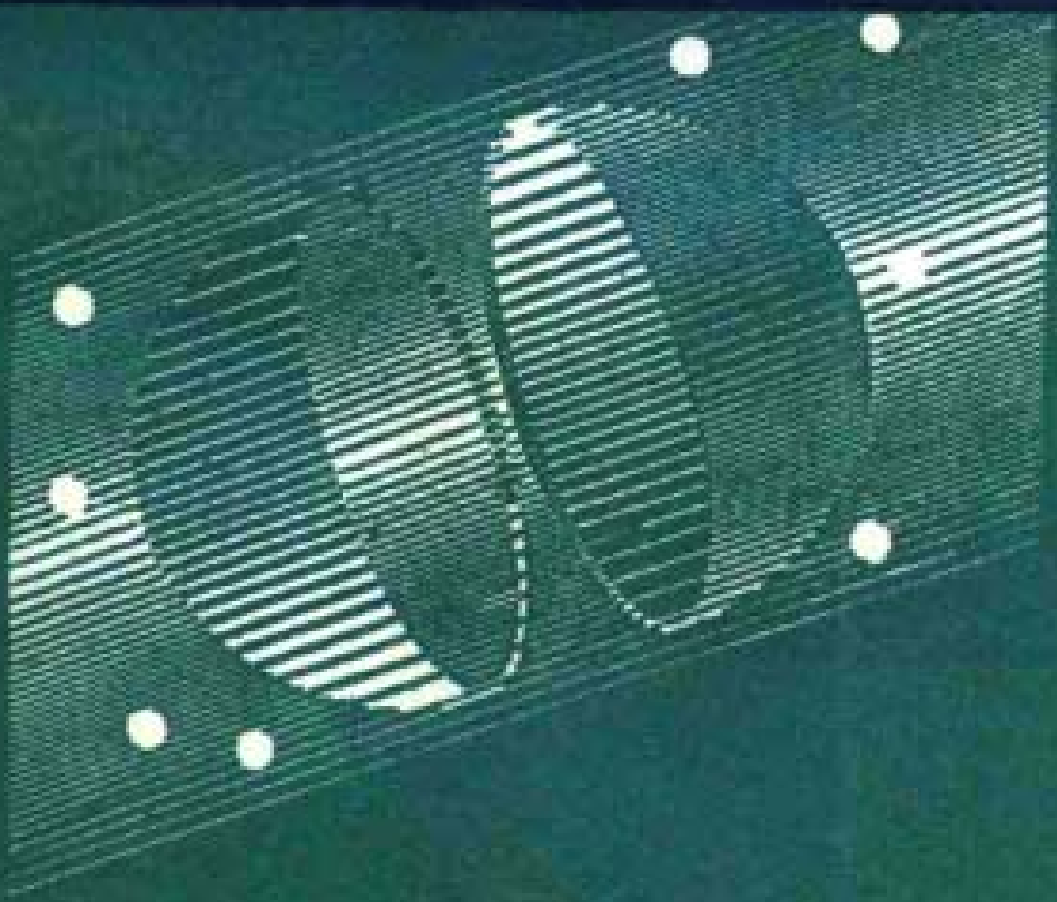
原子物理学习题集

张永恩　于玉兰　编著



河南大学出版社

责任编辑 赵 林　　封面设计 韩 冰



ISBN7-81018-866-X/D·37
定价：8.00 元

原子物理学习题集

张永恩　于玉兰

河南大学出版社

(豫)新登字09号

原子物理学习题集

张永恩　于玉兰

责任编辑　赵　林

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168　毫米1/32　印张：10.5　字数：264千字
1993年10月第1版　1993年10月第1次印刷
印数：1—1000　定价：8.00元

ISBN7-81018-864-X/O·52

前　言

原子物理学是高等学校一门重要的基础课，是从经典物理向近代物理的过渡课程．这门课程的教材，国内已出版了几种，如褚圣麟编的《原子物理学》，葛清泉编的《普通物理学》(原子物理部分)，张永恩编著的《原子和原子核物理学》，杨福家著的《原子物理学》等．这些教材基本上满足了国内的教学需要．与课程相适应的习题集是从事原子物理教学的老师和广大学生，以及许多自学者所迫切需要的．

本书就是为了满足上述需要而编写的．书中除收入了符合原子物理课程基本要求的习题外，还收入部分稍深的习题．

在本书的每一章的开始，都给出了这一章的内容提要和典型题解，这些内容无疑会使读者加深对基本观念的理解，打开演做习题的思路．

编　者

1986．10．

目　录

第一章　原子结构与玻尔理论 …… (1)

内容提要 …… (1)

典型题解 …… (3)

习题集 …… (13)

§1-1　卢瑟福散射 …… (13)

§1-2　氢原子的玻尔理论 …… (16)

§1-3　类氢离子和类氢原子 …… (19)

§1-4　夫兰克－赫芝实验 …… (21)

第二章　微观粒子的薛定谔理论 …… (23)

内容提要 …… (23)

典型题解 …… (26)

习题集 …… (50)

§2-1　光子 …… (50)

§2-2　光电效应 …… (51)

§2-3　康普顿效应 …… (53)

§2-4　电子对效应 …… (56)

§2-5　光子的吸收 …… (57)

§2-6　德布罗意波 …… (58)

§2-7　不确定关系 …… (62)

§2-8　布喇格公式 …… (65)

§2-9　薛定谔方程 …… (67)

第三章　氢原子的量子理论 …… (72)

内容提要 …… (72)

典型题解 …… (77)

习题集 …… (82)

§3-1 氢原子的薛定谔理论 …… (82)
§3-2 氢原子的角动量和磁矩 …… (86)
§3-3 史特恩－盖拉赫实验 …… (88)
§3-4 精细结构 …… (90)
第四章 多电子原子 …… (92)
内容提要 …… (92)
典型题解 …… (97)
习题集 …… (115)
§4-1 全同粒子波函数 …… (115)
§4-2 X射线 …… (116)
§4-3 一个光学电子的原子结构 …… (119)
§4-4 多个光学电子的原子结构 …… (122)
§4-5 塞曼效应 …… (128)
§4-6 原子的磁性 …… (131)
第五章 分子结构和分子光谱 …… (133)
内容提要 …… (133)
典型题解 …… (138)
习题集 …… (155)
§5-1 分子的振动和转动 …… (155)
§5-2 分子光谱 光的组合散射 …… (157)
第六章 原子核的性质和结构 …… (160)
内容提要 …… (160)
典型题解 …… (163)
习题集 …… (174)
§6-1 核的半径 质量和结合能 …… (174)
§6-2 核的角动量 磁矩和电四极矩 …… (176)
§6-3 核的结构模型 …… (178)
第七章 不稳定核的衰变 …… (180)
内容提要 …… (180)
典型题解 …… (185)

习题集 …… (212)
§7-1 衰变定律 …… (212)
§7-2 γ衰变 …… (217)
§7-3 α衰变 …… (220)
§7-4 β衰变 …… (222)
第八章 原子核反应 …… (225)
内容提要 …… (225)
典型题解 …… (229)
习题集 …… (249)
§8-1 核反应中的守恒定律 …… (249)
§8-2 核反应的截面和产额 核能级 …… (253)
§8-3 原子核的裂变 聚变 核能的利用 …… (258)
第九章 粒子 …… (263)
内容提要 …… (263)
典型题解 …… (269)
习题集 …… (275)
§9-1 粒子间的相互作用 …… (275)
§9-2 粒子的衰变 …… (277)
§9-3 粒子的性质 …… (279)
§9-4 粒子的结构模型 …… (281)
附录Ⅰ 习题答案 …… (283)
附录Ⅱ 有关物理常数和单位变换 …… (314)
附录Ⅲ 原子质量表 …… (316)

第一章　原子结构与玻尔理论

内　容　提　要

(一)原子的有核模型

1. 在卢瑟福散射中，散射角 θ 与碰撞参数 b 之间的关系

$$\operatorname{ctg}(\theta/2) = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{mv_0^2}{2Ze^2} \cdot b \qquad (1\text{-}1)$$

式中：m 为 α 粒子的质量；v_0 为 α 粒子的速度；Z 为原子核的电荷数. θ 随 b 的减小而增大.

2. 卢瑟福散射公式

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{mv_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \qquad (1\text{-}2)$$

式中：$\mathrm{d}\sigma$ 称为微分散射截面，它的意义是每个靶原子都存在一个有效截面 $\mathrm{d}\sigma$，凡是射到 $\mathrm{d}\sigma$ 上的 α 粒子，都散射到 θ 与 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 之间的立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内.

3. 散射到 θ 与 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 之间，距散射中心 r 处的单位面积上的 α 粒子数

$$dn = nNt\left(\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2\frac{1}{r^2\sin^4(\theta/2)} \tag{1-3}$$

式中：N 为靶原子的数密度；t 为靶厚度；n 为入射的 α 粒子数；T 为 α 粒子的动能.

4. α 粒子可接近靶核的最小距离

$$r_{\min} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{mv_0^2}\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right) \tag{1-4}$$

当散射角 $\theta=180°$ 时的 $r_{\min}$ 为原子核的半径.

(二)氢原子的玻尔理论

1. 玻尔假定：第一，只有当电子的角动量满足如下公式的电子轨道才是允许的

$$mvr = n\hbar \tag{1-5}$$

式中：$n=1,2,3,\cdots$ 为主量子数；$\hbar=\frac{h}{2\pi}$；r 为电子轨道半径. 第二，当电子从能量高的轨道向能量低的轨道跃迁时，放出光子的频率为

$$\nu = (E_{n+1} - E_n)/h \tag{1-6}$$

式中：E_{n+1} 和 E_n 分别为电子跃迁前后，氢原子能级的能量.

2. 电子轨道半径及氢原子的总能量

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{n^2\hbar^2}{mZe^2}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{1-7}$$

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{m(Ze^2)^2}{2n^2\hbar^2}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{1-8}$$

当 $n=1$ 时，$r_1 = a_0 = 4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{me^2} \cong 0.529$ 埃称为玻尔第一轨道半径. 它所对应的能量 $E_1 = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{2\hbar^2} \cong -13.6$ 电子伏，为氢原子基态的能量；通常把基态的能量看为零，各激发态的能量以它为

标准算起.

3. 氢原子光谱的波数公式

$$\tilde{\nu}=\frac{2\pi^2 m(Ze^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c}\left[\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right]=R_\infty\left[\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right] \tag{1-9}$$

式中：$n'=1, n=2,3,4,\cdots$时得赖曼系(紫外区)；$n'=2, n=3,4,5,\cdots$时得巴耳末系(可见光区)；$n'=3, n=4,5,6,\cdots$时得帕邢系(红外区)；$n'=4, n=5,6,7,\cdots$得布喇开系(远红外区). R_∞ 一 1.0973731×10^7 米$^{-1}$为里得堡常数($R_H=1.0967758\times10^7$ 米$^{-1}$).

4. 在考虑到原子核的运动时，里得堡常变为

$$R_A=\frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c}\frac{1}{1+\frac{m}{M}}=R_\infty\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{M}} \tag{1-10}$$

式中：m 和 M 分别是电子质量和原子核的质量；R_∞为不考虑原子核运动时的里得堡常数.

5. 对于 $He^+(Z=2)$，$Li^{++}(Z=3)$等类氢离子，在以上氢原子公式中，只要选用适当的 Z 值，都是成立的. 但是，对于类氢原子，由于介子的质量较重，在以上公式中都必须应用介子与核的约化质量. 且介子的轨道要比电子的轨道小得多；相应的基态能量要比氢原子低得多. 例如，μ^- 原子的约化质量 $\mu_\mu=1.69499\times10^{-28}$千克，基态能量为－25.28 电子伏；$\pi^-$ 原子的约化质量 $\mu_\pi=2.16303\times10^{-28}$千克，其基态的能量为－32.26 电子伏.

典 型 题 解

1-1. 能量为 8.8 兆电子伏的 α 粒子入射到厚度为 2×10^{-5}厘米的金箔上，试计算散射到 $\theta\geqslant90°$角中的 α 粒子数占入射总数的

百分率(已知金的原子序数 $Z=79$,原子量为 197,金箔的密度为 1.93×10^4 千克/米^3).

[解] 由公式(1-3),散射角大于 90° 的 α 粒子数为

$$dn' = \int dn = nNt\int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma$$

所以,占总数的相对数为

$$\frac{dn'}{n} = Nt\int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma = Nt\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}d\theta$$

其中,单位体积中金的原子数为

$$N = \frac{\rho N_0}{A}$$

$$= \frac{1.93\times10^4\text{ 千克/米}^3\times6.02\times10^{23}\times10^3\text{ 个/千摩尔}}{197\text{ 千克/千摩尔}}$$

$$= 5.9\times10^{28}\text{ 个/米}^3$$

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2 = \left\{\frac{8.98\times10^9\text{ 牛顿·米}^2/\text{库仑}^2\times79}{8.8\times10^6\text{ 电子伏}\times1.602\times10^{-19}\text{ 焦耳/电子伏}}\times\frac{(1.602\times10^{-19}\text{ 库仑})^2}{}\right\}^2$$

$$= 1.69\times10^{-28}\text{ 米}^2.$$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}d\theta = 2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{d\sin(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} = 1$$

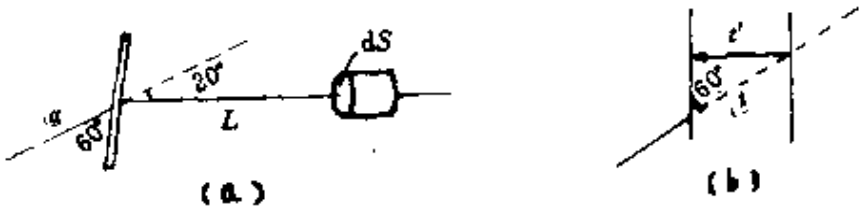
将以上数值代入,即得

$$\frac{dn'}{n} = 5.9\times10^{28}\text{ 个/米}^3\times2\times10^{-7}\text{ 米}\times1.69\times10^{-28}\text{ 米}^2$$

$$= 6.25\times10^{-4}\%$$

1-2. 能量为 3.5 兆电子伏的细 α 粒子束射到单位面积上质量为 1.05×10^{-2} 千克/米^2 的银箔上(见图 a),α 粒子与银箔表面成 60°角. 在离 α 粒子入射方向成 $\theta=20°$ 的方向上,离银箔散射区距

离 $L=0.12$ 米处放一窗口面积为 6.0×10^{-5} 米^2 的计数器. 测得散射进此窗口的 α 粒子是全部入射 α 粒子的百万分之 29. 若已知银的原子量是 107.9，试求银的核电荷数 Z.



例题 1-2 用图

[解] 设靶厚 t'，α 粒子在靶中通过的实际厚度为 $t=t'/\sin60°=2t'/\sqrt{3}$. (见图 b). 探测器张的立体角 $d\Omega=dS/L^2$. 单位面积所遮盖的原子数 $Nt'=\eta/m_{Ag}=\eta(A_{Ag}/N_0)^{-1}$，其中：$N$ 为原子的体密度；η 是单位靶表面积所覆盖的总质量；m_{Ag}为银原子的质量；A_{Ag}为银的原子量；N_0 为阿伏加德罗常数. 那么由公式

$$\frac{dn}{n}=Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{m v_0^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

可求得

$$Z=\left[\frac{dn}{n}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A_{Ag}}{\eta N_0}\frac{(m v_0^2)^2\sin^4(\theta/2)}{(1/4\pi\varepsilon_0)^2e^4d\Omega}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{m v_0^2\sin^2(\theta/2)\cdot L}{(1/4\pi\varepsilon_0)\cdot e^2}\left[\frac{\sqrt{3}A_{Ag}\cdot\frac{dn}{n}}{2N_0\eta dS}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\times3.5\times10^6\times1.6\times10^{-19})\sin^2(10^0)\times0.12}{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{3}\times107.9\times29\times10^{-6}}{2\times6.02\times10^{23}\times1.05\times10^{-2}\times6.0\times10^{-5}}\right)^{1/2}$$

$$=47$$

1-3. 设 N 为单体积内的靶核数，t 为铀箔的厚度，πb^2 为一个靶核的有效面积. 假设 $Nt\pi b^2=0.1$，若能量为 5.0×10^6 电子伏的

α粒子在铀箔上散射时，从角度 $\theta \geqq 4°$ 开始都可以满足卢瑟福散射公式. 试估计铀箔的质量厚度.

[解] 根据公式(1-1)

$$b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{m v_0^2}\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$$

则有

$$Nt\pi b^2 = Nt\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{m v_0^2}\right)^2\mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2} \geqq 0.1$$

其中：$N = N_0(\mu/\rho)^{-1} = N_0\rho/\mu$；$\mu$ 是铀的摩尔原子质量；ρ 是铀的质量密度，N_0 是阿伏加德罗常数. 由此

$$\frac{N_0\rho t\pi(Ze^2)^2}{\mu E^2}\cdot\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2} \geqq 0.1$$

故有

$$\rho t \geqq \frac{0.1\mu E^2(4\pi\varepsilon_0)^2}{N_0\pi(Ze^2)^2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{0.1\times 238\times(5\times 10^6\times 1.6\times 10^{-19})^2}{6.02\times 10^{23}} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\times(1/9\times 10^9)^2}{\pi[92\times(1.9\times 10^{-19})^2]^2}\mathrm{tg}^2 2°$$

$\geqq 2.2$ 毫克 / 厘米^2

1-4. 强度为 5×10^3 个/秒，能量为 3×10^6 电子伏的狭窄α粒子流垂直地射到厚度为 1 微米的金箔上，试问经过 10 分钟在 59° 和 61°之间的角度间隔内将记录多少个被散射的α粒子？

[解] 已知散射角在 θ—$\theta+\mathrm{d}\theta$ 之间 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角内的α粒子数为

$$\mathrm{d}n = nNt\cdot 4\pi\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{m v_0^2}\right)^2\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2\frac{\mathrm{dsin}(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$$

据此式，可计算出散射角在59°—61°之间的α粒子数

$$n'=\int_{59^\circ}^{61^\circ}\mathrm{d}n=2\pi n\frac{\rho N_0}{A}t\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2\int_{59^\circ}^{61^\circ}\frac{\mathrm{d}\sin(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$$

$$=2\pi nt\cdot\frac{\rho N_0}{A}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{Ze^2}{T}\right)^2\left[-\frac{1}{2\sin^2(\theta/2)}\right]_{59^\circ}^{61^\circ}$$

将 $N_0=6.02\times10^{23}$，$A=197$，$\rho=19.3\times10^3$ 千克/米^3，$t=10^{-6}$ 米，$n=5\times10^3$ 个/秒，$Z=76$，$T=3\times10^6$ 电子伏$=3\times10^6\times1.6\times10^{-19}$焦耳及时间 $\tau=600$ 秒代入上式，可计算出 $n'\cong194$. 即可记录 194 个 α 粒子.

1-5. 镭放出的 α 粒子能量为 7.68 电子伏. 假定这些 α 粒子分别用金箔和铝箔散射. 试计算在这两种情况中，α 粒子最接近核的距离.

[解] 根据公式(1-4)，当 $\theta=180^0$ 时，α 粒子最接近原子核，这时(1-4)式变为

$$r_{\min}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{T}$$

其中：$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.99\times10^9$ 牛顿·米^2/库仑^2；$T=7.68\times10^6$ 电子伏；金的原子序数 Z=79，铝的原子序数 Z=13. 因此

$$r_{\min}(\mathrm{Au})=\frac{2\times8.99\times10^9(\text{牛顿}\cdot\text{米}^2/\text{库仑}^2)\times79}{7.68\times10^6\text{电子伏}\times1.6}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\times(1.6\times10^{-19}\text{库仑})^2}{\times10^{-19}\text{焦耳}/\text{电子伏}}$$

$$=2.98\times10^{-14}\text{米}$$

$$r_{\min}(\mathrm{Al})=\frac{2\times8.99\times10^9(\text{牛顿}\cdot\text{米}^2/\text{库仑}^2)\times13}{7.68\times10^6\text{电子伏}\times}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\times(1.6\times10^{-19}\text{库仑})^2}{1.6\times10^{-19}\text{焦耳}/\text{电子伏}}$$

$$=0.49\times10^{-14}\text{米}.$$

1-6. 按照玻尔理论，处于第一激发态的氢原子，如果寿命是

10^{-8}秒，其中电子将旋转多少圈？

［解］ 电子绕原子核旋转，其向心力为原子核对电子的库仑引力，即

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}$$

此式与(1-5)式消去速度得电子轨道半径

$$r_n=4\pi\varepsilon_0\frac{n^2\hbar^2}{me^2}$$

在第一激发态 $n=2$，这时

$$r_2=4\pi\varepsilon_0\frac{4\hbar^2}{me^2}=4a_0=4\times 0.529\,\text{Å}=2.12\times 10^{-10}\,\text{米}$$

倘若消去半径 r 则得电子的速度

$$v_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{n\hbar}$$

对子第一激发态，$n=2$，所以电子的速度为

$$v_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2\hbar}=1.10\times 10^6\,\text{米}/\text{秒}$$

那末，电子绕核转动的角速度为

$$\omega=\frac{v_2}{r_2}=0.52\times 10^{16}\,\text{弧度}/\text{秒}$$

则转的总圈数是

$$N=\frac{\omega t}{2\pi}=\frac{(0.52\times 10^{16}\,\text{弧度}/\text{秒})(10^{-8}\,\text{秒})}{6.28\,\text{弧度}/\text{圈}}$$

$$=8.3\times 10^6\,\text{圈}$$

1-7. 已知氢原子巴尔末第一条谱线(H_α线)的波长为 6562.80 埃. 试计算氚原子的 H_α 线的波长.

［解］ 氚原子与氢原子类似，它有一个电子；但不同的是它的核中有 2 个中子和一个质子. 因此 $Z=1$，$M_T=3M_H$. 而且，对 H_α 线，$n=3$，$n'=2$. 根据公式(1-9)和(1-10).

$$\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\text{和}R=\frac{\mu}{m}R_\infty\doteq\frac{R_\infty}{1+(m/M)}$$

对于氢和氚分别有

$$\tilde{\nu}_H=\frac{1}{\lambda_H}=R_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{R_\infty}{1+(m/M_H)}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

$$\tilde{\nu}_T=\frac{1}{\lambda_T}=R_T\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{R_\infty}{1+(m/M_H)}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

二者相除有

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_H}=\frac{1+(m/M_T)}{1+(m/M_H)}$$

由于

$$\frac{m}{M_H}=\frac{1}{1837}\text{和}\frac{m}{M_T}=\frac{m}{3M_H}=\frac{1}{5611}$$

则

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_H}=\frac{1+(1+/5611)}{1+(1/1837)}=\frac{5612}{5514}$$

所以氚原子的 H_α 线的波长为

$$\lambda_T=\frac{5612}{5514}\times\lambda_H=\frac{5612}{5514}\times 6562.80\text{埃}=6680.93\text{埃}$$

1-8. 试问二次电离的锂离子(Li^{++})从第一激发态向基态跃迁时发出的光子，是否有可能使处于基态的一次电离的氦离子(He^+)的电子电离掉？

[解] (Li^{++})从第一激发态向基态跃迁时发出光子的能量为

$$h\nu_{Li}=9hcR_{Li}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{27}{4}RcR_{Li}$$

He^+的电离能为

$$h\nu_{He}=4hcR_{He}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty}\right)=4hcR_{He}$$

二者相比得

$$\frac{h\nu_{Li}}{h\nu_{He}} = \frac{27R_{Li}}{16R_{He}} = \frac{27}{16} \cdot \frac{1 + m/M_{He}}{1 + m/M_{Li}}$$

由于 $M_{He} < M_{Li}$，所以有 $1+m/M_{He} > 1+m/M_{Li}$，从而有

$$h\nu_{Li} > h\nu_{He}$$

由此知，Li^{++}放出的光子可电离基态的 He^+ 离子.

1-9. 电子与正电子绕其共同的质心转动而构成正电子素.(a)如将这个系统视作正常的原子，试将它放出的光谱线与氢原子的比较之.(b)基态的正电子素的轨道半径是多少?

[解] (a)正电子素原子的原子核是正电子，其质量为 M，电子的质量为 m，因为二者相等，则

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

相应的里得堡常数是

$$R = \frac{m}{m+m} \cdot R_\infty = \frac{R_\infty}{2}$$

因之，正电子素原子的能量为

$$E_{正电子素} = -\frac{RhcZ^2}{n^2} = -\frac{R_\infty hcZ^2}{2n^2}$$

所发出谱线的波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{R_\infty}{2}Z^2\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

与氢原子发射谱线的波数公式相比可知，正电子素原子谱线的波数是氢原子的一半；而波长是氢原子的两倍.

(b)将氢原子半径公式的 m 用 $\mu=m/2$ 代替，可发现

$$r_{正电子素} = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{\mu Ze^2} = 2 \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{mZe^2} = 2r_{氢原子}$$

由此可知，正电子素原子任何状态的电子半径是相同状态下氢原子(核无穷大)中电子半径的两倍.

1-10. μ 介子原子包含一个电荷为 Ze 的原子核和绕核运动的

负 μ 介子. μ^- 介子是一个电荷为 $-e$、质量为 $207m_e$ 的基本粒子. 当质子或其他核捕获一个 μ^- 介子就可形成一个 μ 介子原子. (a) 试计算 $Z=1$ 的 μ 介子原子的第一玻尔轨道半径；(b)计算这种 μ 介子原子的结合能；(c)这种原子的赖曼系的第一条谱线的波长是多少？

[解] (a)由于 $m_{\mu^-}=207m_e$ 及核质量 $M=1836m_e$，则系统的约化质量为

$$\mu=\frac{207m_e\times 1836m_e}{207m_e+1836m_e}=186m_e$$

将约化质量代替氢原子半径公式中电子的质量，可得到

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{186m_ee^2}=\frac{1}{186}\times 5.3\times 10^{-11}\text{ 米}$$

$$=2.8\times 10^{-13}\text{ 米}=2.8\times 10^{-3}\text{ 埃}$$

可见 μ^- 介子要比电子更加接近原子核表面.

(b)由(1-8)式，用 $\mu=186m_e$ 代替式中的 m 得

$$E=-186\frac{m_ee^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2}=-186\times 13.6\text{ 电子伏}$$

$$=-2530\text{ 电子伏}$$

这是基态的能量，因此结合能是 2530 电子伏.

(c)因为

$$\tilde{\nu}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

对于赖曼系，$n'=1$，$n=2$ 且 $R=\frac{\mu}{m_e}R_\infty=186R_\infty$ 所以

$$\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}=186R_\infty\left(1-\frac{1}{4}\right)=139.5R_\infty$$

用 $R_\infty=109737$ 厘米$^{-1}$代入，可得

$$\lambda\cong 6.5\text{ 埃}$$

可见 μ^- 原子的赖曼系处在光谱的 X 射线范围. 因而，要研究 μ 原

子的光谱，需要 X 射线技术.

1-11. 自然界中的许多元素都存在着同位素，它们的原子核具有相同数量的质子但中子数不同. 例如重氢是氢的同位素，它的原子核由一个质子和一个中子组成，核质量约比氢核大一倍. 它们的里得堡常数也不相同. 因而发射光谱的波长也会有所差别. 试计算氢的光谱中某条谱线波长与相应的重氢光谱线波长之差 $\Delta\lambda$.

[解] 氢和重氢的里得堡常数分别为

$$R_H = R_\infty \frac{M_H}{M_H + m_e}$$

$$R_D = R_\infty \frac{M_D}{M_D + m_e} = R_\infty \frac{2M_H}{2M_H + m_e}$$

所以

$$\frac{R_H}{R_D} = \frac{1}{2}\frac{2M_H + m_e}{M_H + m_e} = \frac{2M_H + m_e}{2M_H + 2m_e}$$

$$= 1 - \frac{m_e}{2M_H + 2m_e} \cong 1 - \frac{m_e}{2M_H}$$

又

$$\tilde{\nu}_H = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tilde{\nu}_D = R_D\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

所以

$$\Delta\lambda = \lambda_H - \lambda_D = \lambda_H\left(1 - \frac{\lambda_D}{\lambda_H}\right) = \lambda_H\left(1 - \frac{\tilde{\nu}_H}{\tilde{\nu}_D}\right)$$

$$= \lambda_H\left(1 - \frac{R_H}{R_D}\right) \cong \frac{m_e}{2M_H}\lambda_H = \frac{1}{2 \times 1836.15}\lambda_H$$

现将计算的巴尔末系前几条谱线的结果列于下表中.

	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ_H(Å)	6562.85	4861.32	4340.49	4101.73
$\Delta\lambda$(Å)	1.787	1.324	1.182	1.117

1-12. 在钠原子中，从第一激发态到基态跃迁的波长是 5896 埃. 钠原子的电离电势是 5.1 伏. 按照夫兰克—赫芝实验，在什么数值的电势差下，电流 I_p 下降？

［解］ 由于钠原子的激发，产生第一次下降的电势由下式决定

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

所以有

$$V = \frac{hc}{e\lambda}$$

$$= \frac{6.25 \times 10^{-34} \text{焦耳/秒} \times 3 \times 10^{8} \text{米/秒}}{1.6 \times 10^{-19} \text{库仑} \times 5896 \times 10^{10} \text{米}} = 2.1 \text{伏}$$

相应于激发势，下降发生在 2.1 伏，4.2 伏和 6.3 伏. 但相应于电离势，则发生在 5.1 伏，7.2 伏(2.1 激发＋5.1 电离).

习　题　集

§1-1　卢瑟福散射

1-1. 原子半径的测量值是 10^{-8} 厘米，核子是半径为 1.35×10^{-13} 厘米的球体，而电子的大小几乎可以忽略. 试问原子总体积的多大一部分为含有 A 个核子的原子核所占有？

1-2. 速度为 v 的 α 粒子与静止的电子碰撞. 证明电子可获得的最大速度是 $2v$(假定电子的质量与 α 粒子相比是很小的). 计算入射能量的多大部分损失到电子上.

1-3. 当 α 粒子与金核发生对心碰撞时，α 粒子能量的多大部分

损失掉？

1-4. 能量为 5 兆电子伏的 α 粒子以碰撞参数 $b=2.6\times10^{-13}$ 米射向金核($Z=79$)，散射角多大？

1-5. 如果氢原子辐射的波长 $\lambda=6000$ 埃，问在汤姆逊模型下，原子必须有多大的半径？

1-6. (a)初速度为 v 的 α 粒子与静止的自由电子相碰，假定 α 粒子的质量大约是电子质量的 7400 倍，证明 α 粒子的最大偏转大约是 10^{-4} 弧度. (b)证明 α 粒子与半径为 1.0 埃的汤姆逊原子的正电荷相互作用而引起的最大偏转大约也是 10^{-4} 弧度.

1-7. 一个电荷为 q、动能为 T_i 的粒子入射在电荷为 Q 的靶上. 证明碰撞参数 b 与最接近核的距离 r_c 之间的关系为

$$b=r_c\sqrt{\left(1-\frac{q}{r_c}-\frac{Q}{T_i}\right)}$$

〔提示：应用能量守恒和角动量守恒 $mvb=mr^2\omega$〕.

1-8. 质量为 m、电荷为 ze 和动能为 T_i 的粒子与电荷为 Ze 的核发生散射，且散射角为 θ. 证明最接近的距离与散射角间的关系为

$$r_c=\frac{KZze^2}{2T_i}\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)$$

1-9. 若用动能为 1 兆电子伏的质子射向金箔，试求质子可能接近金核的最小距离. 并计算相同能量的氘核与金核的最小距离.

1-10. 一束 8.3 兆电子伏的 α 粒子垂直入射到铝箔上. 发现散射角超过 60°时卢瑟福散射公式不适用了. 假定 α 粒子的半径是 2×10^{-15} 米，问铝核的半径是多少？

1-11. $^{210}_{84}$Po 放出动能为 5.3 兆电子伏的 α 粒子被厚度为 10^{-7} 米的银箔散射. 试计算散射角分别为 30°，45°和 90°时，动量的改变值.

1-12. 动能为 5.3 兆电子伏的 α 粒子被厚度为 10^{-8} 米的银箔

散射.通过散射角45°和90°散射的α粒子有多大一部分?并计算在这两种情况中,二者最接近的距离.

1-13. 每1000个动能为5兆电子伏的α粒子被金箔散射时,若有一个α粒子的散射角大于90°,试求金箔的厚度.

1-14. 设想铅原子($Z=82$)的正电荷不是集中在很小的核上,而是均匀分布在半径为10^{-10}米的球形原子内,如果有能量为10^6电子伏的α粒子射向这样一个"原子",试通过计算论证这样的α粒子不可能被具有上述设想结构的原子产生散射角大于90°的散射.这个结论与卢瑟福实验结果差得很远,这就说明原子的汤姆逊模型是不能成立的(原子中电子的影响可以忽略).

1-15. 入射能量为7兆电子伏的α粒子被10^{-5}厘米厚的金箔散射.一个敏感面积为10厘米^{2}的探测器放置在距靶40厘米处,且与入射束成30°角.问有多大一部分α粒子被探测到?

1-16. 能量为5兆电子伏的α粒子入射在10^{-7}米厚的铜($Z=29$)箔上,碰撞参数为10^{-10}厘米,计算散射角.在这种情况下,最接近铜核的距离是多少?

1-17. 假定每秒钟有10^8个动能为5兆电子伏的α粒子入射在10^{-5}厘米厚的银箔上.一个面积为5厘米^{2}的探测器放置距靶10厘米处,且与入射束成90°,问探测器每秒钟可测到多少个α粒子?

1-18. 一束动能为5.30兆电子伏、强度为10^4个/秒的α粒子垂直入射到密度为19.3克/厘米^3、原子量为197、厚度为1.0×10^{-5}厘米的金箔上.一个面积为1.0厘米^{2}的α粒子计数器放置在距箔片10厘米处.若用θ表示入射束和箔中心到计数器中心连线的夹角,应用卢瑟福微分截面公式,计算$\theta=10°$和$\theta=45°$时,每小时计录的粒子数.

1-19. 在上问题中,若用密度为9.8克/厘米^3、原子量为63.6、厚度为1.0×10^{-5}厘米的铜箔代替金箔,在$\theta=10°$时,我们每小时得到820个计数.试确定铜的原子序数.

1-20. 一束 7.7 兆电子伏的 α 粒子入射到厚度为 3×10^{-7} 米厚的金箔上，试问有多大一部分 α 粒子的散射角小于 1°？

§1-2 氢原子的玻尔理论

1-21. 有一半径为 R、总电荷为 Q 的均匀荷电的球体，已知距荷电球体的中心为 r（当 $r<R$ 时）处的电场强度是 $Qr/4\pi\varepsilon_0R^3$. 这样的球体相当于原子的汤姆逊模型. 证明电子在球内相对中心做简谐运动，并推导这种运动的频率公式. 若是氢原子，运动频率是多少？并与氢原子的光谱线相比较.

1-22. 试确定氢原子中质子和电子之间静电引力与万有引力之比. 已知万有引力常数 $G=6.67\times10^{-11}$ 牛顿·米^2/千克^2.

1-23. 试计算氢原子的第一玻尔轨道上电子绕核转动的频率、线速度和加速度.

1-24. 求氢原子中电子从 $n=3$ 的状态电离时需要的电离能.

1-25. 某密闭容器中充以温度 2000K 的炽热氢气，若通过观察孔进行测量，其巴尔末系 H_β，H_α 的光强比应是多少？

1-26. 试估计氢原子基态的动能和位能.

1-27. 试由氢原子的里得堡常数计算基态氢原子的电离电势和第一激发电势.

1-28. 800 埃的紫外线射到石英管内的氢上，计算从氢原子发射的电子的动能.

1-29. 氢原子赖曼系的最长波长是 1215 埃. 里得堡常数是多少？

1-30. 在一含有氢气的电子管内，电子的最大动能是 13.0 电子伏. 确定气体放出那些光谱线？

1-31. 当氢原子跃迁到激发能为 10.19 电子伏的状态上时，发射出一个 4890 埃的光子. (a)试确定初始能态的结合能；(b)计算

这种跃迁初态和末态的量子数.

1-32. 在氢原子中，如果电子在第一玻尔轨道中运动，试计算该电子在其轨道中心所产生的磁场.

1-33. 证明在氢原子的玻尔模型中，电子的旋转频率为 $\nu=2|E|/nh$，其中 E 是电子的总能量.

1-34. 试确定与(a)赖曼系，(b)巴尔末系相应的单价电离的氦原子的最初两个光谱线的波长. 并指出这些谱线的区域是可见光区还是紫外区?

1-35. 当从一个状态到另一个状态的跃迁发生时，原子的反冲能不等于零，而是

$$E_r = (h\nu)^2/2Mc^2$$

其中：M 是原子的质量；$h\nu$ 是原子从一个能态到另一个能态的跃迁能量. 问放出光子的能量是多少?

1-36. 当氢原子由高能级跃迁到低能级而发光时，如果考虑氢核的反冲，所发光子的波长的改正值是多少(改正值的定义是 $\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$，其中 λ_0 是未改正的波长，λ 是实际波长)?

1-37. 当一个氢原子从 $n=10$ 跃迁到 $n=1$ 的过程中，发射出一个光子时，这个氢原子的反冲能量是多少?

1-38. 按照玻尔理论，给出在氢原子的基态中的如下各值：(a)量子数；(b)轨道半径；(c)角动量；(d)线动量；(e)角速度；(f)线速度；(g)作用在电子上的力；(h)电子的加速度；(i)动能；(j)势能；(k)总能量. 并且说明(b)和(k)中的量如何随量子数变化?

1-39. (a)证明，当考虑原子的反冲动能 $p^2/2M$ 时，由能量差为 ΔE 的两个原子能级之间跃迁所发射光子的频率要减小一个近似为 $(1-\Delta E/2Mc^2)$ 的因子〔提示：反冲动量是 $p=h\nu/c$〕. (b)给出考虑反冲与不考虑反冲两种情况下，氢原子 3→1 跃迁发射光子

的波长比.

1-40. 有一速度为 1.875×10^5 米/秒的自由电子被一个质子俘获，放出一个光子而形成基态氢原子. 求放出光子的频率，并指出这条谱线在光谱上的位置.

1-41. 试用玻尔理论给出电子和正电子组成的正电子素的能级公式.

1-42. (a)计算氢原子第一玻尔轨道的 v/c 之值；(b)计算电子的角速度；(c)这个圆运动的频率与 $n=1$ 的巴尔末系的频率之比.

1-43. 巴尔末线系限的波长是 3645 埃，赖曼系第一条线的波长是 1215.7 埃. 试计算氢原子的电离能. 并将此结果与从赖曼线系限波长 $\lambda=911.3$ 埃计算的结果比较之.

1-44. 正电子素由第一激发态向基态跃迁发射光谱的波长是多少？

1-45. 试讨论电子在玻尔圆轨道中转动的频率和量子数改变 1 个单位时发射辐射的频率之间的关系. 证明，当量子数很大时，两种频率接近于值 $\nu=2cR/n^3$.

1-46. 考虑一个绕固定轴自由转动的物体，应用索末菲量子规则，证明总能量的可能值是

$$E = n^2\hbar^2/2I, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

其中：I 是它绕转轴的转动惯量.

1-47. 按照索末菲相对论修正公式，计算氢原子第一和第二激发态的可能能量值. 计算这两个能级之间允许跃迁的能量和波长.

1-48. 原子从激发态跃迁到基态将发射光子. 严格说来，发射光子后，原子质量将发生相应变化(设从 M 变到 M'). 而发光过程中原子受到反冲，实际发射的光子频率 ν 将小于不考虑反冲时的频率 ν_0，试证

$$\nu = \frac{M+M'}{2M}\,\frac{M-M'}{h}\cdot c^2$$

$$\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}=\frac{h\nu_0}{2Mc^2}$$

并求氢原子 H_α 线的 $\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}$.

1-49. 若氢原子的主量子数 $n=4$. 试求：(a)电子轨道有几种？形状如何？(b)上述轨道中，除圆形轨道外，面积最大的那个椭圆轨道的长、短半轴是多少？(c)如有一个外加磁场存在，上述(b)中的那个轨道可能有几种取向？此时对应 $n=4$ 的状态共有多少？

1-50. 试用索末菲量子化法则求：(a)质量为 m，圆频率为 ω 的一维谐振子的能量；(b)在均匀磁场 B(B 为磁感应强度)中，作圆周运动(垂直磁场的平面内)的电子轨道的可能半径.

1-51. 计算氢原子中的电子从量子数 n 的状态跃迁到量子数 $(n-1)$的状态时所发射的谱线的频率. 并证明当 n 很大时，这个频率等于电子在量子数 n 的圆轨道上旋转的频率.

1-52. 已知氢原子光谱中的某一线系的极限波长为 3647 埃，其中有一波长为 6565 埃. 试由玻尔理论求该波长相应的始、末态能级的能量及电子的轨道半径.

1-53. 一束电子轰击氢样品. 如果欲使氢原子放出巴尔末系的第一条谱线，试问需要多大的电势差来加速电子？

1-54. 在什么样的温度下，氢气体的平均分子动能等于氢原子的结合能？

1-55. 一个电子在一个半径为 R，总电荷为 Ze 的均匀带电球内部运动. 试用玻尔假定给出相应子位子电荷分布内部的玻尔轨道的那些允许的能级公式.

§1-3 类氢离子和类氢原子

1-56. 应用玻尔模型，计算从单价电离的氦中再电离一个电子

所需要的能量.

1-57. 试估算一次电离的氦离子(He^+)、二次电离的锂离子(Li^{++})的第一玻尔轨道半径、电离电势、第一激发电势和赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值.

1-58. 计算^1H与^3H的H_α线波长差$\Delta\lambda$.

1-59. 计算氚原子赖曼系第一条谱线的波长,并与氢和氘的值比较之.

1-60. 计算一价电离的氦原子的第二个谱线的波长,这条谱线相当于氢原子巴尔末系的第二条谱线. 氦离子的电离电势是多少?

1-61. 如果氘和氢的H_α线分别是6561.01埃和6562.80埃,试确定氘和氢的质量比.

1-62. 已知氢的H_β线波长是4862.6埃,试确定氘的H_β线的波长($R_D=1.0977\times10^{-3}$埃$^{-1}$).

1-63. 试求氢($R_H=1.09678\times10^{-3}$埃$^{-1}$)的3→2跃迁所产生的谱线与一次电离氦($R_{He}=1.09722\times10^{-3}$埃$^{-1}$)的6→4跃迁所产生的谱线之间的波长差.

1-64. (a)推导类氢离子(如He^+或Li^{++}等)的能量公式;(b)绘出He^+离子的能级图并与氢原子的能级图进行比较;(c)电子与裸体的氦核结合形成He^+离子. 假定当电子与原子核组合时,电子没有动能,试确定在这个过程中放出光子的波长.

1-65. μ^-介子在氘原子的$n=2$状态中,试问当μ^-介子跃迁到基态时辐射的能量是多少?

1-66. 对于^{208}Pb的π介子原子($m_\pi=273m_e$)试计算:(a)最初两个玻尔半径;(b)最初两个玻尔轨道的能量;(c)当π^-介子从第二玻尔轨道向第一玻尔轨道跃迁时,所放出的光子的能量.

1-67. μ^-介子是和电子有相同电荷的粒子,其质量($m_\mu=207m_e$). 当μ^-介子与质子组合时,形成μ介子原子. (a)推导μ介子原子中不同玻尔轨道的速度、半径和能量;(b)μ介子原子的电

离能是多少?

§1-4 夫兰克—赫芝实验

1-68. 如果在稀薄的氢原子气体中进行夫兰克—赫芝实验,当加速电压 $U=12.9$ 伏时,能观察到那些谱线?当氢原子气体密度增加时,谱线有何变化?

1-69. 在夫兰克—赫芝实验中,汞原子从 4.9 电子伏的电子那里吸收能量后发射的电磁能为 $h\nu$,其中 ν 是相应于 2536 埃的汞共振线的频率. 试计算 h 的值.

1-70. 在夫兰克—赫芝实验中,氢原子被电子轰击,发现激发电势在 10.21 伏和 12.10 伏. (a)说明观察到伴随着这些激发放出的三条不同的谱线的性质,(b)假定能量差可用 $h\nu$ 表示,给出三个 ν 的允许值.

1-71. 钾的基态和第一激发态的结合能分别是 4.3 电子伏和 2.7 电子伏. 如果用钾蒸气做夫兰克—赫芝实验,在电流—电压图上的什么样的电压值上看到曲线下降?

1-72. 氢原子基态的电离电势为 13.6 伏. (a)它的第一激发态电离电势是多少?(b)在夫兰克—赫芝实验中,如果以原子态的氢为样品,而以加速到 12.5 电子伏的电子束去碰撞氢原子. 问这时能观察到几种波长的辐射 (计算到 2 位数字). (c)如果在充氢的同一容器中还存在一些氦离子 He^+,问电子能量需增大到多少才能观察到与氢原子谱线很相近的 He^+ 离子谱线?它的波长比相邻的氢原子谱线稍短还是稍长?

1-73. 在加热的气体中,原子的平均动能是 $\frac{3}{2}KT$. 由于碰撞,这些原子可用来激发和电离其它原子. 在什么样的温度下,汞原子可激励发射波长为 2580 埃的光?

1-74. 观察高真空玻璃管中由激发原子束所发光谱线的强度沿原子射线束的减弱情况，可以测定各激发态的平均寿命. 若已知原子束中原子速度 $v=10^3$ 米/秒，在沿粒子束方向上相距 1.5 毫米，其共振光谱线强度减少到 1/3.32. 试计算这种原子在共振激发态的平均寿命.

第二章　微观粒子的薛定谔理论

内　容　提　要

（一）　光电效应

从金属表面发射的光电子的最大动能为

$$T_{max} = h\nu - W \tag{2-1}$$

式中：$h\nu$ 是入射光子的能量；W 是金属的功函数，不同的金属，W 有不同值. 它的意义是电子克服金属吸引力需要的能量.

当 $T=0$ 时，$h\nu=W$，于是有阈频率

$$\nu_{阈} = W/h \tag{2-2}$$

在这种入射光子的频率下，刚刚可产生光电效应.

（二）　康普顿效应

当光子被自由电子散射时，散射光子的波长将产生偏移 $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \tag{2-3}$$

式中：λ 是入射光子的波长；λ' 是散射光子的波长；h/m_0c 称为反冲电子的康普顿波长；θ 为散射角.

（三） 电子对效应

电子对的产生只能发生在重核附近. 原子核将带走很大一部分入射光子的动量，但由于核很重，反冲能很小，可忽略不计. 则有

$$h\nu = m_- c^2 + m_- c^2 = T_+ + T_- + 2m_0c^2 \tag{2-4}$$

电子对的湮没是其产生的逆过程. 遵守关系

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_2}{c} \\ &2m_0c^2 + T_- + T_- = h\nu_1 + h\nu_2 \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

（四） 光子的吸收

光子通过物质时，由于光电效应、康普顿效应和电子对效应使光束的强度减弱. 其遵守的规律为

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{2-6}$$

式中：μ 为线性吸收系数. 在实验中，应用质量吸收系数 μ/ρ（ρ 为吸收物的密度）更为方便. 这时有

$$I = I_0 \exp(-\mu(\rho x)/\rho) \tag{2-7}$$

式中：I_0 和 I 分别是吸收前后的光子的强度.

（五） 德布罗意波

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \tag{2-8}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{2-9}$$

对于光子，$\lambda\nu = c$. 从光子的能量和动量去求波长和频率只需要一个关系式；但对于一个有质量的物体，要得出它的波长和频率，却需要两个独立的关系式：$\lambda = h/p$ 和 $\nu = E/h$.

（六） 不确定关系

位置与动量之间关系为

$$\Delta p_x \Delta x \geqslant \hbar/2 \tag{2-10}$$

能量与时间的不确定关系为

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar/2 \tag{2-11}$$

（七） 布喇格公式

在晶体中有规则地排列起来的原子形成的各组平面称为布喇格面. 当一束 X 射线射到任一组平面上时，在满足

$$2d\sin\theta = n\lambda \qquad n = 1,2,\ldots \tag{2-12}$$

时，射出的射线强度就会加强.

式中：d 是两平行平面之间的距离；θ 为入射线与平面的夹角；λ 为入射 X 射线的波长.

（八） 薛定谔方程

微观粒子的状态用波函数 $\psi(x,t)$ 来描写. 波函数的绝对值平方 $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ 表示粒子的几率分布.

粒子的任何一个力学量 $f(x,y,z)$，只要是坐标的函数，其平均值都可由下式求出

$$\langle f(x,y,z)\rangle = \int_{\infty} \psi^*(x,y,z) f(x,y,z) \psi(x,y,z) \mathrm{d}\tau \qquad (2\text{-}13)$$

定态薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r)\right]\psi(r) = E\psi(r) \qquad (2\text{-}14)$$

式中：$U(r)$为粒子在力场中的势能；$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r)$ 称为哈密顿算符；E 为算符 $\hat{H}$ 的本征值；$\psi(r)$称为算符 $\hat{H}$ 相应于本征值 E 的本征函数.

典 型 题 解

2-1. 星体明亮的程度通常是以星体对地球表面的光照度来划分的，并以星等数来标志它的大小，越是明亮的星，其星等数字越小，例如一等星比二等星亮，零等星又比一等星亮，而负一等星比零等星更亮. 金星最亮时－4.3 等星，天狼星是－1.42 等星，织女星是零等星. 以下分别用一等星，二等星，三等星等表示，而六等星是用肉眼直接观察到的最暗的星，观察更暗的星必须借助光学仪器. 光照度的国际单位是流明/米^2(lm/m^2). 人眼对于 $\lambda = 5550$ 埃的绿光最敏感，与这一波长相对的光波频率约为 5.40×10^{14}赫芝. 人们规定对于频率为 5.40×10^{14}赫芝的光波，与 1 流明光通量对应的辐射能量是$\frac{1}{683}$瓦. 对于不同的波长，流明与瓦的对应值是不同的，其它频率的光波，与 1 流明对应的辐射通量都比$\frac{1}{683}$瓦大，但下面都用这一对应值来进行估算.

已知金星对地表面的最大照度为 $E_{A_0} = 1.39\times10^{-14}$ 流明/米^2，一颗六等星照度是 $E_6 = 1.05\times10^{-3}$流明/米^2. 试求当观

察这两颗星时，分别入射到人眼的光子数.

[解] 改换单位后，$E_{Au}\cong 2\times10^{-7}$ 瓦/米^2，$E_6\cong 1.5\times10^{-11}$ 瓦/米^2.

当 $\lambda=5550$ 埃时，每个光子能量 ϵ 为

$$\epsilon = h\frac{c}{\lambda} = (6.6\times10^{-34}\text{ 焦耳·秒})\cdot\frac{3\times10^{8}\text{ 米/秒}}{5550\times10^{-10}\text{ 米}}$$

$$= 3.6\times10^{-19}\text{ 焦耳}$$

人眼瞳孔直径 d 约为几个毫米，现设 $d=4$ 毫米，则瞳孔面积 S 为

$$S = \pi\frac{d^2}{4} = \pi\frac{(4\times10^{-3})^2}{4} = 1.3\times10^{-5}\text{ 米}^2$$

所以观察金星时每秒射入瞳孔的平均光子数 n_{Au} 约为

$$n_{Au} = \frac{E_{Au}}{\epsilon}S = \frac{2\times10^{-7}}{3.6\times10^{-19}}\times1.3\times10^{-5} = 7\times10^{6}\text{ 秒}^{-1}$$

观看一颗六等星时每秒进入瞳孔的光子数约为

$$n_6 = \frac{E_6}{\epsilon}\cdot S = \frac{1.5\times10^{-11}}{3.6\times10^{-19}}\times1.3\times10^{-5} = 542\text{ 秒}^{-1}$$

2-2. 波长为 3000 埃的单色光垂直入射在面积为 4 厘米^2 的表面上. 如果光的强度为 15×10^{-2} 瓦/米^2，试计算每秒与此表面碰撞的光子数目.

[解] 每个光子所带能量为

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\text{ 焦耳·秒})(3\times10^{8}\text{ 米/秒})}{3\times10^{-7}\text{ 米}}$$

$$= 6.63\times10^{-19}\text{ 焦耳}$$

总能量通量为

$$IA = (15\times10^{-2}\text{ 瓦/米}^2)(4\times10^{-4}\text{ 米}^2) = 6\times10^{-5}\text{ 瓦}$$

$$= 6\times10^{-5}\text{ 焦耳/秒}$$

因而，每秒与表面碰撞的光子数为

$$n = \frac{6 \times 10^{-5} \text{ 焦耳 / 秒}}{6.63 \times 10^{-19} \text{ 焦耳 / 光子}} = 9.05 \times 10^{13} \text{ 个光子 / 秒}$$

2-3. 当波长为 4000 埃的光入射在一钡发射极上时，求使所有的光电子轨道弯曲限制在半径为 20 厘米的圆内所需的横向磁场强度. 已知钡的功函数为 2.5 电子伏.

[解] 根据公式(2-1).

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = h\nu - W = h\frac{c}{\lambda} - W$$

$$\frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}) v_{max}^2$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}(\text{焦耳} \cdot \text{秒})(3 \times 10^{8} \text{ 米 / 秒})}{4 \times 10^{-7} \text{ 米}}$$

$$- (2.5 \text{ 电子伏})(1.6 \times 10^{-19} \text{ 焦耳 / 电子伏})$$

解之，得 $v_{max} = 4.62 \times 10^5$ 米/秒. 当这些电子进入磁场时，则有

$$ev_{max}B = \frac{m v_{max}^2}{R_{max}}$$

所以

$$B = \frac{mv_{max}}{eR_{max}}$$

$$= \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ 千克})(4.62 \times 10^{5} \text{ 米 / 秒})}{1.6 \times 10^{-19} \text{ 库仑} \times 0.20 \text{ 米}}$$

$$= 1.32 \times 10^{-5} \text{ 特斯拉}$$

已知地磁场强为 5.8×10^{-5} 特斯拉，可见二者大小差不多.

2-4. 波长 $\lambda = 5893$ 埃的光入射到钾表面上，发射电子的截止电压是 0.36 伏. 计算光电子的最大能量、功函数和阈频率.

[解] 因为截止电压是 0.36 伏，所以光电子的最大动能是

$$T_{max} = eV_0 = 0.36 \text{ 电子伏}$$

就用(2-1)式，

$$eV_0 = h\nu - W$$

由此可得功函数

$$W = h\nu - eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - eV_0$$

$$= \frac{(6.625 \times 10^{-34}\ \text{焦耳·秒})(3 \times 10^{8}\ \text{米/秒})}{(5893 \times 10^{-10}\ \text{米})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{焦耳/电子伏})} - 0.36\ \text{电子伏}$$

$$= 2.15\ \text{电子伏} - 0.36\ \text{电子伏} = 1.79\ \text{电子伏}$$

由关系式 $h\nu_0 = W$，可得到阈频率：

$$\nu_0 = \frac{W}{h} = \frac{(1.79\ \text{电子伏})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{焦耳/电子伏})}{6.63 \times 10^{-34}\ \text{焦耳·秒}}$$

$$= 4.33 \times 10^{14}\ \text{秒}^{-1}$$

2-5. 证明对于自由电子不能产生光电效应.

[证] 如图，我们在质心系中考察这个假想的过程.



(a)吸出量　　(b)吸入量

例题 2-5 用图

在质心系中，初始动量为零. 由能量守恒定律有

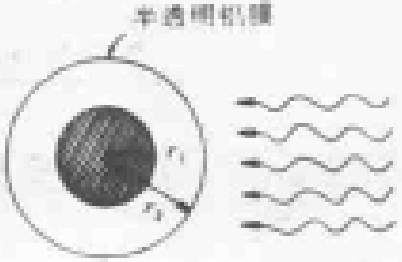
$$E_{\text{初始}} = E_{\text{最终}}$$

或

$$h\nu + mc^2 = m_0c^2$$

由此可见 $m_0 > m$. 这是错误的结果，所以此式不可能成立，那么这个过程也就不可能发生.

要想使光电效应发生，入射光子必须与束缚电子作用才行. 在这个过程中，重离子或核带走了动量，得以使动量守恒成立. 但重物获得的能量都很小，可忽略不计.



例题 2-6 用图

2-6. 如图，这是一个共轴系统的横截面图. 外圆筒为一石英圆筒，内壁敷上半透明的铝薄膜，内径 $r_2 = 1$

厘米，长为 10 厘米. 中间的金属棒为一钠棒，半径 $r_1=0.6$ 厘米，长亦为 10 厘米. 整个系统置于真空中. 今用波长 $\lambda=2700$ 埃的单色光照射系统，求平衡时钠棒所带的电量（设钠具有明锐的极限波长 $\lambda_m=54000$ 埃，忽略边缘效应）.

[解] 钠棒在光线照射下发射出光电子. 按爱因斯坦方程，它们的初动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda_m}$$

这些光电子聚集在铝膜上，使钠棒与铝膜逐渐分别带上等量的正负电荷 Q，当电的累积使它们之间的电位差 V 达到

$$eV=\frac{1}{2}mv^2$$

时，系统就达到了平衡.

利用高斯定理，可以求出钠棒与铝膜之间任一点的电场强度

$$E(r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}$$

式中：r 为该点离对称轴的距离；l 为系统的长度（$l=10$ 厘米）. 因此

$$V=\int_{r_1}^{r_2}E(r)\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

由以上几式，不难求出

$$Q=\frac{2\pi\varepsilon_0 lhc}{e\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_m}\right)$$

$$=\frac{2\times 3.14\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.1}{1.6\times 10^{-19}}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\times 6.63\times 10^{-34}\times 3\times 10^{8}}{\times\ln\frac{1}{0.6}}\rightarrow$$

$$\times\left(\frac{1}{2700\times10^{-10}}-\frac{1}{5400\times10^{-10}}\right)$$

$$=2.5\times10^{-11}\text{ 库仑}$$

2-7. 在一次康普顿散射中，传递给电子的最大能量为 45 千电子伏，试求入射光子的波长.

[解] 要使一个电子的反冲能量具有最大值，入射光子必定是反向散射. 由能量守恒定律

$$E+m_0c^2=E'+45\text{ 千电子伏}+m_0c^2$$

或

$$E-E'=45\text{ 千电子伏}\qquad(1)$$

由动量守恒定律

$$\frac{E}{c}=-\frac{E'}{c}+p_e\qquad(2)$$

再根据相对论公式 $E_e^2=(p_ec)^2+E_0^2$，我们有

$$(0.511\text{ 兆电子伏}+0.045\text{ 兆电子伏})^2$$
$$=(p_ec)^2+(0.511\text{ 兆电子伏})^2$$

则

$$p_e=0.219\text{ 兆电子伏}$$

把 p_e 代入(2)式，可得

$$E+E'=219\text{ 千电子伏}\qquad(3)$$

(1)与(3)式联立，可得 $E=132$ 千电子伏，由此

$$\lambda=\frac{hc}{E}=\frac{12.4\text{ 千电子伏}\cdot\text{埃}}{132\text{ 千电子伏}}=9.39\times10^{-2}\text{ 埃}$$

2-8. 如果在一次康普顿实验中，散射光子能够产生一个电子—正电子对，试求最大散射角.

[解] 已知产生电子—正电子对的阈波长为

$$h\frac{c}{\lambda_{阈}}=2m_0c^2\text{ 或}\frac{h}{m_0c}=2\lambda_{阈}$$

将此结果代入康普顿方程，得

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_{\text{康}}(1 - \cos\theta)$$

这个表达式右边为两个正定项之和，因此，倘若

$$2\lambda_{\text{康}}(1 - \cos\theta) \geqslant \lambda_{\text{康}}$$

则 $\lambda' > \lambda_{\text{康}}$，这样不能产生正负电子对. 取其中的等号，我们求得 $\theta_{\text{康}}$ 为

$$2\lambda_{\text{康}}(1 - \cos\theta) = \lambda_{\text{康}}$$

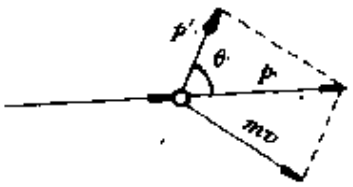
则有

$$\cos\theta_{\text{康}} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \theta_{\text{康}} = 60^\circ$$

值得注意的是，这个结果与入射光子的能量无关.

2-9. 一个波长为 $\lambda = 0.5$ 毫微米的光子与电子碰撞，碰撞后光子以与入射方向成 150° 角的方向反射回来，求碰撞后光子的波长及电子的速度.

［解］ 首先导出散射光波长 λ' 及电子速度 v 与散射角 θ 的关系. 按能量、动量守恒，可列出两个方程



例题 2-9 用图

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + mc^2 \tag{1}$$

$$m^2 v^2 = \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu'}{c}\cos\theta \tag{2}$$

式中：m 是散射后电子的运动质量. (2)可改写为

$$m^2 c^2 v^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta \tag{3}$$

将(1)右端第一项移到左端再平方，可得

$$m^2 c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_e^2 c^4 + 2m_e ch(\nu - \nu') \tag{4}$$

将(3)、(4)两式相减，并利用 $m^2 c^4(1 - \frac{v^2}{c^2}) = m_e^2 c^4$ 得

$$2m_e c^2 h(\nu - \nu') = 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \tag{5}$$

因此，散射光子的波长为

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$$= 0.5 \times 10^{-9} + 4.5 \times 10^{-12}$$

$$= 504.5 \times 10^{-12} \text{ 米.}$$

为求电子的速度，将(1)式右端第一项移项，得

$$mc^2 = m_e c^2 + h(\nu - \nu') \tag{6}$$

又因为

$$h(\nu - \nu') = h\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right)$$

$$= \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}hc \cong \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda^2}hc$$

$$= 3.58 \times 10^{-18} \text{ 焦耳}$$

可见

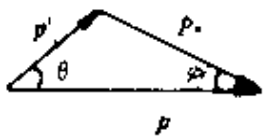
$h(\nu - \nu') = 3.58 \times 10^{-18}$ 焦耳 $\ll m_e c^2 = 8.2 \times 10^{-14}$ 焦耳，即电子的动能 $h(\nu-\nu')$ 远小于其静止能量，因此可以应用非相对论近似

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h(\nu - \nu')$$

所以最后得

$$v = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu')}{m_e}} = 2.8 \times 10^6 \text{ 米 / 秒}$$

2-10. 在康普顿散射中，散射电子与入射光子的夹角为 φ 时，求电子的动能.



例题 2-10 用图

[解] 根据能量守恒

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + T_e + m_0 c^2$$

因为 $h\nu = pc$，所以有

$$pc = p'c + T_e \tag{1}$$

从图中看出：$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_e$，

从而有

$$p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2pp_e\cos\varphi \qquad (2)$$

在(2)式中利用式(1),以及关系式

$$p_e^2 = \frac{E_e^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}[(m_0c^2 + T_e)^2 - (m_0c^2)^2]$$

$$= \frac{1}{c^2}(T_e^2 + 2T_em_0c^2) \qquad (3)$$

得到

$$T_e(m_0 + \frac{p}{c}) = pp_e\cos\varphi$$

将此式平方,再利用式(3),可得

$$T_e^2(m_0 + \frac{p}{c})^2 = \frac{p^2}{c^2}(T_e^2 + 2T_em_0c^2)\cos^2\varphi$$

用 $h\nu/c$ 代替 p,最后解出电子的动能

$$T_e = h\nu\frac{2(\frac{h\nu}{m_0c^2})\cos^2\varphi}{\left(\frac{h\nu}{m_0c^2}+1\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2\cos^2\varphi}$$

可以看出,当 $\varphi=0$ 时,T_e 有最大值.

2-11. 假定100千电子伏能量的X射线入射到靶上,并经历康普顿散射. 试计算(a)散射到与入射方向成 30^0 角的X射线的能量;(b)反冲电子的能量;(c)反冲电子的角度.

[解] (a)设 $E=h\nu$ 和 $E'=h\nu'$ 分别是入射和散射X射线的能量,则 $\lambda=hc/E$ 和 $\lambda'=hc/E'$. 代入散射公式,有

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0c^2}(1 - \cos\theta) \qquad (1)$$

其中:$E=100$千电子伏,$m_0c^2=510$千电子伏,$\cos\theta=\cos 30^\circ=0.866$. 因之

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{100\text{千电子伏}} = \frac{1}{510\text{千电子伏}}(1 - 0.866)$$

$$= \frac{0.134}{510\text{千电子伏}} = \frac{1}{3810\text{千电子伏}}$$

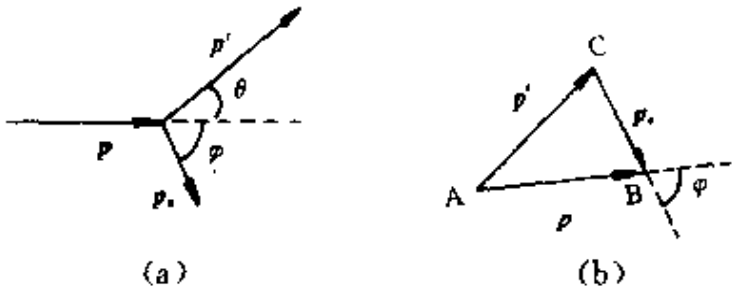
$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{100\text{千电子伏}} + \frac{1}{3810\text{千电子伏}}$$

最后得到散射 X 射线的能量 E' 为

$$E' = 97.5\text{千电子伏}$$

(b)反冲电子的动能为

$$T = E - E' = (100 - 97.5)\text{千电子伏} = 2.5\text{千电子伏}$$



(a) (b)

例题 2-11 用图

(c)图(a)中，p，p' 和 p_e 分别是入射 X 射线，散射 X 射线和反冲电子的动量. 图(b)表示这些量的三角形关系. 为了得到 φ，我们应用三角形 ABC 中的余弦定律

$$p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2pp_e\cos\varphi$$

重新整理，对于光子应用 $E=pc$ 和 $E'=p'c$，我们得到

$$\cos\varphi = \frac{E^2 - E'^2 + p_e^2c^2}{2Ep_ec} \tag{2}$$

但是，对于电子

$$E^2 = p_e^2c^2 + E_0^2$$

其中 $E_0 = m_0c^2$ 和 $E = T + E_0$. 因之 $(T + E_0)^2 = p_e^2c^2 + E_0^2$，则

$$p_ec = T\left(1 + \frac{2E_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$$

将 p_ec 代入(2)中，得到

$$\cos\varphi = \frac{E^2 - E'^2 + T^2[1 + (2E_0/T)]}{2ET[1 + (2E_0/T)]^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

用 $E=100$ 千电子伏，$E'=97.5$ 千电子伏，$T=2.5$ 千电子伏，$E_0=510$ 千电子伏，最后得到

$$\cos\varphi = 0.29, \varphi = 73°$$

2-12. 能量为 2 兆电子伏的 γ 射线产生电子—正电子对，而且电子和正电子以相等的速率向相反方向运动. 而电子进入充氦的探测器并损失它的全部动量以产生离子对. 在氦中若每个离子对的平均电离能是 42.6 电子伏，试计算产生的离子对数.

[解] 根据(2-4)式，并考虑到 $T_-=T_+=T$，则

$$h\nu = 2m_0c^2 + 2T$$

故可求动能

$$T = \frac{h\nu - 2m_0c^2}{2} = \frac{2\text{兆电子伏} - 2(0.51)\text{兆电子伏}}{2}$$

$$= 0.49 \times 10^6 \text{电子伏}$$

因此，在氦中产生的离子对数是

$$n = \frac{0.49 \times 10^6 \text{电子伏}}{42.6 \text{电子伏}/\text{离子对}} = 13850 \text{个离子对}$$

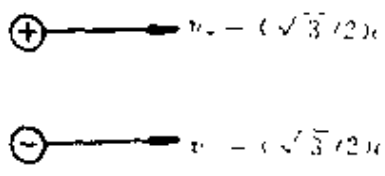
顺便指出，电极上聚集的每种符号的总电荷是 $Q=ne$. 探测器的电容是 C，则探测器的电压脉冲的大小 V 是

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{ne}{C}$$

如果 $C=10$ 微微法 $=10\times10^{-12}$ 法，则

$$V = \frac{13850 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{库仑}}{10 \times 10^{-12} \text{法}}$$

$$= 2.08 \times 10^{-4} \text{伏}$$



例题 2-13 用图

2-13. 如图，一起运动的一个电子与一个正电子发生湮没. 如果所产生的两个光子都在原来电子对运动的方向上运动，求这两个光子的波长.

[解] 如果从质心系来看这个过程，这两个光子应该向相反

方向运动.把这个过程变换回实验室坐标系,我们一定会发现,这两个光子仍然向相反方向运动,因为实验室相对于质心的速度总是比 c 小.根据动量守恒有

$$2mv = p_1 - p_2 = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2}$$

其中

$$2mv = \frac{2(m_0c^2)(v/c)}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$= \frac{2(0.511\text{ 兆电子伏})(\sqrt{3}/2)}{c\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} = 1.77\text{ 兆电子伏}$$

因此

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{(2mv)c}{hc}$$

$$= \frac{1.77\text{ 兆电子伏}}{12.4\times10^{3}\text{ 兆电子伏}\cdot\text{埃}}$$

$$= 142.7\text{ 埃}^{-1} \qquad (1)$$

根据能量守恒,

$$2mc^2 = h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$$

其中

$$2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2(0.511\text{ 兆电子伏})}{\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}}$$

$$= 2.044\text{ 兆电子伏}$$

因此,

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2mc^2}{hc} = \frac{2.044\text{ 兆电子伏}}{12.4\times10^{3}\text{ 兆电子伏}\cdot\text{埃}} = 164.8\text{ 埃}^{-1} \qquad (2)$$

将(1)和(2)式联立,可得

$$\lambda_1 = 6.50 \times 10^{-3} \text{ 埃}, \qquad \lambda_2 = 9.05 \times 10^{-2} \text{ 埃}.$$

2-14. 铅对 1 兆电子伏的 γ 射线的线吸收系数是 0.74 厘米$^{-1}$. 计算(a)对这种 γ 射线,铅的半厚度;(b)使 γ 射线的强度减少到原强度的 1/1000 所需要铅的厚度.

[解] (a)由公式(2-6),当强度减少二分之一时,铅的厚度为

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0.693}{0.74 \text{ 厘米}^{-1}} = 0.94 \text{ 厘米}$$

(b)若 $I/I_0 = 1/1000$,则

$$\frac{1}{1000} = e^{-\mu x}$$

或

$$x = \frac{\ln 1000}{\mu} = \frac{3\ln 10}{0.74} = \frac{3 \times 2.30}{0.74} = 9.32 \text{ 厘米}$$

2-15. 一束光垂直穿过一块 20 毫米厚的材料板,其强度衰减为原来强度的一半. 现在材料板转动 40°角,求这时从材料板穿出的光束的强度.

[解] 由公式(2-6)求线吸系数

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu \times 20}$$

则得

$$\mu = \frac{\ln 2}{20} = 0.0347 \text{ 毫米}^{-1}$$

当材料板转动 40°角以后,厚度为

$$x_2 = \frac{x_1}{\cos 40^\circ} = \frac{20 \text{ 毫米}}{\cos 40^\circ} = 26.1 \text{ 毫米}$$

于是从下式求得这时的强度

$$\frac{I_2}{I_0} = e^{-\mu x_2} = e^{-(0.0347 \text{mm}^{-1})(26.1 \text{mm})} = 0.404$$

2-16. (a)求电子通过电势差为 $V = 100$ 伏的德罗意波长(设电

子初速度为零).(b)证明相对论性粒子的德布罗意波长与加速电势差 V 之间有如下的关系 $\lambda = hc/\sqrt{eV(eV + 2m_0c^2)}$.

