

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 理论力学简明教程

（第二版）

陈世民



高等教育出版社
Higher Education Press

ISBN 978-7-04-023918-8
9 787040 239188 >
定价 19.80 元



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 理论力学简明教程

（第二版）

陈世民



高等教育出版社
Higher Education Press

## 内容提要

本书第一版是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是21世纪课程教材。本书在第一版基础上修订而成，是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

全书系统地介绍了经典力学的传统内容，吸收了该学科的最新进展，直观、简明地介绍了质点系非线性动力学中有序、分岔、混沌等基本现象和基本概念，并基于计算技术的发展引进了求解力学问题的数值计算方法。本书收录了许多经典例题，并在题后附有评注，用以阐述理论、总结思路，有助于读者更好地理解所学内容。本书根据新的专业需要对第一版进行了修订，增加了“拉格朗日不定乘子法”、“耗散函数”等内容，并作为举例叙述了“简单电路问题的动力学模型”，同时对某些意义容易混淆或叙述不够清楚的字句作了修改，并对全书内容作了适当精简。

本书脉络清晰、说理透彻，可作为普通高校物理类专业的教材，也可供相关专业选用和其他科学技术工作者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

理论力学简明教程/陈世民.—2版.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023918-8

Ⅰ.理… Ⅱ.陈… Ⅲ.理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第053034号

**策划编辑** 忻 蓓 **责任编辑** 张海雁 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 尹 莉
**版式设计** 马敬茹 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 毛斯璐

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总 机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| | | | http://www.landraco.com.cn |
| 经 销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 印 刷 | 北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂 | | |
| | | 版 次 | 2001年1月第1版 |
| | | | 2008年6月第2版 |
| 开 本 | 787×960 1/16 | 印 次 | 2008年6月第1次印刷 |
| 印 张 | 17 | 定 价 | 19.80元 |
| 字 数 | 310 000 | | |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

**物料号** 23918-00

# 第二版前言

本教程自2004年12月出版以来，已重印多次，受到广大读者的欢迎。此外还收到了不少读者寄来的信件，在此对他们的鼓励表示深切地感谢！同时，在这几年的使用过程中，也发现了本书的一些不足和错误，乘这次再版的机会，作了必要的补充和修正。

本书再版时，对某些意义容易混淆或叙述不够清楚的文句，作了修改；对某些公式的推导不够仔细的，进行了适当补充。有些读者反映，本教程中某些例题过大、过长，为此，我们对例题也进行了全面审核。对某些例题的内容太庞杂的，作了适当缩减，使演算交代得更清楚些。书中许多例题是采用一题多解方式的，这也是显得过长的一个原因。但是我们认为，作为例题采用一题多解方式有其一定的好处；同一题目从各种角度思考求解，可以比较不同方法的优缺点，可以拓宽读者思路，有利于读者系统地和全面地掌握课文内容。为此我们还是基本上保留了一题多解的方式。当然，教师在讲授时可以从中选择一种解法讲解，其他解法可作为作业留给学生研究。在某些例题中，我们也已发现了一些运算上的错误，对此作者深表歉疚！本书再版时对这些错误一一作了改正。

考虑到基本方法的重要性和某些专业的需要，在“第六章　分析力学”中增加了“拉格朗日不定乘子法”、“耗散函数”等段落，并作为举例叙述了“简单电路问题的动力学模拟”。这些内容对分析力学在非保守力学系和在非力学系统的应用方面，有给读者一定的启示作用。“拉格朗日不定乘子法”是一个基本的数学方法，在后行的课程中也要用到，而这个方法放在分析力学中讲述是最为恰当的。

本书面对的专业较广，不一定能完全适应某一特定专业的要求；面对的读者在力学方面的基础也有很大差异。为此，希望老师讲授本课程时结合专业需要和学生的基础，适当地选择讲授内容。如果专业要求的力学知识主要在应用方面，或学生的力学基础不足，则讲授的学时可着重安排在牛顿力学部分，分析力

学部分则可主要介绍基本概念和主要方法(如拉格朗日方程);对于力学基础较好的学生,则重点放在分析力学部分,牛顿力学部分的讲授可采用简要的、总结式的和举些重点例题的讲授方式;例如可适当选择讲解本书中的综合例题,特别是一题多解和具有"评注"的例题,以温习和总结学过的力学知识。

附录C中,有心力问题的计算程序源代码,改用Visual Basic语言书写。这是因为与Turbo C语言相比Basic语言属于高级计算语言,易于书写和阅读,更适宜于在Microsoft Windows系统上运行,况且多数院校将其作为计算机语言课程讲述。

限于作者水平,本书一定还存在不少缺点甚至错误,恳切地希望读者批评指正!

陈世民

2007年8月于南京大学

# 第一版前言

理论力学是一门应用广泛的基础课程，不仅物理专业的学生必读，对于工程技术专业的学生而言，理论力学也是不可缺少的知识。为了适应当前社会经济发展的需要，高等学校中创建了许多应用物理专业。由于各专业特点不同，对理论力学课程的要求也有较大的差别。本课程就是为适应这一新的情况而编写的。

当今科学技术突飞猛进，新知识大量涌现，物理学本身也在某些方面有了重大进展。为了适应新的形势，需要对课程内容作必要的调整，删繁就简；某些学科的新进展和新知识在教材中需要有一定的反映，教材内容才能相应地得以充实。这正是作者编写本教材时试图贯彻的精神。

介绍、推演和总结物理学的基本规律是理论物理课程的主要目标。在理论物理的教科书中，不可避免地会出现众多纷繁的数学公式，这给初学者带来困扰，理论力学也不例外。本课程强调基本理论，注重从最基本的理论出发引导读者掌握物体各种机械运动形态下的具体规律。本教材较多地强调了势能函数作为稳定性问题判据的重要性。质点运动的平衡、有心力场中圆轨道运动的稳定性和刚体运动的稳定性问题，都用势能函数的极值来判断。考虑到读者对力学已有一定的基础，在普通物理力学课程中对许多重要的力学概念已有较为系统的讲述，因此我们在本教材中，并不特别注重力学概念引入的系统性；对于部分难点则尽可能地采用直观形象的方法。

非线性力学系统的动力学，是近些年蓬勃发展起来的新学科，它对物理学以至其他许多学科的发展，都有巨大的推动作用。非线性动力学的研究赋予古老的经典力学新的活力，对此本教程也给予一定的反映。教程中指出，在非线性力学系统的运动中，普遍存在着有序、分岔和混沌现象。作为例子，介绍了“埃农－海力斯(Hénon－Heiles)势问题”的计算研究结果。我们希望读者能感受到经典力学中存在着的无序或混沌现象。力学系统中的混沌现象是决定论下无序运动的结果，它与统计物理中的概率不确定性有着本质的区别，力学运动的确定性中存在无序行为，而无序中却又包含着有序的特点。KAM 定理则是对此作出证实的最重要进展，本教程的最后一节将初步介绍这方面的内容。

当今科学技术的发展已进入了计算机时代，单纯依靠人的脑力和解析数学的时代似乎已经过去，理论物理自身的发展也是如此。我们相信以后在相关的

教科书中将逐步引入计算方法和技术，以及计算技术所带来的其他优秀成果。为此，我们尝试着利用计算机对有心力问题和埃农－海力斯势问题进行了计算，在附录B和附录C中分别介绍了常微分方程初值问题的数值计算方法，并附有有心力问题的计算程序。这部分内容可作为读者的参考材料，有兴趣的读者也可以在课外上机计算。随着计算机的逐步普及，我们相信学生已经有条件这样做了，在这里我们只是抛砖引玉而已。

不同的应用类物理专业，对理论力学内容的要求不同，安排的教学课时数就有很大差异，从36学时至72学时不等。本教程中，某些节或段的标题前标记有“*”号并用小号字排版的内容，可供灵活选用。有些较为具体的力学问题，例如质点力学中的振动问题、抛体和约束运动问题，质点组中的撞击问题以及拉莫尔进动等，则以例题的形式编写。这些都是为了适应各专业不同的讲课学时的需要，以方便教师更为灵活地选取讲授内容。没有讲授的部分则可作为读者的课外阅读材料。教程中还安排了较多的例题，求解步骤一般都较详尽，以便读者自阅。大多数例题后面附有“评注”，以帮助读者更好地理解本例题的意图、解题的各种可能途径以及其他应注意的地方。

每章的公式及插图都独立编号，例题和习题的插图在编号前分别加有字母L和T。

本书的初稿完成于1997年底。此后在内容安排和文字上进行了少量调整和修改。由于作者水平有限，书中疏漏和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

陈世民

1999年1月于南京大学

# 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话**：(010) 58581897/58581896/58581879

**反盗版举报传真**：(010) 82086060

**E - mail**：dd@hep.com.cn

**通信地址**：北京市西城区德外大街4号
高等教育出版社打击盗版办公室

**邮　　编**：100120

**购书请拨打电话**：(010)58581118

# 目　录


绪论 …… 1

第一章　牛顿力学的基本原理 …… 4

§1.1　质点运动的描写 …… 4

（一）参考系和坐标系 …… 4

（二）质点的运动轨道　速度和加速度 …… 5

*（三）长度恒定的矢量转动时的时间变化率 …… 14

§1.2　牛顿定律 …… 14

§1.3　质点运动的基本定理 …… 27

（一）质点动量定理 …… 27

（二）质点动量矩定理 …… 28

（三）质点动能定理 …… 30

§1.4　保守力　势能和机械能守恒定律 …… 31

（一）保守力　势能函数和机械能守恒定律 …… 31

（二）保守力场的特性 …… 33

*§1.5　质点运动的相空间和相轨迹 …… 38

（一）一维简谐振子的相轨迹 …… 38

（二）单摆运动的相轨迹 …… 39

习题 …… 42

第二章　有心运动和二体问题 …… 46

§2.1　有心力和有心运动 …… 46

（一）基本特性 …… 46

（二）运动方程 …… 47

（三）轨道微分方程 …… 48

§2.2　距离平方反比引力作用下的质点运动 …… 49

（一）轨道 …… 49

（二）轨道的特性 …… 50

§2.3　圆轨道的稳定性 …… 54

§2.4　距离平方反比的斥力作用——α 粒子的散射 …… 58

（一）散射轨道　散射角 …… 58

（二）散射截面　卢瑟福散射公式 …… 59

§2.5 二体问题 …… 61
*§2.6 任意幂有心力问题的计算 …… 63
（一）与距离成任意幂指数的引力 …… 63
（二）微小扰动对轨道的影响 …… 65
（三）相轨迹和庞加莱面 …… 67
*§2.7 埃农－海力斯势问题 …… 69
习题 …… 71
第三章 非惯性参考系 …… 74
§3.1 相对运动 …… 74
（一）绝对速度 相对速度和牵连速度 …… 74
（二）加速度 科里奥利加速度 …… 78
§3.2 平动的非惯性系 …… 79
§3.3 旋转的非惯性系 …… 81
§3.4 地球自转的效应 …… 84
（一）地面坐标系中的质点运动方程 …… 85
（二）自由落体的偏东 …… 87
（三）傅科摆 …… 88
（四）气旋 热带风暴和信风 …… 89
习题 …… 93
第四章 质点组动力学 …… 96
§4.1 质点组 …… 96
（一）外力和内力 …… 96
（二）质心 …… 97
§4.2 质点组的动量、角动量和动能 …… 99
（一）动量 …… 99
（二）角动量 …… 99
（三）动能 …… 100
§4.3 质点组运动的基本定理 …… 102
（一）动量定理和质心定理 …… 102
（二）角动量定理 …… 103
（三）动能定理 …… 105
*§4.4 开放的质点组——变质量物体的运动问题 …… 109
习题 …… 110
第五章 刚体力学 …… 113
§5.1 刚体的运动 …… 113
（一）刚体的运动及其自由度 …… 113

（二）欧拉角 …… 115
*（三）角位移和角速度 …… 116
（四）角速度的欧拉角表示 …… 118
（五）刚体内任意点的速度和加速度 …… 120
（六）瞬时转动中心 …… 122
§5.2 刚体的动量、角动量和动能 …… 126
（一）刚体的角动量和惯量张量 …… 126
（二）刚体的动能 …… 133
§5.3 刚体的动力学方程 …… 136
§5.4 刚体的定轴转动 …… 139
§5.5 刚体的平面平行运动 …… 144
§5.6 刚体的定点运动 …… 149
（一）基本方程 …… 149
（二）用完全跟随刚体转动的坐标系表示的角动量定理——欧拉方程
地球的自转 …… 151
（三）不随刚体自旋的活动坐标系 对称重陀螺的定点运动 …… 154
（四）高速自旋陀螺的近似理论 …… 158
习题 …… 163
第六章 分析力学 …… 168
§6.1 约束 自由度和广义坐标 …… 168
§6.2 虚功原理 …… 172
（一）虚位移和实位移 …… 172
（二）理想约束和虚功原理 …… 173
（三）虚功原理的广义坐标表述和广义力 …… 175
*（四）虚功原理的不定乘子法 …… 177
§6.3 拉格朗日方程 …… 182
（一）达朗贝尔原理 …… 182
（二）拉格朗日方程 …… 183
（三）循环坐标和广义动量积分 …… 186
*（四）耗散系统与耗散函数 …… 187
§6.4 拉格朗日方程的应用举例 …… 189
*§6.5 微小振动 …… 197
（一）耦合摆的微振动 …… 197
（二）简正坐标 …… 201
（三）一般力学体系的微振动 …… 202
§6.6 哈密顿函数和正则方程 …… 204
（一）哈密顿函数 …… 205

（二）哈密顿正则方程 …… 208
（三）泊松括号 …… 213
§6.7 哈密顿原理和正则变换 …… 214
（一）泛函和变分 …… 215
（二）哈密顿原理 …… 216
*（三）正则变换 …… 219
*§6.8 不变环面和 KAM 定理 …… 222
（一）作用变量 角变量和不变环面 …… 222
（二）KAM 定理 …… 224
（三）力学系运动的映射特性 …… 227
习题 …… 228
**附录 A 矢量** …… 234
**附录 B 常微分方程的数值解法** …… 236
（一）龙格－库塔(Runge－Kutta)方法 …… 237
（二）亚当斯(Adams)多步方法 …… 240
（三）米尔恩(Milne)多步方法 …… 241
**附录 C 有心力问题的计算和画图程序** …… 242
（一）力的类型 …… 242
（二）计算方法及相关的子过程 …… 242
（三）主要的变量 …… 244
（四）源程序 …… 244
**主要参考书目** …… 252
**中英文对照索引** …… 253

# 绪　论

理论力学是研究物体机械运动基本规律的科学. 所谓机械运动,是指物体在空间的相对位置随时间变化的一种运动形态①,它是一种最简单、最基本的物质运动形态,各种复杂的、高级的运动形态都包含有这种基本的运动形态.

力学是最早发展起来的学科之一. 早在古代,人们在日常生活和生产中就已经积累了许多关于物体机械运动的知识. 17 世纪末,牛顿(I. Newton)在前人工作的基础上总结出了物体运动的三个基本定律. 这三个著名的牛顿定律,奠定了力学的理论基础. 微积分等数学工具的发展和广泛应用,有力地推动了力学学科的进展. 18 世纪后,拉格朗日(J. L. Lagrange)、哈密顿(W. I, Hamilton)等人又发展了"分析力学". 分析力学使力学规律具有更严密的数学基础,而且力学问题可以完全用严格的解析数学方法来处理;在风格上分析力学则与具有较强矢量特征的牛顿力学很不相同. 分析力学对物理学的发展起着重要的推动作用,在理论物理中占有重要的地位. 由于分析力学理论形式简洁且富有公理特性,很容易将它推广应用到其他学科中去.

理论力学又称"古典力学"或"经典力学",以区别于 20 世纪初发展起来的更深层次上的动力学理论和时空理论. 经典力学中所描述的物体运动,是指物体的尺度与原子、分子相比大得多的宏观物体的运动,与原子尺度可以相比的微观物体的运动则遵循量子力学的规律. 虽然在量子力学中有许多物理量依然沿用经典力学中的概念,然而经典力学和量子力学则是分别适宜于描述不同尺度范围内的物体运动的规律. 此外,经典力学也仅适用于物体的运动速度远小于光速的情形. 速度与光速可以比拟的物体的运动则必须考虑爱因斯坦(A. Einstein)的相对论效应,需由建立在新的时空观念上的相对论力学来处理. 尽管如此,经典力学依然是不可取代的. 对于尺度远大于原子、速度远小于光速的物体的运动,

① 本课程不讨论可形变的连续介质的运动. 这里所指的物体是不可形变的刚性物体;连续介质的运动规律是连续介质力学——流体力学、弹性力学等课程讨论的内容.

运用新理论得到的结果与经典力学的结果完全一致. 这便证实了经典力学在其适用的物体尺度和运动速度范围内的正确性. 在数学处理上经典力学远比新理论简单,从而才有可能对许多宏观低速运动物体的力学问题进行求解.

近两个世纪前经典力学已发展成一门理论严谨、体系完整的学科,用它来处理大至天体、小到尘埃的各种物体运动,都能得出与实际完美符合的结果. 然而,刚过去的100年中,物理学发生了三次伟大革命,恰恰都涉及了经典力学的基础. 如前所述,20世纪初建立的相对论,否定了牛顿学说的绝对时空观念;20世纪20年代发展的量子力学则破除了经典力学中物体位置和动量的同时可精确测量原则;到了20世纪中叶,随着非线性系统研究的开展,力学系统混沌行为的揭示逐渐动摇了经典力学的决定论思维方式. 这启示人们,即使像经典力学这样成熟的物理学科,其背后也潜藏着活力.

长期以来,物理学中存在着两种典型的思维方法,一是以经典力学为代表的"确定论"思维方式;另一种则是"概率论"思维方式,这是以统计物理学为代表的,量子力学也可以包括在内. 经典力学之所以成为确定论思维方式的代表,出于多种原因,特别是数学和计算工具的限制,长期以来人们主要用它来处理一些较为简单的可积分的力学问题,在力学教科书中甚至只讲述一些应用现有数学就可求解的问题. 对于这类可积分问题,给定了外部条件后力学系统的运动完全由初始条件确定,即下一时刻系统的运动状态完全由这一时刻的运动状态确定,而且是可逆的. 这就是说,所描述的物体的运动主要是周期的、有序的机械运动. 这便给人们造成了这样的概念:经典力学是物理学中"确定论"思维方式的典范. 然而早在20世纪20年代,著名数学家庞加莱(H. Poincaré)[①]后来是爱因斯坦[②],就曾指出经典力学系统也存在着"无序"或"混沌"的领域,当时却没有引起物理学家们的注意. 随着电子计算机的出现,计算工具有了革命性的改革. 从20世纪40年代开始,物理学家们逐渐对非线性力学系统的研究重视起来. 特别是在20世纪60年代,气象物理学家洛伦茨(E. Lorenz)采用计算方法计算了他设计的大气模型,发现了令人惊奇的现象:计算结果对于初始条件十分敏感,甚至认为天气的长期预报是不可能的. 此后的许多学者对非线性力学系统进行了研究,充分展示了某些力学系统的行为从有序向混沌转变的特性,以及力学系统运动的混沌特性的重要意义. 这些研究成果对物理学的进展起着巨大的推动作用,

① H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste, Gauthier - villas, Paries (1892); Dover Press (1957); in English N. A. S. A. Translation TT F - 450/452, U. S. Fed. Clearinghouse, Spring - field.

② A. Einstein, Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein, Verh. Deut. Phys. Ges. 19, 82—92 (1917).

也给古老的经典力学增添了新的活力. 现在对非线性系统的研究已超越了力学学科,扩展到物理学的各个领域,甚至已超越了物理学,而成为许多理工学科以至一些人文学科的共同课题. 对非线性系统的研究正逐步形成一门崭新的学科.

理论力学作为理论物理学的第一门课程,它的任务不仅是介绍物体的机械运动规律,还要引导读者如何应用数学去描写和分析物理问题. 作为科学,就必须使用最严谨的方式去表达,去描写,去推演,去总结自然规律. 在众多的表达方式中数学是最为严谨的工具. 我国古代的科学技术居于世界前列,但是大多停留在语言或文字的表达方式(歌诀)上,以致未能很好地总结并发展为严格的理论.

理论力学课程中最常用的数学工具是坐标系、矢量代数、微积分和常微分方程. 读者通过本课程的学习应该能熟练地应用这些数学工具去描述和求解物体的机械运动.

# 第一章

# 牛顿力学的基本原理

人们对机械运动的理论探讨，首先从对质点运动的研究开始. 300 多年前，牛顿便在前人工作的基础上总结出质点运动的三条定律，从而奠定了牛顿力学的基础. 本章首先讨论如何描写质点的运动，然后以牛顿定律为基础讨论质点动力学问题，并由此引入基本的动力学量.

## §1.1 质点运动的描写

物体具有一定的质量、大小和形状. 它的运动一般来说比较复杂，研究起来也较为困难. 为研究方便，我们需要从比较简单的情形入手. 一定大小的物体是由无数具有质量的微小客体组成的. 从微观角度看，虽然这些微小客体仍然具有一定的体积且包含有大量的微观粒子，但在宏观上可以不考虑它的大小和形状，而将其抽象为具有质量的几何点——**质点**. 在有些实际问题中，物体的运动范围比物体本身的尺度要大得多，而且它的形状和大小与问题无关或关系甚小，那么这样的物体也可以作为质点来处理. 例如，地球虽然是一个庞大的物体，但在它围绕太阳做轨道运动时便可以把它当作质点看待. 由于质点没有大小和形状，描述它的运动比较简单，因此我们首先讨论质点的运动.

### （一）参考系和坐标系

要研究物体在空间的运动，首先就必须确定物体在空间的位置. 在茫茫宇宙中，物体的位置只能相对于某一**参考物**来确定. 物体的机械运动也都是相对于参考物的. 参考物又称**参考系**，由特定的一个或多个物体构成. 例如，通常以太阳为参考物来确定地球和其他行星的位置，研究地面上物体的运动则常以地面为参考物.

选定了参考物后，还要在它上面建立适当的**坐标系**，才能具体地表达物体相对于参考物的位置. 对于三维空间，常用的有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系；二维情形时，还常用到平面极坐标系；有时可能更适宜用自然坐标系来描写质点

的运动，自然坐标系也称为“内禀坐标系”.

确定一质点的位置，不仅需要知道它相对于参考物的距离，还要知道它相对于参考物的方位. 很显然，在坐标系中用矢量来表示质点的位置是最为适宜的. 如图 1.1 所示，质点 $P$ 的位置可由坐标原点 $O$ 至 $P$ 点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示. 这个矢量称为质点 $P$ 的位置矢量，简称**位矢**或**径矢**. 在各种坐标系中位矢表达式分别为

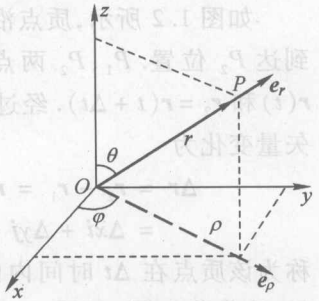


图 1.1

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \text{直角坐标系}$$

$$= \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{k} \qquad \text{柱坐标系}$$

$$= r\boldsymbol{e}_r \qquad \text{球坐标系}$$

位矢的长度为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r$$

$r$ 是质点 $P$ 离开 $O$ 点的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 表示径矢 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量（单位矢量是长度为 1 的矢量）；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 习惯上分别用来表示 $x$、$y$ 和 $z$ 坐标轴方向上的单位矢量.

采用坐标系不仅可以把矢量表达得很明确，而且便于进行运算. 但必须指出，坐标系与参考系在概念上是有一定区别的. 前者主要用作度量空间的数学工具，后者则是物理上实在的物体，物体的运动是以参考物为标准的. 虽然在许多情况下采用完全固定在参考物上的坐标系，这时坐标系本身就成为参考物的一部分，可视为参考物的一种数学抽象. 但是也常选取不固定在参考物上的活动坐标系，同样可用它来表达物体相对于该参考物的位置和运动. 事实上，极坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系都不是固定在参考物上的.

**（二）质点的运动轨道　速度和加速度**

质点运动时其位置矢量随时间变化，位置矢量是时间 $t$ 的函数，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，它直接描绘出质点的运动**轨道**. 在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

或写成标量方程形式：

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

这是以时间 $t$ 为参数的轨道方程，消去参数 $t$ 便得到质点运动的轨道曲线方程. 例如，对上面三个以时间 $t$ 为参量的参量方程，分别消去 $t$ 便得到方程组：

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

这是两个空间曲面方程，它们的交线即是质点的轨道曲线方程. 有时可以不用时间 $t$ 作参量，而用其他与时间相关的量作参量. 例如.

$$\boldsymbol{r}(\theta) = x(\theta)\boldsymbol{i} + y(\theta)\boldsymbol{j} + z(\theta)\boldsymbol{k}$$

其中 $\theta$ 是时间 $t$ 的函数，即 $\theta = \theta(t)$；$\boldsymbol{r}(\theta)$ 是时间 $t$ 的隐函数.

如图 1.2 所示，质点沿轨道运动，设在 $t$ 时刻质点位于 $P_1$ 点，在 $t + \Delta t$ 时刻到达 $P_2$ 位置. $P_1$、$P_2$ 两点的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$. 经过时间间隔 $\Delta t$，质点的位置矢量变化为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \\ &= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k} \qquad (1.1)\end{aligned}$$

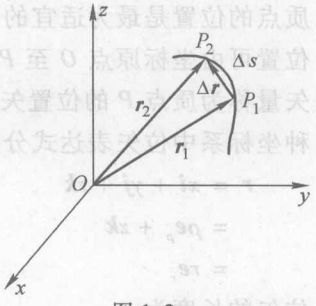


图 1.2

称为该质点在 $\Delta t$ 时间内的**位移**. 显然位移也是矢量，称**位移矢量**. 由图 1.2 可知，位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小即是 $P_1$、$P_2$ 两点间轨道弦的长度. 而质点在 $P_1$ 至 $P_2$ 两点间沿轨道运动过的轨道弧长 $\Delta s$ 则称质点在 $\Delta t$ 时间内沿轨道运动的路程. 路程是标量，与质点的位移有着明显的区别. 设一质点沿一段弧长为 $s$ 的圆弧运动，自一端点出发运动到另一端点后，沿原圆弧折回到出发端点位置，运动质点的位移为 0，但运动的路程则是 $2s$.

在有限的 $\Delta t$ 时间间隔内，质点的位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间间隔 $\Delta t$ 的比值，称为在 $\Delta t$ 时间内质点的**平均速度**. 当 $\Delta t \to 0$ 时，这一比值的极限给出 $t$ 时刻质点的**瞬时速度**，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1.2)$$

平均速度只给出了有限的 $\Delta t$ 时间内质点的平均运动情况，瞬时速度才描述了 $t$ 时刻质点的真实运动. 今后除非特别说明，所指的速度都是指瞬时速度. 速度是位置矢量随时间的变化率，故速度是矢量. 由图 1.2 容易看出，当 $\Delta t \to 0$ 时 $P_1$，$P_2$ 两点无限靠近，质点位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向便与质点所在位置的轨道切线方向一致，而且两点间轨道的弦长和弧长趋于相等，即 $|\Delta\boldsymbol{r}| \to \Delta s$. 这表明任意时刻质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 总是沿着质点所在位置轨道的切线方向；速度的大小等于路程随时间的变化率，称为**速率**，用 $v$ 表示，即

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad (1.3)$$

质点做变速运动时，速度也是时间 $t$ 的函数，即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$. 若质点在 $t \sim t + \Delta t$ 时间内速度的改变为 $\Delta\boldsymbol{v}$，则矢量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与时间间隔 $\Delta t$ 的比值在 $\Delta t \to 0$ 时的极限，叫做质点在 $t$ 时刻的**瞬时加速度**，简称**加速度**，以 $\boldsymbol{a}$ 表示：

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dot{\boldsymbol{v}} \qquad (1.4)$$

加速度是速度的时间变化率，也是矢量.

位置矢量、速度和加速度是描写质点运动的最基本的物理量;公式(1.1)、(1.2)和(1.4)则是质点运动学理论的基础.今后我们会看到,质点在任何情形下运动时,不管用什么方式描述,质点的位矢、速度和加速度的表示式都是从这三个基本公式出发的,各种具体的表示式只是这三个公式在不同的描述方式下的推演.

为便于描述,常需采用各种不同的坐标系来描写质点的运动.在不同的坐标系中,位矢、速度和加速度有着不同的表示形式,下面我们就几种常用的坐标系分别写出它们的坐标表示式

1. 直角坐标系

在直角坐标系中,质点位置矢量的表达式为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

这里位矢 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴方向的分量就是质点位置的坐标:$x$、$y$、$z$.一般来说,质点运动时它们都是时间 $t$ 的函数.对于固定的直角坐标系,坐标轴的方向是固定的,单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不是时间 $t$ 的函数.由公式(1.2)及(1.4)可分别求得质点的速度和加速度.

质点速度的直角坐标表示式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

各速度分量为

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

速度大小(速率)为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

质点加速度直角坐标表示式为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

各加速度分量为

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$$

加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

2. 平面极坐标系

在平面极坐标系中,质点位置矢量的表达式为

$$\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_r \tag{1.8}$$

这里不仅位矢的大小随时间变化,极坐标轴的方向也随质点运动而变化,它也是

时间 $t$ 的函数，即 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_r(t)$，$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\theta(t)$. 由(1.2)式，质点速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

式中右方第一项沿径矢方向，只要知道径矢长度 $r$ 随时间变化的函数关系，$\dot{r}$ 就不难求出. 第二项则包含单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 对时间 $t$ 的导数项. 虽然 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向随时间改变，但总是保持单位长度不变. 如图 1.3(a)所示，当质点在 $t\sim t+\Delta t$ 时间内沿质点轨道从 $P$ 点运动到 $P'$ 点时，位置矢量转过角度 $\Delta\theta$，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 也分别转过同样角度，改变为 $\boldsymbol{e}'_r$、$\boldsymbol{e}'_\theta$. 为了便于比较这两组单位矢量的差异，在图 1.3(b)中把 $\boldsymbol{e}'_r$、$\boldsymbol{e}'_\theta$ 自 $P'$ 点移动到 $P$ 点，并作了放大. 由于 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}'_r$ 的长度相等，都是 1 个单位，它们和 $\Delta\boldsymbol{e}_r$ 构成等腰三角形. 当 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\theta\to 0$，$\Delta\boldsymbol{e}_r$ 将与 $\boldsymbol{e}_r$ 垂直，与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向一致. $\Delta\boldsymbol{e}_r$ 的长度则趋于 $\Delta\theta$ 所张开的单位圆的弧长. 因此，

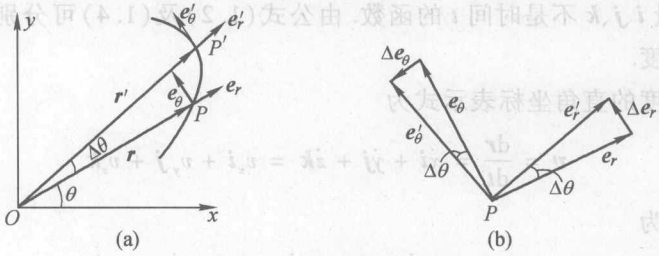



图 1.3

$$\Delta\boldsymbol{e}_r\xrightarrow[\Delta\theta\to 0]{}1\cdot\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta=\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

在极限情形下，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta}{\Delta t}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.10a}$$

同样可以求出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta\boldsymbol{e}_r}{\Delta t}=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \tag{1.10b}$$

这里出现“$-$”号是因为当 $\Delta\theta\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{e}_\theta$ 将趋向于与 $\boldsymbol{e}_r$ 相反的方向.

关系式(1.10a)和(1.10b)在今后的运算中经常用到，读者必须熟练掌握. 实际上它们可以用一个统一的公式表示. 为此，引进**角速度矢量** $\boldsymbol{\omega}$[①] 来描述极坐标轴绕坐标原点的转动；$\dot{\theta}$ 为角速度矢量的大小，角速度的方向则与极坐标轴转动的正方向成右手螺旋关系. 由此设角速度矢量方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_z$(它显然与

① 关于角速度是矢量的证明，将在第五章再作详细讨论.

极坐标平面垂直),极坐标轴转动的角速度矢量可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

依照两矢量的矢乘规则,(1.10a)式和(1.10b)式可分别写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_r \tag{1.11a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_\theta \tag{1.11b}$$

今后我们还将看到,这样的表示式是具有普遍意义的:对任意保持长度不变的矢量(这里的 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 都是长度恒定为 1 的矢量)都具有类似(1.11)式的关系①.

现在我们回到(1.9)式,导出极坐标系下质点的速度表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ &= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned} \tag{1.12a}$$

其中

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{1.12b}$$

分别是质点速度的径向分量和横向分量

平面极坐标下的加速度表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

用(1.10)所示的关系式代入上式,则有

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.13}$$

其中

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

分别为质点加速度的径向分量和横向分量.

3. 柱坐标系

结合质点速度和加速度在直角坐标系、极坐标系中的表达式,极易推广得到柱坐标系中质点的速度和加速度的表达式,只需分别在式(1.12)和式(1.13)中相应地加上 $z$ 方向的分量即可,即

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.15}$$

---

① 见本节末的证明.

4. 自然坐标系

质点的运动情况还可以用自然坐标系来描写，尤其是运动轨道已知时更为适宜. 对于做平面运动的质点，它的自然坐标用 $s$ 和 $\varphi$ 两个参量来表示. 这里 $s$ 是质点自轨道上某一固定参考点 $A$ 处运动后所经过的路程，$\varphi$ 则是质点所在位置的轨道切线与某一固定方向（常用的是 $x$ 轴方向）之间的夹角，如图 1.4 所示. 平面自然坐标系有两个独立坐标轴方向，即质点所在位置的轨道切线方向和轨道的主法线方向. 切线方向以单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 表示，并以质点的运动方向为正方向；主法线位于轨道曲线的密切面内并指向凹侧，以单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 表示. 对于三维运动的质点，还需引入轨道的副法线方向. 副法线方向以单位矢量 $\boldsymbol{e}_b$ 表示，它垂直于由 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 构成的轨道的密切面，并与二者成右手螺旋关系：

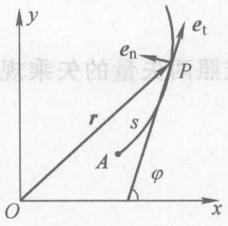


图 1.4

$$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n \tag{1.16}$$

已知质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 总是沿切线方向，因此自然坐标系中质点速度的表达式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t = v\boldsymbol{e}_t \tag{1.17}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

如同极坐标系中单位矢量随时间的变化率那样，同样可以求 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 随时间的变化率. 在二维运动情形下轨道副法线 $\boldsymbol{e}_b$ 的方向不变，恒与轨道平面垂直. 由图 1.4 可以看到，质点运动时 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 的转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_b$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_t = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_b \times \boldsymbol{e}_t = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_n \tag{1.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_n = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_t \tag{1.19}$$

因此质点的加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n + a_b\boldsymbol{e}_b \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n\end{aligned} \tag{1.20}$$

其中

$$\rho = \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} \right| \tag{1.21}$$

是质点所在位置处轨道曲线的曲率半径[①]，它必须是正量，即 $\rho > 0$. 由(1.20)式可知

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_{\mathrm{b}} = 0 \tag{1.22}$$

分别是质点加速度的切向分量、法向分量和副法线方向分量. 值得注意，加速度的副法线方向分量总是等于零. 因为质点的速度 $v$ 总是沿轨道曲线的切线方向，因而加速度 $a$ 必定在密切面内. 速度和加速度在副法线方向都不可能有分量，无论质点做二维运动或三维运动都是如此.

**[例 1.1]** 一质点沿抛物线 $y^2 = 2px$ 运动，速率为常量 $c$. 运动过程中质点的纵坐标 $y$ 不断变小. 试分别在直角坐标系、极坐标系和自然坐标系中，求出质点的速度和加速度.

**[解]** 这是质点平面运动问题.

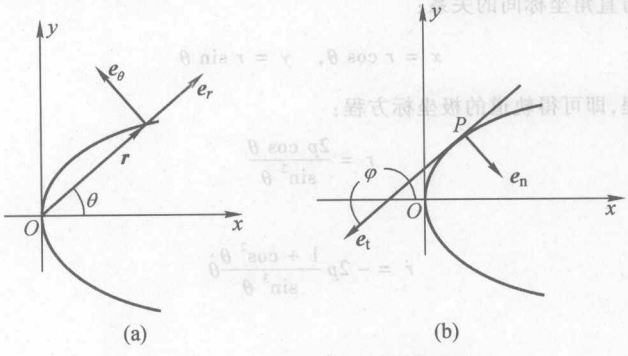



图 L1.1

(ⅰ) 直角坐标系

轨道方程的两边对时间 $t$ 求导数，得 $2y\dot{y} = 2p\dot{x}$，即

$$\dot{y} = \frac{p}{y}\dot{x} \tag{1}$$

或

$$\dot{x} = \frac{1}{p}y\dot{y} \tag{2}$$

由题意，速率是常量 $c$，则有

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c$$

将(2)式代入得

① 采用直角坐标系时，平面曲线的曲率半径可表示为：$\rho = \dfrac{[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2]^{3/2}}{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2} = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$.

$$\dot{y} = \pm \frac{cp}{\sqrt{p^2 + y^2}} \tag{3}$$

按题意，质点的纵坐标不断减小，故 $\dot{y}$ 应取负值. 以此代入(2)式，则

$$\dot{x} = -\frac{cy}{\sqrt{p^2 + y^2}} \tag{4}$$

由此得直角坐标系中质点的速度：

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = -\frac{c}{\sqrt{p^2 + y^2}}(y\boldsymbol{i} + p\boldsymbol{j}) \tag{5}$$

将(3)、(4)两式分别对时间求导，有

$$\ddot{x} = \frac{c^2 p^3}{(p^2 + y^2)^2}, \qquad \ddot{y} = -\frac{c^2 p^2 y}{(p^2 + y^2)^2} \tag{6}$$

故得直角坐标系下质点的加速度

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} = \frac{c^2 p^2}{(p^2 + y^2)^2}(p\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}) \tag{7}$$

(ⅱ) 极坐标系

由极坐标与直角坐标间的关系：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{8}$$

代入抛物线方程，即可得轨道的极坐标方程：

$$r = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{9}$$

由此得

$$\dot{r} = -2p\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^3\theta}\dot{\theta} \tag{10}$$

按题意，

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \\ &= \sqrt{\left(-2p\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^3\theta}\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2\dot{\theta}^2} \\ &= \frac{2p}{\sin^3\theta}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}\,\dot{\theta} \\ &= c \end{aligned}$$

故得

$$\dot{\theta} = \frac{c\sin^3\theta}{2p\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}} \tag{11}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3c^2}{2p^2}\frac{\sin^5\theta\cos\theta(1 + \cos^2\theta)}{(1 + 3\cos^2\theta)^2} \tag{12}$$

因此极坐标系下的质点速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ &= -\frac{c(1 + \cos^2\theta)}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}\boldsymbol{e}_r + \frac{c\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

$$= -\frac{c}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}[(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta] \tag{13}$$

这里已应用了关系式(10)和(11),以及

$$\dot{r} = -\frac{c(1+\cos^2\theta)}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}} \tag{14}$$

此式对时间 $t$ 求导数,并注意关系式(10)、(11),有

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{2p}\frac{\sin^4\theta\cos\theta(3\cos^2\theta-1)}{(1+3\cos^2\theta)^2} \tag{15}$$

由式(9)、(11)、(12)、(14)和(15),得极坐标系下质点的加速度:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

$$= -\frac{c^2\sin^3\theta}{p(1+3\cos^2\theta)^2}[\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_r + (1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_\theta] \tag{16}$$

(ⅲ) 自然坐标系

按题意,可以直接写出质点速度的表达式:

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{e}_t \tag{17}$$

为求加速度,需要先求质点所在位置轨道曲线的曲率半径.这里以 $\varphi$ 表示轨道切线与 $x$ 轴之间的夹角.由(1.21)式,

$$\rho = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \left|\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \left|\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right|$$

$$= \left|\sqrt{1+\tan^2\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \left|\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right| \tag{18}$$

由 $\varphi$ 角定义及轨道方程(2)式,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\varphi = \frac{p}{y} \quad 或 \quad y = p\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

上式两边对 $x$ 求导数,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\varphi = -\frac{p}{\sin^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin^3\varphi}{p\cos\varphi} \tag{19}$$

由此得曲率半径的倒数为

$$\frac{1}{\rho} = \left|\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right| = \left|-\frac{\sin^3\varphi}{p}\right|$$

将上列各式代入(1.20)式得自然坐标系下质点的加速度:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n = \left|-\frac{c^2\sin^3\varphi}{p}\right|\boldsymbol{e}_n \tag{20}$$

请注意,当质点位于 $y>0$ 的区域,如图 L1.1(b)所示的位置时,$\varphi$ 角位于第二象限,而不是第一象限!当质点位于 $y<0$ 区域时 $\varphi$ 角位于第四象限;质点沿轨道运动时,$\sin\varphi$ 为负值.

[评注]

① 解题时,首先要弄清题意.选定坐标系,并按题意画出草图.

② 从本题可以看出,同一个问题能采用多种坐标系来求解,这再次说明坐标系是建立在

参考系上的，是用来描写质点位置的数学工具. 当然，坐标系选取得好坏，直接关系到解题的难易. 本题选用直角坐标系和自然坐标系，就比极坐标系要好一些.

③ 熟练应用质点在各种坐标系下的运动学量（如位置矢量、速度、加速度等）的表示式是解题的关键. 问题中的物理量，一时不能以所用坐标系的坐标变量表达时，可以用其他坐标系的坐标参量作为过渡，通过变量间的变换关系，最终将关系式用所采用的坐标系的变量写出. 例如，本题给出的轨道方程是用直角坐标的变量 $x$、$y$ 来表示的，当使用极坐标或自然坐标时，就得分别通过坐标变量的变换关系(8)、(18)、(19)式，变换成用变量 $r$、$\theta$ 或 $s$、$\varphi$ 来表示.

④ 速度、加速度等物理量都是矢量，必须用矢量式表示. 例如，(5)、(7)式；(13)、(16)式；(17)、(20)式等. 对此读者应养成习惯.

### *（三）长度恒定的矢量转动时的时间变化率

前面讨论的质点运动是相对于固定参考系的，但并不意味着使用的坐标系也必须固定不动. 事实上，平面极坐标系（包括柱坐标系）和自然坐标系都是随质点运动而转动的，这些坐标系中坐标轴的单位矢量，也随质点运动而转动. 前面已经引入了一个普遍适用的方法求转动单位矢量随时间的变化率，如关系式(1.11)所表示的那样. 现在来对这个方法作出证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 为长度恒定的矢量，即 $|\boldsymbol{A}| = A =$ 常数，以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动. 显然矢量 $\boldsymbol{A}$ 转动时，它的矢端将画出围绕角速度矢量（转动轴）的圆周，如图 1.5 所示. 经过 $\Delta t$ 时间，矢量 $\boldsymbol{A}$ 改变为矢量 $\boldsymbol{A}'$，矢端由 $A$ 点移动到 $A'$ 点. 矢量的变化为

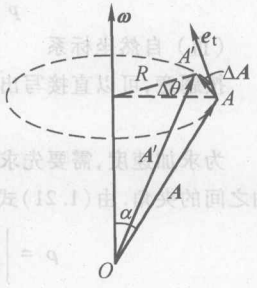


图 1.5

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}$$

它的长度则是圆弧 $\overset{\frown}{AA'}$ 的弦长，$|\Delta \boldsymbol{A}| = AA'$. 当 $\Delta t \to 0$ 时 $A$、$A'$ 之间的弦长趋于弧长，$AA' \to \overset{\frown}{AA'} = (A \sin \alpha)\Delta\theta$，即

$$|\Delta \boldsymbol{A}| = (A \sin \alpha)\Delta\theta$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的时间变化率的大小为

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{A}|}{\Delta t} = A \sin \alpha \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{A}|}{\Delta t} = A \sin \alpha \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = A\omega \sin \alpha$$

其中

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$$

是矢量 $\boldsymbol{A}$ 转动角速度的大小.

现在再看 $\Delta \boldsymbol{A}$ 的方向. 当 $\Delta t \to 0$ 时，由图可知 $\Delta \boldsymbol{A}$ 的方向趋于 $A$ 点处圆周的切线方向，即与 $\boldsymbol{A}$ 垂直又与 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直. $\Delta \boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\omega}$ 的方向之间成右手螺旋关系. 由此按照矢量的矢乘规则，矢量 $\boldsymbol{A}$ 随时间的变化率可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right| \boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = A\omega \sin \alpha \boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{1.23}$$

这便是需要求证的结果.

# §1.2 牛顿定律

上节主要讲述了如何去描写质点的运动，但并没有对质点为什么会产生这样的运动作任何探究，即仅仅讨论了质点的运动学问题. 虽然运动学问题是力学中的一个重要方面，也有着许多重要的实际应用，但是从物理学的观点来看，更为重要的是深入了解引起或改变物体运动的原因，探究物体的运动本质并总结规律，即解决力学体系的动力学问题. 质点的运动学则为研究力学系统的动力学问题做好了必要的铺垫和准备.

物体不是孤立存在的，周围的物体将与它发生相互作用. 物体间的相互作用在力学的范畴内是用一个叫做力的物理量来表示的. 实践表明，力不仅具有大小和方向，力的合成还满足平行四边形定则；力是一个矢量. 至今，人们已发现有四种不同性质和强度的力，即强作用、电磁作用、弱作用和引力作用. 它们相互间的近似相对强度，如下：

| 强作用 | 电磁作用 | 弱作用 | 引力作用 |
| --- | --- | --- | --- |
| 30 | 1 | $6\times10^{-3}$ | $8.5\times10^{-37}$ |

强作用和弱作用都是短程力，相互作用距离极小，只有在原子核的尺度范围($10^{-15}$m)内才显示出来. 因此，对于宏观力学问题完全可以不考虑这两种力. 而电磁力和引力都是长程力，在宏观物理问题中起着直接而明显的作用，在力学问题中正是这两种力影响着物体的运动. 我们平常所接触的力，例如弹性力、摩擦力等，从本质上讲，都是电磁力的表现. 物体间总是存在引力作用，但在通常大小的物体之间，引力的强度极小，可略去不计；一般只考虑周围庞大物体(地球、太阳或其他天体)的引力作用，物体受到的重力便是地球对物体作用的引力.

牛顿力学是以著名的牛顿三定律为基础的. 当物体可以看成质点时，牛顿定律表述如下：

牛顿第一定律——任何物体在没有受到其他物体的作用时，都将保持其静止或匀速直线运动状态不变.

牛顿第二定律——物体受到外力作用时，物体的加速度与受到的外力成正比，与物体的质量成反比，并沿着外力的方向.

牛顿第三定律——物体间的作用力总是相互施加的；一物体受到另一物体的作用力，必存在此物体对另一物体的反作用力，它们大小相等、方向相反且在同一直线上.

这三条定律，是牛顿在众多的实验结果和前人工作的基础上总结出来的规律，它们构成牛顿力学的基本原理. 第一定律又称**惯性定律**，揭示了物体具有保

持其运动状态的特性——**惯性**，指出力是改变物体运动状态的原因. 第二定律给出了力和物体运动之间的定量关系，也给出了物体**惯性质量**的定义，其数学表示式为

$$m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.24}$$

虽然这里给出的是质点运动的基本规律，但很容易将其推广用来确定含有大量微小客体、具有一定大小的宏观物体的运动. 因为一般的宏观物体都可以看成是由相互作用着的质点组成的. 我们将分别在第四章、第五章中作这样的推广，以确定质点组和刚体的运动. 牛顿第三定律则给出了物体间相互作用的特点.

虽然牛顿定律是以大量的现实经验和实验数据为依据的，但它却已经排除了许多表面的和非本质的现象，是经过抽象和推理而得出的理性认识，从而更能反映物体运动的本质.

前面说过，物体的运动是相对于设定的参考系的. 在所选用的参考系中，如果物体的运动服从牛顿定律，那么这个参考系便是**惯性参考系**；牛顿定律不能成立的参考系称为**非惯性参考系**. 只有在惯性参考系中牛顿定律才能成立. 一切相对于惯性参考系做匀速直线运动的参考系也都是惯性参考系. 这是牛顿绝对时空观的直接结果. 在牛顿时空观中，时间和空间是两个互不相干的概念；在不同的参考系中，具有相同的时间和相同的空间. 若牛顿定律在某一参考系中成立，那么在相对于它做匀速直线运动的另一参考系中也成立. 而爱因斯坦相对论则认为时间和空间是相互关联的，并与参考系的运动有关，在两个做相对运动的惯性参考系中，牛顿定律不可能同时成立.

牛顿第二定律的数学表示式(1.24)是一个矢量方程，实际上包含有三个分量(标量)方程，这些方程确定了质点运动的规律. 在不同的坐标系中，运动方程具有不同的表示形式. 例如，在直角坐标系中有

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \tag{1.25a}$$

在极坐标系中为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases} \tag{1.25b}$$

在自然坐标系中则是

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{t}} \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_{\mathrm{n}} \\ 0 = F_{\mathrm{b}} \end{cases} \tag{1.25c}$$

通常地,质点受到的力与质点的位置、速度有关,并随时间变化,它是这些变量的函数,称为力函数. 力函数的一般形式可写为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};t) = \boldsymbol{F}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \tag{1.26}$$

因此,(1.24)式或它的每个分量方程都是质点坐标关于时间的二阶常微分方程. 这些微分方程常被称为质点**运动微分方程**或**运动方程**. 它们表明,质点的位置和速度由这一时刻到下一时刻的变化,即质点运动状态的改变,是由这一时刻作用在质点上的力决定的. 如果作用于质点的力函数已知,原则上,由这一时刻质点的速度和位置便可求得下一时刻质点的速度及位置. 这便是所谓的经典力学中的确定论,似乎只要给定了初始条件,即给定了初始时刻质点的位置和速度,便可确定质点以后的运动状态. 从数学观点来说,当力函数给定以后,在一定的初始条件下,求解运动微分方程(1.24)就可得出明确的积分. 确实,许多力学问题可以得出明确的解答,有些则只要克服数学上的困难,就一定能求得积分. 对于那些原则上可以求得明确积分的力学问题称为**可积分问题**. 但是,并不是对任意形式的力函数,方程(1.24)都是可积分的. 对于那些不可积分的力学问题,必须采用近似方法或借助于计算方法求解. 对这类问题,虽然质点下一时刻的速度和位置仍由这一时刻的质点运动状态决定,但却不可预期其后果. 这种后果的不确定性便是动力学系统中随机特性或混沌特性的表现. 这里的随机性或混沌性与统计力学中的概率性不同,它是由力学系统的确定性导致的混沌,即这一时刻力学系统的状态对于下一时刻系统状态的确定性,却导致一定时间后系统状态的不可预测性. 力学系统的混沌特性,正是目前新兴的非线性物理学科正在深入探究的领域. 本课程不可能较多涉及这一领域,仅在§2.7 中介绍"埃农 - 海力斯(Hénon - Heiles)势问题"的计算结果,在§6.7 中作一点理论方面的初步探讨. 本课程的内容主要限于讨论可积分的力学问题;更确切些,实际上还只是对可积分问题中那些数学方法已发展完备的可解问题进行求解.

[**例 1.2**] 质量分别为 $2m$ 和 $m$ 的重物 1 和重物 2,用不可伸长的轻绳 $l$ 绕过一光滑的轻质滑轮联结. 在重物 2 的下端又用固有长度为 $l_0$、劲度系数为 $k = mg/l_0$ 的弹性绳挂上另一质量为 $m$ 的重物 3. 整个系统保持在铅直平面内,如图 L1.2 所示. 开始时绳子是拉直的,而弹性绳长则为固有长度. 系统自静止状态释放. 分别求出此后各重物的运动状况,以及非弹性绳和弹性绳中的张力大小 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$.

[**解**] 把各重物看成质点. 建立坐标系如图 L1.2 所示. 采用隔离体方法,分别列出各质

点的运动方程①：

$$2m\ddot{x}_1 = 2mg - F \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2 = mg + F' - F \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_3 = mg - F' \tag{3}$$

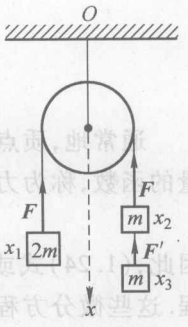


图 L1.2

约束关系：

$$x_1 + x_2 = l - s_0 = s \tag{4}$$

这里 $s_0$ 是非弹性绳围绕滑轮的长度.

弹性绳中的张力：

$$F' = k[(x_3 - x_2) - l_0] = \frac{mg}{l_0}[(x_3 - x_2) - l_0] \tag{5}$$

初始条件：$t = 0$ 时，

$$x_1 = x_0, x_2 = s - x_0, x_3 = s - x_0 + l_0$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0 \tag{6}$$

现在有五个未知量：$x_1$、$x_2$、$x_3$、$F$ 和 $F'$，共有(1)式—(5)式五个方程. 在初始条件(6)下求解，可完全确定三个重物的运动和绳中的张力.

由(4)式得：$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$，代入(1)式并与(2)式联立消去 $F$，则有

$$3m\ddot{x}_2 = -mg + F'$$

将此式与(3)式、(5)式联立，消去 $F'$，得

$$3m(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2) = -\frac{4mg}{l_0}(x_3 - x_2) + 8mg$$

令

$$x = x_3 - x_2 \tag{7}$$

得

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{3l_0}x + \frac{8g}{3}$$

这是谐振动类型的微分方程，结合初始条件(6)，很容易求出它的解为

$$x = 2l_0 - l_0 \cos \omega t \tag{8}$$

其中

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{3l_0}} \tag{9}$$

是系统振动的圆频率. 由(5)式可得弹性绳中的张力大小，

$$F' = \frac{mg}{l_0}(x - l_0) = mg(1 - \cos \omega t) \tag{10}$$

代入(3)式，得

$$\ddot{x}_3 = g - g(1 - \cos \omega t) = g \cos \omega t$$

对时间 $t$ 作两次积分，并考虑到初始条件，可得

$$x_3 = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) + s + l_0 - x_0$$

---

① 注意，弹性绳作用于重物 2 的张力 $F'$ 与图中标出的方向相反，是沿 $x$ 轴正方向的.

以 $\omega$ 的表达式代入,得

$$x_3 = \frac{3}{4}l_0(1 - \cos \omega t) + s + l_0 - x_0 \tag{11}$$

由(7)式,即得

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 - x \\ &= -\frac{1}{4}l_0(1 - \cos \omega t) + l - x_0 \end{aligned} \tag{12}$$

又根据约束条件(4)式,有

$$x_1 = s - x_2 = x_0 + \frac{l_0}{4}(1 - \cos \omega t) \tag{13}$$

代入(1)式得非弹性绳中的张力大小:

$$F = 2m(g - \ddot{x}_1) = 2mg\left(1 - \frac{1}{3}\cos \omega t\right) \tag{14}$$

系统的振动周期是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3l_0}{g}} \tag{15}$$

[例 1.3] 一质量为 $m$ 的炮弹,以速率 $v_0$ 自仰角为 $\alpha$ 的炮管内射出.设炮弹飞行中受到的空气阻力与炮弹的速度成正比,$\boldsymbol{F}_R = -mb\boldsymbol{v}$,这里 $b$ 是常量.求炮弹飞行时的速度和轨道.

[解] 炮弹可以看成质点,以地面为参考系.按题意画出草图,如图 L1.3 所示.炮弹在飞行中受到的力为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_R + m\boldsymbol{g} = -mbv\boldsymbol{e}_t - mg\boldsymbol{k} \tag{1}$$

炮弹受到的力有两项:重力铅直向下,阻力与轨道的切线方向相反.故采用直角坐标系或自然坐标系较为适宜.下面我们将分别在这两种坐标系下求解.

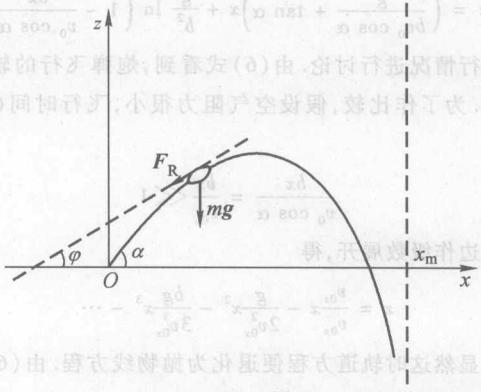



图 L1.3

方法一:采用直角坐标系.

在直角坐标系下力的表达式为

$$\boldsymbol{F} = -mb(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{z}\boldsymbol{k}) - mg\boldsymbol{k} = -mb\dot{x}\boldsymbol{i} - m(b\dot{z} + g)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

由此,可得炮弹的运动微分方程:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mb\dot{x} \\ m\ddot{z} = -m(b\dot{z} + g) \end{cases} \tag{3}$$

初始条件为

$$\begin{aligned} x\big|_{t=0} &= z\big|_{t=0} = 0 \\ \dot{x}\big|_{t=0} &= v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z}\big|_{t=0} &= v_{0z} = v_0\sin\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

对(3)式积分一次,并注意初始条件,得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{0x}e^{-bt} \\ \dot{z} &= v_{0z}e^{-bt} + \frac{g}{b}(e^{-bt} - 1) \end{aligned} \tag{5a}$$

故炮弹的飞行速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{z}\boldsymbol{k} = v_{0x}e^{-bt}\boldsymbol{i} + \left[v_{0z}e^{-bt} + \frac{g}{b}(e^{-bt} - 1)\right]\boldsymbol{k} \tag{5b}$$

对(5a)式再积分一次,在给定的初始条件下,即得质点的位置与时间 $t$ 的关系:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x}}{b}(1 - e^{-bt}) \\ z &= \left(\frac{g}{b^2} + \frac{v_{0z}}{b}\right)(1 - e^{-bt}) - \frac{g}{b}t \end{aligned} \tag{6a}$$

由此两式消去 $t$ 即得轨道方程:

$$z = \left(\frac{g}{bv_{0x}} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right)x + \frac{g}{b^2}\ln\frac{v_{0x} - bx}{v_{0x}} \tag{6b}$$

即轨道为

$$z = \left(\frac{g}{bv_0\cos\alpha} + \tan\alpha\right)x + \frac{g}{b^2}\ln\left(1 - \frac{bx}{v_0\cos\alpha}\right)$$

下面,对炮弹的飞行情况进行讨论. 由(6)式看到,炮弹飞行的轨迹不再是无阻力时的抛物线,却要复杂得多. 为了作比较,假设空气阻力很小,飞行时间(或距离)不长,设满足条件:

$$\frac{bx}{v_0\cos\alpha} = \frac{bx}{v_{0x}} \ll 1$$

这时,可对(6b)式的右边作级数展开,得

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 - \frac{bg}{3v_{0x}^3}x^3 - \cdots \tag{6c}$$

在无空气阻力时 $b=0$,显然这时轨道方程便退化为抛物线方程. 由(6a)式还容易看到,随着时间的推移,炮弹的水平位置将趋向一极限(见图 L1.3):

$$x_m = \frac{v_{0x}}{b} = \frac{v_0}{b}\cos\alpha \tag{7}$$

而在铅直方向则趋向匀速运动,即

$$z = \left(\frac{g}{b^2} + \frac{v_{0z}}{b}\right) - \frac{g}{b}t = \left(\frac{g}{b^2} + \frac{v_0}{b}\sin\alpha\right) - \frac{g}{b}t$$

这从(5)式可以看得更清楚,在 $t\to\infty$ 时,炮弹速度将趋于铅直向下的恒定速度:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = -\frac{g}{b}\boldsymbol{k} \tag{8}$$

方法二:采用自然坐标系.

力在自然坐标系中的坐标表达式为,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -mbv\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} - mg\boldsymbol{k}\\ &= -m(bv + g\sin\varphi)\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + mg\cos\varphi\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\end{aligned}$$

这里 $\varphi$ 是轨道切线与 $x$ 轴之间的夹角.炮弹的运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv - g\sin\varphi \tag{9a}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\varphi \tag{9b}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{\rho}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$$

上式最右边出现负号,因为轨道向下($-\boldsymbol{k}$ 方向)弯曲,随路程 $s$ 增加,$\varphi$ 角减小,$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ 是负值,但 $\rho$ 应为正值.将(9b)式代入上式,并联立(9a)式,得

$$\frac{g\cos\varphi}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = bv + g\sin\varphi$$

注意到

$$\cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} - v\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}(v\cos\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}$$

即可得到

$$\frac{\mathrm{d}(v\cos\varphi)}{(v\cos\varphi)^2} = \frac{b}{g\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

两边经过积分,注意初始条件并作适当整理后,得到炮弹的速度:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = \frac{gv_0\cos\alpha}{g\cos\varphi + bv_0\sin(\alpha-\varphi)}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} \tag{10}$$

我们也可以在自然坐标系下求出炮弹的轨迹.由(9b)式得

$$-v^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = g\cos\varphi \tag{11}$$

由此

$$\begin{aligned}s &= \int \mathrm{d}s = -\int_{\alpha}^{\theta}\frac{v^2}{g\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi\\ &= -gv_0^2\cos^2\alpha\int_{\alpha}^{\theta}\frac{1}{\cos\varphi\,[g\cos\varphi + bv_0\sin(\alpha-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

只要将上式右边的积分积出,便能得到自然坐标系下的轨道方程:$s = s(\varphi)$.虽然自然坐标系的轨道形式对于洲际导弹,宇宙火箭等的远距离飞行器是适宜的,但对于短距离飞行的炮弹来说反而不易看出它的特点来.为此,我们不直接求出 $s$ 与 $\varphi$ 的关系,而求出炮弹飞行的水平距离 $x$ 与 $\varphi$ 的关系.利用(11)式,可得

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cos\varphi = -\frac{v^2}{g}\mathrm{d}\varphi$$

两边积分，得

$$x = \int_0^x \mathrm{d}x = -gv_0^2\cos^2\alpha\int_\alpha^\varphi \frac{1}{[g\cos\varphi + bv_0\sin(\alpha-\varphi)]^2}\mathrm{d}\varphi$$

作变换

$$u = \tan\varphi$$

则

$$x = -gv_0^2\cos^2\alpha\int\frac{1}{(g + bv_0\sin\alpha - bv_0u\cos\alpha)^2}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{gv_0\cos\alpha}{b}\left(\frac{1}{g + bv_0(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\varphi)} - \frac{1}{g}\right) \tag{12}$$

从(10)式和(12)两式可以看到当 $\varphi = \pi/2$ 时有

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{m} = \frac{g}{b}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$$

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_0\cos\alpha}{b} = \frac{v_{0x}}{b}$$

与(7)式和(8)式比较，跟这里得到的结果完全一致.

[评注]　① 本题在直角坐标系下求解，要比用自然坐标系方便一些. 这是由空气的阻力与速度一次方成正比的特点决定的，阻力的直角坐标系表达式具有很简单的形式. 但若空气阻力与速度的二次方成正比或为速度的其他函数，则采用直角坐标系求解就可能很复杂，而用自然坐标系却可能更简便些. 采用什么样的坐标系，需要根据题目的特点来确定，特别是由力的特征来确定.

② 求轨道方程，可以不必像(6a)式那样，先求出以时间为参量的参量方程，然后再消去时间参量来得到. 有时直接从运动方程中消去时间变量 $t$ 可能更简便些. 例如下面的变换就可将对时间 $t$ 求导数转换成对坐标变量 $x$ 求导数：

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x},\quad \ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}x}$$

将其代入运动方程(3)式，就可以分别得出 $\dot{x}$ 和 $\dot{z}$ 直接作为变量 $x$ 的函数，进而求得轨道方程：

$$z = z(x)$$

计算过程请读者自己完成.

[例 1.4]　带电粒子的质量和电荷分别为 $m$ 和 $q$ 的粒子束，自 $O$ 点射入相互垂直的均匀稳定电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中，各粒子的初速度与磁场垂直. 证明：尽管各粒子初速度的大小和方向有差别，但它们都将聚焦在同一个点 $f$ 处；距离 $Of$ 与粒子的质量成正比，与电荷成反比.

[解]　选用直角坐标系，$O$ 点为坐标原点. 设电场和磁场分别沿 $y$ 方向和 $z$ 方向(图 L1.4).

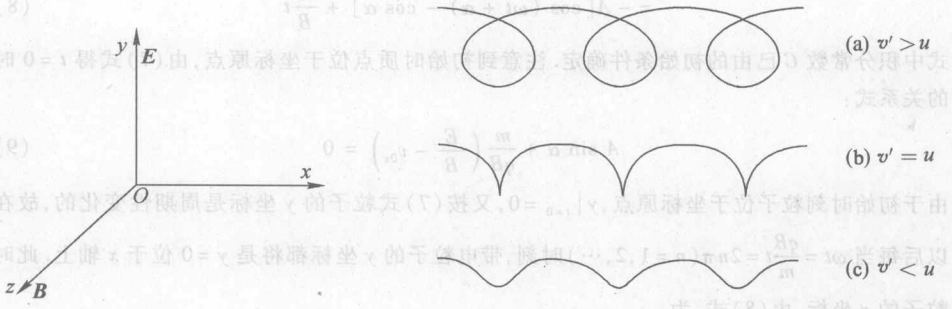



图 L1.4

$$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$$

粒子受到的电磁力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ &= qE\boldsymbol{j} + q(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}) \times B\boldsymbol{k} \\ &= qB\dot{y}\boldsymbol{i} + q(E - B\dot{x})\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{1}$$

质点的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = q(E - B\dot{x}) \end{cases} \tag{2}$$

任一粒子的初始条件为

$$t = 0 \text{ 时}, \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ \dot{x} = v_{0x}, \quad \dot{y} = v_{0y} \end{cases} \tag{3}$$

现在已把物理问题化成了数学问题，在初始条件(3)下求解常微分方程组(2)．对(2)式中的第一式作一次积分，并注意初始条件，可得

$$\dot{x} = \frac{qB}{m}y + v_{0x} \tag{4}$$

代入(2)式中的第二式即可得关于 $y$ 的二阶常系数常微分方程：

$$\ddot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y + \frac{qB}{m}\left(\frac{E}{B} - v_{0x}\right) \tag{5}$$

令

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{6}$$

注意(5)式是谐振动类型的微分方程，很容易得一般解为

$$y = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{m}{qB}\left(\frac{E}{B} - v_{0x}\right) \tag{7}$$

积分常数 $A$ 和 $\alpha$ 由关于 $y$ 和 $\dot{y}$ 的初始条件确定，我们将在本题〔评注〕中写出．

将(7)式代入(4)式并积分一次，即得关于 $x$ 的解：

$$x = -A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{E}{B}t + C$$

$$= -A[\cos(\omega t+\alpha)-\cos\alpha]+\frac{E}{B}t \tag{8}$$

式中积分常数 $C$ 已由的初始条件确定. 注意到初始时质点位于坐标原点，由(7)式得 $t=0$ 时的关系式：

$$A\sin\alpha+\frac{m}{qB}\left(\frac{E}{B}-v_{0x}\right)=0 \tag{9}$$

由于初始时刻粒子位于坐标原点，$y|_{t=0}=0$，又按(7)式粒子的 $y$ 坐标是周期性变化的，故在以后每当 $\omega t=\frac{qB}{m}t=2n\pi(n=1,2,\cdots)$ 时刻，带电粒子的 $y$ 坐标都将是 $y=0$ 位于 $x$ 轴上. 此时粒子的 $x$ 坐标，由(8)式，为

$$x=\frac{E}{B}t=\frac{2n\pi mE}{qB^2}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

它只与粒子的质量 $m$、电荷 $q$ 以及电场 $E$、磁场 $B$ 有关，而与粒子的初始速度的大小和方向无关. 因此，虽然各粒子的初始速度可能不同，只要都从原点出发，它们都将在 $x$ 轴的这些点处聚焦；$n=1$ 为第一聚焦点，相应的坐标为 $\left(\frac{2\pi mE}{qB^2},0\right)$，即

$$x=Of=\frac{2\pi mE}{qB^2}$$

由此证得粒子束中具有相同质量和电荷的粒子将聚焦于一点，聚焦距离与粒子的质量成正比，与电荷成反比. 利用这一特性，可以将带电粒子束中具有不同质量和电荷的粒子分离开来，设计成粒子过滤器.

［**评注**］　由(7)式、(8)式知，任意时刻粒子的速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}=A\omega[\sin(\omega t+\alpha)\boldsymbol{i}+\cos(\omega t+\alpha)\boldsymbol{j}]+\frac{E}{B}\boldsymbol{i}$$

$$=\boldsymbol{v}'+u\boldsymbol{i}$$

按初始条件(3)，由上式可得

$$A\omega\sin\alpha=v_{0x}-\frac{E}{B},\quad A\omega\cos\alpha=v_{0y}$$

即

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\left(v_{0x}-\frac{E}{B}\right)^2+v_{0y}^2}=\frac{mv'}{qB},\quad \cos\alpha=\frac{v_{0y}}{v'}$$

其中

$$v'=|\boldsymbol{v}'|=\sqrt{(v_{0x}-u)^2+v_{0y}^2},\quad u=\frac{E}{B}$$

此外由(7)式、(8)式可得粒子的运动轨道曲线方程：

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=A^2$$

式中

$$x_c=ut-A\cos\alpha,\quad y_c=\frac{m}{qB}\left(\frac{E}{B}-v_{0x}\right)$$

这是圆心坐标为 $(x_c,y_c)$ 的圆周方程，而圆心则以速率 $u$ 沿 $x$ 轴做匀速直线运动. 由此可认为粒子一边以速率 $v'$ 做半径为 $A$ 的匀速圆周运动，同时又以速率 $u$ 沿 $x$ 方向做匀速直线运动. 后一种运动称为粒子在电磁场中的漂移，$u$ 是漂移速率. 容易从物理上解释电磁场中带电粒子运动的上述特点. 粒子受到与速度垂直的磁场力使粒子的运动轨道弯曲，同时电场 $\boldsymbol{E}$ 的作

用力使粒子在顺着电场运动的一半周期内加速，而在逆着电场的一半周期内减速[①]. 粒子速度大处轨道曲率半径较大，速度小的地方曲率半径小[②]导致轨道沿 $x$ 方向漂移. 在 $v'>u, v'=u, v'<u$ 三种情形下粒子的运动轨迹，分别如图 L1.4(a)、(b)、(c)所示. 图中纸面为 $Oxy$ 平面，电场 $\boldsymbol{E}$ 在 $y$ 方向，磁场 $\boldsymbol{B}$ 沿 $z$ 方向与纸面垂直.

在磁约束受控热核反应中，带电粒子的漂移现象很是重要.

[例 1.5] 质量为 $m$ 的小球，穿在竖直放置的螺纹形光滑铁丝上，自静止向下滑动，如图 L1.5 所示. 求小球的速度 $\boldsymbol{v}$ 和铁丝对小球的约束力 $\boldsymbol{F}_N$ 分别与小球下滑距离 $z$ 的关系. 已知铁丝的曲线方程可写为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=b\theta$.

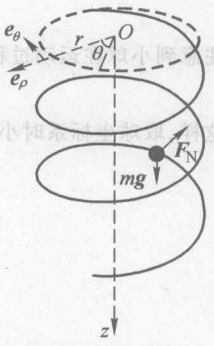


图 L1.5

[解] 由图 L1.5 所示的几何关系，可以看到采用柱坐标较为适宜. 由于铁丝是光滑的，约束力在铁丝的切线方向没有分量. 因此约束力可写为

$$\boldsymbol{F}_N = F_n\boldsymbol{e}_n + F_b\boldsymbol{e}_b \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_b$ 分别是自然坐标系中的主法线和次法线方向的单位矢量.

除约束力外还有重力作用，故小球受到的力是

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_N + m\boldsymbol{g} = F_n\boldsymbol{e}_n + F_b\boldsymbol{e}_b + mg\boldsymbol{k} \tag{2}$$

现在需要将自然坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_b$ 用柱坐标系写出. 由铁丝的曲线方程可知，小球的元位移为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} = (r\boldsymbol{e}_\theta + b\boldsymbol{k})\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}s\boldsymbol{e}_t$$

其中 $\theta$ 是柱坐标系中的极角，也即铁丝曲线方程中的参量角，或小球绕 $z$ 轴的转动角. $\boldsymbol{e}_\theta$ 则是柱坐标系中 $\theta$ 方向的单位矢量. 而

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{s}| = \sqrt{r^2+b^2}\,\mathrm{d}\theta$$

因此

$$\boldsymbol{e}_t = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}(r\boldsymbol{e}_\theta + b\boldsymbol{k}) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}\left(r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}\dot{\theta}(-\boldsymbol{e}_\rho)$$

这里应用了关系式 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta/\mathrm{d}t = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\rho$. 又切向单位矢量的时间变化率 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t/\mathrm{d}t = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_n$ 的方向当沿法线方向[见(1.18)式]，两相比较，可见主法线方向的单位矢量应表示为

$$\boldsymbol{e}_n = -\boldsymbol{e}_\rho \tag{4}$$

副法线方向的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}(r\boldsymbol{e}_\theta + b\boldsymbol{k}) \times (-\boldsymbol{e}_\rho)$$

---

① 这里假定粒子带有正电荷；对于负电荷，加速和减速的情形恰好相反.

② 粒子在磁场力作用下的运动方程：$m\dfrac{v^2}{\rho} = F_B = qvB$，故轨道的曲率半径 $\rho \propto v$.

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}(-b\boldsymbol{e}_\theta + r\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

这样，小球所受的力(2)式，在柱坐标系下的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_N + mg\boldsymbol{k} \\ &= -F_n\boldsymbol{e}_\rho - \frac{F_b b}{\sqrt{r^2 + b^2}}\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{F_b r}{\sqrt{r^2 + b^2}} + mg\right)\boldsymbol{k} \\ &= F_\rho\boldsymbol{e}_\rho + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta + F_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6}$$

注意到小球在运动过程中，径向坐标的长度是恒定的，即

$$\rho = r$$

这样，取球坐标系时小球的运动方程可写为

$$-mr\dot{\theta}^2 = F_\rho = -F_n \tag{7}$$

$$mr\ddot{\theta} = F_\theta = -\frac{F_b b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \tag{8}$$

$$m\ddot{z} = F_z = \frac{F_b r}{\sqrt{r^2 + b^2}} + mg \tag{9}$$

约束条件由铁丝的曲线方程给出：

$$z = b\theta \tag{10}$$

初始条件是

$$t = 0\text{ 时，}\quad \begin{cases} z = \theta = 0 \\ \dot{z} = \dot{\theta} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

由(10)式得

$$\dot{z} = b\dot{\theta}, \qquad \ddot{z} = b\ddot{\theta} \tag{12}$$

代入(9)式，并与(8)式联立消去 $F_b$，即得 $\theta$ 的方程：

$$\left(b + \frac{r^2}{b}\right)\ddot{\theta} = g \quad \text{或} \quad \ddot{\theta} = \frac{gb}{r^2 + b^2}$$

为了分别求出 $v$、$F_N$ 与小球下滑距离 $z$ 的关系，将上式改写如下：

$$\ddot{\theta} = \dot{z}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}z} = b\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}z} = \frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}z} = \frac{gb}{r^2 + b^2} \tag{13}$$

将上式最后一个等式的两边对 $z$ 积分一次，并注意初始条件(11)，即得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r^2 + b^2}z \tag{14}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2gz}{r^2 + z^2}}, \qquad \dot{z} = b\dot{\theta} = b\sqrt{\frac{2gz}{r^2 + b^2}} \tag{15}$$

由此小球的速度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k} \\ &= r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2gz}{r^2 + b^2}}(r\boldsymbol{e}_\theta + b\boldsymbol{k}) \tag{16}$$

将(14)式、(13)式分别代入(7)式、(8)式,得

$$\boldsymbol{F}_n = mr\dot{\theta}^2 = \frac{2rmg}{r^2 + b^2}z$$

$$F_b = -\frac{r\sqrt{r^2 + b^2}mg}{b}\ddot{\theta} = -\frac{mgr}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

由此得铁丝对小球的约束力:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_N &= F_n\boldsymbol{e}_n + F_b\boldsymbol{e}_b \\ &= -F_n\boldsymbol{e}_\rho + \frac{F_b}{\sqrt{r^2 + b^2}}(-b\boldsymbol{e}_\theta + r\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{mgr}{r^2 + b^2}(-2z\boldsymbol{e}_\rho + b\boldsymbol{e}_\theta - r\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{17}$$

[评注] ① 从本例题的约束(铁丝)情形看,采用柱坐标系求解较为适宜,但约束力却不易一下子在柱坐标系中写出.这时,可先"顺其自然"用最容易表达的坐标系写出.由于约束力在切线方向没有分量,故用自然坐标系来表达是最为自然的.下一步则需要建立这两个坐标系之间的关系;自然坐标系中的单位矢量分别用柱坐标系表达,如(3)式、(4)式、(5)式那样.读者应注意并掌握建立两种坐标系间变换关系的方法.这也是本例题的重点之一.本题如果采用直角坐标系求解,读者不妨仿照此步骤建立自然坐标系与直角坐标系各单位矢量间的关系.

② 以后可以看到,由于铁丝是光滑的,本题若用质点的机械能守恒关系来解,会更简单些.

## §1.3 质点运动的基本定理

由牛顿运动方程(1.24)式可以直接推导出三个重要定理.它们不仅对掌握质点运动的规律有着非常重要的意义,而且可以由此引出表征质点运动状态的一些重要物理量,如动量、角动量、动能等.

### (一) 质点动量定理

若质点运动的速度远小于光速,且质点在运动过程中与周围物体没有质量交换,则质点的质量 $m$ 可以看成是一个常量.这时(1.24)式可直接写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1.27}$$

其中

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

称为质点的**动量**. 方程(1.27)表明:质点受到外力作用时,它的动量将发生变化. 质点动量的时间变化率等于质点受到的外力. 这个关系叫做质点的**动量定理**,它是牛顿第二定律的另一表示. 方程(1.27)式是动量定理的微分形式. 若将(1.27)式改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

两边对时间 $t$ 积分,即得

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{\boldsymbol{p}_1}^{\boldsymbol{p}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \boldsymbol{I} \tag{1.28}$$

其中 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 是质点分别在 $t_1$ 和 $t_2$ 时刻的动量. 上式右边,力对时间的积分称为力的**冲量**,它是矢量,常用符号 $\boldsymbol{I}$ 表示. 方程(1.28)表明,在有限时间间隔内,质点动量的改变等于质点所受到的外力的冲量;(1.28)式是动量定理的积分形式. 也称为**冲量定理**.

动量 $\boldsymbol{p}$ 是表征物体运动的一个重要动力学量. 动量定理和牛顿第三定律共同揭示物体间存在相互作用时,必然伴随着物体间动量的交换. 随着物理学的发展,人们认识到动量比速度更能反映物体运动的本质. 质点的运动状态可由质点的位矢坐标和动量来表征①.

若质点不受外力作用,$\boldsymbol{F}=0$,则由动量定理得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 = \text{常矢量}$$

这个关系式称为质点的动量守恒方程,或质点的**动量守恒定律**. 上式表明质点不受外力作用时,质点的动量不随时间变化,在运动过程中保持恒定,是一个常矢量. 实际上这也是惯性定律的直接结果.

若在某一固定方向,例如 $\boldsymbol{e}_l$ 方向,质点不受外力作用,即在该方向力的分量 $F_l=0$,那么质点在该方向的动量分量守恒. 对动量定理(1.27)式两边标乘 $\boldsymbol{e}_l$,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_l = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_l)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_l = F_l = 0$$

故得

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_l = p_l = C(\text{常量})$$

即 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的动量分量守恒.

**(二) 质点动量矩定理**

以质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 矢乘(1.27)式两边,并注意到

① 可参考第六章分析力学 §6.5 节中,哈密顿正则方程及正则变量的描述.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}=0$$

则得

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{1.29}$$

这里

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.31}$$

$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别是质点的动量 $\boldsymbol{p}$ 对于坐标原点的**动量矩**和作用于质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 对同一点的**力矩**;它们都是矢量. 动量矩也叫做**角动量**,是表征物体转动运动状况的重要动力学量. 按动量矩和力矩的定义,它们在直角坐标系中的表达式分别是

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\p_x&p_y&p_z\end{vmatrix}$$

$$=(yp_z-zp_y)\boldsymbol{i}+(zp_x-xp_z)\boldsymbol{j}+(xp_y-yp_x)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}$$

$$=(yF_z-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k}$$

我们也很容易在其他坐标系下分别写出动量矩和力矩的表达式,请读者自己完成.

方程(1.29)是质点**动量矩定理**的微分形式. 它表明,质点对某一定点的角动量的时间变化率等于作用于质点的外力对同一定点的力矩. 动量矩定理也称**角动量定理**. 和动量定理一样,角动量定理(1.29)也是确定质点运动状态的基本规律,特别适宜于处理物体转动的力学问题.

若(1.29)等式两边对时间积分,还可得到动量矩定理的积分形式:

$$\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\boldsymbol{H} \tag{1.32}$$

这个关系又叫做质点的**冲量矩定理**. 其中 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 分别是质点在 $t_1$、$t_2$ 时刻的动量矩;$\boldsymbol{H}$ 是力矩 $\boldsymbol{M}$ 在 $t_2-t_1$ 时间间隔内的积分,叫做在时间间隔 $t_2-t_1$ 内作用于质点的外力的**冲量矩**.

由动量矩定理(1.29)可以知道,当没有外力矩作用于质点,或作用于质点的外力矩之和为零时

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} = 0$$

质点的动量矩将不随时间变化;动量矩将是一个常矢量:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0(\text{常矢量})$$

这是质点的**动量矩守恒定律**:作用在质点上的力矩为零时,质点的角动量在质点运动过程中保持不变.

