面向21世纪课程教材学习辅导书

杨福家 著

# 原子物理学（第四版）学习辅导书

吕华平 刘 莉 主编



高等教育出版社



ISBN 978-7-04-026645-0
9 787040 266450 >
定价 7.30元



面向21世纪课程教材学习辅导书

杨福家 著

# 原子物理学学习辅导书（第四版）

吕华平 刘 莉 主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是杨福家编著的《原子物理学》(第四版)配套的学习辅导书。本书的章节与教材一一对应,对教材中的全部习题给出了分析和解题思路,并作出了详细解答。通过对辅导书的学习,学生可以加强对所学知识的理解,学会分析方法,提高解题能力,巩固和提高学习效果。

本书可供使用杨福家编著的《原子物理学》的学生作为学习辅导书,也可供教师或使用其他原子物理学教材的读者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

原子物理学(第4版)学习辅导书/吕华平,刘莉主编.—北京:高等教育出版社,2009.7
ISBN 978-7-04-026645-0

Ⅰ.原… Ⅱ.①吕…②刘… Ⅲ.原子物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O562

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第086764号

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 策划编辑 | 高 建 | 责任编辑 | 张海雁 | 封面设计 | 刘晓翔 |
| 责任绘图 | 尹文军 | 版式设计 | 马敬茹 | 责任校对 | 王 雨 |
| 责任印制 | 韩 刚 | | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 400-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总 机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经 销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印 刷 | 北京中科印刷有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开 本 | 787×960 1/16 | 版 次 | 2009年7月第1版 |
| 印 张 | 5 | 印 次 | 2009年7月第1次印刷 |
| 字 数 | 90 000 | 定 价 | 7.30元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

**物料号 26645-00**

# 前言

原子物理学是研究原子的结构、运动规律及相互作用的物理学分支，它是高等院校物理学专业的一门基础课程。在教学过程中，我们感受到学生在解课后习题时，会遇到各种各样的困难，缺乏良好的解题习惯。如果不能及时解决这些困难，培养良好的解题基本方法，对学生理解和掌握原子物理学中的基本概念、基本原理和基本规律是不利的。为了给学生在学习原子物理学这门课程时提供帮助，我们组织编写了这本学习辅导书。

本书是受高等教育出版社委托而编写的与杨福家院士所著的《原子物理学》(第四版)配套的学习辅导教材。书中包含了《原子物理学》(第四版)教材中的全部习题。编写中我们力图使解题思路紧扣原教材，解题过程清晰流畅，解题方法准确。书中的题序与原教材中的是一致的。

为了保证本书的质量，我们组织了编写小组。编写小组成员还有韩立尧、王勇和任志儒。小组成员对每个题都进行了准备，在此基础上经过了集体讨论，最后才定稿完成。复旦大学王炎森教授、北京师范大学胡镜寰教授审阅了书稿，对如何培养学生的良好的解题习惯，如何使题解简洁、明晰，提出了许多宝贵的建议和具体做法。王炎森教授还对书稿逐章进行了修改。徐州师范大学物理与电子工程学院的领导和有关老师对本书也提出了一些宝贵意见。高等教育出版社的高建编辑对本书的完成提出了指导性意见。这一切对我们的编写工作有很大帮助，在此，我们一并表示衷心的感谢。

因编者水平有限，书中的错误和不足不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

吕华平　刘莉

2009年2月

# 常用物理学常量及部分组合常量

$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}$

$hc=1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}$

$\hbar c=197\ \text{nm}\cdot\text{eV}$

$m_p c^2=938\ \text{MeV}$

$m_n c^2=940\ \text{MeV}$

$m_e c^2=0.511\ \text{MeV}$

$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\frac{1}{137}$

$1\ \text{u}=931.5\ \text{MeV}/c^2=1.66\times10^{-27}\ \text{kg}$

$N_A=6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$

$\mu_B=0.578\ 8\times10^{-4}\ \text{eV}\cdot\text{T}^{-1}=0.927\times10^{-23}\ \text{J}\cdot\text{T}^{-1}$

$k=1.38\times10^{-23}\ \text{J/K}$

$R=8.31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}$

$h=6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$

$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.05\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$

$e=1.602\times10^{-19}\ \text{C}$

$m_e=9.11\times10^{-31}\ \text{kg}$

$c=3.0\times10^8\ \text{m/s}$

# 目　录


第一章　原子的位形:卢瑟福模型 …… 1
第二章　原子的量子态:玻尔模型 …… 9
第三章　量子力学导论 …… 20
第四章　原子的精细结构:电子的自旋 …… 31
第五章　多电子原子:泡利原理 …… 44
第六章　X 射线 …… 51
第七章　原子核物理概论 …… 61
第八章　超精细相互作用 …… 71

# 第一章　原子的位形：卢瑟福模型

**1-1**　速度为 $v$ 的非相对论的 α 粒子与一静止的自由电子相碰撞，试证明：α 粒子的最大偏离角约为 $10^{-4}$ rad.

**解**　本题可以利用碰撞过程中能量守恒和动量守恒严格解出 α 粒子和自由电子偏离角之间的关系，再进一步求导取极值计算出最大偏离角. 但由于 α 粒子和自由电子质量相差很大，所以本题也可以用近似的方法求解.

设碰撞以后 α 粒子的散射角为 $\theta$，由式(3-1)、(3-2)(《原子物理学》第四版)(以下同，不再说明)知碰撞参数 $b$ 与散射角 $\theta$ 的关系为

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\quad\left(\text{式中 } a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0E}\right)$$

碰撞参数 $b$ 越小，则散射角 $\theta$ 越大. 也就是说，当 α 粒子和自由电子对头碰时，$\theta$ 取得极大值.

此时 α 粒子由于散射引起的动量变化如图 1-1 所示，α 粒子的质量 $m_\alpha$ 远大于自由电子的质量 $m_e$，则对头碰撞后 α 粒子的速度近似不变，仍为 $v$，而电子的速度变为 $2v$，则 α 粒子的动量变化为

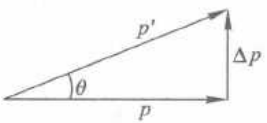

图 1-1

$$\Delta p=2m_ev$$

散射角为

$$\theta\approx\frac{\Delta p}{p}\approx\frac{2m_ev}{m_\alpha v}\approx\frac{2}{4\times1\,836}=2.7\times10^{-4}$$

即最大偏离角约为 $10^{-4}$ rad.

**1-2**　(1) 动能为 5.00 MeV 的 α 粒子被金核以 90° 散射时，它的瞄准距离(碰撞参数)为多大？

(2) 如果金箔厚为 1.0 μm，则入射 α 粒子束以大于 90° 散射(称为背散射)的粒子数是全部入射粒子的百分之几？

**解**　(1) 由式(3-1)、(3-2)知碰撞参数 $b$ 与散射角 $\theta$ 的关系式为

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\quad\left(\text{式中 } a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0E_k}\right)$$

库仑散射因子为

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times2\times79}{5\ \text{MeV}}=45.5\ \text{fm}$$

瞄准距离为

$$b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\times45.5\ \text{fm}\times\cot45^\circ=22.8\ \text{fm}$$

(2) 方法一　根据式(3-15)、(3-16)知,若有 $N$ 个 α 粒子打到金箔上,在 $\mathrm{d}\Omega$ 方向上测得的粒子数为

$$\mathrm{d}N'=Nnt\sigma_C\mathrm{d}\Omega\quad\left(\text{式中}\ \sigma_C=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}},\mathrm{d}\Omega=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

已知金的摩尔质量 $M=197\ \text{g/mol}$,金的密度 $\rho=18.88\ \text{g/cm}^3$,原子核的数密度 $n=\frac{N_A}{V_m}=\frac{N_A}{M/\rho}=\frac{N_A\rho}{M}$,α 粒子束以大于 90°散射的粒子数为

$$N'=\int Nnt\sigma_C\mathrm{d}\Omega=N\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

大于90°散射的粒子数与全部入射粒子的比为

$$\frac{N'}{N}=\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{N_A\rho}{M}t\frac{a^2}{4\sin^3\frac{\theta}{2}}\pi\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{N_A\rho t\pi a^2}{4M}\int_{90^\circ}^{180^\circ}\frac{2\mathrm{d}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\frac{\theta}{2}}=\frac{N_A\rho t\pi a^2}{4M}\left(\frac{1}{\sin^245^\circ}-\frac{1}{\sin^290^\circ}\right)$$

$$=\frac{6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times18.88\ \text{g/cm}^3\times1.0\times10^{-6}\ \text{m}\times3.142\times(45.5\ \text{fm})^2}{4\times197\ \text{g/mol}}$$

$$=9.4\times10^{-5}$$

则大于90°散射的粒子数占全部入射粒子的百分比为 $9.4\times10^{-3}\%$.

方法二　根据碰撞参数 $b$ 与散射角 $\theta$ 的关系式 $b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}$,可知当 $\theta\geqslant90^\circ$ 时,$b(\theta)\leqslant b(90^\circ)$,即对于每一个靶核,散射角大于90°的入射粒子位于 $b<b(90^\circ)$ 的圆盘截面内,该截面面积为 $\sigma_C=\pi b^2(90^\circ)$,则 α 粒子束以大于90°散射的粒子数为

$$N'=Nnt\pi b^2$$

大于90°散射的粒子数与全部入射粒子的比为

$$\frac{N'}{N}=nt\pi b^2=\frac{N_A\rho}{M}t\pi b^2$$

$$=\frac{6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times18.88\ \text{g/cm}^3}{197\ \text{g/mol}}\times1.0\times10^{-6}\ \text{m}\times3.142\times(22.8\ \text{fm})^2$$

$$=9.4\times10^{-5}$$

与方法一所得结果一致.

**1-3**　试问：4.5 MeV 的 α 粒子与金核对心碰撞时的最小距离是多少？若把金核改为$^7$Li 核，则结果如何？

**解**　(1) 由式(4-2)知 α 粒子与金核对心碰撞的最小距离为

$$r_m=a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times2\times79}{4.5\ \text{MeV}}=50.6\ \text{fm}$$

(2) 若改为$^7$Li 核，靶核的质量 $m'$不再远大于入射粒子的质量 $m$，这时动能 $E_k$ 要用质心系的能量 $E_c$，由式(3-10)、(3-11)知，质心系的能量为

$$E_c=\frac{1}{2}m_\mu v^2\quad\left(\text{式中 }m_\mu=\frac{m'm}{m+m'}\right)$$

得

$$E_c=\frac{1}{2}m_\mu v^2=\frac{m'}{m+m'}E_k\approx\frac{A_{\text{Li}}}{A_{\text{He}}+A_{\text{Li}}}E_k=\frac{7}{4+7}E_k=\frac{7}{11}E_k$$

α 粒子与$^7$Li 核对心碰撞的最小距离为

$$r_{\min}=a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_c}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times2\times3\times11}{4.5\ \text{MeV}\times7}=3.0\ \text{fm}$$

**1-4**　(1) 假定金核半径为 7.0 fm，试问：入射质子需要多少能量，才能在对头碰撞时刚好到达金核的表面？

(2) 若金核改为铝核，使质子在对头碰撞时刚好到达铝核的表面，那么，入射质子的能量应为多少？设铝核半径为 4.0 fm.

**解**　(1) 质子和金核对头碰撞时的最小距离为

$$r_m=a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}$$

所以入射质子需要的能量为

$$E_k=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0r_m}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times1\times79}{7.0\ \text{fm}}=16.25\ \text{MeV}$$

(2) 若改为铝核，靶核的质量 $m'$不再远大于入射粒子的质量 $m$，这时需用质心系的能量 $E_c$，质子和铝核对头碰撞时的最小距离为

$$r_{\min}=a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_c}$$

质心系的能量为

$$E_c=\frac{1}{2}m_\mu v^2=\frac{m'}{m+m'}E_k$$

所以入射质子需要的能量为

$$E_k=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}\left(1+\frac{m}{m'}\right)=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times1\times13}{4.0\ \text{fm}}\left(1+\frac{27}{28}\right)=9.2\ \text{MeV}$$

**1-5** 动能为 1.0 MeV 的窄质子束垂直地射在质量厚度为 1.5 mg/cm$^2$ 的金箔上,计数器记录以60°角散射的质子. 计数器圆形输入孔的面积为 1.5 cm$^2$,离金箔散射区的距离为 10 cm,输入孔对着且垂直于射到它上面的质子. 试问:散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比是多少?(质量厚度定义为 $\rho_m=\rho t$,其中 $\rho$ 为质量密度,$t$ 为靶厚.)

**解** 窄质子束打到金箔上,散射到 $\theta\to\theta-\Delta\theta$ 方向上 $\Delta\Omega$ 立体角的概率 $\eta$ 为

$$\eta=\frac{\Delta N}{N}=nt\sigma_C\Delta\Omega$$

式中原子核的数密度 $n=\frac{N_A}{V_m}=\frac{N_A\rho}{M}$,$\Delta\Omega=\frac{S}{r^2}$,散射截面的定义式为

$$\sigma_C=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

则有

$$\eta=\frac{\Delta N}{N}=\frac{N_A\rho t}{M}\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{S}{r^2}$$

已知金的摩尔质量 $M=197$ g/mol,金的质量厚度 $\rho_m=\rho t=1.5$ mg/cm$^2$,先计算出库仑散射因子

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times1\times79}{1\ \text{MeV}}=113.76\ \text{fm}$$

代入数据计算,散射到计数器输入孔的质子数与入射到金箔的质子数之比为

$$\eta=\frac{N_A\rho t}{M}\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{S}{r^2}$$

$$=\frac{6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times1.5\ \text{mg/cm}^2\times(113.76\times10^{-13}\ \text{fm})^2\times1.5\ \text{cm}^2}{197\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}\times16\sin^4 30°\times(10\ \text{cm})^2}$$

$$=8.9\times10^{-6}$$

**1-6** 一束 α 粒子垂直射至一重金属箔上,试求 α 粒子被金属箔散射后,散射角大于60°的 α 粒子数与散射角大于90°的 α 粒子数之比.

**解** 对于每一个靶核,散射角大于 $\theta$ 的入射粒子位于 $b<b(\theta)$ 的圆盘截面内,该截面面积为

$$\sigma_C=\pi b^2(\theta),$$

则 α 粒子束大于 θ 角散射的粒子数为

$$\Delta N = Nnt\pi b^2(\theta) \quad \left(\text{式中 } b=\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)$$

则

$$\Delta N = Nnt\pi\,[\,b(\theta)\,]^2 = Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

散射角大于60°的 α 粒子数与散射角大于90°的 α 粒子数之比为

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{60^\circ}{2}\right)^2}{Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{90^\circ}{2}\right)^2}=\left(\frac{\cot\frac{60^\circ}{2}}{\cot\frac{90^\circ}{2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2=3$$

**1-7**　单能的窄 α 粒子束垂直地射到质量厚度为 2.0 mg/cm² 的钽箔上，这时以散射角 $\theta_0>20°$ 散射的相对粒子数（散射粒子数与入射粒子数之比）为 $4.0\times10^{-3}$. 试计算：散射角 $\theta=60°$ 相对应的微分散射截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

**解**　α 粒子束垂直地射到钽箔上，以散射角 $\theta_0>20°$ 散射的相对粒子数为

$$\frac{\Delta N}{N}=nt\pi b^2=\frac{N_A\rho}{M}t\pi b^2=\frac{N_A\rho_m}{M}\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

可求得库仑散射因子的平方

$$a^2=\frac{\Delta N}{N}\frac{4M}{N_A\rho_m\pi}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

已知相对粒子数 $\frac{\Delta N}{N}=4.0\times10^{-3}$，钽质量厚度为 $\rho_m=2.0$ mg/cm²，钽的摩尔质量 $M=181$ g/mol，$\theta=20°$，代入数据计算得

$$a^2=2.38\times10^{-23}\ \text{cm}^2=2.38\times10^{-27}\ \text{m}^2$$

由式(3-16)得散射角 $\theta=60°$ 相对应的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{a^2}{16\sin^4\frac{60^\circ}{2}}=a^2=2.38\times10^{-27}\ \text{m}^2/\text{sr}$$

**1-8**　(1) 质量为 $m_1$ 的入射粒子被质量为 $m_2(m_2\leqslant m_1)$ 的静止靶核弹性散射，试证明入射粒子在实验室坐标系中的最大可能偏转角 $\theta_L$ 由下式决定：$\sin\theta_L=m_2/m_1$.

(2) 假如 α 粒子在原来静止的氮核上散射，试问：它在实验室坐标系中最大的散射角为多大？

**证**　(1) 质量为 $m_1$ 的入射粒子被质量为 $m_2$ 的静止靶核弹性散射，$m_2\leqslant m_1$，在碰撞前后动量守恒，能量守恒.

设 $m_1$ 粒子碰撞前速度为 $v$，沿着 $x$ 方向，碰撞后速度为 $v_1$，与 $x$ 方向夹角为 $\theta$. $m_2$ 粒子碰撞前速度为 0，碰撞后速度为 $v_2$，与 $x$ 方向夹角为 $\varphi$，如图 1-2 所示.

由能量守恒得

$$\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (1)$$

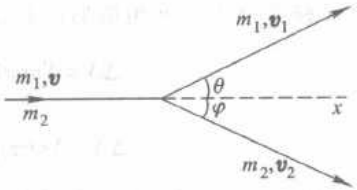

图 1-2

由动量守恒得

$$m_1v=m_1v_1\cos\theta+m_2v_2\cos\varphi \qquad (2)$$

$$0=m_1v_1\sin\theta-m_2v_2\sin\varphi \qquad (3)$$

(2)×sinθ−(3)×cos θ 得

$$m_1v\sin\theta=m_2v_2\sin(\theta+\varphi) \qquad (4)$$

(2)×sinφ+(3)×cos φ 得

$$m_1v\sin\varphi=m_1v_1\sin(\theta+\varphi) \qquad (5)$$

将(4)、(5)两式结果代入式(1)得

$$m_1v^2=m_1\left(\frac{v\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}\right)^2+\frac{m_1^2}{m_2}\left(\frac{v\sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}\right)^2$$

消去 $v^2$ 则有

$$\sin^2(\theta+\varphi)=\sin^2\varphi+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta \qquad (6)$$

对式(6)求导得

$$\sin 2(\theta+\varphi)-\sin 2\varphi=\left(\frac{m_1}{m_2}\sin 2\theta-\sin 2(\theta+\varphi)\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi}$$

取极值时$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi}=0$,则有

$$\sin 2(\theta+\varphi)-\sin 2\varphi=2\cos(\theta+2\varphi)\sin\theta=0$$

当 $\sin\theta=0$ 时 $\theta=0$,为极小值.

当 $\cos(\theta+2\varphi)=0$ 时,$\theta=90°-2\varphi$ 代入式(6)则有

$$\cos 2\varphi=\frac{m_1}{m_2}\cos^2 2\varphi$$

解得

$$\cos 2\varphi=\frac{m_2}{m_1}$$

则有

$$\sin\theta=\cos 2\varphi=\frac{m_2}{m_1}$$

由此得在实验室坐标系中的最大可能偏转角 $\theta_L$ 为

$$\sin\theta_L=m_2/m_1$$

(2) α 粒子在原来静止的氮核上散射,则

$$m_1=m_2=m_\alpha$$

$$\sin\theta_L = 1$$

在实验室坐标系下的最大散射角 $\theta_L = 90°$.

**1-9**　动能为 1.0 MeV 的窄质子束垂直地射到质量厚度为 1.5 mg/cm$^2$ 的金箔上，若金箔中含有百分之三十的银，试求散射角大于30°的相对质子数为多少？

**解**　金箔中含有百分之三十的银，可以理解为金核和银核的粒子数之比为 7∶3. 窄质子束打到金核上，以散射角大于 $\theta$ 散射的相对粒子数

$$\eta_1 = \frac{\Delta N_1}{N} = n_1 t \frac{\pi a^2}{4}\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{N_A\rho}{M} t \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\varepsilon_0 E_k}\right)^2 \times 0.7 \times \cot^2\frac{\theta}{2}$$

窄质子束打到银核上，以散射角大于 $\theta$ 散射的相对粒子数

$$\eta_2 = \frac{\Delta N_2}{N} = n_2 t \frac{\pi a^2}{4}\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{N_A\rho}{M'} t \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2 Z_1 Z'_2}{4\pi\varepsilon_0 E_k}\right)^2 \times 0.3 \times \cot^2\frac{\theta}{2}$$

而质子打到金核和银核上的散射可以看成独立散射事件，则窄质子束射到金箔，以散射角大于 $\theta$ 散射的相对粒子数为

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 \\ &= \frac{N_A\rho t\pi}{4}\left(\frac{e^2 Z_1}{4\pi\varepsilon_0 E_k}\right)^2 \cot^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{Z_2^2}{M}\times 0.7 + \frac{Z_2'^2}{M'}\times 0.3\right)\end{aligned}$$

已知金箔质量厚度 $\rho t = 1.5$ mg/cm$^2$，入射质子的质子数 $Z_1 = 1$，金的质子数 $Z_2 = 79$，摩尔质量 $M = 197$ g/mol，银的质子数 $Z'_2 = 47$，摩尔质量 $M' = 108$ g/mol，$\theta = 30°$，代入数据计算得

$$\eta = 5.8\times 10^{-3}$$

**1-10**　由加速器产生的能量为 1.2 MeV，束流为 5.0 nA 的质子束，垂直地射到厚为 1.5 μm 的金箔上，试求 5 min 内被金箔散射到下列角间隔内的质子数：(1) 59°～61°；(2) $\theta > \theta_0 = 60°$；(3) $\theta < \theta_0 = 10°$.