[解] (a)已知电子的静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ 千克，$eV \ll m_0c^2$，故可略去相对论效应.设电子加速后的速度为 v，则

$$eV = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2eV}{m_0}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 100}}$$

$$= 1.23 \text{ 埃}$$

(b)设电子的动量为 p，则按能量守恒，

$$eV = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2$$

将带根号的表达式展为 p^2 的幂级数，取前三项为

$$\sqrt{m_0^2c^2 + p^2c^2} = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3c^2}$$

则

$$eV = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{p^4}{8m_0^3c^2}$$

$$p^4 - 4m_0^2c^2p^2 + 8m_0^3c^2eV = 0$$

由此方程不难解出

$$p^2 = 2m_0c^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2eV}{m_0c^2}}\right)$$

从物理上考虑，当 $v=0$ 时，应有 $p=0$，故上式的根号前面应取负号，即

$$p^2 = 2m_0^2c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2eV^2}{m_0c^2}}\right)$$

再将带根号的表达式展为 V 的幂级数，并取前三项，则

$$p^2 = 2m_0eV + \frac{e^2V^2}{c^2}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{eV(eV + 2m_0c^2)}$$

最后得

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{eV(eV + 2m_0c^2)}}$$

2-17. 如果对电子的德布罗意波长进行非相对论性计算，电子能量为多大时，这种计算的误差为 5%？

[解] 在非相对论计算中，德布罗意波的波长为

$$\lambda_{非相对} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2T}}$$

在相对论性计算中，

$$(T + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

或

$$pc = \left[2m_0c^2T\left(1 + \frac{T}{2m_0c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

因此，德布罗意波长为

$$\lambda_{相对} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\left[2m_0c^2T\left(1 + \frac{T}{2m_0c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

按题意

$$\frac{\lambda_{非相对} - \lambda_{相对}}{\lambda_{相对}} = 0.05 \quad 或 \quad \frac{\lambda_{非相对}}{\lambda_{相对}} = 1.05$$

而

$$\frac{\lambda_{非相对}}{\lambda_{相对}} = \sqrt{1 + \frac{T}{2m_0c^2}}$$

由此得电子的动能

$$T = 2m_0c^2\left[\left(\frac{\lambda_{非相对}}{\lambda_{相对}}\right)^2 - 1\right] = 0.105 \text{ 兆电子伏}$$

2-18. 确定阿佛加德罗常数 N_A 的最精确的方法之一是 X 射线在晶格上衍射法. 波长为 1.3922 埃的 X 射线从 NaCl 晶面上反射，且在 14°17′26″的角度上观察到第一级反射. 试计算晶格空间及阿佛加德罗常数. 已知 NaCl 的分子量是 58.454，密度是 2.163 克/厘米³.

［解］ 由公式 $2d\sin\theta = n\lambda$，取 $n=1$，则晶格空间为

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{1.3922 \text{ 埃}}{2[\sin(14°17'26'')]}$$

$$= \frac{1.3922 \times 10^{-10} \text{ 米}}{2(0.2468)} = 2.820 \text{ 埃}$$

每单位体积中的分子数 n 为

$$n = \frac{\rho N_A}{M}$$

式中：ρ 是密度、M 是分子量.

如果在 NaCl 这样的立方晶体中，间隔是 d，那么每个离子占据的体积是 d^3；每单位体积中的离子数是 $1/d^3$. 由于在每个分子中有两个离子(Na^-和 Cl^-)，所以

$$n = \frac{2\rho N_A}{M} = \frac{1}{d^3}$$

所以有

$$N_A = \frac{M}{2\rho d^3} = \frac{58.454 \text{ 克/摩尔}}{2(2.163 \text{ 克/厘米}^3)(2.83 \times 10^{-8} \text{ 厘米})^3}$$

$$= 6.02 \times 10^{23} \text{ 原子/摩尔}$$

2-19. (a)有时应用一大晶体从一束自反应堆放出的中子中取出单能的中子. 已知晶体的布喇格面的间距为 1.1 埃. 如果指定布喇格角为 30°，试问从这个角度看到的一级反射的中子的能量是多少？(b)倘所用晶体的布喇格面间距有±0.01 埃的差异，试计算

衍射束能量的层宽.

[解] (a)$\lambda=2d\sin\theta=2(1.1\text{ 埃})\sin30°=1.1$ 埃，中子的波长与其动能之间的关系为

$$\lambda=\frac{h}{m_0v}=\frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)T}}$$

由此可求得中子的动能

$$T=\frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda^2}=\frac{(12.40\times10^3\text{ 电子伏}\cdot\text{埃})^2}{2(940\times10^6\text{ 电子伏})(1.1\text{ 埃})^2}$$

$$=0.0676\text{ 电子伏}$$

(b)将公式(2-12)微分得 $n\delta\lambda=2\delta d\sin\theta$，因此

$$\delta\lambda=\frac{2\delta d\sin\theta}{n}$$

$$=\frac{2(\pm0.01\text{ 埃})\sin30°}{1}$$

$$=\pm0.01\text{ 埃}$$

前已知 $T\propto\lambda^{-2}$，所以

$$\delta T=\frac{-2T}{\lambda}\delta\lambda$$

$$=\frac{-2(0.0676\text{ 电子伏})}{1.1\text{ 埃}}(\pm0.01\text{ 埃})$$

$$=\mp1.23\times10^{-3}\text{ 电子伏}$$

2-20. 试用不确定关系估计氢原子半径 r 及氢原子系统的能量.

[解] 氢原子由原子核及一个电子组成，电子的总能量为

$$E=\frac{p^2}{2m_e}-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r}\qquad(1)$$

式中：p 为电子的动量，我们可认为其动量的不确定值就是 p. 电子坐标的不确定值亦认为是 r. 由不确定关系得

$$r\cdot p\cong\hbar\qquad(2)$$

代入上式得

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3}$$

其中 r 是待求的，只有能使 E 具有极小值的 r 才能形成稳定的氢原子系统，所以取

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \tag{4}$$

将已知常数代入，可得 $r = 0.53\times10^{-10}$ 米. 若将(4)代入(3)式中得

$$E = -\frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2$$

将已知常数代入，可得 $E = -13.6$ 电子伏.

2-21. 测量子弹($m = 50$ 克)的速率与电子($m = 9.1\times10^{-28}$克)的速率是相同的，为 300 米/秒，而且不确定度是 0.01%. 如果在相同的实验中，同时测量速率和位置，电子和子弹的位置的精确度是多少?

[解] 对于电子

$$p = mv = 9.1\times10^{-31}\text{千克}\times300\text{米/秒}$$
$$= 2.7\times10^{-28}\text{千克米/秒}$$
$$\Delta p = m\Delta v = 0.0001\times2.7\times10^{-28}\text{千克米/秒}$$
$$= 2.7\times10^{-32}\text{千克米/秒}$$

所以有

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6.6\times10^{-34}\text{焦耳}\cdot\text{秒}}{4\pi\times2.7\times10^{-32}\text{千克米/秒}}$$
$$= 2\times10^{-3}\text{米} = 0.2\text{厘米}$$

对子子弹，

$$p = mv = 0.05\text{千克}\times300\text{米/秒} = 15\text{千克米/秒}$$
$$\Delta p = 0.0001\times15\text{千克米/秒} = 1.5\times10^{-3}\text{千克米/秒}$$

所以有

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \text{焦耳·秒}}{4\pi \times 1.5 \times 10^{-3}\ \text{千克米/秒}}$$

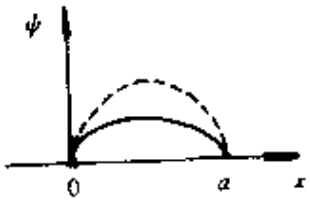
$$= 3 \times 10^{-32}\ \text{米}$$

可见，对于象子弹这样的宏观物体，我们的测量不受不确定关系的限制. 在这个例子中，Δx 大约是原子核半径的 10^{17} 倍. 但是对子象电子这样的微观粒子，就要受到不确定关系的限制. 在这个例子中，Δx 约是原子直径的 10^{7} 倍.

2-22. 一个在一维空间运动的粒子，其状态可用如下波函数描述：

$$\psi(x,t) = \begin{cases} Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}\sin\dfrac{\pi}{a}x & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & x \leqslant 0, x \geqslant a \end{cases}$$

且在 $t=0$ 时函数曲线如图实线所示. 式中 E 和 a 为确定的常数. 求：(a)归一化波函数；(b)几率密度；(c)$\bar{x}$和 $\bar{x^2}$ 的值.



例题 2-22 用图

[解] (a)在一维空间里

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{0} |\psi(x,t)|^2 dx + \int_{0}^{a} |\psi(x,t)|^2 dx + \int_{a}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

将题中给定的 $\psi(x,t)$ 代入，即有

$$A^2 \int_0^a (e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\sin\frac{\pi}{a}x)(e^{\frac{i}{\hbar}Et}\sin\frac{\pi}{a}x)dx = 1$$

积分后有

$$A^2 \cdot \frac{a}{2} = 1 \qquad \text{或} \qquad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

所以归一化波函数为

$$\psi(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_1 t}\sin\dfrac{\pi}{a}x & 0\leqslant x\leqslant a\\ 0 & x\leqslant 0,\ x\geqslant a\end{cases}$$

(b)几率分布函数为

$$\omega(x)=|\psi(x,t)|^2=\begin{cases}\dfrac{2}{a}\sin^2\dfrac{\pi}{a}x & 0\leqslant x\leqslant a\\ 0 & x\leqslant 0,x\geqslant a\end{cases}$$

几率分布曲线如图虚线所示. 从图中可以看出,在区间(0,a)以外找不到粒子,而在(0,a)内各处都有可能找到粒子. 在 x 和 $x+dx$ 之间发现粒子的几率为

$$\omega(x)dx=\frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi}{a}xdx$$

令

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi}{a}x\right)=0$$

可得到在 $x=a/2$ 处,找到粒子的几率最大.

(c)

$$\bar{x}=\langle X\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x|\psi(x,t)|^2dx=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\frac{\pi}{a}xdx=\frac{a}{2}$$

$$\bar{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x,t)|^2dx=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\frac{\pi}{a}xdx=\frac{a^2}{3}\frac{a^2}{2\pi^2}$$

2-23. (a)什么是线性谐振子?写出其薛定谔方程式,并阐明公式中各量的物理意义. (b)有一微观粒子,沿 x 方向运动,描述其运动的波函数为 $\psi(x)=\dfrac{A}{1+ix}$. (i)将此波函数归一化;(ii)求出粒子坐标的几率分布函数;(iii)在何处找到粒子的几率最大?

[解] (a)作一维运动的粒子,如果受的力与其位移 x 成正比而方向相反,这样的粒子称为线性谐振子. 其薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2u=Eu$$

式中：m 为粒子的质量；k 为力场的弹性系数；E 为粒子的能量；$u(x)$为对应于能量 E 的定态波函数.

(b)(i)令 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\psi^*(x)dx=1$

则有

$$|A|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=|A|^2\text{arctg}x|_{-\infty}^{\infty}=\pi|A|^2=1$$

选取 A 的辐角为零，得 $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$，因此归一化波函数为

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+ix}$$

(ii)粒子坐标的几率分布函数

$$\omega(x)=\psi(x)\psi^*(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

(iii)从 $\omega(x)$的表达式不难看出，在点 $x=0$ 找到粒子的几率最大. 该点的几率密度为

$$\omega(0)=\frac{1}{\pi}$$

2-24. 设粒子的势能为

$$U(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ \infty & x<0,x>a\end{cases}$$

试求在这势阱中，粒子的能级和归一化波函数.

[解] 粒子的波函数满足如下定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+U(x)u(x)=Eu(x)$$

为了求出各区间中 $u(x)$的解析式，我们先令

$$U(x)=U_M(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ M & x<0,x>a\end{cases}$$

求出 $u(x)$后，再取极限 $M\to\infty$. 设

$$u(x)=\begin{cases}u_1(x) & -\infty<x<0\\ u_2(x) & 0<x<a\\ u_3(x) & a<x<\infty\end{cases}$$

则它们分别满足如下方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_1(x)+Mu_1(x)=Eu_1(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_2(x)=Eu_2(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u_3(x)+Mu_3(x)=Eu_3(x)$$

令 $\lambda=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(M-E)}$；$k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$. 方程简化为

$$u_1''(x)-\lambda^2u_1(x)=0$$

$$u_2''(x)+k^2u_2(x)=0$$

$$u_3''(x)-\lambda^2u_3(x)=0$$

其通解为

$$u_1(x)=A_1\mathrm{e}^{\lambda x}+B_1\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$u_2(x)=A_2\cos kx+B_2\sin kx$$

$$u_3(x)=A_3\mathrm{e}^{\lambda x}+B_3\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

当 $x\to\pm\infty$时，要求 $u(x)$有界，就定出 $B_1=A_3=0$. 则

$$u_1(x)=A_1\mathrm{e}^{\lambda x}\qquad -\infty<x<0$$

$$u_3(x)=B_3\mathrm{e}^{-\lambda x}\qquad a<x<\infty$$

当 $M\to\infty$时，$\lambda\to+\infty$. 于是得到

$$u_1(x)=0\quad -\infty<x<0$$

$$u_3(x)=0\quad a<x<\infty$$

由波函数的连续性得到 $u_2(x)$所满足的边界条件

$$u_2(0)=0\quad u_2(a)=0$$

代入通解，$u_2(0)=A_2=0$，$u_2(a)=B_2\sin ka=0$，定出本征值

与对应的本征函数

$$k=\frac{n\pi}{a};u_2(x)=B_2\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad n=1,2,3,\cdots$$

令 $\int_0^a u_2(x)\,u_2^*(x)\mathrm{d}x=1$，不难求出 $B_2=\sqrt{\frac{2}{a}}$

于是得到归一化的波函数

$$u(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x & 0<x<a\\ 0 & a<x<\infty\end{cases}$$

从等式 $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{n\pi}{a}$，不难求出能级

$$E_n=\frac{k^2\hbar^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad n=1,2,3,\cdots$$

2-25. 一粒子在球形位阱中运动，势函数为

$$U(r)=\begin{cases}-U_0 & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

证明对角动量 $l=0$ 的状态，决定粒子能级的公式为

$$\sin ka=\pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2U_0}}\cdot ka,\ \text{其中}\ k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-|E|)}$$

[证] $l=0$ 的状态的波函数是球对称的，只依赖于 r，而与 θ，φ 无关，记为 $\psi(r)$. 球坐标下的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\psi(r)}{\mathrm{d}r}\right)+U(r)\psi(r)=E\psi(r)$$

简化后，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\psi(r)}{\mathrm{d}r}-\frac{2m[U(r)-E]}{\hbar^2}\psi(r)=0$$

作变换 $\psi(r)=\frac{u(r)}{r}$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}-\frac{2m[U(r)-E]}{\hbar^2}u(r)=0$$

令 $u(r)=\begin{cases}u_1(r) & r<a\\ u_2(r) & r>a\end{cases}$

$u_1(r)$,$u_2(r)$分别满足如下方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2m(U_0+E)}{\hbar^2}u_1(r)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2(r)}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}u_2(r)=0 \tag{2}$$

(2)式的通解为

$$u_2(r)=A_2\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r}+B_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r}$$

要使波函数在整个区间$(0,\infty)$上平方可积,即

$$\int_0^\infty|\psi(r)r|^2\mathrm{d}r=\int_0^\infty|u(r)|^2\mathrm{d}r<M$$

则必须当$r\to\infty$时,$u_2(r)\to0$. 这就要求$\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$为实数,即$E$为负数:$E=-|E|$,且$A_2=0$,则有

$$u_2(r)=B_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}r} \tag{3}$$

(1)式的通解为

$$u_1(r)=A_1\sin kr+B_1\cos kr,\qquad k=\sqrt{\frac{2m(U_0-|E|)}{\hbar^2}}$$

要使波函数$\psi(r)=\frac{u(r)}{r}$在球$r<a$内处处有界,特别是当$r=0$时,$\psi(r)$有界,必须有$B_1=0$. 因此

$$u_1(r)=A_1\sin kr \tag{4}$$

此外,由几率与几率流的连续性,$u_1(r)$与$u_2(r)$在球面上$(r=a)$还必须满足连续条件

$$u_1(a)=u_2(a)\qquad u'_1(a)=u'_2(a) \tag{5}$$

将(5)代入(3)、(4)中有

$$A_1\sin ka-B_2\mathrm{e}^{-\lambda a}=0$$

$$A_1k\cos ka-B_2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda a}=0$$

式中，$\lambda = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}$；$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - |E|)}$. 齐次方程组存在非零解的条件是其系数行列式等于零. 即

$$\lambda \sin ka = -k\cos ka$$

将上式平方，并利用 $\cos^2 ka = 1 - \sin^2 ka$，就可得到

$$\frac{2m|E|}{\hbar^2}\sin^2 ka = \frac{2m(U_0 - |E|)}{\hbar^2}(1 - \sin^2 ka)$$

最后得出

$$\sin ka = \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0}} = \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2U_0}}ka$$

解出 k 就可决定粒子的能级 E.

习　题　集

§2-1　光　　子

2-1. 波长为 3.0×10^3 埃的单色光垂直入射在面积为 4 平方厘米的表面上，如果光的强度为 15×10^{-2} 瓦/米^2，试计算每秒与此表面碰撞的光子数.

2-2. 一束 300 兆赫的平面电磁波垂直入射到一个面积为 50 平方厘米的表面上. 如果其强度为 9×10^{-5} 瓦/米^2，试计算每秒与该表面碰撞的光子数.

2-3. 一个无线电台的频率为 103.7 兆赫，功率输出为 200 千瓦，试计算每秒从这电台发射的光子数.

2-4. 分别计算波长为 1 埃，1 微米，1 米的光子的能量（分别以

电子伏特和焦耳为单位)、频率和质量.

2-5. 一个光子的频率为 10^6 赫兹,求其能量和动量.

2-6. 一个 1 兆电子伏的电子由碰撞而变为静止状态,并由此产生一个光子. 求此光子的波长.

2-7. 一种光子的动量为 0.02 兆电子伏/c 求其波长和频率.

2-8. 如果一个光子与一个 10 兆电子伏的 α 粒子具有相同的能量,其动量是多少?

2-9. 光子的能量等于电子的静止能量时,它的频率、波长和动量是多少?

§2-2 光电效应

2-10. 波长为 4.0×10^{-7} 米的单色光,照射在逸出功为 2.0 电子伏的金属材料上,光传到金属单位面积上的功率为 3.0×10^{-3} 瓦/米^2. 求(a)单位时间内单位面积上该金属发射的光电子数;(b)光电子的初动能.

2-11. 一个光电管发射极的阈波长为 6.0×10^3 埃,若入射到该光电管的光的截止电压为 2.5 伏,试计算这种光的波长.

2-12. 钨的功函数是 4.52 电子伏,钡的功函数是 2.50 电子伏. 从钨和钡发射光电子的光的最大波长分别是多少?应用可见光制作光电池,那一种金属是有利的?

2-13. 从钨中发射的光电子的阈波长是 2300 埃. 为了得到电子的最大能量是 1.5 电子伏,需要多大波长的光入射?

2-14. (a)从钠中除掉一个电子所需要的能量是 2.3 电子伏,波长 $\lambda=5890$ 埃的黄光可否使钠产生光电效应?(b)从钠中发射光电子阈波长是多少?

2-15. 当波长为 5896 埃的光照射一表面时,放出的光电子的截止电压是 0.12 伏. 同一表面被波长为 2830 埃的光照射时,放出

光电子的截止电压 2.20 伏. 试计算普朗克常数，并计算功函数和该表面的阈频率.

2-16. 一束波长为 5.55×10^{3} 埃的光入射到阈波长为 7320 埃的金属表面. 计算发射电子的最大动能和截止电压.

2-17. 波长为 3.5×10^{3} 埃的光子照射一个表面. 实验上发现，从该表面发射的最大能量的电子在 1.5×10^{-5}特斯拉的磁场中偏转面成的圆轨道半径为 18 厘米. 求这种材料的功函数.

2-18. 钾的功函数是 2.20 电子伏，入射光的波长多大时，才能从钾表面放出最大能量为 4 电子伏的光电子？ 并计算钾表面的阈频率.

2-19. 氢原子的功函数大约是 13.6 电子伏，(a)波长为 10 埃的光子入射到氢原子上，放出的光电子的最大动能是多少？ (b)光电子的最大速率与光的速率之比是多少？

2-20. 在用单色光的光电实验中，使用钠作为光阴极. 发现，波长 $\lambda=3000$ 埃时，截止电压是 1.85 伏；$\lambda=4000$ 埃时，是 0.82 伏. 由这些数据确定：(a)普朗克常数值；(b)钠的功函数(以电子伏为单位)；(c)钠的阈波长.

2-21. 当用波长 3.0×10^{3} 埃的光照射在一种材料上时，发射电子的最大能量为 1.2 电子伏. 求这种材料的功函数.

2-22. 当波长为 4000 埃的光照射阈波长为 6.0×10^{3} 埃的一个表面时，从此表面发射出的电子的最大动能为多少？

2-23. 波长为 4500 埃的光照射一表面，发射光电子的截止电压是 0.71 伏. 当改变入射光的波长时，截止电压变为 1.43 伏. 问改变以后的新波长是多少？

2-24. 波长为 4500 埃的光照射在两个光电管上. 第一个光电管发射极的阈波长为 6.0×10^{3} 埃，面第二个光电管发射极的功函数比第一个光电管发射极的功函数大一倍. 求每一个光电管中的截止电压.

2-25. 在光电效应中，当 $v/c>0.1$ 时，如果要避免误差大于1%，电子的动能要应用相对论公式. 对于从铝表面(功函数为 4.2 电子伏)发射的光电子，经典公式能够应用的入射光子的最小波长是多少?

2-26. 钽的功函数是 4.19 电子伏. 如果波长为 2536 埃的光入射在光电管中的钽发射体上，将测量到多大的截止电压 V_0 值(收集极也是钽)?对 $\lambda=3650$ 埃，你计算的 V_0 值是多少?对子这个值，如何给予物理解释?

2-27. 光电效应中如不考虑原子的反冲，入射光子能量 $h\nu$ 与逸出功 A 的关系为

$$h\nu = A + T_e$$

其中 T_e 是光电子动能. 现如光子在某一静止的自由原子上产生光电效应后，原子具有一定的反冲，分别讨论下列三种情况下 $h\nu$ 与 A(这里 A 应为原子的电离能，与逸出功定义有些差别)的关系：(a)发生光电效应后光电子动量为零. (b)发生光电效应后原子动量为零. (c)光子具有能够发生该光电效应的最小能量.

2-28. 波长为 $\lambda=0.71$ 埃的 X 射线由金箔产生的光电子在磁场 B 中走一个半径为 r 的圆轨迹. 实验上证明 $rB=1.88\times10^{-4}$ 特斯拉·米. 计算(a)光电子的最大动能；(b)从金箔中除掉电子所做的功.

2-29. 一个 0.3 兆电子伏的 X 射线光子与一个原来静止的电子发生"对头"碰撞，试用能量和动量守恒定律求这个电子的反冲速度.

§2-3 康普顿效应

2-30. 分别以波长为 5000 埃和 0.1 埃的光照射到某金属上，求 $\theta=90°$ 方向上康普顿散射的波长.

2-31. 一个光子的康普顿散射产生最大能量的反冲电子进入0.02 韦伯/米^2 的磁场中时，在半径 1 厘米的圆轨道上运动. 问入射光子的能量是多少？

2-32. 在康普顿散射中，θ 为散射光子与入射光子方向的夹角，φ 为反冲电子与入射光子方向的夹角，ν 为入射光子频率，试证

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\varphi\left(1+\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)$$

2-33. 证明康普顿散射中，散射角 θ 和反冲角 φ 的关系为

$$\cos\theta=\left[1-\frac{2}{\left(1+\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2\operatorname{tg}^2\varphi+1}\right]$$

2-34. 证明，在康普顿散射中，反冲电子的动能为

$$T_e=h\nu\left[\frac{\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}{1+\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}\right]$$

其中 $h\nu$ 是入射光子的能量. 并证明反冲电子动能的最大值是

$$T_{e\max}=h\nu\left[\frac{2\frac{h\nu}{m_0c^2}}{1+2\frac{h\nu}{m_0c^2}}\right]$$

2-35. 假定 100 千电子伏的 X 射线入射到一靶上，并经历康普顿散射. 计算(a)$\theta=30°$时，散射 X 射线的能量；(b)反冲电子的能量；(c)电子的反冲角.

2-36. 波长为 0.024 埃的光子入射到自由电子上. (a)确定散射到 30°角方向上光子的波长及反冲电子的动能；(b)如果散射角是 120°，结果如何？

2-37. 欲使散射光子和反冲电子满足关系 $\theta=\varphi=\theta_0$，$h\nu$ 和 θ_0 之间必须有什么关系？如果 $h\nu=10$ 兆电子伏，θ_0 为多少？

2-38. 2.55×10^5 电子伏的 X 射线光子与静止的电子“对头”

碰撞，光子以 $\varphi=\pi$ 的角度反射. 应用动量和能量守恒定律，试给出碰撞后电子的速度与光子速度之比. 并在特殊情况下，验证康普顿散射公式.

2-39. 考虑 $\lambda=1.00$ 埃的 X 射线和 ^{137}Cs 样品放出的波长为 $\lambda=1.88\times10^{-2}$ 埃的 γ 射线，如果在与入射束成 90°角方向观察从自由电子的散射辐射：(a)在每种情况中，康普顿波长改变多少？(b)在每种情况中反冲电子的动能是多少？(c)入射光子能量在碰撞中损失的百分比分别是多少？

2-40. 频率为 ν 的光子被静止的电子散射到 90°角方向. (a)写出动量和能量守恒的相对论方程；(b)从这些方程，证明散射光子的频率为

$$\nu' = \frac{\nu m_0 c^2}{h\nu + m_0 c^2}$$

2-41. 初始能量为 1.0×10^5 电子伏的 X 射线光子沿 $+x$ 方向射到静止的自由电子上. 光子沿 $+y$ 方向被散射. 求反冲电子的动量分量.

2-42. 一个频率为 ν 的光子被静止的电子经 180°被散射回来，(a)写出这个过程的动量和能量守恒方程；(b)用这些方程，计算反冲电子的动量，用 ν 和 m_0 表示.

2-43. 在康顿散射中，光子能量的相对变化 $\Delta E/E$ 满足如下关系

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{h\nu'}{m_0 c^2}\right)(1-\cos\theta)$$

然后作出 $\frac{\Delta E}{E}$ 随 θ 的变化曲线，并解释曲线的物理意义.

2-44. 试证光子打在真空中的自由电子上，不可能将其全部能量给予电子.

2-45. 光子与静止的自由电子碰撞，碰撞后电子获得的最大动能是 60 千电子伏，求入射光子的波长.

§2-4 电子对效应

2-46. 一 γ 射线产生电子—正电子对. 试证明，若没有第三体的存在，而且它得到一些动量，那么能量和动量就不能同时守恒〔提示：使能量相等，证明将导致作用前后的动量不相等〕.

2-47. 在电子对的产生过程中，在什么条件下，电子和正电子带走最大的动量？

2-48. 一 γ 射线在静止的电子或核附近可产生电子—正电子对. 证明在这种情况中阈能等于 $4m_0c^2$.

2-49. 如果产生的电子对的正电子静止，而电子以动能 1.0 兆电子伏在产生电子对的入射光子方向上运动. (a)忽略传递到附近的原子核上的能量，试确定入射光子的能量；(b)传递给原子核的光子动量的百分比是多少？

2-50. 有一光子在磁场 $B=0.20$ 韦·伯/米^2 中产生一对正负电子，其轨道曲率半径 $r=2.5\times10^{-2}$ 米，求光子的能量和波长.

2-51. 一个波长为 0.003 埃的光子在一个重核附近产生一个电子—正电子对. 如果正电子的动能为电子动能的两倍，每个粒子的动能是多少？

2-52. 在 0.05 特斯拉的磁场中发生一次电子对的产生过程，观察到电子和正电子的曲率半径都是 90 毫米，求入射光子的能量.

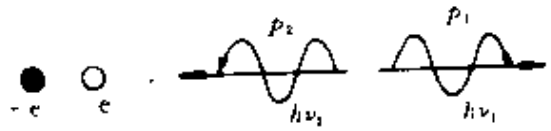
2-53. 一个波长为 0.0005 埃的光子在一个重核附近产生一个电子—正电子对，如果电子和正电子具有相同的动能，求每个粒子的能量.

2-54. 在一个电子对湮没后，观察到两个向相反方向运动的 1 兆电子伏的光子，如果电子和正电子的动能相同，求这个能量值.

2-55. 一个速度为 $0.8c$ 的电子与一个静止的正电子发生湮没

而产生两个光子，观察到其中一个光子沿着入射电子的方向运动，试计算每个光子的能量.

2-56. (a)如图，在 S 参考系中产生湮没过程，在这个参考系中，电子—正电子对静止，两个湮没光子沿 x 轴运动. 试求这些光子的波长，用电子的静止质量 m_0 表示；(b)若有一 S' 参考系以速度 v 相对于 S 系向左运动，现在在 S' 系中观察同样的湮没事件，试问这个运动的观察者所记录的湮没光子的波长是多少?



习题 2-56 用图

§2-5 光子的吸收

2-57. 一束单色光穿过 8.5 毫米的材料后强度减小到 2/3，求线性吸收系数.

2-58. 对于 λ 射光子的吸收，多厚的铅($\mu_{Al}=0.044$ 毫米$^{-1}$)才与 6.0 毫米厚的铅($\mu_{Pb}=5.8$ 毫米$^{-1}$)相当.

2-59. 一束光垂直穿过一块 20 毫米厚的材料板，其强度衰减为原来强度的一半. 现在材料板转动 40°角，求这时从材料穿出的光束的强度.

2-60. 材料 A 的吸收系数为 0.044 毫米$^{-1}$，材料 B 的吸收系数为 0.056 毫米$^{-1}$，假设 A 比 B 厚一倍，而且光穿过两种材料. 如果入射强度为 I_0，最终强度为 $I_0/5$，试计算材料 A 及材料 B 的厚度.

2-61. 有一种材料的吸收系数为 0.061 毫米$^{-1}$，如果入射光的强度为 I_0，试计算使光强度减小到 $I_0/3$ 所需的材料厚度.

2-62. 铅对 1 兆电子伏的 γ 光子的吸收系数 $\mu_{Pb}=0.74$ 厘米$^{-1}$. 计算(a)对这种 γ 光子，铅的半厚度(即光子强度减少一半所需物质的厚度)；(b)使原来强度减小 1/1000 时所需铅的厚度.

2-63. 一种材料的线性吸收系数为 0.055 毫米$^{-1}$，求单色光束穿过 10 毫米厚材料的百分数.

2-64. 取材料 A($\mu_A=0.060$ 毫米$^{-1}$)和材料 B($\mu_B=0.131$ 毫米$^{-1}$)相等的厚度，然后合在一起，这两种叠合材料使入射单色光束的强度减小到 1/5，求这个厚度的大小.

2-65. 对波长为 0.4 埃和 0.5 埃的 X 射线，银的质量吸收系数分别是 38 厘米^2/克和 11 厘米^2/克，(a)计算对这些波长的 X 射线，银的原子吸收系数是多少？(b)将这些值与银原子的几何截面进行比较.

2-66. 对波长为 0.5 埃和 2.25 埃的 X 射线，铅的质量吸收系数分别是 60 厘米^2/克和 500 厘米^2/克. (a)对于这些波长的 X 射线，确定铅的原子吸收系数；(b)与铅原子的几何截面比较之.

2-67. 对波长为 0.20 埃的 X 射线，铝的吸收系数是 0.73 厘米$^{-1}$. 确定(a)质量吸收系数；(b)原子吸收系数.

2-68. 对波长 $\lambda=0.7$ 埃的 X 射线，铝的质量吸收系数是 5 厘米^2/克，铜的质量吸收系数是 50 厘米^2/克. 铝和铜的密度分别是 2.7 克/厘米^3 和 8.93 克/厘米^3. 欲使 X 射线强度衰减一半，这些吸收体的厚度是多少？

§2-6 德布罗意波

2-69. 求下列电子的德布罗意波长：(a)从 500×10^6 电子伏加速器中射出的电子；(b)速度为 $0.5c$ 的电子；(c)总能量恰好等于其两倍静止质量能 m_0c^2 的电子.

2-70. 计算下列情况的德布罗意波长：(a)以 20 米/秒的速率运动，质量为 50 克的金球；(b)以 2200 米/秒的速率运动的质子；(c)速度为 2200 米/秒的中子.

2-71. 计算动能为 15 兆电子伏的质子和中子的德布罗意波

长.

2-72. 德布罗意波长为 5000 埃的质子和电子的动能是多大?

2-73. 在室温下,即在热运动速度下,分别计算氢分子和氧原子的德布罗意波长.

2-74. 计算镭原子核放出的 α 粒子的波长,并将这个波长与核直径相比较.

2-75. 下述粒子中哪一个的波长最长?(a)动能为 3 电子伏的 α 粒子;(b)动能为 13 电子伏的中子;(c)动能为 26 千电子伏的电子;(d)80 千电子伏的光子.

2-76. 电子被一电势差加速后,相应的德布罗意波长是 0.1 埃,试问此电势差有多大?

2-77. 经过 1×10^4 伏特电势差加速的电子束的德布罗意波的波长是多少? 用上述电压加速的质子束,其德布罗意波长是多少?

2-78. 频率为 ν 的光子被质量为 m 的电子散射,频率为 ν' 的散射光子的方向与入射光子的方向成 90°角. 证明反冲电子的德布罗意波长是

$$\lambda = c(\nu^2 + \nu'^2)^{-1/2}$$

2-79. 在 X 射线管中,在 6×10^4 伏电势差下产生 X 射线,试问与这种 X 射线相同波长的电子的动能是多大?

2-80. 如果我们需要观测一个大小为 2.5 埃的物体,可用的光子的最小能量是多少?

2-81. 原子核的大小是 10^{-14} 米的数量级. (a)确定德布罗意波长为 10^{-15} 米的电子的能量;(b)对中子做同样的计算.

2-82. E 为电子的总能量,在什么情况下电子的德布罗意波长可近似表示成

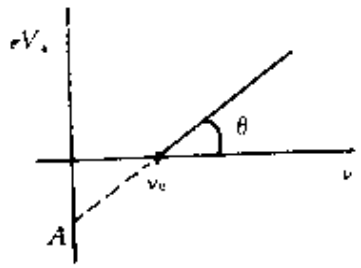
$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

2-83. (a)证明在不考虑相对论修正时,电子枪(加速电位差为

V 伏特)加速的电子束的德布罗意波为 $\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}}$ (埃);(b)若考虑相对论修正,试证明电子的德布罗意波长变为

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{V}} \cdot (1 - 0.489 \times 10^{-6}V)(\text{埃})$$

(c)若从实验得出光电材料的 eV_a 值(e 为电子电荷,V_a 为光电效应的截止电压)和入射光子频率 ν 的实验曲线(如图).试讨论如何从实验曲线定出普朗克常数 h,光电材料的脱出功 A 和阈频率 ν_0.



习题 2-83 用图

2-84.(a)证明电荷为 e,静止质量为 m_0 的粒子在相对论速率下运动的德布罗意波长与加速电压 V 的关系是

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} \cdot \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$$

(b)证明,在非相对论情况下,上式与 $\lambda = h/p$ 是一致的.

2-85.一电子束在电场中经 V 伏电压的加速.(a)问电子在离电场后的德布罗意波长是多少?(b)这德布罗意波的相速度是多少?群速度是多少?(c)把电子束射到一块单晶上,在入射方向与晶面成 θ 角时,观察到散射电子束的第一级强度极大值.问晶面间的距离 d 是多少?

2-86.(a)求电子通过电势差 $V = 100$ 伏特后的德布罗意波长(设电子的初速度为零).(b)相对论性粒子的德布罗意波长与加速电势差 V 之间有如下关系:

$$\lambda = hc/\sqrt{eV(eV + 2m_0c^2)}$$

2-87.如果对电子的德布罗意波长进行非相对论性计算,电子能量为多大时,这种计算的误差为 5%.

2-88. 试证明，当一个粒子的能量远大于其静止能量时，这个粒子的德布罗意波长与具有相同能量的光子的波长大致相等.

2-89. (a)当电子的动能是它静止能量的两倍时，电子的质量有多大？电子的速度有多大？(b)设具有(a)中速度的电子束是从静止开始在电场中加速起来的，它相当于是通过多少伏特的加速电势差来加速的？(c)对具有(a)中动能的电子，计算它的德罗意波长；(d)如有一个光子，它的能量和(a)中电子的能量恰好相等，这个光子具有多大的波长？

2-90. 试确定与德布罗意长 $\lambda=h/p=h/mv$ 相应的波的相速度.

2-91. 试确定与德布罗意波长 $\lambda=h/p$ 相应的波的群速度.

2-92. π 介子的质量 $m_\pi=270m_e$，速度为 $0.995c$，试计算 π 介子的相速度.

2-93. 海水波的速度是 $\sqrt{g\lambda/2\pi}$，其中 g 是重力加速度. 试确定这种波的群速度.

2-94. 在液面上波纹的速度是 $\sqrt{2\pi S/\lambda\rho}$，其中 S 是表面张力，ρ 是液体的密度. 试确这种波的群速度.

2-95. 当质子的动能是多大时，对质子的波长进行非相对论性计算所产生的误差为 5%？

2-96. 一个粒子的康普顿波长与其德布罗意波长之比是多少？

2-97. 应用关系式 $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$；(a)证明电子的相速度大子光速 c；(b)证明电子的群速等于电子的粒子速度；(c)若粒子以速度 v 运动，证明群速等于波速？

2-98. 由热阴极放出的电子为阴极和阳极间 30 千伏的电压差加速；穿过阳极上孔的一细束电子穿过一个薄的铝片. 假定布喇格公式仍然适用，试计算第一衍射花纹的偏离角；(b)确定铝箔中这种波的速度.

§2-7 不确定关系

2-99. 已知电子位置的精确度大约是 10^{-8} 厘米，那么它的速度的精确值是多少？

2-100. 假定在一条直线上运动的一个粒子的能量 $E=\frac{1}{2}mv^2$，试证明 $\Delta E\Delta t\geqslant h/4\pi$；这里 $\Delta t=\Delta x/v$.

2-101. 试用不确定关系，估计氮原子基态的能量.

2-102. 近来发现介子的寿命大约是 10^{-23} 秒，试问它的静止能量的精确值是多少？

2-103. 在直径为 10^{-14} 米的原子核中，一个中子的最小动能是多少？若一个电子存在于这种原子核内，最小动能是多少？

2-104. 带电粒子在威耳孙云室（一种径迹探测器）中的轨迹是一串小雾滴，雾滴的线度约为 1 微米. 当观察能量为 1000 电子伏的电子径迹时，其动量与经典力学动量的相对偏差不小于多少？

2-105. 同时测定 1 千电子伏的电子的位置和动量，如果它的位置在 1 埃之内，它的动量不确定的百分比是多少？

2-106. 对于光子，如果 $\Delta\lambda/\lambda=10^{-7}$，在(a)$\lambda=5.00\times10^{-4}$ 埃（γ 射线），(b)$\lambda=5.00$ 埃（X 射线），(c)$\lambda=5000$ 埃（可见光）等三种情况中，Δx 的值是多少？

2-107. 假定对某粒子动量测量可以精确到千分之一，如果这个粒子(a)质量为 5×10^{-3} 千克，以 2 米/秒的速度运动，(b)是速度为 1.8×10^{8} 米/秒的电子，试确定这个位置的最小不确定度.

2-108. 一个光子的波长为 3000 埃，如果测定此波长的精确度为 10^{-6}，试求此光子位置的不确定量.

2-109. 应用海森堡不确定关系，计算电子可被晶格空位捕获时的最小能量. 假定电子可在半径为 r_0 的球体内运动.

2-110. 原子被激发后就会发生辐射. 发现被激发的某原子的平均寿命大约是 10^{-8}秒，在这个周期中，原子将放出光子后而退激发. (a)光子频率的最小不确定度是多少?(b)从钠原子中发出的大多数光子形成大约 $\lambda=5890$ 埃的两个光谱线，每条谱线的相对宽度是多少? (c)计算原子激发态能量的不确定度?

2-111. 试根据关系式 $\Delta p\Delta x\geqslant h/4\pi$，证明，对于在圆周上运动的粒子，$\Delta p_l\Delta\theta\geqslant h/4\pi$，其中 Δp_l 是角动量的不确定量，$\Delta\theta$ 是角度的不确定量.

2-112. 以速度10^6米/秒运动的电子的位置测定的精确度是10^{-4}厘米. 计算电子动量的不确定度及动量的相对不确定度 $\Delta p/p$.

2-113. 一个质量为 m 的粒子被约束在长度为 L 的一维线段上. 试根据不确定原理进行论证、估算这个粒子所能具有的最小能量值.

2-114. 证明动量为 p 的电子(其动量值为 $p=mv=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v$)，其位置的最小不确定性为

$$(\Delta x)_{\min}=\frac{\hbar}{2m_0c}\sqrt{1-\beta^2}$$

$$=0.002\times10^{-8}\sqrt{1-\beta^2}cm$$

2-115. 设有一个质量为 2×10^{-4}千克的粒子，我们以 $\pm10^{-6}$ 米/秒的精确性去测量它的速度的 x 方向的分量. 那么，我们沿 x 方向确定该粒子的位置时，所能达到的精确性的极限是多少?

2-116. 如果一个系统的激发态的能量宽度为 1.1 电子伏，试求这个能态的平均寿命. 如果该能态的激发能是 1.6 千电子伏，试求此激发态衰变时所发射光子波长的最小不确定性.

2-117. 原子核激发态的寿命大约是 10^{-12}秒，问放出的 γ 光子的能量的不确定度是多少?

2-118. 有三种光子的波长分别为 3000 埃，0.5 埃，2×10^{-4}埃，如果它们波长的不确定性为 10^{-6}，试求这些光子位置最小的不确定性.

2-119. 一个物体的大小为 0.5 埃，观察到这个物体所能使用的光子的最大波长是多少？能够用于观测的电子的最小能量是多少？能够用于测量的质子的最小能量又是多少？

2-120. (a)如果电子可存在于直径为 1 埃的原子内的任何地方，电子动量的不确定性是多少?这与电子在原子内的结合能是否一致?(b)假想电子在直径为 10^{-12}厘米的原子核内，电子动量的不确定性是多少？这与原子核结构的结合能是否一致？(c)现在考虑中子和质子在原子核内，它们动量的不确定值是多少?这与原子核结构的结合能是否一致？

2-121. 能量为 0.05 电子伏的氢原子射线通过缝宽为 d 的一条狭缝，离狭缝 $l=0.5$ 米处放一个接收屏. 求 d 等于多大时，屏上的痕迹最窄.

2-122. 假定 $h=6.625\times10^{-3}$焦耳·秒，而不是 6.625×10^{-34}焦耳·秒，把质量为 66.25 克的一些小球通过两个高而窄的相距 0.6 米的平行窗口掷入房间，速度是每秒 5 米. 每次投掷时掷入哪个窗口是完全随机的. 试确定在窗后 12 米处的墙上所形成的条纹的间距.

2-123. 试确定波长为 3000 埃、强度为 3×10^{-14}瓦/米^2 的单色光束所对应的光子通量.

2-124. (a)一个质量为 m 的粒子被限制在长度为 L 的一维线上. 试根据物质的波动性解释，说明这个粒子的能量只能取分立值，并确定这个能量值. (b)若假设粒子的质量是 0.1 毫克，被约束在 $L=0.1$ 毫克的一段直线上，试确定它的最低能量.

2-125. 线谐振子的能量是 $E=p_x^2/2m+cx^2/2$. (a)证明，应用不确定原理，这个方程可写成

$$E = \frac{h^2}{32\pi^2 m x^2} + \frac{cx^2}{2}$$

(b)然后证明谐振子的最小能量是 $h\nu/2$，其中 $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$ 是谐振子的频率〔提示：这个结果依赖于 $\Delta x\Delta p_x$ 达到它的极限值 $\hbar/2$. 找出用 Δx 和 Δp_x 表示 E，然后求 E 相对于 Δx 和 Δp_x 的极小值〕.

§2-8 布喇格公式

2-126. 氯化钾晶体的主平面间距是 3.14 埃. 对于动能为 40 千电子伏的电子和能量为 40 千电子伏的光子，这些平面的一级布喇格反射角之比是多少?

2-127. 0.083 千电子伏的中子束在某个待研究的样品上散射，在离中心 22°角处的圆周上观测到一个布喇格反射峰. 问这个布喇格面族的间距是多少?

2-128. 入射到原子间距为 2.81 埃的氯化钠晶体上的热中子从主布喇格面衍射，一级衍射峰落在 20°处，这些热中子的能量是多少?

2-129. 在康普顿效应实验的 X 射线光谱计中应用 KCl 晶体，并使主平面($d_0=3.14$ 埃)的反射，而且只考察第一级($n=1$)的反射. 所用的 X 射线是钼的 $\lambda=0.71$ 埃. 对散射角 $\varphi=90°$，测量的 $\Delta\theta=\theta'-\theta_0$ 的值是多少〔提示：计算 θ_0 值，并应用 $\Delta\theta\ll\theta_0$ 写出 $\Delta\theta\cong\frac{d\theta}{d\lambda}\Delta\lambda=\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda'-\lambda_0)$〕?

2-130. 某种晶体中原子核之间的间距为 1.2 埃，对于动能为 0.020 电子伏的电子，一级布喇格反射出现在什么角度上?

2-131. KCl 晶体的相邻晶面的距离是 3.14 埃，该晶体的密度和分子量分别为 1.98×10^3 千克/米^3 和 74.55. 试计算阿伏加德罗常数.

2-132. 动能 $T=180$ 电子伏的电子束垂直地射在镍单晶的表面上，在与此表面的法线成 $\alpha=55°$ 角的方向上，观察到第四级反射的极大. 试求与这种反射相应的晶面间距.

2-133. 假定衍射角为 2°，问中子最大能量是多少时，能够用反射面间间距为 3.5 埃的晶格进行筛选〔这种筛选的方法常用来获得几乎单能的中子束〕?

2-134. 动能为 0.020 电子伏的一束中子入射在 KCl 粉末上. KCl 的晶格间距为 3.14 埃. 在 KCl 靶后 5 厘米的地方有一张平的照相底片，(a)试求由间距 3.14 埃的布喇格面所引起的一级反射在此底片上形成的圆形图样的半径. (b)这同一族布喇格面所引的二级反射的圆环的半径是多少?

2-135. 一束动能为 150 电子伏的电子入射到镍晶体上(原子间距为 2.15×10^{-10} 米). 计算一级和二级衍射电子的出射角.

2-136. 100 电子伏的电子入射到金箔(晶面间距为 4.07 埃)上. 计算一级衍射的角度.

2-137. 戴维孙和盖末在一个实验中将电子垂直入射到平行于主布喇格面切出的一个镍晶体(原子间距为 2.15 埃)的表面上. 它们在距表面法线 50°的地方观察到相长的干涉. 试求与他们使用的电子束相联系的波长.

2-138. 在上题描述的实验中，戴维孙和盖末采用了 54.0 电子伏的电子，试确定镍晶体的有效加速电压.

2-139. 试导出晶体的 X 射线衍射的布喇格公式 $2d\sin\theta=n\lambda$，$n=1,2,3,\cdots$，式中 d 为晶体内上下相邻两层原子平面间的距离. 若 X 射线的波长 $\lambda=1.10$ 埃，原子平面间距 $d=2.52$ 埃，问衍射的 X 射线可能存在的最高级次是多少?

2-140. 动能 $T=10$ 千电子伏的电子束通过多晶体薄箔，并在屏上形成一组衍射环，此屏离箔的距离 $l=10.0$ 厘米. 若第三级反射极大与半径 $r=1.6$ 厘米的衍射环相对应，试求相应的平面间

距.

§2-9 薛定谔方程

2-141. 证明波函数

$\psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$ 或 $\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$

不满足与时间有关的薛定谔方程.

2-142. 假定粒子被限制在无限深的方势阱中. 试计算粒子处在基态时量 x 和 x^2 的平均值.

2-143. 应用在盒子内的粒子的波函数

$$\psi(x,t)=\begin{cases}A\cos\dfrac{\pi x}{a}e^{-iEt/\hbar} & -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2}\\ 0 & x\leqslant-\dfrac{a}{2},x\geqslant+\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

试计算该粒子的 x,p,x^2 和 p^2 的期望值.

2-144. 质量为 m 的质子可沿 x 轴从 $x=-\dfrac{a}{2}$ 到 $x=\dfrac{a}{2}$ 自由的运动. 假定在 $-\dfrac{a}{2}$ 和 $\dfrac{a}{2}$ 处壁垒是完全硬的，粒子的波函数为

$$\psi(x,t)=\begin{cases}A\cos\dfrac{\pi x}{a}e^{-iEt/\hbar} & -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2}\\ 0 & x\leqslant-\dfrac{a}{2},x\geqslant+\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

式中：A 是常数；E 是粒子的总能量；试求最低能态的 E 值.

2-145. 应用上式用的波函数，已知 $A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，计算在 $x=\dfrac{a}{3}$ 处，发现粒子的几率.

2-146. 试导出方势阱的波函数为零的次数 N_x 的表示式. 即 $\psi(x)$ 与 Ox 轴相交的次数（不包含势阱两壁 $x=0$ 和 $x=a$ 的两点）.

2-147. 考虑被限制在宽为 1 埃的一维无限深势阱内的一个电子，试计算 $n=1,10,100,101$ 等情况下的能量值. 并证明，对于大的 n 值，电子的能量值与经典力学的结果是相同的.

2-148. 当谐振子处于 $n=0$ 状态时，试证明谐振子动能 T 和势能 U 的期望值为

$$\langle T\rangle = \langle U\rangle = E_0/2$$

事实上，对谐振子的所有状态，结果都是正确的.

2-149. 一个质量为 m 的粒子，受到力常数为 c 的恢复力的作用. 此简谐振于最低能态的波函数为

$$\psi(x,t) = Ae^{-(\sqrt{cm}/2\hbar)x^2}e^{-(i/2)\sqrt{cm}t}$$

试估算其几率密度.

2-150. 对无限深的方阱，计算 $n=1$ 状态的方均根值 $(\langle x^2\rangle)^{1/2}$.

2-151. 考虑被限制在宽度为 a 的无限深势阱内运动的粒子，试计算在基态的情况下，在(a)$x=0$ 和 $0.01a$ 之间，(b)$x=0.25a$ 和 $0.26a$ 之间发现粒子的几率.

2-152. 在谐振子恢复力公式 $F=-kx$ 中，k 的典型值是 1 焦耳/米^2. 试求质量为 1 千克的振子的振动频率 ν_0. 如果总能量 $E=0.1$ 焦耳，量子数 n 是多少？E_n 和 E_{n+1} 之差是多少？

2-153. 证明单摆有量子化的能量状态. 并计算周期为 1 秒的摆的最小能量值(以电子伏为单位).

2-154. 对子处于宽度为$(0,a)$的方势阱中的粒子，证明

$$\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2 m^2}$$

2-155. 证明，如果波函数 ψ 是实数(即 $\psi^*=\psi$)而且仅在区间 (a,b)中 $\psi\neq 0$. 那么，

$$\langle p\rangle = 0$$

2-156. 一个自由粒子($U=0$)可用波函数 $\psi = c\exp(ikx)$ 来描

写，而且 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi dx=1$．根据$\langle T\rangle$和$\langle T^2\rangle-\langle T\rangle^2$的计算，证明粒子的动能的精确值是 $\hbar^2k^2/2m$.

2-157. 长度为 1 米的摆，摆锤的质量为 0.1 千克. 试问它的零点势能是多少？

2-158. 试计算一个谐振子第一激发态的$\langle x\rangle$和$\langle x^2\rangle$值.

2-159. 试计算一个谐振子的第一激发态的$\langle p\rangle$和$\langle p^2\rangle$.

2-160. 一个粒子限制在 $0<x<a$ 的范围内，而且势能不等于零. 换言之，它的波函数为

$$\psi=Ax(a-x)$$

(a)这是基态还是激发态？(b)计算 A 值；(c)计算$\langle x\rangle$和$\langle x^2\rangle$.

2-161. 证明，在很大量子数的条件下，在一维无限方势阱中的任何小间隔内，找到粒子的几率与它在阱内的位置无关.

2-162. 试证明自由粒子的能量可以有连续的值.

2-163. 粒子所处的一维对称势场为

$$U=\begin{cases}U_0 & 0<x<L\\ 0 & x<0,x>L\end{cases}$$

试推导粒子在 $E<U_0$ 情况下，其总能量 E 所满足的关系式.

2-164. 有一粒子，其质量为 m，在一个三维势箱中运动. 势箱的长、宽、高分别为 a,b,c. 在势箱外，势能 $U=\infty$；在势箱内，$U=0$. 试计算粒子可能具有的能量.

2-165. 有一束能量为 4 电子伏的电子，垂直射向高度为 $U_0=5$ 电子伏、宽度为 2×10^{-7} 厘米的势垒. 试计算这束电子穿透势垒的百分率.

2-166. 假定一个 α 粒子的能量为 10 兆电子伏，并穿入高度等于 30 兆电子伏的势垒. 如果穿透系数是 0.002，试确定势垒的宽度.

2-167. 铀原子核对 α 粒子的作用势可看作是一个高为 $U_0=$

29 兆电子伏，宽为 $a=10^{-12}$ 厘米的方形势阱. 试确定 α 粒子在铀核内的本征值. 并将此结果与铀核发射的 α 粒子的能量比较之.

2-168. 计算(a)电子限制在原子内的能量，(b)质子被限制在原子核内的能量. 已知原子的半径为 10^{-8} 厘米，原子核的半径为 10^{-12} 厘米.

2-169. 一个一维的物体可用如下波函数描述：

$$\psi=\begin{cases}x\sqrt{3} & 0<x<1\\ 0\end{cases}$$

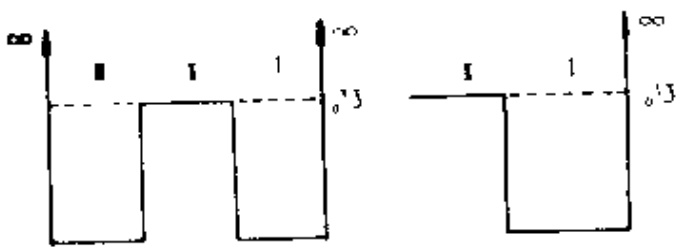
(a)在(0,0.5)的间隔内找到物体的几率是多少？(b)物体的平均位置是多少？

2-170. 一个一维粒子的波函数在 $(-a,a)$ 间为

$$\psi=(2a)^{-1/2}\exp i(kx-\omega t)$$

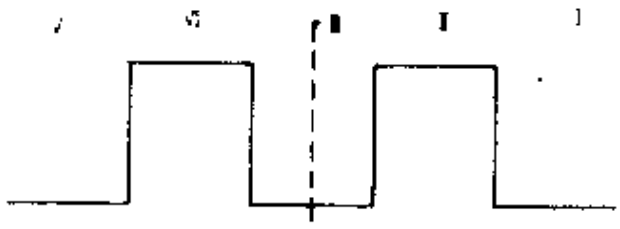
(a)粒子的平均位置是多少？(b)平均动能是多少？

2-171. 考虑如图所示的典型的势阱. 写出薛定谔方程，并给出在不同的能量区域(a)$E>U_0$，(b)$E<U_0$ 中的波函数. 作出不同区域波函数的草图.



习题 2-171 用图

2-172. 考虑如图所示的势垒. 写出薛定谔定程. 对粒子的不同能量区域(a)$E>U_0$ 和(b)$E<U_0$ 中的波函数绘出波函数的草图.



习题 2-172 用图

2-173. 质量为 m 的粒子在对数阱 $U(r)=c\ln r/r_0$ 中运动. 证明：(a)所有本征态具有相同的均方速度，并给出这个均方速度. (b)任意两个能级间隔与质量 m 无关.

2-174. (a)质量为 m 的非相对论粒子在势

$$U(x,y,z)=A(x^2+y^2+2\lambda xy)+B(z^2+2uz)$$

中运动. 这里 $A>0,B>0,|\lambda|<1,u$ 是任意的. 试给出本征能量. (b)考虑如下修正，采用一个新势 $U_{新}$

$$U_{新}=\begin{cases}U & z>-u,x,y\text{ 任意}\\ \infty & z<-u,x,y\text{ 任意}\end{cases}$$

给出基态的能量〔提示：作代换 $\xi=\frac{x+y}{\sqrt{m}},\eta=\frac{x-y}{\sqrt{m}},y=z+u$〕.

第三章　氢原子的量子理论

内　容　提　要

（一）　氢原子的薛定谔方程及波函数

角向方程有两个

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m_l^2\Phi=0 \tag{3-1}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{3-2}$$

径向方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E+U(r)-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \tag{3-3}$$

这些方程的解(即氢原子角向波函数和径向波函数)分别列于表 3-1 和表 3-2 中. 总波函数列子表 3-3 中.

表 3-1 氢原子的角向波函数

l	m_l	$\Phi_{m_l}(\varphi)$	$\Theta_{lm_l}(\theta)$	$Y_{lm_l}(\theta,\varphi)=\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\theta)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
1	±1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\varphi}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}(3\cos^2\theta-1)$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)$
2	±1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\varphi}$	$-\frac{\sqrt{15}}{2}\sin\theta\cos\theta$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$
2	±2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i2\varphi}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}\sin^2\theta$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}$

表 3-2 氢原子的径向波函数

n	l	$R_{nl}(r)$
1	0	$R_{10}=\frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$
2	0	$R_{20}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$
	1	$R_{21}=\frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$
3	0	$R_{30}=\frac{2}{81\sqrt{3}a_0^{3/2}}\left(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$
	1	$R_{31}=\frac{4}{81\sqrt{6}a_0^{3/2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/3a_0}$
	2	$R_{32}=\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}$

表 3-3 氢原子的总波函数

n	l m_l	$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi)$
1	0 0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}e^{-r/2a_0}$
2	0 0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$
	1 0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\cos\theta$
	1 ±1	$-\frac{1}{8\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$
3	0 0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}a_0^{3/2}}\left(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$
	1 0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/3a_0}\cos\theta$
	1 ±1	$-\frac{1}{81\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/3a_0}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$
	2 0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}(3\cos^2\theta-1)$
	2 ±1	$-\frac{1}{81\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$
	2 ±2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}\,a_0^{3/2}}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/3a_0}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}$

解氢原子径向方程还可得到氢原子的能量：

$$E_n=-\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\right]=-\frac{E_1}{n^2}$$

其中 E_1 为氢原子基态的能量. 各种量子数的取值范围为主量子数

$$n=1,2,3,4,\cdots$$

对子任一 n 值，轨道角量子数 l 为

$$l=0,1,2,3,\cdots,(n-1)$$

对于任一 l，轨道磁量子数为

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

共$(2l+1)$个.对于任一个n值有一个能量E_n,但却有$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$个波函数.同一个能量具有一个以上的本征函数的状态称为简并态,其简并度为n^2.

(二)电子在核外的分布几率

电于按半径r的分布几率为

$$\omega_{nl}(r) = R_{nl}^2(r)r^2 \tag{3-4}$$

电子按角θ的分布几率为

$$\omega_{lm_l}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}|\Theta_{lm_l}|^2 \tag{3-5}$$

(三)角动量和磁矩

电于的轨道角动量、自旋角动量和总角动量分别为

$$\left.\begin{aligned} p_l &= \sqrt{l(l+1)}\hbar \\ p_s &= \sqrt{s(s+1)}\hbar \\ p_j &= \sqrt{j(j+1)}\hbar \end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

当$j=l+s=l+\frac{1}{2}$和$j=l-s=l-\frac{1}{2}$.由于p_l和p_s是空间量子化的,p_l和p_s的夹角θ不能连续的变化,只能取某些一定的值.根据余弦定律,其夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \tag{3-7}$$

电子的轨道磁矩、自旋磁矩和总磁矩分别为

$$\left.\begin{aligned}\mu_l &= g_l\mu_B\sqrt{l(l+1)}\\ \mu_s &= g_s\mu_B\sqrt{s(s+1)}\\ \mu_j &= g_j\mu_B\sqrt{j(j+1)}\end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

其中 $\mu_B=\frac{e\hbar}{2m}=0.927\times10^{-23}$焦耳/韦伯/米^2 称为玻尔磁子. $g_l=-1, g_s=-2, g_j=1+\frac{j(j+1)-l(l+1)+s(s+1)}{2j(j+1)}$ 称为朗德因子.

(四)史特恩—盖拉赫实验

具有角动量 p_j 的原子在梯度为 $\frac{dB}{dz}$ 的不均匀磁场中受到的力为

$$F_z=-m_jg_j\mu_B\frac{dB}{dz} \tag{3-9}$$

对子基态的氢原子($1^2S_{1/2}$), $m_j=\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$. p_j 不同取向的氢原子受到相反方向力的作用将分成两束.

原子在经过长度为 L 的不均匀磁场后的偏移 Δz 为

$$\Delta z=\frac{1}{2}\frac{m_jg_j\mu_BL^2}{3KT}\frac{dB}{dz} \tag{3-10}$$

式中:K 是玻尔兹曼常数;T 是原子的温度(单位 K).

(五)精细结构

电子的自旋—轨道相互作用能为

$$\Delta E_{nl}=\begin{cases}\dfrac{Rch\alpha^2}{n^3 l\left(l+\dfrac{1}{2}\right)(l+1)}\dfrac{l}{2}, & j=l+\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{Rch\alpha^2}{n^3 l\left(l+\dfrac{1}{2}\right)(l+1)}\dfrac{l+1}{2}, & j=l-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

(3-11)

式中：$R=\dfrac{2\pi^2me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2ch^3}$，$\alpha=\dfrac{2\pi e^2}{4\pi\varepsilon_0 ch}$ 称精细结构常数. 在这个力的作用下，原来的一个能级将分裂成两个能级.

再考虑到相对论效应后，氢原子能级的普遍公式(称为狄拉克公式)为

$$E=-\frac{Rhc}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)\right] \tag{3-12}$$

电子自旋的存在造成了能级的精细结构分裂，也必然会引起光谱精细结构分裂. 精细结构能级间的跃迁遵守 $\Delta l=\pm1$ 和 $\Delta j=0,\pm1$ 的选择定则.

典 型 题 解

3-1. (a)对于氢原子的基态，计算径向几率密度最大的位置. (b)计算在这个状态中径向坐标的期望值. (c)最后用原子中电子位置的测量值来解释这些结果.

[解] (a)对于 $n=1,l=0$ 的基态，径向几率密度是

$$P_{10}(r)=R_{10}^*(r)R_{10}(r)r^2$$

在表 3-2 的 R_{10} 中，我们只取与 r 有关的部分，得

$$P_{10}(r) = e^{-r/a_0}e^{-r/a_0}r^2 = e^{-2r/a_0}r^2$$

为了求得几率密度的最大值，将 $P_{10}(r)$ 对 r 求微分并令其等于零，即

$$\frac{dP_{10}(r)}{dr} = -\frac{2}{a_0}e^{-2r/a_0}r^2 + e^{-2r/a_0}2r = \left(1 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-2r/a_0}2r = 0$$

解此方程，得

$$r = a_0$$

这是径向几率密度最大的位置.

(b) 为了计算径向坐标 r 的期望值，需要计算 $\bar{r}_{nl} = \int_0^\infty rP_{nl}(r)dr$，其结果为

$$\bar{r}_{nl} = \frac{n^2a_0}{z}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{l(l+1)}{n^2}\right]\right\}$$

用 $n=1, l=0, z=1$ 代入，得到

$$\bar{r}_{10} = a_0\left\{1 + \frac{1}{2}[1]\right\} = 1.5a_0$$

(c) 我们发现 r 的期望值稍大于几率密度最大时的 r 值. 原因是径向几率密度的最大值是不对称的，在电子位置的测量中，在相当大的 r 处仍可发现电子. 这样，虽然大多数电子的位置在 $r=a_0$，但测量所得到的平均值是 $\bar{r}=1.5a_0$.

3-2. 试计算 $\hat{P}_{lz}\psi_{nlm_l}$ 的值. 其中 $\hat{P}_{lz} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$，$\psi_{nlm_l}$ 是单电子原子的本征函数.

[解] 我们有 $\hat{p}_{lz}\psi_{nlm_l} = -i\hbar\frac{\partial\psi_{nlm_l}}{\partial\varphi}$

因为 $\psi_{nlm_l} = R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi)$，可得到

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_{nlm_l}}{\partial\varphi} = R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\left[-i\hbar\frac{d\Phi_{m_l}(\varphi)}{d\varphi}\right]$$

已知 $\Phi_{m_l}(\varphi) = e^{im_l\varphi}$，则

$$\frac{d\Phi_{m_l}}{d\varphi} = im_l e^{im_l\varphi} = im_l\Phi_{m_l}(\varphi)$$

因此

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_{nlm_l}}{\partial\varphi} = R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\left[-i\hbar\, i\, m_l\Phi_{m_l}(\varphi)\right]$$

$$= m_l\hbar\, R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\varphi)\Phi_{m_l}(\varphi)$$

即

$$\hat{P}_{lz}\psi_{nlm_l} = m_l\hbar\,\psi_{nlm_l}$$

3-3. 考虑单电子原子系统中的一个 d 电子. 计算(a)l, s 和 j 的值,(b)p_l, p_s 和 p_j 的值. (c)$\boldsymbol{p}_l$ 与 $\boldsymbol{p}_s$ 之间的夹角.

[解] (a)对于 d 电子,$l=2, s=\frac{1}{2}$. 因而 $j=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 或 $j=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. 就是说,有两个可能的状态分别相应于 $j=\frac{5}{2}$ 和 $j=\frac{3}{2}$. 这两个状态用$^2D_{5/2}$和$^2D_{3/2}$表示,或简单用$^2D_{5/6.3/2}$表示.

(b)根据 $p_l=\sqrt{l(l+1)}\hbar$, $p_s=\sqrt{s(s+1)}\hbar$, $p_j=\sqrt{j(j+1)}\hbar$. 有

$$l=2,\quad p_l=\sqrt{2(2+1)}\hbar=\sqrt{6}\hbar$$

$$s=\frac{1}{2},\quad p_s=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar=\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$j=\frac{5}{2},\quad p_j=\sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)}\hbar=\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$$

$$j=\frac{3}{2},\quad p_j=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}\hbar=\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

(c)根据(3-7)式,当 $l=2, s=\frac{1}{2}, j=\frac{5}{2}$(即$^2D_{5/2}$态)

$$\cos\theta=\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right)-2(2+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2\sqrt{2(2+1)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}}=0.47$$

则 $\theta=42°$. 当 $l=2, s=\frac{1}{2}, j=\frac{3}{2}$(即$^2D_{3/2}$态)

$$\cos\theta=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-2(2+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2\sqrt{2(2+1)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

则 $\theta=135°$.

3-4. 考虑上例题中的 $D_{5/2}$. 计算(a)m_j 和 p_{jz}的值,(b)p_j 在空间的可能取向,(c)如 $s=0$,p_j 的可能取向是什么?

[解] (a)对 $D_{5/2}$态 $l=2, s=\frac{1}{2}, j=\frac{5}{2}$. 因此,$m_j=\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}$,$p_{jz}=m_j\hbar=\frac{5}{2}\hbar,\frac{3}{2}\hbar,\frac{1}{2}\hbar,-\frac{1}{2}\hbar,-\frac{3}{2}\hbar,-\frac{5}{2}\hbar$即对于 $j=\frac{5}{2}$,m_j 有六个可能的值.

(b)因为 $p_{jz}=p_j\cos\varphi$,则

$$\cos\varphi=\frac{p_{jz}}{p_j}=\frac{m_j\hbar}{\sqrt{j(j+1)}\hbar}=\frac{m_j}{j(j+1)}$$

将 $\sqrt{j(j+1)}=\frac{\sqrt{35}}{2}$及各个 m_j 的值代入,依次得到 $\varphi=32°, 59.5°, 79.8°, 100.2°, 120.5°, 148°$.

(c)如果 $s=0$,则 $j=l=2$. 这时 p_j和 p_{jz}没有意义. 只能讨论 p_l 的可能取向:$\cos\theta=\frac{p_{lz}}{p_l}=\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}$.

3-5. 当一束自由电子通过 0.8 特斯拉的均匀磁场时,同此磁场"顺向"和"反向"的两种电子的能量差是多少?

[解] 一个电子在磁场中的势能是

$$E_B=-\mu_s\cdot B=-\mu_{sx}B_x-\mu_{sy}B_y-\mu_{sz}B_z$$

选取适当的坐标使 $B_x=B_y=0$,上式为

$$E_B=-B\mu_{sz}=-B\left(-\frac{e\hbar}{m}\right)_{\text{电}}$$

由此得　　$\Delta E_B = B\frac{e\hbar}{m}\Delta m_s =$（0.8 特斯拉）

$$\times (2 \times 5.79 \times 10^{-5}\ \frac{\text{电子伏}}{\text{特斯拉}})\left\{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})\right\}$$

$$= 9.26 \times 10^{-5}\ \text{电子伏}$$

3-6. 假设加热到 1500 开得到一束银原子束，使之垂直通过梯度为 20 千高斯/厘米（10^4 高斯＝1 韦伯/米^2）的不均匀磁场，磁极长 10 厘米，照象底片放在 50 厘米远处，计算两束银原子分开的距离.

［解］　由(3-9)式，原子受的力

$$|F_z| = m_j g_j \mu_B \frac{dB}{dz}$$

质量为 M 的银原子在 z 方向的加速度是

$$a = \frac{|F_z|}{M} = \frac{1}{M} m_j g_j \mu_B \frac{dB}{dz}$$

则知银原子在 z 方向上的偏移 $\Delta z = \frac{1}{2}at^2$. 式中 t 是银原子通过不均匀磁场的时间，若磁极长为 L，则 $t = L/v$. 这里 v 是银原子在磁场中的速度. 按照气体运动论，处在温度为 T 的原子，其动能为 $\frac{3}{2}kT$，其中 k 是玻耳兹曼常数. 于是可从

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

中求得 v. 因为基态的银原子和轨道量子数 $l=0$，所以有 $j=s$，$g_j = g_s = 2$，最后可得

$$\Delta z = \frac{1}{2}\frac{m_j g_j \mu_B L^2}{3kT}\frac{dB}{dz}$$

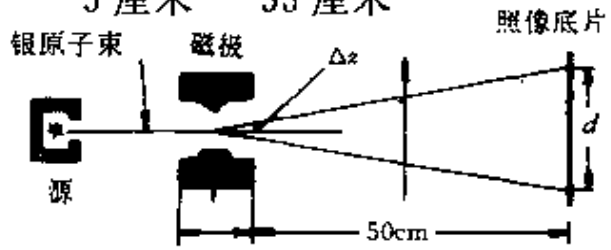
$$= \frac{1}{2}\frac{2(\pm\frac{1}{2})(0.93 \times 10^{-23}\ \text{焦耳/特斯拉})(10\ \text{厘米})^2}{3(1.38 \times 10^{-23}\ \text{焦耳/开})(1500\ \text{开})}$$

$$\times (2\ \text{特斯拉/厘米})$$

≈ 0.015 厘米

Δz 是原子刚离开磁极时向上或向下偏转的大小. 出了磁极之后，原子不再受力作用，从而直线运动. 由图知

$$\frac{\Delta z}{5\text{ 厘米}} = \frac{\frac{1}{2}d}{55\text{ 厘米}}$$



例题 3-6 用图

最后得到

$$d = 2\Delta z \cdot \frac{55}{5} = 2 \times 0.015 \times 11 = 0.33\text{ 厘米}$$

习　题　集

§3-1　氢原子的薛定谔理论

3-1. 已知氢原子的径向波函数是 $R(r)=c_n e^{-r/a_0}$，应用归一化条件确定常数 c_n 的值. 式中 a_0 是氢原子的第一玻尔轨道半径.