有时还需要知道质点运动时对某一轴线的动量矩.设轴线 $l$ 正方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_l$,在普通物理中已知,质点对于轴线 $l$ 的动量矩(角动量)的大小为

$$L_l = Rmv_t \tag{1.33}$$

式中 $R$ 是质点与轴线间的垂直距离;$v_t$ 是质点速度在以 $R$ 为半径的圆周切线 $\boldsymbol{e}_t$ 方向上的分量,$v_t = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_t$,如图 1.6 所示.实际上(1.33)式所示的质点对轴线角动量的大小,是质点对轴上一点的角动量 $\boldsymbol{L}$ 在该轴线方向 $\boldsymbol{e}_l$ 上的分量

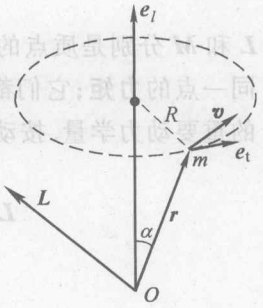


图 1.6

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_l = (\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_l = m(\boldsymbol{e}_l\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}$$

这里我们已应用了熟知的矢量乘积公式[参见附录 A,公式(A.8)].由图 1.6,并注意到 $\boldsymbol{e}_l$ 的长度为 1,有

$$\boldsymbol{e}_l\times\boldsymbol{r} = (r\sin\alpha)\boldsymbol{e}_t = R\boldsymbol{e}_t$$

故

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_l = Rm\boldsymbol{e}_t\cdot\boldsymbol{v} = Rmv_t = L_l \tag{1.34}$$

因角动量是矢量.质点对轴线 $\boldsymbol{e}_l$ 的角动量的正确写法应是

$$\boldsymbol{L}_l = L_l\boldsymbol{e}_l$$

$L_l$ 是质点对轴线 $l$ 的角动量大小,或质点对定点 $O$ 的角动量 $\boldsymbol{L}$ 在 $\boldsymbol{e}_l$ 方向上的分量.把 $L_l$ 说成质点对轴线的角动量,是不妥当的,因为它不是矢量.

同样,对于轴线 $l$ 的力矩则是

$$\boldsymbol{M}_l = M_l\boldsymbol{e}_l$$

其中

$M_l$ 是力矩在 $\boldsymbol{e}_l$ 方向上的分量. $\quad M_l = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_l$ (1.35)

至此读者应已明确,质点对一定点的动量矩(力矩),及对一轴线的动量矩(力矩)之间的区别和它们之间的关系了.

若是在某一固定方向,例如 $\boldsymbol{e}_l$ 方向,作用于质点的力矩为 0 则质点在 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的动量矩分量守恒.因为

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\cdot\boldsymbol{e}_l = \frac{d(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_l)}{dt} = \frac{dL_l}{dt} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_l = 0$$

有

$$L_l = C(\text{常量})$$

### (三) 质点动能定理

牛顿运动方程的另一个重要推理是质点**动能定理**.由牛顿运动方程可得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.36}$$

其中

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1.37}$$

是质点的**动能**.

(1.36)式是质点动能定理的微分形式. 该式表明,质点动能的时间变化率,等于单位时间内作用在质点上的力对质点做的功. 动能定理也可表示为积分形式. 由(1.36)式,注意 $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 有

$$\mathrm{d}T=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.38}$$

两边在 $t_1\sim t_2$ 时间内积分,可得

$$T_2-T_1=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=W \tag{1.39}$$

这里,$T_1$、$T_2$ 分别是质点在 $t_1$,$t_2$ 时刻的动能;$W$ 是质点在时间间隔 $t_2-t_1$ 内从位置 $\boldsymbol{r}_1$ 运动到位置 $\boldsymbol{r}_2$,力 $\boldsymbol{F}$ 对质点做的功;(1.39)式告诉我们:质点在一定时间的运动过程中,其动能改变的数值等于在同样时间内外力对该质点做的功.

必须指出,前面叙述的三个基本定理:动量定理、动量矩定理和动能定理,都是牛顿运动方程的直接推理. 由于牛顿运动方程只有在惯性(参考)系中才适用,因而这三个定理及其表达式(1.27)、(1.29)和(1.36)也都只有在惯性系中才成立. 至于在非惯性系中牛顿运动方程及三个基本定理应分别如何修改,将在第三章中介绍.

## §1.4 保守力 势能和机械能守恒定律

通常,在空间不同位置处和不同时刻质点受到的外力是不一样的;用数学来表示,力是空间坐标和时间的函数. 这种在空间分布的力,叫做**力场**. 质点在力场中运动到空间不同位置,受到力场的作用力不同. 力场还随着时间而变化,力函数是时间 $t$ 的显函数,则这样的力场称为**不稳定力场**. 反之,如果力场不随时间变化,力函数不是 $t$ 的显函数,这样的力场就叫做**稳定力场**.

### (一) 保守力 势能函数和机械能守恒定律

从动能定理(1.38)式,我们看到它的左边是质点动能函数的完全微分,

但右边则是力函数与质点元位移的标乘积. $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是否也可能写成某一函数的完全微分呢？为了方便起见，我们讨论稳定力场的情形，并采用直角坐标系. 由于

$$\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_x(x,y,z)\mathrm{d}x + F_y(x,y,z)\mathrm{d}y + F_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

从数学角度来看，上式能写成完全微分的条件是，力函数的各分量恰好等于某一标量函数的相应偏导数：

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \\ F_y(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \\ F_z(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \end{cases} \tag{1.40a}$$

上列各等式右方出现负号是为了让标量函数 $V(x,y,z)$ 更具有物理意义. 上式也可写成矢量形式：

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\nabla V(x,y,z) \tag{1.40b}$$

这样

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \\ &= -\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{1.41}$$

在这种情况下，动能定理(1.38)式可表示为

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}V$$

或

$$\mathrm{d}(T+V) = 0 \tag{1.42}$$

现在我们看到，能否将(1.38)式改写成(1.42)式，关键是力函数是否具有可表示为一标量函数梯度的特性. 可以表示为标量函数梯度的力场叫做**保守力场**，反之则是**非保守力场**. 一个保守力场必定与一标量函数联系着. 上面所示的函数 $V(x,y,z)$ 就是这样的标量函数. 标量函数在空间各处具有不同的数值，是一个标量场，在物理上称为**力的势场**，或**位势场**. 这里函数 $V(x,y,z)$ 叫做**势能函数**，或**位能函数**. 质点所在位置处势能函数 $V(x,y,z)$ 的数值，称作质点在该位置处的**势能或位能**. 质点的动能和势能都叫做质点的**机械能**. 动能和势能的和 $T+V$，常用符号 $E$ 表示，是质点的总机械能，或简称**机械能**. (1.42)式告诉我们质点受保守力作用时，质点在运动过程中的总机械能保持不变，此即质点的**机械能守恒定律**：

$$T + V = E = \text{常量} \tag{1.43}$$

此式又称为质点的(总)机械能守恒方程.

机械能守恒方程(1.43)和动量守恒方程以及角动量守恒方程，都是由牛顿运动方程经过一次积分得到的，它们都是运动方程的第一积分，简称**第一积分**，

或**初积分**.常常可以直接利用这些守恒方程来处理力学问题.机械能守恒方程在处理实际力学问题中很有用,甚至有时在不知道力的细节情况下,利用机械能守恒方程也能给出有价值的结果来.

只有质点受到保守力作用,质点才具有势能,质点运动时机械能才守恒.现实中经常遇到的力,如万有引力、弹性力、静电力等都是保守力;而摩擦力、黏性力等阻尼力,一般是非保守力.

**(二) 保守力场的特性**

综合前面叙述的内容,可以看到保守力和势能函数具有以下一些特性:

1. 保守力场可表示为势能函数的负梯度

只要势能函数已知,由(1.40)式便可求出质点所受的力.在势能函数中加减任意常量代入(1.40)式给出相同的力,这表明势能函数是可以相差一个任意常量的;势能的零点只有相对意义.

2. 保守力具有无旋性

在数学中已证明,任意一个标量函数的梯度,它的旋度恒等于零,即

$$\nabla \times \nabla V(x,y,z) \equiv 0$$

因而

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{1.44}$$

即保守力的旋度等于零,保守力具有无旋性,保守力场是一个无旋场.这一特性可以用来简便地检验力场是否为保守力场.力函数的旋度等于零,便是保守力场,否则是非保守力场.

3. 保守力做功与路径无关

设质点在空间任意两点 $P_1$ 和 $P_2$ 之间运动(图 1.7),若作用在质点上的力是保守力,则质点所受的力对质点做的功为

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}V = V(P_1) - V(P_2) \tag{1.45}$$

它只取决于质点在这两点处的势能差,而与在这两点间质点运动取什么路径($L_1$ 或 $L_2$)无关.根据这一特点,只需选定势能的零点位置,即可按(1.44)式计算力做的功来确定质点在空间各点的势能.

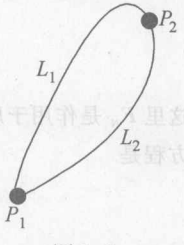


图 1.7

4. 在保守力作用下,质点的总机械能守恒

由(1.43)式所示的机械能守恒方程,质点分别在 $P_1$、$P_2$ 两点处的机械能相等,即

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2$$

5. 势能函数的极小处是稳定平衡点,极大处为不稳定平衡点

质点所受的力等于势能函数的负梯度,这表明作用于质点上的力总是指向

质点势能降低的方向. 若质点位于势能函数极值的位置,那里的势函数梯度为零,作用于质点的力为零,或作用在质点上的力相互平衡. 势能函数的极值点是质点的平衡的位置. 若质点处在势能函数的极小点,则质点少许偏离这一位置其势能必增加,质点将受到一指向平衡点的力,该力具有使质点回到平衡位置的趋向,因而势能函数极小处是质点的稳定平衡点. 相反,质点偏离势能函数为极大的位置时,势能减少,质点受到的力将使质点远离平衡点;势能函数为极大的点是不稳定平衡点.

[例 1.6]　一质量为 $m$ 的质点,自光滑圆滚线的尖端无初速地下滑. 已知圆滚线的方程为:$x=a(2\theta+\sin 2\theta)$,$y=-a(1+\cos 2\theta)$,如图 L1.6 所示. 这里 $\theta$ 是水平线($x$ 轴方向)和质点运动方向间的夹角. 求出质点沿圆滚线运动时对圆滚线的压力 $\boldsymbol{F}_N'$.

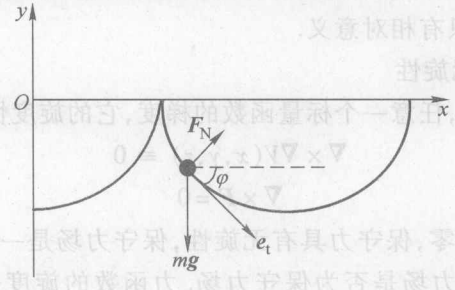



图 L1.6

[解]　现在我们假设质点在 $\theta=3\pi/2$ 至 $\theta=5\pi/2$ 的这一段圆滚线上运动(如图所示). 质点受到的力:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_N\\&=-mg\boldsymbol{j}+F_N(\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})\\&=-F_N\sin\theta\boldsymbol{i}+(F_N\cos\theta-mg)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{F}_N$ 是作用于质点的约束力. 上式已应用关系 $\varphi=-\theta$①. 采用直角坐标系,则质点的运动方程是

$$m\ddot{x}=-F_N\sin\theta \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=F_N\cos\theta-mg \tag{2}$$

约束方程:

$$x=a(2\theta+\sin 2\theta),\quad y=-a(1+\cos 2\theta) \tag{3}$$

初始条件:

$$t=0\text{ 时},\quad \begin{cases}\theta=\dfrac{3}{2}\pi,x=3\pi a,y=0\\ \dot{x}=0,\dot{y}=0\end{cases} \tag{4}$$

① 由图知切线方向 $\boldsymbol{e}_t$ 与 $x$ 轴之间的夹角 $\theta=2\pi-\varphi$,或 $\theta=-\varphi$

当然我们可以在约束方程(3)和初始条件(4)下求解微分方程(1)和(2).但是更为简便的方法是从机械能守恒定律出发求解.由于圆滚线是光滑的,作用于质点的约束反力与质点运动的方向垂直,质点运动时约束力不做功.又重力是保守力,因此机械能守恒定律成立.由约束方程得到

$$\dot{x} = 2a(1 + \cos 2\theta)\dot{\theta};\quad \dot{y} = 2a \sin 2\theta\dot{\theta} \tag{5}$$

故

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4a^2(2 + 2\cos 2\theta)\dot{\theta}^2 \\ &= 16a^2\dot{\theta}^2 \cos^2\theta \end{aligned} \tag{6}$$

由机械能守恒定律得

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0 \tag{7}$$

将关系式(3)和(6)分别代入上式,则

$$8ma^2 \cos^2\theta\dot{\theta}^2 = mga(1 + \cos 2\theta)$$

注意 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$,由上式得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{4a},\quad \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{g}{4a}};\quad \ddot{\theta} = 0 \tag{8}$$

由(5)式对 $t$ 微分一次,并注意(8)式中的各等式,得

$$\ddot{x} = -2g \sin\theta \cos\theta$$

将此式代入(1)式,即可求得 $F_N$,质点受到的约束力则为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_N &= F_N(\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) \\ &= -2mg \cos\theta(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}) \end{aligned}$$

这里已注意 $\varphi = -\theta$.质点对圆滚线的压力是 $\boldsymbol{F}_N$ 的反作用力,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'_N &= -\boldsymbol{F}_N \\ &= 2mg \cos\theta(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}) \end{aligned} \tag{9}$$

[评注] ① 运动方程(1)、(2)和机械能守恒方程(7)都是质点运动的动力学方程.这三个方程不是相互独立的.正如正文中叙述的那样,机械能守恒方程可由运动方程经过一次积分导出.故三个方程中只需选取两个,再加上约束方程(3)和初始条件(4)便可求得全部解.

② 本题也可采用自然坐标系求解.在自然坐标系中,作用于质点的力可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N = mg(\sin\varphi\boldsymbol{e}_t - \cos\varphi\boldsymbol{e}_n) + F_N\boldsymbol{e}_n \\ &= -mg \sin\theta\boldsymbol{e}_t + (F_N - mg\cos\theta)\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

质点运动方程:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg \sin\theta \tag{10}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_N - mg\cos\theta \tag{11}$$

此外还有约束方程(3)和初始条件(4).

由约束条件,如前面已算得关系式(6).由此得

$$\dot{\theta} = \frac{v}{4a\cos\theta} \tag{12}$$

由运动方程(10)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = m\frac{v}{4a\cos\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

$$= \frac{m}{8a\cos\theta}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}\theta} = -mg\sin\theta \tag{13}$$

即

$$\mathrm{d}v^2 = -8ag\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

两边积分得

$$v^2 = 4ag\cos^2\theta\Big|_{3\pi/2}^{\theta} = 4ag\cos^2\theta \tag{14}$$

以此代入运动方程(11)式,并注意到

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\dot{\theta}}v$$

结合(12)、(14)式,即可得

$$F_{\mathrm{N}} = 2mg\cos\theta$$

因而

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{N}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = -2mg\cos\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

这里直接由运动方程求解的,没有利用机械能守恒方程.实际上,若由能量方程求解,如前面那样容易求得关系式(8),代入(6)式便直接可得关系式(14),这要比对运动方程(10)求一次积分得到(14)式方便得多.

[例 1.7] 一质量为 $m$ 的质点在保守力作用下做直线运动,其势能函数为 $V(x) = cx/(x^2+a^2)$,其中 $a$ 和 $c$ 都是正常数.试求出(i)质点的稳定平衡点的位置.(ii)质点在稳定平衡位置附近做微小振动时的振动周期.(iii)如果,质点在稳定平衡点以速度 $\boldsymbol{v}$ 出发,求出在下列各种情形下速度大小 $v$ 的数值范围:(a)质点在稳定平衡附近振动;(b)质点逃逸至 $-\infty$;(c)质点逃逸至 $+\infty$.

[解] (i)平衡位置处应有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{c(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^3} = 0$$

故平衡点位于

$$x = \pm a$$

又

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=\pm a} = -\frac{2xc}{(a^2+x^2)^3}(3a^2-x^2)\Big|_{x=\pm a}$$

$$= \mp\frac{c}{2a^3}$$

因此,在 $x=-a$ 处 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}>0$,质点的势能为极小;$x=-a$ 处是质点的稳定平衡点.势能的示意曲线如图 L1.7 所示.

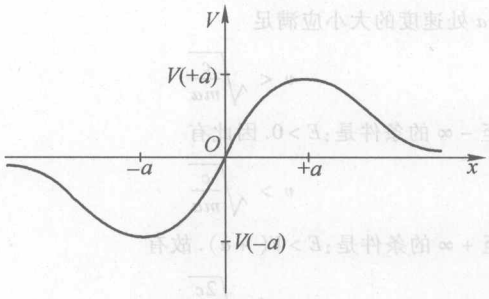



图 L1.7

(ii) 作用于质点的力为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i} = \frac{c(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}\boldsymbol{i}$$

质点在平衡点附近运动,则可将质点所受的力在 $x = -a$ 附近作泰勒(Taylor)展开,其数值为

$$F = -\frac{c}{2a^3}(x + a) + \cdots$$

由此,质点微小振动的运动方程是

$$\omega\ddot{x} \approx -\frac{c}{2a^3}(x + a)$$

或

$$\ddot{x} = \frac{c}{2ma^3}(x + a) = -\omega^2(x + a)$$

它具有简谐运动形式的解:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) - a$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{2ma^3}}$$

是质点微振动的圆频率.质点的振动周期则为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2ma^3}{c}}$$

(iii) 由于

$$V(x = \pm\infty) = 0$$

及

$$V(x = -a) = -\frac{c}{2a}, \quad V(x = +a) = \frac{c}{2a}$$

根据机械能守恒方程:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = E$$

注意动能必是正值,再结合图 L1.7 所示的势能曲线,即可判断下述各种情形下质点的速度大小 $v$ 应满足的条件.

(a) 质点在稳定平衡点附近振动的条件是

$$V(-a) < E < 0$$

故质点在平衡点 $x = -a$ 处速度的大小应满足

$$v < \sqrt{\frac{c}{ma}}$$

(b) 质点能逃逸至 $-\infty$ 的条件是:$E > 0$. 因此有

$$v > \sqrt{\frac{c}{ma}}$$

(c) 质点能逃逸至 $+\infty$ 的条件是:$E > V(+a)$. 故有

$$v < \sqrt{\frac{2c}{ma}}$$

[评注] 由势能函数的极小条件来判断质点运动的平衡状况,是极为有用的方法. 这个方法还可以推广应用到质点组运动稳定性问题的讨论. 读者必须熟练掌握.

## *§1.5 质点运动的相空间和相轨迹

前面几节中,我们曾用质点的坐标和速度来描写质点的运动. 我们也曾在§1.3中讲述动量定理时指出,动量比速度更能反映质点的动力学特性,动量的时间变化率直接反映了质点与其他物体间的相互作用,用坐标和动量来描写质点的运动状态更为适宜. 例如质点的总机械能用动量和坐标表示,则为

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) \tag{1.46}$$

质点任一时刻的位置矢量和动量矢量$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$可以表达质点在该瞬时的动力学状态(或称动力学**相貌**). 为了表达得更形象,可以想象一个由三个位置坐标和三个动量分量"坐标"支撑的六维空间,称作质点(力学系)的**动力学相空间**,简称**相空间**. 那么,任意时刻质点的动力学相貌可以用相空间中的一个确定的点来表示. 由$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$在相空间中确定的点叫做**相点**,相空间中任一时刻的相点,表达了质点(力学系)在该时刻的动力学状态(相貌). 随着时间 $t$ 的改变,质点(力学系)的位置和动量也相应地变化,与之相对应,质点的相点将在相空间中移动. 相点在相空间中移动的轨迹叫做**相轨迹**,简称**相迹**. 显然,相迹能反映出质点(系)动力学状态(相貌)随时间的变化情形. 相空间,相点和相迹是反映和研究质点(力学系)动力学状态的很有用的手段,在统计物理学研究方法中占有重要的地位. 下面介绍几个具体力学问题的相轨迹.

### (一) 一维简谐振子的相轨迹

一个质点受到一维弹性力作用时便成为一个一维的简谐振子. 例如,质量为 $m$ 的物体置于光滑桌面上,在水平方向受到一劲度系数为 $k$ 的弹簧的弹性力作用而沿弹簧方向运动,如图1.8所示,这个物体便是一个一维的简谐振子. 大家熟知,质量为 $m$ 的质点做简谐振动的运动微分方程是

$$m\ddot{x} = -kx$$

或写为 $$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

其中 $\omega^2 = k/m$，它的解是

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{1.47}$$

相应地，质点的动量表达式是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\dot{x}\boldsymbol{i} = p_x\boldsymbol{i} \\ &= -mA\omega\sin(\omega t + \phi)\boldsymbol{i} = -B\sin(\omega t + \phi)\boldsymbol{i} \end{aligned} \tag{1.48}$$

这里 $B = A\sqrt{km}$. 质点的动量只有 $x$ 方向的分量；$p = p_x$. 因此这个一维振子的相空间是由位置坐标 $x$ 和动量坐标 $p_x$ 支撑的二维（平面）空间，如图 1.9 所示. 如果振子静止于平衡点（此时弹簧为自然长度），相空间图 1.9 中的坐标原点 $O$ 就是振子处于稳定平衡状态的相点. 物体（质点）做简谐振动时，任一瞬时都具有确定的坐标和动量，相应的相点坐标是 $(x, p_x)$. 质点做简谐振动时，相点相应地在相空间中移动形成相迹. 由（1.47）式和（1.48）式消去时间参量 $t$，即得到相轨迹方程：

$$\frac{p_x^2}{m^2\omega^2A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \tag{1.49}$$

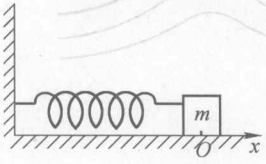



图 1.8

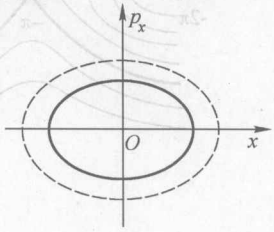



图 1.9

这是椭圆方程；不同初始条件下简谐振子具有不同的振幅 $A$ 和能量，对应于不同的椭圆相轨迹. 图 1.9 中分别用实线和虚线表示的两个椭圆，就分别代表振子的两种不同简谐振动状态的相轨迹.

### （二）单摆运动的相轨迹

一质量为 $m$ 的细小重物用长 $l$ 不可伸长的轻杆联结并悬挂于固定点 $O$，轻杆的质量可忽略不计，如图 1.10 所示，此系统便是**单摆**. 单摆又称**数学摆**. 将重物看成质点，给定适当的初始条件，使摆锤在铅直平面内绕定点运动. 由于杆的约束，摆锤的坐标和动量的分量分别为

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= -l\cos\theta \\ p_x &= m\dot{x} = ml\dot{\theta}\cos\theta \\ p_y &= m\dot{y} = ml\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

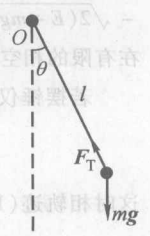



图 1.10

从上面的各关系式可见，只需两个参量 $\theta$ 和 $\dot{\theta}$ 就可完全确定摆锤的运动状态：$(x, y, p_x, p_y)$.

故摆锤的相空间实际上也可以用$(\theta,\dot{\theta})$①支撑的二维空间来表达.

取质点(摆锤)悬挂点 $O$ 处为零势能点,由机械能守恒方程

$$T+V=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta=E \tag{1.51}$$

给出了 $\dot{\theta}$ 与 $\theta$ 之间的函数关系,这便是单摆运动的相轨迹.单摆的各种不同运动状况,在图 1.11 中分别相应于各不同的相迹曲线.下面分别对摆锤运动的各种情况作讨论.

(1) $-mgl<E<mgl$

由(1.51)式

$$\dot{\theta}^2=\frac{2(E+mgl\cos\theta)}{ml^2} \tag{1.52}$$

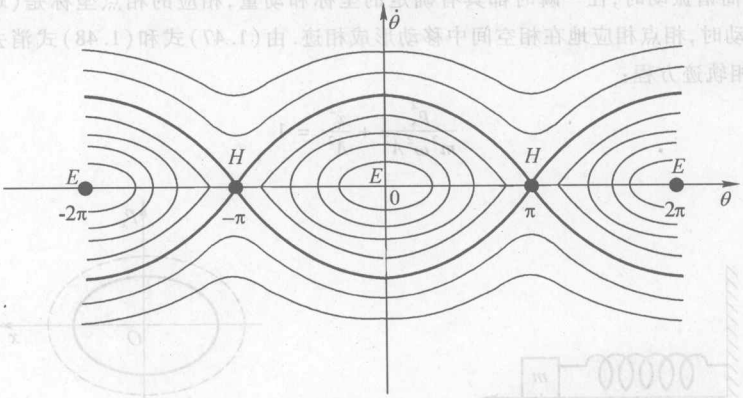



图 1.11

因为 $\dot{\theta}^2$ 恒大于零,故上式右边应大于零,则

$$\cos\theta\geqslant-\frac{E}{mgl} \tag{1.53}$$

而且若 $E+mgl\cos\theta=0$,即 $\theta=\theta_m=\pm\arccos(-E/mgl)$ 时,由(1.52)式知 $\dot{\theta}=0$;故 $\theta_m$ 是单摆具有机械能 $E$ 时,摆锤能摆动的最大角度.因而在能量范围 $-mgl<E<mgl$ 中,摆锤只能在 $-\theta_m\leqslant\theta\leqslant\theta_m$ 范围内摆动,且 $-\pi<\theta_m<\pi$,摆锤不能达到 $\theta=\pi$ 的最高点.由(1.52)式 $\dot{\theta}$ 在 $-\sqrt{2(E+mgl)/ml^2}$ 和 $\sqrt{2(E+mgl)/ml^2}$ 之间变动.可见这时 $\dot{\theta}$ 和 $\theta$ 都是有限的;相点只可能在有限的相空间范围内移动,即相轨迹必是围绕相空间坐标原点的闭合曲线.

若摆锤仅做微小摆动,在运动过程中 $\theta$ 为很小的数值,则有近似

$$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2} \tag{1.54}$$

这时相轨迹(1.52)式可写为

① 通常,与角度变量对应的"动量"是角动量,故用$(\theta,J)$作为相空间坐标较为适宜.由于角动量的数值 $J=ml^2\dot{\theta}$,$J\propto\dot{\theta}$,下面用$(\theta,\dot{\theta})$作坐标不会影响讨论的结果.

$$l\dot{\theta}^2 + g\theta^2 = \frac{2}{ml}(E + mgl) \tag{1.55}$$

是一个椭圆方程，单摆微小摆动时的相轨迹是围绕原点的椭圆曲线. 前面我们已经讨论过，这是简谐运动的相轨迹，即摆锤微小摆动时是简谐运动. 而相空间的坐标原点 $O$ 则是稳定平衡状态的相点，代表单摆静止于铅直位置处的状态. 那些围绕在相点 $O$ 附近的椭圆相迹，则是摆锤在平衡位置附近做简谐运动的相迹. 由此通常把稳定平衡相点叫做 $E$ 点(elliptic point)或**椭圆点**. 相点 $O$ 就是 $E$ 点；而且相空间 $\theta$ 轴上 $(\dot{\theta}=0)\theta = \pm 2n\pi (n=0,1,2,\cdots)$ 各点也都是 $E$ 点. 它们表示的都是摆锤位于最低处的稳定状态.

单摆做较大角度的摆动时，(1.54)式那样的近似不成立，相轨迹得由方程(1.52)表示. 因而离 $E$ 点稍远的相轨迹就不是椭圆了，摆动不再是简谐运动.

(2) $E = mgl$

将能量 $E$ 的数值代入(1.52)式，得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta + 1)$$

单摆在此能量条件下，摆角 $\theta$ 为任何值时上式都能成立，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$；$\dot{\theta}$ 的变动范围则为 $0 \leqslant |\dot{\theta}| \leqslant 2\sqrt{\frac{g}{l}}$. $\theta = \pm\pi$ 时，摆锤达到最高点，此时 $\cos(\pm\pi) = -1$，$\dot{\theta}=0$，摆锤就不能继续转动了. 我们将摆锤这种能量状况的相轨迹在图 1.11 中用粗线表示，称为**分隔线**(seperatrix). 有两条分隔线，分别描写摆锤两种不同方向的转动，它们相交于相空间中的 $H$ 点. 相点 $H$ 描写的是摆锤静止于最高点处的不稳定平衡状态. 邻近 $H$ 点的相轨迹呈双曲线状，故 $H$ 点又称**双曲点**(hyperbolic point). 容易看出，相空间 $\theta$ 轴上 $(\dot{\theta}=0)\theta = \pm(2n+1)\pi, (n=0,1,2,\cdots)$ 各相点都表达摆锤处于最高点处的不稳定状态，因而它们都是 $H$ 相点. 单摆具有机械能 $E = mgl$ 情形下，摆锤绕悬挂点 $O$ 顺时针或逆时针运动，会向最高点趋近，但不会越过最高点.

(3) $E > mgl$

由(1.52)式得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}(E + mgl\cos\theta)$$

现因机械能 $E > mgl$，故上式无论 $\theta$ 为何值都能成立，且恒有 $|\dot{\theta}| > 0$. 这表明摆锤绕定点做转动. 相应的相轨迹如图 1.11 中的波浪形曲线所示. 上半平面，$\dot{\theta} > 0$ 的相轨迹表示摆锤逆时针转动；下半平面 $\dot{\theta} < 0$ 的相轨迹描写摆锤顺时针转动. 由图 1.11 可见，分隔线($E = mgl$ 时的相轨迹)将相空间划分为两部分，在其内部区域，相轨迹为围绕椭圆点的闭合曲线，表示单摆往复摆动；在分隔线外部区域的相轨迹，则描写单摆绕定点做转动. 质点运动时机械能守恒，因而相空间中的每一条相轨迹都代表一定能量的质点运动；相轨迹是等能曲线. 不同的相轨迹，一般来说对应于不同能量的质点运动；不同能量的相轨迹是不可能相交的.

## 习　题

**1.1**　细杆 $OL$ 绕固定点 $O$ 以匀角速率 $\omega$ 转动，并推动小环 $C$ 在固定的钢丝 $AB$ 上滑动，$O$ 点与钢丝间的垂直距离为 $d$，如图 T1.1 所示. 求小环的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

$$\left(\boldsymbol{v}=\frac{d^2+x^2}{d}\omega\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}=\frac{2(d^2+x^2)x}{d^2}\omega^2\boldsymbol{i}\right)$$

**1.2**　椭圆规尺 $AB$ 的两端点分别沿相互垂直的直线槽 $Ox$ 及 $Oy$ 滑动. 已知 $B$ 端以匀速 $c$ 运动(如图 T1.2 所示). 求椭圆规尺上 $M$ 点的轨道方程，速度及加速度的大小 $v$ 和 $a$.

$$\left(v=\frac{c}{d+b}\sqrt{d^2+b^2\cot^2\theta},\quad a=\frac{bc^2}{(d+b)^2\sin^3\theta}\right)$$

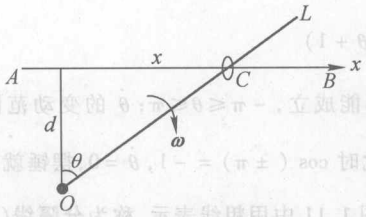



图 T1.1

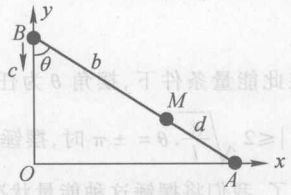



图 T1.2

**1.3**　一半径为 $r$ 的圆盘以匀角速度 $\omega$ 沿一直线滚动(如图 T1.3 所示). 求圆盘边上任意一点 $M$ 的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$(以 $O$、$M$ 点的连线与铅直线间的夹角 $\theta$ 表示)；并证明加速度矢量总是沿圆盘半径指向圆心.

$$(\boldsymbol{v}=r\omega(1+\cos\theta)\boldsymbol{i}-r\omega\sin\theta\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=-r\omega^2\boldsymbol{e}_r)$$

**1.4**　一半径为 $r$ 的圆盘以匀角速度 $\omega$ 在一半径为 $R$ 的固定圆形槽内做无滑动地滚动(如图 T1.4 所示). 求圆盘边上 $M$ 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$(用参量 $\theta$ 和 $\varphi$ 表示).

$$(\boldsymbol{v}=-r\omega\sin(\theta-\varphi)\boldsymbol{e}_R+r\omega[\cos(\theta-\varphi)-1]\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{r\omega^2}{R-r}\{[(R-r)\cos(\theta-\varphi)-r]\boldsymbol{e}_R-(R-r)\sin(\theta-\varphi)\boldsymbol{e}_\theta\})$$

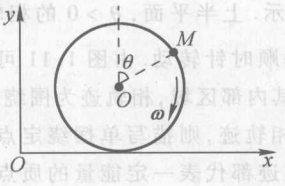



图 T1.3

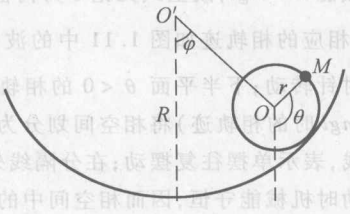



图 T1.4

**1.5**　已知某质点的运动规律是 $y=bt$，$\theta=ct$，$b$ 和 $c$ 都是非零常数. (i) 写出质点轨道的极坐标方程；(ii) 用极坐标表示出质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

$$\left(\boldsymbol{v}=\frac{b}{\sin\theta}[(1-\theta\cot\theta)\boldsymbol{e}_r+\theta\boldsymbol{e}_\theta],\quad \boldsymbol{a}=\frac{2bc}{\sin\theta}(\theta\cot\theta-1)(\cot\theta\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{e}_\theta)\right)$$

**1.6** 已知一质点运动时,径向和横向的速度分量分别是 $\lambda r$ 和 $\mu\theta$,这里 $\lambda$ 和 $\mu$ 是常数.求出质点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$.

$$\left(\boldsymbol{a}=\left[\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\right]\boldsymbol{e}_r+\mu\theta\left[\lambda+\frac{\mu}{r}\right]\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

**1.7** 质点做平面运动,其速率保持为常量.证明质点的速度矢量与加速度矢量正交.

**1.8** 一质点沿心脏线 $r=k(1+\cos\theta)$ 以恒定速率 $v$ 运动.求出质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$.

$$\left(\boldsymbol{v}=v\left(-\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_r+\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\theta\right),\quad \boldsymbol{a}=\frac{3v^2}{4k}\left[-\boldsymbol{e}_r+\tan\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\theta\right]\right)$$

**1.9** 已知质点的极坐标按 $r=e^{\alpha t}$,$\theta=\beta t$ 运动.分别求出质点加速度矢量的切向和法向分量;径向分量和横向分量.

$$(a_\tau=\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t},\quad a_n=\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t};$$
$$a_r=(\alpha^2-\beta^2)e^{\alpha t},\quad a_\theta=2\alpha\beta e^{\alpha t})$$

**1.10** 质点以恒定速率 $c$ 沿一旋轮线运动,旋轮线方程为 $x=R(\theta+\sin\theta)$,$y=-R(1+\cos\theta)$.证明,质点在 $y$ 方向做等加速运动.

**1.11** 一质点沿着 $y^2=2px$ 抛物线运动,其切向加速度的量值是法向加速度量值的 $-2k$ 倍.若此质点从正焦弦的一端$(p/2,p)$以速率 $u$ 出发.求质点到达正焦弦的另一端点$(p/2,-p)$时的速率 $v$.$(v=ue^{-k\pi})$

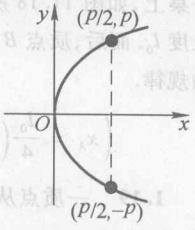


图 T1.11

**1.12** 竖直上抛一小球,若空气阻力恒定.证明小球上升的时间比下落至原地点的时间短.

**1.13** 质量为 $m$ 的质点,自离地面 $h$ 高度处自静止竖直地自由下落.若空气阻力与质点速度的平方成正比,比例常数为 $C$,试讨论此质点下落过程中的运动状况.

**1.14** 将一质量为 $m$ 的质点以初速率 $v_0$ 与水平线成 $\alpha$ 角度抛出,此质点受到的空气阻力是其速度的 $mk$ 倍,这里 $k$ 是常数.试求当此质点的速度与水平线之间的夹角又为 $\alpha$ 时所需的时间.$\left(t=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{2v_0k\sin\alpha}{g}\right)\right)$

**1.15** 一质量为 $m$ 的质点用一长是 $l$ 的不可伸长轻绳悬挂于一小环上,小环的质量是 $3m/2$,穿在一固定的水平钢丝上.开始时小环静止,质点下垂,处于平衡状态.今若沿钢丝的水平方向给质点以大小为 $\sqrt{2gl}$ 的初速度.若轻绳与铅垂线之间的夹角是 $\theta$ 时,小环在钢丝上仍不发生滑动,证明钢丝与小环间的摩擦因数至少是 $1/\sqrt{3}$,此时绳中的张力大小为 $F_T=3mg\cos\theta$.

**1.16** 轻质滑轮上绕有轻绳,绳端与一弹簧的一个端点联结,弹簧的另一端挂一质量为 $m$ 的质点,如图 T1.16 所示.当滑轮以匀角速转动时,质点以匀速率 $v_0$ 下降.今若滑轮突然停止转动,试求弹簧的最大伸长及弹簧中的最大张力大小.已知弹簧受力 $W$ 作用时的静止伸长

是 $\lambda_0$.

$$\left(\lambda = \frac{mg}{W}\lambda_0 + v_0\sqrt{\frac{m\lambda_0}{W}}, F_T = mg + v_0\sqrt{\frac{Wm}{\lambda_0}}\right)$$

**1.17**　两个同样的轻质弹簧,劲度系数为 $k$,自然长度是 $l_0$,在它们中间竖直地串接一质量为 $m$ 的质点.弹簧的另外两个端点分别固定于 $A$ 点和 $B$ 点,如图 T1.17 所示.$A$、$B$ 间的高度差是 $3l_0/2$.设开始时质点静止于 $AB$ 的中点,求质点的运动规律.

$$\left(x = \frac{mg}{2k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)\right)$$

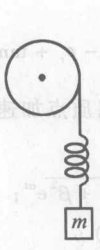



图 T1.16

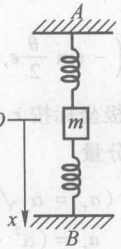



图 T1.17

**1.18**　两质量都是 $m$ 的质点 $A$ 和质点 $B$ 用一自然长度为 $a$ 的轻质弹簧相连置于光滑水平桌上,如图 T1.18 所示.弹簧的劲度系数为 $k$.开始时刻,两质点处于静止状态,弹簧呈自然长度 $l_0$.而后,质点 $B$ 沿 $AB$ 方向受到一大小为 $ka$ 的恒力作用.分别求出质点 $A$ 和质点 $B$ 的运动规律.

$$\left(x_A = \frac{l_0}{4}\left(\frac{\omega^2}{2}t^2 + \cos\omega t - 1\right), x_B = \frac{l_0}{4}\left(\frac{\omega^2}{2}t^2 - \cos\omega t + 5\right);\quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$$

**1.19**　一质点从一光滑圆柱表面最高点处自静止自由下滑,见图 T1.19.问质点滑至何处将脱离圆柱表面? $\left(\theta = \arccos\frac{2}{3}\right)$

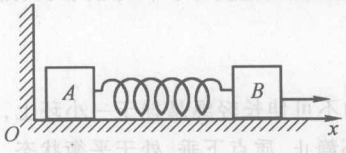



图 T1.18

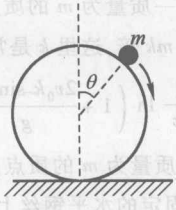



图 T1.19

**1.20**　一钢丝弯成尖端朝上的摆线:$x = a(\varphi - \sin\varphi)$,$z = a(1 + \cos\varphi)$,上面穿有一质量为 $m$ 的小环,如图 T1.20 所示.今若小环在钢丝的最低点处获得大小为 $v_0$ 的初速度,使之沿摆线滑动.求出当小环的速度方向与水平线成 $\alpha$ 角度时,小环的速率 $v$.已知小环与钢丝间的摩擦因数为 $\mu$.

$$\left(v = \left\{\left(v_0^2 + \frac{4ag\mu^2}{1+\mu^2}\right)e^{-\mu(\varphi-\pi)} + \frac{2ga}{1+\mu^2}[2\mu\sin\varphi + (\mu^2 - 1)\cos\varphi + \mu^2 + 1]\right\}^{1/2}\right)$$

**1.21** 如图 T1.21 所示，用细线将一质量为 $m'$ 的圆环挂起来，环上套有两个质量都是 $m$ 的小环，它们可以在大环上无摩擦地滑动. 若两小环同时从大环顶部由静止向两边滑动. 证明：如果 $m > 3m'/2$，大环将会升起；此时角 $\theta$ 是多大？

$$\left(\theta = \arccos\left[\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3m'}{2m}}\right)\right]\right)$$

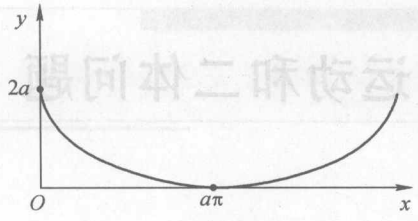



图 T1.20

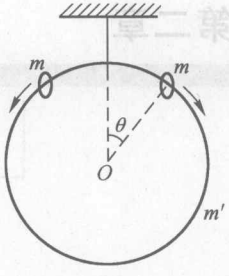



图 T1.21

# 第二章

# 有心运动和二体问题

经典力学的发展是与对天体运行的观察和研究分不开的. 早在 17 世纪初叶,开普勒(J. Kepler)通过对太阳系各行星运动的观察,总结出行星运动的三个定律,于1620 年发表在《论天体之协调》(On Celestial Harmonics)一书中. 在此基础上,牛顿建立了著名的万有引力定律. 行星绕恒星的运动属于所谓"有心运动"一类的运动.

如果运动质点受到的力及其作用线总是通过空间某一固定点,这样的力叫做**有心力**或**辏力**,力所指向或背向的固定点叫做**力心**. 指向力心的有心力叫做引力,背向力心的是斥力. 有心力的量值,一般只是力心与质点间距离 $r$ 的函数. 在有心力作用下质点的运动叫做**有心运动**. 有心运动是一类常见的运动、天体的运行、原子核外的电子运动都属于这类运动. 火箭和人造卫星的发射和运行都离不开对有心运动的研究.

## §2.1 有心力和有心运动

### (一) 基本特性

取力心为惯性系坐标的原点,则质点受到的有心力可按定义写为

$$\boldsymbol{F} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = F(r)\boldsymbol{e}_r \tag{2.1}$$

这里,$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ 是质点的位置矢量. 由此立即可以知道有心力对于力心的力矩为零. 因为有心力的方向总是通过力心,对于力心(坐标原点)的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{F(r)}{r}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} \equiv 0$$

其次，很容易证明有心力是无旋的，满足 $\nabla \times \boldsymbol{F}(r) = 0$[①]，有心力是保守力. 根据有心力的特点，立即可以推得质点有心运动的一些基本特性.

1. 有心运动质点的动量矩守恒

既然质点受到的有心力对于力心的力矩为零，由动量矩定理立即可知，质点在运动过程中对力心（坐标原点）的动量矩守恒. 即

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}_0 = \text{常矢量} \tag{2.2}$$

2. 有心运动质点的平面运动

由于角动量 $\boldsymbol{L}$ 与质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 及速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 都垂直，而质点的角动量却是一恒定矢量，因而质点的位矢和速度都只能在与角动量 $\boldsymbol{L}(=\boldsymbol{L}_0)$ 垂直的平面内. 质点的有心运动只能是平面运动，即有心运动的轨道曲线是平面曲线；质点的运动平面，是由质点的初始位矢和初始速度矢量所决定的.

3. 有心运动质点的机械能守恒

作用于质点的有心力是保守力，可以用一标量函数（势函数）$V(r)$ 来表示

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(r)$$

质点具有势能

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)\,\mathrm{d}r + V(r_0) \tag{2.3}$$

质点的总机械能守恒

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = \text{常量}$$

### （二）运动方程

前面讨论了有心力和质点有心运动的一些特点，对求解有心运动问题提供了有利的帮助. 求解有心运动问题时，采用平面极坐标系求解是最为适宜的. 取运动平面为极坐标平面，角动量矢量则与极坐标平面垂直. 则质点的运动微分方程可写为

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r = F(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

上面的第二个方程很容易积分，注意到

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}$$

---

① 采用极坐标系，

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(r) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\partial}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) \times \boldsymbol{F}(r) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\partial}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) \times F(r)\boldsymbol{e}_r$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial F(r)}{\partial\theta}\boldsymbol{k} = 0$$

因而有

$$\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = 0$$

立即得出第一积分：

$$r^2\dot{\theta} = h$$

这里 $h$ 是积分常数. 实际上，这个积分表达了质点的角动量守恒；由(2.2)式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= L_0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}\\ &= m\boldsymbol{r}\times(\dot{r}\boldsymbol{r} + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L_0}{m} = h \tag{2.5}$$

由此，对于有心运动，通常是在给定的初始条件下求解下列方程组：

$$\begin{cases}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{F(r)}{m}\\ r^2\dot{\theta} = h\end{cases} \tag{2.6}$$

除这两个方程外，还可利用机械能守恒方程

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \tag{2.7}$$

在上列三个方程中，只需适当选取两个独立方程，便可解得质点的运动.

**(三) 轨道微分方程**

关于有心运动，人们感兴趣的常常是质点的运动轨道. 虽然我们可以通过求解运动方程(2.6)，先得到以时间 $t$ 为参量的轨道参量方程 $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$ 然后消去 $t$ 得出轨道曲线方程 $r=r(\theta)$. 但也可以一开始就在运动方程中消去时间变量 $t$ 获得轨道微分方程，然后求轨道微分方程的解得出轨道曲线方程.

注意到

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

式中已利用关系式(2.5). 再引进变换：

$$u = \frac{1}{r} \tag{2.8}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\theta} &= hu^2\\ \dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\\ \ddot{r} &= -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

代入运动方程(2.6)中第一式,即得轨道微分方程:

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=F(u) \tag{2.10}$$

这个方程也称**比内(Binet)公式**,是二阶非线性微分方程.对此求解可得 $u=u(\theta)$,从而得到质点的轨道方程 $r=1/u(\theta)=r(\theta)$.

## §2.2 距离平方反比引力作用下的质点运动

### (一) 轨道

万有引力或两异性点电荷之间的静电力,都是与距离平方成反比的引力.它们都具有如下形式:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.11a}$$

令 $u=1/r$,则

$$F(\boldsymbol{r})=F(u)=-k^2u^2 \tag{2.11b}$$

这里,$k^2$是与力的性质有关的常量.为求质点的运动轨道,将此式代入轨道微分方程——比内公式(2.10),可得方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-u+\frac{k^2}{mh^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(u-\frac{k^2}{mh^2}\right)=-\left(u-\frac{k^2}{mh^2}\right) \tag{2.12}$$

这是简谐振动类型的微分方程,容易得出它的解为

$$u=\frac{1}{r}=\frac{k^2}{mh^2}+A\cos(\theta-\theta_0)$$

或

$$r=\frac{1}{\dfrac{k^2}{mh^2}+A\cos(\theta-\theta_0)}=\frac{\dfrac{mh^2}{k^2}}{1+\dfrac{mh^2}{k^2}A\cos(\theta-\theta_0)}$$

其中,$A$ 和 $\theta_0$都是积分常数,由初始条件确定;$h$ 与质点的动量矩相关[见(2.5)式].若令

$$p=\frac{mh^2}{k^2} \tag{2.13}$$

$$e=\frac{mh^2}{k^2}A \tag{2.14}$$

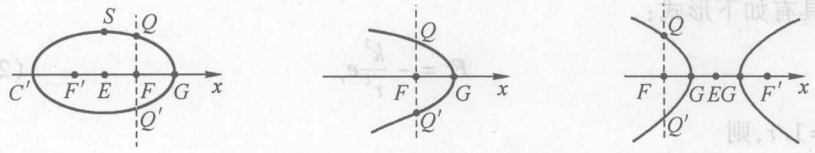
则轨道方程可写为

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

只需适当选取极坐标轴($x$ 轴)的方向,在上式中便可以取 $\theta_0 = 0$. 则质点有心运动的轨道极坐标方程可写成

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{2.15}$$

这是极坐标下典型的圆锥曲线方程,力心(坐标原点)位于圆锥曲线的焦点. 式中 $e$ 称为轨道的偏心率,$p$ 是圆锥曲线正焦弦长度的一半. 椭圆、抛物线和双曲线都是圆锥曲线,取决于偏心率 $e$ 的数值,它们的曲线形状分别如图 2.1 所示。




椭圆 ($e<1$)　　抛物线 ($e=1$)　　双曲线 ($e>1$)

图 2.1

**(二) 轨道的特性**

从轨道方程(2.15)易知,质点位于 $\theta = 0$ 的位置离力心的距离最短;若为椭圆轨道,则在 $\theta = \pi$ 处离力心最远. 轨道上质点离力心最近和最远的这两个点,分别称为**近日点**和**远日点**.

椭圆轨道的近日点和远日点的距离分别是

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}, \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - e} \tag{2.16}$$

由于在近日点和远日点处质点离开力心的距离取极值,故这两点处质点的径向速度为零,即 $\dot{r} = 0$;在近日点和远日点处,质点的径向速度为零.

现在考察在与距离平方成反比的引力作用下,质点有心运动的机械能.

取无穷远处为势能零点,则按(2.3)式计算质点的势能,有

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,\mathrm{d}r = \int_{\infty}^{r} \frac{k^2}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{k^2}{r} \tag{2.17}$$

质点在运动中各处的总机械能守恒,计算质点总机械能最方便的办法是在近日点(或远日点)处进行:

$$E = T + V = \frac{m}{2}(r_{\min}^2\dot{\theta}^2) - \frac{k^2}{r_{\min}} = \frac{k^4}{2mh^2}(e^2 - 1) \tag{2.18}$$

这里已应用了关系式(2.5)、(2.13)和(2.16).由上式可见,质点的总机械能 $E$ 与轨道的偏心率 $e$ 直接相关;由此式还可反过来求出轨道偏心率 $e$ 跟质点机械能 $E$ 的关系:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2mh^2}{k^4}E} \tag{2.19}$$

此式给出了轨道偏心率 $e$ 与动力学常量——总机械能 $E$ 和角动量常数 $h$ 之间的关系.

质点的总机械能 $E$ 与轨道偏心率相关,决定着质点轨道的类型.

1. $E<0(e<1)$——椭圆

质点的机械能 $E<0$,则由关系式(2.19)可知,质点轨道的偏心率 $e<1$.由轨道方程(2.15),质点在任意 $\theta$ 位置处 $1+e\cos\theta\neq 0$,故矢径的长度 $r$ 总是有限;轨道是闭合曲线,为椭圆.从物理上分析,由于质点没有足够的能量达到无穷远处(那里势能为0),只能围绕力心在有限空间范围内运动,故是椭圆轨道.

2. $E=0(e=1)$——抛物线

质点在 $\theta=\pi$ 处 $1+\cos\theta=0$,该处 $r\to\infty$;这表示轨道在 $\theta=\pi$ 处"开口",这是抛物线形轨道.这是因为质点具有的能量,恰可使其到达无穷远处,脱离力心的束缚.

3. $E>0(e>1)$——双曲线

在 $\theta=\pm\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$ 处 $1+e\cos\theta=0$,$r\to\infty$;这是两条渐近线的位置,轨道为双曲线.质点具有充分的能量脱离力心的吸引.

地球等行星围绕太阳的运动,原子中的电子绕原子核的运动,它们的能量都小于零,运行的轨道都是椭圆轨道.彗星的轨道呈抛物线或双曲线状.发射宇宙飞船最小的能量是零①,使飞船按抛物线形轨道飞离地球.这里不打算分别对这三种类型的轨道详细讨论,仅对椭圆轨道的特性作些初步介绍.

椭圆轨道的半长轴长度 $a$ 很容易从近日点和远日点的距离求得:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{(1-e^2)} = -\frac{k^2}{2E} \tag{2.20}$$

这个关系告诉我们,椭圆轨道的半长轴长度只与质点的能量有关,而与角动量无关;给定了质点的总机械能,轨道的半长轴的长度也就确定了.

① 请注意!能量为零,切不能理解为发射宇宙飞船不需要能量.由于我们设定无限远处的势能为零,在地面发射场处飞船具有很大的负势能值,需具有很大的动能与之相抵,飞船的机械能才能为零.

以 $h = L_0/m$ 代入(2.19)式,得

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E}{mk^4}} \tag{2.21}$$

这里 $L_0$ 是质点角动量的数值.这个式子表示质点的能量 $E$ 给定后,轨道的偏心率由质点的角动量大小 $L_0$ 确定;角动量越小,椭圆轨道的偏心率就越大(注意 $E<0$),轨道越扁.如图 2.2 所示的几个椭圆轨道(包括圆轨道)其长轴的长度相同,质点在这些轨道上运动具有相同的总机械能.但它们的偏心率却各不相同,因而它们具有不同的角动量.原子中可能存在几个电子具有相同的能量,但因角动量不同,分别按不同偏心率的轨道运动.这正是原子的经典模型.虽然像原子这样的微观客体,经典力学不可能正确描述,但还是能给出一些有益的图像,给人们以启迪.

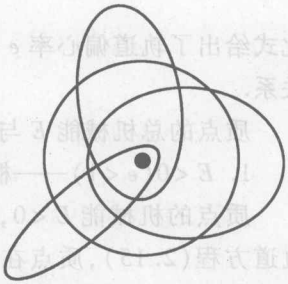


图 2.2

[例 2.1]　质量为 $m$ 的人造地球卫星,以半径为 $r_1$ 的圆轨道 1 绕地球转动.今欲使此卫星在同一轨道平面内,改成以 $r_2$ 为半径的较大圆轨道 2 运动.为达此目的,卫星在轨道 1 处借助火箭增加速度,先使卫星沿一与两圆轨道共切的椭圆形转移轨道运动,到达预定轨道 2 时再适当增加速度,进入圆轨道 2 运动,如图 L2.1 所示.求出卫星分别在轨道 1 和 2 处的速度增加值 $\Delta v_1$ 和 $\Delta v_2$.设卫星轨道都在大气层外,不受空气阻力作用;地球质量为 $m'$,引力常量是 $G$.

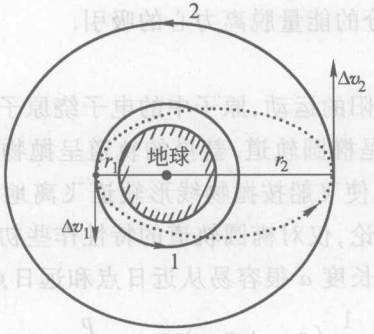



图 L2.1

[解]　按题意,$k^2 = Gmm'$.由(2.20)式,卫星以圆轨道 1 绕地球转动的能量为

$$E_1 = -\frac{k^2}{2r_1} = \frac{m}{2}v_1^2 - \frac{k^2}{r_1} \tag{1}$$

以圆轨道 2 转动时的能量是

$$E_2 = -\frac{k^2}{2r_2} = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{k^2}{r_2} \tag{2}$$

为实现卫星的轨道转移,设卫星按椭圆转移轨道运动时应具有能量 $E$,则在圆轨道 1 和椭圆轨道切点处有

$$E = -\frac{k^2}{2a} = -\frac{k^2}{r_1 + r_2} = \frac{m}{2}v_1'^2 - \frac{k^2}{r_1} \tag{3}$$

这里已注意到椭圆长轴的长度 $a = r_1 + r_2$. 在轨道 2 与椭圆轨道切点处

$$E = -\frac{k^2}{r_1 + r_2} = \frac{m}{2}v_2'^2 - \frac{k^2}{r_2} \tag{4}$$

从上列(1)—(4)式,可分别求出

$$v_1 = k\sqrt{\frac{1}{mr_1}}, v_2 = k\sqrt{\frac{1}{mr_2}}, v_1' = k\sqrt{\frac{2r_2}{mr_1(r_1 + r_2)}}, v_2' = \sqrt{\frac{2r_1}{mr_2(r_1 + r_2)}}$$

故有

$$\Delta v_1 = v_1' - v_1 = \sqrt{\frac{k^2}{mr_1}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right] = \sqrt{\frac{Gm'}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right] \tag{5}$$

同样得

$$\Delta v_2 = v_2 - v_2' = \sqrt{\frac{Gm'}{r_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right] \tag{6}$$

[例 2.2] 彗星的轨道为抛物线,其近日点距离是地球轨道(假定为圆轨道)半径的 $1/n$. 求证此彗星在地球轨道内运行的时间是一年的 $\frac{2(n+2)}{3\pi n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ 倍.

[解] 设太阳、地球和彗星的质量分别为 $m_s$、$m_e$ 和 $m_c$,引力常量为 $G$;地球半径为 $R$. 注意到彗星抛物轨道的偏心率 $e = 1$,及近日点距离是 $R/n$,按(2.16)式有

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{2} = \frac{R}{n}, \quad 得\ p = \frac{2R}{n}$$

故彗星的轨道方程应是

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{2R}{n(1 + \cos\theta)} \tag{1}$$

彗星轨道与地球轨道的交点位于:$r = R, \theta = \pm\theta_0$ 处,如图 L2.2 所示. $\theta_0$ 可由下式确定:

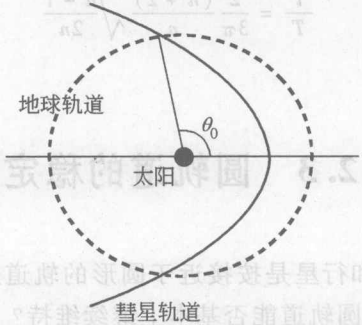



图 L2.2

$$R = \frac{2R}{n(1+\cos\theta_0)}$$

得

$$\cos\theta_0 = \frac{2}{n} - 1, \theta_0 = \pm\arccos\left(\frac{2}{n} - 1\right) \tag{2}$$

由彗星角动量守恒，$r^2\dot{\theta} = h$，得

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = \frac{h(1+\cos\theta)^2}{p^2} \tag{3}$$

故彗星在地球轨道内运行的时间由(3)式积分得

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = \frac{p^2}{h}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{p^2}{h}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}(\theta/2)}{\cos^4\frac{\theta}{2}} = \frac{p^2}{h}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{3\cos^3\frac{\theta}{2}} + \frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}\right)_0^{\theta_0}$$

式中已应用三角关系 $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. 由(2)式 $\cos^2(\theta_0/2) = 1/n$, $\sin^2(\theta_0/2) = 1 - \cos^2(\theta_0/2) = (n-1)/n$. 由此

$$t = \frac{p^2}{h}\frac{(n+2)\sqrt{n-1}}{3} = \frac{(n+2)\sqrt{n-1}}{3\sqrt{Gm_s}}\left[\frac{2R}{n}\right]^{3/2} \tag{4}$$

这里已根据(1)式及 $p$ 的定义(2.13)式，和 $k^2 = Gm_s m_c$ 得

$$p = \frac{m_c h^2}{k^2} = \frac{2R}{n} \quad 和 \quad \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{m_c}{k^2 p}} = \sqrt{\frac{n}{2RGm_s}}$$

地球以圆轨道绕太阳匀速转动，轨道半径是 $R$. 设角速度是 $\omega$，则有

$$\omega^2 R = \frac{Gm_s}{R^2}$$

地球绕太阳运动的周期(一年)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{Gm_s}} \tag{5}$$

由此彗星在地球轨道内运行的时间与地球运动周期之比为

$$\frac{t}{T} = \frac{2}{3\pi}\frac{(n+2)}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

问题得证.

## §2.3 圆轨道的稳定性

许多人造地球卫星和行星是按接近于圆形的轨道运动的. 质点按圆轨道运行时如果受到微小扰动，圆轨道能否基本上继续维持？换句话说，质点因沿轨道径向发生某种干扰而稍许偏离圆形轨道，质点能否维持在原来的圆轨道附近运

动,而不致使偏离不断扩大?即轨道是否稳定?显然,轨道的稳定性有着现实的重要意义.现在我们来一般地讨论质点受有心引力作用时,圆形轨道的稳定性问题.[①]设有心力的势场是 $V(r)$,则有心力为

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r = -\nabla V(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$$

这里,$V(r)$是势能函数.由机械能守恒方程(2.7)式及角动量守恒方程(2.5)式,得

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + V(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) \end{aligned} \tag{2.22}$$

这个方程等效于质点沿矢径方向做一维运动的机械能守恒方程,而 $U(r)$则是相应的等效势能函数:

$$U(r) = \frac{mh^2}{2r^2} + V(r) \tag{2.23}$$

我们已在§1.5中知道如何根据势函数来判断平衡的稳定性.平衡的条件是

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{mh^2}{r^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{mh^2}{r^3} - F(r) = 0$$

此式的最后一个等式恰好是质点绕力心做圆运动时的方程[②].设圆轨道的半径为 $r_0$,则

$$-\frac{mh^2}{r_0^3} = F(r_0) \tag{2.24}$$

而 $r = r_0$(圆轨道)的稳定条件是有效势函数的二阶导数大于零:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0} = \left(\frac{3mh^2}{r^4} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0} = \frac{3mh^2}{r_0^4} - F'(r_0) > 0$$

式中 $F' = (\mathrm{d}F/\mathrm{d}r)_{r_0} = -(\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}r^2)_{r_0}$,注意关系式(2.24),即得稳定条件

$$-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0) > 0 \tag{2.25}$$

为具体讨论,设引力的大小与距离成 $n$ 幂次关系,即

$$F(r_0) = -k^2 r_0^n \tag{2.26}$$

---

① 关于保守力学系(仅受保守力作用的力学系统),Kolmogorov、Arnold 和 Moser 一般地证明了一条重要定理——KAM 定理,表明如果只要扰动充分地小,则力学系将基本维持未扰动时的轨道.参见§6.7.

② 注意做圆运动时,$h = L/m = rv$.

$$F'(r_0) = -nk^2 r_0^{n-1}$$

则按(2.25)式,有

$$3k^2 r_0^{n-1} + nk^2 r_0^{n-1} > 0$$

可见圆轨道稳定的条件是

$$n > -3$$

对于与距离平方成反比的引力来说,$n = -2$,上面的条件是满足的;质点受平方反比引力作用的圆轨道是稳定的.

[例 2.3] 一质量为 $m$ 的质点在势场 $V = Kr^3$, $K > 0$ 的有心力场中运动. 问:(i)质点做圆轨道运动的周期 $T$ 是多少?(ii)当质点做半径为 $r_0$ 的圆周运动时,其角动量多大?(iii)若质点对于 $r = r_0$ 的圆轨道,在径向有一微小偏离,则质点在径向 $r = r_0$ 附近的微振动周期 $T'$ 是多大?

[解] (i)

$$\boldsymbol{F}(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = -3Kr^2\boldsymbol{e}_r$$

做 $r = r_0$ 圆运动时,有

$$m\frac{v^2}{r_0} = mr_0\omega^2 = -F_r = 3Kr_0^2 \tag{1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3Kr_0}{m}}$$

圆运动周期是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3Kr_0}} \tag{2}$$

(ii) 由(1)式可得

$$L = r_0 mv = \sqrt{3mKr_0^5}$$

故转动的角动量为

$$\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{e}_z = \sqrt{3mKr_0^5}\,\boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

常量

$$h = \frac{L}{m} = \sqrt{\frac{3Kr_0^5}{m}} \tag{4}$$

(iii) 当质点运动在径向发生微小偏离 $\xi$ 时,可设

$$r = r_0 + \xi$$

将其代入质点的极坐标运动方程:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{3K}{m}r^2, \quad r^2\dot{\theta} = h$$

得关于 $\xi$ 的方程:

$$\ddot{\xi} - \frac{h^2}{(\xi + r_0)^3} = -\frac{3K}{m}(\xi + r_0)^2 \tag{5}$$

由于 $\xi$ 是小量,作泰勒展开:

$$\frac{1}{(\xi + r_0)^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\frac{\xi}{r_0} + 6\frac{\xi^2}{r_0^2} + \cdots\right)$$

将此式代入(5)式,仅保留 $\xi$ 的一次项,并注意关系式(4),则(5)式可近似地写成

$$\ddot{\xi} = -3\left(\frac{2Kr_0}{m} + \frac{h^2}{r_0^4}\right)\xi = -\frac{15Kr_0}{m}\xi \tag{6}$$

这是典型的谐振动微分方程,表明质点基本上维持圆形轨道,只是质点离力心距离在 $r_0$ 附近有简谐振动式的变化,振动角频率为

$$\Omega = \sqrt{\frac{15Kr_0}{m}}$$

质点运动在径向 $r = r_0$ 附近的微振动周期为

$$T' = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{15Kr_0}}$$

[评注] 关于微振动周期 $T'$ 还可以从能量方程出发来计算. 由(2.22)式,质点的机械能守恒方程为

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mh^2}{2r^2} + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) = E \tag{7}$$

这里 $U(r)$ 是等效势能函数:

$$U(r) = \frac{mh^2}{2r^2} + V(r)$$

对于微小偏离圆轨道情形,$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \xi$. 将 $U(r)$ 在 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ 附近作泰勒展开:

$$U(r) = U(r_0) + \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0}\xi + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}\xi^2 + \cdots \tag{8}$$

注意到(1)式

$$-F_r(r_0) = \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0} = \frac{mv^2}{r_0} = \frac{mh^2}{r_0^3}$$

故有

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = -\frac{mh^2}{r_0^3} + \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0} = \frac{3mh^2}{r_0^4} + \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0} = \frac{3mh^2}{r_0^4} + 6Kr_0$$

将(7)式的两边对时间求导数,有

$$m\ddot{r}\dot{r} + \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}t} = 0$$

注意 $r = r_0 + \xi, \dot{r} = \dot{\xi}, \ddot{r} = \ddot{\xi}$,并将 $U(r)$ 的近似式(8)代入,则得

$$m\dot{\xi}\ddot{\xi} = -\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0}\dot{\xi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}2\xi\dot{\xi} + \cdots$$

$$\approx -3\left(\frac{mh^2}{r_0^4} + 2Kr_0\right)\xi\dot{\xi}$$

以(4)式中的 $h$ 值代入,即得关于 $\xi$ 的方程(6):

$$\ddot{\xi} = -\frac{15Kr_0}{m}\xi$$

由此可得出同样的质点径向振动周期 $T'$.

## §2.4 距离平方反比的斥力作用——α粒子的散射

### (一) 散射轨道 散射角

卢瑟福(E. Rutherford)等人用 α 粒子穿过金箔的散射实验,证实原子核的电荷是集中在 $10^{-14}$m 的微小区域内的.这一实验对于原子经典模型的建立起过重要作用.α 粒子是失去电子的氦核粒子,电荷量为 $q=+2e$,$e$ 是电子电荷的绝对值.当 α 粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 射向一原子序数为 $Z$ 的靶原子时,受到靶原子核电荷 $Q=Ze$ 的库仑力作用而发生散射.

在下面的计算中,把 α 粒子和靶原子核都当作点电荷,且认为靶核固定不动.α 粒子受到原子核的库仑斥力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.27}$$

这里

$$k^2=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2.28}$$

从力的数学表达形式(2.27)看,与距离平方反比引力的表达式(2.11a)非常相似,只是那里的 $-k^2$ 在这里换成(2.28)式的 $k^2$;因而只需重复 §2.2 中的演算,即可得 α 粒子的轨道方程:

$$u=\frac{1}{r}=-\frac{k^2}{mh^2}+A\cos(\theta-\theta_0)$$

或

$$r=\frac{-|p|}{1-e\cos(\theta-\theta_0)}$$

这里,$|p|=\dfrac{mh^2}{k^2}$;偏心率:$e=\dfrac{mh^2}{k^2}A$.只要适当选定坐标极轴的方向,轨道方程可写为

$$r=\frac{-|p|}{1+e\cos\theta} \tag{2.29}$$

如图 2.3 所示,设 α 粒子自无穷远处以速率 $v_0$ 射向靶原子核,瞄准的偏差距离为 $\rho$,则其动量矩(角动量)常量为 $L_0=mv_0\rho$,故

$$h=\frac{L_0}{m}=v_0\rho \tag{2.30}$$

$\rho$ 称为质点的**瞄准距离**,或**碰撞参量**.取无穷远处势能为零,质点的总机械能为

$$E=\frac{m}{2}v_0^2>0 \tag{2.31}$$

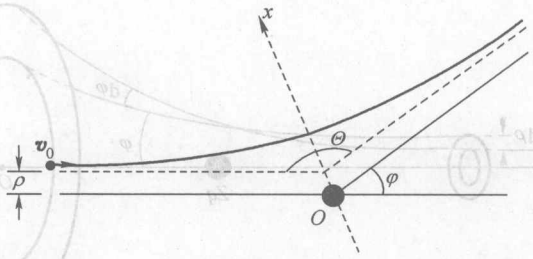



图 2.3

因此，α粒子运动轨道的偏心率 $e>1$，是双曲线型轨道. 为便于观察，图 2.3 中已将极轴（$x$ 轴）画成指向左上方. 由轨道方程（2.29）得出轨道伸向无穷远处的两支渐近线分别与 $x$ 轴间的夹角为

$$\theta_{1,2} = \pm \arccos(1/e)$$

两渐近线间的夹角为

$$\Theta = \theta_1 - \theta_2 = 2\cos(1/e);\ \cos\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{e} \tag{2.32}$$

α粒子的**散射角**为

$$\varphi = \pi - \Theta$$

因此得

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\Theta}{2} = \sqrt{e^2-1}$$

将（2.21）、（2.28）、（2.30）、（2.31）和（2.32）诸式的关系代入上式，最后得

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{Qq}\rho \tag{2.33}$$

此式给出了散射角 $\varphi$ 与瞄准距离 $\rho$ 和入射速率 $v_0$（能量）之间的关系. 瞄准距离和入射速率（能量）越大，则散射角越小. 这是容易理解的，因为瞄准距离大，质点与原子核可能接近的距离远；入射速率（能量）大，质点与核相互作用的时间短. 这些都是使α粒子受靶核的散射作用较弱的因素.

**（二）散射截面　卢瑟福散射公式**

一束流强（通过单位面积的粒子数）为 $n$ 的α粒子流，各粒子以同样的速度 $v_0$ 射向靶原子核. 由于粒子流中各粒子的瞄准距离不同，其散射角也就各不相同. 其中瞄准距离为 $\rho\sim\rho+\mathrm{d}\rho$ 的粒子，流过面积为 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 的环面，其散射角在 $\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 之间，如图 2.4 所示. 通过环面内的粒子数为

$$\mathrm{d}N = 2\pi n\rho\mathrm{d}\rho$$

定义**散射截面** $\mathrm{d}\sigma$：

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}N}{n} \tag{2.34}$$

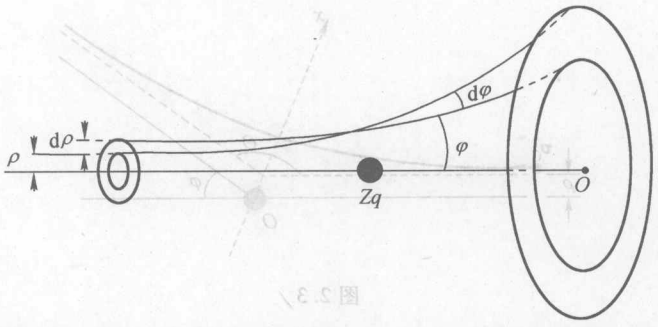



图 2.4

它表示一束单位粒子流(每单位面积流过一个入射粒子),在散射角为 $\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ 之间的散射粒子数. 由(2.33)式可得

$$\mathrm{d}\rho = -\frac{1}{2}\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi$$

则

$$\mathrm{d}\sigma = |2\pi\rho\mathrm{d}\rho| = \pi\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{\cot\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{2\pi\sin\varphi}{\sin^4\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi$$

这里已用到熟知的关系式 $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. 再将 $Q = Ze$ 和 $q = 2e$ 代入,则

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\sin^4\frac{\varphi}{2}} \tag{2.35}$$

其中,$\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$ 是散射角 $\varphi$ 处对应于 $\mathrm{d}\varphi$ 所张的立体角. 故

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\varphi}{2}} \tag{2.36}$$

称作**微分散射截面**,这便是著名的卢瑟福(Rutherford)散射公式,由卢瑟福在1911年首先导出. 最初汤姆孙(J. J. Thomson)提出过一个原子模型,认为原子中的正电荷均匀分布在整个原子球中,而电子浮游在正电荷的间隙之间. 按照这个模型,α 粒子穿过这样的"电荷球"时,受到的排斥力不会很大,从而偏离的角度不会太大. 即只可能存在小角度散射. 然而实验上发现少量反弹的粒子,即散射角 $\varphi > \pi/2$ 的大角度的散射. 存在大角度散射就表明粒子与靶核间有着强大的

短距力作用，正因如此卢瑟福按粒子受原子核 $\sim 1/r^2$ 的力，导出了前面的散射公式. 实验证实了卢瑟福微分散射公式(2.36)的正确性；分析实验数据表明，原子核所带的电荷应存在于 $\sim 10^{-14}$ m($10^{-12}$ cm)的很小尺度范围内，给建立正确的原子模型提供了理论依据.

## §2.5 二体问题

地球(行星)绕太阳转动时，实际上太阳也受到地球的引力作用而运动；即使不计太阳绕银河系中心的轨道运动，它也不是一个严格的惯性参考系. 太阳和行星相互作用构成一个两体系统. 为研究太阳和行星两体系统的运动，具体地以太阳和地球两体系为例. 设想在宇宙中适当选定一固定的参考系. 太阳和地球在这参考系中的位置矢量分别是 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，如图 2.5 所示. 设太阳的质量为 $m_s$，地球的质量是 $m_e$，则太阳和地球的运动方程分别是

$$m_s \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.37}$$

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.38}$$

这两个方程是互相关联的，需要对它们联立求解. 上两式中

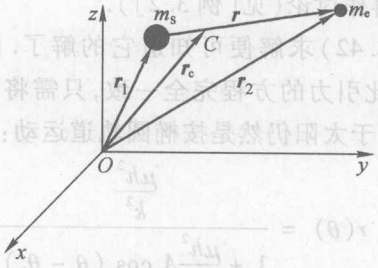



图 2.5

$$k^2 = Gm_s m_e \tag{2.39}$$

和 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 是行星对于太阳的相对位矢. 将运动方程(2.37)和(2.38)相加，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 (m_s \boldsymbol{r}_1 + m_e \boldsymbol{r}_2)}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

令

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_s \boldsymbol{r}_1 + m_e \boldsymbol{r}_2}{m_s + m_e} \tag{2.40}$$

$\boldsymbol{r}_c$ 是太阳和行星系统质心的位矢，质心位于太阳和行星的连线上. 这样，便得到太阳和地球系统质心的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{2.41}$$

现在再对(2.37)和(2.38)两方程分别乘 $\boldsymbol{m}_s$ 和 $\boldsymbol{m}_e$ 并相减，便可得到另一个方程

$$m_s m_e\frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{\mathrm{d}t^2}=m_s m_e\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{(m_s+m_e)k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

或写为

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.42}$$

其中

$$\mu=\frac{m_s m_e}{m_s+m_e} \tag{2.43}$$

称为两体的**折合质量**，或**约化质量**. 现在我们已从相互关联着的太阳和地球的运动方程(2.37)和(2.38)得到了两个相互不关联的方程(2.41)和(2.42)；太阳和地球的二体系的运动化解成了两个独立的“单体”运动. 两体系质心的运动由方程(2.41)描述，做匀速直线运动. 这是两体系的整体惯性运动，对于研究太阳系中太阳或行星的运动并不重要，可以不去讨论. (2.42)式是地球(行星)相对于太阳的运动方程，不过地球(行星)的质量不再是 $m_e$，而必须用折合质量 $\mu$ 代替. 折合质量体现了太阳的运动对行星运动的影响；这里太阳不再看作惯性参考系了，我们将在第三章中再作讨论(见[例 3.2]).

我们无需对方程(2.42)求解便可知道它的解了. 因为这个方程形式上与§2.2中与距离平方反比引力的方程完全一致，只需将 $m_e$ 改成 $\mu$ 就可以了. 由此可知地球(行星)相对于太阳仍然是按椭圆轨道运动：

$$r(\theta)=\frac{\dfrac{\mu h^2}{k^2}}{1+\dfrac{\mu h^2}{k^2}A\cos(\theta-\theta_0)}$$

既然质心做惯性运动，我们可以把质心作为惯性坐标系的原点. 设太阳和地球(行星)相对于质心的位矢分别是 $\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\boldsymbol{r}_2'$，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1'\\ m_s\boldsymbol{r}_1'+m_e\boldsymbol{r}_2'=0\end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{r}_1'=-\frac{m_e}{m_s+m_e}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2'=\frac{m_s}{m_s+m_e}\boldsymbol{r}$$

既然 $r(\theta)$ 是椭圆轨道，$r_1'(\theta)$ 和 $r_2'(\theta)$ 也必然是椭圆轨道. 现在我们得到了太阳

和行星两体系问题的完全解答. 太阳和行星分别位于质心的两边,在同一直线上,并在同一平面内分别围绕质心做椭圆运动;两体系的质心则做匀速直线运动.

## *§2.6 任意幂有心力问题的计算

质点在有心力作用下的有心运动一般属于非线性动力学问题,它们的运动方程(2.4)或(2.6)为二阶非线性方程. 但有心运动存在能量积分和角动量积分二个初积分,给问题的积分带来极大方便,原则上可以求解. 前面已对有心力与距离平方成反比的吸力和斥力的情形,得出了严格的解析解. 但一般来说,即便是与距离成一般幂指数形式的有心力

$$\boldsymbol{F} = Ar^n\boldsymbol{e}_r \tag{2.44}$$

对相应质点运动的非线性微分方程用解析方法求解,可能会用到很复杂的数学. 而力与距离平方成反比($n=-2$)的情形,能"容易"地得到严格的解析解是很幸运的,要不然真不知会给天文学家们带来多大的麻烦呢! 在 $n$ 是任意数(包括非整数)时,用数值计算方法研究是较为适宜的. 下面我们给出一些有心力问题的数值计算结果.

### (一) 与距离成任意幂指数的引力

为计算方便,采用直角坐标系. 设质点质量 $m=1$,运动微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = Axr^{n-1} \\ \ddot{y} = Ayr^{n-1} \end{cases} \tag{2.45}$$

若有心力是引力,$A$ 应是负值. 在适当单位下不失一般性,可令 $A=-1$. 上式中

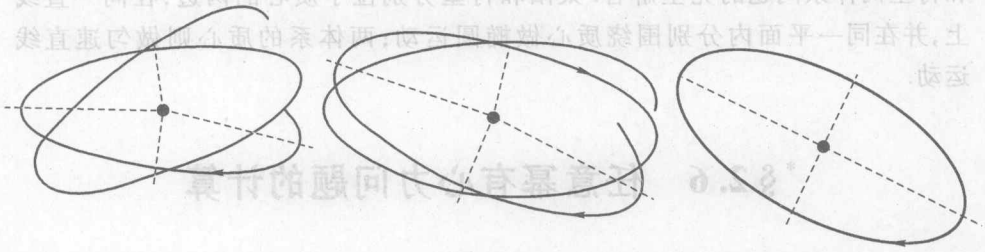
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

初始条件为

$$t=0 \text{ 时}, x = x_0, y = y_0, \dot{x} = v_{0x} \quad \dot{y} = v_{0y} \tag{2.46}$$

给定初始条件后,二阶微分方程组(2.45)可采用"龙格-库塔(Runge-Kutta)"方法求解. 龙格-库塔方法是求解常微分方程常用的数值计算方法之一,在附录 B 中介绍了这个方法. 为具体求解质点有心运动问题,作者编制了用 Visual Basic 语言写出的计算程序,在附录 C 中列出,并附有说明,供读者参考.

我们利用附录 C 中的程序,对质点在不同初始条件下,受不同幂次的有心力作用的情形进行了计算. 在图 2.6 中,选择列出了一些质点在引力作用下($A=-1$)计算得到的运动轨道. 每一幅图下面列出质点的初始条件:质点位矢初始坐标 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0)$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}_0(v_{0x}, v_{0y})$(任意单位). 读者可以看到,图中列出的轨迹一般来说并不闭合. (c)中 $n=1$ 所示的是二维谐振动的情形,其轨道是闭合的椭圆,力心位于椭圆中心. 另一个闭合轨道是在 $n=-2$ 的情形(f),这是读者已熟知的距离平方反比引力的情形,力心位于焦点. (h)和(i)中的点线是时间反向计算的轨迹. (h)轨道是一条指数螺卷形的曲线. 对于其他图中的不闭合轨道所描述的情形,可认为质点一方面绕力心运动,同时轨道本身还绕力心转动. 轨道绕力心转动称为轨



(a) $n$=2.0

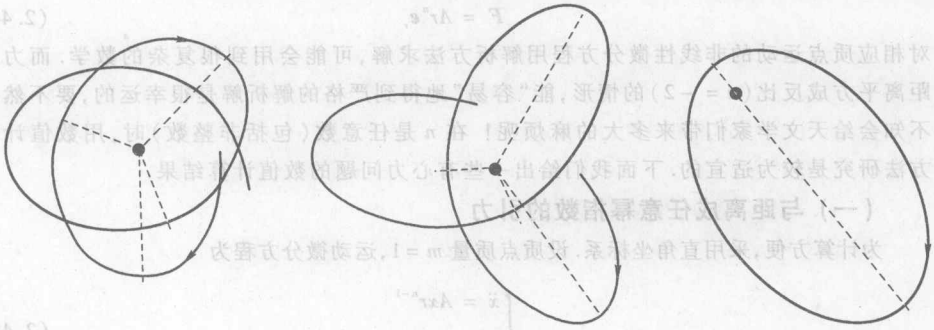
$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(1.5, 1.5)

(b) $n$=1.5

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(2.0, 2.0)

(c) $n$=1.0

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(1.5,1.5)



(d) $n$=−0.5

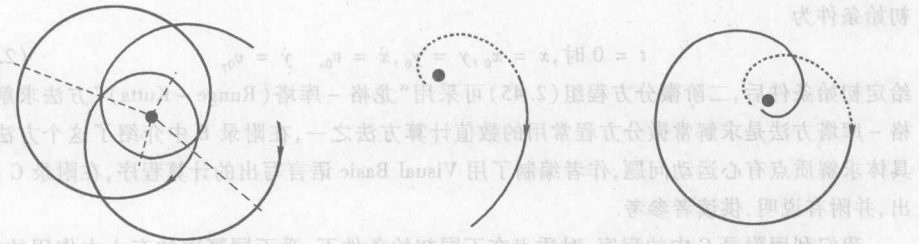
$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(0.3, 1.5)

(e) $n$=−1.0

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(1.0, 1.0)

(f) $n$=−2.0

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(0.6, 0.5)



(g) $n$=−2.5

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(0.15, 0.5)

(h) $n$=−3.0

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(0.218, 0.45)

(i) $n$=−3.0

$r_0$ (2.0, 0.0), $v_0$(0.1, 0.45)

图 2.6

道的**进动**.轨道上离力心最远点或最近的点,叫做**拱点**(Apsides);质点在拱点处径向速度为零.两相邻拱点矢径间的夹角称作**拱角**.太阳系中行星运动轨道的远日点和近日点都是拱点,拱角为 $\phi=\pi$,如图 2.6 中的(f)所示.在图 2.6 中,力心与拱点间的连线用虚线表示;每一轨道都标出了最初四个力心与拱点间的连线.

