微分流形与分析力学初步

知乎: 埃格先生

目录

1. 简介 4
1.1. 本文的特点及作者的一些期待 5
1.2. 参考书目 7
2. 位形空间与微分流形 8
2.1. 运动与力学的“单点化”描述、位形空间 8
2.2. R^m的子流形 12
2.3. 一般微分流形的定义 21
2.4. 微分流形之间的映射 25
3. 微分流形的切向量、切向量场、切丛 27
3.1. 一般流形上的切向量、切空间 27
3.2. 切映射、切丛 30
3.3. 切向量场 33
3.4. 单参数微分同胚群、Lie 导数 37
3.5. Lie 群 42
4. Lagrange 力学 48
4.1. 变分原理 48
4.2. 理想完整约束下运动方程的变分形式 50
4.3. Lagrange 方程 52
4.4. 静力学问题 59
4.5. 小振动问题 62
4.6. 刚体的位形空间 67
4.7. 刚体的Lagrange力学 73
4.8. 无限维位形空间中的Lagrange力学示例: 弦振动 78
5. 流形上的张量、微分形式 81
5.1. 余切向量、余切向量场、余切丛 81
5.2. 协变张量、协变张量场 87
5.3. 余切映射、余切丛的光滑结构、拉回映射、Lie导数 91
5.4. Riemann 度量及其应用 97
5.5. 微分形式 102
5.6. 微分形式的积分 107
5.7. 外微分 110
5.8. 常用公式一览 118
6. 辛流形与 Hamilton 力学 121
6.1. 为什么会出现 Hamilton 力学? 121
6.2. 辛线性代数 125
6.3. 辛流形、辛同胚 132
6.4. Hamilton 向量场、Poisson括号 137
6.5. 辛体积形式、Liouville定理 143
6.6. 余切丛上的标准辛形式 146

6.7. Lagrange 力学到 Hamilton 力学的转化 153
6.8. Hamilton 系统、Arnold-Liouville 定理 157
6.9. Hamilton 方程的辛数值算法 161
7. 附录 168
7.1. 点集拓扑简介 168
7.2. 一般线性空间理论简介 174
7.3. 带边流形 184
7.4. Einstein 求和约定 184

1. 简介

所谓分析力学, 简单来讲就是牛顿建立的经典力学体系在数学形式上的拓展. 该领域最早的经点著作是著名的数学家、物理学家 Joseph Louis Lagrange 所著的《分析力学》(*Mécanique Analytique,* 1788). Lagrange 在该书中给出了一般坐标系下的牛顿运动方程, 即我们今天熟知的 Lagrange 方程. 在19世纪30年代, William Rowan Hamilton 进一步把 Lagrange 方程改写成了形式上更为优美的 Hamilton 正则方程. Hamilton 还注意到了 Lagrange 方程与变分原理之间的联系, 从而提出了“作用量”的概念, 并给出了作用量满足的偏微分方程, 即我们今天熟悉的 Hamilton-Jacobi 方程. 总之, Lagrange 和 Hamilton 的工作给出了两种对牛顿运动方程的数学表述, 它们分别称为 Lagrange 力学和 Hamilton 力学, 是分析力学的主要内容.

分析力学是沟通经典物理与现代物理的桥梁, 是物理学史上浓墨重彩的一笔. 几乎所有大学里的物理专业都会开设这门课程, 它是一个物理系学生知识结构中的重要一环; 同时, 也有很多数学专业和工科专业的学生和学者因工作需要而接触到分析力学.

但遗憾的是, 古今中外绝大多数教科书对分析力学的介绍都流于繁杂的数学公式推导. 同学学过这门课程之后, 大都只会套用 Lagrange 方程列出系统在广义坐标下的运动方程, 至于这个方程是怎么来的, 只记得有很多微分表达式, 代入来代入去、消来消去, 最后推出来这么一个方程, 它好像还跟变分法有点关系. 至于 Hamilton 力学, 大多数同学对它的印象就是从天而降了一个 Legendre 变换, 把 Lagrange 方程切换成了 Hamilton 正则方程, 并且用这个方程求解力学题目反而比用 Lagrange 方程更麻烦. 同学们不理解, 为什么当初 Hamilton 要推导这样一个麻烦的方程, 而物理学家们还偏偏很喜欢这个方程. 数学背景的同学学习分析力学的体验更加糟糕: 大量的数学分析训练使得它们本就难以接受物理学家那种基于微元法的推导方式, 而分析力学中恰恰有大量这样的推导, 且整个理论都是基于这些推导建立起来的! 可怜的数学系同学, 只好耐着性子, 一步一步地把这些“不严谨”的推导跟下来, 并自我安慰曰: 这是物理, 不能当成数学来学.

然而, 分析力学真的不能当成数学来学吗? 本文就要传达这样一个观念: **分析力学中的一切概念都是可以在数学上严格表述的!**

本文我们要介绍 Lagrange 和 Hamilton 力学中蕴含的数学结构, 特别是其中的**几何**结构. N个质点在三维空间中的运动会被看成一个点在$3N$维空间$\mathbb{R}^{3N}$中的运动, 而如果n个质点之间存在$3N-n$个完整约束条件, 使得运动实际上只有n个自由度, 则运动会被看作是$\mathbb{R}^{3N}$中的一个n维子流形上的运动, 这个子流形被称为位形空间. Lagrange方程会被描述成位形空间的切丛(又称为**速度相空间**)上的一个向量场, Hamilton 正则方程则会被描述为位形空间的余切丛上的向量场(又称为**相空间**), 或更一般地, 一个一般的辛流形上的向量场.

以上涉及到的概念: 流形、向量场、切丛、余切丛、辛流形, 都将是我们要从头开始介绍的内容, 对这些概念不熟悉的读者不必担心.

用几何语言来描述分析力学的主要优点是: 我们可以不依赖具体坐标系地给出一切力学概念的明

确定义. 比如说, 在 Lagrange 力学中, Lagrange 函数 L 的形式在不同坐标系下是不同的. 在平面直角坐标系下表示为

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y})=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1}$$

的 Lagrange 量在平面极坐标系下就会变成

$$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi})=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{GmM}{r}. \tag{2}$$

这两个函数在形式上完全不一样. 那么我们不禁要问: 当我们在一般性地讨论一个 Lagrange 函数 L 时, 我们到底在讨论一个什么样的对象? 这样看来, L 似乎成了一个定义模糊的东西. 但是在几何学的框架下, L 不再是$2n$个变量的函数$\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, 而是位形空间的切丛(速度相空间)上的函数 $TM\to\mathbb{R}$. 像(1), (2)这种$2n$个变量的函数则是这个切丛上的函数在两个不同的局部坐标下的表达式, 严格来讲应该分别写成$L\circ\psi_*^{-1}$和$L\circ\varphi_*^{-1}$, 其中 ψ_* 和 φ_* 分别是平面上的直角坐标映射和极坐标映射的切映射, 所以它们本就不是同一个函数, 当然有不同的表达式. 换言之, L 的定义本身不依赖于速度相空间中的坐标选取, 它具有不同表达式只是因为复合了不同的坐标映射. 此外, 我们将看到, Lagrange 方程之所以在任意坐标系下都能够具有相同形式, 也是因为它具有一个不依赖于M上具体坐标的定义方式.

在几何学语言下, Hamilton 力学的优势也会被凸显出来. 我们将会在 Hamilton 力学部分着重介绍相空间中的**辛结构**. 运用这个辛结构, 我们可非常简洁地定义相空间上任何一个函数的 Hamilton 正则方程、证明能量守恒、相流体积守恒、定义 Poisson 括号、可积系统等等. 这一部分的理论是非常优美的.

对于希望攻读理论物理的读者, 理解分析力学中的几何结构也有助于日后学习广义相对论等近现代物理学科时对其中更为复杂的几何学概念的理解.

此外, 我们要介绍的这些知识也是可以“落地”的. 本文会介绍一类在科研和工业中有广泛应用的数值算法, 设计出这样的算法, 非对力学中的几何结构有充分了解不可.

总之, 读者会发现, 当我们用几何语言把分析力学的理论严格化、明确化之后, 很多关于分析力学的困惑都会迎刃而解, 从而自己的对分析力学这个重要的力学体系的理解提升了一个档次, 顺便还学来了一个套微分流形的知识.

1.1. 本文的特点及作者的一些期待

在撰写本文的过程中, 笔者假定读者是这样一群人: 已经在课堂上学过或自学过了分析力学, 但是感觉学得不是很明白, 希望能够从数学的角度更加深入地理解分析力学知识. 在此假定下, 我相信读者至少是学过完整的微积分知识, 熟悉多元微积分中的各种运算的. 而多元微积分中会涉及很多向量运算, 因此读者还应该学过一些线性代数, 知道矩阵的加、减、乘法和求逆运算规则, 以及一些矩阵特征值相关知识. 但同时, 学习微分流形还需要一些额外的拓扑学和更深入的线性代数知识, 而要求一个物理或应用数学背景的读者掌握这些知识可能有些强人所难了. 为了

不影响正文的行文思路, 这一部分被我们编在附录中, 供有需要的读者参阅. 当然, 也有可能读者数学基础极强, 已经学习过微分流形的知识, 这种情况下本文对您来讲可能会有些缺乏深度, 建议直接阅读下一节中列举的参考书目.

本文的一个原则是: 尽可能用最少的数学概念把分析力学的主线内容讲清楚. 本文不是专门讲微分几何或微分流形教科书, 很多在微分流形学科本身中很重要的一些概念: 比如 Frobenius 定理、Lie 代数、deRham上同调, 由于和我们要介绍的内容没什么关系, 我们就不会涉及或只做简单介绍; 此外, 虽然本文要介绍的是“严格数学理论”, 但如果一个命题或定理的证明涉及到大量的分析细节, 我们也会从略, 因为纠缠于这些细节对理解本文的主要内容没有任何帮助. 如果读者想更多地了解微分流形相关的内容, 可以参阅下一节中列举的微分流形相关书目.

根据笔者的经验, 本文中最大的难点应该是在 Lagrange 方程的向量场描述、以及 Lagrange 力学到 Hamilton 力学转化的过程, 这时我们会引入“余切丛上的辛形式”这个概念. 在此之前, 我们涉及的大多数微分流形的概念都有相对比较好的直观对应, 而学到这里时我们会涉及“切丛的切丛”、“余切丛的切丛”这种即使对纯数学专业的同学也不容易理解的数学对象, 可能需要读者反复地读、反复地理解. 因此我们在介绍 Hamilton 力学部分时, 会首先介绍 Hamilton 力学在一般辛流形上的表示, 在更靠后的位置再来介绍 Lagrange 力学到 Hamilton 力学的转化.

最后, 笔者希望通过本文传达一个很重要的理念: **数学, 不只有分析**!

如今, 世界上所有大学的数学专业课都会把分析学作为数学专业的必修课. 中国的大学更是用数学分析课程替代了一般理工专业的高等数学课, 同学们在学习微积分之前还要先被八个实数公理和 $\varepsilon-\delta$ 语言洗一遍脑. 这些构成了数学专业的同学对自己专业的的第一印象, 即数学是严格的, 是分析的. 物理专业同学试图学习数学专业课时也大抵是从这些分析学知识开始入手的, 从而他们也对数学产生了这样的偏见: 数学就是一个给微积分挑刺儿的学科. 这种偏见甚至也存在于数学系同学自己身上. 笔者有一次旁听北京大学数学院一位同学关于量子力学中的泛函分析理论的课程报告, 这位同学在报告中直言：“物理学家建立了理论之后, 我们就得给他们擦屁股.” 人们都知道“数学物理不分家”, 数学家和物理学家自己却是“文人相轻”, 你笑他不严谨, 他笑你不实用.

但事实上, 数学和物理之间的联系从未断过. 在20世纪上半叶, 爱因斯坦在创立广义相对论时, 曾为了描述时空的弯曲, 专门学习黎曼几何, 一学就是七年, 并在这个过程中发明了“爱因斯坦求和约定”这个“语法糖”; 而随着量子场论、基本粒子理论的发展, “群”这个只有纯粹数学领域才会关注的抽象结构在物理学中派上用场. 现代纯粹数学有分析、代数、拓扑、几何这几大分支. 一个物理学家就算觉得分析学对物理百无一用, 也不得不承认剩下几个分支在现代的物理学中已经有了实实在在的应用.

从大的学科视角来讲, 本文介绍的是物理学中力学领域的基础学科——分析力学与现代数学中几何学领域的基础学科——微分流形之间的联系. 这两个学科本是可以独立学习的, 但把它们联系在一起, 则会起到“1+1>2”的效果: 分析力学会给微分流形提供丰富的实例, 帮助理解微分流形中的各种概念; 而微分流形则会给分析力学的严格理论建立提供一个牢靠的数学平台. 希望读者在读过本文后能够感受到, 数学不只有分析, 还有几何等其它分支, 它们如今与物理学有着良性的

互动.

1.2. 参考书目

本文一样讨论经典力学和几何之间关系的文章和专著也有很多. 这里我们列举其中一些比较经典的书目供大家参考. 这些书目都是一些比较“大部头”的著作, 相比本文概览性的介绍而言, 这些书中讨论的内容会更深入, 也更广泛一些.

1. **R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics***, 一本成书较早(1978年), 内容非常全面的经典力学著作. 前半部分介绍微分流形及分析力学的几何化表述, 与 Marsden 之后写的的另一本书 *Introduction to Mechanics and Symmetry* 内容相近; 后半部分是关于经典力学的动力系统定性性质与天体物理的内容. 这本书非常的厚实, 有精力的读者可以尝试去攻读它.
2. **V. I. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (经典力学的数学方法)**. 这本书是数学、物理双学科的经典名作, 甚至很多搞纯物理或纯数学的人都知道这本书. 它具典型的俄罗斯数学、物理教科书的风格——语言简明扼要, 没有废话, 能否读懂全看悟性; 而且本书也具有 Arnold 个人的鲜明特点: 直观主义, 不喜证明, 思维时有跳跃. 笔者是从这本书入门微分流形的, 基本读懂了流形的概念和 Lagrange 力学的流形表述, 但到 Hamilton 力学与辛流形部分时发现自己完全看不懂了. 因此笔者本人并不很推荐初学时拿这本书去学, 但它可以作为第二遍、第三遍学习时的“进阶教程”使用.
3. **J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems* (力学与对称性引论: 经典力学系统初探)**. 相比于 Arnold 的书, 本书无论是数学上还是物理上介绍得都更细致, 对读者也更友好一些. 本书选择了从Hamilton力学开始讲起, 先介绍$\mathbb{R}^{2n}$上的辛结构及 Hamilton 方程, 然后再介绍一般辛向量场上的 Hamilton 力学, 而 Lagrange 力学则是在这些之后(这主要是因为 Lagrange 方程的向量场描述确实比 Hamilton 力学麻烦一些). 本书的另一个特点是同时兼顾无限维位形空间的情形, 从而所讨论的理论可以扩展到流体、弹性力学等连续介质力学问题中.
4. **D. D. Holm, T Schmach, C. Stoica, *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions***. 一本相对比较新的书, 也是笔者目前看到的最容易上手的一本. 前半本的内容和 *Introduction to Mechanics and Symmetry* 的内容比较接近, 后半本介绍一个相对小众的应用领域, 属于作者的私货内容. 本书对读者的理解过程照顾一些, 比如说流形的概念, 该书是先从$\mathbb{R}^n$的嵌入子流形开始讲起的. 并且本书的习题是有答案的(看书自学比较多的朋友应该会明白这一点有多么难得).

此外, 读者可能还希望单独地去补充微分流形方面的知识, 这里也列举一些微分流形教材供读者参考

1. **Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds***. 很多人入门微分流形的首选, 从欧氏空间中的向量场、微分形式、外微分等概念开始讲起, 循序渐进, 涵盖了微分流形中的所有主要概念.
2. **John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds***. 讲解细致, 图很多, 涵盖范围非常广泛(甚至有专门一章讲辛流形), 但代价是令人望而生畏的700页的厚度.

3. **陈维桓《微分流形初步》**. 国内最通行的一本微分流形教材, 看上去很薄, 但文字密度大, 其特点是讲解过于细腻, 推导繁琐, 有时会刻意去使用局部坐标系去证明定理.
4. **梅加强《流形与几何》**. 一本相对比较新的书. 这本书更多是一本讲微分几何(即 Riemann 几何)的书, 其中前两章内容是关于微分流形的, 相比《微分流形初步》, 其内容更简洁一些, 读上去更舒服. 这本书前三章的内容在梅老师的官网上可以找到.

最后, 是一些分析力学本身的教材

1. **Landau, Lifshitz, *Mechanics* (力学)**. 举世闻名的“朗道十卷”之首, 薄薄一百多页, 写尽理论力学之精华(大概朗道大师觉得经典力学只值得讲100页). 以最小作用量原理开篇, 令人虎躯一震. 但在这之后的内容和普通力学教材并无二致: 碰撞、微振动、刚体, 然后是 Hamilton 力学. 赶时间的读者可以拿这本书过一遍主要知识, 但是细致学习还是不能只看这一本.
2. **梁昆淼《力学(下册)》**. 一本踏踏实实给物理系本科生讲力学的教材, 其上册属于大一新生必修课, 里面的内容高中物理课都涉及过, 甚至附录里有微积分. 这本《下册》的副标题是“理论力学部分”, 在简单介绍矢量表示之后进入分析力学部分, 讲虚位移、虚功、d'Alembert 原理, 然后是 Lagrange 方程以及小振动和刚体问题, 然后是 Hamilton 方程, 接着是变分原理, 最后是正则变换和 Hamilton-Jacobi 方程, 分析力学部分结束. 最后两章讲流体力学和弹性力学, 讲得相对比较基础. 作为物理书, 当然就不能指望它里面的数学推导有多么严谨, 但它对知识的讲解足够清晰、到位, 绝对是一本合格的物理课本, 其他分析力学课本的内容大多也不会和这本书相差太远.

本文的定位是对几何框架下的分析力学的入门级简介, 所以以上这些参考书目都会比本文在内容上更加深入, 也更加广泛. 甚至可以说, 本文内容就是就是上述所有参考书目内容的交集, 读者可以根据自身实际情况, 从这些参考书目中选择一些来深入阅读.

2. 位形空间与微分流形

2.1. 运动与力学的“单点化”描述、位形空间

假设我们考虑N个质点在d维空间中的运动(通常$d=1,2,3$). 假设我们已经选定了一个惯性系, 在此惯性系下第i个质点的第k维坐标记作x_{ik}, 那么整个系统的位置状态就由$3N$维向量

$$\boldsymbol{x}=(x_{11},\ \cdots,x_{1d},x_{21},\ \cdots,x_{2d},\ \cdots\ \ \cdots,x_{N1},\ \cdots,x_{Nd})^{\top} \tag{3}$$

唯一确定. 此时, 系统的一个位置状态就可以看作是$\mathbb{R}^{Nd}$中的一个点, 系统运动时, $\boldsymbol{x}$就是时间t的函数, 随着t的变化在$\mathbb{R}^{Nd}$中画出一条轨线. 我们遵循物理学的惯例, 无论标量矢量张量, 字母顶上一点均表示其对时间的导数, 两点均表示其对时间的二阶导数, 这样, $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$表示$\boldsymbol{x}$这个点在$\mathbb{R}^{Nd}$中的运动速度, 也是一个$Nd$维向量, 其第$(i-1)d+k$个分量$v_{ik}=\dot{x}_{ik}$是第$i$个质点在$d$维空间的速度的第$k$个分量. 力$\boldsymbol{F}$也是一个$Nd$维向量, 其分量$F_{ik}$第$i$个质点在$d$维空间所受的力的第$k$个分量. 今后定义的被动力$\boldsymbol{R}$类似. 此外, 记第$i$个质点的质量为$m_i$, 我们定义$\boldsymbol{m}$为一个$Nd\times Nd$的对角矩阵, 其第$(i-1)d+k$个对角元为$m_i$, 这样, $\boldsymbol{mv}$表示系统的动量, 是Nd维矢量, 而 $\frac{1}{2}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\top}\boldsymbol{mv}$表示系统的总动能. 牛顿第二定律在上述记号下的表述是

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}. \tag{4}$$

力$\boldsymbol{F}$通常是位置$\boldsymbol{x}$、速度$\boldsymbol{v}$和时间t的函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$, 但我们感兴趣的是*保守力场*问题, 即$\boldsymbol{F}$仅与$\boldsymbol{x}$和$t$有关, 并且存在一个标量函数$V(\boldsymbol{x}, t)$, 使得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla V(\boldsymbol{x}, t),$$

其中

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_{11}}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_{1d}}, \frac{\partial V}{\partial x_{21}}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_{2d}}, \cdots \quad \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_{N1}}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_{Nd}} \right)^{\top}.$$

特别地, 如果$V = V(\boldsymbol{x})$不显含时间t, 那么$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x})$亦不显含时间$t$. 此时

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^{\top} m \dot{\boldsymbol{x}} + V(\boldsymbol{x}) \right) = \frac{1}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{x}}^{\top} m \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}^{\top} m \ddot{\boldsymbol{x}} \right) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\top} \nabla V(\boldsymbol{x}) \\ &= \dot{\boldsymbol{x}}^{\top}(m\ddot{\boldsymbol{x}} + \nabla V(\boldsymbol{x})) = \dot{\boldsymbol{x}}^{\top}\boldsymbol{0} = 0, \end{aligned}$$

这就是我们熟知的**能量守恒**. 此外, 如果$\boldsymbol{F}$满足$\boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{F} = 0$, 其中$\boldsymbol{1}$是所有分量都是1的$Nd$维列向量, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{1}^{\top} m \dot{\boldsymbol{x}} \right) = \boldsymbol{1}^{\top} m \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{F} = 0,$$

这就是我们熟知的**动量守恒**.

牛顿第二定律是一个二阶常微分方程组, 一般来讲, 确定一个二阶微分方程组的解需要两个边界条件. 对于力学方程组, 通常边界条件的给法是某一个时刻的位置和速度. 对于给定的力$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$而言, 牛顿第二定律(4)可以写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ m^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

此时, 这个n元二阶常微分方程组的初值问题就转化成了一个$2n$元一阶常微分方程组的初值问题. 对于一阶常微分方程组, 无论其有多少个方程, 我们都可以把它看作是一个“向量场求积分曲线”的问题, 即在空间中有一个向量场, 求一条曲线, 使得其在每一点处的切向量都恰是向量场在那一点处的值. 大量的定性分析理论和数值计算方面的工作都是围绕着这一类问题进行的. 因此, 我们会把系统的位置$\boldsymbol{x}$和速度$\boldsymbol{v}$拼成一个更大的向量$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$, 它是一个$\mathbb{R}^{2Nd}$中的一个点, 而(5)则描述了$\mathbb{R}^{2Nd}$中的一个向量场求积分曲线的问题. 此时, 我们称$\mathbb{R}^{2Nd}$为系统的**速度相空间**, 其中每一个点$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$同时确定了系统的位置和动量.

现在, 我们来考虑系统自由度被削减的情形: 比如单摆, 小球本来可以自由地在二维空间中运动, 现在它被一根硬铰链固定, 从而到摆轴的距离被限定为一个定值, 运动只剩下一个自由度; 再比如刚体, 它可以看作一个包含无数个质点的系统, 但是由于内部的刚性约束, 其运动只剩下六个自由度.

一般来讲, 如果系统受到的约束可以描述为$3N-n$个独立的[1]方程 $f_i(\boldsymbol{x})=0$, $i=1,\ \cdots,3N-n$, 那么系统的运动就被限制在$\mathbb{R}^{Nd}$的一个子集M上[2], 而M上的一个上的点可以用n个参数q_1, q_2, $\cdots$, q_n来描述. 我们称M为系统的位形空间.

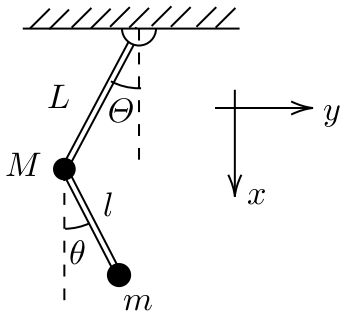


图 2.1.1: 双摆系统

例 2.1.1 *如图 2.1.1所示的双摆系统中, 两级摆的的摆线长度分别是L, l, 下端重物的质量分别是M, m, 取摆线L的固定锚点为原点, 竖直向下和向右分别为x, y轴正方向建立直角坐标系. 原本两个重物在二维平面中的位置总共需要用4个坐标(x_M, y_M, x_m, y_m)来表示, 但约束条件*

$$\begin{cases} x_M^2+y_M^2=L^2 \\ (x_m-x_M)^2+(y_m-y_M)^2=l^2 \end{cases} \tag{6}$$

使得我们只需要用两个摆角Θ, θ来确定系统的一个位置状态. 这两个摆角确定后, 我们有

$$\begin{cases} x_M=L\cos\Theta \\ y_M=L\sin\Theta \\ x_m=L\cos\Theta+l\cos\theta \\ y_m=L\sin\Theta+l\sin\theta. \end{cases} \tag{7}$$

系统的位形空间即是用$\mathbb{R}^4$中满足约束条件(6)的点集. 不难想象, 这个位形空间是嵌入到$\mathbb{R}^4$的一张二维曲面(虽然我们想象不出$\mathbb{R}^4$长什么样子). 事实上, 这个曲面可以和二维环面(游泳圈表面)上的点建立自然的一一对应(即拓扑同胚).

例 2.1.2 图 2.1.2*为离心调速器装置简图, AB边长为$2a$固定于转轴, 其余各斜臂长都是l, 质量忽略不计, 两个小球质量为m, 套管CD质量为M, 套在转轴上, 可以上下滑动, 劲度系数为k的弹簧两端分别固定在两个上臂的中点, 整个系统没有摩擦. 按图示方式建立坐标系, 暂不考虑系统绕轴旋转的问题, 则整个系统中有一个套管、两个小球的平面坐标, 不考虑约束时会有6维. 但考虑约束后, 整个系统的位置状态只由一个参数——斜臂与竖直方向的夹角φ来确定: 两个小球的坐标分别是$(a+l\sin\varphi, l\cos\varphi)$和$(-a-l\sin\varphi, l\cos\varphi)$, 套管坐标是$(0, 2l\cos\varphi)$. 把这6个坐*

---

[1] 即$\nabla f_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\ \cdots,3N-n$ 在任意一点$\boldsymbol{x}$处线性无关

[2] 如果f与速度$\boldsymbol{v}$也有关, 那么该约束是所谓"非完整约束条件", 它会使得分析力学中的很多结论失效, 本文不去考虑这类约束.

标分量看作$\mathbb{R}^6$中一个点的坐标, 令φ跑遍区间$(-\pi/2, \pi/2)$中的所有值, 则这个点就在$\mathbb{R}^6$中画出一条曲线, 这条曲线就是该问题的位形空间. 此外, 弹簧的长度是$2a + l\sin\varphi$也是由φ唯一确定的.

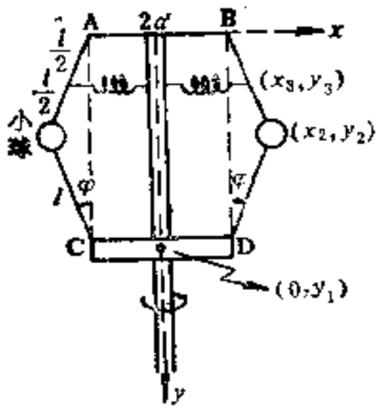


图 2.1.2: 离心调速器, 图片来自梁昆淼《力学(下册)》

由上述例子可以看到, 虽然我们说位形空间M是$\mathbb{R}^{Nd}$的子集, 但并不是$\mathbb{R}^{Nd}$的任何子集都符合我们的要求: 我们期待位形空间M应该是类似曲线、曲面这种图形, 而不是离散点集、有理数点集或者像康托尔点集这种数学分析举反例时才会使用的诡异集合. 更具体地讲, 我们希望这个子集能够具有类似于$\mathbb{R}^n$个结构, 从而用来描述M上的点的n个参数$q_1, q_2, \cdots, q_n$可以在M上形成一个平滑的曲纹坐标网——至少在参数有物理意义的局部范围内可以做到如此.

此外, 约束条件使系统运动的速度也受到了限制: 由于运动被限制在位形空间M上, 其速度不能有脱离M的分量. 比如说, 如果M是一个曲面, 那么速度向量必须落曲面的切平面上(如图 2.1.3)所示. 事实上, 假设系统在M上的运动可以写成$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t))$, 那么我们有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i}(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t))\dot{q}_i(t).$$

上式可以解读为: $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$被限制在点$\boldsymbol{x}(t)$处$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_n}$所张成的$n$维线性空间(即$M$在$\boldsymbol{x}(t)$处的**切空间**)中, 其具体取值由$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$确定. 于是, 系统在$M$上的所有可能运动状态$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$是$\mathbb{R}^{Nd}$的一个子集, 这个子集可以由$2n$个参数$q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$唯一确定. 这个子集称为系统的**速度相空间**.

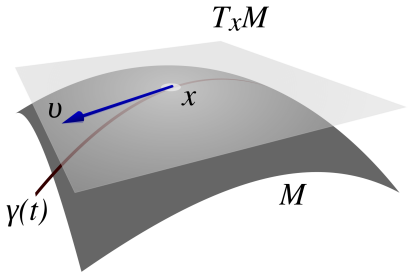


图 2.1.3: 速度向量$\boldsymbol{v}$必须落在曲面的切平面上. 图片来自wikipedia.

接下来我们就来介绍: 用数学的语言来讲, 位形空间M应该是一个n维*微分流形*, $q_1, q_2, \cdots, q_n$构成M上的一个*局部坐标系*, 而相应的速度相空间则是M的*切丛*TM, 是一个$2n$维微分流形, $q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$构成这个切丛上的一个*切坐标系*.

习题

习题 2.1.1 *在例*例 2.1.2*中, 不考虑旋转, 假设*$\varphi = \varphi(t)$*随时间变化, 套管质量集中在轴心处, 弹簧原长为*$2a$*, 约定原点为重力势能为*0*, 试将系统的Lagrange量(动能减势能)表达为*$\varphi, \dot{\varphi}$*的函数.*

2.2. $\mathbb{R}^m$的子流形

本节是大多数讲微分流形的数学书中不会存在的章节, 因为当今的几何学界都比较讲究“内蕴”, 即若无必要, 决不把流形看作更大的空间的嵌入子流形, 比如不会把二维球面看作$\mathbb{R}^3$的子流形等等.

但对于我们而言, 讨论流形在欧氏空间中的嵌入是有必要的. 一方面, 未来在介绍Lagrange力学时, 我需要讨论“约束力”的作用, 这些力作为向量, 都是指向脱离位形空间的方向的, 所以我们无法在完全内蕴的框架下讨论它们; 另一方面, 我们构造的大部分流形都是某个欧氏空间$\mathbb{R}^m$上的子流形, 并且我们也乐意用这种更加直观的方式来理解流形.

当然, 内蕴的讨论也是有必要的, 因为当我们从理想完整约束推出Lagrange方程那一刻起, Lagrange 力学就变成了相应位形空间上的内蕴力学, 尔后的Hamiton力学更是几乎使我们忘掉了空间坐标这个东西的存在. 因此, 我们最终还是要介绍流形的内蕴定义.

我们把$\mathbb{R}^m$中的点表示为列向量, 用粗体字母$\boldsymbol{x}$等来表示.

定义 2.2.1 *设*$n \leq m$*, *A*是*$\mathbb{R}^n$*上的一个开集, 若一个函数*$f : A \to \mathbb{R}$*的任意阶偏导数存在且连续, 则称*f*是光滑函数; 而一个映射*$F : A \to \mathbb{R}^m$*是光滑的* $\Leftrightarrow$ *其任意分量作为*$A \to \mathbb{R}$*的函数是光滑的. 此外, 如果*A*是*$\mathbb{R}^n$*上的任意集合(不一定是开集), 则*$F : A \to \mathbb{R}^m$*是光滑的* $\Leftrightarrow$ *存在一个包含*A*的开集*U*及一个光滑映射*$\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^m$*, 使得*$\tilde{F}|_A = F$*.*

上述定义使我们能够明确地定义“球面上的光滑函数”、“球面到平面的光滑映射”(比如著名的“球极投影”, 见例 2.2.1)等等.

定义 2.2.2 *设$n \leq m$, A是$\mathbb{R}^n$上的一个开集, 一个映射$F : A \to \mathbb{R}^m$满足以下条件时称为**光滑嵌入映射**:*

1. F是光滑单射

2. 对于任意$(q_1, \cdots, q_n) \in A$, $\boldsymbol{x} = F(q_1, \cdots, q_n)$的$n$个偏导数[3]

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_n} \tag{8}$$

是线性无关的向量组.

上述定义在直观上是容易理解的: 比如A是$\mathbb{R}^2$中的一个单连通开区域(同胚于圆盘), $m = 3$, 那么像集$F(A)$就$\mathbb{R}^3$中的曲面, 而A上的直角坐标网格就会被映成曲面$F(A)$上的*曲纹坐标网*, 如图 2.2.4*所示*. 而第二个条件则保证不同坐标分量的曲纹坐标线不会相切, 从而任意一点处两个坐标曲线的切线可以张成曲面的在该点处的切平面. 这些是古典微分几何中的基本概念.

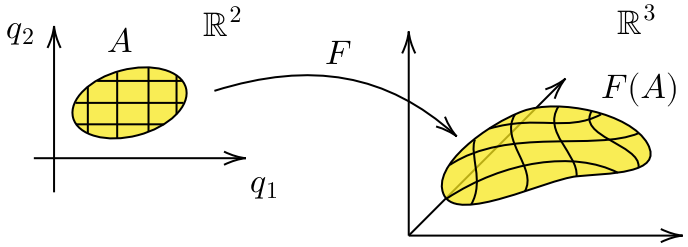


图 2.2.4: 光滑嵌入映射

定义 2.2.3 *$\mathbb{R}^m$中的n**维光滑嵌入子流形**是指满足如下条件的$\mathbb{R}^m$的子集M: 对于任意$\boldsymbol{x} \in M$, 存在一个x的开邻域$U \subseteq M$, 及一个光滑映射$\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, 使得$\varphi(U)$是$\mathbb{R}^n$上的开集, φ是U到$\varphi(U)$的同胚, 并且φ^{-1}作为$\mathbb{R}^n$中开集到$\mathbb{R}^m$的映射是满足*定义 2.2.2*的光滑嵌入映射. 此时称二元组(U, φ)为M上的一个**(光滑)区图**, U和φ分别称为这个区图的**坐标区域**和**坐标映射**.*

此外, 记$q_i(x)$是$\varphi(x)$的第i个分量, 则我们把$(U, \varphi; q_1, q_2, \cdots, q_n)$称为$X$上的一个**局部坐标系**, 简记为$(U, \varphi; q_i)$或$(U; q_i)$. 区图和局部坐标系本质上是同一个东西, 它们只有在不同语境下表述方便程度的区别.

例 2.2.1 *对于球面$S^n = \left\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$, 取*

$$U_1 = S^n - \{(0, 0, \cdots, -1)\}, \quad U_2 = S^n - \{(0, 0, \cdots, 1)\},$$

*两个**球极投影**映射 $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ 和 $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ 分别定义为*

---

[3] 向量对单个变量的偏导数即由其各分量组成的向量, 即

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \ \Rightarrow \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial q_i}\right)$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right),$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

则(U_1, φ_1)和(U_2, φ_2)是S^n上的两个区图. 注意U_1和U_2覆盖了整个S^n, 即其每一个点附近都有存在一个满足定义 2.2.3的区图(U, φ), 因此, S^n是$\mathbb{R}^{n+1}$的光滑嵌入子流形.

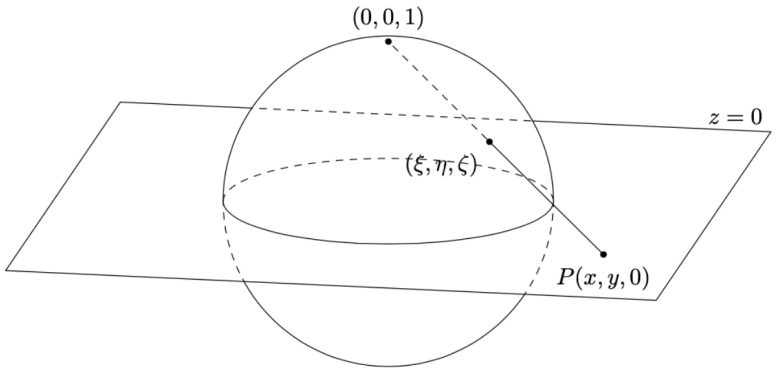


图 2.2.5: 二维球面的球极投影示意图, 图中ξ, η, ζ对应x_1, x_2, x_3, P点坐标的前两个分量(x, y)即$\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$. (图片来自StackExchange)

例 2.2.2 *考虑例 2.1.1中的双摆的位形空间(记为M), (7)式定义了一个$\mathbb{R}^2 \to M$的映射*

$$F(\Theta, \theta) = (L\cos\Theta, L\sin\Theta, L\cos\Theta + l\cos\theta, L\sin\Theta + l\sin\theta)^\top,$$

如果我们把Θ, θ的取值限制在$(0, 2\pi)$中, 则$F|_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)}$构成$\mathbb{R}^2$上开集$(0, 2\pi)^2$到$M$的开子集$F((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$的一一映射, 从而 $(F|_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)})^{-1}$构成一个坐标映射, 即

$$\left(F((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)), (F|_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)})^{-1}\right)$$

构成M上的一个区图, 此外,

$$\left(F((0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)), (F|_{(0,2\pi)\times(-\pi,\pi)})^{-1}\right)$$
$$\left(F((-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)), (F|_{(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)})^{-1}\right)$$
$$\left(F((-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)), (F|_{(-\pi,\pi)\times(0,2\pi)})^{-1}\right)$$

都是M上的区图. 上述四个区图的坐标区域覆盖了整个M, 因此M本身是光滑流形.

例 2.2.3 *U是$\mathbb{R}^n$上的开集, 则(U, id)是一个区图, 其中$\mathrm{id} : U \to U$是恒同映射. (U, id)本身覆盖了整个U, 从而U是$\mathbb{R}^n$的光滑嵌入子流形.*

例 2.2.4 *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是光滑函数, $M = \left\{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$是$f$的图象, 取*

$$\varphi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n,(x_1,\ \cdots,x_n,x_{n+1})\mapsto(x_1,\ \cdots,x_n)$$

则(M,φ)是M的一个区图, 相应的局部坐标系$(M;q_i)$中, q_i就是取第i个分量的函数. 和上例一样, 区图(M,φ)本身覆盖了整个M, 从而M是$\mathbb{R}^{n+1}$的光滑嵌入子流形.

定理 2.2.1 *对于任意包含$\boldsymbol{x}$的两个区图(U,φ)和(V,ψ), 映射*

$$\psi|_{U\cap V}\circ(\varphi|_{U\cap V})^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$
$$\varphi|_{U\cap V}\circ(\psi|_{U\cap V})^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

作为$\mathbb{R}^n$上的开集到$\mathbb{R}^n$上的开集的映射都是光滑映射. 从而它们的Jacobi行列式都非0.

证明: 由于命题只涉及$U\cap V$, 不妨设$V=U=U\cap V$, 这样我们就只需证明$\psi^{-1}\circ\varphi$和$\varphi^{-1}\circ\psi$光滑, 而这一点由$\psi,\varphi,\psi^{-1},\varphi^{-1}$的光滑性立刻可以得到. 由于$\psi\circ\varphi^{-1}$和$\varphi\circ\psi^{-1}$是互逆的, 所以他们的复合映射是恒同映射, 其Jacobi矩阵是单位矩阵, 而复合映射的Jacobi矩阵是两个Jacobi矩阵的乘积, 所以$J_{\psi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(\boldsymbol{x}))J_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\psi(\boldsymbol{x}))=I$, 因此这两个矩阵互为逆矩阵, 从而行列式不可能为0. □

推论 2.2.1 *对于任意包含$\boldsymbol{x}$的两个区图$(U,\varphi),(V,\psi)$, 记$\varphi(\boldsymbol{x})=(q_1,\ \cdots,q_n)$, $\psi(\boldsymbol{x})=(p_1,\ \cdots,p_n)$, 则两个向量组*

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_i}=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial q_i}(q_1,\ \cdots,q_n),\ i=1,2,\ \cdots,n \tag{9}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_i}=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial p_i}(p_1,\ \cdots,p_n),\ i=1,2,\ \cdots,n \tag{10}$$

所张成的线性空间相同.

证明: 事实上, 我们有

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_1},\ \cdots,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_1},\ \cdots,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_n}\right)J^{\top}_{\psi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(\boldsymbol{x})),$$
$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_1},\ \cdots,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial p_n}\right)=\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_1},\ \cdots,\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_n}\right)J^{\top}_{\varphi\circ\psi^{-1}}(\psi(\boldsymbol{x}))$$

因此两个向量组可以互相线性表出, 从而它们张成同一个线性空间. □

由上述推论, 我们可以给出抽象流形上“切空间”的概念.

定义 2.2.4 *设M是$\mathbb{R}^m$的n维光滑嵌入子流形, 对于每一个$\boldsymbol{x}\in M$, 我们任取包含$\boldsymbol{x}$的一个区图(U,φ), 记$\varphi(\boldsymbol{x})=(q_1,\ \cdots,q_n)$, 称由(9)定义的$n$个向量所张成的线性空间为$M$在$\boldsymbol{x}$处的**切空间**, 记作$T_{\boldsymbol{x}}M$, 每一个$T_{\boldsymbol{x}}M$中的向量称为$\boldsymbol{x}$处的一个**切向量**.*

按照推论 2.2.1中的结论, 上述切空间的定义与区图(U,φ)的选取方式无关, 只要它满足定义 2.2.3中光滑区图的条件.

切空间是曲线的切线、曲面的切平面等概念在更一般的流形上的推广.

接下来我们来介绍一大类$\mathbb{R}^m$中的光滑嵌入子流形, 它们的构造方式非常常见, 即用$m-n$个约束方程确定的n维流形

定义 2.2.5 *(正则水平集)设$n \leq m$, $f_1, f_2, \cdots, f_{m-n}$是$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$的$m-n$个光滑函数, 对于任意$n$个实数$c_1$,$c_2$, $\cdots$,c_{m-n}, 称集合*

$$M = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : f_i(\boldsymbol{x}) = c_i, i = 1, 2, \cdots, m-n \right\},$$

*为$f_1, \cdots, f_{m-n}$的一个**水平集**. 若对于任意$\boldsymbol{x} \in M$, 向量组*

$$\nabla f_1(\boldsymbol{x}), \nabla f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \nabla f_{m-n}(\boldsymbol{x})$$

*(这里的∇是$\mathbb{R}^m$上的梯度运算)线性无关, 则称M是$f_1, \cdots, f_{m-n}$的一个**正则水平集**.*

定理 2.2.2 *呈定义 2.2.5, 若M是正则水平集, 则M是$\mathbb{R}^m$的n维光滑嵌入子流形, 并且*

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{x}} M &= \{\nabla f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \nabla f_{m-n}(\boldsymbol{x})\}^{\perp} \\ &= \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \cdots, m-n\} \end{aligned} \tag{11}$$

对任意$\boldsymbol{x} \in M$成立.

证明: 利用隐函数存在性定理, 可以证明在M上的任意一点$\boldsymbol{x}$附近, 我们可以直接把$\boldsymbol{x}$的某$m-n$个分量表示成另外n个分量的光滑函数, 于是, 这n个分量就构成了M在$\boldsymbol{x}$附近的局部坐标系, 坐标映射就是向这n个分量的投影. 这样我们就构造了M在x附近的一个光滑局部坐标系(区图). 至于$T_{\boldsymbol{x}} M$, 任取$\boldsymbol{x}$附近的局部坐标系(U, φ), 记$\varphi(\boldsymbol{x}) = (q_1, \cdots, q_n)$. 我们考虑过$x$的$q_1$-坐标曲线

$$\boldsymbol{x}(t) = \varphi^{-1}(q_1, \cdots, q_i + t, \cdots, q_n)$$

从而$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}$, 那么$\boldsymbol{x}(t) \in M$, 从而$f_j(\boldsymbol{x}(t)) \equiv c_j$对任意$i = 1, 2, \cdots, m-n$成立. 对该式两端求$t$的导数, 我们有

$$0 = \frac{\mathrm{d} f_j(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d} t} = \nabla f_j(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \frac{\partial \varphi^{-1}(q_1, \cdots, q_i + t, \cdots, q_n)}{\partial q_1}$$

取$t = 0$, 得到

$$0 = \nabla f_j(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i},$$

上式对任意$i = 1, \cdots, n$及$j = 1, \cdots, m-n$成立, 这就是说, $\left\{ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_n} \right\}$张成的线性空间恰好与$\{\nabla f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \nabla f_{m-n}(\boldsymbol{x})\}$张成的线性空间垂直. 进一步地, 注意这两个向量组各自都是线性无关的, 从而前者有n维, 后者是$n-m$维, 加起来正好是m维, 从而在$\mathbb{R}^m$中, 这两组向量张成的线性空间正好互为正交补, 因此(11)成立. □

例 2.2.5 *球面$S^2 = \left\{ (x, y, z)^{\top} : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$在其上任意一点处$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\top}$处的切*

空间是

$$T_{\boldsymbol{x}}S^2 = \Big\{(a,b,c)^\top : ax+by+cz=0\Big\}.$$

流形间的映射也是丰富多彩的. 我们主要着眼于流形间的光滑映射. 当流形嵌入在欧氏空间中时, 映射的光滑性是自然的: 它只不过定义 2.2.1后半段中A是光滑流形的一个特例. 一般来讲, 假设有两个光滑嵌入子流形M和N分别嵌入在$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$中, 如果我们能够把一个映射$f: M\to N$写成一个$\mathbb{R}^m$到$\mathbb{R}^n$的映射, 并且这个映射显然是光滑的, 那么f就是光滑的. 比方说圆$x^2+y^2=1$到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的映射$f(x,y)=(ax,by)$, 它作为$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$的映射是光滑的, 所以它作为这个圆到这个椭圆的映射是光滑的.

一类性质特别好的的光滑映射是*光滑同胚*, 即该映射是"双向光滑"的.

定义 2.2.6 *设M,N是两个光滑流形, 如果f是$M\to N$的双射, 并且f和f^{-1}都是光滑的, 那么我们称f是$M\to N$的一个**光滑同胚**. M和N是光滑同胚的 $\Leftrightarrow$ 存在$M\to N$的光滑同胚.*

此外, 为了描述在M上的运动, 我们定义*曲线*的概念.

定义 2.2.7 *设$-\infty\le t_0<t_1\le+\infty$, $M\subseteq\mathbb{R}^m$是一个n维光滑嵌入子流形, 那么我们称任意一个光滑映射$\gamma:(t_0,t_1)\to M$为M上的一个光滑曲线. 此外$[t_0,t_1)$, $(t_0,t_1]$, $[t_0,t_1]$到M的映射γ是光滑曲线 $\Leftrightarrow$ γ连续且$\gamma|_{(t_0,t_1)}$是光滑曲线.*

上述定义下的"曲线"实际上包含了"运动信息": 如果物理上把t看作"时间", 则$\gamma(t)$描述了时间段(t_0,t_1)内, 一个点在M上的运动轨线. 以下定理告诉我们, 沿M的运动$\gamma(t)$在任何时刻t, 其速度向量都必须是是$\gamma(t)$处的一个切向量.

定理 2.2.3 *呈定义 2.2.7, $\dot\gamma(t)\in T_{\gamma(t)}M$ 对任意$t\in(t_0,t_1)$成立. 这里"$\dot{}$"指对t的导数. 此时称$\dot\gamma(t)$是曲线$\gamma(t)$在t处的切向量.*

证明: 任取包含$\gamma(t)$的区图(U,φ), 把$\varphi(\gamma(\tau))$的第i个分量记作$q_i(\tau)$, 由于φ是双向光滑的, $q_i(\tau)$也是τ的光滑函数, 并且$\gamma(\tau)=\varphi^{-1}(q_1(\tau),q_2(\tau),\,\cdots,q_n(\tau))$, 从而

$$\dot\gamma(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^{-1}(q_1(\tau),q_2(\tau),\,\cdots,q_n(\tau))}{\partial q_i}\dot q_i(\tau), \tag{12}$$

取$\tau=t$, 就得到

$$\dot\gamma(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^{-1}(\gamma(t))}{\partial q_i}\dot q_i(t), \tag{13}$$

也就是说$\dot\gamma(t)$是$\left\{\frac{\partial\varphi^{-1}(\gamma(t))}{\partial q_i}, i=1,\,\cdots,n\right\}$的线性组合. 注意这个向量组恰好是$T_{\gamma(t)}M$的一组基, 于是命题得证. □

上述定理在直观上也很好理解: 曲线在曲面上的运动速度不可能有脱离这个曲面的分量.

此外, 如果我们不考虑一条固定的曲线, 那么$\dot{\gamma}(t)$的所有取值可以遍历整个$T_{\gamma(t)}M$: 对于任意一组实数$a_1, \cdots, a_n$, 我们取

$$q_i(\tau) = q_i(t) + a_i(\tau - t)$$

则$\gamma(\tau) = \varphi^{-1}(q_1(\tau), q_2(\tau), \cdots, q_n(\tau))$是$M$上的一条曲线, 并且在$\tau = t$处的切向量是

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi^{-1}(\gamma(t))}{\partial q_i}.$$

由a_i的任意性, 我们发现$\dot{\gamma}(t)$可能是$T_{\gamma(t)}M$的基底的任意线性组合, 于是我们可以把M上任意一点$\boldsymbol{x}$处的切向量看成是过$\boldsymbol{x}$的某条曲线在$\boldsymbol{x}$点处的切向量$\dot{\boldsymbol{x}}$.

有了上述观点后, 我们考虑这样一个问题. 设M, N分别是$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$上的光滑嵌入子流形, $\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$, 如果我们任取一条曲线$\gamma(t)$, 使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v}$, 那么对于任意光滑映射$f: M \to N$, $\boldsymbol{y}(t) = f(\gamma(t))$也是$N$上的一条曲线, 从而$\dot{\boldsymbol{y}}(t)$是$N$上的一个切向量, 那么这个$\boldsymbol{y}(t)$在$t = 0$处的导数$\dot{\boldsymbol{y}}(0)$长什么样?

事实上, 假设f已被延拓到$\mathbb{R}^m$的包含M的开集上(按"光滑映射"的定义, 这总是能做到的), 那么我们可以直接计算

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = J_f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t),$$

其中$J_f(\boldsymbol{x}(t))$是f作为$\mathbb{R}^m$上开集到$\mathbb{R}^n$的映射的Jacobi矩阵. 上式中取$t = 0$, 那么我们就得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}(0) = J_f(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = J_f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v},$$

于是在固定$\boldsymbol{x}$时, $\dot{\boldsymbol{y}}(0)$只与$\dot{\gamma}(0)$有关, 即两个相同$\dot{\gamma}(0)$的曲线$\gamma(t)$会给出相同的$\dot{\boldsymbol{y}}(0)$, 并且这样定义的由$\boldsymbol{v}$到$\dot{\boldsymbol{y}}(0)$的映射是一个线性映射. 诚然, J_f与f从M到$\mathbb{R}^m$的光滑延拓方式有关, 然而不同延拓方式的$J_f(\boldsymbol{x})$在$T_{\boldsymbol{x}}M$上的限制是一定是相同的. 由此我们给出如下定义:

定义 2.2.8 *设M, N分别是$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$上的光滑嵌入子流形, $\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$. 对于任意$f: M \to N$, 我们定义*

$$f_{*\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v} = J_f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v},$$

*其中$J_f(\boldsymbol{x})$是f作为$\mathbb{R}^m$上(包含M的)开集到$\mathbb{R}^n$的光滑映射的Jacobi矩阵. 由此定义的映射$f_{*\boldsymbol{x}}$称为f诱导的$T_{\boldsymbol{x}}M \to T_{f(\boldsymbol{x})}N$的**切映射**.*

可以看出, 所谓切映射, 是一个把曲线切向量映射到曲线切向量上的映射(如图 2.2.6所示). 用更形象化的话来说, 想象M是一个空间, f会把M中的每一个点"投射"为N中的一个"影像", 则切映射的作用就是把在M上运动的物体的速度对应到这个物体在N上的"影像"的速度.

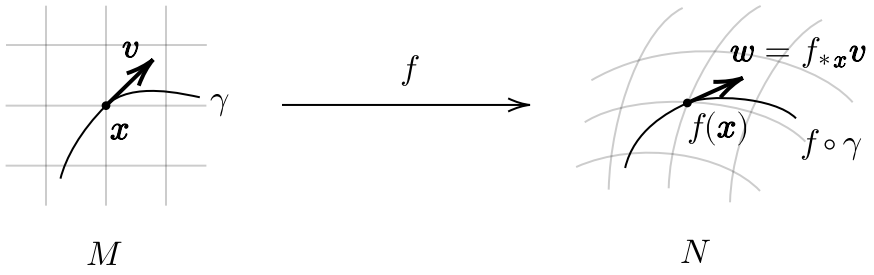


图 2.2.6: 切映射示意图

在经典力学中, 系统的一个运动状态由其位置和速度确定. 按之前的讨论, 切向量即速度向量, 所以在流形M上的运动状态可以表示为$\boldsymbol{x} \in M$和一个切向量$\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$组成的二元组. 而事实上, 这样的二元组整体也构成一个光滑流形.

定义 2.2.9 *设M是$\mathbb{R}^m$的n维光滑嵌入子流形, 那么*

$$TM := \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} : \boldsymbol{x} \in M, \boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M \right\} \tag{14}$$

*是$\mathbb{R}^{2m}$上的$2n$维光滑嵌入子流形, 称为M上的**切丛**. 此时成M是该切丛的**底空间**.*

切丛TM中最重要的一类局部坐标系(区图)是来自底空间M中的局部坐标系诱导定义的*切坐标系*.

定义 2.2.10 *M是$\mathbb{R}^m$的n维光滑嵌入子流形, TM是M的切丛, (U, φ)是M上的区图, 相应局部坐标系为$(U; q_i)$, 则*

$$(TU, \varphi_*)$$

*被称为区图(U, φ)诱导的**切区图**, 其中TU即U的切丛, 而*

$$\varphi_* \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = (\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi_{*\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})) \tag{15}$$

*相应诱导的局部坐标系$(TU; q_1, \cdots, q_n, v_1, \cdots, v_n)$ 称为$(U; q_i)$诱导的**切坐标系**.*

从具体计算的角度来看, 假设$\varphi_* \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = (q_1, \cdots, q_n, v_1, \cdots, v_n)$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \varphi^{-1}(q_1, \cdots, q_n), \\ \boldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial q_i}(q_1, \cdots, q_n). \end{aligned}$$

在Lagrange力学中, 我们会把Lagrange量定义在位形空间M的切丛TM上, 而一般力学课本里的(不含时的)Lagrange函数被写作$2n$元函数$L(q_i, \dot{q}_i)$, 在我们这里实际上是L在一个切坐标系下的表达式$L \circ \varphi_*^{-1}$.

例 2.2.6 *对于正则水平集*

$$M=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m : f_i(\boldsymbol{x})=c_i, i=1,2,\ \cdots,m-n\right\},$$

而言, 其切丛即为

$$TM=\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2m} : f_i(\boldsymbol{x})=c_i, \nabla f_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}=0, i=1,2,\ \cdots,m-n\right\}.$$

如果f是$M\to N$的光滑映射, 那么我们把映射

$$\begin{aligned} f_*: TM &\to TN\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x})\\ f_{*\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

称为f诱导的$TM\to TN$的**切映射**. (15)也是一个切映射, 只不过我们把其像写成了行向量的形式.

习题

习题 2.2.1 *下列哪些$\mathbb{R}^n$的子集是否是光滑嵌入子流形? 若是, 请给出流形的维数*

(1). $\left\{(x_1,\ \cdots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2<1\right\}$

(2). $\left\{(x_1,\ \cdots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2\le 1\right\}$

(3). $\left\{(x,y)^\top\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}<1\right\}$

(4). $\left\{(x,y)^\top\in\mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\}=1\right\}$

(5). $\left\{(x,y)^\top\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=a\right\}$*, 对$a$分类讨论*

(6). $\left\{(x,y,z)^\top\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2\right\}$ *及* $\left\{(x,y,z)^\top\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2\right\}\setminus\left\{(0,0,0)^\top\right\}$

习题 2.2.2 *下列哪些向量是球面$S^2=\left\{(x,y,z)^\top : x^2+y^2+z^2=1\right\}$的切向量?*

(1). $(1,1,1)^\top$ *点处:* $(1,1,1)^\top$

(2). $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top$ *点处:* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},a\right)^\top$*, 对$a$分类讨论*

(3). $(\cos\theta,\ \sin\theta,0)^\top$ *点处:* $(-\sin\theta,\ \cos\theta,0)^\top$

(4). $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^\top$ *点处:* $(0,0,3)^\top$

习题 2.2.3 *求柱面$S^1\times\mathbb{R}=\left\{(x,y,z)^\top\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\right\}$的切丛, 并验证柱面上的螺线*

$$\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos t,\ \sin t, t)^\top$$

的切向量全部包含于$S \times \mathbb{R}$的切空间中, 即$\forall t \in \mathbb{R}$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \in T_{\boldsymbol{\gamma}(t)}(S \times \mathbb{R})$.

习题 2.2.4 *计算例 2.2.1中球极投影映射的逆映射φ_1^{-1}的切映射.*

习题 2.2.5 *试构造一个单位圆周S^1的切丛TS^1与上一题中的柱面$S^1 \times \mathbb{R}$之间的光滑同胚.*

2.3. 一般微分流形的定义

(注: 为了介绍微分流形的定义, 我们需要读者提前了解一些基本的拓扑学知识. 没有接触过拓扑学的读者可以浏览一下附录中的"点集拓扑简介"部分, 里面包含了我们需要的所有拓扑学概念)

一般来讲, 所谓n维流形, 即一个拓扑空间, 其任意一点都有一个邻域(包含该点的开集)与$\mathbb{R}^n$中的一个开集同胚. 如图 2.3.7所示, 假设流形M上某开集U到$\mathbb{R}^n$某开集$\varphi(U)$的同胚映射是φ, 那么我们称有序对(U, φ)是X上的一个**区图**. 记$q_i(x)$是$\varphi(x)$的第i个分量, 则我们把$(U; q_1, q_2, \cdots, q_n)$称为$X$上的一个**局部坐标系**, 简记为$(U; q_i)$. 区图和局部坐标系本质上是同一个东西, 它们的区别只在于在不同语境下, 其中一个会比另一个表述起来更方便.

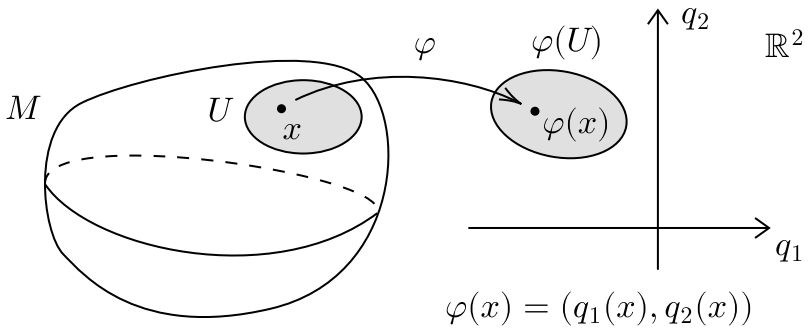


图 2.3.7: 流形及其上局部坐标系, 图中$n = 2$.

对于一般的流形M, 我们很容易定义一个$M \to \mathbb{R}$的函数f的连续性: 因为$\mathbb{R}$本身是一个拓扑空间(欧氏空间), 所以f的连续性定义与一般拓扑空间之间映射的连续性定义一致, 即对$\mathbb{R}$上的任意开集X, $f^{-1}(X) = \{x \in M\colon f(x) \in X\}$是$M$上的开集. 容易验证(利用定理 7.1.1), 如果f是$U \to \mathbb{R}$的连续函数, 那么对于任意M上的区图(U, φ), $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$是连续函数.

在力学问题中, 我们需要对位形空间或者速度相空间上的函数求偏导、求梯度等等, 这时我们要求函数f不仅是连续的, 而且是可微的. 然而, 在一般的流形上, 怎么定义函数的可微性呢?

与连续性不同, 函数可微性这个概念在一般拓扑空间中没有任何对应. 我们便只好依赖局部坐标去定义它: 比如说, 我们希望把f的可微性定义为它在每一个区图(U, φ)上$f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$的可微性. 但这种定义会出现问题: 设想$M$上有两个区图$(U, \varphi)$, (U, ψ), 它们共用一个坐标区域U.

对于任意一个函数$f: M \to \mathbb{R}$, 如果$f \circ \varphi^{-1}$是可微函数, 那么我们会期待$f \circ \psi^{-1}$也是可微函数. 然而

$$f \circ \psi^{-1} = \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right) \tag{16}$$

于是$\varphi \circ \psi^{-1}$决定了$f \circ \psi^{-1}$是否可微. 一般来讲, 我们会要求$\varphi \circ \psi^{-1}$是*光滑*的, 即任意阶可微的, 这样f的任意阶可微性乃至光滑性都可以同时在两个区图下不发生冲突. 这就形成了所谓区图*相容性*的概念.

定义 2.3.1 *设M是n维流形, 如果其上两个区图(U, φ)和(V, ψ)在他们相交的部分$U \cap V$上的限制$\varphi|_{U\cap V}$和$\psi|_{U\cap V}$满足*

$$\psi|_{U\cap V} \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$
$$\varphi|_{U\cap V} \circ (\psi|_{U\cap V})^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

*作为$\mathbb{R}^n$上的开集到$\mathbb{R}^n$上的开集的映射都是光滑映射, 则称这两个区图是C^∞**相容的***(图 2.3.8*).

