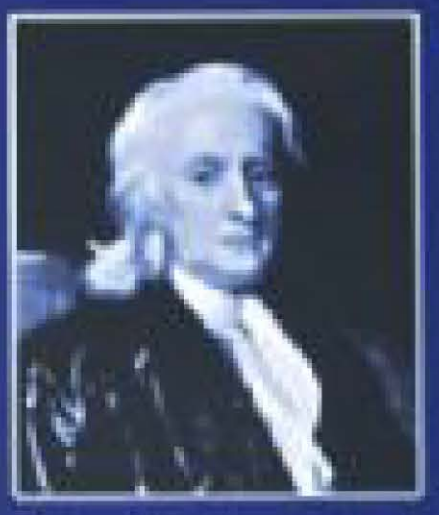


Jingdian Lixue

经典力学

沈惠川　李书民　编著

经典力学基础
Lagrange 力学
Hamilton 力学

中国科学技术大学出版社

03
34

国家自然科学基金资助出版

经 典 力 学

沈惠川　李书民　编著

中国科学技术大学出版社
2006·合肥

内 容 简 介

本书是为适应大学本科教学新形势而撰写的“经典力学”教科书．全书以 Lagrange 力学和 Hamilton 力学为主线，详细阐述了经典力学的基本原理、基本方程及其应用．本书对非完整系统的处理方法作了全面的分析和刷新，对用 Hamilton 原理推导正则方程作了更符合物理学原则的诠释和修正，并指出了推导 Hamilton 正则方程的最好方案是直接由 Legendre 变换出发．本书将弹性力学和经典电动力学全部纳入Lagrange力学和 Hamilton 力学的形式体系，导出了几何非线性弹性力学(有限形变问题)的基本微分方程．本书中强调物理概念的运用及其在具体物理问题中的应用，几乎每一节的内容都比通常的经典力学教科书有所改进和强化．本书中附有近 160 道例题和超过 240 道习题，这对读者的自学是有帮助的．

全书共分三章．第一章为“经典力学基础”，包括第一节“Newton 质点和质点系力学”，第二节“Newton-Euler 刚体力学”，第三节“Hooke-Navier 弹性力学”；第二章“Lagrange力学”；第三章“Hamilton 力学”．书末有“附录”，包括 A“张量”，B“经典电动力学简介”，C“热力学简介”．在第三章的末尾，还介绍了“Birkhoff 系统动力学”．

本书可作为大学本科物理类各专业及相关专业的教材，也可供研究人员作参考．

本书的出版得到国家自然科学基金(编号 10475070)的资助．

图书在版编目(CIP)数据

经典力学/沈惠川，李书民编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2006.8
ISBN 7-312-01930-7

Ⅰ．经… Ⅱ．①沈… ②李… Ⅲ．经典力学—高等学校—教材 Ⅳ．O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 083746 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026)
网址：http://press.ustc.edu.cn
电话：发行部 3602905 编辑部：3602900
电子信箱：发行部 press@ustc.edu.cn 编辑部：edit@ustc.edu.cn
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：710×960/16 印张：28.375 插页：1 字数：658 千字
2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
定价：45.00 元

吴大猷先生论经典力学
（代序）

惠川先生：

我学的物理，多是在1930年代初年，大学刚毕业时（和在大学三四年级时）．那时自己学的古典力学，是我在1941教杨振宁、黄昆们的资本，也是我1956～1957年在台湾教古典力学的讲义（英文的）的底子．这部讲义，后来在台湾翻成中文的《古典动力学》．在1946年以后，我即未看后来的书，尤其1967年回来台湾做“行政”工作，在物理是差不多脱节落伍了．

你提起来Goldstein的力学．我在1956～1957年，接受Prentice-Hall书局的邀请，签了一合约，答应为他们写一本关于Scattering的和一本古典力学的书．适好1958年底，日本博士后T. Ohmura由日本和我工作，他同意和我合作，写Scattering的书；1959～1960夏费了一年半，写毕．但力学的书，我始终没有写，原因是那时Goldstein的书（第一版）刚出来，我觉得我心里计划着重Hamilton-Jacobi理论在量子论发展的美丽部分，和Goldstein的差不多，又我实在所知不多；决定不再写一本和Goldstein观点相似的书．

我在我的古典动力学书中（p. 201）指出关于由Hamilton principle导出canonical Eqs.部分，许多书都犯同一的错误，即在

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum p_k\dot{q}_k - H\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k - \sum\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] = 0$$

中，δq_k乃任意的，故，

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

但δp_k则不是任意的；但由于Legendre变换，$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$，$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$故仍得

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

1980年Goldstein第二版出来，一位朋友送我一本台湾翻印本．我试查看第8-5节（pp. 362～363），果然Goldstein是错的！p_k不能视为independent coordinates的！（Goldstein不仅是抄人抄错的，他是根本了解错的！见他（8-64）式下第4-6行．

Landau-Lifshitz 便不犯此错!)

在 p. 360, p. 372, Goldstein 指引 Dirac 所写关于 generalized dynamics 的小书. Dirac 之 generalized dynamics书,可谓和 Goldstein 书所讲的,隔得很远. 指引Dirac 书,毫不清楚,对读者毫无用处,感觉得这指引有点"装门面",不太诚实!

Goldstein 书内容庞杂而不精. 我固然没有机会去"用"它,但我亦不喜欢它. (1996. 9. 10)

先说 δp_k 在 $\delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = 0$ 中不能是任意的问题.

这点在我的《古典动力学》第 201 页中已说得很清楚. 现在再说一下:

在 $\delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t = 0$ 命题中,我们是比较各不同路径的运动(在同一固定的时间中 $t_1 - t_0$ 从 q_k^0 到 q_k^1 的 $\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$ 的值. 这是 Hamilton principle 本身命题的一部分! 不能忘记了! 因为这个条件,各途径须以同一时间 $t_1 - t_0$ 走完);故在一运动(路)径 $q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k$ 中的 $p_k + \delta p_k$ 不能任意;否则走 q_k 径和走 $q_k + \delta q_k$ 径由 q_k^0 到 q_k^1 的时间,则可以不同了!

许多书的作者,大概根本不知道 Hamilton principle 命题本身有此部分! 把它当作数学变分问题看! 须知 Hamilton principle 是一个物理(力学)的原则! 见我书 p. 185.

在许多书中,彼此抄袭,根本未懂 Hamilton principle 的命题,可怜得很!

我书的 pp. 201~203 指出,如将 Hamilton principle 写成(III-21)式,则 $\delta\dot{q}_k$ 可视作任意的,但有一条件,即(III-33)式(或 214 页之(I-33),即(I-34)式).

关于 $L\mathrm{d}t$ 的 Lorentz 不变性问题,大概情况就是如你所述了. (1996. 9. 23)

关于 Hamilton principle 中之 δp_k 不能是任意的一点,应是无疑问的. 许多人写书也好,教书也好,根本不记得命题是什么. 各比较的 paths,是须在同一时间 $t_1 - t_0$ 中完成的. 故 δp_k 不能任意取,否则可以用很短的时间内由 q_k^0 达到 q_k^1 了! Hamilton principle 不是一个单纯的变分问题,而是一个物理命题! 很少人知道这一点. (我在 1941 年,在昆明教古典力学时的笔记即指出此点;班中有杨振宁、黄昆等. 去年清华大学(台湾省新竹,下同——编者注)将我的手写 Notes 影印出来,给杨、黄等人各一册作纪念.)

我从来都不大相信"书",除了 Dirac 等几个人所写的可靠外,我都不绝对信它,尤其"无名小卒"的写作! (1996. 10. 9)

你要我 1941 年在昆明西南联大的 Classical Dynamics 手写讲义影印本. 我将向

清华索了寄上．这只是为我讲课自己用的 Notes，原不是印发给他人的．三年前清华大学知道我还有此数十页的手稿．我便送了给图书馆．他们影印了几十本，作为纪念，不随便给人（只送了些给当年在那班上的学生，如杨振宁、黄昆、李荫远等几人）.（1996.11.14）

日前我航寄你一册我在 1941 年西南联合大学授古典动力学时的笔记．1941 年的那学期，开始时先拟了一个“目录”，排有章节，其实并非“书稿”，是随课随写的．后来曾作了一些补充，故页数亦不甚连续．

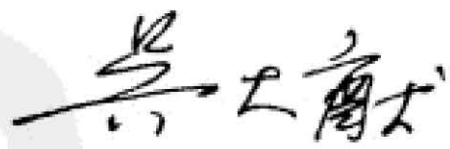
这手稿是 1956 年我第一次去台湾，在清华大学初办研究所第一班（和台湾大学一同上课）所写的英文讲义的蓝本，印发给学生．这讲义后来叫在交通大学（台湾省——编者注）的教授（昔日在美国的学生）翻译成中文，即是后来出版的《古典动力学》.

稿中有笔误和错处．你只可以以纪念品看它．那是半个世纪前的东西！（1996.12.16）

随函附上一稿．文乃去年才有感，最近始得人打字．弟忽然变成一古典物理者矣．

文中是 Newton 以来三百余年第一次有人分析猝变运动的细节．所引入的新名词 jumpulse $\overline{\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)}\cdot\tau$ 乃沿自 impulse $\overline{(F)}\cdot\tau$ 我乃完全用 Newtonian 力学，无新假设，但可能在实用上（如制动，高尔夫球手）有发展处．欢迎教言！（1998.12.17）

我一时想到我最近的文章，引入猝量的观念，这确是在应用力学中有意义，也可能是三百年来 Newton 力学系统中可作补充意义的观念.（1999.1.1）



作　者　序

1996 年 12 月，吴大猷先生将台湾新竹清华大学 1994 年出版的《吴大猷先生手稿：古典力学(1941 年，昆明西南联合大学)》影印手稿(有限本)惠赠于我．这本影印手稿的历史，其年代之久远，远甚于 H. Goldstein 的《经典力学》．它在经典力学发展史上的重要意义，尤其是对理论物理学的贡献，已不仅仅是学术上的、教学上的了．吴大猷先生的这本手稿，就是他后来《古典动力学》一书的蓝本．在吴大猷先生和 Goldstein 以及 L. D. Landau 之前的有关经典力学或分析力学的书籍，绝大部分是专著并且基本上是为数学家和力学家而写的，而不是为物理学家或理学院物理系专业的师生所写的教科书．为物理学家或理学院物理系专业的师生所使用的教科书，应当更注重物理概念的陈述及其在理论物理学中的应用．

在本书“代序”中吴大猷先生对某些经典力学或分析力学教科书里所谓“修正的 Hamilton 原理”或“推广的 Hamilton 原理”的批评，就是正确使用物理概念的典范．吴大猷先生的批评，极具穿透力和震撼力．H. Goldstein 的《经典力学》和 D. T. Greenwood 的《经典动力学》等教科书中对所谓“修正的 Hamilton 原理”或“推广的 Hamilton 原理”的辩解，是无力的和自欺欺人的．“Hamilton 原理”是物理学(或力学)命题(或原则)而不是数学变分法；在真实的运动路径上，位形和动量将同时到达终点而不可能存在不同时到达的“虚变动”．所谓“修正的 Hamilton 原理”或“推广的 Hamilton 原理”，实际上是不顾 Legendre 变换的“纯数学”变分．

推导 Hamilton 正则方程可以有多种方法；最好的方法是直接从 Legendre 变换出发．如果从“Hamilton 原理”出发，则仍需要“Legendre 变换”出手相助．企图凭借旁门左道式的“修正的 Hamilton 原理”或“推广的 Hamilton 原理”来投机取巧或搪塞，在物理上难以自圆其说甚至是说不过去的，只会遭到人们的质疑因而自取其辱．本书详述了三种推导 Hamilton 正则方程的方法；在利用“Hamilton 原理”推导正则方程的过程中，特别强调了吴大猷先生对物理概念的陈述．通过比较，读者自然会认可，只有直接从 Legendre 变换出发推导 Hamilton 正则方程的方法，才是最好的方法．

在经典力学或分析力学中，另一个需要物理学家动脑筋的就是几十年来争论不休的“非完整系统”问题．许多专著和教科书，包括吴大猷先生的《古典动力学》和 Landau 的《力学》，在这一问题上都采取回避的态度，至多只是对“线性非完整”问题

作有限的讨论;而另一些谈到"非线性非完整"问题的书中的说法,则全都是错的,其中有些还相当可笑."非完整问题"涉及速度对系统的约束;它同时在耗散力学、流体动力学、塑性力学流动理论中具有很现实的应用需要. 这个问题是物理学家和力学家的"百年之痒". 1933 年由 N. G. Chetaev 引入的"Chetaev 条件"在物理学上是毫无道理的:它既不能由分析力学的形式得到(即不能从 Hamilton 原理导出),又不能由约束方程的逻辑诱导得到(即不能从变分约束方程导出),更不符合变分学方法的规范程序(即其偏导数是对广义速度的,而它的变分量则是对广义坐标的),但应用 Chetaev 条件后确实可以导出线性非完整系统的真实轨道方程. 1982～1983 年间提出来的另一个被称之为"Vacco 模型"的数学结构,尽管满足 Hamilton 原理,但由它导得的却是系统的测地轨道方程而并非 Routh 方程;换言之,对非线性非完整系统而言,Vacco 模型也行不通. 到底是"Chetaev 条件"对还是"Vacco 条件"正确,抑或是二者都有问题? 这是一个必须严肃思考的问题.

有些理论家在万般无奈的情况下,引入"Gauss 最小拘束原理"和所谓"Jourdain 原理",乃至"万有 d'Alembert 原理"来糊弄人,自以为将适用于理想约束条件的"d'Alembert原理"作一番"推广"就能处理非线性非完整问题. 但是根据 N. G. Chetaev的说法,"d'Alembert 原理"、"Gauss 最小拘束原理"和所谓"Jourdain 原理"这三者,对完整约束、对线性非完整约束是相容的,而对非线性非完整约束则是不相容的;即使将虚位移的概念加以推广,也只能使 d'Alembert 原理与 Gauss 最小拘束原理同时成立,而不能保证 Jourdain 原理成立.(语见 N. G. Chetaev"关于 Gauss 原理"一文,载《持续发展:分析力学著作》,苏联学术科学出版社,莫斯科,1962 年第 323 页.)换言之,任何用改变"理想约束条件"定义来导出非线性非完整系统 Routh 方程的企图,都只是一厢情愿的和靠不住的.

除此之外,另有一些学者试图从其他角度出发来解决非完整系统的问题;关于这方面的介绍和总结,可以参阅梅凤翔先生在《高等分析力学》和《非完整系统力学基础》中的有关章节. 据我了解,这些努力中的绝大部分都收效甚微、影响极小. 可以说,经典力学或分析力学的近代发展,都与最终解决非完整问题的"愿景"有关. 本书分析了"Chetaev 条件"和"Vacco 条件"在理论上的不足,提出可以用所谓"Euler 条件"来统一它们;从而基本上解决了这个问题. 这也是本书的另一个重要"看点".

非完整系统的问题是属于 Lagrange 力学中的问题,而利用"Hamilton 原理"推导正则方程的问题则属于 Hamilton 力学的问题. Lagrange 力学和 Hamilton 力学是经典力学或分析力学中最主要的内容;吴大猷先生和 Goldstein 以及 L. D. Landau 的书都是以 Lagrange 力学和 Hamilton 力学为写作重点的. 记得吴大猷先生的《古典动力学》一书刚在中国大陆出版发行时,中国科学技术大学的一位教授就敲着桌子对我说:"理论力学或经典力学的教科书就应该这么写!"本书写作之初,就是打算以吴大猷先生的《古典动力学》为铺垫进行重新演绎,并以合作的名义出版. 吴大猷先

生在世时，我就有此想法，只是没有机会向吴先生当面提出．在没有得到吴大猷先生家人授权之前，我不能贸然行事．现在的选择是以我在中国科学技术大学 20 多年讲授经典力学和理论力学的若干次授课讲稿为基础所作的改编；此讲稿获得学生们的一致好评，10 多年之前就有学生建议我将此讲稿改编成书．个别学生的课堂笔记甚至比我的讲稿还写得整洁，有的还私下影印授售．

当然从目前中国大陆的大学本科生物理学水平来说，在 Lagrange 力学和 Hamilton力学之前增加一章“经典力学基础”也是必须的，以便与普通物理学的力学部分相衔接．实际上，在吴大猷先生和 Goldstein 以及 Greenwood 等人的书中，也有相关的内容，只是在先后次序上和选材上有所区别而已．然而，必须特别指出的是，那种以“经典力学基础”为主、以 Lagrange 力学和 Hamilton 力学为辅的写作格局应当废止，被颠倒了的主次关系应当被重新颠倒过来．面向 21 世纪的全新教科书尤其要如此；这也是教学改革实际的需要．

写作方针确定之后，选材就是决定的因素．质点力学和刚体力学自不用说：凡是在普通物理学的力学部分中没有讲到的主要内容，都要讲一遍；次要内容可以略而不述．在弹性力学和流体动力学这二者之间，本书选择讲解弹性力学．考虑的出发点首先是，弹性力学的数学结构完全可以纳入 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的形式体系；此外，弹性力学已经完全数学化而且其形式已经完全固定．相反，流体动力学在数学结构上与 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的形式体系相去较远，而且它在物理上还有一些问题没解决，形式上变化多端．当然这样的安排并非是说流体动力学不重要；相反，在连续介质力学的范围内，流体动力学比弹性力学更需要单独成书．流体动力学中关于“Euler 描述”或“系综”的概念是划时代的；这些概念现在已经成为统计力学和量子力学中讨论问题的基础．相比之下，弹性力学较为传统；对弹性力学的理论探讨已经成为过去，它目前的地位与刚体力学一样仅仅是应用（其最新的应用是在生物物理学对 DNA 形状的研究中）．将弹性力学纳入 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的形式体系之后，弹性力学将失去独立存在的理由；同时本书的内容则会更具特色，旗帜更为鲜明．

出于差不多相同的原因，本书中也不专门涉及狭义相对论．相对论无疑是物理学的最重要的支柱之一．相对论（包括狭义的和广义的），热力学，以及分析力学（包括 Lagrange 力学和 Hamilton 力学），是物理学中的“铁三角”；是物理中的物理，是物理学中的哲学．相对论，热力学，以及分析力学是评估其他物理学理论是否正确的最后标准，是所有其他物理学学科必须共同遵守的“约束条件”．这三门课程，在大学授课阶段应该得到进一步加强而不是削弱．面对社会上某些没有经过系统训练的年轻人和某些自以为是者对相对论的无理责难，应当更高地举起 Einstein 的大旗．在大学课堂上，只讲 6 至 12 学时相对论是远远不够的；联系到某些量子力学理论家在相对论知识方面是如此贫乏和他们到处散布对相对论的怀疑的现实，在大学里花一二

个学期的时间来讲授和解读相对论也不算过分．但是由于本书的目标不在这里；为了突出重点节约学时，因此只得割爱少谈．有关知识，读者可以通过阅读 Einstein 原著和其他名家之作来得到．

作为一个统一的理论体系，本书与其他经典力学或分析力学的教科书一样，还将经典电动力学纳入了 Lagrange 力学和 Hamilton 力学的逻辑结构．从这一意义上来说，经典电动力学（除了其中有关相对论的内容外）也没有独立存在的必要了．在本书的附录中，有专门一节介绍经典电动力学的基本公式．但是，经典电动力学有一种比较特殊的数学结构，它同时又能被纳入流体动力学的形式中去．（不能由于经典电动力学的基本方程可以变换为流体动力学的基本方程，以及流体动力学的基本方程可以变换为经典电动力学的基本方程，就说“有超音速就一定有超光速”；因为声速和光速是两个完全不同的物理概念，因为与经典电动力学的基本方程对应的仅仅是“相对论”流体动力学的基本方程．）

Lagrange 力学和 Hamilton 力学，尤其是 Hamilton 力学，与热力学在数学上十分相像．它们都以 Legendre 变换和 Pfaff 方程作为讨论问题的基础．在经典力学和热力学中，有着类似的变分原理．所谓“分析热力学”，就是在这些基础上建立起来的．至于“分析热力学”的细节，本书不打算涉及．在本书的附录中，也有专门一节介绍热力学的基本公式．

由于经典力学，尤其是其中的 Hamilton 力学部分，与后续课程量子力学和统计力学有着千丝万缕的内在联系，因此本书在需要介绍的地方，总是不加回避地介绍一些有关量子力学和统计力学方面的信息．但是这种介绍，只是点到为止．这对以后的学习和研究是有好处的．

在 Goldstein 的《经典力学》第三版中，还有关于“混沌”方面的内容．在经典力学教程中谈论混沌，已经成为一种时髦．在本书目前的这一版中，没有介绍“混沌”的打算．吴大猷先生批评 Goldstein 的《经典力学》“内容庞杂而不精”是应当引起重视的．以后的事，以后再说．

除此之外，本书中还特别提到了钱伟长先生在“变分原理”方面所做的工作．钱先生是我母校清华大学的老师．钱先生当时住在照澜院 16 号时，我就与他有通信来往并受益良多．我在《应用数学和力学》和《中国应用数学和力学进展》杂志上所发表的论文，全都是钱先生审阅推荐的；钱先生对我有知遇之恩．钱伟长先生的《广义变分原理》曾惠赠我一本．《广义变分原理》是一本资料丰富、充满特色的书；书中关于变分原理的积分形式可以很方便地变换为微分形式．书中还记录了就变分原理与胡海昌进行学术辩论的材料．从物理学家的观点来看，钱先生的意见是正确的，而胡海昌的说法有问题．钱先生曾对我说过，他是“学物理出身的”．

本书的参考文献中有梅凤翔先生的 11 本书．梅先生是中国国内分析力学研究方面的领军人物；他对我的论文曾经作过评审，所以当他在“湖州会议”（全国第五届

分析力学学术会议)上第一次见到我时就打趣说:“久闻大名,如雷贯耳.”梅凤翔先生是中国力学学会理事会常务理事、中国力学学会一般力学专业委员会分析力学专业组的组长;我进入力学学会分析力学专业组就是梅先生提名的.梅凤翔先生的书,资料详实全面,是读者进行深入研究的必读之物.梅先生本人也在分析力学方面尤其是非完整系统方面做了许多出色的工作;对 Birkhoff 系统的研究就是梅先生为深入理解非完整系统而引入国内的(从文献资料中可知,数学家 Birkhoff 是 Einstein 的朋友).

为了教学需要和帮助读者自学,本书配备了大量的例题和习题.在本书的第 2、第 3 章有许多传统的“主干”内容;为这些传统的主干内容所配备的一组例题本来是可以作为其“应用”单独编成“一节”的,但本书为了叙述的完整并未作此人为的分隔.例题分为两种:一种是为说明问题或观点在逻辑上所必须具有的;另一种则是解题的示范.前一种例题不可或缺,后一种例题则可多可少.教师授课的时候,对后一种例题可酌情处理.对学生来说,则希望每道例题都能看懂.习题是为学生和自学者准备的;为了学到知识,必须自己动手算(尤其是张量方面的例题和习题,更要亲自动手算).

本书的内容较多.如果学时数宽裕,第 1 章的内容可以有选择地讲一些,第 2、第 3 章全讲;如果学时数不够,则第 1 章内容建议自学,第 2、第 3 章中的非主要内容也可以免讲.对自学者的建议是全书都读.

本书第 1 章中的“1.1 Newton 质点和质点系力学”和“1.2 Newton-Euler 刚体力学”由李书民教授执笔初稿,其余由我执笔初稿;全书由我统一校阅编撰并定稿.在本书的写作和出版过程中,得到中国科学技术大学理学院的大力支持和中国科学技术大学出版社的鼎力帮助.梅凤翔先生对本书的出版也有推力.对他们的支持和帮助,我和李书民教授谨致深深的谢意.

感谢已故吴大猷老师的多次热忱教导和信任,感谢钱伟长老师的鼓励和扶持!

本书的出版得到国家自然科学基金(编号 10475070)的资助.

沈惠川

2006 年 3 月 1 日

于中国科学技术大学

目　录

吴大猷先生论经典力学(代序) …… (ⅰ)

作者序 …… (ⅴ)

1　经典力学基础 …… (1)

1.1　Newton 质点和质点系力学 …… (1)

1.1.1　运动的描述方法 …… (2)

1.1.2　平动参考系和转动参考系 …… (9)

1.1.3　Newton 质点动力学 …… (12)

1.1.4　质点力学中的守恒定律 …… (17)

1.1.5　质点系动力学 …… (23)

1.1.6　位力定理 …… (29)

1.2　Newton-Euler 刚体力学 …… (32)

1.2.1　刚体的基本运动 …… (33)

1.2.2　刚体的简单运动 …… (34)

1.2.3　刚体定点运动的运动学参数和 Euler 运动学方程 …… (38)

1.2.4　刚体定点运动的角动量和转动动能 …… (43)

1.2.5　Euler 动力学方程及其精确解 …… (47)

1.2.6　惯量张量和刚体力学的张量表示 …… (49)

1.3　Hooke-Navier 弹性力学 …… (55)

1.3.1　应变和应力 …… (56)

1.3.2　广义 Hooke 定律和弹性力学基本微分方程 …… (63)

1.3.3　应力函数张量和线弹性力学的通解 …… (73)

1.3.4　关于弹性薄板形变问题和应变能密度的讨论 …… (81)

2　Lagrange 力学 …… (95)

2.1　虚功原理和 d'Alembert 原理 …… (96)

2.2　广义坐标,广义速度,广义质量,广义动量和广义力 …… (108)

2.3 Lagrange 未定乘数法:约束反力和具有多余约束的问题 …… (119)
2.4 理想,完整体系的 Lagrange 方程 …… (126)
2.5 Lagrange 方程的首次积分和守恒定律 …… (146)
2.6 广义动量定理:瞬时力问题 …… (161)
2.7 广义势能和带电粒子在电磁场中的 Lagrangian …… (167)
2.8 非完整体系的 Lagrange 方程(Routh 方程) …… (171)
2.9 耗散问题的 Lagrange 方程 …… (182)
2.10 Lagrangian 的不确定性和非惯性系中的 Lagrangian …… (187)
2.11 多自由度体系的微幅振动和简正坐标 …… (193)
2.12 r-l-c 电路中的 Lagrange 方程 …… (210)
2.13 变分问题的 Euler 方程 …… (213)
2.14 Hamilton 原理和 Maupertuis 原理 …… (221)
2.15 连续体系的 Lagrange 方程及其在弹性力学和电磁场中的应用 …… (232)

3 Hamilton 力学 …… (273)

3.1 Legendre 变换和 Hamilton 正则方程 …… (274)
3.2 正则方程的循环积分和能量积分,广义动量和 Hamiltonian 的不确定性 …… (287)
3.3 Routhian 和 Routh 方程,Binet 方程 …… (292)
3.4 广义经典力学的 Hamilton 正则方程 …… (305)
3.5 连续体系的 Hamilton 正则方程 …… (308)
3.6 正则变换 …… (315)
3.7 Poisson 括号 …… (333)
3.8 Hamilton-Jacobi 理论 …… (346)
3.9 化动量正则变换和化动能正则变换 …… (361)
3.10 Poincare 相空间体积不变性和 Liouville 定理 …… (370)
3.11 Liouville 方程的精确解 …… (379)
3.12 Birkhoff 系统动力学概论 …… (383)

附 录 …… (405)

A. 张量 …… (405)
B. 经典电动力学 …… (413)
C. 热力学 …… (422)

参考文献 …… (432)

人名索引 …… (437)

1 经典力学基础

1.1 Newton 质点和质点系力学

Isaac Newton(1642～1727)是经典力学的开山鼻祖,是物理学史中仅次于A. Einstein(1879～1955)的重量级人物(在普通只接受过中小学教育的人心目中,他甚至凌驾于 Einstein 之上). Newton 于 1687 年发表的《自然哲学的数学原理》(有郑太朴 1931 年的中译本和王克迪 1992 年的中译本)是自 Euclid(约前 330～前 260)的《几何原本》以来第一本最重要、最持久不衰的自然科学著作.《自然哲学的数学原理》与《几何原本》的写作结构完全相同. Euclid 的《几何原本》共 13 卷 467 个命题,在其第一卷中引入 23 个定义、5 个公理、5 个公设;这 5 个公设分别是:①直线公设;②线段无限伸长公设;③同心圆公设;④直角公设;⑤平行线公设. Newton 的《自然哲学的数学原理》共 3 卷 193 个命题(还有 82 个问题、111 个定理和 47 个引理),在其第一卷的卷首引入了三大定律 6 条推论. Newton 三大定律实际上就是经典力学中的"公设". 这种被称为"公理体系"的写作方式一直延续到量子力学(有些量子力学教科书一开头就引入 5 个公设),甚至连被誉为量子力学"圣经"的 P. A. M. Dirac的书也仿照Newton冠名为《量子力学原理》.

"质点"是物理学中最简单的模型. 当物体的形状和大小与所研究的问题无关抑或所起的作用极小时,或者当物体仅仅作平动时,就可以在理论上将此物体视为一个质点. "质点"的概念时至今日仍在量子力学的多种诠释中扮演主要的角色(只有"系综诠释"、"随机诠释"和 L. de Broglie 的"双解理论"除外).

Newton 力学具有双重功能:它一方面是通往其他高级课程(例如量子力学或统计力学)的必由之路,另一方面利用它又可以解决许多工程上的实际问题. 在本书中,从 Newton 力学出发,将渐入 Lagrange 力学和 Hamilton 力学之佳境;当然与此同时也解答一些具体的力学问题.

本节内容的重点是转动参考系中速度和加速度的合成定理以及质点系问题中的动量定理,角动量定理和动能定理(包括 König 定理).

1.1.1 运动的描述方法

一、参考系、质点和坐标系

1. 经典力学的理论框架

1) 时空性质

在经典力学中，宏观物体的机械运动是在“空间”和“时间”中进行的，空间和时间是与物质及其运动无关的独立存在. 前者是物体运动的“背景”和“舞台”，后者用来描写运动物体的先后顺序和因果关系. 在经典力学中，甚至空间和时间本身也是彼此独立的. 在经典力学中，度量空间可以采用“公用的尺子”，度量时间可以采用“公用的时钟”. 在经典力学中，空间是均匀、各向同性的；时间是均匀的，但只能沿着一个方向流逝. 空间的均匀反映了平移不变性，导致了动量守恒；空间的各向同性反映了旋转不变性，导致了角动量守恒；时间的均匀性反映了可逆性(有人认为，时间的概念正是由“不可逆性”所体现的)，但由于时间只有一个方向，故其可逆性是理论虚构的，在一般情况下可逆性导致的机械能守恒并不成立，而应当是热力学第一定律.

强调经典力学的以上时空性质，是为了与相对论的时空性质区别开来：在狭义相对论中，时间与空间是有关联的，“虚”时间与光速的乘积被认为是第四维；在广义相对论中，时间不但与空间相关联，而且时空与物质及其运动相关联；在相对论中度量空间的“度规”是变化的，度量时间的“时钟”也是不同的；在广义相对论中，没有动量守恒也没有能量守恒，只有“能量-动量张量”的守恒. 当然，相对论力学才是惟一正确的理论；Newton 力学只不过是一种近似. 但是，由于 Newton 力学中的所有公式都可以很方便地从经典情况过渡到(尤其是狭义)相对论的情况，因此在讨论力学问题的一般原理时，可以首先简单地只考虑经典情况. 至于广义相对论情况，则要另外考虑(本书不涉及广义相对论).

2) 基本假定：Galileo 不变性或 Newton 相对性原理

Galileo 相对性原理(G. Galileo，1564～1642)假定，描写经典运动的基本定律如果在一个参考系作中成立，则在一切相对于该参考系作匀速运动的参考系中也成立. 因此，由 Galileo 相对性原理得到的推论是，在一个参考系内部所作的任何力学实验，都不能判定它究竟是静止的，还是在作匀速直线运动(在相对论中，A. Einstein 将力学定律的相对性原理推广到一切物理定律).

Galileo 不变性或 Newton 相对性原理的一个直接应用是：如果 $f(x)$ 是 Newton 方程在 $t=0$ 时刻的解，那么 $f(x-v_0t)$ 就是同一个 Newton 方程在任意时刻的解，其中 v_0 是常数.

2. 参考系

物体的机械运动是相对的. 在对它进行描述时,要选择一定的参考物体;这种预先设定的参考物体被称为“参考系”. 最简单的参考系由 4 个不共面,且无相对运动的点组成(实际上就是一个“刚体”).

在经典力学中,参考系可分为“惯性系”和“非惯性系”两类. 所谓惯性系,就是 Newton 第一定律或 Newton 第二定律在其中成立的参考系. 狭义地说,如果一个物体在不受外力的情况下能够保持静止或作匀速直线运动,即服从 Newton 第一定律,则该物体可被视为一个惯性系(惯性系的操作性定义);广义地说,Newton 第二定律在其中成立的参考系,也可被视为一个惯性系. 所谓非惯性系,就是 Newton 第二定律在其中必须加以修正才成立的参考系,即相对于惯性系具有加速度的参考系. 常见的非惯性系有相对于惯性系旋转的“转动参考系”,和固定于天体上的“天文参考系”;在“天文参考系”中,又有以地球自转轴为一个方向,以赤道平面与黄道平面的交线为第二参考方向的“地心参考系”;和有以太阳为原点,坐标轴指向“恒”星的“恒星参考系”(或被称为“日心参考系”). 因为在宇宙中并无绝对的静止,故“恒”星参考系严格说来并非惯性系;但由于恒星的加速度很小,所以“恒星参考系”可被视为一个近似程度很好的惯性系. 更好的惯性系是以大量天体的平均位置为参考方向的参考系.

实际上,由 4 个不共面、且无相对运动的点组成四面体(即“刚体”),就是最简单的惯性系.

3. 质点

在许多实际问题中,当物体的形状和大小与所研究的问题无关抑或所起的作用极小时,或者当物体仅仅作平动时,就可以在理论上将此物体视为一个几何点(此“几何点”可以是一个具体的“物质点”,也可以是一个非具体的“空间点”),其质量可以被认为就集中在这个几何点上. 这种具有确定质量,但不计其形状、大小和内部结构的物体被称为“质点”. 质点的概念是相对的而且与其运动状态有关. 有时大的物体可以被看作质点,小的物体却不能被看作质点. 比如研究地球绕太阳的公转时,地球半径较地球到太阳的距离小得多,地球可被视为质点;但研究地球的自转时,就不能把它当作质点了.

由质点在空间中的几何性质可知,其理论描述相当于 Euclid 几何中的“数学点”. “数学点”是离散的,因而它天生与量子力学中的“非局域性”(当然是 Copenhagen诠释的量子力学)不合. 由于在解析几何中,点的位置是由其坐标值来确定的,因而质点的位置也可以用这种方法来给定. 由此也可以看出,位置的测量较之其他物理量的测量更显重要.

可以在空间自由运动的质点被称为“自由质点”.

4. 坐标系

就数学上而言，坐标系的选取是任意的；但从物理学角度而言，坐标系必须固结于刚体，否则无法判断其为“惯性系”还是“非惯性系”. 由一个不动原点和 3 根坐标轴所指向的 3 个点组成的坐标系，就是“4 个不共面、且无相对运动的点组成的四面体(即‘刚体’)”.

常用的正交坐标系有：①DesCartes 直角坐标系；②三维曲线坐标系；③二维曲线坐标系；④自然坐标系(Serret-Frenet 坐标系). 在三维曲线坐标系中有：(圆-椭圆截面)柱坐标系、(抛物线截面)柱坐标系、(双曲线截面)柱坐标系、球-椭球坐标系、抛物体坐标系、双曲体坐标系. 在二维曲线坐标系中有：(圆-椭圆截面)柱面坐标系、(抛物线截面)柱面坐标系、(双曲线截面)柱面坐标系、球-椭球面坐标系、抛物体面坐标系、双曲体面坐标系、锥面坐标系. 正交的坐标系，一共只有这 15 种. 本书中用得最多的正交坐标系是 DesCartes 直角坐标系，尤其在推导公式时只有使用 DesCartes 直角坐标系才是最方便的；在解题时偶尔也应用球坐标系，(圆截面)柱坐标系，极坐标系和自然坐标系. 其余正交坐标系基本上未涉及.

二、运动学方程和轨道

1. 运动学方程

所谓“运动学方程”，就是质点在空间(或平面上)任一时刻 t 所在位置的数学描述，亦即质点的运动规律.

确定一个自由质点在空间的位置，需要用 3 个独立变量来描述；这些量一般都是时间的函数. 例如一个质点的位置，可以用 3 个直角坐标(x_1, x_2, x_3)表示；也可以用一个引自原点 O 到质点 P 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，如图 1.1. 此时

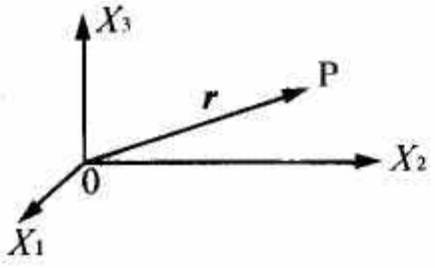


图 1.1

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_k x_k\boldsymbol{i}_k \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.1}$$

即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x_1(t)\boldsymbol{i}_1 + x_2(t)\boldsymbol{i}_2 + x_3(t)\boldsymbol{i}_3 = \sum_k x_k(t)\boldsymbol{i}_k \qquad (k = 1,2,3)$$

式中，$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$为 DesCartes 坐标系 (x_1, x_2, x_3) 方向的单位矢量. 若采用直角坐标系中的分量表示，则质点的运动规律可表示为

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ x_3 = x_3(t) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

在平面上,(1.1.1)式可被约化为

$$\boldsymbol{r} = \sum_k x_k \boldsymbol{i}_k \qquad (k = 1,2) \tag{1.1.3}$$

其分量表示为

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases}$$

对于平面运动,也可采用极坐标 (r,θ) 表示法,即

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

其中 r 为矢径,θ 为极角. 它们与直角坐标的关系为:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.1.5}$$

因此,直角坐标系下的位矢亦可表示为极坐标系下的形式:

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.6}$$

式中,矢径 r 也就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的"模".

此类方程称为质点的"运动学方程".

2. 轨道

运动质点在空间的一连串占据点的集合被称为"轨道". 如果轨道为一条直线,则被称为直线运动;若为一条曲线,则被称为曲线运动;当然,直线运动其实是曲线运动的一种特殊的极限情况;真实的物理世界决不可能有理论上的直线运动;光线在太阳附近的"短程线"就是弯的.

3. 轨道方程式

所谓"轨道方程式",就是将质点运动方程组中的时间参数 t 消去,所得诸变量之间的关系式. 但是,在运动学方程中要消去时间 t,并不像说这句话那么简单;尤其在非线性运动学方程中要完成消去时间 t 的手续是相当麻烦的,因为在非线性条件下轨道会出现"分叉"现象. 此外,轨道的形状依赖于参考系的选择;运动火车中的上下运动在地面上的人的眼里却是抛物线运动;因此在不同的坐标系下,轨道方程式可以完全不一样.

三、位移,速度和加速度

1. 位移和路程

在给定时间内,连接质点的"初位矢"和"末位矢"之间的矢线(由初位矢指向末位

矢),被称位"位移";换言之,位移是质点在两个时刻之间的位矢的差:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.7}$$

由(1.1.7)式可以看出,"位移"$\Delta \boldsymbol{r}$ 是矢量(注意,$\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向不一定沿着 $\boldsymbol{r}(t+\Delta)$的方向,也不一定沿着 $\boldsymbol{r}(t)$的方向).

与此同时,在给定时间内质点所走过的实际距离被称为"路程",记为 s;"路程"s 是标量.

2. 速度和速率

位矢的时间变化率的极限值被称为"速度"

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}r} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.8}$$

速度的大小或"模"被称为"速率". 由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x_1 \boldsymbol{i}_1 + \mathrm{d}x_2 \boldsymbol{i}_2 + \mathrm{d}x_3 \boldsymbol{i}_3, \quad |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (\mathrm{d}x_k)^2} = \mathrm{d}s$$

故速率等于路径的时间变化率:

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \tag{1.1.9}$$

所谓"匀速直线运动",就是指:质点在一直线上运动,且速率不变.

在惯性系下,坐标系原点不动(无加速度),单位矢量恒定

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_k}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.10}$$

所以

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k x_k \boldsymbol{i}_k = \sum_k \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}_k + \sum_k x_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_k \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}_k = \sum_k v_k \boldsymbol{i}_k \tag{1.1.11}$$

其中

$$v_k = \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.12}$$

而

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_k (v_k)^2} \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.13}$$

此中须注意 $v = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 与 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\sum_k (x_k)^2}\right)$ 之间的区别.