**解**　质子束垂直地射到金箔上，散射到 $\theta \to \theta - d\theta$ 范围的概率为

$$\frac{\Delta N}{N} = nt\sigma_C d\Omega = nt\frac{a^2}{16\sin^4\frac{\theta}{2}} 2\pi\sin\theta d\theta$$

(1) 质子散射到 $\theta_1 \to \theta_2$ 范围的相对质子数为

$$\Delta N = Nnt\pi(b_1^2 - b_2^2) = Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\cot^2\frac{\theta_1}{2} - \cot^2\frac{\theta_2}{2}\right)$$

数密度为

$$n = \frac{N_A\rho}{M_{Au}} = \frac{6.02\times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times 18.88\ \text{g/cm}^3}{197\ \text{g/mol}} = 5.77\times 10^{28}/\text{m}^3$$

库仑散射因子为

$$a=\frac{e^2Z_1Z_2}{4\pi\varepsilon_0E_k}=\frac{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times1\times79}{1.2\ \text{MeV}}=94.8\ \text{fm}$$

$$N=\frac{IT}{e}=\frac{5.0\times10^{-9}\ \text{A}\times5\times60\ \text{s}}{1.602\times10^{-19}\ \text{C}}=9.36\times10^{12}$$

计算得

$$\Delta N=Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\cot^2\frac{\theta_1}{2}-\cot^2\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$=9.36\times10^{12}\times5.77\times10^{28}/\text{m}^3\times1.5\ \mu\text{m}\times3.142\times\left(\frac{94.8\ \text{fm}}{2}\right)^2\left[\cot^2\left(\frac{59°}{2}\right)-\cot^2\left(\frac{61°}{2}\right)\right]$$

$$=1.4\times10^9$$

(2) 质子垂直地射到金箔上,以散射角 $\theta>\theta_0=60°$ 散射的粒子数为

$$\Delta N=Nnt\pi b^2=Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\theta_0}{2}\right)^2$$

$$=9.36\times10^{12}\times5.77\times10^{28}/\text{m}^3\times1.5\ \mu\text{m}\times\frac{3.142\times(94.8\ \text{fm})^2}{4}\times\cot^2 30°$$

$$=1.7\times10^{10}$$

(3) 质子垂直地射到金箔上,以散射角 $\theta<\theta_0=10°$ 散射的粒子数为

$$\Delta N=Nnt\pi b^2=Nnt\pi\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\theta_0}{2}\right)^2$$

则在散射角 $\theta<\theta_0=10°$ 范围的粒子数

$$\Delta N'=N-\Delta N=N\left(1-nt\frac{\pi a^2}{4}\cot^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$=9.36\times10^{12}\times\left(1-5.77\times10^{28}/\text{m}^3\times1.5\ \mu\text{m}\times\frac{3.142\times(94.8\ \text{fm})^2}{4}\times\cot^2 5°\right)$$

$$=8.6\times10^{12}$$

# 第二章　原子的量子态：玻尔模型

**2-1**　铯的逸出功为 1.9 eV，试求：

（1）铯的光电效应阈频率及阈值波长；

（2）如果要得到能量为 1.5 eV 的光电子，必须使用多少波长的光照射？

**解**　根据式(6-9)爱因斯坦的光电效应方程

$$\frac{1}{2}mv_m^2=h\nu-\phi$$

式中，$\frac{1}{2}mv_m^2$ 为出射电子的最大动能，$h\nu$ 为入射光子能量，$\phi$ 为金属的逸出功.

（1）铯的逸出功 $\phi=1.9$ eV，当出射电子的最大动能为 0 时，入射光子的频率最小，对应于金属的光电效应阈频率，即

$$h\nu_0=\phi$$

故阈频率为

$$\nu_0=\frac{\phi}{h}=\frac{\phi c}{hc}=\frac{1.9\ \text{eV}\times 3.0\times10^8\ \text{m/s}}{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}=4.6\times10^{14}\ \text{Hz}$$

阈值波长的值为

$$\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}=\frac{3.0\times10^8\ \text{m/s}}{4.6\times10^{14}\ \text{Hz}}=6.5\times10^{-7}\ \text{m}=6.5\times10^2\ \text{nm}$$

（2）若要得到光电子的能量为 $E=\frac{1}{2}mv_m^2=1.5$ eV，则

$$h\nu=\frac{1}{2}mv_m^2+\phi$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{\phi+E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{1.9\ \text{eV}+1.5\ \text{eV}}=3.6\times10^2\ \text{nm}$$

**2-2**　对于氢原子、一次电离的氦离子 $He^+$ 和两次电离的锂离子 $Li^{2+}$，分别计算它们的

（1）第一、第二玻尔轨道半径及电子在这些轨道上的速度；

（2）电子在基态的结合能；

（3）由基态到第一激发态所需的激发能量及由第一激发态退激到基态所放光子的波长.

**解**　由式(7-8)知电子的轨道半径为

$$r_n=\frac{n^2 4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

再根据玻尔角动量量子化条件 $m_e v_n r_n=n\hbar$,得

$$v_n=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}$$

利用组合常量计算

$$r_n=n^2 a_1$$

其中 $a_1$ 为玻尔第一轨道半径,即

$$a_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}=\frac{(\hbar c)^2}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}m_e c^2}=\frac{(197\ \text{nm}\cdot\text{eV})^2}{1.44\ \text{fm}\cdot\text{MeV}\times 0.511\ \text{MeV}}=0.053\text{nm}$$

$$v_n=\frac{v_1}{n}$$

其中 $v_1$ 为电子在第一轨道的速度,即

$$v_1=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}=\frac{e^2 c}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\alpha c=\frac{1}{137}c\quad\left(\alpha=\frac{1}{137}\text{为精细结构常数}\right)$$

玻尔轨道能量公式为

$$E_n=-\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\cdot 2\hbar^2 n^2}=-\frac{Rhc}{n^2}$$

其中 $R=\frac{2\pi^2 e^4 m_e}{(4\pi\varepsilon_0)^2 ch^3}$为里德伯常量. 经计算得

$$Rhc=13.6\ \text{eV}$$

对于类氢离子$He^+$、$Li^{2+}$,只需将公式中的 $e^2$ 换成 $Ze^2$ 即可,$Z$ 为类氢离子的核电荷数. 则有

$$r_n'=\frac{r_n}{Z}=\frac{n^2 r_1}{Z}=0.053\frac{n^2}{Z}\ \text{nm}$$

$$v_n'=Zv_n=\frac{Z}{n}v_1=\frac{Z}{n}\times 2.19\times 10^6\ \text{m/s}$$

$$E_n'=-\frac{Rhc}{n^2}Z^2=\frac{Z^2}{n^2}\times 13.6\ \text{eV}$$

(1) 对氢原子,当 $n=1$ 时有

$$r_1=a_1=0.053\ \text{nm}$$

$$v_1=\frac{1}{137}c=\frac{1}{137}\times 3.0\times 10^8\ \text{m/s}=2.19\times 10^6\ \text{m/s}$$

当 $n=2$ 时有

$$r_2=2^2 r_1=4\times 0.053\ \text{nm}=0.212\ \text{nm}$$

$$v_2=\frac{v_1}{2}=1.09\times10^6\ \text{m/s}$$

对氦离子$He^+$,$Z=2$,则

$$r_1'=\frac{r_1}{Z}=0.053\ \text{nm}\times\frac{1}{2}=0.026\ 5\ \text{nm}$$

$$r_2'=\frac{r_2}{Z}=\frac{2^2r_1}{2}=0.053\ \text{nm}\times2=0.106\ \text{nm}$$

$$v_1'=Zv_1=2\times2.19\times10^6\ \text{m/s}=4.38\times10^6\ \text{m/s}$$

$$v_2'=Zv_2=\frac{Z}{n}v_1=\frac{2}{2}\times2.19\times10^6\ \text{m/s}=2.19\times10^6\ \text{m/s}$$

对锂离子$Li^{2+}$,$Z=3$,则

$$r_1'=\frac{r_1}{Z}=0.053\ \text{nm}\times\frac{1}{3}=0.018\ \text{nm}$$

$$r_2'=\frac{r_2}{Z}=\frac{2^2r_1}{3}=0.053\ \text{nm}\times\frac{4}{3}=0.071\ \text{nm}$$

$$v_1'=Zv_1=3\times2.19\times10^6\ \text{m/s}=6.57\times10^6\ \text{m/s}$$

$$v_2'=Zv_2=\frac{Z}{n}v_1=\frac{3}{2}\times2.19\times10^6\ \text{m/s}=3.29\times10^6\ \text{m/s}$$

(2) 电子在基态的结合能为初速度为零的电子由无穷远处跃迁到基态所释放的能量,与该原子基态的电离能相等. 由于电子在无穷远处的能量为零,则原子的结合能为

$$E=E_\infty-E_k=-E_k=\frac{Rhc}{n^2}Z^2=\frac{Z^2}{n^2}\times13.6\ \text{eV}$$

基态时,$n=1$,则基态结合能

$$E=Z^2\times13.6\ \text{eV}$$

对氢原子,$Z=1$,得

$$E=Z^2\times13.6\ \text{eV}=13.6\ \text{eV}$$

对氦离子$He^+$,$Z=2$,得

$$E=Z^2\times13.6\ \text{eV}=4\times13.6\ \text{eV}=54.4\ \text{eV}$$

对锂离子$Li^{2+}$,$Z=3$,得

$$E=Z^2\times13.6\ \text{eV}=9\times13.6\ \text{eV}=122\ \text{eV}$$

(3) 氢原子或类氢离子基态能量为

$$E_1=-Z^2Rhc$$

氢原子或类氢离子第一激发态能量为

$$E_1=-\frac{1}{4}Z^2Rhc$$

从基态到第一激发态的激发能为

$$\Delta E=E_2-E_1=-\frac{1}{4}Z^2Rhc-(-Z^2Rhc)=Z^2 13.6\ \text{eV}\left(1-\frac{1}{4}\right)=Z^2\times 10.2\ \text{eV}$$

由第一激发态退激到基态所放光子的能量也为 $\Delta E$,则光子的波长为

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}$$

对氢原子,$Z=1$,得

$$\Delta E=Z^2\times 10.2\ \text{eV}=1^2\times 10.2\ \text{eV}=10.2\ \text{eV}$$

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{10.2\ \text{eV}}=122\ \text{nm}$$

对氦离子$He^+$,$Z=2$,得

$$\Delta E=Z^2\times 10.2\ \text{eV}=2^2\times 10.2\ \text{eV}=40.8\ \text{eV}$$

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{40.8\ \text{eV}}=30.4\ \text{nm}$$

对锂离子$Li^{2+}$,$Z=3$,得

$$\Delta E=Z^2\times 10.2\ \text{eV}=3^2\times 10.2\ \text{eV}=91.8\ \text{eV}$$

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{91.8\ \text{eV}}=13.5\ \text{nm}$$

**2-3** 欲使电子与处于基态的锂离子$Li^{2+}$发生非弹性散射,试问电子至少具有多大的动能?

**解** 非弹性散射过程,散射前后体系的机械能发生改变.也就是在散射过程中电子的能量被$Li^{2+}$离子吸收,转化为离子的内能.$Li^{2+}$离子能够吸收的最小能量要能使$Li^{2+}$离子从基态跃迁到第一激发态.故若要发生非弹性碰撞,电子的最小动能应该等于$Li^{2+}$离子从基态跃迁到第一激发态的能量

$$E_k=E_2-E_1$$

类氢离子的能量为

$$E_n=-\frac{Rhc}{n^2}Z^2=-\frac{Z^2}{n^2}\times 13.6\ \text{eV}$$

对于$Li^{2+}$离子,$Z=2$,则

$$E_k=E_2-E_1=\left(-\frac{Rhc}{2^2}Z^2\right)-\left(-\frac{Rhc}{1^2}Z^2\right)=4\times 13.6\ \text{eV}\left(1-\frac{1}{4}\right)=91.8\ \text{eV}$$

**2-4** 运动质子与一个处于静止的基态氢原子作完全非弹性的对心碰撞,欲使原子发射出光子,质子至少应以多大的速度运动?

**解** 与上题类似的,由于发生的是非弹性碰撞,质子能量必须要被氢原子吸收.根据玻尔理论,氢原子吸收的能量只能等于氢原子两个能级的能量差,即

$$\Delta E=E_n-E_1$$

要使质子能量最小,则 $n=2$,即

$$\Delta E=E_2-E_1=-\frac{1}{4}Rhc-(-Rhc)=\frac{3}{4}Rhc$$

设碰撞前质子的速度为 $v$,质子与氢原子发生完全非弹性碰撞,则碰撞前后动量守恒

$$m_p v=(m_p+m_H)v'$$

求解上式,再利用 $m_p\approx m_H$ 得

$$v'=\frac{m_p v}{m_p+m_H}\approx\frac{1}{2}v$$

则质子和氢原子在碰撞前后动能之差为

$$E_k-E_k'=\frac{1}{2}m_p v^2-\frac{1}{2}(m_p+m_H)\left(\frac{v}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m_p v^2\frac{m_H}{m_p+m_H}\approx\frac{1}{4}m_p v^2$$

由能量守恒得到氢原子吸收的能量应该等于质子和氢原子在碰撞前后动能之差

$$\Delta E=\frac{1}{4}m_p v^2=\frac{3}{4}Rhc=10.2\ \text{eV},\quad \text{即}\frac{1}{4}m_p v^2=10.2\ \text{eV}$$

解得

$$v^2=\frac{4\times10.2\times c^2}{m_p c^2}=\frac{40.8\ \text{eV}\times c^2}{938\ \text{MeV}}$$

所以质子的速度为

$$v=6.26\times10^4\ \text{m/s}$$

**2-5**　(1) 原子在热平衡条件下处于不同能量状态的数目是按玻耳兹曼分布的,即处于能量为 $E_n$ 的激发态的原子数为

$$N_n=N_1\frac{g_n}{g_1}e^{-(E_n-E_1)/kT}$$

式中 $N_1$ 是能量为 $E_1$ 状态的原子数,$k$ 为玻耳兹曼常量,$g_n$ 和 $g_1$ 为相应能量状态的统计权重. 试问:原子态的氢在一个大气压,20℃温度的条件下,容器必须多大才能有一个原子处在第一激发态? 已知氢原子处于基态和第一激发态的统计权重分别为 $g_1=2$ 和 $g_2=8$.

(2) 电子与室温下的氢原子气体相碰撞,要观察到 $H_\alpha$ 线,试问电子的最小动能为多大?

**解**　(1) 根据题意,原子在平衡状态下处于能量为 $E_n$ 的激发态的原子数为

$$N_n=N_1\frac{g_n}{g_1}e^{-(E_n-E_1)/kT}$$

式中 $N_1$ 是能量为 $E_1$ 状态的原子数,$g_n$ 和 $g_1$ 为相应能量状态的统计权重.

对于氢原子基态的能量

$$E_1=-13.6\ \text{eV}$$

第一激发态的能量

$$E_2=-\frac{1}{4}\times 13.6\ \text{eV}=-3.4\ \text{eV}$$

氢原子处于基态和第一激发态的统计权重分别为 $g_1=2$ 和 $g_2=8$. 则能量为 $E_2$, 即处于第一激发态的原子数 $N_2$ 为

$$N_2=N_1\frac{g_2}{g_1}e^{-(E_2-E_1)/kT}=N_1\frac{8}{2}e^{-(-3.4+13.6)\times 1.602\times 10^{-19}\ \text{J}/(1.38\times 10^{-23}\ \text{J/K}\times 293.15\ \text{K})}$$

$$=4N_1e^{-403.9}=1.55\times 10^{-175}N_1$$

当 $N_2=1$, 代入上式计算得

$$N_1=6.45\times 10^{174}$$

故至少有 $N=6.45\times 10^{174}$ 个原子才有一个原子处于激发态.

根据理想气体物态方程 $pV=\nu RT=\frac{N}{N_A}RT$, 得到容器的体积 $V$ 为

$$V=\frac{NRT}{N_Ap}=\frac{6.45\times 10^{174}\times 8.31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}\times 293.15\ \text{K}}{6.02\times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times 1.01\times 10^{5}\ \text{Pa}}=2.6\times 10^{149}\ \text{m}^3$$

(2) 氢原子的 $H_\alpha$ 线为巴耳末系的第一条线, 对应于氢原子从 $n=3$ 的状态跃迁到 $n=2$ 的状态. 则若要观察到 $H_\alpha$ 线, 必须使氢原子从基态跃迁到 $n=3$ 的状态. 使氢原子从基态跃迁到 $n=3$ 的状态所需的能量为

$$\Delta E=E_3-E_1=\left(-\frac{Rhc}{3^2}\right)-\left(-\frac{Rhc}{1^2}\right)=13.6\ \text{eV}\left(1-\frac{1}{9}\right)=12.1\ \text{eV}$$

若要观察到 $H_\alpha$ 线, 电子的动能至少应该等于氢原子从基态跃迁到 $n=3$ 的状态的能量, 即

$$E_k=\Delta E=12.1\ \text{eV}$$

**2-6**　在波长从 95 nm 到 125 nm 的光带范围内, 氢原子的吸收光谱中包含哪些谱线?

**解**　在通常温度下, 氢原子都处于基态, 所以吸收光谱是从 $n=1$ 能级向高能级跃迁产生的.

由式(8-4)得

$$\lambda=\frac{1}{R_H\left(1-\frac{1}{n'^2}\right)}$$

由表 8.1 知, $R_H=109\ 677.58\ \text{cm}^{-1}$, 据题意要求波长范围 $95\ \text{nm}<\lambda<125\ \text{nm}$, 所以 $n'$ 取 2、3、4, 其对应的波长分别为

$$n'=2,\quad \lambda=121.6\ \text{nm}$$

$$n'=3,\quad \lambda=102.6\ \text{nm}$$

$$n'=4,\quad \lambda=97.25\ \text{nm}$$

**2-7**　试问哪种类氢离子的巴耳末系和莱曼系的主线的波长差等于133.7 nm?

**解**　类氢离子的能量为

$$E_n=-\frac{Rhc}{n^2}Z^2=-\frac{Z^2}{n^2}\times 13.6\ \text{eV}$$

类氢离子巴耳末系的主线对应于类氢离子从 $n=3$ 的状态跃迁到 $n=2$ 的状态,需要的能量为

$$\Delta E=E_3-E_2=-\frac{Z^2}{9}\times 13.6\ \text{eV}-\left(-\frac{Z^2}{4}\times 13.6\ \text{eV}\right)=\frac{5}{36}Z^2\times 13.6\ \text{eV}$$

巴耳末系主线的波长为

$$\lambda_{32}=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\frac{5}{36}Z^2\times 13.6\ \text{eV}}$$

莱曼系主线对应于类氢离子从 $n=2$ 的状态跃迁到 $n=1$ 的状态,需要的能量为

$$\Delta E=E_2-E_1=-\frac{Z^2}{4}\times 13.6\ \text{eV}-(-Z^2\times 13.6\ \text{eV})=\frac{3}{4}Z^2\times 13.6\ \text{eV}$$

莱曼系主线的波长为

$$\lambda_{21}=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\frac{3}{4}Z^2\times 13.6\ \text{eV}}$$

巴耳末系和莱曼系的主线的波长差等于133.7 nm,则有

$$\lambda_{32}-\lambda_{21}=133.7\ \text{nm}$$

$$\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\frac{5}{36}Z^2\times 13.6\ \text{eV}}-\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\frac{3}{4}Z^2\times 13.6\ \text{eV}}=133.7\ \text{nm}$$

解得 $Z=2$,为氦离子$He^+$.

**2-8**　一次电离的氦离子$He^+$从第一激发态向基态跃迁时所辐射的光子,能使处于基态的氢原子电离,从而放出电子,试求该电子的速度.

**解**　氦离子$He^+$从第一激发态向基态跃迁时所辐射的光子能量为

$$\Delta E=E_2-E_1=-\frac{13.6\ \text{eV}\times Z^2}{2^2}+\frac{13.6\ \text{eV}\times Z^2}{1^2}=13.6\ \text{eV}\times 2^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=40.8\ \text{eV}$$

基态氢原子的电离能为

$$E=E_\infty-E_1=0\ \text{eV}-(-13.6\ \text{eV})=13.6\ \text{eV}$$

电离时放出电子的动能为

$$E_k=\Delta E-E=40.8\ \text{eV}-13.6\ \text{eV}=27.2\ \text{eV}$$

该电子的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m_e}}=\sqrt{\frac{2E_kc^2}{m_ec^2}}=\sqrt{\frac{2\times27.2\ \text{eV}}{0.511\ \text{MeV}}}\times3.0\times10^8\ \text{m/s}=3.10\times10^6\ \text{m/s}$$

**2-9** 电子偶素是由一个正电子和电子所组成的束缚系统,试求出:

(1) 基态时两电子之间距离;

(2) 基态电子的电离能和由基态到第一激发态的激发能;

(3) 由第一激发态退激到基态所放光子的波长.

**解** 电子偶素可以看成类氢原子,氢原子公式中电子的质量 $m_e$ 用核外粒子的折合质量,即

$$m_\mu=\frac{m_em_A}{m_e+m_A}$$

(1) 电子偶素的折合质量

$$m_\mu=\frac{m_em_A}{m_e+m_A}=\frac{1}{2}m_e$$

基态时两电子之间的距离为

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mu e^2}=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\frac{1}{2}m_ee^2}=2a_1=2\times0.053\ \text{nm}=0.106\ \text{nm}$$

(2) 基态电子的电离能

$$E=E_\infty-E_1=R_Ahc$$

$$R_A=R\frac{1}{1+\frac{m_e}{m_A}}=\frac{1}{2}R$$

则电离能为

$$E=\frac{1}{2}Rhc=\frac{1}{2}\times13.6\ \text{eV}=6.8\ \text{eV}$$

基态到第一激发态的激发能

$$\Delta E_{12}=E_2-E_1=\left(-\frac{R_Ahc}{2^2}\right)-\left(-\frac{R_Ahc}{1^2}\right)=\frac{3}{4}R_Ahc=\frac{3}{8}Rhc=5.1\ \text{eV}$$

(3) 由第一激发态退激到基态所放光子的能量为 $\Delta E_{12}$,对应的波长为

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E_{12}}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{5.1\ \text{eV}}=243\ \text{nm}$$

**2-10** $\mu^-$子是一种基本粒子,除静止质量是电子质量的207倍外,其余性质与电子都一样.当它运动速度较慢时,被质子俘获形成 $\mu$ 子原子,试计算:

(1) $\mu$ 子原子的玻尔第一轨道半径;

(2) $\mu$ 子原子的最低能量;

(3) $\mu$ 子原子莱曼线系中的最短波长.