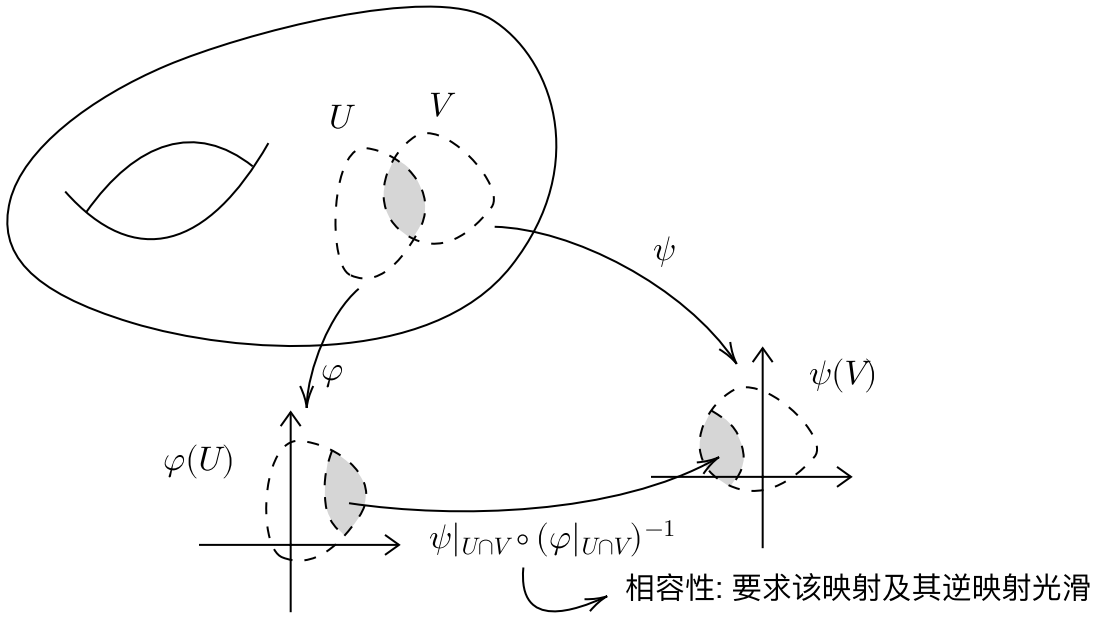


图 2.3.8: 区图的C^∞相容性

有了相容性的定义后, 可以试想: 如果我们有一个M上区图的构成的集合$\mathcal{A}$, 使得$\mathcal{A}$中的任意两个区图(U, φ)和(V, ψ)都是相容的, 并且$\mathcal{A}$中区图的坐标区域全体能够覆盖整个M, 那么, 我们可以把f的可微性定义为f在$\mathcal{A}$中任何一个区图上的可微性. 这种定义方式不能拓展到M的任意区图上, 但如果一个M上的区图(V, ψ)与$\mathcal{A}$中的每一个区图都C^∞相容, 那么f在$\mathcal{A}$中任何一个区图上的可微性也可以推出f在(V, ψ)上的可微性. 这就形成了“图册”、“光滑结构”的概念.

定义 2.3.2 *设$\mathcal{A}$是一个M上的区图的集合, 如果$\mathcal{A}$中的任意两个区图C^∞相容, 并且$\mathcal{A}$中的所有区图构成M的一个开覆盖, 即*

$$\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = M,$$

*则称$\mathcal{A}$是M上的一个C^∞**图册**或**光滑图册**; 如果一个光滑图册包含所有与其中所有元素之容的区图, 即对于任何M上的区图(V,ψ), 只要(V,ψ)与任意$(U,\varphi)\in\mathcal{A}$相容, 则必有$(V,\psi)\in\mathcal{A}$", 则称$\mathcal{A}$是$M$上的一个光滑结构, 此时称二元组$(M,\mathcal{A})$为一个**光滑流形**, 或者说$M$是一个光滑流形, $\mathcal{A}$是其上光滑结构. 一般**微分流形**指光滑流形.*

从定义中可以看出, 一个拓扑空间(X,τ)给定之后, 我们可以判断它是否是流形, 但无法判断它是否为光滑流形, 因为光滑流形本身的定义中包含一个流形和其上一个光滑结构. 更确切地讲, 一个光滑流形是一个形如$(X,\tau,\mathcal{A})$的三元组, 其中(X,τ)是一个满足流形定义的拓扑空间, 而$\mathcal{A}$是流形(X,τ)上的光滑结构. 因此, 从定义上来说, 直接判断一个拓扑空间(X,τ)是否是光滑流形, 就像把两个量纲不同的物理量比大小一样荒谬.

一般来讲, 要想确定一个流形上的光滑结构, 只需要确定其上一个光滑图册$\mathcal{A}$, 然后将其光滑结构取为

$$\overline{\mathcal{A}} = \Big\{(V,\psi) : (V,\psi)\text{与}\mathcal{A}\text{中的每一个图册都}C^\infty\text{相容}\Big\}, \tag{17}$$

这样构造的光滑结构$\overline{\mathcal{A}}$称为图册$\mathcal{A}$的**极大化扩充**.

此外, 和光滑嵌入子流形一样, 对任一区图(U,φ), 记$q_i(x)$是$\varphi(x)$的第i个分量, 则我们把$(U,\varphi;q_1,q_2,\cdots,q_n)$称为$X$上的一个**局部坐标系**, 简记为$(U,\varphi;q_i)$或$(U;q_i)$.

例 2.3.1 例 2.2.1*中, $\mathcal{A}=\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$是一个$C^\infty$图册, 从而其极大化扩充构成球面上的光滑结构.*

证明: 显然$U_1\cup U_2 = S$. 此外, 限制在$U_1\cap U_2$上时,

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1} = \varphi_1\circ\varphi_2^{-1} : (y_1,y_2,\cdots,y_n)\mapsto \frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i^2}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

都是$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$到自身的光滑同胚[4], 因此$(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)$是相容的. □

例 2.3.2 例 2.2.2*中列举了四个区图, 由这四个区图组成的集合构成M上的C^∞图册. 从而其极大化扩充构成球面上的光滑结构.*

证明: 将例 2.2.2中的列举的区图按顺序分别记作$(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2),(U_3,\varphi_3),(U_4,\varphi_4)$, 则$\bigcup_{i=1}^4 U_i = M$, 并且对于$i,j=1,2,3,4$, 限制在$U_i\cap U_j$上时, $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$和$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$都是$\mathbb{R}^2$上一个开矩形区域到自身的恒同映射. □

[4] 这个映射在几何学中称为"反演变换", 是经典的保角变换(这个"反演"是和物理学中的时间反演没有任何关系, 只是名字恰巧一样)

例 2.3.3 *如果M是光滑流形, U是M上的开集, $\mathcal{A}$是M上的光滑结构, 则*

$$\mathcal{A}_U = \{(U \cap V, \varphi|_{U\cap V}) : (V, \varphi)\} \tag{18}$$

*是$\mathcal{A}_U$上的光滑结构, 我们把这样定义的光滑流形$(U, \mathcal{A}_U)$称为M的一个**开子流形**. 我们默认一个流形上开集的光滑结构就是相应开子流形的光滑结构.*

例 2.3.4 例 2.2.3*和*例 2.2.4*中定义的区图可以单独构成相应流形上的C^∞图册, 因为他们的坐标区域是整个流形.*

例 2.3.5 *(积流形)设M, N分别是m维、n维光滑流形, 光滑结构分别为$\mathcal{A}_M$和$\mathcal{A}_N$, 考虑集合$M \times N$, 则*

$$\mathcal{A}_{M\times N} = \{(U \times V, \varphi \times \psi) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M, (V, \psi) \in \mathcal{A}_N\}$$

构成$M \times N$上的一个光滑图册, 其中

$$\begin{gathered}\varphi \times \psi = U \times V \to \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^{m\times n} \\ (x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y))\end{gathered}$$

*我们把$\mathcal{A}_{M\times N}$这个光滑图册的极大化扩充定义为$M \times N$上的光滑结构, 这样$M \times N$也成为了一个光滑流形, 称为M与N的**积流形**.*

在这一定义下, 欧氏空间$\mathbb{R}^n$就是n个实直线$\mathbb{R}$的积流形. 此外, n个一维圆周的积流形被称为***n*维环面**, 也是一个光滑流形, 记作T^n, 即

$$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}S^1}.$$

今后我们约定, 对于光滑流形, 我们选取局部坐标系(区图)时都是从其光滑结构中选取的, 从而在流形上选取的任意两个局部坐标系都是C^∞相容的.

此外$\mathbb{R}^n$的任意开集U上的光滑结构默认为C^∞图册$\{(U, \mathrm{id})\}$的极大化扩充.

对于没有接触过拓扑、流形这些概念的读者而言, 定义 2.3.1、定义 2.3.2还是会显得比较晦涩难懂. 但这是学习微分流形的必经之路. 每一本涉及到微分流形的教材都是这样讲其定义的, 并且还会配上一张长得和图 2.3.8差不多的示意图. 读者如果反复阅读都觉得难以理解, 那么可以暂时先不去纠缠于此, 开始学习后面的内容, 随着学习的深入, 对这些定义的理解也会逐步加深. 在继续后面的学习之前, 只需要把握住如下几点:

1. 所谓流形, 即一个拓扑空间, 其上每一个点x都有一个开邻域U都与欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个开集同胚. 而由于这个同胚映射是到$\mathbb{R}^n$的映射, 我们可以把它看作是在这个拓扑空间上建立的局部坐标系. 从这个视角下, 流形也可以描述为“在每一个点附近都可以建立n维坐标系的空间”.
2. 所谓光滑流形, 或者说流形上的光滑结构, 本质上是对流形上可选的局部坐标系添加的一些限制, 这些限制使得我们任选两个坐标系, 它们的坐标变换函数都是光滑的, 从而我们

对坐标变换求Jacobi矩阵等操作都是合法的, 并且我们去定义光滑函数、切空间、切向量场等概念时不会遇到在不同坐标下定义冲突的问题. 这些对于物理学家来说都是默认的, 只是在数学上, 我们需要把这些概念表述得更加严谨[5].

习题

习题 2.3.1 *名词解释: 区图、C^∞图册(光滑图册)、局部坐标系、开子流形、积流形.*

习题 2.3.2 *求证: (17)中定义的极大化扩充$\overline{\mathcal{A}}$中的任意两个区图都是C^∞相容的.*

习题 2.3.3 *(Grassmann流形)请在$\mathbb{R}^n$中全体过原点的直线组成的集合上定义一个光滑结构, 使之成为一个光滑流形. 这个流形的维数是多少? (注意这个流形和我们之前介绍的光滑嵌入子流形不同, 它作为集合, 里面的元素不是欧氏空间中的点)*

2.4. 微分流形之间的映射

在光滑流形的定义下, 函数的任意阶可导性和光滑性是可以定义的, 更一般地, 任意两个光滑流形之间映射的光滑性也是可以定义的.

定义 2.4.1 *设M是n维光滑流形, $x \subseteq M$, f是$M \to \mathbb{R}$的函数, 如果存在一个包含x的区图(U, φ), 使得*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

作为$\mathbb{R}^n$的开集上定义的函数在$\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$处光滑(任意阶可微), 则称$f$在$x$处光滑. 对于$M$上的任意子集$A$, 若$f$在$A$中的任意一点处光滑, 则称$f$在$A$上光滑, 或$f$是$A$上的光滑函数. 特别地, $A = M$时称f是M上的光滑函数.

如果f在x处光滑, 那么在某包含x的区图(U, φ)下, $f \circ \varphi^{-1}$在$\varphi(x)$处光滑. 事实上, 任意取另一个包含x的区图(V, ψ), 那么在$U \cap V$上,

$$f \circ \psi^{-1} = \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right), \tag{19}$$

按照光滑流形中局部坐标(区图)选取方式的约定, $\varphi \circ \psi^{-1}$是光滑函数, 因此(19)告诉我们: $f \circ \psi^{-1}$在$\psi(x)$处的光滑性等价于$f \circ \varphi^{-1}$在$\varphi(x)$处的光滑性. 注意(V, ψ)是任意选取的, 于是我们有

定理 2.4.1 *设M是n维光滑流形, $x \subseteq M$, f是$M \to \mathbb{R}$的函数, 则: f在x处光滑 $\Leftrightarrow$ 对于任意包含x的区图(V, ψ), 有$f \circ \psi^{-1}$在$\psi(x)$处光滑. 如果f在M上的每一点处都光滑, 则称f是M上的光滑函数, M上的全体光滑函数组成的集合记作$C^\infty(M)$.*

由此可见, f的光滑性在光滑流形上任意(来自光滑结构的)区图上的定义不会发生冲突. 此外, 我们可以按照定义 2.4.1中的方式定义f的可微性、二阶可微性等等.

[5] 数学家最初定义光滑结构时(20世纪初)也只是觉得它就是一个数学上的严格化表述, 没有什么有趣的数学结构在里面, 直到20世纪60年代, Milnor等数学家发现了一系列奇怪的光滑结构("七维怪球", 无法定义光滑结构的拓扑流形等等). 从此一门叫"微分拓扑"的数学分支诞生了. 不过那些就和我们没什么关系了.

例 2.4.1 *M是流形, $(U;q_i)$是其上局部坐标系, 则坐标函数q_i作为$U\to\mathbb{R}$的函数是光滑函数(回顾例 2.3.3, 我们默认U上的光滑结构是开子流形的光滑结构)*

接下来我们把f的值域从$\mathbb{R}$换成任意光滑流形.

定义 2.4.2 *设M是m维光滑流形, N是n维光滑流形 $x\subseteq M$, f是$M\to N$的函数, 如果存在一个M的包含x的区图(U,φ)及一个N的包含$f(x)$的区图(V,ψ)使得 $f(U)\subseteq V$, 并且*

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

作为$\mathbb{R}^m$的开集到$\mathbb{R}^n$子集的映射$\varphi(x)\in\mathbb{R}^n$处光滑(任意阶可微), 则称$f$在$x$处光滑. 对于$M$上的任意子集$A$, 若$f$在$A$中的任意一点处光滑, 则称$f$在$A$上光滑, 或$f$是$A$上的光滑函数. 特别地, $A=M$时称f是M上的光滑函数.

类似地, 如果我们另取两个满足上述条件的M上区图$(\tilde{U},\tilde{\varphi})$和$N$上区图$(\tilde{V},\tilde{\psi})$, 则限制在$U\cap\tilde{U}$上时,

$$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}=\left(\tilde{\psi}\circ\psi^{-1}\right)\circ\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\circ\left(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}\right),\tag{20}$$

按照光滑流形中局部坐标(区图)选取方式的约定, $\tilde{\psi}\circ\psi^{-1}$和$\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$都是光滑函数, 因此$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}$在$\tilde{\varphi}(x)$处的光滑性与$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$在$\varphi(x)$处的光滑性等价, 由$(\tilde{U},\tilde{\varphi})$, $(\tilde{V},\tilde{\psi})$的任意性, 哟们有

定理 2.4.2 *设M是m维光滑流形, N是n维光滑流形 $x\subseteq M$, f是$M\to N$的函数, 则: f在x处光滑 $\Leftrightarrow$ 对于任意一个M的包含x的区图(U,φ)及一个N的包含$f(x)$的区图(V,ψ)使得 $f(U)\subseteq V$, 映射*

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

作为$\mathbb{R}^m$的开集到$\mathbb{R}^n$子集的映射都在$\varphi(x)\in\mathbb{R}^n$处光滑.

由此可见, f的光滑性在光滑流形上任意(来自光滑结构的)区图上的定义不会发生冲突. 此外, 我们可以按照定义 2.4.2中的方式定义f的可微性、二阶可微性等等.

有了光滑映射的概念之后, 一般流形上的光滑同胚、光滑曲线的定义可以一字不差地照搬定义 2.2.6, 定义 2.2.7.

(20)中的三个括号里的映射分别是$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$的映射, 从而它们的Jacobi矩阵满足

$$J_{\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}}=J_{\tilde{\psi}\circ\psi^{-1}}J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}J_{\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}}.$$

由于$\tilde{\psi}\circ\psi^{-1}$和$\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$和他们的逆都是光滑同胚, 故$J_{\tilde{\psi}\circ\psi^{-1}}$, $J_{\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}}$必是满秩矩阵, 从而两个Jacobi矩阵$J_{\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}}$和$J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}$具有相同的*秩*. 由于$\tilde{\psi},\psi,\tilde{\varphi},\varphi$是任意的, 这个秩

$\mathrm{rank} J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))$只取决于$f$和$x$, 而与局部坐标系(区图)的具体选取方式无关, 因此我们定义这个秩为映射f在x点出的**秩**. 如果f不是光滑的, 只是一阶可微的, 那么上述"秩"仍然可以定义. 后面我们会看到, 映射的秩是f在x处诱导的切映射f_{*x}作为线性空间T_xM和$T_{f(x)}N$之间的线性映射的秩.

习题

习题 2.4.1 *名词解释: 光滑函数、光滑映射、光滑映射的秩.*

习题 2.4.2 *设M, N是光滑流形, $y_0\in N$, $M\times N$是M和N的积流形.*
(1). 求证: $\pi_1: M\times N\to M,\ (x,y)\mapsto x$ 和$\pi_2: M\times N\to N,\ (x,y)\mapsto y$ 都是光滑映射;
(2). 求证: $f: M\to M\times N,\ x\mapsto (x,y_0)$ 是光滑映射.

习题 2.4.3 *映射$f: (-1,1)^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto \left(x,x^2y\right)$ 在$(-1,1)^2$上各点处的秩是多少? 请注意分类讨论.*

3. 微分流形的切向量、切向量场、切丛

3.1. 一般流形上的切向量、切空间

一般的光滑流形本质上只是一个拓扑空间, 不能像$\mathbb{R}^m$的嵌入子流形一样, 把切向量定义成其被嵌入空间$\mathbb{R}^m$上的一个向量. 但这并不意味着一般光滑流形上无法定义切向量.

按照我们在定理 2.2.3中的讨论, 光滑流形上切的向量可以看作过该点的曲线在该点处的切向量(速度向量). 然而, $\mathbb{R}^m$光滑嵌入流形中曲线的切向量也是$\mathbb{R}^m$上的向量, 于是, 一种可能的定义方式是把切向量定义为曲线本身——更确切地讲, 是曲线按"速度相等"划分的"等价类": 流形M在x处的切向量是全体满足$\gamma(0)=x$的光滑曲线$\gamma:\mathbb{R}\to M$按照如下等价关系划分的等价类: γ_1和γ_2等价 $\Leftrightarrow$ 在某区图(U,φ)下, $\gamma_1\circ\varphi^{-1}$和$\gamma_2\circ\varphi^{-1}$作为$\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$的光滑映射, 在$t=0$处的导数相等. 在 Arnold 和 Marsden 等关于力学与几何的经典教材中, 切向量都是这样定义的.

然而, 当今数学界使用的是一种更为聪明的定义方式, 它无论在理论分析还是计算上都更加方便. 我们仍然考虑流形M上过x点的光滑曲线γ, 使得$\gamma(0)=x$. 此时γ是$\mathbb{R}\to M$的映射, 从而我们确实无法直接定义什么叫$\dot\gamma(0)$, 但是如果我们另取一个M上的光滑函数$f: M\to\mathbb{R}$, 那么$f\circ\gamma$就是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的光滑映射, 从而它对t的导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t)$是良定义的. 把这个导数在$t=0$处的取值记作$v(f)$, 即

$$v(f)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t)\Big|_{t=0},$$

则不难验证v有如下性质:

- 线加性: 对于任意$c\in\mathbb{R}$及在x处光滑的函数f,g, $v(f+cg)=v(f)+cv(g)$

- Leibniz 法则: 对于任意在x处光滑的函数f, g, $v(fg) = v(f)g(x) + v(g)f(x)$

其中的函数运算都是逐点运算, 比如$(f + cg)(x) = f(x) + cg(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$等. 于是我们可以把切向量定义成这样一个以M上的函数为自变量的函数v

定义 3.1.1 *M是光滑流形, $x \in M$, 记$C_x^\infty(M)$为全体在x附近光滑的$M \to \mathbb{R}$的函数, 则我们称一个满足上述线加性和Lebniz法则的算子$v : C_x^\infty(M) \to \mathbb{R}$为$M$在$x$点处的一个**切向量**, 全体$x$点处的切向量构成的集合称为$M$在$x$处的**切空间**, 记作$T_xM$.*

如上定义的T_xM有自然的线性结构: 对于任意$v, w \in T_xM$, $c \in \mathbb{R}$, $v + cw$自然地可以定义为$f \mapsto v(f) + cw(f)$.

例 3.1.1 *M是n维光滑流形, $x \in M$, $v \in T_xM$, 则对M上任意包含x的局部坐标系$(U, \varphi; q_i)$, 我们记*

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}(x) := \frac{\partial\big(f \circ \varphi^{-1}\big)}{\partial q_i}(\varphi(x)), \tag{21}$$

$\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x f$, $\frac{\partial f}{\partial q_i}\Big|_x$等也表示同样的意义, 则容易验证 $\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x : C_x^\infty(M) \to \mathbb{R}$是$T_xM$处的一个切向量.

此外, 利用一点点分析, 我们就可以证明

定理 3.1.1 *M是n维光滑流形, $x \in M$, $v \in T_xM$, 则对M上任意包含x的局部坐标系 $(U, \varphi; q_i)$ 存在唯一n个实数$v_1, \cdots, v_n$, 使得*

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x, \tag{22}$$

从而T_xM是一个n维线性空间.

如果另取包含x的局部坐标系$(\tilde{U}, \tilde{\varphi}; \tilde{q}_i)$, 不妨假设$\tilde{U} = U$, 那么我们会得到$v$的另外一个表达式

$$v = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x, \tag{23}$$

则不难验证

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x \frac{\partial}{\partial q_j}\Big|_x, \quad \frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i}\Big|_x \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_j}\Big|_x, \tag{24}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x, \quad \tilde{v}_j = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i}\Big|_x. \tag{25}$$

其中$\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i}\Big|_x q_j$(把$q_j$看作$U$上的光滑函数)等的意义遵照例 3.1.1中的记号约定.

这样我们发现, 如果我们把所有“$\big|_x$”去掉, 那么我们就只需要用多元微积分中的导数运算法则来做切向量的相关运算.

当然, 当切向量有了定义之后, 曲线的切向量也有了定义.

定义 3.1.2 *(曲线的切向量)设$\gamma(t)$是M上的曲线, 则对任意t, $\dot\gamma(t)$定义为$\gamma(t)$处的切向量, 使得*

$$\dot\gamma(t):C^\infty_{\gamma(t)}(M)\to\mathbb{R},\ \ f\mapsto\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t). \tag{26}$$

习题

习题 3.1.1 *名词解释: 切向量、切空间*

习题 3.1.2 *在$\mathbb{R}^2$的开子流形$(0,+\infty)^2$上取直角坐标x,y和极坐标r,θ, 它们之间的坐标转化公式是*

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\qquad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan(y\,/\,x)\end{cases}\qquad(r,\theta)\in(0,\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

请利用公式(24)证明, 对于$(0,+\infty)^2$上任意一点a, 有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big|_a=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\Big|_a=\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a\end{cases}$$

习题 3.1.3 *在$\mathbb{R}^3$的开子流形$(0,+\infty)^3$上取直角坐标x,y,z和极坐标r,θ,φ, 它们之间的坐标转化公式是*

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}\qquad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\[1ex] \theta=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\\[2ex] \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases}\qquad(r,\theta,\varphi)\in(0,\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

请利用公式(24)证明, 对于$(0,+\infty)^2$上任意一点a, 有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big|_a=\sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a+\dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a-\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\Big|_a=\sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a+\dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a+\dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\Big|_a=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big|_a\end{cases}$$

3.2. 切映射、切丛

和$\mathbb{R}^m$中的子流形一样, $f: M \to N$的光滑映射的切映射也要把M上曲线$\gamma(t)$的切向量映射为N上的曲线$f\circ\gamma(t)$的切向量. 但在一般流形中, 如下定义方式更加简洁实用:

定义 3.2.1 *设M, N是光滑流形, $f: M \to N$是光滑映射, 则对于任意$x \in M$, $v \in T_xM$, 定义*

$$\begin{aligned} f_{*x}v : C^\infty_{f(x)}(N) &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto v(h\circ f) \end{aligned}$$

*为f在x处诱导的**切映射**.*

按照上述定义, 对于曲线$\gamma: (t_0, t_1) \to M$, 注意(t_0, t_1)本身是光滑流形($\mathbb{R}$的开子流形), 我们把t看作区图$((t_0, t_1), \mathrm{id})$对应的局部坐标分量函数, 那么对于任意$\tau \in (t_0, t_1)$, 我们可以把曲线的切向量(26)看作

$$\dot\gamma(\tau) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\tau}\right)_* \gamma. \tag{27}$$

定理 3.2.1 *切映射保复合. 设f, g分别是光滑流形$M \to N$,$N \to P$的光滑映射, 则*

$$(g\circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x} \tag{28}$$

对任意$x \in M$成立.

证明: 对于任意$x \in M$, $v \in T_xM$, $h \in C^\infty_x(M)$, 有

$$\begin{aligned} ((g\circ f)_{*x}(v))(h) &= v(h\circ(g\circ f)) = v((h\circ g)\circ f) \\ &= f_{*x}(v)(h\circ g) = g_{*f(x)}(f_{*x}(v))(h) \\ &= ((g_{*f(x)}\circ f_{*x})(v))(h) \end{aligned}$$

故(28)总是成立. □

直接利用映射的保复合性, 我们就可以得到: 对于$f: M \to N$及M上曲线$\gamma: \mathbb{R} \to M$, 有

$$(f\dot\circ\gamma)(t) = f_{*\gamma(t)}(\dot\gamma(t)),$$

因此定义 3.2.1符合我们本节初的预期.

定义 3.2.2 *M是n维光滑流形, $x \in M$, $v \in T_xM$, $f: M \to N$是光滑映射, 那么切映射f_{*x}作为线性映射的秩, 或者说$f_{*x}(T_xM)$作为$T_{f(x)}N$的线性子空间的维数, 称为f在x处的**秩**.*

按照光滑映射定义, 假设M, N维数分别是m, n, 任取M的包含x的局部坐标系$(U, \varphi; q_i)$及一个N的包含$f(x)$的局部坐标系$(V, \psi; p_j)$使得 $f(U) \subseteq V$, 映射

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

作为$\mathbb{R}^m$的开集到$\mathbb{R}^n$子集的映射都在$\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$处光滑, 则

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\Big|_x\frac{\partial}{\partial p_j}\Big|_{f(x)},$$

其中$\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\Big|_x$是Jacobi矩阵$J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))$的第$j$行第$i$列(证明技巧: 因为是局部性质, 不妨假设$U\subseteq\mathbb{R}^m$, $V\subseteq\mathbb{R}^n$, φ和ψ都是恒同映射), 从而若

$$v=\sum_{i=1}^{m}v_i\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x,\quad f_{*x}(v)=\sum_{j=1}^{n}w_j\frac{\partial}{\partial p_j}\Big|_{f(x)},$$

则我们有

$$w_j=\sum_{i=1}^{m}v_i\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\Big|_x,$$

或者说

$$(w_1,\ \cdots,w_n)^\top=J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))(v_1,\ \cdots,v_m)^\top,\tag{29}$$

因此$J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))$可以看作是$f_{*x}$在$T_xM$取基底$\left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x\right\}$和$T_{f(x)}N$在坐标基底$\left\{\frac{\partial}{\partial p_j}\Big|_{f(x)}\right\}$时的矩阵表示, 按照线性代数的理论, $J_{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))$的秩就是$f_{*x}$的秩.

定义过切映射之后, 我们来对流形上光滑映射做一些简单的分类.

定义 3.2.3 *设M,N分别是m,n维光滑流形, $f:M\to N$是光滑映射, 如果对于任意$x\in M$, f_{*x}作为线性映射都恒等于某一个整数l, 则称f是一个**常秩映射**, l是f的**秩**. 如果$l=m\le n$, 则称f是一个**浸入**, 如果$l=m\ge n$, 则称f是一个**淹没**. 如果f是浸入, 并且作为拓扑空间$M\to N$的映射是一个嵌入, 则称f是一个**光滑嵌入**.*

浸入不一定是光滑嵌入. 比如说$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, x\mapsto(\cos x,\ \sin x)$, 它是浸入, 但不是嵌入(注意它不是单射), 从而不是光滑嵌入. 这一点读者可以简单验证. 如果把f看作$\mathbb{R}\to S^1$的映射, 那么这又给出了一个的既是淹没又是浸入但不是光滑同胚的例子.

定义 3.2.4 *(浸入/光滑嵌入子流形)如果M, N是光滑流形, $M\subseteq N$, 并且恒同映射$\mathrm{id}:M\to N$是浸入/光滑嵌入, 则称M是N的浸入/光滑嵌入子流形.*

这就是我们本章开头介绍的"$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形"的名字的由来. 可以看到, 如果M是N的光滑嵌入子流形, 那么M就一定是N的浸入子流形.

此外, 如下定理也是相对直观的.

定理 3.2.2 *若M,N都是$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形, 同时M是N的浸入子流形, 那么对于任意*

$x \in M$, T_xM*是*T_xN*的线性子空间.*

证明: 任意一条满足$\gamma(0) = x$的M上的曲线γ都同时是通过x的M上的曲线, 从而$\dot{\gamma}(0) \in T_xM$同时$\dot{\gamma}(0) \in T_xN$. 令$\dot{\gamma}(0)$跑遍T_xM, 则发现T_xM中的每一个元素都属于T_xN, 因此$T_xM \subseteq T_xN$. □

我们尝试把上述定理拓展到一般光滑流形上. 从定义上来讲, T_xM是$C_x^\infty(M) \to \mathbb{R}$的映射, T_xN是$C_x^\infty(N) \to \mathbb{R}$的映射, 直接认为两者有包含关系看上去多少有些别扭. 但T_xM中的元素事实上可以自然地看作是$C_x^\infty(N) \to \mathbb{R}$的额映射. 对于任意$x \in M$, $v \in T_xM$, 按照我们的定义, v是一个将$C_x^\infty(M)$映射到$\mathbb{R}$的算子. 但如果$f \in C_x^\infty(N)$, 则f限制在M上也在x处光滑, 即$f|_M \in C_x^\infty(M)$. 因此, 我们可以定义

$$v(f) = v(f|_M), \ f \in C_x^\infty(N), \tag{30}$$

并且可以验证, 由(30)定义的v对$C_x^\infty(N)$中的元素满足线性性质和Leibniz公式, 从而我们可以认为v也是T_xM中的元素. 在这一意义下, 我们可以认为

$$T_xM \subseteq T_xN, \tag{31}$$

也就是说M的子流形N在某一点x处的切空间是M在该点处的切空间的子空间.

在一般流形中, 我们也可以定义切丛.

定义 3.2.5 *M是n维光滑流形, 则*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

*称为M的**切丛**, $\pi : TM \to M, T_xM \to \{x\}$称为**丛投影映射**. TM是一个$2n$维光滑流形, 其上上的光滑结构定义为*

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(\pi^{-1}(U), \varphi_* \right) : (\varphi, U)\text{是}M\text{的光滑区图} \right\}$$

的极大化扩充. 其中

$$\begin{aligned} \varphi_* : TM &\to \mathbb{R}^{2n} \\ v &\mapsto \varphi_{*\pi(v)} v \end{aligned}$$

*$\mathcal{A}$中的区图称为**切区图**, 其对应的局部坐标系$(\varphi(U); q_i, v_i)$称为**切坐标系**.*

和$\mathbb{R}^m$的嵌入子流形类似, 若$\varphi_*(x, v) = (q_1, \cdots, q_n, v_1, \cdots, v_n)$, 则

$$\begin{aligned} x &= \varphi^{-1}(q_1, \cdots, q_n), \\ v &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x. \end{aligned}$$

此外, 如果M是N的光滑嵌入子流形, 那么按照前面的讨论, $T_xM \subseteq T_xN$对任意$x \in M$成立, 这使得我们有

$$TM \subseteq TN,$$

而事实上, 我们也还可以进一步证明TM也是TN的光滑嵌入子流形. 比如说M是$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形时, TM就是$T\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形, 而$T\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^{2m}$是等同的, 从而我们可以认为TM是$\mathbb{R}^{2m}$的光滑嵌入子流形, 这也是我们对$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形的切丛的构造方式.

3.3. 切向量场

经典动力学问题, 最终要落到对时间的常微分方程的求解. 我们最关注的一类问题——一阶常微分方程组初值问题, 直观上可以解释为空间中的向量场求场线的问题.

定义 3.3.1 *(切向量场)设M是一个光滑流形, 一个**切向量场**或**向量场**X是$M \to TM$的一个映射, 使得对于每一个$x \in M$, $X(x) \in T_xM$. 我们也会把$X(x)$记作X_x. 全体M上的切向量场构成的集合记作$\mathfrak{X}(M)$.*

注: 上述定义是对一般流形而言的. 在介绍$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形时, 我们把$T_{\boldsymbol{x}}M$定义成$\mathbb{R}^m$中的向量而把TM定义成$\mathbb{R}^{2m}$中的点, 因此对于$\mathbb{R}^m$的光滑嵌入子流形, 我们把向量场X看作是$M \to \mathbb{R}^m$的、使得$X(\boldsymbol{x}) \in T_{\boldsymbol{x}}M$的映射, 此时, 映射$M \to \mathbb{R}^{2m}, \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ X(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$可以看作$M \to TM$的映射, 但这个新的映射和$X$本身包含的信息是完全一样的.

例 3.3.1 *记M的维数为n, 任取流形M上的局部坐标系$(U; q_i)$, 把U看作M的开子流形, 则对于$i = 1, \cdots, n$,*

$$\frac{\partial}{\partial q_i} : U \to TU, \ x \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_x$$

是U上的一个切向量场.

由于对于每一个点$x \in U$, 则在U上, 存在唯一n个U上的函数$X_i(x) : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$, 使得$X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_x$, 于是我们有

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{32}$$

上式称为X在$(U; q_i)$下的**局部坐标表示**.

切向量场之间可以进行直接的加法:

$$X + Y = M \to TM, x \mapsto X(x) + Y(x),$$

并且很容易证明, 在任何局坐标系下, 向量场的相加可以表示成分量相加:

$$X+Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)\frac{\partial}{\partial q_i},$$

此外, 对于任意M上的函数f, 我们可以定义定义它与M上的任意切向量场的逐点数乘:

$$fX=M\to TM, x\mapsto f(x)X(x),$$

并且在任何局坐标系下, 向量场的逐点数乘也可以表示成函数与各分量的乘积

$$fX=\sum_{i=1}^{n}fX_i\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

例 3.3.2 *记$\mathbb{R}^m$上的直角坐标为$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 对于$\mathbb{R}^m$上的任意光滑子流形M(包括M是$\mathbb{R}^m$上的开集甚至$\mathbb{R}^m$本身的情形)时, 我们可以把M上的切向量场$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$写作*

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{33}$$

其中$v_i=v_i(\boldsymbol{x})$是切向量的第i个分量作为$M\to\mathbb{R}$的函数.

严格来说, 在M不是$\mathbb{R}^m$的开集时, (33)不是M的局部坐标表示, 而是被嵌入的$\mathbb{R}^m$本身的直角坐标表示. 当然, 这并不妨碍我们使用这种表示方式. 比如, 我们把可以把球面
$S^2=\left\{x^2+y^2+z^2=1\right\}$上的向量场

$$\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\quad\text{表示为}\quad -y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\quad\text{等等,}$$

定义 3.3.2 *设X是n维光滑流形M上的切向量场, 如果X的任意局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$下的局部坐标表示*

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{34}$$

*中, X_i都是U上的光滑函数, 那么我们称X是M上的一个**光滑切向量场**或**光滑向量场**. X上的全体光滑切向量场组成的集合记作$\mathfrak{X}(M)$.*

切向量场光滑性的另一个等价定义是"作为$M\to TM$的映射是光滑嵌入", 这种定义方式不依赖局部坐标系, 但不如我们的定义直观. 此外, 对于嵌入在$\mathbb{R}^m$上的流形, 其上切向量场可以表示为$M\to\mathbb{R}^m$的函数, 这个函数的m个分量如果都是光滑函数, 那么该向量场光滑.

此外, X还可以看作$C^\infty(M)\to C^\infty(M)$的映射: 回顾一般光滑流形上切向量的定义, 对于任何

M上的函数f, 我们可以认为Xf是M上的这样一个函数: 它在x处的取值是$X(x) \in T_xM$对光滑函数f作用得到的实数值, 即

$$(Xf)(x) = (X(x))(f).$$

比如对于(34)中定义的X, 我们就得到

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

这是U上的一个光滑函数($\frac{\partial f}{\partial q_i}$如(21)所定义).

定义 3.3.3 *(积分曲线) 设M是一个光滑流形, X是其上一切向量场, 一条曲线$\gamma : (t_0, t_1) \to M$若*
使得

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \tag{35}$$

*对任意$t \in (t_0, t_1)$成立, 则称$\gamma(t)$是X的一条**积分曲线**.*

对于任意$x \in M$, 我们可以找到一条积分曲线$\gamma : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to M$, 使得$\gamma(0) = x$. 这一点可以通过在$x$附近取局部坐标系, 把(35)归结为一阶常微分方程组的解存在性问题来证明, 但ε_1和ε_2有多大, 或者说这条积分曲线能延伸多远, 则与M以及X在M上的整体性质决定.

例 3.3.3 *圆盘$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 < 1 \right\}$, 切向量场$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$的积分曲线即微分方程*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

的解, 其解为

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

其中$x_0 = x(0), y_0 = y(0)$在$t = 0$时的初值. 从而向量场X的积分曲线是

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix},$$

描的是绕着U的圆心的圆周运动, 对于任何$(x_0, y_0)^\top \in U$, 这条曲线中, t取任何实数都能使$\gamma(t)$在U中. 而向量场$Y = \frac{\partial}{\partial x}$的积分曲线是

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{pmatrix}$$

描述的是y坐标不变的水平运动. 这条积分曲线上, t只能取
$\left(-x_0 - \sqrt{1 - y_0^2}, -x_0 + \sqrt{1 - y_0^2}\right)$ *中的值, 否则$\gamma(t)$就跑出U外了.*

设M, N是光滑流形, $f: M \to N$是光滑同胚, 那么我们可以利用切映射将M上的一个向量场X转移到N上, 记作f_*X, 即

$$\begin{aligned} f_*X : N &\to TN \\ y &\to f_{*x}X(x), \ \text{其中} x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

对于更一般的f, 这样构造的f_*X不一定能够构成N上的切向量场. 比如M的维数比N低时, f_*M根本没有在N的不属于$f(M)$的点上赋任何值; 再比如f是一条自交的曲线时, f_*M在可能在N的同一个点处赋了两个不同的值(图 3.3.9).

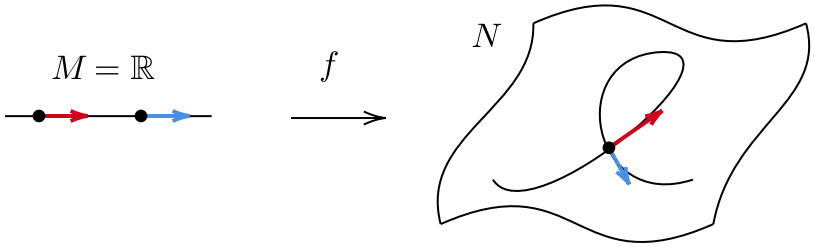


图 3.3.9: f_*M在同一个点处赋了两个不同的值

迄今为止, 我们已经学习了光滑流形上的函数、切向量、切向量场等概念, 在不同情境下, 我们会为了方便而使用不同的符号, 这一定程度上导致了记号的滥用, 所以在本节的末尾, 我们来整理一下我们使用过并且之后也可能使用的各种记号约定. 以下假定, M是流形, x是M中的点, f是$M \to \mathbb{R}$的光滑函数, X是M上的切向量场,

1. $f(x)$表示函数f在x点处的取值, $f|_x$表示相同含义
2. $X(x)$表示切向量场X在x点处的取值, 它是T_xM中的切向量, $X|_x$表示相同含义
3. $X(f)$及Xf表示切向量场X作用在函数f上得到的M上的函数, 即 $Xf: M \to \mathbb{R}, x \mapsto (X|_x)f$. 读者今后看到$X(\ \cdots\ )$时, 需要判断括号中的元素是$M$中的点还是$M \to \mathbb{R}$的函数, 然后才能判断是应该使用第2条规则还是第3条规则.
4. $(X(f))(x)$及$(Xf)(x)$表示切向量$X(x)$作用在f上的结果, $(Xf)|_x$, $X|_xf$, $X(f)(x)$, $X(x)(f)$等表示同样含义, 但$X(f(x))$, $X(f|_x)$则不代表此含义(事实上, 它们是M上的常值函数0), 因此我们要避免使用$Xf(x)$, 这种可能引发歧义的记号.
5. fX代表函数f与向量场X的逐点数乘运算, 即$fX: M \to TM, x \mapsto f(x)X(x)$. 请读者注意$fX$与$Xf$的区别.

习题 3.3.1 *证明或证伪: 如果n维流形M上的一个向量场X在一个坐标系$(U; q_i)$下具有表达式*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i},$$

则任取M上的另一个坐标系$(V; r_i)$, 只要$U \cap V \neq 0$, 向量场X在该坐标系下的表达式便是

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_i},$$

其中f是M上定义的函数.

3.4. 单参数微分同胚群、Lie 导数

考虑球面$S^2=\left\{(x,y,z)^\top:x^2+y^2+z^2=1\right\}$, 则

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S^2\quad\Rightarrow\quad\varphi(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}x\cos t+y\sin t\\x\sin t-y\cos t\\z\end{pmatrix}\in S^2. \tag{36}$$

φ是$S^2\times\mathbb{R}\to S^2$的光滑映射, 并且对于固定的$(x,y,z)^\top\in S^2$, 我们有

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\cos t+y\sin t\\x\sin t-y\cos t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y} \tag{37}$$

是一个S^2上的一个向量场, 其积分曲线就是$\gamma(t)=\varphi(x,y,z,t)$. 事实上, $\varphi(x,y,z,t)$可以看作是S^2绕z轴的、角速度沿z轴正方向的旋转, 而t是这个旋转的角度, 从而对于每一个固定的t, $\varphi(\,\cdot\,,t)$都是$S^2\to S^2$的光滑同胚, 并且容易验证:

- $\varphi(\,\cdot\,,t)\circ\varphi(\,\cdot\,,s)=\varphi(\,\cdot\,,t+s)$ 对任意$t,s\in\mathbb{R}$成立,
- $\varphi(\,\cdot\,,0)=\mathrm{id}$, 从而$\varphi(\,\cdot\,,-t)\circ\varphi(\,\cdot\,,t)=\varphi(\,\cdot\,,0)=\mathrm{id}$ 对任意$t\in\mathbb{R}$成立, 其中id是S^2到自身的恒同映射.

定义 3.4.1 *(单参数微分同胚群)设M是光滑流形, $\varphi:M\times\mathbb{R}\to M$的光滑映射, 使得对于每一个$t\in\mathbb{R}$, $\varphi(\,\cdot\,,t)$是M到自身的光滑同胚, 则称φ是M上的一个**单参数微分同胚群**. 一般我们记$\varphi(x,t)$为$\varphi_t(x)$ 即$\varphi(\,\cdot\,,t)=\varphi_t$. 此外, 向量场$X:x\mapsto\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t}|_{t=0}$称为$\varphi$的**无穷小生成元**, 其中$\frac{\partial\varphi_t(x)}{\partial t}|_{t=0}$为对于固定的$x\in M$, 曲线$t\mapsto\varphi_t(x)$在$t=0$处的切向量. 此时我们又称$\varphi$是由向量场$X$**生成**的单参数微分同胚群, 并将$\varphi_t$记作$\mathrm{e}^{tX}$.*

这样, (37)中的向量场就是(36)中定义的φ的无穷小生成元.

并不是所有的向量场都能生成单参数微分同胚群, 比如例 3.3.3中的$Y=\frac{\partial}{\partial x}$就不能生成单参数微分同胚群. 但此时我们仍然可以定义e^{tY}.

定义 3.4.2 *对于光滑流形M上的光滑向量场X及任意一点x, 我们定义$\mathrm{e}^{tX}(x)$或$\mathrm{e}^{tX}x$为$\gamma(t)$, 其中γ是X的满足$\gamma(0)=x$的X的积分曲线. 如果$\mathrm{e}^{tX}x$对任何$t\in\mathbb{R}$及$x\in M$有定义, 即X可以生成单参数微分同胚群, 则称X是**完备的**.*

接下来为了方便, 我们假定X是完备的, 但所得到的结论对一般的向量场X都是适用的. 此时我们可以把向量场X在一个函数上的作用看作是函数$f\circ \mathrm{e}^{tX}$在$t=0$处的导数, 即

$$(Xf)(x)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)-f(x)}{t}, \tag{38}$$

或者

$$Xf=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\circ \mathrm{e}^{tX}=\lim_{t\to 0}\frac{f\circ \mathrm{e}^{tX}-f}{t}$$

而要证明这个等式只需要注意到$t\mapsto \mathrm{e}^{tX}x$是$X$的积分曲线. 这就是说, X在f上的作用相当于f沿着X的积分曲线的变化率.

我们可以类似地定义另一个切向量场Y沿向量场X的变化率:

$$\mathcal{L}_X Y:=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y=\lim_{t\to 0}\frac{\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y-Y}{t},$$

这样定义的$\mathcal{L}_X Y$也是一个光滑切向量场, 称为Y对X的**Lie导数**. 此时, 对于每一个流形上的点x, 我们有

$$(\mathcal{L}_X Y)(x)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)=\lim_{t\to 0}\frac{\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)-Y(x)}{t} \tag{39}$$

假设M是$\mathbb{R}^m$中的开集, 则我们可以直接计算

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(J_{\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\Big)\\
=&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J_{\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\right)Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)+J_{\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\\
=&\,J_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)J_{\mathrm{e}^{tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)+J_{\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)J_Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)\\
=&\,J_{-X\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)J_{\mathrm{e}^{tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)+J_{\mathrm{e}^{-tX}}\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)J_Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)X\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)
\end{aligned}$$

其中J_φ代表$\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$的Jacobi矩阵. 于是

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)(x)=&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\big(\mathrm{e}^{-tX}\big)_* Y\big(\mathrm{e}^{tX}x\big)=J_{-X}(x)IY(x)+IJ_Y(x)X(x)\\
=&\,J_{-X}(x)Y(x)+J_Y(x)X(x)=-J_X(x)Y(x)+J_Y(x)X(x)
\end{aligned}$$

其中I是$m\times m$单位矩阵, 从而

$$\mathcal{L}_X Y=J_Y X-J_X Y. \tag{40}$$

具体写成分量形式, 就是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= \begin{pmatrix} \partial_1 Y_1 & \cdots & \partial_m Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 Y_m & \cdots & \partial_m Y_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1 X_1 & \cdots & \partial_m X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 X_m & \cdots & \partial_m X_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial Y_1}{\partial q_i} - Y_i \dfrac{\partial X_1}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial Y_m}{\partial q_i} - Y_i \dfrac{\partial X_m}{\partial q_i} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{41}$$

第一行中的∂_i表示$\partial \,/\, \partial x_i$.

例 3.4.1 *向量场*

$$X = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix},$$

此时

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y &= J_Y X - J_X Y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

通过类似的计算过程, 我们可以得到一般光滑流形上Lie导数的一种简便表示.

定理 3.4.1 *对于一般流形上的向量场, 我们有*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] := X \circ Y - Y \circ X, \tag{42}$$

即对于流形上的可微函数f, 有

$$(\mathcal{L}_X Y) f = X(Yf) - Y(Xf).$$

*我们称$[X, Y]$为X, Y的**Lie括号**. 如果$[X, Y] = 0$, 则称X和Y两个向量场是**交换**的.*

例 3.4.2 *呈例* 3.4.1*, 我们可以把两个向量场写成算子的形式* $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$*,* $Y = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$*, 则对于任意流形上的可微函数$f$,*

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_X Y)f = [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \\
&= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-z\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(-z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= -z\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial z},
\end{aligned}
$$

与例 3.4.1 中的结果一致.

更一般地, 我们可以设$X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial q_i}, Y = \sum_{i=1}^m Y_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, 我们便得到

$$
\mathcal{L}_X Y = [X,Y] = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_j}, \tag{43}
$$

这与(41)一致.

定理 3.4.2 *Lie 括号满足*

1. 斜对称性: $[X,Y] = -[Y,X]$

2. 双线性: $[X_1 + aX_2, Y_1 + bY_2] = [X_1,Y_1] + a[X_2,Y_1] + b[X_1,Y_2] + ab[X_2,Y_2]$ *, 这里* $a,b \in \mathbb{R}$.

3. Jacobi恒等式: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \equiv 0$.

证明: 直接利用定义式(42)即可.

在线性代数中, 可以定义两个$n \times n$的矩阵A, B的交换子为$[A,B] = AB - BA$, 如果$[A,B] = 0$, 那么就意味着$AB = BA$, 即两个矩阵可交换. 此时如果对$t, s \in \mathbb{R}$定义

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots, \\
\mathrm{e}^{sB} &= I + sB + \frac{s^2}{2!}B^2 + \frac{s^3}{3!}B^3 + \cdots,
\end{aligned}
$$

分别是矩阵微分方程$\dot{M}(t) = AM(t), M(0) = I$和$\dot{N}(s) = BN(s), N(0) = I$的解, 则对于任意$t, s \in \mathbb{R}$, 有

$$
\left[\mathrm{e}^{tA}, \mathrm{e}^{sB}\right] = 0, \text{ 即 } \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sB} = \mathrm{e}^{sB}\mathrm{e}^{tA}.
$$

类似的结论存在于向量场的Lie括号中.

定理 3.4.3 *设X是M上的向量场, $\varphi : M \to M$是光滑同胚, 满足$\varphi_* X = X$, 则对于任意$t \in \mathbb{R}$, 有*

$$
\varphi \circ \mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{tX} \circ \varphi, \tag{44}
$$

即对任意$x \in M$,

$$
\varphi\left(\mathrm{e}^{tX}x\right) = \mathrm{e}^{tX}(\varphi(x)). \tag{45}
$$

证明: 考虑M上的单参数微分同胚群$\varphi \circ \mathrm{e}^{tX} \circ \varphi^{-1}$, 它由向量场$\varphi_* X$生成, 而$\varphi_* X = X$, 故

$\varphi \circ \mathrm{e}^{tX} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{e}^{tX}$, 从而(44)成立. □

定理 3.4.4 *设X, Y是M上的向量场, 满足$[X, Y] = 0$, 则对于任意$t \in \mathbb{R}$, 有$\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_* Y = Y$.*

证明: 由于$[X, Y] = 0$, 有$\left(\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_* Y\right)(x)$对$t$的导数为0, 从而恒为$Y(x)$, 即$\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_* Y = Y$. □

定理 3.4.5 *设X, Y是M上的向量场, 满足$[X, Y] = 0$, 则对于任意$t, s \in \mathbb{R}$, 有*

$$\mathrm{e}^{tX} \circ \mathrm{e}^{sY} = \mathrm{e}^{sY} \circ \mathrm{e}^{tX} \tag{46}$$

成立, 即对任意$x \in M$,

$$\mathrm{e}^{tX}\left(\mathrm{e}^{sY} x\right) = \mathrm{e}^{sY}\left(\mathrm{e}^{tX} x\right). \tag{47}$$

证明: 利用定理 3.4.3和定理 3.4.4即可得到. □

$[X, Y] = 0$意味着两个向量场的生成的单参数微分同胚群是“独立”的——即“先沿着X走一段路, 再沿Y走一段路”与“先沿着Y走一段路, 再沿X走一段路”的效果是相同的. 比方说我们把xOy平面上的一个点“沿x方向平移距离a”和“沿y轴方向平移距离b”这两个操作是可交换的, 这是对应于Lie括号

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$$

即可微函数对不同坐标求导次序可交换. 在例 3.4.1中, 两个向量场X和Y不可交换, 即$[X, Y] \neq 0$, 而e^{tX}和e^{sY}分别表示“绕z轴正向旋转角度t”和“绕y轴正向旋转角度s”, 这说明这两个操作交换顺序的结果是不一样的——读者可以随便拿起手边的一个物体来验证这一点.

习题

习题 3.4.1 *请判断下列各流形中各向量场的完备性*

(a). 流形$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 < 1\right\}$, *向量场*$X = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $Z = \dfrac{\partial}{\partial z}$

(b). 流形$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\right\}$, *向量场*$X = -z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$,

$Y = -z\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

(c). 流形$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > x^2 + y^2\right\}$, *向量场*$X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial z}$,

$Z = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$,

(d). 流形$M = \mathbb{R}$, *向量场*$X = x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$.

习题 3.4.2 *对例 3.4.2中的X, Y及$Z = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}$, 求$[X, Y]$, $[Y, Z]$和$[Z, X]$, 并验证*

Jacobi恒等式$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ *.*

习题 3.4.3 *请通过计算说明, 例* 3.4.2 *中的*$X,Y,[X,Y]$*与向量场*$W=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}$ *都是交换的, 即*$[X,W],[Y,W],[[X,Y],W]$ *都是零向量场, 并用它们来验证*定理 3.4.5*.*

3.5. Lie 群

本节中, 我们主要介绍一大类光滑流形, 它同时具有群结构和光滑流形结构, 这类群被称为*Lie群*.

首先为没有接触过群论的朋友简单介绍一下、以及帮很久没有接触过代数的朋友复习一下"群"的概念. 简单来讲, 所谓"群", 就是一个定义了一个"乘法"运算的集合.

定义 3.5.1 *设*S*是一个集合, 若*S*上定义了一个二元运算*$G\times G\to G:(a,b)\mapsto ab$*, 满足*
1. 结合律: $(ab)c=a(bc)$*对任意*$a,b,c\in G$*成立*
2. 存在单位元: 存在唯一$e\in G$*, 使得对任意*$a\in G$*, 有*$ae=ea=a$*,* e*被称为**单位元,***
3. 存在逆元: 任意$a\in G$*, 存在唯一*$b\in G$*, 使得*$ab=ba=e$*, 一般记*$b=a^{-1}$*, 称为*a*的**逆元,***
则称G*是一个**群**, 上述二元运算称为这个群上的**乘法**运算.*

例 3.5.1 *若认为乘法运算为*$\mathbb{R}$*上的一般乘法, 则*$\mathbb{R}$*本身不构成群, 任何包含*0*的*$\mathbb{R}$*的子集都不构成群(因为*0*没有逆元),* $\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}:x<0\}$ *不构成群(因为两个负数的乘积是正数). 但是* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*,* $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$*,* $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$*,* $\mathbb{Q}_+=\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+$ *构成群, 以及全体*2*的整数次幂也构成群, 这些群的单位元都是*1*.*

例 3.5.2 *若认为乘法运算为*$\mathbb{R}$*上的一般加法, 则*$\mathbb{R}$*本身构成群, 任何不包含*0*的*$\mathbb{R}$*的子集都不构成群(因为缺少*0*会使这些群没有单位元),* $\mathbb{Q}$*构成群, 全体整数的集合*$\mathbb{Z}$*构成群.*

例 3.5.3 *记*$\mathbb{R}^{n\times n}$*为全体*$n\times n$*矩阵构成的集合, 若认为乘法运算为矩阵的一般乘法, 则*$\mathbb{R}^{n\times n}$*本身不构成群, 但*$\mathbb{R}^{n\times n}$*的如下这些子集构成群*
(1). $GL(n)=\left\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det M\neq 0\right\}$*, 称为**一般线性群**,*
(2). $SL(n)=\left\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}:\det M=1\right\}$*, 称为**特殊线性群**,*
(3). $O(n)=\left\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}:MM^{\top}=I\right\}$*, 称为**一般正交群**,*
(4). $SO(n)=\left\{M\in\mathbb{R}^{n\times n}:MM^{\top}=I\text{ 且 }\det M=1\right\}=O(n)\cap SL(n)$*, 称为**特殊正交群**.*
以上这几个群的名字和记号请大务必记住, 它们是Lie群的最重要的几个例子.

接下来介绍或回顾群论中两个常用的基本概念. 首先, 群与群之间的映射中最重要的一类就是"同态", 简单来讲就是保持乘法运算的映射.

定义 3.5.2 *设*G,H*是两个群,* $f:G\to H$ *若满足: 对任意*$g_1,g_2\in G$*,* $f(g_1)f(g_2)=f(g_1g_2)$*, 则*

*称f是一个**同态映射**, 简称**同态**. 如果此时f还是一一映射, 则称f是$G \to H$的一个**同构**.*

可以证明, 如果f是同构, 那么f^{-1}也是同构.

群的一个子集如果对乘法运算封闭, 则其本身也构成一个群, 这样用子集构造的群称为“子群”.

定义 3.5.3 *设G是群, $H \subseteq G$, 如果H对G中的乘法运算也构成群, 则称H是G的子群.*

一般可以证明, 如果对于任意$h_1, h_2 \in H$, h_1^{-1}和$h_1 h_2$也在H中, 则H是G的子群.

接下来这个例子是离散群中最重要的例子, 它在我们之后定义微分形式时会被当作基础工具来使用.

例 3.5.4 *记$\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, 我们称全体$\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$的一一映射为**n阶对称群**, 记为$S_n$, 其上乘法运算定义为映射的复合. S_n中的每一个元素也被称为$\mathbb{Z}_n$的一个**全排列**.*

“全排列”这个名字也很容易理解, 对于任意$\sigma \in S_n$, 我们把$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$排成一排, 它就是$1, 2, \cdots, n$的一个排列. 按照基本的计数原理, $1, 2, \cdots, n$的排列方式一共有$n!$个, 从而$|S_n| = n!$. 一个有趣的事实是, 所有有限群(元素个数有限的群)都同构于某个对称群的子群, 也就是说, 对称群及其子群囊括了有限群的所有可能结构. 关于对称群, 我们在介绍微分形式时将补充介绍其更多性质.

接下来我们给出Lie群的定义.

定义 3.5.4 *如果一个集合G既是光滑流形又是群, 即其上定义有一个光滑结构和一个群结构, 并且*

(1). 乘法运算$G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh$是积流形$G \times G$到$G$的光滑映射,

(2). 求逆运算$G \to G, g \mapsto g^{-1}$是$G$到自身的光滑同胚

*则称G是一个**Lie群**, Lie群的**维数**为其作为流形的维数.*

由上述定义我们可以直接得到

定理 3.5.1 *G是Lie群, 则对于任意$h \in G$, 若记左乘、右乘h的运算分别为*

$$\begin{aligned} L_h &: G \to G, \ \ g \mapsto hg \\ R_h &: G \to G, \ \ g \mapsto gh \end{aligned} \tag{48}$$

则

(1). L_h和R_h满足$L_h \circ L_g = L_{hg}$, $R_h \circ R_g = R_{gh}$,

(2). L_h和R_h都是光滑同胚.

证明: (1)直接由定义就能得到. 对于(2), 首先注意对于任意$h \in G$, $G \to G \times G, g \mapsto (g, h)$是一个光滑的嵌入映射(这一点读者可以自行验证), 再利用定义, $G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh$是光滑的, 把这两个映射复合起来, 便知$L_h$是光滑的; 随后注意到$L_h$有逆映射$L_{h^{-1}}$, 并且按照前面的讨论, $L_{h^{-1}}$是一个光滑映射, 因此L_h是光滑同胚, 同理R_h也是光滑同胚.

例 3.5.5 例 3.5.3*中的$GL(n)$ $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$都是Lie群.*

事实上, 这几个群都是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子集, 可以看作是n^2维欧氏空间上的子集, 并且它们或为$\mathbb{R}^{n\times n}$上的开集($GL(n)$), 或为$\mathbb{R}^{n\times n}$上的光滑函数(行列式函数, 某两列内积函数都是光滑的)的水平集. 至于乘法和求逆运算的光滑性, 它们都是有理函数, 自然是光滑的.

接下来我们来求$GL(n)$ $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$的维数. 对于$GL(n)$, 它本身是$\mathbb{R}^{n\times n}$的开集, 从而其维数是n^2. 对于$SL(n)$, 我们有一个"行列式=1"的约束条件, 从而其维数是n^2-1. 对于$O(n)$, 我们可以写出$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$个正交条件和n个归一化条件, 它们互相独立, 从而其维数是

$$\dim O(n)=n^2-\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

对于$SO(n)$, 其比$O(n)$多了一个"行列式=1"的约束条件, 但它的维数和$O(n)$相同, 也是$\frac{n(n-1)}{2}$. 这是因为, 正交矩阵本身就蕴含了"行列式=±1"的性质, 我们可以证明$O(n)$有两个连通分支, 两个分支上矩阵的行列式分别是$+1$和-1. 而$SO(n)$则是$O(n)$的行列式为1的连通分支.

例 3.5.6 *求$GL(n)$, $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$在单位矩阵I处的切空间, 即在这几个流形上的曲线$M(t)$在满足$M(0)=I$时, $\dot{M}(0)$的可能取值.*

解: 对于$GL(n)$, 我们注意对于任意$P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $M(t)=I+tP$都是$GL(n)$上的曲线(其中t的取值范围被限制在某个$(-\varepsilon,\varepsilon)$上, 其中$\varepsilon$充分小), 因此, $T_IGL(n)=\mathbb{R}^{n\times n}$.

对于$SL(n)$, 假设$P\in T_ISL(n)$, 即存在$SL(n)$上的曲线$M(t)$, 使得$M(0)=I$, $\dot{M}(0)=P$, 并且按照定义, $\det M(t)=1$应该对任意t成立, 对$M(t)$在$t=0$附近进行线性展开,

$$M(t)=I+tP+o\big(t^2\big),$$

由于$\det M(t)=1$, 我们得到

$$\det(I+tP)=1+o\big(t^2\big),$$

即

$$\begin{vmatrix} 1+tP_{11} & tP_{12} & \cdots & tP_{1n} \\ tP_{21} & 1+tP_{22} & \cdots & tP_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tP_{n1} & tP_{n2} & \cdots & 1+tP_{nn} \end{vmatrix}=1+o\big(t^2\big). \tag{49}$$

(49)左手侧是一个t的多项式, (49)告诉我们的是: 这个多项式的常数项为1, 一次项为0. 其实我们可以发现, 上述行列式如果按照定义式写成$n!$项的和, 那么其中只有

$$(1+tP_{11})(1+tP_{22})\cdots(1+tP_{nn})$$

这一项可以展开出t的零次和一次项, 其它项中t的次数都至少为2, 从而这个行列式中常数项为1, 一次项为$\sum_{i=1}^n P_{ii}$, 因此

$$P \in T_I SL(n) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} P_{ii}, \ \text{即}P\text{的对角元之和为}0. \tag{50}$$

我们还需要证明“ $\Leftarrow$ ”, 这一点实际上可以直接利用维数得到: $\left\{P \in \mathbb{R}^{n\times n} : \sum_{i=1}^{n} P_{ii} = 0\right\}$作为流形的维数显然是$n^2-1$, 这与$SL(n)$的维数相等, 因此(50)中的“ $\Rightarrow$ ”可以变成“ $\Leftrightarrow$ ”, 即

$$T_I SL(n) = \left\{P \in \mathbb{R}^{n\times n} : \sum_{i=1}^{n} P_{ii} = 0\right\}. \tag{51}$$

对于$O(n)$, 假设$P \in T_I O(n)$, 即存在$O(n)$上的曲线$M(t)$, 使得$M(0) = I$, $\dot{M}(0) = P$, 并且按照定义, $M(t)M^\top(t) = I$应该对任意t成立. 对该式求t的导数, 并令$t = 0$, 得到

$$P + P^\top = O, \quad \text{或} \quad P = -P^\top. \tag{52}$$

很容易验证, $\mathbb{R}^{n\times n}$中满足(52)的矩阵全体构成的集合作为$\mathbb{R}^{n\times n}$的子流形维数为$\frac{n(n-1)}{2}$, 恰好与$O(n)$的维数相同, 因此

$$T_I O(n) = \left\{P \in \mathbb{R}^{n\times n} : P = -P^\top\right\}. \tag{53}$$

至于$SO(n)$, 它是$O(n)$的连通分支, 从而在I附近的性质与$SO(n)$在I附近的性质完全相同, 从而$T_I SO(n) = T_I O(n)$. □

Lie群的一大特点就是, 其上的任意一点处的一个切向量都可以通过左乘或右乘运算“平移”到流形上的任意一点处, 并且这个平移的结果在每一个点处是唯一的, 从而形成一个向量场.

