如图 5.1.4 所示，则经过光栅的相互平行的次波会聚到接收屏上的同一点，进行相干叠加.

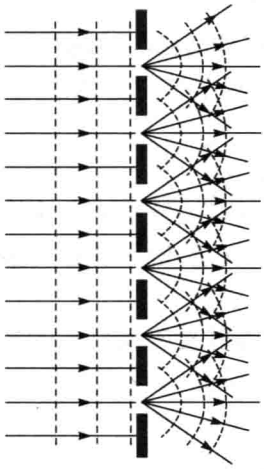


图 5.1.3　透过光栅的光波相干叠加

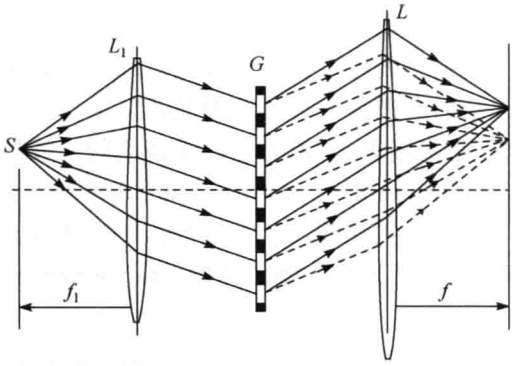


图 5.1.4　用透镜将光波会聚到焦平面上进行叠加

在讨论单缝夫琅禾费衍射时曾经指出，如果单缝沿着衍射屏平移，而衍射装置的其他部分保持不变，则衍射的强度分布将不发生改变，因为位于透镜焦平面上的光强只与衍射光的方向有关. 因此，对于多缝衍射屏，其中每一个单缝，即每一个衍射单元在接收屏上所产生的衍射条纹都是相同的.

但是，来自不同狭缝的光，由于是相干的，所以相互之间也要进行相干叠加. 这就是说，整个光栅上的次波源发出的相同方向的次波在接收屏上的相遇点进行叠加. 因而在应用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式时，积分区域便是整个光栅上的 N 条狭缝. 从数学上看，积分本质是一种加法，可以应用结合律，即先求出各个单缝衍射的复振幅，再对这些复振幅求和. 对每个单缝衍射的复振幅求和对应的是一种干涉过程，即是各条缝的次波的相干叠加，而不是它们的光强相加. 所以，对于衍射光栅，既有来自每一个衍射单元的波列各自的衍射，也有来自不同单元(狭缝)的波列之间的干涉.

对于光栅的每一个单元，按衍射分析；不同的单元之间，按干涉分析.

可以采用振幅矢量方法或者积分方法求得衍射强度分布，以下分别加以说明.

1. 振幅矢量法

沿着与光轴夹角为 θ 方向的衍射光，经过透镜后，都将会聚到焦平面上的某一点 P. 如图 5.1.5 所示，P 点的方位角就是 θ. 由光栅上第 n 个衍射单元(光缝)射出的光在 P 点的振动(复振幅)可以用一个矢量表示，记为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_n^\theta$. 由夫琅禾费单缝衍射结果可知 $|\widetilde{\boldsymbol{A}}_n^\theta| = a_0 \dfrac{\sin u}{u}$，其中，$a_0$ 为单个狭缝所发出的次波在接收屏上的振幅，$u = \dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$.

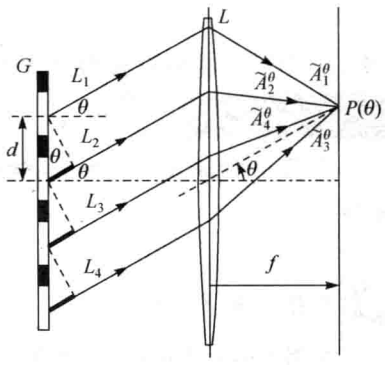


图 5.1.5 透过每个狭缝的光所对应的振幅矢量

由光栅的周期性结构和夫琅禾费衍射的特征可知，来自任意相邻两个单元(即相邻两缝)的衍射矢量间具有相等的光程差 ΔL 和相位差 $\Delta\varphi$.

由图 5.1.5 可以看出，正入射时，相邻衍射单元间的光程差为 $\Delta L = d\sin\theta$，相邻衍射单元间的相位差为

$$\Delta\varphi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{5.1.1}$$

记 $2\beta = \Delta\varphi$，则

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{5.1.2}$$

P 点的合振动，就是所有单元衍射的矢量和，也就是入射光经光栅衍射的复振幅.

设光栅共有 N 条狭缝，则合矢量就是 N 个单元衍射的矢量相加. 将 N 个矢量依次首尾相接，而且第 n 个矢量相对于第 $n-1$ 个矢量转过 $\Delta\varphi = 2\beta$，即 2β 角，如

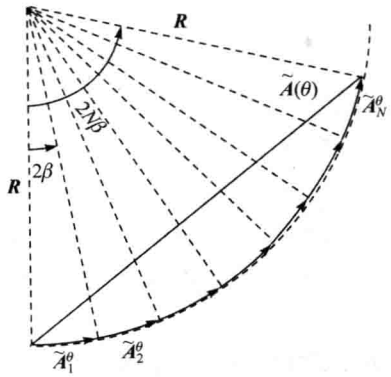


图 5.1.6　振幅矢量的叠加

图 5.1.6 所示，则这 N 个矢量是一个圆弧上的 N 段弦，每段弦的圆心角为 2β，设圆弧的半径为 R，则 $A_n^\theta=2R\sin\beta$. 合振幅矢量为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta)=\widetilde{\boldsymbol{A}}_1^\theta+\widetilde{\boldsymbol{A}}_2^\theta+\widetilde{\boldsymbol{A}}_3^\theta+\cdots+\widetilde{\boldsymbol{A}}_N^\theta$$

即

$$A(\theta)=2R\sin N\beta=2\frac{A_n^\theta}{2\sin\beta}\sin N\beta=A_n^\theta\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

即

$$A(\theta)=a_0\frac{\sin u}{u}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\qquad(5.1.3)$$

衍射光强为

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2\qquad(5.1.4)$$

其中，I_0 为单个狭缝在接收屏上的光强.

例 5.1

三条平行狭缝，宽为 a，缝距分别为 d 和 $2d$，求正入射时夫琅禾费衍射分布.

解　用振幅矢量方法求解.

如图 5.1.7 所示，将每一条逢的次波在接收屏上 θ 方向的合振动(即单缝衍射的合振动)用一个振幅矢量表示，由于缝宽相等，如图 5.18 所示，这是三个等长矢量，记为 $A=U_0\frac{\sin u}{u}$，三个矢量间的夹角依次为 $\Delta\varphi$、$2\Delta\varphi$，而 $\Delta\varphi=kd\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=2\beta$.

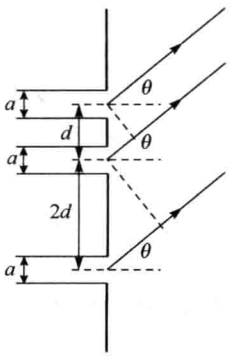


图 5.1.7　三条不等距狭缝

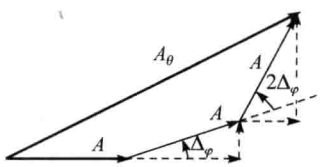


图 5.1.8　振幅矢量图解

见图 5.1.8，记合矢量为 $\boldsymbol{A}(\theta)$，该矢量的两个正交分量分别为

$$A(\theta)_x = A + A\cos\Delta\varphi + A\cos(3\Delta\varphi), \quad A(\theta)_y = A\sin\Delta\varphi + A\sin(3\Delta\varphi)$$

则

$$\begin{aligned} A^2(\theta) &= A(\theta)_x^2 + A(\theta)_y^2 = [A + A\cos\Delta\varphi + A\cos(3\Delta\varphi)]^2 + [A\sin\Delta\varphi + A\sin(3\Delta\varphi)]^2 \\ &= A^2[1 + \cos^2\Delta\varphi + \cos^2(3\Delta\varphi) + 2\cos\Delta\varphi + 2\cos 3\Delta\varphi \\ &\quad + 2\cos\Delta\varphi\cos 3\Delta\varphi + \sin^2\Delta\varphi + \sin^2(3\Delta\varphi) + 2\sin\Delta\varphi\sin(3\Delta\varphi)] \\ &= A^2(3 + 2\cos\Delta\varphi + 2\cos 2\Delta\varphi + 2\cos 3\Delta\varphi) \\ &= I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2(3 + 2\cos 2\beta + 2\cos 4\beta + 2\cos 6\beta) \end{aligned}$$

例 5.2

衍射屏上有两条不等宽的平行狭缝，宽度分别为 a 和 $2a$，，两缝中心间距 $d = 3a$，求正入射时夫琅禾费衍射分布.

解 用振幅矢量方法求解. 衍射屏结构示于图 5.1.9 中，按照单缝衍射的性质，两狭缝单缝衍射的振幅矢量分别为 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^\theta$ 和 $\tilde{\boldsymbol{a}}_2^\theta$，因为缝宽分别为 a 和 $2a$，所以单缝衍射的振幅大小分别为 $a_1^\theta = a_0\dfrac{\sin u}{u}$，$a_2^\theta = 2a_0\dfrac{\sin 2u}{2u} = 2a_0\cos u\dfrac{\sin u}{u}$，其中 $u = \dfrac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$. 按图 5.1.10，可得

$$\begin{aligned} A_\theta^2 &= (a_1^\theta)^2 + (a_2^\theta)^2 + 2a_1^\theta a_2^\theta\cos\Delta\varphi \\ &= \frac{a_0^2\sin^2 u}{u^2}[1 + (2\cos u)^2 + 4\cos u\cos\Delta\varphi] \end{aligned}$$

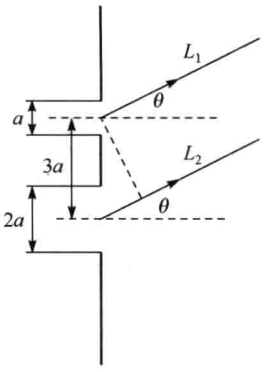


图 5.1.9 衍射屏上不等宽双缝

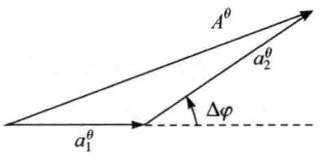


图 5.1.10 振幅矢量图解

而 $\Delta\varphi=kd\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}3a\sin\theta=6u$，于是

$$A_\theta^2=\frac{a_0^2\sin^2u}{u^2}[1+4\cos^2u+4\cos u\cos 6u]$$

本题的另一种处理方法是将宽度为 $2a$ 的单缝视为宽度为 a、间距为 a 的两条狭缝，则衍射屏上是不等距、等宽的三缝. 相邻缝中心间距分别为 $d_1=3a-a/2=5a/2$，$d_2=a$，相位差分别为

$$\Delta\varphi_1=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{5a}{2}\sin\theta=5u,\quad \Delta\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta=2u$$

仿照例 5.2 的方法，有

$$\begin{aligned}A_\theta^2&=\frac{a_0^2\sin^2u}{u^2}[(1+\cos 5u+\cos 7u)^2+(\sin 5u+\sin 7u)^2]\\&=\frac{a_0^2\sin^2u}{u^2}[3+2(\cos\cos 7u\cos 5u+\sin 7u\sin 5u)+2(\cos 7u+\cos 5u)]\\&=\frac{a_0^2\sin^2u}{u^2}\left[3+2\cos(7u-5u)+2\times 2\cos\frac{7u+5u}{2}\cos\frac{7u-5u}{2}\right]\\&=\frac{a_0^2\sin^2u}{u^2}(1+4\cos^2u+4\cos u\cos 6u)\end{aligned}$$

例 5.3

衍射屏上有 $2N$ 条平行狭缝，每条缝宽为 a，缝间不透明部分周期性变化，间距依次为 $2a,6a,2a,6a,\cdots$ 求这种光栅的夫朗禾费衍射强度分布.

解 如图 5.1.11 所示，这样的衍射屏等效于两个缝宽为 a、周期为 $d=8a$ 且错开 $2a$ 的光栅的衍射之和.

如果第一个光栅衍射的振幅矢量为

$$\widetilde{U}_{1\theta}=\widetilde{U}_{10}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

则第二个光栅的振幅矢量为

$$\widetilde{U}_{2\theta}=\widetilde{U}_{20}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

其中，$\widetilde{U}_{20}$ 与 $\widetilde{U}_{10}$ 之间的夹角为两光栅第一条狭缝所发出的同方向次波间的相位差，如图 5.1.12 所示，即

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}2a\sin\theta$$

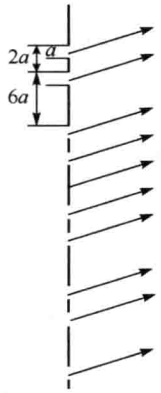


图5.1.11 两套光栅叠合

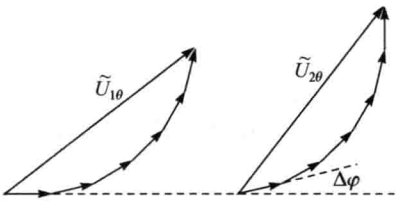


图 5.1.12 第一和第二套光栅单独衍射的振幅矢量

如图 5.1.13 所示，叠加之后合振幅矢量的大小为 A_θ，即

$$A_\theta^2 = A_{1\theta}^2 + A_{2\theta}^2 + 2A_{1\theta}A_{2\theta}\cos\Delta\varphi$$

$$= A_0^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}(2+2\cos\Delta\varphi)$$

而

$$u = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta, \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda}4a\sin\theta = 8u$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{\lambda}4a\sin\theta = 4u$$

$$= 2A_0^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin^2(8u)}(1+\cos 4u)$$

$$= 4A_0^2 \cos^2(2u)\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin^2(8u)}$$

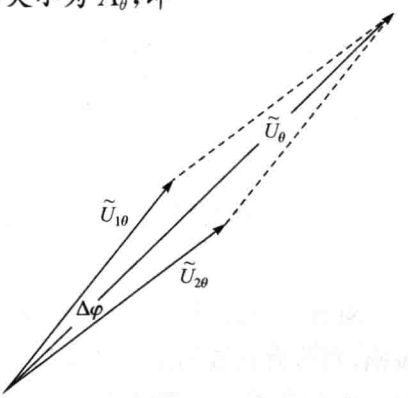


图 5.1.13 两套光栅的合振幅矢量

也可以将两条间距为 $2a$ 的狭缝作为一个衍射单元，这一单元构成周期为 $8a$ 的光栅. 一个单元(一个双缝光栅)的衍射因子为 $\widetilde{U}_i(\theta) = \widetilde{U}_{10}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin 4u}{\sin 2u} = 2\widetilde{U}_{10}\frac{\sin u}{u}\cos 2u$，缝间干涉因子为 $N(\theta) = \frac{\sin 8Nu}{\sin 8u}$. 于是整个光栅衍射的复振幅为

$$\widetilde{U}(\theta)=\widetilde{U}_i(\theta)N(\theta)=2\widetilde{U}_{10}\cos(2u)\frac{\sin u}{u}\frac{\sin(8Nu)}{\sin(8u)}$$

光强为

$$I(\theta)=|\widetilde{U}(\theta)|^2=4I_0\cos^2(2u)\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin^2(8u)}$$

2. 积分法

衍射积分公式为 $\widetilde{U}(\theta)=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$. 平面光波入射，满足近轴条件(也可认为是满足远场条件，因为这是夫朗禾费衍射)，倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)=1$，$\frac{1}{r}$ 为常数，记为 $\frac{1}{r_0}$. 则一维情形下，$\widetilde{U}(\theta)=K\frac{1}{r_0}\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(x)e^{ikr}dx$.

仅需对衍射屏透光部分求积分，有

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta)&=\frac{K}{r_0}\left[\int_{\Sigma_1}\widetilde{U}_0(x_1)e^{ikr_1}dx_1+\int_{\Sigma_2}\widetilde{U}_0(x_2)e^{ikr_2}dx_2+\cdots+\int_{\Sigma_N}\widetilde{U}_0(x_n)e^{ikr_n}dx\right]\\&=\frac{K}{r_0}\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{\Sigma_n}\widetilde{U}_0(x_n)e^{ikr_n}dx_n\right]\end{aligned}$$

对每一个狭缝的积分的结果是入射光经该狭缝后在接收屏上 P 点衍射的复振幅；对所有狭缝的求和是将每一个狭缝衍射的复振幅进行叠加，这是缝间干涉. 上述积分所对应的物理过程为：每一个单狭缝的光在 P 点先进行衍射(单缝积分)，衍射后的复振幅再进行干涉(缝间求和).

瞳函数 $\widetilde{U}_0(x)$ 是衍射屏上次波源的复振幅，平面入射波在衍射屏上的相位是 x 的线性函数. 若入射波矢与光栅平面法线间的夹角为 θ_0，如图 5.1.14 所示，则 $\widetilde{U}_0(x)=U_0e^{ikx\sin\theta_0+i\varphi(0)}$，其中 $\varphi(0)$ 为坐标原点处瞳函数的初相位.

在第 n 条狭缝中，位置在 x_n 的次波源与原点相比，衍射屏之前的光程差为 $(n-1)d\sin\theta_0$，相位差为 $(n-1)kd\sin\theta_0$，即 $\widetilde{U}_0(x_n)=U_0e^{ikx_n\sin\theta_0+i[\varphi(0)+(n-1)kd\sin\theta_0]}$.

记第一条狭缝的中心到接收屏上方位角为 θ 的 P 点的光程为 L_1，则第 n 条狭缝的中心到 P 点的光程 $L_n=L_1-(n-1)d\sin\theta$，如图 5.1.15所示. 在第 n 条狭缝中，位置在 x_n 的次波源到 P 点的光程为 $r_n=L_n-x_n\sin\theta$.

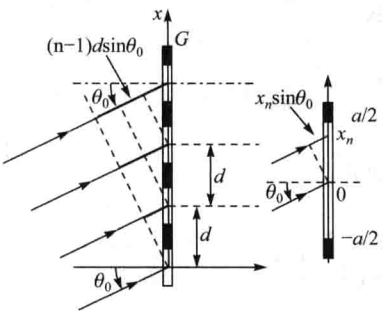


图 5.1.14　衍射屏前的光程差

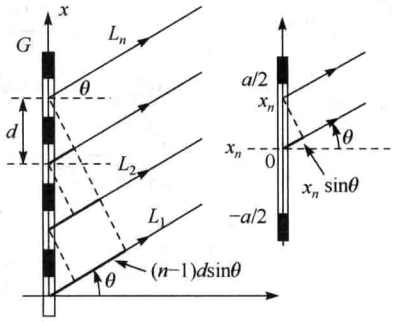


图 5.1.15　衍射屏后的光程差

综合上述讨论可知，第 n 条狭缝上 x_n 的次波在 P 点的相位为

$$\begin{aligned}\varphi(\theta)&=\varphi(0)+(n-1)kd\sin\theta_0+kx_n\sin\theta_0+k[L_1-(n-1)d\sin\theta-kx_n\sin\theta]\\&=\varphi(0)+kL_1+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)+kx_n(\sin\theta_0-\sin\theta)\\&=\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)+kx_n(\sin\theta_0-\sin\theta)\end{aligned}$$

式中，$\varphi_0=\varphi(0)+kL_1$，是光栅原点发出的次波在接收屏上 P 点的相位.

对第 n 条狭缝的衍射积分为

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_n}\widetilde{U}_0(x_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n}\,\mathrm{d}x_n&=\int_{-a/2}^{a/2}U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)+kx_n(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\,\mathrm{d}x_n\\&=U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\sin\theta_0-\sin\theta)x_n}\,\mathrm{d}x_n\\&=U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\sin\theta_0-\sin\theta)a/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\sin\theta_0-\sin\theta)a/2}}{\mathrm{i}k(\sin\theta_0-\sin\theta)}\\&=U_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\frac{\sin\dfrac{ka(\sin\theta_0-\sin\theta)}{2}}{\dfrac{ka(\sin\theta_0-\sin\theta)}{2}}\\&=aU_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\frac{\sin\dfrac{\pi a(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}}{\dfrac{\pi a(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}}\end{aligned}$$

记 $u(\theta_0,\theta)=\dfrac{\pi a(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}$，则

$$\int_{\Sigma_n}\widetilde{U}_0(x_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_n}\,\mathrm{d}x_n=aU_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\frac{\sin u(\theta_0,\theta)}{u(\theta_0,\theta)}\qquad(5.1.5)$$

整个光栅的衍射积分为

$$\widetilde{U}(\theta)=\frac{K}{r_0}\sum_{n=1}^{N}aU_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)]}\frac{\sin u}{u}=K\frac{aU_0}{r_0}\frac{\sin u}{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)}$$

记 $\beta(\theta_0,\theta)=\dfrac{kd(\sin\theta_0-\sin\theta)}{2}=\dfrac{\pi d(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}$，衍射积分中的求和为

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)kd(\sin\theta_0-\sin\theta)}=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi d(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}}=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\beta}$$

$$=\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}N\beta}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\beta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\beta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\tag{5.1.6}$$

最后得到

$$\widetilde{U}(\theta)=K\frac{aU_0}{r_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\tag{5.1.7}$$

衍射光强为

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2\tag{5.1.8}$$

与振幅矢量法得到的结果一致. 其中，$I_0=\left(K\dfrac{aU_0}{r_0}\right)^2$ 为单缝在接收屏上的光强.

记 $N(\theta)=\dfrac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}$，则 $N(\theta)$ 为周期性光栅的 N 元干涉因子.

光强分布公式可以用图 5.1.16 表示. 自上而下分别为单缝衍射的光强、N 缝干涉的光强和整个光栅的光强. 可见，光栅衍射的光强相当于单缝衍射对多缝干涉作了振幅调制. 同时也能看出，只有在单缝衍射的中央主极大内，才有比较强的光强分布.

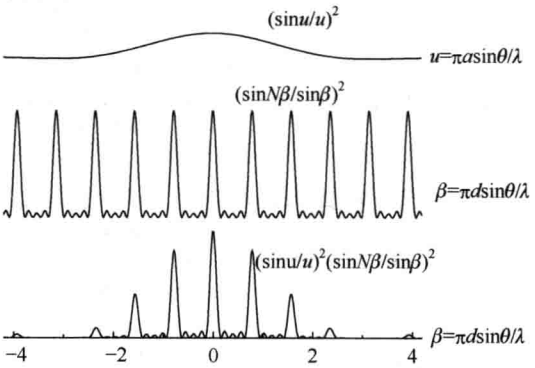


图 5.1.16　光栅的衍射光强分布

上面以透射光栅为例，求出了衍射的光强分布. 除了透射式光栅(图 5.1.17)，还有反射式光栅(图 5.1.18)，就是先在平面上镀一层反射膜，然后在反射膜上刻

出或腐蚀出一系列平行等间隔的划痕，则被刻蚀的地方不反光，保留下来的部分将入射光反射. 对于反射式光栅，方法和结果都与透射式是相同的.

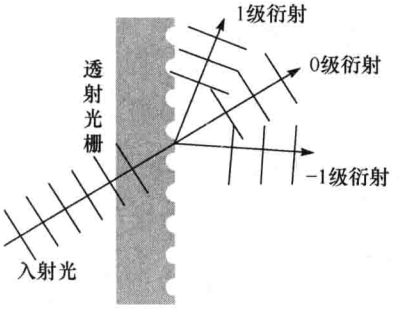


图 5.1.17 透射光栅

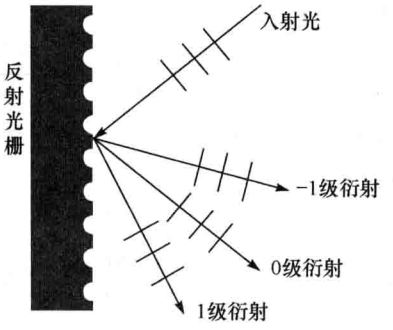


图 5.1.18 反射光栅

例 5.4

用衍射积分方法求解例 5.1～例 5.3.

解 (1) 对于例 5.1 中的不等距三缝，各缝光程之间的关系为

$$L_2=L_1+d\sin\theta,\quad L_3=L_1+3d\sin\theta,\quad r_j=L_j-x\sin\theta$$

$$\widetilde{U}(\theta)=K\left(\int_{\Sigma_1}\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x+\int_{\Sigma_2}\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x+\int_{\Sigma_3}\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\right)$$

$$=aK\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}}{r_0}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_2}}{r_0}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_2}}{r_0}\right)$$

$$=aK\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}}{r_0}[1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(L_2-L_1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(L_3-L_1)}]$$

$$=aK\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}}{r_0}\frac{\sin u}{u}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3kd\sin\theta})$$

强度分布为

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3kd\sin\theta}|^2$$

$$=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2[3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\beta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\beta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\beta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\beta}]$$

$$=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2(3+2\cos2\beta+2\cos4\beta+2\cos6\beta)$$

(2) 对于例 5.2 中的不等宽双缝，两缝的衍射因子分别为 $a\dfrac{\sin u}{u}$ 和 $a\dfrac{\sin 2u}{2u}$，于是有

$$\widetilde{U}_\theta=\widetilde{U}_0\left(a\frac{\sin u}{u}+2a\frac{\sin 2u}{2u}e^{ikd\sin\theta}\right)=a\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}(1+2\cos u e^{i2\beta})$$

注意到 $\beta=3u$，光强为

$$I_\theta=|a\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}|^2(1+2\cos u e^{i2\beta})(1+2\cos u e^{-i2\beta})$$

$$=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}(1+4\cos^2 u+4\cos u\sin 6u)$$

(3) 对于例 5.3 中的两套光栅，每一套衍射的振幅为 $U_0\dfrac{\sin u}{u}\dfrac{\sin(8Nu)}{\sin(8u)}$，两套错开 $2a$，对应的光程差为 $2a\sin\theta$，相位差为 $k2a\sin\theta=4u$，于是总的复振幅为

$$\widetilde{U}(\theta)=U_0\frac{\sin u}{u}\frac{\sin(8Nu)}{\sin(8u)}(1+e^{i4u})$$

光强为

$$I(\theta)=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin(8u)}(1+e^{i4u})(1+e^{-i4u})=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin(8u)}(1+e^{i4u})(1+e^{-i4u})$$

$$=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin(8u)}(2+2\cos 4u)=2I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2(8Nu)}{\sin(8u)}(1+\cos 4u)$$

对三个不同的问题，两种方法的结果完全一致.

5.1.2 双缝衍射

如果光栅只有两条狭缝，$N=2$，则衍射光强为

$$I(\theta)=4I_0\cos^2\beta\frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{5.1.9}$$

而双缝的杨氏干涉强度分布为

$$I(\theta)=2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)\right]=2I_0(1+\cos 2\beta)=4I_0\cos^2\beta \tag{5.1.10}$$

比较发现，两者的区别在于一个衍射因子$\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$，这当然是由于杨氏干涉中不考虑单缝衍射的结果. 或者，认为在杨氏干涉装置中$\dfrac{\sin u}{u}=1$，则必须有 $u=\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=0$，

这只有在 $a \ll \lambda$ 条件下才能实现. 也就是说,在杨氏干涉实验中,由于每一个狭缝本身的宽度比光的波长要小得多,这种情况相当于每一个狭缝或者每一个孔中只有一个次波源. 因而不需要考虑衍射的作用.

图 5.1.19 画出了周期分别为 1(单缝)、2(双缝)、3、4、5、6 的衍射光栅的光强分布.

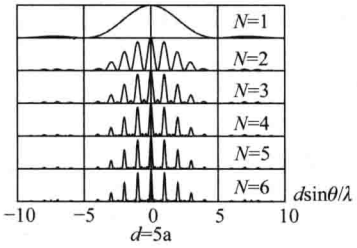


图 5.1.19 不同周期数的衍射光栅的光谱

5.1.3 光栅衍射的特点

由图 5.1.19 和图 5.1.20 可以看出,因为衍射强度是单元衍射和 N 元干涉的乘积,总的光强是由一系列细锐的衍射峰组成,包括主极大和次极大.

光强的极值由缝间干涉因子 $N(\theta)=\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$ 决定,对 $N(\theta)$ 求微分,即可得到取极值的位置.

$$N(\theta)'=\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)'=\frac{N\cos N\beta\sin\beta-\cos\beta\sin N\beta}{\sin^2\beta}=0$$

得到

$$N\tan\beta=\tan(N\beta) \tag{5.1.11}$$

这是一个超越方程,从图 5.1.21 中可以看出,在每一个 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 区间内,除去 $N-1$ 个位于 $(2m+1)\dfrac{\pi}{2N}$ 奇点之外,共有 $N-1$ 个解,都是极大值点.

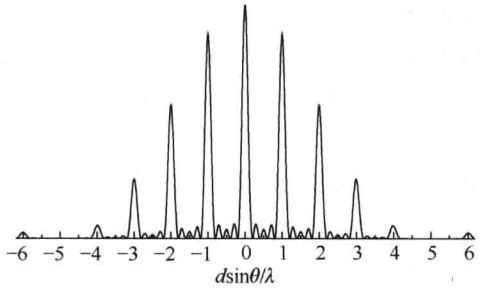


图 5.1.20 光栅衍射的强度分布

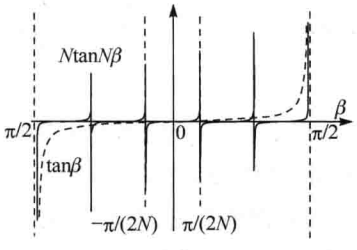


图 5.1.21 $N\tan\beta=\tan(N\beta)$ 的解

以下详细讨论极大值和极小值的位置.

1. 衍射主极大值位置

$\beta=j\pi$ 为超越方程 $N\tan\beta=\tan(N\beta)$ 的一组解,或者 $N(\theta)=\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$ 的分子、分

母同时为 0 时，$N(\theta)$取极大值，$N(\theta)=N$，则光强为

$$I=N^2 I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{5.1.12}$$

由于 $\beta=\dfrac{\pi d(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}$，所以

$$d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=j\lambda,\quad j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{5.1.13}$$

每一个主极大值代表接收屏上 θ_j 位置处的一根亮条纹，每一根亮条纹被称为光栅的一条谱线，j 为谱线级数. 式(5.1.13)是确定光栅光谱的关系式，称为**光栅方程**.

由式(5.1.13)可见，光谱线的位置与 N 无关，由 d,j,λ 决定. 谱线位置与衍射因子无关. 谱线强度与 N^2 成正比，同时受到衍射因子调制.

平面光波(也就是平行光束)正入射时，$\theta_0=0$，光栅方程为

$$d\sin\theta_j=j\lambda,\quad j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{5.1.14}$$

2. 极小值位置

当衍射因子或缝间干涉因子为 0 时，强度都是极小值.

要使衍射因子$\dfrac{\sin u}{u}=0$，只有 $\sin u=0$，同时 $u\neq0$，即 $u=n\pi(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，而 $u=\dfrac{\pi a(\sin\theta_0-\sin\theta)}{\lambda}$，于是得

$$a(\sin\theta_0-\sin\theta)=n\lambda,\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots \tag{5.1.15}$$

要使干涉因子$\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}=0$，必须 $\sin N\beta=0$，同时 $\sin\beta\neq0$，即 $d(\sin\theta_0-\sin\theta)=\dfrac{j}{N}\lambda(j=1,2,\cdots N-1,N+1,\cdots)$，可以列表表示为

$$d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=\boxed{0},\frac{\lambda}{N},\frac{2\lambda}{N},\cdots,\frac{(N-1)\lambda}{N};\boxed{\lambda},\frac{(N+1)\lambda}{N},\cdots,\frac{(2N-1)\lambda}{N};\boxed{2\lambda},\cdots \tag{5.1.16}$$

可见，每两个相邻的主极大值之间，有 $N-1$ 个极小值.

3. 次极大值

在任意两个主极大值 $d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=j\lambda$，$d(\sin\theta_0-\sin\theta_{j+1})=(j+1)\lambda$ 之间，有 $N-1$ 个极小值；而每两个极小值之间还有一个次极大值，所以每两个主极大值之间还有 $N-2$ 个次极大值. 次极大值的位置由超越方程 $N\tan\beta=\tan(N\beta)$ 的另一组解所决定.

4. 谱线的缺级

在干涉的主极大值与衍射的极小值重合的位置，由于干涉的极大值不能出现而产生缺级.

干涉主极大值的位置为 $d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=j\lambda$，衍射极小的位置为 $a(\sin\theta_0-\sin\theta)=n\lambda$，所以缺级条件为 $j/d=n/a$，即

$$j=n\frac{d}{a},\quad n\neq 0 \tag{5.1.17}$$

具有上述级数的谱线由于衍射而缺失.

5.1.4 干涉与衍射的区别和联系

干涉和衍射都是波的相干叠加，因而其物理本质都是相同的，所以无论是直接应用光的叠加原理还是采用惠更斯-菲涅耳衍射积分公式，都遵循振动矢量叠加的原理. 如果仅从这一点来看，实在没有必要将干涉和衍射加以区分. 之所以区分，无非是基于以下几种考虑：

(1) 从实验所采用的装置和方法看，两者有区别；

(2) 从采用的数学手段上看，两者有区别；

(3) 从物理结果上看，两者有区别.

干涉是“光束”之间的相干叠加，因而要求每一条“光束”都要足够细，所以杨氏干涉实验装置中，每一个狭缝或针孔都要足够小，以至于可以认为其中仅包含一个振动源. 这些光束是有限条，或虽然有无限多条，但是光束之间是离散的、不连续的、可数的.

而衍射则是连续分布的无限多个点光源(次波中心)发出的光波的相干叠加. 所以每一个衍射单元可以比较大，例如，菲涅耳圆孔、夫琅禾费单缝、圆孔、矩孔等，其中每一个衍射单元中包含许多(无限多)个扰动源.

由于干涉的“光束”是离散的，所以其叠加的过程可以在数学上用求和的方法解决，即可以直接应用波的叠加原理；而衍射的扰动源是连续分布的，则在数学上必须采用积分(曲面积分)的方法求解，所以需要求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式.

从最后的效果看，干涉之后光的能量在空间均匀分布，无论杨氏干涉还是薄膜干涉，各级亮条纹有相差不大的空间角宽度和强度；而衍射所产生的一系列亮条纹中，光强有着显著的差别. 其中只有一个条纹具有较大的强度，例如，夫琅禾费圆孔衍射的艾里斑、单缝衍射的零级条纹，这个特殊的衍射级其实就是系统的几何像点，因而衍射的结果更接近于几何成像的情况，或者，几何光学就是衍射的零级近似.

5.2 光栅光谱

由光栅方程 $d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=j\lambda$ 可以看出，一方面，对于单色光，经过衍射，不

同的衍射级次具有不同的衍射角(图 5.2.1);另一方面,对于复色光(通常所说的白光),在同一级衍射谱中,不同的波长具有不同的衍射角(图 5.2.2),即 $\theta=\theta(\lambda)$,不同波长的光经光栅后会在空间散开,这说明光栅具有色散能力.

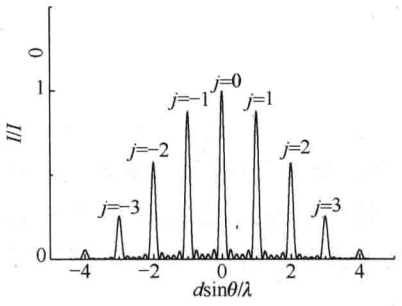


图 5.2.1 单色光经光栅后的光强分布

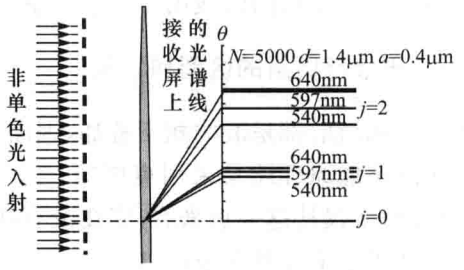


图 5.2.2 光栅的色散

5.2.1 谱线的角宽度和光栅的色分辨本领

1. 谱线的半角宽度

经过光栅衍射的每一级光谱线,在空间都有一定的角宽度,通常用谱线的极大值与相邻极小值的角度差表示谱线的角宽度,这就是“半角宽度”.

一般情形下的光栅方程为 $d(\sin\theta_0-\sin\theta_j)=j\lambda$,由于入射方向 θ_0 为常数,所以只需要针对正入射的情况进行讨论即可.

极大值的位置由光栅方程决定,为 $\sin\theta_j=j\dfrac{\lambda}{d}$,若设 j 级谱线的半角宽度为 $\Delta\theta_j$,则相邻的最小值的位置为 $\sin(\theta_j+\Delta\theta_j)=\left(j+\dfrac{1}{N}\right)\dfrac{\lambda}{d}$.

因而有 $\sin(\theta_j+\Delta\theta_j)-\sin\theta_j=\cos\theta_j\Delta\theta_j=\dfrac{\lambda}{Nd}$,可得

$$\Delta\theta_j=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_j}=\frac{\lambda}{L\cos\theta_j} \tag{5.2.1}$$

其中,光栅的周期数与光栅常数的乘积 $L=Nd$ 就是光栅的有效宽度.

光谱线的角宽度与光栅的有效宽度成反比,也与衍射角(即衍射级数)有关,衍射角大,则角宽度也较大.但是,由于光栅系统基本上都满足近轴条件,也就是说,通常都是小角度衍射,所以衍射角度对谱线的角宽度的影响并不大.

2. 光栅的分辨本领

入射光是白光,则同一级衍射谱中,不同的波长成分有不同的衍射角.由于每一根衍射光谱都有一定的半角宽度,如果波长差为 $\delta\lambda$ 的两根光谱线靠得较近,则有可能相互重叠而无法分辨.

设波长差为 $\delta\lambda$ 的同级衍射光谱线的角距离为 $\delta\theta$，由光栅方程 $d\sin\theta_j=j\lambda$，可以得到 $d\cos\theta\delta\theta=j\delta\lambda$，即

$$\delta\theta=j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta} \tag{5.2.2}$$

用瑞利判据(图 5.2.3)，当 $\delta\theta\geqslant\Delta\theta$ 时，λ 与 $\lambda+\delta\lambda$ 的谱线是可以分辨的，因而由式(5.2.1)和式(5.2.2)，有 $j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta}\geqslant\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$，得到

$$\delta\lambda\geqslant\frac{\lambda}{jN} \tag{5.2.3}$$

只有波长差大于式(5.2.3)所表示的数值，才可以分辨. 或者，可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda_{\min}=\frac{\lambda}{jN} \tag{5.2.4}$$

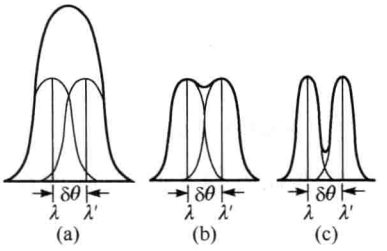


图 5.2.3 瑞利判据

一般用分辨本领表示光栅对不同波长光谱线的分辨能力，分辨本领的定义是 $A=\frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$，则

$$A=jN \tag{5.2.5}$$

分辨本领是针对波长的分辨，因而也称为色分辨本领.

由式(5.2.5)可见，N 越大，j 越大，分辨本领越大；分辨本领与光栅常数 d 无关.

5.2.2 光栅的色散与自由光谱范围

1. 光栅的色散

不同波长的光在空间分开称为色散，通常用数学式 $\theta=\theta(\lambda)$ 表示色散. 光栅具有色散能力.

通常用以下参数衡量光栅的色散能力.

(1) $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$：角色散率，光栅的分光能力.

定义为：两条纯数学的光谱线在空间分开的角距离.

由光栅方程，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{j}{d\cos\theta} \tag{5.2.6}$$

由色散率的定义和光栅衍射特征，可以得到

(a) 当 $j=0$ 时，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda=0$，零级光谱无色散，即所有不同波长的零级光谱线都集中于同一位置. 原因是零级谱的干涉的光程差等于零.

(b) 当 θ 很小时，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda=j/d$，对于固定的衍射级数 j，角色散率为常数.

角色散率与 N 无关.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}$：线色散率，光谱线在焦平面上分开的距离. 对于夫琅禾费衍射，线色散率与角色散率的关系为

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}=f\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} \tag{5.2.7}$$

2. 光栅的量程

由光栅方程 $d\sin\theta=j\lambda$ 或 $d(\sin\theta\pm\sin\theta_0)=j\lambda$ 可以看出，由于 $|\sin\theta|<1$，所以

$$\lambda=\frac{d\sin\theta}{j}<d \tag{5.2.8}$$

即波长大于光栅常数的光不满足光栅方程，因而光栅的量程，即可以测量的最长波长为光栅的周期 d.

3. 自由光谱范围

若入射光的波长范围为 $\lambda_m\sim\lambda_M=\lambda_m+\Delta\lambda$，则经光栅衍射后有 $d\sin\theta_m(j)=d\sin\theta_0+j\lambda_m$，$d\sin\theta_M(j)=d\sin\theta_0+j\lambda_M=d\sin\theta_0+j(\lambda_m+\Delta\lambda)$，即 j 级光谱分布于 $\theta_m(j)\sim\theta_M(j)$. 为了使光谱线不重叠，即第 j 级的长波 λ_M 的谱线与第 $j+1$ 级的短波 λ_m 的谱线不重叠，就要求 $\theta_M(j)<\theta_m(j+1)$，由上式可以得到，$j(\lambda_m+\Delta\lambda)<(j+1)\lambda_m$，$\Delta\lambda<\lambda_m/j$，即

$$\lambda_M-\lambda_m<\lambda_m/j \tag{5.2.9}$$

入射光的波长范围必须满足式(5.2.9)，才能保证第 j 级光谱不与第 $j+1$ 级光谱重叠，这一波长范围称为**自由光谱范围**，即光栅可以自由工作的波长范围.

对于一级光谱($j=1$)，可以从光的短波端 λ_m 计算出光栅的自由光谱范围，$\lambda_M-\lambda_m=\Delta\lambda<\lambda_m$，所以一级光谱的自由光谱范围为$(\lambda_m,2\lambda_m)$. 同样也可以从其长波端确定此范围，对于一级光谱，有 $\Delta\lambda<\lambda_m=\lambda_M-\Delta\lambda$，即 $\Delta\lambda<\lambda_M/2$，一级光谱的自由光谱范围为$(\lambda_M/2,\lambda_M)$. 光栅的量程要求 $\lambda_M<d$，当 $\lambda_M=d$ 时，自由光谱范围为 $(d/2,d)$.

例 5.5

一光栅，光栅常数为 4μm，总宽度为 10cm，波长为 500.00nm 和 500.01nm 的平面波正入射，光栅工作在二级光谱，问这双线分开多大角度？能否分辨？

解 两谱线的距离 $\delta\theta=j\dfrac{\delta\lambda}{d\cos\theta}=\dfrac{2\delta\lambda}{d\cos\theta}$，考虑到

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(j\lambda/d)^2}=\sqrt{1-4\,(\lambda/d)^2}$$

$$\delta\theta=j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta}=\frac{2\delta\lambda}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}}=\frac{2\times0.01\text{nm}}{\sqrt{4^2-4\times0.5^2}\,\mu\text{m}}=5.16\times10^{-6}$$

光栅的刻线数 $N=W/d=10\text{cm}/4\mu\text{m}=2.5\times10^4$，由瑞利判据

$$\delta\lambda=\frac{\lambda}{jN}=\frac{500.0}{2\times2.5\times10^4}=0.01\text{nm}$$

恰可分辨.

5.3 闪耀光栅

5.3.1 问题的提出与解决方案

前面所讨论的平面型光栅，无论是透射式的还是反射式的，$j=0$ 级的色散为零，但该衍射级的强度却是最大的，如图 5.3.1 所示.

需要指出的是，能量集中是衍射的结果，即大部分能量都集中在衍射零级，衍射零级就是所谓的“几何像点”，而细锐的光栅光谱是缝间干涉的结果. 对于平面型光栅，单元衍射零级的位置与缝间干涉的零级的位置恰好是重合的，因为这样的位置无论对于衍射还是干涉，所有次波的光程差都等于 0. 如果让干涉零级与衍射的零级在空间上分开，则可以使衍射的绝大部分能量集中在一个非零的、有色散的衍射级上. 要做到这一点并不困难，通过前面的分析过程可以知道，对于光栅，单缝衍射与缝间干涉实际上是可以独立的.

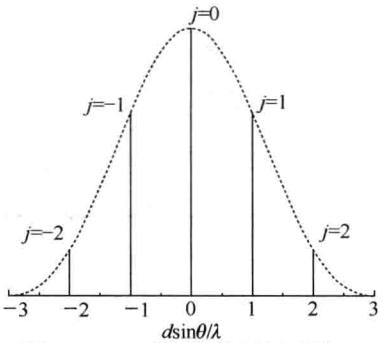


图 5.3.1 无色散的零级干涉与衍射的零级重合

5.3.2 闪耀光栅的结构

图 5.3.2 画出了两种不同的光栅，对于平面式的光栅，无论是透射还是反射，缝间干涉的光程差总是 0，所以几何像点的方向（即衍射 0 级的方向）也是干涉 0 级的方向. 如果让光栅的反射面与光栅平面之间保持一定的夹角 θ_B，如图 5.3.3 所示，对于缝间干涉，0 级依然在相对于光栅法线对称的方向上；由于衍射是每个反射面的行为，对于反射面，衍射 0 级在相对于每个反射面对称的方向上，所以衍射零级与干涉零级之间有 $2\theta_B$ 的夹角. 这样一来，光强最大的谱线就不再是 $j=0$ 级，如图 5.3.4 所示.

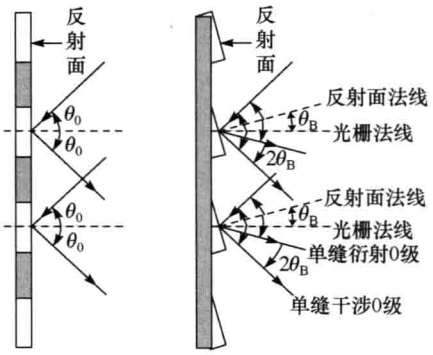


图 5.3.2　平面光栅与闪耀光栅比较

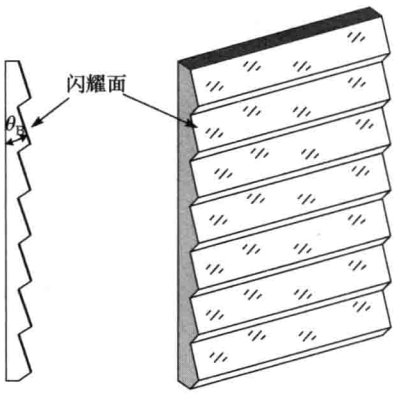


图 5.3.3　闪耀光栅的闪耀面

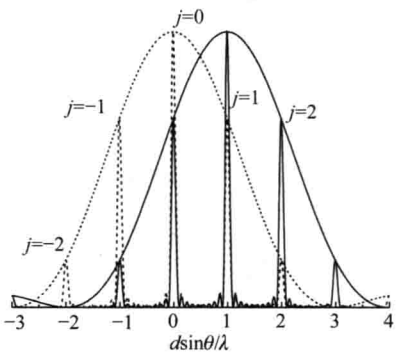


图 5.3.4　由于衍射零级移动使 $j=1$ 级谱线最强

具有这种结构的光栅，即反射面与光栅平面不平行而是保持一定夹角的光栅，被称为**闪耀光栅**（blazing grating）. 闪耀光栅同样也具有周期性结构，每一个反射面被称为**闪耀面**，闪耀面与光栅平面间的夹角称为闪耀角，记为 θ_B.

闪耀光栅的工作方式可以这样看：缝间干涉的光谱仍然由光栅的周期性结构（即光栅常数 d）决定，但由于闪耀面的倾斜，单缝衍射的光谱会产生相对的移动，即衍射中央主极大产生移动，从而使衍射主极大峰值与某个非零的干涉级重合.

5.3.3 闪耀光栅衍射的一般性分析

1. 闪耀面的单元衍射

如图 5.3.5 所示，以光栅的法线为基准，每个反射面的法线沿 θ_B 方向，沿 θ_0 方向的入射光，对反射面的入射角为 $\theta_0'=\theta_0-\theta_B$，沿 θ 方向的衍射光，对反射面的衍射角为 $\theta'=\theta+\theta_B$，于是衍射的复振幅分布可以表示为

$$\widetilde{U}(\theta)=\widetilde{U}_0\frac{\sin u}{u}=\widetilde{U}_0\frac{\sin\dfrac{\pi a[\sin(\theta+\theta_B)-\sin(\theta_0-\theta_B)]}{\lambda}}{\dfrac{\pi a[\sin(\theta+\theta_B)-\sin(\theta_0-\theta_B)]}{\lambda}}$$

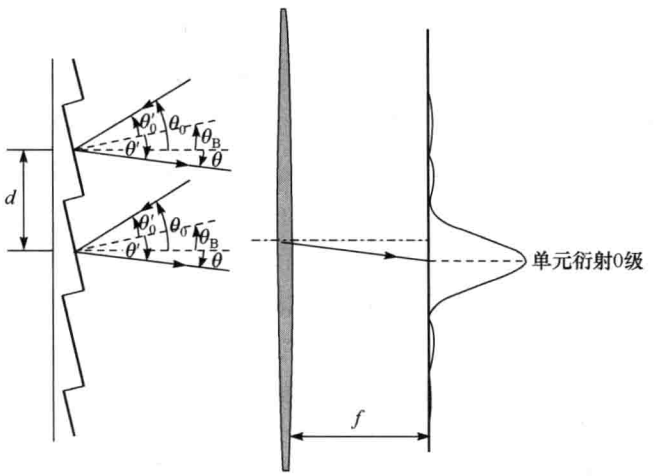


图 5.3.5 闪耀光栅单元衍射的强度分布

衍射 0 级的方向由 $\sin(\theta+\theta_B)-\sin(\theta_0-\theta_B)=0$ 决定，即 $\theta=\theta_0-2\theta_B$. 而对于图 5.3.6 所示的平面型反射光栅，衍射 0 级的方向为 $\theta=\theta_0$.

2. 各个闪耀面之间的干涉

由于不同闪耀面的次波之间的相干叠加是由光栅的周期性结构所决定的，所以缝间干涉的复振幅分布仍然为

$$\widetilde{N}(\theta)=\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin N\dfrac{\pi d(\sin\theta-\sin\theta_0)}{\lambda}}{\sin\dfrac{\pi d(\sin\theta-\sin\theta_0)}{\lambda}}$$

各个干涉级次仍然由光栅方程决定，为 $d(\sin\theta-\sin\theta_0)=j\lambda$.

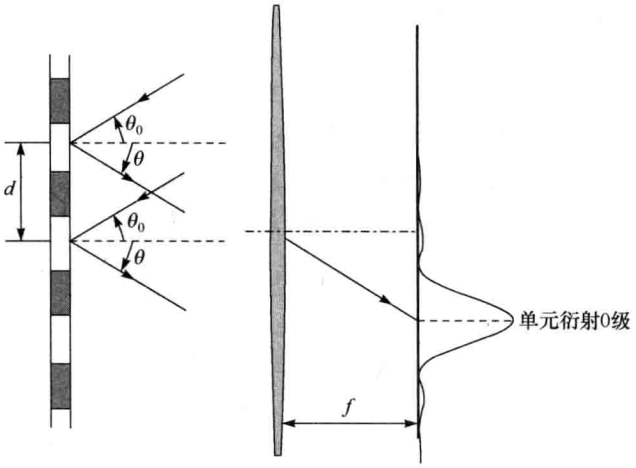


图 5.3.6　平面光栅单元衍射的强度分布

3. 闪耀光栅的光谱线

同时计入单元衍射与缝间干涉，整个光栅的衍射强度分布为

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

强度最大的光谱线位于衍射零级的方向，即衍射角为 $\theta=\theta_0-2\theta_B$，相应的级数为

$$j=\frac{d[\sin(\theta_0-2\theta_B)-\sin\theta_0]}{\lambda}$$

不再是缝间干涉的 0 级谱线，该谱线的色散不等于 0. 结果如图 5.3.7 所示.

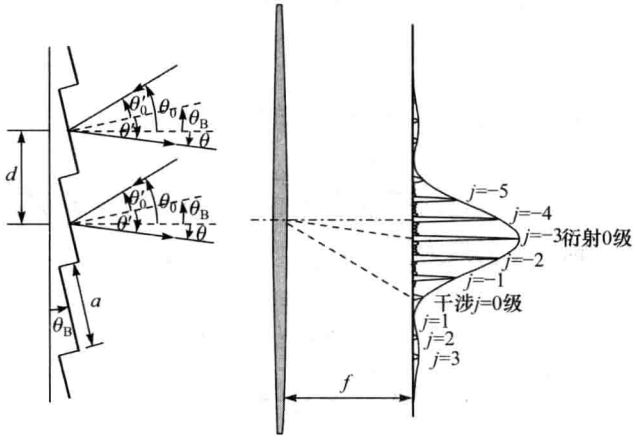


图 5.3.7　闪耀光栅单元衍射的光谱特征

5.3.4 两种常用的照明方式

对于闪耀光栅，入射光通常采用以特殊角度入射的方式，这种入射方式被称为闪耀光栅的照明方式.

通常采用图 5.3.8 所示的两种方式入射(照明).

第一种方式，如图 5.3.8(a)所示，光沿着闪耀面的法线入射，即 $\theta_0=\theta_B$，在反射光的方向上，缝间干涉的光程差为 $\Delta L=2d\sin\theta_B$，在这一方向上的光谱线满足的条件是 $2d\sin\theta_B=-j\lambda$，$j=-1$ 时，衍射最强的波长为 $\lambda_{1B}=2d\sin\theta_B$，$\lambda_{1B}$称为**一级闪耀波长**.

其他波长的一级光谱出现在闪耀波长附近. 由于衍射的零级有很大的宽度，所以其他波长的一级谱线也有足够的强度(图 5.3.9).

第二种方式，如图 5.3.8(b)所示，光沿着光栅平面的法线入射，即 $\theta_0=0$，入射光与反射面(即闪耀面)间的夹角为 θ_B，则反射光与入射光之间的夹角为 $2\theta_B$，因而在反射光的方向上，相邻两个单元干涉的光程差为 $\Delta L=d\sin2\theta_B$，在反射方向上，有 $d\sin2\theta_B=-j\lambda$，一级闪耀波长为 $\lambda_{1B}=d\sin2\theta_B$.

具有一级闪耀波长的谱线会出现在衍射 0 级的方向，而波长为 $\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 的谱线要满足条件 $2d\sin(\theta_B+\delta\theta)=\lambda_{1B}+\delta\lambda$(在采用第一种照明方式时)，当波长差 $\delta\lambda$ 不是很大时，$\delta\theta$ 也不是很大，所以该谱线依然有足够的强度，如图 5.3.9 所示. 同理，如采用第二种明方式，波长为 $\lambda_{1B}+\delta\lambda$ 的谱线要满足条件 $d\sin(2\theta_B+\delta\theta)=\lambda_{1B}+\delta\lambda$.

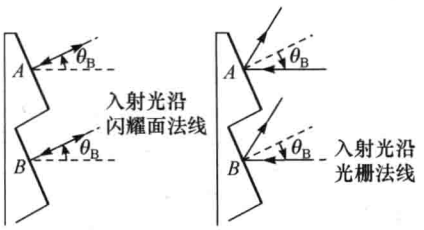


图 5.3.8 闪耀光栅两种常用的照明方式

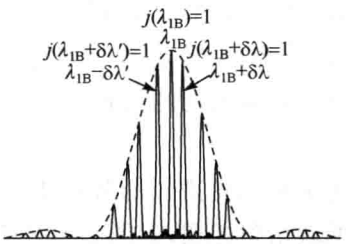


图 5.3.9 闪耀光栅不同波长的一级光谱

5.4 单色仪与光谱仪

衍射光栅具有色散能力，平行入射到光栅上的白光，经过光栅的色散，具有不同的波长的谱线将会出现在空间不同的位置上，即 $\theta=\theta(\lambda)$. 如果保持整个系统不

变，而只让某一个具有特定衍射角的谱线出射，则从系统中出射的光只具有单一的波长，这种仪器就是单色仪. 如果转动光栅，从而使不同波长的谱线能够在某个方位依次出射，从而测量出入射光中不同波长成分的强度，这就就是光谱仪. 其实，单色仪与光谱仪是同一种仪器，只是根据使用目的不同而有不同的名称. 早期的光谱仪或单色仪，是用玻璃棱镜作为色散元件，现在的光谱仪或单色仪中，几乎都采用闪耀光栅作为色散元件.

光栅光谱仪的结构可用图 5.4.1 说明. 入射狭缝 S_1 和出射狭缝 S_2 的位置是固定的，而缝宽可以调节. 球面反射镜 M_1 的焦点就是入射狭缝，入射光经 M_1 反射后变为平行光，射向光栅 G，光栅衍射光经过球面反射镜 M_2 后，射向出射狭缝 S_2. 由于出射狭缝 S_2 位于 M_2 的焦平面处，所以从 G 发出的同方向次波将在狭缝处会聚，而从光栅发出的同方向次波，就是光栅的某一级单色谱线. 保持其他元件不动，转动光栅 G，不同波长的谱线就可以从 S_2 射出. 在 S_2 处，连接探测器，如光电倍增管等，即可以测得射入 S_1 的光谱.

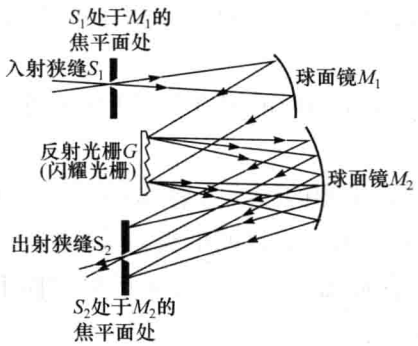


图 5.4.1　光栅光谱仪

在光谱仪中之所以不用透镜而采用反射镜作为聚光元件，是因为透镜会由于玻璃材料的色散而产生色差，无法使不同波长的光会聚在同一焦平面处，而球面反射镜对所有波长的光，其焦点或焦平面都在同一处.

如果将光栅 G 固定在某一角度保持不变，则从 S_2 出射的光，就具有固定的波长，就可以通过该装置从入射的白光中获得单一波长的出射光.

为了提高光谱仪的分辨本领，往往在其中安置两块衍射光栅，如图 5.4.2 所示. 在这种仪器中，入射狭缝 S_1 位于球面镜 M_1 的焦点处，闪耀光栅 G_2 位于球面镜 M_2 的焦平面处，而出射狭缝 S_2 位于球面镜 M_3 的焦平面处. 这样，经过第一块光栅 G_1 色散的光入射到第二块光栅 G_2 上，再经过一次色散，相邻波长间的角距离进一步增大，则最后从狭缝 S_2 出射的光，单色性将

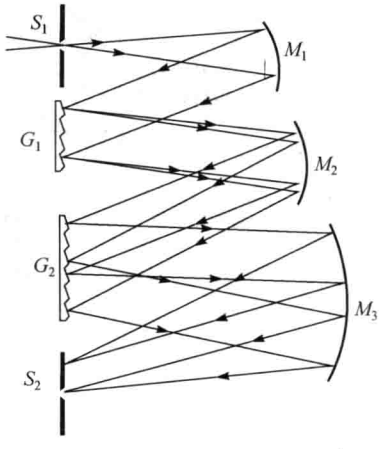


图 5.4.2　双光栅光谱仪

进一步提高. 双光栅单色仪的色分辨本领为

$$A=A_1A_2=j_1j_2N_1N_2$$

其中，A_1、N_1、j_1 和 A_2、N_2、j_2 分别是第一块光栅和第二块光栅的色分辨本领、光栅刻线数、各谱线级数.

