目　录

绪论……（1）

第一章　向量·质点运动学……（5）

§1.1　若干基本概念……（5）

§1.2　向量及其微商……（8）

§1.3　坐标系·几种常用坐标系中的速度和加速度……（21）

§1.4　角速度……（33）

习题……（37）

第二章　牛顿力学……（42）

§2.1　力学定律·质量和力……（42）

§2.2　质点动力学……（47）

§2.3　质点系动力学……（64）

§2.4　变质量物体的运动……（83）

习题……（91）

第三章　非惯性参考系……（97）

§3.1　引言……（97）

§3.2　伽里略-牛顿相对性原理……（99）

§3.3　相对运动的运动学……（100）

§3.4　相对运动的动力学……（108）

习题……（122）

第四章　拉格朗日力学……（127）

§4.1　引言……（127）

§4.2　约束·自由度·广义坐标……（129）

§4.3　虚位移·可能位移·实位移……（136）

§4.4　理想约束·虚功原理……（139）

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§4. 5 平衡的稳定性……(145)
§4. 6 拉格朗日方程……(152)
§4. 7 用拉格朗日方程求解力学问题的步骤和应用举例……(169)
§4. 8 拉格朗日乘子和约束力……(178)
§4. 9 拉格朗日力学的特点和成就……(184)
习题……(186)
第五章 中心力……(196)
§5. 1 引言……(196)
§5. 2 二体问题约化为单体问题……(197)
§5. 3 中心力场中的运动……(199)
§5. 4 开普勒问题·反平方力……(210)
§5. 5 宇宙速度·人造地球卫星……(225)
§5. 6 圆形轨道的稳定性……(232)
§5. 7 散射·实验室坐标系和质心坐标系……(239)
习题……(256)
第六章 微振动……(266)
§6. 1 一维微振动……(266)
§6. 2 耦合谐振动举例——二度耦合谐振子……(269)
§6. 3 多自由度耦合系统微振动的一般理论……(273)
§6. 4 简正坐标和简正模式……(282)
习题……(305)
第七章 刚体力学……(316)
§7. 1 刚体运动的分析……(316)
§7. 2 刚体运动学……(321)
§7. 3 力系及其简化·力系的平衡……(338)
§7. 4 刚体动力学基本方程·平衡方程……(345)
§7. 5 刚体定点运动的角动量和动能·惯量张量和转动惯量……(347)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§7. 6 惯量主轴·惯量椭球……(355)
§7. 7 刚体的定轴转动和平面平行运动……(363)
§7. 8 刚体的定点运动……(374)
习题……(397)
第八章 哈密顿力学……(410)
§8. 1 哈密顿正则方程和运动积分……(410)
§8. 2 相空间·刘维定理……(420)
§8. 3 变分运算……(425)
§8. 4 哈密顿原理……(433)
§8. 5 泊松括号·泊松定理……(441)
§8. 6 正则变换……(447)
§8. 7 哈密顿-雅可比方程……(463)
§8. 8 作用-角变量……(478)
习题……(484)
第九章 连续介质力学基础……(491)
§9. 1 连续介质运动的描述·应变……(491)
§9. 2 应力与应力张量……(504)
§9. 3 连续介质动力学基本方程……(509)
§9. 4 本构方程……(520)
§9. 5 弹性固体……(527)
§9. 6 理想流体……(536)
§9. 7 粘滞流体……(549)
§9. 8 连续介质的拉格朗日方程……(556)
习题……(561)
附录一 矩阵……(566)
附录二 级数展开……(574)
附录三 二阶常微分方程……(576)
附录四 各种均质刚体的质心主转动惯量……(579)
主要参考书目……(582)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

绪　论

理论力学是物理类专业的专业基础课“四大力学”中最先讲授的一门课，它的内容是通常所说的经典力学. 经典力学是经典物理学的基石之一，是发展现代物理学的起点、入口处和阶梯，是物理学工作者必备的专业基础的基础，它不仅对于理科专业是重要的，对于大多数工程技术学科也是最重要的基础理论之一.

经典力学是一门古老、成熟的学科. 众所周知，经典力学大厦的基本框架，早在 1687 年牛顿（Newton）发表的《自然哲学的数学原理》一书中就已经建立起来了. 牛顿发现了物质机械运动的普遍规律，他对经典力学的表述，是在近代意义上，从经验观察到物理理论的第一个数学抽象. 他在发现这些规律的同时，还发明了研究这些规律的数学工具——微积分. 牛顿的成就，当之无愧地被称之“人类历史上个人智慧果实的最高体现”（Laplace 语），成为力学史，也是整个人类科学技术史上伟大的里程碑.

以牛顿定律为基础的牛顿力学在其后发展中不断遇到新的困难和挑战：在社会生产不断提出新的力学问题的背景下，牛顿力学显得困难而费力. 尤其在处理有约束的运动时更是如此，在数学上，动力学问题的求解尚无一般的方法，尤其是三体以上的多体问题和刚体定点运动问题的求解没有一般方法. 在物理上，处理接近光速的运动和原子、亚原子微观世界的运动时，经典力学的基本概念和理论被证明不再适用，而必须代之以新概念和新理论.

1788 年，拉格朗日（Lagrange）发表了分析力学的奠基性著作《分析力学》，把经典力学的发展推向了新阶段，成为力学

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

发展的第二个里程碑．拉格朗日在他的著作中不借用任何几何方法，整个书甚至连一张图都没有，完全用分析形式，统一处理了静力学和动力学、流体静力学和流体动力学；从变分原理出发建立起了受约束系统的平衡和运动微分方程式，把经典力学建立于统一的数学基础之上．拉格朗日力学部分地克服了牛顿力学的困难，并具有更高的概括能力，开辟了深入研究非完整系统、控制系统、电磁系统、振动、稳定性理论等的道路．

1834—1835 年哈密顿(Hamilton)在两篇划时代的论文中提出了 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程．Hamilton 原理成了全部力学和大部分经典物理学的动力学原理．它从一个简单的假设出发，不仅能导出拉格朗日方程和牛顿方程，还将众多领域中许多个别理论完美地统一了起来．它有着极其广阔的适用范围，已经成了物理理论中最成功，影响最广泛、深远的物理原理之一．哈密顿理论是力学发展的第三个里程碑．哈密顿理论表明，力学原理可以用泛函取极值的方式表述，力学状态和动力学方程，可以用优美的正则形式表示出来．不仅力可由势推导出来的完整系的全部力学都可以包含在简洁的哈密顿原理内，而且可以推广到诸如弹性场、电磁场及基本粒子场等动力学中一般不涉及的体系．哈密顿原理和哈密顿正则方程，成了向现代物理学过渡的最适当的桥梁．

上述的牛顿、拉格朗日和哈密顿代表的经典力学的三个发展阶段，在 19 世纪中叶即已完成．事实上，这其中还包含了另外一大批杰出的数学—力学家的贡献，如伽里略(Galilei)、开普勒(Kepler)、莫培督(Maupertuis)、欧勒(Euler)、拉普拉斯(Laplace)、勒让德(Lagrendre)、泊松(Possion)、雅可比(Jacobi)、刘维(Liouville)等．

虽然经典力学早在上个世纪就已“成型”，而且十分完美，现时理论力学课的内容和传统体系早在上世纪末即已确立，但一百年来力学的发展并没有停滞，也没有因牛顿力学失去了昔

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

日似乎能支配整个自然界的地位而降低其价值，相反，力学理论自身及其应用的研究，新的科学分支的建立和发展，都取得了长足的进展，尤其是上个世纪末以来经典非完整分析力学的发展和近三十年来近代分析力学的诞生与发展，又把力学向前推进了一大步，它所使用的先进的强有力的数学工具的意义，已远远超出了经典力学的范围. 这一时期力学的发展，是与彭加莱(Poincare)、李雅普诺夫(Ляпунов)、爱因斯坦(Einstein)、嘉当(Cartan)、阿诺德(Арнольд)等的贡献分不开的. 例如近代分析力学的代表作系由戈德比伦(Godbillon)、阿诺德(Арнольд)和亚伯拉罕(Abraham)与马斯登(Marsden)所著，被称为近代分析力学的三本“圣经”.

由于教学任务与学时所限，非完整分析力学和近代分析力学的内容将不在本课中讲授.

人们都记得，数学与力学的早期结合，曾产生了牛顿时代数学与力学的辉煌成果，产生了牛顿、欧勒这样伟大的数学—力学家. 在其后一个相当长的一个时期里，两门科学的结合减弱了，经历了各自独立的发展. 近一个时期数学与力学的再度结合，成为国际学术界的一股热潮. 例如近代微分几何的研究，使得有可能用流形、微分流形、辛流形的观点和语言重新审视和研究分析力学的原理和方法，形成了近代分析力学或几何动力学. 由于发现了哈密顿力学的数学结构是辛结构，使人们对哈密顿力学的认识更深刻了. 可以预期近代微分几何、数学分析、流形上泛函分析等数学理论的发展，将可能用更加精密、抽象的数学工具武装力学，数学与力学在更高层次上的再度结合必将使力学的发展推进到一个新阶段.

一百年来力学的发展，还表现在：向微观、高速领域的扩展产生了量子力学和相对论力学，促进了近代物理学的发展；同时，经典力学及其分支决定着许多技术部门的发展进程，从普通的机器、机构到天体运动；从海流、大气到火箭、卫星的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

轨道控制，都需要用经典力学理论精确计算．此外，经典力学向邻近学科的渗透，又产生了难以计数的新兴学科：物理力学，生物力学，地球力学，地球流体力学，化学流体力学，运动力学，岩土力学，爆炸力学，断裂力学，宇宙气体动力学……正如著名的戈德斯坦(H. Goldstein)指出的，毋庸置疑，今天的经典力学远非是一个定局的课题，近几十年来，已经看到了经典力学的新发展已处于它的绽花期．经典力学确是一门古老而又年轻，日新月异地发展的生气勃勃的学科．

作为综合大学和高等师范院校物理类专业本科理论力学教程，本书的目的是，(1)使学生掌握经典力学理论的要点和精华，即它的完整理论体系和现代的处理方法．(2)在理论、概念、方法、符号、术语诸方面，为学生实现从普通物理到高等物理，从经典力学到近代物理的过渡作准备，以便顺利"接轨"．(3)使学生掌握必要的数学方法和技巧，受到严格而充分的运用高等数学解决物理问题的训练，以便增强他们在这方面的能力和素养．我们希望读者在阅读本书时，也能注意到这几点．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第一章　向量·质点运动学

在力学及整个物理学中，我们将遇到许多既有大小，又有方向，并且遵从特殊运算规则的一类量——向量. 本章首先讨论向量的一般性质，然后讨论位置向量、位移、速度、加速度和角速度等描述质点运动的特殊向量，它们之间的关系及在各种坐标系中的表示，这些构成了质点运动学的基本内容. 质点运动学是力学的一部分，它是从几何的观点来研究质点的运动，可以看作运动的几何学或以时间为第四维度的四维空间几何学，质点运动学关心的是质点怎样运动而不涉及作此种运动的原因.

§1.1　若干基本概念

研究力学现象，如同研究其它各种自然现象一样，必须首先建立某些基本的概念. 仅仅有了基本的概念还不够，人们在实践中通过观察、实验，即从经验中又获得了许多新的概念，这些新的概念常常要用那些基本概念来表示，或从基本概念引伸和推导出来. 人们把各种概念之间的关系加以归纳、整理、普遍化，上升为力学的规律. 特别是对于这些概念，作出一些未加证明的基本的论断，称为假设或公理，其中以实验观察为基础的，又称为定律，这些公理或定律，往往难以直接地证明，它们的正确性，是由它们逻辑地推导出的结果是否与实践相符来证明的. 在这些原理的基础上，得以建立起各种力学的理论.

许多基本概念，正因为其"基本"，很难用其他更基本的概念来阐释，在某种意义上，可以说，物理科学中最重要和最富

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

有成果的，正是那些不能给予确切意义（或未加定义）的概念. 在研究机械运动规律的力学中，这首先就是空间和时间. 牛顿在他的《自然哲学的数学原理》一书中写道：

“绝对空间自身，与任何外在的东西无关，永远保持不变和不动”，“绝对的真正的数学的时间是自在的，与任何外在的东西无关，它均一地流逝着，又称为持续”. 按照牛顿的时空观，空间是某种不动的三维框架，物体在其中存在和运动着；距离的概念可以从几何角度通过直觉来理解，一维的空间距离可以用刚性尺来量度. 按照牛顿的观点，时间也是绝对的，与任何物理客体和事件无关地流逝着，它可以由任一观察者予以精确定义，用周期性发生的事件（如地球的公转、自转，原子、分子的振动等）来量度，时间与空间彼此没有任何联系. 牛顿的绝对空间和绝对时间的观念，是基于力学实验和生活直观建立起来的，受到了他所处的时代的生产力和科学发展水平的局限. 本世纪发展起来的相对论理论证实，绝对时空观并不能在所有情况下都正确地反映客观实际，它只是相对论时空观的某种近似. 在相对论中，牛顿的时空概念必须进行修正，因为相对论揭示出在物体运动速度大到可与光速相比时，空间几何的度规性质与时间的度量，不仅与观测者的运动状态有关，还和物质分布及其运动状态有关，时间与空间的性质，同物质及其运动是密不可分的，时间与空间，质量与能量也是不可分离的. 在物体运动速度 v 接近光速 c 的情况下，牛顿旧的绝对时空观已不能与客观事实相符，必须放弃，代之以相对论的时间和空间概念. 然而，依据相对论，在物体的运动速度远小于光速时，绝对时空概念，还是十分精确地反映了自然，可以照常应用，就是在这种意义下，我们在研究宏观物体低速运动的经典力学中，继续使用绝对空间和绝对时间概念的.

作为物质存在的形式，运动有其绝对性，即一切物体都处在永恒的运动中；另一方面，运动又有相对性，只有选定了另

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

外的物体或物体系作为参照，才能说某物体是相对静止、还是运动，以及如何运动的．这个被选定的另外的物体或物体系，称为参考系或参照系．参考系一经选定，对运动的描述就是确定的了．在不同的参考系中描述同一物体的运动，结果可能非不相同，但这些结果之间有着确定的关系，因为它们描述的客观物理过程是同一的．参考系的选择是任意的．在运动学问题中，各种参考系是等价的，只有繁简之分；而在动力学问题中，各种参考系不一定是等价的，应视描述运动方便与否来选择参考系．

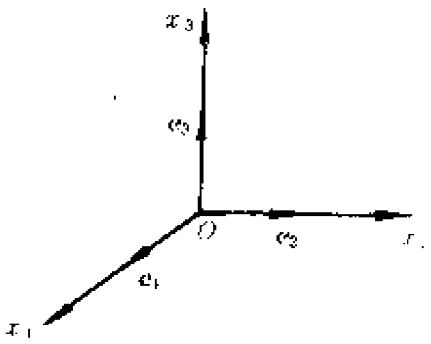


图 1.1

力学的另一基本概念是质量，我们将在动力学中严格定义它．任何物体都可以看成由小到几乎没有大小和形状而具有无限小的或者有限质量的微小物体组成的，这样的微小物体，叫做质点，整个物体叫做质点系．然而物体的大小也是相对的，物体能不能看作质点，不决定于它的实际大小，而与物体的运动范围、参考物体的大小以及在哪个层次上考察物体的运动有关．例如，地球的半径是 6.37×10^{6} 米，地球公转的轨道半径是 1.49×10^{11} 米，前者比后者小 5 个数量级，在考察地球公转时，不考虑地球的形状与大小而把它看作质点，是很合理的．但在考虑地球自转、潮汐、地震等问题时，当然就不能把地球看作质点了．在质点运动学里，我们所说的质点，实质上就是一个几何点，暂不涉及它的质量和对其他物体的作用．质点运动学的任务，就是描述这个几何点的运动．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§1.2 向量及其微商

在初等力学中，向量被定义为具有大小和方向，并按平行四边形法则相加的量，或向量是一个可以用有向线段来表示的量. 这里特别强调的是向量的几何意义. 我们假定读者已经熟悉了向量的几何陈述. 下面，我们用稍为不同的方式，即用代数的符号和语言，回顾一下向量的性质和运算规则.

在三维空间中，我们可以把三维有序实数组(x_1, x_2, x_3)和一个几何向量联系起来，这三个数就称为向量的分量. 粗略地说，这就是向量的代数定义，这一定义还可以推广到高于三维的向量空间. 一个n维空间的向量，可以用n维有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$来表示.

在三维空间中，任何向量x可以展开成任何三个非共面向量的线性组合

$$x = aG_1 + bG_2 + cG_3$$

a，b，c是标量，G_1，G_2，G_3是任意的三个非共面向量，它们组成"基"，任何向量都可以通过基展开或分解. 一般说，G_1，G_2和G_3并不一定是正交(垂直)的，但如果选择互相正交的基向量常常会带来很大方便，这样的基称为正交基. 我们通常采用的笛卡儿基，就是正交基，而另外一些坐标系，如平面极坐标系、圆柱坐标系、球坐标系和其他一些曲线坐标系，所采用的基也是正交基.

笛卡儿基由三个互相垂直的单位长度的向量e_1，e_2和e_3组成，这种具有单位长度的基称为是归一化的. 笛卡儿基(e_1, e_2, e_3)是正交归一基. 这一组基向量在空间各点分别具有相同的方向. 在前述各种曲线坐标中的基向量也是正交归一基. 在笛卡儿基下，一任意向量A可表示为

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i e_i$$

$$= (A_1, A_2, A_3)$$

为了更简明地表示向量和更复杂的张量，我们甚至还可以将 $A=\sum_{i=1}^{3} A_i e_i$ 简化为 $A=A_i e_i$，这是所谓爱因斯坦求和约定. 爱因斯坦在研究向量与张量时发现：每当对给定的下标求和时，这个下标在求和表达式中必出现两次. 反之亦然，这样，求和号就是多余的了，可以省去. 例如 $A_i e_i$，下标 i 从 1 变到 3，这意味着对 $A_1 e_1$，$A_2 e_2$，$A_3 e_3$ 三项求和. 如果还有不同的重复下标，例如 j，还应再次求和. 总之，有多少个重复下标，就应有多少次求和，这种重复下标，称为哑标. 哑标的出现，就意味着采用爱因斯坦求和约定，这将使我们的公式表述和运算得到很大简化，在讨论复杂问题时，我们将使用这一符号速记法.

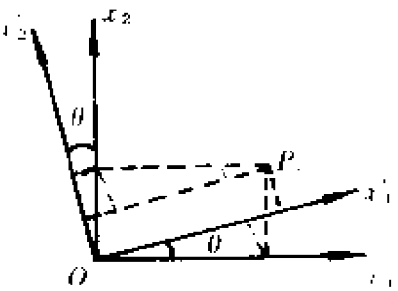


图 1.2

为严格给出向量的代数定义，我们先讨论坐标变换.

一点 P，相对于二维笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2$，坐标为 (x_1, x_2). 如坐标系在原平面内绕原点 O 转 θ 角，成为新坐标系 $O\text{-}x_1'x_2'$，则由图 1.2 可知，点 P 在 $O\text{-}x_1'x_2'$ 中的坐标为

$$x_1' = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta = x_1\cos\theta + x_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (1.1)$$

注：三维向量 x 在笛卡儿基下可以表为 $x=(x_1, x_2, x_3)$，也可以表为 $x=(x, y, z)=xe_x+ye_y+ze_z$，但可以发现，在涉及求和和坐标变换时，用 (e_1, e_2, e_3) 表示笛卡儿基比用 (e_x, e_y, e_z) 更方便，而且此种记号更易推广到高维空间. 本书中将因所讨论的问题不同而采用这两种记号.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$x_2' = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = x_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + x_2\cos\theta$$

将 x_i' 与 x_i 轴的夹角余弦记为

$$\lambda_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j) \tag{1.2}$$

则显然有 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，且由(1.1)

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos(x_1', x_1) + x_2\cos(x_1', x_2) = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 \\ x_2' &= x_1\cos(x_2', x_1) + x_2\cos(x_2', x_2) = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

同理，三维情形下有

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x_2' &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x_3' &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

即

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}x_j \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.5}$$

λ_{ij}是 x_i' 相对于 x_j(j=1, 2, 3)的方向余弦，i=1, 2, 3，故共有 9 个 λ_{ij}，将其排成一个方阵，称为矩阵，以 A 表示：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

λ 称为三维旋转矩阵或变换矩阵，一旦λ给定，即两组坐标轴的方向余弦确定，则可由(1.5)确定点在任何坐标系中的坐标.

(1.6)式给出的矩阵A，行数与列数相等，是一方阵. 然而矩阵并不必为方阵，即行、列数不一定相等. 例如，一个点在三维空间的坐标可以表成一个列矩阵

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

或行矩阵

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$x = (x_1, x_2, x_3) \tag{1.8}$$

矩阵运算最基本的，是矩阵乘法.

将 x'_i、x_i 表成列矩阵，则按

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.9}$$

或

$$x' = Ax \tag{1.10}$$

则有

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

这里矩阵相乘的结果，应当与(1.4)式一致.

推广到一般情形，规定：矩阵 A 和矩阵 B 相乘，仅当 A 的列数与 B 的行数相等才能进行，否则没有意义. 乘积 C 亦为一矩阵.

$$C = AB \tag{1.12}$$

$$C_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj} \tag{1.13}$$

矩阵乘法具有非对易性，即使 A，B 皆为方阵，AB，BA 都有意义，但不一定相等. 有关矩阵的其他性质与运算法则，可参看附录一.

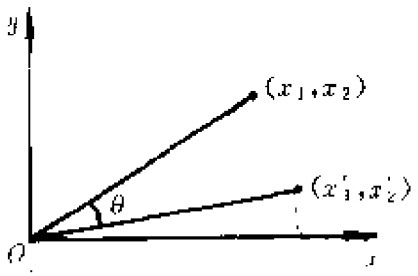


图1.3

以上，我们是令点 P 不动，而坐标系转动 θ. 反之，也可令坐标系不动，使 P 点反向转动 θ 而保持与原点距离不变，转动后 P 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 \\ x'_2 &= -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这是主动变换的方程式，与被动变换的方程式(1.3)完全相同，即两种表述在数学上是等价的. 三维情形亦如此.

变换矩阵λ的性质与如下三角学公式有关：

(1)一直线的方向余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1.15}$$

(2)两条直线，它们的方向余弦各为$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$和$\cos\alpha'$，$\cos\beta'$，$\cos\gamma'$，则它们的夹角θ的余弦是

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma' \tag{1.16}$$

对x'_1轴而言，它对于$x_i(i=1,2,3)$轴的方向余弦满足

$$\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2=\sum_j\lambda_{1j}^2=1 \tag{1.17}$$

对x'_2，x'_3轴亦然，故

$$\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{ij}=1 \qquad (i=1,2,3) \tag{1.18}$$

对于x'_1，x'_2两轴，它们的夹角$\theta=\pi/2$，在x_i坐标系中的方向余弦满足关系

$$\lambda_{11}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{22}+\lambda_{13}\lambda_{23}=\cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{1.19}$$

即

$$\sum_j\lambda_{1j}\lambda_{2j}=0 \tag{1.20}$$

推广之，得

$$\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}=0 \qquad (i\neq k) \tag{1.21}$$

将(1.18)和(1.21)合并得

$$\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}=\delta_{ik} \tag{1.22}$$

δ_{ik}是克罗尼克(Kronecker)δ符号，定义为

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{当 } i\neq k\\ 1 & \text{当 } i=k\end{cases} \tag{1.23}$$

(1.22)式称为正交条件，正交系旋转的变换矩阵必须满足正交

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

条件. 由变换方程的对称性可将逆变换式写为

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x'_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.24}$$

逆变换表示把 x_i 轴看成 x'_i 坐标系中的直线，其正交性条件表示为

$$\sum_j \lambda_{ji}\lambda_{jk} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1.25}$$

前面我们看到，把向量视为3重有序实数组(x_1, x_2, x_3)，当点不动而令坐标系转动时，点的坐标会有许许多多不同数值的分量，即一个向量可以对应于许多组有序的3重数组，这些3重数组间按一定的方式联系起来. 因此，向量的定义不应只包含3重数组，还应当包括变换法则.

设有坐标变换

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \tag{1.26}$$

且变换满足

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} \tag{1.27}$$

如果在此变换下量 φ 不变，则称该量为标量.

如有3维实数组(G_1, G_2, G_3)在坐标系 x_i 经 A 变到 x'_i 时，有

$$G'_i = \sum_j \lambda_{ij} G_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.28}$$

即 G_i 的变换与点的坐标 x_i 一样，则三维实数组

$$\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3) \tag{1.29}$$

称为向量.

向量满足如下公理：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3)$

$= (C_1, C_2, C_3)$

$= \boldsymbol{C}$

即任何两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可相加得第三个向量 $\boldsymbol{C}$.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$A+B=B+A \qquad \text{(交换律)}$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C \qquad \text{(结合律)}$$

(2)$\mathbf{0}=(0,0,0)$

对任何向量 G，

$$G+\mathbf{0}=G$$

0称为零向量，也记为0.

(3)对任何向量 G，有向量$-G$，满足

$$G+(-G)=\mathbf{0}$$

$(-G)$称为向量 G 的逆.

(4)任何向量可以被一普通的数 a 乘，(即被一标量乘)，意义为

$$aG=(aG_1, aG_2, aG_3)$$

标量乘有如下性质：

$$a(bA)=(ab)A$$
$$1A=A$$
$$a(A+B)=aA+aB \qquad (a\text{ 的分配律})$$
$$(a+b)A=aA+bA \qquad (A\text{的分配律})$$

服从公理(1)至(4)的量的集合，称为向量空间.

向量的乘积主要有两类. 首先是标量积或点乘积，定义为

$$A\cdot B=\sum_i A_iB_i \qquad (1.30)$$

这和熟知的标量积的几何定义 $A\cdot B=AB\cos\theta$(θ 是 A，B 的夹角)是一致的，因为，用 AB 同除(1.30)两边得

$$\frac{A\cdot B}{AB}=\sum_i \frac{A_i}{A}\frac{B_i}{B}$$
$$=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$
$$=\cos\theta$$

两向量的标量积是一标量. 证明如下：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

设 A, B 是两向量，满足变换方程

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j, \quad B'_i = \sum_k \lambda_{ik} B_k$$

$$\begin{aligned} A' \cdot B' &= \sum_i A'_i B'_i \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_{ij} A_j \sum_k \lambda_{ik} B_k \\ &= \sum_{j,k} \Big(\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} \Big) A_j B_k \\ &= \sum_{j,k} \delta_{jk} A_j B_k \\ &= \sum_j A_j B_j = A \cdot B \end{aligned}$$

即在坐标变换下，标量积之值不变，故为标量.

标量积有如下性质：

$$\left.\begin{aligned} &A \cdot B = B \cdot A \\ &(\varphi A) \cdot B = A \cdot (\varphi B) = \varphi A \cdot B \qquad (\varphi \text{是标量}) \\ &(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

基向量的标量积为

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.33}$$

向量的第二种乘积是向量积，又称叉积，定义为：

$$C = A \times B$$

$$C_i = [A \times B]_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{1.34}$$

即

$$C = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} e_i A_j B_k \tag{1.35}$$

式中 ε_{ijk} 称为列维—西维塔(Levi—Civita)密度，它的定义是

$\varepsilon_{ijk} = 0$　　如 i, j, k 中任一指标与任一其他指标相等

$\varepsilon_{ijk} = 1$　　如 i, j, k 形成 1, 2, 3 的偶排列

$\varepsilon_{ijk} = -1$　　如 i, j, k 形成 1, 2, 3 的奇排列

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

因而，

$$\varepsilon_{122}=\varepsilon_{313}=\varepsilon_{211}=\cdots=0$$

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=\cdots=+1$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=\cdots=-1$$

向量积的这一定义，与向量积的几何定义是一致的. 因为在几何语言中，如果 $C=A\times B$，则 C 的数值

$$C=AB\sin\theta$$

$AB\sin\theta$ 是由 A，B 所确定的平行四边形的面积，C 的方向为从 A 转向 B 时，右手螺旋定则所确定的螺旋前进方向. 而 C 的数值的平方

$$\begin{aligned}A^2B^2\sin^2\theta&=A^2B^2-A^2B^2\cos^2\theta\\&=\Big(\sum_i A_i^2\Big)\Big(\sum_i B_i^2\Big)-\Big(\sum_i A_iB_i\Big)^2\\&=(A_2B_3-A_3B_2)^2+(A_3B_1-A_1B_3)^2\\&\quad+(A_1B_2-A_2B_1)^2\end{aligned}$$

按(1.35)式知 $A^2B^2\sin^2\theta=C_1^2+C_2^2+C_3^2=C^2$，亦即(1.34)定义的向量积的数值的平方.

两个向量的向量积是一个向量. 证明这一点，只要证明向量积在坐标转动下象普通向量一样变换即可(证明从略).

向量的向量积有如下性质：

$$\left.\begin{aligned}&A\times B=-B\times A\\&A\times(B+C)=A\times B+A\times C\\&(\varphi A)\times B=\varphi(A\times B)\end{aligned}\right\}\qquad(1.37)$$

作为特例，基向量的向量积为

$$e_i\times e_j=e_k\varepsilon_{ijk}\qquad(1.38)$$

通常，运动状态(质点的位置与速度等)和力学规律是用向量，特别是向量微分方程来表述的，因而向量的微商和微分，是经常用到的. 向量(G)对标量(t)微商的基本规则可以简单地表为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{dG}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{G(t+\Delta t)-G(t)}{\Delta t}$$

设 $G=\sum_i G_i e_i$，e_i 是固定的笛卡儿基向量.

$$\frac{dG}{dt}=\sum_i \frac{dG_i}{dt}e_i$$

如果 e_i 是非笛卡儿基或不固定的笛卡儿基，应加上对基向量的微商项

$$\frac{dG}{dt}=\sum_i\left(\frac{dG_i}{dt}e_i+G_i\frac{de_i}{dt}\right)$$

两变元和及乘积的微商可直接推广于向量：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}\\
&\frac{d}{dt}(\varphi G)=\varphi\frac{dG}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}G\\
&\frac{d}{dt}(A\cdot B)=A\cdot\frac{dB}{dt}+\frac{dA}{dt}\cdot B\\
&\frac{d}{dt}(A\times B)=A\times\frac{dB}{dt}+\frac{dA}{dt}\times B
\end{aligned}\right\}\qquad(1.39)$$

在讨论向量的微分算符时，我们着重研究其中最重要的一种——梯度算符.

对于一个只依赖于三维空间坐标 x_1，x_2，x_3 的标量函数 $f(x_1,x_2,x_3)=f(r)$ 而言，它的微分是

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$$

r 是从坐标原点指向点的位置向量，无穷小位移

$$dr=(dx_1,dx_2,dx_3)$$

定义函数 f 的梯度为向量

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\qquad(1.40)$$

则 df 可以表示成 $\mathrm{grad}f$ 同 dr 的标量积

$$df=\mathrm{grad}f\cdot dr\qquad(1.41)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如果函数换成 $g(x_1, x_2, x_3)$，则梯度

$$\mathrm{grad}g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \tag{1.42}$$

的形式不变，因而梯度的向量性质只能由微分算符

$$\mathbf{grad} \equiv \nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{1.43}$$

来决定，∇称为梯度算符. 也称为 nabla 或 del 算符.

标量函数 $f(r)$的微分可以写为

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= |\nabla f||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos(\nabla f, \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \qquad |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s \tag{1.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = |\nabla f|\cos(\nabla f, \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{1.45}$$

它表示∇f 在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向上的投影，显然，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$在$\nabla f // \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的方向上有最大值，这就定义了空间一点∇f 的方向是该点处 f 改变率最大的方向，向量∇f 的大小就等于这一最大改变率，亦即等于在 f 改变最快方向上的 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right|$.

如 $\mathrm{d}f = 0$，f = 常数，因∇f 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 一般不为零，故$\nabla f \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 令 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 沿 f = 常数的一条线，可见∇f 在任一点都垂直于 f = 常数的线或面，例如图1.4表示一圆锥形山峰的等高线图，$f = f(r)$代表点的高度，沿等高线之 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 使 $\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$，故$\nabla f \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\nabla f$ 沿法线.

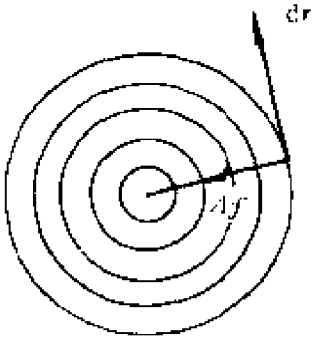


图1.4

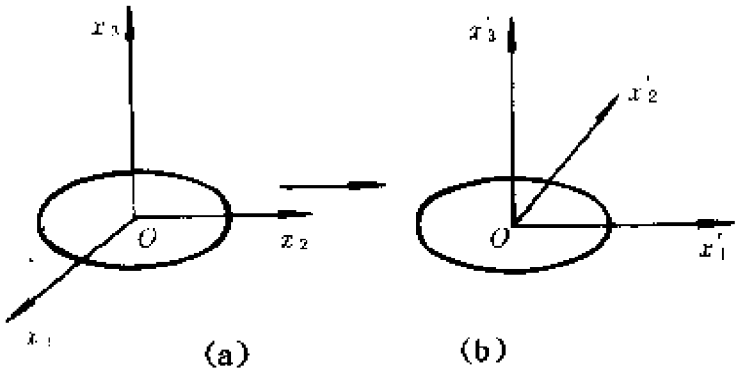
【例1.1】 设有三维笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$，如它

(1)绕 x_3轴逆时针方向转动90°；

(2)绕 x_1轴逆时针方向转动 θ 角.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

求两种情形下的变换矩阵.



(a) (b)

图1.5

解 设转动后的坐标系为 $O=x'_1x'_2x'_3$.

(1) $\lambda_{11}=\cos(x'_1, x_1)=0$

$\lambda_{12}=\cos(x'_1, x_2)=1$

$\lambda_{13}=\cos(x'_1, x_3)=0$

$\lambda_{21}=\cos(x'_2, x_1)=-1$

$\lambda_{22}=\cos(x'_2, x_2)=0$

$\lambda_{23}=\cos(x'_2, x_3)=0$

$\lambda_{31}=\cos(x'_3, x_1)=0$

$\lambda_{32}=\cos(x'_3, x_2)=0$

$\lambda_{33}=\cos(x'_3, x_3)=1$

$$\lambda=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

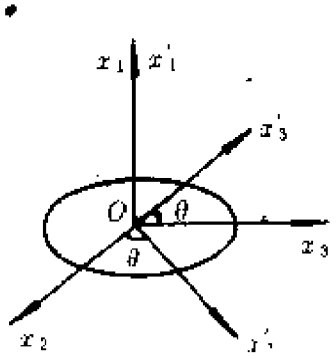


图1.5 (c)

(2) $\lambda_{11}=\cos(x'_1, x_1)=1$

$\lambda_{12}=\cos(x'_1, x_2)=0$

$\lambda_{13}=\cos(x'_1, x_3)=0$

$\lambda_{21}=\cos(x'_2, x_1)=0$

$\lambda_{22}=\cos(x'_2, x_2)=\cos\theta$

$\lambda_{23}=\cos(x'_2, x_3)=\sin\theta$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\lambda_{31}=\cos(x_3', x_1)=0$$

$$\lambda_{32}=\cos(x_3', x_2)=-\sin\theta$$

$$\lambda_{33}=\cos(x_3', x_3)=\cos\theta$$

$$\lambda=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{Bmatrix}$$

【例1.2】 试证明：向量对标量的微商是一向量.

解 向量 G 的分量按下式变换：

$$G_i' = \sum \lambda_{ij} G_j$$

对标量 s' 微商，得

$$\frac{\mathrm{d}G_i'}{\mathrm{d}s'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s'}\sum_j \lambda_{ij}G_j = \sum \lambda_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}G_j}{\mathrm{d}s}\right)$$

(因在 x_i 和 x_i' 系中，$s=s'$，而 λ_{ij} 不依赖 s')故

$$\frac{\mathrm{d}G_i'}{\mathrm{d}s'} = \left(\frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}s}\right)' = \sum_j \lambda_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}G_j}{\mathrm{d}s}\right)$$

即 $\frac{\mathrm{d}G_j}{\mathrm{d}s}$ 在坐标变换下如同向量分量一样变换，因而 $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}$ 为一向量.

【例1.3】 证明向量恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

解法一：

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_1$$

$$= A_2(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_3 - A_3(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_2$$

$$= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3) + A_1B_1C_1 - A_1B_1C_1$$

$$= B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3C_3)$$

$$= B_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

同样地，

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_2 = B_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_3 = B_3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - C_3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

故有

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

解法二：利用公式

$$\sum_k e_{ijk} e_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

证明.

$$\begin{aligned}
[A \times (B \times C)]_i &= \sum_{j,k} e_{ijk} A_j \sum_{l,m} e_{klm} B_l C_m \\
&= \sum_{j,k,l,m} e_{ijk} e_{klm} A_j B_l C_m \\
&= \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
&= \sum_j A_j (B_i C_j - C_i B_j) \\
&= B_i (A \cdot C) - C_i (A \cdot B) \\
&= \{B(A \cdot C) - C(A \cdot B)\}_i
\end{aligned}$$

故

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

§1.3 坐标系·几种常用坐标系中的速度和加速度

到目前为止，我们所作的向量分析都限于采用笛卡儿坐标系，但力学中许多有对称性的问题启示我们，最好是在能充分地把对称性开发出来的坐标系中表述它们，以使处理过程和结果得到简化.

在笛卡儿的描述中，定义了三个互相正交(垂直)的平面族：x =常数，y =常数以及 z =常数，并且用其交点(x, y, z)描述一个点的位置. 现在，我们引入新的并不一定是平面的坐标面的集合：q_1 =常数，q_2 =常数和 q_3 =常数，依此，点(x, y, x)可代之以(q_1, q_2, q_3)，原则上，这里必须存在如下的变换方

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

程：

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

及逆关系

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

相邻两点之间的距离

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \sum_{i,j} h_{ij}^2 dq_i dq_j \end{aligned} \tag{1.48}$$

这里h_{ij}是度规系数，它指明了坐标系的几何性质. 为表记方便，令$x=x_1$，$y=x_2$，$z=x_3$，则

$$dx_k = \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} dq_i \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.49}$$

平方之，得

$$dx_k^2 = \sum_i \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_i dq_j \tag{1.40}$$

代入(1.48)式，有：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_k dx_k^2 \\ &= \sum_k \sum_i \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_i dq_j \end{aligned} \tag{1.51}$$

故有

$$h_{ij}^2 = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \tag{1.52}$$

在以下的讨论中，我们只限于正交系，即

$$h_{ij} = h_{ii}\delta_{ij} \tag{1.53}$$

亦即只有$h_{11}=h_1$，$h_{22}=h_2$和$h_{33}=h_3$不为零.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

对正交坐标系而言，

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2 \tag{1.54}$$

显然 $h_i dq_i = ds_i$ 必须具有长度量纲，虽然坐标 q_i 并不必须如此.

在一般正交曲线坐标下，面积元为

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \tag{1.55}$$

体积元为

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{1.56}$$

按(1.52)式，对笛卡儿坐标系而言，度规系数的平方

$$h_i^2 = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}$$

$$= 1 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$h_i = 1 \tag{1.57}$$

对于一般的曲线坐标系，如果 ϕ 是标量函数，p 是向量函数，向量计算的微分算符可表示为

$$\nabla\varphi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}e_i$$

$$\nabla \cdot p = \sum \frac{1}{h_i h_j h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}(h_j h_k p_i)$$

$$\nabla \times p = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 p_1 & h_2 p_2 & h_3 p_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\varphi = \sum \frac{1}{h_i h_j h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{h_j h_k}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)$$

上式中第2，4两式的求和是按 i, j, k 取1，2，3循环. (关于这组公式的证明，可参阅有关正交坐标系的论著，例如 F. B. Hildebrand 的 Advanced Calculus for Applications，1962.)

上述正交曲线坐标系下的微分算符在各种坐标系中的具体表达式，请见表1.1

在下面的讨论中，我们将研究几种常用的正交曲线坐标

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

系，以及在这些坐标系中点的位置向量、速度和加速度的表示式，这些是质点运动学的基本内容. 以 r 表示质点相对于某参考系上一原点 O 的位置向量，r 作为时间的函数

$$r = r(t)$$

及其在各种坐标系中的分量表达式，称为质点的运动方程. 质点的速度

$$v \equiv \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad (1.58)$$

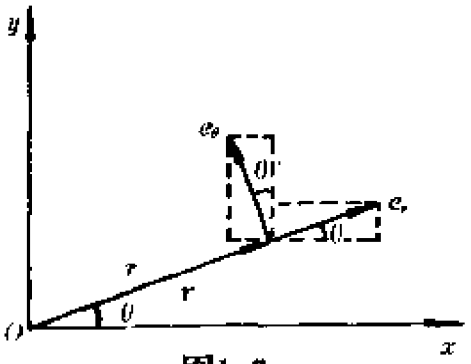


图1.6

质点的加速度

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \ddot{r} \qquad (1.59)$$

"·"，"·· "分别表示对时间的一次和二次微商.

(一)笛卡儿坐标系

三维笛卡儿坐标系 x，y，z，由固定于空间(参考系)上的三个正交归一基向量定义，此三个基向量形成右手系，这些基向量是

$$e_1 = e_x,\ e_2 = e_y,\ e_3 = e_z$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{位置向量} \quad r = (x, y, z) = xe_x + ye_y + ze_z \\ &\text{速　　度} \quad v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z \\ &\text{速率平方} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ &\text{加 速 度} \quad a = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z \end{aligned}\right\} \qquad (1.60)$$

(二)平面极坐标系

二维空间中一点 P 的位置，可由如下定义的坐标 r，θ 描述(图1.6)：

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ \text{或 } r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \frac{y}{|y|}\arccos\frac{x}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (1.61)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

表 1.1　几种常见的坐标系中的向量关系

	笛卡儿系	极坐标系	柱坐标系	球坐标系
变换方程		$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$	$x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ $z=z$	$x=r\sin\theta\cos\varphi$ $y=r\sin\theta\sin\varphi$ $z=r\cos\theta$
度规系数	$h_x=1,\ h_y=1,\ h_z=1$	$h_r=1,\ h_\theta=r$	$h_\rho=1,\ h_\theta=\rho,\ h_z=1$	$h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_\varphi=r\sin\theta$
线元 $ds^2=\sum_i h_i^2 dq_i^2$	$ds=$ $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$	$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}$	$ds=$ $\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\theta^2+dz^2}$	$ds=$ $\sqrt{dr^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2+r^2d\theta^2}$
面积元 $d\sigma_{ij}=ds_i ds_j$ $=h_i h_j dq_i dq_j$	$d\sigma_x=dydz$ $d\sigma_y=dxdz$ $d\sigma_z=dxdy$	$d\sigma=rdrd\theta$	$d\sigma_\rho=\rho d\theta dz$ $d\sigma_\theta=d\rho dz$ $d\sigma_z=\rho d\rho d\theta$	$d\sigma_r=r^2\sin\theta d\theta d\varphi$ $d\sigma_\theta=r\sin\theta drd\varphi$ $d\sigma_\varphi=rdrd\theta$
体积元 $d\tau$ $=ds_1ds_2ds_3=h_1$ $h_2h_3dq_1dq_2dq_3$	$d\tau=dxdydz$		$d\tau=\rho d\rho d\theta dz$	$d\tau=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

	笛卡儿系	极坐标系	柱坐标系	球坐标系
梯度 (Gradient)	$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}e_x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}e_y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}e_z$	$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}e_\theta$	$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}e_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}e_\theta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}e_z$	$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}e_\theta$
散度 (Divergence)	$\nabla\cdot p=\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}$	$\nabla\cdot p=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rp_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial p_\theta}{\partial\theta}$	$\nabla\cdot p=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho p_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial p_z}{\partial z}$	$\nabla\cdot p=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2p_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(p_\theta\sin\theta)$
旋度 (Curl)	$\nabla\times p=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$	$\nabla\times p=\frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ p_r & rp_\theta & 0 \end{vmatrix}$	$\nabla\times p=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p_\rho & \rho p_\theta & p_z \end{vmatrix}$	$\nabla\times p=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & r\sin\theta e_\varphi & re_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ p_r & rp_\varphi\sin\theta & rp_\theta \end{vmatrix}$
拉普拉斯算子 (Laplacian)	$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$	$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

应用(1.52)，度规系数

$$\left.\begin{aligned} h_r^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}\right)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\ h_r=1 \\ h_\theta^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)=r^2,\ h_\theta=r \end{aligned}\right\} \tag{1.62}$$

基向量

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\theta &= -\sin\theta\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\boldsymbol{e}_y \end{aligned}\right\} \tag{1.63}$$

$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向在图1.6上画出，分别称作径向和横向. 很显然，质点运动时，坐标轴的方向是动的，故称这类坐标系为动轴坐标系. 微商得

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_r &= \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot\theta\boldsymbol{e}_r \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

在平面极坐标中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} = \dot r\boldsymbol{e}_r+r\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot r\boldsymbol{e}_r+r\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta=(\dot r,\ r\dot\theta) \\ v^2 &= \dot r^2+r^2\dot\theta^2 \\ \boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}}=\ddot r\boldsymbol{e}_r+\dot r\dot{\boldsymbol{e}}_r+\dot r\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\ddot\theta\boldsymbol{e}_\theta+r\dot\theta\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= (\ddot r-r\dot\theta^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\ &= (\ddot r-r\dot\theta^2,\ r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) \end{aligned}\right\} \tag{1.65}$$

(三)圆柱坐标系(图1.7)

描述三维空间一点 P 的坐标 ρ，θ，z 由下式定义：

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.66}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \frac{y}{|y|}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$z = z \tag{1.67}$$

度规系数

$$\left.\begin{aligned} h_\rho^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) = 1,\ h_\rho = 1 \\ h_\theta^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \rho^2,\ h_\theta = \rho \\ h_z^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}\right) = 1,\ h_z = 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.68}$$

基向量

$$\left.\begin{aligned} e_\rho &= \cos\theta e_x + \sin\theta e_y \\ e_\theta &= -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y \\ e_z & \end{aligned}\right\} \tag{1.69}$$

微商得

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_\rho &= \dot{\theta} e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -\dot{\theta} e_r \\ \dot{e}_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.70}$$

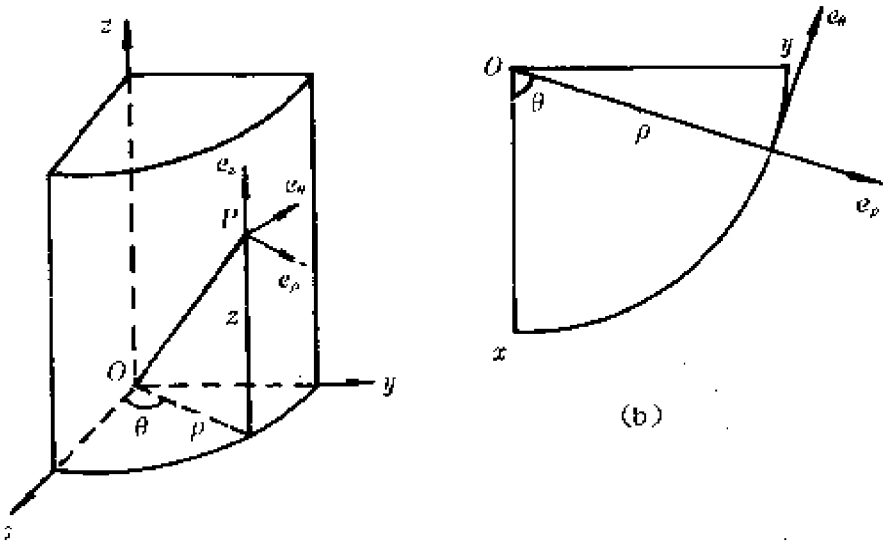


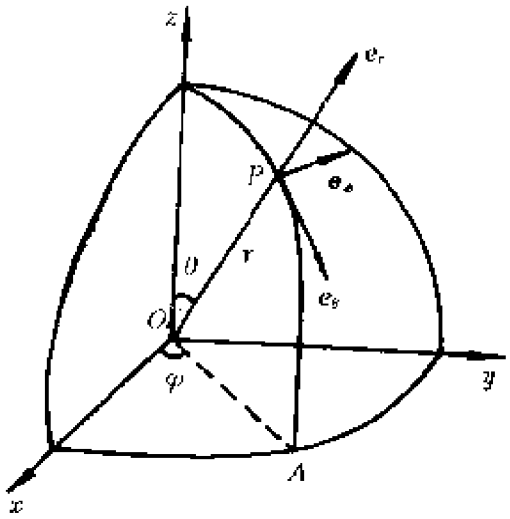
图1.7

在圆柱坐标系中

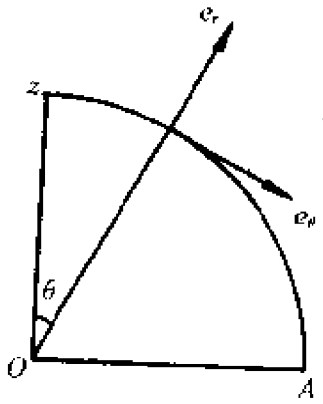
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{r} &= re_r = \rho e_\rho + ze_z = (\rho,\ 0,\ z)\\
\mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}e_\rho + \rho\dot{e}_\rho + \dot{z}e_z\\
&= \dot{\rho}e_\rho + \rho\dot{\theta}e_\theta + \dot{z}e_z = (\dot{\rho},\ \rho\dot{\theta},\ \dot{z})\\
v^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\\
\mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)e_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})e_\theta + \ddot{z}e_z\\
&= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2,\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta},\ \ddot{z})
\end{aligned}\right\} \quad (1.71)
$$

(四)球极坐标系(图1.8)



(a)



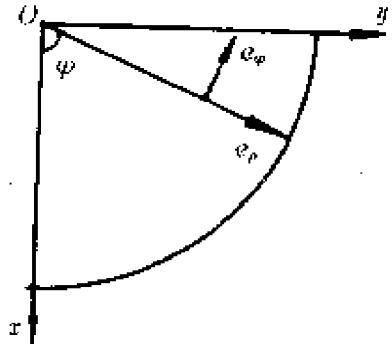
(b)

描述三维空间一点 P 的坐标 r，θ，φ由下式定义：

$$
\left.\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi\\
y &= r\sin\theta\sin\varphi\\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}\right\} \quad (1.72)
$$

或

$$
\left.\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\\
\theta &= \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\
\varphi &= \frac{y}{|y|}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}
\end{aligned}\right\} \quad (1.73)
$$



(c)

图1.8

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

度规系数

$$h_r = 1,\ h_\varphi = r\sin\theta,\ h_\theta = r \tag{1.74}$$

基向量

$$\left.\begin{aligned} e_r &= \sin\theta\cos\varphi\ e_x + \sin\theta\sin\varphi\ e_y + \cos\theta e_z \\ e_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\ e_x + \cos\theta\sin\varphi\ e_y - \sin\theta e_z \\ e_\varphi &= -\sin\varphi\ e_x + \cos\varphi\ e_y \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

微商得

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_r &= \dot{\theta}e_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta e_\varphi \\ \dot{e}_\theta &= -\dot{\theta}e_r + \dot{\varphi}\cos\theta e_\varphi \\ \dot{e}_\varphi &= -\dot{\varphi}\sin\theta e_r - \dot{\varphi}\cos\theta e_\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

在球极坐标系中

$$\left.\begin{aligned} r &= re_r = (r,\ 0,\ 0) \\ v &= \dot{r} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}e_\varphi \\ &= (\dot{r},\ r\dot{\theta},\ r\sin\theta\ \dot{\varphi}) \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2 \\ a &= \ddot{r} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta))e_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)e_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)e_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.77}$$

（四）自然坐标系

一动点在空间中所占据的一系列位置的集合形成一条曲线，即运动轨迹.

设点的运动轨迹在三维欧几里德空间为一光滑曲线，我们可以唯一的方式在曲线上每一点建立一个右手正交坐标系，称为自然坐标系. 设质点在 dt 时间内作了一个无穷小位移 dr，我们以 ds 表示这一位移的大小.

$$ds = |dr| \tag{1.78}$$

则

$$e_r = \frac{dr}{ds} \tag{1.79}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

表示无穷小位移的方向. e_τ 称为单位切向量.

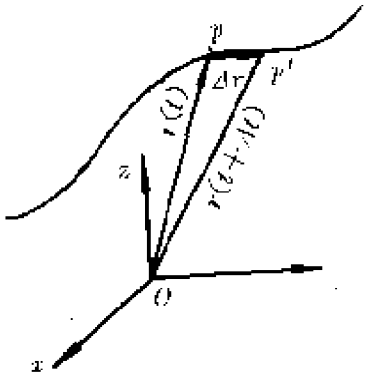


图1.9

质点的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}e_\tau=\dot{s}e_\tau \qquad (1.80)$$

这里 $\dot{s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$，表示质点的速率，即

$$\dot{s}=v \qquad (1.81)$$

P 点处的一段无穷小弧长和 e_τ 共同决定的平面称为密切面，在密切面内，通过 P 点，垂直于 e_τ 并指向轨迹凹侧的单位向量，称为单位法向量，以 e_n 表示.

由

$$e_\tau(t)\cdot e_\tau(t)=1 \qquad (1.82)$$

微商得

$$2e_\tau(t)\cdot\frac{\mathrm{d}e_\tau(t)}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (1.83)$$

这表示当 $\frac{\mathrm{d}e_\tau(t)}{\mathrm{d}t}\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}e_\tau(t)}{\mathrm{d}t}\perp e_\tau(t)$，因而单位法向量 e_n 沿 e_τ 改变的方向，可以表示为

$$e_n(t)=\frac{\mathrm{d}e_\tau(t)/\mathrm{d}t}{\left|\mathrm{d}e_\tau(t)/\mathrm{d}t\right|} \qquad (1.84)$$

轨迹上 P 点处第三个单位向量定义为

$$e_b(t)=e_\tau(t)\times e_n(t) \qquad (1.85)$$

称作副法向单位向量.

这样 (e_τ, e_n, e_b) 形成了一坐标系的右手正交基. 这一坐标系称为自然坐标系. 这一坐标系的原点是取在(固定在)轨迹上的 P 点，而不是在运动质点上. 这组基也称为内禀基.

在质点运动过程中，$r=r(t)$，质点在轨迹上的空间重合点 P 也随时间 t 改变，因而这一组正交基也不断改变空间取向.

在 $r=r(t)$ 处，e_τ 和 e_n 形成了密切面，如果轨迹为平面曲

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

线，密切面将不随 $r(t)$ 改变，质点的运动将限于此平面内. 在一般空间运动情形下，密切面也将随 $r(t)$ 改变.

由 e_n 和 e_b 形成的平面，称为法平面，由 e_τ 和 e_b 形成的平面，称为直切面. 在轨道上 P 点处，由密切面、法平面和直切面形成了自然三面体，自然三面体的三个轴向，就是自然坐标系基向量的方向(见图(1.10))

为了求出自然坐标系下的加速度公式，先求基向量 e_τ 的时间变化率：

$$\frac{de_\tau}{dt} = \left|\frac{de_\tau(t)}{dt}\right| e_n(t)$$

$$= \left|\frac{de_\tau(t)}{ds}\frac{ds}{dt}\right| e_n(t)$$

$$= \left|\frac{de_\tau(t)}{ds}\right| \frac{ds}{dt} e_n(t) \quad (1.86)$$

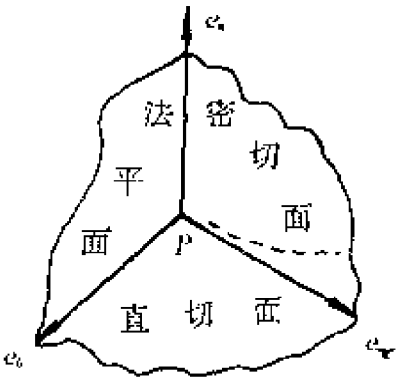


图1.10

$\left|\frac{de_\tau(t)}{ds}\right|$ 称为轨迹上 P 点处的曲率，其倒数

$$\rho = \frac{1}{\left|\frac{de_\tau}{ds}\right|} \quad (1.87)$$

称为曲率半径，因而可将(1.86)表为

$$\frac{de_\tau}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{e_n}{\rho} \quad (1.88)$$

质点的加速度

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}e_\tau)$$

$$= \ddot{s}e_\tau + \dot{s}\frac{de_\tau}{dt}$$

$$= \ddot{s}e_\tau + \frac{\dot{s}^2}{\rho}e_n \quad (1.89)$$

因而加速度在自然坐标系内用内禀基表示时，有切向和法向两

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

个分量，两者都在密切面内，副法线方向的加速度分量总是零.

§1.4 角 速 度

为讨论角速度，首先定义无穷小转动的角位移

$$d\boldsymbol{\phi} = d\phi \boldsymbol{e} \tag{1.90}$$

它是一个有大小(其值为 $d\phi$)，有方向(沿单位向量 e 的方向)的量. e 的方向规定为沿着转出 $d\phi$ 角的转动轴，并按右手螺旋定则定义其正方向(见图1.11). 这样一个量是不是向量，还有待于证明，即必须判定它是否满足向量基本公理，特别是加法交换律，也就是证明，是否两个相继进行的无穷小转动，不论次序如何，都能产生相同的位移. 设位置向量 r 先绕某轴 OO' 转动，无穷小角位移为 $d\phi_1$，r 的端点从 P 变到 P_1，r 变到 $r_1 = r + dr_1$，则

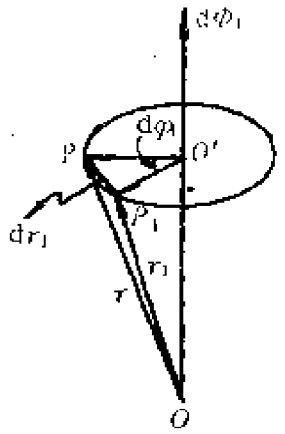


图1.11

$$|dr_1| = |\overrightarrow{PP_1}| = |\overrightarrow{O'P}||d\phi_1| = |\overrightarrow{OP}||d\phi_1|\sin\alpha$$

因 $dr_1 \perp \overrightarrow{O'P}$，借用向量叉积符号，无穷小位移

$$dr_1 = d\phi_1 \times \overrightarrow{OP} = d\phi_1 \times r \tag{1.91}$$

$$r_1 = \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + dr_1 = r + d\phi_1 \times r$$

再作第二次无穷小转动 $d\phi_2$，转动轴是经过 O 点的另一轴(图上未画出)，使向量 r_1 变到 r_2，P_1 点变到 P_2，则

$$r_2 = \overrightarrow{OP_2} = r_1 + d\phi_2 \times r_1$$

$$= r + d\phi_1 \times r + d\phi_2 \times r + d\phi_2 \times (d\phi_1 \times r) \tag{1.92}$$

如果改变两次转动的次序，我们得到的第一个向量是

$$r' = r + d\phi_2 \times r \tag{1.93}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第二次转动得到

$$r'' = r + d\phi_2 \times r + d\phi_1 \times r + d\phi_1 \times (d\phi_2 \times r) \quad (1.94)$$

因 $d\phi_1$，$d\phi_2$是无穷小转动，$d\phi_1 \times (d\phi_1 \times r)$和$d\phi_2 \times (d\phi_1 \times r)$正比于两次转动的大小的乘积$d\phi_1 d\phi_1$，它是一个二阶小量，可以略去. 只取一阶无穷小，而且因为$dr_1 = d\phi_1 \times r$，$dr_2 = d\phi_2 \times r$皆为向量，相加次序可换，故有

$$r'' = r_2, \ (d\phi_1 + d\phi_2) \times r = (d\phi_2 + d\phi_1) \times r \quad (1.95)$$

$$d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1 \quad (1.96)$$

即无穷小角位移满足加法交换律，是向量.

如果角位移是有限的，设为$\Delta\phi_1$，$\Delta\phi_1$，则一般地$\Delta\phi_2 \times (\Delta\phi_1 \times r) \neq \Delta\phi_1 \times (\Delta\phi_2 \times r)$，又不是高阶小量，不能略去，因此得不出

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_1$$

的结论，有限角位移不能满足加法交换律，不是向量，尽管它也是有大小、有方向的量.

定义

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt}e \quad (1.97)$$

式中$d\phi$是向量，dt是标量，因此ω是向量，称为角速度向量，$\omega = \frac{d\phi}{dt}$称为角速度.

【例1.4】 一半径r的圆轮以等速v_0沿一定直线滚动，圆轮保持铅直，求轮缘上任一点A的运动方程及A点的速度和加速度.

解 设$t=0$时，P点与坐标系O-xy原点重合，由图(1.12)可见，P点在任一时刻的坐标

$$x = \overline{OB} - \overline{PA}$$

$$= v_0 t - r\sin\theta$$

式中$\theta = \frac{s}{r} = \frac{v_0 t}{r}$，故

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$x = v_0 t - r\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)$$

$$y = r(1 - \cos\theta)$$

$$= r\left(1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)\right)$$

即为运动方程.

$$\dot{x} = v_0\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)\right]$$

$$\dot{y} = v_0\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)\right]}$$

$$= 2v_0\sin\left|\frac{v_0 t}{2r}\right|$$

v的斜率为

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)}{1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)}$$

$$= \operatorname{ctg}\left(\frac{v_0 t}{2r}\right)$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{ctg}\varphi$$

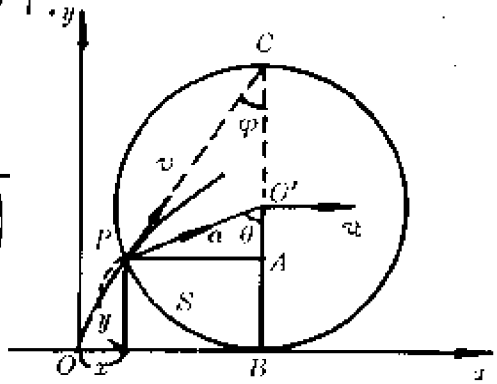


图1. 12

故 v 指向 C 点.

$$a_x = \ddot{x} = \frac{v_0^2}{r}\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{v_0^2}{r}\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v_0^2}{r}$$

a 的斜率为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{v_0 t}{r}\right) = \operatorname{ctg}\theta$$

故 a 指向 O' 点.

【例1.5】 一战斗机 A 以匀速 v 水平飞行，某地对空导弹 B 对 A 进行追踪拦截，其速率为$2v$. 初始时，$\overrightarrow{AB}$与飞机行进方向垂直，$|\overrightarrow{AB}|=b$，试求追踪曲线方程及命中所需的时间. 并求从发射导弹到命中，飞机飞行的距离.

解 以 A 为原点，飞机飞行方向为极轴作一平面极坐标系. 在此坐标系中，导弹 B 有与 A 反向的分速度 v 及沿$\overrightarrow{BA}$方向的分速度$2v$，则 B 的径向及横向速度分量为

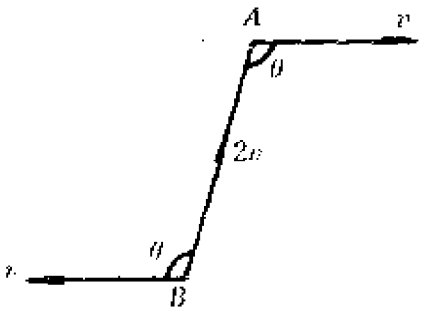


图1.13

$$\dot{r} = -2v - v\cos\theta \qquad (1)$$

$$r\dot{\theta} = v\sin\theta \qquad (2)$$

二式相除得

$$\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta} = \frac{-2-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\left(\frac{2}{\sin\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

积分得

$$\ln r = -2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) - \ln(\sin\theta) + \ln c$$

$$= \ln\left(c/\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\theta\right)\right)$$

$$\frac{c}{r} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\theta$$

因 $\theta=\pi/2$时，$r=b$，故 $c=b$

$$r = \frac{b}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta} = \frac{b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即为追迹曲线方程式.

由上式知，仅当 $\theta=\pi$ 时，$r=0$，即飞机被命中. 由(2)式

$$\dot{\theta}=\frac{v\sin\theta}{r}=\frac{2v\sin\theta\cdot\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}{b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{4v}{b}\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

积分得从发射导弹到命中所用的时间

$$t=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{b}{4v}\csc^4\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{2b}{4v}\left[-\frac{1}{3}\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{2b}{3v}$$

从发射导弹到命中，飞机飞行距离 $s=vt=\frac{2b}{3}$.

习　题

1.1

(1)求三维笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 绕 x_3 轴转动 $\pi/2$ 角的变换矩阵和变换方程式.

(2)求三维笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 绕 x_3 轴转动 $\pi/2$ 角，再绕 x_1 轴转 $\pi/2$ 角的变换方程式.

1.2

(1)求三维笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 绕 x_3 轴转 θ 角，再绕 x_2 轴转 $\pi/2$ 角的变换方程式.

(2)求三维笛卡儿坐标系绕一轴转动120°角的变换矩阵，该轴对原来的三个坐标轴各成相等的角.

(3)求描述所有三个坐标轴对原点反射(反演变换)的正交矩阵，它使 $x_1'=-x_1$，$x_2'=-x_2$，$x_3'=-x_3$.

1.3　根据向量、标量的代数定义，证明

(1)向量的标量积 $A\cdot B$ 为一标量.

(2)向量 A 对标量 s 的微商为一向量.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

1.4 证明勒维-西维塔密度和克罗尼克 δ 符号有如下性质：

(1) $\sum_{j,k} e_{ijk}e_{ljk}=2\delta_{il}$

(2) $\sum_{i,j,k} e_{ijk}e_{ijk}=6$

1.5 证明

$$\sum_k e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

证明中需考虑到所有 i，j，l，m 组合的结果求总和 $\sum_k e_{ijk}e_{lmk}$ (包含81项)：

(a)$i=j$；(b)$i=l$；(c)$i=m$；(d)$j=l$

(e)$j=m$；(f)$l=m$；(g)$i\neq l$ 或 m；(h)$j\neq l$ 或 m

1.6 证明

(1)$A\cdot(B\times C)=C\cdot(A\times B)=B\cdot(C\times A)$

(2)$A\times B=-B\times A$

1.7 证明

$$(A\times B)\cdot(C\times D)=(A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C)$$
$$=A\cdot[B\times(C\times D)]$$

1.8 求从笛卡儿基$\{e_1, e_2, e_3\}=\{e_x, e_y, e_z\}$到圆柱基$\{e'_1, e'_2, e'_3\}=\{e_\rho, e_\theta, e_z\}$的变换矩阵及向量 r 在圆柱坐标系中的坐标.

$$\left[A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]$$

1.9 证明球极坐标单位向量(基向量)

$$e_r=\sin\theta\cos\varphi e_x+\sin\theta\sin\varphi e_y+\cos\theta e_z$$
$$e_\theta=\cos\theta\cos\varphi e_x+\cos\theta\sin\varphi e_y-\sin\theta e_z$$
$$e_\varphi=-\sin\varphi e_x+\cos\varphi e_y$$

1.10 由 $r=re_r$ 出发，计算球极坐标系中点的速度 v 和加

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

速度 a 的表达式.

1.11 如果一个点的速率为常数，证明该点要么作匀速直线运动，要么其加速度垂直于它的速度，并讨论后者是否一定是圆运动，请举例说明之.

1.12 设在平面内动点的加速度的切向分量及法向分量都是常数，试证点的轨迹为对数螺线.

1.13 半径为 a 的圆盘在竖直平面内沿一水平直线以不变的质心速度 v 作纯滚动，试求圆盘上任意点 P 的速度. 设 P 点到圆盘中心 C 的距离为 b.

$$\left\{\begin{array}{l}\omega=\dfrac{v}{a},\ v=\omega\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta},\ \theta\text{ 表示}\overline{PC}\text{与竖直半径的夹角.}\\ \text{速度对水平的倾角 }\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b\sin\theta}{a-b\cos\theta}\end{array}\right\}$$

1.14 一点以如下方式在平面上运动：当它在任意时刻的速度为 v 时，其加速度 $a=kv+\alpha$. 这里 k 是常标量而 α 是一常向量. 证明其加速度的方向不变.

1.15 一点以常速率 v 沿心脏线 $r=k(1+\cos\theta)$ 运动，求：

(1)a_r(加速度的径向分量)；

(2)a(加速度的量值)；

(3)$\dot{\theta}$(角速度).

$$\left((1)a_r=-\frac{3v^2}{4k},\ (2)a=\frac{3v^2}{4k}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}},\ (3)\dot{\theta}=\frac{v}{\sqrt{2kr}}\right)$$

1.16 一点以常速率 v 沿圆滚线运动，其轨道方程为

$$x = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = r(1 - \cos\theta)$$

式中 r 系常数，试证其在 y 轴上的投影作匀加速运动.

1.17 一点沿螺旋线运动，该螺旋线在圆柱坐标系中以时间为参数的方程是

$$\rho = a,\ \theta = bt,\ z = ct^2$$

式中 a，b，c 是常数，求速度、加速度向量作为时间 t 的函数，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

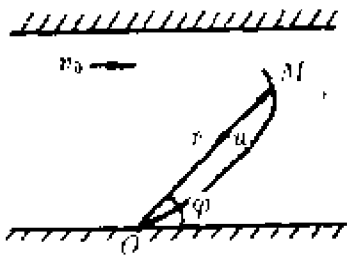
并求速度与加速度在 $t=1$ 时的夹角.

1.18 一艘船从河一侧的 P 点出发，以匀速 V 向对岸与 P 点正好相对的 Q 点方向前进，P、Q 的距离为 d，如果 r 是从 Q 到船的瞬时距离，Q 是 r 与 PQ 之间的夹角，河水的流速为 v，试证船的路径是

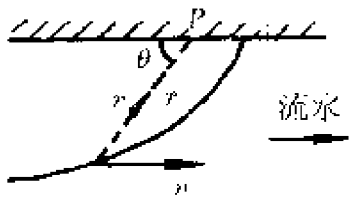
$$r=\frac{d(\sec\theta)}{(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)^{V/v}}$$

1.19 在流速均匀的河道内，有一小船 M 被水冲走，冲走后划船人以不变的相对速度 u 朝岸上 O 点划行，设水流速为 v_0，若把船看成一质点，求船的轨迹.

$\left(r=r_0\frac{\cos^{k+1}\alpha_0}{\sin^{k-1}\alpha_0}\cdot\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha},\ \text{式中}\ \alpha=\pi/2,\ k=\frac{u}{v_0},\ r_0\text{和}\ \alpha_0\text{为小船起始位置.}\right)$



1.19题图



1.20题图

1.20 在流速为 v 的河上，有一在静水中速度为 v 的船，其船首向着对岸一点 P 航行，证明船的轨迹为以 P 为焦点的抛物线.

1.21 证明

$$\frac{d}{dt}[r\cdot(v\times a)]=r\cdot(v\times\dot{a})$$

1.22 证明当 r 和 $v=\dot{r}$ 都是时间 t 的显函数时，

$$\frac{d}{dt}[r\times(v\times r)]=r^2a+(r\cdot v)v-(v^2+r\cdot a)r$$

(a 是加速度向量)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

1.23　应用单位切向量 τ 可表为

$$\tau = \frac{v}{v}$$

这一事实，求单位法向量依 a，v 和 v 的表达式.

$\left(n=(av-vv\dot{v})/|a\times v|\right)$

1.24　在半正焦弦 $2a$ 的抛物线上运动的质点，其到焦点距离为 r，速率为 v，将加速度按径向及法向分解成分量 a_r' 及 a_n'（注意这并非正交分解），证明

$$a_r' = v\frac{dv}{dr},\ a_n' = \sqrt{\frac{a}{2r^3}}\frac{d}{dr}(v^2r)$$

1.25　一质点按下列方程在半径为 R 的圆周上运动

$$s(t) = R\ln\left(\frac{v_0 t}{R}+1\right)$$

(1)求质点的速率.

(2)求质点加速度的大小.

$$\left((1)v=\frac{R}{t+\frac{R}{v_0}},\ (2)a=\frac{\sqrt{2}R}{\left(t-\frac{R}{v_0}\right)^2}\right)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第二章　牛顿力学

1687 年，伊萨克·牛顿(Isaac Newton)出版了他的《自然哲学的数学原理》一书，标志着经典力学的建立. 在这本书中，牛顿提出了用以在数学上描述任何质点或质点系运动的三个基本假设，它们后来被称作牛顿三定律，以牛顿定律作为基本原理的力学，称为牛顿力学. 本章将着重讨论牛顿力学的动力学理论. 所谓动力学的基本问题，是由作用在物体(或者一般地，力学系统)上的力决定物体的运动. 现在我们知道，牛顿定律只是真实的质点动力学原理的很好的近似，严格地考察质点的运动，还必须考虑量子效应与相对论效应，然而在宏观(≫原子线度)低速(≪光速 c)的条件下，这样一些效应极其微小，完全可以忽略不计，牛顿定律是十分精确的.

在这一章里，我们首先对牛顿定律作某些阐释和分析，然后叙述质点力学、质点系力学的基本定理和守恒定律，它们构成了牛顿力学的基本内容.

§2.1　力学定律·质量和力

任何动力学理论都必须作出联结以下三方面内容的假定规则：

体系的特征性质；描述对体系作用的动力学量及参考系.

在牛顿力学中，上述联结由牛顿三定律来实现.

牛顿三定律是：

第一定律(惯性定律)：每个物体都保持它的静止或匀速直线运动状态，除非有力的作用迫使它改变那种状态.

第二定律(运动定律)：物体动量的变化率与作用在物体上

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的力成正比，并沿力的方向发生.

第三定律(作用力与反作用力定律)：任何作用力总存在相等相反的作用力，或：两物体的相互作用力总是大小相等、方向相反的.

如果我们不按“原理”给出的形式，而按照经典力学的现代语言来叙述牛顿定律，则三定律可以表述为：

第一定律：总可以找到一个参考系，在其中，一个不受物质和辐射影响的质点，将以常速度运动.

第二定律：物质和辐射对质点的影响，表现为力的形式，一个力以这样的方式引起质点速度的变化：速度的时间变化率沿力的方向并与力成正比.

第三定律：对于一孤立的质点对，相互施以沿中心线的力，相互作用力大小相等，方向相反.

牛顿第一定律是一个表现因果性关系的纯定性的定律，它第一次引进了力的定性的概念，即力是引起非匀速直线运动的原因.

第一定律的第二种表述中避免了提前使用未加精确定义的“力”的概念，而将外力作用改为“外界的影响”，这更为恰当，爱因斯坦对第一定律这样表述：“一切物体在离其他物体都足够远时，一直保持静止状态或匀速直线运动状态.”

第一定律是动力学的出发点，因为它定义了一个惯性参考系. 所谓惯性参考系是这样一些参考系，相对于它们，物体的运动如不受任何外界的影响，将沿一直线匀速运动(包括速率为零). 我们无法定义一个严格的惯性系，只能说牛顿第一定律(以及第二定律)成立的参考系是惯性系. 这即使在经典力学中也是理想化了的. 在实践中，通常总有可能选定某个参考系使之具有第一定律所要求的性质，例如就许多情形来说，固结于地球的“实验室系”就是一个足够好的惯性系，而对某些天文问题而言，恒星系则是个更好的惯性系.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

牛顿第二定律的数学表达式是运动微分方程，即位置向量 $\mathbf{r}$ 满足的二阶微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} \tag{2.1}$$

或按牛顿的原始的表述：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{2.2}$$

其中动量

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{2.3}$$

对定质量的质点又可表为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{2.4}$$

物理上，它给出了质点运动的动力学规律，它是个瞬时的规律，在任何时刻都成立. 它提供了力、质量和轨道上相邻两点速度变化的直接联系，亦即力与动量的时间变化率的直接联系. 力是物体间的相互作用，第二定律的物理内容，取决于力的经验形式. 在牛顿力学中，主要研究宏观物体的运动，最重要、最常见的力是引力、电磁力及其宏观表现，如弹性力、摩擦力、粘滞力、张力等，这些力的具体规律是由经验即实验、观测等得到的，并非先验地知道的. 经验告诉我们，一般地说，力是位置、速度与时间的函数，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\mathbf{r},\ \boldsymbol{v},\ t) \tag{2.5}$$

力不能直接地决定质点的运动状态，力使质点获得加速度. 质点在各个时刻的加速度，加上适当的初始条件，才能决定质点的运动状态. 加速度将运动学知识和力联系起来. 正是牛顿第二定律提供了解决动力学问题的依据.

由作用力 $\boldsymbol{F}(\mathbf{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ 及 $\mathbf{r}_0$，$\boldsymbol{v}_0$ 唯一地决定了以前及以后任何时刻质点的力学状态，这就是力学因果论或决定论.

牛顿第二定律是牛顿力学的精华. 动力学各种形式的原理，本质上是与第二定律等价的. 初看起来，它是给出了力的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

定量的定义，但实质上，却远不仅仅是一个定义而已．原则上，如果给定了力的规律，就可以应用第二定律，求解质点的运动，但实际上只有少数有意义的问题能得到简单的解析形式的力律，即(2.5)的具体形式，多数情况只能通过近似方法把力表示出来．

关于牛顿第三定律，需要指出："原理"表述的原始形式的第三定律又称为弱形式的作用和反作用定律．它指出两质点的相互作用力是等值反向的．第三定律的第二种表述是说，两质点间的相互作用力不仅等值反向，而且沿两质点的连线(即力是二体中心力)，这称为强形式的作用和反作用定律．物理学中许多常见力，如万有引力、静电库仑力都满足强形式的第三定律．但也能找到一些力，它们并不是中心力，但作用力和反作用力是相等的．如运动电荷间的电磁力，就违背强形式的第三定律．某些情况下，甚至强、弱两种形式的第三定律都不服从．

由 $F=ma$ 可见，可以由力定义质量，或反之，由质量定义力，但只有两者完全独立无关时，才有意义．我们先给质量下定义．

设有三个质点 1，2，3，且假设此三个质点两两分别相互作用．实验上发现，作用力的性质并不重要．譬如说，将 1，2 质点以弹簧相连，则无论压缩或拉伸弹簧，在从静止开始的运动中，两质点的加速度的方向总相反，且数值成一确定的比例关系，其余两对的情形也如此．实验结果可表示为

$$a_{12}=-k_{21}a_{21},\quad a_{13}=-k_{31}a_{31},\quad a_{23}=-k_{32}a_{32} \tag{2.6}$$

a_{ij}表示质点 i 受质点 j 作用所获得的加速度．各 k_{ij}均为常数．由实验还发现 k_{ij}之间满足

$$k_{32}=\frac{k_{31}}{k_{21}} \tag{2.7}$$

可以将 k_{ij}写成

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$k_{32}=\frac{m_3}{m_2},\ k_{31}=\frac{m_3}{m_1},\ k_{21}=\frac{m_2}{m_1} \tag{2.8}$$

其中 m_1，m_2，m_3 均系正数，由(2.6)和(2.8)式得

$$m_1a_{12}=-m_2a_{21},\ m_1a_{13}=-m_3a_{31},\ m_2a_{23}=-m_3a_{32} \tag{2.9}$$

如取质点 1 作为质量单位，则

$$m_2=\frac{m_2}{m_1}=-\frac{a_{12}}{a_{21}} \tag{2.10}$$

定义为质点 2 的质量，同样

$$m_3=\frac{m_3}{m_1}=-\frac{a_{13}}{a_{31}} \tag{2.11}$$

为质点 3 的质量. 这就是马赫(Mach)的操作式质量定义. 这种定义以加速度的测定为依据，并不依赖于力的定义. 这种在已知力作用下，决定一物体加速度的质量，称为惯性质量.

我们知道，在重力场中，一个物体的重量就是作用于物体上的重力，即万有引力. 重力

$$W=mg$$

其中 g 是由重力引起的加速度. 在此式中出现的 m 是作为物体受重力与所产生加速度的比例系数引入的，是决定一物体和其它物体间万有引力的质量，称为引力质量. 从惯性质量的定义我们知道，它是基于加速度的测定，与力、重力(重量)并无关系. 因而，这两种按不同方式定义的质量，并无必然相等的理由. 从伽里略、牛顿以来，人们设计了各种实验来检验两种质量的是否等同，然而，已经在越来越高的精度上目前已达到 10^{-11} 数量级. 确认惯性质量和引力质量是相同的. 惯性质量和引力质量严格相等的论断，称为等效原理. 爱因斯坦正是认识到这一点而发展出他的广义相对论的引力理论的.

在牛顿第二定律中，除质量外，还有力这个未加定义的概念. 应当在建立第二定律的同时，定义质量和力. 力的操作式

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

定义是：选取一物体作为标准物体（或质点），规定作用在标准物体上的力与标准物体所获得的加速度成正比. 如以 F_1 作用在标准物体上，得到的加速度是 a_1，以 F_2 作用在标准物体上，得到的加速度是 a_2，则

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{a_1}{a_2} \text{ 即 } F_2=F_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \tag{2.12}$$

如规定 $F_1=1$，则 $F_2=\frac{a_2}{a_1}$，即任一作用力 F_2 可以定义和度量.

由上述质量与力的定义表明，同一力分别对两个物体所产生的加速度的比值是一标量常数，且与该力的选择无关；同一物体分别受两个力作用所得的加速度的比值是一标量常数而与该物体的选择无关. 这两件事实完全来自经验，是实验证明了的. 它们正是牛顿第二定律的实质内容. 有赖于这样的事实，我们才能给物体的质量和力以确定的数值.

§2.2 质点动力学

质点动力学的基础是牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F \tag{2.13}$$

它又称为微分形式的动量定理. 将上式积分，则得

$$p-p_0=\int_0^t F\mathrm{d}t\equiv\hat{F} \tag{2.14}$$

此式称为积分形式的动量定理，式中 F 是作用于质点的合力，$\hat{F}\equiv\int_0^t F\mathrm{d}t$ 称为在 $0\to t$ 时间内合力 F 的冲量.

力学中许多重要的结论都表述为守恒定律的形式，稍后我们将证明，许多守恒定律都与某种对称性相联系. 这些守恒定律告诉我们. 在什么样的条件下，各种力学量保持不变.

由(2.13)式立即得出，当 $F=0$ 时，$\dot{p}=0$，即：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如果合力 F 为零，则 $p=0$，$p=p_0$，线动量守恒. 这就是质点的动量守恒定律.

设质点对于定点 O 的角动量

$$L = r \times p$$

式中 r 是从 O 点引出的质点的位置向量，定义作用于质点的合力 F 对 O 点的力矩为

$$N = r \times F \tag{2.15}$$

则由牛顿第二定律(2.13)

$$r \times F = N = r \times \frac{dp}{dt} \tag{2.16}$$

因

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = v \times p + r \times \frac{dp}{dt}$$

$$= r \times \frac{dp}{dt} \tag{2.17}$$

故有

$$\frac{dL}{dt} = N \tag{2.18}$$

这是微分形式的角动量定理，式中力矩 N 和角动量 L 的取矩点都是 O.

力 F 对某轴如 z 轴的矩为

$$N_z = N \cdot e_z = xF_y - yF_x \tag{2.19}$$

它等于力 F 对 z 轴上任一点的矩在 z 轴上的投影.

由(2.18)式积分得

$$L - L_0 = \int_0^t N dt \equiv \hat{N} \tag{2.20}$$

这是积分形式的角动量定理. $\hat{N} \equiv \int_0^t N dt$ 称为从 $0 \to t$ 时间内质点所受的合力 F 对质点的冲量矩.

由(2.18)式立即得知，如合力矩 $N=0$，则

$$\dot{L} = 0 \tag{2.21}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即

如果合力矩 N 为零，则 $\dot{L}=0$，$L=L_0$，角动量 L 守恒.

动量 p、角动量 L 都是反映质点运动状态的状态量. 冲量 $\hat{F}$ 和冲量矩 $\hat{N}$ 则是过程量，它们分别代表力和力矩在 Δt 时间间隔内对质点作用的时间累积效应.

上述动量、角动量守恒定律方程式，和动量、角动量定理的方程式一样，都是向量式. 共有 6 个分量方程，即

$$\left.\begin{aligned} &\text{如 } F_x=0,\ \dot{p}_x=0\\ &\text{如 } F_y=0,\ \dot{p}_y=0\\ &\text{如 } F_z=0,\ \dot{p}_z=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} &\text{如 } N_x=0,\ \dot{L}_x=0\\ &\text{如 } N_y=0,\ \dot{L}_y=0\\ &\text{如 } N_z=0,\ \dot{L}_z=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

应当注意，三个角动量守恒式并不完全独立，独立的只有两个，因为它们满足 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}=0$

在实际问题中，常常是合力或合力矩并不为零，但可能有某个方向的合力或合力矩的分量为零，因而可以用守恒定律的分量式来处理问题.

力和力矩对质点的作用，不仅有其时间累积效应，还有空间累积效应，它表现为力和力矩的功.

由牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}$$

则

$$m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.24}$$

$$\text{左式}=\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

右式$=F\cdot v=F\cdot\frac{dr}{dt}$

故有

$$dT=F\cdot dr \tag{2.25}$$

这是微分形式的动能定理，即质点动能的微分等于合力对质点所作的元功.

将上式积分得

$$T_2-T_1=\int_1^2 F\cdot dr=W_{12} \tag{2.26}$$

此为积分形式的动能定理，它表明，在从点 1 到点 2 的过程中，质点动能的代数增量等于作用于质点的合力所作的功.

设我们有某一空间区域，其中每一点都有一定的力(向量)作用着，此力依赖于该点的位置，并且是该点的有限的，单值的和可微的函数，这种区域称为力场.

如果在某一力场中，对于任意点 1 和点 2 之间的任何实际可能的路径来说，功 W_{12} 都相同，则称此力为保守力，力场称为保守力场，系统(质点或质点系)称为保守系统.

保守力(及保守系统)判据的等价描述是：

设质点从力场中 1 点移到 2 点，又从 2 点回到 1 点，在闭合路径上力作的功之和为零，即对任何闭合路径

$$\oint F\cdot dr=0 \tag{2.27}$$

则力场及系统是保守的. 这是保守力的积分形式的判据. 从斯托克斯定理知道，保守力的判据 $\oint F\cdot ds=0$ 可以等价地表为

$$\nabla\times F=0 \tag{2.28}$$

这是保守力的微分形式的判据. 一个力是不是保守力，只要用 del 算符 ∇ 叉乘这个力，即求出力场 F 的旋度，看它是否为零就知道了.

(2.28)式以投影来表示，则为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y},\frac{\partial F_x}{\partial x}=\frac{\partial F_z}{\partial z},\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}$$

保守力场存在的第一个例证，就是如果力 F 在各轴上的投影只是各该坐标的函数，亦即若

$$F_x=F_x(x),F_y=F_y(y),F_z=F_z(z)$$

则前式中所有偏微商都等于零，保守力场存在的条件成立.

保守力场的又一个实例，是万有引力场，它可以表示为

$$F=-\frac{k}{r^2}\mathbf{e}_r$$

应用表 1 中所给球坐标中的旋度公式，有

$$\nabla\times F=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} e_r & e_\theta r & e_\varphi r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\varphi\sin\theta \end{vmatrix}$$

式中 $F_r=-k/r^2,F_\theta=0,F_\varphi=0$，则

$$\nabla\times F=\frac{e_\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{-k}{r^2}\right)-\frac{e_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-k}{r^2}\right)=0$$

满足保守力场的条件.

由向量分析知道，$\nabla\times\nabla\varphi\equiv0$，功 W_{12} 与质点运动路径无关的充分必要条件是：F 应为某一标量函数的梯度，即

$$F=-\nabla V(r) \tag{2.29}$$

式中 $V(r)$ 称作势能.

由上式知，如 $V(r)$ 满足此式，则对任意常数 C，$V(r)+C$ 也满足，因而

$$F=-\nabla[V(r)+C] \tag{2.30}$$

即我们可以在 V 上附加一常数值 C，即在空间内各点上都附加此值而不改变结果，这说明势能零点是可以任意取的.

由动能定理

$$dT=F\cdot dr \tag{2.31}$$

当力为保守力时，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$F \cdot \mathrm{d}r = -\nabla V(r) \cdot \mathrm{d}r$$
$$= -\left(\frac{\partial V(r)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V(r)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V(r)}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$
$$= -\mathrm{d}V(r) \tag{2.32}$$

将 $V(r)$ 简写成 V，则

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}(T+V) = 0$$
$$T + V = E(\text{常数}) \tag{2.33}$$

即：

如果作用于质点的力都是保守力，则质点的总机械能 $T+V$ 守恒. 这就是质点的机械能守恒定律.

在某些情形下，作用于质点的力可以用某个标量函数 V 的梯度表示：$F = -\nabla V$. 但该标量函数同时还是时间的显函数，即 $V = V(r, t)$. 此时 V 仍可看作是质点的势能，但力场不是保守场，这是因为势能的全微分

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t$$
$$= \nabla V \cdot \mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{2.34}$$

而力的元功

$$\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}r = -\nabla V \cdot \mathrm{d}r = -\mathrm{d}V + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{2.35}$$

因而，质点从点 1 运动到点 2，力 F 的功不能再表示成两点间势能函数 V 之差，因为

$$W_{12} = \int_1^2 F \cdot \mathrm{d}r = -\int_1^2 \mathrm{d}V + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t$$
$$= -(V_2 - V_1) + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{2.36}$$

显然，$W_{12} \neq -(V_2 - V_1)$. 将(2.35)式代入动能定理

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}V + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{2.37}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$d(T+V)=\frac{\partial V}{\partial t}dt$$

则总机械能 $E=T+V$ 不再守恒，且

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t} \tag{2.38}$$

即机械能 E 的时间全微商等于势能的时间偏微商. 若势能不明显地依赖于时间，$\frac{\partial V}{\partial t}=0$，则

$$\frac{dE}{dt}=0,\ E=\text{常数} \tag{2.39}$$

即机械能守恒，这正是前面得到过的结果.

质点动力学中一类特殊的运动，称为约束运动. 约束运动是指质点在运动中，其位置或速度受到一定的限制. 例如，质点被约束在一曲面上运动，曲面方程为 $f(r)=0$，此方程称为约束方程. 若质点被约束在一曲线上运动，此曲线是两曲面的交线，则约束方程为

$$\left.\begin{aligned} f_1(r,t)&=0\\ f_2(r,t)&=0\end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

式中含时间 t，表示约束也是随时间变化的. 质点受到约束，也必然受到力的作用，即约束是通过力来实现的. 这样的力称为约束力.

对光滑曲面而言，约束力 N 只能沿曲面法线方向，即与曲面的梯度 ∇f 平行

$$N=\lambda\nabla f \tag{2.41}$$

λ 是一比例系数，称为拉格朗日未定乘子. 它的大小表示约束力的大小，正负表示约束力的指向. 受到光滑曲面约束的质点的运动微分方程是除主动力外还必须加上约束力，即

$$m\ddot{r}=F+N \tag{2.42}$$

即

$$m\ddot{r}=F+\lambda\nabla f$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

或

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

这里有三个坐标和一个拉格朗日乘子 λ，与 $f(r, t)=0$ 联立，即可求出质点运动方程及约束力. 如果质点受到光滑曲线约束，其运动微分方程是

$$m\ddot{r} = F + \lambda_1\nabla f_1 + \lambda_2\nabla f_2 \tag{2.44}$$

其分量式是

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

与约束方程

$$f_1(x, y, z, t) = 0,\ f_2(x, y, z, t) = 0 \tag{2.46}$$

联立，即可求出运动方程及约束力.

由上面的讨论可见，质点受到约束，相当于事先知道了运动的某些情况，本来问题应变得简单些，但事实上却更麻烦了，因为引进了未知的约束力，使方程数目增加了，求解的困难加大了. 这一问题将在分析力学中得到解决.

在牛顿力学中，人们常用自然坐标系处理一些比较简单的问题，克服求解约束运动的困难. 此时，质点的运动微分方程可写为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

因为，例如，对光滑曲线而言，约束力 N 只能沿曲线的法向，切向方程中不会出现约束力，从切向方程可以求出 v 的大小，其方向沿切向为已知，代入法向方程即可求出约束力 N. 问题即告解决. 当然在一定的条件下，即约束力以外的力(主动力)为保守力，约束与时间无关及约束为光滑的情形下，能量守恒定律也可以作为一个方程用来求解约束运动.

【例 2.1】 试以一维运动为例，就如下几种较简单情形求解质点的运动微分方程：

(1)力只是时间 t 的函数.

(2)力只是速度 v 的函数.

(3)力只是坐标 x 的函数.

解 (1)$F=F(t)$

$$m\dot{v}=F(t)$$

积分得

$$m\int_0^t \frac{\mathrm{d}v(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \int_0^t F(t')\mathrm{d}t'$$

$$m[v(t)-v(0)] = \int_0^t F(t')\mathrm{d}t'$$

再积分得

$$m\int_0^t v(t'')\mathrm{d}t'' = mv(0)t + \int_0^t\left[\int_0^{t'} F(t')\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}t''$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t\left[\int_0^{t'} F(t')\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}t''$$

(2)$F=F(v)$

$$m\dot{v}=F(v)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{F(v)}=\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{F(v')}=\frac{t}{m}$$

$$g(v)=g(v_0)+\frac{t}{m}$$

$g(v)$是对$\frac{1}{F(v)}$积分得到的v的函数. 如问题可以反解，则得

$$v=v(t)$$

$$x(t)=\int_0^t v(t')\mathrm{d}t'+x(0)$$

(3)$F=F(x)$

对于只依赖坐标的力，如存在势能函数$V(x)$，由机械能守恒定律知

$$T=\frac{1}{2}mv^2=E-V(x)$$

$$v=\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}$$

分离变量，积分得

$$t=\int_0^t\mathrm{d}t'$$

$$=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x')]}}$$

如问题可以反解，则得

$$x=x(t)$$

故为求$x=x(t)$，须先求$V(x)$，再由初始条件求E，计算出$t=t(x)$，再反求$x=x(t)$

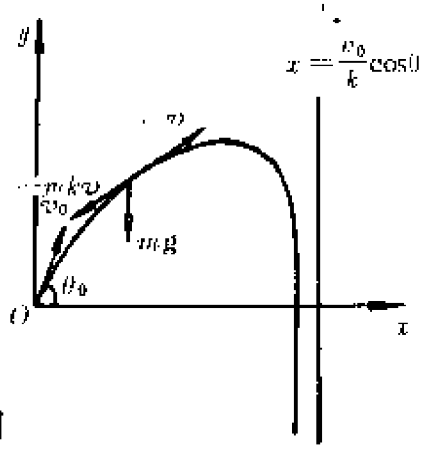


图 2.1

【例 2.2】 一质点在均匀重力场中被以任意方式抛射出去，所受媒质阻力与速度成正比，试讨论质点的运动.

解

质点的运动微分方程为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} - mk\boldsymbol{v}$$

写成分量式为

$$\ddot{x} = -kv\cos\theta = -k\dot{x} \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -kv\sin\theta - g$$

$$= -(k\dot{y} + g) \tag{2}$$

利用初始条件 $t=0$ 时，$\dot{x}=v_0\cos\theta_0$，$\dot{y}=v_0\sin\theta_0$，分别积分(1)，(2)式，得

$$\dot{x} = v_0\cos\theta_0 e^{-kt} \tag{3}$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{k} + \left(v_0\sin\theta_0 + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} \tag{4}$$

设质点在原点 O 被抛射，则 $t=0$ 时

$$x = y = 0$$

利用此初始条件积分(3)、(4)式，得

$$x = \frac{1}{k}v_0\cos\theta_0(1 - e^{-kt}) \tag{5}$$

$$y = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_0\sin\theta_0 + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) \tag{6}$$

由(5)式得

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0\cos\theta_0}\right)$$

代入(6)式得质点的轨迹方程

$$y = x\left(\mathrm{tg}\theta_0 + \frac{g}{kv_0\cos\theta_0}\right) + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0\cos\theta_0}\right) \tag{7}$$

由(5)、(6)、(3)、(4)知，当 $t\to\infty$ 时

$$x \to \frac{1}{k}v_0\cos\theta_0$$

$$y \to -\infty$$

$$\dot{x} \to 0$$

$$\dot{y} \to \frac{g}{k}$$（此为质点不变的最终速度——收尾速度）

由(6)式，令 $y=0$，可求出质点落回抛射点水平面时所用的时

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

间：

$$T = \frac{1}{kg}[(g + kv_0\sin\theta_0)(1 - e^{-kT})] \tag{8}$$

设媒质阻力很小，$k<<1$，则

$$e^{-kT} \approx 1 - kT + \frac{k^2T^2}{2}$$

$$T = \frac{1}{kg}\left[(g + kv_0\sin\theta_0)\left(kT - \frac{1}{2}k^2T^2\right)\right]$$

$$T = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g + kv_0\sin\theta_0} = \frac{2v_0\sin\theta_0}{g}\left(1 - \frac{k}{g}v_0\sin\theta_0\right)$$

代回(5)式得质点回到发射点水平面时与 O 的水平距离：

$$x_{max} = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}\left(1 - \frac{k}{g}v_0\sin\theta_0\right)$$

轨道的最高点：

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{g}\left(1 - \frac{k}{g}v_0\sin\theta_0\right)$$

【例 2.3】 水平面上，质量为 m 的质点 P，受到斜边为 $2a$ 的等腰直角三角形 ABC 三个顶点的吸引(见图 2.2)，此三个点力源对质点的吸引力的大小可表为 $F_i = mkr_i (k>0)$，式中 r_i 是质点 P 到各顶点的距离，P 点坐标为(x, y)，初始时，质点 P 在 C 处静止.

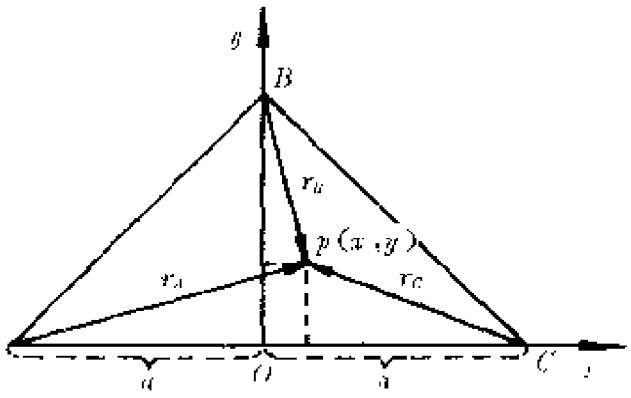


图 2.2

求质点的轨道和速度.

解 取二维笛卡儿坐标如图所示.

从各顶点引向 P 点的位置向量分别为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_A &= (a+x)\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{r}_B &= x\boldsymbol{e}_x - (a-y)\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{r}_C &= -(a-x)\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

三个顶点对 P 的作用力分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_A &= -km\boldsymbol{r}_A \\ \boldsymbol{F}_B &= -km\boldsymbol{r}_B \\ \boldsymbol{F}_C &= -km\boldsymbol{r}_C \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

作用于质点 P 的合力为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -km(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C) \\ &= -km[3x\boldsymbol{e}_x + (3y-a)\boldsymbol{e}_y] \end{aligned} \tag{3}$$

分量式为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -3kmx \\ F_y &= -3kmy + kma \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

质点运动微分方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

即

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -3kmx \\ m\ddot{y} &= -3kmy + kma \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

令 $\omega^2 = 3k$，(5)式化为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2\left(y - \frac{a}{3}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

解之得

$$x = a_1\cos(\omega t + \varepsilon_1) \tag{7}$$

$$\dot{x} = -a_1\omega\sin(\omega t + \varepsilon_1) \tag{8}$$

$$y = a_2\cos(\omega t + \varepsilon_2) + \frac{a}{3} \tag{9}$$

$$\dot{y} = -a_2\omega\sin(\omega t + \varepsilon_2) \tag{10}$$

初始条件为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$t=0$时，$x=a$，$y=0$，$\dot{x}=\dot{y}=0$

代入(7)、(8)、(9)、(10)式，得

$$e_1=0,\ a_1=a,\ e_2=0,\ a_2=-\frac{a}{3} \tag{11}$$

故运动方程是

$$x=a\cos\omega t,\ y=\frac{a}{3}(1-\cos\omega t) \tag{12}$$

速度分量是

$$\dot{x}=-a\omega\sin\omega t,\ \dot{y}=\frac{a}{3}\omega\sin\omega t \tag{13}$$

速度对x轴倾角为

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

质点的轨迹为

$$y=\frac{1}{3}(a-x)$$

质点的运动范围为

$$-a\leqslant x\leqslant a$$

$$0\leqslant y\leqslant\frac{2a}{3}$$

由力的表达式

$$\begin{aligned}F&=-km[3xe_x+(3y-a)e_y]\\&=-3km\left[xe_x+ye_y-\frac{1}{3}ae_y\right]\\&=-3km\left[\mathrm{r}-\frac{1}{3}ae_y\right]\\&=-3km[\mathrm{r}-r_0]\end{aligned}$$

可见力F是弹性力，等效力心的位置在$r_0=\frac{1}{3}ae_y$.

【例 2.4】 将上题推广，设平面内有n个点力源，其分布确定，均对同一质点施一与距离成正比的吸引力，讨论质点的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

运动.

解 取二维笛卡儿坐标系如图所示，以 r 表示质点 P 的位置，以 r_i 表示第 i 个点力源的位置，质点 P 的运动微分方程为

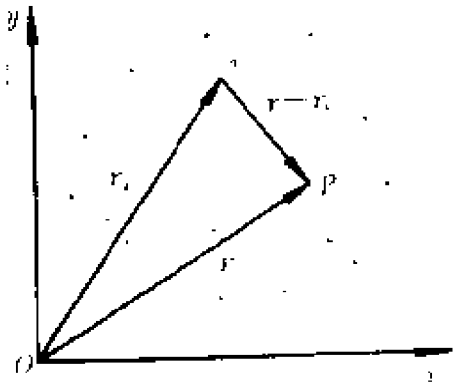


图 2.3

$$m\ddot{r}=-\sum k_i(r-r_i)$$
$$=-(\sum k_i)r+\sum k_i r_i$$
$$=-Kr+K\frac{\sum k_i r_i}{K}=-K(r-r_0) \tag{1}$$

（式中，$K=\sum k_i$，等效力心在 $r_0=\frac{\sum k_i r_i}{K}$ 处）

运动微分方程可改写为

$$\ddot{r}+\frac{K}{m}(r-r_0)=0 \tag{2}$$

令 $\omega^2=\frac{K}{m}$，$r-r_0=r'$，则

$$\ddot{r}'+\omega^2 r'=0 \tag{3}$$

分量式为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}'+\omega^2 x'&=0\\ \ddot{y}'+\omega^2 y'&=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

此为 x'，y' 方向振动频率相等的二维谐振动方程式，其解是

$$\left.\begin{aligned}x'(t)&=A\cos(\omega t-\alpha)\\ y'(t)&=B\cos(\omega t-\beta)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将(5)式中的第二式改写为

$$y'(t)=B\cos[(\omega t-\alpha)+(\alpha-\beta)]$$
$$=B\cos(\omega t-\alpha)\cos(\alpha-\beta)-B\sin(\omega t-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

定义 $\alpha-\beta=\delta$，则

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$y' = \frac{B}{A}x'\cos\delta - B\sqrt{1-\left(\frac{x'}{A}\right)^2}\sin\delta$$

移项、平方，得

$$\frac{B^2}{A^2}x'^2\cos^2\delta - \frac{2B}{A}x'y'\cos\delta + y'^2 = B^2\left(1-\frac{x'^2}{A^2}\right)\sin^2\delta$$

$$B^2x'^2 + A^2y'^2 - 2ABx'y'\cos\delta = A^2B^2\sin^2\delta$$

当 $\delta=\pm\pi/2$，则

$$B^2x'^2 + A^2y'^2 = A^2B^2$$

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = 1\text{(椭圆)}$$

若 $A=B$，则

$$x'^2 + y'^2 = A^2\text{(圆)}$$

如 $\delta=0$，则

$$(Bx' - Ay')^2 = 0$$

$$x' = \frac{A}{B}y'\text{(直线)}$$

如 $\delta=\pm\pi$，则

$$(Bx' + Ay')^2 = 0$$

$$x' = -\frac{A}{B}y'\text{(直线)}$$

【例 2.5】 带电粒子在匀强磁场中的运动.

设带电粒子质量为 m，电荷为 q，以速度 v 在磁感应强度为 B 的匀强磁场中运动.

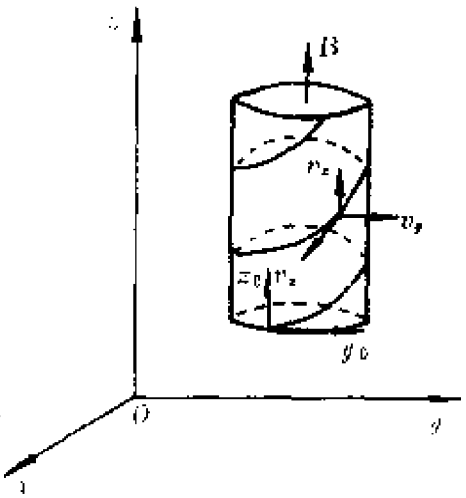


图 2.4

带电粒子在磁场中受的力是洛仑兹力

$$F = q(v \times B)$$

设磁感应强度沿 z 轴方向

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$B=(0,\ 0,\ B)$$
$$v=(v_x,\ v_y,\ v_z)$$

粒子运动微分方程为

$$m\dot{v}=q(v\times B)$$

分量式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{v}_x&=\omega v_y\\ \dot{v}_y&=-\omega v_x\\ \dot{v}_z&=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 $\omega=qB/m$.

积分(1)式中第3式得

$$v_z=v_{z0}$$

微分(1)式中第1、2式得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{v}_x&=\omega\dot{v}_y=-\omega^2v_x\\ \ddot{v}_y&=-\omega\dot{v}_x=-\omega^2v_y\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

积分上式得

$$\left.\begin{aligned}v_x&=C\cos\omega t+D\sin\omega t\\ v_y&=-C\sin\omega t+D\cos\omega t\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中 C、D 是任意常数.

设 $v(0)=(0,\ y_0,\ z_0)$，即令初速度在 xy 平面内的分量沿 y 轴，则由(3)式得

$$\left.\begin{aligned}0&=C\\ v_y^0&=D\\ v_x&=v_y^0\sin\omega t\\ v_y&=v_y^0\cos\omega t\\ v_z&=v_z^0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

积分得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_y^0}{\omega}[1 - \cos\omega t] \\ y &= y_0 + \frac{v_y^0}{\omega}\sin\omega t \\ z &= z_0 + v_z^0 t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由(5)式中前二式消去 t，得粒子轨迹在 xy 平面上的投影

$$(x - x_0 - v_y^0/\omega)^2 + (y - y_0)^2 = v_y^{02}/\omega^2$$

这是一个圆方程. 质点在绕圆柱的轴转动的同时，沿此轴以匀速率 v_z^0 运动，因此，其轨迹是一图 2.4 所示的螺旋，粒子绕磁力线方向螺旋前进.

$r = v_y^0/\omega = v_y^0 m/qB$ 称为回转半径，$\omega = qB/m$ 称为回转频率.

因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m} = \frac{q}{m}(v \times B)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^2) = 2v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2v \cdot (v \times B)\frac{q}{m} = 0$$

$$v^2 = \text{常数}, \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \text{常数}$$

它表明带电粒子在匀强磁场中运动时动能守恒.

§2.3 质点系动力学

质点系是指各质点间有相互作用的多质点系统，质点系中每个质点的运动都可能与系内其他质点的位置和运动有关.

质点系内各质点间的相互作用力，叫做内力，质点系外的力源(物体或场)对质点系内质点的作用力，叫做外力.

为讨论质点系的整体运动，我们引进质心的概念. 设几个质点组成的质点系在给定的三维笛卡儿坐标系中，由原点 O 作出的各质点的位置向量为 $r_i (i = 1, \cdots, n)$，质心 C 是由位置向

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

量 r_c 代表的几何点：

$$r_c=\frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i r_i}{M} \quad (2.48)$$

$$(M=\sum m_i)$$

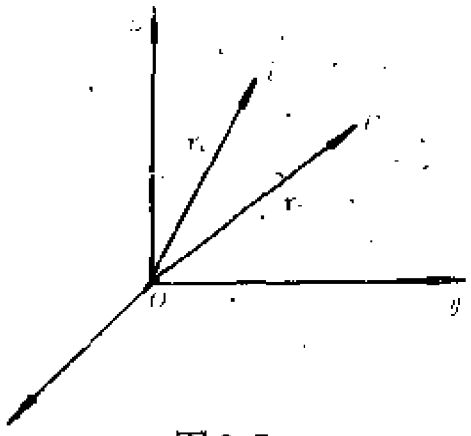


图 2.5

r_c 是质点系中各质点的位置向量以其质量为权重的权平均值，这是质心的几何意义. 如果赋予质心以整个质点系的质量 M，则这个以 r_c 表示位置，以 $\dot{r}_c$ 表示速度的质点，在动力学意义上也称为质心.

由 r_c 表达式得

$$\dot{r}_c=\frac{\sum m_i \dot{r}_i}{M} \quad (2.49)$$

因而质点系的总动量 $p=\sum m_i \dot{r}_i = M\dot{r}_c$，即质点系的总动量等于质心的总动量，质心的速度代表质点系整体运动的速度.

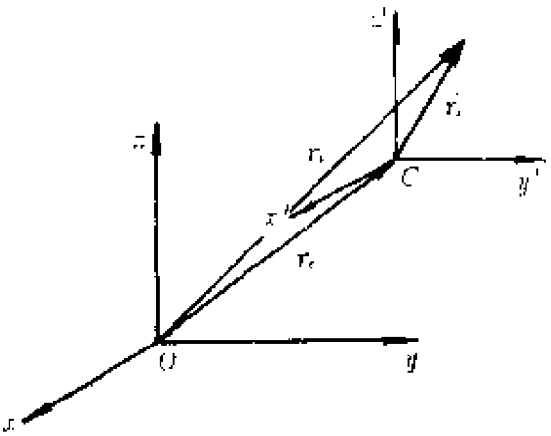


图 2.6

为了讨论质点系运动的方便，我们还要引进一种特殊坐标系：质心坐标系. 质心坐标系固结在随质心平动的参考系上，原点取在质心 C，其坐标轴相对于静系没有转动，通常取为与静系平行. 图 2.6 中 O-xyz 为静系，C-$x'y'z'$ 为质心系.

由质心定义

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$r_C = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

在质心坐标系内，原点即质心 C，$r_C = 0$，质点的位置向量用 r_i $(i = 1, \cdots, n)$表示，则

$$\sum m_i r_i = 0 \tag{2.50}$$

微商之，得

$$\sum m_i \dot{r}_i = 0 \tag{2.51}$$

质心系也可以定义为：质点系的总动量在其中为零的参考系．相应的坐标系为质心坐标系．

按照牛顿运动定律，求解质点系的运动，原则上，可以列出系内各质点的运动微分方程：

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= F_1 \\ m_2 \ddot{r}_2 &= F_2 \\ &\vdots \\ m_n \ddot{r}_n &= F_n \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

式中 $F_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)}$，$F_i^{(e)}$ 代表第 i 个质点所受的合外力，$F_i^{(i)}$ 代表第 i 个质点所受的合内力，它又可以写成

$$F_i^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_{ji}(r_1, r_2, \cdots, r_n; \dot{r}_1, \dot{r}_2, \cdots, \dot{r}_n; t) \tag{2.53}$$

F_{ji}表示系内第 j 个质点对第 i 个质点作用的内力，它可能与系内所有质点的位置和速度有关．

方程组(2.52)可以简写为

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_{ji} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.54}$$

从上式可见：

这组方程一般不能单独求解，而必须联立求解．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质点系的内力可能很复杂，一般是未知力，包括约束力等，可能写不出力律的解析表达式.

方程组数目可能很大，甚至无穷大，求解困难，以至可能无法严格求解. 因此，从数学上看，解这组方程是困难的. 一般说，对于二粒子系统，可以严格求解；对于三粒子系统，仅在对质点及初始条件加很强的限制条件的情形下才有严格解；随着粒子数 n 增加，问题变得十分复杂，必须借助于近似方法.

从物理上看，在质点力学中，我们仅研究了受到作用力的质点的运动情况，但对质点产生的反作用和由此引起的施力物体运动的变化，以及随之而来的作用力的改变并没有考虑. 在质点系问题中，要精细地考察运动，就必须把系内所有发生作用的物体考虑在内才行. 仅当反作用引起的施力物体运动状态的改变小到可以忽略时，才可以只研究单个物体的运动. 如研究地球运动时，稍精细的考察，就不能认为太阳受地球引力引起的运动状态的变化是微不足道的，即不能简单地把地球看作单个质点在固定力心(太阳)的中心力场中运动，而应作为二体问题处理，即把太阳的运动也考虑在内，更精确些，还应考虑太阳系内其他行星、月球乃至其他恒星的影响.

由于求解上述联立方程组的困难，处理质点系问题的基本思想是：首先着眼于整个质点系(而不是个别质点)加以研究，借助于质点系的基本定理和相应的守恒定律，掌握质点系运动的总趋向和一般特征，即表征质点系整体运动的力学量：总动量、总角动量、总能量等在外力作用下的变化规律，质心的位置和运动等. 许多实际问题中，并不一定要求出所有质点的运动，更关心的往往正是这些表征质点系整体运动的量. 例如，气体，由数目巨大的粒子组成，气体分子的微观位置向量 r_i 常常没有多大意义，而且个别分子的轨道是很难观测到的，于是引进少数“宏观”的可观测量描述体系的整体行为. 这样，有些

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

问题仅用基本定理和守恒定律就可以解决. 如有必要，再去求解个别质点的运动. 与质点动力学相似，质点系动力学基本定理或守恒定律共能提供 7 个方程，对于 $f \leqslant 7$ 的系统，原则上可以解决. 例如刚体的运动，最多有 6 个自由度，用 7 个方程求解是足够的.

牛顿第三定律，按其性质来说，在单个质点的动力学中并不重要，但在多质点系统中却处于核心重要的地位.

我们把牛顿第三定律用公式表示，弱形式的第三定律可以表为

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \tag{2.55}$$

强形式的第三定律是

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \;//\; \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = -\boldsymbol{r}_{ij} \tag{2.56}$$

作用于质点系的合力定义为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \right) \tag{2.57}$$

作双重求和，并应用(2.55)式

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji}) = 0$$

因而合力约化成

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{2.58}$$

质点系的总动量，是系中所有质点的动量的向量和

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \tag{2.59}$$

总动量的时间变化率

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}^{(e)}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{2.60}$$

称为微分形式的质点系动量定理，和质点动力学中动量定理有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

相同的形式. 需要注意的是：内力对质点系总动量的变化不起作用，换言之，内力不会改变质点系的总动量. 因为由(2.48)、(2.59)和(2.60).

$$M\ddot{r}_C = F^{(e)} \tag{2.61}$$

(2.61)式表明，质心的加速度等于假定所有外力都作用于质心时产生的加速度，此式称为质心运动定理. 它也表明内力对质心的运动没有直接影响.

由(2.60)、(2.61)式可知，当 $F^{(e)}=0$ 时

$$M\ddot{r}_C = \dot{p} = 0 \tag{2.62}$$

$$M\dot{r}_C = p = 常数 \tag{2.63}$$

即：

如果外力的合力为零，则总线动量守恒，这就是质点系的动量守恒定律.

作用于质点系的关于定点 O(取为坐标原点)的总力矩为

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \times (F_i^{(e)} + F_i^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} r_i \times F_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (r_i \times F_{ji} - r_j \times F_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} r_{ji} \times F_{ji} \end{aligned}$$

$$(r_{ji} = r_i - r_j) \tag{2.64}$$

式中第二项一般不为零，仅当内力 F_{ji} 满足强形式的牛顿第三定律时，$r_{ji} /\!/ F_{ji}$，第二项才为零，在此条件下

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i^{(e)} = N^{(e)} \tag{2.65}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质点系相对于定点 O 的总角动量为

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i \tag{2.66}$$

求微商得

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{p}}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{p}}_i$$

由单个质点的运动微分方程 $\dot{\boldsymbol{p}}_i=\boldsymbol{F}_i$，得

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{(e)} \tag{2.67}$$

故有

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{N}^{(e)} \tag{2.68}$$

这就是微分形式的质点系角动量定理.

如果

$$\boldsymbol{N}^{(e)}=0,\ \dot{\boldsymbol{L}}=0,\ \boldsymbol{L}=\text{常数} \tag{2.69}$$

即：

如果加于质点系的外力关于定点 O 的力矩向量和为零，则总角动量 $\boldsymbol{L}$ 守恒.

这就是质点系总角动量守恒定律.

应该指出，所谓内力不影响质点系总动量的变化和质心的运动，内力矩不影响总角动量的变化，仅对封闭系，即不与任何外界物体作用，而只相互作用的质点系，和某些特殊情形才是严格正确的. 事实上，只要存在外力，一般说，合外力可能与质点系所有质点的位置与速度有关，即

$$\boldsymbol{F}^{(e)}=\boldsymbol{F}^{(e)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n;t)$$

而各质点的运动方程和速度，不仅与作用于其上的外力有关，也与作用其上的所有内力有关，内力的作用通过影响质点的运动，从而影响外力表现出来. 动量定理、质心运动定理和角动量定理，是内力和外力共同作用的最后表现形式.

下面讨论质点系运动中的功、能关系.

我们已知，单个质点在力场中运动，合力 $\boldsymbol{F}$ 的元功

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

质点从位置 1 移到位置 2，合力 $\boldsymbol{F}$ 作的总功

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

当一质点系在力场中运动时，各质点所受的合力的元功总和即对质点系作的元功为

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{2.70}$$

由质点运动定律 $m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{F}_i$，上式等于

$$dW = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt = d\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i)$$

$$= d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dT \tag{2.71}$$

其中

$$T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) \tag{2.72}$$

是质点系的总动能. dW 还可以表为

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{j,i=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

$$= dW^{(e)} + dW^{(i)} \tag{2.73}$$

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{j,i=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{2.74}$$

(2.73)式称为微分形式的动能定理，积分得

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{n}\int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{j,i=1 \\ j\neq i}}^{n}\int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i = W_{12} \tag{2.75}$$

(2.74)式即为积分形式的动能定理.

如果外力均为保守力，则它的功可以表示成势能函数的梯度，即(2.72)式右边第一项

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}V_i^{(e)} \quad (2.76)$$

如果内力也是保守力，第 i 和第 j 个质点的相互作用力可以从势函数 $V_{ij}(=V_{ji})$ 导出. 如果内力是二体中心力，即满足强形式的牛顿第三定律，力的方向只能沿两质点的连线，V_{ij} 只能是两质点间距离的函数

$$V_{ij} = V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) = V_{ij}(r_{ij}) \quad (2.77)$$

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}, \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\nabla_j V_{ij} \quad (2.78)$$

式中

$$\nabla_i = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x_i} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y_i} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$$\boldsymbol{r}_{ji} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = -\boldsymbol{r}_{ij} \quad (2.79)$$

$$r_{ji} = r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (2.80)$$

(2.73)式第二项内力的功为

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} (\boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} (\nabla_i V_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i + \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_i} \mathrm{d}z_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j + \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j + \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_j} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \mathrm{d}V_{ij}
\end{aligned} \quad (2.81)$$

由(2.73)、(2.76)、(2.31)得

$$\mathrm{d}T = -\sum_i \mathrm{d}V_i^{(e)} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} \mathrm{d}V_{ij}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即

$$\mathrm{d}\left(T+\sum_i V_i^{(e)}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} V_{ij}\right)=0$$

则

$$T+\left(\sum_i V_i^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} V_{ij}\right)=E(\text{常数}) \qquad (2.82)$$

或

$$T+V=E(\text{常数}) \qquad (2.83)$$

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} V_{ij} \qquad (2.84)$$

(2.82)式表明：如果质点系所受的内力、外力都是保守力，则质点系动能、内势能和外势能的总和在运动中保持不变，即机械能守恒.

一般说，势能表达式中(2.84)中的第二项内势能不为零，且随时间变化，即是说，质点系运动中，内力的总功并不为零，这一点和动量定理、角动量定理中，质点系总内力和内力矩为零因而对总动量和总角动量的变化无贡献的情形显著不同.

内力的功在特定情形下也可能为零，这由下面的推导可以看出.

内力的功为

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji} \qquad (2.85)$$

一般情形下，$\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji}\neq 0$，但如果系统是刚体，$\boldsymbol{r}_{ji}$不变，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji}$只能与$\boldsymbol{r}_{ji}$垂直，因而也与$\boldsymbol{F}_{ji}$垂直，则有$\boldsymbol{F}_{ji}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ji}=0$，即刚体的内

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

力不作功，内势能不变，由于势能零点可以任意取，故不计内势能可以不计。

在质点系的讨论中，常常选用质心坐标系，这样做的目的，是利用质心特有的性质，将质心运动的自由度同相对于质心运动的自由度明确分开，使质点系运动的图象更加清晰，处理起来更简单，尤其讨论角动量和动能时这样做更有利。

首先来看角动量。

由图 2.6 知，质点 i 在静系中的位置向量 $\boldsymbol{r}_i$ 可以写成

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i \tag{2.86}$$

质点系对定点 O 的总角动量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_C) \times m_i (\dot{\boldsymbol{r}}'_i + \dot{\boldsymbol{r}}_C) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_C \\ &\quad + \boldsymbol{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_C\end{aligned}$$

注意到质心的定义，有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i = 0,$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \dot{\boldsymbol{r}}'_i + \boldsymbol{r}_C \times M \dot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{L}_C \tag{2.87}$$

式中 $\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i \times \dot{\boldsymbol{r}}'_i$ 代表质点系相对于质心运动的角动量，$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{r}_C \times M \dot{\boldsymbol{r}}_C$ 代表质心相对于定点 O 的角动量。这样，质点系对定点 O 的角动量被分成了质心的角动量和相对于质心运动的角动量两部分。

我们已经有了质点系关于静系原点 O 的角动量定理，现在推导质点系关于质心 C 的角动量定理。

一般说，质心系是有加速度的，是非惯性系。在质心系中，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质点 i 的动力学方程是

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)} + (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_C) \tag{2.88}$$

式中$(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_C)$是惯性力，视为外力，以 $\boldsymbol{r}_i$ 从左面叉乘上式，并对 i 求和，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

右式中第二项为零，第三项也为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\Big] = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}) \tag{2.89}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{N}'^{(e)} \tag{2.90}$$

此为质点系对质心 C 的角动量定理，它形式上与对定点 O 的角动量定理一样，只是角动量和力矩的取矩点(参照点)不是定点 O，而是质心 C. 由推导过程显然可见，此式不是对任意参照点都成立，而是质心和定点特有的，不能任意推广.

现在来看动能.

质点系在静系中的动能 T 可以表为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i' + \dot{\boldsymbol{r}}_C)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i') + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_C)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_C)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'^2 + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}_C^2$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\cdots \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_C^2 \qquad (\cdots 31)$$

即

$$T = T' + T_C \qquad (2.92)$$

式中 $T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$ 代表质点系相对于质心运动的动能，$T_C = \frac{1}{2} M v_C^2$ 代表质心的动能. (2.92)称为克尼希定理.