定义 3.5.5 *设G是Lie群, X是G上的切向量场, 如果对于任意$h \in G$, 有*

$$(L_h)_* X = X,$$

*则称X是一个G的一个**左不变切向量场**.*

定理 3.5.2 *设G是Lie群, v是G在单位元e处的一个切向量, 则存在唯一一个G的左不变切向量场X, 使得 $X(e) = v$, 该向量场可以表述为*

$$X(g) = (L_g)_* v, \ \forall g \in G. \tag{54}$$

证明: 首先我们要验证(54)构造的切向量场确系左不变切向量场. 对于任意$h \in G$, 考虑$(L_h)_* X$, 对于任意$g \in G$,

$$\begin{aligned}((L_h)_* X)(g) &= (L_h)_*\left(X\left(h^{-1}g\right)\right) = (L_h)_*(L_{h^{-1}g})_* v \\ &= (L_h \circ L_{h^{-1}g})_* v = (L_{hh^{-1}g})_* v = (L_g)_* v = X(g),\end{aligned}$$

从而$(L_h)_* X = X$. 此外, 任取$g \in G$, 记$X(g) = w$, 则由于向量场是左不变的, $(L_{g^{-1}})_* X$应该

等于X, 从而$(L_{g^{-1}})_* w$应该恰好等于X在e处的取值v, 即$(L_{g^{-1}})_* w = v$, 因此$w = (L_g)_* v$, 由g的任意性, 知(54)成立. □

按照(54)这种方式构造的切向量场称为**由v生成的**左不变切向量场. 事实上, 对于左不变切向量场, 我们可以通过其在任意一点处的取值来确定整个切向量场: 设$X(h) = w$, 则对于任意$g \in G$, 有

$$X(g) = (L_{gh^{-1}})_* w. \tag{55}$$

例 3.5.7 *我们来求$GL(n)$ $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$的左不变切向量场. 以$GL(n)$为例, 设$P \in T_I GL(n) = \mathbb{R}^{n\times n}$, 任取$M \in GL(n)$, P生成的左不变切向量场X在M处的取值应该是$(L_M)_* P$. 假设I附近有一条$GL(n)$上的曲线$K(t)$使得$K(0) = I, \dot{K}(0) = P$, 于是*

$$(L_M)_* P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_M K(t))\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MK(t))\Big|_{t=0} = M\dot{K}(t) = MP,$$

也就是说P生成的$GL(n)$上的左不变切向量场在$M \in GL(n)$上的取值就是MP, 即矩阵M按照通常矩阵乘法乘以矩阵P得到的矩阵. 这一结论对$SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$均成立.

我们曾经用e^{tX}来表示一个向量场X的积分曲线, 即$\mathrm{e}^{tX}(x)$是满足$\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$的曲线. 在这种意义下, 我们无法对于单个切向量$v$来定义$\mathrm{e}^{tv}$, 不过对于Lie群, 我们可以用$v$来生成一整个左不变切向量场, 从而可以给出$\mathrm{e}^{tv}$的定义.

定义 3.5.6 *设G是Lie群, $v \in T_e G$, 则对于$x \in G$, $t \in \mathbb{R}$ 我们定义$\mathrm{e}^{tv}(x)$为$\gamma(t)$, 其中γ是v生成的左不变切向量场的积分曲线, 并且满足$\gamma(0) = x$. 这样定义的$\mathrm{e}^{tv}(\,\cdot\,) : G \to G$称为$v$的**指数映射**.*

例 3.5.8 *我们来求$GL(n)$ $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$的指数映射. ji对于任意$P \in T_I GL(n) = \mathbb{R}^{n\times n}$及$M \in GL(n)$, 我们记$\mathrm{e}^{tP}(M)$为$K(t)$. 按照定义, $K(t)$满足*

$$K(0) = M, \dot{K}(t) = K(t)P,$$

从而

$$K(t) = M\mathrm{e}^{tP} = M\left(I + tP + \frac{t^2}{2!}P^2 + \frac{t^3}{3!}P^3 + \cdots\right)$$

即 $\mathrm{e}^{tP}(M)$是M左乘以通常意义下的矩阵指数e^{tP}. 这一结论对$SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$均成立.

此外, 我们也可以定义右不变切向量场等, 如果利用右不变切向量场来定义指数映射, 则上述$\mathrm{e}^{tP}(M)$就等于M右乘以通常意义下的矩阵指数e^{tP}. 我们会在使用指数映射时说明其实在左不变切向量场的意义下还是右不变切向量场意义下的指数映射.

本节我们介绍了Lie群的概念, 并主要介绍了$GL(n)$ $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$这几个最常用的Lie群, 这将在我们后面介绍刚体运动时起到作用. Lie群本身还有很多有趣的性质, 限于篇幅, 我们不

再更深入讨论. 对广义相对论、量子场论等现代物理话题感兴趣的朋友可以阅读有关Lie群及Lie代数的相关专著, 或者参阅任意一本微分流形教材.

习题

习题 3.5.1 *线性代数中有这样一个"n反射定理", 讲的是任意一个$O(n)$中的元素U必能表示成*

$$U = H_1 H_2 \cdots H_k \quad (k \leq n)$$

的形式, 其中$H_1, \cdots, H_k$是Householder矩阵, 即H_j是形如$I - 2u_j u_j^\top$的矩阵, 其中u_j是单位(列)向量. 请利用该定理证明, $O(n)$确实只有两个连通分支.
(提示: Householder矩阵满足$H_j^2 = I$, 并且$\det H_j = -1$, 从而其实我们总可以通过补足够多对相同的Householder矩阵, 把U表示成n个或$n-1$个Householder矩阵之积……)

习题 3.5.2 *$n \times n$复矩阵S若满足$SS^* = I$, 则称其为**酉矩阵**. 全体$n \times n$酉矩阵组成的群称为n阶酉群, 记作$U(n)$. 我们把一个复数看成两个实数, 从而$n \times n$复矩阵全体可以看作一个欧氏空间$\mathbb{R}^{2n^2}$, 而$U(n)$则是这个$\mathbb{R}^{2n^2}$的光滑嵌入子流形, 从而也是一个Lie群. 求$U(n)$作为流形的维数, 并求其在单位元(单位矩阵)处的切向量$T_I U(n)$.*

习题 3.5.3 *求e^{tM}, 其中$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 并验证对于任意$t \in \mathbb{R}$, 有$\mathrm{e}^{tM} \in SO(3)$.*

4. Lagrange 力学

4.1. 变分原理

最经典的变分原理问题即“最小作用量”问题: 对于任意一个$2n+1$元函数

$$L(q_1,\ \cdots,q_n,\dot{q}_1,\ \cdots,\dot{q}_n,t)\xlongequal{\text{简记为}}L(q,\dot{q},t)$$

求$\mathbb{R}^n$中的曲线$\gamma(t):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^{2n}$(记其第$i$个坐标分量为$\gamma_i=\gamma_i(t)$, 对时间$t$的导数是$\dot{\gamma}_i(t)$), 使得它是满足$\gamma(t_0)=a$, $\gamma(t_1)=b$为两个固定点的所有曲线中, 使作用量

$$S[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma_1(t),\ \cdots,\gamma_n(t),\dot{\gamma}_1(t),\ \cdots,\dot{\gamma}_n(t),t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{简记为}}\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t),t)\mathrm{d}t$$

最小的一条曲线.

例 4.1.1 *(最速降线问题) 求$y(x)$, 使得它是满足$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$的曲线中, 使一个小球在重力场中从(x_0,y_0)以初速度0滚落到(x_1,y_1)所需时间*

$$S=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}}\mathrm{d}x \tag{56}$$

最短的一条.

接下来我们就对这样的变分原理问题来推导著名的 Euler-Lagrange 方程. 相比于物理教材中的推导, 我们给出的推导会更严谨一些. 我们会避免使用“δL”这种意义模糊的记号.

任意一族曲线$\gamma(t;\varepsilon)\xlongequal{\text{简记为}}\gamma^\varepsilon(t):[t_0,t_1]\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}^n$, 若其满足

$$\gamma^\varepsilon(t_0)=a,\ \gamma^\varepsilon(t_1)=b,\quad\forall\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \tag{57}$$

并且$\gamma|_{(t_0,t_1)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)}$作为$\mathbb{R}^2$上的开集到$\mathbb{R}^n$的映射是二阶可微的, 则称之为一个**(二阶可微的)定端曲线簇**. 如果$\gamma(t)$是变分问题的解, 那么对于任意使$\gamma^0(t)=\gamma(t)$的曲线簇$\gamma^\varepsilon(t)$,

$$S\big[\gamma^\varepsilon\big]=\int_{t_0}^{t_1}L\big(\gamma^\varepsilon(t),\dot{\gamma}^\varepsilon(t),t\big)\mathrm{d}t \tag{58}$$

作为ε的函数, 应该在$\varepsilon=0$处取得最小值, 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S\big[\gamma^\varepsilon\big]\Big|_{\varepsilon=0}=0, \tag{59}$$

这样[6], 在$\varepsilon=0$处, 我们有

[6] 下述推导中第二行到第三行用到了分部积分法, 在转移微分号时, 我们把对γ的$\frac{\partial}{\partial t}$变成了$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 这是因为$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)$表达的意思容易和$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial t}$弄混.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} L\big(\gamma^{\varepsilon}(t),\dot{\gamma}^{\varepsilon}(t),t\big)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial^2 \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial t\partial \varepsilon}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}\underline{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

而由于$\gamma^{\varepsilon}(t_0)$和$\gamma^{\varepsilon}(t_1)$总是定值, 从而$\frac{\partial \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}\equiv 0$, 于是上式第一项为$0$; 若要第二项为$0$, 由$\gamma_i^{\varepsilon}$的任意性, 我们无法控制$\frac{\partial \gamma_i^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}$在$(t_0,t_1)$中的取值, 从而如果要想让上式小于$0$, 则被下划线的那一项必须恒定为$0$, 从而我们就得到了Euler-Lagrange方程

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{60}
$$

(60)成立是γ能够最小化$S[\gamma]$的必要条件. 但实际上, 要想推出(60), 我们只需要(59)对任何满足$\gamma^0=\gamma$的定端曲线簇γ^{ε}成立就够了, 至于$S[\gamma]$到底是极小值、极大值还是鞍点, 其实并不重要.

对于例 4.1.1, 我们可以列出相应的Euler-Lagrange方程

$$
\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'}=0
$$

此时

$$
L(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}
$$

从而

$$
\frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy^3}},\ \frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{2y'}{\sqrt{2gy\big(1+y'^2\big)}},
$$

于是相应的Euler-Lagrange方程是

$$
-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy^3}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2y'}{\sqrt{2gy\big(1+y'^2\big)}}=0.
$$

其解为摆线(求解过程见Wolfram), 其参数表示一般具有

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}k^2(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

的形式.

习题

习题 4.1.1 *(最小旋转曲面问题)以* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$ *为边界的绕*z*轴的旋转面(这里旋转面指单个侧面)何时面积最小?*

4.2. 理想完整约束下运动方程的变分形式

我们接下来把目光着眼于这样一类力学问题上: 其存在*完整*约束条件, 使得系统的位形空间是一个$\mathbb{R}^{Nd}$的n维光滑嵌入子流形M, 并且速度相空间是完整的切丛TM, 进一步地, 我们假设系统所受的力分为两部分: 主动力$\boldsymbol{F}$和约束力(被动力)$\boldsymbol{R}$. 其中约束力$\boldsymbol{R}$满足: 对于每一个$\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$我们有

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{61}$$

而$\boldsymbol{F}$则是一个M附近的光滑函数V的梯度:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x}). \tag{62}$$

此时, 牛顿第二定律可以写作

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}), \tag{63}$$

并且(63)能够保证系统在初值条件$\boldsymbol{x}|_{t=0} \in M, \dot{\boldsymbol{x}}|_{t=0} \in T_{\boldsymbol{x}|_{t=0}}M$下, 其解整个地包含于$M$中.

(61)~(63)

接下来我们来推导一个重要的理论: (63)可以写成一个变分问题. 具体来讲, 如果$\boldsymbol{\gamma}(t)$是(63)的解, $t_0 < t_1$, 记$\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{b}$, 那么对于任意一族$M$上的曲线 $\boldsymbol{\gamma}(t;\varepsilon) : [t_0, t_1] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to M$ (和之前一样, 记$\boldsymbol{\gamma}(t;\varepsilon)$为$\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)$) 使得$\boldsymbol{\gamma}^0 = \boldsymbol{\gamma}$, 我们都有(59)式成立, 其中

$$S[\boldsymbol{\gamma}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{\gamma}(t), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t))\mathrm{d}t, \tag{64}$$

其中

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}) - V(\boldsymbol{x}). \tag{65}$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S\big[\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}\big]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t},\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t}\right)-V\big(\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)\big)\mathrm{d}t\\
=&\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t\partial\varepsilon},\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t}\right)-\nabla V\big(\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)\big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t\\
=&\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon},\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t}\right)\right)-\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon},\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t^2}\right)-\nabla V\big(\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)\big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}t\\
=&\underbrace{\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon},\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t}\right)\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0,\text{因为}\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)/\partial\varepsilon\text{在}t_0,t_1\text{处为}0}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\cdot\left(\boldsymbol{m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t^2}+\nabla V\big(\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)\big)\right)\mathrm{d}t\\
=&-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\left(\boldsymbol{m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial t^2}+\nabla V\big(\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)\big)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

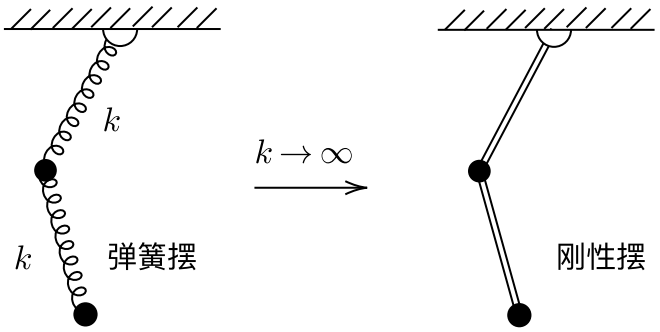
而在$\varepsilon=0$时, $\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}$是(63)的解, 再注意到$\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}$是$\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)$点处$M$的切向量, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S\big[\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}\big]\Big|_{\varepsilon=0}=&-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\left(\boldsymbol{m}\frac{\partial^2\boldsymbol{\gamma}(t)}{\partial t^2}+\nabla V(\boldsymbol{\gamma}(t))\right)\mathrm{d}t\\
=&-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}(t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\gamma}(t),\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t))\mathrm{d}t=0
\end{aligned}
\tag{66}
$$

第二个和第三个等号分别利用了(63)和(61). 这就给出了我们希望得到的结论.

上述推导本质上是变分原理的反向推导过程, 但多出来一个需要考虑的因素: 约束条件及相应的约束力$\boldsymbol{R}$. 性质(61)在这里至关重要, 它使得(66)的最后一步是正确的. (61)在物理上的解读是: $\boldsymbol{R}$在M上的任意一点$\boldsymbol{x}$处与$T_{\boldsymbol{x}}M$*垂直*, 也就是说, $\boldsymbol{R}$是一个*支持力*, 它没有沿着M切空间上的分量, 从而其作用只是把系统沿脱离M方向的速度分量抵消掉, 不会对系统沿M的运动有任何推动和阻碍作用. 满足这种性质的$\boldsymbol{R}$称为**理想约束力**.

典型的理想约束力即各种支持力, 如平面、斜面对其上物体的支持力、单摆系统中绳或铰链对重物的拉力等. 《经典力学的数学方法》中给出了一种对理想完整约束的另一种理解方式: 它们本来也是保守力, 但是相应于这个保守力的势场在M之外几乎为无穷大, 使得系统在脱离M运动时会受到强烈的抵抗. 一个比较好的例子是双摆系统, 我们可以把它看作弹簧摆在弹簧的劲度系数趋于无穷大时的极限.



典型的非理想约束力即各种摩擦力及阻力. 这种力会对系统的运动产生抵消作用. 比如经典的空气阻力, 我们会假设这种力会反向于速度且正比与速度的大小, 即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = -b\dot{\boldsymbol{x}}$. 这种力倾向于抵消系统的速度, 消耗系统的能量, 将机械能转化为内能. 约束力为这种力的系统称为**耗散系统**, 它是动力系统中很重要的一类. 而我们所研究的"保守力+理想完整约束力"下的系统称为**保守系统**.

本文只研究保守系统, 但耗散系统仍然有其实际意义——更确切地说, 其实际意义甚至大于保守系统. 这是因为现实中大多数用到经典力学的领域(如机械工业等)所研究的真实系统都是带有摩擦耗散的, 从更大意义上讲, 整个宇宙都是在熵增的, 宏观世界上的大多数系统甚至在近似的意义下也无法做到保守. 这也是分析力学 (尤其是只关注保守系统的 Hamilton 力学) 最初出现时被人诟病的原因. 但从19世纪末开始, 人们更多关注微观世界, 而微观世界是没有"摩擦耗散"一说的, 从而变分原理以及Hamilton力学因其理论的简洁、对称美而得到广泛应用.

4.3. Lagrange 方程

我们来总结一下上一节中我们得到的结论. 我们考虑了$\mathbb{R}^{Nd}$上被约束在一个n维光滑流形M上的经典力学系统, 其运动满足方程

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}), \tag{67}$$

其中$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x})$, 并且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} \equiv 0$对任何$\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M$成立. 我们得到的结论是: 如果$\boldsymbol{\gamma}(t)$是(63)的解, $t_0 < t_1$, 记$\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{b}$, 那么对于任意一族$M$上的曲线$\boldsymbol{\gamma}(t; \varepsilon)$, 只要$\boldsymbol{\gamma}^0 = \boldsymbol{\gamma}$, 我们都有.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} S\left[\boldsymbol{\gamma}^{\varepsilon}\right]\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \tag{68}$$

其中

$$S[\boldsymbol{\gamma}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{\gamma}(t), \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t))\mathrm{d}t, \ \ L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = T(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - V(\boldsymbol{x}), \ \ T(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}(\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}) \tag{69}$$

注意当运动被完全限制在M上时, 速度只能是M上的切向量, 此时(65)中定义的L可以被看作是速度相空间TM上的一个函数.

本节我们来关注的问题是**如何将牛顿运动方程内蕴地表述为TM上的切向量场**. 按照我们在第2.1节中的讨论, 二阶微分方程初值问题(67)其实可以写成一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})), \end{cases} \tag{70}$$

从而问题变成了$T\mathbb{R}^{Nd} = \mathbb{R}^{2Nd}$上的切向量场求积分曲线的问题. 而考虑约束条件的存在, 系统运动的位形空间实际上是$M \subseteq \mathbb{R}^{Nd}$, 速度相空间实际上是$TM \subseteq \mathbb{R}^{2Nd}$. 从而由(70)构造的向量场限制在$TM$上也是$TM$上的一个向量场, 即

$$\text{对于任意 } \xi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \subseteq TM, \text{ 都有 } \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})) \end{pmatrix} \subseteq T_\xi(TM).$$

因此, 我们实际上把一个$2Nd$维空间中的向量场求积分曲线问题降维成了一个$2n$维流形TM中的向量场求积分曲线问题. 现在我们的问题就变成了: 如何在TM的局部坐标下表述这个向量场, 使得我们得到一个$2n$元微分方程组.

我们首先强调一下: TM上的向量场不是M上的向量场, 前者是一个$TM \to T(TM)$的映射, 而后者是$M \to TM$的映射.

定理 4.3.1 *设M是n维光滑流形, L是TM上的光滑函数, 如果在流形M上, 若曲线 $\gamma : [t_0, t_1] \to M$满足*

$$\gamma(t_0) = a, \ \gamma(t_1) = b,$$

为两个定值, 并且对于任何满足

$$\gamma^\varepsilon(t_0) \equiv a, \ \gamma^\varepsilon(t_1) \equiv b, \ \gamma^0 = \gamma$$

的曲线簇$\gamma^\varepsilon(t) : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [t_0, t_1]$, 都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t = 0,$$

则在任何包含整个曲线簇γ^ε的局部坐标系$(U, \varphi; q_i)$下, $\varphi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{R} \to \varphi(U)$作为$\mathbb{R}^n$中的曲线, 其满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L_\varphi}{\partial u_i}(\dot{\gamma}_\varphi(t)) = \frac{\partial L_\varphi}{\partial q_i}(\dot{\gamma}_\varphi(t)), \tag{71}$$

其中 $L_\varphi = L_\varphi(q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)$ 是L作为TM上的函数在$(U, \varphi; q_i)$的诱导的切坐标系$(TU, \varphi_*; q_i, u_i)$下的局部坐标表示

$$L_\varphi = L \circ \varphi_*^{-1} : TU \to \mathbb{R},$$

(由于U是$\mathbb{R}^n$开子集, 故TU被看作等同于$U \times \mathbb{R}^n$)而$\gamma_\varphi = \varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \to TU$是$TU$上的光滑曲线.

证明: 由于我们讨论的只是局部坐标系下的问题, 所以不妨认为$M = \mathbb{R}^n$, 而这种情形下的证明我们已经在4.1节中完成, 特别地, 方程(71)对应于方程(60). □

可能读者会觉得相比于定理 4.3.1的长度, 上述证明显得简单得荒谬, 但事情其实就是这么简单, 没必要把它复杂化. 特别需要补充的一点是: 上述证明开头的"不妨设$M=\mathbb{R}^n$"实际上是一个非常有用的技巧, 因为在很多实际计算的情况下我们不会去考察流形的整体拓扑结构, 而只关注函数、向量场、曲线等在单个局部坐标系, 或者说一个同胚于$\mathbb{R}^n$开集的区域上的性质, 这样的话, 我们对流形上其它部分的性质根本就没有多大的兴趣, 这种情况下我们就可以认为$M=\mathbb{R}^n$, 而区图(U,φ)中的坐标映射φ只不过是恒等映射id而已. 这样的可以省去很多表述上的麻烦.

但是, 这种技巧也不能滥用, 比如我们讨论流形的紧性、可定向性、向量场的完备性等性质时, 就必须要考虑流形的整体性质. 这时就不能讲"不妨设$M=\mathbb{R}^n$"了, 否则就把我们关心的整体性质给"设"没了.

我们在上一节中已经证明了, 定理 4.3.1的条件在γ是牛顿第二定律(70)的解, L如(65)所定义时被满足, 从而(71)就是成立的, 从而我们可以断言, (70)的解在M的任意切坐标系$(TU,\varphi_*;q_i,v_i)$下必满足方程(71). 我们称(71)为**Lagrange方程**, 一般Lagrange方程会被写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{72}$$

此时$L=L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)$对应于我们的$L_\varphi$, 而$q_i$, $\dot{q}_i$分别对应于γ_φ和$\dot{\gamma}_\varphi$的第i个分量.

当然, 这里还有一个问题就是(65)中定义的L是$\mathbb{R}^{Nd}$上的函数, 而我们要给出这个函数在切坐标系$(TU,\varphi_*;q_i,u_i)$下的表达式, 即L_φ的具体形式.

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-V(\boldsymbol{x}) \tag{73}$$

此时我们注意φ^{-1}是$\varphi(U)\to\mathbb{R}^{Nd}$的光滑嵌入, 对于任意$(q_1,\cdots,q_n)\in\varphi(U)$, 我们总有$\boldsymbol{x}=\varphi^{-1}(q_1,\cdots,q_n)$, 从而$V(\boldsymbol{x})=V\circ\varphi^{-1}(q_1,\cdots,q_n)$, 而对于前一部分, 我们需要$\varphi_*^{-1}(q_1,\cdots,q_n,u_1,\cdots,u_n)$的表达式. 事实上, 对于任意一组$(u_1,\cdots,u_n)\subseteq\mathbb{R}^n$, 有

$$\varphi_*^{-1}(q_1,\cdots,q_n,u_1,\cdots,u_n)\boldsymbol{u}=J_{\varphi^{-1}}(q_1,\cdots,q_n)\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^\top$$

代入到(73), 我们就得到了

$$\begin{aligned}
&L\circ\varphi_*^{-1}(q_1,\cdots,q_n,u_1,\cdots,u_n)\\
=&\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^\top\Big(J_{\varphi^{-1}}(q_1,\cdots,q_n)^\top\boldsymbol{m}J_{\varphi^{-1}}(q_1,\cdots,q_n)\Big)\boldsymbol{u}-V\circ\varphi^{-1}(q_1,\cdots,q_n)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_i},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_j}\right)u_iu_j-V\circ\varphi^{-1}(q_1,\cdots,q_n),
\end{aligned} \tag{74}$$

其中$\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_i}=\dfrac{\partial\varphi^{-1}}{\partial q_i}(q_1,\cdots,q_n)$. (74)就给出了$L\circ\varphi_*^{-1}$的一般表达式. 注意$L$对$u_1,\cdots,u_n$是一个二次型, 并且这个二次型是正定对称的. 后面我们会介绍, 这个二次型是$\boldsymbol{m}$作为M上的黎曼度量

在局部坐标系$(U;q_i)$下的局部坐标表示.

一般来讲, 我们要想获得$L\circ\varphi_*^{-1}$的表达式, 只需要把$\boldsymbol{x}$表示成q_i的函数

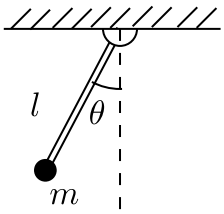
$$\boldsymbol{x}=\varphi^{-1}(q_1,\ \cdots,q_n),$$

随后取$q_i=q_i(t)$, 对它两边求时间导数, 得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^{-1}(q_1,\ \cdots,q_n)}{\partial q_i}\dot{q}_i, \tag{75}$$

然后把$\boldsymbol{x}$集体换成$\boldsymbol{v}$, 把$\dot{q}_i$替换成u_i, 代入到(74)中, 也可以得到正确结果. 一般来讲, 我们也可以不把$\dot{q}_i$替换成u_i, 然后认为$L=L(q_1,\ \cdots,q_n,\dot{q}_1,\ \cdots,\dot{q}_n)$.

例 4.3.1 *(单摆问题)考虑一个单摆, 摆长为l, 上端固定, 下端有一质量为m的小球, 忽略摆线质量, 设摆线与竖直方向的夹角是θ.*



我们将固定的摆轴所在的水平面设为重力势能的零点, 那么当θ随时间变化时, 该系统的动能和重力势能分别是

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,\ V=\ -mgl\cos\theta,$$

于是相应的Lagrange量就是

$$L(\theta,\dot{\theta})=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta,$$

此时Lagrange方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta},$$

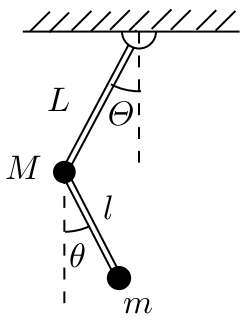
即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}ml^2\dot{\theta}=\ -mgl\sin\theta,$$

整理, 得

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0. \tag{76}$$

例 4.3.2 *(双摆问题)如下图所示的双摆系统中, 两级摆的的摆线长度分别是L, l, 下端重物的质量分别是M, m, 摆角分别记为Θ, θ.*



我们将固定的摆轴所在的水平面设为重力势能的零点, 按照(7)式, 该系统的动能和重力势能分别是

$$T=\frac{1}{2}ML^2\dot{\Theta}^2+\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\Theta}^2+l^2\dot{\theta}^2\right)+m\cos(\Theta-\theta)\dot{\Theta}\dot{\theta}$$
$$V=-MgL\cos\Theta-mg(l\cos\theta+L\cos\Theta)$$

于是Lagrange量

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\Theta,\theta,\dot{\Theta},\dot{\theta})&=T-V\\&=\frac{1}{2}ML^2\dot{\Theta}^2+\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\Theta}^2+l^2\dot{\theta}^2\right)+mLl\cos(\Theta-\theta)\dot{\Theta}\dot{\theta}\\&\quad+MgL\cos\Theta+mg(l\cos\theta+L\cos\Theta)\end{aligned}$$

相应的Lagrange方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\dot{\Theta}}\right)=\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\Theta},\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\theta},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L^2(M+m)\dot{\Theta}+Llm\dot{\theta}\cos(\Theta-\theta)\right)=-gL(M+m)\sin\Theta+Llm\dot{\Theta}\dot{\theta}\sin(\Theta-\theta)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(l^2m\dot{\theta}+Llm\dot{\Theta}\cos(\Theta-\theta)\right)=-glm\sin\theta-Llm\dot{\Theta}\dot{\theta}\sin(\Theta-\theta),\end{cases}\tag{77}$$

最终整理, 得到

$$\begin{cases}\ddot{\Theta}=\dfrac{-g(2M+m)\sin\Theta-mg\sin(\Theta-2\theta)-2\sin(\Theta-\theta)m\left(\dot{\theta}^2l+\dot{\Theta}^2L\cos(\Theta-\theta)\right)}{L(2M+m-m\cos(2\Theta-2\theta))}\\ \ddot{\theta}=\dfrac{2\sin(\Theta-\theta)\left(\dot{\Theta}^2L(M+m)+g(M+m)\cos\Theta+\dot{\theta}^2lm\cos(\Theta-\theta)\right)}{l(2M+m-m\cos(2\Theta-2\theta))}.\end{cases}\tag{78}$$

上述方程虽然完全谈不上"简洁", 但是也足够用于计算机数值模拟. 比如这个演示模拟双摆运动的网页, 里面的结果就是通过求解(78)得到的.

需要说明的一点是, 以上两个问题中的θ, Θ等, 严格来讲不算是局部坐标, 因为会出现类似于(θ, Θ)和$(\theta, \Theta + 2\pi)$这样两个不同的值代表位形空间上的同一个点的情形. 不过我们也完全可以通过对这些映射的定义域作出限制的方式使它们能够成为局部坐标. 事实上, 如果(θ, Θ)的取值范围在$\mathbb{R}^2$上, 那么(7)这种映射在数学上也有一个专门的名字, 叫“复迭映射”.

接下来我们要从向量场的角度来审视 Lagrange 方程. 按照前面的讨论, 由(70)构造的向量场限制在TM上也是TM上的一个向量场, 我们希望得到这个向量场在每一个的局部坐标表示. 按照定理 4.3.1, 只要我们选取的局部坐标是TM上的一个切坐标系
$(TU, \varphi_*; q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)$, 我们就有(71)或者说(72)成立. 由于我们考虑的仍然是局部坐标, 不妨设M就是$\mathbb{R}^n$的开子集, φ是恒同映射, 此时我们可以直接考虑(72), 其中
$L = L(q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)$ 是$\mathbb{R}^{2n}$上的开集到$\mathbb{R}$上的映射. 为了展示向量场的具体表达式, 我们要把(72)写成一阶方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i = u_i, & i = 1, 2, \cdots, n \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial u_i}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{79}$$

第二个方程的左手侧还应该继续被展开

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_i} \dot{u}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial u_i} \dot{q}_j,$$

这样, 我们可以把(79)整理成一个矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ L_{u_1 q_1} & \cdots & L_{u_1 q_n} & L_{u_1 u_1} & \cdots & L_{u_1 u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u_n q_1} & \cdots & L_{u_n q_n} & L_{u_n u_1} & \cdots & L_{u_n u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ L_{q_1} \\ \vdots \\ L_{q_n} \end{pmatrix}$$

其中$L_{u_i q_j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial q_j}$, $L_{u_i u_j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j}$, $L_{q_i} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$, 从而我们最后得到的方程是

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ L_{u_1 q_1} & \cdots & L_{u_1 q_n} & L_{u_1 u_1} & \cdots & L_{u_1 u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u_n q_1} & \cdots & L_{u_n q_n} & L_{u_n u_1} & \cdots & L_{u_n u_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ L_{q_1} \\ \vdots \\ L_{q_n} \end{pmatrix}. \tag{80}$$

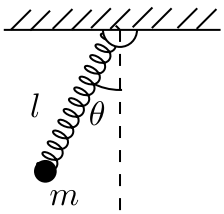
我们将(80)右手侧的向量记作$(\chi_1, \cdots, \chi_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)^\top$, 则(70)定义的向量场在我们考虑的切坐标系下的表达式是

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{81}$$

我们可以看到, (80)涉及到对一个庞大矩阵的求逆. 这个矩阵具有分块结构, 但我们免不了还是要完完整整地求出其右下角矩阵块$(L_{u_i u_j})_{ij}$的逆, 从而可以想见, 一般情形下χ_i和η_i的表达式将会十分臃肿, 这一点如果读者尝试手推(78)则会深有体会. 因此, Lagrange 方程(72) 虽然形式上简洁, 但如果我们想把它考虑成向量场, 那么它使用起来就不甚便利. 之后我们要介绍的 Hamilton 力学的一大优势就是: 它表示成向量场之后的形式是也是简洁美观、便于研究的.

习题

习题 4.3.1 *(弹簧摆)考虑一个弹簧摆, 摆线是劲度系数为k, 原长为L的弹簧, 上端固定, 下端有一质量为m的小球, 忽略摆线质量, 设摆线与竖直方向的夹角是θ, 摆线在摆动时长度为l, 试对该系统在θ, l组成的局部(广义)坐标下列出Lagrange方程.*



习题 4.3.2 *如图 4.3.10设一个质量为M的大斜面物体上有一个质量为m的小斜面物体, 大物体位于光滑水平面上. 斜面的倾斜角为θ(是一个常数). 记大物体的底面中心的水平横坐标是x, 小物体底面中心到大物体斜面顶点的距离是d. 求系统以x和d为局部(广义)坐标的Lagrange方程.*

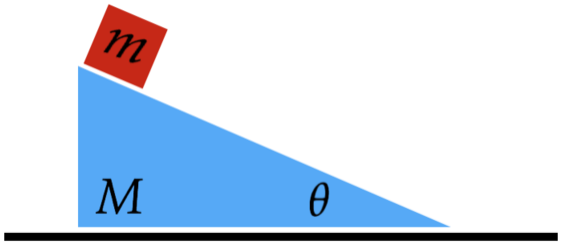


图 4.3.10: 图片来自brilliant

习题 4.3.3 *如图 4.3.11所示, 一个半径为R的竖直圆环上套有一个质量为m的珠子, 圆环绕竖直轴以固定角速度ω转动. 我们考虑相对于这个圆环静止的非惯性坐标系, 从而会引入一个离心势$-\frac{1}{2}\omega d^2$, 其中d是珠子到竖直轴的距离. 记珠子到圆心的连线与竖直方向的夹角为θ. 求系统以θ为局部(广义)坐标的Lagrange方程.*

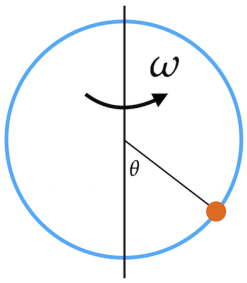


图 4.3.11: 图片来自brilliant

4.4. 静力学问题

现在我们来考虑“静力学问题”: 我们希望找到运动方程(61)~(63)的常值函数解, 这个解对应于系统相对于参考系没有发生任何运动的情形.

现在假设(61)~(63)有一个常数解$\boldsymbol{\gamma}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$, 任取一个包含$\boldsymbol{x}_0$的坐标系$(U, \varphi; q_i)$, 此时(61)~(63)在这个局部坐标系下的方程是(71), 其中L_φ具有(74)的形式, 把方程完整地写出, 则有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_j}\right)u_i u_j - V_\varphi(q_1, \cdots, q_n)\right)\Big|_{q_m=\gamma_m(t), u_m=\dot{\gamma}_m(t), m=1,2,\cdots,n} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_j}\right)u_i u_j - V_\varphi(q_1, \cdots, q_n)\right)\Big|_{q_m=\gamma_m(t), u_m=\dot{\gamma}_m(t), m=1,2,\cdots,n}, \\
&k = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{82}$$

其中$V_\varphi = V \circ \varphi^{-1}$, $\gamma_m(t)$代表$\varphi \circ \gamma(t)$的第m个分量, $\dot{\gamma}_m(t)$则代表这个分量对t的导数. 在(82)中, 我们注意到当$\gamma(t)$是常数时, 对$k = 1, \cdots, n$, 我们都有

$$u_m = \dot{\gamma}_m(t) = 0$$

成立, 于是(82)中左手侧整个地为0, 右手侧括号里的第一项为0, 最后只剩下了

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_k}(-V_\varphi(q_1, \cdots, q_n))\Big|_{q_m=\gamma_m(t), u_m=\dot{\gamma}_m(t), m=1,2,\cdots,n}, \ k = 1, 2, \cdots, n$$

即

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial q_k}(\varphi(\boldsymbol{x}_0)) = 0, \ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{83}$$

成立. (83)告诉我们, 对于任意一组实数$v_1, \cdots, v_n$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial V_\varphi}{\partial q_k}(\varphi(\boldsymbol{x}_0)) = 0, \tag{84}$$

而由于 $T_{\boldsymbol{x}_0}M$本身就是由全体形如$\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial q_k}$的切向量组成的, 所以我们断言, 对于每一个 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}_0}M$, 我们有$v(V) = 0$. 我们此时称$\boldsymbol{x}_0$为一个*驻点*, 对应于多元微积分中梯度为0的点.

定义 4.4.1 *设M是光滑流形, $x \in M$, f是M上的可微函数, 如果对于任意一个$v \in T_xM$, 我们有$v(f) = 0$, 则称x是函数f的一个**驻点**.*

定义 4.4.2 *设M是光滑流形, $x \in M$, f是M上的函数, 如果存在一个包含x的开集U, 使得$f(x)$是$f|_U$的最小值, 则称x是M的**极小值点**; 如果存在一个包含x的开集U, 使得$f(x)$是$f|_U$的最大值, 则称x是M的**极大值点**. 极小值点和极大值点统称为**极值点**.*

定理 4.4.1 *设M是光滑流形, f是M上的可微函数, $x \in M$是f的极值点, x是f的驻点.*

证明: 如果x是f的极小值点, 那么对于任意$v \in T_xM$, 我们取一条光滑曲线$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 使得$\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$, 并且 $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon))$ 整个地包含在一个使x取最小值的开集里, 则 $f \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ 在 $t = 0$ 处取得最小值, 并且 $v(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)|_{t=0}$. 由$f$的可微性和$\gamma$的光滑性知$f \circ \gamma$是可微的, 从而它在$t = 0$处取得最小值意味着$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)|_{t=0} = 0$, 也即$v(f) = 0$. 由$v$的任意性, 知$x$是驻点. 对于$x$是$f$的极大值点的情形, 我们可以完全类似地证明. □

以上定理和微积分及多元微积分中的结论是完全类似的, 即极值点的导数或梯度必为0, 但导数或梯度为0的驻点却不一定是极值点. 事实上, 函数在驻点附近的行为可以非常复杂, 形成诸如马鞍、猴鞍等图形.

我们可以把先前得到的静力学问题的解归结为如下定理.

定理 4.4.2 *对于约束在位形空间M上的运动方程(61)~(63), 若$\boldsymbol{\gamma}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$是该方程的解, 则在限制在$M$的意义下, $\boldsymbol{x}_0$是V的驻点.*

对于定理 4.4.2, 我们有两点需要补充说明.

首先, 定理 4.4.2考虑的是静力学问题, 从而它允许系统中的力不是保守力. 更具体地讲, 如果(63)变成

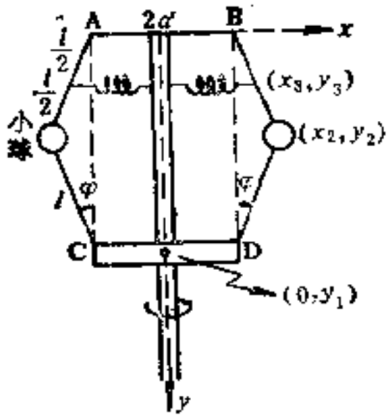
$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - b(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{85}$$

其中$b(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$是在速度相空间空间$TM$附近可微的正实数值函数, 即多了一个阻尼项, 那么定理 4.4.2同样适用, 因为在静止时, (85)中多出来的阻尼项也是恒为0的. 需要注意的是, (85)定义的阻尼项大小是随速度衰减而衰减的, 从而这种阻尼不包括只取决于正压力大小的滑动摩擦力.

其次, 虽然定理 4.4.2只能断言$\boldsymbol{x}_0$是V的驻点, 但是现实世界中真实存在的静力学系统里, $\boldsymbol{x}_0$几乎

总是V的极小值点. 这是因为, 当$\boldsymbol{x}_0$是V的极小值点时, 如果我们对系统进行微小的扰动——比如使其初始位置略微偏离$\boldsymbol{x}_0$, 或者使其有一个很小的初速度, 那么系统也只会在$\boldsymbol{x}_0$附近运动, 不会偏离很远, 我们称V的极小值点为系统的**稳定点**; 而如果V是极大值点或其它非极小值点的驻点, 那么上述这一点就无法保证, 即对系统进行微小的扰动可能导致系统定性性质的巨大改变. 这就好比我们不可能把一根削尖的铅笔笔尖朝下竖立在桌面上, 因为对竖直方向任意小的偏离都会导致它倒下. 不动点的稳定性[7]是动力系统、微分方程定性理论中最基础和重要的问题之一, 关于此的基础知识可以参见 Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*.

例 4.4.1 *我们来考虑例 2.1.2 中的离心调速装置, AB边长为$2a$固定于转轴, 其余各斜臂长都是l, 质量忽略不计, 两个小球质量为m, 套管CD质量为M, 套在转轴上, 可以上下滑动, 劲度系数为k的弹簧两端分别固定在两个上臂的中点, 整个系统没有摩擦. 按图示方式建立坐标系,今假设该系统绕其中心轴以角速度ω转动, 然后我们把参考系取成同样绕y轴以角速度ω旋转的非惯性参考系, 此时我们要引入一个非惯性离心力, 它在系统中定义了一个离心势, 使得位于(x,y)的质量为m的质点多了一个离心势能$-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. 假设套管CD的质量集中在其质心处, 从而我们不必考虑其转动惯量的问题. 试求系统静止(相对于我们的参考系)时φ与ω的关系, 将这个关系表示成$\omega=\omega(\varphi)$的形式(从而这个装置能够达到测量转速的目的).*



解: 我们把系统的势能函数V用局部坐标φ来表示:

$$V=-2(M+m)gl\cos\varphi+\frac{1}{2}k(l\sin\varphi)^2-m\omega^2(a+l\sin\varphi)^2$$

系统静止时, φ是V的驻点, 即$\partial V/\partial\varphi=0$, 从而

$$0=2(M+m)gl\sin\varphi+kl^2\sin\varphi\cos\varphi-2m\omega^2l(a+l\sin\varphi)\cos\varphi,$$

由此解得

[7] 如果读者略微了解过一些动力系统知识, 则需要注意, 在我们所保守系统中, V的极小值点不是"稳定结点", 即偏离极小值点后, 系统不会出现在$t\to\infty$时收敛到极小值点的行为. 后面我们会介绍, 在我们所考虑的保守系统中, 这种动力学行为是不可能出现的.

$$\omega=\sqrt{\frac{2(M+m)gl\sin\varphi+kl^2\sin\varphi\cos\varphi}{2ml(a+l\sin\varphi)\cos\varphi}}, \tag{86}$$

这就是转速ω和张角φ之间的关系. □

可以想见, 上述问题用受力分析图来求解将会比上述解法复杂得多.

定理 4.4.2的结论在工业界有很重要的应用, 它断言一个力学系统在平衡静止状态下处于势能的极小值. 著名的有限元方法就是一整套基于这一假设建立的数值计算方法. 当然, 有限元方法所关注的弹性力学问题属于位形空间维数无限的问题, 可即便对这种问题, 定理 4.4.2的结论也是成立的.

习题

习题 4.4.1 *习题 4.3.3中, 系统平衡(即θ不随时间改变)时, θ是多少? 注意对ω分类讨论, 并讨论您得到的平衡解的稳定性.*

习题 4.4.2 *一个质量为m, 劲度系数为k, 原长为l的均匀重弹簧*
(a). 竖立在地面上
(b). 悬吊在天花板上
时的长度各是多少?

4.5. 小振动问题

本节我们考虑一种物理学中非常常见的问题: 小振动问题. 这类问题通常来源于上一节中我们考察的稳定静力学解加以一个微小的扰动. 由于扰动是微小的, 我们可以对动能函数和势能函数作低阶近似, 得到一个关于局部坐标的常系数线性常微分方程组, 并且这个方程组的解可以看作若干个简谐振动的叠加.

我们接下来给出小振动方程的一个形式推导. 由于小振动问题考虑的是局部性质, 我们可以只考虑一个稳定解附近的局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$及其切坐标系$(TU,\varphi_*;q_i,u_i)$, 此时 Lagrange 量形如(74), 即

$$L\circ\varphi_*^{-1}(q_1,\cdots,q_n,u_1,\cdots,u_n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_i},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_j}\right)u_iu_j-V\circ\varphi^{-1}(q_1,\cdots,q_n).$$

我们简化记号, 把$L\circ\varphi_*^{-1}$记作L, $V\circ\varphi^{-1}$记作V, $\boldsymbol{m}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_i},\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q_j}\right)$记作$g_{ij}$(注意$g_{ij}$是$q_1,\cdots,q_n$的函数), 则

$$L(q_1,\cdots,q_n,u_1,\cdots,u_n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(q_1,\cdots,q_n)u_iu_j-V(q_1,\cdots,q_n), \tag{87}$$

并且$(g_{ij}(q_1,\ \cdots,q_n))_{ij}$构成的矩阵是正定对称的, 然后我们假设$V$在$U$上有一个极小值点

$$V\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots q_n^{\text{ss}}\Big)=\min_{(q_1,\cdots,q_n)\in U}V(q_1,\ \cdots,q_n),$$

而我们研究的运动是在这个稳定点$\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots q_n^{\text{ss}}\Big)$附近的, 从而我们拟定一个正的常数$\varepsilon\ll 1$, 并取

$$q_i=q_i^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_i,\ u_i=\varepsilon\widetilde{u}_i,$$

从而$\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n,\widetilde{u}_1,\ \cdots,\widetilde{u}_n$ 构成另一组切坐标系, 并且Lagrange函数在这组切坐标系下的表示是

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}\Big(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n,\widetilde{u}_1,\ \cdots,\widetilde{u}_n\Big)\\
=&L\Big(q_1^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_1,\ \cdots,q_n^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_n,\varepsilon\widetilde{u}_1,\ \cdots,\varepsilon\widetilde{u}_n\Big)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\Big(q_1^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_1,\ \cdots,q_n^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_n\Big)\varepsilon^2\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j-V\Big(q_1^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_1,\ \cdots,q_n^{\text{ss}}+\varepsilon\widetilde{q}_n\Big)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\Big(q_n^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\varepsilon^2\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\Big(q_n^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\varepsilon^3\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j-V\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\\
&-\sum_{i=1}^n\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\varepsilon\widetilde{q}_i-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial V}{\partial q_iq_j}\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\varepsilon^2\widetilde{q}_i\widetilde{q}_j+o\big(\varepsilon^3\big)\\
=&-V\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\Big(q_n^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial V}{\partial q_iq_j}\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\widetilde{q}_i\widetilde{q}_j\right)+o\big(\varepsilon^3\big),
\end{aligned}$$

其中我们用到了$\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots q_n^{\text{ss}}\Big)$是驻点的性质消除了$\varepsilon$的一阶项. Lagrange量差常数或乘以倍数不改变相应的Lagrange方程, 因此上式最后一行中的第一项$-V\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)$ 可以舍弃, 而如果我们只保留ε的最高阶项, 那么我们就得到了一个关于

$$\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n,\widetilde{u}_1,\ \cdots,\widetilde{u}_n$$

的Lagrange函数

$$\widetilde{L}\Big(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n,\widetilde{u}_1,\ \cdots,\widetilde{u}_n\Big)=\sum_{i,j=1}^n\widetilde{g}_{ij}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j-h_{ij}\widetilde{q}_i\widetilde{q}_j,\tag{88}$$

其中

$$\widetilde{g}_{ij}=g_{ij}\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big),\ h_{ij}=\frac{\partial V}{\partial q_iq_j}\Big(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\Big)\tag{89}$$

都是常数, 而剩下来的问题便是对(88)这个Lagrange量求出Lagrange方程并进行分析.

为了进一步简化记号, 我们把(88)中的所有波浪线省略掉, 得到

$$L(q_1,\ \cdots,q_n,u_1,\ \cdots,u_n)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}u_iu_j-h_{ij}q_iq_j. \tag{90}$$

对于(90), 我们也可以认为它是$\left(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\right)=(0,\ \cdots,0)$ 且 $\varepsilon=1$时, Lagrange 量(87)本身的近似, 只不过此时我们需要$(0,\ \cdots,0)$是极小值点(这一点通过适当平移坐标网格可以做到), 并假设$q_i=\widetilde{q}_i$及$u_i=\widetilde{u}_i$本身很小, 这与假设$q_i=\varepsilon\widetilde{q}_i$, $\widetilde{q}_i\sim O(1)$但ε很小的效果是一致的.

此外, 注意$\{h_{ij}\}_{ij}$是函数V在点$\left(q_1^{\text{ss}},\ \cdots,q_n^{\text{ss}}\right)$处的的Hessian矩阵, 从而这个矩阵是对称的; 并且由于该点是极小值点, 故该矩阵是半正定的, 即其没有负的特征值.

接下来, 我们对(90)求Lagrange方程:

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=u_i,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i},\ i=1,2,\ \cdots,n,$$

将(90)代入, 整理得到

$$\sum_{j=1}^{n}g_{kj}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}h_{kj}q_j=0,\ k=1,2,\ \cdots,n. \tag{91}$$

我们可以把(91)整理为矩阵形式

$$G\ddot{q}+Hq=0, \tag{92}$$

其中$q=(q_1,\ \cdots,q_n)^\top$是列向量, $G=\{g_{ij}\}_{ij}$, $H=\{h_{ij}\}_{ij}$是矩阵. 此时Lagrange量(90)可以写作

$$L(q,\dot{q})=\dot{q}^\top G\dot{q}-q^\top Hq. \tag{93}$$

定理 4.5.1 *存在一个$n\times n$满秩常数矩阵$C=\{c_{ij}\}_{ij}$, 使得对于$r=Cq$, (92)等价于*

$$\ddot{r}+\Omega r=0, \tag{94}$$

其中

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_1^2&&&\\&\omega_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\omega_n^2\end{pmatrix}$$

是对角矩阵, $\omega_i>0$, $i=1,2,\ \cdots,n$.

证明: 首先我们给出如下引理

引理 4.5.1 *(Cholesky分解)任何$n\times n$正定对称矩阵G都可以写作$U^\top U$的形式, 其中U是一个$n\times n$满秩矩阵.*

为了证明上述引理, 只需注意G可以对角化为$G=P^\top\Lambda P$, 其中P是正交矩阵, Λ是对角元全是

正数的对角矩阵, 我们取$U=\Lambda^{1/2}P$即可, 其中$\Lambda^{1/2}$就是Λ的每个对角元取算术平方根所得的对角矩阵. 引理证毕[8].

利用上述引理, 我们假设$G=U^{\top}U$, 然后Lagrange量(93)就变成了

$$L=\dot{s}^{\top}\dot{s}-s^{\top}U^{-\top}HU^{-1}s, \tag{95}$$

其中$s=Uq$, 随后, 注意到$U^{-\top}HU^{-1}$是对称矩阵, 并且也是正定的, 我们可以利用另一个正交矩阵S将其对角化:

$$\Omega=SU^{-\top}HU^{-1}S^{\top}, \tag{96}$$

其中Ω是对角元全是正数的对角矩阵. 此时(95)可以进一步写为

$$L=\dot{r}^{\top}\dot{r}-r^{\top}\Omega r, \tag{97}$$

其中$r=Ss=SUq$. 这样, 我们取$C=SU,\ r=Cq$. 而对于(97), 我们列出的Lagrange方程即具有(94)的形式. □

(94)这个形式写成分量形式即

$$\ddot{r}_i+\omega_i^2 r_i=0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

这是n个简谐振动方程, 其通解为

$$r_i=A_i\cos(\omega_i t+\psi_i),$$

其中A_i, ψ_i为待定常数, 由方程的初值条件确定.

定义 4.5.1 *对于Lagrange量如(90)所示的Lagrange力学系统, 我们称上述向量r的每一个分量$r_1, r_2, \cdots, r_n$为系统的**简正坐标**, $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$为系统的**本征频率**或**固有频率**.*

上述讨论验证了: 当自由度为n的保守系统与平衡位置(即稳定静力学解)时偏离不大时, 其运动近似为n个简谐振动的叠加.

经典小振动问题的数学表述完整、优美且实用, 这样的理论在整个物理学中都是不多见的、难能可贵的.

一般来讲, 如果要想求小振动的本征频率, 可以直接设系统的运动具有$q_i=q_{i0}\cos\omega t$, $i=1,2,\cdots,n$的形式(称为**本征振动**), 代入(92), 就得到了一个方程, 消去$\cos\omega(t)$

$$\big(-\omega^2G+H\big)q=0,$$

该方程要想有非0解, 矩阵$-\omega^2G+H$的行列式就必须为0, 从而可以得到一个ω^2的n次代数方程, 按照前述理论, 这个方程必然有n个正数解, 这n个正数的算术平方根就是我们欲求的本征频率.

---

[8] 我们在证明中给出的这种构造Cholesky方法从实际计算的角度来看是十分低效的, 数值线性代数中有效率远高于此的方法来求出这个分解. 但是我们只是在理论描述这个分解的存在性, 所以给出了这样一种在描述上更方便的构造方式.

例 4.5.1 *双摆系统的Lagrange量*

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\Theta,\theta,\dot{\Theta},\dot{\theta}) = &\frac{1}{2}ML^2\dot{\Theta}^2+\frac{1}{2}m\left(L^2\dot{\Theta}^2+l^2\dot{\theta}^2\right)+mLl\cos(\Theta-\theta)\dot{\Theta}\dot{\theta}\\ &+MgL\cos\Theta+mg(l\cos\theta+L\cos\Theta)\end{aligned}$$

今假设$L=l$, $M=m$, 求系统在$(\Theta,\theta)=(0,0)$附近的本征频率?

解: 将L在$(\Theta,\theta)=(0,0)$附近展开(忽略掉势能中的常数项)

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\Theta,\theta,\dot{\Theta},\dot{\theta}) \approx &\frac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\Theta}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mLl\dot{\Theta}\dot{\theta}\\ &-\frac{1}{2}(M+m)gL\Theta^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2\end{aligned}$$

把方程写出来,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\Theta}}\right)=\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\Theta},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\theta},$$

即

$$\begin{cases}(M+m)L^2\ddot{\Theta}+mLl\ddot{\theta}=-(M+m)gL\Theta,\\ ml^2\ddot{\theta}+mLl\ddot{\Theta}=-mgl\theta.\end{cases}\tag{98}$$

此时我们假设$\Theta=\Theta_0\cos\omega t$, $\theta=\theta_0\cos\omega t$, 代入(98), 消去$\cos\omega t$,

$$\begin{cases}-\omega^2(M+m)L^2\Theta_0-\omega^2mLl\theta_0=-(M+m)gL\Theta_0\\ -\omega^2ml^2\theta_0-\omega^2mLl\Theta_0=-mgl\theta_0\end{cases}$$

我们首先要选择ω, 使得上述方程对Θ_0,θ_0有非零解, 此时行列式

$$\begin{vmatrix}\omega^2(M+m)L^2-(M+m)gL & \omega^2mLl\\ \omega^2mLl & \omega^2ml^2-mgl\end{vmatrix}=0,$$

解得

$$\omega=\sqrt{\frac{g(l+L)(m+M)\pm g\sqrt{m+M}\sqrt{m(l+L)^2+M(l-L)^2}}{2lLM}},$$

这就是双摆系统在$(\Theta,\theta)=(0,0)$附近的两个本征频率, 相应地

$$(\Theta_0,\theta_0)=\left(L\pm\left(\sqrt{\frac{m(l+L)^2+M(l-L)^2}{m+M}}-l\right),2L\right).$$

上述(Θ_0,θ_0)的意义是: 如果初始时刻Θ和θ的大小和速度比值都是$\Theta_0:\theta_0$(当然, 仍然要求它们的绝对数值很小), 则我们将看到这个双摆系统在平衡位置附近做频率为ω的周期摆动. □

最后我们泛泛地介绍一下从(87)到(90)这样的近似的适用范围. 通常来讲, 对于发展方程(即系统

随时间推移的变化) $\dot{u}=F(u)$, 如果我们用与F非常接近的另一个函数或算子$\widetilde{F}$来代替F, 从而方程变成$\dot{\widetilde{u}}=\widetilde{F}(\widetilde{u})$, 并且不改变或微小改变初值条件, 那么$u$与$\widetilde{u}$之间的差异通常是"短时间内可控, 长时间不可控". 通常的分析工具可以证明类似于"对于任意固定T, 若$\left\|\widetilde{F}-F\right\| \leq \varepsilon$, 则在$t\in[0,T]$时, 有$\left\|\widetilde{u}-u\right\| \leq K\varepsilon^{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda T}$对某正数$K$, λ成立"这样的命题, 注意T是在指数上的, 也就是说我们对$\widetilde{u}-u$在$T\to\infty$时的行为是完全失控的. 因此(90)作为(87)的近似, 两个方程的解之间的差异仅在一段有限的时间内是可控的. 这段时间有多长取决于ε有多小. 比如$\varepsilon\sim 10^{-2}$时, 我们大抵就不能指望(87)和(90)的解在$T\approx 10^{3}$时仍然是微小的了. 类似这种的行为也常见于微分方程数值解与真实解之间的差异上.

习题

习题 4.5.1 *求*习题 4.3.1*中的弹簧摆在平衡位置附近做微小振动的两个本征频率.*

习题 4.5.2 *所谓球形摆, 即三维空间中的单摆, 底端重物(记其质量为*m*)可在三维空间中运动, 并且受重力和摆线拉力作用, 从而运动被约束在一个半径为摆线长度(记为*L*)的球面上. 求球形摆在平衡位置(即重物恰好在定点的竖直下方)附近的本征频率.*

习题 4.5.3 *如*图 4.5.12*所示, 一条长*$3L$*的水平滑轨上有两个质量为*m*的重物可以水平无摩擦地滑动, 它们两端和中间用三根长为*L*, 劲度系数为*k*的轻质弹簧连接.求该系统平衡位置附近的本征频率.*

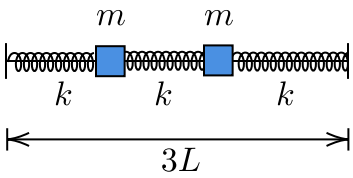


图 4.5.12:

4.6. 刚体的位形空间

本节我们探讨一类比较特殊的系统——刚体。当我们把一个物体看作 "刚体" 时, 我们认为它不再是一个质点, 而是一个占据了一定空间区域的实体, 并且这个实体在运动过程中, 其内的任意两点之间的距离保持不变。我们可以把把刚体分割成N个小体元, 它们两两之间由于直接或间接的刚性支持力作用而保持距离不变, 每一个小体元可以看作一个质点, 从而构成一个N质点系统, 这样, 在 $N\to\infty$ 时的我们就得到了想要研究的刚体. 不过其实对于刚体问题而言, 有限个质点与无限个质点的结论并没有什么本质上的差别, 因为一个刚性体系的位形空间最多只有6维, 更多质点 (甚至无穷个质点) 的引入不会带来新的自由度.

对于一个刚体, 首先我们在三维欧氏空间中建立一个相对于刚体本身静止的坐标系, 称为**随体坐标系**. 假设在随体坐标系下, 刚体占据一定空间$V\subseteq\mathbb{R}^3$, 并且假设V中有四点不共面. 当这个刚体

在我们正常考虑的惯性坐标系下运动时, 我们令

$$x = x(a,t) : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{99}$$

表示刚体在随体坐标系中处于位置 $a \in V$ 的点在 t 时刻的位置. 我们要求运动过程中刚体内任意两点之间的距离保持不变, 即

$$|x(a_1,t) - x(a_2,t)| = |a_1 - a_2| \quad \forall a_1, a_2 \in V, t \in \mathbb{R}. \tag{100}$$

刚体运动的核心性质是保距性, 因此我们首先来探讨在$\mathbb{R}^n$上那些保距变换所具有的性质.

定义 4.6.1 *(等距变换) 设 σ 是一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的映射, 如果其满足: 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 有*

$$|\sigma(a) - \sigma(b)| = |a - b|,$$

则称 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个等距变换. $\mathbb{R}^n$ 上的全体等距变换按映射复合构成的群称为 ***n维欧氏群****, 记作 $E(n)$.*

定理 4.6.1 *任何一个 $\mathbb{R}^n$ 上的等距变换σ都可以表示为*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax + b \end{aligned} \tag{101}$$

的形式, 其中$b \in \mathbb{R}^3$, A 是一个$n \times n$的实正交矩阵.