如果将闪耀光栅加工成球面，则这样的光栅同时具有色散和聚光功能，如图 5.4.3所示.

双光栅光谱仪在工作过程中，两块光栅的转动机构要实现联动，通过两块光栅的同步转动，单色性很好的谱线从狭缝 S_2 射出.

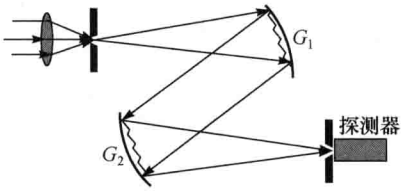


图 5.4.3 由球面光栅制成的双光栅单色仪

5.5 正弦光栅

前面讨论的光栅称为黑白型光栅，即透光部分与遮光部分截然分开，中间没有过渡：狭缝处，透过率为 1；其他部分，透过率为 0. 与黑白型光栅不同，正弦光栅具有可以用正弦或余弦函数表示的振幅透过率，其透过率往往表示为 $t\propto 1+\cos\dfrac{2\pi}{d}x$，其中 d 为光栅的空间周期.

则衍射屏上的瞳函数为

$$\widetilde{U}_0(x)=\widetilde{U}_0\left(1+\cos\frac{2\pi}{d}x\right) \tag{5.5.1}$$

单元衍射因子为

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\theta)&=K\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0}\int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{d}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\mathrm{d}x\\&=K\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0}\int_{-d/2}^{d/2}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{d}x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{d}x}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}\mathrm{d}x\\&=K\widetilde{U}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0}\int_{-d/2}^{d/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$\int_{-d/2}^{d/2}\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}dx=\frac{d}{2}\frac{\sin\left[\left(\pi-k\frac{d}{2}\sin\theta\right)\right]}{\pi-k\frac{d}{2}\sin\theta}=\frac{d}{2}\frac{\sin(\pi-\beta)}{\pi-\beta}$$

$$\int_{-d/2}^{d/2}\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{d}-k\sin\theta\right)x}dx=\frac{d}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}$$

于是

$$\tilde{u}(\theta)=K\tilde{U}_0 d\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}\right] \tag{5.5.2}$$

相当于具有三个不同的夫琅禾费单缝衍射因子，缝宽为 d，狭缝中心分别在 $0,\pi,-\pi$ 处. 正是多元衍射因子 $\tilde{N}(\theta)$ 的 0 级和 ±1 级的位置，其余的级次全部抵消，所以只有这三级衍射，如图 5.5.1 所示.

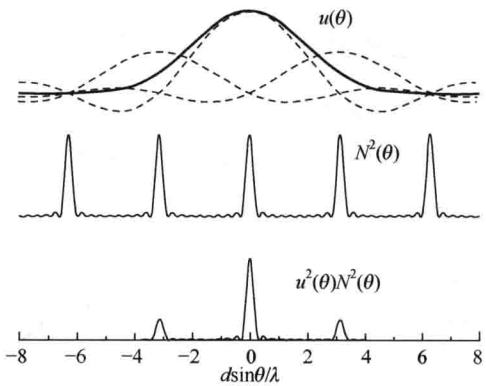


图 5.5.1　正弦光栅的衍射光谱

各列波的半角宽度分别为 $\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{L}$，$\Delta\theta_{\pm1}=\frac{\lambda}{L\cos\theta_{\pm1}}$，其中 L 是光栅的有效宽度.

上述各种黑白光栅和正弦光栅都属于**振幅型光栅**，振幅型衍射屏使得经过衍射屏的光的振幅发生变化. 除此之外，还有一种**相位型光栅**，可以使经过的光的相位发生变化，从而重新构建光波场，具有周期性变化的相位因子的衍射屏就是相位光栅. 其实，闪耀光栅就是一种相位型光栅.

例如，将光学玻璃做成阶梯形结构，每一阶都有相等的高度 d 和宽度 a，设玻璃的折射率为 n. 则从相邻台阶射出的光，光程差为 $\Delta l=(n-1)a$，相位差为 $\Delta\varphi=k\Delta L=\frac{2\pi(n-1)a}{\lambda}$.

例 5.6

三狭缝衍射屏，缝宽均为 a，彼此间距为 d，中间缝盖有可以引起 180° 相位改变的滤光片，波长为 λ 的单色光正入射，计算下列各种情况下的角度：

(1) 第一衍射极小；

(2) 第一干涉极小；

(3) 第一干涉极大.

解 (1) 衍射只与单缝有关，由于是等宽狭缝，所以各个缝的衍射图样完全重叠，则第一衍射极小出现在 $\sin\theta=j\dfrac{\lambda}{a}\overset{j=1}{=}\dfrac{\lambda}{a}$.

(2) 干涉由缝间光的相干叠加决定，干涉因子为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+kd\sin\theta\pm\pi)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+2kd\sin\theta)}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1+kd\sin\theta)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\sin\theta}-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(2\cos\beta-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{aligned}$$

光强为

$$I(\theta)=(2\cos\beta-1)^2$$

极小值条件为 $\cos\beta=1/2$，即 $\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=j\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$，于是得到

$$\sin\theta=\left(j\pm\frac{1}{3}\right)\frac{\lambda}{2d}$$

即第一干涉极小的位置为 $\sin\theta=\dfrac{\lambda}{6d}$.

(3) 干涉极大的条件为 $\cos\beta=-1$，即

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=(2j+1)\pi,\quad \sin\theta=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

一级干涉极大值的位置为 $\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2d}$.

5.6 X 射线在晶体中的衍射

5.6.1 晶格点阵

晶体具有周期性的空间结构，这是由于晶体中的原子、分子或离子在空间作周期性排列的结果，图 5.6.1 所示为 NaCl 中两种离子在空间周期性排列所形成的结构. 晶体的这种周期性可以用晶格描述，晶格中，能够体现晶体空间结构对称性的最小单元称为晶体的原胞，一个原胞中既可能只包含单个原子，也可能包含多个

原子. 将这些原胞在空间周期性排列，就组成了晶体.

在晶体结构学上，通常将一个原胞用一个点表示，则原胞的排列就变成了点的排列. 由于每一个点代表一个原胞，所以这些点就构成了与晶体结构一致的三维空间网格，这种反映晶体结构的网格被称为晶格，或晶格点阵，如图 5.6.2 所示.

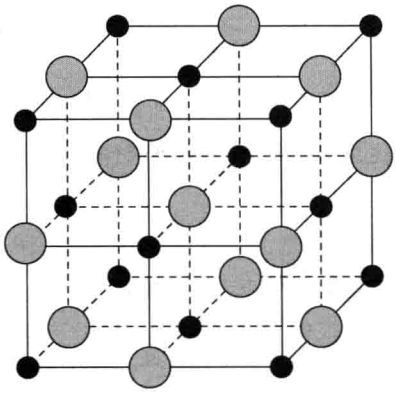


图 5.6.1　NaCl 的结构示意图

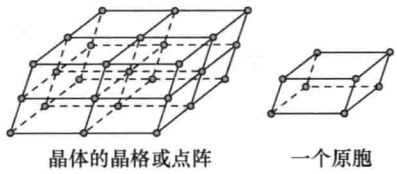


图 5.6.2　晶格点阵、原胞

晶格的每一个格点可能只是一个原子，也可能是若干个原子，或者是离子基团. 晶体中的带电粒子(实际上是原子内部的电荷)在入射 X 射线的交变电磁场中做受迫振动，振动的频率与入射波一致，这种振动所发出的电磁波，射向各个方向，就等效于将入射到晶体中的电磁波向各个方向散射. 由于晶体具有周期性的空间结构，所以各列散射波相位是关联的，散射波的叠加是相干叠加. 叠加的结果，使得沿某些方向散射的波得到大大的增强，而某些方向的散射波则显著减弱，这就是衍射. 因而具有空间周期性结构的晶体可以作为衍射光栅，这是一种三维的光栅.

5.6.2　X 射线在晶体中的衍射

晶体的结构周期，被称为晶格常数. 晶格常数是点阵中相邻格点的间距，通常是 nm 或 0.1nm 的数量级，比可见光的波长小得多，所以可见光不能在晶体中出现衍射.

而 X 射线的波长较短，与晶格常数匹配，所以 X 射线在晶体中可以发生衍射.

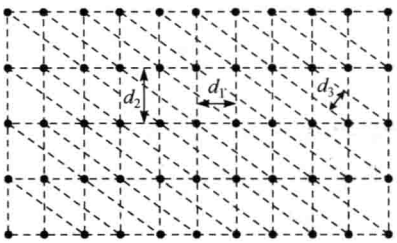


图 5.6.3　同一晶格中不同的晶面族

X 射线可以被晶格点阵中的每一个格点散射，衍射就是各个格点散射波的相干叠加.

可以在晶体中选取相互平行的一系列平面，每个平面被称为晶面，相互平行的等间隔的晶面构成一个晶面族. 晶体中有很多不同的晶面族(图 5.6.3)，不同的晶面族有不同的间距 d.

1. 衍射的极大值条件

可以将晶格中每一个格点作为一个散射单元，散射光是可以沿着任意方向的，但是这些光都是相干光，因而相干叠加的结果，只有在某些特殊的方向上得到加强. 衍射的极大值条件取决于其晶格点阵的结构，也就是取决于晶体的空间周期性.

由于晶体具有三维的周期性结构，相当于一个三维的光栅，所以对其衍射过程的分析，比起前面讲过的具有一维结构的光栅要复杂一些.

晶体点阵中的每一个格点都处在某个晶面上，因而处理晶体衍射，可以先求出每个晶面上散射光相干叠加的复振幅，再求出该晶面族所有晶面散射波叠加的复振幅. 这样就可以得到出现衍射极大的条件.

由于射向晶体的X射线是经过准直的，可看成平面波；探测器到晶体的距离又足够大，满足远场条件，所以X射线的衍射是夫朗禾费衍射.

2. 一个晶面上的衍射

记入射X射线相对于晶面的夹角为 θ，而散射光相对于晶面的夹角为 θ'，如图 5.6.4 所示. 相对于晶面的入射角、散射角都是掠射角.

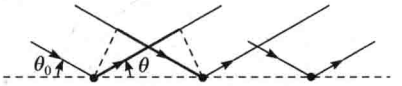


图 5.6.4 同一晶面散射X射线的相干叠加

一个晶面上各个格点都对入射光散射，其中相邻两个格点沿 θ 方向散射光的光程差为 $\Delta L_1 = a(\cos\theta' - \cos\theta)$. 如果上述光程差满足 $\Delta L_1 = a(\cos\theta' - \cos\theta) = j\lambda$，则散射光相干叠加，将会出现极大值. 然而，晶格沿不同方向的散射光的强度并不相同，只有 $j=0$ 的方向光强最大，其他方向的散射光，即使满足干涉相长的条件，强度也要弱得多. 因而每一个晶面的散射光，相干叠加的极大条件为

$$\theta' = \theta \tag{5.6.1}$$

对于一个晶面，相当于光被反射.

3. 晶面间干涉

不同晶面的反射光还要进行叠加. 若相邻晶面间距为 d，则相邻晶面的反射光之间的光程差为 $2d\sin\theta$，如图 5.6.5 所示. 当该光程差等于波长整倍数时，有极大值. 因此晶面间干涉的极大值条件，也就是晶体衍射的条件为

$$2d\sin\theta = j\lambda \tag{5.6.2}$$

式(5.6.2)称为布拉格条件或布拉格方程，是布拉格父子(William Henry Bragg，1862～1942；William Lawrence Bragg，1890～1971，英国)首先发现的.

X射线经过晶体衍射后，在空间形成一系列的衍射极大值分布. 对于周期性很好的单晶体，由于这种晶体光栅是三维的，所以衍射图样与一维的光栅是不同的，并没有一根根的衍射条纹，而是一系列的衍射斑点(图 5.6.6).

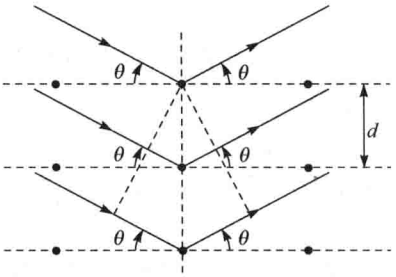


图 5.6.5　不同晶面间散射 X 射线的相干叠加

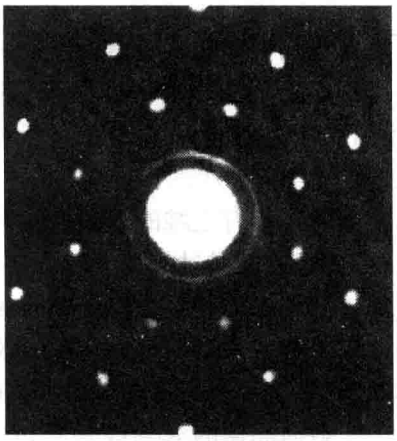


图 5.6.6　单晶体的 X 射线衍射图样

5.6.3　晶体 X 射线衍射的实验方法

1. 劳厄照相法

对于晶格常数未知的单晶体，可以采用具有连续谱的 X 射线衍射，用照像底片或其他的面探测器测量并记录衍射光的强度和方位，这是劳厄照相法(劳厄，Max von Laue，1879～1960，德国).

由于入射光的波长有一定的范围，所以总可以有某些特定的波长 λ 在某些特定的 θ 方向上满足布拉格方程(5.6.2).

如图 5.6.7 所示，射入晶体中的 X 射线，从各个满足布拉格公式的方向射出. 对于晶体中的某一个晶面族，如果发生衍射的掠入射角为 θ，则衍射光相对于该晶面族的掠射角也是 θ，如图 5.6.8 所示，那么，相对于入射光的方向，衍射光偏转了 2θ 角；换言之，在不知晶面族的方向时，从衍射光相对于入射光的偏转角 2θ，可以确定衍射角为 θ，进而确定晶面的取向.

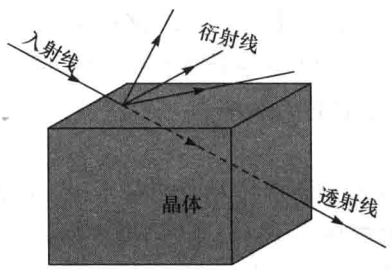


图 5.6.7　透射束与衍射束

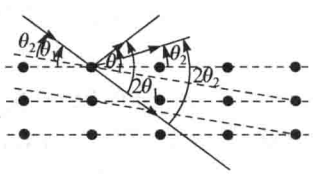


图 5.6.8　衍射束相对于入射束的偏转角

用照相法获得的单晶体X射线衍射图样，可以由上述方法根据衍射光的偏转角确定发生衍射的掠入射角 θ，进而确定发生衍射的晶面族的取向以及晶面间距.

对于单晶体，可以采用衍射仪测量晶面取向以及晶格常数. 这种装置中，入射光的方向是不变的，晶体放在可以绕轴转动的样品台上，而X射线探测器则处在以转轴为中心的一个圆周上. 从探测器位于X射线的入射方向开始，即 $\theta_0=0$，然后两者的转角保持联动，即样品转过 θ 角，探测器同时转过 2θ 角，如图 5.6.9 所示. 这种“θ-2θ”扫描方式，可以测得各级衍射光，进而得到晶格常数 d.

2. 德拜粉末法

除了有严格周期性的单晶体，实际中大量存在的是非晶体和多晶体. 多晶体是由很多个细小的单晶颗粒组成的，其中的各个小颗粒是任意取向的，如图 5.6.10 所示，用上述的劳厄照相方法无法得到好的衍射图样.

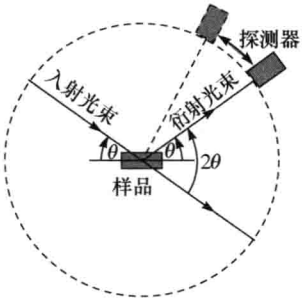


图 5.6.9 “θ-2θ”扫描



图 5.6.10 粉末样品中的晶粒

为了得到多晶样品的衍射图样，可以将多晶体压制成粉末，并制成细棒状. 在粉末样品中，多晶粒的晶面取向更加均匀，也就是相对于固定方向入射的单色X射线，不同晶粒的掠入射角有相当大的取值范围，其中总有一部分晶粒的掠入射角满足布拉格方程 $2d\sin\theta=j\lambda$. 满足方程的衍射光，相对于入射光转过 2θ 角，而与入射光成 2θ 角的直线在空间形成了一个圆锥面，该圆锥的顶角为 4θ，如图 5.6.11 所示，这种方法被称为德拜粉末法(德拜，Petrus Josephus Wilhelmus Debye，1884～1966，荷兰). 在图 5.6.11的衍射装置中，将照相底片安装在一个以样品棒为中心的圆筒壁上，衍射光在就照像底片上形成了以入射光为中心的一系

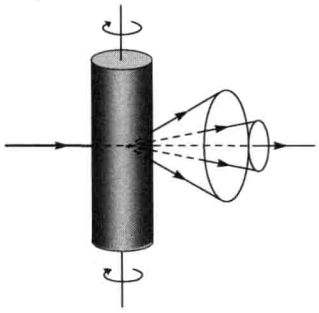


图 5.6.11 粉末样品的X射线衍射

列同心圆环(图 5.6.12).为了使得晶粒的取向更充分,可以让棒状的样品绕轴旋转.这种衍射装置也被称为德拜相机.根据各个德拜圆环的半径,可以计算出发生衍射的掠入射角,进一步得到粉末样品的晶格常数 d.

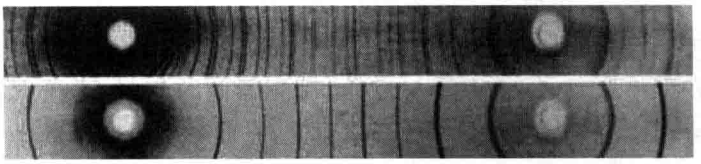


图 5.6.12　多晶体的圆环形衍射条纹

晶体的 X 射线衍射,成了确定材料空间结构的重要手段,生物 DNA 分子的双螺旋结构,就是根据其 X 射线衍射的结果确定的.

第 6 章　傅里叶变换光学

6.1　衍射屏对波前的变换

6.1.1　衍射系统的屏函数

波在自由空间中传播是不会出现衍射的，衍射发生的条件，是要求在波场中有障碍物. 衍射障碍物的存在，使得经过衍射障碍物后，光波在空间的分布发生了变化，即光的波面发生改变，或者说波前的复振幅分布发生了变化. 所以，把能使波前的复振幅发生改变的物，统称为衍射屏. 单缝、圆孔、光栅等是我们熟悉的衍射屏，透镜、棱镜等也是衍射屏.

例如，平面波经过棱镜后依然是平面波，但波矢的方向发生了变化；平面波经过透镜后，变为向焦点会聚的球面波等，这些都是衍射屏引起光波改变的例子.

衍射屏将波所在的空间分为前场和后场两部分，前场为**照明空间**，后场为衍射空间，如图 6.1.1所示.

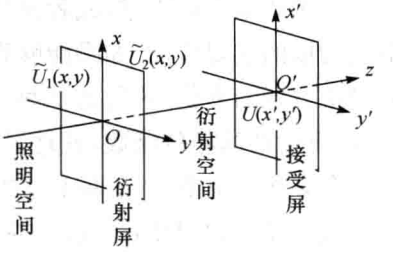


图 6.1.1　衍射系统

在衍射屏和接收屏处分别建立坐标系 $Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$，用函数来描写光波场的分布特征，由于其中的衍射屏、接收屏大多数情况下都是平面，所以上述函数都是波场的复振幅在某一个平面波前上的分布，这就是波前光场. 将波在衍射屏前后表面处的波前光场(复振幅分布函数)分别记为 $\tilde{U}_1(x,y)$ 和 $\tilde{U}_2(x,y)$，分别称为**入射场**、**透射场**(或**反射场**)；接收屏上的波前光场(复振幅分布函数)记为 $\tilde{U}(x',y')$，称为**接收场**. 可见，衍射屏的作用就是使函数 $\tilde{U}_1(x,y)$ 转换为函数 $\tilde{U}_2(x,y)$，用公式表示，即

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{U}_2(x,y)}{\tilde{U}_1(x,y)}=\frac{A_2(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,y)}}{A_1(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,y)}}=\frac{A_2(x,y)}{A_1(x,y)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)]}$$

其中，$\tilde{t}(x,y)$ 为透射率函数或反射率函数，是由衍射屏的特性决定的，也称为**屏函数**.

屏函数为复数，一般情况下可以写成

$$\tilde{t}(x,y)=t(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_t(x,y)} \tag{6.1.1}$$

屏函数的模 $t(x,y)$ 和幅角 $\varphi_t(x,y)$ 都是空间位置 (x,y) 的函数，其中，模 $t(x,y)=\dfrac{A_2(x,y)}{A_1(x,y)}$ 表示光波的振幅透过率，而幅角 $\varphi_t(x,y)=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)$ 表示衍射屏所引起的相位改变.

有些特殊的衍射屏，其屏函数的模 $t(x,y)$ 为常数，这类衍射屏称为**相位型**的，例如，不计吸收和反射的透镜、棱镜等；有些衍射屏，其屏函数的幅角 $\varphi_t(x,y)$ 为常数，如黑白光栅、正弦光栅、单缝、圆孔等，这类衍射屏称为**振幅型**的. 但一般情况下，大多数的衍射屏都是**相幅型**的，即屏函数的模和幅角都不是常数.

6.1.2 简单光波场的波前光场

如果知道了衍射屏的屏函数，即衍射屏的透射率函数或反射率函数，就可以确定已知入射场 $\tilde{U}_1(x,y)$ 经过衍射屏之后的衍射场 $\tilde{U}_2(x,y)$ 的复振幅分布，进而完全确定接收场 $\tilde{U}(x',y')$. 但由于衍射屏的复杂性以及衍射积分求解的困难，完全确定屏函数通常较困难，或者说几乎是不可能的. 所以只能采取一定的近似方法获取衍射场的主要特征. 如果能够确定屏函数的相位，则可以通过研究波的相位改变来确定波场的变化. 这种方法称为波前相位函数分析法，或者称为相位函数判断法. 这里所谓的相位函数，就是屏函数的相位.

在某些情况下，入射场和透射场都是简单的平面波或球面波. 所以熟悉简单光波的波前光场，对判断光波场的特性有很大的帮助. 以下将对简单光波的波前光场作一汇总.

取波前所在的平面为 $z=0$，则该波前上任一点的位矢为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$.

1. 平面波的波前光场

设波矢为 $\boldsymbol{k}=k(\sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_x+\sin\theta_2\,\boldsymbol{e}_y+\sin\theta_3\,\boldsymbol{e}_z)$，如图 6.1.2 所示，由于

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)$$

所以平面波的波前光场的相位函数为 $k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)$.

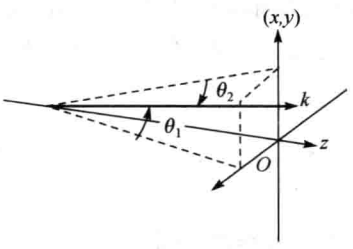


图 6.1.2 平面波

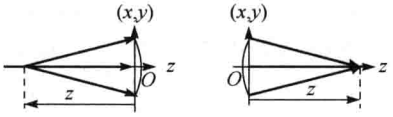
2. 轴上物点的球面波的波前光场

如图 6.1.3(a)所示，从轴上距离波前 z 处发出的球面波，在傍轴条件下，波前光场的相位函数为

$$k\frac{x^2+y^2}{2z}$$

向轴上距离波前 z 处会聚的球面波，如图 6.1.3(b)所示，在傍轴条件下，波前光场的相位函数为

$$-k\frac{x^2+y^2}{2z}$$



(a) 发散球面波　　(b) 会聚球面波

图 6.1.3　轴上物点的球面波

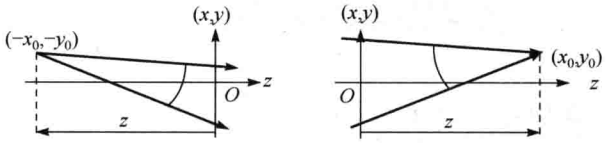
3. 轴外物点的球面波波前光场

如图 6.1.4(a)所示，从轴外物点$(x_0, y_0, -z)$处发出的球面波，在傍轴条件下，波前光场的相位函数为

$$k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}\right)$$

向轴外物点(x_0, y_0, z)处会聚的球面波，如图 6.1.4(b)所示，在傍轴条件下，波前光场的相位函数为

$$-k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}\right)$$



(a) 发散球面波　　(b) 会聚球面波

图 6.1.4　轴外物点的球面波

6.1.3　透镜的相位变换函数

设薄透镜中心处厚度为 d_0，有效口径为 D，即光束被限制在直径为 D 的范围内.

如图 6.1.5 所示，在透镜前后各取一个平面，入射波和透射波的复振幅分别为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(x,y)},\quad \widetilde{U}_2(x,y)=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(x,y)}$$

透镜的透过率函数可表示为

$$\tilde{t}_{\mathrm{L}}=\frac{A_2}{A_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)}=\begin{cases}a(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{L}}(x,y)}, & r<\dfrac{D}{2}\\ 0, & r>\dfrac{D}{2}\end{cases}$$

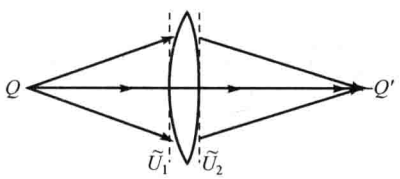


图 6.1.5　透镜的入射波与透射波

其中，$\varphi_L(x,y)=\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)$；$r=\sqrt{x^2+y^2}$，为透镜上一点到光轴的距离.

忽略透镜的吸收和反射，即 $a(x,y)=A_2/A_1=1$，有

$$\tilde{t}_L(x,y)=e^{i\varphi_L(x,y)}=e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{6.1.2}$$

式(6.1.2)就是透镜的屏函数，由于透镜是相位型的衍射屏，所以其屏函数也被称为相位变换函数.

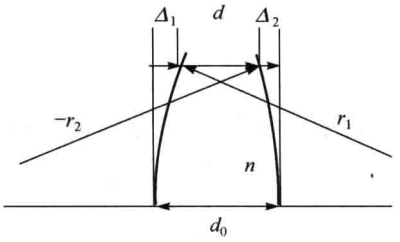


图 6.1.6　薄透镜的相位变换

对于薄透镜，采取傍轴近似，可以认为透镜中的光线平行于光轴. 根据图 6.1.6可以求得经透镜后的相位差为

$$\begin{aligned}\varphi_L(x,y)&=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+nd(x,y)]\\&=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+n(d_0-\Delta_1-\Delta_2)]\\&=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(\Delta_1+\Delta_2)\end{aligned}$$

其中，$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$，是一个由透镜所决定的常数. 在近轴条件下，有

$$\Delta_1(x,y)=r_1-\sqrt{r_1^2-(x^2+y^2)}=r_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r_1^2}}\right)\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1}$$

$$\Delta_2(x,y)=-r_2-\sqrt{r_2^2-(x^2+y^2)}\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}$$

于是得到

$$\varphi_L(x,y)=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)$$

式中，$\frac{2\pi}{\lambda}$为波矢 k，记 $F=\dfrac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$，即薄透镜的焦距. 则有

$$\varphi_L(x,y)=\varphi_0-k\frac{x^2+y^2}{2F} \tag{6.1.3}$$

忽略常数 $\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$，可得透镜的相位变换函数为

$$\tilde{t}_L(x,y)=\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right) \tag{6.1.4}$$

透镜的相位函数为 $-k\dfrac{x^2+y^2}{2F}$.

可以用上述函数得到几何光学的物像公式.

例 6.1

计算沿光轴的平面波经透镜之后，光波场的特征.

解 平行光沿光轴入射，入射波在透镜主平面处的复振幅为 $\widetilde{U}_1=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$，利用屏函数，可得到透射波的复振幅为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_L(x,y)=A\exp[\mathrm{i}(\varphi_0+\varphi_1)]\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

这是会聚到透镜后 F 处的球面波，可见 F 为透镜焦距. 相位的常数部分不起作用，所以可以略去不写.

例 6.2

轴上点光源发出的球面，经透镜之后，具有何种特征?

解 设入射波的光源在透镜前 s 处，则透镜主平面处的入射场为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)$$

则衍射波为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=A\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)$$

$$=A\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)\right]$$

为会聚到 $\left(\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{s}\right)^{-1}$ 处的球面波. 会聚点到透镜主平面的距离为

$$s'=1\Big/\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)=\frac{sF}{s-F}$$

物点和会聚点的关系也可以表示为

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{F}$$

这就是透镜成像的高斯公式. 当 $s=F$ 时，球面波经过透镜后变为平面波.

例 6.3

讨论轴外点光源发出的光波经透镜变换之后的情况.

解 设发光的物点位于$(-x_0,-y_0,-s)$,则在透镜的主平面处,入射场为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{xx_0+yy_0}{s}\right)\right]$$

衍射场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x,y)&=A\exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2s}-\frac{xx_0+yy_0}{s}\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2F}\right)\\&=A\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{s}\right)-\frac{-xx_0-yy_0}{s}\right]\\&=A\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2\dfrac{Fs}{F-s}}-\frac{-xx_0-yy_0}{\dfrac{Fs}{F-s}}\frac{F}{F-s}\right)\end{aligned}$$

可以判断出,经透镜后,光波是向轴外会聚的球面波,会聚点为

$$\left(-\frac{Fx_0}{F-s},-\frac{Fy_0}{F-s},\frac{Fs}{F-s}\right)$$

即像距为$s'=\dfrac{Fs}{F-s}$,横向放大率为$-\dfrac{F}{F-s}$.

6.1.4 光楔的相位变换函数

在光楔前后各取一相互平行的平面,入射波和透射波在两平面上的复振幅各为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=A_1\exp[\mathrm{i}\varphi_1(x,y)],\ \widetilde{U}_2(x,y)=A_2\exp[\mathrm{i}\varphi_2(x,y)]$$

对于如图 6.1.7 所示的薄楔形棱镜,取底边为 y 轴,竖直方向为 x 轴,可以得到

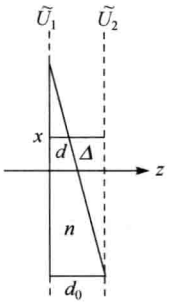


图 6.1.7 光楔的相位变换

$$\varphi_P(x)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd_0-n\Delta)=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta$$

其中,$\varphi_0=\dfrac{2\pi}{\lambda}nd_0$,为常数,相当于光从光楔底部通过造成的相位滞后. 如果光楔楔角为 α,则 $\Delta=\dfrac{d_0}{2}+x\alpha$,$d_0$ 为棱镜底部的厚度.

略去相位中的常数部分,得到棱镜(光楔)的相位函数为

$$\varphi_P(x,y)=-k(n-1)\alpha x \tag{6.1.5}$$

如果光楔的前表面保持在 xy 平面内，而前后两面的交棱在 xy 平面内沿任意方向，即相当于棱镜绕光轴转过一个角度. 斜面法线的方向余弦角由 α_1,α_2 表征，则屏函数为

$$\tilde{t}_P(x,y)=\exp[-\mathrm{i}k(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]$$

例如，轴上一物点到光楔的距离为 s，则其发出的球面波经过光楔后出射的波前可以按以下方法求得：

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_2(x,y)&=\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_P(x,y)\\&=A_1\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2s}\right)\exp[-\mathrm{i}k(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]\\&=A_1\exp\left\{\mathrm{i}k\left[\frac{x^2+y^2}{2s}-(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)\right]\right\}\end{aligned}$$

这是轴外物点发出的球面波，点源的位置为 $x_0=(n-1)\alpha_1 s, y_0=(n-1)\alpha_2 s, z_0=s$.

透镜和棱镜仅是相位型的衍射屏，只对波的相位起变换作用，是一种简单的变换装置.

6.2 接收场的傅里叶变换

经过衍射屏的光波在接收屏上所形成的复振幅，被称为接收场.

在入射场已知的情况下，要想确定接收场至少还要经过以下两个步骤：

第一，求出透射场. 如果屏函数已知，则可以得到透射场为

$$\widetilde{U}_2(x,y)=\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)$$

第二，求出接收场. 要利用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_2(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

总的过程用公式表达，就是

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.2.1}$$

其中，$r\overset{z'=0}{=}\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}$，$z$ 为接收屏到衍射屏的距离. 上式中的积分区域只要取在衍射屏处即可.

6.2.1 衍射积分的近似

对于一般情形下的衍射，严格求解上述积分几乎是不可能的，因而总是在一定的条件下，采取近似，才能求解.

衍射中常采用的近似方法主要有傍轴（近轴）条件和远场条件，由此将衍射分

为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射.

1. 积分公式的简化

对于夫琅禾费衍射系统,设入射光为 xOz 平面内的平面光,即 $\widetilde{U}_1(x,y)=A_1 e^{ikx\sin\theta_0}$,衍射屏函数记为 $\tilde{t}(x,y)$,系统满足近轴条件,即倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)\approx 1$,在接收屏上的复振幅为

$$\widetilde{U}(x',y')=K\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\frac{e^{ik\cdot r}}{f}dxdy$$

其中,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\Delta\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0+kx\sin\theta$,上式也可写为

$$\widetilde{U}(x',y')=\frac{KA_1}{f}e^{ik\cdot r_0}\iint_{\Sigma}\tilde{t}(x,y)e^{ik(\sin\theta_0+\sin\theta)x}dxdy$$

2. 衍射场的近似条件

1) 菲涅耳衍射

如果接收屏距离衍射屏较近,在近轴条件下,即 $z^2\gg(x'-x)^2+(y'-y)^2$ 时,积分公式(6.2.1)中的因子 $\frac{e^{ikr}}{r}$,其相位中的 r 可以化为如下形式:

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2}=z\sqrt{1+\left(\frac{x'-x}{z}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{z}\right)^2}$$

$$\approx z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}$$

并注意到分母中的 r 可以用 z 代替. 于是积分公式(6.2.1)化为

$$\widetilde{U}(x',y')=K\frac{e^{ikz}}{z}\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_1(x,y)\tilde{t}(x,y)\exp\left\{ik\left[\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}\right]\right\}dxdy$$

这就是菲涅耳衍射积分公式.

2) 夫琅禾费衍射

如果接收屏距离衍射屏较远,满足远场条件,即 $z\gg\frac{x^2+y^2}{\lambda}$,由于

$$kr\approx k\left[z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}\right]=k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

$$=k\left(z-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)+\frac{\pi(x^2+y^2)}{z\lambda}$$

$$\approx k\left(z-\frac{xx'+yy'}{z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

由于入射波 $\widetilde{U}_1(x,y)$ 是平面波,其相位为 $k(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)$,总是可以表示为 x、y 的线性函数,则衍射积分化为

$$\widetilde{U}(x',y') =$$

$$A_1 K \frac{e^{ik\left(z+\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)}}{z}\iint_{\Sigma}\tilde{t}(x,y)\exp[ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)]\exp\left(-ik\frac{x'x+y'y}{z}\right)dxdy$$

这就是夫琅禾费衍射积分公式.

可见,对于夫琅禾费衍射,积分公式可化为$\iint\tilde{t}(x,y)e^{i(f_1x+f_2y)}dxdy$的形式.

6.2.2 衍射系统的傅里叶变换

夫琅禾费衍射系统的接收场可通过以下积分确定:

$$\widetilde{U}(x',y') = K'\iint\tilde{t}(x,y)e^{i(f_1x+f_2y)}dxdy$$

从数学上看,上式就是对于屏函数$\tilde{t}(x,y)$的傅里叶变换.因此,求解夫琅禾费衍射问题,就变成了屏函数的傅里叶变换问题.

6.3 夫琅禾费光栅衍射的傅里叶频谱分析

6.3.1 屏函数的傅里叶变换

1. 空间频率的概念

单缝、距孔、圆孔或者光栅,都是衍射屏,其作用是使入射波的波前改变,可以用屏函数表示衍射屏的作用.有一类应用广泛的衍射屏是衍射光栅,即具有周期性结构的衍射屏.

衍射光栅具有空间的周期性,无论是黑白型的光栅还是正弦型的光栅,其周期都可以用光栅常数d表示.

周期的倒数是频率,例如,对于振动,其振动周期T的倒数是振动的频率ν,这是时间上的周期和频率.同样,在空间上也可以定义周期和频率,空间周期的倒数就是空间频率,即有$f=\frac{1}{d}$.f称为空间频率.周期性的衍射屏,既可以用空间周期描述,也可以用空间频率描述.

前面说过的反射、透射光栅,可以认为是"黑白型"的,即一部分使光全部透射或反射,另一部分全部不透光,其透过率函数可表示为图6.3.1;透过率函数也可以是二维分布的(图6.3.2),这些都是典型的振幅型衍射屏,其屏函数表示为

$$\tilde{t}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{透光部分}\\ 0, & \text{遮光部分}\end{cases} \tag{6.3.1}$$

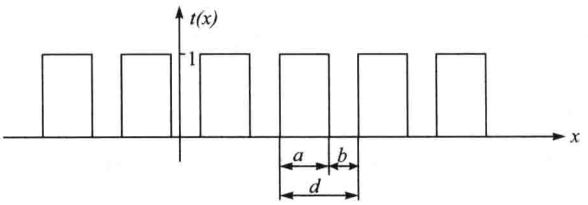


图 6.3.1　振幅型光栅的透过率函数

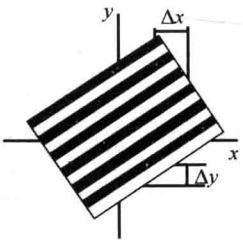


图 6.3.2　二维振幅型光栅

严格的周期函数，应该是定义域为整个 xy 平面的周期函数，而实际的光栅总是有限大小的.

如果 x 方向的透过率表示为

$$\tilde{t}(x)=\begin{cases}1, & x_0+nd<x<x_0+nd+a\\ 0, & x_0+nd+a<x<x_0+(n+1)d\end{cases},x\in(-\infty,+\infty) \quad (6.3.2)$$

该透过率函数的周期性表示为 $\tilde{t}(x)=\tilde{t}(x+nd)$，$d$ 为最小的空间周期，即空间周期，空间频率为 $f=\dfrac{1}{d}$.

2. 正弦光栅的傅里叶变换

如果光栅的透过率是三角函数形式，即余弦或正弦型的，称为正弦光栅.

如果正弦光栅的刻线与 y 轴平行，则其透过率在 x 方向作周期性变化，周期为 d，空间频率为 f，$f=1/d$. 其屏函数可以写成

$$\tilde{t}(x)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0) \quad (6.3.3)$$

如果平行光正入射，由于 $\widetilde{U}_1(x)=A_1$，则透射波的复振幅为

$$\widetilde{U}_2(x)=\widetilde{U}_1(x)\tilde{t}(x)=A_1[t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)]$$

将透射波用复振幅表示，由于

$$\cos(2\pi fx+\varphi_0)=\frac{1}{2}\{\exp[\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]+\exp[-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]\}$$

所以得到

$$\widetilde{U}_2(x)=A_1t_0+\frac{1}{2}A_1t_1\{\exp[\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]+\exp[-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)]\} \quad (6.3.4)$$

即

$$\widetilde{U}_2(x)=\widetilde{U}_0(x)+\widetilde{U}_{+1}(x)+\widetilde{U}_{-1}(x) \quad (6.3.5)$$

透射波实际上变为三列平面波，分别为 $\widetilde{U}_0(x)=A_1t_0$，$\widetilde{U}_{+1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$ 和 $\widetilde{U}_{-1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$，如图 6.3.3 所示.

下面讨论上述三列透射波的方向.

$\widetilde{U}_0(x)=A_1t_0$ 为沿 z 方向的平面波.

$\widetilde{U}_{+1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$ 的波矢在 x 方向的分量为 $k_x^{+1}=2\pi f$,其方向角 θ_{+1} 满足条件 $\sin\theta_{+1}=\dfrac{k_x^{+1}}{k^{+1}}=\dfrac{2\pi f}{\dfrac{2\pi}{\lambda}}=f\lambda$.

$\widetilde{U}_{-1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$ 的波矢在 x 方向的分量为 $k_x^{-1}=-2\pi f$,其方向角 θ_{-1} 满足条件 $\sin\theta_{-1}=\dfrac{k_x^{-1}}{k^{-1}}=-f\lambda$.

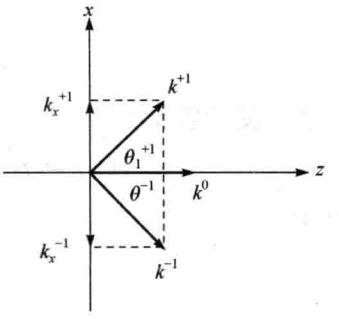


图 6.3.3 平面波透过正弦光栅后的方向

$\widetilde{U}_0(x)=A_1t_0$,被称为 0 级波,直流成分;$\widetilde{U}_{+1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$,被称为 +1 级波;$\widetilde{U}_{-1}(x)=\dfrac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}$ 被称作−1 级波.

上述结果与 5.5 节中用衍射积分公式得到的结果是不一样的,积分公式的结果是

$$\widetilde{U}(x)=KF\widetilde{U}_0d\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{f}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}\right]$$

不同的原因是光栅的宽度是有限的,所以 5.5 节中的屏函数或透过率函数实际上不是严格的周期性函数,因而每一列波不是平面波,而是有相应的半角宽度.

6.3.2 周期性屏函数的傅里叶变换

1. 一般的周期性函数的傅里叶变换

对于一般的周期性的屏函数,可以用傅里叶级数将其展开为一系列正弦和余弦函数的和.

如果周期函数为 $t(x)$,其周期为 d,$x\in(-\infty,+\infty)$,则 $t(x)$ 可以用傅里叶级数表示,即

$$t(x)=t_0+\sum_{n>0}a_n\cos(2\pi f_nx)+\sum_{n>0}b_n\sin(2\pi f_nx) \tag{6.3.6}$$

其中,$f_1=\dfrac{1}{d}$,是基频;$f_n=nf_1=n\dfrac{1}{d}$,是 n 倍频.

而相应的傅里叶系数为

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.7}$$

$$a_n = \frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\cos(2\pi f_n x)\mathrm{d}x \tag{6.3.8}$$

$$b_n = \frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\sin(2\pi f_n x)\mathrm{d}x \tag{6.3.9}$$

或者，也可以写为余弦函数的形式

$$t(x) = t_0 + \sum_{n>0} c_n \cos(2\pi f_n x - \varphi_n) \tag{6.3.10}$$

其中，

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{6.3.11}$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{6.3.12}$$

或者用复指数表示，为

$$\tilde{t}(x) = t_0 + \sum_{n\neq 0} t_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi f_n x - \varphi_n)} = t_0 + \sum_{n\neq 0} \tilde{t}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f_n x} \tag{6.3.13}$$

其中

$$\tilde{t}_n = t_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) \tag{6.3.14}$$

傅里叶系数 $\tilde{t}_n$ 可以直接求出，为

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} t(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi f_n x}\mathrm{d}x \tag{6.3.15}$$

波动光学中，用复数表示有简单明了的优点，所以上述的复数表达式具有代表性.

2. 屏函数的傅里叶频谱

$\tilde{t}_n$ 是将周期性函数展开为傅里叶级数后频率为 f_n 成分的系数，实际上表示了每一个频率成分所占的比例. 如果从波的角度看，将 $\tilde{t}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f_n x}$ 视为波的复振幅，则 $\tilde{t}_n$ 表示的就是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_n x}$ 的振幅.

$\tilde{t}_n$ 的集合称为**傅里叶频谱**，即空间频率为 f_n 的成分的振幅. 对于周期性的屏函数，$\tilde{t}_n$ 的取值是分立的，而非周期性的屏函数，由于必须以傅里叶积分的形式表示，则 $\tilde{t}_n$ 的取值为连续的.

从傅里叶变换的角度来看，任何形式的衍射屏或物体，即任何形式的屏函数，都可以看成一系列具有空间周期性的函数的线性叠加，即空间频谱的线性叠加. 每一个周期函数的相位函数可以表示为 $\varphi_n = 2\pi f_n x$，单色平面波照射到这些物体上，由于平面波的相位因子也是线性的，即 $\varphi(x,y) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$，所以透射波也是一系列具有空间周期性函数的线性叠加，其每一成分的周期 f_n 与屏函数的周期有关，该成分的相位函数为 $\varphi_n' = \varphi(x,y) + \varphi_n = k_x x + k_y y + k_z z + 2\pi f_n x + \varphi_0$，则分解成一系列向不同方向出射的单色平面波，或者是分立的，或者是连续的.

3. 傅氏面

每一个空间频谱代表一个衍射波，该衍射波是平面波. 用透镜可以将不同方向的平面衍射波会聚到其像方焦平面上的不同位置，则得到一系列的衍射斑，焦平面就是入射波经过衍射屏之后形成的空间频谱面，即衍射屏或原图像的**傅里叶频谱面**，简称为**傅氏面**. 夫琅禾费衍射装置实际上就是傅里叶频谱分析器.

4. 黑白型光栅屏函数的傅里叶级数与衍射场

一维情形，即光栅的刻线方向与坐标轴平行，设与 y 轴平行，屏函数是在 x 方向的周期性函数，其周期性屏函数可以表示为 $\tilde{t}(x)=\tilde{t}(x+nd)$，设 $x\in(-\infty,+\infty)$，n 为整数. 可以直接用傅里叶级数表示为

$$\tilde{t}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nfx}$$

则其中的傅里叶频谱为

$$a_n=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nfx}\mathrm{d}x=\frac{1}{d}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nfx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{d\mathrm{i}2\pi nf}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi nfa}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi nfa})$$
$$=\frac{\sin(\pi nfa)}{d\pi nf}=\frac{a}{d}\frac{\sin(\pi nfa)}{\pi nfa}=\frac{a}{d}\frac{\sin(\pi na/d)}{\pi na/d}$$

其方向为 $\sin\theta_n=nf\lambda=\frac{n}{d}\lambda$，即 $d\sin\theta_n=n\lambda$，为光栅方程.

n 级谱的强度为

$$I_n=|a_n|^2=\left[\frac{a}{d}\frac{\sin(\pi na/d)}{\pi na/d}\right]^2=\left(\frac{a}{d}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_n\right)^2}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_n\right)^2}\qquad(6.3.16)$$

为单元衍射因子对应的强度分布.

例如，对于 $a=d/2$ 的光栅，其屏函数的傅里叶展开式为

$$t(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(2\pi fx)-\frac{2}{3\pi}\cos(2\pi\cdot 3fx)+\frac{2}{5\pi}\cos(2\pi\cdot 5fx)-\cdots$$

或用指数表示为

$$\tilde{t}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx})-\frac{1}{3\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdot 3fx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 3fx})$$
$$+\frac{1}{5\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdot 5fx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\cdot 5fx})-\cdots$$

其二、四、六等衍射级次缺级.

6.3.3 非周期性的屏函数的傅里叶变换

非周期性的函数，相当于 $f=\frac{1}{d}=0(d=\infty)$ 的周期性函数.

如对于定义域为$(-L/2,L/2)$函数$g(x)$，如图 6.3.4 所示，可以将上述定义域作为函数的周期，其空间周期为L，取其在一个周期，即$(-L/2,L/2)$间的一段，展开为

$$g(x)=g_0+\sum_{n\neq 0}\widetilde{g}_n e^{i2\pi nfx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{g}_n e^{i2\pi nfx} \tag{6.3.17}$$

其中，$f=\dfrac{1}{L}$，为基频. 其傅里叶系数为

$$\widetilde{g}_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi nfx}\,dx \tag{6.3.18}$$

其中，$f_n=nf$. 相应有

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\widetilde{g}_n e^{i2\pi nfx}\frac{1}{L}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\widetilde{g}_n e^{i2\pi nfx}(f_{n+1}-f_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\widetilde{g}_n e^{i2\pi f_n x}\Delta f_n \tag{6.3.19}$$

如$L=\infty$，上述求和化为积分，有

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\widetilde{g}_n e^{i2\pi f_n x}\Delta f_n=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi f_n x}\,df_n=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi fx}\,df \tag{6.3.20}$$

反变换，即傅里叶系数为

$$G(f)=L\widetilde{g}_n=\int_{-L/2}^{L/2}g(x)e^{-i2\pi fx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}\,dx \tag{6.3.21}$$

即有对于非周期性函数的傅里叶积分变换，或傅里叶变换，可以用积分表示其频谱，为

$$\begin{cases}g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{i2\pi fx}\,df\\ G(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i2\pi fx}\,dx\end{cases}$$

可见，非周期函数的频谱$G(f)$为连续谱.

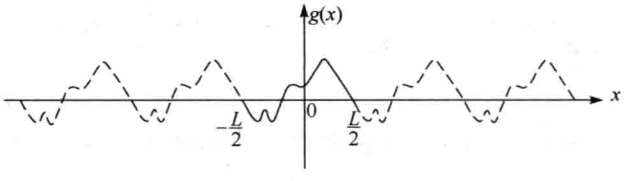


图 6.3.4　非周期性的函数

例如，对于单缝衍射屏，其屏函数为

$$g(x)=\begin{cases}A, & |x|<a/2\\ 0, & |x|>a/2\end{cases}$$

作傅里叶变换，有

$$G(f)=\int_{-a/2}^{a/2}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{A}{-\mathrm{i}2\pi f}\int_{-a/2}^{a/2}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}d(-\mathrm{i}2\pi fx)=\frac{A}{-\mathrm{i}2\pi f}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi fa}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi fa}]$$
$$=A\frac{-\mathrm{i}2\sin(\pi fa)}{-\mathrm{i}2\pi f}=aA\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中，$\alpha=\pi fa$.

如果平面波正入射 $\widetilde{U}_1(x)=A_1$，屏函数中 $A=1$，透射波为

$$\widetilde{U}_2(x)=\widetilde{U}_1(x)g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}aA_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}aA_1\frac{\sin\pi fa}{\pi fa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\,\mathrm{d}x$$

透射波中空间频率为 f 的部分，即方向为 $\sin\theta=\dfrac{2\pi f}{k}=f\lambda$ 的成分，振幅为 $G(f)=aA_1\dfrac{\sin\pi fa}{\pi fa}$，将其中的空间频率 f 以方向表示，$f=\dfrac{\sin\theta}{\lambda}$，则有 $G(f)=aA_1\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\dfrac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$，即为单元衍射因子.

6.4 阿贝成像原理

6.4.1 阿贝成像原理的数学验证

用单色平行相干光照明近轴小物 ABC，该物经透镜后成像于 $A'B'C'$，由于入射光是相干的，这便构成了一个相干成像系统. 对于成像过程，可以用几何光学的物像关系理解，也可以从频谱转换的角度解释.

物可以看成一系列不同空间频谱的集合. 图 6.4.1 所示的相干成像分两步完成. 第一步是物上的光发生夫琅禾费衍射，在透镜的后焦平面上形成一系列衍射斑. 第二步是将各个衍射斑作为新的光源，其发出的各个球面次波在像平面上进行相干叠加，像是干涉的结果，即干涉场. 这就是相干成像的**阿贝原理**. 阿贝成像原理可以用数学方法说明.

不妨设物为正弦光栅，其发出的光波为 $\widetilde{U}_O(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos2\pi fx)$，为三列平面波.

三列平面衍射波在透镜的像方焦平面上形成三个衍射斑 S_{+1}，S_0，S_{-1}，就是三个点光源.

三个衍射斑作为三个点光源，发出的球面波在像平面上进行相干叠加. 在像平

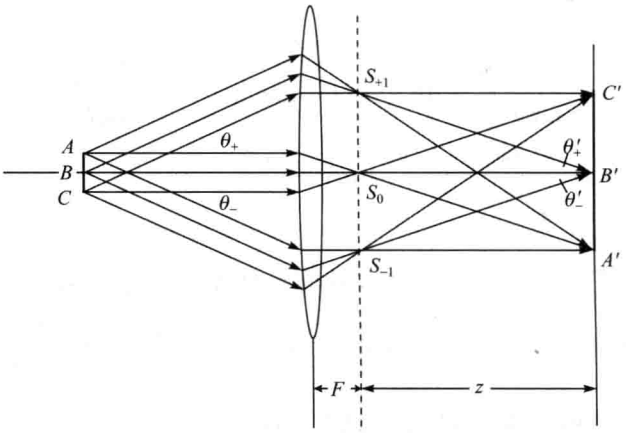


图 6.4.1　阿贝成像原理的数学推导

面上，应用衍射积分公式，其瞳函数振幅为分别为 $A_{\pm1}\propto A_1t_1/2$，$A_0\propto A_1t_0$，初相位分别为 $\varphi(\theta)=kL_0(\theta)$，$L_0(\theta)$ 为光栅（物）中心到衍射场点，即焦平面上衍射斑点的光程，分别表示为 $BS_{\pm1}$ 和 BS_0，则三个次波光源的复振幅可写为

$$\widetilde{U}_{+1}\propto\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_{+1})]$$

$$\widetilde{U}_0\propto A_1t_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_0)]$$

$$\widetilde{U}_{-1}\propto\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS}_{-1})]$$

在像平面(x',y')的复振幅可以按如下方法求得：

对于轴上物点 S_0，在像平面的复振幅为

$$\widetilde{U}_0(x',y')\propto\widetilde{U}_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_0B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

$$\propto A_1t_0\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS_0B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)$$

对于轴外物点 $S_{\pm1}$，由于$(x,y)\approx(z\sin\theta'_{\pm1},0)$，其相位函数中，有

$$-\mathrm{i}k\frac{x'x_0+y'y_0}{z}=-\mathrm{i}k\frac{x_{\pm1}}{z}x'=-\mathrm{i}k\sin\theta'_{\pm1}x'$$

所以有

$$\widetilde{U}_{\pm1}(x',y')\propto\widetilde{U}_{\pm1}\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{x'x_0+y'y_0}{z}\right)$$

$$=\widetilde{U}_{\pm1}\exp[\mathrm{i}k(\overline{S_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp[-\mathrm{i}k(\sin\theta'_{\pm1})x']$$

$$\propto\frac{1}{2}A_1t_1\exp[\mathrm{i}k(\overline{BS_{\pm1}B'})]\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\exp[-\mathrm{i}k(\sin\theta'_{\pm1})x']$$

由于物像之间的等光程性，$(\overbrace{BS_0B'})=(\overbrace{BS_{\pm1}B'})$，可以把前两个相位因子合写为 $\varphi(x',y')$，即

$$\varphi(x',y')=k(\overbrace{BS_0B'})+k\frac{x'^2+y'^2}{2z}=k(\overbrace{BS_{\pm1}B'})+k\frac{x'^2+y'^2}{2z}$$

三列波在像平面上相干叠加的干涉场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_I(x',y')&=\widetilde{U}_0(x',y')+\widetilde{U}_{+1}(x',y')+\widetilde{U}_{-1}(x',y')\\&=A_1\exp[\mathrm{i}\varphi(x',y')]\left\{t_0+\frac{t_1}{2}[\exp(\mathrm{i}k(\sin\theta'_{+1}x')+\exp(-\mathrm{i}k\sin\theta'_{-1}x')]\right\}\end{aligned}$$

根据阿贝正弦条件 $\dfrac{\sin\theta'_{\pm1}}{\sin\theta_{\pm1}}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{1}{V}$，$V$ 为像的横向放大率，于是有 $\sin\theta'_{\pm1}=\sin\theta_{\pm1}/V$，即 $k\sin\theta'_{\pm1}x'=k\sin\theta_{\pm1}x'/V$，而 $k\sin\theta_{\pm1}=\dfrac{2\pi}{\lambda}(\pm f\lambda)=\pm2\pi f$，代入 $\widetilde{U}_I$ 的表达式，有

$$\widetilde{U}_I(x',y')\propto A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x',y')}\left[t_0+t_1\cos\left(2\pi\frac{f}{V}x'\right)\right]$$

而物光波为

$$\widetilde{U}_O(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos2\pi fx)$$

两者除相位函数 $\varphi(x',y')$ 之外，有相似的表达式，而相位函数在强度表达式中不出现，故像与物有相同的光强分布，即物像之间是相似的. 此外，有两点需要说明.

(1) 物的空间频率为 f，而像的空间频率为 f/V，或空间周期由 d 变为 Vd，表示像的几何放大或缩小，不影响像的质量.

(2) 像质的反衬度可以通过交流部分与直流部分的比值体现，对于物像，都有 $\gamma_O=\gamma_I=\dfrac{t_1}{t_0}$，即 $\dfrac{\gamma_I}{\gamma_O}=1$，即像的反衬度没有下降.

对于任意的物，都可以通过傅里叶变换，使之成为一系列正弦光栅的和，所以上述证明具有普遍的意义.

6.4.2 阿贝成像原理的实验验证

1. 关于空间滤波

前面已经说明，正弦光栅的 ±1 级波的方向为 $\sin\theta_\pm=\pm f\lambda=\pm\dfrac{1}{d}\lambda$，$f=\dfrac{1}{d}$ 为衍射屏或物的空间频率. 即空间频率与波的衍射角相关，所以可以据此做成低通、高通或带通的滤波装置，如图 6.4.2 所示.



图 6.4.2 空间滤波装置

对于正弦光栅，仅有 0，±1 级，而对于其

他类型的周期或非周期的光栅，则存在一系列的分立或连续的空间频率. 每一个频率都有相对应的衍射角，不同频率的波将会会聚到透镜的像方焦平面，即傅氏面上.

则在傅氏面上采用不同的装置可以起到空间滤波的效果.

实际的物包含各种信息，即具有各种从低到高的空间频率，但透镜的口径总是有限的，所以会滤掉一些高频信息. 但有时需要对图像进行改造，这就要采取一些措施，进行滤波.

2. 阿贝(1874 年)-波特(1906 年)空间滤波实验

实验装置如图 6.4.3 所示，以黑白光栅为物，在傅氏面上加一可调狭缝，观察像的变化，图 6.4.4 和图 6.4.5 显示了该滤波实验中黑白光栅的透过率函数$\tilde{t}(x)$、空间频谱、像平面上的复振幅分布 $\widetilde{U}(x')$、像平面上的光强分布 $I(x')$以及像的图样. 对结果的说明如下：

(1) 只让 0 级，即直流成分通过，如图 6.4.4 所示，则像平面被 0 级斑发出的球面波照明. 在近轴条件下，像平面被均匀照明.

(2) 让 0 级和±1 级通过，则傅氏面上的频谱如图 6.4.5(b)左所示，而像平面上是 0 和±1 三个衍射斑发出的次波的相干叠加. 在像平面上的复振幅如图 6.4.5(c)左所示，光强以及像的图样为左侧下面两幅.