由克尼希定理和质点系动能定理及(2.86)可得

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right) + \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right) \qquad (2.93)$$

$$\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C$$

应用(2.61)，右式第二项 $\sum_{i}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} M v_C^2\right)$，恰与左端 $\mathrm{d}T$ 表式(2.93)中第一项相消，第四项 $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C = 0$，故有

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' \qquad (2.94)$$

简写成

$$\mathrm{d}T' = \mathrm{d}W'^{(e)} + \mathrm{d}W'^{(i)} \qquad (2.95)$$

这是质点系相对于质心运动的动能定理.

至此，我们已经讨论了质点系动力学的各个基本定理和守恒定律，它们在牛顿力学中占据十分重要的中心地位，因为它

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

们对一切质点系都成立，而我们所涉及的力学体系，无论是致密的刚体，还是松散的太阳系，都是质点系，单个质点也不过是质点数 $n=1$ 的特殊质点系而已．应当指出，这些基本定理和守恒定律并非新的力学原理，只是牛顿定律的推论；各个守恒定律的推导，也并非是这些定律的证明，严格说，这些定律只是一些守恒定理，之所以被称为定律，除了因为它们的极端重要性外，还因为历史上它们是独立地被发现的．至于这些定律被应用于力学以外的任何物理理论中，包括电磁系统和量子力学系统中，是作为一种假说，其正确性是由它们所引出的结果不与任何实验相矛盾而间接证实的．幸运的是，这一组假说获得了极其辉煌的成功．例如，在研究中子衰变时，人们曾以为中子是衰变成一个电子和一个质子，而由测量发现衰变后质子和电子的动量、角动量和能量都与守恒定律相违背．泡里(Pauli)坚持动量、角动量和能量守恒的观念，提出自由中子衰变产物中还应当有一个没有静质量和电荷，自旋与电子相同的某种新粒子，才能解释衰变中丢掉的能量、动量和角动量，满足各项守恒定律．二十多年后，终于由莱因斯(Reines)和科恩(Cowan)在实验中发现了这一新的基本粒子——反中微子 $\bar{\nu}_e$，即确认自由中子的衰变是

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

核物理实验中的这一重大发现，同许多著名实验一样，再一次说明了上述守恒定律在人类探索物质世界规律和性质方面所起的巨大指导作用和威力．

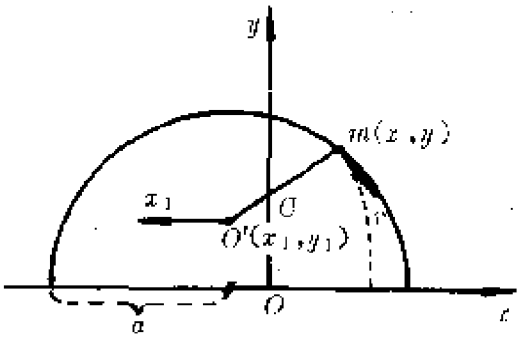


图 2.7

【例 2.6】 一光滑的半径为 a、质量为 M 的半圆柱置于光滑水平面上，半圆柱顶点处有一质点 m，初速度为 0，质点沿与轴线垂直的路线从半圆柱一侧滑下．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)求质点的运动轨迹.

(2)求质点在高为 y 时，质点与半圆柱的速度.

解 (1)取半圆柱横截面底边为 x 轴. 初始时质点 m 与圆柱中心 O 的连线为 y 轴，作笛卡儿坐标系 O-xy.

因水平方向无外力，x 方向动量守恒，质心 C 沿 y 轴下落，且

$$mx + Mx_1 = 0 \tag{1}$$

质点未离开半圆柱前，约束方程是

$$(x - x_1)^2 + y^2 = a^2 \tag{2}$$

由(1)得

$$x_1 = -\frac{m}{M}x \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，得

$$\frac{x^2}{[Ma/(M+m)]^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{4}$$

故质点的运动轨迹为一椭圆.

(2)将(4)式对时间求微商，得

$$\frac{2x\dot{x}}{[Ma/(M+m)]^2} + \frac{2y\dot{y}}{a^2} = 0$$

$$\dot{x} = -\frac{y\dot{y}}{x}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \tag{5}$$

由(2)式及(3)式得

$$a^2 - y^2 = (x - x_1)^2$$

$$\sqrt{a^2 - y^2} = (x - x_1) = x + \frac{mx}{M} = \frac{M+m}{M}x \tag{6}$$

代入(5)式得

$$\dot{x} = -\frac{y\dot{y}}{\sqrt{a^2 - y^2}}\frac{M}{M+m},\quad \dot{x}_1 = \frac{y\dot{y}}{\sqrt{a^2 - y^2}}\frac{m}{M+m} \tag{7}$$

将 $\dot{x}^2$，$\dot{x}_1^2$ 代入能量守恒式

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 = mg(a - y)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

得

$$\dot{y} = -\sqrt{\frac{2g(M+m)(a-y)(a^2-y^2)}{Ma^2+m(a^2-y^2)}} \tag{8}$$

代入(5)式得

$$\dot{x} = M\dot{y}\sqrt{\frac{2g(a-y)}{(M+m)[Ma^2+m(a^2-y^2)]}} \tag{9}$$

由(8)、(9)式得质点速度

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2g(a-y)[M^2y^2+(a^2-y^2)(M+m)^2]}{(M+m)[a^2M+M(a^2-y^2)]}}$$

半圆柱速度

$$\dot{x}_1 = -m\dot{y}\sqrt{\frac{2g(a-y)}{(M+m)[a^2M+m(a^2-y^2)]}}$$

【例 2.7】 质量为 m 的质点，置于底边长为 a 的直角三角形斜劈之顶上. 斜劈质量为 M，放在光滑水平面上，初始时系统静止.

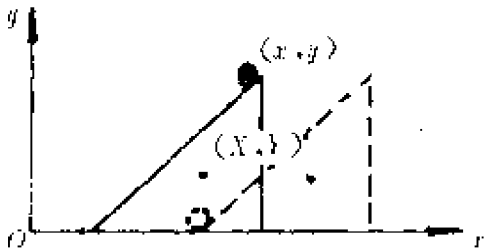


图 2.8

(1)如 m 从静止开始沿斜劈下滑，问到达斜劈底端时，斜劈移动多大距离?

(2)计算质点在水平方向的加速度、斜劈的加速度.

计算斜劈对质点的反作用力及水平面对斜劈的反作用力.

解 (1)如图 2.8 所示，取笛卡儿坐标系 O-xy，图中用实线画出的斜劈表示初始位置，虚线画出的表示末态位置. 用 (x, y) 表示质点 m 的坐标，用 (X, Y) 表示斜劈质心的坐标. 则以 1，2 表示初、末态，因水平方向无外力，动量守恒，质心位置不变，有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$mx_1 + MX_1 = mx_2 + MX_2$$
$$M(X_2 - X_1) = m(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

质点在水平方向相对移动了距离 a，则

$$(x_1 - X_1) - (x_2 - X_2) = a$$
$$x_1 - x_2 = a - (X_2 - X_1) \qquad (2)$$

故斜劈移动距离为

$$X_2 - X_1 = \frac{m}{M}[a - (X_2 - X_1)]$$

$$X_2 - X_1 = \frac{m}{M}a \Big/ \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$= \frac{m}{M+m}a \qquad (3)$$

(2)因斜劈只有沿 x 轴的平动，只取其上一点(如 C 点)的 x 坐标 X 即可描述它的运动，见图 2.9.

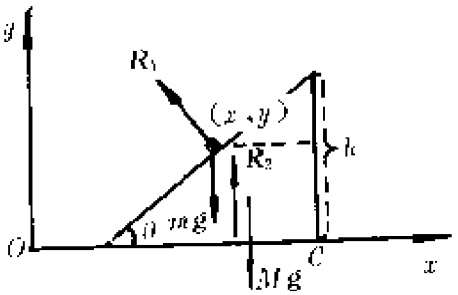


图 2.9

约束方程为

$$\frac{h - y}{X - x} = \mathrm{tg}\theta \qquad (4)$$

求微商得

$$\ddot{X} - \ddot{x} = -\mathrm{ctg}\theta \cdot \ddot{y} \qquad (5)$$

质点受力：mg，斜劈反力 R_1

斜劈受力：Mg，质点反力 $-R_1$，水平面反力 R_2，质点的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -R_1\sin\theta \qquad (6)$$
$$m\ddot{y} = R_1\cos\theta - mg \qquad (7)$$

斜劈运动微分方程为

$$M\ddot{X} = R_1\sin\theta \qquad (8)$$
$$O = R_2 - Mg - R_1\cos\theta \qquad (9)$$

由(6)式得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\ddot{x} = \frac{-R_1\sin\theta}{m} \tag{10}$$

由(8)式得

$$\ddot{X} = \frac{R_1\sin\theta}{M} \tag{11}$$

由(7)式得

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}(R_1\cos\theta - mg) \tag{12}$$

将(10)、(11)、(12)式代入(5)式得

$$R_1\sin\theta\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = -\operatorname{ctg}\theta\,\frac{1}{m}(R_1\cos\alpha - mg)$$

$$R_1 = \frac{mM\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

其它结果是

$$R_2 = \frac{M(m+M)}{M+m\sin^2\theta}g$$

$$\ddot{x} = -\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g,\quad \ddot{X} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

【例 2.8】 一均质杆置于光滑水平面上，杆长 $2a$，质量 m. 另有一小球质量 m'，以速度 v_0 射向杆，v_0 垂直于杆的方向，与杆心垂直距离为 b，试求碰后杆与球的运动.

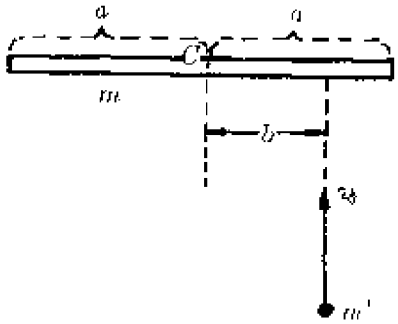


图 2.10

解 设碰后杆的质心速度是 v_c，杆的角速度是 ω，球的速度是 v_1，则由水平面内动量守恒，且只能沿 v_0 方向，即

$$m'v_0 = m'v_1 + mv_c$$

$$m'v_0 = m'v_1 + mv_c \tag{1}$$

由于水平面内无外力，垂直于运动平面方向即竖直方向角

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

动量守恒. 碰前质点对定点 C 的角动量是 $m'v_0b$，碰后则是 $m'v_1b$，杆碰前角动量是零，碰后是 $I_C\omega$，故有

$$bm'v_0 = bm'v_1 + I_C\omega \tag{2}$$

按恢复系数的定义

$$e = \frac{\text{分离速率}}{\text{趋近速率}} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

本题中 $v_2=0$，$v_2'=v_C+b\omega$，$v_1'=v_1$，故

$$e = \frac{v_C + b\omega - v_1}{v_0} \tag{3}$$

$$I_C = \frac{1}{3}ma^2 \tag{4}$$

由(3)式得

$$v_C = v_0e - b\omega + v_1 \tag{5}$$

由(1)式得

$$v_1 = v_0 - \frac{m}{m'}v_C \tag{6}$$

由(1)、(2)式得

$$bmv_C = I_C\omega$$

$$bmv_C = \frac{1}{3}ma^2\omega$$

$$\omega = \left(\frac{3b}{a^2}\right)v_C \tag{7}$$

将(6)、(7)式代入(5)式，得

$$v_C = v_0e - \frac{3b^2}{a^2}v_C + v_0 - \frac{m}{m'}v_C$$

$$v_C = v_0(1+e)/\left(1 + \frac{m}{m'} + 3\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{8}$$

(6)、(7)、(8)式即为所求.

【例 2.9】 一半径 R 的水平圆盘 M 可绕过其边缘上一点之铅直轴自由转动. 如一狗质量为 m，沿盘边缘走一圈，试证

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

圆盘转过的角度为 $\int_0^{\pi}\frac{4m\cos^2\gamma\,d\gamma}{(3M/2)+4m\cos^2\gamma}$，$\gamma$ 如图示.

解 设 B 点表示转轴，初始时，狗 A 在 B 点，OB 沿 KL 轴，以 θ 表示狗相对于圆盘转过的角度，以 φ 表示圆盘在定系中转过的角度.

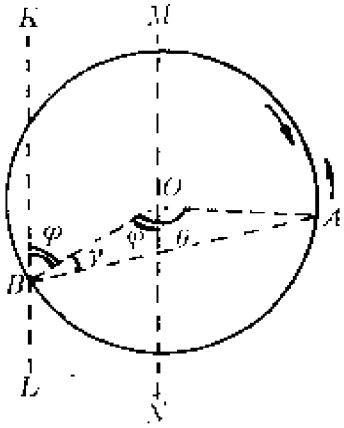


图 2.11

圆盘对于 B 轴的角动量为 $\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}$

狗的角速度为

$$\frac{d}{dt}(\varphi+(\pi-\theta)/2)=\dot{\varphi}-\dot{\theta}/2$$

狗的角动量为

$$(\dot{\varphi}-\dot{\theta}/2)\left\{m\left[2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^2\right\}$$

由铅直方向角动量守恒，得

$$\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}+\left[4mR^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right](\dot{\varphi}-\dot{\theta}/2)=0$$

$$d\varphi=\frac{4m\sin^2(\theta/2)d(\theta/2)}{3M/2+4m\sin^2(\theta/2)}$$

令 $\gamma=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$，则

$$\varphi=-\int_0^{\pi}\frac{4m\cos^2\gamma}{3M/2+4m\cos^2\gamma}d\gamma$$

§2.4 变质量物体的运动

前面讨论的运动，都是物体质量不变的情形. 在自然界和工程技术中有一类运动，物体的质量是不断增加或减少的. 喷气式飞机，火箭，下落的雨滴，海中的浮冰，不断堆积于地上的落链，传送带上的煤……都是这样的变质量体系.

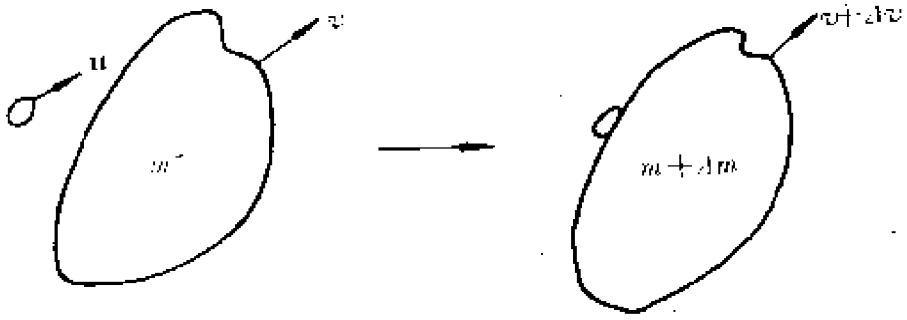
变质量物体主要是两种，一是不断地有小质量的物体并入，一是不断地有小质量物体分出去. 物体与并入或分出去的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

小质量物体组成体系，作为整体，它们仍然遵从质点系的基本定理或守恒定律，其质量并无变化．但就作为主体的物体来说，它的质量就是变化的，如果只考虑它的平动，即只考虑其质心的运动而不考虑转动，仍然可以把它看作质点——变质量的质点．下面推导它的运动微分方程．

设物体质量为 $m(t)$，在 t 时刻速度是 v（$v \ll$ 光速 c），另一微小物体质量 Δm，以速度 u 运动，两者在 $t \to t+\Delta t$ 时间内合并，合并后获共同的速度 $v+\Delta v$，如图 2.12．设作用在 m，Δm 组成的质点系上的合外力为 F，则由动量定理有：

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)-mv-\Delta m u=F\Delta t \qquad (2.96)$$



(a) 合并前　　(b) 合并后

图 2.12

略去二价小量，除以 Δt 并令 $\Delta t \to 0$ 取极限得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u=F \qquad (2.97)$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(u-v)=F \qquad (2.98)$$

(2.97)或(2.98)称为变质量体运动微分方程式．

当 $u=0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=F \qquad (2.99)$$

令 $v_r=u-v$，表示小质量物体并入(或分出)之前相对于物体

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的速度，则

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_r=F \tag{2.100}$$

式中$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$是个代数量，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}>0$表示质量是增加的，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}<0$表示质量是减少的.

运用变质量方程的重要成果之一，是火箭推进原理的提出和应用. 火箭一般由外壳(有时含携带物，如人造卫星、弹头等)和燃料组成，火箭飞行时燃料猛烈燃烧，产生的化学混合剂以高速从尾部喷出，从而推动火箭加速向前运动.

由于火箭运动时质量不断减少，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}<0$. u和v是地面参考系(静系)中观测到的废气与火箭的速度. u与v反向，故$u-v$与v反向，$(u-v)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$与$v$同向，因而由于燃气喷射作用，火箭获得一附加推力

$$F'=(u-v)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{2.101}$$

由变质量方程知，即使没有外力，即$F=0$，火箭依靠其不断抛出质量，也可以改变运动状态获得加速度，这就是火箭推进原理.

单级火箭的模型如图 2.13 所示. 喷出的化学混合剂相对于火箭的速度$u-v=v_r=-v_r e$，e是火箭运动方向的单位向量，因此有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=F \tag{2.102}$$

为研究火箭运动的特征常常略去F，即略去如重力、大气阻力等因素的影响，这是一种粗略的近似，但肯定外力与推进力$v_r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$比较是小的，以后我们再考虑引力的影响.

火箭的总质量$m=m'+m_f(t)+m_c$，式中m'是负载质量，$m_f(t)$是燃料质量，m_c是外壳质量，初始时刻$m_f+m_c=m_0$. 设

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$m_f(0)=\varepsilon m_0$，则 $m_c=(1-\varepsilon)m_0$. ε 是初始时刻燃料质量与初始时刻火箭外壳质量之比，显然 $0<\varepsilon<1$，我们希望 ε 之值尽可能接近 1，典型的 ε 实际值的区域是 $0.7<\varepsilon<0.9$.

在火箭点火后任意时刻 t，火箭总质量

$$m = m' + m_f(t) + (1-\varepsilon)m_0 \tag{2.103}$$

设燃料燃烧后，以常速率 k 喷出，

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_f(t)}{dt} = -k \tag{2.104}$$

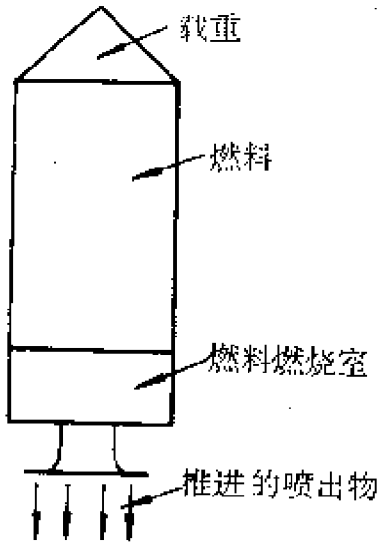


图 2.13

负号表示质量减少，积分此方程，并应用初始条件 $m_f(0)=\varepsilon m_0$，则

$$m_f(t) = -kt + \varepsilon m_0 \tag{2.105}$$

如果全部燃料燃尽时 $t=\tau$，$m_f(\tau)=0$，则上式给出

$$\tau = \varepsilon m_0/k \tag{2.106}$$

将(2.105)式代入(2.103)式，得火箭在任意时刻 $t(0\leqslant t\leqslant\tau)$ 的质量

$$m(t) = m' + m_0 - kt \tag{2.107}$$

方程(2.102)成为

$$(m' + m_0 - kt)\frac{dv}{dt} = v_r k \tag{2.108}$$

设火箭有初始速度 v_0(通常是零)，积分(2.108)式，则在任意时刻 $t(0\leqslant t\leqslant\tau)$，

$$v = v_0 - v_r \ln\left\{1 - \frac{kt}{m_0 + m'}\right\} \tag{2.109}$$

在火箭燃料燃尽时，火箭获得的速度

$$v = v_0 - v_r \ln\left\{1 - \frac{\varepsilon m_0}{m_0 + m'}\right\} \tag{2.110}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如无负载，$m'=0$，则

$$\Delta v = -v_e \ln(1-\varepsilon) \tag{2.111}$$

速度增量与初始质量 m_0 无关.

由(2.111)及(2.110)式显然可见，火箭的效率，即给予负载的最佳末速度依赖于：

(1)结构因子 $1-\varepsilon$；

(2)废气速率 v_e；

(3)质量比 m'/m_0.

结构系数 ε 依赖于设计和制造火箭用的材料，质量比决定于初始时刻火箭和负载的质量，通常是预先决定了的，它与火箭的尺寸、费用有关.

由(2.101)式知道，火箭推力

$$F' = -v_e \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = kv_e \tag{2.112}$$

与废气速率成正比.

定义参量

$$I = F'/gk = v_e/g$$

它可用以比较不同推进燃料的排气速率. 对固体燃料而言，因化学混合剂的不同，最佳 I 值为 250，290，液体燃料为 265，335，425，核燃料则为 1000—3000.

由(2.110)式可知，为提高火箭效率，最有效的办法是提高喷气速率 v_e，这就要求燃料燃烧效率高，温度高、气体膨胀快，压力大，这与燃料性能和发动机性能都有关. 上述三种燃料的火箭中，固体燃料火箭构造简单，费用相对较低，但 I 值较低且推力难于控制. 液体燃料火箭推力容易控制，但设计复杂，费用高. 核燃料火箭，其燃料燃烧获得的能量比化学反应大得多，但能量以热的形式释放，还必须转换成产生高速喷气的推力，此外，喷气的控制，停气后热的排除，负载的放射性屏蔽等，在核火箭的方案付诸实现之前，是必须克服的困难.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由(2.111)知

$$\begin{aligned}\Delta v &= -v_r\ln(1-\varepsilon)\\ &= -v_r\ln\left(1-\frac{m_f(0)}{m_0}\right)\\ &= -v_r\ln\frac{m_c}{m_0}\\ &= v_r\ln\frac{m_0}{m_c}=v_r\ln\left(1+\frac{m_f(0)}{m_c}\right)\end{aligned}$$

因而提高质量比$\frac{m_f(0)}{m_c}$也可以提高火箭效率，然而这种办法远不如增大喷气速率有效，因为当$m_0=m_f(0)+m_c$与m_c之比按几何级数增长时，Δv只能按算数级数增加. 事实上，对有负载(弹头，太空船实验动物，人，仪器……)的火箭而言$m_f(0)/m_c$提到6都很困难，即使提高到蛋液与蛋壳的质量比(≈ 10)，火箭速度也只能达到5—7公里/秒，远达不到第一宇宙速度7.9公里/秒，所以只用单级火箭难以实现宇宙航行.

由(2.110)式知，要获得较高的末速度，还有一种途径，这就是提高初始速度v_0，这可以通过多级火箭来实现. 即把第一级火箭燃料烧完时火箭获得的最大速度v_1，用作第二级火箭的起始速度，把第二级火箭燃料烧完时获得的速度v_2，用作第三级火箭的起始速度……而且在前一级火箭燃料烧完时，在下一级火箭起动前将所用的外壳扔掉以减轻负担，这样最后达到的速度就更大些，以至达到宇宙航行所必须的第一、第二和第三宇宙速度. 理论计算和实践表明，火箭级数并非越多越好，对发射人造卫星来说，一般以3—4级为宜.

【例2.10】 一火箭在均匀引力场中竖直升空. 初速度为v_0，初质量为m_0，火箭外壳与负载质量为m_1，燃料经时间τ燃烧完，喷气相对速度为v_r，求火箭最后达到的速度.

解 由(2.100)式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_r=F$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$m\frac{dv}{dt}=mg+\frac{dm}{dt}v_r$$

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-v_r\frac{dm}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v_1}dv=\int_0^{\tau}-gdt-\int_{m_0}^{m_1}v_r\frac{dm}{m}$$

$$v_1-v_0=v_r\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)-g\tau$$

$$v_1=v_0+v_r\ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)-g\tau$$

可见，在 v_0、v_r 和 $\frac{m_0}{m_1}$ 已定的条件下，燃料燃烧时间 τ 越短，火箭达到的最终速度越大.

【例 2.11】 桌上堆放着一条线密度为 ρ 的锁链，其一端沿桌边移动、下落. 问当链下落 x 长度时的速度、加速度、所用的时间及机械能的变化.

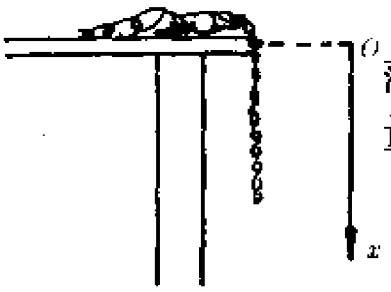


图 2.14

解 视落下的部分链为变质量体. 下落过程中不断有小质量并入，并入的小质量速度为零，按变质量方程，因 $u=0$，故

$$\frac{d}{dt}(mv)=mg$$

$$\frac{d}{dt}(\rho xv)=\rho xg$$

$$\frac{d(xv)}{dt}=xg \qquad (1)$$

$$xv\frac{d(xv)}{dx}=x^2g$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(xv)^2}{dx}=x^2g$$

利用初始条件 $t=0$，$x=0$，$v=0$，积分得

$$\frac{1}{2}(xv)^2=\frac{x^3}{3}g$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$v^2 = \frac{2}{3}xg\,,\ v = \sqrt{\frac{2}{3}xg} \tag{2}$$

由(1)式，

$$v^2 + x\frac{dv}{dt} = xg$$

$$\frac{2}{3}xg + x\frac{dv}{dt} = xg$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}g \tag{3}$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}gx}} = \sqrt{\frac{6x}{g}} \tag{4}$$

机械能变化为

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\,\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho x v^2 - \rho x \cdot \frac{x}{2}g$$

$$= \frac{1}{2}\rho x \cdot \frac{2}{3}gx - \frac{1}{2}\rho x^2 g = -\frac{1}{6}\rho x^2 g$$

此为负值，是因为链下落中各部分间有非弹性碰撞引起的.

【例 2.12】 一球形雨滴在静止的云雾中铅直下落，并不断有雾滴附着其上，附着的质量与雨滴表面积成正比. 设单位时间单位面积附着的质量为 k，雨滴初始半径为 r_0，初速度为 v_0，求雨滴的半径、速度与落下的距离.

解 设在 t 时刻，雨滴质量为 m，半径为 r，因水的密度 $\rho=1$，故

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dm = 4\pi r^2 dr$$

因

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{1}{4\pi r^2}=k$$

$$\mathrm{d}m=k4\pi r^2\mathrm{d}t$$

故有

$$\mathrm{d}r=k\mathrm{d}t$$

因 $t=0$ 时，$r=r_0$，所以

$$r=r_0+kt$$

因并入雨滴的雾珠速度为零，因此，雨滴运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}=mg$$

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}r}=\frac{mg}{k}$$

$$mv=\int_{r_0}^{r}\frac{mg}{k}\mathrm{d}r+m_0v_0$$

$$=\int_{r_0}^{r}\frac{g}{k}\frac{4\pi}{3}r^3\mathrm{d}r+m_0v_0$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3v=\frac{g\pi}{3k}(r^4-r_0^4)+\frac{4}{3}\pi r_0^3v_0$$

雨滴的速度为

$$v=\frac{gr}{4k}+\frac{r_0^3}{r^3}\left(v_0-\frac{gr_0}{4k}\right)$$

落下的距离为

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\int_{r_0}^{r}v\mathrm{d}r=\frac{1}{k}\int_{r_0}^{r}\left\{\frac{gr}{4k}+\frac{r_0^3}{r^3}\left(v_0-\frac{gr_0}{4k}\right)\right\}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{gr_0^2}{8k}\left(\frac{r^2}{r_0^2}+\frac{r_0^2}{r^2}-2\right)+\frac{r_0v_0}{2k}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

习　题

2.1　一质点 P 沿 x 轴运动，质点质量为 m．在 $x>a$ 处，质点受原点 O 的引力为 mk/x^2；在 $x=2a$ 处，受斥力 mak/x^3．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

初始时，质点在 $x=2a$ 处静止.

求：(1)质点开始运动后，在哪一点停下来？

(2)通过 $x=a$ 点后到停下来，用了多长时间？

$\left((1)a/\sqrt{2}\ ;\ (2)a/2\sqrt{a/k}\right)$

2.2 一船质量为 m，在水中行进时受阻力为 $f=av+bv^2$ (a、b 为常数)，当船速达 v_0 时发动机停止工作，问船走多远方能停下？

$\left(s=\frac{M}{b}\ln\frac{a+bv_0}{a}\right)$

2.3 (1)一质点在空气中下落，受到的阻力为 mkv^2，如 $t=0$ 时 $v=0$，求质点的速度和下落距离作为时间的函数，及 $t\to\infty$ 时速度之值 v_∞.

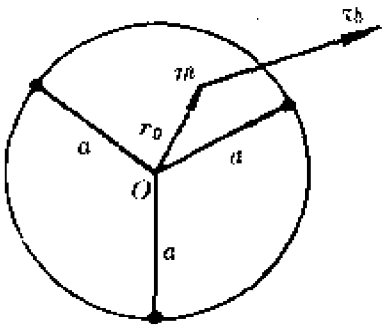
(2)如阻力仍为 mkv^2，质点以初速 v_0 铅直上抛，求所能达到的最大高度 h，及质点复落至抛出点时的速度.

$$\left\{\begin{array}{l}(1)v=\sqrt{\frac{g}{k}}\tanh\left(\sqrt{kg}\,t\right),\ y=\frac{1}{k}\ln\cosh\left(\sqrt{kg}\,t\right),\ v_\infty=\sqrt{\frac{g}{k}}\\ (2)h=\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{k}{g}v_0^2\right),\ v_1^2=\frac{gv_0^2}{g+kv_0^2}\end{array}\right.$$

2.4 质点初始时静止，它受到力 $F(t)=ae^{-bt}$ 的作用自静止出发沿水平直线运动，求出它的位置和速度.

$$\left(x=\frac{a}{mb}\left[t-\frac{1}{b}(1-e^{-bt})\right],\ v=\frac{a}{mb}(1-e^{-bt})\right)$$

2.5 三个点力源等距离地固定在一个半径为 a，圆心为原点的圆周上，每个点力源对质量为 m 的质点的作用力是吸引力 $-kr$，r 是从点力源指向质点的位置向量. 质点在 $t=0$ 时被放入力场，初始条件是 $r=r_0$，$\dot{r}=v_0$，(初始条件见题图 2.5)



题图 2.5

(1)选择适当的广义坐标，写出在

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

任意时刻作用在质点上的力的表达式.

(2)利用上述初始条件解运动微分方程，即用 r_0，v_0及其它系统参数表示 $r(t)$.

(3)在什么条件下(如果存在的话)圆轨道是一种解?

$$\left\{\begin{array}{l}(1)F=-3kr;\ (2)r(t)=r_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}t\right)+\sqrt{\dfrac{m}{3k}}v_0\sin\left(\dfrac{3k}{m}t\right);\\ \\ (3)\text{当 } r_0\perp v_0,\ \text{且}\sqrt{\dfrac{m}{3k}}v_0=r_0\text{ 时，其解是圆轨道.}\end{array}\right\}$$

2.6 真空中有一有缺陷的质量为 950kg 的卫星被一飞船牵引着，两者用一根长 50m 的均匀绳连接着，单位长度绳的质量是 1kg/m，飞船以 $5m/s^2$ 的加速度沿直线加速运动.

(1)飞船作用在绳上的力多大?

(2)计算沿绳的张力.

(3)飞船上的人精疲力竭睡着了，飞船助推器的控制电路之一发生短路. 使加速度变为 $1m/s^2$ 的减速度，详细描述这个事故的后果.

2.7 质量为 M 的物体被一锤所击. 设物体置于水平面上，锤加的力为水平力且均匀增减，在冲击时间的一半时，增至极大值 p，以后又均匀减小至零. 求物体在各时刻的速率及压力所作的功.

$$\left\{\begin{array}{l}0\leqslant t\leqslant\tau/2\text{ 时，}v=\dfrac{pt^2}{m\tau};\ \tau/2\leqslant t\leqslant\tau\text{ 时，}v=\dfrac{p}{2m\tau}(4\tau t-\tau^2-2t^2).\\ \\ (\tau\text{ 是打击时间}),\ \text{压力的功 } W=\dfrac{p^2\tau^2}{8m}\end{array}\right\}$$

2.8 光滑水平的桌面上放置一个弹性系数为 k 的弹簧，弹簧一端固定，另一端系一质量为 M 的木块，这个系统的运动为 $x=A_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}t+\alpha\right)$. 一团质量为 m 的油灰落在木块上与木块完全粘合在一起，在下列二种情况下：

(1)油灰在 M 速度为零时落在木块上；

(2)油灰在 M 速度最大的瞬时落在木块上，求系统新的周

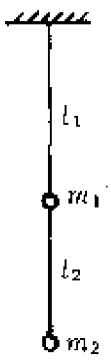
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

期、新的振幅和系统机械能的变化.

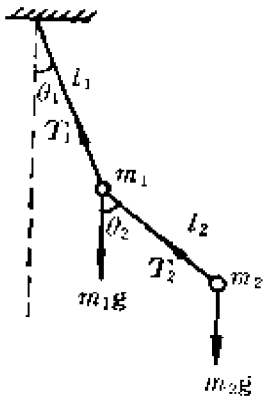
$$\left\{\begin{array}{l}(1)T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}\text{，振幅不变，}\\(2)T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}\text{，新振幅}\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}A_0\end{array}\right.$$

2.9 题图所示的二重摆，二质点质量分别为 m_1，m_2，摆长分别为 l_1，l_2，初始时系统静止. 如(a)所示，$t=0$ 时刻给 m_1 一水平冲击，使之获水平速度 v. 试证明，两摆绳 l_1、l_2 中的张力按如下比例增加：

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}=1+\frac{ml_2}{M(l_1+l_2)}$$



(a)



(b)

2.9 题图

2.10 质量分别为 m_1，m_2 的两块板，中间用弹性系数为 k 的弹簧固连起来. 今在上板的上方掉下一质量为 m_3 的泥巴. 问高度 H 至少为多少时，方能使上面的板跳起来时能带动下面的板？

$\left(H>(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_1+m_2+2m_3)g/(2m_3^2k)\right)$

2.11 一枚火箭在均匀重力场中铅直升空，它以相对速度 v_r，每单位时间质量 μ 的速率喷出气体，火箭的初始质量为 m_0，初速为 0，求时间 t 后火箭的速度及上升的高度.

$$\left\{\begin{array}{l}v=v_r\ln\dfrac{m_0}{m_0-\mu t}-gt,\\h=\dfrac{m_0v_r}{\mu}\left\{\left(1-\dfrac{\mu}{m_0}t\right)\ln\left(1-\dfrac{\mu}{m_0}t\right)+\dfrac{\mu}{m_0}t\right\}-\dfrac{g}{2}t^2\end{array}\right.$$

2.12 一机枪质量为 M，只能装进质量为 M_1 的子弹，它在单位时间内射出子弹的质量为 k，其相对于地面的速度为 u. 如机枪与地面的摩擦系数为 μ，问当子弹全部射出的瞬间，机枪后退的速度为何？

$$\left(v=\frac{M_1}{M}u-\frac{(M+M_1)^2-M^2}{2kM}\mu g\right)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

2.13　证明，如果可以获得收入的负载质量 m' 同火箭的初始质量 m_0 比较很小，且所有外力可以忽略，则当所有燃料燃尽时，给予负载的速度增量为

$$\Delta v = -v_r \ln(1-\varepsilon) - \frac{v_r \varepsilon (m'/m_0)}{1-\varepsilon}$$

$(1-\varepsilon)$是结构因子.

2.14　一单级火箭质量为 m_0，结构因子为$(1-\varepsilon)$，携带一负载 m'，如 $\varepsilon=0.8$，略去外力，证明：能给出末速度为 $1.3v_r$ 的最大负载是 $0.1m_0$. v_r 是废气相对于火箭的速率.

2.15　点火前，一单级火箭的总质量是 m_0，它包括质量为 m_c 的外壳、器械等以及燃料. 燃料按程序燃烧，并以变速率喷出，使得火箭在燃料燃烧期间任意时刻 t 的总质量为

$$m(t) = m_0 \exp(-kt/m_0)$$

其中 k 是常数.

火箭由静止铅直升空，忽略重力以外的所有外力，证明在燃料完全燃尽的瞬间达到的高度是

$$H = \frac{m_0^2}{2k^2}\left(\frac{v_r k}{m_0} - g\right)\left(\ln\frac{m_0}{m_c}\right)^2$$

v_r 是废气相对于火箭的速率.

2.16　地板上堆积着线密度为 ρ 的链条. 将其一端提起，问：

(1)当提起部分的链条长为 x，速度为 v，加速度为 a 时，上端拉力多大？

(2)如上端速度 $v=$常数，拉力 F 多大？

(3)如 $F=$常数，提起的部分链条长 x 时，$v=$？

$$\left\{\begin{array}{l}(1)F=\rho(xg+v^2+xa);\ (2)F=\rho(xg+v^2);\\ (3)v=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{F}{\rho}(x^2-x_0^2)-\dfrac{2g}{3}(x^3-x_0^3)}\end{array}\right.$$

2.17　用右手提着线密度为 ρ，长为 l 的链条的上端，用左手接着下端. 放开右手，问当链条在空中下落距离为 x 时，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

左手受力多大？

（$F=3\mu g x$）

2.18　三质量分别为 m，M，m 的质点 A，B，C 置于光滑水平面上，A，B 和 B，C 间以等长轻绳连接，初始时绳拉直，三质点在一直线上．今 B 受一与绳垂直的打击获速度 v_0．求 A、C 相碰时的相对速度为何？当 $M=m$ 时，其值如何？

$\left(2\sqrt{\frac{M}{M+2m}}v_0;\ (2/\sqrt{3})v_0\right)$

2.19　一个原先静止的原子核，在放射性衰变时发射出一个动量为 1.73MeV/C 的电子，在垂直于电子的方向上则发射一个 1.00MeV/C 的中微子(MeV 代表百万电子伏特，是近代物理中所用能量单位，等于 1.60×10^{-6}尔格．相应地，MeV/C 是线动量的单位．等于 5.34×10^{-17}克·厘米/秒)．试问核沿什么方向反冲？它的动量等于多少 MeV/C？如果剩余核质量为 3.90×10^{-22}克，它的动能是多少电子伏特？

（(剩余核动量 2.00MeV/C，能量 9.11eV)）

2.20　一张唱片，质量为 M，半径为 R，静置于光滑水平面上，中心不固定．一质量为 m 的甲虫，初始时停在唱片的边缘上，求当甲虫以相对速率 u 沿唱片边缘走动后，唱片如何运动？

$\left\{\begin{array}{l}\text{唱片中心 } O \text{ 的速率 } v_0=\frac{mu}{3m+M},\\ O \text{ 绕甲虫与唱片的质心 } C \text{ 作圆周运动，唱片的角速度 } \omega=\frac{2m}{3m+M}\cdot\frac{u}{R}\end{array}\right.$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第三章　非惯性参考系

§3.1　引　　言

牛顿运动定律成立的前提，是必须能找到一个参考系，在其中不受任何外界(实物或场)作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态，我们已经称这样一个参考系为惯性系．而且，相对于这个参考系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系，这一点已隐含在惯性定律中．一个参考系相对于惯性系有加速度(例如相对于它转动)，就不再是一个惯性系，而是非惯性系．牛顿运动定律在非惯性参考系中并不成立，即牛顿第二定律方程式不能描述物体在非惯性参考系中的运动，这可以从如下实例中明显地看出：一球置于光滑水平桌面上，而桌固连在沿水平轨道运动的车厢内．当车以加速度 a 向右运动时，发现球相对于车厢以加速度 $-a$ 向左运动，在非惯性系——车厢内，球并未受到水平力的作用却获得了水平加速度 $-a$，因而牛顿第二定律在这里不再正确．

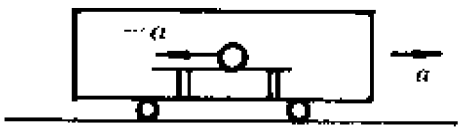


图 3.1

然而，按照相对论，绝对静止的参考系或绝对的惯性系是没有的．一个参考系是不是惯性系，决定于我们能以多大的精确度测出参考系的微小加速度．如果在一个参考系中，我们测不出不受任何外界影响的质点有加速度，或加速度小到对实际应用来说可以忽略的程度，我们就认为这个参考系是惯性系．

此外，一个参考系是不是惯性系，还决定于我们所讨论的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

问题所需要的精度. 在许多应用中，我们认为地球及建立于其上的实验室是一个惯性系. 我们知道地球上赤道处物体随地球自转的向心加速度是 $a_{自}\approx 0.034$ 米/秒^2，地球公转的向心加速度更小，为 $a_{公}=0.006$ 米/秒^2，如果这样的加速度是在允许的误差范围内，就可以把地球和实验室系看作是惯性系.

如果以太阳中心为原点，以指向远处固定恒星的三个方向为轴作一坐标系，这样一个恒星坐标系代表的参考系，应当是一个更好的惯性系，尽管太阳也在绕银河中心转动，但它的加速度为 3×10^{-10} 米/秒^2，比地球公转的加速度小 7 个数量级. 固定恒星之间的距离十分遥远，可以认为它们彼此的影响很小而孤立地存在着，尽管我们无法测出它们相对运动的微小加速度，仍然有理由认为，它们以更高的精度确定了一个惯性系.

如前所述，一切惯性系都不是绝对严格的惯性系. 一个参考系，在某些问题中可以当作惯性系，在另一些问题中则不能. 在惯性参考系中，牛顿运动定律不再适用，而事实恰恰是，许许多多的力学现象在非惯性系中观测是最方便的，在惯性系中观测反而不方便. 如讨论地球表面物体的运动时，以转动着的地球为参考系(它是非惯性系)是方便的，而取惯性系(如日心系)反而不方便，并使问题复杂化了. 因此建立非惯系中的动力学方程，就成为一个重要的问题.

就运动学而言，各种参考系是等价的，只是对同一力学现象的描述有简有繁而已，但对动力学问题而言，各种参考系并不等价，主要是惯性系与非惯性系不等价，不同的非惯性系也不等价. 相对运动的运动学和动力学，研究惯性参考系与非惯性参考系中，运动学量与动力学量、运动方程和动力学方程之间的关系.

处理非惯性系中的运动问题，有两种可供选择的方法. 一是在惯性系中讨论问题，然后变换到非惯性系中去. 二是建立非惯性系中适用的运动学和动力学方程，直接在非惯性系中讨

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

论问题．我们主要采取第二种方法．

§3.2 伽里略-牛顿相对性原理

伽里略-牛顿相对性原理，是物理学中最早提出的原理之一．1632年伽里略在他发表的《关于两种世界体系的对话》一书中论述了以地面和相对于地面作匀速直线运动的船为两个惯性参考系时，在船的密封舱内以及在地面上所作的实验观测没有任何差别，从而说明了人为什么不会感受到地球绕太阳公转的高速运动，进而说明了物理学的基本规律在相互作匀速直线运动的参考系中都是相同的，绝对速度是没有意义的，这就是伽里略不变性原理．

设参考系 S' 相对于惯性系 S 以速度 V 作匀速直线运动，并令 $t=0$ 时，代表两个参考系的坐标系原点重合．又假定 $V \ll C$，并且在这两个惯性系中对时间的测量及对刚性杆长的测量是完全相同的，则质点在两参考系中的位置向量满足

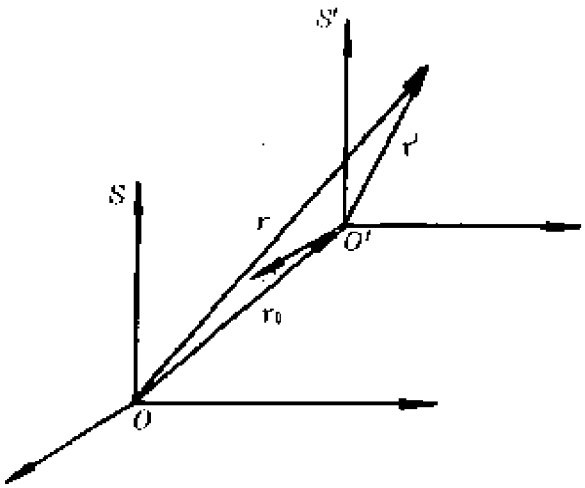


图 3.2

$$\begin{aligned} r &= r' + r_0 \\ &= r' + Vt \end{aligned} \qquad (3.1)$$

且

$$t = t' \qquad (3.2)$$

则(3.1)、(3.2)称为伽里略变换式．将(3.1)式微商得

$$v = v' + V \qquad (3.3)$$

再微商得

$$a = a' \qquad (3.4)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(3.4)式具有重要意义。因为只要质量 m 与速度无关，如果 S 系中有

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$$

S' 系中就有

$$\boldsymbol{F}'=m\boldsymbol{a}'$$

现在已有 $a=a'$，因而两个惯性系中力 $F=F'$，这说明若以 $F=ma$ 定义力，在一切惯性系中力 F 有相同的数值和方向，亦即在任何两个以匀速 V 作相对运动的惯性参考系中，运动微分方程有相同的形式，牛顿的三个定律及其导出的各个定理，对所有惯性系也有相同的形式，这就是伽里略-牛顿相对性原理，或称相对性原理.

力学相对性原理是以牛顿运动定律作为力学的基本原理，以伽里略变换作为不同惯性系之间的时空变换，它只在力学即机械运动的范围内适用. 二十世纪初，爱因斯坦站在其当代物理学最新成果的高度上提出了作为相对论两基本原理之一的概括一切物理规律的相对性原理："物理定律在一切惯性系中有相同的形式，即在任一惯性系内部所做的任何物理实验都不能确定该惯性系的运动状况."

§3.3 相对运动的运动学

一、向量的时间变化率

以位置向量 $r(t)$ 表示动点 P 在任意瞬时的位置，设此刻 P 正绕过 O 点的某瞬时轴以角速度 ω 转动，如图 3.3 所示，由(1.91)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

则 P 点的速度可以表为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v=\omega\times r \tag{3.5}$$

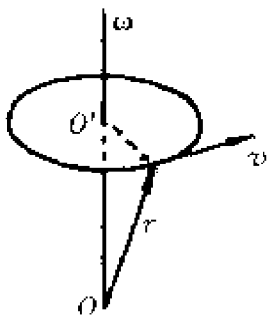


图 3.3

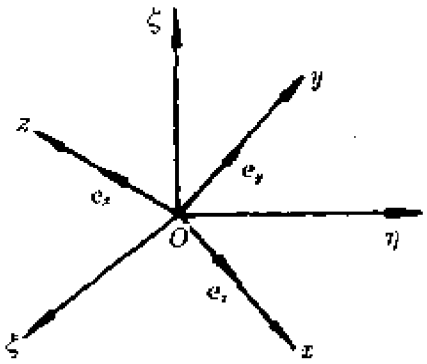


图 3.4

现在考虑两个参考系：静系 S 和转动参考系 S'，笛卡儿坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 固结在 S 上，O-xyz 固结在 S' 上，S' 系以角速度 ω 转动，两坐标系有共同的原点 O，如令 $r=e_i$，(e_i 是单位向量 i 代表 x，y，z)，则 e_i 端点的速度

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t}=\omega\times e_i$$

设有一任意向量 G，它在动系中的表达式为

$$G=G_xe_x+G_ye_y+G_ze_z \tag{3.6}$$

G 在静系中的时间变化率

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}G_x}{\mathrm{d}t}e_x+\frac{\mathrm{d}G_y}{\mathrm{d}t}e_y+\frac{\mathrm{d}G_z}{\mathrm{d}t}e_z\right)+\\&\quad\left(G_x\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t}+G_y\frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t}+G_z\frac{\mathrm{d}e_z}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}G_x}{\mathrm{d}t}e_x+\frac{\mathrm{d}G_y}{\mathrm{d}t}e_y+\frac{\mathrm{d}G_z}{\mathrm{d}t}e_z\right)+\\&\quad(G_x\omega\times e_x+G_y\omega\times e_y+G_z\omega\times e_z)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}G}{\mathrm{d}t}+\omega\times G \tag{3.7}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

式中$\frac{dG}{dt}$称为 G 的绝对时间变化率. $\frac{\tilde{d}G}{dt}=\frac{dG_x}{dt}e_x+\frac{dG_y}{dt}e_y+\frac{dG_z}{dt}e_z$ 称为相对(或本体)时间变化率，它是在动系 S' 中观察到的表观时间变化率，即认为动系不动，因而 e_x，e_y，e_z 都不动，G 相对于它的时间变化率. $\omega\times G$ 是 G 相对于动系不动，仅因动系以角速度 ω 转动被它带动产生的变化率，称为牵连变化率. 因此(3.7)式也可以表述为：向量 G 的绝对时间变化率等于其相对时间变化率加上牵连时间变化率. 例如，当 G 表示位置向量，即 $G=r$ 时，则通过相对动系的运动表示 r 的绝对变化率为

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\tilde{d}r}{dt}+\omega\times r \tag{3.8}$$

即绝对速度等于相对速度与牵连速度之和.

式(3.7)虽然是向量 G 满足的方程式，但由于 G 是任意的向量，它实质上是转动参考系与静止参考系中对时间微商的关系式. G 可以表示 r，ω，p，L…任意向量. 为表示向量的任意性，强调两参考系之间的关系，可以把(3.7)式表为算符方程

$$\frac{d}{dt}=\frac{\tilde{d}}{dt}+\omega\times \tag{3.9}$$

式中$\frac{d}{dt}$表示绝对微商，$\frac{\tilde{d}}{dt}$表示相对微商.

值得注意的是角速度向量 ω，当 $G=\omega$ 时

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\tilde{d}\omega}{dt}\equiv\dot{\omega} \tag{3.10}$$

即对角速度向量而言，其绝对微商等于相对微商，也就是说，角速度向量的绝对时间变化率和相对时间变化率总是相等的.

二、绝对运动、牵连运动和相对运动

由于运动的相对性，绝对的静止是没有的. 然而为了确定地研究运动，在讨论涉及两种参考系的运动时，总可以把其中一个视为不动，称为静系，另一个称为动系.

动点相对于静系的运动，称为绝对运动；动点相对于静系

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的速度、加速度和轨迹，分别称为绝对速度、绝对加速度和绝对轨迹.

动点相对于动系的运动，称为相对运动；动点相对于动系的速度、加速度和轨迹，分别称为相对速度、相对加速度和相对轨迹.

在某一时刻，动点在动系中所占据的空间点(即空间重合点)随动系在静系中的运动，称为牵连运动；相应的速度和加速度，称为牵连速度和牵连加速度. 动点在动系中的空间重合点，是一系列不断更换的点.

如图 3.2 所示，当动系 S' 相对于静系 S 以速度 V 平动时，

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r' \\ \dot{r} &= \dot{r}_0 + \dot{r}' \end{aligned} \tag{3.11}$$

或

$$v = V + v'$$

r 是动点 P 在静系中的位置向量，r' 是 P 在动系中的位置向量，r_0 是动系坐标原点的位置向量. $v=\dot{r}$ 是绝对速度，$v'=\dot{r}'$ 是相对速度，$V=\dot{r}_0$ 是牵连速度，因动系相对静系作平动，P 点在动系中的空间重合点有与动系原点相同的速度 $\dot{r}_0$，因此这里牵连速度就是 V，当动系有转动时，就不再有这样的关系了.

同样地，在动系相对静系加速平动的情形下，有

$$\ddot{r} = \ddot{r}_0 + \ddot{r}' \tag{3.12}$$

即绝对加速度 $\ddot{r}$ 等于相对加速度 $\ddot{r}'$ 和牵连加速度 $\ddot{r}_0$ 的向量和.

三、一般空间运动参考系

设 S' 是相对于静系 S 既有平动又有转动的一般空间运动参考系，S 是惯性系，S' 是非惯性系，坐标系 $O\text{-}\xi\eta\zeta$ 固结在 S 上，$O'\text{-}xyz$ 固结在 S' 上，以 ω 表示动系 S' 相对于静系 S 转动的瞬时角速度向量. 动点 P 在静系中的位置向量

$$r = \xi i + \eta j + \zeta k \tag{3.13}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

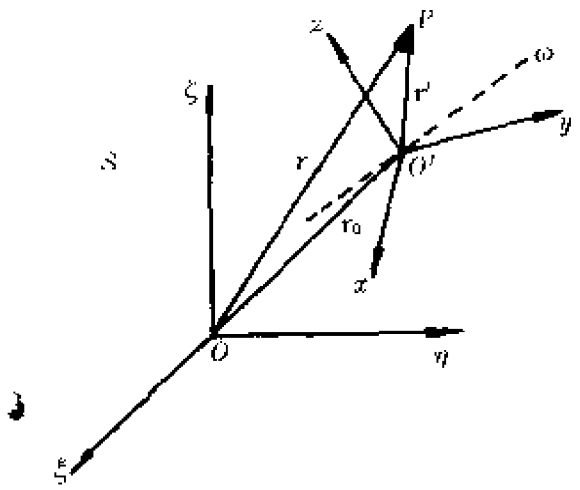


图 3.5

在动系中的位置向量

$$r' = xe_x + ye_y + ze_z \tag{3.14}$$

动系原点 O' 在静系中的位置向量

$$r_0 = \xi_{0'}i + \eta_{0'}j + \zeta_{0'}k \tag{3.15}$$

由图 3.5 知

$$r = r_0 + r'$$

P 点相对于静系的速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt} \\ &= \frac{dr_0}{dt} + \frac{\tilde{d}r'}{dt} + \omega \times r' \\ &= v_0 + v_r + \omega \times r' \\ &= v_r + v_t \end{aligned} \tag{3.16}$$

式中 $v_r = \frac{\tilde{d}r'}{dt}$ 是相对速度，v_t 是牵连速度，$v_t = v_0 + \omega \times r'$，即牵连速度包含两项，一项是 v_0，即动点的空间重合点随动系平动的速度，另一项是 $\omega \times r'$，是空间重合点相对于静系转动的速度. (3.16)式表示绝对速度等于相对速度与牵连速度之向量和，称为相对运动的速度合成公式.

由(3.16)式，静系中动点 P 的加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(v_0 + v_r + \omega \times r') \\ &= \frac{d}{dt}v_0 + \frac{d}{dt}v_r + \frac{d}{dt}(\omega \times r') \\ &= a_0 + \frac{\tilde{d}v_r}{dt} + \omega \times v_r + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt} \end{aligned}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= a_0 + a_r + \omega \times v_r + \dot{\omega} \times r' + \omega \times v_r + \omega \times (\omega \times r') \tag{3.17}$$

即

$$a = a_r + [a_0 + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r')] + 2\omega \times v_r = a_r + a_t + a_c \tag{3.18}$$

(3.18)式称为相对运动的加速度合成公式，式中 $a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t^2}$ 称为相对加速度. $a_t = a_0 + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r')$ 称为牵连加速度，它由三项组成：a_0 是动系坐标原点 O' 的加速度；$\dot{\omega} \times r'$ 是由角速度向量变化产生的加速度，因它与 r' 垂直，称横向加速度；$\omega \times (\omega \times r')$ 与瞬时轴垂直并指向该轴，称向轴加速度；$2\omega \times v_r$ 称科里奥利加速度，它与 ω 有关，又与 v_r 有关，仅当动系相对静系有转动，P 点在动系中有相对运动，且 ω 与 v_r 方向不平行时，才有这项加速度.

作为特例，我们讨论一下平面转动参考系，看一看在这种较为简单的情形下，各项加速度的意义.

设有一水平转台，以匀角速 ω 转动，ω 与台面垂直. 一质点 P 沿转台的一条半径运动，以转台中心 O 为原点，引射线 $O\xi$ 固结于地面参考系(静系)；引半径 Ox，它固结于转台(动系). 设在 $t=0$ 时刻，转台半径 Ox 与 $O\xi$ 重合，t 时刻质点 P 位于 Ox 上 A 点，有相对于静系的速度 v，经 Δt 时间，P 运动到 B 点，此

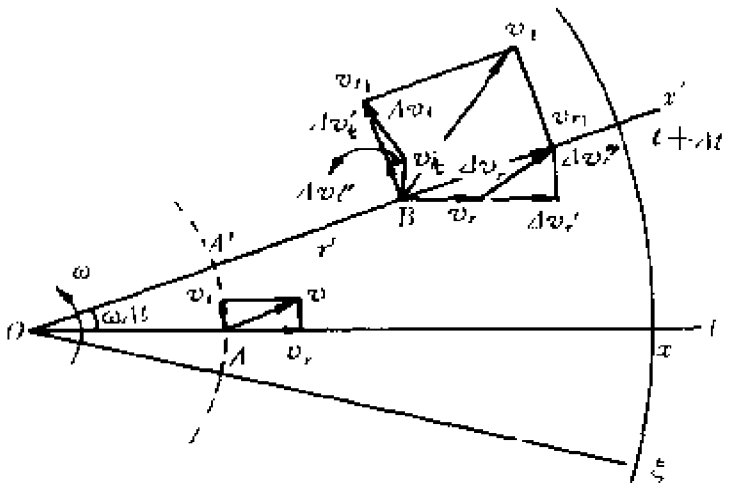


图 3.6

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

时 $\omega \times r' = 0$，又 $\omega \perp r'$，$\omega \times (\omega \times r') = -\omega^2 r'$，去掉"′"号，因此加速度公式简化成

$$a = a_r - \omega^2 r + 2\omega \times v_r \tag{3.19}$$

注意到图 3.6 所示，在静系中观察到，当 $t \to t + \Delta t$ 时，$v \to v_1$ 相对速度的增量与牵连速度的增量均由两部分组成：

$$\Delta v_r = \Delta \dot{v}_r + \Delta \vec{v}_r \tag{3.20}$$

$$\Delta v_t = \Delta \dot{v}_t + \Delta \vec{v}_t \tag{3.21}$$

这里"˙"表示大小的改变，"→"表示方向的改变. 使相对速度本身改变的加速度

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_r'}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\dot{v}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}} v_r}{\mathrm{d}t} = a_r \tag{3.22}$$

是相对加速度.

使牵连速度大小改变的加速度是

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \dot{v}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \omega \times \frac{\Delta \vec{l} B}{\Delta t} \approx \omega \times \frac{v_r \, \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \omega \times v_r \tag{3.23}$$

使相对速度方向改变的加速度是

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \omega \times (v_r + \Delta \dot{v}_r) \approx \omega \times v_r \tag{3.24}$$

改变牵连速度方向的加速度

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} = \omega \times v_t = \omega \times (\omega \times r) = -\omega^2 r \tag{3.25}$$

为向轴加速度.

可见，科里奥利加速度由两部分组成：改变牵连速度大小和改变相对速度方向的加速度，合起来是 $2\omega \times v_r$.

四、参考系与坐标系

为了确定地描述运动，必须选定参考系. 物体是否运动以及作何种运动，只有对一定的参考系而言，才是确定的，但是选定了参考系，作为描述运动的数学工具的坐标系，却仍可以

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

有不同的选择. 例如我们要描述质点在惯性系中的运动，固然可以使用固结在该惯性系上的坐标系，也可以使用平面极坐标系、球坐标系和转动的笛卡儿坐标系等等，这些坐标系都不是完全固结在惯性系上的，然而这并不妨碍用它们来描述惯性系中的运动，这样做不仅是可以的，在某些情况下甚至是必须的，而且会带来很大的方便.

【例 3.1】 一圆盘以匀角速度绕一通过圆心并垂直于盘面之轴而转动，一点 M 以匀相对速度 u 自圆盘上一弦的中点开始沿此弦运动. 如圆心到弦中点的距离为 b，求 M 离弦中点为 x 时，M 点的绝对速度与绝对加速度.

解 本题求的是 M 点的绝对速度与绝对加速度，即 M 点相对于静系的运动. 参考系选为地面. 但为了描述点的绝对运动，并不一定要选固结于静系的坐标系. 例如，我们可以选固结于圆盘的转动坐标系 O-xy，如图所示. y 轴与弦垂直.

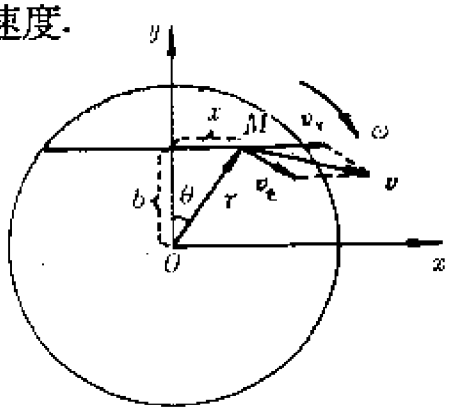


图 3.7

M 点的相对速度

$$v_r = ue_x$$

M 点的牵连速度

$$\begin{aligned} v_t &= \omega \times r \\ &= (-\omega e_z) \times (xe_x + be_y) \\ &= -x\omega e_y + b\omega e_x \end{aligned}$$

绝对速度

$$\begin{aligned} v &= v_r + v_t \\ &= (u + b\omega)e_x - x\omega e_y \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{(u + b\omega)^2 + (x\omega)^2}$$

由(3.19)式，绝对加速度

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$a = a_r - \omega^2 r + 2\omega \times v_r$$

本题中

$$a_r = \frac{\tilde{d}}{dt}(ue_x) = 0$$

$$-\omega^2 r = -\omega^2(xe_x + be_y)$$

$$2\omega \times v_r = 2(-\omega e_z) \times (ue_x) = -2\omega u e_y$$

$$a = -\omega^2 x e_x - \omega^2 b e_y - 2\omega u e_y$$

$$a = \sqrt{(\omega^2 x)^2 + (\omega^2 b + 2\omega u)^2}$$

$$= \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + (2u + \omega b)^2}$$

设加速度 a 与 y 轴成角度 θ，则

$$\sin\theta = \frac{\omega^2 x}{a}$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\omega^2 x}{a}$$

§3.4 相对运动的动力学

一、运动微分方程·惯性力

我们在相对运动的运动学中已得到一般空间运动坐标系中的加速度公式为

$$a = a_r + a_t + a_c$$

两边同乘以 m，得

$$ma = ma_r + ma_t + ma_c \tag{3.26}$$

由牛顿运动定律，$ma=F$，它在惯性系中成立，则

$$ma_r = ma - ma_t - ma_c = F - ma_t - ma_c \neq F \tag{3.27}$$

即在非惯性系中，质量与加速度的乘积不等于物体所受的外力，牛顿运动定律不成立. 但是，如果把$-ma_t$，$-ma_c$视为某

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

种假想的力，是同 F 一样的作用于物体的力，称为惯性力，则仍然可以把(3.27)写成

$$ma_r = F_{eff} \tag{3.28}$$

方程右边包括了物体所受的真实力与假想的惯性力，是它们的向量和，就是说，引进惯性力之后，物体在非惯性系中的运动仍然满足牛顿运动定律，或者说，牛顿运动定律在形式上仍然保持不变，物体的运动完全可以象在惯性系中那样处理，惯性系中得到的各种力学结论仍然成立. 从(3.26)式到(3.27)式，从数学上看，并没有多大意义，只是方程两边移了项，但物理上却是有意义的，前者表示惯性系中的动力学方程，a_r，a_t 和 a_n 都是加速度的组成部分，后者则是非惯性系中的动力学方程，它的合力中包含了 $-ma_t$，$-ma_n$ 这样一些只在非惯性系中才会出现的惯性力，因而这两个公式表示了所用的参考系的不同和处理力学问题观点、方法的不同.

对一般空间运动参考系而言，动力学方程式(3.28)可以表为

$$ma_r = F - m[a_0 + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)] - 2m\omega \times v_r \tag{3.29}$$

式中 F 是物体所受的真实力，即物体所受其他物体或场的作用力，如引力、静电库仑力、电磁力、接触力、张力、弹性力等，物体在惯性系中只受到这些力的作用. $-m[a_0+\dot{\omega}\times r+\omega\times(\omega\times r)]$称为牵连惯性力. 其中 $-ma_0$ 称为平移惯性力，$-m\dot{\omega}\times r$ 称为横向惯性力；$-m\omega\times(\omega\times r)$与向轴加速度反向且与瞬时轴垂直，称为离心惯性力或惯性离心力，它只与位置有关. $-2m\omega\times v_r$ 与科里奥利加速度反向，是个偏转力，称为科里奥利惯性力. (3.29)式右边整体 $F_{eff}=F-m[a_0+\dot{\omega}\times r+\omega\times(\omega\times r)]-2m\omega\times v_r$ 称为有效力.

把惯性力和真实力加以比较，不难发现，它们的共同点是：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

惯性力与真实力一样，具有力的动力学效应和静力学效应，可以通过感官或仪器觉察其存在. 惯性力作为一种假想力被引入，并非虚幻的、不真实的，汽车突然开动使乘客向后倾斜，与在静止的汽车中乘客被人推一下而向后倾斜，其动力学效应并无不同，说明在非惯性系中惯性力是确实存在的. 惯性力与真实力一样，是物体产生加速度和发生形变的原因.

惯性力和真实力还有本质上不同之点：

首先，它不是物体间的相互作用引起的，而是由于用非惯性系来描述运动才出现的. 在惯性系中并没有惯性力，只有非惯性系中才出现惯性力；其次，由于它不是相互作用力，因而没有施力者，也不满足牛顿第三定律；还有，惯性力的大小和方向，依赖于参考系的选择，及参考系与物体的运动状态，这一点与真实力是很不相同的.

现在看来，说惯性力没有施力者，并不是确切的陈述，因为尽管惯性力的起源问题并未完全解决，按照爱因斯坦宇宙论的核心原理——马赫原理，任何一个给定物体的惯性依赖于其它质量的存在和分布，在惯性定律的表述中，必须把宇宙的全部质量都考虑进去，在转动的参考系中，惯性力是由全体恒星相对于该参考系的转动决定的，广义相对论定性地证明了这一点.

二、地球转动的力学效应

(一)地表坐标系

为了讨论计及地球自转时，地球表面附近物体的运动，我们把地球作为参考系，它是非惯性系，并定义一种特殊的坐标系——地表坐标系.

取地表某固定点 O' 为坐标原点，取南、东、天(向上)三个方向为笛卡儿坐标系的三个轴向，基矢用 e_x，e_y，e_z 表示，这样的坐标系称为地表坐标系，也可以称为南东天坐标系. 如图

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

3.8所示. 图中 ω 为地球自转角速度向量，它沿地轴指向北极方向，ω 近似为一常向量，其测量值很小，为

$$\omega = 7.29211515 \times 10^{-5}\text{rad/s}$$

因而地球的转动效应也较小，在很多情形下，地球和建立在其上的实验室，都可以看作很好的惯性系.

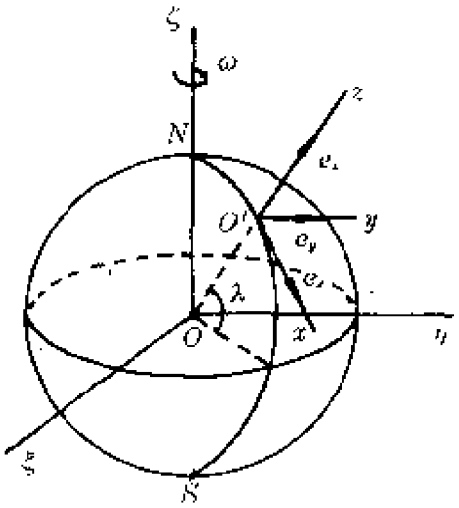


图 3.8

以 λ 表示 O' 点所在的纬度，在地表坐标系中 ω 可以表为

$$\begin{aligned}\omega &= \omega(-\cos\lambda e_x + \sin\lambda e_z)\\ &= \omega(-\cos\lambda,\ 0,\ \sin\lambda)\end{aligned} \tag{3.30}$$

(二)地球附近质点运动的微分方程

考虑到地球的自转与公转，即把地球看作非惯性参考系，地球附近质点运动的微分方程可以写成

$$\begin{aligned}m a_r &= F - m a_t - m a_C\\ &= F - m[a^0 + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)]\\ &\quad - 2m\omega \times v_r\end{aligned} \tag{3.31}$$

r 表示质点在地表坐标系中的位置向量.

a_0 是地表坐标系原点 O' 的加速度

$$a_{0'} = a_0 + \dot{\omega} \times R + \omega \times (\omega \times R) \tag{3.32}$$

R 表示地心 O 到 O' 的位置向量，a_0 是地球公转加速度. 真实力

$$F = F_s + F_e + f \tag{3.33}$$

F_s 表示太阳引力，F_e 代表地球引力，$F_e = mg_0$，方向指向地心，f 代表质点所受太阳、地球引力外的其他作用力. 将 $a_{0'}$ 和 F 代入式(3.31)，得

$$\begin{aligned}m a_r &= F_s + F_e + f - m a_0 - m\dot{\omega} \times R - m\omega \times (\omega \times R)\\ &\quad - m\dot{\omega} \times r - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times v_r\end{aligned} \tag{3.34}$$

因 $r \ll R$，$-m\omega \times (\omega \times r)$ 可略，又 $|\dot{\omega}| \sim 10^{-16}\text{rad}^2/\text{s}^2 \ll \omega^2 \sim$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$10^{-16}\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2$，$-m\dot{\omega}\times R$ 和 $-m\dot{\omega}\times r$ 也可略．故

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{f} + (\boldsymbol{F}_s - m\boldsymbol{a}_0) + [m\boldsymbol{g}_0 - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})] - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{3.35}$$

下面逐个分析(3.35)式中右端二、三项.

因 $r \ll R$，太阳到质点的距离$\approx R_{se}$，太阳对质点的引力 $F_s = G\dfrac{M_s m}{R_{se}^2}$，太阳对地球的引力

$$F_{se} = G\frac{M_s M_e}{R_{se}^2}$$

相比得

$$\frac{F_s}{F_{se}} = \frac{m}{M_e}$$

但

$$F_{se} = M_e a_0$$

故有

$$F_s = ma_0$$

所以

$$F_s - ma_0 = 0 \tag{3.36}$$

第三项中$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}) = -m[(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\boldsymbol{R}] = m\omega^2\boldsymbol{\rho}$是质点在转动的地球参考系中所受的惯性离心力，它与地球引力的向量和称为表观重力：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{g}_0 + m\omega^2\boldsymbol{\rho} = m\boldsymbol{g} = -mg\boldsymbol{e}_z \tag{3.37}$$

由式(3.36)和(3.37)，我们把方程(3.35)简化为

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{f} - mg\boldsymbol{e}_z - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{3.38}$$

这是地球附近质点运动的微分方程式，可见科氏力的出现是考虑地球自转时地球附近质点运动微分方程的主要特征.

将

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r = (-\cos\lambda\omega,\ 0,\ \sin\lambda\omega)\times(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$
$$= (-\omega\sin\lambda\dot{y},\ \omega\sin\lambda\dot{x} + \omega\cos\lambda\dot{z},$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$-\omega\cos\lambda j)$$

代入式(3.38)，并将方程写成分量式，得

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= f_x + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} &= f_y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} &= f_z - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

式中 λ 表示纬度，北半球为正，南半球为负，作这样的区分后，式(3.39)对全球各地都适用.

(三)地球附近质点仅在重力作用下的运动

地球附近质点运动的最简单情形，是仅在表观重力作用下的运动，即 $f=0$ 的情形.

由(3.38)得

$$\ddot{r} = -ge_z - 2\omega \times \dot{r} \tag{3.40}$$

积分得

$$\int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}} d\dot{r} = -ge_z\int_0^t dt - 2\omega \times \int_{r_0}^{r} dr$$

$$\dot{r} = \dot{r}_0 - gte_z - 2\omega \times (r - r_0)$$

因 $r(t)$的函数形式待求，不能进一步积分，用迭代法将此式代回(3.40)，得

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -ge_z - 2\omega \times [\dot{r}_0 - gte_z - 2\omega \times (r - r_0)] \\ &= -ge_z - 2\omega \times \dot{r}_0 + 2gt\omega \times e_z \\ &\quad + 4\omega \times [\omega \times (r - r_0)] \end{aligned} \tag{3.41}$$

略去 ω^2 项，得

$$\ddot{r} = -ge_z - 2\omega \times \dot{r}_0 + 2gt\omega \times e_z \tag{3.42}$$

积分得

$$\dot{r} = \dot{r}_0 - gte_z - 2t\omega \times \dot{r}_0 + gt^2\omega \times e_z \tag{3.43}$$

再积分得运动方程式

$$r = r_0 + \dot{r}_0 t - \frac{1}{2}gt^2e_z - t^2\omega \times \dot{r}_0 + \frac{1}{3}gt^3\omega \times e_z \tag{3.44}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

写成分量式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \dot{x}_0 t + \sin\lambda \dot{y}_0 \omega t^2 \\ y &= y_0 + \dot{y}_0 t - (\sin\lambda \dot{x}_0 + \cos\lambda \dot{z}_0)\omega t^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\cos\lambda \omega g t^3 \\ z &= z_0 + \dot{z}_0 t + \cos\lambda \dot{y}_0 \omega t^2 - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

(四)地球附近质点运动微分方程式的应用

(i)落体偏东

对于地球附近($r \ll R$)的自由落体运动，其运动方程式可以直接由式(3.44)给出. 设初始条件是 $t=0$ 时，$\mathbf{r}=h\mathbf{e}_z$，$\dot{\mathbf{r}}_0=0$

$$\mathbf{r} = \left(h - \frac{1}{2} g t^2\right)\mathbf{e}_z + \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos\lambda \mathbf{e}_y$$

分量式为

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos\lambda \\ z &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

质点落地时，$z=0$，所用时间为 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，代入(3.46)第二式，得

$$y = \frac{2h}{3}\omega \cos\lambda \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{3.47}$$

在地表坐标系中 y 值为正，表明考虑地球自转时，落体不正好落在 $y=0$ 处，而是落在偏东 $\frac{2h}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 处. 例如一物体自北纬 45°，100m 高处自由落下，不计空气阻力，则落地处偏东约 1.55cm. 由(3.47)看出，λ 取正值或负值，$\cos\lambda$ 不变，因而无论南半球或北半球，落体均向东偏离. 落体偏东这一事实，可

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

以用非惯性系中科氏力的作用加以解释. 也可以在惯性系中加以解释. 这些留给读者去讨论.

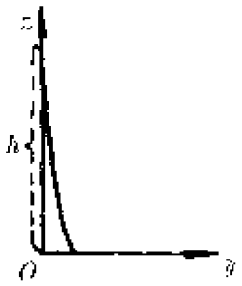


图 3.10

(ii)傅科摆

一个显示地球自转的长悬线、重摆锤、小振幅的单摆，称作傅科摆. 1851 年，傅科(Foucault)制造了一个这样的摆，装置于巴黎伟人祠，它的摆线是长 67m 的钢线，摆锤是 28kg 的铅球. 这样的摆因储存能量较多，不易因摩擦和空气阻力显著衰减，从而维持较长时间的摆动. 最重要的是可以看到摆的振动平面随时间而缓慢地转动，证明了确实存在因地球自转产生的科氏效应，进而证明了地球绕自身轴相对于各恒星的自转. 这是世界上第一个在地球上做的证明地球自转的实验.

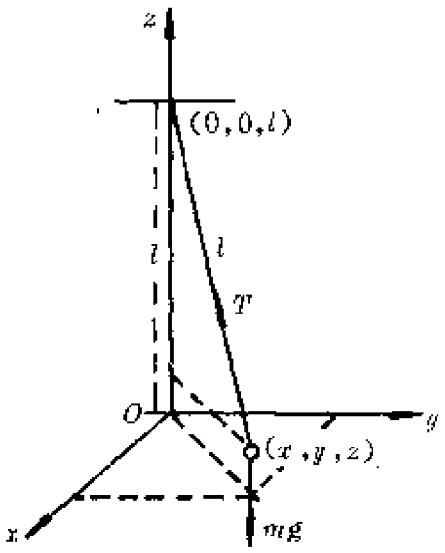


图 3.11

由地球附近质点运动微分方程(3.38)，得傅科摆的运动微分方程是

$$ma_r = T + mg - 2m\omega \times v_r \qquad (3.48)$$

式中 T 是悬线拉力. 在地表坐标系内

$$T = \left(-T\frac{x}{l}, -T\frac{y}{l}, -T\frac{z-l}{l}\right)$$

$$mg = -mge_z$$

$$-2m\omega \times v_r = -2m\omega(-\cos\lambda, 0, \sin\lambda) \times (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

将它们代入(3.48)，写出分量式为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{Tx}{l} + 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} &= -\frac{Ty}{l} - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} &= -T\left(\frac{z}{l} - 1\right) - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{aligned}\right\} \quad (3.49)$$

此方程严格求解有困难，可近似求解.

因傅科摆的摆锤运动在半径为 l 的球面上，

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2$$

而摆动是微幅的，因而 x，y，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\ddot{x}$，$\ddot{y}$ 都是小量. 再看 z 方向的运动，

$$\begin{aligned} \frac{z}{l} &= 1 - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}/l \\ &= 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \\ &= 1 - \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \cdots\right] \approx \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \end{aligned}$$

对 t 求微商

$$\frac{\dot{z}}{l} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{l^2}, \quad \frac{\ddot{z}}{l} = \frac{x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2}{l^2}$$

故 z，$\dot{z}$，$\ddot{z}$ 都是二阶小量，可略.

由(3.49)第 3 式

$$0 = T - mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda$$

因 $\omega\dot{y}$ 也是二阶小量，略去，得

$$T = mg \quad (3.50)$$

代入(3.49)第 1，2 式，得

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x + 2\omega\dot{y}\sin\lambda \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y - 2\omega\dot{x}\sin\lambda \end{aligned}\right\} \quad (3.51)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

令 $\omega_0^2=\frac{g}{l}$，$\Omega=-\omega\sin\lambda$，代入(3.51)式，得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega_0^2 x - 2\Omega\dot{y}\\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y + 2\Omega\dot{x}\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

现引入一动坐标系 $O\text{-}x'y'z'$，令其以角速度 $\Omega=-\omega\sin\lambda e_z$ 相对于地表坐标系 $O\text{-}xyz$ 运动，则坐标变换为

$$\left.\begin{aligned}x &= \cos(\Omega t)x' - \sin(\Omega t)y'\\ y &= \sin(\Omega t)x' + \cos(\Omega t)y'\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

代入(3.52)得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}' + (\omega_0^2 + \Omega^2)x' &= 0\\ \ddot{y}' + (\omega_0^2 + \Omega^2)y' &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

因 $\Omega\ll\omega_0$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}' + \omega_0^2 x' &= 0\\ \ddot{y}' + \omega_0^2 y' &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3.55}$$

这表明在以 $\Omega=-\omega\sin\lambda e_z$ 转动的 $O\text{-}x'y'z$ 系中，摆锤以 ω_0 作二维谐振动，它一般是椭圆振动，特殊初始条件下退化为圆或直线振动.

在地表坐标系 $O\text{-}xyz$ 中. 摆锤的振动平面以角速度 Ω 不断转动，在北半球 $\Omega=-\omega\sin\lambda<0$，在天空俯视地球时，将看到摆平面沿 $-e_z$ 方向(顺时针)转动(见图 3.12)，在南半球沿逆时针方向转动，因 $\Omega=-\omega\sin\lambda>0$. 在北极 $\Omega=-\omega$，在南极 $\Omega=\omega$，在赤道 $\Omega=0$，傅科摆平面没有转动.

傅科摆平面转动的周期

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega\sin\lambda} \tag{3.56}$$

在南北极，$T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|=24\text{h}$ 在其它地方，$T>24\text{h}$，如巴黎伟人祠的傅科摆，$T=32\text{h}$.

(五)地球转动的力学效应举例

地球转动的力学效应，重要表现之一就是表观重力的形

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

成. 如图 3.9 所示，表观重力加速度与赤道平面的交角，称为天文学纬度或纬度. 地心引力加速度与赤道平面的交角，称为地心纬度. 地心引力加速度与表观重力加速度之间，有一很小角度 ε，即地表附近的铅垂线并不指向地心，偏离的角度正是天文纬度与地心纬度之差 $\varepsilon=\lambda-\lambda_0$. 应用三角形正弦定理，$\frac{\sin\varepsilon}{mR\cos\lambda\omega^2}=\frac{\sin\lambda}{mg}$，$\varepsilon=\sin\varepsilon\approx\frac{R\omega^2}{g}\sin\lambda\cos\lambda=\frac{R\omega^2}{2g}\sin2\lambda$，显然，当 $\lambda=45°$时，ε 最大，$\varepsilon_{max}=\frac{R\omega^2}{2g}\approx1.7\times10^{-3}\text{rad}=0.1°$.

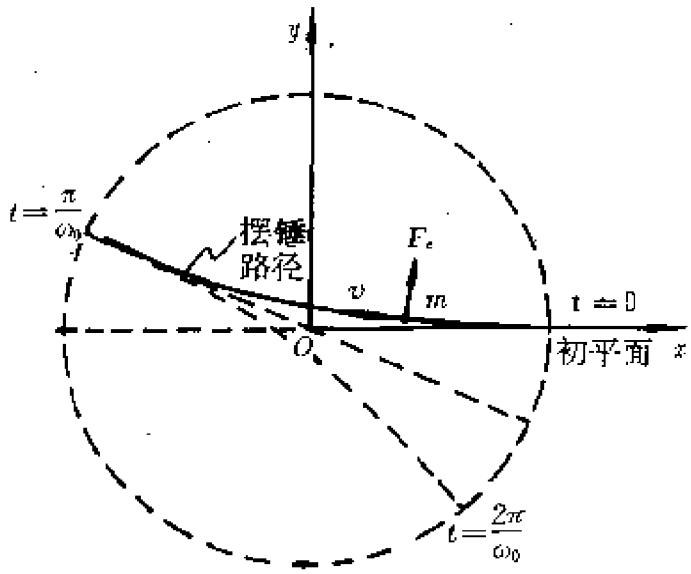


图 3.12

地球自转力学效应的重要表现，是科里奥利力的作用. 除了落体偏东和傅科摆，还有许多实例. 如在地表附近抛射的物体，其落点总是偏离，如系水平抛射，则在北半球向右偏离，在南半球向左偏离. 北半球的河岸，总是右岸冲刷为甚. 南半球则左岸冲刷为甚，水槽、浴盆排水孔处自然形成的漩涡，在北半球总是逆时针方向转动，即使用外力搅动使之顺时针转动，一旦搅动停止，时间长到足以恢复自然流动时，漩涡又成为逆时针的，在南半球则相反，为顺时针的. 因为科氏力作用较小，在这种小范围的运动中，有时为其它因素所掩盖，但这些因素一旦被排除，科氏力的作用还是可以显现出来的.

在地球表面大尺度的运动，如大气、海流、远程火箭的运动中，科氏力的作用十分明显. 地球赤道地区因从太阳获得较多的热量，暖空气上升，由温带较凉的空气来补充，在北半球

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

地面附近向南运动的气流受科氏力的作用向右(即向西)偏斜，形成东北贸易风，南半球地面附近向北运动的气流向左(即向西)偏斜，形成东南贸易风，同理，高空大气的气流方向相反，形成反贸易风. 在小尺度内，如200km左右，可能形成低气压区，如同水槽漩涡那样，在北半球也会形成逆时针环流，如图3.13所示，在适当的条件下，可能形成强度与破坏力极大的强热带风暴或旋风.

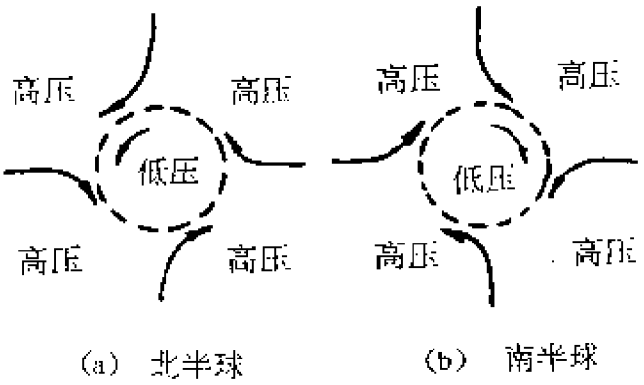


图 3.13

我们把显著受地球自转影响的运动称为大尺度运动，是否为大尺度运动不仅由运动范围决定，它是以无量纲数—罗斯贝(Ruys—Ballot)数来判定的. 罗斯贝数的定义是

$$\varepsilon = \frac{U}{2\omega_z L_{水平}} \tag{3.57}$$

式中 $\omega_z = \omega\sin\lambda$ 为当地地球自转角速度的竖直分量，$L_{水平}$是运动的特征长度，U 是运动的特征速度，如果 $\varepsilon \ll 1$，则运动为大尺度运动. 例如某海流特征水平长度 $L = 200\times 10^3$m，$U = 1$m/s，$\varepsilon = 0.015$，是大尺度运动.

(六)拉莫定理

科里奥利力是自然界中一种很特别的力，它总是与质点运动的路径垂直. 作用于运动着的带电粒子上的磁力

$$F = q\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B} \tag{3.58}$$

有和科氏力相同的形式，式中 $\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度向量，q 是带电粒子的电荷.

在实验室系中，带电粒子的运动微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{q\dot{\boldsymbol{r}}}{m}\times \boldsymbol{B} \tag{3.59}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

引进一新坐标系，其原点与实验室系相同，以 $O\text{-}x'y'z'$ 标志，它绕原点 O 以等角速度 ω 旋转，由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}+\omega\times\\ \dot{r}&=\dot{r}'+\omega\times r'\\ \ddot{r}&=\ddot{r}'+\omega\times(\omega\times r')+2\omega\times\dot{r}'\end{aligned}\tag{3.60}$$

对于转动系中的带电粒子，运动微分方程为

$$\begin{aligned}\ddot{r}'&=-\omega\times(\omega\times r')+2\dot{r}'\times\omega+\frac{q}{m}(\dot{r}'+\omega\times r')\times B\\ &=-\omega\times(\omega\times r')+\frac{q}{m}(\omega\times r')\times B+\dot{r}'\times\left(\frac{qB}{m}+2\omega\right)\end{aligned}\tag{3.61}$$

如果选择

$$\omega=-\frac{qB}{2m}\tag{3.62}$$

(3.61)式最后一项将为零，该式将化成

$$\begin{aligned}\ddot{r}'&=-\left[\frac{q}{2m}\right]^2B\times(B\times r')-\frac{q^2}{2m^2}(B\times r')\times B\\ &=\left[\frac{q}{2m}\right]^2B\times(B\times r')\end{aligned}\tag{3.63}$$

若此方程右边小到可以忽略，即在弱磁场情形下，B^2 项可以略去不计，则磁效应就被消掉了．上述角速度向量 $\omega=-\frac{qB}{2m}$，称为拉莫频率．

一般地，在电场 E 和磁场 B 中，带电粒子在惯性系中的运动微分方程是

$$m\ddot{r}=qE+qv\times B$$

如果运动是相对于以角速度 $\frac{q}{2m}B$ 转动的坐标系，而且 B 足够小以至 B^2 项可以忽略，则运动微分方程成为

$$m\ddot{r}=qE$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这个结果称为拉莫定理.

【例 3.2】 在北纬 λ 度某地地面上，以初速度 $v=(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ 发射一炮弹，试求由于地球自转引起的炮弹飞行时间及落地点相对于惯性系中弹道的偏离.

解 (3.45)式已给出地球附近抛体运动的运动方程：

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \sin\lambda \dot{y}_0 \omega t^2$$

$$y = y_0 + \dot{y}_0 t - (\sin\lambda \dot{x}_0 + \cos\lambda \dot{z}_0)\omega t^2 + \frac{1}{3}\cos\lambda \omega g t^3$$

$$x = z_0 + \dot{z}_0 t + \cos\lambda \dot{y}_0 \omega t^2 - \frac{1}{2} g t^2$$

本题中 $x_0=y_0=z_0=0$，设炮弹飞行时间为 t_1，落地时 $z=0$，由上面第 3 式得

$$0 = \dot{z}_0 t_1 + \cos\lambda \dot{y}_0 \omega t_1^2 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1 = \frac{2\dot{z}_0}{g - 2\omega \dot{y}_0 \cos\lambda} = \frac{2\dot{z}_0}{g}\left(1 - \frac{2\omega \dot{y}_0 \cos\lambda}{g}\right)^{-1}$$

$$\approx \frac{2\dot{z}_0}{g} + \frac{4\dot{z}_0 \dot{y}_0 \omega \cos\lambda}{g^2}$$

故由地球自转引起的落地时间的偏差为

$$\Delta t = \frac{4\dot{z}_0 \dot{y}_0 \omega \cos\lambda}{g^2}$$

将 t_1 之值代入(3.45)第 1 式，略去 ω^2 以上项，得

$$x_1 = \dot{x}_0 t_1 + \sin\lambda \dot{y}_0 \omega t_1^2$$

$$= \dot{x}_0\left(\frac{2\dot{z}_0}{g} + \frac{4\dot{z}_0 \dot{y}_0 \cos\lambda}{g^2}\right) + \sin\lambda \dot{y}_0 \omega\left(\frac{4\dot{z}_0^2}{g^2}\right)$$

$$= \frac{2\dot{x}_0 \dot{z}_0}{g} + \frac{4\dot{y}_0 \dot{z}_0 \omega}{g^2}(\dot{x}_0 \cos\lambda + \dot{z}_0 \sin\lambda)$$

将 t_1 代入(3.45)式第 2 式，得

$$y_1 = \frac{2\dot{z}_0 \dot{y}_0}{g} + \frac{4\dot{z}_0 \omega}{g^2}\left(\dot{y}_0 \cos\lambda - \dot{x}_0 \dot{z}_0 \sin\lambda - \frac{\dot{z}_0^2}{3}\cos\lambda\right)$$

因此，由地球自转引起的落地点的偏离为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\Delta x_1 = \frac{4\dot{y}_0\dot{z}_0\omega}{g^2}(\dot{x}_0\cos\lambda + \dot{z}_0\sin\lambda)$$

$$\Delta y_1 = \frac{4\dot{z}_0\omega}{g^2}\left(\dot{y}\cos\lambda - \dot{x}_0\dot{z}_0\sin\lambda - \frac{\dot{z}_0^2}{3}\cos\lambda\right)$$

【例 3.3】 一炮弹在北半球某地沿地表向东水平发射，求经时间 t 后弹道发生的角度偏离.（取一级近似）

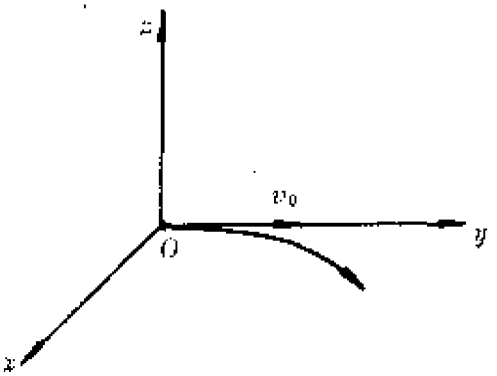


图 3.14

解 炮弹的科氏加速度为

$$\begin{aligned} a_c &= -2\omega\sin\lambda e_z \times v \\ &= -2\omega\sin\lambda e_z \times (\dot{x}e_x + \dot{y}e_y) \\ &= -2\omega\sin\lambda\dot{x}e_y + 2\omega\sin\lambda\dot{y}e_x \end{aligned}$$

因发射向东，沿 e_y 方向，引起弹道偏离发射方向的加速度即 $2\omega\sin\lambda\dot{y}$，经时间 t 后，炮弹的线性偏离为 $x = \frac{1}{2}\times 2\omega\sin\lambda\dot{y}t^2 = \omega\sin\lambda\dot{y}t^2$，炮弹沿 y 方向飞行了

$$y = \dot{y}t - \frac{1}{2}\times 2\omega\sin\lambda\dot{y}t^2 \approx \dot{y}t$$

经时间 t 后，弹道的角度偏离为

$$\varepsilon \approx \frac{\omega\sin\lambda\dot{y}t^2}{\dot{y}t} = \omega t\sin\lambda$$

即偏离角度随时间 t 以比率 $\omega\sin\lambda$ 线性变化.

习　题

3.1 一汽车以恒定正加速度 a_0 沿直线运动，在一给定瞬间前进速率是 v. 求轮上哪一点有最大的绝对加速度（即相对于地面的加速度），并求这个加速度的方向和大小.

（$a_{max} = a_0 + (a_0^2 + v^4/b^2)^{1/2}$，$b$ 是轮半径，v 是瞬时前进速率，a_{max} 出现在 $\mathrm{tg}\theta = a_0 b/v^2$ 定义的点，θ 是由竖直方向量出的角度.）

3.2 一昆虫在以常角速度 ω 转动的转盘上以速率 v 爬行，

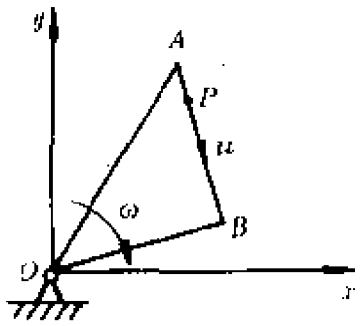
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

其轨迹为半径是 b 的圆. 试在固结于转盘的坐标系中描述运动，求昆虫相对于外部(如地面)的加速度 a 及作用于昆虫的摩擦力 F. 再求当 $v=b\omega$ 和 $v=-b\omega$ 两种情况下的 a 和 F. 注意在后面一种情形时，昆虫相对于外部是静止的.

3.3 一个半径为 R 的圆盘，沿地面上一直线作纯滚动. 一小虫沿盘边缘相对于圆盘以常速率 u 爬行. 设 $t=0$ 时，盘心速度 $v_0=0$，小虫处于最高点，以后盘心以匀加速 a 运动，求当小虫运动一周再回到最高点时，它相对于地面的加速度.

$\left(a_t=2a,\ a_n=4\pi a+\frac{u^2}{R}\right)$

3.4 一等腰直角三角形 ΔAOB，在其自身平面内以匀角速 ω 绕顶点 O 转动，质点 p 在 $t=0$ 时由 A 点出发，以匀相对速率 u 沿直角边 AB 运动，如图所示. 已知 $AB=b$，求 p 点对静系的速度和加速度的分量表示式



3.4 题图

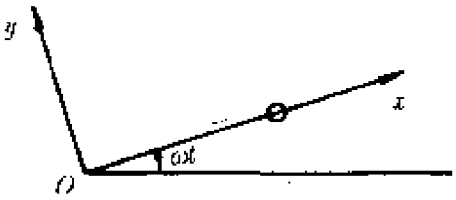
$(v=\omega(b-ut)e_x-(u-\omega b)e_y,$

$a=-(\omega^2 b+2\omega u)e_x-\omega^2(b-ut)e_y)$

3.5 设在上题中，当三角形转了一圈时，p 点走过了 AB，求 p 点在 A 时的绝对速度与绝对加速度.

$\left\{\begin{array}{l} v=\frac{b\omega}{2\pi}\sqrt{8\pi^2+4\pi+1}，与斜边成\ \alpha=\mathrm{tg}^{-1}(4\pi+1)的角度. \\ a=\frac{b\omega^2}{\pi}\sqrt{2\pi^2+2\pi+1}与斜边成\ \beta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi+1}\right)的角度 \end{array}\right.$

3.6 一光滑细杆在水平面内绕其端点 O 以角速度 ω 匀速转动，一质量为 m 的小环被穿在杆上，$t=0$ 时，m 与 O 点之间距离为 a，并相对于杆瞬时静止. 求小环在杆上的运动规律和杆对小环的约束反作用力. (试用两种方法求解)



3.6 题图

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$(x=a\cosh\omega t;\ N_y=2m\omega\dot{x},\ N_z=mg)$

3.7 证明在地球纬度 λ 处的地面上一点，铅垂线与地心引力作用线的角偏离为

$$\varepsilon=\frac{R\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}{g-R\omega^2\cos^2\lambda}$$

并求出最大偏离的数值(以弧秒为单位)是多少？(R 为地球半径)

3.8 科里奥利力公式是

$$\boldsymbol{F}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

(a)这公式在什么情况下适用？式中各符号的意义是什么？

(b)在北纬 λ 度的地方，有一条河沿宽为 W 的河床向北流去，东岸的水位与西岸的不同，问哪一岸的水位高些？

(c)求水位差，并详细说明所用各符号的意义.

(d)就我国大运河粗略估计这个水位差的数量级，写出你所用的各参数的估计值.

$\left(\begin{array}{l}\text{(c)水位差 } h=\dfrac{2W\omega v\sin\lambda}{g},\\ W\text{:河宽，}v\text{:流速，}\lambda\text{:纬度，}\omega\text{:地球自转角速度.}\end{array}\right)$

3.9 在非常有利的条件下，当从上方俯视时，我们发现在海洋表面之下一个相当分明的孤立层中有一海洋环流作逆时针旋转，旋转周期是 14h，这个海洋环流是在什么纬度和哪个半球被测到的？

3.10 假若地球自转速度快到能使赤道上的物体都漂浮起来即失重，那么一天时间将有多长？

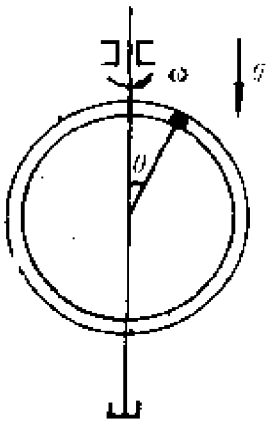
3.11 一个质量为 m 的质点，能在弯成半径为 a 的圆形细管内无摩擦地滑动，圆环绕铅直直径以常角速度 ω(rad/s)转动，如图所示，写出质点的运动微分方程式. 如果质点在 $\theta=0$ 的非稳定平衡位置受到轻微扰动，求出此后最大动能的位置.

$\left(a\ddot{\theta}=a\omega^2\sin\theta\cos\theta+g\sin\theta;\ \theta=\arccos\left(-\frac{g}{2\omega^2a}\right)\right)$

3.12 盛水的圆桶，以匀角速 ω 绕它的轴转动. 如水随桶

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

一起转动，并且不会溢出水桶，证明水面的形状为一旋转抛物面.



3.11 题图

3.13 利用例 3.2 的结果，证明：在南纬 λ 度某地以仰角 $\mathrm{tg}^{-1}(3\mathrm{tg}\lambda)$ 投射一质点，略去 ω^2 以上的项，则落地点及飞行时间均与不计地球自转时的结果一样.

3.14 如一炮弹在北纬 λ 度处从地球表面向正东发射，初速度为 v_0，与水平面成倾角 α，证明炮弹落地时的侧向偏离为

$$d = \frac{4v_0^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

式中 ω 为地球转动角速度.

再证，由于地球旋转而产生的射程变化为

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R^3}{g}}\omega\cos\lambda\left[\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^{\frac{3}{2}}\alpha\right]$$

式中 R 是当 $\omega=0$ 时炮弹的射程.

3.15 在北纬 λ 度处某地，从地面竖直向上投射一质点，如垂直高度较小并忽略空气阻力，则落地点偏西 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{h^3}{g}}$，试证明之.

定性解释所得结果.

3.16 在北纬 λ 度处某地，以仰角 θ，初速 v 向南抛射一质点，求落地点对正南方的角偏离. 设 $\lambda=45°$，$\theta=45°$，$v=400\mathrm{m/s}$

($\varepsilon=0.23°$)

3.17 北纬 λ 度某地，有质量为 m 的列车沿水平直线轨道匀速行驶，求列车分别向东、西、南、北各方运行时，对轨道压力的大小和方向.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(向东运行时，$p_x=2mv\sin\lambda$(向南)，$p_y=0$，$p_z=-mg+2m\omega v\cos\lambda$(向下)

3.18 一小帆船停在赤道无风带，为使船开走船长决定采取应急措施，把200kg的锚升到20m高的桅顶，船的其余部分的质量是1000kg(地球的半径是6400×10^3m)

(1)船将开始运动，为什么?

(2)船运动的方向如何?

(3)船的速度多大?

(4)使船运动的能量从何而来?

((3)船的末速度$v=4.9\times10^{-4}$m/s)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第四章　拉格朗日力学

§4.1　引　　言

在牛顿提出他的三个力学基本定律后，力学获得了极大的发展和广泛的应用．它促进了数学的发展，反过来数学又为力学提供了有力的工具，使人们能用系统的分析方法来处理力学问题，并提出新的力学原理．

在拉格朗日分析力学诞生以前，全部力学问题的求解是以牛顿定律为基础的．牛顿力学着重分析系统与系统外物体之间的相互作用，系统内各物体之间的相互作用及其运动，力与质量等是基本的物理量，其中力是向量．

按照牛顿力学，要完全地决定系统在时间和空间中的运动，必须具备动力学条件(以作用于系统的力表示)，初始条件(以位置，速度的初始值或系统的某些守恒的物理量表示)和约束条件(以表示约束的方程式或不等式表示)，这约束条件的存在常常使系统运动的求解变得复杂起来，因为大量实际运动是受约束的运动，尽管我们可以把约束的作用归结为力的作用，在系统的运动解出之前，这些力常常是未知的．虽然这些力作用的某些效果可能是已知的，例如使物体约束在特定的空间曲线上运动，但由于未知的约束力和未知的运动同时出现在牛顿方程式中，使需求解的微分方程数目增加，求解更加困难，向量分析方法在这里也显得很费力．

此外，牛顿力学还有个明显的缺点，即在各种坐标系中，运动微分方程式有不同的形式，如同一系统在三维笛卡儿坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中，运动微分方程式是完全不同

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的，而且同一问题用不同坐标系处理，其复杂程度也不相同.

人们自然要问，能不能找到一种处理复杂问题的统一的方式，一种变通的方法，可以不必明显地解出系统各部分间的约束力，可以避开繁复的向量运算，不用把力向量函数作为基本量，而只对标量函数进行运算，就能建立一组描述系统运动的动力学方程式？能不能使动力学方程式对任意的曲线坐标甚至广义坐标都有共同的形式，使统一的动力学方程表达出各种坐标系描述系统行为的共性，以适用于处理各种力学问题？分析力学的诞生，在相当大的程度上解决了上述问题.

1788 年拉格朗日(Lagrange)发表了分析力学的奠基性著作《分析力学》，它以新的方法——数学分析方法统一处理了动力学、静力学、流体动力学、流体静力学而无须借助几何方法，它在处理复杂的非自由(即含约束)体系问题和过渡到非力学领域方面有明显的优越性.

通常所说的分析力学主要指两方面的内容，其一是把运动微分方程表达成统一的形式，称为拉格朗日方程或哈密顿正则方程，把所处理的力学系统，用一个特征力学量来代表. 称为拉格朗日函数 L 和哈密顿函数 H，将 L 或 H 代入各自的动力学方程——拉氏方程和正则方程以求解系统的运动. 分析力学的另一方面内容，是试图提出新的力学原理，用以代替牛顿运动定律作为建立整个力学理论的出发点. 事实上，对于这些原理的探寻，远在分析力学诞生之前就已经在进行了. 人们早就注意到，自然界发生的物理过程中，总有某些重要的物理量取极值，通常是极小值. 反映这一最小化倾向的，有公元前二世纪发现的光最短路程原理，它于 1657 年被费马(Fermat)修正为最短时间原理，即光线从介质中一点传播到另一点，总取需时间最短的路径. 1747 年，莫培督(Maupertuis)在神学的基础上提出了最小作用量原理，即动力学的运动总是以最小作用量进行的. 所谓“作用量是某种具有长度×动量或时间×能量量

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

纲的量. 1834—1835 年，哈密顿(Hamilton)提出了哈密顿原理，指出系统的动力学运动，总是使拉格朗日函数 L 的时间积分取极值(通常是极小值). 上述各个原理以及其它原理，尽管并没有增加新的物理内容，在经典力学范围内都和牛顿力学等价，然而由于它们的表达形式比较普遍，更便于向非力学领域推广，如哈密顿原理提供了向许多物理理论推广的框架，不仅成了经典力学理论结构新表述的起点，为它的进一步发展奠定了基础，并成为大部分经典物理学的基础，而且为近代统计力学和量子力学的建立提供了必要的语言和出发点.

§4.2 约束·自由度·广义坐标

一、约束及其分类

在一力学系统中，常存在一些限制质点自由运动的条件，称为约束. 对质点或质点系运动的限制，是指对质点的空间位置及其变化(或运动速度)的限制，这实际上相当于已知系统的一部分运动状况. 例如，质点被约束在一空间曲线上运动，本来对自由质点而言需要三个坐标来描述它的运动，由于加上了空间曲线的约束，只需一个坐标就足以描述它的运动了. 如果质点被约束在平面或曲面上运动，描述它的运动的坐标数也减少了，只要 2 个坐标即够.

为维持约束而加于系统的力，称为约束力，或约束反力，约束力可以是物体间相互接触产生的力(如桌面对物体的支撑力)，也可以是物体内各部分间的内力(如刚体内各质点间的作用力). 约束力在动力学问题未解出之前一般是未知力，特殊情况下，可以预先知道它的大小或方向，而约束是事先知道的. 由于约束力是未知力，约束的存在并没有因事先知道了部分运动情况而使求解变得简单，常常反而使问题变得更复杂

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

了. 约束力的大小、方向与约束有关，还与外力及运动状态有关，可按约束运动的需要自动地调节，它是一种因运动、外力而变化的被动力，和常见的引力、库仑静电力、弹性力等所谓主动力是不同性质的力. 摩擦力中，静摩擦力属约束力，滑动摩擦力是正压力(理想约束力)的函数，尽管也有被动性质，可归入非理想约束力，但因力律已知常视为主动力.

约束的数学表现，称为约束条件. 约束条件通常可以表为力学系统中质点坐标、速度和时间满足的方程式，称为约束方程. 约束方程与加速度 $\ddot{r}$ 无关，只与 r, $\dot{r}$ 及 t 有关，这是因为加速度与力直接相关，如约束与 $\ddot{r}$ 有关，约束与作用力可能要求不同的加速度，客观上无法实现. 这一点也是与实验事实一致的，实验上并未发现约束力与位置向量二次以上时间导数有关的事实，甚至约束与速度相关的情形也是少见的.

约束条件有时也可以表示成不等式.

约束按其不同方面的性质可作如下分类.

(一)完整约束和非完整约束

完整约束又称几何约束，它限制质点在空间的位置，只是质点位置向量(有时也包括时间 t)的函数，其约束方程是

$$f_a(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0 \qquad (a = 1, \cdots, m) \qquad (4.1)$$

或

$$f_a(r_1, r_2, \cdots, r_n; t) = 0 \qquad (a = 1, \cdots, m) \qquad (4.2)$$

例如，质点被约束在一固定球面上运动，约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (R \text{ 是球面的半径}) \qquad (4.3)$$

又如刚体内各质点受有强烈的约束而保持任何两质点间距离不变，约束方程是：

$$(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0 \quad (c_{ij} \text{ 是 } i, j \text{ 两质点间的距离}) \quad (4.4)$$

这些都是完整约束.

不仅对质点位置，也对质点速度所加的限制，称为非完整约束，也称运动约束、微分约束或速度约束，它的约束方程是

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n; \dot{r}_1, \dot{r}_2, \cdots, \dot{r}_n; t) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, m) \tag{4.5}$$

某些约束，虽然约束方程中显含速度，但能经过积分化成几何约束方程，这种可积分成几何约束的微分约束，仍称为完整约束.

例如，圆盘在竖直平面内沿水平直线作纯滚动，圆盘质心速度$(\dot{x}, \dot{y})$与转动角速度满足约束方程

$$\dot{y} = 0, \dot{x} - R\dot{\varphi} = 0 \tag{4.6}$$

分别积分得

$$y = R, x - R\varphi = \text{常量} \tag{4.7}$$

微分约束方程化成了几何约束方程.

还有许多微分约束并不能化成完整约束，它们属非完整约束，本课中我们只限于讨论完整约束问题.

在宏观条件下，许多约束是非完整的，处理起来比较复杂，因为没有一般的方法，须个别处理. 但对物理问题而言，尤其是原子、亚原子尺度上的问题，约束常常具有人为的性质，作为真实物理状态的近似或理想化，而且这种情况很少出现，即使有，也总认为是完整的. 而对于完整约束，我们有一套成熟的方法去处理它们.

一个系统，如果所受的约束全部是完整约束，称为完整系统，如果所受的约束至少有一个是非完整约束，就是非完整系统.

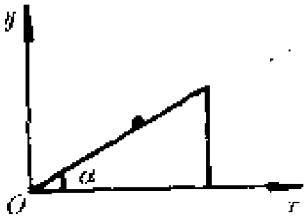


图 4.1

(二)稳定约束和非稳定约束

约束方程不显含时间的约束，是稳定约束，约束方程为

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, m) \tag{4.8}$$

例如，一质点约束在固定斜面上，约束方程为

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x \tag{4.9}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这一约束是稳定约束.

约束方程显含时间的约束，是不稳定约束，约束方程为

$$f_i(r_1, r_2, \cdots, r_n; t) = 0 \qquad (4.10)$$

例如，一小小飞虫粘在一个不断吹大的肥皂泡上，设肥皂泡的半径与时间成正比地增大，则约束方程是

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c) - (vt)^2 = 0 \quad (4.11)$$

(三)可解约束和不可解约束

只从一侧限制系统运动的约束，即单向约束，称为可解约束. 约束方程用不等式表示，例如球面摆，约束条件为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2 \qquad (4.12)$$

限制系统任何一侧运动的约束，即双向约束，称为不可解约束. 质点约束在固定球面上的运动，就是不可解约束的例子，不可解约束的约束条件用等式表示.

(四)理想约束和非理想约束

将在§3.4中讨论.

二、自由度

一个无约束的 n 质点系统，需 n 个位置向量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 或 $3n$ 个独立坐标描述，即有 $3n$ 个自由度，记为 $f=3n$.

如系统受有 m 个完整约束，则需 $3n-m$ 个独立坐标描述运动，自由度数 $f=3n-m$.

如系统除受 m 个完整约束外，还受 r 个非完整约束，则因为非完整约束方程 $f(r, \dot{r}, t)$ 不能直接积分给出坐标间的关系，独立坐标数目并未减少，仍为 $3n-m$，但自由度数为 $3n-m-r$，即自由度数小于独立坐标数目.

对于只受有完整约束的系统，唯一地确定其位形(位置与形状)所必须给出的独立量的数目，称为这个系统的自由度.

对于非完整系统，自由度等于系统的总坐标数 $3n$ 减去所有完整与非完整的约束方程数.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

三、广义坐标

任何一组明确表明体系位形的参数，在一般意义上都可以作为一种坐标系，称为广义坐标，由于存在约束，唯一确定系统位形的广义坐标数，只需 $f=3n-m$ 个.，对于完整系统，就是自由度数. 对于非完整系统，由于非完整约束只限制各位形下的速度而不限制位形，故不能减少广义坐标的数目，广义坐标数仍为 $3n-m$，并不等于自由度数 $f=3n-m-r$.

对于一个系统，广义坐标数已由质点数及约束数确定，但选什么量作广义坐标，却是任意的，并无硬性的规则。但选取广义坐标也应有一定的根据，主要是：

(1)广义坐标必须是独立变更的。例如描述质点的曲面运动，只需两个广义坐标，如取三个，就不是独立的了.

(2)广义坐标必须能唯一地确定系统的位形。例如，一质点约束在抛物面上运动，$f=2$，如我们选取柱面坐标为广义坐标，有三种可供选择的方法：取 ρ，θ，取 ρ，z 或取 z，θ，显然，我们可选第一种或第三种；但不能选第二种，因为由约束方程

$$z=k\rho^2 \tag{4,13}$$

z 和 ρ 并不独立变更，而且 ρ 和 z 并不能唯一地决定系统的位形.

(3)广义坐标的选取应在描述运动时，尽可能简洁明了，而且方程足够简单，以使问题得到简化.

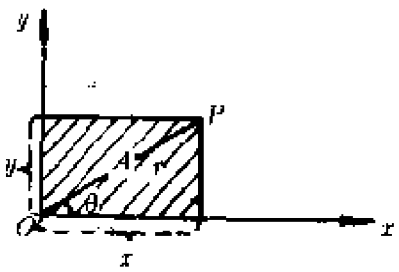


图 4.2

按照上述要求，选取广义坐标不一定选笛卡儿坐标，也不一定选取其他曲线坐标，只需取 f 个独立参量，它们能唯一确定系统的位形就行. 例如，要描述点 P 在平面 O-xy 上的位置，固然可以选 x，y 或 r，θ 为广义坐标，但选 x 和阴影下的面积 A 作广义坐标也可以决

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

定 P 的位置，这里 A 是面积，并不具有长度的量纲. 一般说角度、面积、体积、经纬度、能量、电极化强度 P，磁化强度 M 等都可以作广义坐标，其量纲也可以是长度量纲，面积、体积量纲，能量量纲或无量纲等. 广义坐标不一定是向量投影，不一定能三三一组组成向量.

对于一给定系统，我们选定了一组广义坐标 q_j，$j=1, 2, \cdots, f$，则位置向量 $r_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的笛卡儿分量 x_i，y_i 和 z_i 可以看作 q_i 和 t 的函数，即

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t); t) \\ &= r_i(q_1, q_2, \cdots q_f; t) \quad (i = 1, 2, , \cdots, n) \end{aligned} \tag{4.14}$$

或

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_f; t) \quad (i = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{4.15}$$

这就是 f 个广义坐标到 $3n$ 个笛卡儿坐标的变换方程.

由变换方程可见，系统某一广义坐标的变化，可能引起系统中所有质点位置变化，反之，一个质点位置变化也可能引起所有广义坐标的变化，广义坐标属于整个体系，不一定属于体系中个别质点.

如上所述，n 个质点组成的系统，受到 m 个完整约束的限制，系统的位形可以由 $f=3n-m$ 个广义坐标完全确定. 我们可以把 f 个自由度的体系的运动，看成是抽象的 f 维空间中一个代表点(称为位形点)的运动，空间中的每一维度对应于 q_i 中的一个，这一个 f 维空间，称作“位形空间”.

系统位形随时间变化的过程，可以用位形空间的一条曲线来代表，曲线上每一点确定了系统某一瞬时的位形，位形点的坐标就是 $q_1, q_2, \cdots, q_f$，由于达到某一瞬时的位形(即位形空间中某一点)的途径很多，通过位形空间中一点可以有许多条曲线，每一条曲线对应于确定的初始条件，位形空间的一个点仅仅给出系统中每个质点的位置，并未提供各质点运动的情况.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

位形点和位形空间等还可以表示成矩阵形式. 位形点的坐标，可用一列矩阵表示：

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{3n} \end{Bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_{3n}]^T$$

体系位形的变化规律即运动方程 $x_i = x_i(t)(i=1, 2, \cdots, 3n)$ 可以表为

$$X = X(t)$$

如系统受有约束，有 m 个约束方程

$$f_i(x_1, \cdots, x_{3n}; t) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

也可写成

$$f(x, t) = 0$$

写成矩阵形式即

$$[f_1, \cdots, f_m]^T = 0$$

当用广义坐标 $(q_1, \cdots, q_f)$ 描述系统的位形时，质点系统的位形和运动方程可由 f 行的列矩阵 $q(t)$ 表示

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \cdots \\ q_f(t) \end{Bmatrix} = [q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t)]^T$$

用笛卡儿坐标表示的位形空间(称 X 空间)和用广义坐标表示的位形空间(q 空间)，有一个重要的差别：在 X 空间中位形点的运动是受约束的，在 q 空间中则是自由的，两空间的对应位形点的坐标变换可以表为

$$X = X(q, t)$$

因为每一个含时间 t 的约束方程代表一个活动的超曲面，位形点处在这 m 个超曲面的交集上. 因高维空间无法画出，以 $n=1$，$m=1$ 为例，作高维位形空间示意图如图(4.3)所示。

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

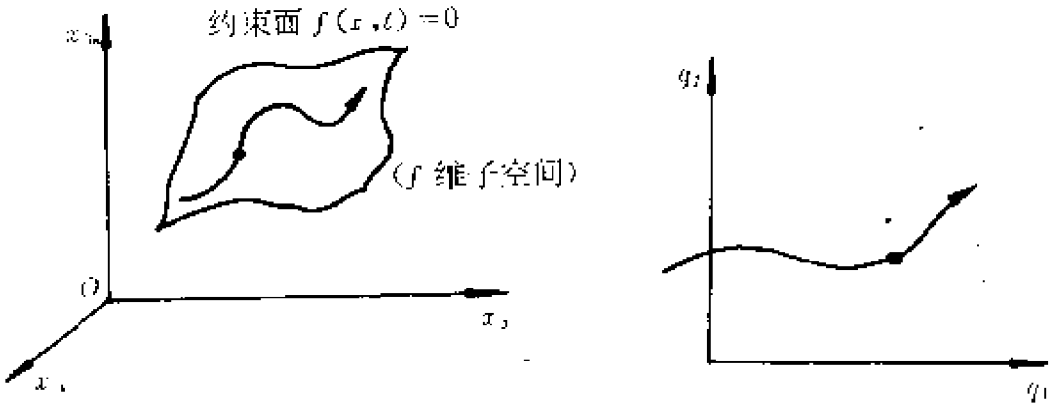


图 4.3

(a) $3n$ 维 x 空间　　(b) f 维 q 空间

§4.3 虚位移·可能位移·实位移

与牛顿力学不同，分析力学为了充分显示力学系统各部分之间的关联、体系与外界的关联及作用在系统上的各种力所起的不同的作用，不仅研究那些实际实现的运动，而且考虑约束允许的一切可能的运动，并依据一定的力学原理，从中“挑出”实际实现的运动，这里所谓“可能”，完全是指约束允许而言，不涉及运动规律，因为从动力学观点来看，只有按照运动定律实际实现的运动才是可能的.

举例来说，一质点被限制在曲面上运动. 质点可能作的无限小位移有无穷多个，如图 4.4(a)所示，它们都是沿质点所在处曲面的切线方向.

然而在给定作用力和初始条件后，依据运动定律，质点实际作的位移则只有一个，是这多种可能性中的一个。这真实的位移称作实位移. 而那些符合约束条件的多种可能的位移称作可能位移，这里可能位移是在未确定作用力和初始条件时对发生运动的可能范围的一种预测，应理解成是经历时间的. 实位移和可能位移都记作 $d\boldsymbol{r}$. 其实如果只考虑约束条件的限制，人

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

们对质点出现在曲面上的位置还可作出如下判断：同一时刻，质点既可以出现在曲面上 A 点，也可以出现在曲面上 A_1 点（见图 4.4a），只要这二位置都满足约束条件. 这样的两点的位置之差 δr_1，如果也看作位移的话，就是不经历时间的位移，亦即根本不是真实的位移，只是满足约束条件的一个几何元有向线段. 其它如 $\delta r_2, \delta r_3, \cdots, \delta r_n$ 也是虚位移. 注意到与以时间 t 为自变量引起的位移 dr 不同，虚位移用 δr 表示. δr 在数学上称作 r 的变分或变更. 变分运算与微分运算一样，只是要把 r 当作独立变量，而不再把它看成是时间 t 的函数，即恒有 $\delta t=0$（等时变分）.

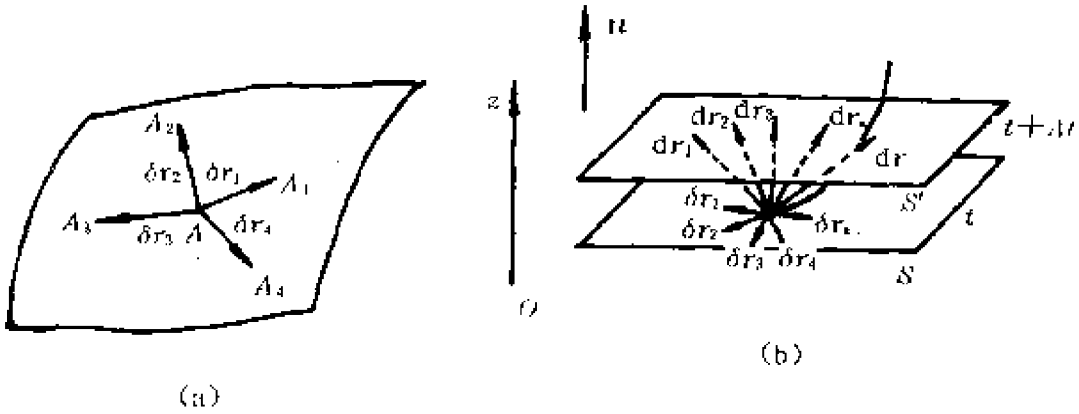


图 4.4

虚位移与实位移不同，与可能位移也不同，虽然都要求符合约束条件，并都有多种可能，但仍有经历和不经历时间的区别——实位移与可能位移是要经历时间的，这在非稳定约束下会看得更明显.

设质点约束在以匀速 u 上升的平面上（如图 4.4(b)所示），约束方程为 $z-ut=0$，在 $t\to t+dt$ 时间内，有许多可能位移 dr_i $(i=1, \cdots, \infty)$，但满足初始条件与动力学方程的只有一个，即实位移 dr，它是可能位移中的一个。由约束方程得

$$dz - u dt = 0 \qquad (4.16)$$

凡满足此条件的位移，即在 $t+dt$ 时刻位移向量端点在 S' 平面

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上的所有位移 dr_1，dr_2，…，都是可能位移，实位移 dr 是其中之一.

将约束方程作变分，则有：

$$\delta z - u\delta t = \delta z = 0 \tag{4.17}$$

即虚位移应保持 z 坐标增量为零，亦即应保持在 t 时刻对应的 S 平面内，图中 δr_1、δr_2，…都是虚位移，这是自然的，因为虚位移与时间进程无关，$\delta t=0$.

由此可见，在非稳定约束下，虚位移与可能位移并不相同，实位移只是可能位移中的一个，而不会与某个虚位移重合。实际上，即使在稳定约束下，虚位移与可能位移虽都座落在同一切平面内，它们也有本质上的差别。可以认为，虚位移是在任意时刻 t 将约束"冻结"后，与可能位移重合的位移. 现在，我们给虚位移一个简洁的表述：

力学系统符合约束条件的、无限小的、即时的位置变更，叫做虚位移. 虚位移是一个与运动无关的，仅由质点所在的位置及加于其上的约束决定的几何概念，是分析力学理论赖以建立的重要概念之一.

现在，讨论在一般情形下，约束对实位移和虚位移的限制.

设 n 个质点的系统受有 m 个完整约束

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.18}$$

如 $\delta r_1, \delta r_2, \cdots, \delta r_n$ 是一组满足约束条件的虚位移，则

$$f_\alpha(r_1 + \delta r_1, \delta r_2 + \delta r_2, \cdots, r_n + \delta r_n, t) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots, m) \tag{4.19}$$

将此式作泰勒展开，得

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n, t) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right) + \cdots = 0 \tag{4.20}$$

式中略去了二阶以上小量，利用约束方程得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,m)$$

(4.21)

即

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_\alpha\cdot\delta r_i=0\qquad(\alpha=1,2,\cdots,m)\qquad(4.22)$$

满足此式的一组虚位移，就是与约束相符的虚位移，这是约束对虚位移的限制条件.

设一组实位移 $dr_1, dr_2, \cdots, dr_n$ 满足约束条件

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n, t)=0\qquad(4.23)$$

则在 $t+dt$ 时刻，有

$$f_\alpha(r_1+dr_1, r_2+dr_2, \cdots, r_n+dr_n, t+dt)=0$$

(4.24)

将此式作泰勒展开，略去二阶以上项，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_i f_\alpha\cdot dr_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt\right)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,m)$$

(4.25)

或

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_i f_\alpha\cdot v_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,m)\qquad(4.26)$$

这是约束对实位移的限制条件.

§4.4 理想约束·虚功原理

在牛顿力学中，讨论质点系的基本定理与守恒定律时，我们特别强调了内力与外力的区别，内力、外力起着不同的作用。在分析力学中，我们则特别注重主动力与约束力的区别，它们在静力学与动力学方程中，也起着很不相同的作用.