### (二)微小扰动对轨道的影响

人造地球卫星围绕地球运转时,卫星受到的力实际上并不是单一地来自地球中心的万有引力.周围地球的大气以及其他星体都对卫星的运动有影响.再说地球本身也不是一个均匀的球体,卫星受到的作用力不是确切地以地心为力心的有心力.上述各种因素的影响,都可等价为在地心的引力上附加一微小的扰动力.不仅人造地球卫星受到扰动力,太阳系中的行星、宇宙中许多星体也都在有心引力和扰动力作用下运动.对天体的微小扰动,天文学称为**摄动**.天体物理学家们已对摄动问题进行了大量的天文观察和理论研究.现代天文学对摄动的研究工作已主要地依靠计算机来完成.

这里不可能对天体问题进行研究,只是从计算物理的角度,向读者提供一点扰动影响有心运动轨道的初步知识.假设扰动力与距离的 $n$ 次幂成正比,质点受到的力为

$$\boldsymbol{F}=\left(-\frac{1}{r^2}+ar^n\right)\boldsymbol{e}_r \tag{2.47}$$

式中扰动力的强度 $a$ 甚小于 1.这样形式的扰动力可以在以下一些情形中出现.

1. 宇宙尘的作用

首先建立一个宇宙尘分布的简单模型.如图 2.7 所示,假设宇宙尘均匀分布在力心 $O$ 点周围,半径为 $R$ 的球形空间内.质点在离球心 $r$ 处受宇宙尘作用的势能可以由下式计算:

$$V(r)=-Gm\int\frac{\mathrm{d}m'}{|\boldsymbol{r}''|}=-Gm\rho\int\frac{\mathrm{d}\tau'}{|\boldsymbol{r}''|} \tag{2.48}$$

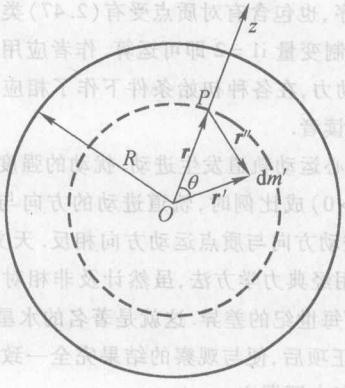



图 2.7

式中 $G$ 是引力常量,$m$ 为质点的质量,$\rho$ 是宇宙尘的密度。如图 2.7 所示,取小体积 $\mathrm{d}\tau'$ 其中的宇宙尘质量为 $\mathrm{d}m'$,$\boldsymbol{r}''$ 是质点 $P$ 至 $\mathrm{d}m'$ 的矢径,即

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\quad |\boldsymbol{r}''|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

代入(2.48)式①得

$$V(r) = -Gm\rho\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{r'^2\sin\theta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r'$$

$$= -2\pi Gm\rho\int_0^R r'^2\frac{1}{rr'}[(r+r)'-|r-r'|]\mathrm{d}r'$$

$$= -2\pi Gm\rho\left[\int_0^r\frac{2}{r}r'^2\mathrm{d}r'+\int_r^R 2r'\mathrm{d}r'\right]$$

$$= -\frac{4\pi}{3}Gm\rho\left(\frac{3}{2}R^2-\frac{1}{2}r^2\right)$$

则质点受到的扰动力为

$$\boldsymbol{F}(r) = -\nabla V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r\boldsymbol{e}_r \tag{2.49}$$

是与 $r$ 的一次幂成正比的.

2. 广义相对论效应

爱因斯坦广义相对论研究指出,在巨大物体周围质点受到的引力定律应修正为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{Gm'}{r^2}\left(m+\frac{3h^2}{c^2r^2}\right)\boldsymbol{e}_r \tag{2.50}$$

式中,$G$ 是引力常量,$m'$和 $m$ 分别为力心物体和质点的质量,$h$ 是质点角动量的相关常数,$c$ 是光速. 可见广义相对论对于万有引力的修正项正比于距离的负四次幂.

3. 太阳系中周围星体的影响

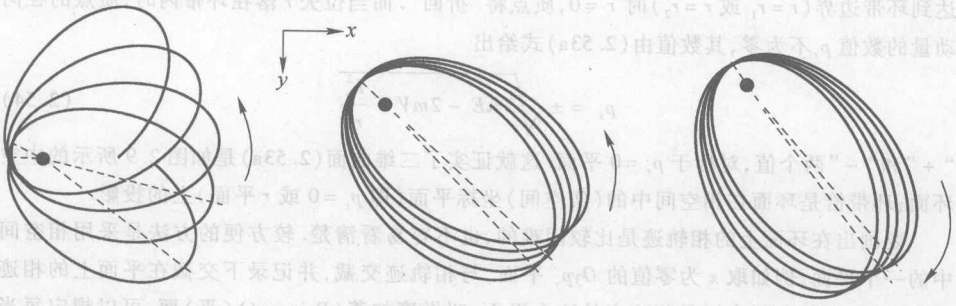
据天文观察及理论分析,有迹象显示太阳系中的行星,受其他行星的扰动力与距离的四次幂成反比.

附录 C 中给出的计算程序,也包含有对质点受有(2.47)类型扰动力时的轨道,进行计算的功能,只需设置程序中的控制变量 i1 =2 即可运算. 作者应用这一程序,分别对许多包含不同扰动强度 $a$ 和幂次 $n$ 的扰动力,在各种初始条件下作了相应的轨道计算. 在图 2.8 中选列了几条计算得到的轨道,以示读者.

计算表明,扰动使质点有心运动轨道发生进动. 扰动的强度 $|a|$ 越大,进动速度也就越大. 扰动力与距离 $r$ 的正次幂($n>0$)成比例时,轨道进动的方向与质点的运动方向一致,而与 $r$ 的负次幂($n<0$)成比例时,进动方向与质点运动方向相反. 天文上观察到水星绕太阳运动的轨道,其近日点存在进动,但用经典力学方法,虽然计及非相对论的摄动效果,计算得到的结果与观察数据相比还存在 43″每世纪的差异. 这就是著名的水星近日点的进动现象. 但计及如(2.50)式中的广义相对论修正项后,便与观察的结果完全一致. 水星近日点进动问题的验证是证明广义相对论正确性的有力证据之一.

---

① 下面的运算需注意,(2.48)式中 $|r''|$ 恒为正值,故应取 $\sqrt{(r-r')^2}=|r-r'|$;$r>r'$时,而 $r<r'$时 $|r-r'|=r'-r$. 对 $r'$的积分,分两段进行:$\int_0^R(\cdots)\mathrm{d}r'=\int_0^r(\cdots)\mathrm{d}r'+\int_r^R(\cdots)\mathrm{d}r'$.




(a) $a=-0.01, n=1$
$r(2.0,0.0), v_0(0.6,0.5)$

(b) $a=-0.001, n=1$
$r(2.0,0.0), v_0(0.6,0.5)$

(c) $a=-0.01, n=-4$
$r(2.0,0.0), v_0(0.6,0.5)$

图 2.8

### （三）相轨迹和庞加莱面

为了更全面地反映质点运动状况的变化，正如已在§1.6中指出的，最好的方法是用相空间将质点运动的相迹（相轨迹）表示出来. 然而，对二维运动问题来说，相空间是由质点的坐标和动量的四个分量：$x, y, p_x, p_y$ 支撑的四维空间. 我们无法在一个四维空间内画出相轨迹来. 但是对于有心运动问题，具有机械能守恒条件：

$$T+V=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V(x,y)=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta})+V(r)=E \tag{2.51}$$

和角动量守恒条件：

$$L=m(x\dot{y}-y\dot{x})=mr^2\dot{\theta}=L_0 \tag{2.52}$$

这两个初积分可认为是对于质点的动量坐标和位置坐标的约束方程，它们在四维空间中确定了一个二维曲面；这个二维曲面是由三维的等能面和三维的等角动量曲面相交而成的. 质点的相轨迹必位于此二维曲面上. 对于行星运动，还可以进一步证明这个二维曲面是一个中空的环面，如图 2.9 所示. 采用极坐标时，可由(2.51)式和(2.52)式得二维曲面的方程为

$$\frac{p_r^2}{2m}+\frac{L_0^2}{2mr^2}+V(r)=E \tag{2.53a}$$

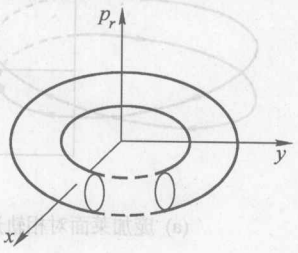



图 2.9 不变环面

式中 $p_r=m\dot{r}$ 是质点的径向动量分量. 上式所示的环面与 $p_r=0$（$\dot{r}=0$）平面的交线，由下面的方程给出：

$$\frac{L_0^2}{2mr^2}+V(r)-E=0$$

或

$$\frac{L_0^2}{2m}+r^2V(r)-Er^2=0 \tag{2.53b}$$

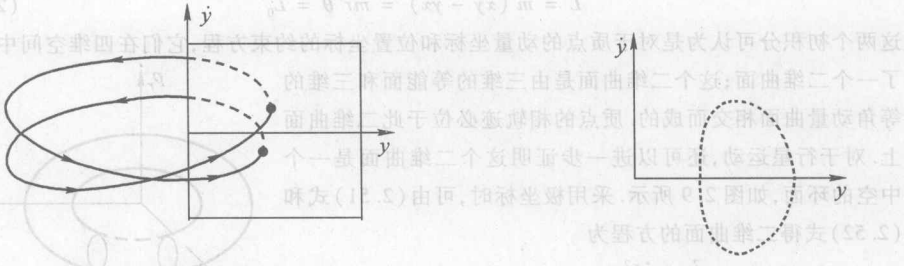
这是关于 $r$ 的代数方程，其幂次不低于2次. 这个方程必存在两个根（解）：$r=r_1$ 和 $r=r_2$，这是在相空间中 $p_r=0$ 面上的两个分别以 $r_1$ 和 $r_2$ 为半径的圆环. 这两个圆就是二维环面与 $p_r=0$ 面的交线. 它们在 $p_r=0$ 平面上划出一环带；质点运动时的位矢被限定在环带中；当质点位矢

达到环带边界($r=r_1$ 或 $r=r_2$)时 $\dot{r}=0$,质点将"折回".而当位矢 $r$ 落在环带内时,质点的径向动量的数值 $p_r$ 不为零,其数值由(2.53a)式给出

$$p_r = \pm\sqrt{2mE - 2mV - \frac{L_0^2}{r^2}} \tag{2.54}$$

"+"和"-"两个值,对称于 $p_r=0$ 平面.这就证实了二维曲面(2.53a)是如图 2.9 所示的中空环面;环带恰是环面在相空间中的(实空间)坐标平面(即 $p_r=0$ 或 $r$ 平面)上的投影.

要画出在环面上的相轨迹是比较困难的,也不容易看清楚.较方便的方法是采用相空间中的一个平面,例如取 $x$ 为零值的 $Oyp_y$ 平面,与相轨迹交截,并记录下交截在平面上的相迹点的位置.在相空间内记录相迹点的这个平面,叫做**庞加莱(Poincaré)(平)面**.可以规定每当相轨迹从平面的正面向反面穿过时,在庞加莱面上只记下交截点,如图 2.10(a)所示.这是相轨道留在在平面上的相迹点.显然它一定位于环面与庞加莱平面的交线上,因为相轨迹是环绕在环面上的.若相轨迹是闭合的,且在环面上仅绕有一匝,则相轨迹仅从正面穿过庞加莱面一次,只在平面上留下一个相点;图 2.10(a)显示的是相轨迹在环面上环绕两圈后闭合,在庞加莱面上留下两个相迹点.要是相轨道是不闭合的,则相轨迹可能在环面上绕有无穷多圈,且遍布整个环面,留在庞加莱面上的相点也将有无穷多个,将它们连接起来会明显地形成一闭合曲线,就是环面与庞加莱面的交截线.例如对于图 2.8,或图 2.6 的(a)、(b)、(d)、(g)等不闭合轨道中所示的运动轨道①,其相应的缠绕在相空间不变环面上的相轨迹将有无穷多匝,它们在庞加莱面 $y-p_y$ 上留下无穷多个相点,可连成一条闭合线,犹如图 2.10(b)所示,显示中空环面的截面形状.庞加莱面方法好比生物实验中采用标本切片方法,将难以观察的三维实体用二维的切片图像来表达.




(a) 庞加莱面对相轨迹的交截　　(b) 庞加莱面上的相迹点

图 2.10

这里还要指出,希望读者不要把质点的运动轨道和质点的相轨迹,这是两个完全不同的概念.运动轨道是质点在实际空间中位置移动的轨迹,对于有心力问题来说是平面曲线.相轨迹是相点在相空间中移动的轨迹,对有心力问题来说,相空间是四维空间轨迹.相点不仅负载有质点位置的信息,还负载有质点的动量信息.

① 图 2.8 所示的曲线是质点在坐标平面上的轨道曲线,也可看成相空间中,环绕在不变环面上的相迹线在实空间坐标平面($p_r=0$ 平面)上的投影.

# *§2.7 埃农－海力斯势问题

如前所述，仅有两个星体相互作用的两体问题，牛顿力学能给出完全的解析解答. 然而天文学研究的星团是包含有许多星体的星系. 即使是只有三个星体的三体问题，已就无法得到严格的解析解，甚至令人更为“失望”. 为研究星系中的星体运动，法国天文学家埃农(Michael Hénon)和在美国的研究生海力斯(Carrl Heiles)研究了一个简化的星体势模型①：

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \tag{2.55}$$

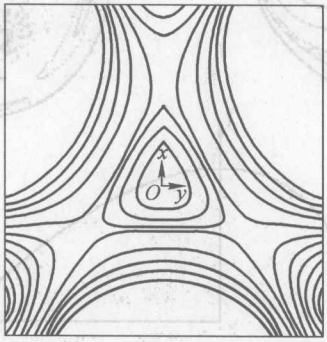



图 2.11

式中第一项是弹性型的二维谐振势，后面两项则是三角对称的扰动势. 后来，有人②在研究分子的振动能级时，也引进了这一形式的电势模型. 这个势场的等势线如图 2.11 所示. 显然，这个势场给出的不是有心力，质点在该势场中运动时不存在角动量守恒积分. 但由于势函数的存在，质点所受的力依旧是保守力，机械能仍然是守恒的. 质点(星体)在这样的力场中如何运动？除能量积分外，是否还可能存在角动量积分之外的其他积分？这正是这个课题的目的.

取质点的质量 $m=1$，则质点的运动微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -x(1+2y) \\ \ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = y(y-1) - x^2 \end{cases} \tag{2.56}$$

由于在 $z$ 方向没有力的作用，只要初始速度没有 $z$ 分量，质点将保持在 $Oxy$ 平面内运动.

埃农－海力斯对非线性运动方程(2.56)作出了著名的计算研究. 作者对此方程组也编制了程序，采用龙格－库塔方法，在各种不同的初始条件下求解，并画出相应的庞加莱面上的相迹点.

实际上，由(2.55)式可见，能量的大小是与扰动项的大小相关的，质点的能量 $E$ 可作为

① Henon M, Heiles C, Astron. J., 1964, 69: 73

② Noid D W, Marcus R A, J. Chem. Phys., 1975, 62: 2119

非线性扰动强度的参量. 图 2.12 显示质点具有不同能量情形,以各种不同初始条件下运动的相轨迹,在庞加莱面上分别留下的相迹点. 其中(a)、(b)和(c)三幅图对应于质点分别具有三种不同总机械能 $E$ 的情形. 每一幅图形则又包含了若干个不同初始条件下的相轨迹交截点. 现分述如下:

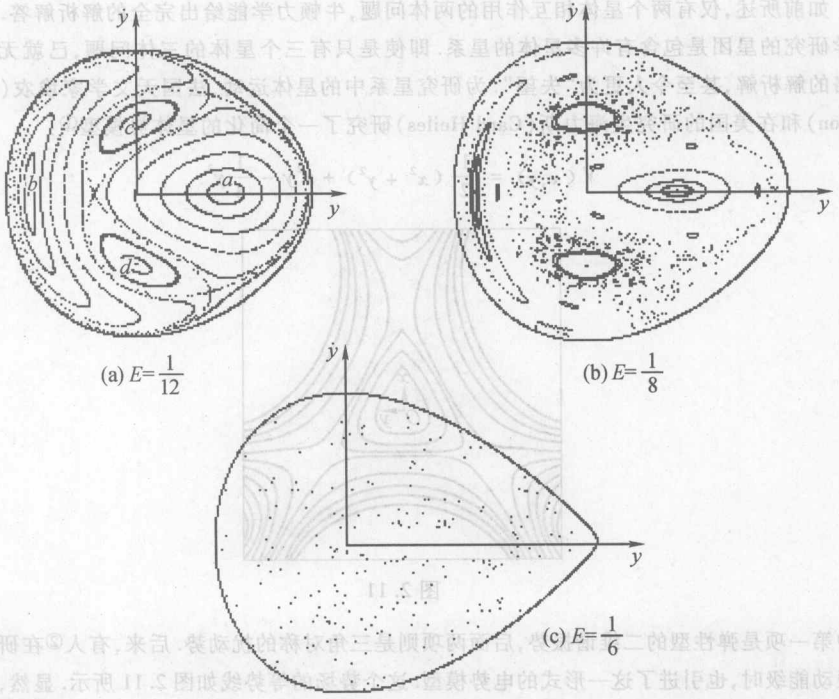



图 2.12

(a) $E=1/12$

很明显,庞加莱面上的相点可分别连成明确的闭合曲线,每一闭合线代表一个环面与庞加莱面的交截线. 这表明在这一能量状况下每一条相轨道都缠绕在各自的不变环面上. 不变环面的存在,意味着这时埃农 - 海力斯问题除具有能量第一积分外,还可能存在另外一个第一积分,虽然这个积分不可能是角动量积分;在此状况下,原则上问题应当存在解析解,虽然实际上也许难以求得①.

① 日本学者 M. Toda 对一维格子(链),研究其非线性点阵振动,考虑点阵间的最近邻的非线性互作用,他引入了一个势模型:$V=\frac{1}{24}(e^{2y-2x\sqrt{3}}+e^{2y+2x\sqrt{3}}+e^{-4y})-\frac{1}{8}$ 得出了完整的解析解(参见:M. Toda. *Theory of Nonlinear Lattice*. Berlin: springer - Verlag. 1987). 而此势函数在微小振动,$x$、$y$ 为小量的展开式:$V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+x^2y-\frac{1}{3}y^3+\cdots$ 恰好与埃农 - 海力斯(Hénon - Heiles)势相符合. 表明能量微小的情形下,埃农 - 海力斯势问题与 Toda 链的数学问题"相同",从而是可能得到解析解的.

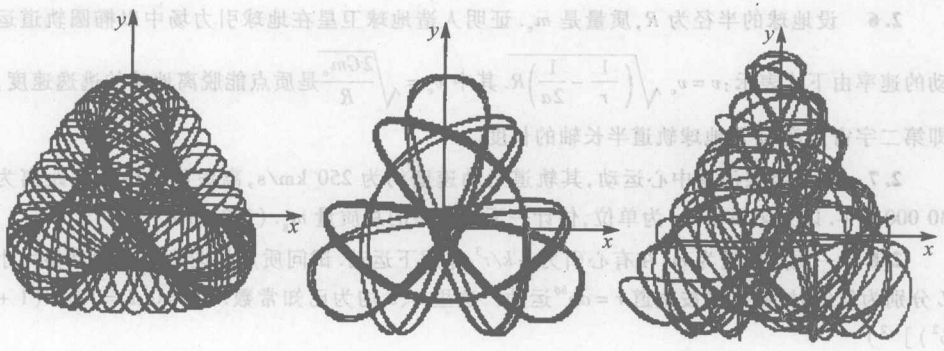
(b) $E=1/8$

质点能量 $E$ 达到这一数值时，庞加莱面上很多相迹点已不能连成闭合线，这表明那些在 $E=1/12$ 时还存在的相应环面已遭破坏. 特别地，我们注意到，有一条原来围绕 $a$ 点的椭圆状闭合迹线却分裂成五个小岛形的迹线. 对应于那些环面已破坏的质点运动来说，除能量积分外，不可能存在第二个第一积分了.

(c) $E=1/6$

这时情况变得更糟. 对应于“小岛”的那组留在庞加莱面上的相迹点，已分散到各处，毫无规则可言，如图 12(c)所示. 这时对应的不变环面不复存在，质点的运动状态进入了无序，也即**混沌状态**.

图 2.13 中的三幅图分别与上述(a)、(b)、(c)三种能量情况相对应，它们是质点在特定的初始条件下分别在二维实空间中的运动轨迹. 当 $E=1/12$ 时，运动轨道是不闭合的，但作较为规则的进动，运动处于**有序状态**；$E=1/8$ 时，轨道跳跃式地进动，分裂成五股，与图 2.13(b)中庞加莱面上五个岛屿形相迹点对应. 这是非线性力学系**分岔现象**的表现；当能量增大到 $E=1/6$，质点运动便毫无规则地“乱窜”，运动轨道好似“一摊乱麻”，质点运动明显地进入**混沌阶段**.




(a) $E=1/12$ (b) $E=1/8$ (c) $E=1/6$

图 2.13

非线性力学系统的运动状态出现或分岔以至混沌，是非常普遍的现象. 这里叙述的质点在埃农－海力斯势场中运动，即埃农－海力斯势问题，就是一个很好的例子. 这里，我们只是通过这个例子简单介绍非线性力学系运动中的有序、混沌现象. 读者还可以在本书的最后一节(§6.7)中进一步获得非线性力学系运动的某些信息.

## 习 题

**2.1** 质点在有心力 $\boldsymbol{F}(r)$ 的作用下运动，质点速度的大小为 $v=a/r$ 这里 $a$ 是常数. 已知 $\theta=0$ 时 $r=r_0$，速度与位置矢径间的夹角为 $\varphi$，求质点运动的轨道方程.

(螺旋线：$r=r_0 e^{\theta\cot\varphi}$)

**2.2** 木星轨道的半长轴长度是5.2天文单位(1天文单位为$1.5\times10^8$ km,是地球轨道半径的长度).求出(i)木星绕太阳运动的周期;(ii)木星在轨道上运动的平均速率.

(11.9年;13.1 km/s)

**2.3** 月球的质量和半径分别是$m=0.012\,3\,m_e$和$R=0.273\,R_e$.这里$m_e$、$R_e$分别是地球的质量和半径.试求(i)月球表面处的重力加速度;(ii)若在月球表面发射火箭,使之脱离月球,则火箭的发射速度至少是多少?

(1.62 m/s²;3.38 km/s)

**2.4** 如果质点受到的有心力为$\boldsymbol{F}=-m\left(\frac{\mu^2}{r^2}+\frac{\lambda}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_r$,式中$\mu$及$\lambda$都是数,并且$\lambda<h^2$.试证其轨道方程可写为:$r=a/(1+e\cos k\theta)$.式中$k^2=\frac{h^2-\lambda}{h^2}$,$a=\frac{k^2h^2}{\mu^2}$,$e=\frac{Ak^2h^2}{\mu^2}$,$A$为积分常数;$h=r^2\dot{\theta}$.

**2.5** 一质点受按万有引力定律的有心力作用,做椭圆运动.$P_1$和$P_2$是过椭圆中心一直径的两端.$v_1$、$v_2$分别是质点在$P_1$和$P_2$处的速率.证明$v_1v_2=v_b^2$,这里$v_b$是质点在轨道短轴端点处的速率.

**2.6** 设地球的半径为$R$,质量是$m_e$.证明人造地球卫星在地球引力场中以椭圆轨道运动的速率由下式表示:$v=v_e\sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)R}$.其中$v_e=\sqrt{\frac{2Gm_e}{R}}$是质点能脱离地球的逃逸速度,即第二宇宙速度.$a$是地球轨道半长轴的长度.

**2.7** 太阳绕银河系中心运动,其轨道运动速度约为250 km/s,离银河系中心的距离为30 000光年.以太阳质量$m_s$为单位,估计一下银河系的总质量$m_g$.($1.3\times10^{11}\,m_s$)

**2.8** 一质点质量为$m$,在有心引力$-k/r^3$作用下运动.试问质点的能量$E$及角动量大小$L$分别为何值时,质点将按轨道$r=ae^{b\theta}$运动?这里$a$、$b$均为已知常数.($E=0$,$L=[km/(1+b^2)]^{1/2}$)

**2.9** 一质量为$m$的质点受谐振子势$V(r)=\frac{k}{2}r^2$的有心力作用.初始时质点沿半径为$a$的圆轨道运动.(i)求出质点圆轨道运动的速率$v_0$.(ii)如果质点在轨道平面内受到一与速度成$\alpha$角,大小为$I=mv_0$的冲量作用,求出质点在此后的运动中离力心的最大距离和最小距离.(iii)当$\alpha=0$和$\alpha=\pi$时,分别对你所得到的结果从物理上分析作出解释.

$$\left(v_0=a\sqrt{\frac{k}{m}},r_\pm=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3+2\cos\alpha\pm(5+4\cos\alpha)^{1/2}}\right)$$

**2.10** 一彗星在近日点处离太阳的距离是地球轨道半径的一半(假定地球做圆轨道运动),该处彗星的速率是地球轨道运动速率的二倍.试从守恒定律出发,(i)求出彗星轨道与地球轨道相交处彗星的速率;(ii)问此彗星的轨道是椭圆、抛物线还是双曲线?为什么?(iii)它能脱离太阳系吗?已知地球绕太阳的轨道半径为$a=1.5\times10^8$ km.

(42.3 km/s,$E=0$,抛物线)

**2.11** 由于核电荷部分地被原子中的电子所屏蔽,屏蔽库仑势为$V(r)=-\frac{k}{r}e^{-r/a}$,其

中 $a>0, k=Ze^2>0$, $Z$ 为原子序数. 试讨论电子在上述势场中做圆轨道运动时的稳定条件.

$$\left(\text{圆轨道半径 } r_0<\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})a=1.618a\right)$$

**2.12** 地球轨道的偏心率 $e=0.0167$. 今若沿其半短轴将椭圆轨道分割为两半,证明地球分别在这两半轨道运行的时间是: $\tau_{\pm}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{e}{\pi}\right)$ 年;计算一下它们相差多少天?

(3.88 天)

**2.13** 质量为 $m$ 的质点在有心斥力场 $mc/r^3$ 中运动,式中 $r$ 是力心到质点的距离, $c$ 为常数. 当质点离力心很远时,质点的速度为 $v_\infty$,瞄准距离是 $\rho$. 试求质点与力心间可能达到的最近距离 $d$. $\left(d=\left(\rho^2+\frac{c}{v_\infty^2}\right)^{1/2}\right)$

**2.14** 试求出上题中质点受力心散射后的散射角 $\varphi$,并求出微分散射截面.

$$\left(\varphi=\pi-\pi\frac{\rho v_\infty}{\sqrt{c+\rho^2 v_\infty^2}}, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{c\pi^2(\pi-\varphi)}{v_\infty^2\varphi^2(2\pi-\varphi)^2\sin\varphi}\right)$$

**2.15** 如图 T2.15 所示,在光滑水平桌面上,两个质量分别为 $m$ 和 $m'$ 的质点由一不可伸长的绳联结,绳穿过固定在水平桌面上的光滑小环. 若 $m$ 与小环相距 $d$ 时获得垂直于绳的初速. 试写出质点 $m$ 轨道微分方程,并解出它的运动轨道方程.

$$\left(\text{轨道方程: } r=d/\cos\sqrt{m'/(m+m')}\theta\right)$$

**2.16** 质量为 $m$ 的质点 $A$,置于光滑的水平桌面上运动如图 T2.16 所示. 此质点系有一根轻绳. 绳子穿过桌面 $O$ 处的光滑小孔后下垂,绳的另一端挂有一同样质量的质点 $B$. 若质点 $A$ 在桌面上离小孔距离为 $d$ 处,沿垂直于绳子方向以初速率 $v_0=(9gd/2)^{1/2}$ 射出,证明质点在此后运动中离 $O$ 点的距离必在 $d$ 与 $3d$ 之间.

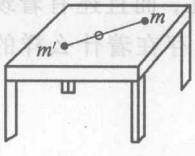



图 T2.15

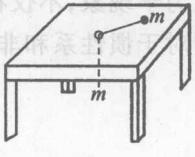



图 T2.16

# 第三章

# 非惯性参考系

前一章讨论行星围绕太阳运动时，我们已经知道太阳和行星是相互作用着的二体力学系统. 实际上，太阳不是一个固定不动或者仅做匀速直线运动的星体，严格说来，太阳不是一个惯性参考系，虽然在处理许多行星运动问题时，常可近似地把它作为惯性系看待. 同样，地球也不是严格的惯性参考系，尽管人们处理日常遇到的力学问题时，常把它作为惯性参考系，仍能得到满意的结果. 但是有一些现象，却是把地球作为惯性参考系所不能解释的. 日常生活中，人们也常常处在非惯性系中. 例如乘坐加速运行或正在拐弯的车、船时，人们的感受明显地与乘坐平稳运动的车船时不同. 人造地球卫星和宇宙飞行器，则更是明显的非惯性系，失重或超重现象是大家熟知的事实. 此外，对某些力学问题，在惯性系中反而不容易求解，而在适当选取的非惯性系中求解却较方便. 因此，在非惯性参考系中研究力学现象，不仅在理论上有其重要性，而且还有着现实的需要. 了解质点分别相对于惯性系和非惯性系的运动规律存在着什么样的联系和区别，就十分必要.

## §3.1 相对运动

### （一）绝对速度　相对速度和牵连速度

我们已熟知，运动的描述是相对于参考系的. 在处理具体问题时，常把参考系抽象为固定在参考系上的坐标系.

今设有两个参考系，分别用固定坐标系 $Oxyz$（简称 $O$ 系）和做相对运动的坐标系 $O'x'y'z'$（简写为 $O'$ 系）来表示，如图 3.1 所示. 在这两参考系中的观察者，分别观察质点 $P$ 的运动，自然都是分别相对于他们自身所在的参考系（坐标系）的. 在固定坐标系内的观察者看来，$O'$ 坐标系是一个活动坐标系，质点 $P$ 的位置矢径为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_t + \boldsymbol{r}' \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{r}_t$ 是活动坐标系原点 $O'$ 在 $O$ 系中的位置矢量，称**牵连位矢**；$\boldsymbol{r}'$ 是 $P$ 点在活动参考系（坐标系）中的位矢，叫做**相对位置矢量**，如图 3.1 所示. 它们的表达式为

$$\boldsymbol{r}_t = x_t\boldsymbol{i} + y_t\boldsymbol{j} + z_t\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

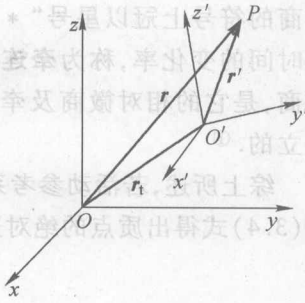



图 3.1

速度是位置矢量的时间变化率. $P$ 点相对于固定参考系 $O$ 的速度称**绝对速度**，即

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{3.2}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t} = \dot{x}_t\boldsymbol{i} + \dot{y}_t\boldsymbol{j} + \dot{z}_t\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}_t \tag{3.3}$$

是活动坐标系原点 $O'$ 相对于固定参考系原点 $O$ 的速度，也即活动坐标系（参考系）的平动速度，称作质点的**平动牵连速度**.

如果我们注意到，活动坐标系相对于固定参考系不仅存在平动，还可能存在转动，那么活动坐标的单位矢量：$\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 都将随活动坐标系一起转动；它们都是时间的函数. 设 $O'$ 系的转动角速度是 $\boldsymbol{\omega}$，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}')$$

$$= \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{3.4}$$

这里，已应用了熟知的关系式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}', \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}', \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'$$

等式(3.4)左边 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$ 是在固定参考系中观察到矢量 $\boldsymbol{r}'$ 的时间变化率[①]，称作 $\boldsymbol{r}'$ 的**绝对微商**. 而该式右边第一项，

$$\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' \tag{3.5}$$

是 $\boldsymbol{r}'$ 相对于活动坐标系 $O'$ 的时间变化率，称作**相对微商**，也就是在活动坐标系中的观察者观察到质点 $P$ 的速度，称作**相对速度**，以 $\boldsymbol{v}'$ 表示. 今后将在相对

① 虽然这里的相对位矢 $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$ 用活动坐标系表示，但坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$ 是时间的函数，表明 $\boldsymbol{r}'$ 是相对于固定参考系的矢量；$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$ 是相对于固定参考系求取的，是时间的绝对微商.

微商的符号上冠以星号“ * ”. $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$则是由活动坐标系“带着”$\boldsymbol{r}'$转动而引起$\boldsymbol{r}'$随时间的变化率,称为**牵连微商**. (3.4)式表明,位置矢量$\boldsymbol{r}'$关于时间的绝对微商,是它的相对微商及牵连微商的矢量和. 其实对任意矢量这个关系都是成立的.①

综上所述,若活动参考系相对于固定参考系既有平动又有转动,由(3.2)式和(3.4)式得出质点的绝对速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\\ &= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_e\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_e = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{3.7}$$

统称为质点的**牵连速度**,是平动牵连速度和转动牵连速度的矢量和;第一项$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_t/\mathrm{d}t$是由质点“跟随”活动参考系的坐标原点平动的速度,第二项则是质点“跟随”活动参考系绕其坐标原点转动的速度.

(3.6)式给出了质点$P$点分别相对于$O$和$O'$两个参考系的速度之间的关系,即绝对速度是相对速度和牵连速度的矢量和. 值得指出,在运动学范围内,绝对和相对的概念都是相对的. 在固定参考系中的观察者,认为质点相对于$O$系的速度是绝对速度,而把相对于$O'$系的速度叫做相对速度. 同样,在活动参考系中的观察者,也可以把相对于$O'$系的速度叫做绝对速度,把相对于$O$系的速度叫做相对速度. 在他们看来,自身所在的参考系是不动的,而另一参考系却是活动的.

[**例 3.1**] 一长为$l$的棒,两端点$A$和$B$分别沿十字槽滑动,$A$端的速率为常量$c$. 棒上有一质点$M$沿棒以恒定的相对速率$u$向$B$端移动,如图 L3.1 所示. 已知初始时,$A$端与$O$点相距为$d$,$M$点位于$A$端处. 求$M$点的速度(以$\theta$角为参量).

---

① 其实,对任何一个用仅有转动的活动参考坐标系表示的矢量,它的绝对微商都可表示为其相对微商和坐标转动引起的牵连微商的矢量和. 设一任意矢量,用固定坐标$O$系表示为$\boldsymbol{A}$,或用以角速度$\boldsymbol{\omega}$转动的活动坐标$O'$系表示为$\boldsymbol{A}'$;$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}'$实际上是同一矢量,只是用不同坐标系表示而已.

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = A'_x\boldsymbol{i}' + A'_y\boldsymbol{j}' + A'_z\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{A}'$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \dot{A}_x\boldsymbol{i} + \dot{A}_y\boldsymbol{j} + \dot{A}_z\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}'}{\mathrm{d}t} &= \dot{A}'_x\boldsymbol{i}' + \dot{A}'_y\boldsymbol{j}' + \dot{A}'_z\boldsymbol{k}' + A'_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t} + A'_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t} + A'_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{A}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}'\end{aligned}$$

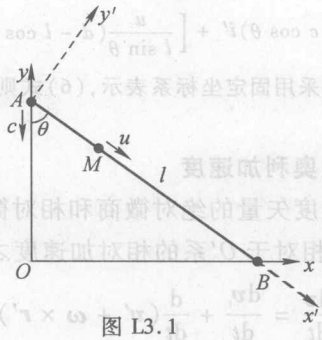



图 L3.1

[解] 取十字槽为固定参考系，棒为活动参考系，如图 L3.1 所示. 则 $\boldsymbol{u}$ 为相对速度；$\boldsymbol{c}$ 是活动系的平动牵连速度. 活动系的角速度 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{k}$. 因此 $M$ 点的绝对速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\\&=u\boldsymbol{i}'-c\boldsymbol{j}+\dot{\theta}ut\boldsymbol{j}'\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $t$ 是 $M$ 自 $A$ 点出发移动的时间. 注意到 $A$ 点的速度：

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}(l\cos\theta\boldsymbol{j})}{\mathrm{d}t}=-l\sin\theta\dot{\theta}\boldsymbol{j}=-c\boldsymbol{j}$$

得

$$\dot{\theta}=\frac{c}{l\sin\theta}\tag{2}$$

$M$ 点移动时间 $t$ 与参数 $\theta$ 间的关系，可由(2)式求得

$$\begin{aligned}t&=\int_0^t\mathrm{d}t=\frac{l}{c}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{l}{c}(\cos\theta_0-\cos\theta)\\&=\frac{d-l\cos\theta}{c}\end{aligned}\tag{3}$$

这里已注意到 $A$ 点的初始位置：$d=l\cos\theta_0$. 由图 L3.1 的几何关系易知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}'&=\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j}\\\boldsymbol{j}'&=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}\end{aligned}\tag{4}$$

将(2)、(3)和(4)诸式代入(1)式得质点 $M$ 的速度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=u(\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\theta\boldsymbol{j})-c\boldsymbol{j}+\dot{\theta}ut(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\\&=\frac{u}{l\sin\theta}[l\sin^2\theta-l\cos^2\theta+d\cos\theta]\boldsymbol{i}\\&\quad+\left[\frac{u}{l\sin\theta}(d\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)-c\right]\boldsymbol{j}\\&=\frac{u}{l\sin\theta}(d\cos\theta-l\cos2\theta)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left[\frac{u}{l\sin\theta}(d\sin\theta-l\sin2\theta)-c\right]\boldsymbol{j}\end{aligned}\tag{5}$$

当然，也可以利用关系式：

$$\boldsymbol{j}=-\cos\theta\boldsymbol{i}'+\sin\theta\boldsymbol{j}'$$

将(1)式用活动坐标系表示，写成

$$\boldsymbol{v} = (u + c\cos\theta)\boldsymbol{i}' + \left[\frac{u}{l\sin\theta}(d - l\cos\theta) - c\sin\theta\right]\boldsymbol{j}' \tag{6}$$

值得提醒读者，虽然(5)式是采用固定坐标系表示，(6)式则用活动坐标系，但它们表达的都是质点 $M$ 的绝对速度.

**(二) 加速度 科里奥利加速度**

类似地，可以通过速度矢量的绝对微商和相对微商的关系，来求得 $P$ 点相对于 $O$ 系的绝对加速度和相对于 $O'$ 系的相对加速度之间的关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_t}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_t}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\\ &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\\ &= \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'\\ &= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c \end{aligned} \tag{3.8}$$

这里我们已注意到 $\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$，以及角速度对时间的绝对变化率和相对变化率相等. 因为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

在(3.8)式中，质点的绝对加速度由三部分合成. 下面分别加以说明.

(1) 第一部分加速度

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.10}$$

是在活动参考系 $O'$ 中的观察者测量到的 $P$ 点加速度，即**相对加速度**.

(2) 第二部分加速度

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_t + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{3.11}$$

叫做**牵连加速度**. 这里包含三项，每一项都只与活动参考系的运动有关，其中

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_t}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.12}$$

是活动坐标系坐标原点的加速度. 活动参考系不转动时，活动参考系上每一点的加速度相同，都是 $\boldsymbol{a}_t$. 故这一项称为**平动牵连加速度**. $\boldsymbol{a}_e$ 中的其他两项都是由活动参考系的转动决定的，可称为**转动牵连加速度**.

(3) 最后一部分加速度

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \tag{3.13}$$

不单单与活动坐标系的运动——转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有关，还与相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 相关，

故不能归入牵连加速度. $\boldsymbol{a}_c$ 称作**科里奥利**(Coriolis)**加速度**,简称**科氏加速度**. 科氏加速度是活动系中的质点运动和活动系的转动相互影响,而对质点的加速度做出的贡献,它的方向垂直于参考系的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和质点的相对速度 $\boldsymbol{v}'$. 科里奥利加速度来自两个方面:① 质点具有相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 时,致使质点在活动参考系中位置的变化,改变了速度的大小. ② 质点跟随活动参考系转动时,由于相对速度方向的变化而形成加速度. 我们可以通过图 3.2 所示的图解来理解,设想一以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕轴转动的圆盘,其中图(a)显示质点以速度 $\boldsymbol{v}'$ 相对于圆盘沿圆盘半径向外运动,单位时间内由 $A$ 运动至 $B$,质点离开盘心的距离增加了 $\boldsymbol{v}'$,从而随圆盘转动时增加的速度(加速度)是 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$;图(b)则表明质点以相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 随圆盘转动而改变方向,这也造成了对加速度的贡献 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$. 科里奥利加速度 $\boldsymbol{a}_c$ 正是上述两种加速度之和.

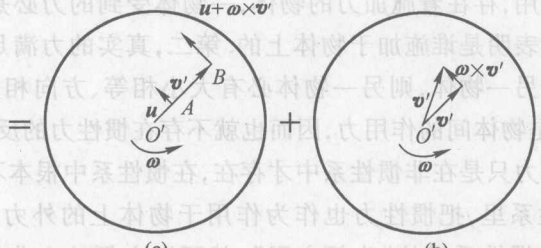



图 3.2

## §3.2 平动的非惯性系

如前节所述,设 $O$ 系为固定(或匀速直线运动)参考系;$O'$ 系是相对于 $O$ 系以加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 做平动但不转动的活动参考系. 我们已经知道,固定参考系或做匀速直线运动的参考系是惯性参考系,即 $O$ 系是惯性系. 相对于惯性系做非匀速直线运动的参考系,都是非惯性系;$O'$ 系是非惯性系. 在惯性系中牛顿运动定律成立;一质量为 $m$ 的质点,其加速度 $\boldsymbol{a}$ 与其受到的力 $\boldsymbol{F}$ 之间满足牛顿第二定律:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{3.14}$$

在非惯性系中,上式则不能成立. 然而人们常常需要在非惯性参考系中处理力学问题,因为人们赖以生存的地球本身就不是一个理想的惯性系. 那么,在非惯性系中对于力学系统的动力学问题,是否有规律可循? 答案是肯定的.

上节(3.8)式中已建立了质点相对于惯性系 $O$ 系的加速度 $\boldsymbol{a}$ 和相对于非惯性系的相对加速度 $\boldsymbol{a}'$ 之间的关系. 现在先讨论非惯性参考系 $O'$ 仅有平动而无转动的情形. 不存在转动意即 $\boldsymbol{\omega}=0$,质点就不存在转动的牵连加速度和科里奥利

加速度；平动加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 就是唯一的牵连加速度. 即

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t \tag{3.15}$$

以此代入牛顿方程(3.14)，即得

$$m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{F}$$

或

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + (-m\boldsymbol{a}_t) \tag{3.16}$$

这个式子告诉我们，在 $O'$ 非惯性系中质点的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 与质量 $m$ 的乘积不等于质点所受到的力 $\boldsymbol{F}$；牛顿第二定律确实并不成立. 但是，如果把 $-m\boldsymbol{a}_t$ 也看作质点受到的一种“力”，则(3.16)式在形式上与牛顿第二定律相同. 在非惯性系中的这项等效力 $-m\boldsymbol{a}_t$ 称为**惯性力**，数值上等于质点的质量 $m$ 与跟活动参考系关联的牵连速度 $\boldsymbol{a}_t$ 的乘积，方向则与 $\boldsymbol{a}_t$ 相反.

必须指出，惯性力并不是真实的力，它们是有很大区别的. 第一，真实的力是物体间的相互作用，存在着施加力的物体，一物体受到的力必是另一物体施加的，而惯性力却无从表明是谁施加于物体上的. 第二，真实的力满足牛顿第三定律，即一物体作用力于另一物体，则另一物体必有大小相等、方向相反的力反作用于该物体；惯性力不是物体间的作用力，因而也就不存在惯性力的反作用力. 第三，作用在质点上的惯性力只是在非惯性系中才存在，在惯性系中根本不存在这样的力.

在非惯性系里，把惯性力也作为作用于物体上的外力，那么(3.16)式就形式上相当于非惯性系里的“牛顿方程”，就可以方便地在非惯性系里求解质点的动力学问题. 在非惯性系中也可以形式上像惯性系那样形式上得到一些定理，如动量定理、动量矩定理、动能定理等，当然这必须把惯性力的因素考虑进去.

[例 3.2]　由于地球和太阳的相互作用，实际上太阳的运动也具有加速度，因而不是惯性参考系. 我们已在 §2.5 中讨论了地球和太阳这样的二体力学系问题. 现在我们用非惯性参考系的角度再来讨论；以太阳为参考系写出地球相对于太阳的运动微分方程.

[解]　设在宇宙中建立一惯性系，太阳的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_s$，地球的位置矢量是 $\boldsymbol{r}_e$，如图 L3.2所示. 把太阳也当作质点看待时，不考虑它的转动效果. 因而太阳是一个平动的非惯性参考系. 在太阳参考系中，地球的位置矢量是 $\boldsymbol{r}$.

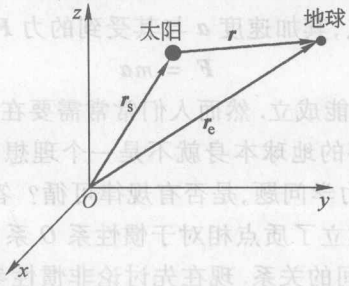



图 L3.2

在太阳非惯性参考系中考察地球的运动，则地球除受太阳的引力外，还需加上惯性力. 以 $m_s$ 和 $m_e$ 分别记为太阳和地球的质量. 则地球相对于太阳的运动方程为

$$\begin{aligned} m_e \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} &= \boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}_t \\ &= -\frac{G m_s m_e}{r^2} \boldsymbol{e}_r - m_e \frac{d^2 \boldsymbol{r}_s}{dt^2} \end{aligned} \tag{1}$$

又因太阳也受地球的引力作用，因此在宇宙惯性系中太阳的运动方程为

$$m_s \frac{d^2 \boldsymbol{r}_s}{dt^2} = \frac{G m_s m_e}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

以此代入(1)即得地球相对于太阳的运动微分方程：

$$m_e \frac{d^2 \boldsymbol{r}_e}{dt^2} = -\frac{G(m_s + m_e) m_e}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

或

$$\mu \frac{d^2 \boldsymbol{r}_e}{dt^2} = -\frac{G m_s m_e}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

式中 $\mu = \dfrac{m_s m_e}{m_s + m_e}$ 为折合质量，地球的这个运动方程与 §2.5 中(2.42)式的结果完全一致.

## §3.3 旋转的非惯性系

以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的参考系也是非惯性参考系；固定在转动参考系上的坐标系，对在惯性系中的观察者来说，则是一个以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的活动坐标系. 活动坐标系仅有转动，不存在平动加速度 $\boldsymbol{a}_t = 0$ 时，则由(3.8)式，质点相对于惯性系(固定坐标系)的绝对加速度是

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

在惯性系中质点的运动服从牛顿定律，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} \\ &= m[\boldsymbol{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'] \end{aligned}$$

因而有

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \tag{3.17}$$

从这里可以看到，要想在旋转的非惯性系中，形式上也按牛顿第二定律处理力学问题，就必须把上式右方的后面三项也都看成是作用在质点上的“外力”；这三项力也都叫做惯性力. 下面我们要对这些惯性力逐项地讨论，同时参见图 3.3.

(a) 惯性力 $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'$ 项，是由非惯性系的转动角速度随时间变化引起的；与非惯性系的角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 有关. 人站在平台上，若平台突然转动出现角加速度人会感受到与平台转动方向相反的力，如图 3.3(a)所示，就是这项惯性力的作用.

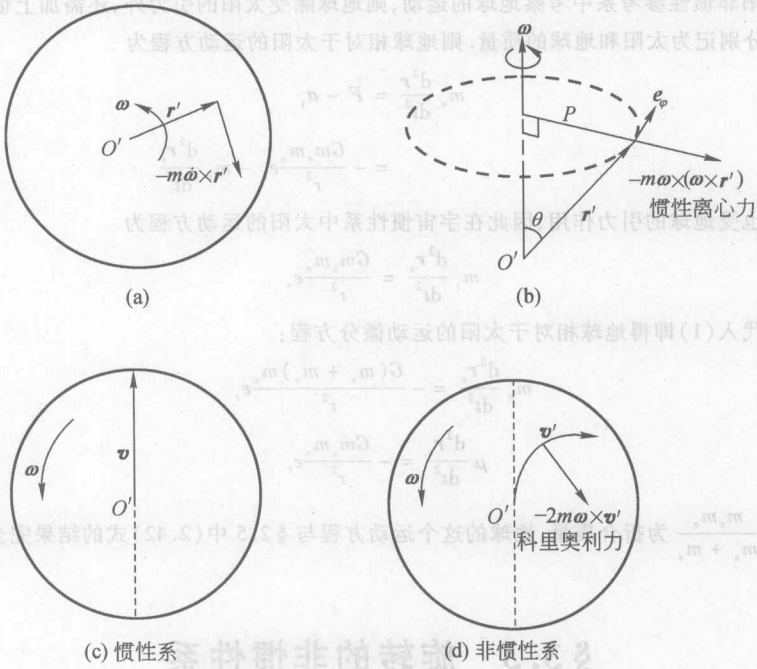



图 3.3

(b) 如图 3.3(b)所示,由熟知的矢量运算可知

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{\omega}\times(\omega r\sin\theta\boldsymbol{e}_{\varphi})=-\omega^{2}\rho\boldsymbol{e}_{\rho} \tag{3.18}$$

可见这项惯性力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=m\omega^{2}\rho\boldsymbol{e}_{\rho}$ 沿着离开转轴的方向,称为**惯性离心力**.

(c) 惯性力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ 项,叫做**科里奥利力**.它既与非惯性系的转动轴垂直,又与相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 垂直.如图 3.3(c)所示,设想一质点在光滑圆盘上沿一直线运动,惯性系中的观察者看来虽然圆盘在转动,质点并没有受到力的作用,始终保持着直线运动.但在转动着的非惯性系中的观察者看来,如图 3.3(d)所示圆盘是不动的,质点的运动路径却向转动相反的方向弯曲,存在加速度.因而他认为质点必在速度的垂直方向受到力的作用,这便是科里奥利惯性力.

总之,在非惯性参考系中质点除外力作用外,只要再添上惯性力的作用,就可以像惯性系中那样处理质点动力学问题;应用"动量定理"、"动量矩定理"或"动能定理"时,同样必须计及惯性力的作用.

**[例 3.3]** 一半顶角为 $\alpha$ 的圆锥,沿圆锥的母线开有一槽,圆锥绕铅直的对称轴线以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动.质量为 $m$ 的质点自圆锥顶点从静止开始无摩擦地向下滑动,如图 L3.3 所示.求出当质点离圆锥顶点为 $s$ 距离时,质点对槽作用的压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$.

［解］ 以圆锥为参考系. 由于圆锥旋转,因此是非惯性系. 现在我们就以这个圆锥非惯性参考系来求解问题. 取坐标轴固定在圆锥上;如图 L3.3 所示,$x$ 轴沿圆锥母线,$y$ 轴和 $z$ 轴分别沿锥面的切向和法线方向. 则有

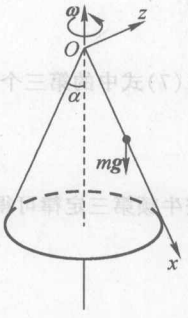


图 L3.3

质点位置矢量： $$\boldsymbol{r}' = x\boldsymbol{i} \tag{1}$$

速度： $$\boldsymbol{v}' = \dot{x}\boldsymbol{i} \tag{2}$$

角速度： $$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\alpha\boldsymbol{i} + \sin\alpha\boldsymbol{j}) \tag{3}$$

加速度： $$\boldsymbol{a}' = \ddot{x}\boldsymbol{i} \tag{4}$$

外力：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{g} + F'_y\boldsymbol{j} + F'_z\boldsymbol{k} \\ &= mg\cos\alpha\boldsymbol{i} + F'_y\boldsymbol{j} + (F'_z - mg\sin\alpha)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $F'_y$ 和 $F'_z$ 分别是圆锥上光滑槽的侧壁和槽底对质点的作用力分量.

惯性力：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\text{int}} &= -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \\ &= m\omega^2 x\sin\alpha(\sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) - 2m\omega\dot{x}\sin\alpha\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{6}$$

初始条件：

$$t = 0\text{ 时},\quad x = 0,\quad \dot{x} = 0$$

运动微分方程：

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{int}}$$

它的分量方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\cos\alpha + m\omega^2 x\sin^2\alpha \\ 0 = F'_y - 2m\omega\dot{x}\sin\alpha \\ 0 = F'_z - mg\sin\alpha + m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha \end{cases} \tag{7}$$

第一个方程的通解,可写为熟知的形式：

$$x = Ae^{\omega t\sin\alpha} + Be^{-\omega t\sin\alpha} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

由初始条件定得

$$A = B = \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2\sin^2\alpha}$$

故得解

$$\begin{aligned}x &= \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t\sin\alpha} + e^{-\omega t\sin\alpha}) - 1\right] \\ &= \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}[\operatorname{ch}(\omega t\sin\alpha) - 1] \\ &= \frac{2g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}\omega t\sin\alpha\right)\end{aligned} \tag{8}$$

式中 sh $x$ 和 ch $x$ 分别是双曲正弦函数和双曲余弦函数。对(7)式第一个方程积分,注意 $\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}$,可得

$$\dot{x}^2 = (2g\cos\alpha + \omega^2 x\sin^2\alpha)x$$

则

$$\dot{x} = \sqrt{(2g\cos\alpha + \omega^2 x\sin^2\alpha)x} \tag{9}$$

由(7)式中的第三个方程,并将(9)式代入第二个方程,即可求得槽对质点的作用力:

$$F'_y = 2m\omega\sin\alpha\sqrt{2gx\cos\alpha + \omega^2x^2\sin^2\alpha}$$

$$F'_z = mg\sin\alpha - m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$$

按牛顿第三定律可得出,当质点离顶点 $x=s$ 时,质点对圆锥槽的作用力是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_N &= -F'_y\boldsymbol{j} - F'_z\boldsymbol{k}\\ &= -2m\omega\sin\alpha\sqrt{\omega^2s^2\sin^2\alpha + 2gs\cos\alpha}\,\boldsymbol{j}\\ &\quad + m\sin\alpha(\omega^2 s\cos\alpha - g)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{10}$$

[评注] 上面是在活动参考系中求解,当然也可在不随圆锥转动的固定惯性参考系中求解.在惯性系中求解时,如图 L3.3 所示建立在圆锥上的坐标系则是旋转的活动坐标系.现在比较一下,在惯性系中求解与前面题解中采用的非惯性系求解有何异同.

请记住,现在是在固定的惯性参考系中求解问题,建立在圆锥体上的活动坐标系 $Oxyz$ 只是作为数学工具来应用.

质点的位置矢量: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}$

角速度 $\boldsymbol{\omega}$: 表达式与(3)式同

速度: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' = \dot{x}\boldsymbol{i} + \omega x\sin\alpha\boldsymbol{j}$

加速度:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'\\ &= (\ddot{x} - \omega^2 x\sin^2\alpha)\boldsymbol{i} + 2\omega\dot{x}\sin\alpha\boldsymbol{j} - \omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{11}$$

外力: 与(5)式同

惯性力: 根本不存在,在惯性系中谈不上惯性力

质点的运动微分方程: $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$

分量方程是

$$\begin{cases} m(\ddot{x} - \omega^2 x\sin^2\alpha) = mg\cos\alpha\\ 2m\omega\dot{x}\sin\alpha = F'_y\\ -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = F'_z - mg\sin\alpha\end{cases} \tag{12}$$

与(7)式比较,好像只是把与转动有关的项从等式右方搬到左方,别无差异.其实,建立这两组方程的观念是完全不同的.(7)式是在非惯性系中求解问题存在惯性力,而这里(12)式则是在惯性系中考察质点的运动,不存在惯性力,只是采用了活动坐标系来表示质点的绝对加速度.

## §3.4 地球自转的效应

地球不仅有自转,同时还绕太阳公转.以太阳作为惯性参考系来看,地球则不是惯性系.虽然在处理地球上发生的许多力学问题时,常可以把地球作为很好的惯性系看待,这是因为地球的自转角速度及绕太阳公转的加速度都很小.地

球自转的平均角速度大小是 $\omega = 7.292 \times 10^{-5}$ rad/s；角速度的改变率：$|\dot{\omega}| \approx 10^{-16}$ rad/s$^2$. 但是，有些力学问题还是能觉察到地球自转的影响. 这一节中，我们要讨论存在地球自转影响的几个典型例子.

**（一）地面坐标系中的质点运动方程**

研究地球上物体的运动时，适宜于采用地面坐标系. 设在地理纬度是 $\lambda$ 处，选取地面上一点 $O$ 作为坐标原点；通常以 $x$ 轴指向南方，$y$ 轴指向东方，铅直向上的方向为 $z$ 轴，如图 3.4 所示. 地球半径为 $R$，地面坐标系原点 $O$ 相对于地心 $D$ 的位置矢量是 $\boldsymbol{R}$. 设地面附近的质点 $P$ 的位矢为 $\boldsymbol{r}$. 则 $P$ 在地面坐标系内的运动方程为

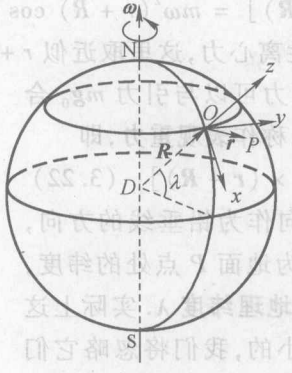



图 3.4

$$m\boldsymbol{a}' = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}_s + m\boldsymbol{g}_0 - m\boldsymbol{a}_e - m\boldsymbol{a}_c \tag{3.19}$$

上式中，$\boldsymbol{a}'$ 是相对于地面坐标系中质点的加速度；$\boldsymbol{F}'$ 是除地球引力（重力）$m\boldsymbol{g}_0$ 及太阳对质点的引力 $\boldsymbol{F}_s$ 外，质点受到的其他外力；最后二项分别是与地面坐标系的牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$ 和科氏加速度 $\boldsymbol{a}_c$ 对应的惯性力.

由于 $\omega$ 已是很小的量，在下面的讨论中通常只计及地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的一次项效应；$\dot{\omega} \propto \omega^3$ 当然属于舍弃之列，即认为地球以恒定的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕地轴转动.

在(3.19)式中，牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$ 应包含两部分，一是坐标原点 $O$ 的加速度 $\boldsymbol{a}_O$，另一是地面坐标系的转动牵连加速度.

坐标原点 $O$ 的加速度又由两种加速度合成：随地球绕太阳转动的加速度 $\boldsymbol{a}_s$ 和绕地轴转动的加速度. 地面坐标系原点 $O$ 相对于地心的位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 是一个长度恒定的矢量，$O$ 点随地面绕地轴转动的速度，自然是

$$\boldsymbol{v}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

地面坐标系原点绕地轴转动的加速度 $\boldsymbol{a}_O$ 为

$$\boldsymbol{a}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$$

故质点 $P$ 的牵连加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_e &= \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{a}_s + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r})] \end{aligned} \tag{3.20}$$

这样，质点在地面坐标系中受到的力是

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{F}_s + m\boldsymbol{g}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R})] - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{a}_s \tag{3.21}$$

质点置于地球表面附近，离开地面的距离与地球的半径 $R$ 比起来是微不足道的，因此

$$-m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R})] = m\omega^2 (r + R) \cos\lambda \boldsymbol{e}_\rho \approx m\omega^2 R \cos\lambda \boldsymbol{e}_\rho$$

是质点受到地球自转的惯性离心力，这里取近似 $r + R \approx R$；$\boldsymbol{e}_\rho$ 是单位矢量，与地轴垂直向外，见图 3.5. 这项力可以与引力 $m\boldsymbol{g}_0$ 合成构成质点的实际重力 $m\boldsymbol{g}$，称作**表观重力**，即

$$m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R})] \tag{3.22}$$

通常就是把表观重力的方向作为铅垂线的方向，它与赤道平面的交角 $\varphi$ 即为地面 $P$ 点处的纬度，通常称为**天文纬度**，以区别**地理纬度** $\lambda$. 实际上这两种纬度之间的差别是微小的，我们将忽略它们的区别. 为看得清楚起见，图中作了放大. 质点绕太阳的运动方程是

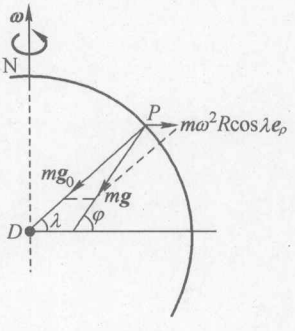



图 3.5

$$\boldsymbol{F}_s = m\boldsymbol{a}_s, \quad \text{即} \quad \boldsymbol{F}_s - m\boldsymbol{a}_s = 0$$

现在可以把质点在地面坐标系中的运方程(3.19)写为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' - mg\boldsymbol{k} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.23}$$

采用了表观重力 $m\boldsymbol{g}$ 后，科里奥利力是质点在地面坐标中受到的主要惯性力.

注意

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\cos\lambda \boldsymbol{i} + \sin\lambda \boldsymbol{k}$$

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = -2m\omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= 2m\omega[\dot{y}\sin\lambda \boldsymbol{i} - (\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)\boldsymbol{j} + \dot{y}\cos\lambda \boldsymbol{k}] \tag{3.24}$$

因而(3.23)式的分量方程可写为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = F_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \tag{3.25}$$

### (二) 自由落体的偏东

质量为 $m$ 的质点自高度为 $h$ 处自由下落,由于地球自转的影响,质点并不沿着铅垂线降落,实际上落地点总是偏向东方. 现在我们就来讨论这个问题. 质点自由下落时,除受到重力作用外没有其他外力,$F_x = F_y = F_z = 0$. 地球自转的影响则表现为科里奥利力的作用. 由(3.25)式,质点的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \tag{3.26}$$

初始条件是

$$t = 0 \text{ 时}, \quad x = y = 0, \quad z = h; \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

将(3.26)式中的第一式和第三式分别对时间积分一次,得

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{z} = 2\omega y\cos\lambda - gt \end{cases} \tag{3.27}$$

以此代入(3.26)式中的第二式,可得方程

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2\omega gt\cos\lambda$$

这是受迫谐振动类型的微分方程,通解为

$$y = A\cos(2\omega t) + B\sin(2\omega t) + \frac{g}{2\omega}t\cos\lambda$$

对时间 $t$ 微分一次,则得

$$\dot{y} = -2\omega A\sin(2\omega t) + 2\omega B\cos(2\omega t) + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}$$

由初始条件即可确定积分常数 $A$ 和 $B$

$$A = 0, \quad B = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}$$

得特解:

$$y = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{g}{2\omega}t\cos\lambda \tag{3.28}$$

再将此式代入(3.27)式,并对时间积分及应用初始条件,即可解得

$$x = \left[\frac{g}{4\omega^2}(\cos 2\omega t - 1) + \frac{1}{2}gt^2\right]\sin\lambda\cos\lambda \tag{3.29}$$

$$z = \left[\frac{g}{4\omega^2}(\cos 2\omega t - 1) + \frac{1}{2}gt^2\right]\cos^2\lambda + h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.30}$$

至此我们已得到了质点自由落体运动的全部解答,与不计地球自转影响时的解有明显的区别. 前面已指出,地球自转角速度是一个很小的量,$\omega t = 2\pi t/T \ll 1$ ($T$ 是地球自转周期,即 1 天),对此小量作级数展开,保留到 $\omega^2$ 项. 注意到

$$\cos 2\omega t \approx 1 - \frac{1}{2}(2\omega t)^2 + \frac{1}{4!}(2\omega t)^4, \quad \sin 2\omega t \approx 2\omega t - \frac{1}{3!}(2\omega t)^3$$

则得

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{6}g\omega^2 t^4 \sin\lambda \cos\lambda \approx 0 \\ y = \dfrac{1}{3}g\omega t^3 \cos\lambda \\ z = h - \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{1}{3}g\omega^2 t^4 \approx h - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{3.31}$$

现在可以看到,地球自转对质点铅垂方向下落的影响甚微,为 $\omega^2$ 量级,可略去不计. 质点不仅铅直下落还有向南($x$ 方向)和向东($y$ 方向)的运动. 向南的偏移比向东偏移小 $\omega$ 量级,因而能观察到的主要是向东移. 这就解释了著名的落体偏东现象. 利用(3.31)式中的第三式,求出下落时间 $t$ 与下落距离 $z$ 的关系,以此代入第二式即可得质点自高度 $h$ 处自由下落至地时,偏东的距离:

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\omega \cos\lambda$$

这个数值很小;质点在纬度 $\lambda = 40°$,高 $h = 200$ m 处下落,到达地面时东偏的距离也仅约是 $4.75 \times 10^{-2}$ m,通常是难以觉察的. 由(3.31)式还可看到在赤道处($\lambda = 0$)偏东现象最为显著,而在两极处,$\lambda = \pi/2$,则不会出现落体偏东现象. 落体偏东现象是科里奥利惯性力造成的结果.

**(三) 傅科摆**

表现地面上科里奥利力影响的又一例子是**傅科摆**. 1851 年傅科(J. Foucault)用很长的线(数米至数十米)悬挂一很重(数十千克)的摆锤做小振幅摆动的实验. 摆锤在很长时间的摆动过程中,摆动平面出现缓慢的旋转现象. 随后于 1879 年,昂内斯(K. Onnes)[①]在他的博士论文中发表了关于摆动平面进动的确切测量结果. 这是一项显示地球自转的重要实验. 我们把这个摆装置叫做**傅科摆**.

这里不拟对傅科摆问题作数学上的求解,仅作定性的解释.

为简单起见,首先假定实验在地球北极进行. 这时地球自转角速度 $\omega$ 的方向就铅直方向. 设想在地心建立一个不随地球转动的惯性系. 在这个惯性系中观察摆锤的运动,摆动平面应保持不变. 因为在垂直于摆动平面的方向摆锤不受任何外力作用(重力和悬线作用的力都在摆动平面内). 但在随地球转动的地面坐标系中观察时,摆锤将受到与摆动平面(摆锤的速度在此平面内)垂直的科里奥

① 昂内斯(K. Onnes)是著名的实验物理学家,于 1911 年首先发现在 4.2 K 液氦温度下,汞的电阻消失这一超导电现象;1913 年获得诺贝尔物理学奖.

利惯性力作用. 如果从傅科摆的上方向下看,则摆锤受到的科氏力总是迫使摆锤偏向运动方向的右方. 这种偏离当然是非常微小的,图 3.6 中所示已大大地夸大了. 但经过长时间地来回摆动就可觉察出摆动平面按顺时针方向进动. 为了理解得更形象些,可以设想在旋转餐厅中心的天花板上挂有一个单摆. 当餐厅没有旋转时,餐厅内、外的人员都观察到单摆在同一固定平面内摆动. 餐厅转动时,餐厅外的人员观察单摆依然在固定的平面内摆动,因为没有任何物体对摆锤施加外力,运动状况不会有任何影响,而餐厅内的食客,则由于他相对于餐厅外建筑物的方位,随餐厅的转动而发生变化,因而能看到单摆的摆动不断地偏离原有的摆动平面,摆动面发生了旋转,好像摆锤受到了某种外力作用,即科里奥利力的作用(当然还存在惯性离心力,但它的方向在摆动平面内,不会使摆动面发生偏转). 我们观察到的傅科摆现象,就好比我们坐在地球这个巨大的,旋转十分缓慢的"餐厅"中观察到单摆摆动平面转动的情形. 关于科里奥利力的这个效应,实际上我们在 §3.3 中就已经提到过了,见图 3.3(d).

不仅在北极,实际上在除地球赤道外的任意纬度处,傅科摆的摆动平面都会有不同程度的进动现象出现. 例如在北半球,地球的自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可以分解成铅直方向和水平方向的两个分量

$$\omega_{铅直} = \omega \sin \lambda$$

$$\omega_{水平} = -\omega \cos \lambda$$

如图 3.7 所示. 地球自转角速度在地平面内的分量 $\omega_{水平}$ 不会对振动面的进动有明显影响. 因为摆锤的速度基本上在水平面内,水平方向的角速度分量 $\omega_{水平}$ 引起的科氏力主要地沿铅直方向. 使摆动面进动的科氏力来自地球自转的铅直方向的角速度分量 $\omega_{铅直}$;纬度 $\lambda$ 越大,分量 $\omega_{铅直}$ 就越大,傅科摆摆动平面的进动就越明显. 在赤道处 $\lambda = 0$,摆动平面将不发生进动. 在南半球,由于地球自转角速度的铅直分量指向地平面下方,摆动平面将按逆时针方向进动,进动方向与北半球相反.

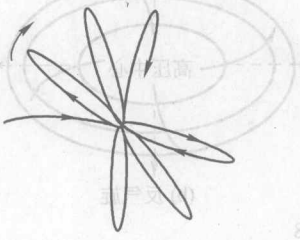


图 3.6

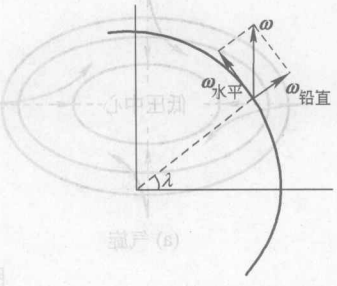
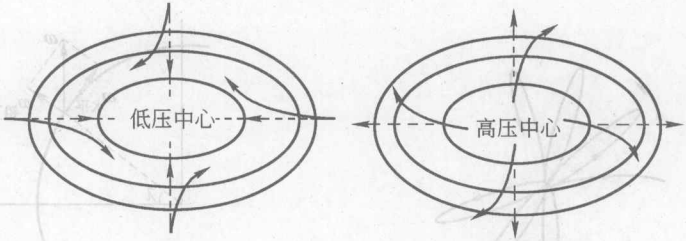



图 3.7

**(四) 气旋 热带风暴和信风**

空间存在气压差时,空气便由高气压区向低气地压区流动,从而形成风. 如

果地球不转动，则风向将沿着气压梯度的负方向：即 $-\nabla p$ 方向. 地球自转时，有科里奥利力作用于流动的空气上，迫使气流的流动方向发生偏转. 现在来定性说明风向受地球自转的影响. 如图 3.8(a)所示，设纸面为某区域的空气流动平面，存在一低压中心区. 图中闭合线表示等气压线. 如果没有科里奥利力效应，风向将沿虚线由高气压的地方向低气压处流动. 在北半球，地球自转引起的科里奥利力迫使气流向右偏转，如图 3.8 中带箭头的粗实线所示. 科氏力和压力梯度的作用力分别指向气流的两侧. 若是仅有压力梯度和科氏力的作用，达到稳定时，科氏力和压力梯度效应恰好相互抵消，此时将形成围绕低压中心的环状气流. 但实际上，风和地面之间存在着摩擦力损耗气流的能量，气流总是偏向低压区的，呈逆时针螺旋形向低压中心汇聚. 相反对于高压中心，气流由中心向外流动，科氏力的作用使气流呈螺旋形顺时针向外，如图 3.8(b)所示. 气象学上把围绕低压中心的旋转气流称为**气旋**，而把绕高压中心转动的气流称为**反气旋**. 因而在地球的北半球，反气旋则是围绕并离开高压中心顺时针旋转的大气环流. 在南半球，气旋和反气旋的旋转方向与北半球相反；气旋为顺时针，反气旋是逆时针的. 存在气旋时，空气向中心聚集，必将形成上升气流，把气体排向高空. 高空的温度低，由地面向上的湿热气流将冷凝成雨. 这便是低气压区常会下雨的重要原因之一. 某一地区若长期受低气压控制，就可能引起洪灾. 相反，对于反气旋，气流从高压中心排出，高空的干燥气体将下沉补充，天气晴好. 长期受高压控制，则会发生旱情. 此外，科氏力的作用阻碍了气流的直接流动，可能造成附加的压力差. 这常常会严重地影响天气状况，甚至造成某些灾变性的天气. 在地球的赤道附近，地球自转角速度与地平面平行，科氏力只能对地面附近的气流发生上下运动的效果，不会产生附加压力差，故对气象的影响甚少；在赤道附近常出现“赤道无风带”现象. 飓风、台风等源于热带气旋，它们总是在赤道带南、北纬 5°以外发生，就是与科氏力在赤道附近对气流影响较小有关.




(a) 气旋　　(b) 反气旋

图 3.8

科里奥利力效应同样可以用来说明信风的形成. **信风**又称**贸易风**. 赤道地区的地表温度高，而两极寒冷. 赤道附近的热空气上升至高空后向两极推进. 然而高空气流越往高纬度，受到的科氏力就越大，气流便越向纬度线偏离. 在

纬度30°附近,气流基本上顺着纬度线了,压根儿到不了极地.可是,从赤道方向不断有气流推来,在中纬度高空堆积,气体必然下沉,以致近地面层空气密度增大,形成高压区.这便是地理学和气象学中熟知的副热带高压区.大气又在近地面层自副热带高压区向赤道低压槽流动,形成大气环流.大气在向赤道流动的过程中,又受到科里奥利力作用,在北半球形成东北信风,在南半球则成东南信风.上述现象由图3.9示意.当然,这里我们只是从地球自转的科氏力的影响来讨论的,并未计及辐射和地形、地貌等其他因素对大气温度及其流动的重要影响.

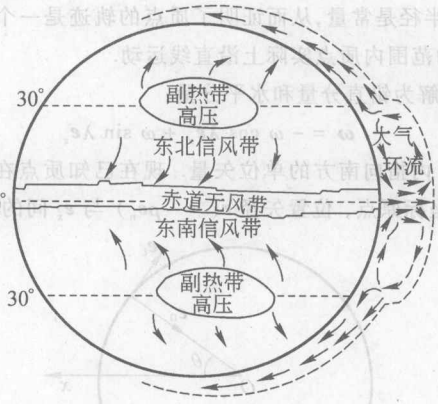



图3.9

[例3.4] 一质点置于光滑的水平桌面上运动,初速度率为$v_0$.设桌面位于北纬$\lambda$处,考虑地球的自转效应,证明质点的运动轨迹是一个圆,并求出圆半径及桌面所受到的力$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{N}}$.

[解] 以桌面为参考系,在桌面内采用自然坐标系.由于桌面随地球一起转动,故是旋转非惯性系.在桌面上采用自然坐标系,则地球的自转角速度(也即桌面的转动角速度)$\boldsymbol{\omega}$可写为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + \omega_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \omega_z\boldsymbol{e}_z = \omega_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + \omega_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \omega\sin\lambda\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

这里,$\boldsymbol{e}_z$是桌面法线方向的单位矢量.

质点将受到重力、桌面的反作用力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$和科里奥利惯性力的作用.请注意,地球自转而引起的惯性离心力已包含在重力中.这样,作用于质点的力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -mg\boldsymbol{e}_z + F_{\mathrm{N}}\boldsymbol{e}_z - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\\ &= (F_{\mathrm{N}} - mg)\boldsymbol{e}_z - 2m\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} & \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} & \boldsymbol{e}_z\\ \omega_{\mathrm{t}} & \omega_{\mathrm{n}} & \omega\sin\lambda\\ v & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &= -2m\omega v\sin\lambda\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + (F_{\mathrm{N}} - mg + 2m\omega_{\mathrm{n}}v)\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{2}$$

由此写出质点在自然坐标系下的运动微分方程:

$$ma_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3}$$

$$ma_n = -m\frac{v^2}{\rho} = -2m\omega v\sin\lambda \tag{4}$$

$$ma_z = m\ddot{z} = 0 = F_N - mg + 2m\omega_n v \tag{5}$$

初始条件为

$$v|_{t=0} = v_0 \tag{6}$$

将(3)式对时间积分一次,并由初始条件(6)得速率为常量:

$$v = v_0$$

代入(4)式得

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega\sin\lambda} = 常量 \tag{7}$$

即质点运动轨迹的曲率半径是常量,从而证明了质点的轨迹是一个圆. 由于 $\omega$ 很小,这个圆的半径非常大,在桌面的范围内质点实际上沿直线运动.

将地球角速度 $\omega$ 分解为铅直分量和水平分量:

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \omega\sin\lambda\boldsymbol{e}_z$$

其中 $\boldsymbol{e}_x$ 是水平面(桌面)内指向南方的单位矢量. 现在已知质点在桌面内做圆周运动,如图 L3.4 所示,取以圆心为坐标原点,位置矢径 $\boldsymbol{r}(=-\rho\boldsymbol{e}_n)$ 与 $\boldsymbol{e}_x$ 间的夹角为 $\theta$ 则

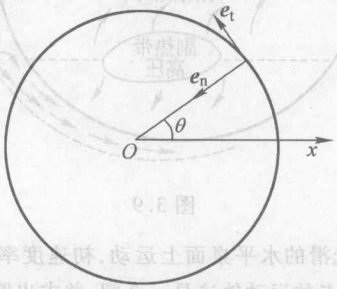



图 L3.4

$$\boldsymbol{e}_x = -\cos\theta\boldsymbol{e}_n - \sin\theta\boldsymbol{e}_t$$

故得

$$\boldsymbol{\omega} = \omega[\cos\lambda(\cos\theta\boldsymbol{e}_n + \sin\theta\boldsymbol{e}_t) + \sin\lambda\boldsymbol{e}_z]$$

由此

$$\left.\begin{aligned}\omega_n &= \omega\cos\lambda\cos\theta\\ \omega_t &= \omega\cos\lambda\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

则由(5)式得桌面对质点的作用力的数值为

$$F_N = mg - 2mv\omega_n = m(g - 2v_0\omega\cos\lambda\cos\theta)$$

桌面受到的力是

$$\boldsymbol{F}'_N = -F_N\boldsymbol{e}_z = m(2v_0\omega\cos\lambda\cos\theta - g)\boldsymbol{e}_z \tag{9}$$

由于地球自转的角速率 $\omega$ 的数值很小,科里奥利力与重力比起来小得多;(9)式圆括内的第一项与重力加速度数值 $g$ 相比要小得很多.

从本题看到,若质点的运动范围不大,且时间较短,地球自转对质点运动的影响甚微. 除

非像本题那样特别指出，一般可不考虑地球自转的影响，把地球作为惯性系看待.

[评注] ① 根据本题的特点，采用内禀坐标系是最为恰当的. 但是，要写出地球的自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在内禀坐标系中的表示式，则需要利用其他坐标系中的表示式来达到. 一个矢量不能直接写出在指定坐标系中的表达式时，要善于利用其他坐标系中的表达式来过渡.

② 本题也可以如下来证明质点做圆周运动. 由于质点在桌面上运动，在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向没有速度分量，外力 $\boldsymbol{F}_N$ 与桌面垂直. 故有

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=[(F_N-mg)\boldsymbol{e}_z-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{v}=0$$

即证明了桌面参考系中，质点受到的力与速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直，加速度只可能沿法向，这也就证明了质点以恒定速度做圆周运动.

③ 本题也可采用直角坐标系来求解. 取固定在桌面上的直角坐标系，与前述类似，$\boldsymbol{e}_x$ 指向南方，$\boldsymbol{e}_y$ 指向东方，$\boldsymbol{e}_z$ 铅直向上. 则根据(3.25)式，可直接写出质点的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=2m\dot{y}\omega\sin\lambda \\ m\ddot{y}=-2m\dot{x}\omega\sin\lambda \\ m\ddot{z}=0=F_N-mg+2m\dot{y}\omega\cos\lambda \end{cases} \tag{10}$$

这里已注意到质点在水平面内运动：$\dot{z}=0$，以及仅在铅直方向存在外力. 将上式中的第二式对时间积分一次，得

$$\dot{y}=v_{0y}-2\omega\sin\lambda(x-x_0)$$

代入第一式，有

$$\ddot{x}=-4\omega^2\sin^2\lambda(x-x_0)+2\omega v_{0y}\sin\lambda$$

类似地，可得

$$\ddot{y}=-4\omega^2\sin^2\lambda(y-y_0)-2\omega v_{0x}\sin\lambda$$

这是两个典型的简谐振动类型的微分方程. 下面请读者自己完成本题的求证.

采用直角坐标系可以应用课文知识，直接写出质点的运动微分方程(10)，但求解时数学上较繁琐些. 采用自然坐标系，数学上较简洁，但对角速度的表达较为迂回. 读者可比较这两种坐标系中求解本题的优缺点.

## 习 题

**3.1** 一船篷高 4 m，在雨中航行时，它的雨篷遮着篷的垂直投影后 2 m 的甲板；但当停航时，甲板上干、湿两部分的分界线却在篷前 3 m 处. 如果雨点的速率是 8 m/s，求船航行的速率 $u$. ($u=8$ m/s)

**3.2** 河的宽度为 $d$，水的流速与离开河岸的距离成正比. 岸边的流速为 0，河中心处的流速是 $c$. 河中一小船内的人以相对于水流恒定的速率 $u$，垂直于水流向岸边划去. 求小船的航行轨迹和抵达对岸的地点.

(若取坐标系原点位于河岸；$x$ 轴和 $y$ 轴分别平行和垂直于河岸. 则轨迹方程为

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{c}{ud}y^2 && \left(y\leqslant\frac{d}{2}\right) \\ x&=\frac{2c}{u}y-\frac{c}{du}y^2-\frac{cd}{2u} && \left(y\geqslant\frac{d}{2}\right) \end{aligned}\right\},$$

抵达对岸的地点：$x=cd/2u$)

**3.3**　一圆盘以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕过圆心并与圆盘面垂直的轴转动. 一质点 $M$ 沿圆盘上的弦,以恒定的相对速度 $\boldsymbol{u}$ 运动,如图 T3.3 所示. 已知该弦离盘心的距离为 $b$. 求在以地面为参考系时,质点 $M$ 的速度和加速度(表示成 $M$ 离弦中点的距离 $x$ 的函数).

$$(\boldsymbol{v} = (u - b\omega)\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j};\quad \boldsymbol{a} = -\omega^2 x\boldsymbol{i} + (2u\omega - b\omega^2)\boldsymbol{j})$$

**3.4**　一飞机在赤道上空以速率 1 000 km/h 水平飞行. 考虑到地球的自转效应,分别在下列情形下求出飞机相对于惯性坐标系(不随地球转动的坐标系)的速率:(i) 向北飞行;(ii) 向西飞行;(iii) 向东飞行. 已知地球半径为6 370 km.