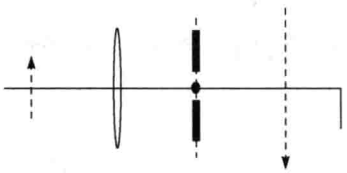


图 6.4.3　阿贝-波特空间滤波实验装置

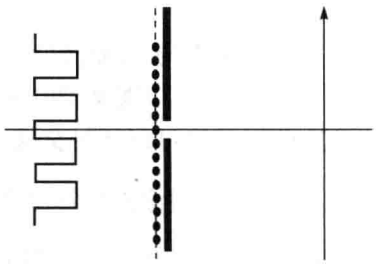


图 6.4.4　阿贝-波特空间滤波实验装置中傅氏面上的可调节狭缝

由于在像平面上，上述三列次波的复振幅可表示为 $a_0\exp\left[\mathrm{i}k\dfrac{x^2+y^2}{2z}\right]$和 $a_1\exp\left[\mathrm{i}k\left(\dfrac{x^2+y^2}{2z}-\dfrac{xx_{\pm1}+yy_{\pm1}}{z}\right)\right]$叠加：

$$\widetilde{U}_1(x,y)=\exp\left[\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right]\left\{a_0+a_1\left[\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{xx_{+1}+yy_{+1}}{z}\right)+\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{xx_{-1}+yy_{-1}}{z}\right)\right]\right\}$$

由于 x_{+1}和 x_{-1}的对称性，以及在 y 方向(水平方向)上都是相同的，故可取 $y=0$，上式变为

$$\widetilde{U}_1(x,y)=\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\left\{a_0+a_1\left[\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{xx_1}{z}\right)+\exp\left(\mathrm{i}k\frac{xx_1}{z}\right)\right]\right\}$$

$$=\left[\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\right]\left[a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)\right]$$

其中，前面的因子是共有的，则像面上的波的特征由振幅 $a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)$ 决定.

值得注意的是，交流成分的空间频率为 $f_1=\frac{k}{2\pi}\frac{x_1}{z}=\frac{x_1}{\lambda z}$，即高级次的衍射斑的空间频率高. 交流与直流的相对振幅由 a_0 与 $2a_1$ 的相对大小决定. 如果 $2a_1>a_0$，上式可以出现负值.

(3) 进一步展宽狭缝，使 0，±1 和±2 级都通过，则有

$$\widetilde{U}_1=\left[\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right)\right]\left[a_0+2a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)+2a_2\cos\left(k\frac{x_2}{z}x\right)\right]$$

由于更多的高频信号加入，这时复振幅的分布更接近于方波，而像的黑白界限更清晰.

(4) 使 0 级之外的所有衍射斑都通过狭缝，这时傅氏面上的频谱、像平面上的振幅和光强分布如图 6.4.5(b)～(d)右侧所示. 像平面的复振幅为

$$\widetilde{U}_1=2\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}kx^2}{2z}\right)\right]\left[a_1\cos\left(k\frac{x_1}{z}x\right)+a_2\cos\left(k\frac{x_2}{z}x\right)+a_3\cos\left(k\frac{x_3}{z}x\right)+\cdots\right]$$

可见，与实验(2)、(3)相比，原来不透光的部分也是亮的.

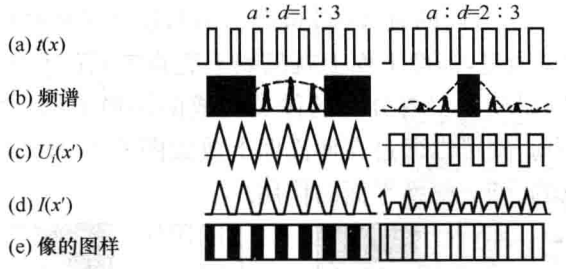


图 6.4.5　空间滤波的振幅与光强

6.4.3　图像处理

由阿贝原理，成像系统总是先在傅氏面上形成衍射斑，然后衍射斑作为新的光源，发出的光在像平面上相干叠加而形成物的像，如图 6.4.6 所示. 因而通过对傅氏面的处理，可以对图像进行处理.

例如，如果物是矩形网格，则其夫琅禾费衍射频谱就是二维的点(图 6.4.7)；物是直线，则衍射斑为一维的点(图 6.4.8). 此时，如果在频谱面上，即傅氏面上，采用相应的空间滤波装置，就可以遮挡频谱中的某些成分，从而改变像.

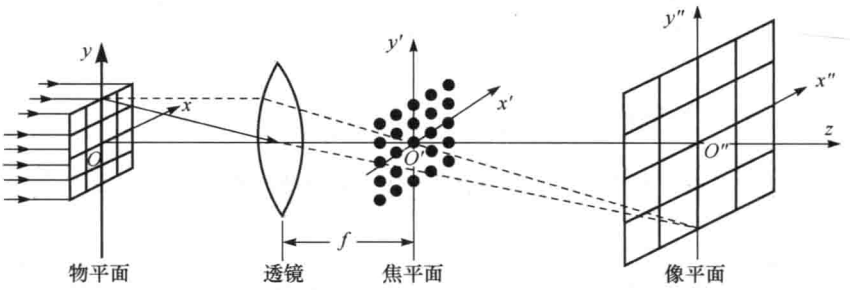


图 6.4.6　成像系统中的物平面、傅氏面(透镜的焦平面)以及像平面

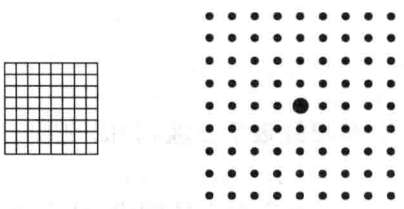


图 6.4.7　矩形网格的空间频谱



图 6.4.8　平行直线的空间频谱

这种图像处理可以有两种不同的方式. 第一,可以采用通过遮挡频谱中某些成分的方式,将图像中的某些部分去掉. 例如,网格形的物,其傅氏面上的频谱是二维分布的衍射斑,如果用竖直狭缝将其他部分遮挡,而只让中央一列衍射斑通过,则像平面上就只剩下水平方向的直线(图 6.4.9(a));用水平狭缝将其他部分遮挡,而只让中央一排衍射斑通过,则像平面上就只剩下竖直方向的直线(图 6.4.9(b));如果狭缝是倾斜的,则只剩下斜着分布的像点构成的倾斜直线(图 6.4.9(c));要是拍摄到了笼中的小鸟,则可以通过在傅氏面上放置图 6.4.9(d)的滤波装置将网格去掉等. 这时傅氏面起到了变换平面的作用.

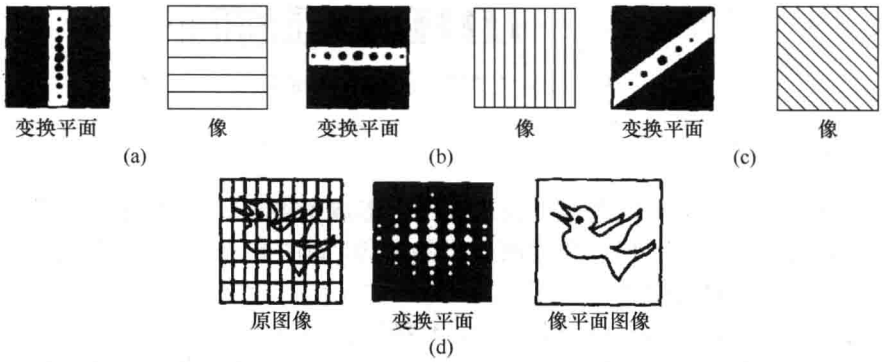


图 6.4.9　对傅氏面遮挡的效果

第二，由于衍射角与波长有关，波长越长，衍射角越大，因而可以在每一衍射斑上设置一个狭缝，该狭缝位置不同，则通过的光的波长不同，从而起到滤色的作用.

6.4.4 θ 调制

如图 6.4.10 所示，用白光照射物平面，在傅氏面上，不同波长的同一级频谱的空间位置不同，可以通过空间滤波进行色彩选择，从而得到彩色图像，或对图像的色彩进行控制. 这种彩色图像是对光栅产生的不同角度 θ 的光学信息选择的结果，所以称为 **θ 调制**，又称**分光调制**.

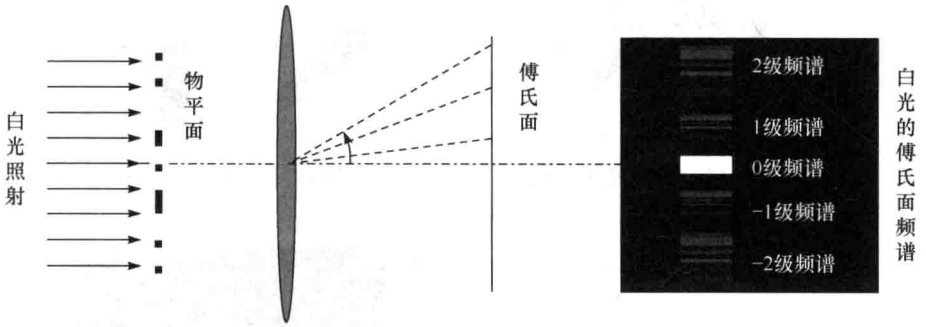


图 6.4.10　白光的傅里叶频谱

例如，在傅氏面上的一级频谱处，使透光缝开在不同的 θ 角处，就可以使不同波长的频谱通过(图 6.4.11).

可以将缝沿不同方向的光栅进行拼接，如图 6.4.12 所示，并将拼接后的光栅置于物平面处，用白光照射.

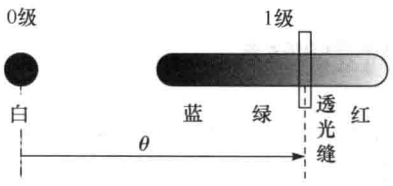


图 6.4.11　对一级频谱进行 θ 调制

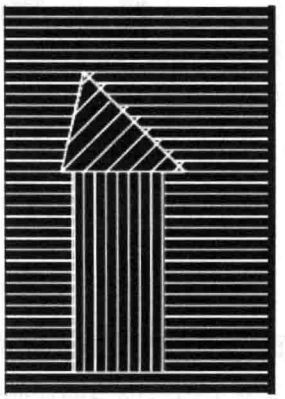


图 6.4.12　拼接光栅

在傅氏面上，不同方向的光栅的傅里叶频谱沿不同方向散开，如图 6.4.13 所

示，得到三组沿不同方向散开的彩色光带.

如果将图 6.4.14 所示的透光缝频谱置于傅氏面上，如图 6.4.15 所示，并调节各缝的位置，使不同方向的频谱中的红、黄、蓝光分别通过光缝，即在傅氏面上进行 θ 调制，在像平面上，不同方向的光栅就以不同的颜色显现，即可得到一幅彩色的拼接光栅的图像(图 6.4.16).

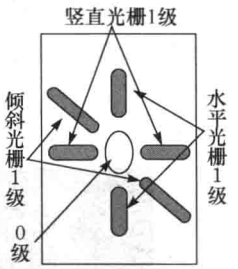


图 6.4.13　拼接光栅的频谱

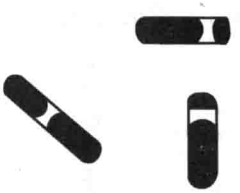


图 6.4.14　透光缝

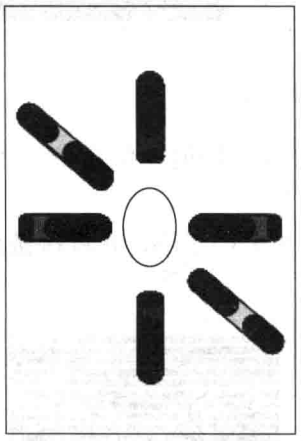


图 6.4.15　透光缝置于傅氏面上

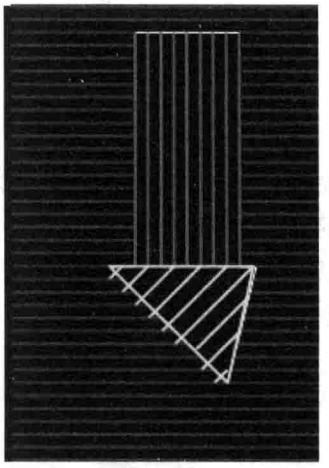


图 6.4.16　彩色的拼接光栅图像

6.5　相衬显微镜

普通显微镜容易观察不同位置处透射率或反射率相差较大的样品，即振幅型样品. 但是对于均匀透明的样品，即透过率函数是相位型的样品，则由于反衬度太小而无法观察.

可以采用附加相移的办法改变透过率.

设相位型样品的屏函数为 $\tilde{t}(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,y)}$，对振幅或光强的透过率没有变化，

因此，在普通显微镜下显示一片均匀的亮度，看不清样品的结构. 设物平面发出的光波为 $\widetilde{U}_o = A_1\tilde{t}(x,y) = A_1 e^{i\varphi(x,y)}$. 依泰勒展开

$$\widetilde{U}_o = A_1 e^{i\varphi(x,y)} = A_1\left(1+i\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots\right)$$

若在显微镜物镜的傅氏面处加一相位板，即在一玻璃板的中心加一小滴液体. 该液体由于处于傅氏面上零级斑的位置，只能使直流成分产生附加的相位 δ，δ 称为相移. 透过相位板的光波，即进入像面的光波变为

$$\widetilde{U}_I = \widetilde{U}_o e^{i\delta} = A_1 e^{i\varphi(x,y)} e^{i\delta} \overset{\text{仅作用于0级}}{=} A_1\left(e^{i\delta}+i\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots\right)$$

$$= A_1\left(e^{i\delta}-1+1+i\varphi-\frac{1}{2!}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots\right) = A_1(e^{i\delta}-1+e^{i\varphi})$$

通过相位板的光强为

$$\begin{aligned} I(x,y) &= A_1^2(e^{i\delta}-1+e^{i\varphi})(e^{-i\delta}-1+e^{-i\varphi}) \\ &= A_1^2\{3+2[\cos(\varphi-\delta)-\cos\varphi-\cos\delta]\} \\ &= A_1^2[3+2(\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta-\cos\varphi-\cos\delta)] \end{aligned}$$

此时光强与相位 φ、δ 的空间分布有关，因而在显微镜下能够分辨样品由于相位分布不同而呈现的空间结构.

一般所使用的显微样品的厚度都很小，因而 $\varphi \ll 1$，此时 $\sin\varphi \approx \varphi$，$\cos\varphi \approx 1$，上式变为

$$I = A_1^2[3+2(\varphi\sin\delta+\cos\delta-1-\cos\delta)] = A_1^2[1+2\varphi(x',y')\sin\delta]$$

其中，$\sin\delta$ 为观察到的像的反衬度. 如果使相移等于 $\pi/2$，则可以得到最大的反衬度.

上述方法称为相位反衬法，即相位法，由泽尼克(Frederik Zernike，1888～1966，荷兰)于 1935 年提出，他 1953 年获得诺贝尔物理学奖. 按照这一原理制成的光学显微装置，就是**相衬显微镜**.

6.6 全息照相

6.6.1 全息照相的基本原理

1. 全息照相的原理

照相是一种记录方式，是通过光学系统将物体的像保存在记录介质中. 但是，普通的照相方法，只是记录了物光波的光强，或者说振幅.

任何光波场既有振幅，也有相位. 所以普通的照相方法是对光波场信息不完整的记录，没有办法记录和反映光波场相位的情况.

能够记录光波场的振幅分布和相位分布的照相方法就是全息照相. 全息,就是指光波场振幅、相位的全部信息.

容易理解,全息照相就是一定要采用相干叠加的方法,或者要采用相干光作为光源.

那么,如何记录光波场的全部信息呢? 更进一步说,记录的目的当然是再现,那么,怎样才能使光波场再现呢?

设想一个发光物体,从物体上各个点所发出的光在空间形成了一个光波场. 根据惠更斯-菲涅耳原理,场点 P 的振动,即复振幅是由波前上的振动情况,即复振幅分布决定的. 而波前上的复振幅分布,是由光源决定的. 所以,只要确定了波前上的复振幅,则振动在波场中的分布是可以确定的. 或者说,波前上的波前光场和实际物体上的各个发光点对光波场的作用是等效的,如果设法将某个波前光场全部复制下来,那么,即使将物体移走,该波前光场仍可以将原来的光波场再现,总的效果,就像物还在那里一样.

可以用某种方法记录波前,再用另一种方法使波前再现. 当波前再现时,在场点 P 看来,就相当于光源,即发出光波的实物被再现了. 由于实物再现时,其光波场的所有因素,振幅、相位等均出现,即光波场的全部信息都再现了,所以这种记录波前的方法称为**全息照相**.

全息照相再现的是一个立体的实物.

2. 波前光场的记录

如图 6.6.1 所示,设在场点 Q,物体所发出的光波(简称物光波,记为 O 光)和另一束参考光波(记为 R 光)的复振幅分别为

$$\widetilde{U}_{\mathrm{O}}(Q)=A_{\mathrm{O}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{O}}(Q)} \tag{6.6.1}$$

$$\widetilde{U}_{\mathrm{R}}(Q)=A_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}}(Q)} \tag{6.6.2}$$

上述两列波相干叠加,即

$$\widetilde{U}(Q)=\widetilde{U}_{\mathrm{O}}(Q)+\widetilde{U}_{\mathrm{R}}(Q)=A_{\mathrm{O}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{O}}(Q)}+A_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{R}}(Q)}$$

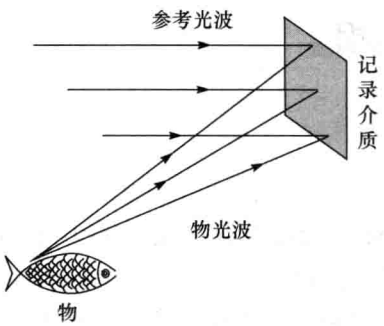


图 6.6.1　记录物光波

Q 点处物光波和参考光波相干叠加(干涉)的光强为

$$\begin{aligned}I(Q)&=|\widetilde{U}|^2=(\widetilde{U}_{\mathrm{O}}+\widetilde{U}_{\mathrm{R}})(\widetilde{U}_{\mathrm{O}}+\widetilde{U}_{\mathrm{R}})^*\\&=\widetilde{U}_{\mathrm{O}}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}^*+\widetilde{U}_{\mathrm{R}}\widetilde{U}_{\mathrm{R}}^*+\widetilde{U}_{\mathrm{O}}\widetilde{U}_{\mathrm{R}}^*+\widetilde{U}_{\mathrm{R}}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}^*\\&=A_{\mathrm{O}}^2+A_{\mathrm{R}}^2+\widetilde{U}_{\mathrm{O}}\widetilde{U}_{\mathrm{R}}^*+\widetilde{U}_{\mathrm{R}}\widetilde{U}_{\mathrm{O}}^*\end{aligned} \tag{6.6.3}$$

在波场中放置记录介质,如照相底片,在记录介质上记录的就是由 O 光和 R 光干涉产生的光强分布,就是式(6.6.3)中的 $I(Q)$. $I(Q)$ 是干涉场的光强分布,其中含有关于振幅和相位

的信息，故底片所记录的是**全息图**(hologram)，全息图是一张干涉花样的照片，从上面看不出物的形貌.

3. 全息图的处理

全息图记录了物光波与参考光波干涉的强度分布，在底片上，必须使感光介质所呈现光学性质(即透光率)与光强成正比，保持线性关系，所以要进行线性冲洗.

经线性冲洗，全息图的透过率函数是干涉强度分布的线性函数，可表示为

$$t(Q)=t_0+\beta I(Q)=t_0+\beta(A_O^2+A_R^2+\widetilde{U}_O\widetilde{U}_R^*+\widetilde{U}_R\widetilde{U}_O^*) \tag{6.6.4}$$

4. 光波场的再现

用一束单色光 $\widetilde{U}'_R=A'_R e^{i\varphi'_R}$ 照射全息图，如图 6.6.2 所示，则从全息图上透射的光的复振幅为

$$\widetilde{U}_T=\widetilde{U}'_R t=(t_0+\beta A_R^2+\beta A_O^2)\widetilde{U}'_R+\beta A'_R A_R[e^{i(\varphi'_R-\varphi_R)}\widetilde{U}_O+e^{i(\varphi'_R+\varphi_R)}\widetilde{U}_O^*] \tag{6.6.5}$$

经过全息图后的光波分成了三个部分.

$(t_0+\beta A_R^2+\beta A_O^2)\widetilde{U}'_R$ 为透射波，由于 $t_0+\beta A_R^2+\beta A_O^2$ 为实数，它就是入射的照明光波振幅被调制后的透射，方向、相位分布没有改变. 其中，$(t_0+\beta A_R^2)\widetilde{U}'_R$ 部分，在参考光波是平面波的情况下，$\widetilde{U}'_R$ 的系数为实常数(由于 t_0、β、A_R 都是常数，在全息图上各处都一样)，称为 0 级波；而 $\beta A_O^2\widetilde{U}'_R$ 中，A_O^2 为物光波的振幅，有一个空间分布，在全息图上各处不相等，因而称为调制波.

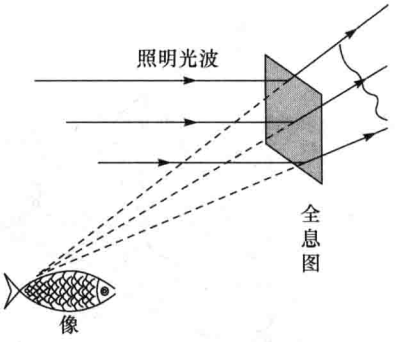


图 6.6.2 再现物光波

$\beta A'_R A_R e^{i(\varphi'_R-\varphi_R)}\widetilde{U}_O$ 是物光波的再现，是振幅和初相位改变了的物光波，是发散的光波. 由于其系数中，β、A'_R、A_R、φ'_R、φ_R 都与物光波的分布无关，在参考波、照明波都是平面波的情况下，是实常数，所以这列波看起来就相当于实物的光强发生了变化($\beta A'_R A_R$ 的作用)，空间位置发生了平移($e^{i(\varphi'_R-\varphi_R)}$ 的作用)，这列波也称为+1 级波.

$\beta A'_R A_R e^{i(\varphi'_R+\varphi_R)}\widetilde{U}_O^*$ 是物光波的共轭波乘以系数 $\beta A'_R A_R e^{i(\varphi'_R+\varphi_R)}$，前面已经讨论过，这个系数在参考波、照明波都是平面波的情况下，是常数，所以这列波通常是向另一方向会聚的光波，也称为−1 级波.

+1 级和−1 级波被称为孪生波，其中+1 级波再现了实物.

在这一过程中，全息图的作用就是衍射屏，再现的过程就是照明光波经过全息图衍射的过程.

从前面的分析可以看出，全息照相记录和再现的过程都是相干叠加的过程，因而要求物光波、参考光波、照明光波都是很好的相干光，即要求光源的时间相干性

好，最好是单色光，因而通常都使用激光进行全息照相. 对记录介质也有较高的要求，记录介质对光强的反应是线性的，如使用照相底片，必须用线性的底片，并采用线性的冲洗工艺.

6.6.2 全息照相的装置

1. 记录装置

如图 6.6.3 所示，用分束板将相干光分为两部分，一束直接照射到记录介质上，这就是参考光波 R；另一束照射到物体上，作为物体的照明光，经物体反射后，照射到记录介质上，这就是物光波 O，与参考光进行干涉.

2. 再现装置

如图 6.6.4 所示，用照明光波（也要求相干性好）照射全息图，经过全息图的光波，分为+1 级波、0 级波和−1 级波，其中+1 级波就是再现的物光波.

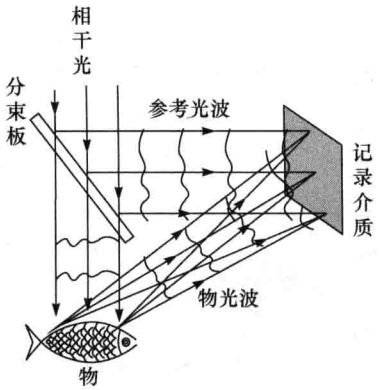


图 6.6.3 记录装置

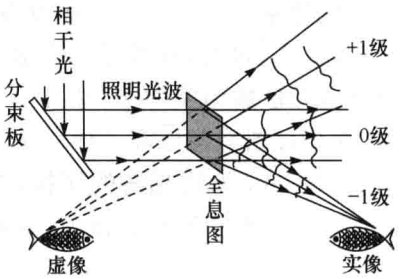


图 6.6.4 再现装置

3. 离轴全息装置

要想得到不受干扰的物光波，应使透射波（0 级波）和会聚波（−1 级波）与再现的物光波（+1 级波）在空间上分开，在照相时，设法使物光波和参考光波以较大的夹角射向记录介质，这样的装置称为采用离轴全息装置.

全息照相的原理是由伽伯（Dennis Gabor，1900～1979）在 1948 年提出的，1960 年激光发明后，由于有了优质的相干光源，全息照相技术获得了广泛的应用. 伽伯于 1971 年获得诺贝尔物理学奖.

第 7 章　光的偏振与双折射

7.1　光的偏振特性

7.1.1　横波的偏振性

光是电磁波，其电场分量（电场强度）$\boldsymbol{E}$、磁场分量（磁感应强度）$\boldsymbol{B}$ 都与光的传播方向（用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表示）垂直，这是一种横波.

透明的电介质，其磁导率 $\mu_r \approx 1$，通常光波不会引起介质的磁化，所以光与物质的相互作用往往是光波的电场与带电粒子间的相互作用，可以只考虑光波的电矢量（亦称**光矢量**）.

由于横波的振动方向与传播方向垂直，所以往往会表现出具有**偏振**（polarization）的特性. 所谓偏振指的就是振动方向相对于传播方向的不对称性. 如图 7.1.1 所示，虽然在与传播方向垂直的各个方向都有振动，但不同方向的振幅却各不相同（图 7.1.1(a)）；或者，电矢量只在一个平面内有振动（图 7.1.1(b)）.

其实，早在麦克斯韦电磁理论建立之前，人们就已经通过实验观察，意识到了光是横波. 例如，可以通过观察反射光或散射光间接证明光的横波性. 光的双散射实验装置如图 7.1.2 所示，一束光经过界面 M_1 的反射后入射到界面 M_2 上，如果在界面 M_1 处使反射光与折射光的方向相互垂直，而且使 M_2 的入射面与 M_1 的入射面垂直，则以某一角度入射到 M_2 时，在界面 M_2 处就没有反射光而只有折射光. 对于这样的实验结果，只有假设光是横波才能予以解释.

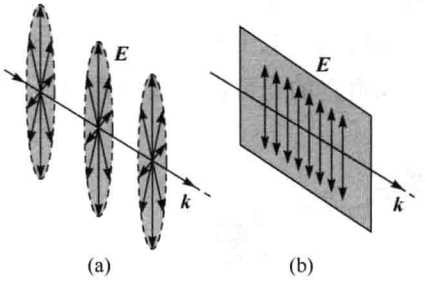


图 7.1.1　光的偏振性

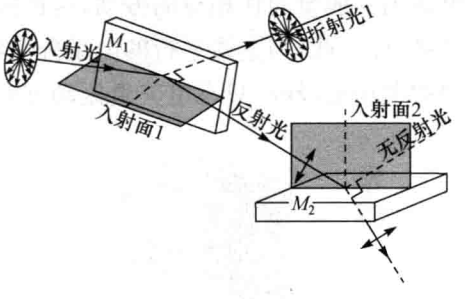


图 7.1.2　光的双散射实验

马吕斯（Etienne-Louis Malus，1775～1812，法国）通过另一种实验证实了光是

横波，并研究了光的偏振特性(1809 年). 他通过电气石晶体观察由其他物体表面反射的光，结果发现，将电气石晶体绕着光束转动时，透过晶体的光的强度会发生改变；晶体转动一周，重新回到原来的位置时，透过晶体的光强也回到原来的数值. 这说明光是横波，而且从介质表面反射的光，振动矢量相对于传播方向的分布是不对称的. 电气石晶体是一种二向色性(dichroism)晶体，分子式可表示为 $NaR_3Al_6[Si_6O_{18}][BO_3]_3(OH,F)_4$，这类晶体中有一个特殊的方向，凡是从晶体中透射出来的光，振动矢量(电场强度矢量)都沿着该方向，这个特殊的方向称为晶体的**透振方向**，也叫**透光轴**. 如图 7.1.3 所示. 只有振动方向与透振方向平行的光，才能从晶体透射；振动方向与透振方向垂直的光，是无法透过该晶体的. 所以，将两块电气石晶体按图 7.1.4 前后排列摆放，转动其中一块晶体，透射光的强度将会改变. 如果这两块晶体的透光轴相互平行，则透射光最强；当两晶体的透光轴相互垂直，则没有光透过. 除了电气石晶体之外，硫酸碘奎宁晶体也是一种典型的二向色性晶体.

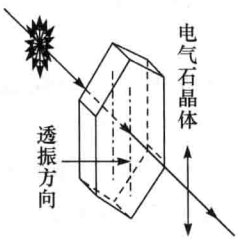


图 7.1.3　光通过二向色性晶体

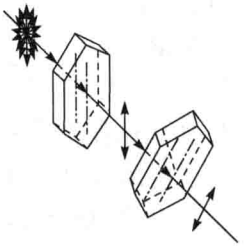


图 7.1.4　光连续通过两块电气石晶体

除了用天然的二向色性晶体获得或检验光的横波性和偏振特性外，还可以采用人工的方法.

最初的器件是用拉直的细导线做成的密排线栅，例如，图 7.1.5 所示的金质线栅，金线间隔 $d=5.08\times10^{-4}$mm. 光通过这种线栅时，金线中的自由电子由于吸收了电磁场的能量而作相应的振动，这种振动由于受到金线尺度的限制，而只能沿着金线进行. 因此，与金线平行的电场分量将被吸收，如图 7.1.6 所示. 由于与金线同方向的电场被吸收，只有电矢量振动方向与金线垂直的光可以从线栅透过.

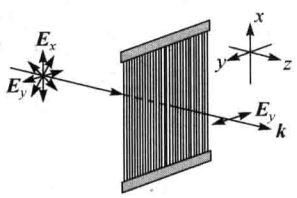


图 7.1.5　金质线栅对光矢量的吸收

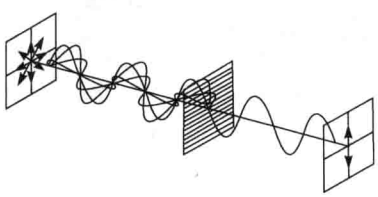


图 7.1.6　光通过金质线栅后光矢量振动的变化

1928年,美国哈佛大学的学生兰德(Edwin Herbert Land,1909～1991)发明了一种人造偏振片.将聚乙烯醇薄膜在碘溶液中浸一段时间,然后从碘液中提出,并沿着聚乙烯醇分子链的方向拉伸.由于碘原子吸附在聚乙烯醇的分子链上,拉伸后,碘原子就沿着被拉直的分子链整齐而密集地排列起来.碘原子中的电子较容易脱离其束缚成为自由电子,因此,在外电场的作用下,电子就可以沿着分子链自由运动.这样就用有机分子链制成了导电的线栅,而分子链的间隔比导线做成的密排线栅要小得多,因而浸碘的聚乙烯醇膜对光的振动的吸收更加充分.这就是**J型偏振片**(polaroid J-sheet).到1938年,兰德又发明了**H型偏振片**(polaroid H-sheet),原理与J型偏振片相同.

7.1.2 起偏与检偏

在偏振光中,有几个重要而常见的概念,例如,起偏、检偏、起偏器、检偏器等,以下进行简单的定义和解释.

起偏:通过某种方法或使用某种光学元件,使光变为具有偏振特性.

检偏:通过某种方法或使用某种光学元件,检验光的偏振特性.

透振方向:从偏振器件通过的光的电矢量的振动方向.例如,上述金属线栅中垂直于金属丝的方向就是透振方向.

用来起偏或检偏的光学元件被称为起偏器或检偏器.图7.1.7表示光经过第一个偏振元件(起偏器)后,再用另一个偏振元件(检偏器)观察其偏振特性.

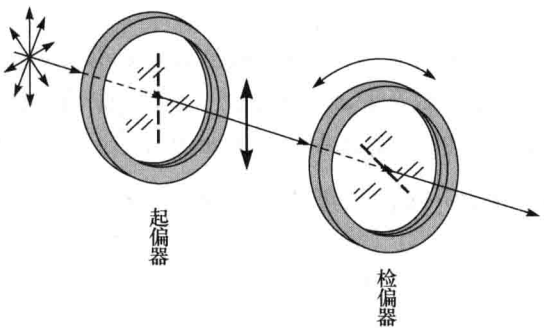


图7.1.7 起偏器与检偏器

由于通过偏振片的光波的电矢量只能沿着一条直线的方向,因而上述起偏器和检偏器也被称为“线起偏器”和“线检偏器”.

7.2 光的偏振态

7.2.1 自然光

自然光(natural light)是大量原子同时发出的光波的集合. 其中的每一列是由一个原子发出的,有一个偏振方向和相位,但光波之间是没有任何关系的. 所以它们的集合,就是在各个方向振动相等、相位差随机的自然光. 自然光电矢量(光矢量)的分布如图 7.2.1 所示.

实验表明,让一束强度为 I_0 的自然光通过吸收可以忽略的起偏器,如图 7.2.2 所示,不论起偏器的透振方向怎样旋转,透射光的光强都不发生改变,在起偏器后的光强

$$I=\frac{1}{2}I_0 \tag{7.2.1}$$

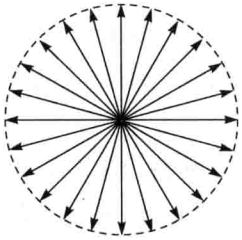


图 7.2.1 自然光电矢量的方向

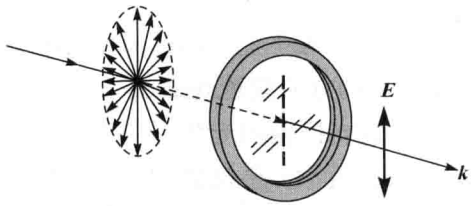


图 7.2.2 自然光经过偏振片后光矢量的改变

上述实验上观察到的结果可以很容易地从理论上证明. 设自然光沿着 z 轴方向传播,记单位角度内的振幅等于 A_0. 其中任一列光,振动方向与 x 轴夹角为 θ,则该振动在 x 方向振动分量的振幅为 $A_x^\theta = A_0\cos\theta$,如图 7.2.3 所示. 由于自然光中的各个波列是不相干的,所以按强度进行叠加,故有 $I_x = \int_0^{2\pi} (A_x^\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} A_0^2 \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi A_0^2$. 同理有 $I_y = \pi A_0^2$. 而总光强为 $I = \int_0^{2\pi} A_0^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi A_0^2$,故 $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0$.

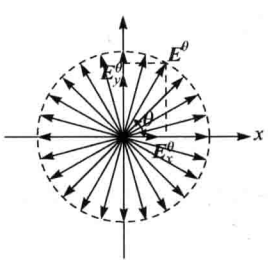


图 7.2.3 光矢量正交分解

自然光通过起偏器后,如果不考虑起偏器对光强的吸收,则透射光强为入射光强的一半.

7.2.2 部分偏振光

如果光波在垂直于波矢的平面内各个方向都有振

动，但不同方向的振幅却不相同，如图 7.2.4 所示，则被称为**部分偏振光**(partially polarized light). 用检偏器检验，转动检偏器的透振方向，会发现透射光的强度会出现改变(图 7.2.5)，但在任何一个方向上，都会有光透过，即不会出现**消光**.

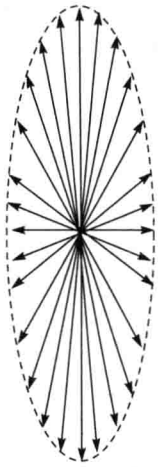


图 7.2.4 部分偏振光

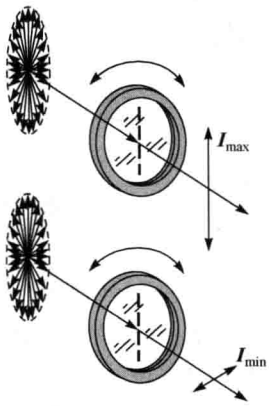


图 7.2.5 部分偏振光通过检偏器各个方向光强改变

这种偏振光电矢量的振幅在不同的方向上有不同的大小，记电矢量振幅的最大值和最小值分别为 A_{max} 和 A_{min}，则相应方向上的光强分别记为 I_{max} 和 I_{min}，可以将部分偏振光的**偏振度**定义为

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{7.2.2}$$

部分偏振光的偏振度介于 1 和 0 之间，即 $0\leqslant P\leqslant 1$. 如果 $I_{max}=I_{min}$，偏振度 $P=0$，就是自然光；偏振度越接近于 1，与自然光相差越远.

7.2.3 平面偏振光

自然光或部分偏振光经过线起偏器(二向色性晶体、偏振片等)后，由于只有平行于起偏器透振方向的电矢量能够通过，所以透射光只包含单一振动方向的电矢量. 这种电矢量始终在一个平面内振动的光或者电矢量振动的投影是一条直线的光，就是**平面偏振光**(plane-polarized light)，也被称为**线偏振光**(linearly polarized light).

如果使平面偏振光垂直地射向偏振片，而该偏振片的透振方向与入射光的偏振平面之间的夹角为 θ，如图 7.2.6 所示. 这时可以将入射光的电矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 正交分解为平行于偏振片透振方向的矢量 $\boldsymbol{E}_{//}$ 和垂直于偏振片透振方向的

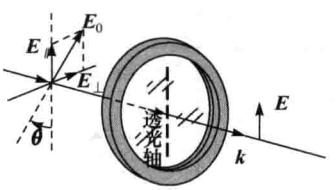


图 7.2.6 平面偏振光通过偏振片图

矢量 $\boldsymbol{E}_{\perp}$，由于只有 $\boldsymbol{E}_{//}$ 可以通过，所以透射光的光强为

$$I_{\theta}=\langle|\boldsymbol{E}_{//}|^{2}|\rangle=E_{0}^{2}\cos^{2}\theta=I_{0}\cos^{2}\theta \tag{7.2.3}$$

其中，E_0 为入射光波的振幅. 这就是马吕斯定律.

任何一列平面偏振光，都可以分解为两列电矢量相互正交的平面偏振光，如图 7.2.7 所示，在直角坐标系中，可以将任意方向的振动矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\cos(kz-\omega t)$ 分解为正交的 $\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_x+\boldsymbol{E}_y=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y \tag{7.2.4}$$

其中

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos(kz-\omega t)\\E_y=A_y\cos(kz-\omega t)\end{cases} \tag{7.2.5}$$

或者

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos(kz-\omega t)\\E_y=-A_y\cos(kz-\omega t)=A_y\cos(kz-\omega t+\pi)\end{cases} \tag{7.2.6}$$

而 $A_x=A\cos\theta$，$A_y=A\sin\theta$.

式(7.2.5)中，两个正交分量是等相位的(同相)，表示光矢量在Ⅰ、Ⅲ象限，式(7.2.6)两个正交分量的相位差是 π(反相)，表示光矢量在Ⅱ、Ⅳ象限.

任何形式的光经过偏振片后，由于电矢量都只沿着透光轴方向振动，所以都成为平面偏振光.

但是，实际的偏振片不可能将与透光轴垂直的振动完全消除，或者，通过实际的线起偏器后，所得到的并不是完全的平面偏振光. 可以用**消光比**来衡量偏振仪器(线起偏器)的起偏效果，消光比的定义为

$$\text{消光比}=\frac{\text{最小透射光强}}{\text{最大透射光强}}$$

7.2.4 圆偏振光

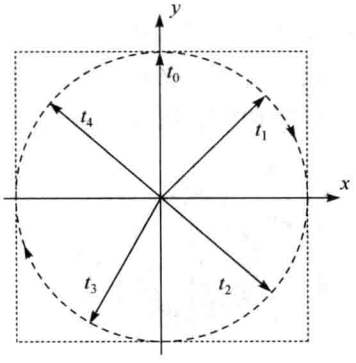


图 7.2.7 圆偏振光

在一个与光的波矢(即光的传播方向)垂直的平面内观察其电矢量，如果光的电矢量不是在一个固定的平面内振动，而是绕着传播的方向匀速旋转，即 t_0、t_1、t_2、t_3、t_4、…诸时刻，电矢量的方位依次变化，且旋转中电矢量的大小保持不变，则其端点轨迹为圆(图 7.2.7)，这就是**圆偏振光**(circular polarized light).

由波的矢量叠加可以判断，圆偏振光可以分解为两个振幅相等的相互垂直的平面偏振光，这

两个平面偏振光具有$\frac{\pi}{2}$的相位差，如图 7.2.8 和图 7.2.9 所示.

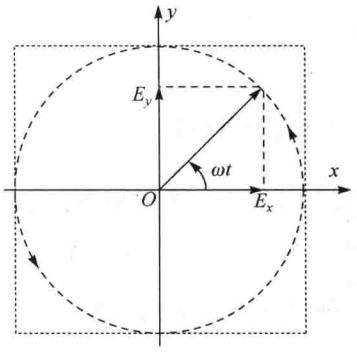


图 7.2.8 圆偏振光正交分解

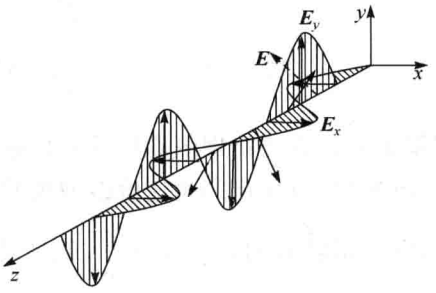


图 7.2.9 圆偏振光两正交分量之间的相位差

圆偏振光可以看成两个电矢量正交的平面波的叠加，即

$$\begin{cases} E_x(z,t)=A\cos(kz-\omega t) \\ E_y(z,t)=A\cos\left(kz-\omega t\pm\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{7.2.7}$$

式中，$+\frac{\pi}{2}$表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$滞后，而$-\frac{\pi}{2}$表示 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$超前.

迎着光的传播方向观察，如果电矢量是顺时针方向旋转的，则称为**右旋圆偏振光**(right-circularly polarized)；如果电矢量逆时针方向旋转，则称为**左旋圆偏振光**(left-circularly polarized).

可以用一种形象的方法记住左旋或右旋的规定：迎着光的传播方向观察，设某一时刻电矢量指向正上方. 下一时刻，若电矢量转向观察者的右侧(顺时针转动)，就是右旋的；相反地，若下一时刻，电矢量转向观察者的左侧(逆时针转动)，就是左旋的.

容易从圆偏振光的分量表达式判断出电矢量的旋转方向. 例如，设 y 分量与 x 分量之间的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$，即 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$滞后$\frac{\pi}{2}$. 如果 $t=0$ 时刻电矢量沿 x 轴正向，则可以得到 $t=\frac{\pi}{4\omega}$、$t=\frac{\pi}{2\omega}$、$t=\frac{3\pi}{4\omega}$、…时刻光矢量的位置，如图 7.2.10 所示，从而判断这是一个左旋圆偏振光. 反之，若 $E_y(z,t)$比 $E_x(z,t)$超前$\frac{\pi}{2}$，则为右旋圆偏振光.

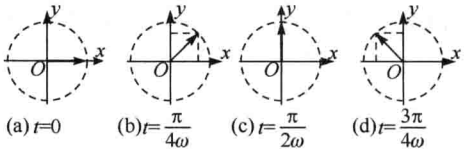


图 7.2.10　$\Delta\varphi=+\dfrac{\pi}{2}$时圆偏振光电矢量的旋转方向

圆偏振光正确的物理图像应该这样描述：在一个与波矢垂直的固定平面内，其光矢量(电矢量)以固定的角速度绕波矢旋转. 但实际上，这一现象是无法直接观测的，因为电矢量旋转的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，就是其正交分量简谐振动的周期，是一个非常小的数值，约为 10^{-14} s，这么小的周期，是难以测量的.

用偏振片检验，圆偏光与自然光相同. 即无论偏振片的透振方向如何，出射光的强度总是相等的.

7.2.5　椭圆偏振光

在一个固定的平面(该平面垂直于光的传播方向)内观察，如果光矢量绕传播方向旋转，而且在不同的角度，光矢量的大小不同，但其数值作周期性变化，矢量端点的轨迹为椭圆，如图 7.2.11 所示，这种偏振光就是**椭圆偏振光**(elliptical polarized light).

如图 7.2.12 所示，椭圆偏振光的电矢量可正交分解为

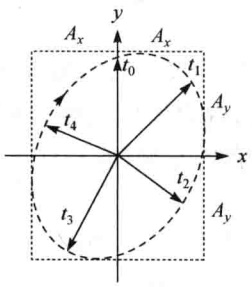


图 7.2.11　椭圆偏振光

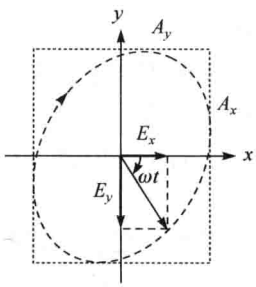


图 7.2.12　椭圆偏振光电矢量的正交分解

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y=A_x\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x+A_y\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi)\boldsymbol{e}_y \tag{7.2.8}$$

即

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos(kz-\omega t)\\ E_y=A_y\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi)\end{cases} \tag{7.2.9}$$

上面两式中，$\Delta\varphi$ 表示 y 分量比 x 分量的相位滞后.

将式(7.2.9)化为$\begin{cases}\dfrac{E_x}{A_x}=\cos(kz-\omega t)\\ \dfrac{E_y}{A_y}=\cos(kz-\omega t)\cos\Delta\varphi-\sin(kz-\omega t)\sin\Delta\varphi\end{cases}$，则得到

$$\begin{cases}\dfrac{E_x}{A_x}=\cos(kz-\omega t)\\ \dfrac{1}{\sin\Delta\varphi}\left[\cos(kz-\omega t)\cos\Delta\varphi-\dfrac{E_y}{A_y}\right]=\sin(kz-\omega t)\end{cases}$$

将第二式中 $\cos(kz-\omega t)$ 以 $\dfrac{E_x}{A_x}$ 替换，再将两式平方之后相加，即可在上述方程中消去参量 $kz-\omega t$，有下式：

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2+\left[\frac{1}{\sin\Delta\varphi}\left(\frac{E_x}{A_x}\cos\Delta\varphi-\frac{E_y}{A_y}\right)\right]^2=1$$

最后得到

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}-\frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi \tag{7.2.10}$$

这是一个 xOy 平面中的椭圆方程. 上述公式中的电场分量 E_x、E_y 就是直角坐标系 E_xOE_y 中的坐标值.

如果 $\Delta\varphi=0$ 或 $\Delta\varphi=\pi$，则 $\dfrac{E_x^2}{A_x^2}+\dfrac{E_y^2}{A_y^2}\pm\dfrac{2E_xE_y}{A_xA_y}=0$ 可得到 $\dfrac{E_x}{E_y}=\pm\dfrac{A_x}{A_y}$，这就是平面偏振光；如果 $\Delta\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$，同时 $A_x=A_y$，则得到 $E_x^2+E_y^2=A^2$，这就是圆偏振光；如果 $\Delta\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$，而不要求 $A_x=A_y$，则得到 $\dfrac{E_x^2}{A_x^2}+\dfrac{E_y^2}{A_y^2}=1$，这就是长、短轴分别沿 x、y 轴的椭圆偏振光，即所谓的**“正椭圆”**偏振光.

由于合成偏振光的两正交分量总是在同一时刻、同一空间点 z 处进行叠加，而且叠加之后光的偏振特性取决于这两个分量之间的相位差. 所以在不引起混淆的前提下，在式(7.2.5)～式(7.2.9)中，通常可以略去相位中的空间部分 kz，或者取观察平面在 $z=0$ 处，这样就可以得到表达式

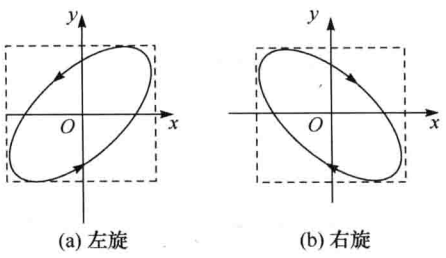
$$\begin{cases}E_x=A_x\cos\omega t\\ E_y=A_y\cos(\omega t-\Delta\varphi)\end{cases} \tag{7.2.11}$$

式中，$\Delta\varphi$ 同样表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 的相位滞后.

需要特别指出的是，有许多光学著作中，偏振光两个正交分量的表达式往往被写为

$$\begin{cases}E_x(z,t)=A\cos\omega t\\ E_y(z,t)=A\cos(\omega t+\Delta\varphi)\end{cases} \tag{7.2.12}$$

由于 ωt 和 $\Delta\varphi$ 之间以加号“+”联系，则式(7.2.12)中 $\Delta\varphi$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 的相位超前. 即如果 $\Delta\varphi$ 为正值，表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 超前；如果 $\Delta\varphi$ 为负值，表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 滞后. 读者一定要注意式(7.2.11)与式(7.2.12)中相位差含义是有所区别的.



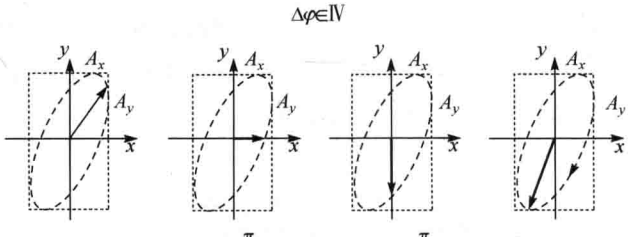
(a) 左旋　　(b) 右旋

图 7.2.13　左旋和右旋椭圆偏振光

在一个与波矢垂直的平面内观察时，椭圆偏振光的电矢量也是绕波矢旋转的，也有右旋和左旋两种情况，如图 7.2.13 所示.

椭圆偏振光电矢量的旋转方向以及椭圆长短轴的取向是由相位差 $\Delta\varphi$ 决定的.

例如，以式 $\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz-\omega t) \\ E_y = A_y\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi) \end{cases}$ 表示光的两个正交分量. 如果观察平面取在 $z=0$ 处，相位差 $\Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，即该相位差处于第Ⅳ象限. 则 $t_0=0$ 时刻，两正交分量的相位分别为 $\varphi_x(t_0)=0$，$\varphi_y(t_0)=-\dfrac{\pi}{6}$，电矢量的初始位置在直角坐标系的第Ⅰ象限. 随着时间的增大，可以分别在后续的 $t_1=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$、$t_2=\dfrac{\pi}{2\omega}$、$t_3=\dfrac{\pi}{\omega}+\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$ 等时刻算得上述两分量的相位依次为 $\varphi_x(t_1)=-\dfrac{\pi}{3}$，$\varphi_y(t_1)=-\dfrac{\pi}{2}$；$\varphi_x(t_2)=-\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi_y(t_2)=-\dfrac{5\pi}{6}$；$\varphi_x(t_3)=-\dfrac{2\pi}{3}$，$\varphi_y(t_3)=-\pi$. 画出电矢量在上述各个时刻的位置，即得图 7.2.14，可看出它是右旋的.



(a) $\omega t=0$　(b) $\omega t=\dfrac{\pi}{2}+\Delta\varphi$　(c) $\omega t=\dfrac{\pi}{2}$　(d) $\omega t=\pi+\Delta\varphi$

图 7.2.14　$\Delta\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$ 时电矢量的旋转方向(右旋)

同样地，如果 $\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即处于第Ⅰ象限时，分别画出在 $t=0$、$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$、$t=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$、$t=\dfrac{\pi}{\omega}$等时刻电矢量的位置，可看出它是左旋的(图 7.2.15).

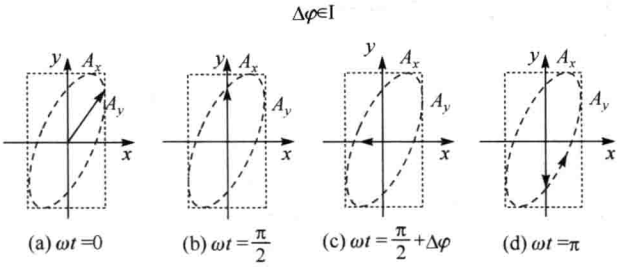


图 7.2.15　$\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{6}$时电矢量的旋转方向(左旋)

容易得到电矢量的旋转方向与两正交分量相位差之间的关系，即

$$\begin{cases}\Delta\varphi\in\text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\text{左旋}\\ \Delta\varphi\in\text{Ⅲ},\text{Ⅳ},\text{右旋}\end{cases}\tag{7.2.13}$$

如果抛开具体的表达式，而用相位的超前或滞后来描述，则可以避免一些讹误. 当 y 分量比 x 分量的相位超前 $0\sim\pi$，则是右旋椭圆偏振光；当 y 分量比 x 分量的相位滞后 $0\sim\pi$，则是左旋椭圆偏振光.

相位差 $\Delta\varphi$ 的取值范围还决定了椭圆长短轴的取向. 例如，画一个矩形，其半边长分别为两正交分量的振幅 A_x、A_y，该矩形与椭圆外切. 当 $\Delta\varphi$ 处于第Ⅲ象限($-\pi<\Delta\varphi<-\pi/2$)时，从 $t=0$ 时刻开始，电矢量端点形成的椭圆与四边形相切的时刻依次为 $\omega t=0$、$\omega t=\pi+\Delta\varphi$、$\omega t=\pi$、$\omega t=2\pi+\Delta\varphi$，在这些切点处，两分量的取值如下：

$$\begin{cases}E_x\overset{\omega t=0}{=}A_x>0\\ E_y=A_y\cos\Delta\varphi<0\end{cases},\quad\text{切点在第Ⅳ象限}$$

$$\begin{cases}E_x\overset{\omega t=\pi+\Delta\varphi}{=}A_x\cos(\pi-\Delta\varphi)>0\\ E_y=-A<0_y\end{cases},\quad\text{切点在第Ⅳ象限}$$

$$\begin{cases}E_x\overset{\omega t=\pi}{=}-A_x<0\\ E_y=A_y\cos(\pi+\Delta\varphi)>0\end{cases},\quad\text{切点在第Ⅱ象限}$$

$$\begin{cases}E_x\overset{\omega t=2\pi-\Delta\varphi}{=}A_x\cos\Delta\varphi<0\\ E_y=A_y>0\end{cases},\quad\text{切点在第Ⅱ象限}$$

分别就 $A_x>A_y$、$A_x<A_y$ 画出如图 7.2.16 所示椭圆，可见其长轴总是在Ⅱ、

Ⅳ象限.

如果 $\Delta\varphi$ 处于第Ⅰ象限($0<\Delta\varphi<\pi/2$),则从 $t=0$ 时刻开始,电矢量的椭圆与四边形相切的时刻依次为 $\omega t=0$(第Ⅰ象限)、$\omega t=\Delta\varphi$(第Ⅰ象限)、$\omega t=\pi$(第Ⅲ象限)、$\omega t=\pi+\Delta\varphi$(第Ⅲ象限)、$\omega t=2\pi$(第Ⅰ象限),则可得到如图 7.2.17 所示的椭圆,可见这是一个长轴位于Ⅰ、Ⅲ象限的椭圆偏振光.

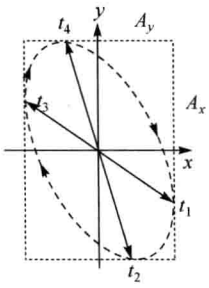


图 7.2.16 $\Delta\varphi$ 处于第Ⅲ象限时椭圆长轴的取向

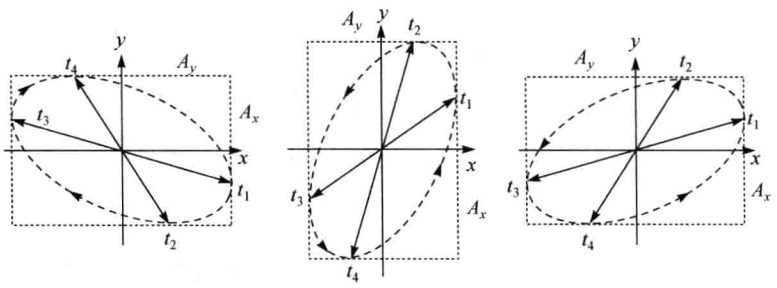


图 7.2.17 $\Delta\varphi$ 处于第Ⅰ象限时椭圆长轴的取向

椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系用图 7.2.18 表示,再次提醒读者,此处的相位差 $\Delta\varphi$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 的相位滞后,即采用式(7.2.11)表示正交分量.

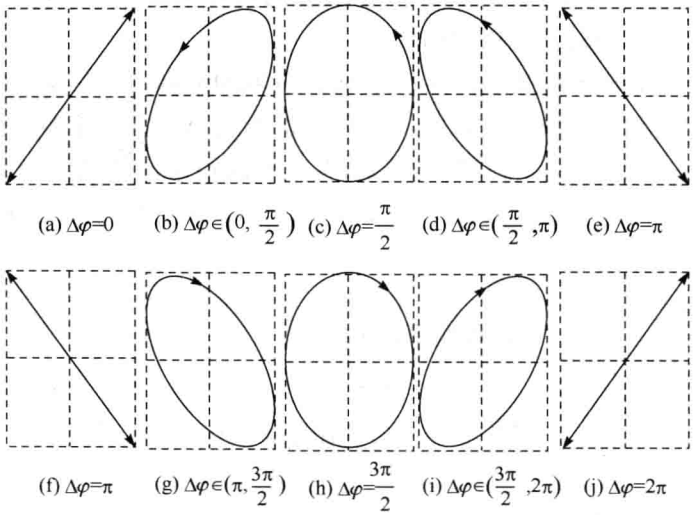


图 7.2.18 椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系

当 $\Delta\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时,椭圆的长短轴沿坐标的方向,是所谓的正椭圆,若同时有 $A_y=A_x$,正椭圆演化为圆.

例 7.1

一束椭圆偏振光与自然光的混合光沿 z 轴方向传播，通过一偏振片. 当偏振片的透振方向沿 x 轴时，透射光强度最大，为 $1.5I_0$；透振方向沿 y 轴时，透射光强度最小，为 I_0. 求：当透振方向与 x 轴成 θ 角时，透射光强是多少？与入射光中的无偏振部分相关吗？

解 椭圆的长轴沿 x 方向. 设自然光的光强为 I_1，而椭偏光分量的振幅为 A_x，A_y. 则

$$\begin{cases} 0.5I_1+A_x^2=1.5I_0 \\ 0.5I_1+A_y^2=I_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_x^2=1.5I_0-0.5I_1 \\ A_y^2=I_0-0.5I_1 \end{cases}$$

P 与 x 轴成 θ 角，考虑到椭圆偏振光的两正交分量间的相位差为 $\pi/2$，所以透过光强

$$\begin{aligned} I(\theta)&=0.5I_1+A_x^2\cos^2\theta+A_y^2\sin^2\theta \\ &=0.5I_1+(1.5I_0-0.5I_1)\cos^2\theta+(I_0-0.5I_1)\sin^2\theta \\ &=1.5I_0\cos^2\theta+I_0\sin^2\theta=I_0(1+0.5\cos^2\theta) \end{aligned}$$

可见，透射光强与入射光中无偏振部分(即自然光)的光强 I_1 无关.

7.3 反射、折射所引起的偏振态的改变

7.3.1 偏振态的改变

光在介质的分界面上发生反射、折射时，复振幅的变化可以用菲涅耳公式描述. 由菲涅耳公式可以看出，反射光、折射光的 P 分量、S 分量都将发生改变，因而会引起偏振态的改变. 一般情况下，自然光经过反射、折射后，都成为部分偏振光. 因此，要拍摄商店橱窗内的物体时，往往要在照相机前加一个偏振滤光镜，目的就是消除橱窗玻璃的反射光，而使橱窗玻璃后物体清晰成像. 同样，由于大气层对光的散射的作用，空气中的光也是部分偏振的，在拍摄空中的景象时，为了突出蓝天白云，使用偏振滤光片也能获得很好的效果.

在特殊的条件下，自然光经过反射、折射可以得到平面偏振光. 以下具体讨论.