对于质点的平面圆周运动,由(1.1.6)式可得速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} \tag{1.1.14}$$

上述(1.1.14)式等号最右边第一项中 r 变,方向 $\boldsymbol{e}_r$ 不变;第二项中 r 不变,方向变. 当"r 变,方向 $\boldsymbol{e}_r$ 不变"时,对比(1.1.3)式和(1.1.6)式,可得

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}_1 \cos\theta + \boldsymbol{i}_2 \sin\theta \tag{1.1.15}$$

而当“r 不变，方向变”时，对比 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}_1(-r\dot{\theta}\sin\theta)+\boldsymbol{i}_2(r\dot{\theta}\cos\theta)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}=r\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}$，可得

$$\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{i}_1\sin\theta+\boldsymbol{i}_2\cos\theta \tag{1.1.16}$$

可以直接证明，$\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 是正交的(亦可由 $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1,\boldsymbol{e}_r\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}=0$ 证明)．于是，极坐标系下单位矢量$(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta)$与 DesCartes 坐标系单位矢量$(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2)$之间的关系为：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{i}_2\end{pmatrix} \tag{1.1.17}$$

同时有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{e}_\theta\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{e}_r\end{cases} \tag{1.1.18}$$

于是

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.1.19}$$

式中，“径向速度”v_r 和“横向速度”v_θ 分别是

$$v_r=\dot{r},\quad v_\theta=r\dot{\theta} \tag{1.1.20}$$

3. 加速度

速度的时间变化率的极限值被称为“加速度”

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.21}$$

所谓“匀加速直线运动”就是指加速度保持不变的直线运动.

在直角坐标系下，利用(1.1.1)式，有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_k\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}_k+2\sum_k\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_k}{\mathrm{d}t}+\sum_k x_k\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{i}_k}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.22}$$

对惯性系而言，由于(1.1.10)式，故

$$\boldsymbol{a}=\sum_k\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}_k=\sum_k\ddot{x}_k\boldsymbol{i}_k=\sum_k a_k\boldsymbol{i}_k \tag{1.1.23}$$

其中

$$a_k=\ddot{x}_k\qquad(k=1,2,3) \tag{1.1.24}$$

而加速度的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\sum_k(a_k)^2}\qquad(k=1,2,3) \tag{1.1.25}$$

此中须注意 $a=\sqrt{\sum_k\left(\dfrac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\sum_k(v_k)^2}\right)$ 之间的区别.

由(1.1.19)式可求出平面圆周运动质点在极坐标系下加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\\&=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta=a_r\boldsymbol{e}_r+a_\theta\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}\tag{1.1.26}$$

其中

$$\begin{cases}a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\end{cases}\tag{1.1.27}$$

分别为“径向”和“横向”加速度. 此中须注意:$a_r\neq\ddot{r}$,$a_\theta\neq r\ddot{\theta}$.

对于质点的曲线运动,有时采用“自然”坐标系更为方便. 以平面运动为例,它以质点相对于路径上一参考点的弧长 s 为坐标,单位矢量 $\boldsymbol{e}_\tau$,$\boldsymbol{e}_n$ 分别沿切线和法线方向. 设 $\boldsymbol{e}_\tau$ 与 x_1 轴之间的夹角为 θ,则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{e}_n,\quad\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_n}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{e}_\tau\tag{1.1.28}$$

由于速度沿曲线的切线方向(这是处理质点曲线运动问题时必须抓住的特点),故

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau\tag{1.1.29}$$

而加速度则为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\tau+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\tau+\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau}{\mathrm{d}\theta}$$

引入曲率半径

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\tag{1.1.30}$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n\tag{1.1.31}$$

式中切向加速度 a_τ(由速度大小的变化引起)与法向加速度 a_n(由速度方向的变化引起)分别为:

$$\begin{cases}a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\end{cases}\tag{1.1.32}$$

(1.1.31)式和(1.1.32)式还适用于三维的情形;在三维情况中,a_n 为“主法向”加速度,而在副法线方向 $\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n$ 上加速度分量为零.

另外$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=\dddot{\boldsymbol{r}}$被称为“急度”或“加加速度”；它们将在求速度$\boldsymbol{v}$或加速度$\boldsymbol{a}$的极值时被用到.

1.1.2　平动参考系和转动参考系

在某种情况下，参考系本身也在运动. 此外，在不同参考系中测量所得到的结果也不相同. 本节研究不同参考系中观测结果之间的关系.

一、平动参考系

依照 Newton 的绝对时空观，在一切参考系中，时间和空间的尺度可以取成相同的，即

$$\begin{cases}\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\text{ 与 }\mathrm{d}\boldsymbol{r}\text{ 之间的比例系数为 }1\end{cases}$$

设 K′参考系相对于 K 参考系作平动. 我们分别用带“′”和不带“′”的量表示两系中测量得到的物理量. 不妨设它们的坐标轴是平行的，且它们的原点 O' 和 O 在初始时刻重合，于是在任意时刻，一个质点在两系中的位矢存在下列关系：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}_e t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_e t^2 \tag{1.1.33}$$

式中，$\boldsymbol{v}_e$ 为 K′参考系相对于 K 参考系的相对平动速度(常矢量)，$\boldsymbol{a}_e$ 为 K′参考系相对于 K 参考系的平动加速度(常矢量)，$\boldsymbol{r}_0$ 为 $t=0$ 时 O' 在 K 参考系中的位矢(若定义 $\boldsymbol{r}_0$ 为任意时刻 O' 在 K 参考系中的位矢，则可将 $\boldsymbol{v}_e t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_e t^2$ 包括在内). 将上式对时间求全导，并注意到

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\quad \boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.34}$$

所以，两参考系之间速度的变换关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{a}_e t \tag{1.1.35}$$

式中 $\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{a}_e t$ 被称为“牵连速度”；$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 分别被称为“绝对速度”和“相对速度”. 注意这里的“相对”二字系指质点的相对运动，而参考系的相对运动被称为“牵连运动”. 对(1.1.35)再次求导，可得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_e \tag{1.1.36}$$

其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}'$ 和 $\boldsymbol{a}_e$ 分别为“绝对加速度”、“相对加速度”和“牵连加速度”. 同样必须注意，“相对加速度”系指质点的相对加速度，而非参考系的相对加速度.

二、转动参考系

1. Poisson 公式

若质点以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 作圆周运动；规定 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向与质点位矢方向和质点运动方向（也就是速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向）成右手螺旋规则，（见图 1.2），即有

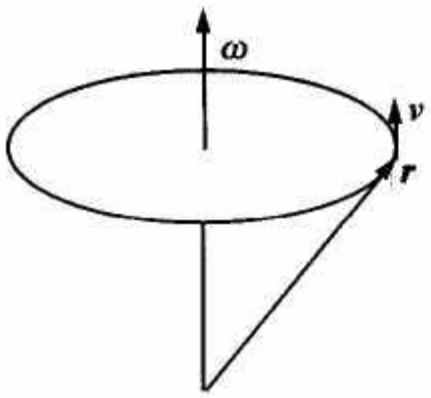


图 1.2

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1.1.37}$$

则当(1.1.37)式中的 $\boldsymbol{r}$ 特指单位矢量 $\boldsymbol{e}_k(k=1,2,3)$ 时，就可得到下列“Poisson 公式”：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_k}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_k \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.38}$$

由“Poisson 公式”(1.1.38)式可以得到圆周运动中的公式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\omega\boldsymbol{e}_\theta\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\omega\boldsymbol{e}_r\end{cases} \tag{1.1.39}$$

式中，ω 是矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的“模”.

2. “Poisson 公式”的推广

设 K′坐标系与 K 坐标系的原点重合，且 K′坐标系相对于 K 坐标系以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动；则对于在 K′坐标系中的任意矢量（非惯性系中的单位矢量用 $\boldsymbol{e}_k$ 表示）

$$\boldsymbol{A}=\sum_k A_k\boldsymbol{e}_k \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.40}$$

其时间全导数为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_k\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_k+\sum_k A_k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_k}{\mathrm{d}t} \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.41}$$

将“Poisson 公式”(1.1.38)式代入(1.1.41)式，便得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \tag{1.1.42}$$

式中

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{A}=\sum_k\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_k \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.43}$$

被称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的“相对导数”（或“当地导数”），而 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 被称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的“绝对导数”（或“随体导数”）. 由于(1.1.43)对任意矢量均成立，故可以将它写成算符形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'+\boldsymbol{\omega}\times \tag{1.1.44}$$

此(1.1.44)式在 Newton 运动学中恒成立. 可以看出,它比"Poisson 公式"更普遍.

3. 速度合成定理(牵连运动为定轴转动)

将(1.1.44)式应用于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}'$ ($\boldsymbol{r}'$为相对位矢),则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.1.45}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.1.46}$$

由此,设 $\boldsymbol{r}$ 为绝对位矢,$\boldsymbol{r}'$为相对位矢,r_0 为任意时刻 O' 在 K 参考系中的位矢,则有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{1.1.47}$$

进而得到

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.1.48}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}\text{ 为 }O'\text{ 点的速度}\\ \boldsymbol{v}'=\displaystyle\sum_k\frac{\mathrm{d}x_k'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_k\text{ 为相对速度}\\ \boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\text{ 为牵连速度}\end{cases} \tag{1.1.49}$$

从(1.1.48)式可以看出,当牵连运动为平动,即 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时,有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$,便回到了平动参考系中的速度合成定理;此外,当 $\boldsymbol{\omega}/\!/\boldsymbol{r}'$时,亦有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$. 值得注意的是,$\boldsymbol{v}'\neq\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$;另外,此处牵连速度的定义与(1.1.35)式不同.

4. 加速度合成定理(牵连运动为定轴转动)

将(1.1.44)式应用于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}'$($\boldsymbol{v}'$为相对速度),则对"绝对加速度"有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'\right]\\&\quad+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right]\\&=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'\end{aligned} \tag{1.1.50}$$

式中,$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$为参考系 K′的"角加速度",$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$为"Coriolis 加速度"(G. G. Coriolis,

1835). 于是,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_c \tag{1.1.51}$$

其中,

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \text{ 为牵连加速度}\\ \boldsymbol{a}'=\sum\limits_k\dfrac{\mathrm{d}^2x_k'}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_k \text{ 为相对加速度}\\ \boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \text{ 为 Coriolis 加速度}\end{cases} \tag{1.1.52}$$

值得注意的是,在一般情况下,$\boldsymbol{a}_e\neq\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}$,$\boldsymbol{a}'\neq\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$;此外,由(1.1.50)式的推导过程可以看出,$\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$中有一半来自$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$,而另一半来自$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$.

从(1.1.50)式可以看出,当牵连运动为平动,即 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时;当质点相对静止、作圆周运动,即 $\boldsymbol{v}'=0$ 时;当 $\boldsymbol{\omega}/\!/\boldsymbol{v}'$时;"Coriolis 加速度"均为零.

此外,以上速度或加速度合成定理是在牵连运动为定轴转动的条件下得到的. 若牵连运动的情况更为复杂,则速度或加速度合成定理也将更为复杂.

圆周运动可视为相对运动等于零的绝对运动. 将相对运动等于零的条件代入以上加速度合成定理,并假设 $\boldsymbol{a}_0=0$,便有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{1.1.53}$$

这个结果是众所周知的.

与 Coriolis 加速度相应的惯性力称为"Coriolis 力". 从(1.1.50)式就可以知道,"Coriolis 力"是"几何力". 所谓"几何力",就是与物质性质完全无关的力,它纯粹是由运动学引起的. 根据广义相对论,引力也是"几何力". 所谓的"引力子"至今找不到,就因为"引力"是几何力的缘故.

"Coriolis 力"的实例有许多. 例如,马达上的皮带向里弯,火车转弯压迫内轨,水池漏水有逆时针方向的漩涡(从上往下看),Foucault 摆的"进动",贸易风、北半球河流冲刷右岸,自由落体东向偏离等.

1.1.3 Newton 质点动力学

前面两节讨论了质点运动学,只限于对运动进行描写,不涉及运动的本质和内在规律. 动力学则是研究运动变化的原因. Newton 运动定律是经典动力学的基础,适用于作低速运动的宏观物体.

一、Newton 运动定律

1. Newton 三定律(王克迪译本的原话)

第一定律:每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态,除非有外力作用于它迫使它改变那个状态.

第二定律:运动的变化正比于外力,变化的方向沿外力作用的直线方向. 即有

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1.1.54}$$

第三定律:每一种作用都有一个相等的反作用力;或者,两个物体间的相互作用总是相等的,而且指向相反.

在三大定律之后有 6 条推论;其中"推论一"是:力遵循加法的平行四边形法则(即,力是"矢量").

这三大定律 6 条推论,就相当于 Euclid《几何原本》中的"公设".

2. 有关 Newton 三定律的说明

物体不受其他物体作用时保持运动状态不变的性质被称为"惯性". "惯性"是物质的一种固有特性. 因而 Newton 第一定律又被称为"惯性定律". 根据后面 1.1.4 的分析可以知道,"惯性定律"实际上是单个质点自身的"动量守恒"定律,它的更深层次的原因是"空间平移不变性".

Newton 的《自然哲学的数学原理》中的"第二定律",仅提到"运动的变化". 所谓"运动的变化"实际上就是"动量的变化". 所以 Newton 第二定律的正确表述是:"动量的变化"正比于外力,并且发生在所加外力的方向上. 从而,

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) \tag{1.1.55}$$

式中,$\boldsymbol{p}$ 是系统的"总动量". 方程(1.1.55)式与方程(1.1.54)式是有区别的;区别在于质量 m 是否是变量;此外,一般来说,$\boldsymbol{p}$ 也不一定等于 $m\boldsymbol{v}$(尤其是当存在电磁场的情况下).

需要指出的是,Newton 第三定律并非自然界的一个普遍成立的定律;其适用条件是:①两个物体之间的相互作用力必须沿着两个物体的质量中心连线(反例是两个物体之间的摩擦力不沿中心连线方向);②两个物体之间的作用力不能依赖于速度(反例是 Lorentz 力与粒子的运动速度有关). 此外,对于由 4 个以上质点组成的系统,Newton 第三定律缺乏实验检验的基础. 因为根据 Newton 第二定律,对每一个质点可以列出对应于(x_1, x_2, x_3)三个方向的 3 个 Newton 方程;而对第 k 个质点来说,它与其他$(n-1)$个质点之间存在对应于第$(1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n)$个质点的$(n-1)$个未知作用力 $\boldsymbol{F}_i$;由数学知识可以得到,只有当方程数不小于未知量数目时,方程组方可定解,即$3 \geqslant n-1$;所以,必须有 $n \leqslant 4$. 这一证明说明了:一方面不可没有 Newton 第三定律(或者另外找一个"代用"定律也成),另一方面 Newton 第三定律对于由 4 个以上质点组成的系统根本无法判别其对错. 在真实的物理世界中,反倒有许多证据表明 Newton 第三定律不对.

根据后面 1.1.5 的分析可以知道，Newton 第三定律实际上是“两个质点”之间的“动量守恒”定律，而且仅仅对“纯力学”物体有效.

二、质点运动微分方程

1. 运动微分方程

根据 Newton 第二定律，当质量 m 恒定时，质点的运动微分方程是

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=m\dot{\boldsymbol{v}}=m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.56}$$

这是一个关于 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的二阶微分方程；当力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$，的形式已知时，方程是可积的；在初始条件 $\boldsymbol{r}(0)$、$\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ 确定后，可求得两组积分常数. 若力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t,\lambda)$，其中 λ 为对时间对位置不可微的参数，则 Newton 方程(1.1.56)式不可积.

在 DesCartes 坐标系中，自由质点的 Newton 方程为

$$m\ddot{x}_k=F_k(x_i,\dot{x}_i,t)\qquad(i,k=1,2,3) \tag{1.1.57}$$

运动微分方程组(1.1.57)式中的 6 个积分常数，由下列初条件决定：

$$\begin{cases}x_k(0)=a_k\\ \dot{x}_k(0)=b_k\end{cases}\qquad(k=1,2,3) \tag{1.1.58}$$

在极坐标系中，自由质点的 Newton 方程为

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t)\\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta(r,\theta;\dot{r},\dot{\theta};t)\end{cases} \tag{1.1.59}$$

其定解条件为

$$\begin{cases}r(0)=r_0\\ \theta(0)=\theta_0\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}\dot{r}(0)=\dot{r}_0\\ \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0\end{cases} \tag{1.1.60}$$

一般来说，Newton 的运动微分方程既非色散的，又非耗散的. 如果力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$，即与速度无关，则 Newton 运动微分方程无耗散，而有可能是色散的；如果 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$，即与速度有关(尤其是与速度的“奇次方”成正比)，则 Newton 运动微分方程就是耗散的. 同样的道理对广义相对论中的“Einstein 场方程”或量子力学中的 Schrödinger 方程也适用. 所以一般地说某一“力的形式尚未确定或势能形式尚未确定”的方程“不是耗散型的”或“是时间可逆的”这样的话，是并无根据的.

2. 力的具体形式

在通常情况下，力的具体形式有 8 种，见表 1.1.

需要说明的是，湿摩擦力中的指数，在通常情况下是

$$\alpha=\begin{cases}1(\text{当 } v<24\text{m/s 时})\\ 2(\text{当 } 24<v<330\text{m/s 时})\end{cases}$$

此外，核力一栏中的汤川(Yukawa)势为

$$V(r)=\frac{C}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \tag{1.1.61}$$

表 1.1

名 称	力的数学表达式	备 注
重力	$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{g}$	严格说来，重力是几何力.
万有引力	$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$	按照广义相对论，万有引力是几何力. 左栏中 Newton 形式是广义相对论形式的 0 级近似.
Coulomb 力	$\boldsymbol{F}=k\frac{e_1e_2}{r^3}\boldsymbol{r}$	Coulomb 力当初是仿照 Newton 万有引力写出来的；其精度现已被证明是相当高的.
Lorentz 力	$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)$	式中 $\boldsymbol{E}$ 为电场，$\boldsymbol{B}$ 为磁感.
Hooke 力 (弹性力)	$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$	式中 k 为弹性常数. 其一维形式推广至三维，就成为弹性力学中的弹性常数张量.
Newton 力(耗散力，粘滞力，减速力)	$\begin{cases}F=\mu N(\text{干摩擦})\\ \boldsymbol{F}=-\mu v^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\tau}(\text{湿摩擦})\end{cases}$	式中 μ 为摩擦系数，N 为约束反力，$\boldsymbol{e}_{\tau}$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 的切线方向单位矢量，α 为指数.
Lennard-Jones 分子力	$F=\frac{\lambda}{r^m}-\frac{\mu}{r^n}$	通常情况下，$\begin{cases}n=7\\ m=13\end{cases}$
核力	$F=\frac{C}{r^n}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$	式中 C 和 n 为常数，$r_0=10^{-13}$ cm 是核半径. 有时候也用汤川(Yukawa)势来描述核力.

以上 8 种力中，除重力、引力和核力外，其余 5 种力在本质上都是电磁相互作用的结果. 物理学界盛传有 4 种相互作用，实际上“引力相互作用”是否包括在内是很可疑的，因为引力是几何力. 兹将“4 种”相互作用的有关参数罗列如下(表 1.2)：

其中，弱相互作用和电磁相互作用已基本上被 S. Weinberg 和 A. Salam 等人所创立的“弱电理论”统一起来.

但是，“弱电作用”通过什么机制、通过什么中间过程最终变成(例如说)摩擦力，物理学家至今仍不太清楚.

表 1.2

	强作用	电磁作用	弱作用	(引力作用)
强度	1	$\frac{1}{137}\approx 10^{-2}$	10^{-13}	10^{-38}
力程	10^{-13} cm	长程	$10^{-15}\sim 10^{-16}$ cm	长程
传递子	胶子	光子	Bose 子	(无)

3. 约束问题

在经典力学中,大量的问题是质点受约束的问题,而不是自由质点问题. 对自由质点问题来说,只要将以上 8 种力代入 Newton 方程(1.1.57)式求解便可解决所有疑问.

1)关于约束和约束反力

如果质点受到某种预先给定的限制而不能作自由运动并占据空间中的任意位置,则这种限制就被称为"约束". 比如,火车必须在铁轨上运动;刚体在运动过程中,其上任意两点的距离保持不变;在马路上行走或行驶,不能"穿墙而过"并要遵守速度限制、时间限制等. 因此,具体的约束必然是静止的或运动的一条"曲线"或者一个"曲面". 这种"曲线"或者"曲面"通常可表示为关于坐标、速度和时间的一个关系式;这种关系式被称为"约束方程". 受约束的质点被称为"非自由质点",而提供约束的物体则被称为"约束物体". 约束物体对质点或质点系的反作用力,被称为"约束反力".

"约束反力"有 4 个特点:①它不完全决定于约束本身,而同时与作用在质点上的其他力以及质点本身的运动状态有关;②一般均是未知的;③通常都是被动力,换言之,单靠约束反力,不可能引起质点的任何运动;④通常发生在接触点上,如果无摩擦时它沿着"约束面"的法线方向,如果有摩擦时它与"约束面"的法线方向成一定角度.

2)解约束问题的方法

解约束问题的方法是:去掉约束并代之以约束反力,从而使质点变成"自由质点"以便可以利用 Newton 方程.

设约束反力为 $\boldsymbol{N}$,于是

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.1.62}$$

然而,在(1.1.62)式中,由于 $\boldsymbol{N}$ 是未知的,方程数少于未知量数目,所以必须联立约

束方程方能求解.

在求解约束(线约束)问题时,通常以"内秉方程"为方便. 所谓"内秉方程",就是以"自然坐标系"表示的 Newton 方程;即

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \\ 0 = F_b + N_b \end{cases} \tag{1.1.63}$$

式中,(F_τ, F_n, F_b)分别为切向、主法向、副法向的主动力;(N_n, N_b)分别为主法向、副法向的约束反力. 方程组(1.1.63)式中的第一个方程给出运动规律;第二、第三两个方程可以被用来决定约束反力.

在应用方程组(1.1.63)式求约束反力时,还需要利用约束方程求出曲率半径 ρ. 若约束方程为

$$x_2 = f(x_1) \tag{1.1.64}$$

则

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f''}{\sqrt{[1+(f')^2]^3}} \tag{1.1.65}$$

式中 $f' = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}, f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}$.

对不光滑的线约束问题,方程组(1.1.63)式中的第一个方程应改写为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\tau + F^d \\ |F^d| = \mu N = \mu\sqrt{N_n^2 + N_b^2} \end{cases} \tag{1.1.66}$$

式中,F^d 为摩擦力,其方向与质点运动方向相反;μ 为摩擦系数.

1.1.4 质点力学中的守恒定律

一、动量定理与动量守恒定律

1. 动量定理

1)微分形式:即 Newton 方程

当质点的质量为常数时,Newton 第二定律可被写成

$$F_k = \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.67}$$

其中

$$p_k = mv_k \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.68}$$

被称为“动量”. (1.1.67)式是微分形式的“动量定理”.

2)积分形式

将(1.1.67)式对时间积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} F_k \mathrm{d}t = p_k(t_2) - p_k(t_1) \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.69}$$

这就是积分形式的“动量定理”. 式中

$$G_k = \int_{t_1}^{t_2} F_k \mathrm{d}t \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.70}$$

被称为“冲量”.

2. 动量守恒

在(1.1.67)式中,若 $F_k=0$ $(k=1,2,3)$,则

$$p_k = mv_k = \text{const. vector} \qquad (k=1,2,3) \tag{1.1.71}$$

这一结果被称为“动量守恒定律”.

如果力的某一方向上的分量为零,则在该方向上有动量的分量守恒.

二、角动量定理与角动量守恒定律

1. 角动量定理

1)微分形式

用位矢 $\boldsymbol{r}$ 矢乘 Newton 方程的等号两端,得

$$m\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.1.72}$$

方程(1.1.72)式右端的量被称为“力矩”.记为 $\boldsymbol{M}$;$\boldsymbol{M}$ 实际上是对惯性坐标系原点 O 的力矩. 如果需要求得对空间任意轴线的力矩,则只要将 $\boldsymbol{M}$ 投影到该轴上便可.

(1.1.72)式左端可被改写为

$$m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) \tag{1.1.73}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.1.74}$$

故(1.1.73)式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} \tag{1.1.75}$$

定义“角动量”(也被称为“动量矩”)

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.1.76}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{1.1.77}$$

上式被称为微分形式的“角动量定理”.

2)积分形式

将(1.1.77)式对时间积分得

$$\boldsymbol{J}(t_2)-\boldsymbol{J}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t \tag{1.1.78}$$

方程(1.1.78)式右端的量被称为“冲量矩”.

2. 角动量守恒

如果质点不受外力作用($\boldsymbol{F}=0$),或虽有外力作用但外力矩为零($\boldsymbol{M}=0$),则角动量守恒

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\text{const. vector} \tag{1.1.79}$$

这一结论被称为“角动量守恒定理”.

如果力矩的某一方向上的分量为零,则在该方向上有角动量的分量守恒.

三、动能定理与机械能守恒定律

1. 动能定理

1)微分形式

用位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 标乘 Newton 方程等号两端,得

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.1.80}$$

方程(1.1.80)式右端的量被称为力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上所做的“元功”,记为 $\mathrm{d}W$. 由于“元功”或“功”是标量,所以它们满足“分配律”. 单位时间内的“元功”,被称为“功率”,即

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_k F_k v_k\qquad(k=1,2,3) \tag{1.1.81}$$

方程(1.1.80)式左端可被改写成

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{1.1.82}$$

定义“动能”为

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1.1.83}$$

于是,方程(1.1.80)式成为

$$dT = dW \tag{1.1.84}$$

上式被称为“动能定理”. 动能定理表明:外力所做的功等于质点动能的增量. 由于Newton 方程是对惯性系而言的,故(1.1.84)式也是相对于惯性系而言的.

2)积分形式

将(1.1.84)式等号两边积分,得到

$$T(2) - T(1) = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.1.85}$$

上述(1.1.85)式被称为“功能定理”. 同样,由于 Newton 方程是对惯性系而言的,故(1.1.85)式也是相对于惯性系而言的.

2. 机械能守恒

1)势能

方程(1.1.85)式右端的功一般与具体路径有关. 但是,如果力 $\boldsymbol{F}$ 可被写成某一个单值、有限、可微的位置函数 $V(\boldsymbol{r})$ 的梯度

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.86}$$

或

$$F_k = -\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_k} \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.1.87}$$

则这种力被称为“保守力”,而函数 $V(\boldsymbol{r})$ 被称为“势能函数”. 由于(1.1.86)式,所以要判断某一个力是否保守力,只要计算此力的旋度是否为零即可. 保守力沿某一路径的功为

$$\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_1^2 dV = V(1) - V(2) \tag{1.1.88}$$

上式表明保守力所做的功与具体路径无关,而只与路径端点的位置有关. 与此相反,对“非保守力”来说,就无此性质. 特别地,对“耗散力”来说,它所做的功虽与路径有关,但总是做负功以消耗能量.

必须指出的是,由(1.1.88)式所确定的,仅仅是“势能差”. 要“不拖泥带水”地写出势能,必须首先定义“势能零点”. 在通常情况下,如果质点的高度变化不十分大时,就定义起始点为势能零点;如果质点的高度变化很大时,就定义距地心无限远处为势能零点;在弹簧或弹性力学问题中,则定义平衡位置处为势能零点.

确定势能零点之后,就可以根据(1.1.88)式写出势能表达式.

2)机械能守恒

将(1.1.86)式代入动能定理(1.1.80)式,得

$$dT = -\nabla V \cdot d\boldsymbol{r} = -dV \tag{1.1.89}$$

即

$$d(T+V) = 0 \tag{1.1.90}$$

故

$$T+V=\text{const.}=E \tag{1.1.91}$$

上式被称为“机械能守恒定律”，而 E 被称为“机械能”. 从以上对保守力和非保守力的分析可知，“机械能守恒定律”对非保守力及其特殊情况“耗散力”是不成立的；对“耗散力”来说，部分机械能转变为热能而散逸，故代之以“机械能守恒定律”的，将是“能量转化和守恒定律”：$T+V+(\text{热能})=\text{const.}$

四、小结

(1)动量守恒，角动量守恒和机械能守恒，都是 Newton 方程的“首次积分”，因而都是一阶微分方程；其一般形式为 $\Phi(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=C$，式中 C 为积分常数(可能不止一个).

(2)动量定理，角动量定理和动能定理，都是来自 Newton 方程，因而都是相对于惯性系而言的.

(3)当合外力为零时，对一个质点来说似乎有 7 个守恒量；但实际上只有 5 个是独立的；因为其中有 2 个是恒等式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=0\\ E=\dfrac{1}{2m}(m\boldsymbol{v})^2=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\end{cases} \tag{1.1.92}$$

其中，第一个等式是永远成立的，第二个等式在势能为零时成立.

五、LaPlace-Runge-Lenz 矢量守恒

在有心力问题中，Newton 方程一般可被写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.1.93}$$

将方程(1.1.93)式等号两边同时矢乘角动量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})$，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{J}=\frac{mf(r)}{r}[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})]=\frac{mf(r)}{r}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})-r^2\dot{\boldsymbol{r}}] \tag{1.1.94}$$

利用等式

$$\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t}=r\dot{r} \tag{1.1.95}$$

可将(1.1.94)式改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})=-mf(r)r^2\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r}-\frac{\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2}\right]=-mf(r)r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{1.1.96}$$

选择

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \tag{1.1.97}$$

便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mk\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{1.1.98}$$

于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J} - mk\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \text{const. vector} \tag{1.1.99}$$

这就是著名的 LaPlace-Runge-Lenz 矢量. 由于(1.1.97)正好对应于“万有引力”,因此 LaPlace-Runge-Lenz 矢量在天体物理学中有很广泛的应用.

本节内容实际上就是中学物理学课程和大学普通物理学课程所讲授的内容;只不过在经典力学课程中写得更为紧凑而已.

【例 1.1】 已知:质量为 m 的质点在曲线上运动,其内秉方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \end{cases}$$

而且外力是保守力,势能为 V.

求:(1)内秉方程的能量积分;

(2)曲线的参数方程为 $\begin{cases} x_1 = x_1(\theta) \\ x_2 = x_2(\theta) \end{cases}$ 时的约束反力(θ 为质点运动方向与水平线之间的夹角),设保守力是重力.

解:(1)因为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v^2)$$

于是,内秉方程的能量积分为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + V = \text{const.} \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \end{cases}$$

(2)当保守力为重力时,有

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx_2 = 0$$

故

$$v^2 = -2gx_2$$

又因为

$$F_n = -mg\cos\theta$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2},\ \rho=\frac{ds}{d\theta}$$

所以

$$N_n=mg\left[\cos\theta-\frac{2x_2}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2}}\right]$$

1.1.5　质点系动力学

一、质点系

1. 质点系的内力和外力

由许多(有限或无限)个相互联系着的质点所组成的系统被称为“质点系”.

质点系中质点之间的相互作用力被称为“内力”(用上角标(i)表示);质点系以外的物体对质点系内任何一质点的作用力被称为“外力”(用上角标(e)表示).

在质点系动力学中,必须有独立存在的 Newton 第三定律,否则推理无法进行.在质点系动力学中,Newton 第三定律表现为强弱两种形式(此为 H. Goldstein 的说法):

$$\begin{cases}\sum\limits_k \boldsymbol{F}_k^{(i)}=0 & \text{(弱形式第三定律)}\\ \sum\limits_k (\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)})=0 & \text{(强形式第三定律)}\end{cases}\tag{1.1.100}$$

这两种形式的 Newton 第三定律分别在推导动量定理或角动量定理时有用.

质点系的内力和外力的划分与所选取的系统(热力学中被称为“隔离体”)有关.在所考虑的精度之内,若一物体对其他质点的影响可以忽略,则此物体可以被排除在系统之外,其运动可单独决定并认为是已知的;在相反的情况下,就应该将此物体包括在系统之内.

2. 质心

1)线矩(静矩)

定义质点系的“线矩(静矩)”为$\sum\limits_k m_k\boldsymbol{r}_k$;对于无限多质点组成的系统,“线矩(静矩)”是$\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}V$,式中$\rho$为系统的质量“体密度”.如果无限多质点组成的系统是一条线或一张面,则质量“体密度”ρ应该被换成质量“线密度”λ或质量“面密度”σ.

2)质心及其位矢

若系统内所有质点对某一指定点的线矩为零,则此指定点就是"质心".

质点位矢的加权平均(权重为质量 m)成为"质心";所以,质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_k m_k \boldsymbol{r}_k}{m} \tag{1.1.101}$$

其中 $m = \sum_k m_k$ 为总质量. 对于无限多质点组成的系统,质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\int \rho \boldsymbol{r} \mathrm{d}V}{m} \tag{1.1.102}$$

其中,总质量 $m = \int \rho \mathrm{d}V$.

根据质心的定义可知,在"质心坐标系"中,质心的位矢为零. 此外,在无限多质点组成的系统中,若质量"体密度"ρ 是常数,则质心就是"形心"(几何中心).

在质点系问题中,尤其在由无限多质点组成的系统中,要列出每个质点的微分运动方程几乎是不可能的,而且也没有必要. 在质点系问题中,主要考虑的是系统作为整体的运动学性质和动力学性质;因此主要研究整个系统的动量定理和动量守恒定律、角动量定理和角动量守恒定律以及动能定理和机械能守恒定律.

二、动量定理和动量守恒定律

1. 动量定理:质点系动力学基本方程之一

设质点系中第 k 个质点所受的外力和内力分别为 $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$ 和 $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$,则根据 Newton 第二定律,对每一个质点都有

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{F}_k^{(i)} \tag{1.1.103}$$

就系统而言必须对 k 求和;考虑到弱形式的第三定律 $\sum_k \boldsymbol{F}_k^{(i)} = 0$,得

$$\sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{1.1.104}$$

因为

$$\sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_k \left(m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_k (m_k \boldsymbol{v}_k)$$

所以,(1.1.104)式成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{1.1.105}$$

式中

$$\boldsymbol{p}=\sum_k \boldsymbol{p}_k=\sum_k m_k\boldsymbol{v}_k \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{1.1.106}$$

是质点系的“总动量”. (1.1.105)式被称为“质点系的动量定理”.

于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\Big(\sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)}\Big)\mathrm{d}t \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{1.1.107}$$

2. 质心运动定理

根据(1.1.101),因为 $m\boldsymbol{r}_C=\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k$,所以

$$m\boldsymbol{v}_C=\sum_k m_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{p} \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{1.1.108}$$

于是,(1.1.105)式还可写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \tag{1.1.109}$$

这就是“质心运动定理”. 它的物理意义很清楚. 质心运动定理是引入质点概念的动力学基础.

3. 质点系的动量守恒定律

在(1.1.107)式中,若合外力 $\sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)}=0$,则有

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_C=\text{const. vector} \tag{1.1.110}$$

这一结论被称为“质点系的动量守恒定律”. “质点系的动量守恒定律”对两个质点组成的质点系而言,就是 Newton 第三定律. 如果质点系所受的合外力在某一方向上的分量为零,则总动量在该方向上的分量守恒,而且质心速度为常量.

三、角动量定理和角动量守恒定律

1. 对原点的角动量定理:质点系动力学基本方程之二

对于质点系来说,用位矢 $\boldsymbol{r}_k$ 矢乘 Newton 方程等号两端并求和,得

$$\sum_k\Big(\boldsymbol{r}_k\times m_k\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2}\Big)=\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(e)})+\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)}) \tag{1.1.111}$$

用“强形式的第三定律” $\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)})=0$,可将方程(1.1.111)式等号右端中的第二项消去;而(1.1.111)式等号的左端则变化为

$$\begin{aligned}\sum_k\Big(\boldsymbol{r}_k\times m_k\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2}\Big)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\Big(\boldsymbol{r}_k\times m_k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\Big)-\sum_k\Big(m_k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\Big)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times m_k\boldsymbol{v}_k)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{p}_k)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{1.1.112}$$

式中

$$\boldsymbol{J}=\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k)=\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{p}_k) \tag{1.1.113}$$

为质点系“总角动量”. 记质点系的“合外力矩”为 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\sum_k(\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(e)}) \tag{1.1.114}$$

于是,方程(1.1.111)式化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{1.1.115}$$

这一结果就是“质点系的角动量定理”.

2. 质点系的角动量守恒定律

在方程(1.1.115)式中,若合外力矩 $\boldsymbol{M}=0$,则

$$\boldsymbol{J}=\text{const. vector} \tag{1.1.116}$$

这就是“质点系的角动量守恒定律”. 如果合外力矩的某一分量为零,则质点系在该方向上的角动量守恒.

3. 对质心的角动量定理

前述讨论中实际上已暗中假定 O 点是惯性系的原点. 若设对惯性系有相对运动的 O' 点作为“矩”的中心,则一般应有

$$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_k' \tag{1.1.117}$$

式中,$\boldsymbol{r}_k$ 和 $\boldsymbol{r}_k'$ 分别为第 k 个质点的“绝对位矢”和“相对位矢”,$\boldsymbol{r}_0$ 为 O' 点相对于 O 点的位矢. 于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}=\sum_k[(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_k')\times\boldsymbol{F}_k^{(e)}]\\ \boldsymbol{J}=\sum_k\left[(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_k')\times m_k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_k')\right]\end{cases} \tag{1.1.118}$$

因而

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_0\times\sum_k\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\sum_k(\boldsymbol{r}_k'\times\boldsymbol{F}_k^{(e)}) \tag{1.1.119}$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\sum_k(\boldsymbol{r}_0\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_0)+\sum_k(\boldsymbol{r}_0\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k')+\sum_k(\boldsymbol{r}_k'\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_0)+\sum_k(\boldsymbol{r}_k'\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k')\\&=\boldsymbol{r}_0\times m\dot{\boldsymbol{r}}_0+\boldsymbol{r}_0\times\sum_k m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k'+\left(\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k'\right)\times\dot{\boldsymbol{r}}_0+\sum_k(\boldsymbol{r}_k'\times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k')\end{aligned} \tag{1.1.120}$$

一般情况下,(1.1.120)式等号右边这 4 项一项都不能少;但是当 O' 点就是质心 C 时,上述(1.1.120)式等号右边的第二、第三两项可以化简为零. 这是因为当 $\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_k'$ 时,$m\boldsymbol{r}_C=\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k$,所以

$$m\boldsymbol{r}_C = \sum_k m_k(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_k') = m\boldsymbol{r}_C + \sum_k m_k\boldsymbol{r}_k'$$

从而

$$\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k' = 0 \tag{1.1.121}$$

此即关于质心定义中所说“若系统内所有质点对某一指定点的线矩为零，则此指定点就是质心”的本义. 由(1.1.121)式，又有

$$\sum_k m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k' = 0 \tag{1.1.122}$$

将(1.1.121)式和(1.1.122)式代入(1.1.120)式，得到

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}_0 \times m\dot{\boldsymbol{r}}_0 + \sum_k (\boldsymbol{r}_k' \times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k') \tag{1.1.123}$$

最后，将(1.1.123)式和(1.1.119)式代入方程(1.1.115)式，利用动量定理(1.1.109)式以及 $\dot{\boldsymbol{r}}_0 \times \dot{\boldsymbol{r}}_0 = 0$，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C \tag{1.1.124}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_C = \sum_k (\boldsymbol{r}_k' \times \boldsymbol{F}_k^{(e)}) \\ \boldsymbol{J}_C = \sum_k (\boldsymbol{r}_k' \times m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k') = \sum_k (\boldsymbol{r}_k' \times m_k\boldsymbol{v}_k') \end{cases} \tag{1.1.125}$$

分别为“质点系所受外力对质心 C 的合力矩”和“质点系对质心 C 的角动量”. (1.1.124)式就是“质点系对质心的角动量定理”.

于是，对质心运动的角动量定理与将质心视为定点的角动量定理，是完全等同的. 但是对质点系中或质点系外其他各点，根据一般的(1.1.120)式，则没有这一性质.

此外，在推导“对质心的角动量定理”时，是从“质点系对 O 点的角动量定理”出发的，而且用到了“质点系的动量定理”；当然，推导过程是充分必要的；这就表明，在这 3 个定理中只有 2 个定理是独立的. 因此，有人舍弃“质点系的动量定理”，而以 2 个角动量定理作为考虑问题的出发点，提出所谓“6 矩方程式”：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C \end{cases} \tag{1.1.126}$$

这当然也是可以的.

四、动能定理和机械能守恒定律

1. 质点系的动能定理:质点系动力学基本方程之三

对质点系中每个质点,动能定理为

$$\mathrm{d}T_k = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k^2\right) = \boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \tag{1.1.127}$$

就系统而言是对 k 求和,得

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}\sum_k \frac{1}{2}m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k^2 = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \tag{1.1.128}$$

这就是"质点系的动能定理".

在(1.1.128)式中,内力所做的功一般不能相互抵消;除非质点系可视为刚体的情形. 因为在刚体中,若设所讨论的一点是原点,则另一点的位矢就是 $\boldsymbol{r}_k = r_k\boldsymbol{e}_r$,由于任意两点之间的距离在运动过程中保持不变,所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = (\mathrm{d}r_k)\boldsymbol{e}_r + r_k\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r = r_k\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.1.129}$$

而内力 $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$ 是沿着 $\boldsymbol{r}_k$ 方向(即 $\boldsymbol{e}_r$ 方向)的,于是在刚体中总是有

$$\boldsymbol{F}_k^{(i)} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \tag{1.1.130}$$

故在刚体中,内力所做的功为零. 有关这一问题的阐述,某些经典力学教科书上的说法有误.

2. 质点系的机械能守恒定律

和在单个质点中的情形一样,若内力和外力均为保守力,则质点系的总机械能守恒

$$T + V = \text{const.} = E \tag{1.1.131}$$

式中,V 为总势能.