**解**　(1) μ 子可看成类氢原子体系,同上题,要将氢原子公式中电子的质量 $m_e$ 换成核外粒子的折合质量 $m_\mu=\dfrac{m_e m_A}{m_e+m_A}$.

μ 子的折合质量

$$m_\mu=\frac{m_e m_A}{m_e+m_A}=\frac{207\times 1\ 836\ m_e}{207+1\ 836}=186m_e$$

μ 子原子的玻尔第一轨道半径为

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{186m_e e^2}=\frac{a_1}{186}=\frac{1}{186}\times 0.053\ \text{nm}=2.85\times10^{-4}\ \text{nm}$$

(2) μ 子原子的最低能量

$$E_1=-\frac{1}{2}m_\mu(\alpha c)^2=-\frac{1}{2}\times186m_e(\alpha c)^2=-186Rhc=-186\times13.6\ \text{eV}=-2.53\times10^3\ \text{eV}$$

(3) μ 子原子莱曼线系

$$\frac{1}{\lambda}=R_\mu\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

最短波长能量最大,$n$ 取 $\infty$,则

$$\Delta E_{1\infty}=E_\infty-E_1=2.53\times10^3\ \text{eV}$$

对应的最短波长为

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E_{1\infty}}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{2.53\ \text{keV}}=0.49\ \text{nm}$$

**2-11**　已知氢和重氢的里德伯常量之比为 0.999 728,而它们的核质量之比为 $m_H/m_D=0.500\ 20$,试计算质子质量与电子质量之比.

**解**　考虑原子核的运动,根据式(8-3)知里德伯常量为

$$R_A=R_\infty\left(\frac{m_A}{m_A+m_e}\right)$$

氢的里德伯常量为

$$R_H=R_\infty\left(\frac{m_H}{m_H+m_e}\right)$$

重氢的里德伯常量为

$$R_D=R_\infty\left(\frac{m_D}{m_D+m_e}\right)$$

氢和重氢的里德伯常量之比

$$\frac{R_H}{R_D}=\frac{\dfrac{m_e m_H}{m_e+m_H}}{\dfrac{m_e m_D}{m_e+m_D}}=\frac{1+\dfrac{m_e}{m_D}}{1+\dfrac{m_e}{m_H}}=\frac{1+\dfrac{m_e m_H}{m_H m_D}}{1+\dfrac{m_e}{m_H}}$$

已知 $R_H/R_D=0.999\ 728$, $m_H/m_D=0.500\ 20$,则

$$0.999\ 728=\frac{1+0.500\ 20\dfrac{m_e}{m_H}}{1+\dfrac{m_e}{m_H}}$$

解得质子质量与电子质量之比为

$$\frac{m_H}{m_e}=1.84\times10^3$$

**2-12** 当静止的氢原子从第一激发态向基态跃迁放出一个光子时,

(1) 试求这个氢原子所获得的反冲速率为多大?

(2) 试估计氢原子的反冲能量与所发光子的能量之比.

**解** (1) 氢原子从第一激发态向基态跃迁放出光子能量为

$$E=E_2-E_1=-\frac{1}{2^2}Rhc+Rhc=10.2\ \text{eV}$$

该光子的动量为 $p=E/c$,由动量守恒定律可得氢原子的反冲速度为

$$v=\frac{p_H}{m_H}=\frac{pc^2}{m_Hc^2}=\frac{Ec}{m_Hc^2}=\frac{10.2\ \text{eV}}{938\ \text{MeV}}\times3.0\times10^8\ \text{m/s}=3.26\ \text{m/s}$$

(2) 氢原子的反冲能量为

$$E_{kH}=\frac{p_H^2}{2m_H}=\frac{(pc)^2}{2m_Hc^2}=\frac{E^2}{2m_Hc^2}=\frac{(10.2\ \text{eV})^2}{2\times938\ \text{MeV}}=5.55\times10^{-8}\ \text{eV}$$

而放出光子能量为

$$E=10.2\ \text{eV}$$

显然

$$E_{kH}/E=\frac{5.55\times10^{-8}\ \text{eV}}{10.2\ \text{eV}}=5.44\times10^{-9}$$

可见反冲能量是可以忽略不计的.

**2-13** 钠原子的基态为3S,试问钠原子从4P激发态向低能级跃迁时,可产生几条谱线(不考虑精细结构)?

**解** 钠原子被激发至4P态,则原子能级有4P、3D、4S、3P和3S,根据选择定则 $\Delta l=\pm1$,应有6条谱线,对应的跃迁分别为4P→3D,4P→4S,4P→3S,3D→3P,4S→3P,3P→3S,如图2-1所示.

**2-14** 钠原子光谱的共振线(主线系第一条)的波长 $\lambda=589.3$ nm 辅线系线系限的波长 $\lambda_\infty=408.6$ nm,试求:

(1) 3S、3P对应的光谱项和能量;

(2) 钠原子基态电子的电离能和由基态到第一激发态的激发能.

**解** (1) 钠原子的共振线波长

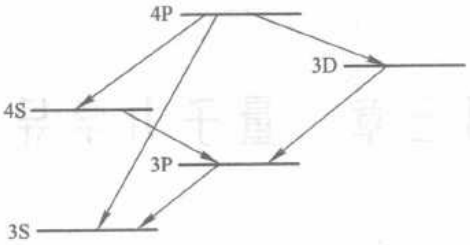


图 2-1

$$\frac{1}{\lambda_c}=T(3S)-T(3P)$$

辅线系线系限

$$\frac{1}{\lambda_\infty}=T(3P)-T(\infty)=T(3P)$$

3P 对应的光谱项为

$$T(3P)=\frac{1}{\lambda_\infty}=\frac{1}{408.6\times10^{-9}\ \mathrm{m}}=2.447\times10^{6}\ \mathrm{m^{-1}}$$

3S 对应的光谱项为

$$T(3S)=\frac{1}{\lambda_c}+T(3P)=\frac{1}{589.3\times10^{-9}\ \mathrm{m}}+2.447\times10^{6}\ \mathrm{m^{-1}}=4.144\times10^{6}\ \mathrm{m^{-1}}$$

3P 对应的能量为

$$E(3P)=-hcT(3P)=-1.24\ \mathrm{nm\cdot keV}\times2.447\times10^{6}\ \mathrm{m^{-1}}=-3.03\ \mathrm{eV}$$

3S 对应的能量为

$$E(3S)=-hcT(3S)=-1.24\ \mathrm{nm\cdot keV}\times4.144\times10^{6}\ \mathrm{m^{-1}}=-5.14\ \mathrm{eV}$$

（2）钠原子基态为 3S 态,第一激发态为 3P 态. 则钠原子基态电子的电离能

$$E=E_\infty-E(3S)=-E(3S)=5.14\ \mathrm{eV}$$

从基态到第一激发态的激发能

$$\Delta E=E(3P)-E(3S)=-3.03\ \mathrm{eV}-(-5.14\ \mathrm{eV})=2.11\ \mathrm{eV}.$$

# 第三章　量子力学导论

**3-1**　电子的能量分别为 10 eV、100 eV 和 1 000 eV 时，试计算其相应的德布罗意波长.

**解**　电子速度远小于光速，则电子动量和能量的关系为

$$p=\sqrt{2m_eE}$$

电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_eE}}=\frac{hc}{\sqrt{2m_ec^2E}}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{2\times0.511\ \text{MeV}\cdot E}}$$

对能量分别为 10 eV、100 eV、1 000 eV 的电子，对应的德布罗意波长分别为

$$\lambda_1=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{2\times0.511\ \text{MeV}\cdot10\ \text{eV}}}=\frac{1.226\ \text{nm}}{\sqrt{10}}=0.39\ \text{nm}$$

$$\lambda_2=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{2\times0.511\ \text{MeV}\cdot100\ \text{eV}}}=\frac{1.226\ \text{nm}}{\sqrt{100}}=0.123\ \text{nm}$$

$$\lambda_3=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{2\times0.511\ \text{MeV}\cdot1\ 000\ \text{eV}}}=\frac{1.226\ \text{nm}}{\sqrt{1\ 000}}=0.039\ \text{nm}$$

**3-2**　设光子和电子的波长均为 0.4 nm，试问：

（1）光子的动量和电子的动量之比是多少？

（2）光子的动能和电子的动能之比是多少？

**解**　（1）已知 $p=h/\lambda$，以及电子和光子的波长

$$\lambda_e=\lambda_\varphi=0.4\ \text{nm}$$

则光子和电子的动量比为 $p_\varphi/p_e=1$

（2）由相对论力学，动量和能量的关系为

$$E^2=m_0^2c^4+p^2c^2$$

对于光子，其静止质量 $m_0=0$，光子的动能为

$$E=pc=\frac{hc}{\lambda}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.4\ \text{nm}}=3.1\times10^3\ \text{eV}$$

而对于电子，其运动速度远小于光速，则电子的动能为

$$E_k=\frac{p^2}{2m_e}=\frac{h^2}{2m_e\lambda^2}=\frac{(hc)^2}{2m_ec^2\lambda^2}=\frac{(1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV})^2}{2\times0.511\ \text{MeV}\times(0.4\ \text{nm})^2}=9.4\ \text{eV}$$

光子的动能和电子的动能之比

$$\frac{E}{E_k}=\frac{3.1\times10^3\ \text{eV}}{9.4\ \text{eV}}=3.3\times10^2$$

**3-3**　若一个电子的动能等于它的静止能量，试求：

（1）该电子的速度为多大？

（2）其相应的德布罗意波长是多少？

**解**　（1）根据爱因斯坦的质能方程，$E=mc^2=E_k+m_0c^2$ 以及 $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$，可得电子动能为

$$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2$$

由上式得

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2m_0$$

解得电子的运动速度为

$$v=\frac{\sqrt{3}c}{2}$$

（2）由德布罗意公式得

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}$$

已知 $m=2m_0$，$v=\frac{\sqrt{3}c}{2}$，代入得

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{h}{\sqrt{3}m_0c}=\frac{hc}{\sqrt{3}m_0c^2}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{3}\times0.511\ \text{MeV}}=1.40\times10^{-3}\ \text{nm}$$

**3-4**　把热中子窄束射在晶体上，由布拉格衍射图样可以求得热中子的能量. 若晶体的两相邻布拉格面间距为 0.18 nm，一级布拉格掠射角（入射束与布拉格面之间的夹角）为 30°，试求这些热中子的能量.

**解**　由布拉格公式 $2d\sin\theta=n\lambda$，得

$$\lambda=\frac{2}{n}d\sin\theta$$

一级布拉格掠射角 $\theta=30°$，$d=0.18$ nm，所以热中子对应的波长为

$$\lambda=2\times0.18\ \text{nm}\times\sin30°=0.18\ \text{nm}$$

则热中子能量为

$$E=\frac{p^2}{2m_n}=\frac{h^2}{2m_n\lambda^2}=\frac{(hc)^2}{2m_nc^2\lambda^2}=\frac{(1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV})^2}{2\times940\ \text{MeV}\times(0.18\ \text{nm})^2}=0.025\ \text{eV}$$

**3-5**　电子显微镜中所用加速电压一般都很高，电子被加速后的速度很大，因而必须考虑相对论修正. 试证明：电子的德布罗意波长与加速电压的关系应为

$$\lambda=\frac{1.226}{\sqrt{V_r}}$$

式中 $V_r=V(1+0.978\times10^{-6}V)$,称为相对论修正电压,其中电子的加速电压 $V$ 的单位是 V. $\lambda$ 的单位是 nm.

**证** 对高速粒子,考虑相对论效应时,动量和能量之间有下列关系:

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4 \tag{1}$$

根据爱因斯坦的质能方程有

$$E=mc^2\approx m_0c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{2}$$

由(1)-(2)$^2$,即得

$$p^2c^2=2E_kE_0+E_k^2=2m_0c^2E_k+E_k^2$$

电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{pc}=\frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2E_k+E_k^2}} \tag{3}$$

而电子被电压 $V$ 加速后的动能为 $E_k=eU=V$ eV ,代入式(3)得

$$\lambda=\frac{1.24\text{nm}\cdot\text{keV}}{\sqrt{2\times0.511\text{MeV}\times V\text{ eV}+(V\text{ eV})^2}}$$

$$=\frac{1.24\times10^3\text{nm}}{\sqrt{2\times0.511\times10^6}}\frac{1}{\sqrt{V\left(1+\dfrac{V}{2\times0.511\times10^6}\right)}}=\frac{1.226}{\sqrt{V_r}}\text{ nm}$$

式中 $V_r=V\left(1+\dfrac{V}{2\times0.511\times10^6}\right)=V(1+0.978\times10^{-6}V)$.

**3-6** (1) 试证明:一个粒子的康普顿波长与其德布罗意波长之比等于 $[(E/E_0)^2-1]^{1/2}$,式中 $E_0$ 和 $E$ 分别是粒子的静止能量和运动粒子的总能量.

(2) 当电子的动能为何值时,它的德布罗意波长等于它的康普顿波长?

**证** (1) 粒子的康普顿波长为

$$\lambda_C=h/m_0c\ (m_0\text{ 为粒子的静止质量})$$

考虑相对论效应有 $E^2=E_0^2+p^2c^2$,则粒子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{\sqrt{E^2-E_0^2}}=\frac{hc}{\sqrt{E^2-m_0^2c^4}}=\frac{hc}{m_0c^2\sqrt{(E/E_0)^2-1}}=\frac{\lambda_C}{\sqrt{(E/E_0)^2-1}}$$

所以,康普顿波长与其德布罗意波长之比为

$$\lambda_C/\lambda=[(E/E_0)^2-1]^{1/2}$$

**解** (2) 当 $\lambda=\lambda_C$ 时,有 $(E/E_0)^2-1=1$,即

$$E/E_0=\sqrt{2}\Longrightarrow E=\sqrt{2}E_0$$

故电子的动能为

$$E_k=E-E_0=(\sqrt{2}-1)E_0=(\sqrt{2}-1)m_0c^2=(\sqrt{2}-1)\times0.511\text{ MeV}=0.21\text{ MeV}$$

**3-7** 一原子的激发态发射波长为 600 nm 的光谱线,测得波长的精度为

$\Delta\lambda/\lambda=10^{-7}$，试问该原子态的寿命为多长？

**解**　原子态的能量不确定度为

$$\Delta E=|h\Delta\nu|=\left|h\left(-\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda\right)\right|=\frac{hc}{\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{600\ \text{nm}}\times10^{-7}=2.07\times10^{-7}\ \text{eV}$$

由海森伯不确定关系 $\Delta E\Delta t\geqslant\hbar/2$ 得

$$\Delta t=\frac{\hbar}{2\Delta E}=\frac{\hbar c}{2\Delta Ec}=\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times2.07\times10^{-7}\ \text{eV}\times3.0\times10^{8}\ \text{m/s}}=1.6\times10^{-9}\ \text{s}$$

所以该原子态的寿命 $\tau$ 应该大于 $1.6\times10^{-9}$ s.

**3-8**　一个电子被禁闭在线度为 10 fm 的区域中，这正是原子核线度的数量级，试计算它的最小动能.

**解**　电子位置的不确定关系为

$$\Delta r=10\ \text{fm}$$

由海森伯不确定关系

$$\Delta p\Delta r\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

则有

$$\Delta p\geqslant\frac{\hbar}{2\Delta r}=\frac{\hbar c}{2\Delta rc}=\frac{197\ \text{fm}\cdot\text{MeV}}{2\times10\ \text{fm}\times c}=\frac{9.85\ \text{MeV}}{c}$$

故动量 $p$ 应大于 $\dfrac{9.85\ \text{MeV}}{c}$，取动量 $p$ 的最小值为

$$p_{\min}=\frac{9.85\ \text{MeV}}{c}$$

若用经典的公式 $p=mv$，则

$$v=\frac{p}{m_e}=\frac{9.85\ \text{MeV}}{m_ec}=\frac{9.85\ \text{MeV}\times c}{m_ec^2}=\frac{9.85\ \text{MeV}\times c}{0.511\ \text{MeV}}\gg c$$

所以要用相对论的能量和动量关系，即

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}\approx pc=9.85\ \text{MeV}$$

则电子的动能为

$$E_k=E-E_0=E-m_0c^2\approx E=9.85\ \text{MeV}$$

**3-9**　已知粒子波函数 $\psi=N\exp\left\{-\dfrac{|x|}{2a}-\dfrac{|y|}{2b}-\dfrac{|z|}{2c}\right\}$，试求：

（1）归一化常数 $N$；

（2）粒子的 $x$ 坐标在 0 到 $a$ 之间的概率；

（3）粒子的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标分别在 $-b\rightarrow+b$ 和 $-c\rightarrow+c$ 之间的概率.

**解**　（1）粒子波函数为

$$\psi=N\exp\left\{-\frac{|x|}{2a}-\frac{|y|}{2b}-\frac{|z|}{2c}\right\}$$

由波函数归一化条件 $\int \psi^* \psi \mathrm{d}\tau = 1$ 得

$$\int \psi^* \psi \mathrm{d}\tau = N^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{a}-\frac{|y|}{b}-\frac{|z|}{c}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 8N^2 \iiint_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 8N^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y}{b}} \mathrm{d}y \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z}{c}} \mathrm{d}z = 8N^2 abc = 1$$

计算得归一化常数为

$$N = \frac{1}{\sqrt{8abc}}$$

(2) 粒子的 $x$ 坐标在 0 到 $a$ 之间的概率为

$$P = \int_0^a \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z (\psi^* \psi) = 4N^2 \int_0^a \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y}{b}} \mathrm{d}y \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z}{c}} \mathrm{d}z$$

$$= 4bc \frac{1}{8abc} \int_0^a \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} a\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

(3) 粒子的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标分别在 $-b \rightarrow +b$ 和 $-c \rightarrow +c$ 之间的概率为

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-b}^{b} \mathrm{d}y \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z (\psi^* \psi) = 2N^2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{-\frac{y}{b}} \mathrm{d}y \int_{-c}^{c} \mathrm{e}^{-\frac{z}{c}} \mathrm{d}z$$

$$= 8 \times \frac{1}{8abc} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \mathrm{d}x \int_0^{b} \mathrm{e}^{-\frac{y}{b}} \mathrm{d}y \int_0^{c} \mathrm{e}^{-\frac{z}{c}} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{abc} ab\left(1 - \frac{1}{e}\right) c\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

**3-10** 若一个体系由一个质子和一个电子组成,设它的归一化空间波函数为 $\psi(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$,其中足标 1,2 分别代表质子和电子,试写出:

(1) 在同一时刻发现质子处于(1,0,0)处,电子处于(0,1,1)处的概率密度;

(2) 发现电子处于(0,0,0),而不管质子在何处的概率密度;

(3) 发现两粒子都处于半径为 1、中心在坐标原点的球内的概率大小.

**解** 概率密度为 $\psi^* \psi = |\psi|^2$.

(1) 质子处于(1,0,0)处,电子处于(0,1,1)处的波函数为 $\psi(1,0,0;0,1,1)$,则概率密度为 $|\psi(1,0,0;0,1,1)|^2$.

(2) 发现电子处于(0,0,0),而不管质子在何处的波函数为 $\psi(x_1, y_1, z_1; 0,0,0)$,则概率密度为 $\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x_1, y_1, z_1; 0,0,0)|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}z_1$.

(3) 发现两粒子都处于半径为 1、中心在坐标原点的球内的概率为

$$P = \int_0^1 r_1^2 \mathrm{d}r_1 \int_0^{\pi} \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \int_0^1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \int_0^{\pi} \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_2 |\psi(r_1, \theta_1, \varphi_1; r_2, \theta_2, \varphi_2)|^2$$

**3-11**　对于在阱宽为 $a$ 的一维无限深阱中运动的粒子，计算在任意本征态 $\psi_n$ 中的平均值 $\bar{x}$ 及 $\overline{(x-\bar{x})^2}$，并证明：当 $n\to\infty$ 时，上述结果与经典结果相一致.

**解**　由式(15-30)知一维无限深阱中运动的粒子的本征态为

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & (n=1,2,3,\cdots;0\leqslant x\leqslant a)\\ 0 & (x<0,x>a)\end{cases}$$

在任意本征态 $\psi_n$ 中的平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)x\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a\left(\frac{x}{2}-\frac{x\cos\dfrac{2n\pi x}{a}}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\,\frac{a^2}{4}=\frac{a}{2}$$

其中 $\int_0^a x\cos\left(\dfrac{2n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{a}{2n\pi}\right)^2\cos\left(\dfrac{2n\pi}{a}x\right)\Big|_0^a=0$

在任意本征态 $\psi_n$ 中的平均值 $\overline{x^2}$ 为

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)x^2\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2\cos\dfrac{2n\pi x}{a}}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

由此得

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{x^2+\bar{x}^2-2x\bar{x}}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{2n^2\pi^2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

由此可得，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{2n^2\pi^2}=\frac{a^2}{12}$$

对于经典情况，粒子在势阱中任何位置的概率相等. 所以粒子处于 $\mathrm{d}x$ 区间内的概率为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{a}$. 则平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\int_0^a x\,\frac{1}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\,\frac{a^2}{2}=\frac{a}{2}$$

平均值 $\overline{x^2}$ 为

$$\overline{x^2}=\int_0^a x^2\,\frac{1}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\,\frac{a^3}{3}=\frac{a^2}{3}$$

代入计算得

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{12}$$

可见 $n\to\infty$ 时的结果与经典结果一致.

**3-12** 求氢原子 1s 态和 2p 态径向电荷密度的最大位置.

**解** 电子在 $r\to r+\mathrm{d}r$ 处的概率为

$$\omega(r)\mathrm{d}r=\int_{\Omega}|\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)|^2 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$$

氢原子 1s 态波函数为

$$\psi_{1,0,0}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}$$

氢原子 1s 态电子的概率为

$$\omega(r)\mathrm{d}r=|\psi_{1,0,0}(r)|^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi r^2}{\pi a_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\mathrm{d}r=\frac{4r^2}{a_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\mathrm{d}r$$

则电荷密度为

$$\rho(r)=-e\omega(r)=-\frac{4r^2e}{a_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}$$

电荷密度取最大值条件为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}=\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{4r^2e}{a_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\left(\frac{8r^2e}{a_1^4}-\frac{8re}{a_1^3}\right)=0$$

解得 $r=a_1=0.053$ nm 时,电荷密度取最大值.