证明: 其实从(101)的形式中我们就可以看出, $b = \sigma(0)$. 我们取映射$\sigma' : x \mapsto \sigma(x) - \sigma(0)$, 则 σ' 也是一个保距映射, 并且$\sigma'(0) = 0$, 接下来证明它是线性映射.
事实上, 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 由 $\left|\sigma'(a) - \sigma'(b)\right| = |a-b|$, $\left|\sigma'(a)\right| = a$, $\left|\sigma'(b)\right| = |b|$ 可知

$$\begin{aligned} \sigma'(a) \cdot \sigma'(b) &= \left(\left|\sigma'(a)\right|^2 + \left|\sigma'(b)\right|^2 - \left|\sigma'(a-b)\right|^2\right)/2 \\ &= \left(|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2\right)/2 = a \cdot b \end{aligned}$$

因此对于任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\begin{aligned} &\left|\sigma'(a+b) - \sigma'(a) - \sigma'(b)\right|^2 \\ =\ &\left|\sigma'(a)\right|^2 + \left|\sigma'(b)\right|^2 + \left|\sigma'(a+b)\right|^2 - 2\sigma'(a+b) \cdot \left(\sigma'(a) + \sigma'(b)\right) + 2\sigma'(a) \cdot \sigma'(b) \\ =\ &|a|^2 + |b|^2 + |a+b|^2 - 2(a+b) \cdot (a+b) + 2a \cdot b = |(a+b) - a - b|^2 = 0 \end{aligned}$$

从而我们总有

$$\sigma'(a+b) = \sigma'(a) + \sigma'(b) \tag{102}$$

对(102)使用所谓 “柯西爬坡法”, 我们还可以证明

$$\sigma'(\lambda a) = \lambda \sigma'(a) \tag{103}$$

对于任意 $\lambda \in \mathbb{Q}$ (有理数集) 成立, 而σ'是保距变换, 容易证明其连续性, 从而可以证明(103)对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是成立的, 这就证明了σ'是一个线性映射. 我们假设在 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底下 $\sigma'(x) = Ax$, 其中, A 是 $n \times n$ 的矩阵, 那么

$$|x|^2 = \left|\sigma'(x)\right|^2 = |Ax|^2 = x^\top A^\top A x$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立, 这说明必然有 $A^\top A = I$, 从而 $\sigma' = \sigma(\,\cdot\,) - b$ 是一个线性正交变换, 定理定理 4.6.1得证. □

正交矩阵所代表的变换被称为 “刚性变换”, 在线性代数中, 有一个结论是说刚性变换一定可以写成若干个旋转、 $n-1$ 维镜面反射变换(Householder 变换)的复合. 从而定理 4.6.1说明任何一个刚性变换都可以表示为一系列平移、旋转、镜面对称变换的复合. 此外, (101)还告诉我们, 欧氏群$E(n)$上还有一个光滑流形结构(即它是一个Lie群), 这个流形的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$, 其中有 n 个维度度由b提供, 剩下的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个维度由正交矩阵A提供. 特别地, 取 $n=3$, 我们就得到 $E(3)$ 的流形维数是$\frac{3\times(3+1)}{2} = 6$. $E(n)$ 作为流形有两个连通分支

$$E(n)^+ = \{x \mapsto Ax + b : \det A = 1\}$$
$$E(n)^- = \{x \mapsto Ax + b : \det A = -1\}$$

其中 $E^+(n)$ 中的元素仍然对映射复合运算封闭, 从而具有群结构, 称为n维定向欧氏群.

我们已经假设刚体占据的空间V中存在至少四点不共面, 且$x = x(a,t)$满足(100), 从而我们可以证明: 对于每一个$t \in \mathbb{R}$, 存在唯一一个$\sigma_t \in E(3)$, 使得

$$x(a,t) = \sigma_t(a) \tag{104}$$

对每一个$a \in V$成立. 从物理意义上来讲, 刚体运动不可能改变物体的定向(不可能“把右手变成左手”), 从而我们还可以保证σ_t在运动过程中一直处于$E(3)$的同一个连通分支上, 我们一般认为随体坐标系与静止坐标系定向相同, 从而这个连通分支是包含恒同映射$x \mapsto Ix + 0$的分支E^+, 也就是说, 对任意t, 存在一个$SO(3)$中的矩阵$M(t)$和一个向量$b(t) \in \mathbb{R}^3$, 使得

$$x(a,t) = A(t)a + b(t), \tag{105}$$

这样, 在我们选定了刚体的某一个初始位置状态之后, 刚体之后的时间内无论运动到什么样的位置状态, 我们都可以在$E^+(3)$中唯一确定一个元素 σ 来表示初始状态到这个新的状态的变换, 因此, 我们可以认为**无约束刚体的位形空间是$E^+(3)$**. 这里的“无约束”指的是刚体可以在三维空间中自由自在地运动. 但很多时候我们们更关注的还是刚体“转动”的那一部分运动, 这种时候我们通常会通过选择适当的参考系, 使得被研究的刚体中有至少一个点是不动的, 经典的例子如转动的陀螺, 我们认为其底部是不动的. 在这种时候, 这个刚体的位形空间中就不再包含平移的成分, 如果我们的把坐标原点选成这个不动的点, 那么状态之间的转化将都可以用刚性线性变换 $x \mapsto Ax, A \in SO(3)$, 从而**定点转动刚体的位形空间是$SO(3)$**, 此时, 对任意$t$, 存在一个$SO(3)$中的矩阵$M(t)$, 使得

$$x(a,t) = A(t)a. \tag{106}$$

对每一个$a \in V$成立. 特别地, 在t时刻, 随体坐标系的三个坐标轴的单位向量分别为 $A(t)e_x, A(t)e_y$和$A(t)e_z$, 其中$e_x = (1,0,0)^\top$, $e_y = (0,1,0)^\top$, $e_z = (0,0,1)^\top$分别是惯性

坐标系下的三个坐标轴的单位向量.

知道了位形空间的结构之后, 我们接下来就可以尝试在上面建立局部坐标系, 我们主要还是考虑刚体的定点转动. Euler 在1776年给出了所谓Euler角, 它用三个几何意义明确的角度来描述空间中的一个旋转变换.

定理 4.6.2 *$SO(3)$中的每一个元素A都可以表示为三个矩阵B, C, D的乘积*

$$A = BCD,$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

*其中φ, θ, ψ称为**Eluer角**.*

上述三个角度的几何意义是明确的. 我们分步骤地介绍这几个角度的由来. 假设经过A这个变换之后, x, y, z三个坐标轴分别变成了x', y', z', 即沿x', y', z'这几个坐标轴的单位向量分别是Ae_x, Ae_y和Ae_z. 那么$A = BCD$中D, C, B这三个矩阵依次做的事情是:

1. **进动**: 把$Oxyz$坐标系绕z轴旋转φ, 得到Ox_1y_1z,
2. **章动**: 把Ox_1y_1z坐标系绕x_1轴旋转θ, 得到$Ox_1y_2z_2$,
3. **自转**: 把$Ox_1y_2z_2$坐标系绕z_2轴旋转ψ, 得到$Ox_3y_3z_2$,

最后得到的$Ox'y'z'$就是我们在第3步最终得到的$Ox_3y_3z_2$(图 4.6.13).

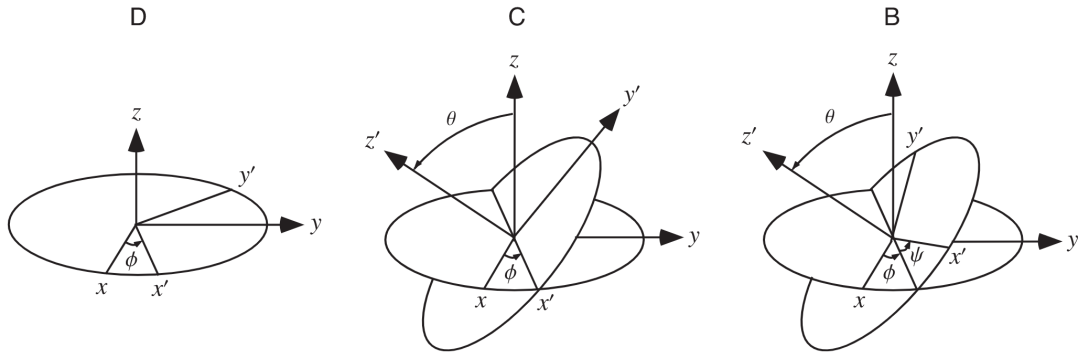


图 4.6.13: 三个Euler角. 图片来自Wolfram, 我们使用的记号与图中略有不同, 但应该不影响理解.

上述三个Euler角度φ, θ, ψ的取值范围分别遍历$[0, 2\pi), [0, \pi], [0, 2\pi)$时, 便可遍历所有$SO(3)$中的元素. 诚然, 如果我们要想让这三个角度构成局部坐标系, 则需要把它们的取值范围限定在一个更小的开集上.

当考虑定轴旋转问题时, 我们可以把旋转角随时间的变化率定义为角速度ω, 并规定其方向沿旋转轴, 用右手定则确定其方向, 这是基础物理学中的内容. 这样定义的角速度ω是$\mathbb{R}^3$中的一个向量, 并且假设旋转轴过原点, 那么对于旋转物体上的任意一点$r \in \mathbb{R}^3$, 我们可以用公式

$$v = \omega \times r \tag{107}$$

求其速度, 其中“ $\times$ ”表示向量外积. 但对于*定点*旋转, 我们能否定义一个角速度向量ω呢? 答案是: 可以, 但这个轴是“瞬时”的, 即每一个时刻, 刚体都在绕着某条轴线旋转, 但这个轴线是随着时间变化的. 具体而言, 我们有:

定理 4.6.3 *对于形如(106)的定点旋转运动, 在任何时刻 t, 存在一个$\tilde{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$, 使得*

$$\dot{x}(a,t) = \tilde{\omega}(t) \times x(a,t), \ \forall a \in V \tag{108}$$

证明: 首先给出一个引理

引理 4.6.1 *对于每一个3×3反对称矩阵M, 存在一个$\mathbb{R}^3$中的元素(并且显然这个元素是唯一的), 使得对于任意$y \in \mathbb{R}^3$, 有*

$$My = x \times y. \tag{109}$$

引理的证明: 一般来讲, 对于两个向量$x = (x_1, x_2, x_3)^\top$和$y = (y_1, y_2, y_3)^\top$, 我们有

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

并且很容易证明, 映射

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{110}$$

构成了$\mathbb{R}^3$到全体3×3实值反对称矩阵的一一对应, 从而引理成立.

接下来回到定理 4.6.3的证明. 由于$x(a,t) = A(t)a$, 我们有

$$\dot{x}(a,t) = \dot{A}(t)a = \dot{A}(t)A^{-1}(t)x(a,t)$$

而由于$A(t)$总是正交矩阵, 我们有

$$A(t)A^\top(t) = I,$$

上式两端对t求导, 得到

$$\dot{A}(t)A^\top(t) + A(t)\dot{A}^\top(t) = O,$$

即$\dot{A}(t)A^\top(t)$是反对称矩阵, 从而存在一个$\tilde{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$, 使得$\tilde{\omega}(t) \times \ = \dot{A}(t)A^\top(t)$, 从而

$$\dot{x}(a,t) = \dot{A}(t)A^{-1}(t)x(a,t) = \dot{A}(t)A^\top(t)x(a,t) = \tilde{\omega}(t) \times x(a,t).$$

因此定理 4.6.3成立. □

从物理学的角度讲, 所谓“绕瞬时轴旋转”, 即物体从t到$t + \delta t$这段时间里, 绕$\tilde{\omega}(t)$所在轴线旋转了$\tilde{\omega}(t)\delta t$这么大的角度, 同时又做了一个尺度为$(\delta t)^2$的微小定点转动.

值得注意的是, 对于任意$M \in SO(3)$, (108)实际上给出了一种$T_MSO(3) \to \mathbb{R}^3$的线性同构, 即每一个$T_MSO(3)$中的向量对应于一个$\mathbb{R}^3$中的角速度向量$\tilde{\omega}$. 具体来讲, 按照例 3.5.7的结论, 每一个$T_MSO(3)$中的元素V都具有MP的形式, 其中P是一个反对称矩阵, 并且容易验证$MPM^\top$也是一个反对称矩阵, 于是我们对于每一个$V \in T_MSO(3)$, 我们把V对应到$VM^\top = MPM^\top$这个反对称矩阵按照(110)的方式所对应的$\mathbb{R}^3$中的向量上. 注意这种构造方式是$T_MSO(3) \to \mathbb{R}^3$的同构, 即这个对应关系是保线性性质的: 任取$V_1, V_2 \in T_MSO(3)$, 假设它们对应的角速度向量分别为$\tilde{\omega}_1$和$\tilde{\omega}_2$, 则对任意$c \in \mathbb{R}$, $V_1 + cV_2$也是$T_MSO(3)$中的元素, 并且它对应的角速度向量是$\tilde{\omega}_1 + c\tilde{\omega}_2$. 正是因为角速度的这种天然的线性可加性, 很多物理课本才会说"**角速度是矢量**"这种说法. 其实$T_MSO(3)$本身同构于$\mathbb{R}^3$这件事并不特别, 毕竟$SO(3)$本身就是三维流形, 但是上述这种$T_MSO(3) \to \mathbb{R}^3$的同构是最具几何和物理直观意义的.

此外, 注意P本身也是一个反对称矩阵, 从而它也按照(110)的方式对应于一个$\mathbb{R}^3$中的向量ω, 这样, 我们又得到了另一个$T_MSO(3) \to \mathbb{R}^3$的同构, 即对每一个$V \in T_MSO(3)$, 我们把$M^\top V = P$这个反对称$3 \times 3$向量按照(110)的方式对应到$\mathbb{R}^3$中的一个向量$\omega$上. 事实上, ω的三个分量分别是角速度ω在随体坐标轴上的投影

$$\omega_i = \tilde{\omega} \cdot (Me_i), \ \ i = 1, 2, 3,$$

这样得到的$\tilde{\omega}$称为刚体的**随体角速度**. 在刚体做定点旋转$x(a,t) = A(t)a$时, 随体角速度$\tilde{\omega}(t)$即$A^\top \dot{A}$这个反对称矩阵按照(110)的方式对应的三维向量.

例 4.6.1 *设刚体定点旋转过程中, 三个Euler角随时间的变化规律* $\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t), \psi = \psi(t)$ *已经给出, 并假设*$\varphi(0) = \theta(0) = \psi(0) = 0$*, 求*$t = 0$*时刻刚体的随体角速度*$\omega$*.*

解: 此时

$$A = BCD = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned} \dot{A}|_{t=0} &= \dot{B}CD|_{t=0} + B\dot{C}D|_{t=0} + BC\dot{D}|_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} & -\dot{\psi}_0 & \\ \dot{\psi}_0 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & -\dot{\theta}_0 \\ & \dot{\theta}_0 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -\dot{\varphi}_0 & \\ \dot{\varphi}_0 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -\dot{\psi}_0 - \dot{\varphi}_0 & \\ \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0 & & -\dot{\theta}_0 \\ & \dot{\theta}_0 & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中$\dot{\psi}_0 = \dot{\psi}(0)$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$. 而$A^\top|_{t=0} = I$, 从而按照(110), $t = 0$时刻刚体的角速度是

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0 \end{pmatrix}.$$

更一般地, 我们可以算出对于任意时刻t, 我们可以计算得到角速度

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{111}$$

这里我们省略了$\omega(t), \tilde{\omega}(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\psi}(t)$ 中的"(t)". □

习题

习题 4.6.1 *试用Euler角分别来描述绕x轴, y轴, z轴以ω为角速度的旋转运动.*

习题 4.6.2 *求例 4.6.1中系统在任意时刻t的角速度$\tilde{\omega}$(惯性系下的, 非随体).*

4.7. 刚体的Lagrange力学

上一节中, 我们介绍了刚体运动的数学描述, 本节我们来把"力学"的部分加进来. 为了方便, 我们本节假设刚体占据的空间V是$\mathbb{R}^3$上一个开区域的闭包, 并且存在一个质量密度函数$\rho : V \to \mathbb{R}$, 从而我们可以用

$$\iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

来求其质量等.

我们首先考虑定点转动体系下, 刚体的动能. 当刚体的质量在空间区域V中按一定密度函数ρ分布时, 其动能就是V中各个小部分体元的动能之总和. 假设刚体的运动由$x = x(a,t)$描述, 则其动能就是

$$T(t) = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(a)|\dot{x}(a,t)|^2\mathrm{d}^3a,$$

这一点甚至对于$x(a,t)$描述的是流体运动时也仍然成立. 这里我们考虑定点旋转问题, 此时我们有$x(a,t) = A(t)a$, $A(t) \in SO(3)$, 从而

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2}\iiint_V \rho(a)|\dot{A}(t)a|^2\mathrm{d}^3a = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(a)|A^\top\dot{A}(t)a|^2\mathrm{d}^3a \\ &= \frac{1}{2}\iiint_V \rho(a)|\omega(t)\times a|^2\mathrm{d}^3a = \frac{1}{2}\omega(t)^\top\mathbf{I}\omega(t) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} I_{22}+I_{33} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{33}+I_{11} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{11}+I_{22} \end{pmatrix}, \tag{112}$$

$$I_{ij}=I_{ji}=\iiint_V \rho(a_1,a_2,a_3)a_ia_j\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}a_3,\ i,j=1,2,3. \tag{113}$$

矩阵$\mathbf{I}$与运动无关, 仅与刚体本身质量分布和随体坐标系选取有关, 称为**惯量张量**, 它是一个实对称矩阵, 并且由于动能在$\tilde{\omega}(t)\neq 0$时总是正的, 从而这个实对称矩阵还是正定的. 按线性代数的基本理论, 实对称矩阵总是可以用正交矩阵对角化的, 换言之, 我们可以通过对随体坐标系做一个以原点为定点的旋转, 得到一个新的随体坐标系, 使得$\mathbf{I}$是对角矩阵, 即I_{ij}在$i\neq j$时为零, 这个新的随体坐标系的三个坐标轴称为我们所研究的刚体的**惯量主轴**. 此时我们记

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix},\ I_j=\left(\sum_{i=1}^{3} I_{ii}\right)-I_{jj},\ j=1,2,3.$$

此时的I_1,I_2,I_3称为刚体的三个**主惯量**. 此时, 动量T对随体角速度的表达式非常简单:

$$T=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right), \tag{114}$$

其中$\omega_1,\omega_2,\omega_3$是随体角速度的三个分量. 当我们选定一个$SO(3)$上的局部坐标系$(U;q_1,q_2,q_3)$之后, 便可把$\omega_1,\omega_2,\omega_3$表示成切坐标$q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3$的函数, 然后利用(114), 就可以把动能$T$表示成$q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3$的函数.

理论上来讲, 给定一个刚体和一个定点, 那么我们需要首先建立一个坐标系, 然后利用(113)得到$\mathbf{I}$, 然后再去对角化$\mathbf{I}$, 从而这样才能得到三个惯量主轴. 但在很多问题中, 刚体本身的对称性就可以很好地提示我们该如何找到惯量主轴: 比如说,

- 如果刚体的质量分布沿着过固定点的某平面对称, 则这个平面上一定有两条惯量主轴, 剩下一条垂直于这个平面
- 如果刚体的质量分布绕着某条过固定点的直线是旋转对称的(比如均匀旋转体), 那么这条轴线本身一定是一个惯量主轴, 并且垂直于这条直线的任意两条互相垂直的过固定点的直线都是都可以作为另外两个惯性主轴. 这种刚体会有两个转动惯量相等, 它们被称为**对称陀螺**.

图 4.7.14展示了一些质量均匀刚体的惯量主轴.

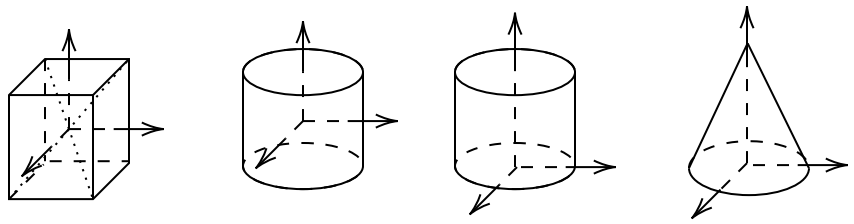


图 4.7.14: 一些刚体以惯量主轴建立的随体坐标系. 注意惯量主轴与定点选取有关, 并且在主惯量有简并(即有两个主惯量相等)的情形中, 惯量主轴不唯一.

完整的Lagrange量需要动能和势能. 对于重力势能这种在$\mathbb{R}^3$中形成恒定力场的势能函数, 按照基础物理学中的结论, 其势能应恰好等于质量与刚体质量相等的、位于刚体质心的质点的势能. 其它类型的势能也可以通过相应的积分运算转化成$SO(3)$上的函数.

在接下来的例子中, 我们介绍一个刚体力学中的著名问题: 对称重陀螺问题.

例 4.7.1 *(重陀螺问题) 今有一重陀螺, 它是一个均匀旋转体, 质量为μ, 底端尖锐, 固定于水平地面, 陀螺重心在轴线上, 与其底端距离为l. 以陀螺底端为原点, 竖直向上的方向为z轴, 地面上两条互相垂直的直线为x, y轴. 设重陀螺在以其底端为定点时, 沿其旋转轴线的主惯量为I_3, 剩余两个主惯量都是I_1. 求陀螺的Lagrange量在三个Euler角下的局部表达式.*

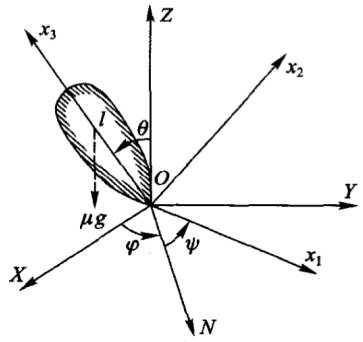


图 4.7.15: 重陀螺问题, 图片来自朗道、栗弗席兹《力学》

解: 由(111)和(114), 我们有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\Big(I_1\big(\omega_1^2+\omega_2^2\big)+I_3\omega_3^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(I_1\big((\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2+(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)^2\big)+I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}I_1\big(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\big)+I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

此外$V=\mu gl\cos\theta$, 从而

$$L = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - \mu g l \cos \theta. \tag{115}$$

□

注意到(115)中并不包含φ和ψ, 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi} \equiv 0, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \equiv 0,$$

从而

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \equiv M_3 \tag{116}$$

及

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \equiv M_z \tag{117}$$

守恒, 并且系统总能量

$$\frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \mu g l \cos \theta = E \tag{118}$$

守恒.

由(116)及(117), 我们得到

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \ \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \cos \theta \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{2 I_1 \sin^2 \theta}, \tag{119}$$

将这些代入(115), 消去$\dot{\varphi}, \dot{\psi}$, 得到

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta), \tag{120}$$

其中

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2 I_3} - \mu g l, \ U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} - \mu g l (1 - \cos \theta). \tag{121}$$

注意(120), 它变成了仅剩θ的微分方程, 并且还是一阶的! 事实上, (120)可以看作是一维空间中牛顿运动方程

$$\ddot{\theta} = - \frac{\mathrm{d} U_{\text{eff}}(\theta)}{\mathrm{d} \theta} \tag{122}$$

的首次积分, 即“一个一维空间中的小球在势场$U_{\text{eff}}(\theta)$中的运动”. 这使得我们可以. 直接去尝试求解(120)可能会略有困难(其解析解不是初等函数), 但也足够辅助我们进行一些理论分析. 比如下例:

例 4.7.2 *当对称重陀螺问题中的各参数满足怎样的条件时, 重陀螺的直立转动是稳定的?*

解: 此时, 运动方程的解对于θ来说是静力学解$\theta \equiv 0$, 要求其稳定性, 即需要判断$U_{\text{eff}}(\theta)$在$\theta = 0$处是否是极小值点. 当然, 仅从(121)来看, U_{eff}在$\theta = 0$时似乎是奇异的, 不过当运动是竖立转动时, M_z和M_3两个守恒量是相等的, 从而我们可以把(121)中的$U_{\text{eff}}(\theta)$进行展开:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(\theta) &= \frac{(M_3 - M_3\cos\theta)^2}{I_1 \sin^2\theta} - \mu g l(1-\cos\theta) = \frac{M_3^2}{I_1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 - \mu g l(1-\cos\theta) \\ &= \frac{M_3^2}{2I_1}\tan^2\frac{\theta}{2} - 2\mu g l \sin^2\frac{\theta}{2} = \left(\frac{M_3^2}{8I_1} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2 + o\big(\theta^2\big), \end{aligned}$$

因此, $U_{\text{eff}}(\theta)$确系驻点, 但要其为极小值点, 则还进一步需要$\frac{M_3^2}{8I_1} - \frac{\mu g l}{2} > 0$, 即

$$M_3^2 > 4I_1\mu g l,$$

进一步地, 由(119)还可以知道$\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3}$, 代入上式, 得到

$$\dot{\psi}^2 > \frac{4I_1\mu g l}{I_3^2}, \tag{123}$$

从而(123)告诉我们, 要想陀螺能竖立旋转, 其转速必须足够大, 大于(123)右手侧的这个数值. 为了使陀螺更容易地转起来, 设计陀螺时, 我们就需要让(123)右手侧的这个数值尽可能小, 即我们需要

- l小, 也就是说陀螺的重心要更靠下
- I_1小, 也就是陀螺要“矮”
- I_3大, 也就是陀螺的质量要尽可能远离旋转轴分布

以下是一些市面可见的陀螺玩具, 大家可以看一看它们是否符合上述特征.



图 4.7.16: 陀螺玩具(图片来自某玩具商网站)

最后请读者注意对称陀螺问题的一个特点: 我们可以找到它的3个守恒量: 总机械能E、

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_3$和$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_z$, 而这个问题本身的自由度个数也是$3$. 一般来讲, 如果一个系统能找到自由度个数多个独立的守恒量, 则我们称之为一个**可积系统**. 因此, 对称陀螺问题中的系统是可积系统. 对于可积系统更进一步的讨论, 我们将在 Hamilton 力学部分进行.

习题

习题 4.7.1 *试求质量均匀分布且总质量为m的*
(1). 边长为a的正方体
(2). 面半径和高分别为r, h的圆柱体
(3). 面半径和高分别为r, h的圆锥体
(4). 半长轴、半中轴和半短轴长度分别为a, b, c的椭球
以质心为定点的三个主惯量.

习题 4.7.2 *试求圆锥形陀螺(圆锥倒立, 圆锥顶点固定于地面, 底面半径和高分别为r, h, 质量为m)能够稳定竖立旋转的最小竖直角速度.*

4.8. 无限维位形空间中的Lagrange力学示例: 弦振动

本节我们考虑所谓“连续介质”中的力学问题, 如流体力学和弹性力学问题. 这一类问题的最重要特点是: 其位形空间是无穷维的, 比如弹性力学中, 确定系统的一个位置状态就需要确定介质内每一个点都对应一个位移向量, 而介质中的点的个数当然是无穷大的.

对于无限维问题, Hamilton最小作用量原理仍然是成立的: 我们仍然可以把系统的动能和势能显式写出, 然后相应地定义作用量, 再假设其取得极小值, 看一看我们能够得到怎样的信息, 是否能够由此推导出想要的力学方程.

例 4.8.1 *(弦振动问题) 假设一根原长为L_0的弦两端固定, 端点间的距离为$L > L_0$, 弦的劲度系数为k, 线密度为ρ, 拨弦后, 弦上各点垂直于弦本身运动, 并假设弦始终处于同一平面内. 在弦所处平面内建立直角坐标系, 使弦的一端在原点, 另一端在$(L, 0)$处, 记t时刻弦静止时位于$(x, 0)$处的点的位置为$(x, u(x, t))$, 并且由于端点固定我们有*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \tag{124}$$

对任意t成立. 求$u(x, t)$满足的方程.

解: t时刻弦的动能是

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

弹性势能是

$$V=\frac{1}{2}k\left(\int_0^L\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x-L_0\right)^2-\frac{1}{2}k(L-L_0)^2,$$

一般弦振动时, $u\ll L$, 此时我们可以近似地认为

$$\begin{aligned}V&\approx k(L-L_0)\int_0^L\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\\&\approx k(L-L_0)\int_0^L\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^L\frac{1}{2}\tau_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中$\tau_0=k(L-L_0)$是静止状态下弦上的张力, 于是

$$L=T-V=\int_0^L\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\tau_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{125}$$

而系统到某个t时刻的作用量也可以定义为

$$S[u]=\int_{t_0}^{t_1}L(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\tau_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{126}$$

我们要考虑的是(126)极小化的问题, 即在$u|_{\tau=t_0}$和$u|_{\tau=t_1}$固定时, (126)怎样才会最小. 按照变分法的标准流程, 接下来我们需要考虑以u为中心的定端曲线簇u^ε, 但由于此时我们的位形空间是一个完整的线性空间, 这个曲线簇不妨取为$u+\varepsilon v$, 其中$v=v(x,t)$二阶可微, 并且满足

$$v(x,t_0)=v(x,t_1)=0\quad\forall x, \tag{127}$$

$$v(0,t)=v(L,t)=0\quad\forall t, \tag{128}$$

此时(126)的极小性意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S[u+\varepsilon v]\Big|_{\varepsilon=0}=0$$

对任意满足(127)的v成立. 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S[u+\varepsilon v]\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-\tau_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{129}$$

利用分部积分和(127)(128), 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \mathrm{d}t \\
&= \rho \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} v(x,t) \right]_{t_0}^{t_1} - \rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} v(x,t) \mathrm{d}t \\
&= -\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} v(x,t) \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{130}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \tau_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \mathrm{d}x \\
&= \tau_0 \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} v(x,t) \right]_0^L - \tau_0 \int_0^L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} v(x,t) \mathrm{d}t \\
&= -\tau_0 \int_0^L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} v(x,t) \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{131}
$$

代入(129)并适当交换积分顺序, 就得到了

$$
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} S[u + \varepsilon v] \Big|_{\varepsilon=0} = -\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L v(x,t) \left[\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \tau_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}t, \tag{132}
$$

而由$v(x,t)$的任意性, 知(132)里面"[ ]"里的表达式必为0, 即

$$
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{133}
$$

其中$c = \sqrt{\tau_0 / \rho}$. □

(133)是最经典的线性波动方程, 利用经典的分离变量法, 可以得到其解具有

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(A_k \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_k \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \tag{134}
$$

的形式, 其中

$$
A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x, \quad B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \tag{135}
$$

一般由初值条件确定.

习题

习题 4.8.1 *假设例 4.8.1 中的弦的振动方向总是垂直于地面, 并且弦受重力作用, 求此时弦的振动方程.*

5. 流形上的张量、微分形式

在进入Hamilton力学部分之前, 我们需要进一步补充微分流形相关知识. 这一部分相比于第3章的内容而言, 直观性会弱一些, 但也算不上特别抽象.

5.1. 余切向量、余切向量场、余切丛

为了介绍余切向量, 我们首先要引入线性代数中一个非常有趣的概念: 对偶空间.

定义 5.1.1 *设V是一个(实)线性空间, 那么全体$V \to \mathbb{R}$的线性映射所构成的线性空间称为V的**对偶空间**, 记作V^*, V^*中的元素称为**对偶向量**. 这里我们认为线性映射的加法和数乘运算分别是按照函数的逐点加法与逐点数乘定义的, 即对于任意$c \in R$及$f, g \in V$, 我们认为*

$$f+g = \begin{aligned} V^* &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto f(v)+g(v) \end{aligned} \quad \text{及} \quad cf = \begin{aligned} V^* &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto cf(v). \end{aligned}$$

例 5.1.1 *对于任意一组实数$a_1, \cdots, a_n$, 映射*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n)^\top &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{aligned} \tag{136}$$

是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的线性映射, 从而是$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$的成员. 我们很快就会看到, $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$中的所有映射都具有(136)的形式.

定理 5.1.1 *设V是n为线性空间, 则V^*也是n维线性空间.*

证明: 任取V中的一组基底$e_1, \cdots, e_n$, 则对于任意$x \in V$, 存在唯一一组实数$x_1, \cdots, x_n$, 使得$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 我们记$x_i = f_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$, 这样定义的函数$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$即为提取$x$在基底$e_1, \cdots, e_n$下第$i$个分量$x_i$的函数. 不难验证, $f_1, \cdots, f_n$ 皆是V^*中的元素, 并且对于任意$f \in V^*$, f可以表示为$f_1, \cdots, f_n$的如下线性组合:

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i,$$

并且这种线性表示方式是唯一的, 因此$f_1, \cdots, f_n$构成V^*的一组基底, 从而V^*是n维的. □

定理 5.1.1中构造的这组V^*中的基底$f_1, \cdots, f_n$称为基底$e_1, \cdots, e_n$的**对偶基**, 他满足

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{137}$$

并且也是唯一满足(137)的V^*中的向量组.

对于$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$, 当$a_1, \cdots, a_n$跑遍$\mathbb{R}^n$后, 形如(136)的映射全体也构成了一个$n$维线性空间, 而

$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$恰好也是$n$维的, 因此形如(136)的映射全体构成了整个$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$. 这里我们用到了"$n$维线性空间的$n$维线性子空间必然是其本身"这个线性代数中的结论.

为了更直观地理解对偶空间和对偶基的概念, 我们可以假设$\mathbb{R}^n$上定义了标准内积函数

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

那么(136)中的这个映射就可以解释为"$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot x$"这样一个"与某常值向量做内积"的函数, 其中$a = (a_1, \cdots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$是常值向量. 这样, 我们可以认为$\left(\mathbb{R}^n\right)^*$中的元素也是$\mathbb{R}^n$中的向量, 即把$x \mapsto a \cdot x$这个映射看作向量$a$本身. 在此意义下, 任取$\mathbb{R}^n$的一组基底$e_1, \cdots, e_n$(它们不一定是标准基底), 则按(137), 这组基底相应的对偶基是$\mathbb{R}^n$中满足

$$f_i \cdot e_j = \delta_{ij},\ i, j = 1, \cdots, n, \tag{138}$$

的向量组$f_1, \cdots, f_n$. 更具体而言, f_i是垂直于$e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n$所张成的超平面, 并与$e_i$内积为1的一个向量. 比如在$\mathbb{R}^3$中, 我们可以直接计算

$$f_1 = \frac{e_2 \times e_3}{G}, f_2 = \frac{e_3 \times e_1}{G}, f_3 = \frac{e_1 \times e_2}{G},\ \text{其中} G = e_1 \cdot (e_2 \times e_3). \tag{139}$$

如果读者接触过固体物理, 那么可以将三维空间中的对偶基理解为"倒格子", 当然, 倒格子的定义中多了一个因子2π.

例 5.1.2 *求$\mathbb{R}^3$中如下基底的对偶基底*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解: 直接代入(139), 得到

$$f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

或者写成线性函数的形式:

$$\begin{cases} f_1 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ f_2 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto \dfrac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \\ f_3 = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \end{cases}$$

□

此外, 对(138)这个表达式, 我们还可以给出这样一种诠释: 如果我们把$e_1, \cdots, e_n$和

$f_1, \cdots, f_n$这两组列向量分别拼装成两个$n \times n$矩阵

$$E = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

那么必有

$$F^\top E = I, \tag{140}$$

其中I是单位矩阵. 因此, 从实际计算的角度来讲, 求对偶基的问题本质上是一个矩阵求逆的问题. 由(140), 我们还可以很容易得到: 如果$e_1, \cdots, e_n$是$\mathbb{R}^n$的标准基底, 即$E = I$, 那么$f_1, \cdots, f_n$便也是$\mathbb{R}^n$的标准基底.

此外, (140)还告诉我们, 如果$f_1, \cdots, f_n$是$e_1, \cdots, e_n$的对偶基, 那么$e_1, \cdots, e_n$也是$f_1, \cdots, f_n$的对偶基. 要证明这一点, 只需注意到, 我们把(140)进行一下转置, 就会得到$E^\top F = I$. 事实上, 对于有限维线性空间, 如果我们考虑双重对偶空间V^{**}, 那么对于任意$v \in V$, 映射$V^* \to \mathbb{R}, f \mapsto f(v)$是$V^{**}$中的元素, 并且这样一种对应关系是一一的, 从而我们可以认为v本身按上述意义构成V^{**}的元素, 在这种意义下, $V^{**} = V$, 这是“对偶”这个名字的由来. 需要注意的是, 这一点只在有限维线性空间中是成立的. 在更一般的线性空间中, 上述$V \to V^{**}$的对应关系只是单射, 不是满射, 从而V^{**}是一个“更大”的空间.

按笔者的理解, 对偶空间的作用很大程度上在于: 它在一般的线性空间——尤其是那些无法自然地定义内积的线性空间中, 给出了一种“准内积”构造, 这种“准内积”, 但它很好地保留了内积最为鲜明的的双线性、正定对称性(在两组互相对偶的基底下), 并且有很类似内积的表达式. 但这种“准内积”与内积最大的不同在于, 它不是两个相同空间中的元素的运算.

接下来我们回到微分流形.

定义 5.1.2 *设M是光滑流形, 则对于任意$x \in M$, 我们称切空间T_xM的对偶空间为M在x点处的**余切空间**, 记作T_x^*M. T_x^*M中的元素称为M在x点处的**余切向量**. 集合*

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

*称为M的**余切丛**, 一个映射$\alpha : M \to TM$的若满足$\alpha(x) \in T_x^*M$, 则称α是M上的一个**余切向量场**.*

可以看到, 余切向量场和余切丛的定义方式与切向量场和切丛的定义方式是类似的. 等我们之后介绍完余切映射和拉回映射之后, 会回过头来给出余切丛T^*M上光滑结构的定义.

此外, 在这里预告一下: 在介绍Lagrange力学时, 我们将Lagrange量L是TM上的函数, 而未来在介绍Hamilton力学时, 我们会看到, L经过Legendre变换后得到的Hamilton量H是一个T^*M上的函数.

定理 5.1.2 *设M是光滑流形, $x \in M$, $f: M \to \mathbb{R}$在x附近可微, 则映射*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f|_x : T_xM &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(f) \end{aligned}$$

*是一个余切向量, 称为f在x处的**微分**.*

证明: 任取$v, w \in T_xM$, $c \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{d}f|_x(v+cw) = (v+cw)(f) = v(f) + cw(f) = \mathrm{d}f|_x(v) + c\mathrm{d}f|_x(w),$$

因此$\mathrm{d}f|_x$是$T_xM \to \mathbb{R}$的线性映射, 故$\mathrm{d}f|_x \in T_x^*M$. □

推论 5.1.1 *设M是光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}$在M上可微, 则*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f : M &\to T^*M \\ x &\mapsto \mathrm{d}f|_x \end{aligned}$$

*是M上的余切向量场, 称为f的**微分**.*

假设$x \in M$被包含在一个坐标系$(U; q_i)$中, 我们知道

$$\left.\frac{\partial}{\partial q_1}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial q_2}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial q_n}\right|_x \tag{141}$$

构成T_xM的一组基底, 那么它的对偶基是什么呢? 事实上, 如果我们直接在U上考虑$q_1, \cdots, q_n$这n个$U \to \mathbb{R}$的坐标函数, 那么按照函数微分的定义, 我们有

$$\mathrm{d}q_i|_x\left(\left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_x\right) = \left.\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right|_x = \delta_{ij},$$

因此, 按照对偶基的等价定义式(137), 我们发现$\mathrm{d}q_1|_x, \cdots, \mathrm{d}q_n|_x$这$n$个$T_x^*M$中的向量恰好构成(141)这组$T_xM$的基底的对偶基. 对于任意一个$x$处的余切向量$p|_x$, 我们可以将其写作基底$\mathrm{d}q_1|_x, \cdots, \mathrm{d}q_n|_x$下的分量表达式

$$p|_x = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q_i|_x. \tag{142}$$

对于M上的任意余切向量场p, 我们任取M上的局部坐标系$(U; q_i)$, 然后我们就可以把p在任意$x \in U$处的取值$p|_x$写成(142)形式的展开, 然后由于x的任意性, 我们可以把"$|_x$"去掉, 得到

$$p = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q_i, \tag{143}$$

这里的$\mathrm{d}q_i$是U上的余切向量场, p_i是U上的函数, 而乘积$p_i\mathrm{d}q_i$是函数p_i和余切向量场$\mathrm{d}q_i$的逐点数乘. 我们称(143)为p在U上的**局部坐标表示**. 我们可以利用余切向量场定义余切向量场的光滑性.

定义 5.1.3 *如果光滑流形M上的余切向量场p满足: 对于任意一个M上的局部坐标系$(U;q_i)$, 在p在$(U;q_i)$上的局部坐标表示(143)中, 函数$p_1,\cdots,p_n$都是U上的光滑函数, 则称p是M上的光滑余切向量场.*

对于任意可微函数f, 我们有

$$\mathrm{d}f|_x=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}f|_x\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\Big|_x\right)\mathrm{d}q_i|_x=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial q_i}\Big|_x\mathrm{d}q_i|_x. \tag{144}$$

由于x的任意性, 我们可以把上式中所有的"$|_x$"去掉, 认为$\mathrm{d}f$, $\frac{\partial}{\partial q_i}$, $\frac{\partial f}{\partial q_i}$等都是是$U$上的向量场或函数, 并且函数与余切向量场的乘法看作是逐点相乘, 这样, 我们就得到了

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i. \tag{145}$$

(145)这个表达式应该会带给大家非常熟悉的感觉——这是多元微积分里面一个相当基础的公式(当然, 多元微积分中会把我们考虑的f是$\mathbb{R}^m$中的开集上定义的函数). 但《高等数学》或《数学分析》教材里只会告诉您, (145)中的$\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}q_i$等都是"形式记号", 代表f, q_i等的"一个无穷小变化量", 而不会严肃地讨论这些形式记号的严格数学意义. 数学界很多人没有接触过微分流形, 于是对$\mathrm{d}f$这些记号的认知便停留在了"形式记号"这个模糊的定义中, 从而为了数学上的严谨性, 会回避对(145)这种微分表达式的直接使用, 转而用诸如一阶Taylor展开

$$\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial q_i}\Delta q_i+o\big(|\Delta q|^2\big)$$

这样数学意义明确的表达式来代替(145). 当然, 物理学界就没有这么多顾忌了, 物理书籍和文章中会大量使用(145)这种微分表达式, 并熟练地基于这些表达式做非常复杂的理论推导. 这是数学和物理的重大分歧之一. 但有了利用余切向量定义的函数微分之后, 这个分歧便不再是不可调和的. 这也是笔者认为微分流形这个学科值得一学的原因——它是少有的一个愿意认真探讨什么叫$\mathrm{d}x$的学科.

为了进一步说明$\mathrm{d}f$和我们所熟知的"形式记号"$\mathrm{d}f$是的意义是一致的, 我们可以验证如下几个命题

定理 5.1.3 *设f,g是光滑流形M上的两个可微函数, 则*

$$\mathrm{d}(fg)=f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f, \tag{146}$$

证明: 对于任意$x\in M$, $v\in T_xM$, 有

$$\mathrm{d}(fg)|_x(v)=v(fg)|_x=v(g)f(x)+v(f)g(x)=f(x)\mathrm{d}g|_x(v)+g(x)\mathrm{d}f|_x(v),$$

由x及v的任意性, (146)成立. □

类似地, 可以验证:

- $\mathrm{d}(f+cg)=\mathrm{d}f+c\mathrm{d}g$, $c\in\mathbb{R}$

- $\mathrm{d}(f\,/\,g)=\frac{1}{g}\mathrm{d}f-\frac{f}{g^2}\mathrm{d}g$
- $\mathrm{d}(h(g))=h'(g)\mathrm{d}g$, 其中$h$是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的可微函数, h'是其导函数. $h(g)$严格来说应该写成$h\circ g$.

由此可见. $\mathrm{d}f$确实满足我们对微分的一切期待, 它使得物理学使用的大量微分运算表达式在数学上具有了明确的意义. 此外, $\mathrm{d}f$中的"d"本身可以看作M上的可微函数到M上的余切向量场的映射, 它有一个名字——外微分. 我们将在介绍微分形式时进一步介绍的其含义.

当然, 学东西不能学得太死性: 不能说今天我们定义了$\mathrm{d}f$是余切向量, 那以后在哪里看到$\mathrm{d}f$我都给它理解成余切向量. 比如统计物理里讲的"空间体元$[x,x+\mathrm{d}x]$"、随机微分方程中会出现的"$\mathrm{d}B(t)$"这个记号(其中$B(t)$是布朗运动——一个处处不可导的函数), 这时我们就不能将$\mathrm{d}(\cdots)$理解为余切向量, 而是需要给出其它数学上的诠释了.

利用(145), 我们可以证明: 如果f是M上的光滑函数, 那么$\mathrm{d}f$必是M上的光滑余切向量场. 特别地, 对于两个有交集的区图$(U;q_i)$和(V,r_i), 我们可以给出$U\cap V$上$\mathrm{d}q_i$和$\mathrm{d}r_i$的转化关系:

$$\mathrm{d}q_i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial q_i}{\partial r_j}\mathrm{d}r_j,\ \mathrm{d}r_j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial r_j}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i. \tag{147}$$

利用(147), 我们可以直接给出任意余切向量场p在不同坐标系下的转化关系: 假如p在$(U;q_i)$和(V,r_i)上的局部坐标表达式分别是

$$p=\sum_{i=1}^n p_i\mathrm{d}q_i=\sum_{i=1}^n\widetilde{p}_i\mathrm{d}r_i,$$

那么由(147), 我们就会知道

$$p=\sum_{i=1}^n p_i\mathrm{d}q_i=\sum_{i=1}^n p_i\sum_{j=1}^n\frac{\partial q_i}{\partial r_j}\mathrm{d}r_j=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial q_i}{\partial r_j}\right)\mathrm{d}r_j,$$

从而

$$\widetilde{p}_j=\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial q_i}{\partial r_j},\ j=1,\cdots,n, \tag{148}$$

类似地, 有

$$p_i=\sum_{j=1}^n\widetilde{p}_j\frac{\partial r_j}{\partial q_i},\ i=1,\cdots,n. \tag{149}$$

由于$\frac{\partial q_i}{\partial r_j},\frac{\partial r_j}{\partial q_i}$等都是$U\cap V$上的光滑函数, 从而$p_1,\cdots,p_n$光滑 $\Leftrightarrow$ $\widetilde{p}_1,\cdots,\widetilde{p}_n$光滑, 这就意味着余切向量场的光滑性的定义在流形光滑结构中不同的局部坐标系下是一致的, 从而余切向量场p的光滑性可以等价地定义为"对于流形上任意一点x, 存在一个包含x的局部坐标系$(U;q_i)$, 使得p在

$(U; q_i)$下的局部坐标表示中p_i都是光滑的". 在这一点上, 余切向量场和切向量场是完全相同的.

和在切向量场那一节末尾一样, 我们最后来整理一下我们会用到的与余切向量场相关的各种记号约定. 以下假定, M是流形, x是M中的点, f是$M \to \mathbb{R}$的光滑函数, X是M上的切向量场, p是M上的余切向量场,

1. $p(x)$表示p在x点处的取值, $p|_x$表示相同含义
2. $p(X), pX$表示余切向量场p逐点作用到切向量场X上的结果, 它是一个M上的函数, 即$pX : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p|_x(X|_x)$.
3. $(pX)(x)$表示pX在x处的取值, $p|_x(X)$, $p(x)(X)$, $p(X)(x)$, $(p(X))(x)$, $(pX)|_x$, $p|_x(X|_x)$, $p(x)(X(x))$等表示相同含义.
4. fp表示函数f与p的逐点数乘, 所得结果是一向量场, 即$fp : X \to T^*M, x \mapsto f(x)p(x)$.
5. 对于任意$v \in TM$, $p(v) = p|_{\pi(v)}(v)$, 其中$\pi(v)$是丛投影映射. 也就是说, 如果v是x点处的切向量, 则$p(v)$就是向量场p在x点处的取值(注意它是是一个T^*_xM中的元素)作用在v上的结果.

习题

习题 5.1.1 *求记$\mathbb{R}^3$中的直角坐标和球坐标的三个分量函数分别为x, y, z和r, θ, φ, 请利用*习题 3.1.3*的结果, 直接写出余切向量场$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$在球坐标系下的局部坐标表达式.*

5.2. 协变张量、协变张量场

为了介绍张量及张量场, 我们引入下一个线性代数中的概念: 多线性函数.

定义 5.2.1 *设V是一个线性空间, 如果一个k元函数$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k个V} \to \mathbb{R}$对于它的每一个分量都是线性的, 即对于任意$v_1, \cdots, v_k, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$, 有*

$$f(v_1, \cdots, v_i + \lambda v, \cdots, v_k) = f(v_1, \cdots, v_k) + \lambda f(v_1, \cdots, \underbrace{v}_{第i个分量}, \cdots, v_k), \tag{150}$$

*则称f是一个**k重线性函数**或**k阶协变张量**.*

接下来介绍一种通过一元线性函数构造多重线性函数的方法: 张量积. 设$f_1, \cdots, f_n$是n个V上的线性函数，那么我们定义它们的**张量积**为

$$\begin{aligned} f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : V \times V \times \cdots \times V &\to \mathbb{R} \\ v_1, v_2, \cdots, v_n &\mapsto f_1(v_1) f_2(v_2) \cdots f_n(v_n). \end{aligned} \tag{151}$$

容易验证, $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ 满足多重线性函数的定义. 此外，如果$f_1, \cdots, f_n$中有一些本身就是多重线性函数，那么张量积也可以类似地定义，比方说f是2重线性函数，g是线性函数，那么$f \oplus g$就是一个三重线性函数

$$\begin{aligned} f \oplus g : V \times V \times V &\to \mathbb{R} \\ v_1, v_2, v_3 &\mapsto f(v_1, v_2) g(v_3). \end{aligned} \tag{152}$$

和线性函数一样, 一个n维线性空间V上的k重线性函数全体(记作V_k^0, 从而$V^* = V_1^0$)按照逐点加法和数乘构成线性空间，我们选定V上的一组基$e_1, \cdots, e_n$, 由于f对其每一个分量都是线性的, 实际上函数f可以由其在这组基底的全体k元组上的作用唯一确定: 假如对于每一组$i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\}$, 我们都知道$f$作用在基底的$k$元组$(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$上的取值

$$f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = f_{i_1 i_2 \cdots i_k}, \tag{153}$$

则对于任意k个向量$v_1, \cdots, v_k$, 设它们在这组基下的分量表达式是

$$v_\alpha = \sum_{i=1}^n v_\alpha^i e_i, \quad \alpha = 1, \cdots, k$$

其中$v_\alpha^i \in \mathbb{R}(\alpha = 1, \cdots, k; i = 1, \cdots n$, 上标$i$在这里是指标而非指数), 则

$$\begin{aligned} f(v_1, \cdots, v_k) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n v_1^{i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n v_2^{i_2} e_{i_2}, \cdots, \sum_{i_k=1}^n v_k^{i_k} e_{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}) v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_k^{i_k} \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f_{i_1 i_2 \cdots i_k} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \cdots v_k^{i_k}. \end{aligned} \tag{154}$$

我们称由(153)确定的$f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$为f在基底$e_1, \cdots e_k$下的**系数**. 容易验证, 在选定线性空间V的一组基$e_1, \cdots e_n$后, V中的每一个k重线性函数都可以写成

$$f = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f_{i_1 i_2 \cdots i_k} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \tag{155}$$

的形式, 其中$e^1, \cdots, e^n$是$e_1, \cdots, e_n$的对偶基. (155)意味着意味着每一个$f \in V_k^0$可以由V_k^0中的向量组

$$\left\{ e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} : i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\} \right\} \tag{156}$$

线性表出，并且可以很容易地验证(156)中的元素所组成的向量组是线性无关的，因此(156)中的全体k阶协变张量构成了V_k^0的一组基底，从而有

$$\dim V_k^0 = n^k. \tag{157}$$

回到微分流形, 我们可以在一般的流形的切空间中定义张量.

定义 5.2.2 *设M是光滑流形, $x \in M$, 我们称$(T_x M)_k^0$中的元素, 即$T_x M$中的一个k重线性函数为M上的一个**k阶协变张量**, 如果一个映射*

$$\tau\colon M\to\bigcup_{x\in M}(T_xM)^0_k$$

满足$\forall x\in M,\ \tau(x)\in(T_xM)^0_k$*, 则称*$x$*是*$M$*上的一个**k阶协变张量场**.*

在上述定义下, 余切向量场即1阶协变张量场.

对于协变张量场τ, 任取M上的局部坐标系$(U;q_i)$, 由于V^0_k可以展开为形如(155)的形式, 对于任意$x\in U$, 我们可以把$\tau(x)$展开为

$$\tau(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\tau_{i_1,\cdots,i_k}(x)\mathrm{d}q_{i_1}|_x\otimes\mathrm{d}q_{i_2}|_x\otimes\ \cdots\ \otimes\mathrm{d}q_{i_n}|_x$$

的形式, 由x的任意性, 我们可以把"$|_x$"去掉, 变成

$$\tau=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\tau_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}q_{i_1}\otimes\mathrm{d}q_{i_2}\otimes\ \cdots\ \otimes\mathrm{d}q_{i_n}.\tag{158}$$

和在余切向量中一样, 我们把(158)称为τ在$(U;q_i)$下的局部坐标表示, 这里的$\tau_{i_1,\cdots,i_k}$是U上的函数. 如果$\tau_{i_1,\cdots,i_k}$对任意$i_1,\ \cdots,i_k$皆是光滑函数, 则称τ是M上的**光滑张量场**. 假如p在$(U;q_i)$和$(V;r_j)$上的局部坐标表达式分别是

$$\tau=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\tau_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}q_{i_1}\otimes\mathrm{d}q_{i_2}\otimes\ \cdots\ \otimes\mathrm{d}q_{i_n}=\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{n}\widetilde{\tau}_{j_1,\cdots,j_k}\mathrm{d}r_{j_1}\otimes\mathrm{d}r_{j_2}\otimes\ \cdots\ \otimes\mathrm{d}r_{j_n},$$

则利用(147), 我们会得到

$$\widetilde{\tau}_{j_1,\cdots,j_k}=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\tau_{i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial q_{i_k}}{\partial r_{j_1}}\cdots\frac{\partial q_{i_k}}{\partial r_{j_k}},\ \tau_{i_1,\cdots,i_k}=\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{n}\widetilde{\tau}_{j_1,\cdots,j_k}\frac{\partial r_{j_1}}{\partial q_{i_k}}\cdots\frac{\partial r_{j_k}}{\partial q_{i_k}}.\tag{159}$$

表达式(159)看上去很复杂, 但其推导过程无非是把(147)代入到两个局部坐标表达式里, 展开, 然后对比系数而已, 是一个体力活, 没有多少技术上的难度. 由(159)及坐标变换Jacobi矩阵系数的光滑性, $\tau_{i_1,\cdots,i_k}$对任意$i_1,\ \cdots,i_k$光滑 $\Leftrightarrow\widetilde{\tau}_{j_1,\cdots,j_k}$对任意$j_1,\ \cdots,j_k$光滑, 从而和在余切向量中一样, 张量场的光滑性与局部坐标选取无关.

假设M是流形, $x\in M$, τ是M上的k阶协变张量场, $X_1,\ \cdots X_k$是M上的切向量场, f是$M\to\mathbb{R}$的函数, 我们约定

1. $\tau(x)$表示τ在x点处取值, $\tau|_x,\tau_x$等表示相同含义.
2. $\tau(X_1,\ \cdots,X_k)$表示τ逐点作用在$X_1,\ \cdots,X_k$上所得的结果, 它是一个$M\to\mathbb{R}$的函数, 即$\tau(X_1,\ \cdots,X_k):M\to\mathbb{R},\ x\mapsto\tau|_x(X_1(x),\ \cdots,X_k(x))$,
3. $f\tau$代表函数f和张量τ的逐点数乘, 即$f\tau\colon M\to\cup_{x\in M}(T_xM)^0_k,\ x\mapsto f(x)\tau(x)$.

容易证明, 如果τ是张量场, 则对于任意$f,g:M\to\mathbb{R}$及任意$i=1,\ \cdots,k$, 有

$$\begin{aligned}\tau(X_1,\ \cdots,fX_i+gY,\ \cdots,X_k)=f\tau(X_1,\ \cdots,X_i,\ \cdots,X_k)\\ +g\tau(X_1,\ \cdots,Y,\ \cdots,X_k)\end{aligned}\tag{160}$$

也就是说, 张量场是“函数线性”的. (160)这个等式可以用来验证一个形如$\alpha(X_1,\ \cdots,X_k)$的“k个向量场 $\to$ 函数”的映射是否定义了张量(详见梅加强《流形与几何》 § 2.4).

可能有些朋友听说过张量有“协变(共变)”与“反变(逆变)”之说. 我们只介绍了协变张量, 而未介绍反变张量, 原因很简单: 用不到. 读者如果对这一部分内容感兴趣, 可以参考任何一本微分流形教材. 从协反变的角度来讲, Hamilton力学就是一个用两组协反变性质相反的变量描述力学系统的方法, 而常用的辛变换(正则变换)则更是一个把这些变量搅和成一团, 重新组合出两组新的协反变性质相反的变量的操作, 这与基于黎曼度量或伪黎曼度量的相对论、弹性力学等有着本质的不同. 因此在讨论Hamilton力学时, 协变、反变的概念是需要被淡化的, 也因此笔者在本文中刻意回避了具有强烈黎曼几何、张量分析色彩的上下角标表示、爱因斯坦求和约定等.

习题

习题 5.2.1 *(Legendre变换)Legendre变换在物理中经常用到(主要在经典力学和经典热力学中), 并被描述为一个“数学知识”, 但数学专业的同学大多数都没有接触过这个变换. 事实上只学过分析的数学专业同学是根本接受不了物理书中对Legendre变换的描述方式的. 本题我们用流形的语言把这种描述方式在数学上严格化.*

设流形M上有一局部坐标系$(U;q_1,\ \cdots,q_n)$. 考虑M上的光滑函数f, 则$\mathrm{d}f$在U上有局部坐标表达式

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\mathrm{d}q_n.\tag{161}$$

*记$\frac{\partial f}{\partial q_i}:=p_i$, 则利用*定理 5.1.3*, 我们有*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f&=p_1\mathrm{d}q_1+p_2\mathrm{d}q_2+\ \cdots\ +p_n\mathrm{d}q_n\\&=\mathrm{d}(p_1q_1)-q_1\mathrm{d}p_1+p_2\mathrm{d}q_2+\ \cdots\ +p_n\mathrm{d}q_n\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{d}(f-p_1q_1)=\ -q_1\mathrm{d}p_1+p_2\mathrm{d}q_2+\ \cdots\ +p_n\mathrm{d}q_n.\tag{162}$$

如果$p_1,q_2,\ \cdots,q_n$也能构成M的局部坐标系(这要求$\mathrm{d}p_1,\mathrm{d}q_2,\ \cdots,\mathrm{d}q_n$在$U$上处处线性无关), 则(162)给出了函数$f_1=f-p_1q_1$的微分在这个新的坐标系下的局部坐标表达式, 而同时我们有

$$\mathrm{d}f_1=\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\mathrm{d}p_1+\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial q_n}\mathrm{d}q_n.\tag{163}$$

由于$\mathrm{d}p_1,\mathrm{d}q_2,\ \cdots,\mathrm{d}q_n$处处线性无关, (162)和(163)中对应项系数相等, 于是我们得到

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1}=\ -q_1,\frac{\partial f_1}{\partial q_2}=p_2,\ \cdots,\frac{\partial f_1}{\partial q_n}=p_n.\tag{164}$$

上述这样一个将局部坐标和函数同时进行变换的过程

$$((U;q_1,q_2,\cdots,q_n);f)\mapsto((U;p_1,q_2,\cdots,q_n);f_1)$$

*称为函数f在局部坐标系$(U;q_i)$下对变量q_1进行的**Legendre变换**. 对于(162), 我们还可以继续对q_2,q_3等所有变量进行的Legendre变换, 最终得到*

$$\mathrm{d}\left(f-\sum_{i=1}^{n}p_iq_i\right)=-q_1\mathrm{d}p_1-q_2\mathrm{d}p_2-\cdots-q_n\mathrm{d}p_n. \tag{165}$$

当然, 如果我们想得到形如(164)的表达式, 则必须要求$(U;p_1,\cdots,p_n)$可以构成局部坐标系, 此时称

$$((U;q_1,q_2,\cdots,q_n);f)\mapsto\left((U;p_1,p_2,\cdots,p_n);f-\textstyle\sum_{i=1}^{n}p_iq_i\right)$$

*称为函数f在局部坐标系$(U;q_i)$下对变量$q_1,q_2,\cdots,q_n$进行的**Legendre变换**.*

***(a)**. 假设f具有局部坐标表达式$f(q_1,\cdots,q_n)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}q_iq_j$, 其中$a_{ij}$是常数, 使得$\{a_{ij}\}_{i,j}$构成正定对称矩阵, 求其对所有变量$q_1,\cdots,q_n$的Legendre变换.*

***(b)**. 求证: 假设f在$(U;q_1,q_2,\cdots,q_n)$下能够对q_1进行Legendre变换得到新的坐标系$(U;p_1,q_2,\cdots,q_n)$和新的函数f_1, 请证明f_1在$(U;p_1,q_2,\cdots,q_n)$下也能对p_1做Legendre变换,*
重新得到坐标系$(U;q_1,q_2,\cdots,q_n)$和函数f.

习题 5.2.2 *证明或证伪: 对于流形M上任意一个函数f, 任取M上的两个局部坐标系$(U;q_i)$和$(V;r_i)$, $(U\cap V\neq 0)$, 如果一个二阶协变向量场在$(U;q_i)$下的局部表达式是*
$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\mathrm{d}q_i\otimes\mathrm{d}q_j$, *则其在$(V;r_i)$中$U\cap V$部分的局部表达式必为*$\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial r_i\partial j_j}\mathrm{d}r_i\otimes\mathrm{d}r_j$.

5.3. 余切映射、余切丛的光滑结构、拉回映射、Lie导数

流形的间的光滑映射可以诱导出切空间之间的切映射, 那么能不能诱导出余切空间之间的"余切映射"呢? 答案是: 可以, 但事情没那么简单.

定义 5.3.1 *设$f:M\to N$是光滑流形间的光滑映射. α是N上的余切向量场, 则我们定义$f^*\alpha$是M上的这样一个向量场: 它使得对于每一个$v\in TM$, 有*

$$\big(f^*\alpha\big)(v)=\alpha(f_*v). \tag{166}$$

*这样定义的f^*称为映射f诱导的向量场α的**余切映射**或**拉回映射**.*

例 5.3.1 *定义$f=\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,(q_1,q_2,q_3)^\top\mapsto(q_1,q_2)^\top$. 则对于任意$\mathbb{R}^2$上的余切向量场*

$$p=a(q_1,q_2)\mathrm{d}q_1+b(q_1,q_2)\mathrm{d}q_2,$$

则

$$f^*p = \hat{a}(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_1 + \hat{b}(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_2 + \hat{c}(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_3, \tag{167}$$

其中

$$\hat{a}(q_1,q_2,q_3) = a(q_1,q_2),\ \hat{b}(q_1,q_2,q_3) = b(q_1,q_2),\ c(q_1,q_2,q_3) = 0, \tag{168}$$

或者说如果把$a(q_1,q_2)$和$b(q_1,q_2)$看作表达式中不含q_3的$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$的函数, 那么$f^*p$和$p$的表达式相同.