作用于质点上的力，在任意虚位移 δr 上作的功，称为虚

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

功；在任意实位移上作的功，称为实功．如果作用在力学系统上的诸约束反作用力 $R_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 在任意虚位移 δr_i 上所作的虚功之和为零，即

$$\delta W_e = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \delta r_i = 0 \qquad (4.27)$$

则这种约束称为理想约束．

下面是一些常见的理想约束的例子．

(一)质点间的刚性连结

设两质点以轻刚性杆连结，见图 4.5 约束力的虚功之和为

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \sum R_i \cdot \delta r_i \\ &= R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 \\ &= R_1 \cdot (\delta r_1 - \delta r_2) \\ &= R_1 \cdot \delta r_{21} \quad (r_{21} = r_1 - r_2) \\ &= 0 \qquad (\text{因 } \delta r_{21} \perp R_1)\end{aligned}$$

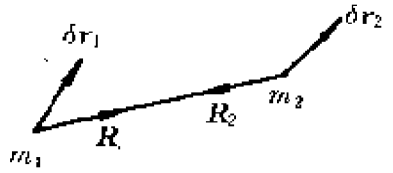


图 4.5

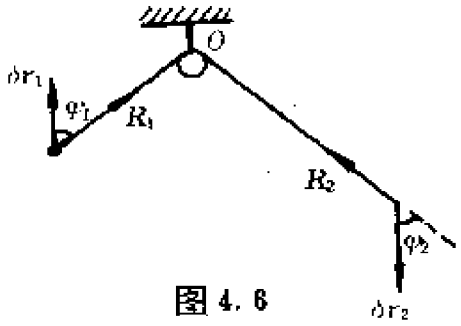


图 4.6

(二)不可伸长的柔韧的绳

两质点以不可伸长的轻绳连结，见图 4.6．绳通过光滑定滑轮，总保持拉直，则约束力

$$R_1 = -R_1 e_1, \quad R_2 = -R_2 e_2$$

(e_1, e_2 是 m_1、m_2 的单位位置向量)，$R_1 = R_2$，故有 $\delta W_e = -R_1(e_1 \cdot \delta r_1 + e_2 \cdot \delta r_2)$，因

$$r_1 + r_2 = l \qquad e_1 \cdot r_1 + e_2 \cdot r_2 = l$$

作变分得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$e_1 \cdot \delta r_1 + e_2 \cdot \delta r_2 = 0$$

故 $\delta W_e = 0$。

（三）光滑曲面·曲线

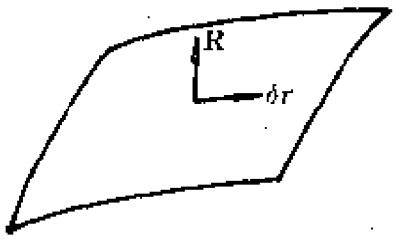


图 4.7

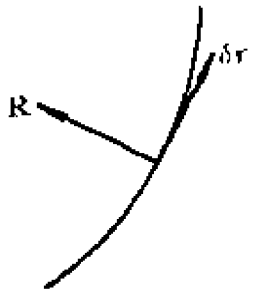


图 4.8

(1)设曲面或曲线是固定的，(见图 4.7，4.8)，因约束面或线是光滑的，不会产生切向约束力，约束力只能沿法向，永远与虚位移垂直，

$$\delta W_e = R \cdot \delta r = 0$$

(2)设曲面或曲线是运动的，在瞬间冻结的曲面或曲线上，因约束是光滑的，约束力沿法向，又因虚位移只能在切向上，仍有

$$\delta W_e = R \cdot \delta r = 0$$

（四）光滑点铰

两个刚体以光滑点铰约束在一起，无约束力矩，只有约束力(如图 4.9)

$$R_1 = -R_2$$

$$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r$$

$$\delta W_e = R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 = (R_1 + R_2) \cdot \delta r = 0$$

（五）纯滚动

两刚体以完全粗糙表面互相接触并运动，约束力即两刚体相互作用力(如图 4.10)。

$$R_1 = -R_2$$

因接触面粗糙，没有滑动，相对位移为零，$\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r$，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

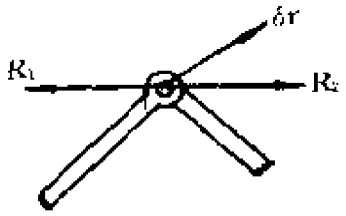


图 4.9

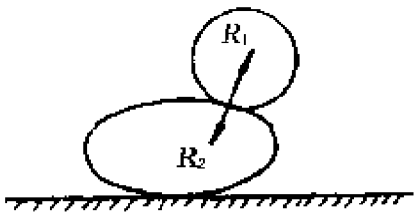


图 4.10

$$\delta W_e = R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 = (R_1 + R_2) \cdot \delta r = 0$$

实际问题中，相当一类约束是理想约束.

下面，我们讨论系统的平衡问题.

一般说，受平衡力系作用的系统处在平衡状态。这里所谓平衡是指静平衡，即：如果系统相对于惯性系原来是静止的，在主动力系作用下，仍然保持静止，称为平衡.

1717 年伯努利给出了受有理想约束的力学系统平衡的充分必要条件，即虚功原理：

设一 n 个质点组成的力学系统，受有 m 个不可解理想、稳定、完整约束，则体系处于平衡状态的充分必要条件是

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0 \qquad (4.28)$$

即诸主动力在任意虚位移上所作的元功之和等于零.

证明如下.

(1)必要性：

设作用在系统中第 i 个质点的主动力为 F_i，约束力为 R_i，平衡时

$$F_i + R_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

以 δr_i 点乘等式左右，得

$$F_i \cdot \delta r_i + R_i \cdot \delta r_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^{n} \cdot R_i \delta r_i = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

因约束是理想的，

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

必要性得证.

(2)充分性：

设 $\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 对约束允许的任何虚位移成立。又设在主动力系作用下，系统原来的静止状态被破坏，则至少有一个质点 i，对于它

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \neq 0$$

则该点的加速度

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i}{m_i}$$

因运动是从静止开始的，故其位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_i$ 方向相同，因此

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

利用理想约束条件，得

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

与 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 的前提矛盾，所以系统内每个质点必须保持静止，证毕.

虚功原理是分析力学形式的静力学原理，它还可以用广义坐标、广义力的形式表达出来.

由变换方程

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, t)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\delta r_i = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (4.29)$$

式中 $\delta q_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$是广义坐标等时变分，为广义虚位移. 将 δr_i 表达式代入虚功原理式，得

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma \qquad (4.30)$$

定义

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma} \qquad (4.31)$$

称为广义坐标 q_σ 对应的广义力分量，则(4.28)式化为

$$\delta W = \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma = 0 \qquad (4.32)$$

因对完整系统而言，所有 $\delta q_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$都是独立变更，(4.32)式成立的充分必要条件是每个系数 Q_σ 都为零，所以系统的平衡方程可表为

$$Q_\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, 5) \qquad (4.33)$$

即：受有完整、理想、稳定约束的力学系统，其平衡的充分必要条件是作用于系统的所有广义力分量为零.

这就是在广义坐标下，用广义力表述的虚功原理，即广义的平衡方程.

由(4.30)式可以看出，无论广义坐标有何量纲，广义力 Q_σ 与广义虚位移 δq_σ 之积必具有功的量纲，因而，如果 q_σ 是线量，Q_σ 必有力的量纲；如果 q_σ 是角量，Q_σ 必有力矩的量纲. 由广义力的定义可知，广义力一般不属于某一质点，也不一定对应于某一主动力分量，广义力属于整个系统，它可能与所有主动力及所有质点有关.

如果作用于系统的所有主动力都是保守力，即 $F_i = -$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\nabla_i V$，则主动力虚功

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = -\sum_i \nabla_i V \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

$$= -\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i \right) = -\delta V \quad (4.34)$$

此时，广义力

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \quad (4.35)$$

另由(4.32)，并注意 $\delta W = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial W}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma$，有

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial W}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma$$

比较系数有

$$Q_\sigma = \frac{\partial W}{\partial q_\sigma} \quad (4.36)$$

总之，对于一般的系统(包括保守的或非保守的系统)，广义力 Q_σ 可按定义(4.31)求出，也可由虚功求出，即由(4.36)求出。对于保守系统，还可按(4.35)求出.

广义力可以理解为：如果相应的广义坐标作单位值的变更，其余广义坐标不变，则广义力的数值等于主动力作的虚功.

§4.5 平衡的稳定性

平衡稳定性的定性概念，很容易从直观得到。如图(4.11)所示，在一竖直平面曲线上，质点在 A，B，C，D 各点处，都可以处在静平衡状态，但在各平衡位置，平衡的稳定性却很不相同。在 A，C 处不稳定，在 B，D 处稳定，但 D 仅在小的扰动下才是稳定的。在稳定平衡位置如 B 点，当质点被稍稍推离这一位置时，它将在重力作用下回到平衡位置. 在非稳定平衡位置如 A 点，质点稍稍离开平衡位置后，偏离将越来越大，不再回

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

到平衡位置，即平衡状态被破坏.

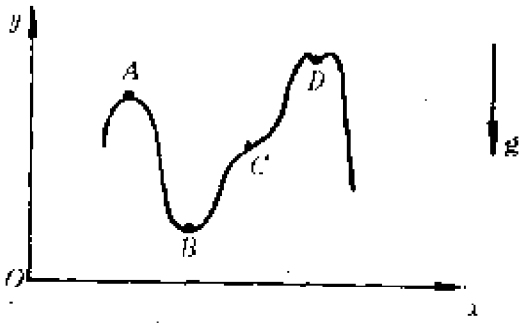


图 4.11

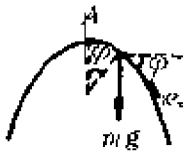


图 4.12

上述由直观得到的概念，不难在数学上加以证明.

如图 4.12 所示，设质点与曲线接触完全光滑. 在 A 点附近，质点运动的切向方程为

$$mR\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi$$

φ 为曲率半径 R 与铅直方向的夹角. 当 $\varphi \ll 1$，即质点偏离 A 很小时，方程为

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{R}\varphi = 0$$

方程的解是

$$\varphi = Ae^{\sqrt{\frac{g}{R}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{R}}t} \qquad (4.37)$$

$t \to \infty$ 时，$\varphi \to \infty$，平衡将被破坏，A 是不稳定的平衡位置.

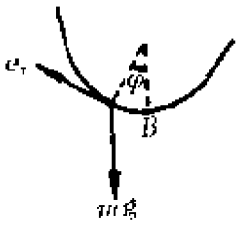


图 4.13

如图 4.15 所示，在 B 点附近，切向方程为

$$mR\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

$$\varphi \ll 1$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0$$

$$\varphi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \qquad (4.38)$$

对任何时刻 t，φ 为有界，质点将在平衡位置附近振动，B

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

是稳定的平衡位置.

下面就一维情形，讨论运动微分方程平衡解的稳定性.

质点作一维运动时牛顿方程可以写为

$$\ddot{x} = f(x) \tag{4.39}$$

$f(x)$是单位质量所受的力. 如x_0是平衡解，x_0代表平衡位置，则要求

$$\ddot{x}\big|_{x=x_0} = 0$$

$$f(x_0) = 0$$

考虑一偏离平衡位置x_0的小位移ξ，

$$x = x_0 + \xi$$

则

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} = f(x_0 + \xi)$$

$$= f(x_0) + \xi f'(x_0) + \frac{1}{2}\xi^2 f''(x_0) + \cdots \tag{4.40}$$

式中$f(x_0)=0$，略去ξ^2以上项，得

$$\ddot{\xi} - f'(x_0)\xi = 0$$

当$f'(x_0)<0$时，$f'(x_0)=-\omega^2$　　(ω为正常数)

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0 \tag{4.42}$$

其解为

$$\xi = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad (A, B \text{ 为任意常数})$$

$$|\xi| \leqslant |A| + |B|$$

为有界，平衡位置是稳定的.

当$f'(x_0)>0$时，$f'(x_0)=\omega^2$

$$\xi = Ce^{\omega t} + De^{-\omega t} \tag{4.44}$$

当$t\to\infty$时，$\xi\to\infty$. 无界，平衡位置是不稳定的。我们定义：

微分方程$\ddot{x}=f(x)$的平衡位置$x=x_0$是稳定的，当$f'(x_0)<0$. 是不稳定的，当$f'(x_0)\geqslant 0$.

从物理上看，稳定性与势能有直接的关系，由在直线上运动的单位质量质点的运动微分方程

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\ddot{x} = f(x)$$

$$V(x) = -\int_{x_0} f(x)\mathrm{d}x \qquad (x_0 \text{ 是势能零点}) \tag{4.45}$$

$$V'(x) = -f(x) \tag{4.46}$$

$$V''(x) = -f'(x) \tag{4.47}$$

在平衡位置 $x=x_0$，$f(x_0)=0$，$V'(x_0)=0$ 表示势能取极值.

$f'(x_0)<0$，$V''(x_0)>0$，平衡位置稳定，势能取极小值.

$f'(x_0)>0$，$V''(x_0)<0$，平衡位置不稳定，势能取极大值.

这表明，平衡的稳定性不仅与平衡位置有关，而且与邻域的性质有关.

设在平衡位置 x_0 附近，势能函数连续可微，其邻近点 $x=x_0+\xi$ 的势能可以展开为

$$V(x)=V(x_0)+\xi V'(x_0)+\frac{1}{2!}\xi^2V''(x_0)+\frac{1}{3!}\xi^3V'''(x_0)+\frac{1}{4!}\xi^4V^{[4]}(x_0)+\cdots \tag{4.48}$$

如在 x_0 处给质点一微小扰动使之偏离 x_0 一小量 ξ，则由机械能守恒可得：

$$T+V(x)=T_0+V(x_0)$$

$$T-T_0=V(x_0)-V(x)$$

取 $V(x_0)=0$ 且平衡位置处 $V'(x_0)=0$，略去 ξ^3 以上项，则

$$T-T_0=-\frac{1}{2!}\xi^2V''(x_0)<0 \tag{4.50}$$

当 $V''(x_0)>0$，即在 $x=x_0$ 势能取极小值时，稍有偏离质点动能减小，速率降低，平衡是稳定的. 若

$$V''(x_0)<0,\ T-T_0>0 \tag{4.51}$$

则质点动能增大，速度增大，平衡不稳定.

同理当 $V''(x_0)=0$ 时

$$V(x)=\frac{1}{3!}\xi^3V'''(x_0),\ \left.\begin{matrix}V'''(x_0)>0\\ V'''(x_0)<0\end{matrix}\right\}\text{均不稳定}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

当 $V''(x_0)=V'''(x_0)=0$ 时

$$V(x)=\frac{1}{4!}\xi^{[4]}V^{[4]}(x_0),\quad \begin{matrix}V^{[4]}(x_0)<0 \text{ 不稳定}\\ V^{[4]}(x_0)>0 \text{ 稳定}\end{matrix}$$

当 $V^{n-1}(x_0)$ 及较低次项均为零时，

$$\left.\begin{aligned}&V^{[n]}(x_0)\neq 0 \quad ([n]\text{表示微商阶数})\\ &n\text{ 为奇数时，}\begin{matrix}V^{[n]}(x_0)>0\\ V^{[n]}(x_0)<0\end{matrix}\Big\}\text{均不稳定}\\ &n\text{ 为偶数时，}\begin{matrix}V^{[n]}(x_0)<0 \text{ 不稳定}\\ V^{[n]}(x_0)>0 \text{ 稳定}\end{matrix}\end{aligned}\right\}\qquad (4.52)$$

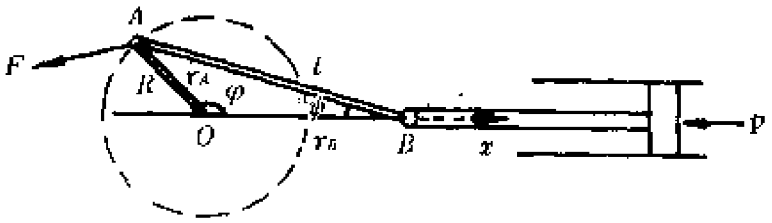


图 4.14

【例 4.1】 一曲柄连杆机构，其 A 端上受一主动力 F，活塞受力 $p=pe_x$，问使体系处于平衡，力 F 与力 p 应满足什么样的关系？

解 由虚功原理，体系平衡时，应满足

$$\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\delta r_i=0$$

$$F\cdot\delta r_A+p\cdot\delta r_B=0 \qquad (1)$$

$$\delta r_A=R\delta\varphi\, e_\varphi,\quad \delta r_B=-\delta x\, e_x$$

$$F_\varphi R\delta\varphi-p\delta x=0 \qquad (2)$$

$$x=R\cos\varphi+l\cos\psi=R\cos\varphi+l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\varphi}$$

$$\delta x=-R\sin\varphi\left[1+\frac{R\cos\varphi}{l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\right]\delta\varphi$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

代入(2)式

$$\frac{F_\varphi}{p}=\frac{\delta x}{R\delta\varphi}=-\sin\varphi\left[1+\frac{R\cos\varphi}{l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\right]$$

【例4.2】一半球壳内面及边缘皆光滑，固定放置，且令过球心之截面水平. 一长$2l$，质量m的均质细棒斜靠于球壳边缘上，其质心C在球壳内. 试求杆的平衡位置并讨论其稳定性.

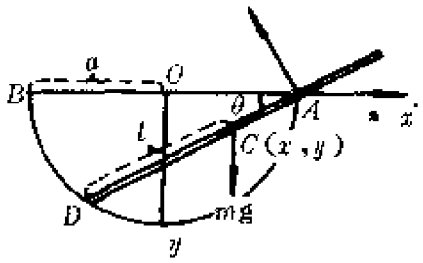


图4.15

解　自由度$f=1$，选角θ为广义坐标，质心C的位置以x，y表示，则

$$y=(2a\cos\theta-l)\sin\theta$$

势能

$$V=-mg(2a\cos\theta-l)\sin\theta$$

平衡位置要求$\frac{dV}{d\theta}=0$。

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\theta}&=-mg[(-2a\sin\theta)\sin\theta+2a\cos^2\theta-l\cos\theta]\\&=-mg[2a(2\cos^2\theta-1)-l\cos\theta]\\&=-mg[4a\cos^2\theta-l\cos\theta-2a]\\&=0\end{aligned}$$

故有

$$4a\cos^2\theta-l\cos\theta-2a=0$$

$$\cos\theta=\frac{1}{8a}[l+\sqrt{l^2+32a^2}]\qquad(1)$$

$$\theta_0=\cos^{-1}\left\{\frac{1}{8a}[l+\sqrt{l^2+32a^2}]\right\}$$

由题设

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$l \geqslant 2a\cos\theta - l \geqslant 0 \tag{2}$$

由(1)式知

$$\frac{1}{8a}\left[l + \sqrt{l^2 + 32a^2}\right] \leqslant 1 \tag{3}$$

(2)、(3)联立得

$$\sqrt{\frac{2}{3}}a \leqslant l \leqslant 2a$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\sin\theta\left[8a\cos\theta - l\right] = mg\sin\theta\sqrt{l^2 + 32a^2} > 0$$

平衡稳定.

【例4.3】 铅直平面内有一光滑圆圈，两小环质量分别为m_1、m_2，套在圈上并以轻杆连结，杆长$2l(l \leqslant a)$。求体系的平衡位置，并讨论其稳定性.

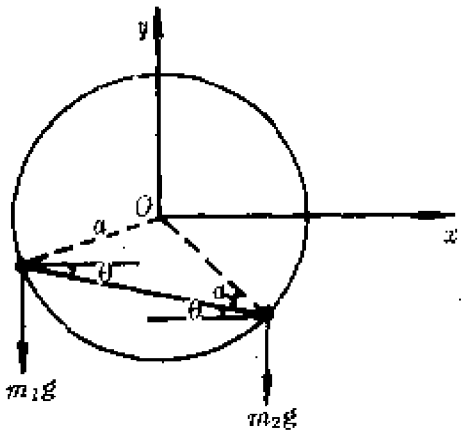


图4.16

解 $f=1$。取θ为广义坐标，系统所受的主动力有m_1g，m_2g.

变换方程是

$$x_1 = -a\cos(\alpha - \theta)$$
$$y_1 = -a\sin(\alpha - \theta)$$
$$x_2 = a\cos(\alpha + \theta)$$
$$y_2 = -a\sin(\alpha + \theta)$$

系统的势能

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 = -m_1ga\sin(\alpha - \theta) - m_2ga\sin(\alpha + \theta)$$

平衡位置满足

$$dV/d\theta = 0$$

$$\frac{dV}{d\theta} = m_1ga\cos(\alpha - \theta) - m_2ga\cos(\alpha + \theta) = 0$$

$$m_1\cos(\alpha - \theta) = m_2\cos(\alpha + \theta)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\frac{\cos(\alpha+\theta)-\cos(\alpha-\theta)}{\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha-\theta)}=\frac{-2\sin\alpha\sin\theta}{2\cos\alpha\cos\theta}$$

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\mathrm{ctg}\alpha$$

平衡位置为

$$\theta_0=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\mathrm{ctg}\alpha\right]$$

当$l<a$，$0<\alpha<\pi/2$时，

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[m_1ga\cos(\alpha-\theta)-m_2ga\cos(\alpha+\theta)]$$

$$=ag[m_1\sin(\alpha-\theta)+m_2\sin(\alpha-\theta)]=-V$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}=\frac{(m_1+m_2)^2\sin^2\alpha+(m_2-m_1)^2\cos^2\alpha}{\sqrt{(m_1+m_2)^2\sin^2\alpha+(m_2-m_1)^2\cos^2\alpha}}>0$$

V 为极小值，平衡稳定.

当$l=a$，$\alpha=0$时

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=ga\cos\theta(m_1-m_2)=0\Rightarrow m_1\neq m_2\text{ 时 }\theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\pm\pi/2}=ag(m_2-m_1)\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm ag(m_2-m_1)$$

$m_2>m_1$时，$\theta=\pi/2$(m_2在下)稳定.

$m_2>m_1$时，$\theta=-\pi/2$(m_2在上)不稳定.

$m_1=m_2$时，随遇平衡.

§4.6 拉格朗日方程

一、达朗伯原理·动力学普遍方程

对于一单个质点，其牛顿运动微分方程为

$$m\ddot{r}=F+R \tag{4.53}$$

式中F是主动力，R是约束力，移项得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}-m\ddot{\boldsymbol{r}}=0 \tag{4.54}$$

从数学上看，这样做并没有增添新的内容，但物理上却表示看问题的角度不同了．这里把$-m\ddot{\boldsymbol{r}}$与力放在一起，也视为一种力，称为达朗伯惯性力。这样做的结果，使得质点的动力学方程变成了平衡方程.

对于n个质点的系统，有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.55}$$

它表示：质点系中任何质点在每一瞬时所受的主动力、约束力和达朗伯惯性力互相平衡。这就是达朗伯原理.

根据达朗伯原理，对于动力学问题，也可以使用静力学中熟悉的概念和方法来处理，在工程和技术上称为动静法，被广泛地应用着。

需要指出的是，达朗伯惯性力与通常意义下的惯性力并不完全相同，它们形式上是相似的。对于一个同单个质点一起运动的非惯性参考系，质点所受的惯性力。正是达朗伯惯性力，但对于质点系，每个质点受到一个达朗伯惯性力$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，作为质点系的整体，我们无法指明这些达朗伯惯性力是相对于哪个非惯性系的惯性力。为避免混淆，我们在惯性力前冠以“达朗伯”字样.

将(4.55)式两边点乘$\delta\boldsymbol{r}_i$，求和，得

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.56}$$

应用理想约束条件

$$\sum_i\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.57}$$

得

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.58}$$

此式称为达朗伯-拉格朗日方程，又称作动力学普遍方程。它表示在理想约束条件下，在运动中任一时刻，系统所受的主动力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

与达朗伯惯性力的虚功之和为零.

达朗伯-拉格朗日方程是动力学的虚功(虚位移)原理. 我们说它是动力学的普遍方程，因为全部力学的定理和方程式都可以由它推导出来.

例如，对自由质点系统，因不受约束，所有虚位移 δr_i 都是独立的，可令除一个(第 i 个)以外，其余都是零. 因为它是 r_i 的独立变更，其系数必为零，因而我们又回到了牛顿方程

$$m_i\ddot{r}_i = F_i$$

二、完整系统拉氏方程与完整保守系统拉氏方程

拉格朗日分析力学的基本动力学方程，可以从不同的力学原理推导出来，我们这里从达朗伯-拉格朗日方程推导它.

设一个系统由 n 个质点组成，受有 m 个完整约束，自由度 $f=3n-m$. 选广义坐标 $q_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$ 来描述系统的运动，则变换方程为

$$r_i = r_i(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t), t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

我们首先证明两个含广义坐标的恒等式.

(1)

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{4.59}$$

证：由变换方程式得速度向量为

$$\dot{r}_i = \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

将 $\dot{r}_i$ 对广义速度 $\dot{q}_k$ 求偏微商，得

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta_{\sigma k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

推导中 $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$ 为零，因为 $\frac{\partial r_i}{\partial t}$ 中不显含 $\dot{q}_k$。

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(2)

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right) \tag{4.60}$$

证：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\\ &= \sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_\sigma + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\end{aligned}$$

此式表明，r_i 对时间 t 的微商与对 q_k 的偏微商可以对易.

下面利用已证明的恒等式(4.59)和(4.60)推导完整系统的拉格朗日方程式.

由变换方程，第 i 个质点的虚位移

$$\delta r_i = \sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \tag{4.61}$$

将(4.61)式代入达朗伯-拉格朗日方程(4.58)，得

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - m_i\ddot{r}_i)\cdot\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = 0$$

移项，并交换求和次序，得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{r}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma$$

上式中，

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\right)\right]\delta q_\sigma\\ &= \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\sigma}\right)\right]\delta q_\sigma\\ &= \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i\right) - \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i\right)\right]\delta q_\sigma\end{aligned}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma$$

$$右边 = \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma$$

合并左右二式，可重新写作

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma\right]\delta q_\sigma = 0 \qquad (4.62)$$

因为 δq_σ 互相独立，前面的系数应为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \qquad (4.63)$$

这就是完整系统的拉格朗日方程，又称为基本形式的拉格朗日方程.

为简化起见，可以定义拉格朗日算符

$$\Lambda_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \qquad (4.64)$$

应用拉格朗日算符，完整系统拉格朗日方程可以表为

$$\Lambda_\sigma T = Q_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \qquad (4.65)$$

完整系统拉格朗日方程，数学上，是 f 个未知函数 $q_\sigma(t)$ 满足的二阶常系数微分方程，必须给出 q_σ 和 $\dot{q}_\sigma$ 的初值才能唯一决定方程的解. 物理上，它是完整系统的运动实际遵循的动力学规律，方程式中的 $T = T(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)$ 是系统在惯性系中的动能. 广义力 $Q_\sigma = Q_\sigma(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)$ 可以含非保守力，也可以含保守力，但只含主动力，不含约束力。$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$ 是与广义坐标 q_σ 共轭的广义动量，用 p_σ 表示，$p_\sigma \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$. 如果广义坐标 q_σ 是线(长度)变量，则共轭的广义动量就是动量；如果广义坐标 q_σ 是角(角度)变量，则共轭的 广义动量就是角动量。在这里，动量和角动量被概括在统一的形式下。实际上，如果广义坐标 q_σ 是其它的量，相应的广义动量还有更广泛的含意. $\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$ 称为拉格朗日力.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

例如，一质点在中心力场中运动，轨迹在平面内，如取惯性笛卡儿坐标系，动能 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$，$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=0$，拉格朗日力不出现；但如取平面极坐标为广义坐标，$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$，$\frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2$，拉格朗日力即为惯性离心力.

完整系统拉格朗日方程适用于完整、理想系统，它可以表示为

广义动量的时间变化率 = 拉格朗日力 + 广义力

(4.66)

在推导完整系统拉格朗日方程时，我们除了只考虑主动力外，并未对力的性质作什么假定，因而它对于保守系统和非保守系统都是正确的.

对于保守系统，所有的力都可以由势能导出：

$$F_i=-\nabla_i V$$

$$\begin{aligned}Q_\sigma&=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}=-\sum_{i=1}^{n}\nabla_i V\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\\&=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\sigma}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\sigma}\right)\\&=-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}\end{aligned}\qquad(4.67)$$

代入完整系统拉氏方程，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}\qquad(\sigma=1,2,\cdots,f)\quad(4.68)$$

令 $L\equiv T-V$，定义为拉格朗日函数. 一般地，除非特殊申明，势能 $V=V(q_\sigma)$，即 V 不显含时间 t 和广义速度 $\dot{q}_\sigma$，$T=T(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)$因而

$$L=L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\qquad(\sigma=1,2,\cdots,f)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma},\quad\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(4.68)式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \qquad (4.69)$$

这就是完整，理想、保守系统的拉格朗日方程，简称拉氏方程。拉格朗日函数(简称拉氏函数)是广义坐标、广义速度和时间的函数，是保守系统的特征量。系统的全部动力学信息都包含在其中，就是说系统及其运动的特征完全由拉格朗日函数给出，其中动能反映了系统的结构性质，如质量、转动惯量、几何参量等，势能包括内力场势能和外力场势能。选定了广义坐标，就已经反映了系统的自由度，并且约束条件自动地得到了满足。给定了拉氏函数，就是给定了一个力学系统。有了拉氏函数，将其代入完整系统或完整保守系统拉氏方程，就可以得到描述系统运动的广义坐标满足的运动微分方程式，解这组微分方程式，并利用初始条件定解，就可以完全决定系统的运动.

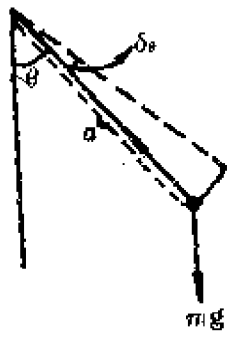


图4.17

【例4.4】 试建立单摆的运动微分方程式.

解 在虚位移 $\delta\theta$ 上，主动力 mg 所作的虚功

$$\delta W = -mg\sin\theta a\delta\theta$$

$$= Q_\theta\delta\theta$$

$$\Rightarrow Q_\theta = -mga\sin\theta$$

$$T=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=ma^2\dot{\theta},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=ma^2\ddot{\theta},\quad \frac{\partial T}{\partial\theta}=0$$

由 $\Delta_\theta T=Q_\theta$：

$$ma^2\ddot{\theta}=-mga\sin\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{a}\sin\theta=0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

此为单摆的运动微分方程.

【例4.5】 求图示复式阿特武德机的拉格朗日函数，并用拉氏方程求系统的运动微分方程(不计摩擦力及滑轮质量).

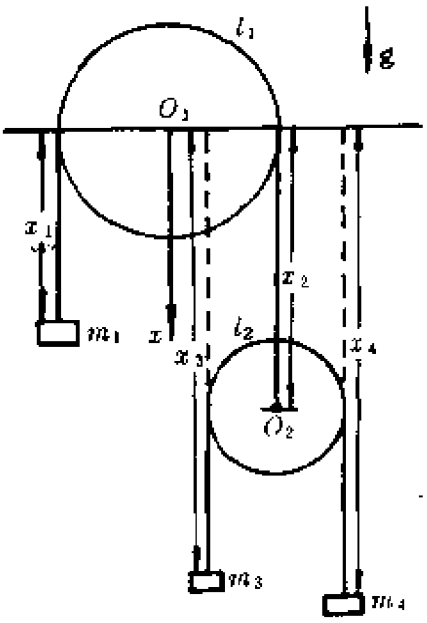


图4.18

解 O_1为定滑轮，作定轴转动. O_2为动滑轮，在铅垂面内作平面运动. 两根不可伸长的绳长度分别为l_1, l_2. 以定点O_1为原点作一维笛卡儿坐标O_1x，如图示，各物体的坐标分别为x_1, x_2, x_3, x_4.

约束方程为

$$x_1+a+x_2=l_1$$

(a是滑轮O_1的半周长)

$$x_3+x_4-2x_2+b=l_2$$

(b是滑轮O_2的半周长)

系统的自由度$f=2$，选x_1, x_3为广义坐标.

由约束方程得

$$\dot{x}_1=-\dot{x}_2,\ \dot{x}_3+\dot{x}_4=2\dot{x}_2$$

系统的动能:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2+\frac{1}{2}m_4(2\dot{x}_1+\dot{x}_3)^2$$

$$V=-m_1gx_1-m_3gx_3+m_4g(x_3+2x_1)$$

拉氏函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2+\frac{1}{2}m_4(2\dot{x}_1+\dot{x}_3)^2$$

$$+m_1gx_1+m_3gx_3-m_4g(x_3+2x_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1+4m_4\dot{x}_1+2m_4\dot{x}_3$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + 4m_4\ddot{x}_1 + 2m_4\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1 g - 2m_4 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3\dot{x}_3 + 2m_4\dot{x}_1 + m_4\dot{x}_3$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m_3\ddot{x}_3 + 2m_4\ddot{x}_1 + m_4\ddot{x}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = m_3 g - m_4 g$$

$$\Lambda_{x_1} L = 0: (m_1 + 4m_4)\ddot{x}_1 + 2m_4\ddot{x}_3 - (m_1 - 2m_4)g = 0$$

$$\Lambda_{x_3} L = 0: 2m_4\ddot{x}_1 + (m_3 + m_4)\ddot{x}_3 - (m_3 - m_4)g = 0$$

如果引入与速度相关势即广义势 $U = U(q_\sigma, \dot{q}_\sigma)$，且广义力可以表为

$$Q_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \quad (4.69)$$

代入完整系统拉氏方程 $\Lambda_\sigma T = Q_\sigma$，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f)$$

令 $L = T - U$，则上式化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \quad (4.70)$$

这表明：在引入广义势、重新定义广义力之后，完整保守系统拉氏方程 $\Lambda_\sigma L = 0$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$的形式保持不变.

某些速度相关力，如洛仑兹力 $F = q(E + v \times B)$，相应的广义势为 $U = q(\varphi - \dot{r} \cdot A)$，这样的力只在一定的意义上称为保守力. 把完整、理想、有普通势系统的拉氏方程推广到有广义势的系统，相应于从经典力学向经典电动力学的过渡.

三、拉氏方程的第一积分

拉格朗日方程作为一组(f 个)二阶常微分方程，常容易获

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

得其第一积分，使问题求解变得较为容易，而且这些第一积分都有明确的物理意义，代表某些重要的物理量守恒.

如果我们已经选定 f 个广义坐标 $q_\sigma(\sigma=1,\cdots,f)$来描述系统的运动，写出拉氏函数 L 后，发现其中不显含某个广义坐标 q_α，只显含广义速度 $\dot{q}_\alpha$，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

则由拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

并注意到 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_\alpha=0,\qquad p_\alpha=\text{常数} \tag{4.71}$$

于是得到与广义坐标 q_α 共轭的广义动量守恒. 我们称拉氏函数 L 中未明显出现的广义坐标 q_α 为循环坐标或可遗坐标，对应的第一积分称为循环积分，代表广义动量 p_α 守恒. 由于当广义坐标取为线变量或角变量时，对应的广义动量分别为动量和角动量，因此$\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$给出了动量和角动量守恒的统一判据(当然，此判据也适用于其它的广义动量守恒). 例如，在万有引力场中，质点运动的拉氏函数在极坐标下为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{km}{r}$$

其中不显含广义坐标 θ，只有广义速度 $\dot{\theta}$，则 θ 是循环坐标，相应的循环积分是

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\text{常数}$$

表示质点对力心的角动量守恒.

力学系统的拉氏函数中有几个循环坐标，就有几个循环积分，也就是有几个与循环坐标共轭的广义动量守恒. 应当指出

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的是，循环积分是否存在和存在多少，与广义坐标的选取有关. 同一个问题，在某些广义坐标下有循环积分，在另外一些广义坐标下则可能没有. 仍以万有引力场中运动的质点为例，当取惯性系中笛卡儿坐标 x、y 为广义坐标时，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{km}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4.72}$$

x，y 都不是循环坐标，因此也不存在相应的循环积分. 由于循环积分越多，越有利于拉氏方程的求解，所以，如何选择坐标，使有更多的循环坐标出现本身就成为分析力学研究的课题.

现在，我们讨论广义能量积分和能量积分.

首先，推出广义坐标下动能的一般表达式.

我们知道，在笛卡儿坐标下，力学系统动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{4.73}$$

它是质点速度的二次齐次函数，如果系统的自由度是 f，那么，在广义坐标下 T 的表达式又如何呢?由变换方程

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

求微商得

$$v_i = \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.74}$$

将它代入动能表达式

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i\left(\sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{\beta=1}^{f} \frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}^{f}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\dot{q}_\alpha$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

注意到右式中2，3项是相同的，可以合并，并令

$$\left.\begin{aligned}a_{\alpha\beta}(q,t)&=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\\ b_\alpha(q,t)&=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\\ c(q,t)&=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2\end{aligned}\right\}\qquad(4.75)$$

它们都不是广义速度的函数，动能

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+\sum_{\alpha=1}^{f}b_\alpha\dot{q}_\alpha+\frac{1}{2}c\\&=T_2+T_1+T_0\end{aligned}\qquad(4.76)$$

式中 $T_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ 是广义速度的二次齐次项，$T_1=\sum_{\alpha=1}^{f}b_\alpha\dot{q}_\alpha$ 是广义速度的一次齐次项，T_0是广义速度的零次项.

在讨论能量积分和广义能量积分之前，我们还要介绍一个将要用到的定理——欧勒齐次函数定理：

设 G 是变量 q_1，q_2，…，q_f 的 m 次齐次函数，将 G 的偏微商$\frac{\partial G}{\partial q_\sigma}$分别乘以 q_σ 求和，则等于函数 G 的 m 倍，即

$$\sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma\frac{\partial G}{\partial q_\sigma}=mG\qquad(4.77)$$

定理中的变量 q_σ 是任意的，并不一定是广义坐标，也可以是广义速度或其它变量.

对于完整、保守系统，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0\qquad(\sigma=1,2,\cdots,f)\qquad(4.78)$$

将上式各项乘以 $\dot{q}_\sigma$，然后将 f 个方程相加，得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0\qquad(4.79)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上式第一项可写成

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\ddot{q}_\sigma \qquad (4.80)$$

代入(4.79)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\ddot{q}_\sigma+\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma\right)=0 \qquad (4.81)$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\ddot{q}_\sigma+\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$

则(4.81)式化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (4.82)$$

定义

$$H\left(q_\sigma,\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma},t\right)=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L \qquad (4.83)$$

或用 p_σ 代替$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}$

$$H(q_\sigma,p_\sigma,t)=\sum_{\sigma=1}p_\sigma\dot{q}_\sigma-L \qquad (4.84)$$

H 称为哈密顿量或哈密顿函数.

可以看出，如果拉氏函数 L 中不明显包含时间 t，这时

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

则(4.82)式左端括号里的量应为常数，即

$$H=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L=\overline{h} \qquad (4.85)$$

由于(4.85)式是由拉氏方程推导出的，所以此式代表拉氏方程的一个运动积分. 为说明 H 的物理意义，将 L 的定义式及(4.76)代入(4.85)式并应用欧勒齐次函数定理将(4.85)中前一项化为

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial T_2}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial T_1}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial T_0}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\right)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= 2T_2 + T_1$$

则(4.85)式化为

$$H = T_2 - T_0 + V = \overline{h} \tag{4.86}$$

注意到动能 $T = T_2 + T_1 + T_0$，(4.86)式不代表系统的总机械能，故称(4.86)为广义能量积分或雅可比积分，H 代表系统的广义能量.

当体系受有稳定约束，且$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$时，$T_1 = T_0 = 0$，$T = T_2$，此时广义能量积分就是能量积分：

$$H = T + V = E \tag{4.87}$$

$H = E$ 代表系统的总机械能，即机械能守恒. 广义能量一般不是系统的机械能，只在特殊情况下才是系统的机械能(但是最重要的特殊情况)，所以广义能量守恒机械能不一定守恒.

在各种条件下，哈密顿函数 H 与总能量 E 有表4.1所示关系.

表4.1 哈密顿函数和总能量的关系

	约束稳定 (且 V 不依赖广义速度 $\dot{q}_s$) $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$	约束不稳定 $\frac{\partial r_i}{\partial t} \neq 0$
拉氏函数 L 不显含时间 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$	$H = E$ $H =$ 常数(总能量)	$H \neq E$ $H =$ 常数(广义能量)$= \overline{h}$
$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$	$H = E$ $H \neq$ 常数	$H \neq E$ $H \neq$ 常数

与广义动量守恒是以拉氏函数 L 中不明显包含某广义坐标作为判据相比，广义能量守恒是以拉氏函数中不明显包含时间 t 为判据. 这说明运动守恒量与力学系统的时、空特性有密切关系.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

四、对称性与守恒定律

在质点和质点系力学中，我们曾给出了牛顿力学中动量、角动量和机械能守恒定律及其条件. 在拉格朗日力学中，我们有可能仅根据力学系统特征函数的特点揭示出力学系统时空对称性与守恒定律的内在联系，从而将人们对自然界本质属性的认识引向深入，这是在牛顿力学的范畴里没有做到的，对人们进一步认识场现象，探索微观物体的结构与规律具有重要意义.

首先，根据空间均匀性可以导出动量守恒定律.

对于在惯性参考系中一封闭的力学系统，空间是均匀的，意味着力学系统在空间作一任意平移(或坐标系作任一平移)时，系统的力学性质不变，由于拉氏函数 L 是力学系统的特征函数，是力学系统的代表，所以系统的力学性质不变，应表现为拉氏函数不变.

考虑系统整体平移一无穷小量 ε，则上述陈述理解为在这一整体平移下 $\delta L=0$，由于变化仅由位置坐标引起，与时间变化无关，即 $\delta t=0$，故用变分符号. 可以想到空间整体平移时系统中每个质点的位置向量 r_i 都产生一 ε 平移变成 $r_i+\varepsilon$，或者说每个质点的变更都是 ε，即 $\delta r_i=\varepsilon$. 让我们看看 $\delta L=0$ 将导致什么结果. 假定 n 个质点的力学系统自由度为 f 则

$$\delta L=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma+\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)=0 \tag{4.88}$$

其中第一项

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\right)-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\delta q_\sigma$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\right)-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma$$

第二步用到拉氏方程，代入(4.88)式，立即得到

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\right) = 0$$

注意到 L 中动能 $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2$，位能与速度变量无关，并利用关系 $\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}$，则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}$$

代回前式，交换求和顺序，则

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial r_i}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i\right) = 0 \qquad (4.89)$$

对空间整体平移，$\delta r_i=\varepsilon$，与求和及时间无关，将 ε 提到求和与微分号外，有

$$\delta L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i\right)\cdot \varepsilon = 0$$

由 ε 是任意的，上式成立必有

$$\dot{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i = 0,\ p = p_0 \qquad (4.90)$$

即空间均匀性导致力学系统动量守恒，或者说系统相对于空间平移不变，必有动量守恒.

其次，根据空间各向同性可以导出角动量守恒.

惯性参考系中对一封闭力学系统的空间各向同性是指系统整体在空间以任何方式转动(或系统不动而坐标系作任一转动)时，系统的力学性质不变，即 $\delta L=0$.

用 $\delta\varphi$ 表示无穷小转动向量，其大小为转角 $\delta\varphi$，其方向是转轴方向(沿 $\delta\varphi$ 按右手螺旋指出的方向)，由此引起的系统中任一质点的位置变更为

$$\delta r_i = \delta\varphi \times r_i \qquad (4.91)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这一整体旋转的结果，仍可由(4.89)导出. 将(4.91)代入(4.89)，并用到 $m_i\dot{r}_i\cdot(\delta\varphi\times r_i)=\delta\varphi\cdot(r_i\times m_i\dot{r}_i)$，则

$$\begin{aligned}\delta L&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i\cdot(\delta\varphi\times r_i)\Big]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\delta\varphi\cdot(r_i\times m_i\dot{r}_i)\\&=\delta\varphi\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}r_i\times m_i\dot{r}_i=0\end{aligned}\tag{4.92}$$

$\delta\varphi$ 是任意的，且 $L=\sum_{i=1}^{n}r_i\times m_i\dot{r}_i$ 是系统的角动量，得到

$$\dot{L}=0,\quad L=L_0\tag{4.93}$$

空间的各向同性导致系统的总角动量守恒，也可以说系统相对于空间旋转不变，必有角动量守恒.

无论空间平移不变性还是空间旋转不变性，一般地说，坐标变化的不变性，都是一种均匀性. 这和电场分布不依赖于空间分布称为均匀电场，密度分布不依赖于坐标称为均匀介质是一个意思. 而均匀性，从几何的观点看又是一种对称性. 任何物理量有绕轴对称性，则该物理量必与绕轴的转角无关. 所以上述守恒定律的存在是力学系统空间对称性的表现.

如果力学系统不具有对任意空间平移和旋转的不变性，则得不出系统总动量和总角动量守恒的结论，对非封闭系统就是这种情况. 但该系统仍可能存在沿某个(或某些)方向上或绕某特定取向转轴的平移或旋转对称性，即系统仍保存部分对称性. 这时系统将仍存在在这些方向上的动量或角动量守恒. 拉氏函数 L 不明显包含(依赖)某广义坐标，该广义坐标原点的移动当然不会引起拉氏函数的变化，这种对称性必有相应的守恒定律存在，所以循环积分是力学系统空间对称性的表现. 但由于对一确定的力学系统，自由度 f 确定，广义坐标的选择仍是任意的，所以即使系统具有某种平移或旋转对称性，也不一定有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

相应的循环坐标出现，只有选择体现这一对称性的独立变量作广义坐标，才可能是反映这一对称性的循环坐标，从而得出相应的广义动量守恒. 力学系统空间对称性的分析为恰当地选择广义坐标、简化方程的求解提供了依据.

最后，根据时间均匀性可导出系统能量守恒.

时间均匀性是指时间零点可以任意选取而拉氏函数不变，也就是拉氏函数对时间平移不变，这只有在拉氏函数不显含时间 t 才有可能，即要求 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$. 我们已经证明过，这正是广义能量守恒的条件，当约束是稳定的和 $\frac{\partial r_i}{\partial t}=0$，广义能量守恒就是系统机械能守恒. 这里我们仅从时间均匀性直接导出了能量守恒定律，可见能量守恒的条件来源于时间均匀性.

如果把空间坐标和时间统一地看作时一空坐标，则力学系统具有动量守恒、角动量守恒和能量守恒的条件在本质上是力学系统的时-空对称性.

§4.7 用拉格朗日方程求解力学问题的步骤和应用举例

用拉格朗日方程求解一个力学问题，一般步骤是：

(1)分析约束，确定自由度 f，选择广义坐标.

(2)写出变换方程

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, t)$$

(3)依广义坐标和广义速度，写出系统的动能 T、势能 V 和拉格朗日函数(对于完整保守系)，或动能 T、广义力 Q_σ($\sigma=1, 2, \cdots, f$)(对于完整系).

(4)将拉氏函数 L 代入拉氏方程 $\Lambda_\sigma L=0$($\sigma=1, 2, \cdots, f$)或将动能 T 代入完整系拉氏方程 $\Lambda_\sigma T=Q_\sigma$($\sigma=1, 2, \cdots, f$)，建立系统运动的微分方程.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(5)求解微分方程，用初始条件定出积分常数.

(6)对结果进行讨论.

上述步骤是通常情形下应采取的，有的步骤可变通运用，例如，在简单情形下，当能以广义坐标直接写出拉氏函数或动能时，变换方程不一定要写出. 而在某些情形下，为求出 L 或 T，还须写出约束方程式，这应具体问题具体分析. 上述(5)、(6)两个步骤，与牛顿力学并无不同，用拉格朗日方程解问题，关键是求出拉氏函数 L 或动能 T 与广义力 Q_α，建立起运动微分方程式.

【例4.6】 一质点质量为 m，以与水平成 α 角的初速度 v_0 向上抛出，试用拉格朗日方程求解其运动，略去空气阻力.

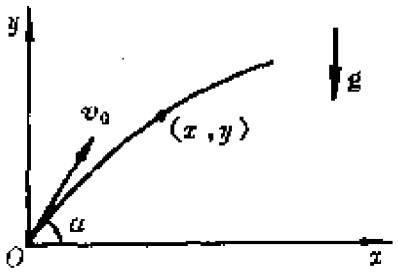


图4.19

解 这是自由质点在重力场中运动的问题. 因与初速度所在铅垂面的垂直方向没有运动，自由度 $f=3-1=2$.

以抛出点为坐标原点，在 v_0 所在铅垂面内建立笛卡儿坐标 $O\text{-}xy$，选质点坐标 x，y 为广义坐标，则

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\quad V=mgy$$

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=-mg$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_x L=0&:m\ddot{x}=0\\ \Lambda_y L=0&:m\ddot{y}+mg=0\end{aligned}\right\}\quad 即\quad \left.\begin{aligned}\ddot{x}&=0\\ \ddot{y}+g&=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

积分此方程组，得

$$\left.\begin{aligned}x&=at+b\\ y&=-\frac{1}{2}gt^2+ct+d\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

a、b、c、d 是积分常数，由初始条件：$t=0$时

$$\left.\begin{aligned}x&=0,\ \dot{x}=v_0\cos\alpha\\ y&=0,\ \dot{y}=v_0\sin\alpha\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

代入(2)式，得

$$x=v_0\cos\alpha\, t$$

$$y=v_0\sin\alpha\, t-\frac{1}{2}gt^2$$

消去 t，得轨道方程为

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

乃一抛物线.

【例4.7】两个质点 m_1 和 m_2 用一长为 l 的不可伸长的绳连结，绳通过光滑水平桌面上一光滑小孔 O，m_1 在桌面上运动，m_2 在桌面下竖直平面内摆动，试建立系统的拉氏方程.

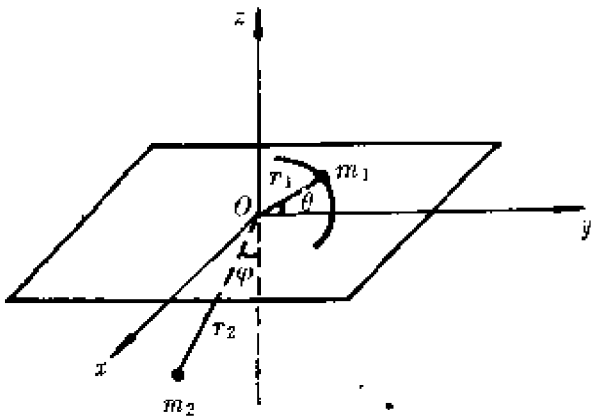


图4.20

解 系统受两个约束：m_1 限制在桌面上运动，$z_1=0$；绳不可伸长，$r_1+r_2=l$. m_2 在竖直平面内摆动，这是由初始条件决定的，相当于多一个约束，故 $f=3\times2-3=3$，选 θ，φ 和 r_2 为广义坐标.

$$T=\frac{1}{2}m_1[\dot{r}_2^2+(l-r_2)^2\dot{\theta}^2]+\frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^2+r_2^2\dot{\varphi}^2)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$V = -m_2 g r_2 \cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2}m_1[\dot{r}_2^2 + (l-r_2)^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}^2) + m_2 g r_2\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = (m_1+m_2)\dot{r}_2,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2}\right) = (m_1+m_2)\ddot{r}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = -m_1(l-r_2)\dot{\theta}^2 + m_2 r_2\dot{\varphi}^2 + m_2 g\cos\varphi$$

由 $\Lambda_{r_2}L=0$：

$$(m_1+m_2)\ddot{r} + m_1(l-r_2)\dot{\theta}^2 - m_2 r_2\dot{\varphi}^2 - m_2 g\cos\varphi = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1(l-r_2)^2\dot{\theta},\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

由 $\Lambda_\theta L=0$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_1(l-r_2)^2\dot{\theta}] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 r_2^2\dot{\varphi},\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 g r_2\sin\varphi$$

由 $\Lambda_\varphi L=0$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 r_2^2\dot{\varphi}) + m_2 g r_2\sin\varphi = 0 \quad (3)$$

(1)，(2)，(3)式即为所求的方程.

【例4.8】以球坐标 r、θ、φ 为广义坐标，求自由质点的运动微分方程.

解 在主动力不一定是保守力的情形下，应当用完整系拉氏方程求解. 因

$$\dot{r} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta e_\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

由广义力定义及基向量变换方程(1.75)可得

$$Q_r = F\cdot\frac{\partial r}{\partial r} = F\cdot\frac{\partial(re_r)}{\partial r} = F\cdot e_r = F_r$$

$$Q_\theta = F\cdot\frac{\partial r}{\partial \theta} = rF\cdot\frac{\partial e_r}{\partial \theta}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= rF \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\varphi e_x + \sin\theta\sin\varphi e_y + \cos\theta e_z)$$

$$= rF \cdot (\cos\theta\cos\varphi e_x + \cos\theta\sin\varphi e_y - \sin\theta e_z$$

$$= rF \cdot e_\theta = rF_\theta$$

$$Q_\varphi = F \cdot \frac{\partial r}{\partial\varphi} = rF \cdot \frac{\partial e_r}{\partial\varphi} = rF \cdot (-\sin\theta\sin\varphi e_x + \sin\theta\cos\varphi e_y)$$

$$= r\sin\theta F \cdot (-\sin\varphi e_x + \cos\varphi e_y) = r\sin\theta F \cdot e_\varphi = r\sin\theta F_\varphi$$

由广义力的虚功

$$\delta W = \sum_\sigma Q_\sigma \delta q_\sigma = Q_r\delta_r + Q_\theta\delta_\theta + Q_\varphi\delta_\varphi$$

又

$$\delta W = F \cdot \delta r$$

$$= F_r\delta_r + F_\theta r\delta_\theta + F_\varphi r\sin\theta\delta_\varphi$$

比较系数得

$$Q_r = F_r,\ Q_\theta = rF_\theta,\ Q_\varphi = r\sin\theta F_\varphi$$

将 T 和 Q_σ 代入拉氏方程，得

$$\Lambda_r T = Q_r : m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2] = F_r$$

$$\Lambda_\theta T = Q_\theta : m[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2] = F_\theta$$

$$\Lambda_\varphi T = Q_\varphi : m[2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + r\sin\theta\ddot{\varphi}] = F_\varphi$$

【例4.9】 一质量—弹簧系统，如图所示. 弹簧一端固定于支架上，支架以速度 V_0 沿固定的水平轴 $O''X$ 运动，质点质量为 m，弹簧弹性系数为 k，自然长为 l_0，求系统的拉氏函数和第一积分.

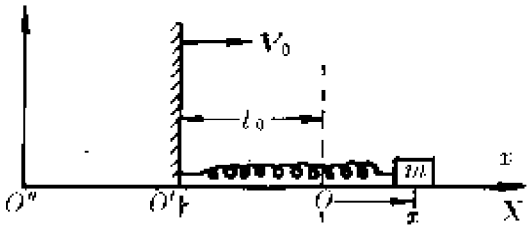


图4.21

解 取动坐标系 O-x，原点取在距 O' 为 l_0 处，以 x 为广义坐标，变换方程为

$$X = V_0 t + l_0 + x$$

$$\dot{X} = V_0 + \dot{x}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}+V_0)^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+2\dot{x}V_0+V_0^2)$$

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mV_0\dot{x}+\frac{1}{2}mV_0^2-\frac{1}{2}kx^2$$

L 中不显含时间，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，故 H 守恒，但变换方程显含时间，$\frac{\partial X}{\partial t}=V_0\neq 0$，$H$ 代表广义能量，故有广义能量积分，注意到 T 中各项为

$$T_0=\frac{1}{2}mV_0^2,\ T_1=mV_0\dot{x},\ T_2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$H=T_2-T_0+V$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}mV_0^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常数}$$

式中 V_0 是常数，$T_2+V=$常数，但 $T+V$ 并不守恒，因为有运动的支架作功.

【例4.10】 试求图所示的二重摆的拉氏函数. 摆的长度分别为 l_1 和 l_2，相应的摆锤质量为 m_1 和 m_2.

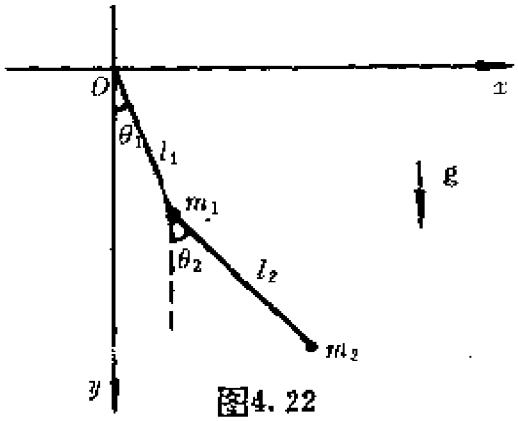


图4.22

解 在摆动平面内选取二维笛卡儿坐标系如图所示. $f=2$，选两条摆线与竖直方向的夹角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，变换方程为

$$x_1=l_1\sin\theta_1,\ y_1=l_1\cos\theta_1$$

$$x_2=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2,\ y_2=l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2$$

动能

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2[(l_1\dot{\theta})^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2$$
$$+ 2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2]$$

势能

$$V = -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

拉氏函数

$$L = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2$$
$$+ \frac{1}{2}m_2[(l_1\dot{\theta}_1)^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\theta_1\theta_2]$$
$$+ m_1gl_1\cos\theta_1 + m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

【例4.11】求各向同性谐振子的运动微分方程.

解　各向同性谐振子是这样一个振动质点，它受到一个总指向或离开一平衡位置的力的作用，而力的大小随质点到平衡位置的距离线性变化，即

$$F = -kr$$

k 是力常数，

因 $F = -\frac{dV}{dr}$，所以

$$V = -\int F dr + c = -\int -kr dr + c$$

取平衡位置处为势能零点，即 $r=0$ 处 $V=0$，则 $c=0$

$$V = \frac{1}{2}kr^2$$

(1)选取描述质点位置的笛卡儿坐标 x, y, z 为广义坐标，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_x L = 0: \quad & m\ddot{x} + kx = 0 \\ \Lambda_y L = 0: \quad & m\ddot{y} + ky = 0 \\ \Lambda_z L = 0: \quad & m\ddot{z} + kz = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)式即为笛卡儿坐标下的运动微分方程.

(2)取描述质点位置的球坐标 r、θ、φ 为广义坐标，则

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$V = \frac{1}{2}kr^2$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}kr^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - kr$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_r L = 0: \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + kr = 0 \\ &\Delta_\theta L = 0: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \\ &\Delta_\varphi L = 0: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2)式即为以球坐标为广义坐标时，各向同性谐振子的运动微分方程.

【例4.12】一小环套在半径为 a 的光滑竖直大圆环上，此圆环绕固定的竖直半径以匀角速 ω 转动，求小环的运动微分方程.

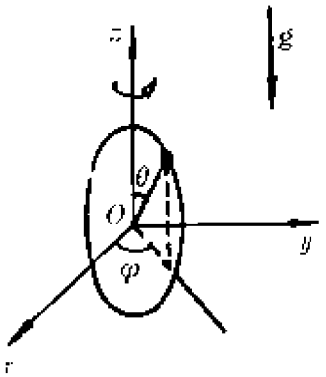


图4.23

解 系统受到两个约束：$r=a$，$\varphi=\omega t$，自由度 $f=3-2=1$，取球坐标 θ 为广义坐标.

动能为

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

在与约束相符的虚位移上，主动力(重力)所作的虚功为

$$\delta W = mg\delta(a\cos\theta) = -mga\sin\theta\delta\theta$$

故

$$Q_\theta = -mga\sin\theta$$

将 T 和 Q_θ 代入拉氏方程

$$\Lambda_\theta T = Q_\theta$$

得

$$ma^2\ddot{\theta} - ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = -mga\sin\theta$$

即

$$\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

【例4.13】求出电磁场中带电粒子运动的拉氏函数.

解　设带电粒子电荷为 q，质量为 m，在电磁场 $E(r,t)$，$B(r,t)$ 中运动. 粒子所受的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

因

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]$$

$$F_x = q\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left[v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\right\}$$

$$F_y = q\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} + \left[v_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - v_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$F_z = q\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} + \left[v_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - v_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\right\}$$

F_x 式中

$$v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} - \left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{\partial}{\partial x}(v \cdot A) - (v \cdot \nabla)A_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(v \cdot A) - \left(\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

故

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - v \cdot A) - \frac{dA_x}{dt}\right]$$

同样地，

$$F_y = q\left[-\frac{\partial}{\partial y}(\varphi - v \cdot A) - \frac{dA_y}{dt}\right]$$

$$F_z = q\left[-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi - v \cdot A) - \frac{dA_z}{dt}\right]$$

令 $U = q(\varphi - v \cdot A)$ 为广义势，则因 $\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(v \cdot A)\right]$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}}\right)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\right)$$

这样，我们以广义势表示出了电磁力，系统的拉氏函数可表为

$$L = T - U = T - q\varphi + qv \cdot A$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + qv \cdot A$$

§4.8 拉格朗日乘子和约束力

拉格朗日方程特别适于处理有约束系统的运动. 有约束，就有约束力作用. 当一个质点被约束在光滑曲面上时，曲面方程为

$$f(r, t) = 0$$

质点受到的约束力使质点不能离开曲面，此力只能沿法线方

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

向，这表明，约束力可以表示成

$$\boldsymbol{R}=\lambda\nabla f=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{4.94}$$

因为∇f沿法向，而两个平行的向量的差别只是它们的大小及量纲不同，λ反映约束力的大小，称为拉格朗日不定乘子.

由虚功原理，系统平衡的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.95}$$

例如单个质点在曲面上运动，可写为

$$\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0 \tag{4.96}$$

如约束是完整、稳定、理想约束：

$$f(x,y,z)=0 \tag{4.97}$$

由它的变分得

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{4.98}$$

因为有约束方程，x，y，z中只有两个独立变量，如取x，y是独立的，z就不是任意的. 由虚功原理，质点平衡时，有

$$F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z=0 \tag{4.99}$$

将(4.98)式乘以不定乘子λ，与(4.99)式相加，得

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0$$

虽δx与δy，δz并不独立，但由于λ尚待定，可选择适当的λ值使$F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\delta y$，$\delta z$是独立的，前面系数必为零，故有

$$\left.\begin{aligned}F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}&=0\\F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}&=0\\F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\}\text{或}\ \boldsymbol{F}+\lambda\nabla f=0 \tag{4.100}$$

(4.100)式与约束方程

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$f(x,y,z)=0$$

联立，即可求出质点的平衡位置与 λ 值，将 λ 代入(4.94)即可求出约束力 R.

一般地，当系统由 n 个质点组成，并受有 m 个完整、稳定、理想、不可解约束时，系统平衡的条件为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}(F_{x_i}\delta x_i+F_{y_i}\delta y_i+F_{z_i}\delta z_i)=0 \tag{4.101}$$

系统各质点虚位移满足(4.21)或(4.22)式的限制条件

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,m)$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

将(4.21)式分别乘以 λ_α，对 α 求和再与(4.101)式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{x_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(F_{y_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\right)\delta y_i+\left(F_{z_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right] \tag{4.102}$$

选择 λ_α，使不独立的变更前系数为零，独立变更前系数也是零，故有

$$\left.\begin{aligned}F_{x_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0\\ F_{y_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=0\\ F_{z_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0\end{aligned}\right\}$$

即

$$\boldsymbol{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.103}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(4.103)与 m 个约束方程

$$f_\alpha(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m)$$

联立，共有$3n+m$ 个方程，恰能决定$3n$ 个坐标与 m 个拉格朗日不定乘子.

引入不定乘子与拉氏方程结合，也可用于求运动系统的约束力.

对 n 个质点组成，受有 m 个约束的完整、保守系统，自由度是 $f = 3n - m$. 用拉氏方程求解此系统的运动，本应选 f 个独立的广义坐标. 为求约束力，我们也可以选大于 f 个广义坐标. 例如，我们就选$3n$ 个广义坐标：$q_1, q_2, \cdots, q_{3n}$，重复 § 4.6作过的类似推导，同样可以得到

$$\sum_{\sigma=1}^{3n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right]\delta q_\sigma = 0 \qquad (4.104)$$

但由于这时$3n$ 个广义坐标的虚位移 δq_σ 并不是完全独立的，由此式并不能马上得出原来形式的拉氏方程. 注意到这$3n$ 个广义坐标还要满足 m 个约束方程. 对广义坐标的约束方程写为

$$\varphi_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_{3n}, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m) \quad (4.105)$$

由此，马上得到广义虚位移满足的约束方程为

$$\sum_{\sigma=1}^{3n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, m)$$

将上述方程分别乘上 λ_α，然后相加得

$$\sum_{\sigma=1}^{3n}\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma = 0$$

与(4.104)式相加

$$\sum_{\sigma=1}^{3n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\sigma}\right]\delta q_\sigma = 0$$

重复在不定乘子法做过的分析，马上得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_\alpha\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, 3n)$$

(4.106)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

共$3n$个方程，含$3n+m$个未知量(包括m个不定乘子)，再与m个约束方程联立求解，原则上可将系统的运动和m个不定乘子同时求出，而

$$R_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\alpha}$$

是与q_α对应的约束力. 实际解题时，不一定选$3n$个广义坐标并引入m个不定乘子，而常常是选大于f个广义坐标就可引入不定乘子. 例如，选$f+1$个广义坐标，留下1个约束方程. 这样只选1个不定乘子就可以了，恰可求出与此约束方程相应的约束力.

拉氏乘子法和第二类拉氏方程的结合，还可以用来解决非完整力学体系的运动问题，主要是线性依赖于速度的不完整约束问题. 这里不再进行讨论了.

【例4.14】一半径为a的光滑圆周，竖直放置，其顶上置一质量为m的质点，$t=0$时，质点以初速度零开始滑落，求质点离开圆周的位置及约束力.

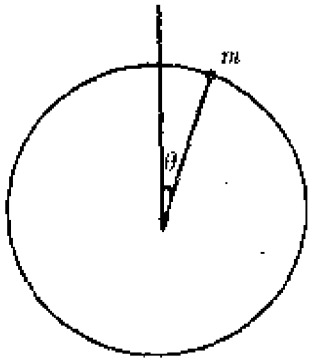


图4.24

解 自由度$f=1$，但要求约束力，取θ，r为广义坐标，这时r还要满足约束方程为

$$\varphi = r - a = 0$$

代入方程(4.106)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\alpha}$$

只有一个约束方程，$\alpha=1$，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta, \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgr\sin\theta, \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta &= \lambda \\ m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) - mgr\sin\theta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda &= -ma\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \\ a\ddot{\theta} &= g\sin\theta \end{aligned}\right\} (r = a) \qquad (1)$$

因 $\ddot{\theta}=\frac{g}{a}\sin\theta$，有 $\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=\frac{g}{a}\sin\theta$，积分得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda = -ma\cdot\frac{2g}{a}(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$= -2mg + 3mg\cos\theta$$

$$= mg(3\cos\theta - 2) \qquad \text{（约束力）}$$

质点离开圆周时，$\lambda=0$

$$3\cos\theta - 2 = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

【例4.15】质量为 m 的圆盘沿倾角为 α 的斜面向下作纯滚动，设运动保持在与底面垂直的铅垂面内，试求圆盘质心的加速度、圆盘的角加速度及静摩擦力.

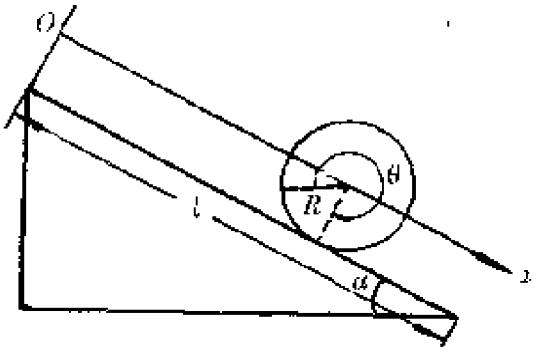


图4.25

解 系统的自由度 $f=1$，选 x，θ 为广义坐标，约束方程为

$$f(x,\theta) = x - R\theta = 0$$

拉氏函数

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2 - mg(l-x)\sin\alpha$$

拉氏方程为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

代入 L 值得

$$m\ddot{x}-mg\sin\alpha-\lambda=0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}+\lambda R=0 \tag{2}$$

由约束方程得

$$\ddot{x}-R\ddot{\theta}=0 \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)得.

$$\ddot{x}=\frac{2}{3}g\sin\alpha,\ \lambda=-\frac{1}{3}mg\sin\alpha,\ \ddot{\theta}=\frac{2g\sin\alpha}{3R}$$

λ 即约束力(静摩擦力)

§4.9 拉格朗日力学的特点和成就

从以上的讨论中我们看到，拉格朗日力学是以牛顿的三个定律作为力学基本原理，由此出发得到了对力学基本问题的新的表述. 拉格朗日力学并非新的力学理论. 对于一个力学系统，拉格朗日方法和牛顿方法分析的结果必须相同，区别只是获得这些结果的方法、途经不同罢了，拉氏方程与牛顿方程是等价的动力学方程.

尽管如此，我们还应当从拉格朗日力学与牛顿力学的对比中，看到拉氏方法的特点和优越性，正是由于这一些，才使得拉格朗日力学克服了牛顿力学的许多困难，使经典力学发展到一个新阶段.

(1)牛顿力学的主要困难之一，是处理有约束特别是多约束问题时，未知的约束力和未知的运动同时出现在牛顿方程中，求解系统的运动十分不便. 用拉格朗日方程建立系统的运

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

动微分方程，则避开约束力，使其在方程中不出现，约束越多，自由度越少，方程越少，求解反而更容易.

(2)牛顿力学中动力学方程在各种坐标系中有不同的形式，拉格朗日方程的形式却对各种广义坐标保持不变.摆脱笛卡儿坐标系的束缚.使用广义坐标，是拉格朗日方法的主要优越性之一.由于使用广义坐标，拉格朗日方程可用来处理惯性系中的运动，也可以处理非惯性系中的运动.

(3)牛顿力学建立动力学方程时，首先着眼于分析和写出力(此外，还有加速度)，它是作用于物体的外界因素，是个向量；而建立拉格朗日方程时，要写出动能、势能和拉氏函数，它们是与物体相结合的量，是标量.牛顿力学主要应用几何和向量分析的方法，比较繁难，而拉格朗日力学是用分析方法，对标量(拉氏函数)进行运算，这较为容易，建立动力学方程时甚至可以不涉及力的概念.

(4)牛顿力学处理各种系统的运动，方法并不相同，但拉氏方程有更高的概括性，许多截然不同的系统，例如刚体、流体、电磁场……都可以用拉氏方程建立其运动微分方程式，并且有一整套统一的方法.

(5)牛顿力学形象、直观，物理图象清楚，对于简单问题，处理较为方便.拉格朗日力学中，坐标、速度、力等都是广义的，数学推理多，物理图象不甚直观，适于处理复杂系统，及从理论上进行普遍的讨论和推广到非力学系统.

拉格朗日力学克服了多约束的困难，大大提高了力学解决复杂问题的能力，但这一困难在当时并没有完全解决，特别是非完整约束的问题，是在拉格朗日之后逐步解决的.非完整系动力学在近代得到了很大发展，并在工程技术上得到日益广泛的应用.拉格朗日力学的建立，使得系统地研究振动理论、平衡和运动的稳定性成为可能，并为近代众多的应用力学的发展，提供了基本的原理与方法.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

习　题

4.1　一弹性圈自然长为 a，弹性模量为 λ，质量为 m，置于光滑的圆锥面上. 当圈静止时，圈面为水平，试用虚功原理求平衡时圈面离圆锥顶点的距离(圆锥顶角为 2α).

$\left(x=\frac{a}{2\pi g a}\left(1+\frac{mg}{2\pi g a\lambda}\right)\right)$

4.2　长 $2l$ 的棒，一端与光滑的铅直墙壁接触，并搭在墙壁前距离 a 处的光滑水平钉上，求平衡位置，并讨论其稳定性.

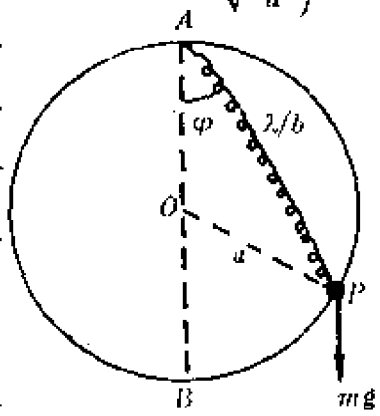
$\left(\text{平衡位置是 } \theta=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}};\ \theta \text{ 是棒对水平面的倾角. 不稳定.}\right)$

4.3　长为 l、质量为 m 的四根相同的均质棒，光滑地铰接成菱形，对称地挂在距离为 $2a$ 的光滑、水平的钉上，两钉高度相同，求系统的平衡位置及钉的约束力.

$\left(\text{平衡位置是 } \vartheta=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}}(\vartheta \text{ 是各棒与水平面的夹角}),\ \text{约束力 } R=2mg\sqrt[3]{\frac{l}{a}}\right)$

4.4　两个相同的均质光滑球，悬在结于定点 O 的两根绳子上，此二球同时又支持一个等重的均质球而达平衡，求此时两绳与铅直方向的夹角 α 及上下两球球心连线与铅直方向的夹角 β 之间的关系.

$(\operatorname{tg}\beta=3\operatorname{tg}\alpha)$



4.5题图

4.5　一质量为 m 的小环，能沿一竖直圆圈自由滑动. 圆圈半径为 a. 一自然长为 b，弹性模量为 λ 的弹簧，一端系于环上，另一端固定在圆圈的最高点. 求可能的平衡位置并讨论其稳定性.

$\left(\text{可能的平衡位置有 } \varphi=0,\ \varphi=\arccos\frac{\lambda b}{2(a\lambda-mgb)},\ \text{平衡位置之是否存在及其稳定性，由常数 } a,b,\lambda,m \text{ 的数值决定.}\right)$

4.6　均质杆长为 a，放在一内壁光滑的固定的回转抛物面

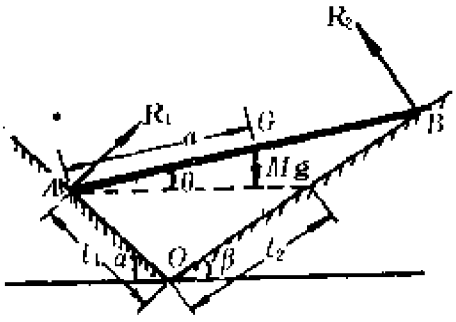
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

形的容器内，抛物面方程为 $x^2=2py$，求杆的平衡位置.

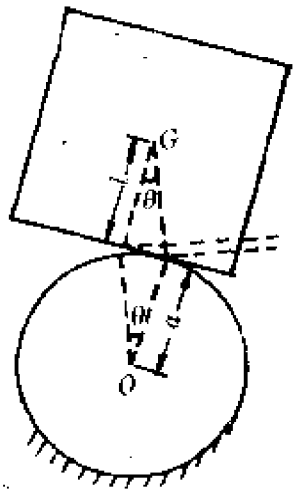
（$2p\geqslant a$ 时，$\theta=0$为平衡位置（θ 是杆与水平面夹角），$2p<a$ 时，$\theta=0$，$\theta=\arccos\sqrt{\frac{2p}{a}}$为平衡位置.）

4.7　与水平面分别成 α,β 角的两个光滑斜面间搭一均质棒，试求平衡位置，并讨论其稳定性，求出两端所受约束力.

$$\left[\begin{array}{l}\text{平衡位置：}\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)\\ \text{约束力 }R_1=\frac{Mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\ R_2=\frac{Mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\end{array}\right]$$



4.7题图



4.8题图

4.8　一轴为水平，半径为 a 的固定粗糙圆柱顶上，置一边长为 $2l$ 的正方体，位置是对称的，求平衡位置 $\theta=0$的稳定性.

（$V=Mg(l\cos\theta+a\theta\sin\theta+a\cos\theta)$）

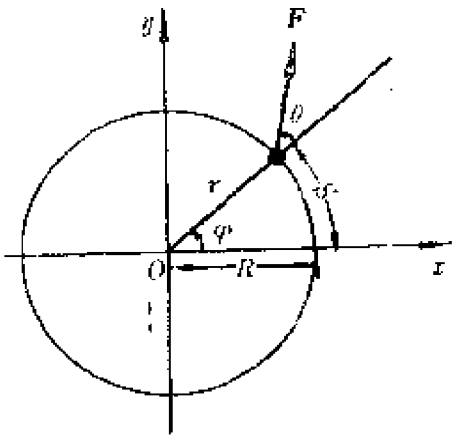
4.9　写出如下系统所受的广义力：

(1)质点被约束在半径为 R 的圆周上运动，在圆的平面上，有力 F 作用于质点.（可选 φ 或 s 为广义坐标）

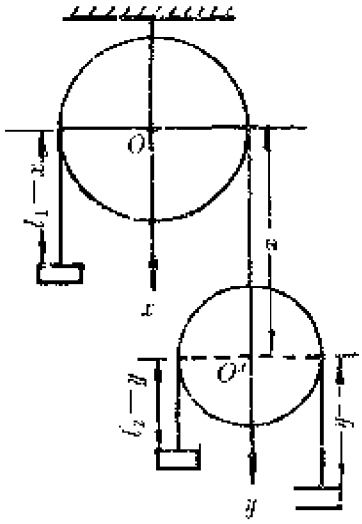
(2)阿特武德机（不计滑轮质量及摩擦力）.两不可伸长的轻绳分别长 l_1 和 l_2.（可选 x，y 为广义坐标）

(3)均质圆柱，质量为 m，从斜面上无滑动滚下，运动中受到恒阻力矩 N 的作用.（可选 l 为广义坐标）

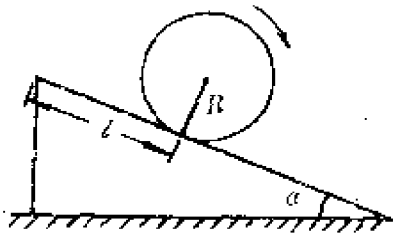
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com



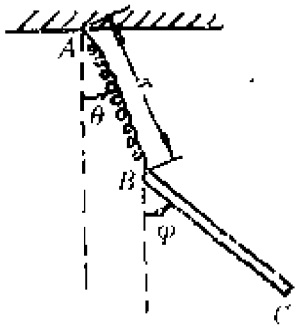
4.9题(1)图



4.9题(2)图



4.9题(3)图



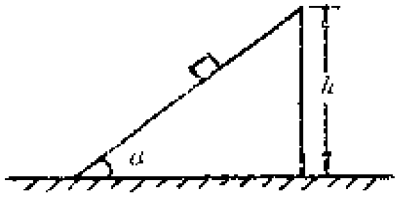
4.9题(4)图

(4)一细棒 BC，质量为 m，长为 $2a$，以轻弹簧 AB 悬于定点 A，弹簧自然长为 b，弹性系数为 k，设系统的运动限于竖直平面内.(可选 r，θ，φ 为广义坐标)

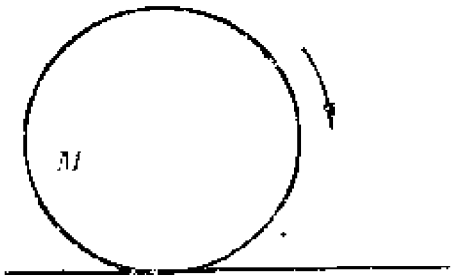
(5)一系统由质量分别为 M 和 m 的两质点组成，它们处在重力场中且彼此以沿连线方向的排斥力 $f(r)$ 相互作用，r 为两质点间的距离，以 x，y，z 表示决定系统质心的笛卡儿坐标，以 r，θ，φ 表示决定质点 m 相对于 M 位置的球坐标，令 Z 轴及极轴铅直向下.(选择 x，y，z，r，θ 和 φ 为广义坐标)

(6)一质点在均匀重力场中运动.(选球坐标 r，θ，φ 为广义坐标)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

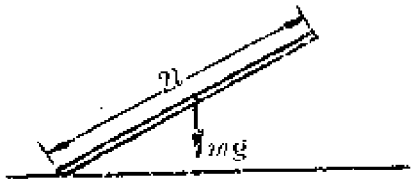


4.10题(1)图



4.10题(2)图

4.10　写出如下系统运动的拉格朗日函数.(要求分析约束,确定自由度,选好广义坐标,写出变换方程,写出拉氏函数).(设运动都是平面运动).



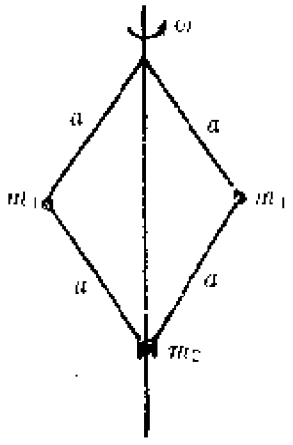
4.10题(3)图

(1)一小方块,质量为 m,在一质量为 M 的光滑斜劈上滑下,斜劈置于光滑水平面上.

(2)均质球在水平面上沿直线作纯滚动.

(3)均质杆在光滑平面上倒下.

(4)一节速器,四根杆质量不计,O 为定点,质点 m_2 可上下运动,整个系统以匀角速 ω 转动.



4.10题(4)图



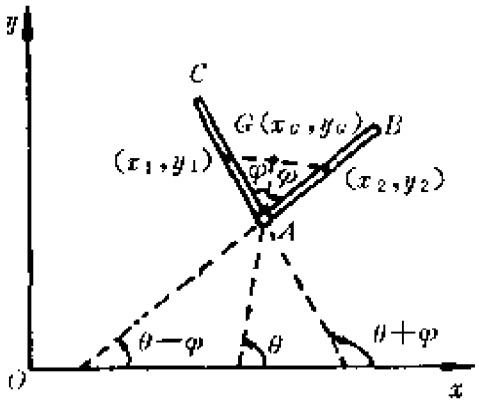
4.10题(5)图

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

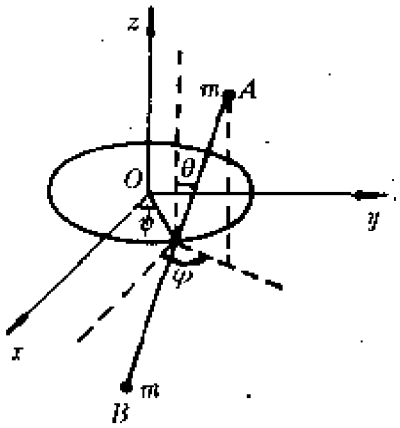
(5)弹性摆，弹簧自然长为 l，弹性系数为 k，摆锤质量为 m.

(6)长$2l$、质量为 M 的相同的两杆 AB 和 AC 在 A 点自由铰接，被投放到光滑水平面上运动.

$$\left(L=M\left[\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2+\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)l^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{1}{3}+\cos^2\varphi\right)l^2\dot{\varphi}^2\right]\right)$$



4.10题(6)图



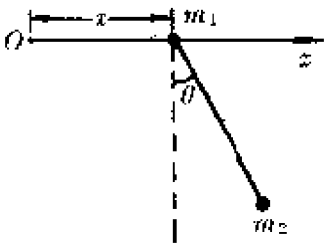
4.10题(7)图

(7)两个质量为 m 的质点由一长为 l 的轻杆连结，其中心被约束在一半径为 a 的圆周上运动.

$$\left(L=T=\frac{1}{2}(2m)(a\dot{\psi})^2+\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{l}{2}\right)^2[\dot{\theta}^2+(\sin\theta\cdot\dot{\psi})^2]\right)$$

(8)质点 m_1 可沿光滑水平直线运动，质点 m_2 以长 l 的绳系于 m_1，作成单摆，在直线所在的铅垂面内摆动.

$$\left(L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)+m_2g\cos\theta\right)$$



4.10题(8)图

(9)一质量为 m 的单摆，其悬挂点：

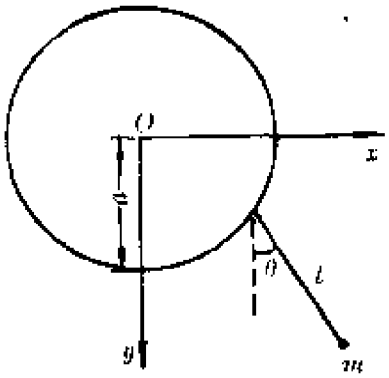
(a)以常角速度 ω 沿一竖直圆周匀速运动.

(b)按 $x=a\cos\omega t$ 的规律在摆的运动平面内水平地振动.

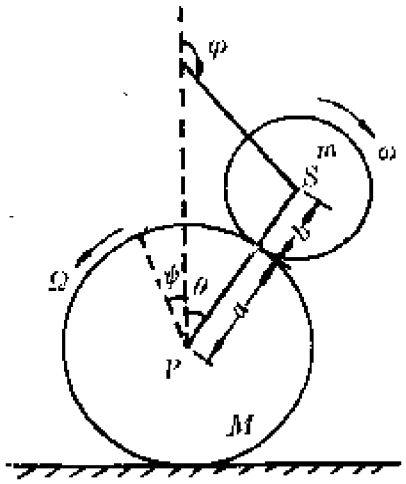
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(c)按规律 $y=a\cos\omega t$ 铅垂地振动.

$$\begin{cases}\text{(a)}\quad L=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+mla\omega^2\sin(\theta-\omega t)+mgl\cos\theta\\ \text{(b)}\quad L=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+ml\omega^2\cos\omega t\sin\theta+mgl\cos\theta\\ \text{(c)}\quad L=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+mla\omega^2\cos\omega t\cos\theta+mgl\cos\theta\end{cases}$$



4.10题(9)图



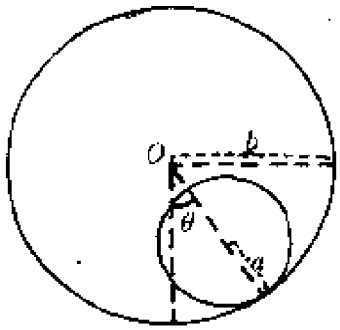
4.10题(10)图

(10)一圆柱体 S，在另一圆柱体 P 上纯滚动，而 P 在水平面上作纯滚动.

$$\begin{cases}L=\frac{1}{2}m[(a+b)^2\dot\theta^2+a^2\dot\psi^2-2a\dot\psi\dot\theta(a+b)\cos\theta]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mb^2\right)\dot\psi^2\\ +\frac{1}{2}M\left(a^2+\frac{1}{2}a^2\right)\dot\psi^2+mg(a+b)(1-\cos\theta)\end{cases}$$

(11)一半径为 a，质量为 m 的均质圆盘，在半径为 b 的固定圆筒内表面作纯滚动.

$$\left(L=\frac{3}{4}m(b-a)^2\dot\theta^2-mg[b(1-\cos\theta)+a\cos\theta]\right)$$



4.10题(11)图

4.11 用拉氏方程求自由质点在圆柱坐标系中的运动微分方程.

$$(m(\ddot\rho-\rho\dot\theta^2)=F_\rho,\ m(\rho\ddot\theta+2\dot\rho\dot\theta)=F_\theta,\ m\ddot z=F_z)$$

4.12 AB 为一光滑金属线，A 点

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

固定，OA 为铅垂线，AB 绕 OA 以恒定角速度 ω 旋转，并保持夹角 α 不变．一小环质量为 m，约束在 AB 上运动．如开始时小环恰在 A 点，AB 长为 l，求经多长时间，小环能到达 B 端？

$$\left(t=\frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left(1+\frac{l\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\alpha}+\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right)^2-1}\right)\right)$$

4.13　一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动．管中有一质量为 m 的质点．开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为 a，质点相对于管的速度为 v_0，试由拉格朗日方程求质点相对于管的运动规律．

$$\left\{x=\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{v_0}{\omega}\right)-\frac{g}{4\omega^2}\right]e^{\omega t}+\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{v_0}{\omega}\right)+\frac{g}{4\omega^2}\right]e^{-\omega t}\right.$$
$$\left.+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\text{（取管轴为 }x\text{ 轴）}\right\}$$

4.14　设有一质点在光滑平面 O-xy 上运动，而此平面又绕过 O 点垂直于平面的 z 轴转动，转动角速度为 ω，质点的质量为 m，其受到的力为保守力，试列出质点相对于转动平面的微分方程，并求出第一积分．

$$\left\{m\ddot{x}=2m\omega\dot{y}+m\omega^2x-\frac{\partial V}{\partial x},\ m\ddot{y}=-2m\omega\dot{x}+m\omega^2y-\frac{\partial V}{\partial y};\right.$$
$$\left.T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)+V=\text{常数}\right\}$$

4.15　一带孔小球，质量为 m，套在一光滑的抛物线 $y=x^2$ 型的金属线上，重力沿 y 方向作用，金属线所在平面以常角速度 ω 绕 y 轴转动．$t=0$ 时，小球在点 $x=a$，$y=a^2$ 处，而在 y 方向没有运动，求决定 x 作为时间函数的微分方程式．

$$((1+4x^2)\ddot{x}+4x\dot{x}^2+(2g-\omega^2)x=0)$$

4.16　一小环，质量为 m，可自由地在一光滑螺旋线上滑动，螺旋线的柱坐标方程为 $\rho=a$，$z=b\varphi$，重力作用于正 z 方向．在 $t=0$ 时，小环由静止自点 $\rho=a$，$\varphi=0$，$z=0$ 释放，求 z 作为时间的函数．

$$\left(z=[gb^2/(a^2+b^2)]t^2/2\right)$$

4.17　一小环套在一光滑的半径为 a 的竖直大圆环上，此

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

大环以匀角速度 ω 绕其铅直直径转动，求小环的运动微分方程.

$$\left(\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta+\frac{g}{a}\sin\theta=0\right)$$

4.18 均质棒 AB，质量为 m，长为 $2a$，其 A 端可在光滑水平导槽上运动，而棒本身又可在竖直面内绕 A 端摆动. 如除重力作用外，B 端还受有一水平的力 F 的作用，试用拉格朗日方程求其运动微分方程. 如摆动的角度很小，则又如何？

$$\left(\begin{array}{l} m(\ddot{x}+a\ddot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta)=F \\ m[a\ddot{x}\cos\theta+(a^2+k^2)\ddot{\theta}]=2Fa\cos\theta-mga\sin\theta \end{array}\right.$$

如 θ 很小，则

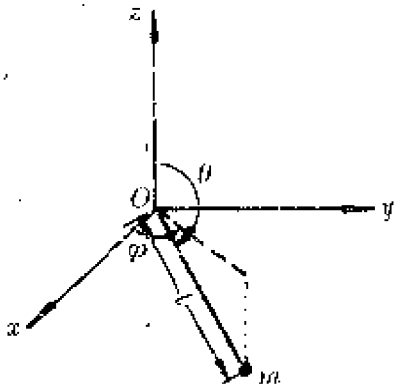
$$\ddot{x}+a\ddot{\theta}=F/m$$

$$\ddot{x}+4/3a\ddot{\theta}+g\theta=2F/m$$

式中 x 为任一瞬时 A 离定点 O 的距离，θ 为任一瞬时棒与竖直线间所成的角度，k 为棒绕质心的回转半径.）

4.19 试求球面摆的拉格朗日运动方程(球面摆是由无重量刚性杆悬挂起来的质点).

$$\left(\begin{array}{l} ml^2\ddot{\theta}-ml^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-mgl\sin\theta=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi})=0 \end{array}\right)$$



4.19题图

4.20 证明拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}mv^2-q\varphi+qv\cdot A$$

产生电磁场中带电粒子的正确的运动微分方程式，即

$$m\ddot{r}=q(E+v\times B)$$

其中 $E=-\nabla\varphi$，$B=\nabla\times A$，（向量 A 称为向量势，而标量 φ 称为标量势.）

4.21 用拉格朗日方程重解例题2.7.

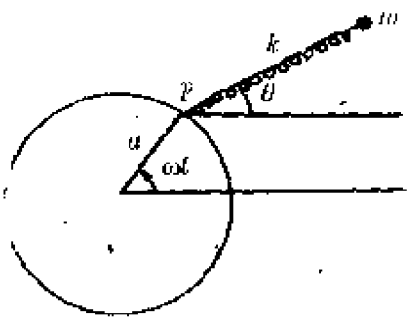
4.22 一木板重 p，放在两个圆柱上，每个圆柱重为 Q，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

今以一水平力 F 推此木板，试求此木板的加速度. 设圆柱与板、及地面的接触为粗糙的.

$$\left(a=\frac{Fg}{p+\frac{3}{4}Q}\right)$$

4.23 质量为 m 的质点，由无质量弹簧系于 p 点，p 点则以匀角速度 ω 沿半径为 a 的圆路经运动. 设弹簧的弹性系数为 k，自然长为 r_0，质点是在水平面上无摩擦地运动，试求出系统的运动微分方程式.



4.23题图

$$\begin{cases} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\omega^2\cos(\theta-\omega t) \\ \quad +k(r-r_0)=0 \\ mr\ddot{\theta}+2m\dot{r}\dot{\theta}+mr\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0 \end{cases}$$

4.24 质量为 M、半径为 a 的薄球壳，其外表面是完全粗糙的，内表面则完全光滑，放在粗糙水平桌上，在球壳内放一质量为 m，长为 $2a\sin\alpha$ 的均质棒. 设此系统由静止开始运动，且在开始的瞬间，棒在通过球心的竖直平面内，两端都与球壳相接触，并与水平成 β 角，试用拉格朗日方程证明在以后的运动中，此棒与水平线所夹的角 θ 满足关系

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2$$
$$=6g(5M+3)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

4.25 一个系统，由质量均为 m 的三个质点组成，其中任何两个质点之间存在的力可以从势 $V=-ge^{-r^2}$ 推得，此处 r 是两个质点间的距离. 另外两个质点都对第三个质点施加一力，它们可以从下列形式的广义势推得：

$$U=-f\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$$

此处 $\boldsymbol{v}$ 是相互作用着的那些质点的相对速度，而 f 为一常数，试用质心的位置向量 R 及下述两个向量

$$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

建立系统的拉氏函数，试问系统的总动量守恒吗？

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left\{\left[\dot{R}+\frac{1}{3}(2\dot{s}_1-\dot{s}_2)\right]^2\right. \\
&\quad \left.+\left[\dot{R}+\frac{1}{3}(2\dot{s}_2-\dot{s}_1)\right]^2+\left[\dot{R}-\frac{1}{3}(\dot{s}_1+\dot{s}_2)\right]^2\right\} \\
&= \frac{3}{m}(\dot{R})^2+\frac{1}{3}[(\dot{s}_1)^2+(\dot{s}_2)^2-\dot{s}_1\cdot\dot{s}_2] \\
V &= -g(e^{\mu|s_1-s_2|}+e^{-\mu s_1}+e^{-\mu s_2}) \\
&\quad -f[(\dot{s}_1-\dot{s}_2)\cdot(s_1\cdot s_2)+\dot{s}_1\cdot s_1+\dot{s}_2\cdot s_2] \\
L &= T-V
\end{aligned}
$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第五章　中　心　力

§5.1　引　　言

中心力是物理学和力学中一种十分重要的力，也是迄今为止人们认识得最清楚的力之一．狭义的中心力通常是指这样的力：它总是指向或离开一固定中心，而它的大小只是受力物体到这一固定中心距离的函数．这一固定中心称为力心，物体在中心力作用下的运动，称为中心力运动．

历史上，人类对自然界认识的两次巨大飞跃，是和中心力的研究相联系的．一次，是在宏观尺度上，对天体运动规律的研究．1689 年，牛顿在答复哲学家洛克的一封信中，说明了如何从观测到的行星的椭圆轨道推导出反平方律，从而导出了万有引力定律，使人们认识了天体运动的规律，并为现代的宇宙航行奠定了理论基础．另一次，是在微观尺度上，对带电粒子被重原子核散射的研究．1910 年卢瑟福(Rutherford)及其学生盖革(Geiger)和马斯登(Marsden)作了二十世纪最著名的实验之一——卢瑟福散射实验，它确立了原子的有核模型，使人们第一次对亚原子世界形成了较为清晰的图象，从而打开了微观世界的大门．在今天，万有引力定律仍然是研究行星、彗星、双星、卫星等天体运动规律的基本依据．在微观世界，尽管经典力学不再适用，但中心力问题仍占有特别重要的地位，几种重要的中心力场——库仑场、万有引力场、各向同性谐振子场等问题，仍然是量子力学中能精确求解的少数问题中的几个．

如果一个系统由两个物体组成，该二物体仅在沿其中心连线的相互作用力作用下运动，这种力也称为中心力，或广义中

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

心力，系统的运动也称为中心力运动.

中心力可以表示为

$$F(r)=f(r)\frac{r}{r}=f(r)e_r \tag{5.1}$$

e_r 是 r 的单位向量，r 是由力心引向受力物体中心的位置向量。如 $f(r)>0$，F 为排斥力；如 $f(r)<0$，F 为吸引力。容易证明，对(5.1)形式的中心力，恒有 $\nabla\times F(r)\equiv 0$，所以中心力是保守力，可以引入势函数

$$V(r)=-\int_{r_0}^{r}f(r)\mathrm{d}r \tag{5.2}$$

通常选 $r=\infty$ 为势能零点，势能值为

$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}f(r)\mathrm{d}r \tag{5.3}$$

§5.2 二体问题约化为单体问题

力学中能够得到严格解的一种极其重要的问题，是所谓二体问题。考虑由两个质点 m_1，m_2 组成的系统，两质点仅在相互作用势能为 V 的力作用下运动，系统的自由度 $f=6$. 解决二体问题的第一步，是证明能够把系统的运动分成质心的运动和相对于质心的运动. 如图 5.1 所示. 设质点的位置向量分别为 r_1 和 r_2，确定系统的位形可以用 r_1 和 r_2 的六个分量，也可以用质心位置向量 r_c 的三个分

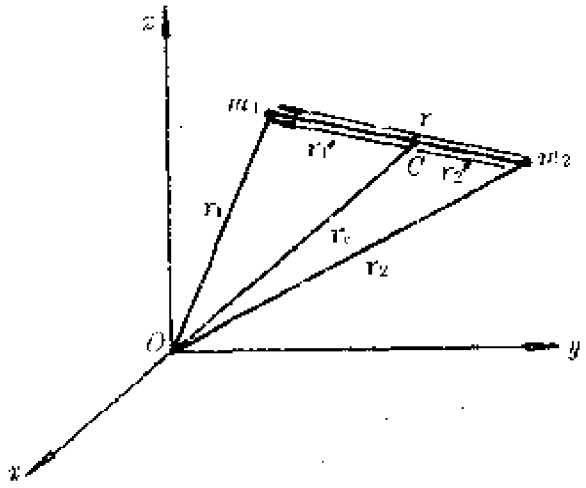


图 5.1

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

量与 $r=r_1-r_2$ 的三个分量. 设系统为保守的，且势能仅为 $r=|r_1-r_2|$(即两质点相互距离)的函数，系统的拉氏函数为

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2-V(r) \tag{5.4}$$

因为我们常常关心的是质点间相对运动的轨道，体系不受外力作用，质心惯心运动，质点的整体平移并不重要，我们可以把坐标系的原点选在系统质心上，即令 $r_c=0$，由质点系的克尼希定理

$$T=T_c+T'$$

$T_c=0$，则

$$\begin{aligned}L&=T'-V(r)\\&=\frac{1}{2}m_1\dot{r}'^2_1+\frac{1}{2}m_2\dot{r}'^2_2-V(r)\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中

$$r'_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}r,\quad r'_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}r \tag{5.6}$$

代入(5.5)得

$$L=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{r}^2-V(r)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2-V(r) \tag{5.7}$$

式中 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 称为折合质量.

于是，我们将两体问题化成了等效的单体问题，即两个质点的运动，形式上等同于一个质量为 μ 的质点，在 $V(r)$ 表示的中心力场中运动，质点对“固定”力心的位置为 r。将上述拉氏函数代进拉氏方程，解出 $r(t)$，再由(5.6)，就可求出每个质点的运动方程 $r'_1(t)$，$r'_2(t)$。如果我们只关心相对运动，这后面的步骤并不是必要的. 如上所述，二体问题可以只当作单体问题处理，即广义中心力问题可以当作狭义中心力处理，但这里代替单个质点质量 m 的是折合质量 μ，r 代表的是 m_1 对 m_2 的相对位置向量.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§5.3 中心力场中的运动

一、守恒定律——运动第一积分

(一)角动量守恒定律

由质点运动的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{N}$$

而中心力场中，$\boldsymbol{F}(r)=f(r)\boldsymbol{e}_r$，故

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}(r)=f(r)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}_r=0 \tag{5.8}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=0,\ \boldsymbol{L}=\text{常数} \tag{5.9}$$

即质点在中心力作用下，角动量守恒.

因 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{L}\perp\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{L}\perp\boldsymbol{v}$，而 $\boldsymbol{L}$ 方向始终不变，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$只能保持在通过原点 O 与 $\boldsymbol{L}$ 垂直的平面内，所以中心力运动只能是平面运动.

用平面极坐标表示，质点的拉氏函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r) \tag{5.10}$$

θ 是循环坐标，因此

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=l(\text{常数}) \tag{5.11}$$

l 是作中心力运动的质点对力心 O 的角动量的量值.

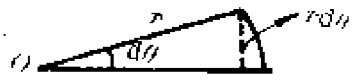


图 5.2

取运动轨道上一段元弧长，如图 5.2 所示. 小三角形的面积元为

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}r\cdot r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

面积的时间微商即面积速度为

$$\dot{A}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

如果取 $h=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{r}\times(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)|=|\boldsymbol{r}\times r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)|$，速度矩 $h=r^2\dot{\theta}=2\dot{A}$，等于面积速度的二倍，即位置向量 r 在单位时间内扫过的面积的 2 倍.

由(5.11)，速度矩 $h=\frac{l}{m}$，为单位质量的角动量，角动量单位常数

$$r^2\dot{\theta}=h$$

的形式. 速度矩 h，可由特定时刻，如初始时刻的位置和速度确定，即

$$h=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{v}_0|=r_0v_0\sin\alpha_0$$

角动量守恒，因而速度矩守恒，面积速度也守恒，这是中心力运动的普遍性质.

(二)能量守恒定律

因为中心力是保守力，中心力运动中应有机械能守恒，即

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=\text{常量}\qquad(5.13)$$

与角动量守恒式结合起来，即将 $l=mr^2\dot{\theta}$ 代入上式，机械能守恒又可表为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)=\text{常量}\qquad(5.14)$$

因为我们通常不关心二体系质心的运动，即整体的静止或匀速直线运动，所以动量守恒定律在这里没有重要意义.

二、运动方程·轨道方程

上面，我们已经找到了 r，θ 的微分方程的两个第一积分，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

它们是 r，θ 的一阶微分方程，即式(5.11)和(5.13)(或(5.14))．下面我们来求另外两个积分——它们的第二积分，即运动方程式．

由(5.14)式，得

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}\left(E-V(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

$$dt=\pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \tag{5.15}$$

令 $t=0$ 时，$r=r_0$

$$t=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \tag{5.16}$$

由此求得

$$t=t(r;\ E,\ l,\ r_0)$$

反求出(或至少形式上可以表示成)

$$r=r(t,\ E,\ l,\ r_0)=r(t) \tag{5.17}$$

再由 $l=mr^2\dot{\theta}$ 得

$$d\theta=\frac{l}{mr^2}dt$$

$$\theta=l\int_0^t\frac{dt}{mr^2(t)}+\theta_0=\theta(t) \tag{5.18}$$

(5.17)和(5.18)式即运动方程式，它们是微分方程的第二次积分，内含 4 个积分常数：E，l，r_0 和 θ_0，事实上，积分常数也可以是 r_0、θ_0，$\dot{r}_0$ 和 $\dot{\theta}_0$，因为给出了这组常数，也就可以决定 E 和 l 了。在经典力这中，动力学参数 E，l 和运动学参数 r_0，θ_0，$\dot{r}_0$ 和 $\dot{\theta}_0$ 都可以取为积分常数，但在量子力学中，质点原有的轨道概念已不再适用，r_0，θ_0，$\dot{r}_0$，$\dot{\theta}_0$ 这样的初值已没有意义，而 E，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

l 却照常有效.

将能量积分和角动量积分的结果(5.15)和(5.18)结合起来，得

$$\theta=\theta'_0+\int_{r_0}^{r}\frac{\frac{l}{mr^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right]}}$$

$$=\theta'_0+\int_{r_0}^{r}\frac{\left(\frac{l}{r^2}\right)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left[E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right]}}=\theta(r)\qquad(5.19)$$

即为轨道方程，反解之可求出 $r=r(\theta)$。

三、轨道微分方程(比内公式)

由角动量积分，$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}$，令 $u=\frac{1}{r}$，则

$$\dot{\theta}=hu^2$$

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=-h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$=-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\qquad(5.20)$$

代入径向微分方程 $m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r)$ 得

$$m\left(-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}-h^2u^3\right)=F\left(\frac{1}{u}\right)$$

即

$$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=F\left(\frac{1}{u}\right)\qquad(5.21)$$

此式即为轨道微分方程，又称比内(Binet)公式. 由公式的表达

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

形式知，如果已知中心力具体形式 $F(r)$ 即 $F\left(\frac{1}{u}\right)$，可由此方程解出 $r=r(\theta)$，反之，如果已知轨道方程 $r=r(\theta)$，也可由此方程求出中心力 $F(r)$.

把能量积分的表达式改变形式，即将 $\dot{r}=-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ 和 $u=\frac{1}{r}$ 代入能量积分式

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{l^2}{2mr^2}+V=E$$

得

$$\frac{1}{2}mh^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{m^2h^2}{2m}u^2+V=E$$

即

$$\frac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2\right]+V=E \tag{5.22}$$

此式称为降阶的比内公式. 由公式表达式看出，如已知中心力 $F(r)$，则势能 $V(r)$ 可求，代入(5.22)式可解出轨道方程 $r=r(\theta)$；反之，如已知轨道方程 $r=r(\theta)$，代入(5.22)式即可求出 $V(r)$，进而求出中心力 $F(r)$.

四、等效的一维问题·有效势能与轨道分类

由径向运动微分方程

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r)$$

和角动量守恒 $mr^2\dot{\theta}=l$ 得

$$m\ddot{r}=\frac{l^2}{mr^3}+f(r) \tag{5.23}$$

此方程中已不显含 θ，横向的运动已隐含在 l 中了，方程中只出现 r 及其时间微商，它是 r 满足的运动微分方程，二维问题转变成了等效的一维问题。当然，这并不意味着我们把实际的二维运动真的变成了一维运动，而是表示可以单独求解径向运动，然后再考虑 r 在轨道平面内按 $\theta(t)$ 的转动. 令 $f_{\mathrm{eff}}(r)\equiv f$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$(r)+\frac{l^2}{mr^3}$，称为有效力，式中$\frac{l^2}{mr^3}=mr\dot{\theta}^2$是惯性离心力，是由于我们引入了动轴坐标系——平面极坐标系而出现的惯性力.将(5.24)写作

$$m\dot{r}\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}-\frac{l^2}{mr^3}-f(r)=0$$

对r积分，得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)=E \qquad (5.24)$$

这正是我们从中心力是保守力的性质得到的能量积分，式中$\frac{l^2}{2mr^2}$项称为离心势能。它实际上是动能的一部分，即横向运动的动能$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$，因为它只是$r$的函数，与$\dot{r}$无关，性质上与势能相似，故称为离心势能. 有效势能$V_{eff}=\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)$，是假想的势能. 是由真实的势能和离心势能两部分组成的. 方程(5.24)描述的是只受一中心力(它是保守力)作用的质点的一维运动，有效势能V_{eff}的引入，使我们能把径向运动作为独立的一维问题来处理，这是解决中心力问题的一个关键。如前所述，这样做并未改变中心力运动的二维性质，要完全地描述运动，需要在求出$r(t)$之后，再求出$\theta(t)$，才能还原成物体的真实运动.

有了有效势能的概念，我们就可以用能量图的方法对中心力运动作许多定性的然而是很有价值的分析，得出关于其运动的一般特征的重要结论.

首先，根据中心力的不同，势能曲线可以分成排斥性的或吸引性的势能曲线.

排斥性的势能，例如α粒子(氦原子核)He^{2+}被一重原子(如金)的原子核散射，而发生轨道偏转. 由于两粒子电荷同号，库仑力是排斥力，势能是排斥性的正势能$\frac{kq_1q_2}{r}$，以V_+表

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

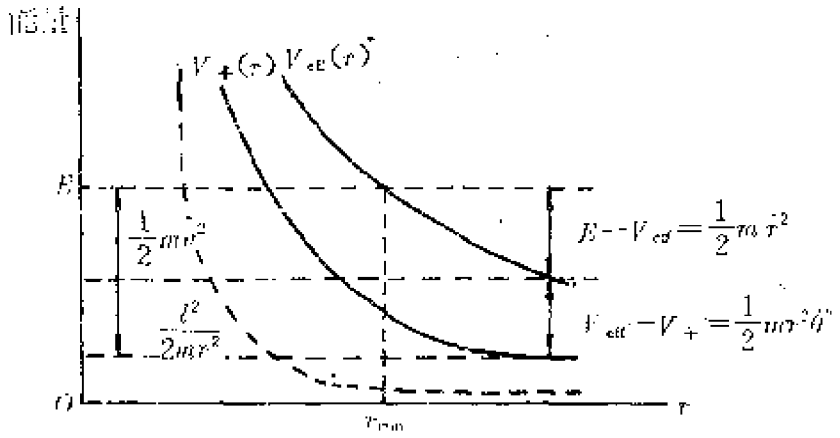


图 5.3

示，如图 5.3 所示。离心势能$\frac{l^2}{2mr^2}$也为正值，因

$$V_{eff}=\frac{kq_1q_2}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}\qquad(k>0)$$

有效势能V_{eff}总为正值.

吸引性的势能，如彗星经过太阳附近轨道发生偏转的情形，势能为负值，以V_-表示，$V_-=-\frac{GMm}{r}$<0. 离心势能$\frac{l^2}{2mr^2}>0$，有效势能

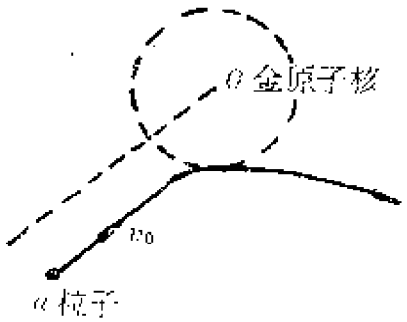


图 5.4

$$V_{eff}=-\frac{GMm}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}\qquad(5.25)$$

即使V_-随r单调变化，V_{eff}也不再随r单调变化了，如图 5.5 所示.

由有效势能的定义

$$V_{eff}(r)=\frac{l^2}{2mr^2}+V(r)$$

知，无论对排斥性或吸引性的势能，有效势能不仅与势能$V(r)$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

有关，还与角动量 l 有关，图 5.3 和图 5.5 画出有效势能曲线，是对特定的 l 画出的，如 l 不同，V_{eff} 曲线也不同，因为 $\frac{l^2}{2mr^2}$ 不

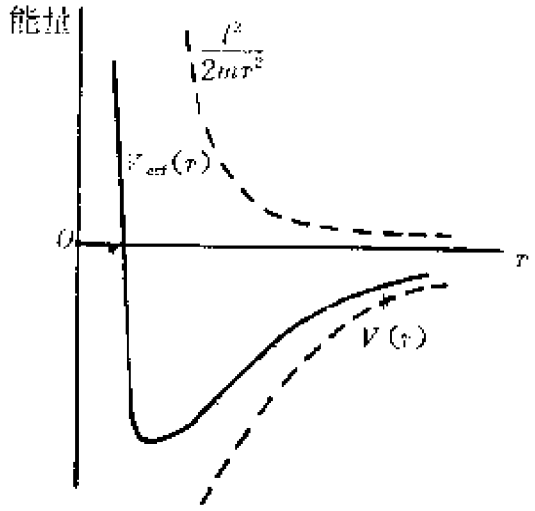


图 5.5

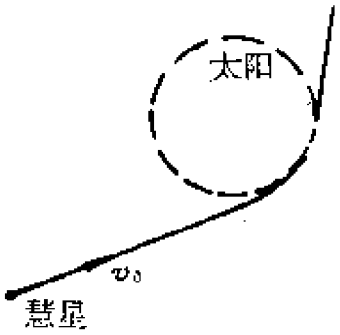


图 5.6

同了．对于同一势能 $V(r)$，存在着 l 不同的一族 V_{eff} 曲线，如图 5.7 和图 5.8 所示．

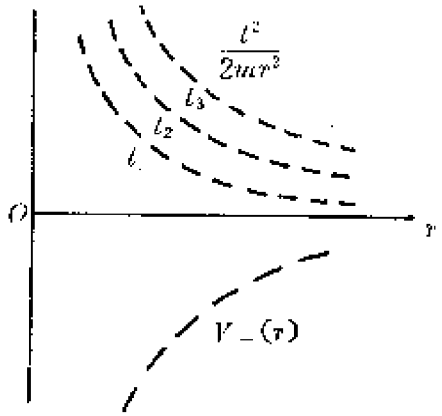


图 5.7

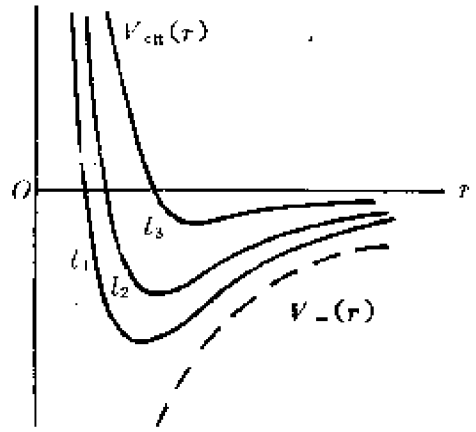


图 5.8

在排斥性势能的情形下，假设势能单调地随 r 增大而减少，如图 5.3 所示那样．一个总能量为 E，从无限远而来的质

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

点，到了r_{min}处便不会再靠近力心，因为在r_{min}的左侧任意r处，V_{eff}之值大于E之值，$\frac{1}{2}m\dot{r}^2=E-V_{eff}<0$，$\dot{r}$为虚数，这在物理上是不能实现的，即质点在$r_{min}$碰到了相斥离心势垒而被迫返回到无限远处。$r$没有上限，即不会有有界的运动，在最近点$r_{min}$处，$\frac{1}{2}m\dot{r}^2=0$，因而径向速度$\dot{r}=0$，这一点称为拱点(或转向点)．由有效势能曲线(图 5.3)还可以看出，$E-V_{eff}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2$，$V_{eff}-V_+=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$，一旦给出了势能$V_+$和有效势能$V_{eff}$曲线，(这意味着给定了势能和角动量)，给定了质点的总能量，便可根据能量图给出质点在任何距离r处的速度量值和速度分量的大小.

关于吸引性势能的情形，仍以万有引力(吸引性反平方力)为例，其典型有效势能曲线如图 5.9 所示．当$E=E_1>0$时，质点只能从无限远来到转向点r_1处返回到无限远．因拱点处$\frac{1}{2}m\dot{r}^2=0$，满足方程$E-V_{eff}(r)=0$的只有一个实根r_1，$r_1\leqslant r<\infty$，轨道无界.

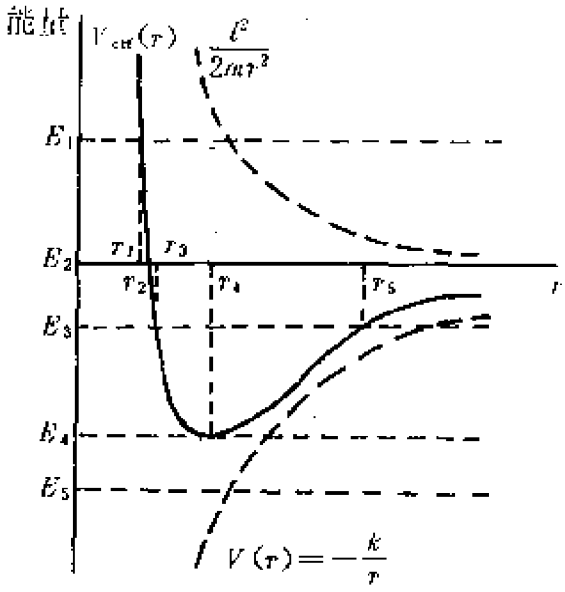


图 5.9

当$E=E_2=0$时，$E-V_{eff}(r)=0$只有一个实根r_2，与$E=E_1$情形相似，$r_2\leqslant r<\infty$，轨道无界.

当$E=E_3<0$时，$E-V_{eff}(r)=0$有两个不等实根r_3，r_5，质点运动的范围$r_3\leqslant r\leqslant r_5$，即限制在$r_3$，$r_5$之间的环状区域中往

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

返，轨道有界.

当 $E=E_4=V_{\text{effmin}}(r)$时，$E-V_{\text{eff}}(r)=0$ 有两实重根 r_4，且质点只能保持在 $r=r_4$，因为任何对此点的偏离都会导致 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ 为负，即 $\dot{r}$ 为虚数. 这就是说 r 是常数，因而轨道是圆形的.

当 $E<V_{\text{eff}}(r)$时，要求 $\frac{1}{2}m\dot{r}^2<0$，物理上不能实现.

在排斥性势能(正势能)的情形下，如果势能单调地随 r 增大而减小，轨道无界；当势能并不随 r 增大而减小时，仍可能有有界的(束缚的)轨道，例如三维各向同性谐振子的情形.

$$f(r)=-kr,\ V(r)=\frac{1}{2}kr^2$$

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{l^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2$$

有效势能曲线如图 5.10 所示，由图可见：

当 $E>V_{\text{effmin}}(r)$时，运动发生在 $E-V_{\text{eff}}=0$ 所决定的两个拱点 r_1 和 r_2 之间，是有界的. 可以证明，这运动轨道是椭圆. 当 $E=V_{\text{effmin}}$时 $r=r_0$，轨道是圆.

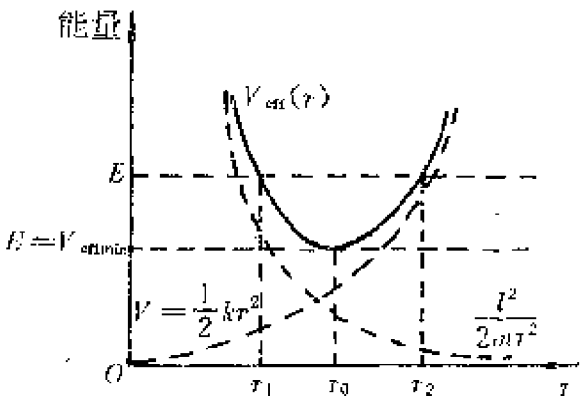


图 5.10

在吸引性势能(负势能)的情形下，轨道一般分为开放、有界和圆形的，类似反平方吸引力所表明的那样. 但这也是有条件的，即吸引性势能当 $r\to\infty$时比 $1/r^2$ 减小得更慢，$r\to 0$ 时比 $1/r^2$ 更慢地趋向无限大，如果不满足这样的条件，轨道的性质就会与典型有效势能曲线所代表的情形有所不同. 如 $V(r)=-\frac{k}{r^3}$，当 $r\to\infty$时，比 $1/r^2$ 更快地减小，而 $r\to 0$ 时，比 $1/r^2$ 更快地趋向无限大，如图 5.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

11 所示.

当 $0<E<V_{\text{effmax}}$ 时，运动可以发生在两个区域：

$$0 \leqslant r \leqslant r_1,\ r_2 \leqslant r < \infty$$

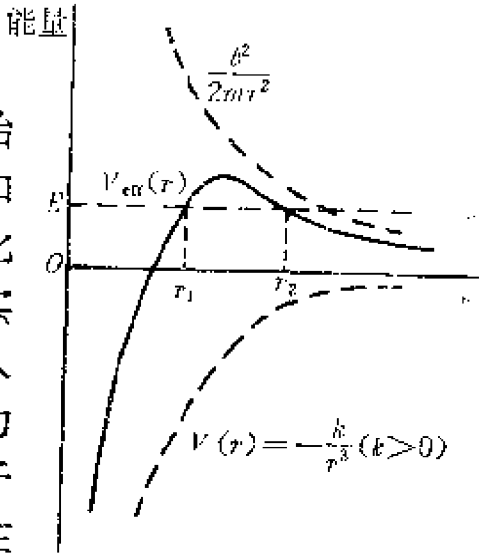


图 5.11

前者轨道是有界的，(如果 r 的初始值 $r_0 \leqslant r_1$ 的话)，后者是无界的，(如果初始条件 $r_2 \leqslant r_0 < \infty$，质点将在此区域内运动)，$r_1<r_0<r_2$ 是不可能实现的，质点也不可能从一个区域进入另一个区域，即 r_1，r_2 之间是经典力学的禁区。然而在量子力学中，粒子能穿透比它的动能高的势垒，即存在所谓隧道效应，上述两种运动状态的跃迁能以一定的几率出现，尽管在宏观实验中这不易观察到，但在微观领域中却是不可忽视的和重要的.

需要指出的是，轨道有界并不一定是闭合的，中心力运动是平面运动，如果质点的运动是周期的，轨道可能闭合；如果质点在两个拱点之间往返有限次数后，不能完全重复原来的运动，则轨道是非闭合的或称开口的. 质点作周期运动时，因运动是二维的，运动表现为两个周期运动的迭加，即：一方面，径向的周期运动，介于两个拱点 $r_{\min}$，$r_{\max}$ 之间，周期为 T_r，另一方面，质点位置向量作周期性转动，周期为 T_θ，如果 T_r 和 T_θ 可以通约，即 $\frac{T_r}{T_\theta}=\frac{m}{n}$ (m，n 为自然数)，则经过 T_r，T_θ 的最小公倍数那样长的时间后，轨道将闭合，否则，轨道将永远不会闭合. 由(5.19)式知，质点的径向运动完成一个周期时，位置向量转过的角度为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(l/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E - V - \dfrac{l^2}{2mr^2}\right)}} \qquad (5.26)$$

式中有因子 2，是因为径向运动的一个完整周期应当是从 $r_{min}\to r_{max}\to r_{min}$，由对称性，在此期间内 $\Delta\theta$ 的值应为 $r_{min}\to r_{max}$ 期间角度变化的 2 倍. 轨道闭合的条件可以表为

$$\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{m}{n}\right) \qquad (m, n \text{ 为自然数})$$

可以证明，对于乘方律中心力

$$V(r) \propto r^{n+1}$$

仅当 $n=-2, 1$ 时才可能有非圆的闭合轨道，它们分别对应于两种非常重要的情形，即反平方力和遵从胡克定律的弹性力，n 取某些分数时，也可能存在非圆的闭合轨道.

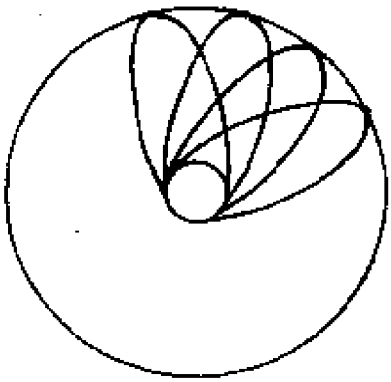


图 5.12

非闭合的有界轨道，如图(5.12)所示的那样，在环形区域 $r_{min}\leftrightarrow r_{max}$ 之间往复振荡，逐渐弥漫于整个环形区域.