7.3.2 垂直入射的情形

由菲涅耳公式，当垂直入射时，$i_1=0$ 时，$i_2=0$，因而

$$\left|\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}\right|=\left|\frac{n_1\cos 0-n_2\cos 0}{n_1\cos 0+n_2\cos 0}\right|=\left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|,\quad \left|\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}\right|=\left|\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}\right|=\left|\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|$$

$$\left|\frac{E_{S2}}{E_{S1}}\right|=\left|\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}\right|=\frac{2n_1}{n_1+n_2},\quad \left|\frac{E_{P2}}{E_{P1}}\right|=\left|\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}\right|=\frac{2n_1}{n_2+n_1}$$

由此可见，$\left|\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}\right|=\left|\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}\right|=\left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|$，$\left|\frac{E_{S2}}{E_{S1}}\right|=\left|\frac{E_{P2}}{E_{P1}}\right|=\frac{2n_1}{n_1+n_2}$，无论反射光还是折射光，各个分量的改变是成比例的. 由于在垂直入射的情形，入射、反射、折射光都与界面的法线重合，所以入射面不唯一，也就是说上述的 P 分量、S 分量是任意的. 因而反射光和折射光的偏振特性不变.

7.3.3 布儒斯特定律

要想使得反射光或折射光变为平面偏振光，则必须要使其中的某一个分量为 0.

按照菲涅耳公式，只有当 $i_1+i_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}=0$. 在这种情形下，反射光中只包含有 S 分量，为线偏光，如图 7.3.1 所示. 由折射定律可知，此时必须有 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2=n_2\cos i_1$，即 $\tan i_1=\frac{n_2}{n_1}$，将这种情形下的入射角记为 i_B，则

$$i_B=\arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{7.3.1}$$

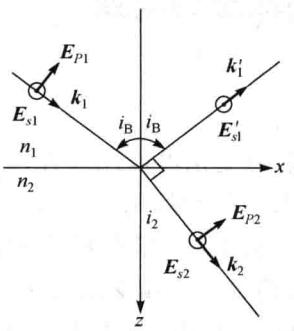


图 7.3.1 以布儒斯特角入射的自然光，反射光为线偏光

上述公式称为**布儒斯特定律**(布儒斯特，Sir David Brewster，1781～1868，苏格兰)，i_B 称为**布儒斯特角**.

当入射角为布儒斯特角时，无论入射光的偏振态如何，反射光都是平面偏振光，只有与入射面垂直的 S 分量.

7.3.4 玻璃片堆和布儒斯特窗

如果自然光以布儒斯特角入射，由于反射光中只有 S 成分，则显然折射光中的 S 成分将小于 P 成分，所以折射光为部分偏振光，其中 S 分量较弱.

利用菲涅耳公式对此作进一步的讨论可知，在折射光中，S 分量的振幅透过率为

$$\left|\frac{E_{S2}}{E_{S1}}\right|=\frac{2\sin i_2\cos i_B}{\sin(i_2+i_B)}=\frac{2\sin(\pi/2-i_B)\cos i_B}{\sin\pi/2}=2\cos^2 i_B$$

P 分量的振幅透过率为

$$\left|\frac{E_{P2}}{E_{P1}}\right|=\frac{2\sin i_2\cos i_B}{\sin(i_B+i_2)\cos(i_B-i_2)}=\frac{2\sin i_2\sin i_2}{\sin(\pi/2)\cos(\pi/2-i_2-i_2)}=\frac{2\sin^2 i_2}{\sin(2i_2)}$$

$$=\tan i_2=\frac{n_1}{n_2}$$

将上面的表达式以振幅 A 表示，由于这是第一次折射的结果，所以可以记成

$$(A_{s2})^{(1)}=A_{s1}2\cos^2 i_B,\quad (A_{P2})^{(1)}=A_{P1}\tan i_2=A_{P1}\frac{n_1}{n_2}$$

如果有一个如图 7.3.2 所示的玻璃平板，入射光在上表面以布儒斯特角 i_B 入射，则在下表面的入射角 i_2 也是布儒斯特角. 经过一对平行面的透射光，其分量的振幅变化如下：

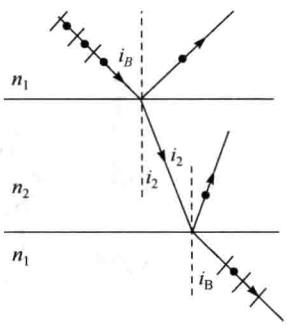


图 7.3.2　两次折射

P 分量，第一次，上表面透射：

$$(A_{P_2})^{(1)}=A_{P_1}\tan i_2$$

第二次，下表面透射：

$$(A_{P_2})^{(2)}=(A_{P_1}\tan i_2)\tan i_B=A_{P_1}\tan i_2\tan\left(\frac{\pi}{2}-i_2\right)=A_{P_1}$$

即 P 分量全透射.

S 分量，第一次，上表面透射：

$$(A_{S_2})^{(1)}=A_{S_1}2\sin^2 i_2$$

第二次，下表面透射：

$$(A_{S_2})^{(2)}=(A_{S_1}2\sin^2 i_2)2\cos^2 i_2=A_{S_1}(2\sin i_2\cos i_2)^2=A_{S_1}\sin^2(2i_2)$$

由于 $\sin^2 2i_2\leqslant 1$，$(A_{S_2})^{(2)}\leqslant A_{S_1}$.

上述推导说明，以布儒斯特角入射的自然光经过一个表面相互平行的玻璃平板后，P 分量保持不变，全部透射；而 S 分量将会比仅经过单侧表面减小得更多.

如果通过 n 对这样的相互平行的表面，则最终的透射光中有

$$(A_{S_2})^{(2n)}=A_{S_1}\sin^{2n}(2i_2)$$

当 $n\to\infty$ 时，$(A_{S_2})^{(2n)}\to 0$，透射光中没有 S 分量，但由于 $(A_{P_2})^{(2n)}=A_{P_1}$，透射光中 P 分量保持不变. 即透射光中只有 P 分量，是平面偏振光，振动方向与入射面平行.

依据这样的原理，可以用玻璃片堆(图 7.3.3)得到平面偏振的透射光.

激光就是利用上述原理获得的很好的平面偏振光，图 7.3.4 为激光器的光学

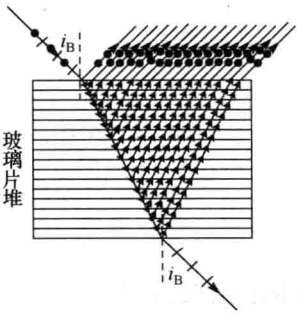


图 7.3.3　玻璃片堆

结构示意. 由一个反射镜和一个透反射镜构成的法布里-珀罗腔就是激光器的谐振腔；激光腔内有一对光学平板玻璃，玻璃板的法线与谐振腔的轴线间的夹角就是布儒斯特角，这样的一对玻璃板称为**布儒斯特窗**或者**布氏窗**. 激光器介质受激辐射发出的光在谐振腔中反复振荡，每振荡一次，就通过布氏窗四次，结果就只有 P 分量从透反射镜（激光器的窗口）出射，而 S 分量则被布氏窗反射. 因而激光是具有 P 分量的平面偏振光.

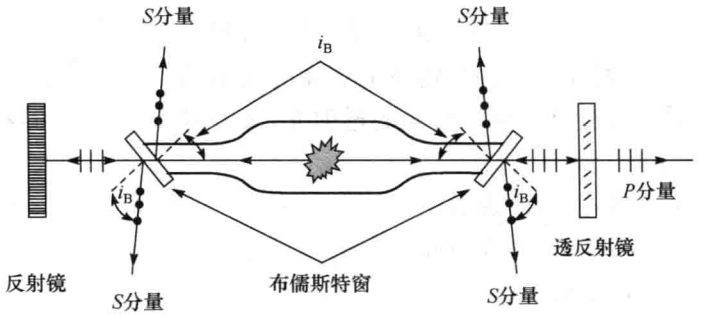


图 7.3.4　激光器中的布儒斯特窗

7.4　光在晶体中的双折射

双折射现象与双折射晶体

1. 双折射现象

晶体具有各向异性，其光学性质与各向同性的介质有很大的差异，例如，将一块方解石晶体覆盖在文字上，则会观察到这些字都有了重影（图 7.4.1），说明一束光经过方解石晶体的折射后成为两束，这就是**双折射**（birefringence）现象.

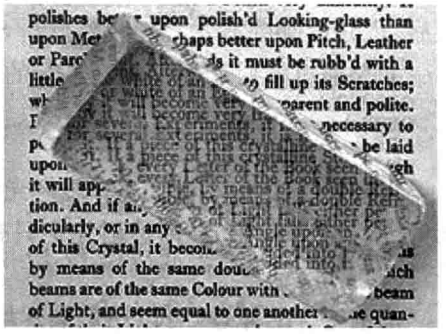


图 7.4.1　方解石晶体的双折射

如图 7.4.2 所示，一束光入射到双折射晶体中，其中一束光遵循折射定律，传播特性与在各向同性介质中相同，因而将这束光称为**寻常光**（ordinary ray），简称为 o **光**；而另一束光则不遵循折射定律，例

如，入射角为零时，在晶体中的折射角并不为零，在某些情况下甚至会出现折射角为负值的特例，因而将这束光称为**非常光**(extraordinary ray)，简称为 e **光**.

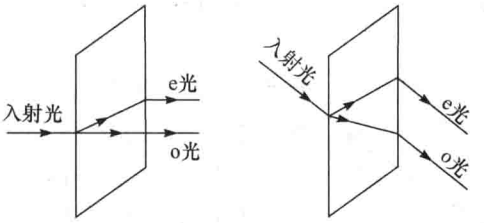
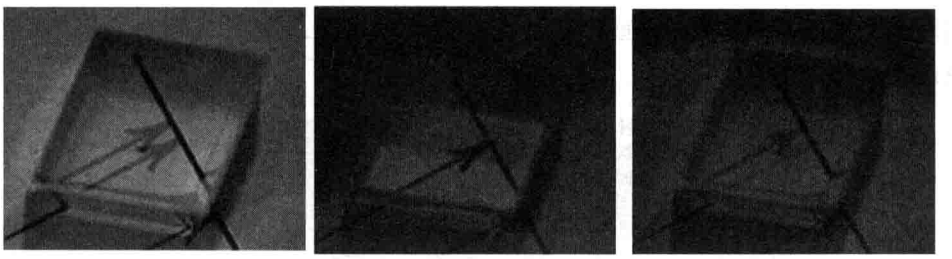


图 7.4.2　光在晶体中的双折射

所谓的 o 光、e 光都是针对在晶体中的光，离开晶体之后，则两束光无所谓“寻常”、“不寻常”，所以，对于从晶体出射的光，不再以 o 光、e 光作为称谓.

实验研究发现，折射后的两束光都是平面偏振光. 如图 7.4.3 所示，将一块方解石晶体覆盖在画有箭头的白纸上，则会看到两个箭头的像；通过一个偏振片观察，当偏振片转到某一角度时，则只能看到一个像，该像的位置与纸面上的箭头重合，因而可以判断这是 o 光折射的结果；继续将偏振片转过约 90°后，则会看到另一个像，这是 e 光折射的结果，而 o 光的像则几乎看不见. 说明 o 光、e 光都是平面偏振光.



(a) 箭头经过方解石晶体的两个像　(b) 经过线偏振器后o光的像　(c) 将线偏振器旋转90°后，e光的像

图 7.4.3　o 光、e 光的偏振特性

2. 双折射晶体

光在很多晶体中都能够产生双折射.

例如，方解石是一种典型的双折射晶体，其成分为 $CaCO_3$，是碳酸钙的三角晶系. 自然界的方解石中由于含有一些金属杂质往往呈现出各种彩色，而比较纯净的方解石则是无色透明的，亦称冰洲石晶体. 石英(水晶)、红宝石、冰等也是双折射晶体. 云母、蓝宝石、橄榄石、硫磺等是另一类双折射晶体.

3. 晶体双折射特征的表示

具有双折射特性的晶体，都具有各向异性的结构，可以用晶体中某些特殊方向

和平面作为其结构和性能特征的标识.

(1) 晶体的光轴:在双折射晶体中有一个特殊的方向,光沿此方向入射时不发生双折射,这个方向就被称为晶体的**光轴**(optical axis of crystal).

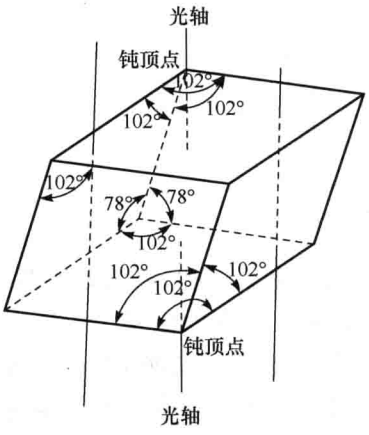


图 7.4.4　方解石晶体的光轴

按光轴可以将具有双折射特性的晶体分为单轴晶体(方解石晶体、石英、红宝石、冰等)、双轴晶体(云母、蓝宝石、橄榄石、硫磺等).

例如,方解石晶体属于三角晶系,天然方解石晶体的外观是平行六面体,它的每一个表面都是一个角度为 102°和 78°的平行四边形,如图 7.4.4 所示.在方解石晶体的八个顶点中,有一对顶点是由三个 102°的钝角构成,这样的顶点称为钝顶点.过钝顶点并且与该顶点的三条棱有相等夹角的直线就是方解石的光轴.由于晶体具有平移对称性,所以所有与上述光轴平行的直线也是该晶体的光轴.

(2) 主截面:晶体某一表面的法线与晶体光轴所构成的平面,就是晶体的**主截面**(principal section).同样由晶体的平移对称性可知,每一个表面实际上有一个平行的主截面族.对于方解石,由于其外形是平行六面体,所以每一组相对的面都有相同的主截面,而相邻的表面有不同的主截面,图 7.4.5 画出了晶体上、下表面的主截面.

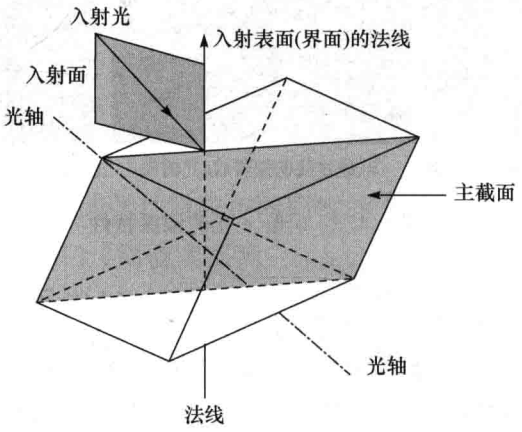


图 7.4.5　晶体中的光轴和主截面

光轴和主截面是与晶体相关的特征,由晶体结构所决定.

(3) 主平面:晶体中的光线与晶体的光轴所构成的平面就是光在晶体中的主

平面(principal plane).

在晶体中,由于双折射而产生了o光和e光,而o光和e光往往是分开的,所以o光与光轴构成的平面就是o**光主平面**,e光与光轴构成的平面就是e**光主平面**.图7.4.6画出了晶体中的o光主平面和e光主平面.实验研究表明,o光、e光具有如下特征.

o光:电矢量的振动方向垂直于其主平面.因而o光的电矢量垂直于光轴.

e光:电矢量的振动方向平行于其主平面.因而e光的电矢量在e光主平面内.

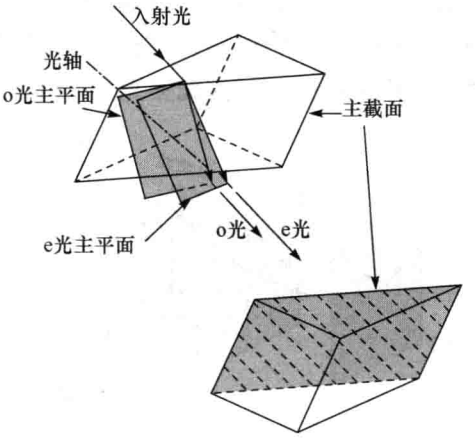


图7.4.6 晶体中o光和e光的主平面

一般情况下,光以任意的角度射入晶体,则入射面(即入射光线与晶体表面法线构成的平面)、主截面、o光主平面、e光主平面是不重合的,如图7.4.7所示.

但是,通过选择合适的入射方向,可以使入射面与主截面重合,即光轴处于入射面之中.此时,o光主平面、e光主平面重合,且均与主截面重合(图7.4.8).

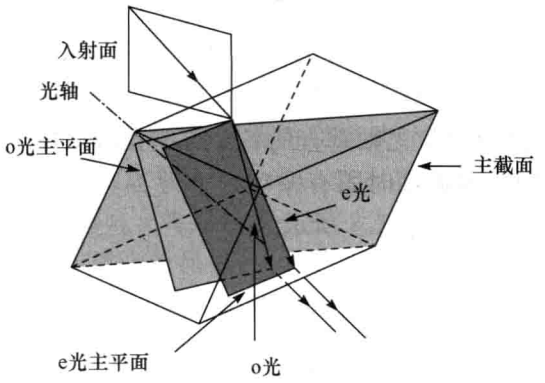


图7.4.7 晶体的主截面与两个主平面不重合

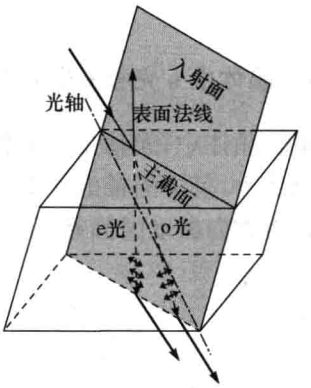


图7.4.8 与主截面平行的入射光在晶体中的主平面

4. o光、e光的光强

在入射面与主截面重合的条件下,晶体中o光的主平面、e光的主平面都与晶体的主截面重合,则可以计算两束光的相对强度.例如,入射光是平面偏振光,电矢量与主截面间夹角为θ,当光轴与表面倾斜时(图7.4.9),在晶体中o光、e光分开,从晶体出射后,这两列光波的相对强度的比值为$\tan^2\theta$;当光轴与表面平行时(图7.4.10),在晶体中o光、e光的方向仍然相同,但折射率不同,所以传播的速度

不相同，从晶体出射后，这两列光波的相对强度仍为$\tan^2\theta$，虽然两列光波的方向相同，但是由于这两个相互正交的振动之间相位差通常不再是 0 或 π，所以出射光不再是与原来相同的平面偏振光.

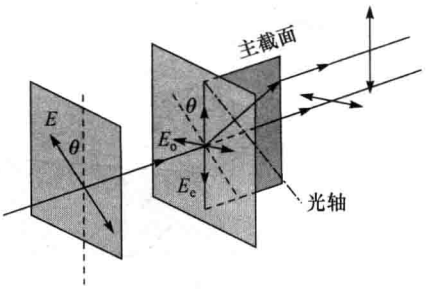


图7.4.9　一般情形下晶体中 o 光、e 光的光强

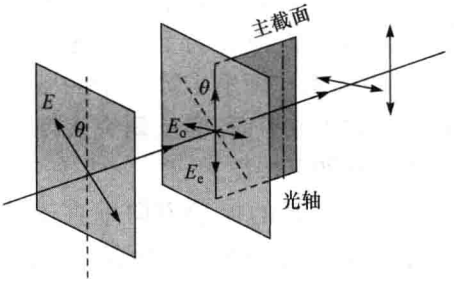


图 7.4.10　晶体光轴与表面平行

如图 7.4.10 所示，设入射平面偏振光的振动平面与晶体的主截面间夹角为 θ，则正交分解所得的 o 光、e 光的振幅分别为 $A_o=A\sin\theta$，$A_e=A\cos\theta$，光强为 $I_o=I\sin^2\theta$，$I_e=I\cos^2\theta$，其中 θ 为入射光的偏振方向与主截面夹角.

7.5　单轴晶体中光的波面

7.5.1　晶体中 o 光和 e 光的波面

单轴晶体中，光轴是一个特殊的方向，而与光轴垂直的各个方向是等效的，因而可以认为，其中的带电粒子沿着光轴方向振动时固有振动频率为 ω_1，而沿着与光轴垂直方向振动时固有振动频率为 ω_2，如图 7.5.1 所示.

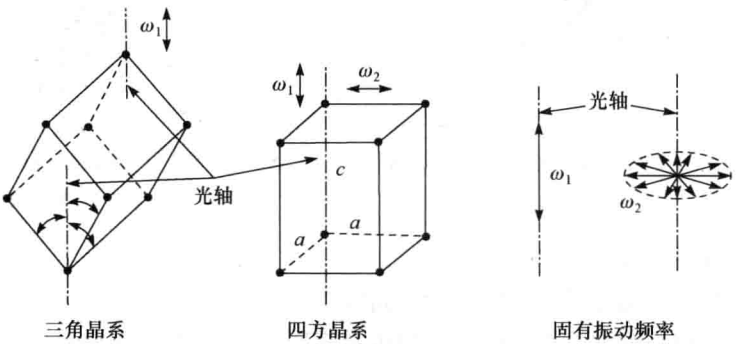


图 7.5.1　单轴晶体中的固有振动频率

由于沿着不同的方向有不同的固有振动频率，因而光在单轴晶体中传播时，沿

着不同的方向就会有不同的速度. 光是横波，沿着光轴方向传播时，由于其振动矢量总是与光轴垂直，所以其相速度受 ω_2 控制，速度为 v_2；而沿着与光轴垂直的方向传播时，由于其振动矢量总是与光轴平行，其速度受 ω_1 控制，速度为 v_1；沿着其他方向传播时，速度是介于上述 v_1 和 v_2 之间的.

光的波面是等相位面，如果单轴晶体中有一个扰动点源，则会将扰动向各个方向传播，如图 7.5.2 所示. 晶体中的波线（即光的传播方向）与晶体的光轴就构成了光的主平面. 如果扰动电矢量的方向与光的主平面垂直，这就是晶体中的 o 光. o 光的电矢量与光轴垂直，则该扰动沿着各个方向传播的速度均等于 v_2（可记为 v_o），因而晶体中 o 光的波面是球面.

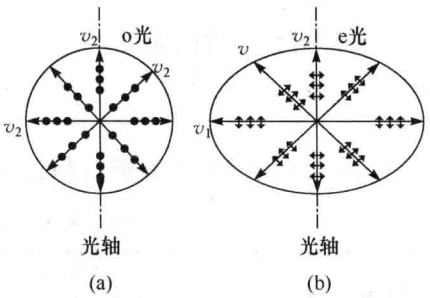


图 7.5.2　单轴晶体中 o 光、e 光电矢量的方向

如果扰动电矢量的方向与光的主平面平行，就是晶体中的 e 光. e 光沿着光轴方向传播时，电矢量与光轴垂直，速度为 v_2；沿着与光轴垂直方向传播时，电矢量与光轴平行，速度为 v_1（可记为 v_e）；而沿着其他方向传播时，相速度介于 v_1 和 v_2 之间，因而 e 光的波面就是一个椭球面. 由于单轴晶体具有绕光轴的旋转对称性，所以该椭球面是一个绕晶体光轴的旋转椭球面.

晶体中 o 光的球形波面、e 光旋转椭球形的波面如图 7.5.3 所示.

如图 7.5.4 所示，由于 o 光、e 光沿着光轴方向传播时具有相同的速度 v_2，所以它们在同一时刻的波面在光轴处总是相切的. 在与光轴垂直的方向传播时，o 光、e 光的速度取决于 o 光、e 光在晶体中的折射率. 如果 o 光的折射率大于 e 光的折射率，那么 e 光的速度 v_1 就大于 o 光的速度 v_2，则球面被包裹于椭球面内，这样的晶体被称为**负晶体**；反之，如果 o 光的折射率小于 e 光的折射率，那么 e 光的速度 v_1 就小于 o 光的速度 v_2，则椭球面被包裹在球面内，这样的晶体被称为**正晶体**.

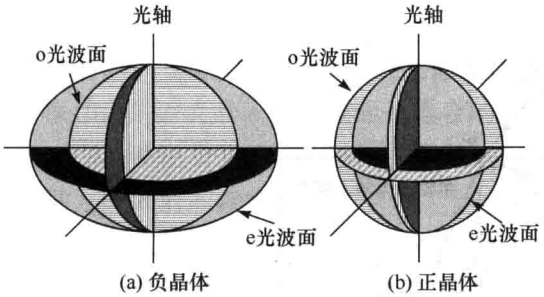


图 7.5.3　单轴晶体中 o 光、e 光的波面

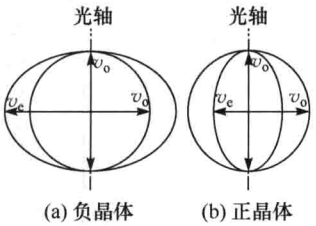


图 7.5.4　单轴晶体中 o 光、e 光沿不同方向的速度

由于 e 光在不同方向传播速度不同，其折射率也不同. 当 e 光沿着与光轴垂直的方向传播时，将 e 光的折射率定义为**主折射率**，即记 e 光沿着与光轴垂直方向传播的速度为 v_e，则其主折射率为

$$n_e=\frac{c}{v_e} \tag{7.5.1}$$

o 光的折射率与方向无关，为

$$n_o=\frac{c}{v_o} \tag{7.5.2}$$

表 7.5.1 给出了方解石和石英对某些波长的 n_o 和 n_e.

表 7.5.1　方解石与石英晶体的 n_o 和 n_e

谱线波长/nm		方解石		石英	
		n_o	n_e	n_o	n_e
Hg	546.072	1.68134	1.49694	1.55716	1.56671
	404.656	1.66168	1.48792	1.54617	1.55535
Na	589.290	1.65836	1.48641	1.54425	1.53336

实际上是根据两种光折射率的相对大小，将晶体分为正晶体和负晶体的.

$v_o>v_e$，为正晶体；$v_o<v_e$，为负晶体. 正晶体中，$n_o<n_e$；负晶体中，$n_o>n_e$. 图 7.5.4 给出了正负晶体中 o 光、e 光的波面. 根据表 7.5.1 所给出的某些波长的光在方解石和石英中的折射率，可见方解石为负晶体，石英为正晶体.

7.5.2　单轴晶体的惠更斯作图法

根据单轴晶体中 o 光、e 光的波面特征，可以利用惠更斯作图法确定晶体中 o 光、e 光的方向.

针对光轴在入射面内的情形，惠更斯作图法可以用下述步骤表述，参见图 7.5.5.

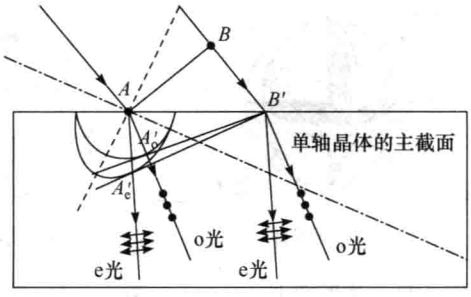


图 7.5.5　双折射的惠更斯作图法

设入射光的波面为 AB，晶体中 o 光、e 光的波面分别为 A'_oB'、A'_eB'.

(1) 将入射光束用一对平行线画出，这两条平行线分别与晶体的表面交于 A 点和 B' 点. 过 A 点作平行线的垂线 AB，则 AB 即为入射光的波面.

入射光由 B 点传播到 B' 点的时间为 $\Delta t=\overline{BB'}/c$. 则在 Δt 内，A 点的光将在晶体中传播过一定的距离.

(2) 由于 o 光的波面为球面，作 o 光波面：以 A 为中心，$v_o\Delta t$ 为半径作球面，该球面即为 o 光的波面. 过 B' 点作该球面的切平面，切点为 A'_o，则 A'_oB' 就是 o 光在晶体中的波面，即 AA'_o 就是 o 光的传播方向.

(3) 由于 e 光的波面为旋转椭球面，作 e 光的波面：光轴为椭球面的旋转对称轴，e 光的波面与 o 光的波面在光轴上相切；椭球的另一轴与该轴垂直，半轴长度为 $v_e\Delta t$. 从 B' 点作椭球面的切平面，切点为 A'_e，则 AA'_e 即为 e 光的方向.

由上述作图过程可以看出，在晶体中，o 光的波面仍然与其传播方向垂直，但是 e 光的波面与其传播方向不再垂直.

晶体中 e 光的方向往往与 o 光相差明显，e 光的折射有时还会出现与折射定律相反的情况. 例如，在入射角不等于 0 时，e 光的折射角可能会等于 0 (图 7.5.6)，甚至出现负值(图 7.5.7).

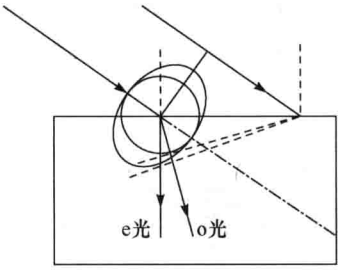


图 7.5.6　e 光的折射角为 0

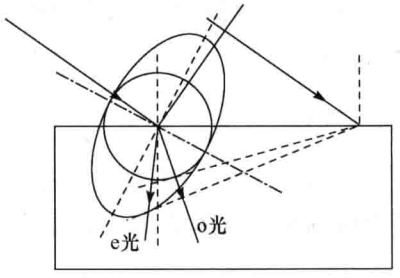


图 7.5.7　e 光的折射角为负值

7.5.3　几种特例

如图 7.5.8 所示，当光轴与晶体表面垂直，且入射光垂直入射. 则按照惠更斯方法作出的 o 光和 e 光的波面是重合的，即不仅 o 光、e 光方向相同，速度也是相同的，这时，并没有发生双折射. 这就是沿着光轴方向入射的特殊情形.

如果光轴与晶体表面平行，则由于在与光轴垂直的方向上，o 光、e 光速度不同，则 o 光、e 光的波面虽然相互平行，但是已经在空间分离，如图 7.5.9 所示. 说明虽然

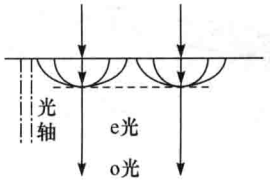


图 7.5.8　沿光轴传播的光不发生双折射

o 光、e 光的方向相同，但传播速度不同，因而发生了双折射.

如果入射面与光轴垂直，如图 7.5.10 所示，则球面和椭球面在入射面的投影都是圆，由于 o 光、e 光的速度不同，两圆的半径不同，因而发生双折射，o 光、e 光不仅方向不同，速度也不同. 但是，这时 e 光的波面与其传播方向垂直.

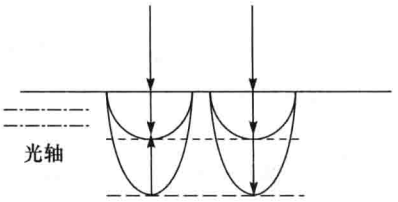


图 7.5.9　o 光、e 光虽然方向相同，但发生了双折射

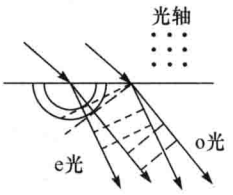


图7.5.10　用惠更斯作图法确定 o 光、e 光的方向

7.6　晶体光学器件

光在晶体中的双折射产生了两种不同的结果，其一，o 光、e 光都是平面偏振光；其二，由于 o 光、e 光的速度不同，一列光相对于另一列光有一定的相位滞后. 利用这两点，可以用双折射晶体制成**偏振棱镜**(birefringent polarizers)和**相位延迟波晶片**(retarders).

7.6.1　偏振棱镜

既然晶体中的 o 光、e 光都是平面偏振光，如果设法将这两束光分开，则就可以得到平面偏振光，这样的晶体就是偏振棱镜. 以下简单介绍几种常用的偏振棱镜.

1. 尼科耳棱镜

尼科耳棱镜(Nicol prism，尼科耳，William Nicol，1770～1851，英国)用方解石晶体制成. 首先对晶体切割，使长约为宽的三倍，如图 7.6.1 所示. 晶体的光轴过 A 顶点，对于表面 $ABCD$，主截面为 $ACC'A'$，对于天然晶体，此主截面中，$\angle C=\angle A'=71°$.

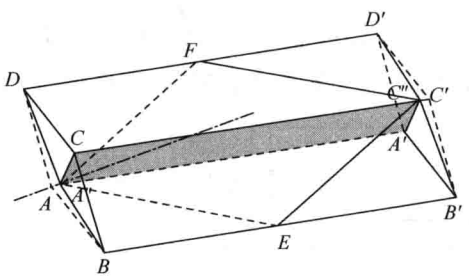


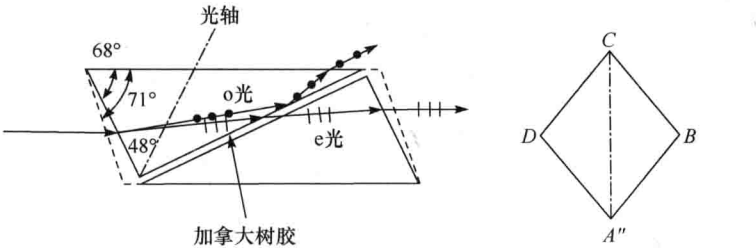
图 7.6.1　由方解石制作尼科耳棱镜

将两相对面磨去一部分，使得$\angle C=\angle A'=68°$.

再用一个与主截面垂直的平面 $A''EC''F$ 将晶体剖开为相等的两部分，之后用加拿大树胶将剖面黏合.

在晶体中 o 光和 e 光有不同的折射

率，但对加拿大树胶，由于是各向同性的，其折射率相同. 例如，对于钠黄光，有 $n_e=1.48641<n=1.55<n_o=1.65836$，在用加拿大树胶黏合处，如果角度合适，可以使 o 光全反射，e 光透射，因而两列平面偏振光分开，如图 7.6.2 所示.



(a) 从尼科耳棱镜获得平面偏振光　　(b) $A''C$为尼科耳棱镜的主截面

图 7.6.2　尼科耳棱镜

但加拿大树胶吸收紫外线，所以尼科耳棱镜不能用于紫外波段.

2. 格兰-汤普森棱镜

格兰-汤普森棱镜(Glan-Thompson prism)的结构如图 7.6.3 和图 7.6.4 所示，是由两块方解石的直角三棱镜组成，而且两棱镜的光轴相互平行. 两棱镜的斜面既可以用胶黏合，也可以直接接触(中间有空气层). 由于胶对紫外线有强烈的吸收，所以直接接触的格兰-汤普森棱镜可以透射紫外线. 容易看出，在两块棱镜的分界面处，o 光发生全反射，从另一侧面透出，而 e 光通过接触面后直接射出.

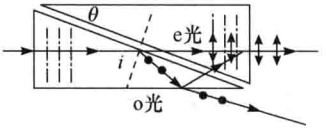


图 7.6.3　格兰-汤普森棱镜(1)

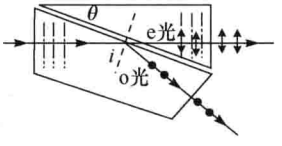


图 7.6.4　格兰-汤普森棱镜(2)

由于 o 光在棱镜的底面有一部分会被反射，反射光会从另一端面与 e 光一起射出(图 7.6.3)，所以，往往将其底面涂黑；或采用图 7.6.4 的结构，保证出射光有好的偏振度.

3. 沃拉斯顿棱镜

沃拉斯顿棱镜(Wollaston prism，沃拉斯顿，William Hyde Wollaston，1766～1828，英国)用两块方解石的直角三棱镜制成. 两棱镜的光轴相互垂直，斜面相对组合在一起，如图 7.6.5 所示.

由于两块晶体的光轴相互垂直，若保持入射光垂直射向第一块晶体，则第一块晶体中，由于 o 光、e 光的方向相同，它们的主平面相同，都与晶体的主截面重合；第二块晶体中，由于折射，o 光、e 光的方向不同，主平面也不重合，但都和第一块晶

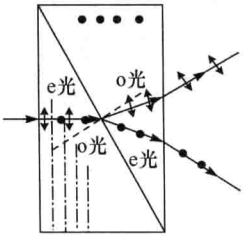


图 7.6.5　沃拉斯顿棱镜

体中光的主截面垂直. 因而第一镜中 o 光进入第二镜时，变为 e 光；第一镜中 e 光进入第二镜时，变为 o 光. 在分界面处，将入射角记为 i_1；第二块晶体中 o 光、e 光的折射角记为 i_{2o}、i_{2e}. 由于 $n_o>n_e$，于是有 $i_{2o}<i_1<i_{2e}$，即

$$\begin{cases} n_o\sin i_1=n_e\sin i_{2e} \\ n_e\sin i_1=n_o\sin i_{2o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin i_{2e}=\dfrac{n_o}{n_e}\sin i_1>\sin i_1 \\ \sin i_{2o}=\dfrac{n_e}{n_o}\sin i_1<\sin i_1 \end{cases}$$

o 光、e 光分开.

4. 洛匈棱镜

洛匈棱镜(Rochon prism)的结构与沃拉斯顿棱镜有些相似，如图 7.6.6 所示，仍然由两个光轴相互垂直的方解石直角三棱镜制成，但第一棱镜的光轴与光入射的表面垂直. 当光垂直入射时，在第一镜中无双折射，第二镜中有双折射.

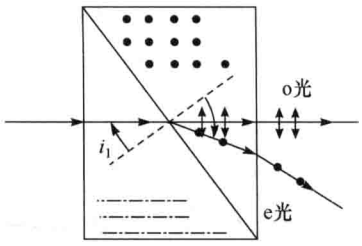


图 7.6.6　洛匈棱镜

可以看出经过棱镜后，由双折射使得两列光的折射角为

$$\begin{cases} n_o\sin i_1=n_o\sin i_{2o} \\ n_o\sin i_1=n_e\sin i_{2e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{2o}=i_1 \\ \sin i_{2e}=\dfrac{n_o}{n_e}\sin i_1>\sin i_1 \end{cases} \Rightarrow i_{2e}>i_{2o}$$

因而 o、e 光分开.

上述偏振棱镜利用了晶体的双折射性质，可以得到偏振度很好的平面偏振光.

7.6.2　波片

波片(wave plate)通常用石英制成，也称为**波晶片**，是从石英晶体中切割出来的薄片. 薄片的两个表面相互平行，而且石英的光轴也与表面平行，如图 7.6.7 所示. 当平行光正入射时，在波片中，虽然有双折射，但是 o 光、e 光的方向一致，只是速度不同，有的超前，有的滞后. 我们也可以将传播速度快、相位超前的光称为“快光”，而传播速度慢、相位滞后的光称为“慢光”.

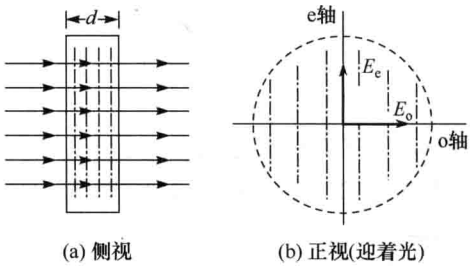


图 7.6.7　波片和波片中的双折射

在图 7.6.7 所示的波片中，由于 e

光沿光轴方向振动，而o光的振动方向与光轴垂直，则光轴的方向也被称为e轴，而与光轴垂直的方向被称为o轴，e轴是波片中e光电矢量的方向，而o轴是波片中o光电矢量的方向. 那么可以建立一个直角坐标系，通常取z轴为光的入射、出射方向，即波矢的方向，xOy 平面与波片的表面平行，为了表示的方便，通常取坐标轴的方向与o轴、e轴的方向平行.

o轴、e轴在波片中的折射率不同，由于e光的传播方向与光轴垂直，所以e光的折射率就是其主折射率，设波片的厚度为 d，则o光、e光在波晶片中的光程分别为 $L_o=n_o d$，$L_e=n_e d$，当光从波片出射时，由此引起的光程差为

$$\Delta L=L_e-L_o=(n_e-n_o)d \tag{7.6.1}$$

相位差

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d \tag{7.6.2}$$

如果波片是正晶体，$n_o<n_e$，出射时，o光的相位比e光超前；如果是负晶体，$n_o>n_e$，出射时，o光的相位比e光滞后. 所以式中(7.6.2)的 $\Delta\varphi$ 是由波片引起的e光相对于o光的相位滞后(延迟).

对于特定的入射光波长，可以通过选择不同厚度的波片，从而产生不同的相位差.

设 m 为整数，入射光的波长为 λ.

如果 $\Delta L=\frac{1}{2}m\lambda\pm\frac{\lambda}{4}$，则 $\Delta\varphi=m\pi\pm\frac{\pi}{2}$，波片使得o光、e光(严格地说，从波片射出后，就不能再称其为o光、e光了，而是两列光矢量正交的光)之间产生额外的 $\pm\frac{\pi}{2}$ 的相位差，这就是 $\frac{1}{4}$ 波片(a quart-wave plate，a quart-wave retarder)，也可记为 $\frac{\lambda}{4}$ 片.

如果 $\Delta L=\pm\frac{\lambda}{2}+m\lambda$，则 $\Delta\varphi=2m\pi\pm\pi$，从波片出射的两列光矢量正交的光之间额外产生 π 的相位差，这种波片被称为 $\frac{1}{2}$ 波片(a half-wave plate，a half-wave retarder)，或记为 $\frac{\lambda}{2}$ 片.

由于晶体中e光、o光的速度，或者相位是超前还是滞后取决于晶体的正负，所以习惯有“快轴”(fast axis)、“慢轴”(slow axis)的说法.

快轴：晶体中传播速度较快的光的振动方向(轴). 负晶体的e轴、正晶体的o轴都是快轴.

慢轴：传播速度慢的光的振动方向(轴). 负晶体的o轴、正晶体的e轴都是

慢轴.

具有偏振特性(平面偏振光、圆偏光和椭圆偏振光)的单色平行光束正入射到波片上,从波片的另一侧出射的光,方向相同,但由于双折射,成为具有一定相位差且电矢量相互垂直的两部分,其偏振特性将发生改变. 而自然光和部分偏振光,由于其正交分量之间的相位差是随机无规的,所以经过波片后,仍然是自然光和部分偏振光,即波片对这两种光不起作用.

7.6.3 相位补偿器

波片具有固定的厚度,因而只适用于特定的波长,而且只能产生固定的相位差. 如果设法将波片做成厚度可以改变的元件,则可以产生任意的相位差,这种元件就是补偿器.

1. 巴比涅补偿器

将两块光轴相互垂直且顶角很小的直角三棱镜的斜面相对接触,组合起来,就做成了**巴比涅补偿器**(Babinet compensator,巴比涅,Jacques Babinet,1794～1872,法国),如图 7.6.8 所示. 该补偿器的结构实际上与沃拉斯顿棱镜相同,区别仅在于该补偿器很薄,且三棱镜顶角很小. 所以在棱镜斜面处光近似垂直入射,因此使得透过的光并没有分开,还基本保持原有的方向,也避免了全反射的发生.

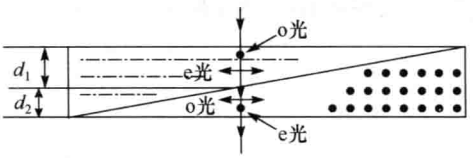


图 7.6.8 巴比涅补偿器

由于上、下两部分的光轴相互垂直,第一块晶体中的 o 光,振动方向与纸面垂直,这列光进入第二块晶体后,振动方向与光轴平行,就变成了 e 光;同样,第一块晶体中的 e 光,振动方向与光轴平行,进入第二块晶体后,振动方向与纸面垂直,就变成了 o 光. 在光经过的路径上,设第一块晶体的厚度为 d_1,第二块晶体的厚度为 d_2,于是其中振动方向垂直于纸面和平行于纸面的两列光的光程分别为

$$L_{o1}=n_o d_1,L_{e2}=n_e d_2;L_{e1}=n_e d_1,L_{o2}=n_o d_2$$

从补偿器出射的两列振动方向正交的光波之间的光程差为

$$\Delta L=(n_o d_1+n_e d_2)-(n_e d_1+n_o d_2)=(n_o-n_e)(d_1-d_2) \tag{7.6.3}$$

因此,改变光入射的位置,就可以使得 d_1-d_2 的数值改变,从而改变出射光的相位差,即

$$\Delta\varphi=k\Delta L=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)(d_1-d_2) \tag{7.6.4}$$

由于 d_1-d_2 有很大的取值范围,所以出射光的相位差的取值范围也可以很大,起到相位补偿的作用.

巴比涅补偿器的特点在于,由于光束的截面总有一定的大小,光束中不同的部

分，所经历的厚度 d_1、d_2 都不相同，所以相位差也不相同. 利用这一点，可使一束均匀的偏振光经过巴比涅补偿器，成为非均匀的偏振光，光束中不同的位置，两正交分量的相位差不同，偏振特性也不同.

2. 索列尔补偿器

结构如图 7.6.9 所示，**索列尔补偿器**(Soleil compensator)由两块光轴方向一致的三棱镜和一块光轴与它们垂直的平板晶体构成. 上面两块晶体可以沿斜面相对滑动，以改变其厚度 d_1，这种补偿器克服了巴比涅补偿器的缺点，由于上下两块晶体等效于平行平板，所以宽光束入射时，也能产生相同的相位差，且光的传播方向不会改变.

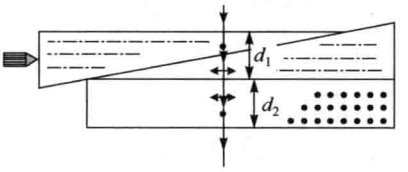


图 7.6.9 索列尔补偿器

如果上、下两块晶体材料相同，光轴方向也相同，则有 $L_o=n_o d$，$L_e=n_e d$，于是 $\Delta L'=(n_o-n_e)d$，这时，看起来只要将上下两块晶体相对滑动，使得晶体的厚度 d 变化，即可改变出射光的相位差，如图 7.6.10 所示. 但是，由于厚度 d 不是一个小量，所以 $\Delta L'\gg\Delta L$，即光程差要大得多，而实际的光不是严格的单色波，而是准单色波，其波列长度有限，是 $L=\lambda^2/\Delta\lambda$，如果该光程差 $\Delta L'$ 超出波列的长度 L，受到时间相干性的限制，出射的两列电矢量正交的光已经无法叠加. 而厚度差 d_1-d_2 可以变得足够小，因而使得光程差 $\Delta L=(n_o-n_e)(d_1-d_2)$ 足够小，满足对时间相干性的要求. 正是由于这样的原因，补偿器都是由两块光轴正交的棱镜组成，而波片的厚度也是很薄的.

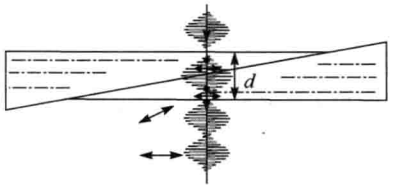


图 7.6.10 光程差太大导致两列波分离

7.7 波片对光的偏振态的改变

7.7.1 光在波晶片中的传播引起的相位差

图 7.7.1 中给出了晶体波片中 o 光、e 光的相对传播速度. 波片中，o 光、e 光的光矢量的方向如图 7.7.2 所示.

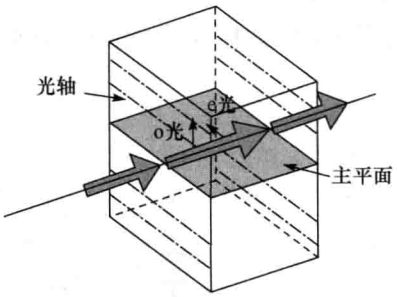


图 7.7.1　波片中 o 光、e 光的主平面

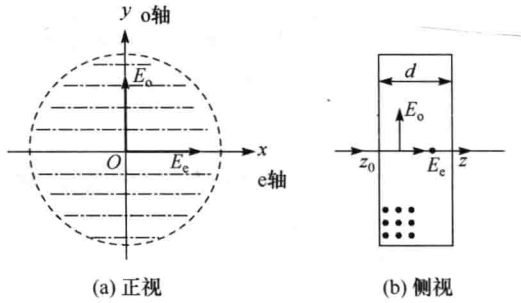


图 7.7.2　波片中 o 光、e 光的光矢量的方向

具有某种偏振态的光射入波片，在波片中，o 光、e 光的振动相互垂直，从波片射出后，这两个相互垂直的、同方向的波列之间会产生一个相位差，因而合成后，所得到的光可以具有各种偏振态，以下作具体分析.

如图 7.7.3 所示，首先取定坐标系取 z 轴沿光的传播方向，不妨设 x 轴与光轴平行，为 e 轴，则 y 轴为 o 轴. 设在入射点 z_0 处，o 光，e 光的相位分别为 $\varphi_o(z_0)$，$\varphi_e(z_0)$，即入射光可以用两个正交分量表示为

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos[kz_0 - \omega t + \varphi_o(z_0)] \\ E_y = A_y \cos[kz_0 - \omega t + \varphi_e(z_0)] \end{cases} \tag{7.7.1}$$

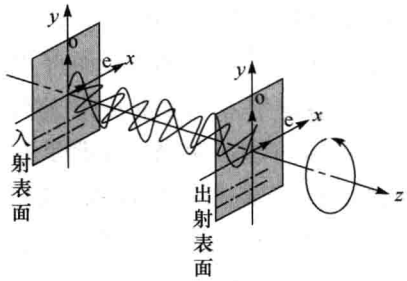


图 7.7.3　波片中 o 光、e 光的速度不同，相位不同

同一时刻，在波片后表面出射点 z 处，两正交分量的相位为

$$\varphi_o(z) = kz_0 - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} n_o d + \varphi_o(z_0) \tag{7.7.2}$$

$$\varphi_e(z) = kz_0 - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} n_e d + \varphi_e(z_0) \tag{7.7.3}$$

它们之间的相位差为

$$\Delta\varphi(z) = \varphi_o(z) - \varphi_e(z) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + [\varphi_o(z_0) - \varphi_e(z_0)] = \Delta\varphi + \Delta\varphi_0$$

其中，$\Delta\varphi_0 = \varphi_o(z_0) - \varphi_e(z_0)$为在波片前表面处 o 光、e 光的相位差，即两正交分量的初相位差，在这里，就是 y 方向振动相对于 x 方向振动的相位滞后 $\Delta\varphi_0$. $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$就是由于光在波片中的双折射而额外产生的 o 光、e 光的相位差，则经过波片后，y 方向振动的光相对于 x 方向振动的光，相位滞后为 $\Delta\varphi + \Delta\varphi_0$.

由于离开波片后，光在均匀介质中传播，两个正交分量之间不会再有额外的相

位差，所以在后面的任何位置处，它们之间的光程差都将保持为 $\Delta\varphi+\Delta\varphi_0$，也就是说，可以将两个正交分量的表达式写为

$$\begin{cases}E_x=A_x\cos(kz-\omega t+\varphi_0)\\E_y=A_y\cos(kz-\omega t+\varphi_0+\Delta\varphi+\Delta\varphi_0)\end{cases}$$

沿快轴振动的光，折射率小，传播速度快，在 z 点的相位较小，即相位超前；沿慢轴振动的光，折射率大，传播速度慢，在 z 点的相位大，即相位滞后.

7.7.2 经过波片后光的偏振态的改变

1. 自然光经波晶片

自然光进入波片，由于晶体中 o 光和 e 光的初相位在 z_0 点是任意的，经波晶片后的相位差仍是任意的，所以仍是自然光，如图 7.7.4 所示.

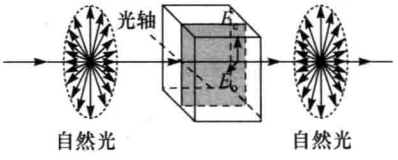


图 7.7.4 自然光经过波片后仍是自然光

2. 线偏光经过波晶片

入射的线偏振光，在波片的前表面处分为 o 光、e 光，两者之间的相位差 $\Delta\varphi_0$ 为 0 或 π，经过波片后，这两个正交的振动之间会产生额外的相位差 $\Delta\varphi$. 以下通过一些例子对此进行具体的分析.

(1) 如图 7.7.5 所示，入射线偏光的振动面与 $\frac{1}{4}\lambda$ 片光轴之间的夹角为 θ，光轴为快轴，讨论经过波片后光的偏振态.

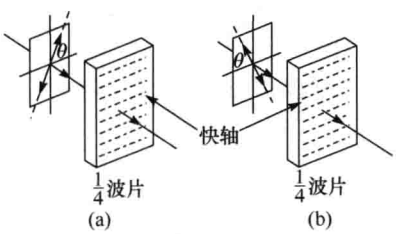


图 7.7.5 入射光为线偏振光

看起来，这两种情况是一样的，因为经过 $\frac{1}{4}$ 波片后，都是竖直方向的分量比水平方向的分量相位要滞后 $\frac{\pi}{2}$. 但是，如果取定坐标系后，将会发现，两种情况下，入射光的两个正交分量之间的相位差是不同的. 如果设第一种情形下入射光两个正交分量间的相位差为 0，则第二种情形下，两者间的相位差是 π. 因而经过波片后，竖直方向比水平方向的相位滞后分别为

$$\Delta\varphi_1=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\quad \Delta\varphi_2=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

第一种情况下，出射光是左旋椭圆偏振光；第二种情况下，出射光是右旋椭圆偏振光. 椭圆的长短轴分别沿竖直和水平方向，就是所谓的“正椭圆”，且长短轴之

比为 $\sin\theta:\cos\theta$，或 $\tan\theta:1$，如图 7.7.6 所示.

通过上述例子可以看出，建立坐标系有助于准确地描述光的偏振状态，如图 7.7.7 所示，对于Ⅰ、Ⅲ象限的线偏振光，其两个分量 $\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$ 总是同时取正值和负值，即两者是同步的，故相位差为 0；而Ⅱ、Ⅳ象限的线偏振光，$\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$ 的正负取值恰恰相反，是反相的，故相位差为 π.

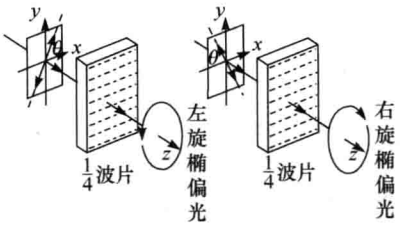


图 7.7.6　出射光分别为左旋(a)和右旋(b)的椭圆偏振光

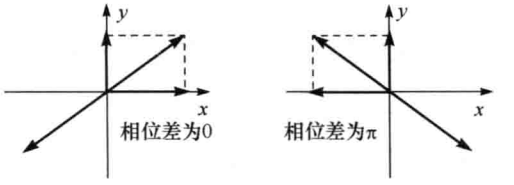


图 7.7.7　线偏振光两正交分量之间的相位差

当入射光与光轴间的夹角 $\theta=45°$ 时，两正交分量的振幅相等，出射光为圆偏振光.

(2) 如图 7.7.8 所示，入射线偏光的振动面与 $\frac{1}{2}\lambda$ 片光轴之间的夹角为 θ，光轴为快轴，讨论出射光的偏振态.

如果入射光中两分量间的相位差是 0，经过 $\frac{1}{2}$ 波片后，相位差为 π，成为Ⅱ、Ⅳ象限的线偏振光；如果入射光中两分量间的相位差是 π，经过 $\frac{1}{2}$ 波片后，相位差为 0，成为Ⅰ、Ⅲ象限的线偏振光. 两种情形下，光矢量与光轴的夹角仍为 θ，相当于振动平面对 e 轴或 o 轴作了镜像变换.

3. 圆偏振光经过波晶片

圆偏振光两正交分量间本来就有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差，再经过 $\frac{1}{4}\lambda$ 片，在波片慢轴方向振动的分量，相位进一步滞后 $\frac{\pi}{2}$，因而出射的光波中，两正交分量之间的相位差为 0 或 π，一定是线偏振光. 同时，由于两正交分量的振幅是相等的，所以线偏振光与光轴间的夹角 $\theta=45°$.

(1) 右旋圆偏振光，波片快轴沿 y 方向.

入射光的分量表达式为 $\begin{cases}E_x=A\cos(kz_0-\omega t)\\ E_y=A\cos\left(kz_0-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，经过波片，快轴 y 方向额

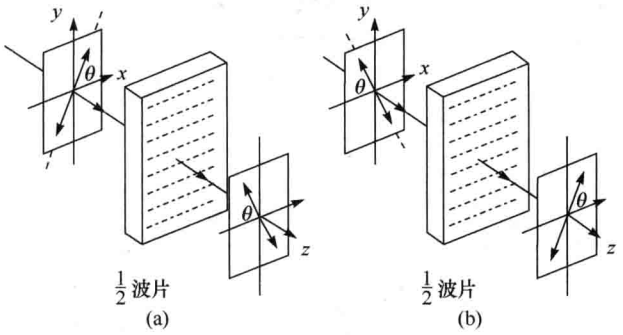


图 7.7.8 线偏振光经过$\frac{1}{2}$波片

外产生的相位差为$-\frac{\pi}{2}$，于是出射光为$\begin{cases}E_x=A\cos(kz-\omega t)\\E_y=A\cos(kz-\omega t-\pi)\end{cases}$，是Ⅱ、Ⅳ象限的线偏振光，如图 7.7.9(a)所示.

(2) 右旋圆偏振光，波片快轴沿 x 方向.

经过波片，慢轴 y 方向额外产生的相位差为$\frac{\pi}{2}$，于是出射光为

$$\begin{cases}E_x=A\cos(kz-\omega t)\\E_y=A\cos(kz-\omega t)\end{cases}$$

两正交分量的相位差为 0，是Ⅰ、Ⅲ象限的线偏振光，如图 7.7.9(b)所示.

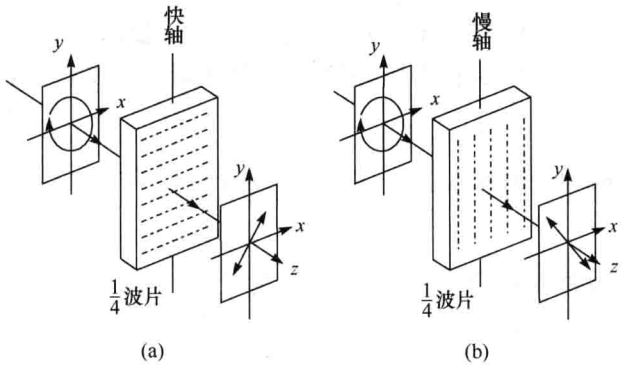


图 7.7.9 圆偏振光经过$\frac{1}{4}$波片

圆偏振光经过$\frac{1}{2}\lambda$ 片，无论波片的快轴在哪个方向，都会在两分量之间额外增加 π 的相位差，因而出射的光波中，两正交分量之间的相位差为$\pm\frac{\pi}{2}$，还是圆偏振

光，但由于额外增加了 π 的相位差，原来的右旋光变成左旋的，而原来左旋的变为右旋的，如图 7.7.10 所示.

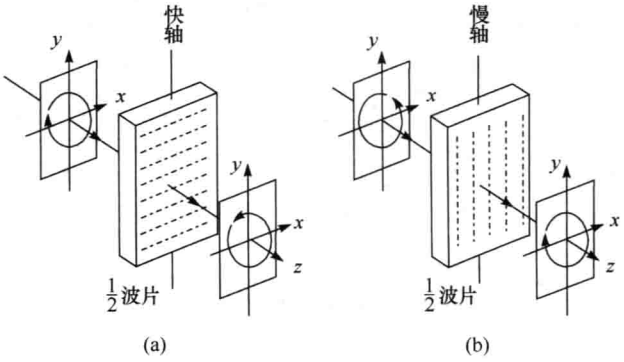


图 7.7.10　圆偏振光经过$\frac{1}{2}$波片

4. 椭圆偏振光经过波晶片

如果入射光为椭圆偏振光，则两正交分量为

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(kz_0 - \omega t) \\ E_y = A_y \cos(kz_0 - \omega t + \Delta\varphi_0) \end{cases}$$

其中，$\Delta\varphi_0$ 为任意值，出射后为

$$\begin{cases} E'_x = A_x \cos(kz - \omega t) \\ E'_y = A_y \cos(kz - \omega t + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi) \end{cases}$$

由于 $\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi$ 仍然是任意值，所以一般情况下，出射光仍然是椭圆偏振光. 至于其长轴取向和电矢量的旋转方向，要通过具体的计算才能确定，以下是几个具体的例子.