若外力或内力中有部分非保守力,则没有机械能守恒定律. 特别是当内力是耗散力时,有热力学第一定律

$$T + V + (\text{焓}) = \text{const.}$$

3. König 定理

利用 $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_k'$,质点系的总动能可被改写成:

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k(\dot{\boldsymbol{r}}_C + \dot{\boldsymbol{r}}_k')^2 = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_C^2 + \dot{\boldsymbol{r}}_C\left(\sum_k m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k'\right) + \frac{1}{2}\sum_k m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k'^2 \tag{1.1.132}$$

用(1.1.122)式,可将(1.1.132)式化为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_C^2 + \frac{1}{2}\sum_k m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k'^2 = T_C + T' \tag{1.1.133}$$

式中

$$\begin{cases} T_C = \dfrac{1}{2}mv_C^2 \\ T' = \dfrac{1}{2}\sum\limits_k m_k(v_k')^2 \end{cases} \tag{1.1.134}$$

分别为“质心动能”和“各质点相对于质心系运动时的动能”. 这一结论称为“König 定理”.

若系统是连续的,则代替(1.1.133)式的是

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\int \rho(\dot{r}')^2 \mathrm{d}V \tag{1.1.135}$$

“König 定理”在量子力学和统计力学中均有应用.

4. 对质心的动能定理

将 $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_C + \dot{\boldsymbol{r}}_k'$ 代入“质点系的动能定理”(1.1.128)式,并利用(1.1.122)式,有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k'^2\right) = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k' + \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k' + \sum_k (-m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k') \tag{1.1.136}$$

其中等号右边第三项由于(1.1.121)式而等于零:

$$\sum_k (-m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k') = -\ddot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \sum_k m_k \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k' = -\ddot{\boldsymbol{r}}_C \cdot \mathrm{d}\sum_k m_k \boldsymbol{r}_k' = 0 \tag{1.1.137}$$

故仍有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k'^2\right) = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k' + \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k' \tag{1.1.138}$$

这就是“质点系中对质心的动能定理”.

从以上讨论可以看出,质心虽为动点,但惯性力所做功为零,因此质心系中的动能定理与惯性系中的动能定理在形式上完全一样. 连同质心系中的动量定理和角动量定理,可以得到结论:质心系虽然不是惯性系,但惯性系中的运动定理在质心系中仍然成立. 这就证明了,以极大天体的平均位置作为参考方向的参考系,与惯性系没有什么两样.

1.1.6　位力定理

一、位力

所谓“位力”(virial),实际上是“均位力积”的简称,即“力和位移的乘积的平均值”.

设:①在质点系的每一个质点上作用有一个不一定是保守的力 $\boldsymbol{F}_k$;②系统的坐

标和动量在任何时刻都是有界的;则定义作用在质点系上的力的“位力”为:

$$w=\overline{\sum_k \boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{r}_k}\qquad(k=1,\cdots,n)\tag{1.1.139}$$

式中,$w=w(t)$是时间 t 的函数.

另有一种“Clausius 位力”,它等于$\frac{1}{2}w$.

二、位力定理

对于质点系中的每个质点,用其位矢标乘 Newton 方程等号两边,得

$$\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{r}_k\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k)-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{p}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k)-2T_k\tag{1.1.140}$$

其中 $T_k=\frac{1}{2}m_k(\boldsymbol{v}_k)^2=\frac{1}{2m_k}(\boldsymbol{p}_k)^2=\frac{1}{2}v_kp_k$ 为每一个质点的动能. 就整个系统而言,将上式对 k 求和,得

$$\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}_k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k-2T\tag{1.1.141}$$

如果运动是有界的,可将上式对一段时间取平均,给出

$$\overline{\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}_k}=\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k}-2\overline{T}\tag{1.1.142}$$

(1.1.142)式等号右边第一项是

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_k\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\mathrm{d}\sum_k(\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{p}_k)\tag{1.1.143}$$

由高等数学可知,对任何一个有界函数 $f(t)$,恒有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\mathrm{d}f=\frac{1}{\tau}[f(\tau)-f(0)]\tag{1.1.144}$$

上述(1.1.144)式在①周期运动 $f(\tau)=f(0)$时(τ 为周期)和②当 $\tau\to\infty$时,都等于零. 所以,在这两种情况下,都有

$$w=-2\overline{T}$$

或

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}w=-\frac{1}{2}\overline{\sum_k\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{r}_k}\qquad(k=1,\cdots,n)\tag{1.1.145}$$

这一结果被称为“位力定理”;而 Clausius 位力就是$-\overline{T}$.

三、保守力系的位力定理

对于保守系统，

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\overline{\sum_k(\nabla_k V)\cdot\boldsymbol{r}_k} \tag{1.1.146}$$

对于单个质点保守系统，

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\overline{r\frac{\partial V}{\partial r}} \tag{1.1.147}$$

若 V 为 r 的幂级数

$$V=ar^{n+1} \tag{1.1.148}$$

则由于 $r\frac{\partial V}{\partial r}=(n+1)V$，得到

$$\overline{T}=\frac{n+1}{2}\overline{V} \tag{1.1.149}$$

特别对平方反比力的情形($n=-2$)，有

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{V} \tag{1.1.150}$$

而对于弹性力的情形($n=1$)，有

$$\overline{T}=\overline{V} \tag{1.1.151}$$

四、位力定理在气体分子运动论中的应用

设分子之间的相互作用力为 $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$，器壁对分子的作用力为 $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$ 则

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\boldsymbol{F}_k^{(i)} \tag{1.1.152}$$

若分子为刚性质点，则与质点系的“线矩”相仿，有

$$\sum_k(\boldsymbol{F}_k^{(i)}\cdot\boldsymbol{r}_k)=\boldsymbol{r}^{(A)}\cdot\sum_k\boldsymbol{F}_k^{(i)}=0 \tag{1.1.153}$$

式中，$\boldsymbol{r}^{(A)}$ 为“折合位矢”. 从而，

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}w=\overline{\sum_k(\boldsymbol{F}_k^{(e)}\cdot\boldsymbol{r}_k)}\qquad(k=1,\cdots,n) \tag{1.1.154}$$

对理想气体而言

$$\boldsymbol{F}^{(e)}=-p\boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{1.1.155}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为器壁法向，$\mathrm{d}A$ 为器壁面元，p 为气体压强. 于是，用 Gauss 定理，可得

$$\overline{T}=\frac{p}{2}\oint(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}A=\frac{p}{2}\int(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\frac{3}{2}pV \tag{1.1.156}$$

再设分子的平均平动能为$\langle\varepsilon\rangle=\frac{3}{2}k_BT=\frac{3}{2}\frac{RT}{N_A}$；其中 k_B 为 Boltzmann 常数，N_A 为 Avogadro 常数，R 为气体常数，T 为 Kelvin 温度(注意不要与动能搞混了)，

$\langle\varepsilon\rangle$是$\varepsilon$的位置平均值(实际上是"系综"平均值). 因此,

$$\langle T\rangle = N_A\langle\varepsilon\rangle \tag{1.1.157}$$

根据统计力学中的"遍历性"(各态历经)假设,有

$$\overline{T} = \langle T\rangle \tag{1.1.158}$$

于是,

$$\frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}RT$$

即

$$pV = RT \tag{1.1.159}$$

正好就是理想气体的状态方程.

1.2 Newton-Euler 刚体力学

如果质点系中每两个质点之间的距离都保持绝对不变,则此质点系被称为"刚体". "刚体"是经典力学中继"质点"之后又一个简单的模型. 比"刚体"模型更复杂的是"弹性体"模型、"粘弹-塑性体"模型和"流体"模型;这些模型构成一条"模型链".

但是,"刚体"模型是一个相对的概念. 首先,"刚体"是一种数学或物理上的抽象;在所研究的问题中,只是当物体的大小和形状的变化可以忽略不计时,或者物体的运动状态是转动时,才可将此物体视为刚体. 其次,从真实的物理世界来看,决不可能存在"刚体"这样一种物体;即使是目前认为最小的微观粒子之间也不可能有"每两个质点之间的距离都保持绝对不变"这样的事;它只是一种近似的处理方法. 第三,"刚体"模型显然违背相对论;由于在"刚体"中"每两个质点之间的距离都保持绝对不变",因而在其中传播的信号速度将成为无穷大;但是在真实的材料中,信号传播速度必然是有限的而且不可能超过光速;因此正如 W. Pauli 在《相对论》(《Theory of Relativity》, Pergamon, 1958)一书中所说的:在相对论中没有刚体的地位.

虽然在相对论中没有刚体的地位,但是 A. Einstein 也说过:"在力学原理的推论中起着基本作用的是绝对刚体和时钟的概念. "这涉及到一把"尺"和一块"表". 相对论中的那把"尺"在运动中是可以变的,但经典力学中的那把"尺"是不变的.

由于"刚体"的概念与物体的转动相联系,因此在刚体力学中经常讨论"陀螺"的问题(原先控制航天器的运动就是用"陀螺"来完成的);此外,刚体力学中的另一个重点是"转动惯量"的概念及其张量表示;这些概念和表示,在后面的章节中和后续课程中将经常被用到.

在刚体力学的发展中作出巨大贡献的是 L. Euler(1707～1783). Euler 一生发表学术论文 886 篇,是迄今为止个人单独完成重要论文最多的科学家. 他也是科学史上一位"恐龙级"和"航母式"的人物.

1.2.1 刚体的基本运动

一、刚体模型

“刚体”就是每两个质点之间的距离都保持绝对不变的质点系.

质点系分为由有限多质点组成的和由无限多质点组成的两种,因此刚体也有两种. 在由有限多质点组成的刚体中,最简单的是由 4 个不共面且无相对运动的点所构成的四面体;而在平面问题中,最简单的则是由 3 个不共线且无相对运动的点所构成的三角形. 在处理由分立质点构成的刚体的问题时,用的是求和;而在处理由连续分布质点构成的刚体的问题时,用的是积分.

描述刚体的运动可以在两种坐标系中进行:一种当然是惯性系,另一种则是固结于刚体的相对坐标系. 后一种坐标系的原点如果正好是质心那就更好,因为在质心系中写出来的运动微分方程较为简单.

直觉告诉我们:在刚体上任意取不共面的 3 点便可将其固定. 每一个质点有 3 个自由度,即质点的 3 个空间坐标. 3 个点共有 9 个坐标. 但由于 3 点之间的 3 个距离为常数,所以必须减去 3 个约束条件,剩下 6 个独立坐标. 若再增加一个质点,虽然增加了 3 个坐标,却同时也增加 3 个约束方程;所以不增加新的独立坐标数,仍然是 6 个自由度. 对由多质点组成的刚体来说,因两两距离保持不变,故都只有 6 个自由度. 因此,刚体的自由度数最大为 6. 但若刚体只由两个质点组成,其约束条件数为 1,则自由度为 $3\times2-1=5$.

因为质点系动力学的基本微分方程数为 7(3 个动量定理,3 个角动量定理,1 个动能定理),而对刚体来说其内力做功是相互抵消的,所以对刚体来说 7 个基本微分方程中只有 6 个是独立的(第 7 个方程可以由另外 6 个方程导出). 这 6 个独立的基本微分方程正好对应于刚体的 6 个自由度.

若刚体存在其他的约束条件,则自由度数将小于 6.

二、刚体运动的分类

1. 平动

刚体作平动时,在每一时刻刚体中任意一条直线始终彼此平行.

其特征是:刚体作平动时,刚体中各质点具有相同的速度和加速度;任意一点的运动即可代表全体;因此只需研究质心的运动.

刚体平动只有 3 个自由度.

2. 定轴转动

刚体作定轴转动时，刚体中有两个质点始终不动，过这两个质点的直线也始终不动；整个刚体绕此直线（被称为“转动轴”）转动.

其特征是：刚体作定轴转动时，刚体中各质点具有相同的角速度和角加速度.

刚体定轴转动时只有 1 个自由度：转动角.

3. 平面平行运动

刚体作平面平行运动时，刚体中任意一点始终在平行于某一固定平面的一个平面内运动.

其特征是：刚体的平面平行运动可分解为平面内任意一点的平动（2 个自由度）和绕过该点的垂直轴的转动（1 个自由度）；因此刚体的平面平行运动具有相同的角速度和角加速度.

刚体的平面平行运动有 3 个自由度.

4. 定点运动

刚体作定点运动时，刚体中只有一个点是不动的，整个刚体绕过此点的“瞬时轴”转动.

其特征是：刚体作定点运动时，“瞬时轴”并不固定于空间.

刚体作定点运动时，有 3 个自由度.

5. 一般运动

刚体作一般运动时，不受任何约束，可在空间中任意运动.

其特征是：刚体的一般运动可分解为质心的平动（3 个自由度）和绕过质心的“瞬时轴”的转动（3 个自由度）.

刚体的一般运动有 6 个自由度.

在刚体的以上 5 种运动中，平动、定轴转动和平面平行运动属于“简单运动”. 刚体中最重要的是定点运动. 一般运动则是平动与定点运动的合成.

1.2.2 刚体的简单运动

一、平动

平动的运动规律和单个质点的运动规律相同，故从略.

二、定轴转动

可与质点的直线运动相类比(表 1.3)

表 1.3

	质点的直线运动	刚体的定轴转动
匀速运动	$s=s_0+v_0t$	$\theta=\theta_0+\omega_0t$
匀变速运动	$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\beta t$
	$v^2=v_0^2+2a(s-s_0)$	$\omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$
	$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$	$\theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$
	$s=s_0+\frac{1}{2}(v+v_0)t$	$\theta=\theta_0+\frac{1}{2}(\omega+\omega_0)t$

因此,刚体的定轴转动问题亦从略.

三、平面平行运动

1. Chasles 定理

Chasles 定理:刚体的平面平行运动可分解为平面内任意一点(被称为"基点")的平动(2 个自由度)和绕过该点("基点")的垂直轴的转动(1 个自由度). 由于"基点"的选择具有任意性,因而对不同的"基点"来说,其平动的运动规律是不同的;但对绕不同"基点"的转动来说,其角速度和角加速度却是相同的. 所以,刚体平面平行运动中的 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,可以直接被称为"平面图形"的角速度和角加速度,而无需指明其"基点".

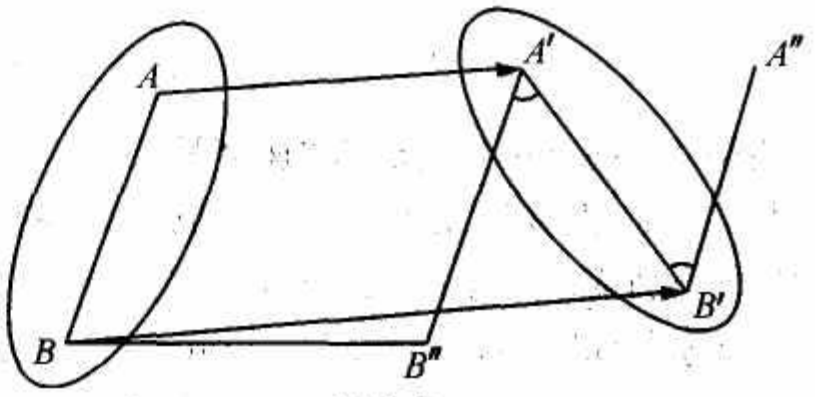


图 1.3

说明 Chasles 定理可以(图 1.3)所示:

可以看出,$\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{BB'}$,但. $\angle B''A'B'=\angle A'B'A''$.

2. 平面图形上各点的速度和"速度瞬心"

1)速度合成

设基点为 A,牵连运动为基点的平动,相对运动为绕过基点的垂直轴的转动,则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.2.1}$$

式中，$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}_A)$分别为绝对位矢，相对位矢和 A 对惯性坐标系原点 O 的位矢，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v}_A)$分别为绝对速度，相对速度和牵连速度，$\boldsymbol{\omega}$ 为转动角速度.

因为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}' \tag{1.2.2}$$

所以

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A) \tag{1.2.3}$$

对于平面图形来说，由于

$$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}' \tag{1.2.4}$$

因而

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\perp\boldsymbol{r}' \tag{1.2.5}$$

即在平面图形中 $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}'$和$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$这 3 个矢量是相互垂直的.

于是，平面图形上任意一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动的速度的矢量和.

2)速度投影定理

平面图形上任意两点的速度在该两点连线上的投影彼此相等.

其证明从略.

3)速度瞬心

对于平面平行运动的刚体，总可以在刚体上或刚体外找到一点 P，使其速度为零：

$$\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_p-\boldsymbol{r}_A)=0 \tag{1.2.6}$$

用 $\boldsymbol{\omega}$ 矢乘上式等号两边，得

$$\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{r}_A+\frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A \tag{1.2.7}$$

该瞬时不动点被称为转动“速度瞬心”. “速度瞬心”的位置不是固定不变的. 瞬心的速度为零，但加速度不为零，否则就成了固定的转动中心了. 转动瞬心在扩展刚体和空间分别描出一条曲线，前者被称为“本体极迹”(或“本体瞬心迹”)，后者被称为“空间极迹”(或“空间瞬心迹”). Poinsot 定理指出：刚体的平面平行运动是本体极迹在空间极迹上作无滑滚动；在某一瞬间的公共切点即为速度瞬心.

求得图形的速度瞬心后，因为$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\perp\boldsymbol{r}'$，故可根据“△法则”求出刚体上任意一点的速度，因为：①图形上任意一点的速度大小正比于该点到速度瞬心的距离(根据 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$)；②任意一点的速度方向垂直于该点到速度瞬心的连线.

速度瞬心还有一些特殊的求法：

(1)平面图形沿某一固定面作无滑滚动时，两面接触点即为速度瞬心.

(2)已知某瞬时图形上任意两点 A 和 B 的速度方向且不平行，则过这两点分别作与它们速度垂直的直线，两直线的交点即为速度瞬心的位置.

(3)已知图形上任意两点 A 和 B 的速度大小,且速度方向垂直于 AB 连线,则"速端连线"与 AB 连线的交点即为速度瞬心.

(4)已知图形上任意两点 A 和 B 的速度大小相等,方向平行但不垂直于 AB 连线,则此时速度瞬心在无穷远处(被称为"瞬时平动").

3. 平面图形上各点的加速度和"加速度瞬心"

1)加速度合成

出发点是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \tag{1.2.8}$$

因为在平面图形中 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}'$,故 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}'=0$,所以

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'-\omega^2\boldsymbol{r}' \tag{1.2.9}$$

或

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A)-\omega^2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A) \tag{1.2.10}$$

其中,除了 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}'$ 外,还由于

$$\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{r}' \tag{1.2.11}$$

又有

$$(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}')\perp\boldsymbol{r}' \tag{1.2.12}$$

即在平面图形中,$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{r}'$ 和 $(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}')$ 这 3 个矢量是相互垂直的.

于是,平面图形上任意一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度三者的矢量和.

2)加速度瞬心

对于平面平行运动的刚体,总可以在刚体上或刚体外找到一点 Q,使其加速度为零:

$$\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{r}_A)-\omega^2(\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{r}_A)=0 \tag{1.2.13}$$

设

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{r}_A=x_1'\boldsymbol{e}_1+x_2'\boldsymbol{e}_2 \tag{1.2.14}$$

则(1.2.13)式就是

$$a_1^A\boldsymbol{e}_1+a_2^A\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & 0 & \beta\\ x_1' & x_2' & 0\end{vmatrix}-\omega^2(x_1'\boldsymbol{e}_1+x_2'\boldsymbol{e}_2)=0 \tag{1.2.15}$$

即

$$(a_1^A-\beta x_2'-\omega^2x_1')\boldsymbol{e}_1+(a_2^A+\beta x_1'-\omega^2x_2')\boldsymbol{e}_2=0 \tag{1.2.16}$$

由此解得

$$\begin{cases}x_1'=x_1^Q-x_1^A=\dfrac{a_1^A\omega^2-a_2^A\beta}{\omega^4+\beta^2}\\[2ex] x_2'=x_2^Q-x_2^A=\dfrac{a_1^A\beta+a_2^A\omega^2}{\omega^4+\beta^2}\end{cases} \tag{1.2.17}$$

该瞬时不动点被称为转动“加速度瞬心”. “加速度瞬心”的位置不是固定不变的;而且“加速度瞬心”的位置不一定就是“速度瞬心”.

求得图形的加速度瞬心后,因为$(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}')\perp\boldsymbol{r}'$,故可根据“△法则”求出刚体上任意一点的切向速度,因为:①图形上任意一点的切向加速度大小正比于该点到加速度瞬心的距离(根据$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}'$);②任意一点的切向加速度方向垂直于该点到速度瞬心的连线. 此外,由于$-\omega^2\boldsymbol{r}'$方向指向加速度瞬心,其大小与该点到加速度瞬心的距离成正比,因而也可以根据“△法则”求出刚体上任意一点的法向速度,只不过在图上画出的法向加速度方向并非其真实的方向,而需要旋转$\frac{\pi}{2}$以使它指向加速度瞬心.

1.2.3 刚体定点运动的运动学参数和 Euler 运动学方程

刚体定点运动有 3 个自由度,因此描述刚体定点运动的运动学参数可以有 3 个独立分量.

一、方向余弦

对于作定点运动的刚体,其位形可用刚体上某一点 P 的位矢的模 r 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 的 3 个方向余弦 $n_k(k=1,2,3)$来确定. 当然,方向余弦满足条件

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \quad \text{或} \quad \sum_k n_k n_k=1 \quad (k=1,2,3) \tag{1.2.18}$$

因此,独立的运动学参数只有 3 个.

二、Euler 参数

设刚体绕通过坐标原点 O 的一条直线(其方向余弦为 n_k)转动 θ 角,则“绝对坐标系”上的 x_k 点被转到“当地坐标系”(或“本体坐标系”)上的 x_k' 点,因而新旧坐标的变换关系为

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1.2.19}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1-2(1-n_1^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\left(n_1n_2\sin\frac{\theta}{2}-n_3\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} & 2\left(n_3n_1\sin\frac{\theta}{2}+n_2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \\ 2\left(n_1n_2\sin\frac{\theta}{2}+n_3\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} & 1-2(1-n_2^2)\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\left(n_2n_3\sin\frac{\theta}{2}-n_1\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \\ 2\left(n_3n_1\sin\frac{\theta}{2}-n_2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} & 2\left(n_2n_3\sin\frac{\theta}{2}+n_1\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} & 1-2(1-n_3^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{1.2.20}$$

被称为“变换矩阵”;它实际上是两套坐标系之间的夹角余弦矩阵. 可以看出,夹角余弦矩阵 A 是“非对称”的. 定义 Euler 参数为

$$\begin{cases} l_0=\cos\dfrac{\theta}{2} \\ l_k=n_k\sin\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad (k=1,2,3) \tag{1.2.21}$$

则有

$$l_0^2+l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 \quad \text{或} \; l_0^2+\sum_k l_kl_k=1 \qquad (k=1,2,3) \tag{1.2.22}$$

而变换矩阵(1.2.20)则成为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} l_0^2+l_1^2-l_2^2-l_3^2 & 2(l_1l_2-l_3l_0) & 2(l_3l_1+l_2l_0) \\ 2(l_1l_2+l_3l_0) & l_0^2-l_1^2+l_2^2-l_3^2 & 2(l_2l_3-l_1l_0) \\ 2(l_3l_1-l_2l_0) & 2(l_2l_3+l_1l_0) & l_0^2-l_1^2-l_2^2+l_3^2 \end{bmatrix} \tag{1.2.23}$$

于是,“当地坐标系”相对于“绝对坐标系”的方位,可由 4 个 Euler 参数 l_0 和 l_k $(k=1,2,3)$以及条件 $l_0^2+\sum_k l_kl_k=1$ 来完全描述. 独立的参量仍然是 3 个.

三、Euler 角

1. Euler 角与 Euler 参数之间的变换关系

引入 3 个 Euler 角 ψ,θ,φ

$$\begin{cases} l_1=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi-\varphi}{2} \\ l_2=\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2} \\ l_3=\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\psi+\varphi}{2} \\ l_0=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\psi+\varphi}{2} \end{cases} \tag{1.2.24}$$

由于(1.2.24)式自动满足(1.2.22)式,因而不必再引入其他的“约束条件”.

2. 两套坐标系之间的夹角余弦矩阵

将(1.2.24)式代入变换矩阵 A(1.2.23)式,于是有

$$A=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{1.2.25}$$

3. Euler 角 ψ,θ,φ 的物理意义

可以将变换矩阵(1.2.25)式拆成 3 个小矩阵的乘积:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.2.26}$$

这表明,可以通过以下 3 步操作,将 K 系("绝对坐标系")转动到 K′系("当地坐标系")的位置:

(1) 绕 Ox_3 轴转 φ 角,使 Ox 到达 Oy 的位置;

(2) 再绕 Oy 轴转 θ 角,将原来的 Ox_3 转至 Ox_3'的位置;

(3) 最后绕 Ox_3'轴转 ψ 角.

3 个 Euler 角被分别命名为:自转角 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$,章动角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,进动角 ψ $(0\leqslant\psi<2\pi)$.

4. Euler 运动学方程

根据(1.2.26)式可知,变换矩阵 A 的逆矩阵是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}&=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

由(1.2.25)式和(1.2.27)式这两个正、逆变换矩阵,可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_3=\sin\theta(\boldsymbol{i}_1\sin\varphi-\boldsymbol{i}_2\cos\varphi)+\boldsymbol{i}_3\cos\theta\\ \boldsymbol{i}_3=\sin\theta(\boldsymbol{e}_1\sin\psi+\boldsymbol{e}_2\cos\psi)+\boldsymbol{e}_3\cos\theta\\ \boldsymbol{e}_1\cos\psi-\boldsymbol{e}_2\sin\psi=\boldsymbol{i}_1\cos\varphi+\boldsymbol{i}_2\sin\varphi\end{cases} \tag{1.2.28}$$

式中,$(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3)$是 K 系坐标轴的单位矢量,$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$是 K′系坐标轴的单位矢量.

另外,由 Euler 角 ψ,θ,φ 的物理意义可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{\varphi} = \boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{e}_{\psi} = \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{\theta} = \boldsymbol{e}_1\cos\psi - \boldsymbol{e}_2\sin\psi = \boldsymbol{i}_1\cos\varphi + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi \end{cases} \tag{1.2.29}$$

而

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{e}_{\psi} + \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_{\theta} + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_{\varphi} \tag{1.2.30}$$

将(1.2.28)式和(1.2.29)式代入(1.2.30)式,得到

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\boldsymbol{i}_1 + (-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi)\boldsymbol{i}_2 + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\boldsymbol{i}_3 \\ (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\boldsymbol{e}_1 + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\boldsymbol{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1.2.31}$$

上述(1.2.31)式就是在两种坐标系下刚体定点转动的“Euler 运动学方程”.

四、Cayley-Klein 参数

1. Cayley-Klein 参数与 Euler 参数之间的关系

定义 Cayley-Klein 参数与 Euler 参数之间的关系为

$$\begin{cases} \alpha = l_0 + il_3 \\ \beta = l_1 + il_2 \\ \gamma = -(l_1 - il_2) \\ \delta = l_1 - il_3 \end{cases} \tag{1.2.32}$$

或

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \\ l_2 = \dfrac{1}{2i}(\beta + \gamma) \\ l_3 = \dfrac{1}{2i}(\alpha - \delta) \\ l_0 = \dfrac{1}{2}(\alpha + \delta) \end{cases} \tag{1.2.33}$$

于是,(1.2.22)式化为

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{1.2.34}$$

因此,独立的参量仍然是 3 个.

2. Cayley-Klein 参数与 Euler 角之间的关系

Cayley-Klein 参数也可用 Euler 角表示为

$$\begin{cases}\alpha=\cos\dfrac{\theta}{2}\exp\left[\dfrac{i}{2}(\psi+\varphi)\right]\\ \beta=\sin\dfrac{\theta}{2}\exp\left[\dfrac{i}{2}(\psi-\varphi)\right]\\ \gamma=-\sin\dfrac{\theta}{2}\exp\left[-\dfrac{i}{2}(\psi-\varphi)\right]\\ \delta=\cos\dfrac{\theta}{2}\exp\left[-\dfrac{i}{2}(\psi+\varphi)\right]\end{cases}\tag{1.2.35}$$

3. 两套坐标系之间的夹角余弦矩阵

利用(1.2.34)式,可将变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 改写成

$$\boldsymbol{A}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) & -i(\alpha\beta-\gamma\delta)\\ -\frac{i}{2}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) & -\alpha\beta+\gamma\delta\\ i(\alpha\gamma+\beta\delta) & -\alpha\gamma+\beta\delta & \alpha\delta+\beta\gamma\end{Bmatrix}\tag{1.2.36}$$

五、Hamilton 参数

1. 四元数

四元数定义为

$$\begin{cases}\Lambda=\lambda_0+\sum\limits_k\lambda_k\boldsymbol{i}_k\\ \Lambda^*=\lambda_0-\sum\limits_k\lambda_k\boldsymbol{i}_k\end{cases}\qquad(k=1,2,3)\tag{1.2.37}$$

其中,λ_0 和 $\lambda_k(k=1,2,3)$被称为“Hamilton 参数”. 四元数的乘法用“∘”表示.

2. Hamilton 参数与 Cayley-Klein 参数之间的关系

Hamilton 参数与 Cayley-Klein 参数之间的关系是

$$\begin{cases}\lambda_0=\dfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\\ \lambda_1=-\dfrac{i}{2}(\beta+\gamma)\\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\\ \lambda_3=-\dfrac{i}{2}(\alpha-\delta)\end{cases}\tag{1.2.38}$$

或

$$\begin{cases}\alpha=\lambda_0+i\lambda_3\\ \beta=i(\lambda_1-i\lambda_2)\\ \gamma=i(\lambda_1+i\lambda_2)\\ \delta=\lambda_0-i\lambda_3\end{cases}\tag{1.2.39}$$

而(1.2.34)式变成

$$\lambda_0^2+\sum_k\lambda_k\lambda_k=1\qquad(k=1,2,3)\tag{1.2.40}$$

3. 两套坐标系之间的夹角余弦矩阵

利用(1.2.39)式,可将变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 改写成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_0^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1)\\ 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_3\lambda_1-\lambda_0\lambda_2)\\ 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_3\lambda_1+\lambda_0\lambda_2) & \lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2\end{pmatrix}\tag{1.2.41}$$

除此之外,还可以利用 Pauli-Dirac 矩阵引人另外一种更为对称的参数以描述刚体的定点运动. 但是,在这些运动学参数中,除了 Euler 角仅有 3 个独立参数外,其他各类参数都是由 4 个参数和一个"约束条件"来描述的.

1.2.4 刚体定点运动的角动量和转动动能

刚体中的能量可以被划分为平动能量和转动能量两种. 例如,刚体中的势能就可被分为与质心平动有关的"平动势能"和与转动坐标有关的"转动势能"两类. 在不是刚体的一般情况下也是如此;前者如重力势能,后者如电动力学中的电磁能量 $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{M}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$(其中 $\boldsymbol{M}$ 为磁偶极距,$\boldsymbol{B}$ 为磁感,θ 为它们之间的夹角);后一种势能显然与角度有关.

一、刚体的动能

刚体的动能可以被分为质心的"平动动能"和绕质心转动的"转动动能"的理论根据是 Chasles 定理和 König 定理. 因此,刚体的总动能可以被写成

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\widetilde{T}(\psi,\theta,\varphi)\tag{1.2.42}$$

式中,$\widetilde{T}(\psi,\theta,\varphi)$为用 Euler 角表示的转动动能(当然也可以用其他参量表示). 若将刚体质心选为坐标系原点,则只要考虑刚体的转动动能.

在刚体是连续分布的情况下,设刚体的质量体密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$,体积元为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$,转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$;因为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,所以

$$\begin{aligned}\widetilde{T}&=\frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int\rho\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1&\boldsymbol{i}_2&\boldsymbol{i}_3\\ \omega_1&\omega_2&\omega_3\\ x_1&x_2&x_3\end{vmatrix}\right|\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\omega_1^2\int\rho(x_2^2+x_3^2)\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\omega_2^2\int\rho(x_3^2+x_1^2)\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int\rho(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}V\\&\quad-\omega_2\omega_3\int\rho x_2x_3\mathrm{d}V-\omega_3\omega_1\int\rho x_3x_1\mathrm{d}V-\omega_1\omega_2\int\rho x_1x_2\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{1.2.43}$$

二、刚体的角动量

将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 代入角动量的定义式，有

$$\boldsymbol{J}=\int\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}V=\int\rho[r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}]\mathrm{d}V\tag{1.2.44}$$

因为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\sum\limits_k x_k\boldsymbol{i}_k\\ \boldsymbol{\omega}=\sum\limits_k\omega_k\boldsymbol{i}_k\end{cases}\qquad(k=1,2,3)\tag{1.2.45}$$

所以

$$\boldsymbol{J}=J_1\boldsymbol{i}_1+J_2\boldsymbol{i}_2+J_3\boldsymbol{i}_3=\sum_k J_k\boldsymbol{i}_k\qquad(k=1,2,3)\tag{1.2.46}$$

式中

$$\begin{cases}J_1=\omega_1\int\rho(x_2^2+x_3^2)\mathrm{d}V-\omega_2\int\rho x_1x_2\mathrm{d}V-\omega_3\int\rho x_3x_1\mathrm{d}V\\ J_2=-\omega_1\int\rho x_1x_2\mathrm{d}V+\omega_2\int\rho(x_3^2+x_1^2)\mathrm{d}V-\omega_3\int\rho x_2x_3\mathrm{d}V\\ J_3=-\omega_1\int\rho x_3x_1\mathrm{d}V-\omega_2\int\rho x_2x_3\mathrm{d}V+\omega_3\int\rho(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}V\end{cases}\tag{1.2.47}$$

三、转动惯量和惯量积(惯性积)

可以发现，(1.2.43)式和(1.2.47)式中有完全相同的 6 个“元素”，即

$$\begin{cases}I_{11}=\int\rho(x_2^2+x_3^2)\mathrm{d}V\\ I_{22}=\int\rho(x_3^2+x_1^2)\mathrm{d}V\\ I_{33}=\int\rho(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}V\end{cases}\tag{1.2.48}$$

和

$$\begin{cases} I_{23} = -\int \rho x_2 x_3 \mathrm{d}V \\ I_{31} = -\int \rho x_3 x_1 \mathrm{d}V \\ I_{12} = -\int \rho x_1 x_2 \mathrm{d}V \end{cases} \tag{1.2.49}$$

式中，(I_{11}, I_{22}, I_{33})被称为“转动惯量”，(I_{23}, I_{31}, I_{12})被称为“惯量积(惯性积)”.

常用的“转动惯量”如表 1.4.

表 1.4

刚体(质量为 m)	惯量主轴	转动惯量
细杆(长为 l)	垂直平分线	$\frac{1}{12}ml^2$
矩形平面(长为 $2a$，宽为 $2b$)	通过质心，与宽边平行	$\frac{1}{3}ma^2$
	通过质心，与平面垂直	$\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$
长方体(长为 $2a$，宽为 $2b$，高为 $2c$)	通过质心，与长棱平行	$\frac{1}{3}m(b^2+c^2)$
细圆环(半径为 a)	直径	$\frac{1}{2}ma^2$
圆板(半径为 a)	通过圆心，与板面垂直	$\frac{1}{2}ma^2$
	直径	$\frac{1}{4}ma^2$
椭圆平板(长半轴为 a，短半轴为 b)	长轴	$\frac{1}{4}mb^2$
	短轴	$\frac{1}{4}ma^2$
	通过质心，与平板垂直	$\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
正圆柱体(底半径为 a，高为 l)	对称轴	$\frac{1}{2}ma^2$
	底面直径	$\frac{1}{12}m(3a^2+l^2)$
椭圆截面柱体(底面长半轴为 a，短半轴为 b，高为 l)	柱体轴线	$\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$
	底面长轴	$\frac{1}{12}m(3b^2+l^2)$

续表

刚体(质量为 m)	惯量主轴	转动惯量
正圆锥体(底半径为 a,高为 l)	对称轴	$\frac{3}{10}ma^2$
	底面直径	$\frac{1}{20}m(3a^2+2l^2)$
半球体(半径为 a)	直径	$\frac{2}{5}ma^2$
球体(半径为 a)	直径	$\frac{2}{5}ma^2$
薄球壳(半径为 a)	直径	$\frac{2}{3}ma^2$
球壳(外半径为 a,内半径为 b)	直径	$\frac{2}{5}m\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$
椭球体(3 个半轴分别为 a, b,c)	a 轴	$\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$

四、用转动惯量和惯量积表示的刚体转动动能

将(1.2.48)式和(1.2.49)式代入(1.2.43)式,得到刚体的转动动能是

$$\begin{aligned}\tilde{T}&=\frac{1}{2}I_{11}\omega_1^2+\frac{1}{2}I_{22}\omega_2^2+\frac{1}{2}I_{33}\omega_3^2+I_{23}\omega_2\omega_3+I_{31}\omega_3\omega_1+I_{12}\omega_1\omega_2\\&=\frac{1}{2}\sum_{k,l}I_{kl}\omega_k\omega_l\qquad(k,l=1,2,3)\end{aligned}\tag{1.2.50}$$

此外,用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 和矢算公式,又有

$$\begin{aligned}\tilde{T}&=\frac{1}{2}\int\rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int(\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\sum_k\omega_kJ_k\qquad(k=1,2,3)\end{aligned}\tag{1.2.51}$$

五、 用转动惯量和惯量积表示的刚体角动量

比较刚体转动动能的两种表达式(1.2.50)式和(1.2.51)式,或者直接由(1.2.46)式,可得

$$\boldsymbol{J}_k=\sum_l I_{kl}\omega_l\qquad(k,l=1,2,3)\tag{1.2.52}$$

即

$$\boldsymbol{J}=(I_{11}\omega_1+I_{12}\omega_2+I_{31}\omega_3)\boldsymbol{i}_1+(I_{12}\omega_2+I_{22}\omega_2+I_{23}\omega_3)\boldsymbol{i}_2+(I_{31}\omega_1+I_{23}\omega_2+I_{33}\omega_3)\boldsymbol{i}_3 \tag{1.2.53}$$

六、回转半径和平行轴定理

1. 回转半径

刚体的转动动能还可以写成

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}\int\rho(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int\rho\,|\,\boldsymbol{\omega}\,|^2\,|\,\boldsymbol{r}\,|^2\sin^2\theta\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2\int\rho r^2\sin^2\theta\mathrm{d}V \tag{1.2.54}$$

式中,θ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角;因而 $r\sin\theta$ 是刚体中某一点到瞬时转动轴的垂直距离. 设刚体绕"转动瞬轴"(即 $\boldsymbol{\omega}$ 的瞬时作用线)的转动惯量为 I_0,则

$$I_0=\int\rho r^2\sin^2\theta\mathrm{d}V \tag{1.2.55}$$

于是

$$\widetilde{T}=\frac{1}{2}I_0\omega^2 \tag{1.2.56}$$

由此,可以定义回转半径 k 为

$$k=\sqrt{\frac{I_0}{m}} \tag{1.2.57}$$

从而,刚体绕"转动瞬轴"的转动惯量可以写成

$$I_0=mk^2 \tag{1.2.58}$$

2. 平行轴定理

利用(1.2.48)式,很容易证明

$$I=I_C+md^2 \tag{1.2.59}$$

式中,I_C 为刚体对通过质心且与所讨论的"新轴"平行的轴的转动惯量,d 为过质心的轴与"新轴"之间的垂直距离. 有了"平行轴定理",就可以方便地写出刚体对任意轴线的转动惯量.

1.2.5 Euler 动力学方程及其精确解

一、Euler 动力学方程

将角动量 $\boldsymbol{J}$ 代入(1.1.42)式,则由 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}$ 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\boldsymbol{J}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M} \tag{1.2.60}$$

如果坐标系原点建立在刚体的质心上，则(1.2.60)式中的相对导数可以被默认为绝对导数.

再将(1.2.53)式代入方程(1.2.60)式，又有

$$\begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1+I_{12}\dot{\omega}_2+I_{31}\dot{\omega}_3+(I_{33}-I_{22})\omega_2\omega_3+I_{23}(\omega_2^2-\omega_3^2)+(I_{31}\omega_2-I_{12}\omega_3)\omega_1=M_1 \\ I_{12}\dot{\omega}_1+I_{22}\dot{\omega}_2+I_{23}\dot{\omega}_3+(I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1+I_{31}(\omega_3^2-\omega_1^2)+(I_{12}\omega_3-I_{23}\omega_1)\omega_2=M_2 \\ I_{31}\dot{\omega}_1+I_{23}\dot{\omega}_2+I_{33}\dot{\omega}_3+(I_{22}-I_{11})\omega_1\omega_2+I_{12}(\omega_1^2-\omega_2^2)+(I_{23}\omega_1-I_{31}\omega_2)\omega_3=M_3 \end{cases} \tag{1.2.61}$$

若将转动坐标轴取为刚体的主轴，即

$$I_{23}=I_{31}=I_{12}=0 \tag{1.2.62}$$

则方程组(1.2.61)式成为

$$\begin{cases} I_{11}\dfrac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}+(I_{33}-I_{22})\omega_2\omega_3=M_1 \\ I_{22}\dfrac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}+(I_{11}-I_{33})\omega_3\omega_1=M_2 \\ I_{33}\dfrac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t}+(I_{22}-I_{11})\omega_1\omega_2=M_3 \end{cases} \tag{1.2.63}$$

这就是著名的“Euler 动力学方程”. “Euler 动力学方程”是一组典型的非线性方程组.

二、Euler 动力学方程的精确解

1. 经典解

Euler 动力学方程的经典精确解至今只有 3 个(本书中不作详解)，即

(1) “Euler-Poinsot 陀螺”：条件是无外力矩 $\boldsymbol{M}$，坐标系原点就是质心.