(540 m/s,　185.5 m/s,　741 m/s)

**3.5**　一楔子顶角为 $\alpha$,以匀加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 沿水平方向加速运动;质量为 $m$ 的质点沿楔子的光滑斜面滑下,如图 T3.5 所示. 求质点相对于楔子的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 及对楔子斜面的压力 $\boldsymbol{F}$.

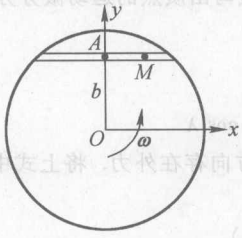



图 T3.3

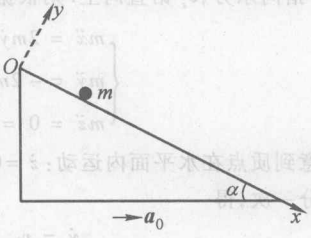



图 T3.5

$$(\boldsymbol{a} = (g\sin\alpha - a_0\cos\alpha)\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{F} = -m(g\cos\alpha + a_0\sin\alpha)\boldsymbol{j})$$

**3.6**　一缆车以大小为 $a_0$,与地平线成 $\alpha$ 角的匀加速度上升. 缆车中一物体自离缆车地板高度 $h$ 处自由下落. 求此物体落至地板处的位置.

(向后偏离:$ha_0\cos\alpha/(g + a_0\sin\alpha)$)

**3.7**　一单摆摆长为 $l$,悬挂点 $O'$ 在水平线上做简谐振动:$x = a\sin pt$. 这里 $x$ 是悬挂点离开水平线上的固定点 $O$ 的距离,如图 T3.7 所示. 开始时摆锤铅直下垂,相对于 $O'$ 的速度为 0. 证明单摆以后的微小振动规律为

$$\theta = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right)$$

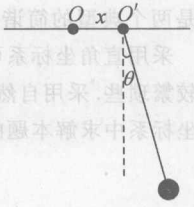



图 T3.7

式中　$k^2 = g/l$.

**3.8**　一竖直放置的钢丝圆圈,半径为 $r$,其上套有一质量为 $m$ 光滑小环. 今若钢丝圈以匀加速度 $\boldsymbol{a}$ 竖直向上运动,求小环相对于钢丝圈的速率 $u$ 和钢丝圈对小环的作用力 $\boldsymbol{F}'_N$. 已知初始时刻钢丝圈圆心与小环的连线跟铅直线之间的夹角 $\varphi = \varphi_0$,小环的相对速率 $u = u_0$.

$$\left(u = \sqrt{u_0^2 + 2r(a+g)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)},\quad \boldsymbol{F}'_N = -mg\left[\left(1 + \frac{a}{g}\right)(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) + \frac{u_0^2}{rg}\right]\boldsymbol{e}_r\right)$$

**3.9**　一平放于光滑水平桌面上的圆盘,以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定的圆盘中心转动. 有一质量为 $m$ 的人沿圆盘上确定的半径以恒定的相对速率 $u$ 向圆盘的边缘走动. 试分别从(a)地面惯性系、(b)圆盘非惯性系,讨论圆盘对人的作用力.

((a) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\parallel} + \boldsymbol{F}_{\perp} = -m(\omega^2 r\boldsymbol{i} + 2\omega u\boldsymbol{j}) + mg\boldsymbol{k}$;(b) $\boldsymbol{F} = -m(\omega^2 r\boldsymbol{i} + 2\omega u\boldsymbol{j}) + mg\boldsymbol{k}$)

**3.10**　一半径为 $r$ 竖直放置的光滑圆环,绕通过其圆心的铅直轴以恒定的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转

动. 在此圆环上套有一质量为 $m$ 的小环,自 $\theta=\pi/4$ 处相对于圆环无初速地沿环下滑. 问小环的位置 $\theta$ 为何值时,它的滑动将开始反向? 这里 $\theta$ 是圆环的圆心与小环的连线跟转轴之间的夹角. $\left(\theta=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2g}{r\omega^2}\right)\right)$

**3.11** 一内壁光滑的管子,在水平面内绕通过其端点 $O$ 的铅直轴,以恒定的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动. 管内有一质量为 $m$ 的质点,用一自然长度为 $l$,劲度系数是 $k$ 的弹簧和管子的端点 $O$ 相连. 设初始时质点离 $O$ 的距离为 $x=l$ 且 $\dot{x}=0$. 求质点在管中的运动及它对管壁的压力 $\boldsymbol{F}_N$.

$\left(x=\frac{l\omega^2}{\Omega^2-\omega^2}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\cos\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t\right),\quad \boldsymbol{F}_N=2ml\frac{\omega^3 l}{\sqrt{\Omega^2-\omega^2}}\sin\sqrt{\Omega^2-\omega^2}t\boldsymbol{j}+mg\boldsymbol{k},\quad \Omega^2=k/m\right)$

**3.12** 质量为 $m$ 的小环,套在半径为 $r_0$ 的光滑水平圆圈上,若圆圈在水平面内以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕其圆周上的一点转动. 试分别写出小环沿圆圈切线方向和法线方向的运动微分方程(以小环相对于圆圈,绕圆心转过的角度 $\theta$ 为参量写出). 设圆圈对小环的作用力大小以 $F_N$ 表示,并可略去小环的重力.

$\left(\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0;\quad mr_0\dot{\theta}^2=-F_N-m\omega^2r_0(1+\cos\theta)-2m\omega r_0\dot{\theta}\right)$

**3.13** 一质量为 $m$ 的质点,位于光滑的水平平台上,此平台以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕通过平台一定点 $O$ 的铅直轴转动. 若质点受到 $O$ 点的吸引力 $\boldsymbol{F}=-m\omega^2\boldsymbol{r}$ 作用,这里 $\boldsymbol{r}$ 是质点相对于 $O$ 点的矢径. 试证明质点在任何起始条件下,将绕 $O$ 点以角速度 $2\omega$ 走一圆周轨道.

**3.14** 一抛物线形金属丝竖直放置,顶点向下,以匀角速 $\boldsymbol{\omega}$ 绕竖直轴转动. 一质量为 $m$ 的光滑小环套在金属丝上. 写出小环在金属丝上滑动时的运动微分方程. 已知金属丝构成的抛物线方程为 $x^2=4ay$,这里 $a$ 为常数.

$$\left(\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}=-\frac{g}{2a}x+\omega^2x-\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2\right)$$

**3.15** 在北纬 $\lambda$ 处,一质点以初速 $v_0$ 竖直上抛,到达高度 $h$ 时又落回地面. 考虑地球的自转效应,不计空气的阻力,求质点落地位置与上抛点之间的距离,偏东还是偏西? 为什么?

$\left(y=-\frac{8\omega h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda,\text{偏西}\right)$

**3.16** 在北纬 $\lambda$ 处,以仰角 $\alpha$ 向东方发射一炮弹,炮弹的出口速率为 $v$. 考虑地球的自转效应,证明炮弹落地点的横向偏离距离是

$$d=\frac{4v^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

# 第四章

# 质点组动力学

## §4.1 质 点 组

前面各章讨论的是质点的运动.正如早已指出的,任何一个物体都由大量的微小粒子组成.这里所谓的"微小",是指粒子在宏观尺度上的微小,以至可以抽象为质点,但在微观尺度上看,它们则仍然充分地大,服从经典力学规律,无需考虑量子力学效应.由多个这样的微小粒子(质点),或由多个无需考虑其大小和形状,可作为质点看待的物体构成的体系,称作**质点组**,或**质点系**.通常,质点组内的粒子(质点)间存在相互作用,每一个质点的运动都与其他质点的运动关联着.质点组内质点的运动状况非常复杂,除了仅有两个质点构成的两体系外,对包含有三个质点以上的质点组,在没有任何附加条件的情况下,至今无法对每一个质点的运动求出严格的解析解.虽然一般来说不能确切地求解出质点组中每个质点的运动状态,但是根据经典力学定律仍然可以找出质点组的总体运动规律.这便是本章的任务.

### (一) 外力和内力

设质点组包含有 $N$ 个质点,当然对每一个质点都可以根据质点力学的基本定律,列出它们的运动微分方程:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{4.1}$$

这里把作用在质点上的力,区分为两种类型:$\boldsymbol{F}_i$ 是质点组外部的物体对第 $i$ 个质点作用的力称为**外力**;另外一种是质点组内部质点间的相互作用力,称为**内力**,$\boldsymbol{F}_{ij}$ 便是质点 $j$ 对质点 $i$ 作用的内力.一般来说,作用于某一质点上的力,特别是内力,与质点组内其他各质点的位置有关.因此,(4.1)式是 $N$ 个矢量方程的联立方程组,也即 $3N$ 个联立标量方程组.

一质点受到另一质点作用的内力,主要是静电力或万有引力,通常具有有心

力的特征;任何两个质点间的、相互作用的力大小相等方向相反,且总是沿着质点的连线方向,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \\ (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

**(二) 质心**

尽管在没有任何附加的约束条件下,由方程组(4.1)来求解每个质点的运动是困难的,但仍然可以求得质点组的整体运动规律.为此,我们先来确定描写质点组整体运动的位置参量,将描写质点组整体运动和描写质点组内部运动的位置参量区分开来.实际上我们在§2.5中处理二体问题时已经这样做了.

质点组的质心位置是描写质点组整体运动的最恰当的位置参量.质心位置矢量的定义如下:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{m} \tag{4.3}$$

其中

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{4.4}$$

是质点组的总质量.由(4.3)式容易看出,质心的位置矢量 $\boldsymbol{r}_c$ 是质点组中各质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 以其质量 $m_i$ 为权重的平均矢量,可以用它来代表质点组的整体位置.质点的质量 $m_i$ 与该质点的位矢 $\boldsymbol{r}_i$ 的乘积:$m_i\boldsymbol{r}_i$,常被称作该质点关于坐标原点的质量一次矩.

质点组中任意一质点 $i$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 则可表示为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_c \tag{4.5}$$

其中

$$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_c \tag{4.6}$$

是质点 $i$ 相对于质心的位置矢量.各质点相对于质心的相对位置矢量 $\boldsymbol{r}'_i$($i=1,\cdots,N$)可以作为质点组的内部位置参量.

根据以上定义,我们立即可得出如下结论:

(1) 质点组中各质点相对于质心的质量一次矩之和恒等于零

由(4.3)式

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i = m\boldsymbol{r}_c \tag{4.7}$$

再据(4.6)式,得

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_c = 0 \tag{4.8}$$

(2) 满足叠加原理

从(4.3)式,质心的位矢由质点组的质量一次矩确定,与各质点的质量呈线性关系,可以利用叠加定理来计算.例如,假设有两个物体(质点组),它们的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$,质心的位矢分别是 $\boldsymbol{r}_{c1}$ 和 $\boldsymbol{r}_{c2}$,则这两物体的质心位矢为

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_{c1} + m_2\boldsymbol{r}_{c2}}{m_1 + m_2}$$

虽然质心的位置矢量(4.3)式是对不连续质点构成的质点组定义的,但很容易推广到连续物体:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}V}{\int_V \rho\mathrm{d}V} \tag{4.3′}$$

这里 $\rho$ 是连续物体的密度函数.

[例 4.1]　一凹底圆锥体,由高为 $h$ 底面半径为 $R$ 的均质正圆锥体,自底面挖去高 $d(d<h)$ 的共轴圆锥而成,如图 I4.1 所示.求此凹底圆锥体的质心位置.

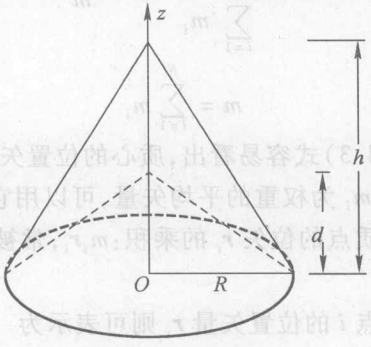



图 I4.1

[解]　以圆锥底中心 $O$ 点为坐标原点,圆锥轴为 $z$ 轴,如图 I4.1 所示.设凹底锥体的体积为 $V_1$,底部凹进部分的体积为 $V_2$;锥体密度为 $\rho$.则由(4.3′)式利用叠加原理有

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_{V_1} \boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}V}{\int_{V_1} \rho\mathrm{d}V} = \frac{\int_{V_1+V_2} \boldsymbol{r}\mathrm{d}V - \int_{V_2} \boldsymbol{r}\mathrm{d}V}{\int_{V_1+V_2} \mathrm{d}V - \int_{V_2} \mathrm{d}V}$$

圆锥体可以看成由与轴垂直,半径为 $r = R(h-z)/h$ 的圆形薄片连续地堆积而成,每一圆片的质心必位于圆锥轴上,故有

$$x_c = 0,\quad y_c = 0$$

$$z_c = \frac{\int_0^h [R(h-z)/h]^2 z\mathrm{d}z - \int_0^d [R(d-z)/d]^2 z\mathrm{d}z}{\int_0^h [R(h-z)/h]^2\mathrm{d}z - \int_0^d [R(d-z)/d]^2\mathrm{d}z}$$

$$= (h+d)/4$$

即质心位于圆锥轴上，离锥底$(h+d)/4$处.

[评注] 具有线性关系的量都存在叠加原理.实际上，本题还可以计算得更简单一些.大家熟知底面半径为$r$，高为$l$的正圆锥体的体积是$V=\pi r^2 l/3$.若锥体是均质的，则其质心位于轴上，离底面$l/4$处.则由叠加定理，可将一个实心的大圆锥体和一个挖去的小圆锥体(负质量圆锥体)的整体看作两个质点体系，来计算该空心锥体的质心离底面的距离为

$$s=\frac{m'h/4-md/4}{m'-m}=\frac{1}{4}\frac{Vh-vd}{V-v}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{h^2-d^2}{h-d}=\frac{1}{4}(h+d)$$

这里$m'$、$m$分别是高为$h$和$d$的实圆锥体质量，$V$和$v$则是它们相应的体积.

## §4.2 质点组的动量、角动量和动能

### (一) 动量

定义质点组的总动量是各质点动量之和，即

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{4.9}$$

由(4.5)式

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}'_i+\dot{\boldsymbol{r}}_c$$

代入(4.9)式，则

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}'_i+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_c$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}'_i+m\dot{\boldsymbol{r}}_c=\boldsymbol{p}'_c+\boldsymbol{p}_c=\boldsymbol{p}_c \tag{4.10}$$

式中，$\boldsymbol{p}'_c$是质点组中各质点相对于质心的动量之和，从(4.8)式容易证明它恒等于零，即

$$\boldsymbol{p}'_c=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}'_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i=0 \tag{4.11}$$

而

$$\boldsymbol{p}_c=m\dot{\boldsymbol{r}}_c=m\boldsymbol{v}_c \tag{4.12}$$

是质点组随质心做整体运动的动量，显然它可以作为质点组动量的整体参量.(4.1)式告诉我们，质点组的总动量恒等于质点组随质心做整体运动的动量.

### (二) 角动量

质点组对固定点(这里是指坐标原点)的角动量，是质点组中各质点对同一固定点的角动量(动量矩)的和.即定义为

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{4.13a}$$

如前已知，质心的运动可以用来描写质点组位置的整体参量，在计算质点组的角动量时，它也起着重要作用. 由(4.5)式

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_c$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_c) \times m_i (\dot{\boldsymbol{r}}'_i + \dot{\boldsymbol{r}}_c) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{r}_c \times \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i\Big) \times \dot{\boldsymbol{r}}_c + \boldsymbol{r}_c \times m\dot{\boldsymbol{r}}_c\end{aligned}$$

由(4.8)式和(4.11)式易知，上式右方的第二、第三两项分别为零. 故得

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{r}_c \times m\dot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{L}'_c + \boldsymbol{L}_c \tag{4.13b}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_c = \boldsymbol{r}_c \times m\dot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{p}_c \tag{4.14}$$

是质点组随质心整体运动对定点(坐标原点)的角动量(动量矩)，对应于质点组的质量集中在质心位置时对定点的角动量. 跟随质心一起平动的坐标系(参考系)称为**质心坐标系**(参考系)，简称**质心系**. $\boldsymbol{L}'_c$则是在质心系中各质点对质心的动量矩之和，也即各质点相对于质心的动量对于质心的动量矩之和：

$$\boldsymbol{L}'_c = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}'_i \tag{4.15}$$

(4.13b)式表明，质点组对定点的角动量，由质点组随质心整体运动对定点的角动量，以及质点组中各质点相对于质心运动对质心的角动量之和两部分合成.

**(三) 动能**

质点组的总动能等于质点组内各质点动能之和，即

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{4.16}$$

同样利用质点坐标和质心坐标之间的关系，可将总动能化解成两部分.

$$\begin{aligned}T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\boldsymbol{r}}'_i + \dot{\boldsymbol{r}}_c) \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}'_i + \dot{\boldsymbol{r}}_c) \\ &= \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i'^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_c \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \\ &= \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i'^2 = T_c + \sum_{i=1}^{N} T_i\end{aligned} \tag{4.17}$$

这里已注意到 $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i = 0$. 上式最后等式右方的第一项

$$T_c = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}_c^2 \tag{4.18}$$

是质点组随质心运动的动能，它好比质点组的质量集中在质心上运动时的动能. 第二项

$$\sum_i T'_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'^2_i \tag{4.19}$$

是质点组中各质点相对于质心运动的动能之和，即质点组在质心系中的动能.

(4.17)式告诉我们质点组的总动能可分解为，质点组随质心运动的动能和质点组相对于质心运动的动能两部分. 这个关系称作**柯尼希**(König)**定理**.

由上面的讨论我们清楚地看到，质点组的整体运动是和质心的运动密切相关的. 在处理质点组运动的问题中，质心具有特殊的地位. 在质心坐标系中，质点组的总动量恒等于零. 质心坐标系的这个特点，对某些力学系的动力学问题(例如质点组的碰撞和散射问题)的处理带来方便.

[**例 4.2**] 三个质量都是 $m$ 的相同质点，等间距地粘贴在半径是 $r$ 的轻质圆盘的边缘，圆盘则沿固定的共面圆环内侧，以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 滚动，如图 I4.2 所示. 设圆环的半径为 $R$，求出此三个质点构成的质点组相对于圆环中心 $O$ 点的动量、角动量和动能.

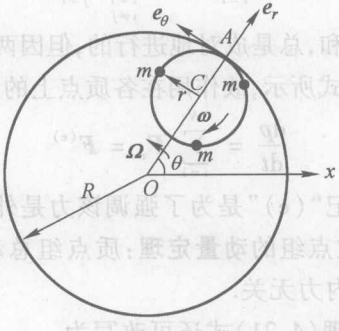



图 I4.2

[**解**] 由约束条件：圆盘和圆环接触处 $A$ 点的速度为零，得 $OC$ 绕 $O$ 点转动的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 为

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{r}{R-r}\boldsymbol{\omega} = \frac{r}{R-r}\omega \boldsymbol{e}_z$$

由于质点分布的对称性，圆盘的中心 $C$ 点即是质心的位置. 故

(i) 质点组相对于圆环中心的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}_c = 3m\boldsymbol{v}_c \\ &= 3m(R-r)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e}_\theta = 3mr\omega \boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

(ii) 质点组相对于圆环中心的角动量为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_c + \boldsymbol{L}'_c = (R-r)\boldsymbol{e}_r \times 3m\boldsymbol{v}_c + \sum_{i=1}^{3} [\boldsymbol{r}_i \times m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)]$$

$$= 3mr(R-r)\omega \boldsymbol{e}_z - 3mr^2\omega \boldsymbol{e}_z = 3mr(R-2r)\omega \boldsymbol{e}_z$$

(iii) 质点组相对于圆环中心的动能为

$$T = T_c + T'_c = \frac{1}{2}3mv_c^2 + 3\frac{1}{2}mv_m'^2$$

$$= \frac{3m}{2}(R-r)^2\Omega^2 + \frac{3m}{2}r^2\omega^2 = 3mr^2\omega^2$$

## §4.3　质点组运动的基本定理

### (一) 动量定理和质心定理

按质点组的总动量定义(4.9)式,并根据各质点的运动定律(4.1)式,质点组动量的时间变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}\end{aligned} \tag{4.20}$$

注意上式右方对内力的求和,总是成对地进行的,但因两质点间的相互作用的力大小相等方向相反,如(4.2)式所示,故作用在各质点上的内力之和恒等于零.则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{4.21}$$

这里,在力的符号加上标记"(e)"是为了强调该力是外力.

(4.21)式表示的是质点组的**动量定理**:质点组总动量的时间变化率等于质点组受到的外力总和,与内力无关.

由(4.10)式,动量定理(4.21)式还可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_c}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{(e)} \quad 或 \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{4.22}$$

这个关系叫做质点组的**质心定理**.(4.22)式即是质心的运动微分方程,质心的加速度决定于作用在质点组上的外力总和.

(4.20)式和(4.22)式分别是动量定理和质心定理的微分形式,它们相应的积分形式是

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{F}^{(e)}\Delta t = \boldsymbol{I} \\ \Delta\boldsymbol{p}_c &= \boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 是作用在质点组的总**冲量**;$\Delta\boldsymbol{p}$ 和 $\Delta\boldsymbol{p}_c$ 是质点组受冲量作用前后,质点组总动量的变化.

根据动量定理或质心定理,立即可以得出如下的结论:如果质点组不受外力

作用或外力相互抵消时，质点组的总动量守恒，是一常矢量，质心做惯性运动. 在某一方向外力分量为零，则在该方向的动量分量守恒，质心在该方向具有恒定的速度分量. 这便是质点组的**动量守恒定律**.

**（二）角动量定理**

分别对各质点的运动方程(4.1)式的两边矢乘质点的位置矢量，则

$$\boldsymbol{r}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{4.24}$$

注意到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i \times m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

将此关系式代入(4.24)式，并将诸方程相加，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} \end{aligned}$$

上式右方第二个求和项为零，这是因为式中成对地出现 $i$、$j$ 的求和项，而内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 具有由(4.2)式表示的有心力特征，故对每一对内力求和，有

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0$$

这样，我们便得到了质点组的**角动量定理**：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M} \tag{4.25}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{4.26}$$

是作用在各质点上的外力对坐标原点（固定点）的力矩之矢量和，即是作用在质点组上的总外力矩①.

角动量定理(4.25)式告诉我们，质点组总动量矩的时间变化率等于作用于质点组上的总外力矩，与内力的作用无关.

从(4.25)式还可以推导得质点组对于质心的角动量定理. 以(4.13)和(4.5)两式的关系，质点组的角动量是质点组随质心运动对固定点的角动量 $\boldsymbol{L}_c$，和相对质心运动对质心的角动量 $\boldsymbol{L}'_c$ 之和：

---

① 当然这里也可以将外力矩写成 $\boldsymbol{M}^{(e)}$. 但大家对内力的特性熟悉后，这是不必要的，因为内力矩之和等于零.

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{L}'_{\mathrm{c}} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}'_i+\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$$

代入(4.25)式,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}\times\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}\times m\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}})=\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}\times m\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}\times\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$$

这里已经用到了质心定理(4.22)式.这样便可得到关系式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{M}'_{\mathrm{c}} \tag{4.27a}$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}' \tag{4.27b}$$

其中 $\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}'_{\mathrm{c}}$ 是质点组相对于质心的角动量;

$$\boldsymbol{M}'_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{M}'=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i \tag{4.28}$$

是作用在各质点上的外力对于质心的外力矩之和,是对于质心的总外力矩.

(4.27a)或(4.27b)称作**相对于质心的角动量(动量矩)定理**,即质心坐标系中的质点组角动量定理.比较分别由(4.25)式和(4.27a)式表达的质点组对于固定点的角动量定理和质点组相对于质心的角动量定理,在形式上完全相同.其根本的原因是质点对质心的质量一次矩为零:$\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i=0$.虽然一般来说,质心坐标系是非惯性系,应考虑到每一质点都受有惯性力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}$,但它们对质心的总惯性力矩为零:

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}'_i\times(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}})=-(\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}'_i)\times\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}=0$$

即惯性力矩相互抵消了,从而得出在质心坐标系中质点组对质心的角动量定理,在形式上与在固定参考系中对固定点的角动量定理相同.

但是读者必须注意,对于一般的活动点,质点组的质量一次矩不等于零,在这样的活动参考系中惯性力矩不能相互抵消,因而对于一般的活动点不存在像惯性参考系中(4.25)式那样简单形式的角动量定理.

从角动量定理可以立即得到如下的**角动量守恒定律**:若作用于质点组的外力对于固定点的力矩为零(或相互抵消),则对于同一固定点的质点组总角动量不随时间变化,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=0$$

即角动量 $\boldsymbol{L}$ 是一常矢量.若在某一方向外力矩的分量为零,则在该方向的总角动量分量守恒.由(4.27a)式也可以得出关于质心系中的角动量守恒定

律：对于质心的外力矩为零或相互抵消时，质点组相对于质心的角动量守恒；在某一方向对质心的外力矩分量为零，则在该方向相对质心的角动量分量是一常量.

**（三）动能定理**

由质点组总动能的定义(4.16)式出发，即可得总动能的时间变化率：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\boldsymbol{F}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}\right)$$

或写为

$$\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i1}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \mathrm{d}W \tag{4.29}$$

此式表明：质点组总动能的增量，等于所有作用在各质点上的外力做的总功，加上内力对各质点做的总功. 这便是质点组的**动能定理**. 必须注意质点间的距离可能变化，内力做的总功一般不为零. 与动量定理和角动量定理不同，在那里不需要考虑内力的作用.

内力所做的功为

$$\mathrm{d}W^{(\mathrm{i})} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i1}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{1j=1\\ j\neq i}}^{N}(\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i - \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i1}}^{N}\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ij}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$. 上式表明，内力是否做功决定于任意两质点间在内力方向上是否有相对位移. 只有在质点组内各质点间的距离保持不变的特殊情况下，内力才不做功，例如刚体就属于这种情形.

如果作用在质点组中的外力是保守力，则有

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i V_i^{(\mathrm{e})}(\boldsymbol{r}_i),\quad \boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\mathrm{d}V_i^{(\mathrm{e})}(\boldsymbol{r}_i)$$

再若质点间的内力属有心力型的保守力，则内力做出的功必等于内力势能的减少

$$\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\mathrm{d}V_{ij}^{(\mathrm{i})}(r_{ij})$$

这里我们引进了第 $i$ 质点的外力势能 $V_i^{(\mathrm{e})}$ 和 $i$、$j$ 一对质点间的内力势能 $V_{ij}^{(\mathrm{i})}$ 的概念. 在内力和外力都是保守力的情形下，动能定理(4.29)式可写为

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N}V_i^{(\mathrm{e})} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}V_{ij}^{(\mathrm{i})}\right) = -\mathrm{d}V \tag{4.30}$$

其中

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} V_{ij}^{(i)}$$

是质点组的总势能.(4.30)式可写为

$$\mathrm{d}(T + V) = 0$$

从而得到质点组的**机械能守恒定律**:

$$T + V = E \tag{4.31}$$

这里 $E$ 为质点组的总机械能,是一运动常量.

与上面的推导过程类似,我们还可以由(4.19)式导出**相对于质心的动能定理**:

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{N} T_i'\Big) = \mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2\Big) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' \tag{4.32}$$

上式表明在质心坐标系(参考系)中质点组总动能的增量等于内力和外力做的总功.这一定理形式上相对于固定参考系中的动能定理相同,只是这里的动能、功等都是相对于质心来计算的.

上面讨论的质点组动量定理(质心定理),角动量定理和动能定理是求解质点组问题的基本方程.除动能定理是标量方程外,动量定理和角动量定理都是用矢量方程描写,共计有七个标量方程.对于包含有三个质点以上的质点组,其独立的坐标变量数通常大于七,故仅由这些方程还不足以确定质点组中每一质点的运动,除非还存在足够数量的约束关系.但利用这些定理可确定质点组运动的总趋向和某些特征,特别是与质心运动有关的特征.

[**例 4.3**]　一不可伸长的轻质绳子长 $2l$.绳子两端分别羁有质量都是 $m$ 的质点,中部则系另一质量为 $m'$ 的质点.这个由绳子相连的质点组,置于光滑的水平桌面上,如图 L4.3 所示.初始时刻绳子是拉直的,质点 $m'$ 以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿桌面与绳子垂直的方向弹射.已知经过 $t$ 时间后绳子两端的质点恰好相碰.求两端质点相碰时刻,(i) 质点 $m'$ 移动的距离 $b$;(ii) 此刻绳中的张力 $\boldsymbol{F}_T$.

[**解**]　(i) 质点 $m'$ 的运动.质点 $m$ 的速度应是相对于 $m'$ 点的速度 $\boldsymbol{u} = l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ 及随质点 $m'$ 运动的牵连速度 $\boldsymbol{v}_{m'}$ 之和,即

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}_{m'} + \boldsymbol{u} = \mp u\sin\theta\boldsymbol{i} + (v_{m'} - u\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{1}$$

式中右方出现的"∓"号分别对应于左、右方的质点 $m$.

$$u = l\dot{\theta} \tag{2}$$

质点组在水平桌面内($x-y$ 平面内)无外力作用,故质点组总动量的 $x$ 分量和 $y$ 分量均应守恒.质点 $m'$ 沿 $y$ 轴运

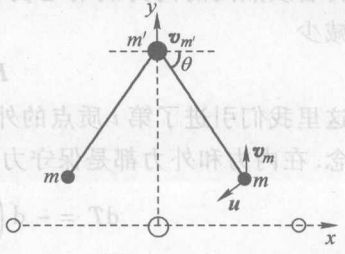



图 L4.3

动,质点组在 $y$ 方向的动量守恒:

$$2m(v_{m'} - l\dot{\theta}\cos\theta) + m'v_{m'} = m'v_0$$

解之,得质点 $m'$ 的速度大小为

$$v_{m'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{m'v_0 + 2ml\cos\theta\dot{\theta}}{2m + m'} \tag{3}$$

对时间积分,即得 $t$ 时间内质点 $m'$ 沿 $y$ 方向移动的距离 $b$ 为

$$b = \int_0^b \mathrm{d}y = \frac{1}{2m + m'}\left(\int_0^\tau m'v_0\mathrm{d}t + 2ml\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \frac{m'v_0t + 2ml}{2m + m'}$$

(ii) 质点 $m'$ 的加速度沿 $y$ 方向,其大小为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$,则运动方程为

$$m'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{m'}{2m + m'}(-2ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2ml\cos\theta\ddot{\theta}) = -2F_T\sin\theta$$

两质点碰撞时刻 $\theta = \pi/2$,此刻绳中张力大小为

$$F_T = \frac{m'ml}{2m + m'}\dot{\theta}^2 \tag{4}$$

为求碰撞时刻的 $\dot{\theta}$ 还需应用机械能守恒方程.注意碰撞时刻 $\theta = \pi/2$,由(3)式得两质点碰撞时刻质点 $m'$ 的速度大小为

$$v_{m'} = \frac{m'}{2m + m'}v_0 \tag{5}$$

碰撞时刻 $\theta = \pi/2$,由(1)式和(2)式得

$$v_m^2 = v_{m'}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

由于桌面是光滑的,质点组无外力做功;绳子不可伸长,内力(绳中张力)也不做功.按机械能守恒,在碰撞时刻质点组的动能应等于其初始动能,即

$$\frac{m'}{2}v_{m'}^2 + mv_m^2 = \left(\frac{m'}{2} + m\right)v_{m'}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{m'}{2}v_0^2$$

由此解得

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{l}\sqrt{\frac{m'}{2m + m'}}$$

以此代入(4)式最后得两质点碰撞时刻绳中的张力大小是

$$F_T = \frac{m'^2m}{l(2m + m')^2}v_0^2$$

**[例 4.4]** 一半径为 $r_0$,质量是 $m$ 的均质圆盘,可绕通过盘心 $O$ 的水平轴,在自身的铅直平面内自由转动.今有一质量 $m_A = m/10$ 的小虫 $A$,自圆盘的最低点突然以相对于圆盘为恒定的速率 $u$ 沿圆盘边缘爬行.已知初始时刻系统是静止的,求出(i) 系统启动瞬时圆盘的转动速率(角速度的大小)$\Omega_0$;(ii) $OA$ 与铅垂线之间的夹角 $\theta$ 应满足的微分方程;(iii) 小虫对盘边切

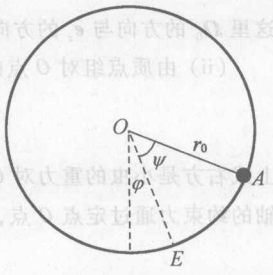



图 I4.4

向的作用力大小 $F_N$.

[解] 圆盘和小虫构成质点组系统.重力和转轴对圆盘的作用力为外力,小虫与圆盘间的力为内力.此转动问题宜采用角动量定理求解.

第一步,分析题意.

当小虫爬行时,小虫在圆盘上绕盘心 $O$ 转动,同时圆盘也转动,以圆盘转动的角度为 $\varphi$,则圆盘转动的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$;小虫在圆盘上转动的角度为 $\psi$,则小虫在圆盘上绕 $O$ 点的转动速率为 $\dot{\psi}=u/r_0$.小虫实际转过的角度为 $\theta=\varphi+\psi$,故小虫的实际角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z=(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\boldsymbol{e}_z=\left(\Omega+\frac{u}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

第二步,求出任意时刻质点组对于固定点 $O$ 的角动量.质点组的总角动量 $\boldsymbol{L}$ 由圆盘的角动量 $\boldsymbol{L}_O$ 和小虫的角动量 $\boldsymbol{L}_A$ 两部分组成.设圆盘的密度为 $\rho$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O&=\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}m=\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\rho\mathrm{d}V\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}r^2\Omega\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_z=\frac{m}{2}r_0^2\Omega\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{mr_0^2}{2}\left(\dot{\theta}-\frac{u}{r_0}\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{L}_A=m_Ar_0^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z=\frac{m}{10}r_0^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_O+\boldsymbol{L}_A=\frac{mr_0}{10}(6r_0\dot{\theta}-5u)\boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

第三步,求解.

(i) 初始时刻小虫位于最低点,此时外力均通过 $O$ 点;外力矩为 0.因此质点组自静止至启动的瞬间,质点组的动量矩应保持为零,由(1)、(2)、(3)诸式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}|_{t=0}&=\boldsymbol{L}_O|_{t=0}+\boldsymbol{L}_A|_{t=0}=\frac{m}{2}r_0^2\boldsymbol{\Omega}|_{t=0}+\frac{m}{10}r_0^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z|_{t=0}\\&=\frac{m}{10}r_0^2\left(6\boldsymbol{\Omega}+\frac{u}{r_0}\boldsymbol{e}_z\right)_{t=0}=0\end{aligned}$$

由此,启动瞬时圆盘的转动角速率

$$\boldsymbol{\Omega}|_{t=0}=\boldsymbol{\Omega}_0=-\frac{u}{6r_0}\boldsymbol{e}_z$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_z$ 的方向相反,表明圆盘为顺时针方向转动.

(ii) 由质点组对 $O$ 点的角动量定理[注意质点组的角动量由(3)式确定]

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{mr^2}{10}6\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_z=-\frac{m}{10}gr_0\sin\theta\boldsymbol{e}_z$$

上式右方是小虫的重力对 $O$ 点的力矩,是关于 $O$ 点的唯一外力矩,而作用于圆盘的重力及盘轴的约束力通过定点 $O$ 点,对 $O$ 点无力矩.由此便得到关于参量 $\theta$ 的微分方程:

$$6r_0\ddot{\theta}+g\sin\theta=0 \tag{4}$$

(iii) 沿圆盘边缘的切线方向,小虫的运动方程为

$$\frac{m}{10}r_0\ddot{\theta} = F - \frac{m}{10}g\sin\theta$$

这里 $F$ 是圆盘对小虫施加的力在切线方向的分量. 右方第二项是小虫的重力在切向方向的分量. 由此小虫对圆盘边缘作用的切向力大小为

$$F_N = -F = -\frac{m}{10}(g\sin\theta - r_0\ddot{\theta})$$

$$= -\frac{m}{10}\left(g\sin\theta - \frac{1}{6}g\sin\theta\right) = -\frac{5}{60}mg\sin\theta$$

负值表示沿切线的相反方向.

## *§4.4 开放的质点组——变质量物体的运动问题

前面讨论的质点组中,质点数量或质点组的质量在运动过程中保持恒定不变,这样的质点组可称为闭合的质点组. 如果质点组的质量或质点的数量可与周围环境发生交流,则成为开放的质点组. 本节讨论属于开放质点组的可变质量物体的运动. 在非相对论性经典力学的架构下,一确定物体的质量在运动过程中是保持不变的. 而本节所说质量的变化不是相对论效应导致的质量变化,而是指物体在运动过程中有物质并入或失去. 例如雨滴下落时周围的水汽不断向上凝结,发射中的火箭有燃烧的气体喷射出去,都是可变质量物体的例子.

设某瞬时质量为 $m$ 的物体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动(不计转动),在 $\Delta t$ 的短暂时间间隔内将其周围以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的微小质量 $\Delta m$ 并入. 合并后物体的质量增加为 $m+\Delta m$ 速度则是 $\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$. 对于原来的物体 $m$ 来说,质量发生了变化,是一开放质点组. 但在合并前后的 $\Delta t$ 时间内将物体 $m$ 和物体 $\Delta m$ 合在一起考虑,则是闭合的质点组. 由闭合质点组的动量定理给出

$$(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) - (m\boldsymbol{v}+\Delta m\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{4.33}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在 $m$ 和 $\Delta m$ 上的合外力. 显然上式也适用于物体失去微小物质的情形,只是 $\Delta m$ 为负值. 对于很短暂的时间间隔 $\Delta t$,并入的质量 $\Delta m$ 和速度的改变 $\Delta\boldsymbol{v}$ 都很小,可略去上式中的二阶无限小项. 在 $\Delta t\to 0$ 的极限情形,得出变质量物体的动力学方程:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{4.34a}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 是质点组(物体)质量的时间变化率,为正值时表明周围有物质并入,负值则表示失去物质. $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 是并入或失去的那部分物质对于物体的相对速度. 将上式左边第二项移至右方,则物理意义将更为明显:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{4.34b}$$

如果相对速度 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\neq 0$,此式右方第二项为物体质量变化时,失去(得到)的那部分物质对物体作用的推(拉)力.

(4.34a)式还可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{4.34c}$$

由此式知，$\boldsymbol{u}=0$ 就表示并入（失去）的那部分物质没有带走动量. 例如柔软绳子垂直落地时，躺到地面上的那部分绳子就静止了，绳子没有失去动量. 又如静止的水汽凝结到下落的雨滴上去，水汽对雨滴没有动量贡献，都是属于这种情形. 若是 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ 并入（失去）的物质与物体没有相对速度，则并入（失去）的物质对物体没有附加的推力作用. 运动着的漏水的水车就属于这种情形，水漏出的那个瞬时，水和车的速度一样.

这里需再次指出，前面所述各式中的物体质量 $m$ 是时间 $t$ 的函数，但它的变化并不是由于物体运动本身引起的相对论效应.

[例 4.5]　质量为 $m$ 的雨滴自静止开始下落，在下落过程中，单位时间内凝结到雨滴上的水汽质量为 $\alpha$，略去空气阻力，求出雨滴在 $t$ 时间后下落的距离.

[解]　水汽速度 $u=0$，$t$ 时刻雨滴的质量 $m'=m+\alpha t$. 这是一维运动问题，以下落方向为 $z$ 坐标正方向，则由(4.33c)式得雨滴的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m+\alpha t)v]=(m+\alpha t)g$$

初始条件为：$t=0$ 时 $v=0$，$z=0$，$m'=m$.

上式对时间 $t$ 积分一次，并注意初始条件，得

$$v=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2mt+\alpha t^2}{2(m+\alpha t)}g$$

$$=\frac{1}{2}gt-\frac{m^2g}{2\alpha(m+\alpha t)}+\frac{mg}{2\alpha}$$

此式对时间积分，结合初始条件，即得 $t$ 时间内雨滴下落的距离：

$$z=\frac{1}{2}g\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{m}{\alpha}t-\frac{m^2}{\alpha^2}\ln\left(1+\frac{\alpha}{m}t\right)\right]$$

## 习　题

**4.1**　在一半径为 $r$ 的圆圈上截取一段长为 $s$ 的圆弧. 求出这段圆弧的质心位置.

$$\left(\text{离圆弧顶点 } r\left[1-\frac{2r}{s}\sin(s/2r)\right]\text{处}\right)$$

**4.2**　求出半径为 $r$ 的均质半球的质心位置.（离底面 $3r/8$）

**4.3**　两只质量均为 $m$ 的冰船，静止地放在光滑的冰面上. 一质量为 $m'$ 的人自第一船跳入第二船，并立即自第二船跳回第一船. 设所有的运动都在一条直线上. 求两船最后的速度之比.

$$\left(\frac{v_1}{v_2}=-\frac{m}{m+m'}\right)$$

**4.4**　一船以速度 $\boldsymbol{v}$ 前进，船上某人以相对速度 $\boldsymbol{u}$ 向船头抛出一质量为 $m$ 的铁球. 已知船和人的总质量是 $m'$，求人抛掷铁球做出的功 $W$.（$W=\dfrac{mm'}{2(m+m')}u^2$）

**4.5**　一质量为 $3m$ 的粒子爆炸成质量相同的三小块. 其中两块的飞行方向相互垂直，它们的速率分别是 $2v$ 和 $3v$. 求出第三块的速度和动量的大小.

$$(\boldsymbol{v}_3 = -(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), \quad |\boldsymbol{p}_3| = \sqrt{13}mv)$$

**4.6** 重为 $W$ 的大楔子放在光滑的水平面上，在它的斜面上放置一与它相似的小楔子. 小楔子的重量是 $P$. 大、小楔子的水平边长分别为 $a$ 和 $b$. 小楔子自大楔子顶部静止下滑，求小楔子完全下滑时(如图虚线所示)，大、小楔子分别位移了多少距离？

$$(x_W = -\frac{p}{W+p}(a-b); \quad x_P = \frac{W}{W+P}(a-b))$$

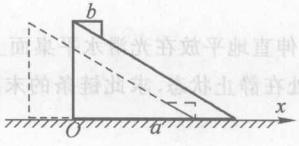



图 T4.6

**4.7** 一炮弹以仰角 $\alpha$ 发射，速度为 $v$. 当炮弹达到最高点时，爆炸成质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的两块弹片. 已知火药爆炸的能量是 $E$. 爆炸后瞬时，两弹片仍沿原方向飞行. 求两弹片落地时相隔的距离 $s$.

$$(s = \frac{v\sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}E})$$

**4.8** 重为 $W$ 的人，手里拿着一个重为 $w$ 的物体，以与地平线成 $\alpha$ 角度的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向前跳出. 当他达到最高点时，将手中的物体以速率为 $u$ 的相对速度向后抛去. 问抛出物体后，人向前跳的距离增加多少？$(\frac{wuv_0}{(W+w)g}\sin\alpha)$

**4.9** 质量为 $m$ 的物体沿一直角劈的光滑斜面下滑，直角劈的质量是 $m'$，倾角为 $\theta$，置于光滑水平面上. (i) 物体水平方向的加速度分量 $\ddot{x}$；(ii) 劈的加速度大小 $\ddot{x}'$；(iii) 劈对物体的反作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和水平面对劈的反作用力 $\boldsymbol{F}_2$.

$$(\ddot{x} = \frac{m'\sin\theta\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta}g, \quad \ddot{x}' = \frac{-m\sin\theta\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta}g; \quad \boldsymbol{F}_1 = \frac{m'm\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta}g\boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{F}_2 = \frac{(m'+m)m'}{m'+m\sin^2\theta}g\boldsymbol{e}_z)$$

**4.10** 质量为 $m'$，半径为 $r$ 的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上. 一质量 $m$ 的质点沿此半球面下滑. 设质点跟球心的连线与铅直轴之间的夹角为 $\theta$. 已知初始时，系统是静止的，$\theta=\alpha$. 求当 $\theta=\beta$ 时，$\dot{\theta}$ 的值.

$$(\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{\frac{(m'+m)(\cos\alpha-\cos\beta)}{m'+m\sin^2\beta}})$$

**4.11** 质量为 $m$ 的小珠 A 能在一水平光滑的滑轨上滑动. 另有一质量也是 $m$ 的质点 B 用无弹性的轻绳与 A 联结，质点 B 可在铅垂平面内摆动. 已知绳长为 $2l$. 初始时，系统静止，绳与铅直线间的夹角为 $\theta=\alpha$. 证明夹角 $\theta=\beta$ 时有 $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g(\cos\beta-\cos\alpha)}{l(2-\cos^2\beta)}$.

**4.12** 在光滑水平桌面上，有两个质量都是 $m$ 的质点，用长为 $l$ 的不可伸长的轻绳联结. 今在其中一个质点上作用与绳垂直的冲量 $I$. 求证此后这两质点分别做圆滚线运动，且它们的能量之比为 $\cot^2\left(\frac{It}{2lm}\right)$，其中 $t$ 是运动时间.

$$(x_1^2 + (y_1 - v_c t)^2 = (l/2)^2,\quad x_2^2 + (y_2 - v_c t)^2 = (l/2)^2)$$

**4.13** 质量为 $m$ 的小环，穿在质量是 $m'$ 的光滑圆圈上，此体系静止地平放在光滑的水平桌面上. 今若突然使小环沿圆圈的切线方向有一速度 $\boldsymbol{v}_0$. 试证明圆圈将不发生转动，而圆心则绕体系的质心做等速圆周运动.

**4.14** 一长为 $2l$ 的均质链条，悬挂于钉在墙上的光滑钉子上. 开始时，挂在钉子两边的链条长度相同，处在平衡状态. 后因微小扰动，链条自一边滑下. 求当链条完全脱离钉子的时刻，链条的速度大小. ($v = \sqrt{gl}$)

**4.15** 长为 $l$ 的均质链条，伸直地平放在光滑水平桌面上，链条与桌面的边缘垂直. 初始时，链条的一半从桌面下垂，但处在静止状态. 求此链条的末端滑到桌子的边缘时，链条的速度大小. ($v = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$)

**4.16** 质量为 $m$，面积为 $S$ 的圆盘，盘心受一与平面垂直的恒定力 $\boldsymbol{F}$ 作用，同时有一股体密度为 $\rho$ 的尘土以恒定的速度 $\boldsymbol{u}$ 迎面而来，与盘面相遇的尘土皆粘于盘面上. 已知圆盘的初速为零. 求 $t$ 时刻圆盘的速度及移动过的距离.

$$(\boldsymbol{v} = \frac{t}{m'}\boldsymbol{F} - \frac{m' - m}{m'}\boldsymbol{u},\quad d = \frac{m' - m}{S\rho} - ut;\quad \text{这里 } m' = \sqrt{m^2 + S\rho\,(Ft^2 + 2mut)})$$

# 第五章

# 刚体力学

大多数固态物体，在运动过程中，其大小和形状的变化很小，即使受到拉伸或挤压变形也很小. 这一类物体的机械运动，可以采用一个称作刚体的理想化模型来研究. 任何物体都可看成为质点组，如果其中任何两个质点之间的距离始终保持不变，那么这样的物体（质点组）就称作**刚体**. 由于刚体的上述特性，给研究它的运动带来很大方便.

刚体只是理想化的模型，客观上并不存在严格意义上的刚体；任何物体在外力作用下，或多或少地会发生形变. 但对于大多数固态物体来说，受到的外力不十分强大时，都可以近似地视为刚体. 因此讨论刚体的运动是力学问题的一个重要方面.

## §5.1 刚体的运动

### （一）刚体的运动及其自由度

我们知道，包含有 $N$ 个质点的质点组需要有 $3N$ 个坐标变量，才能确定每一个质点的位置. 刚体也可看成为质点组，但任意两点间的距离不能变动，这就构成了许多的约束条件，因而刚体作为质点组运动时，能独立变化的坐标变量数目也就相应地减少. 描写物体运动时独立变化的坐标变量数目称为**自由度**[①]. 实际上只要刚体上任意不共线的三个点（例如图 5.1 中的 $A$、$B$、$C$ 三点）的位置确定了，刚体的位置就被确定. 确定三个点的位置需要 9 个坐标变量，然而它们之间的距离 $AB$、$BC$ 和 $CA$ 是恒定的，这是三个约束，所以刚体做任意运动时能独立变化的坐标变量只有 6 个，不必考虑刚体内包含的质点数目有多少. 即刚体一般运

① 关于自由度，在 §6.1 中还要论述.

动的自由度为6.若刚体的运动还受到某些外部约束,自由度就更少.为了恰当地选定描述刚体运动的独立坐标参量,需要对刚体在不同约束条件下的具体运动形式加以考察.

刚体的运动有以下几种形式.

1. 平动

在刚体中任意选定一条直线,如果刚体运动时此直线始终保持平行,则这种运动便称作**平动**.显然,平动时刚体上各点的运动情况相同,具有相同的速度和加速度,故刚体上任何一个质点的运动都可以代表刚体的运动.因而刚体上任何一个点的三个坐标参量都可作为描写刚体运动的独立变量;刚体平动的自由度为3.

需要注意,平动并不一定是直线运动.如图5.2所示那样即使刚体运动的轨迹呈曲线,但仍然是平动.

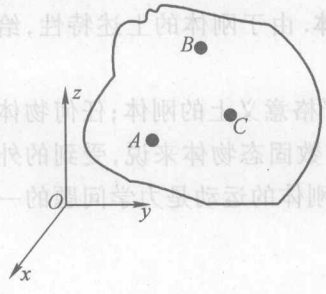



图5.1

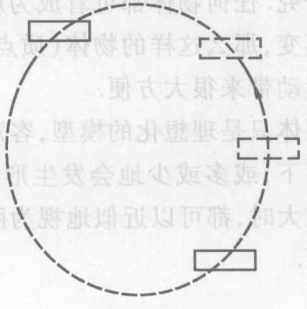


图5.2

2. 定轴转动

刚体绕一固定轴线转动便是**定轴转动**.刚体中如果有两点固定不动,那么刚体的运动必然是定轴转动.这两固定点的连线就是转动轴.转轴上的点都是固定不动的,其他的点则围绕转轴做圆周运动.

刚体定轴转动时已有两个点固定,即已有5个参量给定了数值①,能变动的只有1个坐标变量.因此,刚体定轴转动的自由度为1;显然,取刚体绕转轴转动的角度,作为这个独立变量是最为恰当的.

3. 平面平行运动

若刚体内任意一点都平行于一固定平面而运动,则此刚体做**平面平行运动**.显然刚体中垂直于那个固定平面的直线上各点,其运动状态完全相同.任何一个与固定平面平行的刚体截面,它的运动都可用来恰当地代表刚体的运动.

① 两个点有6个坐标参量,但它们间的长度不变,故实际上是给定了5个独立参量.

刚体做平面平行运动时，图 5.1 中 $A$、$B$、$C$ 三个点离平行固定平面的距离是不变的，这是三个约束条件，因而只有三个独立坐标变量，自由度为 3.

4. 定点转动

刚体上有一个点固定不动，整个刚体围绕这个点转动，这种运动叫刚体的**定点转动**.

由于一个点已经固定了，这个点的三个坐标变量已经给定，因而只剩下三个可以独立变化的坐标变量，刚体定点转动的自由度为 3. 显然，这三个自由度是用来描写刚体绕定点转动的.

5. 一般运动

刚体不受任何外部约束，在空间的任意运动便是刚体的**一般运动**. 已如前述，此时刚体需要 6 个独立变化的坐标变量来描述它的运动；刚体一般运动的自由度是 6.

可从几何上证明，刚体的一般运动可看成是平动和转动的合成. 如图 5.3 刚体由Ⅰ位置运动到Ⅱ位置，可等价为随刚体上某点 $A$（基点），做平动至Ⅰ′位置（虚线所示），而后绕 $A$ 点（基点）转动达到位置Ⅱ. 这里是为了理解方便起见，如图 5.3 那样把平动和转动这两种运动分裂开来展示. 实际上，刚体在运动过程中，这两种运动是同时进行着的. 这种分解的正确性，这里不作严格的几何证明，但读者容易理解. 如图 5.3 所示，刚体随 $A$ 点平动到Ⅰ′位置时，$B$、$C$ 分别到达 $B'$ 和 $C'$；刚体中任何两点间的距离不变，转动时这两点将分别在各自的球面上围绕 $A$ 点运动而达到相应的最终位置. 刚体的一般运动是随基点平动和绕基点转动的合成，基点可以在刚体上任意选取. 前面所列的几种刚体运动都可认为是一般运动的特例.

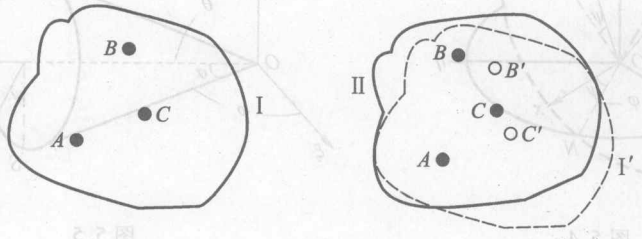



图 5.3

**（二）欧拉角**

从上面对刚体一般运动的分析，已经可以知道确定刚体位置的 6 个独立参量中，需要有三个参量用来确定基点的位置，即用来描写刚体的平动，另外三个则描写围绕基点的转动.

为了表达刚体转动时的位置，选取一固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 及另一固定在刚体的

坐标系 $Oxyz$，两坐标系的原点重合于固定点 $O$. 现在来考察刚体绕定点 $O$ 的转动. 既然坐标系 $Oxyz$ 固定在刚体上随刚体一起转动，它实际上就可以作为刚体的抽象代表. 确定此坐标系相对于固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的位置，也就是确定了刚体的转动位置. 通常取如图 5.4 所示三个可独立变化的角度参量 $\theta$、$\varphi$ 和 $\psi$ 来确定坐标系 $Oxyz$（刚体）的位置. 在图中，分别用实线圆面和虚线圆面分别表示 $O\xi\eta$ 平面和 $Oxy$ 平面，这两平面相交于 $ON$ 线. $OM$ 是在 $Oxy$ 平面内的一条辅助线，它与 $ON$ 线垂直. 角度 $\theta$ 和 $\varphi$ 用来确定 $Oz$ 轴的方向；我们知道，一个轴线的方向只需两个独立参量就能确定了. 这里 $\theta$ 是 $\zeta$ 轴和 $z$ 轴之间的夹角；$\varphi$ 是 $\xi$ 轴与交线 $ON$ 之间的夹角. $x$ 轴及 $y$ 轴绕 $z$ 轴的转动则由角度 $\psi$ 来确定. 因此在给定了这三个独立的角度参量后坐标系 $Oxyz$ 的位置，也即刚体的位置，就完全确定. $\theta$、$\varphi$ 和 $\psi$ 随时间变化，即描写了刚体的转动. 这三个角度参量 $\theta$、$\varphi$ 和 $\psi$ 叫做**欧拉角**.

欧拉角是为描写刚体最一般情形下的转动而引入的，对某些具体的刚体转动，有时也可以灵活地引进角度参量，而不一定拘泥于欧拉角的严格定义. 例如，一圆锥体躺在水平面上做纯滚动时，可以用如图 5.5 中所示的 $\theta$、$\varphi$ 和 $\psi$ 三个角度来描写圆锥体的转动，虽然它们与欧拉角的严格定义略有区别. 图 5.5 中，$\theta$、$\varphi$ 同样用来确定自转轴 $Oz$ 的方向，$\psi$ 则描述锥体轴 $Oz$ 自转. 在这个具体问题中圆锥体的轴线（自转轴 $Oz$）与铅直轴（$O\zeta$）之间的夹角 $\theta$ 是一不随时间变化的恒定角度.

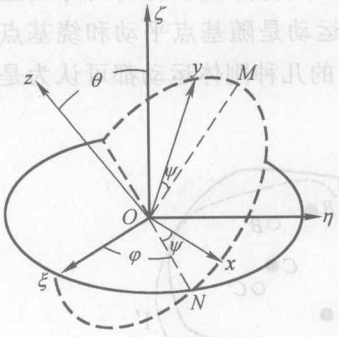



图 5.4

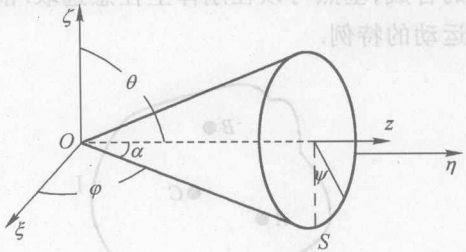



图 5.5

### *（三）角位移与角速度

前面几章已多次应用了角速度矢量，本节将对角速度矢量的定义和特点作较为详细的讨论.

刚体转动时绕某一轴线转过一定的角度，可仿照线位移那样，赋予转过的角度一个方向；一般取转轴方向作为转过的角度方向. 这种带有方向的角度改变量叫做**角位移**. 例如在图 5.5 中绕刚体轴线 $Oz$ 自转角 $\psi$ 的增量 $\Delta\psi$ 就是锥体的自转角位移 $\Delta\boldsymbol{\psi}$ 的量值；$\Delta\boldsymbol{\varphi}$ 则是锥体

绕 $O\zeta$ 轴转动的角位移.

然而,带有方向的量并不一定就是矢量.在质点力学中已熟知质点的线位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 是矢量,因为它不仅具有方向,而且两次位移的合成符合矢量合成的交换律和平行四边形定则.但相继两次有限大小角位移的合成却不满足交换律.这可以从图 5.6 所示的"实验"看出.在图 5.6(a)中,木块先绕 $z$ 轴转动 90°,再绕 $y$ 轴转 90°最终取水平位置.而在图 5.6(b)中只是转动的次序调换,先绕 $y$ 轴转后绕轴 $z$ 转,最后却取立位.这两种位形截然不同.可见,有限转动不能成为矢量.如果是微小转动,例如 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 是一微小的量,情况就不一样.同样设微小角位移 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 的方向沿转轴,并与转动方向①成右手螺旋关系.可以证明微小角位移 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 符合矢量运算规则,是一个矢量,可表示为 $\Delta \boldsymbol{\psi} = \Delta\psi \boldsymbol{e}_n$. $\boldsymbol{e}_n$ 是转轴方向的单位矢量,以转动的右螺旋方向为正方向.

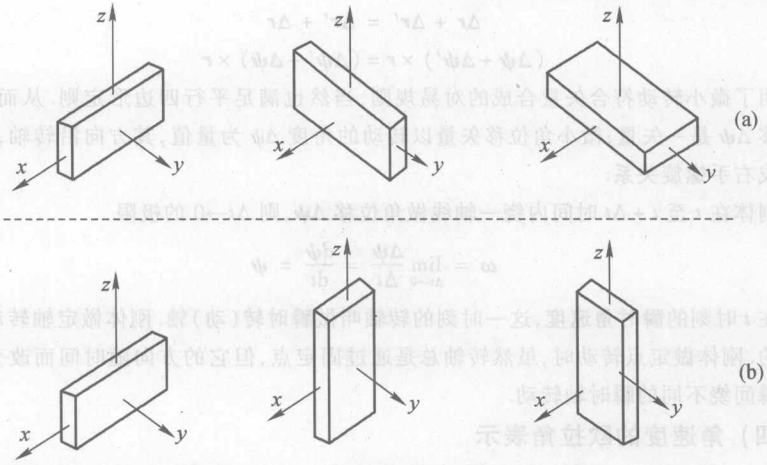



图 5.6

现在我们来证明微小角位移 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 是矢量.如图 5.7 所示,设刚体绕轴 $\boldsymbol{e}_n$ 转动一微小角度 $\Delta\psi$,则刚体上位矢为 $\boldsymbol{r}$ 的 $P$ 点,将围绕 $\boldsymbol{e}_n$ 轴做一微小的圆弧运动至 $P'$点,位移是 $\Delta \boldsymbol{r}$;转动后的位置矢量则是 $\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}$.由于 $\Delta\psi$ 是微小量,所张的微小圆弧 $\overset{\frown}{PP'}$的长度与相应的弦长 $PP'$相等,故有

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{r}$$

现在考察刚体相继分别绕通过 $O$ 点的 $\boldsymbol{e}_n$ 轴和 $\boldsymbol{e}'_n$ 轴进行两次微小转动,角位移分别是 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 和 $\Delta \boldsymbol{\psi}'$.则刚体上 $P$ 点的位置矢量在转动中将作如下的改变过程:

(1) 转动前:$\boldsymbol{r}$;

(2) 转动 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 后:$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{r}$

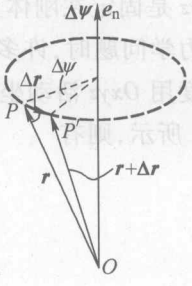



图 5.7

① 这里指刚体上任意点围绕转轴做圆周运动的方向,即实际转动的方向.参见图 5.7.

(3) 在接着的转动 $\Delta\boldsymbol{\psi}'$ 后：

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' + \Delta\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{\psi}' \times \boldsymbol{r}'$$

$$= \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{\psi}' \times (\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{r})$$

注意到 $\Delta\boldsymbol{\psi}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\psi}'$ 都是微小的量，略去它们的乘积(二级微小量)，则刚体经过相继两次微小转动后，$P$ 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\Delta\boldsymbol{\psi} + \Delta\boldsymbol{\psi}') \times \boldsymbol{r}$$

由此式得

$$(\Delta\boldsymbol{\psi} + \Delta\boldsymbol{\psi}') \times \boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}'$$

如果两次转动的次序调换，经过上述相同的步骤，当可证明

$$(\Delta\boldsymbol{\psi}' + \Delta\boldsymbol{\psi}) \times \boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}' + \Delta\boldsymbol{r}$$

我们熟知，两线位移矢量是可以交换的，有

$$\Delta\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}' = \Delta\boldsymbol{r}' + \Delta\boldsymbol{r}$$

故得

$$(\Delta\boldsymbol{\psi} + \Delta\boldsymbol{\psi}') \times \boldsymbol{r} = (\Delta\boldsymbol{\psi}' + \Delta\boldsymbol{\psi}) \times \boldsymbol{r}$$

这便证明了微小转动符合矢量合成的对易规则，当然也满足平行四边形定则. 从而证明了微小角位移 $\Delta\boldsymbol{\psi}$ 是一矢量；微小角位移矢量以转动的角度 $\Delta\psi$ 为量值，其方向沿转轴，与实际转动方向成右手螺旋关系.

设刚体在 $t$ 至 $t+\Delta t$ 时间内绕一轴线做角位移 $\Delta\boldsymbol{\psi}$，则 $\Delta t \to 0$ 的极限

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\psi}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\psi}} \tag{5.1}$$

是刚体在 $t$ 时刻的**瞬时角速度**，这一时刻的转轴叫做**瞬时转(动)轴**. 刚体做定轴转动时，转轴是固定的. 刚体做定点转动时，虽然转轴总是通过固定点，但它的方向随时间而改变，刚体在不同的瞬间绕不同的瞬时轴转动.

### (四) 角速度的欧拉角表示

下面我们来导出刚体定点转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与三个欧拉角间的一般表示式. 由图 5.4 即可得出刚体转动的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_N + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z \tag{5.2}$$

$Oxyz$ 是固定在刚体上的活动坐标系. 今后会看到即使在固定参考系中处理刚体动力学问题时，许多力学量采用活动坐标系表达更为方便. 为此我们将刚体的角速度用 $Oxyz$ 活动坐标系来表达. 注意到，图 5.4 中的各单位矢量间的关系如图 5.8 所示，则有

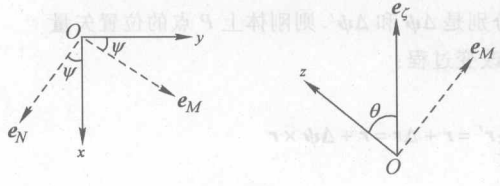



图 5.8

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_N = \cos\psi\boldsymbol{i} - \sin\psi\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\zeta = \sin\theta\boldsymbol{e}_M + \cos\theta\boldsymbol{e}_z = \sin\theta(\sin\psi\boldsymbol{i} + \cos\psi\boldsymbol{j}) + \cos\theta\boldsymbol{e}_z \end{cases} \tag{5.3}$$

代入(5.2)式,即得

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}$$

分量表达式为

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases} \tag{5.4}$$

这便是角速度的欧拉角一般表示式. 当然,也可以用固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 表示角速度矢量,分别得出分量 $\omega_\xi$、$\omega_\eta$、$\omega_\zeta$ 的表示式,请读者自己求出.

在许多具体问题中,有时角速度的表示也不一定拘泥于(5.4)式所示一般表示形式,重要的是灵活地选取坐标系和描写刚体转动的独立角位移,写出更适宜的角速度表示式. 例如,前面提到的圆锥体放在水平面上滚动的例子(见图5.5′),我们可以用如下的方式来表示角速度. 圆锥体绕对称轴的自转角速度是

$$\boldsymbol{\omega}_{自} = \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z$$

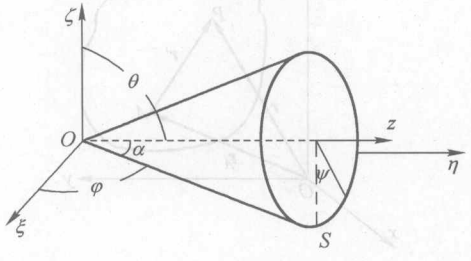



图 5.5′

刚体除自转外对称轴还绕铅直轴 $\zeta$ 轴转动,这种转动通常称为**进动**,$\varphi$ 角则称进动角. 圆锥体的进动角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{进} = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta$$

这里 $\theta$ 角是恒定不变的,$\dot{\theta}=0$. 圆锥体绕定点 $O$ 转动的角速度是自转角速度和进动角速度的合成:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta = \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{e}_S + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\zeta$$

式中 $\boldsymbol{e}_S$ 是锥体母线 $OS$ 方向的单位矢量. 母线 $OS$ 与地接触,其上各点的速度都是零,它必是瞬时转轴. 可见锥体绕定点 $O$ 转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 必沿 $\boldsymbol{e}_S$ 方向. 从上式即可得出自转角速度和进动角速度的量值间存在关系:

$$\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = 0; \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{\dot{\psi}\cos\theta}$$

最后得

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{e}_S$$

$$= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\xi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_\eta \tag{5.5a}$$

这里,角速度矢量是用固定的 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系表示的. 在活动坐标系 $O'xyz$ 中表示则为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k})$$

$$= -\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k} \tag{5.5b}$$

在这里我们所采用的活动坐标系 $O'xyz$ 并非完全固定在锥体上,它跟随锥体绕 $O\zeta$ 轴进动但不跟锥体一起绕对称轴 $O'z$ 自转.

**(五) 刚体内任意点的速度和加速度**

1. 刚体内任意点的速度

在刚体内取任意点 $P$,它的位置矢量是 $\boldsymbol{r}$. 如果我们在刚体上再任取一点 $A$ 作为基点,则 $P$ 点的位置矢量如图 5.9 所示,可表达为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}' \tag{5.6}$$

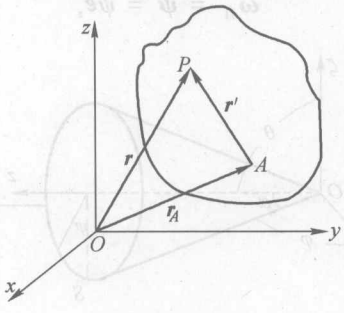



图 5.9

式中 $\boldsymbol{r}_A$ 是基点 $A$ 的位置矢量. 对上式求时间的导数即得 $P$ 点的速度:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$$

这里 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A$ 是基点 $A$ 的速度. 注意到 $\boldsymbol{r}'$ 是刚体上 $A$、$P$ 两点间的位置矢量,即 $P$ 点相对于基点 $A$ 的位置矢量. 矢量 $\boldsymbol{r}'$ 的长度不变,随刚体一起以瞬时加速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕基点 $A$ 转动. 我们早就知道一个长度不变的矢量,以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动时,其时间变化率是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

这样,我们便得到刚体上任意点的速度表示式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5.7}$$

此式表明刚体上任意点的速度，等于随基点的平动速度和绕基点的转动速度的合成①. 在上式的推导过程中没有具体指定基点的位置，(5.7)式对在刚体上任意选取的基点都是成立的. 虽然对不同的基点，其平动速度 $\boldsymbol{v}_A$ 及相对位矢 $\boldsymbol{r}'$ 不一样，但刚体的转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 却相同，与选取的基点无关②.

2. 刚体内任意点的加速度

现在再来导出刚体内任意一点 $P$ 的加速度表示式.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \\ &= \boldsymbol{a}_A + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \end{aligned} \tag{5.8}$$

---

① 读者可与 §3.1 关于活动参考系中质点绝对速度的表达式对照. 刚体本身就是一个活动的参照系，但刚体上的点不存在相对速度.

② 下面是关于 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点无关的证明. 在刚体上另取一不同的基点 $A'$，相对于原基点 $A$ 的位置矢量是 $\boldsymbol{R}$，$P$ 点相对于 $A'$ 的位矢是 $\boldsymbol{r}''$，见图 JZ5.1. 若是刚体绕 $A'$ 的转动角速度是 $\boldsymbol{\omega}'$，则 $P$ 点的瞬时速度又可写为

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'_A + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}''$$

式中 $\boldsymbol{v}'_A$ 是 $A'$ 的速度. 由(5.7)式

$$\boldsymbol{v}'_A = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$$

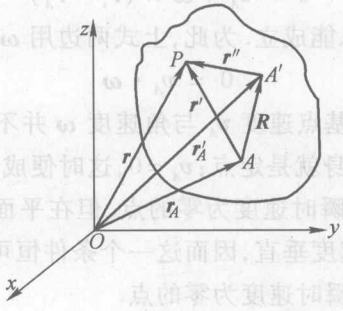



图 JZ5.1

因此

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}''$$

虽然采用不同的基点，但对同一 $P$ 点的速度应当相等. 上式与(5.7)式比较，并注意

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}''$$

即得

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \times \boldsymbol{r}' = 0$$

由于 $P$ 点是任意选取的，故必有

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$$

这就证明了刚体转动的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点选取无关.

这里 $\boldsymbol{a}_A$ 是基点的加速度；$\boldsymbol{\omega}$ 沿瞬时转轴方向，它的量值和方向都是时间 $t$ 的函数；$\boldsymbol{r}'$ 是 $P$ 点相对于基点的位置矢量. 关系式(5.7)和(5.8)是处理刚体运动学问题的基础. 对于下列各种具体运动形态情形，只需相应地作出限制，便可分别从(5.7)式和(5.8)式得出相应的刚体内任意点的速度和加速度.

(1) 平动：$\boldsymbol{\omega}=0$，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A;\quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A$$

(2) 定轴转动：取基点 $A$ 位于转轴上，$\boldsymbol{v}_A=0$，$\boldsymbol{a}_A=0$；$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_z$. $\boldsymbol{e}_z$ 为转轴方向的单位矢量.

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r};\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

(3) 平面平行运动：$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}_A$、$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{a}_A$ 等都是运动平面内的二维矢量；$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_z$. $\boldsymbol{e}_z$ 为运动平面法线方向的单位矢量.

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}';\quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$$

(4) 定点运动：以定点为基点，并取作坐标原点，有 $\boldsymbol{r}_A=0$，$\boldsymbol{v}_A=0$，$\boldsymbol{a}_A=0$.

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r};\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

**(六) 瞬时转动中心**

一般来说，任一瞬间刚体上各点具有不同的速度和加速度. 能否在刚体上或与之刚性联结的地方，找到速度为零的点？为此，假设速度为零的点位于 $\boldsymbol{r}_s$ 处，则由(5.7)式

$$0=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_A) \tag{5.9}$$

首先考察这个等式是否总能成立. 为此，上式两边用 $\boldsymbol{\omega}$ 标乘，则

$$0=\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{\omega}$$

对三维转动的刚体，通常基点速度 $\boldsymbol{v}_A$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 并不相互垂直，这个条件一般不能满足，除非基点 $A$ 本身就是定点：$\boldsymbol{v}_A=0$，这时便成了定点运动. 因此，刚体一般运动时，不一定能找到瞬时速度为零的点. 但在平面平行运动的情形下，刚体上各点的速度总是与角速度垂直，因而这一个条件恒可满足；刚体做平面平行运动时，任何时刻总能找到瞬时速度为零的点.

对(5.9)式两边矢乘 $\boldsymbol{\omega}$ 得

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_A)\\&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_A)]-\omega^2(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_A)\end{aligned}$$

这里已应用熟知的矢量运算关系：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

在平面平行运动情形下，角速度与运动平面垂直，即

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_s-\boldsymbol{r}_A)=0$$

由此得

$$0 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_A - \omega^2(\boldsymbol{r}_s - \boldsymbol{r}_A)$$

故速度为零的点，其位置矢量是

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_A + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_A) \tag{5.10}$$

用分量形式写出

$$\boldsymbol{r}_s = x_s\boldsymbol{i} + y_s\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_A = x_A\boldsymbol{i} + y_A\boldsymbol{j}; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$$

则得速度为零的点，其坐标为

$$\begin{cases} x_s = x_A - \dfrac{v_{Ay}}{\omega} \\ y_s = y_A + \dfrac{v_{Ax}}{\omega} \end{cases} \tag{5.11}$$

在平面平行运动中，刚体上（或与刚体刚性联系的）速度为零的点，被称为**瞬时转动中心**，简称**瞬心**. 刚体在任一瞬时的运动是绕瞬心的转动；若取瞬心为基点，刚体在这瞬时便只是绕瞬心（基点）的转动了.

无论是基点的位矢 $\boldsymbol{r}_A$、速度 $\boldsymbol{v}_A$，还是刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 通常都是时间的函数，由(5.10)式或(5.11)式知，瞬心的位矢 $\boldsymbol{r}_s$ 也必是时间的函数，瞬时中心不是一个固定的点；这一瞬时是瞬心的点，下一瞬时不再是，而由别的点取代.

瞬时中心的位置也可以用几何方法来求得. 既然这一瞬时刚体是绕瞬心做纯转动，则这瞬时刚体上任何点都绕瞬心做圆周运动，它的速度方向必与该点处的圆周半径垂直. 故若刚体上有两点的速度方向已知，则分别通过这两点作该处速度的垂线，它们的交点就是瞬心.

［例 5.1］ 椭圆规尺 $AB$ 的两端点分别沿相互垂直的直线槽 $OX$ 及 $OY$ 滑动，已知 $B$ 端以匀速 $\boldsymbol{u}$ 运动（如图 L5.1 所示）. 求：(i) 椭圆规尺上 $M$ 点的速度 $\boldsymbol{v}_M$ 及加速度 $\boldsymbol{a}_M$；(ii) 规尺的瞬时中心 $S$ 点的位置. 已知 $M$ 点离 $A$、$B$ 点的距离分别为 $a$ 和 $b$.

［解］ 椭圆规尺做平面平行运动，取 $B$ 点为基点，按题意有

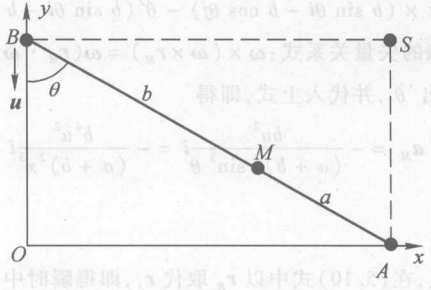



图 L5.1

$$\boldsymbol{r}' = b\sin\theta\boldsymbol{i} - b\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_B = -u\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a}_B = 0$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}$$

(i) 求 $M$ 点的速度.

$M$ 点的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_M &= \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \\ &= -u\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}\times(b\sin\theta\boldsymbol{i} - b\cos\theta\boldsymbol{j}) \\ &= \dot{\theta}b\cos\theta\boldsymbol{i} + (\dot{\theta}b\sin\theta - u)\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $\dot{\theta}$ 可由 $B$ 点的已知速度求出. 取 $A$ 点为基点来写出 $B$ 点的速度表示式. $B$ 点相对于基点 $A$ 的位矢是

$$\boldsymbol{r}_B = -(a+b)\sin\theta\boldsymbol{i} + (a+b)\cos\theta\boldsymbol{j}$$

则 $B$ 点速度表示式,并注意题意 $\boldsymbol{v}_B = -u\boldsymbol{j}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_B \\ &= v_A\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}\times[-(a+b)\sin\theta\boldsymbol{i} + (a+b)\cos\theta\boldsymbol{j}] \\ &= [v_A - (a+b)\dot{\theta}\cos\theta]\boldsymbol{i} - (a+b)\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{j} \\ &= -u\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

等式两边比较可得

$$v_A = (a+b)\dot{\theta}\cos\theta \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{u}{(a+b)\sin\theta} \tag{3}$$

以此代入(1)式即可求得

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{u}{a+b}(b\cot\theta\boldsymbol{i} - a\boldsymbol{j})$$

代入(2)式还可求得 $A$ 点的速度 $\boldsymbol{v}_A$.

$M$ 点的加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_M &= \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'_M + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \\ &= \ddot{\theta}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_M + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{\omega}) - \omega^2\boldsymbol{r}_M \\ &= \ddot{\theta}\boldsymbol{k}\times(b\sin\theta\boldsymbol{i} - b\cos\theta\boldsymbol{j}) - \dot{\theta}^2(b\sin\theta\boldsymbol{i} - b\cos\theta\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

这里已用到 $\boldsymbol{a}_B = 0$,及熟知的矢量关系式:$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_M) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{\omega}) - \omega^2\boldsymbol{r}_M$,并注意到 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}'_M$ 相互垂直. 由(3)式求出 $\ddot{\theta}$,并代入上式,即得

$$\boldsymbol{a}_M = -\frac{bu^2}{(a+b)^2\sin^3\theta}\boldsymbol{i} = -\frac{b^4u^2}{(a+b)^2x^3}\boldsymbol{i}$$

式中 $x$ 是 $M$ 点的横坐标.

(ii) 求瞬时中心

如果将 $B$ 点作为基点,在(5.10)式中以 $\boldsymbol{r}_B$ 取代 $\boldsymbol{r}_A$,即得瞬时中心的位置矢量

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_B + \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_B) = (a+b)\cos\theta\boldsymbol{j} + \frac{1}{\dot{\theta}^2}[\dot{\theta}\boldsymbol{k}\times(-u\boldsymbol{j})]$$

$$= (a+b)\sin\theta\boldsymbol{i} + (a+b)\cos\theta\boldsymbol{j}$$

这便是图中 $S$ 点的位矢. 实际上,由几何关系更容易求出. 因为已知 $A$、$B$ 两点的速度分别沿 $x$ 轴和 $y$ 轴,自 $A$、$B$ 两点分别作这两轴的垂线(图中虚线所示),它们的交点即是瞬心 $S$ 点.

[**评注**] 本题在习题 1.2 中用质点运动学的方法求解过. 无论用质点运动学方法,非惯性系方法还是本章介绍的刚体运动学方法,速度和加速度的求法都建立在同一个基础上,那就是分别为位置矢量的一阶和二阶时间变化率. 不同的只是对位矢作不同的适当分解,读者对此应融会贯通. 例如刚体运动学方法是把所求点的位矢分解为基点的位矢跟相对于基点的位矢之和,$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}'$;而在非惯性系中则分解为活动参考系坐标原点的位矢和相对于活动系的位矢之和,$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_t + \boldsymbol{r}'$,见(3.1)式.

[**例 5.2**] 一圆盘形陀螺,由半径为 $r_0$ 的圆盘和与盘面垂直的轻质轴线 $OC$ 构成,如图 L5.2 所示. 盘面绕轴线以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动,轴线则以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 绕竖直轴转动. 已知陀螺高为 $h$,轴线与铅直线间的倾角为 $\theta$,求圆盘边缘最低点 $B$ 处的速度.

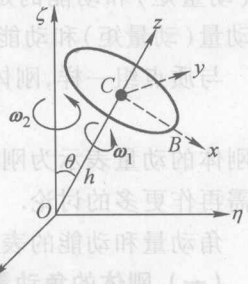


图 L5.2

[**解**] 选取部分地跟随陀螺转动的活动坐标系 $Cxyz$ 坐标系,如图 L5.2 所示. 其中 $xz$ 平面与 $O\zeta$ 线共面,同在铅直面内;$y$ 轴方向与铅直面垂直.

陀螺绕 $O$ 点转动的角速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1\boldsymbol{k} + \omega_2\boldsymbol{e}_\zeta \\ &= -\omega_2\sin\theta\boldsymbol{i} + (\omega_1 + \omega_2\cos\theta)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$B$ 点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = r_0\boldsymbol{i} + h\boldsymbol{k}$$

**方法一** 以定点 $O$ 为基点,将圆盘的运动作为定点运动来处理. 则可得 $B$ 点的速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\omega_2\sin\theta & 0 & \omega_1 + \omega_2\cos\theta \\ r_0 & 0 & h \end{vmatrix} \\ &= [r_0(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) + h\omega_2\sin\theta]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

**方法二** 以 $C$ 点为基点,将圆盘的运动作为刚体的一般运动来处理. $B$ 点相对于基点 $C$ 的位矢为

$$\boldsymbol{r} = r_0\boldsymbol{i}$$

基点 $C$ 的速度为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_C = \omega_2\boldsymbol{e}_\zeta\times d\boldsymbol{k} = \omega_2 h\sin\theta\boldsymbol{j}$$

则 $B$ 点的速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \\ &= \omega_2 h\sin\theta\boldsymbol{j} + [-\omega_2\sin\theta\boldsymbol{i} + (\omega_1 + \omega_2\cos\theta)\boldsymbol{k}]\times r_0\boldsymbol{i} \\ &= [r_0(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) + h\omega_2\sin\theta]\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

得到同样的结果.

[评注] ① 本题的求解,采用了部分地跟随刚体(陀螺)运动的活动坐标系.当然,也可采用固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$.正如我们已多次指出,坐标系作为运算的工具,是可以有多种选择的.

② 这里求得的 $B$ 点的速度虽然用活动坐标系表示,但它不是相对于活动坐标系的相对速度,而依然是相对于固定的惯性参考系的速度,只是用活动坐标系表示而已.

## §5.2 刚体的动量、角动量和动能

已如前述,刚体是一种特殊的质点组.因此在第四章中对质点组动量、角动量(动量矩)和动能的定义,也都适用于刚体.但对于刚体,这些力学量,特别是角动量(动量矩)和动能,应该有更简明的关系式.本节将导出这些关系式.

与质点组一样,刚体的动量定义为

$$\boldsymbol{p} = \sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = m\boldsymbol{v}_c \tag{5.12}$$

即刚体的动量表示为刚体随质心一起整体运动的动量.这已是很简明的关系式,无需再作更多的讨论.