(1) 左旋正椭圆偏振光入射，$\frac{1}{4}\lambda$ 片的快轴沿 x 方向.

入射光的 y 分量相位滞后$\frac{\pi}{2}$，可以表示为 $\begin{cases} E_x = A_x \cos(kz_0 - \omega t) \\ E_y = A_y \cos\left(kz_0 - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，经过波片后，由于 y 为慢轴，y 方向的相位额外滞后$\frac{\pi}{2}$，即两正交分量的表达式为

$\begin{cases} E'_x = A_x \cos(kz - \omega t) \\ E'_y = A_y \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = A_y \cos(kz - \omega t + \pi) \end{cases}$，为Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光，结果示于图 7.7.11.

读者也许会有疑问：分析的结果是否受到坐标轴的取法的影响. 答案当然是

否，因为波片所引起的光的偏振态的改变肯定只与客观条件有关，而坐标系仅是一个分析问题的参考系，坐标系的取法往往依据方便的原则并且会因人而异. 本例中如果使 x 轴沿晶体的慢轴方向，如图 7.7.12 所示，也可得到相同的结果.

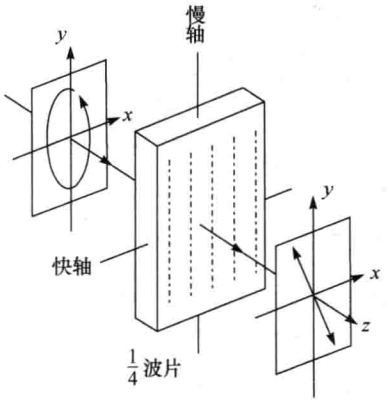


图 7.7.11 椭圆偏振光经过$\frac{1}{4}$波片

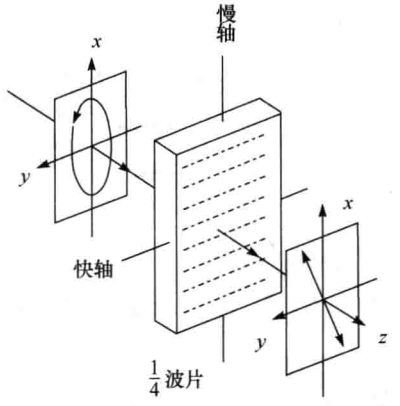


图 7.7.12 另一种坐标系中相同的结果

(2) 右旋椭圆偏振光经过$\frac{1}{4}\lambda$ 片，长轴与光轴夹角为 θ，光轴为快轴.

既然坐标系的取法对结果的判断没有影响，不妨取 e 轴为 x 轴的方向. 椭圆与光轴间的夹角包括两种不同的情况，如图 7.7.13 所示. 根据椭圆偏振光的特性，可知入射光的两正交分量间的相位差分别是 $\Delta\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 和 $\Delta\varphi_0 \in \left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

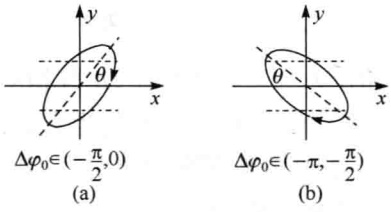


图 7.7.13 入射椭圆偏振光

先看入射光长轴在Ⅰ、Ⅲ象限的情况，经过$\frac{1}{4}$波片后，y 方向又多了$\frac{\pi}{2}$的相位滞后，即 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\Delta\varphi_0+\Delta\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，是左旋椭圆偏振光，长轴仍然在Ⅰ、Ⅲ象限，如图 7.7.14(a)所示.

再看入射光长轴在Ⅱ、Ⅳ象限的情况. 经过$\frac{1}{4}$波片后，y 方向同样又多了$\frac{\pi}{2}$的相位滞后，所以 $\Delta\varphi_0+\Delta\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，还是右旋椭圆偏振光，但长轴变到了Ⅰ、Ⅲ象限，如图 7.7.14(b)所示.

由于椭圆的方程是$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}-\frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$，椭圆长轴或短轴与坐标

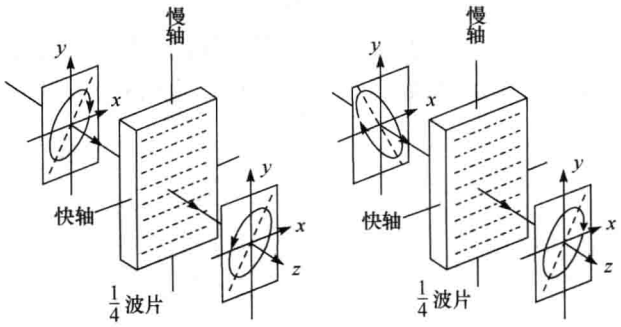


图 7.7.14　经过$\frac{1}{4}$波片后椭圆偏振光旋向和长轴取向的变化

轴的夹角为 $\tan 2\alpha=\frac{2A_xA_y}{A_x^2-A_y^2}\cos\Delta\varphi$，所以相位差改变$\frac{\pi}{2}$，上两式中 $\cos\Delta\varphi$ 和$\sin^2\Delta\varphi$ 的数值都要变化，因而椭圆的形状和取向还是有所改变的.

(3) 椭圆偏振光经过$\frac{1}{2}\lambda$ 片.

经过$\frac{1}{2}\lambda$ 片，无论快轴是 x 轴还是 y 轴，都将增加 π 的附加相位差，则两分量的相位差与入射光相比，正好相反，则电矢量的旋转方向也相反. 即右旋的光，将变为左旋的；左旋的光，将变为右旋的，但椭圆的形状不变.

同时，椭圆长轴的取向也相应变化，即相对于光轴(坐标轴)作镜像变换.

变化的情况示于图 7.7.15 中.

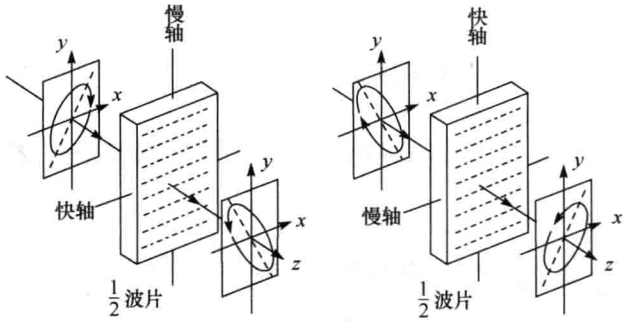


图 7.7.15　经过$\frac{1}{2}$波片后椭圆偏振光旋向和长轴取向的变化

通过上面的各种例子，读者可以看出$\frac{1}{4}$波片与$\frac{1}{2}$波片的作用是不同的. 其中$\frac{1}{2}$波片由于使相位相反，所以并不改变光的偏振态，只是使偏振光作一个镜像变换；而$\frac{1}{4}$波片可以使偏振态有显著的改变，如将正椭圆偏振光变为线偏光，将圆偏光变为线偏光，将线偏光变为椭偏光等.

7.7.3 偏振态的实验鉴定

如果使一束光通过一个线偏振检偏器，如尼科耳棱镜，则变为线偏振光，如果使检偏器的透振方向绕光线旋转 360°，则对不同的入射光，将观察到如下不同的现象：

平面偏振光，光强改变，并会在两个位置出现消光，如图 7.7.16 所示.

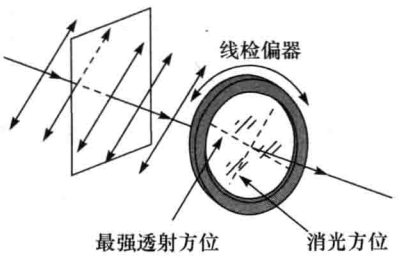


图 7.7.16 线检偏器鉴定平面偏振光

自然光，光强不变；圆偏振光，光强不变，如图 7.7.17 所示.

部分偏振光，光强改变，在两个相互垂直的位置，出现极大值和极小值；椭圆偏振光，光强改变，在两个相互垂直的位置，出现极大值和极小值，如图 7.7.18 所示.

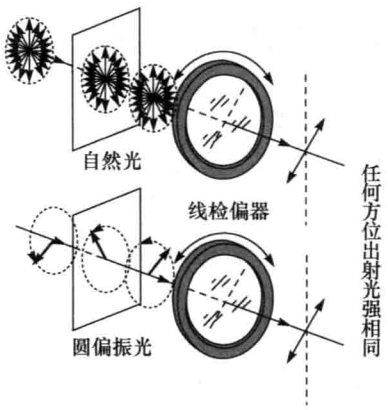


图 7.7.17 通过线检偏器的自然光和圆偏振光

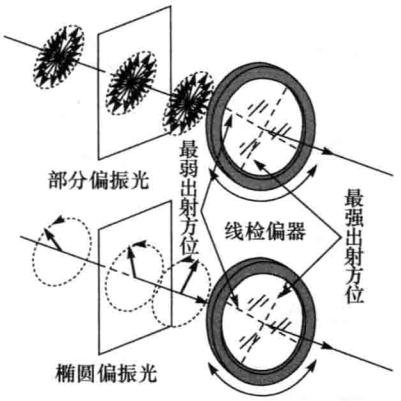


图 7.7.18 通过线检偏器的部分偏振光和椭圆偏振光

于是，仅通过一个线检偏器，可以鉴定出平面偏振光，但自然光和圆偏振光的表现相同，部分偏振光和椭圆偏振光的表现也相同，因而无法将它们进一步区分.

所以，还需要用其他光学元件作进一步的鉴别.

如果在检偏器前放置一个$\frac{1}{4}\lambda$片，则由于圆偏振光经过$\frac{1}{4}\lambda$片后变为线偏振

光，而自然光经过$\frac{1}{4}\lambda$片还是自然光，所以在该波片后放置一个线检偏器，就可以将自然光、圆偏振光区别，如图 7.7.19 所示.

部分偏振光通过$\frac{1}{4}\lambda$片后仍然是部分偏振光，在一般情况下，椭圆偏振光经过$\frac{1}{4}\lambda$片后仍是椭圆偏振光，所以这样仍无法将椭圆偏振光与部分偏振光区别.

设想将坐标系建在波片上，并使 x 轴或 y 轴与波片的光轴平行，那么，一般情况下，入射的是一个倾斜的椭圆偏振光，即 x、y 方向的分量之间的相位差是任意值；但是如果入射的是一个正椭圆偏振光，即椭圆的长短轴与坐标轴重合，则上述相位差就是$\pm\frac{\pi}{2}$，这样的偏振光经过$\frac{1}{4}\lambda$片，变为平面偏振光. 所以可以使$\frac{1}{4}\lambda$片的光轴绕着入射光束旋转，并同时转动检偏器，则部分偏振光不会消光，椭圆偏振光会在特殊的位置消光，从而可以将椭圆偏振光与部分偏振光区别，如图 7.7.20 所示.

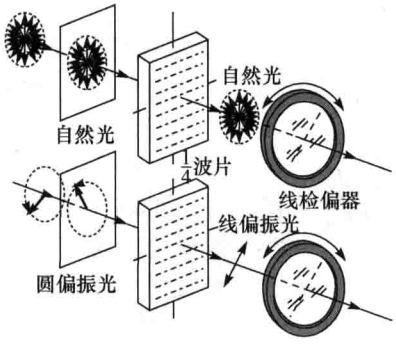


图 7.7.19　自然光与圆偏振光的鉴定

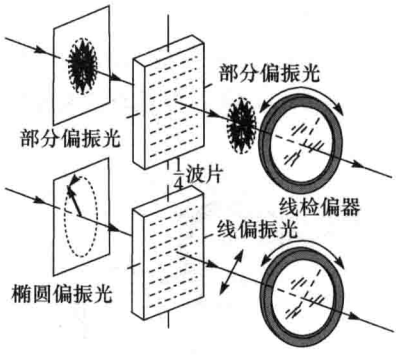


图 7.7.20　部分偏振光与椭圆偏振光的鉴定

可以将上述鉴定方法用表 7.7.1 加以概括.

表 7.7.1　鉴别光的偏振态

光的种类	仅使用偏振器，并使其旋转	$\frac{1}{4}\lambda$片＋偏振器
自然光	光强不变，不消光	转动检偏器，光强不变，不消光
圆偏振光	光强不变，不消光	转动检偏器，光强改变，并消光
线偏光	光强改变，消光，可以鉴定	
部分偏振光	光强改变，但不消光	旋转上述元件，光强改变，但不消光
椭圆偏振光	光强改变，但不消光	旋转上述元件，光强改变，并出现消光

7.8 偏振光的干涉

波片中 e 光和 o 光的电矢量分别沿 e 轴和 o 轴的方向，是相互垂直的；通过波片后，成为两列电矢量相互垂直的平面偏振光，因而是不相干的，只能合成为椭圆等形式的偏振光. 但是，可以通过电矢量振动面的变换，使得它们进行相干叠加.

7.8.1 平行偏振光的干涉装置

平行偏振光的干涉装置如图 7.8.1 所示，由两个偏振片和位于其间的双折射晶体(波晶片)组成. 从线偏振器 P_1 出射的平面偏振光，正入射到晶体中，分为 o 光和 e 光，从晶体出射后，再使电矢量正交的两列波经过一个偏振片 P_2，从 P_2 射出的光，电矢量相互平行，成为相干光，进行相干叠加.

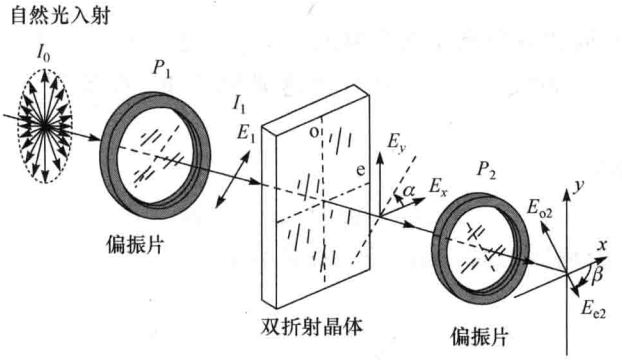


图 7.8.1 平行偏振光的干涉装置

可以看出，在这种装置中，偏振光的干涉与自然光干涉的区别主要有：

(1) 干涉光为线偏光，振动面相互平行；

(2) 光程差由波晶片的厚度，以及波晶片光轴与 P_1、P_2 透光轴之间的夹角决定，不同于双缝或薄膜干涉.

7.8.2 干涉分析与实验现象

1. 参与干涉的光波的振幅及相位

如图 7.8.2 所示，设入射自然光的强度为 I_0，经 P_1 后的线偏光的电矢量和振幅分别为 E_1 和 A_1. 在波晶片中，e 光、o 光的振幅分别为

$$A_e = A_1 \cos\alpha \qquad (7.8.1)$$

$$A_o = A_1 \sin\alpha \qquad (7.8.2)$$

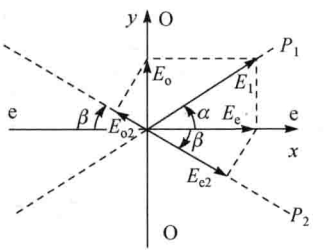


图 7.8.2 光矢量的分解

从波晶片射出的 e 光、o 光，再经过 P_2，相应的振幅为

$$A_{e2}=A_1\cos\alpha\cos\beta \tag{7.8.3}$$

$$A_{o2}=A_1\sin\alpha\sin\beta \tag{7.8.4}$$

e 光、o 光中都有一部分可以从 P_2 透射，它们振动分别表示为 $\boldsymbol{E}_{e2}$、$\boldsymbol{E}_{o2}$，且 $\boldsymbol{E}_{e2}//\boldsymbol{E}_{o2}$，这两部分是相干的，相干叠加可表示为 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{e2}+\boldsymbol{E}_{o2}$，干涉的光强为

$$\begin{aligned}I&=A_{e2}^2+A_{o2}^2+2A_{e2}A_{o2}\cos\Delta\varphi\\&=A_1^2(\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\Delta\varphi)\end{aligned} \tag{7.8.5}$$

其中，$\Delta\varphi$ 为两列光的相位差，由以下因素决定：

(1) P_1 透光轴的方向所引起的相位差，记为 $\Delta\varphi_1=0,\pi$. 当其透光轴在Ⅰ、Ⅲ象限(图 7.8.3(a))时，$\Delta\varphi_1=0$；而当其透光轴在Ⅱ、Ⅳ象限(图 7.8.3(b))，$\Delta\varphi_1=\pi$.

(2) 波晶片引起的 $\Delta\varphi_c=\dfrac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d$.

(3) P_2 透光轴的方向所引起的相位差，记为 $\Delta\varphi_2=0,\pi$. 当其透光轴在Ⅰ、Ⅲ象限(图 7.8.3(c))时，$\Delta\varphi_2=0$；而当其透光轴在Ⅱ、Ⅳ象限(图 7.8.3(d))时，$\Delta\varphi_2=\pi$.

总的相位差为

$$\Delta\varphi=\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_c+\Delta\varphi_2 \tag{7.8.6}$$

各个元件的方向固定时，$\Delta\varphi_1$、$\Delta\varphi_2$ 固定不变.

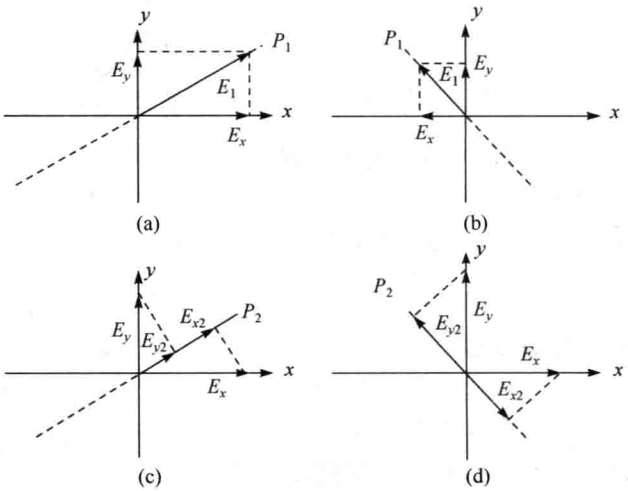


图 7.8.3　偏振片透光轴取向所引起的相位差

例如，$P_1\perp P_2$，且波晶片光轴平分 P_1，P_2 的夹角(图 7.8.4(a))，则有 $\alpha=\beta=$

$\frac{\pi}{4}$，$\Delta\varphi_1=0$，$\Delta\varphi_2=\pi$，干涉光强为

$$I=A_1^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\pi+\Delta\varphi_c)\right]=\frac{1}{4}I_0(1-\cos\Delta\varphi_c)=\frac{1}{2}I_0\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \tag{7.8.7}$$

如果 $P_1//P_2$，且 P_1，P_2 与波晶片光轴的夹角为 45°(图 7.8.4(b))，则有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$，$\Delta\varphi_1=0$，$\Delta\varphi_2=0$，干涉光强为

$$I=A_1^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\Delta\varphi_c)\right]=\frac{1}{4}I_0(1+\cos\Delta\varphi_c)=\frac{1}{2}I_0\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \tag{7.8.8}$$

2. 干涉现象

(1) 波晶片等厚，$\Delta\varphi_c=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d$ 不变.

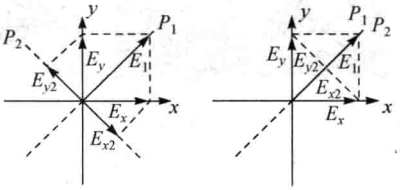


图 7.8.4 偏振光干涉的两种特例

(a) 单色光入射，屏上照度均匀；转动元件，会引起振幅以及 $\Delta\varphi_1$、$\Delta\varphi_2$ 的改变，接收屏上的照度改变.

(b) 白光入射，由于不同波长的成分，相位差 $\Delta\varphi_c(\lambda)$不同，所以有些是干涉相长，而有些是干涉相消，因此接收屏上会出现彩色. 转动元件，色彩、照度都改变. 这种现象就是显色偏振(chromatic polarization).

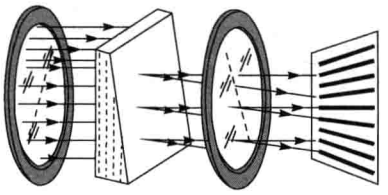


图 7.8.5 通过不等厚晶体的干涉

(2) 波晶片不等厚，$\Delta\varphi_c$ 随厚度而变，不同的厚度处，有些是干涉相长，而有些是干涉相消，因而接收屏上的照度不再均匀，会有干涉条纹出现，如图 7.8.5 所示. 这些干涉条纹的分布和形状，都与波晶片的形状有关.

7.8.3 偏振光干涉的应用——光测弹性

金属制成的柱、梁、钓钩等机件，受外力时，内部有一定的应力分布. 但是，由于金属是不透明的，所以其内部应力往往难以直接观察到. 为了研究其中的应力分布，可以将透明的塑料制成与机件相同的形状，然后仿照机件的受力，在塑料件上施加相应的外力. 塑料是各向同性介质，不受外力时，没有双折射现象，但是加外力后，其内部的应力分布不均匀，会在应力方向产生光轴，出现双折射现象，研究表明，由应力所引起的折射率差与应力的大小成正比，即

$$n_c - n_e = cp \tag{7.8.9}$$

其中，p 为应力；c 为材料系数.

针对这种情况下，可以采用适当的装置，观察到偏振光的干涉，并且由干涉条纹的分布，以推知折射率差在塑料中的分布，从而分析机件中应力分布的情况，这就是**光测弹性**(photoelasticity). 图 7.8.6 是一个汽车轮毂形状的塑料受到压力时其中的干涉条纹，而图 7.8.7 所示为一个 200mm $f/2.5$ 望远镜玻璃镜片在不同受力方式下的光测弹性干涉条纹.

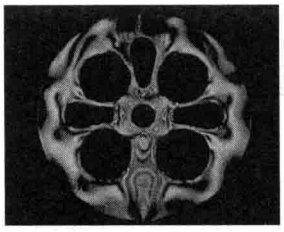


图7.8.6　汽车轮毂受力时的光测弹性照片

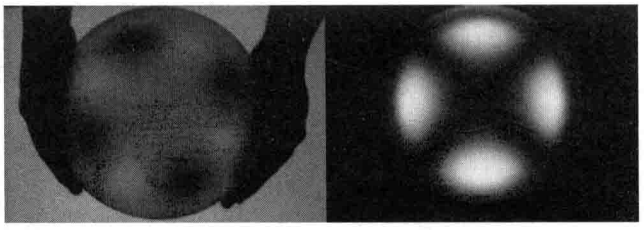


图 7.8.7　不同受力方式下玻璃透镜的光测弹性照片

7.9　电光效应

某些材料在电场作用下，可以产生双折射效应. 例如，有些液体，本来是各向同性的，没有双折射，但在外加电场的作用下，光在其中产生双折射；一些晶体，光沿其光轴入射时，本来不会发生双折射，但加上电场后，沿这一方向的光也发生双折射. 这种现象，都是电场引起了介质光学性质的变化，称为电光效应(electro-optic effect)，也称为人工双折射.

7.9.1　克尔效应

如图 7.9.1 所示，将液态硝基苯($C_6H_5NO_2$)封入有着一对平行玻璃窗口的小盒中，盒中有一对平行的电极板，这就是克尔盒. 将小盒置于两个透光轴正交的线偏振片之间，在没有外电场时，光是无法通过这一系统的，但是如果在极板上加电压(偏振片透光轴与电场的方向之间成 45°夹角)，便有光透过这个系统，说明盒内的液体在外电场的作用下，变成了双折射物质，光轴沿着电场的方向，光在其中分解成了 o 光和 e 光，e 光的电矢量沿着光轴方向(y 方向)，而 o 光的电矢量垂直于光轴，沿着 x 方向，如图 7.9.2 所示，这一现象被称为**克尔效应**(Keer effect，1875 年). 电场的方向与光的传播方向垂直，这是一种横向电场.

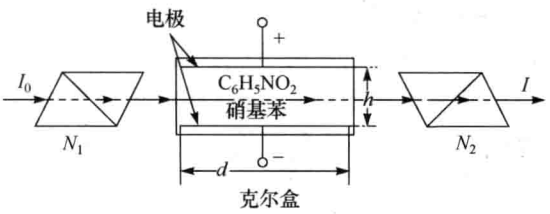


图 7.9.1 克尔效应

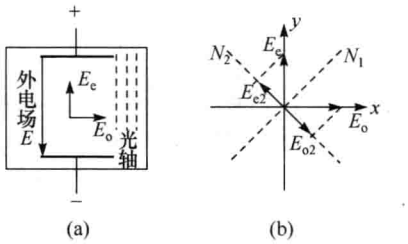


图 7.9.2 克尔效应中，o 光、e 光的电矢量及其分解

实验表明，在液体中 o 光和 e 光的折射率差 $n_{//}-n_{\perp}$ 与外电场有关，称为感生折射率差，可表示为

$$\Delta n=n'-n''=n_{//}-n_{\perp}=KE^2 \tag{7.9.1}$$

其中，k 为克尔常数，例如，硝基苯对钠黄光(D 线，$\lambda=589.3\text{nm}$)的克尔常数为 $k=220\times10^{7}$CGSE 单位. 由于式(7.9.1)为电场强度的二次式，所以克尔效应也被称为**二级电光效应**.

在 $N_1\perp N_2$ 且与外电场 $\boldsymbol{E}$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角时，由式(7.8.7)，出射光的强度为

$$I=I_0\,\frac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta\varphi_c}{2}=I_0\,\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{K\Delta nd}{2}\right)=I_0\,\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}KdE^2\right)$$

而 $E=\dfrac{V}{h}$，于是得到

$$I=I_0\,\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}Kd\,\frac{V^2}{h^2}\right) \tag{7.9.2}$$

可以通过改变加在极板上的电压控制输出的光强.

硝基苯有剧毒，而且液态的克尔盒使用起来不太方便.

7.9.2 泡克尔斯效应

某些晶体，其中最典型的是 KDP 晶体，即磷酸二氢钾(KH_2PO_4)晶体，在没有外电场时，为单轴晶体，但是，在外加电场的作用下，变为双轴晶体. 当入射光沿着原来的光轴方向入射时，光在晶体中分为 o 光和 e 光. 在这种晶体中，o 光和 e 光的折射率差与外电场的强度有关，这就是**泡克尔斯效应**(Pockels effect，1893 年). 例如，入射光经过线起偏器 N_1 后，射入 KDP 晶体，从晶体出射后，再经过另一个检偏器(偏振片或尼科耳棱镜等). 可以让两偏振片的透光轴相互垂直，即 $N_1\perp N_2$，如图 7.9.3 所示. 这时，在没有外加电场的情况下，光是无法通过这一系统的. 但是

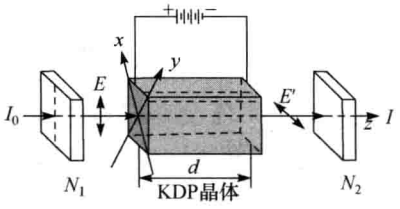


图 7.9.3　泡克尔斯效应(纵向电场)

沿着光的传播方向(也是 KDP 晶体光轴的方向)加上电场后,系统中立刻就有光输出,而且输出的光强与所加的电压有关.

如果所加电场为纵向,即电场与光的传播方向平行,在相互垂直的 x、y 方向的感生折射率分别为 n',n'',沿 x、y 方向振动的 o 光、e 光的传播速度分别为 v',v''.

泡克尔斯效应的感生折射率差为

$$n'-n''=n_o^3\gamma E \tag{7.9.3}$$

其中,n_o 为不加电场时材料对 o 光的折射率;γ 为介质的电光系数. 由于感生折射率差与电场强度成正比,所以泡克尔斯效应也被称为**一级电光效应**.

沿 x、y 方向振动的光的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n'-n'')d=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma V \tag{7.9.4}$$

其中,d 为晶体的纵向长度;V 为晶体两端的电压.

由式(7.8.7),出射光的强度为

$$I=\frac{1}{2}I_0\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{1}{2}I_0\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}n_o^3\gamma V\right) \tag{7.9.5}$$

如果加横向电场(图 7.9.4),则感生折射率差为

$$n'-n''=n_o^3\gamma' E \tag{7.9.6}$$

两正交分量的相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n'-n'')d=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma' Ed=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma' V\left(\frac{d}{h}\right) \tag{7.9.7}$$

其中,h 为晶体横向的线度.

相位差等于 π 时,式(7.9.5)中 $\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}=1$,出射光强最大. 使相位差等于 π 的电压称为**半波电压**(图 7.9.5),记为 $V_{\lambda/2}$,式(7.9.7)中,由于通常 $d>h$,与纵向电场相比,可降低半波电压.

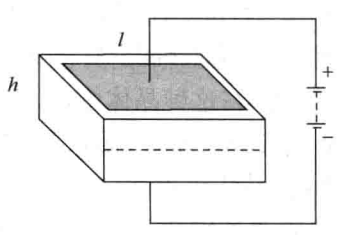


图 7.9.4　横向电场

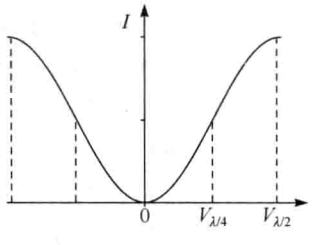


图 7.9.5　半波电压

7.9.3 电光效应的应用

1. 激光光强调制

从式(7.9.5)可以看出，改变加在KDP晶体上的电压，输出光强相应改变. 在$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$附近的一个小的范围中，光强电压的关系近似为线性的(图 7.9.5)，即$\Delta I\propto\Delta V$，这一区域称为线性区，使$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$的电压称为$\frac{\lambda}{4}$电压，记为$V_{\lambda/4}$.

如果先在KDP晶体上施加$V_{\lambda/4}$电压，使其处于线性区，再加上一个幅度较小的调制电压$\tilde{V}=a\sin\omega t$(图 7.9.6)，则输出光的强度将会随着调制电压便变化，即

$$\Delta I\propto\Delta V=a\sin\omega t \tag{7.9.8}$$

这样，就可以实现用正弦波对输出光强进行调制，如调制激光器的输出光强. 如果调制电压是某种信号，则可以将信号加载在激光上，以实现激光通信(图 7.9.7).

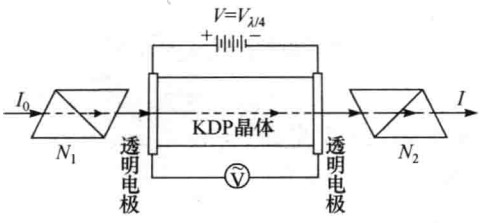


图 7.9.6 在KDP晶体上加调制电压$\tilde{V}$

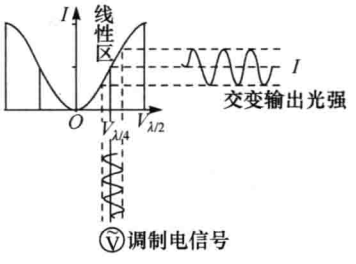


图 7.9.7 加载调制信号

2. 高速光闸

克尔盒，或者KDP晶体，对外加电压的响应非常快，例如，硝基苯克尔效应的弛豫时间约为10^{-9}s的数量级. 所以，除了用作光强调制，还可以作为高速光闸(高速光开关)使用.

由式(7.9.2)或式(7.9.5)，当$V=0$时，没有光输出，系统处于对光截止状态(关)；当$V=V_{\lambda/2}$时，输出光强最大，系统对光处于开通状态(开)，如图 7.9.8 所示. 而从施加电压到光的输出状态改变，所用的响应时间约为10^{-9}s.

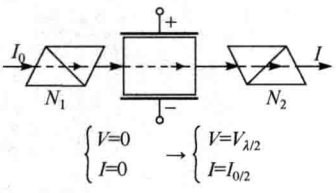


图 7.9.8 高速光闸

7.10 旋　光

7.10.1 自然旋光

1. 石英晶体中的旋光

将石英晶体加工成光轴垂直于表面薄片，线偏光沿着其光轴方向入射，发现出射光的振动面旋转. 这一现象称为**旋光**(optical activity, optical rotation opticity)，如图 7.10.1 所示.

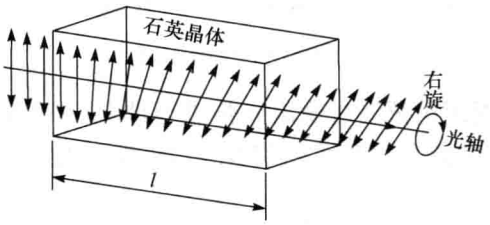


图 7.10.1　偏振光通过石英晶体后振动面旋转

通过晶体后，电矢量 $\boldsymbol{E}$ 转过的角度 θ 与晶体的厚度 l 成正比，即

$$\theta=\alpha l \tag{7.10.1}$$

其中，α 是与晶体有关的常数，称为**旋光本领**，或**旋光率**(optical rotatory power). 该常数通常与光的波长有关，即可表示为

$$\alpha=\alpha(\lambda) \tag{7.10.2}$$

表 7.10.1 列出了石英的旋光率与波长的关系，从中可以看出，在石英的透光范围内(从紫外到近红外)，旋光率随着波长的增大有显著的减小. 这样，如果白光入射，则出射光中，不同的波长成分，电矢量 $\boldsymbol{E}$ 转过的角度不同，如果用检偏器观察，就会发现在不同的角度处，有不同颜色的光射出，这一现象称为**旋光色散**.

表 7.10.1　石英旋光率随波长的变化

波长/nm	旋光率/(°/mm)	波长/nm	旋光率/(°/mm)	波长/nm	旋光率/(°/mm)
175.0	458.5	430.7	42.604	589.3	21.724
226.5	210.9	435.8	41.458	648.8	18.023
250.3	158.9	467.8	35.601	670.8	16.535
308.4	95.02	486.1	32.761	728.1	18.924
340.4	72.45	508.6	29.728	760.4	12.668
404.7	48.945	546.1	25.535	794.8	11.589

实验还发现，迎着光的传播方向观察，线偏光通过石英晶体，其电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振动平面既可能向右旋转，也可能向左旋转(图 7.10.2). 这样的右旋、左旋称为 Dextrorotatory 和 Levorotatory，其中前缀 Dextro 和 Levo 分别是拉丁文右和左的意思. 也可以简记为 *d-rotatory* 和 *l-rotatory*. 进一步的研究表明，这与石英晶体结构有关，尽管石英的成分都是二氧化硅 SiO_2，晶体的外观也相同，但分子结合的方式却有右手和左手两种次序. 图 7.10.3 给出了一种分子式相同但结构不同的实例，其分子按右手次序排列和左手次序排列所形成的晶体外观是互为镜像的，这种结构称为**“对映异构体”**(enantiomorphs)，或**“旋光异构体”**(optical enantiomorphs，optically active enantiomorphs). 石英晶体中有类似的情况，据此可以将石英分为右旋石英和左旋石英(图 7.10.4).

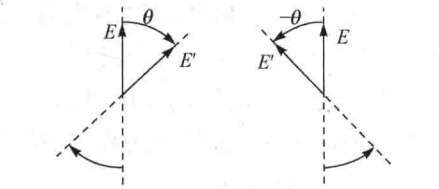


图 7.10.2 $\boldsymbol{E}$ 的右旋和左旋

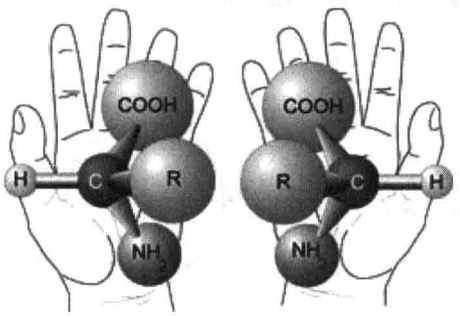


图 7.10.3 分子的左手和右手排列方式

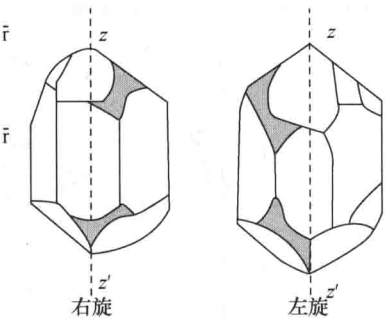


图 7.10.4 右旋石英和左旋石英

除了石英之外，酒石酸(tartaric acid)晶体是另一种具有明显旋光异构特征的晶体. 尽管分子组成都是 $C_4H_6O_6$，但却有三种不同的分子排列(图 7.10.5 和图7.10.6).

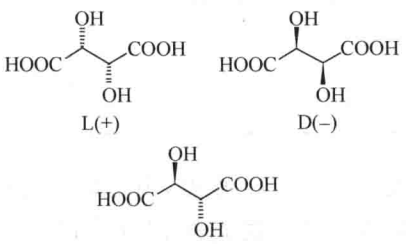


图 7.10.5 酒石酸晶体中分子的排列及其旋光异构体

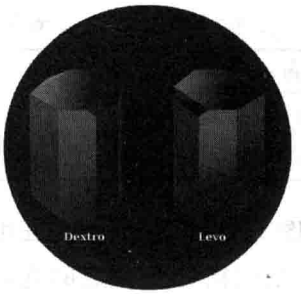


图 7.10.6 右旋和左旋酒石酸晶体的外观

2. 溶液中的旋光

某些溶液也有明显的旋光特性，例如，蔗糖溶液中，线偏光的光矢量转过的角度可表示为

$$\theta=\alpha Nl \tag{7.10.3}$$

其中，α 与溶液的种类有关，称为**比旋光率**(specific rotatory power)，而 N 为溶液的浓度. 例如，室温下，蔗糖的水溶液对钠黄光的比旋光率 $\alpha=66.46°/[\mathrm{dm}\cdot(\mathrm{g/cm^3})]$，$\alpha>0$，取正值表示右旋. 由于溶液都是各向同性的，所以同一种类的溶液，使光矢量都向同一方向旋转.

由于光矢量旋转的角度可以反映蔗糖溶液的浓度，所以通过测量旋光，就可以知道溶液的浓度，这种方法称为“量糖术”(saccharimetry).

3. 旋光的解释

菲涅耳用非常简单的模型解释了旋光现象，他认为，线偏光可以看成两列同方向传播的旋转方向相反的同频率圆偏振光的合成，如图 7.10.7 所示，这两列圆偏振光在各处都以相同的频率旋转，则合成的平面偏振光就在同一个平面内振动.

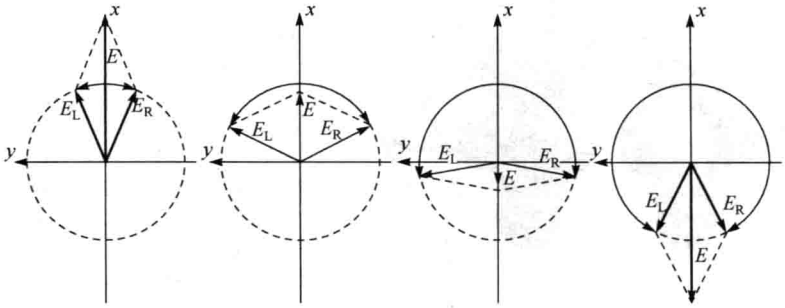


图 7.10.7　两列圆振偏光合成为平面偏振光

在同一种旋光介质中，右旋光和左旋光的折射率 n_L 和 n_R 不同，因而其波矢 $\boldsymbol{k}_L$ 和 $\boldsymbol{k}_R$ 也不同. 表 7.10.2 给出了在右旋石英晶体中左旋光和右旋光的折射率.

表 7.10.2　右旋石英的折射率

波长/nm	n_L	n_R	n_o	n_e
396.8	1.55810	1.55821	1.55815	1.56771
762.0	1.53914	1.53920	1.53917	1.54811

如图 7.10.8 所示，在介质中距离入射表面为 z 的 O' 点处，由于光到达 O' 比 O 点滞后，所以相对于 O 点的光，O' 点处左旋和右旋圆偏光的相位分别滞后 $\varphi_L=k_Lz=\dfrac{2\pi}{\lambda_0}n_Lz$ 和 $\varphi_R=k_Rz=\dfrac{2\pi}{\lambda_0}n_Rz$，即 O' 点的光矢量还没有旋转到 O 点处的位置，

比 O 点处的电矢量分别迟滞了 φ_L 和 φ_R 角，由于 $\varphi_L \neq \varphi_R$，合成后的线偏光振动面旋转，而且距离入射界面越远的地方，振动面旋转过的角度越大.

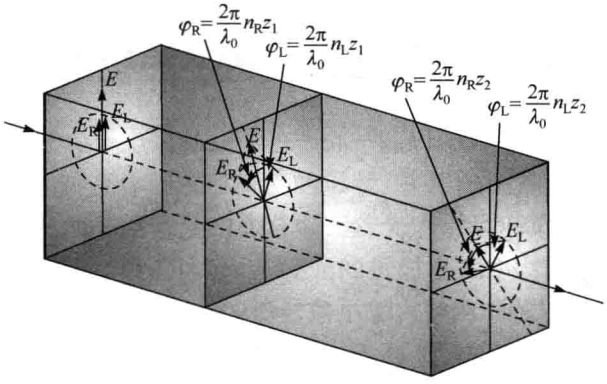


图 7.10.8　光矢量相位滞后

光的电矢量到底是左旋还是右旋，取决于 n_L 和 n_R 的相对大小，如图 7.10.9 所示.

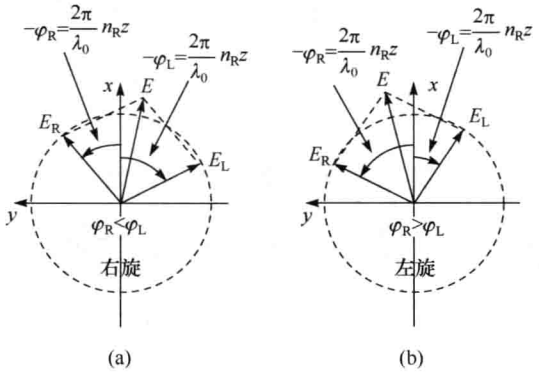


图 7.10.9　右旋和左旋

在右旋晶体中，$n_R<n_L$；左旋晶体中，$n_L<n_R$. 右旋光在右旋晶体中，折射率小，右旋光在左旋晶体中，折射率大；反之，左旋光在左旋晶体中，折射率小；左旋光在右旋晶体中，折射率大.

可以将菲涅耳的思想用矢量表达式，设两列圆偏振光的表达式分别为

$$\boldsymbol{E}_R=\frac{A_0}{2}\left[\boldsymbol{e}_x\cos(k_Rz-\omega t)+\boldsymbol{e}_y\cos\left(k_Rz-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{E}_L=\frac{A_0}{2}\left[\boldsymbol{e}_x\cos(k_Lz-\omega t)+\boldsymbol{e}_y\cos\left(k_Lz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

其中，$k_R=\frac{2\pi}{\lambda_R}=\frac{2\pi n_R}{\lambda_0}=n_R k_0$，$k_L=\frac{2\pi}{\lambda_L}=\frac{2\pi n_L}{\lambda_0}=n_L k_0$，分别代表两列光的波矢. 这两列圆偏光的合成结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_R+\boldsymbol{E}_L=\frac{A_0}{2}[\cos(k_R z-\omega t)+\cos(k_L z-\omega t)]\boldsymbol{e}_x\\&\quad+\frac{A_0}{2}\left[\cos\left(k_R z-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(k_L z-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_y\\&=A_0\left[\cos\left(\frac{k_R+k_L}{2}z-\omega t\right)\cos\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\right]\boldsymbol{e}_x\\&\quad+A_0\left[\cos\left(\frac{k_R+k_L}{2}z-\omega t\right)\cos\left(\frac{k_R-k_L}{2}z-\frac{\pi}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_y\\&=A_0\cos\left(\frac{k_R+k_L}{2}z-\omega t\right)\left[\cos\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_y\right]\end{aligned}$$

从式中可以看出，因子 $\cos\left(\frac{k_R+k_L}{2}z-\omega t\right)$ 表明介质中光波电矢量的振动频率仍为 ω，但波矢为 $\frac{k_R+k_L}{2}=\frac{n_R+n_L}{2}\frac{2\pi}{\lambda_0}$，即波长为 $\frac{2\lambda_0}{n_R+n_L}$. 而电矢量的方向是由 $\cos\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_y$ 所决定的，这一部分与时间无关，仅是位置的函数.

在入射的初始位置，即旋光介质的前表面 O 点处，$z=0$，$\boldsymbol{E}=A_0\boldsymbol{e}_x\cos\omega t$，是沿着 $\boldsymbol{e}_x$ 方向的平面偏振光. 在介质中，矢量 $\cos\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)\boldsymbol{e}_y$ 是沿 $\arctan\left(\frac{k_R-k_L}{2}z\right)$ 方向. 因而相对于初始的入射方位，电矢量转过的角度为 $\theta=\frac{k_R-k_L}{2}z=\frac{\pi(n_R-n_L)}{\lambda_0}z$. 当 $n_R>n_L$ 时，θ 取正值，这是左旋晶体. 电矢量的方向随着位置而改变，如图 7.10.10 所示.

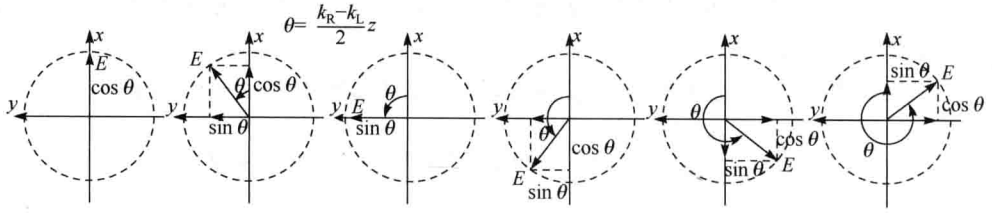


图 7.10.10　电矢量的方向随着位置而改变

菲涅耳巧妙地采用图 7.10.11 所示的复合棱镜，验证上述假设.

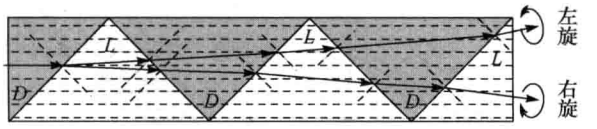


图 7.10.11　菲涅耳复合棱镜

将左旋晶体和右旋晶体制成三棱镜的形状，并按图使各个棱镜光轴平行组合起来，做成复合棱镜. 如平面偏振光从左端面首先入射到右旋晶体中，在右旋晶体中，$n_R<n_L$；进入第二块左旋晶体后，左旋光的折射率变小，折射角大于入射角；而右旋光在左旋晶体中的折射率变大，折射角小于入射角. 所以经过一个界面的折射后，左旋光和右旋光分别向上下两个方向偏折. 再进入右旋晶体中，左旋光的折射率增大，折射角小于入射角，由于第二界面与第一界面的方向不同，所以使左旋光进一步向上偏折，而右旋光则进一步向下偏折. 依次进入后面的晶体中，这种现象不断出现，使得两束光进一步分开.

尽管菲涅耳的假设被复合棱镜实验证实，也定性地解释了旋光现象. 但这一模型过于简单，并没有从光波与物质的相互作用角度对旋光的机理进行分析，因而仅是一个唯象的理论. 其实，旋光的物理机制非常复杂，要采用量子理论加以解释.

7.10.2　磁致旋光

当某些介质处于外磁场中时，这些介质具有旋光性，这就是所谓的**法拉第效应**(Faraday magneto-optics effect)，如图 7.10.12 所示. 平面偏振光沿着磁场方向通过这类介质后，其振动平面发生偏转，实验测得偏转角

$$\theta=VBl \qquad (7.10.4)$$

其中，B 为外磁场的磁感应强度；l 为磁场区域的长度；V 为与介质有关的常数，称为韦尔代(Verdet)常数. 一般物质的韦尔代常数都很小，例如，液体中二硫化碳的 V 值较大，为 $V=0.042'/(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{Gs})$，而固体中重火石玻璃的 V 值可达 $0.09'/(\mathrm{cm}\cdot\mathrm{Gs})$.

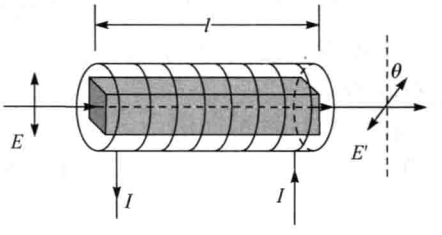


图 7.10.12　法拉第效应

实验研究表明，电矢量振动平面的旋转方向与光的传播方向有关. 图 7.10.13 中，如果从左端入射时，电矢量左旋，则从右端入射时，电矢量右旋.

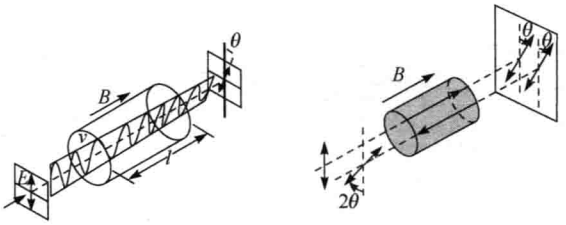


图 7.10.13　磁致旋光的方向性

7.10.3　磁致旋光的应用

1. 单通光闸

如图 7.10.14 所示，自然光经过一个尼科耳棱镜后，得到平面偏振光. 该平面偏振光通过磁场中的介质后，振动平面转过 45 度，被平面镜 M 反射后，沿原路返回，再次通过介质，由于法拉第效应中光矢量旋转的方向与光的传播方向有关，于是光矢量又转过 45 度，则反射回来的光矢量相对于入射光恰转过 90 度，不能通过尼科耳棱镜，这就是单通光闸（也称为磁光隔离器）.

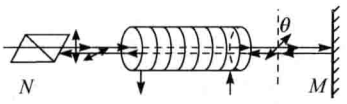


图 7.10.14　单通光闸

2. 溶液浓度的控制

工业生产中要求某溶液维持在某一特定的浓度，如果该溶液具有旋光性，则可以利用这一特性和磁光效应实现溶液浓度的自动控制.

如图 7.10.15 所示，一束光经过尼科耳棱镜 N_1 后，再经过溶液. 设标准浓度的溶液使得入射光左旋 θ，则使光再经过一个右旋 θ 的法拉第旋光装置，该装置后是一尼科耳棱镜 N_2，两尼科耳棱镜的主截面相互垂直，则光不能透过 N_2. 如果溶液的浓度发生改变，则引起角度 θ 的改变，光可以透过 N_2，N_2 后面的光电探测器就会响应.

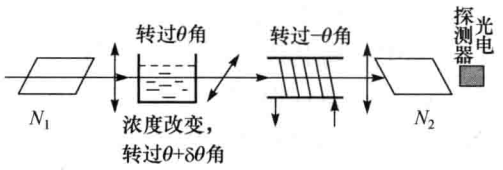


图 7.10.15　溶液浓度的控制

3. 光通信

利用图 7.10.16 的装置，可以通过控制励磁线圈电流而改变介质中的磁场，从而改变出射光的偏转角，使得通过偏振棱镜 N_2 的光强与线圈中的电流作同步的变化，由此就可以将电信号转化为光信号，实现光通信.

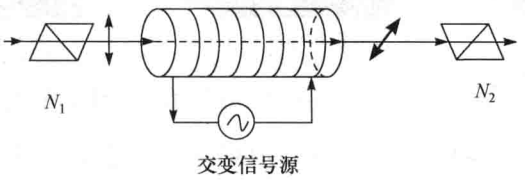


图 7.10.16 利用法拉第效应实现光通信

4. *磁光克尔效应与磁光存储*

如图 7.10.17 所示，一列光波被磁性介质反射之后，其偏振态会发生变化，通常的情况是，一列平面偏振光入射到具有磁性的介质表面，经该表面反射的光，往往成为椭圆偏振光，而且光的反射率也与介质的磁化率有关，这一现象被称为**磁光克尔效应**(magneto-optic Kerr effect，MOKE).

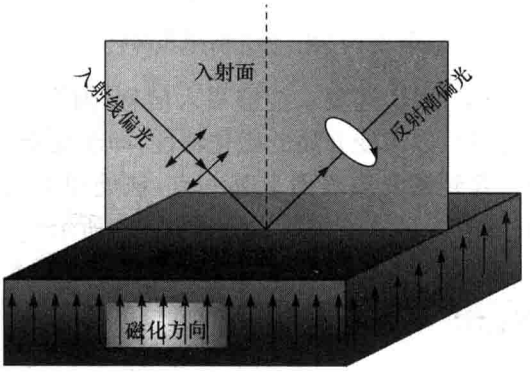


图 7.10.17 磁光克尔效应

磁光克尔效应当然是入射的电磁波与磁性介质相互作用的结果，反射光的状态，包括偏振态、反射强度等都与介质的磁化方向有关. 通常根据介质磁化方向与入射面的相对取向，将磁光克尔效应分为极向、纵向、横向等，如图 7.10.18 所示.

比较简单的情形是极向磁光克尔效应，在这种情形下，介质有两种相反的磁化方向，如图 7.10.19 所示. 如果入射线偏光的电矢量平行于入射面，即只有 P 分量. 当介质向上磁化时，反射光虽然是椭偏光，但其 P 分量增强，S 分量则弱得多，通过一个透振方向与入射面平行的偏振片，仍具有较大的光强. 而当介质被向下磁化，则反射光中的 P 分量要减弱，通过上述偏振片后，光强则很弱. 对于偏振片后面的光电探测器及数字电路，可以将强的信号规定为“1”，而将弱的信号规定为

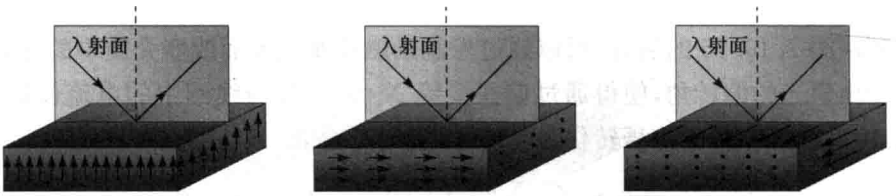


图 7.10.18　极向、纵向和横向的磁光克尔效应

“0”，则介质向上和向下的磁化方向就分别对应于二进制的“1”和“0”，就可以利用这一效应读取磁介质中所存储的信息. 那么，这样的装置就可以用作磁光盘.

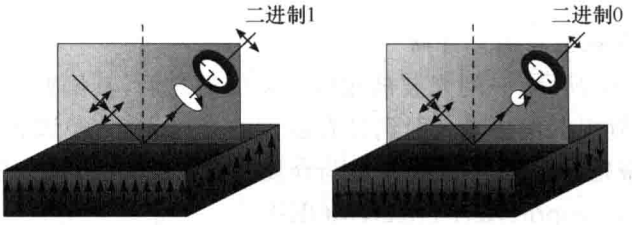


图 7.10.19　信息的激光读取

磁光盘不仅要能读取信息，还要求能够写入信息. 因为光本身是电磁波，当强度足够大时，光的电磁场可以改变介质的磁化特性，即改变介质的磁化方向.

例如，将激光束会聚到磁介质表面上某一点，该处磁畴的磁化方向将出现反转，则原来的信息“1”就被改写成了“0”，如图 7.10.20 所示.

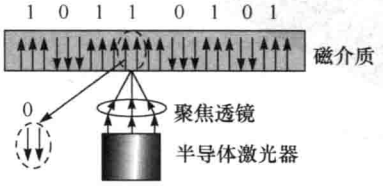


图 7.10.20　信息的激光写入

目前，磁盘信息的写入和读取都需要磁头与磁盘表面进行机械式接触，日积月累，两者间的磨损难以避免，同时，受到磁头惯性质量和空间尺度的制约，磁盘的存储密度和数据的读写速度都受到限制. 而磁光盘是利用激光进行数据的读写，因而可以较好地克服上述缺陷.

第 8 章　光波与物质的相互作用

光与物质的相互作用，从微观机制上看，是入射的电磁波与介质中的带电粒子之间的相互作用. 表现为光的吸收、色散、散射，还有其他的非线性效应等.

8.1　光的吸收

8.1.1　吸收的实验定律

1. 线性吸收定律

实验研究表明，当光强不是很大时，光通过一定厚度的电介质时，被吸收的光强与吸收体的厚度成正比，这就是光的线性吸收规律.

如图 8.1.1 所示，在各向同性均匀介质中取一薄层，厚度为 $\mathrm{d}x$，射入薄层之前，光强为 I，从薄层射出后，由于吸收，强度为 $I+\mathrm{d}I$，其中 $\mathrm{d}I$ 为负值. 则 $-\mathrm{d}I=\alpha I\mathrm{d}x$，其中 α 为与介质有关的常数，称为**吸收系数**. 光强与介质厚度的关系为

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{8.1.1}$$

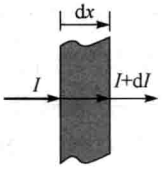


图 8.1.1　介质对光的线性吸收

这一规律称为**布格尔定律**（布格尔，Pierre Bouguer，1698～1758，法国，1729 年发现）或**朗伯定律**（朗伯，Johann Heinrich Lambert，1728～1777，德国，1760 年发现）.

在溶液中，上述吸收定律依然成立，但是对同一类型的溶液，吸收系数与溶液的浓度成正比，即

$$\alpha=AC \tag{8.1.2}$$

其中，A 为与溶液（溶质、溶剂等）有关的常数；C 为溶液的浓度. 因而有

$$I=I_0\mathrm{e}^{-ACx} \tag{8.1.3}$$

这一定律称为**比尔定律**（比尔，August Beer，1825～1863，德国，1852 年发现）.

2. 吸收介质中光波的表达式

光在介质中由于吸收而衰减的情况，可以体现在光波的表达式中. 在电介质中，光波的表达式可以写为

$$\widetilde{U}=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

如果表达式中的 n 是实数，则光波在介质中传播时，振动不会衰减，这就是常

见的定态光波，这是不考虑吸收和其他衰减因素的情况. 如果因为介质的吸收而使光损失能量，则振幅将会衰减. 这时，可以将折射率写为复数形式，即

$$\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa) \tag{8.1.4}$$

则在吸收介质中光波的表达式为 $\widetilde{U}=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}n(1+\mathrm{i}\kappa)x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=A_0\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}nx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，即

$$\widetilde{U}=A_0\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}nx\right)} \tag{8.1.5}$$

其中，虚数指数表示平面波，而实数指数则表示波的振幅 $A_0\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa x}$ 随距离而衰减.

在这种情况下，光强表示为

$$I=|\widetilde{U}|^2=A_0^2\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa x}=I_0\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa x}=I_0\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

可以看出，吸收系数为

$$\alpha=\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa \tag{8.1.6}$$

即复折射率 $\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$ 的虚部 $n\kappa$ 反映了光波被介质吸收而导致的振幅和强度衰减.

8.1.2 吸收系数与波长的关系

实验研究表明，同一种介质，往往对不同波长的光有不同程度的吸收，也就是吸收系数与波长有关. 吸收系数与波长的关系大体可以分为下述两种情况.