证明: 对于任意$x = (x_1,x_2,x_3)^\top$, $v = v_1\frac{\partial}{\partial q_1}|_x + v_2\frac{\partial}{\partial q_2}|_x + v_3\frac{\partial}{\partial q_3}|_x \in T_x\mathbb{R}$, 容易验证:

$$f_*v = v_1\frac{\partial}{\partial q_1}\Big|_{f(x)} + v_2\frac{\partial}{\partial q_2}\Big|_{f(x)},$$

因此

$$\begin{aligned}\big(f^*\alpha\big)(v) &= \alpha(f_*v)\\ &= (a(q_1,q_2)\mathrm{d}q_1 + b(q_1,q_2)\mathrm{d}q_2)\left(v_1\frac{\partial}{\partial q_1} + v_2\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\\ &= a(q_1,q_2)v_1 + b(q_1,q_2)v_2,\end{aligned}$$

从而(167)(168)成立. □

可以看到, 我们虽然无法定义f的逆映射, 但对于每一个$x \in \mathbb{R}^2$, 我们通过余切映射在$f^{-1}(\{x\}) \subseteq \mathbb{R}^3$上的每一个点处给出了一个余切向量. 事实上, 我们不应该把f^*理解成一个类似于f^{-1}的东西, 而应该把它理解为"对偶映射": 对于任意集合线性空间A, B及$f\colon A \to B$, 我们可以利用f定义一个$B^* \to A^*$的映射$f\colon B^* \to A^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$, 这种映射叫作由$f$诱导的**对偶映射**.

如果我们想把余切映射的定义局部化, 即把f^*看作$T^*N \to T^*M$的映射, 则会遇到两个可能的问题:

1. 如果f不是满射, 那么对$x \in N \setminus f(M)$, $\alpha \in T_x^*M$, 我们无法定义$f^*\alpha$中对应的
2. 如果f不是单射, 那么存在两点x_1, x_2使得$f(x_1) = f(x_2) = y \in N$, 那么对于$\alpha \in T_x^*N$, $f^*\alpha$会在x_1, x_2处给出两个不同的值.

在介绍切向量时, 我们提到过, f_*可以把单个切向量映射到单个切向量, 却不一定能构成切向量场到切向量场的映射; 此时在余切向量这里, 我们发现f^*恰恰相反, 可以构成余切向量场到余切向量场的映射, 却不一定能把单个余切向量映射到单个余切向量, 而且遇到的问题恰好和我们用f_*构造切向量场到切向量场的映射时的所遇到的问题是一样的! 正因如此, 当f是光滑同胚时, 这个问题就不会存在, 即f^*在f是光滑同胚时是可以构成$T^*N \to T^*M$的映射的, 并且这个映射是一一的.

接下来我们来给出流形T^*M上的光滑结构的构造方式.

首先, 对于$\mathbb{R}^n$上的任意一点$x=(x_1,\cdots,x_n)^\top$, x点处的余切向量α可以写成

$$\alpha=\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}x_i|_x \tag{169}$$

的形式, 像$\mathbb{R}^n$中的切向量一样, 我们可以把余切向量α等同于$\mathbb{R}^{2n}$中的一个点$(x_1,\cdots,x_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^\top$, 这样我们可以把$\mathbb{R}^n$的余切向量等同于$\mathbb{R}^{2n}$中的一个点.

定义 5.3.2 *设M是n维光滑流形, $\mathcal{A}$是其上光滑结构, 则定义余切丛T^*M上的光滑结构为由光滑图册*

$$\mathcal{A}^*=\left\{\left(\pi^{-1}(U),\left(\varphi^*\right)^{-1}\right):(U,\varphi)\in\mathcal{A}\right\}$$

极大化扩充而成的光滑结构, 其中π是$T^*M\to M$的丛投影映射, 即若$\alpha\in T_x^*M$, 则$\pi(\alpha)=x$.

在上述定义下, 对于M的任意一个局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$及任意一点$x\in U$, $\alpha\in T_x^*M$, 假设$\varphi(x)=(q_1,\cdots,q_n)$, α在$(U,\varphi;q_i)$下的表示为$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}q_i|_x$, 则$\left(\varphi^*\right)^{-1}(\alpha)$对应于是$\mathbb{R}^{2n}$中的点

$$(q_1,\cdots,q_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^\top,$$

因此T^*M作为流形的维数是$2n$, 即M的维数的2倍, 与TM维数相同. 此外, 在上述光滑结构的定义下, 如果f是光滑流形$M\to N$的光滑同胚, 那么f^*就构成$T^*N\to T^*M$的光滑同胚.

此外, 我们还可以问这样一个问题——TM和T^*M都是$2n$维光滑流形, 那它们之间是否存在光滑同胚? 答案是: 是的, 总是存在. 我们在这里介绍一大类这种光滑同胚: 纤维导数.

定义 5.3.3 *(纤维导数)设M是光滑流形, $L:TM\to\mathbb{R}$是光滑函数, 则我们对于任意$x\in M$, $v\in T_xM$ 定义*

$$\begin{aligned}\mathbb{F}L(v)=T_xM&\to\mathbb{R}\\ w&\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}L(v+sw)=\lim_{s\to 0}\frac{L(v+sw)-L(v)}{s}\end{aligned}$$

*这样定义的$\mathbb{F}L$是一个$TM\to T^*M$的映射, 称为由L诱导的$TM\to T^*M$的**纤维导数**.*

这里"纤维"一词来自于流形理论中"纤维丛"的概念. 对于切丛和余切丛, 所谓纤维, 即形如T_xM或T_x^*M ($x\in M$)的集合, 它们被称作x点发出的**纤维**. 在这一意义下, $\mathbb{F}L$这个映射是"保纤维"的, 即它把x点处发出的纤维也映到x点处发出的纤维, 因此得名"纤维导数". 可以证明, 如果对于任意$x\in M$, $L|_{T_xM}$作为$T_xM\to\mathbb{R}$的函数

1. 是凸函数
2. 存在一个最小值C, 并且
3. 对于每一个$D>C$, $\{x\in T_xM:L(x)\le D\}$是紧致的(有界的)

则 $\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚.

例 5.3.2 *设M是n维的, 并且L在任意M上的坐标系(U, q_i)诱导的切坐标$\left(\pi^{-1}(U), \varphi_*; q_i, u_i\right)$下, 有(下式中的$L$应理解为$L \circ \varphi_*^{-1}$)*

$$L(q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)u_i u_j - V(q_1, \cdots, q_n),$$

其中$\{g_{ij}\}_{ij}$构成一个$n \times n$的对称正定矩阵, 即L是一个TM上的Lagrange量, 那么对于任意一个$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \in TU$【$\varphi_* u = (q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)^\top$】, 在同一个切坐标下, $\mathbb{F}L(v)$将$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial q_i} \in TU$【$\varphi_* w = (q_1, \cdots, q_n, v_1, \cdots, v_n)^\top$】映射到

$$(\mathbb{F}L(u))(w) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} L(u + sw) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)u_i w_j,$$

从而在同一个坐标系(U, q_i)诱导的余切坐标$\left(\pi^{-1}(U), \varphi_*; q_i, p_i\right)$下, 有

$$\mathbb{F}L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)u_i \mathrm{d}p_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial u_j}\mathrm{d}p_j, \tag{170}$$

对应于$\mathbb{R}^{2n}$中的点$\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial L}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial u_n}\right)^\top$. 因此, 纤维导数$\mathbb{F}L$恰好就是我们用于Lagrange力学和Hamilton力学之间转化的Legendre变换. 由于L是光滑的, 上述

$$(q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)^\top \to \left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial L}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial u_n}\right)^\top$$

的变换是光滑映射. 此外, 注意到对于任意注意到对于任意$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}q_i \in T^*U$【$\varphi^* \alpha = (\ q_1, \cdots, q_n,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n)^\top$】, 假设$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial q_i} \in TU$【$\varphi_* u = (q_1, \cdots, q_n, u_1, \cdots, u_n)^\top$】使得$\mathbb{F}L(u) = \alpha$, 那么由(170), 我们就能得到

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)u_i = \alpha_j,$$

从而

$$u_i = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{-1}\right)_{ij}(q_1, \cdots, q_n)\alpha_j \tag{171}$$

其中g^{-1}是g的逆矩阵, 也是正定对称的. 再由$(U; q_i)$的任意性, 我们得到: 对每一个$x \in M$, $\alpha \in T_x^*M$, 我们也能找到唯一的$u \in T_{*x}M$使得$\alpha = \mathbb{F}L(u)$, 因此$\mathbb{F}L$是双射, 并且利用(171),

很容易证明$\mathbb{F}L^{-1}$也是光滑的, $\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚.

对于更一般的k阶协变张量场τ, 我们也可以定义拉回映射.

定义 5.3.4 *设τ是光滑流形N上的k阶协变张量场, $f\colon M \to N$是光滑流形间的光滑映射, 则我们定义$f^*\tau$为M上的k阶协变张量场, 使得对于任意$x \in M$及$v_1, \cdots, v_k \in T_xM$, 有*

$$f^*\tau(v_1, \cdots, v_k) = \tau(f_*v_1, \cdots, f_*v_k). \tag{172}$$

*这样定义的张量场在M上是唯一的. 这样定义的f^*称为由f诱导的N上的协变张量场到M上的协变张量场的**拉回映射**.*

定理 5.3.1 *设L, M, N分是光滑流形, $g\colon L \to M$, $f\colon M \to N$是光滑映射, σ, τ是N上的两个协变张量场, 则*

$$f^*(\sigma \oplus \tau) = f^*\sigma \oplus f^*\tau, \tag{173}$$

$$(g \circ f)^*(\sigma) = \big(f^* \circ g^*\big)(\sigma). \tag{174}$$

证明: 直接利用定义式(172)即可.

此外, 如果$f\colon M \to N$是光滑同胚, 则(172)中的$v_1, \cdots, v_k \in T_xM$可以换成$M$上的$k$个切向量场$X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, 得到

$$f^*\tau(X_1, \cdots, X_k) = \tau(f_*X_1, \cdots, f_*X_k). \tag{175}$$

注意上式中f_*X_i表示的是$x \mapsto (f_*X_i)|_x$而非$x \mapsto f_*(X_i|_x)$.

定义了余切映射之后, 我们可以像定义切向量场的Lie导数一样定义余切向量场的Lie导数

定义 5.3.5 *设M是光滑流形, τ是k阶协变张量场, X是M上一个完备的切向量场, 则定义*

$$\mathcal{L}_X\tau := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big(\mathrm{e}^{tX}\big)^*\tau. \tag{176}$$

定义式(176)本身不是很好用, 但是我们有一个

定理 5.3.2 *设M是光滑流形, τ是k阶协变张量场, Y是M上一个完备的切向量场, 则*

$$\mathcal{L}_Y\tau(X_1, \cdots, X_k) = Y(\tau(X_1, \cdots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \tau(X_1, \cdots, [Y, X_j], \cdots, X_k). \tag{177}$$

证明: 相对比较复杂, 涉及到了一些我们未曾提及过的技巧. 详见 John M. *Lee Introduction to Somooth Manifold* 中的 Proposition 12.32 及 Corollary 12.33. □

(177)可以帮助我们直接写出向量场Lie导数的局部表达式.

例 5.3.3 *α是一个余切向量场, 其在坐标系$(U; q_i)$下的表达式是$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}q_i$, 另有向量场$Y$在同*

一坐标系下的表达式是 $\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial q_i}$*, 试将*$\mathcal{L}_Y\alpha$*写成局部坐标表达式.*

解: 任取一向量场X, 设其在同一坐标系下的表达式是 $\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, 利用(177), 有

$$\mathcal{L}_Y\alpha(X) = Y(\alpha(X)) - \alpha([Y,X]),$$

写成局部坐标表达式

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y\alpha(X) &= \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathrm{d}q_j\left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\right) - \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathrm{d}q_k\right)\left(\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i} - X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\right)\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j\right) - \sum_{j=1}^n \alpha_j\left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i} - X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\right)\\
&= \sum_{k=1}^n Y_k\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_k} X_j + \alpha_j \frac{\partial X_j}{\partial q_k}\right) - \sum_{j=1}^n \alpha_j\left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i} - X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\right)\\
&= \sum_{k=1}^n Y_k\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_k} X_j\right) - \sum_{j=1}^n \alpha_j\left(\sum_{i=1}^n - X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j} + \alpha_j \frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\right) X_k
\end{aligned}$$

这里用到了$[Y,X]$的局部表达式(43), 由此我们得到$\mathcal{L}_Y\alpha$的局部表达式

$$\mathcal{L}_Y\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j} + \alpha_j \frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\right)\mathrm{d}q_k. \tag{178}$$

和切向量场一样, 张量场的Lie导数也表示张量场沿着向量场"平移"时的"变化速率". 读者可能至此仍不能完全理解Lie导数的含义, 此时不妨先记住我们有(177)(178)这样的公式可以利用, 日后在实践中再逐步加深对这些定义的理解.

此外, 我们做出如下约定: 如果M是N的光滑嵌入子流形, τ是x处的一个k阶协变张量场, 则τ也可被认为是T_x^*M中的张量场 $\tau = (\mathrm{id})^*\tau$, 其中$\mathrm{id}: M \to N$是$M \to N$的恒同嵌入映射. 这样, 在讨论子流形时我们可以比较方便地定义全局的张量场: 比方说在球面
$S^2 = \left\{(x,y,z)^\top : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ 上定义形如$a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$这样的余切向量, 或
$\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ 这样的协变张量场, 它们虽然是$\mathbb{R}^3$上的张量, 但它们作用在TS^2中的元素上的结果应该是没有任何歧义的.

习题

习题 5.3.1 *在*$\mathbb{R}^3$*(三个坐标函数是*x,y,z*)的子流形*$S^2 = \left\{(x,y,z)^\top : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ *上*

建立球坐标系$(U;\theta,\varphi)$, 其中U是S^2在$\mathbb{R}^3$第一卦限的部分, $\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$. 求张量场$\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ (作为S^2上的张量场)在$(U;\theta,\varphi)$中的局部表达式.

5.4. Riemann 度量及其应用

Riemann度量是流形上的一类二阶张量场, 它在流形的每一点出的切空间上定义了一个*内积*函数.

定义 5.4.1 *设M是光滑流形, g是M上的一个二阶张量场, 如果对于任意$x\in M$, $g|_{T_xM}$是T_xM这个线性空间上的一个内积函数, 即*
1. 对于任意$v\in T_xM\setminus\{0\}$, 有$g(x,x)>0$,
2. 对于任意$v,w\in T_xM$, 有$g(x,v)=g(v,x)$
则称g是流形M上的一个Riemann度量.

例 5.4.1 *($\mathbb{R}^n$上的标准度量) 设$\mathbb{R}^n$上的n个坐标函数为$x_1,\cdots,x_n$, 则*

$$g=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_i$$

*称为$\mathbb{R}^n$上的**标准度量**. 容易验证, 在该度量下, 对于任何两个向量$v=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$和$w=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$我们有*

$$g(v,w)=\sum_{i=1}^n v_iw_i.$$

可以看到, 这就是在$\mathbb{R}^n$的每一点的切空间(仍为$\mathbb{R}^n$)处赋予我们最为熟悉的内积函数.

例 5.4.2 *($\mathbb{R}^{Nd}$上的质量度量) 考虑自由无约束N质点系统在d维空间中运动, 设第i个质点的质量是m_i, 我们定义*

$$m=\sum_{i=1}^N m_i\sum_{j=1}^d x_{i,j}\otimes x_{i,j}$$

*为$\mathbb{R}^{Nd}$这个构型空间上的**质量度量**或**动能度量**, 对于任意$x\in\mathbb{R}^{Nd}$及$v\in T_x\mathbb{R}^{Nd}$, 容易看到,*

$$T(v)=\frac{1}{2}m(v,v)$$

恰好对应于速度相空间中v点对应的状态下系统的动能.

按照Whitney嵌入定理, 所有光滑流形M都可以光滑嵌入到某个维数足够高的欧氏空间$\mathbb{R}^m$中, 假设这个嵌入映射是$\varphi:M\to\mathbb{R}^m$, 则φ^*g一定是M上的Riemann度量, 其中g是$\mathbb{R}^m$上的标准度量

(这一点可以直接利用定义验证), 因此所有有光滑流形上都有Riemann度量[9].

在我们研究Lagrange力学时所涉及的位形空间大都是某个$\mathbb{R}^{Nd}$的光滑嵌入子流形M, 此时按照我们上一节的约定, $\mathbb{R}^{Nd}$上的质量度量m可以直接通过恒同映射$\mathrm{id}: M \to \mathbb{R}^{Nd}$的拉回$\mathrm{id}^* m$定义在$M$上, 因此$M$也天然地定义一个质量度量$m$, 并且$T(v) = \frac{1}{2}m(v,v): TM \to \mathbb{R}$也表示$v$状态下系统的动能. 当然, 即使是不能直接表述为带约束N质点系统的力学系统(比如刚体系统), 我们也仍然可以在其位形空间上定义质量度量m, 使得$\frac{1}{2}m(v,v)$表示动能.

定理 5.4.1 *M是n维光滑流形, g是M上的Riemann度量, 则对于任意M上的局部坐标系$(U, \varphi; q_i)$设g在该区图上的表示是*

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)\mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}q_j,$$

则对于任意$(q_1, \cdots, q_n) \in \varphi(U)$, $\{g_{ij}(q_1, \cdots, q_n)\}_{ij}$构成的$n \times n$矩阵是正定对称矩阵.

证明: 直接利用定义 5.4.1即可. □

接下来我们来考虑一个在Riemann几何中的一个非常有趣的问题: 测地线问题.

定义 5.4.2 *M是n维光滑流形, g是M上的Riemann度量, 对于$a, b \in M$, 若M上一条连接a, b两点的曲线$\gamma: [t_0, t_1] \to M$, 使得*

$$\ell[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\mathrm{d}t \tag{179}$$

最小, 或者

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t \tag{180}$$

*最小, 则称γ是链接a, b的**短程线**或**测地线**.*

首先, $\ell[\gamma]$和$L[\gamma]$的最小化显然是两个不同的问题, 从而我首先要说明他们两个的解是相同的. 为了论证这一点, 首先我们定义曲线的"重新参数化".

定义 5.4.3 *(曲线的重新参数化)假设$\gamma: [t_0, t_1] \to M$是M上的曲线, 若函数*
$h: [t_0, t_1] \to [t_0, t_1]$满足:
1. $h(t_0) = t_0, h(t_1) = t_1$, 并且$h$在$[t_0, t_1]$单调递增
2. h及h^{-1}都在(t_0, t_1)上光滑(需要时也可以放松为"可微"、"二阶可微"等)
*则$\gamma \circ h: [t_0, t_1] \to M$也是上的曲线, 称为$\gamma$的一个**重新参数化**.*

曲线重新参数化后, 其像集不变, 即$\gamma([t_0, t_1]) = \gamma(h([t_0, t_1]))$. 此外, 我们还可以证明$\ell[\gamma]$在重

[9] 读者如果参阅过更多微分流形教材, 会发现它们都是用的所谓"单位分解定理"来证明Riemann度量的存在性, 这是因为它们讲究"内蕴", 并且严格地证明Riemann度量的存在性比严格地证明嵌入定理容易得多. 笔者这样的解释方式主要是考虑到直观性.

参数化后不变. 事实上:

$$\begin{aligned}\ell[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g\big((\gamma\circ h)^{\cdot}(t),(\gamma\circ h)^{\cdot}(t)\big)}\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(h(t))\dot h(t),\dot\gamma(h(t))\dot h(t))}\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(h(t)),\dot\gamma(h(t)))}\dot h(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(h(t)),\dot\gamma(h(t)))}\mathrm{d}h(t)\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))}\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中我们用到了$g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$是双线性函数及$\dot h(t)>0$这两个事实. 由Cauchy-Schwartz不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\ell[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\mathrm{d}t \le \sqrt{\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{t_0}^{t_1}g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\mathrm{d}t}\\ &= \sqrt{t_1-t_0}\sqrt{\int_{t_0}^{t_1}g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\mathrm{d}t} = \sqrt{t_1-t_0}\cdot\sqrt{L[\gamma]}.\end{aligned}\tag{181}$$

(181)告诉我们, 如果$\ell[\gamma]$的最小值是$\ell_{\min}$, 那么$L[\gamma]$的最小值$L_{\min}$不会超过$\frac{(\ell[\gamma])^2}{t_1-t_0}$. 另外, 按照Cauchy-Schwartz不等式的取等条件, (181)中的等号取到的条件是: $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))$在任何$t\in(t_0,t_1)$处的值是相等的. 为了做到这一点, 我们可以对$\gamma$进行重参数化, 变成$\gamma\circ h$, 其中$h$是微分方程初值问题

$$\dot h(t)\sqrt{g(\dot\gamma(h(t)),\dot\gamma(h(t)))} = \frac{\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))}\mathrm{d}\tau}{t_1-t_0},\ h(t_0)=t_0\tag{182}$$

的解, 则容易证明, $h(t_1)=t_1$, 并有

$$g\big((\gamma\circ h)^{\cdot}(\tau),(\gamma\circ h)^{\cdot}(\tau)\big) = \left(\frac{\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g(\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))}\mathrm{d}\tau}{t_1-t_0}\right)^2 = \text{与}t\text{无关的常数},\tag{183}$$

因此此时有$L[\gamma\circ h]=\frac{(\ell[\gamma\circ h])^2}{t_1-t_0}$, 此时如果$\ell[\gamma]=\ell_{\min}$, 则

$L[\gamma\circ h]=\frac{(\ell[\gamma\circ h])^2}{t_1-t_0}=\frac{(\ell[\gamma])^2}{t_1-t_0}=\frac{(\ell_{\min})^2}{t_1-t_0}$, 故

$$L_{\min}=\frac{(\ell_{\min})^2}{t_1-t_0},$$

并且$L[\gamma]$取得最小值 $\Leftrightarrow$ $\ell[\gamma]$取得最小值, 且$g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))$是常数. 这样, 我们可以只研究(180)中最小化$L[\gamma]$的问题.

事实上, 最小化$L[\gamma]$的问题是我们早已熟知的变分问题. 由于该问题是一个非常经典的Riemann流形问题, 故接下来我们采用微分几何中常用的上下标表示, 并使用Einstein求和约定(见附录). 注意到$T(v):=g(v,v)$是一个$TM\to\mathbb{R}$的函数, 并且

$$L[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}T(\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t, \tag{184}$$

假设有一个局部坐标系$\left(U,\varphi;q^i\right)$, 使得$\gamma([t_0,t_1])\subseteq U$, 那么此时在该坐标系诱导的切坐标系下, T具有局部表达式

$$\left(T\circ\varphi_*^{-1}\right)\left(q^1,\ \cdots,q^n,\dot{q}^1,\ \cdots,\dot{q}^n\right)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\left(q^1,\ \cdots,q^n\right)\dot{q}^i\dot{q}^j, \tag{185}$$

此时我们直接把$T\circ\varphi_*^{-1}$记作T, 并记$\varphi\circ\gamma(t)$的第i个分量及其时间导数分别为$q^i(t)$和$\dot{q}^i(t)$, 那么使得(184)中的$L[\gamma]$最小的那个γ必然满足Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^k}\right)=\frac{\partial T}{\partial q^k},\ k=1,2,\ \cdots,n,$$

我们将(185)代入Lagrange方程等号两侧: 左侧为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^k}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}\frac{\partial\dot{q}^i}{\partial\dot{q}^k}\dot{q}^j+g_{ij}\dot{q}^i\frac{\partial\dot{q}^j}{\partial\dot{q}^k}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}\delta_k^i\dot{q}^j+g_{ij}\dot{q}^i\delta_k^j\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{kj}\dot{q}^j+g_{ik}\dot{q}^i\right)\\&=\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^l}\dot{q}^l\dot{q}^j+g_{kj}\ddot{q}^j+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}\dot{q}^l\dot{q}^i+g_{ik}\ddot{q}^i\\&=\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i+2g_{kj}\ddot{q}^j,\end{aligned}$$

右侧为

$$\frac{\partial T}{\partial q^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j,$$

其中$\delta_k^j=\begin{cases}1 & j=k\\0 & j\neq k\end{cases}$, 从而

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i+2g_{kj}\ddot{q}^j=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j$$

整理得到

$$2g_{kj}\ddot{q}^j+\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j=0 \tag{186}$$

(186) 两边同乘 $g^{lk}\ /\ 2$ (g^{lk}是g_{lk}) 的逆矩阵, 即 $g^{lk}g_{kj}=\delta_j^l$ 成立) 得到

$$g^{lk}g_{kj}\ddot{q}^j+g^{lk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j=0$$

即

$$\ddot{q}^l+\frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j=0$$

记

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right) \tag{187}$$

则(187)可写作

$$\ddot{q}^l+\Gamma_{ij}^l\dot{q}^i\dot{q}^j=0 \tag{188}$$

(188)被称为**测地线方程**, 其中系数Γ_{ij}^l被称为Riemann流形 M 在局部坐标系 $\left(U,\varphi;q^1,\ \cdots,q^n\right)$ 下的 **Christoffel 系数**, 它在Riemann几何有着相当重要的地位.

此外, 在经典力学背景下, 我们可以把g换成质量度量m, 此时T可以看作是一个只有动能部分的Lagrange量, 从而(188)可以看作系统在位形空间中只受约束力作用时的"约束惯性运动"的方程. 一个简单的例子是: 若g是$\mathbb{R}^n$上的标准度量, 从而$g_{ij}=\delta_{ij}$, 这是Γ_{ij}^l全部都是0, 这就导致(188)退化为

$$\ddot{q}^l=0,$$

这对应于一个加速度为0的匀速直线运动.

关于Riemann度量, 我们暂时先聊这么多, 它所包含的内容是极其丰富的, 构成了现代几何学中最大的一个分支——微分几何学, 如果展开讲的话就又是另外一个故事了. 感兴趣的朋友可以去看梅加强《流形与几何》中第三章的内容.

习题

习题 5.4.1 *$\mathbb{R}^3$中通常的坐标系是直角坐标系(坐标函数x,y,z), 柱坐标系(坐标函数ρ,ϕ,z) 和球坐标系(坐标函数r,θ,φ). 求直角坐标系下的标准Riemann度量*
$\mathrm{d}x\oplus\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\oplus\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\oplus\mathrm{d}z$ *在柱坐标系和球坐标系下的表达式.*

习题 5.4.2 *$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是一个光滑函数. 考虑$\mathbb{R}^3$的光滑流形 $G_f=\left\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$, 其有一个坐标系$(G_f;\xi,\eta)$, 其中$\xi$和$\eta$分别是$\mathbb{R}^3$中向$x$轴和$y$轴的投影函数, 即*

$$\begin{cases}\xi:G_f\to\mathbb{R},\ (x,y,f(x,y))\mapsto x\\ \eta:G_f\to\mathbb{R},\ (x,y,f(x,y))\mapsto y.\end{cases}$$

求$\mathbb{R}^3$中标准度量$\mathrm{d}x \oplus \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \oplus \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \oplus \mathrm{d}z$ (限制在G_f上)在该坐标系下的表达式.

5.5. 微分形式

向量空间中常见的运算, 除了内积以外, 还有一个"外积", 它在$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^3$中帮助我们定义了"有向体积": 在$\mathbb{R}^2$中, 我们可以计算两个向量x, y张成的平行四边形的有向面积$x \times y$; 在$\mathbb{R}^3$中, 我们可以计算三个向量x, y, z张成的平行六面体的体积$x \cdot (y \times z)$. 这种运算的特点是: 交换其中任意两个参与运算的元素(向量), 计算结果变成原来的负值. 而微分形式则是这种运算在更高维空间上的拓展.

所谓微分形式, 是类特殊的协变张量场: 它具有反对称性, 即当它们作为多线性函数时, 任意交换两个变量的位置, 计算出来的函数值会变成自身的负值.

定义 5.5.1 *若光滑流形M上的k阶协变张量场ω是**反对称**的, 即其满足*

$$\omega(\cdots, X_i, \cdots, X_j, \cdots) = -\omega(\cdots, X_j, \cdots, X_i, \cdots) \tag{189}$$

*对任意切向量场$X_1, \cdots, X_k$及$1 \leq i < j \leq k$成立, 则称ω是M上的一个**k阶微分形式**或**k-形式**. 特别地, 1-形式即M上的余切向量场. 全体k-形式构成的集合记作$A^k(M)$*

此外, 我们还规定: M上的全体光滑函数为0-形式, 即$A^0(M) = C^\infty(M)$.

例 5.5.1 *$\mathbb{R}^2$上的张量场$\omega = \mathrm{d}x_1 \oplus \mathrm{d}x_2 - \mathrm{d}x_2 \oplus \mathrm{d}x_1$是$\mathbb{R}^2$上的一个2-形式, 其中$x_1$和$x_2$分别是$\mathbb{R}^2$上的两个坐标分量函数. 而$g = \mathrm{d}x_1 \oplus \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 \oplus \mathrm{d}x_2$则不是$\mathbb{R}^2$上的微分形式.*

定义 5.5.2 *(反对称化)设τ是光滑流形M上的k阶协变张量场, 则我们称*

$$\mathcal{A}[\tau](X_1, X_2, \cdots, X_k) = \sum_{\sigma \in S(k)} (-1)^{|\sigma|} \tau(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k)})$$

*为τ的**反对称化**, 其中$S(k)$指k阶对称群, 即全体$\{1, \cdots, k\} \to \{1, \cdots, k\}$的双射组成的集合; 而*

$$|\sigma| = \begin{cases} 0 & \sigma\text{是偶排列} \\ 1 & \sigma\text{是奇排列} \end{cases}$$

关于"偶排列"和"奇排列"的概念, 读者应该在学习行列式定义时接触过, 即如果一个一个全排列可以表示为奇数个对换(即"交换两个数的位置")的复合, 则称之为"奇排列"; 反之, 则其必能表示成偶数个对换, 此时称之为"偶排列". 读者可以翻看自己使用过的线性代数课本中介绍行列式的章节来复习这两个概念, 在此我们不多赘述. 但我们还是在这里指出一个有用的事实: 即两个全排列$\sigma, \pi \in S(k)$的复合$\sigma \circ \pi$的奇偶性取决于σ与π的奇偶性是否相同, 相同则为偶排列, 不同则为奇排列. 这样, 我们会得到这样一个等式:

$$(-1)^{|\sigma\circ\pi|}=(-1)^{|\sigma|+|\pi|}=(-1)^{|\sigma|}(-1)^{|\pi|}. \tag{190}$$

由(190), 我们还立即可得

$$(-1)^{|\pi^{-1}|}=(-1)^{|\pi|}. \tag{191}$$

定理 5.5.1 *反对称化后的张量都是反对称的. 即对于光滑流形M上的k阶协变张量场τ, $\mathcal{A}[\tau]$都是M上的k-形式.*

证明: 我们记对换i,j的全排列为τ, 则τ是一个奇排列, 并有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}[\tau](\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots)=\mathcal{A}[\tau](X_{\tau(1)},X_{\tau(2)},\cdots,X_{\tau(k)})\\
=&\sum_{\sigma\in S(k)}(-1)^{|\sigma|}\tau(X_{\sigma\circ\tau(1)},X_{\sigma\circ\tau(2)},\cdots,X_{\sigma\circ\tau(k)})\\
=&\sum_{\sigma\in S(k)}(-1)^{|\sigma\circ\tau|}(-1)^{|\tau^{-1}|}\tau(X_{\sigma\circ\tau(1)},X_{\sigma\circ\tau(2)},\cdots,X_{\sigma\circ\tau(k)})\\
=&(-1)^{|\tau^{-1}|}\sum_{\sigma\circ\tau\in S(k)}(-1)^{|\sigma\circ\tau|}\tau(X_{\sigma\circ\tau(1)},X_{\sigma\circ\tau(2)},\cdots,X_{\sigma\circ\tau(k)})\\
=&-\mathcal{A}[\tau](X_1,\cdots,X_n),
\end{aligned}$$

因此$\mathcal{A}[\tau]$是反对称的. 上式的第2~3行里, 我们使用了(190); 第3~4行里, 我们使用了群的一个性质: 即对任意$a\in G$, $\{ag:g\in G\}=G$; 第4~5行里, 我们使用了τ是奇排列这个事实. □

定义 5.5.3 *(楔积) 设ω_1,ω_2是分别光滑流形M上两个微分形式, 则定义*

$$\omega_1\wedge\omega_2=\mathcal{A}[\omega_1\oplus\omega_2] \tag{192}$$

*为ω_1和ω_2的**楔积**.*

例 5.5.2 *$\mathbb{R}^2$记上的两个坐标分量函数分别为x_1和x_2, 则*

$$\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=\mathcal{A}[\mathrm{d}x_1\oplus\mathrm{d}x_2]=\mathrm{d}x_1\oplus\mathrm{d}x_2-\mathrm{d}x_2\oplus\mathrm{d}x_1.$$

即对于任意两个切向量场$u=u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}$和$v=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, 有

$$(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)(u,v)=u_1v_2-u_2v_1=\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}. \tag{193}$$

定理 5.5.2 *对流形上的任意微分形式$\omega_1,\omega_2,\omega_3$, 楔积满足:*

(1). 斜交换律: $\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{kl}\omega_2\wedge\omega_1$, 其中$k,l$分别为$\omega_1$和$\omega_2$的阶数

(2). 结合律: $(\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)$, 从而$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3$这样的表达式是没有歧义的

(3). 对加法的分配律: $\begin{cases}\omega_1\wedge(\omega_2+\omega_3)=\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3\\(\omega_1+\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge\omega_3+\omega_2\wedge\omega_3\end{cases}$

(4). 对流形上的任意函数f, 有$f\cdot(\omega_1\wedge\omega_2)=(f\omega_1)\wedge\omega_2=\omega_1\wedge(f\omega_2)$

上述定理中各式均可利用定义式(192)来证明, 难点主要在斜交换律和结合律的证明上, 需要对全排列有相对比较深入的了解, 剩下两个都比较容易验证. 证明过程详见梅加强《流形与几何》第二章第2.5节, 感兴趣的读者可以查阅, 否则也可以先只记下结论.

推论 5.5.1 *若ω的阶数是奇数, 则$\omega\wedge\omega=0$. 进一步地, 假设$\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$是流形$M$上的余切向量场(1-形式), 若在存在$i\neq j$使得$\alpha_i=\alpha_j$, 则*

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ \cdots\ \wedge\alpha_n\equiv 0. \tag{194}$$

证明: 只需运用斜交换律即可, 特别地, 我们需要注意对于(194)左侧这种形式, 我们有

$$\cdots\wedge\alpha_i\wedge\ \cdots\ \wedge\alpha_j\wedge\ \cdots=\ -(\ \cdots\wedge\alpha_j\wedge\ \cdots\ \wedge\alpha_i\wedge\ \cdots),$$

从而由$\alpha_i=\alpha_j$我们立刻可得(194). □

接下来我们来考虑一下全体k-形式所构成的空间具有怎样的性质.

我们曾指出, 如果τ是n维光滑流形M上的一个k-形式, 则ω在M的一个局部坐标系$(U;q_i)$下必有形如(158)的局部坐标表达式. 类似地可以证明, 如果ω是n维光滑流形M上的一个k-形式, 则ω在M的一个局部坐标系$(U;q_i)$下必有形如

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\omega_{i_1i_2\cdots i_k}\mathrm{d}q_{i_1}\wedge\mathrm{d}q_{i_2}\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_{i_k} \tag{195}$$

的局部表达式, 其中$\omega_{i_1i_2\cdots i_k}$等是$U$上的函数, 并且这一表达式是唯一的. 当然, 上式中如果我们不写$i_1<i_2<\cdots<i_k$这个条件, 那么这个表达式就不一定是唯一的了, 比如说$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 我们就可以给它写成$-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$, $\frac{1}{2}(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x)$ 等多种形式.

注意(195)中的求和号下的指标是"$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$", 这意味着对于$k$-形式, 这个和式有$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$项. 特别地, $k=n$时, 这个和式只有一项$\omega_{12\cdots n}\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}q_2\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_n$, 而对于$k\geq n$, 这个和式中就没有任何项. 事实上, 如果$k>n$, 则$i_1,\ \cdots,i_k$中必有重复, 此时利用推论 5.5.1, 我们知道$\mathrm{d}q_{i_1}\wedge\mathrm{d}q_{i_2}\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_{i_k}=0$, 从而阶数大于$n$的微分形式都是零张量.

接下来我们给出一个实际计算中很有用的结论, 它算是(193)这个结果的一个推广.

定理 5.5.3 *$\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$是光滑流形$M$上的余切向量场(1-形式), $X_1,\ \cdots,X_n$是M上的切向量场, 则*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n(X_1, \cdots, X_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1(X_1) & \alpha_2(X_1) & \cdots & \alpha_n(X_1) \\ \alpha_1(X_2) & \alpha_2(X_2) & \cdots & \alpha_n(X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1(X_n) & \alpha_2(X_n) & \cdots & \alpha_n(X_n) \end{vmatrix}. \tag{196}$$

证明: 按照定义, 我么有

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n(X_1, \cdots, X_n) = \mathcal{A}[\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n](X_1, \cdots, X_n) \\ =& \sum_{\sigma \in S(n)} \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)}) \\ =& \sum_{\sigma \in S(n)} \alpha_1(X_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_n(X_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

而按照行列式的定义, 上式最后一行就恰好是(196)右手侧的那个行列式.

最后我们来考虑n维光滑流形上的n-形式.

定义 5.5.4 *设M是n维光滑流形, 若M上存在一个n-形式ω, 使得对于任意$x \in M$, $\omega|_x \neq 0$(即ω处处非零), 则称M是**可定向的**, 并称ω是M上的一个**体积形式**.*

定理 5.5.4 *设M是n维光滑流形是可定向的 $\Leftrightarrow$ M上有一个光滑图册$\mathscr{A}$, 使得对任意(U, φ), $(V, \psi) \in \mathscr{A}$, 在$U \cap V \neq 0$时, $\varphi \circ \psi^{-1}$及$\psi \circ \varphi^{-1}$ 的Jacobi行列式总是正数.*

并不是所有的光滑流形都有处处非0的体积形式, 一个典型的不可定向流形的例子是著名的莫比乌斯环(图 5.5.17). 但我们之后最为关注的一类流形——辛流形则总是可定向的.

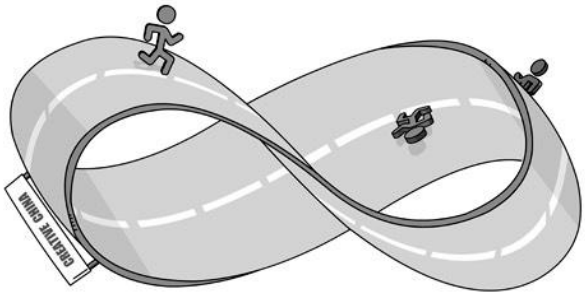


图 5.5.17: 莫比乌斯环

定理 5.5.5 *设M是n维可定向光滑流形ω是其上一个体积形式, 则对于M上的任意n-形式ω', 存在唯一一个M上的光滑函数f, 使得$\omega' = f\omega$, 并且如果ω'也是M上的体积形式, 那么这个f便是一个处处非零的函数.*

证明: 我们将f取为这样一个函数: 任取M上一局部坐标系$(U; q_i)$, 设ω和ω'在$(U; q_i)$下的局部坐标表示分别为

$$\omega_{12\cdots n}(q_1, \cdots, q_n)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n, \ \omega'_{12\cdots n}(q_1, \cdots, q_n)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n, \tag{197}$$

则f在该坐标系下的局部坐标表达式是

$$f(q_1,\ \cdots,q_n)=\frac{\omega'_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)}{\omega_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)}. \tag{198}$$

接下来我们来证明f是well-defined的, 即其在不同局部坐标下的定义不冲突. 事实上, 对于两个不同的局部坐标系$(U;q_i)$和$\left(\widetilde{U};\widetilde{q}_i\right)$而言, 如果$U\cap\widetilde{U}\neq 0$, ω和ω'在$\left(\widetilde{U};\widetilde{q}_i\right)$的局部坐标表达式是

$$\widetilde{\omega}_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\wedge\mathrm{d}\widetilde{q}_2\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}\widetilde{q}_n,\ \widetilde{\omega}'_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\wedge\mathrm{d}\widetilde{q}_2\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}\widetilde{q}_n, \tag{199}$$

将我们熟知的表达式

$$\mathrm{d}\widetilde{q}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{q}_i}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j,\ \mathrm{d}q_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_j}{\partial\widetilde{q}_i}\mathrm{d}\widetilde{q}_i$$

代入(198)(199)并对比系数, 我们就能得到

$$\omega'_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)=\det\left(\frac{\partial\widetilde{q}_j}{\partial q_i}\right)_{i,j}\widetilde{\omega}'_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right), \tag{200}$$

$$\omega_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)=\det\left(\frac{\partial q_j}{\partial\widetilde{q}_i}\right)_{i,j}\widetilde{\omega}_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right), \tag{201}$$

从而

$$\frac{\widetilde{\omega}'_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)}{\widetilde{\omega}_{12\cdots n}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)}=\frac{\omega'_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)}{\omega_{12\cdots n}(q_1,\ \cdots,q_n)},$$

因此f是well-defined的.

最后, 如果$\omega'=f\omega$也是体积形式, 那么它处处非0, 从而f也不可能在任何一点处为0. 证毕. □

为了方便表述, 我们不妨把上述函数称f记作ω'/ω. 由于ω'/ω在流形上处处非0且光滑, 它要么处处为正(即"$\omega'/\omega>0$"), 要么处处为负(即"$\omega'/\omega>0$"), 这两种情形分别称为ω与ω'**定向相同**和**定向相反**. 不难证明, 全体体积形式的集合可以分割成两个等价类, 同一等价类内的体积形式定向相同, 不同等价类的两个体积形式定向相反.

定义 5.5.5 *如果M是可定向的光滑流形, 我们在M上的全体体积形式按定向相同的两个等价类中选取一个作为M的**正定向**. 选取了正定向的流形称为**定向光滑流形**. 在M的正定向中选取一个体积形式ω, 则对于M上的局部坐标系$(U;q_i)$, 如果*

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_1},\ \cdots,\frac{\partial}{\partial q_n}\right)>0,$$

*则称$(U;q_i)$是**正定向**的.*

例 5.5.3 *对于$\mathbb{R}^n$, 我们一般规定$\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$是其正定向, 其中$x_1,\cdots,x_n$是$\mathbb{R}^n$上的自然坐标函数.*

习题

习题 5.5.1 *求$\mathbb{R}^3$(三个坐标函数记为x,y,z)上的3-形式$\omega=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$对向量场*

$$Z=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$$

*的Lie导数$\mathcal{L}_Z\omega$. 读者可以使用*定理 5.3.2*, 也可以利用Lie导数的直接定义式.*

习题 5.5.2 *求证: 对于任意n元全排列$\sigma\in S(n)$, $\mathbb{R}^n$上的n-形式$\mathrm{d}x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\sigma(n)}$是正定向的 $\Leftrightarrow$ σ是偶排列.*

5.6. 微分形式的积分

上一节所讲的内容, 本质上都是微分形式与向量场的逐点运算, 即如果我们把上一节中的"切向量场"换成线性空间中的向量, 把"k-形式"换成线性空间上的反对称k重线性函数, 那么所有结论也都依然是成立的(关于可定向性的内容除外); 而本节中, 我们就要严肃地讨论"场"的问题了.

首先, 我们要定义微分形式的积分. 微分形式的积分是"沿路径做功"、"穿过截面的流量"这些多元微积分中概念的推广.

定义 5.6.1 *设M是n维定向光滑流形, ω是M上的n-形式, 任取M上的一个正定向的局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$, 若$\omega|_{M\setminus U}\equiv 0$, 并且$\omega$在该坐标系下的局部坐标表示为*

$$\omega=\omega_\varphi(q_1,\cdots,q_n)\mathrm{d}q_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q_n$$

则我们定义

$$\int_M\omega=\int_{\varphi(U)}\omega_\varphi(q_1,\cdots,q_n)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n, \tag{202}$$

当然, 上述定义本身存在两个些未打消的疑虑: 首先, (202)这个定义是否与局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$的选取无关? 其次, 如果对所有局部坐标系$(U,\varphi;q_i)$, $\omega|_{M\setminus U}$都不恒等于0, 那么积分该怎么定义?

第一个问题相对比较好解决: 假设另有一个正定向的局部坐标系$\left(\widetilde{U},\widetilde{\varphi};\widetilde{q}_i\right)$, 使得$\omega|_{M\setminus\widetilde{U}}\equiv 0$, 并假设$\omega$在这个局部坐标系下的局部坐标表示是

$$\omega=\omega_{\widetilde{\varphi}}\left(\widetilde{q}_1,\cdots,\widetilde{q}_n\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\widetilde{q}_n$$

那么ω便只在$U\cap\widetilde{U}$上非0, 从而

$$\int_{\varphi(U)}\omega_\varphi(q_1,\ \cdots,q_n)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n=\int_{\varphi\left(U\cap\widetilde{U}\right)}\omega_\varphi(q_1,\ \cdots,q_n)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n$$

$$=\int_{\widetilde{\varphi}\left(U\cap\widetilde{U}\right)}\omega_\varphi\left(q_1\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right),\ \cdots,q_n\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)\right)\det\left(\frac{\partial q_j}{\partial\widetilde{q}_i}\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\cdots\mathrm{d}\widetilde{q}_n$$

$$=\int_{\widetilde{\varphi}\left(U\cap\widetilde{U}\right)}\omega_{\widetilde{\varphi}}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\cdots\mathrm{d}\widetilde{q}_n=\int_{\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{U}\right)}\omega_{\widetilde{\varphi}}\left(\widetilde{q}_1,\ \cdots,\widetilde{q}_n\right)\mathrm{d}\widetilde{q}_1\cdots\mathrm{d}\widetilde{q}_n$$

其中第1~2行我们用到了一般多元微积分中的坐标变换公式, 第2~3行我们用到了n形式的局部坐标表示转化公式(201). 这样, 不同坐标下定义的$\int_M\omega$结果是相同的.

对于第二个问题, 我们形式上给出解决方法: 在多元微积分中, 我们知道积分是具有可加性的, 即$\int_C(f+g)\mathrm{d}x=\int_C f\mathrm{d}x+\int_C g\mathrm{d}x$. 这个性质在流形上的积分中依然成立: 假设$\omega$可以分解为$\omega=\sum_{i=1}^N\omega_i$, 其中$\omega_1,\omega_2,\ \cdots$ 都在某单个区图之外恒为0, 因此我们可以定义

$$\int_M\omega=\sum_{i=1}^N\int_M\omega_i. \tag{203}$$

但这种解释方式仍然存在一些疑虑, 比方说:

- ω是否一定能分解成$\sum_{i=1}^N\omega_i$这种形式?
- 不同的分解方式得到的$\int_M\omega$是否相等?

这些问题就都是分析细节了, 关于它们, 读者可参阅任何一本微分流形教材中有关“积分”的章节, 我们不多赘述.

此外, 如果我们考虑流形M的一个k-形式ω, 且$k<\dim M$, 那么我们可以在M的任意k维光滑嵌入子流形N上定义$\int_N\omega$, 此时的ω应理解为$\mathrm{id}^*\omega$, 其中id是$N\to M$的恒同嵌入映射.

这里我们需要回答一个问题: 为什么我们积分的对象是微分形式, 而不是像多元微积分中那样对函数进行积分? 答案是: 在多元微积分中, 我们做积分的对象从来都是微分形式, 而不是函数! 我们知道, 一个正确的积分表达式永远都是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

特别是, 它们后面都会带有“$\mathrm{d}x$”, “$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$”, “$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$”, 这就是说, 我们积分的对象其实是$f(x)\mathrm{d}x$, $f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, $f(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$这些微分形式, 而不是$f(x)$, $f(x,y)$, $f(x,y,z)$这些函数. 我们之所以能够定义函数的积分, 是因为我们在函数的定义域上默认定义了一个体积形式, 而我们的积分结果是我们的函数与这个体积形式的乘积, 这个体积形式改变后, 函数的积分结果也会相应改变. 这也是为什么我们在坐标变换后函数要乘以Jacobi矩阵——$\mathbb{R}^2$上的体积形式

$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$在极坐标系下的坐标表示是$r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$而不是$\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$, $\mathbb{R}^3$上的体积形式$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$在球坐标系下的坐标表示是$r^2\sin\theta\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$而不是$\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$, 我们必须保持体积形式不动.

接下来我们用一种更为直观的方式来阐释, 微分形式这个“切向量的多线性函数”是如何成为一个可积分的量的.

首先, 流形M上的一个k-形式ω在任意一点$x\in M$的切空间T_xM上定义了一个k重反对称线性函数, 这个线性函数可以看作是在T_xM上定义了任意k个切向量张成的k-维超平行多面体(如$\mathbb{R}^2$上的平行四边形, $\mathbb{R}^3$上的平行六面体)的有向超体积. 我们不妨把这种体积称为“ω-体积”.

接下来, 我们把“ω-体积”的定义扩展到流形上. 为了方便, 我们考虑M上的一个光滑同胚于$\mathbb{R}^k$上开立方体$(0,1)^k$的嵌入子流形P(在$k=\dim M$时P就是M的一个开子流形), 并假设这个光滑同
胚是$f\colon(0,1)^k\to P$, 注意f也可以看作是$(0,1)^k\to M$的光滑嵌入. 接下来, 我们把$(0,1)^k$分割成n^k个相等的小超立方体

$$I_{\vec{n}}=\left(\frac{n_1}{n},\frac{n_1+1}{n}\right)\times\left(\frac{n_2}{n},\frac{n_2+1}{n}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n_k}{n},\frac{n_k+1}{n}\right),$$

其中$\vec{n}=(n_1,\cdots,n_k)$, $n_1,\cdots,n_n$是$[0,n-1]$中的整数. 这些小超立方体中最靠近原点的的顶点为$x_{\vec{n}}=\left(\frac{n_1}{n},\cdots,\frac{n_k}{n}\right)^\top$, 而过该顶点的棱有$k$条, 它们分别是$\frac{1}{n}e_1,\cdots,\frac{1}{n}e_k$, 其中$e_1,\cdots,e_k$是$\mathbb{R}^k$的标准单位向量, 它们可以看作是$x_{\vec{n}}$处的$k$个切向量$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{x_{\vec{n}}}$, $i=1,2,\cdots,k$, 而小立方体$I_{\vec{n}}$可以看作是由$x_{\vec{n}}$处发出的这k个切向量张成的. 映射f将I_n映射到了这个小立方体映到了P上的一个曲边小超平行多面体, 它们也可以近似地看作是由点$f(x_{\vec{n}})$处的k个切向量$\frac{1}{n}f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{x_{\vec{n}}}\right)$张成的(直边)小超平行多面体(图 5.6.18).

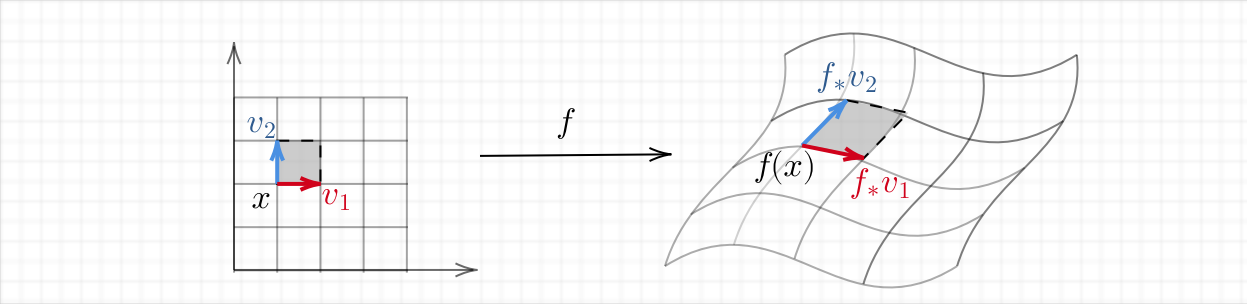


图 5.6.18: 微分形式积分的直观含义. 图中$n=4$, $\vec{n}=(1,2)$, $x=x_{\vec{n}}=\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right)$, $v_1=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_1}|_x$,

$$v_2=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_2}|_x.$$

按照之前的讨论, 在k-形式ω下, 这个小超平行多面体的“ω-体积”应该是

$$\omega|_{f(x_{\vec{n}})}\left(\frac{1}{n}f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_{\vec{n}}}\right),\frac{1}{n}f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{x_{\vec{n}}}\right),\ \cdots,\frac{1}{n}f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{x_{\vec{n}}}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n^k}\big(f^*\omega\big)|_{x_{\vec{n}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_{\vec{n}}},\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{x_{\vec{n}}},\ \cdots,\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{x_{\vec{n}}}\right),$$

从而整个流形P的“ω-体积”就应该是这些可以近似为这些小超平行多面体的“ω-体积”之和:

$$\frac{1}{n^k}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\big(f^*\omega\big)|_{x_{\vec{n}}}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_{\vec{n}}},\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x_{\vec{n}}},\ \cdots,\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{x_{\vec{n}}}\right),\tag{204}$$

当我们取$n\to\infty$时, 就可以(204)这个求和式用积分代替,

$$\int_{(0,1)^k}\big(f^*\omega\big)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ \cdots,\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,\tag{205}$$

注意到如果$f^*\omega$这个k-形式在$(0,1)^k$上的坐标表示为$\big(f^*\omega\big)_{12\cdots k}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_k$, 则

$$\big(f^*\omega\big)_{12\cdots k}=\big(f^*\omega\big)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ \cdots,\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

因此(205)按照定义 5.6.1, 这个积分表达式和$\int_{(0,1)^k}\big(f^*\omega\big)$是完全相同的东西, 因此

$$\text{流形}P\text{的“}\omega\text{-体积”}=\int_{(0,1)^k}\big(f^*\omega\big)=\int_P\omega.$$

5.7. 外微分

本节中, 我们要定义一个微分形式特有的运算——外微分, 它是多元微积分中向量场“散度”、“旋度”等概念的推广.

在定义外微分之前, 我们首先定义一个非常简单但也和外微分一样常用的运算: 内乘.

定义 5.7.1 *设ω是一个k-形式, 则对于任意切向量场$X,X_1,\cdots,X_{k-1}$, 定义*

$$\iota_X\omega(X_1,\cdots,X_{k-1}):=\omega(X,X_1,\cdots,X_{k-1}),$$

*这样定义的$\iota_X\omega$是一个$(k-1)$-形式, 称为向量场X与微分形式ω的**内乘**. 另有一些文献中会把内乘定义为X填在最后一个变量处的形式, 我们把这种内乘称为**右内乘**, 记作$\hat{\iota}_X\omega$, 即*

$$\hat{\iota}_X\omega(X_1,\cdots,X_{k-1}):=\omega(X_1,\cdots,X_{k-1},X).$$

显然, $\hat{\iota}_X\omega=(-1)^{k-1}\iota_X\omega$.

首先我们用微分形式来给出一个立方体表面的正定向——外法向的概念. 考虑$\mathbb{R}^n$上的立方体$I^n=(0,1)^n$, 记其表面为∂I^n, 则∂I^n由$2n$个$n-1$维立方体侧面组成[10], 我们给出这些侧面的定
向, 规则如下:

1. 如果一个侧面位于超平面$x_k=1$中, 则将$(-1)^{n-k}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_k}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$定为其外法向
2. 如果一个侧面位于超平面$x_k=0$中, 则将$(-1)^{n-k+1}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_k}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$定为其外法向.

其中$\widehat{\mathrm{d}x_k}$表示在楔积单项式中删去$\mathrm{d}x_k$. 例如在$n=3$时, 立方体的定向如图

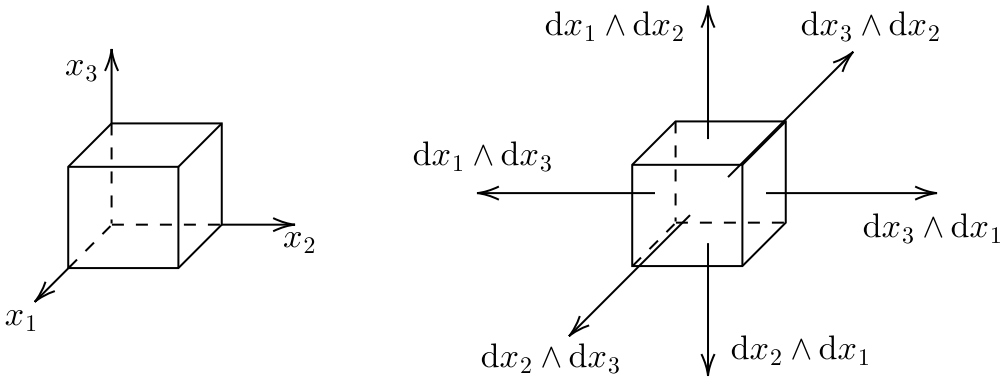


图 5.7.19: 三维立方体各侧面(二维)的外法向

上述规则的定法等同于: 当一个侧面位于超平面$x_k=1(x_k=0)$时, 中, 则将
$\hat{\iota}_{\partial/\partial x_k}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n(\hat{\iota}_{-\partial/\partial x_k}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n)$定为其外法向. 这与我们通常所熟知的外法向定义方式相同. 给出这种定义后, 我们可以确定在这些面上积分一个$(n-1)$-形式时该如何选取符号. 此外, 不光对于正方体, 对于长方体、超平行六面体等, 我们都可以类似地给出其定向规则.

接下来我们形式上给出外微分的定义. 为了方便讨论, 我们只讨论$\mathbb{R}^n$上的情形. 假设$\mathbb{R}^n$上有一个k-形式$\omega(k<n)$, 对于$\mathbb{R}^n$上任意一点x, 我们考虑x处伸出的$k+1$个切向量
$X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k+1)}$(不妨假设它们线性无关), 设$X^{(\mu)}$在$\mathbb{R}^n$第$i$个分量上的投影为$X_i^{(j)}$(
$j=1,\cdots,k+1,i=1,\cdots,n$). 接下来我们考虑由$\varepsilon X^{(1)},\varepsilon X^{(2)},\cdots,\varepsilon X^{(k+1)}$张成的
$k+1$维超平行多面体Π_ε, 其中$0<\varepsilon\ll1$, 则其表面(记作$\partial\Pi_\varepsilon$)是$2(k+1)$个k维超平行多面体, 对于每一个$\mu=1,2,\cdots,k+1$, 平行于k个向量$\left\{X^{(j)}\right\}_{j\neq\mu}$的表面有两个, 一个过点$x$, 另一个过点$x+\varepsilon X^{(\mu)}$.

[10] 准确来讲, 应该还有更低维的棱、顶点等等, 但这些不会对我们接下来关心的运算造成影响.

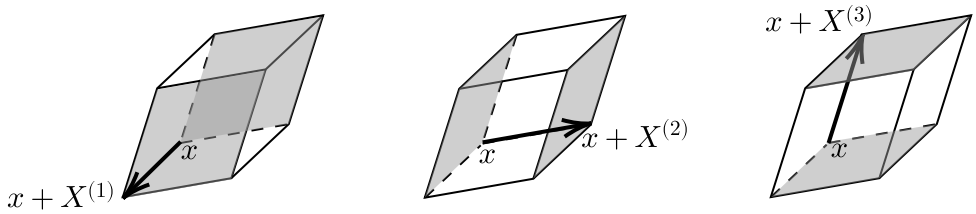


图 5.7.20: 平行多面体的侧面, 图示$n = 3$.

ω在这两个点处的表达式分别为

$$\sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots, x_n)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \quad \text{和}$$

$$\sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}\Big(x_1 + \varepsilon X_1^{(\mu)},\ \cdots, x_n + \varepsilon X_n^{(\mu)}\Big)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

而按照上一节末尾我们对微分形式积分的意义的诠释, 流形在这两个侧面上的积分分别是(在差一个ε的更高阶项的意义下)

$$(-1)^{\mu} \sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots, x_n)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\Big(\varepsilon X^{(1)},\ \cdots, \widehat{\varepsilon X^{(\mu)}},\ \cdots, \varepsilon X^{(k+1)}\Big)$$

$$= (-1)^{\mu}\varepsilon^k \sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots, x_n) \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_1}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_2}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ & & & & \\ X_{i_k}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_k}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix} \quad \text{和}$$

$$(-1)^{\mu+1} \sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}\Big(x_1 + \varepsilon X_1^{(\mu)},\ \cdots, x_n + \varepsilon X_n^{(\mu)}\Big)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\Big(\varepsilon X^{(1)},\ \cdots, \widehat{\varepsilon X^{(\mu)}},\ \cdots, \varepsilon X^{(k+1)}\Big)$$

$$= (-1)^{\mu+1}\varepsilon^k \sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}\Big(x_1 + \varepsilon X_1^{(\mu)},\ \cdots, x_n + \varepsilon X_n^{(\mu)}\Big) \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_1}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_2}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ & & & & \\ X_{i_k}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_k}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix}$$

其中$\widehat{X}$表示去掉X, 系数$(-1)^{\mu}$, $(-1)^{\mu+1}$来自两个侧面的定向, 于是

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega \\
&\approx \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu+1} \varepsilon^k \Bigg(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}\big(x_1+\varepsilon X_1^{(\mu)},\ \cdots, x_n+\varepsilon X_n^{(\mu)}\big) \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_1}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_2}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ & & & & \\ X_{i_k}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_k}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix} \\
&\quad - \sum_{i_1,\cdots,i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots, x_n) \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_1}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_2}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i_k}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_k}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix} \Bigg) \\
&\approx \sum_{\mu=1}^{k+1} (-1)^{\mu+1} \varepsilon^{k+1} \Bigg(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots x_n)}{\partial x_l} X_l^{(\mu)} \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_1}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_2}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i_k}^{(1)} & \cdots & \widehat{X_{i_k}^{(\mu)}} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix} \Bigg) \\
&= \varepsilon^{k+1} \Bigg(\sum_{i_1,\cdots,i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots x_n)}{\partial x_l} \begin{vmatrix} X_l^{(1)} & X_l^{(2)} & \cdots & X_l^{(k+1)} \\ X_{i_1}^{(1)} & X_{i_1}^{(2)} & \cdots & X_{i_1}^{(k+1)} \\ X_{i_2}^{(1)} & X_{i_2}^{(2)} & \cdots & X_{i_2}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{i_k}^{(1)} & X_{i_k}^{(1)} & \cdots & X_{i_k}^{(k+1)} \end{vmatrix} \Bigg) \\
&= \sum_{i_1,\cdots,i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots x_n)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big(\varepsilon X^{(1)}, \varepsilon X^{(2)},\ \cdots, \varepsilon X^{(k+1)}\big) \\
&\approx \int_{\Pi_\varepsilon} \sum_{i_1,\cdots,i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}(x_1,\ \cdots x_n)}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
\end{aligned}
$$

上述推导过程中“ $\approx$ ”的意义都是“两行之间差一个ε的更高阶项”(事实上, 按照Stokes定理, 第一行和最后一行的两个积分是严格相等的, 即使我们全程使用了好几个“ $\approx$ ”), 倒数第3~2行用到了行列式的按行展开. 可以看到, 我们把在Π_ε表面进行的积分$\int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega$变成了在$\Pi_\varepsilon$内部的一个($k+1$)-形式

$$
\sum_{i_1,\cdots,i_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_l} \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge\ \cdots\ \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
$$

的积分, 这个微分形式就是我们要定义的ω的外微分.