§5.4 开普勒问题·反平方力

通常把万有引力作用下行星及其它天体运动的轨道问题称为开普勒问题。万有引力是反平方吸引力，异号电荷之间的库仑静电力也是反平方吸引力，同号电荷之间的库仑静电力则是反平方排斥力，反平方力可以统一表为

$$F = -\frac{k}{r^2}e_r \qquad \begin{matrix} k>0 & \text{吸引力} \\ k<0 & \text{排斥力} \end{matrix} \qquad (5.27)$$

下面先讨论开普勒问题的轨道方程和轨道分类.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由中心力场一般轨道方程(5.19)式

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

令 $u=\frac{1}{r}$，代入上式，得

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{l\mathrm{d}u}{\sqrt{2m\left(E - V - \frac{l^2}{2m}u^2\right)}}$$

$$= \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}$$

引力势能 $V(r)=-ku$，

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk}{l^2}u - u^2}}$$

右式的积分可按如下公式计算：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\arccos\left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{q}}\right),\ q = b^2 - 4ac,\ c < 0$$

令 $a=\frac{2mE}{l^2}$，$b=\frac{2mk}{l^2}$，$c=-1$，则

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 + 4 \times \frac{2mE}{l^2} = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2\left[1 + \frac{2l^2E}{mk^2}\right]$$

$$\theta = \theta_0 - \arccos\left\{-\frac{\frac{2mk}{l^2} - 2u}{\left(\frac{2mk}{l^2}\right)\left[1 + \frac{2l^2E}{mk^2}\right]^{1/2}}\right\}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\cos(\theta-\theta_0)=-\frac{\frac{2mk}{l^2}-2u}{\left(\frac{2mk}{l^2}\right)\left[1+\frac{2l^2E}{mk^2}\right]^{1/2}}=\frac{\frac{l^2}{mk}\frac{1}{r}-1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}}$$

令

$$p=\frac{l^2}{mk},\ \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}} \tag{5.28}$$

则

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}$$

将极轴转一角度使 $\theta_0=0$，得

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \tag{5.29}$$

这是以极点为焦点的圆锥曲线的标准方程，此极点也是力心，p 是圆锥曲线的半正焦弦；ε 是偏心率，它由动力学参数 E 和 l 共同决定.

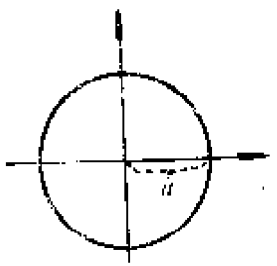
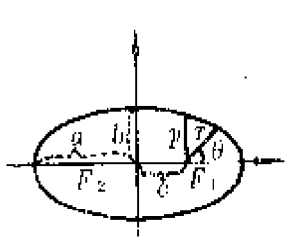
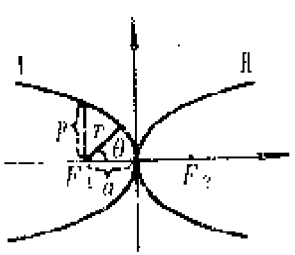
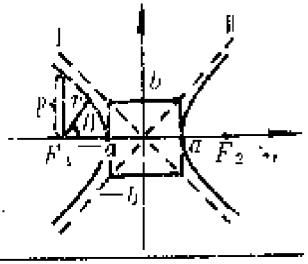
表 5.1　开普勒问题的轨道类型

总　能　量	偏　心　率	轨　道　类　型
$E>0$	$\varepsilon>1$	双曲线(无界)
$E=0$	$\varepsilon=1$	抛物线(无界)
$-\frac{mk^2}{2l^2}<E<0$	$0<\varepsilon<1$	椭圆(有界)
$E=-\frac{mk^2}{2l^2}$	$\varepsilon=0$	圆(有界)

由偏心率的表达式 $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}$ 知，开普勒问题中总能量和偏心率及轨道类型有如表 5.1 所示关系. 关于圆锥曲线的类型和性质，在解析几何中有详细介绍，为引用方便，这里将主要结论及其与动力学参数的关系，详列于表 5.2 中. 表 5.1 中各情形，已在反平方力有效势能曲线图 5.9 中显示出来. 例如对反平

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

表 5-2　反平方力场中的轨道

轨道曲线图					
轨道方程	笛卡儿坐标	$x^2+y^2=a^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=\begin{cases}-4px & (\text{I})\\ +4px & (\text{II})\end{cases}$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	平面极坐标	$r=a$	$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$，原点 F_1 $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$，原点 F_2	$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$，原点 F_1 (I) $r=\frac{p}{1-\cos\theta}$，原点 F_2 (II)	原点 F_1 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ (I) $r=\frac{p}{-1+e\cos\theta}$ (II) 原点 F_2 $r=\frac{p}{-1-e\cos\theta}$ (I) $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$ (II)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续表 5-2

$c=OF_1=OF_2$	0	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	∞	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
偏心率 $e=\frac{c}{a}$	0	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}<1$	$e=1$	$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}>1$
r_{min}	a	$r_{min}=a(1-e)$	a	$r_{min}=a(e-1)$
r_{max}	a	$r_{max}=a(1+e)$	∞	∞
半正焦弦 p	a	$p=a(1-e^2)$	$p=2a$	$p=a(e^2-1)$
质点的能量 E	$E=V_{effmin}=-\frac{k}{2a}<0$	$V_{effmin}<E=-\frac{k}{2a}<0$	$E=0$	$0<E=\frac{k}{2a}$
角动量 l	$\sqrt{\lambda a}\,m$	$\sqrt{\lambda a}\,m$	$\sqrt{\lambda p}\,m$	$\sqrt{\lambda p}\,m$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

方吸引力场，由有效势能表达式

$$V_{eff}(r)=-\frac{k}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}$$

知，$V_{eff}(r)$取极小值时，$V'_{eff}(r)=0$，

$$V'_{eff}(r)=-\frac{k}{r^2}+\frac{l^2}{mr^3}=0\Rightarrow r_0=\frac{l^2}{mk}$$

是极值点，由$V''_{eff}(r)>0$知，r_0为极小值，故$V_{eff}(r)$的极小值

$$V_{effmin}(r)=-\frac{k}{r_0}+\frac{l^2}{2mr_0^2}=-\frac{mk^2}{l^2}+\frac{mk^2}{2l^2}$$

$$=-\frac{mk^2}{2l^2} \tag{5.30}$$

故当$E=-\frac{mk^2}{2l^2}$时轨道为圆形.

由圆锥曲线的极坐标方程知，质点的轨道需两个参数来确定，最直接的是半正焦弦p和偏心率e. 当然，也可以选其它两个参数，如动力学参数E和l，一旦它们确定了，也就给出了p和e，从而给出了轨道方程。从前面的讨论可知，总能量E可以决定轨道的类型，而由E和l，便可以决定轨道的形状.

根据圆锥曲线的性质和e，p的表达式，我们可以得到一个十分重要的结果。以椭圆轨道为例：

由$p=a(1-e^2)$，$e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}$得

$$1-e^2=-\frac{2El^2}{mk^2},\ \frac{p}{a}=-\frac{2El^2}{mk^2} \tag{5.31}$$

故有

$$a=-\frac{mk^2}{2El^2}p=-\frac{mk^2}{2El^2}\cdot\frac{l^2}{mk}=-\frac{k}{2E}$$

$$E=-\frac{k}{2a}(<0) \tag{5.32}$$

这说明在反平方吸引力场中运动的质点，其椭圆轨道的半长轴只与能量有关，而与角动量无关.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

在双曲线轨道的情形，$p=a(e^2-1)$，类似地有

$$E=\frac{k}{2a}(>0) \qquad (a \text{ 是半实轴}) \tag{5.33}$$

轨道为抛物线时，$e=1$，$\frac{2El^2}{mk^2}=0$，$l\neq 0$，故

$$E=0 \tag{5.34}$$

轨道为圆时，$e=0$，$\frac{2El^2}{mk^2}=-1$，$E=-\frac{mk^2}{2l^2}=-\frac{k}{2p}$，$p=a$，因而

$$E=-\frac{k}{2a} \qquad (a \text{ 是圆半径}) \tag{5.35}$$

将用 a 表示的能量表达式代入能量积分式

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{m\lambda}{r}=E \qquad \left(\lambda=\frac{k}{m}=MG\right)$$

得

$$\left.\begin{aligned} &\text{对椭圆轨道：} && v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\\ &\text{对抛物线轨道：} && v^2=\frac{2\lambda}{r} \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

对双曲线轨道：

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

这些用几何参数表示的速度公式，实际上是能量积分的变形，是十分重要和有用的公式.

如果选择运动学参数来描述轨道，可将偏心率公式改写一下，以椭圆轨道为例：

$$\begin{aligned} e&=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\frac{2l^2}{mk^2}\left(-\frac{k}{2a}\right)}\\ &=\sqrt{1-\frac{mh^2}{ka}}=\sqrt{1-\frac{m}{ka}r_0^2v_0^2\sin^2\alpha_0} \end{aligned} \tag{5.37}$$

式中 r_0，v_0 是初始位置和速度，α_0 是初始速度与径向的夹角. 例如发射人造地球卫星时，一旦发射高度 r_0（卫星进入轨道时

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的 r_0)和发射速度 v_0 确定了，卫星的能量即确定了，椭圆轨道的半长轴 a 也随之确定，而椭圆轨道的形状即或圆或扁的程度，就由发射角 α_0 唯一地决定了. α_0 越大，e 越接近零，轨道越接近圆；α_0 越小，e 越接近 1，轨道椭圆越变得狭长.

上面，我们讨论了反平方吸引力作用下的轨道性质。然而历史上，并不是先发现了反平方的万有引力，才解决了行星运动的轨道问题，恰恰相反，是人们经过许多世代的天文观测，逐渐发现了行星运动规律之后，才发现了万有引力定律. 1609年，德国科学家开普勒(Kepler)出版了他的经典著作《新天文学》，总结了他在伟大的天文观察家丹麦人第谷·布拉赫(Tycho Brache)指导下研究火星运动多年的成果，并利用第谷·布拉赫丰富、翔实和精确的观测资料得出的行星运动的第一、第二定律，加上十年后发表的第三定律，构成了所谓关于行星运动的开普勒定律：

第一定律：行星绕太阳作椭圆运动，太阳位于椭圆的一个焦点上.

第二定律：行星和太阳之间的联线(向径)在相等的时间内扫过相等的面积.

第三定律：行星公转的周期的平方和轨道半长轴的立方成正比.

这三个定律非常精确地描绘了行星的运动，但行星为什么能作这种运动，在当时并不清楚. 开普勒认为，他的这些定律，可能只是某个更普遍更深刻的定律的结果，但这定律是什么，他不知道. 在《新天文学》发表80年之后，牛顿从观测到的行星椭圆轨道推出了反平方力，明确地回答了这个问题. 现在，万有引力定律已是尽人皆知的了，但了解当时是怎样把经验和观测的结果，进行更高的理论概括，找出隐藏于观测事实背后的规律性的，对于我们，在某种意义上甚至比了解这规律本身更重要. 下面我们给出这一推理过程.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由开普勒第二定律，面积速度 $\dot{A}$ 守恒，而

$$2\dot{A} = r^2\dot{\theta} = h(\text{常数})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

因而横向力

$$F_\theta = m\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

因行星有加速度，受力只能为径向的，即以太阳为力心的中心力，沿$-\boldsymbol{e}_r$方向.

由开普勒第一定律知

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0')}$$

令 $u=\frac{1}{r}$，则 $u=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta-\theta_0')$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\varepsilon}{p}\sin(\theta-\theta_0')$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta-\theta_0')$$

代入比内公式$-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=f\left(\frac{1}{u}\right)$，得

$$-mh^2u^2\,\frac{1}{p} = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$f(r) = -\frac{mh^2}{pr^2} = -\frac{k}{r^2} \qquad \left(k=\frac{mh^2}{p}\right)$$

这证明了行星受太阳的力是反平方引力.

由开普勒第三定律，各行星绕太阳的周期平方与半长轴的立方成正比，故

$$\frac{a^3}{T^2} = c(\text{常数})$$

c 是对各行星都相同的常数.

注意到椭圆面积为 πab，行星运动的周期

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$h^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},\ p = \frac{b^2}{a}$$

因而

$$\frac{h^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \frac{b^2}{a}} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 C \equiv \lambda$$

因$\frac{a^3}{T^2}$对各行星相同，λ也对各行星相同，是只与太阳有关，与各行星无关的常数。称为太阳高斯(Gauss)常数，行星受太阳的引力为

$$F = -\lambda \frac{m}{r^2} e_r$$

m代表行星的质量.

牛顿进一步研究了行星及其卫星的运动(例如地球-月球的运动)，发现行星对其卫星的引力遵守同样的规律. 如月球质量是m'，则受地球的引力为

$$f(r) = -\gamma \frac{m'}{r^2}$$

除月球外，在地球附近的落体受地球的引力也取同样形式，γ称为地球的高斯常数，只与地球有关，而与受地球引力作用的物体无关.

设地球质量为m，太阳质量为M，则太阳对地球的引力$F = -\lambda \frac{m}{r^2}$，地球对太阳的引力$F' = -\gamma \frac{M}{r^2}$，根据牛顿第三定律

$$|F| = |F'|$$

$$\frac{\lambda m}{r^2} = \frac{\gamma M}{r^2}$$

$$\frac{\lambda}{M} = \frac{\gamma}{m}$$

式中$\frac{\lambda}{M}$只与太阳有关，$\frac{\gamma}{m}$只与地球有关，两者相等，说明它们都等于一个与太阳、地球都无关的常数，令它为G，则

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\lambda = MG \tag{5.38}$$

$$y = mG \tag{5.39}$$

作为假说，把行星与太阳、地球与月球、地球与地球附近物体之间存在的吸引力与两者质量成正比而与两者距离平方成反比的规律，推广到任何两个物体之间，发现都是适用的而无一违背，说明这种引力是普遍存在的，称为万有引力，记为

$$F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

m_1，m_2 为二物体质量，r 为其间距离，G 称为万有引力常数。1798 年开文迪许(Cavendish)用著名的扭秤实验较精确地测定了万有引力常数. 其值为 $G=6.66\times10^{-11}$ 米^3 · 千克$^{-1}$ · 秒$^{-2}$，现代测量的结果是 $G=6.6720\times10^{-11}$ 米^3 · 千克$^{-1}$ · 秒$^{-2}$.

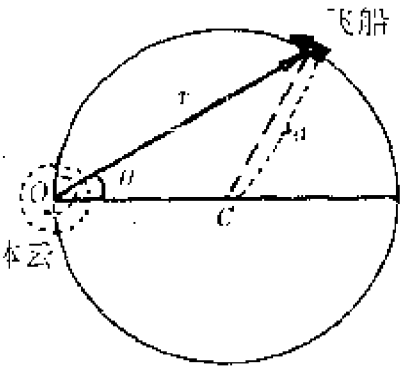


图 5.13

【例 5.1】 一艘已经关掉引擎的宇宙飞船正在一团奇怪的气体云附近航行，飞船的指挥官注意到飞船正在沿一圆形轨道走着，这轨道将直接引到这团云中去. 他还根据飞船的运动推算出它相对于云团的角动量并无改变. 有什么(中心)吸引力能说明这样一个轨道?

解 飞船的圆轨道中心在 C，引力中心即气体云中心在极坐标原点 O，如图所示。

$$r = 2a\cos\theta$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a\cos\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2a}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2a}\frac{1+\sin^2\theta}{\cos^3\theta}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

代入比内公式有

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=-mh^2u^2\frac{1}{2a}\left[\sec^3\theta+\sec\theta\cdot(1+\mathrm{tg}^2\theta)\right]$$

$$=-\frac{mh^2u^2}{2a}\cdot 2\sec^3\theta=-8ma^2h^2u^5$$

$$f(r)=-8ma^2h^2u^{-5}$$

飞船受力是与 r 五次方反比的力.

【例 5.2】 (1)某彗星的轨道为一抛物线，其近日点距离为地球轨道半径的 $1/n$，设地球轨道为圆形，则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的

$$\frac{\sqrt{2}}{3\pi}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

试证明之.

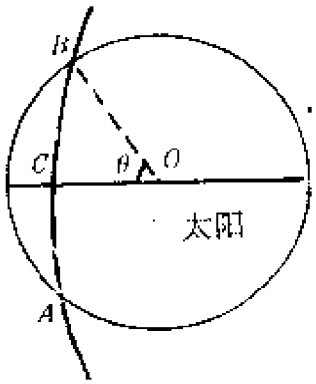


图 5.14

(2)试再证任何抛物线轨道的彗星，停留在地球轨道内(仍假定为圆形的)最长时间为一年的$\frac{2}{3\pi}$倍或约为 76 日.

解 (1)如图所示，地球轨道为圆，彗星抛物线轨道与此圆交于 A、B 两点，彗星行经 AB 的时间即停留在地球轨道内的时间.

由能量守恒知

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E=0$$

$$\dot{r}^2=-\frac{2V(r)}{m}-\frac{h^2}{r^2}=\frac{2\lambda}{r}-\frac{h^2}{r^2}$$

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2\lambda}{r}-\frac{h^2}{r^2}}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$dt=\pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{h^2}{2\lambda}}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{p}{2}}}$$

$$t=2\int_{p/2}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{rdr}{\sqrt{r-\frac{p}{2}}}$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\frac{2}{3}(a+p)\sqrt{a-\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}a^{3/2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

地球公转周期为

$$T=\frac{s}{h/2}=\frac{\pi ab}{h/2}=\frac{\pi\sqrt{pa^3}}{h/2}=2\pi\sqrt{a^3/\lambda}=1\text{年}$$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{3\pi}(1+\frac{2}{n})\sqrt{1-\frac{1}{n}}\text{年}$$

(2)由

$$\frac{dt}{dn}=0\Leftrightarrow n=2$$

且因$\frac{d^2t}{dn^2}<0$,取极大值,

$$t_{max}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{\lambda}}a^{3/2}$$

$$\frac{t_{max}}{T}=\frac{2T}{3\pi}=\frac{2}{3\pi}\times 365\text{日}\doteq 76\text{日}$$

本题也可以对角度作积分求解.

由$r^2\dot{\theta}=h$，$r=\frac{p}{1+\cos\theta}$，则

$$\int_{-\theta_0}^{\theta}\frac{p^2}{(1+\cos\theta)^2}d\theta=\int_0^t hdt$$

由对称性知：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$t=\frac{p^2}{h}\times 2\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}t}{4\cos^4(\theta/2)}=\frac{p^2}{h}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}(\theta/2)}{4\cos^4(\theta/2)}$$

$$=\frac{p^2}{h}\left(\frac{\sin(\theta_0/2)}{3\cos^3(\theta_0/2)}+\frac{2}{3}\frac{\sin(\theta_0/2)}{3\cos(\theta_0/2)}\right)$$

因

$$a=\frac{p}{1+\cos\theta_0}\Rightarrow\cos^2(\theta_0/2)=\frac{1}{n},\ \sin^2(\theta_0/2)=\frac{n-1}{n}$$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{3\pi}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}\ 年$$

故与前法结果相同.

【例 5.3】一质点在万有引力作用下沿椭圆轨道运动，在某一点突然受瞬时力沿切向发生一微小速度变化，速度从 v 变到 $v+\delta v$，求其后轨道的半长轴、半短轴、第一焦点及周期的变化.

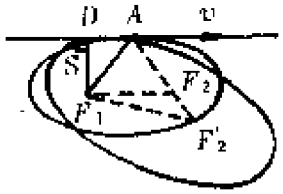


图 5.15

解 (1)我们这里采用变分运算，把变分看作是在约束限度内几何上可行，并非动力学上可能的. 这里认为作用力是瞬时的，不需要时间，看一看一旦速度发生微小变化，各量会发生何种变化. 对于椭圆轨道，有

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

求变分得

$$2v\delta v=\frac{\lambda\delta a}{a^2}(\text{力瞬时作用 } r \text{ 不变})$$

半长轴的变化为

$$\delta a=\frac{2va^2}{\lambda}\delta v$$

(2)由 5.15 图知速度矩

$$h=sv$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\delta h = \delta(sv) = s\delta v = \frac{h}{v}\delta v$$

根据 $p = h^2/\lambda = b^2/a$，取对数

$$2\ln h - \ln\lambda = 2\ln b - \ln a$$

微商得

$$\frac{2\delta h}{h} = \frac{2\delta b}{b} - \frac{\delta a}{a}$$

$$\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta a}{2a} = \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta a}{2a}$$

$$= \frac{\delta v}{v} + \frac{av}{\lambda}\delta v = \left(\frac{1}{v} + \frac{av}{\lambda}\right)\delta v$$

半短轴的变化

$$\delta b = b\left(\frac{1}{v} + \frac{av}{\lambda}\right)\delta v$$

(3)引力中心 F_1 是第一焦点。F_2 是第二焦点，速度大小变化后。F_1 仍为新轨道的第一焦点(速度变化微小，新轨道仍为椭圆)，根据椭圆性质：切线与切点到两焦点联线成等角，切线方向未变，新第二焦点只能在 F_2 延长线上。

$$\overline{AF}_1 + \overline{AF}_2 = 2a,\ \overline{AF}_1 + \overline{AF}_2 = 2(a + \delta a)$$

两式相减得

$$\overline{F_2F_2'} = 2\delta a = \frac{4a^2v}{\lambda}\delta v$$

(4)周期 $T = \frac{2\pi ab}{h}$，两边取对数得

$$\ln T = \ln 2\pi + \ln a + \ln b - \ln h$$

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta h}{h} = \left(\frac{2av}{\lambda} + \frac{1}{v} + \frac{av}{\lambda} - \frac{1}{v}\right) = \frac{3av}{\lambda}\delta v$$

周期的变化为

$$\delta T = T\,\frac{3av}{\lambda}\delta v$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§5.5 宇宙速度·人造地球卫星

挣脱抚育了人类自身的摇篮——地球，飞向太空. 曾经是无数世代人们的梦想. 开普勒问题的研究，使得人类第一次有可能把这样一个经院式的问题变成现实的问题，即计算出三种宇宙速度，并依靠空间科学技术的发展，实现宇宙航行.

人造星体和自然的天体一样，受万有引力作用. 而且，略去各种次要因素的影响，如人造地球卫星所受的高空大气的影响、主天体以外其它天体的影响等，并且只考虑人造天体进入轨道以后的运动，不考虑发射过程和加速阶段的运动，那么，讨论人造天体运动的方法，和讨论行星等运动的方法并无不同. 有关的结论也照常可用.

下面，我们先讨论三种宇宙速度.

第一宇宙速度定义为使人造地球卫星环绕地球作圆轨道运动所需的最小初速度. 用 V_1 表示.

设 M 是主天体地球的质量，m 是卫星质量，R 为地球半径，$r=R+h$，h 是卫星在地面上方的高度，$h\ll R$，则卫星作环绕地球运动的向心加速度由万有引力提供

$$m\frac{V_1^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$$

$$V_1=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

用地球表面重力加速度 g 表示 GM，则

$$\frac{GM}{R^2}=g$$

$$V_1=\sqrt{\frac{R^2g}{r}} \tag{5.39}$$

因 $r\simeq R$，$V_1=\sqrt{Rg}=7.9km/s$。V_{n_1} 又称环绕速度.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第二宇宙速度定义为使人造星体脱离地球引力所需的最小初速度，用 V_2 表示，又称为逃逸速度.

脱离地球引力，又称为地球引力逃逸，理论上，万有引力仅当 $r=\infty$ 时才能为零，实际上，只要 r 比地球半径 R 大两个数量级即 $r\propto 10^2R$，就可以认为实现了引力逃逸. 人造星体作非束缚运动所需的最小能量，从地球上看，应是沿抛物线轨道运动的能量，即 $E=0$，

$$\frac{1}{2}mV_2^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=0$$

$$V_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2}V_1=11.2\text{km/s} \qquad (5.40)$$

为了作登月飞行，宇宙飞船需要的速度就近似等于这个速度. 以等于或大于 V_2 在地球表面发射的天体，脱离地球后将成为人造行星，仍将环绕太阳运动而不能脱离太阳系.

第三宇宙速度 V_3，是使人造天体逃逸太阳引力，脱离太阳系，飞往其他星系所需要的最小的地面发射初速度.

为使人造天体完全脱离太阳引力，相对于太阳的最小速度 V' 应满足如下关系：

$$\frac{1}{2}mV'^2-\frac{GmM_S}{r_{SE}}=0$$

$$V'=\sqrt{\frac{2GM_S}{r_{SE}}}\simeq 42\text{km/s}$$

实际上，从地球上发射物体使之脱离太阳系，并不需要这样大的速度，因为发射时，可沿地球绕太阳运行的轨道切向，以充分利用公转速度. 因地球轨道近似为圆形，半径为 r_E，地球公转的速度是

$$V_E=\omega_E r_E$$

$$=\frac{2\pi}{\tau_E}r_E=\frac{2\pi}{365\times 24\times 3600}\times 1.5\times 10^8\text{km/s}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\simeq 30\text{km/s}$$

如发射速度方向与地球公转的速度方向一致，只须相对于地球有 $V=12\text{km/s}$ 的速度，由于在地球表面上发射，还必须克服地球引力，V 应是脱离地球引力后还应具有的速度，故有

$$\frac{1}{2}mV_3^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mV^2$$

因，$V_2^2=\frac{2GM}{R}$，故

$$V_3^2=V_2^2+V^2$$

$$V_3=\sqrt{V_2^2+V^2}=\sqrt{11.2^2+12^2}$$

$$=16.5\text{km/s} \qquad (5.41)$$

这就是第三宇宙速度.

宇宙航行是一个极其宏伟壮观，也极其复杂、困难的系统工程，涉及许多学科与工程技术部门，它的理论问题也是多层次的，其中之一，就是人造地球卫星的初值问题。所谓初值问题，是指给定初始位置和初始速度，决定卫星的轨道的性质及任意时刻 t 的位置，后者是一个更复杂的问题，已超出了本书的范围，这里不拟讨论。着重讨论轨道性质问题.

人造卫星的初始条件即“切断”条件，指的是火箭引擎停止工作，燃料燃尽时的状态；此时 $t=0$，$r=r_0$，$V=V_0$，$\beta=\beta_0$. 这里 r_0，V_0是初始时刻的向径与速率；β_0 是位置向量为 r_0 时，速度向量 V_0 与横向的夹角，称为初飞行角.

为了完全确定轨道，必须给出 p，ε，θ_0. 如果我们选择极轴沿近地点向径，$\theta_0=0$，如图 5.16，则轨道方程为

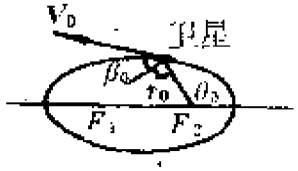


图 5.16

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

由(5.28)式

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{mk^2}$$

$$= 1 + \frac{2l^2}{mk^2}\left(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}\right)$$

$$= 1 + \frac{r_0V_0^2}{\lambda}\left(\frac{r_0V_0^2}{\lambda} - 2\right)\cos^2\beta_0.$$

偏心率

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{r_0V_0^2}{\lambda}\left(\frac{r_0V_0^2}{\lambda} - 2\right)\cos^2\beta_0} \qquad (5.42)$$

半正焦弦

$$p = \frac{l^2}{mk} = \frac{l^2}{m^2\lambda} = \frac{r_0V_0^2\cos^2\beta_0}{\lambda} \qquad (5.43)$$

初始时刻近地点位置向量与初位置向量之间的夹角 θ_0 也可由初始条件定出.

由 $r_0 = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta_0}$ 可得.

$$\cos\theta_0 = \frac{p - r_0}{\varepsilon r_0} = \frac{p}{\varepsilon r_0} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \left[\frac{r_0V_0^2\cos^2\beta_0}{\lambda} - 1\right]/\varepsilon$$

应用 ε 的表达式(5.28)可证

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{(r_0V_0^2/\lambda)\cos\beta_0\sin\beta_0}{(r_0V_0^2/\lambda)\cos^2\beta_0 - 1} \qquad (5.44)$$

由(5.42)、(5.43)、(5.44)可见，ε，p、θ_0 都可表为初飞行角 β_0 及因子 $r_0V_0^2/\lambda$ 的函数.

卫星轨道上有两个特殊点，在那里位置向量与速度垂直，即 $\dot{r}=0$，对应于卫星与地球中心的最大和最小距离，分别称为远地点和近地点，由能量方程

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\lambda m}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\lambda m}{r}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

将 $r=0$ 代入，并将两边乘以 r^2/E，得

$$r^2+\frac{\lambda m r}{E}-\frac{l^2}{2mE}=0 \tag{5.45}$$

此式称为远近点方程，它的两个根即 $r_1=r_{\min}$，$r_2=r_{\max}$，（近地点和远地点），它们是人造地球卫星轨道的两个重要参数.

【例 5.4】一卫星被以速率 $\sqrt{\lambda/R}$ 从地球赤道平面内地球表面 $R/2$ 的高度发射出去，初飞行角为 30°，求其轨道及距地球表面的最大和最小高度.



图 5.17

解

$$r_0=\frac{3R}{2},\ v_0=\sqrt{\frac{\lambda}{R}},\ \beta_0=30^\circ$$

$$\frac{r_0v_0^2}{\lambda}=\frac{3R}{2}\cdot\frac{\lambda}{R}\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}e^2&=1+\frac{r_0v_0^2}{\lambda}\left(\frac{r_0v_0^2}{\lambda}-2\right)\cos^2\beta_0\\&=1+\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}-2\right)\times\frac{3}{4}\\&=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$p=\frac{r_0v_0^2\cos^2\beta_0}{\lambda}=\frac{3R}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{16}R$$

轨道方程为

$$\begin{aligned}r&=\frac{p}{1+e\cos\theta}\\&=\frac{\frac{27}{16}R}{1+\sqrt{\frac{7}{16}}\cos\theta}=\frac{27R}{16+4\sqrt{7}\cos\theta}\end{aligned}$$

最小高度为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$h_1 = \frac{27R}{16+4\sqrt{7}} - R$$

$$= \frac{11-4\sqrt{7}}{16+4\sqrt{7}}R = 0.016R$$

最大高度

$$h_2 = \frac{27R}{16-4\sqrt{7}} - R$$

$$= \frac{11+4\sqrt{7}}{16-4\sqrt{7}}R = 3.984R$$

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{(r_0v_0^2/\lambda)\cos\beta_0\sin\beta_0}{(r_0v_0^2/\lambda)\cos^2\beta_0 - 1}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{3/2\times\sqrt{3}/2\times 1/2}{3/2\times 3/4 - 1}$$

$$= \operatorname{arctg}(3\sqrt{3})$$

$$= 79°6'$$

【例 5.5】在给定瞬间，测得卫星的速度是$\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$，此刻它的方向与向径成 $\pi/4$，距地心为 a. 求卫星的轨道和周期.

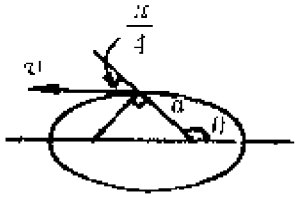


图 5.18

解　由比内公式有

$$-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{r^2} = -GMmu^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\lambda}{h^2}$$

$$h = r^2\dot{\theta} = rv/\sqrt{2}$$

$$= a\sqrt{\lambda/2a} = \sqrt{a\lambda/2}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{2}{a}$$

此方程的解为

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta+\frac{2}{a}$$

选择 $t=0$ 时，$\theta=0$，$r=a$，则

$$A=-\frac{1}{a}$$

由 $\dot{\theta}=hu^2$

$$\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{\dot{r}}{h}=-A\sin\theta+B\cos\theta$$

$$-\frac{\dot{r}}{h}\Big|_{\theta=0}=B$$

$$B=-\frac{1}{h}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{a\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{a}}=-\frac{1}{a}$$

所以

$$u=-\frac{1}{a}\cos\theta-\frac{1}{a}\sin\theta+\frac{2}{a}$$

$$u=\frac{2}{a}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$r=\frac{a/2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$$

这是一个偏心率为$\frac{1}{\sqrt{2}}$的椭圆.

由 $\dot{\theta}=hu^2$ 可知

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\dot{\theta}=\frac{4h}{a^2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}}=\int_0^T\mathrm{d}t$$

$$T=\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{2}{a\lambda}}\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{-2}\mathrm{d}\theta$$

§5.6 圆形轨道的稳定性

质点作圆周运动时，径向速度为零，$\dot{r}\equiv 0$，$r=r_0$ 但并非不动，而是 r_0 以 $\dot{\theta}=\frac{l}{mr_0^2}$（常量）匀速转动. 存在一个圆形轨道，并不表明这个圆轨道是稳定的，圆轨道的稳定性问题，是一个运动的稳定性问题.

动力学研究中稳定性的概念不只一个。我们采取如下定义：

设 $x=x_0(t)$ 是微分方程

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x},t) \tag{5.46}$$

的一个解，将 $x=x_0+\zeta$ 代入(5.46)（这里 ζ 是小量），则得到如下微分方程：

$$\ddot{\zeta}=g(\zeta,\dot{\zeta},t) \tag{5.47}$$

如果(5.47)的解 ζ 对全部时间 t 是束缚的，(5.45)的解 $x=x_0(t)$ 称为稳定的解. 如果 ζ 不是对所有时间为束缚的，$x=x_0(t)$ 称为(5.46)的非稳定的解.

这一定义可以推广到任何微分方程解的稳定性. 这里，我们是在系统的通解已经找到的情况下，利用通解来分析稳定性.

中心力场中存在稳定圆轨道的显明例证之一，是地球公转，地球绕太阳的运动近似走圆形轨道，偏心率仅为 0.017，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

其它行星的轨道也近似圆形. 尽管地球运行中受到诸如彗星、陨石、宇宙尘埃等的扰动，但数十万年的历史已证明地球的近似圆轨道是稳定的. 现在，利用上述一般稳定性概念，来分析中心力场中圆轨道的稳定性.

中心力运动微分方程是

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)&=f(r)\\ m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})&=0 \end{aligned}\right\}$$

联立得

$$m\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right)=f(r) \tag{5.48}$$

这个方程只有在已知$f(r)$的严格形式时才能完全求解，但它总有一个解$r=r_0$，它给出圆轨道。

令$f(r)=-mg(r)$，则

$$\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}=-g(r) \tag{5.49}$$

对圆轨道，$\ddot{r}=0$

$$h^2=g(r_0)r_0^3$$

设质点在半径为r_0的圆轨道上运动，受到一小的扰动，$r_0\to r_0+\zeta$，则(5.49)变为

$$\ddot{\zeta}=\frac{r_0^3g(r_0)}{(r_0+\zeta)^3}-g(r_0+\zeta) \tag{5.50}$$

应用泰勒定理

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta}&=g(r_0)\left(1+\frac{\zeta}{r_0}\right)^{-3}-\{g(r_0)+\zeta g'(r_0)+\cdots\}\\ &=-\left[\frac{3}{r_0}g(r_0)+g'(r_0)\right]\zeta+o(\zeta_2)\end{aligned}$$

$o(\zeta)$是2阶以上小量，

$$\ddot{\zeta}+\left[\frac{3}{r_0}g(r_0)+g'(r_0)\right]\zeta=0 \tag{5.51}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

当

$$\frac{3}{r_0}g(r_0)+g'(r_0)>0 \tag{5.52}$$

ζ是有界的，因$f(r)$是吸引性力，$g(r)>0$，故将(5.52)式除以$g(r)$，得

$$\frac{g'(r_0)}{g(r_0)}+\frac{3}{r_0}>0$$

亦即

$$\frac{f'(r_0)}{f(r_0)}+\frac{3}{r_0}>0 \tag{5.53}$$

是圆形轨道稳定的条件.

对乘方律力

$$f(r)=-\frac{k}{r^n} \tag{5.54}$$

将$f(r)$代入(5.53)式，得

$$\frac{-nr_0^{-(n+1)}}{r_0^{-n}}+\frac{3}{r_0}>0$$

$$\frac{1}{r_0}(3-n)>0$$

$$n<3 \tag{5.55}$$

即仅当$n<3$时，乘方律力场$f(r)=-\frac{k}{r^n}$的圆轨道才是稳定的.

在讨论平衡稳定性时，我们曾经指出，在平衡位置x_0，当势能取极小值即$V''(x_0)>0$时，平衡是稳定的. 在讨论圆轨道稳定性时，同样可以借助势能来判别，但这时已不是静平衡的稳定性，而是运动的稳定性问题. 在§5.2中我们曾指出，中心力场存在圆轨道的条件是中心力必须是吸引性的，因为只有在此种情况下，才可能使中心力与惯性离心力平衡而令径向速度$\dot{r}$为零。至于这个圆形轨道是否稳定，则决定于在那个圆轨道$r=r_0$处有效势能V_{eff}是否有严格的极小值. 或者说，圆形轨道的稳定性，决定于V_{eff}的二阶微商在r_0处所取的符号，若

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} > 0 \quad (r_0 \text{ 处 } V_{eff} \text{ 曲线开口向上}) \qquad (5.56)$$

则圆轨道稳定；若

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} < 0 \quad (r_0 \text{ 处 } V_{eff} \text{ 曲线开口向下}) \qquad (5.57)$$

则圆轨道不稳定. 圆轨道稳定性的这种用有效势能 V_{eff} 表示的判据，与用力表述的判据(5.53)是一致的，因为 $V_{eff} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$，所以

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0}$$

$$= -f'(r_0) + \frac{3l^2}{mr_0^4} = -f'(r_0) - \frac{3}{r_0}f(r_0)$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} > 0$$

即

$$\frac{f'(r_0)}{f(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0$$

或

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} + \frac{3}{r_0}\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0} > 0 \qquad (5.58)$$

应当指出，和静平衡情形不同，圆轨道稳定的条件是有效势能 V_{eff} 取极小值，而不是势能取小值. 作为动力学平衡位置，稳定圆轨道可以出现在 $V(r)$ 极小值处，也可能出现在其它位置甚至势能极大值处.

如果圆轨道是稳定的，则质点能量比圆形轨道能量略有增加时，$r_0 \to r_0 + \zeta$，由方程(5.51)，如定义

$$\omega_0^2 = \frac{3}{r_0}g(r_0) + g'(r_0) \qquad (5.59)$$

则该方程变为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \qquad (5.60)$$

即为简谐振动方程.

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{m}\left[\frac{3}{r_0}f(r_0) + f'(r_0)\right] = \frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m} \qquad (5.61)$$

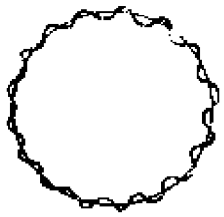


图 5.19

因此 r 将在 r_0 附近作微小振动，如图 5.14 所示，微振动的周期是

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''_{\text{eff}}(r_0)}} \qquad (5.62)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{-m}{\frac{3}{r_0}f(r_0) + f'(r_0)}} \qquad (5.63)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0} + \frac{3}{r_0}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=r_0}}} \qquad (5.64)$$

【例 5.6】 一质量为 m 的质点束缚在线性势 $V = kr$ 之中.

(1)当能量、角动量为多少时，轨道是一个以原点为圆心，半径为 r 的圆?

(2)圆运动的圆频率多大?

(3)如果质点稍微偏离圆轨道，小振动的频率为多少?

解 质点受力 $f = -\frac{\partial V}{\partial r}e_r = -k\,e_r$，即质点受力总是指向力心的.

(1)当轨道为圆时，

$$m\omega^2 r_0 = k,\ \omega^2 = \frac{k}{mr_0}$$

总能量

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + kr_0$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2 + kr_0 = \frac{3}{2}kr_0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

角动量

$$l = mr_0^2\omega = mr_0^2\sqrt{\frac{k}{mr_0}} = \sqrt{mr_0^3k}$$

(2)圆运动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}$$

(3)有效势能

$$V_{eff}(r) = kr + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\frac{dV_{eff}}{dr}\Big|_{r=r_0} = k - \frac{l^2}{2mr_0^3} = 0$$

圆轨道半径

$$r_0 = \left(\frac{l^2}{mk}\right)^{1/3}$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} = \frac{3l^2}{mr_0^4} = 3k\left(\frac{mk}{l^2}\right)^{1/3}$$

当质点稍稍偏离圆轨道时，径向小振动频率

$$\omega' = \sqrt{\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_0}/m} = \sqrt{\frac{3k}{m}\left(\frac{mk}{mr_0{}^3k}\right)^{1/3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3k}{mr_0}} = \sqrt{3}\,\omega$$

【例 5.7】 质量为 m 的质点，在重力场中被约束在一半顶角为 α 的圆锥面上运动，试讨论轨道的稳定性.

解 自由度 $f=2$，选 ρ,θ 为广义坐标，速度平方为

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2\mathrm{ctg}\alpha$$

$$= \dot{\rho}^2\mathrm{csc}^2\alpha + \rho^2\dot{\theta}^2$$

势能

$$V = mgz = mg\rho\mathrm{ctg}\alpha$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$L=\frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2\csc^2\alpha+\rho^2\dot{\theta}^2\right]-mgr\operatorname{ctg}\alpha$$

θ 是循环坐标.

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\rho^2\dot{\theta}=l(\text{常数}) \tag{1}$$

$$\Lambda_\rho L=0:\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\sin^2\theta+g\sin\alpha\cos\alpha=0 \tag{2}$$

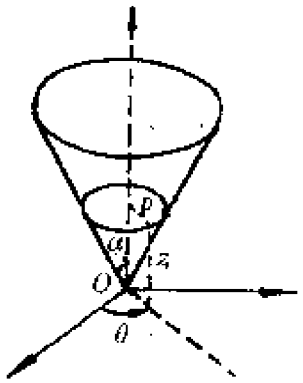


图 5.20

设存在圆轨道 $\rho=a$，受到一小的扰动，

$$a\to a+\zeta$$

由(1)式

$$\rho\dot{\theta}^2=\frac{l^2}{m^2\rho^3}=\frac{l^2}{m^2}(a+\zeta)^{-3}=\frac{l^2}{m^2a^3}\left(1-3\frac{\zeta}{a}\right)$$

代入(2)式，得

$$\ddot{\zeta}-\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}\left(1-3\frac{\zeta}{a}\right)+g\sin\alpha\cos\alpha=0$$

$$\ddot{\zeta}+\frac{3l^2\sin^2\alpha}{m^2a^4}\zeta-\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}+g\sin\alpha\cos\alpha=0 \tag{3}$$

$\rho=a$ 时，$\ddot{\rho}=0$，由(2)式得

$$a\dot{\theta}^2\sin^2\alpha=g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}=g\sin\alpha\cos\alpha$$

(3)式最后两项相消，故有

$$\ddot{\zeta}+\frac{3l^2\sin^2\alpha}{m^2a^4}\zeta=0$$

这是谐振动方程，故圆轨道是稳定的。径向微振动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m^2a^4}{3l^2\sin^2\alpha}}=\frac{2\pi ma^2}{\sqrt{3}\,l\sin\alpha}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§5.7 散射·实验室坐标系和质心坐标系

物理学中一个重要的问题，是由观测资料决定质点间相互作用力的严格形式，因为关于力的知识能够给我们提供物理系统的组成、结构等方面的信息.

在宏观条件下，如果知道了中心力场的轨道，两质点间相互作用力的规律可以由比内公式通过简单的微商求出来，但这样的方法在处理微观体系时是行不通的，因为在理论上，必须用量子力学代替经典力学，而量子力学中轨道的概念已失去了意义。在实验方面，我们没有在非常小的距离上观察微观粒子的手段，而且即使我们的观测技术与设备精密到足以确定微粒子的位置，因观测光线同粒子相互作用引起的测量过程中动量的变化，也是不可避免的，因此终究难以实现.

事实上，对微观粒子而言，能够精确测量的，是相互作用前后粒子的动量。一个粒子从远处向力心运动，受到力心的作用而改变方向，而后又向远处离去，这样的运动称为散射。在物理应用上，我们通常遇到的不是一个而是许多相同粒子的散射. 由于不能跟踪每个粒子的运动，这里必须用统计方法描述散射粒子束的全体的行为. 这时，散射截面是一个十分重要的有用的概念，它是在单位面积上发生一定反应的几率的测量. 在经典力学中，在近似条件下仍然适用，而且无论在经典力学或量子力学中，描述散射的步骤是相同的.

一、散射·散射截面

在这以前，我们对中心力的讨论，较多地集中于束缚的(有界的)轨道，例如在反平方吸引力下，当总能量 E 为负时，限制了粒子不能运动到无限远。但当能量 E 为正时，情形就不同了，这时将出现非束缚的即开放(无界)的轨道.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

一个自由天体经过太阳附近时，由于太阳的吸引力作用，使出射方向与入射方向相比偏离了一个角度，我们说这个天体受到太阳的吸引力而被散射，这时散射中心是太阳，是引力中心.

一个带正电的 α 粒子受到一重原子核电场的作用而改变方向，称为 α 粒子被重原子核散射，散射中心是重原子核，它是排斥力心.

在散射问题的单体表述中，粒子从无限远处以速率 V_∞ 沿直线飞来，经过固定力心附近，或被吸引，或被排斥而偏离原来的轨道，即被散射，通过力心后，作用在粒子上的力终将消失，轨道再次趋于另一条直线. 该直线与入射轨道的夹角 称为散射角，由于碰撞中能量守恒，粒子又重新获得它的初始速率 V_∞，向无限远飞去.

如果在散射粒子沿直线运动尚未改变方向时，从力心向轨迹作垂线，此垂线长(即力心到轨迹的最近距离)称为碰撞参数(或瞄准距离)，用 b 表示，如图 5.21，5.22 所示。b 是一个十分重要的参数，因为能量、角动量、偏心率等，都可用 V_∞ 和 b 表示.

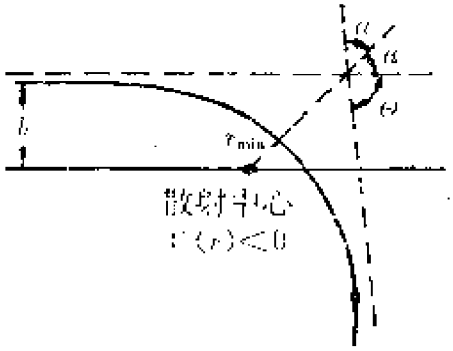


图 5.21

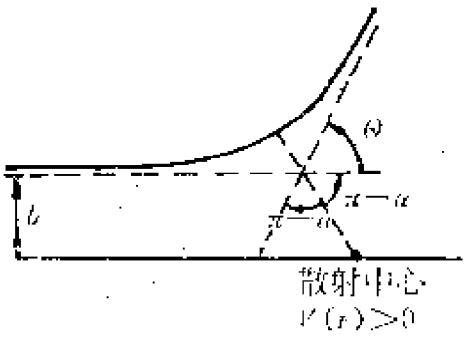


图 5.22

图 5.23 给出了反平方吸引力的双曲线轨道。粒子的能量

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

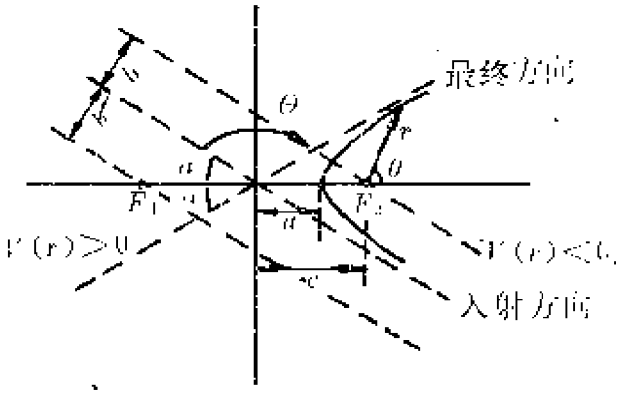


图 5.23

$$E = \frac{1}{2}mV_\infty^2 \tag{5.65}$$

角动量

$$l = mV_\infty b \tag{5.66}$$

偏心率

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{V_\infty^2 b}{\lambda}\right)^2} \tag{5.67}$$

由图 5.23 知，散射角

$$\theta = \pi - 2\alpha \tag{5.68}$$

α 是入射、出射渐近线同近心点向径的夹角. 当 $r \to \infty$ 时，$\theta \to \alpha$，由轨道方程

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

可得

$$1 - \varepsilon\cos\alpha = 0,\ \cos\alpha = 1/\varepsilon$$

$$\operatorname{ctg}(\theta/2) = \operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha)$$

$$= \operatorname{tg}\alpha = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2} \tag{5.69}$$

由(5.67)可得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}=\frac{V_\infty^2 b}{\lambda} \tag{5.70}$$

以上，我们讨论了反平方力场的散射情形. 其中已包含了一般中心力场散射的主要和本质的特征。对不同的中心力场，在轨道的细节上会有所区别.

既然在实验上难以跟踪单个粒子的散射过程，实际上常常研究一束粒子受力心散射的情形，这样的一束粒子可以是宏观的物体或天体也可以是微粒子，这些粒子通常有相同的质量和能量. 散射方向是轴对称的，入射束的性质由入射强度(通量密度)来表示，入射强度用 I 表示：

I = 单位时间内通过垂直于入射粒子束方向的单位面积上的粒子数

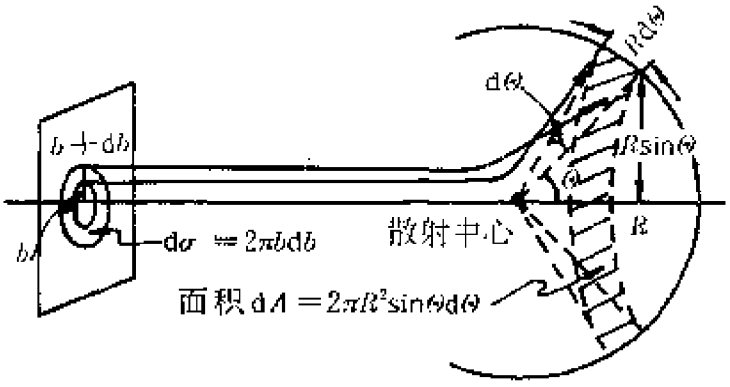


图 5.24

为了定量地描述散射，引入散射截面的概念. 因为散射截面是一个既能从理论上计算，又能在实验上测定的量，便于理论与实验的比较.

设入射束单位体积中粒子数为 n，则入射强度 $I=nV_\infty$.

首先讨论微分散射截面. 假定散射是完全弹性的，力心不动(见图 5.24). 入射粒子沿确定的轨道运动；设 Θ 是 b 的已知函数，由于入射束轴对称，在入射强度不变的情形下，在相同

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

时间内因散射进入 $\theta\to\theta+d\theta$ 之间的立体角 $d\Omega$ 内的粒子数，必定等于通过碰撞参数介于 $b\to b+db$ 之间的面积元 $d\sigma$ 的粒子数.

单位时间进入立体角元 $d\Omega$ 的散射粒子数，应与入射强度 I 及立体角元 $d\Omega$ 正比，即

$$dN = \sigma(\Omega)Id\Omega \tag{5.71}$$

系数 $\sigma(\Omega)$ 称为微分散射截面.

单位时间内通过碰撞参数介于 b 与 $b+db$ 之间的粒子数

$$dN = 2\pi b db \cdot I \tag{5.72}$$

因而

$$2\pi b db \cdot I = -\sigma(\Omega)Id(\Omega) \tag{5.73}$$

这里的负号，表示 b 和 θ 变化方向相反. 立体角元

$$d(\Omega) = \frac{dA}{R^2} = 2\pi\sin\theta d\theta \tag{5.74}$$

代入(5.73)得

$$\sigma(\Omega) = -\frac{b}{\sin\theta}\cdot\frac{db}{d\theta}$$

通常负号并不重要，可以引入绝对值符号，并且将 $\sigma(\Omega)$ 表示为 $\sigma(\theta)$，则

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{5.75}$$

$\sigma(\theta)$ 具有面积量纲，这是把它称作微分散射截面的原因.

定义

$$\sigma_t = \int_{4\pi}\sigma(\Omega)d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\sin\theta d\theta \tag{5.76}$$

为散射总截面，它等于单位时间内单位入射强度的入射束在所有方向上的散射粒子总数. 可以理解为散射中心对入射束所呈现的有效靶面积.

库仑相互作用引起的散射，是原子物理，原子核物理和粒子物理实验中研究的最重要现象之一. 1910 年前后，卢瑟福及

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

其助手进行了一系列金属箔散射 α 粒子的实验，例如将一束 α 粒子射向厚度仅为 4×10^{-7} 米的金箔上，可以认为靶粒子即散射中心是固定的，而且因金属箔很薄，粒子的散射都是一次散射。按照汤姆逊旧的原子模型，原子是均匀分布着正电荷的球，电子嵌在里面，球半径约 10^{-8} 厘米，当快速 α 粒子打入原子时，当然不会被质量仅为 α 粒子 1/7000 的电子散射，只会被正电荷的库仑力所偏转. 在球体内 α 粒子受的力应是 $F=\frac{ZZ'e^2}{r_0^3}r$，与 r 成正比，因此原子内正电荷对射入的 α 粒子的作用不可能太强，在一次散射中最大的偏转也是很小的，更不会产生超过 $\pi/2$ 的散射. 然而，实验表明，竟然有 $1/10^4$ 的 α 粒子被以大于 90°的散射角散射. 正如卢瑟福所说："这几乎同你们把一发 15 英吋的炮弹射向一张薄纸，而它会回过来打中你们一样难以置信.""而当我作过计算后，我发现除非认为原子是一个其大部分质量集中于一微小的核里面的体系，否则是不可能得到那一量级的散射的. 就在那时，我有了原子具有一带有电荷的，很小而很重的核心这一观念."原子的有核模型就是这样产生的.

按(5.69)式

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$$

在卢瑟福散射中，α 粒子受力心的库仑力为

$$F=\frac{2Ze^2}{r^2} \tag{5.77}$$

$+Ze$ 是固定力心的电荷，$+2e$ 是入射 α 粒子电荷，$e=1.6\times10^{-19}$ 库仑，是电子电荷的绝对值，能量 $E>0$，因而轨道是双曲线，

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{m(2Ze^2)^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{Eb}{Ze^2}\right)^2} \tag{5.78}$$

故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}=\frac{Eb}{Ze^2}$$

$$b=\frac{Ze^2}{E}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2} \tag{5.79}$$

微分散射截面

$$\sigma(\Theta)=\frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|=\frac{b}{\sin\Theta}\cdot\frac{Ze^2}{E}\left|\frac{d}{d\Theta}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2\csc^4\frac{\Theta}{2}$$

$$=\left(\frac{k}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}} \tag{5.80}$$

式中，$k=2Ze^2$。(5.80)式称为卢瑟福公式.

散射总截面

$$\sigma_t=\int_{4\pi}\sigma(\Omega)d\Omega=2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\Theta)\sin\Theta d\Theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2\int_0^{\pi}\csc^4\frac{\Theta}{2}\sin\Theta d\Theta=\infty \tag{5.81}$$

因为库仑力是长程力，到无限远才为零，横截面积为无限大的入射束中，粒子都会发生某种偏转，即散射中心对入射束呈现的靶面积为无限大.但由于原子中电子的静电屏蔽作用，核的库仑场在远处被截断，这使 α 粒子被实际原子散射的总面积仍是有限值.

由(5.80)式可见，无论吸引力或排斥力，即无论 $ZZ'e^2$ 符号如何，都产生相同的微分散射截面.

因为卢瑟福公式是按点电荷的库仑定律推导出来的，而实际上，当碰撞参数 b 大到可与原子半径相比时，原子核的正电荷将部分被周围的电子云屏蔽，散射将偏离卢瑟福公式.当 b 非常小时，即 α 粒子进入我们现今所说的短程核力的范围时，散射也将偏离卢瑟福公式.人们根据散射在 b 减小到开始偏离卢瑟福公式时 α 粒子的速度 V_0 和 α 粒子的质量 m，散射中心

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

金原子序数 Z，可以求出 α 粒子接近金原子中心的最近距离.

$$r_{min} \approx 2.37 \times 10^{-14} m$$

这说明 α 粒子与核心距离小到 10^{-14} 米时，卢瑟福公式仍然是准确的，因而原子的质量与正电荷集中分布在一个线度小于 10^{-14} 米的极小区域，构成原子的核心，而原子直径为 10^{-10} 米，二者相差 4 个数量级，原子核体积仅为原子体积的 $1/10^{12}$，可见原子内十分空旷，犹如太阳系一样.

值得注意的是，对低能 α 粒子(即非相对论极限情形)来说，用量子力学计算的散射截面公式与经典的卢瑟福散射截面公式是一样的，反映量子效应的普朗克常数不出现，这是反平方力的一个特殊性质，这一点是幸运的，因为它对原子物理与核物理的早期发展无疑起了鼓舞、推动作用.

二、实验室坐标系和质心坐标系

在上述卢瑟福散射的讨论中，我们作了靶粒子即散射中心是固定的假定，这只是一种近似. 事实上，实际散射问题常常都是二体问题，即靶粒子即使原来静止，被入射粒子推动也会运动，即发生反冲. 那么，是不是像在 §5.2 所做的那样，把入射粒子的质量换成折合质量，把入射粒子的位置向量换成相对位置向量，就可以描述二体散射了呢？这样做理论上当然是对的，但实际工作并不这样简单，因为这涉及实验测量和理论计算二者之间关系的问题.

我们下面的讨论，限于粒子弹性散射的情形，即体系内能不变，因而能量守恒. 由于我们的实际测量通常都是在实验室中进行的，描述实验应当取相对于实验室为静止的实验室坐标系. 我们还知道，用质心系从理论上描述一个物理过程常常比较简单. 如果把实际的二体散射根据等效的单体散射来计算，散射角只能是两粒子相对位置向量的最终方向与初始方向之间的夹角 θ(见图 5.25)，它并不等于实验室中测得的被散射粒子

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

最终方向与初始方向之间的夹角 ψ. 因为在质心系中，二粒子的动量总是相等相反，因而相对位置向量最终方向与初始方向的夹角 θ，就是在质心坐标系中的散射角。又由于在二体散射中靶粒子不再固定，将要反冲，反冲方向与入射方向将有夹角 ζ，称为反冲角. 在实验室参考系(Lab 系)和质心系(C. M 系)中观测到的二体散射，分别示于图 5. 25 和 5. 26 中.

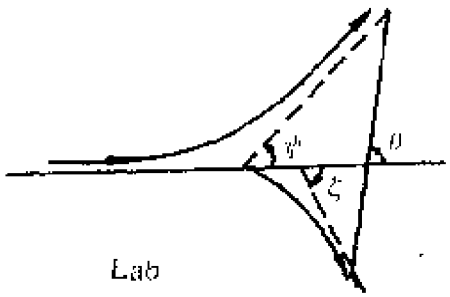


图 5. 25

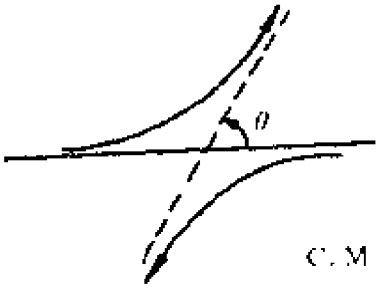


图 5. 26

为找出两种参考系中散射角、散射截面的关系，我们采用如下标记：

实验室系：Lab

质心系：C. M

m_1：入射粒子质量

m_2：靶粒子质量

u_1 入射粒子散射前在 Lab 系中的速度

u'_1 入射粒子散射前在 C. M 系中的速度

V_1 入射粒子散射后在 Lab 系系中的速度

V'_1 入射粒子散射后在 C. M 系中的速度

靶粒子的速度用类似的符号标志：u_2，u'_2，V_2，V'_2.

在 Lab 系和 C. M 系中，二粒子弹性散射的初、末状态可用图 5. 27 表示

两种坐标系中，弹性散射的末态可以概括于图 5. 28 所示的平行四边形中. 图中 V_c 表示质心速度，ψ 是实验室系中的散

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

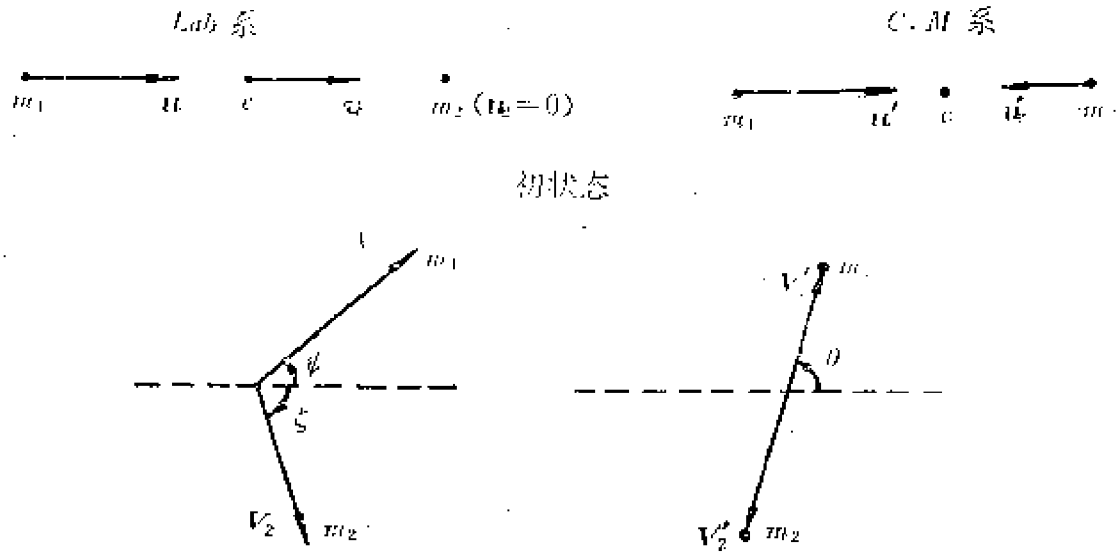


图 5.27

射角，θ 是质心系中的散射角，ζ 是实验室系中的反冲角.

从图上可见，散射后两粒子的速度可表示为

$$V_1 = V'_1 + V_c$$
$$V_2 = V'_2 + V_c$$

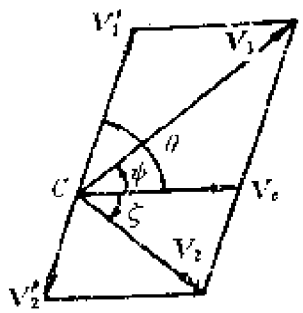


图 5.28

两粒子在质心系中碰前相向运动，碰后沿相反方向离去，质心的速度为

$$V_c = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (u_2 = 0)$$
$$V_c = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (\text{常数}) \qquad (5.82)$$

在 Lab 系中，散射前后动量守恒，故质心速度不变.

下面求出两种坐标系下散射角 ψ 和 θ 之间的关系.

因质心系中总动量恒为零，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$m_1V'_1 + m_2V'_2 = 0 \tag{5.83}$$

又因弹性散射前后能量守恒，并利用克尼希定理，有

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_c^2 + \frac{1}{2}m_1V'^2_1 + \frac{1}{2}m_2V'^2_2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

代入 V_c 之值得

$$\frac{1}{2}\frac{m_1^2u_1^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}m_1V'^2_1 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1V'_1}{m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)V'^2_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right)u_1^2$$

$$V'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}u_1 \tag{5.84}$$

因此

$$\frac{V_c}{V'_1} = \frac{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}u_1}{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}u_1} = \frac{m_1}{m_2} \tag{5.85}$$

同样

$$\frac{V_c}{u'_1} = \frac{V_c}{-\dfrac{m_2u'_2}{m_2}} = \frac{V_c}{-\dfrac{m_2}{m_1(-V_c)}} = \frac{m_1}{m_2} \tag{5.86}$$

故有

$$V'_1 = u'_1 \tag{5.87-1}$$

同理

$$V'_2 = u'_2 \tag{5.87-2}$$

即质心系中两粒子弹性散射前后速率不变.

由图 5.28 知

$$V'_1\sin\theta = V_1\sin\psi$$

$$V'_1\cos\theta = V_1\cos\psi - V_c$$

$$\frac{V'_1\sin\theta}{V'_1\cos\theta + V_c} = \mathrm{tg}\psi$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\dfrac{V_c}{V'_1}}=\mathrm{tg}\psi$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\dfrac{m_1}{m_2}}=\mathrm{tg}\psi \tag{5.88}$$

此式给出了 Lab 系和 C.M 系中散射角 ψ 与 θ 的关系:

当 $m_1\ll m_2$ 时

$$\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}\psi,\ \theta\simeq\psi \tag{5.89}$$

即 Lab 系和 C.M 系中散射角近似相等，因此散射粒子对大质量散射中心影响很小，如对固定散射中心一样.

当 $m_1=m_2$ 时，

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2},\ \psi=\frac{\theta}{2} \tag{5.90}$$

即 Lab 系中的散射角等于 C.M 系中散射角的一半，因 $\theta\leqslant 180°$，$\psi<90°$.

由图 5.28 还可得出

$$\left.\begin{aligned}V_2\sin\zeta&=V'_2\sin\theta\\V_2\cos\zeta&=V_c-V'_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{5.91}$$

两式相除得

$$\mathrm{tg}\zeta=\frac{\sin\theta}{(V_c/V'_2)-\cos\theta}$$

因 $V_c=v'_2=V'_2$，所以

$$\mathrm{tg}\zeta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$$

故

$$\mathrm{tg}\zeta=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$2\zeta=\pi-\theta \tag{5.92}$$

当 $m_1=m_2$ 时，$\theta=2\psi$，故有

$$\zeta+\psi=\pi/2$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即在 Lab 系中，两相等质量的质点散射，其末态速度互相垂直.

对不同的坐标系，散射角不同，微分散射截面的表达式作为散射角的函数也不同. 然而在一个确定的散射实验中，散射进入给定立体角之内的粒子数并不因坐标系的不同而不同，即应有

$$\sigma(\theta)\mathrm{d}\Omega = \sigma'(\psi)\mathrm{d}\Omega'$$

$$2\pi I\sigma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi I\sigma'(\psi)\sin\psi\mathrm{d}\psi \tag{5.93}$$

式中 θ，ψ 分别表示 C.M 系和 Lab 系测得的散射角，$\mathrm{d}\Omega$，$\mathrm{d}\Omega'$ 表示分别在C.M 系和Lab 系中表示的同一立体角元，$\sigma(\theta)$和 $\sigma(\psi)$表示在不同坐标系表示的 同是在 Lab 系中测得的微分散射截面，由(5.93)式得

$$\sigma'(\psi) = \sigma(\theta)\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\psi\mathrm{d}\psi} \tag{5.94}$$

由图 5.28 并利用正弦定理可得

$$\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi} = \frac{V_2}{V_1'}$$

由(5.85)

$$\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi} = \frac{m_1}{m_2} = \lambda \tag{5.95}$$

微分得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\sin(\theta-\psi)\cos\psi}{\cos(\theta-\psi)\sin\psi} + 1 \tag{5.96}$$

将右式展开、化简，得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\psi)\sin\psi} \tag{5.97}$$

代入(5.94)式，得

$$\sigma'(\psi) = \sigma(\theta)\frac{\sin^2\theta}{\cos(\theta-\psi)\sin^2\psi}$$

$$= \sigma(\theta)\frac{[\lambda\cos\psi + \cos(\theta-\psi)]^2}{\cos(\theta-\psi)} \tag{5.98}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

利用(5.95)式得

$$\cos(\theta-\psi)=\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi} \tag{5.99}$$

代入(5.98)式得

$$\sigma'(\psi)=\sigma(\theta)\frac{[\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}]^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}} \tag{5.100}$$

由(5.95)式

$$\theta=\sin^{-1}(\lambda\sin\psi)+\psi$$

代入(5.100)式即完全用 ψ 标定了微分截面.

对于极端情形，$\sigma'(\psi)$可大为化简：

当 $m_1=m_2$，$\lambda=1$ 时，$\theta=2\psi$，

$$\sigma'(\psi)=\sigma(\theta)|_{\theta=2\psi}4\cos\psi \tag{5.101}$$

当 $m_1\ll m_2$，$\lambda\simeq 0$，$\theta\simeq\psi$

$$\sigma'(\psi)=\sigma(\theta)|_{\theta=\psi} \tag{5.102}$$

在弹性散射中，如靶粒子初始时静止，则由动能守恒可知，入射粒子动能将减少，速度减慢，把部分动能传送给靶粒子。由图 5.22 知

$$V_1^2=V'^2_1+V_c^2+2V'_1V_c\cos\theta$$

因

$$V_c=\frac{m_1u_1}{m_1+m_2},\quad V'_1=\frac{m_2u_1}{m_1+m_2}$$

故

$$\frac{V_1^2}{u_1^2}=\frac{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\theta}{(m_1+m_2)^2}$$

$$=\frac{1+\lambda+2\lambda\cos\theta}{(1+\lambda)^2} \tag{5.103}$$

设 Lab 系中入射粒子能量为 E_0，散射后能量为 E，

$$\frac{E}{E_0}=\frac{V_1^2}{u_1^2}=\frac{1+\lambda+2\lambda\cos\theta}{(1+\lambda)^2}$$

当 $m_1=m_2$ 时，$\lambda=1$，所以

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

因 $\theta=2\psi$，故

$$\frac{E}{E_0}=\cos^2\psi$$

当 $\psi=\pi/2$ 时，$E=0$，粒子将停止下来，即在实验室坐标系中，$m_1=m_2$ 时，有最大散射角的粒子将失去所有的能量.

散射时的动能转移，是原子反应堆中使快中子慢化的原理. 为进行受控的核反应，必须使反应堆中裂变产生的快中子减速，同时，又要使之不被俘获而将散射继续下去，这里，用轻元素作为减速剂效果最好. 因而如水中或化合物中的氢、氘及碳等都是较好的减速剂.

【例 5.8】 刚球散射。

作为描述气体运动的粗略近似，常常把它看作不断作混乱运动的光滑、有给定半径的刚性球的集团，它们之间的相互作用是由零力程排斥力引起的弹性碰撞.

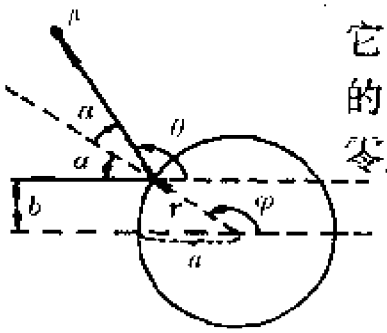


图 5.29

刚球碰撞的二体势能函数为

$$V(r)=\begin{cases}+\infty & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

即刚球不能穿入并且没有力程.

由图 5.29 知，碰撞参数 $b=a\sin\varphi$，散射角 $\theta=\pi-2\alpha$ 又 $\theta+\alpha=\varphi$，故有

$$\frac{\theta}{2}=\varphi-\frac{\pi}{2}$$

$$b=a\cos\frac{\theta}{2}$$

微分散射截面

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1}{4}a^2$$

总散射截面

$$\sigma_r=\int\sigma(\theta)d\Omega=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}a^2 2\pi\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2\left[\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right]=\pi a^2$$

正是散射中心对入射粒子束呈现的有效靶面积.

【例 5.9】 证明由排斥中心力 $F=Kr^{-3}(K>0)$ 产生的散射，其微分散射截面为(图 5.30)

$$\sigma(\theta)=\frac{K\pi^2}{2E}\frac{\pi-\theta}{\theta^2(2\pi-\theta)^2\sin\theta}$$

解 $f=Kr^{-3}=Ku^3\quad\left(u=\frac{1}{r}\right)$

由比内公式，有

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{Ku}{mh^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\left(1+\frac{K}{mh^2}\right)u=0$$

令 $\omega^2=1+\frac{K}{mh^2}$，得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\omega^2u=0$$

此方程的解为 $u=A\sin(\omega\varphi+\varepsilon)$，由初始条件，$r=\infty$，$u=0$，$\varphi=0$，故有 $\varepsilon=0$，$u=A\sin(\omega\varphi)$

碰撞参数

$$b=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varphi\to 0}}r\sin\varphi$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{A\sin(\omega\varphi)}=\frac{1}{A\omega}$$



图 5.20

由图 5.30 可见，当 $r=\infty$ 时，u

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$=0$，$\omega\varphi_\infty=\pi$，$\theta=\pi-\varphi_\infty$，故 $\theta=\pi\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$，即为散射角.

体系的能量

$$E=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varphi\to 0}}\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{m}{2}\left(\frac{\omega\cos(\omega\varphi)}{A\sin^2(\omega\varphi)}\dot{\varphi}\right)^2$$

将 $\dot{\varphi}=hu^2=hA^2\sin^2(\omega\varphi)$ 代入上式，得

$$E=\lim_{\varphi\to 0}\frac{m\omega^2A^2h^2}{2}\cos^2(\omega\varphi)$$

$$=\frac{m\omega^2A^2h^2}{2}=\frac{mh^2}{2b^2}$$

碰撞参数

$$b=\sqrt{\frac{mh^2}{2E}}=\sqrt{\frac{K}{2E(\omega^2-1)}}$$

由卢瑟福散射公式得

$$\sigma(\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{b}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}$$

并令 $x\equiv\frac{\theta}{\pi}$，$x=\frac{\pi-\varphi_\infty}{\pi}=1-\frac{\varphi_\infty}{\pi}=1-\frac{1}{\omega}$，$\omega=\frac{1}{1-x}$，则

$$\sigma(\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{K}{E}\frac{(1-x)^3}{x^2(2-x)^2}$$

$$\sigma(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{K}{2E}\frac{(1-x)\mathrm{d}x}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)}$$

$$=\frac{K}{2E}\frac{\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)}{\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2(2-\frac{\theta}{\pi})^2\sin\theta}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{K\pi^2}{2E} \frac{(\pi-\theta)\mathrm{d}\theta}{\theta^2(2\pi-\theta)^2\sin\theta}$$

微分散射截面为

$$\sigma(\theta) = \frac{K\pi^2}{2E} \frac{(\pi-\theta)}{\theta^2(2\pi-\theta)^2\sin\theta}$$

习　题

5.1　某人观察到一轨道空间站始终停留在地球同一点的垂直上空，问观察者位于地球的什么地方？尽可能详细地描述一下此空间站的轨道.

（轨道在赤道面内，是个圆，半径为 4.2×10^4km）

5.2　质量为 m 的质点受到一静止中心的吸引力 $F=-\frac{2m}{r^3}$，其中 r 是质点到力心的距离. 起始时，$r_0=1$，$\theta_0=0$，$v_0=\sqrt{2}$，且 v_0 与径向成 45°角，求质点的运动规律.

（$r=e^\theta$，对数螺线）

5.3　考虑一个转动的球形行星，该行星赤道上某点的速度是 V，行星转动的效果使赤道上的 g 是极点上 g 的一半. 问该行星极点上一粒子的逃逸速度等于多大？用 V 乘上某个因子表示.

（逃逸速度　$v=2V$）

5.4　一个在有心力作用下的粒子的运动轨迹为 $r\theta=$常数，试用 r 表示其势能.

$\left(V=-\frac{mh^2}{2r^2}\right)$

5.5　如果质点受中心力作用而作双纽线（$r^2=a^2\cos^2\theta$）运动，中心力

$$F = -\frac{3ma^4h^2}{r^7}$$

试证明之.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

5.6　考虑一质量为 m 的粒子在力 $F=-kr$ 影响下运动，这里 k 是一正的常数，r 是该粒子的位置向量.

(a). 证明粒子在一平面内运动.

(b). 找出粒子的位置与时间的关系，假设在 $t=0$ 时，$x=a$，$y=0$，$v_x=0$，$v_y=v_0$.

(c). 证明该轨道是一椭圆.

(d). 求出周期.

(e). 该粒子的运动遵守行星运动的开普勒定律吗?

$\left((d)\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\ (e)\quad 否\right)$

5.7　质点在中心力作用下运动，此力的量值为质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即 $v=\frac{a}{r}$，如 $a^2>h^2$，$(h=r^2\dot{\theta})$，求质点的轨道方程. 设当 $r=r_0$ 时，$\theta=0$.

$\left(r=r_0\exp\left[\mp\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\theta\right]\right)$

5.8　一质点在中心力场中沿螺线轨道

$$r=c\theta^2$$

运动，求力函数形式，并求 θ 作为时间 t 的函数.

$\left(f(r)=-mh^2\left(\frac{6c}{r^4}+\frac{1}{r^3}\right);\ \theta=(5hc^2)^{1/5}t^{1/5},\ h=r^2\dot{\theta}(常数)\right)$

5.9　质点 m 受中心力 $F=-m\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$ 的作用，其中 μ，ν 为常数，证明 m 的轨道是一个转动的圆锥曲线.

$\left(r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos k\varphi}\right)$

5.10　(a). 一质量为 m 的质点在中心力场

$$F=-\frac{kr}{r^4}$$

中运动，证明：如果 E 是质点的总能量，则其速率

$$v=\sqrt{\frac{k}{mr^2}+\frac{2E}{m}}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(b)如质点沿轨道

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

运动，求作用于其上的中心力.

(c)一卫星半径为 a，以周期 p 沿关于某行星半径为 b 的圆形轨道运动，如果它们表面的最短距离是 c，证明行星的质量是

$$4\pi^2(a + b + c)^3/Gp^2$$

$\left((b)\quad f(r)=-\frac{l^2}{m}\frac{3a}{r^4}\right)$

5.11　一卫星的最小和最大轨道速率分别为 V_{max} 和 V_{min}，证明卫星运动的轨道偏心率等于

$$\frac{V_{min} - V_{max}}{V_{max} + V_{min}}$$

5.12　一卫星沿半径为 $2R_g$（R_g 为地球半径）的环绕地球的圆形轨道运动. 在某一时刻，卫星的运动方向朝向地球改变了 α 角，而速率不变，求使卫星刚要接触地球之 α 值.

($\alpha=30°$)

5.13　一卫星匀速率运动在以地心 O 为中心，半径为 $4a$ 的圆形轨道上. 这里 a 是地球半径. 点燃反推进火箭以减小卫星的速率，不改变其方向，因而其后它运动在一椭圆轨道上，它距地心 O 最近为 $2a$. 证明卫星速率必须按 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 的比例减小.

5.14　地球上方几百公里高处来自稀薄大气的阻力，对于沿圆形轨道运行的卫星产生的效应竟是使卫星速率增大，如何解释这个“卫星怪象”?

如果上层大气的阻力是 $F=Av^n$，v 是卫星的速率，卫星到地心的径向距离终归要以 $\frac{dr}{dt}=c$ 的比率减小，c 是正常数，它足够地小，使卫星每转一周的能量损失同总能量相比为一小量. 求 A 和 α 的表达式.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\left(a=3,\ A=-\frac{M}{2Gm}c\right)$

5.15　火箭自地球表面发射，发射方向与竖直方向成 α 角，发射后按椭圆轨道运动，已知椭圆的长轴是地球半径的 n ($n<2$)倍，试求火箭在空中飞行的时间.

$$\left(t=\left(\frac{n^3R_E}{2g}\right)^{1/2}\left\{\pi+\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\cos\alpha-2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{n-1}\cos\alpha}{n-2+\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}}\right\}\right)$$

5.16　一弹道导弹要求有一个 7.5×10^3km 的射程(射程即 αR_E，α 是发射点与目标点处地球半径间的夹角). 求最适宜的飞行角 β_0，v_0 及导弹达到的最大高度.

($\beta_0=28°$，$v_0=6.7\times10^3$km/s，$H=1.2\times10^3$km)

5.17　一质量为 m 的卫星围绕着地球以速度 v 在一半径为 R 的圆轨道上运动，卫星突然吸附了一小质量 δm，而这块小质量在发生碰撞前是静止不动的，求此卫星总能量的改变. 如果假定新轨道大致是圆形的，试求这个新轨道的半径.

$$\left(\triangle E=\frac{1}{2}mv^2\frac{\delta m}{m+\delta m},\ R'=R\left(\frac{m+\delta m}{m}\right)^2\right)$$

5.18　一质点在万有引力作用下沿椭圆轨道运动，在某一点突然受到法线方向的瞬时力而使法向速度突然变化一小量 δV，求此后轨道的半长轴、半短轴、第二焦点及周期的变化.

$$\left[\begin{array}{l}\delta a\simeq0,\ \delta b=-\frac{p_2\delta v}{p_1v},\ p_1,\ p_2\text{ 分别是力心到切线、法线的距离.}\\ \text{第二焦点到质点距离不变，但转过了角度}\frac{2\delta v}{v}.\ \delta T=0\end{array}\right]$$

5.19　有一个在太阳周围按椭圆轨道运行的行星，当运动到某一点时，太阳的质量突然发生一微小变化，假如其后轨道的偏心率之值不变，求证该点即椭圆短轴的端点.

5.20　证明：循着椭圆轨道运行的行星，如其在远日点速率突然增加 δv 的话，则在近日点处行星到太阳的距离增加了

$$4\delta v\{a^3(1-\varepsilon)/(\lambda(1-\varepsilon))\}^{1/2}$$

5.21　设有一彗星的轨道是以太阳为焦点的抛物线，这个

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

彗星在近日点处和另一个质量相同的静止彗星相碰，碰后两个彗星合成一个．证明这个大彗星的轨迹是一个偏心率为 1/2 的椭圆．

5.22　一卫星以速度 v、距地表高度 h 作圆轨道运动，反推进火箭点火，使卫星速率降为 λv，$(0<\lambda<1)$，证明如

$$\lambda^2 \leqslant 2R_E/(2R_E+h)$$

卫星将与地球相撞．R_E 为地球半径．

5.23　研究如下微分方程的解 $x_0(t)$ 的稳定性：

$$(1)t\frac{dx}{dt}-2x=t+1,\ x_0=8t^2-t-\frac{1}{2}$$

$$(2)\frac{dx}{dt}+tx-t^3=0,\ x_0=t^2-2+2e^{-t^2/2}$$

$$(3)t\frac{dx}{dt}+3x=x^2t^2,\ x_0=1/t^2(1+t)$$

((1)如 $x=x_0+\zeta$，$\zeta=At^2$，不稳定；(2)$\zeta=Ae^{-t^2/2}$，稳定；(3)$\zeta=A/t(1+t)^2$，稳定)

5.24　研究微分方程

$$\frac{dx}{dt}+tx=tx^{-3}$$

的解 $x_0=(1+e^{-2t^2})^{1/4}$ 的稳定性．

(令 $x=x_0+\zeta$，$\zeta=Ae^{-2t^2}/(1+e^{-2t^2})^{3/4}$，稳定)

5.25　试从微分方程解的稳定性，证明在乘方律力下，即单位质量受力 $f=-kr^{-n}$ 时，圆轨道稳定的条件是 $n<3$．

5.26　如果一中心力场力函数具有如下形式：

$$f(r)=-\frac{k}{r^2}-\frac{e}{r^4}$$

求其圆轨道稳定的条件．

$\left(r>\frac{e}{k}\right)$

5.27　据汤川核力理论，中子与质子之间的引力势能为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$V(r)=\frac{ke^{-\alpha r}}{r},\qquad k<0$$

求：

(1)圆运动的周期.

(2)圆轨道稳定的条件.

(3)径向微振动周期.

$$\begin{cases} T=2\pi\sqrt{\dfrac{-mr_0^3}{(1+\alpha r_0)ke^{-\alpha r_0}}},\ 1.62>-\alpha r_0>-0.62, \\ T_r=2\pi\sqrt{\dfrac{mr_0^3}{(\alpha^2 r_0^2-\alpha r_0-1)ke^{-\alpha r_0}}} \end{cases}$$

5.28 考虑质量为 m 的质点，它受约束而运动于方程为

$$r^2=4az$$

的抛物面上，如质点受重力作用，证明其对半径为 $r_0=\sqrt{4az_0}$ 的圆轨道所作径向振动频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2mg}{a+z_0}}$$

5.29 研究在指向原点的 mk/R^3 力作用下，质量 m 的粒子圆轨道的稳定性. 这里 k 是常数，(R,θ)是平面极坐标.

($\xi=0$，$\to\zeta=At+B$，不稳定)

5.30 一质点在每单位质量中心力 $f(R)$作用下运动，定下半径为 a 的圆形轨道稳定的条件.

(1)如 $f(R)=\mu e^{-\lambda R}/R^n$，$\mu$ 是正常数，λ 和 n 是常数. 证明稳定圆轨道要求

$$a\lambda+n<3$$

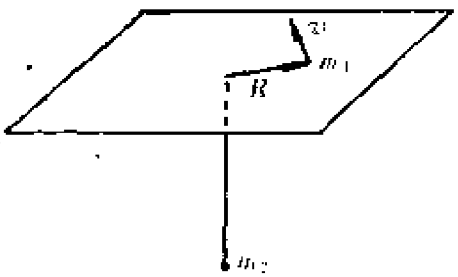
(2)$f(R)=k/R^2+k'/R^3$，其中 k 和 k' 是正常数，证明圆轨道是稳定的.

5.31 一质量为 m_1 的物体，在一无摩擦的水平桌上绕一小孔运动. 该物体系于一通过小孔的细绳上. 质量为 m_2 的物体系于这细绳的另端.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)已知 m_1 在桌面上的初始位置 R_0 和初速度 v_0 及质量 m_1 和 m_2，找出决定这轨道的最大和最小半径的方程。(不要解!)

(2)当这轨道仅稍微和圆不同时，求沿轨道径向振动的频率.



5.31 题图

$$\begin{cases}(1)2m_2gr^3-[(m_1+2m_2)v_0^2\cos^2\theta_0+m_1v_0^2+2m_2R_0g]r^2+m_1R_0^2v_0^2\sin^2\theta_0=0\\(2)\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3m_2g}{(m_1+m_2)r_0}}\end{cases}$$

5.32 质量为 m 的一个质点，在势为 $V(r)=kr^3(k>0)$ 的有心力场中运动.

(a)这质点的动能和角动量多大时，轨道将是一个绕原点的半径为 a 的圆?

(b)圆周运动的周期是多少?

(c)假如这质点的圆周运动受到轻微扰动，那么这个质点绕 $r=a$ 的径向微振动的周期是多少?

$$\left((a)T=\frac{3k}{2}ma^3,\ l=mr^2\dot{\theta}=ma^2\sqrt{3ka};(b)T=\frac{2\pi}{\sqrt{3kn}};(c)\omega=\sqrt{15kn}\right)$$

5.33 设有一束半径为 b 的刚性球和半径为 a 的刚性球散射，入射束是均匀的；试求微分散射截面和散射总截面.

$$\left(|\sigma(\theta)|=\frac{1}{4}(a+b)^2,\ \sigma_r=\pi(a+b)^2\right)$$

5.34 (a)在卢瑟福散射问题中，我们能够计算出给定能量的 α 粒子迎面趋于一原子核时的最小逼近距离 d_0. 证明 $d_0=2kq_1q_2/mv_0^2$. (k 是库仑定律中的比例常数，q_1，q_2 是两粒子上的电荷.)

(b)相距 10^{-14}m 的两质子间的斥力为 2.3N. 试由此推算动能为 5 兆电子伏特的 α 粒子(电荷 $2e$)趋近于金的原子核(电荷 $79e$)时的 d_0 之值.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

($d_0=4.5\times10^{-12}$m)

5.35 一质量为 m 的粒子在一排斥性的中心力 Am/r^3 的力场中运动，A 是常数. 在离力心很远的地方，粒子的速度为 v_0，碰撞参数为 b，证明 m 到力心的最近距离为

$$r_{min}=(b^2+A/v_0^2)^{1/2}$$

5.36 导出在实验室系中：

(1)粒子被散射到大于定角 β 的任何角度上的几率.

(2)粒子被散射到位于同入射方向成 ψ 角的径向距离为 R 的探测器上每单位面积的几率.

$\left((1)P(\beta)=\frac{2\pi}{\sigma_T}\int_\beta^\pi\sigma(\psi)\sin\psi d\psi;(2)P(\psi)=\frac{\sigma(\psi)}{R^2}\right)$

5.37 证明实验室系中最大的散射角是

$$\psi=\sin^{-1}\left(\frac{m_B}{m_A}\right)$$

式中 $m_B/m_1\ll1$. 质子被静止电子弹性散射的最大角度是多大？

$\left(2\zeta=\frac{\pi}{2}-\psi$ 时 ψ 最大，$\psi=0.031^\circ\right)$

5.38 导出实验室系中描述两质子弹性散射的微分散射截面的表达式：

$\left(\sigma(\psi)=\left(\frac{e^2}{T_{Lab}}\right)^2\mathrm{ctg}\psi\csc^3\psi,\quad T_{Lab}$表示动能$\right)$

5.39 一个理论物理学家需要 $\theta=40^\circ$ 和 $T_\infty=100$MeV (1MeV $=10^{-12}$erg)质子—质子弹性散射的资料，他需要给实验物理学家什么样的 ψ 和 T_{Lab} 值以正确地安装实验设备？

($\psi=20^\circ$，$T_{Lab}=200$MeV，T_{Lab}是实验室系中的动能)

5.40 质量为 m 的粒子，受势为 $V\propto r^{-4}$ 的引力作用，求出捕获以初速 v_∞ 从无穷远来的粒子的总截面.

$\left(\sigma=4\pi\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^{1/2}\right)$

5.41 一荷电的 π 介子(π^+ 或 π^-)具有动能 T_0(非相对论性的)，一重核具有电荷 Ze，其有效半径为 R。按经典考虑，当

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

π介子射向核时，只有当它与核的最近距离等于和小于R时才能发生碰撞或散射(忽略核的反冲和原子中的电子效应.)。试证π介子的散射截面为：

$$\text{对于 } \pi^+,\ \sigma = \pi R^2 \frac{T_0 - V}{T_0}$$

$$\text{对于 } \pi^-,\ \sigma = \pi R^2 \left(\frac{T_0 + V}{T_0}\right)$$

其中 $V = \frac{Z e^2}{R}$.

5.42 求粒子落到场 $V = -\alpha/r^2$ 中心去的有效散射截面.

$\left(b_{max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2},\ \sigma = \pi b_{max}^2 = 2\pi\alpha/mv_\infty^2\right)$

5.43 核物理中常常遇到中心力势被定义为方势讲

$$V = 0,\ r > a$$

$$V = -V_0,\ r \leqslant a$$

证明在经典力学中，由这种势引起的散射等同于光线经过半径为a，折射率为

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

的球时所产生的折射(这一等效性说明有可能用惠更斯和牛顿机械微粒两者来解释折射现象)。还要证明：微分散射截面为

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 a^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \frac{(n\cos\frac{\theta}{2} - 1)(n - \cos\frac{\theta}{2})}{(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2})}$$

试求总散射截面.

$(\sigma_t = \pi a^2)$

5.44 一彗星以初速 v_0 向着太阳运动，太阳的质量为M，半径为R.求彗星和太阳相撞的总截面积。太阳可视为静止的并略去所有其它星体.

$\left(\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2GM}{v_0^2 R}\right)\right)$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

5.45　质量为 m 的粒子以速度 v_0 从无穷远发射，受到与距离成反比的固定斥力中心的作用(斥力大小为 k/r^2，k 为常数)，如果粒子不受斥力中心作用时，粒子将以与斥力中心距离为 b 的轨迹通过。求

(1)粒子接近斥力中心的最近距离.

(2)实际产生的偏转角.

(3)对于一均匀的粒子束受到该势场散射的微分散射截面 $d\sigma/d\Omega$.

((1)粒子接近斥力中心的最近距离 R 满足如下方程：

$\frac{1}{R^2}+\frac{k}{mv_0^2b^2R}=\frac{1}{b^2}$. (2)偏转角 2θ, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{2Eb}{k}$, $E=\frac{1}{2}mv_0^2$)

5.46　证明对于任何排斥中心力，散射角的形式解是

$$\Theta=\pi+2\int_0^{u_0}\frac{b\,du}{\sqrt{1-\frac{V(u)}{E}-b^2u^2}}$$

式中 V 是势能，$u=\frac{1}{r}$，u_0 对应于轨道的拱点. 对于力 k/r^3，相应的表达式为何?

(对于力 k/r^2, $\Theta=\pi+2\int_0^{u_0}\frac{b\,du}{\left[1+\left(\frac{2k}{E}+b^2\right)u^2\right]^{1/2}}$)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第六章　微　振　动

本章讨论力学和物理学中一种普遍存在的运动形式——微振动，特别是多自由度的完整、稳定、保守系统的微振动. 所谓微振动，是指振动的位移、速度都是小量，因而振动能量也是小量的振动. 微振动是自然界和工程技术中随处可见的现象. 一座高层建筑或拦河大坝，并不是完全静止不动的，而是在平衡位置附近作微振动，晶格点阵上的原子、多原子分子内各原子也在各自的平衡位置附近作微振动，甚至在中心力场中作圆周运动的物体，在耦合电路中稳恒流动的电流，也会受到扰动而发生对稳定圆轨道及稳定电流值的微振动，至于声学、等离子体等领域，微振动更是广泛存在. 尽管微振动涉及极不相同的领域，表现形式多种多样，但它们都有共同的特点和相似的处理方法. 可以说，微振动是用拉格朗日方程处理，并且其运动问题解决得最好的一类运动.

§6.1　一维微振动

我们对一维振动十分熟悉，知道它的特点在于物体在平衡位置附近作往复的周期运动，它的作用力必须是恢复力——总是指向平衡点的，而且是弹性力，线性地依赖于位移. 从势能曲线看，它们都有一个稳定的平衡位置 ξ，如图 6.1 所示.

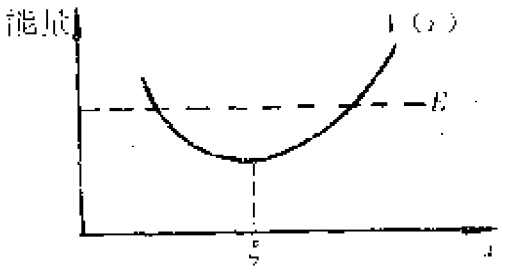


图 6.1

如果一维振动是微振动，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

振动的总能量略高于势能最小值 $V(\xi)$，振动动能

$$\varepsilon = E - V(\xi)$$

是一小量，相应的位移和速度也是小量. 在这样的条件下，在平衡位置 ξ 附近，总可以用抛物线近似代替势能曲线的凹部，这时相应的力一定是弹性力，也即总可以把恢复力线性化，称为线性谐振动近似，或 LHO 近似. 这可以通过将势能 $V(x)$ 在 $x=\xi$ 附近展成泰勒级数看出：

$$V(x)=V(\xi)+V'(\xi)(x-\xi)+\frac{1}{2!}V''(\xi)(x-\xi)^2 + \frac{1}{3!}V'''(\xi)(x-\xi)^3+\cdots \tag{6.1}$$

如选 ξ 点为势能零点，即令 $V(\xi)=V_{\min}=0$，又因 ξ 系平衡位置，$V'(\xi)=0$，所以

$$V(x)=\frac{1}{2!}V''(\xi)(x-\xi)^2+\frac{1}{3!}V'''(\xi)(x-\xi)^3+\cdots$$

移动坐标原点，令 $\xi=0$，则

$$V(x)=\frac{1}{2!}V''(0)x^2+\frac{1}{3!}V'''(0)x^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{3!}\lambda x^3+\cdots \tag{6.2}$$

略去二级以上小量，则

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2 \tag{6.3}$$

势能曲线为抛物线，式中

$$k=V''(0)=\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=0} \tag{6.4}$$

相应的有势力

$$F(x)=-\frac{dV}{dx}=-kx \tag{6.5}$$

即利用微振动的条件，已将力线性化. 质点运动微分方程为

$$m\ddot{x}+V''(0)x=0 \tag{6.6}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{6.7}$$

微振动的角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(0)}{m}} \tag{6.8}$$

周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \tag{6.9}$$

能量积分可以表为

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E(\text{常数}) \tag{6.10}$$

上面关于质点一维微振动的讨论，还可以推广到一般单自由度系统的微振动. 对单摆，以摆角 θ 为变量(广义坐标)，惯性因子是质量 m，力常数为 g/l，角频率 $\omega=\sqrt{g/l}$. 对物理摆(复摆)而言，以 θ 为变量，惯性因子 $I_0=\frac{I}{M}$，力常数为 gl，角频率

$$\omega = \sqrt{gl/I_0} \tag{6.11}$$

对扭转摆，以 θ 为变量，I 为惯性因子，κ 为力常数，角频率

$$\omega = \sqrt{\kappa/I} \tag{6.12}$$

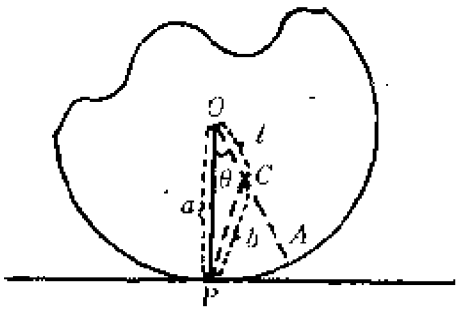


图 6.2

以上讨论说明，在微振动条件下，系统所受的恢复力总可以化成弹性力，我们在讨论多自由度耦合系统的微振动时，仍然采用类似的处理方法.

【例 6.1】 一刚体有一圆形底部(球或圆柱)，置于水平面上，如图所示. 求其在平衡位形附近作微振动的周期. (设接

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

触面粗糙，运动为平面运动).

解　设圆半经为 a，刚体质心为 C，平衡时与平面接触点 A. 选 θ 为广义坐标，则势能

$$V = mg(a - l\cos\theta) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mgl\sin\theta = 0 \tag{2}$$

$\theta=0$ 是平衡位置，因 $\cos\theta\approx1$，$I_P=I_A=I$，

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0} = mgl\cos\theta\Big|_{\theta=0} = mgl > 0 \tag{3}$$

故 θ 是稳定平衡位置.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{V''(0)}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{4}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

§6.2　耦合谐振动举例——二度耦合谐振子

多自由度耦合系统，指的是多质点组成的系统，其各质点间存在着相互作用，彼此间有能量交换，每个质点的运动都与其它质点的运动有关，这使运动问题的求解变得非常复杂.

如果质点间的作用力都是弹性力，这是一个严格的耦合振动系统.

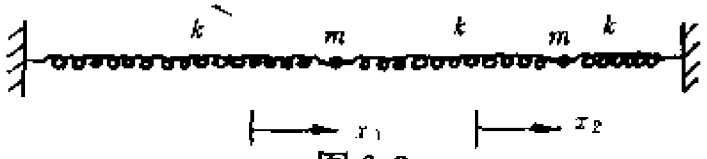


图 6.3

如果系统中每个质点，都存在一个稳定的平衡位置，则力具有恢复力的性质. 而如果体系是在平衡位形附近作微小振动，则恢复力可以线性化为弹性力，这将是本章重点讨论的.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

现在，我们暂时不考虑微振动. 先考察一个严格的耦合振动系统——二度耦合谐振子的运动(如图 6.3 所示). 设两振子质量均为 m，三个弹簧弹性系数均为 k，取各振子平衡位置为坐标原点，取广义坐标为 x_1，x_2(系统自由度 $f=2$).

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{6.13}$$

势能

$$V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}kx_2^2 \tag{6.14}$$

拉氏函数

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2-\frac{1}{2}kx_1^2\\&\quad-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_2^2\end{aligned} \tag{6.15}$$

代入拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,\cdots,f) \tag{6.16}$$

$$\begin{cases}\Lambda_{x_1}L=0:\ m\ddot{x}_1+k(2x_1-x_2)=0\\ \Lambda_{x_2}L=0:\ m\ddot{x}_2+k(2x_2-x_1)=0\end{cases} \tag{6.17}$$

这是二元二阶常系数常微分方程组. 选择如下形式的试探解:

$$x_1=A_1\sin(\omega t+\alpha),\ x_2=A_2\sin(\omega t+\alpha) \tag{6.18}$$

A_1，A_2，ω，α 将在代入微分方程组后来确定.

由微商得

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-\omega^2A_1\sin(\omega t+\alpha)\\ \ddot{x}_2=-\omega^2A_2\sin(\omega t+\alpha)\end{cases} \tag{6.19}$$

方程(6.17)化为

$$\begin{cases}-M\omega^2A_1\sin(\omega t+\alpha)+k(2A_1-A_2)\sin(\omega t+\alpha)=0\\ -M\omega^2A_2\sin(\omega t+\alpha)+k(2A_2-A_1)\sin(\omega t+\alpha)=0\end{cases} \tag{6.20}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

消去$\sin(\omega t+\alpha)$，整理得：

$$\begin{cases}(2k-m\omega^2)A_1-kA_2=0\\-kA_1+(2k-m\omega^2)A_2=0\end{cases}\tag{6.21}$$

方程(6.21)有非零解的充分必要条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}2k-m\omega^2 & -k\\ -k & 2k-m\omega^2\end{vmatrix}=0\tag{6.22}$$

通常称此为久期方程. ω^2 满足

$$(2k-m\omega^2)^2-k^2=0$$

$$\omega_1^2=\frac{3k}{m}\qquad \omega_2^2=\frac{k}{m}\tag{6.23}$$

因前面试探解已代表了 ω 取±值的两种情况，ω 只取正值即可，称为简正频率.

将 ω_1^2 代入(6.21)式得

$$-kA_{11}-kA_{21}=0$$

(A_{ij}的下标 j 代表第 j 个简正频率)，由此推出

$$A_{11}=-A_{21}=A\tag{6.24}$$

将 ω_2^2 代入(6.21)式得

$$kA_{12}-kA_{22}=0,\ A_{12}=A_{22}=B\tag{6.25}$$

当 $\omega=\omega_1$ 时，

$$x_1=A\sin(\omega_1 t+\alpha_1),\ x_2=-A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)\tag{6.26}$$

当 $\omega=\omega_2$ 时，

$$x_1=B\sin(\omega_2 t+\alpha_2),\ x_2=B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\tag{6.27}$$

则通解为

$$\begin{cases}x_1=A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\x_2=-A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{cases}\tag{6.28}$$

因为这里有两个二阶微分方程，共 4 个积分常数，它们将由初始条件(初始位置与初始速度)决定. 由通解可见，每个质点的运动均由两种不同频率的简谐振动迭加而成，这频率就是简正频率. 这些简谐振动称为简正振动.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如果严格控制初始条件，可使体系只参与一种频率的简正振动，而其余的简正振动不被激发.

令 $t=0$ 时，$x_{10}=-x_{20}=a$，$\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$，代入(6.28)式及其微商可得：

$$A=a \qquad B=0 \qquad \alpha_1=\pi/2 \quad \alpha_2=0$$

$$x_1=a\cos\omega_1 t=-x_2 \tag{6.29}$$

两个质点总是反向运动，作图表示则如图 6.4 所示.

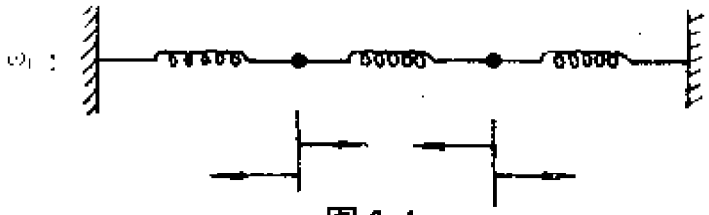


图 6.4

简正频率 ω_1 以其简正振动的振幅比确定了一个简正模式，称为反对称模式.

如令 $t=0$ 时，$x_{10}=x_{20}=a$，$\dot{x}_{10}=\dot{x}_{20}=0$，则 $A=0$，$B=a$，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=\pi/2$，

$$x_1=a\cos\omega_2 t=x_2 \tag{6.30}$$

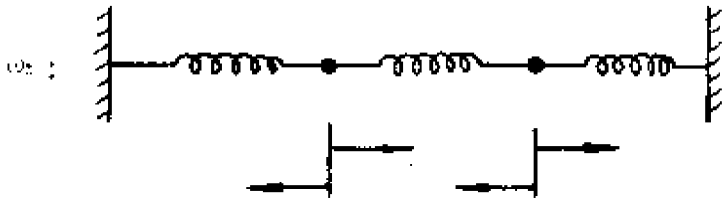


图 6.5

ω_2 确定的简正模式，两质点总是同向运动，称为对称模式.

若按下述方式选一组新的广义坐标：

$$\begin{cases}\eta_1=x_1-x_2=2A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)\\ \eta_2=x_1+x_2=2B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{cases} \tag{6.31}$$

则 η_1，η_2 只参与一种频率的振动，称为简正坐标. 如果开始时就取

$$x_1=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2),\ x_2=\frac{1}{2}(\eta_2-\eta_1) \tag{6.32}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

则

$$T = \frac{1}{4}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) \tag{6.33}$$

$$V = \frac{1}{8}k(3\eta_1^2 + \eta_2^2) \tag{6.34}$$

代入拉氏方程得出

$$\begin{cases} \Lambda_{\eta_1} L = 0: & \ddot{\eta}_1 + \dfrac{3k}{m}\eta_1 = 0 \\ \Lambda_{\eta_2} L = 0: & \ddot{\eta}_2 + \dfrac{k}{m}\eta_2 = 0 \end{cases} \tag{6.35}$$

二方程各自独立，可分别求解，每个简正坐标只参与一种振动. 简正坐标 η_1，η_2 并不单独代表某质点的振动，而是属于整个体系.

§6.3 多自由度耦合系统微振动的一般理论

本节讨论的是多自由度的完整、稳定、保守系统在稳定平衡位形附近的微振动.

设系统有 f 个自由度，选取 f 个广义坐标 $q_1, \cdots, q_f$ 来描述它的运动.

对完整、稳定约束而言，约束方程为

$$f(r_1, r_2, \cdots, r_n) = 0$$

一般情况下，变换方程不显含时间：

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{6.36}$$

因系统是保守的，所有的广义力都可用势能表示

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f) \tag{6.37}$$

系统的运动可以用完整保守系统的拉格朗日方程求解.

如同单自由度的情形一样，系统作微振动，首先作用力必

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

须是恢复力，存在稳定的平衡位形. 平衡位形可以用广义力表示：

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}\Big|_{q_{\sigma 0}} = 0 \qquad (\sigma = 1, \cdots, f) \qquad (6.38)$$

对于力学中绝大多数有物理意义的情形，势能是广义坐标的二次齐次函数，

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_f) = \frac{1}{2}(k_{11}q_1^2 + 2k_{12}q_1q_2 + k_{22}q_2^2 + \cdots) \qquad (6.39)$$

如果存在平衡位形 $q_{\sigma 0}(\sigma=1, \cdots, f)$，总可以作一线性变换，使 $q_{10}=q_{20}=\cdots=q_{f0}=0$，即将各广义坐标的原点取在平衡位形. 不失一般性，可令 $V(0, 0, \cdots, 0)=0$，V 中的系数

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_f=0} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 \\ k_{12} &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 \\ &\cdots \quad \cdots \\ k_{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 \qquad (6.40) \\ &\cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

平衡位形稳定的条件是势能函数为广义坐标的正定二次型；齐二次型为正定的充分必要条件是 $k_{ij}=k_{ji}$ 满足下列条件

$$k_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots (6.41)$$

这里要求系数行列式为正，并不要求各个系数为正.

在如上所述的前提下，处理微振动问题的一般程序如下：

首先，将势能 $V=V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$ 在稳定平衡位形附近作泰勒展开：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_f) = V(0.0, \cdots, 0) + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\Big|_0 q_\alpha + \frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta}^{f} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_0 q_\alpha q_\beta + \cdots \quad (6.42)$$

略去三次以上的项，并已令 $V(0, 0, \cdots, 0)=0$，“0”表示平衡位形，而在平衡位形，所有广义力为零，因此，$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\Big|_0 = 0$，故有

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_f) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}|_0 q_\alpha q_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \quad (6.43)$$

式中

$$k_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_0 = k_{\beta\alpha} \quad (6.44)$$

称为准弹性系数，或刚度系数. 这样，我们把势能化成了广义坐标的二次齐次函数.

其次，变换动能表达式.

由于系统是稳定的，通常变换方程不显含时间，$\frac{\partial r_i}{\partial t}=0$，故有

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \quad (6.45)$$

式中

$$m_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta} = m_{\alpha\beta}(q_1, q_2, \cdots, q_f) \quad (6.46)$$

它是广义坐标的函数，在势能零点附近将 $m_{\alpha\beta}$ 展开

$$m_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta}(0, 0, \cdots, 0) + \sum \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial q_\alpha}\Big|_0 q_\alpha + \cdots \quad (6.47)$$

因 q_α 是小量，$\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ 是二阶小量，在 $m_{\alpha\beta}$ 中取零级项，即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\qquad(\text{常数})\tag{6.48}$$

则动能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\ \beta}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\tag{6.49}$$

已化成广义速度的二次齐次函数，$T>0$，是正定二次型，式中$m_{\alpha\beta}$称为惯性系数.

系统的拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\ \beta}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\ \beta}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta\tag{6.50}$$

准弹性系数 $k_{\alpha\beta}=k_{\beta\alpha}$共$f^2$个，可以用实对称矩阵$[K]$表示：

$$[K]=\begin{bmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1f}\\ \vdots&k_{22}&\ddots\\ k_{f1}&&k_{ff}\end{bmatrix}\tag{6.51}$$

称为刚度矩阵. 惯性系数$m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}$也有$f^2$个，可以用实对称矩阵$[M]$表示：

$$[M]=\begin{bmatrix}m_{11}&\cdots&m_{15}\\ \vdots&m_{22}&\ddots\\ m_{f1}&&m_{ff}\end{bmatrix}\tag{6.52}$$

称为惯量矩阵. 令

$$[q]=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_f\end{bmatrix}\tag{6.53}$$

$$[\dot{q}]=\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_f\end{bmatrix}\tag{6.54}$$

可把动能T和势能V用矩阵表示为：

$$T=\frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}],\ V=\frac{1}{2}[q]^T[K][q]\tag{6.55}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$[\dot{q}]^T$ 和$[q]^T$ 分别是$[\dot{q}]$和$[q]$的转置矩阵.

拉氏函数

$$L = \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}] - \frac{1}{2}[q]^T[K][q] \qquad (6.56)$$

由(6.49)式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]\right\}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\right\}\\ &= \sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta \qquad (6.57)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = -\sum_{\beta}^{f} k_{\alpha\beta}q_\beta \qquad (6.58)$$

拉格朗日方程为

$$\sum_{\beta}^{f}(m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + k_{\alpha\beta}q_\beta) = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, f) \qquad (6.59)$$

矩阵形式为

$$[M][\ddot{q}] + [K][q] = 0 \qquad (6.60)$$

这是二阶常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 \\ \quad + \cdots + m_{1f}\ddot{q}_f + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + k_{1f}q_f = 0 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 \\ \quad + \cdots + m_{2f}\ddot{q}_f + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \cdots + k_{2f}q_f = 0 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ m_{f1}\ddot{q}_1 + m_{f2}\ddot{q}_2 \\ \quad + \cdots + m_{ff}\ddot{q}_f + k_{f1}q_1 + k_{f2}q_2 + \cdots + k_{ff}q_f = 0 \end{cases} \qquad (6.61)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

选如下形式的试探解：

$$q_\alpha = a_\alpha \sin(\omega t + \varepsilon) \qquad (\alpha = 1, \cdots, f) \tag{6.62}$$

显然

$$\ddot{q}_\alpha = -\omega^2 a_\alpha \sin(\omega t + \varepsilon) \tag{6.63}$$

代入(6.60)得线性代数方程组

$$\sum_{\beta}^{f}(k_{\alpha\beta} - \omega^2 m_{\alpha\beta})a_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, f) \tag{6.64}$$

亦即

$$\begin{cases} (k_{11} - m_{11}\omega^2)a_1 + (k_{12} - m_{12})\omega^2 a_2 \\ \quad + \cdots + (k_{1f} - m_{1f}\omega^2)a_f = 0 \\ (k_{21} - m_{21}\omega^2)a_1 + (k_{22} - m_2)a_2 \\ \quad + \cdots + (k_{2f} - m_{2f}\omega^2)a_f = 0 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (k_{f1} - m_{f1}\omega)a_1 + (k_{f2} - m_{f2}\omega^2)a_2 \\ \quad + \cdots + (k_{ff} - m_{ff}\omega^2)a_f = 0 \end{cases} \tag{6.65}$$

矩阵表达式为

$$([K] - [M]\omega^2)[a] = 0 \tag{6.66}$$

式中

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_f \end{bmatrix} \tag{6.67}$$

这是决定 f 个系数 $a_1, \cdots, a_f$ 的 f 元线性代数齐次方程组，该方程组存在非零解的充分必要条件是系数行列式等于零，即

$$\triangle(\omega^2) = \| k_{\alpha\beta} - \omega^2 m_{\alpha\beta} \| = 0 \tag{6.68}$$

此为系统的久期方程，也正是决定 ω^2 的 f 次代数方程，一般有 f 个根，假定无简并(重根)，则有

$$\omega_r^2 \qquad (r = 1, \cdots, f)$$

ω_r^2 称为本征值，或本征频率 ω_r 的平方. 将 ω_r^2 分别代入代数方

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

程组(6.65)，可得 f 组特解系数：

$$a_{\alpha r}$$

其中，$\alpha=1, \cdots, f$ 对应于某广义坐标；$r=1, \cdots, f$ 对应于某本征频率，对应于 ω_r^2，有本征向量

$$[a_r] = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{fr} \end{bmatrix} \qquad (r = 1, \cdots, f) \tag{6.69}$$

相应于本征值 ω_r^2，得到方程组一组特解

$$q_{\alpha r} = a_{\alpha r}\sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \qquad (\alpha = 1, \cdots, f) \tag{6.70}$$

即

$$[q_r] = \begin{bmatrix} a_{1r}\sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \\ a_{2r}\sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \\ \vdots \\ a_{fr}\sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

式中 ε_r 是与 ω_r^2 相应的初位相.

应指出，$\pm\omega_r$ 都是满足久期方程的，但上述特解概括了这两种情形.

$[K]$和$[M]$都是实对称矩阵，本征值一定都是实的，否则，如 ω_r^2 是虚的，将出现发散解.

应注意，由于(6.65)是齐次代数方程组，不能把 $a_{\alpha r}$ 完全定下来，而只能给出在给定本征值 ω_r^2 下一组振幅系数 $a_{\alpha r}$($\alpha=1$, $\cdots$, f)的比值，即本征向量$[a_r]$中尚有一个常数待定. 我们再人为地引入一个条件，即令

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta} a_{\alpha r} a_{\beta r} = 1 \tag{6.72}$$

亦即

$$[a_r]^T [M][a_r] = 1 \tag{6.73}$$

称为归一化条件，这样，对每一确定的本征值 ω_r^2，各特解的振

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

幅系数a_{ar}就完全定下来了．共有f组(每组f个)这样的系数．微分方程组(6.59)的通解应是对应于不同ω_r^2的特解的线性组合，即

$$q_a = \sum_{r=1}^{f} c_r q_{ar}$$

$$= \sum_{r=1}^{f} a_{ar} c_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \quad a = 1, \cdots, f \tag{6.74}$$

亦即

$$\begin{cases} q_1 = a_{11}c_1\sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + a_{12}c_2\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \\ \qquad + \cdots + a_{1f}c_f\sin(\omega_f t + \varepsilon_f) \\ q_2 = a_{21}c_1\sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + a_{22}c_2\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \\ \qquad + \cdots + a_{2f}c_f\sin(\omega_f t + \varepsilon_r) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ q_f = a_{f1}c_1\sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + a_{f2}c_2\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \\ \qquad + \cdots + a_{ff}c_f\sin(\omega_f t + \varepsilon_f) \end{cases} \tag{6.75}$$

其中每一广义坐标均由f项迭加而成，a_{ar}(共f^2个)已由线性代数方程组和归一化条件完全确定下来，而c_r和ε_r($r=1, \cdots, f$)共$2f$个积分常数，将由初始条件定．通解(6.75)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1f} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2f} \\ \vdots & & & \\ a_{f1} & a_{f2} & \cdots & a_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) \\ c_2\sin(\omega_2 t + \omega_2) \\ \vdots \\ c_f\sin(\omega_f t + \varepsilon_f) \end{bmatrix}$$

亦即

$$[q] = [A][\eta]$$

式中

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1r}\cdots & a_{1f} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2r}\cdots & a_{2f} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{f1} & a_{f2}\cdots & a_{fr}\cdots & a_{ff} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \omega_1^2 \quad \omega_2^2 \cdots \omega_r^2 \cdots \omega_f^2 \end{matrix}$$

矩阵的每一列称作一个本征向量$[a_r]$，对应于一确定的本征值ω_r^2. 每一行，代表各广义坐标q_α向各简正坐标展开的系数.

$$[q]=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix},[\eta]=\begin{bmatrix} c_1\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1) \\ c_2\sin(\omega_2 t+\varepsilon_2) \\ \vdots \\ c_f\sin(\omega_f t+\varepsilon_f) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_f \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

式中$\eta_r=c_r\sin(\omega_r t+\varepsilon_r)$称为简正坐标.

上面求得的本征向量是归一化了的本征向量，即满足

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta r}=1 \tag{6.77}$$

或

$$[a_r]^T[M][a_r]=1 \tag{6.78}$$

现在，我们证明，不同本征值的本征向量还满足正交性条件，即

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta s}=0 \qquad (\text{当 } r\neq s) \tag{6.79}$$

由代数方程组(6.74)

$$([K]-[M]\omega^2)[a]=0 \tag{6.80}$$

$$\omega^2[M][a]=[K][a]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{对 } \omega_r^2: & \omega_r^2[M][a_r]=[K][a_r] \quad (a') \\ \text{对 } \omega_s^2: & \omega_s^2[M][a_s]=[K][a_s] \quad (b') \end{array}\right\} \tag{6.81}$$

以$[a_s]^T$左乘(a)，以$[a_r]$左乘(b)，得

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_r^2[a_s]^T[M][a_r]=[a_s]^T[K][a_r] & (a) \\ \omega_s^2[a_r]^T[M][a_s]=[a_r]^T[K][a_s] & (b) \end{array}\right\} \tag{6.82}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

将(a′)取转置，

$$\omega_r^2[a_r]^T[M]^T[a_s] = [a_r]^T[K]^T[a_s] \qquad (c)$$

又因$[M]$，$[K]$皆为实对称矩阵，

$$[M]^T = [M], \qquad [K]^T = [K] \qquad (6.83)$$

(c)与(b′)相减，得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)[a_r]^T[M][a_s] = 0 \qquad (6.84)$$

当$r \neq s$，$\omega_r^2 - \omega_s^2 \neq 0$，故有

$$[a_r]^T[M][a_s] = 0 \qquad (r \neq s) \qquad (6.85)$$

它表示不同本征值的本征向量是正交的. 将此式与归一化条件统一表示为

$$[a_r]^T[M][a_s] = \delta_{rs} \qquad (6.86)$$

即

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta} a_{\alpha r} a_{\beta s} = \delta_{rs} \qquad (6.87)$$

或

$$[A]^T[M][A] = [1] \qquad (6.88)$$

它统一地表达了本征向量的正交归一性.

§6.4 简正坐标和简正模式

上面我们已经系统地讨论过了求解多自由度耦合系统微振动的一般理论，为了深入理解这一理论和方法，我们重新审视一下上述过程.

我们通过求解拉氏方程，给出了问题的通解，将描述系统微振动的广义坐标$q_\alpha(\alpha=1, \cdots, f)$表示成了简正坐标所代表的简正振动的迭加. 简正坐标

$$\eta_r = c_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \qquad (6.89)$$

从而

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r}\eta_r \tag{6.90}$$

就是说，我们解微振动的全部过程，相当于作了一个坐标变换，新坐标(即简正坐标)只参与一种简正振动，而新、老坐标的关系，则由变换方程(6.90)或

$$[q] = [A][\eta] \tag{6.91}$$

给出.

我们知道，广义坐标的选取有任意性，虽然它们都可以用来描述系统的运动. 但选不同的广义坐标，效果可能不同. 我们用 $q_1, \cdots, q_f$ 描述微振动时，各个 q_α 都是不同频率的简谐振动的迭加. 一般说，系统的运动是非周期或多周期的，而用简正坐标描述微振动，虽然各个 q 都将随 t 而变化，但在特定的初始条件下，它们可能都以单一的简正频率振动，各广义坐标 q 都有相同的周期，我们说，这时只有一个简正振动被激发，其余的简正振动被抑制了，各广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1, \cdots, f)$ 之振幅比，(即对确定的 r，各 $a_{\alpha r}$ 之比)，用 $[a_r]$ 表示，即各简正频率以及其相应的本征向量，确定了一个简正模式.

用简正坐标描述振动，将使问题大大简化，但这只能是求解运动的结果，而不是一开始就能作到的，现在我们倒推回去，看看应用简正坐标运动将如何描述.

在微振动情况下，势能可表示成

$$V = \frac{1}{2}[q]^T[K][q] \tag{6.92}$$

当 $q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r}\eta_r$，即 $[q]=[A][\eta]$ 时，由(6.80)式

$$([K] - [M]\omega_r^2)[a_r] = 0 \tag{6.93}$$

以 $[a_r]^T$ 左乘上式得

$$[a_r]^T([K] - [M]\omega_r^2)[a_r] = 0 \tag{6.94}$$

故有

$$[a_r]^T[K][a_r] = \omega_r^2[a_r]^T[M][a_r]$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由(6.86)

$$[a_r]^T[M][a_s] = \delta_{rs}$$

所以

$$[a_r]^T[K][a_s] = \omega_s^2\delta_{rs}$$

即

$$[A]^T[K][A] = [\omega^2] \tag{6.95}$$

式中

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_s^2 \end{bmatrix} \tag{6.96}$$

因此有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}[\eta]^T[A]^T[K][A][\eta] \\ &= \frac{1}{2}[\eta]^T[\omega^2][\eta] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\omega_r^2\eta_r^2 \end{aligned} \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}] \\ &= \frac{1}{2}[\dot{\eta}]^T[A]^T[M][A][\dot{\eta}] \\ &= \frac{1}{2}[\dot{\eta}]^T[\dot{\eta}] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\dot{\eta}_r^2 \end{aligned} \tag{6.98}$$

这说明选用简正坐标，动能、势能都从一般二次型化成了平方和. 我们知道，依照线性代数理论，如两个二次型. 至少有一个是正定的，(这里动能总是正定的即恒正的)，总可以找到一个实的非奇满秩代换，同时化两个二次型为平方和. 求解微振动问题，从数学上看，正是作了这一变换，于是拉氏函数为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$L=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\dot{\eta}^2-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\omega_r^2\eta_r^2 \tag{6.99}$$

拉氏方程 $\Lambda_{\eta_r}L=0(r=1,\cdots,f)$ 为

$$\begin{cases}\ddot{\eta}_1+\omega_1^2\eta_1=0\\ \ddot{\eta}_2+\omega_2^2\eta_2=0\\ \vdots\\ \ddot{\eta}_f+\omega_f^2\eta_f=0\end{cases} \tag{6.100}$$

这组方程彼此独立，没有耦合，可以分开求解，它的解是

$$\begin{cases}\eta_r=c_r\sin(\omega_r t+\varepsilon_r), & \text{当 } \omega_r^2>0\\ \eta_r=a_r t+b_r, & \text{当 } \omega_r^2=0\\ \eta_r=a_r\exp(\omega_r t)+b_r\exp(-\omega_r t), & \omega_r^2<0\end{cases} \tag{6.101}$$

这第三种解并不存在，因为所讨论的微振动问题中，所有 ω_r 及 $a_{\alpha r}(r=1,\cdots,f,\ \alpha=1,\cdots,f)$ 都是实数或零，$\omega_r^2\geqslant 0$.