角动量和动能的表示式复杂些,下面将作较详细地讨论.

**(一) 刚体的角动量和惯量张量**

按定义,质点组对一固定点(坐标原点)的角动量是

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

这个定义当然对刚体也适用.刚体绕固定点以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动时,刚体上任意点的速度为

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$$

将此式代入上面角动量表达式,得

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

将

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$$

代入并作矢量运算,可得

$$\boldsymbol{L} = L_x \boldsymbol{i} + L_y \boldsymbol{j} + L_z \boldsymbol{k} \tag{5.13}$$

这里

$$\begin{cases} L_x = \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

从上式看到，角动量与角速度之间的关系是较为复杂的，但关系式中各角速度分量的系数，都只与刚体的质量分布有关而与刚体的运动状况无关. 分别将这些系数相应地以下列符号表示：

$$\begin{cases} J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \int (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m \\ J_{yy} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) = \int (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}m \\ J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m \end{cases} \tag{5.14a}$$

$$\begin{cases} J_{yz} = J_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i = \int yz\,\mathrm{d}m \\ J_{zx} = J_{xz} = \sum_i m_i z_i x_i = \int zx\,\mathrm{d}m \\ J_{xy} = J_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i = \int xy\,\mathrm{d}m \end{cases} \tag{5.14b}$$

在上面各式中取求和或积分，视刚体中的质点是不连续分布或是连续分布的情况而定. 这样，角动量的表达式(5.13)可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = {} & (J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\boldsymbol{i} + \\ & (-J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z)\boldsymbol{j} + \\ & (-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{5.15a}$$

或采用矩阵表示：

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.15b}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

现在看到 $J_{ij}(i、j = x,y,z)$ 共有九个量，构成一个对称的三阶矩阵. 从坐标变换角度来说，由(5.14)式表示的 $\boldsymbol{J}$ 诸分量构成一个二阶张量，称为刚体的**惯量张量**. 这个张量的矩阵表示式(5.16)，称为**惯量矩阵**. 惯量矩阵的 9 个矩阵元 $J_{ij}$ $(i、j = x,y,z)$ 都是刚体中质点坐标的二次项. 由于非对角元素的对称性 $J_{ij} = J_{ji}$，实际上 9 个矩阵元中只有 6 个独立元素. 此外，由(5.14a)式看到对角元素 $J_{xx}$、$J_{yy}$ 和 $J_{zz}$ 分别就是关于 $x$、$y$ 和 $z$ 坐标轴的转动惯量①. 非对角元素 $J_{ij}(i \neq j)$ 则称为

① 关于刚体对一轴线的转动惯量，普通物理中已有定义. 请参见下面的讨论.

**惯量积**.

我们熟知质量 $m$ 显示物体平动的惯性,若以刚体平动动量的关系式(5.12)与刚体转动的角动量关系式(5.15b)比较,那么 $\boldsymbol{J}$ 作为整体将具有表征刚体转动时的惯量特征.惯量张量是刚体本身的特性,与该刚体将发生什么样的转动没有关系.正如质量 $m$ 是物体本身的内在特性,而与物体将发生什么样的运动无关那样.关于惯量张量的意义,在后面 §5.3 开始讨论刚体动力学时将会更清楚.从张量 $\boldsymbol{J}$ 各分量的表示式(5.14),可以看到 $\boldsymbol{J}$ 仅与刚体中相对于定点的质量分布有关.选定了一个点后,刚体围绕这个点转动的惯量张量便确定了.相对于不同的点刚体的质量分布不同,因而 $\boldsymbol{J}$ 也不相同.惯量张量和角动量一样,只有相对于确定的点才有意义.

和质点组一样,刚体对固定点 $O$ 的角动量也等于刚体随质心平动对 $O$ 点的动量矩与刚体绕质心转动的角动量之和,也可写出如同(4.13b)式那样的关系式:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_c \times m\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{L}'_c \tag{5.17}$$

这里 $\boldsymbol{r}_c$ 是质心相对于固定点 $O$ 的位矢,$\boldsymbol{v}_c$ 是质心速度;$\boldsymbol{L}'_c$ 则是刚体绕质心转动的角动量,它同样由(5.15b)式表示,只是惯量矩阵应对质心求取.

虽然惯量张量(矩阵)较我们以前遇到的量复杂得多,但只要了解它的主要特性,也就不难掌握了.为此对惯量矩阵 $\boldsymbol{J}$ 需作如下的讨论.

1. 惯量主轴

从(5.15)式看到刚体绕某定点转动时,角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向一般与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不一致.但在数学上总能找到一些特殊的方向,刚体绕通过定点沿这些方向的轴转动时,$\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向一致.沿这些特殊方向的轴,称为**惯量主轴**,简称**主轴**.在线性代数中,寻求惯量主轴是通过坐标变换使惯量矩阵对角化的过程.对刚体上(或刚性联结)的任何一个点,采用线性代数方法,总可以找到三个通过该点且相互垂直的惯量主轴,这里不拟对此作更多的讨论.

现在我们来讨论惯量主轴跟惯量矩阵元 $J_{ij}$ 之间的关系.假设 $x$ 轴是惯量主轴,则绕此惯量主轴转动时 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{i}$,按惯量主轴的定义 $\boldsymbol{L}$ 也沿 $x$ 轴方向,由(5.15)式有

$$\boldsymbol{L} = J_{xx}\omega\boldsymbol{i} - J_{xy}\omega\boldsymbol{j} - J_{xz}\omega\boldsymbol{k} = L\boldsymbol{i}$$

比较等式两边,得这个等式成立的充要条件是

$$J_{xy} = J_{xz} = 0$$

同样,如果 $y$ 轴和 $z$ 轴分别为惯量主轴则必须 $J_{yx} = J_{yz} = 0$,$J_{zx} = J_{zy} = 0$.可见,与惯量主轴相关的惯量积(非对角矩阵元)应等于零.利用这一特性,对于具有对称性的均匀刚体,就容易从几何上找出惯量主轴.可以看出,通过某一点的下述两种轴线都是对于该点的惯量主轴,

(1) 对称轴

例如,若 $x$ 轴是对称轴,则刚体上位于$(x,y,z)$的质点必存在有对称的质点$(x,-y,-z)$. 故而由(5.14b)给出惯量积 $J_{xy}=J_{xz}=0$,$x$ 轴是惯量主轴. 对称轴是惯量主轴.

(2) 对称面的法线

若 $yz$ 面是通过定点的对称面,则 $x$ 轴便是该面的法线. 由对称性知,刚体上$(x,y,z)$处的质点,必存在与其对称的$(-x,y,z)$质点. 同样得出 $J_{xy}=J_{xz}=0$,$x$ 轴是惯量主轴. 可见对称面的法线是惯量主轴.

2. 转动惯量

在第一章讨论质点的角动量时就已指出,质点对于某点的角动量跟对于某轴线的角动量是两个不同的概念. 对刚体来说,同样应区分它们的不同. 刚体绕定点转动时的惯性是以张量 $\boldsymbol{J}$ 来量度的,刚体定轴转动的惯量则以转动惯量 $J$ 来表示. 前者是二阶张量,后者是标量,这是两种完全不同的量. 虽然如此,我们将在下面看到,它们之间却又有着某种联系.

刚体是由大量质点构成的,故跟质点情形一样,刚体对某一轴线 $\boldsymbol{l}$ 的角动量,其大小是刚体对轴上一点的角动量在该轴线方向的分量:

$$L_l = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_l = J\omega$$

式中 $\boldsymbol{e}_l$ 是沿轴 $l$ 方向的单位矢量;$J$ 即是刚体对该转轴的转动惯量. 对于质点不连续分布的刚体,转动惯量可由下式求出:

$$J = \sum_i m_i\rho_i^2$$

这里 $\rho_i$ 是 $i$ 质点至转轴的垂直距离. 对于质量连续分布的刚体,则

$$J = \int_V \rho^2 \mathrm{d}m = \int_V \rho^2\sigma \mathrm{d}V \tag{5.18}$$

这里 $\mathrm{d}m$ 是元体积 $\mathrm{d}V$ 内的质量,$\sigma$ 为刚体的密度,$\rho$ 是$\mathrm{d}V$ 至转轴的垂直距离,如图 5.10 所示. 积分是对刚体的体积 $V$ 进行的.

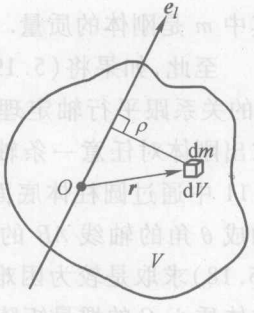


图 5.10

转动惯量也可由对定点 $O$ 的惯量矩阵求得. 设转轴 $l$ 的方向余弦是 $\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$,则轴线方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_l = \alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$$

既为定轴转动,角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿转轴方向,有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_l = (\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k})\omega$$

刚体绕此轴转动的角动量为

$$\boldsymbol{L}_l = L_l\boldsymbol{e}_l$$

其中

$$L_l = \boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{e}_l)\omega$$

$$= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\omega$$

$$= J\omega$$

由此可得刚体关于定点的惯量张量 $\boldsymbol{J}$，与关于通过此定点的轴线的转动惯量 $J$ 之间存在如下关系：

$$J = \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_l$$

$$= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$= J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha - 2J_{xy}\alpha\beta$$

这个关系式告诉我们，知道了刚体对某定点惯量张量 $\boldsymbol{J}$ 后，便可利用它的诸分量 $J_{ij}$，求出对通过该点的任意 $\boldsymbol{e}_l$ 方向轴线的转动惯量 $J$.

例如，欲求刚体对 $x$ 轴的转动惯量 $J_x$，则只需将 $x$ 轴的方向余弦 $\alpha = 1$，$\beta = \gamma = 0$ 代入(5.19)式，即可求得 $J_x = J_{xx}$. 同样可求得对 $y$ 轴和对 $z$ 轴的转动惯量，分别是 $J_y = J_{yy}$ 和 $J_z = J_{zz}$. 同时也就证实了(5.14a)式表示的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的对角元素确是分别对 $x$、$y$、$z$ 三坐标轴的转动惯量.

刚体对惯量主轴的转动惯量，称为**主转动惯量**. 以惯量主轴为坐标轴时，各惯量积为零，惯量矩阵是对角化的；三个对角元素就是分别对三个惯量主轴的主转动惯量.

此外，在普通物理中便已知道，分别对两平行轴线的转动惯量之间，存在**平行轴定理**. 该定理指出，刚体对通过质心的轴线的转动惯量 $J_c$，跟对与之相距为 $d$ 的平行轴的转动惯量 $J$ 间，有如下关系：

$$J = J_c + md^2 \tag{5.20}$$

其中 $m$ 是刚体的质量.

至此，如果将(5.19)式转动惯量 $J$ 与惯量张量 $\boldsymbol{J}$ 的关系跟平行轴定理(5.20)式结合起来，就可以求出刚体对任意一条轴线的转动惯量. 例如欲求图 5.11 中通过圆柱体底面边界上 $A$ 点，并与柱体对称轴成 $\theta$ 角的轴线 $AB$ 的转动惯量，要是直接按公式(5.18)求取是较为困难的. 但我们可以先求出对于柱体质心 $C$ 的惯量矩阵，按公式(5.19)求出通过质心的平行轴线 $CB'$ 的转动惯量，然后应用平行轴定理最终求出对 $AB$ 轴的转动惯量. 我们将在下面的例

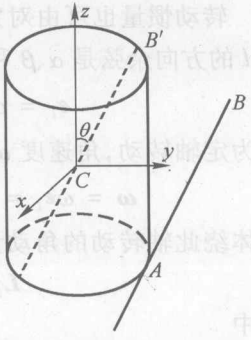



图 5.11

题中作具体运算. 采用这个办法常常可以把较困难的运算化成较为简单的运算. 当然这是以增加了运算步骤为代价的.

[例 5.3] 一底面半径为 $r_0$，高为 $2r_0$ 的均质正圆锥体，如图 5.11 所示绕 $AB$ 轴以角速度 $\omega$ 转动. 轴线 $AB$ 与圆柱轴共面，并成 30°角，$A$ 点是柱体底面边界上的固定点. 求(i) 柱体对于轴线 $AB$ 的转动惯量；(ii) 柱体对 $A$ 点的角动量.

[解] (i) 直接按公式(5.18)求柱体对 $AB$ 轴的转动惯量是较为困难的，如文中所述，我们将通过柱体对质心 $C$ 点的惯量矩阵求出对平行轴线 $CB'$ 的转动惯量，然后应用平行轴定理最终求出对 $AB$ 轴线的转动惯量.

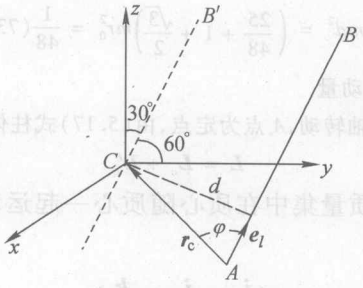



图 L5.3

取质心 $C$ 为坐标原点，坐标轴如图 5.11 所示，$AB$ 位于 $yz$ 平面内. 由于柱体是均匀的，质心位于几何中心，显然 $x$、$y$ 和 $z$ 轴都是对称轴，它们都是惯量主轴. 对圆柱轴的转动惯量 $J_z$ 即是惯量矩阵的对角元素 $J_{zz}$，按公式(5.18)就可求出：

$$J_{zz} = J_z = \int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\sigma\mathrm{d}z = \sigma\pi r_0^5 = \frac{1}{2}mr_0^2$$

由于柱体的对称性，对 $x$ 轴和 $y$ 轴的转动惯量相等 $J_x = J_y$. 设柱体密度为 $\sigma$，则

$$\begin{aligned} J_{xx} &= J_x = \int_{-a}^{a}\sigma(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2r_0}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}(r^2\sin^2\theta + z^2)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= \frac{7}{6}\pi\sigma r_0^5 = \frac{7}{12}mr_0^2 \\ &= J_{yy} = J_y \end{aligned}$$

现在坐标轴是惯量主轴，诸惯量积都为零；对质心 $C$ 的惯量矩阵是一对角矩阵. 由(5.19)式柱体对 $CB'$ 轴的转动惯量是

$$\begin{aligned} J_{CB'} &= (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= J_{xx}\alpha^2 + J_{yy}\beta^2 + J_{zz}\gamma^2 \end{aligned}$$

按题意，

$$\alpha = \cos(\pi/2) = 0,\quad \beta = \cos 60° = \frac{1}{2},\quad \gamma = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以此代入即求得

$$J_{CB'} = \frac{1}{4}(J_{yy} + 3J_{zz}) = \frac{25}{48}mr_0^2$$

再由平行轴定理,要求得柱体对 $AB$ 轴的转动惯量,先求出 $AB$ 与 $CB'$ 间的垂直距离 $d$. 柱体质心 $C$ 相对于 $A$ 点的位矢 $\boldsymbol{r}_c = -r_0\boldsymbol{j} + r_0\boldsymbol{k}$;$AB$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_l = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}$. 设 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\boldsymbol{r}_c$ 之间的夹角为 $\varphi$,则

$$d = |r_c \sin\varphi| = |\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{r}_c| = \frac{(1+\sqrt{3})}{2}r_0, \quad d^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r_0^2$$

由此

$$J_{AB} = J_{CB'} + md^2 = \left(\frac{25}{48} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)mr_0^2 = \frac{1}{48}(73 + 24\sqrt{3})mr_0^2$$

(ii) 求柱体对 $A$ 点的角动量

柱体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 $AB$ 轴转动,$A$ 点为定点,由(5.17)式柱体对 $A$ 点的角动量:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_c + \boldsymbol{L}'_c$$

先求 $\boldsymbol{L}_c$,即设想柱体质量集中在质心随质心一起运动对 $A$ 点的角动量. 质心 $C$ 的速度

$$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c = \omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -r_0 & r_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega a\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{L}_c = m\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_c = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\omega r_0^2(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

再求柱体以同样角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕质心转动的角动量:

$$\boldsymbol{L}'_c = \boldsymbol{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \omega$$

$$= \frac{\omega}{2}(J_{yy}\boldsymbol{j} + \sqrt{3}J_{zz}\boldsymbol{k}) = \frac{m\omega}{24}r_0^2(7\boldsymbol{j} + 6\sqrt{3}\boldsymbol{k})$$

最后得柱体对 $A$ 点的角动量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_c + \boldsymbol{L}'_c \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})}{2}m\omega r_0^2(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \frac{1}{24}m\omega r_0^2(7\boldsymbol{j} + 6\sqrt{3}\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{1}{24}m\omega r_0^2[(19 + 12\sqrt{3})\boldsymbol{j} + (12 + 18\sqrt{3})\boldsymbol{k}] \end{aligned}$$

[评注] 本题求解时当然也可以对 $A$ 点求惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_A$. 不过若取通过 $A$ 点的柱面母线

为 $z$ 轴，仍以 $AB$ 所在平面为 $yz$ 平面，则除 $x$ 轴是对称面的法线，因而是惯量主轴外，$y$ 和 $z$ 轴都不是惯量主轴. 这时除了需要求出 $\boldsymbol{J}_A$ 的对角元素 $J_{xx}$、$J_{yy}$ 和 $J_{zz}$ 外，还要按(5.14b)式求出惯量积 $J_{yz}$、$J_{zy}$($=J_{yz}$)；既然 $x$ 轴是惯量主轴，则与它相关的惯量积 $J_{xy}$、$J_{yx}$、$J_{xz}$ 及 $J_{zx}$ 均等于零. 求得对 $A$ 点的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_A$ 后，便可分别按(5.19)和(5.15b)直接求出柱体对 $AB$ 轴的转动惯量 $J_{AB}$ 及对 $A$ 点的角动量. 请读者自行运算.

### (二) 刚体的动能

刚体的动能是刚体中各质点的动能之和：

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

我们已经知道按柯尼希定理(4.17)式，质点组的动能可分解为随质心运动(平动)的动能和相对于质心的动能之和. 刚体属于质点组，自然也满足这个关系. 即

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + T'_c \tag{5.21}$$

这里 $m$ 是刚体的质量，$v_c$ 是质心速度的量值；

$$T'_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \tag{5.22}$$

是刚体中各质点相对于质心运动的动能之和，即在质心参考系中观察的动能. 由刚体的特点知，刚体中质点与质心间的距离不变，刚体相对于质心的运动只可能是围绕质心的转动. 柯尼希定理则成为：刚体的动能等于刚体随质心运动的平动动能 $T_c$ 及绕质心转动的转动动能 $T'_c$ 之和.

为求 $T'_c$ 我们先一般地来讨论刚体绕固定点转动时动能的表达式. 况且，定点运动是刚体力学问题的重要部分.

如图 5.12 所示，取定点 $O$ 为坐标原点. 当刚体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定点 $O$ 转动时，位矢 $\boldsymbol{r}$ 处质点的速度为

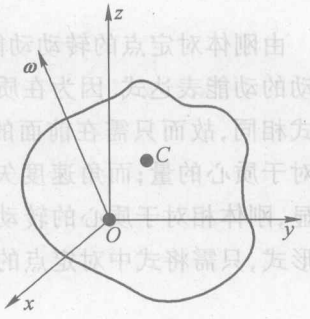



图 5.12

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

则有

$$v^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$$

由此，刚体绕定点 $O$ 转动的动能为

$$T_O = \sum \frac{1}{2} m \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum m \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

是刚体对于定点的角动量. 在上述表示式中,略去了标示各质点的下标符"$i$". 注意到 $\boldsymbol{L}$ 与惯量矩阵 $\boldsymbol{J}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系(5.15b),则 $T_O$ 可写成如下各种表达式:

$$\begin{aligned} T_O &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2}J_\omega \omega^2 \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中

$$J_\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

是刚体对通过定点的瞬时转轴的转动惯量[见(5.19)式]. 特别对于转轴方向不变情形,例如刚体做定轴转动或平面平行运动时,$J_\omega$ 就是刚体绕转轴的转动惯量.

如果所取的坐标轴是关于定点(坐标原点)的惯量主轴,则惯量矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是对角化的;三个对角元素分别为刚体对三个主转动惯量:$J_x$、$J_y$ 和 $J_z$. 这时转动动能可写为

$$T_O = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) \tag{5.24a}$$

由刚体对定点的转动动能表示式(5.24),可以直接推广得到刚体绕质心 $C$ 转动的动能表达式. 因为在质心坐标系中动能的表示式(5.22)与在惯性系中的形式相同,故而只需在前面的推导过程中,把质点位矢、速度等量相应地改写为相对于质心的量;而角速度矢量对刚体上任何一点转动都一样,无需改变[①]. 很明显,刚体相对于质心的转动动能 $T'_c$ 的表达式也应具有(5.23)和(5.24)相同的形式,只需将式中对定点的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}$ 换成对质心 $C$ 的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_c$ 即可,即

$$T'_c = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.24b}$$

这样,刚体做一般运动时的动能表达式可写为

$$T = T_c + T'_c = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{5.25}$$

除了上面已讨论的定点转动和一般运动,刚体的其他运动形态也容易从前面的关系式导出相应的动能表示式.

(1) 平动:$\boldsymbol{\omega} = 0$ 即刚体无转动,不存在转动动能. 故

① 参见(五)1. 最后一句话的脚注.

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 是刚体的平动速度，它等于质心的速度 $\boldsymbol{v}_c$.

(2) 定轴转动

设转轴为 $z$ 轴，在转轴上适当取坐标原点 $O$，则定轴转动可看成角速度方向沿转轴不变的定点运动，$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. 由(5.23)式得

$$T = \frac{1}{2}L_z\omega = \frac{1}{2}J_{zz}\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

这里

$$J_{zz} = J = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$$

是刚体对于转轴(已设定为 $z$ 轴)的转动惯量.

(3) 平面平行运动

取与刚体运动平面垂直的方向为 $z$ 轴方向，$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. 则

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

这里 $J_c$ 是刚体对通过质心的转轴的转动惯量.

[例 5.4] 边长是 $a$ 质量为 $m$ 的均质立方体，绕对角线以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动. 求出此立方体的动能.

[解] 取坐标系如图 L5.4 所示，转轴 $OA$ 方向的单位矢量用矩阵横矢量形式表示为 $\boldsymbol{e}_l = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \quad 1 \quad 1)$，它的三个元素分别是关于三个坐标轴的方向余弦. 现在三个坐标轴都不是惯量主轴，不过从对称性易知

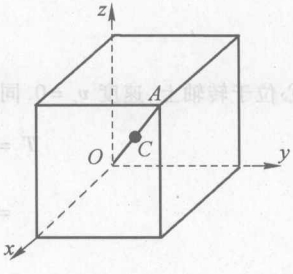



图 L5.4

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \int_0^a\int_0^a\int_0^a (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{3}a^5 = \frac{2}{3}ma^2$$

惯量积

$$J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = \int_0^a\int_0^a\int_0^a xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{4}a^5 = \frac{1}{4}ma^2$$

对立方体角点 $O$ 的惯量矩阵为

$$\boldsymbol{J} = ma^2\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

角速度的矩阵横矢量或列矢量表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_l = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(1 \quad 1 \quad 1) = \frac{\omega}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

按(5.22)式得立方体绕 $O$ 点转动的动能为

$$T_O = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{m\omega^2 a^2}{6}(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}m\omega^2 a^2$$

[评注] 取质心 $C$ 作为坐标原点,计算将更方便,这时三个坐标轴都是惯量主轴. 对 $C$ 点的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_c$ 是对角化的;所有惯量积都为零. 惯量矩阵的对角元素为

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{6}a^5 = \frac{1}{6}ma^2$$

$$\boldsymbol{J}_c = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

质心位于转轴上,速度 $\boldsymbol{v}_c = 0$. 同样可得立方体的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + T'_c = 0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$= \frac{1}{12}m\omega^2 a^2$$

## §5.3 刚体的动力学方程

前面讨论了如何描写刚体的运动——运动学问题,和如何求算刚体的一些力学量——动量、角动量、动能等. 现在我们已经为讨论刚体的动力学问题做好了准备.

在讨论质点组动力学时曾指出,质点组在外力和内力的作用下,除二体问题外,它的运动不能确切地求得解析解. 虽然刚体也属于质点组,但由于刚体内任意两点间距离不可改变,表明存在无数极强的约束关系,大大地减少了刚体的自由度,这才有可能对刚体的运动问题解析求解.

与质点组一样,刚体运动的基本定理为①:

1. 动量定理或质心定理

动量定理
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{5.26a}$$

质心定理
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{5.26b}$$

动量定理的积分形式,又称冲量定理,为
$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{I} \tag{5.26c}$$
式中 $\boldsymbol{I}$ 是作用在刚体上的冲量

2. 角动量定理

对固定点的角动量定理
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{5.27a}$$

相对于质心的角动量定理
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'_c}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}'_c \tag{5.27b}$$

角动量定理的积分形式,即是冲量矩定理,为
$$\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{L}\mathrm{d}t=\boldsymbol{K} \tag{5.27c}$$
式中 $\boldsymbol{K}$ 为对刚体作用的冲量矩.

3. 动能定理
$$\mathrm{d}T=\mathrm{d}W \tag{5.28}$$
这里只需计算外力做的功;刚体内任意两点间无相对位移,内力不做功.正如我们已经熟知,动能定理并不独立于动量定理和角动量定理.

如同已对质点组作过的证明那样,在一定条件下,上述定理都存在相应的第一积分,即守恒定律.应用与这些第一积分对应的守恒定律,将给解决刚体力学问题带来很多方便.

1. 动量守恒定律

刚体不受外力作用,或作用的外力之和 $\boldsymbol{F}=0$ 时,动量守恒,
$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0=\text{常矢量}$$
在某一方向力的分量 $F_i=0$,则在该方向的动量分量守恒 $p_i=$常量

2. 角动量守恒定律

刚体不受外力矩作用,或作用的外力矩之和 $\boldsymbol{M}=0$ 时,角动量守恒,
$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0=\text{常矢量}$$

① 下述定理的导入、证明与§4.3中关于质点组的相应定理相同,各量的符号及其定义也一样.故在此无需赘述.

在某一方向力矩分量 $M_i=0$，则在该方向的角动量分量守恒 $L_i=$ 常量

3. 机械能守恒定律

作用于刚体的外力为保守力时，机械能守恒. 即

$$T+V=E=\text{常量}$$

上述基本定理和相应的守恒定律，是求解刚体动力学问题的基础. 在求解刚体力学问题时，首先必须根据具体问题选定坐标系，在坐标系下写出必要的刚体的动量、角动量或动能的具体表达式，然后代入相应的基本定理，建立微分方程.

需要注意，如果采用转动的活动坐标系，则坐标轴方向的单位矢量是时间 $t$ 的函数；若是采用固定坐标系，则刚体运动时虽然坐标轴的方向不变，但刚体相对于坐标系的位置随时间变化，从而刚体惯量矩阵的各元素都是时间 $t$ 的函数. 在大多情形下，显然采用适当的活动坐标系，以确保惯量矩阵元素不随时间变化，对求解问题更为有利.

刚体的运动，一般可以表示为随刚体上(或与之刚性联结的)某一基点的平动和绕该基点的转动的合成. 虽然基点是可以任意选取的，但在处理动力学问题时，大多情形下选用质心作为基点最为有利. 因为对于其他一般活动基点来说，角动量定理不能写成(5.26)式那样的简单形式.

刚体的平动可由动量定理或质心定理求解，等同于质点动力学，故而不再讨论. 后面将着重讨论刚体带有转动行为的刚体运动.

[例 5.5] 一均质正圆柱体，半径为 $r$，高为 $2r$，以角速度 $\omega$ 绕圆柱侧面的母线转动. 今若突然改为绕一通过与原转轴相交的底面直径转动，试求出其角速度

[解] 取坐标系如图 L5.5 所示. 由于 $yz$ 平面是柱体的对称面，故 $x$ 轴必是惯量主轴. 柱体对于 $O$ 点的惯量矩阵可写为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{1}$$

柱体绕母线 $z$ 轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ 转动时，对 $O$ 点的角动量是

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}=\omega\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$=\omega(-J_{yz}\boldsymbol{j}+J_{zz}\boldsymbol{k})$$

柱体以角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{j}$ 绕底面直径 $y$ 轴转动时，角动量为

$$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}=\Omega\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\Omega(J_{yy}\boldsymbol{j}-J_{zy}\boldsymbol{k}) \tag{3}$$

转轴的转变过程是 $y$ 轴突然固定，$z$ 轴自由释放，$y$ 轴对柱体有冲力作用. 由于冲力是过 $y$ 轴的，故在该轴方向不存在冲力矩分量；柱体在改变转轴过程的前后，$y$ 方向的角动量分量应相等(守恒). 即

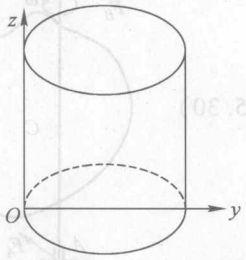



图 L5.5

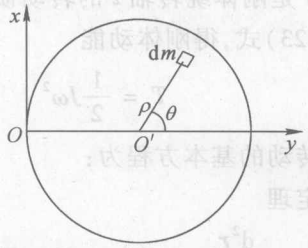



图 L5.5′

$$-\omega J_{yz} = \Omega J_{yy}$$

按照定义，容易求得柱体绕底面直径的转动惯量，设柱体的密度 $\sigma = 1$，则

$$\begin{aligned} J_{yy} = J_y &= \int (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m \\ &= \int_0^{2r}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} (\rho^2 \sin^2\theta + z^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2r} \pi r^2\left(\frac{1}{4}r^2 + z^2\right)\mathrm{d}z = 19mr^2/12 \end{aligned}$$

惯量积

$$J_{zy} = \int zy\,\mathrm{d}m = \int_0^{2r}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} z(r + \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = mr^2$$

这里设柱体质量密度为 1. 因此由(1)式得

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{j} = -\frac{J_{yz}}{J_{yy}}\omega\boldsymbol{j} = -\frac{12}{19}\omega\boldsymbol{j}$$

## §5.4 刚体的定轴转动

设刚体上 $A$、$B$ 两点被约束(例如被两轴承约束)固定不动，刚体绕 $AB$ 轴做定轴转动. 刚体除受到主动力 $\boldsymbol{F}$ 作用外，还应分别受到 $A$、$B$ 两点的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 的作用①. 在轴上选定坐标原点，取转轴为 $z$ 坐标轴，它的方向是不随刚体运动而改变的(图 5.13).

设刚体绕转轴转动的角度变量是 $\varphi$，则角速度是

① 约束力很可能是分布在整个转轴上的，但我们总可以将它们等价地约化成作用在两定点 $A$ 和 $B$ 上.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

对原点求刚体的角动量和惯量矩阵,按(5.15)式有角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = -J_{xz}\omega\boldsymbol{i} - J_{yz}\omega\boldsymbol{j} + J_{zz}\omega\boldsymbol{k} \tag{5.29}$$

这里 $J_{zz} = J$ 是刚体绕转轴 $z$ 的转动惯量.

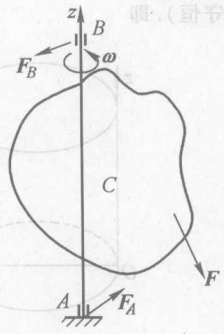


图 5.13

由(5.23)式,得刚体动能

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{5.30}$$

刚体定轴转动的基本方程为:

质心定理

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}^{(e)} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B \tag{5.31}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 是作用在刚体上的各种主动力(包括重力和除转轴约束力之外的其他作用力)之和.

角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{M}_B \tag{5.32}$$

这里 $\boldsymbol{M}$ 是各主动力的力矩之和;$\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{M}_B$ 分别是 $A$ 和 $B$ 点处约束力的力矩. (5.31)式和(5.32)式都是矢量方程,合计有六个标量方程. 将角动量的表达式(5.29)代入(5.32)式,容易写出角动量方程的 $z$ 分量方程为

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_z \tag{5.33}$$

只需注意转轴方向是固定的,单位矢量 $\boldsymbol{k}$ 不是时间 $t$ 的函数;约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 与转轴 $z$ 相交,$\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{M}_B$ 没有 $z$ 方向的分量. 写出质心定理和角动量方程(5.32)的 $x$ 和 $y$ 分量方程时需注意,如果所取坐标系的 $x$ 和 $y$ 轴是跟刚体一起绕 $z$ 轴转动的活动坐标,则单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 都是时间 $t$ 的函数;若取固定坐标系,则(5.29)式中的惯量积 $J_{xz}$ 和 $J_{yz}$ 都是时间的函数.

刚体定轴转动的自由度为 1,只需一个独立变量便可确定刚体的位置,这里取 $\varphi$ 为独立变量. 通常作用于刚体的主动力 $\boldsymbol{F}$ 及它对 $A$ 点的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是已知的,因而求解方程(5.33)便可确定刚体的运动. 其余 5 个标量方程可用来确定转轴对刚体的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$.

[例 5.6] 一质量为 $m$ 的均质薄板,长、宽分别为 $2a$ 和 $a$,悬挂于端点 $O$,可在铅直平面内绕悬挂点无摩擦地摆动,如图 L5.6 所示. 求(i) 薄板在平衡位置附近做微小摆动的周期;(ii) 等值摆长和振动中心的位置;(iii) 设摆动的最大角度是 $\varphi_0$,则薄板摆动时悬挂点受到的力.

[解] 取坐标系如图所示,转轴为 $z$ 轴(按题意,平板的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

以 $\sigma$ 表示质量面密度，平板对 $z$ 轴的转动惯量是

$$J = J_z = \int_{-a/2}^{a/2}\int_0^{2a}(x^2+y^2)\sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{17}{12}ma^2 \tag{2}$$

对悬点 $O$ 角动量的 $z$ 分量为

$$L_z = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{k} = J\omega = J\dot{\varphi}$$

作用在 $O$ 点处的约束力对悬点无力矩；重力矩是作用于平板的唯一力矩. 则

$$\boldsymbol{M} = -mga\sin\varphi\boldsymbol{k} \tag{3}$$

平板的运动由角动量定理的 $z$ 分量方程(5.33)给出，即

$$J\ddot{\varphi} = M_z$$

得方程

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mga}{J}\sin\varphi \tag{4}$$

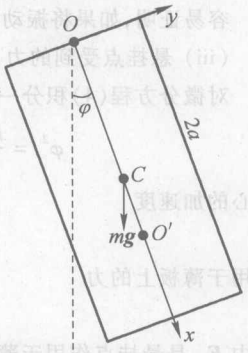


图 L5.6

(i) 微振动周期

平板做微小摆动时 $\varphi$ 为小量，(4)式近似为

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mga}{J}\varphi$$

这是简谐运动微分方程，熟知其解 $\varphi$ 以角频率 $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ 做简谐运动；薄板微小摆动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{17a}{12g}} \tag{5}$$

(ii) 等值摆长和振动中心

我们已熟知摆长为 $l$ 的单摆周期为

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

与(5)式比较，可见薄板的微振动周期等同于摆长为

$$l = \frac{J}{ma} = \frac{17}{12}a$$

的单摆. 这个摆长称为薄板的等值摆长. 离开悬挂点等值摆长 $l$ 处的点，则称为薄板的振动中心，图中以 $O'$ 点表示. 振动中心的位矢是

$$\boldsymbol{r}_{O'} = \frac{17}{12}a\boldsymbol{i}$$

虽然上面讨论的是悬挂的均质薄板摆动问题，其实对于定点悬挂的任何形状刚体的运动(转动或摆动)问题，其运动方程都类似(4)式，其微小摆动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgd}}$$

这里 $m$ 是刚体质量，$J_O$ 是刚体绕悬挂轴线的转动惯量，$d$ 是质心离悬挂点的距离. 同样可定义等值摆长，长度为

$$l = \frac{J_O}{md}$$

任何绕悬挂点摆动的刚体称为**复摆**. 单摆称为数学摆;复摆则称为物理摆.

容易证明,如果将振动中心作为悬挂点,它的周期与绕原悬挂点摆动时的周期相同.

(iii) 悬挂点受到的力

对微分方程(4)积分一次,或由机械能守恒方程,可得

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{mga}{J}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{24g}{17a}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \tag{6}$$

质心的加速度

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_c = -a\dot{\varphi}^2\boldsymbol{i} + a\ddot{\varphi}\boldsymbol{j}$$

作用于薄板上的力

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N$$

其中 $\boldsymbol{F}_N$ 是悬挂点作用于薄板的约束力. 由质心定理

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N$$

即可求悬挂点对薄板的作用力

$$\boldsymbol{F}_N = m\ddot{\boldsymbol{r}}_c - m\boldsymbol{g}$$

而其反作用即是薄板对悬挂点的作用力,注意(4)式和(6)式,有

$$\boldsymbol{F}'_N = -\boldsymbol{F}_N = m\boldsymbol{g} - m\ddot{\boldsymbol{r}}_c = m[(g\cos\varphi + a\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i} - (g\sin\varphi + a\ddot{\varphi})\boldsymbol{j}]$$

$$= \frac{mg}{17}[(41\cos\varphi - 24\cos\varphi_0)\boldsymbol{i} - 5\sin\varphi\boldsymbol{j}]$$

[**例 5.7**] 一半径为 $r$、质量为 $m$ 的均质圆盘(飞轮),绕铅直转轴转动. 如图 L5.7 所示,由于安装不善,圆盘轴线偏离转轴 $\alpha$ 角. 轴承 A 和 B 是光滑的,盘心与它们的距离分别是 $a$ 和 $b$. 求当圆盘以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕轴转动时,两轴承分别承受的力.

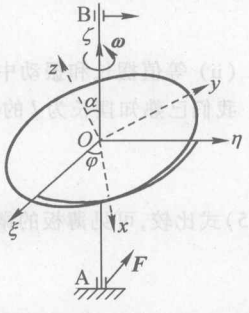


图 L5.7

[**解**] 如图 L5.7 所示,取固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$,另外在圆盘上建立与圆盘一起转动的活动坐标系 $Oxyz$. 并且以圆盘与 $\xi\eta$ 平面的交线为 $x$ 轴;且设定 $z$、$\zeta$ 和 $y$ 三轴线位于同一平面内,$x$ 轴与 $\xi$ 轴之间的夹角为 $\varphi$. 根据图示的几何关系,易知

圆盘的角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_\zeta = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta$$

A 处的约束力

$$\boldsymbol{F} = F_\xi\boldsymbol{e}_\xi + F_\eta\boldsymbol{e}_\eta + F_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta$$

B 处的约束力

$$\boldsymbol{F}' = F'_\xi\boldsymbol{e}_\xi + F'_\eta\boldsymbol{e}_\eta$$

$$\boldsymbol{e}_\zeta = \sin\alpha\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{i} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_\xi + \sin\varphi\boldsymbol{e}_\eta \tag{2}$$

注意坐标系 $Oxyz$ 的三个轴都是圆盘的对称轴. 因而都是惯量主轴. 我们熟知,圆盘对其轴线的转动惯量为 $\frac{1}{2}mr^2$;圆盘对其直径的转动惯量为 $mr^2/4$. 故用活动坐标系表达时,圆盘对盘心 $O$ 的惯量矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{4}mr^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_\zeta=\omega(\sin\alpha\boldsymbol{j}+\cos\alpha\boldsymbol{k})$$

圆盘对盘心 $O$ 的角动量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{mr^2\omega}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}=\frac{mr^2\omega}{4}(\sin\alpha\boldsymbol{j}+2\cos\alpha\boldsymbol{k})$$

注意上式中单位矢量 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 随圆盘一起以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，是时间 $t$ 的函数. 其他各量都是常量，故角动量是长度恒定的矢量，我们熟知其时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=\frac{1}{4}mr^2\omega^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\\0&\sin\alpha&2\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}mr^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{i}=\frac{1}{8}mr^2\sin 2\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\xi+\sin\varphi\boldsymbol{e}_\eta)$$

这里已用到了关系式(2).

约束力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 对 $O$ 点的力矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=-a\boldsymbol{e}_\zeta\times\boldsymbol{F}+b\boldsymbol{e}_\zeta\times\boldsymbol{F}'\\&=(aF_\eta-bF'_\eta)\boldsymbol{e}_\xi+(bF'_\xi-aF_\xi)\boldsymbol{e}_\eta\end{aligned}$$

由角动量定理 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ 得 $\xi$、$\eta$ 方向分量方程

$$\begin{cases}aF_\eta-bF'_\eta=\dfrac{1}{8}mr^2\omega^2\sin 2\alpha\cos\varphi\\[2ex]bF'_\xi-aF_\xi=\dfrac{1}{8}mr^2\omega^2\sin 2\alpha\sin\varphi\end{cases}\tag{3}$$

由质心定理 $m\ddot{\boldsymbol{r}}_c=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}'+m\boldsymbol{g}$ 求约束力. 圆盘的质心位于转轴上，$\ddot{\boldsymbol{r}}_c=0$，故

$$0=F_\xi+F'_\xi;\quad 0=F_\eta+F'_\eta;\quad 0=-mg+F_\zeta$$

即

$$\begin{cases}F_\xi=-F'_\xi\\F_\eta=-F'_\eta\\F_\zeta=mg\end{cases}\tag{4}$$

由(3)式和(4)式即可解得

$$F_\xi=-F'_\xi=-\frac{mr^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\alpha\sin\varphi$$

$$F_\eta=-F'_\eta=\frac{mr^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\alpha\cos\varphi$$

$$F_\zeta=mg$$

即轴承 A、B 承受的力，分别是 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 的反作用力：

$$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{A})}=-\boldsymbol{F}=\frac{mr^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi-\cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta)-mg\boldsymbol{e}_\zeta\tag{5}$$

$$\boldsymbol{F}^{(B)} = -\boldsymbol{F}' = \frac{mr^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\alpha(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\xi - \cos\varphi\boldsymbol{e}_\eta) \tag{6}$$

我们知道,圆盘不转动:$\omega=0$ 时,仅由轴承 A 承受圆盘的重力 $mg$;轴承仅承受圆盘重量的静力作用.但由(5)、(6)两式可见,当圆盘转动时除受到重力作用外,两轴承还分别承受由于圆盘转动而引起的附加力,这是圆盘的动力作用.由上面的式子还可以看到,如果 $\alpha=0$ 或 $\pi/2$,即以圆盘的轴线或直径(它们显然都是惯量主轴)为转轴,两轴承也都不会承受附加的动力作用.因此,在安装转动的机械时需要小心,转轴尽可能不要偏离惯量主轴,否则若转动的角速度很大时,引起的附加力可能损坏轴承.

[评注] ① 本题的求解是以固定坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 为基本坐标系的,但一般不是圆盘的惯量主轴,求惯量矩阵将有较大的困难.因此又引进了固定在圆盘上的活动坐标系 $Oxyz$ 作为辅助的坐标系.采用活动坐标系,圆盘角动量及其时间变化率就较容易求得.读者应很好地体会活动坐标系的应用.

② 当然也可采用完全固着在圆盘上的活动坐标系 $Oxyz$ 来求解.

## §5.5 刚体的平面平行运动

刚体的平面平行运动,可看成为两种运动的合成,即随刚体上(或与之刚性联结的)基点的平动,和绕通过基点并与运动平面垂直的轴的转动.通常取质心作为基点,因为绕质心转动的角动量定理具有(5.27)式那样的简单形式.在随质心运动的坐标系(质心系)中,绕质心的转动则是绕过质心轴线的定轴转动.刚体平面平行运动的自由度为3,需要用3个独立的坐标参量来描写.可取质心的坐标 $x_c$、$y_c$ 作为刚体的平动坐标参量,绕过质心的轴转动的角度 $\varphi$ 为转动自由度参量.

质心的运动由质心定理确定;转动则由转轴方向的角动量定理求解.设质心的运动平面为 $xy$ 平面,过质心的转轴沿 $z$ 方向,则由质心定理

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m\ddot{x}_c = F_x \\ m\ddot{y}_c = F_y \end{cases} \tag{5.34}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 代表作用在刚体上的所有外力(包括各种约束力)的和.

在质心坐标系中,刚体对过质心的轴做定轴转动的角动量

$$\boldsymbol{L} = L_x\boldsymbol{i} + L_y\boldsymbol{j} + L_z\boldsymbol{k}$$

其中转轴方向的单位矢量 $\boldsymbol{k}$ 不随时间变化;$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是否随时间变化,视是否采用旋转的活动系而定.$L_z = J\omega$,$J$ 是刚体对过质心的转轴的转动惯量,它与时间无关.$\omega = \dot{\varphi}$ 是刚体的角速率.角动量定理的 $z$ 分量方程为

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\varphi} = M_z \tag{5.35}$$

式中 $M_z$ 是诸外力(包括约束力)对质心的力矩之和的 $z$ 分量.

(5.34)式和(5.35)式共 3 个标量方程,在外力已知的条件下,可由此解得三个独立参量作为时间 $t$ 的函数关系. 但是,外力中通常包含有未知的约束力,则在上述基本方程之外,还需列出相应的约束方程,才能构成对刚体平面平行运动问题求解的完备方程组.

刚体的内力不做功,当作用在刚体上的外力是保守力时,由动能定理,或(5.34)式和(5.35)式给出机械能守恒方程:

$$T + V = \frac{m}{2}v_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + V = E \tag{5.36}$$

在求解问题时可以用它来替代(5.34)式、(5.35)式中任一标量方程;有时利用机械能守恒方程(5.36),可以使问题的求解更为方便.

**[例 5.8]** 一半径为 $r$、质量为 $m$ 的均质球,静止地置于一质量为 $m'$ 的粗糙平板上,平板则置于光滑的水平面上. 今若沿水平方向给平板以初速度 $v_0$,试求出球体在平板上开始做纯滚动时球体的角速度 $\omega$ 和平板的速度 $v$.

**[解]** 如图 L5.8 所示,设球心 $C$ 点的坐标为 $x_c$,平板的质心坐标是 $x$;球体与平板间的摩擦因数为 $\mu$. 则可写出:

平板的运动方程

$$m'\ddot{x} = -\mu mg \tag{1}$$

球体的质心定理

$$m\ddot{x}_c = \mu mg \tag{2}$$

球体的角动量定理

$$J\dot{\omega} = \mu mgr \tag{3}$$

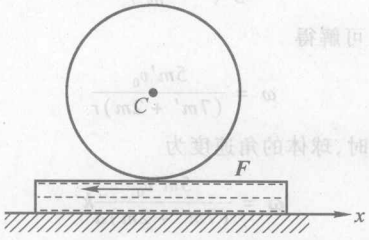



图 L5.8

这里 $J$ 为球体绕其直径的转动惯量,容易求出

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

此外,球体在平板上做纯滚动的条件是它们的接触处无相对滑动,即无相对速度,由此得纯滚动的约束条件:

$$\dot{x}_c + \omega r = \dot{x} \tag{4}$$

初始条件：

$$\dot{x}_c\big|_{t=0} = \omega\big|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}\big|_{t=0} = v_0$$

由(1)—(4)四个方程，结合初始条件已完全可以对问题中出现的 $x_c$、$x$、$\omega$ 和 $\mu$(或摩擦力的数值 $F_f$)等四个未知量求解.

引入球心与平板间的相对坐标

$$x' = x_c - x$$

则纯滚动约束条件(4)式可改写为

$$\dot{x}' = \dot{x}_c - \dot{x} = -\omega r \tag{5}$$

由(1)、(2)两式得

$$\ddot{x}' = \ddot{x}_c - \ddot{x} = \mu g\left(1 + \frac{m}{m'}\right)$$

球体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 以及球心与平板间的相对速度都是时间 $t$ 的函数，由于摩擦力的作用，它们之间也必定存在函数关系. 本题不需要求解球体角速度或平板速度随时间的变化关系，可以先消去时间变量 $t$，直接建立相对速率 $\dot{x}'$ 与角速度的关系. 为此取

$$\ddot{x}' = \dot{\omega}\frac{\mathrm{d}\dot{x}'}{\mathrm{d}\omega} = \mu g\left(1 + \frac{m}{m'}\right) \tag{6}$$

注意方程(3)，得

$$\dot{\omega} = \frac{\mu m g r}{J} = \frac{5\mu g}{2r}$$

将其代入(6)式，有

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}'}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2r}{5}\left(1 + \frac{m}{m'}\right)$$

上式两边对 $\omega$ 积分，并注意初始时刻球体尚无运动，故此刻平板的初速度 $v_0$ 即是它相对于球体质心的速度，可得

$$\dot{x}' = \frac{2r}{5}\left(1 + \frac{m}{m'}\right)\omega - v_0 \tag{7}$$

将此代入纯滚动条件(5)式，可解得

$$\omega = \frac{5m'v_0}{(7m' + 2m)r} \tag{8}$$

故当球体在平板上做纯滚动时，球体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{5m'v_0}{(7m' + 2m)a}\boldsymbol{k}$$

为求平板的速度，将(1)、(2)两式相加得

$$m\ddot{x}_c + m'\ddot{x} = 0$$

此式对时间 $t$ 积分一次，得方程

$$m\dot{x}_c + m'\dot{x} = m'v_0 \tag{9}$$

实际上这是球体、平板系统在 $x$ 方向的动量守恒方程.

由(5)、(7)、(8)及(9)诸式容易解得球体在平板上做纯滚动时平板的速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} = \frac{7m'}{7m' + 2m}\boldsymbol{v}_0$$

[例 5.9] 一均质棒质量为 $m$,长 $2a$,一端置于光滑水平面上,另一端则靠在光滑的铅直墙面上,与地面的夹角为 $\alpha$. 若任棒自此位置开始下滑,求棒与地面间的夹角为多大时,棒将与墙面分离?

[解] 棒除受到重力作用外,还分别受到墙面和地面的约束力作用. 如图 L5.9 所示,设棒滑动时与地面间的夹角为 $\theta$,则

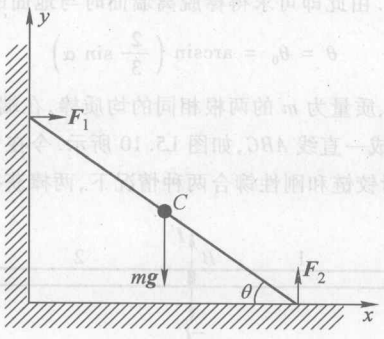



图 L5.9

质心定理

$$m\ddot{x}_c = F_1 \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_c = F_2 - mg \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 分别是墙面和水平面对棒作用的力.

相对质心的角动量定理

$$J\dot{\omega} = -J\ddot{\theta} = F_2 a\cos\theta - F_1 a\sin\theta \tag{3}$$

其中 $J$ 是棒绕过质心的转轴的转动惯量,容易求得

$$J = ma^2/3$$

棒与墙未脱离时的约束方程

$$x_c = a\cos\theta \tag{4}$$

$$y_c = a\sin\theta \tag{5}$$

初始条件:

$$\theta\big|_{t=0} = \alpha, \quad \dot{\theta}\big|_{t=0} = 0$$

上列诸方程构成求解本题的完备方程组. 由(4)、(5)式对时间 $t$ 求两次导数,得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c &= -a\cos\theta\dot{\theta}^2 - a\sin\theta\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_c &= -a\sin\theta\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{6}$$

代入(1)、(2)式并与(3)式消去 $F_1$ 和 $F_2$,注意 $J$ 的值,经过整理后可得方程

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a}\cos\theta \tag{7}$$

对此式作第一积分,并注意初始条件,即得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{4a}(\sin\alpha - \sin\theta) \tag{8}$$

因为重力是保守力,约束力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 不做功,故上式也可由机械能守恒方程得到.

棒与墙脱离的条件是墙的约束力 $\boldsymbol{F}_1=0$,由(1)式及(6)式得

$$0 = \ddot{x}_c = -a\cos\dot{\theta}^2 - a\sin\theta\ddot{\theta}$$
$$= \frac{3g}{4a}\cos\theta(3\sin\theta - 2\cos\alpha)$$

这里已用到关系式(7)、(8).由此即可求得棒脱离墙面时与地面的夹角为

$$\theta = \theta_0 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right) \tag{9}$$

[例 5.10] 长度为 $2a$、质量为 $m$ 的两根相同的均质棒,在端点 $B$ 处相互铰链,置于光滑的水平面上.初始时刻两棒成一直线 $ABC$,如图 L5.10 所示.今在 $C$ 端作用一与棒垂直的冲量 $\boldsymbol{I}$,试求出 $B$ 点处分别为光滑铰链和刚性铆合两种情况下,两棒获得的总能量之比.

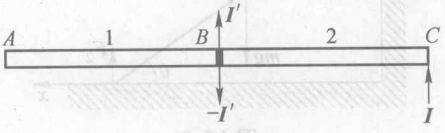



图 L5.10

[解] (i) $B$ 为光滑铰链情形

$C$ 端受冲击时,两棒在 $B$ 处分别会受到与棒垂直的约束冲量作用,设约束冲量大小为 $\boldsymbol{I}'$.按关于质心的冲量定理和冲量矩定理,可分别对棒 1 和棒 2 立出方程[①].

$$\text{对棒 1}\begin{cases} mv_1 = I' \\ J\omega_1 = I'a \\ v_1 = v_B - \omega_1 a \end{cases}$$

$$\text{对棒 2}\begin{cases} mv_2 = I - I' \\ J\omega_2 = (I + I')a \\ v_2 = v_B + \omega_2 a \end{cases}$$

上列各式中 $v_1$、$v_2$;$\omega_1$、$\omega_2$ 分别是冲击后棒 1 和棒 2 的质心速度和角速度的大小,分别计算棒 1、棒 2 的质心速度 $v_1$、$v_2$ 时,都以 $B$ 点作为基点.$v_B$ 是 $B$ 点的速率;$J$ 则是棒绕质心转动的转动惯量:$J = \frac{1}{3}ma^2$.由上面六个方程可分别解出 $v_1$、$v_2$、$v_B$、$\omega_1$、$\omega_2$、$I'$ 等六个未知量,结果如下:

$$v_1 = -\frac{I}{4m},\quad v_2 = \frac{5I}{4m};\quad \omega_1 = -\frac{3I}{4ma},\quad \omega_2 = \frac{9I}{4ma}$$

结果表明,在受冲击后的瞬时,棒 2 做逆时针转动,棒 1 则做顺时针转动.两棒获得的总能量为

$$E = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{J}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{7I^2}{4m}$$

---

① 分别计算棒 1、棒 2 的质心速度时,都取 $B$ 点作为基点:$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_{c1} - \boldsymbol{r}_B)$,$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}_{c2} - \boldsymbol{r}_B)$.

(ii) $B$ 处刚性铆合情形

此时两棒合成为总长为 $4a$、质量为 $2m$ 的一根棒，$B$ 点为质心. 由冲量定理和冲量矩定理，可得方程

$$\begin{cases} 2mv_B = I \\ J'\omega' = 2aI \end{cases}$$

式中 $J'$ 是相对于 $B$ 点转动惯量：$J' = \frac{8}{3}ma^2$. 由此得两棒的质心（即 $B$ 点）速度大小为 $v_B = \frac{I}{2m}$；角速度大小为 $\omega' = \frac{3I}{4ma}$.

两棒系统受冲击后获得的总能量为

$$E' = \frac{1}{2}2mv_B^2 + \frac{1}{2}J'\omega'^2 = \frac{I^2}{m}$$

故分别在光滑铰链和刚性铆合两种情形下，受到冲击后两棒获得的总能量之比为

$$\frac{E}{E'} = \frac{7}{4}$$

## §5.6 刚体的定点运动

刚体运动时，如果刚体上（或与之刚性联结处）只有一个点保持固定不动，则称刚体做**定点运动**. 刚体定点运动时绕固定点转动，因而又称**定点转动**. 刚体定点运动时转轴随时间不断改变，其运动情况要比定轴转动复杂得多.

### （一）基本方程

刚体的定点转动是三维运动，具有三个自由度. §5.1 已指出，可以用三个独立的角度参量（例如欧拉角）$\theta$、$\varphi$ 和 $\psi$ 表达刚体的位置. 刚体任一瞬时的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量则可通过它们的时间变化率 $\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$、$\dot{\psi}$ 表示. 刚体定点转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不仅大小随时间变化，方向也时刻改变. 但刚体在任一瞬时的转动，可设想成刚体绕沿该时刻角速度方向的**瞬时转轴**转动；瞬时转轴的方向随时间不断改变.

动量定理、角动量定理和动能定理这三个基本定理是求解刚体定点运动问题的基础. 由角动量定理确定刚体的转动状况；动量定理（质心定理）确定质心的运动或用来求解作用在刚体上的力（包括约束力）；动能定理或力有势情形下的机械能守恒定律，给问题的求解提供方便.

如果作用于刚体上的外力，对于定点的力矩已知，则由角动量定理的三个分量方程结合给定的初始条件，原则上可以对刚体定点转动问题求解. 求解时通常需要将角动量 $\boldsymbol{L}$ 在适当的活动坐标系下写出. 最适宜的坐标系是，以定点作为坐

标原点,刚体的惯量主轴为坐标轴.显然,这样选取的坐标系,必是与刚体关联着转动的活动坐标系.在这坐标系中刚体的惯量矩阵是对角化的,且不随时间 $t$ 变化.这时,刚体的角动量可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = J_x\omega_x\boldsymbol{i} + J_y\omega_y\boldsymbol{j} + J_z\omega_z\boldsymbol{k} \\ &= L_x\boldsymbol{i} + L_y\boldsymbol{j} + L_z\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{5.37}$$

其中 $J_x = J_{xx}, J_y = J_{yy}, J_z = J_{zz}$ 分别是刚体对于三个主轴的主转动惯量,它们都是常量.则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = J_x\dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + J_y\dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + J_z\dot{\omega}_z\boldsymbol{k} + J_x\omega_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + J_y\omega_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + J_z\omega_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}$$

如果活动坐标系的转动角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$,则由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{j}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}_x\boldsymbol{i} + \dot{L}_y\boldsymbol{j} + \dot{L}_z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} \\ &= \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} \end{aligned} \tag{5.38}$$

再次得出熟知的关系式:矢量的绝对导数等于其相对导数及牵连导数的和.

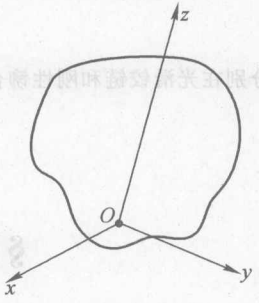


图 5.14

因而,采用了前述的活动坐标系后,刚体定点转动的角动量定理应表达为

$$\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \tag{5.39}$$

需要再次地强调,这里的 $\boldsymbol{\Omega}$ 是活动坐标系转动的角速度.

若是作用于刚体的外力中包含有未知的力,或需要求出定点 $O$ 作用于刚体的约束力,则还需求助于质心定理:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{5.40}$$

如果刚体转动时,做功的外力是保守力,则还可由机械能守恒方程求解.采用惯量主轴为坐标轴时,机械能守恒方程为

$$\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) + V = E \tag{5.41}$$

正如已经多次指出的,在求解刚体的转动问题时,可用机械能守恒方程代替角动量定理(5.39)中任一标量(分量)方程.

刚体定点运动的角动量 $\boldsymbol{L}$ 是刚体转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的函数,从而是描写刚体转动的独立角变量及其时间变化率的函数.一般情形下,确定刚体运动的动力学方

程是角动量定理(5.39)式,或与它相应的三个分量方程,它们是关于角变量的三个联立的二阶非线性微分方程组.试图用解析方法求解这样的微分方程组,一般来说会遇到数学上的极大困难.200 多年来,至今仍只是对在少数几种特殊情形下的重刚体[①]定点运动问题求得解析解.

在以后的叙述中,将对几个典型的具体问题:地球自转问题和对称陀螺的定点运动问题,适当地讨论其求解过程.

**(二) 用完全跟随刚体转动的坐标系表示的角动量定理——欧拉方程 地球的自转**

求解刚体定点运动问题,最重要的是寻求刚体的转动规律;这是由刚体的角动量定理确定的.为此,首要的是将角动量定理在适当的坐标系中写出,有利于具体求解.

采用固定在刚体上的坐标系,定点 $O$ 为坐标原点以惯量主轴为坐标轴,可确保刚体转动时惯量矩阵恒呈对角化形式,各元素为常量不随时间变化.这样选定的是完全跟随刚体一起转动的活动坐标系,它的转动角速度与刚体的角速度相同:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$$

在这样的活动坐标系下

$$\boldsymbol{L} = J_x\omega_x\boldsymbol{i} + J_y\omega_y\boldsymbol{j} + J_z\omega_z\boldsymbol{k} \tag{5.42}$$

则角动量定理(5.39)式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \tag{5.43}$$

它的三个分量方程是

$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z = M_x \\ J_y\dot{\omega}_y - (J_z - J_x)\omega_z\omega_x = M_y \\ J_z\dot{\omega}_z - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y = M_z \end{cases} \tag{5.44}$$

这便是通常所称的**欧拉动力学方程**.

下面,我们以地球自转的运动问题作为求解欧拉方程的例子.这是刚体定点运动的典型问题之一.

地球近似地可看成为一个扁平的旋转椭球体,地球的自转可作为重刚体绕质心(几何中心)做定点转动的例子.如果略去太阳、月球以及其他星体对地球作用的微小力矩,则作用于地球的外力对定点(质心)的力矩为零,即

$$\boldsymbol{M} = 0$$

① 通常称在重力作用下转动的刚体为重刚体.

取坐标系完全固定在地球上. 以地球质心为坐标原点,地轴为 $z$ 轴. 由于地轴是对称轴它必是惯量主轴;由旋转对称可知,与 $z$ 轴垂直的 $x$、$y$ 轴也都是惯量主轴,且转动惯量相等:$J_x = J_y$,有时统一用 $J_*$ 表示,称作横向转动惯量. 三个主转动惯量间存在关系:

$$J_x = J_y = J_* \neq J_z$$

因为外力矩 $\boldsymbol{M} = 0$,根据角动量定理(5.43)式,立即得出结论:不管地球如何转动,它的角动量 $\boldsymbol{L}$ 是在空间固定不动的恒定矢量. 其次,由前列各主转动惯量间的关系,欧拉动力学方程(5.44)可化为

$$\begin{cases} J_*\dot{\omega}_x - (J_* - J_z)\omega_y\omega_z = 0 \\ J_*\dot{\omega}_y - (J_z - J_*)\omega_z\omega_x = 0 \\ J_z\dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \tag{5.45}$$

由第三式得

$$\omega_z = \varepsilon = \text{常量}$$

代入第一、第二式,得

$$\dot{\omega}_x = \frac{J_* - J_z}{J_*}\varepsilon\omega_y \tag{5.46a}$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{J_* - J_z}{J_*}\varepsilon\omega_x \tag{5.46b}$$

将(5.46a)式对时间 $t$ 求一次导数,用(5.46b)式消去 $\dot{\omega}_y$,并设常量

$$n = \frac{J_z - J_*}{J_*}\varepsilon \tag{5.47}$$

则可得关于 $\omega_x$ 的方程

$$\ddot{\omega}_x = -n^2\omega_x$$

同样地,可得关于 $\omega_y$ 的方程

$$\ddot{\omega}_y = -n^2\omega_y$$

这两个都是熟知的简谐运动型方程,其通解可分别写为

$$\omega_x = \varepsilon' \cos(nt + \alpha) \tag{5.48a}$$

$$\omega_y = \varepsilon' \sin(nt + \alpha) \tag{5.48b}$$

此外我们已知

$$\omega_z = \varepsilon \tag{5.48c}$$

式中 $\varepsilon'$ 和 $\alpha$ 都是常量,由初始条件确定.

现在我们已经求出了任意时刻地球自转的角速度:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \varepsilon'[\cos(nt + \alpha)\boldsymbol{i} + \sin(nt + \alpha)\boldsymbol{j}] + \varepsilon\boldsymbol{k} \\ &= \varepsilon'\boldsymbol{e}_\rho + \varepsilon\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{5.49}$$

这里已令

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos(nt+\alpha)\boldsymbol{i} + \sin(nt+\alpha)\boldsymbol{j}$$

显然这是地球赤道平面内，一个绕 $z$ 轴（地轴）以角速率 $n$ 转动的径向单位矢量. 因此在活动坐标系中（地球上）观察地球自转的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是一大小 $\omega = \sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon^2}$ 恒定，围绕地轴以角速率 $n$ 转动的旋转矢量，如图 5.15 所示. 地球自转的瞬时转轴并不固定于地球. 通常把地球自转的瞬时转轴（沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向）叫做天文地轴，而把地球的对称轴（$z$ 轴）称作地理地轴. 地球绕地轴的转动周期 $2\pi/\varepsilon$ 近似地等于 1 日. 地球的 $(J_z - J_*)/J_* \approx 1/300$，故由(5.47)式知天文地轴绕地理地轴转动的周期约为 300 日[①]，接近 10 个月. 由于天文地轴绕地理地轴转动，因而任一地点相对于天文地轴的纬度（天文纬度）出现周期性的变更，这种现象在天文学上叫做**纬度变迁**.

回过来再讨论地球的自转角动量 $\boldsymbol{L}$ 与自转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系. 前已指出，由于不存在力矩作用，地球自转的角动量是一恒定矢量. 如果就取 $\boldsymbol{L}$ 的方向为一固定坐标轴的方向，单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\zeta$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= J_*(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}) + J_z\omega_z\boldsymbol{k} = J_*\boldsymbol{\omega} + (J_z - J_*)\omega_z\boldsymbol{k}\\ &= L\boldsymbol{e}_\zeta = \text{常矢量}\end{aligned}$$

由上式可见 $\boldsymbol{L}$ 是由沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的矢量 $J_*\boldsymbol{\omega}$ 和沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的矢量 $(J_z - J_*)\omega_z\boldsymbol{k}$ 的合成. $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 应始终位于同一平面. 因此，在固定坐标系中观察，$\boldsymbol{L}$ 是固定不动的，而 $\boldsymbol{\omega}$ 及地轴 $z$ 分列在它的两侧并围绕着它转动，如图 5.16 所示. 实际上它们三者之间的夹角是很小的，图中的几何关系已经大大地夸大了.




图 5.15

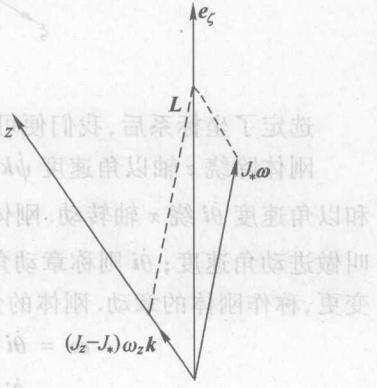



图 5.16

① 实际则得为 427 日，这是因为地球并非严格的刚体，海水的流动性以及地球本身的弹性导致周期的增长.

为要确定地球任意瞬间的位置，就要将角速度各分量 $\omega_x$、$\omega_y$ 和 $\omega_z$ 的欧拉角表示式(5.4)分别代入(5.48)各式中去，对时间积分后，原则上可得出欧拉角的时间函数 $\theta(t)$、$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$. 严格求解颇为繁难，一般需采用计算方法，这里不再作进一步讨论.

**(三) 不随刚体自旋的活动坐标系　对称重陀螺的定点运动**

对称陀螺的定点转动是刚体定点运动中的又一典型问题. 如图 5.17 所示，通常将陀螺的对称轴取作自转轴 $z$，显然它是惯量主轴. 取定点 $O$ 为坐标原点，并设坐标轴 $y$ 位于 $z$ 轴和固定的铅直轴 $\zeta$ 所确定的平面内；以过 $O$ 点与 $z$ 轴垂直的平面跟水平面 $\xi\eta$ 的交线为 $x$ 轴. $\theta$、$\varphi$ 两角确定了自转轴的方位；自旋的角度则由 $\psi$ 表示. 很明显，这样选定的坐标系 $Oxyz$ 不随刚体自旋，只是部分地跟随刚体绕 $\zeta$ 轴转动. 由于陀螺对于 $z$ 轴的旋转对称性，尽管 $x$ 轴和 $y$ 轴并不跟随陀螺自转，但任何时刻都是陀螺的惯量主轴，且转动惯量相同，设为 $J_x = J_y = J_\perp$.

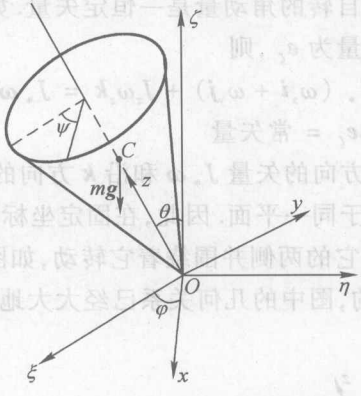



图 5.17

选定了坐标系后，我们便可具体地将角动量定理写出.

刚体除绕 $z$ 轴以角速度 $\dot{\psi}\boldsymbol{k}$ 自旋外，自转轴还同时以角速度 $\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta$ 绕 $\zeta$ 轴转动和以角速度 $\dot{\theta}\boldsymbol{i}$ 绕 $x$ 轴转动. 刚体自转轴绕固定轴 $\zeta$ 的转动称为刚体的进动，$\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta$ 叫做进动角速度；$\dot{\theta}\boldsymbol{i}$ 则称章动角速度. 自转轴 $z$ 与固定轴 $\zeta$ 间的角度 $\theta$ 随时间的变更，称作刚体的章动. 刚体的角速度则为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta + \dot{\psi}\boldsymbol{k} \\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{5.50a}$$

即

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\theta} \\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta \\ \omega_z = (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\end{cases} \tag{5.50b}$$

这个角速度表达式比(5.4)式简单;显然,采用不随刚体自旋的主轴坐标系会对问题的求解带来便利.

活动坐标系 $Oxyz$ 的角速度是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta \\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{5.51}$$

它不同于(5.50)式所示的刚体(陀螺)角速度 $\boldsymbol{\omega}$.

陀螺的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= J_x\omega_x\boldsymbol{i} + J_y\omega_y\boldsymbol{j} + J_z\omega_z\boldsymbol{k} \\ &= J_*\dot{\theta}\boldsymbol{i} + J_*\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j} + J_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这里已用 $J_*$ 分别代替 $J_x$ 和 $J_y$. 陀螺角动量的时间变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} \\ &= J_*\dot{\omega}_x\boldsymbol{i} + J_*\dot{\omega}_y\boldsymbol{j} + J_z\dot{\omega}_z\boldsymbol{k} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dot{\theta} & \dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\varphi}\cos\theta \\ J_*\omega_x & J_*\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix} \\ &= (J_*\dot{\omega}_x - J_*\omega_y\dot{\varphi}\cos\theta + J_z\omega_z\dot{\varphi}\sin\theta)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (J_*\dot{\omega}_y + J_*\omega_x\dot{\varphi}\cos\theta - J_z\omega_z\dot{\theta})\boldsymbol{j} + J_z\dot{\omega}_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

上式中,我们已应用了(5.50b)式:$\omega_x\dot{\varphi}\sin\theta - \omega_y\dot{\theta} = \omega_x\omega_y - \omega_y\omega_x = 0$.

设陀螺的重心 $C$ 离定点 $O$ 的距离为 $l$,则重力对 $O$ 点力矩为

$$\boldsymbol{M} = l\boldsymbol{k}\times(-mg\boldsymbol{e}_\zeta) = mgl\sin\theta\boldsymbol{i}$$

这是作用在陀螺上的力对定点 $O$ 的唯一外力矩. 由此得角动量定理的三个分量方程为

$$J_*\dot{\omega}_x - J_*\omega_y\dot{\varphi}\cos\theta + J_z\omega_z\dot{\varphi}\sin\theta = mgl\sin\theta \tag{5.52a}$$

$$J_*\dot{\omega}_y + J_*\omega_x\dot{\varphi}\cos\theta - J_z\omega_z\dot{\theta} = 0 \tag{5.52b}$$

$$J_z\dot{\omega}_z = 0 \tag{5.52c}$$

这三个相互联立的非线性方程是求解对称陀螺定点运动问题的基本方程.

首先由(5.52c)式,立即可得出一个第一积分:

$$\omega_z = \varepsilon = \text{常量} \tag{5.53a}$$

或

$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = \varepsilon \tag{5.53b}$$

取(5.52a)$\times\omega_x$ +(5.52b)$\times\omega_y$,并注意角速度分量的表示式(5.50),则

$$J_*(\omega_x\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\omega}_y) = mg\sin\theta\dot{\theta}$$

或写为

$$\frac{J_*}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_x^2 + \omega_y^2) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgl\cos\theta)$$

由此立即给出第二个第一积分

$$\frac{J_*}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2)+mgl\cos\theta=E'=\text{常量} \tag{5.54a}$$

或由(5.50b)式

$$\frac{J_*}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{J_z}{2}\varepsilon^2+mgl\cos\theta=E \tag{5.54b}$$

其中 $E=E'+J_z\varepsilon^2/2$.

取(5.52b)$\times\sin\theta$ +(5.52c)$\times\cos\theta$,并注意(5.50b)式,经整理后有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_*\omega_y\sin\theta+J_z\omega_z\cos\theta)=0$$

从而给出第三个第一积分

$$J_*\omega_y\sin\theta+J_z\omega_z\cos\theta=S=\text{常量} \tag{5.55a}$$

注意(5.50b)及(5.53a)式,上式可写为

$$J_*\dot\varphi\sin^2\theta+J_z\varepsilon\cos\theta=S \tag{5.55b}$$

其实,(5.54)、(5.55)两个第一积分分别对应于刚体的机械能守恒方程和在 $\boldsymbol{e}_\zeta$ 方向的角动量守恒方程.

由于重力是保守力,机械能应守恒,显然(5.54b)式便是能量积分:

$$\frac{J_*}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2)+\frac{J_z}{2}\omega_z^2+mgl\cos\theta=E$$

重力总是平行于固定轴 $\boldsymbol{e}_\zeta$,在 $\boldsymbol{e}_\zeta$ 方向无外力矩,该方向的角动量分量守恒:

$$L_\zeta=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta=J_*\omega_y\sin\theta+J_z\omega_z\cos\theta=S$$

此即(5.55)式.

在解题时直接由上述守恒律给出相应的第一积分,自然更为简洁明了.

下面我们将根据已得到的三个第一积分,对对称陀螺的定点运动作一些定性的讨论.

由(5.55b)式,刚体进动的角速率

$$\dot\varphi=\frac{L_\zeta-J_z\omega_z\cos\theta}{J_*\sin^2\theta}=\frac{S-J_z\varepsilon\cos\theta}{J_*\sin^2\theta} \tag{5.56}$$

将此代入(5.54b)式得

$$\frac{J_*}{2}\dot\theta^2+\left[\frac{(S-J_z\varepsilon\cos\theta)^2}{2J_*\sin^2\theta}+\frac{J_z}{2}\varepsilon^2+mgl\cos\theta\right]=E \tag{5.57a}$$

或写为

$$\frac{J_*}{2}\dot\theta^2+U(\theta)=E \tag{5.57b}$$

这里

$$U(\theta) = \frac{(S - J_z\varepsilon\cos\theta)^2}{2J_*\sin^2\theta} + \frac{J_z}{2}\varepsilon^2 + mgl\cos\theta \tag{5.58}$$

关系式(5.57b)完全类似于质点在一维势场中运动的机械能守恒关系式；$U(\theta)$可看成有效势能函数，与$\theta$的函数关系定性地如图5.18中的曲线所示. 刚体(陀螺)在运动过程中机械能$E$守恒，它的大小由初始条件确定，在图中表示为一条水平线. 有效势能函数$U(\theta)$有一极小值. $E$大于该极小值时，图中所示的能量水平线与势能曲线相交于$\theta_1$和$\theta_2$. 在这两角度处刚体(陀螺)的有效势能等于总机械能$E = U(\theta_{1,2})$. 由(5.54b)式可知，在该二角度处$\dot{\theta} = 0$，这表明章动角$\theta$仅限于$\theta_1$和$\theta_2$之间变化. 上述章动角$\theta$的变化表现为陀螺相对于铅直轴上下摆动，好像“点头”一样，故名**章动**.

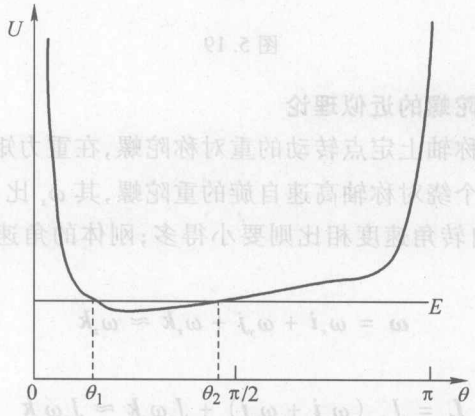



图 5.18

现在再看刚体的进动情况.

由(5.56)式可以看到，在不同的初始条件下，进动角速度可能存在三种情况：

(1) $S > J_z\varepsilon\cos\theta_1$

$\dot{\varphi}$恒为正值，表明刚体绕$\zeta$轴以不变的方向进动. 特别地，如果刚体能量的数值恰好等于$U$的最小值，则能量水平线在该处将与势能曲线$U(\theta)$的最低点相切于$\theta_1 = \theta_2$. 在这种情况下，由(5.57b)式知$\dot{\theta}$恒等于零，刚体除自转外将不发生章动，刚体进动时自转轴与固定轴$\zeta$间保持恒定角度；刚体不存在章动的这种进动称为**规则进动**.

(2) $J_z\varepsilon\cos\theta_2 < S < J_z\varepsilon\cos\theta_1$

$\dot{\varphi}$将在$\theta_1$和$\theta_2$之间的某个$\theta$值处改号；刚体绕固定轴的进动将不断变换方向.

(3) $S = J_z\varepsilon\cos\theta_1$

进动朝一个方向进行,但在 $\theta_1$ 处 $\dot{\varphi}$ 为零.

以定点 $O$ 为球心作一球面,刚体转动时自转轴与球面的交点在球面上画出的曲线,可以形象地表达上述三种情况,分别如图 5.19 中(a)、(b)、(c)三个所示.

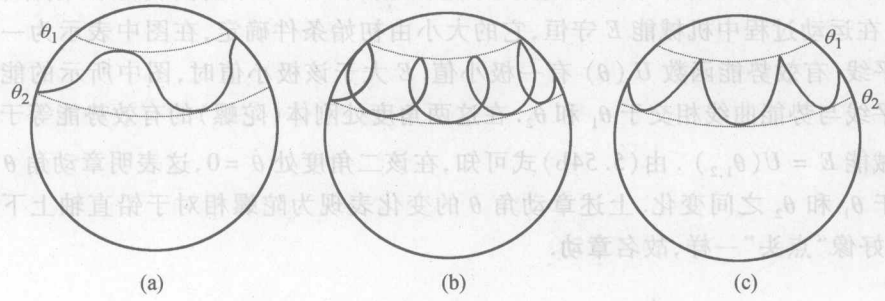



图 5.19

**(四) 高速自旋陀螺的近似理论**

一般来说,绕对称轴上定点转动的重对称陀螺,在重力矩作用下既有自转又有进动和章动.但一个绕对称轴高速自旋的重陀螺,其 $\omega_z$ 比 $\omega_x$ 和 $\omega_y$ 大得多,进动和章动角速度与自转角速度相比则要小得多;刚体的角速度几乎与自转角速度相等,即

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k} \approx \omega_z \boldsymbol{k}$$

角动量

$$\boldsymbol{L} = J_* (\omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j}) + J_z \omega_z \boldsymbol{k} \approx J_z \omega_z \boldsymbol{k}$$

这就是说,对于高速自转的重陀螺,自转角速度、总角速度、角动量都可近似地看成沿着对称轴 $z$ 方向.有了这样的近似,运算起来就方便多了.仍然以图 5.17 所示的陀螺为例,当它高速自转时

$$\boldsymbol{L} \approx J_z \omega_z \boldsymbol{k} \approx J_z \omega \boldsymbol{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = J_z \dot{\omega} \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega} \times (J_z \omega \boldsymbol{k})$$

$$= J_z \omega \dot{\varphi} \sin\theta \boldsymbol{i} - J_z \omega \dot{\theta} \boldsymbol{j} + J_z \dot{\omega} \boldsymbol{k}$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}$ 是坐标系的转动角速度,见(5.51)式.作用于陀螺上的重力矩为

$$\boldsymbol{M} = l\boldsymbol{k} \times (-mg\boldsymbol{e}_\xi) = mgl \sin\theta \boldsymbol{i}$$

由角动量定理,得

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{J_z \omega}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\omega} = 0$$

上面的第一式表明在重力矩的作用下,陀螺将发生进动,自转角速度越大进动角速度就越小;第二式显示无章动发生,陀螺做规则进动;第三式表明陀螺的角速

度恒定不变,也即角动量的大小不变.这是近似理论得出的结论.由此,对于高速自转的对称陀螺,其角动量的时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta \times \boldsymbol{L} \tag{5.59}$$

如果陀螺不自转,在重力矩作用下陀螺自然会倾倒,即 $\dot{\theta} \neq 0$.但高速自转时,重力矩的作用并不使陀螺倾倒而是使之进动.这是因为重力矩的方向在 $\boldsymbol{i}$ 方向,与陀螺角动量的方向垂直,只能使高速自转陀螺的角动量沿重力矩的方向变化,从而发生进动.换句话说,欲使高速转动对称陀螺的转轴偏转,就必须在陀螺上作用外力矩;陀螺角动量变更的方向沿外力矩方向.这一现象称为**回转效应**.

日常生活中,人们常常自觉或不自觉地利用着回转效应.骑自行车所以不会倾倒,就是依靠自行车车轮的角动量保持水平方向,但当需要拐弯时,则车身必须倾斜,使重力对车轮作用一个向前(后)方向的重力矩,迫使车轮的角动量向前(后)变更,从而达到向右(向左)拐弯的目的.在技术上回转效应则有重大的应用.枪筒或炮筒的内壁上需刻有螺旋式的"来复线",使子弹射出后绕其对称轴高速旋转,以避免子弹在空中翻滚.在轮船、飞机、火箭及其他航天器和军事器械中,常用高速旋转的陀螺来定向.轮船中的柴油机或汽轮机具有高速转动的巨大飞轮或涡轮,当轮船拐弯时迫使它们的角动量改变方向,轴承需对它们作用很大的力矩;轴承将承受巨大的附加压力.如果轮船拐弯太猛,便可能损坏机件.

[**例 5.11**] 原子的半经典模型认为,原子中的电子围绕原子核以某些确定的圆轨道或椭圆轨道转动.从电磁学观点来看,电子的闭合轨道运动构成小电流圈,形成磁偶极子;从力学观点来看,电子绕原子核高速转动,这样的原子恰似转动着的陀螺.这种原子的"电子陀螺"(原子的电子磁矩),置于外磁场中将受到磁场的力矩作用使之发生进动.这种磁矩的进动被称为**拉莫尔**(Larmor)**进动**.设原子中电子电荷的绝对值为 $e$,外磁场的磁感强度为 $\boldsymbol{B}$.求电子轨道磁矩的进动角速度.