定义 5.7.2 *(外微分)设M是光滑流形, ω是M上的k-形式, 则我们定义$\mathrm{d}\omega$是满足下述性质的$(k+1)$-形式: 对于任意M上的局部坐标系$(U;q_i)$, 如果ω具有局部坐标表达式*

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}q_{i_1}\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_{i_k},$$

则$\mathrm{d}\omega$具有局部坐标表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge\mathrm{d}q_{i_1}\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_{i_k}\\&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial q_l}\mathrm{d}q_l\wedge\mathrm{d}q_{i_1}\wedge\ \cdots\ \wedge\mathrm{d}q_{i_k}.\end{aligned}\tag{206}$$

诚然, 上述定义依赖于局部坐标, 我们需要证明上述定义在不同局部坐标系下是不冲突的. 我们在此不去直接证明它(这个直接证明可以留给读者尝试证明), 而是给出外微分的还有另一种与坐标无关的等价定义方式: $\mathrm{d}\omega$是一个$k+1$形式, 使得对于任意$k+1$个光滑切向量场$X_1,\ \cdots,X_{k+1}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,X_2,\ \cdots,X_{k+1})=&\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\omega\Big(X_1,\ \cdots,\widehat{X_i},\ \cdots,X_{s+1}\Big)\\&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\Big([X_i,X_j],X_1,\ \cdots,\widehat{X_i},\ \cdots,\widehat{X_j},\ \cdots,X_{k+1}\Big)\end{aligned}$$

特别地, 如果ω是1-形式, 则

$$\mathrm{d}\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X)-\omega([X,Y]).\tag{207}$$

关于外微分, 最著名的定理就是Stokes定理: 它是多元微积分中最重要的三个积分公式——Green公式、Gauss公式和Stokes公式的一个推广

定理 5.7.1 *设M是n维光滑带边流形[11], ∂M是其边界, ω是M上的$(n-1)$-形式, 则*

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M\mathrm{d}\omega.$$

该定理的证明细节比较繁多, 此处从略. 但是如果大家去学习微分流形的专著的话. 则会发现, 其实证明Stokes定理的最核心步骤仍然是大家最为熟知的Newton-Lebniz公式

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),$$

其余步骤只是对流形上技术性细节的处理.

[11] 关于带边流形及其边界的严格定义, 见附录.

除了严格证明此外, 我们还可以这样直观地理解Stokes定理: 按照本节开头介绍的直观推导过程, $\int_{\partial M}\omega=\int_M \mathrm{d}\omega$对于$M$是小超平行多面体元$\Pi_\varepsilon$时成立, 我们把$M$分解成许许多多个这样的小体元$\Pi_i$, 而$\int_M \mathrm{d}\omega=\sum_i\int_{\Pi_i}\mathrm{d}\omega=\sum_i\int_{\partial\Pi_i}\omega$, 各体元边界$\partial\Pi_i$中, 位于$M$内部的部分都是两个体元的公共边界, 并且这个公共边界对于两个体元而言的定向是相反的, 从而ω在这上面的积分便两两抵消掉, 最后只剩下位于M边界的部分没有被消去(图 5.7.21), 从而$\sum_i\int_{\partial\Pi_i}\omega=\int_{\partial M}\omega$, 这就得到了Stokes定理. 这个直观理解方式也可以在数学上严格化, 不过这会更麻烦一些.

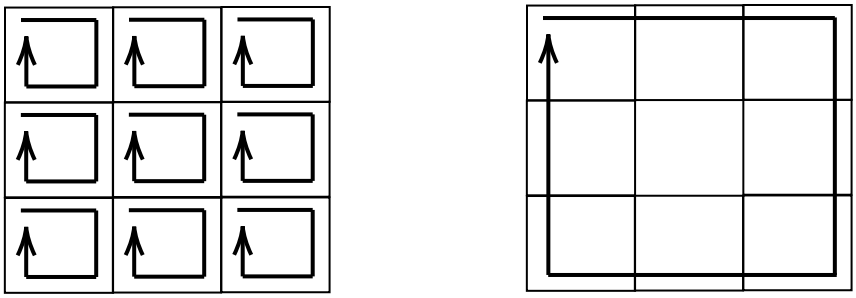


图 5.7.21: $\partial\Pi_i$上的积分当中, 位于M内部的部分两两消去, 剩下M边界上的部分.

接下来我们来介绍作为Stokes定理的特例的Green公式、Gauss公式和Stokes公式.

Greeen公式

设D是$\mathbb{R}^2$上的有界闭区域，ω是D上的1-形式

$$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

那么

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

由Stokes定理有

$$\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

这就是多元微积分中的Green公式.

Gauss公式

设D是$\mathbb{R}^2$上的有界闭区域，ω是D上的2-形式

$$\omega=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

那么

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

由Stokes定理有

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这就是多元微积分中的Gauss公式.

Stokes公式

设S是$\mathbb{R}^3$中一块有向曲面，其边界∂S是一条简单闭曲线，ω是$\mathbb{R}^3$上的一个1-形式

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

那么

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

由Stokes定理，有

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这就是多元微积分中的Stokes公式.

可以看到, 外微分的Stokes定理统一了多元微积分中最重要的(应该也是最难的)三个公式的形式.

接下来我们介绍一些外微分常见的性质及相关概念.

定理 5.7.2 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} \equiv 0$, *即对于任意$k$-形式$\omega$, 有*$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$, *即*$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$*是一个处处为0的$(k+2)$-形式.*

证明: 直接利用(206)即可, 读者可自行补齐证明. 我们此处给出另一个比较讨巧的证明方式: 我们任意取流形上一个区域Ω, 则由Stokes定理, 有

$$\int_\Omega \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial(\partial\Omega)} \mathrm{d}\omega,$$

由于带边流形的边界是不带边的流形, 故$\partial(\partial\Omega)$是一个空集, 在一个空集上的任何积分当然只能是0, 因此上述等式链中最右端的那个积分是0, 从而$\int_\Omega \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$, 由$\Omega$的任意性及$\omega$的光滑性, 知$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$必是处处为零. □

既然$\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$, 那么如果某个微分形式$\omega$满足$\mathrm{d}\omega = 0$, 我们能不能找到一个微分形式$\omega$使得$\omega = \mathrm{d}\alpha$ 成立呢? 这个问题的一部分为如下Poincaré引理所回答.

定理 5.7.3 *(Poincaré引理)设ω是光滑流形M上的k-形式，并且*$\mathrm{d}\omega = 0$, *则对任意$x \in M$, 存在*

x的一个邻域U及U上定义的光滑$k-1$形式α, 使得在U上$\omega=\mathrm{d}\alpha$.

证明: 见陈维桓《微分流形初步》第四章第2节的定理2.5. □

Poincaré引理可以用于证明一些存在性定理(比如Noether定理中断言的守恒量的存在性等), 但这个存在性总是局部的. 通常发生的情况是: 您发现$\mathrm{d}\omega=0$, 从而能够在局部上定义一个α使得$\omega=\mathrm{d}\alpha$, 然而当您试图把α延拓到整个流形上时, 出现了类似于复变函数多值性的问题.

例 5.7.1 *$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上的1-形式*

$$\omega=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

它显然处处光滑, 并且$\mathrm{d}\omega=0$. 但如果我们在单位圆周C上积分ω(从$\theta=0$积到$\theta=2\pi$), 会得到

$$\int_C\omega=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\sin\theta-\sin\theta\mathrm{d}\cos\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\neq0,$$

从而不可能存在一个0-形式(光滑函数)$f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, 使得$\omega=\mathrm{d}f$(否则上述积分必为0). 但如果我们不要求函数在整个$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$上有定义, 则可以发现

$$\omega=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\quad\text{when } x\neq0$$

$$\omega=\mathrm{d}\left(\arctan\left(-\frac{x}{y}\right)\right)\quad\text{when } y\neq0$$

等, 即ω在更小的局部上可以写成$\mathrm{d}f$的形式.

定义 5.7.3 *如果一个微分形式ω满足$\mathrm{d}\omega=0$, 则称ω是**闭**的; 如果存在一个微分形式α, 使得$\omega=\mathrm{d}\alpha$, 则称α是**恰当**的.*

在这一定义下, 我们可以把之前的讨论归结为:

- 恰当的微分形式一定是闭的
- 闭的微分形式不一定是恰当的, 但一定在流形的某个局部上是恰当的.

闭形式和恰当形式之间的关系取决于流形的拓扑结构. 如果一个流形同胚于$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{R}^n$上的单连通区域, 则这个流形上微分形式的"闭"与"恰当"是等价的. 例 5.7.1中的流形是$\mathbb{R}^2$去掉了一个原点, 从而不再是单连通的, 因此会存在闭但不恰当的微分形式. 流形的拓扑结构更复杂时, 闭形式与恰当形式之间就会有更微妙的关系, 拓扑学中 de Rham 上同调就是一个通过研究这一关系来研究流形拓扑结构的工具. 但这些便远不是我们要展开讨论的内容了.

习题

习题 5.7.1 *在热学中, 我们有一个论断: 热量Q是过程量. 事实上, 在热力学的状态空间中, 我们定义两个有函数S(熵)和T(温度), 它们在状态空间的任何区域内都不是常数函数, 并且它们是独立的(即$\mathrm{d}S$和$\mathrm{d}T$总是不共线的). 热量被我们定义为一个余切向量场$đQ=T\mathrm{d}S$. 请证明, $đQ$这个向量场不是闭的, 从而也不可能在任何局部上是恰当的. 这就是说, 我们不可能在空间中找到*

一个函数Q(即使只是局部上), 使得$\mathrm{d}Q = đQ$.

习题 5.7.2 *在$\mathbb{R}^4$(四个坐标函数分别为x_1, x_2, x_3, x_4)上, 求*

$$\omega = x_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + x_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4$$

在球面$S^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$ 上的积分$\int_{S^3} \omega$, 其中$\mathbb{R}^4$中的定向取标准定向, S^3的定向取外法线方向(即$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ 所决定的定向)

5.8. 常用公式一览

以下公式摘录自Introduction to Mechanics and Symmetry, 它们在我们讨论力学, 尤其是Hamilton力学时经常用到, 有一些我们介绍过, 有一些则没有. 它们大都可以直接从定义式来证明, 但这里我们只是把这些公式列举出来供读者需要时回来翻看.

流形M上的Lie导数的定义是：对于M上任意两个切向量场X, Y, 有

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X,$$

其在局部坐标系$\left(U; x^i\right)$下的局部坐标表达式为

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^{\dim M} \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

其中X^j, Y^j是X, Y在$\left(U; x^i\right)$下的局部表达式, 即

$$X|_U = \sum_{i=1}^{\dim M} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y|_U = \sum_{i=1}^{\dim M} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

对于微分同胚φ, ψ, 有

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y] \text{ 和 } (\varphi \circ \psi)_* X = \varphi_* \psi_* X$$

对于两个微分形式α和β, 有

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha,$$

其中k, l分别是α和β的阶数.

对于光滑映射φ, ψ, 有

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta \quad \text{and} \quad (\varphi \circ \psi)^* \alpha = \psi^* \varphi^* \alpha$$

外微分d是微分形式之间的线性映射, $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\alpha = 0$, 并且

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$$

对任意k-形式α成立.

对于任意$k+1$个光滑切向量场$X_1, \cdots, X_{k+1}$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{s+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\Big([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_{k+1}\Big)\end{aligned}$$

对于光滑映射φ, 有

$$\varphi^* \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\varphi^* \alpha$$

(Poincare引理)设ω是光滑流形M上的k-形式，并且$\mathrm{d}\omega = 0$, 则对任意$p \in M$, 存在p的一个邻域U及U上定义的光滑$k-1$形式α, 使得在U上$\omega = \mathrm{d}\alpha$.

$\iota_X \alpha$对X, α是双线性的, 并且对于光滑函数 $h : M \to \mathbb{R}$

$$\iota_{hX} \alpha = h \iota_X \alpha = \iota_X h \alpha.$$

此外, $\iota_X \iota_X \alpha = 0$ 并且

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta$$

其中k是α的阶数.

对于一个光滑同胚φ, 有

$$\varphi^*(\iota_X \alpha) = \iota_{\varphi^* X}\big(\varphi^* \alpha\big)$$

$\mathcal{L}_X \alpha$对X, α是双线性的，并且有

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$$

Cartan魔术公式:

$$\mathcal{L}_X \alpha = \mathrm{d}\iota_X \alpha + \iota_X \mathrm{d}\alpha$$

对于一个光滑同胚φ, 有

$$\varphi^* \mathcal{L}_X \alpha = \mathcal{L}_{\varphi^* X} \varphi^* \alpha$$

对于k阶协变张量场α(当然, 也包括α是k-形式的情形在内), $\mathcal{L}_X\alpha$的定义为

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(X_1,\,\ldots,X_k)=X(\alpha(X_1,\,\ldots,X_k))-\sum_{i=0}^{k}\alpha(X_1,\,\ldots,[X,X_i],\,\ldots,X_k)$$

下列等式对任意函数f, 切向量场X, Y和微分形式α, β成立

- $\mathcal{L}_{fX}\alpha=f\mathcal{L}_X\alpha+\mathrm{d}f\wedge\iota_X\alpha$
- $\mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha=\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\alpha-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\alpha$
- $\iota_{[X,Y]}\alpha=\mathcal{L}_X\iota_Y\alpha-\iota_Y\mathcal{L}_X\alpha$
- $\mathcal{L}_X\mathrm{d}\alpha=d\mathcal{L}_X\alpha$
- $\mathcal{L}_X\iota_X\alpha=\iota_X\mathcal{L}_X\alpha$
- $\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta)=\mathcal{L}_X\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta$

如果一个向量场X和微分形式α分别有局部坐标表达式

$$X=\sum_{l=1}^{n}X_l\frac{\partial}{\partial x_l}\quad\text{和}\quad\alpha=\sum_{i1\ldots ik}\alpha_{i1\ldots ik}\mathrm{d}x_{i1}\wedge\,\cdots\,\wedge\mathrm{d}x_{ik},$$

那么如下恒等式成立:

$$\mathrm{d}\alpha=\sum_{i_1\ldots i_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\,\cdots\,\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\iota_X\alpha=\sum_{i_1\ldots i_k}\sum_{l=1}^{n}X_l\alpha_{li_2\ldots i_k}\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\,\cdots\,\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$\mathcal{L}_X\alpha=\sum_{i_1\ldots i_k}\sum_{l=1}^{n}\left(X_l\frac{\partial\alpha_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial q_l}+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial X_l}{\partial x_{i_\mu}}\alpha_{i_1,\cdots,i_k|\left\{i_\mu\to l\right\}}\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\,\cdots\,\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

这里“$i_1,\,\cdots,i_k|\left\{i_\mu\to l\right\}$”表示把第$\mu$个指标$i_\mu$换成$l$.

6. 辛流形与 Hamilton 力学

6.1. 为什么会出现 Hamilton 力学?

相信很多读者学习Hamilton力学时对“为什么要使用Legendre变换”这个问题感到十分困惑. 因此我们需要将时间调回到19世纪初, 看一看Hamilton当年到底是出于什么目的、用什么方法推导出了Hamilton方程.

其实在Hamilton之前, Lagrange就曾经在研究力学系统微扰问题[12]时利用“常数变易法”推导出过类似于Hamilton正则方程的结果（当然，Lagrange本人用的记号和我们用的记号完全不同）：

定理 6.1.1 *假设$q\big(t, q^{(0)}, v^{(0)}\big)$是Lagrange方程*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

以$q^{(0)}, v^{(0)}$为初值的解, 其中$L = T(q, \dot{q}) - V(q)$, 那么如果我们在L上加一个势能项的微扰, 取

$$L'(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) - \Omega(q),$$

并假设扰动后的Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L'}{\partial q}$$

以$q^{(0)}, v^{(0)}$为初值的解是$q\big(t, q^{(0)}(t), v^{(0)}(t)\big)$, 则我们有

$$\frac{\mathrm{d}q^{(0)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \Omega}{\partial p}, \quad \frac{\mathrm{d}p^{(0)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Omega}{\partial q}.$$

其中$p^{(0)}(t) = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}\big(q^{(0)}(t), v^{(0)}(t)\big)$, Ω被看作$q, p = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}$的函数.

可见在Hamilton之前, Lagrange就已经注意到了，把 $p = \partial T \,/\, \partial \dot{q}$ 看作独立变量在某些情形下是很方便的. 笔者猜测, Hamilton能够写下Hamilton正则方程, 一定程度上是受此启发.

Hamilton建立Hamilton力学体系的著作是他在1834年发表两篇论文. 关于这两篇论文，有这样一些有趣的事实

1. Hamilton在第二篇文章中才推导出了Hamilton正则方程, 却在第一篇文章里已经给出了Hamilton-Jacobi方程.
2. 在Hamilton的文章中从来没有出现过一个叫Legendre的名字（但却出现过Laplace, Lagrange 和Poisson的名字），他自己推导Hamilton正则方程时使用的变换也与当今我们所熟知的Legendre变换略有不同.

可见Hamilton当时的工作思路和当今主流力学教科书的讲授思路还是有很大不同的.

Hamilton当年所考虑的问题其实相当具体: 就是我们最早介绍的三维空间中无约束条件的n质点

[12] 见Mechanique Analytique, Part 2, Section V

系统的运动, 并且势能函数U(他定义的势能函数与当今我们熟知的势能函数差一个负号)就是两两之间的吸引或排斥势, 甚至可以写出表达式

$$U=\sum_{1\leq i<j\leq n} m_i m_j f_{ij}(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|). \tag{208}$$

换言之, 他关注的主要还是天体运动. 这样, Hamilton写下了相应的Newton运动方程

$$m_i x_i''=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i y_i''=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i z_i''=\frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{209}$$

及其等价表示

$$\delta U=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i''\,\delta x_i+y_i''\,\delta y_i+z_i''\,\delta z_i), \tag{210}$$

其中δx_i, δy_i, δz_i指的是虚位移, δU则是U在虚位移δx_i, δy_i, δz_i下的变化量, 并假设我们有初值条件

$$\begin{cases} x_i=a_i, & y_i=b_i, & z_i=c_i \\ x_i'=a_i', & y_i'=b_i', & z_i'=c_i' \end{cases} \qquad t=0. \tag{211}$$

那个时代的人们已经知道形如(208), (209)的系统具有动能、动量、角动量的守恒性质, 即找到了7个运动积分(首次积分), 但苦于找不到更多. 而Hamilton的文章则剑走偏锋，首先假定我们把(209)(211)这个初值问题解出来了, 那么我们就可以把

$$S=\int_0^t (T+U)\mathrm{d}t$$

写成$x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, t$的函数, 使得

$$m_i x_i'=\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad m_i y_i'=\frac{\partial S}{\partial y_i},\quad m_i z_i'=\frac{\partial S}{\partial z_i}, \tag{212}$$

$$m_i a_i'=-\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad m_i b_i'=-\frac{\partial S}{\partial y_i},\quad m_i c_i'=-\frac{\partial S}{\partial z_i}, \tag{213}$$

成立. 注意(213)这组方程, 我们可以从它直接反解出x_i, y_i, z_i关于$a_i, b_i, c_i, a_i', b_i', c_i'$及$t$的表达式, 也就是把方程完完整整地解出来了, 而(212)也给出了这个方程的$3n$个首次积分. 从这个角度来看, 求解(209)就等价于求出S的表达式. Hamilton推导出S应该满足偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2\right)=U. \tag{214}$$

(214)实际上就是在直角坐标系下的Hamilton-Jacobi方程.

为了增强自己理论的泛用性, Hamilton在他的第二篇文章中开始考虑将x_i, y_i, z_i等换成广义坐标

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{3n},$$

随后写出了相应的Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}-\frac{\partial T}{\partial \eta_i}=\frac{\partial U}{\partial \eta_i}. \tag{215}$$

为了能够得到类似于(214)的偏微分方程, Hamilton首先对(215)做出了一些变形: 他利用T是$\eta_i^{\prime}$的二次型的特点, 写下

$$2T=\sum_{i=1}^{3n}\eta_i^{\prime}\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}},$$

然后将T的微分写成

$$\delta T=\sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\delta\eta_i^{\prime}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\delta\eta_i\right)=\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\delta\eta_i^{\prime}+\eta_i^{\prime}\delta\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\right)$$

两种形式, 从而

$$\begin{aligned}\delta T&=2\delta T-\delta T\\&=\sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\delta\eta_i^{\prime}+\eta_i^{\prime}\delta\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}\delta\eta_i^{\prime}+\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\delta\eta_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{3n}\eta_i^{\prime}\delta\frac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}-\frac{\partial T}{\partial \eta_i}\delta\eta_i\end{aligned} \tag{216}$$

若取$\varpi_i=\dfrac{\partial T}{\partial \eta_i^{\prime}}$, 并假设$T=F(\varpi_1,\ \cdots,\varpi_{3n},\eta_1,\ \cdots,\eta_{3n})$, 那么(216)就告诉我们

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \varpi_i}=\eta_i^{\prime}\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial \eta_i}=-\dfrac{\partial T}{\partial \eta_i}.\end{cases} \tag{217}$$

将(217)的代入Lagrange方程组(215)中, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varpi_i+\frac{\partial F}{\partial \eta_i}=\frac{\partial U}{\partial \eta_i}. \tag{218}$$

若取

$$H=F-U=F(\varpi_1,\varpi_2,\ \ldots\varpi_{3n},\eta_1,\eta_2,\ \ldots\eta_{3n})-U(\eta_1,\eta_2,\ \ldots\eta_{3n}), \tag{219}$$

则容易得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial \varpi_i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\varpi_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_i}. \end{cases} \tag{220}$$

(220)就是Hamilton推出的Hamilton正则方程. Hamilton还顺手给出了H的守恒性质

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{\partial H}{\partial \eta_i}\frac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial \varpi_i}\frac{\mathrm{d}\varpi_i}{\mathrm{d}t}\right) = 0. \tag{221}$$

接下来, Hamilton在上述新定义的变量H, ϖ_i, η_i的意义下写下了作用量表达式,

$$S = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{3n} \varpi_i \frac{\delta H}{\delta \varpi_i} - H\right)\mathrm{d}t. \tag{222}$$

然后把S写成η_i, ϖ_i及他们在$t=0$时初值e_i, p_i的函数, Hamilton就得到了

$$\varpi_i = \frac{\delta S}{\delta \eta_i} \quad p_i = -\frac{\delta S}{\delta e_i}.$$

类似地, Hamilton还推出了此时S应该满足的偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + F\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}, \ldots \frac{\partial S}{\partial \eta_{3n}}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{3n}\right) = U(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{3n}), \tag{223}$$

也即

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \frac{\partial S}{\partial \eta_2}, \ldots \frac{\partial S}{\partial \eta_{3n}}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{3n}\right) = 0. \tag{224}$$

(224)就是我们今天熟知的Hamliton-Jacobi方程.

此外, Hamilton还在自己的文章中讨论了对微扰问题. 由于篇幅限制, 我们变不再更深入地介绍Hamilton本人的工作，仅做如下总结：

1. 在Hamilton之前, Lagrange, Poisson等人就已经开始注意到在有些时候, 把广义速度$\dot{q}_i$变成广义动量p_i的变换的方便之处, Hamilton本身的工作也很可能受此启发;
2. Hamilton所研究的系统比我们今天所熟知的经典Hamilton力学要更具体一些: 只包含无约束条件的n质点系统之间吸引、排斥的作用;
3. Hamilton的研究目的从一开始就是作用量S及其满足的偏微分方程——Hamilton-Jacobi方程，也就是一般力学课本上直到最后一章才有的内容;
4. Hamilton正则方程在Hamilton的工作中只是将Hamilton-Jacobi方程推广到任意坐标系的一个中间步骤.
5. Hamilton在进行从广义速度到广义动量的变换时, 使用的是Lagrange的著作者用的

$p = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}$的形式, 而不是我们当今熟悉的一整个$p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$的形式, 并且他也不知道自己做的变换被我们今天称为Legendre变换.

由此可见，Hamilton当年的工作思路和我们如今力学教科书的讲授思路是大相径庭的. 事实上, 在Hamilton的时代, 欧洲还处于工业革命早期, 电气时代尚未到来, Maxwell方程组出现要等到三四十年之后才出现，而相对论、量子力学等近现代物理话题更是要等到Hamilton去的四五十年后才出现. Hamilton当时所做的工作更多地还是服务于当时已有的天文学和简单的机械、流体动力学以及初等的几何、波动光学; 当时的微积分知识体系也尚未完善, 微分方程的求解技术也还仅限于解析解、幂级数解. 在这样的背景下, Hamilton的工作的原本目标也只是把Lagrange建立的分析力学体系和在光学中已有应用的作用量、变分原理结合起来, 形成一个新的理论框架. 他发表自己的理论时, 大概是想象不到这些工作会有那样大的影响力的.

我们如今的力学教科书, 大都是近几十年的物理学从业者编写的, 他们所学习的物理知识远远多于Hamilton那个时代人们知道的物理知识：他们懂统计物理、量子物理、相对论，甚至量子场论、原子物理, 并且微积分的数学理论也早已发展成熟, 人们对Hamilton力学体系的认知也达到了一个新的高度. 在这样的背景下, 教科书的编写者们必须相应地重新编排Hamilton的工作——把他的工作用当今我们熟悉的数学语言重述，删繁就简，并引导我们去注意到Hamilton力学在物理学各个其它领域的推广和运用. 在这个“重新编排”的过程中, 人们发现Hamilton做的广义动量的变换本质上与Legendre变换是一致的, 便把这个变换叫作Legendre变换.

习题

习题 6.1.1

(a). 阅读Hamilton于1834年写下的论文On a General Method in Dynamics[13]*第1~10页(“6.”之前)并回答: 文中的characteristic function V最终被写成了哪些变量的函数?*

(b). 阅读On a General Method in Dynamics第64~65页(“23.”开始到结束)并回答: 由函数V变到函数S是对V的哪个自变量进行的Legendre变换?

6.2. 辛线性代数

本章的主要目的就是介绍Hamilton力学的数学结构. 从现代数学的角度来看, Hamilton力学中的“相空间”本质上是一个辛流形, 所谓辛流形, 是指流形上赋予了一个辛形式, 后者是指一个满足一定条件的2阶微分形式, 这个2-形式在流形的每一个点的切空间处定义了一个“辛内积”, 这可以类比于Riemann流形上的度量张量在流形的每一点的切空间处定义了一个内积. 辛内积和内积的一个最大的区别是: 后者是对称的, 而前者是反对称的. 本节里, 我们就首先来介绍线性空间上的辛内积.

对于一个实线性空间 V, 一个反对称双线性函数指的是一个满足

$$\forall u, v \in V,\ \omega(v, u) = -\omega(u, v) \tag{225}$$

[13] 原文连接: https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Dynamics/#GenMethod

的双线性函数.

任意一个双线性函数在我们取定线性空间上的一组基底之后都会有一个矩阵表示. 我们当然希望这个矩阵表示越简单越好, 而这个矩阵表示的复杂程度则取决于我们基底的选取. 对于反对称的双线性函数, 我们可以理论上证明，存在一组基底，使得这个双线性函数具有一个非常简单的矩阵表示.

定理 6.2.1 *设ω是实线性空间V上非零的反对称双线性函数, 则存在一个非负整数n及V上存在一组基底$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_m$($m = \dim V - 2n$), 使得 ω 在这组基底下的矩阵表示为*

$$\omega_{q;p;u} = \begin{pmatrix} J_{2n\times 2n} & \\ & O_{m\times m} \end{pmatrix}, \tag{226}$$

其中

$$J_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{pmatrix}. \tag{227}$$

换言之, $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_m$ 满足

$$\begin{cases} \omega(q_i, p_j) = \delta_{ij} & i, j = 1, \cdots, n, \\ \omega(p_i, p_j) = \omega(p_i, p_j) = 0 & i, j = 1, \cdots, n, \\ \omega(u_i, v) = 0 & i = 1, \cdots, m,\ v \in V. \end{cases} \tag{228}$$

证明: 如果$\omega \equiv 0$, 那么$n = 0$, ω总是零矩阵，符合(226)中的情形.

如果$\omega \neq 0$, 那么我们可以选择两个向量$q_1, \widetilde{p}_1$, 使得$\omega\left(q_1, \widetilde{p}_1\right) \neq 0$, 然后取

$p_1 = \widetilde{p}_1 \,/\, \omega\left(q_1, \widetilde{p}_1\right)$, 则$\omega(q_1, p_1) = 1$. q_1, p_1一定不共线, 因为反对称双线性函数作用在两个共线向量上的结果肯定是0. 我们记

$$W_1 = \operatorname{span}\{q_1, p_1\},\ W_1^\perp = \{v \in X : \forall w \in W_1, \omega(q_1, p_1) = 0\}, \tag{229}$$

则对于任意一个向量$v \in V$, 我们有

$$v = \underbrace{v - \omega(v, p_1)q_1 + \omega(v, q_1)p_1}_{\in W_1^\perp} + \underbrace{\omega(v, p_1)q_1 - \omega(v, q_1)p_1}_{\in W} \tag{230}$$

并且容易验证$W_1 \cap W_1^\perp = \{0\}$, 因此我们有

$$V = W_1 \oplus W_1^\perp. \tag{231}$$

接下来，我们对$W_1^\perp$及ω在其上的限制$\omega_{W_1^\perp \times W_1^\perp}$重复上述操作, 如果$\omega_{W_1^\perp \times W_1^\perp}$非零, 那么我们又可以得到$W_1^\perp$中的两个向量$q_2, p_2$, 使得$\omega(q_2, p_2) = 1$, 然后令

$$W_2 = \operatorname{span}\{q_2, p_2\},\ W_2^\perp = \{v \in W_2 : \forall w \in W_1, \omega(q_2, p_2) = 0\},$$

则有

$$W_1 = W_2 \oplus W_2^{\perp}.$$

接下来，我们对$W_2^{\perp}$及ω在其上的限制$\omega_{W_2^{\perp}\times W_2^{\perp}}$重复上述操作, 如果$\omega_{W_2^{\perp}\times W_2^{\perp}}$非零, 那么我们又可以得到$W_2^{\perp}$中的两个向量$q_3, p_3$, 使得$\omega(q_3, p_3) = 1$, 然后令

$$W_3 = \mathrm{span}\{q_2, p_2\},\ W_3^{\perp} = \{v \in W_2 : \forall w \in W_1, \omega(q_2, p_2) = 0\},$$

则有

$$W_2 = W_3 \oplus W_3^{\perp}.$$

……

如此循环，直到在第n步时，我们发现$\omega_{W_n^{\perp}\times W_n^{\perp}}$为零. 任取$W_n^{\perp}$上的一组基底$u_1, \cdots, u_m$, 则

$$\begin{aligned} V &= W_1 \oplus W_1^{\perp} \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_2^{\perp} \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_3^{\perp} \\ &= \cdots \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus W_n^{\perp} \\ &= \mathrm{span}\{q_1, p_1\} \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}\{q_n, p_n\} \oplus \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_m\} \\ &= \mathrm{span}\{q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_m\} \end{aligned}$$

从而向量组$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_m$是$V$的一组基底, 并且可以验证这组基底满足(228). □

上述证明中构造基底的过程实际上类似于内积空间上“Gram-Schmidt正交化”的过程, 只不过我们这里的“正交”是“辛内积为0”的意思.

对于我们而言，更加重要的是非退化的双线性函数. 所谓非退化，指的是双线性函数的矩阵表示总是满秩的, 或者说诱导映射

$$\begin{aligned} \omega^{\flat} : V &\to V^* \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot) \end{aligned}$$

是$V \to V^*$的线性同构. 如果一个双线性函数是非退化的，那么在我们按照定理 6.2.1所构造的矩阵表示(226)中, m就应该为0, 否则(226)这个矩阵就不是满秩的了, 这样我们便有

$$\dim V = 2n,$$

这告诉我们V的维数一定是偶数, 并且基底$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, u_1, \cdots, u_m$ 中根本没有$u_1, \cdots, u_m$这一部分, 只有$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$.

定义 6.2.1 *设V是一个线性空间, ω是V上的一个双线性函数, 则称(V, ω)是一个**辛线性空间**，或者说V是一个辛线性空间, ω是其上**辛内积**, 按照*定理 6.2.1*所构造的基底*

$$q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n$$

*称为V上的一组**辛基底**, ω在这组基底下的矩阵表示*

$$J_{2n\times 2n}=\begin{pmatrix} O_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & O_{n\times n}\end{pmatrix} \tag{232}$$

*称为**辛矩阵**.*

例 6.2.1 *$\left(\mathbb{R}^{2n},J_{2n\times 2n}\right)$是一个辛线性空间，其中$J_{2n\times 2n}$由(232)定义. 此时自然基底*

$$q_k=e_k,\ p_k=e_{k+n},\ k=1,\ \cdots,n$$

是这个辛线性空间的一组辛基底, 其中e_l指的是第l个分量为1, 其他分量全为0的列向量($l=1,\ \cdots,2n$).

就像在定理 6.2.1中的证明里面那样，对辛线性空间(V,ω)的任意一个子空间W, 我们定义

$$W^{\perp}:=\{v\in V\mid \forall u\in W,\ \omega(v,u)=0\}$$

为W的**辛正交补空间**.

类似于内积空间中的正交补空间，辛正交补空间满足

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W, \tag{233}$$

$$\dim W^{\perp}+\dim W=V. \tag{234}$$

但是一般来讲，$W^{\perp}\cap W=\{0\}$ 却并不总是成立的. 比如说V的任意一个一维线性子空间, 读者可以顺手验证，它与它辛正交补的交集还是它本身. 辛线性空间的子空间与其正交补之间的关系大概分为这样几类:

- $W^{\perp}\cap W=\{0\}$, 此时我们称W是V的**辛子空间**, 这等价于说ω在子空间W上的限制$\omega|_{W\times W}$是非退化的
- $W\subseteq W^{\perp}$, 此时我们称W是**各向同性的**, 这等价于说ω在子空间W上的限制$\omega|_{W\times W}\equiv 0$.
- $W^{\perp}\subseteq W$, 此时我们称W是**余各向同性的**. 由(233)我们可以得知, W是余各项同性的当且仅当$W^{\perp}$是各向同性的.
- $W=W^{\perp}$, 此时我们称W是V的一个**Lagrange子空间**. 称W是V的Lagrange子空间当且仅当W既是各向同性的又是余各项同性的.
- 其它情形, 我们不关注.

例 6.2.2 *在例 6.2.1中,*

$$\begin{cases} \operatorname{span}\{q_1,p_1\},\operatorname{span}\{q_1,q_2,p_1,p_2\}\text{都是}\mathbb{R}^{2n}\text{的辛子空间}, \\ \operatorname{span}\{q_1,q_2\},\operatorname{span}\{p_1,p_2,p_3\}\text{等是各向同性的}, \\ \operatorname{span}\{q_1,\ \cdots,q_n,p_1\}\text{是余各向同性的}, \\ \operatorname{span}\{q_1,\ \cdots,q_n\},\operatorname{span}\{p_1,\ \cdots,p_n\}\ \text{是Lagrange子空间}. \end{cases}$$

接下来我们通过几条定理来更加详尽地讨论辛正交补、辛子空间、各项同性、余各项同性子空间和Lagrange子空间的性质, 它们均选自da Silva的*Lectures on Symplectic Geometry*第一章的课后习题.

以下我们均假设V是线性空间, ω是其上辛内积.

定理 6.2.2 *对于V的任意线性子空间W,* (233)*和*(234)*成立.*

证明: 考虑映射

$$\begin{aligned}\omega_W^\flat : V &\to W^* \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot)|_W,\end{aligned}$$

$\omega_W^\flat$的核是

$$\{v | \forall y \in W, \omega(v, y) = 0\} = W^\perp$$

因此其维数是 $\dim W^\perp$; 而$\omega_W^\flat$的像集则是全体形如

$$\{\omega(v, \cdot)|_W : v \in V\}$$

的集合. 由 ω 的非退化性，$\{\omega(v, \cdot) : v \in V\} = V^*$ 包含了所有 $V \to \mathbb{R}$ 的线性映射，从而 $\{\omega(v, \cdot)|_W : v \in V\} = W^*$ 包含了所有 $W \to \mathbb{R}$ 的线性映射，从而这个像集是 $\dim W$ 维的.

线性映射的核和像的维数是定义域的维数，从而有 $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, 即(233)成立.

进一步地,

$$\left(Y^\perp\right)^\perp := \{v \in V \,|\, \omega(v, u) = 0 \text{ for all } u \in Y^\perp\}$$

是 X 的一个线性空间，注意 Y 中的所有元素满足上述条件，所以 $Y \subseteq Y^\perp$, 而由第1问，有

$$\dim\left(Y^\perp\right)^\perp = \dim Y,$$

从而必然有 $\left(Y^\perp\right)^\perp = Y$, 即(234)成立. □

定理 6.2.3 *若Y和W均是V的线性子空间, 则* $Y \subseteq W \iff W^\Omega \subseteq Y^\Omega$.

证明: 由于

$$\begin{cases} Y^\perp = \{v \in V \,|\, \omega(v, u) = 0 \text{ for all } u \in Y\} \\ W^\perp = \{v \in V \,|\, \omega(v, u) = 0 \text{ for all } u \in W\} \end{cases}$$

若$v \in Y^\perp$, 则 $\omega(v, u) = 0$ for all $u \in W$，由于 $Y \subseteq W$, 必有 $\omega(v, u) = 0$ for all $u \in Y$, 即 $v \in W^\perp$. 这说明 $W^\perp \subseteq Y^\perp$. □

定理 6.2.4 W *是辛子空间(i.e.,* $\Omega|_{W\times W}$ *非退化)* $\iff W \cap W^\perp = \{0\} \iff V = W \oplus W^\perp$

证明: W 辛 $\implies W \cap W^\perp = \{0\}$: $x \in W \cap W^\perp$ 意味着 $x \in W$ 并且

$$\omega(x,u)=0 \text{ for all } u\in W$$

由 ω 的非退化性，$x=0$.

$W\cap W^{\perp}=\{0\}\Longrightarrow W$ 辛：$W\cap W^{\perp}=\{0\}$ 意味着若 $x\in W$ 并且

$$\omega(x,u)=0 \text{ for all } u\in W$$

则必有 $x=0$，这等价于 ω 的非退化性.

W 辛 $\Longrightarrow V=W\oplus W^{\perp}$：由于 $W\cap W^{\perp}=\emptyset$, 并且 $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$, 故 $W\oplus W^{\perp}=V$.

$W\oplus W^{\perp}$ 蕴含了 $W\cap W^{\perp}=0$, 所以反过来不用证了. □

定理 6.2.5 *若W是V的各向同性的线性子空间，则*$\dim W\leq\frac{1}{2}\dim V$.

证明: 由$W\subseteq W^{\perp}$ 有 $\dim W\leq\dim W^{\perp}$, 又因 $\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V$, 故 $2\dim W\leq\dim V$, 得证. □

定理 6.2.6 *在W是V的各向同性的线性子空间的前提下, 下述各款等价*
- *W是V的Lagrange子空间, 即$W=W^{\perp}$*
- *W既是各向同性的又是余各项同性的*
- $\dim W=\frac{1}{2}\dim V$

证明: 既是各向同性的又是余各项同性的即 $W\subseteq W^{\perp}$ 且 $W^{\perp}\subseteq W$, 即 $W^{\perp}=W$, 后两者等价; 并且意味着 $\dim W=\frac{1}{2}\dim V$ 故能推出W是V的Lagrange子空间; 如果W是V的Lagrange子空间则 $W\subseteq W^{\perp}$, 而 $\dim W=\frac{1}{2}\dim V$即 $\dim W=\dim W^{\perp}$, 因此 $W=W^{\perp}$. □

定理 6.2.7 *如果W是V的Lagrange子空间, 那么对于W上的任意一组基底$q_1,\cdots,q_n$, 我们可以找到V中的另外n个向量$p_1,\cdots,p_n$, 使得$q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n$ 构成V的一组辛基底.*

证明: 第一步：选取 $p_1\in\operatorname{span}\{q_2,\ldots,q_n\}^{\perp}$. 由于 $\operatorname{span}\{q_2,\ldots,q_n\}^{\perp}$ 的维数是 $n+1$, 它肯定不是 W 的子空间，从而可以选择 p_1 使得其 $\notin V$, 这样就必有 $\omega(q_1,p_1)\neq 0$ (否则 $\omega(q_1,p_1)=0$, 又有 $\omega(q_i,p_1)=0$ for all $i\geq 2$, 这便意味着 $p\in V^{\perp}$, 亦即 $p\in V$, 矛盾), 再适当伸缩之, 可以使得 $\omega(q_1,p_1)=1$.

第二步：考虑 $\operatorname{span}\{q_1,p_1\}^{\perp}$，此时 $\operatorname{span}\{q_2,\ldots,q_n\}^{\perp}$ 是 $\operatorname{span}\{q_1,p_1\}^{\perp}$ 的 Lagrangian 子空间，我们可以类似第一步地，取 $p_2\in\operatorname{span}\{q_3,\ldots,q_n\}^{\perp}\setminus\operatorname{span}\{q_2,\ldots,q_n\}^{\perp}$，这样 p_2 与p_1及$q_i(i\neq 2)$ 都是 ω-正交的.

第三步：考虑 $\mathrm{span}\{q_1, p_1, q_2, p_2\}^\perp$，此时 $\mathrm{span}\{q_3, \dots, q_n\}^\perp$ 是 $\mathrm{span}\{q_1, p_1, q_2, p_2\}^\perp$ 的
Lagrangian 子空间，我们可以类似第一步地，取
$p_3 \in \mathrm{span}\{q_4, \dots, q_n\}^\perp \setminus \mathrm{span}\{q_3, \dots, q_n\}^\perp$，这样 p_3 与p_2, p_1及$q_i (i \neq 3)$ 都是 ω-正交的.

...

第n步：考虑 $\mathrm{span}\{q_1, p_1, q_2, p_2, \cdots, q_{n-1}, p_{n-1}\}^\perp$, 这是一个二维辛子空间，并且 q_n 在其内，任取这个空间里一个与 q_n 不共线的元素，p_n 使得 $\omega(q_n, p_n) \neq 0$, 再适当伸缩之，使得 $\omega(q_n, p_n) = 1$. 基就找完了. □

正如在内积空间中, 正交变换可以保持两个向量变换前后内积不变, 在辛线性空间中我们也会关注这样一类线性变换, 它使得任意两个向量在这个线性变换前后的辛内积保持不变.

定义 6.2.2 *设(V_1, ω_1)和(V_2, ω_2)是两个辛线性空间, φ是$V_1 \to V_2$的线性同构, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V_1$ 和, 有*

$$\omega_2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \omega_1(\alpha, \beta),$$

则称φ是V_1和V_2之间的一个辛线性同构. 特别地$(V_2, \omega_2) = (V_1, \omega_1)$, 则称$\varphi$是$(V_1, \omega_1)$上的辛线性变换.

和在内积空间中类似, 一个$2n$维辛线性空间和$\mathbb{R}^{2n}$总是辛线性同构的.

定理 6.2.8 *任意一个$2n$维辛线性空间同构于$\left(\mathbb{R}^{2n}, J_{2n\times 2n}\right)$.*

证明: 设(V, ω)是$2n$维线性空间, 任取V的一组辛基底$q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$, 取线性映射$\varphi$, 使得$\varphi(q_i) = e_i$, $\varphi(p_i) = e_{n+i}$ $(i = 1, \cdots, n)$, 则φ是满足条件的辛线性同构. □

此外，正如在n维内积空间中, 全体正交变换构成一个Lie群$U(n)$, 一个$2n$辛线性空间上的全体辛线性变换也构成一个Lie群, 称为$2n$维**辛群**, 记作$\mathrm{Sp}(2n)$.

由于任意一个$2n$维辛线性空间同构于$\left(\mathbb{R}^{2n}, J_{2n\times 2n}\right)$, 我们只需要讨论$\mathbb{R}^{2n}$上的全体辛线性变换. 对于$v, w \in \mathbb{R}^{2n}$, 它们的辛内积即

$$v^\top J_{2n\times 2n} w,$$

假设有一个辛线性变换的矩阵表示为M, 那么我们有

$$(Mv)^\top J_{2n\times 2n}(Mw) = v^\top J_{2n\times 2n} w, \ \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

由此, 我们容易得到

$$M^\top J_{2n\times 2n} M = J_{2n\times 2n}. \tag{235}$$

(235)就是M是辛变换的充分必要条件.

辛群是“辛”这个名字最初的来源. $\mathrm{Sp}(2n)$最初的名字是“复群(complex group)”，1946年, Weyl觉得 complex group 这个名字太有歧义, 因此把complex一词的前缀“com-”替换成了同义的希腊文词缀“sym-”, 最终创造了“symplectic”一词, 不久之后华罗庚先生把这个词的第一个音节音译成了一个“辛”字传入国内, 这便有了辛群、辛流形、辛几何这些名字. 可见“辛”字和天干地支计数中的“辛”其实没什么关系, 它只是一个音译. 有人觉得这个中文翻译很牵强, 不够“信达雅”, 但相比于对岸的日本直接把整个symplectic音译为片假名“シンプレクティック”而言, “辛”这个名字至少还算是简洁.

习题

习题 6.2.1 *求证: 若$A\in \mathrm{Sp}(2n)$, $\lambda\in\mathbb{C}$是A的特征值, 则$\overline{\lambda}$, $1/\lambda$, $1/\overline{\lambda}$都是A的特征值.*

习题 6.2.2 *求$\mathrm{Sp}(2n)$的维数.*

习题 6.2.3 *求证: $\mathrm{Sp}(2)=SL(2)$.*

6.3. 辛流形、辛同胚

类似于Riemann流形是由一个流形在其每一点的切空间处定义一个内积构成的，辛流形是由一个流形在每一点处定义一个辛内积构成的. 当然，我们也会对这些辛内积有一些额外的要求.

定义 6.3.1 *设M是一个流形, ω是M上的一个闭的、非退化的2-形式, 则我们称(M,ω)是一个**辛流形**, 或者M是一个辛流形, ω是M上的**辛形式**或**辛结构**.*

这个定义中有这样一些关键要素:

- ω是M上的一个2-形式: 指的是M上的一个二阶反对称协变张量场, 即ω在M上每一点的切空间处定义了一个反对称的双线性函数, 并且这个双线性函数在M的每一个局部坐标系下的系数都是光滑函数;
- ω是闭的: 指的是ω的外微分为零, 即$\mathrm{d}\omega=0$
- ω是非退化的: 指的是ω在每一点的切空间处定义的那个反对称的双线性函数都是非退化的, 即这个双线性函数是一个辛内积, 使得这个切空间构成一个辛内积空间.

我们知道, 一个辛内积空间的维数必然是偶数, 如果一个流形是辛流形, 则意味着它在每一点处的切空间都是偶数维的, 而流形的维数又等于切空间的维数, 因此我们有:

定理 6.3.1 *辛流形的维数一定是偶数.*

这是一个流形能够成构成辛流形的最基本要求.

例 6.3.1 *我们将$\mathbb{R}^{2n}$的前n个坐标分量称为$q_1,\cdots,q_n$, 后n个坐标分量称为$p_1,\cdots,p_n$, 记*

$$\omega = \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_2 + \ \cdots \ + \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_n, \tag{236}$$

则$\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega\right)$是一个辛流形.

证明: 我们来证明, ω是闭的、非退化的. 事实上,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(\mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(\mathrm{d}q_i) \wedge \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0 \wedge \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}q_i \wedge 0 = 0,
\end{aligned}$$

故ω是闭的. 而对于$\mathbb{R}^{2n}$上的任意一点x, 我们把

$$\frac{\partial}{\partial q_1}, \ \cdots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ \cdots, \frac{\partial}{\partial p_n} \tag{237}$$

作为x的基底(这里我们省略了取值记号"$\big|_x$"), 则对于每一个$i, j = 1, 2, \ \cdots, n$, 有

$$\begin{aligned}
&\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}q_k \wedge \mathrm{d}p_k \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) \\
= &\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_k\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}p_k\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) - \mathrm{d}p_k\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_k\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{kj} = 0 \\
&\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_k \wedge \mathrm{d}p_k \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \\
= &\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_k\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}p_k\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) - \mathrm{d}p_k\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}q_k\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} - 0 \cdot 0 = \delta_{ij},
\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

类似地, 可以证明

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0, \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_j}\right) = \ -\delta_{ij},$$

从而ω在p点处定义的双线性函数在(237)中定义的基底下的矩阵表示正是(232)中定义的$J_{2n\times 2n}$, 这是一个非退化的矩阵, 因此ω是非退化的. □

例 6.3.2 *对于任意一个可定向的二维流形M及M上的任意一个处处非零的2-形式ω, (M,ω)都是一个辛流形.*

证明: 首先, 因为M是二维的, 所以M上的微分形式最高就是2阶, 从而任何2-形式的外微分都一定是0, 这就证明了ω是闭的; 其次, 因为M是二维的且ω是反对称的, 所以ω在M中任意一点处的切空间上的任意一组基底下的矩阵表示都必然具有

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

的形式, 而ω非零, 故a也一定不等于零, 从而这个矩阵表示是非退化的, 这也意味着ω在该点处是非退化的, 这就证明了ω在M上是处处非退化的. □

在辛流形也是流形, 它当然也有光滑映射、向量场、微分形式等等一系列概念. 其中对于辛流形之间的光滑映射, 我们会格外关注那些"保持辛形式不变"的光滑映射.

定义 6.3.2 *设(M_1,ω_1)和(M_2,ω_2)是辛流形, φ是$M\to N$的光滑映射, 如果$\varphi^*\omega_2=\omega_1$, 或者说对于$M$上任意两个同一点处发出的切向量$\alpha,\beta$, 都有*

$$\omega_2(\varphi_*\alpha,\varphi_*\beta)=\omega_1(\alpha,\beta),$$

*则称φ是(M_1,ω_1)到(M_2,ω_2)的**辛映射**. 进一步地, 如果φ还是M_1到M_2的同胚映射, 则称φ是(M_1,ω_1)到(M_2,ω_2)的**辛同胚**, 一个辛流形到其自身的辛同胚称为**辛自同构**, 辛流形M的全体辛自同构记作*$\mathrm{Sympl}(M)$.

由上述定义，我们很容易得到

定理 6.3.2 *设(M_1,ω_1)和(M_2,ω_2)是辛流形, φ是$M\to N$的光滑同胚, 则φ是辛同胚当且仅当对于任意$p\in M$, φ作为$T_pM\to T_{\varphi(p)}N$的映射是辛线性映射.*

例 6.3.3 *对于例 6.3.1中的$\left(\mathbb{R}^{2n},\omega\right)$, 对于任意$k\neq 0$,*

$$\begin{aligned} \varphi:\mathbb{R}^{2n}&\to\mathbb{R}^{2n}\\ (q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)&\mapsto\left(kq_1,\cdots,kq_n,\frac{p_1}{k},\cdots,\frac{p_n}{k}\right)\end{aligned}$$

是辛自同构, 而

$$\begin{aligned} \psi:\mathbb{R}^{2n}&\to\mathbb{R}^{2n}\\ (q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)&\mapsto(kq_1,\cdots,kq_n,kp_1,\cdots,kp_n)\end{aligned}$$

是自同胚, 但在$k\neq\pm1$时不是辛映射.

证明: 欲证明φ是辛自同构, 我们只需证明

$$\omega(\varphi_*\alpha,\varphi_*\beta)=\omega(\alpha,\beta)$$

对于$\mathbb{R}^{2n}$上任意两个同一点处发出的切向量α,β成立. 任取$x\in\mathbb{R}^{2n}$, 设$\alpha,\beta\in T_x\mathbb{R}^{2n}$, 并且它们有分量表达式

$$\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\alpha_{n+i}\frac{\partial}{\partial p_i},\ \beta=\sum_{i=1}^n\beta_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\beta_{n+i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

(这里我们省略了取值记号"$|_x$")那么

$$\varphi_*\alpha=\sum_{i=1}^nk\alpha_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{\alpha_{n+i}}{k}\frac{\partial}{\partial p_i},\ \varphi_*\beta=\sum_{i=1}^nk\beta_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\frac{\beta_{n+i}}{k}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\psi_*\alpha=\sum_{i=1}^nk\alpha_i\frac{\partial}{\partial q_i}+k\alpha_{n+i}\frac{\partial}{\partial p_i},\ \varphi_*\beta=\sum_{i=1}^nk\beta_i\frac{\partial}{\partial q_i}+k\beta_{n+i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

并且

$$\omega(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_{n+i}-\alpha_{n+i}\beta_i,$$

从而

$$\omega(\varphi_*\alpha,\varphi_*\beta)=\sum_{i=1}^nk\alpha_i\cdot\frac{\beta_{n+i}}{k}-k\alpha_{n+i}\cdot\frac{\beta_i}{k}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_{n+i}-\alpha_{n+i}\beta_i=\omega(\alpha,\beta),$$

故φ是辛同构; 但是

$$\omega(\psi_*\alpha,\psi_*\beta)=\sum_{i=1}^nk\alpha_i\cdot k\beta_{n+i}-k\alpha_{n+i}\cdot k\beta_i=k^2\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_{n+i}-\alpha_{n+i}\beta_i\right)=k^2\omega(\alpha,\beta),$$

从而只要$k\neq\pm1$, 则必有$\omega(\psi_*\alpha,\psi_*\beta)=k^2\omega(\alpha,\beta)\neq\omega(\alpha,\beta)$, 因此$\psi$一般不是辛映射. □

例 6.3.4 *对于$\big(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p\big)$, 一个$\mathbb{R}^2$光滑坐标变换*

$$\begin{cases}Q=Q(q,p)\\P=P(q,p)\end{cases}$$

是辛同胚当且仅当该变换的Jacobi行列式为1, 即

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q}{\partial q}&\dfrac{\partial Q}{\partial p}\\\dfrac{\partial P}{\partial q}&\dfrac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}\equiv1.\tag{238}$$

证明: 我们只需要注意

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}P &= \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial Q}{\partial p}\mathrm{d}p\right)\wedge\left(\frac{\partial P}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial P}{\partial p}\mathrm{d}p\right)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial q}\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}q+\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q+\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p+\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial p}\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}p\\
&= 0-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p+\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p+0\\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right)\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p}\\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}P=\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p\Longleftrightarrow\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p}\\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix}=1.
$$

□

例6告诉我们, $\mathbb{R}^2$上的辛变换就是$\mathbb{R}^2$上的保体积变换, 即一个区域的体积在坐标变换前后是不变的. 如果我们要利用这个变换来计算$\mathbb{R}^2$上某个函数f在某个区域Ω上的积分, 那么我们不必多乘一个Jacobi行列式, 即

$$
\int_\Omega f(Q,P)\mathrm{d}Q\mathrm{d}P=\int_\Omega f(Q(q,p),P(q,p))\mathrm{d}q\mathrm{d}p.
$$

我们可以对比一下, $\mathbb{R}^2$上的辛变换和$\mathbb{R}^2$上的保持Riemann度量的变换. 可以证明, 欧氏空间上的保持Riemann度量的变换必然是保距变换, 即保持$\mathbb{R}^n$上任意两点之间距离不变的变换. 这一类变换我们在讨论刚体问题时曾经证明过, 它们必然具有$x\mapsto Ax+b$, 的形式, 其中A是正交矩阵. 这些变换全体构成一个$\left(n^2+n\right)/2$维Lie群, 称为n维欧氏群. 对于$\mathbb{R}^2$, 全体保距变换构成2维欧氏群, 它的流形维数是$\left(2^2+2\right)/2=3$, 即一个刚性变换只有三个自由度（两个平移、一个旋转）. 但是$\mathbb{R}^2$上的辛变换则有着多得多得多的自由度：事实上, $\mathbb{R}^2$全体辛变换构成的群不是Lie群，因为它的维数是无穷大. 这里我们不去证明这个结论，但是读者可以想象，二维辛变换只需要具有“保体积性”——它可以把直角坐标系映成各式各样的曲纹坐标系, 只要这些曲纹坐标系中坐标网格的体积不变即可, 这样的变换当然比必须保持每个网格形状完全不变的保距变换要多得多了!

类似于在辛线性空间中我们有Lagrange子空间, 在辛流形中我们也有Lagrange子流形.

定义 6.3.3 *设(M,ω)是一个$2n$维辛流形, N是M的n维嵌入子流形, 如果对于TN中的任意两个同一点发出的切向量α,β, 都有*

$$\omega(\alpha,\beta)=0,$$

则称N是M的Lagrange子流形.

Lagrange子流形还有如下等价表述：

定理 6.3.3 *设(M,ω)是一个辛流形, N是M的嵌入子流形, 则N是M的Lagrange子流形当且仅当对于任意$p\in N$, T_pN都是T_pM的Lagrange子空间.*

利用Lagrange子流形, 我们可以给辛同胚一个新的表述形式

定理 6.3.4 *设M,N是辛流形, φ是$M\to N$的微分同胚, 那么$\varphi:M\to N$是辛同胚当且仅当对于M的每一个Lagrange子流形P, $\varphi(P)$都是N上的Lagrange子流形.*

习题

习题 6.3.1 *请判断下列流形上是否存在辛结构:*

(a). 二维球面S^2(方程: $x^2+y^2+z^2=1$)

(b). 三维球面S^3(方程: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$)

(c). 莫比乌斯环

(d). 四维环面$T^4=S^1\times S^1\times S^1\times S^1$.

习题 6.3.2 *求证: $(0,+\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,+\infty)^2$的映射*

$\varphi:(x,y)\mapsto\left(\sqrt{2x}\cos y,\sqrt{2x}\sin y\right)$ *是一个辛映射, 这里我们在两个$\mathbb{R}^2$的开集上都取标准辛形式$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.*

习题 6.3.3 *求证: 二维辛流形上的所有光滑曲线都是它的Lagrange子流形.*

6.4. Hamilton 向量场、Poisson括号

本节我们介绍辛流形上两类重要的向量场：辛向量场和Hamilton向量场.

我们知道, 一个流形上的每一个向量场X都会在这个流形上定义一个单参数微分同胚群$\left\{\mathrm{e}^{tX}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, 对于辛流形, 我们会格外关注那些使得$\mathrm{e}^{tX}$对每一个$t$都是辛同胚的向量场, 也就是那些使得

$$\omega\left(\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_*\alpha,\left(\mathrm{e}^{tX}\right)_*\beta\right)=\omega(\alpha,\beta)\tag{239}$$

对M上任意两个从同一点发出的切向量α,β及任意t成立的向量场. (239)意味着对于任意$t\in\mathbb{R}$, 有

$$\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^*\omega=\omega,$$

从而

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^*\omega - \omega}{t} \equiv 0,$$

由此，我们我们给出如下定义：

定义 6.4.1 *设(M,ω)是辛流形, X是M上的向量场, 如果$\mathcal{L}_X\omega \equiv 0$, 则我们称$X$是$M$上的辛向量场, M上全体辛向量场的集合记作$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$.*

当然, 上述定义无法保证X是一个完备的向量场[14]. 但如果X是一个完备的辛向量场, 那么它生成的单参数微分同胚群$\left\{\mathrm{e}^{tX}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$中的每一个元素必然都是辛自同构.

定理 6.4.1 *X是M上的辛向量场当且仅当*

$$\mathrm{d}(\iota_X\omega) = 0 \tag{240}$$

成立.

证明: 利用Cartan魔术公式及ω的闭性($\mathrm{d}\omega = 0$)，我们有

$$0 = \mathcal{L}_X\omega = \mathrm{d}(\iota_X\omega) + \iota_X(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\iota_X\omega) + \iota_X 0 = \mathrm{d}(\iota_X\omega),$$

从而(240)得证. □

对(240)应用Poincare引理, 对于M上任意一点, 我们都可以在它的任意一个同胚于$\mathbb{R}^{2n}$的邻域$N \subseteq M$上构造一个光滑函数H, 使得

$$\iota_X\omega = \mathrm{d}H. \tag{241}$$

在N上成立, 称为X的一个**局部Hamilton函数**(很快我们就会看到此名从何而来). 当然, 如果M本身就同胚于$\mathbb{R}^{2n}$开球, 那么就存在一个在整个M上有定义的函数H来满足(241).

有一点点遗憾, 并非所有流形上的所有辛向量场存在有一个使得(241)成立的在整个流形上定义的光滑函数H与之对应. 但反过来讲, 如果存在一个M上的光滑函数H使得(241)成立, 那么必然有

$$\mathrm{d}(\iota_X\omega) = \mathrm{d}(\mathrm{d}H) = 0,$$

从而X也必然是M上的辛向量场, 但是这些向量场对于我们讨论Hamilton力学问题而言将会有更加重要的意义，所以值得拥有一个新的名字: Hamilton向量场.

定义 6.4.2 *设(M,ω)是辛流形, X是M上的向量场, 如果存在一个M上的光滑函数H, 使得(241)成立, 则我们称X是一个Hamilton向量场, M上的全体Hamilton向量场的集合记作$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$.*

由于Hamilton向量场都是辛向量场，假设X是完备的Hamilton向量场也必然是一个完备的辛向量场, 从而它生成的单参数微分同胚群$\left\{\mathrm{e}^{tX}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$中的每一个元素必然都是辛自同构.

例 6.4.1 *对于例 6.3.1中的辛流形$\left(\mathbb{R}^{2n},\omega\right)$, 任取光滑函数*

---

[14] 回顾：如果一个流形M上的向量场X可以生成整个流形的单参数微分同胚群$\left\{\mathrm{e}^{tX}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, 则称$X$是完备的

$H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n):\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, *我们可以唯一地确定*$\mathbb{R}^{2n}$*上的一个向量场*$X$, *使得* (241)*成立. 假设*

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial q_i}+X_{n+i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

则对于任意向量场Y, *我们有*

$$\begin{aligned}(\iota_{\partial/\partial q_i}\omega)(Y)&=\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}q_j\wedge\mathrm{d}p_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial q_i},Y\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}q_j\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}p_j(Y)-\mathrm{d}q_j(Y)\mathrm{d}p_j\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\mathrm{d}p_j(Y)-\mathrm{d}q_j(Y)\cdot 0\\&=\mathrm{d}p_i(Y)\end{aligned}$$

从而有

$$\iota_{\partial/\partial q_i}\omega=\mathrm{d}p_i,$$

类似地, 可以证明

$$\iota_{\partial/\partial p_i}\omega=-\mathrm{d}q_i,$$

因此

$$\begin{aligned}\iota_X\omega&=\sum_{i=1}^{n}X_i\iota_{\partial/\partial q_i}\omega+X_{n+i}\iota_{\partial/\partial p_i}\omega\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i\iota_{\partial/\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i\right)+X_{n+i}\iota_{\partial/\partial p_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i\mathrm{d}p_i-X_{n+i}\mathrm{d}q_i.\end{aligned}\tag{242}$$

另一方面,

$$\mathrm{d}H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i.\tag{243}$$

由 (241), *我们知道* (242) *和* (243) *中*$\mathrm{d}q_i$, $\mathrm{d}p_i$ *前面的对应系数应该相等, 因此我们有*

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ X_{n+i} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{244}$$

换言之, X的任意一条积分曲线$\gamma(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$ 都应该满足微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{245}$$

(245)*不是别的, 正是经典力学中的Hamilton正则方程, 连一个字母都不差.*

通过上例, 我们已经能够看到辛流形与Hamilton力学最直接的关联, 辛流形中的各种概念与Hamilton力学中各种理论的对应关系也将在本章中陆陆续续地呈现出来.