(2) “Lagrange-Poisson 陀螺”：条件是 $I_{11}=I_{22}\neq I_{33}$，质心在对称轴上但不是坐标系原点. 由方程组(1.2.63)式可以看出，当 $I_{11}=I_{22}$ 时，由第三个方程中可解出 $\omega_3=\text{const.}$；将它代入第一第二两个方程后，这两个方程都是线性的.

(3) “Kowalewskaja 解”：条件是 $I_{11}=I_{22}=2I_{33}$，质心在惯量椭球的赤道平面上. 1888 年法国科学院悬赏 3 000 法郎征答此问题；S. V. Kowalewskaja 以其出色的解答获得 5 000 法郎奖赏. 她在答卷上所选的铭语是：“说自己知道的话，干自己应干的事，做自己想做的人.”

2. 孤波解

当 $\boldsymbol{M}=0$ 时，Euler 动力学方程成为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{I_{22}-I_{33}}{I_{11}}\omega_2\omega_3\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{I_{33}-I_{11}}{I_{22}}\omega_3\omega_1\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t}=\dfrac{I_{11}-I_{22}}{I_{33}}\omega_1\omega_2\end{cases}\tag{1.2.64}$$

若 $I_{33}>I_{11}>I_{22}$，则可设

$$\begin{cases}\beta_1=-\dfrac{I_{22}-I_{33}}{I_{11}}\\[2ex]\beta_2=\dfrac{I_{33}-I_{11}}{I_{22}}\\[2ex]\beta_3=\dfrac{I_{11}-I_{22}}{I_{33}}\end{cases}\tag{1.2.65}$$

于是，方程组(1.2.64)式成为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}=-\alpha\Omega_2\Omega_3\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}=\alpha\Omega_3\Omega_1\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}=\alpha\Omega_1\Omega_2\end{cases}\tag{1.2.66}$$

式中，$\alpha=\sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3}$，而

$$\begin{cases}\omega_1=\sqrt{\beta_1}\Omega_1\\\omega_2=\sqrt{\beta_2}\Omega_2\\\omega_3=\sqrt{\beta_3}\Omega_3\end{cases}\tag{1.2.67}$$

方程组的精确解是

$$\begin{cases}\Omega_1=a_1\tanh(kt)\\\Omega_2=a_2\operatorname{sech}(kt)\\\Omega_3=a_3\operatorname{sech}(kt)\end{cases}\tag{1.2.68}$$

式中，$k=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\alpha\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. (1.2.68)式是类似于“三波相互作用”的“孤波解”；当 $t\to\infty$时，Ω_2 和 Ω_3 迅速趋于零，而 Ω_1 迅速趋于稳定. 这就是“陀螺导航”的基本原理.

1.2.6 惯量张量和刚体力学的张量表示

利用“Einstein 约定”和张量运算规则(参阅附录 A)可将刚体力学中的所有公式换成张量写法. 由于平直空间中的二阶张量与矩阵是等价的，因而刚体力学中的许

多公式也可写成矩阵形式.

一、惯量张量

刚体的转动动能在 K 坐标系中可以被写成

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}I_{kl}\omega_k\omega_l \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.69}$$

而在 K′坐标系中可以被写成

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}\tilde{I}_{ij}\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j=\frac{1}{2}\tilde{I}_{ij}\omega_k\alpha_{ki}\omega_l\alpha_{lj} \tag{1.2.70}$$

对比(1.2.69)式和(1.2.70)式,可知

$$I_{kl}=\alpha_{ki}\alpha_{lj}\tilde{I}_{ij} \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{1.2.71}$$

即,I_{kl}为二阶张量. 若写成矩阵形式,则是

$$(I_{kl})=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{1.2.72}$$

而且

$$I_{kl}=I_{lk} \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.73}$$

二、刚体角动量和转动动能的张量表示和矩阵表示

1. 刚体角动量

$$J_k=I_{kl}\omega_l \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.74}$$

$$(J_k)=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{1.2.75}$$

2. 刚体转动动能

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}I_{kl}\omega_k\omega_l=\frac{1}{2}J_k\omega_k \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.76}$$

$$\tilde{T}=\frac{1}{2}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2' \\ J_3 \end{pmatrix} \tag{1.2.77}$$

三、惯量椭球

当刚体转动动能 $\tilde{T}$=const. 时,有

$$\frac{1}{2}I_{kl}\omega_k\omega_l = C \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.78}$$

即

$$\frac{1}{2}I_{11}\omega_1^2+\frac{1}{2}I_{22}\omega_2^2+\frac{1}{2}I_{33}\omega_3^2+I_{23}\omega_2\omega_3+I_{31}\omega_3\omega_1+I_{12}\omega_1\omega_2 = C \tag{1.2.79}$$

或

$$\frac{1}{2}\tilde{I}_{11}\omega_1^2+\frac{1}{2}\tilde{I}_{22}\omega_2^2+\frac{1}{2}\tilde{I}_{33}\omega_3^2+\tilde{I}_{23}\omega_2\omega_3+\tilde{I}_{31}\omega_3\omega_1+\tilde{I}_{12}\omega_1\omega_2 = 1 \tag{1.2.80}$$

这是一个“椭球面”方程，因此被称为“惯量椭球”.

四、惯量主轴和主转动惯量

设惯量主轴的方向余弦为 $n_k(k=1,2,3)$，则对任意对称主量，都有

$$I_{kl}n_l = In_k = I\delta_{kl}n_l \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.81}$$

或

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{1.2.82}$$

将(1.2.81)式或(1.2.82)式等号右边移到左边，有

$$(I_{kl}-I\delta_{kl})n_l = 0 \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.83}$$

或

$$\begin{pmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33}-I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2.84}$$

上述(1.2.83)式或(1.2.84)式就是高等代数中的“久期方程”. 要使“久期方程”中的方向余弦 n_k 有不全为零的解，必须其系数行列式等于零，即

$$|I_{kl}-I\delta_{kl}| = 0 \qquad (k,l=1,2,3) \tag{1.2.85}$$

或

$$\begin{vmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33}-I \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.86}$$

于是有

$$(I-I_1)(I-I_2)(I-I_3) = 0 \tag{1.2.87}$$

或

$$I^3 - AI^2 + BI - C = 0 \tag{1.2.88}$$

式中，(I_1, I_2, I_3)为“主转动惯量”，而

$$\begin{cases} A = I_1 + I_2 + I_3 = I_{11} + I_{22} + I_{33} = I_{kk} \\ B = I_2 I_3 + I_3 I_1 + I_1 I_2 = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{23} \\ I_{23} & I_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{33} & I_{31} \\ I_{31} & I_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{vmatrix} \\ C = I_1 I_2 I_3 = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{vmatrix} \end{cases} \tag{1.2.89}$$

由方程(1.2.88)式中求得“主转动惯量”(I_1, I_2, I_3)后，再代回“久期方程”(1.2.84)式，可算出惯量主轴的方向余弦 $n_k(k=1,2,3)$.

五、Euler 动力学方程的张量形式

1. 张量形式的 Euler 动力学方程

张量形式的 Euler 动力学方程可以被写成

$$\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\omega_j J_i = M_k \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.2.90}$$

因为 $J_k = I_{kl}\omega_l$，所以方程(1.2.90)式就是

$$I_{kl}\frac{\mathrm{d}\omega_l}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\omega_j I_{il}\omega_l = M_k \qquad (i,j,k,l = 1,2,3) \tag{1.2.91}$$

若设“主转动惯量”为 I_k，因为

$$J_k = I_k\omega_k \qquad (\text{不对 } k \text{ 求和}) \tag{1.2.92}$$

所以，方程(1.2.91)式又可被写成

$$I_k\frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\omega_j(\omega_i I_i) = M_k \qquad (\text{不对 } k \text{ 求和}) \tag{1.2.93}$$

注意，在学过张量以后，不求和的指标要注明.

2. Euler 动力学方程的首次积分

(1) 当 $M_k = 0$ 时，Euler 动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\omega_j J_i = 0 \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.2.94}$$

在方程(1.2.94)式等号两边标乘 ω_k，有

$$\omega_k\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} + (e_{kji}\omega_k\omega_j)J_i = 0 \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.2.95}$$

因为 $(e_{kji}\omega_k\omega_j) = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega})_i = 0$，所以

$$\omega_k \frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} = \omega_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{kl}\omega_l) = 0 \qquad (k,l = 1,2,3) \tag{1.2.96}$$

由于 I_{kl} 是对称张量，因而将(1.2.96)式中的求和指标 k 和 l 互换后，又有

$$\omega_l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{kl}\omega_k) = 0 \qquad (k,l = 1,2,3) \tag{1.2.97}$$

相加(1.2.96)和(1.2.97)两式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I_{kl}\omega_k\omega_l\right) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (k,l = 1,2,3) \tag{1.2.98}$$

于是

$$\widetilde{T} = \text{const.} \tag{1.2.99}$$

(2)当 $M_k = 0$ 时，在 Euler 动力学方程(1.2.94)式等号两边标乘 J_k，有

$$J_k \frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} + (e_{kji}J_kJ_i)\omega_j = 0 \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.2.100}$$

因为 $(e_{kji}J_kJ_i) = (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{J})_j = 0$，所以

$$J_k \frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(J^2)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (k = 1,2,3) \tag{1.2.101}$$

于是

$$J^2 = \text{const.} \tag{1.2.102}$$

【例 1.2】 已知：质量分别为 (m_1, m_2, m_3) 的 3 个质点，位于 $B\left(\frac{a}{2},h,0\right)$，$A(a,0,0)$ 和 $O(0,0,0)$3点(图 1.4).

求：(1)各转动惯量和惯量积，并写成矩阵形式；

(2)当 $m_2 = m_3 = \frac{1}{2}m_1$，$h = a$ 时的惯量主轴和惯量主轴的方向.

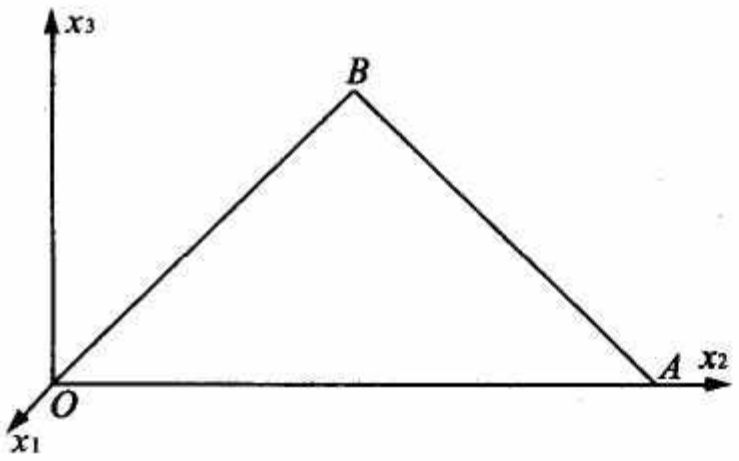


图 1.4

解：(1)因为

$$\begin{cases} I_{11} = m_1h^2 \\ I_{22} = m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_2a^2 = \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)a^2 \\ I_{33} = I_{11} + I_{22} = m_1h^2 + \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)a^2 \\ I_{23} = 0 \\ I_{31} = 0 \\ I_{12} = -\frac{1}{2}m_1ah \end{cases}$$

所以

$$(I)=\begin{pmatrix} m_1h^2 & -\frac{1}{2}m_1ah & 0 \\ -\frac{1}{2}m_1ah & \left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1h^2+\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)a^2 \end{pmatrix}$$

(2)从久期方程中,可解出

$$\begin{cases} I_{1,2}=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{17})m_2a^2 \\ I_3=\frac{7}{2}m_2a^2 \end{cases}$$

再由久期方程得到

$$\begin{cases} \frac{n_2}{n_1}=\frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ n_3=0 \end{cases}$$

从而惯量主轴的方向(即 $I_{1,2}$ 与 x_1 轴之间的夹角)分别为 $\arctan\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ 和 $\arctan\frac{1+\sqrt{17}}{4}$;而 I_3 的方向仍然垂直于 O-x_1x_2 平面.

【例 1.3】 已知:3 个质量均为 m 的质点分别位于$(a,0,0),(0,a,2a),(0,2a,a)$3 点.
求:系统相对于原点 O 的主转动惯量.

解:因为

$$\begin{cases} I_{11}=m(a^2+4a^2)+m(4a^2+a^2)=10ma^2 \\ I_{22}=ma^2+m(4a^2)+ma^2=6ma^2 \\ I_{33}=ma^2+ma^2+m(4a^2)=6ma^2 \\ I_{23}=-m(2a^2+2a^2)=-4ma^2 \\ I_{31}=I_{12}=0 \end{cases}$$

所以

$$(I)=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}ma^2$$

由于

$$\begin{cases} I_{11}+I_{22}+I_{33}=22ma^2 \\ \begin{vmatrix} I_{22} & I_{23} \\ I_{23} & I_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} I_{33} & I_{31} \\ I_{31} & I_{11} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{vmatrix}=140(ma^2)^2 \\ \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{31} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{23} & I_{33} \end{vmatrix}=200(ma^2)^3 \end{cases}$$

因此

$$I^3-22I^2+140I-200=0$$

即

$$(I-10)^2(I-2)=0$$

于是

$$\begin{cases} I_{1,2}=10ma^2 \\ I_3=2ma^2 \end{cases}$$

1.3 Hooke-Navier 弹性力学

弹性体模型是物理学“模型链”中继“质点”和“刚体”之后的第三个简单模型. 它实际上就是质点力学中“弹簧谐振子”问题的三维推广. 所谓“弹性”,就是所研究的材料必须服从 Hooke 定律(R. Hooke,1635～1703);从 Taylor 展开(B. Taylor,1685～1731)的观点来看,Hooke 定律只不过是任何复杂“力-变”关系的一级近似而已. 从这一意义上来说,弹性体在物理上必然是线性的,因为 Hooke 定律要求“应力”与“应变”成正比关系;但是在几何上可以是“非线性”的,因为“几何非线性”与 Hooke 定律无关.

弹性体模型当然要比“质点”和“刚体”更符合实际问题. 比弹性体更严格的模型还有“粘弹性模型”和“塑性模型”;然而,这两种模型除了极个别特例外在数学计算上都十分复杂,到目前为止尚无确定和简单的处理方法. 就凝聚态物理学尤其是固体物理学的现状而言,弹性体模型已经足够并且相当精确. I. Prigogine(1917～2003)在《非平衡态统计力学》(上海科学技术出版社,1984)一书中甚至说过:“只要我们忽略非谐力,固体就是一个独立谐振子的集合.”“这种近似对于许多平衡态问题来说已经足够……”对于稍微复杂一些的更符合实际的问题(例如非线性效应等复杂性问题)来说,“谐振子的集合”就应换成弹性体模型,当然计算也相应地变得复杂一些. 实际上,P. J. W. Debye(1884～1966)在研究固体比热时,就用到了简单的弹性力学理论. 弹性体模型比“谐振子的集合”复杂的地方,就在于任何一维都与其他二维有关联.

所谓“弹性力学”,按 L. D. Landau(1908～1968)和 E. M. Lifshitz(1915～1985)的说法,“即是把固体作为连续介质来处理的力学”. 然而,有时候非固体也可以当作弹性体来处理;例如生物物理学中的“双螺旋”DNA 结构的模型.

时至今日,弹性力学已经十分成熟. 与“流体动力学必须和物理实验相结合”所不同的是,弹性力学只是一种“应用数学”. L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz 在《连续介质力学》(人民教育出版社,1962)一书中说:“在弹性理论中,对于以数学形式确切地

提出的问题的求解具有最重要的意义，这些问题牵涉到线性偏微分方程；因此弹性理论中包含着不少所谓数学物理的成分．”当然，L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz 所说的“线性偏微分方程”也不尽然，因为对“几何非线性”的弹性力学问题，会出现“非线性偏微分方程”．正是出于弹性力学已经相对数学化这一原因，面向 21 世纪的许多重点院校，已将弹性力学这门原先的“专业课”下放为“专业基础课”；但流体动力学则仍属于“专业课”．

此外，在本书第 2 章 2.15 中，将证明弹性力学可以纳入 Lagrange 力学(C. J. L. Lagrange，1736～1813)的范畴；因为写出弹性体的“应变能密度”现在已十分容易；这对“纳入 Lagrange 力学的范畴”来说是必不可少的条件．这是弹性力学又一个与流体动力学不同之处；也是本书重点介绍弹性力学的主要原因．

1.3.1 应变和应力

一、应变

固体在作用力的影响下．将发生不同程度的形变，换言之，将改变它原有的形状和体积．假设，在形变前，物体中某一点的位矢分量用 $x_i(i=1,2,3)$来表示；而在形变后，物体中同一点的位矢分量用 x_i'来表示．于是，在形变时，物体中该点的位移矢量(或被称为“形变矢量”)的分量 $u_i(i=1,2,3)$可表示为

$$u_i = x_i' - x_i \tag{1.3.1}$$

当然，由于 x_i'是 x_i 的函数，因而 u_i 也是 x_i 的函数．这种以形变前的位矢分量来描述连续介质形变的方法，被称为“Lagrange 描述”；反之，按钱伟长先生(1912～)的说法，以形变后的位矢分量来描述连续介质形变的方法，被称为“Euler 描述”．相应的变量(坐标)x_i 和 x_i'，分别被称为“Lagrange 变量(坐标)”和“Euler 变量(坐标)”．物体形变时，形变前的各点位矢分量很容易得知，因而用“Lagrange 描述”比较方便．但是在考虑物体形变以后的平衡状态时，则是用“Euler 描述”比较方便．在“小形变”问题中，由于二次以上的项均须略去，因而“Lagrange 描述”与“Euler 描述”在形式上相同；但在“有限形变”(即“大位移”)问题中，由于二次以上的项不能略去，因而此时“Lagrange 描述”与“Euler 描述”在形式上是不同的．在弹性力学中，用的是“Lagrange 描述”，而在流体动力学中，用的是“Euler 描述”．这也是弹性力学与流体动力学之间的一个区别．

关于“Lagrange 描述”与“Euler 描述”，在流体动力学和统计力学中有更严格、更正规的定义．“Euler 描述”是 L. Euler(1707～1783)于 1755 年提出来的，“Lagrange 描述”的名称则是同一个 Euler 于 1757 年提出来的．在流体动力学中，将着眼于“流

体质点”的分析方法称为“Lagrange 描述”，而将着眼于“流场空间中固定点”的分析方法称为“Euler 描述”. 换言之，“Lagrange 描述”是“质点的描述”，而“Euler 描述”则是“场的描述”. 统计力学中的“Maxwell 最可几理论”和“Darwin-Fowler 平均值理论”(C. G. Darwin and R. H. Fowler)都着眼于“粒子”，因此都是“Lagrange 描述”；而“系综理论”则相当于“Euler 描述”. 对统计力学中的“系综”概念作出最通俗解释的是田长霖(1935～2002)(见 Chang L. Tien and John H. Lienhard. Statistical Thermodynamics. Hemisphere Pub. Co.，1979. 有中译本，清华大学出版社，1987). 田长霖说：“我们设想有两个有经验的行家，他们想弄清楚是否能通过喝第二杯咖啡要付钱的办法来加速顾客在拥挤的商业区小饭店内中午的流通. 为此，他们必须要弄清有多少值钱的座位由于顾客们慢吞吞地呷其已经空了的杯子(这些杯子应拿去用)而浪费掉. 一个行家从顾客进门起就盯住他们，计算他们吃喝的时间，他观察的是 10 个人的‘体系’随时间变化的情况. 第二个行家则在营业高峰时来到，拍摄从阳台到整个餐室的照片. 于是他获得了以 10 个人组成的所有体系的‘系综’的状况，由此计算该时刻吃喝顾客的百分数并得到了相同的信息. 第二个行家所作的观察更方便，并能提供更多的信息. ”田长霖的解释十分恰当，非常精辟；它说明了第一个行家所操作的正是流体力学中的 Lagrange 描述，第二个行家所操作的则是流体力学中的 Euler 描述，而流体力学中的 Euler 描述就相当于统计力学中的“系综”描述. 此外，“Lagrange 描述”与“Euler 描述”在量子力学的各种“诠释”中也有很贴切的对应：曾一度被封为“正统诠释”的“Copenhagen 诠释”以及包括“大千世界诠释”(目前国际上已将“大千世界诠释”奉为“正统诠释”)在内的四五种主要“诠释”都是“Lagrange 描述”的，而“系综诠释”则是“Euler 描述”的. 在量子力学中，凡涉及“多粒子”、凡涉及“经典场”、凡涉及相对论的理论，都必然是“系综诠释”的. 当然，“量子系综”与“经典系综”之间也有区别.

L. Brillouin 于 1928 年在《力学和弹性理论中的张量》一书中首次指出：弹性力学所采用的是“Lagrange 坐标”. J. L. Synge 和钱伟长在 1940 年的一篇纪念 T. von Karman(1881～1963)的文章中将之称为“拖带坐标”. J. L. Synge 和钱伟长说：“因为坐标 x_i 在形变过程中保持不变，但坐标框架的形状改变了. ”在弹性力学中所着眼的也是弹性体中的具体质点.

当物体形变时，点与点之间的距离将发生变化. 若设两点之间在形变前的矢径分量为 $\mathrm{d}x_i(i=1,2,3)$，则在形变后这两点之间的矢径分量成为 $\mathrm{d}x_i'=\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}u_i$. 两点之间的距离的平方在形变前是

$$(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2=(\mathrm{d}x_i)^2 \tag{1.3.2}$$

而在形变后是

$$(\mathrm{d}l')^2=(\mathrm{d}x_1')^2+(\mathrm{d}x_2')^2+(\mathrm{d}x_3')^2=(\mathrm{d}x_i')^2=(\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}u_i)^2 \tag{1.3.3}$$

因为

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \qquad (i,k = 1,2,3) \tag{1.3.4}$$

所以，

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l \qquad (i,k,l = 1,2,3) \tag{1.3.5}$$

在写出(1.3.5)式时要注意“求和指标”的使用. 由于(1.3.5)式等号右边第二项中关于“求和指标”i 和 k 对称，即

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k$$

再将(1.3.5)式等号右边第三项中的“求和指标”i 和 l 互换，于是得到

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2e_{ik} dx_i dx_k \qquad (i,k = 1,2,3) \tag{1.3.6}$$

式中，e_{ik} 被称为“应变张量”：

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad (i,k,l = 1,2,3) \tag{1.3.7}$$

可见，“应变张量”是对称张量：

$$e_{ik} = e_{ki} \tag{1.3.8}$$

当然，它也可被写成矩阵形式：

$$(e_{ik}) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \tag{1.3.9}$$

式中，(e_{11}, e_{22}, e_{33}) 分别为 (x_1, x_2, x_3) 方向的“正应变”，而 (e_{23}, e_{31}, e_{12}) 被称为“剪应变”(或“偏应变”).

式(1.3.7)被称为“Cauchy 方程”(B. A. L. Cauchy, 1789～1857). 在(1.3.7)式中，等号右边第三项是二次“非线性项”；这就昭示，在一般情况下弹性力学是“几何非线性”的. 在“几何非线性”的弹性力学中，“Lagrange 坐标”与“Euler 坐标”是有区别的. 所以在弹性力学的大位移问题中，都要强调“Lagrange 描述”. 如果略去(1.3.7)式中等号右边的第三项，则成为“几何线性”的弹性力学；这时就没有必要强调“Lagrange 描述”与“Euler 描述”之间的区别了.

在“几何线性”的弹性力学即“线弹性力学”中，(1.3.7)式简化成为

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (i,k = 1,2,3) \tag{1.3.10}$$

由此可得“Saint Venant 应变相容方程”(A. J. C. B. de Saint Venant, 1797～1866)：

$$\frac{\partial^2 e_{ji}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 e_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \qquad (j,i,k,l = 1,2,3) \tag{1.3.11}$$

“Saint Venant 应变相容方程”(1.3.11)式还可写成如下形式：

$$e_{jkm}e_{ipq}\partial_k\partial_p e_{mq}=0 \tag{1.3.12}$$

式中，e_{jkm} 为 Levi-Civita 符号(T. Levi-Civita，1873～1941).

在“线弹性力学”中，由(1.3.10)式很容易看出“应变张量”的物理意义. 例如，当$(i,k=1)$时，$e_{11}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$就是 x_1 轴方向线段的相对伸长；再如，当时$(i=1;k=2)$，可以证明 $e_{12}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$，为原来在 x_1 方向和 x_2 方向的两线段所夹的角度(直角)在形变后减小值的一半.

在“几何非线性”的弹性力学中，(1.3.7)式中等号右边第三项的二次“非线性项”只不过是对以上物理解释的“非线性”修正.

由于“应变张量”e_{ik} 是对称张量，因而与刚体力学中一样，可以用解“久期方程”的方法求“主应变”和“应变主轴”的方向.

弹性体的“体胀系数”用 θ 表示. 将“Cauchy 方程”代入“体胀系数”的定义式，

$$\theta=\lim_{dV\to 0}\frac{dV'-dV}{dV} \tag{1.3.13}$$

式中 $dV=dx_1dx_2dx_3$ 为形变前的体积元，$dV'=dx_1'dx_2'dx_3'$ 为形变后的体积元. 略去高阶小量，最后可得：

$$\theta=e_{kk}=\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1.3.14}$$

当然，在“线弹性力学”中，上式可被简化为

$$\theta=e_{kk}=\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{1.3.15}$$

由矩阵理论的知识可知，在(1.3.9)式中，除了 θ 是“第一不变量”之外，还有两个不变量

$$\theta'=\begin{vmatrix}e_{22}&e_{23}\\e_{23}&e_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{33}&e_{31}\\e_{31}&e_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}\\e_{12}&e_{22}\end{vmatrix} \tag{1.3.16}$$

$$\theta''=\begin{vmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{31}\\e_{12}&e_{22}&e_{23}\\e_{31}&e_{23}&e_{33}\end{vmatrix} \tag{1.3.17}$$

【例 1.4】 已知：主应变 $e_1=e,e_2=e'$，且 $e\neq e'$；对应的应变主轴的方向为 n_j，e' 对应的应变主轴的方向为 n_j'.

求证：$n_jn_j'=0$，即 n_j 垂直于 n_j'.

证：因为

$$\begin{cases} n_j e_{ji} = e n_j \delta_{ji} \\ n_j' e_{ji} = e' n_j' \delta_{ji} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} n_i' n_j e_{ji} = e n_i' n_j \delta_{ji} = e n_i' n_i \\ n_i n_j' e_{ji} = e' n_i n_j' \delta_{ji} = e' n_i n_i' \end{cases}$$

两式相减，得

$$(e - e') n_i n_i' = e_{ji} n_j n_i' - e_{ji} n_j' n_i$$

由 e_{ij} 的对称性，又有

$$(e - e') n_i n_i' = e_{ji} n_j n_i' - e_{ij} n_j' n_i$$

在后一项中将求和指标 i 和 j 互换，得

$$(e - e') n_i n_i' = e_{ji} (n_j n_i' - n_i' n_j) = 0$$

由于

$$e - e' \neq 0$$

故

$$n_j n_j' = 0$$

【例 1.5】 已知：可能的应变状态为

$$\begin{cases} e_{11} = a_0 + a_1 (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^4 + x_2^4) \\ e_{22} = b_0 + b_1 (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^4 + x_2^4) \\ e_{12} = c_0 + c_1 x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + c_2) \\ e_{33} = e_{23} = e_{31} = 0 \end{cases}$$

求：系数 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 之间的关系.

解：将已知条件代入“Saint Venant 应变相容方程”，可得

$$\begin{cases} a_1 + b_1 - c_1 c_2 = 0 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

二、应力

“应力”是一种“面力”. 所谓“面力”，就是物体中任意一个“人为划定”的面上所作用的力. 由于一个“面”是由其“单位法线方向”确定的，而“单位法向”有 3 个分量；另外，“力”是矢量，也有 3 个分量；因此，应力作为“单位面积上的力”，就必然有 9 个分量.

设“面元”用 $\Delta S_k (k = 1,2,3)$ 表示，作用在此“面”上的“力”用 $\Delta F_i (i = 1,2,3)$ 表示，作用在此“面”上的“力矩”用 $\Delta M_j (j = 1,2,3)$ 表示，因而当下列两式成立时：

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta M_j}{\Delta S_k} = 0 \tag{1.3.18}$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S_k} = \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}S_k} = \sigma_{ik} \tag{1.3.19}$$

就称 $\sigma_{ik}(i,k=1,2,3)$ 为该“面元”上某一点处的“应力”. 用矩阵,可表示成

$$(\sigma_{ik})=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{1.3.20}$$

“应力张量”σ_{ik} 的对称性是由(1.3.20)式来保证的(下面将通过弹性体的“角动量守恒”方程给出其证明):

$$\sigma_{ik}=\sigma_{ki} \tag{1.3.21}$$

(1.3.20) 式中,$(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33})$ 被称为“正应力”,$(\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{12})$ 被称为“剪应力”(或“偏应力”).

由于“应力张量”σ_{ik} 是对称张量,因而与刚体力学中一样,可以用解“久期方程”的方法求“主应力”和“应力主轴”的方向. 由矩阵理论的知识可知,在(1.3.20)式中,有 3 个不变量

$$\Theta=\sigma_{kk} \tag{1.3.22}$$

$$\Theta'=\begin{vmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{33} & \sigma_{31}\\ \sigma_{31} & \sigma_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{vmatrix} \tag{1.3.23}$$

$$\Theta''=\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{vmatrix} \tag{1.3.24}$$

其中 $\Theta=\sigma_{kk}$,就是矩阵(1.3.20)式的“迹”.

在建立了“应力张量”的概念后,就可以导出弹性力学的“Navier 方程”(C. L. M. H. Navier,1785～1836),也就是弹性力学的运动微分方程.

首先,根据 Newton 第二定律,可以写出

$$\int_V \rho f_i \mathrm{d}V+\oint_S \sigma_{ij}\mathrm{d}S_j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{1.3.25}$$

式中,ρ 为弹性体的质量密度,f_i 为单位质量的体积力,$\mathrm{d}V$ 为体积元,$\mathrm{d}S_j$ 为面元(其法线方向单位矢量是 n_j). 可以看出,方程(1.3.25)式等号左边第二项若对“全空间”积分应该是零,否则,就弹性体整体而言将不会服从 Newton 第二定律. 当然对局部空间积分时,这一项不全为零.

在弹性力学中,ρ 一般是常数(因而对弹性力学而言,“连续性方程”可以略去,因为它是恒等式);但在这里只需 ρ 是“Lagrange 坐标”x_i 的函数即可.

对方程(1.3.25)式用 Gauss 定理(K. F. Gauss,1777～1855),由于 $\mathrm{d}V$ 是任取的,故

$$\rho f_i+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1.3.26}$$

此即弹性力学的“Navier 方程”.

其次，对弹性体还可以写出“角动量守恒”方程：

$$\int_V \rho e_{ijk} x_j f_k \mathrm{d}V + \oint_S e_{ijk} x_j \sigma_{kl} \mathrm{d}S_l = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho e_{ijk} x_j \frac{\partial u_k}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{1.3.27}$$

式中，e_{ijk} 为 Levi-Civita 符号. 应用 Gauss 定理，因为

$$\oint_S e_{ijk} x_j \sigma_{kl} \mathrm{d}S_l = \int_V \frac{\partial}{\partial x_l}(e_{ijk} x_j \sigma_{kl})\mathrm{d}V = \int_V \left(e_{ijk}\sigma_{kj} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}V$$

所以，

$$\int \left(\rho e_{ijk} x_j f_k + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + e_{ijk}\sigma_{kj}\right)\mathrm{d}V = \int_V \rho e_{ijk} x_j \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\mathrm{d}V$$

即

$$\int_V \left[e_{ijk} x_j \left(\rho f_k + \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right) + e_{ijk}\sigma_{kj}\right]\mathrm{d}V = 0 \tag{1.3.28}$$

将方程(1.3.26)代入(1.3.28)式，由于 $\mathrm{d}V$ 是任取的，故

$$e_{ijk}\sigma_{kj} = 0$$

即

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk} \tag{1.3.29}$$

从而证明了“应力张量”σ_{jk} 的对称性与弹性体“角动量守恒”方程是等价的. 换言之，在常规的弹性力学中，只需 3 个“Navier 方程”就已足够.

需要特别指出的是，在“几何非线性”的弹性力学中，由于弹性体的“小单元”在形变时有了变化，而这种变化对于“小单元”的“Navier 方程”必然有所影响；因而在考虑了这些影响之后，“Navier 方程”将修改为

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\sigma_{kl}\right] \tag{1.3.30}$$

在本书第 2 章“Lagrange 力学”2.15 节中将证明方程(1.3.30)这一经过修改的形式是正确的.

【例 1.6】 已知：全应力定义为 $\sigma_{(n)} = \sigma_{ji} n_j n_i$，总面力定义为 $T_i = \sigma_{ji} n_j$，式中 n_i 为面元的法向单位矢量；剪应力 τ_i 由下式定义：

$$\tau^2 = \tau_i \tau_i = (T_i)^2 - \sigma_{(n)}^2$$

另外，应力主轴上的主应力设为(σ_1，σ_2，σ_3).

求：正八面体上剪应力的平方.

解：在正八面体上有

$$\begin{cases} |n_1| = |n_2| = |n_3| \\ n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

所以

$$|n_i| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此由已知条件有

$$(T_i)^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$\sigma_{(n)} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

于是

$$\tau^2 = \tau_i \tau_i = (T_i)^2 - \sigma_{(n)}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]$$

【例 1.7】 已知:在线弹性静力学中,应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma(x_i) \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0 \end{cases}$$

求证:体积力 $f_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$,$(i = 1,2,3)$,即此体积力是保守力,式中 V 为势能函数.

证:将已知应力状态代入线弹性静力学的基本微分方程,有

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \rho f_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho f_1 = 0, \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho f_2 = 0, \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho f_3 = 0$$

从而

$$f_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)$$

可以看出,$\dfrac{\sigma}{\rho} = V$.

1.3.2 广义 Hooke 定律和弹性力学的基本微分方程

一、广义 Hooke 定律

广义 Hooke 定律是弹性力学中的"本构方程",它实际上就是 Hooke 定律在三维情况下的推广. 一般地,可以设应力 σ_{ij} 是应变 e_{kl} 的函数:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{kl}) \tag{1.3.31}$$

如果弹性体中无"初应力",并且"物理上"变化小,则用 Taylor 展开、略去高阶小量后得

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}}\right)_0 e_{kl} = a_{ijkl} e_{kl} \tag{1.3.32}$$

式中,a_{ijkl} 被称为"弹性常数张量";它应该有 81 个分量. (1.3.32)式实际上就是 Newton 质点力学中谐振子 $F = kx$ 的合理推广.

首先,由于"应力张量"是对称张量,所以

$$a_{ijkl} = a_{jikl} \tag{1.3.33}$$

其次，由于“应变张量”是对称张量，所以

$$a_{ijkl} = a_{ijlk} \tag{1.3.34}$$

(1.3.33)式和(1.3.34)式的结果，使得“弹性常数张量”的个 $9^2=81$ 分量一下子锐减至 $6^2=36$ 个.

第三，在绝热条件下，“应变能密度”$A(e)$的全微分是

$$\mathrm{d}A = \sigma_{ij}\,\mathrm{d}e_{ij} \tag{1.3.35}$$

即

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \tag{1.3.36}$$

由于

$$\begin{cases} a_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial e_{kl}\partial e_{ij}} \\ a_{klij} = \dfrac{\partial \sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} \end{cases} \tag{1.3.37}$$

所以有类似于热力学中“Maxwell 关系”(J. C. Maxwell，1831～1879)的等式：

$$a_{ijkl} = a_{klij} \tag{1.3.38}$$

其结果使得“弹性常数张量”的 36 个分量又锐减至 21 个(对角线上的 6 个和非对角线上的 15 个). 对于“各向异性”弹性体而言，独立的弹性常数至多只有 21 个. M. Born(1882～1970)于 1915 年用“迭代物质构造原理”，证明了可以得到 21 个弹性常数. 对三斜晶系晶体，有 18 个弹性常数；对等轴晶系晶体，有 3 个弹性常数. 彭恒武于 1941 年具体计算了几种晶体的弹性常数，与实验一致.

第四，对于“各向同性”弹性体而言，有下面 3 方面的考虑：

(1) 沿任意两个相反方向，弹性关系相同. 其原则是，相反方向的“正应力”保持不变；相反方向的“剪应力”必须变号. 具体物理考虑是，“正应力”与各“剪应变”无关，“剪应力”只与对应的“剪应变”有关. 这样，就减去了 12 个弹性常数，即

$$a_{1123}, a_{1131}, a_{1112},$$
$$a_{2223}, a_{2231}, a_{2212},$$
$$a_{3323}, a_{3331}, a_{3312},$$
$$a_{1223}, a_{1231}, a_{2331}$$

尚余弹性常数为 $21-12=9$ 个.

(2) 沿 3 个互相垂直的方向，弹性关系相同. 其原则是，换坐标轴时“应变”换位. 这样，就又减去了 6 个弹性常数，即

$$a_{1133}, a_{2233} \quad (=a_{1122})$$
$$a_{3131}, a_{1212} \quad (=a_{2323})$$
$$a_{2222}, a_{3333} \quad (=a_{1111})$$

尚余弹性常数为 9−6=3 个.

(3) 沿坐标轴转动任一角度后的方向,弹性关系相同. 于是,再减去 1 个弹性常数,即

$$a_{1111} = a_{1122} + 2a_{1212}$$

最后,尚余弹性常数为 3−1=2 个.

通常以所谓"Lame 常数"(G. Lame,1795～1870)来代替这两个弹性常数:

$$\begin{cases} \lambda = a_{1122} \\ \mu = a_{1212} \end{cases}$$

从而

$$a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.3.39}$$

其具体形式(摊成平面)为

$$(a_{ijkl}) = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \tag{1.3.40}$$

等式(1.3.39)被称为"Lame 弹性常数张量",等式(1.3.40)被称为"Lame 弹性常数矩阵".

当然也可以反过来设应变 e_{ij} 是应力 σ_{kl} 的函数:

$$e_{ij} = e_{ij}(\sigma_{kl}) \tag{1.3.41}$$

于是,相应的有

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}\right)_0 \sigma_{kl} = b_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.3.42}$$

经过与上面类似的分析,可以得到

$$b_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{1.3.43}$$

式中,E 为"Young 模量"(T. Young,1773～1829),ν 为"Poisson 比"(S. D. Poisson,1781～1840). "Young-Poisson 常数"也是弹性常数.

这两组弹性常数之间有如下关系:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \tag{1.3.44}$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases} \tag{1.3.45}$$

在弹性力学发展史上，Navier 于 1820 年最初认为只有 1 个弹性常数(实际上相当于认为弹性体是“不可压缩”的)，Cauchy 于 1820～1822 年间认为应有 2 个弹性常数，Cauchy 和 Poisson 于 1822～1828 年间认为一般情况下独立弹性常数应有 15 个而各向同性体应有 1 个(也是实际上相当于认为弹性体是“不可压缩”的)，G. Green (1793～1841)于 1838 年用能量守恒定律证明了一般情况下独立弹性常数应有 21 个，最后 W. Thomson(即 Kelvin 勋爵 1824～1907)和 Young 用热力学第一、第二定律证明了一般情况下独立弹性常数应有 21 个而各向同性体应有 2 个.

由广义 Hooke 定律可以写出“应变能密度”$A(e)$是

$$A(e) = \frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{1.3.46}$$

它实际上就是 Newton 质点力学中谐振子能量 $V=\frac{1}{2}kx^2$ 的合理推广. 对“应变能密度”$A(e)$可以作如下判断：首先，因为弹性体中无“初应力”，即 $e_{ij}=0$ 时 $\sigma_{ij}=0$，所以 $A(e)$中不应有 e_{ij} 的一次项，否则 σ_{ij} 中将出现常数项；其次，$A(e)$本身中可以有常数项，该常数可以理解为 $A(e)$的初值；第三，由于 Hooke 定律，$A(e)$必须是 e_{ij} 的二次齐次式，才能保证 σ_{ij} 与 e_{ij} 之间的线性关系；最后，在坐标旋转时由于各向同性要求，$A(e)$必须是不变量. 从以上这些考虑出发，就可写出

$$A(e) = A_0 + \frac{1}{2}\theta^2 + \mu e_{kl}e_{kl} \tag{1.3.47}$$

从而就可得到“Lame 关系”.

当然，“Lame 关系”或“Young-Poisson 关系”也可根据(1.3.39)式和(1.3.43)式得到

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ e_{ij} = -\dfrac{\nu}{E}\Theta\delta_{ij} + \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \end{cases} \tag{1.3.48}$$

“Lame 关系”有时也写成

$$\sigma_{ij} = k_s\theta\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}\right) \tag{1.3.49}$$

式中

$$k_s = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1.3.50}$$

为等熵弹性模量.

由(1.3.48)式可知

$$\Theta = \frac{E}{1-2\nu}\theta = (3\lambda + 2\mu)\theta \tag{1.3.51}$$

二、弹性力学的基本微分方程

将广义 Hooke 定律代入 Navier 方程或 Saint Venant 应变相容方程，就可以得到弹性力学的基本微分方程.