表 6.1　求解多自由度耦合系统微振动的一般步骤

1	$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$ $k_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\Big\|_0=k_{\beta\alpha}$	$V=\frac{1}{2}[q]^T[K][q]$ $[q]=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_f\end{bmatrix}\quad[K]=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1f}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2f}\\\vdots&&&\\k_{f1}&k_{f2}&\cdots&k_{ff}\end{bmatrix}$
2	$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ $m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(0,\cdots,0)$ $=m_{\beta\alpha}$	$T=\frac{1}{2}[\dot{q}]^T[K][\dot{q}]$ $[\dot{q}]=\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\vdots\\\dot{q}_f\end{bmatrix}\quad[M]=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&\cdots&m_{1f}\\m_{21}&m_{22}&\cdots&m_{2f}\\\vdots&&&\\m_{f1}&m_{f2}&\cdots&m_{ff}\end{bmatrix}$
3	$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ $-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$	$L=\frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}]$ $-\frac{1}{2}[q]^T[K][q]$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续表 6.1

4	将 T_r 代入 $\Delta_\alpha L_r=0$，得 $\sum_{\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + k_{\alpha\beta}q_\beta = 0$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$	$[M][\ddot{q}]+[K][q]=0$
5	将 $q_\beta = a_\beta \sin(\omega t+\varepsilon)$ 代入(4) $\sum_{\beta=1}^{f}(k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega^2)a_\beta=0$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$	$([K]-[M]\omega^2)[a]=0$ $[a]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_f \end{bmatrix}$
6	$\Delta(\omega^2)=\left\| \sum_{\alpha,\beta=1}^{f}(k_{\alpha\beta} - m_{\alpha\beta}\omega^2) \right\| =0$ $\Rightarrow \omega_r^2$，$(r=1, 2, \cdots, f)$	$\Delta(\omega^2)=\| [K]-[M]\omega^2 \| =0$ $\Rightarrow \omega_r^2$，$(r=1, 2, \cdots, f)$
7	将 ω_r^2 代回(5)得 $a_{\alpha r}$ $q_{\alpha r}=a_{\alpha r}\sin(\omega_r t+\varepsilon_r)$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$ $r=1, 2, \cdots, f$	$[a_r]=\begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{fr} \end{bmatrix}$ $[q_r]=[\cdots, a_{\alpha r}\sin(\omega_r t+\varepsilon_r), \cdots]^T$ $\alpha, r=1, 2, \cdots, f$
8	为使 $a_{\alpha r}$ 确定下来，引入归一化条件 $\omega_r^2: \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta r}=1$ 当 $\omega_r \neq \omega_s$ 时， $\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta s}=0$(正交) 正交归一化条件统一表为 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta s}=\delta_{rs}$	$[a_r]^T[M][a_r]=1$ $[a_r]^T[M][a_s]=0 \quad r\neq s$ $[A]^T[M][A]=[1]$ $[A]=\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_f \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1f} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2f} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{f1} & a_{f2} & \cdots & a_{ff} \end{bmatrix}$ $[A]$的各行代表各广义坐标，各列为与 ω_r 对应的本征向量.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续表 6.1

9	通解 $q_\alpha=\sum_{r=1}^{k}\mu_{\alpha r}q_{\alpha r}=\sum_{r=1}^{f}a_{\alpha r}\eta_r$ $\alpha=1,2,\cdots,f$	$[q]=[A][\eta]$ $[\eta]=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_f\end{bmatrix}$ $\eta_r=\begin{cases}c_r\sin(\omega_r t+\varepsilon_r), & \text{当 } \omega_r^2>0\\ nt+b, & \text{当 } \omega_r^2=0\end{cases}$
10	作图说明简正模式	

【例 6.2】 求解图示二重摆在铅垂平面内的微振动.

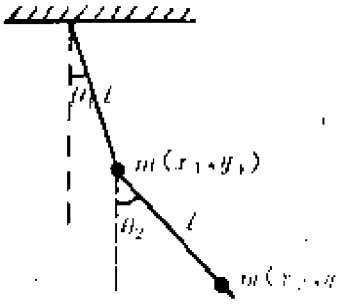


图 6.6

解 系统自由度 $f=2$，取两摆线与铅垂方向的夹角 θ_1，θ_2 为广义坐标，则变换方程为

$$\begin{cases}x_1=l\sin\theta_1\\ y_1=l\cos\theta_1\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}x_2=l\sin\theta_1+l\sin\theta_2\\ y_2=l\cos\theta_1+l\cos\theta_2\end{cases} \tag{2}$$

则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=l\cos\theta_1\dot{\theta}_1\\ \dot{y}_1=-l\sin\theta_1\dot{\theta}_1\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_2=l\cos\theta_1\dot{\theta}_1+l\cos\theta_2\dot{\theta}_2\\ \dot{y}_2=-l\sin\theta_1\dot{\theta}_1-l\sin\theta_2\dot{\theta}_2\end{cases} \tag{4}$$

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+(\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2)] \tag{5}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

用拉氏方程求解，由于微振动，可将动能表示成广义速度的二次齐次函数，即 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$ 的二次齐函数．在 $x_1=l\cos\theta_1\dot{\theta}_1$ 中，$\cos\theta_1=1-\frac{\theta_1^2}{2}+\cdots$ 只能取零级项，即 $\cos\theta_1\simeq 1$，$\dot{x}_1=l\dot{\theta}_1$．同样，$\dot{x}_2=l\dot{\theta}_1+l\dot{\theta}_2$．在 $\dot{y}_1=-l\sin\theta_1\dot{\theta}_2$ 中，$\sin\theta_1$ 和 $\dot{\theta}_1$ 都是小量，$\dot{y}_1$ 已是二阶小量，$\dot{y}_1^2$ 是四阶小量，故应舍去，即 $\dot{y}_1^2=0$，同样．$\dot{y}_2^2=0$．

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)=\frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2]$$

同样地，应将势能表示成广义坐标 θ_1，θ_2 的二次齐次函数，在用广义坐标表示 $y_1=l\cos\theta_1$ 时，不能只取零级项，而必须令 $\cos\theta_1=1-\frac{\theta_1^2}{2}$，即 $y_1=l\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)$，$y_2=l\left[\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)+\left(1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right]$，势能

$$\begin{aligned}V&=-mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_1+\cos\theta_2)\\&=-mgl\left[\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)+\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)+\left(1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)+V_0\end{aligned}\qquad(6)$$

拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2]-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)\qquad(7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=ml^2[\dot{\theta}_1+(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)=ml^2(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=-2mgl\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}=ml^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)=ml^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl\theta_2$$

$$\begin{cases} \Lambda_{\theta_1} L = 0: & 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \\ \Lambda_{\theta_2} L = 0: & l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

设试探解形为

$$\theta_1 = a_1\sin(\omega t + \alpha),\ \theta_2 = a_2\sin(\omega t + \alpha) \tag{9}$$

代入(8)式得

$$\begin{cases} -2la_1\omega^2 - la_2\omega^2 + 2ga_1 = 0 \\ -la_1\omega^2 - la_2\omega^2 + ga_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

即

$$\begin{cases} \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)a_1 - \frac{1}{2}\omega^2 a_2 = 0 \\ -\omega^2 a_1 + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)a_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

此方程组有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{（久期方程）} \tag{12}$$

$$\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2 - \frac{1}{2}\omega^4 = 0$$

$$\left(\frac{g}{l} - \omega^2 - \frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{g}{l} - \omega^2 + \frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\omega_1^2 = (2+\sqrt{2})\frac{g}{l},\ \omega_2^2 = (2-\sqrt{2})\frac{g}{l} \tag{13}$$

将本征值 ω_1^2，ω_2^2 分别代入(10)式得

$$\begin{cases} a_{21} = -\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}a_{11} = -\sqrt{2}a_{11} \equiv -\sqrt{2}A \\ a_{22} = -\dfrac{2(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}a_{12} = \sqrt{2}a_{12} \equiv \sqrt{2}B \end{cases} \tag{14}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

通解为

$$\begin{cases}\theta_1 = A\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \theta_2 = -\sqrt{2}A\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{2}B\sin(\omega_2 t + \alpha_2)\end{cases} \tag{15}$$

ω_1 对应的是反对称模式，即当简正振动 $\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$ 不被激发时，$\frac{\theta_1}{\theta_2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. ω_2 对应的是对称模式，亦即 $\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$ 不被激发时，$\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 用图表示则如图 6.7 所示.

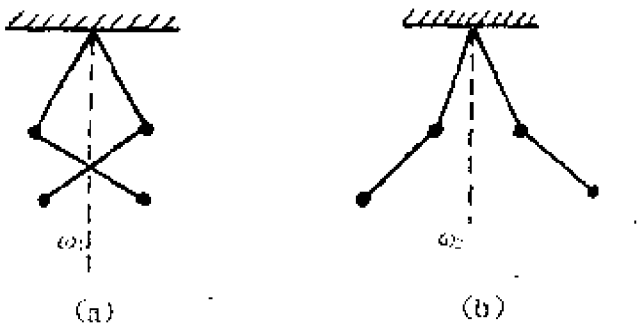


图 6.7

【例 6.3】 椭圆摆的微振动.

质量为 M 的物体可沿直线 AB 无摩擦地滑动. 另一质量为 m 的物体由一长为 l 的轻杆与 M 相连，并可在铅直面内自由摆动，试求解系统的微振动，求出简正坐标.

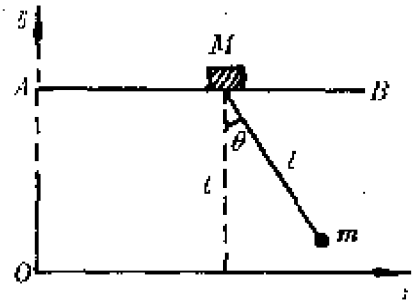


图 6.8

解 自由度 $f=2$，选图示二维笛卡儿坐标系 $O-xy$，选取 x，θ 为广义坐标.

M 的坐标是 x，$y_0(y_0=l)$.

m 的坐标是：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{cases} x_1 = x + l\sin\theta \\ y_1 = l - l\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta},\ \dot{y}_1 = l\sin\theta\dot{\theta} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})^2 + l^2\sin^2\theta\ \dot{\theta}^2] \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2] \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2] \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

$$V = Mgy_0 + mgl(1 - \cos\theta) \simeq mgy_0 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \tag{4}$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2 \tag{5}$$

代入拉氏方程，得

$$\begin{cases} \partial_x L = 0: & (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ \partial_\theta L = 0: & ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

即

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \end{cases} \tag{7}$$

设试探解为

$$x = a_1\sin(\omega t + \varepsilon),\ \theta = a_2\sin(\omega t + \varepsilon) \tag{8}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a_1\sin(\omega t + \varepsilon),\ \ddot{\theta} = -\omega^2 a_2\sin(\omega t + \varepsilon) \tag{9}$$

代入(7)式得

$$\begin{cases} (M+m)\omega^2 a_1 + ml\omega^2 a_2 = 0 \\ \omega^2 a_1 + (l\omega^2 - g)a_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} (M+m)\omega^2 & ml\omega^2 \\ \omega^2 & l\omega^2 - g \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

$$(M+m)(l\omega^2 - g)\omega^2 - ml\omega^4 = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\omega^2\{(M+m)(l\omega^2-g)-ml\omega^2\}=0$$

$$\omega_1^2=0,\quad \omega_2^2=\frac{M+m}{Ml}g \tag{12}$$

将 $\omega_1^2=0$ 代入线性代数方程(10). 由第一式，a_{11}，a_{21}都不定；由第二式，得 $a_{21}=0$，a_{11}不定，故 $\theta=a_{21}\sin(\omega_1 t+\varepsilon_1)\equiv 0$，但 x 并非零解. 将 $\theta=0$ 代回微分方程(7)，得 $\ddot{x}=0$，$x=a_{11}(t+b)$

由归一化条件

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta r}=1 \tag{13}$$

$$m_{11}a_{11}a_{11}=1$$

$$(M+m)a_{11}^2=1,\ a_{11}=\frac{1}{\sqrt{M+m}}$$

$$a_{21}=0 \tag{14}$$

将 $\omega_2^2=\frac{(M+m)}{Ml}g$，代入方程(10)，得

$$a_{22}=-\frac{M+m}{ml}a_{12} \tag{15}$$

由归一化条件

$$m_{11}a_{12}a_{12}+m_{12}a_{12}a_{22}+m_{21}a_{22}a_{12}+m_{22}a_{22}a_{22}=1$$

$$(M+m)a_{12}^2+mla_{12}a_{22}+mla_{22}a_{12}+ml^2a_{22}^2=1$$

$$(M+m)a_{12}^2-2(M+m)a_{12}^2+\frac{(M+m)^2}{m}a_{12}^2=1$$

$$\left[\frac{(M+m)^2}{m}-(M+m)\right]a_{12}^2=1$$

$$a_{12}^2=\frac{m}{(M+m)M},\ a_{12}=\sqrt{\frac{m}{M(M+m)}} \tag{16}$$

$$a_{22}=-\frac{1}{l}\sqrt{\frac{M+m}{Mm}} \tag{17}$$

特解为

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{M+m}}(t+b),\ \theta_1=0 \tag{18}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$x_2 = \sqrt{\frac{M}{M(M+m)}}\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{M+m}{Mm}}\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \tag{19}$$

通解为

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ &= c_1 \frac{1}{\sqrt{M+m}}(t+b) \\ &\quad + c_2\sqrt{\frac{M}{M(M+m)}}\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\theta = -c_2\frac{1}{l}\sqrt{\frac{M+m}{Mm}}\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2)$$

取简正坐标

$$\eta_1 = c_1(t+b),\ \eta_2 = c_2\sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \tag{22}$$

则

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{M+m}}\eta_1 + \sqrt{\dfrac{M}{M(M+m)}}\eta_2 \\ \theta = -\dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{M+m}{Mm}}\eta_2 \end{cases} \tag{23}$$

对时间求微商，得

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{\sqrt{M+m}}\dot{\eta}_1 + \sqrt{\dfrac{m}{M(M+m)}}\dot{\eta}_2 \\ \dot{\theta} = -\dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{M+m}{Mm}}\dot{\eta}_2 \end{cases} \tag{24}$$

将其代入动能、势能表达式，得拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}\omega_2^2\eta_2^2 \tag{25}$$

其中没有交叉项，且每一简正坐标前的系数恰为该简正坐标对

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

应的简正频率的平方. 如果不用前面引入的归一化条件. 虽然也能化成平方和的形式，但系数则不能如此简单.

再将 L 代入拉氏方程，得

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

则

$$\begin{cases} \eta_1 = c_1(t + b) \\ \eta_2 = c_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \end{cases} \tag{27}$$

显然，η_1 描写质心的平动，因为

$$\eta_1 = \sqrt{M + m}\left(x + \frac{ml}{M + m}\theta\right) \tag{28}$$

括号内的 $x + \frac{ml}{M+m}\theta$ 正表示质心位置.

$$\eta_2 = -l\sqrt{\frac{Mm}{M + m}}\theta = -l\sqrt{\mu}\,\theta \tag{29}$$

反映的是相对于质心的纯摆动.

简正模式如图 6.9 所示.

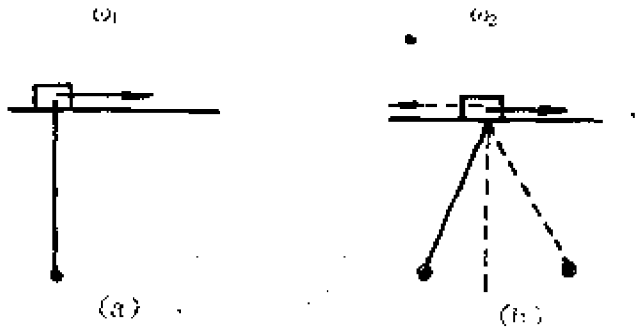


图 6.9

【例 6.4】求解平面耦合摆的微振动. 耦合摆是二等长单摆用弹簧相连，弹簧弹性系数为 k，二摆长均为 l，摆锤质量为 m，二摆铅直时弹簧无伸长.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

解 我们用矩阵表述的方法处理这一问题.

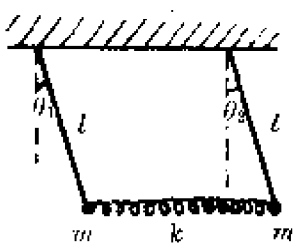


图 6.10

耦合摆在铅直平面内振动. 自由度 $f=2$，选 θ_1，θ_2 为广义坐标，即将广义坐标的原点，分别取在两摆锤的稳定平衡位置上.

系统的动能在微振动条件下为

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) \tag{1}$$

重力势能

$$V_1=-mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \tag{2}$$

弹性势能

$$V_2=\frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2 \tag{3}$$

总势能

$$V=\frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2+mgl(-\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{4}$$

动能 T 已是 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$ 的二次齐次式.

由微振动条件，V 中 $\sin\theta_1\simeq\theta_1$，$\sin\theta_2\simeq\theta_2$，$\cos\theta_1\simeq1-\frac{\theta_1^2}{2}$，$\cos\theta_2\simeq1-\frac{\theta_2^2}{2}$，故

$$V=\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2) \tag{5}$$

$$\begin{cases}k_{11}=kl^2+mgl\\k_{12}=-kl^2=k_{21}\\k_{22}=kl^2+mgl\end{cases} \tag{6}$$

$$[K]=\begin{pmatrix}kl^2+mgl & -kl^2\\-kl^2 & kl^2+mgl\end{pmatrix} \tag{7}$$

$$[M]=\begin{pmatrix}ml^2 & 0\\0 & ml^2\end{pmatrix} \tag{8}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\| [K] - [M]\omega^2 \| = 0 \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} mgl + kl^2 - ml^2\omega^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$(mgl + kl^2 - ml^2\omega^2)^2 - (kl^2)^2 = 0 \tag{11}$$

解之得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{l}, \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m} \end{cases} \tag{12}$$

代入代数方程组，得

$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$：

$$\begin{pmatrix} mgl + kl^2 - ml^2\frac{g}{l} & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - ml^2\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_{11} = a_{21} = a, \quad [a_1] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \tag{13}$$

$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$：

$$\begin{pmatrix} mgl + kl^2 - ml^2(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}) & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - ml^2(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\Rightarrow a_{12} = -a_{22} = \beta, [a_2] = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \tag{14}$$

所以

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \tag{15}$$

由正交归一化条件$[A]^T[M][A]=[1]$，有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2 ml^2 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 ml^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此得

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2ml^2}} = \beta \tag{17}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

由

$$[q] = [A][\eta]$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}l} & \frac{1}{\sqrt{2m}l} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}l} & -\frac{1}{\sqrt{2m}l} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

简正坐标

$$\begin{cases} \eta_1 = c_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) \\ \eta_2 = c_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \end{cases} \tag{20}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{cases}\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}l}(\eta_1 + \eta_2) \\ \theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}l}(\eta_1 - \eta_2)\end{cases} \tag{21}$$

如果给定初始条件，可将解完全定下来.

设 $t=0$，$\theta_{10}=\theta_0$，$\theta_{20}=0$，$\dot{\theta}_{10}=\dot{\theta}_{20}=0$，且耦合是弱的，$\dfrac{2k}{m}=2n^2$，$\omega_0^2=\dfrac{g}{l}$，$\omega_0^2 \gg n^2$，$\omega_1=\omega_0$，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}} = \omega_0\sqrt{1+\frac{2n^2}{\omega_0^2}} \simeq \omega_0\left(1+\frac{n^2}{\omega_0^2}\right) \tag{22}$$

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \simeq \omega_0,\quad \frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \frac{n^2}{2\omega_0} \tag{23}$$

注：刚度矩阵的矩阵元 $k_{\alpha\beta}$ 也可以由定义求出，即如本题中写出势能

$$V = \frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + mgl(-\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

之后，由 $k_{\alpha\beta}=\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right|_0$（"0"表示将各广义坐标取在平衡位置）可得

$$k_{11} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2}\right|_0 = \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[-kl^2(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\cos\theta_1 + mgl\sin\theta_1\right]\right\}_0$$

$$= kl^2 + mgl$$

$$k_{12} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right|_0 = k_{21} = -kl^2$$

$$k_{22} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2}\right|_0 = kl^2 + mgl$$

一般情形下，只要利用微振动近似条件，将动能和势能分别表示成广义速度和广义坐标的二次齐次函数，便可直接写出〔M〕〔K〕的各矩阵元，不必进行 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$ 这样的运算.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

通解

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_0\cos\frac{\omega_1+\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\\ \theta_2 &= \theta_0\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

利用弱耦合条件 $n^2\ll\omega_0^2$，得

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \left(\theta_0\cos\frac{n^2}{2\omega_0}t\right)\cos\omega_0 t\\ \theta_2 &= \left(\theta_0\sin\frac{n^2}{2\omega_0}t\right)\sin\omega_0 t\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

可见在弱耦合条件下，其振幅是调制的，形成所谓“拍”，而且，当 θ_1 最大时，θ_2 为零；θ_1 为零时，θ_2 最大，能量不断地互相传递.

【例 6.5】 线性对称三原子分子 YX_2 的微振动.

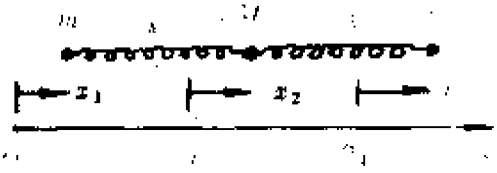


图 6.11

例如 CO_2 分子，中心原子 C 与两端原子 O 和 O 之间存在弹性键，并设弹性系数均为 k，C 原子质量为 M，O 原子质量为 m，O 与 O 的耦合可略. 平衡时，弹簧长为自然长.

解法一 系统动能

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \tag{1}$$

$$2T = (\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3)\begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$[M] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix} \tag{3}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

$$2V = k(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) \tag{4}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{5}$$

久期方程为

$$\| [K] - [M]\omega^2 \| = 0 \tag{6}$$

即

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

$$(k - m\omega^2)(2k - M\omega^2) - 2k^2(k - m\omega^2) = 0$$

$$(k - m\omega^2)[k(2m + M) - Mm\omega^2]\omega^2 = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_3 = \sqrt{\dfrac{k}{m}\left(1 + \dfrac{2m}{M}\right)} \end{cases} \tag{9}$$

由

$$([K] - [M]\omega^2)[a] = 0 \tag{10}$$

即

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

将 $\omega = \omega_1 = 0$ 代入，得

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\Rightarrow a_{11}=a_{21}=a_{31}=\alpha$$

$$[a_1]=\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} \tag{12}$$

将 $\omega=\omega_2=\frac{k}{m}$ 代入(11)得

$$\begin{bmatrix}0 & -k & 0\\ -k & 2k-\frac{Mk}{m} & -k\\ 0 & -k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a_{22}=0,\ a_{12}=-a_{32}=\beta$$

$$[a_2]=\begin{bmatrix}\beta\\ 0\\ -\beta\end{bmatrix} \tag{13}$$

将 $\omega_3^2=\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)$ 代入(11)得

$$\begin{bmatrix}-\frac{2mk}{M} & -k & 0\\ -k & -k\frac{M}{m} & -k\\ 0 & -k & -\frac{2mk}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a_{13}=a_{33}=\gamma,$$

$$a_{23}=-\frac{2m}{M}a_{13}$$

$$[a_3]=\begin{bmatrix}\gamma\\ -\frac{2m}{M}\gamma\\ \gamma\end{bmatrix} \tag{14}$$

故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$[A]=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & -\frac{2m}{M}\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{bmatrix} \tag{15}$$

由正交归一化条件$[A]^T[M][A]=[1]$，有

$$\begin{bmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \beta & 0 & -\beta\\ \gamma & -\frac{2m}{m}\gamma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & -\frac{2m}{M}\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha^2(2m+M) & 0 & 0\\ 0 & 2\beta^2 m & 0\\ 0 & 0 & 2\gamma^2 m+\frac{4m^2}{m}\gamma^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{17}$$

故有

$$\alpha=\frac{1}{(2m+M)^{1/2}},$$

$$\beta=\frac{1}{(2m)^{1/2}}$$

$$\gamma=\frac{1}{\left[2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)\right]^{1/2}} \tag{18}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & \frac{-2m/M}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

其中

$$\begin{cases} \eta_1 = a + bt \quad (\text{代表整体即质心平动}) \\ \eta_2 = c_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \\ \eta_3 = c_3 \sin(\omega_3 t + \varepsilon_3) \end{cases}$$

式中 a，b，c_2，c_3，ε_2，ε_3 由初始条件定.

简正模式如图 6.12 所示：

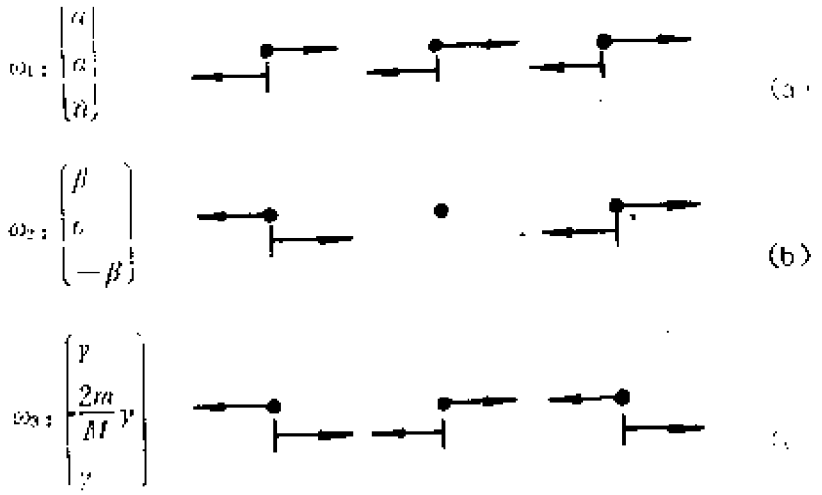


图 6.12

解法二 可将本题化为两个自由度问题. 引进坐标

$$y_1 = x_2 - x_1, \; y_2 = x_3 - x_2 \tag{1}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(称为内坐标)则由

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 \tag{2}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 \tag{3}$$

利用质心静止的条件

$$m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 + m\dot{x}_3 = 0 \tag{4}$$

及

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1,\ \dot{y}_2 = \dot{x}_3 - \dot{x}_2 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{M+2m}[-(M+m)\dot{y}_1 - m\dot{y}_2] \\ \dot{x}_2 = \dfrac{m}{M+2m}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{M+2m}[m\dot{y}_1 + (M+m)\dot{y}_2] \end{cases} \tag{6}$$

代入(3)、(2)式，

$$T = \frac{m}{2(M+2m)}[(M+m)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + 2m\dot{y}_1\dot{y}_2] \tag{7}$$

又

$$V = \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 \tag{8}$$

故有

$$[k] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \dfrac{m(M+m)}{M+2m} & \dfrac{m^2}{M+2m} \\ \dfrac{m^2}{M+2m} & \dfrac{m(M+m)}{M+2m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

久期方程为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{vmatrix} k-\frac{m(M+m)}{M+2m}\omega^2 & -\frac{m^2}{M+2m}\omega^2 \\ -\frac{m^2}{M+2m}\omega^2 & k-\frac{m(M+m)}{M+2m}\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}\frac{M+2m}{M}} \quad (12)$$

以下解法同解法一.

习　题

6.1　求质量为 m 的质点关于平衡点振动的线性谐振动近似和振动角频率，势能函数为

(1) $V(x)=\frac{A}{x}+Bx^3$;

(2) $V(x)=\frac{Ax^2}{x^2+a^2}$;

(3) $V(x)=A\cosh bx-B\sinh bx \quad (A>B)$.

$\left((1)k=12B\left(\frac{A}{3B}\right)^{\frac{1}{4}},\ (2)k=2\frac{A}{a^2},\ (3)k=b^2\sqrt{A^2-B^2}\right)$

6.2　求解下列单自由度系统的微振动. 要求作线性谐振动近似(LHO)，并求出对平衡位置微振动的周期.

(1)单摆;

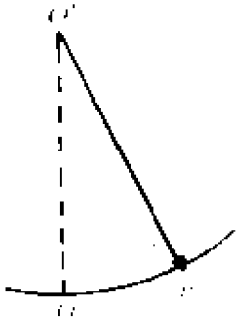
$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$

(2)两定点连线水平，每点上系一弹性绳，自然长均为 l，弹性系数均为 k，两绳的另一端同系在质量为 m 的质点上. 平衡时，每绳与铅直方向夹角均为 α. 使质点自平衡位置沿铅直方向向下作微小位移后开始运动.

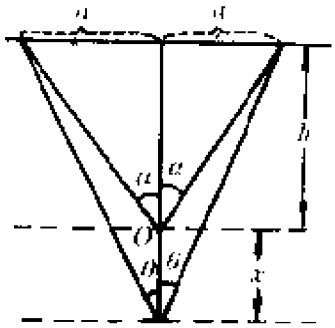
$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{a\operatorname{ctg}\alpha(a-l\sin\alpha)}{g(a-l\sin^3\alpha)}}\right)$

(3)均质半圆柱质量为 m，半径为 R，在粗糙水平面上作微

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com



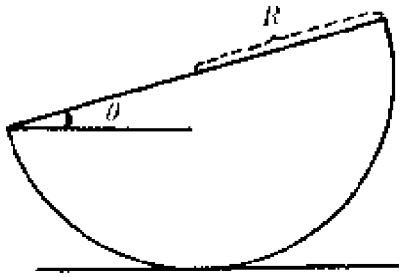
6.2 题(1)图



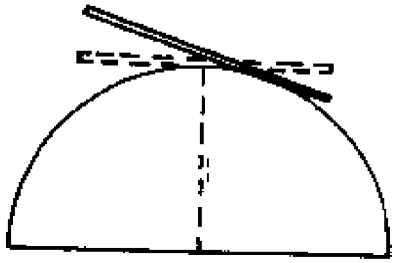
6.2 题(2)图

振动.

$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{9}{8}\pi-2\right)}\right)$



6.2 题(3)图



6.2 题(4)图

(4)均质杆质量为 M，长为 l，置于粗糙半圆柱上.

$\left(T=\frac{\pi l}{\sqrt{3gr}}\right)$

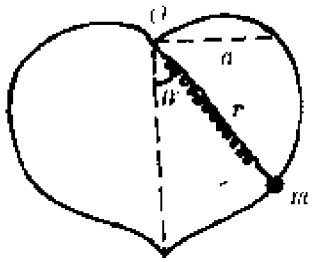
(5)质量为 m 的质点在水平面的上空受斥力作用而处于悬浮状态，斥力的大小与质点到这平面的距离成反比，比例系数为 λ，求质点在平衡位置附近作竖向微振动的周期.

$\left(T=\frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\right)$

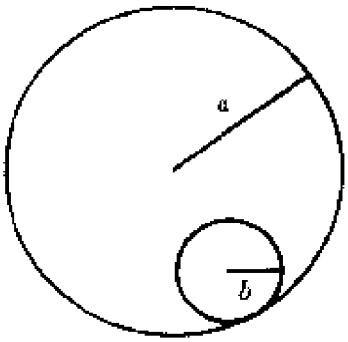
(6)质点沿心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 运动，质点以弹簧系住，弹簧另一端固定于 o 点，弹簧自然长 l，弹性系数 k，不计摩擦力.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\left(\text{当 } kn<3mg \text{ 时}, T=4\pi\sqrt{\frac{ma}{3mg-ka}}\right)$



6.2 题(6)图



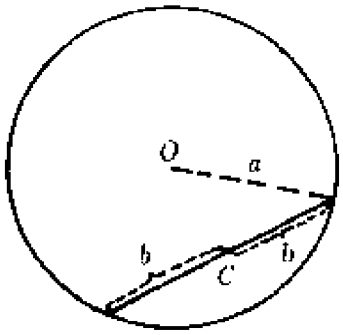
6.2 题(7)图

(7)半径为 b 的球，原处于半径为 a 的球壳内平衡位置附近某点. 设球壳内面粗糙，如突然将球由静止状态放开，则开始振动.

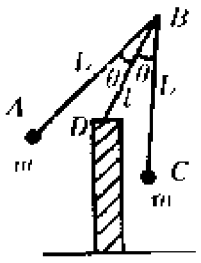
$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{(a-b)}{g}}\right)$

(8)一标尺的两端在一光滑的固定铅直圆环内滑动，标尺长 $2b$，质量 M，圆环半径为 a，在平衡位置附近微振动.

$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{3a^2-2b^2}{3g\sqrt{a^2-b^2}}}\right)$



6.2 题(8)图



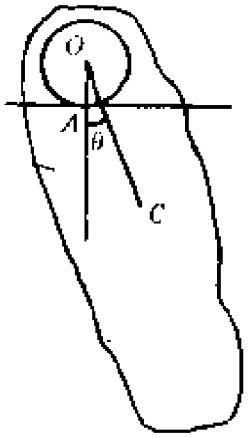
6.2 题(9)图

(9)由三根无重杆固结在一点组成的刚性结构，缚上两个质点，如图所示，质点质量均为 m. 令刚性系统支持在一固定点 D，并以小振幅左右摆动. $AB=BC=L$，$BD=l$. $\angle ABD=$

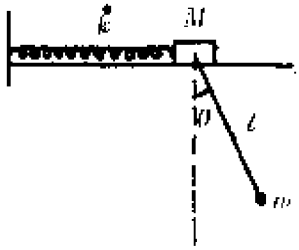
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\angle DBC=\theta$.　　$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{L^2+l^2-2Ll\cos\theta}{g(L\cos\theta-l)}}\right)$

(10)一物理摆顶部有个半径为 a 的柱体，可在水平面上只滚不滑地运动，此摆相对于重心 C 的回转半径为 ρ，重心 C 至圆柱体中心 O 的距离为 $OC=h$，试确定此物理摆的微振动周期.



6.2 题(10)图



6.3 题图

$\left(T=2\pi\sqrt{\frac{\rho^2+(h-a)^2}{gh}}\right)$

6.3　由质量为 m 的质点和长 l 的轻绳组成的单摆，悬挂在质量为 M 的物体上，该物体用一力常数为 k 的水平弹簧拉着，设水平面光滑.

(1)建立拉格朗日方程.

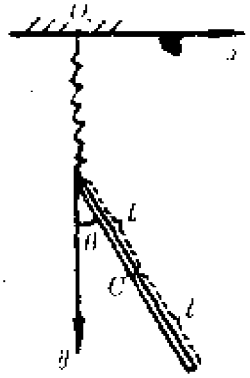
(2)求出微振动的频率.

$$\left\{\begin{array}{l}(1)\ \begin{array}{l}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=0\\ ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}+mgl\theta=0\end{array}\\ (2)\ \begin{array}{l}\omega_1=\sqrt{\dfrac{g(M+m)+kl+\sqrt{[g(M+m)+kl]^2-4Mlgk}}{2Ml}}\\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{g(M+m)+kl-\sqrt{[g(M+m)+kl]^2-4Mlgk}}{2Ml}}\end{array}\end{array}\right.$$

6.4　一质量为 M，长度为 $2l$ 的均质棒，其一端通过一力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

常数为 k 的弹簧悬挂起来. 该棒只能在一个竖直平面内摆动，而弹簧则因约束只能沿铅垂方向运动. 试用拉格朗日方法建立运动微分方程式.



6.4 题图

$$\begin{pmatrix} M\ddot{x}+kx=Mg+Ml[\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta] \\ \frac{3}{4}l\ddot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta+g\sin\theta=0 \end{pmatrix}$$

6.5 如将题 6.3 中的单摆换成长 $2b$，质量为 m 的细棒，试建立系统的运动微分方程式.

$$\begin{pmatrix} (M+m)\ddot{x}+mb\cos\theta\ddot{\theta}-mb\sin\theta\dot{\theta}^2+kx=0 \\ \frac{4mb^2}{3}\ddot{\theta}+mb\cos\theta\ddot{x}-mb\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}+mgb\sin\theta=0 \end{pmatrix}$$

6.6 用拉格朗方程求解下列二自由度系统的微振动. (要求写出拉氏函数，建立拉氏方程，求出简正频率，写出通解表达式并作图说明简正模式.)



6.6 题(1)图

(1)两个质点，质量分别为 $2m$ 和 m，按图示的方式悬挂在固定点，弹簧的弹性系数均为 k，只考虑竖直方向的微振动.

$$\left(\omega_1^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\frac{k}{m},\ \omega_2^2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{k}{m}\right)$$



6.6 题(2)图

(2)质量分别为 m_1，m_2 的两原子组成的分子. 平衡时其间距离为 a，相互作用力是准弹性的，弹性系数为 k.

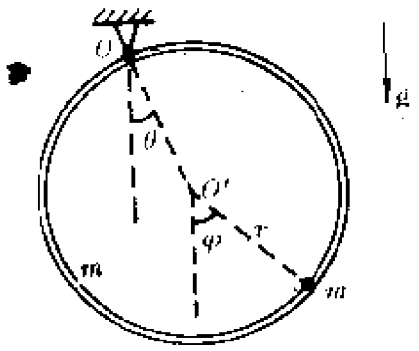
$$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}k\right)$$

(3)一圆环质量为 m 可绕过环上定点 O 的水平轴转动，环面铅直，质点 m 可在环内无摩擦地滑动.

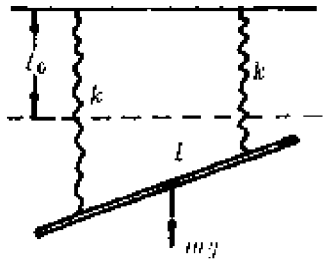
$$\left(\omega_1^2=\frac{g}{2r},\ \omega_2^2=\frac{2g}{r}\right)$$

(4)两弹簧自然长均为 l_0，无重量，弹性系数均为 k，下端

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com



6.6题(3)图



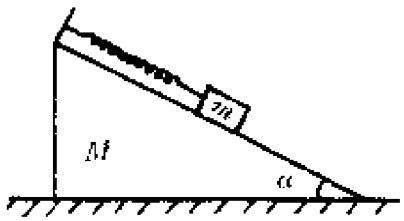
6.6题(4)图

悬一细棒，质量为 m，长为 l. 系统因两弹簧拉伸情况不同而振动.

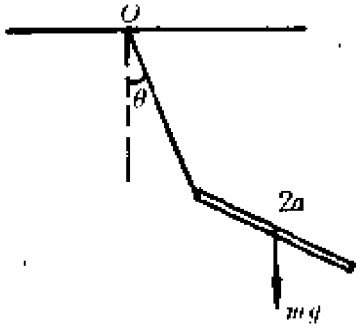
$$\left(\omega_1^2=\frac{2k}{m},\ \omega_2^2=\frac{6k}{m}\right)$$

(5)用一根弹性系数为 k 的弹簧把一个质量为 m 的木块拴在质量为 M 的楔上，楔的无摩擦的斜面与水平面成 α 角，楔在无摩擦的水平面上自由滑动.

$$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{k(M+m)}{m(M+m\sin^2\alpha)}\right)$$



6.6题(5)图



6.6题(6)图

(6)长为 l 的不可伸长的绳悬于定点 O，下端挂一长 $2a$，质量为 M 的杆.

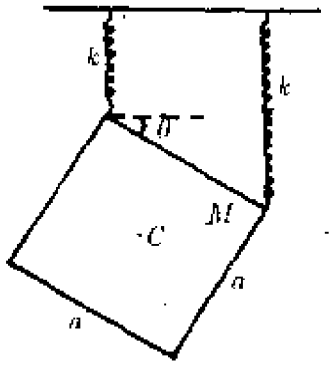
$$\left(\omega^2=\frac{3l+4a\pm\sqrt{(3l+4a)^2-12al}}{2al}g\right)$$

(7)一薄正方形金属板，质量为 M，相邻的两个角悬挂在

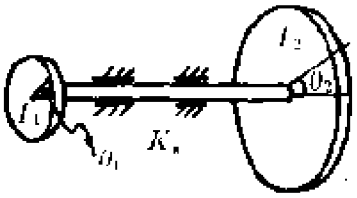
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

两个完全相同的弹簧下面，弹簧只能在竖直平面内运动.

$\left(\omega_1^2=\frac{2k}{m},\ \omega_2^2=\frac{3k}{m}\right)$



6.6 题(7)图



6.6 题(8)图

(8)图所示扭振系统，两圆盘转动惯量各为 I_1 和 I_2，中间用一无质量的弹性圆轴相连. 弹性轴的扭转刚度为 k_θ. 系统发生扭转振动.

(提示：两圆盘相对角位移为 $\theta_1-\theta_2$，弹性轴引起的对第一圆盘的恢复力矩 $N=-k_\theta(\theta_1-\theta_2)$，对第二圆盘的恢复力矩为 $-N$)

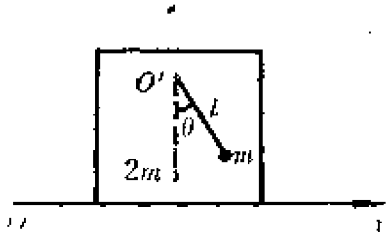
$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{k_\theta(I_1+I_2)}{I_1I_2}\right)$

(9)一薄圆盘，质量为 M，半径为 R，以两个弹性系数均为 k 的相同弹簧对称地连在光滑圆桌上两固定点 A，B. 圆盘可沿桌面自由转动，运动限于平面内. 设平衡时，弹簧长 l 均大于自然长 l_0.

$\left(\omega_1^2=\frac{2k}{M},\ \omega_2^2=\frac{4k(l-l_0)(l+R)}{MRl}\right)$



6.6 题(9)图



6.6 题(10)图

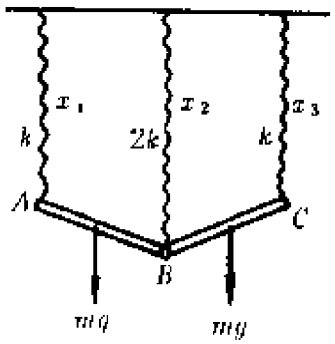
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(10)一长为 l、质量为 m 的单摆和质量为 $2m$ 的物块组成图示的系统，单摆系于物块上的 O' 点，物块可以在水平面上无摩擦地滑动，假定为平面运动.

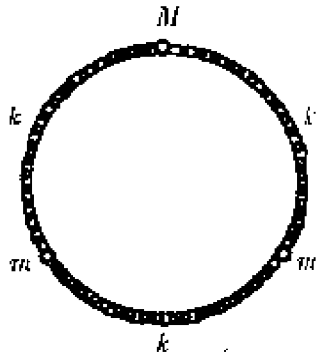
$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{3g}{2l}\right)$

6.7 求解下列三自由度系统的微振动. 要求用微振动理论的矩阵表述方法完成全部解题步骤.

(1)两杆相同，质量均为 m，长 $2a$，铰接于 B 点，以三根弹簧对称地悬挂，弹簧的弹性系数分别为 k、$2k$ 和 k. 平衡时，A，B，C 三点同高. 弹簧只能在垂竖直方向运动.



6.7 题(1)图



6.7 题(2)图

$\left(\omega_1^2=\frac{3k}{m},\ \omega_2^2=\frac{2k}{m},\ \omega_3^2=\frac{6k}{m}\right)$

(2)质量分别为 m，M，m 的三个质点，以三个弹性系数皆为 k 的同样的弹簧连接，约束在光滑水平的圆周上运动. 当质点对称放置时，弹簧皆为自然长.

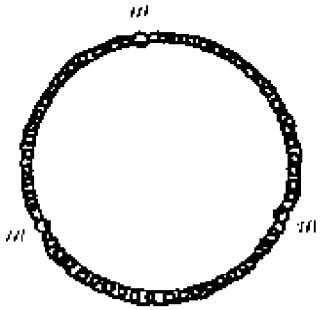
$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{3k}{4m},\ \omega_3^2=\frac{k(M+2m)}{Mm}\right)$

(3)上题中，如将质量为 M 的质点，也换成 m，再做此题.

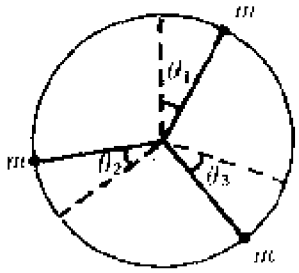
(提示：本题会出现两个本征值相等即重根的情形. 可以任意选择相关本征向量的一个分量值，定下一个本征向量，然后运用正交性条件，定下另外一个本征向量.)

$\left(\omega_1^2=0,\omega_2^2=3\frac{k}{m},\ \omega_3^2=3\frac{k}{m}\right)$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com



6.7题(3)图



6.7题(4)图

(4)三个相等质量的质点，在由势能

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=V_0(e^{-\alpha}+e^{-\beta}+e^{-\gamma})$$

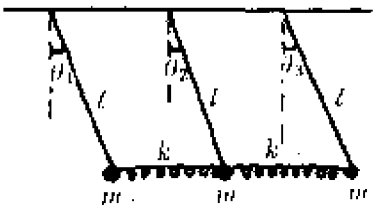
(其中 α，β，γ 是它们的角间距，以弧度为单位)得出的力作用下在半径为 b 的圆圈上运动. 当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$ 时系统处于平衡，偏离平衡位置后系统开始振动.

(注意：因 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，α，β，γ 不是独立的，可选三质点偏离平衡位置的角位移 θ_1，θ_2，θ_3 为广义坐标)

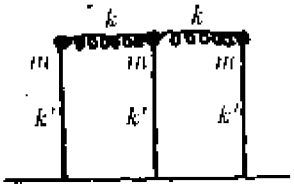
$$\left(\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\omega_3^2=\frac{3V_0e^{-\frac{2\pi}{3}}}{mb^2}\right)$$

(5)三度耦合摆. 如图所示，三个相同的摆，上端固定，摆锤以两相同弹簧连结.

$$\left(\omega_1^2=\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}=\omega_2^2,\ \omega_3^2=\frac{g}{l}-\frac{k}{m}\right)$$



6.7题(5)图



6.7题(6)图

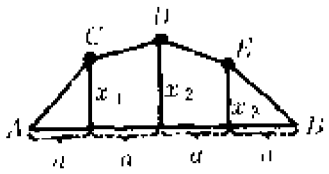
(6)三个质量都是 m 的质点，分别固定在三根相同的弹性棒的顶端，弹性棒下端固定不动，相邻两质点以相同的轻弹簧

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

连结．设弹性棒质量不计，弹性系数为k'，弹簧弹性系数为k，平衡时系统如图所示．

（提示：弹性棒的恢复力，与顶端的水平位移成正比）

$\left(\omega_1^2=\frac{k'}{m},\ \omega_2^2=\frac{k'+k}{m},\ \omega_3^2=\frac{k'+3k}{m}\right)$



6.7 题(7)图

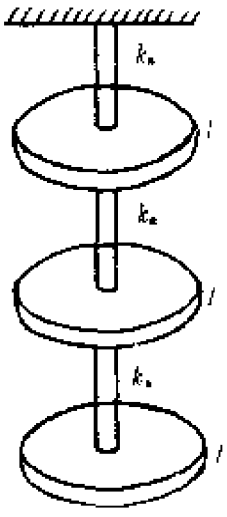
(7)负载弦由长为$4a$的弹性绳等距地连结3个质量均为m的质点构成，求解横向微振动．

（提示：A，B固定，$\overline{AC}=(a^2+x^2)^{1/2}=a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right)$，设绳中张力不变，$\overline{AC}$势能为$V_1=(\overline{AC}-a)f=\frac{1}{2}\frac{f}{a}x^2$，$V_2,V_3,V_4$同样可求）

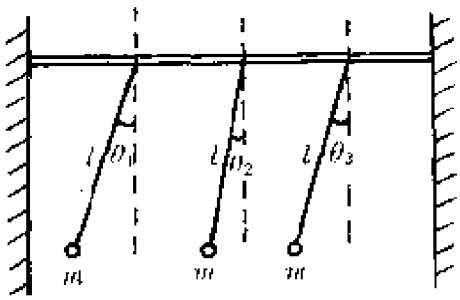
$\left(\omega_1^2=(2-\sqrt{2})\frac{k}{m},\ \omega_2^2=2\frac{k}{m},\ \omega_3^2=(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}\right)$

(8)三根弹性棒，质量不计，扭转刚度均为k_θ．固连三个相同的圆盘，每个圆盘对各自的垂直于盘面的中心轴的转动惯量为I．

$\left(\omega_1^2=0.198\frac{k_\theta}{I},\ \omega_2^2=1.555\frac{k_\theta}{I},\ \omega_3^2=3.244\frac{k_\theta}{I}\right)$



6.7 题(8)图



6.7 题(9)图

(9)三个完全相同的平面摆，悬挂在一个稍微弯曲的支架

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上，由于支架不是刚性的，平面摆之间存在耦合，能量可从一平面摆转移到另一摆。

（$\omega_1^2=\omega_2^2=1+\varepsilon,\omega_3^2=1-2\varepsilon$，这里取自然单位，$m=l=g=1$，各对摆耦合系数都是$\varepsilon$）

6.8 如系统的动能 T 和势能 V 分别是

$$T=\frac{1}{2}(3\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_2\dot{q}_3+2\dot{q}_3\dot{q}_1+4\dot{q}_1\dot{q}_2)$$

$$V=\frac{1}{2}n^2(6q_1^2+5q_2^2+4q_3^2+8q_2q_3+8q_3q_1+10q_1q_2)$$

找一个坐标变换，使动能和势能都化成平方和的形式，其中要求动能变成

$$T=\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2+\dot{\xi}_3^2)$$

（$q_1=\xi_1$，$q_2=-\xi_1+\xi_2$，$q_3=-\xi_2+\xi_3$）

6.9 求系统的简正坐标，此系统的拉氏函数为

(1) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2)+\alpha xy$

(2) $L=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2+m_2\dot{y}^2)+\beta\dot{x}\dot{y}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

（(1) $\eta_1=x\cos\varphi+y\sin\varphi$，$\eta_2=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$，$\operatorname{ctg}(2\varphi)=(\omega_1^2-\omega_2^2)/2\alpha$）

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第七章　刚体力学

刚体是一类特殊的质点系，是一种多质点系统的理想化模型，其中任意两个质点间的距离在运动中保持不变. 刚体是一类坚硬物体，如金属块、岩石等的很好的近似，尽管自然界里并不存在严格意义上的刚体(从宏观上看，任何物体总会在某种条件下发生形变，从微观上看，任何看似坚固的物体也都是由运动着的微粒子组成的)，用刚体模型来描述一大类系统仍然可以得到它们的十分准确的运动方程式.

刚体既然是一种特殊的质点系，质点系的各种基本定理与守恒定律对于它都适用，而且刚体是用质点系的理论将其运动问题解决得最好的一类质点系.

§7.1　刚体运动的分析

一、刚体运动的自由度

在第四章我们讲过，对于完整系统，其自由度数等于描述其位形的坐标数减去约束方程数，即 $f=3n-m$.

因为每一个自由质点需要 3 个坐标来描述，现在，假设有三个质点 i，j，k 固结于三根刚性棒构成的三角形的三个顶点上，则独立的约束方程为

$$|r_i-r_j|^2=l_{ij}^2$$

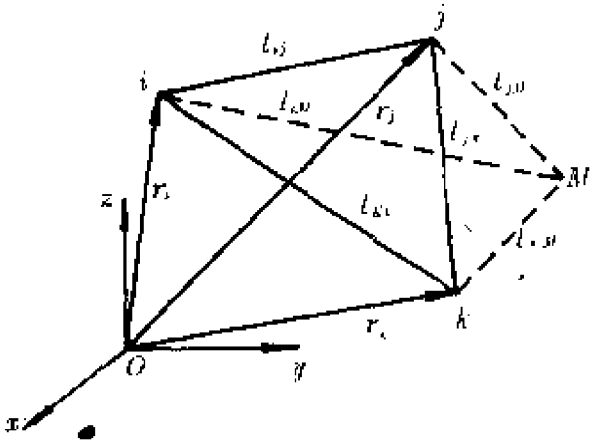


图 7.1

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$|r_j - r_k|^2 = l_{jk}^2$$
$$|r_k - r_i|^2 = l_{ki}^2$$

系统的自由度

$$f = 3n - m$$
$$= 3 \times 3 - 3 = 6$$

如果有第 4 个质点 M 也参与进来，则描述它的位置需要三个附加的坐标，但也增加了三个附加的独立约束方程：

$$|r_M - r_i|^2 = l_{Mi}^2,\ |r_j - r_M|^2 = l_{jM}^2,\ |r_k - r_M|^2 = l_{kM}^2$$

因而自由度并不改变. 依此类推，无论加上多少以刚杆连结的质点，甚至无穷多个，也不会改变自由度数，刚体就是这种情况. 因此可以认为，刚体的自由度一般为 6. 描述刚体的一般运动需 要 6 个独立变量，但在受到某些限制时，也可以用少于 6 个的独立变量来描述. 因刚体的自由度

$$f \leqslant 6$$

我们应用质点系一般定理或守恒律的 7 个方程来解决刚体问题，原则上是够用的.

二、刚体运动的基本类型——平动和转动

尽管刚体运动的类型复杂多样，但基本的只有两种：平动和转动，刚体的任一种运动都可以化为这两种运动的合成.

所谓平动是指刚体在运动过程中，过体内或与之固连的空间内任何两点之间的直线都与自身平行的运动. 或在运动的任何瞬间，刚体上每点都作平行移动，即位移大小、方向都相同. 这样的运动，称为平动. 在平动中，刚体的方位不变. 刚体内任何一点的运动都与其它点相同，因而任一点都可以代表刚体的运动. 它的位移、速度和加速度，也就是刚体的位移、速度和加速度，这样，刚体平动的描述就与一个质点的运动的描述一样. 只有只存在平动或只须考虑平动时，刚体的运动才可以作为质点的运动来处理.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

应该注意的是：刚体的平动并不要求运动轨迹必须为直线. 平直传送带上物体的运动固然是平动；不计地球自转时，地球绕太阳的运动也是平动，尽管地球公转的轨道乃是椭圆.

刚体运动过程中有两点(因而也就有一条直线)保持不动，称为转动. 此直线即为转动轴. 如两点瞬时不动，转动轴为瞬时轴，如两点始终保持不动，则转动轴为固定轴.

一般刚体运动的自由度是6，从质点系基本定理我们知道，确定质心位置须3个独立坐标，因而一般刚体有3个平动自由度. 一旦质心位置固定下来，剩下的3个自由度只涉及刚体方位的改变，是用来描述刚体转动的. 这里我们选质心作为参考点或基点. 这样，刚体的运动就分成了质心的平动和绕质心的转动. 由于系统自由度是运动学属性，并不依赖于质心的位置，如只从运动学考虑，刚体中任何其它的点同样可以被选作运动的参考点，而由于动力学的原因，常取质心作为参考点.

三、欧勒(Euler's)定理和查理斯(Chasles')定理

这是两个关于刚体位移的重要定理，我们先叙述欧勒定理：

(一)欧勒定理

具有任一个固定点的刚体的最一般的位移，可以由绕通过此定点的某一轴的纯转动来实现.

定理证明如下：

选定点 O 和刚体内与 O 等距的两点 A、B，对于刚体的任意位移，A，B 必在同一球面上运动. 圆弧 AB 的运动代表了刚体的运动. 如图 7.2 所示，刚体经任一位移后，A，B 点移至 A'，B' 点. 因点 A，B 是固定在刚体上的，大圆弧 AB 和 A'，B' 是相等的. 引大圆弧(即以球心为圆心、球半径为半径的圆弧)C_1，它是球面上到 A，A' 等距离的点的轨迹；类似地引大圆 C_2，它是球面上到 B，B' 等距离的点的轨迹. C_1，C_2 或者在一

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

直径的两端点相交，或者相重合. 设 C_1 和 C_2 相交在通过 O 的直径的两端 P 和 P'，圆弧 PA 和 PA' 相等，圆弧 PB 和 PB' 相等. 现在我们证明绕 PP' 的同一转动将使 B 运动到 B'，A 运动到 A'. 我们已看到，大圆弧 AB，BP 和 PA 分别等于 $A'B'$，$B'P$ 和 PA'，因而球面三角形 ABP 和 $A'B'P$ 或者相重合，或者对称，但后面的可能性被排除掉. 因为这要求 C_1 和 C_2 重合，暂不讨论. 因此，球面角 APB 和球面角 $A'PB'$ 相等，球面角 APA' 和球面角 BPB' 也相等. 即 A 至 A'，B 至 B'，于是对于 C_1 和 C_2 相交的情形，定理已证明.

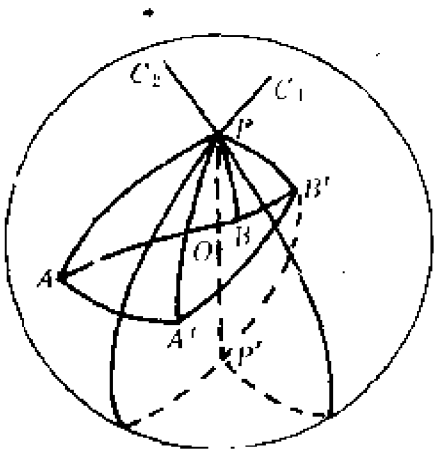


图 7.2

现在假定 C_1 和 C_2 重合，形成一共同的大圆 C，在此情形下，P 和 P' 决定的转动轴通过 C 和包含弧 AB 与 $A'B'$ 的两个大圆的公共交点，球面三角形 ABP 和 $A'B'P$ 分别退化到两个大圆弧上，且显然，同样的角位移使 A 运动到 A'，B 运动到 B'.

（二）查理斯定理

刚体最一般的位移，它等同于一螺旋位移，即可视为平动及绕一平行于平动方向之轴的转动的合成.

由欧勒定理我们知道，刚体定点运动的最一般情形等同于通过该定点的某轴的单一转动. 而定轴转动是刚体上所有点都在平行于同一平面的各平面内运动的平面位移，对于刚体的平面位移，可以用一刚体薄片的运动来代表.

如果容许刚体不仅有方位的改变，也有平动，则一般说刚体内没有点不发生位置变化，但我们可以认为刚体的一般位移是随刚体内任意点的平动位移加上绕通过基点的某一轴的转动

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

位移合成的结果. 平动位移不改变刚体方位，转动位移不改变基点位置，这两种位移可按不同次序完成或同时进行. 所以刚体的一般位移等同于随刚体内某点的平动加上绕通过该点的某轴的转动.

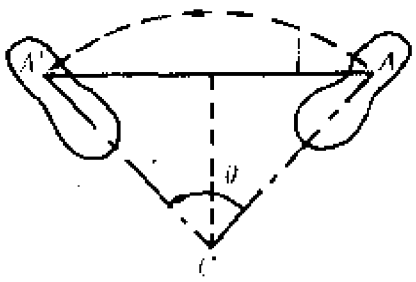


图 7.3

设图 7.3 表示一薄刚体的平面位移，等同于绕通过转动中心 C 垂直于平面的轴的纯转动，角度为 θ. 如再迭加上一个平动位移，它有平行于转动轴的平动分量，也有垂直于转动轴的平动分量，后者和转动可结合成一纯转动，这样，则位移不再是平面位移，而是沿轴平动和绕轴转动合成的一般位移. 如果认为平动和转动是同时进行的，则刚体内每个点都描绘出一螺旋路径. 所以，刚体的一般位移称为螺旋位移.

四、刚体运动的分类

(1)平动，是刚体方位不变的运动，刚体内任一直线在运动中始终保持与初始时平行.

自由度 $f=3$，通常用任意基点的坐标 x，y，z 来描述.

(2)定轴转动. 刚体运动时各点始终绕一固定轴线转动，各点都在平行于某固定平面的平面里作圆周运动. $f=1$，用转角 φ 描述.

(3)平面平行运动：

刚体中任意一点始终在平行于某固定平面的平面内运动，简称平面运动. 这时取一个平行于固定平面的断面，它的运动即代表刚体的运动. 例如沿斜面滚动的圆柱，取它的一个断面，其上每个点的运动，代表了圆柱沿轴线方向的直线上所有点的运动(图 7.4).

在平面内确定刚体上一个参考点的位置需要两个坐标(通

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

常取质心为参考点），例如选 x 和 y. 参考点确定后，刚体还能绕通过此点垂直于平面的轴转动，为描述转动，还需要一个角度变数，取为 φ，刚体平面运动的自由度 $f=3$.

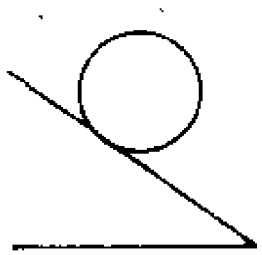


图 7.4

(4)定点运动(或称定点转动)：

刚体运动过程中，只有一点保持不动，称为定点运动. 依据欧勒定理，定点运动刚体的任一位移均可由绕通过定点的某轴的转动来实现，所以，定点运动实际上是刚体绕通过定点的瞬时轴转动. 确定转轴方向需要两个变数，确定绕转轴的转动还需要一个变数，故 $f=3$. 通常取欧勒角 φ, θ, ψ 来描述定点运动.

(5)一般运动：

一般运动即平动加上定点运动.

自由度 $f=6$，通常用 x，y，z 描述基点的位置，用欧勒角 φ, θ, ψ 来描述刚体的方位.

§7.2 刚体运动学

一、刚体转动的角速度

在§1.2中已经看到，笛卡儿坐标系的任意转动可以由 3×3 旋转矩阵左乘以指定代表点位置的列矩阵来实现：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

如果在作了转动$[\lambda_1]$后，再作转动$[\lambda_2]$，笛卡儿坐标系的最后取向同一次转动

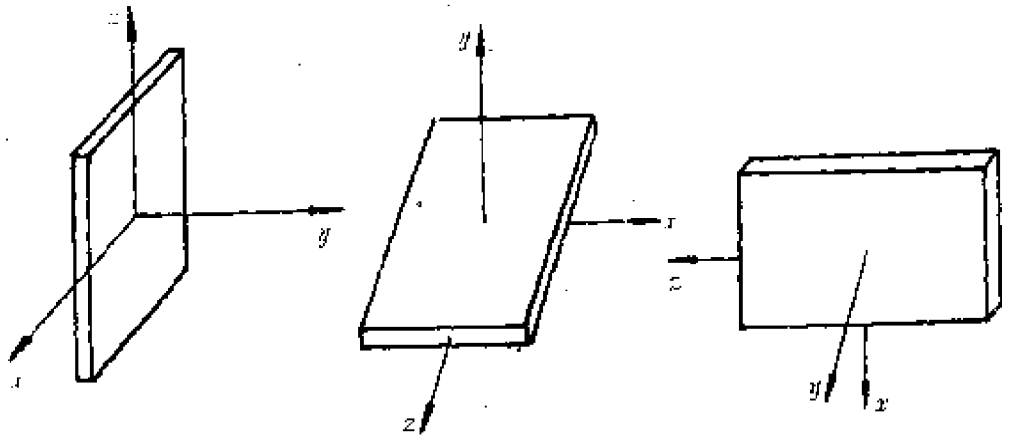
$$[\lambda] = [\lambda_2][\lambda_1] \tag{7.2}$$

相同.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由于矩阵相乘一般不能对易(交换次序)，对相继两次以上的转动，次序是重要的.

以图 7.5 所示的长方体形刚体——木块为例. 固结于其上的笛卡儿坐标系的转动代表了刚体的转动. 设初始时，木块位置如图(a)所示，它相继绕 x 和 y 轴转动 90°后的取向如图(b)所示，而相继绕 y 和 x 轴转动后的取向则如图(c)所示.



(a) (b) (c)

图 7.5

显然图(b)和(c)所示是完全不同的，说明有限转动并不满足加法交换律，刚体的有限转动不是向量.

我们在 § 1.4 中曾定义了无穷小角位移 $\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\varphi e$，并证明了它是向量，因此角速度

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{7.3}$$

也是向量，这一点也可以从转动矩阵看出.

设坐标系 $O\text{-}xyz$ 绕 z 轴作无穷小转动(角位移)ε_z，相应的转动矩阵是

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$(\varepsilon_z)=\begin{pmatrix}\cos\varepsilon_z & \sin\varepsilon_z & 0\\ -\sin\varepsilon_z & \cos\varepsilon_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_z & 0\\ -\varepsilon_z & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{7.4}$$

其中用到在 ε_z 为无穷小量时，$\cos\varepsilon_z\simeq 1$，$\sin\varepsilon_z\simeq\varepsilon_z$，相继作无穷小转动 ε_x 和 ε_y，则

$$[\varepsilon_y][\varepsilon_x]=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\varepsilon_y\\ 0 & 1 & 0\\ \varepsilon_y & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_z & 0\\ -\varepsilon_z & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 1 & 0\\ \varepsilon_y & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{7.5}$$

相继作无穷小转动 ε_z，ε_y 和 ε_x，则得

$$[\varepsilon_x][\varepsilon_y][\varepsilon_z]=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x\\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1\end{pmatrix}=[1]+[\varepsilon]\tag{7.6}$$

其中

$$[\varepsilon]=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y\\ -\varepsilon_z & 0 & \varepsilon_x\\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 0\end{pmatrix}\quad\text{（反对称矩阵）}\tag{7.7}$$

对相继任意两次无穷小转动，如忽略无穷小量的乘积

$$([1]+[\varepsilon_1])([1]+[\varepsilon_2])=[1]+[\varepsilon_1]+[\varepsilon_2]\tag{7.8}$$

反对称矩阵$[\varepsilon_1]$、$[\varepsilon_2]$代表两个任意的无限小转动，因矩阵加法是可交换的，我们有

$$[\varepsilon_1]+[\varepsilon_2]=[\varepsilon_2]+[\varepsilon_1]\tag{7.9}$$

即在无穷小转动下，转动矩阵是可交换(对易)的，无穷小转动的确是向量，反映这一无穷小转动的角位移 $d\varphi$ 是向量. 因而角速度 $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$ 也是向量.

二、描述刚体运动的两组坐标系

通常用静系(或称定系，一般是惯性系)和动系(本体坐标

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

系，一般是非惯性系）来描述刚体的运动，如图 7.6 所示.

O-$\xi\eta\zeta$ 代表固定坐标系，它在空间中是不动的. O'-xyz 代表本体坐标系，与刚体固结在一起，它的三条坐标轴的方向反映了刚体的方位（或取向），它相对于静系的运动，就代表了刚体的运动.

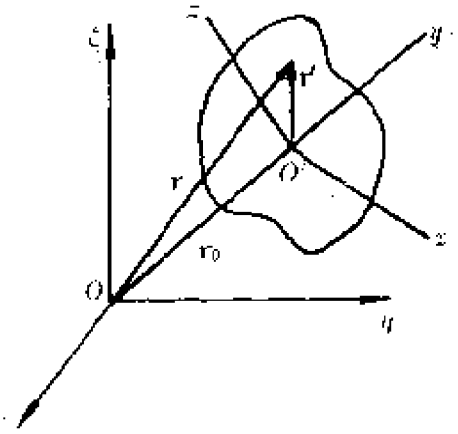


图 7.6

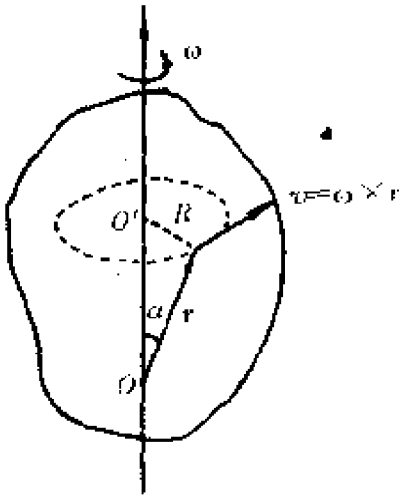


图 7.7

三、刚体的定轴转动

刚体运动的基本类型是平动和转动，但平动是质点运动的特征，质点只有平动而无转动，因而体现刚体运动特征的，是转动而不是平动. 转动中最简单的形式是定轴转动，它只需一个变量 φ 描述，$f=1$（图 7.7）.

刚体定轴转动时，各点的位置、速度虽然不同，但绕定轴转动的角位移 $\mathrm{d}\varphi$ 和角速度 ω 相同，各点都绕定轴作圆周运动，并有相同的角加速度 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，且 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 与 ω 都沿轴线.

刚体上任一点 P 的速度大小是 $\omega R=r\sin\alpha\omega$，方向沿圆 O 的切向，故可表为

$$v=\omega\times r \tag{7.10}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times\frac{dr}{dt}$$

$$=\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times(\omega\times r) \qquad (7.11)$$

右端第一项是切向加速度，第二项是向轴加速度.

四、刚体的平面平行运动

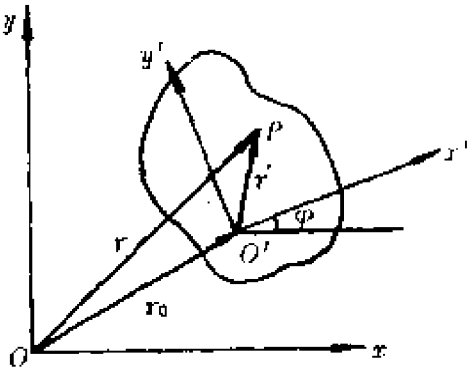


图 7.8

根据查理斯定理，刚体最一般的位移等同于一螺旋位移，即刚体不仅有方位的改变，也有平动. 如果刚体方位的改变和平动仅发生在一平面内，那就是我们所说的平面平行运动：刚体中任何一点都在一与同一固定平面平行的平面内运动. 从运动学看，在平面平行运动中，所有固定在刚体内而垂直于该固定平面的直线都在平行于自身而作平动（虽然刚体并非在作平动），因而，与固定平面平行的任何截面（即不变形的平面图形），都可以代表刚体的运动. 但在动力学上，常取通过质心的截面来代表刚体的运动. 为讨论刚体平面运动中各点的速度和加速度，引进图 7.8 示的两种坐标系：O-xy 是静系，O'-$x'y'$ 是动系即本体系. O' 是基点，它在静系中的位置向量是 r_0，任意点 P 在动系中的位置向量是 r'，在静系中的位置向量是 r，P 点在静系中的速度

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{dr_0}{dt}+\frac{dr'}{dt}=v_0+\frac{dr'}{dt} \qquad (7.12)$$

右端第一项是基点平动速度，第二项$\frac{dr'}{dt}$的意义可由如下分析看出：

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{d}{dt}(x'e_{x'}+y'e_{y'})=\dot{x}'e_{x'}+x'\dot{e}_{x'}+\dot{y}'e_{y'}+y'\dot{e}_{y'}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{de_{x'}}{dt}=\frac{de_{x'}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}e_{y'}=\omega(e_{z'}\times e_{x'})=\omega\times e_{x'} \tag{7.13}$$

$$\frac{de_{y'}}{dt}=\omega\times e_{y'} \tag{7.14}$$

注意到 r' 是动系中的常向量，$\dot{x}'=\dot{y}'=0$，则

$$\frac{dr'}{dt}=\omega\times x'e_{x'}+\omega\times y'e_{y'}=\omega\times r' \tag{7.15}$$

它是点 P 相对于基点 O' 的转动速度. 故有

$$v=v_0+\omega\times r' \tag{7.16}$$

将质点相对于静系的速度 v 表示成分量式，在静系中为

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v_{ox}-(y-y_0)\omega\\v_y&=v_{oy}+(x-x_0)\omega\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

在动系中为

$$\left.\begin{aligned}v_{x'}&=v_{ox'}-y'\omega\\v_{y'}&=v_{oy'}+x'\omega\end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

式中 $v_{x'}$，$v_{y'}$ 是质点在静系中的速度 v 在动系二坐标轴上的分量，并非相对动系的相对运动速度分量.

$$\sqrt{v_{x'}^2+v_{y'}^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v$$

平面运动的刚体上质点的加速度为

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(v_0+\omega\times r')=a_0+\frac{d}{dt}(\omega\times r')$$

$$=a_0+\frac{d\omega}{dt}\times r'+\omega\times(\omega\times r') \tag{7.19}$$

注意到平面运动中 $\omega\perp r'$，$\omega\perp r_0$，$\omega\perp r$，则

$$a=a_0+\frac{d\omega}{dt}\times r'-r'\omega^2$$

$$=a_0+\frac{d\omega}{dt}\times(r-r_0)-(r-r_0)\omega^2 \tag{7.20}$$

式中 a_0 是动系原点的加速度，$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}e_z=\alpha e_z$ 是角加速度. $\frac{d\omega}{dt}$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\times r' = \frac{d\omega}{dt} \times (r - r_0)$是质点相对于基点$O'$转动的切向加速度，$-r'\omega^2 = -(r - r_0)\omega^2$是相对于$O'$转动的向心加速度.

刚体作平面运动时，代表它的运动的平面刚体上(或平面刚体所连结的平面上)，总有一点速度(相对静系的速度)$v = 0$，这一点叫作瞬时转动中心，简称转动瞬心. 利用速度为零的条件，就可以找到瞬心的位置. 设瞬心在C点. 则

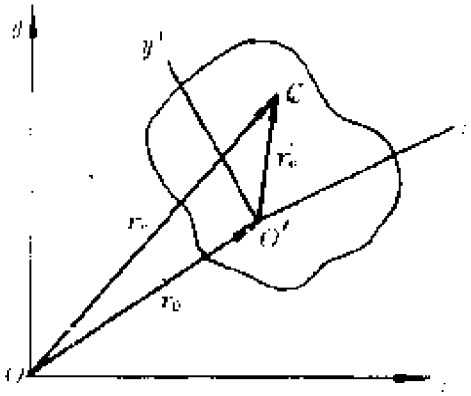


图7.9

$$v_c = v_0 + \omega \times r_c' = 0 \tag{7.21}$$

或

$$v_0 + \omega \times (r_c - r_0) = 0 \tag{7.22}$$

如图7.9所示，C既是刚体上的点，又是空间(静系)中的点，C点的位置既可以用它在动系中的坐标表示，也可以用静系中的坐标表示，由(7.22)式得

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} - (y_C - y_0)\omega = 0 \\ v_{0y} + (x_C - x_0)\omega = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

求得瞬心C在静系中的位置是

$$\left.\begin{aligned} x_C = x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega} \\ y_C = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

由(7.21)式得

$$\left.\begin{aligned} v_{0x} - y_C'\omega = 0 \\ v_{0y} + x_C'\omega = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

由此求得瞬心C在动系中的位置是

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} x'_C &= -\frac{v_{Oy'}}{\omega} \\ y'_C &= \frac{v_{Ox'}}{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (7.26)$$

在平面刚体运动时，转动瞬心位置不断变化，瞬心 C 在固定平面（定系 O-xy）上所描绘的轨迹，称为空间轨迹；C 在平面刚体上（即动系 O-$x'y'$ 上）所描绘的轨迹，称为本体轨迹.

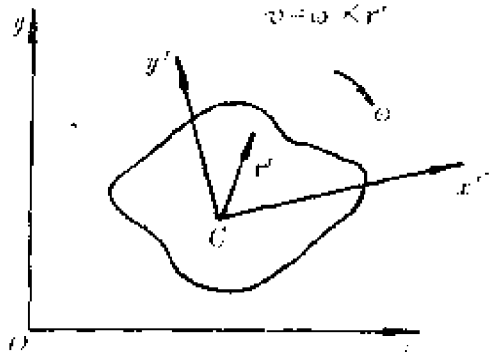


图7.10

除用上述解析方法求瞬心位置外，还可以用几何方法求出. 如果选取瞬心为基点，则因该时刻瞬心不动，刚体绕此点作瞬时纯转动——定轴转动，刚体上任一点的速度为

$$v = \omega \times r'$$

由此我们可用如下几何方法求转动瞬心：

（Ⅰ）已知两点的速度方向：如 A，B 两点速度 v_A，v_B 不平行，瞬心 O 在它们垂线的交点上（图7.11(a)）.

如 $v_A \parallel v_B$，C 点在无限远处，此时刚体作瞬时平动，各点瞬时速度相等（图7.11(b)）

（Ⅱ）已知一点速度的大小和方向及角速度大小和方向：转动瞬心在过 A 点的 v_A 垂线上，距 A 为 $r=\frac{v_A}{\omega}$ 处（图7.12）.

（Ⅲ）已知两点速度的大小和方向（如果它们是平行的）：若 $\overrightarrow{AB}$ 上 v_A（及 v_B），C 在速度端点连线与 $\overrightarrow{AB}$ 交点上（图7.13(a)、(b)）.

（Ⅳ）平面刚体在某固定面上作无滑动的滚动，转动瞬心在接触点上（图7.14）.

求出了瞬时转动中心，对于决定运动的平面图形（即刚体）

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

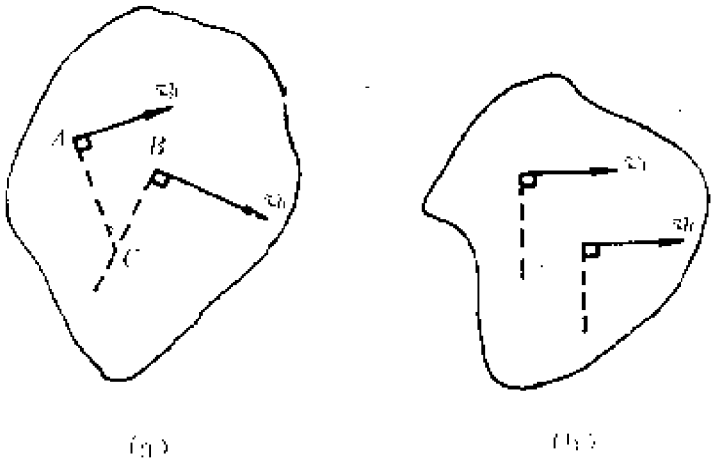


图7.11

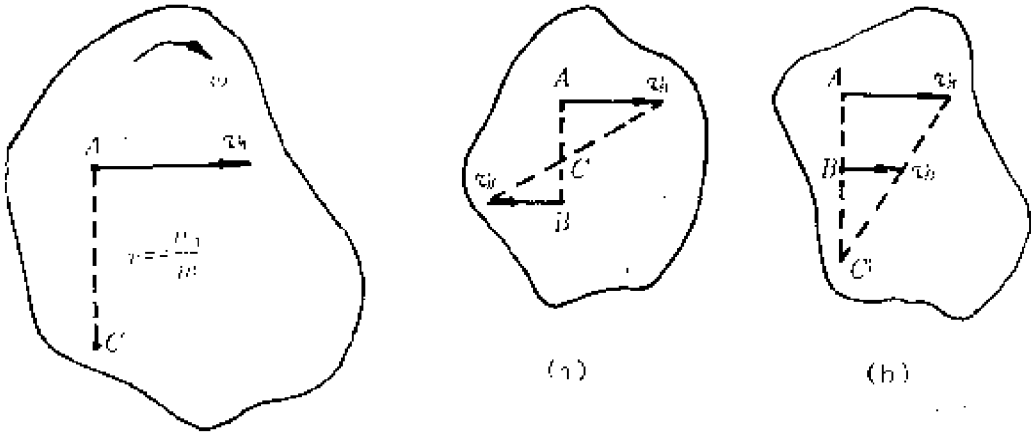


图7.12　　图7.13

中各点的速度有重要意义．因为知道了转动瞬心和转动方向，也就可以决定各点速度的方向(图7.15)，一旦 ω 大小也确定了，各点的速度都可以求出来．

总之，对刚体的平面运动可以从四种不同的角度加以分析：

(Ⅰ)平面图形在其平面内的任何位移(有限的或无限小的位移)可以看作随基点的平动和绕基点的转动的复合运动．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

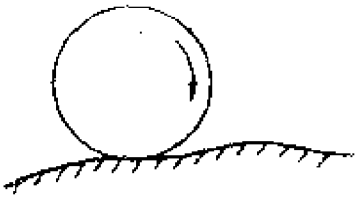


图7.14

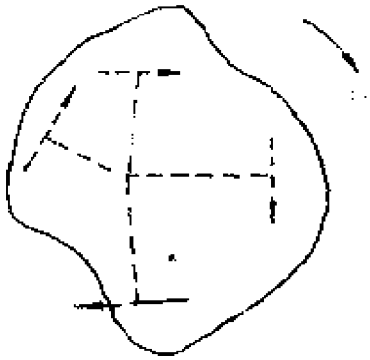


图7.15

（Ⅱ）任何位移可以看作每一瞬间绕瞬心的纯转动，或一连串这样的纯转动累积的结果.

（Ⅲ）任何有限位移相当于一个绕某中心的转动，这个中心称为有限转动中心. 这可从下面的分析得出：

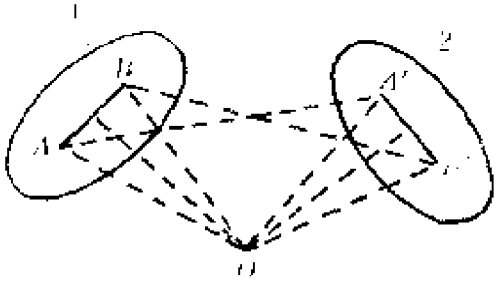


图7.16

因为平面图形有三个自由度，图形上任何两点之间的连线的位置足以确定图形的位置.

设图形从位置1移到2，线段 AB 和 $A'B'$ 代表它们的两个不同位置(图7.16).

如果存在有限转动中心 O，它必然满足

$$OA = OA', \quad OB = OB'$$

即转动中心 O 应在 AB 和 $A'B'$ 的中垂线上，不难证明 O 确是转动中心：

因 $OA=OA'$，$OB=OB'$，如果 $\angle AOA' = \angle BOB'$，图形转过 $\angle AOA'$ 后 AB 与 $A'B'$ 必然重合，因而图形由位置1移动到了位置2. 由于三个对应边相等，$\triangle ABO \cong \triangle A'B'O$，故有

$$\angle AOB = \angle A'OB'$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{v}{l}\sqrt{a^2 + b^2\mathrm{tg}^2\varphi}$$

由(7.20)，平面运动的刚体上质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\omega^2$$

$\boldsymbol{a}_0$是基点的加速度，取 B 为基点，$\boldsymbol{a}_0 = 0$，任意点 P 的加速度

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\omega^2$$

$\boldsymbol{r}' = b\boldsymbol{e}_{y'}$，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_P &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{l\cos\varphi}\boldsymbol{e}_{x'}\right) \times (b\boldsymbol{e}_{y'}) - (b\boldsymbol{e}_{y'})\frac{v^2}{l^2\cos^2\varphi} \\
&= -\frac{vb}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{bv^2}{l^2\cos^2\varphi}\boldsymbol{e}_{y'} \\
&= -\frac{vb}{l}\sec\varphi\mathrm{tg}\,\omega\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{bv^2}{l^2\cos^2\varphi}\boldsymbol{e}_{y'} \\
&= -\frac{vb}{l}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{v}{l\cos\varphi}\boldsymbol{e}_{x'} - \frac{bv^2}{l^2\cos^2\varphi}\boldsymbol{e}_{y'} \\
&= \frac{v^2b}{l^2\cos^2\varphi}\left(\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}\boldsymbol{e}_{x'} - \boldsymbol{e}_{y'}\right)
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{e}_{x'} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_{y'} = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y$，得：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_P &= \frac{v^2b}{l^2\cos^2\varphi}\left(-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x - \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\boldsymbol{e}_y + \sin\varphi\boldsymbol{e}_x - \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\right) \\
&= -\frac{v^2b}{l^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_y \\
&= -\frac{v^2b}{l^2\cos^3\varphi}\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

$$r = l\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{a}_P = -\frac{v^2bl}{r^3}\boldsymbol{e}_y$$

因 P 点坐标

$$x = a\sin\varphi, \qquad r = b\cos\varphi$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

故 P 点轨迹为椭圆.

(2)瞬时转动中心 C 在静系中坐标为

$$x_C=l\sin\varphi, \qquad y_C=l\cos\varphi$$

$$x_C^2+y_C^2=l^2$$

即空间极迹是以 O 为圆心、l 为半径的圆.

瞬心 C 在动系中的坐标为

$$x'_C=\frac{l}{2}\sin 2\varphi, \qquad y'_C=\frac{l}{2}\cos 2\varphi$$

$$x_C'^2+y_C'^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

本体极迹是以 O' 为圆心、$\frac{l}{2}$ 为半径的圆.

五、刚体的定点运动

(一)速度和加速度公式

为了描述刚体的定点运动，如同对定轴转动和平面运动一样，首先要给出刚体上任一点的速度和加速度计算公式，并且由于定点运动的复杂性，要选择适当的独立变量来确定刚体的位置，还要给出用独立变量表示的角速度公式.

根据欧勒定理，刚体定点运动最一般的位移等同于通过该点的某轴的单一转动，这一定理对有限转动和无限小转动都是适用的. 在无限短时间

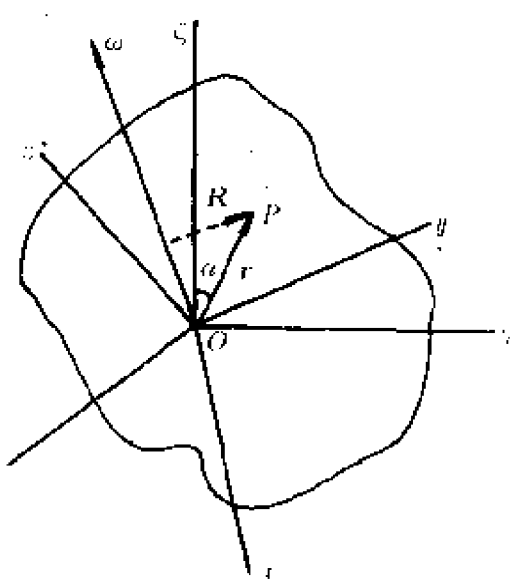


图7.19

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

内，刚体绕某过定点的轴作了无限小的转动，这个轴就是瞬时轴.

如图7.19所示，刚体上任意点 P 绕瞬时轴(沿 ω 的方向)转动的瞬时速度

$$v=\omega\times r \tag{7.27}$$

瞬时加速度

$$\begin{aligned}a&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\times r)\\&=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times r+\omega\times\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times r+\omega\times(\omega\times r)\\&=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times r+\omega(\omega\cdot r)-\omega^2 r\end{aligned}\tag{2.28}$$

从形式上看，(7.27)、(7.28)式与定轴转动的速度、加速度公式(7.10)、(7.11)完全相同，但它们反映的物理内容并不相同. 就速度公式而言，虽然都是绕轴转动的速度，但一个轴是固定的，一个是时刻变化的. 加速度公式中，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times r$ 项对定轴转动是切向加速度，因为 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}/\!/\omega$；对定点运动而言，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\not/\!/\omega$，此项一般并不沿切向，称为转动加速度(或横向加速度). $\omega\times(\omega\times r)$ 对定轴转动而言，是向心加速度，但在定点运动中不再向心，而是指向转动瞬轴，称为向轴加速度.

(二)欧勒角

定点运动的刚体，自由度 $f=3$，至于用哪些变量来描述运动，选择是任意的. 欧勒建议用下面定义的三个角 φ、θ、ψ(它们被称为欧勒角)来描述定点运动刚体的位置.

因为刚体的位置是用固定在刚体上的动系(本体坐标系)相

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

对于固定坐标系的方位来描述的，以下将用本体坐标系代表刚体，（因为坐标架也是刚体），该坐标系位置确定了，刚体的位置也就确定了.

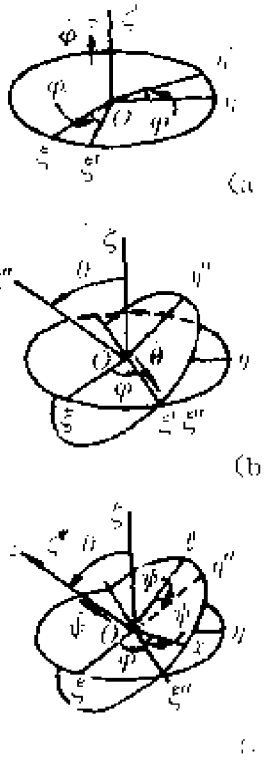


图7.20

一个笛卡儿坐标系，按照特定顺序相继完成三次转动，变换到另一个笛卡儿坐标系，相应地，刚体由原来的位置移到另一个任意位置，这三次转动转过的特定角度，就是欧勒角.

先把笛卡儿坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 绕 ζ 轴逆时针转动 φ 角，转到了 O-$\xi'\eta'\zeta'$（图 7.20(a)）.

其次，使 O-$\xi'\eta'\zeta'$ 绕 ξ' 轴转动 θ 角，转到 O-$\xi''\eta''\zeta''$，这里 ξ'' 是 $\zeta\eta$ 平面与 $\xi''\eta''$ 平面的交线，称为节线(图7.20(b)).

最后，令 O-$\xi''\eta''\zeta''$ 绕 ζ'' 轴逆时针转过 ψ 角，变换为 O-xyz(图7.20(c)).

经过这三次转动，坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 变到了任意坐标系 O-xyz，即由 φ、θ、ψ 三个角就完全确定了 O-xyz 相对于 O-$\xi\eta\zeta$ 的方位.

上述三次转动及转动的最后结果，都可用矩阵表示.

以 ξ 表示定系，x 表示动系，以 A 表示动系最后方位，即坐标轴最终位置对初始位置(静系)的相对取向，以 A_φ 和 A_θ、A_ψ 分别表示三次转动的旋转矩阵，则第一次转动可表为

$$\xi' = A_\varphi \xi \qquad (\xi', \xi \text{ 为列矩阵})$$

即

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

第二次转动为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\xi'' = \Lambda_\theta \xi'$$

即

$$\begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \tag{7.30}$$

第三次转动为

$$x = \Lambda_\psi \xi''$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

Λ 可表示成矩阵积

$$\Lambda = \Lambda_\psi \Lambda_\theta \Lambda_\varphi \tag{7.32}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7.33}$$

总的变换可以表示为

$$x = \Lambda\xi \tag{7.34}$$

欧勒角的上述选法称为 x 约定，因为第二次转动是绕中间坐标系的 x 轴(即 ξ')转动的. 还有另一种选法称为 y 约定，即第二次转动是绕中间坐标系的 y 轴(即 η')转动的，这种约定在量子力学和近代物理中常用.

上述欧勒角中，φ 在 O-$\xi\eta$ 平面上，是节线 ξ' 与 ξ 轴的夹角，称为进动角，其变化范围不受限制，进动角速度 $\dot{\varphi}=\dot{\varphi} e_\zeta$.

θ 角是在 O-$\eta'\zeta$ 平面上，z 轴与 ζ 轴的夹角，称为章动角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，章动角速度 $\dot{\theta}=\dot{\theta}e_\xi$ (e_ξ 是节线 $O\xi'$ 的单位向量).

ψ 角是 O-xy 平面上节线 ξ' 与 x 轴的夹角，称为自转角，其

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

变化范围不受限制. 自转角速度 $\psi=\dot{\psi}e_z$.

对定点运动的刚体，只要确定了过定点 O 的任一轴线的方位，再给出刚体绕此轴的转角，刚体的位置就完全确定了. 用欧勒角可以方便地做到这一点. 例如，用 φ, θ 就可以确定 z 轴的位置，再给出自转角 ψ，刚体的位置就确定了. 欧勒角可以唯一地决定动系即刚体的位置，它们彼此可以无关地独立变化，其中任何一个自由地变化时，其余两个可以保持不动，也可以随意变化.

通常，刚体作定点运动时，三个欧勒角都将发生变化. 例如一个陀螺，既有自转(绕自身动力对称轴的转动)，又有章动(点头)，也有进动(动力对称轴绕空间第三轴即 ζ 轴转动). 刚体的瞬时角速度是这三个独立的(但并非正交的)角速度的向量和

$$\begin{aligned}\omega&=\dot{\varphi}+\dot{\theta}+\dot{\psi}\\&=\dot{\varphi}e_\zeta+\dot{\theta}e_\xi'+\dot{\psi}e_z\end{aligned}\tag{7.35}$$

这是一个向量方程式，它既可以投影到静坐标系上，也可以投影到动坐标系上，从而得出角速度分量和欧勒角及其微商的关系式，即两组欧勒运动学方程式. 为了动力学计算的方便，常常采用将 ω 投影到动系上所得到的欧勒运动学方程组.

首先，将 $\dot{\varphi}e_\zeta$ 沿动系 O-xyz 轴向投影(见图7.20)，先把 $\dot{\varphi}e_\zeta$ 沿 $O\eta''$ 和 Oz 分解：

$$\dot{\varphi}e_\zeta=\dot{\varphi}\cos\theta e_z+\dot{\varphi}\sin\theta e_{\eta''}\tag{7.36}$$

再将 $\dot{\varphi}\sin\theta e_{\eta''}$ 沿 e_x, e_y, e_z 分解，得

$$\dot{\varphi}e_\zeta=\dot{\varphi}\cos\theta e_z+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi e_x+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi e_y\tag{3.37}$$

其次，将 $\dot{\theta}e_{\xi'}$ 向动系分解：

$$\dot{\theta}e_{\xi'}=\dot{\theta}\cos\psi e_x-\dot{\theta}\sin\psi e_y\tag{7.38}$$

最后，$\dot{\psi}e_z$ 已在 z 轴上，将(7.36)～(7.38)代入(7.35)式，得

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

这组方程就是欧勒运动学方程.

同样地，如果把 ω 投影到固定坐标系的轴上，得出另一组方程式

$$\left.\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_\eta &= -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_\zeta &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

有兴趣的读者，可以自己完成它的证明.

§7.3 力系及其简化·力系的平衡

一、基本概念和公理

作用于物体(这里指刚体)上的一组力，称为力系. 刚体动力学就是研究在力系的作用下，刚体运动的规律.

在质点系动力学中，我们曾得到质点系质心运动定理和关于质心的角动量定理，我们把 $F^{(e)}=\sum_i F_i^{(e)}$ 称为作用在质点系上的合外力，把 $N'^{(e)}=\sum_i N_i'^{(e)}$ 称为质点系所受外力对质心 C 的力矩的向量和，即对 C 的合外力矩. 事实上，这样讲是不够严格的，因为外力并不一定都通过质心，"合外力"如何求?"外力矩的向量和"又如何求?并没有详细讨论.

在利用质点系一般定理建立自由刚体动力学方程时，我们必须给出从已知力系求 $F^{(e)}$ 和求 $N'^{(e)}$ 的方法，为此，必须对力系进行分析和简化.

首先，要明确下面几个基本概念：

平衡：是指物体处于静止或匀速直线运动状态.

平衡力系：是作用在处于平衡状态的物体上的力系.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

力偶：是大小相等，方向相反，不共线的二力组成的力系（见图7.21）.

力偶中的二力所在的平面称为力偶面，两力间的垂直距离称为力偶臂.

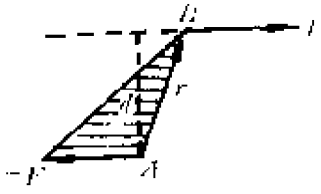


图7.21

设力偶的两个作用点为 A 和 B，定义

$$N = r \times F = \overrightarrow{AB} \times F \qquad (7.41)$$

为力偶矩，r 是力 F 的作用点 B 对 A 的位置向量. 它也可以用 A 对 B 的位置向量 $\overrightarrow{BA}$ 与力 $-F$ 的向量积定义：$N=\overrightarrow{BA}\times(-F)$，这两者是等价的. 力偶矩是自由向量，可以平行于自身任意移动其位置而不改变其效应，即它可以作用于力偶面上任何一点（平移），也可以沿自身方向滑移. 保持力偶矩不变，可以任意改变力偶中力的大小与力臂的长短. 力偶的唯一效应，是使物体转动. 它不能与一个力等效，也不能与一个力平衡，只能与另外一个力偶等效或平衡. 力偶矩是力偶作用效应的度量，它的量值

$$N = Fd = 2\triangle ABC \qquad (7.42)$$

在着手对作用于刚体上的力系进行简化前应明确：作用于变形体的力和作用于刚体的力效果是不同的，对变形体而言，力的作用点改变了，力的效果就要改变. 作用于刚体的力却有不同的结果. 下面的力系简化，是只适用于刚体的.

刚体静力学是以少数建立在大量实验事实基础上的公理为基础的，它们是：

二力平衡公理：作用于刚体上的二力平衡的条件是二力等值、反向、共线.

加减平衡力系公理：作用于刚体上的任意力系加上或减去任意一个平衡力系（即与零等效的力系）不改变原力系对刚体的效应.

推论：力的可传性——作用于刚体上的力可以沿其作用线

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

移动到刚体上任一点，而不改变对刚体的效应，由此得出：力是滑移向量.

力的平行四边形公理：共点力的合成遵从向量的平行四边形法则.

推论：三力平衡汇交原理——当刚体受不平行的三个力作用而达平衡时，这三个力必汇交于一点.

作用与反作用公理：两物体间的作用力和反作用力，总是大小相等，方向相反，作用在同一直线上的.

二、力系的简化

依据上述基本概念和公理，可以将作用在刚体上的力系简化，即找出一种形式尽可能简单而效果相同的力系来代替原来的力系.

简化力系常用到所谓等效原理，它不难从加减平衡力系公理得出. 等效定理如下：

作用于刚体上任意点 A 的力 F，等效于另一指定点 O 上一个同样大小、方向的力，加上一个力偶，它的力偶矩等于原力 F 对 O 点的力矩

$$N = r \times F \qquad (7.43)$$

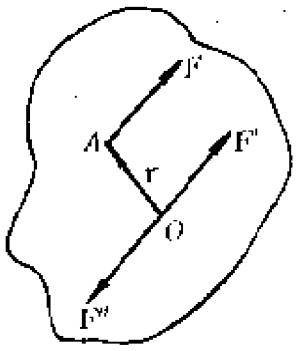


图7.22

(见图7.22)，设有一力系作用于刚体，各力并不共点，也不共面，称为一般空间力系. 为将力系简化，可依等效定理将力系中所有的力迁至刚体上任意一点 O，此点称为简化中心. 每一力迁至 O 后化成了与原来的力大小相等、方向相同的力加上一力偶，因而整个力系化成了一空间汇交力系(汇交于 O 点)和一空间力偶系. 对此空间汇交力系可重复应用平行四边形法则求出合力 F，称为力系的主矢，它与简化中心的位置无关.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$F = \sum_i F_i \qquad (7.44)$$

空间力偶系合成得到一合力偶. 合力偶的力偶矩向量等于各分力偶矩向量的向量和，即

$$N_o = \sum_i N_{oi} \equiv \sum_i m_o(F_i) \qquad (7.45)$$

N_o 表示合力偶的力偶矩向量.

$N_{oi} \equiv \sum_i m_o(N_i)$，表示分力偶的力偶矩向量，$N_o$ 称为原力系对简化中心 O 的主矩，它随简化中心的不同而改变.

空间一般力系向一点简化后，一般可以化成一个力——主矢，和一个力偶——其力偶矩是主矩，在特殊情形下，分别有下列最后简化结果：

（Ⅰ）$F \neq 0$，$N_o = 0$，力系简化为一个通过简化中心的合力，其大小与方向与力系主矢相同.

（Ⅱ）$F = 0$，$N_o \neq 0$，力系简化为一个合力偶，合力偶的力偶矩等于主矩 N_o，此时空间力系的主矩与简化中心的选取无关.

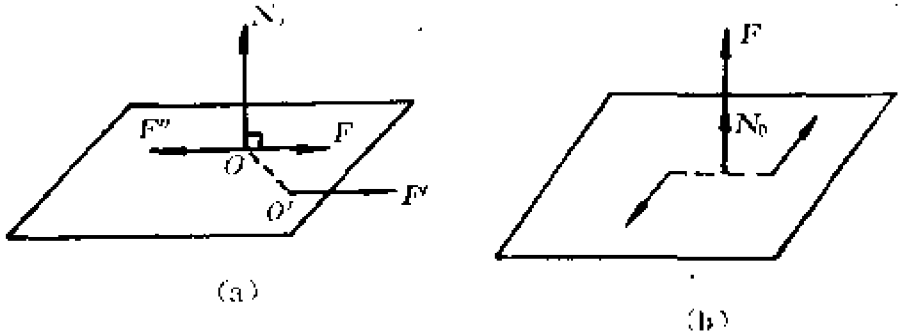


图7.23

（Ⅲ）$F \neq 0$，$N_o \neq 0$.

(a)如 $F \perp N_o$，力系仍可简化为一合力 F'，如图7.23(a)所示. F' 与主矢 F 大小、方向均相同. 因为对任意的 O 点，总可以找到 O'，使

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$m_O(F') = \overrightarrow{OO'} \times F = N_O$$

(b)如 $F // N_O$，力系简化成一力和一力偶，力和力偶矩共线，称为力螺旋(图7.23(b))

(c)如 $F \not\parallel N_O$，可将 N 分解成两个与 F 平行及垂直的分量，按(a)，(b)处理.

(Ⅳ)$F=0$，$N_O=0$，力系平衡.

空间力系的简化中，还常用到如下的定理：如空间力系与一合力等效时，合力对任一点之矩等于力系中各力对同一点之矩的向量和，即

$$m_O(F) = \sum_i m_O(F_i) = N_O \qquad (7.16)$$

这个定理称为空间力系的合力之矩定理. 其证明如下：设力系向某点 O' 简化，得到主矢 $F \neq 0$，主矩 $N_O = 0$，则 F 与原力系等效 (图7.24).

再将此力系向另一点 O 简化，得一力和一力偶，其力偶矩为

$$N_O = \sum_i m_O(F_i) \qquad (7.17)$$

由等效定理，将 F 由 O' 平移到 O，结果应和原力系向 O 点简化结果相同，故平移 F 时所得的附加力偶和力偶矩 $m_O(F)$ 应和 N_O 相同，即

$$m_O(F) = \sum_i m_O(F_i) \qquad (7.18)$$

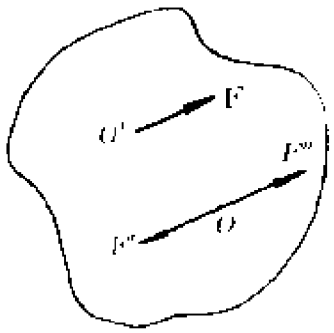


图7.24

作为空间一般力系的特例，平面汇交力系和空间汇交力系的简化可用几何法(力平行四边形法则或多边形法则)或解析法(求力在坐标轴上的投影)合成，得到一作用在汇交点的合力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$F = \sum_i F_i \tag{7.49}$$

关于空间平行力系的简化，先考察两同向平行力的情形（图7.25）. 设刚体上 A，B 两点作用以同向平行力 F_1、F_2，因其平行，不能用平行四边形法则求合力. 我们在 A，B 两点各加一力，令它们等值、反向、共线（如不共线，可将力 F_2 滑移使之共线），即给刚体施一平衡二力系 $(P, -P)$，则由图7.25可见，

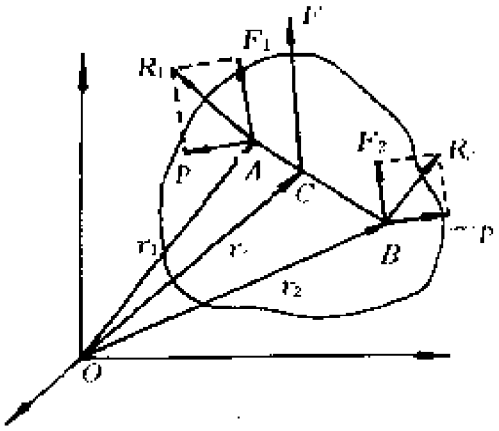


图7.25

$$R_1 = F_1 + p$$
$$R_2 = F_2 + (-p)$$

由加减平衡力系原理合力

$$\begin{aligned} F &= R_1 + R_2 \\ &= F_1 + p + F_2 - p \\ &= F_1 + F_2 \end{aligned} \tag{7.50}$$

即二平行力的合力等于该二力的向量和.

由力系的合力之矩定理，合力之矩

$$r_C \times F = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 \tag{7.51}$$

设力作用线方向单位向量为 e，

$$r_C \times Fe = r_1 \times F_1 e + r_2 \times F_2 e$$

$$r_C = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2}{F_1 + F_2} \tag{7.52}$$

合力 F 的作用点 C，称为二平行力的力心.

对多个平行力的力系，由逐次合成的办法不难得到合力为

$$F = \sum_i F_i \tag{7.53}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$F = \sum_i F_i \tag{7.54}$$

(7.54)式中 F_i 及 F 是代数量，规定了平行力中某方向的力为正，反向平行力则为负，平行力系中心位置为

$$r_C = \frac{\sum_i F_i r_i}{\sum_i F_i} \tag{7.55}$$

当平行力中各点沿同一方向转过相同的角度时，合力 F 也转过同一角度，但平行力系中心 C 并不改变.

三、力系的平衡

空间一般力系平衡的充分必要条件，是该力系的主矢和对任一点的主矩都等于零. 力系对刚体作用的全部效应相互抵消. 即

$$F = 0, \qquad N = 0 \tag{7.56}$$

此为力系平衡方程式，其分量式是

$$\sum_i F_{xi} = 0, \ \sum_i F_{yi} = 0, \ \sum_i F_{zi} = 0 \tag{7.57}$$

$$\sum_i m_x(F_i) = 0, \ \sum_i m_y(F_i) = 0, \ \sum_i m_z(F_i) = 0 \tag{7.58}$$

式中 $m_x(F_i) = [m_O(F_i)]_x$ 表示力 F_i 对 O 点的矩在通过该点的 x 轴上的投影，称为力 F_i 对 x 轴之矩.

可见，空间一般力系有6个独立的平衡方程，可解出6个未知量. 当未知量个数多于独立方程数时，不能求解，称为静不定问题.

由空间一般力系平衡方程立即得出，空间汇交力系的平衡方程为

$$\sum_i F_{x_i} = 0, \ \sum_i F_{y_i} = 0, \ \sum_i F_{z_i} = 0, \tag{7.59}$$

对于空间平行力系，若各力平行于 z 轴，平衡方程为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sum_i F_{xi} = 0,\ \sum_i m_x(F_i) = 0,\ \sum_i m_y(F_i) = 0, \quad (7.60)$$

由这三个独立的平衡方程，可解出三个未知量.

§7.4 刚体动力学基本方程·平衡方程

我们知道，刚体的运动分为定轴转动、平面平行运动、定点运动和一般空间运动，在讨论各种具体类型的运动之前，我们有必要首先就刚体运动的一般动力学问题进行讨论，以期从总体上把握刚体运动的基本规律和处理刚体动力学问题的思路和方法.

刚体既然是一类特殊的质点系，质点系的基本定理完全适用于刚体. 对于刚体的一般运动，自由度 $f=6$，需要6个独立变量描述，要建立和求解6个方程式. 其中3个坐标变量(如 x，y，z)用来确定基点的位置，描述刚体的平动；3个角度变量(如欧勒角 φ，θ，ψ)用来确定刚体的空间取向，描述刚体的转动.

我们曾经指出，在刚体运动学中，基点的选择是任意的，但质点系动力学中的动量定理即质心运动定理告诉我们：质心的运动完全由质点系所受的外力决定，仅由质心运动定理就可以将质心的运动确定下来. 这是质心特有的性质. 因此，动力学中常选质心作为基点，这样做的好处，是使平动自由度与转动自由度分开，使问题的求解获得了很大的简化.

在刚体动力学中，质心运动微分方程是

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{F}$$

式中 M 是刚体总质量，$\boldsymbol{F}=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 是外力主矢，方程的分量式是

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= F_x \\ M\ddot{y}_C &= F_y \\ M\ddot{z}_C &= F_z \end{aligned}\right\} \quad (7.61)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

将基点(通常作为动坐标系原点)取在质心 C，刚体相对于质心转动的规律就可以用关于质心的角动量定理来描述. 在质心系里，刚体的运动实际上是定点运动，关于质心的角动量定理表为

$$\dot{L}' = N' \tag{7.62}$$

式中 L' 是刚体相对于质心的角动量，$N' = \sum_i r_i \times F_i^{(e)}$ 是外力对质心 C 的主矩，写成分量式，

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}'_x &= N'_x \\ \dot{L}'_y &= N'_y \\ \dot{L}'_z &= N'_z \end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

这里，质心运动定理和相对于质心的角动量定理共提供了6个独立的方程式，原则上可以决定刚体的运动.

作为质点系动力学普遍定理之一的动能定理，也可以用来代替上述6个方程中的一个来求解刚体的运动.

质点系相对于定点的动能定理表达式为

$$\mathrm{d}T = \sum_i F_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}r_i + \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ji} \cdot \mathrm{d}r_i \tag{7.64}$$

对刚体而言，右式第二项，即内力的功之和为零，这可以证明如下：

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ji} \cdot \mathrm{d}r_i &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ji} \cdot \mathrm{d}r_i + \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ij} \cdot \mathrm{d}r_j \Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ji} \cdot (\mathrm{d}r_i - \mathrm{d}r_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} F_{ji} \cdot \mathrm{d}r_{ji} = 0 \end{aligned} \tag{7.65}$$

其中最后一步用到 $F /\!/ r_{ji}$ 及对刚体 $\mathrm{d}r_{ji} \perp r_{ji}$，故刚体动能定理化为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$dT = \sum_i F_i^{(e)} \cdot dr_i \tag{7.66}$$

类似地，易证刚体相对于质心的动能定理为

$$dT' = \sum_i F_i^{(e)} \cdot dr'_i \tag{7.67}$$

需要指出的是，相对于定点的角动量定理也可以用来处理刚体的运动：

$$\dot{L} = N \tag{7.68}$$

式中

$$L = r_C \times M\dot{r}_C + L' \tag{7.69}$$

方程(7.62)和(7.68)并不相互独立，而是可以互相推导的. 动能定理(5.66)和(5.67)也是如此.

刚体的一般运动，在理论上是可以解决的，但把上述基本方程具体化，针对各类问题求解(主要是定点运动)还有许多方法问题要解决，尤其是数学上还有许多困难有待克服.

刚体平衡时，作用在刚体上的一般空间力系应为平衡力系，空间力系平衡，要求该力系的主矢和对任意点的主矩都为零.

$$\left.\begin{aligned} F &= 0 \\ N &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

它们的6个分量方程恰好足以决定刚体平衡时的位形.

§7.5 刚体定点运动的角动量和动能·惯量张量和转动惯量

刚体运动的平动部分，已由质心运动定理即动量定理确定，其计算与质点平动的计算一样. 表现刚体运动特点的是转动，特别是定点运动，即定点转动. 定轴转动可以认为是定点运动的特例. 因此，用刚体基本方程解决刚体运动问题，应着重解决用角动量定理描述和求解刚体定点运动问题，首先要计

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

算定点运动角动量.

设刚体绕定点 O 运动，作一任意笛卡儿坐标系(静系)O-xyz，则刚体上任意点 i 在静系中的速度

$$v_i = \omega \times r_i$$

刚体对定点 O 的角动量

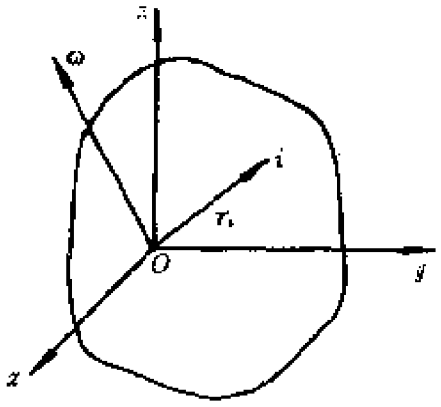


图7.26

$$\begin{aligned} L &= \sum_i m_i r_i \times v_i \\ &= \sum_i m_i r_i \times (\omega \times r_i) \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 \omega - (\omega \cdot r_i) r_i] \\ &= (\sum_i m_i r_i^2)\omega - \sum_i m_i r_i (\omega \cdot r_i) \end{aligned} \tag{7.71}$$

由(7.71)式可见，作定点运动的刚体的角动量 L 和角速度 ω 的方向一般是不相同的，仅当 $\sum_i m_i r_i(\omega \cdot r_i)=0$ 时，L 与 ω 才同向.

将 r_i 和 ω 写成分量式

$$\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \tag{7.72}$$

$$r_i = x_i e_x + y_i e_y + z_i e_z \tag{7.73}$$

代入(7.71)式，整理得

$$\begin{aligned} L = &\left[\omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i\right] e_x \\ &+ \left[-\omega_x \sum_i m_i y_i z_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i\right] e_y \\ &+ \left[-\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\right] e_z \end{aligned} \tag{7.74}$$

定义

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned} I_{yy} &= \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2) \\ I_{zz} &= \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2) \\ I_{xy} &= -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx} \\ I_{yz} &= -\sum_i m_i y_i z_i = I_{zy} \\ I_{zx} &= -\sum_i m_i z_i x_i = I_{xz} \end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

(7.75)式中各项，统称为惯性系数，I_{xx}，I_{yy}，I_{zz}分别称为刚体关于x，y和z轴的转动惯量系数，而I_{xy}，I_{yz}，I_{yx}，I_{zy}，I_{zx}，I_{xz}称为刚体关于相应两坐标的惯量积. 利用(7.75)式可将(7.74)式写成

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \tag{7.76}$$

(7.76)式也可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{7.77}$$

如果刚体是连续体，(7.75)式中的求和可用积分代替，其中质点质量应改为质量密度乘以体积元. 对角元

$$I_{xx} = \int_v \rho(r)(r^2 - x^2)\mathrm{d}V \tag{7.78}$$

非对角元

$$I_{xy} = -\int \rho(r)xy\mathrm{d}V \tag{7.79}$$

其余惯性系数的表达式依此类推.

定义

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$I=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{7.80}$$

利用 I，由(7.72)式，刚体定点运动的角动量可表为

$$L=I\cdot\omega \tag{7.81}$$

$$I=\frac{L}{\omega} \tag{7.82}$$

由(7.76)式可见，对定点运动而言，角动量和角速度之间的关系是比较复杂的. 在普通物理中，我们曾讨论过最简单的转动：以刚体动力对称轴为轴线的定轴转动，其角动量 $L=I\omega$，式中 I 是关于转轴的转动惯量，是个标量. 而在定点运动中，L 和 ω 是以一个新型的量 I 相联系的. 如(6.77)式所示，I 可以表示成向量 L 与向量 ω 的商，但两个向量之商并不是向量，而它是一个有9个分量的复杂的量，称为惯量张量，它是一个二级张量，它的9个分量中，只有6个是独立的，因为 $I_{xy}=I_{yx}$，$I_{yz}=I_{zy}$，$I_{zx}=I_{xz}$. 因此，它也称为二级对称张量.

惯量张量作为整体，表征刚体转动中惯性的大小，如同标量 m(质量)表征物体平动的惯性大小一样.

各惯性系数的意义，可以从下面的分析看出.

设刚体绕某坐标轴(例如 x 轴)转动

$$\omega=(\omega,\ 0,\ 0) \tag{7.83}$$

由(7.76)式

$$L_x=I_{xx}\omega,\ L_y=I_{yx}\omega,\ L_z=I_{zx}\omega \tag{7.84}$$

可知，转动惯量系数 I_{xx} 决定当刚体绕 x 轴转动时，角动量在 x 轴上的分量的大小，I_{xx} 就是绕 X 轴的转动惯量，而惯量积 I_{yx}，I_{zx} 则分别决定当刚体绕 x 轴转动时角动量在 y 轴和 z 轴上分量的大小，余类推.

从前面的讨论我们知道，惯性系数和惯量张量取决于刚体的质量分布和坐标系的选取. 坐标系的选取包括坐标原点即参

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

考点的选取和坐标轴的取向，不指明参考点和坐标系，惯量张量是没有意义的.

到现在为止，我们的笛卡儿坐标系是取为静系. 从惯性系数的表达式知道，刚体运动时，刚体上各质点的坐标都是时间的函数，每个惯性系数都随时间不断变化，这样，惯性系数实际上难以计算. 但如果选固结于刚体上的的本体系，则所有的惯性系数在刚体运动时将不再变化而成为常数，尽管这时仍要计算6个积分或求和，但已作了较大简化. 因此，虽然我们要计算的是刚体在静系中的角动量，即参考系是惯性系，但却应当选动坐标系(本体系)进行计算. 从现在起，我们一般都选取本体坐标系. 下面我们将说明，这一次简化还不够，我们希望进一步把惯量矩阵变换成对角矩阵，以使计算更加简化.

现在我们来计算刚体定点运动的动能.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i \cdot (\omega \times r_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega \cdot (r_i \times v_i) \\ &= \frac{1}{2}\omega \cdot \sum_i m_i r_i \times v_i \\ &= \frac{1}{2}\omega \cdot L = \frac{1}{2}\omega \cdot I \cdot \omega \end{aligned} \tag{7.85}$$

令 $\omega=\omega e$，$e=(\alpha, \beta, \gamma)$是角速度方向的单位向量，

$$T = \frac{1}{2}\omega e \cdot I \cdot \omega e = \frac{1}{2}\omega^2 e \cdot I \cdot e \tag{7.86}$$

定义

$$I = e \cdot I \cdot e$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= (\alpha, \beta, \gamma)\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha \tag{7.87}$$

它是刚体关于通过 O 点、方向为(α, β, γ)的任意瞬时轴线的转动惯量.

将(7.87)式代入(7.86)式得动能表达式为

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha)\omega^2 \tag{7.88}$$

转动惯量的定义(7.87)式，与它的初等定义 $I = \sum_i m_i R_i^2$ (R_i 是刚体内质点 i 到轴线的垂直距离)是一致的(图7.27). 因为

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i R_i^2 \\ &= \sum_i m_i (r_i \times e)^2 \\ &= \sum_i m_i (r_i \times e) \cdot (r_i \times e) \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 - (r_i \cdot e)^2] \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 - (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2] \\ &= I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha \end{aligned} \tag{7.89}$$

与(7.87)式相同.

利用(7.89)式，只要给定任一轴的方向(用 α, β, γ 表示)就可以决定绕该轴的转动惯量，例如，欲求对 z 轴的转动惯量，则将 $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$代入(7.89)式，便得 $I=I_{zz}$.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

为了简明、形象地表示转动惯量，可将刚体对某轴的转动惯量 I 的大小，用一个等质量的质点的转动惯量来代表，此质点到轴线垂直距离为 k，$I=mk^2$，则

$$k=\sqrt{\frac{I}{m}} \qquad (7.90)$$

称为刚体对该轴的回转半径. 给出了回转半径和质量，也就给出了转动惯量.

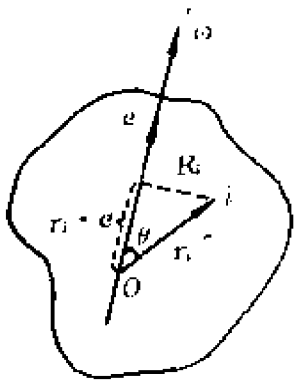


图7.27

下述两个定理，对简化刚体或质点系的转动惯量的计算很有用.

(一)平行轴定理

质点系对任一轴 z 的转动惯量 I，等于它对通过质心 C 且与 z 轴平行的轴 z' 的转动惯量 I_C，加上质点的质量 m 与两轴间距离 d 的平方的乘积.

证：见图7.28，从 C 点作 z 轴垂线交于 O，以 O 为原点作一笛卡儿坐标系 O-xyz，再过质心作一质心坐标系 C-$x'y'z'$，使 x'，y'，z' 轴分别平行于 x，y，z 轴. 由任意点 i 分别引 l_i，l_i' 垂直于 z，z'，则刚体对 z 轴的转动惯量

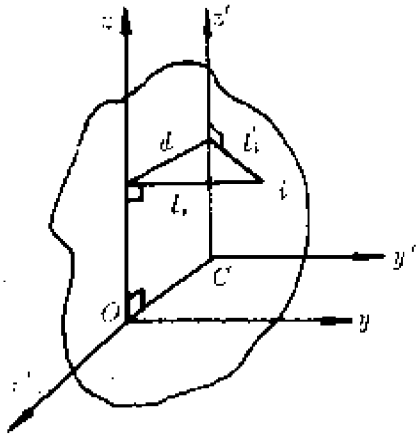


图7.28

$$I=\sum_i m_i l_i^2=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$$

对 z' 轴的转动惯量

$$I_C=\sum_i m l_i'^2=\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)$$

$$x_i=x_i'-d \qquad y_i=y_i'$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

代入 I 的表达式

$$I=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_i[(x_i'-d)^2+y_i'^2]$$

$$=\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)+d^2\sum_i m_i-2d\sum_i m_i x_i'$$

$$=I_C+md^2 \tag{7.91}$$

(二)垂直轴定理

如果质点系的全部质量分布在平面上，则质点系对该平面中任二垂直轴的转动惯量之和，等于过该二轴的交点与它们垂直的第三轴的转动惯量(图7.29).

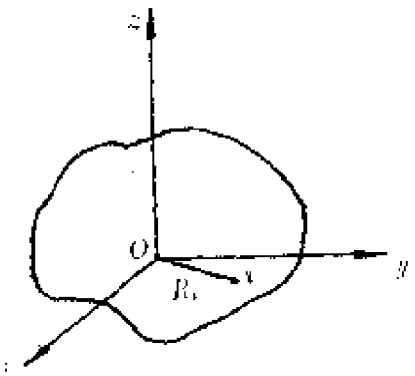


图7.29

证:设质点系质量分布在 $O\ xy$ 平面上，则质点系对各轴的转动惯量为

$$I_x=\sum_i m_i y_i^2,\ I_y=\sum_i m_i x_i^2$$

$$I_z=\sum_i m_i R_i=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$$

$$=I_x+I_y \tag{7.92}$$

应注意，此定理仅对质量分布在一平面上的质点系成立.

由上面的讨论我们看到:

(1)定点运动刚体的角动量 L、动能 T 和绕任意轴的转动惯量 I，都须由惯量张量 I 决定.

(2)一般 L 与 ω 不共线(同向)，即 $L\not\parallel\omega$，即使刚体恒绕某一定轴转动，如绕 z 轴转动，$\omega=\omega e_z$，$L=I_{xz}\omega e_z+I_{yz}\omega e_y+I_{zz}\omega e_z$，$L$ 与 ω 也不共线.

(3)在本体坐标系下求得的 I 只与坐标取法有关，与运动无关，这给计算带来方便.

(4)如能选择坐标系使惯量积均为零，则在这些坐标轴方向

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上 L 将与 ω 共线，I，L，T，l 都将变得简单易求.

§7.6 惯量主轴·惯量椭球

刚体绕定点 O 以角速度 ω 转动时，对于定点 O，能不能找到一些特殊方向即轴线，当刚体绕这些轴线转动(即角速度 ω 沿此轴线)时，刚体的角动量 L 也沿同一方向呢?事实上，确实可以找到这样一些方向，我们称它们为惯量主轴方向.

两个向量 L 与 ω 同方向，数学上就意味着它们之间只差一标量因子 I：

$$L = \mathbb{I}\omega \tag{7.93}$$

其中 $\mathbb{I}$ 是标量因子 I 乘单位矩阵，由角动量的表达式

$$L = I\omega \tag{7.94}$$

我们得到

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbb{I} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{7.95}$$

移项得

$$\left[\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 0 \tag{7.96}$$

$$\begin{pmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = 0 \tag{7.97}$$

即

$$\left.\begin{aligned} (I_{xx} - I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z = 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy} - I)\omega_y + I_{yz}\omega_z = 0 \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + (I_{zz} - I)\omega_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.98}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这是角速度三个分量满足的线性齐次方程组，这组方程有非平凡解的充分必要条件是其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.99)$$

此为久期方程，算出即得 I 满足的三次代数方程，有三个根. 由于 I 是实对称矩阵，根据线性代数理论，方程的根一定是实的(见附录1)，亦即三个本征值 I_1，I_2，I_3均为实的. 每一个 $I_i(i=1, 2, 3)$对应于绕一个主轴的转动惯量，称为主转动惯量.