在例 6.4.1中, 我们看到一个函数可以唯一地确定一个Hamilton向量场, 那么这个命题对一般的辛流形是否成立呢? 答案是肯定的

定理 6.4.2 *设(M, ω)是辛流形, H是M上的一个光滑函数, 在M上存在唯一的Hamilton向量场X_H, 使得*

$$\iota_{X_H}\omega = \mathrm{d}H, \tag{246}$$

*此时我们称X_H为函数H的Hamilton向量场, H为Hamilton向量场X_H的**Hamilton函数**.*

证明: 由于ω是非退化的, 故在M的每一点p处

$$\begin{aligned} \omega_p^\flat : T_pM &\to T_p^*M \\ v &\mapsto \iota_v\omega = \omega(v, \cdot) \end{aligned}$$

是线性同构, 因此$\omega_p^\flat$有逆映射, 从而我们可以取

$$(X_H)_p = \left(\omega_p^\flat\right)^{-1}((\mathrm{d}H)_p),$$

并且这种取法是唯一的. □

如果反过来, 给定一个一个Hamilton向量场X, $\iota_X\omega$会是某一M上的函数的微分, 但是这个函数不是唯一确定的. 事实上, 如果$\iota_X\omega = \mathrm{d}H$, 则对于任意常数$C$, $\iota_X\omega$也等于$\mathrm{d}(H + C)$.

上述定理在Riemann流形中是有对应的. 在Riemann流形(M, g)中, 对于任意一个函数L, 会有唯一一个满足

$$\iota_{X_L}g = \mathrm{d}L \tag{247}$$

的向量场X_L, 称为函数L的*梯度场*. 但一般来讲, Hamilton向量场和梯度场的定性性质有很大的差异.

定理 6.4.3 *设(M,ω)是辛流形, H是M上的一个光滑函数, X_H是H对应的Hamilton向量场, 则沿着X_H的任意积分曲线$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $H\circ\gamma$是常值函数, 即H沿γ不变.*

证明: 事实上, 由于γ是X_H的积分曲线, 有

$$\gamma'(t)=X_H(\gamma(t))$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}&=\mathcal{L}_{\gamma'(t)}H=\iota_{\gamma'(t)}(\mathrm{d}H)=\iota_{\gamma'(t)}(\iota_{X_H(\gamma(t))}\omega)\\&=\iota_{\gamma'(t)}(\iota_{\gamma'(t)}\omega)=\omega(\gamma'(t),\gamma'(t))=0.\end{aligned}$$

因此$H(\gamma(t))$是常数. □

相比之下, 对于Riemann流形上函数L的梯度场X_L，我们可以类似地计算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}&=\mathcal{L}_{\gamma'(t)}L=\iota_{\gamma'(t)}(\mathrm{d}L)=\iota_{\gamma'(t)}(\iota_{X_L(\gamma(t))}g)\\&=\iota_{\gamma'(t)}(\iota_{\gamma'(t)}g)=g(\gamma'(t),\gamma'(t))\geq 0,\end{aligned}$$

从而L沿着$\gamma(t)$是一个随t单调不减的函数.

最后，我们从Lie括号的角度来重新审视一下全体辛向量场$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$和全体Hamilton向量场的集合$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$.

定理 6.4.4 *$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$按照向量场的Lie括号构成Lie代数, 并且$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$是$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$的子Lie代数.*

证明: 按照我们之前的讨论, $\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$必然是$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$的子集, 从而我们只需要证明$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$和$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$各自对加法、数乘及Lie括号运算封闭即可.

对于$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$, 任取$X,Y\in\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$ 及 $c\in\mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\iota_{X+cY}\omega)&=\mathrm{d}(\iota_X\omega+c\iota_Y\omega)\\&=\mathrm{d}(\iota_X\omega)+c\mathrm{d}(\iota_Y\omega)=0+c\cdot 0=0,\\\mathrm{d}(\iota_{[X,Y]}\omega)&=\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega-\iota_{[X,Y]}(\mathrm{d}\omega)=\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega\\&=\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\omega)-\mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\omega)=\mathcal{L}_X 0-\mathcal{L}_Y 0=0,\end{aligned}$$

从而$X+cY$和$[X,Y]$都是辛向量场, 因此$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$对数乘及Lie括号封闭, 故$\mathfrak{X}_{\mathrm{Sp}}(M)$按Lie括号构成Lie代数.

对于$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$, 任取$X,Y\in\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$ 及 $c\in\mathbb{R}$, 设$\iota_X\omega=\mathrm{d}G$, $\iota_Y\omega=\mathrm{d}H$,

$$\begin{aligned}\iota_{X+cY}\omega&=\mathrm{d}G+c\mathrm{d}H=\mathrm{d}(G+cH)\\\iota_{[X,Y]}\omega&=\mathcal{L}_X(\iota_Y\omega)-\iota_Y(\mathcal{L}_X\omega)=\mathcal{L}_X(\mathrm{d}H)-\iota_Y(0)=\mathrm{d}(\mathcal{L}_X H)\\&=\mathrm{d}(\iota_X(\mathrm{d}H))=\mathrm{d}(\iota_X(\iota_Y\omega))=\mathrm{d}(\omega(Y,X))\end{aligned}\tag{248}$$

从而$X+cY$和$[X,Y]$都是Hamilton向量场, 因此$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$对数乘及Lie括号封闭, 故$\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M)$按向量场的Lie括号构成Lie代数. □

(248)第二行最后$\mathrm{d}(\cdot)$内的函数$\omega(Y,X)$是Lie括号$[X,Y]$对应的一个Hamilton函数, 它由函数G和H唯一确定. 我们给这个函数的*负值*取一个新的名字:

定义 6.4.3 *[Poisson括号]设G, H是辛流形(M,ω)上的两个光滑函数, 我们定义*

$$\{G,H\}:=\omega(X_G,X_H) \tag{249}$$

*为函数G和H的**Poisson括号**, 其中X_G和X_H分别是函数G和H的Hamilton向量场.*

除了定义(249)外, Poisson括号还有多种表示形式, 它们都是等价的:

$$\{G,H\}=\omega(X_G,X_H)=-\mathrm{d}G(X_H)=\mathrm{d}H(X_G)=\mathcal{L}_{X_G}H=X_G(H). \tag{250}$$

Poisson括号这个名字也来源于经典力学. 试看下例:

例 6.4.2 *对于例 6.3.1中的辛流形$\left(\mathbb{R}^{2n},\omega\right)$, 任取光滑函数$G,H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, 我们有*

$$X_G=\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i},\ X_H=\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

从而

$$\begin{aligned}
\{G,H\}&=\omega(X_G,X_H)\\
&=\sum_{j=1}^n\mathrm{d}q_j\wedge\mathrm{d}p_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i},\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\\
&=\sum_{j=1}^n\mathrm{d}q_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}p_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\\
&\quad-\mathrm{d}p_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\mathrm{d}q_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\\
&=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_i}\delta_{ji}\right)\left(-\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta_{ji}\right)-\left(-\sum_{i=1}^n\frac{\partial G}{\partial q_i}\delta_{ji}\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta_{ji}\right)\\
&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial G}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)-\left(-\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j}\\
&=\sum_{j=1}^n\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}.
\end{aligned} \tag{251}$$

与经典力学中Poisson括号的表达式一致.

既然辛流形上的Poisson括号来自经典力学, 那么辛流形上的Poisson括号也会满足经典力学中Poisson括号的各种性质, 我们列举部分性质如下:

定理 6.4.5 *设F, G, H等是辛流形(M, ω)上的光滑函数, 则*

$$\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\}, \tag{252}$$

$$\{G, H\} = -\{H, G\}, \tag{253}$$

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0, \tag{254}$$

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + G\{F, H\} \tag{255}$$

成立, 其中$a, b \in \mathbb{R}$, (255)中GH等是光滑函数的逐点乘法.

证明: (252)和(253)都比较容易证明, 为了证明(255), 只需使用Poisson括号的另一种表达形式并利用切向的Leibniz法则, 即可得到

$$\begin{aligned}\{F, GH\} &= -X_F(GH) = -(H \cdot X_F G + G \cdot X_F H) \\ &= (-X_F G)H + G(-X_F H) \\ &= \{F, G\}H + G\{F, H\}.\end{aligned}$$

接下来证明(254). 事实上, 由于ω是闭的, $\mathrm{d}\omega$为零, 故

$$\begin{aligned}0 &= d\omega(X_F, X_G, X_H) \\ &= X_F\omega(X_G, X_H) - X_G\omega(X_F, X_H) + X_H\omega(X_F, X_G) - \omega([X_F, X_G], X_H) \\ &\quad +\omega([X_F, X_H], X_G) - \omega([X_G, X_H], X_F) \\ &= X_F\{G, H\} - X_G\{F, H\} + X_H\{F, G\} + [X_F, X_G]H - [X_F, X_H]G + [X_G, X_H]F \\ &= \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} \\ &\quad -\{F, \{H, G\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} - \{H, \{G, F\}\} \\ &= -3 \cdot (\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\})\end{aligned}$$

上述推导中的第二行到第四行用到了(250)中列举的Poisson括号的各种表达形式, 最后一行用到了Poisson括号的交换反对称性(253). □

上述定理中(254)称为**Jacobi恒等式**, (255)称为**Leibniz法则**.

6.5. 辛体积形式、Liouville定理

辛流形的一个有趣的特点是, 它上面无法像在Riemann流形上那样定义长度、角度, 但却可以定义体积.

定义 6.5.1 *设(M, ω)是$2n$维辛流形, 则定义$2n$阶形式*

$$\omega_{\mathrm{vol}} := \frac{1}{n!}\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{个}\omega} = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} \tag{256}$$

*为其**(辛)体积形式**.*

例 6.5.1 *对于例 6.3.1中的辛流形$\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega\right)$, 我们有*

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{vol}} &= \frac{1}{n!}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i\right)^{\wedge n} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\sum_{j_1=1}^{n} \mathrm{d}q_{j_1} \wedge \mathrm{d}p_{j_1}\right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^{n} \mathrm{d}q_{j_2} \wedge \mathrm{d}p_{j_2}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} \mathrm{d}q_{j_n} \wedge \mathrm{d}p_{j_n}\right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\{j_1,\cdots,j_n\}=\{1,\cdots,n\}} (\mathrm{d}q_{j_1} \wedge \mathrm{d}p_{j_1}) \wedge (\mathrm{d}q_{j_2} \wedge \mathrm{d}p_{j_2}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}q_{j_n} \wedge \mathrm{d}p_{j_n}) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\{j_1,\cdots,j_n\}=\{1,\cdots,n\}} (\mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n) \wedge (\mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n) \\
&= \mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n
\end{aligned}
$$

其中第二行到第三行用到了“楔积单项式中若存在相同两项则为0”，第三行到第四行用到了楔积的斜对称性：读者可以自行验证, 只要$j_1, \cdots, j_n$是$1, \cdots, n$的排列, 则必有

$$
(\mathrm{d}q_{j_1} \wedge \mathrm{d}p_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}q_{j_n} \wedge \mathrm{d}p_{j_n}) = (\mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n) \wedge (\mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n).
$$

因此, $\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega\right)$上的辛体积形式$\omega_{\mathrm{vol}}$就是其标准体积形式.

当然, 我们还需要验证ω_{vol}确实是一个体积形式, 即它在流形的每一点处都是非退化的.

定理 6.5.1 *设(M, ω)是$2n$维辛流形, 则ω_{vol}是非退化的, 从而给出了流形M的一个定向, 称为M的**辛定向**.*

证明: 我们只需要证明ω_{vol}在M上的每一点处都是非退化的. 事实上, 任取$x \in M$, 由于ω_{vol}上定义了一个辛内积, 我们可以取一组辛基底

$$
\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial p_n} \in T_p M,
$$

使得ω在这组基底下的矩阵表示是(227)中定义的$J_{2n\times 2n}$, 或等价地,

$$
\omega_x = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j.
$$

其中$\mathrm{d}q_1, \cdots, \mathrm{d}q_n, \mathrm{d}p_1, \cdots, \mathrm{d}p_n$是$\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial p_n}$的对偶基. 按照例 6.5.1中的推导方式, 我们有

$$
(\omega_{\mathrm{vol}})_x = \mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n,
$$

这是一个非退化的$2n$-形式. 使x跑遍整个M, 我们就得到了ω_{vol}的非退化性. □

辛体积形式是由n个辛形式楔积得到的, 因此可想而知, 一个流形到自身的所有辛同胚也会保持辛体积形式不变. 特别地, 辛体积形式沿着辛向量场、Hamilton向量场生成的相流（单参数微分同胚群）是不变的.

定理 6.5.2 *设φ是$2n$辛流形(M,ω)到自身的辛同胚, 则*

$$\varphi^*\omega_{\mathrm{vol}} = \omega_{\mathrm{vol}}, \tag{257}$$

或者说对于M上任意$2n$个同一点发出的切向量$v_1, \cdots, v_{2n}$, 有

$$\omega_{\mathrm{vol}}(\varphi_* v_1, \cdots, \varphi_* v_{2n}) = \omega_{\mathrm{vol}}(v_1, \cdots, v_{2n}). \tag{258}$$

证明: 直接计算如下:

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega_{\mathrm{vol}} &= \varphi^*\left(\frac{1}{n!}\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega\right) = \frac{1}{n!}\varphi^*\omega\wedge\varphi^*\omega\wedge\cdots\wedge\varphi^*\omega \\ &= \frac{1}{n!}\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega = \omega_{\mathrm{vol}}.\end{aligned}$$

□

定理 6.5.3 *设X是$2n$维辛流形(M,ω)上的辛向量场, 则*

$$\mathcal{L}_X\omega_{\mathrm{vol}} = 0, \tag{259}$$

特别地, 如果X是Hamilton向量场, 则(259)成立.

证明: 直接计算如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega_{\mathrm{vol}} &= \frac{1}{n!}\mathcal{L}_X(\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega) \\ &= \frac{1}{n!}(\mathcal{L}_X\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega+\omega\wedge\mathcal{L}_X\omega\wedge\cdots\wedge\omega+\cdots \\ &\qquad +\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\mathcal{L}_X\omega) \\ &= \frac{1}{n!}(0+0+\cdots+0) = 0.\end{aligned}$$

□

定理 6.5.4 *[Lioville定理]设X是$2n$维辛流形(M,ω)上完备的辛向量场, 对于M上任意一个体积有限的区域Ω, 记*

$$\mathrm{e}^{tX}\Omega := \left\{\mathrm{e}^{tX}x : x\in\Omega\right\}, \tag{260}$$

为Ω中的点沿X的积分曲线走到t时刻, 则

$$\int_{\mathrm{e}^{tX}\Omega}\omega_{\mathrm{vol}} = \int_{\Omega}\omega_{\mathrm{vol}} \tag{261}$$

对于任何$t\in\mathbb{R}$.

证明: 我们只需要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{e}^{tX}\Omega}\omega_{\mathrm{vol}} = 0.$$

事实上, 由于X是完备的辛向量场, e^{tX}是辛同胚, 从而根据定理 6.5.2, 有$\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^*\omega_{\mathrm{vol}} = \omega_{\mathrm{vol}}$, 于

是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{e}^{tX}\Omega}\omega_{\mathrm{vol}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{*}\omega_{\mathrm{vol}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\omega_{\mathrm{vol}}=0. \tag{262}$$

此外, 我们也可以通过定理 6.5.3出发:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{e}^{tX}\Omega}\omega_{\mathrm{vol}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{*}\omega_{\mathrm{vol}}=\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{*}\omega_{\mathrm{vol}}=\int_{\Omega}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{*}(\mathcal{L}_{X}\omega_{\mathrm{vol}})=0 \tag{263}$$

□

上述证明中, (263)略微麻烦些, 但它适用于向量场X不完备, 从而$\mathrm{e}^{tX}\Omega$不能在整个$\mathbb{R}$上定义的情形.

Liouville定理表明, 如果把辛向量场看成一个流体的流场, 那么在辛体积的意义下, 这个流场代表的流是不可压缩的. 从动力系统的角度来看，这种不可压缩性表明，辛向量场是无源、无汇的，从而其中的不动点不可能是稳定或不稳定结点，并且积分曲线也几乎不可能出现像$y=\mathrm{e}^{-x}$这种趋于某一稳定不动点的动力学行为.

6.6. 余切丛上的标准辛形式

我们最终的目标是用辛几何的方法来研究Hamilton力学, 但在之后的章节中我们会看到, 将Lagrange方程变成Hamilton正则方程的Legendre变换本质上是一个切丛到余切丛的同胚映射, 从而在Hamilton力学中, 我们首先拿到的相空间都是位形空间的余切丛, 因此, 理解余切丛上的辛形式是理解Hamilton力学的数学结构的一个重要环节.

很多辛几何和教材会把余切丛作为全书第一个辛流形的例子来介绍. 但是实际上这个例子并不很容易理解：在一个余切丛$T^{*}M$中, 每一个元素量都有两重身份——

1. 流形$T^{*}M$中的一个点, $T^{*}M$在这个点处有切空间、余切空间等
2. 流形M中某一个点x处的余切向量, 对于点x处的每一个M的切向量v, 它作用在v上都会得到一个实数.

在余切丛上辛形式的构造中, 余切向量会在这两重身份之间来回切换, 因此对于刚刚接触辛流形的读者而言, 这些内容初看之下会显得相当之晦涩. 正因如此, 笔者决定把这一部分挪到本章的末尾, 用一个单独的章节来充分地探讨如何在余切丛上构造辛形式.

在构造我们想要的辛形式之前, 我们首先回顾一下余切丛的定义。对于一个n维流形M及其上一点x, 其切空间$T_{x}M$的对偶空间$T_{x}^{*}M$被称为x的余切空间, $T_{x}^{*}M$中的元素被称为余切向量, 它是$T_{x}M\to\mathbb{R}$的线性映射. 而所谓余切丛, 则是M上各点处余切空间的并集

$$T^{*}M=\bigcup_{x\in M}T_{x}^{*}M. \tag{264}$$

按照(264), $T^{*}M$与M最直接的关系就是对于$T^{*}M$中的每一个元素α, 存在唯一一个$x\in M$, 使得$\alpha\in T_{x}^{*}M$, 从而我们可以构造一个映射$\pi:T^{*}M\to M$, 使得

$$\pi(\alpha) = x, \text{ 若 } \alpha \in T_x^* M.$$

我们称π为从投影映射. 我们约定, 在$\mathbb{R}^n$中, $(q_1, \cdots, q_n)$点处的余切向量 $p_1 \mathrm{d}q_1 + \cdots + p_n \mathrm{d}q_n$等同于$\mathbb{R}^{2n}$中的点$(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$, 这样我们就建立了一个$T^*\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^{2n}$之间的同构映射, 因此我们认为$T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, 从而不再区分两者. 此外, 对于$\mathbb{R}^n$中的任意开集$K$, 我们也认为

$$T^*U \cong U \times \mathbb{R}^n \cong \{(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} : ((q_1, \cdots, q_n \in U)\}.$$

T^*M的拓扑结构和光滑结构可以通过M上的光滑结构来进行构造. 假设M上的光滑结构是$\mathscr{A}$, 那么对于任意$(U, \varphi) \in \mathscr{A}$, 我们可以认为$\varphi$是$U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$的一个光滑同胚, 而这个同胚的拉回映射$\varphi^*$是一个

$$T^*(\varphi(U)) \cong \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_x^* M$$

的映射, 从而其逆映射$\left(\varphi^*\right)^{-1}$是一个$\pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$的映射, 可以看作是一个坐标映射. 我们记

$$\mathscr{A}^* = \left\{ \left(\pi^{-1}(U), \left(\varphi^*\right)^{-1}\right) : (U, \varphi) \in \mathscr{A} \right\},$$

则$\mathscr{A}^*$构成T^*M的一个光滑图册, 称为T^*M的余切图册, 其中的每一个区图对应的局部坐标系称为T^*M的余切坐标系. 而T^*M上的光滑结构就是$\mathscr{A}^*$的极大化扩充.

具体而言, 假设一个$x \in M$被包含在一个区图$(U, \varphi; q_1, \cdots, q_n)$内, 其坐标$\varphi(x)$为 $(q_{x1}, \cdots, q_{xn})$， $p \in T^*M$的分量表达式是$p = \sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}q_i$, 那么$\alpha$在切坐标系 $\left(\pi^{-1}(U), \left(\varphi^*\right)^{-1}\right)$下的坐标就是

$$(q_{x1}, \cdots, q_{xn}, p_1, \cdots, p_n).$$

一般来讲, 我们把$\left(\varphi^*\right)^{-1}$的前$n$个坐标分量函数记作$q_1, \cdots, q_n$, 后$n$个坐标分量函数记作 $p_1, \cdots, p_n$, 从而我们把一个余切坐标系记作$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$.

接下来就是重头戏了！我们要T^*M上构造一个辛形式, 就是要找一个T^*M上的2-形式——注意是T^*M上的2-形式，不是M上的2-形式！我们还希望这个辛形式在任何*余切坐标系* $\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$下具有

$$\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i \tag{265}$$

的形式, 这样一来, 在任何余切坐标系下, ω与$\mathbb{R}^{2n}$中的标准辛形式便都是一致的了. 注意到

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i = -\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i\right), \tag{266}$$

我们把$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i$记作$\alpha$, 于是我们的目标转而变成：在$T^*M$上寻找一个1-形式(余切向量场)$\alpha$, 使得$\alpha$在任何余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$下具有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i \tag{267}$$

的形式, 然后令$\omega = -\mathrm{d}\alpha$即可. 再次注意: α是T^*M的余切向量场, 而不是M的余切向量场！也就是说α是$T^*\left(T^*M\right)$的一个截面.

幸运的是，我们确实可以找到这样一个它是在整个T^*M上有定义的余切向量场α. 注意，接下来是关键!

定理 6.6.1 *设M是n维流形, T^*M是其余切向量场, 记$\pi : T^*M \to M$为丛投影映射, 则*

$$\alpha = \pi^* : T^*M \to T^*\left(T^*M\right) \tag{268}$$

*定义了T^*M上的一个余切向量场, 并且它在任何余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$下都具有(267)的形式. 它被称为$T^*M$上的**重言式**1-**形式**.*

这里的π^*指的是丛投影映射的拉回映射. $\alpha = \pi^*$意味着对于任意$\xi \in T^*M, z \in T_\xi\left(T^*M\right)$,

$$\alpha_\xi(z) = \zeta(\pi_* z).$$

证明: 我们假设$\xi \in T_x M$, 包含于余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$中, x在$(U; q_i)$下的坐标是$(q_{x1}, \cdots, q_{xn})$, 并且ξ在$(U; q_i)$下的表达式是

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} p_{\xi i} \mathrm{d}q_i. \tag{269}$$

现在我们把ξ看成流形T^*M中的点, 对于任意$z \in T_\xi\left(T^*M\right)$, 我们知道

$$\langle \alpha_\xi, z \rangle = \langle \xi, \pi_* z \rangle,$$

假设z在$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$中的表达式是

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_{qi} \frac{\partial}{\partial q_i} + z_{pi} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

则由丛投影映射的定义, 我们有

$$\pi_* z = \sum_{i=1}^{n} z_{qi} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

于是

$$\langle \alpha_\xi, z \rangle = \langle \xi, \pi_* z \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} p_{\xi i} \mathrm{d}q_i, \sum_{i=1}^{n} z_{qi} \frac{\partial}{\partial q_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_{\xi i} z_{qi},$$

这意味着

$$\alpha_\xi = \sum_{i=1}^{n} p_{\xi i} \mathrm{d}q_i. \tag{270}$$

令ξ跑遍$\pi^{-1}(U)$, 我们就得到了

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i,$$

即(267)成立. □

有趣的事实, 在(269)和(270)中, ξ的表达式和α在ξ处的取值α_ξ的表达式长得完全一样, 这也是α叫做“重言式”1-形式的原因. 不过需要注意的是, 两个表达式的长得虽然一样, 但它们表达式中各项的意义是不一样的:

- 在(269)中, $p_{\xi i}$是ξ作为M上的余切向量在局部坐标系$(U; q_i)$下的第i个展开式系数, $\mathrm{d}q_i$是局部坐标系$(U; q_i)$中第i个坐标分量函数的微分;
- 在(270)中, $p_{\xi i}$是ξ作为T^*M上的点在余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$下坐标的第$n+i$个分量$p_i$（当然, 它和(269)中$p_{\xi i}$的值是相等的）, $\mathrm{d}q_i$是T^*M的余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$中第$i$个坐标分量函数$q_i$的微分.

这样，我们构造完T^*M上的重言式1-形式$\alpha = \pi^*$之后, 就可以构造T^*M上的辛形式了.

定义 6.6.1 *对于任意一个光滑流形M, 设α是T^*M上的重言式1-形式, 我们定义*

$$\omega = -\mathrm{d}\alpha \tag{271}$$

*为T^*M上的**典则辛形式**.*

当然, 由(266), 我们可以得到

定理 6.6.2 *ω是T^*M上的辛形式, 它在任何坐标在T^*M上的任意余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); q_i, p_i\right)$下的表达式都是*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i. \tag{272}$$

至此, 我们找到了任意一个流形M的余切丛T^*M上的辛结构.

6.7. *Darboux定理、辛结构的平坦性

本节中我们要进一步地探讨辛结构作为一种几何结构的特点, 使得我们对辛流形的介绍更加完整. 本节内容相对独立, 与物理问题没有很直接的关系, 初学的读者可以选择跳过, 但仍然建议读者记一下定理 6.7.1中“Darboux坐标系(辛坐标系)”的定义, 之后会用到一次.

我们在6.2节证明了, 对于辛线性空间, 我们总可以找到一组辛基底, 使得这个辛线性空间具有$J_{2n\times 2n}$这种简单的矩阵表示. 而对于辛流形, 也希望在其上选择坐标系, 使得辛形式ω在这个坐标系下的表达式和$\mathbb{R}^{2n}$上标准辛形式$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i$一样. Darboux定理告诉我们, 在任意一个辛流形上的任意一个点附近, 我们都可以找到这样的坐标系.

定理 6.7.1 *(Darboux定理)设(M,ω)是$2n$维辛流形, 则对于任意$x\in M$, 存在一个局部坐标系$(U;q_i,p_i)$, 使得ω在U上具有*

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i \tag{273}$$

*的形式. 满足这一条件的坐标系称为**Darboux坐标系**或**辛坐标系**.*

引理 6.7.1 *对于任意一个n维流形M, 设$X_1,\ \cdots,X_k$ $(k\leq m)$是其上k个独立的(在任意一点处的取值是线性无关的k个向量)、满足*

$$[X_i,X_j]=0,\ i,j=1,2,\ \cdots,k \tag{274}$$

的向量场, 则在M的任意一点p附近存在一个局部坐标系$(U;x_1,\ \cdots,x_n)$, 使得

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{275}$$

对$j=1,2,\ \cdots,k$成立.

该引理的证明全都是分析细节, 我们不证. 但是读者应该能够理解的是, 我们之所以需要条件(274), 是因为在一个坐标系下, 对不同坐标系求偏导的运算是可交换的.

引理 6.7.2 *设(M,ω)是$2n$维辛流形, 则其上一个坐标系$(U;q_i,p_i)$是Darboux坐标系当且仅当坐标函数$q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n$对每一个$i,j=1,2,\ \cdots,n$满足*

$$\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0, \tag{276}$$

$$\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}, \tag{277}$$

其中$\{\cdot,\cdot\}$是Poisson括号.

证明: “$\Longrightarrow$”: 如果$(U;q_i,p_i)$是Darboux坐标系, 则容易验证，对于U上的任意函数f,g都有

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}, \tag{278}$$

成立, 于是(276)和(277)可以直利用(278)验证.

“ $\Longleftarrow$ ”: 如果(276)和(277)成立, 那么对于$i,j=1,\ \cdots,n$我们有

$$\begin{cases} \mathrm{d}q_j(X_{q_i})=\{q_i,q_j\}=0, \\ \mathrm{d}p_j(X_{q_i})=\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}, \\ \mathrm{d}p_j(X_{p_i})=\{p_i,p_j\}=0, \\ \mathrm{d}q_j(X_{p_i})=\{p_i,q_j\}=-\delta_{ij}, \end{cases}$$

因此

$$X_{q_i}=\frac{\partial}{\partial p_i},\ X_{p_i}=-\frac{\partial}{\partial q_i},\ i=1,\ \cdots,n. \tag{279}$$

假设ω在$(U;q_i,p_i)$下的表达式是

$$\omega=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}q_j+B_{ij}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_j+C_{ij}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}p_j,$$

其中A_{ij},B_{ij},C_{ij}都是U上的光滑函数, 并且$A_{ij}+A_{ji}=C_{ij}+C_{ji}=0$对$i,j=1,\ \cdots,n$都成立, 则

$$\begin{cases} A_{ij}=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i},\frac{\partial}{\partial q_j}\right)=\frac{1}{2}\omega(-X_{p_i},-X_{p_j})=\frac{1}{2}\{p_i,p_j\}=0, \\ B_{ij}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i},\frac{\partial}{\partial p_j}\right)=\omega(-X_{p_i},X_{q_j})=-\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}, \\ C_{ij}=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i},\frac{\partial}{\partial p_j}\right)=\frac{1}{2}\omega(X_{q_i},X_{q_j})=\frac{1}{2}\{q_i,q_j\}=0, \end{cases}$$

因此我们有

$$\omega=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\delta_{ij}\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_j=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i,$$

从而$(U;q_i,p_i)$是Darboux坐标系. □

接下来我们来证明Darboux定理.

证明: 按照引理 6.7.2的内容, 我们其实只需要在x附近找到$2n$个函数$q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n$, 使得它们满足(276)和(277). 我们只需证明, 对于$k=0,1,\ \cdots,n-1$, 假如我们已经找到了$2k$个函数$q_1,\ \cdots,q_k,p_1,\ \cdots,p_k$满足(276)和(277), 那么我们就可以再找到两个函数q_{k+1},p_{k+1}使得$q_1,\ \cdots,q_{k+1},p_1,\ \cdots,p_{k+1}$这$2(k+1)$个函数满足(276)和(277), 其中$k=0$的情形意味着我们可以首先找到$q_1$和$p_1$满足(277). □

事实上, 假如我们已经找到了$2k$个函数$q_1, \cdots, q_k, p_1, \cdots, p_k$满足(276)和(277), 注意到对于常值函数$H$, X_H总是常数, 因此对于$i, j = 1, 2, \cdots, k$, 有

$$\begin{aligned}[X_{q_i}, X_{q_j}] &= -X_{\{q_i, q_j\}} = 0\\ [X_{q_i}, X_{p_j}] &= -X_{\{q_i, p_j\}} = 0\\ [X_{p_i}, X_{p_j}] &= -X_{\{p_i, p_j\}} = 0\end{aligned}$$

于是由引理 6.7.1我们可以找到一个x附近的坐标系$u_1, \cdots, u_{2n}$, 使得

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = X_{q_i}, \ \frac{\partial}{\partial u_{i+k}} = X_{p_i}$$

对$i = 1, \cdots, k$成立. 我们取$q_{k+1} = u_{2k+1}$, 则对$i = 1, \cdots, k$, 我们有

$$\{q_{k+1}, q_i\} = [X_{q_{k+1}}, X_{q_i}] = \left[\frac{\partial}{\partial u_{2k+1}}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right] = 0,$$

$$\{q_{k+1}, p_i\} = [X_{q_{k+1}}, X_{p_i}] = \left[\frac{\partial}{\partial u_{2k+1}}, \frac{\partial}{\partial u_{i+k}}\right] = 0,$$

从而$q_1, \cdots, q_k, p_1, \cdots, p_k$的Poisson括号为零, 于是按照引理 6.7.1, 我们又可以找到x附近的坐标系$v_1, \cdots, v_{2n}$, 使得

$$\frac{\partial}{\partial v_i} = X_{q_i}, \ \frac{\partial}{\partial v_{j+k+1}} = X_{p_j}$$

分别对$i = 1, \cdots, k+1$, $j = 1, \cdots, k$成立, 此时我们选择$p_{k+1} = v_{k+1}$, 这样就有

$$\{q_{k+1}, p_{k+1}\} = X_{q_{k+1}}(p_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial v_{k+1}} v_{k+1} = 1,$$

$$\{q_i, p_{k+1}\} = X_{q_i}(p_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial v_i} v_{k+1} = 0,$$

$$\{p_j, p_{k+1}\} = X_{p_j}(p_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial v_{j+k+1}} v_{k+1} = 0$$

对$i = 1, \cdots, k+1$, $j = 1, \cdots, k$成立. 至此我们构造出了q_{k+1}, p_{k+1}, 使得$q_1, \cdots, q_{k+1}$, $p_1, \cdots, p_{k+1}$满足(276)和(277), 论证完毕. □

上述证明思路相对朴素. 在1960年左右Moser, Weinstein等人给出了Darboux定理的一个更加巧妙的证法, 大致思路是

1. 适当选取一个局部坐标系$(U; q_i, p_i)$, 使得辛形式$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i|_x \wedge \mathrm{d}p_i|_x$, 然后
2. 定义$\omega_0 = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$, 从而$\omega(x) = \omega_0(x)$.
3. 对于$t \in [0, 1]$, 定义$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$

4. 利用ω_t的闭性和Poincare引理, 构造一个随t光滑变化的向量场X_t, 使得其生成的单参数局部微分同胚半群[15] F_t满足$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t^*\omega_t = 0$, 对任意$t \in (0,1)$成立,
5. $(F_1(U); q_i \circ F_1, p_i \circ F_1)$ 是我们所求的坐标系.

这个证明借用了拓扑学中同伦变换的思想，类似这样的方法被称为Moser技巧.

Darboux定理是辛结构特有的一个结论. 相比之下, Riemann流形上则*根本没有没有*能够类比于Darboux定理的结论. 事实上, 假设在一个n维Riemann流形上我们总能找到一个坐标系使得Riemann度量g在这个坐标系下的分量表达式是和欧氏空间$\mathbb{R}^n$一样的$\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \oplus \mathrm{d}x_i$, 那么这个坐标系下的Christoffel系数[]就全都是0. 但是在Riemann流形上有一个概念叫“曲率张量”，这个张量在任一坐标系下系数都可以表示为Christoffel系数的齐次多项式, Christoffel系数全为0就意味着这个流形上各点处的曲率张量全都为0, 从而Riemann流形在各点处的曲率全部为0, 这当然不能对一般的Riemann流形成立, 只能对一些性质特殊的Riemann流形——比如说欧氏空间$\mathbb{R}^n$、柱面$\mathbb{R} \times S^1$等成立.

Darboux定理告诉我们，一个辛流形上每一个点的邻域都与$\mathbb{R}^{2n}$上的标准辛结构同构, 这就是说, 从辛结构的视角来看, 辛流形在每一个点附近都与$\mathbb{R}^{2n}$无异. 我们可以把这种“局部与$\mathbb{R}^{2n}$无异”的性质解释为一种“平坦”的特性, 或者说, 我们无不能辛结构来解释空间的“弯曲”.

6.8. Lagrange 力学到 Hamilton 力学的转化

在6.1节中，我们简单地介绍了一下Hamilton是在怎样的背景下推导出了Hamilton正则方程. 从现代几何学的视角来看, 这个变换本质上是一个切丛到余切丛的光滑同胚映射.

定义 6.8.1 *设M是一个流形, 对于任意一个TM上的函数L, 我们定义$\mathbb{F}L$为$TM \to T^*M$的映射, 使得对于每一个$x \in M$及$v \in T_xM$, 则$\mathbb{F}L(v)$是T_x^*M中的余切向量, 使得*

$$\langle \mathbb{F}L(v), w\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} L(v+sw) = \lim_{s\to 0}\frac{L(v+sw)-L(v)}{s}.$$

*我们称$\langle \mathbb{F}L(v), w\rangle$是在纤维$T_xM$上$v$沿$w$方向的**纤维导数**.*

例 6.8.1 *对于$\mathbb{R}^n$, 对于任意$x \in \mathbb{R}^{2n}$, $v \in T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, 假设*

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \cdots, x_n),\\ v &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \cong (x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_n), \end{aligned}$$

则对任意的光滑函数$L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, 及

---

[15] 即对于每一个实数$t \in [0,1]$, F_t是$U \to M$上某开子流形的光滑同胚, 并且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t = X_t$成立.

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x \cong (x_1, \cdots, x_n, w_1, \cdots, w_n)$$

有

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{F}L(v), w\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} L(v+sw)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} L(x_1, \cdots, x_n, v_1+sw_1, \cdots, v_n+sw_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_n)\cdot w_i\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{F}L(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\Big|_v \mathrm{d}v_i \cong \left(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial L}{\partial v_1}(x,v), \cdots, \frac{\partial L}{\partial v_n}(x,v)\right),$$

这里$\dfrac{\partial L}{\partial v_i}(x,v)$*是*$\dfrac{\partial L}{\partial v_i}\Big|_v (x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_n)$ *的简写.*

上例实际上给出了在一般坐标系下$\mathbb{F}L$的表达式.

定理 6.8.1 *设M是一个n维光滑流形, L是$TM \to \mathbb{R}$的光滑函数, 则在M的任意坐标系$(U; x_i)$, 相应的切坐标系为$\left(\pi^{-1}(U); x_i, v_i\right)$, 则对于切向*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

我们有

$$\mathbb{F}L(v) = \frac{\partial L}{\partial v_i}\mathrm{d}x_i,$$

其中$\dfrac{\partial L}{\partial v_i}$*是$L$在切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); x_i, v_i\right)$ 下对v_i的偏导数.*

证明: 只需要通过坐标映射的切映射把$\pi^{-1}(U)$映到$\mathbb{R}^{2n}$上, 然后使用例 6.8.1的计算结果即可.

□

接下来的定理表明, 变换$\mathbb{F}L$在很多我们关注的情况下可以建立切丛和余切丛的同构.

定理 6.8.2 *设M是一个n维光滑流形, L是$TM \to \mathbb{R}$的光滑函数, 若对于每一个$x \in M$, $L|_{T_xM}$都是线性空间T_xM上的"正定二次型+常数"型的函数, 即$L|_{T_xM}$在T_xM上有最小值m, 并且$L|_{T_xM} - m$是T_xM上的正定二次型, 则$\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚.*

证明: 这里我们仅证明$\mathbb{F}L$是一一映射, 证明完这一点之后, $(\mathbb{F}L)^{-1}$的光滑性都只是分析细节. 事

实上, 任意选取$x \in M$及包含M的一个基底$(U; x_i)$, 设其诱导的切坐标是$\left(\pi^{-1}(U); x_i, v_i\right)$, 则按照例 6.8.1中的推导, 对于任意$v \in T_x M$, 若

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \cong (x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_n),$$

则

$$\mathbb{F}L(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}\bigg|_v \mathrm{d}v_i \cong \left(x_1, \cdots, x_n, \frac{\partial L}{\partial v_1}(x, v), \cdots, \frac{\partial L}{\partial v_n}(x, v)\right).$$

因此, 我们只需要证明

$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto \left(\frac{\partial L}{\partial v_1}(x, v), \cdots, \frac{\partial L}{\partial v_n}(x, v)\right)$$

这个映射是双射. 事实上, 由于L在$T_x M$上是“正定二次型+常数”型的函数, 上述映射是一个$\mathbb{R}^n$上的线性同构, 证毕.证明:

上述定理中, “正定二次型+常数”可以改成“有最小值且导数无界的凸函数”. 如果我们所研究的物理问题仅仅是质点系统在某个位势场下的运动问题, 那么$L|_{T_x M}$便总是“正定二次型+常数”. 但也存在更复杂的问题, 比如说体系中带有磁场的问题. 但此时$L|_{T_x M}$仍然是有最小值且导数无界的凸函数, 因此$\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚.

接下来我们来定义Lagrange量L所对应的Hamilton量H.

定义 6.8.2 *设M是光滑流形, L是TM上的函数, 并且$\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚, 那么我们称函数*

$$\begin{aligned} E : TM &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle \mathbb{F}L(v), v\rangle - L(v) \end{aligned}$$

*为TM上L的**连带能量函数**, 而函数*

$$H = E \circ (\mathbb{F}L)^{-1} : T^*M \to \mathbb{R}$$

*是相应于L的**连带Hamilton函数**.*

定理 6.8.3 *假设M是光滑流形, L是TM上的光滑函数, 并且$\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚, H是L的连带Hamilton函数, $(U; q_i)$是M上的局部坐标系, 并且其在TM上诱导的切坐标系是$\left(\pi_{TM}^{-1}(U); q_i, v_i\right)$, 在$T^*M$上诱导的余切坐标系是$\left(\pi_{T^*M}^{-1}(U); q_i, p_i\right)$, 则$M$上的一条曲线$\gamma : (t_0, t_1) \to M$在$\gamma((t_0, t_1)) \cap U$上满足Euler-Lagrange方程*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q_i}\bigg|_{\dot\gamma} - \frac{\partial L}{\partial v_i}\bigg|_{\dot\gamma} = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{280}$$

当且仅当T^*M上的曲线$\widetilde{\gamma}=\mathbb{F}L\circ\dot{\gamma}:(t_0,t_1)\to M$满足方程

$$\left.\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right|_{\widetilde{\gamma}}=-\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{\widetilde{\gamma}},\ \left.\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right|_{\widetilde{\gamma}}=\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{\widetilde{\gamma}},\ i=1,2,\ \cdots,n, \tag{281}$$

即$\widetilde{\gamma}$在U上是T^*M上函数H的Hamilton向量场.

证明: 我们仅证明“ $\Longrightarrow$ ”. 由于是局部性质, 我们不妨假设$M=\mathbb{R}^n$. 此时, 按照例 6.8.1的结果, 有

$$\mathbb{F}L(q_1,\ \cdots,q_n,v_1,\ \cdots,v_n)=(q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n),$$

其中

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i},\ i=1,2,\ \cdots,n \tag{282}$$

我们假设由(282)可以反解出

$$v_i=v_i(q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n)\overset{\text{简记为}}{=\!=\!=}v_i(q,p)$$

则

$$\begin{aligned}&H(q_1,\ \cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n)\\=&\sum_{i=1}^n v_i(q,p)p_i-\sum_{i=1}^n L(q_1,\ \cdots,q_n,v_1(q,p),\ \cdots,v_n(q,p))\end{aligned}$$

于是利用(282), 我们会得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p)&=\sum_{k=1}^n p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_i}(q,p)-\frac{\partial L}{\partial q_k}(q,v)\frac{\partial v_k}{\partial q_i}(q,p)-\frac{\partial L}{\partial x_i}(q,v)\\&=\sum_{k=1}^n\left(p_k-\frac{\partial L}{\partial q_k}(q,v)\right)\frac{\partial v_k}{\partial q_i}(q,p)-\frac{\partial L}{\partial x_i}(q,v)\\&=-\frac{\partial L}{\partial x_i}(q,x),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i}(p,x)&=v_i(q,p)+\sum_{k=1}^n p_k\frac{\partial v_k}{\partial p_i}(q,p)-\frac{\partial L}{\partial q_k}(q,v)\frac{\partial v_k}{\partial p_i}(q,p)\\&=v_i(q,p)+\sum_{k=1}^n\left(p_k-\frac{\partial L}{\partial q_k}(q,v)\right)\frac{\partial v_k}{\partial p_i}(q,p)\\&=v_i(q,p),\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) = v_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}, \tag{283}$$

此外, 由(282)及Euler-Lagrange方程(280), 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) &= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q,v) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t})\right) = -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{284}$$

(283)和(284)即(281). □

推论 6.8.1 *假设M是光滑流形, L是TM上的光滑函数, 并且$\mathbb{F}L$是$TM \to T^*M$的光滑同胚, H是L的连带Hamilton函数, 则M上的曲线γ在M的任意局部坐标下满足Euler-Lagrange方程(280)当且仅当$\mathbb{F}L \circ \dot{\gamma}$在$T^*M$的任意余切坐标系下满足Hamilton正则方程(281), 或者说$\mathbb{F}L \circ \dot{\gamma}$是连带Hamilton函数$H$的Hamilton向量场的积分曲线.*

以上命题给出了Lagrange力学和Hamilton力学的对应关系. 即如果一个曲线在位形空间M上满足Euler-Lagrange, 那么$\mathbb{F}L \circ \dot{\gamma}$在$T^*M$上就满足Hamilton正则方程. 这是Lagrange力学到Hamilton力学最为直接的转换关系. T^*M也称为相应力学问题的**相空间**, 坐标p_i称为**广义动量**.

6.9. Hamilton 系统、Arnold-Liouville 定理

对于Lagrange力学而言，Lagrange方程在位形空间的切空间上的不变性仅限于切坐标系, 所以我们只是在切空间中讨论了Lagrange力学就足够了，也不用考虑切空间上其它坐标形式的选取；但对于Hamilton力学, 人们发现在很多余切坐标之外的坐标系下, Hamilton正则方程仍然具有形式不变性. 因此，在讨论Hamilton力学时, 我们就不能只选择相空间的余切坐标系来研究, 或者说, 我们不能把相空间只看作是余切丛——我们需要一个更大的框架, 它能够容许更多的使得Hamilton正则方程形式不变的坐标系. 另一方面, 我们也不能把余切丛只看作是一个没有其它任何结构的光滑流形, 因为也并不是T^*M上的所有坐标变换都能保持Hamilton正则方程的形式.

数学家与物理学家们经过多年的探索，最终达成的共识是：辛流形结构最适合描述Hamilton力学.

假设我们有一个由Lagrange力学问题变换而来的Hamilton力学问题, 其相空间是余切丛$M = T^*N$, 并且这个相空间上定义有一个Hamilton函数H, 那么按照我们在第6.6节中所介绍的, M上有一个典则辛形式ω, 它在M的任何余切坐标系$\left(\pi^{-1}(U); p_i; q_i\right)$下的表达式是$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$. 现在我们要做的事情是：*忘记$M$具有余切丛结构*, 但保留$M$上由典则辛形式$\omega$定义的辛结构. 也就是将$M$看成一个辛流形$(M,\omega)$, 而不再是余切丛$T^*N$, 从而我们也只把

Hamilton函数H看作这个辛流形上定义光滑函数.

定义 6.9.1 *一个Hamilton系统指的是一个三元组(M,ω,H), 其中(M,ω)是一个辛流形, H是M上的一个光滑函数. 我们称辛流形(M,ω)是这个Hamilton系统的**相空间**, H是这个Hamilton系统上的**Hamilton函数**, 而这个Hamilton函数定义的Hamilton向量场X_H称为这个Hamilton系统的**Hamilton向量场**.*

Hamilton系统无非是比辛流形结构多了一个Hamilton函数, 因此其性质大都继承自辛流形的性质. 我们下面将比较重要的性质列举出来, 其证明均可在之前的章节中找到.

定理 6.9.1 *设(M,ω,H)是Hamilton系统, γ是其上Hamilton向量场X_H的积分曲线, 则$H\circ\gamma$是常值函数.*

上述定理说明, Hamilton函数的值沿着Hamilton向量场的积分曲线, 或者说Hamilton正则方程的解是不变的, 这对应于Hamilton系统最为重要的一个性质之一——能量守恒.

如果我们不单看一条X_H的积分曲线, 而是关注由X_H定义的相流e^{tX_H}, 则我们有

定理 6.9.2 *设(M,ω,H)是Hamilton系统, 则单参数微分同胚群e^{tX_H}是保辛形式的, 即对于任何$t\in\mathbb{R}$及M的开子流形U, 若e^{tX_H}在U上有定义, 则有*

$$\left(\mathrm{e}^{tX_H}\right)^*\omega=\omega. \tag{285}$$

特别地, 如果X_H是完备的向量场, 则(285)对任意$t\in\mathbb{R}$成立.

上述定理告诉我们, e^{tX_H}定义了相流到自身的辛同胚（至少在局部上）. 由此我们可以证明相流e^{tX_H}的保体积性:

定理 6.9.3 *设(M,ω,H)是Hamilton系统, ω_{vol}是(M,ω)上的体积形式, 则任取M上一块体积有限的区域Ω, 必有*

$$\int_\Omega\omega_{\mathrm{vol}}=\int_{\mathrm{e}^{tX_H}(\Omega)}\omega_{\mathrm{vol}}.$$

上述两个定理甚至对于含时问题也是成立的.

除了Hamilton函数外, 我们还往往会关注其它函数在Hamilton向量场积分曲线下的守恒性质. 这个“其它函数”被物理学家们称为**力学量**.

定理 6.9.4 *设(M,ω,H)是Hamilton系统, γ是其上Hamilton向量场X_H的积分曲线, 则对于任意一个M上的光滑函数f, 我们有*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t))=\{f,H\}(\gamma(t)), \tag{286}$$

其中$\{f,H\}=X_H(f)$是H和F的Poisson括号. 特别地, 如果$\{f,H\}\equiv0$, 则f沿X_H的积分曲

*线也是常数，此时我们称f是这个Hamilton系统的一个**守恒量**或**运动积分**.*

由此可见, 一个力学量是否是运动积分, 取决于其与H的Poisson括号是否为0.

寻找一个Hamilton系统的运动积分无论是对数学家还是物理学家而言都是非常非常重要的问题. 无可争议的是，对于一个Hamilton系统，我们能够找到越多的运动积分，则表明我们对这个系统的认知越清晰.

当然，我们还是要寻找“本质上不同”的运动积分. 如果F是运动积分, 那么$2F$, F^2, $\ln F$等等也都是运动积分. 更一般地, 对于任意k元函数φ, 假设$f_1, \cdots, f_k$是Hamilton系统(M, ω, H)的运动积分, 那么$f = \varphi(f_1, \cdots, f_k)$也一定是Hamilton系统$(M, \omega, H)$的运动积分. 这样的运动积分满足

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial f_i} \mathrm{d}f_i = \sum_{i=1}^{k} \varphi'_{f_i} \mathrm{d}f_i,$$

也就是说, $\mathrm{d}f, \mathrm{d}f_1, \cdots, \mathrm{d}f_k$在$M$上的任何一点处的微分是线性相关的. 这种运动积分是从已知运动积分构造出来的，不会带给我们对系统的任何新的认知.

此外, 我们还可以通过Poisson括号构造运动积分

定理 6.9.5 *设(M, ω, H)是Hamilton系统, f_1, f_2是其运动积分, 则$\{f_1, f_2\}$也是其运动积分.*

证明: 由Jacobi恒等式, 我们有

$$\begin{aligned} \{\{f_1, f_2\}, H\} &= -\{\{H, f_1\}, f_2\} - \{\{f_2, H\}, f_1\} \\ &= -\{0, f_2\} - \{0, f_1\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此$\{f_1, f_2\}$也是运动积分. □

这样的运动积分也属于从已知运动积分构造出来的新运动积分.

于是，我们的目标可以更加明确一些：寻找足够多的运动积分$f_1, \cdots, f_k$, 使得

1. $\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2, \cdots \mathrm{d}f_k$在相空间上任何一点处都是线性无关的,
2. $\{f_i, f_j\} = 0$对任何$i, j = 1, 2, \cdots, k$成立.

在这样两个限定下,我们能够找到的运动积分个数其实非常有限.

定理 6.9.6 *设(M, ω, H)是$2n$维Hamilton系统, 若存在运动积分$f_1, \cdots, f_k$满足上述两条性质, 则$k \leq n$.*

证明: 我们记$X_1, \cdots, X_k$为相应于$f_1, \cdots, f_k$的Hamilton向量场, 我们在流形M上任意取一点x, 则由于$\mathrm{d}f_1, \cdots, \mathrm{d}f_k$在$T_x^*M$内线性无关，由辛形式$\omega$的非退化性及$X_i$的定义, $X_1, \cdots, X_k$在T_xM内也是线性无关的, 从而$\dim \operatorname{span}\{X_1, \cdots, X_k\} = k$. 而由Poisson括号的定义, 对任何$i, j = 1, 2, \cdots, k$, 我们有

$$\omega(X_i, X_j) = 0,$$

也就是说$\mathrm{span}\{X_1,\ \cdots,X_k\}$是辛内积空间$(T_xM,\omega|_{T_xM})$上一个各向同性的线性子空间, 按照辛线性空间的理论, 其维数不能超过n, 因此$k\leq n$. □

于是，我们的目标又更加地明确：寻找相空间维数一半多个运动积分$f_1,\ \cdots,f_n$, 使得它们的微分在任何一点线性无关，Poisson括号两两交换.

那这件事，我们能做到吗?

答案是：如果能, 那么这个系统的性质就太好了, 所以一般不能.

这些“性质太好”的系统，是物理学家们梦寐以求的系统，值得拥有一个新的名字：

定义 6.9.2 *设(M,ω,H)是$2n$维Hamilton系统, 若存在n个运动积分$f_1=H,f_2,\ \cdots,f_n$满足*
1) $\mathrm{d}f_1,\mathrm{d}f_2,\ \cdots\mathrm{d}f_n$在$M$上任何一点处都是线性无关的,
2) $\{f_i,f_j\}=0$对任何$i,j=1,2,\ \cdots,n$成立.
*则称该系统是一个**可积系统**.*

可积系统的性质有多好呢？这是Arnold-Liouville定理所阐述的内容.

定理 6.9.7 *(Arnold-Liouville定理)设(M,ω,H)是$2n$维可积系统, $f_1=H,f_2,\ \cdots,f_n$是其满足可积性定义的n个运动积分, 定义$f:M\to\mathbb{R}^n$为$f=(f_1,\ \cdots,f_n)$, $c\in\mathbb{R}^n$是f的正则值（即$f^{-1}(c)$是M的n维光滑嵌入子流形）, 则*
1) $f^{-1}(c)$是(M,ω)的Lagrange子流形,
*2) 对于$f^{-1}(c)$的任意一个连通分支，若Hamilton向量场X_H在这个连通分支上完备, 则存在一个非负整数k这个连通分支必然同胚于$T^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, 其中$T^k$是$k$维圆环. 特别地, $f^{-1}(c)$的所有紧连通分支同胚于T^n, 称为**Liouville圆环**.*
3) 对于$f^{-1}(c)$的任意一个连通分支，设其同胚于$T^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, 则我们可以找到一组坐标系$\theta_1,\ \cdots,\theta_n$, 其中前$k$个对应于$T^k$的$k$个分量，后$n-k$个对应于$\mathbb{R}^{n-k}$的$n-k$个分量, 使得Hamilton向量场在这个坐标系下对应的微分方程可以写作

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}=v_i,\ i=1,2,\ \cdots,n$$

*其中$v_1,\ \cdots,v_n$都是常数. 此时我们称$\theta_1,\ \cdots,\theta_n$为**角坐标**.*
*4) 对于$f^{-1}(c)$的任意一个连通分支，设其同胚于$T^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, 并且具有角坐标系$\theta_1,\ \cdots,\theta_n$, 则存在该连通分支的一个邻域及此邻域上的$n$个函数$\tau_1,\ \cdots\tau_n$, 使得$(\theta_1,\ \cdots,\theta_n,\tau_1,\ \cdots,\tau_n)$在这个邻域上构成$M$上的一个Darboux坐标系. 我们称$\tau_1,\ \cdots\tau_n$为**作用量坐标**.*
上述定理除了第一条结果之外都需要比复杂, 我们不证.

Liouville-Arnold 定理告诉我们，对于可积系统，它的运动被限制在一个n维子流形上, 这个n维子流形可以表示成一些圆周和一些直线的积流形，而系统的状态在这个积流形的圆周分量上做

匀速圆周运动、直线分量上做匀速直线运动. 翻译成大白话就是：*系统的运动可以表示成匀速圆周运动和匀速直线运动的复合*——这是我们在物理学中最熟悉的两种运动!

这里稍微提醒一下：上述定理并不表明可积系统的运动轨迹一定是周期轨迹、螺旋轨迹这样的简单图形. 比如说两个维度上周期比值为无理数的匀速圆周运动可以复合出在圆环上处处稠密的轨迹.

当然，自然界中大多数运动都不是有限个直线运动和圆周运动的复合这么简单的，所以可积系统其实是非常少的. 一个著名的不可积系统就是三体问题——三个星体在三维空间中运动，两两之间以万有引力相互作用. 这个问题一共有九个自由度，但是我们却找不到九个运动积分. 这就是为什么我们通常说“三体问题无解”. 而事实上，数值模拟下的三体运动轨迹也显示出了相当大的混乱性和对初值的敏感性, 表明它不是匀速直线运动与匀速圆周运动的简单复合.

三体问题尚且复杂如斯，可想而知，有更多星体的系统的求解复杂度一定是超乎我们想象的. 但其实人们也发现, 适当地设计势能函数可以使得任意n体问题可积. 可惜的是, 这些势能函数大多没有实际物理意义，只是数学家设计的“toy model”. 比如一维空间上的n体Calogero-Moser系统

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(p_n^2+\omega^2 q_n^2\right)+g^2\sum_{m,n=1;m\neq n}^{N}(q_n-q_m)^{-2} \tag{287}$$

对任意$n=1,2,\cdots$都是可积的. 也有一些无穷维的可积系统的例子, 详细可见wikipedia中的介绍. 这一类的可积系统会被纯数学家们关注，研究其中蕴含的代数结构.

6.10. Hamilton 方程的辛数值算法

“你研究这些有什么用？”永远是对一个数学家最深入灵魂的拷问. 本节我们就要回答: 研究Hamilton力学里的辛结构有什么应用. 我们给出一个应用实例——实实在在的应用实例，它是一个确实被运用于科研与工业中的算法：辛数值算法, 它是由 Ronald D. Ruth 和我国的冯康老师等在20世纪80年代创立的.

大多数Hamilton系统是无法解析求解的, 但如今我们有了计算机, 我们可以求其数值解. 比如说我们考虑$\mathbb{R}^2$上以$H(q,p)=\frac{1}{2}\left(q^2+p^2\right)$为Hamilton函数的Hamilton系统,

$$\begin{cases}\dot{q}=p\\ \dot{p}=-q,\end{cases} \tag{288}$$

其解是周期函数

$$\begin{cases}q=q_0\cos t+p_0\sin t\\ p=p_0\cos t-q_0\sin t\end{cases} \tag{289}$$

区中 q_0,p_0 是 q,p 在 $t=0$ 处的初值.

为了树枝上模拟这个系统的行为, 我们需要把时间离散化,

$$\begin{cases} t_m = m\Delta t \\ q_m \approx q(t_m) \\ p_m \approx p(t_m), \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2 \cdots$$

然后用差分替代微分, 得到

$$\begin{cases} \dfrac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} = p_m \\ \dfrac{p_{m+1} - p_m}{\Delta t} = -q_m \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} q_{m+1} = q_m + \Delta t \cdot p_m \\ p_{m+1} = p_m - \Delta t \cdot q_m \end{cases} \tag{290}$$

(290)右侧的公式可以直接用来编程的. 这种方法最早是Euler为了证明微分方程解的存在性而提出的, 称为**显式Euler法**, 此外我们还有隐式Euler法

$$\begin{cases} \dfrac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} = p_{m+1} \\ \dfrac{p_{m+1} - p_m}{\Delta t} = -q_{m+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} q_{m+1} = \dfrac{q_m + \Delta t \cdot p_m}{1 + (\Delta t)^2} \\ p_{m+1} = \dfrac{p_m - \Delta t \cdot q_m}{1 + (\Delta t)^2} \end{cases} \tag{291}$$

(291)右侧的公式也可以直接用来编程. 但利用(290)和(291)得到的数值不是很令人满意: 由于数值误差, (290)解出的轨迹是一个不断地向外扩展的螺旋, (291)解出的轨迹是一个不断向内收缩的螺旋, 它们都不符合(288)的解具有闭合轨线的定性性质, 并且Hamilton函数的值$H(q_m, p_m)$也随着步数m的增大而增大或减小, 不具有守恒的性质.

//todo: 加图片: 显示、隐式Euler格式的数值解和相应能量的变化

那么如何才能让这个轨迹不再向外扩张或收缩呢? 我们可以想到, 既然显式格式会使解扩张, 隐式格式会使解收缩, 那么一半显式, 一半隐式又会如何呢? 这就给出了一个新的数值算法

$$\begin{cases} \dfrac{q_{m+1} - q_m}{\Delta t} = p_m \\ \dfrac{p_{m+1} - p_m}{\Delta t} = -q_{m+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} q_{m+1} = q_m + \Delta t \cdot p_m \\ p_{m+1} = \big(1 - (\Delta t)^2\big) p_m + \Delta t \cdot q_m \end{cases} \tag{292}$$

这个算法的数值结果看上去就体面得多了: 轨道看上去完全是闭合的, 并且Hamilton函数的值$H(q_m, p_m)$也只是在初值附近有小幅度的波动, 没有整体增长或下降的趋势.

为什么会有这样的结果呢? 我们需要更加定量的分析. 首先对于显式Euler法(290), 我们把右手侧(q_m, p_m)到(q_{m+1}, p_{m+1})的转换关系看作是一个坐标变换, 那么我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_{m+1} \wedge \mathrm{d}p_{m+1} &= \mathrm{d}(q_m + \Delta t \cdot p_m) \wedge \mathrm{d}(p_m - \Delta t \cdot q_m) \\ &= \mathrm{d}q_m \wedge \mathrm{d}p_m - (\Delta t)^2 \mathrm{d}p_m \wedge \mathrm{d}q_m \\ &= \big(1 + (\Delta t)^2\big) \mathrm{d}q_m \wedge \mathrm{d}p_m, \end{aligned}$$

这就是说, 在这个坐标变换下, $\mathbb{R}^2$上的体积形式, 或者说辛形式, 被扩大成了原来的$1+(\Delta t)^2$倍. 类似地, 对于隐式Euler法(291), 我们有

$$\mathrm{d}q_{m+1}\wedge\mathrm{d}p_{m+1}=\frac{1}{1+(\Delta t)^2}\mathrm{d}q_m\wedge\mathrm{d}p_m,$$

这就是说, 在这个坐标变换下, $\mathbb{R}^2$上的体积形式(辛形式)被缩小成了原来的$1\,/\,\big(1+(\Delta t)^2\big)$倍. 但对于我们半显半隐的算法(292), 我们却能得到

$$\mathrm{d}q_{m+1}\wedge\mathrm{d}p_{m+1}=\mathrm{d}q_m\wedge\mathrm{d}p_m,$$

也就是说, (292)这个数值算法是能保持体积形式、辛形式不变的! 事实上, 这是一个对形如(292)的这样半显半隐的数值算法而言相当普遍的结论. 对于任意一个$\mathbb{R}^{2m}$上的Hamilton正则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i},\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{293}$$

我们考虑其数值算法

$$\begin{cases}\dfrac{q_i^{m+1}-q_i^m}{\Delta t}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\big(q^m,p^{m+1}\big)\\[2ex] \dfrac{p_i^{m+1}-p_i^m}{\Delta t}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\big(q^m,p^{m+1}\big),\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{294}$$

其中$q_i^m\approx q_i(m\Delta t)$是对第$m$个时间步处$q_i$的数值估计, 而不是$q_i$的$m$次幂, 而$q^m$, p^m等则分别是$q_1^m,\cdots,q_n^m$和$p_1^m,\cdots,p_n^m$的简写.