1. Lame 方程

将“Lame 关系”(1.3.48)式代入“Navier 方程”(1.3.30)式，可得

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho f_i + (\lambda+\mu)\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \mu\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}$$
$$+\left[\lambda\theta\delta_{jk}+\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \tag{1.3.52}$$

此方程被称为“Lame 方程”. 当然，也可将“Lame 方程”改写为如下形式

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + (c_p^2 - c_s^2)\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_k} + c_s^2\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_l}$$
$$+\left[(c_p^2-2c_s^2)\theta\delta_{jk}+c_s^2\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \tag{1.3.53}$$

式中，c_p 为纵波波速，c_s 为横波波速

$$\begin{cases} c_p^2 = \dfrac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho} \\ c_s^2 = \dfrac{E}{2\rho(1+\nu)} = \dfrac{\mu}{\rho} \end{cases} \tag{1.3.54}$$

注意，在“几何非线性”的弹性力学中，$\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} \neq \theta$. 在“线弹性力学”中，方程(1.3.52)或方程(1.3.53)等号右边略去“非线性项”后只剩下线性项，而且这时才有 $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \theta$.

也可利用关系(1.3.44)式，将线性化的 Lame 方程改写为简单形式

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\right] + \rho f_i \tag{1.3.55}$$

2. Beltrami-Michell 方程(E. Beltrami and J. H. Michell)

由(1.3.48)式可得

$$\frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\nu}{E}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_l}\delta_{ij}$$

将它代入“Saint Venant 应变相容方程”(1.3.11)式，有

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}+\frac{\partial^2\sigma_{kl}}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial x_j\partial x_l}-\frac{\partial^2\sigma_{jl}}{\partial x_i\partial x_k}\right)$$
$$=\nu\left(\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\delta_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}-\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\right)\Theta \tag{1.3.56}$$

对(1.3.56)式中的指标 k 和 l 进行“缩并”,又有

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial x_j\partial x_k}-\frac{\partial^2\sigma_{jk}}{\partial x_i\partial x_k}\right)$$
$$=\nu\left(\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)\Theta \tag{1.3.57}$$

另外,由“Navier 方程”(1.3.26)式,还有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial x_j\partial x_k}=\rho\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\\[2ex]\dfrac{\partial^2\sigma_{jk}}{\partial x_i\partial x_k}=\rho\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right]\end{cases} \tag{1.3.58}$$

将(1.3.57)式和(1.3.58)式代入(1.3.56)式,最后再利用对(1.3.55)式求散度得到的式子及(1.3.51)式,可以完成“Beltrami-Michell 方程”的推导:

$$\left[\delta_{ij}\frac{\rho\nu(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right]\Theta-\left[\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\right]\sigma_{ij}$$
$$=-\rho\left(\delta_{ij}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.3.59}$$

由于在推导过程中使用了“Saint Venant 应变相容方程”,因而方程(1.3.59)式又被称为“Beltrami-Michell 应力相容方程”. 必须注意的是,此推导是在“几何线性”的弹性力学即“线弹性力学”中成立的;在推导过程中 3 次使用了近似的“Cauchy 方程”(1.3.10)式,其中一次是在导出“Saint Venant 应变相容方程”处,第二次是在用到线性化表达式(1.3.55)式时,第三次是在上面将对 u_i 的偏导数换写成 e_{ij} 时;另外,这里的“Navier 方程”也不是“几何非线性”弹性力学的. 在“几何非线性”的弹性力学中,无法推导“Beltrami-Michell 应力相容方程”. 所以“Beltrami-Michell 方程”不是一般成立的方程.

将(1.3.59)式中的指标 i 和 j“缩阶”,又可得关于 Θ 的方程:

$$-\frac{\rho}{E}\left[\frac{2-3\nu+4\nu^2}{(1-\nu)(2+\nu)}\right]\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_k\partial x_k}=-\frac{\rho}{1-\nu}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

此式有时会被用到.

从以上推导中可看出,用“Lagrange 位移”u_i 表示的弹性力学的基本微分方程最简单、最方便.

三、平面应变问题和平面应力问题的基本微分方程

在弹性力学中，还有一些特殊问题. “几何线性”的弹性力学即“线弹性力学”以及“静力学”问题当然也算特殊问题，但这两类问题已包括在上述一般问题之中；(1.3.59)式所表示的就是“线弹性力学”问题. 除此之外，还有一些属于第二层次，第三层次的特殊问题；例如“平面应变问题”，“平面应力问题”，“细杆问题”，“薄板-薄壳问题”，“杆的扭转问题”等等.

平面应变问题和平面应力问题在通常的弹性力学教科书中都有所描述. 在通常的弹性力学教科书中，平面应变问题和平面应力问题都是“线弹性力学”的；而且导出的基本微分方程都是用应力表示的. 在“几何非线性”的弹性力学中，若用“Lagrange 位移”u_i 来重新表示平面应变问题和平面应力问题的基本微分方程，将使这两类问题变得更清晰、更具普遍性. 在平面问题中，只有二维；因此“角标”换用希腊字母 $(\alpha,\beta,\cdots)$表示.

1. 平面应变问题

平面应变问题的约束条件是

$$e_{33}=e_{23}=e_{31}=0 \tag{1.3.60}$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}=0 \qquad u_3=0 \quad (\alpha=1,2) \tag{1.3.61}$$

2. 平面应力问题

平面应力问题的约束条件是

$$\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0 \tag{1.3.62}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_3}=0 \qquad (\alpha,\beta=1,2) \tag{1.3.63}$$

这两组约束条件各为 6 个. 由 6 个约束条件可将有 9 个量的$\frac{\partial u_l}{\partial x_k}(k,l=1,2,3)$去掉其中 5 个(因为 $e_{33}=0$ 或 $\sigma_{33}=0$ 各为恒等式)，剩下 4 个量为$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}(\alpha,\beta=1,2)$. 所以，在这两类问题中，“Cauchy 方程”总是

$$e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}+\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\beta}\right)\right] \tag{1.3.64}$$

而“广义 Hooke 定律”变成

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{E}{1+\nu}\left(e_{\alpha\beta}+\frac{\nu}{1-k\nu}e_{\lambda\lambda}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{1.3.65}$$

注意，式中 $e_{\lambda\lambda}\neq e_{kk}$，而在(1.3.65)式中

$$k=\begin{cases}1(\text{对平面应力})\\ 2(\text{对平面应变})\end{cases} \tag{1.3.66}$$

将这些关系代入方程(1.3.26)式的二维表达式(当然要考虑平面应变问题和平面应力问题两种情况)

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\left(\delta_{\alpha\lambda}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\lambda}\right)\sigma_{\beta\lambda}\right]+\rho f_\alpha=\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \tag{1.3.67}$$

最后得到

$$\frac{2(1+\nu)\rho}{E}\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}-f_\alpha\right)=\left[\frac{1+(2-k)\nu}{1-k\nu}\right]\left(\delta_{\alpha\lambda}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\lambda}\right)\frac{\partial e_{\gamma\gamma}}{\partial x_\lambda}+\left(\delta_{\alpha\lambda}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\lambda}\right)\left(\delta_{\gamma\lambda}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\lambda}\right)\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_\beta\partial x_\beta}$$
$$+\left[\left(\frac{2\nu}{1-k\nu}\right)e_{\gamma\gamma}\delta_{\beta\lambda}+\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\lambda}\right)\right]\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\lambda} \tag{1.3.68}$$

式中,$(\alpha,\beta,\gamma,\lambda=1,2)$,而

$$e_{\lambda\lambda}=\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda}\right) \tag{1.3.69}$$

可以看出,方程(1.3.52)式与方程(1.3.69)式在结构上是相仿的. 从原则上讲,方程(1.3.52)式可被用来解决所有弹性力学问题.

【例 1.8】 已知:一长为 l 的长杆竖直地置于重力场中.

求:它的形变.

解:设 x_3 轴为杆轴的方向,杆下端所在平面为 x_1-x_2 平面.

应力分量中,除 σ_{33} 外都应等于零;而在杆的上端($x_3=l$ 处)有 $\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$. 从而,可解出

$$\sigma_{33}=-\rho g(l-x_3)$$

而其余的应力分量皆为零. 于是,可算出各应变分量

$$\begin{cases}e_{11}=e_{22}=\dfrac{\nu}{E}\rho g(l-x_3)\\ e_{33}=-\dfrac{1}{E}\rho g(l-x_3)\\ e_{23}=e_{31}=e_{12}=0\end{cases}$$

由此积分可得位移分量为

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{\nu}{E}\rho g(l-x_3)x_1\\ u_2=\dfrac{\nu}{E}\rho g(l-x_3)x_2\\ u_3=-\dfrac{\rho g}{2E}[l^2-(l-x_3)^2-\nu(x_1^2+x_2^2)]\end{cases}$$

其中 u_3 在 $x_3=0$ 处,即长杆下端处是不适用的(因为 x_1 和 x_2 不一定是零).

【例 1.9】 已知:半径为 a 的实心球处在自身的引力场中.

求:它的形变.

解:将线弹性静力学的基本微分方程写出矢量形式是

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=-\frac{2(1+\nu)}{E}\rho\boldsymbol{f}$$

换成球坐标(r,θ,φ)后,以$\boldsymbol{f}=-g\dfrac{\boldsymbol{r}}{R}$代入此式,有

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2u)}{\mathrm{d}r}\right]=\rho g\frac{r}{R}$$

其定解条件为

$$\begin{cases}u\text{ 有界} & (r=0)\\ \sigma_{rr}=0 & (r=a)\end{cases}$$

由此得到

$$u=-\frac{\rho g a(1-2\nu)(1+\nu)}{10E(1-\nu)}r\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

讨论:(1)在半径为$a\sqrt{\dfrac{3-\nu}{3(1+\nu)}}$的球面内部,$e_{rr}<0$(受压);而在其外部,$e_{rr}>0$(受拉).

(2) 球心压力为$\dfrac{3-\nu}{10(1-\nu)}\rho g a$.

【例 1.10】 已知:半径为a的圆柱体以等角速度$\boldsymbol{\omega}$绕其对称轴旋转.

求:它的形变.

解:将线弹性静力学的基本微分方程写出矢量形式是

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=-\frac{2(1+\nu)}{E}\rho\boldsymbol{f}$$

换成柱坐标(r,φ,x_3)形式,以圆柱体的对称轴为x_3轴,$f_r=\omega^2 r$. 此问题中同样只有径向位移$u_r=u(r)$. 由此可得基本微分方程是

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}\right]=-\rho\omega^2 r$$

其定解条件为

$$\begin{cases}u\text{ 有界} & (r=0)\\ \sigma_{rr}=0 & (r=a)\end{cases}$$

由此解得

$$u=\frac{\rho\omega^2(1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)}r[(3-2\nu)a^2-r^2]$$

【例 1.11】 已知:一个内、外半径分别为a和b的空心圆筒,其内壁受有压强p,而外壁不受力.

求:它的形变.

解:设空心圆筒的对称轴为x_3轴. 用柱坐标(r,φ,x_3). 此问题中只有径向位移$u_r=u(r)$. 由此可得基本微分方程是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(ru)}{\mathrm{d}r}=\text{const.}=2A$$

解出

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

其中(A,B)为待定常数. 于是可得

$$\begin{cases} u_{rr} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = A - \dfrac{B}{r^2} \\ u_{\varphi\varphi} = \dfrac{u}{r} = A + \dfrac{B}{r^2} \end{cases}$$

其定解条件为

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -p & (r = a \text{ 处}) \\ 0 & (r = b \text{ 处}) \end{cases}$$

从而求得

$$\begin{cases} A = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2} \\ B = \dfrac{1+\nu}{E} \dfrac{p(ab)^2}{b^2 - a^2} \end{cases}$$

讨论:其应力分布为

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \dfrac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{33} = 2\nu \dfrac{pa^2}{b^2 - a^2} \end{cases}$$

【例 1.12】 已知:一个内、外半径分别为 a 和 b 的空心球壳,其内壁受有压强 p_1,而外壁受有压强 p_2.

求:它的形变.

解:以球心为原点引入球坐标(r,θ,φ)系. 此问题中只有径向位移 $u_r = u(r)$. 由此可得 $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$,于是基本微分方程是

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0$$

即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}(r^2 u)}{\mathrm{d}r} = \text{const.} = 3A$$

或

$$u = Ar + \frac{B}{r^2}$$

其中(A,B)为待定常数. 由此可得

$$\begin{cases} e_{rr} = A - \dfrac{2B}{r^3} \\ e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = A + \dfrac{B}{r^3} \\ \sigma_{rr} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{rr} + 2\nu e_{\theta\theta}] = E\left[\dfrac{A}{1-2\nu} - \dfrac{2B}{(1+\nu)r^3}\right] \end{cases}$$

其定解条件为

$$\sigma_{rr}=\begin{cases}-p_1 & (r=a\text{ 处})\\ -p_2 & (r=b\text{ 处})\end{cases}$$

从而求得

$$\begin{cases}A=\dfrac{1-2\nu}{E}\left(\dfrac{p_1a^3-p_2b^3}{b^3-a^3}\right)\\ B=\dfrac{1+\nu}{E}\left[\dfrac{(p_1-p_2)a^3b^3}{b^3-a^3}\right]\end{cases}$$

于是

$$\sigma_{rr}=\left(\frac{p_1a^3-p_2b^3}{b^3-a^3}\right)-2\left[\frac{(p_1-p_2)a^3b^3}{(b^3-a^3)r^3}\right]$$

1.3.3 应力函数张量和线弹性力学的通解

一、应力函数张量

“应力函数”的概念是 J. G. B. Airy(1862 年,1801～1892),J. C. Maxwell (1870 年),G. Morera(1892 年)等人首先引入弹性力学的,后来 Y. A. Krutkov(1949 年)将其发展成“应力函数张量”. V. A. Fok 称之为“Krutkov 张量”.

可以从四维时空推导“动力应力函数张量”,而将“Krutkov 张量”作为其特例.

众所周知,如果没有外力场,四维时空中的运动微分方程可以归结为“能量-动量张量”(或“物质张量”)的四维散度为零(具体推导从略,或可参阅“附录 B”):

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=0 \tag{1.3.70}$$

由于,旋度的散度恒为零(Bianchi 恒等式),有

$$T_{\mu\nu}=e_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma G_{\alpha\beta\nu} \tag{1.3.71}$$

式中 $e_{\mu\alpha\beta\gamma}$ 为四维 Levi-Civita 符号. 由四维 Levi-Civita 符号的性质和 $T_{\mu\nu}$ 的对称性或反对称性,运用张量的“缩阶”性质,又有(推导从略)

$$T_{\mu\nu}=\left(e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}-\frac{2}{7}e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\right)\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\alpha\rho\beta\alpha} \tag{1.3.72}$$

因此,$T_{\mu\nu}$ 若是对称的(或反对称的),则有

$$T_{\mu\nu}=\begin{cases}e_{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\nu\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}(\text{当 }T_{\mu\nu}\text{ 是对称张量时})\\ e_{\mu\nu\beta\gamma}e_{\alpha\rho\sigma\lambda}\partial_\gamma\partial_\lambda\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}(\text{当 }T_{\mu\nu}\text{ 是反对称张量时})\end{cases} \tag{1.3.73}$$

式中,$\phi_{\alpha\beta\rho\sigma}$ 是“双指标对称张量”. 它被称之为“动力应力函数张量”. 整个推导的要点是利用了“能量-动量张量”的四维散度为零和它的对称性或反对称性.

作为这一推导的特例,对没有外力的线弹性“静力学”问题

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1.3.74}$$

同样可以写出

$$\sigma_{ij} = e_{ikm} e_{jpq} \partial_m \partial_q \phi_{kp} \tag{1.3.75}$$

式中，e_{ikm} 为三维 Levi-Civita 符号，ϕ_{kp} 为“Krutkov 张量”. 证明是简单的. 用与以上相同的方法，由(1.3.74)式，有

$$\sigma_{ij} = e_{ikm} \partial_m G_{kj} \tag{1.3.76}$$

因为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

故

$$e_{ikm} \partial_m G_{kj} - e_{jkm} \partial_m G_{ki} = 0 \tag{1.3.77}$$

或

$$e_{lmk} \partial_m (\delta_{il} G_{kj} - \delta_{jl} G_{ki}) = 0 \tag{1.3.78}$$

在上式等号两边作用 e_{ljk}，利用 $e_{ljk} e_{lmk} = 2\delta_{jm}$，有

$$\partial_j (\delta_{il} G_{kj} - \delta_{jl} G_{ki}) = 0 \tag{1.3.79}$$

将指标 i 与 k 进行“缩阶”，得

$$\partial_j (G_{lj} - \delta_{lj} G_{kk}) = 0 \tag{1.3.80}$$

此式表示张量$(G_{lj} - \delta_{lj} G_{kk})$的散度为零. 于是，又有

$$G_{lj} - \delta_{lj} G_{kk} = e_{jpq} \partial_q \phi_{pl} \tag{1.3.81}$$

其“迹”为

$$G_{kk} = -\frac{1}{2} e_{kpq} \partial_q \phi_{pk} \tag{1.3.82}$$

将(1.3.82)式代入(1.3.81)式，再代入(1.3.76)式，有

$$\sigma_{ij} = \left(e_{ikm} e_{jpq} - \frac{1}{2} e_{ijm} e_{kpq} \right) \partial_m \partial_q \phi_{kp} \tag{1.3.83}$$

再利用 σ_{ij} 的对称性，先将指标 k 与 p 互换，其次将指标 m 与 q 互换，第三将指标 i 与 j 互换，最后得到

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = e_{ikm} e_{jpq} \partial_m \partial_q \phi_{kp} \\ \phi_{kp} = \phi_{pk} \end{cases} \tag{1.3.84}$$

“Krutkov 张量”中常用的有两个：一个名之曰“Maxwell 应力函数”，另一个名之曰“Morera 应力函数”.

“Maxwell 应力函数”ϕ_{il} 与应力 σ_{ik} 之间的关系，写成矩阵形式就是

$$(\sigma_{ik})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\phi_3}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3^2} & -\dfrac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1\partial x_2} & -\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3\partial x_1}\\ -\dfrac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x_3^2}+\dfrac{\partial^2\phi_3}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x_2\partial x_3}\\ -\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x_3\partial x_1} & -\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x_2^2}\end{pmatrix} \tag{1.3.85}$$

“Morera 应力函数”ψ_l与应力σ_{ik}之间的关系，写成矩阵形式就是

$$(\sigma_{ik})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2\partial x_3} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x_3\partial x_1} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1\partial x_2}\end{pmatrix} \tag{1.3.86}$$

可以很容易辨认出“Maxwell 应力函数张量”和“Morera 应力函数张量”正是“Krutkov 张量”中的某些分量. 实际上，“Maxwell 应力函数”(ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3)正是“Krutkov应力函数张量”中的$(\phi_{11},\phi_{22},\phi_{33})$；而“Morera 应力函数”$(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$正是“Krutkov 应力函数张量”中的$(-2\phi_{23},-2\phi_{31},-2\phi_{12})$. 在二维问题中，引入“Airy 应力函数”是方便的. “Airy 应力函数”ϕ实际上是“Maxwell 应力函数”的特例：

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\lambda\partial x_\lambda}\delta_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta,\lambda=1,2) \tag{1.3.87}$$

设若将(1.3.87)式代入“静力学问题”的(1.3.59)式并使用张量“缩并”运算，则可得到关于 Airy 应力函数ϕ的“双调和”方程：

$$\nabla^2\nabla^2\phi=\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\lambda\partial x_\lambda}=0 \tag{1.3.88}$$

实际上，线弹性静力学问题就是解各类“双调和”方程.

二、线弹性静力学的通解

1. Stokes-Helmholtz 分解

Stokes-Helmholtz 分解(G. G. Stokes，1819～1903；H. L. F. von Helmholtz，1821～1894)指的是，一个矢量可以分解为一个标量的梯度与另一个矢量的旋度之和，即

$$u_i=A\partial_i\phi+e_{ijk}\partial_jG_k \tag{1.3.89}$$

式中ϕ为标量势，G_k为矢量势，A为比例常数. 由于标量势和矢量势共有 4 个分量，而u_i只有 3 个分量，所以可以设有 1 个“规范条件”

$$\partial_k G_k = 0$$

于是

$$G_k = e_{kmn}\partial_m \varphi_n$$

从而，应用张量运算规则 $e_{ijk}e_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ 后有

$$u_i = A\partial_i \phi + \partial_i(\partial_k \varphi_k) - \partial_k \partial_k \varphi_i \tag{1.3.90}$$

2. 线弹性静力学的 Boussinesq-Galerkin 通解(J. V. Boussinesq;B. G. Galerkin)

线弹性静力学体积力为零时的 Lame 方程是(参阅(1.3.52)式)

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \\ \theta = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{cases} \tag{1.3.91}$$

将(1.3.90)式代入(1.3.91)式，并令

$$A = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{1.3.92}$$

则有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\left(\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \phi}{\partial x_l}\right) = 0 \tag{1.3.93}$$

设

$$\phi = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \tag{1.3.94}$$

就有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 \nabla^2 \varphi_i = 0 \tag{1.3.95}$$

于是，线弹性静力学的 Boussinesq(1885)-Galerkin(1930)通解为

$$\begin{cases} u_i = -B\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}\right) + \dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_k} \\ B = 1 - A = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} = \dfrac{1}{2(1-\nu)} \end{cases} \tag{1.3.96}$$

其中，ϕ_i 满足“双调和方程”(1.3.95)式. 这表明，线弹性静力学的通解是用 3 个“双调和函数”来表示的.

3. 线弹性静力学的 Neuber-Babokovich 通解

在以上讨论中，令

$$\psi_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 \varphi_i \tag{1.3.97}$$

则由(1.3.95)式和(1.3.94)式，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_l \partial x_l} = \nabla^2 \psi_i = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_l} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_l \partial x_l}\right) = \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \end{cases} \tag{1.3.98}$$

由(1.3.98)式的第二式,可解出

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2} x_k \psi_k \tag{1.3.99}$$

式中 ϕ_0 为"调和函数",即

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_l \partial x_l} = \nabla^2 \phi_0 = 0 \tag{1.3.100}$$

于是,线弹性静力学的 Neuber(1934)-Babokovich(1932)通解为

$$\begin{cases} u_i = -B \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi_0 + \dfrac{1}{2} x_k \psi_k\right) + \psi_i \\ B = \dfrac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \dfrac{1}{2(1-\nu)} \end{cases} \tag{1.3.101}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 \phi_0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2 \psi_i = 0 \end{cases} \tag{1.3.102}$$

这表明了线弹性静力学的通解是用 4 个"调和函数"来表示的.

4. 讨论

线弹性静力学的通解除了"Boussinesq-Galerkin 通解"和"Neuber-Babokovich 通解"外,还有"Betti 通解","Kelvin 通解"等其他形式的通解. 后两个形式的"通解"也表明,线弹性静力学的通解同样是用 4 个"调和函数"来表示的. 另有一种形式的"通解",证明了线弹性静力学的通解甚至可以用 3 个"调和函数"来表示(实际上用 3 个"调和函数"来表示就已足够). 其中,"Boussinesq-Galerkin 通解"是最基本的. 其他几种"通解"需要求解类似于(1.3.98)式这样的方程得到.

有人会有疑问,线弹性静力学的通解是否可以由求解 $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$ 得到? 这里有必要提请注意:一般来说,线弹性静力学的边界条件的数目少于定解方程 $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$ 所必需的边界条件的数目,因而不能直接求解方程 $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$. 要求解线弹性静力学,必须用"Boussinesq-Galerkin 通解"和"Neuber-Babokovich 通解"这样的"通解"形式.

至于体积力不为零的线弹性静力学问题,也很容易解决. 因为线弹性力学问题的基本微分方程是线性方程,其非齐次方程的通解等于齐次方程的通解加上非齐次方程的特解;只要再找到一个非齐次方程的特解就可以了.

这些讨论，对以下线弹性动力学的通解也适用，只是解的形式不再是“调和函数”而换成“波函数”而已.

【例 1.13】 已知：体积力是保守力，即

$$\rho f_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

式中 V 为势能.

求证：线弹性静力学问题的应力张量可用 Airy 应力函数 ϕ 表示为

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\gamma \partial x_\gamma} + V\right)\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta,\lambda = 1,2)$$

并导出相应的相容方程.

证：将已知的 $\sigma_{\alpha\beta}$ 代入线弹性静力学问题的基本微分方程

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho f_\alpha = 0$$

立即可以得到验证. 对(1.3.59)式进行“缩阶”，有

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\right) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_k}\right)$$

将已知的 $\sigma_{\alpha\beta}$ 进行“缩阶”后分“平面应变问题”和“平面应力问题”两种情况代入上式，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\beta \partial x_\beta} = \nabla^2\nabla^2\phi = \begin{cases} -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2 V & \text{(对平面应变问题)} \\ -(1-\nu)\nabla^2 V & \text{(对平面应力问题)} \end{cases}$$

【例 1.14】 已知：内外半径分别为 a 和 b 的圆筒，其内外壁分别受有压强 p_1 和 p_2，视此问题为平面应变问题.

求：它的应力分布.

解：以圆筒的对称轴为 x_3 轴. 平面应变问题用极坐标 (r,φ) 表示较为方便. 由于问题是对称的，故与极角 φ 无关. 引入“Airy 应力函数”ϕ，它所满足的“双调和方程”是

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

其通解为

$$\phi = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D$$

其中 (A,B,C,D) 为待定常数. 于是

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \dfrac{A}{r^2} + B(2\ln r + 1) + 2C \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}r^2} = -\dfrac{A}{r^2} + B(2\ln r + 3) + 2C \\ \sigma_{r\varphi} = 0 \end{cases}$$

而定解条件是

$$\sigma_{rr}=\begin{cases}-p_1 & (r=a\text{ 处})\\ -p_2 & (r=b\text{ 处})\end{cases}$$

$\sigma_{r\varphi}$ 总为零. 由定解条件和轴对称性可得

$$\begin{cases}A=\dfrac{(p_2-p_1)a^2b^2}{b^2-a^2}\\ B=0\\ C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1a^2-p_2b^2}{b^2-a^2}\right)\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\dfrac{(p_2-p_1)a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}+\dfrac{p_1a^2-p_2b^2}{b^2-a^2}\\ \sigma_{\varphi\varphi}=-\dfrac{(p_2-p_1)a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}+\dfrac{p_1a^2-p_2b^2}{b^2-a^2}\end{cases}$$

因此,可以看出

$$\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}=2\frac{p_1a^2-p_2b^2}{b^2-a^2}=\text{const.}$$

讨论:若在平面应力问题中,则

$$\sigma_{33}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi})=\text{const.}$$

三、线弹性动力学的通解

1. Stokes-Helmholtz 分解

在"含时"问题中,以上 Stokes-Helmholtz 分解不再适用. 此时必须将取值范围从三维扩展到四维. 设(希腊字母取 1,2,3,4;拉丁字母取 1,2,3)

$$\begin{cases}u_\mu=A\partial_\mu\phi+e_{\mu\alpha\nu}\partial_\alpha G_\nu\\ G_\nu=e_{\nu\beta\gamma}\partial_\beta\varphi_\gamma\end{cases}\tag{1.3.103}$$

从而,应用张量运算规则 $e_{\mu\alpha\nu}e_{\nu\beta\gamma}=\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\gamma}-\delta_{\mu\gamma}\delta_{\alpha\beta}$ 后有

$$u_i=A\partial_i\phi+\partial_i(\partial_k\varphi_k)-\left(\partial_k\partial_k-\frac{1}{c^2}\partial_t\partial_t\right)\varphi_i\tag{1.3.104}$$

2. 线弹性动力学的 Boussinesq-Galerkin 型通解

线弹性动力学体积力为零时的 Lame 方程是(参阅(1.3.52)式)

$$\begin{cases}(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\dfrac{\partial^2u_i}{\partial x_k\partial x_k}=\rho\dfrac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\\ \theta=\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\end{cases}\tag{1.3.105}$$

由(1.3.104)式,设

$$u_i=A\partial_i\phi+B[\partial_i(\partial_k\varphi_k)-\partial_k\partial_k\varphi_i]+\partial_t\partial_t\varphi_i\tag{1.3.106}$$

将(1.3.106)式代入(1.3.105)式,并令

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \\ A = -\dfrac{\mu}{\rho} = -c_s^2 \\ B = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho} = c_p^2 \end{cases} \tag{1.3.107}$$

则有

$$\left(c_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_i = 0 \tag{1.3.108}$$

这表明了函数 φ_i 满足"双重波动方程";但值得注意的是,每一重波动方程中的波速不同;c_p 是纵波波速,c_s 是横波波速.

于是,线弹性动力学的 Boussinesq-Galerkin 型通解为

$$\begin{cases} u_i = (c_p^2 - c_s^2)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}\right) - \left(c_p^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_i \\ \left(c_p^2 \nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(c_s^2 \nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_i = 0 \\ c_p^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ c_s^2 = \dfrac{\mu}{\rho} \end{cases} \tag{1.3.109}$$

这种通解又被称为"Sternberg-Eubanks-Gurtin 通解"(E. Sternberg, R. A. Eubanks and M. E. Gurtin). 它是线弹性动力学中最基本的通解.

3. 线弹性动力学的 Neuber-Babokovich 型通解

在以上讨论中,设

$$\psi_i = \left(c_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_i \tag{1.3.110}$$

则由(1.3.108)式和(1.3.107)式有

$$\begin{cases} \left(c_s^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_i = 0 \\ \left(c_p^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \end{cases} \tag{1.3.111}$$

由(1.3.111)式的第二式,可以解出

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2c_p c_s} x_k \psi_k \left(\frac{c_s}{c_p} x_j, t\right) \tag{1.3.112}$$

式中,ϕ_0 满足"纵波"方程

$$\left(c_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_0 = \left(c_p^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_0 = 0 \tag{1.3.113}$$

于是,线弹性动力学的 Neuber-Babokovich 型通解为

$$\begin{cases} u_i = (c_p^2 - c_s^2)\partial_i\phi - \psi_i(x_j,t) \\ \phi = \phi_0 + \dfrac{1}{2c_pc_s}x_k\psi_k\left(\dfrac{c_s}{c_p}x_j,t\right) \\ \left(c_p^2\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_0 = 0 \\ \left(c_s^2\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_i = 0 \end{cases} \tag{1.3.114}$$

式中

$$\begin{cases} c_p^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ c_s^2 = \dfrac{\mu}{\rho} \end{cases} \tag{1.3.115}$$

综上所述,线弹性动力学的基本解是"双重波动方程"或"波动方程"的解,需要注意的只是其中的波速. 有体积力的情况下,只需加一项非齐次方程的特解.

至此,"线弹性力学"问题已全部解决. 从物理学角度来看,这一页已经彻底翻过去了. 剩下的,只是"几何非线性"的弹性力学即求解完整的非线性方程(1.3.52)式了.

1.3.4 关于弹性薄板形变问题和应变能密度的讨论

由于弹性薄板形变问题与弹性薄壳形变问题在原理上和处理方法上没有本质的区别,因而可以只讨论弹性薄板的形变问题;它们之间的惟一区别在于弹性薄板的原始形状是平直的而弹性薄壳的原始形状是弯曲的.

弹性薄板形变问题是一个古老的研究课题. L. Euler, J. Bernoulli(1667～1748), E. F. F. Chladni(1756～1827), Sophie Germain(1776～1831), J. L. Lagrange, S. D. Poisson, C. L. Navier, G. R. Kirchhoff(1824～1887)等人都研究过这一课题;其中只有 Lagrange, Navier 和 Kirchhoff 的结果才是正确的.

严格说来,用 Lame 方程(1.3.52)式就能处理弹性薄板的形变问题而用不着另辟蹊径;但当时,一是还没有非线性的 Lame 方程(1.3.52)式,二是人们希望有一个更简单的描述弹性薄板形变问题的基本微分方程;所以许多力学家选择了使用所谓"Kirchhoff-Love 假设"(A. E. H. Love, 1863～1940)来建立仅适用于弹性薄板形变问题的另一种理论体系.

在"Kirchhoff-Love 假设"基础之上建立起来的弹性薄板形变理论中,引入了某种程度的近似,以及其他前后矛盾的附加条件,因而与弹性力学的基本方程例如 Lame 方程(1.3.52)式有异. 这就引起了争议. 为此,有人将弹性力学划分为"数学"

弹性力学和“实用”弹性力学两大类，而将板壳理论归入“实用”弹性力学之中.

所谓“Kirchhoff(1850)-Love(1928)假设”系指：①薄板的厚度比薄板的其他尺度小得多；②薄板中面的挠度比薄板的厚度小. 其中第②个假设在“大挠度”问题中有所修正.

由这两条假设，可以得到如下推论：①薄板的厚度可略而不计；②薄板内部平行于中面的平面应力跨厚度的积分总值，可略而不计；③薄板中垂直于中面的法线，形变后仍为中面的法线；④在考虑平衡方程时，薄板仍设为平板.

由此可以看出，形式上的简单是以逻辑上的复杂为代价的：“鱼和熊掌不可得兼!”

由于“Kirchhoff-Love 假设”增加了弹性力学的逻辑复杂性，因而它不符合Einstein的“逻辑简单性”原则. 然而，若将弹性薄板形变问题作为弹性力学中的特殊问题来看待，则还是有其理论轨迹的. 其中，最有意义的，就是讨论弹性薄板形变问题的“应变能密度”.

1. 弹性薄板小挠度弯曲的应变能密度

由(1.3.46)式可知，弹性体的应变能密度是

$$A(e)=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$$

其中 Cauchy 方程是线性的

$$e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\qquad (i,k=1,2,3)$$

对弹性薄板形变问题而言，合适的“约束条件”是

$$\begin{cases}e_{23}=e_{31}=0\\ \sigma_{33}=0\end{cases}\tag{1.3.116}$$

而且在 $e_{23}=e_{31}=0$ 中，实际上有

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}=-\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\quad(\alpha=1,2)\tag{1.3.117}$$

甚至还隐藏着

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\tag{1.3.118}$$

式中，$w=u_3$.

将“约束条件”(1.3.116)式，(1.3.117)式和(1.3.118)式代入 Cauchy 方程，再代入应变能密度的表达式，可得弹性薄板小挠度弯曲的应变能密度为

$$A(w)=\frac{D}{2}\left[\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\right]\tag{1.3.119}$$

式中，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为“抗弯刚度”，h 为薄板的厚度. 由此，最终导出了“Sophie

Germain 方程"(详细推导从略)

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta}\right)w = D\nabla^2\nabla^2 w = q \qquad (1.3.120)$$

式中,q 为垂直于板面的横向分布力.

2. 弹性薄板大挠度弯曲的 von Karman 应变能密度

弹性薄板大挠度弯曲问题远比小挠度弯曲来得复杂,因为 Cauchy 方程是"非线性"的:

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad (i,k,l = 1,2,3)$$

von Karman 在导出弹性薄板大挠度弯曲问题的基本微分方程的前半部分时,并没有完整地利用"约束条件"(1.3.116)式,而仅仅用到了 $\sigma_{33}=0$,这表现在"广义 Hooke 定律"中

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\left(e_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}e_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}\right) \qquad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2) \qquad (1.3.121)$$

与此同时,他引入了"除挠度 w 外其余二阶小量均可略去"的附加假设,而将 Cauchy 方程改写成

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) \qquad (\alpha,\beta = 1,2) \qquad (1.3.122)$$

式中,v_α 为中面位移矢量的分量. 可以由原始的 Cauchy 方程证实,在此假设中 e_{23} 和 e_{31} 并不恒等于零,因而与正式的弹性力学有矛盾.

根据 von Karman 的假设,可以算出其"应变能密度"是

$$A(v,w) = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)^2+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)+\frac{1}{4}\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)^2\right] \qquad (1.3.123)$$

在推导的最后过程中,von Karman 代入了"弹性薄板小挠度弯曲问题"的"Sophie Germain 方程"(当然还引入了"Airy 应力函数"). 这就是构成所谓"von Karman方程"的全部(详细推导从略)

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta}\right)\phi = \dfrac{E}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\beta \partial x_\beta}\right)\right] \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\beta x_\beta}\right)w = \dfrac{h}{D}\left[\left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\beta \partial x_\beta}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)+\dfrac{q}{h}\right]\end{cases} \qquad (1.3.124)$$

式中,ϕ 为"Airy 应力函数".

从推导过程中可以看出,最成问题的就是"代入了弹性薄板小挠度弯曲问题的

Sophie Germain 方程”这一步. 从理论角度分析，推导“von Karman 方程”的过程同推导“Sophie Germain 方程”的过程之间有两处矛盾或不谐调：①首先是二者的 Cauchy 方程不完全相同；推导“von Karman 方程”时在等号两边用了两次 Cauchy 方程而且是两种不同的 Cauchy 方程；这无论如何说不过去. ②其次是二者的“约束条件”不完全相同. 根据 von Karman 的假设，对照一般的 Cauchy 方程，除非 $\partial_3 u_1 = -\partial_1 w$ 和 $\partial_3 u_2 = -\partial_2 w$，否则不会有 $e_{23} = e_{31} = 0$. 他在推导方程(1.3.124)中第二式等号的右边时，再也没有用过 $\partial_3 u_\alpha = -\partial_\alpha w$ 这两个式子. 因此，“von Karman 方程”的推导过程在理论上是可疑的；至少可以说，这种推导并不完美. 上世纪 40 年代开始，已有人如 Reissner，Mindlin 等着手修改“von Karman 方程”. 这说明问题确实存在. 当然，在一般的工程技术活动中，“von Karman 方程”的精度还不至于引起灾难性的后果.

3. 对弹性薄板大挠度弯曲的 von Karman 方案的修改意见

对弹性薄板大挠度弯曲的 von Karman 方案的修改，本书有两种意见：第一种意见认为从 (1.3.116)，(1.3.117) 和 (1.3.118) 3 式这 6 个“约束条件”出发，可将 $(\partial_\alpha u_\beta)$，$(\partial_3 u_\beta)$，$(\partial_\alpha w)$ 这 8 个变量化为用两个独立变量表示. 于是，Cauchy 方程成为

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) \tag{1.3.125}$$

而

$$e_{33} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.3.126}$$

这样，(1.3.117) 和 (1.3.118) 两式自动满足. 然后，由 (1.3.116) 式中解出 $(\partial_\alpha u_\beta)$. 从而使(1.3.125)式成为

$$e_{\alpha\beta} = -\frac{1-2\nu}{2\nu}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) + \frac{1-\nu}{2\nu}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\gamma}\frac{\partial w}{\partial x_\gamma}\right)\delta_{\alpha\beta} \tag{1.3.127}$$

从而，“应变能密度”是

$$A(w) = \frac{E(1-2\nu+4\nu^2-2\nu^3)}{8\nu^2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) \tag{1.3.128}$$

最后一步，可以“代入弹性薄板小挠度弯曲问题的 Sophie Germain方程”也可以不代而直接应用所得之方程. 但如果“代入弹性薄板小挠度弯曲问题的 Sophie Germain 方程”的话，则这种方案仍未解决“两边两次使用不同的 Cauchy 方程”的问题.

第一种意见的实质是在最一般的 Cauchy 方程(1.3.7)式前提下，加进推导 Sophie Germain方程所用的约束条件. 第二种意见的出发点与之相反，是在 von Karman 的 Cauchy 方程(1.3.122)式前提下，加进推导 Sophie Germain 方程的推理

方法.

由类似于(1.3.117)式的等式(只是将 u_α 换成 v_α),可得

$$v_\alpha = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \tag{1.3.129}$$

因而

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{1.3.130}$$

于是由 Cauchy 方程(1.3.122)式,有

$$e_{\alpha\beta} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) \tag{1.3.131}$$

因为 $\sigma_{33}=0$,所以可容易地写出中面的"应变能密度". 最后,对 x_3 从 $\left(-\frac{h}{2}\right)$ 到 $\left(\frac{h}{2}\right)$ 积分,注意到最后两项的积分为零,便可得到整个弹性薄板的"应变能密度"为

$$A(w) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{h^3(1-\nu)}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) + \frac{h^3\nu}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{h}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)\right] \tag{1.3.132}$$

可以看出,这第二种意见解决了所有的问题. 惟一的遗憾是,在这种处理方案中,"Cauchy 方程"是 von Karman 的而不是最一般的. 从这一意义上来说,这种处理方案仍以"Kirchhoff-Love 假设"为前提.

有了"应变能密度",则基本微分方程立即可以得到. 具体运算过程,将在本书第 2 章"Lagrange 力学"2.15 节中介绍.

以上两种修改意见正确与否,以及它们同"von Karman 方程"之间的比较,可在具体问题中得到验证. 仅从理论角度来判断,这两种修改的处理方案的正确性和精确性是毋庸置疑的.

如果要抛开"Kirchhoff-Love 假设",惟一的方法就是回到"Lame 方程"(1.3.52)式. 实际上,"von Karman 方程"并不比"Lame 方程"(1.3.52)式简单和方便.

至于用"约束条件"修改 Cauchy 方程是否合理的问题,也是用不着担心的. 因为:①所涉及的"约束条件"仅仅是"Lagrange 位移"以及这些位移对坐标的导数,而与系统的动量无关;②这种对 Cauchy 方程的修改,涉及的是"应变能密度",而"应变能密度"属于系统的"势能";③已经有推导"Sophie Germain 方程"和推导"von Karman方程"两个实例证明这种修改 Cauchy 方程的方法是合理的.