3-2. 证明 $R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$ 是氢原子薛定谔径向方程的解，而 $R(r) = e^{ar}$ 则不是.

3-3. 验证波函数 $R_{21}(r)Y_{10}(\theta)$ 是归一化的.

3-4. 证明 $\Theta_{20}(\theta) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3\cos^2\theta - 1)$ 是方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$$

的解，并且是归一化的.

3-5. 试证明处在 1s，2p 和 3d 态的氢原子电子，在距原子核的距离分别为 a_0，$4a_0$ 和 $9a_0$ 的球壳内被发现的几率最大.

3-6. 由氢原子中电子分布几率随 r 的改变图看出，对 2s 电子，$p\mathrm{d}r$ 有两个最大值. 试确定最大值处的 r 值.

3-7. 氢原子基态的归一化波函数（$n=1, l=0, m_l=0$）由下式给出

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2}{a_0^{3/2}}\mathrm{e}^{-r/a_0}$$

证明在氢原子基态中，电子到核的平均距离是

$$\langle r\rangle=\int\psi^* r\psi\mathrm{d}\tau=\frac{3}{2}a_0$$

其中 $\mathrm{d}\tau=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$；$a_0$ 是玻尔第一轨道半径.

3-8. 应用上题给出的氢原子基态归一化波函数，计算 $\frac{1}{r}$ 的平均值. 即证明

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\int\psi^*\frac{1}{r}\psi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a_0}$$

到此，对已得到的两个结果 $\langle r\rangle=\frac{3}{2}a_0$ 与 $\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle=\frac{1}{a_0}$，你可得到什么结论？

3-9. 若在以核为圆心的半径 r_0 的球外电子的径向波函数为 $R(r)$，则发现电子的几率为 $\int_{r_0}^{\infty}|R(r)|^2r^2\mathrm{d}\tau$. 波函数 $R_{10}(r)$ 相应于氢原子基态，a_0 为那个状态的玻尔轨道半径. (a)计算在大于 a_0 处找到氢原子基态电子的几率. (b)当基态氢原子中的电子距核 $2a_0$ 处，它的全部能量是势能. 按照经典物理，电子不能超过距离 $2a_0$. 试给出基态原子中的电子在 $r>2a_0$ 的几率.

3-10. 根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 Q 的原子核（可看成是点电荷），外面是带负电的电子云. 在正常状态（核外电子处在 s 态）下电子云的电荷密度分布 $P_e(r)=\frac{Q}{\pi a_0^3}e^{-2r/a_0}$ 是球对称的，式中 a_0 是玻尔半径. 求原子内的电场分布 $E(r)$.

3-11. 由量子力学获得的类氢原子半径的平均值或期望值是

$$\langle r\rangle=\frac{n^2a_0}{z}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-\frac{l(l+1)}{n^2}\right]\right\}$$

计算 $n=1,2,3$ 和不同 l 下的 $\langle r\rangle$ 值，并与相应的玻尔轨道半径比较之.

3-12. 对于处在 $2p$ 态的氢原子，试计算势能的平均值 $\langle U\rangle$.

3-13. 当氢原子波函数 ψ 仅是 r 的函数时，方程 $\langle E\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar^2}{2m}\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dx+\int_{-\infty}^{\infty}U\psi^*\psi dx$ 中的 $\langle T\rangle$ 变成 $\langle T\rangle=\frac{\hbar^2}{2m}\int_{\infty}^{\infty}4\pi r^2\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dr$. 计算在 1s 态的氢原子动能 T 的平均值 $\langle T\rangle$.

3-14. 已知氢原子中电子的势能为 $U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 和总能量 $E_n=-\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$. 现考虑氢原子中具有 $l=n-1$ 的状态中的电子，对于这样的状态，r 的平均值是 $\langle r\rangle=n^2a_0\left(1+\frac{1}{2n}\right)$，在大的 n 下近似等于 n^2a_0. (a)试从 E_n 减去 $U(r)$ 给出电子的动能 T. (b)从 T 计算动量 mv，并由 mv 计算德布罗意波长 λ. (c)如果电子在半径为 n^2a_0 的圆上运动，在这个圆周上有多少个波？

3-15. 在氢原子的理论中，若不考虑电子质量随速度的变化，试应用上题的方法计算在 $n=4,l=3$ 的状态中电子的速度？在这种速度下，电子的实际质量与静止质量之比是多少？

3-16. 在氢原子处子基态中，计算当电子距核 $3a_0$ 处，电子的动能 T. 据此说明电子要进入经典禁止区域. 在什么 r 值下，动能

$T=0$.

3-17. 氢原子、氘原子和一次电离的氦离子都是一个电子的原子. 氘核与氢核的电荷相等，而质量几乎是氢核的两倍. 氦核的电荷是氢核电荷的两倍，而质量差不多是氢原子质量的四倍. 试精确的预言这些原子的基态能量比〔提示：考虑约化质量的改变〕.

3-18. (a)计算氢原子 $n=2, l=1$ 的状态的最大径向几率密度的位置；(b)计算这个状态中径向坐标的期望值；(c)解释在上述计算中，出现差别的原因.

3-19. 在基态中，氢原子的大小认为是 $z=1$ 的 $n=1$ 壳层的半径、$a_0=4\pi\varepsilon_0\hbar^2/\mu e^2\cong 0.5$ 埃. 证明这个基本的原子大小可直接从不确定原理的考虑得到.

3-20. 计算相应于能量 E_2 的一组退化态的几率密度函数的平均值.

3-21. (a)计算氢原子基态中势能的期望值$\langle U\rangle$. (b)证明在基态中，$E=\langle U\rangle/2$，其中 E 是总能量. (c)应用关系 $E=T+U$ 来计算基态中动能的期望值$\langle T\rangle$，并证明$\langle T\rangle=-\langle U\rangle/2$. 这种关系在势能具有 $U(r)\propto-\frac{1}{r}$ 形式的任何量子力学系统，任何状态都可成立.

3-22. 已知 $\psi=e^{ikx}$ 是总能量算符 $\hat{E}$ 在零势能的一维问题中的本征函数. (a)证明它也是线动量算符 $\hat{p}$ 的本征函数，并确定有关的动量本征值. (b)$\psi=\cos kx$ 和 $\psi=\sin kx$ 是零势能的 $\hat{E}$ 的本征函数，试问它们是否是线动量算符 $\hat{p}$ 的本征函数?

3-23. 证明 $\hat{p}_l^2\psi_{nlm_l}=l(l+1)\hbar^2\psi_{nlm_l}$〔提示：用 $\Theta_{lm_l}(\theta)$所满足的微分方程〕.

3-24. 证明单电子原子本征函数 ψ_{300}, ψ_{310}, ψ_{320}, 和 ψ_{322}的奇偶性取决于$(-1)^l$.

§3-2 氢原子的角动量和磁矩

3-25. 量子数 n,l,m_l 的取值范围是

$$n=1,2,3,\cdots$$

$$l=0,1,2,n,-1$$

$$m_l=-l,-l+1,\cdots,0,\cdots,+l-1,l$$

试证明它们与如下条件是等价的：

$$|m_l|=0,1,2,3,\cdots$$

$$l=|m_l|,|m_l|+1,|m_l|+2,|m_l|+3,\cdots$$

$$n=l+1,l+2,l+3,\cdots$$

3-26. 试计算自旋矢量 p_s 相对于磁场方向的两个可能的取向.

3-27. 单个电子的原子中，其量子态用 n,l,m,s 四个量子数描述；有时也用 n,l,j,m_j 来描述. 试证明这两种描述的量子态数是相等的.

3-28. 证明在任何原子中的电子有确定的角动量，但任何时刻它的角位置往往不能确定，试解释之.

3-29. f 电子和 g 电子的轨道角动量的值是多少？按(a)量子力学模型，(b)按玻尔—索末菲模型，两种情况进行讨论.

3-30. 对于氢原子中的 d 电子，j 的可能值是什么？并分别按(a)量子力学模型，(b)玻尔—索末菲模型计算总角动量的可能性，并作出上述计算的图形.

3-31. 按量子力学模型，对于氢原子中的 f 电子，计算 p_l 与 p_s 矢量的可能夹角.

3-32. 按量子力学模型，对于氢原子中的 g 电子，计算 p_l 与 p_s 矢量的可能夹角.

3-33. 已知 $l=3$，求 j 和 m_j 值.

3-34. 已知 j=$\frac{9}{2}$,$\frac{7}{2}$,求 l 值.

3-35. 当 $l=3$ 时,试计算 p_l 与 z 轴可能有的夹角.

3-36. 由于 $p_j=p_l+p_s$,所以有

$$\sqrt{j(j+1)} \geqslant |\sqrt{l(l+1)}-\sqrt{s(s+1)}|$$

如 $s=\frac{1}{2}$,证明 $j=l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},l-\frac{3}{2},l-\frac{5}{2},\cdots$等一系列值中只有下列数值满足上述条件:

$$j=l+\frac{1}{2},\quad l-\frac{1}{2}(l\neq 0)$$

$$j=\frac{1}{2}\qquad\qquad (l=0)$$

3-37. 试作图计算 $l=1$,$l=2$ 和 $l=3$ 时角动量 p_l 与它的 z 分量 p_z 之间的夹角.

3-38. 对于 p,d 和 f 态电子,p_{lz}的最大值与 p_l 之间的百分差是多少?

3-39. 计算$^2D_{3/2}$,$^2D_{5/2}$,$^2F_{5/2}$,$^2F_{7/2}$等原子状态的总角动量和轨道角动量矢量之间的夹角.

3-40. 计算由于电子的高速运动,作用在电子的自旋磁矩上的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小.

3-41. 试确定绕着一个质子在半径 r 的圆形轨道上运动的一个电子的磁矩.

3-42. 利用量子力学的结果,试计算对于 $n=3$ 能级可能有的磁矩,并与玻尔理论的结果比较.

3-43. 计算在氢原子的第一玻尔轨道半径中电子的位置上,由于自身的运动(可考虑为核绕电子运动)产生的磁感应强度.

3-44. 如果一个氢原子放置在一个强度大于其内部场强的磁场中,它的轨道和自旋磁矩就独立的绕外场运动,它的能量由量子数 m_l 和 m_s 决定. (a)计算能级分裂,(b)作 $n=2$ 的能级分裂图,标

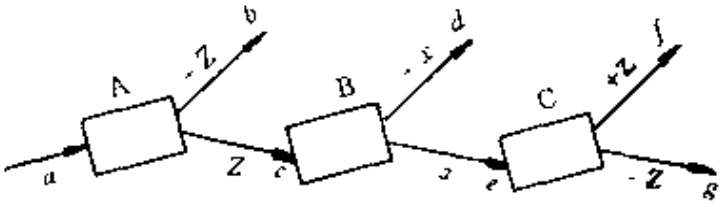
明每个分能级的量子数，(c)在外磁场作用下，$n=2$ 的能级分裂的最大宽度等于磁场不存在时 $n=1$ 和 $n=2$ 能级的能量差时，外磁场的大小是多少？

§3-3 史特恩—盖拉赫实验

3-45. 有一氢原子处在 $l=1, j=\frac{3}{2}$ 的状态中. 试求(a)在做史特恩—盖拉赫实验时，将分裂为几条线状痕迹？(b)它的总角动量在磁场方向的最大分量？(c)它的总磁矩在磁场方向的最大分量.

3-46. 利用银原子(原子量为 108)做史特恩—盖拉赫实验的一组数据如下：磁场梯度 $\frac{\partial B}{\partial z}=10^3$ 特斯拉/米；磁极 x 向长度 $x_1=0.04$ 米；磁极到屏的距离 $x_2=0.10$ 米；原子进入磁极间的速度 $v_x=5\times10^2$ 米/秒；屏上淀积的两条黑斑间的距离 $d=0.002$ 米. 求银原子磁矩在磁场方向的投影 μ_z 的大小(设磁场边沿的影响可以忽略).

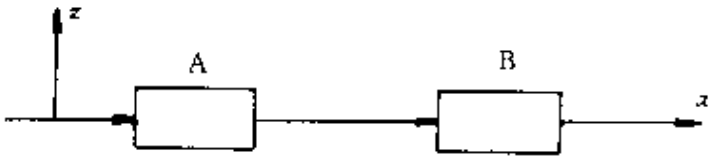
3-47. 一电子束通过史特恩—盖拉赫实验仪器后将按其自旋的两个取向分裂成两束，每束中的电子自旋都按照同一取向排列(称为极化). 现有 A, B, C 三个这样的分析仪，其中 A, C 使电子自旋沿 $+z$ 和 $-z$ 方向极化(即 $s_z=+\frac{1}{2}\hbar$ 或 $-\frac{1}{2}\hbar$)，B 使电子自旋沿



习题 3-47 用图

$+x$ 和 $-x$ 方向极化，电子束通过三个分析仪的方式如图所示. 设入射束 a 中的电子数为 N，试求出 c, e, g 各束中的电子数.

3-48. A, B 为两个史特恩—盖拉赫实验装置，它们都只允许自旋 $s_z=+\frac{1}{2}\hbar$ 的粒子通过，现有一束未极化（见上题）的电子沿 x 轴方向进入装置 A，有什么方法能完全阻止电子从 B 中穿出.



习题 3-48 用图

如设 A, B 间距为 L，电子速度为 v，给出你准备采用的方法的有关参数.

3-49. 已知史特恩—盖拉赫实验中，磁场梯度 $\frac{\partial B}{\partial z}=1.5\times10^{2}$ 特斯拉/米，如氢原子处于基态，在磁场中运动速度 $v=10^{4}$ 米/秒，在磁场中运动的距离 $d=10$ 厘米，求刚从磁场时的裂距.

3-50. 如上题中改为 $\frac{\partial B}{\partial z}=10^{5}$ 高斯/厘米，$d=4$ 厘米，磁铁出口到屏的距离为 10 厘米. 已知银原子束在屏上的裂距 $\Delta l=2.0$ 毫米，原子速度 $v=5\times10^{4}$ 厘米/秒. (a)求束中银原子的角动量，(b)银原子磁矩在磁场方向上投影 μ_z 的大小.

3-51. 在一个史特恩—盖拉赫实验中，银原子通过梯度为 60 特斯拉/米的一个非均匀的磁场，运动距离为 0.1 米. 如果在接收板上测得的分裂间距为 0.15 毫米，银原子的速度是多少？已知银原子的质量是 1.79×10^{-25} 千克.

3-52. 已知铁(^{5}D)的原子束在横向不均匀磁场中分裂为 9 束. 问铁原子的 J 值多少？其有效磁矩多大？如果已知上述铁原子的速度 $v=10^{3}$ 米/秒，铁原子量为 55.85，磁极范围 $L_1=0.03$ 米，磁铁到屏的距离 $L_2=0.10$ 米，磁场中横向的磁感应强度不均匀梯度 $\frac{dB}{dz}=10^{3}$ 特斯拉. 试求屏上偏离最远的两束之间的距离 d.

3-53. 用从加热的灯丝放出的细束自由电子做史特恩—盖拉赫实验. 电子加速到速度为 10^9 厘米/秒时进入梯度为 500 高斯/厘米的不均匀磁场. (a)自由电子的朗德因子是多少? (b)确定磁场作用在这些电子上的力. (c)当电子从磁场出来后,相反自旋的电子之间分开 2 厘米时,电子径迹的长度是多少?

3-54. 考虑用从 5 万伏的氢原子放电管放出的窄质子束进行史特恩—盖拉赫实验. 如果磁场梯度仍是 500 高斯/厘米. (a)质子受到的作用力是多少? (b)相反方位的质子分开 2 厘米时,径迹有多长? (c)需要多大的磁场梯度才能使相反自旋的质子在 2000 厘米的径迹时分开 0.4 厘米?

3-55. 恒温炉的温度为 1233 开,从中放出的具有典型动能的银原子束进入长为 50 厘米的不均匀磁场后分成两束,这两束在磁铁尾部相距 1 毫米,试确定磁场梯度. 由于是单一的 $l=0$ 电子,银的磁偶极矩与氢原子的相同.

§3-4 精细结构

3-56. 如果忽略自旋—轨道耦合能和相对论修正,求氢原子 E_n 能级的简并度(即认为 n 相同的状态都具有相同的能量).

3-57. 计算氢原子 $n=2, l=1$ 的状态的自旋—轨道相互作用能的大小. 并验证它与观察到的相应能级的精细结构的大小有相同的数量级($n=1$ 的状态没有自旋—轨道相互作用能).

3-58. 求氢原子 2p 能级的精细结构裂距 ΔE,并求比值 $\Delta E/E_{2p}$(式中 E_{2p} 是 2p 态的能量).

3-59. 若氢原子中电子的 $l=1, s=\frac{1}{2}$. 试计算 $\boldsymbol{p}_l \cdot \boldsymbol{p}_s$ 的可能值.

3-60. 试计算导致两条钠 D 线(5889.95 埃,5895.92 埃)的由

电子轨道运动所产生的磁场强度.

3-61. 试解释类氢原子光谱的精细结构. 并证明类氢离子的 nl 电子组态的两个相邻精细结构光谱项间的间隔大小为 $R\alpha^2Z^4/n^3l(l+1)$. 其中 Z 为类氢离子的原子序数，R 为里德堡常数，α 为精细结构常数.

3-62. 应用精细结构公式计算如下三个状态所相应的能量：$n=2, l=1, j=\frac{3}{2}$；$n=2, l=1, j=\frac{1}{2}$；$n=2, l=0, j=\frac{1}{2}$；所有这五个态都是退化的吗？

3-63. 在钠中，两能级 $3^2P_{3/2}$ 和 $3^2P_{1/2}$ 相距 5.97 埃. 试计算表示式 $\Delta E_{ls}=a\boldsymbol{p}_l\cdot\boldsymbol{p}_s$ 中的常数 a 的值.

3-64. 对于 $l=4, 10$ 和 15，计算自旋—轨道相互作用的大小. 证明对于大的 l 值，在 $j=l+\frac{1}{2}$ 和 $l-\frac{1}{2}$ 两种情况下，自旋角动量矢量与轨道角动量矢量差不多相互垂直.

3-65. 为什么谱项 S 项的精细结构总是单层结构？试直接从碱金属光谱双线的规律性和从电子自旋与轨道相互作用的物理概念两方面分别说明之.

3-66. 试计算氢原子赖曼线系第一条的精细结构分裂的波长差.

第四章　多电子原子

内　容　提　要

(一)全同粒子的波函数不相容原理

1. 全同粒子的波函数

两个全同粒子系统的对称波函数为

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \qquad (4\text{-}1)$$

两个全同粒子系统的反对称性波函数为

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)] \qquad (4\text{-}2)$$

式中：$\psi_\alpha(1)$ 表示第一个粒子的波函数，α 代表四个量子数.

2. 不相容原理

在原子中，不可能有两个或两个以上的电子存在于同一量子态中. 换言之，含有几个电子的体系必须用反对称的总本征函数来

描写.这是泡里于 1925 年提出的,故称泡里不相容原理.

3. 电子组态

前已知,对于一个给定的 n 值 (相应一个壳层),轨道量子数 l 的取值是 $l = 0,1,2,3,4,\cdots,n-1$ (相应一个支壳层),分别可用小写字母 s,p,d,f,g…来表示.所谓电子组态,是指电子在各支壳层上的排列情况.例如,钠原子的电子组态是 $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$,表示在 1s,2s,2p 各支壳层填满了电子,分别是 2 个,2 个和 6 个.但在 3s 支壳层上只有一个电子.

4. 洪特定则

Ⅰ.在同一电子组态形成的各能级中,重数最高的,亦即 S 最大的能级位置最低.

Ⅱ.当重数相同时,具有最大 L 值的能级最低.

(二)X 射线

X 射线的标志谱可分 K 系、L 系、M 系.K 系谱是 L,M,N,…各壳层的电子向 K 层跃迁所产生的.L 系谱是 M,N,…各壳层的电子向 L 层跃迁所产生的.

标志 X 射线谱的波数公式为

$$\tilde{\nu} = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_f^2}-\frac{1}{n_i^2}\right) \tag{4-3}$$

式中:σ 为屏蔽常数.对于 K 系,$\sigma=1$;对于 L 系 $\sigma=7.4$ 等.(4-3)式又称莫塞莱定律.

当强度 I_0 的 X 射线束穿过 x 厚的物质层后,其强度 I 由下式决定

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{4-4}$$

式中：μ 为靶物质的吸收系数. 实验表明，吸收系数随光子能量的增大而减小，但在某些能量值时，吸收系数突然上升，相应于 X 射线强度有一个显著的下降，称为吸收限.

（三）一个光学电子的原子结构

由于满壳层电子对原子核的屏蔽作用，具有一个光学电子的原子（碱金属原子）的能级能量为

$$E_n = -Z_{有效}^2 \frac{Rch}{n^2} \tag{4-5}$$

其光谱项为

$$T = -\frac{E_n}{ch} = \frac{RZ_{有效}^2}{n^2} = \frac{R}{\left(\frac{n}{Z_{有效}}\right)^2} = \frac{R}{n^{*2}} = \frac{R}{(n-\Delta)^2} \tag{4-6}$$

式中：$Z_{有效}$是有效核电荷数，通常大于 1；n^* 为有效量子数，通常小于主量于数 n；Δ 为量子数修正值.

碱金属原子光谱可分为四个线系. 例如钠原子的主线系是 $n^2P_{3/2,1/2}$ 向 $3^2S_{1/2}$ 态跃迁产生的，为双线结构；第二辅线系是 $n^2S_{5/2,3/2}$ 向 $3^2P_{3/2,1/2}$ 跃迁产生的，也是双线结构；第一辅线系是 $n^2D_{5/2,3/2}$ 向 $3^2P_{3/2,1/2}$ 跃迁产生的，是三重线结构；柏格曼系是 $n^2F_{7/2,5/2}$ 向 $3^2D_{5/2,3/2}$ 跃迁产生的，也是三重线结构. 产生三重线的跃迁遵守选择定则 $\Delta l = \pm 1$ 和 $\Delta j = 0, \pm 1$ ($0 \nrightarrow 0$被禁止).

（四）两个光学电子的原子结构

1. *LS* 耦合法

两个电子的自旋量子数分别为 s_1 和 s_2，则其自旋角动量分别

为 $p_{s_1}=\sqrt{s_1(s_1+1)}\hbar$，$p_{s_2}=\sqrt{s_2(s_2+1)}\hbar$. 总自旋角动量为 p_{s_1} 和 p_{s_2} 的矢量和，即 $p_S=p_{s1}+p_{s2}$. 亦有 $P_S=\sqrt{S(S+1)}\hbar$，其中总自旋量子数 $S=s_1+s_2$ 或 s_1-s_2.

两个电子的轨道角动量亦有此规律，即 $p_L=\sqrt{L(L+1)}\hbar$，其中总轨道角动量量子数为

$$L=l_1+l_2,\ l_1+l_2-1\cdots|l_1-l_2| \tag{4-7}$$

若 $l_1>l_2$，有$(2l_2+1)$个可能的 L 值；若 $l_1<l_2$，有$(2l_1+1)$个可能值.

总角动量 $p_J=p_S+p_L$. 其大小为 $p_J=\sqrt{J(J+1)}\hbar$. 其中总角动量量子数为

$$J=L+S,\ L+S-1,\ L+S-2\cdots|L-S| \tag{4-8}$$

若 $L>S$，则有$(2S+1)$个可能的 J 值；若 $L<S$，则有$(2L+1)$个可能值.

2. *jj* 耦合法

每个电子的总角动量分别为 $p_{j_1}=\sqrt{j_1(j_1+1)}\hbar$，$p_{j_2}=\sqrt{j_2(j_2+1)}\hbar$，其中，$j_1=l_1+\frac{1}{2}$ 或 $l_1-\frac{1}{2}$；$j_2=l_2+\frac{1}{2}$ 或 $l_2-\frac{1}{2}$. *jj* 耦合下的总角动量 $p_J=p_{J1}+p_{J2}$，其大小为 $p_J=\sqrt{J(J+1)}\hbar$. 其中 J 所满足的关系为

$$J=j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-2\cdots|j_1-j_2| \tag{4-9}$$

若 $j_1>j_2$，则有 $(2j_2+1)$ 个可能的 J 值；若 $j_1<j_2$，则可能有 $(2j_1+1)$ 个可能的 J 值.

LS 耦合与 *jj* 耦合所得到的量子态不同，但状态数是相同的. 绝大数原子，特别是轻原子都是 *LS* 耦合的，只有一些重原子和轻原子的高激发态遵守 *jj* 耦合法则.

(五)塞曼效应

1. 正常塞效应

自旋角动量等于零的原子置于均匀磁场中时，将产生附加的能量

$$\Delta E = M_L \mu_B B \tag{4-10}$$

其中轨道磁量子数 $M_L = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm L$，共$(2L+1)$个. 因此，原来的一个能级将分裂成$(2L+1)$个能级. 当垂直磁场方向观察时，原先的一条光谱线将分成三条，其波数分别为 $\tilde{\nu}_0 + \frac{eB}{4\pi mc}$，$\tilde{\nu}_0$ 和 $\tilde{\nu}_0 - \frac{eB}{4\pi mc}$. 其中 $\tilde{\nu}_0$ 为原光谱的波数，称为 π 成分，其他两条称为 σ 成分. 当平行于磁场方向观察时，只能观察到两条 σ 成分. 这种现象称为正常塞曼效应.

2. 反常塞曼效应

当自旋角动量不等于零的原子置于外磁场中时，光谱线分裂将多于三条，称为反常塞曼效应. 这时原子的能级能量的附加值为

$$\Delta E = g M_J \mu_B B \tag{4-11}$$

在 LS 耦合下，g 因子为

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \tag{4-12}$$

能级将分裂成$(2J+1)$条. 能级分裂前的波数为 $\tilde{\nu}_0$，能级分裂后产生光谱的波数为

$$\tilde{\nu}_0 = \tilde{\nu}_0 + [(M_J g)_f - (M_J g)_i] \frac{eB}{4\pi mc} \tag{4-13}$$

式中：i, f 分别代表跃迁前后的能级.

(六)原子的磁性

1. 抗磁性

抗磁性是磁场对电子轨道运动所起作用的结果. 原子在磁场中,其所有电子构成一个整体绕磁场旋进,形成一个电的环流. 其旋进角动量都在磁场的方向. 由于电子带负电,就相当有一个相反方向的正电环流,于是产生与磁场相反方向的磁矩.

朗之万推导的抗磁性磁化率公式为

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{\mu_0 Ze^2 N}{6m}\bar{r}^2 \qquad (4\text{-}14)$$

式中: M 是单位体积中的磁矩; H 为外磁场强度; N 为单位体积中的原子数; μ_0 为真空磁导率; r 是电子到原子核的距离.

2. 顺磁性

顺磁性是具有磁距 ($J \neq 0$) 的大量原子的总磁距的平均值是正的,即平均磁距向着外磁场的方向的情况. 顺磁性的磁化率为

$$\chi = \frac{\bar{\mu}}{H} = \frac{\mu_0 J(J+1)g^2\mu_B^2}{3KT} \qquad (4\text{-}15)$$

典 型 题 解

4-1. 利用简单的玻尔图象计算 K_α 和 L_α 系各跃迁的莫塞莱关系式中的 A 值.

[解] 当原子中的电子从原来的能级 E_f 跃迁到能量较低的

能级 E_i 时，按玻尔理论，原子辐射光子的波长为

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c}=R_\infty Z^{*2}\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^2}\right)$$

或

$$\nu^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^2}\right)cR_\infty\right]^{1/2}Z^*$$

对于 K_α 和 L_α 的跃迁，分别有 $n_f=2$，$n_i=1$ 和 $n_f=3$，$n_i=2$，于是

$$\nu_{K_\alpha}^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)cR_\infty\right]^{1/2}Z^*=\left(\frac{3}{4}cR_\infty\right)^{1/2}Z^*$$

$$=(4.97\times10^7\ \text{赫兹}^{1/2})Z^*$$

$$\nu_{L_\alpha}^{1/2}=\left[\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)cR^{\ -1/2}Z^*=\left(\frac{5}{56}cR_\infty\right)^{1/2}Z^*\right.$$

$$=(2.14\times10^{\ }\ \text{赫兹}^{1/2})Z^*$$

因此知 $A_{K_\alpha}=4.97\times10^7$ 赫兹$^{1/2}$，$A_{L_\alpha}=2.14\times10^7$ 赫兹$^{1/2}$. 如果在 K_α 跃迁中，原于中的内部电子不受外层电子的影响，那么，跃迁之前的 L 电子将受到有效核电荷 $(Z-1)e$ 的作用. 对于 K_α 跃迁有 $Z^*=Z-1$，则

$$\nu_{K_\alpha}^{1/2}=(4.97\times10^7\ \text{赫兹}^{1/2})(Z-1)$$

对于 L_α 跃迁，屏蔽效应较为复杂，莫塞莱公式 $\nu^{1/2}=A(Z-\sigma)$ 中的常数 σ 不再等于屏蔽电子的数目9，而是7.4.

4-2. 对于一个以 $^{56}_{26}$Fe 为阳极发射 K_α 线的 X 射线管，计算所需的最小加速电压. 并计算 K_α 光子的波长.

[解] 在 K 壳层上产生一个空穴时，原子的激发能的公式为 $E_K=\mu Z_n^2e^4/(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2n^2$. 对于 $^{56}_{26}$Fe 原子激发能为

$$E_K=\frac{\mu Z_n^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2n^2}$$

$$\simeq 13.6\frac{Z_n^2}{n^2}\text{ 电子伏}\simeq 13.6\,(Z-\alpha)^2\text{ 电子伏}$$

$$= 13.6 \times (24)^2 \text{ 电子伏} = 7.8 \times 10^3 \text{ 电子伏}$$

在这里，$n = 1$，$Z_n = Z_1 = Z - 2 = 24$. 要想在 K 壳层产生一个空穴，必须用 7.8×10^3 电子伏的能量的电子束去轰击${}^{56}_{26}$Fe阳极才行，而电子得到这种能量所需的加速电压是

$$V \simeq 7.8 \times 10^3 \text{ 伏}$$

原子发射 K_α 光子后，在 L 层留下一个空穴，与此相当的激发能为

$$E_L = 13.6 \frac{Z_n^2}{n^2} \text{ 电子伏}$$

$$\simeq 13.6 \frac{(26 - 10)^2}{4} \text{ 电子伏} \simeq 8.7 \times 10^2 \text{ 电子伏}$$

光子带走的能量为 $h\nu = E_K - E_L$. 由于 E_L 的值仅有 E_K 的10%左右. 这里只作近似计算，令 $h\nu \simeq E_K$，光子的波数为 $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$，则

$$\frac{h\nu}{hc} \simeq \frac{E_K}{hc} \simeq \frac{\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4\pi c\hbar^3}(Z - 2)^2 = R(Z - 2)^2$$

$$\simeq 1.1 \times 10^7 \times (24)^2 \text{ 米}^{-1} = 6.3 \times 10^9 \text{ 米}^{-1}$$

最后得光子的波长为

$$\lambda \simeq 1.6 \times 10^{-10} \text{ 米} = 1.6 \text{ 埃}$$

这个波长大约是典型分子的大小，或晶体中原子或分子占的空间. 因此，从${}^{56}_{26}$Fe 放出的 K_αX 射线可用来做衍射实验以研究分子或晶体的结构.

4-3. 用0.50埃的 X 射线去轰击某一物质，观察到从 K 壳层中发射出来的光电子在强度为2×10^{-2}特斯拉的磁场中在一个半径为23毫米的圆周上运动. K 壳层电子的结合能是多少?

[解] 从 $F = ma$ 可以求得光电子的动能

$$evB = m\frac{v^2}{R} \quad \text{即} \quad v = \frac{e}{m}BR$$

则光子的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2R^2}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1.6\times10^{-19}\text{库仑})^2(2\times10^{-2}\text{特斯拉})^2(23\times10^{-3}\text{米})^2}{(9.11\times10^{-31}\text{千克})}$$

$$= 2.97\times10^{-15}\text{焦耳} = 18.6\text{千电子伏}$$

而入射光子的能量为

$$E_\nu = \frac{h\nu}{\lambda} = \frac{12.4\text{千电子伏}\cdot\text{埃}}{0.50\text{埃}} = 24.8\text{千电子伏}$$

则结合能为

$$\Delta E = E_\nu - T$$

$$= 24.8\text{千电子伏} - 18.6\text{千电子伏} = 6.2\text{千电子伏}$$

4-4．(a)已知锂原子的量子数修正值 $\Delta_s = 0.41$，并设其两个1s电子完全互相屏蔽．试计算电离锂原子全部三个电子所需要的总能量．(b)若实际测得电离这三个电子所需要的总能量为203.44电子伏，试计算锂中作用在1s电子的有效电荷数．

[解] (a)欲电离2s上的光学电子所需的能量为

$$E_1 = \frac{hcR}{(2-0.41)^2}$$

已知基态氢原子的电离能 $hcR = 13.6$ 电子伏，则从上式算出 $E_1 = \frac{13.6}{2.53}$ 电子伏．

锂的核电荷数 $Z = 3$，若两个1s电子互相完全屏蔽，对某一个1s电子来说，有效电荷数 $Z_{有效} = 2$．那末，电离这个1s电子所需的能量为

$$E_2 = 2^2hcR\frac{1}{1^2} = 4\times13.6\text{电子伏}$$

电离最后一个1s电子所需的能量为

$$E_3 = 3^2hcR = 9\times13.6\text{电子伏}$$

因此，三个电子全电离掉所需的总电离能为

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = (9+4+\frac{1}{2.53})\cdot13.6 = 182.24\text{电子伏}$$

(b)现实际测量的总电离能 $E' = 203.44$ 电子伏，大于上述计算值. 这是因为在计算 E_2 时假定两个1s 电子是完全屏蔽的. 而实际上只能部分屏蔽，设有效电荷数为 Z^*；则

$$E' = E_1 + E_3 + Z^{*2}hcR$$

$$E' - E = (Z^{*2} - 2^2)hcR$$

$$Z^{*2} = \frac{E' - E}{hcR} = 5.59$$

$$Z^* = 2.36$$

4-5. Na 原子的基态为3s. 已知其共振线波长为5893埃，漫线系第一条的波长为8193埃，基线第一条的波长为18459埃，主线系的系限波长为2413埃. 试求3S，3P，3D，4F 各谱项的项值.

[解] 将上述波长依次表示为 $\lambda_{pm} = 5893$ 埃，$\lambda_{dm} = 8193$ 埃，$\lambda_{fm} = 18459$ 埃 和 $\lambda_{p\infty} = 2413$ 埃. 则各谱项的项分别为

$$T_{3S} = \tilde{\nu}_\infty = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} = \frac{1}{2413 \times 10^{-10}} = 4.144 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{3P} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} - \frac{1}{\lambda_{pm}} = 4.144 \times 10^6 - \frac{1}{5893 \times 10^{-10}}$$

$$= 2.447 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{3D} = T_{3P} - \frac{1}{\lambda_{dm}} = 2.447 \times 10^6 - \frac{1}{8193 \times 10^{-10}}$$

$$= 1.227 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

$$T_{4F} = T_{3D} - \frac{1}{\lambda_{fm}} = 1.227 \times 10^6 - \frac{1}{18459 \times 10^{-10}}$$

$$= 0.685 \times 10^6 \text{ 米}^{-1}$$

4-6. K 原子共振线波长为7665埃，主线系系限波长为2858埃. 已知 K 原子基态为4s. 试求4S，4P 谱项的量子数修正项 Δ_S，Δ_P 值各为多少？

[解] 已知 $\lambda_{pm} = 7665$ 埃，$\lambda_{p\infty} = 2858$ 埃，$T_{4S} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}}$

根据

$$T_{4S} = R_K/(4 - \Delta_s)^2 \approx R_\infty/(4 - \Delta_s)^2$$

则有

$$\Delta_S \approx 4 - \sqrt{R_\infty / T_{4S}} = 4 - \sqrt{R_\infty \cdot \lambda_{p\infty}}$$

$$= 4 - \sqrt{109731\ 米^{-1} \times 2858 \times 10^{-10}\ 米} = 2.23$$

又据

$$T_{4P} = \frac{1}{\lambda_{p\infty}} - \frac{1}{\lambda_{pm}}$$

得

$$\Delta_p \approx 4 - \sqrt{R_\infty / T_{4P}} = 4 - \sqrt{\frac{R_\infty \lambda_{p\infty} \lambda_{pm}}{\lambda_{pm} - \lambda_{p\infty}}} = 4 -$$

$$\sqrt{\frac{1097371\ 米^{-1} \times 2858 \times 10^{-10}\ 米 \times 7665 \times 10^{-10}\ 米}{7665 \times 10^{-10}\ 米 - 2858 \times 10^{-10}\ 米}}$$

$$= 1.76$$

4-7. Na 原子光谱中得知其3D 项的项值 $T_{3D} = 1.2274 \times 10^6$ 米$^{-1}$，试计算该谱项之精细结构裂距.

[解] 已知 $T_{3D} = 1.2274 \times 10^6$ 米$^{-1}$ 和 $R_{Na} = 1.0974 \times 10^7$ 米$^{-1}$

则有

$$n^* = \sqrt{\frac{R_{Na}}{T_{3D}}} = \sqrt{\frac{1.0974 \times 10^7}{1.2274 \times 10^6}} = 2.99$$

而 $Z^* = n/n^*$，则可得

$$\Delta T = \frac{R\alpha^2 Z^{*4}}{n^3 l(l+1)} = \frac{R\alpha^2 n}{n^{*4} l(l+1)}$$

$$= \frac{1.0974 \times 10^7 \times (1/137.04)^2 \times 3}{2.99^4 \times 2(2+1)}$$

$$= 3.655\ 米^{-1}$$

4-8. 试计算氢原子赖曼线系第一条的精细结构分裂的波长差.

[解] 由于相对论修正和自旋——轨道耦合作用，氢原子的赖曼线系第一条谱线由2P→1S 的跃迁分成两种情况：

$$\tilde{\nu}_1 = 1S_{1/2} - 2P_{1/2}$$
$$\tilde{\nu}_2 = 1S_{1/2} - 2P_{3/2}$$

由精细结构公式

$$T = \frac{R}{n^2} + \frac{R\alpha^3}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)$$

得

$$\tilde{\nu}_1 = \left[\frac{R}{1^2} + \frac{R\alpha^2}{1^3}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{4}\right)\right] - \left[\frac{R}{2^2} + \frac{R\alpha^2}{2^3}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{8}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{4}R - \frac{11}{64}\alpha^2 R$$
$$\tilde{\nu}_2 = \left[\frac{R}{1^2} + \frac{R\alpha^2}{1^3}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{4}\right)\right] - \left[\frac{R}{2^2} + \frac{R\alpha^2}{2^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{4}R - \frac{15}{64}\alpha^2 R$$

则

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{\tilde{\nu}_1} - \frac{1}{\tilde{\nu}_2} = \frac{\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1}{\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2} \approx \frac{\alpha^2}{9R}$$
$$= \left(\frac{1}{137}\right)^2 \frac{1}{9 \times 109737} = 5.39 \times 10^{-3} \text{ 埃}$$

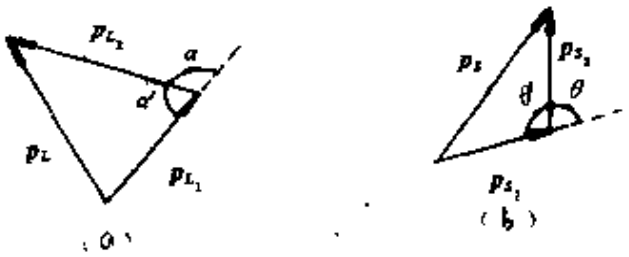
4-9. 已知 He 原子两个电子被分别激发到2p 和3d 轨道，其所构成的原子态为^{3}D，问这两个电子的轨道角动量 p_{l_1} 与 p_{l_2} 之间的夹角，自旋角动量 p_{s_1} 与 p_{s_2} 之间的夹角分别是多少？

[解] (1)由^{3}D 态的电子组态3p3d，知 $L=2, S=1$ 和 $l_1=1$，$l_2=2$，则

$$p_{l_1} = \sqrt{l_1(l_1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar,\ p_{l_2} = \sqrt{l_2(l_2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$$
$$p_l = \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$$

由图(a)，应用余弦定律

$$p_L^2 = p_{l_1}^2 + p_{l_2}^2 - 2p_{l_1}p_{l_2}\cos\alpha'$$



例题 4-9用图

$$\cos\alpha' = \frac{p_{l_1}^2 + p_{l_2}^2 - p_L^2}{2p_{l_1}p_{l_2}} = \frac{1+6-6}{2\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0.28868$$

$$\therefore \quad \alpha' = 73°13'$$

故 $\alpha = \pi - \alpha' \approx 180° - 73°13' = 106°47'$

(2)因为 $s_1 = s_2 = 1/2$

$$\therefore \quad p_{s_1} = p_{s_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$$

所对应的三重态 $S = 1$，则 $p_S = \sqrt{(1+(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$

由图(b)，应用余弦定理，有

$$\cos\theta' = \frac{p_{s_1}^2 + p_{s_2}^2 - p_s^2}{2p_{s_1}p_{s_2}} = -0.3333$$

$$\therefore \theta = 180° - \theta' = 70°32'$$

4-10. 试按 LS 耦合法则确定 Ne ($Z = 72$)，Si ($Z = 14$) 和 P ($Z = 15$) 等原子的基态，写出状态符号.

[解] Ne ($Z = 10$) 原子的电子组态为$1s^2 2s^2 2p^6$，刚好填满第二壳层，具有十分稳定的结构. 具有 $L = S = J = 0$ 的性质，其原子基态的状态符号为$^1S_0$.

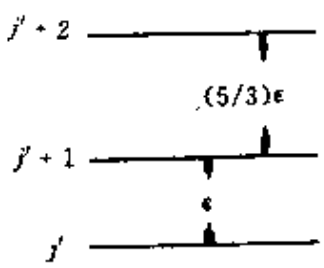
Si ($Z = 14$) 原子的电子组态为$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$，光学电子组态为$3p^2$量子数是 $l_1 = l_2 = 1$；$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$；则 $L = 0,1,2$；$S = 0$，

1. 因 LS 耦合遵守洪特定则，应取 $S=1$. 当 $S=1$ 时这两个同科电子的自旋平行 $m_{s_1}=m_{s_2}=\frac{1}{2}$，即已有 (n,l,m_s) 三个量子数相等. 那末只有 m_{l_1} 不等 m_{l_2} 时才服合泡里原理，即 $L\neq 2$，应取 $L=1$. 按正常次序，J 值最小的状态的能量最低，故 $J=0$. 总之，Si 的原子基态的量子数为 $S=1, L=1, J=0$，其原子基态的状态符号为 $^3P_0$.

P ($Z=15$) 原子的电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$，光学电子组态为 $3p^3$. 同理，按洪特定则，$S=\frac{3}{2}$；根据泡里原理，任意两个光学电子的轨道角动量都不能平行，故 $L=0$；则 $J=3/2$. 因此，P 原子的基态符号为 $^4S_{3/2}$.

4-11. 对某个中等 Z 值的原子的线状谱的测量表明，在一个特定的多重态中，随能量增加的顺序，两相邻能级间的间隔的比是3比5. 试应用朗德间隔定律确定这些能级的量子数 s', l', j'. 这个例子对实验光谱学家分析他的实验结果给出了一些深入的了解.

[解] 由实验给出的结果如图所示. 如果较低的能级的间距是 ϵ，则较高的两能级的间距为 $\frac{5}{3}\epsilon$. 虽然最初不知道 j' 的值，但知道每个能级的 j' 值是不同的. 令最低的能级为 j'，较高的能级依次为 $j'+1$ 和 $j'+2$.



例题 4-11用图

朗德定则指出，相邻能级间的间隔正比于高能级的 j' 值. 这样，较低的两能级间隔为

$$\epsilon = 2K(j'+1)$$

较高的两能级之间隔为

$$(5/3)\epsilon = 2K(j'+2)$$

二式相比，并消去未知的 K 得

$$5j' + 5 = 3j' + 6 \quad 和 \quad j' = 1/2$$

由此，按能级增加的顺序，j' 的值分别为 1/2，3/2，5/2.

再确定多重态的 s' 和 l' 的值. 已知公式

$$j' = s' + l', s' + l' - 1, \cdots, |s' - l'|$$

因为 j' 的最小值是1/2，最大值是5/2，有

$$|s' - l'| = 1/2; s' + l' = 5/2$$

为了去掉绝对值，可按两种情况考虑. 第一种情况，$s' \geqslant l'$，这时上两方程为

$$s' - l' = 1/2 \qquad s' + l' = 5/2$$

由此得

$$s' = 3/2 \quad 和 \quad l' = 1$$

第二种情况，$s' \leqslant l'$. 两方程为

$$-(s' - l') = 1/2 \qquad s' + l' = 5/2$$

二式相加得 $l' = 3/2$. 但由于总轨道角动量量子数不能有半整数，所以上述结果是不成立的. 因之，只有 $s' \geqslant l'$ 的第一种情况存在，即只有 $s' = 3/2$ 和 $l' = 1$.

4-12. 原于未填充满的支壳层的电子组态如下：(a)np^2；(b)np^3. 试求原子谱项的可能类型.

[解] 根据泡里原理，不可能有两个以上的电子具有相同的四个量子数 (nlm_lm_s). 对 np 电子，n 和 l 两个量子数是相同的，所以只要看 m_l 和 m_s 两个量子数. 因为 $l = 1$，则 $m_l = 1, 0, -1$；m_s 只有 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 两种情况. 据此，可排列出量子数的可能分布表. 排表时不必写出 M_L 和 M_S 之和为负值的那些电子分布，因为不能给出任何新的状态，这一点可以证明. 表中箭头 ↑ 表示 $m_s = +\frac{1}{2}$，箭头 ↓ 表示 $m_s = -\frac{1}{2}$.

表1 (a)np^2

m_l	m_s					
+1	↑	↑	↑	↑	↑ ↓	
0	↑		↓			↑ ↓
−1		↑		↓		
M_S	1	1	0	0	0	0
M_L	1	0	1	0	2	0

由表看出，具有 $M_L = 2$ 和 $M_S = 0$ 的状态的存在指明有一个谱项^{1}D；因而还应该有两个 $M_S = 0$ 的状态：$M_L = 1$ 和 $M_L = 0$．此外，具有 $M_L = 1$ 和 $M_S = 1$ 的状态的存在，说明存在光谱项^{3}P；因而还应该有一个 $M_L = 0$ 和 $M_S = 1$ 的状态．再有，尚存在 $M_L = M_S = 0$ 的状态，其光谱项为^{1}S．总之，在 np^2组态中，应存在如下三种类型的光谱项：^{1}S，^{1}D，和^{3}P．

表2给出了 np^3组态的量子数的可能分布．同样，排表时不考虑 $(M_L + M_S)$ 的负值．由表看出，存在 $M_L = 2$ 和 $M_S = 1/2$ 的状

表2 (b)np^3

m_l	m_s						
+1	↑	↑	↑	↓	↑ ↓	↑ ↓	↑
0	↑	↑	↓	↑	↑		↑ ↓
−1	↑	↓	↑	↑		↑	
M_S	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
M_L	0	0	0	0	2	1	1

态，说明有一个光谱项^{2}D；尚有 $M_L = 1$ 和 $M_S = 1/2$，$M_L = 0$ 和 $M_S = 1/2$ 的两个状态存在．具有 $M_L = 1$ 和 $M_S = 1/2$ 的态存在，表明有光谱项^{2}P；尚有 $M_L = 0$ 和 $M_S = 1/2$ 的态存在．具有 $M_L = 0$ 和 $M_S = 3/2$ 的态存在，表明有光谱项^{4}S；尚有 $M_L = 1$ 和 $M_S = 1/2$ 的态．总之 np^3电子组态有谱项^{2}D，^{2}P 和^{4}S．

4-13. 利用 *jj* 耦合确定光学电子组态为 s^1p^1的原子态，并与 *LS* 耦合结果相比较．

[解] 对于s^1p^1电子组态，$l_1=0$，$l_2=1$；$s_1=s_2=1/2$与每个电子先耦合成总角动量，则其量子数分别是

$$j_1=s_1=1/2;\ j_2=l_2\pm s_2=3/2\text{ 和 }1/2$$

然后 j_1 和 j_2 耦合成 J

$$j_1=\frac{1}{2}\text{ 和 }j_2=\frac{1}{2}\text{ 耦合成 }J=1,0$$

$$j_1=\frac{1}{2}\text{ 和 }j_2=\frac{3}{2}\text{ 耦合成 }J=2,1$$

jj 耦合形成的原子态没有特别的符号，通常将上述四个原子态标为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})_0$，$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})_2$，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})_1$. 括号内是 j_1 和 j_2 的值，括号外的下标是 J 值.

根据 LS 耦合，总自旋量子数 $S=1,0$，总轨道量子数 $L=1$. 对于 $S=1,L=1$，有 $J=2,1,0$. 则原子状态为$^3P_2$，$^3P_1$，$^3P_0$三个态. 对 $S=0,L=1$，则 $J=1$，有一个原子态$^1P_1$. 总共四个原子态. 这与 jj 耦合得到的原子态个数是相同的，而且 J 值在两种耦合下也是相同的. 对于同一个电子组态，应用两种不同的耦合，虽然能级个数相同，但能级间的间隔却相差很大，这反映 $F(s_1s_2)$，$F_2(l_1l_2)$，$F_3(l_1s_1)$，$F_4(l_2s_2)$，$F_5(l_1s_2)$ 和 $F_6(l_2s_1)$ 等几个相互作用的强弱对比的不同.

4-14. He 原子从 $1s3d^1D_2\to 1s2p^1P_1$ 跃迁的光谱线波长为6678.10埃. 今将 He 原子放在 $B=2.5$ 特斯拉的磁场中，从垂直磁场方向观察，分裂成几条光谱？最长的波长是多少？现用光栅常数为0.002毫米的透射光栅来观察，为了分辨这些谱线，该光栅狭缝的总数至少是多少（$\mu_B=9.27\times10^{-24}$焦耳/特斯拉）？

[解] 在外磁场中，谱线的波长发生改变

$$\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}=[M_2g_2-M_1g_1]\frac{B\mu_B}{hc}$$

对于态$^1P_1$：$L_1=1$；$M_1=1,0,-1$；$J_1=1$；$S_1=0$. 故

$$g_1 = 1 + \frac{J_1(J_1+1) - L_1(L_1+1) + S_2(S_2+1)}{2J_1(J_1+1)} = 1$$

对于态$^1D_2$：$L_1 = 2$；$M_2 = 2, 1, 0, -1, -2$；$J_1 = 1$；$S_1 = 0$.

故

$$g_2 = 1 + \frac{J_2(J_1+1) - L_2(L_2+1) + S_2(S_2+1)}{2J_2(J_2+1)} = 1$$

根据选择定则 $\Delta M = M_2 - M_1 = 1, 0, -1$，则

$$M_2 g_2 - M_1 g_1 = 1, 0, -1$$

因此，$$\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{B\mu_B}{hc}, 0, -\frac{B\mu_B}{hc}$$

$$\Delta\lambda = \frac{B\mu_B}{hc}\lambda^2,\ 0,\ -\frac{B\mu_B}{hc}\lambda^2$$

在所分裂的三条谱线中，最长的波长为

$$\lambda'_{max} = \lambda + \frac{B\mu_B}{hc}\lambda^2$$

$$= 6678.10 + \frac{2.5 \times 9.27 \times 10^{-24}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \times 10^{-10}(6678.10)^2$$

$$= 6678.62 \text{ 埃}$$

设光栅的狭缝为 N，则光栅所能分辨的 n 级谱线最小波长差为 $\delta\lambda = \lambda/nN$. 可见，谱线的级次愈高，可分辨的波长差愈小. 据光栅方程 $d\sin\theta = n\lambda$，谱线的最大级次为

$$n_{max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{0.002}{6678.1 \times 10^{-7}} = 3$$

故该光栅所能分辨的最小波长差等于 $\delta\lambda_{min} = \lambda/3N$. 令 $\delta\lambda_{min} = \Delta\lambda = 0.52$ 埃，由此求得

$$N = \frac{\lambda}{3\Delta\lambda} = \frac{6678.1}{3 \times 0.52} = 4280$$

要想分辨上述光谱线，光栅至少需要4280条狭缝.

4-15. 已知 He 原子$^1P_1 \to {}^1S_0$跃迁的光谱线在磁场中分裂为三条光谱线，其间距 $\Delta\tilde{\nu} = 0.467$ 厘米$^{-1}$，试计算所用磁场的磁感应强度.

[解] 分裂后的谱线上原谱线的波数差为：

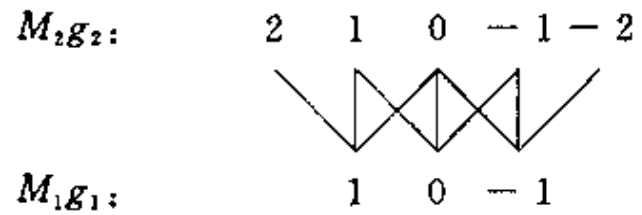
$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = [M_2 g_2 - M_1 g_1]\frac{Be}{4\pi mc}$$ 由于氦原子的两个价电子之间是 LS 耦合，所以，对$^1P_1$态：$S = 0$，$L = 1$，$J = 1$，$M_2 = 1, 0, -1$，$g_2 = 1$；对$^1S_0$态：$S = L = J = 0$，$M_1 = 0$，$g = 1$. 则

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{Be}{4\pi mc} = 0.467 \text{ 厘米}^{-1}$$

$$B = \frac{4\pi mc}{e} \cdot \Delta\tilde{\nu} = 1.00 \text{ 特斯拉}$$

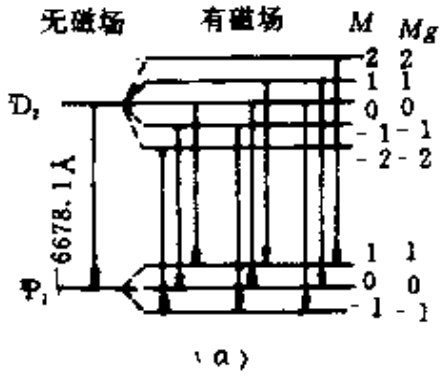
4-16. 氦原子光谱中波长为6678.1埃($1s3d\,^1D_2 \to 1s2p\,^1P_1$)及7065.1埃($1s3s\,^3S_1 \to 1s2p\,^3P_0$)的两条谱线，在磁场中发生塞曼效应时各分裂成几条?分别作出能级跃迁图. 问哪一个是正常塞曼效应?哪个不是?为什么?

[解] (1)对$^1D_2$态：$L = 2$，$S = 0$，$J = 2$，$M_2 = 0, \pm 1, \pm 2$，$g_2 = 1$. 对$^1P_1$态：$L = 1$，$S = 0$，$J = 1$，$M_1 = 0, \pm 1$，$g_1 = 1$. 则



$M_2g_2 - M_1g_1$	−1	−1	−1	0	0	0	1	1	1

由图(a)看出，在磁场中，从 $^1D_2 \to {}^1P_1$ 的跃迁虽有九种，但只有三种波长，中间一条在原位，两边的谱线与中间谱线的波数差均为 $L = \dfrac{Be}{4\pi mc}$，可见是正常塞曼效应.



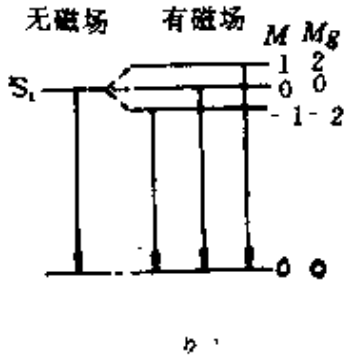
(a)

例题4-16用图

(2)对 $^1S_1$ 态：$L = 0$，$S = 1$，$J = 1$，$M_2 = 0, \pm 1$，$g_2 = 2$. 对 $^3P_0$ 态：$L = 1$，$S = 1$，$J = 0$，$M_1 = 0$，$g_1 = 0$. 则

M_2g_2：	2	0	-2
M_1g_1：		0	
$M_2g_2 - M_1g_1$：	-2	0	2

由图(b)看出，在磁场中，谱线虽也分裂成三条，但它们与中间谱线的波数差不是 L，而是 $2L$，所以说是反常塞曼效应.



(b)

例题4-16用图

4-17. 钙原子最常见的一条光谱线是波长为 $\lambda = 4226.73$ 埃的一条[从 P→S 跃迁产生的]. 当钙原子置子4韦伯/米^{2}的均匀磁场中时，其光谱显示正常塞曼图象. 试计算正常塞曼图象的三个分量的波长和它们之间的波长差.

[解] 已知正常塞曼效应三条谱线的波数分别是

$$\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_0 - \frac{Be}{4\pi mc}; \tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}_0; \tilde{\nu}_3 = \tilde{\nu}_0 + \frac{Be}{4\pi mc}$$

它们之间的波数差为

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_3 - \tilde{\nu}_2 = \frac{Be}{4\pi mc} = \frac{B\mu_B}{hc}$$

$$= \frac{0.927\times10^{-23}\text{安}\cdot\text{米}^2\times4\text{韦伯}/\text{米}^2}{6.63\times10^{-34}\text{焦耳}\cdot\text{秒}\times3\times10^8\text{米}/\text{秒}}$$

$$= 186.3\text{米}^{-1}(\because 1\text{韦伯}\times1\text{安培}=1\text{焦耳})$$

再由波数差计算波长差. 因为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda},\ d\tilde{\nu} = -\frac{1}{\lambda^2}d\lambda$$

则

$$|d\lambda| = \lambda^2 d\tilde{\nu} = (4226.73\times10^{-10}\text{米})^2\times186.3\text{米}^{-1}$$

$$= 3.329\times10^{-11}\text{米} = 0.333\text{米}$$

正常塞曼分裂后的三条谱线的波长分别是

$$\lambda_1 = 4226.73\text{埃} - 0.33\text{埃} = 4226.40\text{埃}$$

$$\lambda_2 = \lambda = 4226.73\text{埃}$$

$$\lambda_3 = 4226.73\text{埃} + 0.33\text{埃} = 4227.06\text{埃}$$

此外，由表示式看出 $\Delta\tilde{\nu} = \frac{Be}{4\pi mc}$ 看出，正常塞曼效应可用来测量电子的荷质比. 因为在实验中，磁场 B 是已知的，分裂后光谱的波数差 $\Delta\tilde{\nu}$ 可从光谱中测得，由 $\frac{e}{m} = \frac{4\pi c}{B}\Delta\tilde{\nu}$ 可算出荷质比.

4-18. 处于状态$^2S_{1/2}$和$^2P_{3/2}$中的原子在磁感强度 $B = 10^{-2}$ 特斯拉的磁场中，试求原子旋进的角速度.

[解] 已知拉莫尔旋进的角速度公式为

$$\omega = g\frac{e}{2m}\mu_0 H = g\frac{e}{2m}B$$

式中：电子电荷 e 和其质量 m 是已知的，朗德因子 g 可求.

对$^2S_{1/2}$态：$S = 1/2$，$L = 0$，$J = 1/2$；根据公式(4-12)求得 $g = 2$. 所以

$$\omega = g\frac{e}{2m}B = 2 \times \frac{1.60 \times 10^{-19}\text{库仑} \times 10^{-2}\text{特斯拉}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}\text{千克}}$$

$$= 1.77 \times 10^{2}\text{弧度/秒}$$

对$^2P_{3/2}$态：$S = 1/2$，$L = 1$，$J = 3/2$；由(4-12)求得朗德因子 $g = 4/3$.

$$\omega = g\frac{e}{2m}B = \frac{4}{3}\frac{1.60 \times 10^{-19}\text{库仑} \times 10^{-2}\text{特斯拉}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}\text{千克}}$$

$$= 1.18 \times 10^{9}\text{弧度/秒}$$

4-19. 已知磁场的磁感应强度增加 $\Delta B = 0.5$ 特斯拉时，某个单项的裂矩总宽度增加了 $\Delta\tilde{\nu} = 140\text{米}^{-1}$，试问该谱项的状态符号是什么？

[解] 在外磁场的作用下，原子磁矩旋进所引起的能级分裂通常用光谱项差 ΔT 来表示，有

$$\Delta T = -M_J g\bar{L}$$

式中：$\bar{L} = \frac{eB}{4\pi mc}$ 为罗仑兹单位.

能级在外场中的分裂是相对于原来能级的位置上下对称的，所以裂距的总宽度为

$$\Delta\tilde{\nu}' = 2|\Delta T| = 2M_J g\frac{eB}{4\pi mc}$$

当外场的感应强度增加 ΔB 时，裂距的总宽度又增加了 $\Delta\tilde{\nu} = 140\text{米}^{-1}$. 有

$$\Delta\tilde{\nu}' + \Delta\tilde{\nu} = 2M_J g\frac{e}{4\pi mc}(B + \Delta B)$$

$$\Delta\tilde{\nu}' = 2M_J g\frac{e\Delta B}{4\pi mc}$$

所以总角动量投影量子数(因为是单项，$g = 1$)为

$$M_J = \frac{4\pi mc}{2ge} \cdot \frac{\Delta\tilde{\nu}}{\Delta B}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 9.11 \times 10^{-31}\text{千克} \times 3 \times 18^{8}\text{米/秒}}{1 \times 1.60 \times 10^{-19}\text{库仑}}$$

$$\times \frac{140\text{ 米}^{-1}}{0.5\text{ 特斯拉}}$$

$$= 3$$

通常求总裂距，是求 J 的最大投影值相对的能级的距离. 现求得 $M_J = 3$，则 $J = 3$.

因为是单项，$S = 0$，这时 $L = J$. 则该光谱项为 $^1F_3$.

4-20. 处于正常状态 ^3F 的 Ni 原子放置在磁感应强度 $B = 5 \times 10^{-2}$ 特斯拉的磁场中时，原子的旋进角速度 $\omega = 5.5 \times 10^9$ 弧度/秒. 试确定在磁场中原子获得的最大附加能量.

[解] 由旋进角速度

$$\omega = \frac{geB}{2m} = 5.5 \times 10^9 \text{ 弧度 / 秒}$$

可求出朗德因子

$$g = \frac{2m\omega}{eB}$$

$$= \frac{2 \times 9.11 \times 10^{-31}\text{ 千克} \times 5.5 \times 10^9\text{ 弧度 / 秒}}{1.60 \times 10^{-19}\text{ 库仑} \times 5 \times 10^{-2}\text{ 特斯拉}}$$

$$\approx \frac{5}{4}$$

再从 Ni 原子的状态 ^3F，可求出最大分裂能级所对应的磁量子数 M_J：因为 $L = 3, S = 1$，则 $J = 4, 3, 2$. 可知最大的 M_J 是4. 则最大附加能量为

$$\Delta E = M_J g \mu_B B$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} \times 0.927 \times 10^{-23}\text{ 焦耳 / 特斯拉} \times 5 \times 10^{-2}\text{ 特斯拉}$$

$$= 23.18 \times 10^{-25}\text{ 焦耳} = 14.48 \times 10^{-5}\text{ 电子伏}$$

4-21. 钾原子在 $B = 0.3$ 韦伯 / 米^2 的磁场中，当交变电磁场的频率为 8.4×10^9 赫兹时，观察到顺磁共振，试计算朗德因子 g，并指出原子处在何种状态？

[解] (1)由公式 $h\nu = g\mu_B B$. 可求得 g 因子

$$g=\frac{h\nu}{\mu_B B}=\frac{6.63\times{}^{34}\text{焦耳}\cdot\text{秒}\times 8.4\,\text{秒}^{-1}}{9.27\times10^{-24}\dfrac{\text{焦耳}}{\text{特斯拉}}\times 0.3\,\text{特斯拉}}=2$$

(2)钾原子外层只有一个电子，所以 $s=\frac{1}{2}$.

据 $g=1+\dfrac{j(j+1)-l(l+1)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2j(j+1)}=2$，有

$$j(j+1)-l(l+1)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)=2j(j+1)$$

设 $j=l+\frac{1}{2}$，代入上式可得

$$l=0\text{ 和 }l=-\frac{3}{2}\text{(不合理)}$$

设 $j=l-\frac{1}{2}$，代入上式可得

$$l=\frac{1}{2}\text{(不合理) 和 }l=-1\text{(不合理)}$$

由 $l=0$ 和 $s=\frac{1}{2}$，可知 $j=\frac{1}{2}$. 故原子状态为 $^2S_{1/2}$.

习　题　集

§4-1 全同粒子波函数

4-1 两个全同粒子在边长为 a 的一维盒子中独立地运动，这个盒子可用一个无限深的方势阱去描述. 一个粒子处于基态，另一个粒子处在激发态. 为了简单，假定粒子没有自旋，这样系统的总本征函数正好是空间本征函数. (a)确定对称和反对称的本征函数 $\psi_+=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)+\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)]$ 和

$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)]$的具体形式；并证明，$\frac{1}{\sqrt{2}}$是这些方程的归一因子.(b)系统是对称的和反对称的两种情况下，给出两粒子之距离 D 的期望值.

4-2. 确定三个粒子系统(粒子间的相互作用可以忽略)的归一化称总波函数的形式. 归一化对称总波函数的形式是什么？

4-3. 如果三个粒子中有两个粒子具有相 同的空间和自旋量子态，试证明三个粒子的反对称本征函数恒等于零.

4-4. α 粒子中包含两个质子和两个中子. 证明，如果每对核子的波函数是反对称的，那么 α 粒子的波函数是对称的(提示：考虑一对 α 粒子).

§4-2 X 射线

4-5. 试述 X 射线的莫塞莱定律. X 射线的 K,L,M 线系是怎样形成的？并绘一简图说明之.

4-6. 试求铀 ($Z = 92$) 的 K_α 的波长、频率和能量.

4-7. 当加速电压达到80.7千伏时，在 X 光管的金靶上开始产生 K 系标识谱，求金的 K 吸收限.

4-8. 由实验测得下列元素的 K_α 谱线的数据为 Fe：1.94埃，Co：1.79埃，Ni：1.66埃，Cu：1.54埃. 试从这些数据求出各元素的原子序数.

4-9. 铝被高速电子束轰击而产生的连续 X 光谱的短波限为5埃. 问这时是否也能观察到其标识谱 K 系线？

4-10. 一个电视显象管工作在20千伏的加速电压下，这台仪器产生的 X 射线的最大能量是多少？相应的波长是多少？

4-11. 原子放出 X 射线前是静止的，为了保持动量不变，当它发射 X 射线时，原子经历反冲. 设原子的质量是 M，X 射线的能量是 $h\nu$，试计算原子的反冲能.

4-12. 需要多大的能量去激发镉原子以观察到 L 系的 X 射线. 要观察到镉原子的所有 X 射线需要多大的能量?

4-13. 对原子中的两个 K 电子我们采用如下模型：每个电子的总能量等于有一个"有效"核电荷 Ze^* 的玻尔能量加上库仑相互作用能(假定两个电子处于距离最大的位置，为两倍玻尔半径 r_B). 下表列出了一些元素的 K 壳层结合能数据，试求出这些元素的核屏蔽因子 $Z_0 = Z-Z^*$.

元素	Ni	Zr	Sb	Gd	Ta
Z	28	40	51	64	73
K 壳层结合能(千电子伏)	8.333	17.998	30.491	50.239	67.417

4-14. 铀($Z = 92$)的 K 吸收限为 0.107 埃，K_α 谱线为 0.126埃. 试求 L 吸收限的波长.

4-15. 某种物质在波长为0.257埃的 X 射线辐照下从 L 壳层发射光电子，测得这些光电子的截止电势为8.20伏. 试求 L 吸收限的波长.

4-16. 铜的 K 系吸收限是1.377埃，产生这些 K 系 X 射线的临界电压是9千伏. 求 h/e 的值.

4-17. 钇 ($Z = 39$) 的 K 吸收限是0.7277埃. 为了从钇中产生 K 系发射，至少需要加上17.039千伏的加速电压. 试从这些数据求出 h/e 值.

4-18. 已知钨的光电效应的阈波长为2760埃，而钨的 X 光 K 吸收限为0.1782埃，求金属钨表面的逸出功和钨原子 K 壳层的电子能量. 分析为什么两者相差那么大. 如果钨原子经多次电离后成

为一个类氢离子，试估计这个类氢离子基态的能量，由此能得到什么启示？

4-19. 在0.10埃的 X 射线辐射下的某种物质，它的 K 吸收限为0.15埃. 从 K 壳层发射出来的光电子的最大动能是少？

4-20. 考虑银($Z=47$)K_α线的发射. 计算银原子的反冲能与发射的 K_α 光子能量之比.

4-21. 用0.50埃的 X 射线去轰击某一物质，观察到从 K 壳层中发射出来的光电子在强度为2×10^{-2}特斯拉的磁场中在一个半径为23毫米的圆周上运动. K 壳层电子的结合能是多少？

4-22. 钼的 K_αX 射线光子入射到磁谱仪中钨薄箔上，在磁谱仪中的磁场强度为150高斯. 钨的 L_{I}，L_{II}，L_{III} 吸收限分别是1.025埃，0.075埃和1.216埃. (a)确定从这些能级放出电子的能量；(b)确定它们在磁场中的轨道半径；(c)计算这种磁谱线的间隔.

4-23. 应用铀的 K_{α_1} 的 X 射线来研究银原子的能级. 银箔放置在磁谱仪的内部并用铀的 K_{α_1}X 射线来轰击. 谱仪放在300高斯的磁场中. (a)确定从银的 K 和 L 能级放出的电子的动能；(b)确定在磁场中的电子的轨道半径. 应用能量和动量的相对论方程解这个问题. (c)计算从银 K 能级放出电子的速度.

4-24. 某种物质的 K 吸收限为0.827埃，由 K_αX 射线从 L 壳层逐出的俄歇电子的动能为10.2千电子伏. 求 K_αX 射线的能量和 L 吸收限的波长.

4-25. 在 Zn ($Z=30$) 中，K 和 L 壳层的电离(结合)能分别为9.659千电子伏和1.021千电子伏. 试求出 K_αX 射线引起的从 L 壳层发射出来的俄歇电子的动能.

4-26. 当钨原子的 L 层电子被原子核俘获时，M 层电子要填充 L 层空穴，从而发射俄歇电子. 如果钨的 L_{I} 吸收限是1.025埃，M_{I} 的吸收限是4.41埃，试计算电子的动能.

4-27. 从铜($K_\alpha=1.54$ 埃，$K_\beta=1.39$ 埃，$K_{\text{吸收}}=1.38$ 埃) 发

射出来的 X 射线穿过一片镍（$K_\alpha = 1.66$ 埃，$K_\beta = 1.50$ 埃，$K_{吸收} = 1.49$ 埃），试问出现的最强的波长是多少？

4-28. 什么元素的 K_α X 射线的波长是1.785埃？什么元素的 K_α X 射线的波长是0.712埃？

4-29. 考虑一个以$_{26}$Fe 作为阳极的 X 射线管，要使铁发射 K_α 射线，所需的最小加速电压是多少？并计算 K_α 光子的波长.

4-30. 某种元素在单色 X 射线的辐照下发射出光电子，测得这些光电子的截止电势为24，100，110和115千伏. 如果把这种元素作为 X 射线管中的靶，K_α 谱线的波长会是多少？

4-31. 在Os（$Z=76$）中，K和L吸收限具有的波长分别为0.168埃和1.17埃，试问 K_α 谱线的波长是多少？

4-32. 在 Ta（$Z = 73$）中，K_α 谱线是0.216埃，L 吸收限是1.25埃，试问 K 吸收限的波长是多少？

§4-3 一个光学电子的原子

4-33. 已知钠原子主线系中第一条谱线的波长为0.589微米，第二条为0.3302微米，该线系的极限波长为0.2413微米. 第一辅线系的第一条谱线为0.8919微米，第二条谱线为0.568微米. 第二辅线系的第一条谱线为1.14微米. 柏格曼系的第一条谱线为1.846微米. 求 $n=3,4$的各能级值. 画出能级图.