1. 普遍吸收

空气、纯水、玻璃等，这些物质看起来都是无色透明的，说明它们对白光中的所有成分均匀吸收；白布、粉笔、白色涂料，这些物质看起来是纯白色的，说明它们对白光中的各个成分均匀反射，并没有吸收某些特定波长的光. 黑色物质，更是吸收几乎所有可见光. 这种情况就是普遍吸收，即这些物质的吸收系数几乎与波长无关，吸收后所有成分的光强都有大致相同的改变.

但实际上，对所有波段的光波都普遍吸收的介质是不存在的. 如玻璃，对紫外和更短波长的光有较强烈的吸收. 空气也是如此，其中的臭氧分子对波长小于300nm的紫外线有强烈的吸收，因而保护了地球上的生命不受强紫外线的照射. 对于红外线，大气层只是在一些狭窄的波段是透明的，这些对红外线吸收较小的波段称为“大气窗口”.

2. 选择吸收

红色玻璃，褐色饮料，是因为对白光中的其他波长成分强烈吸收，而显示出特定的颜色. 这种情况就是选择吸收. 介质的吸收系数与光的波长有关，只强烈地吸收某些波长成分的光.

从微观机制上看，选择吸收与构成物质的原子种类和结构状态有关. 每种原子都有特定的能级结构. 原子可以吸收或发射光，并在其能级之间跃迁. 被吸收的光

的波长 λ 与能级差 ΔE 之间的关系为 $\lambda=\dfrac{hc}{\Delta E}$，其中，$h$ 为普朗克常量，c 为真空中的光速.

地球被一层大气所包裹，大气层吸收了来自宇宙空间的高强度的射线，保护了地球上的生命，同时又能够使可见光透过大气，给地球带来光明. 大气对各个波段的电磁辐射的吸收率可以用图 8.1.2 表示.

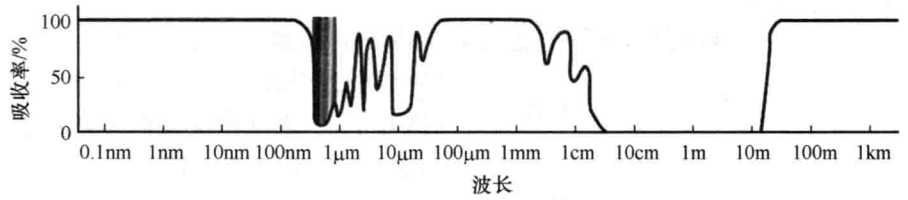


图 8.1.2　大气层对电磁波的吸收

从图 8.1.2 中可以看出，大气对可见光、无线电波的吸收较低，对短波辐射吸收较强，而对红外波段的辐射，表现出显著的选择性吸收. 这样的选择性吸收是由大气中的某些分子所造成的. 图 8.1.3 表示了大气中的分子对不同波段电磁辐射的吸收.

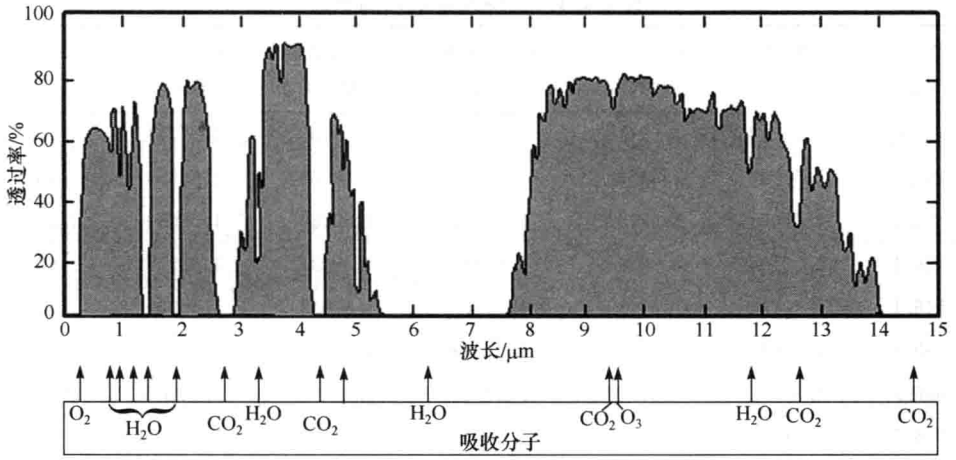


图 8.1.3　大气中分子对电磁辐射的吸收

从图 8.1.3 中可以看出，某些红外辐射可以穿透大气层，这些波段被称为大气的**红外窗口**. 红外窗口对地球保持适宜的温度至关重要. 如果红外窗口变小，则由于红外辐射难以通过大气层，地球温度会上升，这就是**温室效应**(greenhouse effect). 水、二氧化碳对红外波段的电磁辐射吸收强烈，是影响温室效应的主要因

素. 大气中水蒸气的含量是相对恒定的，而由于工业化，二氧化碳的含量不断上升，这就是造成温室效应的原因.

8.2 光的色散

1. 色散现象

白光通过玻璃棱镜后，不同颜色的光会以不同的角度射出，从而在空间分开，这是牛顿最先发现的. 由于不同颜色的光在空间散开了，所以这种现象称为**光的色散**.

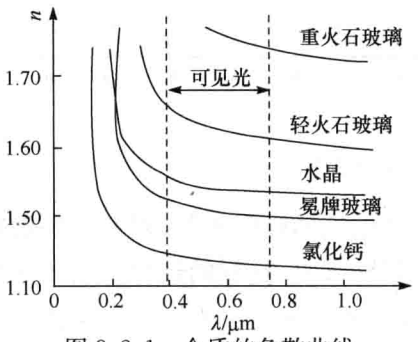


图 8.2.1 介质的色散曲线

光的色散是由于不同波长的光具有不同折射率，所以可以将折射率表示为波长的函数，即 $n=n(\lambda)$.

图 8.2.1 是一些介质的折射率与波长的关系，表 8.2.1 则列出了一些光学玻璃的色散.

表 8.2.1 典型光学玻璃的色散

光谱线 /nm	冕牌玻璃 (K9)	钡冕牌玻璃 (BaK7)	重冕牌玻璃 (ZK6)	轻火石玻璃 (QF3)	钡火石玻璃 (BaF1)	重火石玻璃 (ZF1)
365.0	1.53582	1.59417	1.63862	1.61197	1.57371	1.70022
404.7	1.52982	1.58620	1.63049	1.59968	1.56553	1.68229
435.8	1.52626	1.58154	1.62573	1.59280	1.56080	1.67245
486.1	1.52195	1.57597	1.61999	1.58481	1.55518	1.66119
546.1	1.51826	1.57130	1.51519	1.57832	1.55050	1.65218
589.3	1.51630	1.56880	1.61260	1.57490	1.54800	1.64750
656.3	1.51389	1.56582	1.60949	1.57089	1.54502	1.64207
766.5	1.51104	1.56238	1.60592	1.56638	1.54160	1.62609
853.0	1.50918	1.56023	1.60268	1.56366	1.33946	1.63254
950.8	1.50778	1.55866	1.60206	1.56172	1.53791	1.63007

光在介质中的传播速度也会随波长改变，因而色散也可以用介质中光的速度与波长的函数关系表示为 $v=v(\lambda)$.

2. 色散规律

如图 8.2.2 所示的牛顿正交棱镜实验可以非常形象地显示介质的色散规律.

透过小孔的白光经过透镜后，成为一束细平行光，射向第一块棱镜. 经该棱镜色散后，不同波长的光沿水平方向散开，红光在外侧，蓝光靠里侧. 这些光再射入第二块棱镜，由于第二块棱镜与第一块棱镜的棱相互垂直，所以在第二块棱镜中，色散出现在竖直方向上，里侧的蓝光折射率大，从下方射出，而外侧的红光由于折射率小，从上方射出，因而在屏幕上自然形成一条彩色的曲线，这就是光的折射率 n 随波长 λ 的分布.

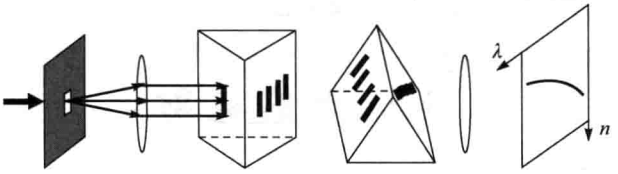


图 8.2.2　用牛顿正交棱镜实验装置

图 8.2.3 则是测量气态原子色散的装置.

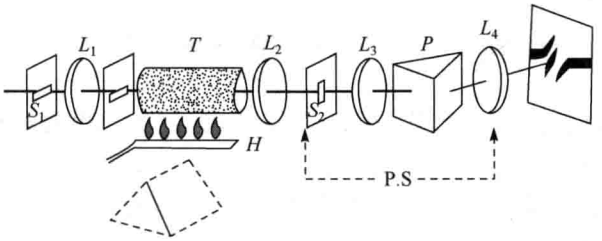


图 8.2.3　气态原子色散的牛顿正交棱镜实验装置

实验研究表明，折射率 n 随波长 λ 的增大而减小，而且在波长小的地方减小得快.

根据实验总结出的色散规律可以用公式表示，这就是**柯西公式**(柯西，Augustin-Louis Cauchy，1789～1857，法国)

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4} \tag{8.2.1}$$

其中，A、B、C 是与介质有关的常数，需要由实验测定. 柯西公式是一个经验公式，在波长范围不是很大时，可以只取前两项，即

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2} \tag{8.2.2}$$

通常用色散率$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$表示折射率随波长变化的幅度. 依据柯西公式，可得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda}-\frac{4C}{\lambda^3}\approx-\frac{2B}{\lambda} \tag{8.2.3}$$

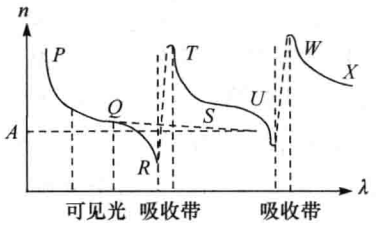


图 8.2.4　正常色散与反常色散

正常情况下，介质的折射率与波长的关系都符合柯西经验公式. 但是，实验表明，物质存在一个吸收带，也就是在某一个波长范围内，光由于被介质强烈吸收，而不能通过介质，所以无法测量这一波长范围内介质的折射率，光的色散在这一区域不遵循柯西公式，这种情况被称为**反常色散**，如图 8.2.4 所示.

8.3　光的散射

8.3.1　散射现象

进入介质中的光波与介质中的带电粒子相互作用，带电粒子在入射光的激发下作受迫振动，发出电磁波. 这是有真实扰动源的光辐射，有时也被称为**次级辐射**，但与惠更斯所引入的次波是不同的. 次级辐射是由于带电粒子振动产生的，可以向各个方向发射.

如果介质是均匀的，具有周期性的空间结构，则次级辐射经相干叠加后，可以在某些特定的方向上取得极大值. 然而，由于光的波长比原子、分子间的距离大得多，所以可见光不会像 X 射线那样在介质中产生衍射. 即除了沿着入射光原来的方向有光继续传播之外，其他的方向是没有光的.

但是，如果介质是不均匀的，则从介质中发出的散射波在其他方向不能完全抵消，可以向任意方向传播，这就是光的**散射**. 所以，光在密度不均匀的介质中总能产生散射.

根据散射机制的不同，主要有以下两类.

(1) 悬浮质点的散射：均匀分布或悬浮在介质中的质点，例如，空气中的尘埃，溶液中的胶体等.

(2) 分子散射：虽然介质是均匀的，但是由于分子的热运动，会在其中产生密度的起伏，从而产生散射.

8.3.2　散射定律

1. 瑞利散射

当散射体的尺寸小于波长时，入射光中不同的波长成分有不同的散射，实验和理论研究表明，散射光强与入射光波长的四次方成反比，即 $I \propto \lambda^{-4}$. 这样的散射被称为**瑞利散射**(Rayleigh scattering).

例如，大气中的分子以及其中细小的尘埃颗粒，会对日光产生明显的散射. 如

果没有大气，空中没有散射光，则天空的背景应当是黑的，这就是宇航员在大气层外和月球上所见到的景象. 我们在白昼之所以看得见明亮的天空，就是由于日光受到大气的散射，而这些被散射后的光从四面八方进入我们的眼睛. 晴朗的天空呈现蓝色，是因为白光中的短波成分散射较强，所以在偏离太阳直射的方向，总是蓝紫色的成分比红黄色的成分要多. 而旭日和落日之所以是红彤彤的，是由于早晚太阳斜射向地面，所经历的大气层的厚度要比正午时分厚得多，所以日光中的短波被大量散射，沿着原来方向前进的主要是其中的长波成分. 相比较而言，正午时分，太阳直射地面，阳光所经过的大气层的厚度比较薄，对短波的散射没有早晚强烈，因而太阳是耀眼的白色.

2. 米-德拜散射

当散射体颗粒度大于波长时，散射光强对波长的依赖性不强，各个波长成分的散射光强差别不大，这样的散射被称为**米-德拜散射**(Mie-Debye scattering).

云雾由水滴组成，这些水滴的直径可以与光的波长相比，因而对光的散射不再遵循瑞利散射定律，而要服从米-德拜散射的规律，所以我们看到的云是白色的. 当空气中的悬浮颗粒较多时，米-德拜散射起的作用也比较大，这时也看不见湛蓝的天空了，而是白蒙蒙的. 注意观察吸烟者，会发现从烟头处冒出的是缕缕青烟(蓝色)，而从吸烟者口鼻出来的则是白烟，是因为烟头冒出的烟中，所含多是燃烧后的分子，引起瑞利散射；而从口鼻出来的烟中则含有大量的水汽，导致米-德拜散射.

散射光强与波长以及散射物大小的关系可用图 8.3.1 表示，其中 a 为散射体的线度.

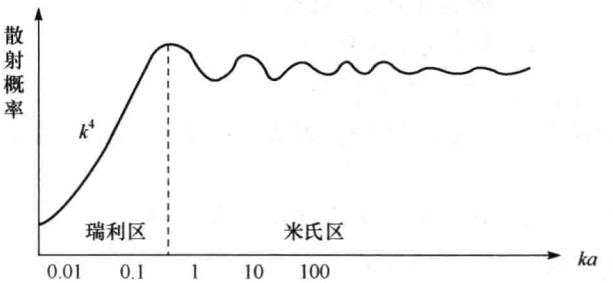


图 8.3.1 瑞利散射与米-德拜散射

当 $a<0.3\dfrac{\lambda}{2\pi}$ 时，$\dfrac{2\pi}{\lambda}a=ka<0.3$，瑞利散射.

当 $a<0.3\dfrac{\lambda}{2\pi}$ 时，$ka>0.3$，米-德拜散射.

8.4 强光在介质中的非线性电极化效应

当光强不是很大时，光与介质之间的相互作用是线性的，即介质的极化强度与入射光的电场分量之间是线性关系

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$$

但是，如果入射光强较大，则上述线性关系不再成立，实验和理论研究表明，介质的极化强度与入射场的关系为

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0[\chi^{(1)}\boldsymbol{E}+\chi^{(2)}\boldsymbol{EE}+\chi^{(3)}\boldsymbol{EEE}+\cdots]=\boldsymbol{P}^{(1)}+\boldsymbol{P}^{(2)}+\boldsymbol{P}^{(3)}+\cdots \quad (8.4.1)$$

是非线性关系. 其中，$\boldsymbol{P}^{(1)}$代表电极化强度矢量表示式中与光波场的电场强度矢量成线性关系的分量，而 $\boldsymbol{P}^{(2)}$代表与光波场强度成二次幂关系的分量，$\boldsymbol{P}^{(3)}$代表与光波场强度成三次幂关系的分量，……相应地，$\chi^{(1)}$、$\chi^{(2)}$、$\chi^{(3)}$、…分别是介质的线性电极化率、非线性的二次电极化率、非线性的三次电极化率……研究表明，$\dfrac{\chi^{(2)}E}{\chi^{(1)}}\approx\dfrac{\chi^{(3)}E}{\chi^{(2)}}\approx\cdots\approx\dfrac{E}{\bar{E}_a}$，其中 $\bar{E}_a$ 为介质中的原子(或分子)维持价电子运动平衡的内部平均电场强度，其数量级约为 $10^{11}\,\mathrm{V/m}$，这是一个很大的场强. 一般情况下，入射光强不是很大时，总有 $E\ll\bar{E}_a$，因而高次的极化可以忽略.

对于一般的各向异性介质，上述表达式是非常复杂的张量形式. 为了便于讨论，我们仅从形式上对上述表达式上进行讨论.

将式(8.4.1)写成标量的形式，为

$$P=\varepsilon_0[\chi^{(1)}E+\chi^{(2)}E^2+\chi^{(3)}E^3+\cdots]=P^{(1)}+P^{(2)}+P^{(3)}+\cdots$$

设入射光为频率为 ω 的单色强光，即入射光随时间扰动的表达式为

$$E=E_0\cos\omega t$$

则在上述电场的作用下，介质中除了线性电极化强度 $P^{(1)}=\varepsilon_0\chi^{(1)}E_0\cos\omega t$(称为基波)之外，还会有二次、三次非线性的电极化强度.

介质的二次非线性电极化强度为

$$P^{(2)}=\chi^{(2)}E^2=\chi^{(2)}[E_0\cos(\omega t)]^2=\frac{\chi^{(2)}E_0^2}{2}(1+\cos2\omega t) \quad (8.4.2)$$

式(8.4.2)说明由于二次非线性电极化效应，在电极化强度表达式中出现了时间频率为 2ω 高频交流成分以及直流成分. 其中频率为 2ω 的辐射称为二次谐波.

如果入射光是频率分别为 ω_1、ω_2 的强光，则此时介质的二次非线性电极化强度为

$$P^{(2)}=\chi^{(2)}E^2=\chi^{(2)}(E_{01}\cos\omega_1 t+E_{01}\cos\omega_1 t)^2$$

$$=\chi^{(2)}(E_{01}^2\cos^2\omega_1 t+2E_{01}E_{02}\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t+E_{02}^2\cos^2\omega_2 t)$$

$$=\chi^{(2)}\left[\frac{E_{01}^2}{2}(1+\cos 2\omega_1 t)+\frac{E_{02}^2}{2}(1+\cos 2\omega_2 t)\right]$$

$$+\chi^{(2)}E_{01}E_{02}[\cos(\omega_1+\omega_2)t+\cos(\omega_1-\omega_2)t] \tag{8.4.3}$$

电极化强度表达式中不仅出现了直流成分和二倍频成分 $2\omega_1$、$2\omega_2$，还有频率为 $\omega_1+\omega_2$ 的和频成分，以及频率为 $\omega_1-\omega_2$ 的差频成分.

依此类推，若进一步考虑三次非线性电极化效应的贡献，则在单一频率的强光作用下，介质中可产生三次谐波(即三倍频)；在三种不同频率的强光作用下，按照频率组合的方式，介质中可产生更多新频率的辐射.

因此，强光可以在介质中产生不同于入射波的其他频率的扰动，这些扰动就产生新的辐射. 例如，单一频率强光入射，可产生二次谐波辐射、三次谐波辐射；不同频率强光入射，则会产生和频、差频的辐射. 这些效应已经获得了实际的应用.

要产生光学二次谐波，对工作物质有相应的要求，即要满足相位匹配条件或折射率匹配条件，表示为

$$n(\omega)=n(2\omega) \tag{8.4.4}$$

由于光在介质中的色散效应，上式是不容易得到满足的. 但是在双折射晶体中，由于 o 光和 e 光的折射率有着较大的差异，即偏振态决定了其折射率，而折射率的大小与光波的传播方向有关，同时也与晶体的温度有关. 因此，可以使入射的基波和产生的二次谐波具有不同的偏振态，然后沿晶体的特定的入射方向，或者使晶体保持在特定的温度，以达到晶体折射率的色散效应被其双折射效应正好抵消的目的，从而使得对于基波和二次谐波有相同的折射率，以满足相位匹配条件. 这种相位匹配的方式称为角度控制或温度控制.

常用的非线性工作晶体，即倍频晶体，均是人工生长的优质晶体，如 KDP(磷酸二氢钾)、ADP(磷酸二氢铵)、$LiIO_3$(碘酸锂)等，主要用于波长较长的红外激光入射，而产生较近红外区的二次谐波输出辐射，例如，CO_2 激光器输出的 10.6μm 激光，可产生 5.3μm 的二次谐波.

除了相位匹配之外，还要选取一定的激励耦合方式，即既可以将晶体放在激光器之外，使得行波单次通过晶体，也可以将晶体放在激光器的谐振腔内，使得基波光束多次通过晶体.

产生二次谐波的实验装置如图 8.4.1 所示.

要产生光学和频与差频，同样要满足一定的相位匹配条件，其装置可用图 8.4.2 表示.

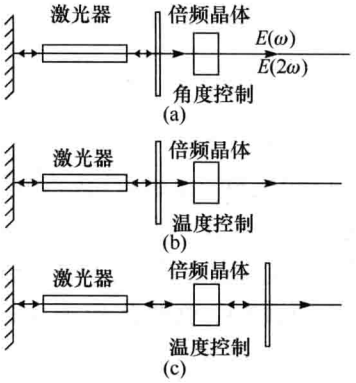


图8.4.1　产生二次谐波的实验装置

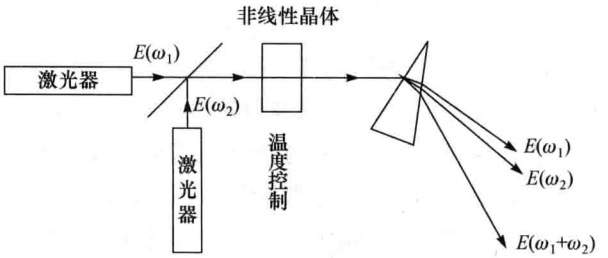


图 8.4.2　产生光学和频的实验装置

第9章　光的量子性

光的量子理论是近代物理学的重要组成部分，是目前仍在不断取得新进展的重要光学分支. 光的波粒二象性，以及由此推广的物质的波粒二象性，是量子理论的基础. 光量子这一模型是为了解决经典物理学难以克服的困难而提出的，是物理学发展的必然结果，光量子这一物理模型有着坚实的实验基础.

9.1　黑体辐射

9.1.1　热辐射

热辐射是构成物质的带电粒子做随机的热运动而产生的电磁波. 粒子的热运动与温度有关，所以热辐射也与温度有关. 阳光就是太阳的热辐射，从火山口涌出的岩浆、烧红的铁块、白炽灯的灯丝，都是热辐射体. 在物体的温度高达千摄氏度时，才有显著的热辐射；热辐射的波长，通常在红外和可见波段.

热辐射所形成的电磁波场，简称为辐射场. 通过研究辐射场的性质，可以了解热辐射的规律.

1. 辐射场的物理参数

辐射场就是电磁波场，任何发出电磁波（光波）的物体都在其周围形成一个辐射场，辐射场是一个矢量场.

描述辐射场的物理参数很多，本书重点介绍一些与热辐射有关的物理量.

(1) 辐射通量：温度为 T 时，辐射场单位体积中，频率 ν 附近、频率间隔 $\mathrm{d}\nu$ 内的辐射功率，表示为

$$\mathrm{d}\Phi(\nu,T)=E(\nu,T)\mathrm{d}\nu \tag{9.1.1}$$

辐射通量是单位时间内所辐射的能量，具有功率的量纲. 式(9.1.1)中，$E(\nu,T)$就是单位体积中，频率 ν 附近单位频率间隔的**辐射通量**，称为**辐射谱密度**或**辐射本领**，也称**单色辐出度**.

(2) 吸收本领：将照射到物体上的电磁波的通量记为 $\mathrm{d}\Phi(\nu,T)$，其中被物体吸收的通量记为 $\mathrm{d}\Phi'(\nu,T)$，则比例

$$A(\nu,T)=\frac{\mathrm{d}\Phi'(\nu,T)}{\mathrm{d}\Phi(\nu,T)} \tag{9.1.2}$$

称为物体的**吸收本领**. 吸收本领也被称为**吸收比**.

2. 热辐射与热平衡

1) 物体间的热交换

如图 9.1.1 所示,与外界隔绝的几个物体,起初温度各不相同. 假设相互间只能以热辐射的形式交换能量,则每一个物体都向外辐射能量,同时也吸收其他物体辐射到其表面的能量. 温度低的物体,辐射较小,吸收较大;而温度高的物体,辐射较大,吸收较小. 经过一个过程后,所有物体的温度相同,达到了热平衡状态.

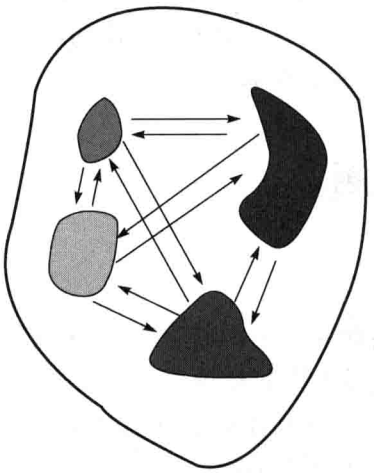


图 9.1.1 物体间通过辐射交换能量

热平衡时,每一个物体辐射的能量等于其吸收的能量,即热平衡状态下,吸收本领大的物体,其辐射本领也大,因而可以得到以下关于热辐射的定律.

2) 基尔霍夫热辐射定律

热平衡状态下物体,其辐射本领与吸收本领成正比,而且比值只与 ν, T 有关,即

$$\frac{E(\nu,T)}{A(\nu,T)}=f(\nu,T) \tag{9.1.3}$$

由于任何物体都可通过热辐射到达热平衡状态,所以式(9.1.2)中的 $f(\nu,T)$ 是普适函数,与物质的种类无关.

因而可以通过研究辐射场的性质得到普适函数 $f(\nu,T)$ 的规律,这样一来,就可以对物体的热辐射性质进行全面深入的研究.

3. 黑体

根据式(9.1.3),如果要通过实验来测量普适函数 $f(\nu,T)$,则必须同时测量物体的辐射本领 $E(\nu,T)$ 和吸收本领 $A(\nu,T)$,但是这样会使研究变得比较复杂,因为不容易区分哪一部分辐射是来自物体本身,哪一部分辐射是被物体所反射的,所以吸收本领 $A(\nu,T)=\dfrac{\mathrm{d}\Phi'(\nu,T)}{\mathrm{d}\Phi(\nu,T)}$,并不容易测量.

如果设法使物体的吸收本领 $A(\nu,T)\equiv 1$,则可得 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$,这种情况下,只需要测量物体的辐射,即单色辐出度,就可以得到普适函数 $f(\nu,T)$.

$A(\nu,T)\equiv 1$,表明物体对辐照到它上面的能量全部吸收,没有反射. 用通俗的语言说,由于它不反光,可以认为它是黑的. 因而 $A(\nu,T)\equiv 1$ 的物体,称为**黑体**(black body),或**绝对黑体**.

但实际上并不存在表面不反光的绝对黑体,实验中用的绝对黑体都是专门制作的. 一个开有小孔的空腔,对射入其中的光几乎可以全部吸收,如图 9.1.2 所示,

等效于绝对黑体. 这时，只要测量空腔开口处的辐射本领，即可以得到 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$. 黑体辐射的测量装置如图 9.1.3 所示.

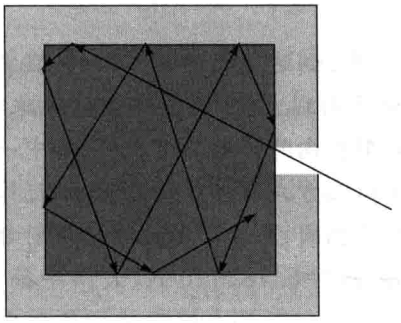


图 9.1.2　绝对黑体

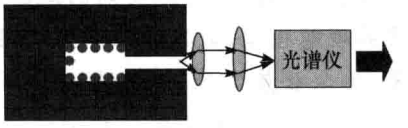


图 9.1.3　黑体辐射的测量装置

9.1.2　黑体辐射的实验规律

实验测量得到的黑体辐射的光谱如图 9.1.4 所示，表明在不同的温度下，黑体的辐射本领不同；同时，在不同的波长（频率）处，辐射本领（即单色辐出度）也不同.

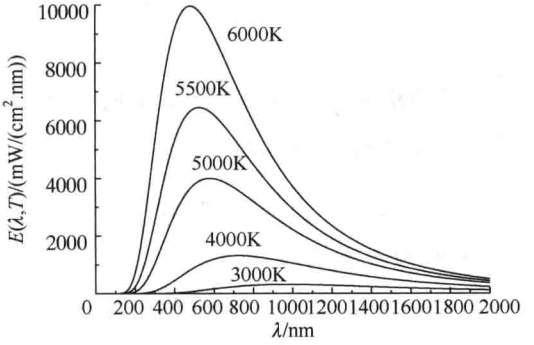


图 9.1.4　黑体辐射的测量结果

在 19 世纪末到 20 世纪初的一段时间内，许多人对黑体辐射进行了较深入的研究，从实验和理论上总结出了黑体辐射的规律.

1. 斯特藩-玻尔兹曼定律

斯特藩（J. Stefan，1835～1893，奥地利）和玻尔兹曼（L. E. Boltzmann，1844～1906，奥地利）分别于 1879 年和 1884 年发表了对黑体辐射的研究结果.

黑体辐射光谱中每一条曲线下的面积，表示黑体的辐射通量，即某一温度下总的辐射本领，该辐射本领与温度的四次方成正比，即

$$\Phi(T)=\int_0^{\infty}E(\nu,T)\mathrm{d}\nu=\sigma T^4 \tag{9.1.4}$$

其中，$\sigma=5.67032\times10^{-8}\mathrm{W/(m^2\cdot K^4)}$，为**斯特藩-玻尔兹曼常量**.

这就是**斯特藩-玻尔兹曼定律**.

例 9.1

地球上的能量从源头上说都来自太阳辐射. 到达地面的太阳辐射(假定不计大气对太阳辐射的吸收)一部分被地球表面反射到太空，其余部分被地球吸收. 被吸收的部分最终转换成地球热辐射. 热辐射在向外传播的过程中，其中一部分会被大气层中的温室气体反射回地面，地球以此方式保持了总能量平衡. 作为一个简单的理想模型，假定地球表面的温度处处相同，且太阳和地球的辐射都遵从斯特蕃-玻尔兹曼定律. 已知太阳表面温度 $T_S=5.78\times10^3\mathrm{K}$，太阳半径 $R_S=6.69\times10^5\mathrm{km}$，地球到太阳的平均距离 $d=1.50\times10^8\ \mathrm{km}$. 假设温室气体在大气层中集中形成一个均匀的薄层，并设它对热辐射通量的反射率为 $\beta=0.38$.

(1) 如果地球表面对太阳辐射的平均反射率 $\alpha=0.30$，试问考虑了温室气体对热辐射的反射作用后，地球表面的温度是多少?

(2) 如果地球表面一部分被冰雪覆盖，覆盖部分对太阳辐射的反射率为 $\alpha_1=0.85$，其余部分的反射率为 $\alpha_2=0.25$. 问冰雪被盖面占总面积多少时地球表面温度为 273K.

解 (1) 设地球到太阳的距离为 d，地球和太阳的半径分别为 R_E 和 R_S，太阳表面的温度为 T_S，则太阳辐射的总功率为

$$P_S=4\pi R_S^2 J=4\pi R_S^2\sigma T_S^4$$

到达地球表面，太阳辐射的功率密度为

$$I=\frac{P_S}{4\pi d^2}=\frac{\sigma R_S^2 T_S^4}{d^2}$$

地球朝向太阳的截面积为 πR_E^2，地球吸收辐射的功率为

$$P_A=(1-\alpha)\pi R_E^2 I=\frac{(1-\alpha)\pi\sigma R_E^2 R_S^2 T_S^4}{d^2}$$

设地球表面的温度为 T_E，温室气体将地表的部分辐射反射回来，则地球辐射的功率为

$$P_E=(1-\beta)4\pi R_E^2\sigma T_E^4$$

达到热平衡时，$P_A=P_E$，即 $\dfrac{(1-\alpha)\pi\sigma R_E^2 R_S^2 T_S^4}{d^2}=(1-\beta)4\pi R_E^2\sigma T_E^4$.

地球的温度为

$$T_E=\sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)R_S^2}{4(1-\beta)d^2}}T_S=\sqrt[4]{\frac{1-0.30}{4(1-0.38)}\left(\frac{6.69\times10^5}{1.50\times10^8}\right)^2}\times5.78\times10^3=281(\mathrm{K})$$

(2) 设冰雪覆盖部分所占的比例为 η，平均反射率为 $\eta\alpha_1+(1-\eta)\alpha_2=\eta(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2$，则平衡时

$$[(1-\alpha_1)\eta+(1-\alpha_2)(1-\eta)]\frac{\pi\sigma R_E^2R_S^2T_S^4}{d^2}=(1-\beta)4\pi R_E^2\sigma T_E^4$$

$$\eta=\frac{1-\alpha_2-4(1-\beta)\dfrac{d^2}{R_S^2}\dfrac{T_E^4}{T_S^4}}{\alpha_1-\alpha_2}=\frac{1-0.25-4(1-0.38)\left(\dfrac{1.50\times10^8}{6.69\times10^5}\right)^2\left(\dfrac{273}{5.78\times10^3}\right)^4}{0.85-0.25}$$

$=21.6\%$

2. 维恩位移定律

1983 年，维恩(Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien，1864～1928，德国)从热力学导出了黑体辐射谱应当具有下述形式：

$$E(\nu,T)=c\nu^3f\left(\frac{\nu}{T}\right)\text{或}E(\lambda,T)=\frac{c^5}{\lambda^5}f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

或者进一步写成

$$E(\nu,T)=\frac{\alpha\nu^3}{c^2}e^{-\beta\nu/T},\quad E(\lambda)=\frac{\alpha c^2}{\lambda^5}e^{-\beta c/\lambda T}$$

其中，v 为分子的运动速度；α、β 为常量. 这就是**维恩公式**. 虽然其中函数 $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ 或 $f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ 的表达式无法得到，但可以求出辐射本领极大值的关系式，表示为

$$T\lambda_m=b \tag{9.1.5}$$

其中，λ_m 表示辐射本领最大的波长；$b=2.8978\times10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K}$.

式(9.1.5)称为**维恩位移定律**. 维恩由于“发现了热辐射的规律”而获得 1911 年诺贝尔物理学奖.

维恩位移定律在实际中有广泛的应用，在无法进行接触测温的情况下，通过观察物体的辐射谱，可以得到物体的温度. 例如，在炼钢厂中，人们通过观察高炉中钢水的颜色，能够判断出钢水的温度.

例 9.2

物体温度不同，热辐射谱也不同，在视觉上所造成的“光的颜色”也不同，因而可以用“色温”表示光源的光谱特征或光的照明特征. 例如，一些常用光源的色温为：标准烛光为 1930K；钨丝灯为 2760～2900K；荧光灯为 3000K；闪光灯为 3800K；中午阳光为 5600K；电子闪光灯为 6000K；蓝天为 12000～18000K. 通常将色温 3300K 以下的光称为暖色光，3300～5300K 的光称为冷白色光（或中性光），5300K 以上的光称为冷色光. 计算上述三种色光的峰值辐射波长各是多少.

解 按照维恩位移定律，有 $\lambda_m = b/T = 2.8978\times10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}/T \approx 3\times10^{6}\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{K}/T$，于是有

色温 3000K 的暖色光：$\lambda_m = 3\times10^{6}\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{K}/3000\mathrm{K} = 1000\mathrm{nm}$；

色温 4000K 的中性光：$\lambda_m = 3\times10^{6}\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{K}/4000\mathrm{K} = 750\mathrm{nm}$；

色温 6000K 的冷色光：$\lambda_m = 3\times10^{6}\,\mathrm{nm}\cdot\mathrm{K}/3000\mathrm{K} = 500\mathrm{nm}$.

3. 瑞利-金斯定律

瑞利和金斯（J. H. Jeans，1877～1946，英国）分别于 1900 年和 1905 年用经典的统计物理方法研究了黑体辐射的规律. 瑞利“由于对重要气体密度的研究，并因此而发现了氩”而获得 1904 年诺贝尔物理学奖.

瑞利认为，空腔中的电磁波在腔的内壁不断地反射，则只有以驻波的形式存在，才能使其不因叠加而湮没. 在驻波假设的前提下，可以推导出从黑体中辐射出的能量.

驻波要满足一定的条件，即其波节（振动为零处）必须在腔壁处，如图 9.1.5 所示. 将黑体的空腔看成一个边长为 L_x、L_y、L_z 的方匣子，因而得到

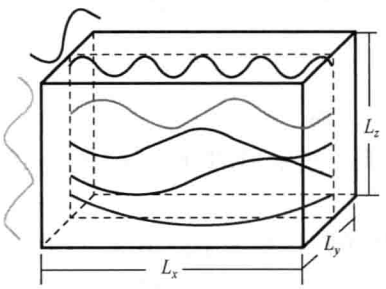


图 9.1.5　驻波的边界条件

$$\begin{cases}\sin(k_xL_x)=0\\ \sin(k_yL_y)=0\\ \sin(k_zL_z)=0\end{cases}$$

所以必须有

$$\begin{cases}k_x=n_x\pi/L_x\\ k_y=n_y\pi/L_y\\ k_z=n_z\pi/L_z\end{cases}\qquad(9.1.6)$$

其中，n_x、n_y、n_z 都是整数.

驻波的波矢满足以下条件：

$$|\boldsymbol{k}|^2=|k_x\boldsymbol{e}_x+k_y\boldsymbol{e}_y+k_z\boldsymbol{e}_z|^2=\pi^2\left[\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2\right] \tag{9.1.7}$$

利用关系式 $\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi c}{\lambda}=kc$，则式(9.1.7)化为

$$1=\left[\frac{n_x}{\omega L_x/(\pi c)}\right]^2+\left[\frac{n_y}{\omega L_y/(\pi c)}\right]^2+\left[\frac{n_z}{\omega L_z/(\pi c)}\right]^2 \tag{9.1.8}$$

由于 n_x、n_y、n_z 都是整数，所以对于一个确定的频率 ω，这三个整数的不同组合 (n_x,n_y,n_z) 是有限的个数. 每一个组合，虽然所决定的波矢大小 $|\boldsymbol{k}|$ 都是相同的，但由于波矢在空腔中的方向可以有多种取向，所以代表了不同的驻波. 整数 (n_x,n_y,n_z) 的每一个组合，称为一个**驻波模式**.

式(9.1.8)是椭球面的方程，可以看成以三个整数 n_x、n_y、n_z 为直角坐标轴的椭球面，如图 9.1.6 所示. $0\sim\omega$ 的驻波模式 (n_x,n_y,n_z) 数就是第Ⅰ象限球面内的所有整数点的数目，这些点是其中所有单位体积方格的顶点，顶点数等于其中的单位体积的方格数，由于每个方格的体积为 1，所以顶点的数目就是第Ⅰ象限内所有方格的体积之和，这些体积的总和与椭球在第Ⅰ象限的体积相等. 该体积为

$$\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\frac{\omega L_x}{\pi c}\frac{\omega L_y}{\pi c}\frac{\omega L_z}{\pi c}=\frac{1}{6}\frac{\omega^3}{\pi^2c^3}V \tag{9.1.9}$$

其中，$V=L_xL_yL_z$ 为黑体腔的体积.

考虑到偏振态，由于每一个驻波都有两个自由度，所以驻波的模式数应当是式(9.1.9)的 2 倍，即

$$n_\omega=\frac{1}{3}\frac{\omega^3}{\pi^2c^3}V=\frac{8\pi}{3}\frac{\nu^3}{c^3}V \tag{9.1.10}$$

圆频率小于 ω 的总的驻波模式数为上述椭球的体积，单位体积内、频率在 $\nu\sim\nu+\mathrm{d}\nu$ 的驻波数为 $\mathrm{d}n_\omega=8\pi\dfrac{\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu$，也可表示为

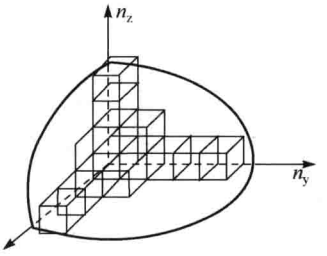


图 9.1.6 整数组合 (n_x,n_y,n_z) 的数目

$$\rho\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2\mathrm{d}\nu \tag{9.1.11}$$

而从小孔辐射出的驻波数(即分子运动论中的泄流数)为

$$\Gamma=\frac{1}{4}c\rho \tag{9.1.12}$$

每一个驻波模式，就是一个**经典谐振子**，按照**能量均分定理**，每个谐振子的能量为

$$\varepsilon=kT \tag{9.1.13}$$

辐射出的能量，即辐射本领为

$$E(\nu,T)=\Gamma kT=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT \tag{9.1.14}$$

由于 $d\nu=d\left(\frac{c}{\lambda}\right)=\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$，可以将式(9.1.14)以波长表示为

$$E(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^4}kT \tag{9.1.15}$$

式(9.1.14)和式(9.1.15)就是**瑞利-金斯定律**.

从经典物理学的角度看，瑞利-金斯定律是无懈可击的，它从辐射场的性质出发，得出了黑体空间中单位体积驻波的谱密度，进而求出从小孔辐射出的驻波(谐振子)的数目和能量.

4. 紫外灾难

图 9.1.7 是维恩定律、瑞利-金斯定律与实验结果的比较. 容易看出，在波长较大的波段，瑞利-金斯定律与实验结果一致，符合得较好；但是在短波区域，当$\lambda\to 0$，$E(\lambda,T)\to\infty$时，与实验结果严重偏离. 由于这种偏离出现在波长较短的区域，所以被称为“紫外灾难”.“紫外灾难”说明，用经典物理学的理论，无法解释黑体辐射的规律.

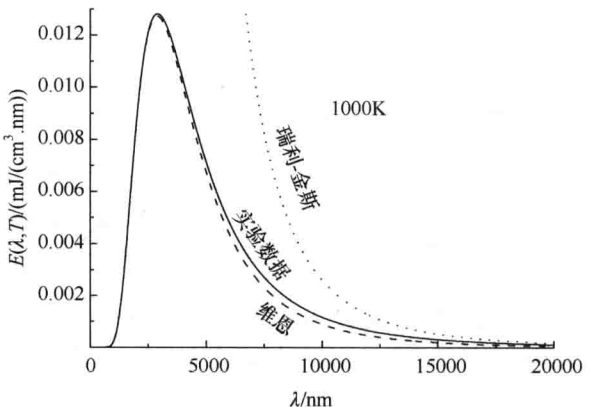


图 9.1.7　维恩曲线(虚线)、瑞利-金斯曲线(点)与实验曲线(实线)的比较

虽然从图上看起来维恩公式与实验结果的符合比瑞利-金斯定律还要好，但是维恩公式与实验的偏离却是系统的，即从物理的观点看，它的偏离比瑞利-金斯定律还要严重.

9.2 光 量 子

从解决黑体辐射的紫外灾难开始，物理学家提出了关于光的新的假说，并逐步

建立起了光量子的物理模型.

9.2.1 普朗克能量分立的谐振子

1. 普朗克对黑体辐射的解释

1900年,普朗克(Max Planck,1858～1947,德国)从熵的表达式出发,"猜"出了辐射本领所应具有的数学表达式.为了从理论上推导出这样的表达式,他作了一个假设:黑体空腔中谐振子的能量不能任意取值,而只能取一系列不连续的、分立的数值,可以设这些能量值为

$$\varepsilon=\varepsilon_0,2\varepsilon_0,3\varepsilon_0,4\varepsilon_0,\cdots$$

而且能量与谐振子频率之间有以下关系:

$$\varepsilon_0=h\nu \tag{9.2.1}$$

其中,ν 为谐振子的频率.

由于不同频率的谐振子能量不同,从统计的角度看,一个谐振子处于不同能量状态的概率也不相同,即一个谐振子处于能量 $E_n=n\varepsilon_0$ 态的概率正比于 $\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\varepsilon_0}{kT}}$.

则空腔内每一个驻波,即每一个谐振子的平均能量可以根据上述概率分布计算,为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\sum\limits_n n\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\varepsilon_0}{kT}}}{\sum\limits_n \mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\varepsilon_0}{kT}}}=\frac{\sum\limits_n n\varepsilon_0\mathrm{e}^{-(n-1)\varepsilon_0\beta}}{\sum\limits_n \mathrm{e}^{-(n-1)\varepsilon_0\beta}}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\varepsilon_0\beta}\right)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\beta}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\beta})=\frac{\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\beta}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\beta}}\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon_0\beta}}{\mathrm{e}^{\varepsilon_0\beta}}=\frac{\varepsilon_0}{\mathrm{e}^{\varepsilon_0\beta}-1}$$

即每个普朗克谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{9.2.2}$$

这与瑞利-金斯的假设(9.1.13)不相同,即 $\bar{\varepsilon}\neq kT$.

利用谐振子的谱密度公式(9.1.11)和(9.1.12),可以算出黑体的辐射本领为

$$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}=\frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{9.2.3}$$

可以对式(9.2.3)作进一步的分析.kT 实际上是谐振子热运动的动能,在长波段,谐振子的能量较小,即 $h\nu\ll kT$,这时 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\approx\dfrac{1}{1+\dfrac{h\nu}{kT}-1}=\dfrac{kT}{h\nu}$,于是辐射本领为

$$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}h\nu^3\frac{kT}{h\nu}=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2kT$$

与瑞利-金斯符合.

在短波段,谐振子的能量较大,即 $h\nu \gg kT$,$e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$,式(9.2.3)化为

$$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

即在短波区域(即所谓的"紫外"波段)随着频率的增加(即随着波长的减小),辐射本领迅速减小,并趋近于 0,这与实验结果一致.

普朗克的分立能量谐振子假设虽然解释了黑体辐射的实验规律,解决了"紫外灾难",但是由于这一假设看起来没有什么依据,在当时并没有得到认可.

2. 空腔中的光波与宇宙的背景辐射

1965 年,美国贝尔实验室的两位工程师阿诺·彭齐亚斯和罗伯特·威尔逊使用他们自己设计的射电望远镜收到了一个来自宇宙空间的波长为 7.35cm 的微波信号,这一信号与方向、时间无关,被称为宇宙背景微波辐射. 很快,就有科学家指出,这是来自于宇宙的黑体辐射.

按照宇宙大爆炸的学说,整个宇宙是有一定大小的,就相当于一个巨大的密闭空腔,这样的空腔中就会残留有当初大爆炸时的电磁辐射(即黑体辐射). 由于辐射与温度相关,由此算得宇宙空间的背景温度为 2.7K. 彭齐亚斯和威尔逊因此获得了 1978 年的诺贝尔物理学奖.

图 9.2.1 是宇宙背景探测者卫星所测量到的宇宙背景辐射的谱图.

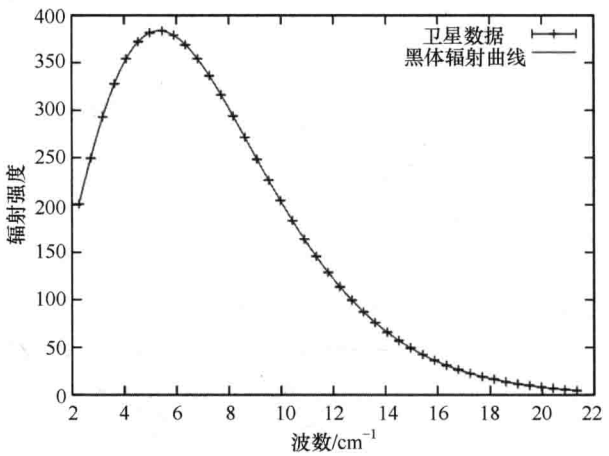


图 9.2.1 宇宙背景微波辐射的实验测量结果与黑体辐射曲线的比较

9.2.2 光量子

1. 光电效应

现代意义上的光电效应是赫兹在进行电磁波实验过程中发现的. 1887 年,赫

兹将一对电火花隙(通过线圈连接的一对电极,置于空气中,当有电磁波通过线圈时,会在电极间产生电场,从而将电极间的空气电离,发出电火花)放在一个带有玻璃观察窗的暗盒中,以便更好地观察电火花.他注意到,放电时,两极间火花的长度变短了,而这正是由于那块作为观察窗的玻璃板的影响.将玻璃板移开之后,电极间的火花又变长了.当他用不吸收紫外光的石英代替普通玻璃板后,火花的长度则没有缩短.赫兹认为,这块处在电磁波源和接收线圈之间的玻璃板吸收了紫外辐射,而紫外辐射会导致电荷在电火花隙间跳跃.他对这一现象研究了数月之后写出了研究报告.

1899年,J. J. 汤姆孙采用克鲁克斯管研究光电效应,他用紫外线照射真空管中的金属电极(阴极),发现回路中有电流出现,这就是**光电流**(photocurrent),说明由于光的照射,有电子被从金属中打出,这就是**光电子**(photoelectron).改变入射光的波长和强度,会引起电流强度的改变.他测量的结果是入射光的强度越强、频率越短,光电流就越大.1901年,特斯拉(Nikola Tesla, 1856～1943,克罗地亚)利用光电效应为电容器充电并获得发明专利.图9.2.2是研究光电效应的实验装置示意图.

对光电效应进行深入仔细研究的是德国物理学家勒纳德.1902年,他使用一个大功率的电弧灯研究真空管中金属电极的光电效应,通过测量光电子的**截止电压**(stopping voltage),他得到结论,光电子的最大动能只与照射到金属上的光的频率有关,而与光的强度无关;当照射到电极上的紫外线频率增大时,光电子动能相应增大;如果光的频率小于某一数值,则没有光电子发射,这样的频率就是截止频率(cutoff frequency),对于各种金属电极,有一个与材料有关的截止频率.

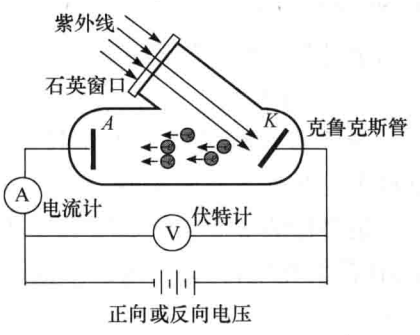


图9.2.2 光电效应的实验研究装置

2. *爱因斯坦对光电效应的解释*

受到普朗克分立能量谐振子假设的启发,1905年,爱因斯坦(Albert Einstein, 1879～1955)更进一步提出了**"光量子"**(light quanta)的概念,并成功地解释了光电效应.

爱因斯坦接受了普朗克关于光的谐振子能量 $E=h\nu$ 的假说,更进一步提出了"能量子"假说,认为光辐射中每一个能量子所携带的能量就是 $E=h\nu$.光辐射中,每一个"能量子"都是分立的,这就是光的粒子性,后来,"能量子"被称为**光子**(photon).

金属中的电子,由于受到束缚,从表面逸出时需要克服一定的势能,这就是**功**

函数(work function,也称**逸出功**),记为 W. 则由于吸收了一个光子而从金属表面逸出的光电子的动能为

$$E_k=h\nu-W \tag{9.2.4}$$

如果在真空管的电极上加反向电压,则光电子的动能要损失. 恰好使得光电子不能到达阳极的反向电压就是截止电压 V_s,这时,$eV_s=E_k$,于是 $V_s=\dfrac{h\nu}{e}-\dfrac{W}{e}$,即

$$h=\frac{eV_s+W}{\nu} \tag{9.2.5}$$

1916 年,密立根(Robert Andrews Millikan,1868～1953,美国)从实验上验证了爱因斯坦的光量子方程(9.2.5),并且测量了式中 h 的数值,得到 $h=6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$,$h$ 称为**普朗克常量**,是一个基本的物理学常数.

9.2.3 康普顿效应

根据普朗克和爱因斯坦的思想而提出的"光子"是分立的能量子,可以被电子整个吸收. 这样看起来,似乎光子作为粒子没有什么问题了. 然而,从物理学的观点看,既然是粒子,就应当具有粒子的全部特征,光子至少应该具有动量. 那么,光子的动量是怎样的? 有没有证明光子具有动量的实验?

1. 实验现象

1921 年,康普顿(Arthur Holly Compton,1892～1962,美国)发现了 X 射线在材料中的非相干散射现象.

康普顿的实验结果如图 9.2.3 所示,经过单色化的 X 射线入射到不同的材料上,在散射光中,一部分波长不变,是相干散射;另一部分波长变长,是非相干散射.

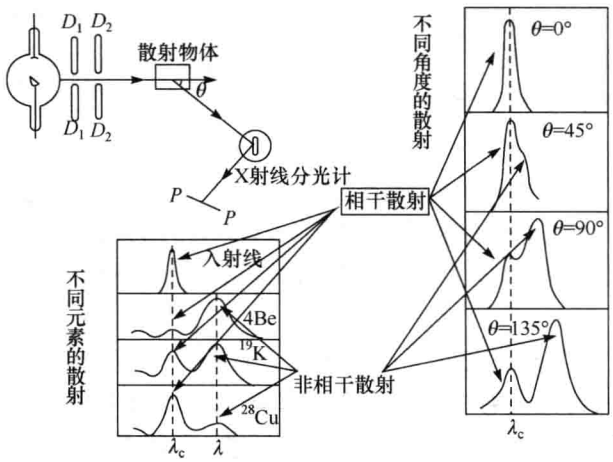


图 9.2.3　康普顿散射的实验结果

康普顿还注意到，对于同一种元素，在不同的角度上，非相干散射的波长改变不同；而在同一角度上，不同的元素非相干散射所占的比例不同，元素序数较小的轻原子，非相干散射的比例较大，而元素序数较大的重原子，相干散射的比例较大. 上述实验现象称为**康普顿效应**(Compton effect).

2. 光子的动量

康普顿利用光子模型，成功地解释了这一现象.

从光子的观点看，入射的 X 射线光子具有能量和动量. 对于光子，由于能量 $E=h\nu$，利用爱因斯坦质能关系 $E=mc^2$，以及动量的表达式 $p=mc$，可以得到光子的动量表达式为

$$p=\frac{h\nu}{c} \tag{9.2.6}$$

入射的 X 射线光子与电子发生弹性碰撞，在碰撞过程中，动量和能量是守恒的，如图 9.2.4 所示，即

$$\begin{cases} h\nu+m_0c^2=h\nu'+mc^2 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'+m\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{9.2.7}$$

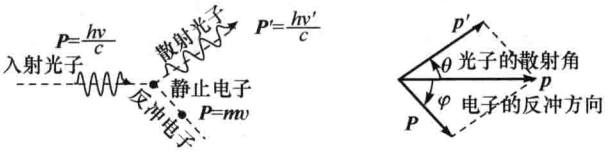


图 9.2.4 光子与电子的弹性碰撞

将式(9.2.7)中第一式变为 $mc^2=h\nu-h\nu'+m_0c^2$，两端平方，得到

$$m^2c^4=h^2\nu^2+h^2\nu'^2-2h^2\nu\nu'+m_0^2c^4+2m_0c^2h(\nu-\nu') \tag{9.2.8}$$

而将式(9.2.7)中第二式写为标量表达式，得到

$$(mv)^2=\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2-2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta$$

再作如下的数学变换：

$$m^2c^2v^2=h^2\nu^2+h^2\nu'^2-2h^2\nu\nu'\cos\theta \tag{9.2.9}$$

式(9.2.8)减式(9.2.9)得

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^4=m_0^2c^4-2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta)+2m_0hc^2(\nu-\nu') \tag{9.2.10}$$

按照相对论，由于 $m\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=m_0$，式(9.2.10)变为

$$m_0^2c^4=m_0^2c^4-2h^2\nu\nu'(1-\cos\theta)+2m_0hc^2(\nu-\nu')$$

整理后为$\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)=\frac{c}{\nu'}-\frac{c}{\nu}$，即

$$\Delta\lambda=\lambda_C(1-\cos\theta) \tag{9.2.11}$$

其中，$\lambda_C=\frac{h}{m_0c}=2.42631\times10^{-3}\text{nm}=0.0242631\text{Å}$，称为康普顿波长.

用式(9.2.11)可以解释对同一种元素，在不同的角度上非相干散射的波长不同的现象. 而对于不同元素的散射，则可以这样理解：由于康普顿的散射模型中假设电子是自由电子，但实际上，在材料中，还有一些成键的束缚电子，如每个原子的内壳层电子. 这些束缚电子由于受到原子核的束缚，其动量，能量在碰撞(散射)前后变化很小，所以光子在与束缚电子的散射过程中，动量和能量的变化也很小，可以认为是相干散射. 在轻原子中，束缚电子的数目相对较少，因而非相干散射的光子数目较多；而重的原子中，束缚电子数目较多，因而相干散射的光子数目较多.

具有了动量的光子，才是真正意义上的粒子.

普朗克 1918 年由于“发现能量子，从而对物理学的发展做出了巨大的贡献”而获得了诺贝尔物理学奖；爱因斯坦因为“在理论物理方面的成就，尤其是发现了光电效应的规律”而获得 1921 年诺贝尔物理学奖；密立根则是“因为基本电荷及光电效应方面的工作” 而获得 1923 年诺贝尔物理学奖，康普顿因为“发现了后来以其名字命名的效应”获得 1927 年诺贝尔物理学奖.

3. 光压

由于光子有动量，光照射到物体表面时，光子由于碰撞，将会产生压力，这就是光压.

根据定义，光强是单位面积的光通量，从光子的观点看，光强的表达式应当为 $I=nh\nu c$，其中，n 为单位体积中的光子数，c 为光速. 记每个光子的动量为 p_φ，光正入射到物体表面，若全被反射，则动量的改变量为 $2p_\varphi$，施于表面的冲量亦为 $2p_\varphi$，而冲量为 $F\Delta t$. 单位时间内，有 nc 个光子入射到单位表面上，由此可算得光压为

$$P=2nc p_\varphi=2nh\nu=\frac{2I}{c} \tag{9.2.12}$$

9.2.4 物质的波粒二象性

光子具有动量，每个光子的动量为 $p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$，也可以将其写为

$$\lambda=\frac{h}{p} \tag{9.2.13}$$

式(9.2.13)将反映粒子性的动量和反映波动性的波长结合起来，表明波动性和粒子性是物质不可分割的两种基本属性. 这就是德布罗意(Louis Victor de Bro-

glie，1892～1987，法国）所提出的“物质波”的概念.

作为粒子，光子还具有质量

$$m=\frac{h\nu}{c^2} \tag{9.2.14}$$

光的粒子性表现在光与物质的相互作用方面，波长越短，光子的能量越高，其粒子性越显著，如电离气体、光电效应、康普顿效应、荧光效应、单光子记录等.

光的波动性表现在光的传播、干涉、衍射以及散射、反射、折射等方面，波长较长的光，有着显著的波动性.

不仅光具有粒子性，粒子也具有波动性，微观粒子具有波粒二象性，这都是被实验所证实的.

德布罗意由于“发现了电子的波动本质”而获得1929年诺贝尔物理学奖.

例 9.3

1961年有人从高度 $H=22.5\text{m}$ 的大楼上向地面上发射频率为 ν_0 的 γ 光子，并在地面测量接收到的 γ 光子的频率 ν，测得的 ν 与 ν_0 不同，与理论预计一致. 试从理论上求出 $(\nu-\nu_0)/\nu$ 的值.

解 按相对论，粒子的能量为 $E=mc^2$，其中，$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 是粒子的运动质量.