这三个主轴方向，可按下述方式确定：将 I_1，I_2，I_3分别代入线性代数方程组(7.98)，可求出三组两两正交的实本征向量，即三组角速度向量分量的比 $\omega_{x_i}:\omega_{y_i}:\omega_{z_i}(i=1, 2, 3$代表三个本征值)，这组比值归一化后，代表相应于主转动惯量 I_i 的那个主轴的三个方向余弦，因而给出了三个惯量主轴的方向.

注意到 I 也是以三个方向余弦为变量的齐二次型(7.87)式的系数矩阵，由线性代数的知识知道，上述求惯量主轴的过程就是化二次型为平方和的过程. 在以三个惯量主轴为坐标轴的坐标系中，计算转动惯量的(7.87)式的二次型将化成平方和的形式，所有交叉项的系数全为零，即所有的惯量积全为零，惯量张量只有对角元不是零，

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \qquad (7.100)$$

且三个对角元就是三个主转动惯量. $I_x=I_1$，$I_y=I_2$，$I_z=I_3$. 这样的坐标系称为主轴坐标系. 显然，在惯量主轴坐标系中，角动量、转动惯量与转动动能的表达式都将取最简单的形式. 刚体的角动量 L 写成矩阵形式为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x\omega_x \\ I_y\omega_y \\ I_z\omega_z \end{pmatrix} \tag{7.101}$$

或写成

$$L = I_x\omega_x e_x + I_y\omega_y e_y + I_z\omega_z e_z \tag{7.102}$$

同样，动能表达式为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\omega \cdot I \cdot \omega \\ &= \frac{1}{2}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) \end{aligned} \tag{7.103}$$

绕方向余弦为 α，β 和 γ 的通过点 O 的轴的转动惯量为

$$I = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 \tag{7.104}$$

与(7.77)、(7.87)、(7.88)式比较，它们已被大大地简化了.

前面曾经指出，选本体坐标系(这里指的是完全固结于刚体，同刚体一起运动的坐标系)可以使惯量张量的所有惯性系数在刚体运动过程中保持为不变的常数，从而排除了由于惯性系数随时间变化给求解带来的困难，简化了计算. 现在，如果再把本体坐标系选成刚体的惯量主轴系，则惯性系数只有三个不为零，角动量、动能和转动惯量将取(7.102)、(7.103)、(7.104)式的形式，这将使我们有可能在尽量简洁的形式下来求解复杂的定点运动问题.

需要指出的是，引入主轴系这种特殊的坐标系，是为了简化 L，T，I 等的表示形式，并不能改变刚体定点运动时，对一般的瞬时轴角动量 L 与角速度 ω 方向不一致的物理事实. 从(7.102)式可见各 L_i/ω_i(i 代表 x，y，z)的比值并不相同.

由对通过定点 O 的任意瞬时轴的转动惯量表达式(7.89)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

式我们看到，一旦求得6个惯性系数，给定任意瞬时轴的方向(α, β, γ)，便可以求出绕该轴的转动惯量，这一点还可以用几何方法形象地表示出来.

因为对任意瞬时轴$l(\alpha, \beta, \gamma)$(图7.30)转动惯量

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha$$

是α, β, γ的二次齐次函数，我们在$l(\alpha, \beta, \gamma)$轴线上任取一点P，令其到原点O的距离

$$r = \frac{1}{\sqrt{I}} \tag{7.105}$$

则P点的坐标为

$$x = \alpha r, \ y = \beta r, \ z = \gamma r$$

$$\alpha^2 = Ix^2, \ \beta^2 = Iy^2, \ \gamma^2 = Iz^2$$

代入I的表达式得

$$1 = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{yz}yz + 2I_{zx}zx \tag{7.106}$$

这是一个二次曲面方程，r是曲面上P点的位置向量，x，y，z是P点的坐标，只要给定了r，就可以求出I.

我们知道，二次曲面有3种，注意到I是转动惯量，$0<I<\infty$，r不能变得无穷大，这表示曲面上的点不能趋向无穷远，曲面是封闭曲面. 只能是椭球面，如果我们能在选定的坐标系下，依据6个惯性系数将椭球面画出来，则欲求绕任意轴(α, β, γ)的转动惯量I，只要从椭球中心O作一方向为(α, β, γ)的射线与椭球面相交，量出r之长，则

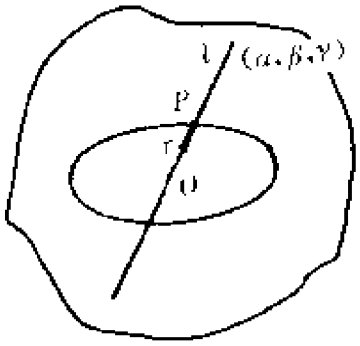


图7.30

$$I = \frac{1}{r^2} \tag{7.107}$$

我们把这样一个反映绕任意轴转动的转动惯量分布的椭球面称

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

作关于 O 点的惯量椭球. 我们也可以取

$$r = \frac{k}{\sqrt{I}} \qquad (k \text{ 为正常数})$$

即椭球面可以按比例放大或缩小，结论不变.

惯量椭球总是对一定的点而言的. 刚体上每一点 O 都有一惯量椭球，椭球中心即在 O 点. 由解析几何理论我们知道，椭球方程可以简化，即总可以作一坐标变换，将椭球方程化成标准形式. 当将坐标轴转到沿通过 O 点的惯量椭球的三个主轴时，惯量椭球方程简化为

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \qquad (7.108)$$

就是说，以惯量椭球的三个互相垂直的主轴为坐标轴，惯量张量的所有交叉项——惯量积都变为零，所以惯量椭球的三个主轴形成的坐标系，就是我们前面讲的惯量主轴系. 原点在质心的惯量椭球，称为质心惯量椭球；原点为质心的惯量主轴系，称为质心惯量主轴系.

引进惯量椭球的意义如下：

(1)用几何方法表示出绕通过 O 点任一取向轴的转动惯量的大小.

(2)借助惯量椭球面确定刚体绕某轴转动时角动量的方向和分量的大小.

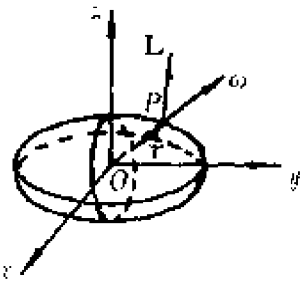


图7.31

由图7.31知，因 r 沿 ω 方向，ω 与椭球面交点 P 的位置

$$r = (x, y, z),$$

$$x : y : z = \omega_x : \omega_y : \omega_z$$

因选坐标系为主轴系 $O\text{-}xyz$

$$I_x : I_y : I_z = I_x\omega_x : I_y\omega_y : I_z\omega_z$$
$$= I_x x : I_y y : I_z z$$

椭球面函数，$F = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 1$，故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$I_x x = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x},\ I_y y = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y},\ I_z z = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}$$

则

$$L_x : L_y : L_z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} \tag{7.109}$$

即

$$\mathbf{L} \parallel \nabla F$$

因此，角动量沿 ω 与椭球面交点处的椭球面的法线方向.

由图还可看到，L 在 ω 上的分量

$$L_\omega = \mathbf{L} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \tag{7.110}$$

(3)由前述，刚体的运动仅通过主转动惯量 I_x，I_y，I_z 与物体结构相联系. 两个具有相同的主转动惯量的刚体，无论具体形状如何，将以相同的方式运动(除摩擦阻力等与形状有关外).

由于均质椭球是主转动惯量已知的最简单的几何形体，刚体的运动可用等效的惯量椭球来代表，由此得到了研究定点运动中欧勒—潘索问题的几何方法.

应当指出，确定主轴系方位，并不总要用计算的方法. 实际上，由于实际的刚体常常具有某种或某些对称性，依据对称性确定主轴系是很方便的.

在主轴系下，所有惯量积为零，惯量张量变为对角的. 这是由对称性求主轴的依据. 下面给出若干判断规则，证明是简单的，留给读者考虑.

对于刚体上任一点 O：

(i)如果刚体有通过 O 点的对称轴，此轴一定是主轴.

(ii)如果刚体有通过 O 点的对称面，则通过 O 点，垂直于对称面的轴是一主轴.

(iii)找到 O 点的两条相互垂直的主轴后，过 O 点与这两轴垂直的第三轴也是主轴.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(iv)如果已找到了主轴系 O-xyz，则当 $I_x=I_y$ 时，O-xy 平面上过 O 点的一切轴都是主轴；当 $I_x=I_y=I_z$ 时，过 O 点的空间一切方向的轴都是主轴.

上面的讨论说明，惯量椭球形象地反映了对 O 点转动惯量分布的几何图象. 惯量椭球的存在说明对任一点至少存在一组惯量主轴系，在这一坐标系中，惯量张量可以化简，这一化简与主轴变换(即使所有惯量积为零的坐标变换)是完全等价的.

【例7.2】 求正方形均质薄板对其一顶点 O 的

(1)主转动惯量.

(2)主轴方向.（取坐标系 O-xyz，如图7.32示）

解

$$I_{xx}=\frac{1}{3}ma^2$$

$$I_{yy}=\frac{1}{3}ma^2$$

$$I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{2}{3}ma^2$$

（据垂直轴定理）

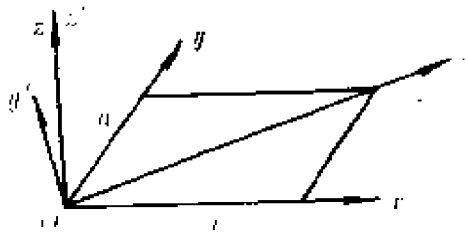


图7.32

因 $z=0$，所有含 z 的惯量积为 0，故有

$$I_{xz}=I_{zx}=I_{yz}=I_{zy}=0$$

$$I_{xy}=-\int xy\,dm=-\int_0^a\int_0^a \rho xy\,dx\,dy$$

$$=-\rho\frac{a^4}{4}$$

$$m=\rho a^2$$

$$I_{xy}=-\frac{ma^2}{4}=I_{yx}$$

久期方程

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}ma^2 - I & -\frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{3}ma^2 - I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 - I \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{3}ma^2 - I\right)^2 - \left(\frac{1}{4}ma^2\right)^2\right]\left(\frac{1}{3}ma^2 - I\right) = 0$$

解之得主转动惯量为

$$I_1 = \frac{2}{3}ma^2$$

$$I_2 = \frac{7}{12}ma^2$$

$$I_3 = \frac{1}{12}ma^2$$

由

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

若以 α, β, γ 表示转轴方位角，则

$$\begin{pmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega & \cos\alpha \\ \omega & \cos\beta \\ \omega & \cos\gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 - I & -\frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{3}ma^2 - I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 - I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}ma^2 - I\right)\cos\alpha - \frac{1}{4}ma^2\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$-\frac{1}{4}ma^2\cos\alpha+\left(\frac{1}{3}ma^2-I\right)\cos\beta=0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{2}{3}ma^2-I\right)\cos\gamma=0 \qquad (3)$$

当 $I=I_3=\frac{1}{12}ma^2$，代入(1)式得

$$\cos\alpha=\cos\beta$$

$$\cos\gamma=0,\ \gamma=90^\circ$$

所以对角线为一主轴，(由对称性亦知其为主轴).

将 $I=I_2=\frac{7}{12}ma^2$代入(1)，得

$$\cos\alpha=-\cos\beta$$

代入(3)式，得 $\gamma=90^\circ$，又第二主轴与第三主轴正交，故只能在 O-xy 平面内且与对角线正交，β 为45°，α 为135°即为 y'，第一主轴应与前两者正交，即为 z'轴.

§7.7 刚体的定轴转动与平面平行运动

一、定轴转动

刚体绕固定轴转动(图7.33)，是刚体最简单也是最基本的运动形式，它只有一个自由度，每一点都绕轴作圆周运动，凡与轴平行的直线上的一切点，运动情况完全相同. 设角速度 ω 沿定轴 z，则

$$\omega=\omega e_z \qquad (7.110)$$

只用对 z 轴的角动量定理便可确定其运动：

$$L_z=N_z \qquad (7.111)$$

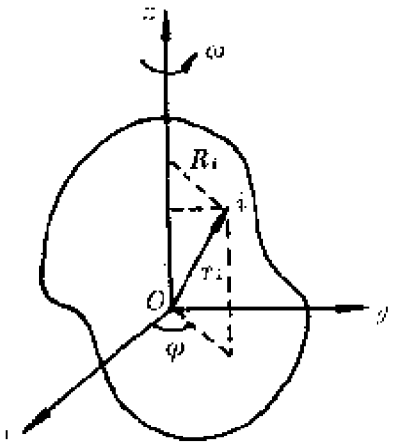


图7.33

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

因为，由(7.71)式

$$L=\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega-\sum_i m_i \mathbf{r}_i(\omega\cdot\mathbf{r}_i) \tag{7.112}$$

$$\mathbf{r}_i=x_i\mathbf{e}_x+y_i\mathbf{e}_y+z_i\mathbf{e}_z \tag{7.113}$$

则

$$\begin{aligned}L_z&=\sum_i m_i r_i^2\omega-\sum_i m_i z_i z_i\omega\\&=\sum_i\left[m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-m_i z_i^2\right]\omega\\&=\left[\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right]\omega=\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega\\&=I_z\omega\end{aligned} \tag{7.114}$$

因 I_z 是常数，故

$$\begin{aligned}&L_z=I_z\dot{\omega}=N_z\\&I_z\alpha=N_z \text{ 或 } I_z\ddot{\varphi}=N_z\end{aligned} \tag{7.115}$$

式中 $\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$ 是角加速度，(7.115)是定轴转动的动力学方程.

因为是一维问题，有一个独立方程就可以用来求解运动. 因此动能定理也可替代(7.115)来确定转动规律：

$$\mathrm{d}T=\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}_i \qquad \left(T=\frac{1}{2}I\omega^2\right) \tag{7.116}$$

外力的功也可以表示成力矩的功的形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T&=\sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\mathrm{d}t\\&=\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{(e)}\mathrm{d}t\\&=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{N}^{(e)}\mathrm{d}t\\&=N_z^{(e)}\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{7.117}$$

如有机械能守恒，则可直接利用它求解运动：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{1}{2}I_z\omega^2 + V = E \tag{7.118}$$

【例7.3】 复摆.

一刚体在重力作用下绕固定水平轴自由摆动，称为复摆或物理摆.

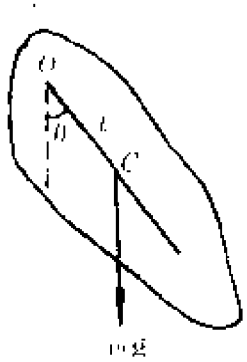


图7.34

解 这是典型的定轴转动问题，它的转动方程是

$$I_z\dot{\omega}_z e_z = \overrightarrow{OC} \times mg$$

$$(Ml^2 + I'_z)\ddot{\theta} = -lMg\sin\theta$$

当 $\theta \ll 1$时，$\sin\theta \cong \theta$，方程变为

$$(Ml^2 + I'_z)\ddot{\theta} + lMg\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{lMg}{Ml^2 + I'_z}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{lMg}{Ml^2 + I'_z}} = \sqrt{\frac{g}{l + \frac{I'_z}{Ml}}}$$

振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l + \frac{I'_z}{Ml}}{g}}$$

在$\overrightarrow{OC}$延长线上取一点O'使得当把刚体质量集中于O'处一质点时，与刚体有相同的转动惯量，$\overrightarrow{OC'} = l'$的长度称为等效单摆长，$O'$称为振动中心.

等效单摆长为

$$l' = l + \frac{I'_z}{Ml}$$

因关于质心的回转半径由下式给出：

$$k_C = \sqrt{\frac{I'_z}{M}}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

故有

$$l' = l + \frac{k_C^2}{l}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + k_C^2}{gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mgl}}$$

复摆运动方程式为

$$\theta = a\sin\left(\sqrt{\frac{lg}{k_C^2 + l^2}}t + \varepsilon\right)$$

若以振动中心O'为悬挂点，则

$$I_{O'} = Mk_O^2 + M(l' - l)^2$$

$$= Mk_C^2 + M\left(\frac{k_C^2}{l}\right)^2 = Mk_C^2\frac{k_C^2 + l^2}{l^2}$$

其振动周期为

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'_O}{Mg(l' - l)}} = \sqrt{\frac{k_C^2 + l^2}{gl}} = T$$

即与以O为悬点时周期相同，所以，振动中心与悬点交换周期不变. 因为l，l'和T都能十分精确地测定，所以复摆可以用来精确测定重力加速度g的数值.

二、平面平行运动

求解刚体平面平行运动，因为自由度$f=3$，只要建立三个动力学方程式. 最直接了当的，是以质心为基点，用质心运动定理确定质心的运动方程，再用相对质心的角动量定理建立在质心系中的定轴转动方程：

$$m\ddot{r}_C = F \qquad (F \text{ 即 } F^{(e)})$$

即

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F_x \\ m\ddot{y}_C &= F_y \end{aligned}\right\} \qquad (7.119)$$

以及

$$I_z\ddot{\theta} = N_z$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这里有三个未知量、三个独立方程，可以求解. 如有约束存在，还应有相应的约束方程. 此外，动能定理或机械能守恒定律还可以用来代替上述三个方程中的一个：

刚体运动时，内力作功之和为零. 刚体相对于静系的动能定理表为

$$\mathrm{d}T = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \qquad \left(T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}\omega^2\right) \tag{7.120}$$

相对于质心系的动能定理

$$\mathrm{d}T' = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' \qquad \left(T' = \frac{1}{2}I_{Cz}\omega^2\right) \tag{7.121}$$

机械能守恒定律

$$T_C + T' + V = E \qquad \left(T_C = \frac{1}{2}mv_C^2,\ T' = \frac{1}{2}I_{Cz}\omega^2\right) \tag{7.122}$$

【例7.4】 (1)棒的一端置于光滑水平面上，另一端则靠在光滑墙上，且棒与地面的倾角为 α. 如任其自此位置开始下滑，则当棒与地面的倾角变为 $\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$ 时棒将与墙分离，试证明之.

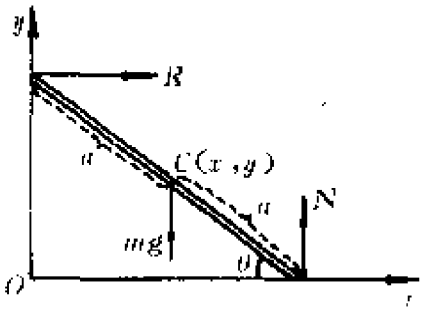


图7.35

(2)试研究上面小题中棒与墙分离后的运动，求棒落地时的角速度.

解 设棒长为 $2a$，质量为 m，墙与地面对棒的约束力为 R 及 N，沿墙与地面取 x，y 轴建立坐标系 O-xy. 棒的运动微分方程是

$$m\ddot{x} = R \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = N - mg \tag{2}$$

$$I_C\ddot{\theta} = Ra\sin\theta - Na\cos\theta \tag{3}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$I_c = \frac{1}{3}ma^2 \tag{4}$$

联立得

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = m\ddot{x}a\sin\theta - (m\ddot{y} + mg)a\cos\theta$$

$$\frac{1}{3}a\ddot{\theta} = \ddot{x}\sin\theta - \ddot{y}\cos\theta - g\cos\theta \tag{5}$$

由 $x = a\cos\theta$，$y = a\sin\theta$ 可知，

$$\ddot{x} = -a\cos\theta\dot{\theta}^2 - a\sin\theta\ddot{\theta} \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -a\sin\theta\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\ddot{\theta} \tag{7}$$

代入(5)式得

$$\frac{1}{3}a\ddot{\theta} = -a\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 - a\sin^2\theta\ddot{\theta} + a\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$- a\cos^2\theta\ddot{\theta} - g\cos\theta$$

$$\frac{4}{3}a\ddot{\theta} = -g\cos\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g}{4a}\cos\theta \tag{8}$$

$$\frac{4}{3}a\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -g\cos\theta \tag{9}$$

积分得

$$\frac{2}{3}a\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta + C \tag{10}$$

当 $\theta = \alpha$ 时，$\dot{\theta} = 0 \rightarrow C = g\sin\alpha$，

$$\frac{2}{3}a\dot{\theta}^2 = g(\sin\alpha - \sin\theta) \tag{11}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\sin\alpha - \sin\theta)$$

墙的约束力

$$R = m\ddot{x} = -ma(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta})$$

$$= -ma\frac{3g}{4a}[2\cos\theta(\sin\alpha - \sin\theta) - \sin\theta\cos\theta]$$

$$= -\frac{3}{4}mg[2\cos\theta\sin\alpha - 3\sin\theta\cos\theta]$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

分离时，

$$R' = 0 \to \sin\theta = \frac{2}{3}\sin\alpha,\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right) \qquad (12)$$

(2)棒与墙分离后，棒的运动微分方程是

$$m\ddot{x} = 0 \qquad (1)'$$

$$m\ddot{y} = N_1 - mg \qquad (2)'$$

$$I_C\ddot{\theta} = -N_1 ma\cos\theta \qquad (3)'$$

由(2)′、(3)′得

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} = -(m\ddot{y} + mg)a\cos\theta \qquad (4)'$$

$$y = a\sin\theta,\ \ddot{y} = -a\sin\theta\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\ddot{\theta}$$

代入(4)′得

$$\ddot{\theta}\left(\frac{1}{3} + \cos\theta^2\right) - \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$= -\frac{g}{a}\cos\theta \qquad (5)'$$

$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right) - \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$= -\frac{g}{a}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a(\sin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

$$= -\frac{g}{a}\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$$\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right)\mathrm{d}\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2\mathrm{d}(\sin^2\theta)$$

$$= -\frac{2g}{a}\mathrm{d}\sin\theta \qquad (6)'$$

积分得

$$\frac{4}{3}\dot{\theta}^2 - \sin^2\theta\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{a}\sin\theta + C$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)=-\frac{2g}{a}\sin\theta+C \qquad (7)'$$

棒离墙后的运动的初始条件，即离墙时的状态，由第(1)小题，

当 $\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\alpha$ 时，

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}\left[\sin\alpha-\frac{2}{3}\sin\alpha\right]$$

$$=\frac{g}{2a}\sin\alpha \qquad (8)'$$

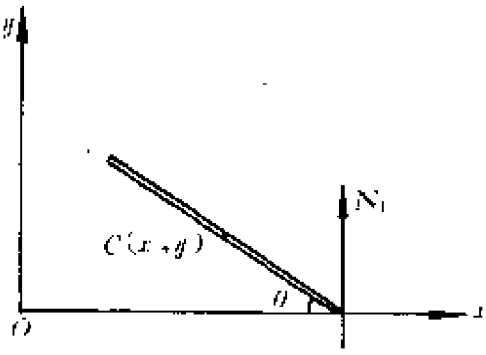


图7.36

代入(7)′

$$\frac{g\sin\alpha}{2a}\left(\frac{4}{3}-\frac{4\sin^2\alpha}{9}\right)=-\frac{2g}{a}\frac{2}{3}\sin\alpha+C$$

$$\Rightarrow C=\frac{2g\sin\alpha}{a}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{9}\right) \qquad (9)'$$

故有

$$\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\theta\right)=-\frac{2g}{a}\sin\theta+\frac{2g\sin\alpha}{a}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{9}\right)$$

棒落地时，$\theta=0$

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g\sin\alpha}{2a}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{9}\right)$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{2a}\left(1-\frac{\sin\alpha^2}{9}\right)}$$

【例7.5】 一均质圆盘，半径为 a，质量为 M，以初速 v 和初角速度 ω 沿滑动磨擦系数为 μ 的一粗糙水平面抛射出去，并保持盘面铅直. 求圆盘的运动.

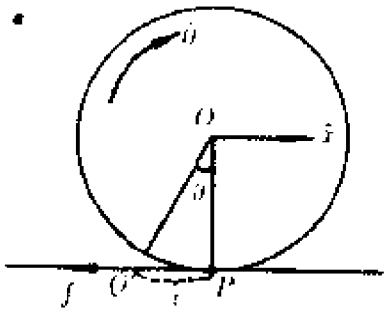


图7.37

解 分三种情形讨论圆盘的运动.

(1)初始时，v 向右；ω 顺时针，v

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$>a\omega$. 此时圆盘与水平面接触点 P 的速度为 $v-a\omega$，方向向右，滑动摩擦力为 μMg，方向向左.

圆盘的运动微分方程为

$$M\ddot{x} = -\mu Mg \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -\mu Mga \tag{2}$$

(设力矩顺时针为正)

$t=0$时，质心初速为 $\dot{x}=v$，由(1)积分得

$$\dot{x} = v - \mu gt \tag{3}$$

这是质心速度表达式. $t=0$时，$\dot{\theta}=\omega$，由(2)积分得角速度为

$$\dot{\theta} = \omega + \frac{2\mu g}{a}t \tag{4}$$

P 点的速度

$$v_P = \dot{x} - a\dot{\theta} = v - \mu gt - a\left(\omega + \frac{2\mu g}{a}t\right)$$

$$= v - a\omega - 3\mu gt \tag{5}$$

这是圆盘既滚且滑的情形.

当圆盘停止滑动，开始作纯滚动时，

$$v_P = 0$$

$$v - a\omega - 3\mu gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v-a\omega}{3\mu g} \tag{6}$$

t 是开始纯滚动的时刻，此时质心速度为

$$\dot{x} = v - \mu g\frac{v-a\omega}{3\mu g} = \frac{2v+a\omega}{3} \tag{7}$$

开始纯滚动以后，圆盘的运动微分方程式变为

$$m\ddot{x} = -F \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\varphi} = Fa \tag{9}$$

这 F 是设为静摩擦力，假定方向向左. 约束方程为

$$\dot{x} = a\dot{\varphi} \tag{10}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由此得

$$\ddot{x} = a\ddot{\varphi} \tag{11}$$

代入(8)式得

$$Ma\ddot{\varphi} = -F \tag{12}$$

与(9)式联立，得

$$\ddot{\varphi} = 0,\ \dot{\varphi} = \varphi_0,\ F = 0$$

这表明圆盘此时不受外力作用，静摩擦力亦为零，圆盘依惯性在粗糙水平面上作纯滚动.

(2)初始时，v 向右，ω 顺时针，$v<a\omega$，f 向右. 运动微分方程式为

$$M\ddot{x} = \mu Mg \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -\mu Mga \tag{14}$$

$t=0$时，$\dot{x}=v$，$\dot{\theta}=\omega$，由(13)、(14)得质心速度

$$\dot{x} = v + \mu gt \tag{15}$$

角速度

$$\dot{\theta} = \omega - \frac{2\mu gt}{a} \tag{16}$$

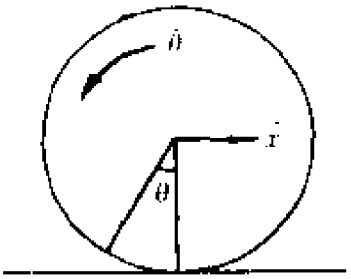


图7.38

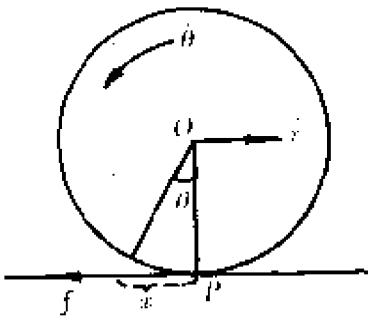


图7.39

P 点的速度

$$v_P = \dot{x} - a\dot{\theta}$$

$$= v + \mu gt - a\left(\omega - \frac{2\mu gt}{a}\right) = v - a\omega + 3\mu gt \tag{17}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

开始纯滚动时，$v_P=0$，即

$$v-a\omega+3\mu g t=0$$

$$t=-\frac{v-a\omega}{3\mu g} \tag{18}$$

此时圆盘质心的速度

$$\dot{x}=v+\mu g t$$

$$=v-\mu g\frac{v-a\omega}{3\mu g}$$

$$=\frac{2v+a\omega}{3} \tag{19}$$

与前种情形一样.

(3)初始时 v 向右，ω 逆时针，f 向左.

$$v_P=v+a\omega(\text{向右}) \tag{20}$$

运动微分方程为

$$M\ddot{x}=-\mu Mg \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta}=\mu Mg a \tag{22}$$

因 $t=0$时，$\dot{x}=v$，$\dot{\theta}=-\omega$，

$$\dot{x}=v-\mu g t \tag{23}$$

$$\dot{\theta}=\frac{2\mu g t}{a}-\omega \tag{24}$$

当 $\dot{x}-a\dot{\theta}=0$时开始纯滚动，设为 t 时刻，

$$v-\mu g t=a\left(\frac{2\mu g t}{a}-\omega\right)$$

$$\Rightarrow t=\frac{v+a\omega}{3\mu g} \tag{25}$$

此时盘心速度

$$\dot{x}=v-\mu g\frac{v+a\omega}{3\mu g}=\frac{2v-a\omega}{3} \tag{26}$$

这里有三种情形，即开始纯滚动时，

如$2v>a\omega$，$\dot{x}$ 向右；

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如 $2v=a\omega$，$\dot{x}=0$，刚好停下来；

如 $2v<a\omega$，$\dot{x}$ 向左，说明圆盘已是向回运动了，在这过程中开始纯滚动.

圆盘折回时，$x=0$，$\dot{x}=v-\mu g t=0$

$$t_{折}=\frac{v}{\mu g} \tag{27}$$

因 $2v<a\omega$，

$$t_{折}=\frac{v}{\mu g}=\frac{3v}{3\mu g}=\frac{2v+v}{3\mu g}<\frac{a\omega+v}{3\mu g} \tag{28}$$

即先折回运动，后开始纯滚动.

§7.8 刚体的定点运动

现在根据角动量定理，在前面准备的基础上，推导刚体定点运动的微分方程（图 7.40）.

选两套坐标系：固定坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 和动坐标系（本体坐标系）O-xyz，在本体系中写出惯量张量 I，所有的惯性系数均为常数. 进一步，取 O-xyz 为主轴坐标系，则惯量张量中所有惯量积变为零，在此坐标系下，惯量张量

$$I=\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

（I_x，I_y，I_z 为主转动惯量），角动量

$$L=I_x\omega_x e_x+I_y\omega_y e_y+I_z\omega_z e_z$$

我们知道，质点系角动量定理表达式为

$$\dot{L}=N$$

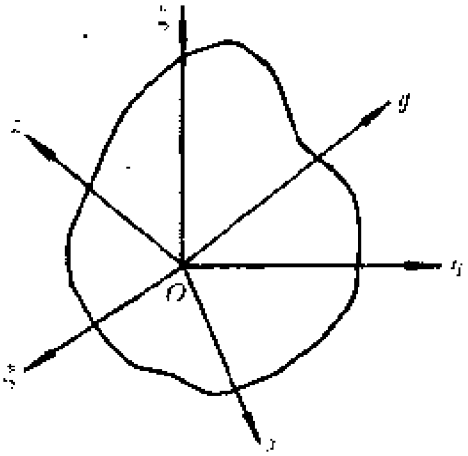


图 7.40

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\dot{L}$是L的绝对变化率，应相对于定系求导. 前面L的表示式是将L在动系中分解，L相对动系在运动，动系相对定系也在运动，各单位向量都随时间变，因此，

$$\begin{aligned}\dot{L}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_x\omega_x e_x+I_y\omega_y e_y+I_z\omega_z e_z)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_x\omega_x)e_x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_y\omega_y)e_y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_z\omega_z)e_z\\&\quad+I_x\omega_x\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t}+I_y\omega_y\frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t}+I_z\omega_z\frac{\mathrm{d}e_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\tag{7.123}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_x\omega_x)e_x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_y\omega_y)e_y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_z\omega_z)e_z=\frac{\tilde{\mathrm{d}}L}{\mathrm{d}t}\tag{7.124}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t}=\omega\times e_x,\ \frac{\mathrm{d}e_y}{\mathrm{d}t}=\omega\times e_y,\ \frac{\mathrm{d}e_z}{\mathrm{d}t}=\omega\times e_z\tag{7.125}$$

$$I_x\omega_x\omega\times e_x=\omega\times(L_x e_x),\ I_y\omega_y\omega\times e_y=\omega\times(L_y e_y)$$
$$I_z\omega_z\omega\times e_z=\omega\times(L_z e_z)\tag{7.126}$$

故

$$\dot{L}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}L}{\mathrm{d}t}+\omega\times L\tag{7.127}$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}L}{\mathrm{d}t}+\omega\times L=N\tag{7.128}$$

写出分量方程为

$$\left.\begin{aligned}I_x\dot{\omega}_x-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z&=N_x\\I_y\dot{\omega}_y-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x&=N_y\\I_z\dot{\omega}_z-(I_x-I_y)\omega_x\omega_y&=N_z\end{aligned}\right\}\tag{7.129}$$

这就是刚体定点运动的基本方程，称为欧勒动力学方程.

由于主轴坐标系固结于刚体，刚体转动时也随之转动，即坐标轴方向是待求的. 我们已经用欧勒角表示刚体本体坐标轴对固定坐标轴的方位，并用欧勒运动学方程表示角速度与欧勒角及其微商的关系. 因此，对于自由度$f=6$的定点运动，应当

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

以欧勒动力学方程(7.129)与欧勒运动学方程(7.39)联立求解. 这是6个非线性常微分方程，其含6个未知数 ω_x，ω_y，ω_z，φ，θ，ψ 及它们的一阶微商，如已知所受外力矩及初始位置和初始角速度，原则上即可将运动全部解出. 当然，也可以消去 ω_x，ω_y 和 ω_z，把这组方程化成三个欧勒角 φ，θ，ψ 的二阶微分方程，以 φ_0，θ_0，ψ_0，$\dot{\varphi}_0$，$\dot{\theta}_0$，$\dot{\psi}_0$，为初始条件解出.

除了欧勒动力学方程外，机械能守恒方程

$$\frac{1}{2}(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2)+V=E \qquad (7.130)$$

也可以用来代替上述6个方程之一来求解运动.

事实上，由于 N_x，N_y，N_z 与刚体对定系的位置有关，一般是欧勒角和角速度分量的函数，即 φ，θ，ψ，ω_x，ω_y，ω_z 的函数，因而求解这组方程是异常困难的，即使在刚体除约束力外仅受重力作用作定点运动的情形(即所谓重刚体的情形)，一般也不能以解析方法求解. 仅在对外力矩或刚体形状作某些限制的下述三种特殊情形下，才能用解析的形式完全解出来.

(Ⅰ)欧勒—潘索情形：

外力的合力通过定点 O，因而无外力矩作用.

这是重刚体的特殊情形：定点 O 与质心 C 重合，此时刚体依惯性绕定点自由转动.

这种情形对刚体形状没有限制，又称为不对称陀螺.

(Ⅱ)拉格朗日—泊松情形：

定点 O 的惯量椭球是一旋转椭球，即 $I_x=I_y\neq I_z$，刚体重心位于 z 轴上，即位于动力对称轴上，椭球对该轴旋转对称. 在这种情形下，刚体常常迅速地绕 z 轴自转，称为陀螺，或回转仪.

(Ⅲ)C·B柯凡律夫斯卡娅情形

在此情形下，$I_x=I_y=2I_z$，惯量椭球是一种更特殊的旋转椭球，质心在惯量椭球的赤道面 $o-xy$ 上，也是一种对称陀螺.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

我们着重讨论(Ⅰ)、(Ⅱ)两种情形.

一、欧勒—潘索情形

(1)自由对称陀螺的规则进动.

欧勒—潘索情形是最简单的刚体定点运动的可解问题，虽然对刚体的形状并无限制，但有实际意义的问题常常有一定的对称性，典型的问题是地球、回转仪等. 以地球为例，我们可以取地心为参考点，作主轴坐标系. 因为它呈扁椭球状，以地球对称轴为 z 轴，则 $I_x=I_y$，对应的惯量椭球为旋转椭球，如果认为太阳、月球对地球的引力均近似地通过地心，外力矩可以忽略，$N=0$，则地球绕质心(即地心)的运动可以认为是自由对称陀螺，是欧勒—潘索情形的特例.

现在我们来求它的解析解.

因 $N=0$，有角动量守恒，$L=L_0$.

因无外力矩作功，能量及动能均守恒

$$T=\frac{1}{2}\omega\cdot L_0=E$$

注意 L_0 是一常向量，ω 在 L_0 上的投影为常数，因此，ω 绕 L_0 作进动且与 L_0 成一固定角.

为得到运动的解，须将欧勒动力学方程和运动学方程联立求解.

地球运动的欧勒动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x-(I_x-I_z)\omega_y\omega_z&=0\\ I_x\dot{\omega}_y-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x&=0\\ I_z\dot{\omega}_z&=0 \end{aligned}\right\}\qquad(7.131)$$

由(7.131)第3式，得

$$\omega_z=\text{常数}=\Omega\qquad(7.132)$$

代入前两式，得

$$\dot{\omega}_x=-\frac{(I_z-I_x)}{I_x}\Omega\omega_y=-n\omega_y\qquad(7.133)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\dot{\omega}_y = \frac{(I_x - I_z)}{I_x}\Omega\omega_x = n\omega_x \tag{7.134}$$

式中

$$n = \frac{(I_x - I_z)}{I_x}\Omega \tag{7.135}$$

由(7.133)、(7.134)式得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\omega}_x + n^2\omega_x = 0\\ \ddot{\omega}_y + n^2\omega_y = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.136}$$

故得

$$\left.\begin{aligned}\omega_x = \omega_0\cos(nt + \varepsilon)\\ \omega_y = \omega_0\sin(nt + \varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{7.137}$$

ω_0，ε 为积分常数，且

$$\omega_0^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 \tag{7.138}$$

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \Omega^2 + \omega_0^2 \tag{7.139}$$

(7.132)、(7.137)、(7.138)、(7.139) 诸式说明，角速度向量 ω，其量值为常数，在 O-xy 平面内的投影随时间变化描出一圆，ω 绕本体坐标系的 z 轴以恒定角速度 n 进动.

上面求出了角速度的值，也就是求出了动力学方程的第一积分，还要进一步求出欧勒角随时间变化的规律.

注意到 $L=L_0$ 方向不变，故可选静系 ζ 轴与 L_0 方向一致，这时 L 在本体坐标系中的分量应与进动角速度 $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}e_\zeta$ 在 O-xyz 坐标系中分解的方式相同，

$$\left.\begin{aligned}L_x = L_0\sin\theta\sin\psi = I_x\omega_x\\ L_y = L_0\sin\theta\cos\psi = I_y\omega_y\\ L_z = L_0\cos\theta = I_z\omega_z\end{aligned}\right\} \tag{7.140}$$

由上式第3个方程，及 $\omega_z=\Omega$，得 $\theta=\theta_0$，$\dot{\theta}=0$，由第1个方程及(7.137)第1式，

$$L_0\sin\theta\sin\psi = I_x\omega_0\cos(nt + \varepsilon) \tag{7.141}$$

故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\psi = \frac{\pi}{2} - (nt + \varepsilon) \tag{7.142}$$

$$L_0 \sin\theta_0 = I_z \omega_0 \tag{7.143}$$

$$\dot{\psi} = -n$$

为求 φ，还需应用欧勒运动学方程，由(7.39)第3式，

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{7.144}$$

式中 $\theta=\theta_0$，$\omega_z=\Omega$，$\dot{\psi}=-n$，则

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\cos\theta_0}(\Omega + n) \tag{7.145}$$

$$\varphi = \sec\theta_0(\Omega + n)t + \varphi_0 \tag{7.146}$$

运动的解是

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \sec\theta_0(\Omega + n) = \sec\theta_0 \frac{I_z}{I_x}\Omega \\ \psi &= -n \\ \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.147}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sec\theta_0(\Omega + n)t + \varphi_0 \\ \psi &= \frac{\pi}{2} - (nt + \varepsilon) = -nt + \varepsilon' \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{7.148}$$

由上述结果，我们得出：

$\dot{\theta}=0$，$\theta=\theta_0$，表示对称轴 z 与 ζ 轴(即 L_0 方向)夹角不变，没有章动.

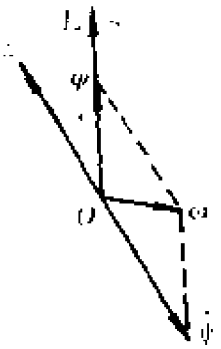
$\dot{\psi}=-n$，表示当 $I_z>I_x$ 时，$n=\dfrac{I_z-I_x}{I_x}\Omega>0$，$\dot{\psi}$ 方向(自转方向)沿 z 轴负方向. 对地球来说 $I_z>I_x$，就属于这种情形(图 7.41). 如 $I_z<I_x$，$\dot{\psi}$ 沿 z 轴正向，因

$$\dot{\psi} = \sec\theta_0 \frac{I_z}{I_x}\Omega > 0$$

刚体绕 z 轴自转的同时，还绕空间第3轴(ζ 轴)以 $\dot{\psi}$ 进动，总角速度应是这两个角速度的向量和，它位于 z，ζ 平面内，量值是

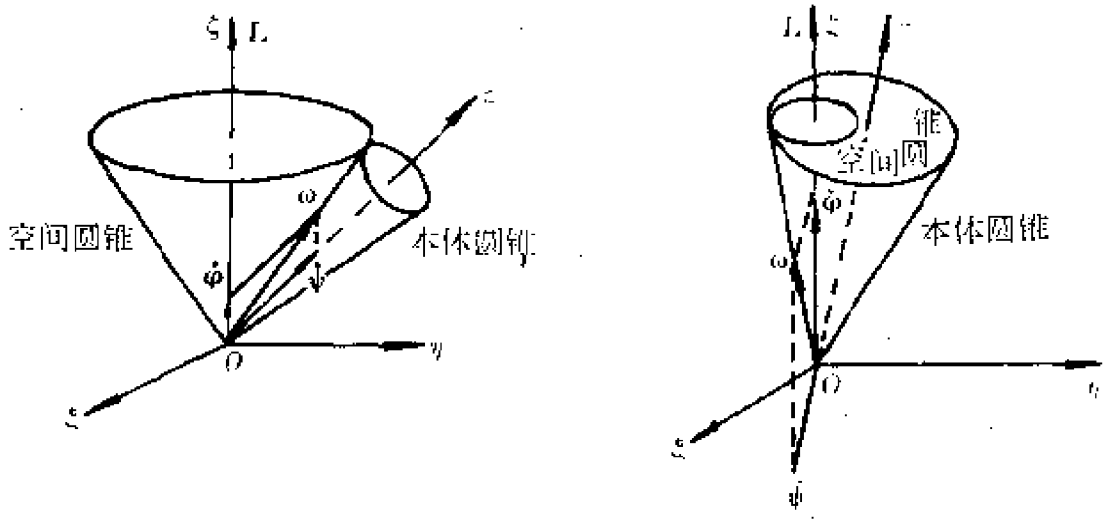
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

常数，也绕 ζ 轴旋转. 这种章动角不变，进动与自转角速度也保持不变，自转轴 z 及总角速度 ω 绕空间第3轴 ζ 进动的运动，称为规则进动. 这是刚体的惯性运动，比质点的惯性运动复杂得多.



图(7.41)

注意，现在 L，ω 和 z 轴位于同一平面内. 对于定系来说，ω 绕 ζ 轴进动描画出一个圆锥，称为固定圆锥，对本体系而言，ω 绕 z 轴(刚体动力对称轴)旋转描画出又一个圆锥，称为本体圆锥. 这两个圆锥相切于 ω，刚体的运动相当于本体圆锥在固定圆锥上滚动.(图7.42)



正进功 $I_z>I_z$ (a)　　逆进功 $I_z>I_z$ (b)

图(7.42)

既然地球转动可以近似认为是自由运动，地球转轴也应当表现出规则进动，地球表面各点的纬度应周期性地变化. 观测表明，地球转动角速度并不沿地理地轴 $O\%$，而是相对于地理地轴有缓慢的旋转. 这样，地球日不是由角速度 ω 决定，而是由 ω_z 决定，亦即由 Ω 决定.

当 $I_z\approx I_z$ 时

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$n = \frac{I_z - I_x}{I_x}\Omega \ll \Omega$$

对地球而言

$$\frac{I_z - I_x}{I_x} = 0.00327 \tag{7.149}$$

进动角频率应为

$$\Omega = \frac{\omega_z}{306} \tag{7.150}$$

因 $\omega_z \approx \omega$，地球转轴进动周期为

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\Omega}\frac{I_x}{I_z - I_x} \approx 306 \text{ 日}$$

实际观测的进动(这是相对于本体系的进动，而本体系本身又在空间中以 ω 转动)，其周期比它约大50%，近420日. 这是由于地球并不是刚体而是某种程度的弹性体；形状并非扁椭球，而是近似扁平的梨子形，而且太阳和月球对地球的引力也不能完全忽略，外力矩不严格为零.

二、潘索方法

分析自由刚体的运动还有另外一种方法，即1834年潘索提出的方法，它在几何性质上类似于滚动圆锥方法.

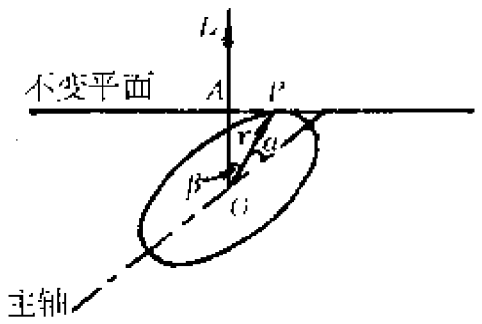


图7.43)

由前面的讨论我们知道，如果选择质心主轴坐标系，惯量椭球方程为

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \tag{7.151}$$

我们曾经定义，由原点 O 到椭球表面任意点 P 的距离反比于刚体绕轴 OP(即 ω)的转动惯量的平方根，

$$r = \frac{1}{\sqrt{I}} \tag{7.152}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$r = \frac{\omega}{\omega\sqrt{I}} \tag{7.153}$$

r 在常向量 L 上的正交投影长度 OA 为

$$\overline{OA} = \frac{r \cdot L}{l} = \frac{\omega \cdot L}{\omega l\sqrt{I}} = \frac{\sqrt{2T}}{l} \tag{7.154}$$

因 T，l 是常数，$\overline{OA}$ 是常数，式中

$$l = |L| \tag{7.155}$$

故向量 r 的端点运动在一垂直于角动量向量 L 的平面上，它是一个空间中的固定平面，称为不变平面. 它的位置由初始条件决定，因为椭球和不变平面的切点在转动瞬轴上，椭球在平面上的滚动是无滑动的纯滚动，当椭球在不变平面上滚动时，它的中心在原点处保持静止，切点 P 称为极点. 切点在不变平面上画出的轨迹称为空间极迹. 在椭球上画出的曲线称为本体极迹. 可以想象，(7.151)式右端之值稍有改变，方程即表示另外一个同样形状的同心椭球. 如果考虑一系列相邻椭球壳，每一个 F 值稍有不同. 显然，在一定的椭球壳上的给定点处 F 增加最快的方向是外法线方向.

$$\begin{aligned}\nabla F &= \frac{\partial F}{\partial x}e_x + \frac{\partial F}{\partial y}e_y + \frac{\partial F}{\partial z}e_z \\ &= 2I_x x e_x + 2I_y y e_y + 2I_z z e_z\end{aligned} \tag{7.156}$$

其中 e_x，e_y，e_z 指向主轴方向. 因

$$L = I_x\omega_x e_x + I_y\omega_y e_y + I_z\omega_z e_z \tag{7.157}$$

归纳起来，潘索对自由刚体定点运动的解释是基于如下三点：

(i) $$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

(ii) 不变平面与角动量 L 垂直.

(iii) 固定点 O 到极点的切平面的距离是

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2T}}{l}$$

这三点不论刚体是否受外力矩作用都适用. 把它们用于欧勒-潘

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

索情形. 则更为简单：切平面是不变平面. T，L 都是常数. $\overline{OA}$ 也是常数，由此

$$\boldsymbol{L} /\!/ \nabla F$$

也就是 L 方向.

我们得出如下结论：

（Ⅰ）不变平面切刚体在定点 O 的惯量椭球于 P 点.

（Ⅱ）转动瞬时轴在任何时刻都通过切点 P.

（Ⅲ）惯量椭球在不变平面上无滑动滚动，点 O 和不变平面在空间保持不动.

（Ⅳ）惯量椭球是固定在刚体中的，刚体的转动也为惯量椭球在固定平面上的滚动所描述.

（Ⅴ）有相同惯量椭球的刚体将有相同的转动运动，（如果有相同的初始条件的话），即使它们的质量与外部形状是完全不同的.

（Ⅵ）运动通常都有垂直于不变平面的角速度 ω 的分量，此分量引起附加于椭球滚动的绕 P 点的转动.

（Ⅶ）当刚体绕主轴转动时，运动只有这转动.

三、刚体自由转动的稳定性

一不受任何力矩或力作用的刚体，当绕其一主轴转动时，并不总是稳定的，即如对系统施一小的扰动，并不总能恢复到以前的状态或绕原来的状态作小振动.

设刚体的质心主转动惯量各不相同，

$$I_x < I_y < I_z$$

外力矩为零时欧勒动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z &= 0 \\ I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_x\omega_z &= 0 \\ I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.158}$$

引入正常数

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$A_1=\frac{I_z-I_y}{I_x},A_2=\frac{I_z-I_x}{I_y},A_3=\frac{I_y-I_z}{I_z} \tag{7.159}$$

方程组(7.158)变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\omega}_x+\omega_y\omega_z A_1&=0\\ \dot{\omega}_y-\omega_x\omega_z A_2&=0\\ \dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y A_3&=0\end{aligned}\right\} \tag{7.160}$$

(1)设刚体先绕 x 轴转动，$\omega=\omega_x e_x$，如施一小的扰动，则可将角速度向量表为

$$\omega=\omega_x e_x+\xi e_y+\eta e_z \tag{7.161}$$

ξ，η 为小量，$\omega_y=\xi$，$\omega_z=\eta$，欧勒动力学方程变为

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\text{常数}\\ \dot{\xi}&=\eta\omega_x A_2\\ \dot{\eta}&=-\xi\omega_x A_3\end{aligned}\right\} \tag{7.162}$$

对后二式求微商得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}&=-\omega_x^2 A_2A_3\xi\\ \ddot{\eta}&=-\omega_x^2 A_2A_3\eta\end{aligned}\right\} \tag{7.163}$$

这组方程的解为

$$\left.\begin{aligned}\xi(t)&=A\sin(\omega_x\sqrt{A_2A_3}t+\delta)\\ \eta(t)&=B\sin(\omega_x\sqrt{A_2A_3}t+\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{7.164}$$

所以，使 ω 在 y，z 方向引入小扰动后，它们并不随时间增大，只在 $\xi=0$，$\eta=0$附近振动，说明绕 x 轴的转动是稳定的.

(2)如刚体绕 y 轴转动，在 x，z 方向引入小的扰动，即 $\omega_y\gg\omega_x\approx\omega_z$，则欧勒方程为

$$\left.\begin{aligned}\omega_y&=\text{常数}\\ \ddot{\omega}_x-(\omega_y^2A_1A_3)\omega_x&=0\\ \ddot{\omega}_z-(\omega_y^2A_1A_3)\omega_z&=0\end{aligned}\right\} \tag{7.165}$$

ω_x，ω_z 的解的形式为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$A\exp(\omega_y\sqrt{A_1A_3}t)+B\exp(-\omega_y\sqrt{A_1A_3}t)$$

当 $t\to\infty$ 时，扰动变为无限大，所以刚体绕 y 轴的转动不稳定.

(3)如刚体以 ω_z 绕 z 轴转动，$\omega_z\gg\omega_x\approx\omega_y$. 与(1)的情形一样，$\omega_x$，$\omega_y$ 以角频率 $\omega_z\sqrt{A_1A_2}$ 随时间 t 作正弦变化，是有界的，因而转动稳定.

结论是：对任一刚体，如其三个质心主转动惯量不相等，绕相应于最大或最小主转动惯量的主轴的转动是稳定的，而绕主转动惯量居间的主轴的转动是不稳定的，即当 $I_x<I_y<I_z$ 时，绕 x，z 轴的转动是稳定的，绕 y 轴的转动是不稳定的.

四、动反作用力

定轴转动的刚体，质心不在转轴上时，我们熟知，转动与静止时轴上受到的压力是不同的，这是由于转动时惯性离心力引起力对轴承上的动压力.

当转轴通过质心时，定轴转动的刚体是否也会在轴承上产生附加的动压力呢？

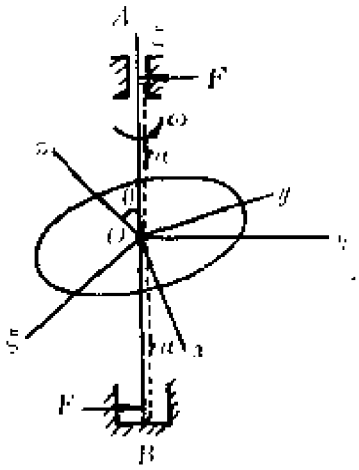


图7.44

回答是：如果定轴不是惯量主轴，则轴承上也会产生附加的动压力.

设定轴转动的刚体是一飞轮，质心为 O. 飞轮的对称轴与转轴 AB 的夹角为 θ，如图7.44所示. 角速度

$$\begin{aligned}\omega&=\omega e_\zeta\\&=\omega\cos\theta e_z+\omega\sin\theta e_y\end{aligned}\qquad(7.166)$$

假定

$$\dot\omega=0\qquad(7.167)$$

并假定转动时有力矩 N 作用着，且

$$I_z=I_y.$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

则欧勒动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} -(I_x - I_z)\omega_y\omega_z &= N_x \quad (1)\\ -(I_z - I_x)\omega_z\omega_x &= N_y \quad (2)\\ 0 &= N_z \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

因 $\omega_x=0$，故 $N_y=0$，(7.160)的(1)式变为

$$-(I_z - I_x)\omega^2\sin\theta\cos\theta = N_x > 0 \quad (\text{因 } I_z > I_x)$$

$$I_z = \frac{1}{4}mr^2,\ I_x = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\frac{1}{8}mr^2\omega^2\sin 2\theta = N_x = 2Fa$$

$$F = \frac{1}{16a}mr^2\omega^2\sin 2\theta \qquad (7.168)$$

五、部分固着于刚体的坐标系——进动坐标系

以前，我们处理定点运动问题时选取的动坐标系是本体坐标系 O-xyz，是完全与刚体固结在一起的．有时，对某些定点运动问题，将动系 O-xyz 部分地固定在刚体上，会使问题的处理更加方便简洁．

选择惯量主轴系，可以使所有惯性系数为常数，使所有惯量积变为零，从而使惯量张量、动能、转动惯量，以及角动量表达式十分简单．如果选择的动系并不和刚体完全固定在一起也能达到这一目的，当然也可以．例如讨论对称刚体规则进动时，就可以这样做，即使动系只参与刚体的进动与章动，而不参与自转，却仍能保持为惯量主轴系，这样的动坐标系，称为部分固着于刚体的坐标系．

图7.45表示一自由对称刚体

不失一般性，可令动系 Ox 轴，oz 轴(刚体动力对称轴)和空间第3轴 $O\zeta$ 始终在同一平面上，Ox、Oz 轴绕 $O\zeta$ 轴转动，刚体绕 Oz 轴自转时，O-xyz 并不参与，但因刚体对称，$I_x=I_y$，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

刚体绕过 O 点的 O-xy 平面内任何一轴的转动惯量都相等 $I=I_x=I_y$，所以即使 Ox 与 Oy 轴未与刚体固结在一起，也能保证任意时刻对 Ox 和 Oy 轴的惯性系数恒为常数. 这样做的好处，是使总角速度在 Oy 轴上的投影恒为零，方程会变得更简单.

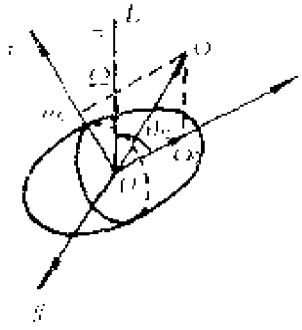


图7.45

总之，选取部分固定在刚体上的坐标系，而仍能保证其为主轴系，这在讨论对称刚体的规则进动中是可能的，但欧勒动力学方程式必须修改.

由图7.45知，由于动系 O-xyz 不参加自转，只参与进动和章动，且 $\omega_y=0$，$\omega=\Omega+\omega_0$，其中 Ω 是坐标系的角速度，ω_0 是自转角速度.

刚体的角动量在动系中的表达式为

$$L = I_x\omega_x e_x + I_y\omega_y e_y + I_z\omega_z e_z$$

据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}+\Omega\times$，

$$\begin{aligned}\dot{L} &= I_x\dot{\omega}_x e_x + I_y\dot{\omega}_y e_y + I_z\dot{\omega}_z e_z \\ &\quad + I_x\omega_x\dot{e}_x + I_y\omega_y\dot{e}_y + I_z\omega_z\dot{e}_z \\ &= I_x\dot{\omega}_x e_x + I_y\dot{\omega}_y e_y + I_z\dot{\omega}_z e_z \\ &\quad + I_x\omega_x\Omega\times e_x + I_y\omega_y\Omega\times e_y + I_z e_z\Omega\times e_z \quad (7.169)\end{aligned}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x - I_y\omega_y\Omega_z + I_z\omega_z\Omega_y &= N_x \\ I_y\dot{\omega}_y - I_z\omega_z\Omega_x + I_x\omega_x\Omega_z &= N_y \\ I_z\dot{\omega}_z - I_x\omega_x\Omega_y + I_y\omega_y\Omega_x &= N_z \end{aligned}\right\} \quad (7.170)$$

对自由对称刚体，$N=0$，$L=L_0=I_0 e_\zeta$，x，z，ζ 共面，O-xyz 只参与进动和章动，由于 L 守恒，L 只有 x，z 分量

$$L_y = I_y\omega_y = 0，\text{故 } \omega_y = 0 \quad (7.171)$$

$$\Omega_y = \omega_y = 0 \quad (7.172)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

欧勒动力学方程化为

$$\left.\begin{aligned} &I_x\dot{\omega}_x = 0 \\ &-I_x\omega_z\Omega_z + I_z\omega_z\Omega_x = 0 \\ &I_z\dot{\omega}_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.173}$$

故有

$$\omega_x = c_1,\ \omega_z = c_2$$

$$L_z = L_0\cos\theta = I_z\omega_z = I_z c_2$$

因此

$$\theta = \theta_0$$

由图可见，

$$\omega_x = \omega_0 + \Omega\cos\theta_0$$

$$\omega_x = \Omega\sin\theta_0 = c_1 = \Omega_x$$

故

$$\Omega = \frac{c_1}{\sin\theta_0} \quad (常数)$$

$$\omega_0 = \omega_z - \Omega\cos\theta_0 = c_2 - c_1\mathrm{ctg}\theta_0 \quad (常数)$$

结论是

$$\dot{\varphi} = \Omega,\ \dot{\psi} = \omega_0,\ \dot{\theta} = 0 \tag{7.174}$$

这正是规则进动.

在这一特殊情况下，$\theta=\theta_0$，即为常数，刚体没有章动，部分固着在刚体上的坐标系称为进动坐标系.

更为一般的部分固着于刚体的坐标系，可以参与刚体的进动和章动，而不参与自转.

因

$$\omega = \dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi} \tag{7.175}$$

在这种情形下，动系的角速度

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega - \dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi} \\ &= \dot{\theta}e_y + \dot{\varphi}\sin\theta e_x + \dot{\varphi}\cos\theta e_z \\ &= \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z \end{aligned} \tag{7.176}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

欧勒运动学方程化为

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\\ \omega_y &= \dot{\theta}\\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\right\} \qquad (7.177)$$

(7.176)、(7.177)式和动力学方程(7.170)是在部分固着于刚体的坐标系中讨论对称刚体定点运动的基本方程.

六、拉格朗日—泊松情形

现在,我们考虑一轴对称刚体的运动,它的定点 O 的惯量椭球是旋转椭球,$I_x=I_y\neq I_z$,它的质心位于动力对称轴 Oz 轴上,并绕对称轴迅速旋转,称为陀螺. 它是受与绕轴自转有关的回转力矩影响的运动的简单例子,然而,它的有关结果,已用于分析诸如回转仪,自旋抛体运动等.

(一)一般方程

设对称轴上 O 点固定,C 点为质心(见图7.46),刚体的质量为 m,我们从欧勒动力学和运动学方程出发.

选进动坐标系,如图所示,z,ζ,y 三轴共面,重力矩的分量式为

$$\left.\begin{aligned}N_x &= mgl\sin\theta\\ N_y &= 0\\ N_z &= 0\end{aligned}\right\} (7.178)$$

在 O-xyz 坐标系中角速度的分量为

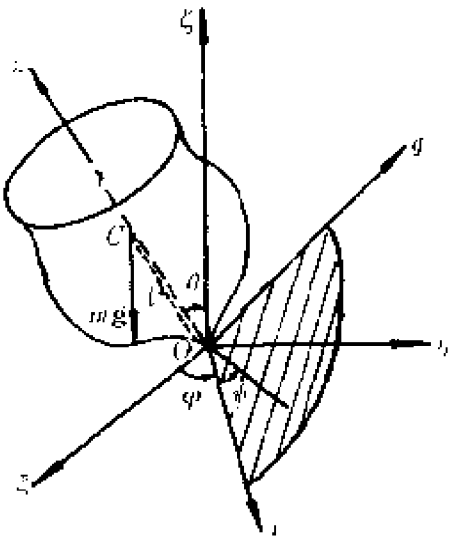


图7.46

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta}\\ \omega_y &= \dot{\varphi}\sin\theta\\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}\right\}(7.179)$$

角动量分量为

$$\left.\begin{aligned}L_x &= I_x\omega_x = I_x\dot{\theta}\\ L_y &= I_y\omega_y = I_x\dot{\varphi}\sin\theta\\ L_z &= I_z\omega_z = I_z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}) = I_z s\end{aligned}\right\}\qquad(7.180)$$

其中 $s=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$，称为自旋，由

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}L}{\mathrm{d}t}+\omega\times L=N\qquad(7.181)$$

有如下欧勒动力学方程

$$\left.\begin{aligned}&I\ddot{\theta}+I_z s\dot{\varphi}\sin\theta-I\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta=mgl\sin\theta &(1)\\ &I\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\theta)-I_z s\dot{\theta}+I\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta=0 &(2)\\ &I_z\dot{s}=0 &(3)\end{aligned}\right\}\qquad(7.182)$$

式中 $I=I_x=I_y$，l 是 O 点到质心 C 的距离.

上式中第(3)个方程表明，刚体关于对称轴的自旋 s 是常数，因而沿此轴的角动量分量是常数

$$L_z=I_z s=\text{常数}$$

由第2个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_z s\cos\theta)=0\qquad(7.183)$$

故

$$I\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_z s\cos\theta=B=\text{常数}\qquad(7.184)$$

现在，我们得到了方程组(7.182)的两个第一积分.

如果没有摩擦力作用于陀螺消耗其能量，则总能量守恒；

$$\frac{1}{2}(I\omega_x^2+I\omega_y^2+I_z s^2)+mgl\cos\theta=E\qquad(7.185)$$

或以欧勒角表示：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + I_z s^2) + mgl\cos\theta = E \quad (7.186)$$

由(7.184式)，解出 $\dot{\varphi}$，代入上式得

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(B - I_z s\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + \frac{1}{2}I_z s^2 + mgl\cos\theta = E \quad (7.187)$$

这是 θ 满足的方程，原则上可以对它积分，求出 θ 作为时间的函数.

作代换

$$u = \cos\theta$$

则 $\dot{u} = -\sin\theta\dot{\theta} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\theta}$，还可求得

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(2E - I_z s^2 - 2mgl u)I^{-1} - (B - I_z s u)^2 I^{-2} \quad (7.188)$$

简写之

$$\dot{u}^2 = f(u) \quad (7.189)$$

积分得 u(因之 θ)作为时间的函数，故有

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (7.190)$$

$f(u)$是三次多项式，积分结果可用椭圆函数表示.

实际上并不需要完成这一积分，也可以讨论运动的一般性质.

由(7.190)式可知，t 为实数，$f(u)$必为正值，θ 的极限值必由$f(u)=0$的根来决定. 因$0\leqslant\theta\leqslant 90°$，$0\leqslant u\leqslant 1$，在0和+1之间有两个不等根(图7.47)，相应的 θ 值 θ_1和 θ_2则是极限值. 第3个根 $u_3>1$，没有实际意义. 当陀螺绕竖直轴进动时，陀螺对称轴在两个 θ 值之间往复摆动. 这种振动称为章动. 如果有重根，即 $u_1=u_2$，则陀螺没有章动，而保持稳定进动.

为了描述陀螺的运动通常作一以陀螺固定点为球心的单位半径的球面，描绘出对称轴在球面上的相交曲线，称为图轴的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

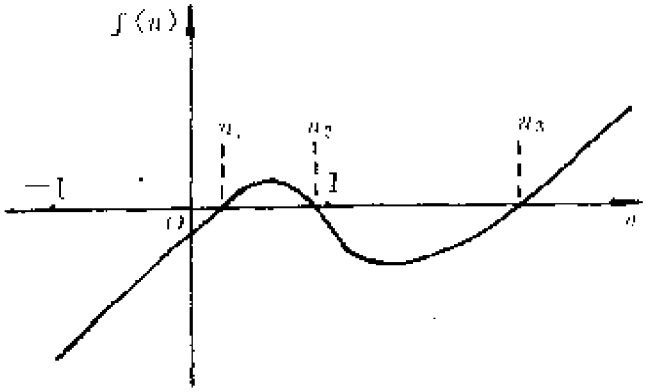
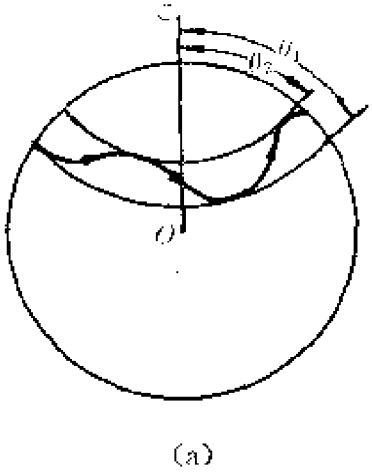
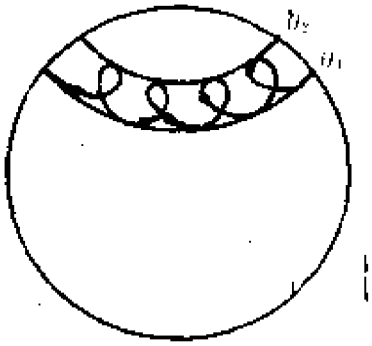


图7.47



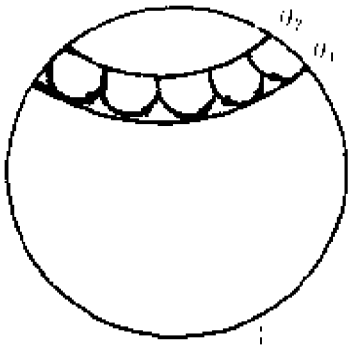
(a)

图7.48(a)



(b)

图7.48(b)



(c)

图7.48(c)

轨迹. 其纬度位于余纬度 $\theta_1=\arccos u_1$, $\theta_2=\arccos u_2$ 两个界面圆之间，如图7.48(a)所示.

由(7.184)式

$$\dot{\varphi}=\frac{B-I_{zs}\cos\theta}{I\sin^2\theta} \tag{7.191}$$

在 $\theta_1<\theta<\theta_2$ 范围内，$\dot{\varphi}$ 可能改变符号，也可能不改变符号，由常数 B 和 I_{zs} 决定.

如 $\dot{\varphi}$ 不改变符号，当对称轴(z 轴)在 θ_1，θ_2 之间振动时，陀

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

螺单调地进动，这正是图7.48(a)的情形.

如$\dot{\varphi}$在θ_1，θ_2之间变号，则$\theta=\theta_1$时进动角速度与$\theta=\theta_2$时进动角速度符号必定相反，则图轴轨迹必然出现画圈的现象，即有向回去的运动，如图7.48(b)所示.

当B和$I_z s$之值使得

$$\dot{\varphi}|_{\theta=\theta_2}=0, \qquad \dot{\theta}|_{\theta=\theta_2}=0 \tag{7.192}$$

则将出现尖点运动，如图7.48(c)所示. 这正是陀螺开始运动时的一般情形：令$t=0$时$\theta=\theta_2$，即有一定的倾斜，给以绕对称轴的自旋s，并令初始进动和章动角速度为零：$\dot{\varphi}=\dot{\theta}=0$. 陀螺开始运动后，陀螺获得转动动能，既有进动，又有章动，必然重力势能减少，降低到另一极限值θ_1，然后再减少动能，增加势能，对称轴再度上升到θ_2. 如此往复.

(二)高速回转仪的近似理论

现代高速回转仪或陀螺仪，已发展成精确度极高的仪表，有着巨大的实用价值，用于定向、瞄准、平振、稳定等，无论是航海、航空或航天、及制导方面，都广泛运用着，而且陀螺理论无论在天文学、应用力学或近代物理中也占有重要地位.

我们知道对于刚体定点运动问题，即使在重刚体的情形下，也只有少数三种情形可解. 真正应用经典力学中刚体力学理论解决工程技术中的理论或实际定点运动问题，不仅能找到第一积分的问题不多，即使找到了，还有许多数学问题要解决，因此，提出和发展近似分析方法，就显得十分重要，回转仪的近似理论就是其中之一.

高速回转仪(或陀螺仪)(图7.49)是定点在动力对称轴上并绕轴高速自转的定点运动的刚体. 快速转动的陀螺，不受磁性影响能准确定向的回转罗盘等，都是它的例子. 以高速自转陀螺为例，高速回转仪近似理论的基本假设是：回转仪绕自身动力对称轴高速自转，对定点O的角动量L、角速度ω和对称轴重合.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

一般说，L，ω 与对称轴方向并不一致，当自转角速度 $\psi\approx\omega_z\gg1$，对称轴又绕空间第3轴 $O\zeta$ 缓慢进动，进动角速度 $\dot{\varphi}\ll\omega_z\approx\psi$，($\dot{\varphi}$，$\dot{\psi}$ 都是常数)，章动角 θ 保持不变，$\omega=\dot{\varphi}e_\zeta+\psi e_z\approx\psi e_z\approx\omega_z e_z$，角动量 $L\approx I_z\omega_z e_z$，因而，L，ω，z 轴近似共线. 将 L 代入角动量定理公式

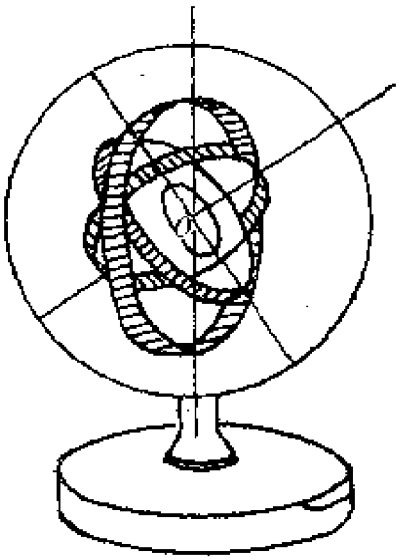


图7.49

$$\dot{L}=N$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_z\omega_z e_z)$$

$$=I_z\dot{\omega}_z e_z+I_z\omega_z\dot{e}_z \quad (7.193)$$

因 $\dot{\omega}_z=0$，$\dot{e}_z=\omega\times e_z$，所以

$$\dot{L}=\omega\times L$$

故

$$\omega\times L=N$$

$$(\dot{\varphi}+\dot{\psi})\times I_z\dot{\psi}e_z=N$$

$$I_z(\dot{\varphi}\times\dot{\psi})=N \quad (7.194)$$

因而 $N\perp\dot{\varphi}$，$\dot{\psi}$，N的方向由图指向外. 可以看出，高速自转陀螺受力作用后，不是倒向力的方向，而是沿力矩方向转动. $\dot{L}=N$，N 的方向就是 $\dot{L}$ 的方向，L 与对称轴 Oz 同向，$\dot{L}$ 的方向正是对称轴进动方向，也是力矩的方向. 这就是说，要使高速自转刚体的转轴绕另一固定方向以某一角速度 ω 再转动，必须在该轴上施以力矩，该力矩方向必须是高速自转轴转动的方向，同时，施力物体也受到一与作用力大小相同的反作用力的力矩 N'，则

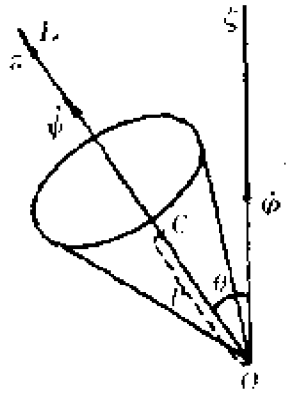


图7.50

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$N' = -N = I_z(\dot{\psi} \times \dot{\varphi}) \qquad (7.195)$$

N' 称为回转力矩，它是高速自转刚体转轴绕另一轴转动时，施力物体受到的反作用力的力矩.

在图7.50所示的情形下，由(7.194)式，可得

$$I_z\dot{\varphi}\dot{\psi} = mgl$$

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{I_z\dot{\psi}} \qquad (7.196)$$

此式表明进动角速度与 mgl 成正比，与自转角速度成反比，自转越快，进动越慢.(7.196)式也可以从(7.182)方程(1)，利用稳定进动条件 $\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}\ll\dot{\psi}$，消去 $\sin\theta$，解得.

【例7.6】轮船上的涡轮绕轴 AB 高速转动，转动角速度方向如图所示. 轴承间距离为 l，当船绕垂直纸面的铅直轴转动时，轴承 AB 受力如何?

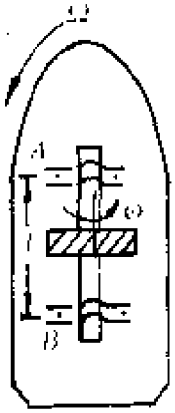


图7.51

解 设涡轮及轴关于轴向的转动惯量为 I_z，转弯的角速度为 Ω，自转角速度 ω，则轴承所受的回转力矩为

$$N' = I_z(\omega \times \Omega)$$

$$N' = I_z\omega\Omega \qquad \text{方向向右}$$

A 点轴承受向上的压力，B 点受向下的压力，因

$$N' = Fl$$

受力为

$$F = \frac{N'}{l} = \frac{I_z\omega\Omega}{l}$$

由于高速旋转 ω 很大，轴承上受到的作用力 F 可以很大，以至可能损坏轴承造成事故.

【例7.7】碾轮重 p，半径为 a，回转半径为 k(绕对称轴)，杆长为 l，进动角速度 Ω，碾轮作无滑动滚动.

(1)比较碾轮对地面的静、动压力.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(2)求 O 点的约束力.

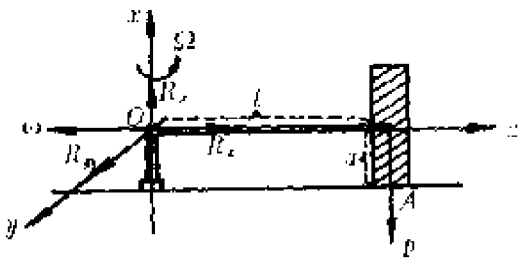


图7.52

解 因碾轮作纯滚动，A 点速度为零，约束方程是

$$\omega a = \Omega l$$

$$\omega = \frac{\Omega l}{a}$$

静止时，

$$R = 0,\ F = -pe_z = -Mge_z$$

计算动压力，可用回转力矩公式计算，也可用欧勒动力学方程求解.

回转力矩即附加动压力的力矩为

$$N' = I_z(\omega \times n)$$

$$= -I_z \frac{l}{a}\Omega^2 e_y = -\frac{l}{a}\Omega^2 Mk^2 e_y$$

$$N' = \frac{l}{a}\Omega^2 Mk^2$$

$$F_z' = \frac{1}{a}\Omega^2 Mk^2$$

碾轮对地面的压力为

$$F_z = Mg + F_z' = Mg + \frac{1}{a}\Omega^2 Mk^2$$

对碾轮应用质心运动定理得

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} &= -Mg + R_z + F_z = 0 \\ M\ddot{y} &= R_y + F_y = 0 \\ -Ml\Omega^2 &= R_x + F_x \end{aligned}\right\}$$

$$R_z = Mg - F_z = -\frac{1}{a}\Omega^2 Mk^2$$

$$F_y = 0,\ F_x = 0$$

$$R_y = 0,\ R_x = -Ml\Omega^2$$

可见，当碾轮的质量很大，转速很高时. 动压力比静压力大得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

多，同时在支承点 O 有一个很大的向上作用力，需要用坚固的轴承固定.

习　题

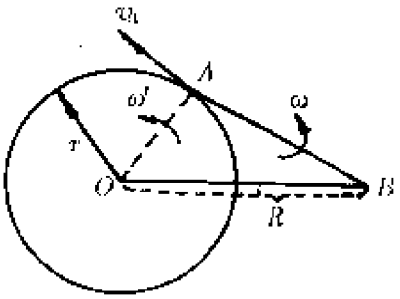
7.1　一半径为 a 的圆盘以匀角速度 ω 绕其中心转动，另一半径为 b 的圆盘以匀角速度 ω' 在 A 外面无滑动地滚动，试证两圆盘连心线以角速度 $\dfrac{a\omega+b\omega'}{a+b}$ 转动，并求 B 圆盘绕 A 圆盘滚动一周所需的时间及 B 圆盘回到原来位置时所需的时间，设运动维持在一个平面内.

$$\left\{\begin{array}{l} B \text{ 绕 } A \text{ 滚动一周所需时间为 } t_1=\dfrac{2\pi(a+b)}{b(\omega'-\omega)} \\ B \text{ 盘回到原来位置的时间为 } t_2=\dfrac{2\pi(a+b)}{a\omega+b\omega'} \end{array}\right.$$

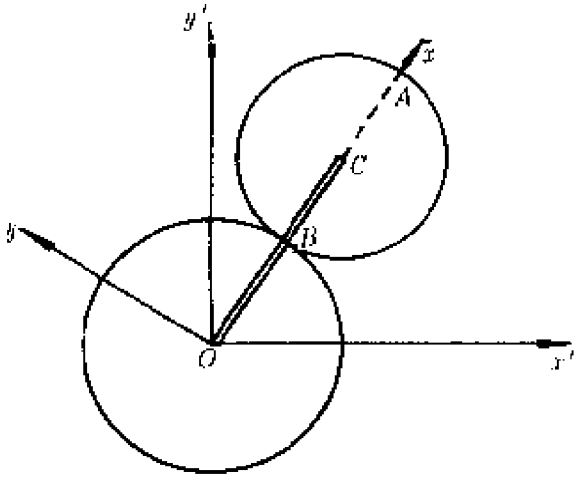
7.2　长度为 l 的直杆 AB 在平面内运动，其角速度为 ω，杆的一端在半径为 r，中心为 O 的圆周上运动，$\overline{OA}$ 线的角速度为 ω'，证明 $\overline{OB}$ 线的角速度为

$$\Omega=[\omega(R^2+l^2-r^2)+\omega'(R^2+r^2-l^2)]/(2R^2)$$

其中 R 为 B 到中心 O 的距离.



7.2题图



7.3题图

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

7.3　一行星齿轮，其臂杆$\overline{OC}$以等角速度ω沿顺时针方向旋转，大轮以Ω反时针方向旋转，试求图中A，B，C各点的速度和加速度.

$$(v_C=-(R+r)\omega e_y,\ v_B=R\Omega e_y$$

$$v_A=-[2(R+r)\omega+R\Omega]e_y$$

$$a_C=-(R+r)\omega^2 e_x$$

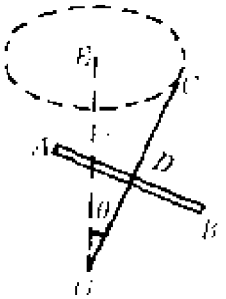
$$a_B=\{-(R+r)\omega^2+\frac{1}{r}[R\Omega+(R+r)\omega]^2\}e_x$$

$$a_A=-[r\omega^2+(R+r)\omega^2+2\omega R(\omega+\Omega)$$

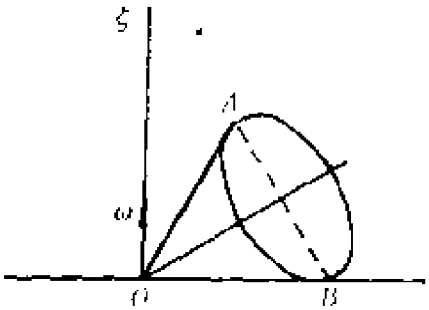
$$+\frac{R^2}{r}(\omega+\Omega)^2]e_x)$$

7.4　转轮AB，绕OC轴转动的角速度为ω_1，而OC绕竖直线OE转动的角速度则为ω_2，如$\overline{AD}=\overline{DB}=a$，$\overline{OD}=b$，$\angle COE=\theta$，试求转轮最低点$B$的速度.

$([\omega_1 a+\omega_2(a\cos\theta+b\sin\theta)]e_y$，$e_x$沿$\overrightarrow{AB}$方向，$e_z$沿$\overrightarrow{OC}$方向)



7.4题图



7.5题图

7.5　高为h，顶角为2α的圆锥在一平面上滚动而不滑动，如已知此锥以匀角速ω绕$O\zeta$轴转动，试求圆锥底面上A点的转动加速度a'和向轴加速度a''的量值.

$$\left(a'=\frac{\omega^2 h}{\sin\alpha},\ a''=2a'\cos^2\alpha\right)$$

7.6　一"刚体"由六个质量均为m，分别固定在三根各长$2a$，$2b$及$2c$的轻杆的两端的质点组成，这些杆在它们的中点彼此正交. 试证明由三根杆决定的坐标系是一主轴系. 写出在此

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

坐标系中体系的惯量张量.

$$\begin{pmatrix} 2m(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2m(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

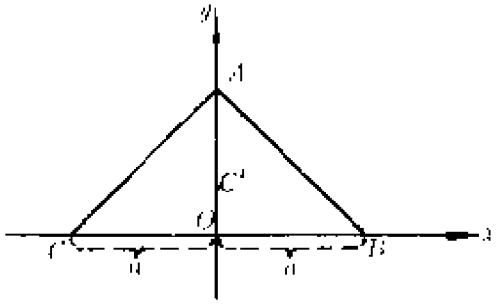
7.7 构成质点系的三个质点，其一质量为$4m$，位于$(a, -a, a)$，其二质量为$3m$，位于$(-a, a, a)$，其三质量为$2m$，位于(a, a, a).

(1)求关于坐标原点的惯量张量.

(2)应用(1)的结果，求关于通过原点、单位向量$n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e_y$的轴的转动惯量.

$$\left((1)ma^2\begin{pmatrix} 18 & 5 & -3 \\ 5 & 18 & -1 \\ -3 & -1 & 18 \end{pmatrix};(2)23ma^2\right)$$

7.8 有一平板刚体，其形状为一个45°的直角三角形并且有均匀的质量密度，求相对于该刚体质心的主转动惯量. 它的几根主轴是什么?



7.8题图

$$\left(I_1=\frac{1}{18}ma^2,\ I_2=\frac{1}{6}ma^2,\ I_3=\frac{2}{9}ma^2\right)$$

7.9 三个等质量质点分别位于$(a, 0, 0)$，$(0, a, 2a)$和$(0, 2a, a)$，求相对于原点的主转动惯量及一组主轴.

((1)$I=2ma^2$，$x=0$，$y=z$；(2)$I=10ma^2$(二重根) x：任意，$y=-z$)

7.10 一个刚体由4个质点及连结它的轻杆组成，各质点的位置是：

$m(a, a, a)$，$2m(a, -a, -a)$，$3m(-a, a, -a)$ $4m(-a, -a, a)$.

系统恰构成一正四面体，试求：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)刚体对原点 O 的惯量张量.

(2)原点 O 的三个主转动惯量.

(3)原点 O 的主轴方向.

$$((1)I=ma^2\begin{pmatrix}20 & 0 & 2\\ 0 & 20 & 4\\ 2 & 4 & 20\end{pmatrix}$$

$$(2)I_1=20ma^2,\ I_2=(20-\sqrt{20})ma^2,$$

$$I_3=(20-\sqrt{20})ma^2$$

$$(3)e'_x=-\frac{2}{\sqrt{5}}e_x+\frac{1}{\sqrt{5}}e_y+0e_z$$

$$e'_y=\frac{1}{\sqrt{10}}e_x+\frac{2}{\sqrt{10}}e_y+\frac{1}{\sqrt{2}}e_z$$

$$e'_z=\frac{1}{\sqrt{10}}e_x+\frac{2}{\sqrt{10}}e_y-\frac{1}{\sqrt{2}}e_z$$

7.11 试证通过均质正方体质心 O 的任意轴均为 O 点的主轴.

7.12 计算边长为 l，质量为 m，密度为 ρ 的均质正立方体的惯量张量，坐标系的原点取为立方体的一个角而三个轴沿立方体的三个棱. 证明

$$I=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}ml^2$$

7.13 用求解本征方程的方法，将上题中的惯量张量 I 对角化，即求出主转动惯量，并求出主轴方向.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left(I=ml^2\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\0&\frac{11}{12}&0\\0&0&\frac{11}{12}\end{pmatrix}\right.$$

$I_1=\frac{1}{6}ml^2$，对应的主轴是立方体的对角线；$I_2=I_3=\frac{11}{12}ml^2$，对应的两主轴在与立方体对角线垂直的平面内，取向任意.）

7.14　对任何惯量张量，都可能通过绕原点的坐标旋转而将其对角化，新坐标轴即为主轴，新的转动惯量即为主转动惯量. 试在上题中，先令绕 x_3 轴转45°角，再绕 x_2 轴转 $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ 角，以使 x_1 轴与立方体的对角线重合. 证明经过这样的坐标旋转，可使惯量张量对角化.

$$\left\{\lambda_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \lambda=\lambda_2\lambda_1\right\}$$

7.15　试求边长为 l 的正立方体关于下列各点的惯量椭球：

(1)中心点；(2)一边中点；(3)一顶点.

$$\left((1)x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{6}{Ml^2}\right.$$

$$(2)\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

$$a_1=a_3=\sqrt{\frac{3}{3Ml^2}},\ a_2=\sqrt{\frac{6}{Ml^2}}$$

$$(3)\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

$$\left.a_1=\sqrt{\frac{6}{Ml^2}},\ a_2=a_3=\sqrt{\frac{12}{11Ml^2}}\right)$$

7.16　试求边长分别为 $2a$，$2b$ 的长方形均匀板中心的惯量椭球.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

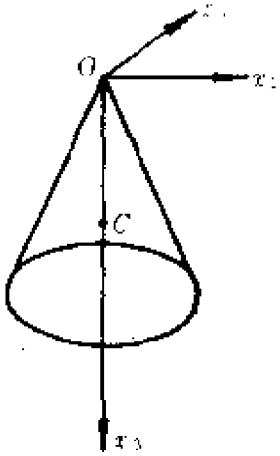
$$\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, a_1=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{3}{m}}, a_2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{m}}, a_3=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{3}{m}}\right)$$

7.17 正五角星形均匀薄板的几何中心在 O 点，求证薄板平面内经过 O 点的任何一条轴都是惯量主轴.

7.18 一均匀圆板，质量为 m，半径为 a，中心为 C，求圆板关于过中心 C 垂直于圆盘的轴上，到 C 点距离为 b 的 O 点的主转动惯量及惯量椭球.

$$\left(I_1=I_2=\frac{1}{4}ma^2+mb^2, I_3=\frac{1}{2}ma^2\right)$$

7.19 (1)计算一高为 h，底半径为 a 的圆锥关于其顶点的主转动惯量. (2)比值 h/a 为何值时，通过顶点的任何轴都是主轴? (3)在此情形下，求出质心的位置及关于它的主转动惯量.



7.19题图

((1)选 O-$x_1x_2x_3$ 坐标系如图示，Ox_3 沿轴线. 关于 O 点

$$I_1=I_2=\frac{3M}{20}(a^2+4h^2)$$

$$I_3=3Ma^2/20$$

(2)$h/a=1/2$ 时，过 O 点的任何轴都是主轴.

(3)质心 C 位置：$(0, 0, 3a/8)$

关于 C 点：

$$\left.\begin{aligned}I_1=I_2=51Ma^2/320,\\ I_3=3Ma^2/10\end{aligned}\right)$$

7.20 质量为 M 的两个相同的质点用一根长度为 $2a$ 的无质量的刚杆相联(哑铃). 刚杆绕一通过杆的中心并与杆成 θ 角的轴旋转. 杆的中心在坐标原点，轴沿 z 方向. 在 $t=0$ 时哑铃处于 x-z 平面内，角速度 ω 不随时间而变，方向沿 z 轴.

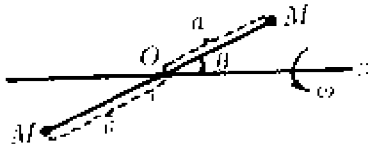
(1)计算惯量张量的全部组元(一定要写下你所采用的坐标系).

(2)用算得的惯量张量组元，求在实验室坐标系下哑铃的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

角动量随时间变化的规律.

(3)用方程 $L=r\times p$，计算哑铃的角动量，并证明它与(2)中的答案一致.



7.20题图

(4)计算轴上的转矩随时间变化的规律.

(5)计算哑铃的动能.

(1)在与哑铃固结在一起的坐标系 O-xyz 内.

$$I=\begin{pmatrix} 2Ma^2\cos^2\theta & 0 & -Ma^2\sin 2\theta \\ 0 & 2ma^2 & 0 \\ -Ma^2\sin 2\theta & 0 & 2Ma^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(2)

$$L=Ma^2\omega\begin{pmatrix} -\sin 2\theta\cos\omega t \\ -\sin 2\theta\cos\omega t \\ 2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

选 O-$x'y'z'$ 为实验室坐标系.

(3)同上.

(4)$N=Ma^2\omega^2[\sin 2\theta\sin\omega t\boldsymbol{e}_x'-\sin 2\theta\cos\omega t\boldsymbol{e}_y')]$

(5)$T=Ma^2\sin^2\theta\omega^2$)

7.21　图示各物体皆均质，重量为 Q，物体尺寸与质心速度或绕轴转动的角速度如图所示. 试计算各物体的动量和对 O 点的角动量.

7.22　一端固定在天棚上 O 点的绳绕在一个半径为 r 重 w 的圆盘上.

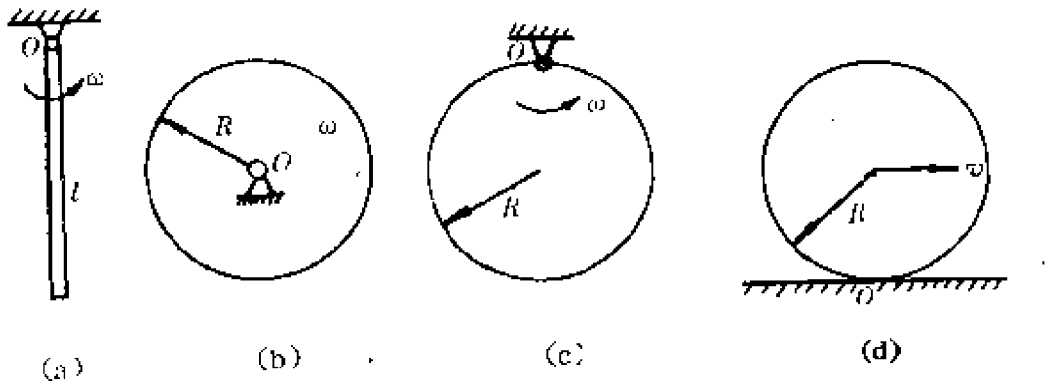
(1)求盘的中心向下运动的加速度、圆盘的角加速度和绳的张力.

(2)写出在定系 O-xy 中，关于原点 O 的角动量定理、动能定理的具体表达式.

(3)在质心系 C-$x'y'$ 中的角动量定理和动能定理的具体表达式.

(4)机械能守恒定律的具体表达式.

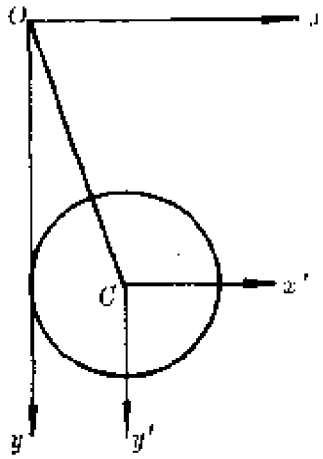
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com



(a) (b) (c) (d)

7.21题图

7.23 如果一个物理摆绕与质心相距不同距离的两点中任一个旋转时，具有相同的振动周期，证明具有同样周期的单摆摆长等于两个支点间的距离. 这样的物理摆称作凯特可逆摆，曾经为重力加速度的测定提供了最精确的方法(精确度约达十万分之一). 讨论凯特摆在测定重力加速度上与单摆相比所具有的优点.



7.22题图

7.24 一标尺的两端在一光滑竖直圆环内滑动. 如果标尺所张中心角为120°，证明等效单摆长等于圆环的半径.

7.24 一个质量为 m，半径为 R 的均匀圆柱体放置在与水平面成 θ 角的斜面上. 令 g 表示重力加速度，a 表示圆柱体的轴沿斜面运动的加速度，圆柱体和斜面之间的摩擦系数为 μ.

当 θ 小于某个临界角 θ_0 时，圆柱体将无滑动地沿斜面滚下.

(a) θ_0 等于多少?

(b) 当 $\theta<\theta_0$ 时，加速度 a 等于多少?

$\left((a)\operatorname{tg}\theta<\operatorname{tg}\theta_0=3\mu,(b)a=\frac{2}{3}g\sin\theta\right)$

7.26 一个活腿梯子由两条腿组成，它们被顶上的铰链和

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

底下的绳子联接在一起，并以60°角置于水平面上. 如果绳子突然切断，求铰链在该瞬时的加速度. 假设梯子的两条腿是均匀、完全一样的，并忽略所有摩擦.

$\left(a=\frac{3}{8}g\right)$

7.27 一球半径为 a，沿斜面滚下，斜面倾角为 α，求其加速度及作纯滚动的条件. 设滑动摩擦系数为 μ.

$\left(\text{纯滚动条件为}\ \mu>\frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha\right)$

7.28 一圆环质量为 m，半径为 a，以速度 v 沿倾角为 α 的粗糙斜面抛下，同时给它以一使之向斜面上滚动的角速度. 起初，环在距平面底端垂直高度为 h 的地方，环在运动中保持铅直并刚好在斜面底端停下来. 求环与斜面间的摩擦系数及环的初始角速度.

$\left(\mu=\operatorname{tg}\alpha\left(1+\frac{v^2}{2gh}\right),\ \omega_0=\frac{2h}{av}\left(g+\frac{v^2}{2h}\right)\right)$

7.29 一均匀固体球，质量为 m，半径为 a，在一水平面上运动，其质心的速率为 v，关于水平直径转动的角速度为 Ω，求球的动能，并求球关于下述各点的角动量：

(1)关于球上同平面接触的点；

(2)关于平面上同球接触的点；

(3)关于接触点，把它看作沿平面以速率 v 运动的点；

(4)关于球心；

(5)关于球的最高点.

((1)$(7ma^2\Omega/5)e_z$；(2)$[(\pm 2ma^2\Omega/5)-mvm]e_z$，$\pm$号决定于 Ω 的方向；(3)$(2ma^2\Omega/5)e_z$；(4)$(2ma^2\Omega/5)e_z$；(5)决定于"最高点"的含意)

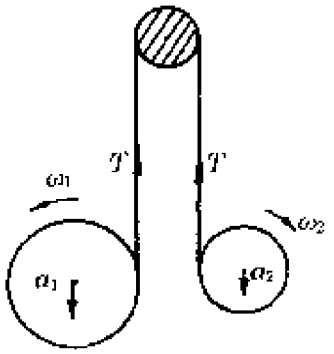
7.30 长为 $2a$ 的均质棒 AB，以铰链悬挂于 A 点上. 如起始时，棒自水平位置无初速地运动，并且当棒通过竖直位置时铰链突然松脱，棒成为自由体，试证在以后的运动中，棒的质心的轨迹为一抛物线，并求当棒的质心下降距离 h 以后，棒一共转了几转？

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

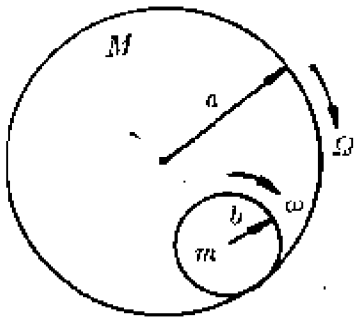
$\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}\right)$

7.31　光滑水平的钉子上挂一绳，绳两端各缠在一圆盘上．这两个圆盘的质量分别为 M_1，M_2，半径分别为 r_1，r_2．求从静止放开后．两圆盘的加速度，角加速度和绳中张力．

$$\left(a_1=\frac{3M_1+M_2}{3(M_1+M_2)}g,\ a_2=\frac{M_1+3M_2}{3(M_1+M_2)}g,\right.$$
$$\left.\dot{\omega}_1=\frac{4M_2}{3r_1(M_1+M_2)}g,\ \dot{\omega}_2=\frac{4M_1}{3r_2(M_1+M_2)}g,\ \text{张力：}T=\frac{2M_1M_2}{3(M_1+M_2)}g\right)$$



7.31题图



7.32题图

7.32　一大圆筒，可绕过中心的水平轴线自由转动．一小圆柱置于圆筒内，其轴线与圆筒轴线平行．求小圆柱的运动微分方程式及作微振动时的等效单摆长．

$$\left((a-b)\frac{3M+m}{2M+m}\ddot{\theta}=-g\sin\theta,\ l=\frac{(a-b)(3M+m)}{(2M+m)}\right)$$

7.33　一小球置于大球顶上．初始时静止．受微小扰动向下落．大球可绕一水平直径自由转动．求两球的角速度及两球分离时，球心连线与铅垂方向夹角 θ 之值．设接触是粗糙的．

$$\left(\text{大球：}\omega_1=\frac{(a+b)m}{a(M+m)}\dot{\theta},\ \text{小球：}\omega_2=\frac{(a+b)M}{b(M+m)}\dot{\theta},\right.$$
$$\left.\dot{\theta}=\sqrt{\frac{10g(M+m)(1-\cos\theta)}{(a+b)(7M+5m)}},\ \text{分离时，}\theta=\arccos\frac{10(M+m)}{17M+15m}\right)$$

7.34　质量为 m 的圆柱体 s 在质量为 M 的圆柱体 p 上滚动，而 p 则放在粗糙水平面上．已知两圆柱的轴都是水平的，

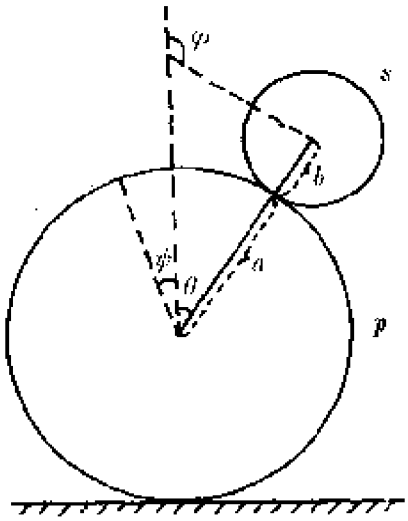
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

且重心在同一竖直面内. 开始时系统是静止的，若以圆柱体 p 的质心的初始位置为固定坐标系的原点，则圆柱 s 的重心在任意时刻的坐标为

$$x = c\frac{m\theta + (3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}$$

$$y = c\cos\theta$$

试证明之. 式中 c 为两圆柱轴线间的距离，θ 为两圆柱连心线与铅垂线之间的夹角.



7.34题图

(提示：约束方程之一为 $a(\theta+\varphi)=b(\varphi-\theta)$)

7.35 质量为 m，半径为 a 的小球，置于固定的半径为 b 的完全粗糙的大球上，小球从两球中心连线与铅直方向成 θ_0 角时由静止开始滚落，问小球何时离开大球？并求小球的角速度.

$$\begin{cases}\theta=\arccos\left(\frac{10}{17}\cos\theta_0\right)\\ \omega=\frac{1}{a}\sqrt{g(a+b)(\cos\theta_0-\cos\theta)}\end{cases}$$

7.36 一均质棒 AB，在任意瞬间 A，B 点的速度分别为 v_A 和 v_B. 已知棒长为 $2a$，质量为 M，试证其动能为

$$\left(\frac{1}{6}M(v_A^2+v_A\cdot v_B+v_B^2)\right)$$

7.37 试用拉格朗日方程推导欧勒动力学方程式.

如刚体作定点运动，其角动量于任何时刻皆垂直于刚体瞬时角加速度，则此刚体的动能为常数. 试证明之.

7.38 试证明对称刚体不受力矩作用绕质心自由转动(欧勒—潘索情形)时，作规则进动，即章动角不变，其余两个欧勒角为时间的线性函数.

7.39 一台球放在有摩擦的桌面上，施一打击作用，使之

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

具有一初速度和一初角速度.试证明在发生纯滚动之前，球心沿一抛物线运动.

（提示:先证明 $\dot{v}_x$，$\dot{v}_y$ 均为常数，(x，y 为质心在定系中的坐标).
再证 $\frac{R_y}{R_x}=\frac{\dot{v}_y}{\dot{v}_x}$=常数. R 是摩擦力）

7.40 设一旋转对称刚体($I_1=I_2$)在外力作用下绕对称轴上一定点作规则进动. 以 ω_1 表示自转角速度，ω_2 表示进动角速度，θ 表示章动角. 试用角动量定理证明对固定点外力矩总和为

$$N=I_3(\omega_2\times\omega_1)+\left[1+\frac{I_3-I_1}{I_3}\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]$$

7.41 证明:无力矩陀螺的角动量在本体系内以角速度 Ω 绕对称轴转动. 还要证明:对称轴在空间内绕角动量的固定方向转动，其角速度为

$$\dot{\varphi}=\frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta}$$

φ，θ 是欧勒角

7.42 如果刚体不是对称的，则无力矩运动的欧勒方程解析解不可能用初等函数给出. 但要证明:能够用能量和角动量守恒来得到用椭圆积分表示的 ω 本体系分量的表达式.

7.43 应用欧勒方程，证明当刚体绕一主轴转动时，约束力矩为零.

7.44 一回转仪，$I_1=I_2=2I_3$，依惯性绕质心转动，并作规则进动. 已知此回转仪的自转角速度为 ω_0，并知其自转轴与进动轴间的夹角 $\theta=60°$，求进动角速度 ω_p 之值. 试用本体系与进动坐标系两种坐标系求解.

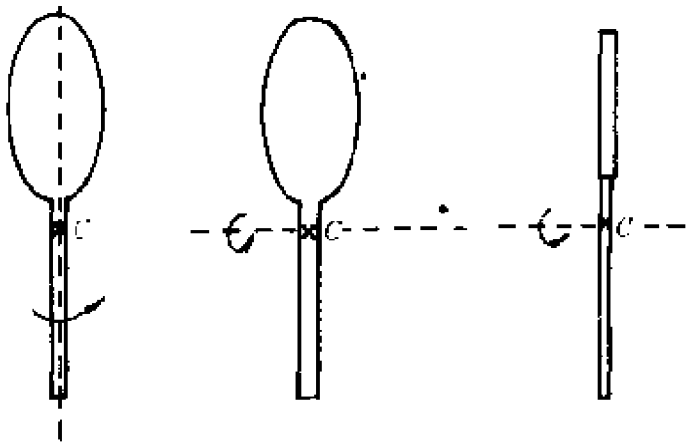
$$(\omega_p=2\omega_0)$$

7.45 假定运动是无章动的匀速进动，根据欧勒方程求证均匀引力场中对称陀螺作匀速进动的条件为

$$mgl=\dot{\varphi}[I_3\dot{\psi}-(I_1-I_3)\dot{\varphi}\cos\theta_0]$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

7.46　一个高为l，顶角为90°的正圆锥支于顶点，在重力作用下作陀螺运动．开始时，以自转角速度$5\sqrt{\frac{3g}{l}}$绕对称轴转动，和铅直向上方向成60°角．证明在随后的运动中，章动角总介乎60°和120°之间．



7.47题图

7.47　试讨论不受力矩作用的刚体的稳定性，即"网球拍定理"：对于具有三个不相等主转动惯量的刚体(如网球拍)，绕相应于最大或最小主转动惯量的主轴的转动是稳定的，而绕主转动惯量居间的主轴的转动是不稳定的．

(提示：如图所示，$I_1<I_2<I_3$)

7.48　对称陀螺的轴位于竖直位置，陀螺以很大的角速度ω_2作稳定的自转．今突然在离开顶点a处受到一与陀螺的对称轴垂直的冲量$\hat{I}$作用，试证陀螺在以后的运动中，最大章动角近似地为$2\mathrm{arctg}(\frac{\hat{I}a}{I_3\omega_3})$，式中$I_3$是陀螺绕对称轴转动的转动惯量．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第八章　哈密顿力学

在第四章里，我们讨论了求解力学问题的拉格朗日方法，现在讨论分析力学的第二部分即由哈密顿、泊松、雅可比等人发展的处理力学问题的另一种更加重要和省力的方法，称为哈密顿力学.

在拉格朗日力学里，讨论力学问题是以广义坐标和时间为独立变量，虽然广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 也在拉氏函数及拉氏方程中出现，但它们都是作为广义坐标对时间的简单微商，是相关变量，因此说，在位形空间里，描述单个粒子的运动只需三个独立变量.哈密顿力学则与此不同，它去掉了上述的相关性，引入新的独立的变量——广义动量 p_σ，并引入新的特征函数——哈密顿函数(或称哈密顿量)$H(q, p, t)$，(它是广义坐标、广义动量与时间的函数)来代替拉格朗日力学中的特征函数——拉氏函数 $L(q, \dot{q}, t)$其中，广义动量定义为：

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.1}$$

就是说，对于每一个广义坐标，有一个相应的广义动量分量.在哈密顿力学里，力学系统的状态，不再用广义坐标 q_σ 和广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 描述，而是用作为时间函数的广义坐标 q_σ 及广义动量 p_σ 描述.

§8.1　哈密顿正则方程和运动积分

一、哈密顿正则方程

我们先建立哈密顿正则方程，它是哈密顿力学的基本动力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

学方程式.

建立正则方程，主要考虑了两点：

其一，从数学上研究微分方程的求解：化高阶方程为低阶方程的方法，化法不同，得到的方程组形式也不同；

其二，这种化高阶方程为低阶方程的方法，应在实际上带来好处，尤其应在物理上能引入新的物理量，赋予新的物理意义.

现在，从拉氏方程建立正则方程. 主要经过三个步骤：

(一)寻找途径将拉氏方程降价

从数学上看，应是引入新的变数化高阶方程组为低阶方程组. 对于拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \tag{8.2}$$

这是 f 个二阶微分方程组，将其化为一阶微分方程组的一个最简单的办法，是视广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 是新变数 ψ_σ，即令

$$\dot{q}_\sigma=\psi_\sigma \tag{8.3}$$

则

$$L=L(q_1,\cdots,q_f,\psi_1,\cdots,\psi_f,t) \tag{8.4}$$

拉氏方程化为 q_σ,ψ_σ 对 t 的 $2f$ 个一阶微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{q}_\sigma=\psi_\sigma\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \psi_\sigma}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0\end{cases} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \tag{8.5}$$

这时已将 ψ_σ 视为独立变量. 显然，这种变换并没有什么实质性的变化，不会给我们带来什么好处.

(二)用广义动量代替广义速度作变换

注意到广义动量与广义速度有明确的关系，即

$$p_\sigma=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \tag{8.6}$$

而广义动量有明确的物理意义. 如视 q_σ，p_σ 是独立变量，通过

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上式又可将广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 表示为 q_σ，p_σ 的函数，从而得到 $2f$ 个一阶方程组. 为看得明显，将动能在广义坐标下的表达式写出：

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} a_{\alpha,\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha}^{f} b_\alpha\dot{q}_\alpha + T_0 \tag{8.7}$$

所以

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \\ &= \sum_{\beta}^{f}(a_{\alpha,\beta}\dot{q}_\beta + b_\alpha),\ (\alpha = 1, \cdots, f) \end{aligned} \tag{8.8}$$

写成更明显的形式

$$\begin{cases} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \cdots + a_{1f}\dot{q}_f + b_1 = p_1 \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \cdots + a_{2f}\dot{q}_f + b_2 = p_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{\alpha 1}\dot{q}_1 + a_{\alpha 2}\dot{q}_2 + \cdots + a_{\alpha f}\dot{q}_f + b_\alpha = p_\alpha \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{f1}\dot{q}_1 + a_{f2}\dot{q}_2 + \cdots + a_{ff}\dot{q}_f + b_f = p_f \end{cases} \tag{8.9}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta}(q_1, \cdots, q_f, t), \\ b_\alpha &= b_\alpha(q_1, \cdots, q_f, t) \end{aligned} \tag{8.10}$$

求解这组方程式，可将广义速度表示为广义动量和广义坐标的函数：

$$\dot{q}_\sigma = g_\sigma(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2 \cdots, p_f, t) \qquad \sigma = 1, \cdots, f \tag{8.11}$$

（可以证明，只要系数行列式 $\| \triangle \| \neq 0$，解永远存在.）

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{8.12}$$

在求偏导数之后，要视 p_σ 为独立变量. 其中的 $\dot{q}_\sigma$ 要视为广义坐标的一次导数. (8.12)应视为 p_σ 和 $q_\sigma(\sigma=1, \cdots, f)$的一阶微

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

分方程组，$2f$ 个方程中的另 f 个方程由拉氏方程得到，但这时 L 中的$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}(\sigma=1, \cdots, f)$应用上面求出的 $p_\sigma(\sigma=1, \cdots, f)$代替，这时 L 的形式与前面不同，

$$\bar{L} = \bar{L}(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t) \qquad (8.13)$$

由拉氏方程

$$\dot{p}_\sigma = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \qquad (8.14)$$

故有

$$\begin{cases} \dot{q}_\sigma = g_\sigma(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t) & \left(p_\sigma = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \\ \dot{p}_\sigma = \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma} \end{cases} \qquad (8.15)$$

因已视 q_σ, $p_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$为描述体系运动的独立变量，所以这是 q_σ、$p_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$共 $2f$ 个变量满足的一阶微分方程组．其中广义坐标 q_σ 和广义动量 p_σ 简称为正则变量．这种方程中仍存在对 $\dot{q}_\sigma$ 的偏导数，而且形式不对称．

（三）引入哈密顿函数

我们曾在拉格朗日力学中引入有广义能量含意的哈密顿函数

$$H = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma - L \qquad (8.16)$$

在将 L 对 $\dot{q}_\sigma$ 作偏导数之后，视 H 为 q_σ, p_σ, t 的函数，即将其中的 $\dot{q}_\sigma$ 均用 q_σ, p_σ 表示出来，

$$H(q_1, q_2 \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$$

$$= \left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - L\right)_{\dot{q}_\sigma \to q_\sigma, p_\sigma} \qquad (8.17)$$

这一用广义坐标和广义动量表示的哈密顿函数，和拉氏函数一样，也是体系的特征函数，系统的运动规律及各种动力学信

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

息，都包含在其中.这是一个极其重要的物理量，不仅在经典力学中如此，在量子力学中哈密顿函数作为力学量算符，也是支配量子系统运动规律的最基本和最重要的物理量.

用 H 代替 L 后，动力学方程式取何种形式呢？让我们做如下计算：

对(8.16)式，视独立变量为 q_σ，p_σ 和 t.

$$\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}=\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{f}p_\beta\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\sigma}$$

$$=\dot{q}_\sigma+\sum_{\beta=1}^{f}\left(p_\beta-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right)\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial p_\sigma}=\dot{q}_\sigma \qquad (8.18)$$

其中由定义 $p_\beta=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$，式中第二项里，$p_\beta-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}=0$，故有

$$\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}=\dot{q}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \qquad (8.19)$$

而

$$\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}=\sum_{\beta=1}^{f}p_\beta\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$$

$$=\sum_{\beta=1}^{f}\left(p_\beta-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\right)\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial q_\sigma}-\dot{p}_\sigma$$

$$=-\dot{p}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots f) \qquad (8.20)$$

其中用到(8.12)，将(8.19)和(8.20)式合在一起，即

$$\begin{cases}\dot{q}_\sigma=\dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}\\ \dot{p}_\sigma=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma}\end{cases} \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \qquad (8.21)$$

这是以 $H=H(q_1,q_2\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f,t)$即哈密顿量作为特征函数，以 q_σ，p_σ 为独立变量的 $2f$ 个一阶微分方程组，称为系统的正则方程. 它的特点是：

(1)形式对称.

(2)对每个 q_σ、p_σ 的一次导数，只明显地出现在左端，右端

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

只出现 q_σ 和 p_σ，这给近似计算带来很大方便.

(3)以 H 描述体系，有与 L 不同的新的物理意义，特别是以 q_σ，p_σ 为独立变量，在理论的发展上有更重要的意义. 应该注意，必须将哈密顿函数表示成正则变量即广义坐标和广义动量的函数才能作为体系的特征量，并由此建立正则方程.

二、哈密顿函数与运动积分

(一)能量积分

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{f}(-\dot{p}_\sigma\dot{q}_\sigma + \dot{q}_\sigma\dot{p}_\sigma) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

所以

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{8.22}$$

当 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ 时，$\frac{dH}{dt} = 0$

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t) = \bar{h} \tag{8.23}$$

由第四章知，这表示

$$H = T_2 - T_0 + V = \bar{h}$$

(这里 T_2，T_0，V 都用 q，p 表示)

它代表广义能量守恒.

当 $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$ 时

$$H = T + V = E \tag{8.24}$$

代表总能量守恒.

(二)循环积分

由正则方程，当 q_σ 为循环坐标时，有

$$\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0 \tag{8.25}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

故有

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0 \tag{8.26}$$

$$p_\sigma = p_{\sigma 0} \tag{8.27}$$

即为循环积分，它表示广义动量守恒，$p_{\sigma 0}$之值可由初始条件定出. 这时

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_{\sigma 0}, \cdots, p_f, t) \tag{8.28}$$

进一步求解只需解$f-1$个独立变量的系统的运动. 显然，循环坐标越多，求解越简单，而循环坐标的多少，与广义坐标选取有关.

【例 8.1】 写出球极坐标系中质点运动的哈密顿正则方程.

解 在球极坐标中，由变换方程

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

质点的动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \tag{2}$$

则

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{cases} \tag{3}$$

质点的哈密顿量

$$H = T + V$$

$$= \frac{1}{2m}[p_r^2 + p_\theta^2/r^2 + p_\varphi^2/(r^2\sin^2\theta)] + V(r, \theta, \varphi) \tag{4}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

哈密顿方程为

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \dfrac{1}{mr^2}\left(\dfrac{p_\varphi^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \end{cases} \tag{5}$$

【例 8.2】 求有一点被固定的对称重陀螺的哈密顿函数，再由它求出哈密顿正则方程.

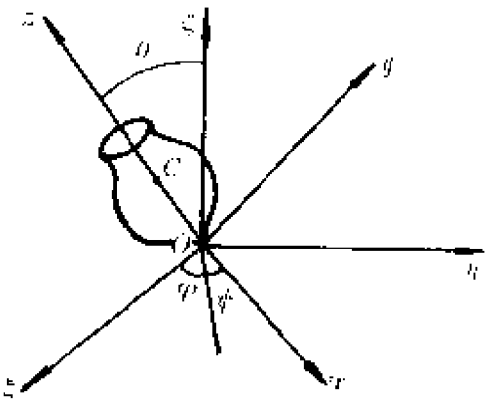


图 8.1

解 系统的拉氏函数

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + Mgl\cos\theta \tag{1}$$

广义动量为

$$\begin{cases} p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1\dot{\theta} & (2) \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta & (3) \\ p_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) & (4) \end{cases}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$H = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + Mgl\cos\theta$$

由(2)、(3)、(4)

$$I\dot{\theta} = p_\theta,\ I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\varphi - p_\psi\cos\theta$$
$$I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = p_\psi \tag{5}$$

故有

$$H = \frac{1}{2I_1}p_\theta^2 + \frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2$$
$$+ \frac{1}{2I_3}p_\psi^2 + Mgl\cos\theta \tag{6}$$

哈密顿正则方程为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{I_1} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\ \dot{\psi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\psi} = -\dfrac{\cos\theta(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)}{I_1\sin^2\theta} + \dfrac{1}{I_3}p_\psi \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -\dot{p}_\theta = \dfrac{\partial H}{\partial\theta} = \dfrac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)}{I_1\sin^3\theta} - Mgl\sin\theta \\ -\dot{p}_\varphi = \dfrac{\partial H}{\partial\varphi} = 0 \\ -\dot{p}_\psi = \dfrac{\partial H}{\partial\psi} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

【例8.3】 求二体中心力系统的哈密顿函数和正则方程.

解 设二质点质量分别为 m_1, m_2, 在静系中的位置向量为 $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$, 质心位置向量为 $\mathbf{R}$, 相对位置向量为 $\mathbf{r}$.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_2^2$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{1}$$

其中

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$M = m_1 + m_2,$$

$$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2),\ r = |\mathbf{r}|$$

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)$$

$$+ \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r) \tag{2}$$

式中$(X, Y, Z)=R$, $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})=\dot{R}$.

广义动量

$$\begin{cases} p_X = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X},\ p_Y = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y} \\ p_Z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = M\dot{Z} \\ p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r},\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \end{cases} \tag{3}$$

故哈密顿函数为

$$H = \dot{X}p_X + \dot{Y}p_Y + \dot{Z}p_Z + \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - L$$

$$= \frac{1}{2M}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2)$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r) \tag{4}$$

哈密顿正则方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = \dfrac{\partial H}{\partial p_X} = \dfrac{p_X}{M},\ -\dot{p}_X = \dfrac{\partial H}{\partial X} = 0 \Rightarrow p_X = p_{X0}, \\ \dot{Y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_Y} = \dfrac{p_Y}{M},\ -\dot{p}_Y = \dfrac{\partial H}{\partial Y} = 0 \Rightarrow p_Y = p_{Y0}, \\ \dot{Z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_Z} = \dfrac{p_Z}{M},\ -\dot{p}_Z = \dfrac{\partial H}{\partial Z} = 0 \Rightarrow p_Z = p_{Z0} \end{cases} \tag{5}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\begin{cases} \dot{r}=\dfrac{\partial H}{\partial p_r}=\dfrac{p_r}{\mu}, \quad -\dot{p}_r=\dfrac{\partial H}{\partial r}=-\dfrac{1}{\mu r^3}\left(p_\theta^2+\dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)+V'(r) \\ \dot{\theta}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}=\dfrac{p_\theta}{\mu r^2}, \quad -\dot{p}_\theta=\dfrac{\partial H}{\partial \theta}=-\dfrac{p_\varphi^2}{\mu r^2}\dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \\ \dot{\varphi}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{\mu r^2\sin^2\theta}, \quad -\dot{p}_\varphi=\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}=0\Rightarrow p_\varphi=M_Z(\text{常量}) \end{cases} \tag{6}$$

【例8.4】 韦伯电动力学中认可的速度相关势为

$$V=-\frac{1}{r}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \tag{1}$$

求在这种势作用下，单个质点的哈密顿函数.

解

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{r}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \tag{2}$$

广义动量是

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}+\frac{2\dot{r}}{c^2 r} \tag{3}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \tag{4}$$

哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H&=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta-L \qquad (5)\\ &=\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{c^2 r}\right)\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{r} \\ &=\frac{p_r^2}{2m\left(1+\dfrac{2}{mc^2 r}\right)}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{1}{r} \qquad (6) \end{aligned}$$

§8.2 相空间·刘维定理

在牛顿力学中，我们常用决定 n 个质点系统各质点位置的位置向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$ 或 $x_1, x_2, \cdots, x_{3n}$ 来描述系统的位形，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这$3n$ 个坐标组成了一个$3n$ 维空间即位形空间，也称 X 空间，对受有约束的系统，这$3n$ 个量不是独立的. 在拉格朗日力学中，引入了广义坐标，用 $f=3n-m$ 个广义坐标 $q_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$来描述系统的位形，也称为位形空间，或 q 空间，在 q 空间中各广义坐标彼此独立，因而代表点在 q 空间是自由运动的，因为系统在任一时刻的位形，都可以用位形空间中的一个代表点来表示，系统位形的轨迹，对应于位形空间中的一条曲线，系统的实际运动，可以用一个代表点在位形空间中的运动来描述，即

$$q_\sigma = q_\sigma(t) \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.29}$$

但位形空间的一个代表点，仅仅给出系统各质点的位置，并未提供有关质点运动的信息.

把位形空间的概念加以推广，把具有 f 个自由度的系统的 q_σ 和 $\dot{q}_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f,)$看作是$2f$ 维空间内一点的坐标，则这一空间内的点，将代表系统所有质点的位置和广义速度. 这个$2f$ 维空间，称为相空间. 如将广义速度 $\dot{q}_\sigma=\psi_\sigma$ 视为独立变量，拉格朗日方程化成了以 q_σ 和 ψ_σ 为独立变量的一阶常微分方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \\ &\frac{\mathrm{d}q_\sigma}{\mathrm{d}t}=\psi_\sigma \end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

但这样的变换并没有给解方程带来方便，即 q_σ，$\dot{q}_\sigma$ 不是一组好的变量. 事实上，如果我们选广义坐标 q_σ 和广义动量 $p_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$来代替广义坐标和广义速度作为描述系统状态的独立变量，则可以组成包含 p_σ 和 q_σ 的$2f$ 维空间，称为哈密顿相空间，或相空间(也称相宇)，其中的点称为代表点或相点. 用哈密顿相空间来描述系统的运动，比用 q 空间有更多的优越性，因为就最终意义来说，广义坐标和广义速度当然不是独立

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的，因为一旦知道了 $q_\sigma=q_\sigma(t)$，$\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_\sigma(t)$便可以求出来，而 $p_\sigma=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\sigma}L(q,\dot{q},t)$也就可以求出来. 问题是，由 $q_\sigma\longrightarrow\dot{q}_\sigma$ 只是简单地对时间求微商，与系统的行为方式无关，只涉及时空关系. 而广义动量乃是动力学量，具有更多的物理意义. 研究 q_σ 和 p_σ 的关系，从而最终解除对这些量彼此独立的假定，也就等于求解动力学方程了. 所以，在振动理论，统计力学和近代物理中，常用哈密顿相空间来描述运动.

在相空间里，任何一点都代表力学体系的一种运动状态，当时间改变时，力学系统的运动状态随之改变，代表点将在相空间中运动，它的运动轨道由正则方程(8.21)决定. 对任何实际物理问题而言，哈密顿函数和它的微商必定是单值函数，因此由正则方程(8.21)，经过相空间中任何一点的轨道只能有一个，因为在相空间中轨道的运动方向完全由 $\dot{q}_\sigma$、$\dot{p}_\sigma$ 决定，给定力学系统以不同的初状态，相空间的代表点就将沿不同的轨道运动. 相空间的轨道(或相径)都是互不相交的，因为假若相交，则经过交点将有两条不同的轨道，这与哈密顿函数及其微商的单值性相矛盾.