氢原子 2p 态波函数为

$$\psi_{2,1,0}(r,\theta)=\frac{r}{4\sqrt{2\pi a_1^5}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_1}}\cos\theta$$

氢原子 2p 态电子的概率为

$$\omega(r)\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\,|\psi_{2,1,0}(r,\theta)|^2 2\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi r^4}{32\pi a_1^5}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{r^4}{16a_1^5}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\mathrm{d}r\times\frac{2}{3}=\frac{r^4}{24a_1^5}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\mathrm{d}r$$

电荷密度为

$$\rho(r)=-e\omega(r)=-\frac{r^4e}{24a_1^5}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}$$

电荷密度取最大值条件

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{r^4e}{24a_1^5}\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{r}{a_1}}\left(\frac{r^4e}{24a_1^6}-\frac{r^3e}{6a_1^5}\right)=0$$

解得当 $r=4a_1=0.053\ \text{nm}\times4=0.21$ nm 时,电荷密度取最大值.

**3-13** 设氢原子处在波函数为 $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}}\mathrm{e}^{-r/a_1}$ 的基态,$a_1$ 为玻尔第

一半径，试求势能 $U(r)=-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 的平均值.

**解**　势能的平均值为

$$\begin{aligned}\overline{U}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{*}U\psi\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{\infty}|\psi|^2\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi a_1^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r=-\int_0^{\infty}\frac{e^2 r}{a_1^3\pi\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\mathrm{d}r\\&=-\frac{e^2}{a_1^3\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}r\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_1}}\mathrm{d}r=-\frac{e^2}{a_1^3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_1}\end{aligned}$$

**3-14**　证明下列对易关系：$[\hat{y},\hat{p}_y]=\mathrm{i}\hbar$，$[\hat{x},\hat{p}_y]=0$，$[\hat{x},\hat{L}_x]=0$，$[\hat{x},\hat{L}_y]=\mathrm{i}\hbar z$，$[\hat{p}_x,\hat{L}_x]=0$，$[\hat{p}_z,\hat{L}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{p}_z$

**证**　$$[\hat{y},\hat{p}_y]\psi=\hat{y}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi-(-\mathrm{i}\hbar)\psi$$

$$=\hat{y}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi+\mathrm{i}\hbar\psi+\hat{y}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\psi=\mathrm{i}\hbar\psi$$

所以 $[\hat{y},\hat{p}_y]=\mathrm{i}\hbar$.

$$[\hat{x},\hat{p}_y]\psi=\hat{x}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi-\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{x}\psi$$

$$=\hat{x}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi+\hat{x}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\psi=0$$

同样可证 $[\hat{x},\hat{p}_y]=0$.

$$\begin{aligned}[\hat{x},\hat{L}_x]&=[\hat{x},\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y]=[\hat{x},\hat{y}\hat{p}_z]-[\hat{x},\hat{z}\hat{p}_y]\\&=\hat{y}[\hat{x},\hat{p}_z]+[\hat{x},\hat{y}]\hat{p}_z-\hat{z}[\hat{x},\hat{p}_y]-[\hat{x},\hat{z}]\hat{p}_y=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\hat{x},\hat{L}_y]&=[\hat{x},\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z]=[\hat{x},\hat{z}\hat{p}_x]-[\hat{x},\hat{x}\hat{p}_z]\\&=\hat{z}[\hat{x},\hat{p}_x]+[\hat{x},\hat{z}]\hat{p}_x-\hat{x}[\hat{x},\hat{p}_z]-[\hat{x},\hat{x}]\hat{p}_z=\mathrm{i}\hbar\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\hat{p}_x,\hat{L}_x]&=[\hat{p}_x,\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y]=[\hat{p}_x,\hat{y}\hat{p}_z]-[\hat{p}_x,\hat{z}\hat{p}_y]\\&=\hat{y}[\hat{p}_x,\hat{p}_z]+[\hat{p}_x,\hat{y}]\hat{p}_z-\hat{z}[\hat{p}_x,\hat{p}_y]-[\hat{p}_x,\hat{z}]\hat{p}_y=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\hat{p}_x,\hat{L}_y]&=[\hat{p}_x,\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z]=[\hat{p}_x,\hat{z}\hat{p}_x]-[\hat{p}_x,\hat{x}\hat{p}_z]\\&=\hat{z}[\hat{p}_x,\hat{p}_x]+[\hat{p}_x,\hat{z}]\hat{p}_x-\hat{x}[\hat{p}_x,\hat{p}_z]-[\hat{p}_x,\hat{x}]\hat{p}_z=\mathrm{i}\hbar\hat{p}_z\end{aligned}$$

**3-15**　设质量为 $m$ 的粒子在半壁无限高的一维方阱中运动，此方阱的表达式为

$$V(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\0 & (0\leqslant x\leqslant a)\\V_0 & (x>a)\end{cases}$$

试求在 $E<V_0$ 的束缚态情况下：

(1) 粒子能级的表达式；

(2) 证明在此阱中至少存在一个束缚态的条件是，阱深 $V_0$ 和阱宽 $a$ 之间满足关系式：

$$V_0 a^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{32m}$$

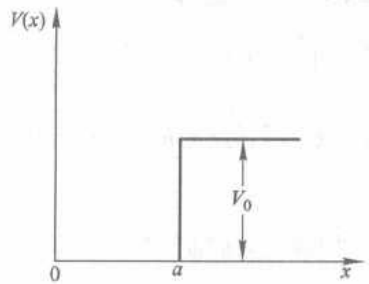


图 3-1

**解**　(1) $V(x)$ 与 $t$ 无关，是定态问题. 其定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

在各区域的具体形式为

$$\text{Ⅰ}\quad x<0\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_1(x)+V(x)\psi_1(x)=E\psi_1(x)\tag{1}$$

$$\text{Ⅱ}\quad 0\leqslant x\leqslant a\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_2(x)=E\psi_2(x)\tag{2}$$

$$\text{Ⅲ}\quad x>a\qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_3(x)+V_0\psi_3(x)=E\psi_3(x)\tag{3}$$

由于在方程(1)中，由于 $V(x)=\infty$，要等式成立，必须

$$\psi_1(x)=0$$

方程(2)可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_2(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2(x)=0$$

令 $k_1^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_2(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_1^2\psi_2(x)=0$$

其解为

$$\psi_2(x)=A\sin k_1x+B\cos k_1x$$

方程(3)可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_3(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi_3(x)=0$$

令 $k_2^2=\dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_3(x)}{\mathrm{d}x^2}-k_2^2\psi_3(x)=0$$

其解为

$$\psi_3(x)=C\mathrm{e}^{k_2x}+D\mathrm{e}^{-k_2x}$$

当 $x\to\infty$ 时，$\psi_3(x)$ 有限，则有 $C=0$.

根据波函数连续性条件得

$$\psi_2(0)=B=\psi_1(0)=0$$

$$\psi_2(a)=A\sin\ k_1a=\psi_3(a)=D\mathrm{e}^{-k_2a} \tag{4}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=Ak_1\cos\ k_1a=\left.\frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=-Dk_2\mathrm{e}^{-k_2a} \tag{5}$$

由式(4)、(5)得

$$\tan\ k_1a=-\frac{k_1}{k_2}$$

即 $\tan\sqrt{\dfrac{2mEa^2}{\hbar^2}}=-\sqrt{\dfrac{E}{V_0-E}}$，此即为粒子能级的表达式.

(2) 已知 $\tan\ k_1a=-\dfrac{k_1}{k_2}$，因为 $k_1>0,k_2>0$　则有 $\tan\ k_1a<0$，故 $k_1a>\dfrac{\pi}{2}$，则

$$k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}<\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}a>k_1a>\frac{\pi}{2}$$

由此可得

$$\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}a>\frac{\pi}{2}$$

解得

$$V_0a^2\geqslant\frac{\pi^2\hbar^2}{8m}=\frac{h^2}{32m}$$

**3-16**　在宏观世界中，汽车闯入客厅的概率为多少?

**解**　可近似用方势垒的穿透概率来估算.

对能量为 $E$ 的微观粒子，相对于高度为 $V_0(>E)$，厚度为 $D$ 的方势垒的穿透

概率为

$$P=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}D}$$

在宏观世界中,对汽车闯入客厅情况,取汽车的质量为 $m=10^3\ \mathrm{kg}$

势垒高度取汽车速度为 $v_0=50\ \mathrm{m/s}$ 时的能量,则势垒高度为

$$V_0=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times10^3\ \mathrm{kg}\times(50\ \mathrm{m/s})^2=1.25\times10^6\ \mathrm{J}$$

汽车停放在车库,则汽车可能具有的能量 $E\ll V_0$. 势垒厚度即车库的墙壁厚度为

$$D=0.2\ \mathrm{m}$$

代入数据计算得

$$P=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}D}=e^{-\frac{2}{1.05\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}\sqrt{2\times10^3\ \mathrm{kg}\times1.25\times10^6\ \mathrm{J}}\times0.2\ \mathrm{m}}=e^{-1.9\times10^{38}}\approx10^{-155}$$

说明透射系数非常微小.

# 第四章　原子的精细结构:电子的自旋

**4-1**　一束电子进入 1.2 T 的均匀磁场时,试问电子自旋平行于和反平行于磁场的电子的能量差为多大?

**解**　电子具有自旋,则存在与自旋相联系的磁矩 $\mu_s$,它在磁场作用下的能量为

$$U=-\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{B}$$

电子自旋方向与磁场平行和反平行,则有

$$U=-\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{B}=-\mu_{sz}B=g_s m_s\mu_B B\quad\left(\text{其中 } g_s=2, m_s=\pm\frac{1}{2}\right)$$

所以电子自旋平行于和反平行于磁场的电子的能量为

$$U=\pm\mu_B B$$

则电子自旋平行于和反平行于磁场的电子的能量差为

$$\Delta U=2\mu_B B=2\times 0.578\ 8\times10^{-4}\ \text{eV}\cdot\text{T}^{-1}\times 1.2\ \text{T}=1.4\times10^{-4}\ \text{eV}$$

**4-2**　试计算原子处于 $^2D_{3/2}$ 状态的磁矩 $\mu$ 及投影 $\mu_z$ 的可能值.

**解**　对于处于 $^2D_{3/2}$ 状态的原子,其角动量量子数分别为

$$L=2;2S+1=2;S=\frac{1}{2};J=\frac{3}{2},m_J=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g_J=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-2(2+1)}{2\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{4}{5}$$

原子的磁矩为

$$\mu_J=-g_J\sqrt{J(J+1)}\,\mu_B=-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}\,\mu_B=-1.55\mu_B$$

原子的磁矩投影为

$$\mu_{Jz}=-m_J g_J\mu_B=\left(\pm\frac{6}{5},\pm\frac{2}{5}\right)\mu_B$$

**4-3**　试证实:原子在 $^6G_{3/2}$ 状态的磁矩等于零,并根据原子矢量模型对这一事实作出解释.

**解**　对于处于 $^6G_{3/2}$ 状态的原子,其角动量量子数分别为

$$L=4;2S+1=6;S=\frac{5}{2};J=\frac{3}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)-4(4+1)}{2\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}=0$$

原子的总磁矩为

$$\mu_J=-g_J\sqrt{J(J+1)}\,\mu_B=0$$

根据矢量模型(图 4-1),总磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 不在总角动量 $\boldsymbol{J}$ 的延长线上,它可以分解为两个分量,一个垂直于总角动量 $\boldsymbol{J}$ 方向,由于它绕 $\boldsymbol{J}$ 转动,对外总效果为 0,另一个沿总角动量 $\boldsymbol{J}$ 方向记作 $\mu_J$.

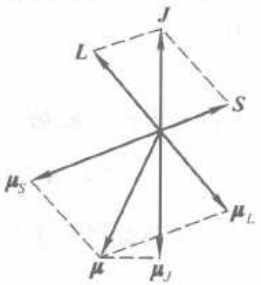

图 4-1

$$\mu=\mu_J=\mu_L\cos(\boldsymbol{L},\boldsymbol{J})+\mu_S\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{J})$$

轨道磁矩 $\mu_L=-g_L\hat{L}\mu_B$,其中 $g_L=1,\hat{L}=\sqrt{L(L+1)}\,\hbar$

自旋磁矩 $\mu_S=-g_S\hat{S}\mu_B$,其中 $g_S=2,\hat{S}=\sqrt{S(S+1)}\,\hbar$

利用三角形的余弦定理,角动量 $\boldsymbol{L}$ 和总角动量 $\boldsymbol{J}$ 夹角的余弦 $\cos(\boldsymbol{L},\boldsymbol{J})$ 为

$$\cos(\boldsymbol{L},\boldsymbol{J})=\frac{\hat{J}^2\hbar^2+\hat{L}^2\hbar^2-\hat{S}^2\hbar^2}{2\hat{J}\hat{L}\hbar^2}=\frac{J(J+1)+L(L+1)-S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)L(L+1)}}$$

角动量 $\boldsymbol{S}$ 和总角动量 $\boldsymbol{J}$ 夹角的余弦 $\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{J})$ 为

$$\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{J})=\frac{\hat{J}^2\hbar^2+\hat{S}^2\hbar^2-\hat{L}^2\hbar^2}{2\hat{J}\hat{S}\hbar^2}=\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)S(S+1)}}$$

则总磁矩 $\mu$ 为

$$\begin{aligned}\mu_J&=\mu_L\cos(\boldsymbol{L},\boldsymbol{J})+\mu_S\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{J})\\&=(-g_L\hat{L}\mu_B)\cos(\boldsymbol{L},\boldsymbol{J})+(-g_S\hat{S}\mu_B)\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{J})\\&=-\mu_B\frac{J(J+1)+L(L+1)-S(S+1)}{2\sqrt{J(J+1)}}-2\mu_B\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}}\\&=-\mu_B\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)+4(4+1)-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)}{2\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}}-2\mu_B\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)-4(4+1)}{2\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}}\\&=0\end{aligned}$$

可见原子在 $^6G_{3/2}$ 状态的磁矩等于零是因为 $\boldsymbol{\mu}_L$ 和 $\boldsymbol{\mu}_S$ 在总角动量 $J$ 方向的投影之和为零.

**4-4**　在施特恩-盖拉赫实验中,处于基态的窄的银原子束通过极不均匀的横向磁场,并射到屏上,磁极的纵向范围 $d=10$ cm,磁极中心到屏的距离 $D=25$ cm. 如果银原子的速率为 400 m/s,线束在屏上的分裂间距为 2.0 mm,试问磁场强度的梯度值应为多大? 银原子的基态为 $^2S_{1/2}$,质量为 107.87 u.

**解**　银原子的基态为 $^2S_{1/2}$,其角动量量子数分别为

$$l=0;2s+1=2;s=\frac{1}{2};j=\frac{1}{2},m_j=\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g=\frac{3}{2}+\frac{s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-0}{2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}=2$$

在施特恩-盖拉赫实验中,银原子束打到屏上,偏离 $x$ 轴的距离为

$$z=\mu_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{3kT}=-m_jg_j\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{mv^2}$$

则线束在屏上的分裂间距为

$$\Delta z=2\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{mv^2}$$

磁场强度的梯度值为

$$\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\Delta zmv^2}{2\mu_BdD}=\frac{2.0\text{mm}\times107.87\times1.66\times10^{-27}\text{kg}\times(400\text{m/s})^2}{2\times0.927\times10^{-23}\text{J/T}\times10\text{cm}\times25\text{cm}}=1.2\times10^2\text{T/m}$$

**4-5**　在施特恩-盖拉赫实验中,不均匀横向磁场梯度值为 $\frac{\partial B_z}{\partial z}=5.0\text{T/cm}$,磁场的纵向范围 $d=10$ cm,磁极中心到屏的距离 $D=30$ cm,使用原子束是处于基态 $^4F_{3/2}$ 的矾原子,原子动能 $E_k=50$ meV. 试求屏上线束边缘成分之间的距离.

**解**　矾原子的基态为 $^4F_{3/2}$,其角动量量子数分别为

$$L=3;2S+1=4,S=\frac{3}{2};J=\frac{3}{2},m_J=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g_J=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-3(3+1)}{2\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{2}{5}$$

则有

$$m_Jg_J=\pm\frac{3}{5},\pm\frac{1}{5}$$

原子束打到屏上,偏离 $x$ 轴的距离为

$$z=\mu_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{3kT}=-m_j g_j\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{2E_k}$$

屏上线束边缘成分之间距离为

$$\Delta z=\frac{6}{5}\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{2E_k}=\frac{6}{5}\times 0.578\ 8\times10^{-4}\text{eV/T}\times 5.0\ \text{T/cm}\times\frac{30\ \text{cm}\times 10\ \text{cm}}{2\times 50\ \text{meV}}=1.0\times10^{-2}\ \text{m}$$

**4-6** 在施特恩-盖拉赫实验中,原子态的氢从温度为400 K的炉中射出,在屏上接收到的两条氢束线,间距为0.60 cm.若把氢原子换成氯原子(基态为$^2P_{3/2}$),其他实验条件不变,那么,在屏上可以接收到几条氯束线?其相邻两束的间距为多少?

**解** 氢原子的基态为$^2S_{1/2}$,其角动量量子数分别为

$$l=0;2s+1=2,s=\frac{1}{2};j=\frac{1}{2},m_j=\pm\frac{1}{2}$$

因为$l=0$,则朗德$g$因子为

$$g_j=g_s=2$$

则有

$$m_j g_j=\pm1$$

氢原子线束在屏上的分裂间距为

$$\Delta z_1=2\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{3kT}$$

氯原子的基态为$^2P_{3/2}$,其角动量量子数分别为

$$L=1;2S+1=2,S=\frac{1}{2};J=\frac{3}{2},m_J=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$$

在屏上可以接收到4条氯束线.朗德$g$因子为

$$g_J=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-1(1+1)}{2\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{4}{3}$$

则有

$$m_J g_J=\pm\frac{2}{3},\pm\frac{6}{3}$$

氯原子线束在屏上的分裂间距为

$$\Delta z_2=\frac{4}{3}\mu_B\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dD}{3kT}$$

氢原子线束和氯原子线束在屏上的分裂间距之比为

$$\frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}=\frac{2\mu_B\dfrac{\partial B_z}{\partial z}\dfrac{dD}{3kT}}{\dfrac{4}{3}\mu_B\dfrac{\partial B_z}{\partial z}\dfrac{dD}{3kT}}=\frac{3}{2}$$

已知 $\Delta z_1=0.6$ cm,代入计算得

$$\Delta z_2=0.4\ \text{cm}$$

**4-7**　试问波数差为 29.6 $\text{cm}^{-1}$的莱曼系主线双重线,属于何种类氢离子.

**解**　类氢离子莱曼系主线对应 $n'=2\to n=1$ 的跃迁,考虑选择定则,它对应 2P→1S 的跃迁,如图 4-2 所示. 由于自旋-轨道相互作用,2P 能级将分裂为两条,由式(21-12′)可得其波数差为

$$\Delta\tilde{\nu}=\frac{Z^4}{n^3l(l+1)}\times 5.84\ \text{cm}^{-1}$$

则类氢离子莱曼系主线双重线的波数差也为 $\Delta\tilde{\nu}$. 对 2P 能级,其量子数分别为

$$n=2,\quad l=1$$

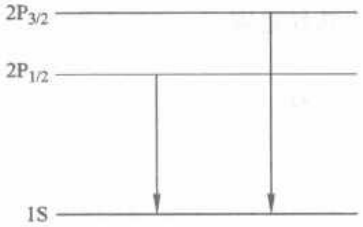


图 4-2

已知 $\Delta\tilde{\nu}=29.6\ \text{cm}^{-1}$,则有

$$29.6\ \text{cm}^{-1}=\frac{Z^4}{2^3\times 1(1+1)}\times 5.84\ \text{cm}^{-1}$$

计算得 $Z=3$,所以该类氢离子为$Li^{2+}$离子.

**4-8**　试估计作用在氢原子 2P 态电子上的磁场强度.

**解**　对 2P 能级,其量子数分别为 $n=2,l=1$

由于自旋-轨道相互作用,氢原子 2P 能级将分裂为两条,由式(21-12′)可得其能量差为

$$\Delta U=\frac{Z^4}{n^3l(l+1)}\times 7.25\times10^{-4}\ \text{eV}=\frac{7.25\times10^{-4}\ \text{eV}}{2^3\times2}=4.53\times10^{-5}\ \text{eV}$$

自旋磁矩在磁场中的能量为

$$U=-\boldsymbol{\mu}_s\cdot\boldsymbol{B}=-\mu_{sz}B=g_s m_s\mu_B B=\pm\mu_B B$$

由此引起的能量差为

$$\Delta U=2\mu_B B$$

氢原子 2P 态电子上的磁场强度为

$$B=\frac{\Delta U}{2\mu_B}=\frac{4.53\times10^{-5}\ \text{eV}}{2\times0.578\ 8\times10^{-4}\ \text{eV}\cdot\text{T}^{-1}}=0.39\ \text{T}$$

**4-9**　试用经典物理方法推出正常塞曼效应.

**解**　取磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向沿 $z$ 轴. 原子具有磁矩 $\boldsymbol{\mu}$,因而具有势能

$$U=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}=-\mu_z B$$

其中 $\mu_z$ 为磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 在磁场方向的投影，$\mu_z=-mg\mu_B$，代入得 $U=mg\mu_B B$.

原子在两个能级之间跃迁时，如果无外磁场，则 $h\nu=E_2-E_1$. 表现为一条谱线. 如果有外场 $\boldsymbol{B}$，则每一个能级都会发生分裂：

$$E_2'=E_2+m_2g_2\mu_B B$$

$$E_1'=E_1+m_1g_1\mu_B B$$

而观察到的只是能级的差值，则

$$h\nu'=E_2'-E_1'=(E_2-E_1)+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B$$

当体系的自旋为零时，$g_2=g_1=1$，则

$$h\nu'=h\nu+(m_2-m_1)\mu_B B$$

由选择定则

$$\Delta m=m_2-m_1=0,\pm1$$

所以有

$$h\nu'=h\nu+\begin{Bmatrix}\mu_B B\\0\\-\mu_B B\end{Bmatrix}$$

裂为三条谱线.