4-34. 已知 Li 原子光谱主线系最长波长 $\lambda=6707$埃. 辅线系的极限波长 $\lambda_\infty=3519$埃. 求 Li 原子第一激发电势和电离电势.

4-35. 钠原子的电离能是5.13电子伏；钠 D 线的波长是5890埃和5896埃. 由这些数据，计算产生钠 D 线的能级的能量，并给出两个能级的能量.

4-36. 对于在基态中的钠原子的光学电子，计算：(a)有效正电

荷；(b)屏蔽常数. 已知钠的电离能是5.13电子伏.

4-37. 写出 Li ($Z=3$) 的电子组态. 假定 Li 是类氢原子，计算 2s 价电子的电离能. 这个计算结果怎么样才能与实验结果5.39电子伏进行比较？屏蔽常数和有效正电荷各是多少？

4-38. Li 原子的基态项为2S. 若把 Li 原子激发到3P 态后，问当 Li 原子从3P 激发态向低能级跃迁时可能产生哪些谱线(不考虑精细结构)？

4-39. 考虑一个具有电子组态为$1s^2 2s^2 2p^1$的原子，问 L,S,J 的值是多少？并分别给出相应的 p_L, p_S, p_J 的值.

4-40. 考虑一个具有电子组态为$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^1$的原子. 试问 L,S,J 的值是多少？并分别给出相应的 p_L, p_S, p_J 的值.

4-41. 已知钠原子有下列光谱项(以厘米$^{-1}$为单位).

T_{nl} l / n	s	p	d	f
3	41444.9	24492.7	12274.4	
4	15706.5	11181.9	6879.5	6858.6
5	8245.8	6408.9	4411.6	4388.6

如将能级表示成

$$E_{nl} = -Rch\frac{1}{(n-\Delta_l)^2}$$

求各改正值 Δ_l.

4-42. Na原子的S，P，D项的量子修正值$\Delta_S=1.36$，$\Delta_P=0.86$，$\Delta_D=0.01$，把谱项表达式写成 $\frac{R(Z-\sigma)^2}{n^2}$ 形式，其中 Z 是核电荷数. 试计算3S，3P，3D 项的 σ 分别为何值？并说明 σ 的物理意义.

4-43. 如将 Na 原子能级表示成

$$E_{nl} = -Rch\frac{(Z-\sigma_{nl})^2}{n^2}$$

则 σ_{nl} 与 n，Δ_l 有关，写出这关系；并利用4-41题中的数据求出 σ_{nl} 的值.

4-44. 试证碱金属原子下列关系式成立：

$$\sqrt{\frac{T_{nl}}{R}}=\frac{Z-\sigma_{nl}}{n}$$

已知下列离子的电离电位分别为：Li：5.40伏，Be^{+}：17.0伏，B^{++}：35.6伏. 试利用这些数据作图验证这一关系，并求出屏蔽常数.

4-45. 碱金属比隋性气体多一个电子，试写出前四种碱金属的电子组态.

4-46. 把一个 Li 原子看成类氢原子，试确定其2s 电子的电离能，并定性解释它与实验值5.39电子伏的差别.

4-47. 锂原子的2P→2S 跃迁产生的光谱线的波长是 $\lambda=6708$ 埃. 试问2P 态的能量是多少？为什么锂的2P 态能量与氢原子2P 态能量比较接近，而二者的2S 态能量差较远？

4-48. 应用给出的钠黄线的波长，来计算钠原子的两个3P 态的能量差[应用公式 $\Delta E\approx(\mathrm{d}E/\mathrm{d}\lambda)\Delta\lambda$].

4-49. (a)已知 Li 原子量子数修正值 $\Delta=0.41$，并认为 Li^{+}中两个电子互相完全屏蔽. 估计电离 Li 原子的全部三个电子所需总能量. (b)若实际测得电离这三个电子所需总能量为203.44电子伏，试计算 Li^{-}中作用于1s 电子的有效电荷数.

4-50. 假定一个原子状态是由单独一个电子确定，那么在(a)S 态，(b)P 态，(c)D 态中，这个原子的总角动量可能是哪些数值？

4-51. 考虑能级的精细结构，求出 He 的 $n=3$，$n=4$ 态中包含的能级，画出能级图，并标以精细结构裂距，画出可能发生的跃迁.

4-52. 已知两条谱线的波数差为 $\Delta\tilde{\nu}$，由于 $\nu=c\tilde{\nu}$ 及 $\lambda=1/\tilde{\nu}$，是否它们的频率差和波长差分别为 $\Delta\nu=c\tilde{\nu}$，$\Delta\lambda=1/\Delta\tilde{\nu}$，说明理由.

4-53. 有一个原子具有一个封闭的原子实再加上一个 d 电子，

给出它的可能状态的光谱项.

4-54. 钾是 $Z = 19$ 的碱金属原子，问：(a)钾基态的电子组态是什么?(b)该态的量子数 L,S,J 各多少?光谱项怎么写?(c)其第一激发态光谱项怎么写?电子组态是什么?

§4-4 多个光学电子原子

4-55. 试求由量子数 n 标示的一个壳层所能容纳的最大电子数.

4-56. 试求能够占据一个 f 支壳层的最大电子数，并写出这些电子的 m_l 和 m_s 值.

4-57. 写出两个等效 nd 电子的各个可能状态.

4-58. He 原子的两个电子处在2p3d 电子组态，且电子间是 LS 耦合，问可能组成哪几种原子态?用原子态符号表示之.

4-59. 试论证在 $l = 1$ 支壳层上有一个电子和有五个电子时，原子具有相同的角动量状态.

4-60. 哪一种过渡族元素具有电子组态$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$?

4-61. 碱土金属比惰性气体多两个电子，试求出前四种碱土金属的电子组态.

4-62. 如果一个原子的状态是由两个等效的 np 电子确定的，那么可能有哪些态?

4-63. 应用矢量模型，试确定 $l_1 = 3$ 和 $l_2 = 2$ 的两个电子系统的总轨道角动量量子数的值.

4-64. 应用矢量模型，试确定(a) $L = 2, S = 3$; (b) $L = 3, S = 2$ 的原子系统的总角动量量子数.

4-65. 设某原子具有两个光学电子，它们的角动量状态分别为 $l_1 = 2, s_1 = \frac{1}{2}; l_2 = 2, s_2 = \frac{1}{2}$. 试用 LS 耦合求整个原子的全部角

动量状态.

4-66. (a)碳原子基态的 L,S 和 J 的值是多少?(b)与碳原子基态有相同组态($1s^2 2s^2 2p^2$)的其他可能的激发态(用光谱项符号表示)是什么?

4-67. 设 Mg 原子的两个价电子中,一个处于3p 态,一个处于3f 态,分别以 LS 耦合及 jj 耦合写出可能出现的光谱项,并证明两种模型的状态数相等.

4-68. 对于一个支壳层上有一个空穴的情况,在 LS 耦合下,不相容原理所允许的量子态和支壳层上有一个电子的情况所允许的量子态间有什么关系?

4-69. 对子轨道角动量量子数 $l_1 = 1$ 和 $l_2 = 3$ 的两个电子,试确定:(a) L 的值,(b) S 的值,(c) J 的可能值,(d)给出所有可能状态的状态符号.

4-70. 已知一个原子处于 D 态,另一个处子 P 态,且这两个原子的总角动量 J 都可取三种状态,求这两个原子的总自旋角动量量子数.

4-71. 考虑 d 支壳层完全被电子充满(即含不相容原理所允许的10个电子). 忽略电子间的相互作用,这样哈特里近似量子数 n,l,m_l,m_s 可用来描写每个电子. (a)证明对满足不相容原理的系统,只有一个可能的量子态. (b)证明在这个状态中,总自旋角动量、总轨道角动量和总角动量的 Z 分量全是零. (c)试给出论据说明,这种状态的总自旋角动量、总轨道角动量和总角动量也全是零. (d)电子之间的相互作用实际上是否改变?总自旋角动量和总轨道角动量又如何?

4-72. 锌原子 ($Z = 30$) 的最外层电子有两个,基态时的组态是4s4s. 当其中有一个被激发,考虑两种情况:(a)被激发到5s 态,(b)被激发到4p 态. 试求出在 LS 耦合下,这两种电子组态分别构成的原子状态. 从(a)和(b)情况形成的激发态向低以能级跃迁分

别各有几种光谱跃迁?

4-73. (a)写出钠原子基态的电子组态和原子态. (b)如果价电子被激发到4s 态,问向基态跃迁时可能发射出几条光谱线?试画出能级跃迁图(考虑精细结构),并说明之.

4-74. 应用泡里原理判断下列各项中哪些是不可能存在的:$^1S_0$,$^1P_2$,$^2D_2$,$^7F_0$,$^5F_0$,$^3D_{\frac{1}{2}}$,$^6P_{\frac{1}{2}}$.

4-75. 求镍原子的正常电子组态在 *LS* 耦合时的所有可能光谱项,并确定其中哪个是基项.

4-76. 对下列电子组态:(a)p^1和 p^5,(b)p^2和 p^4,证明这样两个电子组态有同一组可能的谱项类型,并给出光谱项.

4-77. 利用 *LS* 耦合法则,泡里原理和洪特定则,确定下列原子的基态:$_6C$,$_7N$,$_{11}Na$,$_{12}Mg$,$_{29}Cu$,$_{36}Kr$.

4-78. He 原子的激发态1s2s^{1}S 及1s2s^{3}S 的能量相差0.8电子伏,哪一个状态的能量小一些,说明理由. 为什么 He 原子基态是^{1}S 而不是^{3}S 态.

4-79. 给出$_{13}$Al 和$_{26}$Fe 的原子基态及其轨道角动量、自旋角动量、总角动量和有效磁矩.

4-80. 正电子的自旋也是1/2,但具有与电子相反的磁矩. 考虑一个由电子与正电子组成的系统,基态时这一系统的轨道角动量为零,因此可处于^{1}S 和^{3}S 态,试问哪一个是基态?

4-81. 铍原子共有四个电子,已知其中三个始终处于基态,(a)给出铍原子的三个最低能量的电子组态;(b)用 *LS* 耦合模型画出这三个最低能量电子组态的全部能级;(c)给出上述能级间全部可能发生的跃迁.

4-82. 根据选择定则确定在 *LS* 耦合的情况下,从状态^{2}D 到状态^{2}P 的各种可能的强跃迁.

4-83. 实验测得两条钠的 D 线为5895.92埃和5889.95埃,试粗略地计算原子内价电子所感受到的由于自身轨道运动引起的磁

感应强度(已知 $hc=12400$埃·电子伏).

4-84. 把$_3$Li 原子看成类氢原子. 试确定其2s 电子的电离能，并定性地解释它与实验值5.39电子伏的差别原因何在?

4-85. 在 LS 耦合中，原子磁矩的大小为 $\mu_J=\sqrt{J(J+1)}g_J\mu_B$，其中 $\mu_B=e\hbar/2m$ 是玻尔磁子，朗德 g 因子为 $g_J=1+\dfrac{J(J+1)-L(L+1)+S(S+1)}{2J(J+1)}$. (a)根据只有 μ_L 和 μ_S 平行于 p_J 的分量对时间平均时才对 μ_J 有贡献的事实，借助于余弦定律推导上述结果. (b)在弱磁场中，原子仍遵守 LS 耦合，对于一个给定的 J，有多少个亚态?不同亚态之间的能量差是多少?

4-86. 氯(Cl)的基态是$^2P_{3/2}$，计算其磁矩. 在弱磁场中，氯的基态将分成多少个亚态?

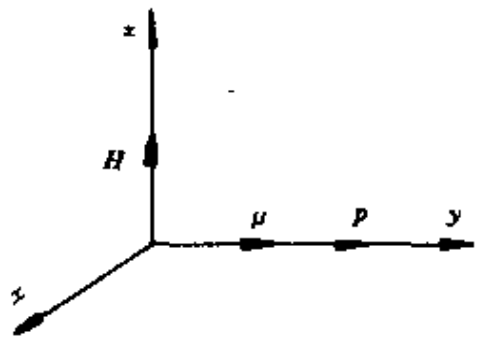
4-87. 求$^3P_2$及^2D 态的朗德因子及总磁矩.

4-88. (a)求各单重态的朗德因子，(b)求各 S 态的朗德因子.

4-89. 下列光谱项在有外磁场和无外磁场时的简并度各为多少:$^3P_1$，$^1D_2$，$^6F_{5/2}$.

4-90. He 原子基态的简并度是多少?如果电子的自旋不是1/2而是3/2(这时泡里原理仍然成立)，忽略电子间自旋角动量的耦合能，则 He 原子基态的简并度又是多少?说明理由.

4-91. 质子的自旋磁矩为 μ_i 动量矩为 p_i，方向位子 xy 平面内(如图). 试求出在 z 方向的均匀磁场 H 作用下，质子旋进的频率 f，并指明旋进方向.



习题4-91用图

4-92. 某原子自旋角动量为零，轨道角动量为 p_l，试证在外磁场 B 中，该原子的角动量绕 B 方向的进动角速度 ω 为

$$\omega = \frac{eB}{2m_e}$$

若另一原子轨道角动量为零，自旋角动量 p_s，再求该原子角动量的进动角速度.

4-93. 计算处在2.0韦伯/米^{2}的磁场中的原子的 s，p，d 电子的进动频率.

4-94. 一个原子的 $l = 2$，磁矩为2玻尔磁子. 若将该原子放在1.0韦伯/米^{2}的磁场中，计算(a)进动速度，(b)作用在原子上的转矩(力矩). 假定磁矩在45°角上.

4-95. 当光源放在30000高斯的磁场中时，电子轨道的进动角速度是多少?

4-96. 由于30000高斯磁场中 p 电子轨道的进动运动，p 电子能量的最大改变是多少?

4-97. 观察到的汞蒸气的两个共振势是4.86伏和6.67伏，汞的电离势是10.43伏. 计算(a)汞共振辐射的波长，(b)汞最低态的波数.

4-98. (a)应用钙的能级图中给出的波长，确定两个最低共振的值，(b)若用能量为2.8电子伏的电子来激发钙原子，钙原子放出什么谱线?

4-99. 量子力学给出自旋—轨道耦合能可以表成 $W = Kp_L \cdot p_S$，其中 K 对于多重结构中各态数值相同，即 L，S 相同而 J 不同时各态 K 都一样. 试证明能级的精细结构中各相邻能级的间隔 ΔE 正比于 $J+1$（称为朗德间隔定则），即

$$\Delta E = K(J+1)\hbar^2$$

式中：J 为下能级的量子数.

4-100. 如 Ca 原子的两个价电子处于4s4p 组态，由 LS 耦合模型，它的合成态可以是^{3}P 态(^{3}P 是三重态，J 可取2，1，0). 试求这三重态两个能级间隔之比. 实验测得$^3P_1$与$^3P_0$间隔为64.9×10^{-4}电

子伏；$^3P_2$与$^3P_1$的间隔为131.2×10^{-4}电子伏，将计算结果与实验结果比较.

4-101. 已知某三重态的两个间隔之比为3/5，求该三重态的量子数 L,S,J.

4-102. 从高温铯原子气体光谱中测出其共振光谱双线的波长分别为 $\lambda_1=5944$ 埃和 $\lambda_2=8521$ 埃，两者的强度比 $I_1:I_2=2:3$，相应的能级统计权重(简并度) $g_1=2,g_2=4$. 假若二能级的跃迁几率相同，试求此气体的温度.

4-103. 求 $T=300K$ 时，处于$3p$ 态与基态的 Na 原子数的比值，你估计这时能否观察到 D_1,D_2线发射.

4-104. 惰性气体原子结构的特征是电子填满 p 壳层. 例如氖原子的电子组态是$1s^22s^22p^6$. 这种闭合组态的总角动量 p_J，总轨道角动量 p_L 和总自旋角动量 p_S 全等于零. (a)解释符号$1s^22s^22p^6$的意义. (b)氖原子最低激发态相应于一个2p 电子激发到3s 轨道. $(2p^5)$"核心"的轨道和自旋角动量与 p 态上的一个运动电子的大小相等方向相反. 因此，对子它与激发电子的相互作用，"核心"能处理为 p 态电子. 假定是 LS 耦合，试计算这个状态组的量子数 (L,S,J). (c)当原子置于磁场 H 中时，它的能量改变(与 $H=0$时相比)为 $\Delta E=\frac{e\hbar}{2mc}gMH$. 其中 M 可能取 $J,J-1,J-2,\cdots-J$；g 为朗德因子. 试计算氖原子$1s^22s^22p^53s^1$组态的 $L=1,S=1,J=2$ 状态的 g 因子. (d)氖原子的$1s^22s^22p^53s^1$组态结构不常用 LS 耦合法则，而用"对耦合"图象. 外层电子的轨道角动量 p_{L_2}与"核心"的总角动量 p_{J_c}耦合成矢量 $K(K=p_{J_c}+p_{L_2})$，然后与外层电子的自旋 p_{S_2}耦合成原子的总角动量 p_J. 试计算$1s^22s^22p^53s^1$组态的原子态的 J_c,K,J 等量子数.

§4-5 塞曼效应

4-105. 考虑自旋共振实验. 自旋翻转是电子自旋从平行到反平行的跃迁，反之亦然. 这种跃迁可用射频讯号产生. 计算在1.0韦伯/米^{2}的磁场中，引起这种跃迁的讯号的频率.

4-106. 原子处在磁场 B 中，欲使其电子自旋方向反转，需要多少能量.

4-107. 一束电子进入强度为1.2特斯拉的均匀磁场，试计算自旋平行和反平行于磁场的电子的能量差.

4-108. 作图说明在弱磁场中由$^2D_{3/2}$到$^2P_{1/2}$态的跃迁产生的谱线是怎样分裂的，并按波长次序将它们排列起来.

4-109. 在1.5韦伯/米^{2}的磁场中，原子的4F 态的正常相邻分量之间的间隔是多少?假定合成自旋角动量为零.

4-110. 假定一正常塞曼图样的两分量之间的间距是4×10^{10}周/秒. 磁场 B 值多大时，这些线才能用可分辨间隔0.05埃的光谱计分辨开?

4-111. 试求在强度为2特斯拉的磁场中，Na 的状态$^2P_{1/2}$和$^2S_{1/2}$的塞曼能级分裂.

4-112. Li 漫线系的一条谱线($3^2D_{3/2}\rightarrow2^2P_{1/2}$)在弱磁场中将分裂成多少条光谱线?试作出相应的能级跃迁图.

4-113. 假若外磁场比较弱，氢原子的轨道角动量 p_l 和自旋角动量 p_s 的耦合作用强子它们分别与外磁场的相互作用. 试计算在0.05特斯拉的外磁场中氢原子的最低能量状态$^2S_{1/2}$，$^2P_{1/2}$，$^2P_{3/2}$，的反常塞曼分裂.

4-114. He 原子从$1s3d\,^1D_2\rightarrow1s2p\,^1P_1$跃迁的光谱线波长为

6678.10埃. 今将 He 原子放在 $B=2.5$特斯拉的磁场中，从垂直磁场方向观察，问谱线分成几条？最大的波长是多少？现用光栅常数为0.0020毫米的透射光栅来观察，为了分辨这些谱线，问该光栅狭缝的总数至少是多少？

4-115. 某种元素的样品置于强度为0.3特斯拉的磁场中，波长为4500埃的谱线的塞曼分量相隔多少？

4-116. 已知原子的电子组态为 p^3，谱项结构为 LS 耦合. 问当其处于一弱磁场 B 中时，各谱项的分裂数为若干？并计算出分裂的大小.

4-117. 钙原子的4226埃谱线在3特斯拉磁场的正常塞曼分裂中，分裂成间距为0.25埃的三条谱线. 试确定电子的荷质比 e/m.

4-118. 波长为 $\lambda=4226$埃的确定的原子跃迁，在1韦伯/米^{2}的磁场中观察时，显示正常塞曼图样，其分量间隔为 1.4×10^{10} 周/秒. 试计算 e/m 的值.

4-119. 一个原子在0.6特斯拉的磁场中发生了从 $l=2$ 态到 $l=1$ 态的跃迁. 如果未加磁场时，这种跃迁相应的波长是5000埃，试确定所观察到的波长.

4-120. 在某强度磁场作用下，Na 的 $3^2P_{1/2}$ 能级分裂后，其能量差为 10^{-3} 电子伏. 求 Na 光5890埃（$3^2P_{3/2}\rightarrow2^2S_{1/2}$）分裂的四条谱线的波长.

4-121. Na 原子3P→3S 跃迁的精细结构为两条，波长分别为5895.93埃和5889.96埃. 试求出原能级 $^2P_{3/2}$ 在磁场中分裂后的最低能级与 $^2P_{1/2}$ 分裂后的最高能级相并合时所需要的磁感应强度 B.

4-122. Na 原子从（$3^2P_{1/2}\rightarrow2^2P_{1/2}$）跃迁的光谱线波长为5896埃，在 $B=2.5$韦伯/米^{2}的磁场中发生塞曼分裂. 问从垂直于磁场方向观察，其分裂为多少光谱线？其中波长最长和最短的两条光谱线的波长各多少埃？

4-123. 可以证明$^4D_{1/2}$和$^6D_{3/2}$在磁场中不会分裂，试作一个这样的证明，并说明为什么$J \neq 0$而不发生分裂.

4-124. 分析碱金属共振线(即第一激发态到正常态的跃迁)由于LS耦合及弱磁场作用下谱线逐次分裂的情况：给出相应的能级图及谱线位置(磁场下分裂用洛仑兹量表示定量位置). 再问沿磁场和垂直磁场方向看到谱线情况分别如何?

4-125. 在$_6C$原子的3s3p组态中，计算能级$^3P_1$的朗德因子. 并用此结果预言，当原子置于0.1特斯拉的磁场中时能级的分裂.

4-126. 对于电子组态3p4d，在LS耦合时(a)写出所有的光谱项；(b)若置于磁场中，问一共分裂出多少个能级；(c)给出其间可能出现的光谱跃迁.

4-127. 在0.8特斯拉的磁场中，钠原子的3S能级的两个自旋态之间的能量差是多少?为了确定光谱线的塞曼分裂的大小，假定跃迁在同一个3P态到这两个态之间发生，试问两个谱线的波长差是多少?

4-128. (a)Hg原子有两个最外层电子，其基态的电子组态是6s6s，若其中一个电子被激发到7s态(中间有6p态)，由此形成的激发态向低能级跃迁时有多少种可能的光谱跃迁?画出能级跃迁图(按LS耦合，且知三重能级按正常次序排列). (b)已知其中三重线中间一条谱线的波长是4358埃，它在磁场中将分裂成几条分线?画出能级跃迁图. (c)若有分辨本领$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 10^5$的光学仪器，为能分辨上述谱线塞曼分裂后的分部分线，则所加的磁场至少应多少?

4-129. 某光谱仪分辨率为$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-5}$(即，如$\lambda = 10^5$埃，则该仪器可分辨波长差$\Delta\lambda = 1$埃的两条谱线)，需用多强的磁场，该仪器才能分辨Na原子D_1线的四条谱线.

4-130. 假设p_i与p_i的相互作用比它们与外磁场的相互作用强得多，试求在强度为0.05特斯拉的磁场中，氢的状态$^2D_{3/2}$和$^2D_{5/2}$

的反常塞曼分裂.

4-131. 在平行于磁场方向观察到某光谱线的正常塞曼效应中两条相邻谱线间波长差 $\Delta\lambda = 0.40$ 埃，已知磁感应强度 $B = 2.5$ 特斯拉. 求未加磁场时谱线的波长 λ.

4-132. 试问外磁场中的强度多大时，氦离子的2P 能级的精细结构裂距正好等于状态$^2P_{3/2}$在塞曼分裂中相邻能级的间隔.

4-133. 磁场多大时，H 原子2P 能级的天然分裂(精细结构分裂)与$^2P_{1/2}$态的塞曼分裂的间隔相同?

§4-6 原子的磁性

4-134. 对于原子在外磁场中能级发生分裂现象，最容易解释的是电子自旋共振. 如果将$_{11}$Na 原子置于频率为 ν 的电磁辐射中，而且这个辐射场中还存在强度为 B 的磁场. 当光子的能量 $h\nu$ 正好等于基态的两个分量的塞曼分裂时，电磁能将产生强烈的吸收. 原因是两个支能级间可能发生跃迁，从而吸收光子. 在典型的实验中，$\nu = 1.0 \times 10^{10}$ 赫，试确定由塞曼分裂所决定的频率与这些微波频率发生共振时磁场 B 的大小.

4-135. 铊原子气体在$^2P_{1/2}$状态. 当磁铁调到 $B = 0.2$韦伯/米^{2}时，观察到顺磁共振现象，问微波发生器的频率多大?

4-136. 有一顺磁性原子体系，每个原子具有磁矩 $\mu = 10^{-20}$ 尔格/高斯，，磁矩的取向只能是 ± 1. 在无磁场时，由于热运动，上下取向的磁矩平均数相等. 为了做原子散射实验，希望在外加磁场之后，使正向平行磁场的磁矩数至少是反向数目的三倍. 现在实验室的条件是最大磁场 $B = 5 \times 10^4$ 高斯. (a)在室温($T \sim 300$K)下能否达到要求，为什么?(b)在什么温度下才能达到要求?计算过程中下列自然对数可供选择：ln1 = 0.00; ln2 = 0.69; ln3 = 1.10;

ln4＝1.39，ln5＝1.61.

4-137. 氩原子(Z＝10)的基态是$^1S_0$；钾原子(Z＝19)的基态是$^2S_{1/2}$；钙原子(Z＝20)的基态$^1S_0$；钪原子(Z＝21)的基态是$^2D_{3/2}$. 问这些原子中哪些是抗磁性的?哪些是顺磁性的?为什么?

第五章　分子结构和分子光谱

内　容　提　要

（一）　分子的能量

$$E = E_e + E_v + E_J$$

式中：E_e，E_v，E_J 分别表示电子能量、振动能量和转动能量.

（二）　分子从能级 E' 跃迁到能级 E'' 吸收或放出的光子波数

$$\bar{\nu} = \frac{E'_e - E''_e}{hc} + \frac{E'_v - E''_v}{hc} + \frac{E'_J - E''_J}{hc}$$

$$= (T' - T'') + (G' - G'') + (F' - F'')$$

式中：T，G，F 分别表示分子的电子、振动和转动谱项.

（三） 分子光谱

分子光谱
- 电子光谱（紫外光谱）：在远紫外，紫外及可见区，E_e，E_v 和 E_j 都改变.
- 振动光谱（近红外谱）：在近红外区，E_v 和 E_j 都改变.
- 转动光谱
  - （远红外光谱）在远红外区，只有 E_j 改变.
  - （微波谱）在微波区，只有 E_j 改变.

（四） 双原子分子的转动光谱

双原子分子的转动能量

$$E(J)=\frac{h^2}{8\pi^2 I}J(J+1)$$

J 是转动量子数，$J=0,1,2,\ldots$；I 是转动惯量，$I=\mu r^2$.

谱项

$$F(J)=\frac{E(J)}{hc}=\frac{h}{8\pi^2 Ic}J(J+1)$$

$$=BJ(J+1)$$

其中常数 $B=\dfrac{h}{8\pi^2 Ic}$

转动能级跃迁遵从电偶极选择定则

$$\Delta J=\pm 1$$

当分子从转动量子数$(J+1)$的能级向量子数为 J 的能级跃迁时，发射光的波数为

$$\tilde{\nu}=\frac{E_{J+1}-E_J}{hc}=\frac{h}{8\pi^2 Ic}[(J+1)(J+2)-J(J+1)]$$

$$=\frac{2h}{8\pi^2 Ic}(J+1)=2BJ' \qquad J'=1,2,3,\cdots$$

因此，发射谱的波数是等间隔的，间隔为 $2B$；与此类似，吸收谱也

是等间隔的，为 $2B$.

（五） 双原子分子的振动光谱

1. 谐振子模型

可粗略地认为双原子分子是一个谐振子，两个原子在键轴方向作简谐振动. 根据量子力学，简谐振子的能量是量子化的，可用 E_v 表示

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)hf = \left(v + \frac{1}{2}\right)a$$

v 称为振动量子数，$v=0,1,2,\cdots$. 振动频率 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$，$k$ 是恢复力常数.

谱项

$$G(v) = \left(v + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}$$

式中 $\tilde{\omega} = \frac{f}{c} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

(i)非极性分子，$\Delta v = 0$.

(ii)极性分子，$\Delta v = \pm 1$.

体系从能级 v 跃迁到 $v+1$ 时吸收的光子波数为

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= G(v+1) - G(v)\\ &= \left(v + 1 + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega} - \left(v + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}\\ &= \tilde{\omega}\end{aligned}$$

2. 非谐振子型

实际上双原子分子的势能曲线并不是简单的抛物线形式，而

是所谓的莫尔斯(P·M·Morse)曲线.如果采用莫尔斯势能,则量子力学算出的振动能量为

$$E_v=\left(v+\frac{1}{2}\right)a-\left(v+\frac{1}{2}\right)^2b. \qquad a>b$$

式中:a,b 都是常数.

如果在同一电子态有振动能级跃迁,则谱线的波数为

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}&=\frac{E'_{v'}-E_v}{hc}\\&=\frac{1}{hc}\left\{\left[\left(v'+\frac{1}{2}\right)a-\left(v'+\frac{1}{2}\right)^2b\right]\right.\\&\quad\left.-\left[\left(v+\frac{1}{2}\right)a-\left(v+\frac{1}{2}\right)^2b\right]\right\}\\&=(v'-v)\tilde{\omega}-(v'-v)(v'+v+1)x\tilde{\omega}\end{aligned}$$

式中:$\tilde{\omega}=\frac{a}{hc}=\frac{f}{c}$,$x=b/a$,是非谐性系数.

对谐振子势,选择定则是:$\Delta v=\pm1$.

对非谐振子势,选择定则是:$\Delta v=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

当体系从能级 $v=0$ 跃迁到 $v=v$ 时吸收的光子波数为

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}&=G(v)-G(0)\\&=v(\tilde{\omega}-x\tilde{\omega})-v^2x\tilde{\omega}\end{aligned}$$

式中 $v=1,2,3,\cdots$.

(六) 双原子分子的振动转动谱带

有振动能量和转动能量同时改变而产生的光谱称为振动转动光谱,在近红外区.谱线的波数为

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}&=\frac{E'-E}{hc}=\frac{1}{hc}[(E'_{v'}-E'_{J'})-(E_v-E_J)]\\&=\tilde{\nu}_0+B'J'(J'+1)-BJ(J+1)\end{aligned}$$

若 $B'=B$,则有 $\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0+B[J'(J'+1)-J(J+1)]$ 转动能级跃

迁的选择定则是：$\Delta J=\pm 1$.

当 $J'=J+1$ 时，$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0+2BJ'$. $J'=1,2,3,\cdots$称作 R 支.

当 $J'=J-1$ 时，$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0-2BJ$. $J=1,2,3,\cdots$称作 P 支.

（七） 电子谱带的转动结构

如果电子能量，振动能量和转动能量都有变动，就形成所谓电子振动转动谱带. 谱线波数为

$$\tilde{\nu}=\frac{E'-E}{hc}=\frac{1}{hc}[(E'_e+E'_v+E'_J)-(E_e+E_v+E_J)]$$

$$=\frac{\Delta E_e-\Delta E_v}{hc}+B'J'(J'+1)-BJ(J+1)$$

$$=\tilde{\nu}_0+B'J'(J'+1)-BJ(J+1)$$

选择定则是

$\Delta J=0,\pm 1.$ （$J'=0\nrightarrow J=0$ 的跃迁除外）

P 支：$\Delta J=-1$ $(J'=J-1)$

$$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0-(B'+B)J+(B'-B)J^2 \quad J=1,2,3,\ldots$$

Q 支：$\Delta J=0$ $(J'=J)$

$$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0+(B'-B)J+(B'-B)J^2 \quad J=1,2,3,\ldots$$

R 支：$\Delta J=+1$ $(J'=J+1)$

$$\tilde{\nu}=\tilde{\nu}_0+(B'+B)J'+(B'-B)J'^2 \quad J'=1,2,3,\ldots$$

（八） 量子谐振子的平均能量

$$E=\frac{h\nu}{2}+\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

式中：ν 是振子的振动频率；k 是玻耳兹曼常数，T 是绝对温度.

（九） 双原子分子的电子状态的符号

当 $\lambda=|m_e|=0,1,2,3,...$ 时，电子态符号分别以 $\sigma,\pi,\delta,\varphi,...$ 来表示.

$$\Lambda=\sum\lambda_i=0,1,2,3,...$$

分子态符号：$\Sigma,\Pi,\Delta,\Phi,...$

其中 λ 是与个别电子的轨道角动量在分子轴上的投影相应的量子数；Λ 是分子的电子壳层的量子数.

典 型 题 解

5-1. 已知分子 H_2，O_2 和 Cl_2 的核间距分别为 0.741×10^{-8}，1.207×10^{-8} 和 1.988×10^{-8} 厘米. 试计算当平移运动的平均动能等于它们在第一激发态的转动能时的温度.

[解] 分子的平均动能为

$$E_{平}=\frac{3}{2}KT$$

分子的转动能为

$$E_J=\frac{h^2}{8\pi^2I}J(J+1)$$

其中 $I=\mu r^2$，当分子处于第一激发态时，$J=1$，这时的转动能为

$$E_J=\frac{2h^2}{8\pi^2I}=\frac{h^2}{4\pi^2\mu r^2}$$

根据题意，$E_{平}=E_J$，则有

$$\frac{3}{2}KT=\frac{h^2}{4\pi^2\mu r^2}=\frac{\hbar^2}{\mu r^2}$$

得 $$T=\frac{2\hbar^2}{3K\mu r^2}$$

μ 为折合质量，$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$，对于 H_2，O_2，Cl_2 等相同原子组成的分子，$\mu=\frac{m}{2}$，代入上式，得

$$T=\frac{4\hbar^2}{3Kmr^2}$$

对分子 H_2，温度 T_1 为

$$T_1=\frac{4\times(1.0546\times10^{-34})^2}{3\times1.38\times10^{-23}\times1.00797\times1.66\times10^{-27}}\times\frac{1}{(0.741\times10^{-10})^2}$$

$$=116.98(\text{开})$$

对分子 O_2，温度 T_2 为

$$T_2=\frac{4\times(1.0546\times10^{-34})^2}{3\times1.38\times10^{-23}\times15.9994}\times\frac{1}{1.66\times10^{-27}\times(1.207\times10^{-10})^2}$$

$$=2.78(\text{开})$$

对分子 Cl_2，温度 T_3 为

$$T_3=\frac{4\times(1.0546\times10^{-34})^2}{3\times1.38\times10-23\times35.453}\times\frac{1}{1.66\times10^{-27}\times(1.988\times10^{-10})^2}$$

$$=0.462(\text{开})$$

5-2. 已知 CO 分子中的原子核距离为 1.13 埃，C 和 O 原子的质量分别为 1.99×10^{-26} 千克和 2.66×10^{-26} 千克. 试求当 $J=1$ 时的转动能量.

[解] 双原子分子的转动能量为

$$E_J = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1)$$

转动惯量

$$I = \mu r^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

$$= \frac{1.99 \times 10^{-26} \times 2.66 \times 10^{-26} \times (1.13 \times 10^{-10})^2}{1.99 \times 10^{-26} + 2.66 \times 10^{-26}}$$

$$= 1.45 \times 10^{-46} (\text{千克} \cdot \text{米}^2)$$

对于 $J=1$ 的转动能量为

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{I} = \frac{(1.0546 \times 10^{-34})^2}{1.45 \times 10^{-46}}$$

$$= 7.67 \times 10^{-23} (\text{焦耳})$$

$$= 4.79 \times 10^{-4} (\text{电子伏})$$

5-3. 一个 HgCl 分子，因发生 $J=1 \rightarrow J=0$ 的转动跃迁而发射一个波长为 4.4 厘米的光子. 试求此分子内原子核之间的距离 (Hg 及 Cl 的质量分别是 3.32×10^{-25} 和 5.81×10^{-26} 千克).

[解] 当分子发生转动量子数 $J=1 \rightarrow J=0$ 的跃迁时，发射光子的波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_1 - E_0}{hc} = \frac{2h}{8\pi^2 Ic}$$

$$= \frac{h}{4\pi^2 Ic}$$

式中 $I = \mu r^2$，所以有

$$r = \sqrt{\frac{\lambda h}{4\pi^2 \mu c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda h}{\mu c}}$$

$$\mu = \frac{m_{Hg} \cdot m_{Cl}}{m_{Hg} + m_{Cl}} = \frac{3.32 \times 10^{-25} \times 5.81 \times 10^{-26}}{3.32 \times 10^{-25} + 5.81 \times 10^{-26}}$$

$$= 4.945 \times 10^{-26} (\text{千克})$$

则原子核间距离

$$r=\frac{1}{2\times 3.14}\sqrt{\frac{4.4\times 10^{-2}\times 6.625\times 10^{-34}}{4.945\times 10^{-26}\times 3\times 10^{8}}}$$

$$=2.23\times 10^{-10}(\text{米})$$

$$=2.23(\text{埃})$$

5-4. HBr 分子的远红外吸收光谱是一些 $\Delta\tilde{\nu}=16.94$ 厘米$^{-1}$等间隔的光谱线. 试求 HBr 分子的转动惯量及其原子核间的距离(已知 H 和 Br 的原子量分别为 1.008 和 79.92).

[解] 分子光谱的远红外区波段系因 E_j 的改变而产生的纯转动光谱,其频谱为等间隔的,间隔为 $2B$. 即

$$\Delta\tilde{\nu}=2B=\frac{2h}{8\pi^2 Ic}=\frac{h}{4\pi^2 Ic}$$

式中 I 是分子的转动惯量,根据上式可写为

$$I=\frac{h}{4\pi^2 c\Delta\tilde{\nu}}$$

$$=\frac{6.625\times 10^{-34}}{4\times 3.14^2\times 3\times 10^{8}\times 1694}$$

$$=3.30\times 10^{-47}(\text{千克}\cdot\text{米}^2)$$

转动惯量 $I=\mu r^2$,式中 r 即为双原子分子中的核间距

$$r=\sqrt{\frac{I}{\mu}}=\sqrt{\frac{I(m_{\mathrm{H}}+m_{\mathrm{Br}})}{m_{\mathrm{H}}\cdot m_{\mathrm{Br}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3.30\times 10^{-47}\times(1.008+79.92)}{1.008\times 79.92\times 1.66\times 10^{-27}}}$$

$$=1.413(\text{埃})$$

5-5. 已知 HCl 气体能够吸取波长为 3.465 微米的红外幅射. 试求 HCl 分子的力常数.

[解] 在讨论双原子分子振动运动与振动光谱的关系时,可粗略地认为双原子分子是一个谐振子,两个原子核在键轴方向作简谐振动,分子振动的总能量为

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)hf$$

式中：f 为振动频率，$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$

体系以能级 v 跃迁到 $v+1$ 时吸收的光子的波数等于

$$\tilde{\nu} = \left(v + 1 + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega} - \left(v + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$$

式中：$\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$

$$\therefore \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

由此可得力常数为

$$k = (2\pi c\tilde{\nu})^2\mu = 4\pi^2\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2\mu$$

$$= 4 \times 3.14^2 \times \left(\frac{3 \times 10^8}{3.4654 \times 10^{-6}}\right)^2\left(\frac{1.008 \times 35.45}{1.008 + 35.45}\right)$$

$$\times 1.66 \times 10^{-27}$$

$$= 29.5936 \times 10^{28} \times 1.627 \times 10^{-27}$$

$$= 481.5(\text{牛顿} / \text{米})$$

5-6. HCl 分子的红外吸收谱除基本谱带外还有几个泛音谱带. 已知：

$$\tilde{\nu}_{0\to1} = \tilde{\omega}(1 - 2x) = 2885.9 \text{ 厘米}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}_{0\to2} = 2\tilde{\omega}(1 - 3x) = 5668.0 \text{ 厘米}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}_{0\to3} = 3\tilde{\omega}(1 - 4x) = 8437.0 \text{ 厘米}^{-1}$$

试计算 HCl 分子的力常数 k.

[解] 谐振子模型只能说明最强的一条谱线，而对其它几条弱谱线不能解释，所以必须利用非谐振子模型才能满意地说明双原子的振动运动与振动光谱的关系. 非谐振模型的振动能量为

$$E_v = \left(v + 4\frac{1}{2}\right)a - \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 b$$

谱线的波数为

$$\tilde{\nu} = v(\tilde{\omega} - x\tilde{\omega}) - v^2 x\tilde{\omega}^2$$

$$\because \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\therefore \quad k = (2\pi c\tilde{\omega})^2 \mu$$

下面根据题设求 $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\nu}_{0\to 3} - \tilde{\nu}_{0\to 2} = 3\tilde{\omega} - 12x\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega} + 6x\tilde{\omega}$$

$$= \tilde{\omega} - 6x\tilde{\omega}$$

$$= 2679.0(\text{厘米}^{-1})$$

$$\tilde{\nu}_{0\to 1} - (\tilde{\nu}_{0\to 3} - \tilde{\nu}_{0\to 2}) = 4x\tilde{\omega}$$

$$= 206.9(\text{厘米}^{-1})$$

$$\therefore x\tilde{\omega} = 51.725(\text{厘米}^{-1})$$

将上面的结果代入 $\tilde{\nu}_{0\to 1}$，得

$$\tilde{\omega} = 2989.35(\text{厘米}^{-1})$$

$$k = (2\pi c\tilde{\omega})^2 \mu$$

$$= 4 \times 3.14^2 \times (3 \times 10^8)^2 \times (2989.35 \times 10^2)^2 \times 1.627 \times 10^{-27}$$

$$= 516(\text{牛顿} / \text{米})$$

5-7. Cl 原子的两同位素^{35}Cl 和^{37}Cl 分别与 H 化合成两种分子 HCl^{35}和 HCl^{37}. 试求这两种分子的振光谱相应光谱带基线的频率 ν_0 之比.

[解]：不同同位素的双原子分子的折合质量不同，设分子的折合质量分别为 μ 和 μ'，故原来是一条的振动谱线，现在分为两条，相应的频率为 ν_0 及 ν'_0. 因为 k 只与电子云分布和核电荷有关，而与核质量无关，所以有

$$\frac{\nu_0}{\nu'_0}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu'}}}=\sqrt{\frac{\mu'}{\mu}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{m_{Cl^{37}}}{m_{Cl^{35}}}\right)\cdot\left(\frac{m_H+m_{Cl^{35}}}{m_H+m_{Cl^{37}}}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{37}{35}\right)\left(\frac{1.008+35}{1.008+37}\right)}$$

$$=1.0013$$

5-8. 若双原子分子的固有振动频率是 ω，非谐振性系数是 x，试在确定这种分子最大可能的振动量子数，相应的振动能和离解能并计算出氢分子的这些数值.

[解] 设 E_{max}是分子的最高振动能级，D 为离解能，则有

$$D=E_{max}-\frac{1}{2}h\omega 4 \tag{1}$$

$$E_{max}=(v_{max}+\frac{1}{2})h\omega-(v_{max}+\frac{1}{2})^2xh\omega \tag{2}$$

比 E_{max}低一级的振动能量为

$$E_{max}=\left(v_{max}-\frac{1}{2}\right)h\omega-\left(v_{max}-\frac{1}{2}\right)^2xh\omega \tag{3}$$

我们可视 E_{max}与 E_{max-1}非常接近，因此有

$$E_{max}\doteq E_{max-1} \tag{4}$$

比较(2)、(3)两式可得

$$h\omega-2v_{max}xh\omega=0$$

$$\therefore\quad v_{max}=\frac{1}{2x} \tag{5}$$

即最大可能振动数为$\frac{1}{2x}$. 将(5)式代入(2)式，得

$$E_{max}=\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\right)h\omega-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\right)^2xh\omega$$

$$=\frac{h\omega(1-x^2)}{4x} \doteq \frac{h\omega}{4x} \tag{6}$$

即为最大振动能表达式.将(6)式代入(1)式,得

$$D=\frac{h\omega}{4x}-\frac{1}{2}h\omega$$

$$=\frac{h\omega(1-2x)}{4x}$$

即为离解能表达式.

对于氢分子:$\bar{\nu}=4395.2$ 厘米$^{-1}$,$x=28.5\times10^{-3}$

最大可能振动数为

$$v_{max}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\times28.5\times10^{-3}}=17$$

最大振动能为

$$E_{max}\doteq\frac{h\omega}{4x}=\frac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{10}\times4395.2}{4\times28.5\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}}$$

$$=4.79(\text{电子伏})$$

离解能为

$$D=\frac{h\omega(1-2x)}{4x}$$

$$=\frac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{-10}\times}{4\times28.5\times10^{-3}\times1.6\times}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\times4395.2(1-2\times28.5\times10^{-3})}{\times10^{-19}}$$

$$=4.51(\text{电子伏})$$

5-9. 如果氢分子的振动频率是已知的,试求由重氢和氢组成的分子 D_2 和 H_2 的离解能之差.

[解] 设 H_2 分子的振动频率为 ω_H,D_2 分子的振动频率为 ω_D,则有

$$\frac{\omega_H}{\omega_D}=\sqrt{\frac{\mu_D}{\mu_H}}$$

得到

$$\omega_D = \omega_H \sqrt{\frac{\mu_D}{\mu_H}} \tag{1}$$

D_2 的离解能可写为

$$\begin{aligned} D_D &= \frac{h\omega_H \sqrt{\frac{\mu_H}{\mu_D}}(1-2x')}{4x'} \\ &= \frac{h\omega_H \sqrt{\frac{\mu_H}{\mu_D}}}{4x'} - \frac{h\omega_H \sqrt{\frac{\mu_H}{\mu_D}}}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

H_2 的离解能为

$$D_H = \frac{h\omega_H(1-2x)}{4x} = \frac{h\omega_H}{4x} - \frac{h\omega_H}{2} \tag{3}$$

分子 H_2 和分子 D_2 都是由氢和氢的同位素组成，因此它们具有相同的位能曲线，相同的力常数及最大振动能. 在(2)式及(3)式中，第一项均是最大振动能，因此它们是相等的，所以有

$$\begin{aligned} D_D - D_H &= \frac{h\omega_H}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\mu_H}{\mu_D}}\right) \\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{10} \times 4395.2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 0.080(\text{电子伏}) \end{aligned}$$

5-10. 已知氯分子本征振动的波数 $\bar{\nu}=564.9$ 厘米$^{-1}$，核间距离为 1.988×10^{-10} 米. 试计算为使氯分子的转动能等于它在第一激发能级的振动能，必须把分子激发到哪一个转动能级？

[解] 双原子分子的振动能量为

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)hf$$

第一激发态是 $v=1$，所以有

$$E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)hf = \frac{3}{2}hf$$

双原子分子的转动能为 $\frac{h^2}{8\pi^2 I}J(J+1)$

式中：$I=\mu r^2$. 根据题意得知

$$\frac{3}{2}hf=\frac{h^2}{8\pi^2\mu r^2}J(J+1) \quad 又\ \mu=\frac{1}{2}m_{Cl}$$

$$\therefore \quad J(J+1)=6\pi^2 m_{Cl}r^2\frac{f}{h}$$

$$=6\times(3.14)^2\times 35.45\times 1.66\times 10^{-27}$$

$$\times(1.988\times 10^{-10})^2\times\frac{3\times 10^{10}\times 564.9}{6.625\times 10^{-34}}$$

$$=3519$$

解方程，得 $J=58$

5-11. 证明由不同同位素组成的双原子分子引起的转动光谱和振动光谱的相对频移分别为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{\Delta\mu}{\mu}(转动)$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=1-\sqrt{1+\frac{\Delta\mu}{\mu}}(振动)$$

式中 μ 是折合质量.

[证明] 纯转动光谱的表达式为

$$\tilde{\nu}=2BJ' \qquad J'=1,2,3,\ldots$$

式中

$$B=\frac{h}{8\pi^2 Ic} \qquad I=\mu r^2$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}}=\frac{2\Delta BJ'}{2BJ'}=\frac{\Delta B}{B}$$

$$=\Delta\left(\frac{1}{\mu}\right)\Big/\frac{1}{\mu}$$

$$\because \quad \Delta\left(\frac{1}{\mu}\right)=-\frac{\Delta\mu}{\mu^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\mu}{\mu}$$

振动光谱的(基线)波数为

$$\tilde{\nu} = \Delta v\tilde{\omega} \qquad \Delta v = 1,2,3,\ldots$$

式中 $\tilde{\omega} = \frac{f}{c}$, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$

相对频移为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} = \frac{\Delta\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}$$

因同位素效应,有

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\mu}{\mu}$$

$$\because 1 - \sqrt{1 + \frac{\Delta\mu}{\mu}} = 1 - \left[1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu} + \ldots,\right] \doteq -\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu}$$

$$\therefore \frac{\Delta\nu}{\nu} = 1 - \sqrt{1 + \frac{\Delta\mu}{\mu}}$$

5-12. $^{1}H\,^{35}Cl$ 分子内的氢原子和氯原子之间键的力常数为516 牛/米.

(1)求第一振动激发态与振动基态之间的能量差;

(2)在什么温度下,处于第一振动激发态的分子数是在振动基态时的 $1/e$.

[解] (1)双原子分子的振动能量为

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)hf$$

第一振动激发态时,振动量子数 $v=1$,则

$$E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)hf$$

振动基态时，振动量子数 $v=0$，则 $E_0=\frac{1}{2}hf$. 二个状态的能量差为

$$\Delta E = E_1 - E_0 = hf$$

$$= h \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

其中 $\mu = \frac{m_H \cdot m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} \times 1.66 \times 10^{-27} = 1.63 \times 10^{-27}$(千克)

将各已知值代入前式，得

$$\Delta E = 6.625 \times 10^{-34} \times \frac{1}{2 \times 3.14}\sqrt{\frac{516}{1.63 \times 10^{-27}}}$$

$$= 5.92 \times 10^{-2}\text{(焦耳)}$$

$$= 0.37\text{(电子伏)}$$

(2)处于第一激发态上的分子数 N_1 与基态上的分子数 N_0 之比为

$$\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) \quad (\text{设 } g_i = 1)$$

当 $\Delta E = kT$ 时，有

$$N_1 = N_0 \cdot \frac{1}{e}$$

由此得

$$T = \frac{\Delta E}{k} = \frac{5.92 \times 10^{-20}}{1.38 \times 10^{-23}} = 4.28 \times 10^3\text{(开)}$$

5-13. HCl 分子有一个近红外光谱带，其相邻的几条谱线的波数是：2925.78；2906.25；2865.09；2843.56；2821.49 厘米$^{-1}$. H 和 Cl 的原子量分别是 1.008 和 35.45. 试求这个谱带的基线波数 $\tilde{\nu}_0$ 和这种分子的转动惯量.

[解] 近红外区域的谱带是属于 E_v 及 E_J 都发生变化的振—转光谱，谱线的波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{E'_v - E_v}{hc} + \frac{E'_J - E_J}{hc}$$

$$\doteq \tilde{\nu}_0 + B[J'(J'+1) - J(J+1)]$$

当 $J'=J+1$ 时，产生 R 分支，它们的波数为

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + 2BJ' \qquad J' = 1,2,3,\ldots$$

当 $J'=J=1$ 时，产生 P 分支，它们的波数为

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 - 2BJ \qquad J = 1,2,3,\ldots$$

从题设各波数来看，前两个波数是属于 R 分支(因为 R 分支的频率大于 P 分支)，而后三个波数是属于 P 分支的，它们各记为，$\tilde{\nu}_{R_1}$，$\tilde{\nu}_{R_2}$，$\tilde{\nu}_{P_1}$，$\tilde{\nu}_{P_2}$，$\tilde{\nu}_{P_3}$. R 分支和 P 分支各谱线的间隔是近似相等的，都相隔 $2B$. 基线波数 $\tilde{\nu}_0$ 是谱带中的一个空位，相当于只有振动跃迁时的波数，因此有

$$\tilde{\nu}_{R_1} = \tilde{\nu}_0 + 2B \qquad (J' = 1)$$

$$\tilde{\nu}_{P_1} = \tilde{\nu}_0 - 2B \qquad (J = 1)$$

$$\tilde{\nu}_{R_2} = \tilde{\nu}_0 + 4B \qquad (J' = 2)$$

$$\tilde{\nu}_{P_2} = \tilde{\nu}_0 - 4B \qquad (J = 2)$$

由以上 4 个等式，得

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{1}{4}(\tilde{\nu}_{R_1} + \tilde{\nu}_{R_2} + \tilde{\nu}_{P_1} + \tilde{\nu}_{P_2})$$

$$= \frac{1}{4}(2925.78 + 2906.25 + 2865.09 + 2843.56)$$

$$= 2885.17(\text{厘米}^{-1})$$

再由以上的 4 个等式求出 $\overline{B}$

$$\overline{B} = \frac{1}{12}[(\tilde{\nu}_{R_1} - \tilde{\nu}_{P_1}) + (\tilde{\nu}_{R_2} - \tilde{\nu}_{P_2})]$$

$$= \frac{1}{12}[(2906.25 - 2865.09) + (2925.78 - 2843.56)]$$

$$= 10.28$$

转动惯量为

$$I = \frac{h}{8\pi^2 \overline{B} C}$$

$$=\frac{6.625\times10^{-34}}{8\times(3.14)^2\times10.28\times10^2\times3\times10^8}$$

$$=2.70\times10^{-47}(\text{千克}\cdot\text{米}^2)$$

5-14. 已知在光被分子 S_2 组合散射的振动光谱中，最靠近不移动成分的红伴线和紫伴线的波长分别为 3466 埃和 3300 埃. 试求该分子的振动频率和准弹性系数 k(非谐性忽略不计).

[解] 设 ν'_1 和 ν'_2 分别为紫伴线和红伴线的频率，则有

$$\nu'_1=\nu_0+\nu_1$$

$$\nu'_2=\nu_0-\nu_1$$

式中：ν_0 为原谱线的频率；ν_1 是振动谱带频率，由以上二个等式，可得

$$\nu'_1-\nu_1=\nu'_2+\nu_1$$

$$\therefore\quad \nu_1=\frac{\nu'_1-\nu'_2}{2}=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$=3\times10^8/2\times\left(\frac{1}{3300\times10^{-10}}-\frac{1}{3466\times10^{-10}}\right)$$

$$=2.18\times10^{13}(\text{秒}^{-1})$$

$$\because\quad \nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\therefore\quad k=(2\pi\nu_1)^2\mu=(2\pi\nu_1)^2\frac{m_s}{2}$$

$$=(2\times3.14\times2.18\times10^{13})^2\times\frac{32.06}{2}\times1.66\times10^{-27}$$

$$=498.7(\text{牛}/\text{米})$$

5-15. 散射物由双原子分子组成，分子中的一个原子属于氧的同位素^{16}O，若已知光的联合散射时，“伴线”与基线的距离为 $\Delta\bar{\nu}=2169$ 厘米$^{-1}$，分子的准弹性系数 $k=1.9\times10^6$达因/厘米，试确定另一个原子属于什么元素.

[解] 具有能量为 $h\nu_0$ 的光子与散射物接触时，分出一部分能量给散射物的分子，使分子从 $v=0$ 的振动能级跃迁到 $v=1$ 的振动能级，其能量为 $h\nu_1$. 当伴线与基线的距离为 $\Delta\tilde{\nu}$ 时，振动能级间隔为

$$h\nu_1 = hc\Delta\nu_1$$

式中 $\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, $\mu = \frac{m_x m_0}{m_x + m_0}$

即

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(m_x + m_0)}{m_x \cdot m_0}} = c\Delta\nu$$

$$\frac{m_x + m_0}{m_x \cdot m_0} = (2\pi c\Delta\tilde{\nu})^2/k$$

得

$$m_x = \frac{m_0 k}{4\pi^2 m_0 c^2(\Delta\tilde{\nu}) - k}$$

$$= \frac{15.9994 \times 1.66 \times 10^{-27} \times 1910}{4 \times 3.14^2 \times 15.9994 \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 - 1910}$$

$$= 20 \times 10^{-27}(\text{千克})$$

原子量为

$$\frac{20 \times 10^{-27}\ \text{千克}}{1.66 \times 10^{-27}\ \text{千克}} = 12.04$$

与碳原子的原子量 12.01115 相当，因此是碳原子. 所以该分子为 CO.

5-16. 光的波长 $\lambda_0 = 5461$ 埃，在其组合散射的转动光谱中，最靠近不移动谱线的红伴线和紫伴线的波长差对 N_2 分子来说是 $\Delta\lambda = 7.2$ 埃. 试求该分子的转动常数 B 和转动惯量 I.

[解] 转动喇曼谱具有小间隔的谱线，其谱线波数为

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \pm 6B, \pm 10B, \pm 14B, \ldots$$

最靠近瑞利的红伴线与紫伴线的波数分别为

$$\tilde{\nu}'_1 = \tilde{\nu}_0 - 6B$$
$$\tilde{\nu}'_2 = \tilde{\nu}_0 + 6B$$

波数差为

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}'_2 - \tilde{\nu}'_1 = 12B$$

波长差为

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}'_2 \cdot \tilde{\nu}'_1} = \frac{12B}{\tilde{\nu}'_2 \cdot \tilde{\nu}'_1}$$

得到转动常数

$$B = \frac{\tilde{\nu}'_1 \cdot \tilde{\nu}'_2}{12}\Delta\lambda \doteq \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$
$$= \frac{7.2 \times 10^{-10}}{12 \times (5461 \times 10^{-10})^2}$$
$$= 201.3(\text{米}^{-1})$$

转动惯量

$$I = \frac{h}{8\pi^2 Bc} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{8 \times 3.14^2 \times 201.3 \times 3 \times 10^8}$$
$$= 1.39 \times 10^{-46}(\text{千克} \cdot \text{米}^2)$$

5-17. 在光的组合散射转动光谱中，O_2 分子的两条相邻红伴线的波数差 $\Delta\nu = 5.8$ 厘米$^{-1}$，试确定该分子的转动惯量及核间距离.

[解] 在组合散射中，转动跃迁的选择定则为

$$\Delta J = 0, \pm 2$$

因此相邻两条红伴线的波数分别为

$$\tilde{\nu}'_1 = \tilde{\nu}_0 - 6B$$
$$\tilde{\nu}'_2 = \tilde{\nu}_0 - 10B$$

波数差为

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}'_1 - \tilde{\nu}'_2 = 4B$$

$$\therefore \quad B = \frac{\Delta\tilde{\nu}}{4} = 580/4$$

$$=145(\text{米}^{-1})$$

转动惯量为

$$I=\frac{h}{8\pi^2Bc}=\frac{6.63\times10^{-34}}{8\times3.14^2\times145\times3\times10^8}$$

$$=1.9\times10^{-45}(\text{千克}\cdot\text{米}^2)$$

核间距离为

$$\because\quad I=\mu r^2$$

$$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{I}{\mu}}=\sqrt{\frac{2I}{m_0}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times1.9\times10^{-45}}{15.9994\times1.66\times10^{-27}}}$$

$$=1.2\text{ 埃}$$

5-18. 双原子分子的电子壳层是由(a)两个电子组成的(一个是σ—电子,另一个是δ—电子);(b)三个电子组成的(σ—电子,π—电子,δ—电子)试确定其电子状态可能有的谱项类型.

[解] (a)两个电子所处的状态为

对σ—电子:$\lambda=0,s=\frac{1}{2}$;

对δ—电子:$\lambda=2,s=\frac{1}{2}$.

$$\Lambda=\sum\lambda_i=0+2=2$$

$S=0,1$. 形成单态和三重态,相应的谱项为,$^1\Delta_2,^3\Delta_1,^3\Delta_2,^3\Delta_3$

(b)

对σ—电子: $\lambda=0$, $s=\frac{1}{2}$

对π—电子: $\lambda=1$, $s=\frac{1}{2}$

对δ—电子: $\lambda=2$, $s=\frac{1}{2}$

$$\Lambda=\sum\lambda_i$$

由于 λ 所代表的角动量有两个可能方向，所以 $\sum\lambda_i$ 是一个代数和，因此有

$$\Lambda = 1,3$$

$$S = \frac{3}{2},\frac{1}{2}$$

当 $\Lambda=1$ 时：

$S=\frac{1}{2}$ 时，$\Lambda+\Sigma=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$，形成双重态.

$S=\frac{3}{2}$ 时，$\Lambda+\Sigma=\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$，形成四重态.

相应的谱项为：

$$^2\Pi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}},\quad ^4\Pi_{\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

当 $\Lambda=3$ 时：

$S=\frac{1}{2}$ 时，$\Lambda+\Sigma=\frac{7}{2},\frac{5}{2}$，形成双重态.

$S=\frac{3}{2}$ 时，$\Lambda+\Sigma=\frac{9}{2},\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}$，形成四重态.

相应的谱项为：

$$^2\Phi_{\frac{7}{2},\frac{5}{2}},\quad ^4\Phi_{\frac{9}{2},\frac{7}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}}.$$

习　题　集

§5-1　分子的振动和转动

5-1.　已知 N_2 分子的原子核间的距离为 1.1 埃，试根据经典理论估计在室温下 N_2 分子转动的角速度.

5-2.　已知 S_2 和 HI 分子处于第一激发转动能级，试求出它

们转动的角频率(分子的核间距离 S_2:1.89 埃,HI:1.60 埃).

5-3. N_2 分子的核间距离为 1.1 埃,求这个分子对其中心的转动惯量.这个分子具有哪些转动能级?哪个转动能级(J 值)的能量等于它的热能(约$\frac{1}{40}$电子伏)?

5-4. 氢分子的力常数 $k=570$ 牛顿/米.试根据不确定关系估算氢分子的最小可能振动能的数量级.

5-5. 实验测得某双原子分子的一组谱线,发现它们有相等的波数差 $\Delta\tilde{\nu}=0.23$ 厘米$^{-1}$.试写出其中波数最小的三条谱线的波长.

5-6. HF 分子的力常数是 966 牛顿/米.试求此分子的振动频率.

5-7. HCl 分子的力常数是 516 牛顿/米.在室温条件下,HCl 分子的振动是否有可能处在它的第一激发态?

5-8. 波长为 3 微米的单色电磁辐射,是否能激发处子基态的分子 HF 的转动能级和振动能级?

5-9. 已知 H_2 分子的核间距是 0.74 埃,试求出 H_2 分子的振动能级间距.

5-10. 已知 Cl_2 分子的固有振动频率是 564.9 厘米$^{-1}$,非谐系数 $x=7.08\times10^{-3}$,试确定它的最大振动能的数值.

5-11. 已知 P_2 分子的固有振动频率为 780.43 厘米$^{-1}$,离解能为 5.033 电子伏.试求非谐性系数 x 的值.当分子离解时,一个原子处在激发能为 1.66 电子伏的激发态.

5-12. NaCl分子基态附近的两相邻振动能级间隔约为 4×10^{-2}电子伏.求在此间隔内包含的转动能级数目.

5-13. N_2 分子和 H_2 分子的固有振动频率分别为 2359.6 厘米$^{-1}$和 4395.2 厘米$^{-1}$.当温度多高时,N_2 和 H_2 分子的平均振动能比它们的零点能量大一倍?

5-14. 假设双原子分子为亚铃状，核质量分别为 m_1，m_2，核间距离为 r. 试证明双原子分子绕通过质心且垂直于两核连线为轴的转动惯量为 $I=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2$.

§5-2 分子光谱 光的组合散射

5-15. 已知 HCl 分子的纯转动光谱谱线的波数是：124.30 厘米$^{-1}$，145.03 厘米$^{-1}$，165.63 厘米$^{-1}$，185.86 厘米$^{-1}$，206.38 厘米$^{-1}$. 试计算该分子的转动惯量及第一转动能级的转动角速度.

5-16. 已知 HCl 分子的纯转动光谱两条相邻谱线的波长是 117 微米和 156 微米. 试求出该分子的转动惯量和转动常数 B' 的值.

5-17. 已知 HCl 的振动谱包含如下的波长：12.03×10^{-5}米，9.60×10^{-5}米，8.04×10^{-5}米，6.89×10^{-5}米，6.04×10^{-5}米. 试求该分子的核间距.

5-18. 试计算$^{35}Cl_2$和$^{37}Cl_2$混合物的纯振动谱带谱线的同位素移动的相对值，并说明较重的分子的谱线向光谱的哪一边移动？

5-19. 分子混合物分别为$^{12}C_2$，$^{12}C^{13}C$和$^{1}H^{35}Cl$，$^{2}H^{35}Cl$，试求在其纯振动谱带中的同位素移动的相对值相差多少倍？

5-20. 由 $H^{35}Cl$ 和 $H^{x}Cl$ 组成的气体，其纯振动谱带中同位素的相对值是 8×10^{-4}，属于 $H^{x}Cl$ 的谱线向波长较大的一边移动. 试求出同位素^{x}Cl的质量.

5-21. 氢分子的振动频率是 1.29×10^{14}秒$^{-1}$，(a)求两相邻振动能级间隔是多少电子伏？(b)氢分子从 $n=2$ 到 $n=1$ 的振动态的跃迁所辐射的光波波长是多少？(c)从哪个初始态跃迁到振动的基态会导致可见光谱的辐射？

5-22. 已知分子 HBr 的振转吸收光谱中，与基态能级和最

近的激发振动能级($v=0$ 和 $v'=1.2$)之间产生禁戒跃迁($\Delta J=0$)相应的零谱线的波数为 2559.3 厘米$^{-1}$和 5028.2 厘米$^{-1}$. 试确定该分子的振动频率和非谐性系数 x 的值.

5-23. 已知分子 HF 的振转谱带中,连续分布的谱线波数为 3874 厘米$^{-1}$、3916 厘米$^{-1}$、4000 厘米$^{-1}$和 4024 厘米$^{-1}$这些谱线相应于 $\Delta J=\pm 1$ 和 $v'=1\to v=0$ 的跃迁,HF 分子的振动频率为 4138.5 厘米$^{-1}$. 试求出 HF 分子的转动惯量和非谐性系数.

5-24. 当波长 $\lambda=4350$ 埃的光量子被 NO 分子散射时,光量子的波长增加 400 埃. 已知 NO 分子的力常数为 1.54×10^{6} 达因/厘米,试由此确定它的振动量子数变化的数值.

5-25. HCl 分子的固有振动频率等于 8.97×10^{13}秒$^{-1}$,试求波长为 4500 埃的光在这种分子上组合散射的红伴线和紫伴线的波长.

5-26. 试求温度 $T=300$ 开时,在光被 Cl_2 分子组合散射的振动光谱中,最靠近不移动成分的紫伴线和红伴线的强度比. 当温度增加一倍时,这个比值变化多少倍?

5-27. 分子 HF 的固有振动波数 $\tilde{\nu}=4138$ 厘米$^{-1}$,求纯振动喇曼散射斯托克斯和反斯托克斯线的波长,当入射光的波长 $\lambda=6328$ 埃时.

5-28. N_2 分子的气体在温度 $T=293$ 开时,观察光在这种气体中的组合散射的振动光谱. 为了使谱线的紫伴线和红伴线的强度比率变化到 $n=2$ 倍,给定气体必须加热到多少度?

5-29. 已知 O_2 分子的基线波数 $\tilde{\nu}_0=1580$ 厘米$^{-1}$,$B=1.446$ 厘米$^{-1}$以波长 $\lambda=5000$ 埃的激光照射后,测得波长 $\lambda'=5002.169$ 埃. 问这是转动喇曼谱还是振动喇曼谱?并确定这是哪两个能级间跃迁产生的喇曼谱?

5-30. HI 分子的两个原子核之间的平衡距离是 1.61 埃,试计算这个分子转动能级的能量和最初两个允许跃迁的波长.

5-31. $^{12}C^{16}O$ 分子的原子间距为 1.13 埃，试求在可见光范围内(5000 埃)由电子跃迁所引起的相邻转动谱线之间的近似波长间距？

第六章　原子核的性质和结构

内　容　提　要

(一)原子核的基本特性

1. 原子核的半径

$$R=r_0A^{1/3}$$

式中：A 是质量数；r_0 是比例常数，大约在 1.2～1.4 费米的范围内（1 费米$=10^{-15}$米）.

2. 原子核的密度

$$\rho=\frac{M_N}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{4\pi r_0^3}\cdot\frac{M_N}{A}$$

式中：M_N 为原子核的质量.

3. 原子核的电势能

假设原子核的电荷 Ze 是均匀分布在核内，同时假定原子核是球对称的，则可计算出一个质子在原子核内的电势能.

$$E_C=\frac{3}{5}\frac{kZ(Z-1)e^2}{R}$$

式中：$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ 为库伦常数. $ke^2=1.44$ 兆电子伏特·费米.

4. 原子核的结合能　平均结合能

$$\Delta E=\Delta m\cdot c^2=[Zm_p+(A-Z)m_n-M_N]c^2$$

式中：Δm 是质量亏损，c 是真空中的光速.

平均结合能

$$\overline{E}=\frac{\Delta E}{A}=\frac{\Delta mc^2}{A}$$

式中：A 是质量数.

5. 原子核的角动量

$$P_I=\sqrt{I(I+1)}\hbar$$

式中：I 为核的自旋量子数，为整数或半整数. 核自旋在某特定方向上的投影为

$$P_{IZ}=M_I\hbar$$

式中：$M_I=I,I-1,\cdots,I+1,-I$，共有 $2I+1$ 个值.

原子的总角动量：因核自旋的存在，原子的总角动量 p_F 应该是核外电子总角动量 p_J 与核自旋 p_I 的矢量和，即

$$\boldsymbol{p}_F=\boldsymbol{p}_J+\boldsymbol{p}_I \qquad p_F=\sqrt{F(F+1)}\hbar$$

$F=J+I,J+I-1,\cdots|J-I|$.

当 $J>I$ 时，F 有 $2I+1$ 个可能值；当 $J<I$ 时，F 有 $2J+1$ 个可能

值. 对于允许跃迁 $\Delta F=0,\pm1(F=0\not\to F=0)$

6. 原子核的磁矩

$$\mu_I=g_I\sqrt{I(I+1)}\mu_N$$

式中：g_I 称原子核的回旋磁因子，$\mu_N=\frac{e}{2m_p}\hbar$ 称核磁子.

核磁矩一般用它的最大投影表示

$$\mu_{I_{max}}=g_I I\mu_N$$

7. 原子核的电四极矩

$$Q=\frac{2}{5}Z(a^2-b^2)$$

式中：Z 是总的核电荷数；a 为半长轴；b 为半短轴.

电四极矩与相对离差的关系为

$$Q=\frac{6}{5}ZR_0^2(\frac{\delta R_0}{R_0})$$

式中：$\frac{\delta R_0}{R_0}$ 为相对离差；R_0 为原子核的平均半径.

8. 原子核的宇称

若 $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,t)$ 是描述粒子状态的波函数，$\hat{P}$ 是宇称算符，则有

$$\hat{P}\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots t)=\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots t)$$

这时波函数所描述的系统的宇称是偶宇称. 若

$$\hat{P}\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots t)=-\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots t)$$

这时波函数所描述的系统的宇称是奇宇称.

(二)原子核的结构模型

1. 原子核的质量半经验公式

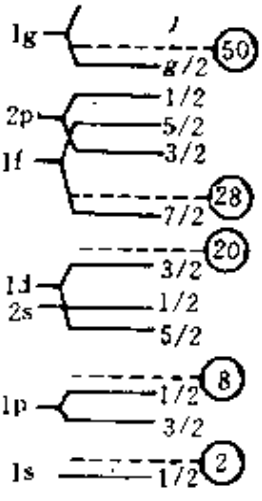
设 $M(A,Z)$是由 Z 个质子和$(A-Z)$个中子所组成的原子核的质量. 由核液滴模型，可得核质量的半经验公式为

$$M(A,Z)=M_{H}Z+M_{n}(A-Z)-a_{1}A+a_{2}A^{3/2}+a_{3}Z^{2}A^{-1/3}$$

$$+a_{4}(A/2-Z)^{2}A^{-1}+\begin{Bmatrix}-1\\0\\+1\end{Bmatrix}\cdot a_{5}A^{-1/2}$$

式中：$a_1=0.016910\text{u}$；$a_2=0.019110\text{u}$；$a_3=0.000763\text{u}$；$a_4=0.101750\text{u}$；$a_5=0.012$；$M_H=1.007825\text{u}$；$M_n=0.008665\text{u}$.