[**解**] 设电子以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕原子核做圆周运动,圆周半径为 $r$.电子的圆周运动构成闭合电流圈,它等效于一磁偶极子,相应的磁矩称为电子的轨道磁矩:

$$\boldsymbol{\mu} = i\boldsymbol{S}$$

这里电流

$$i = -\frac{e\omega}{2\pi}$$

电流圈的面积

$$\boldsymbol{S} = \pi r^2 \boldsymbol{e}_\mathrm{n}$$

$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 是电流圈平面法线的单位矢量,与电流方向成右螺旋关系;可见 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n} = \boldsymbol{e}_\omega$.电子轨道磁矩可写为

$$\boldsymbol{\mu} = i\boldsymbol{S} = -\frac{er^2}{2}\boldsymbol{\omega}$$

另一方面，电子沿轨道运动时对于原子核的角动量（电子的轨道角动量）为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m_e \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times m_e (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = m_e r^2 \boldsymbol{\omega}$$

式中 $m_e$ 是原子中的电子质量. 由此可得出电子轨道磁矩与轨道角动量之间存在关系：

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L} \tag{1}$$

磁场中磁矩受到的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$$

按角动量定理有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} = \left(\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{B}\right) \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{L} \tag{2}$$

与(5.59)式比较，即可看出，经典原子模型中的电子轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 或轨道磁矩 $\boldsymbol{\mu}$，是大小不变的矢量，以角速度

$$\boldsymbol{\omega}_L = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta = \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{B} \tag{3}$$

绕磁场方向进动，如图 L5.11 所示. 进动角速度顺着磁场方向的进动称为**拉莫尔进动**；$\omega_L$ 称为**拉莫尔(角)频率**. 电子轨道进动的结果是产生一个附加电流，这个电流形成与磁场方向相反的附加磁矩. 因而拉莫尔进动是用来解释物质抗磁性的理论基础.

[**例 5.12**] 一半径为 $r$、质量为 $m$ 的均质圆盘，它的对称轴由一相距为 $d$ 的铅直轴驱动，使圆盘竖直地在水平面上无滑动地滚动，如图 L5.12 所示. 已知圆盘绕驱动轴以恒定的角速 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动. 求圆盘对水平面的正压力. 圆盘轴线 $OO'$ 的质量可忽略.

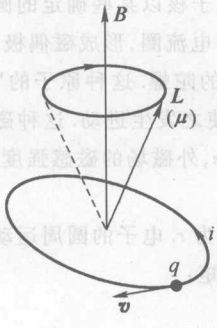



图 L5.11

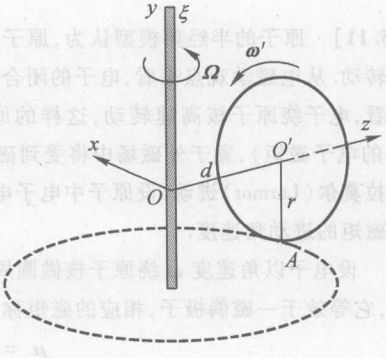



图 L5.12

[**解**] 取活动坐标系如图所示：单位矢量 $\boldsymbol{k}$ 沿圆盘的对称轴；$\boldsymbol{i}$ 为圆盘前进方向；$\boldsymbol{j}$ 则沿驱动轴与单位矢量 $\boldsymbol{e}_\zeta$ 重合. 驱动轴与圆盘对称轴的联结点 $O$ 是与圆盘刚性联结的定点. 现在我们要处理的是圆盘对 $O$ 点的定点运动.

圆盘除绕 $\zeta$ 轴转动外，还绕其对称轴 $z$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}'$ 转动. 圆盘的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega\boldsymbol{j} + \omega'\boldsymbol{k}$$

由圆盘在水平面上纯滚动条件给出

$$\Omega d + \omega' r = 0 \tag{1}$$

故
$$\omega' = -\frac{\Omega d}{r}$$

圆盘绕对称轴和直径的转动惯量分别是
$$J_z = \frac{m}{2}r^2, \quad \text{和 } J' = \frac{m}{4}r^2$$

按平行轴定理即得对 $x$ ($y$) 轴的转动惯量
$$J_* = \frac{m}{4}r^2 + md^2$$

坐标轴 $x$、$y$、$z$ 分别是对称面的法线或对称轴，故都是惯量主轴，圆盘的角动量可写为
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} J_* & 0 & 0 \\ 0 & J_* & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ \omega' \end{pmatrix} = J_*\Omega\boldsymbol{j} + J_z\omega'\boldsymbol{k}$$

圆盘已满足纯滚动条件(1)式，圆盘的最低点 $A$ 与水平面之间没有滑动趋势；水平面作用在圆盘上的力仅有竖直方向的力 $\boldsymbol{F}_N$. 驱动轴作用的力通过定点 $O$；此外还有重力 $m\boldsymbol{g}$. 因而外力对定点的力矩为
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = (-r\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k})\times(F_N - mg)\boldsymbol{j} = d(F_N - mg)\boldsymbol{i}$$

则按角动量定理，有
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L} = 0 + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \Omega & 0 \\ 0 & J_*\Omega & J_z\omega' \end{vmatrix}$$
$$= J_z\Omega\omega'\boldsymbol{i}$$
$$= \boldsymbol{M} = d(F_N - mg)\boldsymbol{i}$$

比较等式两边，即得
$$F_N = mg - \frac{J_z\Omega\omega'}{d} = mg + \frac{m}{2}r\Omega^2$$

圆盘对水平面的正压力是 $\boldsymbol{F}_N$ 的反作用力：
$$\boldsymbol{F}'_N = -\boldsymbol{F}_N = -\left(mg + \frac{m}{2}r\Omega^2\right)\boldsymbol{j}$$

[例 5.13] 经验告诉我们，用一支铅笔的笔尖与水平桌面接触，使之竖直地稳定转动是很困难的. 一长 $s$ 为 10 cm，直径 $d$ 为 0.8 cm 的铅笔，纵使以角速为 $\omega_0$ = 100 r/s 高速转动，也不能使之稳定地竖直转动. 试从理论上作出解释.

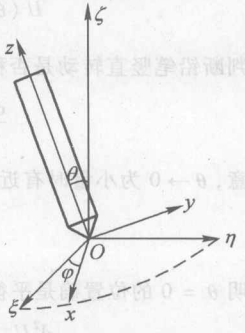


图 L5.13

[解] 本题仅是前面讨论的“对称重陀螺定点运动”问题的特例. 求解过程几乎重复前述，但为增强读者对此类问题的印象，我们仍然简要地按一般求解步骤进行.

取不随铅笔自转的活动坐标系 $Oxyz$，$x$ 轴位于 $\xi\eta$ 平面内；$z$ 轴、$\zeta$ 轴和 $y$ 轴位于同一平面，如图 L5.13 所示. 初始时刻铅笔直立转动，$z$ 轴与 $\zeta$ 轴重合，故初始角速度 $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\boldsymbol{e}_\zeta = \omega_0\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{e}_\zeta = \sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

任意时刻铅笔的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta + \dot{\psi}\boldsymbol{k} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}$$
$$= \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$$

坐标系转动的角速度

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta$$

铅笔对 $O$ 点的角动量

$$\boldsymbol{L} = J_*(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j}) + J_z\omega_z\boldsymbol{k}$$

对 $O$ 点的力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} \times m\boldsymbol{g} = mgl\sin\theta\boldsymbol{i}$$

这里 $m$ 是铅笔的质量，$l$ 是铅笔的重心离 $O$ 点的距离. 由角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$$

可得[见(5.52)式]

$$J_z\dot{\omega}_z = 0$$

即

$$\omega_z = \omega_0 = \text{常量} \tag{1}$$

重力平行于 $\zeta$ 轴，$\boldsymbol{e}_\zeta$ 方向无力矩分量，该方向的角动量分量守恒，得[见(5.55)式]

$$L_\zeta = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta = J_*\dot{\varphi}\sin^2\theta + J_z\omega_0\cos\theta = J_z\omega_0$$

这里已用到了初始条件：$t = 0$ 时 $\theta = 0$，$\omega_z = \omega_0$. 由此，

$$\dot{\varphi}\sin\theta = \frac{J_z\omega_0(1-\cos\theta)}{J_*\sin\theta} \tag{2}$$

由机械能守恒得[见(5.54)]

$$\frac{J_*}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{J_z}{2}\omega_z^2 + mgl\cos\theta = E$$

将关系(2)代入上式，并作适当整理后得

$$\frac{J_*}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta) = E \tag{3}$$

式中有效势[参见(5.57)式]

$$U(\theta) = \frac{J_z^2\omega_0^2(1-\cos\theta)^2}{2J_*\sin^2\theta} + mgl\cos\theta + \frac{J_z}{2}\omega_0^2 \tag{4}$$

要判断铅笔竖直转动是否稳定，只需测验有效势在 $\theta = 0$ 处是否为极小.

$$\frac{\mathrm{d}U(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{J_z^2\omega_0^2(1-\cos\theta)^2}{J_*\sin^3\theta} - mgl\sin\theta$$

注意，$\theta \to 0$ 为小量时有近似：$\sin\theta = \theta$，$\cos\theta = 1 - \theta^2/2$. 故有极限

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = 0$$

表明 $\theta = 0$ 的位置确是平衡点.

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{J_z^2\omega_0^2}{J_*}\frac{(2-\cos\theta)(1-\cos\theta)^2}{\sin^4\theta} - mgl\cos\theta$$

有
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}=\frac{J_z^2\omega_0^2}{4I_*}-mgl \tag{5}$$

将铅笔作为瘦长圆柱体(或杆)看待,则对 $z$ 轴及 $x$(或 $y$)轴的转动惯量分别为

$$J_z=\frac{m}{8}d^2=0.08m(\approx 0)$$

$$J_*=m(d^2/16+s^2/3)\approx\frac{1}{3}ms^2=\frac{100}{3}m.$$

这里已取铅笔的直径 $d=0.8$ cm,和长度 $s=10$ cm. 此外,$\omega_0=2\pi\times100$ rad/s, $l=s/2=5$ cm. 由(5)式,得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}=(19-4\,900)m<0$$

可见 $\theta=0$ 处势能为极大,是不稳定的平衡点. 由此证明了铅笔竖直转动是不稳定的. 即使初始时刻铅笔竖直转动,稍遇扰动便将倾倒.

## 习 题

**5.1** 一长为 $l$ 的棒 $AB$,靠在半径为 $r$ 的半圆形柱面上,如图 T5.1 所示. 今 $A$ 点以恒定速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿水平线运动. 试求(i) $B$ 点的速度 $\boldsymbol{v}_B$;(ii) 画出棒的瞬时转动中心的位置.

$$\left(\boldsymbol{v}=v_0\left(1-l\frac{\sin^3\theta}{r\cos\theta}\right)\boldsymbol{i}-v_0\frac{l\sin^2\theta}{r}\boldsymbol{j}\right)$$

**5.2** 一轮的半径为 $r$,竖直放置于水平面上. 轮心以恒定速度 $\boldsymbol{v}_0$ 前进. 求轮缘上任一点(该点处的轮辐与水平线成 $\theta$ 角)的速度和加速度.

$$\left(\boldsymbol{v}=v_0(1+\sin\theta)\boldsymbol{i}-v_0\cos\theta\boldsymbol{j};\quad \boldsymbol{a}=-\frac{v_0^2}{r}(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\right)$$

**5.3** 半径为 $r$ 的圆柱夹在两块相互平行的平板 A 和 B 之间,两板分别以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 匀速反向运动,见图 T5.3. 若圆柱和两板间无滑动,求:(i) 圆柱瞬心的位置;(ii) 求位于圆柱上与板接触点 $M$ 的加速度.

$$\left(x_s=0,\quad y_s=\frac{2rv_2}{v_1+v_2};\quad \boldsymbol{a}=-\frac{(v_1+v_2)^2}{2r}\boldsymbol{j}\right)$$

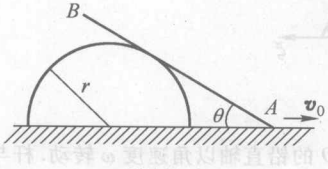



图 T5.1

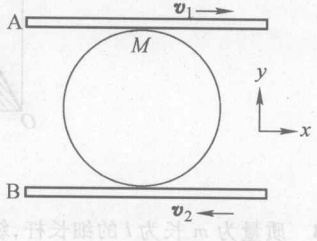



图 T5.3

**5.4** 高为 $h$、顶角为 $2\alpha$ 的圆锥,在一平面上无滑动地滚动(参见图 T5.4). 已知圆锥轴线以恒定角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕过顶点的铅直轴转动. 求:(i) 圆锥的角速度;(ii) 锥体底面上最高点的速

度；(iii) 圆锥的角加速度.

$$\left(\boldsymbol{\omega} = -\Omega\cot\alpha\boldsymbol{e}_\xi;\quad \boldsymbol{v} = 2\Omega h\cos\alpha\boldsymbol{e}_\eta;\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = -\Omega^2\cot\alpha\boldsymbol{e}_\eta\right)$$

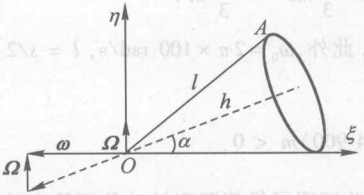



图 T5.4

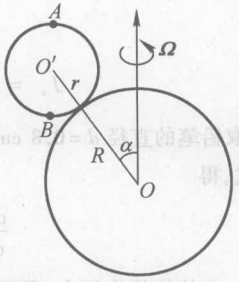



图 T5.5

**5.5**　在一半径为 $R$ 的球体上置一半径为 $r$ 的较小的球，它们的连心线 $OO'$ 与竖直轴间保持 $\alpha$ 角，如图 T5.5 所示. 若 $OO'$ 绕竖直轴以恒定的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动，小球在大球上无滑动地滚动. 分别求出小球最高点 $A$ 和最低点 $B$ 的速度.

$$(\boldsymbol{v}_A = \omega\sin\alpha[(1+\cos\alpha)R + r]\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}_B = \omega\sin\alpha[(1-\cos\alpha)R + r]\boldsymbol{j})$$

**5.6**　一边长为 $d$，质量是 $m$ 的均质立方体，分别求出该立方体对过顶点的棱边、面对角线和体对角线的转动惯量 $J_\mathrm{p}$、$J_\mathrm{f}$ 和 $J_\mathrm{b}$.

$$(J_\mathrm{p} = 2md^2/3,\quad J_\mathrm{f} = 5md^2/12,\quad J_\mathrm{b} = md^2/6)$$

**5.7**　一均质等边三角形的薄板，边长为 $l$，质量为 $m$. 试在图 T5.7 所示的坐标系下，求出薄板对质心 $C$ 的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_\mathrm{c}$ 并由此导出对顶点 $O$ 的惯量矩阵 $\boldsymbol{J}_O$. 图中坐标系 $Cxyz$ 和坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的坐标轴分别相互平行；$\xi\eta$ 和 $xy$ 都在薄板平面内.

$$\left(\boldsymbol{J}_\mathrm{c} = \frac{1}{24}ml^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_O = \frac{1}{24}ml^2\begin{pmatrix}3&-2\sqrt{3}&0\\-2\sqrt{3}&7&0\\0&0&10\end{pmatrix}\right)$$

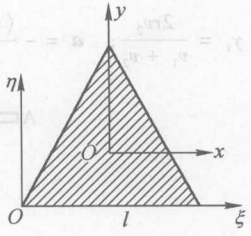



图 T5.7

**5.8**　质量为 $m$ 长为 $l$ 的细长杆，绕通过杆端点 $O$ 的铅直轴以角速度 $\omega$ 转动. 杆与转轴间的夹角为 $\theta$ 保持恒定. 求杆对于端点 $O$ 的角动量.

$$\left(\boldsymbol{L} = -\frac{1}{3}ml^2\omega\sin\theta\boldsymbol{j}\right)$$

**5.9** 一半径为 $r$、质量为 $m$ 的圆盘，在水平面上做纯滚动，盘面法线与铅直轴间保持恒定角度 $\alpha$，盘心则以恒定速率 $u$ 做半径为 $2r$ 的圆周运动. 求圆盘的动能.

$$\left(T = \frac{mu^2}{32}(24 + \sin^2\alpha)\right)$$

**5.10** 一半径为 $r$ 的均质圆盘，平躺在粗糙的水平桌面上，绕通过其中心的竖直轴转动，初始时刻圆盘的角速度大小为 $\omega_0$. 已知圆盘与桌面间的摩擦因数为 $\mu$. 问经过多少时间圆盘将停止转动？

$$\left(t = \frac{3r\omega_0}{4\mu g}\right)$$

**5.11** 如图 T5.11 所示，一矩形均质薄板 $ABCD$，长为 $l$，宽为 $d$，质量为 $m$. 薄板绕竖直轴 $AB$ 以初角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 转动，阻力与薄板表面垂直并与面积，以及速度的平放成正比，比例系数为 $k$. 问经过多少时间后，薄板的角速度减为初角速度的一半？ $\left(t = \frac{4m}{3kd^2l\omega_0}\right)$




图 T5.11

**5.12** 一质量为 $m$、长为 $l$ 的均质细长杆，一端与固定点 $O$ 光滑铰链，可在铅直面内自由转动. 初始时刻杆竖直向上，而后倒下. 试分别求出此后杆绕铰链 $O$ 转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$，作用于铰链上的力 $\boldsymbol{F}_N$ 与杆转过的角度 $\theta$ 的关系.

$$\left(\omega = \sqrt{3g(1-\cos\theta)/l},\quad \boldsymbol{F}_N = \frac{mg}{4}[2(3-5\cos\theta)\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta]\right)$$

**5.13** 一段均质圆弧，半径为 $R$，绕通过弧线中点并与弧线垂直的水平轴线摆动. 求弧线做微振动时的周期. ( $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$ )

**5.14** 一矩形薄板，边长分别为 $l$ 和 $d$，以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕对角线转动. 今若突然改为绕 $l$ 边转动，求此时薄板的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$. $\left(\boldsymbol{\Omega} = \frac{l\omega}{4\sqrt{l^2+d^2}}\boldsymbol{j}\right)$

**5.15** 一半径为 $r$、质量为 $m$ 的球体，无转动地以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，今若突然将其表面上的一点 $O$ 定住不动，求此后球体的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 及对于 $O$ 点的角动量 $\boldsymbol{L}$. 已知 $O$ 点和球心 $C$ 的连线与 $\boldsymbol{v}$ 成 $\alpha$ 角，如图 T5.15 所示.

$$\left(\boldsymbol{\omega} = \frac{5v}{7r}\sin\alpha\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{L} = mrv\sin\alpha\boldsymbol{j}\right)$$

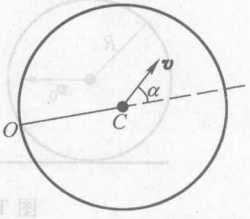



图 T5.15

**5.16** 圆盘竖直地在一坡角为 $\alpha$ 的斜面上无滑动地滚下. 证明：(i) 圆盘质心的加速度大小为 $g\sin\alpha/2$；(ii) 圆盘和斜面间的摩擦因数至少是 $\tan\alpha/2$.

**5.17** 长为 $l$ 的均质棒，一端以光滑铰链悬挂于固定点. 若起始时，棒自水平位置静止开始运动，当棒通过竖直位置时铰链突然松脱，棒开始自由运动. 在以后的运动中，(i) 证明棒质心的轨迹为一抛物线；(ii) 问棒的质心下降 $h$ 距离时，棒已转过多少圈？

$$\left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3h}{2l}}\text{圈}\right)$$

**5.18** 质量为 $m'$ 的平板，受水平力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，在一不光滑的水平面上运动. 平板与水平面间的摩擦因数为 $\mu$. 平板上放有一质量为 $m$ 的均质实心圆柱，在平板上做纯滚动. 试求出平板的加速度. $\left(\ddot{x}=\dfrac{3[F-\mu(m+m')g]}{3m'+m}\right)$

**5.19** 一粗糙的半球形碗，半径为 $R$. 另有一半径为 $r$ 较小的均质球体，从碗边无初速地沿碗的内壁滚下，如图 T5.19 所示. 求出球体的角速度大小 $\omega$ 与所在位置 $\varphi$ 角的关系，以及球体在最低处时球心的速度.

$$\left(\omega=\sqrt{\frac{10(R-r)g\cos\varphi}{7r^2}},\quad \boldsymbol{v}=-\sqrt{\frac{10}{7}(R-r)g\cos\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

**5.20** 一半径为 $R$ 的均质圆球，置于同样的固定球体的表面上. 初始时刻此两球的连心线与铅直线成 $\alpha$ 角，球体静止，而后开始沿固定球表面无滑动地滚下. 求出球体脱离固定球表面时，连心线与铅直线间的夹角 $\theta$，及此时球体的角速度大小 $\omega$.

$$(\theta=\arccos(10\cos\alpha/17),\quad \omega=2\sqrt{5g\cos\alpha/17R})$$

**5.21** 一半径为 $r$ 的球体，绕其水平的直径以角速度 $\omega_0$ 转动，而后将其放置在摩擦因数为 $\mu$ 的水平桌面上. 求出此球体开始做纯滚动时，球体已前进的距离 $s$.

$$\left(s=\frac{2\omega_0^2r^2}{49\mu g}\right)$$

**5.22** 桌球是用棍棒冲击使球体运动的一种游戏. 设桌球的半径为 $r$，置于光滑的平面上. 问应在什么高度处水平冲击球体，球体才不会滑动而做纯滚动？($h=7r/5$)

**5.23** 一半径为 $R$ 的均质球体以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在水平面上无滑动地滚动，突然遇到一高为 $h$ ($<R/2$) 的台阶，见图 T5.23. 球体受台阶的冲击是非弹性的，试求出球体受到冲击后的角速度大小 $\omega$. 若球体在台阶处无滑动，为使球体能登上台阶，初速度的大小 $v_0$ 至少应多大？

$$(\omega=v_0(7R-5h)/2R^2,\quad v_0=R\sqrt{10gh/7})$$

**5.24** 一半径为 $r$ 的均质圆盘，于光滑的水平面上绕铅直的直径以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动. 证明角速度大小 $\omega>4\sqrt{6g/r}$ 时，这样的旋转是稳定的.

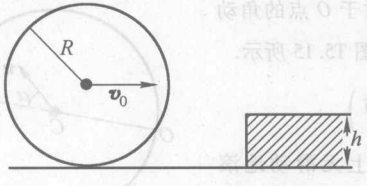



图 T5.23

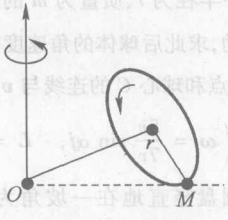



图 T5.25

**5.25** 一陀螺由一半径为 $r$ 的均质圆盘和长为 $4r/3$ 的细轴杆构成；圆盘的质量为 $4m$，轴杆的质量是 $m$. 此陀螺绕杆的端点 $O$ 做定点转动，如图 T5.25 所示. 若欲使陀螺绕铅直轴做规则进动，且盘的最低点 $M$ 保持与 $O$ 点在同一水平面内，则陀螺的角速度在对称轴上的分量 $\omega_z$ 应满足什么样的条件？ $\left(\omega_z > \dfrac{4}{15}\sqrt{\dfrac{94g}{r}}\right)$

**5.26** 对称陀螺初始时的自旋角速 $\dot{\psi} = \sqrt{6mghJ_*}/J_z$，转轴与铅直轴间的夹角为 $\theta = \theta_0 = \arccos(3/4)$，而后释放. 求在此后的运动中，$\theta$ 角将在什么范围内摆动？ $J_*$ 和 $J_z$ 分别是陀螺的横向转动惯量和绕对称轴 $z$ 的转动惯量.

$$\left(\arccos(3/4) \leqslant \theta \leqslant \arccos(1/2)\right)$$

**5.27** 一对称陀螺，质心离顶点的距离为 $l$，对顶点的主转动惯量是 $J_*$、$J_*$ 和 $J_z$. 若此陀螺对顶点做规则进动，进动角速度大小为 $\omega_0$，章动角取 $\theta_0$. 求出陀螺的角速度在对称轴方向的分量. $\left(\omega_z = \dfrac{J_*\omega_0^2\cos\theta_0 + mgl}{J_z\omega_0}\right)$

**5.28** 一带轴的均匀轮子，半径为 $r$，轴的质量可忽略不计. 在离盘心为 $d$ 的轴的端点处用一长为 $l$ 的轻绳悬挂于天花板上的 $O$ 点. 令轮子以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 高速自转. 轮轴水平地绕过定点 $O$ 的铅直线做规则进动. 求绳子与铅直线间的夹角 $\alpha$.

（由于角 $\alpha$ 很小，可作近似 $\sin\alpha \approx \alpha$）.

$$\left(\alpha = \frac{4gd^3}{r^4\omega^2 - 4gld^2}\right)$$

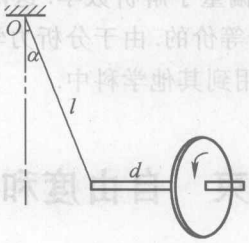



图 T5.28

# 第六章

# 分析力学

至今我们学习的力学理论都属于牛顿力学范围.虽然它提供了求解力学问题的有效方法,但它也存在着一些不足和困难.首先,有时在表述方式上有些复杂,例如在球坐标系或一般的曲线坐标系下写出运动方程就较为麻烦.另外,对于质点组力学问题,将遇到包含大量方程的微分方程组,尤其在处理约束问题时,力学系统的独立变量数目减少了,但因引进了未知的约束力和相应的约束关系,反而使求解的方程数目增多,增加了复杂性.在这一章里,将介绍经典力学理论的另一种表述方式——分析力学.如果说,牛顿力学在数学处理方面着重于几何和矢量的应用,分析力学则偏重于解析数学.这两种不同风格的力学理论,在力学范围内包含的内容是完全等价的.由于分析力学具有普适的表述方式,使之有可能超越力学范围,推广应用到其他学科中.

## §6.1 约束 自由度和广义坐标

关于约束和自由度,实际上已在前面的章节中提到过,而本节要由此引入**广义坐标**的概念.在分析力学中,广义坐标有着重要意义,因此有必要对约束和自由度概念作更详细的说明和讨论.

$n$ 个相互作用着的质点构成一个**力学系统**,简称**力学系**、**力学体系**或**体系**.若是力学系中每一个质点的位置都被确定,则这体系的位置状态就确定了.力学系的位置状态称为力学系的**位形**.任一质点的位置需要用三个独立的坐标参量表示,包含有 $n$ 个质点的力学系的位形需要有 $3n$ 个坐标参量:$(x_1,y_1,z_1)$,$(x_2,y_2,z_2)$,$\cdots$,$(x_n,y_n,z_n)$来确定.为便于今后书写和表述,这 $3n$ 个参量将统一写为 $x_i(i=1,2,\cdots,3n)$.

然而,在一个力学体系中,常常存在一些限制质点自由运动的条件,这些限制条件便是**约束**.例如质点限制在 $z=0$ 的平面($xy$ 平面)上运动,便是一个约

束;本来一自由质点的三个坐标 $x$、$y$、$z$ 是可以独立变更的,但存在了 $z=0$ 的一个约束条件,便只有 $x$、$y$ 二个参量可以独立变更了,再如,两个质点保持 $l$ 距离恒定,约束方程为

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}=l$$

因而质点的 6 个坐标参量便只有 $6-1=5$ 个参量可以独立变更.

对于一个具有 $n$ 个质点的体系,若存在 $k$ 个约束(方程),那么确定体系位形变化的 $3n$ 个坐标参量中只有 $3n-k=s$ 个参量可独立变更.

按照约束情况的不同,力学体系的约束常可区分为以下几种类别:

1. 几何约束和微分约束

若是约束只是限制质点的几何位置,则称为**几何约束**. 前面所举的一质点限于 $z=0$ 平面内运动和两质点用刚性杆相连的例子便都是几何约束. 在几何约束的约束方程中,仅出现质点的坐标变量,形式如

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)=0$$

如果约束方程中还包含有速度变量,则称这种约束为**微分约束**. 例如,一半径为 $r$ 的圆盘在固定的 $\xi\eta$ 平面上做无滑动的滚动,如图 6.1 所示. 由于圆盘与平面接触点 $A$ 的速度必须为零,这便构成约束. 像以前那样,在圆盘上建立活动坐标系 $Cxyz$,但不随圆盘绕盘轴转动;取 $\boldsymbol{i}$ 为圆盘前进的方向,$\boldsymbol{k}$ 为圆盘的轴线方向,它与铅直方向间的夹角为 $\theta$. 在上一章我们已熟知,圆盘的角速度可表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta-\dot{\psi}\boldsymbol{k}$$

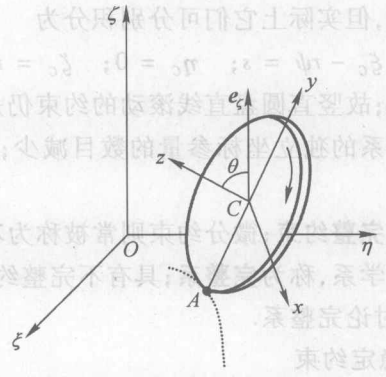



图 6.1

则 $A$ 点的速度应是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_A&=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A\\&=v_{Cx}\boldsymbol{i}+v_{Cy}\boldsymbol{j}+v_{Cz}\boldsymbol{k}+(\dot{\theta}\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta-\dot{\psi}\boldsymbol{k})\times(-r\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

$$= (v_{Cx} + r\dot{\varphi}\cos\theta - r\dot{\psi})\boldsymbol{i} + v_{Cy}\boldsymbol{j} + (v_{Cz} - r\dot{\theta})\boldsymbol{k} \tag{6.1}$$

由于 $A$ 点的速度应为零,因而给出约束方程:

$$v_{Cx} + r\dot{\varphi}\cos\theta - r\dot{\psi} = 0 \quad 或 \quad \mathrm{d}x_C + r\mathrm{d}\varphi\cos\theta - r\mathrm{d}\psi = 0$$

$$v_{Cy} = 0 \quad 或 \quad \mathrm{d}y_C = 0$$

$$v_{Cz} - r\dot{\theta} = 0 \quad 或 \quad \mathrm{d}z_C - r\mathrm{d}\theta = 0$$

这些约束方程中都包含有速度变量或坐标参量的时间导数,它们构成了坐标变分(变更)之间的约束关系.如果这种约束不能全部解出体系中质点坐标参量之间的相互关系,就称为微分约束.微分约束的特点是在约束方程中不仅包含有坐标变量,还包含有速度变量(坐标的时间导数),形式如

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_i, \cdots) = 0$$

虽然微分约束并不确切地建立体系坐标参量间的约束关系,但它们限制了坐标参量的变更.不过,我们还需注意,有些约束方程初看起来是微分约束,但它们是可积分的,实际上仍然是几何约束方程.在前述的例子中,要是圆盘竖直地沿着直线(例如 $\boldsymbol{e}_\xi$ 方向)滚动,则有

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{\xi}_C\boldsymbol{i}; \quad \dot{\theta} = 0, \quad \theta = \pi/2; \quad \dot{\varphi} = 0$$

约束方程便成为

$$\dot{\xi}_C - r\dot{\psi} = 0$$

$$\dot{\eta}_C = 0$$

$$\dot{\zeta}_C = 0$$

此时看起来是微分约束,但实际上它们可分别积分为

$$\xi_C - r\psi = s; \quad \eta_C = 0; \quad \zeta_C = r$$

却是三个几何约束方程;故竖直圆盘直线滚动的约束仍是几何约束.

几何约束使力学体系的独立坐标参量的数目减少;微分约束则限制了坐标参量的独立变更数目.

有时称几何约束为**完整约束**;微分约束则常被称为**不完整约束**或**运动约束**.凡只存在完整约束的力学系,称为**完整系**;具有不完整约束的力学系则称**不完整系**.本课程主要地限于讨论完整系.

2. 稳定约束和不稳定约束

不随时间变化的约束,称为**稳定约束**.在稳定约束的约束方程中不会明显地包含时间变量 $t$.例如质点约束在一个半径为 $r$ 的固定的球面上运动,则质点在此球面上运动的约束方程为

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

约束方程中没有明显的时间变量 $t$ 出现.相反,如果约束明显地随时间变化,则

便是**不稳定约束**. 例如质点被约束在一个不断胀大(缩小)的球面上,球面是不稳定的,这便是不稳定约束,它的约束方程为

$$f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - (ut)^2 = 0$$

式中 $u$ 是球面半径的增长速率;约束方程明显地包含有时间变量 $t$,是时间 $t$ 的显函数.

3. 可解约束和不可解约束

如果在力学体系的运动过程中,某些约束可能会被解除,则那些约束便称**可解约束**. 例如,设一质点用一长为 $l$ 的不可伸长的软绳,联结在定点 $O$ 上做任意运动,质点离开 $O$ 点的距离虽不能大于 $l$,但有可能靠近 $O$ 点,因而脱离了绳子的约束. 像这样的约束便是可解约束.

**不可解约束**是指始终不能解脱的那种约束. 在上面的例子中,如果约束质点的是刚性的杆子,则质点在运动过程中将始终与 $O$ 点保持 $l$ 距离,不能摆脱杆子的约束,这类约束便是不可解约束.

现在我们来对自由度概念作出明确定义:能完全地描述一个力学体系的运动所需要的独立参量变更数目,叫做力学体系的**自由度**.

无论是几何约束或是微分约束,都限制了坐标参量的独立变更. 包含 $n$ 个质点的力学体系,存在 $k$ 个约束方程,则体系的自由度就是 $s$,这里 $s = 3n - k$. 如果这 $k$ 个约束全都是几何约束,则体系的独立参量数目就等于体系的自由度. 但若除几何约束之外还存在微分约束,那么自由度便小于独立参量数目了.

设 $k$ 个几何约束方程为

$$f_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}; t) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,k) \tag{6.2}$$

根据这 $k$ 个约束方程,总可以分别把体系的 $3n$ 个坐标参量用 $s(=3n-k)$ 个独立参量 $q_1, q_1, \cdots, q_s$ 的函数表示出来:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s; t) \qquad (i = 1,2,\cdots,3n) \tag{6.3}$$

这 $s$ 个独立参量 $q_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,s)$ 叫做拉格朗日**广义坐标**. 广义坐标可以是坐标变量,也可能是角量或其他能用来表述体系位形的其他独立参量. 例如,一单摆在空间摆动时,摆锤受到长为 $l$ 的摆长的约束,则对摆锤的约束方程为

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

表明 $x$、$y$、$z$ 中只有两个变量是独立的,可以像(6.3)式那样把坐标变量表示为独立变量的函数. 如果取 $x$、$y$ 作为独立变量,有

$$x = x(x,y) = x$$

$$y = y(x,y) = y$$

$$z = z(x,y) = \pm\sqrt{l^2 - x - y^2}$$

大家熟知,从这个约束条件也可以引进新的独立变量 $\theta$、$\varphi$ 把摆锤的坐标变量表

示为

$$x = x(\theta,\varphi) = l\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = y(\theta,\varphi) = l\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = z(\theta,\varphi) = l\cos\theta$$

无论选用独立坐标变量 $x$、$y$，还是采用独立参量 $\theta$，$\varphi$ 都同样可用来表述单摆这个力学体系的位形，在分析力学的中这两组独立参量具有同样的地位，分别都可作为单摆的广义坐标. 如果摆长以某种方式随时间伸缩：$l = l(t)$，则坐标变量的函数关系中将明显地含有时间变量 $t$，就像(6.3)式中的各函数那样.

由上可见，广义坐标已超越了狭义的坐标变量概念，甚至可以超越力学范畴，推广到物理学的其他领域中去. 例如在电磁学中，标量势和矢量势就可作为电磁场的广义坐标. 再如电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 以及磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 等，也可能成为描写物质电磁状态或与电磁现象相关的力学状态的广义坐标.

## §6.2 虚功原理

为了从分析力学角度讨论力学系的运动问题，首先从力学系的静力学问题入手. 虚功原理则是分析静力学的基础.

**(一) 虚位移和实位移**

大家都很熟悉质点位移的概念. 在牛顿力学中，质点从一个位置移动到另一位置总是随着时间的变化(增加)而发生的，这是质点真实发生的位移. 在时间间隔 $\mathrm{d}t(\neq 0)$ 内发生的真实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 称为**实位移**. 现在要介绍一个新的位移概念——**虚位移**.

考虑一置于某一球面的顶点，且处在平衡状态的质点. 大家都知道这个质点稍受干扰质点便会从球面顶端沿球面滑下. 然而在质点还没有发生滑动的时刻(瞬时)却是不能确定质点将向哪一方向滑下，但必须按约束沿球面滑下. 如果在这一瞬时设想质点在某一方向沿球面发生位移，由于时间并未改变位移尚未发生，这样想象的位移当然不是真实的位移，从而称为**虚位移**. 只要满足约束条件——限制在球面上，设想沿任何方向的位移都可作为这一时刻的虚位移. 任一时刻存在许多可能的虚位移. 与此相比较，实位移是真实发生的位移，是由动力学规律唯一确定的位移.

质点的虚位移，是某一瞬时质点在约束许可的条件下，设想发生的微小位移. 显然，虚位移与实位移是完全不同的概念. 虚位移是在时间没有变化($\mathrm{d}t = 0$)时设想的位移，以符号 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示. 实位移则是在 $\mathrm{d}t(\neq 0)$ 时间内发生的真实

位移,尽管它们都必须满足约束条件.在前面所述的例子中,实位移可以是所有可能的虚位移中的一个.但在不稳定约束下,实位移则完全不同于虚位移.这从图 6.2 所示的例子中可以明显地看出.图 6.2 中,质点约束在一不稳定的曲面上,在某瞬时 $t$ 曲面位于 $F$ 处,但在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻曲面移动到了虚线所示的 $F'$ 位置.虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 只可能设想在 $F$ 曲面上,而实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 则不可能出现在 $F$ 曲面上的.

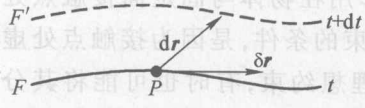



图 6.2

有时为了数学处理上的方便,虚位移也可以设想发生在一个实际上还未发生的时间增量内.这个虚拟的时间增量用 $\delta t$ 表示,显然 $\delta t=0$.

**(二)理想约束和虚功原理**

质点发生实位移时,作用在质点上的力便要做功,这是力做出的真实功.如果想象质点做虚位移,也同样地想象这个力做出了功,虽然实际上此力尚未做功.任意瞬间,设想力在虚位移下做出的功,叫做**虚功**,用 $\delta W$ 表示.

把作用在质点上的力分为两类:主动力 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{F}'$.若是质点处在力的平衡状态,则 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}'=0$,这时力在虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 下所做的虚功显然为零,即

$$\delta W=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}')\cdot\delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\delta \boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}'\cdot\delta \boldsymbol{r}=0$$

对于包含有 $n$ 个质点的力学体系,如果每一质点都处在力的平衡状态,作用在每一质点上的力所做的虚功为零:

$$\delta W_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\delta \boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_i'\cdot\delta \boldsymbol{r}_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

这个体系当然是处于平衡状态的.将上面的 $n$ 个等式相加,有

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta \boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i'\cdot\delta \boldsymbol{r}_i=0 \tag{6.4}$$

即体系处于平衡状态时,作用在各质点上的力(主动力和约束力)所做的虚功之和为零.再进一步,若是体系中各个约束力所做的虚功之和等于零,即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i'\cdot\delta \boldsymbol{r}_i=0 \tag{6.5}$$

就称这个体系处在**理想约束条件**下;把具有特性如(6.5)式表达的约束称为**理想约束**.有许多理想约束条件的例子.光滑曲面、曲线、光滑铰链是理想约束.受这些约束的质点,约束力必与相应的虚位移垂直,这些约束明显地满足理想约束条件(6.5).不过我们还需特别注意到,理想约束条件(6.5)并不是要求作用在每一质点上的约束力都不做虚功,而是它们之和为零.不可伸长的杆、绳也是理

想约束. 例如将不可伸长的轻绳两端的重物，悬挂在光滑滑轮的两边，见图 6.3. 绳子是不可伸长的，因而两重物各自的虚位移必须大小相等，方向相反；忽略绳子质量，则绳子分别作用在这两重物上的张力（约束力）相同 $\boldsymbol{F}_{T1}=\boldsymbol{F}_{T2}$，约束力（张力）对两重物所做的虚功之和等于零. 力学体系中的固定点约束，显然也是理想约束. 因为在固定点处质点的虚位移只可为零. 物体在固定曲面上纯滚动时，作用在物体与固定面接触点处的摩擦力也满足理想约束的条件，是因为接触点处虚位移为零. 即使对于非理想约束，有时也可能将其分解，把其中部分非理想约束力归入主动力来处理，从而使非理想约束化为理想约束. 例如物体放置在粗糙的斜面上，这样的约束显然并非理想约束，但若将斜面作用的摩擦力归入主动力，则斜面便成了理想约束.

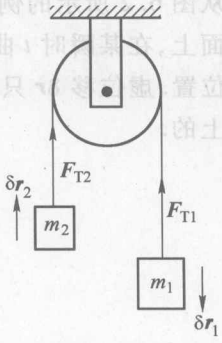


图 6.3

由上可见，理想约束在力学体系中有着很广的范围.

处于理想约束条件下的力学系统，在力所做的虚功（6.4）式中，约束力便自动地消去了，剩下的只有主动力所做的虚功. 从这里得出重要的结论：在理想约束条件下，力学系的平衡条件是作用在各质点上的主动力所做的虚功之和等于零，这一规律称为**虚功原理**. 它的数学表述为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(F_{ix}\delta x+F_{iy}\delta y+F_{iz}\delta z)=0 \tag{6.6a}$$

或写为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{3n}F_i\cdot\delta x_i=0 \tag{6.6b}$$

仿照对体系各质点坐标做统一编号那样，这里对主动力的各分量也相应地做了统一编号. 例如 $F_1$、$F_2$、$F_3$ 是主动力 $\boldsymbol{F}_1$ 的三个分量，$F_4$、$F_5$、$F_6$ 则是主动力 $\boldsymbol{F}_2$ 的三个分量. 余顺序类推.

满足虚功原理是力学系平衡的充分必要条件，这与牛顿力学中的力平衡方程是等价的. 从推导过程看，虚功原理是理想约束条件下力学系中各质点平衡状态的结果. 反之，如果体系平衡时虚功原理（6.6）式成立，则加进理想约束条件（6.5）便有主动力和约束力的虚功之和等于零：

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i')\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

在这个表式里，用约束力代替了约束，每个质点只是在力（无需区分主动力还是约束力）作用下相互独立地运动，因而上式中每一质点虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 前的因子都等于零. 从而得出各质点的力平衡方程：$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i'=0(i=1,2,\cdots,n)$. 由此验证了

牛顿力学中各质点的平衡方程与虚功原理的等价性.

应用虚功原理(6.6)式求解理想约束的力学系平衡物体时,由于不再出现约束力,只需计及主动力的虚功之和,这是一个很大的优点.但从另一方面来说,却无法求出约束力来,这又是一个缺点.

**(三)虚功原理的广义坐标表述和广义力**

存在约束的力学系中,各质点坐标参量之间存在约束关系,这些坐标变量不是相互独立的,用它们表述的虚功原理(6.6)式不能直接应用.实际上最常采用的方法是以表达力学系位形的独立参量——广义坐标来表述的虚功原理.

从质点坐标变量与广义坐标间的函数关系(6.3)式,可以导出质点坐标变量的虚位移 $\delta x_i$ 与广义坐标虚位移(变更)$\delta q_\alpha$ 之间的关系:

$$\delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t}\delta t = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \quad (i = 1,2,\cdots,3n)$$

这里需注意时间的虚变更 $\delta t = 0$.以此代入虚功原理的表述(6.6b)式中,有

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3n} F_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = 0$$

或写为

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \tag{6.7a}$$

这便是以广义坐标表述的虚功原理.写得更明显些:

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_s\delta q_s = 0 \tag{6.7b}$$

其中

$$Q_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s;t) = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \tag{6.8}$$

称为**广义力**在 $\alpha$ 方向的分量;所有这些分量的总体 $Q_\alpha(\alpha = 1,2,\cdots,s)$,则是作用于体系的广义力.从量纲上分析,广义坐标 $q_\alpha$ 是线量时,$Q_\alpha$ 对应于力的分量;$q_\alpha$ 为角量,则广义力 $Q_\alpha$ 是相应的力矩分量.

广义坐标是描写力学体系位形的独立参量,它们的变更(虚位移)$\delta q_\alpha$ 也都分别相互独立,由此虚功原理(6.7)式表明,体系处于平衡时各广义力的分量都等于零,即应有 $Q_1 = 0, Q_2 = 0, \cdots, Q_s = 0$.或等价地写成

$$Q_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s;t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.9}$$

(6.9)式中包含的 $s$ 个关于广义坐标的方程,即是体系的平衡方程.从这些方程可以确定体系的平衡位形或解出未知的主动力.虚功原理(6.7)式告诉我们,在理想约束情况下,力学体系的平衡条件是各广义力分量都等于零.

**[例 6.1]** 两长度分别为 $l_1$ 和 $l_2$,质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的均质杆 $OA$ 和 $AB$,位于同一铅直

平面内，并在 $A$ 点光滑铰链. $OA$ 的另一端则悬挂在 $O$ 点，杆 $AB$ 的端点 $B$ 受一水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图 L6.1 所示. 求平衡时此二杆的位置.

[解] 按题意，主动力有杆 $OA$ 和 $AB$ 的重力 $m_1\boldsymbol{g}$ 和 $m_2\boldsymbol{g}$ 以及水平力 $\boldsymbol{F}$. 重力可认为分别作用在杆的重心 $C$ 点和 $D$ 点；$\boldsymbol{F}$ 作用在 $B$ 点. $C$、$D$、$B$ 三质点共有 9 个坐标参量：$x_C, y_C, z_C, x_D, y_D, z_D, x_B, y_B, z_B$. 共存在 7 个约束，它们是定点 $O$，杆 $OA$ 和 $AB$，铰链 $A$，以及杆约束在铅垂面内，相应地有 $z_C=0$，$z_D=0$，和 $z_B=0$. 这 7 个约束满足理想约束条件；约束力的虚功之和为零. 注意重力沿 $y$ 方向，而 $B$ 点处的作用力在 $x$ 方向，由虚功原理得

$$\delta W = m_1 g\delta y_C + m_2 g\delta y_D + F\delta x_B = 0 \tag{1}$$

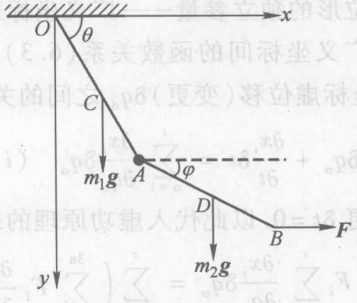



图 L6.1

体系仅有 $s=3\times3-7=2$ 个独立参量，可引进两个广义坐标. 取二杆分别与水平线间的夹角 $\theta$ 和 $\varphi$ 为广义坐标. 则约束关系给出

$$y_C = \frac{l_1}{2}\sin\theta,\quad y_D = l_1\sin\theta + \frac{l_2}{2}\sin\varphi,$$

$$x_B = l_1\cos\theta + l_2\cos\varphi$$

由这些关系式，容易得到约束许可的相应虚位移：

$$\delta y_C = \left(\frac{l_1}{2}\cos\theta\right)\delta\theta$$

$$\delta y_D = (l_1\cos\theta)\delta\theta + \left(\frac{l_2}{2}\cos\varphi\right)\delta\varphi$$

$$\delta x_B = -(l_1\sin\theta)\delta\theta - (l_2\sin\varphi)\delta\varphi$$

将这些关系式代入(1)式得

$$\left(\frac{l_1}{2}m_1 g\cos\theta + l_1 m_2 g\cos\theta - l_1 F\sin\theta\right)\delta\theta + \left(\frac{l_2}{2}m_2 g\cos\varphi - l_2 F\sin\varphi\right)\delta\varphi = 0$$

由于 $\delta\theta$ 和 $\delta\varphi$ 是独立的，它们前面的系数(广义力分量)分别为零，即得平衡方程：

$$Q_\theta = \frac{l_1}{2}m_1 g\cos\theta + l_1 m_2 g\cos\theta - l_1 F\sin\theta = 0 \tag{2}$$

$$Q_\varphi = \frac{l_2}{2}m_2 g\cos\varphi - l_2 F\sin\varphi = 0 \tag{3}$$

由此解出体系平衡时的广义坐标：

$$\tan\theta = \frac{(m_1+2m_2)g}{2F},\quad \tan\varphi = \frac{m_2 g}{2F}$$

这便是所需的结果.

[评注] ① 请将本题解算的各步骤与正文内容一一对应比较,以期对虚功原理有更具体的认识.

② 原则上说,本题的力学系包含有无数质点,每个质点都作用有重力,由于材质是均匀的,可将重力看成集中作用在杆的质心,实际上这也是个质点重力合成(积分)的结果.故可看作体系中仅 $C$、$D$、和 $B$ 三个点受有主动力;其余质点处主动力 $F_i=0$,在虚功计算中不起作用.

③ 从广义力 $Q_\theta$ 和 $Q_\varphi$ 的表示式(2)、(3)式可看出它们都具有力矩量纲,它们分别与角度的广义坐标 $\theta$ 和 $\varphi$ 对应.

[例 6.2] 四根长度都为 $l$ 的轻杆,光滑铰链而成 $ABCD$ 菱形框架.$B$、$D$ 间用一轻绳联结;框架支于同一水平的两个光滑钉子上,并在 $C$ 点挂一重为 $P$ 的重物,如图 L6.2 所示.已知二钉子间距 $2d$.用虚功原理求绳中的张力.

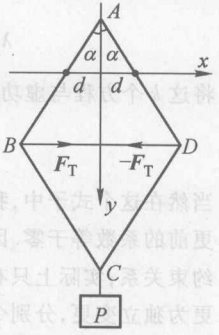


图 L6.2

[解] 建立坐标系如图 L6.2 所示.为求绳中张力,就不能把绳子看作约束;张力 $\boldsymbol{F}_T$ 应作为主动力.绳子虽不能伸长但柔软,不能约束 $B$ 点和 $D$ 点相向的虚位移.忽略杆和绳的重力,实际受主动力作用的是在 $B$、$D$ 和 $C$ 三个点;杆、钉子等所有约束满足理想约束条件.可将 $\alpha$ 作为广义坐标.

由虚功原理

$$\delta W = F_T\delta x_B + P\delta y_C - F_T\delta x_D = 0 \tag{1}$$

从图中所示的几何关系容易得出诸坐标变量用广义坐标 $\alpha$ 表示为

$$x_B = -l\sin\alpha$$

$$x_D = l\sin\alpha$$

$$y_C = l\cos\alpha + (l\cos\alpha - d\cot\alpha)$$

由此

$$\delta x_D = -\delta x_B = l\cos\alpha\delta\alpha$$

$$\delta y_C = \left(-2l\sin\alpha + \frac{d}{\sin^2\alpha}\right)\delta\alpha$$

以此代入(1)式,经整理后得平衡方程

$$Q_\alpha = P(-2l\sin\alpha + d\csc^2\alpha) - 2F_T l\cos\alpha = 0$$

以此得绳中张力

$$F_T = P\tan\alpha\left(\frac{d}{2l}\csc^3\alpha - 1\right)$$

[评注] 也许有的读者会想到把 $A$ 点取作坐标原点.这样做是错误的.因为在杆的约束之下,当 $B$、$C$、$D$ 点虚位移时,$A$ 点必然也有虚位移,如果把坐标原点取在 $A$ 点,便不是固定坐标系了.

### *(四) 虚功原理的不定乘子法

采用虚功原理的广义坐标方法,求解理想约束的力学系平衡问题时可以不考虑约束力;约束条件越多,广义坐标的数目越少,联立求解得方程数目也就越少.这是这个方法的很大的优点.但从另一方面来说,却无法求出约束力来,这又是一个缺点.为求约束力,可采用**不定乘**

子方法.

设力学体系存在 $k$ 个完整约束(几何约束),约束方程分别为

$$f_j(x_1, x_2, \cdots x_{3n}; t) = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{6.10}$$

各质点的虚位移 $\delta x_i (i=1,2,\cdots,3n)$ 必须在(6.10)式所示 $k$ 个约束方程许可的条件下发生,即必须满足方程:

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,k) \tag{6.11}$$

引进 $k$ 个不同的常数:$\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$,分别与上面的 $k$ 个方程一一对应相乘,即

$$\lambda_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,k)$$

将这 $k$ 个方程与虚功原理的表达式(6.6a)相加,稍加整理后得方程:

$$\sum_{i=1}^{3n} \left( F_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0 \tag{6.12}$$

当然在这个式子中,我们不能像虚功原理的广义坐标方法那样,简单地令每个质点的坐标变更前的系数等于零.因为这些变更 $\delta x_i$ 不是独立的,它们之间存在着由(6.11)式表示的 $k$ 个约束关系;实际上只有 $s=3n-k$ 个坐标变更是独立的.但是我们总可以选取其中 $s$ 个坐标变更为独立变更,分别令独立变更前面地系数等于零.至于剩下的 $k$ 个不独立坐标变更前的系数,我们也可以"强制"它们分别为零,因为我们在这里引进了 $k$ 个未知常数 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$,只要适当地调整这些常数 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$ 就可使(6.12)式中各质点虚位移分量 $\delta x_i$ 前的系数都为零:

$$F_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,3n) \tag{6.13}$$

这里有 $3n$ 个方程再加上 $k$ 个约束方程(6.10),合计有 $3n+k$ 个方程,恰好可以解出体系平衡时的 $3n$ 个位形坐标 $x_i (i=1,2,\cdots,3n)$ 和 $k$ 个未知常数 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$.

我们知道,如果把对体系的约束用相应的约束力代替,如(6.4)式所示,体系平衡的条件是主动力和约束力的虚功之和为零,即

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}'_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{3n} (F_i + F'_i)\delta x_i = 0$$

既然以约束力代替了约束,那么可认为质点是在主动力和约束力共同作用下无约束地自由运动.因而上式中质点每一坐标虚位移前的系数分别都应等于零:

$$F_i + F'_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,3n)$$

将此式与(6.13)式比较,即可求得作用在各质点上的约束力分量为

$$F'_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad (i = 1,2,\cdots,3n) \tag{6.14a}$$

只要诸常数 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$ 确定,则体系受到的约束力就由(6.15)式求出.这些常数 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,k)$ 称作**拉格朗日乘子**或**拉格朗日不定乘子**,简称**不定乘子**.它们是需要在解题过程中待定的.从而这一解题方法被称作**拉格朗日不定乘子法**.

更进一步,将约束力(6.14a)式用矢量形式写出,有

$$\boldsymbol{F}'_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\boldsymbol{k} \right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla_i f_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{F}_i'^{(j)} = \lambda_1 \nabla_i f_1 + \lambda_2 \nabla_i f_2 + \cdots + \lambda_k \nabla_i f_k \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.14b}$$

式中 $\nabla_i = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_i} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_i}$ 是对第 $i$ 质点坐标求导的梯度算符矢量. 而

$$\boldsymbol{F}_i'^{(j)} = \lambda_j \nabla_i f_j \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ \ j = 1,2,\cdots,k) \tag{6.15}$$

则是第 $j$ 个约束对第 $i$ 质点的约束力. 我们熟知,如果理想约束方程 $f_j(x,y,z) = 0$ 是曲面方程,则在 $i$ 质点位置处受到的约束力方向和曲面的法线方向,即 $\nabla_i f_j$ 的方向,一致. 这正是(6.15)式所表示的.

本节介绍的拉格朗日不定乘子方法,与前面介绍的广义坐标方法一样,是利用虚功原理求解体系平衡问题的方法. 但在这个方法中,并不回避约束力 $\boldsymbol{F}_i'$,而是采用这样的观点:对各质点的约束用相应的约束力取代,从而认为各质点在力(主动力和约束力)的作用下各自独立地运动. 引入不定乘子的目的是为了将需要求解约束力与相应的约束(方程)"挂起钩"来;约束力的大小和方向自然是与约束(方程)的形状密切相关的,它们之间的关联由(6.14)式表示,因而还可以求得约束力.

采用拉格朗日不定乘子法虽然可以求出约束力,但需要求解得方程数目增多了. 对于 $n$ 个质点的力学体系,具有 $k$ 个约束方程时就需要求解 $3n+k$ 个方程联立. 约束的数目 $k$ 越多,需要求解得方程数目就越多. 然而这是一个非常有用的数学方法,在许多物理及工程学科中常会用到.

[**例 6.3**] 两个质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的小球,用长为 $l$ 的轻竿联结,置于半径为 $a$ 的光滑球形碗中,如图 L6.3 所示. 设小球很小可不计尺度,竿长 $l < 2a$. 求出小球、轻竿体系的平衡位置,以及碗底、轻竿分别对此两小球的约束力.

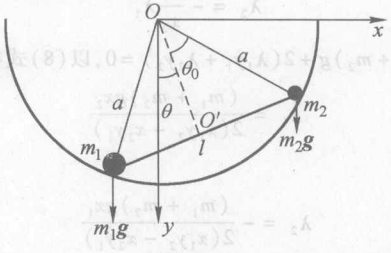



图 L6.3

[**解**] 如图 L6.3 所示,由碗心 $O$ 点作轻竿的垂线(虚线)$OO'$,它必是轻竿所张圆心角($2\theta_0$)的角等分线. 设 $OO'$ 与 $y$ 轴之间的夹角为 $\theta$. 小球 $m_1$ 的坐标为($x_1$,$y_1$),球心与它的连线 $Om_1$ 与 $y$ 轴之间的夹角为 $\theta_1$. 同样,$m_2$ 的坐标和 $Om_2$ 与 $y$ 轴夹角分别为($x_2$,$y_2$)和 $\theta_2$. 由图易知

$$\begin{cases} \theta_1 = -(\theta_0 - \theta) = \theta - \theta_0 \\ \theta_2 = \theta + \theta_0 \end{cases} \tag{1}$$

显然 $m_1$ 的位置由 $\theta_1$ 确定,$m_2$ 的位置由 $\theta_2$ 确定;整个体系的位置由 $\theta$ 确定.

采用虚功原理拉格朗日不定乘子方法求解.

由题意,作用在两小球上的主动力分别为

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{g} = m_1 g\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{g} = m_2 g\boldsymbol{j} \tag{2}$$

共有3个约束:$m_1$和$m_2$分别位于碗壁上,以及两球受轻竿约束,它们的间距为$l$.

采用直角坐标求解.约束方程为

$$f_1 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0$$
$$f_2 = x_2^2 + y_2^2 - a^2 = 0 \tag{3}$$
$$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

按(6.13)式

$$F_{1x} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1} = F_{1x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1}$$
$$= 0 + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_3 (x_2 - x_1) = 0 \tag{4}$$

$$F_{1y} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_1} = m_1 g + 2\lambda_1 y_1 - 2\lambda_3 (y_2 - y_1) = 0 \tag{5}$$

$$F_{2x} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2} = 0 + 2\lambda_2 x_2 + 2\lambda_3 (x_2 - x_1) = 0 \tag{6}$$

$$F_{2y} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_2} = m_2 g + 2\lambda_2 y_2 + 2\lambda_3 (y_2 - y_1) = 0 \tag{7}$$

这里由虚功原理(6.13)得到(4)、(5)、(6)和(7)等式共4个方程,另外还有(3)式所示的3个约束方程.由这7个方程,当可解出两小球平衡位置的坐标$x_1, y_1, x_2, y_2$和3个不定乘子$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$等7个未知量.

(4)式+(6)式,得$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$,即

$$\lambda_2 = -\frac{x_1}{x_2}\lambda_1 \tag{8}$$

(5)式+(7)式,得$(m_1 + m_2)g + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$,以(8)式得关系代入,即可解得

$$\lambda_1 = \frac{(m_1 + m_2) g x_2}{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \tag{9}$$

代入(8)式,得

$$\lambda_2 = -\frac{(m_1 + m_2) g x_1}{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \tag{10}$$

将上面$\lambda_1$的表达式代入(4)式,有

$$\lambda_3 = \frac{(m_1 + m_2) g x_2 x_1}{2(x_2 - x_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1)} \tag{11}$$

为计算方便,利用参量$\theta$,即中垂线$OO'$与$y$轴间的夹角.事实上,确定两小球的位置需4个坐标变量$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$,但存在3个约束,故力学系只有1个自由度;参量$\theta$即能完全确定小球和轻竿体系的位置.据约束方程(3),有

$$x_1 = a\sin\theta_1 = a\sin(\theta - \theta_0), \quad y_1 = a\cos\theta_1 = a\cos(\theta - \theta_0)$$
$$x_2 = a\sin\theta_2 = a\sin(\theta + \theta_0), \quad y_2 = a\cos\theta_2 = a\cos(\theta + \theta_0)$$
$$x_1 x_2 = a^2 \sin(\theta - \theta_0)\sin(\theta + \theta_0)$$
$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = a^2 [\sin(\theta - \theta_0)\cos(\theta + \theta_0) - \sin(\theta + \theta_0)\cos(\theta - \theta_0)] = -a^2 \sin 2\theta_0$$

$$x_2 - x_1 = a[\sin(\theta+\theta_0) - \sin(\theta-\theta_0)] = 2a\sin\theta_0\cos\theta = l\cos\theta$$

$$y_2 - y_1 = a[\cos(\theta+\theta_0) - \cos(\theta-\theta_0)] = -2a\sin\theta_0\sin\theta = -l\sin\theta$$

这里已注意到 $2a\sin\theta_0 = l$. 将这些关系式代入(9)、(10)、(11)诸式,有

$$\lambda_1 = -\frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)}{2a\sin 2\theta_0}$$

$$\lambda_2 = \frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta-\theta_0)}{2a\sin 2\theta_0} \tag{12}$$

$$\lambda_3 = -\frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}{4a\sin 2\theta_0\sin\theta_0\cos\theta}$$

(1) 求平衡位置

将诸 $\lambda$ 与 $\theta$ 的关系代入(5)式[当然也可将其代入(7)式],即得确定平衡位置的方程:

$$m_1 g - \frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)}{\sin 2\theta_0\cos\theta}[\cos(\theta-\theta_0)\cos\theta + \sin(\theta-\theta_0)\sin\theta] = 0$$

即

$$m_1 g = \frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)\cos\theta_0}{2\sin 2\theta_0\cos\theta}$$

得

$$\frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos\theta} = \tan\theta\cos\theta_0 + \sin\theta_0 = 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\sin\theta_0$$

注意图 L6.3 中 $\theta_0$ 与竿长 $l$、球碗半径 $a$ 之间的几何关系,即可由上式解得小球系统的平衡位置

$$\tan\theta = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\tan\theta_0 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{l}{\sqrt{4a^2-l^2}} \tag{13a}$$

由此通过三角函数运算,易得

$$\begin{cases} \sin(\theta+\theta_0) = \sin\theta_2 = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\sin\theta_0\cos\theta \\ \sin(\theta-\theta_0) = \sin\theta_1 = -\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\sin\theta_0\cos\theta \end{cases} \tag{13b}$$

(2) 求约束力

按(6.15)式,各约束对两小球的约束力分别是:

球形碗底面对 $m_1$ 的约束力:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1'^{\text{碗}} &= \lambda_1\nabla_1 f_1 = 2\lambda_1(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) \\ &= -\frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)}{\sin 2\theta_0}[\sin(\theta-\theta_0)\boldsymbol{i} + \cos(\theta-\theta_0)\boldsymbol{j}] \\ &= -m_1 g\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{14a}$$

$f_2$ 中不存在 $m_1$ 的坐标变量,它对 $m_1$ 不存在约束力.

轻竿对 $m_1$ 的约束力:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1'^{\text{竿}} &= \lambda_3\nabla_1 f_3 = -2\lambda_3[(x_2-x_1)\boldsymbol{i} + (y_2-y_1)\boldsymbol{j})] \\ &= -\frac{(m_1+m_2)g\sin(\theta+\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}{2a\sin 2\theta_0\sin\theta_0\cos\theta}l(\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}) \end{aligned}$$

$$= m_1 g \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\cos\theta_0} \boldsymbol{e}_l \tag{14b}$$

运算中已注意平衡位置处关系式(13b)及 $\sin\theta_0 = l/2a$;式中 $\boldsymbol{e}_r$ 是 $m_1$ 处球碗半径方向的单位矢量,$\boldsymbol{e}_l$ 则是轻竿 $l$ 方向的单位矢量.显然[注意(13b)式,$\sin(\theta-\theta_0)$ 的值为负],$m_1$ 受到的约束力为

$$\boldsymbol{F}_1'^{\text{碗}} + \boldsymbol{F}_1'^{\text{竿}} = -m_1 g \boldsymbol{j}$$

球形碗底面对 $m_2$ 的约束力:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2'^{\text{碗}} &= \lambda_2 \nabla_2 f_2 = 2\lambda_2 (x_2 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j}) \\ &= -\frac{(m_1+m_2) g \sin(\theta-\theta_0)}{\sin 2\theta_0} [\sin(\theta+\theta_0)\boldsymbol{i} + \cos(\theta+\theta_0)\boldsymbol{j}] \\ &= -m_2 g \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0} \boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{15a}$$

轻竿对 $m_2$ 的约束力:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2'^{\text{竿}} &= \lambda_3 \nabla_2 f_3 = 2\lambda_3 [(x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j})] \\ &= -\frac{(m_1+m_2) g \sin(\theta+\theta_0) \sin(\theta-\theta_0)}{2a \sin 2\theta_0 \sin\theta_0 \cos\theta} l(\cos\theta \boldsymbol{i} - \sin\theta \boldsymbol{j}) \\ &= m_2 g \frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos\theta_0} \boldsymbol{e}_l \end{aligned} \tag{15b}$$

$m_2$ 受到的约束力为

$$\boldsymbol{F}_2'^{\text{碗}} + \boldsymbol{F}_2'^{\text{竿}} = -m_2 g \boldsymbol{j}$$

[评注] 本题也可采用极坐标来做.

## §6.3 拉格朗日方程

在分析力学中,拉格朗日方程是处理力学系动力学物体的主要方法之一.拉格朗日方程的理论可以完全独立于牛顿力学;可以从一变分极值的基本原理得出(参见§6.6).但为初学者便于掌握,这里还是从牛顿力学方程出发推导.

### (一) 达朗贝尔原理

对于包含有 $n$ 个质点的力学体系中,每一质点的运动都应服从牛顿定律,即

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i' \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

和以前一样我们约定 $\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{F}_i'$ 分别为作用于第 $i$ 质点的主动力和约束力.对上面的方程作一简单的移项手续,可等价地写为

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_i' - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.16}$$

这方程的重要意义在于启发我们:如果把 $-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 也当作作用在质点上的力看待,那么任何瞬时作用在体系中任一质点 $i$ 上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{F}_i'$ 和力 $-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 总是平衡的;质点的动力学方程可化为静力学方程.通常把这种平衡原则称为**达**

**朗贝尔原理**(D'alembert's principle). 力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 被称为**逆效力**(reversed effective force)①. 初看起来,逆效力就是我们熟悉的惯性力,其实是不同的. 惯性力只是在非惯性参考系中才出现,而逆效力则是在惯性系中引进的,(6.16)式在惯性系中写出;作用在各质点上的惯性力,与采用的非惯性参考系的加速度相关,逆效力则决定于质点各自的加速度.

既然按达朗贝尔原理把动力学问题化成了静力学问题,我们便可仿照处理静力学问题的虚功原理那样来处理动力学问题了. 由(6.16)式可得,体系中作用于各质点上所有力(包括主动力、约束力和逆效力)的虚功之和等于零,即

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}'_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{6.17}$$

对于只讨论体系满足理想约束条件的情形:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}'_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

则得出

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{6.18a}$$

或用统一足码改写成

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3n} (F_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i = 0 \tag{6.18b}$$

注意在这个表达式里,$m_1 = m_2 = m_3$ 是第一个质点的质量,$m_4 = m_5 = m_6$ 则是第二个质点的质量,余类推. 方程(6.18)通常称为**达朗贝尔 - 拉格朗日方程**.

**(二) 拉格朗日方程**

由于体系中存在约束,(6.18)式中各质点坐标变量的变更相互不独立,为此要像处理虚功原理那样,导出达朗贝尔 - 拉格朗日方程(6.18)的广义坐标表示形式.

设包含有 $n$ 个质点的力学系,存在 $k$ 个约束方程:

$$f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}; t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

引入 $s(=3n-k)$ 个独立坐标参量——广义坐标:$q_\alpha(\alpha = 1, 2, \cdots, s)$,则体系的 $3n$ 个坐标变量分别用广义坐标表示为

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s; t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

下面的推导主要由质点的坐标变量与广义坐标间的函数关系,通过对多元函数求导数的运算法则来完成.

$$\dot{x}_i = \frac{\mathrm{d}x(q_1, q_2, \cdots, q_s; t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.19}$$

① 虽然由于历史原因,许多作者称它为惯性力.

式中

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

称为广义速度分量,它们的总体 $\dot{q}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 称**广义速度**. 再次提请注意:$\mathrm{d}q_\alpha$ 和 $\delta q_\alpha$ 的区别. 前者是广义坐标的实位移(对应的时间变更 $\mathrm{d}t\neq 0$),后者则是虚位移(对应于 $\delta t=0$). (6.19)式表明 $\dot{x}_i$ 是广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$、广义速度 $\dot{q}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 和时间 $t$ 的函数,即

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q,\dot{q};t)$$

今后为书写方便,在函数关系中常以 $q$ 代表全体 $s$ 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_s$. 同样,用 $\dot{q}$ 代表 $s$ 个广义速度分量.

为了下面的推导中需要,先来证明以下两个关系式.

第一个关系式:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \tag{6.20}$$

运算中只要注意 $x_i = x_i(q,t)$,$x_i$ 与 $\dot{q}_\alpha$ 无关,以及 $\dfrac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}=0(\beta\neq\alpha$ 时)因为 $q_\alpha$ 和 $q_\beta$ 是独立变更的. 这个关系式表明,速度分量 $\dot{x}_i$ 对广义速度分量 $\dot{q}_\alpha$ 的偏导数,与相应的坐标变量 $x_i$ 对广义坐标 $q_\alpha$ 的偏导数相等.

第二个关系式:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\alpha \partial t}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right) \tag{6.21}$$

此式表明运算(算符)"$\partial/\partial t$"和"$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$"可以对调.

现在回到对(6.18)式作广义坐标表示的推导.

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$

$$= \sum_i \sum_\alpha m_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{x}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\right]\delta q_\alpha$$

$$= \sum_\alpha\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha$$

上式推导过程中第一个等式应用了虚位移 $\delta x_i = \left(\sum \dfrac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)$ 的表示式;第三个等式则用到了(6.20)式和(6.21)式,并交换了对足码 $i$ 和 $\alpha$ 的求和次序. 再注意

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

和

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

这里 $T$ 是力学体系动能：

$$T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{6.22}$$

由此得到逆效力的虚功：

$$-\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = -\sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right] \delta q_\alpha$$

至于主动力的虚功，在上节已作推导：

$$\sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = \sum_{\alpha} Q_\alpha \delta q_\alpha$$

式中

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.23}$$

称为**广义力**. 将这些关系式代入(6.18b)式即可得到达朗贝尔－拉格朗日方程的广义坐标表示式：

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha\right] \delta q_\alpha = 0$$

诸广义坐标的变更是相互独立的，则按线性代数理论，每一独立变更前的系数必须为零. 由此得到一列方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.24}$$

这是基本形式的**拉格朗日方程组**. 其中每一方程都是二阶常微分方程，方程数目与体系的自由度 $s$ 相等. 从方程形式上看，它能适用于各种曲线坐标系(各种形式的广义坐标). 这里约束力已不再出现，从而避免了牛顿力学中对于约束越多，求解的方程数目反而越多的缺点. 只要能将力学系的动能表示为广义坐标、广义速度和时间 $t$ 的函数：$T(q,\dot{q};t)$，就可立出拉格朗日方程组.

在许多力学问题中，作用于体系的力是保守力，对于保守力可以引进势能函数. 对整个体系来说，势能函数应与体系中各质点的坐标变量有关，当然也可表示为广义坐标的函数. 在某些情况下，例如受不稳定力场作用时，还可能是时间 $t$ 的显函数.

$$\begin{aligned} V &= V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n;t) = V(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t) \\ &= V(q_1,q_2,\cdots,q_s;t) \end{aligned} \tag{6.25}$$

作用在第 $i$ 质点上的保守力(主动力),是势能函数关于 $i$ 质点的坐标变量的负梯度:

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i V(\boldsymbol{r};t)$$

或按足码的统一编号,写成

$$F_i = -\frac{\partial V(x;t)}{\partial x_i} \tag{6.26}$$

这样,在保守力情形下,可得出广义力与势能函数的关系:

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{3n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V(q;t)}{\partial q_\alpha} \tag{6.27}$$

由此,拉格朗日方程(6.24)式便可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V(q;t)}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

注意:势能函数只是广义坐标和时间的函数,而与广义速度 $\dot{q}$ 无关;因而 $V$ 对任一广义速度分量 $\dot{q}_\alpha$ 的偏导数恒等于零. 故上式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

式中,体系的动能和势能之差 $T-V$ 总是同时出现,它可以作为一个新的函数 $L$ 来表示. 这个函数称为**拉格朗日函数**,简称**拉氏函数**或**拉格朗日量**(Lagrangian):

$$L(q,\dot{q};t) = T(q,\dot{q};t) - V(q;t) \tag{6.28}$$

拉氏函数是广义坐标、广义速度的函数,也可能是时间 $t$ 的显函数. 拉格朗日函数 $L$ 在分析力学中有着非常重要的地位. 如果作用在力学体系上的主动力全是保守力,则这个力学系称为**保守(力学)系**. 对于保守力学系,拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.29}$$

这是分析力学中处理保守系动力学问题的基本方程.

拉氏函数对广义坐标的偏导数,称为力学系的**广义动量**,例如

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{6.30}$$

是对应于广义坐标 $q_\alpha$ 的广义动量. 量纲分析表明,若 $q_\alpha$ 为线坐标,则 $p_\alpha$ 是线动量;如 $q_\alpha$ 是角量,则 $p_\alpha$ 为角动量.

### (三) 循环坐标和广义动量积分

如果某一广义坐标 $q_\beta$ 在拉氏函数中不出现,则 $\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0$,从保守系的力学系的拉格朗日方程(6.29)容易看到,相应于 $\alpha=\beta$ 的那个拉氏方程便简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right) = 0$$

从而立即可以得出相应的第一积分：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = p_\beta = C_\beta = 常量 \tag{6.31}$$

若是在拉氏函数中有多个广义坐标不出现，则相应于每一个这种广义坐标都可分别得出第一积分. 那些在体系的拉格朗日函数 $L$ 内不出现的广义坐标，叫做该力学系的**循环坐标**. 与每一循环坐标相应的第一积分，称为与该循环坐标相应的**广义动量积分**，或**循环积分**. (6.31)式就是对应于循环坐标 $q_\beta$ 的循环积分(广义动量积分). (6.31)式表明，与循环坐标对应的广义动量是体系的运动守恒量.

显然，力学体系的循环坐标越多，得到的循环积分就越多，对力学问题的求解就越有利. 循环坐标的多少，却与广义坐标如何选取有着密切关系. 例如一自由质点在有心力作用下运动，若采用直角坐标，相应的拉氏函数为

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left(-\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

质点没有约束，坐标 $x$、$y$ 都是独立参量(广义坐标)；这里的拉格朗日函数中没有循环坐标. 但改用平面极坐标，体系(只包含一个质点)的拉氏函数则是

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$

那么 $\theta$ 就是循环坐标. 相应地可得广义动量积分

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = J_0$$

这是我们熟知的质点对力心的角动量，是一守恒量.

### *(四) 耗散系统与耗散函数

前面我们着重讨论了保守力学体系，即体系所受的外力可以用一个势函数的负梯度表示：

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V$$

在这种情形下，力学体系的总机械能在运动过程中保持恒定. 实际上，在很多情形下体系会受到并非有势的外力；某些驱动力、摩擦力、阻尼力便是非有势力. 物体受到这样的力作用时，在运动过程中机械能将不守恒. 如果作用于力学体系的非有势力是摩擦力或各种阻力，大家熟知，力学系的机械能在运动过程中将受到损耗，这样的力学系便是**耗散力学系统**，简称**耗散系统**.

设力学体系受到的外力包含有势力和非势力两部分组成，即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{有势} + \boldsymbol{F}_{非势} = \sum_{i=1}^{n}(-\nabla_i V + \boldsymbol{f}_i) \tag{6.32}$$

式中有势力可用势函数的负梯度表；$\boldsymbol{f}_i$ 是作用在力学系中第 $i$ 个质点上的非势力. 力学体系的运动原则上可由基本形式的拉格朗日方程(6.24)式求解. 广义力 $Q_\alpha$ 中自然也相应地包含有势部分和非势部分：

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{有势} + Q_\alpha^{非势} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{6.33}$$

其中有势部分 $Q_\alpha^{有势}$ 如同(6.27)式表示：

$$Q_\alpha^{有势} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{6.34}$$

而广义力的非势部分按(6.8)式的定义，有

$$Q_\alpha^{非势} = \sum_{i=1}^{3n} f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{6.35}$$

式中已对力学系中各质点的坐标进行了统一编号. 实际问题中，驱动力的形式多种多样，而耗散力则大多只与质点速度有关且与速度方向相反：

$$\boldsymbol{f}_i = -\kappa_i(v_i)\boldsymbol{v}_i \tag{6.36}$$

对于受到耗散力作用的耗散系统，还常引进**耗散函数**概念. 按定义，耗散力部分的广义力为

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{耗散} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(v_i)\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(v_i)\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(v_i)\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(v_i)v_i\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s \end{aligned} \tag{6.37}$$

这里我们应用了已证明过的关系式(6.20)：$\dfrac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$. 式中所定义的函数 $\Phi$ 即称为耗散函数. 直接由(6.36)式的最后等式知

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{v_j} \kappa_j(u)u\mathrm{d}u \tag{6.38}$$

特别对于与质点速度成正比的耗散力：$\boldsymbol{f}_j = -b_j\boldsymbol{v}$，$b_j$是正常数，则由(6.38)式容易求出耗散函数为

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}b_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}b_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} b_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \end{aligned} \tag{6.39}$$

这个函数称为**瑞利**(Rayleigh)**耗散函数**，式中 $b_{\alpha\beta}$只是广义坐标 $q_\alpha$、$q_\beta$的函数.

将诸广义力表式(6.34)、(6.35)、(6.37)代入(6.24)式，即得耗散系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{6.40}$$

式中 $L = T - V$ 是力学系的拉格朗日函数.

下面我们来讨论耗散函数的实际意义. 在稳定约束情形下动能 $T$ 是质点速度(或广义速

度)的二次齐次函数:

$$T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \tau_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

式中 $\tau_{\alpha\beta}$ 只是广义坐标 $q_\alpha$、$q_\beta$ 的函数,$T$ 和 $L$ 都不是时间 $t$ 的显函数. 故有

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

因此,力学系机械能的时间变化率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{6.41}$$

特别对于摩擦力等与速度成正比的耗散力,$\Phi$ 用瑞利耗散函数代入,则有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\Phi \tag{6.42}$$

可见瑞利耗散函数直接与体系机械能的时间损耗率相关.

## §6.4 拉格朗日方程的应用举例

由力学系统的拉格朗日方程出发求解体系的运动,是分析力学中最常用的方法. 下面以若干具体的力学系统的运动问题进行求解为例,帮助读者深入地、具体地掌握这个重要的方法.

[例 6.4] 如图 L6.4 所示的滑轮组悬挂的三个重物,质量分别为 $m_1$、$m_2$ 和 $m_3$. 试分别求出这三个重物的加速度的大小. 滑轮及绳子的质量可忽略不计.

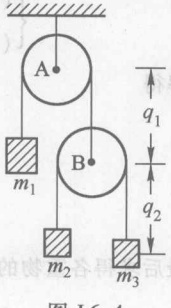


图 L6.4

[解] 本题用牛顿力学方法求解稍显繁琐,用分析力学方法就较简明. 本题的力学系由三个重物和两个滑轮组成. 存在的约束有:(i) 滑轮 A 被固定,(ii) $m_1$ 与滑轮 B 间用长为 $l'$ 的绳子联结;(iii) $m_2$ 和 $m_3$ 间由长 $l$ 的绳子约束. 体系做一维运动,五个"质点"却有三个约束,因此只有两个独立参量. 如图所示,取独立参量 $q_1$、$q_2$ 为广义坐标. 设三重物的坐标变量分别为:$x_1$、$x_2$ 和 $x_3$;滑轮 A、B 边缘的半周长分别是 $s_1$ 和 $s_2$. 参考图中几何关系,容易得出三物体的坐标变量与广义坐标间的关系为

$$x_1 = l' - s_1 - q_1, \quad x_2 = q_1 + l - s_2 - q_2, \quad x_3 = q_1 + q_2$$

由此,各重物的速度分别是

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dot{q}_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{cases} \tag{1}$$

注意,不计滑轮和绳子的质量,则力学体系的动能写为

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{2}$$

体系的势能写为

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 - m_3gx_3$$

$$= (m_1 - m_2 - m_3)gq_1 + (m_2 - m_3)gq_2 + V_0$$

这里把所有的常量归并成常数项 $V_0$.

体系的拉格朗日函数为

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - \tag{3}$$

$$(m_1 - m_2 - m_3)gq_1 - (m_2 - m_3)gq_2 - V_0$$

分别对应于二广义坐标的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2] + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_2 + m_3)\dot{q}_2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1] + (m_2 - m_3)g = 0$$

得出方程

$$\begin{cases}(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 + (m_1 - m_2 - m_3)g = 0\\ (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 + (m_2 - m_3)g = 0\end{cases}$$

解得

$$\ddot{q}_1 = \frac{(4m_2 - m_1)m_3 - m_1m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1m_2}g$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2m_1(m_3 - m_2)}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1m_2}g$$

最后求得各重物的加速度的值,由(1)式得

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{q}_1 = -\frac{(4m_2 - m_1)m_3 - m_1m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1m_2}g$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = \frac{(4m_2 - 3m_1)m_3 + m_1m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1m_2}g$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \frac{(4m_2 + m_1)m_3 - 3m_1m_2}{(m_1 + 4m_2)m_3 + m_1m_2}g$$

[评注] 从本题可以看到,拉格朗日方程方法解算问题的过程非常明确.一般可按以下

步骤：

(i) 按题意，分析约束关系引进独立参量，从而写出体系中各个质点的坐标变量与广义坐标之间的函数关系；

(ii) 写出体系的动能表示式. 初学者可先像牛顿力学中那样用各质点的速度分量写出，然后再写出动能的广义坐标、广义速度表示式. 不要急于一步就把动能的广义坐标、广义速度表示式写出，那样容易出错.