习　题

1. 已知：质点以恒定速率沿一曲线运动.

求证：该质点的速度永远与加速度垂直.

2. 已知：质点在平面内运动的切向加速度和法向加速度都是常数.

求证：该质点的运动轨道是对数螺线.

3. 已知：质点的运动轨道方程是 $r=a\exp(\theta)$；质点运动时其径向加速度恒等于零.

求证：质点的运动速率以及加速度的大小都与 r 成正比.

4. 已知：质点的运动轨道方程在直角坐标系下是 $x_1^2+x_2^2=\alpha^2$，式中 α 为常数.

求：(1)此运动轨道方程的自然坐标系表示；(2)质点运动的切向加速度和法向加速度.

答：(1)$s=a\theta$；(2)$\begin{cases} a_\tau=a\ddot{\theta} \\ a_n=a\dot{\theta}^2 \end{cases}$

5. 已知：质点的运动轨道方程在自然坐标系下是 $s=a\tan\theta$，而且当 $\theta=0$ 时质点通过点 $(0,a)$.

求：此运动轨道的直角坐标系表示.

答：$x_2=a\cosh\left(\frac{x_1}{a}\right)$

6. 已知：质点的运动轨道方程是心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$.

求证：(1)质点的径向加速度为常数；(2)质点的角速度和总加速度的大小都与 $\sqrt{r}$ 成反比.

7. 已知：质点沿极坐标方程为 $r(1+\cos\theta)=2a$ 的曲线运动，运动时满足 $\dot{\theta}=\frac{1}{r^2}$ 的条件.

求：(1)质点的运动速度和加速度的径向分量和横向分量(用 θ 表示)；(2)此运动轨道的直角坐标系表示.

答：(1)$\boldsymbol{v}=\frac{1}{2a}[\boldsymbol{e}_r\sin\theta+\boldsymbol{e}_\theta(1+\cos\theta)]$，$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{8a^3}(1+\cos\theta)^2\boldsymbol{e}_r$；(2)$x_2^2=4a(a-x_1)$

8. 已知：质点沿抛物线 $x_2^2=2bx_1$ 运动，其切向加速度恒为法向加速度的 α 倍；质点经过正焦弦的一端 A 点 $\left(\frac{b}{2},b\right)$ 时的速度为 u.

求：质点到达正焦弦的另一端 B 点 $\left(\frac{b}{2},-b\right)$ 时的速度.

答：$v=u\exp\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$

9. 已知：在铅直平面内有一半径为 a 的半圆形(上半圆)管道；管道内有一长度为 πa、质量为 $\rho\pi a$ 的链条；若链条由于微扰而从管道口向外滑出；任意时刻链条末端与水平线之间的夹角为 θ.

求：链条的速度.

答：$v=\sqrt{\frac{ga}{\pi}(\theta^2-2\cos\theta+2)}$

10. 已知：质量为 M，半径为 a 的半球其底面置于光滑的水平面上；质量为 m 的质点沿此半球

面滑下；初始时质点和球心的连线与铅直向上直线之间的夹角为 α，系统静止.

求：质点绕球心运动的角速度.

答：$\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{2g(\cos\alpha-\cos\theta)}{a\left(1-\dfrac{m}{M+m}\cos^2\theta\right)}}$

11. 已知：质量为 m 的直杆可自由地在固定铅直套管中运动；杆的下端搁在质量为 M，仰角为 α 的光滑直角三角形劈的斜面上，而直角三角形劈置于光滑的水平面上.

求：杆和劈的加速度 a(杆)和 a(劈).

答：$\begin{cases}a(\text{杆})=-\dfrac{mg}{m+M\cot^2\alpha}\\ a(\text{劈})=\dfrac{mg\cot\alpha}{m+M\cot^2\alpha}\end{cases}$

12. 已知：质点被约束在铅直平面内的光滑摆线上

$$\begin{cases}x_1=a(\theta-\sin\theta)\\ x_2=-a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

求：质点的运动微分方程.

答：$2a\ddot{\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}+a\dot{\theta}^2\cos\dfrac{\theta}{2}-g\cos\dfrac{\theta}{2}=0$

13. 已知：长度为 l 的轻质细绳其 A 端在竖直向上的 x_3 轴某一点；x_1-x_2 平面是一块平板，原点 O 处是一小孔；细绳穿过小孔连接质点 B；OB 是一个平面摆，摆角为 θ；以等速 v 向上拉动细绳的 A 端.

求：质点的运动微分方程.

答：$(l-vt)\ddot{\theta}-2v\dot{\theta}-g\sin\theta=0$

14. 已知：质量为 m 的质点用一根弹性系数为 k，固有长度为 a 的细绳系于固定点 A；平衡时细绳长度为 $a+b$；质点由 A 点从静止状态自由下落；不计阻力.

求：(1)质点运动微分方程；

(2)质点自 A 点落至最低点 D 所需时间以及 AD 之间的距离.

答：(1)$\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}k(x-a)^2-mgx=0$ ·

(2)$t=\sqrt{\dfrac{2a}{g}}+\sqrt{\dfrac{b}{g}}\left(\pi-\arctan\sqrt{\dfrac{2a}{b}}\right)$，$\overline{AD}=a+b+\sqrt{b^2+2ab}$

15. 已知：(旋转单摆)质量为 m 的质点 A 以长度为 l 的轻杆 OA 连接在水平轴 Ox_1 上；水平轴 Ox_1 又以等角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 Ox_3 轴旋转.

求：系统的运动微分方程.

答：$\ddot{\theta}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=\omega^2\sin\theta\cos\theta$

16. 已知：半径为 b 的圆盘以匀角速度 ω 绕着通过其中心并与盘面垂直的轴转动；盘面上有一沿着半径 r 为的圆周开出的槽，槽内有一质点以等速率 v' 相对于圆盘运动.

求：质点的绝对速度的大小和绝对加速度的大小.

答：$v=\omega r\pm v'$，$a=\omega^2 r+\dfrac{(v')^2}{r}\pm 2\omega v'$

17. 已知：水平直管以匀角速度 ω 绕着通过管上一点的铅直轴转动，管内有一小球与转轴之间的距离是 $r=b\cosh(\omega t)$.

求：小球的绝对速度的大小和绝对加速度的大小.

答：$v=\omega\sqrt{2r^2-b^2}=\omega b\sqrt{\cosh^2(\omega t)+\sinh^2(\omega t)}$，$a=2\omega^2\sqrt{r^2-b^2}=2\omega^2 b\sinh(\omega t)$

18. 已知：半径为 b 的球以匀角速度 ω 绕其竖直的直径旋转；球面上纬度角为 φ 处有一质点以等速率 v' 沿球的经线运动.

求：该质点的绝对加速度.

答：$\boldsymbol{a}=\left(-\omega^2 b\sin^2\theta-\dfrac{v'^2}{b}\right)\boldsymbol{e}_r+(-\omega^2 b\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta+2\omega v'\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi$

19. 已知：半径为 b 的圆周在自身平面内以等角速度 ω 绕圆周上固定点 O 沿逆时针方向转动，一质点 M 在此圆周上以相对速度 $2b\omega$ 沿顺时针方向运动；初始时质点 M 和 O 点是同一直径的两端.

求：质点的绝对速度、绝对加速度和轨迹.

答：$v=2b\omega\sin\omega t$，$a=2b\omega^2\cos\omega t$，质点轨迹为初始时由 M 点到 O 点的直线.

20. 已知：螺旋桨飞机在空中以速率 v_0 沿半径为 a 的水平圆形轨道转弯；螺旋桨长度为 l，自转角速度为 ω；螺旋桨与铅直轴之间的夹角为 θ.

求：螺旋桨端点处的速度和加速度.

答：$v=\sqrt{v_0^2\left(1+\dfrac{l\sin\theta}{a}\right)^2+l^2\omega^2}$，

$$a=\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{a}\right)^2+\left(\frac{v_0^2 l}{a^2}-\frac{2v_0 l\omega}{a}+l\omega^2\right)^2+\frac{2v_0^2}{a}\left(\frac{v_0^2 l}{a^2}-\frac{2v_0 l\omega}{a}+l\omega^2\right)\sin\theta}$$

21. 已知：半径为 a 的光滑圆圈处在铅直平面内；圆圈上套有一质量为 m、$t=0$ 时相对速度为 v_0 的小珠；圆圈以等加速度 a_0 沿竖直方向运动；圆圈中心和小珠的连线与竖直向上直线之间的夹角为 θ，初始时 $\theta=\theta_0$.

求：(1)小珠的相对速度；(2)圆圈对小珠的约束反力.

答：(1)$v'=\sqrt{v_0^2+2a(g-a_0)(\cos\theta-\cos\theta_0)}$；(2)$N=\dfrac{mg}{a}\left[a\left(1-\dfrac{a_0}{g}\right)(3\cos\theta-2\cos\theta_0)+\dfrac{v_0^2}{g}\right]$

22. 求证：只有当真实力的势能函数在用非惯性系中的坐标 $x_k'(k=1,2,3)$ 表示时不显含时间 t，即 $V(x_k)=V'(x_k')$，且该非惯性系的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和质点加速度中的 $\boldsymbol{a}_0$ 都是常矢量时，才有机械能守恒.

23. 已知：在平方反比引力场 $F=-\dfrac{k}{r^2}$ 中，质点的总能量是负值.

求证：该质点的动能的长时间平均值等于其总能量的负值，即 $\overline{T}=-E$(用 virial 定理).

求：该质点的势能的长时间平均值 $\overline{V}$.

答：$\overline{V}=2\overline{E}$

24. 已知：质点系中第 i 个质点所受到的合力是保守力 $\boldsymbol{F}_i'$ 和正比于其速度的摩擦阻力 $\boldsymbol{f}_i$；系统在束缚运动中达到稳定状态而不因摩擦力停顿下来.

求证：此时的 virial 定理是 $\overline{T}=-\dfrac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{F}_i'\cdot\boldsymbol{r}_i}$

25. 求证：若质点系的动能定理在某一惯性系中成立，则在任何惯性系中均成立.

26. 求证：自由刚体上任意两点的速度矢量在此两点连线上的投影相等.

27. 求证：转动惯量的平行轴定理和垂直轴定理（垂直轴定理指的是，对平面刚体而言，有 $I_{33}=I_{11}+I_{22}$）.

28. 已知：作平面运动的刚体质量为 m，它对瞬时转动轴的转动惯量为 I，角速度为 ω；刚体的质心至瞬时转动轴的距离为 r；外力对瞬时转动轴的力矩为 M.

求证：$I\dot{\omega}+mr\dot{r}\omega=M$ 或 $I\dot{\omega}+\frac{1}{2}\dot{I}\omega=M$

29. 已知：半径为 a 的圆盘以等速 v_0 沿水平线作无滑滚动；一长度为 l 的细杆 AB 以铰链联结于圆盘边缘上的 B 点，其 A 端则沿上述水平线滑动；圆盘的转角为 φ.

求：A 点的线速度.

答：$v_A=2v_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[1+\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{l^2-4a^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}}\right]$

30. 已知：有一质量为 m 半径为 a 高为 l 的正圆柱体.

求：此圆柱体对其底面直径的转动惯量.

答：$I=\frac{m}{12}(3a^2+4l^2)$

31. 已知：均匀圆锥体的底半径为 a，高为 h.

求：均匀圆锥体绕母线的转动惯量.

答：$I=\frac{3ma^2(a^2+6h^2)}{20(a^2+h^2)}$

32. 已知：均匀圆锥体的底半径为 a，高为 h.

求：均匀圆锥体底面圆周上一点的惯量椭球方程.

答：$(3a^2+2h^2)x_1^2+(23a^2+2h^2)x_2^2+26a^2x_3^2+10ahx_3x_1=k^2$

33. 已知：均匀圆锥体的底半径为 a，高为 h.

求：此均匀圆锥体对其质心的惯量椭球为一圆球的条件.

答：$h=2a$

34. 已知：质量为 m 的匀质长方体的三棱分别为 $(2a,2a,3a)$.

求：此长方体对某一顶点的惯量椭球方程.

答：$13x_1^2+13x_2^2+8x_3^2-9x_2x_3-9x_3x_1-6x_1x_2=k^2$

35. 已知：质量为 m、3 个半轴分别为 (a,b,c) 的均匀椭球绕其对称轴 AB 以角速度 $\dot{\varphi}$ 转动，而 AB 轴又以角速度 $\dot{\theta}$ 绕通过椭球中心且与 AB 垂直的 CD 轴转动.

求：椭球的转动动能和角动量.

答：$\begin{cases}\tilde{T}=\frac{m}{10}[(b^2+c^2)\dot{\theta}\sin^2\varphi+(c^2+a^2)\dot{\theta}\cos^2\varphi+(a^2+b^2)\dot{\varphi}^2] \\ \boldsymbol{J}=-\frac{m}{5}[\boldsymbol{i}_1(b^2+c^2)\dot{\theta}\sin\varphi+\boldsymbol{i}_2(c^2+a^2)\dot{\theta}\cos\varphi+\boldsymbol{i}_3(a^2+b^2)\dot{\varphi}]\end{cases}$

36. 已知：质量为 m 半径为 a 的匀质圆盘其盘心 C 与高为 h 的竖直杆 AO 的顶点 O 以长度为 l 的刚性轻质杆 CO 相铰连，A 为水平面上的一点，OC 垂直于盘面；圆盘绕 AO 轴以角速度 ω 转动，

圆盘在水平面上作纯滚动;圆盘与水平面之间的接触点到 A 点的距离为 b(图 1.5).

求:水平面对接触点的约束反力.

答:$N=\dfrac{ah+bl}{ab(a^2+l^2)^2}\left[\dfrac{1}{2}ma^2l(ah+bl)-\dfrac{1}{4}ma(a^2+l^2)(hl-ab)\right]\omega^2$

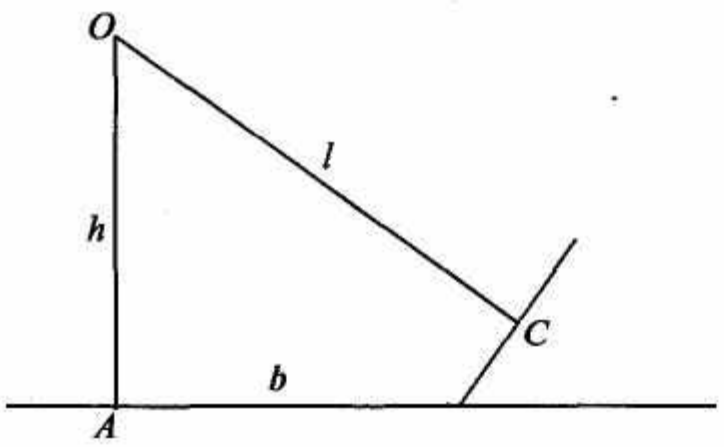


图 1.5

37. 求证:在刚体对通过某一点所有各轴的转动惯量中,有最大值和最小值的转动惯量是刚体对该点的主转动惯量.

38. 求证:刚体对 3 个坐标轴的转动惯量之和,等于此刚体对坐标原点的 3 个主转动惯量之和.

39. 求证:尽管对共原点的不同直角坐标系而言有不同的惯量矩阵,但主转动惯量和惯量主轴必然相同.

40. 已知:$I_{11}=2a^2$,$I_{22}=2b^2$,$I_{33}=2c^2$,

$I_{23}=-bc$,$I_{31}=-ca$,$I_{12}=-ab$.

求:主转动惯量.

答:$\begin{cases}I_{1,2}=(a^2+b^2+c^2)\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}\\ I_3=0\end{cases}$

41. 已知:$I_{11}=a^2$,$I_{22}=b^2$,$I_{33}=c^2$,$I_{23}=bc$,$I_{31}=ca$,$I_{12}=ab$.

求:主转动惯量.

答:$\begin{cases}I_{1,2}=0\\ I_3=a^2+b^2+c^2\end{cases}$(系统是一个点)

42. 求证:通过刚体质心的主轴是刚体对该轴上任意一点的主轴.

43. 已知:质量均为 1 的 4 个质点分别位于(1,0,0,),(1,0,1),(−1,0,0),(−1,0,−1) 4 点处.

求:主转动惯量和惯量主轴的方向.

答:$\begin{cases}I_1=3-\sqrt{5}\\ I_2=3+\sqrt{5}\\ I_3=6\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha_1^{(1)}:\alpha_2^{(1)}:\alpha_3^{(1)}=1:0:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \alpha_1^{(2)}:\alpha_2^{(2)}:\alpha_3^{(2)}=1:0:-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\\ \alpha_1^{(3)}:\alpha_2^{(3)}:\alpha_3^{(3)}=0:(-1):0\end{cases}$

44. 已知:边长为 a 的匀质正方形薄板的质量为 m.

求:此正方形薄板对其一个顶点的主转动惯量和惯量主轴.

答：$\begin{cases} I_1=\dfrac{1}{12}ma^2 \\ I_2=\dfrac{7}{12}ma^2 \\ I_3=\dfrac{2}{3}ma^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha_1^{(1)}:\alpha_2^{(1)}:\alpha_3^{(1)}=1:1:0 \\ \alpha_1^{(2)}:\alpha_2^{(2)}:\alpha_3^{(2)}=1:(-1):0 \\ \alpha_1^{(3)}:\alpha_2^{(3)}:\alpha_3^{(3)}=0:0:1 \end{cases}$ （当正方形薄板的两邻边为坐标轴时）

45. 已知：定点运动刚体不受外力矩作用.

求证：$\begin{cases} \dfrac{I_1-I_2}{I_3}\omega_2^2+\dfrac{I_1-I_3}{I_2}\omega_3^2=\text{const.} \\ \dfrac{I_2-I_3}{I_1}\omega_3^2+\dfrac{I_2-I_1}{I_3}\omega_1^2=\text{const.} \\ \dfrac{I_3-I_1}{I_2}\omega_1^2+\dfrac{I_3-I_2}{I_1}\omega_2^2=\text{const.} \end{cases}$

46. 已知：平面刚体不受外力矩作用.

求证：此平面刚体作自由运动时其角速度在平面上的投影的大小不变.

47. 已知：定点运动刚体不受外力矩作用；刚体对定点的 3 个主转动惯量互不相等.

求证：除非初始时角速度沿着某惯量主轴方向，否则该刚体的角速度大小将在运动过程中发生变化.

48. 已知：弹性体内一点的位移为

$$\begin{cases} u_1=a_1x_1 \\ u_2=a_2x_2 \\ u_3=a_3x_3 \end{cases}$$

求：(1)应变张量，并写成矩阵形式；(2)体应变.

答：$(e_{ik})=\begin{pmatrix} a_1+\dfrac{1}{2}a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2+\dfrac{1}{2}a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3+\dfrac{1}{2}a_3^2 \end{pmatrix}$.

$$\theta=(a_1+a_2+a_3)+\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$

49. 已知：应变分量为

$$\begin{cases} e_{11}=a(x_1^2+x_2^2) \\ e_{22}=ax_2^2 \\ e_{12}=ax_1x_2 \\ e_{33}=e_{23}=e_{31}=0 \end{cases}$$

求证：这种应变状态是可能的.

50. 已知：应变分量为

$$\begin{cases} e_{11} = a(x_1^2 + x_2^2)x_3 \\ e_{22} = ax_2^2 x_3 \\ e_{12} = ax_1 x_2 \\ e_{33} = e_{23} = e_{31} = 0 \end{cases}$$

求证:这种应变状态是不可能的.

51. 已知:弹性体的应变分量在加热后成为

$$\begin{cases} e_{11} = e_{22} = e_{33} = \alpha T(x_i) \\ e_{23} = e_{31} = e_{12} = 0 \end{cases}$$

式中 $T(x_i)$为温度,它是坐标 x_i 的函数.

求证:只有当 $T(x_i)$为坐标 x_i 的线性函数时,这种应变状态才是可能的.

52. 已知:线弹性静力学中应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\dfrac{a}{r}\sin\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{b}{r}\sin\theta \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{b}{r}\cos\theta \end{cases}$$

求证:此应力状态是可能的. 并求其适合的边界条件.

53. 已知:线弹性静力学中一点的应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = \sigma \end{cases}$$

过这一点的面元法向单位矢量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3)$$

求:过这一点的面元上的全应力和剪应力.

答:$\sigma_{(n)}^2 = 4\sigma^2$, $\tau^2 = 0$

54. 已知:正八面体的面元法向单位矢量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3)$$

在正八面体中一点的应力张量为

$$(\sigma_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 1 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 1 \end{pmatrix}\sigma$$

设正八面体各面上全应力和总面力皆为零.

求:(c_1, c_2, c_3)的值.

答:$c_1 = c_2 = c_3 = -\dfrac{1}{2}$

55. 已知:一点的应力张量为

$$(\sigma_{ji}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & la & 0 \\ 0 & 0 & ma \end{pmatrix} \qquad (a > 0)$$

求:全应力大于零的条件.

答:$n_3^2>-\dfrac{1+(l-1)n_2^2}{m-1}$

56. 已知:在线弹性静力学中,若应力分量为

$$\begin{cases}\sigma_{11}=a_1x_1+a_2x_2\\ \sigma_{22}=a_3x_1+a_4x_2\\ \sigma_{12}=-a_4x_1-a_1x_2-bx_1\\ \sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0\end{cases}$$

而且此应力分布满足弹性静力学的平衡微分方程.

求:体积力必须符合的条件.

答:$\begin{cases}\rho f_1=0\\ \rho f_2=b\end{cases}$

57. 已知:线弹性力学在无体积力时的 Lame 方程为

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$$

设

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{(1)}+\boldsymbol{u}_{(2)}$$

其中

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{u}_{(1)}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_{(2)}=0\end{cases}$$

求:(1)无旋波的波动方程及其波速;(2)无散波的波动方程及其波速.

答:(1)$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(1)}}{\partial l^2}=c_p^2\nabla^2\boldsymbol{u}_{(1)}$,$c_p=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

(2)$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}_{(2)}}{\partial l^2}=c_s^2\nabla^2\boldsymbol{u}_{(2)}$,$c_s=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$

58. 已知:Airy 应力函数 ϕ 与应力张量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 之间的关系是:

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\lambda\partial x_\lambda}\delta_{\alpha\beta}\qquad(\alpha,\beta,\lambda=1,2)$$

求:它的极坐标形式.

答:

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\\ \sigma_{\theta\theta}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\\ \sigma_{r\theta}=-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\end{cases}$$

59. 求证:柱坐标(r,θ,x_3)下的 Neuber-Babokovich 型通解为

$$\begin{cases}u_r=\psi_r-\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\phi_0+\dfrac{1}{2}r\psi_r+\dfrac{1}{2}x_3\psi_3\right)\\ u_\theta=\psi_\theta-\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial}{r\partial\theta}\left(\phi_0+\dfrac{1}{2}r\psi_r+\dfrac{1}{2}x_3\psi_3\right)\\ u_3=\psi_3-\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\phi_0+\dfrac{1}{2}r\psi_r+\dfrac{1}{2}x_3\psi_3\right)\end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} \nabla^2\phi_\theta = 0 \\ \nabla^2\psi_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r^2}\psi_r = 0 \\ \nabla^2\psi_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r^2}\psi_\theta = 0 \\ \nabla^2\psi_3 = 0 \end{cases}$$

60. 求证：球坐标(r,θ,φ)下的 Neuber-Babokovich 型通解为

$$\begin{cases} u_r = \psi_r - \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial}{\partial r}(\phi_0 + r\psi_r) \\ u_\theta = \psi_\theta - \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial}{r\partial\theta}(\phi_0 + r\psi_r) \\ u_\varphi = \psi_\varphi - \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\phi_0 + r\psi_r) \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} \nabla^2\phi_0 = 0 \\ \nabla^2\psi_r - \dfrac{2}{r^2}\psi_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin\theta}\psi_\theta - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \\ \nabla^2\psi_\theta - \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\psi_\theta - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\theta} = 0 \\ \nabla^2\psi_\varphi - \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\psi_\varphi + \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\varphi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

2 Lagrange 力学

1788 年，Joseph Louis LaGrange（1736～1813）发表了他的名著《分析力学》（《Mécanique Analytique》，Paris），从此开创了经典力学的新时代．《分析力学》包括静力学 8 章，动力学 12 章；全书首次采用广义坐标、广义速度等概念，用分析方法从变分原理出发建立了受约束系统的平衡方程和运动方程，包括微振动问题．1815 年的第三版增加了 8 篇附录，其中有一篇是讨论刚体的定点转动问题的．整本书中没有一张图；Lagrange 以他的书中没有一张图感到自豪．

时至今日，曾经以讨论“受约束系统”为出发点的分析力学，现在自身也成了物理学中的“约束条件”．分析力学（包括 Lagrange 的和 Hamilton 的）、热力学、相对论（包括狭义的和广义的），是物理学其他学科所必须共同遵守的“约束条件”；它们是物理中的物理，是物理中的哲学．这三门学科，是物理学中的“铁三角”．

但这并不是说，在分析力学中已无所作为、没有什么东西可研究的了；恰恰相反，例如“非完整系统”的问题，就已经困扰了分析力学界几十年．许多经典力学或分析力学教科书中，在谈到“非完整系统”的问题时的说法都是有毛病的，有些甚至是错误的．所谓“非完整约束”，指的是“速度限制”；（众所周知，交通工具在行驶时必须有“路线限制”和“速度限制”，它不可能“穿墙而过”，也不可能“超速行驶”或“超慢行驶”；其中“速度限制”就是“非完整约束”）这无论是在分析力学的“非完整约束问题”和“耗散力学”问题中还是在流体动力学问题中抑或塑性力学流动理论问题中，都同样具有十分重要的意义．大部分学者为避免说错话，在书中只讲“线性非完整约束”。但这种“线性非完整约束”，没有任何普遍性可言。

Lagrange 力学的主要内容，除了以 Lagrange 方程为主线的那部分理论之外，还包括它的前缀“d'Alembert 原理”．“d'Alembert 原理”是 Jean Le Rond d'Alembert（1717～1783）在他的成名作品《论动力学》（《Traité de Dynamique》，Paris，1743）中首先提出来的，但当初的说法与现在的稍有不同．全书两部分共 7 章．在“d'Alembert原理”这一部分内容中，值得注意的是对“理想约束”的描述．许多在“非完整系统”问题上所犯的错，都是由于对“理想约束”的理解有欠缺所致．

本书第二章“Lagrange 力学”，还包括“变分法”和“Euler 方程”（Leonhard Euler，1707～1783）．在有些经典力学或分析力学教科书中，将“变分法”和“Euler 方程”归入Hamilton力学；在另外一些经典力学或分析力学教科书中，则将“变分法”和“Euler

方程”另辟一章；当然也有与本书作同样处理的，因为 Hamilton 原理中的被积函数是“Lagrangian”，而“Euler 方程”与“Lagrange 方程”在形式上完全相同．

被积函数是“Lagrangian”的“Hamilton 作用量”也可以被用来做量子力学．P. A. M. Dirac(1902～1984)于 1933 年就在一种不太出名的欧洲物理学杂志上发表文章指出了这一点．Dirac 指出，量子力学解答来自使“Hamilton 作用量”取极小值的那些路径，而惟一可能的路径就是导出 Lagrange 方程的经典路径．10 多年以后，欧洲物理学家 Herbert Jehle 在一次啤酒聚会上将 Dirac 的观点介绍给了 R. P. Feynman(1918～1988). Feynman 立即领悟到 Dirac 所说的“相似于”就是指“等于”，并马上作了简单的证明．这一回，轮到“Jehle 的眼睛鼓出来了，赶紧掏出笔记本把黑板上的式子抄了下来”. Feynman 由此发明了量子力学的“路径积分形式”. 量子力学的“路径积分形式”实际上也是对原来的正统量子力学“Copenhagen 诠释”的一种挑战．

2.1 虚功原理和 d’Alembert 原理

一、约束及其分类

1. 约束和位形

所谓“约束”就是指限制质点系或连续体系运动的时间条件、几何学(空间)条件、运动学条件和动力学条件等．总而言之，质点系或连续体系在“约束条件”下不再是自由的．

在分析力学中，质点系或连续体系的“位形”是由“位形空间坐标系”中的坐标决定的，因而“约束条件”就由“位形空间坐标系”中的方程来确定．

所谓“位形”，指的是各质点或连续体系中各小“单元”(“Lagrange 描述”的或“Euler 描述”的)的“位置”或“位移”的集合．每一个质点或每一个小“单元”的坐标一般来说有三个 DesCartes 分量；在质点系或连续体系问题中，总质点数或总的小“单元”数一般说来不止一个，因而问题中的 DesCartes 分量一般来说就不止三个；如果总质点数或总的小“单元”数是 n，则问题中的 DesCartes 分量的数目就应该是 $3n$ 个；在分析力学中，这 $3n$ 个 DesCartes 分量作为自变量将在同一个特征函数和同一个方程中出现；于是，出现在同一个力学量和同一个方程中的这 3n 个自变量就不能再被称为“位置”或“位移”，而只能换用另外的名称；通常，它们就被称为是“位形”或“d’Alembert位形”. 此外，还有一种“位形”的定义则更是剔除了“约束条件”的数

目．当总质点数或总的小“单元”数是 n，“约束条件”的数目是 s 时，“位形”的总数规定是$(3n-s)$；如此定义的“位形”被称为“Lagrange 位形”．“Lagrange 位形”实际上就是后面将要着重介绍的“广义坐标”．

由“d'Alembert 位形”或“Lagrange 位形”组成的坐标系被称为“位形空间坐标系”；它们所在的空间就是“位形空间”．“位形空间”是数学空间，而不是 3+1 维的物理空间．在一些量子力学著作中，有时将“位形空间”改称为“组态空间”．

2. 与约束有关的几个基本概念

(1)虚(virtual)位移和实(real)位移：“虚位移”系指任意假设的位移．在若干条虚位移中，只有一条是真实的位移．真实的位移被称为“实位移”．如果“实位移”用 $\mathrm{d}x_k$ 表示，则“虚位移”就表示成 δx_k．

(2)约束反力和主动力：“约束反力”系指约束对各质点或连续体系中各小“单元”产生的反作用力．“约束反力”通常出现在与各质点或连续体系中各小“单元”接触的“接触点”、“约束线”或“约束面”处(受力方当然是各质点或连续体系中各小“单元”)．“约束反力”是被动产生的，因此它不会使受力方发生加速度，当然也不会使受力方做功．约束反力之外的力被称为“主动力”．“主动力”包括重力，Newton 引力，Lorentz 力等等．

(3)虚功和实功：各质点或连续体系中各小“单元”在“虚位移”上所做的功被称为“虚功”．由于对“虚位移”来说，时间 t 只是一个参量而且在某一瞬时它是固定的，对某一时刻 t 来说可以有许多“虚位移”，因而 $\delta t=0$，同时“虚功”亦为零．相反，对“实位移”来说，时间间隔是确确实实存在的，因而 $\mathrm{d}t\neq 0$，同时“实功”亦不为零．

3. 约束的分类

(1)理想约束和非理想约束：“理想约束”系指在任何虚位移上，约束反力的元功之和恒为零的那种约束．相反，在任何虚位移上，约束反力的元功之和不为零的那种约束，被称为“非理想约束”．

(2)稳定约束和不稳定约束：“稳定约束”系指约束方程中“不显含”时间 t 的那种约束．相反，约束方程中含有时间 t 的那种约束，被称为“不稳定约束”．

(3)可解约束(单面约束)和不可解约束(双面约束)：可解约束系指只限制质点或连续体系中小“单元”在某一方向的位移，而在其他方向可以脱离的那种约束．“可解约束”可以用不等式 $f(x_k,t)\leqslant C$ 或 $f(x_k,t)\geqslant C$ 来表示．相反，质点或连续体系中小“单元”始终不能脱离的那种约束，则被称为“不可解约束”．“不可解约束”是用等式 $f(x_k,t)=C$ 来表示的．式中，$f(x_k,t)=C$ 是约束方程．

(4)完整约束(几何约束)、微商约束(运动约束)和非完整约束：“完整约束”系指约束方程中不含速度的那种约束．“微商约束”系指约束方程中既含有位形又含有速度的那种约束；特殊的“微商约束”可经过积分后变为“完整约束”．不能经过积分变为“完整约束”或干脆不能积分的那种约束，被称为“非完整约束”．另外，不能用等式

表示的“可解约束”是另一类“非完整约束”.

(5)被动约束和主动约束:“被动约束”系指有赖于接触或摩擦,被动地实现的那种约束.在通常的受约束力学问题中,大多是“被动约束”.但是,也有一类约束是有赖于辅助能源主动地实现的(例如伺服约束);这种约束被称为“主动约束”.“主动约束”较少见.

4. 一些说明

(1)“理想约束”系指在任何虚位移上,约束反力的元功之和恒为零的那种约束.这个定义是不容篡改的.在同一个问题中不能有两种或两种以上关于理想约束的定义.

(2)在不稳定约束中,存在虚功和实功的问题.但对稳定约束而言,二者没有本质上的区别;因为在稳定约束问题中,约束不随时间而变,“实位移”与“虚位移”之间不再有区别,而约束反力在“虚位移”上是不做功的.

(3)“非完整约束”问题是经典力学或者分析力学中困扰人们几十年的重要课题.许多对原有理论体系的怀疑以及各种错误观点的出现,都与此有关.因此,对于“非完整约束”问题要格外注意.

(4)如果一个力学系统所受到的约束全部是“完整约束”,则此系统就是“完整系”.如果一个力学系统所受到的约束哪怕有一个是“非完整的”,则此系统就是“非完整系”.对“非完整系”的处理方法不同于对“完整系”的处理方法.

(5)在本书的稍后部分(参阅 2.5 节)将讨论运动微分方程的“首次积分”.“首次积分”也可以视为“非完整约束”.然而,这种“非完整约束”不同于原先的“非完整约束”.原先的“非完整约束”是事前加之于力学系统之上的,而“首次积分”这种“非完整约束”则是力学系统运动的结果.原先的“非完整约束”与力学系统的动能无关,但这种“非完整约束”却使力学系统中一部分动能变成了“势能”.具体情况参阅 3.3 节中的“Routhian 和 Routh 方程”.

(6)如果约束方程中出现加速度或者位形对时间的更高阶导数,则此约束被称为“高阶非完整约束”.“高阶非完整约束”问题是与“广义经典力学”相联系的;有人证明过,在通常的以 Newton 定律为基础的经典力学中一般不会有“高阶非完整约束”问题.

二、等时变分和全变分

1. 变分 δ 与微分 d 之间的可对易性

图 2.1 描述了一个质点或一个小“单元”由位形 x_k 运动到位形 A 的两条路径:第一条路径由位形 x_k 出发,首先沿“实位移”$\mathrm{d}x_k$ 运动,经由位形 $x_k+\mathrm{d}x_k$,再沿“虚位移”$\delta(x_k+\mathrm{d}x_k)$运动,最终到达位形 A;第二条路径亦由位形 x_k 出发,首先沿“虚位移”δx_k 运动,经由位形 $x_k+\delta x_k$(当然要凑得很精准),再沿“实位移”$\mathrm{d}(x_k+\delta x_k)$运

动，最终也到达位形 A. 按第一条路径计算，位形 A 的准确描述是 $x_k+\mathrm{d}x_k+\delta(x_k+\mathrm{d}x_k)$；但是按第二条路径计算，位形 A 的准确描述是 $x_k+\delta x_k+\mathrm{d}(x_k+\delta x_k)$. 由于位形 A 是同一个位形，所以这两种计算的结果必须相等. 于是，有

$$x_k+\mathrm{d}x_k+\delta(x_k+\mathrm{d}x_k)=x_k+\delta x_k+\mathrm{d}(x_k+\delta x_k)$$

整理后，得到

$$\delta(\mathrm{d}x_k)=\mathrm{d}(\delta x_k) \qquad (2.1.1)$$

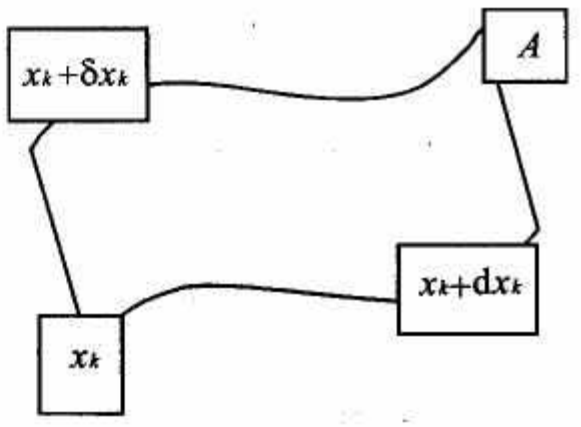


图 2.1

实际上不管被作用的力学量或函数是否是 x_k，这样的等式都成立. 因此，第一个结论是：变分 δ 与微分 d 可对易.

“变分 δ 与微分 d 可对易”这句话包含两层意思：(1)δ 运算与 d 运算可交换；(2)δ 运算规则与 d 运算规则完全相同，只是记号有所区别而已.

物理学家普遍承认“变分 δ 与微分 d 可对易”.

2. 变分 δ 与导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 之间的有条件可对易性

仍旧将 x_k 考虑为被作用的力学量或函数的代表. 首先认定 $\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}$ 是一个“分式”，然后对这个“分式”求变分，再利用“变分 δ 与微分 d 之间的可对易性”，就有

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\delta(\mathrm{d}x_k)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_k\delta(\mathrm{d}t)}{(\mathrm{d}t)^2}=\frac{\mathrm{d}(\delta x_k)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_k\mathrm{d}(\delta t)}{(\mathrm{d}t)^2} \qquad (2.1.2)$$

可以一眼看出，在一般情况下，变分 δ 与导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 之间是不可对易的. 如果要求变分 δ 与导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 之间可对易，则(2.1.2)式最后一个等号右边第二项必须等于零；也就是必须有 $\delta t=0$. 而 $\delta t=0$ 正是经典力学或分析力学所经常用到的“等时变分”条件.

于是，可以定义两种变分：

(1)全变分：指变分 Δ 与导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 之间是不可对易的那种变分(将变分符号改写为 Δ 以示区别)，此时有

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta x_k)-\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) \qquad (\Delta t\neq 0) \qquad (2.1.3)$$

(2)等时变分：变分 δ 与导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 之间是有条件可对易的那种变分，此时有

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_k) \qquad (\delta t=0) \qquad (2.1.4)$$

在经典力学或分析力学中，除了“等时变分”条件外，还有一种被称为“等能变分”的条件. 在“等能变分”中，有 $\delta E=0$；而不是 $\delta t=0$. 在本书 2.14“Maupertuis 原理”

一节中将出现“等能变分”.

三、虚功原理

虚功原理的表述:具有理想约束的质点系,其达到平衡的充分必要条件是,在任何虚位移上,主动力的元功之和为零.

1. 虚功原理的必要性

设质点数为 n;约束反力用 N_k 表示,主动力用 F_k 表示,$(k=1,\cdots,3n)$则质点系达到平衡时,在每一个质点的每一个方向上,都有

$$F_k+N_k=0 \tag{2.1.5}$$

因而,主动力和约束反力的合力 F_k+N_k 在虚位移上的元功之和恒为零,即

$$(F_k+N_k)\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.6}$$

或

$$F_k\delta x_k+N_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.7}$$

因为对理想约束而言,约束反力的元功之和恒为零,故有

$$N_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.8}$$

所以,得到

$$F_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.9}$$

$\delta W=F_k\delta x_k$ 被称为“虚功”. 于是,虚功原理可表示成

$$\delta W=0 \tag{2.1.10}$$

虚功原理中的功是“虚功”,质点系并无真实运动. 它的物理本质,实际上就是系统的总“势能”取极小. 关于这一点,将在后文(参阅 2.2 节)中看得更清楚.