2. 原子核的壳层模型



核子按能级填充情况如图所示，质子和中子各自独立地按泡利不相容原理进行能级填充. 在任一个 l 的状态里，最多只能填充 $2(2l+1)$个同类核子. 因此，1s 态上可填充两个质子和两个中子，构成第一壳层. 1p 态上可填充 6 个质子和 6 个中子，构成第二壳层. 1d 态可填充 10 个质子和 10 个中子，因 2s 与 1d 重合，所以共填充 12 个质子和 12 个中子. 构成第三壳层.... 图中圆圈里的数字是填满虚线(壳层界限)以下所有能级的同种核子数目. 根据核子的填充顺序可给出核子的组态. 通常，对于质子，在核子组态符号前用 π 表示，对于中子，在核子组态符号前用 γ 表示，如$(\pi 1S_{1/2})^2$，$(\gamma 1S_{1/2})^2$ 等.

典 型 题 解

6－1. 估计原子核中核物质的密度，核子浓度及基元电荷的

体密度.

〔解〕 若将原子核视为球体,则其密度为

$$\rho=\frac{3M_N}{4\pi r_0^3 A}=\frac{3}{4\pi r_0^3 N}$$

式中:$r_0=1.40\times10^{-15}$米;$N=6.02\times10^{23}$/克分子.

$$\therefore\rho=\frac{3}{4\times3.14\times(1.40\times10^{-15})^3\times6.02\times10^{23}}$$

$$=1.45\times10^{17}(\text{千克/米}^3)$$

A 克核物质的核子浓度为

$$1.45\times10^{17}\times6.02\times10^{23}\times10^3$$

$$=8.7\times10^{43}(\text{核子/米}^3)$$

基元电荷的体密度

$$Q=Ze/(\frac{4}{3}\pi r^3 A)=e/(\frac{8}{3}\pi r_0^3)\qquad(\text{设 }Z=\frac{A}{2})$$

$$\therefore\quad Q=\frac{1.6\times10^{-19}\times3}{8\times3.14\times(1.4\times10^{-15})^3}=6.96\times10^{24}\text{库仑/米}^3$$

6-2. 计算$^{18}_{8}$O 核和$^{175}_{71}$Lu 核的库仑能.

〔解〕 若假设原子核的电荷 Ze 均匀分布在核内,同时假定原子核是球对称的,则可算得核的库仑能

$$E_C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{Z(Z-1)e^2}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{Z(Z-1)e^2}{r_0A^{1/3}}$$

$$=1.44\times\frac{3}{5}\cdot\frac{Z(Z-1)}{r_0A^{1/3}}$$

($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e^2=1.44$ 兆电子伏·费米).

$^{16}_{8}$O 核的库仑能为

$$E_C=1.44\times\frac{3}{5}\times\frac{8(8-1)}{1.40\times18^{1/3}}=1.44\times\frac{3}{5}\times\frac{56}{1.20\times2.62}$$

$$=13.29\text{ 兆电子伏}$$

$^{175}_{71}$Lu 核的库仑能为

$$E_C = 1.44 \times \frac{3}{5} \times \frac{71(71-1)}{1.4 \times (175)^{\frac{1}{3}}} = 548.41 \text{ 兆电子伏}$$

6－3. 当质子在球形核里均匀分布时，它们的静电相互作用能等于$\frac{3}{5}\frac{e^2Z(Z-1)}{R}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，试根据镜核$^{11}B$和$^{11}C$，$^{13}C$和$^{13}N$的结合能之差，仅仅是由于静电能不同所引起的这一假设，计算这些核的半径(Z是原子序数，R是核半径).

〔解〕 镜核是指两个质量数A相同，但其中甲核的质子数Z与乙核的中子数目相同，而乙核的质子数目$(Z+1)$与甲核的中子数目相同的原子核，如题目中的$^{11}_{5}B$与$^{11}_{6}C$，$^{13}_{6}C$与$^{13}_{7}N$等等.

设甲核的质子数为Z，则乙核的质子数为$(Z+1)$，若镜核的结合能之差仅仅是由于静电能不同而引起的，则其差值ΔE为

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2(Z+1)Z}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2Z(Z-1)}{R}$$

$$= \frac{1.2e^2Z}{R}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

同时我们注意到ΔE亦可用质量亏损来计算

$$\Delta E = [Zm_H + (Z+1)m_n - M_{甲}]c^2$$

$$-[(Z+1)m_H + Zm_n - M_{乙}]c^2$$

$$= [m_n - m_H - \Delta M]c^2$$

$\therefore$有 $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1.2e^2Z}{R} = (m_n - m_H + \Delta M)c^2$$

得 $$R = \frac{1.2e^2Z}{(m_n - m_H + \Delta M)c^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

已知：

$M_{(H)} = 1.007825\text{u}$； $M_{(n)} = 1.008665\text{u}$.

$M_{(^{11}B)} = 11.009305\text{u}$； $M_{(^{11}C)} = 11.011431\text{u}$.

$M_{(^{13}C)} = 13.003354\text{u}$； $M_{(^{13}N)} = 13.005738\text{u}$.

$^{11}_{5}B$与$^{11}_{6}C$核的半径为：

$R = 1.44\times$

$$\xrightarrow[\left[1.008665-1.007825+(11.011431-11.009305)\right]]{1.2}$$

$$\xleftarrow[\times(3\times10^8)^2]{\times5}$$

$=3.13$(费米)

$^{13}_{6}C$ 与 $^{13}_{7}N$ 核的半径为

$$R=1.44\times\xrightarrow[\left[1.008665-1.007825+(13.005738-13.003354)\right]]{1.2}$$

$$\xleftarrow[\times(3\times10^8)^2]{\times5}$$

$=3.44$(费米)

6－4. 快中子的波长远小于核的半径，当用这种中子轰击质量厚度为 $\rho d=20$ 毫克/厘米^2 的 ^{208}Pb 薄靶时，观察到初始中子流的 η 部分($\eta=1.45\times10^{-4}$)发生了弹性各向同性散射，试计算 ^{208}Pb 核的半径.

〔解〕 被散射的粒子数与初始流量的比率(η)应等于核占据的相对面积：

$$\eta=n\pi R^2$$

$n=\frac{\rho d}{A}N_A$ 是 1 厘米^2 靶表面的原子核数

得

$$\eta=\pi\frac{\rho d}{A}N_A R^2$$

$$\therefore\quad R=\sqrt{\frac{\eta A}{\pi\rho d N_A}}$$

$$=\sqrt{\frac{1.45\times208}{3.14\times20\times6.02\times10^{23}}}=\sqrt{\frac{3.016\times10^2}{378\times10^{23}}}$$

$=8.93$(费米)

6－5. 把宇宙的总质量想象为具有 10^{51} 公斤的数量级，如果把它压缩，直到它的密度等于核的密度 2×10^{17} 公斤/米^3. 问宇宙的

半径将有多大？求这个半径与太阳半径 7×10^8 米之比.

〔解〕 当宇宙的密度为核密度时(设想宇宙为球形)，则有：

$$10^{51}\text{公斤}/(\tfrac{4}{3}\pi R^3)=2\times10^{17}\text{公斤}/\text{米}^3$$

R 是被压缩后的半径，

得 $$R^3=\frac{3\times10^{51}}{4\pi\times2\times10^{17}}=1.19426\times10^{33}(\text{米}^3)$$

$$\therefore\quad R=\sqrt[3]{1.19426\times10^{33}}\doteq1.06\times10^{11}(\text{米})$$

与太阳半径之比为 $\frac{1.06\times10^{11}}{7\times10^8}\doteq\frac{1}{7}\times10^3$.

6－6. 试确定中子和 α 粒子在 ^{21}Ne 中的结合能. 已知：$^{21}_{10}$Ne：20.993856u；$^{20}_{10}$Ne：19.992441u；$^{17}_{8}$O：16.999134u.

〔解〕 中子：

$$\Delta E=\Delta mc^2=[(m_{^{20}\text{Ne}}+m_n)-m_{^{21}\text{Ne}}]c^2$$

$$=[(19.992441+1.008665)-20.993856]c^2$$

$$=0.00725\times931.5\text{ 兆电子伏}=6.75\text{ 兆电子伏}$$

α 粒子：

$$\Delta E=\Delta mc^2=[(m_{^{17}\text{O}}+m_{^4\text{He}})-M_{^{21}\text{Ne}}]c^2$$

$$=[(16.999134+4.002603)-20.993856]c^2$$

$$=0.007881\times931.5\text{ 兆电子伏}=7.34\text{ 兆电子伏}$$

6－7. 根据质量亏损曲线得知：锡(Sn)每个核子的质量亏损约为 0.00915u/核子，根据这个数据和已知的中子及质子的质量计算 $^{120}_{50}$Sn 的原子质量.

〔解〕 $\Delta E=\Delta mc^2$

$$\Delta m=120\times0.00915\text{u})$$

$$=[(70\times1.008665)+(50\times1.007825)-M]$$

$$M=[(60.5199+60.4695-1.098]$$

$$=119.900(\text{u})$$

6－8. 试计算在 $B=0.1$ 特斯拉的磁场里，电子、质子和中子旋进的角速度. 已知回转因子：$g_e=2$；$g_p=5.58$；$g_n=3.82$.

〔解〕 电子、质子和中子都具有自旋和磁矩，它们处在磁场中就会受到场力的作用，其效果将是绕磁场的方向旋进. 旋进的角速度如下

电子： $\omega_e = g_e \frac{e}{2m} B \qquad \mu_B = \frac{he}{4\pi m} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{e}{2m}$

$$\therefore \omega_e = g_e \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B$$

$$= 2 \times \frac{0.92732 \times 10^{-23}}{1.0546 \times 10^{-34}} \times 0.1 = 1.758 \times 10^{10} / 秒$$

质子：$\omega_p = g_p \frac{\mu_N}{\hbar} \cdot B$

$$= 5.58 \times \frac{5.05 \times 10^{-27}}{1.0546 \times 10^{-34}} \times 0.1 = 2.672 \times 10^{7} / 秒$$

中子：$\omega_n = g_n \frac{\mu_N}{\hbar} \cdot B$

$$= 3.82 \times \frac{5.05 \times 10^{-27}}{1.0546 \times 10^{-34}} \times 0.1 = 1.827 \times 10^{7} / 秒$$

6－9. 处于基态 $^1S_0$ 的 ^{25}Mg 原子束，按照拉比方法通过磁场系统（磁共振法）. 当磁场的磁感应强度为 $B = 1.35$ 特斯拉时，共振频率 $\nu = 3.5$ 兆赫兹. 若已知在给定状态中原子磁矩的最大投影 $\mu_z = 0.85\mu_N$，试确定 ^{25}Mg 核的回转磁比率及自旋.

〔解〕 在 $^1S_0$ 状态中，原子的磁矩只由核磁矩决定.

核自旋磁矩在外磁场 B 中引起二能级移动为

$$\Delta E = -M_I g_I \mu_N B$$

其能级间矩为 $\Delta(\Delta E) = g_I \mu_N B$ 共振条件为外界提供的能量 $h\nu$ 与能级间距 $\Delta(\Delta E)$ 相等，即

$$h\nu = g_I \mu_N B$$

由此可求得核回转磁比

$$g_I = \frac{h\nu}{\mu_N B} = \frac{6.626 \times 10^{-34} 焦耳 \cdot 秒 \times 3.5 \times 10^{6} 秒^{-1}}{5.05 \times 10^{-27} 焦耳 \cdot 特斯拉^{-1} \times 1.35 特斯拉}$$

$$= 0.340$$

核磁矩 μ_N 在 Z 方向上的最大投影

$$\mu_{IZ}=Ig_I\mu_N$$

得

$$I=\frac{\mu_{IZ}}{g_I\mu_N}$$

∴核自旋：$I=\frac{0.85}{g_I}=\frac{0.85}{0.34}=\frac{5}{2}$

6－10. 原子^{85}Rb 的谱项$^2S_{\frac{1}{2}}$的每一子能级在强磁场中分裂成 6 个成分，试求该原子的核自旋.

〔解〕 在外磁场中，由于核磁矩与外场的相互作用，会引起核塞曼能级分裂. 即

$$\Delta E\sim\mu_I\cdot B$$

核磁矩 $\mu_I=\sqrt{I(I+1)}g_I\mu_N$ 在外磁场方向上的投影为

$$\mu_{IZ}=M_Ig_I\mu_N$$

式中：μ_I 是核角动量的磁量子数，其取值为

$\mu_I=I,I-1,\cdots I$. 共有 $2I+1$ 个取值. 因此，μ_N 相对于外磁场方向(Z 方向)有 $2I+1$ 个取值，即 $2I+1=6$，得 $I=\frac{5}{2}$.

6－11. 试对原子^{39}K 求出谱线$^2P_{\frac{1}{2}}\rightarrow{}^2S_{\frac{1}{2}}$的超精细结构的成分数，若已知核自旋 $I=\frac{3}{2}$.

〔解〕 原子的总角动量 $p_F=p_J+p_I$

$F=J+I,J+I-1,\cdots|J-I|$

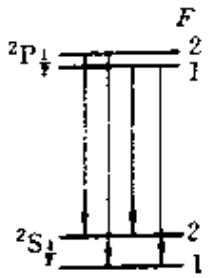
式中：J 是原子电子壳层的角动量量子数；I 是原子核的自旋量子数. 对允许跃迁 $\Delta F=0,\pm1$.

$$F=0\nrightarrow F=0$$

∴对$^2S_{\frac{1}{2}}$能级 $J=\frac{1}{2}$，$I=\frac{3}{2}$，其 F 取值为 $2J+1$ 个，超精细结构层数为 F 的取值个数所决定.

则 $F=\frac{1}{2}+\frac{3}{2},\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right|=2,1$

对$^2P_{\frac{1}{2}}$能级：同理 $F=2,1$. 其能级跃迁的超精细结构如图所示：



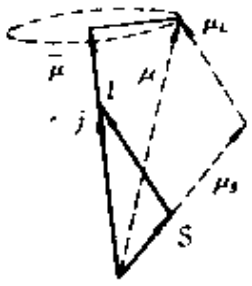
例题 6-11 用图

根据选则定则 $\Delta F=0,\pm1,(F=0\nrightarrow F=0)$允许跃迁有 4 种，因此有 4 种成分.

6－12. 回转因子 g_s 和 g_l 表征核内核子的自旋运动和轨道运动(p_s 和 p_l). 试推导由 g_s 和 g_l 确定核子的回转因子的表达式. 推导时以关系式 $\mu=g_sp_s+g_lp_l$ 为依据.

〔解〕 与计算原子的磁矩相类似，我们计算核子的磁矩时亦可利用矢量图来进行.

若 $g_s\neq g_l$，则 μ 与 p_j 方向不重合，结果，矢量 μ 以及 μ_s,μ_l 都绕 p_j 进动. 这样 $\bar{\mu}$ 就不是一个有定向的恒量，而它在 p 方向上的分量 μ 是有定向的恒量. 这是核子对时间平均的磁矩. 其矢量图如下：



例题 6－12 用图

由图可见，

$$\bar{\mu}=\mu_s\cos(p_sp_j)+\mu_l\cos(p_lp_j)$$

由于 $\mu_s=g_s\sqrt{s(s+1)}\cdot\mu_N$

$\mu_l=g_l\sqrt{l(l+1)}\mu_N$

而余弦可由相应的三角形按照余弦定理确定

$$p_s^2=p_j^2+p_l^2-2|p_jp_l|\cos(p_lp_j)$$

$$p_l^2=p_j^2+p_s^2-2|p_jp_s|\cos(p_sp_j)$$

把上述关系式代入 $\bar{\mu}$ 的表达式得

$$\bar{\mu}=g_j\sqrt{j(j+1)}\mu_N$$

式中：$g_j=\frac{g_s+g_l}{2}+\frac{(g_s-g_l)[s(s+1)-l(l+1)]}{2j(j+1)}$.

若把 $s=\frac{1}{2}$ 及 $j=l\pm\frac{1}{2}$ 代入上式，则得

$$g_j=\frac{g_s\pm g_s-g_l}{2l+1}$$

式中：对 $j=l+\frac{1}{2}$，取加号.

$j=l-\frac{1}{2}$，取减号.

6－13. 试根据核子 g_j 的表达式，计算质子($g_l=1, g_s=5.58$)和中子($g_l=0, g_s=-3.82$)在下列状态下的磁矩：$S_{\frac{1}{2}}$，$P_{\frac{1}{2}}$ 和 $P_{\frac{3}{2}}$.

〔解〕 由 6－12 题得：$g_j=g_l\pm\frac{g_s-g_l}{2l+1}$. 式中对 $j=l+\frac{1}{2}$ 为加号；$j=l-\frac{1}{2}$ 为减号对质子来说我们求得

$$\mu_p=\left(1+\frac{2.29}{j}\right)j\mu_N \qquad \text{式中 } j=l+\frac{1}{2}.$$

$$\mu_p=\left(1-\frac{2.29}{j+1}\right)j\mu_N \qquad \text{式中 } j=l-\frac{1}{2}.$$

对中子来说

$$\mu_n=-1.91\mu_N \qquad \text{式中 } j=l+\frac{1}{2}.$$

$$\mu_n=\frac{1.91}{j+1}j\mu_N \qquad \text{式中 } j=l-\frac{1}{2}.$$

结果我们得到

	$S_{\frac{1}{2}}$	$P_{\frac{1}{2}}$	$P_{\frac{3}{2}}$
μ_p	2.79	−0.26	3.79
μ_p	−1.91	0.64	−1.91

6－14. 在拉比的原始实验里，处在$^2S_{\frac{1}{2}}$状态中的^{23}Na原子束先通过极不均匀的强磁场H_1随后通过很长的极不均匀的弱磁场H_2，结果原子束分裂成8个成分，试确定^{23}Na的自旋.

〔解〕 在强磁场H_1中，$J-I$耦合被破坏. 核的磁矩与电子磁矩之比为1/1836. 因此这时核自旋I对原子束的分裂不会有明显的影响，起主要作用的是电子磁矩. 处在$^2S_{\frac{1}{2}}$态的^{23}Na原子$J=\frac{1}{2}$，原子束分裂的条数为$2J+1=2$，即原子束分裂为2条. 而在弱磁场H_2中，I与J已经不再分开，因此当这两条原子束到达H_2范围时，其中每一条原子束分裂为$2I+1$个成分. 结果产生了$2(2I+1)=8$个成分，由此得$I=\frac{3}{2}$.

6－15. 若已知质子的回转因子($g_s=5.58$)和中子的回转因子($g_s=-3.82$)，氘核的核子处于状态$S(l=0)$，试估计氘核磁矩投影的数值.

〔解〕 氘核处在$S(l=0)$状态时，说明轨道的贡献为0. 只有自旋有贡献，因此根据上题结果$\mu_p=g_j j\mu_N$

$$\mu_p=g_s s\mu_n=5.58\cdot\frac{1}{2}\mu_N=2.79\mu_N$$

同理 $$\mu_n=g_s s\mu_N=-3.82\cdot\frac{1}{2}\mu_N=-1.91\mu_N$$

氘核磁矩投影值为$\mu_p+\mu_n=0.88\mu_N$. 但是氘核的磁矩的实验值为$0.857\mu_N$. 因此说明上述计算除了核子的自旋磁矩外，还应考虑轨道磁矩. 氘核基态并不完全是S态. 现已知道处于S态的占96%，处于D态的4%，这样就能算出与实验相符合的结果.

6－16. 试利用原子质量的半经验公式，确定对β衰变稳定，而质量数A等于23，51，89核的原子序数.

〔解〕 利用原子质量半经验公式(外斯塞格质量半经验公式)可帮助我们了解核的稳定性，特别是同质异位素核的稳定性. 根据题设，A均为奇数，对奇A同质异位素核，$M(A,Z)$只是Z的函

数，在此情况下，只有接近最小 $M(A,Z)$ 值的原子核是稳定的. 因此，对 β 衰变稳定的奇 A 核就有

$$\frac{dM}{dZ}=0$$

原子质量半经验公式为：

$$M(A,Z)=M_H Z+M_n(A-Z)-a_1A+a_2A^{\frac{2}{3}}+a_3Z^2A^{-\frac{1}{3}}$$
$$+a_4(A/2-Z)^2A^{-1}$$

其中 $M_H=1.007825$，$M_n=1.008665u$，$a_1=0.01691u$，$a_2=0.01911u$，$a_3=0.000763u$，$a_4=0.10175u$.

$$\frac{dM}{dZ}=M_H-M_n+2a_3ZA^{-\frac{1}{3}}-a_4+2a_4ZA^{-1}=0$$

得
$$Z=\frac{(M_n+a_4-M_H)A}{2(a_3A^{\frac{2}{3}}+a_4)}$$
$$=\frac{A}{(1.983+0.0149\times A^{\frac{2}{3}})}$$

$A=23$：

$$Z=\frac{23}{1.983+0.0149\times(23)^{\frac{2}{3}}}=10.95\simeq 11$$

原子序数 $Z=11$ 的核是 $^{23}_{11}Na$.

$A=51$：

$$Z=\frac{51}{1.983+0.0149\times(51)^{\frac{2}{3}}}=23.3\simeq 23$$

原子序数 $Z=23$ 的核是 $^{51}_{23}V$.

$A=89$：

$$Z=\frac{89}{1.983+0.0149\times(89)^{\frac{2}{3}}}=39.1\simeq 39$$

原子序数 $Z=39$ 的核是 $^{89}_{39}Y$.

6－17. 试利用核壳层模型给出 ^7Li，^{13}C 和 ^{25}Mg 核的基态的核子组态及核自旋.

〔解〕 根据核壳层模型，^7_3Li 的核子组态为

$$(\pi 1s_{\frac{1}{2}})^2(\pi 1p_{\frac{3}{2}})^1,(\nu 1s_{\frac{1}{2}})^2(\nu 1p_{\frac{3}{2}})^2.$$

略去满壳层组态可简写为$(\pi 1p_{3/2})^1$,$(\nu 1p_{3/2})^2$.

基态核自旋为 $I=\frac{3}{2}$.

$^{13}_{6}C$ 的核子组态为$(\pi 1s_{1/2})^2(\pi 1p_{3/2})^4$,$(\nu 1s_{1/2})^2(\nu 1p_{3/2})^4(\nu 1p_{1/2})^1$. 略去满壳层组态可简写为$(\nu 1p_{1/2})^1$.

基态核自旋为 $I=\frac{1}{2}$.

$^{25}_{12}Mg$ 的核子组态为$(\pi 1d_{5/2})^4$,$(\nu 1d_{5/2})^5$.

基态核自旋为 $I=\frac{5}{2}$.

6－18. 试利用核壳层模型确定^{17}O,^{29}Si 和^{45}Sc 的基态的核自旋和宇称.

〔解〕 根据壳层模型,$^{17}_{8}O$ 的核子组态为$(\nu 1d_{5/2})^1$. 因此其核自旋和宇称为$\frac{5}{2}(+)$.

$^{29}_{14}Si$ 的核子组态为$(\pi 2s_{1/2})^1$. 因此其核自旋和宇称为 $\frac{1}{2}(+)$.

$^{45}_{21}Sc$ 的核子组态为$(\pi f_{7/2})^1(\pi f_{7/2})^4$. 因此其核自旋和宇称为$\frac{7}{2}(-)$.

习　题　集

§6－1 核的半径 质量和结合能

6－1. 测得 Ge 核半径为$^{9}_{4}Be$ 核半径的两倍,那么在 Ge 核中

有多少核子?

6－2. 计算下列各核的半径：$^{4}_{2}He$，$^{107}_{47}Ag$，$^{238}_{92}U$ 设 $r_0=1.45$ 费米.

6－3. 用能量为 8.8 兆电子伏的 α 粒子与静止的^{235}U 核对心碰撞，这时 α 粒子被散射，且满足卢瑟福公式，试计算^{235}U 核半径，并且与核半径公式 $R=r_0A^{1/3}$ 计算得的^{235}U 核半径相比较.

6－4. 假定质子的质量是 1.67×10^{-27} 千克，且质子是球形的，其半径 $R=r_0A^{1/3}$（$r_0=1.35\times10^{-15}$ 米）. 试证明核物质的密度约为 10^{14} 吨/米^3.

6－5. 试计算氢的核密度与原子密度之比（假定原子核半径为 1 费米）.

6－6. 一个 $A=235$ 的原子核分裂为两个新核，它们的质量数之比为 2：1. 求这两个新核的半径.

6－7. 计算$^{108}_{47}Ag$ 的库仑势垒.（a），对质子；（b）对 α 粒子.

6－8. 计算附加到$^{4}_{2}He$ 上的一个中子和附加到$^{16}_{8}O$ 和$^{32}_{16}S$ 上的一个质子的结合能. 并与每个核子的平均结合能比较.

6－9. 已知：$m(^{238}U)=238.05078u$，$m(^{235}U)=235.043944u$，$m(^{236}U)=236.045582u$. 试计算^{239}U，^{236}U 最后一个中子的结合能.

6－10. 在核$^{9}_{4}Be$ 内，每个核子的平均结合能等于 6.45 兆电子伏，而在$^{4}_{2}He$ 核内等于 7.06 兆电子伏，要把$^{9}_{4}Be$ 核分裂成两个 α 粒子时，必需多少能量?

6－11. （a）计算^{12}C 核结合能与三个 α 粒子结合能之和的差值.（b）假定这些 α 粒子来自于三角形结构，这个三角形的每边是一个 α 粒子的键. 计算每个 α 粒子键的结合能.

6－12. 已知$^{9}_{4}Be$ 核的平均结合能为 6.459 兆电子伏，而质子与中子的质量是 m_p，m_n 为已知，求$^{9}_{4}Be$ 核的质量及其原子的质量.

6－13. $^{35}_{17}Cl$ 的结合能是 298 兆电子伏，试计算它的质量.

6－14. 一个质子和一个中子结合时可形成一个氘核，而能量为 2.22 兆电子伏的光子又可把氘核分成中子和质子，试求氘核的质量.

6－15. 附加到核(A,Z)上最后一个中子的结合能由下列公式决定

$$BE(n)=[M(A-1,Z)+M_n-M(A,Z)]c^2$$

试计算附加在铅的同位素$(Z=82)^{206}Pb$，^{207}Pb 和 ^{208}Pb 上最后一个中子的结合能. 结合能值 $BE(n)$与铅同位素的 N 和 Z 值有什么联系？

6－16. (a)两个球形对称的质子的质心相距 2 费米，计算两个质子间的万有引力能量. (b)在这个距离下，两质子的库仑排斥能是多少？(c)将你计算的结果与核的吸引能(约 10 兆电子伏)进行比较.

§6－2 核的角动量　磁矩和电四极矩

6－17. ^{209}Bi 原子的谱项$^2D_{\frac{5}{2}}$具有超精细分裂的四个成分，且相邻成分间的间隔之比等于 4∶5∶6，求核的自旋.

6－18. $^{10}_5B$ 核的核自旋和对称特性是：$I=3$，对称. (a)证明质量、电荷、核自旋、对称性与硼核中含有 Z 个质子和$(A-Z)$个中子的假定是一致的. (b)证明这四个性质与硼核含有 A 个质子和$(A-Z)$个电子的假定是不一致的.

6－19. 试问表征下列原子的基态的谱项，分裂成多少个超精细结构成分$^3H(^2S_{\frac{1}{2}},I=\frac{1}{2})$，$^6Li(^2S_{\frac{1}{2}},I=1)$，$^9Be(^1S_0,I=\frac{3}{2})$，

$N^{14}(^4S_{\frac{3}{2}}I=1)$，$^{15}N(^4S_{\frac{3}{2}},I=\frac{1}{2})$，$^{35}Cl(^2P_{\frac{3}{2}},I=\frac{3}{2})$？

6－20. $^9Be(^1S_0)$和$^{13}C(^3P_0)$的原子束通过极不均匀的强磁场(按着史特恩—盖拉赫的方法). 这时给定线束分裂的成分数分别等于 4 和 2. 试确定核的自旋.

6－21. 若^{6}Li(在状态$^2S_{\frac{1}{2}}$中)的原子束按照史特恩—盖拉赫实验,通过极不均匀的弱磁场,试问此线束分裂应有的最大成分数是多少?^{6}Li 的核自旋是 $I=\frac{3}{2}$,用强磁场代替弱磁场时,情况是否会改变?

6－22. 实验测得$^{241}A_m$ 和$^{243}A_m$ 的原子光谱的超精细结构由六条谱线组成,已知相应原子能级的电子总角动量大子核的自旋,试求$^{241}A_m$ 和$^{243}A_m$ 核的自旋.

6－23. 已知^{235}U 原子光谱的一个超精细结构由八条谱线组成,且^{235}U 的基态为$^5L_6$,试求该核的自旋.

6－24. ^{59}Co 核的原子基项包含超精细分裂的八个成分,试确定该核的自旋.

6－25. ^{111}Cd 原子中$^3P_0\to{}^3S_1$ 的跃迁中,能级$^3P_0$ 没有发现超精细分裂,而能级$^3S_1$ 分裂成两个子能级,试确定^{111}Cd 的核自旋.

6－26. 用磁共振法研究了分子$^7Li^9F$ 的磁性,这种分子电子壳层的角动量等于零.在恒定磁场的强度 $B=0.5$ 特斯拉的情况下,当交变磁场频率 $\nu_1=8.30$ 兆赫兹和 $\nu_2=2.00$ 兆赫兹和时发现有两个共振峰,这两个峰分别属于锂核和氟核,它的自旋为已知.试求这些核的磁矩.

6－27. 若^3_1H 和^3_2He 核的核子处于状态 $S(l=0)$中,试利用泡利原理确定这些核的磁矩投影,质子及中子的磁矩均为已知.

6－28. 已知原子核的电四极矩 Q 与原子核偏离球形的相对离差$\frac{\delta R_0}{R_0}$的关系为 $Q=\frac{6}{5}ZR_0^2(\frac{\delta R_0}{R_0})$. 已知$^{165}_{67}Ho$ 核的电四极矩为 300 费米^2,如果 $R_0=1.4A^{1/3}$,试求$\frac{\delta R_0}{R_0}$.

6－29. $^{181}_{73}Ta$ 核的电四极矩为 6×10^{-26}米^2,a/b=1.15,试求两个半轴 a,b 的值.

§6-3 核的结构模型

6-30. 试利用质量半经验公式计算^{239}u 和^{236}u 最后一个中子的结合能.

6-31. 试利用质量半经验公式计算^{37}Cl 和^{40}Ca 的原子质量.

6-32. $^{23}_{11}$Na 和$^{23}_{12}$Mg 的质量分别为 22.989771u 和 22.994125u. 试计算质量半经验公式中的常数 a_3 的值.

6-33. 试利用液滴模型求出一个给定的奇 A 核的最稳定的同量异位素.

6-34. 利用上题结果,求出 $A=57$ 的最稳定的原子核.

6-35. 试利用质量半经验公式,求出^{235}U 核抛出的 α 粒子的能量.

6-36. 试利用核壳层模型给出$^{19}_{9}$F,$^{31}_{15}$P 和$^{129}_{53}$I 等核处子在(a)基态;(b),第一激发态,自旋和宇称.

6-37. 试利用核壳层模型给出$^{32}_{15}$P 核的基态角动量的可能值是多少?

6-38. 试利用核壳层模型给出^{3}H 和^{3}He 核的基态的磁矩.

6-39. 由^{40}Ca,^{41}Ca 和^{39}Ca 的原子质量,计算 $1d_{3/2}$和 $1f_{7/2}$中次壳层之间的能量差.

6-40. 利用核壳层模型给出$^{80}_{36}$Kr 和$^{91}_{40}$Zr 核的基态角动量的宇称.

6-41. 测得^{57}Fe 核的激发态的磁矩是 $\mu=-0.153\mu_N$. (a)负的意义是什么?(b)确定^{57}Fe 核在该状态下的 g 值. (c)计算在33.3特斯拉的磁场中,这个能级的裂距.

6-42. (a)应用已知的^{57}Fe 的核基态的磁矩值和核自旋值,计算核的 g 值. (b)如果核周围的场强是 33.3 特斯拉,试确定这个能级的裂距.

6－43. 试推算$^{13}_{6}C$核处在下列各态时的总角动量：(a)基态；(b)激发态，最后一个中子激发到$2S_{\frac{1}{2}}$的轨道上；(c)激发态，质子轨道填满到$1p_{\frac{3}{2}}$，另有两个中子处于$1S_{\frac{1}{2}}$轨道，三个中子处于$1P_{\frac{3}{2}}$轨道以及两个中子处于$1P_{\frac{1}{2}}$轨道.

6－44. 设原子核的线度约为10^{-14}米，试利用不确定关系证明电子不可能做为独立的基本粒子处在核内.

6－45. 利用核的壳层模型，求$^{15}_{8}O$和$^{4}_{2}He$的基态角动量.

第七章　不稳定核的衰变

内　容　提　要

(一)衰变定律

1. 孤立元素的衰变定律

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

式中：λ 是衰变常数；N_0 是初始时放射性原子核的数目；N 是 t 时刻还没有衰变的原子核数目.

半衰期和平均寿命

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

式中：$T_{1/2}$ 是放射性原子核的半衰期；τ 是放射性原子核的平均寿

命.

2. 衰变链中的衰变定律

假设衰变链为：A→B→C，则 B 原子核所遵守的衰变定律是：

$$N_B = \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

式中：λ_A是 A 核的衰变常数；λ_B是 B 核的衰变常数；N_B是 t 时刻还没有衰变的 B 核的数目；N_{A_0}为 $t=0$ 时 A 核的数目.

当 $t \gg \frac{1}{\lambda_B}$且 $\lambda_A \ll \lambda_B$的条件下有

$$\lambda_A N_A \simeq \lambda_B N_B$$

上式表示 B 核单位时间内的衰变数等于 A 核单位时间内的衰变数，称为久期平衡状态.

3. 放射性强度

放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数$-\frac{dN}{dt}$为该物质的放射性强度，又称为放射性活度. 即

$$I = -\frac{dN}{dt} = I_0 e^{-\mu}$$

式中：I_0为初始的放射性强度($t=0$ 时)，放射性强度单位是“居里”或“贝克勒”.

1 居里(Ci)$=3.7\times10^{10}$次核衰变/秒

1 贝克勒(Bq)=1 次核衰变/秒

(二)γ 衰变

1. 核能级与 γ 衰变

设衰变前原子核的能量为 E_i，衰变后原子核的能量为 E_f，则

放出 γ 光子的能量为

$$E_\gamma = (E_i - E_f) - E_R$$

式中：E_R 是子核的反冲能量.

跃迁中母核只放出一个 γ 光子的情况下，有

$$m_R v_R = \frac{E_\gamma}{c}$$

式中：m_R，v_R 分别为子核的质量及速度.

反冲核的动能为

$$T_R = \frac{1}{2} m_R v^2 = \frac{E_\gamma^2}{2m_R c^2}$$

跃迁中母核发射若干个 γ 光子的情况下，如几乎在同时发射两个 γ 光子

$$T_R = \frac{1}{2m_R c^2}(E_{\gamma_1}^2 + E_{\gamma_2}^2 + 2E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}\cos\theta)$$

式中：θ 是两个 γ 光子发射方向的夹角.

2. γ 跃迁几率

按壳层模型计算

电多极辐射的 γ 跃迁几率为

$$P_E(L) = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c}(KR)^{2L}\omega$$

磁多极辐射的 γ 跃迁几率为

$$P_M(L) = \frac{20(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{\hbar^2}{m_p cR}\right)^2 (KR)^{2L}\omega$$

式中：L 为 γ 光子带走的角动量量子数；K 为光子的波数；m_p 为质子的质量；R 为原子核半径；ω 为 γ 光子的角频率.

在 γ 跃迁中，γ 辐射的角动量量子数的取值范围是

$$I_i + I_f \geqslant L \geqslant |I_i - I_f| \quad (I_i = 0 \text{ 到 } I_f = 0 \text{ 除外})$$

式中：I_i 和 I_f 分别为原子核跃迁前后的角动量量子数.

3. 内转换电子的能量

根据能量守恒原理，内转换电子的能量近似地等于 γ 跃迁的衰变能与电子结合能之差

$$T_e = E_i - E_f - \varepsilon_n$$

式中：E_i 为原子核跃迁前的能量，E_f 为原子核跃迁后的能量；ε_n 为核外电子的结合能.

内转换系数：$\alpha = \frac{P_e}{P_\gamma} = \frac{I_e}{I_\gamma}$

式中：I_e 为单位时间内放射的转换粒子的数目；I_γ 为单位时间内放射 γ 光子的数目.

或写为 $\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \cdots$

式中：$\alpha_K, \alpha_L, \alpha_M \cdots$ 分别为 K，L，M…各电子壳层的转换系数.

(三)α 衰变

1. α 衰变能

$$Q_\alpha = T_\alpha\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right)$$

式中：T_α 为 α 粒子的动能；M_α 为 α 粒子的质量；M_Y 为子核的质量.

若用质量数之比代替核质量比，则上式可变为

$$Q_\alpha = \frac{A}{A-4}T_\alpha$$

用衰变前后原子核的质量计算衰变能则有

$$Q_\alpha = [M_x - (M_y + M_\alpha)]c^2$$

2. 产生 α 衰变的条件

$$M_x > M_y + M_\alpha$$

式中：M_x 为衰变前原子核的质量；M_y 为衰变后原子核的质量；M_α 为 α 粒子的质量.

（四）β 衰变

1. β^- 衰变能

$$Q_\beta^- = (M_x - M_y)c^2$$

式中：M_x 为衰变前原子的质量；M_y 为衰变后原子的质量.

产生 β^- 衰变的条件： $M_x > M_y$

2. β^+ 衰变能

$$Q_\beta^- = (M_x - M_y - 2m_e)c^2$$

式中：M_x 为衰变前原子质量，M_y 为衰变后原子质量，m_e 为电子质量.

产生 β^+ 衰变的条件： $M_x > (M_y + 2m_e)$

3. K 俘获的衰变能

$$Q = (M_x - M_y)c^2 - \omega_k$$

式中：M_x 为衰变前的原子质量；M_y 为衰变后的原子质量，ω_k 为 K 壳层电子的结合能.

产生 K 俘获的条件：$M_x > M_y + (\omega_k/c^2)$

典 型 题 解

7-1 $^{232}_{90}Th$ 放射 α 射线成为 $^{228}_{88}Ra$. 从含有 1 克 $^{232}_{90}Th$ 的一片薄膜测得每秒放射 4100 粒 α 粒子，试算出 $^{232}_{90}Th$ 的半衰期为 1.4×10^{10} 年.

[解] 根据放射性衰变规律

$$N = N_0e^{-\lambda t}$$

如果在短时间 dt 内有 dN 个核衰变，则核衰变率 dN/dt 必定与当时存在的总原子核数目 N 成正比，即：$-\frac{dN}{dt}=\lambda N=\lambda N_0e^{-\lambda t}$；

此式可写成：$\lambda e^{-\lambda t}=\frac{-\frac{dN}{dt}}{N_0}$ (1)

其中 $-\frac{dN}{dt}=4100$；$t=1$ 秒；$N_0=\frac{N_A}{A}\times1$ 克，$N_A=6.02\times10^{23}$；$A=232$ 克，故

$$N_0=\frac{6.02\times10^{23}}{232}\times1=26\times10^{20}$$

将各已知量代入(1)式，得

$$\lambda e^{-\lambda}=\frac{4100}{26\times10^{20}}=\frac{41}{26\times10^{18}} \quad (2)$$

因为 $^{232}_{90}Th$ 的半衰期 $T=1.4\times10^{10}$ 年，所以可视 λ 为很小，因此可以将 $e^{-\lambda}$ 展成级数，取前两项，即有：$e^{-\lambda}\approx1+\lambda$.

这样(2)式变为

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{41}{26\times10^{18}}$$

因此得

$$\lambda=\frac{41}{26\times10^{18}-41}=1.58\times10^{-18}/\text{秒}$$

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{1.58\times 10^{-18}\text{秒}^{-1}}=0.438\times 10^{18}\text{秒}$$

$$=1.4\times 10^{10}\text{年}(1\text{年}=3.15\times 10^{7}\text{秒})$$

$\therefore {}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ 的半衰期是 1.4×10^{10}年.

7-2 已知放射性同位素${}^{55}_{27}\mathrm{Co}$原子数目在一小时内衰减少了3.8%，衰变产物是非放射性的，试确定该同位素的衰变常数、平均寿命、半衰期.

[解] 根据放射性衰变定律

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

得 $$(1-\frac{3.8}{100}N_0)=N_0e^{-\lambda t}$$

$$\ln 96.2-\ln 100=-\lambda t$$

$t=1$ 小时

$$\therefore\quad \lambda=\frac{0.039}{3600}=1.081\times 10^{-5}\text{秒}^{-1}$$

$$T=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{0.693}{1.08\times 10^{-5}/\text{秒}}=65377.35\text{秒}=18.16\text{小时}$$

$$\tau=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1.08\times 10^{-5}/\text{秒}}=94339.6\text{秒}=26.21\text{小时}.$$

7-3. 当1微克的同位素${}^{32}_{15}\mathrm{P}$衰变时，在一昼夜中放出多少个β粒子？${}^{32}_{15}\mathrm{P}$的半衰期是14.3天.

[解] 根据放射性衰变规律

$$N=N_0e^{-\lambda t},\quad \lambda=\frac{\ln 2}{T}$$

因放出的β粒子数是衰变原子核数，所以有

$$dN=N_0-N=N_0(1-e^{-\lambda t})$$

式中：$N_0=\frac{6.02\times 10^{23}}{32}\times 10^{-6}\text{克}=1.882\times 10^{16}$

$t=24$ 小时，$T=14.3$ 天$=343.2$ 小时

代入上式，得

$$dN=1.882\times 10^{16}\times(1-e^{-\frac{24}{343.2}\ln 2})$$

$$=1.88\times10^{6}\times0.049=9.22\times10^{14}(\text{个})$$

在一昼夜中放出 9.22×10^{14} 个 β 粒子.

7-4. 一克镭(不考虑衰变产物)在一年内产生 0.043 厘米^3 标准状态的氦. 试计算阿伏加德罗常数(衰变常数 $\lambda=1.36\times10^{-11}$ 秒$^{-1}$).

[解] 衰变方程为

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra}\longrightarrow{}^{222}_{86}\mathrm{Rn}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

一克镭所含的粒子数为

$$N_0=\frac{1}{226\times1.66\times10^{-24}}=2.665\times10^{21}$$

在一年内衰变了的镭核的数目为 dN(也就是产生的氦核的数目).

$$dN=N_0-N=N_0(1-e^{-\lambda t})$$

已知 $\lambda=1.36\times10^{-11}$秒$^{-1}$ $t=3.15\times10^{7}$ 秒

代入上式得

$$dN=2.665\times10^{21}\times(1-e^{-1.36\times10^{-11}\times3.15\times10^{7}})$$

$$=1.141\times10^{18}$$

标准状况下,1 克分子的任何气体的体积都是 22.4 升

$$\therefore N_A=\frac{dN\times22.4\times100}{V_{He}}$$

$$=\frac{1.141\times10^{18}\times22.4\times1000}{0.043}=6.02\times10^{23}$$

7-5. 放射性单位居里相应于 1 克镭在 1 秒钟内的衰变数,如果知道镭的半衰期等于 1620 年,试求出这个数.

[解] 1 克纯镭和它的子体氡(Rn)达到平衡时,氡的每秒衰变数定义为 1 居里.

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra}\xrightarrow[T_1=1620\text{年}]{\alpha}{}^{222}_{86}\mathrm{Rn}\xrightarrow[T_2=3.82\text{天}]{\alpha}{}^{218}_{84}\mathrm{Po}$$

当达到平衡时,$\lambda_1N_1=\lambda_2N_2$

1 克纯镭所含的原子数为

$$N_1=\frac{6.024\times10^{23}}{226}=2.66\times10^{21}$$

$$\lambda_1=\frac{\ln2}{T_1}=\frac{0.693}{1620\times24\times365\times3600}=1.36\times10^{-11}(\text{秒}^{-1})$$

$$\lambda_2=\frac{\ln2}{T_2}=\frac{0.693}{3.82\times24\times3600}=2.10\times10^{-6}(\text{秒}^{-1})$$

得 $$N_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}N_1=\frac{1.36\times10^{-11}}{2.10\times10^{-6}}\times2.66\times10^{21}\approx1.76\times10^{16}$$

每秒钟氡原子的衰变数为

$$-\frac{dN_2}{dt}=\lambda_2N_2=2.10\times10^{-6}\times1.76\times10^{16}$$

$$\approx3.7\times10^{10}(\text{次}/\text{秒})$$

因此 1 居里$=3.7\times10^{10}$次/秒核衰变.

7－6. 用 5 克镭衰变而积累的氡，每隔 48 小时提取一次，每次能提取多少毫克的氡(氡也是放射性的)?

[解] $^{226}_{88}\mathrm{Ra}\xrightarrow{\alpha}{}^{222}_{86}\mathrm{Rn}\xrightarrow{\alpha}{}^{218}_{84}\mathrm{Po}$

已知$^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ 的半衰期 $T_1=1620$ 年. $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ 半衰期是 $T=3.82$ 天. 所以有 $T_1\gg T_2$；因此是久期平衡的问题.

设 N_1 及 N_2 分别为 t 时刻母核数与子核数，N_{10}为 $t=0$ 时的母核数，λ_1 及 λ_2 分别为它们的衰变常数，因此有

$$N_2=\frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_2}(1-e^{-\lambda_2t})$$

$$\lambda_1=\frac{\ln2}{T_1}=\frac{0.693}{1620\times365}=1.172\times10^{-6}/\text{天}$$

$$\lambda_2=\frac{\ln2}{T_2}=\frac{0.693}{3.82}=0.1814/\text{天}$$

$$N_{10}=\frac{6.024\times10^{23}\times5}{226}=1.332\times10^{22}$$

$$t=48\text{小时}=2\text{天}$$

将各已知量代入 N_2 的表示式，得

$$N_2 = \frac{1.172 \times 10^{-6}}{0.1814} \times 1.332 \times 10^{22} \times (1 - e^{-0.1814 \times 2})$$

$$= 2.6016 \times 10^{15}$$

每次提取氡的数量用 m 表示，则有

$$m = 2.6016 \times 10^{16} \times \frac{222}{6.024 \times 10^{23}} \times 10^3$$

$$= 9.587 \times 10^{-3}(\text{毫克})$$

7－7. 一块铀矿石经分析，是铀(^{238}U)及铅(^{206}Pb)的混合物，其中铅(^{206}Pb)的含量是27%(重量比)，问这块矿石的年龄是多少年？

[解] 铀(^{238}U)是铀系的第一个元素，经过一系列的衰变最后成为稳定元素$^{206}_{82}Pb$. 若 N_{Pb}为^{206}Pb 的原子数，N_U 是^{238}U 的原子数，则有

$$N_{Pb} = N_{0U} - N_U - \sum_i N_i$$

式中：N_0 是 $t=0$ 时^{238}U 的原子数；$\sum N_i$ 是所有^{238}U 放射性子体的原子数的总和. 如果 t 很大(在10亿年以上)则 $\sum_i N_i \ll N_{Pb}$，因此有

$$N_{Pb} = N_{0U} - N_U$$

而 $N_U = N_{0U}e^{-\lambda t}$

因此可得

$$N_{Pb} = N_U e^{\lambda t} - N_U = N_U(e^{\lambda t} - 1)$$

$$N_{Pb}/N_U = e^{\lambda t} - 1$$

由此可求得矿石的年龄

$$t = \frac{\ln\left(\frac{N_{Pb}}{N_U} + 1\right)}{\lambda}$$

将 N_{Pb}/N_u 换成重量比，即

$$\frac{m_{Pb}}{m_U}=\frac{206N_{Pb}}{238N_U}=\frac{27}{73}$$

$$\frac{N_{Pb}}{N_U}=1.15\times\frac{27}{73}=0.4273$$

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T}=\frac{0.693}{4.5\times10^9\text{ 年}}=1.5\times10^{-10}/\text{年}$$

把各已知量代入上式，得

$$t=\frac{\ln(0.4273+1)}{1.5\times10^{-10}}=2.4\times10^9\text{ 年}$$

这块矿石的年龄是 2.4×10^9 年.

7-8. 现今在天然铀矿中^{238}U含量占99.28%，^{235}U占0.72%，若假设当初这两种同位素丰度相等且在化学或物理学的变化中，同位素没有分离的情形发生，若已知^{238}U($T=4.5\times10^9$年)，^{235}U($T=7.1\times10^8$年)，试由此条件出发计算地球的年龄.

[解] 若衰变的时间为 t，根据放射性衰变定律

$$N_{235}=N_{0235}e^{-\lambda_{235}t}$$

$$N_{238}=N_{0238}e^{-\lambda_{238}t}$$

由题中假设得知，$N_{0235}=N_{0238}$

故

$$\frac{e^{-\lambda_{238}t}}{e^{-\lambda_{235}t}}=\frac{N_{238}}{N_{238}}=\frac{99.28}{0.72}=138$$

$$e^{(\lambda_{238}-\lambda_{235})t}=138$$

$$-(\lambda_{238}-\lambda_{235})t=\ln 138=4.92$$

$$\lambda_{238}=\frac{0.693}{T_{238}}=\frac{0.693}{4.5\times10^9}=1.54\times10^{-10}/\text{年}$$

$$\lambda_{235}=\frac{0.693}{T_{235}}=9.76\times10^{-10}/\text{年}$$

$$\therefore\quad t=\frac{4.92}{8.22\times10^{-10}}\approx6\times10^9\text{ 年}$$

因此地球的年龄约为 6×10^9 年，因^{235}U是一个偶奇分配的

核，而^{238}U是一个偶—偶分配的核，^{235}U最初的含量不会大于^{238}U的含量，因此地球的年龄不会超过6×10^9年.

7－9. 天然铀矿数百万年以来未曾受到化学分离，故整个$4n+2$系处于一平衡状态.

$$A^{238}U = A^{234}Th = A^{234}Pa = A^{234}U = A^{230}Th = \cdots$$

因为$A=\lambda N$ $\therefore (\lambda N)^{238}U=(\lambda N)^{234}U$

由此关系计算铀矿中预期的同位素^{234}U的丰度.

[解] $\dfrac{N_{234}}{N_{238}}=\dfrac{\lambda_{238}}{\lambda_{234}}=\dfrac{T_{234}}{T_{238}}$

查表得知：$T_{238}=4.5\times10^9$年，$T_{234}=2.5\times10^5$年

故得 $\dfrac{N_{234}}{N_{238}}=\dfrac{2.5\times10^5}{4.5\times10^9}=5.6\times10^{-5}$

因铀矿中^{238}U占99.28%，故预期同位素^{234}U在矿中的含量为0.0056%.

7-10. 从放射性母液中分离出来的放射性核素A，它的子体B也是放射性的，如果B不再从A液中分开，求B的放射性强度和时间t的关系(A和B的衰变常数分别为λ_A和λ_B，在$t=0$时，子体B为零). 在什么情况下母体和子体的强度比是恒定的.

[解] (1)设N_1和N_2分别为母体A和子体B在时间t时的原子核数，子体B在1秒内有$\lambda_B N_2$个原子核发生衰变而减少，而同时1秒内将有$\lambda_A N_1$个母体A原子核发生衰变而使B增多. 于是B原子核数目的变化率为

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_A N_1 - \lambda_B N_2$$

$\because$ $N_1=N_{10}e^{-\lambda_A t}$

式中：N_{10}为$t=0$时A的原子核数，

$$\therefore \quad \frac{dN_2}{dt}=\lambda_A N_{10}e^{-\lambda_A t}-\lambda_B N_2$$

即

$$\frac{dN_2}{dt}+\lambda_B N_2=\lambda_A N_{10}e^{-\lambda_A t}$$

此方程对应的齐次方程解为 $N_2^1=Ce^{-\lambda_B t}$，令其特解为 $N_2^1=C'e^{-\lambda_A t}$ 代入原方程有

$$-C'\lambda_A e^{-\lambda_A t}=\lambda_A N_{10}e^{-\lambda_A t}-\lambda_B C'e^{-\lambda_A t}$$

得 $$C'=\frac{\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}N_{10}$$

$$\therefore\quad N_2=N_2'+N_2''=Ce^{-\lambda_B t}+\frac{\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}N_{10}e^{-\lambda_A t}$$

由初始条件 $t=0$ 时，$N_{20}=0$，所以有

$$C=-\frac{\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}N_{10}$$

$$\therefore\quad N_2=\frac{\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}N_{10}(e^{-\lambda_A t}-e^{-\lambda_B t})$$

(2)当母体 A 的半衰期 T_A 大于子体 B 的半衰期 T_B 时，也即 $\lambda_B>\lambda_A$ 时，母体与子体的强度比才可能有恒定值. 事实上

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{N_{10}e^{-\lambda_A t}}{\frac{\lambda_A}{\lambda_B-\lambda_A}N_{10}(e^{-\lambda_A t}-e^{-\lambda_B t})}=\frac{\lambda_B-\lambda_A}{\lambda_A}\cdot\frac{1}{[1-e^{-(\lambda_B-\lambda_A)t}]}$$

因为 $\lambda_B>\lambda_A$，所以当 $(\lambda_B-\lambda_A)t\gg 1$ 时

$$e^{-(\lambda_B-\lambda_A)t}\simeq 0$$

则有 $$\frac{N_1}{N_2}=\frac{\lambda_B-\lambda_A}{\lambda_A}$$

7-11. 同位素 A_1 的原子核进行放射性衰变时形成放射性同位素 A_2，它们的衰变常数等于 λ_1 和 λ_2. 假定在开始时，制剂仅含有同位素 A_1 的原子核，数量为 N_{10}，试确定：(a)经过时间间隔 t 之后，同位素 A_2 的原子核数；(b)同位素 A_2 的原子核数达到最大的时间间隔；(c)在何情况下，能达到动平衡状态？在此状态时两种同位素的数量的比值将是不变的，这个比值等于什么？

[解] (a)A_1 核单位时间的衰变数为

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1 N_1 \qquad (1)$$

$\lambda_1 N_1$ 是 A_2 核单位时间的增长数，同时 A_2 核单位时间的衰变数为

$\lambda_2 N_2$，因此 A_2 数目的变化率为

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \tag{2}$$

而 A_1 的核数 N_1 由下式给出

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

则(2)式为 $$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

考虑到初始条件，$t=0$ 时，$N_{20}=0$

∴ 方程(2)的解为

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \tag{3}$$

N_2 是 A_2 核的数目，它的变化不仅与子体 A_2 的衰变常数 λ_2 有关，而且还与母体 A_1 的衰变常数 λ_1 有关.

(b)同位素 A_2 的原子核数目达到最大时

$$\frac{dN_2}{dt} = 0, \frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0$$

得 $$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{e^{-\lambda_2 t}}{e^{-\lambda_1 t}}$$

取对数得 $$\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = (\lambda_1 - \lambda_2)t$$

$$\therefore \quad t_{max} = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(c)为使比值 N_1/N_2 保持不变，N_1 和 N_2 应该以相同的方式依赖时间. 这仅在 $e^{-\lambda_2 t} \ll e^{-\lambda_1 t}$ 的情况下才是可能的. 为满足该不等式，必须有 $\lambda_1 \ll \lambda_2$，且时间间隔 t 远大于较稳定同位素的平均寿命时，$e^{-\lambda_2 t} \longrightarrow 0$. 故有

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

$$\therefore \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

7-12. 同位素^{112}Pd进行β衰变时，产生β放射性的同位素^{112}Ag. 它们的半衰期分别等于 21 小时和 3.2 小时. 若在开始时该制剂仅含有第一种放射性同位素，试求第二种同位素的最大放射性与制剂的初始放射性的比率.

[解] 这是母体与子体共存的衰变链，因此可应用公式

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

若第二种同位素的最大放射性用 A_{2max}表示，则 A_{10}表示第一种同位素初始时刻的放射性.

$$A_{10} = \lambda_1 N_{10}, \quad A_{2max} = \lambda_2 N_2$$

因此有 $$\frac{A_{2max}}{A_{10}} = \frac{\frac{\lambda_2 \lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t_{max}} - e^{-\lambda_2 t_{max}})}{\lambda_1 N_{10}}$$

$$\therefore \quad \frac{A_{2max}}{A_{10}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t_{max}} - e^{-\lambda_1 t_{max}})$$

式中 $t_{max} = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$

$$T_1 = 21 \text{ 小时}, \quad T_2 = 3.2 \text{ 小时}$$

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1} = 0.033/\text{ 小时}$$

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_2} = 0.216/\text{ 小时}$$

$$t_{max} = \frac{-1.878}{0.37 - 0.216} = \frac{-1.881}{-0.183} = 10.24 \text{ 小时}$$

$$\therefore \quad \frac{A_{2max}}{A_{10}} = \frac{0.216}{0.183}(e^{-0.033 \times 10.24} - e^{-0.216 \times 10.24})$$

$$= \frac{0.216}{0.183} \times 0.604 = 0.7$$

7-13. 激发能 $E=129$ 千电子伏特的自由的^{191}Ir 核发射 γ 量子而过渡到基态，试求由于核反冲引起的 γ 量子能量的相对变化.

[解] 在一般情况下，可应用 $E_r = E_i - E_f$ 来表示 γ 光子的能

量. 式中：E_i 为衰变前的原子核能量，E_f 为衰变后的原子核能量. $E_i=129$ 千电子伏，$E_f=0$. 所以，$E_\gamma=129\times10^3$ 电子伏. 因核反冲引起的 γ 光量子能量的变化量为 $\Delta h\nu$.

$$\Delta h\nu=E_R=\frac{E_\gamma^2}{2m_Rc^2}\text{，}\quad m_R\text{ 为核的质量}$$

相对变化为 $\dfrac{\Delta h\nu}{h\nu}=\dfrac{\dfrac{E_\gamma^2}{2m_Rc^2}}{E_\gamma}=\dfrac{E_\gamma}{2m_Rc^2}$

将已知值代入得 $\dfrac{\Delta h\nu}{h\nu}=\dfrac{129\times10^3}{382\times931.5\times10^6}=3.6\times10^{-7}$

7-14. 激发能为 103 千电子伏的同质异能核 $^{81}Se^m$，发射一个 γ 光子而达到基态，试求反冲核的速度.

[解] γ 光子的能量为

$$E_\gamma=E_i-E_f-E_R$$

式中：E_R 是反冲核的能量.

根据题意，$E_i-E_f=103\times10^3$ 电子伏，与 E_R 比较，有

$$E_i-E_f\gg E_R$$

因此在一般情况下，可视 $E_\gamma=103\times10^3$ 电子伏. 反冲核的能量为

$$E_R=\frac{1}{2}m_Rv_R^2=\frac{E_\gamma^2}{2m_R3c^2}$$

∴ 反冲核的速度为

$$v_R=\frac{E_\gamma}{m_Rc}$$

为计算方便可写为 $v_R=\dfrac{E_\gamma c}{m_Rc^2}$ 将各已知量代入得

$$v_R=\frac{103\times10^3\times3\times10^8}{81\times931.5\times10^6}=0.41\times10^3\text{ 米/秒}$$

7-15. 设质量数为 A 的静止原子核放出一个能量为 $h\nu$ 的光子，且为另一个相应的静止核所吸收，试求辐射核的能级差及吸收核所获得的内能.

[解]若 A 核只放出一个能量为 $h\nu$ 的光子，则子核的动量和 γ 光子的动量大小相等方向相反，因此有

$$m_R v_R = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

由此得 $v_R = \frac{h\nu}{m_R c}$.

故反冲核的动能为 $\frac{1}{2} m_R v_R^2 = \frac{(h\nu)^2}{2m_R c^2}$

根据能量守恒，A 核的能级差 ΔE 为光子的能量与反冲核的动能之和.

$$\Delta E = h\nu + \frac{h^2\nu^2}{2m_R c^2} = h\nu(1 + \frac{h\nu}{2m_R c^2})$$

当相同的原子核吸收光子时，由子动量守恒，也得到速度 $v = \frac{h\nu}{m_R c}$，其动能同样是 $\frac{h^2\nu^2}{2m_R c^2}$.

∴吸收核所得到的内能应为光子的能量和核的动能之差.

$$\Delta E' = h\nu - \frac{h^2\nu^2}{2m_R c^2} = h\nu(1 - \frac{h\nu}{2m_R c^2})$$

7-16 γ 量子源位于吸收体上方，并相距 20.0 米，试问源必须以多大的速度向上运动，才能在吸收体所在处完全补偿由地球重力所引起的 γ 量子能量的引力变化？

[解] 庞德和里卜卡在 1960 年的实验表明光子具有引力质量，而且引力质量等子惯性质量，$M = h\nu/c^2$. 引力质量为 M 的光子竖直下落距离 L 时，它应该获得 MgL 的能量.

设光子原来具有的能量为 $h\nu$，当光子下落 L 距离之后，它的能量将增加 MgL. 所以它在地面上的能量为 $h\nu = h\nu + MgL$.

因为 $h\nu' = h\nu + mc^2$，如果惯性质量与引力质量相等，我们就能用 $h\nu/c^2$ 代替上式中的 M，而得到

$$h\nu' = h\nu + h\nu \cdot \frac{gL}{C^2}$$

整理后得 $$\frac{\nu'-\nu}{\nu}=\frac{gL}{C^2}$$

上式就是频率的相对变化. 为了补偿因地球重力场所引起的 γ 光子能量的引力变化，必须使源向上运动，其运动速度可根据多卜勒效应

$$\nu=\nu' C/(C-v)$$

得 $$v=\frac{\nu'-\nu}{\nu}\cdot C=\frac{gL}{C^2}\cdot C=\frac{gL}{C}$$

将各已知值代入

$$v=\frac{980.616\times 2000}{3\times 10^{10}}=6.53\times 10^{-5}\text{ 厘米/秒}$$

7-17. ^{225}Ac 核放出动能 $T_\alpha=5.8$ 兆电子伏的 α 粒子(没有继续衰变的产物)，试确定 1 克^{225}Ac 制剂在等于这种核平均寿命时期内放出的热量.

[解] 放射性原子核的衰变规律为

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

当 $t=\tau$ 时(τ 是平均寿命，$\tau=\frac{1}{\lambda}$)，上式为

$$N=N_0e^{-\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}=\frac{N_0}{e}$$

放射性原子核的 α 衰变能为

$$Q_\alpha=\frac{A}{A-4}T_\alpha$$

则 1 克^{225}Ac 制剂在等于这种核平均寿命的时期内放出的能量为

$$\begin{aligned}Q&=N_0Q_\alpha-NQ_\alpha\\&=\frac{N_A}{A}\cdot\frac{A}{A-4}T_\alpha-\frac{N_A}{A}\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{A}{A-4}T_\alpha\\&=\frac{N_AT_\alpha}{A-4}\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

式中 N_A 为阿伏加德罗常数. 将各已知值代入上式，得

$$Q=\frac{6.024\times5.8\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}{(225-4)\times4.18}\left(1-\frac{1}{2.7}\right)$$

$$=3.82\times10^{5}\text{ 千卡}$$

7-18. 氡^{222}Rn 的半衰期为 $T_{1/2}=3.8$ 天，衰变时放出能量为 $T_{\alpha}=5.5$ 兆电子伏的 α 粒子，试确定质量为 $m=10$ 毫克的这种制剂（没有继续衰变的产物）在下列时间内所放出的热量是多少？(1)1 秒；(2)半衰期.

[解] 根据题设已知条件：

(1)在单位时间内衰变的原子核数目$\frac{dN}{dt}$正比于当时未衰变的原子核数目 N，写为

$$-\frac{dN}{dt}=\lambda N$$

$$=\frac{\ln2}{T_{1/2}}N_{0}\exp\left(-\frac{\ln2}{T_{1/2}}t\right)$$

式中 $N_{0}=\frac{N_{A}}{A}\cdot m$ 代入上式，得

$$-\frac{dN}{dt}=\frac{N_{A}m\ln2}{AT_{1/2}}\cdot\exp\left(-\frac{\ln2}{T_{1/2}}t\right)$$

放射性核的 α 衰变能为

$$Q_{\alpha}=\frac{A}{A-4}T_{\alpha}$$

因此在一秒内这种制剂所放出的热量为

$$Q=\frac{N_{A}m\ln2\cdot T_{\alpha}}{T_{1/2}(A-4)}\cdot\exp\left(-\frac{\ln2}{T_{1/2}}\right)$$

$$=\frac{6.024\times10^{23}\times10^{-7}\times0.693\times5.5\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}{3.8\times24\times3600(222-4)\times4.18}$$

$$\times\exp\left(-\frac{0.693}{3.80\times24\times3600}\right)$$

$$=10.66\text{ 卡}$$

(2)在等于半衰期 $T_{1/2}$的时间内这种制剂所放的热量为

$$Q=\frac{1}{2}N_0Q_\alpha=\frac{N_A\cdot m\cdot T_\alpha}{2(A-4)}$$

$$=\frac{6.024\times10^{23}\times10^{-2}\times5.5\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}{2\times218\times4.18}$$

$$=2098\text{ 千卡}$$

7-19. 已知放射性同位素^{219}Rn 进行 α 衰变

$$^{219}_{86}\mathrm{Rn}\longrightarrow{}^{215}_{84}\mathrm{Po}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

放出的α粒子的能量分别是6.82兆电子伏，6.55兆电子伏和 6.43 兆电子伏，子核一为基态，另外两个是激发态. 求子核由激发态回到基态时放出的 γ 光子的能量. 并画出子核的能级图.

[解] 当$^{219}_{86}$Rn 放出 α_0 时(最大动能)，它衰变到$^{215}_{84}$Po 的基态，这时放出的衰变能为

$$Q_{\alpha_0}=\frac{A}{A-4}T_{\alpha_0}$$

$$=\frac{219}{219-4}\times6.82\text{ 兆电子伏}$$

$$=6.95\text{ 兆电子伏}$$

当$^{219}_{86}$Rn 放出 α_1 时，它衰变到$^{215}_{84}$Po 的第一激发态，这时放出的衰变能为

$$Q_{\alpha_1}=\frac{A}{A-4}T_{\alpha}$$

$$=\frac{219}{219-4}\times6.55\text{ 兆电子伏}$$

$$=6.67\text{ 兆电子伏}$$

当$^{219}_{86}$Rn 放出 α_2 时，它衰变到$^{215}_{84}$Po 的第二激发态，这时放出的衰变能为

$$Q_{\alpha_2}=\frac{A}{A-4}T_{\alpha_2}$$

$$=\frac{219}{215}\times6.43\text{ 兆电子伏}$$

$= 6.55$ 兆电子伏

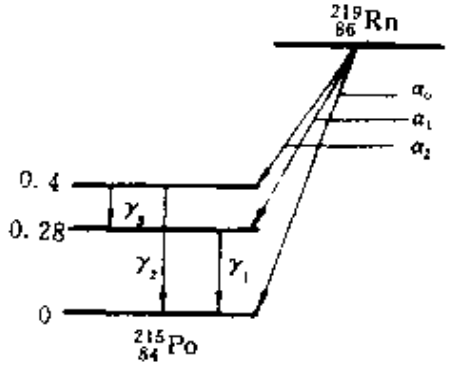
γ 射线的能量等子相应的 α 衰变能之差. 因此有

$E_{\gamma_1} = 6.95$ 兆电子伏 $- 6.67$ 兆电子伏 $= 0.28$ 兆电子伏

$E_{\gamma_2} = 6.95$ 兆电子伏 $- 6.55$ 兆电子伏 $= 0.40$ 兆电子伏

$E_{\gamma_3} = 6.67$ 兆电子伏 $- 6.55$ 兆电子伏 $= 0.12$ 兆电子伏

$^{215}_{84}$Po 核的能级图为



例题 7-19 用图

7-20. ^{212}Po 核衰变时，发射出四组 α 粒子：能量是 8.780 兆电子伏的基本组和能量是 9.492；10.422；10.543 兆电子伏的长射程组. 若已知在所有情形下子核都直接到达基态，试计算并画出 ^{212}Po 核的能级图.

[解] 由题设可知，母核与子核的能量差有四个值，这只能是母核的能量有四个值，或子核的能量有四个值的结果.

究竟是母核有四个能级，还是子核有四个能级，这要从射线的相对强度来分析，射线的强度决定于产生跃迁的原子核. 大量原子核在不同能级上的分布，服从玻尔兹曼能量分布律，即处于较低能级的原子核数目，多于较高能级的原子核数目. 如果母核处于四个能级，而子核处于一个能级，由于母核在较低能级上的数目多，产生跃迁的几率也必然大，因而能量较小的 α 粒子的数目要多于较大能量的 α 数. 反之，则是能量较大的 α 粒子数较多. 根据题意，能量为 8.780 兆电子伏的一组是基本组，这是四组 α 粒子中能量最

低的一组. 因此可以断定母核可以处于四个不同的能级.

^{212}Po 衰变方程为

$$^{212}_{84}\mathrm{Po} \longrightarrow {}^{208}_{82}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} + Q_\alpha$$

衰变能为

$$Q_\alpha = \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_{Pb}}\right) T_\alpha$$

$$\text{或 } Q_\alpha = \frac{A}{A-4} T_\alpha$$

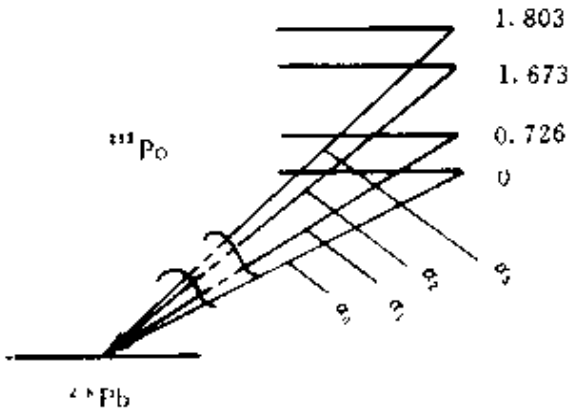
$$\therefore \quad Q_{\alpha_0} = \frac{212}{208} \times 8.780 \text{ 兆电子伏} = 8.949 \text{ 兆电子伏}$$

$$Q_{\alpha_1} = \frac{212}{208} \times 9.492 \text{ 兆电子伏} = 9.675 \text{ 兆电子伏}$$

$$Q_{\alpha_2} = \frac{212}{208} \times 10.422 \text{ 兆电子伏} = 10.622 \text{ 兆电子伏}$$

$$Q_{\alpha_3} = \frac{212}{208} \times 10.543 \text{ 兆电子伏} = 10.745 \text{ 兆电子伏}$$

^{212}Po 核的能级图如下：



例题 7-20 用图

7-21. 计算 α 粒子对于 $^{20}_{10}\mathrm{Ne}$，$^{112}_{50}\mathrm{Sn}$，$^{238}_{92}\mathrm{U}$ 核的库仑势垒高度，设 $r_0 = 1.45$ 费米.

[解] α 粒子对核的库仑势垒高度为

$$V_c(R)=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0(A_N^{1/3}+A_\alpha^{1/3})}$$

α粒子对$^{20}_{10}$Ne核的库仑势垒高度为

$$V_c(R)=\frac{2\times10\times(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1.45\times10^{-15}(20^{1/3}+4^{1/3})}$$

$=4.6$ 兆电子伏

α粒子对$^{112}_{50}$Sn核的库仑势垒高度为

$$V_c(R)=\frac{2\times50\times(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1.45\times10^{-15}(112^{1/3}+4^{1/3})}$$

$=15.5$ 兆电子伏

α粒子对$^{238}_{2}$92U核的库仑势垒高度为

$$V_c(R)=\frac{2\times92\times(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1.45\times10^{-15}(238^{1/3}+4^{1/3})}$$

$=24.3$ 兆电子伏

由以上计算可知，由于库仑势垒的存在，而且重核的库仑势垒较轻核的库仑势垒要大一些，因此能量为4—9兆电子伏的α粒子不能进入重核.