**4-10**　锌原子的光谱中的一条谱线($^3S_1\rightarrow{}^3P_0$)在 $B$ 为 1.00 T 的磁场中发生塞曼分裂，试问：从垂直于磁场方向观察，原谱线分裂为几条？相邻两谱线的波数差等于多少？是否属正常塞曼效应？并请画出相应的能级跃迁图.

**解**　对于锌原子$^3S_1\rightarrow{}^3P_0$ 跃迁，考虑到光源在磁场中的塞曼效应，

$$h\nu'=h\nu+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B,\quad \Delta\tilde{\nu}=(m_2g_2-m_1g_1)L$$

对原子态$^3S_1$，其量子数分别为

$$2S+1=3,S=1;L=0;J=1,m_J=0,\pm1$$

$L=0$，则朗德因子 $g=2$，故有 $m_2g=0,\pm2$.

对原子态$^3P_0$，其量子数分别为

$$2S+1=3,S=1;L=1;J=0,m_J=0$$

则有 $m_1g=0$.

利用格罗春图(图 4-3)，则

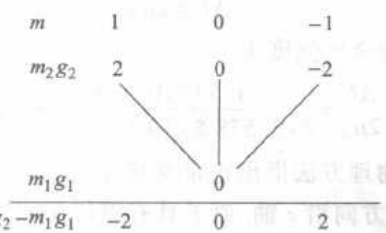


图 4-3

根据跃迁选择规则 $\Delta m_j=0,\pm1$,有

$$\Delta\tilde{\nu}=(-2,0,2)L$$

其中 $$L=\frac{eB}{4\pi m_e c}=\frac{1.602\times10^{-19}\ \text{C}\times1\text{T}}{4\pi\times9.11\times10^{-31}\ \text{kg}\times3.0\times10^{8}\ \text{m/s}}=46.7\ \text{m}^{-1}$$

在垂直于磁场方向观察,该谱线在外加磁场中分裂为三条,一条为 π 线($\Delta m=0$),两条为 σ 线($\Delta m=\pm1$). 相邻两谱线波数差为

$$\Delta\tilde{\nu}=2L=2\times46.7\ \text{m}^{-1}=93.4\ \text{m}^{-1}$$

该谱线分裂不属于正常塞曼效应($S\neq0$). 相应的能级图如图 4-4 所示.

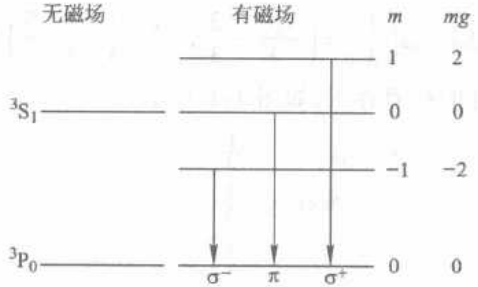


图 4-4

**4-11**　试计算在 $B$ 为 2.5 T 的磁场中,钠原子的 D 双线所引起的塞曼分裂.

**解**　钠原子的 D 双线所对应的跃迁为

$$^2P_{3/2}\rightarrow{}^2S_{1/2},\quad {}^2P_{1/2}\rightarrow{}^2S_{1/2}$$

原子态$^2P_{3/2}$、$^2P_{1/2}$、$^2S_{1/2}$对应的量子数如下表所示.

| | $L$ | $S$ | $J$ | $m$ | $g$ | $mg$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $^2S_{1/2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\pm\frac{1}{2}$ | 2 | ±1 |
| $^2P_{1/2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\pm\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\pm\frac{1}{3}$ |
| $^2P_{3/2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\pm\frac{2}{3},\pm2$ |

根据光源在磁场中的塞曼效应,

$$h\nu'=h\nu+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B,\quad \Delta\tilde{\nu}=(m_2g_2-m_1g_1)L$$

在外磁场中$^2P_{3/2}$分裂为四个塞曼能级,间距为$\frac{4}{3}\mu_B B$;$^2P_{1/2}$分裂为两个塞曼能级,间距为$\frac{2}{3}\mu_B B$;$^2S_{1/2}$分裂为两个塞曼能级,间距为 $2\mu_B B$.

借助格罗春图(图 4-5)计算波数的改变,对$^2P_{3/2}\rightarrow{}^2S_{1/2}$跃迁

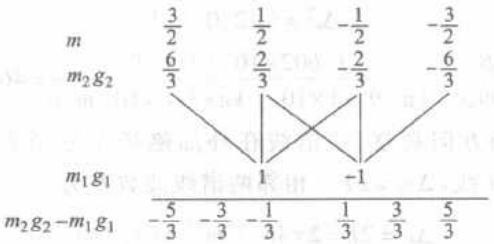


图 4-5

$$\Delta\tilde{\nu}=\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{3}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{3}{3},\frac{5}{3}\right)L$$

$^2P_{1/2}\rightarrow{}^2S_{1/2}$跃迁的格罗春图,如图 4-6 所示. 则

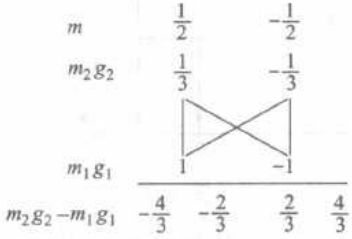


图 4-6

$$\Delta\tilde{\nu}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)L$$

上面式中 $L=\dfrac{eB}{4\pi m_e c}=\dfrac{1.602\times10^{-19}\ \text{C}\times2.5\ \text{T}}{4\pi\times9.11\times10^{-31}\ \text{kg}\times3.0\times10^{8}\ \text{m/s}}=1.17\times10^{2}\ \text{m}^{-1}$

**4-12**　钾原子的价电子从第一激发态向基态跃迁时,产生两条精细结构谱线,其波长分别为 766.4 nm 和 769.9 nm,现将该原子置于磁场 $B$ 中(设为弱场),使与此两精细结构谱线有关的能级进一步分裂.

(1) 试计算能级分裂的大小,并绘出分裂后的能级图.

(2) 如欲使分裂后的最高能级与最低能级间的差距 $\Delta E_2$ 等于原能级差 $\Delta E_1$ 的 1.5 倍,所加磁场 $\boldsymbol{B}$ 应为多大?

**解**　(1) 钾原子基态电子组态 4s;原子态为 $4^2S_{1/2}$.

第一激发态为 4p,对应的原子组态为 $4^2P_{3/2}$,$4^2P_{1/2}$;第一激发态向基态跃迁为 $4^2P_{3/2}\rightarrow4^2S_{1/2}$,$4^2P_{1/2}\rightarrow4^2S_{1/2}$.

对原子态 $4^2P_{3/2}$,其对应的角动量量子数为

$$s=\frac{1}{2};l=1;j=\frac{3}{2},m_j=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g_j=\frac{3}{2}+\frac{s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-1(1+1)}{2\times\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{4}{3}$$

则有

$$m_jg_j=\pm\frac{6}{3},\pm\frac{2}{3}$$

对原子态 $4^2P_{1/2}$ 其对应的角动量量子数为

$$s=\frac{1}{2};l=1;j=\frac{1}{2},m_j=\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为

$$g_j=\frac{3}{2}+\frac{s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-1(1+1)}{2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{2}{3}$$

则有

$$m_jg_j=\pm\frac{1}{3}$$

对原子态 $4^2S_{1/2}$ 其对应的角动量量子数为

$$s=\frac{1}{2};l=0;j=\frac{1}{2},m_j=\pm\frac{1}{2}$$

朗德 $g$ 因子为 $g=2$,则有 $m_jg_j=\pm1$.

在磁场中,引起的附加能量为

$$E=-\boldsymbol{\mu}_j\cdot\boldsymbol{B}=-\mu_{jz}B=g_jm_j\mu_BB$$

对应的能级(图 4-7)为

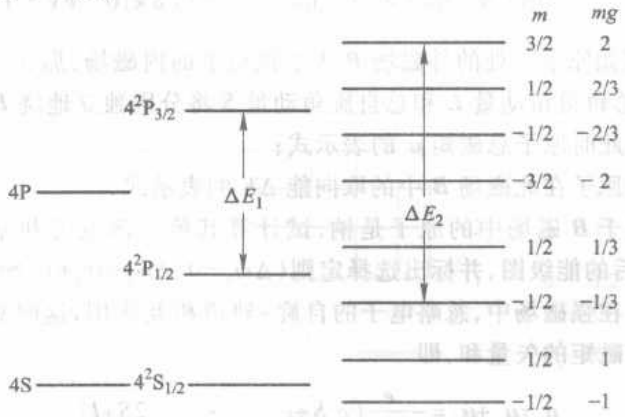


图 4-7

所以 $4^2P_{3/2}$ 能级分裂的能级间距为

$$\Delta E_2' = \frac{4}{3}\mu_B B$$

$4^2P_{1/2}$ 能级分裂的能级间距为

$$\Delta E_1' = \frac{2}{3}\mu_B B$$

$4^2S_{1/2}$ 能级分裂的能级间距为

$$\Delta E_0' = 2\mu_B B$$

(2) 由能级图可以看出分裂后的最高与最低能级差 $\Delta E_2$ 与原能级差 $\Delta E_1$ 的关系为

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= \Delta E_1 + 1.5\Delta E_2' + 0.5\Delta E_1' \\ &= \Delta E_1 + 1.5\times\frac{4}{3}\mu_B B + 0.5\times\frac{2}{3}\mu_B B = \Delta E_1 + \frac{7}{3}\mu_B B\end{aligned}$$

已知精细结构谱线分别为 $\lambda_1 = 766.4$ nm 和 $\lambda_2 = 769.9$ nm,则能量差 $\Delta E_1$ 又可以表示为

$$\Delta E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}$$

已知 $\Delta E_2 = 1.5\Delta E_1$,则有

$$\frac{7}{3}\mu_B B = 0.5\Delta E_1$$

由此得所加磁场 $B$ 为

$$\begin{aligned}B &= \frac{0.5\Delta E_1}{\frac{7}{3}\mu_B} = \frac{0.5hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2\frac{7}{3}\mu_B} \\ &= \frac{0.5\times 1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}\times(769.9\ \text{nm} - 766.4\ \text{nm})}{769.9\ \text{nm}\times 766.4\ \text{nm}\times\frac{7}{3}\times 0.578\ 8\times 10^{-4}\ \text{eV}\cdot\text{T}^{-1}} = 27.2\ \text{T}\end{aligned}$$

**4-13** 假如原子所处的外磁场 $\boldsymbol{B}$ 大于该原子的内磁场,那么,原子的 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 耦合将解脱,总轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 和总自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 将分别独立地绕 $\boldsymbol{B}$ 旋进.

(1) 写出此时原子总磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的表示式;

(2) 写出原子在此磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的取向能 $\Delta E$ 的表示式;

(3) 如置于 $\boldsymbol{B}$ 磁场中的原子是钠,试计算其第一激发态和基态的能级分裂,绘出分裂后的能级图,并标出选择定则($\Delta m_s = 0, \Delta m_l = 0, \pm 1$)所允许的跃迁.

**解** (1) 在强磁场中,忽略电子的自旋-轨道相互作用,这时总磁矩等于自旋磁矩与轨道磁矩的矢量和,即

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e}(g_s\boldsymbol{S} + g_l\boldsymbol{l}) = -\frac{e}{2m_e}(2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{l})$$

(2) 原子在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的取向能 $\Delta E$ 的表达式为

$$\Delta E=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{\mu}_s+\boldsymbol{\mu}_l)\cdot\boldsymbol{B}=(m_l+2m_s)\mu_B B$$

(3) 钠原子的基态为 3S,第一激发态为 3P,第一激发态向基态跃迁为 3P→3S.

对 3P 态,其量子数为

$$l=1,m_l=0,\pm1;s=\frac{1}{2},m_s=\pm\frac{1}{2}$$

则有

$$m_l+2m_s=0,\pm1,\pm2$$

在此磁场中钠的第一激发态 3P 分裂为 5 条. 其取向能为

$$\Delta E=(0,\pm1,\pm2)\mu_B B$$

对 3S 态,其量子数为

$$l=0,m_l=0;s=\frac{1}{2},m_s=\pm\frac{1}{2}$$

则有

$$m_l+2m_s=\pm1$$

在此磁场中钠的基态 3S 分裂为 2 条. 其取向能为

$$\Delta E=(\pm1)\mu_B B$$

根据选择定则

$$\Delta m_s=0,\quad \Delta m_l=0,\pm1$$

它们之间可发生 6 条跃迁,由于较高的各能级的间距相等,只能产生三个能量差值,$\Delta E=(1,0,-1)\mu_B B$,因此只能观察到三条谱线,其中一条与不加磁场时相同,这时塞曼效应被帕邢-巴克效应所代替.

对应的能级图如图 4-8 所示.

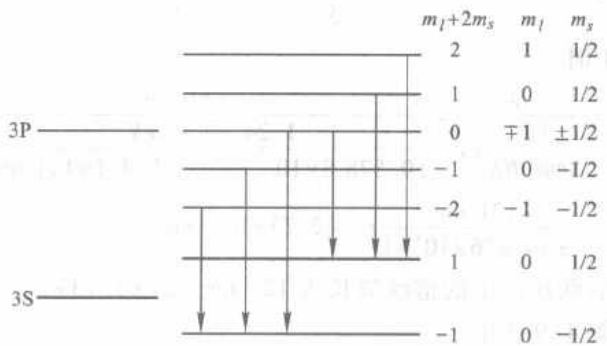


图 4-8

**4-14** 在 $B=4$ T 的外磁场中,忽略自旋-轨道相互作用,试求氢原子的 2P→1S跃迁($\lambda=121$ nm)所产生的谱线的波长.

**解** 氢原子的 2P→1S 跃迁谱线对应的能量为

$$h\nu=E_{2P}-E_{1S}$$

考虑到外磁场的作用下的附加能量,谱线的能量为

$$h\nu'=E'_{2P}-E'_{2S}=E'_{2P}+\Delta E_{2P}-(E'_{2S}+\Delta E_{2S})$$
$$=h\nu+(m_2g_2-m_1g_1)\mu_B B$$

忽略自旋-轨道相互作用,只要考虑轨道角动量的磁矩,即自旋为 0 时,

$$g_1=g_2=1$$

则有

$$h\nu'=h\nu+(m_2-m_1)\mu_B B$$

根据选择定则

$$\Delta m=m_2-m_1=0,\pm1$$

根据 $\nu=\dfrac{c}{\lambda}$,则有

$$h\frac{c}{\lambda'}=h\frac{c}{\lambda}+\Delta m\mu_B B$$

谱线的波数差为

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{hc}{\dfrac{hc}{\lambda}+\Delta m\mu_B B}-\lambda$$

$$=\frac{hc-\left(\dfrac{hc}{\lambda}+\Delta m\mu_B B\right)\lambda}{\dfrac{hc}{\lambda}+\Delta m\mu_B B}=\frac{-\lambda}{\dfrac{hc}{\Delta m\mu_B B\lambda}+1}$$

当 $\Delta m=0$ 时

$$\Delta\lambda=0$$

当 $\Delta m=\pm1$ 时

$$\Delta\lambda=\frac{-\lambda}{\dfrac{hc}{\Delta m\mu_B B\lambda}+1}=\frac{-121\text{ nm}}{\dfrac{1.24\text{ nm}\cdot\text{keV}}{\pm0.578\,8\times10^{-4}\text{ eV}\cdot\text{T}^{-1}\times4\text{ T}\times121\text{ nm}}+1}$$

$$=\frac{-121\text{ nm}}{(\pm)4.426\times10^{4}+1}\approx\mp2.73\times10^{-3}\text{ nm}$$

所以分裂后跃迁产生的谱线波长为 121 nm,$121\pm2.73\times10^{-3}$ nm,分裂后的能级跃迁图如图 4-9 所示.

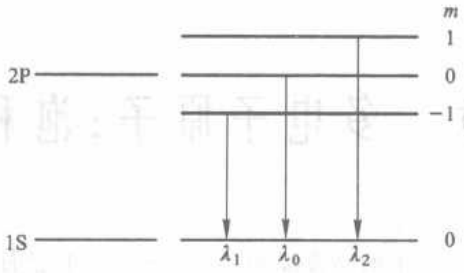


图 4-9

# 第五章　多电子原子：泡利原理

**5-1**　氦原子中的电子的结合能为 24.6 eV，试问：欲使这个原子的两个电子逐一电离，外界必须提供多少能量？

**解**　氦原子中的电子的结合能为 24.6 eV，则将氦原子中的一个电子电离需能量为 24.6 eV. 再将另一个电离，即将类氢离子$He^+$中的电子电离，需能量为

$$E_\infty = Z^2 Rhc = 2^2 \times 13.6\ \text{eV} = 54.4\ \text{eV}$$

故将氦原子的两个电子逐一电离需的总能量为

$$E = 24.6\ \text{eV} + 54.4\ \text{eV} = 79.0\ \text{eV}$$

**5-2**　计算$^4D_{3/2}$态的 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$.

**解**　对于$^4D_{3/2}$态，其角动量量子数分别为

$$S=\frac{3}{2},\quad L=2,\quad J=\frac{3}{2}$$

角动量分别为

$$S=\sqrt{s(s+1)}\,\hbar=\sqrt{\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)}\,\hbar=\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

$$L=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar=\sqrt{2\times(2+1)}\,\hbar=\sqrt{6}\,\hbar$$

$$J=\sqrt{j(j+1)}\,\hbar=\sqrt{\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)}\,\hbar=\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

由 $L$-$S$ 耦合有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$，则

$$J^2=L^2+S^2+2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$$

由此得

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-S^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\hbar^2-6\hbar^2-\frac{15}{4}\hbar^2\right)=-3\hbar^2$$

**5-3**　对于 $S=\frac{1}{2}$和 $L=2$，试计算 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ 的可能值.

**解**　考虑 $L$-$S$ 耦合，总角动量量子数为

$$J=L+S,L+S-1,\cdots,|L-S|$$

对于 $S=\frac{1}{2}$，$L=2$，则 $J$ 的可能值为$\frac{5}{2}$或$\frac{3}{2}$

当 $J=\frac{3}{2}$时，$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-S^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}-2\times3-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\hbar^2=-\frac{3}{2}\hbar^2$

当 $J=\frac{5}{2}$ 时,$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(J^2-L^2-S^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}-2\times3-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\hbar^2=\hbar^2$

**5-4**　试求 $^3F_2$ 态的总角动量和轨道角动量之间的夹角.

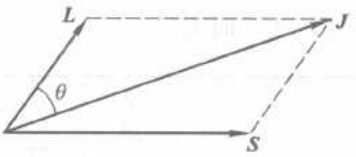

图 5-1

**解**　对 $^3F_2$ 态,其角动量量子数分别为

$$L=3,\quad S=1,\quad J=2$$

由图 5-1 得

$$S^2=L^2+J^2-2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{J}|\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{L^2+J^2-S^2}{2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{J}|}=\frac{3\times4+2\times3-1\times2}{2\sqrt{3\times4}\sqrt{2\times3}}=0.943$$

总角动量和轨道角动量之间的夹角为

$$\theta=19°28'$$

**5-5**　在氢、氦、锂、铍、钠、镁、钾和钙中,哪些原子会出现正常塞曼效应?为什么?

**解**　考虑这些原子的基态,它们分别为

$H(^2S_{1/2})$、$He(^1S)$、$Li(^2S_{1/2})$、$Be(^1S_0)$、$Na(^2S)$、$Mg(^1S)$、$K(^2S)$、$Ca(^1S)$

要出现正常塞曼效应,必须要求只有原子形成 $S=0$,$2S+1=1$ 的独态.

氢、锂、钠、钾的电子数为奇数,不能出现正常塞曼效应. 而氦、铍、镁和钙,对原子的磁矩有贡献的是两个电子,它们的自旋若取向相反,则总自旋 $S=0$,即 $2S+1=1$(独态),故能产生正常塞曼效应.

**5-6**　假设两个等效的 d 电子具有很强的自旋-轨道作用,从而导致 $j$-$j$ 耦合,试求它们总角动量的可能值. 当它们发生 $L$-$S$ 耦合,则它们的总角动量的可能值又如何? 在两种情况下,可能的状态数目及相同 $J$ 值出现的次数是否相同?

**解**　对两个等效的 d 电子,若发生 $L$-$S$ 耦合,则有

$$s_1=s_2=\frac{1}{2},\quad S=0,1;\quad l_1=l_2=2,\quad L=0,1,2,3,4,$$

根据偶数定则(即对于 2 个同科电子,由于泡利原理的限制,只有 $L+S$ 为偶数的原子态才可能存在)有

当 $S=0$ 时,$L=0,2,4$,对应的原子态为 $^1S_0$,$^1D_2$,$^1G_4$

当 $S=1$ 时,$L=1,3$,对应的原子态为 $^3P_{2,1,0}$,$^3F_{4,3,2}$

若发生 $j$-$j$ 耦合,则有

$$l_1=2,\quad s_1=\frac{1}{2},\quad j_1=\frac{3}{2},\frac{5}{2};\quad l_2=2,\quad s_2=\frac{1}{2},\quad j_2=\frac{3}{2},\frac{5}{2},$$

根据泡利原理,同一状态$(n,l,j,m_j)$的电子只有 1 个,则

$j_1$、$j_2$ 分别为$\frac{3}{2}$,$\frac{5}{2}$时,形成的原子态为$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)_{4,3,2,1}$

$j_1$、$j_2$ 为$\frac{3}{2}$时有

| | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{2}$ | — | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | — | | |
| $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | — | |
| $-\frac{3}{2}$ | 0 | −1 | −2 | — |

$M_J$ 的可能值为 0,0,±1,±2,$J$ 的可能值为 0,2,则形成的原子态为$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)_{2,0}$

$j_1$、$j_2$ 为$\frac{5}{2}$时有

| | $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{2}$ | — | | | | | |
| $\frac{3}{2}$ | 4 | — | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 3 | 2 | — | | | |
| $-\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | 0 | — | | |
| $-\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | −1 | −2 | — | |
| $-\frac{5}{2}$ | 0 | −1 | −2 | −3 | −4 | — |

$M_J$ 的可能值为 0,0,±1,±2,0,±1,±2,±3,±4,$J$ 的可能值为 0,2,4,则形成的原子态为$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)_{4,2,0}$.