2. 虚功原理的充分性

用反证法(假设 $F_k\delta x_k=0$,但质点系不平衡,看是否有矛盾). 若质点系不平衡,则在每一个质点的每一个方向上,都有

$$F_k+N_k\neq 0 \tag{2.1.11}$$

因而,主动力和约束反力的合力 F_k+N_k 在虚位移上的元功之和(设合力 F_k+N_k 与虚位移 δx_k 之间的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$)大于零,即

$$(F_k+N_k)\delta x_k>0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.12}$$

或

$$F_k\delta x_k+N_k\delta x_k>0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.13}$$

因为对理想约束而言,约束反力的元功之和恒为零,故有

$$N_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n)$$

所以,得到

$$F_k\delta x_k > 0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.14}$$

此式与假设矛盾，所以质点系必然处于平衡状态．

若合力 F_k+N_k 与虚位移 δx_k 之间的夹角大于$\frac{\pi}{2}$，将得到

$$F_k\delta x_k < 0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.15}$$

其结论也一样．

下文证明 d'Alembert 原理时，将不再证明其充分性．仿此即可．

3. 由虚功原理得到的推论

由虚功原理得到的推论是：在理想约束条件下，$3n$ 维的主动力“矢量”必须与 $3n$ 维的虚位移“矢量”永远垂直(由 $F_k\delta x_k=0$ 得到)．

4. 虚功原理的优缺点

虚功原理的优点是方程(2.1.9)式中没有约束反力．这对不会画“受力图”的人来说是个福音．

虚功原理的缺点有两个：①正因为方程(2.1.9)式中没有约束反力，所以在必须求解约束反力的问题中，将无法下手；换言之，不能求约束反力．②方程(2.1.9)式只能处理静力学问题，而无法求解动力学问题；换言之，方程(2.1.9)式中缺少惯性力．这第二个缺点，将在“d'Alembert 原理”中得到克服．至于第一个缺点，则要应用“Lagrange未定乘子法”(参阅 2.3 节)才能克服．

四、d'Alembert 原理

1. d'Alembert 原理的表述

对具有理想约束的质点系来说，在任何虚位移上，主动力和惯性力的合力为零是系统达到平衡的充分必要条件．

2. d'Alembert 原理的必要性证明

设惯性力为$-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}$，其中 p_k 为动量；则在每一个质点的每一个方向上，根据 Newton 第二定律，都有

$$F_k+N_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.1.16}$$

上述(2.1.16)式被称为“动平衡条件”．因而，主动力、约束反力和惯性力的合力 $F_k+N_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}$ 在虚位移上的元功之和恒为零，即

$$\left(F_k+N_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.17}$$

或

$$\left(F_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_k+N_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.18}$$

因为对理想约束而言，约束反力的元功之和恒为零，故有

$$N_k\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.19}$$

所以，

$$\left(F_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.20}$$

此式被称为“d'Alembert-LaGrange 方程”.

d'Alembert 原理中“主动力和惯性力的合力”所做的功也是虚功，质点系同样并无真实运动．它的物理本质，实际上就是系统的“动能与势能之差”取极小．关于这一点，在后面 2.4“Lagrange 方程”一节中将会看得很清楚．

3. 由 d'Alembert 原理得到的推论

由 d'Alembert 原理得到的推论是：在理想约束条件下，$3n$ 维的“主动力和惯性力的合力”“矢量”必须与 $3n$ 维的虚位移“矢量”永远垂直(由$\left(F_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_k=0$ 得到).

“主动力和惯性力的合力”在有些教科书中被称为“耗损力”.

五、关于“Gauss 最小拘束原理”和“Jourdain 原理”

首先引入“带下标质量”的约定．为了能够应用“Einstein 求和约定”，而且为了书写方便，本书约定质量用 m_k 表示($k=1,\cdots,3n$)．当 $k=1,2,3$ 时，就理解为第一个质点的质量；当 $k=4,5,6$ 时，就理解为第二个质点的质量；诸如此类，依此类推．于是每个质点的动量可以被写成

$$p_k=m_kv_k=m_k\dot{x}_k \qquad (\text{不对 } k \text{ 求和}) \tag{2.1.21}$$

但在系统总动能的表达式中

$$T=\frac{1}{2}m_k(v_k)^2=\frac{1}{2}m_k(\dot{x}_k)^2 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.22}$$

对傀儡指标 k 是要求和的(如果不求和就表示是一个质点的动能，而且要标明“不对 k 求和”字样)，因为它相当于在(2.1.20)式等号两边同时“点乘”了$\frac{1}{2}v_k=\frac{1}{2}\dot{x}_k$.

1.“Gauss 最小拘束原理”

K. F. Gauss(1777～1855)引入了一个被称之为“拘束”的力学量：

$$Z=\frac{1}{2m_k}\left(F_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)^2 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.23}$$

并假定式中的质量 m_k 是常量．“Gauss 最小拘束原理”说：力学系统的真实运动是使“拘束”Z 取极小值．换言之，就是

$$\delta Z = 0 \tag{2.1.24}$$

于是，将(2.1.23)式代入(2.1.24)式，就可得到

$$\delta Z = \frac{1}{m_k}\left(F_k - \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta\dot{p}_k = (F_k - m_k\ddot{x}_k)\delta\ddot{x}_k = 0 \qquad (k = 1,\cdots,3n) \tag{2.1.25}$$

还可以利用 $Z(\dot{p}_k+\delta\dot{p}_k)$或 $Z(\ddot{x}_k+\delta\ddot{x}_k)$的 Taylor 级数展开，证明满足(2.1.25)式的“拘束”Z 确实是极小值.

因此，根据“Gauss 最小拘束原理”，$3n$ 维的“主动力和惯性力的合力”即 $3n$ 维的“耗损力”是与 $3n$ 维的“虚加速度”永远垂直的.

问题是，“Gauss 最小拘束原理”是否有道理?

设质点在“主动力和惯性力的合力”作用下的位矢 $x_k(t+\mathrm{d}t)$的 Taylor 级数展开为

$$x_k(t+\mathrm{d}t) = x_k(t) + \dot{x}_k\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\ddot{x}_k(\mathrm{d}t)^2 + \cdots \tag{2.1.26}$$

另设此质点在主动力 F_k 的作用下自由运动，其位形 $x_k'(t+\mathrm{d}t)$的 Taylor 级数展开为

$$x_k'(t+\mathrm{d}t) = x_k(t) + v_k\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{F_k}{m_k}(\mathrm{d}t)^2 + \cdots \tag{2.1.27}$$

将(2.1.27)式与(2.1.26)式相减，有

$$x_k'(t+\mathrm{d}t) - x_k(t+\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_k}{m_k} - \ddot{x}_k\right)(\mathrm{d}t)^2 \tag{2.1.28}$$

上述(2.1.28)式表示由于约束的存在，使质点对其自由运动产生偏离；等号右边括号中的力学量与“Gauss 拘束”Z 没有本质上的区别. 因而，Gauss 引入“拘束”的概念是有其力学根据的.

2. “Jourdain 原理”

比起“Gauss 最小拘束原理”来，“Jourdain 原理”显得没有什么道理. F. Jourdain 自己定义的“理想约束”是

$$N_k\delta\dot{x}_k = 0 \qquad (k = 1,\cdots,3n) \tag{2.1.29}$$

于是，他得到

$$\left(F_k - \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta\dot{x}_k = 0 \qquad (k = 1,\cdots,3n) \tag{2.1.30}$$

在“Jourdain 原理”中，$3n$ 维的“主动力和惯性力的合力”即 $3n$ 维的“耗损力”是与 $3n$ 维的“虚速度”永远垂直的.

$3n$ 维的“主动力和惯性力的合力”即 $3n$ 维的“耗损力”，在 d'Alembert 原理中永远与 $3n$ 维的虚位移垂直，在“Gauss 最小拘束原理”中永远与 $3n$ 维的“虚加速度”垂直，到了“Jourdain 原理”中又永远与 $3n$ 维的“虚速度”垂直，在同一个问题中这怎么

可能?

"理想约束"就是"理想约束",怎么可以随心所欲定义?在同一个问题中不可能有两套标准.按照这种逻辑,各人为了自圆其说,就可以在不同的问题中定义各种各样的"理想约束";这样便没有了标准.即使在某一类问题中可能有道理,然而它跟现在所要讨论的问题也是毫不相干的.

根据 N. G. Chetaev 的说法,它们三者,对完整约束、对线性非完整约束是相容的,而对非线性非完整约束是不相容的;即使将虚位移的概念加以推广,也只能使 d'Alembert原理与 Gauss 最小拘束原理同时成立,而不能保证 Jourdain 原理成立.

3."万有 d'Alembert 原理"

"万有 d'Alembert 原理"是罗马尼亚学者 D. Mangeron 和 S. Deleanu 于 1962 年根据对

$$\begin{cases} \text{d'Alembert 原理}\left(F_k-\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_k=0 \\ \text{Jourdain 原理}\left(F_k-\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta \dot{x}_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \\ \text{Gauss 原理}\left(F_k-\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta \ddot{x}_k=0 \end{cases} \tag{2.1.31}$$

的综合考虑提出来的.他们的"理想约束条件"是

$$N_k\delta \overset{(r)}{x}_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.32}$$

式中 $\overset{(r)}{x}_k$,是 x_k 的 r 阶导数.由此,他们提出方程

$$\left(F_k-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}\right)\delta \overset{(r)}{x}_k=0 \qquad (k=1,\cdots,3n) \tag{2.1.33}$$

并命名为"万有 d'Alembert 方程".

根据上面 Chetaev 的说法,"万有 d'Alembert 方程"其实并不"万有",它至多适用于线性非完整约束,而对非线性非完整约束根本无用;起码它们在同一个问题中不可能同时成立.所以,对"万有 d'Alembert 原理"用不着认真对待.

【例 2.1】 已知:一水平的固定光滑钉子 O 与光滑的铅直墙面的垂直距离为 a;一长为 l 的匀质棒 AB 搁在钉子上并且其下端 A 卡在墙面上;匀质棒 AB 与墙面之间的夹角为 θ(图 2.2).

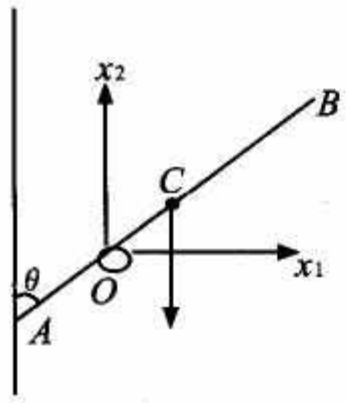


图 2.2

求:平衡时 θ 角的大小.

解:以固定光滑钉子 O 为原点,水平方向为 x_1 轴,竖直向上方向为 x_2 轴,建立坐标系.本题中所关心的点是匀质棒 AB 的质心 C 点和棒与墙的接触点 A 点;因为质心受有重力,A 点处受有墙对棒的垂直约束反力.

C 和 A 点的坐标分别是 $C\left(\frac{l}{2}\sin\theta-a,\frac{l}{2}\cos\theta-a\cot\theta\right)$，$A(-a,-a\cot\theta)$.

相应的虚位移是

$$\begin{cases}\delta x_2^C=-\frac{l}{2}\sin\theta+\frac{a}{\sin^2\theta}\\ \delta x_1^A=0\end{cases}$$

由虚功原理，有

$$\delta W=N\delta x_1^A-mg\delta x_2^C=0$$

即

$$-\frac{l}{2}\sin\theta+\frac{a}{\sin^2\theta}=0$$

于是，得到

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2a}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

【例 2.2】 已知：相同的两个匀质球 B 和 C 悬在结于定点 O 的两根轻绳上；此两球又支持一个等重的匀质球 A；两根轻绳之间的夹角为 2α，而 A、B 两球中心连线与 A、C 两球中心连线之间的夹角为 2β(图 2.3).

求：平衡时 α 角与 β 角之间的关系.

解：以定点 O 为原点建立坐标系，垂直向下方向为 x 轴. 主动力是重力，都向下；因此只需求 x 方向的虚位移.

设 A 球球心坐标为 x^A，C 球球心坐标为 x^C，而 B 球球心坐标亦为 x^C. 另设定点 O 至 C 球球心的距离为 l；球半径均为 a. 因为

$$\begin{cases}x^A=l\cos\alpha-2a\cos\beta\\ x^C=l\cos\alpha\end{cases}$$

所以，虚位移是

$$\begin{cases}\delta x^A=-l\sin\alpha\delta\alpha+2a\sin\beta\delta\beta\\ \delta x^C=-l\sin\alpha\delta\alpha\end{cases}$$

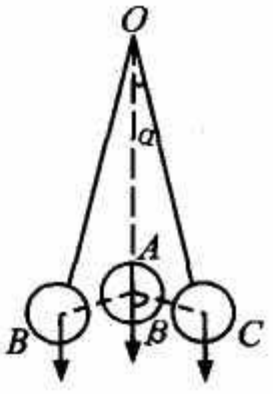


图 2.3

另外，在由定点 O、A 球球心和 C 球球心组成的三角形中，根据正弦定律有

$$\frac{l}{\sin\beta}=\frac{2a}{\sin\alpha}$$

即

$$2a\sin\beta=l\sin\alpha$$

将此式等号两边同时取变分，有

$$2a\cos\beta\delta\beta=l\cos\alpha\delta\alpha$$

由于两根轻绳上的张力与位移垂直而不做功，因而虚功原理是

$$\delta W=mg\delta x^A+2mg\delta x^C=0$$

即

$$mg(-3l\sin\alpha\delta\alpha+2a\sin\beta\delta\beta)=0$$

将 $2a\cos\beta\delta\beta = l\cos\alpha\delta\alpha$ 代入上式，得到

$$mgl(-3\sin\alpha + \tan\beta\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

于是

$$\tan\beta = 3\tan\alpha$$

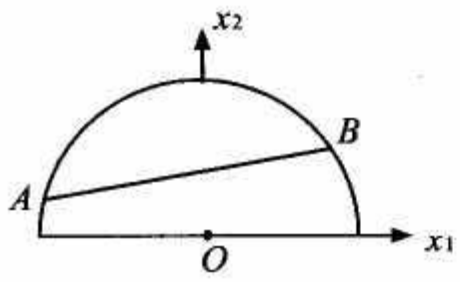


图 2.4

【例 2.3】 已知：质量分别为 M 和 m 的两个小环 A 和 B，以长为 $2l$ 的轻绳相连，并套在半径为 a 的竖直放置的半圆形钢索上；轻绳与水平线之间的夹角为 θ(图 2.4).

求：平衡时 θ 角的大小.

解：以半圆形钢索的圆心 O 为原点建立坐标系，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴. 圆心 O 至 AB 连线的垂直距离为 $\sqrt{a^2-l^2}$. 由此，根据简单的几何关系，可知 A、B 两点的坐标分别为

$$A(-l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta, -l\sin\theta + \sqrt{a^2-l^2}\cos\theta)$$

$$B(l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta, l\sin\theta + \sqrt{a^2-l^2}\cos\theta)$$

由于主动力是重力，其方向朝下，所以只需考虑轴 x_2 方向的虚位移. 因而

$$\begin{cases}\delta x_2^A = (-l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta)\delta\theta \\ \delta x_2^B = (l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta)\delta\theta\end{cases}$$

由虚功原理，有

$$\delta W = Mg\delta x_2^A + mg\delta x_2^B = 0$$

即

$$\left[Mg(-l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta) + mg(l\cos\theta - \sqrt{a^2-l^2}\sin\theta)\right]\delta\theta = 0$$

于是得到

$$\tan\theta = \frac{(M-m)l}{(M+m)\sqrt{a^2-l^2}}$$

【例 2.4】 已知：质量分别为 M 和 m 的两个质点 A 和 B，以线密度为 λ 的铁链相连，并置于半径为 a 的竖直放置的半圆柱面上；铁链在半圆柱面上的张角为 2α；平衡时垂直于弦 AB 的直线与水平直径之间的夹角为 θ(图 2.5).

求：平衡时 θ 角的大小.

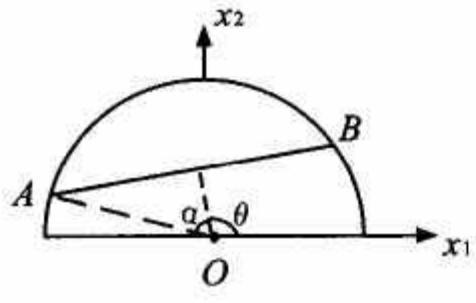


图 2.5

解：以半圆柱面的圆心 O 为原点建立坐标系，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴. 本题中所关心的点除了 A 点和 B 点外就是铁链的质心 C，因为主动力(重力)相当于作用在质心 C 上. 质心 C 的坐标应该在垂直于弦 AB 的直线的延长线上，但却不在弧 AB 上. 可算出，质心 C 与原点 O 的直线距离为 $\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$. 因此 A、B、C 3 点的坐标分别为

$$A[-a\cos(\pi-\alpha-\theta),a\sin(\pi-\alpha-\theta)]$$
$$B[a\cos(\theta-\alpha),a\sin(\theta-\alpha)]$$
$$C\left[-\frac{a\sin\alpha}{\alpha}\cos(\pi-\theta),\frac{a\sin\alpha}{\alpha}\sin(\pi-\theta)\right]$$

即

$$A[a\cos(\theta+\alpha),a\sin(\theta+\alpha)]$$
$$B[a\cos(\theta-\alpha),a\sin(\theta-\alpha)]$$
$$C[\frac{a}{\alpha}\sin\alpha\cos\theta,\frac{a}{\alpha}\sin\alpha\sin\theta]$$

本题所关心的虚位移是

$$\begin{cases}\delta x_2^A = a\cos(\theta+\alpha)\delta\theta\\ \delta x_2^B = a\cos(\theta-\alpha)\delta\theta\\ \delta x_2^C = \dfrac{a}{\alpha}\sin\alpha\cos\theta\delta\theta\end{cases}$$

由虚功原理,有

$$\delta W = 2a\alpha\lambda g\,\delta x_2^C + Mg\,\delta x_2^A + mg\,\delta x_2^B = 0$$

即

$$[2a\lambda\sin\alpha+(M+m)\cos\alpha]\cos\theta-(M-m)\sin\alpha\sin\theta=0$$

解得

$$\tan\theta=\frac{(M+m)\cos\alpha+2a\lambda\sin\alpha}{(M-m)\sin\alpha}$$
$$=\frac{(M+m)\cot\alpha+2a\lambda}{M-m}$$

【例 2.5】 已知:离心调节器是由四根杆长均为 l 的细杆组成的菱形、两个质量均为 m 的惯性小球和一个质量为 M 的质点构成的;菱形 $ABCD$ 的顶点 A 固定在铅直轴上;C 点是质量为 M 的质点且可沿铅直轴上下运动;B 点和 D 点是两个质量均为 m 的惯性小球;整个系统以匀角速度 ω 绕铅直轴转动;AB 杆与铅直轴之间的夹角为 θ(图 2.6).

求:动平衡时 θ 角的大小.

解:以 A 为原点建立坐标系,水平方向为 x_1 轴,竖直向上方向为 x_2 轴.本题中,主动力(重力),惯性离心力在 B、C、D 3 点上.它们的坐标分别是 $B(-l\sin\theta,-l\cos\theta)$,$C(0,-2l\cos\theta)$,$D(l\sin\theta,-l\cos\theta)$.

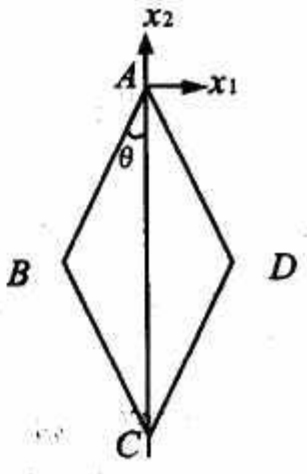


图 2.6

虚位移是

$$\begin{cases}\delta x_1^D = l\cos\theta\delta\theta\\ \delta x_2^D = l\sin\theta\delta\theta\\ \delta x_2^C = 2l\sin\theta\delta\theta\end{cases}$$

由 d'Alembert 原理,有

$$-2ml\omega^2\sin\theta\delta x_1^D+2mg\,\delta x_2^D+Mg\,\delta x_2^C=0$$

即

$$[(M+m)g-ml\omega^2\cos\theta]l\sin\theta\delta\theta=0$$

解得

$$\cos\theta=\frac{M+m}{ml\omega^2}g$$

2.2 广义坐标,广义速度,广义质量,广义动量和广义力

一、自由度

所谓“自由度”,就是指决定系统内诸质点或连续体内诸“小单元”位形的独立变量数. 前面已经提到,当总质点数或总的“小单元”数是 n,“约束条件” $f_\beta(x_i)=0$ 的数目是 s 时($i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s$),“位形”的总数被规定是($3n-s$);如此定义的“位形”被称为“Lagrange 位形”. “Lagrange 位形”的数目实际上就是“自由度”数.

二、广义坐标,广义速度和广义加速度

1. 广义坐标

所谓“广义坐标”,就是指决定质点系内诸质点或连续体中诸“小单元”位形的独立参数.

广义坐标的数目就等于质点系内诸质点或连续体中诸“小单元”的自由度数.

因此,Lagrange 位形就是广义坐标;Lagrange 的“位形空间”就是“广义坐标空间”.

广义坐标用 $q_k(k=1,\cdots,m)$ 来表示;式中,m 是“自由度数”,即

$$m=3n-s \tag{2.2.1}$$

于是,$3n$ 个 d'Alembert 位形 $x_i(i=1,\cdots,3n)$ 与此 m 个 Lagrange 位形 $q_k(k=1,\cdots,m)$ 之间有如下函数关系:

$$x_i=x_i(q_k)\qquad(i=1,\cdots,3n;\ k=1,\cdots,m) \tag{2.2.2}$$

2. 广义坐标的微分和导数以及广义速度和广义加速度

先讨论稳定情况. 在稳定情况中,d'Alembert 位形 x_i 的全微分是

$$\mathrm{d}x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k\qquad(i=1,\cdots,3n;\ k=1,\cdots,m) \tag{2.2.3}$$

或在(2.2.3)式等号两边同时除以 dt,有

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k=1,\cdots,m) \tag{2.2.4}$$

式中,$\dot{q}_k(k=1,\cdots,m)$被称为"广义速度". 同理,$\ddot{q}_k$ 被称为"广义加速度".

将(2.2.4)式等号两边对广义速度 $\dot{q}_k$ 求偏导数,有

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k=1,\cdots,m) \tag{2.2.5}$$

上述(2.2.5)式是分析力学中一个很重要的关系式,在以后的公式推导中将起到很关键的作用. 这个公式也很好记:速度对速度的导数等于位形对位形的导数.

也有加速度对加速度的导数,将在不稳定情况中一起讨论.

另外,由(2.2.3)式,又有

$$(\mathrm{d}x_i)^2 = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}q_l \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k,l=1,\cdots,m) \tag{2.2.6}$$

和由(2.2.4)式,又有

$$(\dot{x}_i)^2 = \dot{x}_i\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k,l=1,\cdots,m) \tag{2.2.7}$$

(2.2.6)式可用于讨论两点之间的距离,(2.2.7)式可用于描述系统的动能. 注意,求和指标的书写要正确;已经用过的求和指标不要再用了,而要换用另外的求和指标.

三、系统的动能和广义质量

系统的动能可以写成

$$T = \frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i)^2 = \frac{1}{2}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k,l=1,\cdots,m) \tag{2.2.8}$$

式中,与前面一样,约定质量用 m_i 表示($i=1,\cdots,3n$). 当 $i=1,2,3$ 时,就理解为第一个质点的质量;当 $i=4,5,6$ 时,就理解为第二个质点的质量;诸如此类,依此类推.

引入"广义质量"M_{kl} 的概念,定义

$$M_{kl} = m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} \qquad (i=1,\cdots,3n;\ k,l=1,\cdots,m) \tag{2.2.9}$$

而且,由(2.2.9)式可知

$$M_{kl} = M_{lk} \tag{2.2.10}$$

则

$$T = \frac{1}{2}M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (k,l=1,\cdots,m) \tag{2.2.11}$$

于是，系统的动能仍然是速度的二次齐次函数，只不过原来的 d'Alembert 速度换成了现在的广义速度而已．

四、Euler 定理

对系统的动能来说，Euler 定理是

$$\dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.12}$$

证明是简单的．因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_l + \delta_{kl} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \\ &= \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_l + \delta_{kl}\left(\frac{1}{2} M_{jl} \dot{q}_j\right) = \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_l + \frac{1}{2} M_{jk} \dot{q}_j \\ &= \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_l + \frac{1}{2} M_{lk} \dot{q}_l = M_{kl} \dot{q}_l \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

所以

$$\dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

实际上，Euler 定理对所有二次齐次函数皆成立．一般来说，若力学量 f 是自变量 x_k 的 n 次齐次函数，则 Euler 定理是

$$x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = nf \tag{2.2.14}$$

五、广义动量

广义动量的最初定义是

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.15}$$

于是，由 Euler 定理有

$$T = \frac{1}{2} p_k \dot{q}_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.16}$$

此外，因为

$$T = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i)^2 \qquad (i = 1, \cdots, 3n) \tag{2.2.17}$$

所以

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1, \cdots, m)$$

(2.2.18)

由于,(2.2.18)式中,$m_i\dot{x}_i(i=1,\cdots,3n$;不对 i 求和)是 d'Alembert 动量:

$$p_i = m_i\dot{x}_i \qquad (i=1,\cdots,3n;\text{不对 } i \text{ 求和}) \tag{2.2.19}$$

因此,(2.2.18)式就是

$$p_k = p_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.2.20}$$

分析一下(2.2.20)式就可明白,由于$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)$正是 d'Alembert位形坐标系与 Lagrange 位形坐标系之间的(微分形式的)夹角余弦矩阵,所以(2.2.20)式实际上表示了:广义动量 $p_k(k=1,\cdots,m)$可视为 d'Alembert 动量 $p_i(i=1,\cdots,3n)$在 Lagrange 位形空间(广义坐标空间)的投影.

从现在起必须记住:一个 d'Alembert 位形空间的力学量如果点乘$\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)$,就表示它在 Lagrange 位形空间(广义坐标空间)的投影.

广义动量的定义式(2.2.15)式今后会有变化(参阅(2.4.24)式). 这种选用更好定义的现象在物理学中经常发生;因为后来的定义更深刻,而且又包含原先的定义.

六、广义力

广义力的定义起源于对"功是标量"的认识.

真实的"元功"的表达式为

$$\mathrm{d}W = F_i\mathrm{d}x_i = F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.2.21}$$

由此定义"广义力"为

$$Q_k = F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.2.22}$$

于是,真实的"元功"的表达式具有不变的形式:

$$\mathrm{d}W = Q_k\mathrm{d}q_k \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.2.23}$$

而且,由(2.2.22)式可以辨认出,广义力 $Q_k(k=1,\cdots,m)$是 d'Alembert 力 $F_i(i=1,\cdots,3n)$在 Lagrange 位形空间(广义坐标空间)的投影.

七、用广义坐标和广义力表示的虚功原理

因为 d'Alembert 虚位移是

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.2.24}$$

所以，虚功等于

$$\delta W = F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = Q_k \delta q_k \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1 \cdots, m) \tag{2.2.25}$$

于是，虚功原理可表示为

$$\delta W = Q_k \delta q_k = 0 \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.26}$$

由于“广义虚位移”$\delta q_k (k=1, \cdots, m)$之间是相互独立的(这一点与 d'Alembert 虚位移有根本的不同；d'Alembert 虚位移之间是相关的，因为其中有 s 个约束条件没有解除)，所以(2.2.26)式还可以被化简为

$$Q_k = 0 \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.27}$$

而在 d'Alembert 位形空间的虚功原理中是没 $F_i = 0$ 有这样的表达式的.

此外，若所有主动力都是保守力，势能为 $V(x_i)$，则由于

$$\begin{cases} V(x_i) = V[x_i(q_k)] = V(q_k) \\ F_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.28}$$

因而

$$Q_k = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.29}$$

于是，当主动力有势时的平衡条件又可以被写成

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, \cdots m) \tag{2.2.30}$$

八、不稳定情况时的有关讨论

在不稳定情况下，d'Alembert 位形 x_i 应该是 Lagrange 位形 q_k 和时间 t 的函数；即

$$x_i = x_i(q_k, t) \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.31}$$

显而易见，(2.2.31)式比(2.2.2)式更具普遍性；从而由其导出的结果当然也更具普遍性.

1. 广义坐标的微分和导数

d'Alembert 位形 x_i 的全微分是

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \mathrm{d}t + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k \qquad (i = 1, \cdots, 3n; k = 1, \cdots, m) \tag{2.2.32}$$

而 d'Alembert 位形 x_i 的全导数则是

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m) \tag{2.2.33}$$

在(2.2.33)式等号两边对广义速度 $\dot{q}_k$ 求偏导数,仍有

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m) \tag{2.2.34}$$

但是,速度平方将变形为

$$\begin{aligned}(x_i)^2 &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l \\ &(i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

2. d'Alembert 加速度与广义加速度之间的偏导数

因为

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k \tag{2.2.36}$$
$$(i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m)$$

所以

$$\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m) \tag{2.2.37}$$

将(2.2.34)式与(2.2.37)式联立,得到

$$\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m) \tag{2.2.38}$$

这个公式也很好记:加速度对加速度的导数等于速度对速度的导数,又等于位形对位形的导数.

另外,由(2.2.36)式又可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= 2\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k} + 2\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l = 2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\ &= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

根据在下一节将要证明的对易关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{2.2.40}$$

又有

$$\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = 2\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \qquad (i = 1,\cdots,3n;k = 1,\cdots,m) \tag{2.2.41}$$

这一关系被称为“Nielsen 关系”.

在(2.2.39)式中的“全导数”是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\qquad (l=1,\cdots,m) \tag{2.2.42}$$

这与力学量是 $f=f(q_k,t)$(在这里是 $x_i=x_i(q_k,t)$)有关. 如果力学量是 $f=f(q_k,\dot{q}_k,t)$,则“全导数”应该是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}+\ddot{q}_l\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\qquad (l=1,\cdots,m) \tag{2.2.43}$$

3. 系统的动能

记

$$\begin{cases} M=m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=2T_0 \\ M_k=m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \\ M_{kl}=m_i\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_l} \end{cases} \tag{2.2.44}$$

及

$$\begin{cases} M_k\dot{q}_k=T_1 \\ \dfrac{1}{2}M_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l=T_2 \end{cases} \tag{2.2.45}$$

式中,(T_0,T_1,T_2)的下标$(0,1,2)$表示它们分别是广义速度 $\dot{q}_k$ 的零次齐次式,一次齐次式和二次齐次式. 从而

$$T=T_0+T_1+T_2 \tag{2.2.46}$$

在(2.2.46)式的条件下,Euler 定理是

$$\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=\dot{q}_k\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}=T_1+2T_2 \tag{2.2.47}$$

除此之外,广义动量和广义力的定义仍然与在稳定情况中一样.

【例 2.6】 已知:质量为 m 的小环 M 套在水平放置的半径为 a 的光滑半圆形轨道 AMB 上;两根弹性系数为 k 的弹性细绳一端固定在半圆的圆心 O 上,另一端分别绕过半圆顶点 A、B 处的无摩擦定滑轮固定在 M 上;弹性细绳原长等于半圆半径 a;以 OM 与半圆直径之间的夹角 θ 为广义坐标(图 2.7).

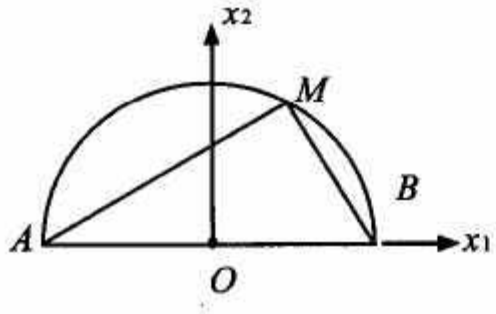


图 2.7

求:M 的平衡位置(用 θ 角表示)及轨道对 M 的约束反力.

解:以半圆的圆心 O 为原点建立坐标系,半圆直径方向为 x_1 轴,其垂直方向为 x_2 轴. 小环 M 的坐标是 $M(a\cos\theta,a\sin\theta)$.

考虑水平面内的作用力. 因为弹性细绳原长等于半圆半径为 a,所以 AM 和 BM 分别为两根弹性细绳的伸长. 根据

Hooke 定律，它们对 M 的作用力分别是

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}^A = -k(a+x_1)\boldsymbol{i}_1 - kx_2\boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{F}^B = k(a-x_1)\boldsymbol{i}_1 - kx_2\boldsymbol{i}_2 \end{cases}$$

式中，$(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2)$ 分别为 x_1 方向和 x_2 方向的单位矢量．

设 M 的虚位移为 $\delta\boldsymbol{r}$，则有

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta x_1\boldsymbol{i}_1 + \delta x_2\boldsymbol{i}_2 = a(-\sin\theta\boldsymbol{i}_1 + \cos\theta\boldsymbol{i}_2)\delta\theta$$

由虚功原理

$$\delta W = (F_1^A + F_1^B)\delta x_1 + (F_2^A + F_2^B)\delta x_2 = 0$$

可得

$$[-k(a+x_1) + k(a-x_1)](-a\sin\theta\delta\theta) + (-2kx_2)(a\cos\theta\delta\theta) = 0$$

即

$$2ka^2(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta)\delta\theta = 0$$

其中，广义力

$$Q_\theta = 2ka^2(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0$$

这就意味着，M 在轨道上任意一点均能处于平衡状态．

轨道对 M 的约束反力在水平面上的分量为

$$\boldsymbol{N} = -(\boldsymbol{F}^A + \boldsymbol{F}^B) = 2kx_1\boldsymbol{i}_1 + 2kx_2\boldsymbol{i}_2 = 2k\boldsymbol{r}$$

而它在竖直方向的分量为 $mg\boldsymbol{i}_3$．

【例 2.7】 已知：质量不计的直角尺形刚体 AOB 的顶点 O 铰连于铅直轴上，并绕此轴以角速度 ω 转动；直角尺型刚体 AOB 的 A 端和 B 端分别是质量为 m_1 和 m_2 的质点；OA 长为 l_1，OB 长为 l_2；OA 与铅直轴之间的夹角为 α（图 2.8）．

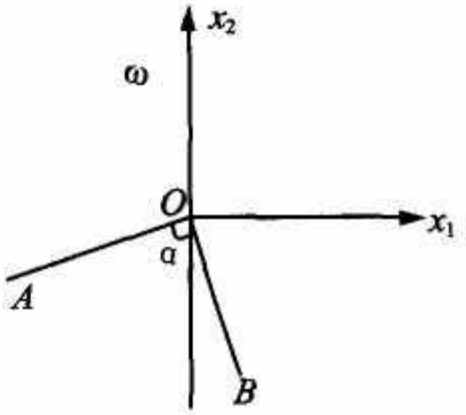


图 2.8

求：动平衡时角速度 ω 的大小．

解：以直角尺形刚体 AOB 的顶点 O 为原点建立坐标系，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴．本题中，主动力（重力）和惯性离心力都作用在 A、B 两点上；因此，A 端和 B 端是本题所关心的两个点．它们的坐标分别是 $A(-l_1\sin\alpha, -l_1\cos\alpha)$，$B(l_2\cos\alpha, l_2\sin\alpha)$．

因此，在本题中，α 角就是广义坐标．于是，虚位移是

$$\begin{cases} \delta x_1^A = -l_1\cos\alpha\delta\alpha \\ \delta x_2^A = l_1\sin\alpha\delta\alpha \\ \delta x_1^B = -l_2\sin\alpha\delta\alpha \\ \delta x_2^B = -l_2\cos\alpha\delta\alpha \end{cases}$$

由 d'Alembert 原理，有

$$m_1 g\delta x_2^A + m_2 g\delta x_2^B - m_1\omega^2 x_1^A\delta x_1^A - m_2\omega^2 x_1^B\delta x_1^B = 0$$

即

$$m_1 g(l_1\sin\alpha\delta\alpha) + m_2 g(-l_2\cos\alpha\delta\alpha) - m_1\omega^2(-l_1\sin\alpha)(-l_1\cos\alpha\delta\alpha) - m_2\omega^2(l_2\cos\alpha)(-l_2\sin\alpha\delta\alpha) = 0$$

或

$$[(m_1 l_1 \sin\alpha - m_2 l_2 \cos\alpha)g - \omega^2 (m_1 l_1^2 - m_2 l_2^2)\sin\alpha\cos\alpha]\delta\alpha = 0$$

从中解出

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 l_1 \sin\alpha - m_2 l_2 \cos\alpha}{(m_1 l_1^2 - m_2 l_2^2)\sin\alpha\cos\alpha} g}$$

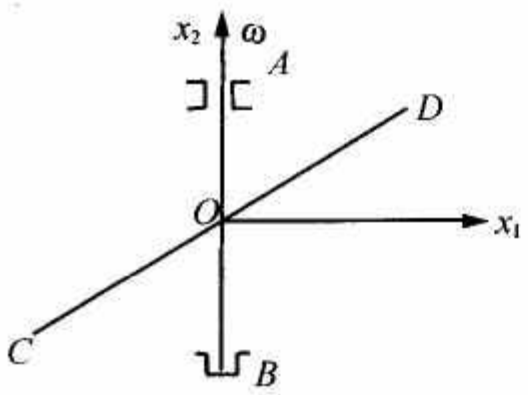


图 2.9

【例 2.8】 已知：铅直轴在止推(下)轴承 B 和扶直(上)轴承 A 中以匀角速度 ω 转动；轻质杆 COD 的中点 O 与铅直轴刚性联结；轻质杆 COD 的 C、D 两端各有一质量为 m 的质点；OA 的长度为 a，OB 的长度为 b，OC 和 OD 的长度都是 l；$\angle AOD=\alpha$ (图 2.9).

求：动平衡时止推(下)轴承 B 和扶直(上)轴承 A 上的约束反力.

解：本题与上题【例 2.7】不同；上题中，直角尺形刚体与铅直轴是“铰连”；而本题中，轻质杆与铅直轴是“刚性联结”. 由于此“刚性联结”并非对称于铅直轴，因而必然使上下两个轴承产生约束反力. 上轴承只起扶直作用，所以约束反力在水平方向；下轴承所受的约束反力可以分解为两个方向，其水平方向的约束反力与上轴承所受约束反力大小相等、方向相反，其竖直方向的约束反力则等于系统的总重力.

值得注意的是，在本题中，轴承的约束反力是作为“外力”来处理的，而并非“在方程中不出现”的“系统内部的约束反力”.

以刚性联结点 O 点为原点建立坐标系，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴. 因而，A、B、C、D 4 点的坐标为 $A(0,a)$，$B(0,-b)$，$C(-l\sin\alpha,-l\cos\alpha)$，$D(l\sin\alpha,l\cos\alpha)$. 这 4 个点上有主动力，惯性离心力或约束反力，是本题所关心的点.

因此，在本题中，α 角就是广义坐标. 虚位移为

$$\begin{cases} \delta x_1^A = a\delta\alpha \\ \delta x_1^B = -b\delta\alpha \\ \delta x_1^C = -l\cos\alpha\delta\alpha \\ \delta x_2^C = l\sin\alpha\delta\alpha \\ \delta x_1^D = l\cos\alpha\delta\alpha \\ \delta x_2^D = -l\sin\alpha\delta\alpha \end{cases}$$

注意，虚位移 δx_1^A 和 δx_1^B 是由计算弧长得到的，而不是由变分坐标得到的.

由 d'Alembert 原理，有

$$N_1^A(a\delta\alpha) + N_1^B(-b\delta\alpha) + mg(l\sin\alpha\delta\alpha) + mg(-l\sin\alpha\delta\alpha)$$
$$-m\omega^2(-l\sin\alpha)(-l\cos\alpha\delta\alpha) - m\omega^2(l\sin\alpha)(l\cos\alpha\delta\alpha) = 0$$

考虑到两个轴承上所受的水平约束反力大小相等、方向相反，即

$$N_1^A = -N_1^B$$

于是，经整理后得到

$$[N_1^A(a+b) - m\omega^2\sin(2\alpha)]\delta\alpha = 0$$

解得

$$N_1^A = -N_1^B = \frac{m\omega^2 \sin(2\alpha)}{a+b}$$

而

$$N_2^B = -2mg$$

【例 2.9】 已知:广义力 $Q_k = a_{kl}\dot{q}_l$,其中 $a_{kl} = -a_{lk}$;这种力被称为"回转力".

求证:回转力不做功.

证:因为元功是

$$\mathrm{d}W = Q_k \mathrm{d}q_k = Q_k \dot{q}_k \mathrm{d}t = a_{kl}\dot{q}_l \dot{q}_k \mathrm{d}t$$

交换求和指标 k 和 l 后,有

$$\mathrm{d}W = a_{lk}\dot{q}_k \dot{q}_l \mathrm{d}t = -a_{kl}\dot{q}_k \dot{q}_l \mathrm{d}t$$

即

$$\mathrm{d}W = a_{kl}\dot{q}_l \dot{q}_k \mathrm{d}t = -a_{kl}\dot{q}_k \dot{q}_l \mathrm{d}t$$

所以,

$$\mathrm{d}W = 0$$

【例 2.10】 已知:质量为 m_1 长为 l_1 和质量为 m_2 长为 l_2 的两根匀质棒 OA 和 AB 铰连于 A 点,OA 棒无摩擦地悬于 O 点;整个系统处在竖直平面内;在 AB 棒的 B 端有一不变水平力 F_1 使整个系统处于平衡状态;OA 棒与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1,AB 棒与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2(图 2.10).

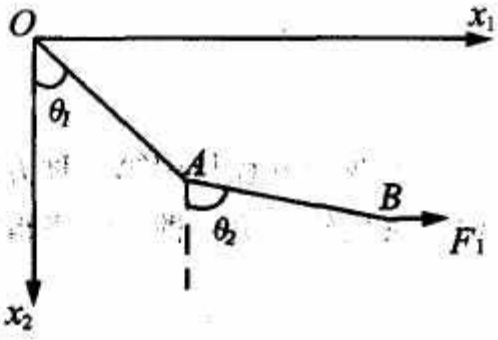


图 2.10

求:平衡时 θ_1 和 θ_2 的大小.

解:本题可用两种方法来解.第一种方法,$Q_k = 0$;第二种方法,$\dfrac{\partial V}{\partial q_k} = 0$.