7-22. 只有几个兆电子伏能量的α粒子，能够离开具有几十兆电子伏深度的势阱，这一事实可以用隧道效应加以解释.

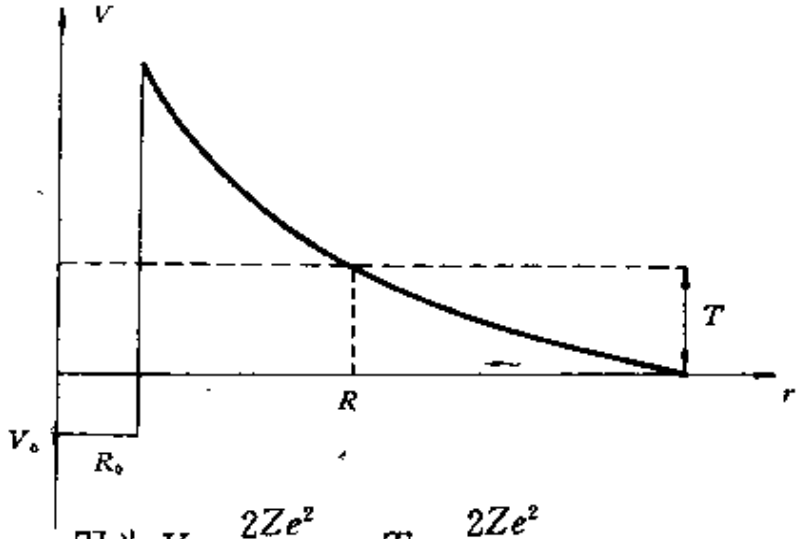
试利用一简单模型

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & r<R_0\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Ze^2}{r} & r>R_0\end{cases}$$

计算该势垒的伽莫夫(Gamaw)因子，即能量为T的α粒子通过这势垒的透射几率，将结果用α粒子的末速度表示出来，并估算α放射核的平均寿命.

[解] 根据题意，α粒子与原子核的作用势如图所示：α粒子穿透R_0到R厚的势垒几率为

$$P=\exp\left[-2\int_{R_0}^{R}\sqrt{\frac{2m(V-T)}{\hbar^2}}\mathrm{d}r\right]$$



因为 $V=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$；　$T=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

得 $P=\exp\left\{-2\left(\frac{2mT}{\hbar^2}\right)^{1/2}\int_{R_0}^{R}\left(\frac{R}{x}-1\right)^{1/2}\mathrm{d}r\right\}$

$=\exp\left\{-2\left(\frac{2mT}{\hbar^2}\right)^{1/2}R\left[\arccos\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}-\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\left(1-\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\right]\right\}$

由于势垒相当宽 $R\gg R_0$，而且

$$\arccos\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\approx\frac{\pi}{2}-\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}$$

$$\left(1-\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\approx 1$$

∴有 $P=\exp\left\{-2\left(\frac{2mT}{\hbar^2}\right)^{1/2}R\left[\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}\right]\right\}$

以 $R=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 T}$　代入上式，得

$$P=\exp\left[\frac{4e}{\hbar}\left(\frac{m}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}(ZR_0)^{1/2}-\frac{e^2}{\hbar\,\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}ZT^{1/2}\right]$$

令 $T=\frac{1}{2}mv^2$，v 是 α 粒子在离原子核很远距离 r 处的速度，该处 $V(r)=0$

代入上式得

$$P=\exp\left[\frac{4e}{\hbar}\left(\frac{m}{\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}(ZR_0)^{1/2}-\frac{e^2}{\hbar\,\varepsilon_0}\cdot\frac{Z}{v}\right]$$

这就是用 α 粒子来速度表示的透射几率.

α 发射核平均寿命 τ 可利用 P，由以下直观的论证加以估算.

将 α 粒子想象为以速度 v_i 和动能

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = E + V_0 \approx V_0$$

在核内自由运动的经典粒子. 由于 α 粒子被限制在半经为 R_0 的原子核内，它必将和势垒碰撞. 每单位时间相碰 $v_i/2R$ 次. 现在每次碰撞贯穿势垒的几率是 P，因而每单位时间内 α 粒子离开原子核的几率是

$$\frac{v_i}{2R_0} \cdot P = \frac{1}{\tau}$$

式中：τ 是 α 发射核的平均寿命.

利用 P 的公式，得

$$\ln\tau = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{2R_0^2m}{V_0} - \frac{4e}{\hbar}\left(\frac{m}{\pi\epsilon_0}\right)^{1/2}(ZR_0)^{1/2}\right) + \frac{Ze^2}{\hbar\,\epsilon_0}\cdot\frac{1}{v}$$

这一关系通过在大距离处 α 粒子的速度 v 和核半径 R_0，给出 α 发射核的平均寿命 τ 的估算值. 它和实验值能很好地符合.

7-23. 已知 ^{32}P 核进行 β^- 衰变，其结果使子核直接达到基态，试确定 β 粒子的最大动能和相应的子核动能.

[解] ^{32}P 核进行 β^- 衰变，即

$$^{32}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \bar{\nu}$$

β 粒子的最大动能近似等于衰变能，因此有

$$Q_{\beta^-} = (M_z - M_{z+1})c^2$$

$$M_p = 31.98409\mathrm{u}, M_s = 31.98224\mathrm{u},$$

将已知值代入方程得

$$Q_{\beta^-} = (31.98409 - 31.98224) \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$
$$= 1.723 \text{ 兆电子伏}$$

实际上在β衰变中放出的衰变能应由子核、β粒子和中微子三者分摊.当β粒子有最大动能时,中微子动能可视为0,而子核的反冲能在前面的计算中亦忽略不计,如计及子核的反冲能,即子核得到的能量,则要考虑到在β粒子以一定的动量 p 发射时,将给原子核以反冲,使原子核获得相反方向的动量,大小也是 p,与 p 相对应原子核获得一反冲能 T_R.β粒子的最大动能用衰变能 Q_{β^-} 代替,则β粒子的总能量为 $E^2=c^2p^2+(m_0c^2)^2$

即 $$(Q_{\beta^-}+m_0c^2)^2=c^2p^2+(m_0c^2)^2$$

$$Q_{\beta^-}^2+2Q_{\beta^-}m_0c^2=p^2c^2$$

得

$$p^2=\frac{Q_{\beta^-}(Q_{\beta^-}+2m_0c^2)}{c^2}$$

反冲动能 T_R 可写为

$$T_R=\frac{p^2}{2M}=\frac{Q_{\beta^-}(Q_{\beta^-}+2m_0c^2)}{2Mc^2}$$

即是子核得到的动能.

将各已知值代入得

$$T_R=\frac{1.723(1.723+2\times0.511)}{2\times32\times931.5}=79.3\text{ 电子伏}$$

7-24. ^{11}C 核进行 β^+ 衰变,其结果使子核直接达到基态.试确定 β^- 粒子的最大动能和相应的子核动能.

[解] ^{11}C 核的 β^+ 衰变为

$$^{11}_{6}\text{C}\longrightarrow{}^{11}_{5}\text{B}+{}^{0}_{+1}\text{e}+\nu$$

β^+ 粒子的最大动能近似等于衰变能,即

$$T_{\beta^+}=Q_{\beta^+}=(M_x-M_{x-1}-2m_0)c^2$$

$$=(11.011431-11.009305)\times931.5\text{ 兆电子伏}$$

$$-1.022\text{ 兆电子伏}$$

$$=0.96\text{ 兆电子伏}$$

子核的动能为(利用上题结果)

$$T_R = \frac{Q_{\beta^+}(Q_{\beta^+} + 2m_0c^2)}{2Mc^2}$$

$$= \frac{0.96(0.96 + 2 \times 0.511)}{2 \times 11 \times 931.5}$$

$$\doteq 93 \text{ 电子伏}$$

7-25. ^{11}C 核进行 β^+ 衰变,其结果使子核直接到达基态. 如果子核不受到反冲,试计算正电子和中微子的能量值各为多少?

[解] ^{11}C 核进行 β^+ 衰变为

$$^{11}C \longrightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{0}_{+1}e + \nu$$

衰变能为

$$Q_{\beta^+} = (M_x - M_{x-1} - 2m_0)c^2$$

$$= (11.011431 \quad 11.009305) \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$

$$- 1.022 \text{ 兆电子伏}$$

$$= 0.96 \text{ 兆电子伏}$$

用 T_{β^+} 及 T_ν 分别表示正电子的能量及中微子的能量,用 p_{β^+} 及 p_ν 分别表示正电子的动量及中微子的动量. 在衰变过程中,若核无反冲,根据能量守恒、动量守恒,有

$$Q_{\beta^+} = T_{\beta^+} + T_\nu$$

$$p_{\beta^+} = -p_\nu$$

由 $p_{\beta^-} = \frac{\sqrt{T_\beta(T_\beta - 2m_0c^2)}}{c}$, $p_\nu = \frac{T_\nu}{c}$

得 $\frac{\sqrt{T_\beta(T_\beta - 2m_0c^2)}}{c} = \frac{T_\nu}{c}$

将 $T_\beta = (Q_{\beta^+} - T_\nu)$ 代入方程,整理后得

$$Q_{\beta^+}^2 + 2m_0c^2 \cdot Q_{\beta^+} = T_\nu(2Q + 2m_0c^2)$$

$$\therefore \quad T_\nu = \frac{Q_{\beta^+}^2 + 2m_0c^2 \cdot Q_{\beta^+}}{2Q_{\beta^+} + 2m_0c^2}$$

$$= \frac{(0.96)^2 + 2 \times 0.511 \times 0.96}{2 \times 0.96 + 2 \times 0.511}$$

$$= 0.647 \text{ 兆电子伏}$$

$$T_\beta = (Q_{\beta^+} - T_\nu) = 0.96 - 0.647 = 0.313 \text{ 兆电子伏}$$

7-26. 在高层大气中，由于气层外的高能辐射对空气的作用而形成同位素^{14}C($T_{1/2}=5730$ 年). 它发射一个能量为 0.156 兆电子伏的 β 粒子，求具有这一能量的 β 粒子的速度. 不要忽略相对论效应.

[解] 在考虑相对论效应的情况下，β 粒子的动量为

$$p_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

式中：v 是 β 粒子的速度.

β 粒子的能量为 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$

可写为

$$(T_e + m_0 c^2)^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

得 $$c^2 p^2 = T_e^2 + 2 m_0^2 c^4 \cdot T_e$$

$$c^2 m_0^2 v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(T_e^2 + 2 m_0^2 c^4 \cdot T_e)$$

经整理后，得

$$v = c \cdot \sqrt{\frac{(T_e^2 + 2 m_0^2 c^2 \cdot T_e)}{(T_e^2 + 2 m_0^2 c^4 \cdot T_e) + m_0^2 c^4}}$$

$$= 0.64c$$

式中：c 为真空中光速.

7-27 放射性同位素^{24}Na核进行 β^- 衰变，放出最大动能为 1.38 兆电子伏的 β 粒子，同时还有能量为 1.38 兆电子伏和 2.78 兆电子伏的 γ 光子放出. 试求其衰变能及子核的能级.

[解] ^{24}Na 进行 β^- 衰变，可写为

$$^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + ^{0}_{-1}\text{e} + \nu$$

其衰变能为

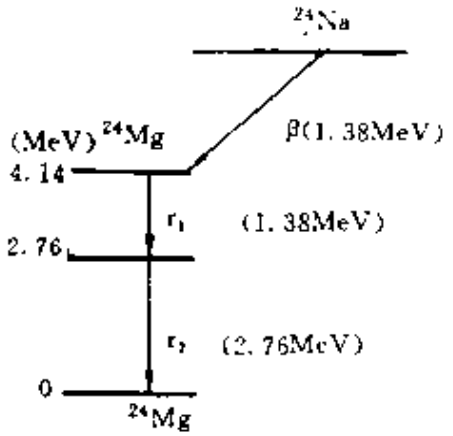
$$Q_\beta = [M_z - M_{z+1}]c^2$$

$$= (23.990967-23.985045) \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$

$$= 5.52 \text{ 兆电子伏}$$

而β粒子的最大能量是 1.38 兆电子伏，这说明^{24}Na 核经 β^- 衰变后，子核^{24}Mg 处于激发态，可写为$^{24}Mg^*$. β 衰变的衰变能与 β 粒子的最大动能之差为 5.52－1.38＝4.14 兆电子伏恰好是两种 γ 光子的能量之和. 因此子核要放出一个能量为 1.38 兆电子伏的 γ 光子之后，再放出一个能量为 2.76 的 γ 光子方能到达基态.

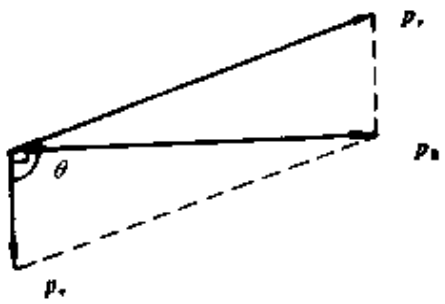
其衰变图如下：



例题 7-27 用图

7-28. ^{6}He 核进行 β^- 衰变，其结果使子核直接到达基态. 衰变能 $Q_\beta = 3.50$ 兆电子伏，若动能 $T_e = 0.60$ 兆电伏的电子以与反冲核的方向成直角飞出去，试问与电子飞出方向成多大的角度发射出中微子？

[解] 当^{6}He 核进行 β^- 衰变时，电子与反冲核的运动方向成直角飞出. 这时反冲核的动量 p_R 与电子动量 p_e 及中微子动量 p_ν 的矢量图如图所示：



例题 7-28 用图

若 p_e 与 p_ν 的夹角为 θ，则有

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{p_e}{p_\nu}$$

$$\pi-\theta=\arccos\frac{p_e}{p_\nu}$$

$$\therefore\ \theta=\pi-\arccos\frac{p_e}{p_\nu}$$

已知衰变能为 Q_β=3.50 兆电子伏，T_e=0.6 兆电子伏.

$$Q_\beta=T_e+T_\nu+T_R$$

因为 T_e，T_ν 比 T_R 大很多，可略去 T_R. 则

$$Q_\beta=T_\beta+T_\nu$$

$$p_e=\frac{\sqrt{T_e(T_e+2m_0c^2)}}{c}$$

$$p_\nu=\frac{T_\nu}{c}=\frac{(Q_\beta-T_e)}{c}$$

$$\therefore\quad p_e/p_\nu=\frac{\sqrt{T_e(T_e+2m_0c^2)}}{(Q_\beta-T_e)}$$

$$=\frac{\sqrt{(0.6)^2+0.6\times1.022}}{3.50-0.60}=0.3356$$

$$\therefore\quad \theta=\pi-\arccos(0.3356)$$

$$\approx 110°.$$

7-29. 已知${}^{7}_{4}Be$,${}^{7}_{3}Li$,的质量分别为 $M_{Be}=7.016929u$,$M_{Li}=7.016004u$. 试根据题设条件说明${}^{7}_{4}Be$ 是通过何种衰变方式衰变至${}^{7}_{3}Li$ 的(电子质量 $M_e=0.0005486u$).

[解] ${}^{7}_{4}Be$ 核衰变至${}^{7}_{3}Li$,从衰变前后的核电荷数 Z 来看,这只能是 β^+ 衰变或 K 俘获.

产生 β^+ 衰变的条件为

$$M_z > M_{z-1} + 2m_0$$

所以应该有

$$7.016929u > 7.016004u + 2 \times 0.0005486u$$

得 $7.016929u \not> 7.017101u$

上式不成立,即不满足产生 β^+ 衰变的条件,所以只能是 K 俘获. 其衰变为

$${}^{7}_{4}Be + {}^{0}_{-1}e \longrightarrow {}^{7}_{3}Li + \nu$$

K 俘获过程中的衰变能为

$$\begin{aligned} Q_{EC} &= (M_z - M_{z-1})c^2 - \varepsilon_k \\ &= (7.016929 - 7.016004) \times 931.5 - \varepsilon_k \\ &= 0.86 \text{ 兆电子伏} - \varepsilon_k \end{aligned}$$

一般较轻元素的 ε_k 值为 10^2 电子伏的数量级.

$\therefore$ $Q_{EC}>0$ 满足 K 俘获的产生条件.

7-30. ${}^{64}Cu$ 能以 β^-,β^+ 及 K 俘获三种形式衰变,试求:(a)β^- 及 β^- 粒子的最大能量(子核直接到达基态). (b)当${}^{64}Cu$ 通过 K 俘获使子核直接到达基态时,求中微子的能量.

已知原子质量 ${}^{64}_{29}Cu$:63.929766u,${}^{64}Ni$:63.927967u,${}^{60}_{30}Zn$:63.929145u.

[解] (a)${}^{64}Cu$ 的 β^- 衰变为

$${}^{64}_{29}Cu \longrightarrow {}^{64}_{30}Zn + {}^{0}_{-1}e + \nu$$

β^- 粒子的最大能量等于其衰变能，因此有

$$Q_{\beta^-} = (M_z - M_{z+1})c^2$$

将各已知值代入，得

$$Q_\beta = (63.929766 - 63.929145) \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$
$$= 0.578 \text{ 兆电子伏}$$

即 β^- 粒子的最大能量是 0.578 兆电子伏.

^{64}Cu 的 β^+ 衰变为

$$^{64}_{29}\text{Cu} \longrightarrow {}^{64}_{28}\text{Ni} + {}^{0}_{+1}\text{e} + \nu$$

β^+ 粒子的最大能量等于其衰变能，因此有

$$Q_{\beta^+} = [M_z - (M_{z-1} + 2m_0)]c^2$$

将各已知值代入，得

$$Q_{\beta^+} = (63.929766 - 63.927967) \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$
$$- 1.022 \text{ 兆电子伏}$$
$$= 0.654 \text{ 兆电子伏}$$

即 β^+ 粒子的最大能量是 0.654 兆电子伏

(b) $^{64}_{29}Cu$ 的 K 俘获为

$$^{64}_{29}\text{Cu} + {}^{0}_{-1}\text{e} \longrightarrow {}^{64}_{28}\text{Ni} + \nu$$

$^{64}_{29}Cu$ 通过 K 俘获使子核直接到达基态，则中微子的能量等于其衰变能

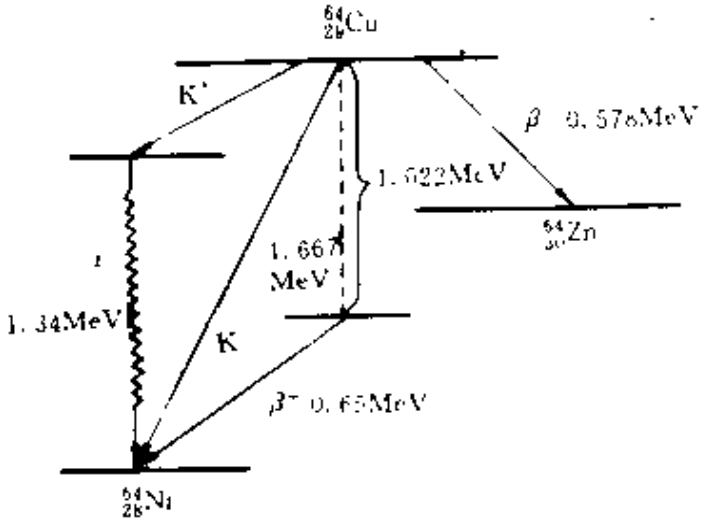
$$Q_{EC} = (M_z - M_{z-1})c^2 - \varepsilon_k$$
$$= (63.929766 - 63.927967) \times 931.5 - \varepsilon_k$$

查表得知 ^{64}Cu 的 K 电子的激发能约为 9 千电子伏.

$\therefore$ $Q_{EC} = 1.676$ 兆电子伏 $- 9$ 千电子伏 $= 1.667$ 兆电子伏.

即中微子的能量是 1.667 兆电子伏.

$^{64}_{29}$ Cu 衰变图如下图所示：



例题 7-30 用图

习　题　集

§7-1　衰变定律

7-1.　1911 年居里夫人制备的第一个国际标准镭源含^{226}Ra 16.74 毫克，到 1983 年底，此镭源还含有多少毫克^{226}Ra？平均每年减少多少毫克？

7-2.　经多少个半衰期以后，任何放射性核素的活度可以减小至原来的 30%，10%，0.1%，0.01%？

7-3.　^{60}Co 的半衰期是 5.26 年，(a)计算平均寿命和衰变常数；(b)1 克^{60}Co 样品的活性是多少(以居里为单位)？

7-4.　应用上题的数据，计算 10 居里的^{60}Co 样品的质量是多少？

7-5.　观察到放射性^{123}I 衰变规律如下：

经过时间(小时)	计数/分	经过时间(小时)	计数/分
0	99.968	25	26.448
5	77.105	30	20.789

10	58.860	35	15.567
15	44.932	40	12.246
20	34.646	45	9.163

用此表数据作曲线，并计算：(a)半衰期；衰变常数和平均寿命；(b)26 小时之后样品的活度；(c)26 小时之后放射性原子的数目.

7-6. 有一放射性强度为 100 毫居里的放射性^{32}P 制剂，求在制成后 30 天的放射性强度.

7-7. 已知^{222}Rn 的半衰期为 3.824 天，问 1 微居里和 10^3 贝克勒(Bq)的^{222}Rn 的质量分别是多少？

7-8. 已知^{210}Po 的半衰期为 138.4 天，问 1 微克的^{210}Po 的放射性活度为多秒贝克勒(Bq)？

7-9. ^{144}Pm 的半衰期为 365 天，问它的活度从 1 毫居里减少到 1 微居里需要多少时间？

7-10. 实验测得 0.1 毫克的^{239}Pu 的衰变率为 1.38×10^7 衰变/分，求^{239}Pu 的半衰期[$m(^{239}Pu)=239.6521577u$].

7-11. 1000 居里的^3H($T_{1/2}=12.33$ 年)处子标准状态时其体积为多大？

7-12. 已知天然铀中，U 与^{231}Pa 的比值为 3.05×10^6，$T_{1/2}(^{213}Pa)=3.25\times10^4$ 年，求^{235}U 的半衰期.

7-13. (a)在 1000 克^{238}U 样品中，每天可发生多少衰变？(b)如果所有的 α 粒子从铀中逃出，而且样品是静电绝缘的，样品上将储存多少负电荷？

7-14. 某一放射性样品的活度在 30 天的时间间隔内减少了 8 倍，它的半衰期、平均寿命和衰变常数是多少？

7-15. 已知^{40}K 的半衰期为 1.3×10^9 年.(a)计算 1 克的^{40}K 每秒中放出的β粒子数；(b)利用在钾的样品中，^{40}K的丰度值(0.011%)，计算 1 克钾每秒钟放出的 β 粒子数.

7-16. 假定^{40}K衰变的90%是放出β粒子，并应用已知的这个同位素的丰度值(0.011%)，计算重200克的KCl晶体每分钟放出的β粒子数.

7-17. 在反应堆中，产生的放射性元素^{60}Co是一种医用和商用辐射源(1.33和1.17兆电子伏的γ射线)，它的半衰期是5.3年，一克这种物质含有多少个原子？它的衰变常数是多少？一克这样物质每秒发生多少次衰变？用居里表示一克这种物质的放射性.

7-18. ^{90}Sr是从核裂变反应堆和核弹中产生的放射性裂变产物，由于它有相当长的半衰期(约28年)，所以它是一种持久性污染物并引起严重的处理问题. 求这种物质一克中含有多少个原子？它的衰变常数是多少？一克这种物质每秒发生多少次衰变？用居里表示一克的放射性.

7-19. 由裂变型炸弹留下的放射性污染物^{90}Sr的半衰期约为28年，这种污染物衰变到原来值的1/100，需要多长的时间？

7-20. 放射性同位素^{234}Th的半衰期为24.1天，试问在1秒；1昼夜；1个月内这种同位素的原子核衰变多大一部分？

7-21. 试确定1千克纯同位素^{238}U在与地球年龄相等的时间(2.5×10^9年)产生的铅的数量. 同位素^{238}U的半衰期为4.5×10^9年.

7-22. ^{238}U放出8个α粒子和6个电子之后的最后衰变产物是^{206}Pb，即

$$^{238}U \longrightarrow {}^{206}Pb + 8{}^{4}_{2}He + 6{}^{0}_{-1}e$$

如果开始时有1千克纯同位素^{238}U，在10亿年中生成多少^{206}Pb？已知^{238}U的半衰期为4.5×10^9年. 如何用这个方法计算地球的年代？

7-23. 同位素^{210}Bi的半衰期为4.97天，试问保存10天的1毫克这种制剂有多大的放射性？

7-24. 有一动能为5电子伏的中子束在自由空间通过多少

距离，它的强度才减少一半？

7-25. 有一动能为 0.025 电子伏的中子束，试问在 2.0 米的射程长度上有多大一部分中子发生衰变？

7-26. 用中子束照射^{197}Au来生成^{198}Au，已知^{198}Au的半衰期为 2.696 天，问照射多少天才能达到饱和放射性活度的 95%？

7-27. 用加速的氘轰击^{55}Mn来生成^{56}Mn，^{56}Mn的产生率为 5×10^{8}/秒，已知^{56}Mn的半衰期为 2.579 小时，试求轰击 10 小时后，^{56}Mn的放射性活度.

7-28. 计算在标准温度和压力下，2 厘米^{3}的氡(^{222}Rn)每秒放出的 α 粒子数. 给出以毫居里为单位的活度(已知^{222}Rn的 $T_{1/2}=3.8$ 天).

7-29. 若有 1000 厘米^3 标准状态的氚(^3_1H)，在 0°下密封储存 12.33 年，试求储存 12.33 年后，(a)^3_1H的放射性活度. (b)^3_1H的比活度. (c)容器内气体的压力.

7-30. 人体内含 18%的碳(C)和 0.2%的钾(K). 已知天然条件下^{14}C的原子数之比为 $1.2:10^{12}$. ^{14}C的 $T_{1/2}=5730$ 年，^{40}K的天然丰度为 0.0118%，$T_{1/2}=1.26\times10^{9}$ 年. 求体重为 75 千克的人体内的总放射性活度.

7-31. 在人体血液里注入微量溶液，溶液中放射性同位素^{24}Na的放射性 $A=2.0\times10^{3}$/秒，经过 $t=5.0$ 小时后取出 1 厘米^{3}的血液，其放射性是 $a=16$/分钟，试求人体血液的体积(已知^{24}Na的 $T_{1/2}=15$ 小时).

7-32. ^{115}In的天然丰度为 95.72%，$T_{1/2}=5\times10^{14}$年，试求天然放射性同位素^{115}In的比活度.

7-33. 实验测得纯^{235}U样品的放射性比活度为 80.0Bq/分·克，试求^{235}U的半衰期.

7-34. 钚^{239}Pu的半衰期等于 2.4×10^{4} 年，试计算它的比放射性.

7-35. 已知^{90}Sr按下式衰变

$$^{90}Sr \xrightarrow[28.1年]{\beta^-} {}^{90}Y \xrightarrow[64小时]{\beta^-} Zr(稳定)$$

试计算将纯^{90}Sr放置多长时间，其放射性活度刚好与^{90}Y的相等.

7-36. 1000厘米^{3}的海水含有0.48克的K和1.8×10^{-6}克的U，假定后者与其子体已达到平衡，试计算1000厘米^{3}海水的放射性活度.

7-37. 1克与其子体处于平衡态的^{226}Ra，每年产生标准状态的氦气172厘米^3，求阿伏加德罗常数.

7-38 已知^{210}Pb按下列方式衰变

$$^{210}Pb \xrightarrow[1914年]{\beta^-} {}^{210}Bi \xrightarrow[5天]{\beta^-} {}^{210}Po \xrightarrow[138.4天]{\alpha} {}^{206}Pb(稳定)$$

若有1毫居里纯^{210}Pb储存于容器中，那么，经过多少时间，容器中积累的^{210}Po最多?

7-39. 试证明在核按照链A→B→C转变的情况下，如果衰变常数λ_A小于λ_B，经过与较稳定的核的平均寿命相比足够长的时间间隔之后，两种物质(A和B)的比率不再随时间变化.

7-40. 放射性同位素RaA以半衰期$T_A=3$分钟衰变，所形成的RaB也发生衰变，其半衰期为$T_B=27$分.假设在起始时刻制剂只含有RaA，试确定经过多长时间间隔，放射性同位素RaB的数量达到最大.

7-41. 在镭的制剂中，长时间内积累了氡^{222}Rn和RaD.若在此时间以前镭的放射性为1居里，试确定^{222}Rn的α放射性和RaD的β的放射性(已知$^{226}RaT_{1/2}=1622$年，$^{222}RnT_{1/2}=3.8$天，$RaDT_{1/2}=22.1$年).

7-42. 镭的半衰期$T=1620$年.作为铀的衰变产物，镭在铀中的含量是每2.8×10^6个铀原子有一个镭原子.若已知铀的半衰期远大于镭的半衰期，试由这些数据估计铀的半衰期.

7-43. 假设地球刚形成时，^{235}U和^{238}U的相对丰度为1∶2，

试求地球的年龄.

7-44. ^{238}U 的最终衰变产物是^{206}Pb，^{238}U 的半衰期约为 4.5×10^9 年. 在地球上，我们从古岩石中混杂着的^{238}U 和^{206}Pb 来看，原始的^{238}U 约占 40%已衰变. 问岩石的年龄是多大(这是估计地球凝固年代的一种方法)?

7-45. 把 1 毫克的镭封在 2.0 厘米^3 的瓶子里，假设氡气不能从瓶中跑出，问一年后瓶子里有多少氡(镭的半衰期 $T_{1/2}=1620$ 年，在衰变到^{206}Pb 以前，这个放射系的其它同位素的半衰期不超过几天，因为^{206}Pb 的半衰为 21 年，所以我们可近似地假定这个系以该同位素为终点)?

7-46. 把 1 毫克的镭封在瓶子里，它衰变为氡，而氡又以半衰期 3.8 天衰变，大约一个月后，瓶子里有多少氡(用克表示)?

7-47. 假定活植物体中^{14}C 与^{12}C 的原子数之比 $12.:10^{12}$，$T_{1/2}(^{14}C)=5730$ 年. 考古工作者为某古代遗址中一块木头碳化后，测得每克碳的放射性活度为 3.5 次衰变/分. 试估算此古代遗址距今多少年?

7-48 目前地球上发现的同位素的正常混合中，^{238}U 的丰度是 99.3%和^{235}U 的丰度为 0.7%，测量的半衰期分别为 6.52×10^9 年，和 1.02×10^9 假定地球刚形成时二者具有相等的丰度，试确定从地球刚形成到现在所经过的时间.

7-49. 某一元素的两个同位素的半衰期分别为 T_1，T_2. 它们在地球上的丰度为 A_1，A_2. 假定在地球形成时两个同位素有相等的丰度. 计算地球的年龄.

§7-2 γ 衰变

7-50. 已知在 K 俘获$^{88}_{40}Zr+^{0}_{-1}e\longrightarrow{}^{88}_{39}Y+\nu$ 过程中，中微子

的能量是 0.28 兆电子伏，求它同时放出的 γ 射线的能量.

7-51. 在 β 衰变 $^{25}_{11}\mathrm{Na}\longrightarrow{}^{25}_{12}\mathrm{Mg}+{}^{0}_{-1}\mathrm{e}+\nu$ 过程中，放出三种 β 射线，最大能量分别为 2.20 兆电子伏(7%)，2.80 兆电子伏(26%)，和 3.84 兆电子伏(67%)求 γ 射线的能量，并作出能级跃迁示意图.

7-52. $^{60}\mathrm{Co}$ 发射一个能量为 1.33 兆电子伏的 γ 光子在这个过程中核的质量减少了百分之几?

7-53. 试计算 1 微克重的 $^{137}\mathrm{Cs}$ 每秒放出多少个 γ 光子(已知 $^{137}\mathrm{Cs}$ 的半衰期为 30.17 年，β 衰变至子核激发态的分支比为 93%，子核 γ 跃迁的内转换系数分别为 $\alpha_k=0.0976$，$\frac{K}{L}=5.66$ $\frac{M}{L}=0.260$).

7-54. 有一激发能为 436 兆电子伏的同质异能核 $^{69}\mathrm{Zn}^{m}$，试求放射 γ 光子后的反冲动能 $E_{R\gamma}$ 和放射内转换电子后的反冲动能 E_{Re}. 若 $^{69}\mathrm{Zn}^{m}$ 处于高激发能态，可能发射中子，试求发射能量为 436 千电子伏的中子后的反冲能 E_{Rn}(已知 K 层电子的结合能为 9.7 千电子伏).

7-55. $^{108}\mathrm{Cd}$ 由激发态向基态跃迁时，发射 0.62 兆电子伏的 γ 光子，试计算 $^{108}\mathrm{Cd}$ 核的反冲能.

7-56. $^{60}\mathrm{Co}$ 经 β^- 衰变生成激发态的 $^{60}\mathrm{Ni}$，然后接连放射 1.17，1.33 兆电子伏的两个 γ 光子，跃迁到 $^{60}\mathrm{Ni}$ 的基态. 假定两个 γ 光子几乎同时放出，试分别计算两个 γ 光子以相同和相反方向放出时 $^{60}\mathrm{Ni}$ 核获得的反冲能.

7-57. $^{210}\mathrm{Bi}$ 核放出 γ 光子的能量为 47 千电子伏，确定(a)核的反冲动量；(b)核的反冲能量.

7-58. (a)推导由于动量为 p 的内转换电子的放出，而引起原子核发生反冲的动能表达式；(b)在均匀磁场中磁感应强度为 B，半径为 R 的轨道上，内转换电子的动量为 BeR，证明反冲动能

是 $E_{Re}=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{(BR)^2}{m}$.

7-59. 从^{137}Cs 发射的 K 内转换电子，在磁谱仪测量的 β 动量谱上，产生一个尖锐的线，此线的值为 $BR=3381$ 高斯·厘米. 这个 K 电子的结合能为 37.44 千电子伏. (a)确定内转换电子的动能；(b)确定产生该内转换电子的激发能.

7-60. ^{141}Ce 核进行 β 衰变形成激发的^{141}Pr 核，它过渡到基态时，或者发射 γ 光子，或者发射内转换电子. 若内转换的 K 电子具有 $BR=1135$ 高斯·厘米，而 K 电子的结合能等于 42 千电子伏. 试确定^{141}Pr 的激发能.

7-61. ^{117}In 核进行 β 衰变形成激发的^{117}Sn 核，它过渡到基态时，相继发射出两个 γ 光子. 伴随着这个过程发射出内转换的 K 电子，对于这些电子来说，BR 等于 3050 和 1300 高斯·厘米. K 电子的结合能是 29 千电子伏，试确定 γ 光子的能量.

7-62. 从^{137}Cs 放出的 γ 光子入射到一块铀样品上时，从其 K 壳层发出光电子. 用 β 磁谱仪测量的动量给出 $BR=3083$ 高斯·厘米. 在铀中 K 电子的结合能是 115.5 千电子伏. 试确定：(a)光电子的动能；(b)γ 光子的能量.

7-63. 放射源$^{46}_{21}$Sc 经 β^- 衰变至$^{46}_{22}$Ti 的激发态，然后接连通过两次跃迁至基态. 由 β 磁谱仪，在曲率半径为 20 厘米处，测得此放射源的内转换 K 电子的峰与场强 257.5，216.6 高斯相对应. 已知 Ti 的 K 电子结合能为 5.0 千电子伏，试求 γ 跃迁的能量.

7-64. ^{69}Hg 的一个激发态的寿命是 8×10^{-13}秒，确定当原子核到达基态时，放出 γ 射线谱的宽度.

7-65. 以速度 v 运动的原子核放出一个 γ 光子，这个 γ 光子运动方向与核的方向是相同的. (a)给出在这种情况下，多卜勒移动的相对论表示式；(b)证明在非相对论的限制下，你给出的表示式可简化为方程

$$\nu' = \nu \frac{c}{c - v}$$

7-66. 已知^{119}Sn 的 24 千电子伏能级的寿命为 1.9×10^{-8} 秒. 当穆斯堡尔谱线的半宽度等于该能级的自然宽度 Γ 时，源与吸收体之间应有多大的相对运动速度？

7-67. 当把发射特征线宽度为 Γ 的光子的放射源放置在探测器附近时，而且把具有相同宽度的吸收体插入放射源和探测器之间时，证明共振吸收曲线（如在多卜勒位移中看到的那样）的总宽度是 2Γ.

7-68. 激发能 $E=23.8$ 千电子伏的自由^{119}Sn 核发射 γ 光子而过渡到基态，该能级宽度 $\Gamma=2.4\times10^{-8}$电子伏. 试问这样的 γ 光子是否能被另一个处在基态的自由^{119}Sn 核共振吸收？设两个核原来是静止的.

7-69. 用激发态的^{57}Fe 发射的 14.4 千电子伏的 γ 射线做共振荧光实验，如果作为吸收体的稳定^{57}Fe 处于自由状态，穆斯堡尔效应不能实现，这时吸收体接收的 γ 光子能量偏离 14.4 千电子伏多少电子伏？为使共振吸收达最大值，在有反冲发射和无反冲发射 γ 光子时，放射源的运动速度各多大？

7-70. 对于^{57}Fe 和^{67}Zn，其穆斯堡尔 γ 谱线的相对宽度分别等于 3.0×10^{-13}和 5.0×10^{-16}. 为了使在地球表面记录时穆斯堡尔谱线的引力位移超过这些谱线宽度，试问源（^{57}Fe 和^{67}Zn）必须离开地面而升至多大的高度？

§7-3 α 衰变

7-71. ^{226}Ra 产生 α 衰变其半衰期为 1620 年. 计算 α 粒子的动能. 如果 Q 值是 4.66 兆电子伏和 4.673 兆电子伏. 计算放射出的 γ 射线的能量.

7-72. 同位素^{238}U经α衰变的衰变能为4.19兆电子伏，试求子核的速度和动能.

7-73. ^{212}Po放出α粒子的动能为10.54兆电子伏，求衰变能及反冲核的动量和能量.

7-74. ^{226}Ra经α衰变，其衰变能为4.88兆电子伏，镭初始时是静止的，因而动量为0.当这个核衰变时，氡和α粒子分摊4.88兆电子伏的能量为其动能.求每个衰变产物的动能是多少?

7-75. $^{216}_{84}Po$经α衰变至$^{214}_{82}Pb$，已知α粒子的动能T_α为5.988兆电子伏，试计算反冲核$^{214}_{82}Pb$的动能；并求α衰变能.

7-76. 某α放射体放出两组α粒子，动能为T_1和T_2，且$T_1>T_2$.放出动能为T_2的α粒子的原子核处子激发态，然后放出γ射线达到基态.试计算γ射线的能量.用T_1，T_2和质量数A表示.

7-77. ^{210}Po核从基态进行衰变，并伴随着发射两组α粒子：能量为5.30兆电子伏的基本组和强度微弱的能量为4.50千电子伏的一组.试求这种核的α衰变能和子核发射的γ光子的能量.

7-78. ^{226}Th核从基态进行衰变，并伴随着发射能量为6.33兆电子伏，6.23兆电子伏，6.10兆电子伏和6.03兆电子伏的α粒子.试计算并画出子核的能级图.

7-79. ^{238}Pu的重要用途之一是制造核电池.假定^{238}Pu($T_{1/2}=87.75$年，$T_\alpha=5.4992$兆电子伏).α衰变能的5%转换为电能.当电池的输出功率为20瓦时，此电池应装多少克^{238}Pu?

7-80. ^{239}Pu的原子核在衰变时放出能量为$T_\alpha=5.3$兆电子伏的α粒子.已知^{239}Pu的半衰期$T_{1/2}=2.4\times10^4$年，试确定体积为$V=1$厘米^{3}的这种制剂(没有继续衰变的产物)在时$t=1$年内放出的热量(^{239}Pu的密度为$\rho=19$克/厘米^3).

7-81. ^{210}Po的原子核在衰变时放出能量为$T_\alpha=5.3$兆电子伏的α粒子，试确定$m=10.0$毫克的^{210}Po制剂(没有继续衰变的产物)在等于这种核平均寿命的时期内，放出的热量.

7-82. ^{210}Po 的原子核在衰变时放出能量为 $T_\alpha=5.3$ 兆电子伏的 α 粒子，质量为 $m=10.0$ 毫克的 ^{210}Po 制剂（没有继续衰变的产物）在等于它的半衰期的时期内放出 2.2 千焦耳的热量，试确定 ^{210}Po 原来的放射性.

7-83. 试估计对于 ^{222}Rn 核发射的 α 粒子来说，库仑势垒的高度. 对于以动能为 5.5 兆电子伏飞出的 α 粒子，这种核的势垒宽度多大？

7-84. (a)写出 α 粒子从原子序数为 Z 的核放出后的势能表达式；(b)确定铀对 α 粒子的势垒高度；(c) ^{238}U 放出动能为 4.2 兆电子伏 α 粒子，确定 α 粒子必须穿过的势垒宽度.

§7-4 β 衰变

7-85. 试计算静止的中子进行衰变时所产生的粒子的总动能.

7-86. 试由下列数据计算出氘核的结合能：已知 ^1H 和 ^2H 的原子质量分别是 1.007825u 和 2.014102u，自由中子 β 衰变时电子的最大能量 $T_e=0.78$ 兆电子伏.

7-87. 若已知母原子和子原子的质量以及电子的质量. 试问如何确定在 β^- 衰变；β^+ 衰变和 K 俘获时释放的能量.

7-88. 已知 ^{45}Ca 的质量过剩 $\Delta=-40.18$ 兆电子伏，实验测得 ^{45}Ca 发射的 β^- 粒子的最大能量为 0.258 兆电子伏，试求 ^{45}Ca 的 β^- 衰变子体的原子质量.

7-89. 在核 ^{15}O β^+ 衰变时，正电子的最大能量为 1.686 兆电子伏. 若已知 ^{15}N 原子的质量过剩 $\Delta=4.525$ 兆电子伏，试求 ^{15}O 核的质量.

7-90. 已知子核的质量和 β 衰变的能量 Q，试求下列原子的质量：(a)进行 β^- 衰为的 ^6He，$Q=3.50$ 兆电子伏；(b)进行 β^+ 衰变

的^{22}Na，$Q=1.83$ 兆电子伏.

7-91. 在 β 衰变 $^3_1H\longrightarrow{}^3_2He+{}^0_{-1}e+\nu$ 中测得 β 粒子的最大能量为 19 千电子伏，已知氚核的质量是 3.016.50u，求 ^3_2He 的质量.

7-92. 由 ^{13}N 的 β^+ 衰变求表达式 $R=r_0A^{1/3}$ 中的 r_0 值. 已知 β^+ 衰变的最大能量为 1.19 兆电子伏.

7-93. 已知 $^{25}_{11}Na$ 核在 β 衰变中放出三组 β 粒子分谱，它们的最大能量分别是 2.2 兆电子(7%)，2.8 兆电子伏(26%)和 3.8 兆电子伏(67%)，求 γ 射线的能量. 并画出能级跃迁图.

7-94. ^{56}Mn 核从基态进行 β 衰变时，发出三组 β 粒子分谱，它们的最大能量分别是 0.72，1.05 兆电子伏和 2.86 兆电子伏. 伴随衰变所发射的 γ 光子具有 0.84 兆电子伏，1.81 兆电子伏，2.14 兆电子伏，2.16 兆电子伏和 2.98 兆电子伏的能量，试计算并画出子核的能级图.

7-95. 静止的 ^{11}C 核放出具有最大能量的正电子，试确定这时反冲核的能量.

7-96. ^6He 的 β^- 射线谱末点能量为 3.50 兆电子伏. (a)计算子核的反冲动能；(b)放出动能为 1.5 兆电子伏的 β^- 粒子与反冲核运动的方向成 90°，确定这个衰变中所包含的三个粒子的动量.

7-97. 已知 $m(^7Be)=7.016929u$，$m(^7Li)=7.016004u$，求 $^7_4Be+{}^0_{-1}e\longrightarrow{}^7_3Li+\nu$ 过程中，子核 ^7Li 和中微子的能量各是多少？中微子的动量是多少？

7-98. $Z=50$ 的原子核的 K 俘获，其衰变能为 2.0 兆电子伏. 试问衰变能的多大部分被中微子带走？

7-99. 设在标准状态下体积为 2.57 厘米^3 的氚气样品中，发现每小时放出 0.1909 卡的热量. 已知氚的半衰期为 12.33 年. 试求：(a)衰变率；(b)β 粒子的平均能量 $\bar{T}$；(c)$\bar{T}_\beta$ 与 β 谱的最大能量 T_m 的比值 $\bar{T}_\beta/T_m$.

7-100. 将 0.95 居里的^{210}Bi($T_{1/2}=5.01$ 天)放入量热器内，立即进行测量. 实验测得热量的输出为 0.02546 卡/分. 已知^{210}Bi的 β 粒子的最大能量 T_{max}为 1.1605 兆电子伏，试计算(a)^{210}Bi 发射的 β^-粒子的平均能量 $\bar{T}_\beta$；(b)$\bar{T}_\beta$ 与 T_{max}之比.

7-101. 样品中含有4.00毫克的RaE，实验测得半衰期为 5.01 天，放出 β 粒子的平均能量为 0.337 兆电子伏，试求样品的能量辐射率 W.

7-102. 求证$^{22}_{10}Ne$ 不可能发生 β^-衰变.

7-103. 证明$^{40}_{19}K$ 产生 β^-衰变，β^+衰变与 K 俘获都是可能的.

7-104. 为了设计 β 磁谱仪的近似尺寸，试计算 1 兆电子伏的 β^-粒子在恒定的磁感应强度为 0.1 特斯拉的磁场中的轨道曲率半径.

7-105. ^{117}In 核进行 β 衰变时，形成激发的^{117}Sn 核，它过渡到基态时，相继发射出两个 γ 光子，伴随着这个过程发射出内转换的 K 电子，对这些电子来说 BR 等于 3050 和 1300 高斯·厘米. K 电子的结合能是 29 千电子伏，试确定 γ 光子的能量.

第八章　原子核反应

内　容　提　要

（一）　核反应的能量

1. 反应能 Q

若原子核 X 被 x 粒子撞击，变为 Y 核并放出新的粒子 y，即

$$x + X \rightarrow Y + y$$

$m_x \quad M_X \quad M_Y \quad m_y$　　静止质量

$T_x \quad T_X \quad T_Y \quad T_y$　　动能

$$Q \equiv (T_Y + T_y) - (T_x + T_X)$$

$$= [(m_x + M_X) - (M_Y + m_y)]c^2$$

当 $Q>0$ 时，核反应是放能反应.

当 $Q<0$ 时，核反应是吸能反应.

由动能的测量来定出 Q：

$$Q = (1 + \frac{A_y}{A_Y})T_y - (1 - \frac{A_x}{A_Y})T_x - \frac{2\sqrt{A_x A_y T_x T_y}}{A_Y}\cos\theta$$

式中 T_y,T_x 及 θ 可以从实验中测得,质量 m_x,m_y 和 M_Y 是已知的,可由上式算出 Q 值.是反应能的实验值.

2. 阈　能

使反应能够进行的入射粒子在实验室系中的最小动能即为核反应的阈能.

$$T_{阈.实} = |Q|(\frac{M_X + m_x}{M_X})$$

式中:m_x 和 M_X 是入射粒子和靶核的质量;Q 是反应能.

(二) 反应截面和反应速率

1. 反应截面

若一束强度为 I 的单能粒子束,垂直地入射到面积为 A,厚度为 dx 的薄靶上,若靶中每单位体积内有 n 个核,则单位面积内有 ndx 个核.单位时间内入射粒子与靶核发生反应数为 N',则有

$$N' = \sigma I n dx$$

式中的比例系数 σ 称为反应截面(或有效截面).可写为

$$\sigma = \frac{N'}{Indx}$$

$$= \frac{单位时间内发生的核反应数}{单位时间内的入射粒子数 \times 单位面积内的靶核数}$$

反应截面表示一个入射粒子打在单位面积内只含一个靶核的靶体上,发生核反应的几率.

反应截面的单位是"靶恩"记做"b"

$$1 靶恩 = 10^{-24} 厘米^2$$

$$1 毫靶恩 = 10^{-3} 靶恩$$

宏观截面　　$\Sigma = n\sigma$

2. 反应速率

单位时间内发生核反应的数，定义为反应速率. 用 RR 表示：

$$RR = \Phi An\sigma dx$$

式中：Φ 为单位时间通过单位面积的入射粒子数；A 为薄靶的面积.

因为宏观截面为 $\Sigma = n\sigma$，体积 $V = Adx$，所以上式可写为

$$RR = \Phi \Sigma V$$

3. 核反应的产额

入射粒子在靶物质中引起的核反应数与入射粒子数之比称为核反应的产额.

① 入射粒子是中子的情况

入射中子的强度随靶厚度的增加而按指数规律减小，写为

$$I = I_0 e^{-n\sigma d}$$

中子在厚度为 d 的靶体内引起的核反应数为

$$N' = I_0 - I = I_0(1 - e^{-n\sigma d})$$

反应产额为

$$Y = \frac{N'}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-n\sigma d}$$

当 $d \ll \frac{1}{n\sigma}$（薄靶）时，　有 $Y = nd\sigma$

当 $d \gg \frac{1}{n\sigma}$（厚靶）时，　有 $Y = 1$

② 荷电粒子的情况

若入射粒子是荷电粒子，则 σ 是入射粒子能量的函数，面荷电粒子在靶体不同深度处的能量是不同的.

因此，反应产额写为

$$Y = n\sigma(T_0)\int_0^d dx = n\sigma(T_0)d$$

如果靶厚大于荷电粒子的射程($d>R(T_0)$),则荷电粒子的核反应产额为

$$Y=\int_0^{T_0}\frac{\sigma(T)\mathrm{d}T}{(\frac{-\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x})_{ion}}$$

式中:$(\frac{-\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x})_{ion}$为电离损失.

4. 放射性核素的产额

若稳定核被入射粒子轰击生成放射性核,此放射性核仅以衰变方式减少,并生成稳定核. 如

$$(A)\xrightarrow{(n,r)}(B)\xrightarrow[\lambda_2]{}(C)\quad(稳定)$$

在照射时间,核素(B)的生长与入射中子通量 Φ,反应截面 σ 和靶体原子数 N_1 成正比.

可假定(A)的原子数为常数,$N_1\simeq N_{10}$. 在照射过程中核素(B)的衰变率为 λ_2N_2. 所以,核素(B)的净生长率为

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t_b}=\Phi\sigma N_{10}-\lambda_2N_2$$

t_b 为照射时间.

$$N_2(t_b)=\frac{\Phi\sigma N_{10}}{\lambda_2}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b})$$

核素(B)的放射性活性为

$$A_2(t_b)=\lambda_2N_2(t_b)=\Phi\sigma N_{10}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b})$$

式中:$(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b})$称为饱和因子 S. 当 $t_b\gg T_{1/2}$时,$\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b}\to0$,则 $S\to1$,$A_2(T_b)$有最大值;当 $t_b\ll T_{1/2}$时,$\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b}\simeq1-\lambda_2t_b$,$S\simeq\lambda_2t_b$. 照射后 t 时刻,核素(B)的放射性活性为

$$A_2(t)=A_2(t_b)\mathrm{e}^{-\lambda_2t_b}$$

典 型 题 解

8－1. 动能是 0.90 兆电子伏的质子同静止的氘核发生对心弹性碰撞，试求碰撞后质子的动能.

[解] 设 m_1, m_2 分别为质子与氘核的质量，v_1 是质子碰撞前的速度，v_1'，v_2' 是碰撞后质子与核的速度.

根据能量守恒定律和动量守恒定律：

$$m_1 v = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{2}$$

我们得到

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 v'_2 \tag{3}$$

$$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 v'^2_2 \tag{4}$$

由(3)、(4)得

$$v_1 + v'_1 = v'_2 \tag{5}$$

(5)式代入(3)式得

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v_1 + v'_1)$$

$$\therefore v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \tag{6}$$

碰撞后质子的动能为

$$T'_1 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2$$

$$= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot T_1$$

$$= (\frac{-1}{3})^2 \cdot 0.9 \text{ 兆电子伏}$$

$$= 0.10 \text{ 兆电子伏}$$

8－2. 试求一个中子在和一个静止的原子核的弹性正碰撞中，其损失的动能最大分率.

[解] 设中子质量为 m_1，原子核的质量为 m_2，碰撞前中子的速度为 v_1，碰撞后它们的速度变为 v'_1 和 v'_2.

则中子的初动能 $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$,

碰撞后的动能 $T'_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$

中子动能减少的分率为

$$\frac{T_1 - T'_1}{T_1} = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2}$$

利用上题结果 $v'_1 = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})\, v_1$

$$\therefore \quad \frac{T_1 - T'_1}{T_1} = \frac{v_1^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2}{v_1^2}$$

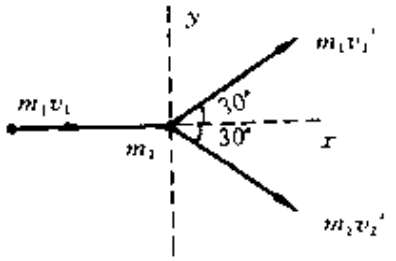
$$= 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

8－3. 氘核在静止的原子核上，以 30°角弹性地散射. 反冲核对入射氘核的运动方向也以这个角度飞出去. 试问这个原子核属何种原子(不考虑相对论情况)?

[解]设氘核的质量为 m_1，靶核质量为 m_2，碰撞前氘核速度为 v_1，碰撞后它们的速度各为 v'_1 和 v'_2. 氘核散射角与反冲核飞出角相同，$\theta = 30°$.

根据动量守恒及能量守恒原理，有



例题 8 - 3 用图

$$m_1v_1=m_1v'_1\cos\theta+m_2v'_2\cos\theta \tag{1}$$

$$0=m_1v'_1\sin\theta-m_2v'_2\sin\theta \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2 \tag{3}$$

由(2)式得 $$v'_2=\frac{m_1v'_1}{m_2} \tag{4}$$

(4)式代入(1)式，得 $v'_1=\frac{v_1}{2\cos\theta}$ (5)

(5)式代入(3)式，得 $$m_1v_1^2=\frac{m_1v_1^2}{4\cos^2\theta}+\frac{m_1^2v_1^2}{m_2\cdot 4\cos^2\theta}$$

整理后得 $$m_2=\frac{m_1}{(4\cos^2\theta-1)}=\frac{m_1}{2}$$

已知 m_1 是氘核，所以 $m_2=\frac{m_1}{2}$ 是氢核.

8 - 4. (a) 算出 ${}^7_3\mathrm{Li}(\mathrm{p},\alpha){}^4_2\mathrm{He}$ 的反应能. 有关同位素质量如下：${}^1_1\mathrm{H}$：1.007825u； ${}^7_3\mathrm{Li}$：7.016005u； ${}^4_2\mathrm{He}$：4.002603u. (b) 在上题的核反应中，如果以 1 兆电子伏的质子打击 ${}^7_3\mathrm{Li}$，问在垂直于质子束的方向观测到 ${}^4_2\mathrm{He}$ 的能量有多大？

[解](a) 核反应方程式为

$${}^1_1\mathrm{H}+{}^7_3\mathrm{Li}\rightarrow{}^4_2\mathrm{He}+{}^4_2\mathrm{He}$$

反应能为

$$Q=[(m_\mathrm{H}+m_\mathrm{Li})-2m_\mathrm{He}]c^2$$
$$=[(7.016005+1.007825)-2\times4.002603]\times931.5$$

$=17.35$ 兆电子伏

(b) 由(a)题的计算得知其反应能 $Q=17.35$ 兆电子伏反应能亦可表示为

$$Q=\left(1+\frac{A_y}{A_Y}\right)T_y-\left(1-\frac{A_x}{A_Y}\right)T_x-\frac{2\sqrt{A_xA_yT_xT_y}}{A_Y}\cos\theta$$

$A_x=1, A_y=A_Y=4, T_x=1$ 兆电子伏

且 $T_Y=\frac{1}{2}(Q+T_x)$ 代入上式得

$$\cos\theta=\frac{T_x}{4\sqrt{\frac{1}{2}T_x(Q+T_x)}}=0.0825$$

$\therefore\quad \theta=85°26'$

在此方向 $T_Y=\frac{1}{2}(Q+T_x)=9.175$ 兆电子伏

8－5. 用动能为 2.7 兆电子伏的质子束轰击静止的锂靶，由核反应 $^7\mathrm{Li}+{}^1\mathrm{H}\rightarrow 2{}^4\mathrm{He}$ 的结果，观察到两个具有相同能量的 α 粒子. (a) 试求出给定的 α 粒子处于标准状态下的空气中的射程. (b) 试求出它们飞散的方向之间的夹角.

[解](a) 根据核反应中的能量守恒定律可知

$$Q=(T_Y+T_y)-(T_x+T_X)$$

由题设 $T_X=0$ $T_Y=T_y$

$$\therefore\quad T_Y=T_y=\frac{1}{2}(Q+T_x)$$

α 粒子的动能 $T_y=\frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}v^2$

得 $$v=\left(\frac{(Q+T_x)}{m_{\mathrm{He}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

根据盖革公式，在标准状态下，α 粒子在空气中的射程为

$$R=av^3 \text{ 厘米}$$

$$\therefore\quad R=a\left[\frac{(Q+T_x)}{m_{\mathrm{He}}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

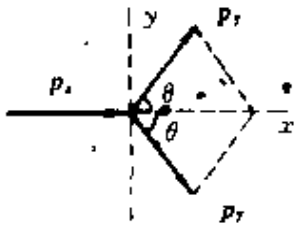
利用(8－4)题的结果 $Q=17.35$ 兆电子伏

$a=9.8\times10^{-28}$秒^3/厘米^2　$T_x=2.7$ 兆电子伏

代入上式得

$$R=9.8\times10^{-28}\text{秒}^3/\text{厘米}^2\times\left[\frac{(17.35+2.7)\times1.6\times10^{-12}\times10^6}{4.002603\times1.66\times10^{-24}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=10.39\text{ 厘米}$$



例题 8－5 用图

两个 α 粒子飞散方向之间的夹角如图所示

根据动量守恒定律，有

$p_x=p_Y+p_y$

α 粒子飞出方向与沿入射质子的方向之间的夹角为 θ

$$p_Y^2=p_x^2+p_y^2-2p_xp_y\cos\theta$$

利用 $p^2=(mv)^2$，　$T=\frac{1}{2}mv^2$，得

$$Q=(1+\frac{A_y}{A_Y})T_y-(1-\frac{A_x}{A_Y})T_x-\frac{2\sqrt{A_xA_yT_xT_y}}{A_Y}\cos\theta$$

$A_x=1$，$A_y=A_Y=4$，代入上式得

$$Q=2T_y-\frac{3}{4}T_x-\sqrt{T_xT_y}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{2T_y-Q-\frac{3}{4}T_x}{\sqrt{T_xT_y}}$$

利用(1)的结果，$T_y=\frac{1}{2}(Q+T_x)$ 代入上式

$$\cos\theta=\frac{T_x}{4\sqrt{\frac{1}{2}T_x(Q+T_x)}}$$

$$=\frac{2.7}{4\times\sqrt{\frac{1}{2}\times 2.7\times(17.35+2.7)}}$$

$$=0.1298$$

$$\therefore\quad \theta=82.5^\circ$$

两个 α 粒子飞散方向之间的夹角为 $2\theta=165^\circ$.

8－6. 氘核轰击^{6}Li 核时，核反应的结果产生^{7}Be＋n 以及^{4}He＋^{3}He＋$_{0}$n 试把这些反应释放的能量值作一下比较并说明它们不同的原因.

[解] 核反应方程为

$$^{6}_{3}\mathrm{Li}+^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{7}_{4}\mathrm{Be}+^{1}_{0}\mathrm{n}$$

$$^{6}_{3}\mathrm{Li}+^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{4}_{2}\mathrm{He}+^{3}_{2}\mathrm{He}+^{1}_{0}\mathrm{n}$$

参加反应的各原子质量如下

$_{0}^{1}$n：1.008665u；　^{2}H：2.014102u；

^{3}He：3.016029u；　^{4}He：4.002603u；

^{6}Li：6.015126u；　^{7}Be：7.016930u.

第一式的反应能为

$$Q_1=[(m_{\mathrm{Li}}+m_{\mathrm{H}})-(m_{\mathrm{Be}}+m_{\mathrm{n}})]c^2$$

$$=[(6.015126+2.014102)-(7.016930+1.008665)]\times 931.5\text{ 兆电子伏}$$

$$=3.38\text{ 兆电子伏}$$

第二式的反应能为

$$Q_2=[(m_{\mathrm{Li}}+m_{\mathrm{H}})-(m_{^3\mathrm{He}}+m_{^4\mathrm{He}}+m_{\mathrm{n}})]c^2$$

$$=[(6.015126+2.0141020)-(4.002603+3.016129+1.008665)]\times 931.5\text{ 兆电子伏}$$

$$=1.80\text{ 兆电子伏}$$

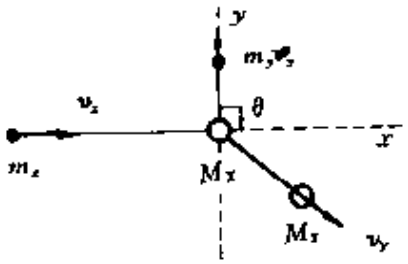
$Q_1>Q_2$，其差别是由于^{7}Be 核的结合能大于^{3}He 核及^{4}He 核的结合

能之和而引起的(从质量上来看^{7}Be 是 7.016930u，而^{4}He+^{3}He 是 7.018632u). 所以第一种情况释放的能量要多一些.

8-7. 在$^{4}_{2}$He+$^{9}_{4}$Be→$^{12}_{6}$C+$^{1}_{0}$n 的核反应中，若 α 粒子的速度为 1.5×10^{9} 厘米/秒，放出的中子以 4×10^{9} 厘米/秒的速度并垂直于 α 前进方向飞出，求^{12}C 的速度.

[解] α 粒子轰击^{9}Be 核生成^{12}C 核及中子，其核反应如图所示，设在 θ 角方向出射的中子的速度为 v_y，在 φ 角方向反冲核^{12}C 的速度为 V_Y，由动量守恒有

$$m_x v_x = m_y v_y \cos\theta + M_Y V_Y \cos\varphi$$



例题 8-7 用图

$$0 = m_y v_y \sin\theta - M_Y V_Y \sin\varphi$$

已知：$\theta=\frac{\pi}{2}$，所以上式为

$$m_x v_x = M_Y V_Y \cos\varphi$$

$$m_y v_y = M_Y V_Y \sin\varphi$$

上面二方程平方相加，得

$$(m_Y V_Y)^2 = (m_x v_x)^2 + (m_y v_y)^2$$

$$\therefore\quad V_Y = \sqrt{\frac{(m_x v_x)^2+(m_y v_y)^2}{M_Y^2}}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{4^2\times(1.5\times10^{9})^2+1\,(4\times10^{9})^2}$$

$$= 6.0\times10^{8}\ \text{厘米/秒}$$

即反冲核^{12}C 的速度为 6.0×10^{8} 厘米/秒.

8－8. 在$^{12}_{6}C(p,r)^{13}_{7}N$核反应中，已知质子的动能为0.46兆电子伏，测得γ光子的能量为2.37兆电子伏，靶核^{12}C质量$m_C=12.000000u$，$^{1}_{1}H$的质量$m_H=1.007825u$，试求这个核反应能Q值及反冲核$^{13}_{7}N$的原子质量.

[解] 核反应方程为

$$^{12}_{6}C+^{1}_{1}H\rightarrow^{13}_{7}N+h\nu+Q$$

（式中$h\nu$为γ光子的能量）

该系统在反应前，质心坐标系中的动能为

$$T_{cm}=T_x\left(\frac{m_X}{m_X+m_x}\right)$$

$$=\frac{12}{12+1}\times 0.46\text{兆电子伏}$$

$$=0.42\text{兆电子伏}$$

（计算中分别以它们的质量数近似代替质量）

反应后，γ光子能量$E_\gamma=h\nu=2.37$兆电子伏

（γ光子的能量在两个坐标系中相等）

在质心坐标系中反应后两粒子的动量总和等于0，所以有

$$\frac{h\nu}{c}=M_NV'_N$$

其中，V_N'为^{13}N在质心坐标系中的速度.

因此，^{13}N在质心坐标系中动能为

$$T_N'=\frac{1}{2}M_NV'^2_N=\frac{1}{2}M_N\left(\frac{h\nu}{M_Nc}\right)^2$$

$$=\frac{E_\gamma^2}{2M_Nc^2}$$

因为，$2M_Nc^2\simeq 2422$兆电子伏比E_γ^2大很多，

因此T'_N可略去不计.

∴反应后系统的总能量为

$$T_{cm}'=T_N'+E_\gamma\simeq E_\gamma$$

$$= 2.37 \text{ 兆电子伏}$$

反应能为

$$Q = T'_{cm} - T_{cm}$$
$$= 2.37 \text{ 兆电子伏} - 0.42 \text{ 兆电子伏}$$
$$= 1.95 \text{ 兆电子伏}$$

用质量单位表示

$$Q = \frac{1.95 \text{ 兆电子伏}}{931.5 \text{ 兆电子伏}} = 0.002093\text{u}$$

$$Q = [(M_c + m_p) - (M_N + m_\gamma)]$$

得
$$M_N = M_c + m_p - Q$$
$$= 12.000000 + 1.007825 - 0.002093$$
$$= 13.005732\text{u}$$

同位素表中^{13}N的质量是13.005738u，可见上述计算与实际数值符合得相当好.因此利用核反应亦可测定原子质量.

8－9. 一个静止氘核吸收了能量为6兆电子伏的γ光子而分解为一个中子和一个质子.如果发射中子的方向与入射γ射线方向成90°角，问发射出质子的动能和中子的动能各为多少(已知氘核的结合能为$\Delta E=2.23$兆电子伏)?

[解] 根据能量守恒和动量守恒，有

$$h\nu - \Delta E = \frac{1}{2}m_n v_n^2 + \frac{1}{2}m_p v_p^2$$

因为中子方向与γ光子的方向成90°，所以

有
$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + (m_n v_n)^2 = (m_p v_p)^2$$

$$v_p^2 = \frac{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + (m_n v_n)^2}{m_p^2}$$

得
$$h\nu - \Delta E = \frac{1}{2}m_n v_n^2 + \frac{1}{2}m_p \left\{\frac{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + (m_n v_n)^2}{m_p^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}m_n v_n^2+\frac{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2}{2m_p}+\frac{m_n^2}{2m_p}v_n^2$$

整理后得中子的动能为

$$\frac{1}{2}m_n v_n^2=\frac{(h\nu-\Delta E)m_p c^2-\frac{(h\nu)^2}{2}}{(m_p+m_n)c^2}$$

$$=\frac{(6-2.23)\times 939.6-6^2/2}{939.6+938.3}$$

$$=1.87\text{ 兆电子伏}$$

质子的动能为

$$\frac{1}{2}m_p v_p^2=(h\nu-\Delta E)-\frac{1}{2}m_n v_n^2$$

$$=3.77\text{ 兆电子伏}-1.87\text{ 兆电子伏}$$

$$=1.90\text{ 兆电子伏}$$

8－10. 对中子的探测，通常是利用硼核对它的俘获作用. 这种反应是：

$$^1n+{}^{10}B\rightarrow{}^7Li+{}^4He$$

1.0087　10.0129　7.0160　4.0026

在反应过程中，所释放的能量以生成物的动能出现，应用通常的技术，可计数所产生的快速 α 粒子. 假定原来的反应物基本上是静止的，试计算 α 粒子的速率.

[解] 根据能量守恒和动量守恒原理有：

$$p_{Li}=-p_{He}$$

根据题意，在反应过程中所释放的能量以生成物的动能出现，且假定原来的反应物基本上是静止的，因此有

$$Q=\frac{1}{2}M_{Li}v_{Li}^2+\frac{1}{2}m_{He}v_{He}^2$$

由　$(M_{Li}v_{Li})^2=(m_{He}v_{He})^2$　得

$$v_{Li}^2=\frac{m_{He}^2v_{He}^2}{M_{Li}^2}$$

代入上式

$$Q=\frac{1}{2}M_{Li}\left(\frac{m_{He}^2v_{He}^2}{M_{Li}^2}\right)+\frac{1}{2}m_{He}v_{He}^2$$整理后得

$$v_{He}=\sqrt{\frac{2M_{Li}Q}{m_{He}(m_{He}+m_{Li})}}$$

$$Q=[(M_B+M_n)-(M_{Li}+M_{He})]c^2$$
$$=[(1.0087+10.0129)-(7.0160+4.0026]\times 931.5$$
$$=2.79\text{ 兆电子伏}$$

$$v_{He}=\sqrt{\frac{2\times 7.0160\times 2.97\times 10^6\times 1.6\times 10^{-19}}{4.0026\times(4.0026+7.0160)\times 1.66\times 10^{-27}}}$$
$$=9.25\times 10^6\text{ 米/秒}$$

8－11. 在下列反应中靶核不动，若质子和中子的能量取阈能值时，试确定反应生成核^{7}Be 和^{15}O 的动能.

(a)^{1}H+^{7}Li→^{7}Be+^{1}n，　$Q=-1.65$ 兆电子伏

(b)^{1}n+^{19}F→^{15}O+^{1}H+4^{1}n，　$Q=-35.8$ 兆电子伏

[解]　反应前系统的动能即为入射粒子的动能. 这个能量是质心系中的初始粒子 x 和 X 的动能 E'(即质心系能量)与质心动能 E_c(相当子质量集中于质心上以质心速度运动的一个粒子的动能)之和. 当入射粒子的能量等子阈能时，E'刚好等子反应能，即 $E'=|Q|$. 而反应后的产物 y 和 Y 则相对质心静止，且以质心的速度运动.

反应前质心的速度 v_c 与入射粒子在实验室中的速度 v_x 的关系为 $v_c=\frac{m_x}{m_x+M_x}v_x$. 由动量守恒，反应后质心的速度为 $v'_c=\frac{m_x}{m_y+M_Y}v_x$. 则反应后剩余核的动能为

$$T_Y=\frac{1}{2}M_Yv'^2_c=\frac{1}{2}M_Y\left(\frac{m_x}{m_y+M_Y}v_x^2\right)^2$$
$$=\frac{m_xM_Y(m_x+M_X)}{M_X(m_y+m_Y)^2}|Q|\cong\frac{m_xM_Y}{M_X(m_y+M_Y)}|Q|$$

(a) $^{1}H+^{7}Li\rightarrow{}^{7}Be+^{1}n$，　　$Q=-1.65$ 兆电子伏

Be 的动能为：

$$T_{Be}=\frac{m_p M_{Be}|Q|}{M_{Li}(M_{Li}+m_p)}$$

$$=\frac{1\times7\times1\times1.65}{7\times(7+1)}=0.206\text{ 兆电子伏}$$

(b) $^{1}n+^{19}F\rightarrow{}^{15}O+^{1}H+4{}^{1}n$，　　$Q=-35.8$ 兆电子伏

^{15}O 的动能为：

$$T_O=\frac{m_n M_O|Q|}{M_F(M_F+m_n)}=\frac{1\times15\times35.8}{19\times(19+1)}=1.413\text{ 兆电子伏}$$

8－12. ^{115}In 俘获中子的反应截面 $\sigma=190\times10^{-24}$ 厘米^2，试计算在强度为 10^7 中子/厘米^2·秒的中子束的作用下，在面积为 10 厘米^2，厚度为 0.3 毫米的铟箔中有多少^{116}In 原子出现？(In(铟)的原子量为 114.76，密度 7.3 克/厘米^3).