在两种情况下,可能状态的数目都为 9 个,其中 $J=4$ 出现 2 次,$J=3$ 出现 1 次,$J=2$ 出现 3 次,$J=1$ 出现 1 次,$J=0$ 出现 2 次,相同 $J$ 值出现的次数是

相同的.

**5-7**　依 $L$-$S$ 耦合法则,下列电子组态可形成哪些原子态?其中哪个态能量最低?

(1) $np^4$;(2) $np^5$;(3) $nd(n'd)$.

**解**　(1) $np^4$ 与 $np^2$ 具有相同的原子态.

对 $np^2$,$l_1=l_2=1$,$L=2,1,0$;$s_1=s_2=\frac{1}{2}$,$S=0,1$

根据偶数定则

当 $S=0$ 时,$L=0,2$,对应的原子态为 $^1S_0$,$^1D_2$

当 $S=1$ 时,$L=1$ 对应的原子态为 $^3P_{2,1,0}$

利用洪特定则(对于一个给定的电子组态形成的原子态,当某原子态具有的 $S$ 最大时,它处的能级位置最低;对同一 $S$,又以 $L$ 值大的为最低;对于同科电子关于同一 $L$ 值而 $J$ 值不同的诸能级次序,当同科电子数小于或等于闭壳层占有数的一半时,具有最小 $J$ 值的能级处在最低,这称为正常次序;当同科电子数大于闭壳层的一半时,具有最大 $J$ 值的能级为最低.)

$np^4$ 形成的诸原子态中能量最低的是 $S=1$,$L=1$,由于 p 电子数超过半满,$J$ 反常序,$J=L+S=1+1=2$,能量最低的原子态为 $^3P_2$.

(2) $np^5$ 与 $np^1$ 具有相同的原子态.

对 $np^1$,$l=1$,　$s=\frac{1}{2}$,对应的原子态为 $^2P_{1/2}$,$^2P_{3/2}$.

利用洪特定则,由于 $np^5$,有 5 个 p 电子数超过半满,$J$ 反常序,$J=l+s=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,能量最低的原子态为 $^2P_{3/2}$.

(3) 对 $nd(n'd)$,$l_1=l_2=2$,$L=4,3,2,1,0$;　$s_1=s_2=\frac{1}{2}$,$S=0,1$ 形成的原子态有

$^1S_0$,$^1P_1$,$^1D_2$,$^1F_3$,$^1G_3$,$^3S_1$,$^3P_{2,1,0}$,$^3D_{3,2,1}$,$^3F_{4,3,2}$,$^3G_{5,4,3}$

利用洪特定则,在这些态中能量最低的是 $S=1$,$L=4$,由于 p 电子数未达到半满,$J$ 正常序,$J=|L-S|=4-1=3$,能量最低的原子态为 $^3G_3$.

**5-8**　铍原子基态的电子组态是 2s2s,若其中有一个电子被激发到 3p 态,按 $L$-$S$ 耦合可形成哪些原子态?写出有关的原子态的符号.从这些原子态向低能态跃迁时,可以产生几条光谱线?画出相应的能级跃迁图.若那个电子被激发到 2p 态,则可能产生的光谱线又为几条?

**解**　对铍原子基态的电子组态是 2s2s,有

$$l_1=l_2=0, L=0;\quad s_1=s_2=\frac{1}{2}, S=0,1$$

2s2s 为同科电子组态,根据偶数定则有 $S=0$,则 2s2s 形成的原子态为 $^1S_0$.

对电子组态 2s3p,有

$$l_1=0, l_2=1, L=1;\ s_1=s_2=\frac{1}{2}, S=0,1$$

则 2s3p 形成的原子态为 $^1P_1$, $^3P_{2,1,0}$.

在 2s3p 和 2s2p 电子组态形成的能级之间还有 2s3s 和 2s2p 电子组态形成的能级. 对 2s3s,有

$$l_1=l_2=0, L=0;\ s_1=s_2=\frac{1}{2}, S=0,1$$

则 2s3s 形成的原子态为 $^1S_0$, $^3S_1$;2s2p 形成的原子态为 $^1P_1$, $^3P_{2,1,0}$

跃迁的能级图如图 5-2 所示. 则电子被激发到 3p 态,在满足跃迁选择规则下向低能态跃迁的过程中,可以产生 10 条谱线. 若电子被激发到 2p 态,向低能态跃迁的过程中,只可能产生 1 条谱线,为 $2^1P_1\rightarrow 2^1S_0$.

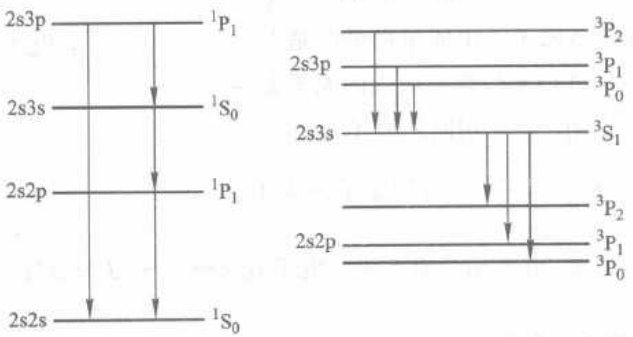


图 5-2

**5-9** 试证明,一个支壳层全部填满的原子必定具有 $^1S_0$ 的基态.

**证** 对于支壳层全部填满的情况,由于所有电子的 $l$ 都相同,考虑到泡利原理,每个电子的轨道磁量子数只能分别是

$$m_l=-l,-l+1,\cdots,l-1,l,\text{则 } m_L=0$$

自旋磁量子 $m_s=\pm\frac{1}{2}$ 各占一半,则 $m_s=0$. 因此

$$m_J=m_L+m_S=0$$

所以只能是

$$L=0, S=0, J=0$$

即形成 $^1S_0$ 态.

**5-10**　依照 $L$-$S$ 耦合法则，$(nd)^2$ 组态可形成哪几种原子态？能量最低的是哪个态？并依此确定钛原子的基态.

**解**　对$(nd)^2$，$l_1=l_2=2$，$L=4,3,2,1,0$；$s_1=s_2=\frac{1}{2}$，$S=0,1$

根据偶数定则

当 $S=0$ 时，$L=0,2,4$，对应原子态为 $^1S_0$，$^1D_2$，$^1G_3$

当 $S=1$ 时，$L=1,3$，对应原子态为 $^3P_{2,1,0}$，$^3F_{4,3,2}$

根据洪特定则，在这些态中能量最低的是 $S=1$，$L=3$. 由于 d 电子数未达到半满，$J$ 正常序，则

$$J=|L-S|=3-1=2,$$

故能量最低的原子态为 $^3F_2$.

钛原子的原子序数为 22，价电子组态为 $3d^2$，则钛原子的基态为 $^3F_2$.

**5-11**　一束基态的氦原子通过非均匀磁场后，在屏上可以接收到几条？在相同条件下，对硼原子，可接收到几条？为什么？

**解**　施特恩-盖拉赫实验中，原子束打在屏上的位置与轴心的距离为

$$z_2=-m_J g_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\frac{dD}{3kT}$$

因此分裂的条数由 $m_J g_J$ 的取值可能数决定.

对于氦原子，基态 $L=0$，$S=0$，$J=0$. 通过非均匀磁场可以接收到 $2J+1=1$ 条.

硼原子基态电子组态 $2s^22p$，填满的壳层不用考虑，原子的角动量等于 2p 的总角动量，基态 $L=1$，$S=\frac{1}{2}$，p 电子未达到半满，按正常序，基态 $J=|L-S|=\frac{1}{2}$. 故基态的原子态为 $^2P_{1/2}$，通过非均匀磁场在屏上可以接收到 $2J+1=2$ 条.

**5-12**　写出下列原子的基态的电子组态，并确定它们的基态：$_{15}P$，$_{16}S$，$_{17}Cl$，$_{18}Ar$.

**解**　对于 $_{15}P$ 原子，基态的电子组态为 $1s^22s^22p^63s^23p^3$. 填满的壳层的角动量为 0，原子的角动量等于 $3p^3$ 的总角动量. 根据洪特定则，未满壳层的电子的排布如图 5-3 所示，即 3 个同科 p 电子的自旋 $m_s$ 取相同值 $\frac{1}{2}\left(\text{或}-\frac{1}{2}\right)$，故

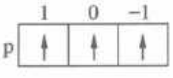

图 5-3

$S_{max}=\frac{3}{2}$，基态的自旋 $S=\frac{3}{2}$. 3 个同科 p 电子的自旋 $m_s$ 取相同值，根据 3 个同科 p 电子的 $m_l$ 只能分别取 1，0，-1 中的不同值，显然 $m_L=\sum m_l=0$，对应于 $L=0$. 故对于 $_{15}P$ 原子，基态原子态 $S=\frac{3}{2}$，$L=0$，又因 3 个 p 电子填到 p 支壳层满额

的一半,多重态有反常序,故 $J=L+S=\frac{3}{2}$. 所以 $_{15}P$ 原子基态的原子态为 $^4S_{3/2}$.

对于 $_{16}S$ 原子,基态的电子组态为 $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4$. 填满的壳层不用考虑,原子的角动量等于 $3p^4$ 的总角动量. 根据洪特定则,未满壳层的电子的排布如图 5-4 所示. 故基态原子态 $S=1$, $L=1$,又因 4 个 p 电子超过 p 支壳层满额的一半,多重态有反常序,故 $J=L+S=2$. 所以 $_{16}S$ 原子基态的原子态为 $^3P_2$.

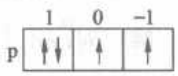

图 5-4

对于 $_{17}Cl$ 原子,基态的电子组态为 $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$. 填满的壳层不用考虑,原子的角动量等于 $3p^5$ 的总角动量. 根据洪特定则,未满壳层的电子的排布如图 5-5 所示. 故基态原子态 $S=\frac{1}{2}$, $L=1$,又因 5 个 p 电子超过 p 支壳层满额的一半,多重态有反常序,故 $J=L+S=\frac{3}{2}$.

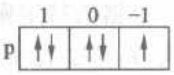

图 5-5

所以 $_{17}Cl$ 原子基态的原子态为 $^2P_{3/2}$.

对于 $_{18}Ar$ 原子,基态的电子组态为 $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$,壳层全部填满,原子的角动量等于 0,即 $S=0$, $L=0$, $J=L+S=0$.

所以 $_{18}Ar$ 原子基态的原子态为 $^1S_0$.

# 第六章 X 射 线

**6-1** 某一 X 射线管发出的连续 X 光谱的最短波长为 0.012 4 nm，试问它的工作电压是多少？

**解** X 射线管发射的 X 射线的最短波长为 $\lambda_{min}=0.012\ 4\ \text{nm}$，故射线管的阳极获得的最大激发能为

$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda_{min}}$$

该能量由加速电子提供，则有

$$eU=h\nu=\frac{hc}{\lambda_{min}}$$

所以 X 射线管的工作电压为

$$U=\frac{hc}{\lambda_{min}e}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.012\ 4\ \text{nm}\cdot e}=100\ \text{kV}$$

**6-2** 莫塞莱的实验是历史上首次精确测量原子序数的方法. 如测得某元素的 $K_\alpha$-X 射线的波长为 0.068 5 nm，试求出该元素的原子序数.

**解** 根据式(29-5)莫塞莱经验公式

$$\nu_{K_\alpha}=\frac{c}{\lambda_{K_\alpha}}=Rc(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}Rc(Z-1)^2$$

由此式得该元素原子序数

$$Z=1+\sqrt{\frac{4hc}{3Rhc\lambda_{K_\alpha}}}=1+\sqrt{\frac{4\times1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{3\times1.36\ \text{eV}\times0.068\ 5\ \text{nm}}}$$

$$\approx43$$

**6-3** 钕原子($Z=60$)的 L 吸收限为 0.19 nm，试问从钕原子中电离一个 K 电子需作多少功？

**解** 根据莫塞莱经验公式，可以求出 $K_\alpha$-X 射线的能量为

$$E_{K_\alpha}=h\nu_{K_\alpha}=\frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}}=Rhc(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}Rhc(Z-1)^2$$

$$=\frac{3}{4}Rhc(60-1)^2=\frac{3}{4}\times13.6\ \text{eV}\times59^2=35.5\ \text{keV}$$

而 $K_\alpha$-X 射线为电子从 K 层跃迁到 L 层空穴发出谱线，其能量又可以表示成 L 层与 K 层电子的能量之差，即

$$E_{K_\alpha}=E_L-E_K=h\nu_{K_\alpha}=35.5\ \text{keV}$$

钕原子的 L 吸收限为 0.19 nm,则 $n=2$ 壳层的电子的能量为

$$E_L=-\frac{hc}{\lambda_{L\infty}}=-\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.19\ \text{nm}}=-6.5\ \text{keV}$$

所以钕原子中 K 壳层电子能量为

$$E_K=E_L-h\nu_{K_\alpha}=-6.5\ \text{keV}-35.5\ \text{keV}=-42.0\ \text{keV}$$

则从钕原子中电离一个 K 电子需作 42.0 keV 的功.

**6-4** 证明:对大多数元素,$K_{\alpha 1}$ 射线的强度是 $K_{\alpha 2}$ 射线的两倍.

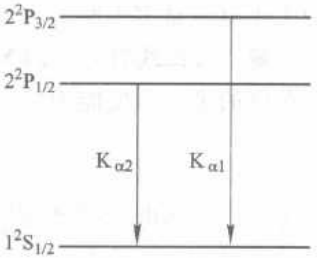

图 6-1

**证** $K_\alpha$ 射线是电子由 $n=2$ 向 $n=1$ 跃迁产生. $K_{\alpha 1}$ 射线是电子由 $n=2$ 的 $^2P_{3/2}$ 能级向 $n=1$ 的 $^2S_{1/2}$ 的跃迁产生;$K_{\alpha 2}$ 射线是电子由 $n=2$ 的 $^2P_{1/2}$ 能级向 $n=1$ 的 $^2S_{1/2}$ 能级跃迁产生,如图 6-1 所示.

而射线的强度与 $2J+1$ 成正比. 对 $^2P_{3/2}$ 能级,$J_1=\frac{3}{2}$,则有

$$2J_1+1=2\times\frac{3}{2}+1=4$$

对 $^2P_{1/2}$ 能级,$J_2=\frac{1}{2}$,则有

$$2J_2+1=2\times\frac{1}{2}+1=2$$

所以 $K_{\alpha 1}$ 射线的强度是 $K_{\alpha 2}$ 射线的两倍.

**6-5** 已知铅的 K 吸收限为 0.014 1 nm,K 线系各谱线的波长分别为 0.016 7 nm($K_\alpha$),0.014 6 nm($K_\beta$),0.014 2 nm($K_\gamma$),现请:

(1) 根据这些数据描绘出有关铅的 X 射线能级简图;

(2) 计算激发 L 线系所需的最小能量与 $L_\alpha$ 线的波长.

**解** (1) 铅的 K 吸收限为 0.014 1 nm,K 壳层电子的能量为

$$E_K=-\frac{hc}{\lambda_{K\infty}}=-\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.014\ 1\ \text{nm}}=-87.9\ \text{keV}$$

$K_\alpha$ 谱线对应电子从 L 壳层到 K 壳层的跃迁,则有

$$E_L-E_K=h\nu_{K_\alpha}=\frac{hc}{\lambda_{K\alpha}}$$

L 壳层电子的能量为

$$E_L=E_K+\frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}}=-87.9\ \text{keV}+\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.016\ 7\ \text{nm}}=-13.6\ \text{keV}$$

$K_\beta$、$K_\gamma$ 谱线分别对应电子从 M、N 壳层到 K 壳层的跃迁，则可以得到

$$E_M = E_K + \frac{hc}{\lambda_{K_\beta}} = -87.9\ \text{keV} + \frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.014\ 6\ \text{nm}} = -2.97\ \text{keV}$$

$$E_N = E_K + \frac{hc}{\lambda_{K_\gamma}} = -87.9\ \text{keV} + \frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.014\ 2\ \text{nm}} = -0.58\ \text{keV}$$

能级图如图 6-2 所示

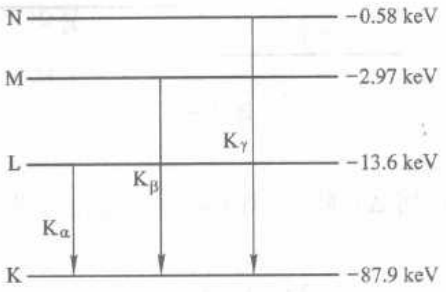


图 6-2

（2）由于泡利不相容原理的限制，要激发 L 线系，必须在 L 壳层产生一个空穴. 要在 L 壳层产生空穴，由于铅原子 L 壳层的外层 M、N 层是充满电子的，这样要使 L 壳层产生空穴，就应将 L 壳层的电子电离出去. 其所需要的能量为

$$E = 0 - E_L = 13.6\ \text{keV}$$

$L_\alpha$ 线对应电子从 L 壳层到 M 壳层的跃迁，其能量为

$$E_{L_\alpha} = E_M - E_L = -2.97\ \text{keV} - (-13.6\ \text{keV}) = 10.6\ \text{keV}$$

$L_\alpha$ 线的波长为

$$\lambda_{L_\alpha} = \frac{hc}{E_{L_\alpha}} = \frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{10.6\ \text{keV}} = 0.12\ \text{nm}$$

**6-6** 一束波长为 0.54 nm 的单色光入射到一组晶面上，在与入射束偏离为120°的方向上产生一级衍射极大，试问该晶面的间距为多大？

**解** 根据布拉格衍射公式得

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

由图 6-3，可以得到此时对应的入射角（入射射线与晶面的夹角）为 $\theta = 60°$.

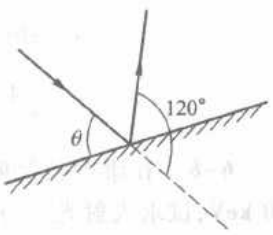


图 6-3

对于一级衍射，$n = 1$，则该晶面的间距为

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.54\ \text{nm}}{2\times\sin 60°} = 0.31\ \text{nm}$$

**6-7** 在康普顿散射中，若入射光子的能量等于电子的静止能，试求散射光子的最小能量及电子的最

大动量.

**解**　根据式(30-3)康普顿散射公式

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\lambda_{ec}(1-\cos\theta)\quad\left(\text{式中 }\lambda_{ec}=\frac{h}{m_0c}\right)$$

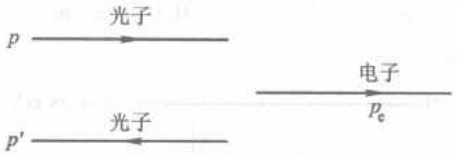


图 6-4

若散射光子能量最小,则 $\Delta\lambda$ 最大,则 $\cos\theta=-1$,此时光子与电子的散射如图6-4所示,即

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=2\lambda_{ec}$$

入射光子的能量等于电子的静止能,则有

$$h\frac{c}{\lambda}=m_0c^2$$

则

$$\lambda=\frac{hc}{m_0c^2}=\frac{h}{m_0c}=\lambda_{ec}$$

散射光子波长为

$$\lambda'=\lambda+2\lambda_{ec}=3\lambda_{ec}$$

故散射光子的频率为

$$\nu'=\frac{1}{3}\nu_0$$

散射光子的能量

$$E=h\nu'=\frac{1}{3}h\nu_0=\frac{1}{3}m_0c^2=\frac{1}{3}\times0.511\ \text{MeV}=0.17\ \text{MeV}$$

因为 $\cos\theta=-1$,所以 $\theta=180°$

根据碰撞前后动量守恒有

$$p_e=p-p'=\frac{h}{\lambda}-\left(-\frac{h}{\lambda'}\right)=\frac{h}{\lambda_{ec}}+\frac{h}{3\lambda_{ec}}=\frac{4h}{3\lambda_{ec}}=\frac{4hm_0c}{3h}$$

$$=\frac{4}{3}m_0c=0.681\ \text{MeV}/c=3.64\times10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

**6-8**　在康普顿散射中,若一个光子能传递给一个静止电子的最大能量为10 keV,试求入射光子的能量.

**解**　方法一　根据康普顿散射公式

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\lambda_{ec}(1-\cos\theta)\quad\left(\text{式中}\ \lambda_{ec}=\frac{h}{m_0c}\right)$$

若光子传递给静止电子能量最大,则 $\Delta\lambda$ 最大,则 $\cos\theta=-1$,则有

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=2\lambda_{ec}$$

散射光子波长为

$$\lambda'=\lambda+2\lambda_{ec}$$

光子散射前后能量的变化为

$$\Delta E=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda+2\lambda_{ec}}=10\ \text{keV}$$

由此式得

$$\lambda^2+2\lambda_{ec}\lambda-\frac{hc\lambda_{ec}}{5}=0$$

解之得

$$\lambda=-\lambda_{ec}\pm\sqrt{\lambda_{ec}^2+\frac{hc\lambda_{ec}}{5}}$$

故入射光子波长为

$$\lambda=\sqrt{\lambda_{ec}^2+\frac{hc\lambda_{ec}}{5}}-\lambda_{ec}\quad(\text{负的舍去})$$

式中

$$\lambda_{ec}=\frac{h}{m_0c}=\frac{hc}{m_0c^2}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{0.511\ \text{MeV}}=2.43\times10^{-3}\ \text{nm}$$

所以入射光子波长为

$$\lambda=\sqrt{(2.43\times10^{-3}\ \text{nm})^2+\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}\times(2.43\times10^{-3}\ \text{nm})}{5\ \text{keV}}}-2.43\times10^{-3}\ \text{nm}$$

$$=22.23\times10^{-3}\ \text{nm}$$

入射光子能量为

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{22.23\times10^{-3}\ \text{nm}}=55.8\ \text{keV}$$

方法二 根据式(30-6)知,康普顿散射中反冲电子动能为

$$E_k=h\nu-h\nu'=h\nu\frac{\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}{1+\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}$$

若光子传递给静止电子能量最大,则 $\Delta\lambda$ 最大,则 $\cos\theta=-1$,则

$$E_k = h\nu \frac{2\frac{h\nu}{m_0c^2}}{1+2\frac{h\nu}{m_0c^2}} = E\frac{2\frac{E}{m_0c^2}}{1+2\frac{E}{m_0c^2}} = \frac{2E^2}{m_0c^2+2E}$$

已知 $E_k = 10\ \text{keV}$,所以有

$$10\ \text{keV} = \frac{2E^2}{m_0c^2+2E}$$

由此可得

$$E^2 - 10\ \text{keV}\cdot E - 5\ \text{keV}\cdot m_0c^2 = 0$$

解之得

$$E = \frac{10\ \text{keV} \pm \sqrt{(10\ \text{keV})^2 + 20\ \text{keV}\cdot m_0c^2}}{2} \quad (\text{负的舍去})$$

所以入射光子能量为

$$E = 55.8\ \text{keV}$$

**6-9** 若入射光子与质子发生康普顿散射,试求质子的康普顿波长.如反冲质子获得的能量为 5.7 MeV,则入射光子的最小能量为多大?

**解** 质子的康普顿波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_pc} = \frac{hc}{m_pc^2} = \frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}}{938\ \text{MeV}} = 1.32\times10^{-6}\ \text{nm}$$

若要使入射光子的能量最小,则 $\cos\theta = -1$,质子获得的能量为

$$E_k = h\nu \frac{2\frac{h\nu}{m_pc^2}}{1+2\frac{h\nu}{m_pc^2}} = E\frac{2\frac{E}{m_pc^2}}{1+2\frac{E}{m_pc^2}} = \frac{2E^2}{m_pc^2+2E}$$

已知 $E_k = 5.7\ \text{keV}$,所以有

$$5.7\ \text{keV} = \frac{2E^2}{m_pc^2+2E}$$

由此可得

$$E^2 - 5.7E - \frac{1}{2}\times5.7m_pc^2 = 0$$

解之得

$$E = \frac{5.7\ \text{keV} \pm \sqrt{(5.7\ \text{keV})^2 + 4\times\frac{1}{2}\times5.7\ \text{keV}\times938\ \text{keV}}}{2} \quad (\text{负的舍去})$$

所以入射光子的最小能量为

$$E = 54.6\ \text{MeV}$$

**6-10** 康普顿散射产生的散射光子，再与原子发生相互作用，当散射角 $\theta>60°$ 时，无论入射光子能量多么大，散射光子总不能再产生正负电子偶. 试证明之.

**解** 散射光子能量为

$$h\nu'=\frac{h\nu}{1+\frac{h\nu(1-\cos\theta)}{m_0c^2}}=h\nu\frac{m_0c^2}{m_0c^2+h\nu(1-\cos\theta)}<h\nu\frac{m_0c^2}{h\nu(1-\cos\theta)}$$

若 $\theta>60°$，则 $\cos\theta<\frac{1}{2}$，代入上式可得

$$h\nu'<2m_0c^2$$

所以，散射光子总不能再产生正负电子偶.