我们认为代表点的集合充满相空间，代表点足够多，从而可以定义一个相空间代表点密度，也称相密度. 相密度可以看作连续变化的，在最一般情形下，代表点的密度应是 q_1，q_2，$\cdots$，q_f，p_1，p_2，$\cdots$，p_f，t 的函数

$$\rho=\rho(q_1,\cdots,q_f,p_1,\cdots,p_f,t)$$

为了利用相空间的变换考察动力学系统的演变，我们引入一重要定理——刘维(Liouville)定理：相空间代表点的密度在运动过程中不变，即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8.31}$$

证明如下：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

考虑一相空间中的固定体积元

$$d\Omega = dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f \tag{8.32}$$

这个体积元是由下列各平面构成：

$$q_i,\ q_i + dq_i;\ p_i,\ p_i + dp_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, f)$$

经 dt 时间，因为有代表点进入或离开这个体积元，使此体积元中代表点数由 $\rho d\Omega$ 变为 $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) d\Omega$ 的增量数为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega \tag{8.33}$$

由于相轨道不相交，代表点在相空间运动过程中不会消失，所以这一净增数应与通过该体积元边界进、出而计算出的净增数相等.

先考虑通过平面 q_i 进入 $d\Omega$ 的数目. 注意到此平面的面积为

$$dA = dq_1 \cdots dq_{i-1}\, dq_{i+1}, \cdots dq_f, dp_1, \cdots dp_f \tag{8.34}$$

体积元可表为

$$d\Omega = dq_i dA$$

在 dt 时间内通过 dA 进入 $d\Omega$ 的代表点，应在体积为 $\dot{q}_i dt dA$ 的柱体内，dA 是它的底，$\dot{q}_i dt$ 是它的高. 故 dt 时间通过 dA 进入 $d\Omega$ 的代表点数应为

$$\rho \dot{q}_i dt dA$$

同样，在 dt 时间内通过平面 $q_i + dq_i$ 走出 $d\Omega$ 的代表点数为

$$(\rho \dot{q}_i)_{q_i + dq_i} dt dA = \left[(\rho \dot{q}_i)_{q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) dq_i\right] dt dA \tag{8.35}$$

两者相减得到通过平面 q_i 及 $q_i + dq_i$ 进入 $d\Omega$ 的代表点数为

$$-\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) dq_i dt dA = -\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) dt d\Omega$$

同理，在 dt 时间内通过平面 p_i 和 $p_i + dp_i$ 进入 $d\Omega$ 的代表点数为

$$-\frac{\partial (\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} dt d\Omega$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

把这两式相加，求和，得到 dt 时间内通过边界进入 $d\Omega$ 的代表点净增数，应与(8.34)式相等，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega = -\sum_i \left(\frac{\partial (\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right) dt d\Omega$$

消去 $dt d\Omega$，得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum_i \left\{ \frac{\partial (\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial (\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right\}$$

由于 ρ 是 q，p，t 的函数

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\}$$

由上两式消去 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$，得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \sum_i \left\{ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right\}$$

将正则方程代入上式，得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} = 0 \qquad (8.36)$$

刘维定理的另一种表述是：与一组状态相应的相空间体积元在运动中保持不变.

我们知道，体积元 δV 中代表点数

$$\delta N = \rho \delta V$$

$$\frac{d}{dt}(\delta N) = \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d}{dt}(\delta V)$$

如果保持代表点数不变，即

$$\frac{d}{dt}(\delta N) = 0$$

则

$$\frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d}{dt}(\delta V) = 0$$

已证明 $\frac{d\rho}{dt} = 0$，且因 ρ=常数，故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V)=0 \tag{8.37}$$

即相体积不变.

还应指出，刘维定理表明，在相空间中，相当于系统运动的代表点的密度在运动中保持恒定，但这仅对相空间而言是对的，位形空间并不存在类似的性质.

§8.3 变分运算

为了在以下的叙述中讨论被称为哈密顿原理的变分原理——这一原理可以称作力学乃至物理学中最重要的原理，我们先介绍变分法中所使用的一些方法和概念，尽管在本课中只在很有限的范围内用到它们.

一、变分法的基本概念

(一)变分法的基本问题

设 $f(x, y(x), y'(x), \cdots)$是 $x, y(x), y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdots$的函数，要求确定一函数 $y(x)$，使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \cdots)\mathrm{d}x \tag{8.38}$$

取极值(极大值或极小值)，量 f 依赖于因变量 $y(x)$的函数形式，称为泛函，视为已知，而积分限固定. $y(x)$可以改变以使 I 取极值.

设 $y=y(x)$使积分 I 取极小值，则任何相邻函数无论多么接近 $y(x)$，都将使 I 值增加. 相邻函数按下式定义：

$$y(\alpha, x)=y(0, x)+\alpha\eta(x) \tag{8.39}$$

$\alpha=0$时，$y=y(0, x)=y(x)$，即使 I 取极值的函数. $\eta(x)$是 x 的函数，具有一阶连续导数，且在端点 x_1，x_2处为零，即

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{8.40}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(二)真实轨道和比较轨道

在位形空间中，系统运动的轨道分为真实轨道和比较轨道. 在给定力、初始条件和约束条件后，体系的运动由运动微分方程唯一确定，这种运动称为真实运动，其轨道称为真实轨道或极值轨道. 如果只考虑约束的限制，系统所作的一切与约束相符的运动，都是运动学上可能的运动，相应的轨道有无穷多条，这种符合约束条件的运动学上可能的轨道称为比较轨道，或可能轨道. 图(8. 2)画出了这两种不同的轨道.

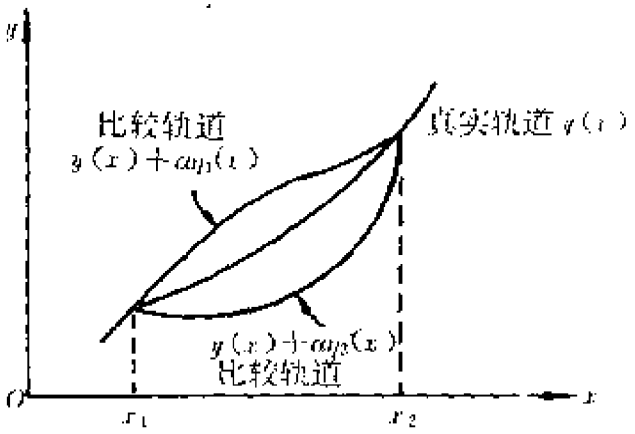


图8. 2

二、函数的变分

设有 f 个自由度的系统，其运动方程为

$$q_\sigma = q_\sigma(t) \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.41}$$

广义坐标 q_σ 是时间 t 的函数. 以 t 为横轴，q_σ 为纵轴作出二维时空坐标系中的函数曲线，如图8. 3所示.

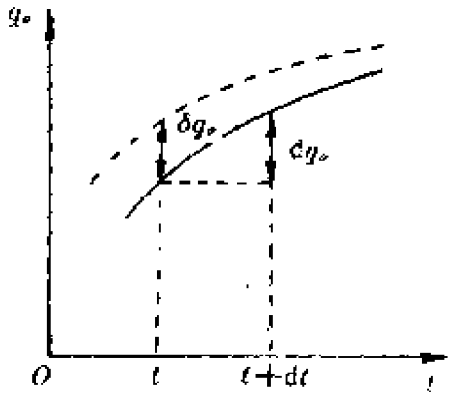


图 8. 3

函数 $q_\sigma(t)$ 因自变量时间 t 的微小变化而产生的变化用 dq_σ 表示，称为 $q_\sigma(t)$ 的微分.

$$dq_\sigma = \dot{q}_\sigma(t)dt \tag{8.42}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

在函数 $q_\sigma(t)$ 附近函数形式发生了微小变化，新的函数形式用图8.3中的虚线表示，这一比较曲线的函数形式是

$$\bar{q}_\sigma(t, \varepsilon) = q_\sigma(t, 0) + \varepsilon\eta_\sigma(t) \tag{8.43}$$

完全由函数形式变化引起的 q 的微小变化，称为函数的变分或等时变分.（因为它不是经历时间发生的变更，即与时间无关），用 δq_σ 表示，

$$\delta q_\sigma = \bar{q}_\sigma(t, \varepsilon) - q(t, 0) = \varepsilon\eta_\sigma(t) \tag{8.44}$$

由于是等时变分

$$\delta t \equiv 0 \tag{8.45}$$

“δ”符号称为变分符号，δ 表示的变分运算有如下法则：

$$\begin{cases} \delta(A + B) = \delta A + \delta B \\ \delta(AB) = A\delta B + B\delta A \\ \delta\left(\dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{B\delta A - A\delta B}{B^2} \end{cases} \tag{8.46}$$

这些与微分运算是相同的.此外还有

$$\begin{cases} \delta(\mathrm{d}r) = \mathrm{d}(\delta r) \\ \delta\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta r) \\ \delta\displaystyle\int_{t0}^{t_1}\varphi\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\delta\varphi\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{8.47}$$

这三式证明如下：

先证 $\delta\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{q}_\sigma(t) - q_\sigma(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon\eta_\sigma(t)] = \varepsilon\dot{\eta}_\sigma(t)$$

又按变分定义，求导数的变分，则

$$\begin{aligned} \delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_\sigma(t) &= \dot{\bar{q}}_\sigma(t) - \dot{q}_\sigma(t) \\ &= (\dot{q}_\sigma + \dot{\varepsilon}\eta_\sigma) - \dot{q}_\sigma = \varepsilon\dot{\eta}_\sigma(t) \end{aligned}$$

故有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta$$

因之也有

$$\mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}$$

类似地

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1}q(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t&=\int_{t_0}^{t_1}\bar{q}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}q(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}[\bar{q}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)-q(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\delta q(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\qquad)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\delta(\qquad)\mathrm{d}t$$

证毕.

三、泛函的极值·欧勒—拉格朗日方程

最简单的泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t$$

是函数$q(t)$的函数，它的值取决于$q=q(t)$的函数形式，$q(t)$必须是连续可微的并满足边界条件

$$\delta q|_{t=t_0}=\delta q|_{t=t_1}=0(\text{或}\ \eta(t_0)=\eta(t_1)=0)\qquad(8.48)$$

在上述条件下，寻求一个函数$q=q(t)$，使泛函J取极值(或稳定值)，这是一个典型的泛函变分问题.

为求使函数$q=q(t)$令J有极值的条件，可先将$\bar{q}=q+\varepsilon\eta(t)$代入$J$，并由

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0\qquad(8.49)$$

求极值条件.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$J(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1} f(q+\varepsilon\eta,\ \dot{q}+\varepsilon\dot{\eta},\ t)\mathrm{d}t \tag{8.50}$$

对上式作泰勒展开，因 ε 系小量，只保留至一级项，则

$$J(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1}\left\{f(q,\ \dot{q},\ t)+\varepsilon\eta\frac{\partial f}{\partial q}+\varepsilon\dot{\eta}\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right\}\mathrm{d}t \tag{8.51}$$

对 ε 求微商，得

$$\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\eta+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t \tag{8.52}$$

式中，

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\mathrm{d}t&=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\eta\right)-\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\eta\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.53}$$

利用 $\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$的条件，$\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\eta\Big|_{t_0}^{t_1}=0$，故有

$$\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)\right]\eta\mathrm{d}t=0 \tag{8.54}$$

因 η 为任意函数，若要上式成立，括号因子应为零，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial f}{\partial q}=0 \tag{8.55}$$

这就是泛函 J 取极值的条件，称为欧勒—拉格朗日方程，满足这一方程的函数 q，使积分 J 取极值.

推广到多个因变数的情形：

$$\begin{aligned}f=f(&q_1(t),\ q_2(t),\ \cdots,\ q_f(t),\ \dot{q}_1(t),\\&\dot{q}_2(t),\ \cdots,\ \dot{q}_f(t),\ t)\end{aligned} \tag{8.56}$$

各因变数可表示为

$$\begin{cases}q_1(t,\ \varepsilon)=q_1(t,\ 0)+\varepsilon\eta_1(t)\\q_2(t,\ \varepsilon)=q_2(t,\ 0)+\varepsilon\eta_2(t)\\\vdots\end{cases} \tag{8.57}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)\right\}\eta_\sigma(t)\mathrm{d}t \tag{8.58}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}=0$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \qquad (8.59)$$

即多自由度体系的欧勒方程.

【例8.5】 最速落径问题.

一质点在均匀重力场中从静止开始由 O 点运动到较底的 A 点，求质点以可能的最短时间完成这个运动所遵循的路径.

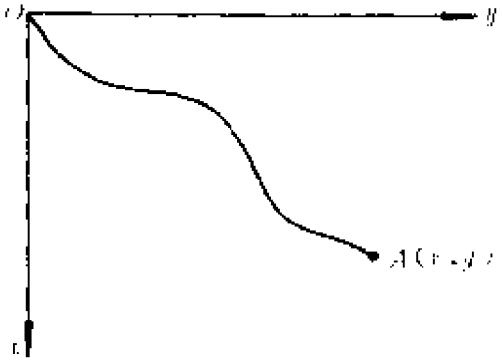


图8.4

解 以 v 表示质点沿曲线运动的速率，从 O 到 A 所用的时间为：

$$t=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\mathrm{d}s}{v} \qquad (1)$$

因为质点在保守力场中，且质点从静止开始运动，

$$T+V=E=0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mgx$$

$$v=\sqrt{2gx} \qquad (3)$$

$$t=\int\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gx}}$$

$$=\int_0^x\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}\mathrm{d}x \qquad (4)$$

因常数$(2g)^{-1/2}$不会影响路径方程，选取泛函为

$$f=\left(\frac{1+y'^2}{x}\right)^{1/2} \qquad (5)$$

因$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，欧勒—拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \qquad (6)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

因而

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C(\text{常数}) \tag{7}$$

求偏微商并平方，得

$$y'^2 = c^2 x(1 + y'^2) \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{c^2 x}{1 - c^2 x}\right)^{1/2} \tag{9}$$

积分得

$$y = c\int \frac{x\,dx}{(x - c^2 x^2)^{1/2}} \tag{10}$$

作变量代换

$$x = \frac{1}{2c^2}(1 - \cos\theta) \tag{11}$$

则

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2c^2}\sin\theta \tag{12}$$

$$y = \frac{1}{2c^2}\int(1 - \cos\theta)d\theta \tag{13}$$

$$y = \frac{1}{2c^2}(\theta - \sin\theta) + c'(\text{常数}) \tag{14}$$

由于 $x=0$时(即 $\theta=0$时)，$y=0$，所以 $c'=0$. 故得最速落径曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2c^2}(1 - \cos\theta) = a(1 - \cos\theta) & \left(a = \dfrac{1}{2c^2}\right) \\ y = \dfrac{1}{2c^2}(\theta - \sin\theta) = a(\theta - \sin\theta) \end{cases} \tag{15}$$

这是过原点的旋轮线方程.

【例8.6】 平面上两点之间的最短距离.

解 平面上的弧长元为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

1，2两点间任一曲线的总长度为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$J = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

要求曲线为最短路径，即令 J 取极小值. 取泛函

$$f = \sqrt{1 + y'^2} \tag{3}$$

因$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$，故欧勒—拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{4}$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{5}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C(\text{常数}) \tag{7}$$

$$\Rightarrow y' = a(\text{常数})$$

a 和 c 的关系为：

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = c$$

$$\Rightarrow a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \tag{8}$$

$$y = ax + b(b \text{ 是常数}) \tag{9}$$

这是直线方程，此直线即为极值路径，且为极小值路径. a，b 两个积分常数决定于曲线通过两个端点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的条件.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§8.4 哈密顿原理

一、力学原理的分类

随着科学的发展，人们对机械运动规律的认识逐渐深化，机械运动本质属性的表现形式也是多样的.

最初，机械运动的规律被总结为牛顿定律的形式.

后来，人们沿着不同的路线，用不同的方法总结出各种类型的基本原理. 这些原理的共同点在于它们具有充分的普遍性，可以作为力学理论的基础，从这原理出发，可以推出的其它定理和命题. 而不同点在于反映客观规律的深刻程度不同，侧重不同，广泛性不同和应用方便程度的不同.

所有这些原理的正确性在于它们描述同一客观事实的一致性，在于由它们推出的各种规律、结论同实验事实的一致性. 因此这些原理可以互相推导，并不要求通过实验直接验证. 原理不需要证明.

力学原理分为微分原理和积分原理. 微分原理如第二定律和达朗伯原理，是从对系统的瞬态的考虑出发的，反映每一瞬时的共性. 积分原理，如能量守恒原理等，则是考虑系统在t_1和t_2两个时刻之间的整个运动中的规律.

以上的力学原理称为不变分的原理.

另一类力学原理称为变分的力学原理. 变分的力学原理，也有微分变分原理和积分变分原理两大类.

微分变分原理研究力学系统在某状态邻近无限小时间间隔中真实运动和其它可能运动之间所作的局部比较. 微分变分原理告诉我们，对真实运动来说，某函数取极值. 虚位移原理(或虚功原理)、达朗伯—拉格朗日原理(或达—拉方程)都是微分变分原理. 此外，约当(Jour dain)原理、高斯(Gauss)最小拘束原

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

理等也是微分变分原理.

积分变分原理研究力学系统在一段有限时间内真实运动与可能运动之间的比较. 积分变分原理指出，对真实运动而言，某泛函取极值，哈密顿原理、拉格朗日原理、莫培督的最小作用量原理等都是积分变分原理.

二、哈密顿原理

著名的爱尔兰数学物理学家哈密顿首先用变分法形式得出了力学中最重要的一般性原理——哈密顿原理. 这是一个积分变分原理，对于完整保守系统来说，是一泛函的极值问题.

定义 拉格朗日函数在时间 t_0 至 t_1 的积分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t \tag{8.60}$$

称为哈密顿意义下的作用量.

S 是一个泛函，由 f 个广义坐标即时间函数 $q_\sigma(t)$ $(\sigma = 1, \cdots, f)$ 来决定.

哈密顿原理可表述如下：

在相同的时间、相同的起始和终了位置和相同的约束条件下，双面、完整、受广义有势力的系统在所有可能的各种运动中，真实运动使哈密顿作用量取极值(稳定值)，即

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{8.61}$$

由原理的叙述，我们可以看到，哈密顿原理有几个必要的前提：

(1)系统所受的约束是双面、理想、完整的.

(2)所有广义力是有势力，即

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.62}$$

(3)所有可比较运动同在 t_0 开始，在 t_1 结束。各可比较运动

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

在同一时间 t_1—t_0内完成，时间 t 不变更，因而变量的变分是等时变分.

(4)所有广义坐标在初、末时刻彼此相等. 就是说在边界上，广义坐标的等时变分恒为零，即

$$(\delta q_\sigma)_{t=t_0}=0,\ (\delta q_\sigma)_{t=t_1}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,f) \tag{8.63}$$

上述双面、理想、完整系统，有 f 个自由度，用 f 个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_f$ 来描述，系统的运动可以看成以 $q_1, q_2, \cdots, q_f$ 为坐标的 f 维位形空间中一代表点的运动. 当时间变化时，代表点沿空间某轨迹运动. 这种以时间 t 为参量的轨迹即系统的运动路径. 我们用 $q_\sigma(t_1)(\sigma=1,2,\cdots,f)$代表系统的第1个位形，用 $q_\sigma(t_2)$代表系统的第二个位形，它们分别对应于 f 维位形空间中的1，2两点，在1，2两点之间有各种各样可能的运动路径(或邻近轨迹)，代表各种可比较的运动。这里所谓"可能"，是指运动学上可能即约束允许的. 而真实路径(或轨道)，则只有一条，它是满足约束条件、初始条件和动力学规律的路径. 哈密顿原理提供了一种标准(或判据)，用以区分真实运动和其它可能的运动.

物理学史上，对最小作用量的探寻有着悠久的历史，人们发现大自然总是使某些重要物理量取极小值，从而启发和诱使物理学家去研究最小化的规律. 这可以追溯到公元前二世纪，亚历山大的希罗(Hero)发现：光线从一点经平面镜反射到另一点处，总是取最短路径，并由此证明光的反射定律. 1657年费马修正了希罗的最短路程原理，提出了光线在介质中传播的最小时间原理. 1744年，莫培督提出了最小作用量原理. 1829年高斯提出了最小拘束原理。而哈密顿原理则是物理学中最重要、影响最深远的原理之一. 它成了全部力学和大部分经典物理学的基础. 哈密顿原理充分体现了高度抽象的数学形式与丰富、深刻的物理规律的完美统一，它用一个极其简洁精炼的基本假

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

设，把全部力学理论统一起来。由于它含有不选广义坐标也能定义的物理量 T 和 V，所有表述与坐标选择无关，不会因坐标不同而变化，它不仅成了最基本和普遍的力学原理，而且是处理其它更高深的理论物理课题的适当方法，不仅可以推广处理非完整的及非保守系统，还可以应用于牛顿力学以外的广阔的物理领域，(特别是场)，如电磁场、弹性场、基本粒子场等.

哈密顿原理指出，哈密顿作用量在真实路径上取极值，并未指明是极大值还是极小值。事实上，对绝大多数实际问题中都是取极小值，已经证明，如果积分区间充分小，那么在定常(稳定)约束下，哈密顿原理的泛函在真实路径上取极小值.

三、由哈密顿原理推导完整保守系统的拉氏方程

因

$$\delta s=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_\sigma,\ \dot{q}_\sigma,\ t)\mathrm{d}t=0 \tag{8.64}$$

$$\begin{aligned}\delta s&=\int_{t_0}^{t_1}\delta L(q_\sigma,\ \dot{q}_\sigma,\ t)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma\right)\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t\\&\quad+\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}=0\end{aligned} \tag{8.65}$$

利用边界条件

$$(\delta q_\sigma)_{t=t_0}=0,\ (\delta q_\sigma)_{t=t_1}=0\qquad(\sigma=1,\cdots,f) \tag{8.66}$$

则

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\right]\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t=0 \tag{8.67}$$

因积分区间是任意的，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)\right]\delta q_\sigma=0 \qquad (8.68)$$

又因系统是完整的，各广义坐标独立变更，各 δq_σ 是独立的，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,\cdots,f) \qquad (8.69)$$

四、由哈密顿原理推导正则方程

$$\delta s=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0$$

$$H=\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma-L$$

则

$$\delta s=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\frac{\mathrm{d}q_\sigma}{\mathrm{d}t}-H(p_\sigma,q_\sigma,t)\right]\mathrm{d}t=0 \qquad (8.70)$$

或

$$\delta\sum_{\sigma=1}^{f}\int_{t_0}^{t_1}p_\sigma\mathrm{d}q_\sigma-\delta\int_{t_0}^{t_1}H\mathrm{d}t=0$$

此式称为修正的哈密顿原理. (8.70)式即

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(p_\sigma\delta\dot{q}_\sigma+\dot{q}_\sigma\delta p_\sigma-\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma-\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (8.71)$$

因

$$\delta\dot{q}_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma$$

$$p_\sigma\delta\dot{q}_\sigma=p_\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_\sigma\delta q_\sigma)-\dot{p}_\sigma\delta q_\sigma$$

故(8.71)式化为

$$\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\delta q_\sigma\Big|_{t_0}^{t_1}+\sum_{\sigma=1}^{f}\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\dot{q}_\sigma-\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma\right.$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$-\left(\dot{p}_\sigma+\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\Big]\mathrm{d}t=0 \qquad (8.72)$$

式中第一项

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\delta q_\sigma\right)\Big|_{t_0}^{t_1}=\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma[\delta q_\sigma(t_0)-\delta q_\sigma(t_1)]=0 \qquad (8.73)$$

由于系统是完整系，各广义坐标和广义动量独立变更，即 δq_σ、δp_σ 是互相独立的，故由(8.72)式可得

$$\begin{cases}\dot{q}_\sigma=\dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}\\ \dot{p}_\sigma=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma}\end{cases}\qquad(\sigma=1,2,\cdots,f) \qquad (8.74)$$

即哈密顿正则方程.

【例8.7】 试用哈密顿原理求线性谐振子的运动方程.

解 设线性谐振子质量为 m，弹簧弹性系数为 k，则

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\delta s&=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2\right)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}m\dot{x}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}kx\,\delta x\,\mathrm{d}t\\&=m\dot{x}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\ddot{x}\delta x\,\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_1}kx\delta x\,\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (2)$$

由

$$\delta x(t_0)=\delta x(t_1)=0 \qquad (3)$$

$$\delta s=-\int_{t_0}^{t_1}(m\ddot{x}+kx)\delta x\,\mathrm{d}t=0 \qquad (4)$$

积分对任何时间间隔都是零，只能被积函数为零. 又 δx 独立变更，故有

$$m\ddot{x}+kx=0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) \tag{5}$$

【例8.8】 一带电粒子电荷为 q，静止质量为 m，在电磁场(E, B)中运动. 已知其拉氏函数为

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - q(\varphi - v\cdot A)$$

式中 φ 是标量势，A 为向量势，试用哈密顿原理求质点在电磁场中运动的相对论运动微分方程式.

解

$$\delta s = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

即

$$\delta s = \delta\int_{t_0}^{t_1}[-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} - q(\varphi - v\cdot A)]\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

因

$$\delta s = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}(\delta L\mathrm{d}t + L\delta\mathrm{d}t)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}(\delta L\mathrm{d}t + L\mathrm{d}\delta t)$$

积分限固定，系等时变分，第二项 $\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}\delta t = 0$

$$\delta s = \int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial r}\delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot r}\delta\dot r + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

$\delta t = 0$，第三项为零，

$$\delta s = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial r}\delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot r}\delta\dot r\right)\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中第二项 $\frac{\partial L}{\partial \dot r}\delta\dot r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\delta r\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)\delta r$，因

$$\delta r(t_0) = \delta r(t_1) = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\delta s = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)\right] \delta r \mathrm{d}t = 0 \tag{5}$$

因时间间隔是任意的，且 δr 独立变更，

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \tag{6}$$

将拉氏函数代入此方程，

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -q\nabla\varphi + q\nabla(v \cdot A) \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + qA \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(qA) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) + q\frac{\partial A}{\partial t} - q(v \cdot \nabla)A \\ &\quad + q\nabla\varphi - q\nabla(v \cdot A) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) + q\nabla\varphi \\ &\quad - q[\nabla(v \cdot A) - (v \cdot \nabla)A] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$\nabla(v \cdot A) + (v \cdot \nabla)A = v \times (\nabla \times A) = v \times B$$

$$-\nabla\varphi = E$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = q(E + v \times B) \tag{11}$$

这就是所求微分方程.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

§8.5 泊松括号和泊松定理

一、泊松括号及其性质

泊松括号是一种重要的缩写符号，它在经典力学中定义，但被推广到量子力学中，获得了广泛的应用.

定义 设已知正则变量和时间的两个函数 $\varphi(q, p, t)$ 和 $\psi(q, p, t)$，关于这两个函数相对于正则变量(q_σ, p_σ)的泊松括号表达式是

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma}\right) \tag{8.75}$$

设 $F = F(q, p, t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q, p, t)\\ &= \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma + \frac{\partial F}{\partial t}\\ &= \sum_\sigma\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\\ &= [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned} \tag{8.76}$$

推导中的第二步应用了哈密顿正则方程。(8.76)中第一项称为 F 和 H 的泊松括号.

由泊松括号的定义，容易得到泊松括号的下述性质：

设 φ, ψ, θ 均为(p, q, t)的函数，a，b，c 是常数，则有

$$\begin{aligned}&(1)[\varphi, \varphi] = 0\\ &(2)[\varphi, c] = 0\\ &(3)[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi]\\ &(4)[a\varphi + b\psi, \theta] = a[\varphi, \theta] + b[\psi, \theta]\\ &(5)[\varphi\psi, \theta] = [\varphi, \theta]\psi + \varphi[\psi, \theta]\end{aligned} \tag{8.77}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$(6)\ \frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\ \psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right]+\left[\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$$

$$(7)a[\varphi,\ \psi]=[a\varphi,\ \psi]=[\varphi,\ a\psi]$$

$$(8)[\varphi,[\psi,\ \theta]]+[\psi,[\theta,\ \varphi]]+[\theta,\ [\varphi,\ \psi]]=0$$

（雅可比恒等式）

以下泊松括号称为基本泊松括号：

$$\begin{cases}(1)[q_i,\ q_j]=0\\(2)[p_i,\ p_j]=0\\(3)[q_i,\ p_j]=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\1 & i=j\end{cases}\end{cases}\tag{8.78}$$

哈密顿正则方程可以用泊松括号表示. 由

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=[F,\ H]+\frac{\partial F}{\partial t}\tag{8.79}$$

设 $F=q_i$

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=[q_i,\ H],\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}=[q_i,\ H]$$

即

$$\dot{q}_i=[q_i,\ H]\tag{8.80}$$

当 $F=p_i$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=[p_i,\ H],\qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i}=[p_i,\ H]$$

即

$$\dot{p}_i=[p_i,\ H]\tag{8.81}$$

(8.80)、(8.81)即为用泊松括号表示的正则方程。如果说正则方程中 p_i，q_i 还不完全对称(因为方程差一负号)，则用泊松括号表示的正则方程形式上就是完全对称的了，p_i 和 q_i 处于完全同等的地位.

由(8.79)立即得到，函数(力学量)$F(q,\ p,\ t)$是哈密顿正则方程的第一积分的充分必要条件是

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial F}{\partial t}+[F, H]=0 \tag{8.82}$$

定义 设 $\varphi(q, p, t)$, $\psi(q, p, t)$, $\theta(q, p, t)$对 q, p, t 有二阶连续偏导数，则称下式为复合泊松括号：

$$[\varphi,[\psi, \theta]]=\sum_{\alpha=1}^{f}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial[\psi, \theta]}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial[\psi, \theta]}{\partial q_\alpha}\right] \tag{8.82}$$

定义 如果函数 $\varphi(q, p, t)$, $\psi(q, p, t)$所构成的泊松括号恒等于零，即

$$[\varphi, \psi] \equiv 0 \tag{8.83}$$

则称函数 φ, ψ 为相互内旋的.

二、泊松定理

设 $\varphi(q, p, t)$和 $\psi(q, p, t)$是哈密顿正则方程的不处于相互内旋的两个第一积分，则它们的泊松括号也是哈密顿正则方程的第一积分.

证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi, \psi]=[[\varphi, \psi], H]+\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi] \tag{8.84}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi]=\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right]+\left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$

因为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+[\varphi, H]=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}+[\psi, H]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi]=[-[\varphi, H], \psi]+[\varphi,-[\psi, H]]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi, \psi]=[-[\varphi, H], \psi]+[\varphi,-[\psi, H]]$$

$$+[[\varphi, \psi], H]$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= [\psi, [\varphi, H]] + [\varphi, [H, \psi]] + [H, [\psi, \varphi]]$$
$$= 0 \tag{8.85}$$

故

$$[\varphi, \psi] = C(\text{常数})$$

证明的最后一步应用了雅可比恒等式.

泊松定理中，两函数的非互相内旋的条件是重要的. 泊松定理给出了从已知的两个第一积分求新的第一积分的一种方法，但如果两已知积分互相内旋，则不可能用泊松定理得出新的积分，只有满足非互相内旋的条件，才能获得新的积分.

【例8.9】 质点运动的角动量的 x，y 分量为常数，试证明其 z 方向的分量也是常数.

解 设

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = q_3,$$
$$p_x = p_1, \quad p_y = p_2, \quad p_z = p_3$$
$$L_x = yp_z - zp_y = q_2p_3 - q_3p_2 = C_1 \tag{1}$$
$$L_y = zp_x - xp_z = q_3p_1 - q_1p_3 = C_2 \tag{2}$$
$$[L_x, L_y] = \sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{\partial L_x}{\partial I_\sigma}\frac{\partial L_y}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial L_x}{\partial p_\sigma}\frac{\partial L_y}{\partial I_\sigma}\right)$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{\partial(q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial I_\sigma}\frac{\partial(q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial(q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_\sigma}\frac{\partial(q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial I_\sigma}\right)$$
$$= q_1p_2 - q_2p_1 = L_z = C_3 \tag{3}$$

由泊松定理知，L_z 也是第一积分

【例8.10】 由前题知，L_x，L_y，L_z 都是第一积分，$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ 也是第一积分，

$$[L^2, L_z] \tag{1}$$

也应是第一积分，但计算表明

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$[L^2, L_z]=0 \tag{2}$$

并未给出新的守恒量. 因为 $L_x=C_1$, $L_y=C_2$, $L_z=C_3$ 构成一内旋积分组，由它们出发，不可能利用泊松定理求出新的第一积分.

【例 8.11】 求 x, y, z, $x^2+y^2+z^2$ 分别与 L_z 组成的泊松括号.

解

$$[x, L_z]=\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x}-\frac{\partial x}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x}=\frac{\partial L_z}{\partial p_x}$$

$$=\frac{\partial(xp_y-yp_x)}{\partial p_x}=-y \tag{1}$$

$$[y, L_z]=\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}-\frac{\partial y}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y}=\frac{\partial L_z}{\partial p_y}=x \tag{2}$$

$$[z, L_z]=\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial L_z}{\partial p_z}=0 \tag{3}$$

$$[x^2+y^2+z^2, L_z]=\frac{\partial x^2}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x}+\frac{\partial y^2}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}+\frac{\partial z^2}{\partial z}\frac{\partial L_z}{\partial p_z}$$

$$=2x\cdot(-y)+2y\cdot(x)+0=0 \tag{4}$$

【例 8.12】 利用球极坐标求球面摆的哈密顿函数和正则方程并用这些正则变量直接计算泊松括号

$$[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x]$$

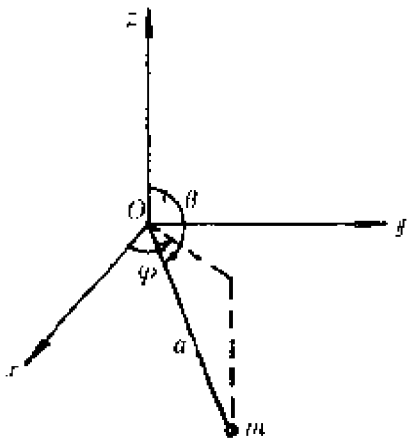


图 8.5

解

$$L=\frac{1}{2}ma^2(\dot\theta^2+\sin^2\theta\dot\varphi^2)-mgl\cos\theta$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=ma^2\dot\theta$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=ma^2\sin^2\theta\dot\varphi \tag{1}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$H=\frac{p_\theta}{ma^2}p_\theta+\frac{p_\varphi}{ma^2\sin^2\theta}p_\varphi-\frac{1}{2}ma^2$$
$$\times\left(\frac{p_\theta^2}{m^2a^4}+\frac{p_\varphi^2}{m^2a^4\sin^2\theta}\right)+mga\cos\theta$$
$$=\frac{p_\theta^2}{2ma^2}+\frac{p_\varphi^2}{2ma^2\sin^2\theta}+mga\cos\theta \tag{2}$$

$$\begin{cases}\dot\theta=\dfrac{p_\theta}{ma^2}\\ \dot\varphi=\dfrac{p_\varphi}{ma^2\sin^2\theta}\\ \dot p_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}=\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{ma^2\sin^2\theta}p_\varphi^2+mga\sin\theta\\ \dot p_\varphi=-\dfrac{\partial H}{\partial\varphi}=0\end{cases} \tag{3}$$

$$L_x=yp_z-zp_y=m(y\dot z-z\dot y)$$
$$=ma^2[\sin\varphi\sin\theta(-\sin\theta\cdot\dot\theta)$$
$$-\cos\theta(\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot\varphi+\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot\varphi)]$$
$$=ma^2(-\sin\varphi\cdot\dot\theta-\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\cdot\dot\varphi)$$
$$=-\sin\varphi p_\theta-\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\cdot p_\varphi \tag{4}$$
$$L_y=zp_x-xp_z=m(z\dot x-x\dot z)$$
$$=ma^2[\cos\theta(-\sin\varphi\sin\theta\cdot\dot\varphi+\cos\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta)$$
$$-\cos\varphi\sin\theta(-\sin\theta\cdot\dot\theta)]$$
$$=ma^2(\cos\varphi\cdot\dot\theta-\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\cdot\dot\varphi)$$
$$=\cos\varphi\cdot p_\theta-\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\cdot p_\varphi \tag{5}$$
$$L_z=xp_y-yp_x=m(x\dot y-y\dot x)$$
$$=ma^2[\cos\varphi\sin\theta(\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot\varphi+\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta)$$
$$-\sin\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\sin\theta\dot\varphi+\cos\varphi\cos\theta\cdot\dot\theta)]$$
$$=ma^2(\sin^2\theta\cdot\dot\varphi)=p_\varphi \tag{6}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$[L_x, L_y] = \frac{\partial L_x}{\partial \theta}\frac{\partial L_y}{\partial p_\theta} + \frac{\partial L_x}{\partial \varphi}\frac{\partial L_y}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial L_x}{\partial p_\theta}\frac{\partial L_y}{\partial \theta} - \frac{\partial L_x}{\partial p_\varphi}\frac{\partial L_y}{\partial \varphi}$$

$$= \left(\cos\varphi \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} p_\theta\right) \cdot \cos\varphi + (-\cos\varphi \cdot p_\theta + \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \cdot p_\varphi)(-\sin\varphi \operatorname{ctg}\theta)(-\sin\varphi \cdot p_\theta - \cos\varphi \operatorname{ctg}\theta \cdot p_\varphi)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \operatorname{ctg}^2\theta\right) \cdot p_\varphi$$

$$= p_\varphi = L_z \tag{7}$$

$$[L_y, L_z] = \frac{\partial L_y}{\partial \theta}\frac{\partial L_z}{\partial p_\theta} + \frac{\partial L_y}{\partial \varphi}\frac{\partial L_z}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial L_y}{\partial p_\theta}\frac{\partial L_z}{\partial \theta} - \frac{\partial L_y}{\partial p_\varphi}\frac{\partial L_z}{\partial \varphi}$$

$$= -\sin\varphi \cdot p_\theta - \cos\varphi \cdot \operatorname{ctg}\theta \cdot p_\varphi = L_x \tag{8}$$

$$[L_z, L_x] = \frac{\partial L_z}{\partial \theta}\frac{\partial L_x}{\partial p_\theta} + \frac{\partial L_z}{\partial \varphi}\frac{\partial L_x}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial L_z}{\partial p_\theta}\frac{\partial L_x}{\partial \theta} - \frac{\partial L_z}{\partial p_\varphi}\frac{\partial L_x}{\partial \varphi}$$

$$= \cos\varphi \cdot p_\theta - \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \cdot p_\varphi = L_y \tag{9}$$

§8.6 正则变换

一、正则变换定义和举例

对哈密顿问题的一种看法，是它的解代表了相空间中动点(q, p)和固定点(α, β)这样两点之间的正则变换，主函数就是这个变换的函数.

我们知道，哈密顿正则方程是$2f$个一阶微分方程，如果H中不显含某个q_α，即q_α是循环坐标，则相应的p_α是常数，即有相应的广义动量守恒。H中循环坐标越多，就相应地有更多的循环积分.

用以描述一给定系统的广义坐标不止一组，可以有许多组。例如，讨论质点的平面运动时，可以用笛卡儿坐标，也可以用平面极坐标。对于中心力运动而言，笛卡儿坐标x，y都不是循环坐标，但选用平面极坐标作广义坐标，则θ是一循环坐

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

标. 因此，是否存在循环积分和有多少循环积分，与广义坐标的选取有关.

如对每一个问题，都可能选择一组特殊的广义坐标，它们都是循环的，那么问题的解就容易得到了. 例如一系统的哈密顿函数，是运动积分，而且所有广义坐标都是循环的，则所有共轭的广义动量都是常数

$$p_\sigma = \alpha_\sigma \qquad (\sigma = 1, \cdots, f) \tag{8.86}$$

H 不显含各广义坐标和时间 t，则可表为

$$H = H(\alpha_1, \cdots, \alpha_f)$$

又

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial \alpha_\sigma} = \omega_\sigma \tag{8.87}$$

ω_σ 只是 α_σ 的函数，即常数，故有

$$q_\sigma = \omega_\sigma t + \beta_\sigma \tag{8.88}$$

β_σ 为由初始条件决定的积分常数.

当然，所有广义坐标都是循环坐标的情况是极少的，一般选用的广义坐标都不是循环的，因而需要建立一定的程序，将一组普通的广义坐标，变换为另一种更适用的广义坐标.

如果说，拉格朗日力学比之牛顿力学的主要优越性，是应用了广义坐标，这些坐标消去了约束方程. 而且，在理论上考察运动，是将它看作代表点在位形空间的轨迹. 类似地，哈密顿动力学的优越性在于应用了甚至更一般的坐标. 我们不仅有了 q_σ 作为坐标，还有 p_σ 作为"坐标"；不仅能考虑组态空间(流形)上的坐标变换，而且可以看到能进行相空间(即余切丛流形)上的坐标变换. 这样的变换可以混同"p"和"q"，而且无法分清某些坐标是"动量"而另外一些不是. 这种可能性是没有限制的. 而有用的是局限于相空间 那些保持哈密顿方程不变的坐标变换.

设一力学系统用正则变量 $q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f$ 来描述，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

它们的动力学方程即哈密顿正则方程为

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma},\ \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, \cdots, f)$$

研究由变量 p，q 向 P，Q 的变换

$$P_\sigma = P_\sigma(p, q) \text{ 和 } Q_\sigma = Q_\sigma(p, q)$$

类似地，考虑

$$p_\sigma = p_\sigma(P, Q) \text{ 和 } q_\sigma = q_\sigma(P, Q)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{f}\left\{\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial F}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\right\}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \tag{8.89}$$

应用(8.89)，认为 H 是经(P, Q)作为(p, q)的函数，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q_\sigma}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\rho=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial Q_\rho}[Q_\sigma, Q_\rho]_{(p,q)} + \sum_{\rho=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial P_\rho}[Q_\sigma, P_\rho]_{(p,q)}\\ \frac{\mathrm{d}P_\sigma}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\rho=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial Q_\rho}[P_\sigma, Q_\rho]_{(p,q)} + \sum_{\rho=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial P_\rho}[P_\sigma, P_\rho]_{(p,q)}\end{aligned}\right\} \tag{8.90}$$

这里加在泊松括号上的下标是为了指明包含在微商中的变量. 如果函数 P_i 和 Q_i 也满足泊松括号关系

$$\left.\begin{aligned}&[Q_\sigma, Q_\rho]_{p,q} = 0, \qquad [P_\sigma, P_\rho] = 0\\ &[Q_\sigma, P_\rho] = \delta_{\sigma,\rho}\end{aligned}\right. \tag{8.91}$$

则由(8.90)式即可得出 P_i 和 Q_i 也满足哈密顿正则方程. 满足(8.91)的坐标变换在哈密顿动力学理论中起着重要的作用，称为正则变换.

因为正则变换隐含着新坐标满足哈密顿正则方程，如果我们交换变量$(p, q)\leftrightarrow(P, Q)$(8.91)式也被满足. 两个“坐标卡”$(P_\sigma, Q_\sigma)$和$(p_\sigma, q_\sigma)$当彼此以正则变换相联系时是完全等价的，

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

正则变换确实没有立即给出一个运动常数. 虽然如此，包含在正则变换中的“对称性”，保持了哈密顿方程不变。有一些结果，将在下面仔细研究.

【例8.13】 设 $Q=qp$，$P=\ln p$，证明变换是正则的.

解 将 Q，P 代入(8.91)式，

$$\begin{aligned}
[Q_\sigma, Q_\rho]_{(p,q)} &= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial Q_\sigma}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\rho}{\partial p_k}-\frac{\partial Q_\sigma}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\rho}{\partial q_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial(p_\sigma q_\sigma)}{\partial q_k}\frac{\partial(q_\rho p_\rho)}{\partial p_k}-\frac{\partial(q_\sigma p_\sigma)}{\partial p_k}\frac{\partial(p_\rho q_\rho)}{\partial q_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{f}(p_\sigma\delta_{\sigma k}q_\rho\delta_{\rho k}-q_\sigma\delta_{\sigma k}p_\rho\delta_{k\rho}) \\
&= \sum_{k=1}^{f}(p_\sigma q_\sigma - q_\sigma p_\sigma)=0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}
[P_\sigma, P_\rho]_{(p,q)} &= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial P_\sigma}{\partial q_k}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_k}-\frac{\partial P_\sigma}{\partial p_k}\frac{\partial P_\rho}{\partial q_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial \ln p_\sigma}{\partial q_k}\frac{\partial \ln p_\rho}{\partial p_k}-\frac{\partial \ln p_\sigma}{\partial p_k}\frac{\partial \ln p_\rho}{\partial q_k}\right\} \\
&= 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Q_\sigma, P_\rho]_{(p,q)} &= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial Q_\sigma}{\partial q_k}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_k}-\frac{\partial Q_\sigma}{\partial p_k}\frac{\partial P_\rho}{\partial q_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial(q_\sigma p_\sigma)}{\partial q_k}\frac{\partial \ln p_\rho}{\partial p_k}-\frac{\partial \ln p_\sigma}{\partial p_k}\frac{\partial \ln p_\rho}{\partial q_k}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{f}p_\sigma\delta_{\sigma k}\cdot\frac{1}{p_\rho}\delta_{\rho k}=\delta_{\sigma\rho} \qquad (3)
\end{aligned}$$

故所给的变换是正则变换.

【例8.14】 设 $Q=q$，$P=2p$，对于新的哈密顿函数 $2H$ 满足正则方程，但变换是非正则的，证明之.

解

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$[Q_\sigma, Q_\rho]_{(p,q)} = \sum_{k=1}^{f}\left\{\frac{\partial I_\sigma}{\partial I_k}\frac{\partial p_\rho}{\partial p_k} - \frac{\partial I_\rho}{\partial p_k}\frac{\partial I_\rho}{\partial I_k}\right\} = 0 \tag{1}$$

$$[P_\sigma, P_\rho]_{(p,q)} = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial(2p_\sigma)}{\partial I_\sigma}\frac{\partial(2p_\rho)}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial(2p_\sigma)}{\partial p_\sigma}\frac{\partial(2p_\rho)}{\partial I_\sigma}\right)$$
$$= 0 \tag{2}$$

$$[Q_\sigma, P_\rho]_{(p,q)} = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial I_\sigma}\frac{\partial(2p_\rho)}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial I_\sigma}{\partial p_\sigma}\frac{\partial(2p_\rho)}{\partial I_\sigma}\right)$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{f} 2\delta_{\sigma k}\cdot\delta_{\rho k} = 2\delta_{\sigma\rho} \neq \delta_{\sigma\rho} \tag{3}$$

故变换不是正则的. 但如新哈密顿量为 $K(Q, P)=2H(q, p)$,

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{\partial(2H)}{\partial(2p)} = \dfrac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} = 2\dot{p} = -2\dfrac{\partial H}{\partial I} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} \end{cases} \tag{4}$$

仍能保持哈密顿正则方程的形式.

注: 按近代分析力学和辛几何的观点, (8.91)中定义的正则变换还可以称为保持微分2-形式不变的变换. 或辛变换, 这两种定义是一致的. 因为泊松括号关系通过

$$\gamma[e_{q^i}, e_{q^j}] = \{p_j, p_i\} = 0$$
$$\gamma[e_{I_i}, e_{I_j}] = \{q^j, q^i\} = 0$$
$$\gamma[e_{I_j}, e_{q^i}] = \{p_i, -q^j\} = \{q^j, p_i\} = \delta_i^j$$

决定在给定坐标系中 γ 的形式, 一正则变换即辛变换保持 γ 的形式不变. 很明显, 一个坐标变换 $(p_i, q^i)\to(P_i, Q^i)$ 是正则的, 当且仅当

$$\gamma = dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i$$

这里 γ 是正则2-形式或辛形式. (e_{p_i}, e_{q^i}) 是对应于坐标 (p_i, q^i) 的坐标基矢. $\wedge$ 表示外积, $\{,\}$ 代表泊松括号, 即书中的 $[,]$ (参阅文献[4][21]).

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这一例子表明，我们的正则变换的定义与任何特定的哈密顿函数无关，它只涉及相空间中的坐标关系. 作为(8.91)式给出的定义的结果，哈密顿正则方程总能保持其形式不变，但反过来是不对的，如这里的例子所表明的，逆命题并不成立，即保持正则方程形式不变的变换并不一定是正则变换. 由此可见，把正则变换定义为保持哈密顿正则方程形式的变换是不妥的.

正则变换和保持哈密顿正则方程形式不变的变换是两个不同的概念，以往较多论著未论及这一点，这里特别指明.

通常我们希望考虑依赖时间的正则变换，在这种情况下，力学运动的几何描述最好在扩展相空间里进行. 扩展相空间是在相空间上简单地加一时间轴得到的. 扩展相空间现在是$2f+1$维，这里f表示自由度数. 根据扩展相空间上的微分几何理论，可以给出一个一般的正则变换定义，为了避开相应的术语和数学工具，我们只给出它的结论，不予推导.

命题　由变量q_α, p_α向新变量Q_α, P_α的变换

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\sigma, p_\sigma, t),$$
$$P_\alpha = P_\alpha(q_\sigma, p_\sigma, t) \qquad (\alpha, \sigma = 1, \cdots, f)$$

如果满足法夫(Pfaff)方程

$$\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{8.92}$$

则一定是正则变换. 事实上，法夫方程不仅是正则变换的充分条件，也是必要条件。其证明可参考有关文献.

至于法夫方程本身，不难由哈密顿原理得到：

设同时将独立坐标和动量q_α, p_α变到新的集合Q_α, P_α，即

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$$
$$P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) \tag{8.93}$$

新坐标集合也是正则的，它们满足正则方程

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} \tag{8.94}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这里 K 是(P, Q, t)的函数

$$K = K(Q, P, t) \tag{8.95}$$

是在新坐标系下代替旧坐标系中的 H 的哈密顿函数，Q_σ，P_σ 是正则的，满足修正的哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma\dot{Q}_\sigma - K(Q, P, t)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{8.96}$$

旧坐标 p_σ，q_σ 也是正则的，因而

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma - H(q, p, t)\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{8.97}$$

因此有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma - H\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma\dot{Q}_\sigma - K\right)\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{8.98}$$

如在上式中加减一函数 $F = F(q, p, t)$，则因

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \delta\left[F(q, p, t)\right]_{t_1}^{t_2}\\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)\Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\right)\Big|_{t_1}^{t_2}\\ &= 0\end{aligned} \tag{8.99}$$

泛函的变分将不受影响．事实上，(8.92)的最后一项$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$只在端点处对作用量积分有贡献．无论 F 是(q, p, t)或(Q, p, t)或相空间坐标的任意混合的函数，此项都将为零，因为这些坐标在端点处的变分都是零．故可将方程(8.98)表示为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma - H\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma\dot{Q}_\sigma - K\right) - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{8.100}$$

因而导致

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma - H\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma\dot{Q}_\sigma - K\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{8.101}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

或

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma dq_\sigma - H dt\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma dQ_\sigma - K dt\right) = dF \tag{8.102}$$

这个重要的方程表明，两个法夫微分形式之差等于一个恰当微分，它代表了由变量(q, p)和相关的哈密顿函数$H(q, p, t)$到新变量(Q, P)和新哈密顿函数$K(Q, P, t)$的变换为正则变换的充要条件. 函数$F(q, Q, t)$称为变换的母函数. 注意到(8.101)式中第一个括号内，是q_σ, p_σ, t的函数，第二个括号内是Q_i, P_i和t的函数，于是F一般应是$(4f+1)$个变量q_σ, p_σ, Q_σ, P_i和t的函数，但两组变量之间有$2f$个变换方程(8.93)，因而除t外，只有$2f$个是独立的. 这F是$2f$个变量的函数，其中f个是旧的坐标，f个是新的坐标，F只有4种可能的函数形式：

$$F_1(q, Q, t), \qquad F_2(q, P, t)$$
$$F_3(p, Q, t), \qquad F_4(p, P, t)$$

函数F是新旧坐标的函数，它能影响从旧坐标集合到新坐标集合的变换，即变换关系可以从函数F导出. 因此F称为母函数.

母函数不能取$F(q, p, t)$的形式，因为它不包含新的变量. 也不能取$F(Q, P, t)$的形式. 前述四种母函数选择哪一种，视问题而定. 当处理位形空间的变换

$$Q_\sigma = Q_\sigma(q, t)$$

(称为点变换)时，q_i和Q_i不能成为独立变量，因而第一种形式的母函数$F_1(q, Q, t)$应当排除.

二、母函数的一些主要形式

(一)第1类母函数$F_1(q, Q, t)$

即选择了$q_1, \cdots, q_f, Q_1, \cdots, Q_f, t$作为$2f+1$个独立变

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

量. 在此情形下，方程(8.101)可写为

$$\sum_{\sigma}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - H = \sum_{\sigma}^{f} P_\sigma \dot{Q}_\sigma - K + \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t}(q, Q, t) \tag{8.103}$$

因

$$F_1 = F_1(q, Q, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}t} = \sum_{\sigma}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \sum_{\sigma}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial Q_\sigma}\dot{Q}_\sigma + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{8.104}$$

代入方程(8.101)式，得

$$\sum_{\sigma}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - H = \sum_{\sigma}^{f} P_\sigma \dot{Q}_\sigma - K + \sum_{\sigma}^{f} \frac{\partial F_1}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_\sigma}\dot{Q}_\sigma + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{8.105}$$

或

$$\sum_{\sigma}^{f}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_\sigma} - p_\sigma\right)\dot{q}_\sigma + \sum\left(P_\sigma + \frac{\partial F_1}{\partial Q_\sigma}\right)\dot{Q}_\sigma - K + H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \tag{8.106}$$

因 q_σ 和 Q_σ 是独立变量，$\dot{q}_\sigma$ 和 $\dot{Q}_\sigma$ 的系数必分别为零，故

$$\begin{cases} p_\sigma = \dfrac{\partial}{\partial q_\sigma}F_1(q, Q, t) & (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \\ P_\sigma = -\dfrac{\partial}{\partial Q_\sigma}F_1(q, Q, t) & (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \\ K = H + \dfrac{\partial}{\partial t}F_1(q, Q, t) \end{cases} \tag{8.107}$$

由上式第一式可求得 $Q_\sigma = Q_\sigma(q, p, t)$，代入第二式得 $P_\sigma = P_\sigma(q, p, t)$，此二式即为所求正则变换. 前式第三式给出了新旧哈密顿量之间的关系.

(二)第二类母函数 $F_2(q, P, t)$：

为证明 $F_2(q, P, t)$ 和 $F_1(q, Q, t)$ 的关系，从基本微分形

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

式

$$\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - H\,\mathrm{d}t + K\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}F_1(q, Q, t) \tag{8.108}$$

出发. 既然要以 P 代替 Q 作为母函数及对应微分形式中的变量，将

$$\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \mathrm{d}P_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma = \mathrm{d}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma P_\sigma\Big) \tag{8.109}$$

与(8.108)相加得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \mathrm{d}P_\sigma - H\,\mathrm{d}t + K\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}F_1(q, Q, t) + \mathrm{d}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma P_\sigma\Big)$$

$$= \mathrm{d}F_2(q, P, t) \tag{8.110}$$

式中

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma P_\sigma$$

写出 $F_2(q, P, t)$的全微分

$$\mathrm{d}F_2 = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial F_2}{\partial q_\sigma}\mathrm{d}q_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial F_2}{\partial P_\sigma}\mathrm{d}P_\sigma + \frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{8.111}$$

假定诸变量(q, P, t)都是独立的，可令(8.110)、(8.111)中相应系数相等，从而由含 $\mathrm{d}q_\sigma$ 各项得

$$p_\sigma = \frac{\partial F_2}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f) \tag{8.112}$$

由含 $\mathrm{d}P_\sigma$ 各项得

$$Q_\sigma = \frac{\partial F_2}{\partial P_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f) \tag{8.113}$$

比较 $\mathrm{d}t$ 系数，得

$$K = H + \frac{\partial}{\partial t}F_2(q, P, t)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

至此，母函数 F_2 及其微分形式、新哈密顿函数表达式都已得到. 由(8.112)可得

$$P_\sigma = P_\sigma(q, p, t)$$

代入(8.113)可得

$$Q_\sigma = Q_\sigma(q, p, t)$$

这二式即为所求的正则变换式.

(三)第三类母函数 $F_3(P, Q, t)$

用类似方法，可导出与 F_3 相关的微分形式

$$-\sum_{\sigma=1}^{f} q_\sigma dP_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma dQ_\sigma - H dt + K dt = dF_3(P, Q, t) \tag{8.114}$$

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{\sigma=1}^{f} q_\sigma p_\sigma \tag{8.115}$$

$$q_\sigma = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f)$$

$$P_\sigma = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f)$$

$$K = H + \frac{\partial}{\partial t} F_3(p, Q, t)$$

(四)第四类母函数 $F_4 = F_4(p, P, t)$

与 F_4 相关的微分形式为：

$$-\sum_{i=1}^{f} q_i dp_i + \sum_{i=1}^{f} Q_i dP_i - H dt + K dt = dF_4(p, P, t) \tag{8.116}$$

$$F_4(p, P, t) = F_2(q, P, t) - \sum_{\sigma=1}^{f} q_\sigma p_\sigma \tag{8.117}$$

$$p_\sigma = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f)$$

$$Q_\sigma = \frac{\partial F_4}{\partial P_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \cdots, f)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$K = H + \frac{\partial}{\partial t}F_4(q_\alpha, P_\alpha, t)$$

上面给出了四类母函数及其相关的四类正则变换公式，这四类正则变换并非全部正则变换. 对于系统的所有自由度，合适的母函数不一定正好是这四种类型之一，可能要用到，对某些正则变换甚至必须用到四种类型的混合的母函数.

【例 8.15】 设 $F = F_2 = \sum_\alpha q_\alpha P_\alpha$，$H$ 不显含时间.

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha = P_\alpha$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial}{\partial P_\alpha}\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha = q_\alpha$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H$$

即函数 F 生成恒等变换.

如果 $F = -\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha$，则 $Q_\alpha = -q_\alpha$，$P_\alpha = -p_\alpha$，且 $K = H$. 这表示空间反演是正则变换的特殊情形.

【例 8.16】 证明变换

$$q = \sqrt{2P}\sin Q$$

$$p = \sqrt{2P}\cos Q$$

或

$$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

$$Q = \mathrm{tg}^{-1}(q/p)$$

是正则的.

证明(1) $\mathrm{d}q = \sqrt{2P}\cos Q\,\mathrm{d}Q + (2P)^{-1/2}\sin Q\,\mathrm{d}P$

$$p\,\mathrm{d}q = 2P\cos^2 Q\,\mathrm{d}Q + \cos Q\sin Q\,\mathrm{d}P$$

$$p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q = (2\cos^2 Q - 1)P\,\mathrm{d}Q + \frac{1}{2}\sin 2Q\,\mathrm{d}P$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)\mathrm{d}Q + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)\mathrm{d}P$$

$$= \frac{\partial F}{\partial Q}\mathrm{d}Q + \frac{\partial F}{\partial P}\mathrm{d}P = \mathrm{d}F \qquad (1)$$

即 $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)$ 是恰当微分，故变换是正则的.

证明(2) 易见

$$[Q, Q] = [P, P] = 0$$

由题设

$$\sec^2 Q \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = q$$

$$\sec^2 Q \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{q}{p^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = p$$

则

$$[Q, P] = \left[\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{p}\cos^2 Q\right)p + \left(\frac{q}{p^2}\cos^2 Q\right)q\right]$$

$$= \cos^2 Q\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \cos^2 Q(1 + \mathrm{tg}^2 Q) = 1$$

故变换是正则的.

【例 8.17】 证明 $p = m\omega^2 q\,\mathrm{ctg}Q$，$P = \frac{m\omega}{2}q^2\,\mathrm{cosec}^2 Q$ 为正则变换，并用它求谐振子的运动方程.

解 因变换式不显含时间 t，$H = K$，

$$\mathrm{d}F = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i$$

$$= (m\omega^2 q\,\mathrm{ctg}Q)\mathrm{d}q - \left(\frac{m\omega}{2}q^2\,\mathrm{cosec}^2 Q\right)\mathrm{d}Q$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{m\omega}{2}q^2\,\mathrm{ctg}Q\right) \qquad (1)$$

可见变换满足 Pfaff 方程，故为正则变换.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$p = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad H = K \tag{2}$$

对线性谐振子，选偏离平衡点位移 x 为广义坐标. 弹性系数为 k. 令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，哈密顿函数为

$$H(x\,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{3}$$

正则变换式为

$$p = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad P = \frac{m\omega}{2}q^2 \operatorname{cosec}^2 Q \tag{4}$$

由第二式得

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \tag{5}$$

代入前式得

$$p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \tag{6}$$

则

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\ &= \frac{2m\omega P\cos^2 Q}{2m} + \frac{m\omega^2 2P}{2m\omega}\sin^2 Q \\ &= \omega P = K(Q, P) \end{aligned} \tag{7}$$

由此得新哈密顿函数 K 的正则方程为

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \tag{8}$$

故有循环积分 $P = a$(常数)，因 $H = K = E = \omega a$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial(\omega a)}{\partial a} = \omega$$

$$Q = \omega t + \beta \qquad \text{(积分常数)}$$

故

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \beta),$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$p = m\dot{x} = \sqrt{2m}E\cos(\omega t + \beta)$$

因 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}_0=0\Rightarrow\beta=0$，所以

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

谐振子运动方程为

$$x = x_0\sin\omega t \tag{9}$$

【例 8.18】 直接证明下列变换是正则的，并求出与该变换相关的四种母函数.

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right),\ P = q\operatorname{ctg}p$$

解

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} = -\frac{\dot{q}}{q} + \dot{p}\operatorname{ctg}p$$

$$P\dot{Q} = -\dot{q}\operatorname{ctg}p + q\dot{p}(\operatorname{ctg}p)^2$$

$$P\dot{Q} - p\dot{q} = -\dot{q}\operatorname{ctg}p + q\dot{p}(\operatorname{ctg}p)^2 - p\dot{q}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(p + \operatorname{ctg}p)q]$$

函数 $\psi=pq+q\operatorname{ctg}p$ 是(q, p)的函数. $P\dot{Q}-p\dot{q}$ 等于它的时间全微商，说明变换是正则的，但 ψ 中不含新的变量，不能用来作母函数. 但可以定义它是数值上等于母函数的函数.

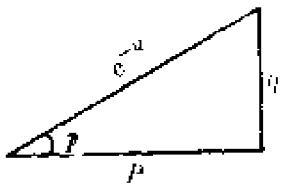


图 8.6

$$\psi = (q, p) = F_1(q, Q) \tag{1}$$

考虑到 $P=q\operatorname{ctg}p$，$\frac{P}{q}=\operatorname{ctg}p$；$Q=\ln\frac{\sin p}{q}$，$e^Q=(\sin p)/q$，则

$$q = e^{-Q}\sin p$$

故有图 8.6 所示的几何关系：

$$F_1(q, Q) = \psi(q, p)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= q\cos^{-1}\sqrt{1-q^2e^{2Q}} + \sqrt{e^{2Q}-q^2} \qquad (3)$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \cos^{-1}\sqrt{1-q^2e^{2Q}}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \sqrt{e^{-2Q}-q^2}$$

其次求 $F_2(q,P)$. 因

$$F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma P_\sigma$$

$$F_1(q,Q) = \psi(q,p)$$

$$F_2 = qp + q\mathrm{ctg}p + QP$$

以 q, P 作为独立变量

$$qp = q\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P}$$

$$QP = -P\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

$$q\mathrm{ctg}p = P$$

故

$$F_2(q,P) = q\mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P} + P\left(1-\ln\sqrt{q^2+P^2}\right) \qquad (4)$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{q}{P}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -\ln\sqrt{q^2+P^2}$$

同样地计算. 得

$$F_3(q,Q) = F_1 - qp = e^{-Q}\cos p \qquad (5)$$

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = e^{-Q}\sin p$$

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = e^{-Q}\cos p$$

$$F_4(p,P) = F_2 - qp = QP + q\mathrm{ctg}p$$

$$= P + P\ln\left(\frac{\cos p}{P}\right) \qquad (6)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial F_4}{\partial p} = -P\operatorname{tg} p = -q$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = \ln\left(\frac{\cos p}{P}\right) = Q$$

因所有母函数 F_1，F_2，F_3，F_4 都不显含时间，

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) \tag{7}$$

§8.7 哈密顿—雅可比方程

一、化零正则变换·哈密顿—雅可比方程

本节讨论一种实质上完全不同于以前的牛顿、拉格朗日或哈密顿方法的积分运动方程的方法——哈密顿—雅可比方法. 它是基于如下的考虑：

求解力学问题的途径之一，是变一组旧的坐标集合到一组新的坐标集合，而使后者都是循环的，因而所有的广义动量都是常数. 用这种方法，运动方程可以被积分而给出解. 这适用于哈密顿函数 H 守恒的情形. 这种途径是坐标变换的一种，把 $H(q, p)$ 转换到 $K(Q, P)$，然后应用哈密顿方程，积分后给出结果.

求解的另外一种途径是寻求由 t 时刻的坐标和动量 (q, p) 到一组新的常量（它可以是在 $t=0$ 时刻的 $2f$ 个初始值 (q_0, p_0)）的正则变换，变换方程是

$$\begin{aligned} q &= q(q_0, p_0, t) \\ p &= p(q_0, p_0, t) \end{aligned} \tag{1.118}$$

这些变换方程给出了用 $t=0$ 时刻的 (q_0, p_0) 表示的 q，p 之值，也就是给出了力学问题的解. 这一变换的最大好处在于既得到了变换方程，也得到了解. 这是由雅可比提出的方法. 这种方法是普遍的，原则上，也适用于哈密顿函数包含时间的情形.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

按照雅可比方法，新的坐标集合是常数，即 q_0，p_0，在初始时刻哈密顿函数的值只是个数，可以选为零. 如果要求变换后的哈密顿函数 K 为零，则新运动方程是

$$\begin{cases} \dot{Q}_\sigma = \dfrac{\partial K}{\partial P_\sigma} = 0 \\ \dot{P}_\sigma = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_\sigma} = 0 \end{cases} \tag{8.119}$$

Q_σ，P_σ 则为循环的，是时间常数.

新、旧哈密顿函数与母函数之间的关系为

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{8.120}$$

如果 $K=0$，则由母函数 F 生成的正则变换 $(q_\sigma, p_\sigma) \leftrightarrow (Q_\sigma, P_\sigma)$ 称为化零正则变换.

一旦找到了化零正则变换，系统的动力学方程变得十分简单，即

$$P_\sigma = \beta_\sigma = 常数 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.121}$$

所有 Q_σ 都是循环坐标，有 f 个循环积分.

$$Q_\sigma = \alpha_\sigma = 常数 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.122}$$

即所有广义坐标也都是常数，因而经化零正则变换，所有正则变量都是积分常数.

为方便起见，我们取第二类母函数 $F = F_2(q, P, t)$，则有

$$P_\sigma = \frac{\partial}{\partial q_\sigma} F_2(q, P, t) \tag{8.123}$$

代入 $H(q, P, t)$，方程(8.120)则可写为

$$H\left(q_1, q_2, \cdots, q_f, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial F_2}{\partial q_f}; t\right) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0 \tag{8.124}$$

这是一个 $f+1$ 个变量的偏微分方程，独立变量数已从正则方程式的 $2f+1$ 减去了 f，(8.124)是变量为 $q_1, \cdots, q_f, t$ 的所求

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

母函数满足的偏微分方程，称为哈密顿—雅可比方程，它的解通常用 s 表示，称为哈密顿主函数.

如果我们找到了哈密顿—雅可比(H-J)方程的全积分，就能得到化零正则变换的母函数，系统的动力学问题即得到解决. 所谓全积分，是指包含任意常数的解，而且任意常数的个数恰等于独立变数的个数，解的形式为

$$F_2 \equiv s = s(q_1, \cdots, q_f; \alpha_1, \cdots, \alpha_f; t) \qquad (8.125)$$

寻找 H-J 方程全积分的方法，就是哈密顿—雅可比方法，是积分哈密顿正则方程的最重要的方法.

二、哈密顿—雅可比(H-J)定理

(一)哈密顿—雅可比方程的解

H-J 方程(8.124)有一阶偏微分方程的形式，含 $f+1$ 个变量，因而，一个全积分必须包含 $f+1$ 个独立的积分常数 α_1，α_2，$\cdots$，α_{f+1}. 因为 H-J 方程中，未知函数只是以偏微商出现，因而如果 s 是一个解，$s+\alpha_{f+1}$ 也必然是解. H-J 方程的全积分一定含有一个相加常数(如 α_{f+1})，因为它不影响变换，我们可以认为 s 只包含 f 个常数(α_1，α_2，$\cdots$，α_f)，因此，H-J 方程的全积分有(8.125)的形式.

我们可以取这 f 个常数作为新的常值广义动量 P_σ，即

$$\alpha_\sigma = P_\sigma \qquad (8.126)$$

因而，f 个变换方程为

$$p_\sigma = \frac{\partial s(q, \alpha, t)}{\partial q_\sigma} \quad (q, \alpha \text{ 代表整个一组量}) \qquad (8.127)$$

在 $t=0$ 时刻，(8.127)构成了把 f 个 α 与 q 和 p 的初始值联系起来的 f 个方程，这使我们可以根据特定初始条件求积分常数，即 $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(q, p, t)$ 或 $P_\sigma = P_\sigma(q, p, t)$，另外一半变换方程为

$$Q_\sigma = \beta_\sigma = \frac{\partial s(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (8.128)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由 $t=0$ 时 q_σ 之值求出上式右边 $t=0$ 时之值，即可以根据初始条件求得常数 β，并反求出

$$q_\rho = q_\rho(a, \beta, t) \tag{8.129}$$

在求出偏微商

$$p_\sigma = \frac{\partial s(q, a, t)}{\partial q_\sigma} \tag{8.130}$$

之后，将 $q_\rho(a, \beta, t)$ 代入上式得

$$p - p_\sigma = p_\sigma(a, \beta, t) \tag{8.131}$$

(8.129)、(8.131)即为哈密顿正则方程的完全解.

(二)哈密顿—雅可比定理

设函数 $H(q_1, q_2, \cdots, q_f; p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$ 是力学系统的哈密顿函数，如果 $s=s(q_1, q_2, \cdots, q_f, a_1, a_2, \cdots, a_f, t)$ 是哈密顿—雅可比方程的一个全积分，即 s 存在二阶偏微商，a_1，a_2，$\cdots$，a_f 是独立的积分常数，亦即

$$\det\left[\frac{\partial^2 s}{\partial q_k \partial a_\sigma}\right] \neq 0 \tag{8.132}$$

并且满足哈密顿—雅可比偏微分方程，那么，正则方程

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, f)$$

的全部 $2f$ 个第一积分有如下形式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial a_\sigma} = \beta_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \qquad \text{(a)} \\ &\frac{\partial s}{\partial q_\sigma} = p_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \qquad \text{(b)} \end{aligned} \tag{8.133}$$

其中 $\beta_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$ 为新的任意常数.

证明　我们要证明的是(a)、(b)为第一积分，它对时间 t 的全微商应恒为零.

对(a)式求偏微商，

$$\frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial t} + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial q_k} \dot{q}_k = 0$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

因 $\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}$，$p_\sigma=\frac{\partial s}{\partial I_\sigma}$，代入上式，得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial I_k}\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial I},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial I_k}\right)}\equiv 0 \qquad (8.134)$$

为证明上面恒等式，将 $s(q,a,t)$ 代入 H-J 方程，

$$\frac{\partial s}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial s}{\partial I},t\right)\equiv 0$$

对 a_σ 求偏微商，

$$\frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial I},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial I_k}\right)}\frac{\partial^2 s}{\partial I_k \partial a_\sigma}=0 \qquad (8.135)$$

因满足

$$\det\left[\frac{\partial^2 s}{\partial a_\sigma \partial I_k}\right]\neq 0$$

(8.134)、(8.135)相合. (a)式得证.

类似可证(b)式：

$$\dot{p}_\sigma=\frac{\partial^2 s}{\partial I_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 s}{\partial I_\sigma \partial I_k}\dot{q}_k$$

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial I},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial I_k}\right)} \qquad (8.136)$$

代入上式得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial I_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 s}{\partial I_\sigma \partial I_k}\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial I},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial I_k}\right)}-\dot{p}_\sigma=0$$

即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial^2 s}{\partial q_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial^2 s}{\partial q_\sigma \partial q_k}\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial q_k}\right)}+\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}=0 \quad (8.137)$$

将恒等式

$$\frac{\partial s}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right)\equiv 0$$

两端对 q_σ 求偏微商，得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial q_\sigma \partial t}+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial^2 s}{\partial q_\sigma \partial q_k}\cdot\frac{\partial H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right)}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial q_k}\right)}+\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\equiv 0 \quad (8.138)$$

正与(8.137)相合，定理得证.

由上述 H-J 方程解的讨论，我们看到，哈密顿主函数 s 作为母函数，给出了一个包含常动量和常坐标的正则变换，在解 H-J 方程的同时，也自动地找到了力学问题的解.

为了得到关于 s 的更多信息，对它求时间全微商：

$$S=S(q,\alpha,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial s}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial s}{\partial \alpha_i}\dot{\alpha}_i+\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$=\sum_i p_i\dot{q}_i-H=L \quad (8.139)$$

推导中用到了 H-J 方程 $H+\frac{\partial s}{\partial t}=0$ 及 $\dot{\alpha}_i=0$，故有

$$S=\int L\,\mathrm{d}t+\text{常数} \quad (8.140)$$

这一表达式和哈密顿原理中的哈密顿作用量差一常数，表明此积分是不定形式的积分. 在哈密顿原理中同样的定积分给出力学问题的解，而适于哈密顿主函数的不定积分给出了求解问题的另一种方式. 在实际计算中，用(8.140)式表示结果是不适用的，因为除非 q_i，p_i 作为时间函数已知，即问题已经解出，积分是不能作的.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

三、哈密顿—雅可比特征函数

对于一个保守系统，哈密顿函数 H 不显含时间 t，且约束是稳定的，则 $H=a_1=E$（总能量）. 如约束不稳定，$H=a_1=\overline{h}$（常数，广义能量）. 由

$$H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q}\right)+\frac{\partial s}{\partial t}=0 \tag{8.141}$$

因为 s 依赖时间仅包含在后面一项，可以分离变量. 假定解的形式为

$$s(q,a,t)=W(q,a)-a_1t \tag{8.142}$$

式中 W 为一新函数，不含 t，称为哈密顿—雅可比特征函数，于是

$$\frac{\partial s}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial W}{\partial q_\sigma},\quad \frac{\partial s}{\partial t}=-a_1 \tag{8.143}$$

代入(8.141)得

$$H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=a_1 \tag{8.144}$$

它是不依赖时间的 H-J 方程，代表系统的哈密顿函数在运动中不随广义坐标和广义动量变化，因之也不随时间变化，H 即广义能量积分，在许多情形下就是能量积分，以 E 表示. 于是，正则方程的求解又转化为从偏微分方程(8.144)求 W 的问题，W 的物理意义可以从对 W 求时间全微商看出：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\sum_\sigma\frac{\partial W}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\sum_\sigma\frac{\partial W}{\partial a_\sigma}\frac{\mathrm{d}a_\sigma}{\mathrm{d}t}=\sum_\sigma\frac{\partial W}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial s}{\partial q_\sigma}=p_\sigma$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\sum_\sigma p_\sigma\dot{q}_\sigma$$

$$W=\int\left(\sum_\sigma p_\sigma\dot{q}_\sigma\right)\mathrm{d}t$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

对于 $H=E$ 的系统

$$\sum_\sigma p_\sigma \dot{q}_\sigma = L + H = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma = 2T,$$

$$W = \int 2T\,dt \tag{8.145}$$

即哈密顿—雅可比特性函数 $W(q_\sigma, \alpha_\sigma)$ 等同于 $\int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt$（它称为拉格朗日作用量），其间只差一个不重要的常数.

四、分离变量法

尽管 H-J 方程是一个一阶非线性偏微分方程，可解情形较少，但它是一个特殊的偏微分方程，对许多实际问题来说，可以用分离变量法把它化成可以直接积分的常微分方程来求解.

分离变量法主要用于下述的两种情形.

(一)哈密顿函数不显含时间 t

由前面的讨论知道，此时

$$H(q, p) = \alpha_1 = \bar{h}$$

由 H-J 方程：

$$\frac{\partial s}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial s}{\partial q}, t\right) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -H = -\alpha_1 \tag{8.146}$$

可求出系统主函数的适当形式为

$$s(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t$$

显然

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha_\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma = 2, 3, \cdots, f) \tag{8.147}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t \tag{8.148}$$

$$\frac{\partial s}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial W}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{8.149}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由(8.146)、(8.149)知，H-J 方程简化为

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1$$

此为修改的 H-J 方程，其中包含能量常数 α_1 和 $f-1$ 个常数 $\alpha_2, \cdots, \alpha_f$，各 α 值都是由 $\partial w/\partial q_\sigma$(即广义动量)在初始位形上的初始值确定的.

由

$$s = W(q_1, q_2, \cdots, q_f, \overline{h}, \alpha_2, \cdots, \alpha_f) - \overline{h}t$$

$$\begin{cases} \beta_\sigma = \dfrac{\partial s}{\partial \alpha_\sigma} & (\sigma = 2, 3, \cdots, f) \\ p_\sigma = \dfrac{\partial s}{\partial q_\sigma} & (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \end{cases} \tag{8.150}$$

得

$$\begin{cases} \beta_\sigma = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_\sigma} & (\sigma = 2, 3, \cdots, f) \\ \beta_1 = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t \\ p_\sigma = \dfrac{\partial W}{\partial q_\sigma} & (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \end{cases} \tag{8.151}$$

(8.151)中第一式给出各广义坐标之间的关系，决定了系统代表点在位形空间中的轨迹；第二式给出了各广义坐标与时间 t 之间满足的一个方程，显示了运动过程中系统各广义坐标之间的关系如何随 t 而变化.

(二)存在循环坐标的情形

假定系统是非保守的，具有循环坐标 $q_2, \cdots, q_{k+1}$，与各循环坐标相关的 p 都是常数，

$$p_\sigma = \alpha_\sigma \quad (\sigma = 2, \cdots, k+1)$$

由 $p_\sigma = \dfrac{\partial s}{\partial q_\sigma}(\sigma = 1, \cdots, f)$知，可以取如下形式的主函数：

$$s(q, \alpha, t) = \sum_{\sigma=2}^{k+1} \alpha_\sigma q_\sigma + S'(q_{k+2}, \cdots, q_f, \alpha_1, \cdots, \alpha_f, t) \tag{8.152}$$

由 H-J 方程可知：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial s}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right)=0$$

代入 s 得

$$\frac{\partial s'}{\partial t}+H\left(q_{k+2},\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1},\right.$$
$$\left.\frac{\partial s'}{\partial q_{k+2}},\cdots,\frac{\partial s'}{\partial q_f},t\right)=0 \tag{8.153}$$

除常值动量外，这个偏微分方程的全积分包含$(f-k)$个不可加常数，一旦知道了 s'，即可由

$$\begin{aligned}
&\beta_\sigma=q_\sigma+\frac{\partial s'}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma=2,3,\cdots,k+1)\\
&\beta_\sigma=\frac{\partial s'}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma=k+2,\cdots,f)\\
&p_\sigma=\alpha_\sigma \qquad (\alpha=1,2,\cdots\cdots,k)\\
&p_\sigma=\frac{\partial s'}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma=k+2,\cdots,f)
\end{aligned} \tag{8.154}$$

求得该系统的解.

当系统为保守的，且有循环坐标 $q_2,\cdots,q_{k+1}$时，则主函数

$$s(q,\alpha,t)=\sum_{\sigma=2}^{k+1}\alpha_\sigma q_\sigma-\alpha_1 t+W'$$
$$(q_{k+2},\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1}) \tag{8.155}$$

修改的 H-J 方程为

$$H\left(q_{k+2},\cdots,q_f,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1},\frac{\partial W'}{\partial q_{k+2}},\cdots,\frac{\partial W'}{\partial q_f}\right)=\alpha_1 \tag{8.156}$$

除能量常数 α_1 和常值动量 $\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1}$之外，$W'$的完全解包含 $f-k-1$ 个不可加常数.

系统运动的解为

$$\beta_\sigma=q_\sigma+\frac{\partial W'}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma=2,\cdots,k+1)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\beta_\sigma = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma = k+2, \cdots, f)$$

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1}$$

$$p_\sigma = a_\sigma \qquad (\sigma = 2, \cdots, k+1)$$

$$p_\sigma = \frac{\partial W'}{\partial q_\sigma} \qquad (\sigma = k+2, \cdots, f)$$

【例 8.19】 谐振子的运动.

哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) = E \tag{1}$$

式中，$\omega = \sqrt{k/m}$.

令

$$p = \frac{\partial s}{\partial q}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] \tag{2}$$

母函数 s 生成的正则变换，应是化零正则变换.

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

因为仅最后一项依赖时间，解的形式为

$$s(q, a, t) = W(q, a) - a t \tag{4}$$

代入(3)式，得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = a(= E) \tag{5}$$

积分得

$$\begin{cases} W = \sqrt{2ma}\int \mathrm{d}q \sqrt{1 - \dfrac{m\omega^2 q^2}{2a}} \\ S = \sqrt{2ma}\int \mathrm{d}q \sqrt{1 - \dfrac{m\omega^2 q^2}{2a}} - a t \end{cases} \tag{6}$$

因为要求解谐振的运动，不必求这一积分.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由

$$Q_\alpha = \beta_\alpha = \frac{\partial s(q, a, t)}{\partial a_\alpha} \tag{7}$$

$$\beta = \frac{\partial s}{\partial a} = \sqrt{\frac{m}{2a}} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2a}}} - t$$

$$t + \beta = \frac{1}{\omega} \arcsin q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2a}} \tag{8}$$

求得

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2a}{m\omega^2}} \sin\omega(t + \beta) \\ p = \dfrac{\partial s}{\partial q} = \dfrac{\partial V}{\partial q} = \sqrt{2ma - m^2\omega^2 q^2} \end{cases} \tag{9}$$

将 q 的表达式代入得

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2ma[1 - \sin^2(t + \beta)]} \\ &= \sqrt{2ma}\cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{10}$$

下面，由初始条件定积分常数.

$t = 0$ 时，$q = q_0$，$p = p_0$

由(9)、(10)式，有

$$\begin{cases} q^2 = \dfrac{2a}{m\omega^2} \sin^2\omega(t + \beta) \\ p^2 = 2ma\cos^2\omega(t + \beta) \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} q_0^2 = \dfrac{2a}{m\omega^2} \sin^2\omega\beta \\ p_0^2 = 2ma\ \cos^2\omega\beta \end{cases} \tag{12}$$

$$2ma = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2 \tag{13}$$

$$\mathrm{tg}\omega\beta = m\omega \frac{q_0}{p_0} \tag{14}$$

【例 8.20】 一自由质点的质量为 m，处于保守场中，试

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

确定其哈密顿—雅可比方程，分别用笛卡儿坐标、圆柱坐标和球坐标表示.

解 对于保守系统，哈密顿主函数为

$$s = W(q_\alpha, \alpha_\alpha) - Et$$

哈密顿—雅可比方程形为

$$H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$$

在笛卡儿坐标系中

$$q_1 = x, \ q_2 = y, \ q_3 = z$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) = E$$

$$p_x = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}, \ p_y = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$p_z = \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

H-J 方程为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + 2mV(x, y, z) = 2mE \tag{1}$$

在圆柱坐标系中

$$q_1 = r, \ q_2 = \theta, \ q_3 = z$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + p_z^2\right) + V(r, \theta, z)$$

$$p_r = \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r}, \ p_\theta = \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$p_z = \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

H-J 方程为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + 2mV(r, \theta, z) = 2mE \tag{2}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

在球极坐标系中

$$q_1 = r,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \theta$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + V(r, \varphi, \theta)$$

$$p_r = \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r},\ p_\theta = \frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

H-J 方程为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + 2mV(r, \varphi, \theta) = 2mE \tag{3}$$

【例 8.21】由 H-J 理论说明：围绕太阳的行星轨道是以太阳为一焦点的椭圆.

解　行星—太阳系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{GMm}{r} \tag{1}$$

体系是保守的，H-J 方程为

$$H\left(q, \frac{\partial s}{\partial q}\right) = \alpha_1 = E \tag{2}$$

以哈密顿特性函数 W 作为变换的母函数，则

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial s}{\partial r} = \dfrac{\partial W}{\partial r} \\ p_\theta = \dfrac{\partial s}{\partial \theta} = \dfrac{\partial W}{\partial \theta} \end{cases} \tag{3}$$

修改的 H-J 方程为

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \tag{4}$$

由(1)式

$$p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} = 2mE + \frac{2m^2GM}{r} \tag{5}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2=2mE+\frac{2m^2GM}{r} \tag{6}$$

分离变数，

$$W=W_r(r)+W_\theta(\theta) \tag{7}$$

则

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=2mE+\frac{2m^2GM}{r} \tag{8}$$

因中心力场中角动量守恒，

$$\begin{cases} p_\theta=\dfrac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta}=\alpha_2(\text{常数}) \\ W_\theta=\alpha_2\theta+c \end{cases} \tag{9}$$

代入(8)式得

$$\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}=\sqrt{2mE+\frac{2m^2GM}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}$$

$$W_r=\int\sqrt{2mE+\frac{2m^2GM}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\mathrm{d}r$$

$$W=W_r(r)+W_\theta(\theta)$$

$$=\alpha_2\theta+\int\sqrt{2mE+\frac{2m^2GM}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\mathrm{d}r+c$$

$$Q_1=\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=t+\beta_1 \tag{10}$$

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}$$

$$=\theta-\int\frac{\alpha_2\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE+\dfrac{2m^2GM}{r}-\dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}} \tag{11}$$

积分得

$$\frac{1}{r}=\frac{m^2GM}{\alpha_2^2}-\left(\frac{m^4G^2M^2}{\alpha_2^4}+\frac{2mE}{\alpha_2^2}\right)^{1/2}$$

$$\times\cos(\theta-\beta_2')\qquad(\beta_2'=\beta_2+\pi/2) \tag{12}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{1}{r}=\frac{m^2GM}{\alpha_2^2}\left[1-\left(1+\frac{2E\alpha_2^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}\cos(\theta-\beta_2')\right] \quad (13)$$

令

$$p=\frac{\alpha_2^2}{m^2GM}$$

$$e=\left(1+\frac{2E\alpha_2^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}<1 \quad (14)$$

则

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}[1-e\cos(\theta-\beta_2')]$$

$$r=\frac{p}{1-e\cos(\theta-\beta_2')} \quad (系圆锥曲线，因 e<1) \quad (15)$$

是一椭圆，焦点之一为力心——太阳.

§8.8 作用—角变量

对于物理学中一类十分重要的作周期运动的系统，人们关心的不是运动轨道细节而是频率. 为了适于求解这类运动，我们将把哈密顿—雅可比方法加以推广和变化. 我们不再把 H-J 方程中直接出现的积分常数 α_n 作为新动量，而是适当定义常数 J_n，它们构成 α_n 的 f 个独立函数的集合，称为作用变量.

对于单自由度系统，很大一部分运动是周期的. 设系统是保守的，哈密顿函数能写成

$$H(q,p)=\alpha_1 \quad (8.157)$$

解出动量

$$p=p(q,\alpha_1) \quad (8.158)$$

此式可看作哈密顿函数具有常数值时系统代表点在相空间的轨道方程. 按相空间的轨道特性，这样的周期运动分为：

(1)摆动. q、p 都是时间的周期函数，如一维谐振子.

(2)转动 p 是 q 的某个周期函数，如刚体定轴转动.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

引入新的变量 J 代替 α_n 作为变换后的(常值)动量，即作用变量，它定义为

$$J = \oint p\,\mathrm{d}q$$

它具有角动量的量纲，积分是对摆动或转动的周期计算的.

因

$$H = \alpha_1 = H(J) \tag{8.159}$$

哈密顿特性函数可写成

$$W = W(q, J) \tag{8.160}$$

共轭于 J 的广义坐标称为角变量 ω，定义为

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial J} \tag{8.161}$$

角变量运动方程为

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J) \tag{8.162}$$

因对一常数的常参数偏导，$\nu(J)$也是不随时间变化的常数，则有解

$$\omega = \nu t + \beta \tag{8.163}$$

故 ω 是时间的线性函数，ν 是作用变量的常函数.

到现在为止，作用—角变量还只是由 H-J 方程得出的一般变换坐标，并无显著优越性，现考虑 q 经历振动或转动一周期 ω 的变化，

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial \omega}{\partial q}\mathrm{d}q \tag{8.164}$$

将(8.161)代入得

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J}\mathrm{d}q \tag{8.165}$$

注意到 J 是常数，对 J 的微商可提到积分号外，

$$\Delta\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\oint \frac{\partial W}{\partial q}\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}J}\oint p\,\mathrm{d}q = 1 \tag{8.166}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由 $\omega=\nu t+\beta$ 知，若 τ 是 q 运动的周期，则

$$\Delta\omega=\tau\nu=1$$

则

$$\nu=1/\tau \tag{8.167}$$

即为 q 的周期运动的频率.

从这里我们看到，作用—角变量应用的最大优越性，在于它能不必求系统运动的完全解便可得到周期运动的频率. 再以谐振子为例加以说明.

由 $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2\right]=\alpha(=E)$ 可知，

$$J=\oint p\,\mathrm{d}q=\oint\sqrt{2m\alpha-m^2\omega^2q^2}\,\mathrm{d}q$$

代入

$$q=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin\theta$$

积分得

$$J=\frac{2\alpha}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

$$\alpha=H=\frac{J\omega}{2\pi}$$

$$\nu(J)=\frac{\partial H(J)}{\partial(J)}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

这正是谐振子频率公式.

对于多自由度系统的某种运动，只要 H-J 方程中有一组或一组以上坐标是可分离的，即可以引进作用角变量.

可分离性即正则变换形为

$$p_\sigma=\frac{\partial W(q_\sigma,\alpha_1,\cdots,\alpha_f)}{\partial q_\sigma} \tag{8.168}$$

它给出

$$p_\sigma=p_\sigma(q_\sigma,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f) \tag{8.169}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

定义共轭于 q_σ 的作用变量或相积分

$$J_\sigma = \oint p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma \tag{8.170}$$

当 q_σ 是循环坐标时，

$$J_\sigma = 2\pi p_\sigma \tag{8.171}$$

由(8.168)式，

$$J_\sigma = \oint \frac{\partial}{\partial J_\sigma} W(q_\sigma, \alpha_1, \cdots, \alpha_f)\mathrm{d}q_\sigma \tag{8.172}$$

q_σ 在这里是作为积分变量出现，这一定积分不是 q_σ 的函数，每个作用变量 J_σ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_f$ 的函数，于是

$$J_\sigma = J_\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \tag{8.173}$$

解出 α_σ，得：

$$\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(J_1, \cdots, J_n) \tag{8.174}$$

因而哈密顿特性函数 W 可表为

$$W = W(q_1, \cdots, q_f, J_1, \cdots, J_f) \tag{8.175}$$

H 作为 J_σ 的函数出现，

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \cdots, J_f)$$

共轭于 J_σ 的广义坐标为

$$\omega_\sigma = \frac{\partial W}{\partial J_\sigma} \tag{8.176}$$

角变量 ω_σ 的运动方程是

$$\dot{\omega}_\sigma = \frac{\partial}{\partial J_\sigma} H(J_1, \cdots, J_f) = \nu_\sigma(J_1, \cdots, J_f)$$

因此解为

$$\omega_\sigma = \nu_\sigma t + \beta_\sigma \tag{8.177}$$

(8.176)、(8.177)联立给出

$$q_\sigma = q_\sigma(J_1, \cdots, J_f, \beta_1, \cdots, \beta_f, t) \tag{8.178}$$

当 q_ρ 变化一周时，角变量变化为

$$\Delta\omega_\sigma = \oint \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial J_\rho}\mathrm{d}q_\rho \tag{8.179}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

由 ω_σ 定义，

$$\Delta\omega_\sigma = \oint \frac{\partial^2 \omega_\sigma}{\partial q_\rho \partial J_\sigma} \mathrm{d}q_\rho$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\sigma} \oint \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial q_\rho} \mathrm{d}q_\rho = \frac{\partial}{\partial J_\sigma} \oint p_\rho \mathrm{d}q_\rho \qquad (8.180)$$

因此

$$\Delta\omega_\sigma = \frac{\partial}{\partial J_\sigma} J_\rho = \delta_{\sigma\rho} = \begin{cases} 1 & \sigma = \rho \\ 0 & \sigma \neq \rho \end{cases} \qquad (8.181)$$

上式表示仅当 q_ρ 变化一个完整周期时，ω_σ 改变 1.

由(8.177)式，

$$\Delta\omega_\sigma = \nu_\sigma \Delta t \qquad (8.182)$$

当 $\Delta t = \tau_\sigma$ 时，

$$1 = \nu_\sigma \tau_\sigma$$

$$\nu_\sigma = \frac{1}{\tau_\sigma} \qquad (8.183)$$

（请注意这里定义的作用变量 $J = \oint p\,\mathrm{d}q$ 与天体力学中的定义不同，那里的 J 是这里的 $1/2\pi$ 倍，角变量是这里定义的 2π 倍. 因而用角频率 ω 代替了 ν.）

【例 8.21】 用作用—角变量法求力常数各不相同的三维谐振子的频率. 求各笛卡儿坐标和共轭动量的、作为作用—角变量的函数的解.

解 在三维笛卡儿坐标系中，哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2 \qquad (1)$$

k_x，k_y，k_z 是三个方向 x，y，z 上的力常数. 哈密顿特性函数可作变量分离

$$W = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) \qquad (2)$$

哈密顿—雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$+\frac{k_x}{2}x^2+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=\alpha_1 \tag{3}$$

故有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\right)^2+\dfrac{k_x}{2}x^2=\alpha_2\\ \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}y}\right)^2+\dfrac{k_y}{2}y^2=\alpha_3\\ \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}z}\right)^2+\dfrac{k_z}{2}z^2=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\\ (\alpha_2,\ \alpha_3\ \text{亦为常数})\end{cases} \tag{4}$$

各作用变量为

$$\begin{cases}J_x=\oint p_x\mathrm{d}x=\oint\dfrac{\partial W}{\partial x}\mathrm{d}x=\oint\dfrac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\ \qquad=\sqrt{mk_x}\oint\sqrt{\dfrac{2\alpha_2}{k_x}-x^2}\mathrm{d}x=2\pi\alpha_2\sqrt{m/k_x}\\ J_y=2\pi\alpha_3\sqrt{m/k_y}\\ J_z=2\pi(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\sqrt{m/k_z}\end{cases} \tag{5}$$

用反变换解出

$$H=\alpha_1=\frac{1}{2\pi}\left(J_x\sqrt{\frac{k_x}{m}}+J_y\sqrt{\frac{k_y}{m}}+J_z\sqrt{\frac{k_z}{m}}\right) \tag{6}$$

各振动频率为

$$\begin{cases}\nu_x=\dfrac{\partial H}{\partial J_x}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_x}{m}}\\ \nu_y=\dfrac{\partial H}{\partial J_y}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_y}{m}}\\ \nu_z=\dfrac{\partial H}{\partial J_z}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_z}{m}}\end{cases} \tag{7}$$

以上求 ν_x 的程序可归纳为：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)写出时间无关的 H-J 方程

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

解出

$$W = \sum_{\sigma=1}^{k} W_\sigma(q_\sigma, \alpha_1, \cdots, \alpha_k) \quad (\alpha_1 = E)$$

(2)作变换

$$J_\sigma = \oint \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma} \mathrm{d}q_\sigma = J_\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \quad (\sigma = 1, \cdots, k)$$

(3)由上式反解出

$$H = H(J_1, \cdots, J_k) = E$$

(4)求 ν_σ

$$\nu_\sigma = \frac{\partial H(J_1, \cdots, J_k)}{\partial J_\sigma}$$

显然，这里并不需要求解运动规律.

习　题

8.1　写出下列系统的哈密顿函数，并建立正则方程式.

(1)线性谐振子.

(2)单摆.

(3)中心力场中的自由质点.

(4)球面摆.

8.2　试在圆柱坐标系中写出自由质点的哈密顿正则方程.

8.3　试写出自由质点在作匀速转动的坐标系中的哈密顿函数的表示式.

$\left(H=\frac{1}{2m}p^2-\Omega\cdot(r\times p)+V$，式中 r 为质点位置向量，$p=mv$，v 是质点相对于固定坐标系的速度$\right)$

8.4　试写出在以加速度 a 作匀加速运动的车上悬着的单摆的哈密顿函数，并建立正则方程.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

8.5　试写出地球附近均匀重力场中质点运动的哈密顿函数，建立正则方程.

8.6　已知一带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数为

$$L=T-q\left(\varphi-\frac{1}{c}v\cdot A\right)$$

$$=\frac{1}{2}mv^2-q\left(\varphi-\frac{1}{c}v\cdot A\right)$$

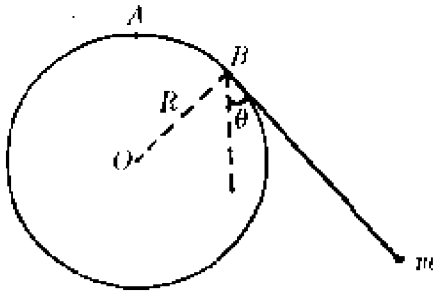
式中 v 是粒子速度，m 为粒子质量，q 为粒子的电荷，φ 为标量势，A 为向量势. 试由 L 写出其哈密顿函数.

$\left(H=\frac{1}{2m}\left[p-\frac{q}{c}A(r,t)\right]^2+q\varphi(r,t)\right)$

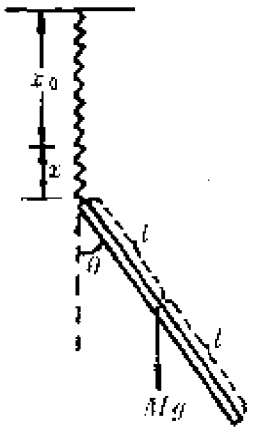
8.7　试写出复摆的哈密顿函数，建立正则方程. 设摆质量为 m，质心到轴距离为 l，摆对轴的转动惯量为 I.

8.8　一半径为 R 的圆盘，盘面铅直. 有一长为 $l+\pi R/2$ 的不可伸长的轻绳，上端固定在圆盘顶，上边一段绕在圆盘边缘上，绳下系一质量为 m 的质点. 试用哈密顿正则方程求解系统微振动频率.

$\left(H=\frac{p_\theta^2}{2m(l+R\theta)^2}+mgR\sin\theta-mg(l+R\theta)\cos\theta,\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$



8.8 题图



8.9 题图

8.9　一质量为 M，长度为 $2l$ 的均匀棒，其一端用力常数

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

为 k 的弹簧悬挂起来. 该棒只能在一个竖直平面内摆动，而弹簧因约束只能在铅垂方向运动，求系统的哈密顿函数，并求这一系统的哈密顿正则方程.

$\left(H=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{2}{3}Ml^2\dot{\theta}^2-Ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}-Mg(x+l\cos\theta)+\frac{1}{2}kx^2\right)$

8.10 试用哈密顿正则方程求复式阿特武德机中三个物体的运动加速度.

8.11 半径为 a 的均质球，自半径为 b 的固定球顶端自由落下，试用哈密顿正则方程，求动球球心下降的角加速度.

$\left(\ddot{\theta}=\frac{5\sin\theta}{7(a+b)}g\right)$

8.12 试写出三维各向同性谐振子的哈密顿函数，建立正则方程.(在笛卡儿坐标和球极坐标下分别求出).

8.13 证明三维空间中两点间的最短距离为一直线.

8.14 证明直立圆柱面上的短程线为一螺旋线.

8.15 证明质点沿最速落径(旋轮线)无摩擦地运动到最低点所需时间为 $\pi\sqrt{a/g}$，而与起始点无关.

8.16 按定义，角动量的笛卡儿分量为

$$L_x=yp_z-zp_y,\ L_y=zp_x-xp_z,\ L_z=xp_y-yp_x$$

计算泊松括号，证明

$$[L_x,L_y]=L_z,\ [L_y,L_z]=L_x,\ [L_z,L_x]=L_y$$

8.17 试计算由 p_x, p_y, p_z, $p_x^2+p_y^2+p_z^2$, $L_x^2+L_y^2+L_z^2$ 各与 L_z 组成的泊松括号.

8.18 证明下列变换是正则变换：

$$Q=q^{\alpha}\cos(\beta p),\ P=q^{\alpha}\sin(\beta p)$$

并求出 β 之值.

$\left(\alpha=\frac{1}{2},\beta=2\right)$

8.19 证明

$$Q=\ln(1+\sqrt{q}\cos p),\ P=2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$$

是正则变换.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

8.20 证明：

(1)$Q=\mathrm{tg}q$，$P=(p-mv_0)\cos^2 q$

(2)$Q=\ln[(\sin p)/q]$，$P=q\mathrm{ctg}p$

(3)$Q=p^2+q$，$P=p+t$

(4)$Q=p$，$P=(pt/m)-q$

是正则变换.

8.21 证明以下变换$(q,\ p)\to(Q,\ P)$是正则变换：

(1)$Q=k\sqrt{2q}\cos p$，$P=k^{-1}\sqrt{2q}\sin p$

(2)$Q=\ln(q^{-1}\sin p)$，$P=q\mathrm{ctg}p$

8.22 证明变换

$$Q=m^{1/2}[q+(q+p)^2],\ P=(m)^{-1/2}[p+(q-p)^2]$$

是正则变换.

8.23 证明变换$(q_r,\ p_r)\to(Q_r,\ P_r)$是正则的：

$$q_1=\lambda_1^{-1/2}(2Q_1)^{1/2}\cos P_1+\lambda_2^{-1/2}(2Q_2)^{1/2}\cos P_2$$

$$p_1=(1/2)(2\lambda_1 Q_1)^{1/2}\sin P_1+(1/2)(2\lambda_2 Q_2)^{1/2}\sin P_2$$

$$q_2=-\lambda_1^{-1/2}(2Q_1)^{1/2}\cos P_1+\lambda_2^{-1/2}(2Q_2)^{1/2}\cos P_2$$

$$p_2=(-1/2)(2\lambda_1 Q_1)^{1/2}\sin P_1+(1/2)(2\lambda_2 Q_2)^{1/2}\sin P_2$$

8.24 证明变换$(q_r,\ p_r)\to(Q_r,\ P_r)$是正则的：

$$q_1=(\sqrt{2P_1}\sin Q_1+P_2)/\sqrt{m\omega}$$

$$q_1=(\sqrt{2P_1}\cos Q_1+Q_2)/\sqrt{m\omega}$$

$$p_1=\sqrt{m\omega}(\sqrt{(2P_1)}\cos Q_1-Q_2)/2$$

$$p_2=\sqrt{m\omega}(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1+P_2)/2$$

8.25 证明变换$(q_r,\ p_r)\to(Q_r,\ P_r)$是正则的：

$$p_r=\sqrt{P_r+f_r(Q_r)}e^{-Q_r}$$

$$q_r=\sqrt{P_r+f_r(Q_r)}e^{Q_r}\qquad(r=1,\cdots,f)$$

式中$f'(Q_r)$为Q_r的任意但可积分的函数.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

8.26　对简谐振子，哈密顿函数是

$$H(q,p)=(p^2/2m)+(m\omega^2q^2/2)$$

证明存在一个到新变量 $Q=Q(q,p)$，$P=P(q,p)$ 的时间无关正则变换，新变量下的哈密顿函数

$$H(Q,P)=(P^2+\omega^2Q^2)/2$$

8.27　证明变换 $Q=q+te^p$，$P=p$ 是正则的，并求一函数 $F(q,p,t)$ 使

$$dF(q,p,t_0)=pdq-P(q,p,t_0)dQ(q,p,t_0)$$

8.28　证明变换

$$Q=(p^2+q^2)^{1/2}$$

$$P=(p^2+q^2)^{1/2}\left[t-tg^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)\right]$$

是正则的，并求一函数 $F(q,p,t)$，使

$$dF(q,p,t_0)=pdq-P(q,p,t_0)dQ(q,p,t_0)$$

8.29　证明变换

$$Q=\sqrt{e^{-2q}-p^2},\quad P=\cos^{-1}(pe^q)$$

是正则变换.

8.30　某体系的哈密顿函数为 $H=\omega^2p(q+t)^2$，ω 为一常数，求 q 作为时间的函数：

(1)通过解变量 q，p 的正则方程求解；

(2)通过正则变换 $Q=q+t$，$P=p$ 来求解.

8.31　考虑一个系统，其拉格朗日函数为 $L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2$.

(1)证明：$\delta\int_0^{\pi/8}Ldt$ 对于路径 $x=A\sin t$ 取零值.

(2)证明：对于路径 $x=A(\sin t+c\sin 8t)$ 在 $t=0$ 和 $t=\pi/8$ 有与路径 $x=A\sin t$ 相同的值，则 $\int_0^{\pi/8}Ldt$ 当 $c=0$ 时有最小值.

8.32　决定对于自由落体来说，下列轨道哪一个更接近实际运动：

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

(1)$Z=At$.

(2)$Z=Bt^3$.

($Z=Bt^3$)

8.33　试用哈密顿原理，求均质圆柱沿倾角为 α 的粗糙斜面自由滚下时质心的加速度.

8.34　试用哈密顿原理讨论质点在光滑平面上的惯性运动.

8.35　某系统的哈密顿函数为

$$H = H(q, p) = p + aq^2$$

应用哈密顿—雅可比理论求解其运动.

($q=t+A$，$p=-at^2-2aAt+B$，其中 A，B 是常数)

8.36　一抛射体以初速 v 及与水平成 ψ 角射出，应用哈密顿—雅可比理论求抛射体的轨道方程.

($x=(v\cos\psi)t$，$y=-(g/2)t^2+(v\sin\psi)t$)

8.37　试求质点在势场

$$V = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{FZ}{r^3}$$

中运动时的主函数 S，式中 α 及 F 为常数.

在球极坐标系中

$$S=-Et+\int\sqrt{2mE-\frac{\alpha_2}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{\alpha_2+2mF\cos\theta-\frac{\alpha_3^2}{\sin^2\theta}-2m\alpha d\theta}+\alpha_3\varphi$$

8.38　试用哈密顿—雅可比方程求解单摆问题.

8.39　试用哈密顿—雅可比方程求解复摆问题.

8.40　试用哈密顿—雅可比方程求行星绕太阳运动时的轨道方程.

8.41　一质量为 m 的质点受约束而保持在光滑的运动的金属线上，金属线的方程是

$$y = x + \frac{1}{2}at^2$$

当 $t=0$ 时，质点静止在 $x=y=0$，应用哈密顿—雅可比理论求

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质点的路径.

$(x=-at^2/4,\ y=at^2/4)$

8.42 用哈密顿—雅可比方法求解具有一个固定点的对称重陀螺问题.

$$\left(H=\frac{2}{2I_1}p_\theta^2+\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2+\frac{1}{2I_3}p_\psi^2+mgl\cos\theta\right.$$

$W=W_1(\theta)+\alpha_\varphi\varphi+\alpha_\psi\psi$

H-J方程为

$$\left.\frac{1}{2I_1}\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta)^2+\frac{1}{2I_3}\alpha_\psi^2+mgl\cos\theta=\alpha_1\right)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第九章　连续介质力学基础

§9.1　连续介质运动的描述·应变

一、作为质点系的连续介质模型

任何力学系统都可由一质点系来概括，应用质点系动力学的普遍定理去研究它的运动. 在第七章里我们研究过一类特殊的质点系——刚体的运动，刚体是不形变体，运动过程中任意二点间的距离不变或与研究的问题比变化甚微可以忽略不计. 这一章里我将研究形变体的运动，即物体在运动过程中物体各部分之间的相对位移是不能忽略的.

在形变体力学中，把物质看作连续介质. 尽管物质是由不连续的微观粒子——原子和分子组成，似乎只要把物质当作由原子和分子这样的质点组成的质点系，就可应用质点系动力学普遍定理了. 但力学研究的是物质的宏观机械运动，决定物质宏观运动性质的不是个别原子和分子的行为，而是对大量原子和分子行为统计平均的总体效果. 因此，研究物质的宏观机械运动，不必考虑物质的微观结构，而采用连续介质模型.

连续介质模型认为，物质连续分布在它所占有的容积内，是固体、液体和气体的统一概括. 为了应用质点系运动定理，需明确连续介质质点的概念. 连续介质的质点是连续介质的一小体积元(物质微团)，它的尺度与所研究问题的宏观尺度比是充分地小，以至在此小体积元中，每种物理量都可看成是均匀分布的常量，从而在数学上可以把此体积元当作一个几何点来处理. 而另一方面，又要求此物质体积元的尺度与原子和分子运动的尺

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

度相比是足够地大，大到该体积元中仍包括大量原子和分子，从而能对原子和分子的运动作统计平均，以得到表征宏观性质的物理量. 这也就是对连续介质质点宏观小、微观大的要求. 对一般情况下的固体、液体和气体，这二要求总可同时满足. 例如在标准大气压下，取体积为 10^{-5} 立方厘米的流体"质点"，宏观上可以认为小到不必再考虑其内部的不均匀性了. 但这样小的流体体积元中仍含有 10^{14} 个分子，从微观上看仍是非常之大的. 我们就是在这种意义下来使用连续介质模型和质点概念的. 这意味着，表征物质(宏观)运动的各物理量，像密度、应力、位移、速度和温度等都是空间坐标和时间的连续函数. 我们还认为这些物理量，除了在个别特殊面上外，存在所需要的各阶偏微商.

上述分析也告诉我们，连续介质力学是有一定适用范围的. 当作为连续介质的质点包含的原子和分子的数目非常小，物理量在该质点的各部分已不能再看作常量时，连续介质力学的理论就不再适用，即微观大的条件已不再满足. 例如，研究管道中气体的流动时，当气体密度很小以至分子自由程与管子半径在数量级上可比拟时，连续介质运动方程就不适用了.

建立起连续介质模型及其质点的概念，我们就可以从质点系动力学的普遍定理出发建立连续介质的基本运动方程. 这一节首先介绍连续介质运动的描述，即讨论连续介质运动学问题. 由于与以往我们熟悉的机械运动形式比，连续介质运动变化的特点主要是形状的变化，所以，这里着重解决的是形变的描述.

二、实体坐标与空间坐标

描述连续介质的运动有两种方法.

一种方法是将连续介质各质点用初始时刻 $t=0$ 在笛卡尔坐标系(或任一选定的曲线坐标系)中的三个坐标 a_1, a_2 和 a_3 来标明，称为连续介质的实体坐标(或物质坐标). 不同的实体坐标代表不同的质点，相当于把连续介质所有的物质点都编上了

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

“号”、打上了标记. 写成矢量形式则为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{9.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 是沿笛卡尔坐标三个轴的单位矢量. 用 1, 2 和 3 代表 x, y 和 z 三个惯用的坐标是为了写成求和的形式方便. 以下我们还将采用下角标重复代表求和的惯例, 即(9.1)式写为

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{3} a_k\boldsymbol{e}_k = a_k\boldsymbol{e}_k = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$$

凡遇到重复角标就表示从 1 到 3 的求和而省略 $\sum$ 符号. 它给以后的推导将带来很多方便.

把连续介质各物理量看成是实体坐标 a_1, a_2, a_3 和时间 t 的函数, 并研究这些函数的变化, 这样的描述和研究方法称为拉格朗日(Lagrange)方法. 实体坐标也称为拉格朗日变量.

用实体坐标(a_1, a_2, a_3)标记的物质点, 经运动变化, t 时刻所在的空间位置(x_1, x_2, x_3)称为连续介质的空间坐标, 其位置矢量用 $\boldsymbol{r}$ 表示, 则有矢量关系式

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_k\boldsymbol{e}_k \tag{9.2}$$

把连续介质各物理量看成是空间坐标 x_1, x_2, x_3 和时间 t 的函数, 并研究这些函数的变化规律, 这样的描述与研究方法称欧勒(Euler)方法.

很明显, 实体坐标与空间坐标有确定的关系

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}, t), \text{即 } a_k = a_k(x_1, x_2, x_3, t), k = 1, 2, 3 \tag{9.3}$$

这表示, t 时刻位于空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的连续介质质点是 $t=0$ 时刻位于 $\boldsymbol{a}$ 的那个物质点, 这用的是欧勒描述方法. 而

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, t)$$

即

$$x_k = x_k(a_1, a_2, a_3, t), k = 1, 2, 3 \tag{9.4}$$

这表示, 初始时刻位于 $\boldsymbol{a}$ 的那个物质点, t 时刻在位置 $\boldsymbol{r}$. 这用的是拉格朗日描述方法. 很自然的有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, 0)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

即

$$a_k = x_k(a_1, a_2, a_3, 0), k = 1, 2, 3$$

对每个时刻 t，r 和 a 之间一一对应，$a(r,t)$ 与 $r(a,t)$ 都是单值连续函数，并互为反函数.

拉格朗日方法是先给每个连续介质质点以标记，然后跟踪各质点，描述其运动. 这与我们在质点力学里描述质点运动的方法没什么两样. 对运动时间持续不长，在全部时间内位移都很小的连续介质运动，两种方法一样有效. 例如对固体的小形变就是如此. 但对有限形变和流体的运动，拉格朗日方法常常不再适用，因为那时跟踪标识质点已不可能。例如对流体，在初始时刻标记的某流体质点的小体积元，经过一段时间后，很可能流散开来，以至与其他质点掺和起来，无法区分，这时应用欧勒方法则更方便. 在流体力学中就都是采用欧勒描述方法.

三、位移矢量场·随体微商

函数 $r = r(a,t)$ 给出 t 时刻连续介质各个质点的位置，称作连续介质的位形. 连续介质质点的位移是指某质点在时刻 t 离开初始时刻所在位置的位移. 质点 a 在 t 时刻位于 $r(a,t)$ 的位移 u 为

$$\begin{aligned} u(a,t) &= r(a,t) - a \\ &= r(a,t) - r(a,0) \end{aligned} \tag{9.5}$$

很显然，$t=0$ 时位移为零，$u(a,0)=0$. u 是空间点 a 和时间 t 的函数，所以 $u(a,t)$ 是场量，称作位移场矢量. 这样的场也称作位移矢量场。在连续介质力学中，我们遇到的几乎都是场量.

有了位移不难计算质点的速度 v，

$$v(a,t) = \frac{du(a,t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} \tag{9.6}$$

和加速度 α（为与实体坐标相区别，这里加速度用了与本书前面不同的符号）

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$a(a,t)=\frac{dv(a,t)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t^2}=\frac{\partial r}{\partial t^2} \tag{9.7}$$

以上对 t 求偏微商时，要保持 a 不变. 保持 a 不变就是跟踪一个确定的质点不变，这和质点力学里计算质点的速度与加速度是一样的，这里用的是拉格朗日观点.

保持质点不变对 t 微商称作随体微商. 我们用 $\frac{d}{dt}$ 表示随体微商，对任意以 a，t 为自变量的函数 $f=f(a,t)$，求 f 的随体微商很简单，

$$\frac{df}{dt}=\frac{df(a,t)}{dt}\Big|_{a\text{不变}}=\frac{\partial f}{\partial t}$$

(9.6)与(9.7)式就是这种情况.

如果以欧勒变量，即以空间坐标 r 作自变量时，$f=f(r,t)$，保持 a 不变就要注意到 r 还是 a 和 t 的函数，对 f 的随体微商为

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\Big|_{a\text{不变}}\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}\Big|_{a\text{不变}}\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_{a\text{不变}}$ 就是速度 v，即 $v_k=\frac{\partial x_k}{\partial t}\Big|_{a\text{不变}}$，上式可写为

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{\partial f}{\partial t}+v\cdot\nabla f$$

在欧勒变量下的随体微商公式可记为

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v\cdot\nabla \tag{9.8}$$

如果将速度表式 $v(a,t)$ 中的 a 利用 $a=a(r,t)$ 换成 r 与 t 的函数 $v=v(r,t)$，这就给出了每一个空间点 r 在时刻 t 的速度场，已不再涉及与实体坐标所表示的物质点的关系，这就是欧勒观点. 这时计算加速度应用(9.8)式，得

$$a(r,t)=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v \tag{9.9}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

或写成分量形式，

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad i = 1,2,3$$

四、应变张量

连续介质区别于刚体的运动变化形式是形变. 形变的最基本标志是物体中任意二点间的距离发生变化. 下面通过考察二点间距离的变化引入描述纯形变的物理量——应变张量.

考虑初时刻连续介质中相邻的二质点 p 和 p'，它们的位置矢量分别为实体坐标 a 和 $a'=a+da$，其间距为 da，如图 9.1 所示，该间距长度的平方可表示为

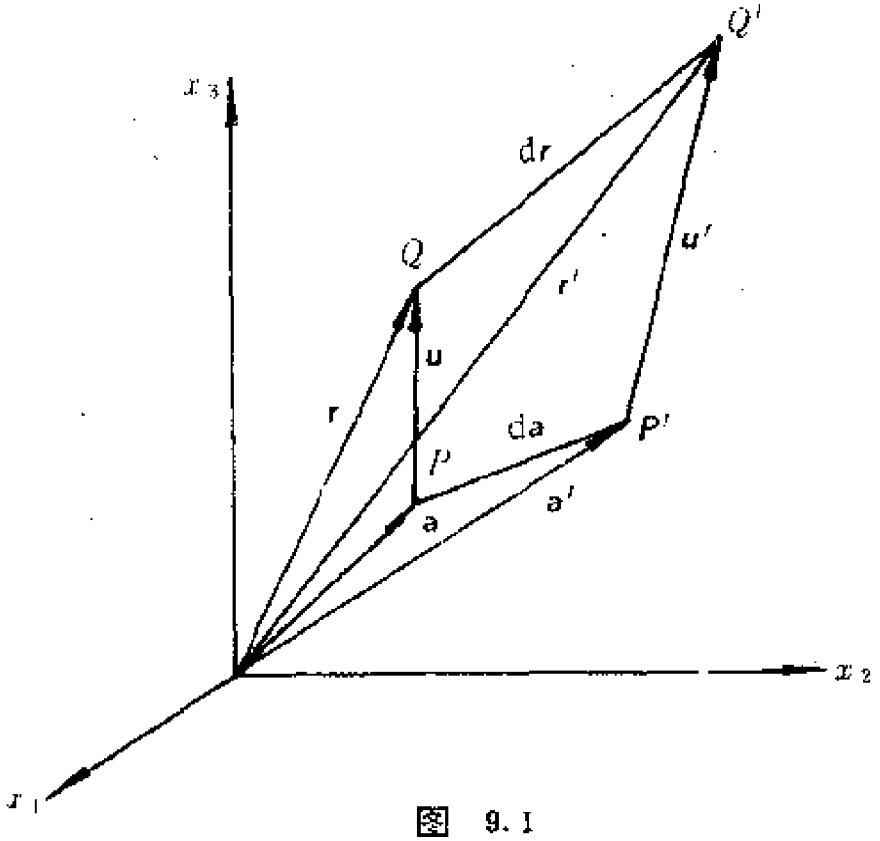


图 9.1

$$\begin{aligned} |da|^2 &= da \cdot da \\ &= (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2 \\ &= (da_i)^2 = \delta_{ij} da_i da_j \end{aligned} \tag{9.10}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

这里重复角标代表求和.

t 时刻此二点分别运动到 Q 和 Q'，它们的位置分别由空间坐标 r 和 $r'=r+\mathrm{d}r$ 确定，其间距长度的平方可表示为

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}r|^2&=\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}r\\&=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2\\&=(\mathrm{d}x_i)^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\end{aligned}\tag{9.11}$$

终时刻与初时刻二长度平方之差反映二质点间距离的变化，

$$|\mathrm{d}r^2|-|\mathrm{d}a|^2=\delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j-\delta_{ij}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j\tag{9.12}$$

下面用位移 u 分别在拉格朗日变量和欧勒变量下表出距离平方之差. 由(9.5)式有

$$u=r-a$$

即

$$u_i=x_i-a_i\quad i=1,2,3$$

如果采用拉格朗日描述方法，视 u 和 r 都是 a 的函数，初始时刻不同的 a 点，t 时刻将处于不同的位置 r 和产生不同的位移 u，则有

$$\begin{aligned}x_i&=u_i+a_i\\\mathrm{d}x_i&=\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\mathrm{d}a_k+\mathrm{d}a_i\end{aligned}\qquad(i=1,2,3)$$

将此式代入(9.12)，

$$\begin{aligned}&|\mathrm{d}r|^2-|\mathrm{d}a|^2\\&=\delta_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\mathrm{d}a_k+\mathrm{d}a_i\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial a_m}\mathrm{d}a_m+\mathrm{d}a_j\right)-\delta_{ij}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j\\&=\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\mathrm{d}a_k\mathrm{d}a_j+\delta_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial a_m}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_m\\&\quad+\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\frac{\partial u_j}{\partial a_m}\mathrm{d}a_k\mathrm{d}a_m+\delta_{ij}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j-\delta_{ij}\mathrm{d}a_i\mathrm{d}a_j\\&=\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_k}+\frac{\partial u_k}{\partial a_m}+\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\frac{\partial u_i}{\partial a_m}\right)\mathrm{d}a_k\mathrm{d}a_m\end{aligned}$$

定义

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$E_{km}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial a_k}+\frac{\partial u_k}{\partial a_m}+\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\frac{\partial u_i}{\partial a_m}\right) \tag{9.13}$$

$$|\mathrm{d}r|^2-|\mathrm{d}a|^2=2E_{km}\mathrm{d}a_k\mathrm{d}a_m \tag{9.14}$$

如果用欧勒描述方法，视 r 为独立变量，u 和 a 都是 r 的函数，即

$$a_i=x_i-u_i \qquad (i=1,2,3)$$

$$\mathrm{d}a_i=\mathrm{d}x_i-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$$

将此式代入(9.12)，经整理得

$$|\mathrm{d}r|^2-|\mathrm{d}a|^2=\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_m}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_m$$

定义

$$e_{km}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_m}-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right) \tag{9.15}$$

$$|\mathrm{d}r|^2-|\mathrm{d}a|^2=2e_{km}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_m \tag{9.16}$$

可以看出，连续介质任意二物质点间距离的变化——形变，完全由一二阶张量的分量 E_{km} 或 e_{km} 决定，E_{km} 与 e_{km} 的区别只在于描述连续介质的独立自变量不同，引入符号表示此张量，

$$\{E_{km}\}=\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{13}\\E_{21}&E_{22}&E_{23}\\E_{31}&E_{32}&E_{33}\end{pmatrix}$$

$$\{e_{km}\}=\begin{pmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\e_{21}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{pmatrix}$$

也可用并矢 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{e}$ 表示. 该张量称作应变张量. 容易看出

$$E_{mk}=E_{km}, \qquad e_{mk}=e_{km}$$

应变张量是对称张量. 二长度平方差统一表为

$$|\mathrm{d}r|^2-|\mathrm{d}a|^2=2E_{km}\mathrm{d}a_k\mathrm{d}a_m$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= 2e_{km}dx_k dx_m \qquad (9.17)$$

应变张量(9.13)和(9.15)，以及(9.17)式，是在任意形变条件下导出的，它们与位移对坐标(实体坐标或空间坐标)的偏导数呈非线性关系. 所以，这里导出的应变表式适用于任意有限形变.