光子的能量为 $E=h\nu$，所以也可以定义光子的质量. 按上述关系，光子的质量为

$$m=\frac{h\nu}{c^2}$$

光子不可能是静止的，所以光子也没有静止质量，$E=h\nu$ 其实就是光子的动能.

在引力场中，光子由于具有质量，也就具有引力势能. 在地面附近，其引力势能就是重力势能. 所以，本题中，光子从高处射向地面，重力势能转化为动能，即

$$h\nu_0+mgH=h\nu$$

可得

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu}=\frac{h\nu-h\nu_0}{h\nu}=\frac{mgH}{mc^2}=\frac{gH}{c^2}=2.5\times10^{-15}$$

9.3 激　光

激光的英文缩写为 laser，全称是 Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation，就是**辐射的受激发射的光放大**，是基于辐射的量子理论发明的一种具有很好的相干性并能够实现自我放大的光输出.

9.3.1 爱因斯坦的辐射理论

原子自身有一系列的能级，原子在这些能级之间可以进行辐射跃迁，即原子从高能级跃迁到低能级的过程中，发射光子；原子从低能级跃迁到高能级，吸收光子. 且跃迁前后的能级差与发射或吸收的光子的能量匹配.

爱因斯坦认为，原子的辐射跃迁可分为以下三种不同的类型.

1. 自发辐射

原子中最低的能级被称为基态，由于原子受到激发之后可以跃迁到其他的高能级，因而这些能级被称为激发态.

基态是稳定的，而激发态却是不稳定的，即处在激发态的原子经过一定的时间之后，将会跃迁到基态或其他能量较低的能级. 而且这种跃迁是原子本身自发的物理过程，因而被称为自发跃迁.

设某原子的两个能级分别为 E_1 和 E_2，该原子能够自发地从 E_2 跃迁到 E_1，每次跃迁发出一个光子. 若设 t 时刻，处在 E_2 能级的原子有 N_2 个. 显然，单位时间内从 E_2 跃迁到 E_1 的原子数与 N_2 成正比，可以表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{E}}=A_{21}N_2 \tag{9.3.1}$$

式中，A_{21} 是每个原子自发地从 E_2 跃迁到 E_1 的概率，也称为自发辐射的爱因斯坦系数.

自发辐射仅与原子的初末态有关.

2. 受激辐射

处在 E_2 能级的原子，也可以受到外界因素的诱发而跃迁到 E_1 能级.

如果原子受到能量为 $h\nu=E_2-E_1$ 的外来光子的诱发，也可以从 E_2 跃迁到 E_1，并发出一个光子. 这种辐射跃迁被称为受激辐射，单位时间内由于受激辐射而从 E_2 跃迁到 E_1 的原子数同样与 N_2 成正比，而且与外来辐射场有关，设辐射场中单位体积中频率为 ν 的光子数为 $u(\nu)$，则单位时间内受激辐射的原子数可以表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Est}}=B_{21}u(\nu)N_2 \tag{9.3.2}$$

式中，B_{21}为每个原子从 E_2到 E_1受激辐射的概率，也称为受激辐射的爱因斯坦系数；$u(\nu)$称为辐射场的谱密度.

受激辐射所发出的光子与外来光子有相同的频率、相位和偏振特性.

3. 受激吸收

在外来辐射场的诱发下，原子不仅可以从 E_2 受激辐射跃迁到 E_1，也可以吸收光子从 E_1跃迁到 E_2，这一过程被称为受激吸收. 单位时间内受激吸收的原子数与处在 E_1能级的原子数 N_1成正比，可以表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Ast}}=B_{12}u(\nu)N_1 \tag{9.3.3}$$

式中，B_{12}为每个原子从 E_1 到 E_2 受激吸收的概率，也称为受激吸收的爱因斯坦系数.

上述三种辐射跃迁可用图 9.3.1 表示.

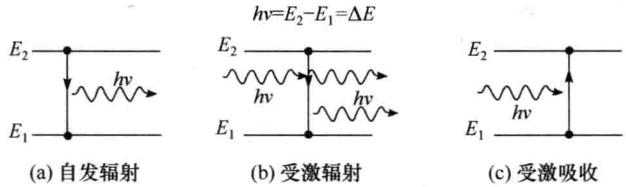


图 9.3.1 三种不同的辐射跃迁过程

4. 辐射跃迁的细致平衡条件

只要受到外来辐射场的激发，原子中就会同时有上述三种辐射跃迁过程，如图 9.3.2所示. 当原子处在平衡态时，则有$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{E}}+\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Est}}=\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Ast}}$，即

$$A_{21}N_2+B_{21}u(\nu)N_2=B_{12}u(\nu)N_1 \tag{9.3.4}$$

从式(9.3.4)可以解出

$$u(\nu)=\frac{A_{21}N_2}{B_{12}N_1-B_{21}N_2}=\frac{A_{21}}{B_{12}\dfrac{N_1}{N_2}-B_{21}} \tag{9.3.5}$$

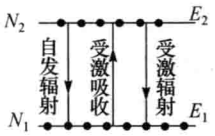


图 9.3.2 辐射跃迁达到平衡态

达到平衡态时，系统中各个能级的原子数遵循玻尔兹曼分布，即

$$\frac{N_1}{N_2}=\mathrm{e}^{\frac{E_2-E_1}{kT}}=\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} \tag{9.3.6}$$

同时，外来辐射场的谱密度可以用黑体辐射的规律描述，即

$$u(\nu)=\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{9.3.7}$$

从式(9.3.5)～(9.3.7)可得到

$$\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}=\frac{A_{21}}{B_{12}\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-B_{21}}=\frac{A_{21}}{B_{12}\nu^3}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-\frac{B_{21}}{B_{12}}}$$

从中解得

$$\begin{cases}B_{12}=B_{21}\\ A_{21}=\dfrac{8\pi\nu^3}{c^3}B_{12}=\dfrac{8\pi\nu^3}{c^3}B_{21}\end{cases} \tag{9.3.8}$$

式(9.3.8)就是三个爱因斯坦系数之间的关系.

9.3.2 粒子数反转与光放大

1. 两能级原子体系

受激辐射与受激吸收是在原子系统中同时进行的两个相反的过程，每个受激辐射过程使净输出的光子数增加 1 个，而每个受激吸收过程使净输出的光子数减少 1 个，即单位时间内处在平衡态的原子系统净输出的光子数为

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Est}}-\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{Ast}}=B_{21}u(\nu)N_2-B_{12}u(\nu)N_1=B_{21}u(\nu)(N_2-N_1) \tag{9.3.9}$$

如果 $N_2>N_1$，则受激辐射的过程大于受激吸收的过程，净输出的光子数增加，光被放大. 反之，则受激辐射的过程小于受激吸收的过程，净输出的光子数为负值，不能实现光放大.

在自然状态下，由于平衡态原子的分布遵循玻尔兹曼分布，即$\dfrac{N_1}{N_2}=\mathrm{e}^{\frac{E_2-E_1}{kt}}$，总是 $N_2<N_1$，所以只有两个能级的原子体系，处在上能级的原子数总是小于下能级，不可能实现光放大.

因此，要向实现光放大，必须设法使上能级的原子数大于下能级.

2. 粒子数反转

原子可以通过自发辐射的过程从上能级跃迁到下能级，这一过程中上能级粒子数的变化可表示为

$$\mathrm{d}N_2=-A_{21}N_2\mathrm{d}t$$

可以解得

$$N_2(t)=N_{20}\mathrm{e}^{-A_{21}t} \tag{9.3.10}$$

式中，N_{20}是初始时刻激发态 E_2能级的原子数；$N_2(t)$是 t 时刻激发态 E_2 能级的原子数. 设经过时间 τ，且 $A_{21}\tau=1$，则 $N_2(\tau)=N_{20}/\mathrm{e}$. 则 τ 被称为能级 E_2 的寿命，即

$$\tau=\frac{1}{A_{21}}$$

实验研究表明，原子的各个能级的寿命是不相同的，有的能级寿命很短，有的能级寿命却很长. 一般情况下，若能级的寿命小于 10^{-8} s，这样的能级被称为**激发态**，意即处在该态的原子可以很快地经历辐射跃迁过程回到低能态，激发态的寿命通常为 $10^{-11}\sim10^{-8}$ s. 若能级的寿命大于 10^{-3} s，这样的能级被称为**亚稳态**，意即原子可以在该能级停留较长的时间. 实际上，很多亚稳态能级的寿命在 $10^{-3}\sim10^{0}$ s.

假设原子中有三个能级 E_1、E_2 和 E_3，如图 9.3.3 所示. 其中 E_3 的寿命很短，是激发态能级，而 E_2 的寿命较长，是亚稳态能级. 初态时，E_1 上的原子数很多，而 E_3上原子数较少. 如果依靠外部提供的高密度能量(如强光、强电场等)，使 E_1 上的原子跃迁到 E_3，这一过程通常被称为“抽运”，也称“泵浦”. 跃迁到 E_3的原子并不直接跃迁回 E_1，而是很快跃迁到 E_2，这一过程被称为“弛豫”. 由于 E_2是亚稳态，寿命较长，所以跃迁到 E_2的原子可以积累到较多的数目，以至于处于 E_2能级的原子数比处于 E_1能级的原子数还要多. 这样，在能量 $h\nu=E_2-E_1$ 的激发光的作用下，从 E_2跃迁到 E_1，在 E_2 和 E_1 之间产生受激辐射，发出能量为 $h\nu$ 的光辐射，就可以实现光放大，使得输出的光子数多于输入的光子数.

上能级的原子数比下能级的原子数多，称为粒子数反转. 由于在 E_2和 E_1上能级之间实现了粒子数反转，激发光被放大，这就是**辐射的受激发射的光放大**，即**激光**.

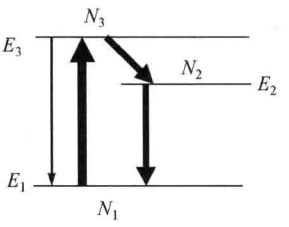


图 9.3.3 三能级体系中的粒子数反转

能够实现粒子数反转并使光放大的介质，称为激光增益介质.

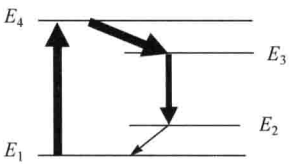


图 9.3.4 四能级体系中的粒子数反转

除了上述三能级体系外，四能级体系也能够实现粒子数反转，用作激光增益介质. 如图 9.3.4 所示，其中相关能级除了基态 E_1、激发态 E_4和亚稳态 E_3之外，还有一个激发态 E_2. 先将原子抽运到 E_4，原子从 E_4弛豫到 E_3，再从 E_3跃迁到 E_2. 跃迁到 E_2的原子可以很快回到基态 E_1，因而 E_2 基本是空的，更容易在亚稳态 E_3和激发态 E_2之间实现粒子数反转，并在这两个能级之间实现光放大.

受激辐射过程中所发出的光波与入射的激发光有相同的频率、相位、方向和偏振，因而激光具有很好的相干性.

当然，激光增益介质中的能级是非常丰富的，能够实现光放大的能级也不止一对. 所以，激光器中，还要采用适当的装置，选择某一对能级间的受激辐射进行放大并输出，从而获得单色光. 而且要使输出光都具有相同的偏振特性. 实现单色光输出，利用了法布里-珀罗腔；获得偏振光，利用了布儒斯特窗. 这些内容在本书中都有介绍，此处不再赘述.

习题与答案

第 1 章

1.1 一列一维波的表达式为 $E(z,t)=A\cos\omega(t-\frac{z}{v})$，式中$\frac{z}{v}$的含义是什么？如果将其表示为 $E(z,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{\omega z}{v}\right)$，$\frac{\omega z}{v}$的含义又是什么？

【答案】 比原点的时间延迟；比原点的相位滞后.

1.2 一列波长为 λ、振幅为 A 的平面光，在直角坐标系中，其波矢与三个坐标轴间的夹角分别为 α、β 和 γ，已知 $\alpha=30°$，$\beta=75°$，原点处相位为 0.

(1) 写出这列波的表达式(波函数)$U(x,y,z)$；

(2) 写出这列波在 $z=0$ 平面上的表达式(波前函数)$U(x,y,0)$；

(3) 若方向角 β 分别改为 $\beta=90°$ 和 $\beta=120°$，分别求其波前函数 $U_1(x,y,0)$，$U_2(x,y,0)$.

【答案】 (1) $U(x,y,z)=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(0.866x+0.2588y\pm0.4278z-ct)$；

(2) $\widetilde{U}(x,y,0)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}(0.866x+0.2588y)}$；

(3) $\widetilde{U}_1(x,y,0)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}\times0.866x}$，$\widetilde{U}_2(x,y)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}(0.866x-0.5y)}$.

1.3 一平面波的波函数为 $E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$，式中，$x,y,z$ 的单位为 m，t 的单位为 s. 试求：

(1) 时间频率；

(2)波长；

(3) 波矢的大小和方向；

(4) 在 $z=0$ 和 $z=1$ 波前上的相位分布.

【答案】 (1) $\nu=0.796\mathrm{Hz}$；

(2) $\lambda=1.17\mathrm{cm}$；

(3) $k=5.39\ \mathrm{cm}^{-1}$，$\boldsymbol{k}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z)$；

(4) $\varphi|_{z=0}=2x-3y$，$\varphi|_{z=1}=2x-3y+4$.

1.4 太阳光垂直射向地面，测得能流密度为 $1.35\mathrm{kW/m^2}$，计算地面上太阳光电场强度的振幅. 如果用一个半径为 5cm 的透镜将太阳光聚成面积 $1\mathrm{mm^2}$ 的光斑，忽略透镜对光的吸收和反射，计算光斑上的能流密度和电场强度的振幅.

【答案】 $E_0=1.01\times10^3\ \mathrm{V/m}$；$I'=1.06\times10^7\ \mathrm{W/m^2}$；$E_0'=8.94\times10^4\ \mathrm{V/m}$.

1.5 如习题 1.5 图所示，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ，设 $x=0$ 的点的相位 $\varphi_0=0$.

(1) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(2) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$；

(3) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$.

【答案】 (1) $\varphi(x)=kx$；

(2) $\varphi(y)=0$；

(3) $\varphi(r)=kr\cos\theta$.

1.6 如习题 1.6 图所示，一平面简谐波沿 $\boldsymbol{r}$ 方向传播，波长为 λ，设 $r=0$ 的点的相位为 φ_0.

(1) 写出沿 $\boldsymbol{r}$ 方向波的相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$；

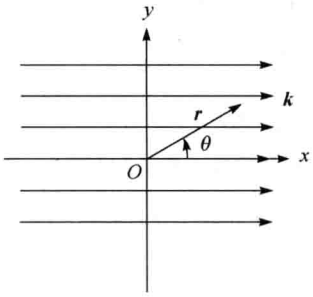
(2) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(3) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$.

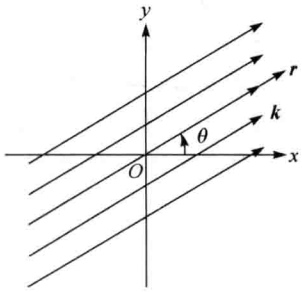
【答案】 (1) $\varphi(\boldsymbol{r})=k(x\cos\theta+y\sin\theta)+\varphi_0$；

(2) $\varphi(x)=kx\cos\theta+\varphi_0$；

(3) $\varphi(y)=ky\sin\theta+\varphi_0$.



习题 1.5 图



习题 1.6 图

1.7 在玻璃中 z 方向上传播的单色平面波的波函数为

$$E(z,t)=10^2\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\pi\times10^{15}\left(t-\frac{z}{0.65c}\right)\right]\right\}$$

式中，c 为真空中的光速，时间以 s 为单位；电场强度以 V/m 为单位；距离以 m 为单位. 试求：

(1) 光波的振幅和时间频率；

(2) 玻璃的折射率；

(3) z 方向的空间频率；

(4) 在 xz 平面内与 x 轴成 45°角方向上的空间频率.

【答案】 (1) $A=10^2\,\mathrm{V/m}$，$\nu=5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$；

(2) $n=1.54$；

(3) $f_z=2.564\times10^6\,\mathrm{m}^{-1}$；

(4) $f_{\pi/4}=1.813\times10^6\,\mathrm{m}^{-1}$.

1.8 一平面波的复振幅为 $\tilde{E}(P)=A\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k}{5}(3x-4z)\right]$，试求波的传播方向，并写出在 xy 平面上的相位分布.

【答案】 与 x 轴夹角 θ 为 $-53°$，$\varphi(z=0)=-\dfrac{3kx}{5}$.

1.9 写出习题 1.3 中平面波的复振幅表达式.

【答案】 $\widetilde{U}(P)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2x-3y+4z)}$.

1.10 一列单色波在折射率为 n 的介质中由 A 点传播到 B 点，其相位改变了 2π，问光程改变了多少？从 A 到 B 的距离是多少？

【答案】 λ_0，$\overline{AB}=\lambda_0/n$.

1.11 频率为 6×10^{14} Hz、相速度为 3×10^8 m/s 的光波，在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少？

【答案】 83.3nm.

1.12 钠黄光(钠原子的 D 双线)的波长分别为 $\lambda_1=589.0$nm，$\lambda_2=589.6$nm，设 $t=0$ 时刻两列波的波峰在原点 $z=0$ 处重合，求：

(1) $t=0$ 时在传播路径上的哪些位置两列波的波峰还能重合？

(2) 经过多长时间，两列波的波峰又可以在原点重合？

【答案】 (1) $z=p\times1.736$mm；

(2) $t=p\times0.578790\times10^{-11}$ s.

1.13 波长为 404.7nm 的蓝光在重火石玻璃中的折射率为 1.682，而波长为 766.5nm 的红光在重火石玻璃中的折射率为 1.636，分别求出它们在这种玻璃中的波长以及相速度. 如果这两种光在玻璃中的某一点相位相同，经过多少距离后，有 π 的相位差？这时哪种光的相位超前？

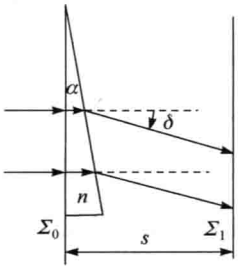
【答案】 240.6nm，468.5nm，$v'_{\mathrm{B}}=1.7836\times10^8$ m/s；$v'_{\mathrm{R}}=1.8337\times10^8$ m/s，247.3nm，红光超前.

1.14 一个顶角 α 很小的三棱镜(即所谓“光楔”)，折射率为 n，可以使平面光发生折射，计算表明，若光从一侧正入射，从另一侧出射的光波方向偏转 $\delta=(n-1)\alpha$，如习题 1.14 图所示. 求在光楔右侧距离入射的一侧波前 Σ_0 为 s 处平面 Σ_1 上的波前函数.

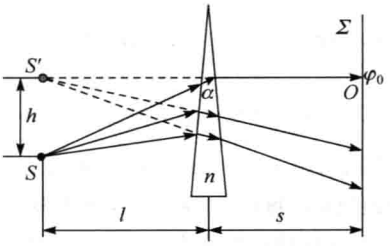
【答案】 $\widetilde{U}(x,y,z=s)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{-ks\sin[(n-1)\alpha]+ks\cos[(n-1)\alpha]+\varphi_0\}}$，其中 φ_0 为原点处的相位.

1.15 计算表明，当单色点光源 S 距离光楔(顶角为 α、折射率为 n)为 l 时，从另一侧看到光源 S' 位于 S 的正上方 $h=(n-1)\alpha l$ 处，如习题 1.15 图所示. 据此求出在光楔右侧距离 s 处平面 Σ 上的波前函数，设图中 O 点处的相位为 φ_0.

【答案】 $\widetilde{U}(x,y,z=s+l)=\dfrac{A_0}{s+l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k\frac{x^2+y^2}{2(s+l)}+\varphi_0\right]}$.

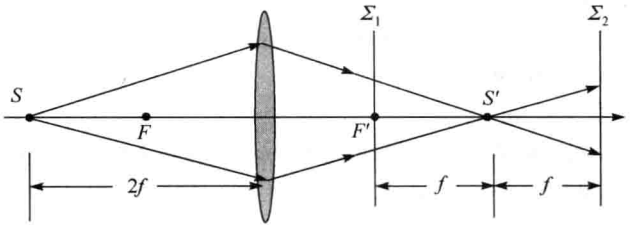


习题 1.14 图



习题 1.15 图

1.16 将一单色点光源置于凸透镜物方(左侧)2倍焦距处,如习题1.16图所示.计算该点发出的光波经透镜后,在像方(右侧)的会聚点前、后1倍焦距处平面 Σ_1 和 Σ_2 上的波前函数(认为透镜的孔径很小,光波满足傍轴条件.可设会聚点处的初相位为0).



习题1.16图

【答案】 $\widetilde{U}(x,y,z=-f)\propto\exp\left[-\mathrm{i}k\left(f+\dfrac{x^2+y^2}{2f}\right)\right]$,$\widetilde{U}(x,y,z=f)\propto\exp\left[\mathrm{i}k\left(f+\dfrac{x^2+y^2}{2f}\right)\right]$.

1.17 在波前 xOy 平面上,分别出现了以下的波前函数的相位:

(1) $\widetilde{U}_1\propto\exp\left(\mathrm{i}5k\dfrac{x^2+y^2}{D}\right)$;

(2) $\widetilde{U}_2\propto\exp\left(\mathrm{i}k\dfrac{x^2+y^2}{2D}\right)$;

(3) $\widetilde{U}_3\propto\exp\left(\mathrm{i}4k\dfrac{x^2+y^2}{2D}\right)\cdot\exp\left(-\mathrm{i}4k\dfrac{5x+8y}{2D}\right)$,其中,$k$ 为波数,$D>0$.

请根据这些波前函数判断波场的类型和特征.

【答案】 (1) 与 xOy 平面相距 $z'=D/10$ 处的轴上物点发出的球面波;

(2) 与 xOy 平面相距 $z'=D$ 处的轴上物点发出的球面波;

(3) 与 xOy 平面相距 $z'=D/4$ 处的轴外物点 $x'=5,y'=8$ 发出的球面波.

1.18 (1)从太阳上的一点发出的球面光波到达地球,估算在地面上一个多大的范围内,可以将太阳光作为平面波处理.已知太阳距地球 1.8×10^8 km,对于其所发出的可见光中心波长550nm的光波.

(2) 月亮上一点发出的球面波到地球上,估算在地面上一个多大的范围内,可以将月光作为平面波处理.已知月亮距地球 3.8×10^5 km,对于其所发出的可见光中心波长550nm的光波.

【答案】 (1) 若取 $|z|\lambda=50\rho_{\max}^2$,$\rho_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{50}}\times314.64\mathrm{m}=44.5\mathrm{m}$;若取 $|z|\lambda=100\rho_{\max}^2$,$\rho_{\max}=\dfrac{1}{10}\times314.64\mathrm{m}=31.464\mathrm{m}$.

(2) 若取50倍,则 $\rho'_{\max}=2.0446\mathrm{m}$;若取100倍,则 $\rho'_{\max}=1.447\mathrm{m}$.

1.19 一射电源距地面高度约300km,向地面发射波长20cm的微波,接收器的孔径为2m,问这种情况下,是否满足远场条件?

【答案】 满足远场条件.

第 2 章

2.1 光线以入射角 i 射到折射率为 n 的物体上，设反射光与折射光线成直角，问入射角与折射率之间的关系如何？

【答案】 $\tan i=n$.

2.2 把一片两侧表面相互平行的玻璃板放在装满水的玻璃杯上，从空气射入玻璃的光线能否在另一侧面发生全反射？从水射入玻璃的光线能否在另一侧面发生全反射？已知玻璃的折射率为 1.50，水的折射率为 1.33.

【答案】 都不可能发生.

2.3 红光和紫光对同种玻璃的折射率分别是 1.51 和 1.53. 当这些光线射到玻璃和空气的分界面上时，全反射的最小角度是多少？当白光以 41°的角入射到玻璃和空气的界面上时，将会有什么现象发生？

【答案】 $i_C^V=40.81°$，$i_C^R=41.47°$，以 41°角入射，将看到彩色光从玻璃的另一侧射出.

2.4 如习题 2.4 图所示，以光线射入镜面间并反射 n 次，最后沿入射时的光路返回，试写出 θ_i 与 α 间的关系表达式.

【答案】 $\theta_i=(n-1)\alpha/2$.

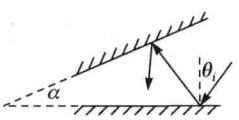
2.5 证明：当一条光线通过平板玻璃时，出射光线方向不变，只产生侧向平移. 当入射角 i_1 很小时，位移 $\Delta x=\dfrac{n-1}{n}i_1 t$. 其中，$n$ 为玻璃的折射率，t 为玻璃板的厚度.

2.6 如习题 2.6 图所示，一条光线通过一顶角为 α 的棱镜.

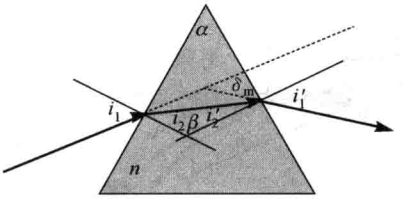
(1) 证明出射光线相对于入射光线的偏向角为 $\delta=i_1+i_1'-\alpha$；

(2) 证明在 $i_1=i_1'$ 时，有最小偏向角 δ_m，而且 $n=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$，式中，$n$ 为棱镜材料的折射率，在已知 α 的情况下，通过测量 δ_m，利用上式可以算出棱镜材料的折射率；

(3) 顶角 α 很小的棱镜称为光楔，证明以小角度入射的光线，经光楔产生的偏向角为 $\delta=(n-1)\alpha$.



习题 2.4 图

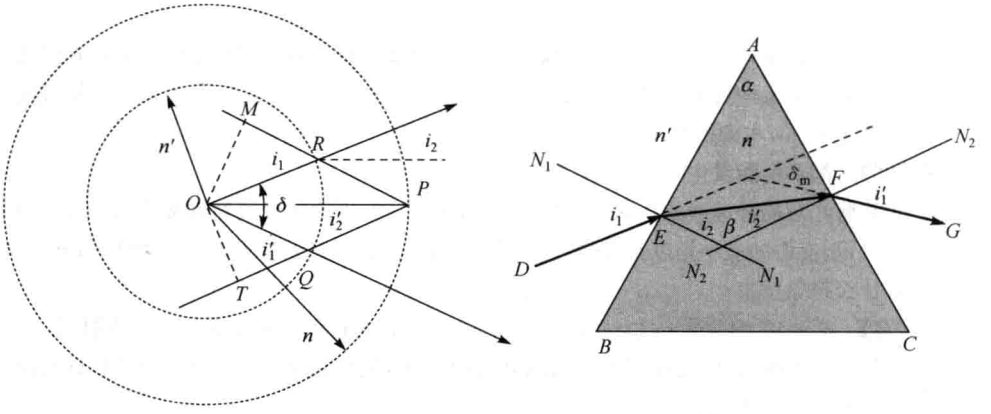


习题 2.6 图

2.7 顶角为 50°的棱镜的 $\delta_m=35°$，如果浸入水中，最小偏向角等于多少？水的折射率为 1.33.

【答案】 11.1°

2.8 习题 2.8 图是一种求折射线方向的追迹作图法. 例如,为了求光线通过棱镜的路径(习题 2.8 图(b)),可如习题 2.8 图(a)所示以 O 为中心作二圆弧,其半径正比于折射率 n,n'. 作 OR 平行于入射线 DE,作 RP 平行于棱镜第一界面的法线 N_1N_1,则 OP 的方向即第一次折射后光线的方向. 再作 QP 平行于第二界面的法线 N_2N_2,则 OQ 的方向即出射线 FG 的方向,从而 $\angle ROQ=\delta$ 即偏向角,证明此法的依据.



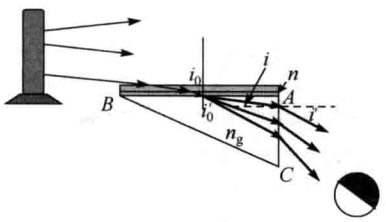
习题 2.8 图

2.9 组合珀罗棱镜由两块 45°角直角棱镜组成,利用两块直角棱镜的四个直角面上产生的全反射,使像倒转与凸透镜成实像的情况一致,试证明之.

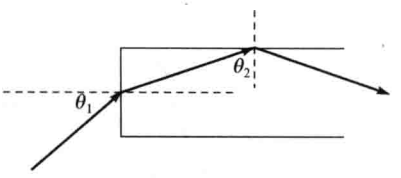
2.10 极限法测液体折射率的装置如习题 2.10 图所示,ABC 是直角棱镜,其折射率 n_g 已知,将待测液体涂一薄层于其上表面 AB,再覆盖一块毛玻璃. 用扩展光源在掠入射的方向上照明. 从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一个下限 i'. 如用望远镜观察,则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区. 证明待测液体的折射率可以由下式算出:$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}$. 用这种方法测量液体的折射率,测量范围受什么限制?

2.11 如习题 2.11 图所示,光从塑料棒的一端射入,若要保证射入的光总是在棒内全反射传播,其折射率至少是多大?

【答案】 $n\geqslant\sqrt{2}$.



习题 2.10 图



习题 2.11 图

2.12 如习题 2.12 图所示，在圆形木塞中心垂直插入一大头针，然后将其倒放浮于水面上，调节大头针露出的长度，使观察者从水面上无论何种角度都恰好看不到水下的大头针. 如果测得大头针露出木塞的长度为 h，木塞直径为 d，求水的折射率.

【答案】 $n=\sqrt{1+\left(\frac{2h}{d}\right)^2}$.

2.13 如习题 2.13 图所示，一束光线以入射角 i_1 射入折射率为 n 的球形水滴，求：

(1) 此光线在水滴内另一侧球面的入射角 α，这条光线是被全反射还是部分反射？

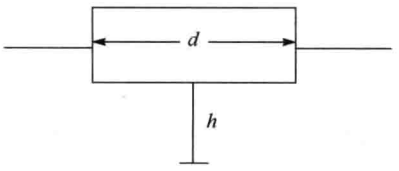
(2) 偏向角 δ 的表示式；

(3) 偏向角最小时的入射角 i.

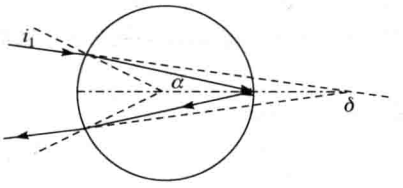
【答案】 (1) $\sin\alpha=\sin i_1/n$，不能发生全反射；

(2) $\delta=\pi-2(2\alpha-i_1)$；

(3) $\arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$



习题 2.12 图



习题 2.13 图

2.14 水槽中盛水，深 20cm，底部有一光源，水面上放一不透光纸片. 要使从水面上任何角度都看不到光源，纸片的形状和面积应怎样？

【答案】 $r\geqslant nh/\sqrt{1-n^2}$.

2.15 一玻璃杯，底部为凸球面，球面下嵌一画，空杯看去，与普通酒杯无异；注入酒后，则底部呈现美丽画面，请解释.

2.16 一球面反射镜将平行光会聚在 $x_0=20$cm 处；将水(折射率约为 4/3)注满球面，光通过一张白纸片上的针孔射向反射镜，如习题 2.16 图所示，距离 x 为多大时在纸片上成清晰的像？

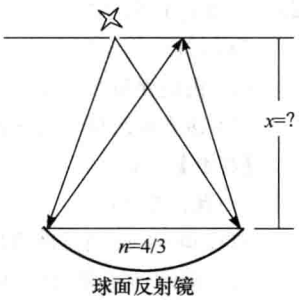
【答案】 $x=30$cm.

2.17 使一束向 P 点会聚的光在到达 P 点之前通过一玻璃平板，玻璃板垂直于光束的轴线. 问会聚点如何移动？移动多少？设玻璃板厚度为 d，折射率为 n.

【答案】 向远离玻璃板方向移动，$\Delta\approx d\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

2.18 眼睛和物体间有一折射率为 $n=1.5$ 的玻璃平板，厚度 $d=30cm$. 求人眼看到的像和物之间的距离是多少？

【答案】 10cm.

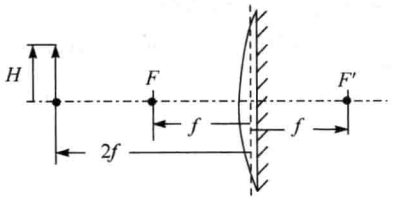


习题 2.16 图

2.19 水平放着一个凹面镜，曲率半径为 60cm，里面装满了水. 求出这个镜子的焦距，水的折射率为 4/3.（假设水的厚度和镜子的曲率半径相比很小）

【答案】 22.5cm.

2.20 一平凸透镜焦距为 f，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它 $2f$ 处，垂直于主轴放置一高为 H 的物，其下端在透镜的主轴上（习题 2.20 图）.



习题 2.20 图

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚还是实.

(2) 用计算法求出此像的位置和大小.

【答案】 (2)$s_3'=\frac{2}{3}f$，实像，像高 $H/3$，倒立.

2.21 一发光物点位于一透明球的后表面，从前表面出射的近轴光束恰为平行光，求此透明球材料的折射率.

【答案】 $n=2$.

2.22 已知一个凹透镜的两球面的光焦度分别为 $5m^{-1}$ 和 $-10m^{-1}$，透镜的直径为 30mm，中心厚 2mm. 问用以制造该透镜的平板玻璃（折射率为 1.5）至少应用多厚？该透镜的边缘有多厚？

【答案】 4.3mm，3.17mm.

2.23 半径为 R 的透明球体的半面镀一反射膜，问此球的折射率为何值时，从空气中入射的光经此球反射后仍沿原方向返回？

【答案】 $n=2$.

2.24 一折射率为 1.50、厚度为 20mm 的平凸透镜放在纸面上，球面的曲率半径为 80mm，分别求当球面向下和平面向下时，纸上与透镜接触处的文字的成像位置.

【答案】 距纸面 5.5mm，在纸面下；距纸面 6.7mm，在纸面下.

2.25 一凸球面镜浸没在折射率为 1.33 的水中，高为 1cm 的物在在凸面镜前 40cm 处，像在镜后 8cm 处. 求像的大小、正倒、虚实以及凸面镜的曲率半径和光焦度.

【答案】 虚像，0.2cm，正立，光焦度 $-13.3/m$.

2.26 实物放在凹面镜前什么位置能成倒立的放大像？为什么？是实像还是虚像？

【答案】 $\frac{|r|}{2}<s<|r|$，实像.

2.27 一玻璃半球的曲率半径为 R，折射率为 1.5，其平面的一侧镀银（习题 2.27 图），有一物高为 h，放在曲面顶点前 $2R$ 处，求：

(1) 由曲面所成的第一个像的位置；

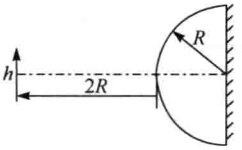
(2) 该光具组最后所成像的位置.

【答案】 (1)$s_1'=\infty$；

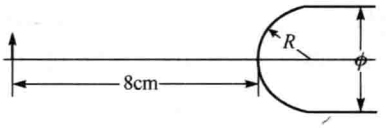
(2)像仍在 $2R$ 处.

2.28 直径 $\Phi=4$cm 的长玻璃棒的一端磨成曲率半径为 $R=2$cm 的半球形，长为 0.1cm 的物垂直于棒的轴线，距球面顶点 8cm 处，如习题 2.28 图所示. 求像的位置、大小，并作图.

【答案】 $s'=12$cm，$y'=-0.1$cm.



习题 2.27 图



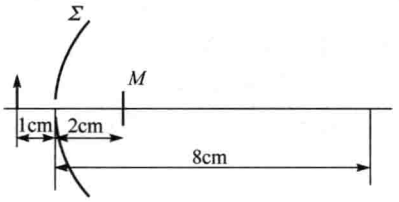
习题 2.28 图

2.29 习题 2.29 图所示是牛顿显微物镜的原理图：在凹面反射镜中心开一个小孔，凹面反射镜的曲率半径为 8cm，在凹面镜中心右侧 2cm 处有一小平面镜 M. 若凹面镜左方距小孔 1cm 处有一物长 0.1cm，求物体经此光学系统后成像的位置及像的大小，并作出光路图.

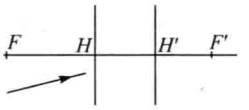
【答案】 反射镜右方 20cm，0.4cm，实像.

2.30 (1) 用作图法求习题 2.30 图中光线 1 的光轭光线；

(2) 用作图法求习题 2.30 图中光具组的节点的位置.



习题 2.29 图



习题 2.30 图

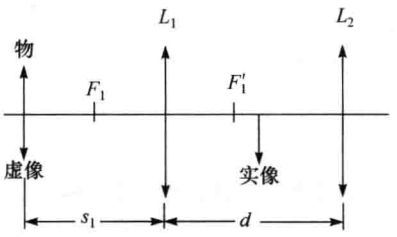
2.31 一个在空气中的透镜系统，光焦度为 Φ，主平面间距 $HH'=d$. 求证：放大率为 -1 的两共轭面之间的距离为 $d+4/\Phi$.

2.32 透过焦距为 9cm 的会聚透镜，观察在平静水面下 1.2m 处的一条小鱼（习题 2.32 图），若透镜位于水面上方 0.6m，看到的小鱼位于何处？（假设鱼在透镜光轴上，$n_{空气}=1$，$n_{水}=4/3$.）

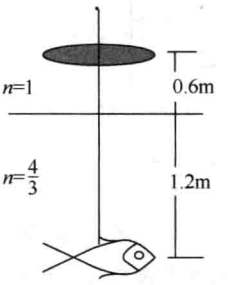
【答案】 虚像仍在原处，$s'=-1.8$m.

2.33 如习题 2.33 图所示，设计并解释这样一个透镜组，它由两个会聚透镜组成，并能在物体所在的位置成一个与物体大小相同的倒立虚像.

【答案】 两镜间距 $d=\dfrac{2f_1s_1}{s_1-2f_1}$，两镜焦距 $f_2=\dfrac{f_1s_1^2}{(s_1-2f_1)^2}$.



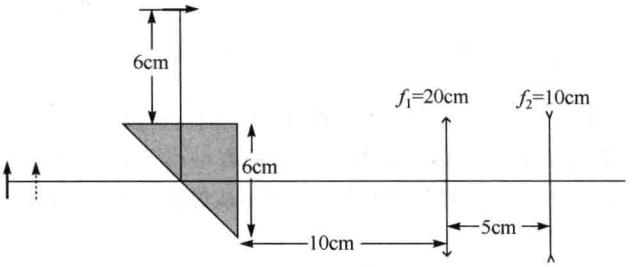
习题 2.32 图



习题 2.33 图

2.34 如习题 2.34 图所示为一个等腰直角三棱镜($n=1.5$)和两个薄透镜所组成的光学系统. 求图中物体最后成像的位置和像的大小. 设物体长为 1cm.

【答案】 最终像的大小为 0.5m,正立、虚像.



习题 2.34 图

2.35 用凸透镜和平面镜可以测凹透镜的焦距. 方法是:先让点光源 Q 经凸透镜成实像于 Q' 点,测得像距 s'. 然后,在凸透镜与 Q' 点之间放置待测得凹透镜,使其与凸透镜共轴,并在凹透镜右侧与光轴放置平面镜,如习题 2.35 图所示. 移动凹透镜到一个合适的位置,使 Q 经过整个光学系统后所成的像与其自身重合. 测得此时凹透镜与凸透镜间距离为 d,计算凹透镜的焦距.

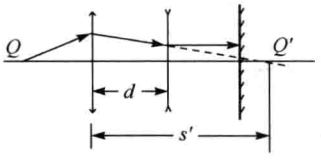
【答案】 $f=d-s'$.

2.36 如习题 2.36 图所示为一透镜组,物处于最左端透镜的左方 10cm 处,使用逐次成像法求最后的成像位置. 已知四个薄透镜均处于空气中,像方焦距分别为 $f_1'=f_3'=-5\text{cm}$,$f_2'=f_4'=5\text{cm}$.

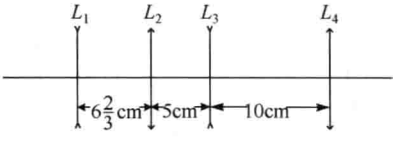
【答案】 最后成像的位置在 L_4 右侧 5cm 处,即 L_4 的像方焦点上.

2.37 由两个完全相同的球面薄表壳玻璃胶合在一起,中间是空气,其中一块玻璃的表面镀银成为球面反射镜,如习题 2.37 图所示. 利用准直法,即让灯泡发出的光通过白屏上的针孔,调节 L 可在白屏上得到孔的清晰的像,这时测得 $L=20\text{cm}$. 如果在表壳中充满折射率为 4/3 的水,求 L 为何值时,在白屏上能得到空的清晰像?

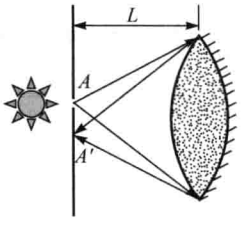
【答案】 $L=12\text{cm}$.



习题 2.35 图



习题 2.36 图



习题 2.37 图

2.38 如习题 2.38 图所示,把曲率半径为 r 的对称薄双凸透镜放在水平镜面上,透镜上方为空气,透镜和平面镜之间加入折射率为 n_2 的液体,透镜的折射率为 n_1. 设透镜上方距离 l 处物像重合,试求 n_1、n_2 和 r 间的关系.

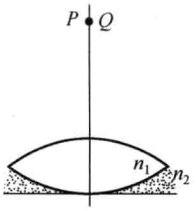
【答案】 $l=-\dfrac{r}{2n_1-(n_2+1)}=f$.

2.39 如习题 2.39 图所示，一烧杯内水深 4cm，杯底有一枚硬币，水面上放置一焦距为 30cm 的薄透镜，硬币的中心位于透镜的光轴上. 若透镜上方的观察者(通过透镜)看到硬币还在原处，求透镜应放于距离水面多高的位置.

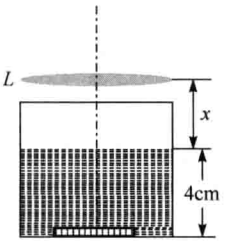
【答案】 透镜位于水面上方 2cm 处.

2.40 共心透镜两球面的曲率半径分别为 r_1、r_2，如习题 2.40 图所示. 透镜材料的折射率为 n，厚度为 d. 试求该透镜主点的位置.

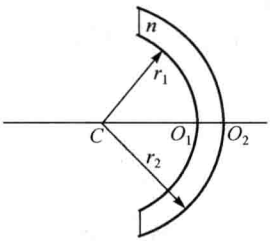
【答案】 $x_H=\dfrac{df_1}{\Delta}=-r_1$，$x'_H=\dfrac{df'_2}{\Delta}=r_2$.



习题 2.38 图



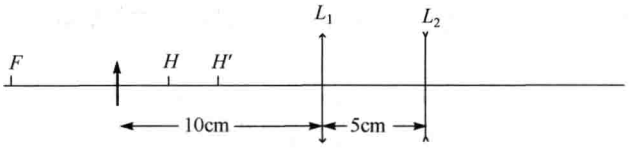
习题 2.39 图



习题 2.40 图

2.41 两薄透镜共轴，一个是会聚透镜，焦距为 $f_1=10$cm；另一个为发散透镜，$f_2=-15$cm，两者相距 5cm(习题 2.4.1 图). 若将一物体放在会聚透镜左侧 10cm 处. 试求透镜组的焦点、主点的位置，以及像的位置、大小、虚实和正倒.

【答案】 $f=f'=15$cm，$x_H=5$cm，$s'_2=-7.5$cm，$\beta=1.5$.



习题 2.41 图

2.42 如习题 2.42 图所示，物体浸于水中，发出的光线横穿过一个半径为 R 的球形空气泡，水的折射率为 4/3.

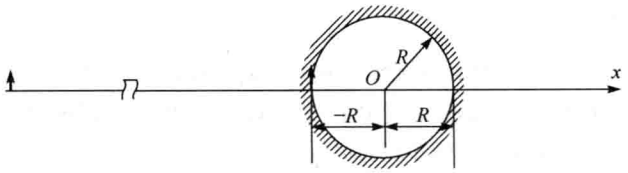
(1) 当物体离气泡很远时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实；

(2) 当物体位于气泡的左侧表面时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实.

【答案】 (1)$s'_2=-\dfrac{5}{2}R$，虚像，正立，缩小；

(2) $s'_2=-\dfrac{8}{5}R$，虚像，倒立，稍缩小.

2.43 如习题 2.43 图所示，折射率为 1.5 的共心透镜与凹面镜的球心重合于 C 点，置于空气中，透镜的曲率半径分别为 50cm 和 40cm. 凹面镜的曲率半径为 −80cm，求反射系统的基点，并讨论其特性.

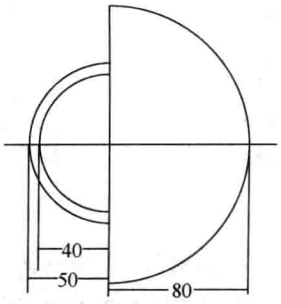


习题 2.42 图

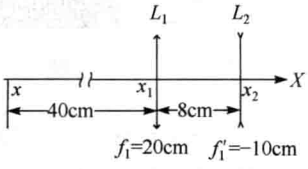
【答案】 $f=f'=\dfrac{9000}{259}\text{cm}, x_H=-\dfrac{1275}{259}\text{cm}, x_H'=-\dfrac{20400}{259}\text{cm}$，相当于一个凹面镜.

2.44 如习题 2.44 图所示，考虑一双透镜系统，一个高为 1cm 的物体位于凸透镜左侧 40cm 处，计算像的大小和位置.

【答案】 $y'=0.4545\text{cm}, s_2'=-14.545\text{cm}$.



习题 2.43 图



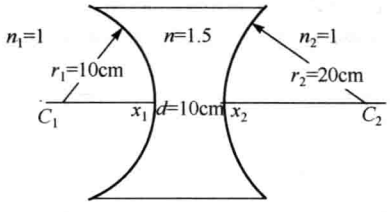
习题 2.44 图

2.45 如习题 2.45 图所示，考虑一个厚透镜，第一个曲面与第二个曲面的曲率半径分别为 −10cm和 20cm. 透镜厚度为 10cm，折射率为 1.5. 试求该厚透镜的主点和焦点的位置.

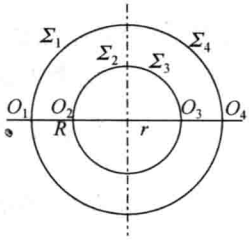
【答案】 $f=f'=\dfrac{nr_1r_2}{(n-1)^2d+(n-1)n(r_1-r_2)}, x_H=-\dfrac{dr_1}{(n-1)d+n(r_1-r_2)}, x_H'=\dfrac{dr_2}{(n-1)d+n(r_1-r_2)}$.

2.46 如习题 2.46 图所示，一空心玻璃球，内外半径分别为 r 和 R，置于空气中. 玻璃的折射率 $n=1.5$，求系统的各个基点的位置.

【答案】 $x_H'=-4\text{cm}, x_H=-2\text{cm}, f=f'=-12\text{cm}$.



习题 2.45 图



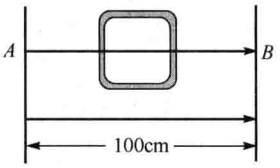
习题 2.46 图

2.47　在习题 2.10 中，望远镜起何作用？为何在望远镜的视场中会出现半明半暗的区域？

第 3 章

3.1　如习题 3.1 图所示，两列波长 500nm 的单色波传过 100cm 的距离，由 A 到达 B 处，其中一列波穿过盛水的玻璃杯，玻璃杯壁厚 0.5cm，内壁间距 10cm，设两列波在 A 同相位，求在 B 处的相位差. 已知玻璃和水的折射率分别为 1.52 和 1.33.

【答案】　4.8×10^{5} rad.



习题 3.1 图

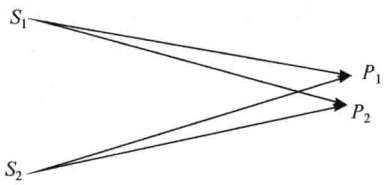
3.2　设两列单色光波在空间某一点的振动分别为 $E_1=4\cos(2\pi\times10^{15}t)$ 和 $E_2=6\cos\left(2\pi\times10^{15}t+\frac{\pi}{6}\right)$，求该点的合振动.

【答案】　$E=9.67\cos(0.1\pi-2\pi\times10^{15}t)$.

3.3　四列同方向振动的单色波在 P 点的振动分别为 $E_1=5\cos(2\pi\times10^{14}t)$，$E_2=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{6}\right)$，$E_3=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$E_4=5\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{2}\right)$，计算该点的合振动振幅及初相位.

【答案】　$E=16.73\cos\left(2\pi\times10^{14}t+\frac{\pi}{4}\right)$.

3.4　如习题 3.4 图所示，从 S_1 和 S_2 各发出波长为 $10m$ 的电磁波，在彼此靠近的两个点 P_1 和 P_2 测得电磁波的强度分别为 9W/m^2 和 16W/m^2，若 $S_1P_1=2560\text{m}$，$S_1P_2=2550\text{m}$，$S_2P_1=2570\text{m}$，$S_2P_2=2555\text{m}$，问 S_1 和 S_2 处电磁波的功率各为多少？（设两列波从 S_1 和 S_2 发出时同相位，可以不考虑这些波的电矢量间的夹角.）



习题 3.4 图

【答案】　$P_{S_1}=1.008\times10^{9}W$，$P_{S_2}=2.058\times10^{7}W$.

3.5　用振幅矢量法证明 $3\cos(kz-\omega t)+4\sin(kz-\omega t)=5\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi)$，并确定 $\Delta\varphi$ 的值.

【答案】　$\Delta\varphi=-53°$.

3.6　求两列波 $E_1=A\cos(kz-\omega t)$，$E_2=A\cos(-kz-\omega t)$ 的合振动.

【答案】　$E=2A\cos kz\cos\omega t$.

3.7　一列驻波的表达式为 $E=100\sin\frac{2}{3}z\cos5\pi t$，找出可以合成这种驻波的两列单色波.

【答案】　$E_1=50\sin\left(\frac{2}{3}z-5\pi t\right)$，$E_2=50\sin\left(\frac{2}{3}z+5\pi t\right)$.

3.8 载有信号的波列 $E=A(1+a\cos\omega_m t)\cos\omega_c t$，是频率为 ω_c 的单色波的振幅被频率为 ω_m 的单色波调制. 证明这列载波是频率为 ω_c、$\omega_c+\omega_m$ 和 $\omega_c-\omega_m$ 的三列单色波叠加的结果.

3.9 真空中沿 z 方向传播的两列单色波 $E_1=A\cos2\pi\left(\nu t-\frac{z}{\lambda}\right)$，$E_2=A\cos2\pi\left[(\nu+\Delta\nu)t-\frac{z}{\lambda-\Delta\lambda}\right]$，其中 $\Delta\nu=3\times10^8$ Hz. 试求这两列波叠加所形成的波的振幅、强度变化的空间周期.

【答案】 2m.

3.10 对于光波，证明 $\frac{1}{v_g}=\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$.

3.11 在液体表面下比波长大许多的深度中传播的表面波的相速度为 $v_p=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$，其中，$\gamma$ 为液体的表面张力，ρ 为液体的密度. 计算在长波极限下，一个脉冲(准单色波)的群速度.

【答案】 $v_g=\frac{1}{2}\left(v_p+\frac{1}{v_p}\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)$ 或 $v_g=\frac{\frac{g\lambda}{4\pi}+\frac{3\pi\gamma}{\rho\lambda}}{v_p}$.

3.12 证明 $v_g=\frac{c}{n}+\frac{\lambda c}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

3.13 一列波在周期性结构中传播，其频率为 $\omega=2\omega_0\sin(kl/2)$，求出这列波的相速度和群速度的表达式.

【答案】 $v_p=\omega_0 l\frac{\sin(kl/2)}{kl/2}$，$v_g=\omega_0 l\cos(kl/2)$.

3.14 在激光出现之前，单色性最好的光源是氪同位素 Kr^{86} 放电管发出的波长为 605.7nm 的红光，其波列长约 700mm，求其波长分布范围和频率分布范围.

【答案】 $\Delta\lambda=5.241\times10^{-4}$ nm，频率 $(4.950\pm2.141\times10^{-6})\times10^{14}$ Hz.

3.15 测量二硫化碳的折射率的实验数据为波长为 589.0nm 时，折射率为 1.629；波长为 656.0nm 时，折射率为 1.620；求波长为 589.9nm 时，光波在其中的相速度、群速度以及群速折射率.(提示：折射率与波长的关系为 $n=A+B/\lambda^2$，其中 A、B 可根据题设确定.)

【答案】 1.840×10^8 m/s，1.735×10^8 m/s，1.727.

3.16 在双缝干涉的情况下，用 θ 表示接收屏上一点对双缝中心的张角，如习题 3.16 图所示. 证明：

(1) 屏幕上的光强为 $I(\theta)=4A_0^2\cos^2(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta)=I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$；

(2) 第一极小出现在 $\theta_1=\frac{\lambda}{2d}$.

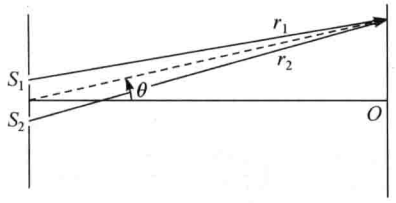
3.17 如习题 3.17 图所示的杨氏实验装置中，若单色光源的波长 $\lambda=500.0$nm，$d=S_1S_2=0.33$cm，$r_0=3$m，试求：

(1) 条纹间隔.

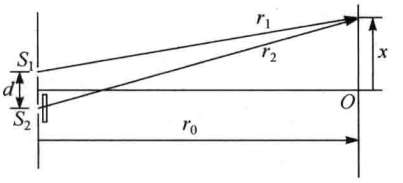
(2) 若在 S_2 后面置一厚度 $h=0.01$mm 的平行平面玻璃片，试确定条纹移动方向和计算位移的公式；假设一直条纹的位移为 4.73mm，试计算玻璃的折射率.

【答案】 (1) 0.5mm.

(2) 条纹向下移动；j 级亮纹的位置 $x'=\frac{r_0}{d}[j\lambda-(n-1)h]$；1.52.



习题 3.16 图



习题 3.17 图

3.18 用很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝装置中的一条缝上，这时，接收屏上的中心为原来的第七级亮纹所占据，若 $\lambda=550.0$nm，则云母片有多厚？

【答案】 6.64μm.

3.19 设有两个点光源 S_1、S_2，相距为 t，接收屏垂直于 S_1S_2 连线放置，垂足为接收屏上的原点，接收屏至 S_1、S_2 中点的距离为 D，且 $D\gg t$、x. 问在接收屏上生成的干涉图像是什么形状？并证明第 j 级亮纹至屏原点的距离为

$$\rho=D\sqrt{2\left(1-\frac{j\lambda}{t}\right)}$$

3.20 波长为 λ 的平行单色光以小倾角 θ 斜入射到间距为 t 的双缝上，设接收屏到双缝距离为 D.

(1) 求零级主极大的位置；

(2) 假设在屏上到双缝距离都相等的地方恰好出现暗条纹，倾角 θ 必须满足什么条件？

【答案】 (1) $x_0=D\sin\theta$；

(2) $\theta\approx\sin\theta=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{t}$.

3.21 考虑如习题 3.21 图所示的三缝干涉，假设三狭缝的宽度 a 相同$\left(a\leqslant\frac{\lambda}{2}\right)$. 试求：

(1)第一主极大的 θ 角是多少？(即从三狭缝出来的子波同相位)；

(2)把(1)的结果写为 θ_1，在零级主极大($\theta=0$)方向的能流可写为 F_0. 在$\frac{\theta_1}{2}$方向上的能流是多少？(以 F_0 为单位，设 $\lambda\ll d$.)

【答案】 (1) $\theta=\frac{x}{D}=2\frac{\lambda}{d}$.

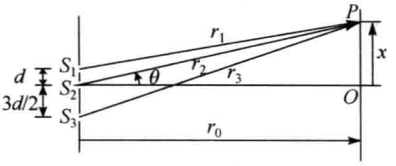
(2)$\frac{F_0}{9}$.

3.22 在杨氏双缝实验中，除了原有的光源缝 S 之外，在 S 的正上方再开一狭缝 S'，如习题 3.22 图所示. (1)若使 $S'S_2-S'S_1=\frac{\lambda}{2}$，试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布；

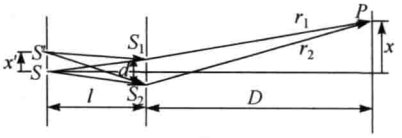
(2)若 $S'S_2-S'S_1=\dfrac{\lambda}{2}$，$S$ 和 S' 同时打开时，屏上的光强分布如何？

【答案】 (1) $4I_0\cos^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda D}x\right)$，$4I_0\sin^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda D}x\right)$；

(2) 两缝同时打开，$I+I'=4I_0$.



习题 3.21 图



习题 3.22 图

3.23 习题 3.23 图所示为一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性装置，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器，当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹会移动，由移过条纹的根数即可推知气体的折射率. 试求：

(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率，干涉条纹如何移动？

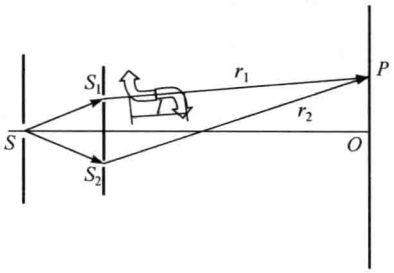
(2) 设 $l=2.0$cm，条纹移过 20 根，光波长 589.3nm，空气折射率为 1.000276，求待测气体(氯气)的折射率.

【答案】 (1) 条纹上移；

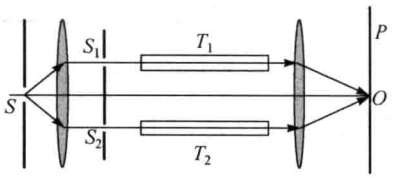
(2) 1.0008653.

3.24 瑞利干涉仪的结构和使用原理如下(习题 3.24 图)：以钠光灯作为光源置于透镜 L_1 的前焦面，在透镜 L_2 的后焦面上观测干涉条纹的变动，在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管 T_1 和 T_2. 实验开始时，T_2 管充以空气，T_1 管抽成真空，此时开始观察干涉条纹. 然后逐渐使空气进入 T_1 管，直到它与 T_2 管的气压相同位置. 记下这一过程中条纹移过的数目. 设光波长为 589.3nm，管长 20cm，条纹移过 98 根，求空气的折射率.

【答案】 1.000289.



习题 3.23 图



习题 3.24 图

3.25 为测量粒子的速度，用两列波长为 λ 的相干光照射粒子的路径，并使入射方向与路径法线间分别成 θ 角和 $-\theta$ 角，如习题 3.25 图所示. 记录反射光信号，接收器每秒收到 n 个反射光的信号. 求粒子速度.

【答案】 $v=\dfrac{n\lambda}{2\sin\theta}$.

3.26 波长为 632.8nm 的激光垂直入射在一半径为 1.25mm 的衍射屏上，为了观察夫琅禾费衍射，观察屏大约要放多远？

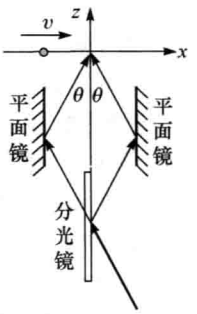
【答案】 100×2.47m.