**6-11** 证明：光子与自由电子相碰，不可能发生光电效应.

**证** 设光子频率为 $\nu$，其能量为

$$E=h\nu$$

设电子的初能量为 $E_1$. 由光电效应概念及能量守恒，得到电子的末能量为

$$E_2=E_1+E$$

由相对论动量能量关系

$$E^2=c^2p^2+E_0^2$$

电子初动量为

$$p_1=\frac{1}{c}\sqrt{E_1^2-E_0^2}$$

末动量为

$$p_2=\frac{1}{c}\sqrt{E_2^2-E_0^2}$$

式中 $E_0$ 为电子的静止能量，光子初动量为 $p=\frac{E}{c}$.

由动量守恒得

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2$$

由上式计算得

$$p_1^2=p_2^2+p^2-2pp_2\cos\theta$$

则有

$$E_1^2-E_0^2=E_2^2-E_0^2+E^2-2E\sqrt{E_2^2-E_0^2}\cos\theta$$

代入能量守恒方程 $E_2=E_1+E$，计算得

$$\cos\theta=-\frac{E_2}{\sqrt{E_2^2-E_0^2}}<-1$$

而 $\cos\theta\geqslant-1$，产生矛盾. 也就是说过程中动量守恒和能量守恒不能同时满

足,因此该过程不可能发生.

**6-12** 证明:在真空中不可能发生"光子→电子对"过程.

**证** 假设可以发生"光子→电子对"过程.设光子能量为 $E=h\nu$,形成电子对的两个电子的能量分别为 $E_1$、$E_2$.

由能量守恒有

$$E=E_1+E_2$$

考虑能量与动量的关系

$$E^2=c^2p^2+E_0^2 \quad (E_0 \text{ 为粒子的静止能量})$$

则两个电子的动量分别为

$$p_1=\frac{1}{c}\sqrt{E_1^2-E_0^2}$$

$$p_2=\frac{1}{c}\sqrt{E_2^2-E_0^2}$$

光子的动量为

$$p=\frac{E}{c}$$

由动量守恒得

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$$

计算得

$$p_2^2=p^2+p_1^2-2pp_1\cos\theta$$

所以有

$$E_2^2-E_0^2=E^2+E_1^2-E_0^2-2E\sqrt{E_1^2-E_0^2}\cos\theta$$

计算得

$$E_2^2-E_1^2-E^2=2E\sqrt{E_1^2-E_0^2}\cos\theta$$

代入 $E=E_1+E_2$,得

$$\cos\theta=\frac{E_1}{\sqrt{E_1^2-E_0^2}}>1$$

而 $\cos\theta\leqslant 1$,产生矛盾.也就是说过程中动量守恒和能量守恒不能同时满足,因此该过程不可能发生!

**6-13** 已知铑($Z=45$)的电子组态为$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}4s^2\ 4p^6\ 4d^8\ 5s^1$,现请:

(1) 确定它的基态谱项符号;

(2) 用它的 $K_\alpha$-X 射线做康普顿散射实验,当光子的散射角为60°时,求反冲电子的能量.(已知 $K_\alpha$ 的屏蔽系数 $b=0.9$).

(3) 在实验装置中用厚为 0.30 cm 的铅屏蔽该射线.如果改用铝代替铅,为

达到同样的屏蔽效果，需要用多厚的铝？（$\mu_{Pb}=52.5\ cm^{-1}$，$\mu_{Al}=0.765\ cm^{-1}$）

**解** （1）满壳层不用考虑，只需考虑 $4d^8 5s^1$ 的光谱项.

根据洪特定则，基态的 $S$ 和 $L$ 值最大未满壳层的电子的排布如图 6-5 所示. 由图得

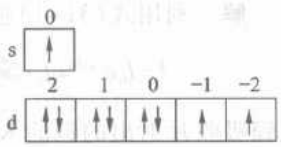


图 6-5

$$S=\frac{3}{2},\quad L=3.$$

又因 8 个 d 电子超过 d 支壳层满额的一半，多重态有反常序，最大 $J$ 值能级最低.

$$J=L+S=\frac{9}{2}$$

铬基态原子态为 $^4F_{9/2}$.

（2）$K_\alpha$-X 射线的能量为

$$h\nu_{K_\alpha}=Rhc\,(Z-b)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}\times 13.6\ eV\times(45-0.9)^2=19.8\ keV$$

利用此光子做康普顿散射实验，根据式(30-6)康普顿散射公式知反冲电子能量为

$$E=h\nu\frac{\gamma(1-\cos\theta)}{1+\gamma(1-\cos\theta)}=h\nu\frac{\frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}{1+\frac{h\nu}{m_e c^2}(1-\cos\theta)}$$

$$=19.8\ keV\times\frac{19.8\ keV\left(1-\frac{1}{2}\right)}{0.511\times10^3\ keV+19.8\ keV\left(1-\frac{1}{2}\right)}=0.38\ keV$$

（3）根据式(31-1)，射线的吸收服从关系式

$$I=I_0 e^{-\mu x}$$

为达到同样屏蔽效果，则

$$\mu_{Al}x_{Al}=\mu_{Pb}x_{Pb}$$

已知铅的吸收系数为 $\mu_{Pb}=52.5\ cm^{-1}$，铅的厚度 $x_{Pb}=0.30\ cm$，铝的吸收系数为 $\mu_{Al}=0.765\ cm^{-1}$，代入计算得

$$x_{Al}=\frac{\mu_{Pb}x_{Pb}}{\mu_{Al}}=\frac{52.5\ cm^{-1}\times0.30\ cm}{0.765\ cm^{-1}}=21\ cm$$

**6-14** 已知铜和锌的 $K_\alpha$-X 射线的波长分别为 0.153 9 nm 和 0.143 4 nm，镍的 K 吸收限为 0.148 9 nm，它对铜和锌的 $K_\alpha$-X 射线的质量吸收系数分别为 48 $cm^2/g$ 和 325 $cm^2/g$. 试问：为了使铜的 $K_\alpha$-X 射线与锌的 $K_\alpha$-X 射线的相对

强度提高 10 倍,需要多厚的镍吸收片.

**解** 利用式(31-1)强度衰减公式

$$I=I_0e^{-\mu x}=I_0e^{-\frac{\mu}{\rho}\rho x}=I_0e^{-\mu'\rho x}\quad(\text{式中}\mu'=\frac{\mu}{\rho}\text{为质量吸收系数})$$

从镍吸收片射出的铜的 $K_\alpha$-X 射线与锌的 $K_\alpha$-X 射线的相对强度为

$$\frac{I_{Cu}}{I_{Zn}}=\frac{e^{-\mu'_{Cu}\rho x}}{e^{-\mu'_{Zn}\rho x}}=e^{(\mu'_{Zn}-\mu'_{Cu})\rho x}$$

已知$\frac{I_{Cu}}{I_{Zn}}=10$,$\mu'_{Zn}=325\ \text{cm}^2/\text{g}$, $\mu'_{Cu}=48\ \text{cm}^2/\text{g}$,所以镍吸收片的质量厚度为

$$\rho x=\frac{\ln 10}{\mu'_{Zn}-\mu'_{Cu}}=\frac{2.30}{325\ \text{cm}^2/\text{g}-48\ \text{cm}^2/\text{g}}=8.3\times10^{-3}\ \text{g/cm}^2$$

已知镍的密度为 $\rho=8.9\ \text{g/cm}^3$,代入计算得镍吸收片的厚度为

$$x=\frac{\rho x}{\rho}=\frac{8.3\times10^{-3}\ \text{g/cm}^2}{8.9\ \text{g/cm}^3}=9.3\times10^{-6}\ \text{m}$$

# 第七章　原子核物理概论

**7-1**　试计算核素$^{40}$Ca和$^{56}$Fe的结合能和比结合能.

**解**　原子核的结合能表示自由核子组成原子核时所释放的能量,由式(33-1)知结合能可以表示成

$$E_B=\Delta Mc^2=(ZM_H+Nm_n-M_{Ca})c^2$$

对于核素$^{40}$Ca,已知$Z=20$,$A=40$,$N=20$,$M_H=1.007\ 825$ u,$m_n=1.008\ 665$ u,$M_{Ca}=39.962\ 59$ u,代入计算得核素$^{40}$Ca的质量亏损为

$$\begin{aligned}\Delta M&=(ZM_H+Nm_n-M_{Ca})\\&=20(1.008\ 665+1.007\ 825)\ \text{u}-39.962\ 59\ \text{u}=0.367\ 21\ \text{u}\end{aligned}$$

则核素$^{40}$Ca的结合能为($1uc^2=931.5$ MeV)

$$E_B=931.5\ \text{MeV}\times 0.367\ 21=342.1\ \text{MeV}$$

$^{40}$Ca的比结合能为

$$\frac{E_B}{A}=\frac{342.1\ \text{MeV}}{40}=8.55\ \text{MeV}$$

对于核素$^{56}$Fe,已知$Z=26$,$A=56$,$N=30$,$M_{Fe}=55.934\ 9$ u,代入计算得核素$^{56}$Fe的结合能为

$$\begin{aligned}E_B&=(ZM_H+Nm_n-M_{Fe})c^2\\&=(26\times 1.007\ 825\ \text{u}+30\times 1.008\ 665\ \text{u}-55.934\ 9\ \text{u})c^2\\&=0.528\ 5\ uc^2=492.3\ \text{MeV}\end{aligned}$$

$^{56}$Fe的比结合能为

$$\frac{E_B}{A}=\frac{492.3\ \text{MeV}}{56}=8.79\ \text{MeV}$$

**7-2**　1 mg$^{238}$U每分钟放出740个α粒子,试证明:1 g$^{238}$U的放射性活度为0.33 μCi,$^{238}$U的半衰期为$4.5\times10^9$ a.

**证**　放射性活度指放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数,根据式(37-5)放射性活度表示为

$$A=-\frac{dN}{dt}=\lambda N_0e^{-\lambda t}=\lambda N$$

已知1 g$^{238}$U的放射性活度为

$$A=740\times10^{3}/\text{min}=\frac{740}{60}\times10^{3}\ \text{Bq}$$

$$=12.33\times10^{3}\ \text{Bq}=\frac{12.33\times10^{3}}{3.7\times10^{4}}\ \mu\text{Ci}=0.33\ \mu\text{Ci}$$

则$^{238}$U 的衰变常量为

$$\lambda=\frac{A}{N}=\frac{12.33\times10^{3}\ \text{Bq}}{\frac{1}{238}\ \text{mol}\times6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}}=4.87\times10^{-18}\ \text{s}^{-1}$$

放射性核素半衰期与其衰变常量的关系为

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{\lambda}$$

所以$^{238}$U 的半衰期为

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{4.87\times10^{-18}\ \text{s}^{-1}}=\frac{0.693}{4.87\times10^{-18}\times365\times24\times3\ 600}\ \text{a}=4.5\times10^{9}\ \text{a}$$

**7-3** 活着的有机体中,$^{14}$C 对$^{12}$C 的比与大气中是相同的,约为 $1.3\times10^{-12}$. 有机体死亡后,由于$^{14}$C 的放射性衰变,$^{14}$C 的含量就不断减少,因此,测量每克碳的衰变率就可计算有机体的死亡时间. 现测得:取之于某一骸骨的 100 g 的碳的 β 衰变率为 300 次衰变/min ,试问该骸骨有多久历史?

**解** 活着的有机体中,$^{14}$C 对$^{12}$C 的比与大气中是相同的,约为 $1.3\times10^{-12}$. 则在活的有机体 100 g 碳中$^{14}$C 的核数为

$$N_0=\frac{100}{12}\ \text{mol}\times6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times1.3\times10^{-12}=6.52\times10^{12}$$

则活的有机体中 100 g 碳中$^{14}$C 的放射性活度为

$$A_0=\lambda N_0=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}N_0$$

经查得$^{14}$C 的半衰期为 $T_{1/2}=5\ 730$ a,则其衰变常量为

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}=\frac{0.693}{5\ 730\times365\times24\times3\ 600\ \text{s}}=3.835\times10^{-12}\ \text{s}^{-1}$$

根据式(37-5)放射性活度的定义为

$$A=A_0e^{-\lambda t}$$

所以有

$$t=-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{A}{A_0}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{A_0}{A}$$

根据骸骨中碳的 β 衰变率,可计算出骸骨中 100 g 的碳$^{14}$C 的放射性活度为

$$A=300/\text{min}=5/\text{s}$$

代入计算得

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{A_0}{A}=\frac{5\ 730\ \text{a}}{0.693}\ln\frac{6.52\times10^{12}\times3.835\times10^{-12}\ \text{s}^{-1}}{5\ \text{s}^{-1}}=1.33\times10^{4}\ \text{a}$$

**7-4**　一个放射性元素的平均寿命为 10 d，试问在第 5 d 内发生衰变的数目是原来的多少？

**解**　放射性元素的平均寿命为 10 d，再根据平均寿命 $\tau$ 与衰变常量 $\lambda$ 的关系，可得

$$\lambda=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\ \text{d}^{-1}$$

根据放射性衰变规律

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

经过 4 d 后，剩余的放射性元素为

$$N=N_0e^{-\lambda t}=N_0e^{-\frac{4}{10}}=N_0e^{-\frac{2}{5}}$$

经过 5d 后，剩余的放射性元素为

$$N'=N_0e^{-\lambda t}=N_0e^{-\frac{5}{10}}=N_0e^{-\frac{1}{2}}$$

第 5 d 衰变的放射性元素数目为

$$\Delta N=N-N'=N_0e^{-\frac{2}{5}}-N_0e^{-\frac{1}{2}}=N_0(e^{-\frac{2}{5}}-e^{-\frac{1}{2}})$$

第 5 d 内发生衰变的数目与原来数目之比为

$$\frac{\Delta N}{N_0}=\frac{N_0(e^{-\frac{2}{5}}-e^{-\frac{1}{2}})}{N_0}\approx0.064$$

**7-5**　试问原来静止的$^{226}$Ra 核在 α 衰变中发射的 α 粒子的能量是多少？

**解**　由式(38-3)知 α 衰变能为

$$Q_\alpha=[M_X-(M_Y+M_{He})]c^2$$

式中 $M_X$、$M_Y$ 和 $M_{He}$分别为母核、子核和氦的原子质量.

对衰变

$$^{226}\text{Ra}\longrightarrow{}^{222}\text{Rn}+\alpha$$

已知 $M_X=M_{Ra}=226.025\ 4$ u，$M_Y=M_{Rn}=222.017\ 6$ u，$M_{He}=4.002\ 603$ u，代入计算得 α 衰变能为

$$Q_\alpha=[M_{Ra}-(M_{Rn}+M_{He})]c^2=(226.025\ 4-222.017\ 6-4.002\ 603)\times931.5\ \text{MeV}$$
$$=0.005\ 197\times931.5\ \text{MeV}=4.84\ \text{MeV}$$

根据动量守恒得到子核的反冲动能

$$E_r=\frac{m_\alpha}{m_Y}E_\alpha$$

根据能量守恒定律，α 衰变能还等于 α 粒子的动能和子核的反冲动能之和. 根据式(38-5)知 α 衰变能为

$$Q_\alpha = E_\alpha + E_r = \left(1+\frac{m_\alpha}{m_Y}\right)E_\alpha \approx \frac{A}{A-4}E_\alpha$$

式中 $A$ 为 X 的原子量,$A=226$. 则发射的 α 粒子的能量为

$$E_\alpha = Q_\alpha \frac{A-4}{A} = 4.84\ \text{MeV} \times \frac{226-4}{226} = 4.75\ \text{MeV}$$

**7-6** $^{210}$Po 核从基态进行衰变,并伴随发射两组 α 粒子. 其中一组 α 粒子的能量为 5.30 MeV,放出这组 α 粒子后,子核处于基态;另一组 α 粒子的能量为 4.50 MeV,放出这组 α 粒子后,子核处于激发态. 试计算,子核由激发态回到基态时放出的 γ 光子的能量.

**解** 该衰变过程的方程为

$$^{210}\text{Po} \longrightarrow {}^{206}\text{Pb} + \alpha$$

在衰变过程中的衰变能等于 α 粒子的动能和子核的反冲动能之和,α 粒子的动能与 α 衰变能的关系为

$$E_\alpha = Q\frac{A-4}{A}$$

已知在 α 衰变过程中,放出的由 α 粒子的能量分别为 $E_{\alpha 0}=5.30$ MeV,$E_{\alpha 1}=4.50$ MeV,代入上式可以分别计算出反应的衰变能 $Q$:

$$Q_1 = \frac{A}{A-4}E_{\alpha 0},\ Q_2 = \frac{A}{A-4}E_{\alpha 1}$$

衰变能之差即为子核基态和激发态的能量之差,则子核由激发态回到基态时放出的 γ 光子的能量为

$$E = Q_1 - Q_2 = \frac{A}{A-4}(E_{\alpha 0}-E_{\alpha 1}) = \frac{210}{210-4}(5.30\ \text{MeV}-4.50\ \text{MeV}) = 0.82\ \text{MeV}$$

**7-7** $^{47}$V 既可以发生 $\beta^+$ 衰变,也可以发生 K 俘获,已知 $\beta^+$ 的最大能量为 1.89 MeV,试求 K 俘获过程中放出的中微子的能量 $E_\nu$.

**解** $^{47}$V 发生 $\beta^+$ 衰变可表示为

$$^{47}\text{V} \longrightarrow {}^{47}\text{Ti} + e^+ + \nu_e$$

$^{47}$V 发生 K 俘获可表示为

$$^{47}\text{V} + e^- \longrightarrow {}^{47}\text{Ti} + \nu_e$$

在 $\beta^+$ 衰变中,$\beta^+$ 的最大能量近似为衰变能

$$E_0 = (M_V - M_{Ti} - 2m_e)c^2 = 1.89\ \text{MeV}$$

在 K 俘获中,衰变能为

$$Q_\beta = (M_V - M_{Ti})c^2 = E_0 + 2m_e c^2 = 1.89\ \text{MeV} + 2\times 0.511\ \text{MeV} = 2.91\ \text{MeV}$$

衰变能在中微子和子核之间分配,由于中微子质量很小,大部分能量为中微子所得,所以 K 俘获过程中放出的中微子能量 $E_\nu = 2.91$ MeV

**7-8** 试计算下列反应的反应能:

(1) $\alpha+{}^{14}\mathrm{N}\longrightarrow{}^{17}\mathrm{O}+\mathrm{p}$

(2) $\mathrm{p}+{}^{9}\mathrm{Be}\longrightarrow{}^{6}\mathrm{Li}+\alpha$

有关核素的质量,可查阅本书附表.

**解**　根据式(41-8),核反应的反应能可由反应前后各粒子的质量求出:

$$Q=[(M_{\mathrm{i}}+M_{\mathrm{T}})-(M_{\mathrm{l}}+M_{\mathrm{R}})]c^{2}$$

式中,$M_{\mathrm{i}}$,$M_{\mathrm{T}}$,$M_{\mathrm{l}}$,$M_{\mathrm{R}}$ 分别代表入射粒子、靶核、出射轻粒子和剩余核的质量.