定理 6.10.1 *对于数值算法(294), 我们有*

$$\sum_{i=1}^n\mathrm{d}q_i^{m+1}\wedge\mathrm{d}p_i^{m+1}=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}q_i^m\wedge\mathrm{d}p_i^m,\tag{295}$$

或等价地, Jacobi矩阵

$$M=\frac{\partial\big(q_1^{m+1},\cdots,q_n^{m+1},p_1^{m+1},\cdots,p_n^{m+1}\big)}{\partial\big(q_1^m,\cdots,q_n^m,p_1^m,\cdots,p_n^m\big)}\tag{296}$$

满足

$$M^\top J_{2n\times 2n}M=J_{2n\times 2n},\ J_{2n\times 2n}=\begin{pmatrix}&I_{n\times n}\\-I_{n\times n}&\end{pmatrix}.\tag{297}$$

证明: 事实上, 我们可以利用(294)写出微分表达式

$$\begin{cases} \mathrm{d}q_i^{m+1} - \mathrm{d}q_i^m = \Delta t \sum\limits_{j=1}^{n} \left(H_{p_i q_j} \mathrm{d}q_j^m + H_{p_i p_j} \mathrm{d}p_j^{m+1} \right) \\ \mathrm{d}p_i^{m+1} - \mathrm{d}p_i^m = -\Delta t \sum\limits_{j=1}^{n} \left(H_{p_i q_j} \mathrm{d}q_j^m + H_{p_i p_j} \mathrm{d}p_j^{m+1} \right) \end{cases}$$

它可以被整理成如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} I & -\Delta t H_{pp} \\ O & I + \Delta t H_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}q^{m+1} \\ \mathrm{d}p^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + \Delta t H_{pq} & O \\ -\Delta t H_{qq} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}q^m \\ \mathrm{d}p^m \end{pmatrix}, \tag{298}$$

其中

$$\mathrm{d}q^m = \begin{pmatrix} \mathrm{d}q_1^m \\ \mathrm{d}q_2^m \\ \vdots \\ \mathrm{d}q_n^m \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}q^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}q_1^{m+1} \\ \mathrm{d}q_2^{m+1} \\ \vdots \\ \mathrm{d}q_n^{m+1} \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}p^m, \ \mathrm{d}p^{m+1}\text{类似},$$

$$H_{pq} = \begin{pmatrix} H_{p_1 q_1} & H_{p_1 q_2} & \cdots & H_{p_1 q_n} \\ H_{p_2 q_1} & H_{p_2 q_2} & \cdots & H_{p_2 q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{p_n q_1} & H_{p_n q_2} & \cdots & H_{p_n q_n} \end{pmatrix}, \ H_{qp}, H_{qq}, H_{pp}\text{类似},$$

$$H_{p_i q_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}(q^m, p^{m+1}), \ H_{q_i p_j}, H_{q_i q_j}, H_{p_i p_j}\text{类似},$$

于是

$$M = \begin{pmatrix} I & -\Delta t H_{pp} \\ O & I + \Delta t H_{qp} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I + \Delta t H_{pq} & O \\ -\Delta t H_{qq} & I \end{pmatrix}. \tag{299}$$

只需要注意到$H_{qp} = H_{pq}^\top$, 我们便可以验证, (299)中定义的M满足(297). □

上述定理证明了, 格式(294)是保持$\mathbb{R}^{2n}$上的标准辛形式的, 因此它又被称为**辛Euler法**. 当然, 由于广义动量和广义坐标的对称性, 我们可以验证

$$\begin{cases} \dfrac{q_i^{m+1} - q_i^m}{\Delta t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(q^{m+1}, p^m) \\ \dfrac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\Delta t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(q^{m+1}, p^m), \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{300}$$

也是保辛形式的, 也叫做辛Euler法. 更一般地, 对于一个Hamilton正则方程(293)的数值差分算法, 如果其其从第n个时间步到第$n+1$个时间步的递推公式定义了一个$\mathbb{R}^{2n}$上的辛自同构, 我们就称这个数值算法为**辛数值算法**.

辛Euler法的缺点是精度太低, 每一个时间步会引入一个$(\Delta t)^2$量级的误差, 假设我们模拟的时长是一个固定值T, 那么我们需要模拟大约$T\,/\,\Delta t$步, 于是到最后一步的时候我们的累计误差就是

$$\frac{T}{\Delta t}\cdot(\Delta t)^2\approx T\Delta t=o(\Delta t),$$

所以我们称这个算法具有一阶精度. 接下来我们介绍一个具有二阶精度的数值算法, 这是一个多步方法: 首先我们计算一个中间步

$$\begin{cases}\dfrac{q_i^{n+1/2}-q_i^n}{\Delta t\,/\,2}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\left(q^{n+1/2},p^n\right)\\[2ex]\dfrac{p_i^{n+1/2}-p_i^n}{\Delta t\,/\,2}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\left(q^{n+1/2},p^n\right)\end{cases}\tag{301}$$

得到$q_i^{n+1/2}$和$p_i^{n+1/2}$, 接下来计算

$$\begin{cases}\dfrac{q_i^{n+1}-q_i^{n+1/2}}{\Delta t\,/\,2}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\left(q^{n+1/2},p^{n+1}\right)\\[2ex]\dfrac{p_i^{n+1}-p_i^{n+1/2}}{\Delta t\,/\,2}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\left(q^{n+1/2},p^{n+1}\right)\end{cases}\tag{302}$$

得到我们想要的q_i^{n+1}和p_i^{n+1}. 这个数值算法称为**Stoemer-Verlet算法**, 是一个具有二阶精度的辛数值算法. 为了证明它是一个辛数值格式, 只需要注意(301)和(302)本质上是两个时间步长为$\Delta t\,/\,2$的辛Euler法, 从而$\left(q^n,p^n\right)\to\left(q^{n+1/2},p^{n+1/2}\right)$和$\left(q^{n+1/2},p^{n+1/2}\right)\to\left(q^{n+1},p^{n+1}\right)$的变换都是辛变换即可.

Stoemer-Verlet算法在分子动力学模拟中是非常重要的数值方法. 分子动力学模拟中, 我们要求解一个粒子数非常多的Hamilton系统, 但我们想要得到的的并不是解这个方程, 而是这个系统的某些物理量F的统计平均——我们会把这个系统模拟很长很长时间, 然后求所有时间步上F的值的平均. 对于这种问题, 我们不需要求解Hamilton系统的数值算法有多么高的精度, 但我们希望这个算法具有长时间统计性质稳定的特征，更具体地来说，我们希望我们求出的数值解$\left(q^n,p^n\right)$能够使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F\left(q^n,p^n\right)\tag{303}$$

是

$$\langle F\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(q(t),p(t))\tag{304}$$

的近似结果, 二者之间的差可以被Δt控制住. 但我们看到, 在显示、隐式Euler法是无法保证这一点的：比如说我们取F为Hamilton函数H, 那么用显示Euler法, (303)就会趋于$+\infty$, 用隐式Euler法, (303)就会趋于0, 这都不是我们想要的结果. 计算数学家们证明了, 对于辛Euler法、Stoemer-

Verlet算法等辛数值算法, (303)对(304)的逼近特性是可以保证的.

对于一般的Hamilton系统, 辛数值算法都是隐式的格式, 也就是说我们可能需要利用迭代法求解非线性方程来获取q^{n+1}, p^{n+1}, 但是如果Hamilton量可以写作$H(q,p)=V(q)+T(p)$的形式, 那么我们可以得到一个q^{n+1}, p^{n+1}作为q^n, p^n的函数的显式表达式（请读者自己尝试写出这个表达式）, 从而得以避免迭代步骤, 大大提高计算效率. 一般来讲, 只要我们选取的坐标系是直角坐标系, Hamilton函数就可以写成这种形式, 所以在分子动力学模拟中, 这个算法的效率是相当高的.

辛数值算法的另外一个应用领域是天文学. 辛数值算法的优点是它可以保持Hamilton系统的很多定性性质, 比如说本节开头我们介绍的$H=\frac{1}{2}\left(q^2+p^2\right)$中轨道的闭合性. 这种保定性性质的特点对天文学的重要性在于，它可以更加准确地预测一个天体系统的长期性质. 比如说日地月系统, 如果使用显式数值算法，那么我们将会在数值结果中看到月亮被甩出它在地球附近的轨道, 飞离太阳系, 而用辛数值算法, 则会看到正常的“月亮绕地球转，地球绕太阳转”.

研究天文学问题时, 我们会关心数值解对真实解的逼近程度, 因此我们需要阶数更高的数值算法. 在高阶辛数值算法在这一方面, 我们有**辛Runge-Kutta法**. 我们记

$$
\begin{aligned}
z &= (q_1,\ \cdots, q_n, p_1,\ \cdots, p_n)^\top \\
f(z) &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\ \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1},\ \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}\right),
\end{aligned}
$$

考虑如下数值算法

$$
\begin{cases}
z^{m+1} = z^m + \Delta t \sum_{i=1}^{s} c_i f(K_i) \\
K_i = z^m + \Delta t \sum_{j=1}^{s} b_{ij} f(K_j) \qquad i = 1,\ \cdots, s
\end{cases}
\tag{305}
$$

可以证明:

定理 6.10.2 *如果对于$i, j = 1, 2,\ \cdots, s$, 有*

$$
c_i b_{ij} + c_j b_{ji} = c_i c_j,
$$

则(305)是辛数值算法.

一个阶数比较高的例子是

$$\begin{cases} z^{m+1} = z^m + \dfrac{\Delta t}{2}(f(K_1) + f(K_2)) \\ K_1 = z^m + h\left(\dfrac{1}{4}f(K_1) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)f(K_2)\right) \\ K_2 = z^m + h\left(\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)f(K_1) + \dfrac{1}{4}f(K_2)\right), \end{cases}$$

这个格式的阶数是4.

更多关于辛数值算法的内容可参见冯康老师的《哈密尔顿系统的辛几何算法》. 总而言之, 辛数值算法以及这种思想有着非常广泛的实际应用. 但要想设计出这样的算法并在理论上证明其特性，便需要我们对Hamilton力学中的辛结构有充分的理解. 所以说, 即使是对于做应用领域的人来说, 多了解一些数学理论和数学结构也是有所裨益的.

7. 附录

7.1. 点集拓扑简介

(注：本附录只介绍我们定义流形时所需要的一般拓扑学概念, 供没有接触过拓扑学的读者快速了解, 真正想学习拓扑学还应阅读 M. A. Armstrong 的 *Basic Topology* 等专著.)

自从微积分诞生起, 数学家们便开始将之应用于几何学, 来研究一般曲面的曲率等各种局部性质, 这便是微分几何. 随着微分几何在19世纪中叶趋于成熟, 数学家们开始更加关注几何对象的**整体**性质: 比如说如何区别一个球面和一个环面? 如何判断一个平面区域上有几个“洞”? 这些性质的特点是: 它们在连续形变下不变. 直观地讲, 您无论怎么去抻拉、压缩一个图形, 只要不用剪刀把它剪断或扎穿等等, 这些性质就都不会变化(图 7.1.22).

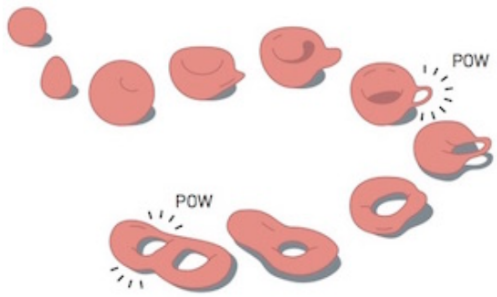


图 7.1.22: 拓扑学关注的性质. 整个变形过程中, 仅在两个"POW!"处有拓扑学性质的变化

那么数学上如何刻画这种“连续变化下不变”的性质呢? 这就要从所谓“连续”的定义入手. 如果读者接触过数学分析, 那么会记得所谓“连续函数”的定义是用$\varepsilon-\delta$语言表述的: 如果对于任意$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 使得当$|x-y|<\delta$时, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在x处连续, 在定义域内任意一点处连续的函数称为连续函数. 这里的 f 可以泛指任何$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的映射, 甚至任何两个定义了距离的空间之间的映射. 如果读者更系统地学习过分析学, 那么就会听说过连续函数的另一个等价定义: **开集的原像是开集**[16], 即$f(x)$是连续函数当且仅当如果对于任意开集U, 集合$f^{-1}(U)=\{x:f(x)\in U\}$ 也是开集. 后者的特点是: 它仅涉及到“开集”的定义, 不需要依赖于“距离”等传统几何学的概念. 于是, 对于两个集合 A,B, 我们只需要指定它们的哪些子集是开集, 就可以定义什么是$A\to B$的连续映射. 受此启发, 数学家们开始思考如何在一般的集合上定义开集.

即使要抛弃“距离”等概念, 我们也不能随随便便地给一般的集合指定哪些子集是开集. 比如在$\mathbb{R}^n$ 中, 任意多个开集的并集也是开集, 任意有限个开集的交集也是开集, 这些性质都是不涉及距离等概念的, 我们希望我们指定“开集”时也能照顾到这些性质. 经过几代数学家的探索, 数学界最终确定了一般拓扑空间的定义如下.

定义 7.1.1 *设X是一个非空集合，τ是X的一个子集族，如果τ满足*

[16] $\mathbb{R}^n$的一个子集X是开集 $\Leftrightarrow$ 对于X中的任意一点x, 存在一个正数ε, 使得与x的距离小于ε的点全在X中.

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ (空集和全集是开集),

2. 若$\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \tau$, 则$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$ (任意多个开集的并集是开集),

3. 若$A_1, \cdots, A_n \in \tau$, 则$A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$ (有限多个开集的交集是开集),
*则称(X, τ)是一个**拓扑空间**，或者X是一个拓扑空间, τ是X上的**拓扑**，τ中的每一个成员称为A中的**开集**; 此外$\{A \setminus U : U \in \tau\}$中的元素称为$X$上的**闭集**，即闭集定义为开集的补集.*

配套地, 我们还可以给出拓扑空间之间连续映射的概念

定义 7.1.2 *设X, Y是两个拓扑空间，一个映射$f : X \to Y$若满足：对于Y的任意开集U，$f^{-1}(U)$是X中的开集，则称f是**连续映射**. 如果f是双射, 并且f和f^{-1}都是连续映射, 那么我们称f是X到Y的一个**同胚映射**(简称**同胚**). 两个拓扑空间是**同胚**的 $\Leftrightarrow$ 两个拓扑空间之间存在同胚映射.*

如果X和Y之间有同胚f, 那么对于X上的任意开集U, $f(U) = \{f(x) : x \in U\}$也是$Y$的开集, 对于$Y$上的开集$V$, $f^{-1}(V)$也是X上的开集, 并且$V = f(U) \Leftrightarrow U = f^{-1}(V)$, 从而$f$不仅给出了$X$和$Y$中元素的一一对应, 还给出了它们的开集之间的一一对应.

例 7.1.1 *对于任意集合A, $\tau_t = \{\emptyset, A\}$和$\tau_d = 2^A$都是$A$上的拓扑, 分别称为**平凡拓扑**和**离散拓扑**, 它们分别是A上拓扑细致程度的两个极端: 对于A的任意拓扑τ, 均有$\tau_t \subseteq \tau \subseteq \tau_d$.*

例 7.1.2 *对于$\mathbb{R}^n$, $\tau = \left\{X \subseteq \mathbb{R}^n : \forall x \in X, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, |y - x| \le \varepsilon \to y \in X\right\}$ 称为$\mathbb{R}^n$上的**欧氏拓扑**. τ由$\mathbb{R}^n$上一般意义下的开集组成.*

今后我们默认$\mathbb{R}^n$上的拓扑是欧氏拓扑, 即$\mathbb{R}^n$上的开集和数学分析中定义的开集是一致的[17], 从而$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的映射的连续性和分析学中用$\varepsilon - \delta$语言定义的连续性也是一致的.

例 7.1.3 *$\mathbb{R}^3$上的球面$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ 上的拓扑可以定义为:*

$\tau = \{S \cap U : U$是$\mathbb{R}^3$上的开集$\}$, 即球面上的开集是$\mathbb{R}^3$上的开集与球面的交集. 这是符合直观的.

例 7.1.4 *呈上例. $\mathbb{R}^3$上的L^1球面(正八面体) $S' = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}$ 上也可以定义拓扑为$\tau' = \{S' \cap U : U$是$\mathbb{R}^3$上的开集$\}$. 此时映射*

$$\begin{aligned} f : S' &\to S \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}, \frac{y}{\sqrt{|y|}}, \frac{z}{\sqrt{|z|}}\right) \end{aligned}$$

构成S'到S的同胚.

---

[17] 很多拓扑学教科书会把定义了欧氏拓扑的$\mathbb{R}^n$记为$\mathbb{E}^n$, 这主要是区别$\mathbb{R}^n$上的其它拓扑, 但本文不会涉及$\mathbb{R}^n$上的其它拓扑, 因此可以作此约定.

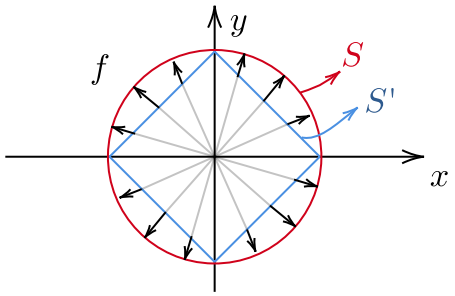


图 7.1.23: $f(x)$示意图, 示$z=0$截面.

例 7.1.5 *$\mathbb{R}^2$上的圆周$C=\left\{(x,y):x^2+y^2=1\right\}$上的拓扑定义为$\tau=\{C\cap U:U$是$\mathbb{R}^2$上的开集$\}$, 此时映射*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to C\\ x&\mapsto(\cos x,\ \sin x)\end{aligned}$$

是连续映射, 但不是同胚.

连续映射的一个重要性质是"连续映射的复合是连续映射".

定理 7.1.1 *X,Y,Z是拓扑空间, $f:X\to Y$和$g:Y\to Z$是连续映射, 则$g\circ f:X\to Z$是连续映射.*

证明: 设U是Z中开集, 由于g连续, 故$g^{-1}(U)$是Y中开集, 又因为f连续, 所以$f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$是$X$中开集, 即$(g\circ f)^{-1}(U)$是$X$中开集. 由$U$的任意性, 知$g\circ f$连续.

常见的拓扑空间构造方式有子拓扑和积拓扑. 分别给出了一个由大拓扑空间构造小拓扑空间的方法和一个由小拓扑空间构造大拓扑空间的方法.

定义 7.1.3 *如果(X,τ)是拓扑空间, $Y\subseteq X$, 那么$\tau_Y=\{Y\cap U:U\in\tau\}$是$Y$上的拓扑, 称为$X$限制在$Y$上的**子拓扑**. 称$(Y,\tau_Y)$为$(X,\tau)$的子拓扑空间(如图 7.1.24所示).*

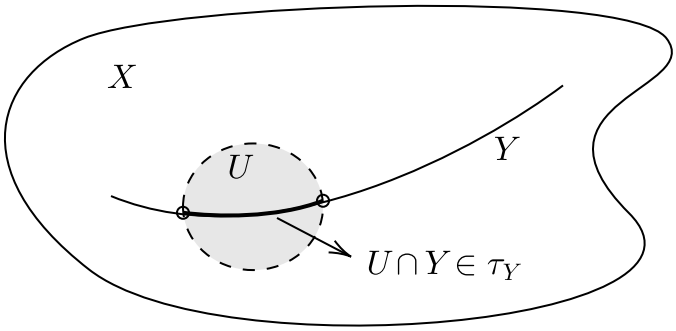


图 7.1.24: 子拓扑

例 7.1.6 *设X是$\mathbb{R}^n$的一个离散点集, 即对于任意$x\in X$, 有*

$$\inf\Big\{|x-y|: y\in X且y\neq x\Big\}>0,$$

则$\mathbb{R}^n$限制在X上的子拓扑就是X上的离散拓扑.

此外, 例 7.1.3, 例 7.1.4, 例 7.1.5中构造的S, S', C上的拓扑都是相应欧氏空间的子拓扑. 今后我们默认欧氏空间的任何子集上的拓扑就是欧氏拓扑限制在该子集上的子拓扑.

定义 7.1.4 *如果(X,τ_X), (Y,τ_Y)是拓扑空间, 则*

$$\tau_{X\times Y}=\left\{U\subseteq X\times Y\text{: 存在}\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\tau_X,\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\tau_Y\text{, 使得}U=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha\times B_\alpha)\right\}$$

*是$X\times Y$是哪个的一个拓扑, 称为τ_X和τ_Y的**积拓扑**. $(X\times Y,\tau_{X\times Y})$也称为$(X,\tau_X)$, (Y,τ_Y)的**积拓扑空间**.(如图 7.1.25所示)*

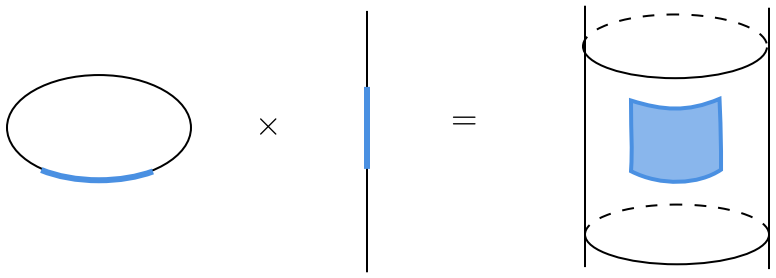


图 7.1.25: 积拓扑

直白地讲, 积拓扑空间$X\times Y$的中的开集就是那些可以写成X中的开集与Y中的开集的笛卡尔积的"任意并"的集合. 此外, $\tau_{X\times Y}$还可以定义为$X\times Y$的所有包含集族
$\sigma=\{A\times B: A\in\tau_X, B\in\tau_Y\}$ 的拓扑中最粗的一个, 或者所有包含σ的拓扑的交集, 此时σ称为τ的一个**拓扑基**.

例 7.1.7 *$\mathbb{R}^{m+n}$作为拓扑空间, 可以看作$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$作为拓扑空间的积拓扑空间, 更一般地, $\mathbb{R}^m$则可看作m个$\mathbb{R}$的积拓扑空间. 读者可以尝试对一些简单的情形进行验证, 比如$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.*

例 7.1.8 *记T^1为一维圆周, 则$T^n=\underbrace{T^1\times T^1\times\cdots\times T^1}_{n个T^1}$称为$n$维**环面**. 这是最为经典的积拓扑空间的例子.*

除了同胚外, 还有一类比较重要的连续映射中: 嵌入.

定义 7.1.5 *设X,Y是拓扑空间, 若连续映射$f: X\to Y$是单射, 并且f作为X到$f(X)$(作为Y的子拓扑空间)的映射是同胚映射, 则称f是X到Y的一个**嵌入**.*

例 7.1.9 *函数*

$$\begin{aligned}&f: T^2\to\mathbb{R}^3\\&\theta_1,\theta_2\mapsto((R+r\cos\theta_1)\cos\theta_2,(R+r\cos\theta_1)\sin\theta_2,r\sin\theta_1)\end{aligned}$$

是T^2到$\mathbb{R}^3$的一个嵌入(如图 7.1.26所示) 其中$R > r$. 这是最为熟知的二维环面的形状.

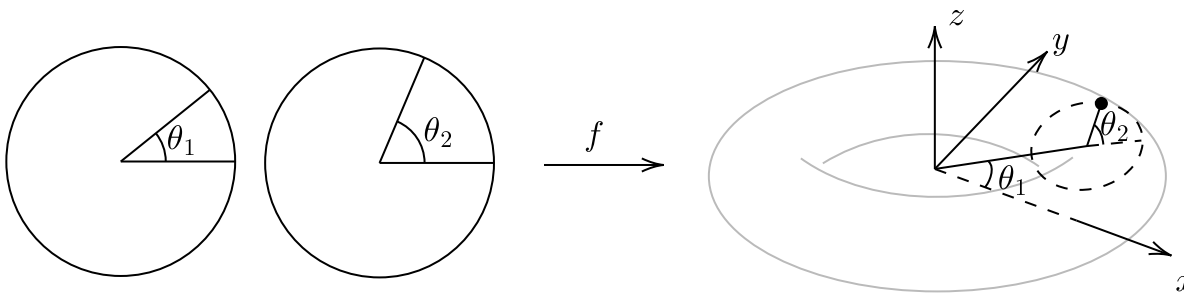


图 7.1.26: $f : T^2 \to \mathbb{R}^3$示意图

为了区别不同的拓扑结构, 我们需要了解拓扑空间的一些常用性质. 最为常用的两个, 一个是连通性, 一个是紧性. 前者相对来讲较为直观.

定义 7.1.6 *如果一个拓扑空间X不可以被分割成两个互不相交的开集的并, 则称X是**连通**的; 一个拓扑空间X的子集Y如果不能写成$(Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2)$的形式, 其中$U_1, U_2$是$X$的开集, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $Y \cap U_1$和$Y \cap U_2$都非空, 则称Y是X的一个**连通分支**.*

例 7.1.10 *$\mathbb{R}$是连通的. 这是因为, 假设U是$\mathbb{R}$的开集, 且$U \neq \mathbb{R}$, 任取$x \in \mathbb{R} \setminus U$, 则可以证明$\sup\{a : [x, a] \subseteq \mathbb{R} \setminus U\}$和$\inf\{a : [a, x] \subseteq \mathbb{R} \setminus U\}$之一是有限的、包含于$\mathbb{R} \setminus U$且不是$\mathbb{R} \setminus U$的内点. 类似地, 可以证明$\mathbb{R}$上的所有开、闭、半开半闭区间都是连通的.*

例 7.1.11 *离散拓扑的每一个多于一个点的点集都不是它的连通分支.*

由于$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}$上的区间都是连通的, 我们可以给出另外一种连通性的定义

定义 7.1.7 *设X是一个拓扑空间, $a, b \in X$, 如果存在$[0, 1] \to X$的连续映射, 使得$f(0) = a$, $f(1) = b$, 则称a, b在X中是**道路连通**的. 如果把X中全体与a道路连通的点组成的集合记作$[a]$, 那么可以证明对于任何与a道路连通的点b, 都有$[a] = [b]$, 即道路连通是X上的点的一个等价关系, 而$[a]$这样的集合是这个等价关系对应的等价类. 我们称$[a]$这样的等价类为X的**道路连通分支**. 如果X只有一个道路连通分支, 则称X是**道路连通**的.*

容易证明, 一个道路连通分支一定是一个连通分支, 一个道路连通的拓扑空间一定是连通的.

例 7.1.12 *$\mathbb{R}^2$上的双曲线$xy = 1$是其两个道路连通分支的并, 而圆$x^2 + y^2 = 1$是道路连通的.*

利用连通性, 我们可以对一些简单的拓扑结构进行区分.

例 7.1.13 *圆周T^1与$\mathbb{R}$不同胚. 这是因为T^1去掉任意一点后(即: 去掉一个单点后作为T^1的子拓扑空空间)仍是连通的, 而$\mathbb{R}$去掉任意一个单点x后可以写成两个开集$(-\infty, x)$和$(x, +\infty)$的并(如图 7.1.27所示).*

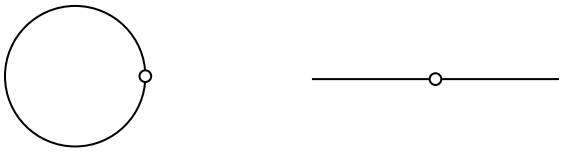


图 7.1.27: T^1去掉任意一点后仍是连通的, 而$\mathbb{R}$去掉任意一点后不再连通.

例 7.1.14 *$\mathbb{R}$与$\mathbb{R}^2$的子集$xy=0$(即"两条相交的直线")不同胚, 因为后者去掉原点后具有4个道路连通分支, 而前者去掉任意一点都只能具有两个连通分支(如*图 7.1.28*所示).*



图 7.1.28: $\mathbb{R}$去掉任意一点后只有两个连通分支, 而$xy=0$去掉(0,0)后有四个.

拓扑学里有一些反例来表明连通不能推出道路连通. 但是可以证明, 对于我们关注的拓扑空间——流形而言, 道路连通和连通是完全等价的.

最后稍微介绍一下"紧性". 所谓"紧", 在数学分析中指的是"任意序列有收敛子列". 而这个命题用开集的语言表述为"Heine-Borel定理": 一个集合是紧的, 当且仅当它的任意开覆盖有有限子覆盖, 这是一个只涉及开集的定义方式, 可以作为一般拓扑空间中"紧性"的定义.

定义 7.1.8 *设(X,τ)是拓扑空间, 若对于任意$\sigma\subseteq\tau$, 只要$\bigcup_{U\subseteq\sigma}U=X$, 就存在一个正整数$N$及$\sigma$的一个$N$元子集$\{V_1,V_2,\cdots,V_N\}$, 使得$\bigcup_{n=1}^{N}V_n=X$, 则称$(X,\tau)$是**紧**的.*

一般来讲, 对于欧氏空间$\mathbb{R}^n$的子空间X, 有

定理 7.1.2 *X是紧集 $\Leftrightarrow$ X是$\mathbb{R}^n$的有界闭集.*

但是对于无限维的线性空间, 上述定理就不再成立, 这是泛函分析的内容, 我们不多赘述. 对于我们所关注的流形, 证明其紧性只需要证明其可嵌入某个欧氏空间$\mathbb{R}^n$, 使得像集是$\mathbb{R}^n$的有界闭集即可; 而如果要证明一个拓扑空间不是紧的, 则更好的方法是利用紧的定义.

例 7.1.15 *$\mathbb{R}^n$本身不是紧的, 球面$S^n=\left\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\subseteq\mathbb{R}^{n+1},\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\right\}$是紧的, 环面$T^n$也是紧的.*

有了以上这些基础之后, 我们就可以用拓扑学的语言来定义

定义 7.1.9 *一个拓扑空间X, 若*

1. 存在一个正整数n, 使得对任意$x\in X$, 存在X中的开集U, 使得$x\in U$, 且U同胚于$\mathbb{R}^n$某开集,

2. X可以嵌入到某个欧氏空间$\mathbb{R}^m$中[18] *(一般来讲, $m\geq n$)*

[18] 数学教材中会把这一条替换成"Hausdorff可分性+第二可数性", 以此强调流形定义的内蕴性. 但笔者此处使用的定义与数学教材中的定义是等价的.

*则称X是一个**拓扑流形**或**流形**.*

例 7.1.16 *$\mathbb{R}^2$的子集$\{(x,y):xy=a\}$在$a\neq 0$时是一维流形, 但在$a=0$时不是流形, 因为这个图形在$x=y=0$附近的开集不同胚于任何$\mathbb{R}$上的开集(而其余点附近都可以找到与$\mathbb{R}$同胚的开集)*

关于流形更多概念和示例, 我们在正文中介绍. 在此我们介绍一个一般流形的一个比较好的性质.

定理 7.1.3 *设X是拓扑流形, Y是X的子集, 则Y是X的连通分支 $\Leftrightarrow$ 则Y是X的道路连通分支.*

7.2. 一般线性空间理论简介

7.2.1. 线性空间

一个集合V上若定义了一个加法运算$V\times V\to V$和一个数乘运算$\mathbb{R}\times V\to V$，使得如下八条运算定律被满足

$\forall\alpha,\beta\in V,\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\forall\alpha\in V,1\alpha=\alpha$
$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$\forall\alpha\in V,k,l\in\mathbb{R},(kl)\alpha=k(l\alpha)$
$\exists 0\in V,\forall\alpha\in V,\alpha+0=\alpha$	$\forall\alpha\in V,k,l\in\mathbb{R},(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
$\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V,\alpha+\beta=0$	$\forall\alpha,\beta\in V,k\in\mathbb{R},k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

则称V是一个**线性空间**。上述性质中，左列第三条性质中的$0\in V$称为V中的**零元**，左列第四条性质中的β称为V中的**负元**，一般记作$-a$. 可以直接由定义验证，在一个线性空间中，零元是唯一的，每一个元素的负元也是唯一的，并且对于任意$\alpha\in V$及$k\in\mathbb{R}$, $k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=0$；此外，对于每一个线性空间中的向量$\alpha$, $-\alpha=(-1)\alpha$.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 V 中的一个向量组, 任给s个实数$k^1,\cdots,k^s$, 向量$\sum_{i=1}^s k^i\alpha_i$ 称为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的一个**线性组合**, $k^1,\cdots,k^s$称为此线性组合的**系数**; 对于 $\beta\in V$, 若存在 $c^1,\cdots,c^s\in\mathbb{R}$, 使得 $\beta=\sum_{i=1}^s c^i\alpha_i$, 则称 β 可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$**线性表出**; 如果有 s 个不全为0的实数 $k^1,\cdots,k^s$, 使得 $\sum_{i=1}^s k^i\alpha_i=0$, 则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是**线性相关**的, 否则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是**线性无关**的, 线性无关意味着 $\sum_{i=1}^s k^i\alpha_i\Rightarrow k^1=\cdots=k^s=0$.

包含零元的向量即组必然是线性相关的; 若单个向量α组成的向量组是线性相关的，则$\alpha=0$.

设 $n\in\mathbb{N}^*$, 若一个线性空间 V 中有一个 n 元线性无关组 $e_1,\cdots,e_n$ 使得 V 中的所有向量都可以由 $e_1,\cdots,e_n$ 线性表出, 则称 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组**基底**(亦简称**基**), n 称为 V 的**维数**.

可以验证, 如果线性空间 V 以一个 n 元向量组 $e_1,\cdots,e_n$ 为基底，则：对于 $m>n$, V中任意一个 m 元向量组线性相关; 对于 $m<n$, V中任意一个 m 元向量组不可能把 V 中的所有向量

线性表出，这说明一个线性空间不可能有两个所含元素个数不同的基底，从而上述定义中的维数是良定义的. 当然，并不是每一个空间都有一个有限元向量组作为基底, 如果一个线性空间中任何有限元向量组都不构成其基底，则我们称这个线性空间是**无穷维的**.

不难验证，对于一个线性空间V，对于其任意一组基底$e_1,\ \cdots,e_n$，V中的每一个向量α可唯一地表示为$e_1,\ \cdots,e_n$的线性组合. 一般我们把 α 由 $e_1,\ \cdots,e_n$ 线性表出的系数组成的 n 元组 $(a_1,\ \cdots,a_n)^\top$ 称为 α 在 $e_1,\ \cdots,e_n$ 下的**坐标**, 坐标通常写成列向量的形式.

设$\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 是 V中的两组基, V中的矢量 α 在此两组基下的表示分别为

$$X=(x_1,\ \cdots,x_n)^\top \qquad Y=(y_1,\ \cdots,y_n)^\top \tag{306}$$

为了求 X,Y之间的关系, 首先把两组基底之间的关系研究清楚. 事实上, 由于 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 是 V 的基, 每一个 β_i 都可以由 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 唯一地线性表出，设

$$\beta_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\quad j=1,2,\ \cdots,n \tag{307}$$

为推导简便，引入形式写法

$$\sum_{i=1}^{n}x^i\alpha_i\overset{\triangle}{=}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

这样(307)就可以写作

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

记上式右端的 $n\times n$ 矩阵为 A, 则上式可写为

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}A \tag{308}$$

A 称为由基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 的**变换矩阵**或**过渡矩阵**.

不难验证如下几个事实

- $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 到 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$的过渡矩阵是单位矩阵 I
- 若基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是 A, 基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 到基 $\gamma_1,\ \cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵是 B, 则基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 到基 $\gamma_1,\ \cdots,\gamma_n$ 的过渡矩阵是 AB
- 基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵和基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_n$ 到基 的过渡矩阵 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$互为逆矩阵，从而过渡矩阵都是可逆矩阵.

接下来我们来求解(306)中两组系数之间的关系. 一方面, 我们有

$$\alpha=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}, \tag{309}$$

另一方面,

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{310}$$

由于α在 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 下的表示方式唯一, 故

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ \text{即}\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{311}$$

这就是系数变换的公式, 注意对比(308)和(311)之间的差异.

设 V 是线性空间, $U\subseteq V$, 并且 U 对于 V 中的加法和数乘运算封闭，从而也形成一个线性空间, 则称 U 是 V 的一个**线性子空间**，上下文没有歧义时也简称“**子空间**”.

设 U 是有限维线性空间 V 的线性子空间, 则必然有$\dim U\leq\dim V$, 并且若 $\dim U=\dim V$, 则 $U=V$.

设 U 是 n 为线性空间 V 的一个 s 线性子空间, 则 U 的基底可以**扩充**为 V 的基底, 即: 若 $e_1,\ \cdots,e_s$ 是 U 的基底, 则存在 $n-s$ 个向量 $e_{s+1},\ \cdots,e_n$, 使得 $e_1,\ \cdots,e_n$ 是 V 的基底. 基底扩充是线性空间中各种命题和定理证明的常用手段。

容易验证，对于一个线性空间V的任意两个线性子空间U和W, $U\cap V$和

$$U+W:=\{x+y:x\in U,y\in W\} \tag{312}$$

都是V的线性子空间，并且可以通过基底扩充的手法，得到

$$\dim U+\dim W=\dim(U+W)+\dim(U\cap W). \tag{313}$$

一般地，如果$U\cap W=\{0\}$，则称$U+W$是**直和**，记作$U\oplus W$. 当然，我们可以直接由(313)得到

$$\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W, \tag{314}$$

而若线性空间V中有两个子空间W,W'满足

$$W\oplus W'=V, \tag{315}$$

则称W和W'互为对方的**补空间**. 利用基底扩充的手法，可以证明补空间是一定存在的（但一般不是唯一的）。

设线性空间 V 中有向量组 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_s$, 则全体可由这个向量组线性表出的向量

$$\left\{\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i : k_1,\ \cdots, k_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

是 V 的线性子空间, 称为由 $\alpha_1,\ \cdots, \alpha_s$ **生成**（或**张成**）的**线性子空间**, 记作 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\ \cdots, \alpha_s\}$, 并称 $\dim \mathrm{span}\{\alpha_1,\ \cdots, \alpha_s\}$为向量组 $\alpha_1,\ \cdots, \alpha_s$ 的秩, 记作 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\ \cdots, \alpha_s\}$.

7.2.2. 线性映射

设$A : V \to V'$是线性空间之间的映射，如果f满足：对任意$\alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{R}$, 有

$$A(k\alpha + \beta) = kA(\alpha) + A(\beta), \tag{316}$$

则称f是$V \to W$的**线性映射**. V到自身的线性映射称为**线性变换**，V到$\mathbb{R}$的线性映射称为**线性函数**. 若 A 是 $V \to V'$ 的线性映射, 则

- $A(0) = 0'$ 其中$0'$ 是V' 的零元
- $A(-\alpha) = -A(\alpha), \forall \alpha \in V$
- $A\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{s} k_i A(\alpha_i)$
- 如果 V 是有限维的, $e_1,\ \cdots, e_n$ 是 V 的一组基, 则对于 V 中的任一矢量 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, 有

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(e_i) \tag{317}$$

最后一条性质表明, 只要知道了 V 的一个基 $\alpha_1,\ \cdots, \alpha_n$, 在 A 下的象, 则 V 中任一向量在 A 下的像就都确定了. 即 n 维线性空间 V 到 V' 的线性映射可以完全有其在 V 上的一个基的作用决定.

设 A, B 分别是 $U \to V, V \to W$ 的线性映射, 则 $A \circ B$ 也是 $U \to W$ 的线性映射.

设 A 是 $U \to V$ 的线性映射, 且是双射, 则 $A^{-1} : V \to U$ 也是线性映射, 此时称 A 是 $U \to V$ 的**线性同构**. 若两个线性空间U, V有线性同构映射, 则称这两个线性空间是**线性同构的**, 记作 $U \cong V$. 容易证明，对于两个有限维线性空间U和V, $U \cong V$当且仅当$\dim U = \dim V$.

对于线性映射, 我们可以定义它们的加法和数乘为他们作为映射的**逐点加法、数乘运算**，即对于任意两线性空间个 V 到 V' 的线性映射 A, B 和 $c \in R$, 我们定义

$$\begin{aligned} A + B : V &\to V' & \qquad cA : V &\to V' \\ \alpha &\mapsto A(\alpha) + B(\alpha), & \alpha &\mapsto cA(\alpha), \end{aligned} \tag{318}$$

这样，全体$V \to V'$的线性映射按逐点加法、数乘构成一个线性空间，我们记之为 $\mathrm{Hom}(V, V')$; 特别地, 还记空间到自身的全体线性变换$\mathrm{Hom}(V, V)$为$\mathrm{End}(V)$.

线性映射中最重要的概念是其“核”和“像”。设 A 是线性空间 V 到线性空间 V' 的线性映射, 我们称

$$\mathrm{Ker}A=\{\alpha\in V\colon A(\alpha)=0\} \tag{319}$$

为映射 A 的**核**, 称

$$\mathrm{Im}A=\{A(\alpha)\colon \alpha\in V\} \tag{320}$$

为映射 A 的**像**. 对于一个线性映射$A:V\to V'$而言，f是单射当且仅当$\mathrm{Ker}A=\{0\}$, f是满射当且仅当$\mathrm{Im}A=V'$，并且一般地有

$$\dim \mathrm{Ker}A+\dim \mathrm{Im}A=\dim V. \tag{321}$$

一般我们称$\dim \mathrm{Im}A$为线性映射A的**秩**.

接下来我们分别讨论线性映射的矩阵表示. 设 V和 W 分别是 n 维、m维线性空间, A 是 $V\to W$ 的线性映射, 在 V中取一组基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$, 在 W 中取一组基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_m$, 因为 $A(\alpha_i)\in W$, 所以 $A(\alpha_i)$ 可以由 W 的基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_m$ 唯一地线性表出

$$A(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i,\quad i=1,2,\ \cdots,n, \tag{322}$$

或者形式地表示为

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \tag{323}$$

将(323)右端的 $m\times n$ 矩阵记作 $A_{\alpha;\beta}$, 称 M_A 是线性映射 A 在 V的基 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$ 和 W 的基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_m$ 的矩阵. $A_{\alpha;\beta}$ 的第 j 列是 $A(\alpha_j)$ 在基 $\beta_1,\ \cdots,\beta_m$ 下的坐标 ($j=1,\ \cdots,n$). 因此, $A_{\alpha;\beta}$ 被线性映射 A 唯一决定. 事实上, 在这两组即给定的情况下, 每一个 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$也按(323)的方式唯一决定了一个 $V\to W$ 的线性映射 A, 这样我们就建立了一个 $M_{m\times n}$(全体$m\times n$实矩阵组成的集合) 到 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的线性同构, 从而我们有

$$\mathrm{Hom}(V,W)\cong M_{m\times n} \tag{324}$$

从而

$$\dim \mathrm{Hom}(V,W)=mn \tag{325}$$

事实上, 上述同构不仅保持了线性结构, 还保持了矩阵乘法：设 U,V,W 分别是 r,s,t 维线性空间, A,B 分别是 $U\to V, V\to W$ 的线性映射, 在 U,V,W 上分别选择 $\alpha_1,\ \cdots,\alpha_r$, $\beta_1,\ \cdots,\beta_s$ 和 $\gamma_1,\ \cdots,\gamma_t$ 为基底, 则

$$(A\circ B)_{\alpha;\gamma}=A_{\alpha;\beta}B_{\beta;\gamma}. \tag{326}$$

接下来我们推导一个线性映射在不同基底下的矩阵之间的关系。设 U, V 分别是 m, n 维线性空间, $A: M \to N$ 是线性映射, A 在 U 取基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, V 取基底 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 时的矩阵是 $A_{\alpha,\beta}$, 在 U 取基底 $\widetilde{\alpha}_1, \cdots, \widetilde{\alpha}_m$, V 取基底 $\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_n$ 时的矩阵是 $A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, 并且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 到 $\widetilde{\alpha}_1, \cdots, \widetilde{\alpha}_m$ 的转移矩阵是 S, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 到 $\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_n$ 的转移矩阵是 T, 那么我们有

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} A_{\alpha;\beta} \tag{327}$$

$$A\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_1 & \cdots & \widetilde{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_1 & \cdots & \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}} \tag{328}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_1 & \cdots & \widetilde{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} S \tag{329}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\beta}_1 & \cdots & \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T \tag{330}$$

将(329),(330)代入(328)并令两端同时右乘 S^{-1}, 得到

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} T A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}} S^{-1}, \tag{331}$$

对比(331)和(328), 得到

$$T A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}} S^{-1} = A_{\alpha;\beta}, \tag{332}$$

再两边同时左乘 T^{-1}, 右乘 S 即可得到

$$A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}} = T^{-1} A_{\alpha;\beta} S. \tag{333}$$

(332)和(333)给出了两组基底下线性映射A的矩阵之间的转化关系. 由(332)或(333)可以看出，矩阵$A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}}$和$A_{\alpha;\beta}$是相抵的，从而具有相同的秩. 由$A_{\widetilde{\alpha};\widetilde{\beta}}$和$A_{\alpha;\beta}$的任意性知，$A$在任意一个基底下的矩阵的秩都是相等的，事实上，这个秩就是线性映射A的秩，即$\dim \mathrm{Im} A$.

一个线性空间V上的线性变换是它到自身的映射，所以一个线性变换的矩阵表示只要确定V上的基底即可. A 在 V的一组基底 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A_α, 在 V的另一组基底 $\widetilde{\alpha}_1, \cdots, \widetilde{\alpha}_n$ 下的矩阵是 $A_{\widetilde{\alpha}}$, 并且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到 $\widetilde{\alpha}_1, \cdots, \widetilde{\alpha}_n$ 的过渡矩阵是 S, 则用和前面完全类似的推导方式，容易得到

$$A_{\widetilde{\alpha}} = S^{-1} A_\alpha S,$$

即线性变换在V不同基底选取下的矩阵两两相似，这意味着它们具有相同的Jordan标准型. 出于我们的需要，这里我们不做展开.

7.2.3. 线性函数、对偶空间

设 V 是 n 维线性空间, 若一个 $V \to \mathbb{R}$ 的映射满足:

$$\begin{cases} f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) & \forall \alpha, \beta \in V \\ f(k\alpha) = k f(\alpha) & \forall \alpha \in V, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

则称 f 为 V 上的**线性函数**. 由上一节中的讨论，全体线性函数组成的集合$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$按照逐点

加法和数乘运算构成线性空间, 它称为V的**对偶空间**, 通常记作V^*. 由(325)，我们有

$$\dim V^* = \dim \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{R} = \dim V \cdot 1 = \dim V. \tag{334}$$

所以$V^* \cong V$. 设$e_1, \cdots, e_n$是V的一组基底，则在$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$中我们可以取这样一组基底$e^1, \cdots, e^n$, 使得

$$e^i(e_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{335}$$

容易验证，$e^1, \cdots, e^n$是$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$中一组线性无关的向量，称为$e_1, \cdots, e_n$的**对偶基底**.

接下来我们讨论对偶空间的坐标变换。假设 n 维线性空间 V 中有一组基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 对应于 V^* 上的对偶基底 $e^1, e^2, \cdots, e^n$; 接下来我们又取了 V 上的另一组基底 $f_1, \cdots, f_n$, 对应于 V^* 上的对偶基底 $f^1, f^2, \cdots, f^n$, 如果我们已经知道了 $e_1, \cdots e_n$ 到 $f_1, \cdots, f_n$ 的变换

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ j = 1, 2, \cdots, n \tag{336}$$

或者写成矩阵形式

$$(f_1, \cdots, f_n) = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{337}$$

那么直接由定义可以验证

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \tag{338}$$

或者

$$\left(f^1, \cdots, f^n\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-\top} \left(e^1, \cdots, e^n\right) \tag{339}$$

其中 $A^{-\top} = \left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$ 代表矩阵 A 的逆转置运算（求逆和转置可交换这一点，读者可自去验证），也就是说**对偶基的坐标变换矩阵是原基底坐标变换矩阵的差一个求逆转置运算.**

最后，我们讨论线性空间之间的线性映射对偶映射. 设 X, Y 是两个线性空间，$f\colon X \to Y$ 是他们之间的线性映射，X^*, Y^* 分别是 X, Y 的对偶空间，则我们定义 f 的**对偶映射** f^* 为：

$$\begin{aligned} f^*\colon Y^* &\to X^* \\ \omega &\mapsto \omega(f(\,\cdot\,)) \end{aligned} \tag{340}$$

也就是说，对于每一个 $\omega \in Y^*$, $f^*\omega$ 是 X^* 中的元素，对于每一个 $x \in X$, 有[19]

$$f^*(\omega)(x) = \omega(f(x)). \tag{341}$$

我们可以看到，一个线性映射的对偶映射相比于其本身，定义域和值域“交换”了，变成把值域的对偶空间里的元素拉回到了定义域的对偶空间里，所以这个映射也称为 f 的**拉回映射**。

对偶映射的矩阵表示也非常简单：设 X, Y 是分别是 m, n 维线性空间，并且在 X 取定的基底 $e_1, \cdots, e_m$, Y 取定基底 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, $f: X \to Y$ 是它们之间的线性映射，并且在上述基底下的矩阵是 $F = \{f_{ij}\}_{m\times n}$, 即

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\varepsilon_j, \ i = 1, \cdots, m, \tag{342}$$

则 f^* 在 X, Y 分别取相应对偶基底 $e^1, \cdots, e^m$ 和 $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n$ 时的矩阵恰好是 $F^\top$, 即

$$f^*\left(\varepsilon^j\right) = \sum_{i=1}^{m} f_{ij}e^i, \ j = 1, \cdots, n. \tag{343}$$

7.2.4. 双线性函数

设 V 是一个线性空间, $V\times V$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 若满足: 对于任意 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \beta \in V$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, 有

- $f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1 f(\alpha_1, \beta) + k_2 f(\alpha_2, \beta)$
- $f(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1 f(\alpha, \beta_1) + k_2 f(\alpha, \beta_2)$

则称 f 是 V 上的一个**双线性函数**. 上述两条表明

$$\begin{cases} \text{固定}\alpha, \ \text{函数}\beta \mapsto f(\alpha, \beta)\text{是}V\text{上的一个线性函数} \\ \text{固定}\beta, \ \text{函数}\alpha \mapsto f(\alpha, \beta)\text{是}V\text{上的一个线性函数} \end{cases}$$

我们把线性函数 $\beta \mapsto f(\alpha, \beta)$ 记作 $f^\flat(\alpha)$ （“$\flat$”是乐谱里的降记号）, 即

$$f^\flat(\alpha)(\beta) = f(\alpha, \beta), \tag{344}$$

这样，$f^\flat$ 就是一个 V 到 V^* 的线性映射（回顾：V^* 是 V 上全体线性函数组成的线性空间）.

在 V 中取一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 任取两个 V 中的矢量 x, y, 设

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

则

---

[19] 今后遇到 $f(a)(b)$ 这种表达式，我们默认它等于 $(f(a))(b)$，即 f 作用到 a 上得到一个函数，这个函数再作用到 b 上得到一个值

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i f(e_i, e_j) \end{aligned} \tag{345}$$

把(345)中的系数 $f(e_i, e_j)$ 作为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素, 即令

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & \cdots & f(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n,e_1) & \cdots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix},$$

我们称上述 A 为双线性函数 f 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的**度量矩阵**，它由 f 和基 $e_1, \cdots, e_n$ 唯一决定. 由(345), 我们有

$$f(x,y) = X^\top A Y \tag{346}$$

其中 $X = (x_1, \cdots, x_n)^\top, Y = (y_1, \cdots, y_n)^\top$ 分别是 x, y 在 $e_1, \cdots, e_n$ 下的坐标. 可以证明, 对于两个 $n \times n$矩阵，如果对于任意两个n维列向量X, Y, 都有 $X^\top A Y = X^\top B Y$, 则 $A = B$, 因此, 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下, 任何一个 $n \times n$ 矩阵也按照(345)的方式唯一决定了一个线性映射 f.

在V上任取两组基底$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$和$\beta_1, \cdots, \beta_n$, 若$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$到$\beta_1, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵是$P$, f 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵分别为 A, B, 则由(346)不难导出

$$B = P^\top A P.$$

从而同一个双线性函数在不同的基底下的度量矩阵是合同的(回顾: 合同变换即 $A \mapsto X^\top A X$ 这样的变换, 其中 X 是可逆的; 若两个对称矩阵合同, 则他们有相同的正负惯性指数, 即有相同的正、负特征值个数). 由于任意两个合同矩阵有相同的秩，一个双线性函数 f 的所有可能度量矩阵都有一个固定的秩, 将其定义为 f 的**秩**, 记作 $\mathrm{rank} f$. 事实上，双线性函数f的秩与$f^\flat$作为线性映射的秩相等.

如果f在V的某一组基下的度量矩阵是满秩的，那么它在V的其它任何基底下也是满秩的，此时我们说f是**非退化的**. 容易验证，f是非退化的当且仅当$f^\flat$是$V \to V^*$的同构.

如果f对于任意$\alpha, \beta \in V$满足

$$f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha), \tag{347}$$

则称f是对称的；而如果f对于任意$\alpha, \beta \in V$满足

$$f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha), \tag{348}$$

则称f是反对称的. 容易验证，对称双线性函数的度量矩阵全都是对称的，反对称双线性函数的度量矩阵也全都是反对称的.

如果一个对称的双线性函数$\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ 满足

$$\text{正定性：}\ \forall\alpha\in V, \langle\alpha,\alpha\rangle>0, \tag{349}$$

则称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$V$上的一个内积函数. 从(349)容易验证，一个内积函数必然是非退化的双线性函数. 一个定义了内积函数的线性空间被称为内积空间。在内积空间上，我们可以定义向量的长度、夹角等概念. 一个向量$\alpha\in V$的**长度**定义为

$$|\alpha|:=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}, \tag{350}$$

并且我们可以证明著名的Cauchy-Schwartz不等式

$$|\langle\alpha,\beta\rangle|\leq|\alpha||\beta|. \tag{351}$$

有限维的内积空间被称为**欧氏空间**. 可以证明，若 V 是欧氏空间, 则 V 中存在一组基 $e_1,\cdots,e_n$ 使得内积函数在此基下是单位矩阵, 即对任意 $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i, y=\sum_{i=1}^n y_ie_i\in V$, 有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i. \tag{352}$$

在内积空间V的任意子集W上，我们定义

$$W^\perp=\{x\in V:\forall y\in W,\langle x,y\rangle=0\} \tag{353}$$

为W的**正交补**. 可以验证，$W^\perp$总是V的线性子空间，并且如果W本身也是V的线性子空间，那么

$$W=W\oplus W^\perp. \tag{354}$$

注意对比：对于一般的有限维线性空间，一个线性子空间的补空间一般有无穷多个；但是在欧氏空间中，一个线性子空间的正交补空间是唯一的.

如果线性空间V上的一个反对称双线性函数Ω是非退化的，那么我们可以证明，V一定是偶数维的，并且它有一组基底$e_1,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{2n}$, 使得$\Omega$在这组基底下的度量矩阵是

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_{n\times n}\\ -I_{n\times n} & 0\end{pmatrix}, \tag{355}$$

即

$$\Omega(e_i,e_j)=\begin{cases}1 & j-i=n\\ -1 & i-j=n\\ 0 & \text{其它,}\end{cases} \tag{356}$$

其证明并不非常简单，可参见丘维声老师《高等代数（第二版）下册》第166~169页. 此时，我们称Ω是V上的一个**辛内积**，定义了辛内积的线性空间称为**辛内积空间**, 而(355)中的矩阵J称为**辛矩阵**.

在微分流形中，如果流形上每点处的切空间上定义了一个内积，则称之为一个Riemann流形；

而如果每一个点处的切空间上定义了一个辛内积，则称之为一个辛流形. 前者几乎支撑了整个现代几何学的发展，而后者对于我们来说有特殊的重要意义：整个Hamilton力学的严格数学描述都是以辛流形为背景建立的.

7.3. 带边流形

定义 7.3.1 *设M是一个n维光滑流形，如果M的一个子集D中的点可以分为两类：*

1. *内点. $x \in D$如果满足：存在一个p的邻域U, 使得$U \subseteq D$，则称x为内点.*
2. *边界点. $x \in D$如果满足: 在M中有一个包含p点的局部坐标系$(U, \varphi; q_i)$, 使得$\varphi(x)$是坐标原点，并且$U \cap D = \{x \in U : q_n(x) \geq 0\}$.*

*则称D是M上的一个**带边区域**. 带边区域的边界点的集合记作∂D.*

可以证明，∂D是M的一个$m-1$维的闭嵌入子流形，并且当M是可定向流形时, ∂D也是可定向的. 设$p \in \partial D$的一个局部坐标系$(U; q_i)$是M上正定向的局部坐标系，那么

$$(U \cap \partial D; q_1, \cdots, q_{n-1})$$

也是∂D的局部坐标系, 并且M在∂D上诱导的定向是由

$$(-1)^n \mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_{n-1}$$

给出的, 使得∂D称为有诱导定向的光滑流形. 上述规定与微积分中$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$在带边区域的边界上诱导的定向是一致的.

7.4. Einstein 求和约定

所谓Einstein约定求和就是略去求和式中的求和号，在此规则中两个相同指标（一般来讲是一次上标一次下标[20]）就表示求和，而不管指标是什么字母，有时亦称求和的指标为“哑指标”：

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

1. 在同一项中，如果同一指标（如上式中的i）成对出现，就表示遍历其取值范围求和。这时求和符号可以省略，如上所示。
2. 上述成对出现的指标叫做哑指标，简称哑标。表示哑标的小写字母可以用另一对小写字母替换，只要其取值范围不变。
3. 当两个求和式相乘时，两个求和式的哑标不能使用相同的小写字母。为了避免混乱，常用的办法是根据上一条规则，先将其中一个求和式的哑标改换成其它小写字母。（这一条规则以后会用到）
4. 此外还规定，对于形如$\partial f / \partial x^{j_1 \cdots j_\lambda}_{k_1 \cdots k_\mu}$这种表达式，分子上的指标要“翻转”：$x$ 的上标$j_1, \cdots, j_\lambda$是整个偏微分表达式的下标，x 的下标$k_1, \cdots, k_\mu$是整个偏微分表达式的上标；分母上的上下标不翻转

[20] 在标准的张量运算中，指标多次出现在一个单项式里必然只可能是两次，一次上标一次下标，如果一个指标出现次数≥ 3或者两次同时出现为上标或下标，说明这个表达式写错了

例 7.4.1 *矩阵乘法：设* $A=\left\{a^i{}_j\right\}_{m\times n}$, $B=\left\{b^j{}_k\right\}_{n\times p}$ *分别是*$m\times n$,$n\times p$*矩阵，则* $C=AB$*是一个*$m\times p$*的矩阵，记*C*的第*i*行第*j*列元素为*$c^i{}_k$*, 则对于*$i=1,\ \cdots,m$*和* $k=1,\ \cdots,p$*, 总有*

$$c^i{}_k=\sum_{j=1}^{n}a^i{}_jb^j{}_k. \tag{357}$$

上式按照 Einstein 求和约定，角标j*在被求和表达式*$a^i{}_jb^j{}_k$*中分别以上下标的形式各出现了一次，从而前面对*j*求和的求和号可以省略，从而上述表达式可写为*

$$c^i{}_k=a^i{}_jb^j{}_k. \tag{358}$$

在理解表达式$a^i{}_jb^j{}_k$*时，因为我们事先指定过矩阵*A*的行数和*B*的列数是*n*，所以读者可以通过上下文就能推断出*j*应该从*1*求和到*n*, 并且*$a^i{}_jb^j{}_k$*中*i,k*两个角标各自只出现一次，所以表达式不对*i,k*求和，这样就还原出了带求和号的*(357).

例 7.4.2 *复合函数求导的链式法则. 设*$f=f\left(g^1,\ \cdots,g^m\right)$, $g^i=g^i\left(h^1,\ \cdots,h^n\right)$, *(*$i=1,\ \cdots,m$*)*$h^j=h^j\left(x^1,\ \cdots,x^p\right)$*,(*$j=1,\ \cdots,n$*), 此时我们对于某一个*$k\in\{1,\ \cdots,p\}$*求* $\partial f/\partial x^k$*, 则由链式求导法则, 我们有*

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial g^i}\frac{\partial g^i}{\partial h^j}\frac{\partial h^j}{\partial x^k} \tag{359}$$

按照按照 Einstein 求和约定，及偏微分式的上下标规则，上式中指标i,j*都各自分别以上、下角标的形式各出现了一次，因此对*i,j*的求和号都可以省略掉，从而表达式可以写成*

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=\frac{\partial f}{\partial g^i}\frac{\partial g^i}{\partial h^j}\frac{\partial h^j}{\partial x^k} \tag{360}$$

这个和一元微积分中链式求导法则非常类似的形式. 在理解表达式$\dfrac{\partial f}{\partial g^i}\dfrac{\partial g^i}{\partial h^j}\dfrac{\partial h^j}{\partial x^k}$*时，我们知道*$g^i$*的*$i$*的取值范围是*$1,\ \cdots,m$*, 以及*$h^j$*中*$j$*的取值范围是*$1,\ \cdots,n$*, 因此该表达式要对*$i$*从*$1$*求和到*$m$*, 对*$j$*从*$1$*求和到*$n$*; 而指标*$k$*只出现了一次，所以不对指标*$k$*求和，这样就还原出了带求和号的*(359).

此外，在Einstein求和约定下，一个向量α的分量表达式$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha^ie_i$就可以简化为 $\alpha=\alpha^ie_i$, 而如果有一个双线性函数f使得$f(e_i,e_j)=f_{ij}$, 则对于两个向量$\alpha=\alpha^ie_i$和 $\beta=\beta^je_j$, 有$f(\alpha,\beta)=f_{ij}\alpha^i\alpha^j$. 这样的表达式看上去会简洁许多, 类似这样的表达式在做张量运算这种涉及大量求和的运算时会为我们带来极大的便利, 但是如果不做张量运算时它会造成歧义, 因此大多数时候我们还是会把求和号明确写出来. 而在表达式很复杂时我们开始采用Einstein求和约定，通常使用时我们会事先说明.