(iii) 对保守力体系，写出体系的势能表示式. 同样不要急于一步就用广义坐标表示，可先用各个质点的坐标变量写出.

(iv) 写出拉氏函数的广义坐标、广义速度表示式；$L(q,\dot{q};t) = T - V$.

(v) 对应于各个广义坐标，写出拉格朗日方程.

(vi) 求解方程组.

**[例 6.5]** 在半径为 $R$ 的光滑圆环上穿有一质量为 $m$ 的小球，圆环以恒定角速度 $\omega$ 绕其铅直的直径转动，如图 L6.5(a)所示. 求出小球的平衡位置(小球在圆环上能保持不动的位置).

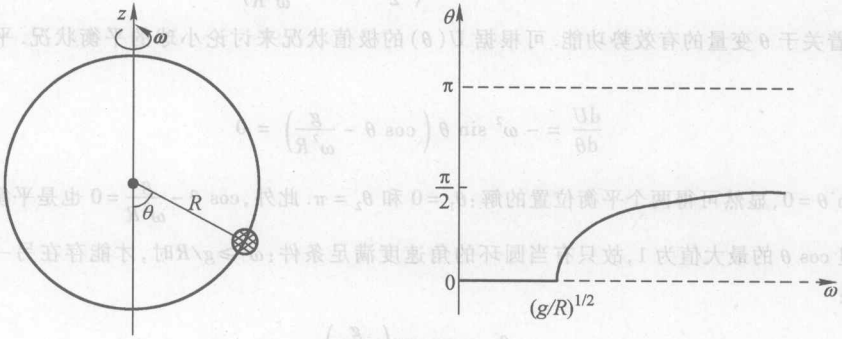



图 L6.5

**[解]** 将小球看成质点，它是力学系的唯一质点. 由于圆环的约束，小球的位置由角度 $\theta$ 确定. 但圆环转动，是不稳定约束. 取圆环中心为坐标原点，以转轴为 $z$ 轴，$x$、$y$ 轴位于水平面内.

小球的坐标为

$$x = R\sin\theta\cos\omega t,\quad y = R\sin\theta\sin\omega t,\quad z = -R\cos\theta$$

圆环的动能：

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(R^2\omega^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2)$$

圆环的势能：

$$V = mgz = -mgR\cos\theta$$

体系的拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{m}{2}R^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mgR\cos\theta$$

虽然约束是不稳定的,但选用 $\theta$ 作广义坐标,使拉氏函数仍不是时间的显函数.

拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=mR^2\ddot{\theta}-mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mgR\sin\theta=0$$

由此得

$$\ddot{\theta}=\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{R}\sin\theta=\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{g}{\omega^2R}\right) \tag{1}$$

两边对 $\theta$ 积分一次,并移项后得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\omega^2\cos\theta\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{g}{\omega^2R}\right)=\varepsilon=\text{常数}$$

或写成

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+U(\theta)=\varepsilon$$

这类似于自由质点在势场中做一维运动的机械能守恒方程.其中

$$U(\theta)=\omega^2\cos\theta\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{g}{\omega^2R}\right) \tag{2}$$

则起着关于 $\theta$ 变量的有效势功能.可根据 $U(\theta)$ 的极值状况来讨论小球的平衡状况.平衡条件为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}=-\omega^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{g}{\omega^2R}\right)=0$$

由 $\sin\theta=0$,显然可得两个平衡位置的解:$\theta_1=0$ 和 $\theta_2=\pi$.此外,$\cos\theta-\frac{g}{\omega^2R}=0$ 也是平衡点条件,但 $\cos\theta$ 的最大值为 1,故只有当圆环的角速度满足条件:$\omega^2\geqslant g/R$ 时,才能存在另一平衡位置:

$$\theta_3=\arccos\left(\frac{g}{\omega^2R}\right) \tag{3}$$

小球在圆环上的平衡位置与圆环转动的角速率 $\omega$ 之间的关系,如图 L6.5(b)所示.易见,不管圆环的角速度有多大,圆环的最低点($\theta=0$)和最高点($\theta=\pi$)总是小球的平衡位置.但在 $\omega=\sqrt{g/R}$ 处又开始增添了由(3)式表示的平衡位置,并随着 $\omega$ 的增大平衡位置 $\theta_3$ 的值向 $\pi/2$ 逐渐靠近.这就是说,当 $\omega=\sqrt{g/R}$ 时,小球的平衡点在 $\theta=0$ 的位置**分岔**为 $\theta=0$ 和 $\theta_3$ 两个位置.

下面讨论小球的三个平衡位置的稳定性.由

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}=\omega^2\left(1-2\cos^2\theta+\frac{g}{\omega^2R}\cos\theta\right)$$

对平衡点 $\theta=\theta_1=0$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}=\frac{g}{R}-\omega^2$$

则分两种情形:当 $\omega>\sqrt{g/R}$ 时,上式右方 $<0$ 表明最低点是不稳定平衡点;当 $\omega<\sqrt{g/R}$ 时,上式右方 $>0$,球在圆环最低点是稳定平衡的.

对平衡点 $\theta_2=\pi$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pi}=-\omega^2\left(1+\frac{g}{\omega^2R}\right)<0$$

即小球在圆环最高位置肯定是不稳定平衡.

对平衡点 $\theta_3 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = \omega^2\left[1-\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)^2\right]$

只有满足条件 $\omega^2 \geqslant g/R$ 时才会出现这一平衡点,上式右方 $>0$;$\theta_3$ 是稳定平衡位置.

图 L6.5(b)中,稳定平衡点随 $\omega$ 的关系用粗线表示;虚线则表示不稳定平衡位置.

若采用随圆环转动的坐标系,比较小球受到的重力和惯性力的相对大小,读者就不难理解上述各平衡位置的稳定性了.

[评注] 本题仍按例 6.4 的评注中所建议的步骤求解,目的是让初学者熟悉解题过程.本题研究的对象,是仅具有一个质点的简单力学系,是很容易用独立参量 $\theta$ 写出小球的动能表示式的.小球作为质点,它的绝对速度是相对于圆环的速度与随圆环转动的速度之和:

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{\omega} = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + R\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

这里 $\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 分别是 $\theta$ 方向和圆环转动方向的单位矢量.这样,立即可得小球的动能为

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2\sin^2\theta)$$

[例 6.6] 一质量为 $m$,半径为 $r$ 的均质圆柱体沿一斜劈的斜面无滑动地滚下,斜劈则放置在光滑的水平面上,如图 L6.6 所示.已知,斜劈的质量为 $m'$,劈角为 $\alpha$.(i) 写出柱体和斜劈系统的拉格朗日函数,(ii) 柱体自静止沿斜面滚动了 $n$ 圈时,斜劈的速度 $\boldsymbol{v}$ 和柱体滚动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$.

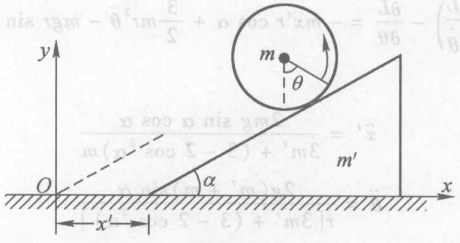



图 L6.6

[解] 取坐标系如图 L6.6 所示,以 $x'$、$y'$ 为斜劈尖端的坐标;$x$、$y$ 为柱体轴心的坐标,$s$ 为柱体轴心离斜劈尖端的距离(初始时刻为 $s_0$)以及 $\theta$ 是柱体滚动的角度.从图可知存在约束关系:

$$s = s_0 - r\theta, \quad \dot{s} = -r\dot{\theta}$$

$$x = x' + s\cos\alpha, \quad \dot{x} = \dot{x}' + \dot{s}\cos\alpha = \dot{x}' - r\dot{\theta}\cos\alpha$$

$$y = s\sin\alpha, \quad \dot{y} = \dot{s}\sin\alpha = -r\dot{\theta}\sin\alpha$$

$$y' = 0, \quad \dot{y}' = 0$$

由此可见体系只有两个独立参量,这里取 $x'$ 和 $\theta$,作为广义坐标;$\theta$ 确定了柱体在斜面上的位置,$x'$ 则确定斜劈的位置,这二参量已能完全确定体系的位形.

体系的动能为

$$T = \frac{m'}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{m'}{2}\dot{x}'^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 - 2\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha + \dot{\theta}^2 r^2) + \frac{m}{4}r^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{m+m'}{2}\dot{x}'^2 - m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

这里已取柱体绕轴线的转动惯量 $J = mr^2/2$.

体系的势能为

$$V = m'gy' + mgy = mgs\sin\alpha$$
$$= -mgr\theta\sin\alpha + mgs_0\sin\alpha \tag{2}$$

(i) 体系的拉格朗日函数

$$L = T - V$$
$$= \frac{(m'+m)}{2}\dot{x}'^2 - m\dot{x}'\dot{\theta}r\cos\alpha + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\theta\sin\alpha - mgs_0\sin\alpha \tag{3}$$

它不是 $x'$ 的函数,故 $x'$ 是循环坐标. 立即可得关于广义坐标 $x'$ 的广义动量积分:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = (m'+m)\dot{x}' - mr\dot{\theta}\cos\alpha = 0 \tag{4}$$

这里已用到了初始条件;初始时,$\dot{x}' = 0$, $\dot{\theta} = 0$. 实际上这个方程即是体系在 $x$ 方向动量分量的守恒方程.

(ii) 拉格朗日方程组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x'} = (m'+m)\ddot{x}' - mr\ddot{\theta}\cos\alpha = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\ddot{x}'r\cos\alpha + \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} - mgr\sin\alpha = 0 \tag{6}$$

解之得

$$\ddot{x}' = \frac{2mg\sin\alpha\cos\alpha}{3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)m} \tag{7}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g(m'+m)\sin\alpha}{r[3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)]} \tag{8}$$

注意 $$\ddot{x}' = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{x}'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(m'+m)}{mr\cos\alpha}\dot{x}'\frac{\mathrm{d}\dot{x}'}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(m'+m)}{mr\cos\alpha}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}'^2}{d\theta}$$

这里已应用了关系式(4). 将(7)式代入上式左方,得

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}'^2}{\mathrm{d}\theta} = \frac{4m^2rg\cos^2\alpha\sin\alpha}{(m'+m)[3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}$$

两边对 $\theta$ 积分;柱体在斜面上滚动 $n$ 圈,$\theta$ 转过 $2n\pi$ 角度. 则

$$\int \mathrm{d}\dot{x}'^2 = \frac{4m^2rg\cos^2\alpha\sin\alpha}{(m'+m)[3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}\int_0^{2n\pi}\mathrm{d}\theta$$

得柱体滚动 $n$ 圈后

$$\dot{x}' = \sqrt{\frac{8n\pi m^2rg\cos^2\alpha\sin\alpha}{(m'+m)[3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}}$$

即得斜劈的速度为

$$v = \dot{x}'i = \sqrt{\frac{8n\pi m^2rg\cos^2\alpha\sin\alpha}{(m'+m)[3m' + (3 - 2\cos^2\alpha)m]}}i$$

同样,由(8)式对 $\theta$ 积分后,得

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{8n\pi(m'+m)g\sin\alpha}{r[3m'+(3-2\cos^2\alpha)m]}}$$

柱体滚动 $n$ 圈后，柱体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k} = \sqrt{\frac{8n\pi(m'+m)g\sin\alpha}{r[3m'+(3-2\cos^2\alpha)m]}}\boldsymbol{k}$$

［例 6.7］ 试用分析力学方法求解例 5.13——铅笔竖直旋转的稳定性问题.

［解］ 取坐标系与例 5.13 同，如图 L6.7 所示.

$$\boldsymbol{e}_\zeta = \sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

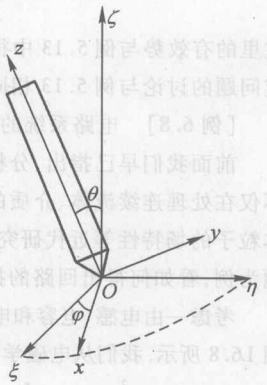



图 L6.7

角速度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta + \dot{\psi}\boldsymbol{k}\\ &= \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}\\ &= \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

初始条件：

$$t = 0\text{ 时},\quad \theta = 0,\quad \omega_z = \omega_0$$

铅笔定点转动时的拉氏函数为

$$\begin{aligned}L &= T - V\\ &= \frac{J_*}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{J_z}{2}\omega_z^2 - V\\ &= \frac{J_*}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{J_z}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta \qquad (1)\end{aligned}$$

以三个角量 $\theta$、$\varphi$、$\psi$ 为广义坐标. 对应于 $\theta$ 的拉格朗日方程是

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta}\\ &= J_*\ddot{\theta} - J_*\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + J_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta - mgl\sin\theta \qquad (2)\\ &= 0\end{aligned}$$

从拉氏函数看到，$\varphi$ 和 $\psi$ 都是循环坐标，具有相应的广义动量积分，

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = J_*\dot{\varphi}\sin^2\theta + J_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = J_z\omega_0 \qquad (3)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = J_z(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = J_z\omega_0 \qquad (4)$$

这里已应用了初始条件. 由(3)式和(4)式，得到

$$\omega_z = (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = \omega_0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J_z\omega_0(1-\cos\theta)}{J_*\sin^2\theta}$$

以此关系代入(2)式，可得

$$\begin{aligned}J_*\ddot{\theta} &= \frac{J_z^2\omega_0^2}{J_*}\left(\frac{(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\sin^2\theta}\right) + mgl\sin\theta\\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{J_z^2\omega_0^2}{J_*}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta\right) \qquad (5)\end{aligned}$$

此式很容易对 $\theta$ 积分得

$$\frac{J_*}{2}\dot{\theta}^2+\frac{J_z^2\omega_0^2}{J_*}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta}+mgl\cos\theta=E \tag{6}$$

这里 $E$ 是积分常数. 无论从“运动方程”(5)式还是“能量方程”(6)式,跟一维运动相比较,可以引进有效势:

$$U(\theta)=\frac{J_z^2\omega_0^2(1-\cos\theta)^2}{2J_*\sin^2\theta}+mgl\cos\theta \tag{7}$$

这里的有效势与例 5.13 中得到的有效势(4)式 ,除相差一个常量外,完全一致. 下面关于稳定问题的讨论与例 5.13 相同,请读者自己查阅.

[例 6.8] 电路系统的动力学模拟

前面我们早已指出,分析力学具有某种公理特性,很容易推广应用到许多其他学科中去. 不仅在处理连续流体、介质的弹性场等理论研究和工程问题中得到广泛应用,也在电磁场、基本粒子的场特性等近代研究领域扮演重要角色. 作为一点启示,这里以最简单的电流回路问题为例,看如何得出回路的拉格朗日方程,从而导出电路方程的.

考虑一由电感、电容和电阻组成的 $LCR$ 回路,其中串接有随时间变化的外电动势 $\mathscr{E}(t)$,如图 L6.8 所示. 我们从电磁学知道,电容器 $C$、电感线圈 $L$ 中分别储存有电能 $\frac{q^2}{2C}$ 和磁能 $\frac{L}{2}i^2$. $q$ 和 $i$ 分别是电容器极板上的电荷和电路中的电流; $i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$. 电阻是晶格对定向电子的散射作用,导致电势降低 $-Ri$;外电动势 $\mathscr{E}(t)$ 提升电路的电势.

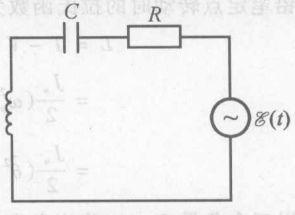


图 L6.8

如果我们把电荷 $q$ 作为电路系统的广义坐标,那么电流 $i=\dot{q}$ 就可比拟为广义速度;电感线圈储存的能量 $\frac{L}{2}i^2=\frac{L}{2}\dot{q}^2$ 比作系统的动能,电容器储存的能量 $\frac{q^2}{2C}$ 对应于势能(与弹性势能 $\frac{k}{2}x^2$ 类似);以电势差为体系受到的力,其中 $-Ri$ 为耗散力、$\mathscr{E}(t)$ 则是驱动力. 按(6.39)式,耗散力相应的瑞利耗散函数是 $\frac{R}{2}i^2$;驱动力 $\mathscr{E}(t)$ 与广义坐标 $q$ 无关,是“有势力”,与其相应的势函数当可写为 $-\mathscr{E}(t)q$. 这个电路系统恰似与一弹簧连接的质点,受随时间变化的引力作用,浸在具有黏性的液体中做一维运动的力学系. 因而有理由设想,电路系统的拉格朗日函数写为

$$L=T-V=\frac{L}{2}i^2-\left[\frac{q^2}{2C}-\mathscr{E}(t)q\right] \tag{1}$$

耗散函数

$$\Phi=\frac{R}{2}\dot{q}^2 \tag{2}$$

按(6.40)式,此耗散系统的拉格朗日方程为

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}(t) \tag{3}$$

这正是我们熟知的电路方程.

需要指出,我们在上面将图 L6.8 所示的电路系统与一受阻尼的强迫振动力学系作对照比拟,完全是为了便于理解. 事实上,无论是电路系统的拉格朗日函数(1)式,还是拉格朗日

方程(3)式中,都只有电磁学量出现,根本就不存在力学量.这是纯粹的电磁系统!我们希望通过这个例子,读者能体会到由于分析力学的公理特性,是可以如何方便地推广应用到其他学科中去的.当今许多工程技术问题,机电网络的设计都应用着分析动力学方法.

## *§6.5 微小振动

自然界中的力学系统大多是较为复杂的非线性系统,不大可能对其运动作出完整的一般解.作为求解的试探,常常是对系统相对其平衡位置微小偏离的运动求解.这时可以对系统的有关物理量在平衡位置附近作线性展开,使非线性问题近似成为线性问题,使之易于求解.这是物理学中常用的线性化手段.有一些系统本身就是在其平衡位置附近运动的.例如分子或晶格处的原子,通常它们就在各自的平衡位置附近做微小振动.

以简单的单摆来说,便是一个非线性系.如图 6.4 所示,设摆锤质量为 $m$,摆长为 $l$.采用极坐标,我们熟知单摆的运动方程为

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

显然,它是关于 $\theta$ 的二阶非线性微分方程.

单摆的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

以最低点 $O$ 为势能零点时,单摆的势能为

$$V = mgl(1-\cos\theta)$$

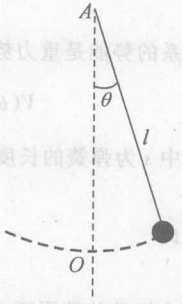


图 6.4

虽然这是个简单的非线性系运动问题,可以得到严格的解析解,但也要用到较为复杂的椭圆函数.要是只讨论单摆在铅直平衡位置附近的微小摆动,求解就非常简单了.这时 $\theta$ 是一个小量,可取近似:$\sin\theta\approx\theta$,$1-\cos\theta\approx\theta^2/2$.这样,运动方程便得以线性化,成为熟知的简谐运动微分方程:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

单摆仅是在微小摆动时做简谐运动.单摆系统做微小摆动的拉格朗日函数则为

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

动能和势能分别是广义速度 $\dot{\theta}$ 和广义坐标 $\theta$ 的平方项.

单摆做微小摆动时的简谐运动,我们已经非常熟悉,无需继续讨论.下面让我们先讨论耦合摆的微振动问题.通过这一例子,使读者可以了解到力学系微小振动的主要特征和求解过程.然后,在此基础上,再介绍对一般的力学体系在平衡位置附近小振动问题求解.

### (一)耦合摆的微振动

如图 6.5 所示,这里的耦合摆由两个相同的单摆平行悬挂,摆锤间用一轻质弹簧相连构成.设摆锤的质量为 $m$,摆长为 $l$.两摆锤平行下垂时弹簧呈自然长度 $s_0$;弹簧劲度系数为 $k$,它的质量忽略不计.显然二摆都垂直下挂时,系统处于能量最小的平衡状态.现在来求解耦合

摆在平衡位置附近做微小摆动时的运动.虽然这只是两个自由度的,较为简单的力学系,但它包含了处理非线性力学系在平衡位置附近做微振动的主要过程.

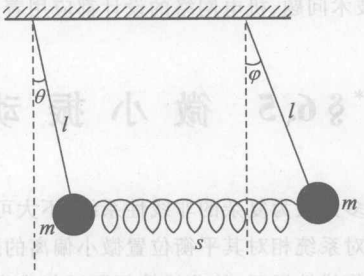



图 6.5

设耦合摆在自身的铅直平面内做微小摆动,两摆锤摆动的角度分别为 $\theta$ 和 $\varphi$,这两个独立变量确定了系统的位形,可作为的广义坐标.系统的动能为

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \tag{6.43}$$

体系的势能是重力势能和弹簧的弹性势能之和:

$$V(\theta,\varphi) = mgl[(1-\cos\theta) + (1-\cos\varphi)] + \frac{k}{2}(s-s_0)^2 \tag{6.44}$$

式中 $s$ 为弹簧的长度,根据几何关系很容易求出它与 $\theta$ 和 $\varphi$ 的函数关系:

$$\boldsymbol{s} = l(\cos\theta - \cos\varphi)\boldsymbol{i} + l(\sin\varphi - \sin\theta)\boldsymbol{j} + s_0\boldsymbol{j} \tag{6.45}$$

由此

$$s^2 = [s_0 + l(\sin\varphi - \sin\theta)]^2 + l^2(\cos\theta - \cos\varphi)^2 \tag{6.46}$$

在小振动的情形下,$\theta$ 和 $\varphi$ 都是很小的量,可以对势能 $V(\theta,\varphi)$ 在系统的平衡位置附近展开,保留到 $\theta$、$\varphi$ 的二次项.注意,在平衡位置处 $\theta=\varphi=0$,$s=s_0$,则

$$V(\theta,\varphi) = V(0) + \left(\left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_0 \theta + \left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_0 \varphi\right) + \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_0 \theta^2 + 2\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi}\right|_0 \theta\varphi + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_0 \varphi^2\right) + \cdots \tag{6.47}$$

由势能函数(6.44)式,易知

$$V(0) = V(\theta=0,\varphi=0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_0 = \left[mgl\sin\theta + k(s-s_0)\frac{\partial s}{\partial\theta}\right]\Bigg|_0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_0 = \left[mgl\sin\varphi + k(s-s_0)\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right]\Bigg|_0 = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_0 = \left[mgl\cos\theta + k\left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)^2 + k(s-s_0)\frac{\partial^2 s}{\partial\theta^2}\right]\Bigg|_0 = mgl + kl^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_0 = mgl + kl^2$$

由(6.46)式,$\left(s\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)_0 = s_0\left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)_0 = -s_0 l$;从而,$\left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)_0 = -l$,同样可得 $\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)_0 = l$.

由此

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi}\right|_0 = \left[k\frac{\partial s}{\partial\theta}\frac{\partial s}{\partial\varphi} + k(s-s_0)\frac{\partial^2 s}{\partial\theta\partial\varphi}\right]_0 = -kl^2$$

将上列各关系式带代入(6.47)式,得耦合摆微小振动时的势能函数近似为

$$V(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}mgl(\theta^2+\varphi^2) + \frac{k}{2}l^2(\theta^2-2\theta\varphi+\varphi^2) \tag{6.48}$$

最后可得体系微振动的拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}ml(\dot\theta^2+\dot\varphi^2) - \frac{1}{2}mgl(\theta^2+\varphi^2) - \frac{k}{2}l^2(\theta^2-2\theta\varphi+\varphi^2) \end{aligned} \tag{6.49}$$

关于 $\theta$ 和 $\varphi$ 的拉氏方程分别是

$$\ddot\theta + \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)\theta - \frac{k}{m}\varphi = 0 \tag{6.50a}$$

$$\ddot\varphi - \frac{k}{m}\theta + \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)\varphi = 0 \tag{6.50b}$$

这是二阶常系数线性微分方程组,可以期望它具有振动类型的解:

$$\theta = A_\theta e^{i\omega t};\quad \varphi = A_\varphi e^{i\omega t}$$

将其代入(6.50)式,可得关于 $A_\theta$、$A_\varphi$ 的齐次代数方程组:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2\right)A_\theta - \frac{k}{m}A_\varphi &= 0 \\ -\frac{k}{m}A_\theta + \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2\right)A_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{6.51}$$

$A_\theta$、$A_\varphi$ 具有非零解的必要条件是它们的系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

这是关于角频率 $\omega$ 的 4 次方程,容易求得其 4 个特征根为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}},\quad \omega_4 = -\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

这些频率都只与耦合摆自身装置的参量($m$、$l$ 和 $k$)有关,因而称为耦合摆的固有频率或本征频率.似乎将某一个本征值 $\omega_\alpha$ 代入(6.51)式,就可解出与之相应的常数 $A_\theta^{(\alpha)}$ 和 $A_\varphi^{(\alpha)}$.然而由于(6.51)式是齐次线性方程,这两系数不是独立的,只能解出它们的比值.例如由(6.51)的第一式,可得

$$\frac{A_\theta^{(\alpha)}}{A_\varphi^{(\alpha)}} = \frac{k}{m}\Big/\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega_\alpha^2\right)$$

以 $\omega_1$ 或 $\omega_2$ 代入得 $\dfrac{A_\theta^{(1,2)}}{A_\varphi^{(1,2)}} = 1$;将 $\omega_3$、$\omega_4$ 代入则 $\dfrac{A_\theta^{(3,4)}}{A_\varphi^{(3,4)}} = -1$.可见,两个常数中只有一个是可以任意取的.由(6.51)中的第二式也得到同样的结果.这是因为联立代数方程组(6.51)的系数行立式为零,二代数方程不独立的缘故.

微分方程组(6.50)的一般解可写成如下的线性组合形式:

$$\begin{aligned}\theta &= A_\theta^{(1)} e^{i\omega t} + A_\theta^{(2)} e^{-i\omega t} + A_\theta^{(3)} e^{i\omega' t} + A_\theta^{(4)} e^{-i\omega' t}\\ \varphi &= A_\theta^{(1)} e^{i\omega t} + A_\theta^{(2)} e^{-i\omega t} - A_\theta^{(3)} e^{i\omega' t} - A_\theta^{(4)} e^{-i\omega' t}\end{aligned} \tag{6.52}$$

式中已注意到各本征频率的值和系数 $A_\theta^{(\alpha)}$ 的任意性,并令

$$\begin{cases}\omega = \omega_1 = -\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}\\ \omega' = \omega_3 = -\omega_4 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}\end{cases} \tag{6.53}$$

(6.52)式中解的四个组合系数 $A_\theta^{(1)}$、$A_\theta^{(2)}$、$A_\theta^{(3)}$ 和 $A_\theta^{(4)}$ 可由初始条件确定.

下面讨论一特定初始条件下的情形.设初始时仅是左边的摆向右方偏离平衡位置一微小角度 $\theta_0$,即初始条件为

$$t = 0 \text{ 时 } \theta = \theta_0,\quad \varphi = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0 \tag{6.54}$$

代入(6.52)式即可求得

$$A_\theta^{(1)} = A_\theta^{(2)} = A_\theta^{(3)} = A_\theta^{(4)} = \frac{\theta_0}{4}$$

从而得出耦合摆做小振动时的解

$$\begin{cases}\theta = \dfrac{\theta_0}{2}(\cos \omega t + \cos \omega' t)\\ \varphi = \dfrac{\theta_0}{2}(\cos \omega t - \cos \omega' t)\end{cases} \tag{6.55}$$

如果再令

$$\omega_A = \frac{\omega' - \omega}{2},\quad \omega_B = \frac{\omega' + \omega}{2} \tag{6.56}$$

则又可将解写为

$$\begin{cases}\theta = \theta_0 \cos \omega_A t \cos \omega_B t\\ \varphi = \theta_0 \sin \omega_A t \sin \omega_B t\end{cases} \tag{6.57}$$

表明耦合的两个摆都分别在做调幅振动.注意 $\omega_B > \omega_A$,调幅振动的基本频率为 $\omega_B$,调幅频率是 $\omega_A$,如图 6.6 所示.可以看到两个摆的摆动是消长互补的.一个摆的振动变小时,另一摆的振动则变大;当一个摆的振幅减小为零时,另一个摆的振幅则达到最大值.这说明通过弹簧的耦合,振动能量在两摆之间往返传递.

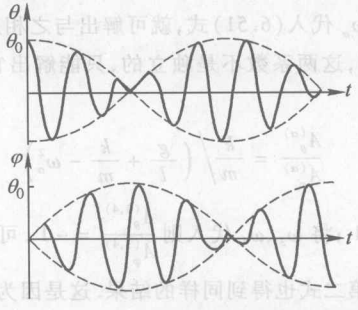



图 6.6

### （二）简正坐标

前面已经看到耦合摆的两个摆的摆动相互关联着，不是独立的. 原因是势能表达式(6.48)中存在 $\theta$ 和 $\varphi$ 的乘积项. 进一步探讨发现，只要对两摆的振动坐标（$\theta$ 和 $\varphi$）适当地线性组合，成为新的广义坐标参量，就可使动能表达式表示为新广义速度平方和的形式，同时又能使势能函数中也不出现广义坐标的交叉（乘积）项. 对所讨论的具体耦合摆来说，这种坐标变换不难得到. 若令

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta + \varphi), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta - \varphi) \tag{6.58}$$

将此坐标（参量）变换关系代入(6.48)及(6.49)，分别得出势能函数和拉氏函数：

$$V(\xi,\eta) = \frac{1}{2}mgl\xi^2 + \frac{1}{2}mgl\left(1 + \frac{2kl}{m^2g}\right)\eta^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{1}{2}mgl\xi^2 - \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\eta^2$$

这样，动能、势能或拉氏函数分别都只包含广义速度及广义坐标的平方项，不再存在交叉乘积项，显然这是两个独立振子的拉格朗日函数. 相应地由拉氏方程给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\dfrac{g}{l}\xi \\ \ddot{\eta} = -\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}\right)\eta \end{cases} \tag{6.59}$$

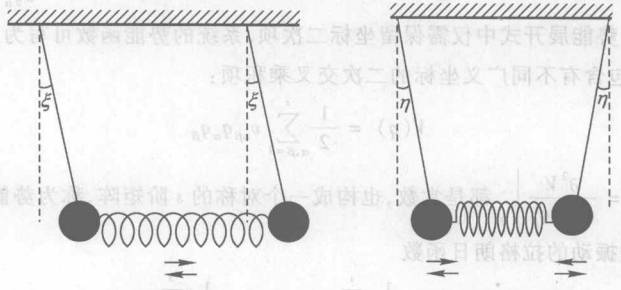
两个独立的简谐振动微分方程，其解为两个独立的简谐振动：

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad \eta = \eta_0 \cos(\omega' t + \beta) \tag{6.60}$$

式中 $\xi_0$、$\eta_0$、$\alpha$ 和 $\beta$ 都是积分常数，由初始条件确定；$\omega$ 和 $\omega'$ 的值如(6.53)式. 如前所述，若取初始条件(6.54)式，即得

$$\xi = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \quad \eta = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}\cos\omega' t$$

实际上，这个解由变换关系(6.58)式直接从(6.55)式便可得出. 这两个独立简谐振动分别代表以不同的本征频率振动的两个独立振动模式. 这些独立的简谐振动模式有时被称为体系的**简正（振动）模式**或**简正振动**. 简正振动的频率是体系的本征频率，称为**简正频率**. 与简正振动相对应的（广义）坐标 $\xi$、$\eta$ 称为**简正坐标**. 由(6.58)式易知，这两种简正模式分别是两个摆的“整体”振动模式和“相对”振动模式. 如图 6.7 所示，它们具有不同的本征频率. 每一种简




(a) 整体运动　　(b) 相对运动

图 6.7

正模式振动都是整个耦合摆的整体振动效果，而不属于任何一个具体的单摆. 也就是说，耦合摆的小振动既可以从两个摆的振动 $\theta(t)$ 和 $\varphi(t)$ 去考察，或者表示成(6.60)式那样的两种独立简谐振动模式 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$.

### (三) 一般力学体系的微振动

前面讨论的耦合摆系统是仅具有两个自由度的较为简单的力学系统，但对其处理的主要过程，可向多自由度的一般体系推广. 下面的讨论过长读者可与前述耦合摆的求解过程一一对照.

对于一个自由度为 $s$ 的微振动力学体系，求解的第一步是建立该系统在平衡附近做微小振动时的拉格朗日函数.

一般来说体系的动能是广义坐标和广义速度的函数，在稳定约束条件下，动能是广义速度的二次齐次函数；在动能表达式中除出现广义速度的平方项外，还包含有不同广义速度的二次交叉乘积项，即具有如下形式：

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\tau_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \tag{6.61}$$

式中系数 $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\alpha\beta}(q)$ 是 $s$ 个广义坐标的函数. 讨论系统在平衡位置附近微振动时，可将其在平衡位置附近作级数展开，

$$\tau_{\alpha\beta}(q) = \tau_{\alpha\beta}(0) + \sum_{\gamma=1}^{s}\left.\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}(q)}{\partial q_\gamma}\right|_0 q_\gamma + \cdots$$

这里设体系在平衡位置处，各广义坐标为零；式中的诸 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 都是广义坐标相对于平衡位置的偏离，它们都是小量. 展开式中仅需保留数值最大的第一项(常数)，略去其余较小的高阶项，即

$$\tau_{\alpha\beta}(q) \approx \tau_{\alpha\beta}(0) \tag{6.62}$$

今后(6.61)式广义速度二次中的系数 $\tau_{\alpha\beta}$，都认为是常数 $\tau_{\alpha\beta}(0)$. 显然，可以把这 $s\times s$ 个些常系数 $\tau_{\alpha\beta}(0)$ $(\alpha,\beta=1,2,\cdots,s)$ 排成 $s$ 阶的对称矩阵，称为**动能系数矩阵**.

同样，对系统的势能函数，也在平衡位置附近展开成级数：

$$V(q) = V(0) + \sum\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_0 q_\alpha + \frac{1}{2!}\sum\sum\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right|_0 q_\alpha q_\beta + \cdots$$

以平衡位置处的势能为零点，$V(0)=0$ 平衡位置处是势能的极值，必有 $\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_0 = 0(\alpha = 1,2,\cdots,s)$. 因此，势能展开式中仅需保留坐标二次项. 系统的势能函数可写为广义坐标的二次齐次函数，通常包含有不同广义坐标的二次交叉乘积项：

$$V(q) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}v_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \tag{6.63}$$

式中诸系数 $v_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right|_0$ 都是常数，也构成一个对称的 $s$ 阶矩阵，称为**势能系数矩阵**.

写出系统微振动的拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\tau_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}v_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \tag{6.64}$$

由拉格朗日方程，即得体系在平衡位置附近运动的动力学方程组：

$$\sum_{\beta=1}^{s}(\tau_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + v_{\alpha\beta}q_\beta) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.65}$$

这是 $s$ 个相互耦合的二阶常系数线性微分方程，可设解具有以下形式：

$$q_\alpha = A_\alpha e^{i\omega t} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.66}$$

将其代入微分方程组(6.65)式，即得关于系数 $A_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 的代数方程组：

$$\sum_{\beta=1}^{s}(v_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}\omega^2)A_\beta = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.67}$$

这是 $s$ 个方程联立的齐次代数方程组. 具有非零解的必要条件是其系数行列式为零.

$$\begin{vmatrix} v_{11}-\tau_{11}\omega^2 & v_{12}-\tau_{12}\omega^2 & \cdots & v_{1s}-\tau_{1s}\omega^2 \\ v_{21}-\tau_{21}\omega^2 & v_{22}-\tau_{22}\omega^2 & \cdots & v_{2s}-\tau_{2s}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{s1}-\tau_{s1}\omega^2 & v_{s2}-\tau_{s2}\omega^2 & \cdots & v_{ss}-\tau_{ss}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.68}$$

这是关于 $\omega$ 的 $2s$ 阶方程. 由这些方程可解出 $2s$ 个本征频率 $\omega_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,2s)$. 将某一本征值(例如 $\omega_\alpha$)，代入方程组(6.67)式，去求解相应的 $s$ 个系数 $A_\beta^{(\alpha)}(\beta=1,2,\cdots,s)$ 的值(本征矢量). 然而，因为方程组(6.67)的系数行列式为零，实际上这些系数不是相互独立的，求得的只是它们的比值关系；其中只有一个系数是可以任意取的，将他设为 $A^{(\alpha)}$. 对应于 $2s$ 个本征频率就有 $2s$ 个任意常数 $A^{(\alpha)}(\alpha=1,2,\cdots,2s)$. 至于方程组(6.55)的一般解，则是对应于 $2s$ 个本征频率的指数型特解的线性组合：

$$q_\beta = \sum_{\alpha=1}^{2s} A^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad (\beta = 1,2,\cdots,s) \tag{6.69a}$$

这里的 $2s$ 个线性组合系数 $A^{(\alpha)}(\alpha=1,2,\cdots,2s)$ 可以由体系的广义坐标和广义速度的初始值 $q_{\alpha 0}$、$\dot{q}_{\alpha 0}(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 来确定. 一般地，$2s$ 个本征频率中两两数值相等、互为正负. 因此通解(6.69a)式也可写成三角函数的形式

$$q_\beta = \sum_{\alpha=1}^{s}(a_\alpha \sin\omega_\alpha t + b_\alpha \cos\omega_\alpha t) \qquad (\beta = 1,2,\cdots,s) \tag{6.69b}$$

同样，这里的 $2s$ 个组合系数 $a_\alpha$、$b_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 由初始条件确定.

还可以引进体系的简正坐标. 对体系的广义坐标线性组合，即作坐标变换：

$$\xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s} c_\beta(\alpha) q_\beta \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.70}$$

坐标变换的目的是，在新的广义坐标下，既能在体系的动能的表达式中消除广义速度的乘积项，只包含它们的平方项，又使势能仅含广义坐标的平方项. 即要求动能的系数矩阵和势能的系数矩阵都对角化. 由于这两个系数矩阵都是实矩阵，且动能的系数矩阵是正定的，从线性代数理论的角度，上述的要求总能办到. 这样，体系的拉格朗日函数便具有如下的形式：

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}(t_\alpha \dot{\xi}_\alpha^2 - v_\alpha \xi_\alpha^2) \tag{6.71}$$

相应的拉氏方程组必是 $s$ 个相互独立的简谐振动微分方程：

$$\ddot{\xi}_\alpha + \frac{v_\alpha}{t_\alpha}\xi_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.72}$$

这里每一方程的解都具有简谐振动形式：

$$\xi_\alpha = A_\alpha \sin(\omega_\alpha t + \theta_\alpha) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.73}$$

其中本征频率

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{v_\alpha}{t_\alpha}} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.74}$$

这里的 $2s$ 个常数 $A_\alpha$、$\theta_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 由初始条件确定. 体系的这些按本征频率做独立简谐振动的广义坐标，就是体系的简正坐标. 体系在平衡位置附近的微小振动是这些简正振动的合成.

分子、晶体中的原子是以静电力相互作用着的多粒子力学系统. 讨论原子在其平衡位置附近的微小振动，是分子物理和固体物理的重要课题之一. 特别在固体物理中，将耦合的原子振动表达为体系的简正振动具有非常重要的意义. 与每一简正模式对应的独立简谐振子的能量，从量子力学角度看，是量子化的. 固体中属于整个原子振动体系的量子化简正模式，即是声子. 固体的许多特性与其中的声子行为有着密切关系.

## §6.6 哈密顿函数和正则方程

我们已经看到拉格朗日函数

$$L = L(q_1,q_2,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s;t) \tag{6.75}$$

在确定力学系的运动方面有着非常重要的地位，可认为它是表征力学系运动的一个特征函数. 拉格朗日函数是广义坐标、广义速度的函数；在不稳定约束或随时间变化的势场情形下，也可能是时间 $t$ 的显函数. 拉氏函数的函数关系(6.75)式表明，力学系任一瞬时的运动状态，是由广义坐标和广义速度来确定的. 从这个意义上讲，广义坐标和广义速度都是确定力学系运动状态的变量. 以前还曾指出，用动量代替速度来描述运动状态更具有物理意义，因此通常用广义坐标和广义动量作为确定力学系状态的变量. 为用广义动量来代替广义速度，先要寻求广义速度跟广义动量之间的关系. 由广义动量的定义(6.30)式

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \\ &= p_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s;t) \end{aligned} \tag{6.76}$$

即可得到 $s$ 个广义动量与广义坐标、广义速度的关系式，反过来也可从这 $s$ 个关系式解出广义速度跟广义坐标、广义动量之间的关系：

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha &= \dot{q}_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1,p_2,\cdots,p_s;t) \\ &= \dot{q}_\alpha(q,p;t) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \end{aligned} \tag{6.77}$$

下面，我们要寻找以广义坐标和广义动量为变量的力学系运动的特征函数.

### (一) 哈密顿函数

对拉格朗日函数(6.75)式作变分,注意 $\delta t=0$,则

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t\\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\dot q_\alpha\right)-\dot q_\alpha\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\right)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\delta(p_\alpha\dot q_\alpha)-\dot q_\alpha\delta p_\alpha\right)\end{aligned}$$

这里已应用了广义动量的定义(6.76)式.将上式右边的第二项移至左边,有

$$\delta\left(L-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\dot q_\alpha\delta p_\alpha\right)$$

等式右方变量 $q_\alpha$ 和 $p_\alpha$ 的变分情况提示我们,这个等式左方括号内的函数是以广义坐标和广义动量为变量的.由于 $L$ 可能是时间 $t$ 的显函数,这个函数当然也可能是 $t$ 的显函数.现在引进一个新的函数,定义为

$$\begin{aligned}H(q,p;t) &= H(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1,p_2,\cdots,p_s;t)\\ &= -L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha\end{aligned}\tag{6.78}$$

称为**哈密顿函数**[①],或**哈密顿量**(Hamiltonian).必须注意,哈密顿函数是广义坐标和广义动量的函数,故(6.78)式右边的广义速度(包括拉格朗日函数中的广义速度)$\dot q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$,都应看成是 $q$、$p$ 的函数,应以(6.77)式代入;在哈密顿函数中不应出现广义速度变量!

上面从拉格朗日函数 $L(q,\dot q;t)$ 作变量变换,变换成哈密顿函数 $H(q,p;t)$ 的过程中,实际上已用到了著名的**勒让德**(Legendre)**变换**.不仅这里要用勒让德变换,在第六章讲述正则变换时也要用到;后行课程"热力学"和其他学科中也常会遇到.为使读者对此有明确的印象,这里用仅包含两个独立变量的函数为例,简要地说明这一变换的过程和它的特点.

设某一以 $x$、$y$ 为独立变量的函数 $F=F(x,y)$,则有

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y$$

式中将函数 $F$ 对独立变量的偏导数记为

$$u=\frac{\partial F}{\partial x}=u(x,y),\quad v=\frac{\partial F}{\partial y}=v(x,y)\tag{6.79}$$

---

① 定义哈密顿函数为 $H=-L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha$,而不是 $L-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot q_\alpha$ 是为了使哈密顿函数更有物理意义,这在后面正文的讨论中可以看到,见(6.74)式.

现在希望将函数 $F(x,y)$ 变换成以它的一个变量及它对另一变量的偏导数，例如以 $x,v\left(=\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ 为独立变量的函数 $G(x,v)$. 为此首先解出

$$y = y(x,v)$$

注意到以 $x$、$v$ 为独立变量时

$$\mathrm{d}(vy) = y\mathrm{d}v + v\mathrm{d}y$$

式中

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$$

因而

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v + \mathrm{d}(yv)$$

或

$$\mathrm{d}G(x,v) = \mathrm{d}(F - yv) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v = \frac{\partial G}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial v}\mathrm{d}v$$

故需要寻求的，以 $x$、$v$ 为独立变量的函数是

$$G(x,v) = F(x,y(x,v)) - y(x,v)v \tag{6.80}$$

同理，要是想变换成以变量 $y$ 及偏导数 $u\left(=\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ 为独立变量的函数，那么仿照上式很容易得出此函数一定是

$$U(y,u) = (F - xu)_{x=x(y,u)} \tag{6.81}$$

虽然这里只是两个变量的函数变换，正如变换(6.78)导出哈密顿函数 $H$ 那样，很容易推广到多个变量的情形.

现在再回到对哈密顿函数的讨论.

作为例子，导出一自由质点在有心势场 $V(r)$ 中运动的哈密顿函数；按定义过程如下：

若采用平面极坐标系，质点的动能为

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{6.82}$$

力学系(质点)的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

广义动量为

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{6.83}$$

由此解出

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{6.84}$$

最后得哈密顿函数：

$$\begin{aligned} H(r,\theta;p_r,p_\theta) &= -L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha \\ &= -\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)+(m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+V(r) \end{aligned} \tag{6.85}$$

现在来看哈密顿函数在物理上具有什么特性.

力学系在稳定约束情形下，动能是广义速度的二次齐次函数，例如设体系仅有两个广义坐标 $q_1$ 和 $q_2$，则体系的动能将具有如下的形式：

$$T=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta=a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2$$

(6.82)式所示的质点动能，以及例 6.6 中(1)式所示的体系动能都是这样的形式. 由上式容易求得

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\dot{q}_1+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\dot{q}_2=2(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2)=2T$$

同样，对于具有 $s$ 个广义坐标的力学系在稳定约束情形下，动能与广义坐标 $\dot{q}_\alpha$ 的关系具有如下形式：

$$\begin{aligned} T &= a_{11}\dot{q}_1^2+a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\cdots+a_{1s}\dot{q}_1\dot{q}_s+a_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1+\cdots+a_{ss}\dot{q}_s^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \end{aligned} \tag{6.86}$$

由此得出

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=2\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta=2T \tag{6.87}$$

因而体系的动能为广义速度的二次齐次函数时，可导出哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H(q,p) &= -L+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha=-T+V+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \\ &= -T+V+2T=T+V \end{aligned} \tag{6.88}$$

可见在稳定约束情形下，哈密顿函数就是力学系的总机械能函数；从这里便可看出，哈密顿函数是力学系运动特性的一个重要特征函数，在近代物理中广泛地被应用.

前面所举的自由质点在有心势场中的运动，其哈密顿函数(6.85)式也可以直接由动能函数和势能函数的和(6.88)式来求得，当然动能函数(6.82)式中的广义速度应按(6.83)式、(6.84)式所示的代换步骤置换成广义动量.

对具有不稳定约束的力学系，动能则是广义速度的二次非齐次函数[①]；通常包含有广义速度的二次项、一次项和零次项，分别以 $T_2$、$T_1$ 和 $T_0$ 表示，即

$$T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{s} b_\alpha\dot{q}_\alpha + T_0 = T_2 + T_1 + T_0$$

这样

$$\begin{aligned} H(q,p;t) &= -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha\dot{q}_\alpha = -T + V + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \\ &= -(T_2 + T_1 + T_0) + V + 2T_2 + T_1 \\ &= T_2 - T_0 + V \end{aligned} \tag{6.89}$$

这时哈密顿函数虽然不是力学系的总机械能函数，但它依然是该力学系运动的一个特征函数.

**（二）哈密顿正则方程**

哈密顿函数 $H(q,p;t)$ 作为力学系的特征函数，是否也能像拉格朗日函数那样用来确定力学系的运动呢？

考察在无限小的时间变化 $\mathrm{d}t$ 内，哈密顿量的改变

$$\mathrm{d}H = -\mathrm{d}L + \sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha\mathrm{d}\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha) \tag{6.90}$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}(\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha + p_\alpha\mathrm{d}\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

这里已用到了拉格朗日方程(6.29)和广义动量(6.76)式. 将上式代入(6.79)式，即得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\mathrm{d}p_\alpha\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}(-\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha + \dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha) - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.91}$$

比较后面一个等式的两边，由于 $\mathrm{d}q_\alpha$ 和 $\mathrm{d}p_\alpha$ 都是独立的，可得到一组方程：

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.92}$$

---

① 用一个最简单的例子就说明白了：设一质点约束在以恒定速率 $c$ 上升的水平面 $z = ct$ 上运动，则此质点的动能为 $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{2}c^2 = T_2 + T_0$. 这是不稳定约束情形，动能表达式中包含有（广义）速度变量的二次项和零次项（常数项），而非速度变量的二次齐次函数.

这是共有 $2s$ 个相互联立的一阶常微分方程组，方程形式上简单而对称，故称为**哈密顿正则方程**，或简称**正则方程**. 结合初始条件，对这 $2s$ 个方程求解，即可得到 $s$ 个广义坐标和 $s$ 个广义动量作为时间 $t$ 的函数：

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(t) \\ p_\alpha = p_\alpha(t) \end{cases} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.93}$$

从而完全确定了力学系的运动状态. 由此可见正则方程即是力学系的运动方程. 哈密顿函数和拉格朗日函数一样，都是可以用来确定力学系运动的重要特征函数. 只是拉格朗日函数是以广义坐标和广义速度为体系的运动状态变量的，而哈密顿量则以广义坐标和广义动量为状态变量. 广义坐标和广义动量 $q_\alpha$、$p_\alpha$($\alpha = 1,2,\cdots,s$)称为力学系的**正则变量**. 由这 $2s$ 个独立的正则变量支撑的 $2s$ 维抽象空间，构成力学系的相空间. 任一瞬时力学系的广义坐标和广义动量确定了相空间中的一个点，称为**相点**，它标志着力学系的运动状态.

如果哈密顿函数或拉格朗日函数是时间 $t$ 的显函数，(6.80)式还给出关系：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

在某些情形下正则方程很容易获得一些第一积分.

首先考察哈密顿函数的时间变化率：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{6.94}$$

在推导过程中已用到了正则方程(6.92). 在稳定约束情形下，如果哈密顿函数不是时间的显函数，则$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，(6.94)式化为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t} = 0$$

立即可得熟知的力学系总机械能积分

$$T + V = E = \text{常量} \tag{6.95}$$

表明哈密顿函数不是时间的显函数时，例如在稳定约束和稳定势场情形下，力学系的总机械能守恒.

对于不稳定约束情形，便不能得到机械能积分，力学系的总机械能不守恒. 这是容易理解的，因为不稳定约束的约束力对力学系做了功(这时实际上已不是理想约束了)，力学系的机械能必然要改变.

再看，如果力学系的广义坐标有一些在哈密顿函数中不出现，即可得到相应

的广义动量积分. 例如设 $q_\beta$ 不出现,则由正则方程得

$$\dot{p}_\beta = -\frac{\partial H}{\partial q_\beta} = 0$$

即得相应的广义动量积分

$$p_\beta = C_\beta = 常量$$

在哈密顿函数中不出现的那些广义坐标,显然也不会出现在拉格朗日函数中,它们都是循环坐标;相应的广义动量积分就是循环积分.

正则方程组(6.92)似乎表明,只要给定了力学系的哈密顿函数 $H$,$2s$ 个正则方程的积分便确定了力学系的运动轨迹,这是所谓经典力学的确定论. 然而现在我们知道,并不是任何力学系的哈密顿函数都是可积分的. 对于那些不可积分的力学系来说,就可能出现随机的混沌行为.

对于较简单的力学系的力学问题,采用正则方程求解可能会比牛顿力学方法或拉格朗日方程要迂回复杂些,但正则方程形式对称简洁,更具有形式上的普适性,适宜于对力学系作纯理论的推理,在理论物理中有着重要地位. 哈密顿函数和正则方程也更适宜于推广应用到其他学科,近代物理的创始学科——量子力学的创建和发展与它有着密切的关系.

[例 6.9] 一质量为 $m$、半径为 $r$ 的圆柱体置于坡角为 $\alpha$ 的斜面上,柱轴用轻绳跨过坡顶的光滑滑轮与一质量为 $m'$ 的重物相联结,如图 L6.9 所示. 重物自静止开始下落,求重物的加速度和下落距离 $h$ 后的速度.

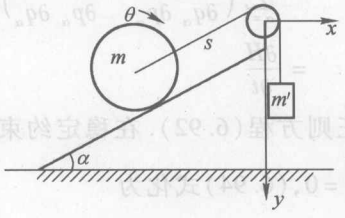



图 L6.9

[解] 设绳长为 $l$,柱体轴心离坡顶距离为 $s$,柱体滚动的角度为 $\theta$,重物下垂的距离是 $y$. 约束关系为

$$y + s = l, \quad \dot{y} = -\dot{s};$$
$$\dot{s} = -r\dot{\theta}$$

可见力学系仅需一个广义坐标;选取为重物的纵坐标 $y$ 为广义坐标.

力学系的动能为

$$T = \frac{m'}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{J}{2}\dot{\theta}^2$$

$$= \left(\frac{m'}{2} + \frac{m}{2} + \frac{m}{4}\right)\dot{y}^2 = \frac{(2m' + 3m)}{4}\dot{y}^2 \tag{1}$$

这里,已把圆柱体对轴的转动惯量 $J = mr^2/2$ 代入.

力学系的势能为

$$V = -m'gy - mgs\sin\alpha = -(m' - m\sin\alpha)gy - mgl\sin\alpha \tag{2}$$

与 $y$ 对应的广义动量为

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{(2m' + 3m)}{2}\dot{y}$$

由此得

$$\dot{y} = \frac{2}{(2m' + 3m)}p$$

将此代入动能表达式(1),注意到力学系在重力势场中运动,动能是广义速度 $\dot{y}$ 的二次齐次函数,力学系的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \frac{p^2}{(2m' + 3m)} - (m' - m\sin\alpha)gy - mgl\sin\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

由正则方程得

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2}{(2m' + 3m)}p \tag{4}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y} = (m' - m\sin\alpha)g \tag{5}$$

将(4)式的关系代入上式,有

$$\dot{p} = \frac{(2m' + 3m)}{2}\ddot{y} = (m' - m\sin\alpha)g$$

由此得

$$\ddot{y} = \frac{2(m' - m\sin\alpha)}{(2m' + 3m)}g$$

此式对坐标 $y$ 自 $y_0$ 至 $y_0 + h$ 积分,得

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{2(m' - m\sin\alpha)}{(2m' + 3m)}gh$$

其实这个积分可由能量积分(6.83)式直接得到.

最后得重物的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \ddot{y}\boldsymbol{j} = \frac{2(m' - m\sin\alpha)}{(2m' + 3m)}g\boldsymbol{j}$$

重物下落距离 $h$ 后的速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{y}\boldsymbol{j} = 2\sqrt{\frac{m' - m\sin\alpha}{(2m' + 3m)}gh}\,\boldsymbol{j}$$

**[例 6.10]** 一质量为 $m$ 的小环穿在一根光滑的水平钢丝上,一质量为 $m'$ 的小球用长 $l$ 的轻绳悬挂在小环上,如图 L6.10 所示.初始时整个系统处在静止状态,而后小球在钢丝所在的铅直面内摆动,并带动小环在钢丝上滑动.试由正则方程求出小球摆动的角度 $\theta$ 所满足的微分方程.

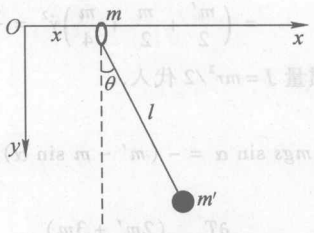



图 L6.10

[解] 由约束条件可知,对于小球和小环构成的力学体系,仅需两个独立参量便可确定其位形.这里以小环离坐标原点的距离 $x$ 及小球摆动的角度 $\theta$ 为广义坐标.

小球的坐标为

$$x' = x + l\sin\theta, \quad y' = l\cos\theta$$

力学系的动能为

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m'}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m'}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)$$

$$= \frac{(m+m')}{2}\dot{x}^2 + m'l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m'}{2}l^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

力学系的势能为

$$V = -m'gl\cos\theta \tag{2}$$

相应的广义动量为

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m+m')\dot{x} + m'l\dot{\theta}\cos\theta \tag{3}$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m'l\dot{x}\cos\theta + m'l^2\dot{\theta} \tag{4}$$

由(3)、(4)式解出

$$\dot{x} = \frac{1}{(m+m'\sin^2\theta)}\left(p_x - \frac{p_\theta}{l}\cos\theta\right) \tag{5}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{m'l^2(m+m'\sin^2\theta)}[-m'lp_x\cos\theta + (m+m')p_\theta] \tag{6}$$

再分别将 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 的关系式(5)、(6)代入动能的表达式(1)中.由于力学系在保守场——重力势场中运动,以及动能是广义速度的二次齐次函数,因而力学系的哈密顿函数为

$$H(x,\theta;\dot{x},\dot{\theta}) = T + V$$

$$= \frac{1}{2m'l^2(m+m'\sin^2\theta)}(m'l^2p_x^2 - 2m'l\cos\theta p_x p_\theta + (m+m')p_\theta^2) \tag{7}$$

$$- m'gl\cos\theta$$

由哈密顿函数看出广义坐标 $x$ 为循环坐标,立即可得循环积分,注意初始时为静止状态,为

$$p_x = (m+m')\dot{x} + m'l\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

这是体系的动量在 $x$ 方向分量的守恒条件.由此得

$$\dot{x} = -\frac{m'l\cos\theta}{(m+m')}\dot{\theta} \tag{8}$$

由关于 $\theta$ 的正则方程，注意 $p_x=0$ 得

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-\frac{(m+m')\sin\theta\cos\theta}{l^2(m+m'\sin^2\theta)^2}p_\theta^2-m'gl\sin\theta$$

将关系式(4)、(8)代入上式，经过冗长但不困难的整理后，即可得出关于广义坐标 $\theta$ 的微分方程：

$$(m+m'\sin^2\theta)l\ddot{\theta}+m'l\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta+(m+m')g\sin\theta=0$$

[评注] 本例题及上一例题，显示具体地建立力学系统哈密顿函数的过程；着重指出哈密顿函数需用广义坐标和广义动量（正则变量）为变量. 我们也已看到，对于较为简单的力学系，采用正则方程求解，还不如用牛顿力学方法或拉格朗日方程求解更简便些.

### （三）泊松括号

设体系的某一力学量 $G$ 是体系的广义坐标、广义动量的函数，还可能是时间的显函数：

$$G(q;p;t)=G(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1,p_2,\cdots,p_s;t)$$

则这个力学量的时间变化率是

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial G}{\partial t}\tag{6.96}$$

由哈密顿正则方程(6.77)，力学量 $G$ 对时间的导数可写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)+\frac{\partial G}{\partial t}\\&=[G,H]+\frac{\partial G}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.97}$$

这里引进了一个缩写符号，称为力学量 $G$ 与哈密顿函数 $H$ 的**泊松括号**：

$$[G,H]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\tag{6.98}$$

(6.97)式表明，力学量的时间导数与体系的哈密顿量 $H$ 有着直接的关联. 特别地若力学量不是时间 $t$ 的显函数（当然力学量还是随时间变化的，因为广义坐标和广义动量都是时间的函数，随时间变化），则 $\partial G/\partial t=0$；立即可以得出这样的结论：要是力学量与体系哈密顿函数的泊松括号为零，那么该力学量就是力学系的一个运动守恒量，即

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=[G,H]=0,\quad G=G_0=\text{常量}$$

如果力学量 $G$ 即是哈密顿函数本身 $G=H$，当 $H$ 不是时间的显函数时，则有 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=[H,H]\equiv0$，立即得出运动积分 $H=E$. 这是熟知的总机械能守恒方程.

利用泊松括号，哈密顿正则方程也可写成

$$\dot{q}_\alpha=[q_\alpha,H],\quad \dot{p}_\alpha=[p_\alpha,H]\qquad(\alpha=1,2,\cdots,s)\tag{6.99}$$

要注意,广义坐标和广义动量是作为体系的独立变量(正则变量)出现的:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\alpha}=1,\quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\alpha}=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{6.100}$$

任何两个力学量 $A$ 和 $B$ 的泊松括号,定义为

$$[A,B]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\right) \tag{6.101}$$

应用上面的关系式,容易证明正则变量之间存在以下的关系:

$$[q_\alpha,q_\beta]=0,\quad [p_\alpha,p_\beta]=0$$

$$[q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0,\alpha\neq\beta\\1,\alpha=\beta\end{cases} \qquad (\alpha,\beta=1,2,\cdots,s) \tag{6.102}$$

按泊松括号的定义(6.101)式读者不难验证,力学量的泊松括号具有以下一些特性:

(1) $[c,A]=0$,若 $c$ 是常数

(2) $[A,B]=-[B,A]$

(3) $[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$

(4) $[AB,C]=[A,C]B+A[B,C]$

(5) $\dfrac{\partial}{\partial t}[A,B]=\left[\dfrac{\partial A}{\partial t},B\right]+\left[A,\dfrac{\partial B}{\partial t}\right]$

(6) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$

泊松括号这一符号在量子力学中经常用到.

## §6.7 哈密顿原理和正则变换

前面曾提到,整个分析力学可以独立于牛顿定律,而从一种变分原理出发来建立.由于这种变分原理具有的公理性特点,更容易将这个力学原理向其他学科领域推广.这便是本节要讲述的哈密顿原理.

自然界的许多物理现象分别服从某些极值原理.早在光学理论还没有建立的时候,一位叫皮莱·费马(Pierre Fermat)的法国法官就指出,介质中不同两点间光线总是走花时间最少的路线.这便是光学中有名的**费马原理**.由费马原理可以导出光学的反射和折射定律.光线在 $P_1$ 和 $P_2$ 两点间沿真实路径行进的时间为

$$t=\int_{P_1}^{P_2}\frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$$

费马原理指出,这个时间取极小值.式中 $\mathrm{d}s$ 是光线沿路径行进的光路程增量,$v(s)$ 是在光程 $s$ 处的光速.

像费马原理那样取极值的运算方法,在数学中属于变分方法.本节要讲述的哈密顿原理,数学上也是一种变分方法.为此需要介绍一点变分方法的数学知识.

**(一) 泛函和变分**

谁都知道,两点间的连线以直线为最短.然而如何用数学证明呢?可以采用变分极值的方法.设平面上两点 $P_1$ 和 $P_2$ 它们的坐标分别为$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$,设以函数为 $y=y(x)$的曲线联结这两点.在两点间此曲线长度是

$$S = S[y(x)] = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.103}$$

这里长度 $S$ 显然与所取的函数 $y(x)$密切相关;取不同函数的曲线,其长度 $S$ 不同.因此 $S$ 是函数 $y(x)$的函数.以函数为变量的函数叫做**泛函**.这里 $S$ 就是函数 $y(x)$的泛函,记作 $S[y(x)]$.联结两点的曲线函数有无限多,我们要证明的命题是,这无数可能的曲线函数中选出长度最短的曲线是直线.

现在暂时放下上述命题,先简单介绍泛函极值问题.

设有一泛函如下:

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y,y';x)\,\mathrm{d}x \tag{6.104}$$

式中右方的被积函数是 $y$、$y'(=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$和参量 $x$ 的连续可微函数.$y=y(x)$是联结$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$两点的曲线,要求在众多的曲线中挑出一条使泛函 $S[y(x)]$为极值.为此另取一条与 $y(x)$相差无几的曲线

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$$

两曲线具有相同的端点.由于两曲线 $y(x)$和 $\tilde{y}(x)$非常靠近,以至在相同参量 $x$ 处的差距 $\delta y(x)$很小,如图 6.8 所示(当然是大大夸大了!).两个相差甚微的函数值间的差异称为函数的**变分**或**变更**.读者应注意变分和微分的区别.变分是两相邻函数间的差异 $\delta y$,微分则是函数 $y(x)$随其参量 $x$ 真实改变 $\mathrm{d}x$ 时的增量 $\mathrm{d}y$.

分别由两相近函数 $\tilde{y}(x)$和 $y(x)$给出的泛函值之差,称为泛函的变分,记作 $\delta S$

$$\delta S = \tilde{S} - S = \int \mathrm{d}x \left[ f\left(\tilde{y}, \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}x}; x\right) - f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}; x\right)\right] \tag{6.105}$$

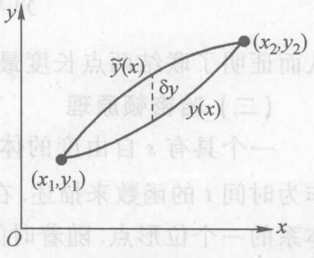


图 6.8

由于 $\tilde{y}(x)$与 $y(x)$间仅有微小差异,可作如下泰勒展开:

$$f(\tilde{y},\tilde{y};x) = f\left(y+\delta y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}; x\right)$$

$$= f(y,y';x) + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x} + O(\delta^2) \tag{6.106}$$

式中 $O(\delta^2)$ 代表二阶以上的高阶小量. 注意到关系式

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y$$

将此式和(6.106)式代入(6.105)式,并略去二阶以上的高阶项;注意 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 可得

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}\right)\right\}\delta y(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}\delta y\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

由于两曲线具有共同的端点,在两端点处 $\delta y = 0$ 因而上式右端的最后一项为零. 泛函为极值的条件是泛函的变分为零,即

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}\right)\right\}\delta y(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{6.107}$$

上式积分中 $\delta y(x)$ 是参量 $x$ 的任意微小函数,因而被积函数中大括号内的函数应等于零,即得方程

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}\right) = 0 \tag{6.108}$$

这个方程称为泛函 $S[y(x)]$ 变分的**欧拉方程**. 满足此微分方程的函数 $y(x)$(曲线),其相应的泛函取极值.

现在可以回过来论证两点间直线最短的问题了.

比较(6.104)和(6.103)式,泛函(6.103)的被积函数是

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

代入欧拉方程(6.108),即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0$$

由此得 $y'' = 0$,对应的曲线为线性函数:$y(x) = C_1 x + C_2$. 曲线的两端点是 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$,因而使泛函(6.103)为极值的曲线必是直线:

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

从而证明了联结两点长度最短的曲线是直线的命题.

**(二) 哈密顿原理**

一个具有 $s$ 自由度的体系,它的运动由 $s$ 个广义坐标 $q_\alpha(t)$($\alpha = 1, 2, \cdots, s$)作为时间 $t$ 的函数来描述. 在体系的 $s$ 维位形空间中,这 $s$ 个广义坐标的值确定体系的一个位形点. 随着时间的变动,位形点在位形空间中描绘出体系的运动轨道(轨迹). 设在时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 时,体系的位形点分别位于位形空间中的 $P_1$ 和 $P_2$

点，相应的广义坐标分别是 $q_\alpha(t_1)(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 和 $q_\alpha(t_2)(\alpha=1,2,\cdots,s)$，或缩写为 $q(t_1)$ 和 $q(t_2)$. 在体系位形空间中，由 $P_1$ 点通向 $P_2$ 点存在各种各样可能的轨道(路径). 但体系运动的真实轨道只能是其中的一条. 如何从众多的可能轨道中挑选出体系运动的真实轨道？即在 $t_1$ 至 $t_2$ 时间内，如何正确地确定体系的 $s$ 个作为时间参量 $t$ 函数的广义坐标 $q(t)$？哈密顿原理提供了确定体系运动真实轨道的方法.

这里仅讨论保守的完整力学体系. 引进泛函 $S[q(t)]$，它是体系的拉格朗日函数 $L$ 关于时间 $t_1$ 至 $t_2$ 的积分，定义为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q};t)\,\mathrm{d}t \tag{6.109}$$

积分量 $S$ 称为体系的**哈密顿作用量**，简称**作用量**或**主函数**，它显然与位形空间中由 $P_1$ 点通向 $P_2$ 点的轨迹密切相关，是关于 $q(t)$ 的泛函.

**哈密顿原理**表述为：对于一个保守的完整力学体系，真实运动轨道的哈密顿作用量为极值. 其数学形式为

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q};t)\,\mathrm{d}t=0 \tag{6.110}$$

根据这个原理，可以从作用量的变分为零来确定真实轨道. 下面我们较具体地讨论这样的变分过程. 作为泛函，(6.109)式与(6.104)式形式完全相同. 只是这里的积分参量是时间 $t$，被积函数中包含有 $s$ 个函数：$q_\alpha(t)(\alpha=1,2\cdots s)$. 因此，对作用量的变分，只需将前面叙述的变分运算过程直接推广即可①.

在运动的真实轨道 $q(t)$ 邻近选取另一可能的轨道

$$\tilde{q}_\alpha(t)=q_\alpha(t)+\delta q_\alpha(t)\qquad(\alpha=1,2,\cdots,s)$$

分别在 $t_1$ 和 $t_2$ 时刻具有与真实轨道相同的位形点. 则

$$\tilde{S}-S=\int_{t_1}^{t_2}(L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}};t)-L(q,\dot{q};t))\,\mathrm{d}t \tag{6.111}$$

由于诸 $\tilde{q}(t)$ 与 $q(t)$ 相差甚微，可作如下的泰勒展开：

$$\begin{aligned}L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}};t)&=L(q,\dot{q};t)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha\right)+O(\delta^2)\\&=L(q,\dot{q};t)+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right)\\&\quad+O(\delta^2)\end{aligned}$$

代入(6.111)式得

① 习惯上，将 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 记作 $y'$，而把函数对时间变量 $t$ 的导数 $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t$ 写成 $\dot{q}$.

$$\tilde{S}-S=\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\Big|_{t_1}^{t_2}+O(\delta^2) \tag{6.112}$$

注意两轨道在端点处重叠,有

$$\delta q_\alpha(t_1)=\delta q_\alpha(t_2)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,s)$$

故(6.112)中右方第二项为零.略去二阶以上的小量 $O(\delta^2)$ 项,即得哈密顿作用量为极值的条件:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right)\delta q_\alpha\mathrm{d}t=0 \tag{6.113}$$

由于各广义坐标的变分 $\delta q$ 可以是时间 $t$ 的任意函数,并且是相互独立的,故上式被积函数中各独立变分 $\delta q$ 前面的系数应等于零.由此得到微分方程组:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{6.114}$$

这是变分极值(6.110)式的欧拉方程,也即是我们熟悉的拉格朗日方程组.这也就表明哈密顿原理确实是力学的基本原理.

前面讨论的哈密顿原理是在广义坐标空间,即位形空间中的变分原理.只需稍作改变,即可化为相空间中的变分原理.由拉格朗日函数 $L$ 跟哈密顿函数 $H$ 的关系(6.76),立即可把哈密顿原理改写为

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)\mathrm{d}t=0 \tag{6.115}$$

这样改写的正确性,还得通过实际检验.作简单的变分运算得

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha+p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)\mathrm{d}t$$

在相空间中广义坐标和广义动量都是独立变量,注意到

$$p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha\mathrm{d}t=\mathrm{d}(p_\alpha\delta q_\alpha)-\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha\mathrm{d}t$$

代入前式,则

$$\delta S=\sum_\alpha(p_\alpha\delta q_\alpha)\Big|_{t_1}^{t_2}+\int\sum\left[\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t=0$$

由于相轨道的初始和末端(对应于时刻 $t_1$ 和 $t_2$)的位形是确定的,有 $\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=0$,因而上式右方第一项为零.又因 $\delta q_\alpha$ 和 $\delta p_\alpha$ 是任意的且相互独立,它们的系数应分别为零;由此导出哈密顿正则方程:

$$\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\[2ex]\dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\end{cases}\quad(\alpha=1,2,\cdots s) \tag{6.116}$$

可见,(6.115)式确实是相空间中的力学变分原理.

对于变分轨道具有确定端点的变分原理,变分泛函的被积函数可以相差一任意函数关于时间的全导数.事实上,无论在哈密顿原理(6.109)式或(6.115)式中,于被积函数中添加一任意函数 $U$ 关于时间的全导数 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$,不会影响变分结果.因为添加的项,其结果仅由该函数在端点处的变分确定,而我们讨论的变分一切轨道通过同样端点,在那里的变分为零,故有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \delta U\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

这就证明了变分原理(6.109)式和(6.115)式作用量的被积函数之间,可能会相差一任意函数的时间导数.

哈密顿原理在理论上具有重要意义.由于它是建立在描写体系运动的总体效果——积分形式的基础之上的,与采用什么样的坐标系(广义坐标)没有关系.因而只要适当地引进体系的拉格朗日函数 $L$,就容易推广应用到其他学科领域.在求解具体力学问题时,采用哈密顿原理则不如其他方法更为直接和方便,况且由哈密顿原理变分得到的欧拉方程就是拉格朗日方程.

除了这里介绍的哈密顿原理外,在力学变分原理中还有形式上略有不同的其他变分原理,例如最小作用量原理等.哈密顿原理是一种等时变分原理,即真实轨道 $q(t)$ 与相邻轨道 $\tilde{q}(t)$ 间的变分 $\delta q = \tilde{q}(t) - q(t)$ 是在相同的时刻 $t$ 求取的;各相邻轨道都具有相同的起讫时间和位形(或相点).而最小作用量原理则采用不等时变分.在不等时变分中,相邻轨道间的位形变分可以在不同时刻进行:$\Delta q = \tilde{q}(t+\Delta t) - q(t)$.这种变分原理在力学的发展过程中起过一定的作用.

### *(三) 正则变换

前面讲过,如果在哈密顿函数中出现循环坐标,就立即可得出相应的循环积分.力学系的哈密顿函数中出现的循环坐标越多,对相应的哈密顿方程组求解便越有利.然而循环坐标是与广义坐标的选取有关的;对于相空间的某一坐标系($q_\alpha, p_\alpha, \alpha = 1,2,\cdots,s$)可能不存在或出现较少的循环坐标,而在另一坐标系($Q_\alpha, P_\alpha, \alpha = 1,2,\cdots,s$)中可能出现较多循环坐标.但是,如果随意地作坐标变换,即使变换后的哈密顿函数中出现了循环坐标,但若新坐标与哈密顿函数间的关系(运动方程)却不是正则方程那样的简单形式,仍然得不出循环积分来,得出的运动方程甚至更难求解.为此需要寻找一种能保持正则方程形式的相空间坐标系变换的方法.即要求变换后的新变量,仍然是力学系的正则变量.满足这样要求的坐标变换方法称为**正则变换**.

设对于新坐标系,哈密顿函数为 $H^*$.既然要求的变量标也是正则变量,即在新、老坐标系中力学系的运动方程都是正则方程,则它们应分别满足哈密顿原理(6.115)式.即

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha - H\right)\mathrm{d}t = 0 \text{ 和 } \delta S^* = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_\alpha P_\alpha\dot{Q}_\alpha - H^*\right)\mathrm{d}t = 0$$

上面第二个变分原理保证了新坐标系中运动方程的正则形式.虽然上面两个变分式是对

于同一力学系的，但我们已经知道，作为固定端点的变分原理，哈密顿作用量 $S$ 的被积函数可以相差任意函数的时间全导数. 即

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \dot{Q}_\alpha - H^*\right) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

或写为

$$\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}U \tag{6.117a}$$

这个式子建立了新、老坐标间的关系，并且提示 $U$ 是老坐标 $q_\alpha$、新坐标 $Q_\alpha$ 和时间 $t$ 的任意函数：$U(q,Q;t)$，由(6.117a)式易知

$$p_\alpha = \frac{\partial U(q,Q;t)}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial U(q,Q;t)}{\partial Q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.118a}$$

和

$$H^* - H = \frac{\partial U(q,Q;t)}{\partial t} \tag{6.119a}$$

故只要具体设定了函数 $U(q,Q;t)$，则由(6.118a)式即可解出新、老坐标系的变换关系：$Q_\alpha = Q_\alpha(q,p;t)$，$P_\alpha = P_\alpha(q,p;t)$ $(\alpha = 1,2,\cdots,s)$. 函数 $U$ 称为正则变换(6.118a)的母函数. 需要再次指出，只要任意取一个以 $q$、$Q$ 和 $t$ 为变量的母函数 $U$，则由(6.118a)式确定的一组变换，就一定是正则变换. 这样说来，进行正则变换并不困难. 确实，正则变换本身并不难，问题是取什么样的母函数可使新的哈密顿函数中包含更多的循环坐标，这就不那么容易了. 其次，由于是相空间的坐标变换，一般来说，变换后的新坐标系已把原来的坐标 $q$、动量 $p$“糅合”在一起了，因而不能确切地称 $Q$、$P$ 分别为新坐标和新动量(虽然习惯上有时还是这样称呼它们)，而应当称作力学系统的**共轭正则变量**. 经过正则变换后，力学系的运动方程依然保持为哈密顿正则方程形式：

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.120}$$

式中 $H^*$ 是经过正则变换后的哈密顿函数，与变换前的哈密顿函数 $H$ 间的关系由(6.119a)式确定；如果所取的母函数 $U$ 不是时间 $t$ 的显函数，则变换前后的哈密顿函数相等，即 $H^* = H$.

上面的母函数是以 $q$、$Q$ 和 $t$ 为变量的，为便于区分后面将要引入的函数，将它记作 $U_1$：

$$U_1 = U = U_1(q,Q;t)$$

只需利用 §6.6 中介绍过的勒让德变换方法(见 204 页和 205 页)，就可很容易由 $U_1$ 得出其他变量的母函数.

如果想由以 $q$,$Q$ 为变量的母函数 $U_1(q,Q;t)$ 变换成以 $q$ 和 $P$ 为变量的母函数 $U_2(q,P;t)$ 可采用勒让德变换. 由(6.118a)式知 $P$ 是 $U_1$ 关于另一变量 $Q$ 的偏导数的负值，则参照(6.80)式容易得出变量转换后的母函数：

$$U_2(q,P;t) = \left(U_1(q,Q;t) + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha P_\alpha\right)_{Q=Q(q,P;t)} \tag{6.121}$$

式中置换关系 $Q = Q(q,P;t)$ 由(6.118a)的第二式解出. 由此

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_2 &= \mathrm{d}U_1 + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.117b}$$

因而

$$p_\alpha = \frac{\partial U_2(q,P;t)}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial U_2(q,P;t)}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.118b}$$

和

$$H^* - H = \frac{\partial U_2(q,P;t)}{\partial t} \tag{6.119b}$$

即给出了变换关系.

虽然这里的 $U_2$ 是用勒让德变换由函数 $U_1$ 导出的,然而 $U_1$ 本身就是所定变量的任意函数.实际上(6.117b)和(6.117a)一样,都是正则变换的条件.因而单从正则变换的角度来说,就不一定需要从 $U_1$ 导出 $U_2$,只要取一以 $q$、$P$ 和 $t$ 为变量的任意函数 $U_2(q,P;t)$,由(6.107b)和(6.119b)给出的变换就一定是哈密顿函数以 $Q$、$P$ 和 $t$ 为变量,$H^* = H^*(Q,P;t)$ 的正则变换了.

同样,利用另一勒让德变换可得出以 $p$、$Q$ 为变量的母函数 $U_3(p,Q;t)$.由(6.118a)式知 $p$ 是 $U_1$ 关于另变量 $q$ 的偏导数,因而经勒让德变换即可得

$$U_3(p,Q;t) = \Big(U_1(q,Q;t) - \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha p_\alpha\Big)_{q=q(p,Q;t)} \tag{6.122}$$

由于

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_3 &= \mathrm{d}U_1 - \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.117c}$$

因而可取任意函数 $U_3(p,Q;t)$ 为母函数,正则变换关系为

$$q_\alpha = -\frac{\partial U_3(p,Q;t)}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial U_3(p,Q;t)}{\partial Q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.118c}$$

和

$$H^* - H = \frac{\partial U_3(p,Q;t)}{\partial t} \tag{6.119c}$$

利用勒让德变换,还表明以 $p$、$P$ 为变量的任意函数 $U_4(p,P;t)$,也能是母函数.

$$U_4(p,Q;t) = \Big(U_1(q,Q;t) - \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha P_\alpha\Big)_{\substack{q=q(p,P;t)\\ Q=Q(p,P;t)}} \tag{6.123}$$

$$\mathrm{d}U_4(p,P;t) = -\sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t \tag{6.117d}$$

故变换式

$$q_\alpha = -\frac{\partial U_4(p,P;t)}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial U_4(p,P;t)}{\partial P_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,s) \tag{6.118d}$$

和

$$H^* - H = \frac{\partial U_4(p,P;t)}{\partial t} \tag{6.119d}$$

为正则变换.

[例 6.11] 取母函数 $U(q,Q) = qQ$,求出正则变换关系式.

[解] 由(6.118a)式得

$$p = \frac{\partial U}{\partial q} = Q, \quad P = -\frac{\partial U}{\partial Q} = -q$$

可见,经过正则变换后,老坐标变成了负的“新动量”;老动量却变成“新坐标”.

[例 6.12] 证明变换 $Q=qp, P=\ln p$ 是正则变换.

[解] 由题意,$p=\frac{Q}{q}, P=\ln\frac{Q}{q}$. 以此代入(6.117a)式得

$$p\mathrm{d}q-P\mathrm{d}Q=\frac{Q}{q}\mathrm{d}q-\ln\frac{Q}{q}\mathrm{d}Q=\frac{Q}{q}\mathrm{d}q-\mathrm{d}\left(Q\ln\frac{Q}{q}\right)-\frac{Q}{q}\mathrm{d}q$$

$$=-\mathrm{d}\left(Q\ln\frac{Q}{q}\right)=\mathrm{d}U$$

可见上面等式的左方确可写为一函数的全微分;这个函数便是母函数

$$U(q,Q)=-Q\ln\frac{Q}{q}$$

问题得证.

[评注] ① 也可以用(6.117b)式来求证. 注意 $p=\mathrm{e}^P, Q=qp=q\mathrm{e}^P$,则由(6.117b)式得

$$p\mathrm{d}q+Q\mathrm{d}P=\mathrm{e}^P\mathrm{d}q+q\mathrm{e}^P\mathrm{d}P=\mathrm{d}(q\mathrm{e}^P)=\mathrm{d}U(q,P)$$

等式左边确是一函数的全微分,问题得证.

利用(6.117c)、(6.117d)式也同样可以求证,请读者自己完成.

② 如果题中的变换确是正则变换,则“新坐标”$Q$ 和“新动量”$P$ 是正则变量. 由正则变量构成的泊松括号应满足规则(6.102)式.

注意 $Q=qp, P=\ln p$ 按泊松括号的定义(6.101),显然

$$[Q,Q]=0,\quad [P,P]=0$$

而

$$[Q,P]=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=p\frac{1}{p}-q\cdot 0=1$$

$Q$ 和 $P$ 确实满足规则(6.91)式,因而它们是正则变量;问题得证.