(1) 对反应 $\alpha+{}^{14}\mathrm{N}\longrightarrow{}^{17}\mathrm{O}+\mathrm{p}$,已知 $M_{\mathrm{i}}=M_{\alpha}=4.002\ 603\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{T}}=M_{{}^{14}\mathrm{N}}=14.003\ 07\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{l}}=M_{\mathrm{p}}=1.007\ 825\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{R}}=M_{{}^{17}\mathrm{O}}=16.999\ 13\ \mathrm{u}$,代入核反应能公式计算得

$$Q=(4.002\ 603+14.003\ 07-16.999\ 13-1.007\ 825)\times 931.5\ \mathrm{MeV}=-1.19\ \mathrm{MeV}$$

(2) 对反应 $\mathrm{p}+{}^{9}\mathrm{Be}\longrightarrow{}^{6}\mathrm{Li}+\alpha$,已知 $M_{\mathrm{i}}=M_{\mathrm{p}}=1.007\ 825\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{T}}=M_{{}^{9}\mathrm{Be}}=9.012\ 183\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{l}}=M_{\alpha}=4.002\ 603\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{R}}=M_{{}^{6}\mathrm{Li}}=6.015\ 123\ \mathrm{u}$,代入核反应能公式计算得

$$Q=(1.007\ 825+9.012\ 183-6.015\ 123-4.002\ 603)\times 931.5\ \mathrm{MeV}=2.13\ \mathrm{MeV}$$

**7-9**　试问:用多大能量的质子轰击固定的氚靶,才能发生 $\mathrm{p}+{}^{3}\mathrm{H}\longrightarrow\mathrm{n}+{}^{3}\mathrm{He}$ 反应?若入射质子的能量为 3.00 MeV,而发射的中子和质子的入射方向成90°角,则发射的中子和${}^{3}\mathrm{He}$ 的动能各为多少?

**解**　根据式(41-8)知核反应能为

$$Q=[(M_{\mathrm{i}}+M_{\mathrm{T}})-(M_{\mathrm{l}}+M_{\mathrm{R}})]c^{2}$$

式中,$M_{\mathrm{i}}$、$M_{\mathrm{T}}$、$M_{\mathrm{l}}$、$M_{\mathrm{R}}$ 分别代表入射粒子、靶核、出射轻粒子和剩余核的质量.

对核反应 $\mathrm{p}+{}^{3}\mathrm{H}\longrightarrow{}^{3}\mathrm{He}+\mathrm{n}$,已知 $M_{\mathrm{i}}=M_{\mathrm{p}}=1.007\ 825\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{T}}=M_{{}^{3}\mathrm{H}}=3.016\ 050\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{l}}=M_{\mathrm{n}}=1.008\ 665\ \mathrm{u}$,$M_{\mathrm{R}}=M_{{}^{3}\mathrm{He}}=3.016\ 029\ \mathrm{u}$,代入核反应能公式计算得

$$Q=(1.007\ 825+3.016\ 050-3.016\ 029-1.008\ 665)\times 931.5\ \mathrm{MeV}=-0.76\ \mathrm{MeV}$$

根据式(41-14),要使一个反应能够发生,入射粒子所需的最小能量即阈能表达式为

$$K_{\text{阈}}=-Q\frac{M_{\mathrm{T}}+M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{T}}}$$

这里可以用相应的核质量数 $A$ 代替核质量 $M$,已知入射粒子即质子的质量数为1,靶核即${}^{3}\mathrm{He}$ 的质量数为3,代入计算则反应阈能为

$$K_{\text{阈}}=-Q\frac{M_{\mathrm{T}}+M_{\mathrm{i}}}{M_{\mathrm{T}}}=0.765\ \mathrm{MeV}\times\frac{1+3}{3}=1.02\ \mathrm{MeV}$$

所以必须用大于 1.02 MeV 能量的质子轰击固定的氚靶,才能使核反应能够发生.

根据式(41-12),核反应 $Q$ 方程的一种表达形式为

$$K_1(\theta)=\left[u\pm\sqrt{u^2+w}\right]^2$$

式中 $$u=\frac{\sqrt{M_iM_iK_i}}{M_i+M_R}\cos\theta,\quad w=\frac{M_RQ+K_i(M_R-M_i)}{M_i+M_R}$$

已知 $\theta=90°$,$\cos\theta=0$,所以 $u=0$. 所以出射轻粒子的动能为

$$K_1(\theta)=w=\frac{M_RQ+K_i(M_R-M_i)}{M_i+M_R}$$

代入计算得

$$K_1(\theta)=\frac{3\times(-0.76\ \text{MeV})+3.00\ \text{MeV}(3-1)}{1+3}=0.93\ \text{MeV}$$

根据式(41-9),核反应能还可以表示为

$$Q=K_1+K_R-K_i$$

已知入射粒子动能为 $K_i=3.00$ MeV,则出射粒子 $^3$He 的动能为

$$K_R=Q-K_1+K_i=-0.76\ \text{MeV}-0.93\ \text{MeV}+3.00\ \text{MeV}=1.31\ \text{MeV}$$

**7-10** 由原子核的半经验结合能公式,试导出 β 稳定线上的原子核的 $Z$ 和 $A$ 所满足的关系式.

**解** 根据式(33-9),原子核的半经验结合能公式为

$$E_B=a_VA-a_SA^{2/3}-a_CZ^2A^{-1/3}-a_{Sym}(Z-N)^2A^{-1}+E_{BP}+B_{B壳}$$

式中 $a_V=15.8$ MeV,$a_S=18.3$ MeV,$a_C=0.72$ MeV,$a_{Sym}=23.2$ MeV,将 $N=A-Z$,代入上式得

$$E_B=a_VA-a_SA^{2/3}-a_CZ^2A^{-1/3}-a_{Sym}(2Z-A)^2A^{-1}+E_{BP}+B_{B壳}$$

如果原子核发生 β 衰变,则变为它的同量异位素. 对于某一确定 $A$ 的同量异位素,最稳定的原子核应该是具有最大结合能的核素,即核素的 β 稳定条件为

$$\left.\frac{\partial E_B}{\partial Z}\right|_{A=\text{const.}}=0$$

结合能 $E_B$ 对 $Z$ 求导得

$$2a_CZA^{-1/3}+a_{Sym}4(2Z-A)A^{-1}=0$$

解之得

$$Z=\frac{4a_{Sym}A}{8a_{Sym}+2a_CA^{2/3}}=\frac{A}{2+\dfrac{a_C}{2a_{Sym}}A^{2/3}}$$

$$=\frac{A}{2+\dfrac{0.72\ \text{MeV}}{2\times23.2\ \text{MeV}}A^{2/3}}=\frac{A}{2+0.016A^{2/3}}$$

所以 β 稳定线上的原子核的 $Z$ 和 $A$ 所满足的关系式为

$$Z=\frac{A}{2+0.016A^{2/3}}$$

**7-11**　(1) 试证明：一个能量为 $E_0$ 的中子与静止的碳原子核经 $N$ 次对碰后，其能量近似为 $(0.72)^N E_0$.

(2) 热中子能有效地使 $^{235}U$ 裂变，但裂变产生的中子能量一般较高(MeV). 在反应堆中用石墨作减速剂，欲使能量为 2.0 MeV 的快中子慢化为热中子(0.025 eV)，需经过多少次对碰？

**解**　(1) 中子与碳原子对碰前后动量守恒，能量守恒，则有

$$m_n v_0 = m_n v_n + m_C v_C \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_n v_0^2 = \frac{1}{2}m_n v_n^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 \tag{2}$$

由式(1)、(2)联立解得

$$v_n = \frac{m_n - m_C}{m_n + m_C}v_0 = \frac{1-12}{1+12}v_0 = -\frac{11}{13}v_0$$

所以经过一次对碰后，中子的动能变为

$$E = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_0 = 0.72E_0$$

经过 $N$ 次对碰后，中子的动能变为

$$E_N = (0.72)^N E_0$$

(2) 由 $E_N = (0.72)^N E_0$ 得，经过的对碰次数为

$$N = \frac{\ln\left(\frac{E_N}{E_0}\right)}{\ln(0.72)} = \frac{\ln\left(\frac{0.025\ \text{eV}}{2\ \text{MeV}}\right)}{\ln(0.72)} = \frac{-18.1975}{-0.3285} = 55.4$$

需经过 56 次对碰，才能使快中子慢化为热中子.

**7-12**　轻核 $^{19}F$ 在质子轰击下的共振反应，常用作低能加速器的能量定标，例如：

| 质子能量 $E_p$/keV | 反应 | 宽度/keV |
|---|---|---|
| 224.4 | $^{19}F(p,\gamma)$ | 1.0 |
| 340.4 | $^{19}F(p,\alpha\gamma)$ | 4.5 |
| 873.5 | $^{19}F(p,\alpha\gamma)$ | 5.2 |
| 935.3 | $^{19}F(p,\alpha\gamma)$ | 8.0 |
| 1 085.0 | $^{19}F(p,\alpha\gamma)$ | 4.0 |

(1) 试确定 $^{20}Ne$ 的几个激发能级；

(2) 试求出复合核$^{20}$Ne相对能级的平均寿命.

**解** 对核反应 ${}_1^1\mathrm{p}+{}_9^{19}\mathrm{F}\longrightarrow{}_{10}^{20}\mathrm{Ne}^*\longrightarrow{}_{10}^{20}\mathrm{Ne}+\gamma$,式中$^{20}$Ne$^*$表示复合核$^{20}$Ne处于激发态的核.用$M_p$、$M_F$、$M_{Ne}$表示静止质量,$K_p$、$K_F$、$K_{Ne}$表示动能,$W$表示激发能级.由能量守恒得

$$M_pc^2+K_p+M_Fc^2+K_F=M_{Ne}c^2+K_{Ne}+W$$

由此激发能级$W$可以表示为

$$W=(M_p+M_F-M_{Ne})c^2+K_p+K_F-K_{Ne}$$

其中靶核静止,$K_F=0$.又因为动量守恒$p_p=p_{Ne}$,则有

$$mv=(20m)v'$$

$$v'=\frac{1}{20}v$$

故复合核动能为

$$K_{Ne}=\frac{1}{2}\times(20m)v'^2=\frac{1}{2}\times20m\left(\frac{1}{20}v\right)^2=\frac{1}{20}K_p$$

代入激发能级公式中,计算得

$$W=(M_p+M_F-M_{Ne})c^2+K_p-\frac{1}{20}K_p$$

该式表明发生共振反应时,复合核在某一激发态的能量等于入射离子能量(质心系)与它与靶核的结合能之和.

结合能的表达式为

$$E_B=\Delta Mc^2=(M_p+M_{19_F}-M_{20_{Ne}})c^2$$

已知$M_p=1.007\ 825$ u,$M_{19_F}=18.998\ 40$ u,$M_{20_{Ne}}=19.992\ 44$ u,代入计算得结合能为

$$E_B=(18.998\ 40+1.007\ 825-19.992\ 44)\times931.5\ \mathrm{MeV}=12.841\ \mathrm{MeV}$$

当$K_p=224.4$ keV时,$^{20}$Ne的激发能级为

$$W=12.841\ \mathrm{MeV}+0.224\ 4\times\frac{19}{20}\ \mathrm{MeV}=13.054\ \mathrm{MeV}$$

当$K_p=340.4$ keV时,$^{20}$Ne的激发能级为

$$W=12.841\ \mathrm{MeV}+0.340\ 4\times\frac{19}{20}\ \mathrm{MeV}=13.164\ \mathrm{MeV}$$

当$K_p=873.5$ keV时,$^{20}$Ne的激发能级为

$$W=12.841\ \mathrm{MeV}+0.873\ 5\ \mathrm{MeV}\times\frac{19}{20}=13.671\ \mathrm{MeV}$$

当$K_p=935.3$ keV时,$^{20}$Ne的激发能级为

$$W=12.841\ \mathrm{MeV}+0.935\ 3\ \mathrm{MeV}\times\frac{19}{20}=13.730\ \mathrm{MeV}$$

当 $K_p=1\ 085.0$ keV 时，$^{20}Ne$ 的激发能级为

$$W=12.841\ \text{MeV}+1.085\ 0\ \text{MeV}\times\frac{19}{20}=13.872\ \text{MeV}$$

共振幅宽度即为激发能级的宽度. 根据不确定关系

$$\Delta E\cdot\Delta t\approx\frac{\hbar}{2}$$

则平均寿命为

$$\Delta t\approx\frac{\hbar}{2\Delta E}=\frac{\hbar c}{2\Delta Ec}=\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\Delta E\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}$$

所以各个能级宽度对应的平均寿命分别为

$$\Delta E=1.0\ \text{keV},\Delta t\approx\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times1.0\ \text{keV}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}=3.3\times10^{-19}\ \text{s}$$

$$\Delta E=4.5\ \text{keV},\Delta t\approx\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times4.5\ \text{keV}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}=7.3\times10^{-20}\ \text{s}$$

$$\Delta E=5.2\ \text{keV},\Delta t\approx\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times5.2\ \text{keV}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}=6.3\times10^{-20}\ \text{s}$$

$$\Delta E=8.0\ \text{keV},\Delta t\approx\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times8.0\ \text{keV}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}=4.1\times10^{-20}\ \text{s}$$

$$\Delta E=4.0\ \text{keV},\Delta t\approx\frac{197\ \text{nm}\cdot\text{eV}}{2\times4.0\ \text{keV}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}=8.2\times10^{-20}\ \text{s}$$

**7-13**　设一个聚变堆的功率为$10^6$ kW，以 D+T 为燃料，试计算一年要消耗多少氚？这么大功率的电站，若改用煤作燃料，则每年要消耗多少煤（煤的燃烧热约为 $3.3\times10^7$ J/kg）？

**解**　对核反应 $D+T\longrightarrow\alpha+n+17.58$ MeV，说明有一个氚核参加反应，将放出的能量为 $E=17.58$ MeV.

一个聚变堆一年产生的能量为

$$W=Pt=10^6\times10^3\ \text{W}\times3\ 600\times24\times365\ \text{s}=3.15\times10^{16}\ \text{J}$$

$$=\frac{3.15\times10^{16}}{1.602\times10^{-19}}\ \text{eV}=1.97\times10^{35}\ \text{eV}$$

则所需氚核数为

$$N=\frac{W}{E}=\frac{1.971\times10^{29}\ \text{eV}}{17.58\ \text{MeV}}=1.121\times10^{28}$$

每个氚核的质量为

$$m=3.016\ 05\ \text{u}=3.016\ 05\times1.66\times10^{-27}\ \text{kg}=5.00\times10^{-27}\ \text{kg}$$

$N$ 个氚核的总质量为

$$M=mN=5.00\times10^{-27}\times1.121\times10^{28}=56.1\ \text{kg}$$

煤的燃烧值为 $3.3\times10^7$ J/kg,需要煤的质量为

$$M'=\frac{3.15\times10^{16}\ \text{J}}{3.3\times10^7\ \text{J/kg}}=9.55\times10^8\ \text{kg}$$

**7-14** 铁的热中子俘获截面为 2.5 b,试问入射热中子经过 1.0 mm 厚的铁块后被吸收掉百分之几?

**解** 由式(41-17)知核反应截面的定义式为

$$\sigma=\frac{n_r}{n_i Nt}$$

式中,$n_i$、$n_r$ 分别为入射粒子和反应粒子数,$N$ 为单位体积靶核粒子数,$t$ 为厚度.

而单位体积靶核粒子数 $N$ 为

$$N=\frac{\rho}{M}N_A$$

式中铁的 $\rho=7.86\ \text{g/cm}^3$,$M=56\ \text{g/mol}$.

所以入射热中子被吸收的概率为

$$\frac{n_r}{n_i}=\sigma Nt=\sigma\frac{\rho}{M}N_A t$$

$$=2.5\times10^{-24}\text{cm}^2\times\frac{7.86\ \text{g/cm}^3}{56\ \text{g/mol}}\times6.02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}\times1.0\ \text{mm}=2.1\%$$

**7-15** 有人认为质子可能会衰变,其平均寿命约为 $1.2\times10^{32}$ a.若要测量它的放射性(例如,每月测量到一次衰变事件),那么至少要用多少水?

**解** 已知质子的平均寿命为

$$\tau=1.2\times10^{32}\ \text{a}=1.2\times10^{32}\times24\times3\ 600\times365\ \text{s},$$

根据衰变常量 $\lambda$ 与平均寿命 $\tau$ 的关系得

$$\lambda=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{1.2\times10^{32}\times24\times3\ 600\times365}\ \text{s}^{-1}$$

若质子每月发生一次衰变,则其放射性活度为

$$A=1/\text{月}=\frac{1}{(30\times24\times3\ 600)\ \text{s}}$$

而放射性活度 $A=\lambda N$,则质子的总数 $N$ 为

$$N=\frac{A}{\lambda}=\frac{1.2\times10^{32}\times365\times24\times3\ 600\ \text{s}}{30\times24\times3\ 600\ \text{s}}=1.46\times10^{33}$$

1 mol 水的质量为 18 g,含 $6.02\times10^{23}$ 个水分子,而每一个水分子中有 10 个质子,即每 18 g 水中含有 $6.02\times10^{24}$ 个质子.所以 $N$ 个质子对应的水质量为

$$m=\frac{1.46\times10^{33}}{6.02\times10^{24}\ \text{mol}^{-1}}\times18\ \text{g/mol}=4.36\times10^9\ \text{g}=4.36\times10^6\ \text{kg}$$

# 第八章　超精细相互作用

**8-1**　由原子光谱的超精细结构发现，钠的 $D_1$ 线（589.6 nm）又分裂成两条相距为 0.002 3 nm 的谱线，这是钠的 $3S_{1/2}$ 能级一分为二的结果. 试求该能级的两个子能级的间距［参见图 43.5《原子物理学》（第四版）］.

**解**　设 $3S_{1/2}$ 能级分裂的两个子能级的能量分别为 $E_1$、$E_2$，如图 8-1 所示. 则钠的 $D_1$ 线（589.6 nm）又分裂成的两条谱线波长为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，

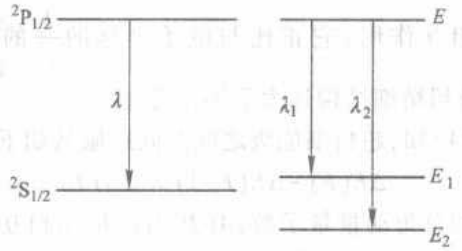


图 8-1

$$E-E_1=\frac{hc}{\lambda_1}$$

$$E-E_2=\frac{hc}{\lambda_2}$$

两式相减得

$$E_1-E_2=\frac{hc}{\lambda_2}-\frac{hc}{\lambda_1}=\frac{hc(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\approx\frac{hc(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}\times 0.002\ 3\ \text{nm}}{(589.6\ \text{nm})^2}=8.2\times10^{-6}\ \text{eV}$$

**8-2**　原子 $^{42}K$ 的谱线 $^2S_{1/2}$ 的每一个子能级在强磁场中分裂成 5 个成分，试求该原子核的自旋.［提示参见 §22(5)《原子物理学》（第四版），考虑在强场下超精细结构的分裂特征］

**解**　在强场下超精细结构的分裂能级为

$$U=-g_I m_I\mu_N B+\mu_B B(2m_s+m_l)$$

对 $^{42}K$ 原子的 $^2S_{1/2}$ 态，$l=0$，$s=1/2$，则 $m_l=0$，$m_s=\pm1/2$. 所以原子 $^{42}K$ 的谱线 $^2S_{1/2}$ 有两个子能级.

而每个子能级在强磁场中分裂为 $2I+1$ 个成分. 所以有

$$2I+1=5$$

解得

$$I=2$$

故 $^{42}K$ 原子核的自旋为 $I=2$.

**8-3** 考察图 43.4[《原子物理学》(第四版)],回答:

(1) 为什么 $^4F_{9/2}$ 能级的磁偶极超精细结构远大于 $^4G_{11/2}$ 能级?

(2) 电四极相互作用将给 $^4F_{9/2}$ 能级的间距规则带来多大的偏差?

**解** (1) 对于 $^{139}La$ 的 $5d^26s^4F_{9/2}\longrightarrow 5d^26p^4G_{11/2}$ 跃迁(波长为 625.0 nm),它的谱线与有关的超精细结构如图 43.4 所示. 一对 5d 电子对超精细结构的贡献可以忽略. 处于较低态的 6s 电子比处于较高态的 6p 电子离原子核近,它的运动在原子核处产生的磁场较大,故它引起的超精细能级分裂也较大,而 6p 电子离原子较远,超精细相互作用(它正比与电子坐标的 $\frac{1}{r^3}$ 的平均值)也就小,因此 $^4F_{9/2}$ 能级的磁偶极超精细结构远大于 $^4G_{11/2}$ 能级.

(2) 由式(43-24)知,超精细能级之间的间距服从如下规则:

$$\Delta E(F)-\Delta E(F-1)=A(J)F$$

其中 $F$ 为原子体系的总角动量量子数,$A(J)$ 为超精细相互作用常量,它表示能级分裂大小的量度. 可见,相邻能级的间距随 $F$ 按等差级数增加,则有

$$E(F=8)-E(F=1)=A(J)\sum_{i=|I-J|+1}^{I+J}F_i=35A(J)$$

将 $\Delta\tilde{\nu}=0.500\ \text{cm}^{-1}$ 代入有

$$35A(J)=\Delta E=hc\Delta\tilde{\nu}=1.24\ \text{nm}\cdot\text{keV}\times 0.500\ \text{cm}^{-1}=6.20\times10^{-5}\ \text{eV}$$

所以 $A(J)=1.77\times10^{-6}\ \text{eV}$

由式(44-3)知,电四极超精细相互作用常量 $B$ 表示为

$$B=eQ\left\langle\frac{\partial^2V_e}{\partial z^2}\right\rangle$$

式中 $Q$ 为原子核的电四极矩,$\left\langle\frac{\partial^2V_e}{\partial z^2}\right\rangle$ 为核外电子产生的电场梯度的平均值.

对 $^{139}La$ 核,其电四极矩为 $Q=0.26\ \text{b}=0.26\times10^{-24}\text{cm}^2$ 由原子的电离能(基态为 eV 量级)和线度($10^{-8}$ cm 量级),可估算得

$$\left\langle\frac{\partial^2V_e}{\partial z^2}\right\rangle\approx10^{16}\ \text{V}\cdot\text{cm}^{-2}$$

于是有

$$B\approx e\times0.26\times10^{-24}\text{cm}^2\times10^{16}\ \text{V}\cdot\text{cm}^{-2}=0.26\times10^{-8}\ \text{eV}$$

可见,电四极矩只对超精细能级的间距规则产生一个小的修正.