[解]　每单位体积内的原子数目为

$$n=\frac{6.02\times10^{23}\times7.3}{114.76}=0.0383\times10^{24}/\text{厘米}^3$$

$$n\sigma=0.0383\times10^{24}\times190\times10^{-24}$$

$$=7.277\text{ 厘米}^{-1}$$

$I_0=10^7$ 中子/厘米^2·秒，$d=0.03$ 厘米，面积 $A=10$ 厘米^2 时，单位时间入射粒子与靶核发生反应的粒子数为 N'

$$N'=N_O-N=N_0(1-e^{-n\sigma d})$$

$$=10\times10^7(1-e^{-7.277\times0.03})$$

$$=10^8(1-e^{-0.216})$$

$$=2\times10^7\text{ 个原子}$$

即在 1 秒内生成 2×10^7 个 ^{116}In 原子.

8－13. 一克天然的钕(Nd)在中子通量为 10^{13} 个中子/厘米^2·秒的反应堆中，辐照 4 天. ^{146}Nd 的天然丰度是 17.22%，它对热中子的截面是 2 靶. 在$^{146}Nd+^{1}n\rightarrow{}^{147}Nd\xrightarrow[11.1\text{天}]{\beta}$

^{147}Pm的.反应中,^{147}Nd 的量是多少？若忽略辐照过程中的任何衰变,在辐照之后的瞬间,其放射性活度是多大(^{146} Nd 密度是 6.9 克/厘米^3)?

[解] 产生 ^{147}Nd 的核反应是

$$^{147}\mathrm{Nd}+1\mathrm{n}\rightarrow{}^{147}\mathrm{Nd}\xrightarrow[11.1\text{天}]{\beta^-}{}^{147}\mathrm{Pm}$$

反应速率为

$$RR=\Phi n\sigma v$$

其中 $\Phi=10^{13}$中子/厘米^2·秒,$\sigma=2$ 靶$=2\times10^{-24}$厘米^2

$$v=\frac{M}{\rho}=\frac{1\text{ 克}}{6.9\text{ 克/厘米}^3}=0.145\text{ 厘米}^3$$

$$n=\frac{\rho N_A}{A}=\frac{6.9\times6.02\times10^{23}}{146}$$

$$=0.285\times10^{23}/\text{厘米}^3$$

$$\therefore RR=10^{13}\times0.285\times10^{23}\times2\times10^{-24}\times0.145$$

$$=8.265\times10^{10}/\text{秒}$$

在 4 天内产生的^{147}Nd原子的总数为

$$N=RR\cdot t\times17.22\%$$

$$=8.265\times10^{10}\times34.56\times10^4\times\frac{17.22}{100}$$

$$=4.92\times10^{15}\text{ 个}$$

4.92×10^{15} 个^{147}Nd原子具有质量为

$$m=\frac{A\cdot N}{N_A}$$

$$=\frac{147\times4.92\times10^{15}}{6.02\times10^{23}}=1.2\times10^{-6}\text{克}$$

^{147}Nd 的放射性活度为

$$A(t_b)=\lambda N(t_b)$$

$$=\frac{\ln2}{T_{1/2}}N=\frac{0.693\times4.92\times10^{15}}{11.1\times8.64\times10^4}=3.56\times10^{\%}\text{/秒}.$$

8－14. 用能量为 22 兆电子伏的质子束照射铁靶,(p,n)反应

的产额为 1.2×10^{-3}，反应结果生成半衰期为 77.2 天的放射性同位素^{56}Co. 试确定当质子电流$J=21$微安时，从开始照射经过 $t_b=2.5$ 小时，靶的放射性.

[解] 用能量为 22 兆电子伏的质子照射铁靶在(p,n)反应中，生成放射性同位素^{56}Co

$$^{56}_{26}\mathrm{Fe}\xrightarrow[(p,n)]{}{}^{56}_{27}\mathrm{Co}\xrightarrow[77.2\text{天}]{\beta^+}{}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$$

在照射过程中，放射性同位素的衰变率为

$$A(t_b)=\lambda_2 N_2(t_b)$$
$$=N'(1-e^{-\lambda_2 t_b})$$

因为 t_b 比 $T_{1/2}$小很多，$e^{-\lambda_2 t_b}\approx1-\lambda_2 t_b$ 所以上式可写为

$$A(t_b)=N'\lambda_2 t_b$$
$$=YI_0\lambda_2 t_b$$
$$=\frac{\ln 2}{T}\cdot Y\cdot\frac{J}{e}\cdot t_b$$

其中 $I_0=\frac{J}{e}$，1 微安·厘米$^{-2}$相当于

$$\frac{10^{-6}\text{库伦}\cdot\text{厘米}^{2}}{1.6\times10^{-19}\text{库伦}}=6.25\times10^{12}/\text{秒}\cdot\text{厘米}^2$$

∴ 靶的放射性活度为

$$A(t_b)=\frac{0.693\times1.2\times10^{-3}\times2.5\times21\times6.25\times10^{12}}{77.2\times24}$$
$$=3.98\text{ 毫居里}$$

8－15. 用能量为 1 兆电子伏的氘核照射薄重冰靶时，核反应^{2}H(d,n)^{3}He 的产额和反应截面分别为 0.8×10^{-5}及 0.02 靶. 若氘核的能量为 2 兆电子伏时的产额为 4.0×10^{-5}，试确定这时的反应截面.

[解] 因为氘核是荷电粒子，所以核反应产额为

$$Y=n\int_0^d\sigma(T)\mathrm{d}x$$

在薄靶的情况下，$\sigma(T)=\sigma(T_0)$有

$$Y = nd\sigma(T_0)$$

设氘核的能量为 1 兆电子伏时、核反应产额及反应截面分别为Y_1及 σ_1.

当氘核的能量为 2 兆电子伏时，核反应产额及反应截面分别为 Y_2及 σ_2.

则

$$Y_1=nd\sigma_1$$

$$Y_2=nd\sigma_2$$

由以上二式得

$$\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{nd\sigma_1}{nd\sigma_2}$$

$$\therefore\quad \sigma_2=\frac{Y_2\cdot\sigma_1}{Y_1}$$

$$=\frac{4.0\times10^{-5}\times0.02}{0.8\times10^{-5}}=0.10\text{ 靶}$$

8－16. 当能量为 0.225 兆电子伏的质子轰击^{27}Al 靶时，在^{27}Al (p,γ)^{28}Si 反应中观察到共振现象. 试求所形成复合核的能级高度.

[解]核反应方程为

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}+^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{28}_{14}\mathrm{Si}^{*}\rightarrow{}^{28}_{14}\mathrm{Si}+\gamma$$

当入射粒子的质心系能量，与它在复合核中的结合能之和恰好等于复合核的一个能级时，俘获截面急剧增大，这时产生共振现象，因此复合核能级的高度为

$$E_{能}=(E_0+T_{cm})$$

式中：E_0为中子在复合核中的结合能. T_{cm}是入射粒子的质心能量.

$$E_0=[(m_{Al}+m_H)-m_{Si}]c^2$$

$$=[(926.981535+1.007825)-27.976928]\times931.5$$

$$=11.58\text{ 兆电子伏}$$

$$T_{cm}=\frac{m_{Al}}{m_{Al}+m_n}T_p$$
$$=\frac{27}{28}\times 0.225\text{ 兆电子伏}$$
$$=0.217\text{ 兆电子伏}$$

$\therefore$ $E_{\text{激}}=(11.58+0.217)=11.797$ 兆电子伏

8-17. 在$^{115}In(n,\gamma)^{116}In$ 的反应中，当入射中子的能量为 $T_n=1.44$ 兆电子伏时，观察到共振吸收现象，其共振截面 $\sigma_0=2.76\times10^4$ 靶，$\Gamma_n=0.81\times10^{-3}$兆电子伏，且 $\Gamma_\gamma\gg\Gamma_n$，试推断复合$^{116}In^*$的平均寿命.

[解] 应用布莱特—维格纳公式

$$\sigma_{n,\gamma}=\frac{\lambda_2}{4\pi}\cdot\frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{(T-T_0)^2+(\frac{\Gamma}{2})^2}\quad\text{(对(n,}\gamma\text{) 反应)}$$

当入射粒子动能与共振能量相等时($T=T_0$)，发生共振吸收，核反应截面最大，其值为

$$\sigma_0=\frac{\lambda^2}{\pi}\cdot\frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma^2}$$

因为 $\Gamma_\gamma\gg\Gamma_n$，所以 $\Gamma=\Gamma_n+\Gamma_\gamma\simeq\Gamma_\gamma$.

则上式变为

$$\sigma_0=\frac{\lambda^2}{\pi}\frac{\Gamma_n}{\Gamma}$$

由此得 $\Gamma=\frac{\lambda^2\Gamma_n}{\pi\sigma_0}$

平均寿命

$$\tau=\frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma}$$
$$=\frac{h}{2}\cdot\frac{\sigma_0}{\lambda^2\Gamma_n}$$

中子的德布罗意波 $\lambda=\frac{h}{\sqrt{2mT_n}}$

$$\lambda = \frac{6.625 \times 10^{-27}}{\sqrt{2 \times 1.0086665 \times 1.66 \times 10^{-24} \times 1.44 \times 1.6 \times 10^{-12}}}$$

$$= 3.017 \times 10^{-9} \text{ 厘米}$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{6.625 \times 10^{-27}}{2} \times \frac{2.76 \times 10^{4} \times 10^{-24}}{(3.017 \times 10^{-9})^2 \times 0.81 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-12}}$$

$$= 7.76 \times 10^{-15} \text{秒}$$

8－18. 在上题的条件下，如果中子的能量为 0.5 兆电子伏，试求反应截面.

［解］ 根据题设可知，这时中子的能量较低，在这种情况下，它的波长 $\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{2\mu T}}$，用中子能量 T 表示的反应截面的公式为

$$\sigma_{nr} = \sigma_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2}{4(T - T_0)^2 + \Gamma^2}$$

根据上式可知，$\Gamma = \frac{\lambda^2 \Gamma_n}{\pi \sigma_0} = 0.085$ 兆电子伏.

$$\therefore \quad \sigma_{nr} = 2.76 \times 10^{4} \times 10^{-24} \times \left(\frac{1.44}{0.5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{(0.085)^2}{4 \times (0.5 - 1.44)^2 + (0.085)^2}$$

$$= 95.5 \text{ 靶}$$

8－19. 用强度为 10^{10} 个中子/厘米^2·秒的热中子流照射天然铀样品，若在实验条件下，^{235}U 核的反应截面为 590 靶，试确定由于^{235}U 分裂的结果，1 厘米^3 样品放出的热功率（一个^{235}U 裂变放出能量约为 200 兆电子伏）.

［解］ 当天然铀样品被强度为 10^{10} 个中子/厘米^2·秒的热中子流照射时，使样品中的^{235}U 发生裂变，其反应速率为

$$RR = \Phi \Sigma V = \Phi n \sigma V = \Phi \frac{\rho N_A}{A} \sigma V$$

因为^{235}U 的天然丰度为 0.71%，每个^{235}U 核裂变时放出约 200 兆

电子伏的能量，所以 1 厘米^3 样品放出的热功率为

$$N_{功}=RR\times 0.71\%\times 200$$

$$=10^{10}\times\frac{18.7\times 6.02\times 10^{23}}{235}\times 590\times 10^{-24}\times 1\times\frac{0.71}{100}$$

$$\times 200\times 10^{6}\times 1.6\times 10^{-19}$$

$$=0.064\text{ 焦耳/秒}$$

$$=0.064\text{ 瓦}$$

8－20. 试计算 1 克^{235}U 裂变时全部释放的能量约等于多少煤在空气中燃烧所放出的热能（煤的燃烧热约等于 33×10^6 焦耳/千克）.

[解]裂变过程是被轰击的原子核吸收中子形成复合核，然后裂开分裂成两个中等质量的原子核.

$$^{235}_{92}\mathrm{U}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\rightarrow{}^{236}_{92}\mathrm{U}\rightarrow \mathrm{X}+\mathrm{Y}+2{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

设复合核分裂为两个 A＝117 的核同时放出两个中子. 在 A＝236 附近，每个核子的平均结合能为 7.6 兆电子伏；而在 A＝117 附近，每个粒子的平均结合能为 8.5 兆电子伏. 因此^{236}U 裂变时所放出的能量为

$$\epsilon=2\times 117\times 8.5\text{ 兆电子伏}-236\times 7.6\text{ 兆电子伏}$$

$$\simeq 200\text{ 兆电子伏}$$

1 克^{235}U 中的原子核数目为

$$N=\frac{MN_A}{A}=\frac{1\times 6.02\times 10^{23}}{235}=2.56\times 10^{21}\text{ 个}$$

1 克^{235}U 完全裂变时释放的能量为

$$E=N\epsilon=2.56\times 10^{21}\times 200=5.1\times 10^{23}\text{ 兆电子伏}$$

$$=8.2\times 10^{10}\text{ 焦耳}$$

煤的燃烧热 $Q=33\times 10^6$ 焦耳/千克

与 1 克^{235}U 相当的煤的质量是

$$m=\frac{E}{Q}=\frac{8.2\times 10^{10}\text{ 焦耳}}{33\times 10^{6}\text{ 焦耳/秒}}$$

$= 2.5$ 吨

8－21. 每个铀核分裂时，大约释放 200 兆电子伏的能量，并且平均放出 2.5 个中子，试确定在功率为 10000 千瓦的反应堆中，1 秒钟内产生的中子数.

[解] 若用 N 表示功率，t 表示时间，则功为

$$W = N \cdot t$$

其中 $N=10000$ 千瓦$=1\times10^{7}$ 焦耳/秒

$t=1$ 秒

$\therefore$ $W=1\times10^{7}\times1=10^{7}$ 焦耳$=6.22\times10^{19}$ 兆电子伏

需要参加裂变的核数目为

$$n=\frac{6.22\times10^{19}\text{兆电子伏}}{200\text{ 兆电子伏}}=3.11\times10^{17}\text{个}$$

每一个核裂变时平均释放出 2.5 个中子，因此反应堆中 1 秒钟内放出的中子数目是

$$n' = 3.11 \times 10^{17} \times 2.5$$
$$= 7.78 \times 10^{17} \text{ 中子 / 秒}$$

8－22. 一个原子能发电站的效率是 16.7%，试求出在一个功率为 5000 千瓦的原子能发电站^{235}U 一昼夜的消耗量是多少?

[解] 设原子能发电站的效率为 η

$$\eta = \frac{N_{\text{有用功率}}}{N_{\text{总功率}}} = 16.7\%$$

$\therefore$ $$N_{总}=\frac{N_{有用}}{16.7\%}=\frac{5000\times100}{16.7}$$
$$=2.99\times10^{7}\text{ 焦耳/秒}$$
$$W = N_{总} \cdot t$$
$$= 2.99 \times 10^{7} \times 86400$$
$$= 2.586 \times^{12} \text{ 焦耳}$$
$$= 16.16 \times 10^{24} \text{ 兆电子伏}$$

一昼夜需参加裂变的铀核数目为

$$n = \frac{W}{E} = \frac{16.16 \times 10^{24}\ \text{兆电子伏}}{200\ \text{兆电子伏}}$$

$$= 8.08 \times 10^{22}\ \text{个}$$

n 个铀核的质量为

$$m = 8.08 \times 10^{22} \times 235 \times 1.66 \times 10^{-24}\ \text{克} = 31.5\ \text{克}$$

即一昼夜消耗 31.5 克的^{235}U.

8－23. 试求两个质子和两个中子聚变合成 1 克氦时所释放的能量约等于多少煤在空气中燃烧所释放的热能(煤的燃烧热约等于 33×10^6 焦耳/千克).

[解] 当两质子和两个中了聚变成氦时,所释放的能量为

$$\Delta E = [(2m_n + 2m_p) - m_{He}]c^2$$

$$= [(2.017330 + 2.015650) - 4.002603] \times 931.5\ \text{兆电子伏}$$

$$= 28\ \text{兆电子伏}$$

一克氦所含的原子核数目为

$$N = \frac{N_A \cdot m}{A} = \frac{6.02 \times 10^{23}}{4} \doteq 1.5 \times 10^{23}\ \text{个}$$

合成 1 克氦所释放的能量为

$$E = \Delta E \cdot N = 28\ \text{兆电子伏} \times 1.5 \times 10^{23} = 6.7 \times 10^{11}\ \text{焦耳}$$

与一克氦相当的煤的质量是

$$m = \frac{E}{Q} = \frac{6.7 \times 10^{11}\ \text{焦耳}}{33 \times 10^6\ \text{焦耳/千克}}$$

$$= 2.0 \times 10^4\ \text{千克} = 20\ \text{吨}$$

8－24. 设 1 千克氘(重氢,^2H)按照下述反应而聚变成 1 千克氦

$$^2_1H + {}^2_1H \rightarrow {}^4_2He$$

$$2.0141 \quad 2.0141 \quad 4.0026$$

试求在这一聚变过程中所释放的能量;如果受约束的氦的比热为

0.75 卡/克·度. 问这些能量将使氦的温度升高多少?

[解] 两个氘核聚变成$^4_2$He 核所释放的能量为

$$\Delta E = [(m_H^2 - m_{He})]c^2$$
$$= [2 \times 2.0141 - 4.0026] \times 931.5 \text{ 兆电子伏}$$
$$= 23.85 \text{ 兆电子伏}$$

由此可知,每消耗 2 个氘核可释放出 23.85 兆电子伏的能量,所以消耗 1 千克的氘所释放的能量为

$$\frac{23.85 \text{ 兆电子伏} \times 1}{2 \times 2.0141 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{千克}}$$
$$= 3.57 \times 10^{-27} \text{兆电子伏} = 5.712 \times 10^{14} \text{焦耳}$$

已知受约束的氦的比热为 $c = 0.75$ 卡/克·度,所以 1 千克氦的温度将升高为

$$\frac{5.712 \times 10^{14} \text{焦耳}}{0.75 \times 4.18 \text{ 焦耳/克·度} \times 1000 \text{ 克}} = 1.82 \times 10^{11}\text{°C}$$

习 题 集

§8-1 核反应中的守恒定律

8-1. 当一束质子入射到$^{31}_{15}$P 靶上,而放出的粒子分别是:(a)一个中子;(b)一个质子;(c)一个氘核;(d)一个 α 粒子. 试分别写出反应的完整方程.

8-2. 写完下列反应式

(a)^{235}U→α+____

(b)^{23}Na(d,p)____

(c)____→$e^- + \bar{\nu} + {}^3$He

(d)^{20}Na→e^++____+____

(e)$^{16}O(d,p)$____

(f)^{14}N(____,n)^{17}F

8－3. 计算下列核反应的 Q 值，并指出是吸能反应，还是放能反应？

$^{10}B(\alpha,p)^{13}C$；$^{27}Al(\alpha,d)^{29}Si$；$^{9}Be(d,n)^{10}B$；$^{15}N(d,n)^{16}O$.

8－4. 计算下列核反应的 Q 值，并指出是吸能反应，还是放能反应？

$^{9}Be(d,\alpha)^{7}Li$；　$^{2}H(d,p)^{3}H$；　$^{6}Li(p,\alpha)^{3}He$.

8－5. 利用下述核数据，求核反应$^{192}Os(d,t)^{191}Os$ 的 Q 值.

原子核	^{191}Os	^{192}Os	d	t
$\Delta(Z,A)$兆电子伏	－36.388	－35.875	13.136	14.950

8－6. 已知^{7}Li 和^{4}He 的比结合能分别为 5.60 和 7.06 兆电子伏，试求出$^{7}Li(n,\alpha)^{4}He$ 核反应的 Q 值.

8－7. 在$^{2}H(d,p)^{3}H$ 的核反应中，已知反应能 $Q=4.04$ 兆电子伏，氢原子及氘原子的质量分别为 1.007825u，2.014102u 试求出氚原子的质量.

8－8. 在$^{17}O(n,p)^{17}N$ 的核反应中，已知反应能 $Q=-7.89$ 兆电子伏，氧原子及中子、质子的质量分别为 16.999134u，1.008665u，1.007825u，试求出^{17}N 原子的质量.

8－9. 动能为 T_0 的中子与静止的核发生弹性碰撞，核质量为 M，这时中子被散射，试证明当中子被质子弹性散射时，被散射的中子运动方向与反冲质子的方向之间夹角是 90°.

8－10. 中子与质量相等的其它粒子碰撞时能被最有效地减速. 假设速率为 2×10^{7} 米/秒的中子与静止质子发生弹性对心碰撞，问中子在碰撞后的速率是什么？如果中子与静止的自由金原子发生弹性碰撞，再求解.

8－11. 动能为 1.0 兆电子伏的 α 粒子在静止的^{6}Li 核上弹性地散射，试确定与 α 粒子初始运动方向成 30°角飞出的反冲核的动

能.

8－12. 能量为 6 兆电子伏的质子入射到静止的^{12}C 核上，试求质子的运动的速度. 设质子的质量为 1u.

8－13. 在实验室中，快速中子可用 400 兆电子伏的氘核束，通过如下方式生成：

$$^{2}_{1}H+^{3}_{1}H\rightarrow^{4}_{2}He+^{1}_{0}n$$

(a) 计算反应能 Q 值；(b) 假定$^{2}_{1}H$ 和$^{3}_{1}H$ 的动能可忽略，α 粒子和中子的动能是多少？

8－14. 质量为 M，速度为 V 的粒子与质量为 m 的静止粒子发生弹性碰撞，试用能量守恒和动量守恒定律证明，如果质量为 m 的粒了的速度 v 与 V 的方向相同，那么

$$v=\frac{2M}{M+m}V.$$

8－15. 一粒子的质量为 M_1，动能为 T_1，速度为 V_1，动量为 P_1，当它被一个静止的原子核(M_0,T_0,V_0,p_0)俘获时，放出一个轻粒子(M_2,T_2,V_2,p_2)和反冲的重粒子(M_3,T_3,V_3,p_3). 试应用能量和动量守恒定律证明：当轻粒子的发射方向与入射粒子径迹呈 90°时，轻粒子的能量是：

$$T_2=\frac{M_3}{M_2+M_3}(Q-\frac{M_1-M_3}{M_3}T_1)$$

其中 Q 是反应能.

8－16. (a)证明由放能反应 $Z+x\rightarrow Y+y+Q$ 产生的粒子 y 在质心系中的发射角 θ 与实验室中记录的角度 φ 的关系是

$$\theta=\varphi+\arcsin(\beta\sin\varphi)$$

$$\beta^2=\frac{m_ym_x}{M_YM_X[1+\frac{Q(M_Y+m_y)}{M_X+T_x}]}$$

其中 $T_x=\frac{1}{2}m_xv_x^2$ 是实验室系中轰击粒子的动能. (b)证明在吸能

反应中

$$T_x = \frac{M_X + m_x}{M_X}|Q|$$

时，质心系中每个产生粒子的动量为零.

8－17. (a)应用能量和动量守恒原理，证明在与质量数为 A 的原子核的对心碰撞中，中子的能量减少为 $\Delta T = T\left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]$ 其中 T 是中子的初始能量. (b)计算中子与质子；氘核；$A=12$ 的碳核碰撞时能量损失.

8－18. 一束能量为 0.40 兆电子伏的氘核，射向重氢靶，计算入射束呈 90^0 角发射的氘核的能量.

8－19. 通常用反应 $^{10}B(n,\alpha)^7Li$ 来记录慢中子，试求 α 粒子的动能和反冲核的动能.

8－20. 质量为 M 的非相对论粒子与静止的相同质量的粒子发生弹性碰撞，证明碰撞后两个粒子径迹的夹角为 90°.

8－21. 在 $^7Li(p,\alpha)^4He$ 反应中，当质子的能量为 1 兆电子伏时，如果两个 α 粒子相对于入射质子方向对称飞开，试求每一 α 粒子的动能和出射角.

8－22. 在给定的核反应中，假定在 θ_1 角上放出粒子的动能 T_{y_1}；在 θ_2 角上是 T_{y_2}，计算入射粒子的能量. 用 T_{y_1}，T_{y_2} 和静止质量来表示.

8－23. 考虑核反应 $^{16}O(p,d)^{15}O$，$^{209}Bi(p,d)^{208}Bi$，问质子与氘核刚刚接触时的库仑势垒的高度是多少？

8－24. 能量为 5.3 兆电子伏的 α 粒子入射到铍靶上，引起 $^9Be(\alpha,n)^{12}C$ 反应，其反应能为 5.70 兆电子伏. 假定反应前 ^9Be 核处于静止状态，试求中子的最大和最小能量.

8－25. 通常利用反应 $^1_1H+^7_3Li\rightarrow^7_4Be+^1_0n$，从单能的质子源产生单能的中子. 反应能 $Q=-164$. 兆电子伏，如果质子的动能为 5 兆

电子伏，试问在多大的角度上发射能量为 2.5 兆电子伏的中子？

8－26. 在$^{19}F(n,p)^{19}O$ 的反应中，$Q=-3.9$ 兆电子伏. (a)计算阈能. (b)计算^{19}F 和^{19}O 的质量差.

8－27. 由下述核反应循环，计算在$^{30}Si(d,n)^{31}P$ 反应中生成基态的^{31}P 的反应能 Q.

$^{30}Si+d\rightarrow{}^{31}Si+p+4.370$ 兆电子伏

$^{31}Si\rightarrow{}^{31}p+\beta^{-}+\bar{\nu}+1.476$ 兆电子伏

$n\rightarrow p+C^{3}\cdot+\bar{\nu}+0.783$ 兆电子伏

8－28. 由下述核反应循环，计算在$^{29}Si(d,n)^{30}P$ 反应中生成基态的^{30}P 的反应能 Q.

$^{31}P+\gamma\rightarrow{}^{30}P+{}_{0}^{1}n-12.313$ 兆电子伏

$^{31}P+p\rightarrow{}^{28}Si+{}^{4}He+1.916$ 兆电子伏

$^{28}Si+d\rightarrow{}^{29}Si+p+6.251$ 兆电子伏

$2\,d\rightarrow{}^{4}He+23.847$ 兆电子伏

8－29. 用粒子 α 打击^{9}Be 产生^{12}C，并放出一个新的粒子. (a)写出核反应方程. (b)如果 α 粒子在速率为 1.5×10^{9} 厘米/秒，放出的新粒子以 4×10^{9} 厘米/秒的速率垂直于 α 粒子前进的方向飞出，求^{12}C 的速率. (c)若这个反应是放能反应，放出能量为 5.7 兆电子伏，问反应后比反应前质量增加还是减少？变化多少？

8－30. 已知镭源的 α 粒子的最大能量为 7.69 兆电子伏，求镭—铍中子源的最大中子能量.

8－31. 当入射粒子的能量为 1 兆电子伏时，由$^{7}Li(p,\alpha)^{4}He$ 反应所放出的两个 α 粒子的方向相对入射质子的方向是对称的，试求每个 α 粒子的动能和出射角.

§8-2 核反应的截面和产额 核能级

8－32. 热中子(～0.025 电子伏)束通过 5 厘米厚的水时，其

强度减弱了一半，假定中子束仅被氢原子吸收，试计算：(a)吸收截面；(b)吸收系数；(c)若强度减少 10 倍，需要多厚的水？

8－33. 对某个散射靶，入射中子束有 $10^{-3}\%$被散射. 如果靶的密度为 1.06×10^{7} 千克/米^3，$A=2000$，面且每个核的中子总截面 $\sigma=1.1$ 靶，试求这个靶的厚度.

8－34. 热中子(～0.025 电子伏)束的强度分别减少(a)10 倍；(b)100 倍；(c)1000 倍时，需要多厚的铝？已知铝密度是 2.7 克/厘米^3，对 0.025 兆电子伏的中子截面是 0.23 靶.

8－35. 按照定义，粒子的平均自由程 $\bar{x}$ 由下式给出：

$$\bar{x}=\frac{\int_0^{N_0}x\mathrm{d}N}{\int_0^{N}\mathrm{d}N}$$

其中 $\mathrm{d}N$ 是经过距离 x，被吸收之前的粒子数. 证明：

$$\bar{x}=\frac{1}{n\sigma}=\frac{1}{\sum}$$

8－36. 利用平均自由程的表达式，$\bar{x}=\frac{1}{n\sigma}$ 计算热中子的平均自由程. (a)在水中 $\sigma=0.33$ 靶，密度为 1 克/厘米^3；(b)在石墨中，$\sigma=2.6$ 靶，密度为 2250 千克/米^3.

8－37. 对 1 兆电子伏的中子，镍的总截面(吸收＋散射)是 3.5 靶. 一束这样的中子通过 10^{-4} 米厚的镍薄片时，相对衰减 $\mathrm{d}I/I$ 是多少？已知镍的密度为 8900 千克/米^3，σ 参照自然存在的同位素分布.

8－38. 动能为 $T_n=1$ 兆电子伏的中微子与原子核发生反应的截面数量级为 10^{-48} 米^2. 1 兆电子伏的中微子沿地球直径穿过地球时，被吸收的几率是多少(已知地球的直径是 1.3×10^{7} 米，平均密度为 5500 千克/米^3，假定平均原子量为 38)？

8－39. 试计算镍对 40 兆电子伏的中子的散射截面是多少靶？

8－40. 用能量为 17 兆电子伏的 α 量子照射厚度为 1.0 毫米的铜板时，(r,n)反应产额为 4.2×10^{-4}. 试求此反应截面.

8－41. 由天然同位素锂制成的靶，其厚度为 0.50 厘米，试确定用热中子(～0.025 电子伏)束照射此靶时(n,α)反应产额.

8－42. 快中子照射铝靶时，产生 $^{27}Al(n,p)^{27}Mg$ 反应，接下去又发生 β－衰变 $^{27}Mg \xrightarrow[T_{1/2}=9.46\text{分}]{\beta^-} {}^{27}Al$. 已知铝靶面积为 2×5 厘米^2；厚为 1 厘米；靶面垂直于中子束，铝靶经通量为 10^7 厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$的快中子长期照射后，经过 20.4 分钟，还有 1.13×10^{-2} 微居里的放射性，试求该反应的反应截面.

8－43. 强度为 2×10^{12} 个中子/秒的热中子(～0.025 电子伏)流照射天然同位素组成的薄硼板，照射时间为一年，由于 ^{10}B 核发生反应的结果，到照射结束时 ^{10}B 的含量变成 16.4%，试确定该反应的反应截面.

8－44. 用 20μA 的 3.5 兆电子伏的质子束轰击厚为 5.0 毫克/厘米^{2}的锂靶，通过 $^7Li(p,n)^7Be$ 反应产生放射性同位素 ^7Be. 设反应截面为 300 毫靶，试求 2 小时后的放射性活度.

8－45. 0.1 克的 ^{59}Co 暴露在通量为 10^{14} 个中子/厘米^2·秒的热中子束中 1 分钟，计算产生的放射性同位素 ^{60}Co 的原子核数目以及在辐照后的瞬间，样品的活度. 假定在辐照过程中没有核衰变，反应截面 $\sigma=19$ 靶.

8－46. 厚度为 0.02 厘米的金箔被通量为 10^{12} 个中子/厘米^2·秒$^{-1}$的热中子照射 5 分钟，通过 $^{197}Au(n,\gamma)^{198}Au$ 反应生成 ^{198}Au. 已知反应截面为 98.7 靶，金的密度为 19.3 克/厘米^3，试求每平方厘米产生 ^{198}Au 的放射性活度.

8－47. 重 0.2 克的薄金箔，在反应堆的热中子流中辐照 2 分钟，^{198}Au 由下反应产生：

$$^{197}Au + {}^1n \rightarrow {}^{198}Au \xrightarrow[64.8\text{小时}]{\beta^-} {}^{198}Hg + \nu$$

中子的俘获截面是 98 靶，它离开反应堆之后的活度正好是 2 毫居里，求热中子通量.

8－48. 用能量为 14 兆电子伏的氘核轰击磷粉靶，由于(d,p)反应，生成^{32}P. 如果用流强度为 25μA 的氘核照射两小时以后，^{32}P的放射性活度为 14.1 毫居里. 求比核反应产额. 在照射过程中^{32}P的衰变可忽略.

8－49. 强度为 2.0×10^{10}个中子/秒的中子流照射厚度是 1.0 克/厘米^2 的薄磷板，中子的动能为 2 兆电子伏，照射时间 $\tau=4.0$ 小时，照射结束后，经过 $\tau=1.0$ 小时磷板的放射性变为 105 微居里. 已知放射性是由(n.p)反应产生的同位素^{31}Si 引起的，试确定此反应截面.

8－50. 质量为 0.20 确定的薄铟箔^{115}In 被热中子流照射两小时，在照射结束后经过 0.50 小时，铟的放射性为 0.07 毫居里，试确定中子流密度.

8－51. 复合核激发能 E_C 由下式给出：

$$E_C = E'_x + E_B$$

其中 E_B 是复合核处于基态时粒子 x 的结合能(≈8 兆电子伏/中子). E'_x 是入射粒子的能量用于激发原子的部分. 应用线动量守恒定律证明：

$$E'_x = E_x\left(\frac{M_X}{M_X + m_x}\right)$$

其中 E_x 是入射粒子的能量(可用非相对论近似).

8－52. 试求氘核俘获动能为 1 兆电子伏的质子所形成的^3He核的激发能.

8－53. 计算^{27}Al 捕获 8 兆电子伏的 α 粒子所形成复合核的激发能.

8－54. 对于反应$^{10}B+d\rightarrow{}^8Be+\alpha+17.8$ 兆电子伏，当氘束能量为 0.6 兆电子伏时，在 $\theta=90^0$ 方向上观察到四种能量的 α 粒

子；12.2 兆电子伏；10.2 兆电子伏；9.0 兆电子伏；7.5 兆电子伏. 试求^{8}Be 的激发能.

8－55. 分别用能量为 1.05 兆电子伏，2.22 兆电子伏和 3.0 兆电子伏的质子轰击$^{7}_{3}Li$ 靶，来观察共振现象. 已知质子和$^{7}_{3}Li$ 的结合能是 17.21 兆电子伏，试求所形成的复合核的激发能.

8－56. 当能量为 15 兆电子伏的中子与^{184}W 核作用时形成复合核. (a)求复合核的俘获截面. (b)约为几何截面的几倍？

8－57. 在$^{181}Ta+{}^{1}n\rightarrow{}^{182}Ta^{*}\rightarrow{}^{182}Ta+\gamma$ 的反应中，当入射中子的能量为 $T_n=4.3$ 电子伏时，观察到共振吸收现象，其吸收截面 $\sigma_n=4200$ 靶，能级宽度 $\Gamma_n\doteq 2\times10^{-3}$ 电子伏，$\Gamma_\gamma\gg\Gamma_n$，试推断复合核$^{182}Ta^{*}$ 的平均寿命.

8－58. 已知^{6}Li 核对于发射中子和粒子的平均寿命为 $\tau_n=1.1\times10^{-20}$ 秒；$\tau_\alpha=2.2\times10^{-20}$ 秒(无其他过程)，试求出当能量为 0.25 兆电子伏的中了被^{6}Li 核俘获时，产生的激发态的平均寿命.

8－59. 在复合核的形成中，若共振能级在宽度是 1 电子伏；1 千电子伏和 1 兆电子伏. 这些状态相应的寿命是多少？从这些数据中你能得到什么结论？

8－60. $^{27}_{13}Al$ 吸收一个 α 粒子后的形成什么样的复合核？复合核的衰变有什么不同的方式？相应的剩余核是什么？

8－61. 中子被^{113}Cd 俘获时形成复合核，若中子能量 $T_n=2T_0$ 时，辐射俘获截面是在 $T_n=T_0$ 时这个过程的截面的 1/15，式中 $T_0=0.178$ 电子伏，试利用布莱特一维格的公式求出复合核的能级宽度 Γ(Γ 与中子能量无关).

8－62. 一束能量为 17 兆电子伏，束流为 10^{-8}A 的质子入射在$^{63}_{29}Cu$ 靶箔上，箔片每单位上的质量为 10^{-2}千克/米^{2}，发现一个距靶 1 米远处，面积为 10^{-5}米^{2}，放置在与入射束呈 30°的位置上的计数器，每分钟探测到 240 个弹性散射质子，试确定微分截面的值.

8－63. 当能量为 60 兆电子伏的质子轰击$^{54}_{26}Fe$靶时，一群具有最高能量的非弹性散射质子在 40°角发射出去，测量的微分截面为 $d\sigma/d\Omega=1.3\times10^{-3}$靶/每单位立体角内，剩余核处在第一激发态上(1.42 兆电子伏). 若用 10^{-7}A 的质子束轰击质量厚度为 10^{-3}千克/米^2 的纯^{54}Fe 靶箔，并且用面积为 10^{-5}米^2，距靶箔 10^{-1} 米处的探测器测量非弹性散射质子. 试计算每秒钟记录多少个？

§8－3 原子核的裂变　聚变　核能的利用

8－64. 当^{235}U 核俘获中子时，发生的核分裂必须有的激发能应该不小于 5.2 兆电子伏. 试问^{235}U 核俘获热中子是否能发生分裂？

8－65. ^{235}U 核俘获热中子后. 若已知在分裂的核中一个核子的结合能为 7.8 兆电子伏，而在核碎片中一个核子的结合能则为 8.6 兆电子伏，试估计给定过程中释放的能量值.

8－66. 在^{235}U 核的裂变中，两个碎片的质量比是 1.5，试问两个碎片的速度比是多少？

8－67. ^{235}U 核俘获一个热中子时分裂成两个碎片，其质量数分别为 96 和 104，设两个碎片的总动能为 165 兆电子伏，试计算每一个碎片的动能和速度.

8－68. ^{235}U 核除 α 衰变之外，还可发生自发裂变. 若已知^{235}U 的 α 衰变有半衰期 $T_{1/2}=6.5\times10^{8}$ 年，而其自发裂变的平均寿命 $\tau\doteq3\times10^{17}$年. 试求这两种过程的强度的比率.

8－69. 试估算在贮存的 1000 千克的天然铀中，每年由于自发裂变有多少^{235}U 和^{238}U 损失掉？通过 α 衰变的损失又有多少？

8－70. ^{235}U 核由慢中子引起裂变，如果两个裂变产物的质量数分别是 72 和 162，计算释放的能量.

8－71. 假设在热平衡中，绝对温度为 T 时，原子核的动能量

是 kT,($k=1.38\times10^{-6}$尔格/度). 试计算 300K 的中子,14×10^{6}K 的质子和 10^{6}K 的氦核的能量.

8－72. (a)距 $Z=45$ 的核 10^{-12}厘米处的势能(以伏为单位). (b)两个核的中心相距 10^{-12}厘米,试确定其势能(以兆电子伏为单位).

8－73. 假定为通过核势垒所需要的激活能等于裂变过程中所生成的两个核的库伦能. (a)计算^{8}Be 衰变成两个 α 粒子的激活能. (b)将这个值与有关的核的质量差所对应能量相比较.

8－74. 在裂变反应$^{63}Cu+p\rightarrow{}^{24}Na+{}^{39}K+{}^{1}n$ 中,确定:(a)通过势垒所需要的激活能;(b)反应物与生成物之间的质量差所等效的能量;(c)反应阈能.

8－75. 假定 α 粒子在裂变的瞬间静止地释放出来,试确定 α 粒子从 $Z=56$;$A=140$ 的裂变碎片的库伦场中获得的动能.

8－76. 如果中子的初动能 $E_0=7$ 兆电子伏,试对中子减速到与温度 $T=300$K 相应的热能水平的中子,在重氢(^{2}H)和碳(^{12}C)中的弹性碰撞次数作一比较. 已知每经过一次碰撞后中子的平均能量 $\bar{E}=E_0[1-\frac{2A}{(1+A)^2}]$,试求 A 是减速剂的核的质量数.

8－77. 试证明:一个能量为 E_0 的中子与静止的碳原子核经过 N 次对碰撞之后,其能量近似为$(0.72)^{N}E$.

8－78. (a)证明如果 α 是中子俘获截面与中子裂变截面之比,那么对子一个给定的可裂变同位素 $1/(1+\alpha)$是裂变反应的比率,而 $\alpha/(1+\alpha)$是俘获反应比率. (b)证明每吸收一个中子产生的裂变中子的平均数 n 是 $\gamma/(1+\alpha)$. 其中 γ 是每次裂变发射中子的平均数.

8－79. 试计算^{233}U,^{235}U 和天然铀每吸收一个热中子产生次级中子的平均数. 设天然铀中^{235}U 的含量为 1/140.

8－80. 核燃料吸收一个热中子后,发出的平均中子数为 n,为

使铀的 $n=1.7$，铀中的^{235}U要浓缩到什么程度？

8－81. 在中子诱发的^{235}U核一次裂变中，大约放出185兆电子伏提供使用的能量. 若在反应堆中^{235}U不断产生100兆瓦的功率，那么1千克的铀能使用多久？

8－82. 若一座^{235}U反应堆每30天用掉2千克的燃料，该反应堆的输出功率是多大？

8－83. 计算在功率为500兆瓦的核反应堆中，作为裂变燃料的^{235}U的消耗率. 假定从热到电的转换效率仅有5%.

8－84. ^{235}U核的一次热中子裂变中放出热量200兆电子伏，除中微子带走10兆电子伏的能量外，其余均可收回，试计算：(a)产生一W功率时，每秒需要发生的裂变数. (b)已知^{235}U核的热中子总吸收截面为680.8靶，其中裂变截面为582.2靶，要使反应堆产生100兆瓦的功率，每昼夜至少要消耗多少克^{235}U？

8－85. 若反应堆的增殖系数 $K=1.06$，试估计反应堆的功率增大到 $\eta=10^6$ 倍经过的时间间隔. 已知反应堆中一代中子的平均寿命 $\tau\doteq0.1$ 秒.

8－86. 某原子发电站的效率为20%时，它在一年内核燃料的消耗量为19.2千克^{235}U，试求这个原子发电站的电功率(千瓦). 设在每次^{235}U分裂时释放能量为200兆电子伏.

8－87. 某原子破冰船的发动机输出44000马力的功率，如果破冰船的反应堆的效率为20%，试求反应堆一昼夜内核燃烧消耗量. 设在每次^{235}U分裂时释放能量为200兆电子伏，把所得结果与效率为80%时为保证给定功率必须的煤(发热量为7000千卡/千克)的昼夜消耗量作一比较.

8－88. 若原子弹的三硝基甲苯当量等子 3×10^4 吨，试计算原子弹爆炸时发生分裂的^{235}U的质量. 假定三硝基甲苯的热当量约为1千卡/克，在每次^{235}U分裂时释放能量为200兆电子伏.

8－89. 原子反应堆的典型结构是用铀块排成的格子浸在石墨

中，这种为铀及减速剂混合组成的实际繁生媒质称为“铀锅炉”. 若已知倍增系数 $K=1.06$，中子由分裂过程而产生时到被某核俘获时所经历的路程平均长度 $L=350$ 厘米，试求立方形“铀锅炉”的中肯大小(边长 D).

8－90. 当 1 克氢原子由聚合转变成氦原子时，释放出多少能量？并与 1 克的 ^{235}U 核裂变放出的能量相比较.

8－91. 试问在下列热核反应中燃烧 1 克核燃料时放出多少能量：

(a) $d+t\rightarrow {}^4He+{}^1n+17.6$ 兆电子伏

(b) $d+d\rightarrow t+p+4.0$ 兆电子伏

(c) $d+{}^6Li\rightarrow {}^4He+{}^4He$

将得到的结果同燃烧 1 克铀时放出的能量作一比较.

8－92. 已知氘在氢元素中的丰度是 1/6000，试计算在 1 升水中所提取的氘发生核聚变放出的能量是多少？

8－93. 氘核每个核子的平均结合能是 1.09 兆电子伏，^4He 的平均结合能是 7.05 兆电子伏，据此计算两个氘核聚合成 ^4He 时的聚变能.

8－94. 一个聚变堆的功率为 10^6 千瓦，以 d＋t 为燃料，试计算每秒钟要消耗多少氚？

8－95. 试利用 $d+d$ 反应截面的公式，$\sigma dd=1.2\times10^2\frac{1}{T_c}\exp\left(-\frac{31.3}{T_c^{1/2}}\right)$靶，($T_c$ 是质心系中的动能). 计算 $T_d=10$ 千电子伏和 100 千电子伏时的反应截面.

8－96. 试计算下列循环中释放的总能量.

$p+{}^{12}C\rightarrow {}^{13}N$

$^{13}N\rightarrow {}^{13}C+e^++\nu$

$p+{}^{13}C\rightarrow {}^{14}N$

$p+{}^{14}N\rightarrow {}^{15}O$

$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{-} + \nu$

$p + {}^{15}N \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$

8－97. 试计算在 dt 聚变中产生一兆瓦的功率时，氘和氚的消耗率(假定聚变产生的全部能量都可用).

8－98. 已知 dt 反应的 $Q=17.6$ 兆电子伏，假定由聚变反应产生的全部能量均可回收，试计算产生 1 兆瓦功率时，^{2}H 和 ^{3}H 在单位时间内的消耗量.

8－99. 在等离子体温度 $kT=20$ 千电子伏的条件下，$H=100$ 千高斯的外磁场能维持等离子体最大密度是多少?

8－100. 如果氘等离子体的温度为 1.0 千电子伏和 10.0 千电子伏，试计算氘核具有相对运动最可几速度时 dd 反应的截面.

第九章　粒　　子

内　容　提　要

（一）高能反应中的阈能

在第六章中我们给出了吸能核反应的阈能公式. 但在粒子物理中粒子间产生的反应一般在高能下发生，而且反应后产生的粒子一般不是两个粒子，而是好多个粒子. 在这种情况下，阈能的表达式，仍与上述非相对论结果一致. 即对于

$$m + M \rightarrow \sum_i m_i$$

有

$$T_{阈} = -\frac{m + M}{M} Q \tag{9-1}$$

（二）粒子的性质

目前已发现的粒子达到 780 多种，现将熟知的几种粒子及其量子数列于表 9-1 中.

表 9-1　粒子的性质

组名		粒子和(反粒子)	静止质量(MeV/c^2)	电荷(Q/e)	固有自旋	轻子数 l_e 或 l_μ	重子数 B	固有宇称 P	同位旋 T	同位旋 z 分量 T_z	奇异数 S	超荷 Y
光子		$\gamma(\gamma)$	0	0	1	0	0					
轻子		$\nu_e(\bar{\nu}_e)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$+1(-1)$	0					
		$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$+1(-1)$	0					
		$e^-(e^+)$	0.511	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	$+1(-1)$	0					
		$\mu\ (\mu^+)$	105.7	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	$+1(-1)$	0					
		$\tau^-(\tau^+)$	1784	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	$l_\tau=-1(+1)$	0					
强子	介子	$\pi^+(\pi^-)$	139.6	$+1(-1)$	0	0	0	奇	1	$+1(-1)$	0	0
		$\pi^0(\pi^0)$	135.0	0(0)	0	0	0	奇	1	0(0)	0	0
		$\pi^-(\pi^+)$	139.6	$-1(+1)$	0	0	0	奇	1	$-1(+1)$	0	0
		$K^+(K^-)$	493.8	$+1(-1)$	0	0	0	奇	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$	$+1(-1)$	$+1(-1)$
		$K^0(\bar{K}^0)$	497.8	0(0)	0	0	0	奇	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}(+\frac{1}{2})$	$+1(-1)$	$+1(-1)$
		$\bar{K}^0(K^0)$	497.8	0(0)	0	0	0	奇	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$	$-1(+1)$	$-1(+1)$
		$K^-(K^+)$	493.8	$-1(+1)$	0	0	0	奇	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}(+\frac{1}{2})$	$-1(+1)$	$-1(+1)$
	子	$\eta^0(\bar{\eta}^0)$	549	0	0	0	0	奇	0	0	0	0
		$\eta'(\bar{\eta}')$	958	0	0	0	0	奇	0	0	0	0

组名		粒子和(反粒子)	静止质量(MeV/c^2)	电荷(Q/e)	固有自旋	轻子数 l_e 或 l_μ	重子数 B	固有宇称 P	同位旋 T	同位旋 z 分量 T_z	奇异数 S	超荷 Y
强子	重子	$p(\bar{p})$	938.3	$+1(-1)$	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$	0	$+1(-1)$
		$n(\bar{n})$	939.6	0	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}(+\frac{1}{2})$	0	$+1(-1)$
		$\Lambda^0(\bar{\Lambda}^0)$	1116	0	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	0	0	$-1(+1)$	0
		$\Sigma^+(\bar{\Sigma}^+)$	1189	$+1(-1)$	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	1	$+1(-1)$	$-1(+1)$	0
		$\Sigma^0(\bar{\Sigma}^0)$	1192	0	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	1	0	$-1(+1)$	0
		$\Sigma^-(\bar{\Sigma}^-)$	1197	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	1	$-1(+1)$	$-1(+1)$	0
	介子	$\Xi^0(\bar{\Xi}^0)$	1315	0	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$	$-2(+2)$	$-1(+1)$
		$\Xi^-(\bar{\Xi}^-)$	1321	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}(+\frac{1}{2})$	$-2(+2)$	$-1(+1)$
		$\Omega^-(\bar{\Omega}^-)$	1672	$-1(+1)$	$\frac{1}{2}$	0	$+1(-1)$	偶(奇)	0	0	$-3(+3)$	$-2(+2)$

(三)守恒定律

在粒子之间存在有四种形式的相互作用，那就是强相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和万有引力作用. 因为万有引力作用非常弱，所以可以不考虑. 各种量子数在不同相互作用下遵守的守恒定律列于表 9-2 中.

表 9-2

守恒量	强作用	电磁作用	弱作用	
能　量	+	+	+	
线动量	+	+	+	
角动量	+	+	+	
电　荷	+	+	+	
电轻子数	+	+	+	
μ 轻子数	+	+	+	
重子数	+	+	+	
同位旋	+	−	−	(对非轻子，$\Delta T=\frac{1}{2}$)
同位旋 z 分量	+	+	−	(对非轻子，$\Delta T_z=\frac{1}{2}$)
奇异数	+	+	−	(对非轻子，$\Delta S=\frac{1}{2}$)
宇　称	+	+	−	(在 K^0，$\bar{K}^0$ 的慢衰变系统中，经常违背此规定)
电荷共轭	+	+	−	
时间反演	+	+	+	

"+"代表守恒，"−"代表不守恒

在任何反应和衰变过程中，能量、线动量、角动量和电荷是守恒的，已是熟知的事实. 下面只给出其他一些守恒定律.

1. 轻子数和重子数守恒

电子及其有关的中微子(ν_e) 的轻子数，μ 介子及其有关的中微子(ν_μ)的轻子数，在所有的反应中各自都是守恒的. 例如衰变

$$\mu^- \to e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$L_\mu: +1=0+0+1$$

$$L_e: 0=+1-1+0$$

重子的重子数 $B=+1$，反重子的 $B=-1$，其余粒子的 $B=0$. 任何反应和衰变过程，总重子数是守恒的. 例如：

$$K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-$$

$$B: 0+1=1+0+0$$

2. 同位旋守恒

有一些介子或重子，它们的自旋相同，质量相近，但电荷不同. 在强相互作用中这组粒子是等同的，因而用“同位旋”(T)来描述这组粒子的特性. $2T+1$ 就是这组粒子的总数，例如，三种 π 介子 (π^+, π^0, π^-)质量都约为 $139\text{MeV}/c^2$，其同位旋为 $T=1, T_z=+1, 0, -1$. 分别对应于 π^+, π^0, π^-. 又如，两种核子(n,p)，同位旋 $T=\frac{1}{2}$，而 $T_z=+\frac{1}{2}$对应于质子，$T_z=-\frac{1}{2}$对应于中子.

实验证明，在一切强相互作用中，同位旋及其 z 分量都是守恒的. 在电磁作用中，前者不守恒，后者仍守恒. 在弱作用中，二者都不守恒. 在不守恒时，反应或衰变前后的变化都只能是$\frac{1}{2}$，即 $\Delta T=\frac{1}{2}$和 $\Delta T_z=-\frac{1}{2}$. 例如，强作用过程

$$\pi^0 + p \to \pi^+ + n$$

$$T: 1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

$$T_z: 0+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$

再如，弱作用过程

$$K^0 \to \pi^0 + \pi^0$$

$$T: \frac{1}{2} \neq 2, 1, 0$$

$$T_z: -\frac{1}{2} \neq 0+0$$

3. 奇异数守恒

K 介子及 Λ,Σ,Ξ,Ω 等重子在强作用中总是成对的产生,而生成物的衰变却是弱过程. 为了解释这种"奇异"现象,引入奇异量子数,简称奇异数,用 S 表示. 实验上发现,在强作用和电磁作用过程中,总奇异数(标量和)守恒,但在弱作用过程中,反应或衰变前后奇异数相差 1,即 $\Delta S=1$. 例如强作用过程

$$\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+$$

$$S: 0+0=-1+1 \qquad \Delta S=0$$

又如弱作用过程

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p$$

$$S: -1 \neq 0+0 \qquad \Delta S=1$$

对于奇异粒子,电荷与奇异数,重子数,同位旋 z 分量的关系由盖尔曼－西岛给出

$$Q=T_z+\frac{1}{2}(B+S) \tag{9-2}$$

知道了其中任三个量,就可得到第四个量.

(四)夸克结构模型

在已发现的 700 多种粒子中,轻子占少数. 至今也未发现轻子可辨认的内部结构. 而强子则不同,已相继提出几个关于强子的结构模型,其中最流行,被多数人承认的是夸克模型.

盖尔曼于 1964 年提出了夸克的概念,认为所有已知的强子都是由 u 夸克,d 夸克和 s 夸克复合而成. 在丁肇中等人发现 J/ψ 粒子后,为了解决强和弱的矛盾,又引入了粲夸克 c. 三个普通夸克

和一个粲夸克再加上它们的反粒子一共有八个，它们的量子数集中列于表 9-3 中. 各种强子可认为是由八个夸克粒子的几种所构成.

表 9-3　各种夸克粒子的量子数

夸克与反夸克	自旋 S	Q/e	T	T_z	奇异数 S	Y	B	C
u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0
s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$	0
c	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0.	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+1$
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	$+1$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
$\bar{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1

根据表中列出的量子数，可以用两个或三个夸克构成一个强子.

典　型　题　解

9-1. 证明用反应 $p+p\to p+p+p+\bar{p}$ 产生反质子所需要的能量值大约是 6BeV.

［证］ 假定系统的初始动量是 p_i. 反应后此动量为四个粒子分摊，故一个粒子的动量为

$$p_{1f}=p_i/4 \tag{1}$$

入射质子的最初动能 T_i 与反应后一个粒子的动能 T_{1f} 有关系（设

质子的静止质量为 M_0)：

$$T_i=4T_{1f}+2M_0c^2 \tag{2}$$

产生粒子的动量 p_{1f}，动能 T_f，总能量 E 的关系由如下相对论关系给出

$$E^2=(T_{1f}+M_0c^2)^2=p_{1f}^2c^2+M_0^2c^4 \tag{3}$$

或

$$p_{1f}^2c^2=(T_{1f}+M_0c^2)^2-M_0^2c^4 \tag{4}$$

同理有

$$p_{1i}^2c^2=(T_i+M_0c^2)^2-M_0^2c^4 \tag{5}$$

将(4)和(5)式代入(1)中得到

$$(T_i+M_0c^2)^2-M_0^2c^4=16[(T_{1f}+M_0c^2)^2-M_0^2c^4] \tag{6}$$

将(2)式中的 T_i 代入(6)中，解 T_{1f} 得

$$T_{1f}=M_0c^2 \tag{7}$$

应用(7)式，由方程(2)得到

$T_i=4M_0c^2+2M_0c^2=6M_0c^2=6$(938 兆电子伏)$=5628$ 兆电子伏

即入射质子大约需要 6BeV 的能量才可产生反质子.

9-2. 静止的 π^+ 介子的寿命为 2.6×10^{-8} 秒. 从加速中产生的单能 π 束经过 10 米的路程后衰变了 10%. 求 π^+ 的动量和能量.

[解] 在随 π^+ 介子一起运动的坐标系中，π^+ 介子按衰变定律衰变

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

式中：N_0，N 分别代表初时刻($t=0$)与任意时刻(t)的 π^- 介子数目；λ 为衰变常数. 平均寿命 $\tau=\frac{1}{\lambda}=2.6\times10^{-8}$ 秒. 从上式不难得到衰变 10%($N=0.9N_0$)所需的时间 T

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda T}\left(\frac{N}{N_0}=0.9\right)$$

$$T=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_0}{N}=\tau\ln\frac{N_0}{N}$$

由于相对论效应，在实验室坐标系中测量，π^+介子衰变10%所经过的时间T'是T的$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$倍，即$T'=T/\sqrt{1-\beta^2}$. 已知在这段时间内，$\pi^+$介子运动了$l=10$米，则

$$l=vT'=\frac{vT}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln\frac{N_0}{N}$$

$$\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{l}{\tau\ln\frac{N_0}{N}}$$

由于得π^+介子的动量和能量分别为

$$p=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{ml}{\tau\ln\frac{N_0}{N_0}}=9.1\times10^{-19}\text{千克}\cdot\text{米/秒}$$

$$E=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}=2.74\times10^{-10}\text{焦耳}=1.7\times10^9\text{电子伏}$$

9-3. 设下述反应

$$\pi^-+p\rightarrow n+\pi^0$$

中，若π^-和p最初静止，试求各产物的能量.

[解] 对于产物n和π^0，根据相对论关系有

$$E_n^2=E_{0n}^2+(p_nc)^2$$

$$E_{\pi^0}^2=E_{0\pi^0}^2+(p_{\pi^0}c)^2$$

应用动量守恒，两产物之间有关系

$$(p_nc)^2=(p_{\pi^0}c)^2$$

由此可得

$E_n^2-E_{\pi^0}^2=E_{0n}^2-E_{0\pi^0}^2=$(939.6兆电子伏)$^2-$(135.0兆电子伏)$^2=8.646\times10^5$(兆电子伏)^2

或

$$(E_n+E_{\pi^0})(E_n-E_{\pi^0})=8.646\times10^5(\text{兆电子伏})^2 \qquad (1)$$

由能量守恒有

$$E_n+E_{\pi^0}=E_{0\pi^-}+E_{0p}=139.6\text{ 兆电子伏}+938.3\text{ 兆电子伏}$$
$$=1007.9\text{ 兆电子伏}. \qquad (2)$$

将(2)代入(1),得

$$E_n-E_{\pi^0}=802.1\text{ 兆电子伏} \qquad (3)$$

联立(2)式和(3)式,解得

$$E_n=940.0\text{ 兆电子伏}, \qquad E_{\pi^0}=137.9\text{ 兆电子伏}.$$

9-4. 试确定下列反应中(设都是强相互作用过程)的未知粒子 X 的类型.

(a) $\bar{K}^- + p \to K^+ + X$

(b) $\pi^- + p \to K^0 + X$

(c) $p + p \to \pi^- + n + \Lambda^0 + X$

[解] (a)电荷数守恒:$-1+1=+1+Q$ 得 $Q=-1$

重子数守恒:$0+1=0+B$ 得 $B=1$

奇异数守恒:$-1+0=+1+S$ 得 $S=-2$

T_z 守恒:$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=+\frac{1}{2}+T_z$ 得 $T_z=-\frac{1}{2}$

由此可知,未知的 X 粒子为 Ξ 粒子.

(b)电荷数守恒:$-1+1=0+Q$ 得 $Q=0$

重子数守恒:$0+1=0+B$ 得 $B=1$

奇异数守恒:$0+0=1+S$ 得 $S=-1$

T_z 守恒:$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+T_z$ 得 $T_z=0$

由此可判定未知粒子 Σ^0 是超子或超子 Λ^0.

电荷数守恒:$+1+1=+1+0+0+Q$ 得 $Q=+1$

轻子数守恒:$0+0=0+0+0+L$ 得 $L=0$

重子数守恒:$+1+1=0+1+1+B$ 得 $B=0$

奇异数守恒:$0+0=0+0-1+S$ 得 $S=+1$

T_z 守恒:$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}+0+T_z$ 得 $T_z=+\frac{1}{2}$

由这些性质可断定未知粒子为 K^+ 介子.

9-5. 试根据守恒定律来判断下列反应可否发生.

(a)$\pi^- + p \to \Sigma^+ + K^-$

反应前的奇异数为 0,反应后的奇数为 -2. 可见此反应不可能发生.

(b)$K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$(已知反应后含有 $l=1$ 的轨道角动量).

由于 Ω^- 的 $S=-3$,而 K^+ 和 K^0 的 $S=+1$,所以反应后的奇异数为 -1. 又 K^- 的 $S=-1$,p 的 $S=0$,故反应前后的奇异数相等,满足奇导数守恒定律. 同时,电荷数和重子数是守恒的;同位旋和同位旋 z 分量也是守恒的. 宇称受 $(-1)^l$ 决定,由于反应后 $l=1$,使得宇称守恒. 因此知,这种反应可以在强作用下发生.

(c)$\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$(已知反应后含有 $l=1$ 的轨道角动量).

此反应电荷数和重子数守恒,因为最后状态包含轨道角动量为 1,所以角动量和宇称是守恒的. 同时 $\Delta T=\frac{1}{2}$,$\Delta T_z=\frac{1}{2}$,$\Delta S=1$. 故该反应在强作用和电磁作用下不能发生. 但实际上,只要反应后不含 l 为奇的轨道角动量,该反应仍可在弱作用下发生.

(d)$\pi^+ + p \to p + p + \bar{n}$

反中子的各种量子数别为:$Q=0$,$S=\frac{1}{2}$,$B=-1$,$P=$奇,$T=\frac{1}{2}$,$T_z=+\frac{1}{2}$,$S=0$. 经检验证明,所有的量子数都是守恒的,反应能在强作用下发生.

(e)$\bar{n} \to \bar{p} + e^+ + \nu_e$

因 ν_e 只参于弱作用,上反应是弱作用过程. 电荷数和重子数守恒;电轻子数也守恒. e^+ 和 ν_e 的同位旋和奇异数没有定义,故不必考虑,所以此反应可发生.

(f)$\Lambda^0 \to n + \gamma$

有 γ 光子参加反应，说明是电磁作用过程. 由于同位旋 z 分量不守恒，所以此反应不能发生.

9-6. 应用推广的泡里原理求出下列体系的同位旋 T：(a)在状态 ^3P 和 ^3D 的 np；(b)在状态 ^1P 和 ^1D 的 $\pi^-\pi^0$；(c)在状态 ^1P 和 ^1D 的 $\pi^+\pi^-$.

[解]

粒　子	n	p	π^+	π^-	π^0
自　旋	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
同位旋	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
体系同位旋	1,0		2,1	2,1	

(a)因为中子和质子的同位旋都是 $\frac{1}{2}$，所以由 n,p 组成的体系同位旋可以有 $T=1$ 或 0. 对于 ^3P 态和 ^3D 态，体系同位旋是 1 还是 0，可由推广的泡里原理确定. 对于(np)体系的 ^3P 态有 $(-1)^{l+s+T}=(-1)^{1+1+T}=-1$，则同位旋 $T=1$. 对于(np)体系的 ^3D 态有 $(-1)^{l+s+T}=(-1)^{2+1+T}=-1$，则 $T=0$.

(b)对 π^+ 和 π^0 体系，由于 T 都是 1，所以体系同位旋为 2,1,0 中的一个. 但由于体系的 $T_z=+1$，所以体系同位旋不可能为 0，只能是 2 或 1. 对 ^1P 态：$(-1)^{l+s+T}=(-1)^{1+0+T}=+1$，则 $T=1$；对 ^1D 态：$(-1)^{l+s+T}=(-1)^{2+0+T}=+1$，则 $T=2$.

9-7. udd，uud 和 dds 等夸克结构可造成何种粒子？$d\bar{s}$ 夸克组成又可能结构成何种粒子？

[解] 各种夸克粒子的性质可由表 9-3 查到.

(1)udd：(i)自旋都是 $\frac{1}{2}$，故可偶合成 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. (ii)电荷为 $\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})=0$. (iii)同位旋都是 $\frac{1}{2}$，可偶合成 $\frac{1}{2}$. (iv)同位旋 z 分量 $T_z=+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$. (v)奇异数为 0. (vi)重子数 $B=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. 从偶合成的量子数看，正好与中子的量

子数相同，所以 udd 夸克结构可构造成中子.

(2)uud：自旋、同位旋、重子数、奇异数都与 udd 相同，但电荷数为$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})=1$；同位旋 z 分量 $T_z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=+\frac{1}{2}$. 由此可知，uud 夸克组成可结构成质子.

(3)dds：重复上述步骤，可得 $S=\frac{1}{2}$，$T=1$，$T_z=-1$，$B=1$，$S=-1$，$Q=-1e$，$Y=0$. 这正是 Σ^- 超子的量子数，即 dds 可构成 Σ^- 超子.

(4)$d\bar{s}$：此体系的量子数为 $S=0$，$T=\frac{1}{2}$，$T_z=-\frac{1}{2}$，$B=0$，$S=1$，$Q=0$，$Y=1$. 可见 $d\bar{s}$ 是 K^0 介子的夸克结构.

习　题　集

§9-1　粒子间的相互作用

9-1. 动能为 100 兆电子伏的 μ^- 介子同静止的电子发生弹性对心碰撞，试求反冲电子的动能.

9-2. 动能等子本身静能量的正电子在静止的自由电子上湮没，结果产生两个 γ 光子，其中一个 γ 光子的能量为另一个的 $n=2$ 倍，试计算两个 γ 光子飞出方向之间的夹角.

9-3. 计算由下列反应产生 π 介子的阈能.

$$p+p\rightarrow p+n+\pi$$

9-4. 试计算下列反应中轰击粒子的阈动能(第一个粒子是轰击粒子)：

$$(a)\bar{p}+p\rightarrow\bar{\Lambda}+\Lambda$$

$$(b)\pi^-+p\rightarrow\Sigma^-+K^+$$

$$(c)\pi^- + p \to n + K^0 + \bar{K}^0$$

$$p + p \to p + p + \Sigma^- + \bar{\Sigma}^+$$

9-5. 试计算反应 $\gamma \to \pi^0 + p$ 的阈能.

9-6. (a)在 p－p 和(b)π－p 作用中，产生反质子的实验室阈值是多少?

9-7. γ 光子入射到氢靶上产生 π^+ 介子，而 π^+ 介子以 70 兆电子伏的初始动能在 90°的方向上发射出去. (a)确定介子的动量；(b)确定入射光子的能量.

9-8. 证明在电子附近产生粒子对时，最小的光子能量是 $4m_e c^2$.

9-9. 中微子在铅中的作用截面大约是 10^{-40} 厘米^2，问中微子在铅中的平均自由程是多少?

9-10. 一个核子入射到最初静止的核子上. 它的动能(也就是那个参考系中系统的总动能)是 T. 证明，在质心系中，系统的总动能是 $\frac{T}{2}$.

9-11. 产生 π^+ 介子的方法之一是用高能光子轰击质子靶. 假定放出的 π 介子与入射光子方向成 90°时，其动能是 20 兆电子伏. 入射光子的能量是多少?

9-12. 试计算在下列反应中入射粒子取阈能时氢靶里产生的介子的动能：

$$(a)\gamma + p \to n + \pi^+$$

$$(b)p + p \to p + \Sigma^0 + K^+$$

9-13. 假定一个静止的 π 介子与一个质子相互作用，产生一个中子和一个 γ 光子：

$$\pi^- + p \to n + \gamma$$

计算放出的 γ 光子的能量.

9-14. 计算 15 兆电子伏的 π 介子的速度和动量. 当它在 1.5

韦伯/米^{2}的磁场中运动时，曲率半径是多少？对15兆电子伏的μ介子重复上述计算.

9-15. 一个能量为10BeV的质子的速度和动量是多少？

9-16. 应用相对论方法计算下述高能反应

$$m_1+m_2\rightarrow M_1+M_2+\cdots+M_n$$

的阈能. 设靶粒子m_2为静止.

§9-2 粒子的衰变

9-17. μ介子的衰变方程是

$$\mu^-\rightarrow e^-+\nu_\mu+\bar{\nu}_\mu$$

已知μ介子的静止质量是$207m_e$；中微子和反中微子的静止质量假定是零. 电子的最大动能和最大动量是多少？

9-18. 动能为T的相对论K^0介子在飞行中衰变成两个π^0介子. 试求：(a)当T取何值时所生成的一个π^0介子能够处于静止状态；(b)在$T=100$兆电子伏时对称飞离的π^0介子方向之间的夹角.

9-19. 动能$T_\pi=50$兆电子伏的π介子在飞行中衰变成μ介子和中微子. 若中微子的飞出角等于90°，试问μ介子的飞出角多大？

9-20. 在K^+静止的参考系(即质心系)中，计算$K^+\rightarrow\pi^++2\gamma+\pi^0$的衰变中，$\pi^+$的动能.

9-21. 试计算K^-介子经下列过程衰变的Q值：

$$K^-\rightarrow\pi^-+\pi^0+\pi^0$$

$$K^-\rightarrow\mu^-+\bar{\nu}+\pi^0$$

$$K^-\rightarrow e^-+\bar{\nu}+\pi^0$$

9-22. 当一个静止的μ介子衰变成电子时，电子的最小和最大能量是多少？在每种情况下，中微子反中微子对所带走的能量是多少？

9-23. 若最初处于静止的 π^- 介子经衰变 $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$，试求 e^- 的动能.

9-24. 若最初处于静止的 Λ^0 超子经衰变 $\Lambda^0 \to p + \pi^-$，试求 π^- 的动能.

9-25. 速度为 $\beta = v/c$ 的相对论 π 介子在飞行中衰变成 μ 介子和中微子. 试证明，中微子在质心参考系和实验室参考系里的飞出角 θ_c 和 θ_L 之间的关系为

$$\cos\theta_c = \frac{\cos\theta_L - \beta}{1 - \beta\cos\theta_L}.$$

9-26. 某个中性粒子衰变成质子和 π^- 介子. 它们飞离方向之间的夹角 $\theta = 60°$. 其动量分别等于 450 和 135 兆电子伏/c. 试计算该中性粒子的质量；是什么粒子？

9-27. 假定一个中性粒子衰变两个荷电粒子，且以夹角为 40° 放出. 测量第一个粒子的动能是 191 兆电子伏，动量是 300 兆电子伏/c；第二个粒子的动能是 870 兆电子伏和动量是 1000 兆电子伏/c. 试给出这三种粒子，写出衰变方程.

9-28. 一个荷电 π 粒子以 0.012%的比率直接衰变成一个电子. (a)写出反应方程；(b)确定这个反应所释放出的能量.

9-29. K^+ 介子衰变成(a)二个 π 介子；(b)三个 π 介子；(c)一个 μ 介子和一个中微子. 试分别计算 Q 值.

9-30. 证明从 ^1S 态电子偶素湮没产生的每个光子的波长等于电子的康普顿波长.

9-31. 当 π^0 介子衰变时产生的每个 γ 光子的能量是多少？它们必须相等吗？

9-32. 自由中子为什么不会衰变成一电子和一个正电子？为什么不能衰变成质子一反质子对？

9-33. 在 $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ 的衰变过程中，假定 μ^- 在衰变前处于静止态，试求电子的最大能量.

9-34. 一个静止的 Σ^0 粒子衰变成一个 Λ^0 粒子和一个光子，试求光子的动能.

9-35. 研究质子衰变的可能性是个很有现实意义的课题. 探测质子衰变的典型实验是建造一个很大的水箱，并放入仪器以探测由于质子的衰变产生的契伦科夫辐射.

(a)假定你建造的水箱可装 10000 顿水(1 顿＝1000 公斤). 如果质子的平均寿命 $\tau_p=10^{32}$ 年，问在一年内，你预计可观察到多少个衰变？假定你用的探测器的效率为 100%，而且假定束缚在核内的质子和自由质子以同样的比率衰变.