## *§6.8 不变环面和 KAM 定理

100 多年前,19 世纪和 20 世纪之交,首先由庞加莱,后来是爱因斯坦就曾分别指出,经典力学也存在着随机(混沌)的领域. 然而由于后来量子力学的出现和巨大的成功,将物理学家的注意力吸引到那方面去了. 过了半个多世纪,物理学家才又接过数学家的研究成果,大大地加快了对非线性系统的研究,同时也极大地推动了物理学的进展.

在 §2.7 中我们用计算物理方法求解了非线性力学系的问题,使我们从感性上了解到力学系的有序和混沌行为. 本节将简要地作一点理论方面的介绍,希望能使读者对这一领域有稍许深入一点的理解. 诚然,非线性力学是一门正在发展的学科,常常要用到许多繁杂的数学,我们在这里只能作些定性的说明.

### (一) 作用变量 角变量和不变环面

对于 $s$ 自由度的可积分力学系,必然存在 $s$ 个第一积分. 换句话说,从理论上讲,对于可积分的力学系,通过适当的正则变换,原则上总可将全部 $s$ 个广义坐标变换成循环坐标. 设在变换后的新相空间坐标系中,共轭正则变量为:$\theta_\alpha$、$J_\alpha$($\alpha=1,2,\cdots,s$)既然“新坐标”$\theta$ 都是循环

坐标，力学系的哈密顿函数将仅是“新动量”的函数：

$$H^* = H = H(J_1, J_2, \cdots, J_s) \tag{6.124}$$

本节只讨论稳定约束下的保守力学系，哈密顿函数中不显含时间变量 $t$，采用的正则变换母函数当然也不是时间 $t$ 的显函数，变换前、后的哈密顿函数相等. 这时，根据正则方程立即可得到 $2s$ 个积分：

$$\begin{cases} \dot{J}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} = 0, & J_\alpha = J_\alpha(0) = I_\alpha \\ \dot{\theta}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial J_\alpha} = \omega_\alpha(I_1, I_2, \cdots, I_s), & \theta_\alpha = \omega_\alpha t + \theta_\alpha^0 \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \tag{6.125}$$

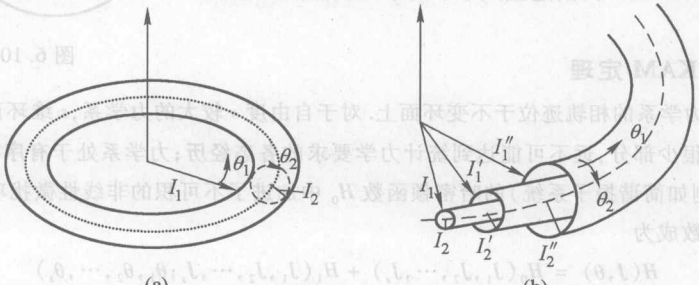
共有 $I_\alpha$、$\theta_\alpha^0$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, s)$ 等 $2s$ 个积分常量，而且这里 $\omega_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, s)$ 也都是常量，因为它们仅分别是积分常量 $I_\alpha$ 的函数.

从(6.125)式的第一式得出 $s$ 个“新动量”的第一积分后，立即可从第二式得出另外 $s$ 个“新坐标”的积分. 由此看到，对于 $s$ 自由度的力学系，能得出 $s$ 个第一积分，这个力学系便是可积分的. 值得注意的是，(6.125)式“新坐标”$\theta$ 的积分都分别与时间 $t$ 成正比，对限于有限范围内运动的力学系来说，这些“新坐标”都只可能是某种**角度变量**，它们的共轭变量 $J$ 则称为**作用变量**. 实际上，作用变量的确切定义是

$$J_\alpha = \oint p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s) \tag{6.126}$$

式中的积分是对力学系运动的一个周期进行的；庞加莱早就证明，对于有限范围运动的可积分力学系，总是做周期性的运动.

从几何学观点看，$s$ 个作用变量为常量，是对力学系的相点在 $2s$ 维相空间中运动的 $s$ 个约束，它们构成 $s$ 维曲面，相点只能位于这个曲面上，而且，相点的“新坐标”角度变量 $\theta$ 随时间 $t$ 增加，相轨迹必呈“环状”线. 这些提示我们，对相点约束的曲面应是 $s$ 维环面，称为**不变环面**. 这里“不变”两字并不是指环面有什么不变的特性，而是指在不同的初始条件下，作用变量具有一组不同的常量 $I_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, s)$，构成确定的环面. 对于 $s > 2$ 的环面是十分抽象的. 而对自由度仅为 2 的力学系，$s = 2$，就可能表示得比较直观. 这时在 4 维相空间中两个作用变量的第一积分，给出如图 6.9(a)所示意的 2 维环面；这个图像也许可使读者对不变环面有些具体的了解. 图 6.9(b)部分地画出窝套着的三个环面，它们对应于三个不同的初始条件，即三组不同的作用量积分：$J_1 = I_1, I_1', I_1'', J_2 = I_2, I_2', I_2''$.




(a) (b)

图 6.9

对于保守系，存在能量积分. 能量积分也是正则方程的第一积分，故(6.125)式的 $s$ 个 $J$ 的第一积分中，自然包含了能量积分.

一维谐振子是一个最简单的例子，我们就以这一例子作具体说明. 它的哈密顿函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \tag{6.127}$$

其中没有循环坐标. 作正则变换，取母函数是新、老坐标的函数：

$$U(q,\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{kmq^2}\cot(\theta) \tag{6.128}$$

由(6.107a)式给出变换关系：

$$p = \frac{\partial U}{\partial q} = \sqrt{kmq}\cot(\theta), \quad J = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\sqrt{kmq^2}\csc^2(\theta)$$

由此解出

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\sqrt{km}}}\sin(\theta), \quad p = \sqrt{2\sqrt{kmJ}}\cos(\theta)$$

将此代入(6.127)式，得出变换后的哈密顿函数：

$$H^*(\theta,J) = H(q,p) = \sqrt{\frac{k}{m}}J \tag{6.129}$$

变换后的谐振子力学系的哈密顿函数中只包含“新动量”——作用变量 $J$ 了. 由正则方程，立即得

$$\dot{J} = -\frac{\partial H^*}{\partial \theta} = 0, \quad J = I = \text{常量};$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H^*}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

这里讨论的简谐振子系统，自由度仅为 $1(s=1)$，$J=I$ 给出的环“面”实际上是二维相空间中的一个圆圈，如图 6.10 所示；在三种不同初始条件下，分别取不同的积分常量值：$I$、$I'$、$I''$，对应于不同的圆半径. 相点必位于“环面”(圆圈)上，因此相轨道也就是该圆圈；而在老的 $q-p$ 坐标系中，相轨道是椭圆，如图 1.9(见第一章 §5)所示. 简谐振子是保守系，当然存在能量积分：$H^*=E$，由(6.129)式即得 $J=\sqrt{m/k}E=I$. 可见，这里关于 $J$ 的第一积分实际上就是能量积分.

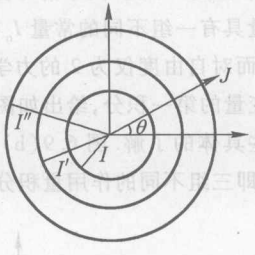



图 6.10

## (二) KAM 定理

可积分力学系的相轨迹位于不变环面上. 对于自由度 $s$ 较大的力学系，$s$ 维环面仅占 $2s-1$ 维等能面的很少部分，远不可能达到统计力学要求的**各态经历**；力学系处于**有序状态**. 如果在可积系统(例如简谐振子系统)的哈密顿函数 $H_0$ 中加进了不可积的非线性微扰项 $H_1$，力学系的哈密顿函数成为

$$H(J,\theta) = H_0(J_1,J_2,\cdots,J_s) + H_1(J_1,J_2,\cdots,J_s;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s) \tag{6.130}$$

那么，扰动 $H_1$ 将对原来的未扰动力学系发生怎样的影响呢？于 20 世纪中叶之前，存在着两种观点：以庞加莱，伯克霍夫(G. D. Birkhoff)等人为代表的部分学者认为，微扰只微小地改变

可积系统的频率,而仅导致不大的非线性振动;以勃格留波夫(N. Bogoliuboff)为代表的另一部分学者则认为,即使扰动很小也会对未扰动的可积系统产生很大影响,最终使其导致统计力学的各态经历.

1954年,柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov)发表了一篇短文,宣布了一条定理,可说是沟通了上述两种观点;然而在他的文章中没有给出该定理的证明.差不多经过了十年,阿诺德(V. I. Arnol'd)和莫泽(J. Moser)分别独立地补上了这个定理的证明;后来这个定理便被称为**KAM定理**.在相当长时间内,物理学家们对KAM定理及其包含的意义不甚了解.

KAM定理称:若是微扰充分地小,并且未扰动力学系中坐标变量$\theta$的运动频率的雅可比量(Jacobian)不恒为零,即

$$\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s)}{\partial(J_1,J_2,\cdots,J_s)}=\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_\alpha \partial J_\beta}\right|\neq 0 \tag{6.131}$$

$$\omega_\alpha=\frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\quad(\alpha=1,2,\cdots,s)$$

那么,哈密顿量为$H$的受扰动的力学系的大多数相轨道将继续留在光滑的$s$维不变环面上.而此时的环面与$H_0$的环面比较,仅有小的畸变.简言之,KAM定理声称,要是非线性扰动较小,$H$系统的主要方面与$H_0$系统相比较,仅有微小的区别.

KAM定理是非线性系统动力学的基本定理,它的发现堪称是20世纪中力学科学的重大进展.

为对KAM定理作较具体的说明,我们就自由度为2的哈密顿系统来讨论.设哈密顿量为

$$H(J_1,J_2;\theta_1,\theta_2)=H_0(J_1,J_2)+H_1(J_1,J_2;\theta_1,\theta_2) \tag{6.132}$$

式中 $H_0$是可积的,$H_1$是微扰哈密顿量.认为系统做周期运动,可将$H_1$作傅里叶展开:

$$H=H_0(J_1,J_2)+\sum_{m,n}[H_1^{mn}(J_1,J_2)\cos(m\theta_1+n\theta_2)+$$

$$H_1'^{mn}(J_1,J_2)\sin(m\theta_1+n\theta_2)] \tag{6.133}$$

为简单起见,我们先只在展开式中取一项进行讨论.取

$$H=H_0(J_1,J_2)+H_1^{mn}(J_1,J_2)\cos(m\theta_1+n\theta_2) \tag{6.134}$$

这依然是不可积分的哈密顿函数.现在,作一次正则变换,试图由原来的正则变量$(\theta,J)$变为新的正则变量$(\varphi,I)$.取母函数是"老坐标"$\theta$和"新动量"$I$的函数:

$$U(\theta,I)=I_1\theta_1+I_2\theta_2+S_{mn}(I_1,I_2)\sin(m\theta_1+n\theta_2) \tag{6.135}$$

式中 $S_{mn}(I_1,I_2)$是待定的系数;显然,$S_{mn}=0$时是恒等变换:$I_\alpha=J_\alpha,\varphi_\alpha=\theta_\alpha$.

按正则变换关系(6.107b)式:

$$\begin{cases}J_1=\dfrac{\partial U}{\partial\theta_1}=I_1+mS_{mn}\cos(m\theta_1+n\theta_2);\\[2ex] J_2=\dfrac{\partial U}{\partial\theta_2}=I_2+nS_{mn}\cos(m\theta_1+n\theta_2);\\[2ex] \varphi_1=\dfrac{\partial U}{\partial I_1}=\theta_1+\dfrac{\partial S_{mn}}{\partial I_1}\sin(m\theta_1+n\theta_2);\\[2ex] \varphi_2=\dfrac{\partial U}{\partial I_2}=\theta_2+\dfrac{\partial S_{mn}}{\partial I_2}\sin(m\theta_1+n\theta_2).\end{cases} \tag{6.136}$$

考虑到当 $S_{mn}$ 很小时，应接近于恒等变换，可将(6.134)式哈密顿量 $H$ 中的 $H_0$ 作泰勒展开. 注意到关系(6.136)式，有

$$\begin{aligned} H_0(J_1,J_2) &= H_0(I_1,I_2) + \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_1}\bigg|_{I_1} m + \frac{\partial H_0}{\partial J_2}\bigg|_{I_2} n\right) S_{mn}\cos(m\theta_1 + n\theta_2) + \cdots \\ &= H_0(I_1,I_2) + (m\omega_1 + n\omega_2) S_{mn}\cos(m\theta_1 + n\theta_2) + \cdots \end{aligned}$$

式中 $\omega_\alpha = \omega_\alpha(I_1,I_2) = \dfrac{\partial H_0}{\partial I_\alpha}(\alpha = 1,2)$. 又

$$\begin{aligned} \cos(m\theta_1 + n\theta_2) &= \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \left[ m\frac{\partial S_{mn}}{\partial I_1}\sin(m\theta_1 + n\theta_2) + \right. \\ &\quad \left. + n\frac{\partial S_{mn}}{\partial I_2}\sin(m\theta_1 + n\theta_2)\right] \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \cdots \\ &= \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \left(m\frac{\partial S_{mn}}{\partial I_1} + n\frac{\partial S_{mn}}{\partial I_2}\right)\sin^2(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \cdots \end{aligned}$$

正则变换后的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H^*(\varphi_1,\varphi_2;I_1,I_2) &= H + \frac{\partial U}{\partial t} = H \\ &= H_0(I_1,I_2) + \{[m\omega_1(I_1,I_2) + n\omega_2(I_1,I_2)]S_{mn}(I_1,I_2) \\ &\quad + H_1^{mn}(I_1,I_2)\}\cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \cdots \end{aligned} \tag{6.137}$$

这里仅写出变换后哈密顿量的最低阶小量. 值得指出，严格地说上式右方的 $H_0(I_1,I_2)$ 是与(6.132)式中未扰动的哈密顿量 $H_0(J_1,J_2)$ 略有区别的①，它已包括了扰动哈密顿量 $H_1(\theta_1,\theta_2;J_1,J_2)$ 中与 $\theta$ 无关的项. 容易看出，在最低阶近似下，欲使 $H^*$ 中不出现变量 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$，(6.137)式中 $\cos(m\varphi_1 + n\varphi_2)$ 项前面的系数(花括号内的量值)须为零. 即须有

$$S_{mn}(I_1,I_2) = -\frac{H_1^{mn}(I_1,I_2)}{m\omega_1(I_1,I_2) + n\omega_2(I_1,I_2)} \tag{6.138}$$

现在我们看到，只有上式右边的分母不为零，即 $m\omega_1(I_1,I_2) + n\omega_2(I_1,I_2) \neq 0$，且与分子 $H_1^{mn}$ 相比不太小时，使 $\varphi_1$、$\varphi_2$ 为循环坐标的正则变换才有可能. 要是分母很小，$S_{mn}$ 将是较大的数，由(6.135)式给出的母函数 $U$ 确定的正则变换就不会接近于一恒等变换，上面以 $S_{mn}$ 作为小量的前提也不成立了. 可见，若哈密顿系统(6.132)式存在一组频率 $(\omega_1,\omega_2)$ 满足条件：

$$|m\omega_1(J_1,J_2) + n\omega_2(J_1,J_2)| \ll |H_1(J_1,J_2)| \tag{6.139}$$

则由未扰动的系统就要受到哈密顿量(6.134)式中，与角度相关项 $\cos(m\theta_1 + n\theta_2)$ 的显著干扰；与 $H_0$ 相应的不变环面将被破坏. 然而力学系哈密顿函数(6.133)式中，扰动项的傅里叶展开包含有 $m$、$n$ 取各种不同数值的分量. 若对某一组 $(m,n)$ 数值满足条件(6.139)式，那么与比值 $m/n$ 相同和相近的其他各组数 $(m',n')$ 也必将满足条件(6.139)式. 换句话说，在由 $J_1 = J_1(0)$，$J_2 = J_2(0)$ 确定的环面将受扰动项 $\cos(m\theta_1 + n\theta_2)$ 的作用而遭到破坏，那么在其附近的环面也就可能遭到扰动项 $\cos(m'\theta_1 + n'\theta_2)$ 的破坏. 用物理的语言来说，条件(6.139)式

① 对于 $H_0$ 系统，$(J_1,J_2;\theta_1,\theta_2)$，是角度－作用量变量，但对含有不可积扰动项 $H_1$ 的系统 $H$ 来说，则不是该系统的角度－作用量变量，而是正则变量.

是一个共振关系. $H_0$ 满足此关系的振子将通过 $\cos(m\theta_1 + n\theta_2)$ 项发生共振耦合. 同时,将存在一个振子的频率带,带内的振子通过 $\frac{m'}{n'} \approx \frac{m}{n}$ 的扰动项 $\cos(m'\theta_1 + n'\theta_2)$ 耦合共振. 在共振区内的环面都遭到了破坏. 可以预期,在此重叠着的、被破坏的环面区中,力学系的运动将是十分复杂的,很可能是**各态经历**的. 如果扰动 $H_1$ 充分地小,因而所有的傅里叶分量 $H_1^{mn}$ 都很小,则由条件(6.139)式确定的共振区很窄. 此时由于共振而导致环面破坏的总区域,从测量学观点来看,只占相空间的很小部分;力学系在大部分相空间中运动依然保持着有序状态. 随着非线性扰动的增加(是与增加力学系的能量等价的),则重叠的共振区也增加,直到相空间的大部分空间被复杂"游动"的相点所占有.

至今,读者也许对KAM定理已有了一定的感性认识. 现在回过来考察在§2.7中讨论过的埃农-海力斯问题,它显然是符合KAM定理的. 当质点的能量较小 $E \leqslant 0.08$ 时,尽管存在不可积的非线性扰动,质点运动的相轨道仍然分布在各自的不变环面上. 虽然这些环面与二维谐振子的环面相比,有微小的畸变. 这时系统仍保持有序状态. 随着能量增大,扰动强度也随之加大,便有部分不变环面被破坏了. 当能量 $E \approx 0.166$ 时几乎所有的环面都遭到破坏,系统处于**混沌状态**. 处在混沌状态的力学系,由于共振区的相互严重交叠,两相邻初始条件的相轨道分别在容许的相空间——等能面上"乱窜",以致无法预期今后两相点间相距会有多远;相点可能各态经历.

### (三) 力学系运动的映射特性

研究力学系的相点运动,常采用庞加莱面,相点每穿过一次便在庞加莱面上留下一个迹点. 从数学观点看,这样留下的迹点可认为是相点运动在庞加莱面上的映射. 两相继迹点间的关系,可用数学的"递推关系"——**映射关系**表示. 例如

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \alpha \end{cases} \tag{6.140}$$

就是描述环绕在圆形截面的不变环面上的相轨迹,在 $J-\theta$ 庞加莱面上的映射;迹点位于恒定半径的圆周上,相继迹点转过 $\alpha$ 角度. 通常把 $\alpha/2\pi$ 称作**转动数**. 显然,对于闭合的运动轨迹,穿过庞加莱面的次数是有限的,转动数为有理数;转动数是无理数时,力学系的相轨道密集地缠绕在不变环面上,庞加莱面上的相迹点形成连续的圆周曲线. (6.140)式明显地代表某一可积问题的映射. 这样的映射曲线称为 **KAM曲线**.

若在(6.140)式表示的可积转动映射中引入微小的扭曲——相当于在相应力学系的哈密顿量中加进扰动,设映射改变为

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n + f(J_n, \theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \alpha(J_n) + g(J_n, \theta_n) \end{cases} \tag{6.141}$$

式中 $f$、$g$ 都是以 $\theta$ 为 $2\pi$ 的周期函数. 在 $f=g=0$ 的情形,所得的映射曲线仍是稳定的KAM曲线,表明虽然扰动使转动角度 $\alpha$ 与作用变量 $J$ 相关,但只需作适当的正则变换,则仍是一个可积分系统. 如果 $f$、$g$ 不为零,莫泽曾证明,只要 $f$、$g$ 都充分地小,那么对应于转动数 $\alpha(J)/2\pi$ 为非有理数的那些不变(环面)曲线在扰动作用下仍然存在,仅有轻微的畸变;对应于KAM定理所指出那样,它们基本上保持不变环面的状况. 对于那些转动数为有理数的相轨道,相应的不变环面将受到扰动 $f$、$g$ 的破坏. 伯克霍夫证明,对应于未扰动力学系转动数为有理数的

映射圆周,在扰动作用下不再维持,而代之以交互出现相等个数的(稳定平衡)椭圆点和(不稳定)双曲点.图 6.11 中最里面和最外面的圆圈,分别是转动数为无理数的 KAM 曲线;中间画出的是受扰动扭曲后的有理数转动曲线及其相邻的曲线,它们构成的相迹线如同单摆的相轨道(图 1.11)那样,每一椭圆点($E$ 点)都有一些闭合的 KAM 曲线围绕着.进一步研究表明,这些闭合的 KAM 曲线相对于各自 $E$ 点,也有有理数转动数和无理数转动数之分.对于有理数转动数的 KAM 曲线,又会分裂为交互排列的 $E$ 点和 $H$ 点,图案如同尺寸缩小了的图 6.11.如果用"放大镜"观察,每一层次 $E$ 点邻近的图案都是相似的,这是一种自相似结构的图案.至于 $H$ 点邻近,情况非常复杂,相迹线交错重叠,混沌总是最先从这些地方发生的(图 6.11 中没有画出).




图 6.11

现在我们应当不难理解埃农 - 海力斯势问题中,相轨迹出现的"岛链"图案[参见图 2.10(b)]了,其原因正如上面描述的那样.

## 习 题

**6.1** 一长为 $l_0$、质量为 $m$ 的均质棒,斜靠在固定的半球形碗的边缘,一端置于碗内,如图 T6.1 所示.已知碗是光滑的,半径为 $r$;棒在碗内的长度为 $l(l<2r)$.用虚功原理证明棒的全长为 $l_0=\dfrac{4(l^2-2r^2)}{l}$.

**6.2** 用绳子等距离地在定点 $O$ 处悬挂两相同的均质球,两球之上另放置一相同的球体,如图 T6.2 所示.已知分别悬挂两球的绳长都是 $l$.用虚功原理求出 $\alpha$ 角与 $\beta$ 角之间的关系.

$$(\tan\beta = 3\tan\alpha)$$

**6.3** 用轻质橡皮圈捆扎三个置于光滑水平桌面上的相同球体,捆扎的高度与球心的高度相同.将第四个同样的球体置于三球之上.由虚功原理求出橡皮圈中的张力.已知每个球体的重量为 $P$.

[提示:找出顶上球体的高度与橡圈长度间的约束关系,注意顶上球体沿竖直方向向下做虚位移时,橡圈长度也发生虚伸长,张力将做虚功]

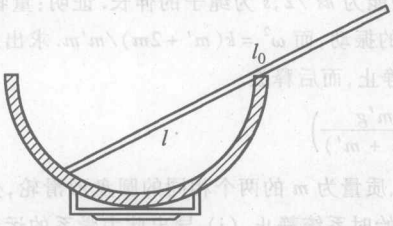



图 T6.1

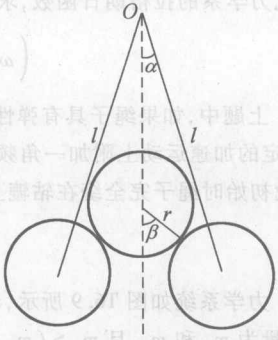



图 T6.2

$$\left(F_{\mathrm{T}}=\frac{\sqrt{6}}{18}P\right)$$

**6.4** 一弹性绳圈，它的自然长度为 $l_0$，劲度系数是 $k$，单位长度质量（线密度）为 $\sigma$. 将此弹性圈套在一半径为 $R(2\pi R>l_0)$ 的光滑球面上，弹性圈因自重而下滑. 用虚功原理求出平衡时弹性绳圈对球心所张的角度 $\theta$ 所满足的方程.

$$\left(\sin 2\theta-\frac{l_0}{\pi R}\cos\theta-\frac{l_0\sigma g}{2\pi^2 kR}\sin\theta=0\right)$$

**6.5** 一半径为 $R$ 的半球形碗内装有两个质量分别是 $m_1$ 和 $m_2$ 的球体，它们的半径同为 $r(2r<R)$. 用虚功原理求出这两个球体在碗中平衡时它们的连心线与水平线间的夹角.

$$\left(\theta=\arctan\frac{(m_1-m_2)r}{(m_1+m_2)\sqrt{R^2-2rR}}\right)$$

**6.6** 一轻杆长 $l$，一端光滑铰链于固定点 $O$，另一端点及杆的中点分别焊接有质量为 $m'$ 和 $m$ 的小球，如图 T6.6 所示. 杆可在铅直平面内绕固定点摆动. 写出此力学系统的拉格朗日函数；求出微小摆动的周期.

$$\left(L=\frac{m+4m'}{2}l^2\dot{\theta}^2+(m+2m')gl\cos\theta,\quad \tau=2\pi\sqrt{\frac{(m+4m')l}{(m+2m')g}}\right)$$




图 T6.4




图 T6.6

**6.7** 一半径为 $r$、质量为 $m'$ 的圆柱形轱辘，轴线水平. 轱辘上绕有长 $l$ 的轻绳，绳的自由端系一质量为 $m$ 的重物. 初始时绳子完全绕在轱辘上，体系静止. 而后重物下落带动轱辘转

动. 写出此力学系的拉格朗日函数,求绳子完全释放时轱辘转动的角速度大小.

$$\left(\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{mgl}{(m' + 2m)}}\right)$$

**6.8** 上题中,如果绳子具有弹性,弹性势能为 $ks^2/2$,$s$ 为绳子的伸长. 证明:重物 $m$ 的运动是在恒定的加速运动上附加一角频率为 $\omega$ 的振动,而 $\omega^2 = k(m' + 2m)/m'm$. 求出此种振动的振幅. 设初始时绳子完全绕在轱辘上,体系静止,而后释放.

$$\left(\frac{mm'g}{k(2m + m')}\right)$$

**6.9** 力学系统如图 T6.9 所示,半径为 $r$、质量为 $m$ 的两个相同的圆盘形滑轮,分别悬挂的重物质量为 $m_1$ 和 $m_2$,且 $m_2 > (m_1 + mg)$ 初始时系统静止. (i) 导出此力学系的运动微分方程;(ii) 分别求出二重物下降的速度与重物下落距离 $h$ 之间的关系.

$$\left(\ddot{y}_{m_1} = \frac{4(2m_1 - m_2 - m)}{8m_1 + 2m_2 + 7m}g;\quad v_{m_1} = 2\sqrt{\frac{2(2m_1 - m_2 - m)}{8m_1 + 2m_2 + 7m}gh}\right.$$

$$\left.v_{m_2} = -\sqrt{\frac{2(2m_1 - m_2 - m)}{8m_1 + 2m_2 + 7m}gh}\right)$$

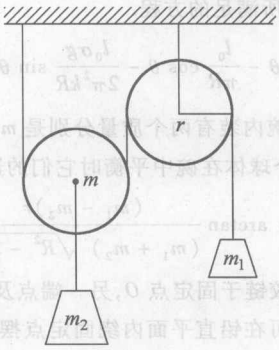



图 T6.9

**6.10** 一质量为 $m$、半径为 $r$ 的小圆柱体置于一半径为 $R$ 的固定大圆柱面的内侧做纯滚动. 写出小圆柱体的拉格朗日函数及在最低点(平衡位置)附近微小振动的周期.

$$\left(L = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R - r)\cos\theta,\quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{3(R - r)}{2g}}\right)$$

**6.11** 一质量为 $m$、半径为 $r$ 的小圆柱体,放在质量为 $m'$、半径为 $R$ 的另一大圆柱体上,大柱体 $m'$ 则置于粗糙的水平面上,二柱体的轴相互平行,质心在同一竖直平面内. 初始时力学系统静止. 若以初始时大圆柱体的质心为固定坐标系的坐标原点,证明而后的任意时刻小圆柱体的质心坐标为

$$x_m = \frac{m\theta + (3m' + m)\sin\theta}{3(m' + m)}(r + R),\quad y_m = (r + R)\cos\theta$$

这里 $\theta$ 是二柱体质心的连线与铅直线间的夹角.

**6.12** 小球 1 和小球 2 的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$,用绳子相连,绳子穿过光滑水平桌面上

小孔. 小球 1 在桌面上运动,小球 2 则垂直悬挂在桌面下. 写出此力学系的拉格朗日函数和所有的第一积分. 设绳长为 $l$.

$$\left( L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g(l - r); \right.$$

$$\text{机械能积分:} \frac{(m_1 + m_2)}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - m_2 g(l - r) = E$$

$$\left. \text{角动量积分:} m_1 r^2\dot{\theta} = L_0 \right)$$

**6.13** 如图 T6.13 所示,长为 $2l$、质量为 $m$ 的均质棒其二端分别用长都是 $s$ 的轻绳垂直悬挂. 今若突然将其中一根绳子剪断,用拉格朗日方程求出棒下落的运动微分方程.

$$\left( \begin{cases} ms^2\ddot{\theta} + msl\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \theta) + msl\dot{\varphi}^2\sin(\varphi - \theta) + mgs\sin\theta = 0 \\ \dfrac{4}{3}ml^2\ddot{\varphi} + msl\ddot{\theta}\cos(\varphi - \theta) - msl\dot{\theta}^2\sin(\varphi - \theta) + mgl\sin\varphi = 0 \end{cases} \right)$$

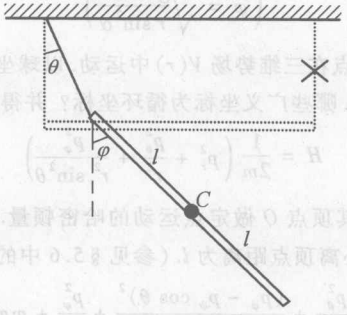



图 T6.13

**6.14** 一半径为 $a$、质量为 $m$ 的圆环,用三根长度都是 $l$ 的无弹性轻绳在等弧点处水平悬挂,成一扭摆如图 T6.14 所示. 求此扭摆绕中心铅直轴扭转的微振动周期 $\tau$. $\left( 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \right)$

**6.15** §6.5 中图 6.5 所示的耦合摆,若两摆锤的质量不同,分别为 $m$ 和 $m'$. 求此耦合摆的本征频率. 初始条件如同(6.54)式:仅第一个摆有微小偏移 $\theta_0$. 求第二个摆可能达到的最大摆幅;第二个摆的摆动最大时,第一个摆的摆幅是否为零?

$$\left( \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \frac{g}{l} + k\frac{(m' + m)}{m'm} \right)$$

**6.16** 摆长为 $l$、摆锤质量为 $m$ 的两个相同单摆串接成为一个双摆,如图 T6.16 所示. 求此双摆在铅直平面内微振动的各个本征频率.

$$\left( \omega_{1,2} = \pm\sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}}, \quad \omega_{3,4} = \pm\sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}} \right)$$

**6.17** 两质量为 $m$ 和另一质量为 $m'$ 的球体用两根劲度系数都是 $k$ 的轻质弹簧沿一直线串接,如图 T6.17 所示. 求出此体系的微振动本征频率.

$$\left( \omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{2m + m'}{mm'}k} \right)$$

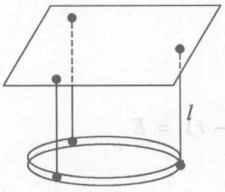



图 T6.14




图 T6.16




图 T6.17

**6.18** 一质量为 $m$ 的质点在一光滑锥面的内壁上运动. 锥体的半顶角为 $\alpha$,锥体口朝上. 以质点离锥体顶点的距离 $r$ 及围绕锥体轴线转动的角度 $\varphi$ 为广义坐标,写出质点的哈密顿函数,并求出质点绕锥体轴转动的角速度多大时,可绕轴做稳定的圆周运动.

$$\left(\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r\sin^2\alpha}}\right)$$

**6.19** 一质量为 $m$ 的质点在三维势场 $V(r)$ 中运动. 以球坐标 $r$、$\theta$ 和 $\varphi$ 为质点的广义坐标,写出此质点的哈密顿函数. 哪些广义坐标为循环坐标? 并得出相应的循环积分.

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

**6.20** 写出对称陀螺绕其顶点 $O$ 做定点运动的哈密顿量. 设陀螺关于对称轴及横轴的转动惯量分别为 $J$ 及 $J_*$,质心离顶点距离为 $l$. (参见 §5.6 中的图 5.17)

$$\left(H = \frac{p_\theta^2}{2J_*} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{J_*\sin^2\theta} + \frac{p_\varphi^2}{2J} + mgl\cos\theta\right)$$

**6.21** 力学量 $A$、$B$ 和 $C$ 都是体系正则变量的函数,证明它们的泊松括号存在如下关系:

$$[A,B] = -[B,A];\quad [A+B,C] = [A,C] + [B,C];$$
$$[AB,C] = [A,C]B + A[B,C]$$

**6.22** 证明任何正则变量的函数 $G(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1,p_2,\cdots p_s;t)$,存在以下关系:

$$\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} = -[p_\alpha,G];\quad \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} = [q_\alpha,G]\quad (\alpha = 1,2,\cdots,s)$$

**6.23** 证明一质点关于坐标原点的位矢 $\boldsymbol{r}$、动量 $\boldsymbol{p}$ 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的直角坐标分量存在如下关系:

$$[x,L_y] = z;\quad [x,L_z] = -y;\quad [x,L_x] = 0$$
$$[p_x,L_y] = p_z;\quad [p_x,L_z] = -p_y;\quad [p_x,L_x] = 0$$
$$[L_x,L_y] = J_z;\quad [L_x,L_z] = -J_y;\quad [L_x,L^2] = 0$$

**6.24** 试问变换 $Q = q, P = 2p$ 是正则变换吗?

**6.25** 取母函数 $U(q,P) = \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha P_\alpha$,求出正则变换关系.

**6.26** 试证变换 $Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), P = q\cot p$ 为一正则变换.

**6.27** 证明:变换关系 $q = (2Q)^{1/2}k^{-1/2}\cos P, p = (2Q)^{1/2}k^{1/2}\sin P$ 为一正则变换.

**6.28** 质量为 $m$ 的质点竖直上抛. 写出质点运动的哈密顿函数;利用母函数 $U = mg\left(\frac{1}{6}gQ^3 + xQ\right)$作正则变换求解此质点的运动. 这里 $x$ 是质点上抛的距离,$Q$ 是"新广义坐标". 初始时刻 $x = 0$, $\dot{x} = v_0$.

**6.29** 在一光滑斜面上放置一长为 $l$、质量为 $m$ 的均质细杆,斜面与水平面的夹角为 $\alpha$. 如图 T6.29 所示,细杆可在斜面上自由滑动和转动,$C$ 点是细杆的中心点. 试用哈密顿原理导出细杆的运动方程. ( $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} - g\sin\alpha = 0$, $\ddot{\theta} = 0$)

**6.30** 一条均质链条,长为 $l$、质量为 $m$,置于水平光滑的桌面上. 今因部分链条自桌面的边缘下垂,导致链条滑落;如图 T6.30 所示,整个链条位于同一铅直面内. 试用哈密顿原理导出链条的运动方程. $\left(\ddot{y} = -\frac{g}{l}y\right)$

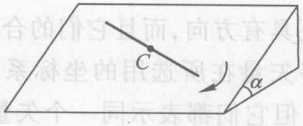



图 T6.29

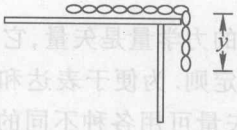



图 T6.30

# 附录 A

# 矢　量

众多的力学量是矢量，它们不仅有大小还具有方向，而且它们的合成满足平行四边形定则. 为便于表达和运算，常需要将矢量在所选用的坐标系中进行分解. 一个矢量可用各种不同的方式进行分解，但它们都表示同一个矢量；不管选用什么样的坐标系表示，矢量本身是不变的. 例如，在下面各坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以分别分解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} && \text{直角坐标系}\\ &= A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_z\boldsymbol{k} && \text{柱坐标系}\\ &= A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\phi\boldsymbol{e}_\varphi && \text{球坐标系}\end{aligned} \tag{A.1}$$

这里应用的都是熟知的符号. 单位矢量前面的量是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在该坐标轴方向的分量，它是一个数，是标量. 在分析和描写力学问题时一定要分清那些量是矢量，那些量是标量. 这一点读者在一开始就必须注意. 正确使用矢量不仅是分析和处理物理问题所必需的，也是保证正确运算必不可少的，同时它还可以用来校验运算结果是否有错. 矢量是不能和标量相加或相等的；等式两边的每一项应当同是矢量或同是标量，否则表明运算有错. 这一功能与量纲的作用有些类似.

下面将列出一些常用的矢量代数运算关系式. 为简洁起见，仅用直角坐标来表达. 其他坐标系中的表达形式完全类似.

1. 矢量的加减

矢量除了具有大小和方向外，另一个特性是两个矢量的合成必须满足平行四边形定则. 设两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们的合成矢量（矢量和）为 $\boldsymbol{C}$，如图 A.1 所示. 它们的关系式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\\ &= (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}\\ &= C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{A.2}$$

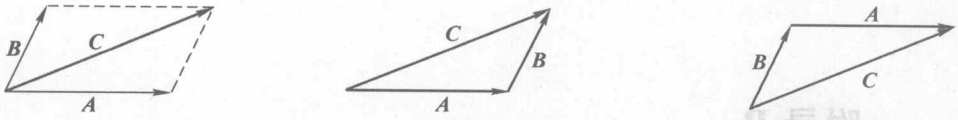



图 A.1

2. 矢量的标积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}&=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\\&=|\boldsymbol{A}|B_A=A_B|\boldsymbol{B}|\end{aligned}\tag{A.3}$$

这里 $\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角. $B_A$ 是矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分量(投影);$A_B$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 方向的分量(投影).

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\tag{A.4}$$

3. 矢量的矢积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})&=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta\boldsymbol{e}_n\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{A.5}$$

这里单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 确定的平面垂直;$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{e}_n$ 间满足右螺旋关系,如图 A.2 所示.

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=\boldsymbol{e}_A\times\boldsymbol{e}_B\tag{A.6}$$

$\boldsymbol{e}_A$、$\boldsymbol{e}_B$ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向和矢量 $\boldsymbol{B}$ 方向的单位矢量.

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\tag{A.7}$$

4. 两个常用的矢量公式

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\tag{A.9}$$

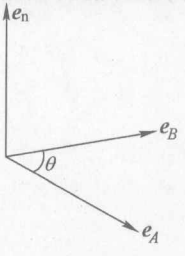



图 A.2

# 附录 B

# 常微分方程的数值解法

很多实际的力学问题中，所遇到的常微分方程往往不能用解析方法求解，必须借助数值计算方法. 随着科学的进展，计算方法也就愈显重要. 这里仅介绍常微分方程初值问题的数值求解方法.

设一阶常微分方程为[①]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = f(t,x) \tag{B.1}$$

初始条件为

$$t = t_0, \quad x = x_0 \tag{B.2}$$

我们的目的是要在初始条件(B.2)下求出方程(B.1)的积分. 采用数值方法求解，不可能得出解析形式的解 $x = x(t)$ 来，只能得出在一系列 $t_i (i = 0,1,2,3,\cdots)$

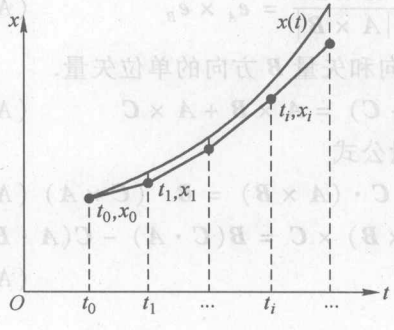



图 B.1

① 更一般地，一阶常微分方程表示为：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f(x,y)$，这里 $y$ 是变量 $x$ 的函数，$y = y(x)$. 力学问题中常以时间 $t$ 作为变量，位置坐标 $x$ 是 $t$ 的函数；按传统习惯，对时间 $t$ 的导数写为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$.

处求出相应的 $x$ 的值：$x_i = x(t_i)$（$i = 0,1,2,3,\cdots$）. 这里 $t_i$ 是变量 $t$ 的一个特定的数值，它在 $t$ 轴上的位置称为 $t$ 的结点. 通常，结点是在 $t$ 轴上均匀设置的，如图 B.1 所示. 两相邻结点的间距称作变量 $t$ 的步长，设为 $h$. 则

$$t_i = t_0 + ih \quad (i = 0,1,2,3,\cdots)$$

通常步长 $h$ 需要取得较小；$h$ 越小，计算的精度就越高，但计算工作量越大. 按泰勒级数展开：

$$x_{i+1} = x(t_i + h) = x_i + hx(t_i) + \frac{1}{2}h^2x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x''(t_i) + \cdots \quad (B.3)$$

若是步长 $h$ 很小，仅保留到 $h$ 项，则

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x(t_i + h) = x_i + hx(t_i) \\ &= x_i + f(t_i, x_i)h \end{aligned} \quad (B.4)$$

因此，若第 $i$ 结点 $t_i$ 处的函数值 $x_i$ 已经求出，则可以从上式得出下一结点 $t_{i+1}$ 处的函数值 $x_{i+1}$ 来. 这便是求解一阶常微分方程的**欧拉**(Euler)**方法**. 它的几何意义是明显的，可由图 B.1 看出：在 $(t_i, x_i)$ 点处作一斜率为 $\dot{x}_i = f(t_i, x_i)$ 的直线，它与直线 $t = t_i + h = t_{i+1}$ 相交的点便是 $(t_{i+1}, x_{i+1})$，然后再由此点作斜率为 $\dot{x}_{i+1}$ 的直线，重复前面的步骤求出函数值 $x_{i+2}$. 如此一点一点地进行下去，所画出的线便近似地作为微分方程(B.1) 的积分曲线. 这是个“单步”计算方法，即这一步的计算结果直接由上一步的结果给出，不涉及更早各步的结果，计算较为简单. 但是很容易看到，这个方法比较粗糙，误差会逐渐积累，现在很少用它做实际计算. 不过我们可以从这里了解数值计算的方式. 求解常微分方程的一些常用方法大多是建立在对欧拉方法的改进或应用差分的基础上的. 下面介绍几个用来求解常微分方程的数值计算方法，但这里对这些方法不作严格的数学证明，主要地仅给出实用的关系式.

### （一）龙格 - 库塔(Runge - Kutta) 方法

这个方法对欧拉方法中的斜率作了适当改进，大大减小了积累误差. 它也是“单步”计算方法. 下面分别给出各种情形下的递推计算公式，它们都正确到 $h^4$ 量级.

1. 求解一阶微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x_0 = x(t_0) \end{cases} \quad (B.5)$$

计算的递推式为

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (B.6)$$

其中

$$\begin{cases} s_1 = f(t_i, x_i) \\ s_2 = f\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_1\right) \\ s_3 = f\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_2\right) \\ s_4 = f(t_i + h, x_i + hs_3) \end{cases} \tag{B.7}$$

2. 求解一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t, x, y) \\ x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{B.8}$$

计算的递推式为

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4) \end{aligned}\right\} \tag{B.9}$$

其中

$$\begin{cases} s_1 = f(t_i, x_i, y_i) \\ s_2 = f\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_1, y_i + \dfrac{1}{2}hu_1\right) \\ s_3 = f\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_2, y_i + \dfrac{1}{2}hu_2\right) \\ s_4 = f(t_i + h, x_i + hs_3, y_i + hu_3) \\ u_1 = g(t_i, x_i, y_i) \\ u_2 = g\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_1, y_i + \dfrac{1}{2}hu_1\right) \\ u_3 = g\left(t_i + \dfrac{1}{2}h, x_i + \dfrac{1}{2}hs_2, y_i + \dfrac{1}{2}hu_2\right) \\ u_4 = g(t_i + h, x_i + hs_3, y_i + hu_3) \end{cases} \tag{B.10}$$

3. 求解二阶微分方程：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = f(t, x, \dot{x}) \\ x\big|_{t_0} = x_0, \quad \dot{x}\big|_{t_0} = \dot{x}_0 \end{cases} \tag{B.11}$$

众所周知，一个二阶微分方程可以化解成两个一阶的联立微分方程——一阶微分方程组. 方程(B.11)可写成

$$\begin{cases} \dot{x} = X \\ \dot{X} = f(t,x,X) \\ x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = X(t_0,x_0) \end{cases} \tag{B.12}$$

它的计算递推公式可以仿照(B.9)、(B.10)式,作适当地推广后给出

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hX_i + \frac{h^2}{6}(s_1 + s_2 + s_3) \\ X_{i+1} &= X_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \end{aligned}\right\} \tag{B.13}$$

这里

$$\begin{cases} s_1 = f(t_i,x_i,X_i) \\ s_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_1, X_i + \frac{1}{2}hs_1\right) \\ s_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_2, X_i + \frac{1}{2}hs_2\right) \\ s_4 = f\left(t_i + h, x_i + hX_i + \frac{1}{2}h^2 s_3, X_i + hs_3\right) \end{cases} \tag{B.14}$$

4. 求解二阶微分方程组:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \\ \ddot{y} = g(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \\ x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0,x_0,y_0) \\ y_0 = y(t_0), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0,x_0,y_0) \end{cases} \tag{B.15}$$

这样的初值问题在二维的力学问题中常会遇到. 令

$$X = \dot{x}, \quad Y = \dot{y}$$

结合一阶方程组和二阶方程的求解公式,作适当推广后,对方程(B.15)可得出如下的计算递推公式[①]:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hX_i + \frac{1}{6}h^2(s_1 + s_2 + s_3) \\ X_{i+1} &= X_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \\ y_{i+1} &= y_i + hY_i + \frac{1}{6}h^2(u_1 + u_2 + u_3) \\ Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{6}(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4) \end{aligned}\right\} \tag{B.16}$$

① 参见 Rudolf Zurmuhl. Numerical Analysis for Engeneers and Physicist. P. 452,1976. Springer International Student Edition. Translated by R. Subramanian.

其中

$$s_1 = f(t_i, x_i, y_i, X_i, Y_i)$$

$$s_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_1, y_i + \frac{1}{2}hY_i + \frac{1}{8}h^2 u_1, X_i + \frac{1}{2}hs_1, Y_i + \frac{1}{2}hu_1\right)$$

$$s_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_1, y_i + \frac{1}{2}hY_i + \frac{1}{8}h^2 u_1, X_i + \frac{1}{2}hs_2, Y_i + \frac{1}{2}hu_2\right)$$

$$s_4 = f\left(t_i + h, x_i + hX_i + \frac{1}{2}h^2 s_3, y_i + hY_i + \frac{1}{2}h^2 u_3, X_i + hs_3, Y_i + hu_3\right)$$

$$u_1 = g(t_i, x_i, y_i, X_i, Y_i)$$

$$u_2 = g\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_1, y_i + \frac{1}{2}hY_i + \frac{1}{8}h^2 u_1, X_i + \frac{1}{2}hs_1, Y_i + \frac{1}{2}hu_1\right)$$

$$u_3 = g\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hX_i + \frac{1}{8}h^2 s_1, y_i + \frac{1}{2}hY_i + \frac{1}{8}h^2 u_1, X_i + \frac{1}{2}hs_2, Y_i + \frac{1}{2}hu_2\right)$$

$$u_4 = g\left(t_i + h, x_i + hX_i + \frac{1}{2}h^2 s_3, y_i + hY_i + \frac{1}{2}h^2 u_3, X_i + hs_3, Y_i + hu_3\right) \tag{B.17}$$

**（二）亚当斯（Adams）多步方法**

这个方法建立在应用差分的基础上. 求解的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{B.18}$$

假设已经计算到第 $i$ 步，即结点 $t_i$ 及其以前各结点处的函数值：$\cdots, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$ 均已求得. 那么，下一个结点 $t_{i+1}$ 处的函数值由方程（B.18）通过积分求得：

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))\,\mathrm{d}t \tag{B.19}$$

被积函数 $f$ 是变量 $t$ 的函数；近似地用一向后型的外插多项式代替：

$$f = f_i + \frac{\Delta f_{i-1}}{h}(t - t_i) + \frac{\Delta^2 f_{i-2}}{2!h^2}(t - t_i)(t - t_{i-1}) + \cdots \tag{B.20a}$$

这里，$f_i = f(t_i, x_i)$，是在结点 $t_i$ 处函数 $f$ 的数值；$\Delta^n f_i$ 则是在结点 $t_i$ 处函数 $f$ 的 $n$ 阶差分，定义为

$$\Delta^n f_{i-j} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{i-k} \tag{B.21}$$

在（B.20）式中保留到 $n = 3$ 阶差分并代入（B.19）式，积分后即得下面的递推公式：

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \tag{B.22a}$$

同样，也可以用一内插多项式来代替(B.19)式中的被积函数：

$$f = f_{i+1} + \frac{\Delta f_i}{h}(t - t_{i+1}) + \frac{\Delta^2 f_{i-1}}{2!h^2}(t - t_{i+1})(t - t_i) + \cdots \tag{B.20b}$$

代入(B.19)式，经积分后得递推公式：

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \tag{B.22b}$$

由这个式子计算得的结果可作为由(B.22a)式计算结果的改进；由(B.22a)式得到 $t_{i+1}$ 处的结果 $x_{i+1}$ 后即可算得 $f_{i+1}$，代入(B.22b)式便可得到改进的 $x_{i+1}$ 值. 因此(B.22a)式和(B.22b)式可分别用作对 $x_{i+1}$ 的“预报(predicting)”和“校正(correcting)”. 这两个递推关系式构成亚当斯方法的基础，现将它们重新写在一起：

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1}^{(p)} &= x_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \\ x_{i+1}^{(c)} &= x_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \end{aligned}\right\} \tag{B.22}$$

式中上标 p 和 c 分别表示预报和校正的意思. 这个方法是“多步法”，计算第 $i+1$ 步时，需要知道前面的 $i$、$i-1$、$i-2$、$i-3$ 等各步的 $x$ 值. 因此，最初几步的 $x$ 值不能用这个方法得到，通常先用龙格－库塔方法或其他方法求出最初几步的值，然后再用本方法继续积分. 在同样精度的条件下，亚当斯方法要比龙格－库塔方法运算得快些，因为这里用不到计算诸 $s$ 的值.

将求解一阶微分方程的亚当斯方法，推广应用到求解微分方程组或高阶微分方程，是很直接的. 这里不再给出它们的运算递推公式，读者可以自己去尝试.

### (三) 米尔恩(Milne)多步方法

龙格－库塔方法是对欧拉方法中的斜率作了适当改进后得到的. 如果对龙格－库塔方法中的诸斜率(即诸 $s$ 的值)作适当地平均，则可得米尔恩方法的预报公式；采用辛普森(Simpson)积分公式计算(B.19)式中的积分，可得米尔恩方法的校正公式. 它们分别是

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1}^{(p)} &= x_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i) \\ x_{i+1}^{(c)} &= x_{i-1} + \frac{1}{3}h(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) \end{aligned}\right\} \tag{B.23}$$

和亚当斯方法一样，最初几步的 $x$ 函数值也需要用其他方法求出. 本方法同样很容易推广到微分方程组和高阶微分方程的情形.

# 附录 C

# 有心力问题的计算和画图程序

## (一) 力的类型

本程序是用 Visual Basic 语言书写的,不仅可作计算,同时可将计算得到的数据画图. 用什么样的程序语言并不重要,从一种语言翻译成另一种语言,对具有一定计算机语言基础的读者来说,并不困难. 事实上这个程序的许多部分最初是用 FORTRAN 语言写的. 在本书第一版中则采用 TURBO C 语言编写. 虽然本附录列出的程序未作优化处理,但它能给出正确的计算和画图.

本程序计算两种类型的有心力问题:

(1) 质点与力心间距离 $r$ 成 $n$ 幂次的吸引力:

$$\boldsymbol{F} = ar^n\boldsymbol{e}_r \tag{C.1}$$

(2) 带有扰动项的距离平方反比的吸力:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r + ar^n\boldsymbol{e}_r \tag{C.2}$$

上面的有心力表达式中 $n$ 和 $a$ 可以是任意的正数或负数. 这两种类型的有心力的计算,在程序中用一控制变量 i1 来控制. i1 = 1,计算(C.1)类型的有心力; i1 = 2,计算(C.2) 类型的有心力。

## (二) 计算方法及相关的子过程

以计算有心力问题(C.1)为例来说明本程序的计算过程. 为说明方便起见,程序加上了行号. 下面说明程序段的作用时,将相应的程序段的起讫行号附在后面的圆括号内.

(1) 方程式

力:

$$\begin{cases} F_x = ar^n \dfrac{x}{r} \\ F_y = ar^n \dfrac{y}{r} \end{cases} \tag{C.3}$$

势能：

$$V_{xy} = -\frac{a}{n+1} r^{n+1} \tag{C.4}$$

质点的运动微分方程：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= ar^n \frac{x}{r} = F_x \\ \ddot{y} &= ar^n \frac{y}{r} = F_y \end{aligned}\right\} \tag{C.5}$$

（2）程序

用龙格－库塔方法对方程(C.5)积分[见附录B中的(B.17)式]．相关的子过程名为：

Command1－click——主子过程(1—183)①

rkod2s——求解二阶方程组(C.5)式的龙格－库塔方法程序,(184—215)；

*force*——计算力函数 $F_x$ 和 $F_y$(C.3)式,(216—239)；

*vxy*——计算势能 $V_{xy}$(C.4)式,(240—250)．

（3）输入控制变量和初始条件(30—40),(50—55)

① 控制变量——i1(默认值=1)；　② 力系数——$a$(默认值=－1)

③ 力的距离幂次——$n$(默认值=1)；　④ 初始位置 $r$——$(x,y)$；

⑤ 初始速度 $v$——$(v_x,v_y)$．

（4）提醒修改不合理的控制变量和输入数据(64—75)

（5）询问和设置反向计算(170—181)．

（6）设置背景颜色和画出力心点(97—100)．

（7）对运动方程组(C.5)积分(106—167)．

（8）拱点和拱角的确定并画出拱线(125—167)，

检测轨道上相继三个计算点分别离力心的距离 $r_2$、$r_1$ 和 $r$,若 $(r_2-r_1)\cdot(r-r_1)<0$ 表明拱点位于 $r_2$ 至 $r$ 这段轨道内．以二次曲线来拟合：

$$r = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2 \tag{C.6}$$

由这三点的位置确定系数 $a_1$、$a_2$ 和 $a_3$．则拱点的位置 $\theta$ 由下式确定：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = a_2 + 2a_3\theta = 0 \tag{C.7}$$

① 括号内的数字对应于源程序的行号．下同．

(9) 询问继续计算还是开始新的作业,作出相应的处理(163—167).

**(三) 主要的变量**

(1) 常数

pi——π = 3.141 592 65;　　dpi——度和弧度的转换系数 = 180/π;

hd6——1/6.

(2) 变量

i1——力类型的控制变量;　　n——有心力中距离的幂次;

a——有心力中的力常量;　　x0,y0——力心的坐标;

ml——图形的比例尺度;　　ns——角动量 + 或 - 的标志变量;

h——时间的积分步长;　　nt——已积分的时间步数;

ntm——每一轮运算的最大步数;　　L——角动量;

E0——总机械能的初始值;　　ET,EP——动能 ,势能;

Ent——积分至第 nt 步时总机械能的计算值;

de——计算的能量与初始能量的相对误差;

dem——容许的能量最大相对误差;

x,y——像素点的坐标;　　r——质点离力心的距离;

raps——拱点的矢径长度;　　zaps——拱点的 $\theta$ 坐标;

naps——拱点的编号(最多画出 4 条拱线).

(3) 数组

p(5),pa(5)各元素为:

p(1)——质点的 x 坐标;　　p(2)——质点的 y 坐标;

p(3)——质点速度的 x 分量;　　p(4)——质点速度的 y 分量;

pa(n)——前一步 p(n) 的量.

**(四) 源程序**

```
1. Option Explicit
2. Const pi As Double = 3.1415927
3. Const dpi As Double = 57.29578          '径度 - 度的转换系数
4. Const hd6   As Double = 1/6
5. Public i As Integer,i1 As Integer,n As Double,a As Double
6. Public h As Double,hp2 As Double,hd2 As Double
7. Private Sub Command1_Click( )
8. '  有心力问题的质点轨迹计算代码.    陈世民  编制
9. '  —1997.4.Turbo C  版本 - -.;  —2007.7.Visual Basic  版本 - -
10. Dim x0 As Double,y0 As Double,x As Double,y As Double,x1 As Double,y1 As Double
11. Dim ns As Integer,ml As Integer,naps As Integer,msg  As Integer,rvs As Integer
12. Dim ntm As Long,nt As Long
```

```
13. Dim pa(5)As Double,p(5)As Double,p1 As Double,p2 As Double,p3 As Double,p4 As Double
14. Dim E0 As Double,ET As Double,EP As Double,xd2 As Double
15. Dim L As Double,Lnt As Double,Ent As Double,de As Double,fx As Double,fy As Double
16. Dim r As Double,r1 As Double,r2 As Double,raps As Double
17. Dim z As Double,z1 As Double,z2 As Double,zaps As Double
18. Dim a1 As Double,a2 As Double,a3 As Double,dlt As Double,rmin As Double
19. Const dem As Double = 0.0001    '质点的计算能量偏离初始总机械能 E0 的最大容许值
20.   x0 = 2500          '(x0,y0)坐标原点,或力心的坐标
21.   y0 = 2500
22.   ntm = 1000         '每一轮计算的最大步数
23.   ml = 500           '空间尺度的放大系数
24.   h = 0.005          '数值计算时关于角度 z(theta)的步长
25.   rmin = 0.01        '为避免计算发散,容许质点接近力心的最近距离
26.   hp2 = h * h
27.   hd2 = h/2#
28.   Open"D:\project\orbt3.txt"For Output As #3
29. l5:   Cls
30.   i1 = Val(InputBox("请输入力类型的控制变量    i1","控制变量  i1","1"))
31.   If(i1 = 1 Or i1 = 2)Then
32.   '  i1 = 1  为无扰动情形,力:  F = ar^n;i1 = 2  为有扰动情形,力:  F = -1/r^2 + ar^n
33.     If i1 = 1 Then
34.       Print #3," 无扰动情形!"
35.       a = Val(InputBox(" 无扰动情形!  请输入引力常数    a","距离幂次  a"," -1"))
36.       n = Val(InputBox("请输入距离幂次    n","距离幂次  n","1"))
37.       p(1) = Val(InputBox("请输入质点初始 x 坐标","初始坐标  p(1)","1"))
38.       p(2) = Val(InputBox("请输入质点初始 y 坐标","初始坐标  p(2)","1"))
39.       p(3) = Val(InputBox("请输入质点初始 vx 分量","初始坐标  p(3)","1"))
40.       p(4) = Val(InputBox("请输入质点初始 vy 分量","初始坐标  p(4)","1"))
41.       Print #3," "
42.       Print
43.       Print #3," 力类型 i1 = ";i1,"  距离幂次  n = ";n,"引力常数  a = ";a,"  步_
    长  h = ";h
44.       Print #3,"初始坐标:( ";p(1);",";p(2);")","  初始速度:( ";p(3);",";_
    p(4);")"
45.       Print "  无扰动情形!"
46.       Print " 力类型 i1 = ";i1,"  距离幂次  n = ";n,"引力常数  a = ";a,"  步长_
    h = ";h
47.       Print  初始坐标:( ";p(1);",";p(2);")","  初始速度:( ";p(3);",";_
```

```
p(4);")"
    Else
      Print #3," 有扰动情形!"
      a = Val( InputBox( " 有无扰动情形! 请输入引力常数 a"," 距离幂次 _
a"," -1"))
      n = Val( InputBox("请输入距离幂次 n","距离幂次 n","1"))
      p(1) = Val( InputBox("请输入质点初始 x 坐标","初始坐标 p(1)","1"))
      p(2) = Val( InputBox("请输入质点初始 y 坐标","初始坐标 p(2)","1"))
      p(3) = Val( InputBox("请输入质点初始 vx 分量","初始坐标 p(3)","1"))
      p(4) = Val( InputBox("请输入质点初始 vy 分量","初始坐标 p(4)","1"))
      Print #3," "
      Print
      Print #3," 力类型 il =";il," 距离幂次 n =";n,"引力常数 a =";a," 步 _
长 h ="; h
      Print #3,初始坐标: ( ";p(1);",";p(2);")","  初始速度: (";p(3);",";_
p(4);")"
      Print "  有扰动情形!"
      Print " 力类型 il =";il," 距离幂次 n =";n,"引力常数 a =";a," 步 _
长 h =";h
      Print 初始坐标: (";p(1);",";p(2);")","  初始速度: ( ";p(3);",";_
p(4);")"
    End If
    If n > 0 And a > 0 Then
      Print " Warning !! n>0 and a >0 ! 质点将加速奔向无限远处!. "
    msg = MsgBox("是否改变引力常数 a 的数值?",4 + 32 + 0,"改变引力常数")
      If msg = 6 Then a = Val( InputBox("请输入改变的引力常数 a","引力常数 _
a"," -1"))
    msg = MsgBox("是否改变距离幂次 n 的数值?",4 + 32 + 0,"改变距离幂次")
      If msg = 6 Then n = Val( InputBox("请输入改变的距离幂次 n","距离幂次 _
n"," -2"))
    End If
  Else
    msg = MsgBox("力类型控制变量 il 不正确,是否重做?",4 + 32 + 0,"重做")
    If msg = 6 Then GoTo 15
    If msg = 7 Then GoTo 1999
  End If
  r = Sqr(p(1) * p(1) + p(2) * p(2))
  z = Atn(p(2) / p(1))
```

```
78.  r2 = r
79.  z2 = z
80.  ET = 0.5 * (p(3) * p(3) + p(4) * p(4))
81.  x1 = x0 + ml * p(1)
82.  y1 = y0 + ml * p(2)
83.  nt = 0
84.  naps = 0                    'naps 为拱角(拱线)的编号
85.  EP = vxy(p)
86.  E0 = ET + EP
87.  L = p(1) * p(4) - p(2) * p(3)
88.  Print
89.  Print "距离  r = ";r,"动能  ET = ";ET,"势能  EP = ";EP,"总机械能  E0 = "; _
     E0,"角动量大小  L = ";L
90.  Print #3,
91.  Print #3,"距离  r = ";r,"动能  ET = ";ET,"势能  EP = ";EP,"总机械能  E0 = "; _
     E0,"角动量大小  L = ";L
92.  msg = MsgBox("is every thing OK?",4 + 32 + 0,"run job")
93.  If msg < > 6 Then GoTo l999
94.  x1 = x0 + ml * p(1)
95.  y1 = y0 + ml * p(2)
96.  nt = 0
97.  BackColor = RGB(255,255,255)
98.  FillColor = RGB(0,0,0)
99.  FillStyle = 0
100. Circle (x0,y0),30              '  画力心(实心黑色圆点)
101. DrawWidth = 1
102. p1 = p(1)
103. p2 = p(2)
104. p3 = p(3)
105. p4 = p(4)
106. l10: nt = nt + 1              '数值计算的步数
107. For i = 1 To 4
108. pa(i) = p(i)
109. Next i
110. Call rkod2s(pa(),p())         '  调用求解运动(二阶)微分方程的子过程
111. If nt Mod 100 < > 0 Then GoTo l11        '  每计算 100 步测算一次总能量
112. EP = vxy(p)
113. ET = 0.5 * (p(3) * p(3) + p(4) * p(4))
```

```
114.  Ent = ET + EP
115.  Lnt = p(1) * p(4) - p(2) * p(3)
116.  de = (Ent - E0)/E0
117.  If Abs(de) > dem Then
118.    Print #3," de > dem!,nt = ";nt,";de = ";de;""     ' 总能量偏差已超过设定的最大值
119.    msg = MsgBox("是否减小步长?",4 + 32 + 0,"步长")
120.     If msg < > 6 Then GoTo l999
121.    h = 0.1 * h                                      ' 为增加计算精度, 减小步长
122.     If h < 0.0001 Then GoTo l999
123.    GoTo l10
124.    End If
125. l11:   r = Sqr(p(1) * p(1) + p(2) * p(2))           ' 质点的矢径长度
126.    z = Atn(p(2) / p(1))                             ' 质点位置的 theta(角度)坐标
127.    If nt > 1 And naps < 4 And (r2 - r1) * (r - r2) < = 0# Then
128. '  满足此条件时 r 的极值(拱点)必在 r1,r2,r 三点之间.在 r1(z1),r2(z2),r(z) 三点
129. '  间的质点轨道用二次曲线 r = a1 + a2z + a3z * z,拟合.按求解线性代数方程组方法, _
     解出系
130. '数 a1,a2,a3.并由极值条件  dr/dz = a2 + a3 * z = 0  得出拱点处的拱角 zaps.
131.      dlt = z2 * (z * z - z * z2) + z * (z1 * z1 - z1 * z) + z1 * (z2 * z2 - _
     z1 * z2)
132.      a1 = r1 * z2 * (z * z - z * z2) + r2 * z * (z1 * z1 - z1 * z) + r * z1 _
     * (z2 * z2 - z1 * z2)
133.      a1 = a1 / dlt
134.      a2 = (r2 * z * z - r * z2 * z2) + (r * z1 * z1 - r1 * z * z) + (r1 * _
     z2 * z2 - r2 * z1 * z1)
135.      a2 = a2 / dlt
136.      a3 = (r * z2 - r2 * z) + (r1 * z - r * z1) + (r2 * z1 - r1 * z2)
137.      a3 = a3 / dlt
138.      zaps = - a2 / a3 / 2
139.      raps = a1 + a2 * zaps + a3 * zaps * zaps
140.      If p(1) < 0 Then zaps = zaps + pi              ' 注意矢径位于第二和第三象限
141.      a1 = x0 + ml * raps * Cos(zaps)
142.      a2 = y0 + ml * raps * Sin(zaps)
143.      DrawStyle = 2
144.      Line (x0,y0) - (a1,a2)  '画拱线
145.      naps = naps + 1
146.      zaps = dpi * zaps
147.      Print #3,"拱点 naps = ";naps,"zaps = ";zaps,"raps = ";raps,"xaps = ";p(1),"yaps_
```

```
    =";p(2)
148.        DrawStyle = 0
149.    End If
150.        If r < rmin Then GoTo l999      'r < rmin 时,质点离开力心太近,可能导致计算发散
151.    r1 = r2
152.    r2 = r
153.    z1 = z2
154.    z2 = z
155.    x = x0 + ml * p(1)
156.    y = y0 + ml * p(2)
157.    Line (x1,y1) - (x,y)        ' 画相继两步的质点轨迹
158.    x1 = x
159.    y1 = y
160.        If  nt < ntm Then GoTo l10 Else GoTo l99
161. l501:      Print #3," de > dem    ! nt = ",nt,Tab(5),"de = ",de
162.    Print "de > dem! nt = ",nt,Tab(5),"de = ",de
163. l99:       msg = MsgBox("是否继续进行?",4 + 32 + 0,"继续判断")
164.    If msg = 6 Then
165.        nt = 0              'ntm 步的计算尚不能给出完整轨道,再增加 ntm 步,作新一轮计算
166.        GoTo l10
167.    End If
168. l999:      msg = MsgBox("逆时计算?",4 + 32 + 0,"逆时计算")
169.    If msg = 6 Then
170.        Print #3,"进行逆时运算!"
171.        p(1) = p1           ' 从初始位置处作反向轨道计算
172.        p(2) = p2
173.        p(3) = - p3
174.        p(4) = - p4
175.        x1 = x0 + ml * p(1)
176.        y1 = y0 + ml * p(2)
177.        nt = 0
178.        ntm = 100
179.        naps = 0
180.        GoTo l10
181.    End If
182. Close #3
183. End Sub
184. Private Sub rkod2s(pa( ) As Double,p( ) As Double)      '求解二阶常微分方程的子过程
```

```
185. Dim s As Double,u As Double,s1 As Double,s2 As Double,s3 As Double,s4 As Double
186. Dim u1 As Double,u2 As Double,u3 As Double,u4 As Double
187. '   Print "hp2 = ";hp2,"hd2 = ";hd2,"hd6 = ";hd6
188. '   Print #3,"hp2 = ";hp2,"hd2 = ";hd2,"hd6 = ";hd6
189.     Call force(p(),s,u)
190.     s1 = s
191.     u1 = u
192.     p(3) = pa(3) + hd2 * s
193.     p(4) = pa(4) + hd2 * u
194.     p(1) = pa(1) + hd2 * (pa(3) + hd2 * s / 2#)
195.     p(2) = pa(2) + hd2 * (pa(4) + hd2 * u / 2#)
196.     Call force(p(),s,u)
197.     s2 = s
198.     u2 = u
199.     p(3) = pa(3) + hd2 * s
200.     p(4) = pa(4) + hd2 * u
201.     Call force(p(),s,u)
202.     s3 = s
203.     u3 = u
204.     p(3) = pa(3) + hd2 * s
205.     p(4) = pa(4) + hd2 * u
206.     p(1) = pa(1) + h * (pa(3) + h * s / 2#)
207.     p(2) = pa(2) + h * (pa(4) + h * u / 2#)
208.     Call force(p(),s,u)
209.     s4 = s
210.     u4 = u
211.     p(1) = pa(1) + h * pa(3) + hd6 * hp2 * (s1 + s2 + s3)
212.     p(2) = pa(2) + h * pa(4) + hd6 * hp2 * (u1 + u2 + u3)
213.     p(3) = pa(3) + hd6 * h * (s1 + 2# * (s2 + s3) + s4)
214.     p(4) = pa(4) + hd6 * h * (u1 + 2# * (u2 + u3) + u4)
215. End Sub
216. Private Sub force(p() As Double,fx As Double,fy As Double)     '计算作用力的子过程
217. Dim x As Double,y As Double,r As Double,r2 As Double
218.    x = p(1)
219.    y = p(2)
220.    r2 = x * x + y * y
221.    r = Sqr(r2)
222. '   Print "in subforce,x = ",x,"y = ",y,"a = ",a,"r = ",r,"n = ",n,"i1 = ",i1
```

```
223.    If  i1 = 1 Then
224.      If  Abs(n + 1#) > 0.0000000001 Then
225.        fy = a * r ^ n
226.        fx = fy * x / r
227.        fy = fy * y / r
228.      Else
229.        fy = a / r
230.        fx = fy * x / r
231.        fy = fy * y / r
232.      End If
233.    Else
234.      fy = -1# / r2 + a * r ^ n
235.      fx = fy * x / r
236.      fy = fy * y / r
237.    End If
238. 'Print "in subforce,x = ",x,"y = ",y,"a = ",a,"i1 = ",i1,"n = ",n,"fx = ",fx
239. End Sub
240. Private Function vxy(p( ) As Double) As Double        '  计算质点势能的函数子过程
241. Dim np1 As Double,r As Double,r2 As Double,x As Double,y As Double
242.    np1 = n + 1#
243.    r2 = p(1) * p(1) + p(2) * p(2)
244.    r = Sqr(r2)
245.    If i1 = 1 Then
246.      If  n < > -1 Then vxy = -a * r ^ np1 / np1 Else vxy = -a * Log(r)
247.    Else
248.      If  n < > -1 Then vxy = -1# / r - a * r ^ np1 / np1 Else vxy = -1# / r - a * Log(r)
249.    End If
250. End Function
```

# 主要参考书目


[1] 周衍柏. 理论力学教程. 2 版. 北京:高等教育出版社,1986

[2] 梁昆森. 力学　下册(理论力学). 3 版. 北京:高等教育出版社,1995

[3] 胡慧玲,林纯镇,吴惟敏. 理论力学基础教程. 北京:高等教育出版社,1986

[4] Goldstein. H. Classical Mechanics(3rd ed). 经典力学(影印版). 北京:高等教育出版社,2005

[5] Meirovitch. L. Methods of Analytical Dynamics. New York: McGraw - Hill Book Company,1970

[6] José J V, Saletan E J. Classical Dynamics——A Contemporary Approach. Cambridge: Cambridge University Press,1998

# 中英文对照索引


A

| | | |
|---|---|---|
| 埃农－海力斯势问题 | Hénon－Heiles Potential | 69 |
| 亚当斯方法 | Adams method | 240 |

B

| | | |
|---|---|---|
| 保守力场 | conservative force field | 32 |
| 变分 | variation | 215 |
| 不变环面 | invariant torus | 223 |
| 不定乘子法 | method of undetermined multipliers | 177 |
| 不可解约束 | unsolvable constraint | 171 |
| 不完整系 | nonholonomic system | 170 |
| 不完整约束 | nonholonomic constraint | 170 |
| 不稳定力场 | unstable force field | 31 |
| 不稳定约束 | unstable constraint | 171 |

C

| | | |
|---|---|---|
| 参考系 | Frame of reference | 4 |
| 冲量 | impulse | 28,102 |
| 冲量定理 | theorem of impulse | 28 |
| 冲量矩 | moment of impulse | 29 |
| 冲量矩定理 | theorem of moment of impulse | 29 |
| 辏力 | central force | 46 |

D

| | | |
|---|---|---|
| 达朗贝尔原理 | D'Alembert principle | 182 |
| 达朗贝尔－拉格朗日方程 | D'Alembert－Lagrange equation | 183 |

| | | |
|---|---|---|
| 电路系统的动力学模拟 | dynamical analogy of electric circuit | 196 |
| 定点转动 | Fixed – point rotation | 149 |
| 定轴转动 | Fixed – axis rotation | 114,139 |
| 动力学相空间 | phase space of dynamics | 38 |
| 动量 | momentum | 28,99,126 |
| 动量定理 | theorem of momentum | 28 |
| 动量矩 | moment of momentum | 29,47,100 |
| 动量矩(角动量)定理 | theorem of moment of momentum | 29,103 |
| 动量矩守恒定律 | law of conservation of moment of moment | 30 |
| 动量守恒定律 | law Of conservation momentum | 28,103,137 |
| 动能 | kinetic energy | 31,100,133 |
| 动能定理 | theorem of kinetic energy | 30,105,137 |
| 动能系数矩阵 | coefficient matrix of kinetic energy | 202 |


## F


| | | |
|---|---|---|
| 泛函 | functional | 215 |
| 反气旋 | anticyclone | 90 |
| 非保守力场 | non – conservative force field | 32 |
| 非惯性参考系 | non – initial frame of reference | 74,79,81 |
| 费马原理 | principle of Fermat | 214 |
| 分岔 | bifurcation | 71 |
| 分隔线 | separatrix | 41 |
| 分析力学 | analytical mechanics | 1,168 |
| 傅科摆 | Foucault pendulum | 88 |
| 复摆 | compound pendulum | 142 |


## G


| | | |
|---|---|---|
| 刚体 | rigid body | 113 |
| 刚体力学 | mechanics of rigid body | 113 |
| 各态历经 | ergodic | 224 |
| 拱点 | apsis | 65 |
| 共轭正则变量 | canonical conjugate variable | 220 |
| 拱角 | apsidal angle | 65 |
| 惯量积 | product of inertia | 128 |
| 惯量矩阵 | matrix of inertia | 127 |
| 惯量张量 | tensor of inertia | 127 |
| 惯量主轴 | principal axis of inertia | 128 |
| 惯性 | inertia | 16 |

| | | |
|---|---|---|
| 惯性参考系 | inertial frame of reference | 16 |
| 惯性定律 | law of inertia | 15 |
| 惯性力 | inertial force | 80 |
| 惯性离心力 | inertial centrifugal force | 82 |
| 惯性质量 | inertial mass | 16 |
| 广义动量积分 | integral of generalized momentum | 187 |
| 广义力 | generalized force | 175 |
| 广义速度 | generalized velocity | 184 |
| 广义坐标(系) | generalized coordinate(system) | 171 |
| 轨道 | orbit | 5,49 |
| 规则进动 | regular precession | 157 |


## H


| | | |
|---|---|---|
| 哈密顿函数 | Hamiltonian function | 205 |
| 哈密顿量 | Hamiltonian | 205 |
| 哈密顿原理 | Hamilton principle | 217 |
| 哈密顿正则方程 | Hamiltonian canonical equation | 208 |
| 哈密顿作用量 | Hamilton action | 217 |
| 回转效应 | gyroscopic effect | 159 |
| 混沌 | chaos | 71,227 |
| 耗散系统 | dissipative system | 187 |
| 耗散函数 | dissipative function | 187 |


## J


| | | |
|---|---|---|
| 几何约束 | geometrical constraint | 169 |
| 机械能 | mechanical energy | 32 |
| 机械能守恒定律 | law of conservation ofmechanical energy | 32,106 |
| 加速度 | acceleration | 6,120 |
| 简正模式 | normal mode | 201 |
| 简正频率 | normal frequency | 201 |
| 简正振动 | normal vibration | 201 |
| 简正坐标 | normal coordination | 201 |
| 角变量 | angular variable | 223 |
| 角动量 | angular momentum | 29,99,126 |
| 角动量定理 | theorem of angular momentum | 29,104 |
| 角动量守恒定律 | law of conservation of angular momentum | 104,137 |

| | | |
|---|---|---|
| 角速度矢量 | angular velocity vector | 8 |
| 角位移 | angular displacement | 116 |
| 进动 | precession | 119 |
| 绝对速度 | absolute velocity | 74 |

**K**

| | | |
|---|---|---|
| KAM 定理 | KAM theorem | 225 |
| KAM 曲线 | KAM curve | 227 |
| 可积分问题 | integrable problem | 17 |
| 可解约束 | solvable constraint | 171 |
| 科里奥利加速度 | Coriolis acceleration | 78 |
| 科里奥利力 | Coriolis force | 82 |
| 柯尼希定理 | König theorem | 101 |

**L**

| | | |
|---|---|---|
| 拉格朗日方程组 | Lagrange equations | 185 |
| 拉格朗日函数 | Lagrange function | 186 |
| 拉格朗日量 | Lagrangian | 186 |
| 拉莫尔角频率 | Larmor angular frequency | 160 |
| 拉莫尔进动 | Larmor precession | 160 |
| 勒让德变换 | Legendré transformation | 205 |
| 力场 | force field | 31 |
| 力矩 | moment of force | 29 |
| 理想约束 | ideal constraint | 173 |
| 力心 | center of force | 46 |
| 力学系 | mechanical system | 168 |
| 两体问题 | two – body question | 61,80 |
| 龙格 – 库塔方法 | Runge – Kutta method | 237 |
| 卢瑟福散射公式 | Rutherford scattering formula | 59 |
| 卢瑟福散射实验 | Rutherford scattering experiment | 58 |

**M**

| | | |
|---|---|---|
| 贸易风 | Trade winds | 81 |
| 米尔恩多步方法 | Milne multistage method | 241 |
| 瞄准距离 | collision parameter | 58 |

**N**

| | | |
|---|---|---|
| 牛顿定律 | Newton law | 15 |

| | | |
|---|---|---|
| 内力 | Internal force | 96 |
| 逆效力 | reversed effective force | 183 |

O

| | | |
|---|---|---|
| 耦合摆 | coupled pendulums | 197 |
| 欧拉动力学方程 | Euler dynamical equation | 151 |
| 欧拉角 | Euler angle | 115 |
| 欧拉方程 | Euler equation | 216 |

P

| | | |
|---|---|---|
| 庞加莱面 | Poincaré section | 67,69 |
| 碰撞参数 | impact parameter | 58 |
| 平动 | translation | 114 |
| 平均速度 | average velocity | 6 |
| 平面平行运动 | plane – parallel motion | 114,144 |
| 泊松括号 | Poisson bracket | 213 |

Q

| | | |
|---|---|---|
| 气旋 | cyclone | 90 |
| 牵连加速度 | convection acceleration | 78 |
| 牵连速度 | convection velocity | 75 |

R

| | | |
|---|---|---|
| 瑞利耗散函数 | Rayleigh dissipative function | 188 |

S

| | | |
|---|---|---|
| 散射轨道 | Scattering Orbit | 58 |
| 散射角 | scattering angle | 59 |
| 散射截面 | scattering cross – section | 59 |
| 摄动 | perturbation | 65 |
| 势场 | potential field | 32 |
| 势能 | potential energy | 32 |
| 势能函数 | potential energy function | 32 |
| 势能函数矩阵 | matrix of potential energy function | 202 |
| 实位移 | real displacement | 172 |
| 双曲点 | hyperbolic point | 41 |
| 瞬时加速度 | instantaneous acceleration | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 瞬时角速度 | instantaneous angular velocity | 118 |
| 瞬时速度 | instantaneous velocity | 6 |
| 瞬时转动中心 | instantaneous center of rotation | 122 |
| 瞬时转轴 | instantaneous axis | 118,149 |
| 瞬心 | instantaneous center | 123 |
| 速率 | speed | 6 |

**T**

| | | |
|---|---|---|
| 椭圆点 | elliptic point | 41 |

**W**

| | | |
|---|---|---|
| 外力 | external force | 96 |
| 完整系 | holonomic system | 170 |
| 完整约束 | holonomic constraint | 170 |
| 纬度变迁 | latitude change | 153 |
| 微分散射截面 | differential scattering | 60 |
| 微分约束 | differential constraint | 169 |
| 微小振动 | micro – vibration | 197 |
| 位能 | potential energy | 32 |
| 位能函数 | potential function | 32 |
| 位势场 | potential field | 32 |
| 位移 | displacement | 6 |
| 稳定力场 | stable force field | 31 |
| 稳定约束 | stable constraint | 171 |

**X**

| | | |
|---|---|---|
| 相点 | phase point | 38 |
| 相对速度 | relative velocity | 75 |
| 相对运动 | relative motion | 74 |
| 相轨迹 | phase trace | 38 |
| 相空间 | phase space | 38 |
| 信风 | trade wind | 90 |
| 信风带 | tradewind zone | 91 |
| 虚功 | virtual work | 173 |
| 虚功原理 | principle of virtual work | 174 |
| 虚位移 | virtual displacement | 172 |
| 循环积分 | cyclic integral | 187 |
| 循环坐标 | cyclic coordinates | 187 |

## Y


| | | |
|---|---|---|
| 映射 | mapping | 227 |
| 有心力 | central force | 46 |
| 有心运动 | central motion | 46 |
| 有序状态 | order | 71,224 |
| 约化质量(折合质量) | reduced mass | 62 |
| 运动约束 | constraint of motion | 170 |


## Z


| | | |
|---|---|---|
| 章动 | nutation | 157 |
| 正则变换 | canonical transformation | 219 |
| 正则变量 | canonical variable | 209 |
| 正则方程 | canonical equation | 209 |
| 质点 | particle, material point | 4 |
| 质点组(系) | system of particles | 96 |
| 质心 | mass center | 97 |
| 质心(运动)定理 | theorem of(motion of) mass center | 102,137 |
| 质心坐标系 | mass center coordinate system | 100 |
| 主函数 | principal function | 217 |
| 主转动惯量 | principal moment of inertia | 130 |
| 转动惯量 | moment of inertia | 129 |
| 转动数 | rotation number, winding number | 227 |
| 自由度 | degree of freedom | 113,171 |
| 作用变量 | action variable | 223 |
| 作用量 | action | 217 |