3.27 在菲涅耳圆孔衍射实验中，保持其他条件不变，而使圆孔的半径连续增大，大致画出观察点 P 处光强随圆孔半径变化的曲线.

3.28 波长为 $\lambda=5633\text{Å}$ 的单色光从远处的光源发出，经过一个直径 $D=2.6$mm 的圆孔，在距孔 1m 处放一屏幕，问：

(1) 幕上正对孔中心的点 P 是亮的还是暗的？

(2) 要使 P 点的明暗变成与(1) 相反的情况，至少要将屏幕移动多少距离？



习题 3.25 图

【答案】 (1) P 为亮点；

(2) 前移 0.25m 或后移 0.5m.

3.29 一硬币半径为 1.2cm，距波长 500nm 的点光源 10cm，求在两者的中心连线上，硬币后 10cm 处的光强表示式 $\left(\dfrac{a_{k+1}}{2}\right)^2$ 中 k 的数值.

【答案】 48.

3.30 平行光正入射到单圆孔衍射屏上，在轴上距离孔 L 处记录光强变化，发现光强随孔径的增加呈振荡型变化.

(1) 求第一极大时圆孔的半径 r_a；

(2) 求第一极小时圆孔的半径 r_b；

(3) 如果用半径为 r_a 的不透光圆屏代替衍射屏，此时的强度如何？

【答案】 (1) $\sqrt{L\lambda}$；

(2) $\sqrt{2L\lambda}$；

(3) 等于自由传播时的光强.

3.31 波长为 500.0nm 的单色光垂直入射到直径为 4mm 的圆孔上，确定轴线上光强极大和极小值点的位置.

【答案】 $\begin{cases}\dfrac{8}{2m+1}(\text{m}),\text{亮}\\ \dfrac{4}{m}(\text{m}),\text{暗}\end{cases}$.

3.32 波长为 500.0nm 的单色光垂直入射到直径为 4mm 的圆孔上，接收屏在圆孔后 1.5m 处，问孔的轴线与屏的焦点处是亮点还是暗点？如果要使该点的光强发生相反的变化，孔的直径要改变多少？

【答案】 暗点；$\rho=1.88\sqrt{2m+1}(\text{mm})$.

3.33 波长为 632.8nm 的平行光垂直入射到圆孔衍射屏上，屏后轴上距离 $1m$ 处出现一个亮点，设此时圆孔恰好仅露出第一个半波带，试求：

(1) 圆孔的半径；

(2) 由该点向衍射屏移动多远可以出现第一个暗点?

【答案】 (1) 0.795mm;

(2) 0.5m.

3.34 对于波长为 500nm 的光,波带片的第 8 个半波带的直径为 5mm,求此波带片的焦距以及距焦点最近的两个次焦点到波带片的距离.

【答案】 1.56m;0.521m,0.312m.

3.35 若将一个菲涅耳波带片的前 5 个偶数半波带挡住,其余全开放,衍射场中心的强度与自由传播时相比扩大了多少倍?

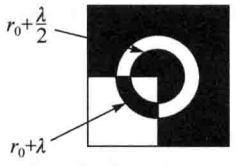
【答案】 121.

3.36 若将一个菲涅耳波带片的前 50 个奇数半波带挡住,其余全开放,衍射场中心的强度与自由传播时相比扩大了多少倍?

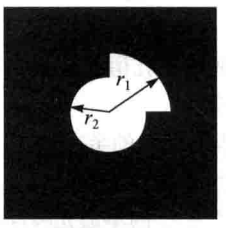
【答案】 9801.

3.37 平行光照射习题 3.37 图所示的衍射屏,图中标出的是观察点到屏上的光程,在近轴条件下用矢量方法求出观察点的光强(用自由传播时该点的光强表示).

【答案】 $\frac{9}{16}I_0$.



习题 3.37 图



习题 3.38 图

3.38 500.0nm 的光正入射到习题 3.38 图所示衍射屏上,$r_1=\sqrt{2}$mm,$r_2=1$mm,轴上观察点距衍射屏 2m. 计算该点的振幅和强度.

【答案】 $\frac{3}{4}A_1$;$\frac{9}{4}I_0$.

3.39 波带片第 5 环的半径为 1.5mm,对于 500.0nm 的光,其焦距和第一环的半径是多少? 若在波带片和屏幕间充以折射率为 n 的介质,将发生什么变化?

【答案】 0.9m;0.67mm;$f_2=nf_1$.

3.40 一菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1=5.0$mm.

(1) 若用波长为 1.06μm 的单色平行光照明,求其主焦距;

(2) 若要求对此波长主焦距缩短为 25cm,需要将此波带片缩小或放大多少?

3.41 如习题 3.41 图所示,用波长为 632.8nm 的平行光垂直照射宽度为 0.2mm 的单狭缝,缝后有一焦距为 60cm 的透镜,光屏在此透镜的焦平面上,求衍射图样中心到第二条暗纹的距离.

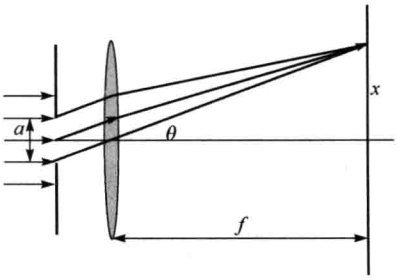
【答案】 3.8mm.

3.42 当缝宽分别是 1λ、5λ、10λ 时，单缝夫琅禾费衍射的半强角宽度是多大？（半强角宽度是光强等于中央衍射主极大光强一半处的衍射角宽度.）

【答案】 52.6°；10.2°；5.08°.

3.43 (1) 平行单色光以 θ_0 角入射到有一单缝的衍射屏上，屏后有一透镜，设透镜无限大，求后焦面上的光强分布；

(2) 如果将上述狭缝换为长板条，强度又如何？



习题 3.41 图

【答案】 (1) $I(\theta)=I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2$，$u=\dfrac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0\pm\sin\theta)$；

(2) $I'(\theta_0)=I(\theta)=(K-1)^2 I_0$.

3.44 波长 480nm 的平行单色光垂直入射到缝宽 0.4mm 的单缝衍射屏上，缝后透镜焦距为 60cm，计算当屏上一点到缝两端的位相差分别为 $\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{\pi}{6}$ 时，该点到焦点的距离分别是多少？

【答案】 0.018cm；0.006cm.

3.45 平行白光正入射到 0.320mm 宽的狭缝上，透镜后 1m 远处有一小的分光镜的入射缝正对该狭缝，对图样进行分光研究. 如果狭缝沿着垂直方向移动 1.250cm，分光镜中所见如何？

【答案】 可见 9 条紫色条纹（即紫光出现 9 次），红光出现 5 次，其他颜色的光出现的次数介于两者之间.

3.46 针孔相机没有透镜，而是用一个前后相距 10cm 的带针孔的暗盒构成. 用它拍摄太阳时要得到最清晰明亮的像，针孔的直径应该多大？中心波长取 500nm.

【答案】 0.247mm，这是圆孔的艾里斑与针孔的几何像斑的均衡值.

3.47 阿波罗 11 号登月后，在月球上将 100 块阿波罗小棱镜排成方阵，用来精确测量月地之间距离的变化. 不采用整块大棱镜的原因有二：一是月球温差大，大棱镜易变形；二是月地间有相对运动，返回光束将偏离原发射地. 为此，将每一个小棱镜置于一个保护圆筒中，利用衍射使返回的光束在地面上形成一扩展直径的圆斑罩住发射地. 若该直径需要 10.67mi(1mi=1609.344m)，红宝石激光器发出的光波长为 694.3nm，月地间距离为 2.4×10^5 mi(1mi=1609.344m)，请设计保护圆筒的直径.

【答案】 38.1mm.

3.48 (1) 用 275.0nm 的紫外线比用 550.0nm 的可见光，显微镜的分辨本领可以增大多少倍？

(2) 显微镜的物镜在空气中的数值孔径为 0.9，若用紫外线，可以分辨的两条线的最小间距是多少？

(3) 用油浸系统时，可分辨的最小间距又是多少？油的折射率为 1.6；

(4) 照相底片上感光微粒的大小约为 0.5mm，问当油浸系统的紫外线显微镜的横向放大率是多少时，底片上恰能分辨？

【答案】 (1) 2 倍；

(2) 186nm;

(3) 116nm;

(4) 4.3×10^{3}.

3.49 一反射式天文望远镜的通光孔径为 2.5m,求可以分辨的双星的最小夹角.与人眼相比,分辨本领提高了多少倍?人眼瞳孔的直径约为 2mm.

【答案】 2.648×10^{-7} rad,1250 倍.

3.50 双星之间的角距离为 1×10^{-6} rad,辐射波长为 577.0nm 和 579.0nm,要分辨此双星,望远镜的孔径至少多大?

【答案】 0.706m.

第 4 章

4.1 设菲涅耳双面镜的夹角 $\varepsilon=10^{-3}$ rad,有一单色狭缝光源 S 与两镜相交处 C 的距离 r 为 0.5m,单色波的波长 $\lambda=500.0$nm.在距两镜相交处的距离为 $L=1.5$m 的屏幕 Σ 上出现明暗干涉条纹.

(1) 求屏幕 Σ 上两相邻明条纹之间的距离;

(2) 问在屏幕 Σ 上最多可以看到多少明条纹?

【答案】 (1)1.00mm;

(2)如果仅考虑屏幕上部,则包括 0 级,可以看见 4 条,下半部分也应该有一些,但考虑到反射镜的遮挡,会少一些.

4.2 将一焦距 f' 为 50cm 的会聚透镜的中央部分截去 6mm,把余下的上下两部分再黏合在一起,成为一块梅斯林对切透镜 L.在透镜 L 的对称轴上,左边 300cm 处有一波长 $\lambda=500.0$nm 的单色点光源 S,右边 450cm 处置一光屏 D.试分析并计算:

(1) S 发出的光经过透镜 L 后的成像情况,如所成之像不止一个,计算各像之间的距离;

(2) 在光屏 D 上能否观察到干涉条纹?

【答案】 (1) 两像间距 7.2mm;

(2) 不能.

4.3 波长 λ 为 0.5μm 的平行单色光垂直入射到双缝平面上,已知双缝间距 d 为 0.5mm,在双缝另一侧 5cm 远处,放置一枚像方焦距 f' 为 10cm 的理想透镜 L,在 L 右侧 12cm 远处放置一屏幕.问屏幕上有无干涉条纹?若有,则条纹间距是多少?

【答案】 0.11mm.

4.4 一束波长 500nm 的平行光正入射到菲涅耳双棱镜上,已知棱镜顶角为 3.5′,折射率为 1.5,距棱镜 4.0m 处有一接收屏.

(1) 求屏上干涉条纹间距;

(2) 求屏上出现的亮条纹数.

【答案】 (1)0.5mm;

(2)10.

4.5 一劳埃德镜面宽度为 4.0cm,一缝光源在其左侧,离镜边缘 2.0cm,比镜面高出 0.5mm,接

收屏幕在镜右侧，距其边缘 300cm，入射光波长 589nm，求：

(1) 幕上的条纹间距以及出现的条纹数；

(2) 若缝光源上下平移以改变其到镜面的高度，幕上条纹将如何变化？

【答案】 (1) 1.81mm；

(2) 若光源向上平移，条纹间隔减小，条纹数增加，若向下平移，则刚好相反.

4.6 沿着与肥皂膜的法线成 35°角的方向观察膜呈绿色($\lambda=500.0\text{nm}$)，设肥皂水的折射率为 1.33，求：

(1) 薄膜的厚度；

(2) 如果垂直注视，膜呈何种颜色？

【答案】 (1) $(2j+1)1.0417\times10^{-7}\text{m}$；

(2) 554.2nm.

4.7 一束白光垂直照射厚度为 $0.4\mu\text{m}$ 的玻璃片，玻璃的折射率为 1.5，在可见光谱范围内($\lambda=400.0\sim700.0\text{nm}$)，反射光的哪些波长成分将被加强？

【答案】 135.4nm.

4.8 白光以 45°角射在肥皂($n=1.33$)膜上，试求使反射光呈黄色($\lambda=610.0\text{nm}$)的最小膜厚度.

【答案】 135.4nm.

4.9 如习题 4.9 图所示为一观察干涉条纹的实验装置. R_1 为透镜 L_1 下表面的曲率半径，R_2 为透镜 L_2 上表面的曲率半径，今用一束波长 $\lambda=589.3\text{nm}$ 的单色平行钠光垂直照射，由反射光测得第 20 级暗条纹半径 r 为 2.4cm，又已知 $R_2=2.5\text{cm}$，试求：

(1) 干涉图样的形状和特性；

(2)透镜下表面的曲率半径 R_1 是多少？

【答案】 (1) 亮条纹 $r_j=\sqrt{\dfrac{(2j+1)\lambda R_1R_2}{2(R_2-R_1)}}$，暗条纹 $r_j'=\sqrt{\dfrac{j\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}}$；

(2) 192.73cm.

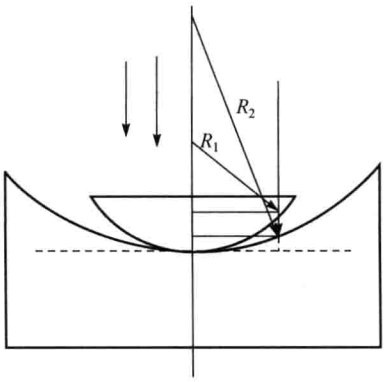
4.10 如习题 4.10 图所示的实验装置，在一洁净的玻璃片的上表面上放一滴油，当油滴展开成油膜时，在波长 $\lambda=600.0\text{nm}$ 的单色光垂直照射下，从反射光中观察到油膜所形成的干涉条纹. 实验中，由读数显微镜向下观察油膜所形成的干涉条纹. 如果油膜的折射率 $n=1.20$，玻璃的折射率 $n'=1.50$，试求：

(1) 当油膜中心的最高点与玻璃片的上表面相距 $h=1.20\mu\text{m}$ 时，描述所观察到的条纹的形状，即可以观察到几条亮条纹，亮条纹所在处油膜的厚度是多少？中心点的明暗程度又如何？

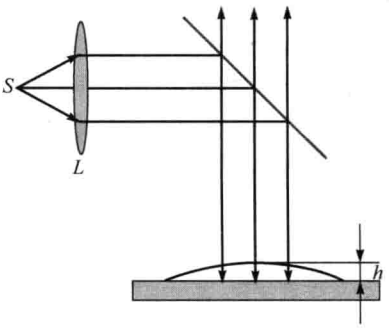
(2) 当油膜逐渐扩展时，所看到的条纹将如何变化？

【答案】 (1) 可见 5 条亮纹，$h_1=j\dfrac{\lambda}{2n}$；

(2) 油膜扩展，看见亮条纹向中心收缩并消失，同时可见油膜新扩展的区域有新条纹出现.



习题 4.9 图



习题 4.10 图

4.11 如习题 4.11 图所示是牛顿环的干涉装置，平凸透镜球面的曲率半径 $R=10.0\text{m}$，折射率 $n_1=1.50$，平板玻璃由左右两部分组成，折射率分别是 $n_3=1.50$ 和 $n_4=1.75$，平凸透镜的顶点在这两部分玻璃的分界处，中间充以折射率 $n_2=1.62$ 的二硫化碳液体，若用单色光垂直照射，在反射光中测得右边 j 级明条纹的半径 $r_j=4\text{mm}$，$j+5$ 级明条纹的半径 $r_{j+5}=6\text{mm}$，试求：

(1) 入射光的波长；

(2) 观察到的干涉图样.

【答案】 (1) 648nm；

(2) 同一高度处，两侧条纹正好明暗错开.

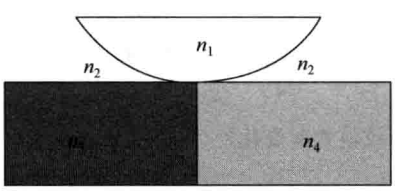
4.12 如习题 4.12 图所示，A 为平凸透镜，B 为平板玻璃，C 为金属柱，D 为框架，A、B 之间留有气隙，而 A 被固结在框架的边缘上. 温度变化时，C 发生伸缩，而假设 A、B、D 都没有伸缩. 现用波长为 $\lambda=632.8\text{nm}$ 的激光垂直照射，试求：

(1) 在反射光中观察时，看到牛顿环的条纹都移向中央，这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短？

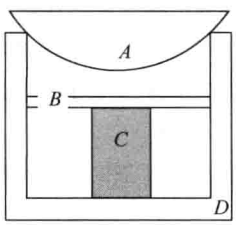
(2) 如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失，C 的长度变化了多少？

【答案】 (1) 金属柱 C 缩短；

(2) $3.164\mu\text{m}$.



习题 4.11 图



习题 4.12 图

4.13 一个迈克耳孙干涉仪被调节，当用波长 $\lambda=500.0\text{nm}$ 扩展光源照明时会出现同心圆环形

条纹，若要移动其中一臂而使圆环中心处相继出现1000条条纹，则该臂要移动多少？若中心是亮的，计算第一个暗环的角半径.（要求用两臂的路径距离差和波长表示）

【答案】 250μm，$i=\sqrt{\dfrac{\lambda}{2h}}$.

4.14 在傍轴条件下，等倾条纹的半径与干涉级有什么样的依赖关系？牛顿环的情况又怎样？能够将二者区别吗？如何区别？

4.15 将光滑的平板玻璃覆盖在柱形平凹透镜上，如习题4.15图所示，试求：

(1) 用单色光垂直照射时，画出反射光中干涉条纹分布的大致情况.

(2) 若圆柱面的半径为R，且中央为暗纹，问从中央数第2条暗纹与中央暗纹的距离是多少？

(3) 连续改变入射光的波长，在$\lambda=500.0$nm和$\lambda=600.0$nm时，中央均为暗纹，求柱面镜的最大深度.

(4) 若轻压上玻璃片，条纹如何变化？

【答案】 (1) 是平行于柱面轴线的直条纹；

(2) $d'=\sqrt{2\lambda R}$；

(3) 1.5μm；

(4) 条纹间距变大，且中心有条纹被吞入.

4.16 玻璃板上有一层油膜，波长可连续改变的单色光正入射，在$\lambda=500.0$nm和$\lambda=600.0$nm时，观察到反射光干涉相消，并且在这两波长之间再无其他波长的光相消.

(1) 证明油膜的折射率一定小于1.5(玻璃的折射率1.5).

(2) 若油的折射率为1.3，求油膜的厚度.

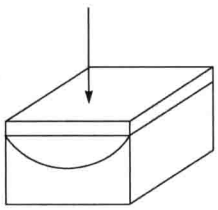
【答案】 (2) 673nm.

4.17 如习题4.17图所示，在一厚玻璃中有一气泡，形状类似球面透镜，用单色光从玻璃的左侧垂直入射.(1)描述在右侧看到的干涉条纹的特点，即形状、间距、级数和边界处的条纹；

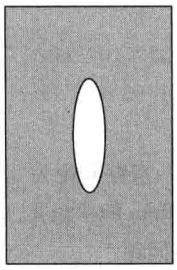
(2) 若均匀用力挤压玻璃的左右两侧，条纹有何变化？

【答案】 (1) 干涉条纹是同心圆环；

(2) 挤压，则圆环被吞入中心.



习题4.15图



习题4.17图

4.18 用迈克耳孙干涉仪精密测长，以He-Ne激光器的632.8nm谱线作为光源，其谱线宽度

为 0.0001nm，对干涉强度信号测量的灵敏度可达 1/8 个条纹.

(1)这台干涉仪的测长精度是多少?

(2)该测长仪一次测长的量程是多少?

【答案】 (1) 40nm;

(2) 2m.

4.19 镉灯为准单色光源，其红色谱线的中心波长为 642.8nm，谱线宽度为 0.001nm.

(1) 求其光场的相干长度和相干时间;

(2) 求该红色谱线的频宽;

(3) 用此灯作为迈克耳孙干涉仪的光源，用镜面移动来观测干涉场输出的光信号曲线，设镜面移动速度为 0.5mm/s，试估算需要多长时间可以获得显示有两个波包形状的信号曲线?

【答案】 (1)41cm，1.4×10^{-9}s;

(2) 7.1×10^{2}MHz;

(3) ~800s.

4.20 如果法布里-珀罗干涉仪两反射面间距为 1.00cm，用波长 500nm 的绿光做实验，干涉条纹中心正好是一亮斑，求第 10 个亮环的角直径.

【答案】 0.042nm.

4.21 两条光谱线，中心为 600nm，波长差 10^{-4} nm，现在要用法布里-珀罗干涉仪将其分辨，问法布里-珀罗干涉仪的镜面间距至少要多长? 设每一个镜面的反射率为 95%.

【答案】 ~3cm.

4.22 设法布里-珀罗腔长 5.000cm，用扩展光源做实验，光波波长 $\lambda=600.0$nm，问:

(1) 中心干涉级数是多少?

(2) 在倾角为 1°附近，干涉环的半角宽度是多少? (设光强反射率 $R=0.98$).

(3) 如果用该法布里-珀罗腔分辨谱线，其色分辨本领有多大? 可分辨的最小波长间隔是多少?

(4) 如果用其对白光进行选频，透射最强的谱线有几条? 每条的谱线宽度是多少?

(5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5}(相对值)，则谱线的漂移量是多少?

【答案】 (1) 166666;

(2) 2.21×10^{-6};

(3) 2.59×10^{7}，2.32×10^{-5}nm;

(4) 共 118422 条，1.93×10^{7}Hz;

(5) 6×10^{-5}nm.

4.23 在杨氏双缝实验中，双缝间距为 0.5mm，接收屏距双缝 1.000m，点光源距双缝 30cm，它发射波长 $\lambda=500.0$nm 的单色光. 试求:

(1) 屏上干涉条纹间距.

(2) 若点光源由轴上向下平移 2mm，屏上干涉条纹向什么方向移动? 移动多少距离?

(3) 如点光源发出的光波为(500.0±2.5)nm 范围内的准单色光，求屏上能看到的干涉极大的最高级次.

(4) 若光源具有一定的宽度,屏上干涉条纹消失时,它的临界宽度是多少?

【答案】 (1) 1.00mm;

(2)上移 6.7mm;

(3) 100;

(4) 0.3mm.

第 5 章

5.1 一束激光(波长为 630nm)掠入射于一钢尺上(最小刻度为 1/16in),反射的光投射到 10m 以外的竖立墙壁上.

(1) 推导墙上干涉极大处的角度 θ. 为简单起见,设入射激光束平行于钢尺表面.

(2) 墙上零级和 1 级干涉图样的垂直分布又如何?

【答案】 (1) $\theta=\sqrt{\dfrac{2j\lambda}{d}}$;

(2) 0,28.2cm.

5.2 导出不等宽双狭缝的夫琅禾费衍射强度分布公式,设缝宽分别为 a 和 $2a$,缝距 $d=3a$.

【答案】 $I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2(1+4\cos^2 u+2\cos u\cdot 2\cos 6u)$.

5.3 $2N$ 条平行狭缝,缝宽为 a,缝间不透明部分周期性变化,间距为 $a,3a,a,3a,\cdots$求下列各种情形的衍射强度分布:

(1) 遮住偶数条;

(2) 遮住奇数条;

(3) 全开放.

【答案】 (3) $I(\theta)=2I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2\left(\dfrac{\sin 8Nu}{\sin 8u}\right)^2(1+\cos 4u)$.

5.4 三狭缝衍射屏,缝宽均为 a,彼此间距为 d,中间缝盖有可以引起 180°相位改变的滤光片,波长为 λ 的单色光正入射,计算下列各种情况下的角度.

(1) 第一衍射极小;

(2) 第一干涉极小;

(3) 第一干涉极大.

【答案】 (1) $\sin\theta=j\dfrac{\lambda}{a}\overset{j=1}{=}\dfrac{\lambda}{a}$;

(2) $\sin\theta=\dfrac{\lambda}{6d}$;

(3) $\sin\theta=\dfrac{\lambda}{4d}$.

5.5 已知光栅缝宽为 1.5×10^{-4}cm,波长为 600nm 的单色光垂直入射,发现第 4 级缺级,透镜焦距为 1m,试求:

(1) 屏幕上第 2 级亮条纹与第 3 级亮条纹的距离;

(2) 屏幕上所呈现的全部亮条纹数.

【答案】 (1)11.05cm;

(2)15 条.

5.6 三缝衍射屏,缝宽为 a,缝间不透光部分宽度为 b,薄透镜焦距为 2m.

(1) 把中间缝关闭,单色平行光垂直照射.在透镜焦平面上得到如习题 5.6 图所示衍射条纹,在图上画出三缝均打开时的衍射条纹分布.

(2) 若打开三缝,用 400nm、600nm 的双色平行光入射,在屏上 $x=10$cm 处,同时观察到 600nm 的 k 级主极大和 400nm 的 $k+1$ 级主极大,则三缝的 a、b 各是多大?

【答案】 (2) $a=12\mu$m,$b=12\mu$m.

5.7 有一四缝衍射屏,缝宽为 a,缝间不透光部分宽度为 b 习题 5.7 图,且 $a=b$,如习题 5.7 图(a)所示,其中缝 1 一直打开,其他缝可以关闭,单色平行光正入射,试求:

(1) 打开缝_____可得到习题 5.7 图(b)的强度分布;

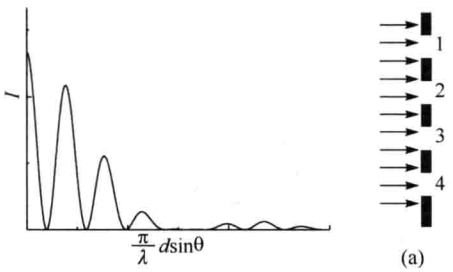
(2) 画出四个缝全打开时的强度分布;

(3) 若缝 1、3 打开,d 不变,而 a 减小至 $a\ll b$,画出强度分布曲线;

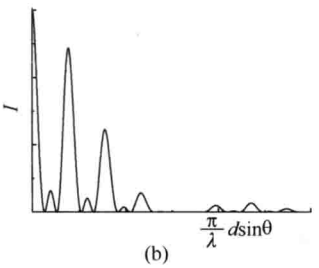
(4) 按(2)的情况,中央最大光强为 $I=$_____ I_0,I_0 为习题 5.7 图(b)中的中央最大光强.

【答案】 (1) 1 和 3;

(4) 4.



习题 5.6 图



习题 5.7 图

5.8 为了能分辨第二级钠光谱的双线(波长分别为 589.0nm 和 589.6nm),宽度为 10cm 的平面光栅的常数是多少?

【答案】 0.20mm.

5.9 平行光正入射到宽度为 6cm 的平面透射光栅上,在 30°的衍射角方向上恰可分辨的两谱线的频率差 $\Delta\nu$ 是多少?

【答案】 1×10^{10} Hz.

5.10 一光栅,光栅常数为 4μm,总宽度为 10cm,波长为 500.0nm 和 500.01nm 的平面波正入射,光栅工作在二级光谱,问该双线分开多大角度?能否分辨?

【答案】 5.16×10^{-6} rad;恰可分辨.

5.11 某光源发射波长为 650nm 的红光,用刻线数为 10^5 的光栅测量发现这是双线,在该光栅的第三级光谱中刚好能分辨此双线,求这两条谱线的波长差.

【答案】 约 2.2×10^{-3} nm.

5.12 一光栅宽5.00cm，每毫米有400条刻线. 波长为500.0nm的平行光正入射时，光栅的第4级衍射光谱在单缝衍射的第一极小值位置. 试求：

(1) 每缝的宽度；

(2) 第二级衍射谱的半角宽度；

(3) 第二级可分辨的最小波长差；

(4) 如果入射光的入射方向与光栅平面的法线成30°角，光栅能分辨的最小波长差又是多少？

【答案】 (1) 6.25×10^{-4}mm；

(2) 1.09×10^{-5}；

(3) 0.0125nm；

(4) 0.003nm.

5.13 绿光波长500.0nm，正入射在光栅常数为2.5×10^{-3}mm、宽度为30mm的光栅上，聚光镜的焦距为500mm，求：

(1) 第一级光谱的线色散率；

(2) 第一级光谱中能分辨的最小波长差；

(3) 该光栅最多能看到第几级光谱？

【答案】 (1) 0.2mm/nm；

(2) 0.042nm；

(3) 4级.

5.14 国产31WI型1m平面光栅摄谱仪的技术数据如下：物镜焦距1050mm，光栅刻划面积60mm×40mm，闪耀波长635.0nm(1级)，刻线1200条/mm，色散(线色散率的倒数)0.8nm/mm，理论分辨率72000(1级). 试求：

(1) 该摄谱仪能分辨的最小波长间隔.

(2) 摄谱仪的角色散本领是多少？

(3) 光栅的闪耀角是多大？闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大的角度？

【答案】 (1) 0.005mm；

(2) 0.244nm/′；

(3) 12°39′.

第 6 章

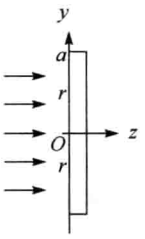
6.1 设薄透镜由折射率为n_L的材料做成，其物方、像方的折射率分别为n和n'，两折射球面的曲率半径分别为r_1和r_2，导出其相位变换函数.

【答案】 $\exp\left[-\frac{ik}{2}\left(\frac{n_L-n}{r_1}-\frac{n_L-n'}{r_2}\right)(x^2+y^2)\right]$.

6.2 用薄透镜的相位变换函数导出傍轴条件下的横向放大率公式.

6.3 用劈形棱镜的相位变换函数导出傍轴光束斜入射时所产生的偏向角.

6.4 用变折射率材料做成如习题6.4图所示的微透镜，其折射率变化呈抛物线型，为



习题 6.4 图

$$n(r)=n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha r^2\right),\quad r^2=x^2+y^2$$

(1) 写出其屏函数，设其厚度为 d，孔径为 a，且 $a\gg d\gg\lambda$.

(2) 用相因子分析法导出其焦距为

$$F=\frac{1}{\alpha n_0 d}\text{或}F=\frac{a^2}{2(n_0-n)d}$$

其中，n 为 $r=a$ 时的折射率，即 $n=n_{r=a}=n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha a^2\right)$.

(3) 若要求 $F\approx1\text{mm}$，问折射率系数 α 的值应为多少？设 $d\approx10\mu\text{m}$，$a\approx100\mu\text{m}$，$n_0\approx1.68$.

【答案】 (1) $\tilde{t}(x,y)=\exp[\mathrm{i}\varphi_{\mathrm{L}}(x,y)]=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2}\alpha n_0 d(x^2+y^2)\right]=\exp\left[-\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2/(\alpha n_0 d)}\right]$.

(3) $\alpha\approx60/\text{mm}^2$.

6.5 一块条状余弦光栅，其栅条密度 $1/d_0$ 为 300 线/mm，现将其作为衍射屏被一平行光照射，而在后焦面(x',y')上接收其夫琅禾费衍射场，设焦距 f 为 200mm，光波长为 600nm.

(1) 当栅条平行于 x 轴方向时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率(f_x,f_y)的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标(x',y')的值，并画出图示.

(2) 当栅条逆时针转过 45°而处于 xy 平面的Ⅰ、Ⅲ象限时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率(f_x,f_y)的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标(x',y')的值，并画出图示.

(3) 当栅条顺时针转过 30°而处于 xy 平面的Ⅱ、Ⅳ象限时，写出其屏函数 $\tilde{t}(x,y)$、空间频率(f_x,f_y)的值，及其在后焦面上三个衍射斑中心坐标(x',y')的值，并画出图示.

【答案】 (1) $(300\text{mm}^{-1},0)$；$(0,0)$，$(36\text{mm},0)$，$(-36\text{mm},0)$；

(2) $(212\text{mm}^{-1},-212\text{mm}^{-1})$；$(0,0)$，$(25.5\text{mm},-25.5\text{mm})$，$(-25.5\text{mm},25.5\text{mm})$.

6.6 在一相干成像系统中，作为入射光瞳的镜头的相对孔径为 1/5，求此系统的截止频率(mm^{-1}). 设物平面在前焦面附近，照明波长为 500nm.

【答案】 200mm^{-1}.

6.7 采用远场装置接收单缝的夫琅禾费衍射场，设单缝宽约 $100\mu\text{m}$，入射光波长 632.8nm.

(1) 接收屏幕至少应放在多远？

(2) 在接收屏幕上的多大范围内才算是夫琅禾费衍射场？

(3) 0 级半角宽度为多少？

(4) 在接收屏幕上，0 级的线宽度为多少？

【答案】 (1) 取 50 倍 197.5mm；

(2) 取 50 倍 2.8cm；

(3) 衍射的 0 级角半宽度 $6.328\times10^{-3}\text{rad}$；

(4) 2.5mm.

6.8 采用像面接收装置接收单缝的夫琅禾费衍射场，设单缝宽约 1mm，入射光波长 488.0nm，物距 40cm，像距 30cm.

(1)如果单缝置于透镜后方，要求在像面 1cm 范围内准确地接收到夫琅禾费衍射场，单缝

离像面至少多远?

(2)如果单缝紧贴透镜后侧,求0级半角宽度和接收屏幕上0级的线宽度.

(3)如果单缝离透镜40cm远,求0级半角宽度和接收屏幕上0级的线宽度.

(4)如果单缝置于透镜前方,紧贴在其左侧,情况如何?

【答案】 (1) 3.54cm;

(2) 0.78mm;

(3) $1.68'=1'41''$, 0.39mm;

(4) $1'41''$, 0.78mm.

6.9 如习题6.9图(a)所示,参考光束R和物光束O均为平行光,对称地斜入射于记录介质上,二者间夹角为$\theta=2\theta_0$.

(1) 说明全息图上干涉条纹的形状.

(2) 分别写出物光波和参考光波在记录介质平面上的相位分布$\varphi_O(y)$和$\varphi_R(y)$.

(3) 证明全息图上干涉条纹的间距为$d=\dfrac{1}{2\sin\theta_0}$.

(4) 计算夹角$\theta=1°$时,间距为多少?夹角$\theta=60°$时,间距为多少?设入射光为He-Ne激光,波长为632.8nm.

(5) 如习题6.9图(b)所示,如果照明光波和参考光波是同方向、同波长的,分析0级、+1级、−1级三个衍射波出现在什么方向上,画图说明.

【答案】 (1) 干涉条纹垂直于y轴;

(2) $\varphi_R(y)=-ky\sin\theta_0+\varphi_{R0}$, $\varphi_O(y)=ky\sin\theta_0+\varphi_{O0}$;

(4) $\theta=1°$, $d=18.1\mu m$; $\theta=60°$, $d=0.365\mu m$.

6.10 若在习题6.9中用正入射的平面波再现,+1级波和−1级波各发生什么变化?

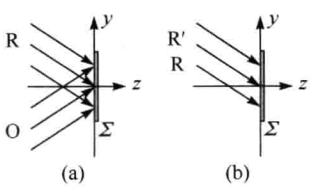
6.11 如习题6.11图(a)所示,用正入射的平面参考光波R记录轴外物点O发出的球面波.

(1)如习题6.11图(b)所示,用轴上的点光源发出的球面波来重建波前,求+1级和−1级两像点的位置;

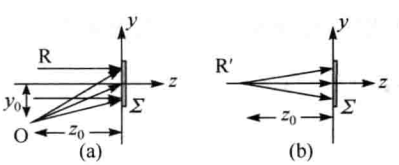
(2)用与记录全息图时波长不同的正入射平面光波照明,求+1级和−1级两像点的位置.

【答案】 (1)$(0,-y_0/2,-z_0/2)$的点;方向与z轴夹角为$\theta'=\arcsin\dfrac{-y_0}{z_0}$的平面波;

(2) $(0,-y_0,-z_0)$, $(0,-y_0,z_0)$.



习题6.9图



习题6.11图

第 7 章

7.1 一束自然光和平面偏振光的混合光，通过一个可旋转的理想偏振片后，光强随着偏振片的取向可以有 5 倍的改变. 求混合光中两种成分光强的比例.

【答案】 自然光占 33.3%，线偏光占 66.7%.

7.2 两偏振片的透振方向成 30°夹角时，自然光的透过光强为 I_1. 若其他条件不变而使上述夹角变为 45°，仍以自然光入射，透射光强变为多少？

【答案】 $\frac{2}{3}I_1$.

7.3 欲使一列平面偏振光的振动面旋转 90°.

(1) 只用两块理想的偏振片，怎样做到这一点？

(2) 如果用两理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转了 90°，最大的光强为原来的多少倍？

【答案】 (1)使第一片的透振方向与平面偏振光的振动方向既不平行也不垂直，而第二片的透振方向与平面偏振光的振动方向保持垂直即可；

(2) $\frac{1}{4}$.

7.4 假定在两个固定的正交理想偏振片之间插入第三个理想偏振片，且使其透振方向以角速度 ω 旋转. 以自然光入射，并使 $t=0$ 时刻新插入的偏振片的透振方向与第一个偏振片透振方向之间夹角为 0，试证明透射光强满足关系式 $I=\frac{1}{8}I_0(1-\cos 4\omega t)$.

7.5 四个理想偏振片堆叠起来，每一片的透振方向相对于前一片顺时针转过 30°角，自然光入射，最后出射的光强为原来的多少倍？

【答案】 $\frac{27}{128}I_0$.

7.6 一对起偏器和检偏器的取向使透射光强为最大，当检偏器转过 30°、45°、60°时，透射光强各减小至最大光强的多少？

【答案】 3/4；1/2；1/4.

7.7 起偏器和检偏器的透振方向之间夹角是 $\theta=30°$.

(1) 如果没有吸收，透射光强变为原来的多少？

(2) 如果它们各吸收了 10%的光强，透射光强又变为原来的多少？

【答案】 (1)$\frac{3}{8}$；

(2)$\frac{243}{800}$.

7.8 在两个正交偏振片之间插入第三个偏振片，以自然光入射，求：

(1) 透射光强变为入射光强的 1/8 时，第三偏振片的方位角.

(2) 如何放置才能使最后的透射光强为零？

(3) 是否可以使透射光强变为入射的自然光强的 1/2?

【答案】 (1) $\theta=\frac{\pi}{4}$;

(2) $\theta=0,\frac{\pi}{2}$;

(3) 不可能.

7.9 一束自然光入射到折射率为 1.72 的火石玻璃上,若发现反射光是平面偏振光,试求光在该火石玻璃中的折射角.

【答案】 31°10′.

7.10 有一空气-玻璃分界面,已知光从空气一侧射入玻璃时,其布儒斯特角为 57°,计算这种光从玻璃一侧射入空气时的布儒斯特角.

【答案】 33°.

7.11 如习题 7.11 图所示为两块相同的冰洲石晶体 A、B 前后排列,强度为 I 的自然光垂直于 A 的表面入射之后依次通过 A、B. A、B 的主截面之间夹角为 α. 求 $\alpha=0°,45°,90°,180°$ 时由 B 射出的光束的数目和每束光的强度.

【答案】 2 束,光强相等;4 束,光强相等;2 束,光强相等;1 束.

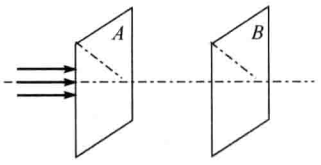
7.12 如习题 7.12 图所示,一棱镜由玻璃直角三棱镜(折射率为 n)和一个负晶体的直角三棱镜(光轴垂直于图面)组成. 自然光从玻璃一侧垂直入射,讨论以下几种情况双折射光束的传播方向:

(1) $n=n_o$;

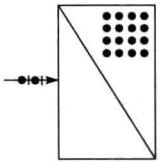
(2) $n=n_e$;

(3) $n>n_o$;

(4) $n_o>n>n_e$.



习题 7.11 图



习题 7.12 图

7.13 一束线偏振的钠黄光垂直射入一方解石晶体,其光矢量的振动方向与晶体的主截面成 20°角. 不考虑界面的反射和介质的吸收,计算出现双折射的两束光的相对振幅和强度.

【答案】 0.364;0.132.

7.14 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上,平板厚度为 4.2mm,其光轴与入射面垂直. 求平板另一表面上 o 光与 e 光两出射点的间隔. 已知对于钠黄光,冰的折射率为 $n_o=1.3090$, $n_e=1.3104$.

【答案】 1.27×10^{-2}mm.

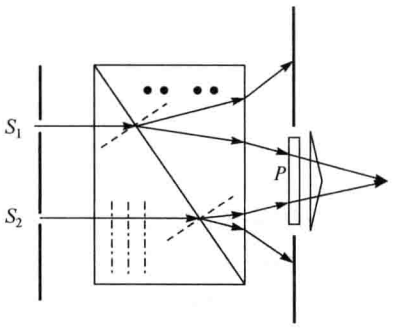
7.15 钠黄光以 50°角入射到方解石制成的波片上,该波片的光轴平行于晶体表面,且垂直于光的入射面. 求两束光在晶体内的夹角. 若晶片厚 1mm,求出射后两束光间的垂直距离. 已

知对于钠黄光(波长为 587.0nm),方解石的折射率为 $n_o=1.658$,$n_e=1.486$.

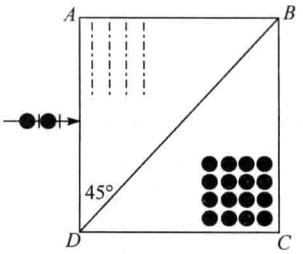
答:0.0532mm.

7.16 如习题 7.16 图所示是偏振光度计. 从光源 S_1 和 S_2 射来的每一束光都被沃拉斯顿棱镜 W 分为两束线偏振光,但其中一束被挡住,只有一束进入视场. 来自 S_1 的偏振光的电矢量在图面内,来自 S_2 的偏振光的电矢量垂直于图面. 转动偏振片 P,直到视场两半的角度相等. 设此时偏振片的透振方向与图面夹角为 θ,试证明光源的强度比为 $\tan^2\theta$.

7.17 习题 7.17 图中棱镜 $ABCD$ 由 45°方解石直角三棱镜组成,棱镜 ABD 的光轴平行于 AB,棱镜 BCD 的光轴垂直于图面. 当光垂直于 AB 入射时,说明为什么 o 光和 e 光在第二块棱镜中分开,并在图中画出它们的波面和振动方向.



习题 7.16 图



习题 7.17 图

7.18 单色线偏光垂直射入方解石晶体,其振动方向与晶体的主截面成 30°角,两折射光再经过方解石后面的尼科耳棱镜,棱镜的主截面与入射光最初的振动面有 50°夹角. 求两条出射光线的相对强度.

【答案】 22.8 或 0.095.

7.19 用什么方法区分 $\frac{\lambda}{2}$ 片和 $\frac{\lambda}{4}$ 片?

7.20 一束沿 z 轴方向传播的椭圆偏振光与自然光的混合光通过一偏振片. 当偏振片的透振方向沿 x 轴时,透射光强度最大,为 $1.5I_0$;透振方向沿 y 轴时,透射光强度最小为,I_0.

(1) 当透振方向与 x 轴成 θ 角时,透射光强是多少? 与入射光中的无偏振部分相关吗?

(2) 如果入射光先通过一个 $\frac{\lambda}{4}$ 片,再通过偏振片,$\frac{\lambda}{4}$ 片的光轴沿 x 轴,而偏振片的透振方向与 x 轴成 30°角时透射光强最大,求此最大光强值,以及入射光中两成分的强度比例.

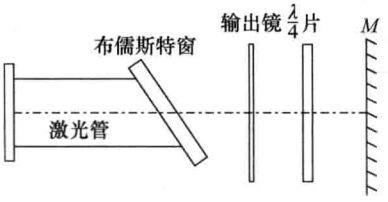
【答案】 (1) $I_0(1+0.5\cos^2\theta)$;

(2) $\frac{7}{4}I_0$,1.5∶1.

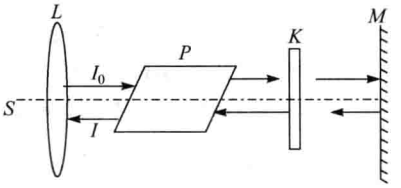
7.21 如习题 7.21 图所示,在使用激光器发出的平面偏振光的各种测量仪器上,为避免激光返回激光器的谐振腔,在激光器输出窗口外放一 $\frac{\lambda}{4}$ 片,且其主截面与出射激光的振动面间有 45°夹角,说明此波片的作用.

7.22 如习题 7.22 图所示，单色光源 S 置于透镜 L 的焦点处，P 为偏振器，K 为此单色光的 $\frac{\lambda}{4}$ 片，其快轴与偏振器的透振方向成 α 角，M 为平面反射镜. 已知入射到偏振器的光强为 I_0，分析光束经过各个元件后的偏振态，计算返回 L 处的光强(不计反射、吸收的光强损失).

【答案】 $\frac{1}{2}I_0\cos^2 2\alpha$.



习题 7.21 图



习题 7.22 图

7.23 用一块 $\frac{\lambda}{4}$ 片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光，达到消光位置后，$\frac{\lambda}{4}$ 的光轴与偏振片的透振方向相差 22°，求椭圆长短轴之比.

【答案】 0.404.

7.24 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过一 $\frac{\lambda}{4}$ 片(快轴沿 y 轴)，然后再经过一块主截面相对于 $\frac{\lambda}{4}$ 片的光轴向右旋过 15° 的尼科耳棱镜，求最后出射的光强.

【答案】 $3I_0/4$.

7.25 当入射线偏光的光矢量与 $\frac{\lambda}{4}$ 片的快轴成 30° 角时，光线透过这 $\frac{\lambda}{4}$ 片后的偏振状态如何?

【答案】 椭圆偏振光，长短轴之比为 $\sqrt{3}$.

7.26 一束波长为 λ 的右旋圆偏振平行光，正入射到一块两表面平行的方解石晶片上，且照射整个晶片，晶片的光轴平行于其表面(习题 7.26 图中 y 方向)，晶片的 A 部分为 $\frac{\lambda}{2}$ 片，B 部分为 $\frac{\lambda}{4}$ 片，如习题 7.26 图所示.

(1) 分别指出经过晶片两部分的光的偏振态.

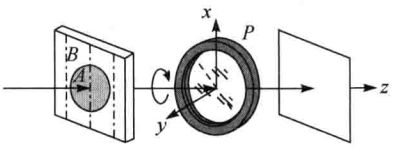
(2) 从晶片射出的光如果再经过一个透振方向与 y 成 45° 角的偏振片，在屏上将见到什么现象?

(3) 在将偏振片绕光线方向旋转 360° 的过程中，屏上的光强发生什么变化?

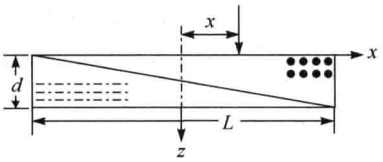
7.27 一巴比涅补偿器由两个光轴相互垂直的劈形石英组成. 如习题 7.27 图所示，现有一束极窄的线偏振光正入射，其偏振方向与 x 轴成 45° 角，光束偏离补偿器的中心线 x.

(1) 用 n_o、n_e、λ、L、d、x 表示出射光束中 x，y 分量间的相对相移；

(2) x 取什么样的值时可以得到线偏光或圆偏光？



习题 7.26 图



习题 7.27 图

7.28 将巴比涅补偿器放在两个正交偏振片之间，光轴与它们的透振方向之间成 45°角，会看到什么现象？若补偿器楔角 $\alpha=2.75°$，用平行的钠黄光(5892.90Å)照射，求干涉条纹的间隔. 转动补偿器的光轴，对干涉条纹有什么影响？

【答案】 看到平行于补偿器棱边的等间隔直条纹；间隔 $\Delta x=\dfrac{\lambda}{2(n_o-n_e)\tan\alpha}=\dfrac{\lambda}{2(n_o-n_e)\alpha}$；转动补偿器，出射光强度改变.

7.29 以线偏振光照射巴比涅补偿器，通过偏振片观察，发现在两楔形棱镜中央，即厚度 $d_1=d_2$ 处有一条暗线，与中央暗线相距 a 处又有一条暗线. 若以同一波长的椭圆偏振光照射，发现暗线移至距离中央 b 处.

(1) 求椭圆偏振光在补偿器晶体中所分解成的两个振动分量的初始相位差与 a、b 的关系.

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两棱镜晶体的光轴平行，试证此时 $b=a/4$.

(3) 设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ，找出 θ 与(2)中椭圆长短轴比值的关系.

【答案】 (1) $\Delta\varphi_0\pm\dfrac{2\pi b}{a}=0$；

(3) 长短轴之比为 $\cos\theta:\sin\theta$.

7.30 从尼科耳棱镜透射的线偏振光，垂直射到一块石英的 $\dfrac{\lambda}{4}$ 片上，光的振动面与石英光轴成 30°角，然后又经过第二个尼科耳棱镜，两棱镜的主截面成 60°角，求最后的透射光强. 设入射光强为 I_0.

【答案】 $\dfrac{5}{16}I_0$ 或 $\dfrac{1}{8}I_0$.

7.31 两偏振片之间有一 $\dfrac{\lambda}{2}$ 片，波片的快轴与 P_1 的透振方向成 38°角. 设波长为 632.8nm 的光垂直入射到 P_2 上，要使透射光最强，P_2 应如何放置？若晶片的折射率 $n_o=1.52$，$n_e=1.48$，计算此晶片的最小厚度.

【答案】 P_2 的透振方向应与 P_1 成 $2\times38°=76°$；7.91×10^{-6}m.

7.32 一块厚度为 0.04mm 的方解石晶片，光轴与表面平行，将其插入正交偏振片之间，且使主截面与第一偏振片的透振方向成 $\theta\left(\theta\neq0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 角，问白光中哪些波长成分不能通过此装置？

【答案】 688.0nm，655.5nm，573.3nm，529.3nm，491.4nm，458.7nm，430.0nm，404.7nm.

7.33 两个正交偏振片之间有一个石英巴比涅补偿器($n_o=1.54190$，$n_e=1.55093$)，石英的光轴与偏振片的透振方向均成45°角.问：

(1) 用平行钠光照明，在第二个偏振片的后面能看到什么现象？

(2) 若楔角$\alpha=2.75°$，求干涉条纹间距.

(3) 云母是双轴晶体，很薄时可以按单轴晶体处理，令一云母片的快慢轴与补偿器的快慢轴方向一致，将其放在补偿器上，所有暗条纹移动了1/4的条纹间距，求云母片所产生的光程差.

【答案】 (1) 平行于y轴的等间距平行直条纹；

(2) 0.674mm；

(3) $m\lambda+\dfrac{\lambda}{4}$.

7.34 将能引起650nm光程差的晶片，置于正交偏振片之间，用白光照明，透射光是什么颜色？

【答案】 433.3nm.

7.35 有哪些方法可以使一束线偏光的振动面旋转90°？

7.36 如习题7.36图所示，玻璃片堆A由折射率为n的玻璃平板组成，半波片C的快轴与y轴夹角为30°，偏振片P的偏振化方向沿y轴，自然光沿水平方向入射.

(1) 要使A的反射光为完全线偏振光，玻璃片堆A的倾角θ应该是多大？

(2) 若将A出射的部分偏振光看成是自然光和线偏振光的叠加，则经过C后线偏光的振动面有何变化？说明理由.

(3) 若A的透射光中自然光的强度为I，线偏振光的强度为$3I$，计算从P出射的光强.

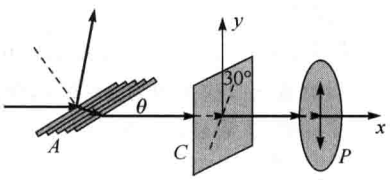
【答案】 (1) $\arctan n$；

(2) 透射线偏光的振动面转到与y轴成60°方向；

(3) $5I/4$.

7.37 怎样利用两个偏振片和白光光源区分垂直于光轴和平行于光轴切出的两个石英晶片？

7.38 对于波长为587.3nm的钠黄光，石英的旋光率为21.7°/mm，若将一石英晶片垂直于光轴切割，置于两透振方向平行偏振片之间.问当石英片的厚度多少时，没有光透过第二个偏振片？



习题7.36图

【答案】 $(j+1)8.29(\text{mm})$.

7.39 纯蔗糖溶液的比旋光率为$[\alpha]=6.65°/\text{cm}\cdot[\text{g}/\text{cm}^3)]$，今有不知纯度的蔗糖溶液，浓度为20%(即每100cm³中有20g蔗糖)，溶液的厚度为20cm，能使一线偏光的振动面旋转25°，求这种蔗糖的纯度(即纯糖占蔗糖的百分比).

【答案】 94.0%.

7.40 在两个透振方向平行的偏振片间放一半波片，其主截面沿着P_1的透振方向向右旋转27°，半波片后再放一右旋石英片，其旋光率为$\alpha=18°/\text{mm}$，单色光正入射到P_1.要使在P_2后消光，石英片的最小厚度是多少？

【答案】 2mm.

7.41 厚度为 1mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在正交偏振片之间，为什么无论入射光的波长为何值时，晶片总是亮的？

7.42 厚度为 1mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在两主截面平行的尼科耳棱镜之间，对某一波长的光偏振面旋转 20°，问当石英晶片的厚度为多少时，该波长的光将完全消失？

【答案】 4.5mm.

7.43 在两尼科耳棱镜之间插入一块石英旋光片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光(550.0*nm*)，石英对这一波长光的旋光率为 24°/mm，求下列情形下晶片的厚度为多少？

(1) 两尼科耳棱镜的主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜的主截面平行.

【答案】 (1) $7.5j$(mm)；

(2) $7.5(j+0.5)$(mm).

7.44 一表面垂直于光轴的水晶片恰好可抵消 10cm 长度的浓度为 20%的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转. 对此波长，水晶的旋光率为 $\alpha=21.75°/\text{mm}$，麦芽糖的比旋光率为 $[\alpha]=144°/\text{dm}\cdot[\text{g/cm}^3)]$，求此水晶片的厚度.

【答案】 $1.324+8.726j$(mm).

7.45 将 14.5g 的蔗糖溶于纯水，得到 60cm^3 的溶液. 在长度 15cm 的量糖计中测得钠光偏振面的旋转角为向右 16.8°，已 $[\alpha]=6.65°/[\text{cm}\cdot(\text{g/cm}^3)]$，该蔗糖样品中有多大比例的非旋光杂质？

【答案】 30.3%.

第 8 章

8.1 一均匀介质的吸收系数为 $\alpha=0.32/\text{cm}$，求出射光强变为入射光强 0.1、0.2、0.5 倍时介质的厚度.

【答案】 7.169cm；5.029cm；2.166cm.

8.2 设海水的吸收系数为 $\alpha=2/\text{m}$，而人眼能感受到的光强为太阳光强的 10^{-18}. 试问在海面下多深处，人眼还能看见光？

【答案】 20.72m.

8.3 证明当介质厚度 $L=1\text{cm}$ 而吸收系数又很小时，吸收率 $G=\dfrac{I_0-I}{I_0}$ 在数值上就等于吸收系数本身.

8.4 用 $A=1.53974$，$B=4.6528\times10^5\ \text{Å}^2$ 的玻璃做成 50°棱角的棱镜，当其对 550.0nm 的入射光处于最小偏向角位置时，求其角色散率是多少 rad/Å.

【答案】 $-6.272\times10^{-6}\,\text{rad/Å}$.

8.5 某种玻璃对不同波长的折射率在 $\lambda_1=400.0\text{nm}$ 时，$n_1=1.63$；$\lambda_2=500.0\text{nm}$ 时，$n_2=1.58$. 假定柯西公式 $n=A+\dfrac{B}{\lambda^2}$ 适用，求此种玻璃在 600.0nm 时的 $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

【答案】 $-2.058\times10^{-5}/\text{Å}$.

8.6 一块玻璃对波长为 0.070nm 的 X 射线的折射率比 1 小 1.600×10^{-6}，求 X 射线能在此玻璃的外表面发生全反射(全外反射)的最大掠射角.

【答案】 0.102°.

8.7 同时考虑介质对光的吸收和散射时，吸收系数 $\alpha=\alpha_0+\alpha_s$，其中，α_0 是真正的吸收系数，而 α_s 为散射系数. 朗伯定律为 $I=I_0e^{-(\alpha_0+\alpha_s)L}$，若光经过一定厚度的某种介质后，只有 20%的光强通过，已知该介质的散射系数为真正吸收系数的 1/2，若消除散射，透射光强可增加多少?

【答案】 $0.142I_0$.

8.8 计算波长为 253.6nm 和 546.1nm 的两条谱线的瑞利散射强度之比.

【答案】 21.50∶1.

第 9 章

9.1 假设太阳光的峰值波长为 475nm，试求太阳表面的温度.

【答案】 6100K.

9.2 人的正常体温是 37℃，求人体辐射的峰值波长.

【答案】 9.343μm.

9.3 计算下列波长的光量子能量(以 eV 表示)：

(1) 红外线，2.0μm；

(2) 紫外线，250nm.

【答案】 (1) 0.62eV；

(2) 4.97eV.

9.4 波长为 400nm 的光照射在功函数(即逸出功)为 2.48eV 的表面上，试求：

(1) 该表面发射的电子的最大动能；

(2) 光的截止波长是多少?

【答案】 (1) $0.624\text{eV}=0.998\times10^{-19}\text{J}$；

(2) 500.6nm.

9.5 在光电效应中，一个光子完全被一个电子所吸收. 试证明：如果吸收该光子的是一个自由电子，那么能量守恒和动量守恒不可能同时满足.

9.6 在康普顿散射实验中，证明光子能量损失的比例随着波长的减小而增加，并分别计算波长为 0.0711nm 和 0.0022nm 的光子的能量损失，取散射角分别为 0、90°、180°.

【答案】 $\lambda=0.0711\text{nm}$，$\theta=0°$，0；$\theta=90°$，3.3%；$\theta=180°$，6.4%.

$\lambda=0.0022\text{nm}$，$\theta=0°$，0；$\theta=90°$，52.5%；$\theta=180°$，68.85%.

9.7 证明：电子的动能若取非相对论的表达式(即 $E_k=p^2/2m$)，那么康普顿移动有以下表达式：$\lambda'-\lambda=\left(1-\dfrac{h\nu-h\nu'}{2mc^2}\right)^{-1}\dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$，并证明当发射电子的速度远小于 c 时，上述方程与 $\lambda'-\lambda=\dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$一致.

参考文献

赵凯华，钟锡华. 1984. 光学. 北京：北京大学出版社.

Born M, Wolf E. 1999. Principals of Optics. 7th edition. Cambridge：Cambridge University Press.

(O-6028.01)

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
中国科学技术大学国家基础科学人才培养基地物理学丛书

主编 杨国桢　　副主编 程福臻

- 力学与理论力学(上册)（第二版）　杨维纮 编著
- 力学与理论力学(下册)（第二版）　秦 敢 向守平 编著
- 电磁学与电动力学(上册)（第二版）　胡友秋 程福臻 叶邦角 刘之景 编著
- 电磁学与电动力学(下册)（第二版）　胡友秋 程福臻 编著
- 光学（第二版）　崔宏滨 李永平 康学亮 编著
- 原子物理与量子力学(上册)（第二版）　朱栋培 陈宏芳 石名俊 编著
- 原子物理与量子力学(下册)（第二版）　朱栋培 陈宏芳 石名俊 编著
- 热学 热力学与统计物理（上册）（第二版）　曹烈兆 周子舫 编著
- 热学 热力学与统计物理（下册）（第二版）　周子舫 曹烈兆 编著

www.sciencep.com
ISBN 978-7-03-045012-8
9 787030 450128 >
定价：49.00 元

高等教育出版中心　数理出版分社
联系电话：010-64015178
E-mail：mph@mail.sciencep.com