五、小形变的应变张量；张应变与切应变

对大量弹性力学的实际问题，形变都是很小的，相邻二点的位移之差是很小的量，即

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1 \quad 或 \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right| \ll 1$$

对所有的 i, j 都成立. 此时(9.13)和(9.14)中最后一项是二阶小量，可以忽略，应变张量化为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (9.18)$$

由 $x_k = a_k + u_k$ 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial a_i} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial a_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i}\right) \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a_i} \\ &\approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\end{aligned}$$

即在小形变下 $\frac{\partial u_j}{\partial a_i}$ 与 $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ 的差别可以忽略，故有

$$E_{ij} \cong e_{ij} \qquad (9.19)$$

这时应变张量分量与位移偏导数呈线性关系，欧勒描述与拉格朗日描述的区别可以忽略.

现在讨论应变张量分量的物理意义. 对对角线项 $e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$，$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$，$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$，容易看出，它们分别是连续介质在形变前的 a_1，a_2 和 a_3 点及其邻域沿 x 轴、y 轴和 z 轴的相对伸长，即单位

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

长度的伸长量，这也是应变的直观含义. 在小形变下用 x_i 代替 a_i，其意义相同，只是连续介质的点用形变后的坐标来标识而已.

非对角线项的含意不那么直观. 以 e_{12} 为例，并将 1，2 换以 x，y，则

$$e_{12}=e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$\frac{\partial u_y}{\partial x}$——$x$ 方向线段 $PQ=\Delta x$ 的端点 Q 在 y 方向变化 Δu_y（见图 9.2），则在无穷小变量下 $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ 代表的是 Δx 向 y 方向转过的角度 $\Delta\theta_1$，即 $\Delta\theta_1\approx\frac{\Delta u_y}{\Delta x}$. 同理，$\frac{\partial u_x}{\partial y}$——表示 y 方向一线元 Δy 在 x 方向转过的角度 $\Delta\theta_2=\frac{\partial u_x}{\partial y}$. 故

$$2e_{12}=\Delta\theta_1+\Delta\theta_2$$

表示原来互相垂直的两条线段 PQ 和 PR 形变后夹角减小的量，称为剪切应变或切应变. 如果 $\Delta\theta_1\neq0$，$\Delta\theta_2\neq0$，但 $e_{12}=0$，这说明整体发生了旋转，形状并没有变化，切应变为零. 对其他非对角线项的含意可作类似解释.

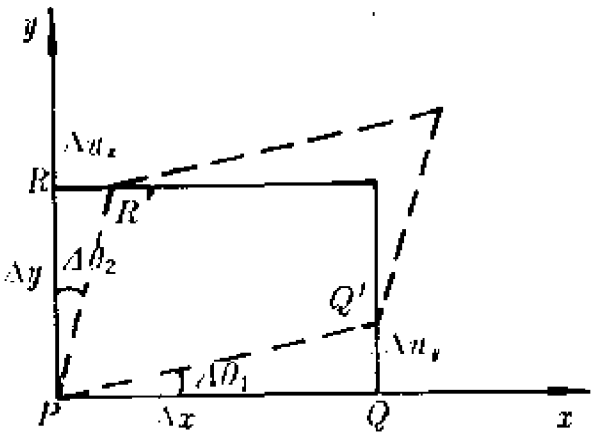


图 9.2

应变张量对角线项之和表示连续介质体积的相对变化——体应变. 考虑形变前介质某体积元 $dV=da_1da_2da_3$，为简化讨论，假定只发生伸长形变，形变后的体积元变为 $dV'=dx_1dx_2dx_3$，由 $dx_i=du_i+da_i=\frac{\partial u_i}{\partial a_j}da_j+da_i$，且只有伸长形变，所有 $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}=0$（当 $i\neq j$），则

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$dV' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1}da_1 + da_1\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial a_2}da_2 + da_2\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial a_3}da_3 + da_3\right)$$
$$= (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33})da_1da_2da_3$$

注意到 e_{11}, e_{22}和 e_{33}都是小量，忽略二次以上小量，有

$$dV' \cong (1 + e_{11} + e_{22} + e_{33})dV$$

单位体积的相对变化为

$$e = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{(1 + e_{11} + e_{22} + e_{33})dV - dV}{dV}$$
$$= e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{ii}$$

且

$$e = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot u \qquad (9.20)$$

应变张量的分量完备地描述了连续介质的形变. 对角元反映的是沿三个坐标轴的伸长缩短形变；非对角元反映的是剪切形变，即几何形状的变化；而对角线元之和反映的则是体积的变化.

应变张量的分量在选定坐标系后才能给出，其值与坐标选择有关. 与一般二阶张量一样，通过坐标变换可使应变张量的非对角元化为零，这样的坐标系称应变主轴坐标系. 关于这一部分理论读者可在连续介质或弹性力学的书刊中查到.

六、小形变元位移的分解

连续介质的一般运动变化由位移场 $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$来描述. 在小形变下(即$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1$)元位移 du 可表示为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_j}dx_j$$

或写成分量形式为

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_j$$

其中

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = e_{ij}$$

是应变张量 $\mathbf{e} = e_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \{e_{ij}\}$ 的分量，是对称张量. 取

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varphi_{ij} \tag{9.21}$$

是一反对称张量 $\{\varphi_{ij}\}$ 的分量，对角线元恒为零. 则

$$\mathrm{d}u_i = \varphi_{ij}\mathrm{d}x_j + e_{ij}\mathrm{d}x_j \tag{9.22}$$

如果引入位移矢量场 $\boldsymbol{u}$ 的旋度，即定义

$$\Lambda\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{u}$$

其分量与 φ_{ij} 有简单关系

$$\begin{aligned}\Lambda\varphi_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varphi_{kj}\end{aligned}$$

用 ε_{ist} 作用上式左右，并利用关系式

$$\varepsilon_{ist}\varepsilon_{ijk} = \delta_{sj}\delta_{tk} - \delta_{sk}\delta_{tj}$$

可得出

$$\varphi_{ij} = \varepsilon_{kij}\Lambda\varphi_k = -\varepsilon_{ijk}\Lambda\varphi_k$$

从而

$$\varphi_{ij}\mathrm{d}x_j = \varepsilon_{ikj}\Lambda\varphi_k\mathrm{d}x_j = (\Lambda\boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r})_i$$

$$\mathrm{d}u_i = ((\Lambda\boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r})_i + e_{ij}\mathrm{d}x_j$$

矢量式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \Lambda\boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathbf{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.23}$$

其中 $\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{r}$ 点位移为 $\boldsymbol{u}$，在 $\boldsymbol{r}$ 无限小邻域 $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的位移$u(r+dr)$可用$u(r)+du$表示，即

$$u(r+dr)=u(r)+\Delta\varphi\times dr+e\cdot dr$$

它由三部分组成：第一项$u(r)$代表平动，自由度是3；第二项$\Delta\varphi\times dr$代表刚性转动，由角位移$\Delta\varphi$决定，自由度也是3；最后一项$e\cdot dr=e_{ij}dx_j$，e_i是纯形变引起的位移，由应变张量e决定，$e_{ij}(i,j=1,2,3)$中只有6个是独立的，自由度是6. 这样，描述r点邻域的位移，需要12个独立的数，自由度是12. 很自然可以选

$$u_i,\Delta\varphi_i,\quad e_{ij}\qquad(i,j=1,2,3)$$

为广义坐标. 其实我们还知道，它们并不是完全独立的，只要知道了位移场$u(r,t)$的三个分量，$\Delta\varphi$和e都可依据确定的关系由u导出，这时把u当作基本量，而其他当作导出量，当然这就要给出9个导出量与u的关系式.

此外，物体的形变总与热状态有关，在连续介质力学中，力学量与热学量有着本质的联系，因此，描述形变体热状态还应包括的广义坐标是绝对温度$T=T(x_1,x_2,x_3,t)$.

七、应变速度张量

应变张量的时间变化率为应变速度张量. 我们首先在小形变下导出应变速度张量. 由位移$u=u(r,t)$，速度在小形变下为

$$v=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+v\cdot\nabla u\cong\frac{\partial u}{\partial t}$$

对应变也有同样的结果，且偏导数可交换次序

$$\begin{aligned}\dot{e}_{ij}&=\frac{de_{ij}}{dt}=\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\end{aligned}\tag{9.24}$$

需指出，对有限形变的应变速度张量也取上述形式，无需作出

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$是小量的假定.

对(9.23)求时间导数,得出

$$dv = \omega \times dr + \dot{e} \cdot dr \tag{9.25}$$

其中

$$\omega = \Delta\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\nabla \times v$$

表示旋转角速度,分量式

$$\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk}\dot{\varphi}_{kj} \quad i = 1,2,3$$

$$\dot{\varphi}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) \tag{9.26}$$

§9.2 应力与应力张量

一、彻体力与表面力

研究连续介质动力学问题,必须讨论作用在连续介质中的作用力,作用力有两类.

其中一类,是作用在连续介质一切物质点(即一小体积元)上并与质点质量 Δm 成比例的质量力,它是不需要与物体接触而作用在物质一切部分的力,这种力称彻体力或体力. 我们熟悉的重力、引力、电磁力以及惯性力都属于彻体力. 对某质量元 Δm 受到的彻体力为

$$\Delta F = f\Delta m$$

其中 f 是作用在单位质量上的力,称质量力密度. 如物质密度为 ρ,质量元 Δm 的体积为 ΔV,则

$$\Delta F = \rho f \Delta V$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

显然 ρf 是体积力密度，即单位体积介质受到的作用力.

另一类力，是物体与物体相接触通过接触面传递的作用力，或物体的一部分与另一部分通过界面相互作用的力，这种力称表面力或面力，是只有物体直接接触才起作用的力. 面力的大小和方向与作用面的取向有关，而方向一定的面元上面力的大小又与面元的面积成比例. 为此，类似于体力密度，要引入面力密度的概念. 单位面积上受的作用力为面力密度，也叫应力.

面力密度与体力密度是同数量级的. 任一体积元 ΔV 是三级小量，与 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 成比例，而面积元是二级小量与 $\Delta x\Delta y$（或 $\Delta y\Delta z$，$\Delta x\Delta z$）成比例. 所以，连续介质中任一体积元 ΔV 所受体力总比面力小一个量级，面力作用更为重要.

面力是宏观力学概念，是宏观意义下的短程力，即距离非常小时，也就是宏观上直接接触时才发生作用. 从微观上看不存在面力，任何力的本质都是原子、分子及质量间的相互作用，是体力.

二、应　　力

应力是指单位面积上的作用力，是矢量，其严格定义如下.

考虑连续介质中的一部分，如图 9.3 所示，A 部分对 B 部分的作用力通过截面 S 实现. 其中在 D 点通过法线为 n 的面元 ΔS，A 对 B 的作用力为 ΔF_n，则单位面积上的作用力为

$$\sigma_n(D)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta F_n}{\Delta S} \tag{9.27}$$

此力称为应力，是 D 点法线正方向介质对法线负方向介质的单位面积上的作用力. 该力与位置 D 有关；同一点不同取向面元上的应力不一定相同，即应力 $\sigma_n(D)$ 与取向 n 有关；此外，ΔF_n（从而 σ_n）一般与 n 不同向. 由定义知 σ_n 沿法向 n 的分力为正，表示 A 对 B 的拉力.

完备地了解连续介质内部力的分布情况，就是要知道介质

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

内任一点、任一取向面元上应力的大小. 如果能找到各点不同取向面积元上应力大小之间的关系，就有可能在知道了某些方向上的应力后求出任何取向面元上的应力值. 我们来寻找这种关系.

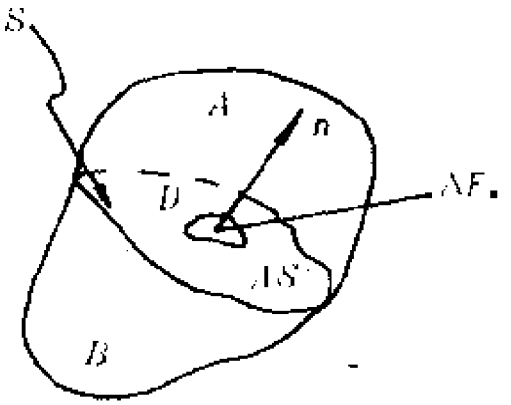


图 9.3

三、应力张量

考虑连续介质内任一体积元，如图 9.4 所示的四面体，并假定它的三个面恰为坐标系 O-xyz 的三个坐标面，第四个面 ABC 与三个坐标轴相交于 A，B 和 C.

ABC 面外法线 n，受力 ΔF_n，面积元 ΔS_n；

BOC 面外法线 $-i$，受力 ΔF_{-x}，面积元 ΔS_x；

AOC 面外法线 $-j$，受力 ΔF_{-y}，面积元 ΔS_y；

AOB 面外法线 $-k$，受力 ΔF_{-z}，面积元 ΔS_z.

如果假定连续介质的密度是 ρ，在该体积元内单位质量的加速度为 w，受到的体力密度是 f，并注意到该体积元 ΔV 是小量，ρ，w 和 f 均可看做均匀的. 则根据牛顿第二定律或达兰伯定理，该体积元所受面力、体力与惯性力项之和为零. 或写为

$$\Delta F_n + \Delta F_{-x} + \Delta F_{-y} + \Delta F_{-z} = (\rho w - \rho f)\Delta V \tag{9.28}$$

引入面积元，化为

$$\Delta S_n\left(\frac{\Delta F_n}{\Delta S_n}\right) + \Delta S_x\left(\frac{\Delta F_{-x}}{\Delta S_x}\right) + \Delta S_y\left(\frac{\Delta F_{-y}}{\Delta S_y}\right) + \Delta S_z\left(\frac{\Delta F_{-z}}{\Delta S_z}\right)$$
$$= (\rho w - \rho f)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

由于体积元与面积元比是高一级小量，所以在令 A，B，C 无限趋于 0 点，$\Delta V \to 0$ 时，上式右端以更快的速度趋于零，左端括弧

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

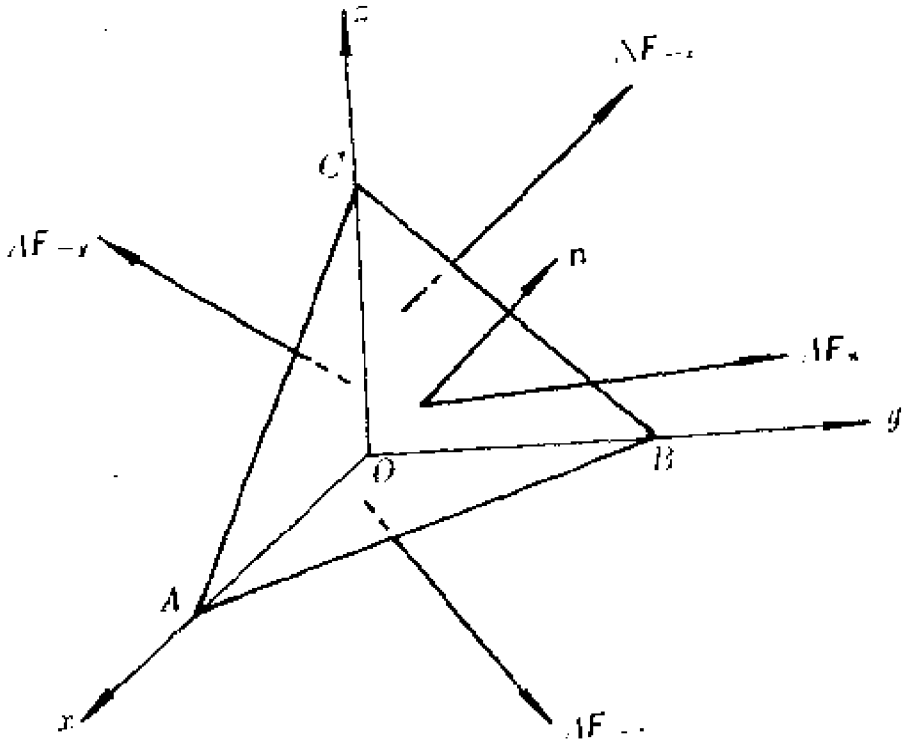


图 9.4

内的项按(9.27)定义是相应面上的应力，故得同一点面力平衡方程

$$\triangle S_n\sigma_n + \Delta S_x\sigma_{-x} + \Delta S_y\sigma_{-y} + \Delta S_z\sigma_{-z} = 0 \qquad (9.29)$$

假定法线 n 的方向余弦已知，即

$$n = \cos(\hat{nx})i + \cos(\hat{ny})j + \cos(\hat{nz})k$$

则有

$$S_x = S_n\cos(\hat{nx}), S_y = S_n\cos(\hat{ny}), S_z = S_n\cos(\hat{nz})$$

代入(9.29)，约掉 S_n 并移项，得

$$\sigma_n = -\cos(\hat{nx})\sigma_{-x} - \cos(\hat{ny})\sigma_{-y} - \cos(\hat{nz})\sigma_{-z}$$

由牛顿第三定律

$$\sigma_x = -\sigma_{-x}, \sigma_y = -\sigma_{-y}, \sigma_z = -\sigma_{-z}$$

结果

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sigma_n = \cos(\hat{nx})\sigma_x + \cos(\hat{ny})\sigma_y + \cos(\hat{nz})\sigma_z \qquad (9.30)$$

写成分量式

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx} &= \cos(\hat{nx})\sigma_{xx} + \cos(\hat{ny})\sigma_{yx} + \cos(\hat{nz})\sigma_{zx} \\
\sigma_{ny} &= \cos(\hat{nx})\sigma_{xy} + \cos(\hat{ny})\sigma_{yy} + \cos(\hat{nz})\sigma_{zy} \\
\sigma_{nz} &= \cos(\hat{nx})\sigma_{xz} + \cos(\hat{ny})\sigma_{yz} + \cos(\hat{nz})\sigma_{zz}
\end{aligned} \qquad (9.31)$$

或写成矩阵乘的形式

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{pmatrix} = (\cos(\hat{nx}), \cos(\hat{ny}), \cos(\hat{nz})) \times \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (9.32)$$

(9.31)和(9.32)表明任一点(这里是 O 点)取向 n 的面元上的应力由右端九个分量的一二阶张量决定. 仍改用 1,2,3 表示 x, y, z,此二阶张量可记为

$$\{\sigma_{ij}\} = \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad (9.33)$$

称为应力张量. 其分量的含义 σ_{ij},由引入过程知,前角标 i 表示面元的法线方向,后角标 j 表示此面元上应力沿 j 方向的分量. 例如 σ_{21}就是法线指向正 y 方向的面元上的应力 σ_y 沿 x 轴的分量 σ_{yx}.

如果已知连续介质任一点的应力张量(9.33),则任意取向(给出法线 n 的方向余弦)面上的应力可由(9.32)求出. 因此,了解连续介质力的情况(面力),归结为求出应力张量(9.33)九个分量的分布,这每个分量一般都是空间点的函数,可记为 $\sigma(D) = \{\sigma_{ij}(D)\}$.

利用对定点力矩的平衡条件,可以证明(详见后)

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad (9.34)$$

即应力张量也是对称张量,独立分量只有六个. 这时前后角标的

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

含义也可互换. (9.31)或(9.32)可一般表为

$$\sigma_n = n \cdot \sigma = \sigma \cdot n \tag{9.35}$$

应力张量的对角线分量 σ_{11}, σ_{22}和 σ_{33}称为张应力或法应力；非对角线分量 $\sigma_{ij}(i \neq j)$称为剪切应力或切应力. 压强也是常用的面力密度概念，特别在流体力学中用的较多. 压强方向的定义与应力恰好相反，如理想流体中一点的压强为 p，用应力表示为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{9.36}$$

§9.3 连续介质动力学基本方程

一、可变区域上物理量的时间变化率

为后面推导时运用方便，这里先证明一个有用的公式. 考虑一物质体积随时间变化，记为 $V(t)$，界面为 $S(t)$. 物理量 $A(r,t)$在 $V(t)$上总量 $\int_{V(t)} A(r,t)\mathrm{d}V$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A(r,t)\mathrm{d}V = \int_V \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (Av)\right]\mathrm{d}V \tag{9.37}$$

我们来证明(9.37)式.

依据定义，并注意积分限 $V(t)$随时间变化，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} A(r,t)\mathrm{d}V \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V+\mathrm{d}V} A(r,t+\Delta t)\mathrm{d}V - \int_V A(r,t)\mathrm{d}V\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_V [A(r,t+\Delta t) - A(r,t)]\mathrm{d}V \\
&\quad + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta V} A(r,t+\Delta t)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

其中前一项$\frac{1}{\Delta t}$可移进积分号内，取极限为 A 对时间 t 的偏导数.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

第二项是扩大(或减小)的体积 ΔV 中 A 的贡献. 体积的变化应为 $t+\Delta t$ 时刻界面 $S(t+\Delta t)$ 与 t 时刻 $S(t)$ 之差. 在面元 dS 上，外法线为 n，dS 处物质界面的移动速度为 v，则在 Δt 时间内在 dS 处发生的区域变化 $dV=dSv_n\Delta t$，其中 $v_n=v\cdot n$，对整个曲面积分应是 Δt 时间内该物质体积的变化 ΔV，这样上式后一积分可用面积分表出，并取 $dSn=dS$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta V}A(r,t+\Delta t)dV=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\oiint_S A\Delta V_n dS\Delta t$$

$$=\oiint_S Av\cdot dS$$

应用高斯定理

$$\oiint_S Av\cdot dS=\int_V\nabla\cdot(Av)dV$$

两项相加得到(9.37)式.

二、质量守恒定律——连续性方程

质量守恒即物质不灭，确定质量的物体可以运动变形，但其质量 M 保持不变，也即质量 M 的随体微商不变，

$$\frac{dM}{dt}=0 \tag{9.38}$$

用 V 表示连续介质所占体积，ρ 为密度，$M=\int_V\rho dV$，应用(9.37)式

$$\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V\rho dV$$

$$=\int_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho v\right]dV=0$$

由于 V 的选择是任意的，上式为零只有被积函数恒等于零，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0 \tag{9.39}$$

或

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

注意到随体微商公式(9.8)，上式也可写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.39}$$

这是欧勒描述下的质量守恒定律的微分形式，也称连续性方程，在流体力学中经常用到.

利用(9.37)式和连续性方程(9.39)式容易证明下述关系式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho A \mathrm{d}V = \int_V \rho \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V \tag{9.40}$$

在后面的推导中将用到此式.

在拉格朗日描述下，连续性方程将取不同的形式. $t=0$时刻，体积为V_0、密度为ρ_0的连续介质总质量为 $M = \int_{V_0} \rho_0 \mathrm{d}V_0$；$t$时刻，经运动变形体积变为$V$，密度变为$\rho$，但其总质量 $M = \int_V \rho \mathrm{d}V$ 应不变，即

$$\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_{V_0} \rho_0 \mathrm{d}V_0$$

$t=0$时刻某连续介质物质点的直角坐标a_1，a_2和a_3，就是描述介质的拉格朗日变量——实体坐标. 该物质点t时刻的坐标(空间坐标)为x_1，x_2和x_3，则$t=0$时刻的体积元 $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}a_3$，$t$时刻变为 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$. 如果采用拉格朗日描述，要把空间坐标用实体坐标表出，利用关系

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3; t) \qquad i = 1,2,3$$

及体积分换元公式

$$\mathrm{d}V = J\mathrm{d}V_0$$

其中J为雅可比行列式.

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial a_i} \frac{\partial x_2}{\partial a_j} \frac{\partial x_3}{\partial a_k}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

代入积分表示式

$$\int_{V_0}\rho J\mathrm{d}V_0=\int_{V_0}\rho_0\mathrm{d}V_0\Rightarrow\int_{V_0}(\rho J-\rho_0)\mathrm{d}V_0=0$$

由于积分域V_0的任意性，立刻有

$$\rho_0=\rho J \tag{9.41}$$

这就是拉格朗日描述下的连续性方程.

(9.39)和(9.41)式是对连续介质未作任何假定的条件下导出的，适于任意有限形变. 在小形变下(9.41)中的J有更明显的物理意义. 此时

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|\ll 1$$

以

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\delta_{ij}$$

代入雅可比行列式中，并忽略二级以上小量，有

$$J=1+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=1+\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

代入(9.41)则连续性方程化为

$$\rho_0=\rho(1+\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

或

$$\rho=\rho_0(1-\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{9.42}$$

因位移散度是体应变，即

$$e=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=J-1=\frac{\mathrm{d}V-\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}V_0}$$

三、运动方程

(一)连续介质的牛顿运动方程

由牛顿运动定律，可导出连续介质的运动微分方程.

考虑连续介质中体积为V的一块物体，其界面为S，面元$\mathrm{d}S$的外法线为$\boldsymbol{n}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{n}$，速度场用$\boldsymbol{v}$表示，单位质量的体力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

密度为 ρ，应力张量为 σ，界面 S 上的面力密度按(9.35)式为 $\sigma_n = n \cdot \sigma$. 则体积为 V 的连续介质所受体力的合力为 $\int_V \rho f \mathrm{d}V$；通过界面 S 所受面力总和为 $\oint_S \mathrm{d}S \cdot \sigma$，介质的总动量为 $\int_V \rho v \mathrm{d}V$. 根据牛顿第二定律：物体的动量变化率应等于物体所受外力之和，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v \mathrm{d}V = \int_V \rho f \mathrm{d}V + \oint_S \mathrm{d}S \cdot \sigma \qquad (9.43)$$

左端利用(9.40)式，右端第二项利用高斯定理化为体积分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v \mathrm{d}V = \int_V \rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$\oint_S \mathrm{d}S \cdot \sigma = \int_V \nabla \cdot \sigma \mathrm{d}V$$

(9.43)写成

$$\int_V \left[\rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \rho f - \nabla \cdot \sigma\right]\mathrm{d}V = 0$$

由于 V 的任意性，得出连续介质微分形式的运动方程

$$\rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho f + \nabla \cdot \sigma \qquad (9.44)$$

写成分量形式

$$\rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \qquad i = 1,2,3$$

此式与质点动力学运动方程的差别是该式是对单位体积建立的，此外右端多出应力梯度对力的贡献项. 它是解决连续介质动力学的最基本方程.

(二)动能定理

由(9.44)式不难导出连续介质的动能变化定理. 用速度 v 点乘(9.44)式两边

$$\rho v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho v \cdot f + v \cdot (\nabla \cdot \sigma) \qquad (9.45)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

左端

$$\rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right)$$

定义二阶张量(或并矢)双点乘为 $\mathbf{A}:\mathbf{B}=A_{ij}B_{ji}$，由

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \sigma) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i \sigma_{ik}) \\ &= v_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma : \nabla \boldsymbol{v} \end{aligned} \qquad (9.46)$$

其中后一项

$$\begin{aligned}\sigma : \nabla \boldsymbol{v} &= \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= \sigma_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right] + \sigma_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right]\end{aligned}$$

由(9.24)和(9.26)，并注意 σ_{ik} 是对称张量，则

$$\sigma : \nabla \boldsymbol{v} = \sigma_{ik}\dot{e}_{ki} + \sigma_{ik}\dot{\varphi}_{ik} = \sigma : \dot{\mathbf{e}} + \sigma : \dot{\varphi}$$

又因 $\dot{\varphi}_{ik}$ 是反对称张量，$\dot{\varphi}_{ki} = -\dot{\varphi}_{ik}$，所以

$$\sigma : \dot{\varphi} = \sigma_{ik}\dot{\varphi}_{ki} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}(\dot{\varphi}_{ik} + \dot{\varphi}_{ki}) = 0$$

即连续介质刚性转动时，应力作的功恒为零. 这样由(9.46)式可知，

$$\boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \sigma) = \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \sigma) - \sigma : \mathbf{e}$$

代回(9.45)得到动能定理的微分表示式

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \sigma) - \sigma : \dot{\mathbf{e}} \qquad (9.47)$$

如果体力是有势的

$$\boldsymbol{f} = -\nabla \varepsilon$$

式中 ε 是单位质量在外场中的势能，并一般的 ε 可能明显的依赖于时间 t，即 $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$，于是

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}) = -(\boldsymbol{v} \cdot \nabla \varepsilon) = -\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) \qquad (9.48)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上式最后一步用到对 ε 的随体微商公式. (9.47)可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2+\varepsilon\right)=\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\sigma)-\sigma:\dot{\boldsymbol{e}} \quad (9.49)$$

对确定体积 V 的连续介质，通过对(9.47)式在 V 上积分，并利用(9.40)式和高斯定理，可得积分形式的动能定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\frac{1}{2}\rho v^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\oiint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{v}-\int_V\sigma:\dot{\boldsymbol{e}}\mathrm{d}V \quad (9.50)$$

此式左端是体积为 V 的连续介质的总动能变化率. 右端第一项是单位时间内体力作功(功率)总和；第二项是单位时间内 S 表面面力作功总和；最后一项是单位时间内由于形变内应力所作功的总和，它是机械能与热能间的转换项. 由于形变，应力所作功如果为正，是机械能转变为热能，体系动能应减小，所以该项前面取负号，体系机械能不守恒.

(三)角动量定理

体积为 V，界面为 S 的连续介质，对某定点角动量的变化率应等于体力和来自界面外的面力力矩之和. 质量元 $\rho\mathrm{d}V$ 的角动量 $\mathrm{d}J=\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$；$\rho\mathrm{d}V$ 受到体力力矩为 $\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V$；$S$ 表面面元 $\mathrm{d}S$ 上面力力矩 $\boldsymbol{r}\times(\sigma\cdot\mathrm{d}S)$，则物体 V 的角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\oiint_S\boldsymbol{r}\times\sigma\cdot\mathrm{d}S \quad (9.51)$$

利用(9.40)和高斯定理，并注意到 V 的任意性，得到

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}+\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\sigma) \quad (9.52)$$

由运动方程(9.44)和上式可自然导出应力张量是对称张量. 实际上

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\sigma)=\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\sigma)+(\sigma\cdot\nabla)\times\boldsymbol{r}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

代入(9.52)式后移项，并用到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\times v)=r\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

则

$$r\times(\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\rho f-\nabla\cdot\sigma)=(\sigma\cdot\nabla)\times r$$

左端括号内是运动方程，则恒有

$$(\sigma\cdot\nabla)\times r=\varepsilon_{ijk}\sigma_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}x_k\theta_i$$

$$=\varepsilon_{ijk}\sigma_{jl}\delta_{lk}\theta_i=\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\theta_i=0$$

这要求每一分量都为零，即

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\sigma_{jk}-\sigma_{kj})=0$$

当 $i\neq j\neq k$ 时 $\varepsilon_{ijk}=1$，则必有

$$\sigma_{jk}=\sigma_{kj}$$

应力张量的对称性是连续介质角动量定理和运动方程的自然推论.

四、能量守恒定律与热力学能量方程

由于物体的形变常伴以传热过程，如果只限于机械能与热能间的相互转换，则热力学第一定律给出能量守恒定律的形式是

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\qquad(9.53)$$

其中$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$是单位时间内体系增加的能量(机械能与内能)，$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$是单位时间内外力作功之和，$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$是单位时间内物体系增加的热量.

对体积为 V，表面为 S 的连续介质体，假定内能密度(单位质量的内能)为 e，动能密度为$\frac{v^2}{2}$，体力密度 f，热源密度 h(单位

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质量介质在单位时间内放出的热量)，热流密度向量 q（对法向 n，$q_n=q\cdot n$，单位时间内通过单位面积由 $-n$ 方向流向正 n 方向的热流为正），应力张量为 σ. 则物体 V 的总能量变化是

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)dV$$

外力作机械功

$$\frac{dW}{dt}=\int_V\rho f\cdot v\,dV+\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S\sigma\cdot v\cdot dS$$

单位时间热源放出的总热量是

$$\int_V\rho h\,dV$$

注意到 q 的定义，且 n 为界面 S 上面元 dS 的外法线，则通过 dS 流入的热量为

$$-q\cdot n\,dS=-q\cdot dS$$

单位时间内通过周界面 S 流入的热量是

$$-\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S q\cdot dS$$

单位时间增加热量是

$$\frac{dQ}{dt}=\int_V\rho h\,dV-\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S q\cdot dS$$

代入能量守恒定律，得积分形式的能量方程

$$\frac{d}{dt}\int_V\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)dV$$

$$=\int_V(\rho f\cdot v+\rho h)dV+\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S(\sigma\cdot v-q)\cdot dS\quad(9.54)$$

用(9.40)和高斯定理不难导出微分形式的能量方程

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+e\right)=\rho f\cdot v+\rho h+\nabla\cdot(\sigma\cdot v)-\nabla\cdot q$$

(9.55)

从(9.55)左右减去动能定理(9.47)的左右各项，则可得到内能变化的微分公式

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\rho\frac{de}{dt}=\rho h-\nabla\cdot q+\sigma:\dot{e} \tag{9.56}$$

此式右端最后一项与(9.47)最后一项符号相反，这正说明该项实现的是机械能与热能间的转换，机械能减小则热能增加，总能量守恒.

五、热力学第二定律

能量方程建立了连续介质在运动变形过程中机械能与热能的相互转换与守恒关系，热力学第二定律则指出这种转换是否可逆和不可逆时过程的方向性，特别是引入熵的概念，对建立连续介质力学理论也有重要意义.

用 dQ 表示介质单位质量获得的元热量，T 为绝对温度，热力学第二定律指明，对可逆过程 $\frac{dQ}{T}$ 是某状态函数的全微分，即

$$dS=\frac{dQ}{T}$$

状态函数 S 是介质单位质量的熵——熵密度. 对不可逆过程

$$dS>\frac{dQ}{T}$$

或将二式写在一起，

$$dS\geqslant\frac{dQ}{T} \tag{9.57}$$

连续介质发生的任何运动变化应受此不等式制约.

在位移 u_i、速度 v_i 以及他们的偏导数 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 都是小量，从而它们的相乘项可以忽略的条件下，形变称为线性的，过程进行缓慢，是可逆的，对单位体积应用(9.57)式，并取等号

$$\rho T\,dS=\rho dQ$$

单位体积获得热量

$$\rho dQ=(\rho h-\nabla\cdot q)dt,$$

则对单位时间单位体积介质有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$(\rho h - \nabla \cdot q) = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho T \frac{dS}{dt}$$

代入内能变化公式(9.56)并整理得

$$\frac{de}{dt} = T \frac{dS}{dt} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\dot{e}_{ij}$$

注意

$$\dot{e}_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt}$$

则有

$$de = T\,dS + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij} \tag{9.58}$$

又知单位质量的自由能

$$f = e - TS, df = de - T\,dS - S\,dT$$

所以，以 f 代替 e 有

$$df = -S\,dT + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij} \tag{9.59}$$

由(9.59)式知自由能 f 是绝对温度 T 和应变张量分量 e_{ij} 的函数，即

$$f = f(T, e_{ij})$$

对等温过程，T 等于常数，$dT=0$，f 只是形变张量的函数，

$$df(e_{ij}) = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij} \tag{9.60}$$

或

$$\frac{\partial f(e_{ij})}{\partial e_{ij}}de_{ij} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij}$$

(9.60)式右端是应力作的功，左端是某函数全微分，f 此时实际上是介质单位质量的形变能，或称形变位能，且比较 de_{ij} 前系数，立刻有

$$\sigma_{ij} = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial e_{ij}}\right)_T \qquad (i,j=1,2,3) \tag{9.61}$$

注意到小形变 ρ 可视为常数，并取 $W=(\rho f)_T$，则有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\qquad (i,j=1,2,3)\tag{9.62}$$

W 是单位体积的形变位能.

对绝热过程($h=0,q=0$),$\mathrm{d}S=0$,由(9.58)得

$$\sigma_{ij}=\rho\left(\frac{\partial e}{\partial e_{ij}}\right)_s=\left(\frac{\partial \rho e}{\partial e_{ij}}\right)_s=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\tag{9.63}$$

在绝热过程形变能 $W=(\rho e)_s$.

§9.4 本构方程

在前一节里,建立起对所有连续介质都应满足的基本方程,它们是质量守恒定律,动量变化定律和能量守恒定律,即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot v=0\tag{9.39}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\rho f+\nabla\cdot\sigma\tag{9.44}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\rho h-\nabla\cdot q+\sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\tag{9.56}$$

以及熵不等式(9.57). 动能定理和角动量定量均可从(9.44)导出,不提供新的独立方程. 上述五个方程中,除体力密度 f 和热源密度 h 通常是已知的外,还包含14个未知物理量(ρ,v,e,q 和 σ_{ij}). 为求出连续介质动力学问题的解,还必须在各物理量间建立另外9个补充的方程,才能使方程的个数与未知量的个数一致,得到封闭的方程组. 这些补充的方程,对不同的连续介质,或对同一连续介质在不同的物理条件下将是不同的,这样的方程统称为本构方程. 其中确定应力的方程称为应力应变关系;确定热流密度向量 q 的称作传热方程;而热力学函数密度、压强、温度、内能、自由能和熵满足的方程又称状态方程. 这样一些方程通常是在大量实验基础上提出理论模型,再通过实验来确定其中的参数和函数关系. 建立各种模型下的本构方程本身就是连

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续介质力学的主要研究课题之一.

本构方程虽然不能完全从理论上导出，必须同时依靠实验，但从理论上却可提出一些建立本构方程所应遵从的基本原理或公理. 依据这些，可以限定本构方程可能采取的形式，缩小本构方程选择的范围，减少实验的盲目性，从而大大减化本构方程的建立过程. 这些基本公理是：本构方程与坐标系选择的无关性；本构方程对空间平移与空间旋转的不变性以及本构方程的时间平移不变性. 依据这些公理，本构方程一定是张量方程，其函数应是时、空坐标的单值连续函数，但不显含(x_1,x_2,x_3)和t；在坐标系的刚性旋转变换中保持形式不变. 限于篇幅，这里我们仅应用这些结论，论证从略.

一、理想弹性体的应力应变关系

理想弹性体是小形变的各向同性的线性形变连续介质. 它的应力应变关系是一典型的本构方程，应用广泛. 这里首先给出固体介质的应力应变关系，然后再扩展到包括其他因素的形式.

理想弹性体的形变是可逆过程，可以应用§9.3之五适用于可逆过程的热力学公式(9.58)或(9.59)式，对等温过程，由(9.60)和(9.61)以及(9.62)得

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\qquad(i,j=1,2,3)\tag{9.62}$$

W是单位体积的形变位能，也就是单位体积的自由能$W=(\rho f)_T$. 按前面已指出的一般公理的要求W不含坐标$r(x_1,x_2,x_3)$和时间t，它通常还应是温度的函数$W=W(T,e_{ij})$，对等温过程，$T=T_0$为常数，则$W=W(T_0,e_{ij})$，可只看作是形变张量分量e_{ij}的函数. W的函数形式虽然不知道，但在小形变下$e_{ij}\ll 1$，可将W展成e_{ij}的幂级数，然后忽略高阶小项. 视W是$e_{ij}(i,j=1,2,3)$的多元函数，在$e_{ij}=0$点附近将W作泰勒展开

$$W(e_{ij})=W(e_{ij}=0)+\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\Big|_{e_{ij}=0}e_{ij}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big|_{e_{ij}=0}e_{ij}e_{kl}+\cdots$$

注意到没有形变，从而 $e_{ij}=0$ 时对应没有力作用的情况，这时内应力应为零，即 $\sigma_{ij}=0$. 由此，上展开式中第二项 $\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}\Big|_{e_{ij}=0}\equiv 0$，对所有 i,j 值成立. 此外，第一项 $W(e_{ij}=0)$ 是常数，作为位能零点值可以取为零，$W(e_{ij}=0)\equiv 0$. 如果只保留到二阶小项，相当于保留到最低阶不等于零的那些项，则上式化为

$$W(e_{ij})\doteq\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big|_{e_{ij}=0}e_{ij}e_{kl} \qquad (9.64)$$

这与导出微振动位能展开式的步骤完全相同，只要把 e_{ij} 理解成广义坐标. 注意双角标代表求和，上式包括很多项，它们的系数都是常数. 由于形变位能 W 是标量，在坐标旋转变化下应是不变量，则其右端作为二阶张量的二次齐次函数也必须是不变量. 由张量分析知(证明从略)二阶张量只能构成两个二次幂的不变量，它们是对角线分量和的平方，记为 I_1，

$$I_1=(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2=e_{ii}^2=e^2=(\nabla\cdot u)^2$$

和 e_{ij} 所有分量平方和，记为 I_2，

$$I_2=e_{ij}^2$$

这就是说要保证(9.64)式是不变量，其系数只有两个是不同的，(9.64)式应取如下形式：

$$W(e_{ij})=\frac{1}{2}\lambda e_{ii}^2+\mu e_{ij}^2 \qquad (9.65)$$

这便是等温形变理想弹性体形变能的一般表示式. 其中 λ 和 μ 是弹性常数，称拉梅系数，将由实验来定.

将(9.65)代入(9.62)立即得到理想弹性体的应力应变关系

$$\sigma_{ij}=\lambda e\delta_{ij}+2\mu e_{ij}\qquad(i,j=1,2,3) \qquad (9.66)$$

其中

$$e=e_{kk}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=\nabla\cdot u$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

写成分量形式则为

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\lambda e+2\mu e_{11}\\ \sigma_{22}&=\lambda e+2\mu e_{22}\\ \sigma_{33}&=\lambda e+2\mu e_{33}\\ \sigma_{12}&=\sigma_{21}=2\mu e_{12}\\ \sigma_{13}&=\sigma_{31}=2\mu e_{13}\\ \sigma_{23}&=\sigma_{32}=2\mu e_{23}\end{aligned}\qquad(9.67)$$

由上式后三式看出 μ 是剪切应力与剪切应变的比例系数，$\mu=\frac{1}{2}\sigma_{ij}/e_{ij}(i\neq j)$，称剪切模量或弹性体的刚度模量. λ 的物理意义不明确，可引入另外的弹性模量. 考虑一特殊情况，令

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma$$

相当于全部压缩或膨胀，然后将(9.67)的前三式相加，得

$$\sigma=Ke$$

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu=\frac{\sigma}{e}\qquad(9.68)$$

这是体积压缩模量，由于物体受压时体积缩小，因此恒有 $K>0$.

考虑柱体的单向拉伸，假定是在 x_1 轴向施加拉力，侧面为自由面，这时应力场中只有 $\sigma_{11}\neq 0$，(9.67)化为

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\lambda e+2\mu e_{11}\\ 0&=\lambda e+2\mu e_{22}\\ 0&=\lambda e+2\mu e_{33}\end{aligned}$$

不难解出

$$\sigma_{11}=\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}e_{11}$$

$$e_{22}=e_{33}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}e_{11}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

引入

$$E=\frac{\sigma_{11}}{e_{11}}=\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}\quad\cdot \tag{9.69}$$

为拉伸弹性模量，也称杨氏模量，恒有 $E>0$. 引入

$$\nu=-\frac{e_{22}}{e_{11}}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{9.70}$$

称泊松比. 因纵向拉伸总伴随着横向缩短，即 $e_{11}>0$时，必有 $e_{22}<0$，故按(9.70)的定义，恒有 $\nu>0$. 由(9.69)和(9.70)还可解出

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{9.71}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{9.72}$$

由于 $E>0,\nu>0$，再由(9.72)必有 $\mu>0$. 又因为 $\lambda+\mu>\lambda+\frac{2}{3}\mu=K>0$，所以由(9.70)必有 $\lambda>0$，这样按(9.70)，μ 取任何可能正值，ν 值不会超过0.5，即$0<\nu<0.5$. 这些弹性模量的物理意义不同，有的便于在理论推导中使用，如 λ 和 μ；有的便于在实验中测量，如 K 和 E，它们互相有一定联系，其中独立的只有两个.

对理想流体，没有粘滞阻力，切应力为零，流体的任何两部分可任意沿切向产生相对位移，这相当于切变模量 $\mu=0$. 另外，对流体任何一点不同方向的压强一样，即流体压强是各向同性的，如果用张量表示应是二阶各向同性张量，再注意到压强的定义与应力差一负号，则对理想流体

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}=Ke\delta_{ij}\text{ 或 }p=-Ke \tag{9.73}$$

其中 $K=\lambda$ 是流体压缩模量.

有了前述理论基础，不难扩展到各向异性弹性体情况. 注意到(9.64)左端是标量，右端 $e_{ij}e_{kl}$ 是四阶张量，故其系数也应为一四阶张量，称作四阶弹性模量张量，则对最一般的各向异性介

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

质，形变位能应为

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{9.74}$$

再用(9.62)得到应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \tag{9.75}$$

弹性模量张量 C_{ijkl} 似乎最多有81个分量，但由于 σ_{ij} 和 e_{ij} 都是对称张量，很容易证明 $\{e_{ijkl}\}$ 中只有36个是独立的. 再由(9.75)式和(9.62)式可证

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} = C_{klij}$$

从而独立弹性模量最多只有21个. 对各向同性弹性体 $\{C_{ijkl}\}$ 应是四阶各向同性张量，这时21个弹性常数中就只有两个是独立的了.

二、粘滞弹性体

有弱粘滞性的弹性介质，已不再是理想弹性体，由于内摩擦，机械能将转变为热，这类介质称耗散介质. 这时应力张量分量除与应变有关外，还应包括粘滞应力的贡献. 如用 σ_{ij}' 表示粘滞应力张量的分量，则应力张量应包括两部分，即

$$\sigma_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \sigma_{ij}'$$

σ_{ij}' 的形式由具体模型来定，通常认为，在小形变下，σ_{ij}' 与应变速度张量成比例，并且在各向同性要求下，也只包含两个常数，即取

$$\sigma_{ij}' = \lambda' \dot{e}\delta_{ij} + 2\mu' \dot{e}_{ij} \tag{9.76}$$

其中

$$\dot{e} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

代入前式得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sigma_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda' \dot{e}\delta_{ij} + 2\mu' \dot{e}_{ij}\delta_{ij} \qquad (9.77)$$

这一模型对固体称粘弹模型或称 $Voigt$ 体，对流体则称牛顿粘滞流体. 对小形变 $\dot{e}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}$，(9.77)也可整理成下述形式

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}\right) e\delta_{ij} + 2\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right) e_{ij} \qquad (9.78)$$

其中 $\left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}\right)$ 和 $\left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right)$ 称为粘弹算符. 与(9.66)比较可知，只要以粘弹算符代替原弹性常数，就可得到(9.78)，使用中注意微分算符要对其后的函数发生作用才有意义.

对流体，参考(9.73)，本构方程的形式应为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda' \dot{e}\delta_{ij} + 2\mu' \dot{e}_{ij} \qquad (9.79)$$

将(9.79)的三个法应力，也即对角线项相加，得

$$\sigma_{ii} = -3p + 3\left(\lambda' + \frac{2}{3}\mu'\right)\dot{e}$$

通常取 $\mu' = \eta$，称动力粘滞系数，取 $\zeta = \lambda' + \frac{2}{3}\mu'$ 称体积粘滞系数. 实验表明在实际流体中，ζ 一般很小，可近似认为等于零，即 $\zeta = 0$，由此可得出

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu' = -\frac{2}{3}\eta$$

同时得出

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

将 λ' 表式代回(9.79)，得到粘滞流体应力张量通常采用的表示形式

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\eta\dot{e}\right)\delta_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} \qquad (9.80)$$

这种粘滞流体也称作牛顿流体. 这种流体虽然剪切模量为零，但切应力并不是零，这是由流体间相对运动内摩擦引起的.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

三、线性热弹性体

现在研究物体温度不再保持常数的形变. 温度变化范围不大的小形变连续介质称线性热弹性体. 前面已经得到在确定温度 $T=T_0$ 下的应力应变关系. 在温度变化时，应力表示式中应增加与温度变化有关的项. 这样的应力称热应力. 当 T 变化范围不大，即 $(T-T_0)$ 是小量时，热应力是 $(T-T_0)$ 的线性函数，对各向同性的线性热弹性体，本构方程的形式是

$$\sigma_{ij}=\lambda e\delta_{ij}+2\mu e_{ij}+\beta(T-T_0)\delta_{ij}$$

常取 $\beta=-K\alpha$，$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$ 是体积压缩模量，则上式写为

$$\sigma_{ij}=\lambda e\delta_{ij}+2\mu e_{ij}-K\alpha(T-T_0)\delta_{ij} \qquad (9.81)$$

对自由膨胀

$$\sigma_{ij}=0 \qquad (i,j=1,2,3)$$

同时

$$e_{ij}=0 \qquad (i\neq j)$$

这时将法应力 σ_{11}，σ_{22} 和 σ_{33} 三项相加，得到

$$e=\alpha(T-T_0) \qquad (9.82)$$

这是体积相对变化与温度变化的关系，α 是热膨胀系数.

§9.5 弹性固体

将前两节建立的连续介质普遍理论与本构方程应用于弹性固体研究的科学，称弹性力学，它是多门工程与技术学科的基础. 这里仅给出弹性力学的基本方程——位移场方程和反映动力学最典型规律的实例. §9.4已指明，当物体的形变足够小时，所有的固体都是理想弹性体，包括像坚硬的钢铁、岩石以至陶瓷，只是形变的微小程度，同弹性模量一样，对不同物理性质的固体是很不相同的. 这里仅限于讨论各向同性的理想弹性介质.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

一、位移场方程

如果不考虑整体的平动和刚性转动，弹性固体介质每一物质点的位移都是离开未形变前的位置（平衡位置）的小位移，速度和位移梯度也都是小量，如§9.1已证明的，这时使用拉格朗日变量（实体坐标）和欧勒变量（空间坐标）标识介质点是一样的．如果求得在整个弹性体上位移场的分布 $u(x_1,x_2,x_3;t)$，则整个弹性体的形变就完全已知了．在弹性动力学中，最关心的是位移．因此，在把§9.3的运动方程(9.44)用到弹性固体上，首先要把其中的速度用位移表出．

由于小形变，

$$|v_i| \ll 1, \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1$$

故

$$v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \cong \frac{\partial u}{\partial t}$$

可见用欧拉变量和用拉格朗日变量计算速度的公式是一样的，这一近似也可记为

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \ll \frac{\partial}{\partial t}$$

同样加速度也可表为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(9.44)的运动方程化为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho f + \nabla \cdot \sigma \qquad (9.82)$$

写成分量式则为

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} \qquad (i = 1,2,3) \qquad (9.83)$$

对理想弹性体，应力应变关系如(9.66)，即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\sigma_{ki}=\sigma_{ik}=\lambda\delta_{ki}e+2\mu e_{ki}\qquad(i,j=1,2,3)$$

且其中

$$e=\nabla\cdot u;e_{ki}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

计算(9.83)最后一项

$$\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x_k}=\lambda\delta_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla\cdot u)+\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}u_i+\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

其中第一项 $\delta_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}$;第二项$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}=\nabla^2$是拉普拉氏算符;第三项求偏导数次序可以交换

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}u_k=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot u)$$

得到

$$\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x_k}=\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot u)+\mu\nabla^2u_i$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot u)\qquad i=1,2,3$$

代入(9.83),再将$i=1,2,3$三个分量式矢量相加得

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\rho f+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u+\mu\nabla^2u\qquad(9.84)$$

由

$$\nabla\times(\nabla\times u)=-\nabla^2u+(\nabla\nabla\cdot u)$$

即

$$\nabla^2u=(\nabla\nabla\cdot u)-\nabla\times(\nabla\times u)$$

(9.84)也可写为

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\rho f+(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u-\mu\nabla\times(\nabla\times u)$$

(9.85)

(9.84)和(9.85)就是理想弹性体位移场满足的微分方程组,也称纳维(*Navier*)方程.其中弹性模量λ,μ和体力密度f通常是已知的,由于小形变,密度ρ可用未形变时的密度代替,也是已

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

知的. 故用(9. 84)或(9. 85)的三个方程求三个未知的位移量是封闭的.

在位移场方程中视密度为常数 ρ_0，并不意味着在形变过程中 ρ 保持不变，只是其变化部分很小，在解方程时取了近似. 在求得位移场 u 后，用小形变下的连续性方程(9. 42)立即可求出任何时刻的密度

$$\rho = \rho_0(1 - \nabla \cdot u) \tag{9.86}$$

二、边界条件

求解(9. 84)或(9. 85)偏微分方程的定解问题还必须给出弹性体周围界面上和两种介质分界面上的边界条件或连接条件. 对弹性固体这些边界条件是：

(1)二介质分界面上两侧应力连续. 用 n 表示界面上某面元的法线，σ_{nn} 表示界面法应力(法向沿 n 的面积元上应力的法向分量)，σ_{nl} 表示界面切应力，则应力连续为

$$\sigma_{nn}^{(1)} = \sigma_{nn}^{(2)}$$

$$\sigma_{nl}^{(1)} = \sigma_{nl}^{(2)}$$

统一写为

$$n \cdot \sigma^{(1)} = n \cdot \sigma^{(2)} \tag{9.87}$$

(2)二介质分界面两侧位移连续.

$$u_n^{(1)} = u_n^{(2)}$$

$$u_l^{(1)} = u_l^{(2)}$$

或

$$u^{(1)} = u^{(2)} \tag{9.88}$$

如果界面是弹性体的包围面，则可将(2)介质的应力与位移看作给定的已知量.

三、弹性静力学平衡方程

体积为 V，界面为 S 的弹性体，在体力 f 与界面 S 上的外力

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

密度 F_s 作用下发生形变，但介质各点速度 $v \equiv 0$，则弹性体处于静力学平衡状态，在纳维方程中令 $\rho \frac{\partial u}{\partial t^2} = 0$，得平衡方程

$$\rho f + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \mu \nabla^2 u = 0 \qquad (9.89)$$

直接从(9.44)可得到应力张量的平衡方程

$$\rho f + \nabla \cdot \sigma = 0 \qquad (9.90)$$

同时用到在界面 S 上的边界条件，对给定外应力 F_s 和位移 u_0，应有

$$n \cdot \sigma = F_s$$

$$u = u_0$$

平衡方程中 λ, μ 和 ρ 是已知的. 求解此平衡问题通常有两种途径. 一种是先由(9.89)求出位移场 u，然后由本构方程求出应力场分布. 另一种是将应力张量分量本身当做未知量，利用(9.90)求出应力场，如果需要，再利用应力应变关系求出应变场和位移场.

四、弹性波

振动和波动是弹性动力学的主要研究内容. 局部小扰动沿弹性介质的传播称弹性波. 固体中弹性波传播的规律与特征，可通过求解确定边界条件下的位移场方程得到. 略去体力的作用，位移场方程(9.84)变为

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial u}{\partial t^2} \qquad (9.91)$$

作为例子，这里仅研究均匀无限各向同性介质中的平面波，求形式如

$$u = a f(\omega t - k \cdot r) \qquad (9.92)$$

的解. f 是空间坐标 r 和时间 t 的多元函数，但它对 r 和 t 的依赖却总是以 $(\omega t - k \cdot r)$ 为宗量的形式，我们称后者为 f 的相位. a 和 k 是常矢量，ω 也是常量，它们有一定的关系，这要由将(9.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

92)代入位移场方程中来确定.

在将(9.92)代入位移场方程(9.91)之前,我们先来说明形如(9.92)解的物理意义.为更直观一些,不妨将 f 取为具体的函数形式,如

$$f = \cos(\omega t - k \cdot r)$$

$$u = a\cos(\omega t - k \cdot r) \tag{9.93}$$

显然,它代表一周期振荡.对确定的空间点 r,u 只随时间 t 变化,它对应于介质质点在 r 附近的简谐振动,ω 是振动圆频率,a 是振幅.当 r,t 同时变时,如果仍保持相位不变,从而位移 u 也取确定值,则这同一相位对应不同的 r,t 值,表示具有某特定值的位移随时间的推移出现在空间的不同位置上,即在介质中某点的振动随时间的变化传播开来.这一振动的传播过程就是弹性波.波动过程就是等相位点在空间的传播过程.为确定等相位点在空间的变化与时间的关系,只要将相位取某确定值,为方便使任何时刻的相位就等于 $r=0$ 点,$t=0$ 时刻的初相,即由(9.93)

$$\omega t - k \cdot r = 0$$

或写成

$$k \cdot r = \omega t \tag{9.94}$$

这是等相位点时空坐标应满足的方程.因 k 是常矢量,r 是空间坐标,对确定的时刻 t,(9.94)代表一垂直 k 的平面方程.这说明在这一平面上的点相位都相同,该平面称等相位面,如图9.5所示.由

$$k \cdot r = kr\cos(\hat{k,r})$$

$$= kl$$

其中

$$l = r\cos(\hat{k,r})$$

是平面上点的位矢在 k 方向上的投影,是等相位面至坐标原点的垂直距离.由(9.94)可得

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

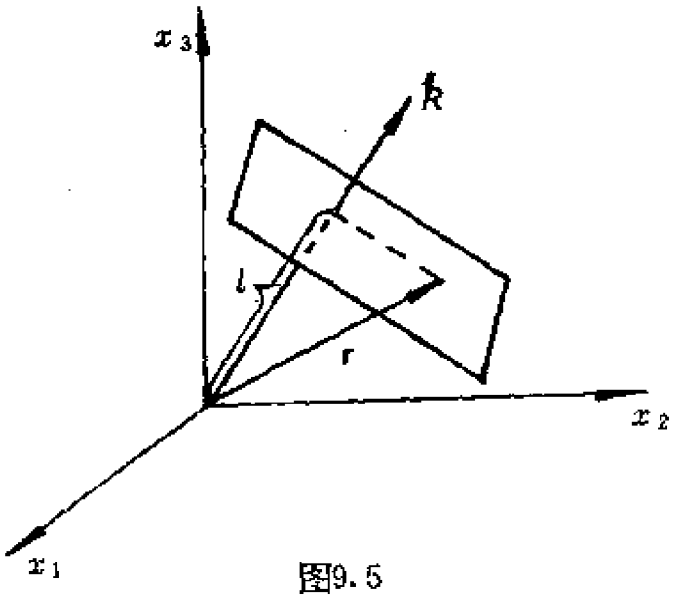


图9.5

$$kl = \omega t; \qquad l = \frac{\omega}{k} t$$

随 t 增大，l 增大，等相位面沿 k 方向移动，移动速度用 C 表示，则

$$C = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} \tag{9.95}$$

等相位面的传播速度称相速度，等相位面也称波阵面，所以 C 也称波传播的相速度，其传翻方向沿垂直于波阵面的方向 k，k 称作波矢量. 因波阵面是平面，并且(9.94)是简谐振荡，故此波称简谐平面波.

下面将(9.93)代入位移场方程(9.91)，看看 a，k 和 ω 以及相速度 C 还要满足什么关系，才能保证它是位移场方程的解. 不难算出，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u = -\omega^2 a \cos(\omega t - k \cdot r)$$

$$\nabla\nabla \cdot u = -k(a \cdot k)\cos(\omega t - k \cdot r)$$

$$\nabla^2 u = -k^2 u = -k^2 a \cos(\omega t - k \cdot r)$$

代入(9.91)，比较 $\cos(\omega t - k \cdot r)$ 前的系数，得关系式

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$(\rho\omega^2 - \mu k^2)\boldsymbol{a} = (\lambda + 2\mu)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \tag{9.96}$$

这是位移场方程(9.91)有形如(9.93)或(9.92)解的充分必要条件. 这个等式可在以下两种情况下成立:

(1)$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{k}$,则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} = k^2\boldsymbol{a}$,代入(9.96),

$$\omega^2 = k^2\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

将满足此方程的 k 记作 k_p,由(9.95)得知相应相速度

$$C_p = \frac{\omega}{k_p} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{9.97}$$

即

$$k_p = \frac{\omega}{C_p}$$

k_p 是波的传播方向,$\boldsymbol{a}$ 是质点振动方向,即位移的方向,或称偏振方向. $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{k}$ 说明这是一种介质质点振动方向与波传播方向一致的弹性波,称为纵波. 容易证明,这种波的 $e = \nabla\cdot\boldsymbol{u} \neq 0$,而 $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$,所以这种波也叫膨胀波,其传播速度是 C_p.

(2)$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{k}$,则(9.96)式右端为零,得

$$\omega^2 = k^2\frac{\mu}{\rho}$$

满足此方程的 k 记作 k_t,相速度为

$$C_t = \frac{\omega}{k_t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{9.98}$$

或

$$k_t = \frac{\omega}{C_t}$$

这是一种介质质点振动方向与波传播方向垂直的弹性波,称为横波. 因对这种波 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$,而 $\nabla \times \boldsymbol{u} \neq 0$,即横波与体积变化无关,而与物质质点的无限小转动有关,因此横波也称畸变波或旋转波,其传播速度是 C_t. 比较(9.97)与(9.98)可知,横波速度总

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

小于纵波速度，即 $C_t<C_l$.

根据上述分析，在无限均匀各向同性弹性固体中可以有两类波传播，一类是纵波，一类是横波，它们的传播速度不同，偏振状态不同. 很容易想到，流体中的小扰动也能传播，由于理想流体的剪切模量等于零，$\mu=0$，所以理想流体中只能传播纵波. 弹性波根据波阵面的不同还可分为球面波、柱面波等. 弹性波在两种不同介质的分界面上，将发生折射和反射，折、反射的规律由边界条件决定. 此外，在介质分界面上，或固体的自由表面上，还可能产生沿界面传播的表面波. 这些都是波动现象的共同规律，限于篇幅，这里不再介绍.

最后，我们从位移场方程(9.91)严格导出任意纵、横波满足的波动方程. 因任何矢量场总可化为纵场与横场之和，对位移场则有

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_l+\boldsymbol{u}_t$$

其中 $\boldsymbol{u}_l$ 为纵场，对纵场总有 $\nabla\times\boldsymbol{u}_l=0$；其中 $\boldsymbol{u}_t$ 为横场，对横场总有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=0$，取

$$e=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l+\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l$$

称压缩，也即体应变，它与纵场 $\boldsymbol{u}_l$ 有关；取

$$\Omega=\nabla\times\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}_l+\nabla\times\boldsymbol{u}_t=\nabla\times\boldsymbol{u}_t$$

称旋转，它只与横场 $\boldsymbol{u}_t$ 有关. 用 ∇ 点乘(9.91)的两侧，并注意求偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$、$\frac{\partial}{\partial x_j}$ 的顺序可以交换和上述关系，可得到压缩 e 满足的方程

$$\nabla^2 e-\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}=0 \tag{9.99}$$

其中

$$C_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

这就是熟知的波动方程，它总有宗量如(9.92)形式的解. 由于 e

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

只与纵场 u_l 有关，所以其解是纵波，前面得到的平面纵波解就是一例. 用 $\nabla\times$ 作用(9.91)式，可得到旋转 $\Omega=\nabla\times u_l$ 满足的波动方程

$$\nabla^2\Omega-\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}=0 \tag{9.100}$$

其中

$$C_l=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

这是横波场满足的波动方程，是一矢量波动方程. 任何弹性波场的问题可通过求解(9.99)和(9.100)解决.

§9.6 理想流体

由于流体的相对运动变形是任意的，而且在特定时刻标识的流体质点，经过一段时间后，很可能流散开来而无法跟踪，用拉格朗日法描述流体的运动很困难，所以在流体力学中都采用欧勒描述方法. 也是由于这个原因通常都不用位移场 u 而用速度场 v 作为广义坐标来描述流体的运动. 为此，先介绍流线的概念，然后再讨论动力学问题.

一、轨迹与流线

轨迹是流体质点在连续变化时间内所经过的路径. 实体坐标 a 给定后，$r=r(a,t)$ 实际上就是质点 a 在空间运动的轨迹. 如果给定速度场 $v=v(r,t)$，即 $v_i=v_i(x_1,x_2,x_3,t)$ 后，按(9.6)质点的速度有

$$v=\frac{du}{dt}=\frac{dr}{dt};\quad v_i=\frac{dx_i}{dt}$$

则有

$$dx_1=v_1dt,\quad dx_2=v_2dt,\quad dx_3=v_3dt$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

轨迹的微分方程为

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)}$$

$$=\frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)}=dt \qquad (9.101)$$

应注意，提出轨迹这一概念是为拉格朗日法服务的，所以在上式中 x_1,x_2,x_3 是时间 t 的函数，此方程满足初始条件 $x_i|_{t=0}=a_i$ 的解 $x_i(a,t)$ 就是轨迹.

流线是一条空间曲线，在任一瞬时这一曲线上所有空间点的流体速度均与此线相切. 流线具有瞬时的概念，它由许多空间点在同一瞬时所组成，一般而言，不同瞬时，流线有不同的形状. 因为流体的速度方向与流线相切，如果同一空间点的速度在变化，那么经过这一空间点的流线的形状也必然在改变. 流线的微分方程可由流线的定义导出. 沿流线上 x_1,x_2,x_3 点取线元 $dl=dx_1e_1+dx_2e_2+dx_3e_3$，空间点的速度与流线相切，即 v 平行于 dl. 当两矢量平行时，其矢量积为零，因此有

$$v\times dl=0$$

写成分量式则为

$$v_2dx_3-v_3dx_2=0$$

$$v_3dx_1-v_1dx_3=0$$

$$v_1dx_2-v_2dx_1=0$$

或者写成为

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)}=\frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)}$$

$$=\frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} \qquad (9.102)$$

上式虽然在形式上与(9.101)很相似，但提出流线这个概念是为欧勒法服务的，上式中的 x_1,x_2 和 x_3 是独立变量，与 t 无关，而 t 是参数，在上式的积分过程中当作常数处理. 这是因为根据流线

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

的定义，这里 x_1，x_2 和 x_3 表示同一瞬时(所以 t 保持常数)组成同一流线的许多空间点的坐标.

流线和轨迹是两个不同的概念，对每个给定的时刻和给定的空间点都有一条流线和一条轨迹经过，通常情况下，两者一般不重合. 但当流体作稳定运动(也称定常运动)时，即所有物理量都不明显依赖时间 t 时$\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$，速度场只是空间坐标的函数 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3)$. 由于过空间点各时刻的流线都相同，从而流线与轨迹在空间重合，但其物理意义仍不能认为是相同的.

二、封闭运动方程组与边界条件

由 §9.4(9.73)式，理想流体的应力应表示为

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$$

其中 p 为压强，则

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}=-\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\nabla\cdot\sigma=-\nabla p$$

在欧勒描述下

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$$

代入(9.44)式，得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (9.103)$$

或写成分量式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=f_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,3)$$

这就是理想流体的动力学微分方程，称欧勒方程. 由于 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$ 这一项的存在，欧勒方程是非线性微分方程.

连续性方程为流体动力学提供另一个独立方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \qquad (9.104)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

又因

$$\sigma : \dot{e} = \sigma_{ij}\dot{e}_{ij} = -p\delta_{ij}\dot{e}_{ij}$$

$$= -p\dot{e}_{ii} = -p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -p\nabla \cdot v$$

代入§9.3内能变化方程(9.56)

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho h - \nabla \cdot q - p\nabla \cdot v \qquad (9.105)$$

再引入内能 e 和压强 p 与密度 ρ 和绝对温度 T 之间关系的状态方程

$$e = e(\rho, T) \qquad (9.106)$$

$$p = p(\rho, T) \qquad (9.107)$$

在(9.103)至(9.107)共七个方程中，包含着 v，p，ρ，T 和 e 七个未知量(f 和 h 通常是给定的已知量)，它们构成了理想流体运动的封闭运动方程组.

对流体力学中经常遇到的一些重要特殊情况，状态方程常取更简单的形式，这使所需封闭方程组的个数减少，其中主要有下述几种情形.

(一)正压流体

如果状态方程(9.107)与温度 T 无关，即密度只是压强 p 的函数

$$\rho = \rho(p) \qquad (9.108)$$

则这种流体称正压流体，或称为流体的正压运动. 流体的等温与绝热过程都具有正压性. 例如满足波义耳定律的气体，其状态方程为

$$\frac{p}{\rho} = 常数$$

或一般的绝热方程

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = 常数$$

其中 γ 是绝热指数，$\gamma = C_p/C_v$，C_p 和 C_v 分别是定压比热和定容

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

比热.

注意到欧勒方程(9.103)右端最后一项的形式,可以按如下微分关系引入一新的函数 P 来代替正压流体中的 p,

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{9.109}$$

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

在给定 ρ 与 p 的函数关系后,就可以求出 P,称 P 为正压流体的压力函数. 压力函数的物理意义与实现流体正压性的方法有关. 对绝热过程压力函数是热力学函数焓;对等温过程压力函数是热力学函数热力势.

如果将 P,p 和 ρ 都看作是空间坐标 x_1,x_2和 x_3以及时间 t 的函数,则可将定义(9.109)写成如下形式

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

比较 $\mathrm{d}x_i$ 前的系数应相等,得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

即

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P \tag{9.110}$$

将(9.110)代入欧勒方程(9.103),得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nabla p \tag{9.111}$$

这就是正压流体的欧勒方程. 如果压力函数 P 作为 ρ 的函数已求出,再加连续性方程(9.104),正好四个方程求四个未知物理量.

(二)理想不可压缩流体的运动

对不可压缩流体,密度 ρ 为常数,$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$,这也相当于最简单的状态方程. 连续性方程化为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.112}$$

再与欧勒方程(9.103)联立，四个未知量 $\boldsymbol{v}$ 和 p（ρ 为常数），四个方程，构成封闭方程组. 一般情况下，液体都可以看作是不可压缩的；对气体，在许多情况下也可以看成是不可压缩的. 实际上，当稳定气流速度不超过每秒70米时，采用不可压缩近似给计算压强和密度带来的误差不超过1%.

不可压缩流体也是最简单的一类正压流体，其压力函数为 $P=\frac{p}{\rho}$.

三、伯努利积分

对理想流体的正压运动，如果体力是有势的，即

$$\boldsymbol{f} = -\nabla \varepsilon$$

写出欧勒方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla \varepsilon - \nabla P \tag{9.112}$$

用 $\boldsymbol{v}\cdot$ 作用上式

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{v} \cdot \nabla \varepsilon - \boldsymbol{v} \cdot \nabla P \tag{9.113}$$

注意

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varepsilon;$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P;$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

(9.113)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + P\right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \tag{9.114}$$

对稳定(定常)运动，即 $\frac{\partial}{\partial t}=0$，有

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon+P\right)=0$$

这表示

$$\frac{v^2}{2}+\varepsilon+P=C_i \qquad (9.115)$$

由于微商是随体进行的，所以积分常数也是沿流体质点的轨迹保持不变，又由于稳定运动轨迹与流线重合，因此沿每一条流线 C_i 为常数，而沿不同流线 C_i 值可以不同. $\frac{v^2}{2}$，ε 和 P 分别表示单位质量流体的动能、势能和压力函数，压力函数也称压能. 运动积分(9.115)表示的是机械能守恒关系，称为伯努利(*Bernoulli*)积分，是1738年伯努利提出的. 伯努利积分是在理想正压流体稳定运动条件下，沿流线作出的欧勒运动微分方程的积分. 根据不同的条件，给出势能 ε 和压力函数 P，便可得到伯努利积分的具体形式，这些公式称伯努利方程.

(一)不可压缩流体的稳定运动

对不可压缩流体，ρ=常数，压力函数

$$P=\frac{p}{\rho}$$

代入伯努利积分(9.115)，得

$$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon+p=c_i$$

假定流线上某点为起始点，这一点的压强为 p_1，速度为 v_1 和势能为 ε_1，则可定出常数 c_i，进而将压强 p 表为

$$p=p_1+\rho(\varepsilon_1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v^2) \qquad (9.116)$$

对液体 ε 应是单位质量的重力势能，即

$$\varepsilon=gZ;\qquad \varepsilon_1=gZ_1$$

Z 表示从某点算起的高度，则得伯努利方程

$$p=p_1+\rho g(Z_1-Z)+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v^2) \qquad (9.117)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

如果体力可以忽略，对气体常可这样处理，则

$$p = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v^2) \tag{9.118}$$

可以看出，沿流线速度增大，则压强减小，反之亦然. 依据这一原理，有很多重要应用. 例如飞机翼升力的产生就可由(9.118)作出解释，当气流沿机翼上侧的速度大于沿下侧的速度时，由(9.118)式可知上侧的压力将小于下侧压力，机翼上下侧压差指向上，形成升力.

(二)理想气体的绝热运动

绝热(等熵)变化的可压缩气体，状态方程是

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A \qquad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$$

这也是正压流体，可求得压力函数为

$$P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \tag{9.119}$$

注意，此时压力函数就是焓. 如再忽略体力，伯努利方程为

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = C_1 \tag{9.120}$$

如果取 $v=0$ 时的压强和密度分别是 p_0 和 ρ_0，则定出积分常数 C_1 后，整理可得

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{9.121}$$

如果引入声波速度 a，上式可用来研究超声速和亚声速流动的性质. 声音在空气中传播是绝热过程，声速由下式决定(证明略)：

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{绝热}}}$$

将气体的绝热方程代入，得

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

则(9.121)可改写为

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{9.122}$$

取流体流动速度 v 与声音传播速度 a 之比 M，

$$M=\frac{v}{a} \tag{9.123}$$

M 为马赫数. $M<1$是亚声速流动，$M>1$是超声速流动. (9.122)告诉我们，在流动速度不同的气流里，声波速度也是变的. $v=0$时，$a=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$，马赫数是零；而 $v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$时，马赫数是无穷大.

用 $a^2=\gamma\frac{p}{\rho_0}$除(9.122)左右，并应用绝热方程，整理可得

$$p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{9.124}$$

或

$$p_0=p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

将此式作二项式展开，则有

$$p_0=p\left(1+\frac{\gamma}{2}M^2+\frac{\gamma}{8}M^4+\cdots\right)$$

在 $M<1$时，此展开式的高次项越来越小.

$$p_0-p=p\cdot\frac{\gamma}{2}M^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{1}{40}M^4+\cdots\right)$$

由 $M^2=v^2/a^2=\frac{v^2\rho}{\gamma p}$，代入上式

$$p_0-p=\frac{1}{2}\rho v^2\left(1+\frac{1}{4}M^2+\frac{1}{40}M^4+\cdots\right) \tag{9.125}$$

如果考虑流体是不可压缩的，令(9.118)中 $p_1=p_0$，$v_1=0$，则有

$$p_0-p=\frac{1}{2}\rho v^2 \tag{9.126}$$

(9.125)和(9.126)就是分别用可压缩和不可压缩模型，得到的压强—流速变化关系，二模型的相对误差

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\Delta = \left(\frac{1}{4}M^2 + \frac{1}{40}M^4 + \cdots\right)$$

当空气声速为 $a=331$ 米/秒，$v<70$ 米/秒（$M<0.21$）时，相对误差为1%. 可见，即使对气体，在流速不高，马赫数较小时，仍可当作不可压缩流体来处理.

四、无旋运动与拉格朗日积分

这一节根据与上节不同的条件对欧勒运动微分方程进行积分. 仍以理想正压流体为例，并且体力是有势的，如果运动是无旋的，但不要求是稳定的，则可以求得欧勒方程的运动积分.

如果速度矢量场 $\boldsymbol{v}$ 在流体空间每一点都满足

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

则称流体是无旋的. 因为，旋度是零的矢量函数，总可以表为某标量函数的梯度，即

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$$

所以无旋流体的运动也称作是具势的运动. 而且可以证明，流体在某一时刻（如起始时刻）是具势的，则永远是具势的.

利用矢量公式

$$\nabla(v^2) = 2\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + 2(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$$

得

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$$

代入正压流体的欧勒方程(9.111)则

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} - \nabla P \quad (9.127)$$

对无旋流体，$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$，且如体力也是有势的，$\boldsymbol{f} = -\nabla \varepsilon$. 则代入上式整理有

$$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \varepsilon + P\right) = 0 \quad (9.127)$$

可见括号里诸项之和只能是一时间 t 的任意函数，即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\varepsilon+P=f(t) \qquad (9.128)$$

这就是欧勒方程的又一运动积分，称作拉格朗日积分．因为速度势相差一个相加的时间函数仍给出同一速度场 v，所以可以将上式右端取为零或常数，即(9.128)不失一般性可写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\varepsilon+P=C \qquad (9.129)$$

在非稳定无旋运动条件下，拉格朗日积分决定了理想流体中速度和压力之间的关系，它在流体力学中也有广泛应用．上式中除 ε 为已知外还有 φ、ρ 和 p 待求，因此，还要应用连续性方程和正压流体的状态方程．

将拉格朗日积分与伯努利积分进行比较，它们的条件不同，一个要求稳定，不要求无旋，一个要求无旋，并不要求稳定．一个要求沿流线守恒，一个不要求沿流线．所以积分常数 C 与 C_i 也不同，一个是通用常数，一个是流线常数．

如果流体不但是无旋的，而且是稳定的，即总有 $\frac{\partial}{\partial t}=0$，则拉格朗日积分(9.129)变成与伯努利积分相同的形式：

$$\frac{v^2}{2}+\varepsilon+P=C$$

这是不要求沿流线得到的，由此可以得出：对无旋的稳定流体，伯努利积分常数 C_i 对不同流线都相同．

五、不可压缩流体的定常无旋绕流

研究流体与物体(如航船、机翼以及障碍物)的相互作用，是流体力学的基本课题之一，它们都可概括为绕流问题．这里以一平面绕流问题为例来介绍一般处理方法．

假定空间充满不可压缩流体，以稳定而无旋方式沿 z 方向流动，在无穷远处速度为 v_0．如在流体中放置一无限长圆柱，半径为 a，其轴线与 Z 方向垂直(如图9.6所示)，求流体中速度与

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

压力的分布，及圆柱体所受的合作用力.

由于对称性，沿圆柱轴线方向任一断面里的运动都是相同的，所以上述问题化为平面问题.

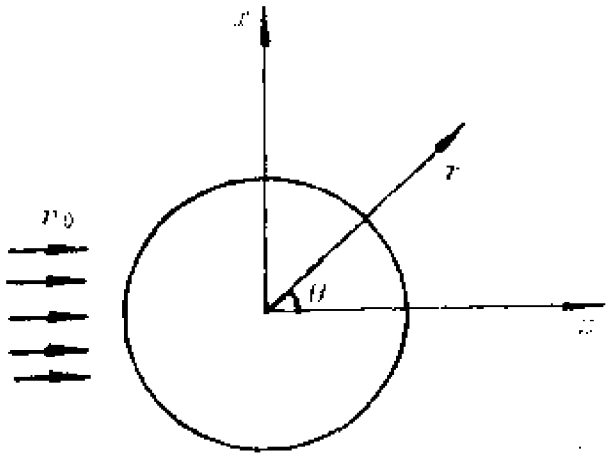


图9.6

流体是无旋的，$\nabla\times v=0$，可引入速度势 φ：

$$v=\nabla\varphi \tag{9.130}$$

由流体是不可压缩的，$\rho=$常数，$\nabla\cdot v=0$，得到

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{9.131}$$

在圆柱坐标下拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0 \tag{9.131}$$

在无限远处

$$v_r=v_\theta=0;v_x|_{r\to\infty}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{r\to\infty}=v_0 \tag{9.132}$$

在圆柱面上

$$v_r|_{r=a}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \tag{9.133}$$

可以分三步来求此绕流问题. 首先求出满足边界条件的拉普拉斯方程(9.131)的解；然后代入(9.130)求出速度场；最后将 v 代入伯努利积分求出压强分布.

用直接代入法可以验证，函数

$$\varphi_n=\frac{\cos n\theta}{r^n}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{9.134}$$

是方程(9.131)的一系列特解. 注意到边界条件(9.132)

$$\varphi_0=v_0z=v_0r\cos\theta \tag{9.135}$$

是(9.131)满足无穷远边界条件的特解.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

我们选择试探解

$$\varphi = v_0 z + A\frac{\cos\theta}{r} = \cos\theta\left(v_0 r + \frac{A}{r}\right) \tag{9.136}$$

如果通过选择常数 A 能使它满足边界条件(9.132)和(9.133)，则根据存在与唯一性定理，它一定是本问题的唯一解. 为此求出速度场

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \cos\theta\left(v_0 - \frac{A}{r^2}\right) \tag{9.137}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\sin\theta\left(v_0 + \frac{A}{r^2}\right) \tag{9.138}$$

代入(9.133)定出常数 $A = v_0 a^2$，因而

$$v_r = v_0\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); v_\theta = -v_0\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{9.139}$$

则

$$\begin{aligned} v^2 &= v_r^2 + v_\theta^2 \\ &= v_0^2\left[\cos^2\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \sin^2\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{9.140}$$

不考虑体力，应用伯努利方程(9.118)，并取 $v_1 = v_0$，取 $p_1 = p_0$ 为无穷远处的压强，则流体中任一点的压强为

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2) \tag{9.141}$$

其中 v^2 取(9.140)的形式. 则流体在圆柱面上的压强($r = a$)为

$$p_a = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2(1 - 4\sin^2\theta) \tag{9.142}$$

下面计算单位长圆柱体所受合力. 作用在单位宽，弧长 $\mathrm{d}S$ 的面积元的作用力在 x 与 z 方向分力为

$$\mathrm{d}f_x = -p_a\sin\theta\mathrm{d}S = -p_a a\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f_z = -p_a\cos\theta\mathrm{d}S = -p_a a\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

则可计算出单位长圆柱体所受合力

$$f_x = -a\int_0^{2\pi}\left[p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2(1 - 4\sin^2\theta)\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$= 0$$

$$f_x = -a\int_0^{2\pi}\left[p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2(1 - 4\sin^2\theta)\right]\cos\theta d\theta$$

$$= 0 \qquad (9.143)$$

结果等速运动流体对圆柱体的作用力竟然是零！这一结论不但对圆柱体，对任何形状物体应用上述理论也得到同样结果. 这与实验不符，这一理论与实验的矛盾称为达兰伯佯谬. 出现这一矛盾的原因，是没有考虑流体粘滞性. 因此，研究物体在流体中运动所受阻力问题，流体的粘滞性不能忽略.

§9.7 粘滞流体

一、封闭运动方程组

应用粘滞流体的应力张量表式(9.80)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\eta\dot{e}\delta_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} \qquad (9.80)$$

其中

$$\dot{e} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}; \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

计算

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$

$$+ \eta\nabla^2 v_i + \eta\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$

代入运动方程(9.44)的分量式，再将其矢量相加，得

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho\boldsymbol{f} - \nabla p + \frac{1}{3}\eta\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \eta\nabla^2\boldsymbol{v} \qquad (9.144)$$

这就是粘滞流体的运动微分方程，称作纳维—斯托克斯(Navier-Stokes)方程. η 是动力粘滞系数，如果引入运动粘滞系

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

数 ν：

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{9.145}$$

(9.144)也常写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

$$= \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3}\nu \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{9.146}$$

连续性方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.147}$$

注意到

$$\sigma_{ij}\dot{e}_{ij} = -p\nabla \cdot \boldsymbol{v} - \frac{2}{3}\eta\dot{e}^2 + 2\eta\dot{e}_{ij}^2$$

则粘滞流体的内能方程为

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \rho h - \nabla \cdot \boldsymbol{q} - p\nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

$$- \frac{2}{3}\eta\dot{e}^2 + 2\eta\dot{e}_{ij}^2 \tag{9.148}$$

状态方程

$$e = e(\rho, T); \quad p = p(\rho, T) \tag{9.149}$$

以上七个方程求七个未知量($\boldsymbol{v}$, e, p, T, ρ)，构成封闭方程组，而 f、h 和 η 一般是给定的，可当已知量处理.

对不可压缩粘滞流体，ρ=常数，(9.144)与连续性方程为

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \boldsymbol{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{9.150}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.151}$$

四个方程求四个未知量，构成封闭方程组.

粘滞流体的边界条件为：

在二介质分界上

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\left.\begin{aligned}(\sigma\cdot n)_1 &= (\sigma\cdot n)_2\\ (v)_1 &= (v)_2\end{aligned}\right\} \tag{9.152}$$

在自由表面，

$$\sigma\cdot n = -p_0 n \quad (p_0\text{——大气压}) \tag{9.153}$$

二、圆管中的稳定流动

不可压缩粘滞流体沿直圆管的稳定流动是有重要实际意义，而又可以得到精确解的少数粘滞流体运动问题之一.

取 z 轴沿圆管轴顺流方向(如图9.7所示)，圆管半径为 a，假设无体力，流体沿管稳定流动 $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$，由流动的轴对称性可断定，速度场矢量只有 z 分量不为零，即

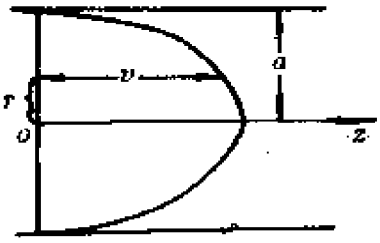


图9.7

$$v_x = v_y = 0, v_z = v$$

又由不可压缩流体的连续性方程

$$\nabla\cdot v = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

知沿 z 方向流动的流体速度并不依赖变量 z，即

$$v = v(x, y)$$

将 $v = v_z k = vk$ 代入纳维—斯托克斯方程，三个分量方程是

$$\left.\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial p}{\partial x}\\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho v\cdot\Delta v &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\nabla^2 v\end{aligned}\right\} \tag{9.154}$$

由(9.154)的前二方程知

$$p = p(z)$$

在 x, y 平面内取极坐标，并注意到轴对称性，各物理量与 θ 无

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

关，取

$$v = v(r)$$

又注意到

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = v(r)\boldsymbol{k} \cdot \nabla v(r)\boldsymbol{k}$$

$$= v(r)\frac{\partial}{\partial z}v(r)\boldsymbol{k} = 0$$

则(9.154)第三式变为

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v$$

或

$$\nabla^2 v(r) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p(z)}{\partial z} = C \qquad (9.155)$$

因为两个不同变量(r 与 z)的函数相等，只有它们都等于常数 C 才有可能. 而$\frac{\partial p}{\partial z}$表示的是沿管的压力梯度，上式说明该梯度是常数. 如果管长 l，压差为 Δp（注意是上游与下游压力之差），平均压力梯度$\frac{\Delta p}{l}$是常数，则可定出

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l} = C$$

负号是因为计算偏导数是用 z 大处的 p 与 z 小处的 p 相减，而压差计算则相反，即压强梯度是负的.

在 C 确定后，可进一步求解 $v(r)$的方程，在柱坐标系下，

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

则由(9.155)有

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}v(r) = -\frac{\Delta p}{\eta l} \qquad (9.156)$$

易积分求出

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + B\ln r + C \qquad (9.157)$$

由 $r=0$点 $v(0)$应有限，可知 $B=0$. 又在 $r=a$ 点，由于**粘滞性**，z

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

方向速度应为零，即

$$v(a) = 0$$

得

$$C = \frac{\Delta p}{4\eta l}a^2$$

则

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(a^2 - r^2) \tag{9.158}$$

它表明管中 z 向速度沿 r 方向的变化是一抛物线. 单位时间通过管的流量为

$$Q = 2\pi\rho\int_0^a v r \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\rho \cdot \frac{\Delta p}{4\eta l}\int_0^a (a^2 - r^2)\mathrm{d}r$$

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}a^4 \tag{9.159}$$

其中 $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ 是运动粘滞系数. 这个计算流量的公式称泊肃叶(Poiseuille)公式.

三、粘滞流体中的振荡运动

粘滞流体的切变模量 $\mu = 0$，但由于粘滞作用，在粘滞流体中仍可能产生横波. 我们以一个平板淹没在粘滞流体中做振荡运动来研究流体的运动.

假设不可压缩流体与无界平面(固体平面)相接触，该平面在自己所处的平面内以频率 ω 作简谐振动，求出现在流体中的运动.

选固体表面为 y，z 平面，在 $x > 0$ 的区域是流体占据的空间，将 y 轴取在面的运动方向上，如图所示. 振动面沿 y 方向振动的速度为

$$x = 0, \quad u = A\cos(\omega t)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

为求解方便，将 u 取为复数形式，这样，全部过程可用复数来作，只在最后结果中注意取出实部就行了. 上述条件可概括为边界条件：流体速度 v 在边界($x=0$)上应有 $v=u$，即

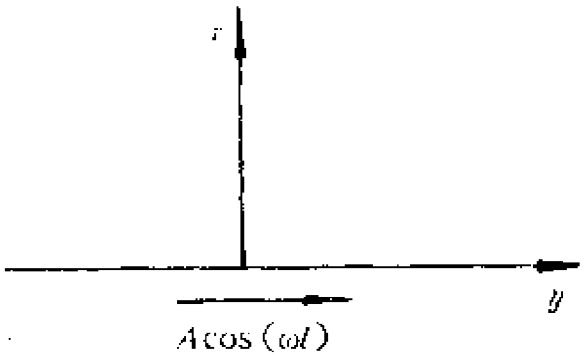


图9.8

$$v_x=v_z=0,$$

$$v_y=u=Ae^{i\omega t} \qquad \text{当}(x=0)$$

从对称性考虑，容易看出各物理量只与 x（与 t）有关，而与 y，z 无关. 由连续性方程 $\nabla\cdot v=0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$$

说明 $v_x=C$，又因在边界上 $v_x=0$，所以此常数恒为零，即 $v_x=0$. 既然所有的量都与坐标 y，z 无关，则 $v\cdot\nabla v=v_x\frac{\partial}{\partial x}v$，且因 $v_x=0$，故 $v\cdot\nabla v=0$. 于是运动方程对此问题取

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2 v$$

其 x 分量给出

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

即

$$p=p_0 \quad (\text{常数})$$

也是对称性考虑，z 方向任何一断面内的运动同此平面，$v_z=0$. 因此，速度只有 y 分量，而此 y 分量又只依赖于 x 和 t，即

$$v=v_y j=v(x,t)j$$

则由运动方程得到 $v(x,t)$ 满足的方程为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

这是一维热传导方程. 取

$$v(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$$

代入前方程得到 $u(x)$ 的方程

$$\frac{d^2u}{dx^2} + i\frac{\omega}{\nu}u = 0$$

$$u(x) = u_0 e^{\pm i\frac{i+1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}x}$$

$$v_y = v = u_0 e^{\mp\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x} e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x - i\omega t}$$

因 $x \to \infty e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x} \to \infty$, 此解发散. 故物理上合理的解是

$$v_y = v = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x - \omega t\right)}$$

令 $x=0$ 时, $v_y = Ae^{-i\omega t}$, 得

$$v_y = v(x,t)$$

$$= Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x - \omega t\right)} \qquad (9.160)$$

这个解说明, 沿 x 方向有个速度沿 y 方向振荡的波在传播, 质点振动方向与波的传播方向垂直, 是横波. 此外, 这个波沿 x 方向指数衰减. 振幅随离开固体面的距离的增加而指数降低. 如果用振幅减少到最大振幅的 $1/e$ 的距离来定义横波的贯穿深度 δ, 即

$$Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\delta} = Ae^{-1}$$

解得

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \qquad (9.161)$$

显然, 贯穿深度随频率的升高而降低, 又随运动粘滞系数的增加而增加. 例如, 对水 ($\nu = 0.01$ 厘米^2/秒), 当线频率 $f=1$ 时, $\delta \sim \frac{1}{20}$ (厘米); $f=10$ 时, $\delta \sim \frac{1}{60}$ (厘米); $f=100$ 时, $\delta \sim \frac{1}{200}$ (厘米). 可

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

见粘滞横波只出现在界面附近很薄的层中.

已知速度场后，可求出振动于流体的平面上每单位面积所受的摩擦力，摩擦力的方向沿 y 轴，由粘滞张量 σ_{xy}' 决定：

$$\sigma_{xy}' = 2\eta\dot{e}_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \eta\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

代入(9.160)

$$\sigma_{xy}' = \sqrt{\omega\rho\eta}\,\frac{(i-1)}{\sqrt{2}}v$$

注意

$$\frac{(i-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

所以在 $x=0$ 平面上

$$\sigma_{xy}' = \sqrt{\omega\rho\eta}\,Ae^{-i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

只取实部

$$\sigma_{xy}' = \sqrt{\omega\rho\eta}\,A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

振动面的速度是 $u = A\cos\omega t$，可见摩擦力与速度之间出现一相移.

§9.8 连续介质的拉格朗日方程

在此之前，我们讨论连续介质问题，用的都是牛顿力学的方法. 在这一节里，介绍连续介质拉格朗日方程的建立，并把它推广到一般的连续体系.

前几章里建立的拉氏方程，只适用于分离体系. 自由度是 n 的体系，共有 n 个拉氏方程. 那时，我们总是把力学体系看成是由 n 个质点组成的质点系. 依此观点，连续介质应看作是由无穷多个质点所组成，自由度是无限大，拉氏方程也要无穷多个，这是作不到的和不适用的.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

对连续介质，我们是用位移矢量场 u 来描述其运动和变形，而位移 $u=u(x_1,x_2,x_3,t)$ 是空间坐标和时间的函数. 这时，空间坐标是连续变量，不同的坐标代表不同的介质质点. 这里的空间坐标相当于起到质点系统中求和角标 i 的作用，而不同质点的运动，则用场物理量 u 来表示. 此时，x_1,x_2,x_3 和 t 处于同样的地位，都是独立变量. 如果求得 u 的具体形式，连续介质的运动就是完全已知的了. 所以，对连续介质，我们可以选场量 u 作为广义坐标，$u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3$，独立分量有三个，自由度只有3. 如果作类比的话，这里的 u_i 相当于前面研究过的分离体系中的广义坐标 q_i. 不同之处是，分离体系中的 q_i 只是时间 t 的函数，而这里的 u_i 同时是 x_1,x_2,x_3 和 t 的函数.

确定了广义坐标和自由度以后，就可以进一步形成拉氏函数. 这里有两个问题需要说明：一是，拉氏函数的定义仍是动能与势能之差，但对连续介质，应先给出单位体积的拉氏函数. 然后对整个连续介质占据的空间求和（这相当于对所有质点求和），得到整个连续介质的拉氏函数. 单位体积的拉氏函数称拉格朗日函数密度，用花写的 $\mathscr{L}$ 表示，则总拉氏函 L 为

$$L=\iiint_v \mathscr{L}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{9.162}$$

用 v 表示介质占据的空间，也可省略. 其次，注意到对分离体系，当取 q_i 为广义坐标，且广义坐标是时间 t 的函数，$q_i=q_i(t)$ 时，拉氏函数 L 是广义坐标和广义坐标对时间 t 的导数，以及时间 t 的函数，即

$$L=L(q_i,\dot{q}_i;t)$$

那么对连续介质，以 u_i 为广义坐标，而 u_i 是 x_1,x_2,x_3 和 t 的函数时，则可以想到，拉氏函数一般应为广义坐标 u_i，广义坐标对所有空间坐标和时间 t 的偏导数 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，$\frac{\partial u_i}{\partial t}$，以及 x_1,x_2,x_3 和 t 的函数，即用拉氏函数密度表示

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(u_1,u_2,u_3,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\frac{\partial u_1}{\partial t},\cdots,\frac{\partial u_3}{\partial t};x_1,x_2,x_3,t\right)$$

或简记为

$$L=L\left(u_i,\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial u_i}{\partial t};x_1,x_2,x_3,t\right) \tag{9.163}$$

下面我们从哈密顿原理导出连续介质的拉氏方程. 由于现在空间坐标与时间处于同样地位，在拉氏函数中都是参数. 所以在应用哈密顿原理时，空间坐标的变分(变更)与时间 t 的变分一样，都应是零，即 $\delta x_1=\delta x_2=\delta x_3=\delta t=0$. 按定义，哈密顿作用量为

$$S=\iiiint\mathscr{L}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t$$

由哈密顿原理

$$\delta S=0$$
$$\iint_{t_1}^{t_2}\iiint\delta\mathscr{L}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t=0 \tag{9.164}$$

注意到

$$\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\delta u_i;\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\delta u_i$$

计算

$$\delta\mathscr{L}\left(u_i,\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial u_i}{\partial t};x_i,t\right)$$
$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i}\delta u_i+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

其中

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\delta u_i\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\right)\delta u_i$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\delta u_i\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\right]\delta u_i$$

代入(9.164)并用到在积分上，下限恒有 $\delta u_i^1=\delta u_i^2=0$，则上二式中全微分项对(9.164)积分的贡献为零，(9.164)写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\delta u_i\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}_i}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\right]\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t=0 \tag{9.165}$$

由于 δu_i 是任意的，取的积分范围也是任意的，所以要使上式恒为零，必须每一 $\delta u_i(i=1,2,3$，相同角标代表求和)前的系数为零，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}_i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\right]-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i}=0\quad(i=1,2,3) \tag{9.166}$$

这就是连续介质的拉氏方程。其中

$$\mathscr{L}=\mathscr{T}-\mathscr{V} \tag{9.167}$$

$\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{V}$ 是动能与势能密度，势能中除包括体积力的势能 ε 外，还应包括连续介质的形变位能 $\mathscr{W}$。但我们通常是把弹性体的形变位能写为应变张量 $e_{[\,]}$ 的函数，这时 $\mathscr{L}$ 对 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的偏导数也可改为对 e_{ij} 的偏导，注意 $\mathscr{L}$ 是通过 e_{ij} 依赖于 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，则

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial e_{kl}}\frac{\partial e_{kl}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$$

由

$$e_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

则

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\frac{\partial e_{kl}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}=\frac{1}{2}(\delta_{ki}\cdot\delta_{lj}+\delta_{kj}\cdot\delta_{li})$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_{kl}}\cdot\frac{1}{2}(\delta_{ki}\delta_{lj}+\delta_{kj}\cdot\delta_{li})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_{ij}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_{ji}}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_{ji}}$$

$$(e_{ji}=e_{ij})$$

(9.166)写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{u}_i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_{ij}}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i}=0\quad(i=1,2,3)$$

(9.167)

对弹性固体

$$f=-\nabla v$$

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^2-W(e_{ij})-\rho v$$

代入(9.167)很容易得到前面已给出的运动方程，那时

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$$

请读者验证。

最后，我们可以很容易的把上述结果推广到自由度为任意 f 的更一般的连续体系。作为广义坐标的场物理量用 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 表示，把 t 写成 x_4，$q_\sigma=q_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则此时，拉氏方程可写为下述更对称的形式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial x_\rho}\right)}\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_\sigma}=0$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,f)$$

请注意，这里重复的希腊字母下角标表示从1到4的求和。

用同样的方法，还可推导出连续介质的正则方程。

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

习　题

9.1　已知速度场为 $v_k=\frac{kx_k}{1+t}$,$(k=1,2,3)$。(1)求加速度场 $w=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$;(2)求 $a=r(a,0)$的轨迹,(3)求 $v(a,t)$和 $w(a,t)$.

9.2　对以下速度场,求 $\dot{e}_{ij}$,$\dot{\omega}_{ij}$和流线的形状.

(1)$v_1=cx_2$,$v_2=v_3=0$,c 为常数.

(2)$v_1=-\frac{cx_2}{x_1^2+x_2^2}$,$v_2=\frac{cx_1}{x_1^2+x_2^2}$,$v_3=0$,$c$ 为常数.

9.3　证明在 $n=(n_1,n_2,n_3)$方向上的线元,在单位时间内的相对伸缩为 $n_in_j\dot{e}_{ij}$.

9.4　$\mathbf{e}=\{e_{ij}\}$为小形变张量,$\mathrm{d}r\cdot\mathbf{e}\cdot\mathrm{d}r=e_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=1$,是与 $\mathbf{e}$ 对应的二次曲面,l 是 $\mathrm{d}r$ 在此曲面上 P 点(OP 由 $\mathrm{d}r$ 给出)法线上的投影.证明小形变位移 $\mathbf{e}\cdot\mathrm{d}r$ 的大小为 $\frac{1}{l}$.

9.5　分析以下简单应力,理解它们具有指明的特点.

(1)各向同性应力

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}\qquad(p\text{ 为常数})$$

(2)x_1方向的均匀伸缩

$$\sigma_{11}=\sigma\quad(\text{常数})$$

其他应力分量为零

(3)纯剪切

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau(\text{常数})$$

其他应力分量为零.

(4)纯弯曲

$$\sigma_{11}=cx_2(c\text{ 为常数})$$

其他应力分量为零.

(5)纯扭转

$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=x_2f(r),\sigma_{23}=\sigma_{32}=-x_1f(r)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$r = x_1^2 + x_2^2,$$

其他应力分量为零

(6)平面应力

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

都只是 x_1 和 x_2 的函数，其他应力为零.

9.6 求面力密度

$$(1)\sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad n = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(2)\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & -\frac{\sigma}{2} & -\frac{\sigma}{2} \\ -\frac{\sigma}{2} & \sigma & -\frac{\sigma}{2} \\ -\frac{\sigma}{2} & -\frac{\sigma}{2} & \sigma \end{pmatrix} \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

9.7 球面上单位法向量(θ, φ 为球坐标) $n = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$，法应力 $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$，求球面上法应力的平均值为

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sigma_n \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

9.8 证明一维管道流动问题中，连续性方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\sigma) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho\sigma v) = 0$$

其中 σ 为管道截面积(沿每个横截面上，密度 ρ，速度 v 都是均匀分布)，$\mathrm{d}S$ 为流动方向上的微分元，在稳定流动情况下，连续性方程变为

$$\rho v \sigma = \text{常数}$$

9.9 已知速度场

$$v_i = \frac{x_i}{1+t}, i = 1,2,3, t = 0 \text{ 时 } \rho = \rho_0(\text{常数}),$$

由连续方程求密度 ρ.

9.10 证明运动方程

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=\rho f_i+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}-\rho v_i v_j)$$

9.11 在连续区域 V 中(周界为 S)有应力场 σ 满足平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i=0$$

设 v 为任一与 σ 无关的速度场,且

$$D_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

证明下式(称虚功原理)成立

$$\int_v\sigma_{ij}D_{ij}\mathrm{d}v=\int_S\mathrm{d}S\cdot\sigma\cdot v+\int_v\rho f\cdot v\mathrm{d}S$$

9.12 把应力张量写为

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij}(p\text{ 为压强}),$$

引入焓 $H=e+\frac{p}{\rho}$,证明能量方程可改写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot q+\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}$$

9.13 忽略体力,证明理想弹性体平衡时,应力张量满足下述封闭方程组

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathrm{tr}\sigma)=0\qquad i,j=1,2,3$$

其中

$$\mathrm{tr}\sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$$

9.14 把理想弹性体的自由面条件 $\sigma\cdot n=0$ 用位移表示出来.

9.15 球体在自身引力作用下(体力 $f=-Gr$,G 为常数),计算此球体的位移场与变形.(设球表面 $r=a$ 为自由表面)

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

9.16　已知流体速度场为

$$v_1=-\frac{kx_2}{x_1^2+x_2^2},v_2=-\frac{kx_1}{x_1^2+x_2^2},v_3=0$$

问此流体是否无旋，是否可压缩.

9.17　假定地球是由密度为 ρ，半径为 R 的不可压缩流体所组成，且任一单位质量上所受重力与该质量到地心的距离成正比，在地球表面上单位质量所受到的力为 g，求地球中心的压强.

9.18　开口水槽旁有一小孔，离水面的距离为 h，水面离槽底的高度为 H. 如将此水槽置于地上，问由小孔射出的水流，其射程为多少？并求使射程最大时的 h 之值.

9.19　设一圆柱形容器以恒定的角速度 Ω 绕自身的轴旋转，试确定盛于此容器中的不可压缩流体在重力场内自由面的形状.

9.20　在等截面的 U 形管中盛有液体，管的两端与大气相通，自由面的压力为 p_0，管中液体总长为 l. 设 $t=0$ 时液体处于静止状态，液体两端面高之差为 h. 求以后液面的振荡规律.

9.21　求粘滞流体在内半径和外半径各为 R_1 和 R_2 的环形截面的导管中流动时的速度分布，并求流量公式.

9.22　一层粘滞流体介于二平行的固体平面间，设其一平面振荡于自己所处的平面内，求施于每一平面上的摩擦力.

9.23　设沿自身平面振荡的平面上有一层高 h 的粘滞流体，流体之顶为自由表面，求施于平面上的摩擦力.

9.24　在压力梯度存在的情况下，决定介于两平行平面间流体的运动(可以假定沿平行平面方向的压力梯度为简谐的 $ae^{-i\omega t}$).

9.25　半径为 R_1 的柱面在另一半径为 R_2 的共轴柱面内以速度 v 平行于中心轴而运动，二轴间充满粘滞流体，求流体的速度分布及单位长圆柱面上所受到的摩擦力.

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

9.26　半径为 R_1 和 R_2 的两共轴柱面，柱面间充满粘滞流体．设两柱面各以角速度 Ω_1 和 Ω_2 旋转，求流体的速度分布及施于柱面上的摩擦力矩．

9.27　粘滞流体平行于 $x-y$ 平面作稳定流动，流速沿 x，且只与坐标 y 有关，即 $v_x=v_x(y)$．求单位体积流在单位时间内的能量消耗．

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

附录一　矩　　阵

一、矩阵

一矩阵A，是元素a_{ij}按如下方式排列：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

一般行数$n\neq$列数m. 如果$m=n$，则称为方阵. a_{ij}中的i是行标，j是列标. 除非特殊指明，本附录中只讨论方阵.

定义 1.　如果$a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则$m\times m$　矩阵A是对称矩阵.

定义 2.　如果$a_{ij}=-a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则$m\times m$矩阵$A$是反对称的.

定义 3.　两个$m\times m$矩阵A和B的和为

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

定义 4.　两个$m\times m$矩阵A和B的积为

$$(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$C=AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mj} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

亦即C 的第 i 行 j 列元素 c_{ij}等于A 第 i 行与B 的第 j 列元素对应相乘的积之和.

定义 5 如果$AB=BA$，则称矩阵A 和B 是可对易的，否则是不可对易的.

定义 6 如果非对角元都为零，即 $a_{ij}=0$，当 $i\neq j$，称矩阵是对角的.

定义 7 如果一个矩阵是对角的，且所有对角元为 1，即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

则 I 称为单位矩阵.

由矩阵乘积的定义，易证

$$AI=IA$$

定义8

$$(A^T)_{ij}=(A)_{ji}$$

则称A^T 为 A 的转置.

由定义知，矩阵两次转置的结果是没有转置，即

$$(A^T)^T=A$$

两矩阵乘积的转置

$$(AB)^T=B^TA^T$$

多个矩阵乘积的转置

$$(ABCD\cdots G)^T=G^T\cdots D^TC^TB^TA^T$$

定义9 矩阵的行列式，是它的元素的行列式

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \cdots\end{vmatrix} \tag{4}$$

两矩阵乘积的行列式等于它们各自行列式的乘积.

$$\det AB=\det A\det B \tag{5}$$

定义10 如果 $AA^{-1}=I=A^{-1}A$，则称A^{-1}是矩阵A 的逆.

可以证明

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\det A_{11}}{\det A} & \dfrac{\det A_{21}}{\det A} & \cdots\\ \dfrac{\det A_{12}}{\det A} & \dfrac{\det A_{22}}{\det A} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{6}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

式中A_{ij}是从A中去掉第i行和第j列余下的矩阵.

一具有一列的矩阵定义一列向量a.

一具有一行的矩阵定义一行向量a^T.

即

$$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\qquad a^T=[a_1,a_2,\cdots,a_n] \tag{7}$$

如果a，b有相同的元素数，则类似于点积，a^Tb是一标量

$$a^Tb=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \tag{8}$$

当$a=b$时

$$a^Tb=a^Ta=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\|a\|^2 \tag{9}$$

称为向量a的模平方——a的长度的平方.

定义11 如果$a^Tb=0$，向量a和b正交.

矩阵运算的其它规则：

设λ，k，k_1，k_2是纯数，A，B，C是矩阵，则

$$\left.\begin{aligned}&\lambda A=A\lambda\\&A+B=B+A\\&A+(B+C)=(A+B)+C\\&k(A+B)=kA+kB\\&(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A\\&A(BC)=(AB)C\\&A(B+C)=AB+AC\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

上述矩阵的性质和运算，对一般矩阵(非方阵)也是适用的，但要注意：

(1)只有当两个矩阵的行数相同且列数也相同时，才能相加.

(2)只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘.

(3)矩阵乘法不满足交换律，即一般情形下，$AB \neq BA$，无论方阵和非方阵相乘都是如此.

二、矩阵变换

矩阵G 将向量a 变换到向量a'，遵从如下规则：

$$a' = Ga = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots \\ g_{21} & g_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + \cdots \\ g_{21}a_1 + g_{22}a_2 + \cdots \\ \vdots \quad \vdots \end{bmatrix} \tag{11}$$

a'的转置为

$$a'^T = a^T G^T = [a_1, a_2, \cdots] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots \\ g_{12} & g_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= [g_{11}a_1 + g_{12}a_2 + \cdots, g_{21}a_1 + g_{22}a_2 + \cdots, \cdots] \tag{12}$$

定义12 如果$G^T = G^{-1}$，则矩阵G 称为正交矩阵.

上式即

$$G^T G = I \tag{13}$$

定义13 若G 为正交矩阵，则它定义的变换

$$b = Ga$$

是正交变换.

正交变换保持向 量的大小(长度)不变，因为若

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$b = Ga$$

是正交变换，则

$$b^T = (Ga)^T = a^T G^T$$

$$b^T b = a^T G^T G a = a^T I a = a^T a$$

即$\|b\| = \|a\|$，说明向量长度保持不变.

定义14 若矩阵乘积$G^{-1}AG = B$，其中A，B是m阶方阵，方阵G可逆，则B是A的相似矩阵. 对A的运算$G^{-1}AG$称为对A作相似变换，G称为把A变成B的相似变换矩阵.

定义15 若G矩阵元为复数，当$g_{ij}^* = g_{ji}$，即$G^{T*} = G$，称G为厄米(Hermitian)矩阵.

定义16 若$G^{T*} = G^{-1}$，则G称为酉矩阵，变换$G^{-1}AG$称为酉变换.

三、本征值与本征向量

定义17 若G是n阶方阵，a是n维非零向量，λ是纯数，使得

$$Ga = \lambda a$$

或

$$(G - \lambda I)a = 0 \tag{14}$$

成立，则称λ为G的本征值，a为G的对应于本征值λ的本征向量.

(14)式是n个未知数、n个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|G - \lambda I| = 0 \tag{15}$$

即

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} & \cdots \\ g_{21} & g_{22}-\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

上式是以λ为未知数的一元n次方程，称为方阵G的本征

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

方程(特征方程). G 的本征值(特征值)就是本征方程的根，本征值集合$\{\lambda_i\}$称为G 的谱. 如果某本征值是本征方程的重根，则谱称为简并的. 若谱是非简并的，将每个 λ_i 逐个代回方程(14)，便得到 n 个向量$a_i(i=1, 2\cdots, n)$. 称为G 的属于本征值 λ_i 的本征向量.

由于线性代数方程组(14)为齐次的，a_i 的任何非零倍数 $ka_i(k\neq 0)$仍是本征向量.

通常要求a_i 是单位向量，即

$$(a_i)^T a_i = 1 \tag{17}$$

则称本征向量a_i 已归一化.

与本征值本征向量相关的几个重要定理如下.

定理1 若方阵A 与B 相似，则A 与B 的本征多项式相同，从而A 与B 的本征值也相同.

证 设A 与B 相似，则有G，使

$$G^{-1} AG = B \tag{18}$$

故

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |G^{-1} AG - G^{-1}(\lambda I) G| \\ &= |G^{-1}(A - \lambda I) G| \\ &= |G^{-1}||A - \lambda I||G| = |A - \lambda I| \end{aligned}$$

推论 若 n 阶方阵A 与对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

相似，则 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 即是A 的 n 个本征值.

定理2 实对称矩阵的本征值为实数.

设复数 λ 是实对称矩阵A 的本征值，复向量a 是对应的本征向量，则

$$Aa = \lambda a \qquad (a \neq 0) \tag{20}$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$Aa^* = A^* a^* = (\lambda a)^* = \lambda^* a^*$$

故

$$a^{*T} Aa = a^{*T}(Aa) = a^{*T}\lambda a = \lambda a^{*T} a$$

又

$$a^{*T} Aa = (a^{*T} A^T) a = (Aa^*)^T a$$
$$= (\lambda^* a^{*T}) a = \lambda a^{*T} a$$

两式相减得

$$(\lambda - \lambda^*) a^{*T} a = 0$$

因$a \neq 0$,

$$a^{*T} a = \sum_{i=1}^{n} a_i^{*T} a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \neq 0$$

故 $\lambda - \lambda^* = 0$, $\lambda = \lambda^*$, 说明 λ 是实数.

定理3 设 λ_1, λ_2是实对称矩阵A 的两个本征值, a_1, a_2是对应的本征向量. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则a_1与a_2正交.

证 $Aa_1 = \lambda_1 a_1$, $\quad Aa_2 = \lambda_2 a_2$

作

$$a_2^T A a_1 = \lambda_1 a_2^T a_1 \tag{21}$$
$$a_1^T A a_2 = \lambda_2 a_1^T a_2 \tag{22}$$

取(2)式转置,

$$(a_1^T A a_2)^T = \lambda_2 (a_1^T a_2)^T$$

即

$$a_2^T A^T a_1 = \lambda_2 a_2^T a_1 \tag{23}$$

因A 为实对称矩阵, $A^T = A$.

(21)式与(23)式相减得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) a_2^T a_1 = 0$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则

$$a_2^T a_1 = 0$$

即a_1与a_2正交.

定理4 设A 为 n 阶实对称矩阵, 其本征值为 λ_1, λ_2, …,

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

λ_n，则总可以找到一实正交矩阵，使

$$p^{-1}Ap = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

为对角矩阵，即将A 对角化.

（证明略）

定理5 对称矩阵A 为正定的充分必要条件是：A 的各阶主子式都为正，即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \tag{25}$$

（证明略）

定理6 两个 n 阶实对称矩阵A，B，其中A 是正定的，则总能找到一个实的非奇异矩阵p 将它们同时对角化

$$p^{-1}Ap = I$$

$$p^{-1}Bp = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{26}$$

（证明略）

附录二　级数展开

一、泰勒级数

$$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a)$$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^n(a)+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)$$

$$+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\cdots$$

式中

$$f^n(a)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)|_{x=a}$$

常用的展开式有：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad |x|<1$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots \qquad |x|<\frac{\pi}{2}$$

二、二项式级数

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2$$

$$+\cdots+\binom{n}{m}a^{n-m}x^m+\cdots$$

当$|x/a|<1$级时数收敛. 式中二项式系数为

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$$
$$+\cdots+\binom{n}{r}x^r+\cdots \qquad |x|<1$$

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3$$
$$+\cdots+(-1)^r\binom{n}{r}x^r+\cdots \qquad |x|<1$$

常用的展开式(设 x 是小量)有

$$e^x\approx 1+x$$
$$\sin x\approx x$$
$$\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$$
$$(1\pm x)^{1/2}\approx 1\pm\frac{1}{2}x$$
$$(1\pm x)^{1/3}\approx 1\pm\frac{1}{3}x$$
$$(1\pm x)^{-1}\approx 1\mp x$$
$$(1\pm x)^{-2}\approx 1\mp 2x$$
$$(1\pm x)^{-3}\approx 1\mp 3x$$

附录三　二阶常微分方程

常系数二阶线性微分方程具有以下形式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x) \qquad (1)$$

即

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{2}$$

(1)其中特殊的一类是 $f(x)=0$ 的方程，即

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3}$$

称常系数线性二阶齐次方程，此种方程有如下性质：

①如 $y_1(x)$ 是方程(3)的一个解，则 $c_1y_1(x)$ 也是一个解.

②如 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 也是解.

③如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关解，则方程的通解为 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$；

作代换

$$y = e^{rx} \tag{4}$$

代入方程(3)，得一代数方程

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{5}$$

此方程称为辅助方程，其解为

$$r = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \tag{6}$$

如辅助方程有二不等实根，$r_1 \neq r_2$，则通解为

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{7}$$

如有二相等实根，$r_1=r_2=r$，则通解为

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} \tag{8}$$

如有二不等复根，$r=\alpha\pm i\beta$，则通解为

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) \tag{9}$$

或

$$y = \mu e^{\alpha x}\sin(\beta x + \delta) \tag{10}$$

(2)一般(即非齐次)的二阶线性微分方程：

设 $y=u$ 是齐次方程

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{11}$$

的通解，$y=v$ 是非齐次方程

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{12}$$

的任意解，则

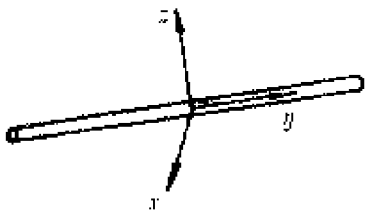
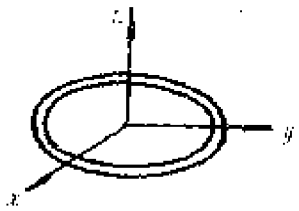
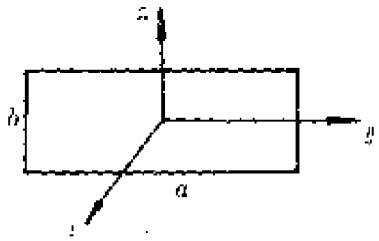
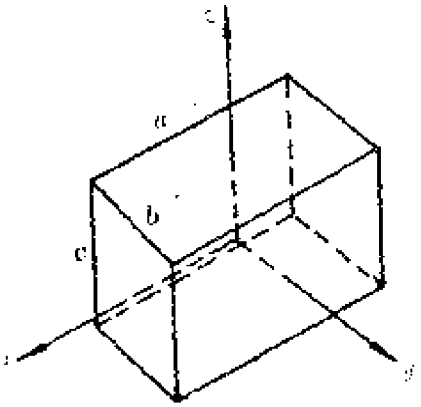
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

$$y = u + v \tag{13}$$

是方程(12)的一个解，u(它称为补函数)的求法前面已给出，v(它称为特解)可用观察法或试探法求出. 例如可根据 $f(x)$的函数形式，猜出一个特解的形式代入(12)式，用待定系数法求解.

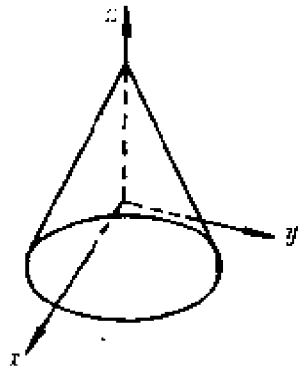
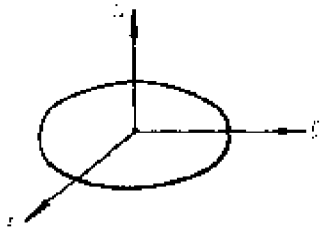
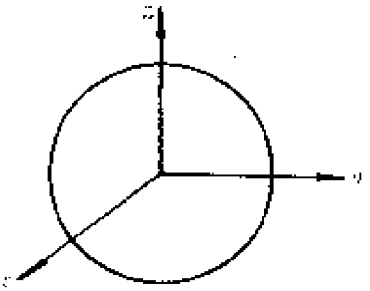
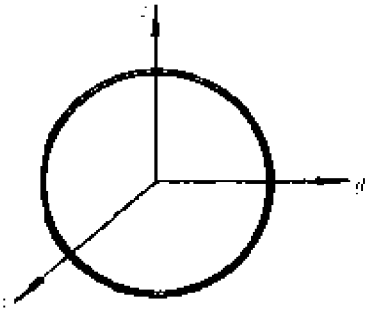
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

附录四　各种均质刚体的质心主转动惯量

物　体	图形及质心主轴系	质心主转动惯量
细棒：长 a		$I_x=I_z=\frac{m}{12}a^2$ $I_y=0$
细圆环：半径 R		$I_x=I_y=\frac{1}{2}mR^2$ $I_z=mR^2$
长方形薄板：长 a，宽 b		$I_x=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$ $I_y=\frac{m}{12}b^2$ $I_z=\frac{m}{12}a^2$
长方体：边长分别为 a,b,c		$I_x=\frac{m}{12}(b^2+c^2)$ $I_y=\frac{m}{12}(a^2+c^2)$ $I_z=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$

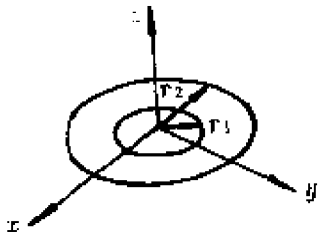
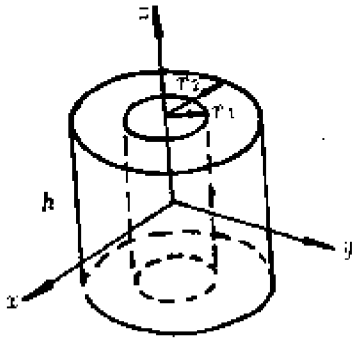
PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续前表

物　体	图形及质心主轴系	质心主转动惯量
正圆锥：高 h，底半径 R		$I_z=I_y=\frac{3m}{20}\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)$ $I_x=\frac{3}{10}mr^2$
圆盘：半径 R		$I_z=I_y=\frac{m}{4}R^2$ $I_x=\frac{m}{2}R^2$
球：半径 R		$I_x=I_y=I_z$ $=\cdots$(对过质心的任意轴) $=\frac{2}{5}mR^2$
薄球壳：半径 R		$I_x=I_y=I_z$ $=\cdots$(对过质心的任意轴) $=\frac{2}{3}mR^2$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

续前表

物　体	图形及质心主轴系	质心主转动惯量
薄圆环：内外半径分别为 r_1，r_2		$I_x=I_y=\frac{m}{4}(r_1^2+r_2^2)$ $I_z=\frac{m}{2}(r_1^2+r_2^2)$
柱管：内外半径分别为 r_1，r_2，高 h		$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{1}{3}h^2\right)$ $I_z=\frac{m}{2}(r_1^2+r_2^2)$
椭球：半轴分别为 a、b、c		$I_x=\frac{m}{5}(b^2+c^2)$ $I_y=\frac{m}{5}(a^2+c^2)$ $I_z=\frac{m}{5}(a^2+b^2)$

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com

主要参考书目

〔1〕〔美〕H·戈德斯坦，《经典力学》(第二版)，科学出版社，1986 年.

〔2〕〔美〕J·B·Marion，《质点和系统的经典动力学》，李笙译，高等教育出版社，1986 年.

〔3〕〔俄〕L. D. Landan and E. M. Lifshitz，“Mechanics”(第三版)，J. B. Sykes. J. S. Bell 译自俄文版，Pergamon Press. 1976.

〔4〕S. Neil Rasband，“Dynamics”，John Wiley and Sons. 1983.

〔5〕Klaus Rossberg，“A First Course in Analytical Mechanics”，John Wiley and Sons. 1983.

〔6〕胡慧玲，林纯镇，吴惟敏，《理论力学教程》，高等教育出版社.

〔7〕周衍柏，《理论力学教程》(第二版)，高等教育出版社，1986 年.

〔8〕卢圣治，胡静，管靖，《理论力学》，电子工业出版社，1991 年.

〔9〕吴大猷，《古典动力学》，科学出版社，1983 年.

〔10〕Dr. D. N. Burghes，Dr. A. M. Downs“Modern Introduction to Classical Mechanics and Control”，Ellis Horwood. Pubusher. Chichester，1975.

〔11〕Dr. Gupta，and Dr. Kumar，Dr. Sharma，“Classical Mechanics”，Pragati Prakashan 1980～1981.

〔12〕Edward A. Desloge，“Classical Mechanics”，John Wiley and Sons，1982.

〔13〕Grant R. Fowles，“Analytical Mechanics”(Third

PDF 檔案使用 "pdfFactory Pro" 試用版本建立 www.pdffactory.com