(b)质子可能的衰变是 $p\to\pi^0+e^-$，中性的 π 介子立即(在 10^{-16} 秒)衰变成两个光子 $\pi^0\to\gamma+\gamma$. 试计算由静止质子衰变产生的光子的最大和最小能量(已知质子质量 $M_p=938$ 兆电子伏/c^2，正电子的质量 $m_e=0.51$ 兆电子伏/c^2，π^0 介子的质量 $m_\pi=135$ 兆电子伏/c^2).

§9-3 粒子的性质

9-36. (a)为什么 ρ^0 介子不允许衰变成 π^0 介子？(b)假定入射氘核有足够的能量，为什么不能发生 $d+d\to{}^4_2He+\pi^0$ 过程？(c)为什么 π^+ 介子不可能衰变成 e^+ 和 γ？(d)当中子是氘核的一部时，是什么阻止了反应 $n\to p+e^-+\bar{\nu}_e$ 发生？

9-37. 在 $p\to\pi^0+e^++e$ 反应中，哪些守恒定律被违反？

9-38. 试解释下列反应被禁止的原因：

$$\pi^0\to\mu^++e^-+\bar{\nu}$$

$$\Sigma^-\to\pi^++\pi^0$$

$$\Lambda^0\to p+e^-$$

9-39. 下面列举的反应中，哪种途径是被禁止的，为什么？

(a) $\Sigma^- \begin{cases} \to n+\pi^- & ① \\ \to \Lambda^0+\pi & ② \end{cases}$

(b) $\Xi^- \begin{cases} \to p+\pi^-+\pi^- & ③ \\ \to \Lambda^0+\pi^-,\ \Lambda^0 \to p+\pi^- & ④ \end{cases}$

9-40. 下述 Ω^- 的弱变中，哪一个是不可能的.

(a)$\Omega \to \Xi^- + \pi^0$ (b)$\Omega \to \Lambda^0 + K^-$ (c)$\Omega^- \to \Sigma^- + K^0$.

9-41. 试确定下述各对反应中哪一个反应是可能的.

(a) $\begin{matrix} \pi^- + p \to \Sigma^0 + \eta^0 \\ \pi^- + p \to \Sigma^0 + K^0 \end{matrix}$ （强相互作用）

(b) $\begin{matrix} \Sigma^- \to \pi^- + \eta^0 \\ \Sigma^- \to \pi^- + p \end{matrix}$ （弱衰变）

(c) $\begin{matrix} p+p \to K^- + \Sigma^- \\ p+p \to K^+ + p + \Lambda^0 \end{matrix}$ （强相互作用）

(d) $\begin{matrix} n \to p + e^- + \nu_e \\ n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \end{matrix}$ （弱衰变）

9-42. 试问下面列举的反应中哪些被奇异数守恒定律所禁止：

(a)$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$;

(b)$\pi^- + p \to k^- + k^+$;

(c)$\pi^- + n \to \Xi^- + K^+ + K^-$

$\bar{p} + n \to \Lambda^0 + \bar{\Sigma}^-$.

9-43. 试求粒子系统 $K^+ + p$ 的同位旋及其 z 分量的可能值.

9-44. 对下列反应式，计算 Ω^- 粒子的 B, Q, T, T_z, S 的值：

$\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$ $\Omega^- \to K^- + \Lambda^0$ $\Omega^- \to \Xi^- + \pi^0$

9-45. 应用上题给出的方程及上问题的结果，计算 $\bar{\Omega}^-$ 粒子的 B, Q, T, T_z 和 S 的值.

9-46. 在已知 Q, B, S 的情况下，利用盖尔曼－西岛关系计算下粒子的 T_z：(a)Δ^{++}；(b)K^+；(c)Ω^-；(d)ρ^+.

9-47. 试求下列反应中同位旋 T 及其 z 分量 T_z 的变化：

(a)$\pi^- + p \to K^+ + \Xi^-$

(b)$\pi^- + p \to K^+ + K^0 + \Xi^-$

(c)$K^- \to \pi^0 + \pi^+$

9-48. 试求核子－核子；π 介子－核子两种体系的同位旋 T 及其投影 T_z 的可能值.

9-49. (a)μ 介子的动能 $T = 7m_\mu$ 时，平均寿命 $\tau = 17.6$ 微秒，试问 μ 介子的固有平均寿命是多少？(b)π^+ 介子的动量 $p = 55$ 兆电子伏/c，在衰变前平均飞行 $l = 3.0$ 米. 试确定 π^+ 介子的固有平均寿命.

9-50. 若 π^+ 介子的动能等于 100 兆电子伏，试求在从产生地到靶(距离为 6.00 米)的飞行中，介子衰变的几率.

9-51. 试利用推广的泡里原理求下列体系的同位旋 T：在状态 ^1P 和 ^1D 的 $\pi^-\pi^-$.

9-52. 在 $\pi^- + d \to n + n$ 的反应中，已知 π^- 的 $l = 0$ 和 d 具有偶宇称，试利用角动量守恒定律及宇称守恒定律确定 π^- 介子的宇称.

§9-4 粒子的结构模型

9-53. 分别由哪三个夸克粒子可构成下列重子：

$p, n, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0$ 和 Ξ^-.

9-54. 用夸克和反夸克粒子如何结构成 π^+ 和 π^-. 又如何结构成 Λ^0 和 $\overline{\Lambda^0}$?

9-55. 如下夸克组成，将得到哪些粒子？

(a)$\bar{s}u$, (b)$\bar{s}d$, (c)$\bar{d}u$.

9-56. 鉴定由三个夸克 sss 构成的粒子类型.

9-57. 试用夸克模型给出重子八重态 $n, p, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Lambda^0, \Xi^-, \Xi^0$ 中各粒子的 T, T_z, Q, B 和 Y 的值.

9-58. 夸克原子是由$+\frac{2}{3}e$夸克作为原子核，加上一个电子构成. 计算玻尔轨道半径和赖曼系的波长(假定夸克的质量是核子质量的$\frac{1}{3}$).

附录 I　习题答案

第　一　章

1-1.　$2.46\times10^{-15}A$.

1-3.　$0.078\cos^2\theta$.

1-4.　10°.

1-9.　1.14×10^{-13}m.

1-10.　4.74×10^{-15}m.

1-11.　0.55×10^{-19}; 0.815×10^{-19}; 1.5×10^{-19}kg. m·s^{-1}.

1-13.　1.03×10^{-3}cm.

1-16.　9°40′.

1-17.　~5.5α 个粒子/秒.

1-18.　4170 个/小时; 11 个/小时.

1-20.　0.876.

1-21.　$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$; 氢原子: $f=6.6\times10^{15}$s^{-1}可与氢光谱中最高的频率相比.

1-22.　22.6×10^{38}.

1-23.　$f=6.58\times10^{15}$Hz; $v=2.19\times10^{6}$m·s^{-1}.

$a=9.05\times10^{22}$m·s^{-1}.

1-24.　1.51eV.

1-25.　0.097.

1-26.　13.6eV; −27.2eV.

1-27. 13.6V；10.20V.

1-28. 1.85eV；12.06eV；13.94eV；14.60eV.

1-29. $R=1.097\times10^{-3}$ Å $^{-1}$.

1-30. $n=5\to n'<5$；$n=0\to n'<4$ 等.

1-31. (a)0.87eV；(b)4，2.

1-32. 12.9Wb·m^{-2}.

1-34. (a)303.75Å，256.3Å，紫外区；(b)1640.25Å，1180.01Å，紫外区.

1-35. $h\nu-[(h\nu)^2/2Mc^2]$.

1-36. 6.6×10^{6} Å/λ.

1-37. 9.6×10^{-8}eV.

1-38. (a)1；(b)0.529Å；(c)1.05×10^{-34}kg.m^2·s^{-1}；
(d)1.99×10^{-24}kg.m·s^{-1}；(e)4.14×10^{-16}s^{-1}；
(f)2.19×10^{6}m·s^{-1}；(g)8.25×10^{-8}N；
(h)9.07×10^{22}m·s^{-2}；(i)13.6eV；
(j)−27.2eV；(k)−13.6eV.

1-40. 5.708×10^{15}s^{-1}.

1-41. $-\frac{1}{2}R_\infty hc\frac{1}{n^2}$.

1-42. (a)7.29×10^{-3}；(b)4.14×10^{14}弧度/秒；(c)1.26.

1-43. 13.62eV；13.62eV.

1-44. 2430Å.

1-48. 1.0×10^{-9}.

1-49. (a)一个圆轨道，三个椭圆轨道；(b)面积最大的椭圆轨道对应于$n_4=3$；长短半轴分别为$a=8.4672$Å，$b=\frac{3}{4}a=6.3504$Å.

1-50. (a)$E=nh\nu$，$n=1,2,3\cdots$；(b)$r=\sqrt{\frac{n\hbar}{Be}}$，$n=1,2,3\cdots$.

1-51. $\nu=\frac{me^4}{4\pi(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3}\cdot\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$.

1-52. $E(n=3)=-1.51\text{eV}$；$E(n=2)=-3.4\text{eV}$；
$a_3=4.77\text{Å}$；$a_2=2.12\text{Å}$.

1-53. 12V.

1-54. $1.05\times10^5\text{K}$.

1-55. $E_n=\frac{kZe^2}{R}\left[\frac{n\hbar}{e}\sqrt{\frac{1}{mkZR}}-\frac{3}{2}\right]$.

1-56. 54.4eV.

1-57. He^+：$\frac{1}{2}$；4；4；$\frac{1}{4}$. Li^{++}：$\frac{1}{3}$；9；9；$\frac{1}{9}$

1-58. $\Delta\lambda=2.38\text{Å}$.

1-59. 1215.243Å；1215.68Å；1215.35Å.

1-61. $M_D/M_H\cong2.0$.

1-62. 4861.3Å.

1-63. 2.63Å.

1-64. (a)$E_n=-\frac{m'Z^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}$；(c)$2.28\times10^{-8}\text{m}$.

1-65. 1.04MeV.

1-66. (a)5.39Fm，9.45Fm；(b)−15.35MeV；
−6.25MeV；(c)9.1MeV.

1-68. 1216Å，1026Å，973Å，6565Å，4863Å，1.876μm；
气体密度增加，谱线减少.

1-69. $6.64012\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$.

1-71. 2.7，4.3，5.4，7，8.1…V.

1-72. (a)3.4V；(b)$n=3\to n=2$，$\tilde{\nu}_1=1.5\times10^6\text{m}^{-1}$；
$n=3\to n=1$，$\tilde{\nu}_2=0.98\times10^7\text{m}^{-1}$，$n=2\to n=1$，
$\tilde{\nu}_3=0.83\times10^{-7}\text{m}^{-1}$(c)13.2eV，氦离子谱线的波长略小于对应的氢光谱的波长.

1-73. $3.7\times10^4\text{K}$.

1-74. 1.25×10^{-6}s.

第 二 章

2-1. 9.05×10^{13}个光子/秒.

2-2. 2.26×10^{18}个光子/秒.

2-3. 2.91×10^{30}个光子/秒.

2-5. 4.14×10^{3}MeV；4.14×10^{3}MeV/c.

2-6. 12.4×10^{-3}Å.

2-7. 6.20×10^{-1}Å；4.84×10^{18}Hz.

2-8. 10MeV/c.

2-9. 1.2×10^{20}Hz；0.024Å；2.7×10^{-22}kg.m·s^{-1}.

2-10. (a)6×10^{9}·s^{-1}.m^{-2}；(b)1.1eV.

2-11. 2713Å.

2-12. 2750Å；4960Å.

2-13. 1.8×10^{3}Å.

2-14. (a)否；(b)5400Å.

2-16. 0.54eV；2.26V.

2-17. 2.90eV.

2-18. 2000Å；531×10^{14}周/秒.

2-19. (a)1.222keV；(b)0.069c.

2-20. (a)6.6×10^{-34}J·s；(b)2.3eV；(c)5400Å.

2-21. 2.93eV.

2-22. 1.03eV.

2-24. 0.69V；第二个光电管不发射光电子.

2-26. 0.71V；−0.79V.

2-27. 非相对论情形(a)$h\nu\cong A+\frac{A^2}{2Mc^2}$；

(b)$h\nu\cong A+\frac{A^2}{2mc^2}$；(c)$h\nu\cong A+\frac{A^2}{2(M+m)c^2}$.

2-29. $0.65c$.

2-30. 5000.0243Å；0.1243Å.

2-31. 32keV.

2-35. (a)97.5keV；(b)2.5keV；(c)73°.

2-36. (a)0.027Å；0.057MeV；(b)0.06Å，0.31MeV.

2-37. $\cos\theta_0=(1+\frac{h\nu}{m_0c^2})/(2+\frac{h\nu}{m_0c^2})$；17.3°.

2-38. $\frac{v}{c}=\frac{3}{5}$.

2-39. (a)X 射线与 γ 射线的改变是相同的，为 0.0243Å；
(b)0.295keV，378keV；(c)2.4%，57%.

2-42. (a)$p=\frac{4(h\nu)^2+4h\nu m_0c^2}{4h\nu c+2m_0c^3}$.

2-45. 7.88×10^{-12}m.

2-49. (a)2.02MeV；；(b)29.6%.

2-50. 3.17MeV；2.92×10^{-13}m.

2-51. 1.04MeV；2.08×10MeV.

2-52. 2.88MeV.

2-53. 11.9MeV.

2-54. 0.49MeV.

2-55. 1.02MeV；.034MeV.

2-56. (a)$\lambda=\frac{h}{m_0c}$；(b)$\lambda'_1=\frac{h}{m_0c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$，$\lambda'_2=\frac{h}{m_0c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$.

2-57. 0.129mm^{-1}.

2-58. 791mm.

2-59. $0.404I_0$.

2-60. 11.18mm；22.36mm.

2-61. 18mm.

2-62. (a)94cm；(b)9.32cm.

2-63. 57.7%.

2-64. 8.4mm.

2-65. (a)6.81×10^{-21}厘米²/原子；1.97×10^{-21}厘米²/原子.

2-66. (a)2.06×10^{-20}厘米²/原子；1.73×10^{-19}厘米²/原子.

2-67. (a)0.27cm²/g；(b)1.22×10^{-23}厘米²/原子.

2-68. Al：0.051cm；Cu：0.00155cm.

2-69. (a)2.48×10^{-7}Å；(b)4.21×10^{-10}Å. (c)1.40×10^{-2}Å.

2-70. (a)6.625×10^{-34}m；(b)1.91×10^{-10}m.

2-71. 0.74×10^{-13}m.

2-74. 6.11×10^{-13}m.

2-75. 光子.

2-76. 15000V.

2-77. 0.1225Å；2.862×10^{-3}Å.

2-79. 3.5keV.

2-80. 4.96×10^{3}eV.

2-81. (a)1.24GeV；(b)616MeV.

2-85. (a)$\lambda=\frac{12.25}{\sqrt{V}}$(Å)；(b)相速$=\sqrt{\frac{eV}{2m}}$. 群速$\sqrt{\frac{2eV}{m}}$；

(d)$\frac{12.25}{2\sin\theta\sqrt{V}}$(Å).

2-86. (a)1.23Å.

2-87. 0.105MeV.

2-89. (a)2.73×10^{-30}kg，2.82×10^{8}m/s；(b)1.03×10^{6}V；

(c)8.61×10^{-3}Å；(d)8.09×10^{-13}m.

2-90. $1u_p=c^2/v$.

2-91. $1u_g=v$.

2-92. 1.005c.

2-93. $u_g = u_p/2$.

2-95. 192MeV.

2-96. $\frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \sqrt{(\frac{E}{E_0})^2 - 1}$.

2-98. (a)59.8′; (b)$8.75\times10^8 \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2-99. $1.15\times10^8 \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

2-102. 65.8MeV.

2-103. 0.013MeV; 4.45MeV.

2-104. $\frac{\Delta p}{\Delta p} \geqslant 3.09\times10^{-5}$.

2-105. 6.2%.

2-106. (a)3.98×10^2 Å; (b)3.98×10^6 Å;
(c)3.98×10^9 Å.

2-107. (a)5.28×10^{-20} Å; (b)2.57Å.

2-108. 23.9mm.

2-109. 0.061eV.

2-110. (a)$\Delta\nu \geqslant 8\times10^6 \mathrm{s^{-1}}$; (b)$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1.6\times10^{-8}$;
(c)$\Delta E \geqslant 3.3\times10^{-8}$eV.

2-112. $1.05\times10^{-30}\mathrm{kg.\,m\cdot s^{-1}}$; 1.16×10^{-5}.

2-113. $T_{\min} = h^2/128\pi^2 mL^2$.

2-115. 1.32×10^{-25}m.

2-116. 2.99×10^{-16}s; 5.33×10^{-3}Å.

2-117. $\sim10^{-3}$eV.

2-118. 2.39cm; 3.98×10^4 Å; 15.9Å.

2-119. 0.5Å; 602eV; 0.328eV.

2-120. (a)~1eV; (b)~10MeV; (c)~0.1MeV.

2-121. 3.19μm.

2-122. 0.4m.

2-123. 4.5 个光子/厘米^2.秒.

2-124. (a)$E_n=n^2\frac{h^2}{8mL^2}$, $n=1,2,3\cdots$, (b)3.43×10^{-34}eV.

2-126. $\theta_{光子}/\theta_{电子}=5.1$.

2-127. 1.33Å.

2-128. 2.21×10^{-2}eV.

2-129. 0.23°.

2-130. 57.4°.

2-131. 6.05×10^{26}原子/千摩尔.

2-132. $d=\pi\hbar k/\sqrt{2mT}\cos(\alpha/2)=2.1$Å.

2-133. 1.37eV.

2-134. (a)3.85cm; (b)28.9cm.

2-135. 13.1°; 27.7°.

2-136. 8.7°.

2-137. 1.65Å.

2-138. 1.3V.

2-139. 4.6.

2-140. $d=\pi\hbar k/\sqrt{2mT}\sin\theta=2.3$, 并且 $\mathrm{tg}2\theta=r/l$.

2-142. $\frac{a}{2}$; $\frac{a^3}{3}(1-\frac{6}{\pi^2})$.

2-143. $\bar{x}=0$; $\bar{p}=0$; $\overline{x^2}=A\frac{a^3}{4\pi^2}(\frac{\pi^2}{6}-1)=0.033a^2$;

$\overline{p^2}=(\frac{\hbar\pi}{a})^2$.

2-144. $E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

2-145. 0.195.

2-146. $N=n-1$; $N=n$.

2-147. 37; 37×10^2; 37×10^4; 37.7×10^4eV.

2-149. $p=A^2e^{-(\sqrt{cm}/\hbar)x^2}$.

2-150. $\frac{x_0}{2\pi}(\frac{\pi^2}{3}-2)^{1/2}$.

2-152. $0.159s^{-1}$; 9.48×10^{32}; 1.05×10^{-34}J.

2-153. 6.22×10^{-15}eV.

2-157. 1.64×10^{-34}J.

2-158. $\langle x\rangle=0$; $\langle x^2\rangle=\frac{3}{2}a^2$.

2-159. $\langle p\rangle=0$; $\langle p^2\rangle=\frac{3}{2}\hbar^2\sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$.

2-160. (a)基态; (b)$A=\sqrt{30}/a^{5/2}$; (c)$\langle x\rangle=\frac{a}{2}$,

$\langle x^2\rangle=2a^2/7$.

2-163. $\beta L=n\pi+2\mathrm{arctg}(\beta/\alpha)$. 其中 $\alpha^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0-E)$,

$\beta^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2}$.

2-164. $E=E_x+E_y+E_z=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2})$.

2-165. $3.22\times10^{-7}\%$.

2-166. $L=1.94\times10^{-13}$cm.

2-167. 0.49; 3.7; 10.0; 18.8; 0.96; 7.5; 15.

2-168. (a)37eV; (b)2MeV.

2-169. (a)$\frac{1}{8}$; (b)$\langle x\rangle=\frac{3}{4}$.

2-170. (a)$\langle x\rangle=0$; (b)$\langle p\rangle=\hbar k$.

2-173. $\langle v^2\rangle=\langle\frac{p^2}{m^2}\rangle=\langle\frac{c}{m}\rangle$.

2-174. (a)$E_{n_1,n_2,n_3}=\hbar\omega_x(n_1+\frac{1}{2})+\hbar\omega_y(n_2+\frac{1}{2})$

$+\hbar\omega_z(n_3+\frac{1}{2})-Bu^2$.

(b)$E_{基态}=\frac{1}{2}\hbar(\omega_x+\omega_y)+\frac{3}{2}\hbar\omega z-Bu^2$. 其中,

$$\omega_\xi=\sqrt{\frac{2A}{m}(1+\lambda)},\omega_\eta=\sqrt{\frac{2A}{m}(1-\lambda)},\omega_\zeta=\sqrt{\frac{2B}{m}}.$$

第 三 章

3-1. $C_n=2/a_0^{3/2}$.

3-6. $r=(3\pm\sqrt{5})a_0$.

3-9. (a)68%; (b)25%.

3-10. $E(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1+\dfrac{2r}{a_0}+\dfrac{2r^2}{a_0^2})e^{-2r/a_0}$.

3-12. $-\mu e^4/4(4\pi\varepsilon_0.)^2\hbar^2$.

3-13. $me^4/32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2$.

3-14. (a)$T=me^4/32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0$; (b)$me^2/4\pi\hbar\ \varepsilon_0 n$;
$8\pi^2\varepsilon_0\hbar/me^2$; (c)$n$.

3-15. $5.47\times10^5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; 1.00000166.

3-16. $-me^4/96\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2$; $2a_0$.

3-17. $E_{He}:E_D:E_H=4.0016:1.0003:1$.

3-18. (a)$4a_0$; (b)$5a_0$.

3-20. $\dfrac{1}{4}[\psi_{200}^*\psi_{200}+\psi_{21-1}^*\psi_{21-1}+\psi_{210}^*\psi_{210}+\psi_{211}^*\psi_{211}]$
$=\dfrac{1}{128\pi}(\dfrac{Z}{a_0})^3e^{-Zr/a_0}[(2-\dfrac{Zr}{a_0})^2+(\dfrac{Zr}{a_0})^2]$.

3-26. $\theta_1=54°45'$; $\theta_2=125°15'$.

3-30. 3/2, 5/2; (a) $\sqrt{15}\hbar/2$, $\sqrt{35}\hbar/2$; (b)$2\hbar$.

3-31. 60°; 131°50′.

3-33. $j=\dfrac{5}{2}$, $m_j=\pm\dfrac{5}{2},\pm\dfrac{3}{2},\pm\dfrac{1}{2}$; $j=\dfrac{7}{2}$,
$m_j=\pm\dfrac{7}{2},\pm\dfrac{5}{2},\pm\dfrac{3}{2}.\pm\dfrac{1}{2}$.

3-34. $l=4$.

3-35. 16.8°; 35.3°; 60°.

3-37. 45°,90°,135°,35°54′,66°,90°,114°,144°6′;39°32′,54°32′,73°8′,90°,106°52′,125°25′,150°28′.

3-38. p:29%;d:18%;f:13%.

3-39. 18°11′,15°12′,12°50′,10°53′.

3-40. ~1 特斯拉.

3-41. $\mu=\frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{kr}{m}}$.

3-42. $l=2;\mu=2.27\times10^{-23}$J/T;$l=1$:
$\mu=1.31\times10^{-23}$J/T,$l=0;\mu=0$.

3-43. 6.72Wb/m^2.

3-44. (a)$(m_l+2m_s)\mu_B B$;(c)4.4×10^{4}T.

3-45. (a)4 条;(b)$\frac{3}{2}\hbar$;(c)$2\mu_B$.

3-46. $\mu_s=9.34\times10^{-24}$A.m^2.

3-47. $\frac{1}{2}N,\frac{1}{4}N,\frac{1}{8}N$.

3-48. 在沿 x 轴方向或垂直于 $x-z$ 平面方向加一个磁场
$B=\frac{\pi mv}{eL}$.

3-49. 0.083mm.

3-50. 0.53×10^{-34}J.s(b)0.93×10^{-23}J/T.

3-51. 455m/s.

3-52. 4.14×10^{-3}m.

3-53. (a)2;(b)$\pm4.653\times10^{-22}$N;62.7m.

3-54. (a)$\pm4.64\times10^{-22}$N;590m;1.74×10^{16}高斯/厘米.

3-56. $2n^2$.

3-57. $|\Delta E_{ls}|\sim10^{-4}$eV,因为 $p_l.p_s$ 可能是正的或负的,所以能级的分裂大约是 2×10^{-4}eV.

3-58. 4.53×10^{-5}eV;1.3×10^{-5}.

3-59. $\frac{1}{2}\hbar^2;-\hbar^2$.

3-60. $B=18.4\mathrm{T}$.

3-62. $-13.586;-13.611,-13.611\mathrm{eV}$；至少两个是退化的.

3-64. $[-5,+4;-11,+10;-16,+15]a\hbar^2/2$

3-66. 5.39×10^{-3}Å.

第 四 章

4-1. (a) $\psi_s=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{a}[\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}+\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{a}]$

$$\psi_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{a}[\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}-\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{a}]$$

(b) $$\overline{D}=\iint\psi_s^*D\psi_s\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{2}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}|x_2-x_1|[\cos^2\frac{\pi x_1}{a}\sin^2\frac{2\pi x_2}{a}+\sin^2\frac{2\pi x_1}{a}\cos^2\frac{\pi x_2}{a}+2\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{a}]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\overline{D}=\iint\psi_A^*D\psi_A\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{2}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}|x_2-x_1|[\cos^2\frac{\pi x_1}{a}\sin^2\frac{2\pi x_2}{a}+\sin^2\frac{2\pi x_1}{a}\cos^2\frac{\pi x_2}{a}-2\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\cos^2\frac{\pi x_2}{a}]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

4-2. $$\psi_A=\frac{1}{\sqrt{3!}}[\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)+\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)\psi_\alpha(3)+\psi_\gamma(1)\psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)-\psi_\gamma(1)\psi_\beta(2)\psi_\alpha(3)$$

$$-\psi_\beta(1)\psi_\alpha(2)\psi_\gamma(3)-\psi_\alpha(1)\psi_\gamma(2)\psi_\beta(3)]$$

对称的波长函数中全是正号.

4-6. 0.15Å；2.0×10^{19}Hz；85keV

4-7. 0.154Å.

4-9. 可观察到 K 系线.

4-10. 20keV；0.62Å.

4-11. $\frac{1}{2M}(\frac{h\nu}{c})^2$.

4-12. 5.6keV；30keV.

4-13.

Z	Z^*	Z_0
28	25.3	2.7
40	26.9	3.1
51	47.9	3.1
64	61.3	2.7
73	70.9	3.1

4-14. $\lambda_L=0.709$Å.

4-15. 0.310Å.

4-16. 4.1×10^{-15}V.s.

4-18. 4.492eV；69.58keV；74.5keV.

4-19. 41.3keV.

4-20. $\sim10^7$.

4-21. 6.2keV.

4-22. (a)5.37keV，5.93keV，7.26keV；(b)1.65cm，1.73cm，1.92cm；(c)0.16cm，0.38cm.

4-23. (a)72.68keV，94.60keV，94.75keV；(b)315.6cm，361.34cm，361.43cm；(c)2.88×10^{10}cm·s^{-1}.

4-24. 12.6keV；5.17Å.

4-25. 8.638keV；7.617keV.

4-26. 54.41keV.

4-27. 8.05Å.

4-28. 钴($Z=27$)；钼($Z=42$).

4-29. 7.8×10^{3}V；1.6Å.

4-30. 0.163Å.

4-31. 0.196Å.

4-32. 0.184Å.

4-33. $E_{30}=-5.14$eV，$E_{31}=-3.03$eV，$E_{32}=-1.52$eV，
$E_{40}=-1.94$eV，$E_{41}=-1.38$eV，$E_{42}=-0.85$eV，
$E_{43}=-0.85$eV.

4-34. $V_1=1.85$V；$V_\infty=5.38$V.

4-35. -3.02103eV，-3.02317eV，0.00214eV.

4-37. $1s^2 2s^1$；-3.395eV；1.74；1.26.

4-38. 3P→3S；3S→2P；2P→2S；3P→2S.

4-39. 1；$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$；$2\hbar$；$\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$；$\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$.

4-40. 2；$\frac{1}{2}$；$\frac{3}{2}$或$\frac{5}{2}$；$\sqrt{6}\hbar$；$\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$；$\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$；$\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$.

4-41. $\Delta_0=1.36$；$\Delta_1=0.87$；$\Delta_2=0.01$；$\Delta_3=0$.

4-42. $\sigma_s=9.18$；$\sigma_p=9.6$；$\sigma_D=10$.

4-43. $\sigma_{30}=9.16$，$\sigma_{31}=9.58$，$\sigma_{32}=10.0$，
$\sigma_{40}=9.49$，$\sigma_{41}=9.72$，$\sigma_{42}=10.0$，$\sigma_{43}=10.0$，
$\sigma_{50}=9.63$，$\sigma_{51}=9.79$，$\sigma_{52}=10.0$，$\sigma_{53}=10.0$.

4-44. 1.75.

4-46. 不考虑内层电子：-30.6eV；考虑内层电子完全屏蔽：-3.4eV.

4-47. -3.49eV.

4-48. 0.00214eV.

4-49. (a)182.24eV;(b)$Z^*=2.36$.

4-50. (a)$\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$;(b)$\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$;$\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$;$\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$;$\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$.

4-52. $\Delta\lambda\neq 1/\Delta\tilde{\nu}$.

4-53. $^2D_{5/2}$,$^2D_{3/2}$.

4-54. (c)第一激发态为 3^2D,光谱项为$^2D_{3/2}$,$^2D_{5/2}$.

4-55. $2n^2$.

4-56. 14 个电子;$m_l=\pm3,\pm2,\pm1$;$m_s=\frac{1}{2}$.

4-57. 这 45 个容许的量子数组合(即从 10 个原子数中每次取两个的组合数)产生如下 23 个状态;(±4,0),(±3,1);(±3,0),(±3,−1),(±2,1),(±2,0),(±2,−1),(±1,1),(±1,0),(±1,−1),(0,1),(0,0),(0,−1).

4-58. $^1P_1$,$^3P_{0,1,2}$,$^1D_2$,$^3D_{1,2,3}$;$^1F_3$,$^3F_{2,3,4}$.

4-62. $^1D_2$,$^3P_{2,1,0}$,$^1S_0$.

4-63. $L=5,4,3,2,1$.

4-64. $J=5,4,3,2,1$.

4-65. S=0,$^1P_1$,$^1D_2$,$^1F_3$;S=1:$^3P_{2,1,0}$,$^3D_{3,2,1}$,$^3F_{4,3,2}$.

4-66. (a)$L=1,S=1,J=0$;(b)$^1S_0$,$^1D_2$,$^3P_1$,$^3P_2$.

4-70. 1;≥1.

4-73. (a)电子组态:$1s^22s^22p^63s^1$;原子态为$^2S_{1/2}$.

(b)$4^2S_{1/2}\rightarrow3^2P_{1/2}$;$4^2S_{1/2}\rightarrow3^2P_{3/2}$;$3^2P_{1/2}\rightarrow3^2S_{1/2}$;$3^2P_{3/2}\rightarrow3^2S_{1/2}$.

4-74. 可能存在的项是$^1S_0$,$^7F_0$.

4-76. (a)^2P,(b)^1S,^1D 和^3P.

4-78. $1s2s^3S$ 的自旋方向相同,所以磁矩方向相同,位能最低.$1s2s^3S$ 违反泡里原理,不可能存在.

4-79. Al；$^2P_{1/2}$，$p_l=\sqrt{2}\hbar$，$p_s=\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$，$p_j=\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$，$\mu\ \frac{\sqrt{3}}{3}\mu_B$；

Fe；$^5D_4$，$p_l=\sqrt{6}\hbar$，$p_s=\sqrt{6}\hbar$，$p_j=2\sqrt{5}\hbar$，$\mu=3\sqrt{5}\mu_B$.

4-80. ^1S，因为自旋方向相反，则磁矩方向相同，位能最低.

4-81. (a)$1s^22s^2$；$1s^22s^12p^1$；$1s^22s^13s^1$；(b)$1s^22s^2$：$^1S_0$；

$1s^22s^12p^1$：$^1P_1$，$^3P_{0,1,2}$，$1s^22s^13s^1$：$^1S_0$，$^3S_1$；

(c)$^1S_0\rightarrow{}^1P_1$，$^1P_1\rightarrow{}^1S_0$，$^3S_1\rightarrow{}^3P_0$，$^3S_1$，$^3P_2$.

4-82. $^2D_{5/2}\rightarrow{}^2P_{3/2}$；$^2D_{3/2}\rightarrow{}^2P_{3/2}$；$^2D_{3/2}\rightarrow{}^1P_{1/2}$.

4-84. 3.4eV.

4-86. $5\mu_B$；3.

4-87. $\frac{3}{2}$；$\frac{6}{5}$，$\frac{4}{5}$；$\frac{3}{2}\sqrt{6}\mu_B$，$\frac{3}{5}\sqrt{35}\mu_B$，$\frac{2}{5}\sqrt{15}\mu_B$.

4-88. (a)1(除 S 态)；(b)2(除单态).

4-89. 有磁场简并度为 1；无磁场简并度 3，5，6.

4-90. 1，6.

4-91. $f=\frac{\mu_0\mu H}{2\pi p_l}=\frac{\mu_0 H}{2\pi p_l}(\mu_s+\frac{1}{2m}p_l)$.

4-92. $\frac{eB}{me}$.

4-94. (a)8.8×10^{10}转/秒，(b)1.6×10^{-23}J.

4-95. 2.65×10^{11}s.

4-96. 2.77×10^{-23}J.

4-97. (a)2542.6Å，1852.6Å；(b)84405.6cm.

4-98. (a)1.88eV，2.92eV；(b)$4^3P_1\rightarrow4^1S_0$.

4-100. 计算值 0.500 实验值 0.494.

4-101. $L=1$，$S=\frac{3}{2}$，$J=\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$($^4P_{5/2}$，$^4P_{3/2}$，$^4P_{1/2}$).

4-102. $T=2780$K.

4-103. 10^{-35}；不能看到 D 线.

4-104. (b)(1,1,2)(1,1,1)(1,1,0)(1,0,1),(c)$g=3/2$,
(d)(3/2,5/2,3)(3/2,5/2,2)(3/2,3/2,2)
(3/2,3/2,1)(3/2,1/2,1)(3/2,1/2,0);(1/2,
3/2,2)(1/2,3/2,1)(1/2,1/2,1)(1/2,1/2,0).

4-105. 2.8×10^{10}周/秒.

4-107. 1.39×10^{-4}eV.

4-109. 0.87×10^{-4}eV.

4-111. $\pm3.86\times10^{-5}$eV；$\pm11.58\times10^{-5}$eV.

4-112. 六条.

4-113.

状态	L	S	J	g	M_J	$\Delta E(\times10^{-5}\text{eV})$
$2P_{3/2}$	1	1/2	3/2	4/3	±3/2	±0.579
					±1/2	±0.193
$2P_{1/2}$	1	1/2	1/2	2/3	±1/2	±0.097
$2S_{1/2}$	0	1/2	2	2	±1/2	±0.290

4-114. 可分裂成三条；最长的波长为 6678.62Å；4280 条.

4-115. 0.0283Å.

4-116. 二重项

谱项符号：	$^2S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$	$D_{3/2}$	$D_{5/2}$	$F_{5/2}$	$F_{7/2}$
分裂数：	2	2	4	4	6	6	8
间隔(单位$\frac{\mu_B B}{hc}$)：	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{7}$

四重项

谱项符号：	$^4S_{3/2}$	$P_{1/2}$	$D_{3/2}$	$P_{5/2}$	$D_{1/2}$	$D_{3/2}$
分裂数：	4	2	4	6	2	4
间隔(单位$\frac{\mu_B B}{hc}$)：	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
谱项符号：	$^4D_{5/2}$	$^4D_{7/2}$	$^4F_{3/2}$	$^4F_{5/2}$	$^4F_{7/2}$	$^4F_{9/2}$
分裂数：	6	8	4	6	8	10
间隔(单位$\frac{\mu_B B}{hc}$)：	$\frac{48}{35}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{26}{21}$	$\frac{4}{3}$

4-117. 1.76×10^{11}C/kg.

4-119. 5000.07Å，5000Å，4999.93Å.

4-120. 5884.35Å；5887.17Å；5892.83Å；5895.65Å.

4-121. 18.84T.

4-122. 四条；5896.54Å，5895.46Å.

4-123. 因为 $g=0$，所以不发生分裂.

4-124. $^2P_{1/2}\rightarrow{}^2S_{1/2}$发出四条谱线，其位移是$-\frac{4}{3}\tilde{L}$，$-\frac{2}{3}\tilde{L}$，$\frac{2}{3}\tilde{L}$，$\frac{4}{3}\tilde{L}$($\tilde{L}=\frac{Be}{4\pi mc}$)，$^2P_{3/2}\rightarrow{}^2S_{1/2}$发出六条谱线，其位移是$-\frac{5}{3}\tilde{L}$，$-\tilde{L}$，$-\frac{1}{3}\tilde{L}$，$\frac{1}{3}\tilde{L}$，$\tilde{L}$，$\frac{5}{3}\tilde{L}$沿磁场方向观察，可看六条 σ 线，垂直于磁场方向观察可看到全部十条谱线.

4-125. 3/2，$\pm8.7\times10^{-6}$eV.

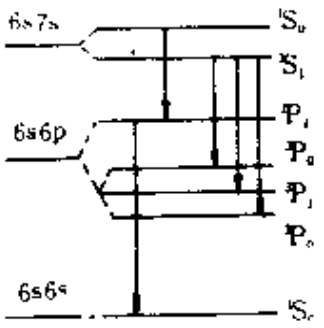
4-126. (a)

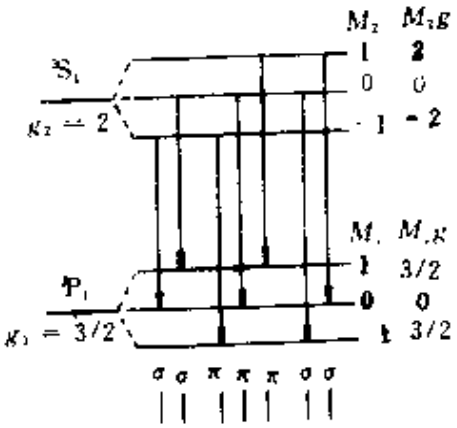
L \ S	0	1
1	$^1P_1$	$^3P_0$，$^3P_1$，$^3P_2$
2	$^1D_2$	$^3D_1$，$^3D_2$，$^3D_3$
3	$^1F_3$	$^3F_2$，$^3F_3$，$^3F_4$

(b)60 个能级，(c)上述 12 个态有相同的字称，因此它们之间无偶极辐射跃迁，所以无光谱发射.

4-127. 9.26×10^{-5}eV；0.26Å.

4-128. (a)有五种　　(b)七条





(c)$B=1$T.

4-129. 0.55T.

4-130. $^2D_{3/2}$态；$\pm 3.47\times10^{-6}$eV，$\pm 1.16\times10^{-6}$eV；$^2D_{5/2}$态：$\pm 8.68\times10^{-6}$eV，$\pm 5.21\times10^{-6}$eV，$\pm 1.74\times10^{-6}$eV.

4-131. 4.14×10^{3}Å.

4-133. 1.17T.

4-134. 0.35T.

4-135. $\nu=1.9\times10^{9}s^{-1}$.

4-136. (a)不能满足要求；(b)低 6.6K，才能达到要求.

4-137. 凡总磁矩等于零的原子都表现为抗磁性；总磁矩不等于零的原子都表现为顺磁性.

第 五 章

5-1. $\omega=\sqrt{\frac{2KT}{\mu r^2}}=7.46\times10^{12}s^{-1}$.

5-2. 1.56×10^{11}弧度·秒$^{-1}$(S_2)3.51×10^{12}弧度·秒$^{-1}$(HI).

5-3. $2.4\hbar\times10^{-4}J(J+1)$eV；10.

5-4. $E\approx\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{K}{\mu}}=0.27$eV.

5-5. 4.35cm；2.18cm1.45cm.

5-6. $1.2\times10^{14}s^{-1}$.

5-7. 否.

5-8. 只能激发转动能级.

5-9. 0.543eV.

5-10. 2.47eV.

5-11. 3.59×10^{-3}.

5-12. 3.72×10^{14}.

5-13. 3100K;5600K.

5-15. 2.72×10^{-40}g. cm, $5.47\times10^{12}s^{-1}$.

5-16. 2.6×10^{-40}g. cm^2, $11cm^{-1}$.

5-17. 1.27Å.

5-18. $\Delta\lambda/\lambda=0.028$,向长波方面.

5-19. 1/40.

5-20. 61.42×10^{-27}kg.

5-21. (a)0.534eV,(b)2.32μm,(c)$n=4$.

5-22. $\nu=c(3\tilde{\nu}_{01}-\tilde{\nu}_{02})=7.96\times10^{13}s^{-1}$.

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tilde{\nu}_{01}-\tilde{\nu}_{02}}{3\tilde{\nu}_{01}-\tilde{\nu}_{02}}=17\times10^{-3}.$$

5-23. $I=1.33\times10^{-40}$g·cm^2, $x=0.022$.

5-24. $\Delta\nu=1$.

5-25. 5200Å, 3968.2Å.

5-26. 0.07,增大2.8倍.

5-27. 8573Å 5015Å.

5-28. 100K.

5-29. 是$J=0\rightarrow J=2$的转动喇曼谱.

5-30. 0, 1.614×10^{-3}, 4.84×10^{-3}, 9.68×10^{-3}eV; 7.68×10^{-6}, 3.932×10^{-6}m.

5-31. 0.962Å.

第 六 章

6-1. 72.

6-2. 2.3Fm, 6.9Fm, 9.0Fm.

6-3. 3.01×10^{-14}m, 7.4×10^{-15}m.

6-5. 0.15×10^{15}.

6-6. 5.99,7.55Fm.

6-7. (a)11.84MeV,(b)23.67MeV.

6-8. 20.6,9.75,10.01MeV.

6-9. 4.77MeV,6.55MeV.

6-10. 1.57MeV.

6-11. (a)7.275MeV,(b)2.425MeV.

6-12. 9.013334u.

6-13. 34.97u.

6-14. 2.014017u.

6-15. 8.05,6.76,10.01MeV.

6-16. (a)5.8×10^{-37}MeV;(b)0.72MeV.

6-17. $\frac{9}{2}$.

6-19. 2,2,1,3,2,4.

6-20. $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$.

6-21. 5个成分,强场时 J-I 偶合断裂.分裂情况也将改变.

6-22. $\frac{5}{2}$.

6-23. $\frac{7}{2}$.

6-24. $\frac{7}{2}$.

6-25. $\frac{1}{2}$.

6-26. $\mu_{Li}=3.26\mu_N$, $\mu_F=2.62\mu_N$.

6-27. $\mu_{^3H}=2.98\mu_N$, $\mu_{^3He}=-2.13\mu_N$.

6-28. 6.33%.

6-29. 0.9179×10^{-14}m, 0.7982×10^{-14}m.

6-30. 5.20MeV,6.66MeV.

6-31. 36.9752u,39.9744u.

6-32. 6.68×10^{-4}u.

6-33. $Z=\dfrac{A}{0.015A^{2/3}+2}$

6-34. $Z=26$，是$^{57}_{26}$Fe.

6-35. 4.20MeV.

6-36. (a)$\frac{5}{2}+,\frac{1}{2}+,\frac{7}{2}+$，(b)$\frac{1}{2}+,\frac{3}{2}+,\frac{5}{2}+$.

6-37. 1；2.

6-38. $2.79\mu_N,-19.1\mu_N$.

6-39. 7.26MeV.

6-40. $0+,\frac{5}{2}+$.

6-41. (b)-0.102，(c)1.07×10^{-8}eV.

6-42. (a)0.1806，(b)1.88×10^{-7}eV.

6-43. $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}$.

6-45. $\frac{1}{2}$，0.

第 七 章

7-1. 16.23mg；4.33×10^{-4}mg/a.

7-2. $5T_{1/2}$；$6.6T_{1/2}$；$100T_{1/2}$；$13.3T_{1/2}$.

7-3. (a)7.6a，$4.17\times10^{-9}s^{-1}$；(b)1130Ci.

7-4. 0.0088g.

7-6. 23.5mCi.

7-7. 6.50×10^{-12}g；1.76×10^{-13}g.

7-8. 1.66×10^{8}Bq.

7-10. 2.38×10^{4}a.

7-11. 386cm.

7-12. 7.08×10^{8}a.

7-13. (a)1.067×10^{17}个/天；(b)3.416×10^{-7}C.

7-14. 10d；14.5d；$8\times10^{-7}s^{-1}$.

7-15. (a)2.54×10^{5} 个/秒；(b)29.97 个/秒.

7-16. 9.12×10^{3} 个/分.

7-17. 1×10^{22}；$4.14\times10^{-9}s^{-1}$；$4.1\times10^{13}s^{-1}$；1100Ci.

7-18. 6.7×10^{21}；$7.9\times10^{-10}s^{-1}$；$4.1\times10^{13}s^{-1}$；140Ci.

7-19. 186a.

7-20. 1.477×10^{-7}，0.028，0.578.

7-21. 275g.

7-23. 31Ci.

7-24. ($T_{1/2}=212.8$min).

7-25. 9×10^{-7}.

7-26. 11.7d.

7-27. 4.66×10^{8}Bq.

7-28. 1.126 个/秒，3.045×10^{6}mCi.

7-29. (a)1.3×10^{3}Ci；(b)4.85×10^{3}Ci·g^{-1}；(c)1.52×10^{5}b.

7-30. 0.214μCi.

7-31. $V=(A/a)e^{-\lambda t}=6$L.

7-32. 0.22Bq.g^{-1}或 13.2 衰变/分·克.

7-33. 7.0×10^{8}a.

7-34. 62.2mCi.

7-35. 764h.

7-36. ^{40}K，14.4Bq；^{238}U 系列，0.31Bq；^{235}U 系列，0.011Bq.

7-37. $6.0127\times10^{23}mol^{-1}$.

7-38. 801.5d.

7-40. $t=10.7$min.

7-41. 都是 1Ci.

7-42. $T_{1/2}=4.5\times10^{9}$a.

7-43. 5.1×10^{9}a.

7-44. 3.35×10^{9}a.

7-45. 3.0×10^{-13}kg.

7-46. 6.4×10^{-9}g.

7-47. 1.14×104a.

7-48. 6.0×10^{9}a.

7-49. $t=\ln(A_1/A_2)/(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})$.

7-50. 0.39MeV.

7-51. $E_{r_1}=1.64$MeV，$E_{r_2}=1.04$MeV.

7-52. 2.4×10^{-5}.

37-53. 2.65×10^{4} 个/秒.

7-54. 1.5eV，4.9eV，6.4eV.

7-55. 1.91eV.

7-56. 56eV，0.23eV.

7-57. (a)47keV·c^{-1}，(b)2.65×10^{-3}eV.

7-59. (a)624.75keV，(b)662.19keV.

7-60. 145keV.

7-61. 566 和 161keV.

7-62. (a)545.16keV，(b)661.26keV.

7-63. 1.12MeV，0.89MeV.

7-64. 5.02×10^{-3}eV.

7-65. (a)$\nu=\dfrac{\nu'[1+(v/c)]}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$.

7-66. 4.3×10^{-2}cm/s.

7-69. 3.91×10^{-3}eV；81.4m/s；40.7m/s.

7-70. 频率相对增量 $\Delta\nu/\nu=gL/c^2\gg\frac{L}{E}$. 由此得到：

$L_{Fe} \geqslant 2.8\text{km}$，$L_{Zn} \geqslant 4.6\text{m}$.

7-71. 9.49MeV，4.60MeV，0.19MeV.

7-72. $2.44\times10^{5}\text{m/s}$，0.072MeV.

7-73. 10.74MeV，282.9MeV/C，0.20MeV.

7-74. 0.086MeV，4.79MeV.

7-75. 0.112MeV，6.11MeV.

7-76. $E_r=\frac{A}{A-4}(T_1-T_2)$.

7-77. 5.40 和 0.82MeV.

7-78. 能级：0，0.11，0.24 和 0.31MeV.

7-79. 719g.

7-80. $Q=\frac{N_A\rho T_*}{A-4}[1-\exp(-\ln 2\frac{t}{T_{1/2}})=1149.5\text{kJ}]$.

7-81. $1.6\times10^{4}\text{kJ}$.

7-82. 0.8mCi.

7-83. 29MeV，$3.6\times10^{-12}\text{cm}$.

7-84. (b)35.63MeV，(c)$5.43\times10^{-12}\text{cm}$.

7-85. 0.78MeV.

7-87. 对 β^-，有 $M_X>M_Y$. 对 β^+，有 $M_X>M_Y+2m_0$. 对 K 俘获有 $M_X>M_Y+\epsilon_n/c^2$.

7-88. 44.955912u.

7-89. 15.00338u.

7-90. (a)6.0189u；(b)21.99444u.

7-91. 3.016029u.

7-92. 1.48Fm.

7-93. 0.58，0.42，1.0，1.6MeV.

7-95. $T_R\simeq Q_\beta+(Q_{\beta^+}+2m_0c^2)/2Mc^2=93\text{eV}$.

7-96. (a)1.42keV；(b)$P_e=1.94\text{MeV/C}$，$P_\nu=2.0\text{MeV/C}$，$P_R=0.48\text{MeV}\cdot\text{C}^{-1}$.

7-97. 56.8eV, 0.862MeV, 0.862MeV · C^{-1}.

7-98. 98.3%.

7-99. (a)$2.46\times10^{11}s^{-1}$; (b)5.6keV, (c)0.30.

7-100. (a)0.315MeV; (b)0.285.

7-101. 0.99W.

7-104. 0.0475m.

7-105. 566keV, 161keV.

第 八 章

8-2. (a)$^{321}_{90}Th$; (b)$^{24}_{11}Na$; (c)$^{3}_{1}H$; (d)$\nu+^{20}_{10}Ne$; (e)$^{17}_{8}O$; (f)α.

8-3. 4.06; 4.36; −6; 9.85MeV.

8-4. 7.16; 4.04; 4.01MeV.

8-5. -1.301MeV.

8-6. 17.3MeV.

8-7. 3.0170u.

8-8. 17.00845u.

8-10. 0, $1.98\times10^{7}m\cdot s^{-1}$.

8-11. $T=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}T_0\cos^2\theta=0.7MeV$.

8-12. $2.6\times10^{6}m\cdot s^{-1}$.

8-13. (a)17.59MeV; (b)3.54MeV, 14.05MeV.

8-17. (b)1; 0; 8/9; 0.284.

8-18. 3.361MeV.

8-19. 1.78MeV; 1.01MeV.

8-21. 9.17MeV; 85.3°.

8-23. 2.34MeV; 12.33MeV.

8-24. 6.7MeV; 10.9MeV.

8-25. 78°.

8-26. (a)4.1MeV;(b)0.005024u.

8-27. 5.063MeV.

8-28. 3.367MeV.

8-29. (b)6×10^{6}cm·s^{-1}(c)减少. $\Delta m=10^{-26}$g.

8-30. 13.0MeV.

8-31. 9.17MeV;85.3°

8-32. (a)2.07b;(b)0.14cm;(c)16.4cm.

8-33. 2.85×10^{-6}米.

8-34. (a)166.3cm;(b)332.6cm;(c)49.9cm.

8-36. (a)91cm;(b)3.4cm.

8-37. 0.0032.

8-38. 10^{-12}.

8-39. 0.7b.

8-40. 0.05b.

8-41. $\bar{Y}=1-e^{-nd}=0.8$.

8-42. 0.28b.

8-43. 3.9×10^{3}b.

8-44. 1.75×10^{7}Bq.

8-45. 12×10^{13};5×10^{5} 个密度/秒.

8-46. 1.04×10^{8}Bq.

8-47. 3.47×10^{12}个中子/厘米^{2}·秒.

8-48. 8.6×10^{4}.

8-49. 0.02b.

8-50. $3\times10^{7}(\text{cm})^{-1}\cdot s^{-1}$.

8-52. 6.16MeV.

8-53. 38.97MeV.

8-54. 3.0;4.8;7.0MeV.

8-55. 18.13;19.15;19.84MeV.

8-56. (a)2.8;(b)1.2倍.

8-57. 1.4×10^{-15}s.

8-58. 0.7×10^{-20}s.

8-59. 6.6×10^{-14};6.6×10^{-11};6.6×10^{-8}s.

8-60. $(^{31}_{15}P)^*$ (α,p);(α,d);(α,α′)$^{30}_{14}Si$;$^{29}_{14}Si$;$^{27}_{13}Al$.

8-61. $\sigma_{min}/\sigma_0=0.87(\Gamma/T_0)^2$ 其中 σ_{min}和 $T_{min}=0.2T_0$ 相对应.

8-63. 87个事件/秒.

8-64. 可以分裂.

8-65. 约1MeV.

8-66. 0.667.

8-67. 98MeV;1.4×10^7m·s^{-1};67MeV;9.6×10^6m·s^{-1}.

8-68. 2.5×10^9.

8-69. 1.4×10^{-8}μg;6.8×10^{-5}μg;6.9μg;1.5×10^2μg.

8-70. 171.8MeV.

8-71. 0.02585eV;1.2keV;8.617keV.

8-72. (a)6.48×10^6V;(b)291.6MeV.

8-73. (a)0.151MeV;(b)0.094MeV.

8-74. (a)39.97MeV;(b)−24.15MeV.(c)15.82MeV.

8-75. 19.27MeV.

8-76. 在重氢中为32.4次;在碳中为124次.

8-79. 2.303;2.089;1.342.

8-80. 1.2%.

8-81. 8.78d.

8-82. 62.5MW.

8-83. 7.32g·min^{-1}.

8-84. (a)3.29×10^{10}W.s(b)130g.

8-85. $t=\tau n=\tau\frac{\lg n}{\lg k}=24$ 秒.

8-86. 105kW.

8-87. 172g;120T.

8-88. 1.53kg.

8-89. $D=\frac{L}{\sqrt{k-1}}$14m.

8-90. 14.1×10^{23}MeV.

8-91. (a)3.4×10^{8}kJ,(b)0.9×10^{8}kJ,(c)2.7×10^{8}kJ,
对于铀来说是 0.8×10^{8}kJ.

8-92. 4.2×10^{6}kJ.

8-94. 1.77×10^{-3}g.

8-95. 9.6×10^{-6}b;3×10^{-2}b.

8-96. 24.69MeV.

8-97. 1.18×10^{-9}kg·s^{-1};1.77×10^{-8}kg·s^{-1}.

8-98. 1.18×10^{-6}g·s^{-1};1.77×10^{-6}g·s^{-1}.

8-99. 1.244×10^{16}cm^{-13}.

8-100. 3×10^{-12};6×10^{-4}b.

第 九 章

9-1. $T_e=\frac{2m_eT(T+2m_\mu)}{(m_e+m_\mu)^2+2m_eT}=2.8$MeV.

9-2. $\cos\theta=\frac{1}{2\pi}[\frac{T}{T+2me}(1+n)^2-1-n^2]$;$\theta=120°$.

9-3. 282MeV.

9-4. (a)0.78GeV;(b)0.91MeV;(c)1.38GeV;
(d)7.84GeV.

9-6. (a)5.62GeV;(b)4.03GeV.

9-7. (a)175MeV/c;(b)259.8MeV.

9-9. 3.04×10^{17}cm(0.323 光年).

9-11. 164MeV.

9-12. (a)1.36MeV;(b)197MeV.

9-13. 131MeV.

9-15. 0.996c.

9-16. $T_{阈}=\frac{m_1+m_2}{m_2}(-Q)$.

9-17. 105MeV;1054MeV/c.

9-18. (a)$T=(m_k-2m_\pi)m_k/2m_\pi=0.42$GeV.

(b)$\cos\theta=\frac{2T(T+2m_k)}{(T+m_k)^2-4m_\pi^2}-1;\theta=103°$.

9-19. $\theta\approx10°$.

9-20. 108MeV.

9-21. 43MeV;78.5MeV;182MeV.

9-22. 0 和 53MeV;52.5MeV.

9-23. 69.3MeV.

9-24. 32.7MeV.

9-26. $M=1115\text{MeV}/c^2$;是 Λ 粒子.

9-27. $K^0\to\pi^++\pi^-$.

9-28. (a)$\pi^-\to e+\nu$;(b)139.07MeV.

9-29. (a)214.67MeV;(b)75.09MeV;(c)388.16MeV.

9-31. 68MeV;为使动量守恒,必须相等.

9-32. 自旋不守恒;轻子数和自旋不守恒.

9-33. 52.3MeV.

9-34. 73.6MeV.

9-35. (a)33.4 个衰变/年;(b)$E_{\gamma\max}=469.3$MeV,

$E_{\gamma\min}=9.7$MeV.

9-37. B 和 Q.

9-39. (a)途径②,在能量上.(b)途径①,因为$|\Delta S|=2$.

9-40. (c).

9-41. (a)第 2 个;(b)第.1 个;(c)第 2 个;
(d)第 2 个.

9-42. (b)和(c).

9-43. $T=1;T_z=1$.

9-45. $B=-1,Q=+1,T=0,T_z=0,S=+3$.

9-47. (a)和(b)$\Delta T=0,\Delta T_z=0$;(3)$\Delta T=\frac{3}{2},\Delta T_z=\frac{1}{2}$.

9-48.

	nn	pp	np	π^+p	π^-p	π^0p	π^+n	π^-n	π^0n
T_z	−1	+1	0	+3/2	−1/2	+1/2	+1/2	−3/2	−1/2
T	1	1	1,0	3/2	3/2,1/2	3/2,1/2	3/2,1/2	3/2	3/2,1/2

9-49. (a)$\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}=\tau m_\mu/(m_\mu+T)=2.2\mu s$

(b)$\tau_0=l\sqrt{1-\beta^2}/\beta c=lm_\pi=2.5\times10^{-8}s$.

9-50. $p=1-e^{-t/\tau}=0.43$ (t 为飞行时间,τ 为运动介子的平均寿命).

9-51. 在^1P 态 $T=1$;在^1D 态 $T=2$ 和 0.

9-52. 负宇称.

9-53. udd;udd;uus;dds;uss;dss.

9-54. $\pi^+(u\bar{d}),\pi^-(\bar{u}d);\Lambda^0(uds),\bar{\Lambda}^0(\bar{u}\bar{d}\bar{s})$.

9-55. (a)K^0 介子;(b)K^0 介子;(c)π^+介子.

9-56. Ω.

9-58. $0.795n^2$Å,其中 $n=1,2,3\cdots$;2733,2306,2186Å.

附录Ⅱ　有关物理常数和单位变换

重力常数　$G=6.67\times10^{-11}$牛顿·米^2/千克^2

阿伏加德罗常数　$N_0=6.0222\times10^{23}$个粒子/摩尔

玻耳兹曼常数　$k=1.3806\times10^{-23}$焦耳/开

$=8.62\times10^{-5}$eV/°K

法拉第常数　$F=N_0e=9.6487$ 库仑/摩尔

真空介电常数　$\varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0c^2}=8.85419\times10^{-12}$库仑^2/牛顿·米^2

$4\pi\varepsilon_0=1.11265\times10^{-10}$库仑^2/牛顿·米^2

库仑力常数　$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.98755\times10^{9}$ 牛顿·米^2/库仑^2

真空磁导率　$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$牛顿/安培^2

（或 1.256637×10^{-6}伏·秒/安·米）

普朗克常数　$h=6.6262\times10^{-34}$焦耳·秒

$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.05459\times10^{-34}$焦耳·秒

里德堡常数　$R_\infty=1.0973731\times10^{7}$ 米$^{-1}$

$R_H=1.0967758\times10^{7}$ 米$^{-1}$

精细结构常数　$a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137.036}=7.29735\times10^{-3}$

玻尔第一轨道半径　$a_0=4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{me^2}=5.29177\times10^{-11}$米

（或 0.529177Å）

电子的康普顿波长　$\lambda_c=\frac{h}{m_ec}=2.42631\times10^{-12}$米

$\lambda_c=\frac{\hbar}{m_ec}=3.86159\times10^{-13}$米

电子的量子单位　$e=1.60219\times10^{-19}$库仑

（或 4.8033×10^{-10}静电系单位）

真空中的光速　$c=2.997925\times10^{8}$ 米/秒

电子的质量　$m_e=9.1096\times10^{-31}$千克(或 0.00054858)

电子的荷质比　$\frac{e}{m_e}=1.75880\times10^{11}$库仑/千克

质子质量　$m_p=1.67261\times10^{-27}$千克(或 1.0072765u)

中子质量　$m_n=1.67492\times10^{-27}$千克(或 1.008665u)

电子的静止能量　$m_ec^2=0.51100$ 兆电子伏特

质子的静止能量　$m_pc^2=938.26$ 兆电子伏特

中子的静止能量　$m_nc^2=939.55$ 兆电子伏特

玻尔磁子　$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}=9.2741\times10^{-24}$安·米^2(焦耳/$\frac{\text{韦伯}}{\text{米}^2}$)

核磁子　$\mu_N=\frac{eh}{2m_p}=5.05\times10-27$安·米^2(焦耳/$\frac{\text{韦伯}}{\text{米}^2}$)

1 千克$=5.16\times10^{29}$MeV/c^2

1u$=931.48$MeV/c^2

1u$=1.6598\times10^{-27}$千克

1Å$=10^{-10}$米

1 费米$=10^{-15}$米

1eV$=10^{-6}$MeV$=10^{-9}$BeV$=1.602192\times10^{-19}$焦耳

1 特斯拉$=1$ 韦伯/米$^2=10^4$ 高斯.

附录Ⅲ　原子质量表

符号前的角标代表原子序数；打“*”的代表放射性同位素.

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
$_0$n	1*	1.008665	$_9$F	19	18.998405
$_1$H	1	1.007825	$_{10}$Ne	20	19.992440
$_1$D	2	2.014102		21	20.993849
$_1$T	3*	3.016050		22	21.991385
$_2$He	3	3.016030	$_{11}$Na	22*	21.994437
	4	4.002603		23	22.989771
	6	6.018892	$_{12}$Mg	24	23.985042
$_3$Li	6	6.015125		25	24.986809
	7	7.016004		26	25.982593
$_4$Be	9	9.012186	$_{13}$Al	26*	25.986892
	10*	10.013534		27	26.981539
$_5$B	10	10.012939	$_{14}$Si	28	27.976929
	11	11.009305		29*	28.976496
$_6$C	12	12.000000		30	29.973763
	13	13.003354		32*	31.974020
	14*	14.003242	$_{15}$P	31	30.973765
$_7$N	14	14.003074	$_{16}$S	32	31.972074
	15	15.000108		33	32.971462
$_8$O	16	15.994915		34	33.967865
	17	16.999133		36	35.967089
	18	17.999160	$_{17}$Cl	35	34.968851

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	36*	35.968309		51	50.943961
	37	36.965898	$_{24}$Cr	50	49.946054
$_{18}$A	36	35.967544		52	51.940513
	38	37.962728		53	52.940653
	39*	38.964317		54	53.938882
	40	39.962384	$_{25}$Mn	55	54.938050
	42*	41.963048	$_{26}$Fe	54	53.939616
$_{19}$K	39	38.963710		55*	54.938299
	40*	39.964000		56	55.939395
	41	40.961832		57	56.935398
$_{20}$Ca	40	39.962589		58	57.933282
	41*	40.962275		60*	59.933964
	42	41.958652	$_{27}$Co	59	58.933189
	43	42.958780		60*	59.933813
	44	43.955492	$_{28}$Ni	58	57.935342
	46	45.953689		59*	58.934342
	48	47.952531		60	59.930787
$_{21}$Sc	45	44.955920		61	60.931056
$_{22}$Ti	44*	43.959572		62	61.928342
	46	45.952632		63*	62.929664
	47	46.951768		64	61.927958
	48	47.947950	$_{29}$Cu	63	62.929592
	49	48.947870		65	64.927786
	50	49.944786	$_{30}$Zn	64	63.929145
$_{23}$V	50*	49.947164		66	65.926052

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	67	66.927145		84	83.911503
	68	67.924857		85*	84.912523
	70	69.925334		86	85.910616
$_{31}$Ga	69	68.925574	$_{37}$Rb	85	84.911800
	71	70.924706		87*	86.909186
$_{32}$Ge	70	69.924252	$_{38}$Sr	84	83.913430
	72	71.922082		86	85.909285
	73	72.923462		87	86.908892
	74	73.921181		88	87.905641
	76	75.921405		90*	89.907747
$_{33}$As	75	74.921596	$_{39}$Y	89	88.905872
$_{34}$Se	74	73.922476	$_{40}$Zr	90	89.904700
	76	75.919207		91	90.905642
	77	76.919911		92	91.905031
	78	77.917314		93*	92.906450
	79*	78.91894		94	93.906313
	80	79.916527		96	95.908286
	82	81.916707	$_{41}$Nb	91*	90.906860
$_{35}$Br	79	78.918329		92*	91.907211
	81	80.916292		93	92.906382
$_{36}$Kr	78	77.920403		94*	93.907303
	80	79.916380	$_{42}$Mo	92	91.906810
	81*	80.916610		93*	92.906830
	82	81.913482		94	93.905090
	83	82.914131		95	94.905839

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	96	95.904674		108	107.904187
	97	96.906021		109*	108.904928
	98	97.905409		110	109.903012
	100	99.907475		111	110.904188
$_{43}$Tc	97*	96.906340		112	111.902762
	98*	97.907110		113	112.904408
	99	98.906249		114	113.903360
$_{44}$Ru	96	95.907598		116	115.904762
	98	97.905289	$_{49}$In	113	112.904089
	99	98.905936		115*	114.903871
	100	99.904218	$_{50}$Sn	112	111.904835
	101	100.905577		114	113.902773
	102	101.904348		115	114.903346
	104	130.905430		116	115.901745
$_{45}$Rh	103	102.905511		117	116.902958
$_{46}$Pd	102	101.905609		118	117.901606
	104	103.90411		119	118.903313
	105	104.905064		120	119.902198
	106	105.903479		121*	120.904227
	107*	106.905132		122	121.903441
	108	107.903891		124	123.905272
	110	109.905164	$_{51}$Sb	121	120.903816
$_{47}$Ag	107	106.905094		123	122.904213
	109	108.904756		125	124.905232
$_{48}$Cd	106	105.906463	$_{52}$Te	120	119.904023

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	122	121.903064		134	133.904612
	123*	122.904277		135	134.905550
	124	123.902842		136	135.904300
	125	124.904418		137	136.905500
	126	125.903322		138	137.905000
	128	127.904476	$_{57}$La	137*	136.906040
	130	129.906238		138*	137.909610
$_{53}$I	127	126.904070		139	138.906140
	129*	128.904987	$_{58}$Ce	136	135.907100
$_{54}$Xe	124	123.906120		138	137.905830
	126	125.904288		140	139.905392
	128	127.903540		142*	141.909140
	129	128.904784	$_{59}$Pr	141	140.907596
	130	129.903509	$_{60}$Nd	142	141.907663
	131	130.905085		143	142.909779
	132	131.904161		144*	143.910039
	134	133.905815		145	144.912538
	136	135.907221		146	145.913086
$_{55}$Cs	133	132.905355		148	147.916869
	134*	133.906823		150	149.920960
	135*	134.905770	$_{61}$Pm	145*	144.912691
	137*	136.906770		146*	145.914632
$_{56}$Ba	130	129.906245		147*	146.915108
	132	131.905120	$_{62}$Sm	144	143.911969
	133*	132.905879		146*	145.912992

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	147*	146.914867		161	160.926945
	148*	147.914791		162	161.926803
	149*	148.917180		163	162.928755
	150	149.917276		164	163.929200
	151*	150.919919	$_{67}$Ho	165	164.930421
	152	151.919756		166 *	165.932289
	154	153.922282	$_{68}$Er	162	161.928740
$_{63}$Eu	151	150.919838		164	163.929287
	152*	151.921749		166	165.930307
	153	152.921242		167	166.932060
	154*	153.923053		168	167.932383
	155*	154.922930		170	169.935560
$_{64}$Gd	148*	147.918101	$_{69}$Tm	169	168.934345
	150*	149.918605		171 *	170.936530
	152*	151.919794	$_{70}$Yb	168	167.934160
	154	153.920929		170	169.935020
	155	154.922664		171	170.936430
	156	155.922175		172	171.936360
	157	156.924025		173	172.938060
	158	157.924178		174	173.938740
	160	159.927115		176	175.942680
$_{65}$Tb	159	158.925351	$_{71}$Lu	173*	172.938800
$_{66}$Dy	156 *	155.923930		175	174.940640
	158	157.924449		176*	175.942660
	160	159.925202	$_{72}$Hf	174*	173.940360

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	176	175.941570		192	191.961150
	177	176.943400		194	193.962725
	178	177.943880		195	194.964813
	179	178.946030		196	195.964967
	180	179.946820		198	197.967895
$_{73}$Ta	180	179.947544	$_{79}$Au	197	196.966541
	181	180.948007	$_{80}$Hg	196	195.965820
$_{74}$W	180	179.947000		198	197.966756
	182	181.948301		199	198.968279
	183	182.950324		200	199.968327
	184	183.951025		201	200.970308
	186	185.954440		202	201.970642
$_{75}$Re	185	184.953059		204	203.973495
	187*	186.955833	$_{81}$Tl	203	202.972353
$_{76}$Os	184	183.952750		204*	203.973865
	186	185.953870		205	204.974442
	187	186.955832	RaE″	206*	205.976104
	188	187.956081	AcC″	207*	206.977450
	189	188.958300	ThC″	208*	207.982013
	190	189.958630	RaC″	210*	209.990054
	192	191.961450	$_{82}$Pb	202*	201.927997
	194*	193.965229		204*	203.973044
$_{77}$Ir	191	190.960640		205*	204.974480
	193	192.963012		206	205.974468
$_{78}$Pt	190*	189.959950		207	206.975903

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
	208	207.976650	An	219*	219.009481
RaD	210*	209.984187	Tn	220*	220.011401
AcB	211*	210.988742	Rn	222*	222.017531
ThB	212*	211.991905	$_{87}$Fr		
RaB	214*	213.999764	AcK	223*	223.019736
$_{83}$Bi	207*	206.978438	$_{88}$Ra		
	208*	207.979731	AcX	223*	223.018501
	209	208.980394	ThX	224*	224.020218
RaE	210*	209.984121	Ra	226*	226.025360
ThC	211*	210.987300	$MsTh_1$	228*	228.031139
	212*	211.991876	$_{89}$AC	227*	227.027753
RaC	214*	213.998686	$MsTh_2$	228*	228.031080
	215*	215.001830	$_{90}$Th		
$_{84}$Po	209*	208.982426	RdAc	227*	227.027706
RaF	210*	209.982876	RdTh	228*	228.028750
AcC′	211*	210.986657		229*	229.031652
ThC′	212*	211.989629	Io	230*	230.033087
RaC′	214*	213.995201	UY	231*	231.036291
AcA	215*	214.999423	Th	232*	232.038124
ThA	216*	216.001790	UX_1	234*	234.043583
RaA	218*	218.008930	$_{91}$Pa	230*	230.050065
$_{85}$At	215*	214.998663		231*	231.035877
	218*	218.008607	Uz	234*	234.043298
	219*	219.011290	$_{92}$U	231*	231.036264
$_{86}$Rn	233*	233.039522		232*	232.037168
	234*	234.040904			

符号	质量数	质量	符号	质量数	质量
AcU	235*	235.043915	$_{94}$Pu	236*	236.046071
	236*	236.045637		238*	238.049511
UI	238*	238.048608		239*	239.052146
$_{93}$NP	235*	235.044049		240*	240.053882
	236*	236.046624		241*	241.056737
	237*	237.048050		242*	242.058725
				244*	244.064100