(1)第一种方法

系统自由度数为 2,广义坐标为(θ_1,θ_2).本题中所关心的点是 OA 棒的中点,AB 棒的中点和 B 点.这 3 个点的坐标分别是

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \dfrac{l_1}{2}(\boldsymbol{i}_1 \sin\theta_1 + \boldsymbol{i}_2 \cos\theta_1) & (OA \text{ 中点坐标}) \\ \boldsymbol{r}_2 = l_1(\boldsymbol{i}_1 \sin\theta_1 + \boldsymbol{i}_2 \cos\theta_1) + \dfrac{l_2}{2}(\boldsymbol{i}_1 \sin\theta_2 + \boldsymbol{i}_2 \cos\theta_2) & (AB \text{ 中点坐标}) \\ \boldsymbol{r}_3 = l_1(\boldsymbol{i}_1 \sin\theta_1 + \boldsymbol{i}_2 \cos\theta_1) + l_2(\boldsymbol{i}_1 \sin\theta_2 + \boldsymbol{i}_2 \cos\theta_2) & (B \text{ 点坐标}) \end{cases}$$

而广义力(Q_1,Q_2)分别是

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 \boldsymbol{g} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial \theta_1} + m_2 \boldsymbol{g} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial \theta_1} + \boldsymbol{F} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial \theta_1} \\ Q_2 = m_1 \boldsymbol{g} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial \theta_2} + m_2 \boldsymbol{g} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial \theta_2} + \boldsymbol{F} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial \theta_2} \end{cases}$$

于是,根据 $Q_k = 0$ 有

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 g l_1 \sin\theta_1 + F_1 l_1 \cos\theta_1 = 0 \\ F_1 l_2 \cos\theta_2 - \dfrac{1}{2}m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

从中解得

$$\begin{cases}\tan\theta_1 = \dfrac{2F_1}{(m_1+2m_2)g}\\ \tan\theta_2 = \dfrac{2F_1}{m_2 g}\end{cases}$$

(2)第二种方法

因为不变水平力 F_1 所对应的势能为

$$V_F = -\int_0^{x_1(B)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -F_1(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)$$

所以总势能为

$$V = V_g + V_F = -\frac{1}{2}m_1 g l_1\cos\theta_1 - m_2 g\left(l_1\cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_2\cos\theta_2\right) - F_1(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)$$

于是,根据 $\dfrac{\partial V}{\partial q_k}=0$ 有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = \dfrac{1}{2}m_1 g l_1\sin\theta_1 + m_2 g l_1\sin\theta_1 - F_1 l_1\cos\theta_1 = 0\\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta_2} = \dfrac{1}{2}m_2 g l_2\sin\theta_2 - F_1 l_2\cos\theta_2 = 0\end{cases}$$

这两个方程与用第一种方法得到的两个方程完全相同,因而结果也将完全相同. 但是,第二种方法显然比第一种方法来得简单.

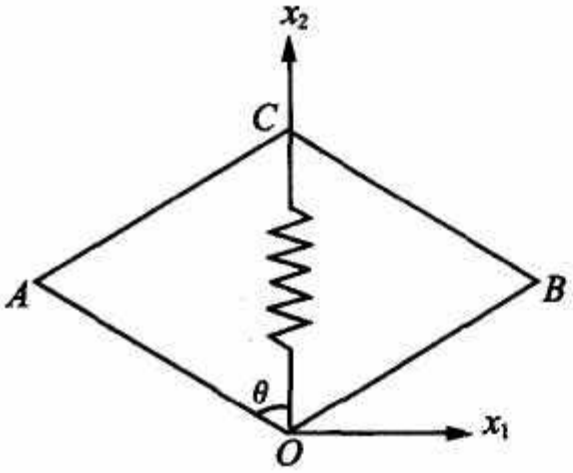


图 2.11

【例 2.11】 已知:4 根长为 l 的轻质杆铰连成一个菱形 $OACB$;O 点在下方且固定不动,C 点在 O 点的正上方且可沿对称轴上下游动;对称轴的主要部分是固有长度为 $\sqrt{2}l$、弹性系数为 k 的弹簧;A、B 两点各有一质量为 m 的质点;整个系统在竖直平面内运动;OC 与 OA 之间的夹角为 θ(图 2.11).

求:平衡时 θ 角的大小.

解:以 O 点为原点,OC 方向为 x_2 轴,水平方向为 x_1 轴,建立坐标系. 因而,A、C 两点的坐标为 $A(l\sin\theta, l\cos\theta)$,$C(0, 2l\cos\theta)$.

重力势能为

$$V_g = 2mgl\cos\theta$$

弹性势能为

$$V_k = \frac{1}{2}k(2l\cos\theta - \sqrt{2}l)^2$$

因此,总势能是二者之和,即

$$V = V_g + V_k = 2mgl\cos\theta + 2kl^2\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$,得到

$$-2mgl\sin\theta-4kl^2\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

即

$$2l\sin\theta\left[mg+2kl\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=0$$

于是,解得

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{mg}{2kl}$$

2.3 Lagrange 未定乘数法:约束反力和具有多余约束的问题

虚功原理的缺点之一,是无法计算系统内部的约束反力. Lagrange 未定乘数法(又被称为"Lagrange 待定乘数法")可被用于处理这个问题. 此外,Lagrange 未定乘数法又可被用来顺带解决具有多余约束(当然是"完整约束")的问题. Lagrange 未定乘数法其实在高等数学的教科书中就有所叙述.

一、Lagrange 未定乘数法

设质点系由 n 个质点组成,该系统受有 s 个完整约束,其约束方程是

$$f_\beta(x_i)=0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.1}$$

因而,此力学系统的独立坐标数目是$(3n-s)$个. 以下分别讨论 d'Alembert 位形坐标系和Lagrange位形坐标系(广义坐标系)中的 Lagrange 未定乘数法. 这两种Lagrange未定乘数法有共通之处.

1. d'Alembert 位形坐标系中的 Lagrange 未定乘数法

给质点系中每一个质点在每一个方向上以虚位移 $\delta x_i(i=1,\cdots,3n)$,则由(2.3.1)式,下式也近似成立:

$$f_\beta(x_i+\delta x_i)=0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.2}$$

将(2.3.2)式按 Taylor 级数展开,有

$$f_\beta(x_i+\delta x_i)=f_\beta(x_i)+\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\delta x_i+\cdots=0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.3}$$

由于(2.3.1)式,故略去高阶小量后,得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\delta x_i=0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.4}$$

回顾一下高等数学，就可知道(2.3.4)式实际上就是约束曲面的 $f_\beta(x_i)=0$ 的“切平面方程”. 换言之，虚位移 δx_i 的主要部分是在“切平面”上而并非许可在任意方向上.

另外，由虚功原理，系统的平衡条件为

$$\delta W = F_i \delta x_i = 0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.3.5}$$

将(2.3.4)等式前乘以因子 λ_β(按 Einstein 约定求和)，然后与(2.3.5)式相加，有

$$\left(F_i+\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\right)\delta x_i = 0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.6}$$

由于 d'Alembert 虚位移 δx_i 之间是相互关联的(因为有 s 个完整约束没有解除)，所以不能将(2.3.6)式中的括号直接取出来让它等于零. 根据 Lagrange 未定乘数法，选择 λ_β，使 s 个不独立的虚位移前的括号等于零，因而余下的$(3n-s)$个独立的虚位移前的括号也都等于零了. 于是，总是有

$$F_i+\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1,\cdots,3n;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.7}$$

当然(2.3.7)式是无法求解的，因为未知量的数目$(3n+s)$大于方程的数目$(3n)$. 于是必须联立 s 个约束方程(2.3.1)式才能构成完整的一组$(3n+s)$个方程，以用来决定 $3n$ 个 x_i 和 s 个 λ_β.

式中，λ_β 被称为“Lagrange 未定乘数”或“Lagrange 待定乘数”；这种方法则被称为“Lagrange 未定乘数法”.

具体说来，若“约束面”的方程是 $f(x_i)=0$ $(i=1,2,3)$，则解题的方程组是

$$\begin{cases} F_1+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 \\ F_2+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 \\ F_3+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=0 \\ f(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

即由 4 个方程解出 4 个未知量(x_i,λ).

若“约束线”的方程是和 $f_1(x_i)=0$ 和 $f_2(x_i)=0$ $(i=1,2,3)$，则解题的方程组是

$$\begin{cases} F_1+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}=0 \\ F_2+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=0 \\ F_3+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}=0 \\ f_1(x_1,x_2,x_3)=0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

即由 5 个方程解出 5 个未知量(x_i,λ_1,λ_2). 于是. 可以看出,"约束线"的问题比"约束面"的问题来得复杂,因为"线"是两个"面"的交线.

当然,(2.3.5)式的"虚功原理"也可以用"d'Alembert 原理"来代替,以用来解决运动问题.

2. 广义坐标系中的 Lagrange 未定乘数法

"广义坐标系中的 Lagrange 未定乘数法"是用来处理多余约束问题的. 所谓"多余约束问题",就是说,现在所选的"广义坐标"并非真正的广义坐标,其中还有 s 个完整约束没有被解除. 这"没有被解除"的 s 个完整约束来源于两种可能:①并非故意的;②故意的. 有时候,故意先不解除某些约束,可以使方程的形式比较简单,尽管方程数目必然增加.

设"没有被解除"的 s 个完整约束的方程是

$$f_\beta(q_k)=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.10}$$

同样,给质点系中每一个质点在每一个 Lagrange 位形方向上以广义虚位移 $\delta q_k(k=1,\cdots,m)$,则由(2.3.10)式,下式也近似成立:

$$f_\beta(q_k+\delta q_k)=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.11}$$

将(2.3.11)式按 Taylor 级数展开,有

$$f_\beta(q_k+\delta q_k)=f_\beta(q_k)+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\delta q_k+\cdots=0 \quad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.12}$$

由于(2.3.10)式,故略去高阶小量后,得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\delta q_k=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.13}$$

同样,可以知道,(2.3.13)式实际上就是约束曲面 $f_\beta(q_k)=0$ 的"切平面方程".

另外,由虚功原理,系统的平衡条件为

$$\delta W=Q_k\delta q_k=0 \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.3.14}$$

将(2.3.13)式前乘以因子 λ_β(按 Einstein 约定求和),然后与(2.3.14)式相加,有

$$\left(Q_k+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots s) \tag{2.3.15}$$

因为现在所选的"广义坐标"并非真正的广义坐标,现在的"广义虚位移"也并非真正的广义虚位移,其中还有 s 个完整约束没有解除,所以不能将(2.3.15)式中的括号直接取出来让它等于零. 根据 Lagrange 未定乘数法,选择 λ_β,使 s 个不独立的虚位移前的括号等于零,因而余下的($m-s$)个独立的虚位移前的括号也都等于零了. 于是,总是有

$$Q_k+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.3.16}$$

当然(2.3.16)式同样是无法求解的,因为未知量的数目($m+s$)大于方程的数目 m.

于是必须联立 s 个约束方程(2.3.10)式才能构成完整的一组$(m+s)$个方程,以用来决定 m 个 q_k 和 s 个 λ_β 个.

"多余约束问题"由此得到圆满解决. 因而,在解题时如果发现有未解除的约束条件,就可在方程中加一项 $\lambda_\beta \dfrac{\partial f_\beta}{\partial q_k}$ 进行处理,最后与"未解除的约束条件" $f_\beta(q_k)=0$ 联立求解,也能得到正确结果."故意先不解除约束条件"的情况,同此方法处理.

"Lagrange 未定乘数法"在连续介质力学,量子力学,统计力学等诸多学科中,有广泛的用途. 甚至在"数理经济学"等非物理学科中,也经常用到"Lagrange 未定乘数法".

二、"Lagrange 未定乘数"λ_β 的物理意义:约束反力

以"面约束"为例. 在此情况下,$\beta=1$;基本方程是

$$\begin{cases} F_i+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 & (i=1,\cdots,3n) \\ Q_k+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial q_k}=0 & (k=1,\cdots,m) \end{cases} \tag{2.3.17}$$

式中,$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial q_k}$ 实际上是梯度运算.

由解析几何知识可知,曲面的法线方向是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| & (i=1,\cdots,3n) \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_k}\Big/\left|\dfrac{\partial f}{\partial q_k}\right| & (k=1,\cdots,m) \end{cases} \tag{2.3.18}$$

式中,$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ 和 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial q_k}\right|$ 是 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial q_k}$ 的"模". 但是,由于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i=0 & (i=1,\cdots,3n) \\ \dfrac{\partial f}{\partial q_k}\delta q_k=0 & (k=1,\cdots,m) \end{cases} \tag{2.3.19}$$

表示 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 和 δx_i 垂直以及 $\dfrac{\partial f}{\partial q_k}$ 和 δq_k 垂直,所以 δx_i 或 δq_k 只能在曲面的切平面上(这就是为何虚位移 δx_i 或 δq_k 的主要部分是在"切平面"上而并非许可在任意方向上的原因).

此外,质点系在曲面上平衡时,有

$$\begin{cases} F_i+N_i=0 & (i=1,\cdots,3n) \\ Q_k+N_k=0 & (k=1,\cdots,m) \end{cases} \tag{2.3.20}$$

式中，N_i 或 N_k 是曲面对质点系的约束反力．于是，比较(2.3.17)式和(2.3.20)式，得到

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = N_i & (i = 1, \cdots, 3n) \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial q_k} = N_k & (k = 1, \cdots, m) \end{cases} \tag{2.3.21}$$

而且，根据(2.3.18)式，约束反力就在曲面的法线方向．

这一结果，亦可由

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 & (i = 1, \cdots, 3n) \\ \lambda \dfrac{\partial f}{\partial q_k} \delta q_k = 0 & (k = 1, \cdots, m) \end{cases} \tag{2.3.22}$$

与理想约束条件

$$\begin{cases} N_i \delta x_i = 0 & (i = 1, \cdots, 3n) \\ N_k \delta q_k = 0 & (k = 1, \cdots, m) \end{cases} \tag{2.3.23}$$

的对比中得到．

在“线约束”情况下，由于“线”是两个“面”的交线，所以总的约束反力是两个“面约束”约束反力的矢量合成．

于是，可以得到结论：“Lagrange 未定乘数”λ_β 是与约束反力成比例的标量；当 λ_β 求出时，约束反力也就确定了．

此结论推广到更一般的情况中也同样，甚至对“线性非完整系统”也能用．

然而，从解题角度来看，用“Lagrange 未定乘数法”并不比直接解 Newton 方程来得简便．解题时，除非题目有特殊要求外，哪种方法简便就用哪种方法．“Lagrange未定乘数法”的重要性是理论上的．有些用 Newton 方程无法解决的问题，就只能用“Lagrange 未定乘数法”解决．

此外，必须提醒注意的是，“Lagrange 未定乘数”λ_β 的物理意义是通过对比得到的，而不能预先规定它是什么．在分析力学的完整约束问题中，它可以是“与约束反力成比例的标量”，但在非线性非完整约束问题中就不一定；在连续介质力学中可以是“应力-应变关系”，在统计力学中可以是 $\dfrac{1}{k_B T}$，而在量子力学中又可以是“本征能量”．钱伟长先生(1912～)将这种“通过对比得到其物理意义”的过程称之为“识别”．钱伟长先生曾经就 Lagrange 未定乘数的“识别”问题同胡海昌进行过几年论战(钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社，1985)．从理论分析来看，钱伟长先生的观点是正确的．

三、高阶“Lagrange 未定乘数法”:钱伟长法

在某些情况中,当求出的 $\lambda=0$ 时,通常的“Lagrange 未定乘数法”就失效了. 解决这一问题的方法是所谓高阶“Lagrange 未定乘数法”.

高阶“Lagrange 未定乘数法”假定完整约束条件

$$f(x_i)=0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.3.24}$$

为某一“正规函数”(即满足通常可微,单调有界等条件的函数)Φ 的“泛函”(即“函数的函数”),也就是

$$\Phi=\Phi(f) \tag{2.3.25}$$

而且

$$\begin{cases} \Phi(f)\big|_{f=0}=0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}f}\right|_{f=0}=\lambda^{(1)} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}f^2}\right|_{f=0}=\lambda^{(2)} \\ \vdots \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^r\Phi}{\mathrm{d}f^r}\right|_{f=0}=\lambda^{(r)} \end{cases} \tag{2.3.26}$$

则当用 Taylor 级数展开 $\Phi=\Phi(f)$ 时,有

$$\Phi(f)=\lambda^{(1)}f+\frac{1}{2!}\lambda^{(2)}f^2+\cdots+\frac{1}{n!}\lambda^{(n)}f^n+\cdots \tag{2.3.27}$$

于是,

(1)当 $\lambda^{(1)}\neq 0$ 时,就略去 f^2 以上的高次项,得到通常的“Lagrange 未定乘数法”:

$$F_i+\lambda^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.3.28}$$

(2)当 $\lambda^{(1)}=0$ 而 $\lambda^{(2)}\neq 0$ 时,就略去 f^3 以上的高次项,取

$$\Phi(f)=\frac{1}{2!}\lambda^{(2)}f^2 \tag{2.3.29}$$

从而得到二阶“Lagrange 未定乘数法”:

$$F_i+\lambda^{(2)}f\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.3.30}$$

将(2.3.30)式与下式联立,便可定解此问题:

$$f^2(x_i)=0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.3.31}$$

(3)更高阶的“Lagrange 未定乘数法”依此类推.

在应用“Lagrange 未定乘数法”时必须提醒的是,不能将完整约束条件 $f(x_i)=0$

不加分析地直接代入(2.3.28)式或将 $f^2(x_i)=0$ 不加分析地直接代入(2.3.30)式这样的方程(直接代入的后果是,只剩下 $F_i=0$ 了). 完整约束条件 $f(x_i)=0$ 或 $f^2(x_i)=0$只有在与这些方程联立时才能派上用场. 这里有一个先让 $f(x_i)=0$ 还是后让$f(x_i)=0$ 的问题,或先让 $f^2(x_i)=0$ 还是后让 $f^2(x_i)=0$ 的问题. 正如在解常微分方程时不能将初始条件先代入方程一样,完整约束条件也不能先代入诸如(2.3.28)式或(2.3.30)式这样的方程. 初学者尤其是数学基础不扎实的初学者,最容易犯这样的错误.

【例 2.12】 已知:同例【2.6 题】.

求:轨道对 M 的约束反力(用 Lagrange 未定乘数法).

解:因为

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}^{\mathrm{A}}=-k(a+x_1)\boldsymbol{i}_1-kx_2\boldsymbol{i}_2\\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{B}}=k(a-x_1)\boldsymbol{i}_1-kx_2\boldsymbol{i}_2\end{cases}$$

而

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}_1\delta x_1+\boldsymbol{i}_2\delta x_2$$

已知的约束方程是(注意等号右边必须是零)

$$f=a^2-x_1^2-x_2^2=0$$

应用 Lagrange 未定乘数法,得到

$$\begin{cases}-k(a+x_1)+k(a-x_1)-2\lambda x_1=0\\ -2kx_2-2\lambda x_2=0\end{cases}$$

由上述第二个方程,立即解出

$$\lambda=-k$$

于是

$$\begin{cases}N_1=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=(-k)(-2x_1)=2kx_1\\ N_2=\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=(-k)(-2x_2)=2kx_2\end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{N}=2kx_1\boldsymbol{i}_1+2kx_2\boldsymbol{i}_2=2k\boldsymbol{r}$$

结果与前面完全一样.

【例 2.13】 已知:质量为 m 的质点 A 被约束在竖直圆周 $x_1^2+x_2^2=a^2$ 上,并受一水平力 kx_1 的作用(图 2.12).

求:质点的平衡位置及约束反力.

解:以圆心 O 为原点建立坐标系. 质点 A 的坐标为(x_1,x_2)

(1)当 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=\pm a\end{cases}$ 时,约束反力是$\pm mg$.

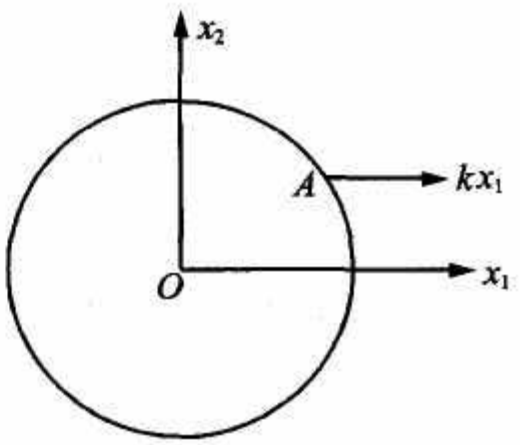


图 2.12

(2)设 $f=x_1^2+x_2^2-a^2$

则由 Lagrange 未定乘数法,有

$$\begin{cases} mg-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 \\ kx_1-\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 \\ f=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} mg-2\lambda x_2=0 \\ kx_1-2\lambda x_1=0 \\ x_1^2+x_2^2-a^2=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{k}{2} \\ x_1=\pm\sqrt{a^2-\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2} \\ x_2=\dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

所以,约束反力是

$$\boldsymbol{N}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\right)=k\left(\pm\sqrt{a^2-\left(\frac{mg}{k}\right)^2}\boldsymbol{i}_1+\frac{mg}{k}\boldsymbol{i}_2\right)$$

而它的大小是

$$|\boldsymbol{N}|=ka$$

2.4 理想,完整体系的 Lagrange 方程

一、由 Newton 第二定律推导 Lagrange 方程

1. 对时间的全导数$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义坐标的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial q_k}$之间的可对易性

由(2.2.33)式,在较为一般的不稳定情况中,有 d'Alembert 位形对时间的全导数为

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l \qquad (i=1,\cdots,3n;\ l=1,\cdots,m) \tag{2.4.1}$$

从而可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\qquad(l=1,\cdots,m)\tag{2.4.2}$$

首先对(2.4.1)式等号两边,取对广义坐标的偏导数$\frac{\partial}{\partial q_k}$. 由于在动力学中广义坐标和广义速度之间是相互独立的,故有

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial q_k}+\dot{q}_l\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_l}\tag{2.4.3}$$

其次,将对时间的全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义坐标的偏导数$\frac{\partial}{\partial q_k}$的次序颠倒过来,又有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial q_k}+\dot{q}_l\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l\partial q_k}\tag{2.4.4}$$

比较(2.4.3)式的等号右端和(2.4.4)式的等号右端,可知它们是相等的,即

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\tag{2.4.5}$$

换言之

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\tag{2.4.6}$$

即,对时间的全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义坐标的偏导数$\frac{\partial}{\partial q_k}$之间是可对易的.

2. 将 Newton 方程投影到广义坐标系

设 d'Alembert 位形空间中的动量是

$$p_i=m_i v_i=m_i\dot{x}_i\qquad(\text{不对 } i \text{ 求和})\tag{2.4.7}$$

可见,p_i 与 $\dot{x}_i$ 的方向一致.

将 Newton 方程$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=F_i(i=1,\cdots,3n)$投影到广义坐标系,即有

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\qquad(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)\tag{2.4.8}$$

式中,等号右边就是广义力. 对(2.4.8)式等号左边进行演绎,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)=Q_k\qquad(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)\tag{2.4.9}$$

或代入(2.2.34)式和(2.4.5)式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-p_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}=Q_k\qquad(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)\tag{2.4.10}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}=Q_k\qquad(i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m)\tag{2.4.11}$$

也就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)=Q_k \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.4.12}$$

因为根据(2.2.17)式,系统的总动能为

$$T=\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.4.13}$$

于是,(2.4.12)式就可以被写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.14}$$

此即 LaGrange 方程.

二、由 d'Alembert 原理推导 Lagrange 方程

将虚位移与广义虚位移之间的关系,广义力的定义式,以及(2.4.5)式,即

$$\begin{cases}\delta x_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k\\ Q_k=F_i\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\\ \dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\end{cases} \tag{2.4.15}$$

代入 d'Alembert 原理,即

$$\left(-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}+F_i\right)\delta x_i=0 \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.4.16}$$

马上得到

$$\left(-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Q_k\right)\delta q_k=0 \qquad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.4.17}$$

经过与由 Newton 第二定律出发推导 Lagrange 方程相同的演绎,最后得到

$$-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0 \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.18}$$

由于广义虚位移 δq_k 是相互独立的,于是,仍有 Lagrange 方程(2.4.14)式.

三、主动力为保守有势力时的 Lagrange 方程

当主动力为保守有势力时,由(2.2.29)式,有

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.19}$$

因此,Lagrange 方程(2.4.14)式演变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial V}{\partial q_k}\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.20}$$

定义 Lagrangian 为

$$L=T-V \tag{2.4.21}$$

并考虑到，在通常情况中势能 $V(q_k)$ 仅仅是位形 q_k 的函数，即

$$\frac{\partial V(q_k)}{\partial \dot{q}_k}=0\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.22}$$

于是，Lagrange 方程(2.4.20)式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.23}$$

由于在通常情况中势能 $V(q_k)$ 仅仅是位形 q_k 的函数，所以广义动量的定义式可以被改写为

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.24}$$

这种改写，并非权宜之计；这样的定义式，在理论中被永久地固定下来；因为它不仅包含了原有的定义式，而且还有更强的理论优势.

此外，从 Lagrange 方程(2.4.23)式中可以看出，Lagrangian 不仅仅是时间 t，广义坐标 $q_k(k=1,\cdots,m)$ 的函数，还是广义速度 $\dot{q}_k(k=1,\cdots,m)$ 的函数，即

$$L=L(q_k,\dot{q}_k,t)\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.25}$$

这个事实从另一个侧面说明了，在动力学中，广义坐标是与广义速度相互独立的自变量(在运动学中，由于 $\dot{q}_k=\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$，使它们之间不是独立的).

四、主动力中既有保守力又有非保守力时的 Lagrange 方程

当主动力中既有保守力又有非保守力时，其保守力用 $-\frac{\partial V}{\partial q_k}$ 表示，而非保守力则仍用 Q_k 表示，于是 Lagrange 方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.26}$$

在这种形式的 Lagrange 方程中，广义力 Q_k 中只包含非保守力，而保守力已并入 Lagrangian L 之中.

五、Lagrange 方程的 Nielsen 形式

1. 对时间的全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义速度的偏导数$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$之间的非对易性

由于现在考虑的典型力学量是 Lagrangian L；它是时间 t，广义坐标 q_k 和广义速度 $\dot{q}_k$ 的函数；因而，对时间的全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$应该是(2.2.43)式而不是(2.2.42)式，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}+\ddot{q}_l\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\qquad (l=1,\cdots,m) \tag{2.4.27}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}+\ddot{q}_l\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\\&=\frac{\partial^2}{\partial t\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_l\frac{\partial^2}{\partial q_l\partial \dot{q}_k}+\ddot{q}_l\frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_l\partial \dot{q}_k}\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}+\ddot{q}_l\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_l\frac{\partial^2}{\partial q_l\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial}{\partial q_k}+\ddot{q}_l\frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_l\partial \dot{q}_k} \tag{2.4.29}$$

在(2.4.29)式的运算中用到了

$$\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_k}=\delta_{kl} \tag{2.4.30}$$

而广义速度与广义加速度之间是相互独立的．根据(2.4.28)式和(2.4.29)式，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial q_k} \tag{2.4.31}$$

换言之，对时间全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义速度的偏导数$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$之间是非对易的．

2. Nielsen 形式的 Lagrange 方程

将对时间全导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与对广义速度的偏导数$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$之间的非对易性即(2.4.31)式代入 Lagrange 方程(2.4.26)式，得到

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=Q_k\qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.32}$$

这就是 Nielsen 形式的 Lagrange 方程，或者被称为“Lagrange 方程的 Nielsen 形式”．对某些先对时间求全导数再对广义速度求偏导数来的方便的问题，方程(2.4.32)式有其优越性．

六、具有多余约束问题的 Lagrange 方程

对于具有多余完整约束 $f_\beta(q_k)=0(k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s)$的问题,(2.3.16)式给出方程

$$Q_k+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.4.33}$$

将 Lagrange 方程(2.4.26)式代入(2.4.33)式,并用$-\lambda_\beta$取代λ_β(这不是什么实质性的问题)就可得到具有多余约束问题的 Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k} \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.4.34}$$

于是,对于解题过程中新发现完整约束的问题,以及故意未将全部完整约束进行解除的问题,都可以通过在 Lagrange 方程等号右边加上$\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}$这一项,然后与完整约束条件联立求解的方法来处理.

七、关于 Lagrange 方程的讨论

(1)Lagrange 方程是 Newton 方程在广义坐标系(Lagrange 位形坐标系)中的投影,正如广义动量$p_k(k=1,\cdots,m)$是 d'Alembert 动量$p_i(i=1,\cdots,3n)$在 Lagrange 位形空间(广义坐标空间)的投影,广义力$Q_k(k=1,\cdots,m)$是 d'Alembert 力$F_i(i=1,\cdots,3n)$在Lagrange L 位形空间的投影一样;因而它继承和遗传了 Newton 方程的某些优缺点,例如由于 Newton 方程是在惯性坐标系下写出来的,所以 Lagrange方程的通常形式也仅适用于惯性系. 在通常解题之前,要首先建立惯性坐标系. Lagrangian L 是在惯性系中写出来的. 非惯性系下的 Lagrange 方程和 Lagrangian L 都要作部分修改.

(2) Lagrange 方程是分析力学中的核心方程之一. Lagrange 方程是对力学系统的整体而言的,因此首先必须区分系统和外界. 这一要求要比 Newton 来得严格. 对于理想约束问题而言,系统内部的约束反力的元功之和等于零;但外界约束反力所做的功不为零.

(3) 在推导 Lagrange 方程时必须注意 4 个对易或非对易关系. 这 4 个对易或非对易关系也是分析力学中的核心问题;那就是

$$\begin{cases}\text{微分 d 与变分 }\delta\text{ 是对易的：}\delta\mathrm{d}=\mathrm{d}\delta\\ \text{时间全导数}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{ 与变分 }\delta\text{ 是有条件}(\delta t=0)\text{ 可对易的：}\delta\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\\ \text{时间全导数}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{ 与对广义坐标的偏导数}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\text{ 是对易的：}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\\ \text{时间全导数}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{ 与对广义速度的偏导数}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\text{ 是不可对易的：}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\partial}{\partial q_k}\end{cases}\tag{2.4.35}$$

此外，在分析力学中，还有一个对易关系（参阅 2.14 节），即

$$\text{积分}\int(\cdots)\mathrm{d}t\text{ 与变分 }\delta\text{ 是有条件}(\delta t=0)\text{ 可对易的：}\delta\int(\cdots)\mathrm{d}t=\int\delta(\cdots)\mathrm{d}t\tag{2.4.36}$$

（4）Lagrange 方程中的动能和势能都必须用广义坐标 q_k 和广义速度 $\dot{q}_k(k=1,\cdots,m)$来表示；在应用 Lagrange 方程之前，必须利用约束条件将问题中的 d'Alembert 位形 $x_i(i=1,\cdots,3n)$变换成广义坐标 q_k. 换言之，系统中不独立的坐标必须在应用 Lagrange 方程之前全部去掉，否则将变成具有多余约束的问题而导致错误结论.

（5）Lagrange 方程是描述于 Lagrange 位形空间的 $q_k(k=1,\cdots,m)$中的动力学方程. 对于单个粒子而言，位形空间（d'Alembert 位形空间）基本上等同于物理空间；但对多粒子系统而言，位形空间（不管是 d'Alembert 位形空间还是 Lagrange 位形空间）一般不是物理空间. 后续的 Hamilton 力学和量子力学，也是描述于位形空间中的物理学方程.

（6）Lagrangian L 是时间 t，广义坐标 q_k 和广义速度 $\dot{q}_k$ 的函数. 在动力学中，广义坐标 q_k 与广义速度 $\dot{q}_k$ 是相互独立的自变量. 在质点系问题中，势能 V 比较好写，动能 T 相对而言较为难写；但只要正确地建立了坐标系，在坐标系中将问题中所关心的“点”（可能是质点，也可能不是质点）的坐标正确地写出来，则 Lagrangian L 也就并不难写了. 而在连续体系的问题中，一般来说，动能密度比较好写，反而势能密度不太好写（可参阅 1.3 节）. 此外，由于 Lagrange 方程是关于 Lagrangian L 的二阶微分方程，因而 Lagrangian L 中的常数项可以略而不写；至于在 Lagrangian L 中还有什么可以略去，本书后面 2.10 中将专门讨论.

（7）从推导过程中可以看出，Lagrange 方程成立的条件是，系统所受到的约束必须是理想和完整的. 理想约束要求约束反力“矢量”必须与广义虚位移“矢量”垂直，因而导致“耗损力”（主动力与惯性力之和）“矢量”必须与广义虚位移“矢量”垂直；在 Lagrange 方程中，“耗损力”就是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}(k=1,\cdots,m)$. 非完整系统的 Lagrange 方程的推导比较复杂（尤其是对非线性非完整系统），将在后面 2.8 节中给出.

(8) Lagrange 方程不仅适用于 Lagrange 描述的力学量，而且也适用于 Euler 描述的力学量．Lagrange 方程在连续体系中的某些应用，就是对 Euler 描述的力学量而言的；例如对电磁场问题的应用和对相对论量子力学问题的应用．

(9) Lagrange 方程较之 Newton 方程来得简洁：对于由 n 个质点组成、受到 s 个完整约束条件限制的力学系统来说，应用 Newton 方程需要 $(3n+s)$ 个方程联立求解，而用 Lagrange 方程只需要 $(3n-s)$ 个方程．约束越多，其优越性就越明显．

(10) Lagrange 方程就其下标来看，似乎像是矢量方程，但实际上却不一定是矢量方程．举例来说，对球坐标 (r,θ,φ) 问题，它的三个方程就构不成矢量；对于有约束的问题，去掉约束后也不再是矢量．所谓的约束反力“矢量”，所谓的“耗损力”“矢量”，所谓的广义虚位移“矢量”，都是打引号的，只是为了理解上的方便．

(11) 主动力为保守有势力时，和主动力中含有非保守力时的 Lagrange 方程，在形式上稍有不同．之所以可以将主动力拆成保守力和非保守力两部分相加，并非“力是标量”，而是因为保守力所做的虚功和非保守力所做的虚功可以相加，最后由于“广义虚位移是相互独立的”而令它们的系数各自为零，才得到现在方程的形式的．

(12) 对具有多余约束的问题，只要在 Lagrange 方程等号右边加上一项 $\lambda_\beta \dfrac{\partial f}{\partial q_k}$，然后与多余的约束方程 $f_\beta(q_k)=0$ 联立求解即可．

(13) Lagrange 方程也适用于相对论粒子；因为只要将 Newton 动量换成相对论动量，Newton 方程也适用于相对论粒子；所以由 Newton 方程投影到广义坐标系所得到的 Lagrange 方程也同样．粒子的相对论动能是

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \tag{2.4.37}$$

而粒子的相对论 Lagrangian L 是

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - V \tag{2.4.38}$$

式中

$$\beta_k = \frac{v_k}{c} = \frac{\dot{x}_k}{c} \qquad (k=1,2,3) \tag{2.4.39}$$

而 m_0 为粒子的静质量．(注意 v_k 与 $\dot{x}_k$ 之间的区别以及它们在什么条件下是一回事，换言之，在运动学中的 β_k 与在动力学中的 β_k 是有区别的；在动力学中，β_k 是变量。)

(14) 当所有的力学量都与时间 t 无关时，就是所谓“静力学”问题．在“静力学”问题中，Lagrange 方程简化为

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.4.40}$$

这就又回到了(2.2.30)式．“静力学”问题有两类，第一类是已知主动力，求系统处于

平衡态时的位置;第二类是求系统处于平衡态时各部分受到的约束反力．对于第一类问题来说,应用(2.4.39)求解特别方便．

(15) 不能用 Lagrange 方程来讨论所谓“齐次问题”．所谓“齐次问题”就是形如 $L=\dot{q}_k+q_k$ 这样的问题;将它代入 Lagrange 方程就会得到 $-1=0$ 的荒唐结果．

(16) Lagrange 方程是联系力学和其他物理学学科(甚至其他非物理学学科)的桥梁．因为 Lagrange 方程是从能量角度来写动力学方程的;能量是标量(无方向,是不变量),而且是整个物理学中甚至非物理学学科中一个通用的基本物理量．但是,Newton 方程中的动量和力都是矢量,而且仅仅是力学范围内才有定义的力学量．

【例 2.14】 已知:质量为 m 的质点在势场 V 中运动.

求:(1)DesCartes 坐标系中的 Lagrangian 和运动微分方程;

(2)平面极坐标中的 Lagrangian 和运动微分方程;

(3)球坐标中的 Lagrangian 和运动微分方程．

解:(1)DesCartes 坐标系中的 Lagrangian 是

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-V(x_1,x_2,x_3)$$

因此

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=-\dfrac{\partial V}{\partial x_k}=F_k\\ p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}=m\dot{x}_k\end{cases}$$

故,运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}_k)=F_k\qquad(k=1,2,3)$$

此即 Newton 方程．

(2)因为

$$\begin{cases}x_1=r\cos\theta\\ x_2=r\sin\theta\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{x}_2=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$$

于是,Lagrangian 是

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r,\theta)$$

因此

$$\begin{cases}p_r=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}\\ p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\ddot{r}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2-\dfrac{\partial V}{\partial r}\\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\end{cases}$$

而广义力是

$$\begin{cases} Q_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_r = F_r \\ Q_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial(r\boldsymbol{e}_r)}{\partial \theta} = r\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = rF_\theta \end{cases}$$

故,运动微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$$

其中,第二个方程的等号两边消去了公因子 r.

(3)因为

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{x}_3 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

于是,Lagrangian 是

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V(r, \theta, \varphi)$$

因此

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin 2\theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}\sin^2\theta) - \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\sin 2\theta - \dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

而广义力是

$$\begin{cases} Q_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = F_r \\ Q_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = rF_\theta \\ Q_\varphi = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = r\sin\theta F_\varphi \end{cases}$$

故,运动微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \dfrac{1}{2}r\dot{\varphi}^2\sin 2\theta) = F_\theta \\ m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta) = F_\varphi \end{cases}$$

其中,第二个方程的等号两边消去了公因子 r,第三个方程的等号两边消去了公因子 $r\sin\theta$.

【例 2.15】 已知:质量为 m 的质点作一维运动,其 Lagrangian 是

$$L=\frac{1}{12}m^2\dot{x}^4+m\dot{x}^2f(x)-f^2(x)$$

式中 $f(x)$是 x 的某一可微函数.

求:质点的运动微分方程;并说明它与 Newton 方程的关系.

解:因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=m\dot{x}^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}-2f\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\\ p=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\dfrac{1}{3}m^2\dot{x}^3+2m\dot{x}f(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(m\dot{x})^2\ddot{x}+2m\ddot{x}f(x)+2m\dot{x}^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\end{cases}$$

代入 Lagrange 方程后得到

$$(m\dot{x}^2+2f)\left(m\ddot{x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

即

$$m\ddot{x}=-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

可见,只要 $f(x)$是势能 $V(x)$,则上述方程与 Newton 方程完全一样.

【例 2.16】 已知:质量为 m 的质点在重力场中的曲线上运动;曲线的参数方程为

$$x_k=x_k(s)\qquad(k=1,2,3)$$

x_3 轴方向向上.

求:质点的运动微分方程.

解:因为

$$\dot{x}_k=\left(\frac{\partial x_k}{\partial s}\right)^{\cdot}\dot{s}$$

所以,Lagrangian 是

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_k)^2-mgx_3=\frac{1}{2}m\left(\frac{\partial x_k}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial s}\right)^{\cdot}\dot{s}^2-mgx_3(s)$$

因而有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial s}=m\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\dfrac{\partial^2x_k}{\partial s^2}\right)^{\cdot}\dot{s}^2-mg\dfrac{\partial x_3}{\partial s}\\ p=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{s}}=m\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\right)^{\cdot}\dot{s}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{s}}=m\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\right)^{\cdot\cdot}\ddot{s}+2m\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial s}\dfrac{\partial^2x_k}{\partial s^2}\right)^{\cdot}\dot{s}^2\end{cases}$$

代入 Lagrange 方程后得到

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial s}\right)^{\cdot\cdot}\ddot{s}+\left(\frac{\partial x_k}{\partial s}\frac{\partial^2x_k}{\partial s^2}\right)^{\cdot}\dot{s}^2+g\frac{\partial x_3}{\partial s}=0$$

【例 2.17】 已知:粒子的相对论 Lagrangian L 是

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}-V$$

式中

$$\beta_k=\frac{v_k}{c}=\frac{\dot{x}_k}{c}\qquad(k=1,2,3)$$

而 m_0 为粒子的静质量.

求:粒子的运动微分方程.

解:因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=-\dfrac{\partial V}{\partial x_k}=Q_k=F_k\\[2ex] p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}=m_0c^2\dfrac{\dfrac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{m_0\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

于是,代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=F_k$$

【例 2.18】 已知:质量为 m 的质点置于半径为 a 的光滑固定球面的顶端;因受小扰动此质点从球面顶端滑下;质点和球心连线与竖直向上直线之间的夹角为 θ(图 2.13).

求:(1)球面对质点的约束反力;

(2)质点脱离球面时 θ 角的大小.

解:(1)以球心为原点,过原点的向上直径为 x_2 轴,建立坐标系.质点的坐标为

$$(r\sin\theta,r\cos\theta)$$

因而系统的 Lagrangian L 是

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-mgr\cos\theta$$

而约束方程为 $r=a$,因此

$$f=r-a=0$$

将以上两式代入具有多余约束的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

得到

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)+mg\cos\theta=\lambda\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})-mgr\sin\theta=0\end{cases}$$

由此解得

$$\lambda=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)+mg\cos\theta$$

因此在球面上($r=a,\ddot{r}=0$)有

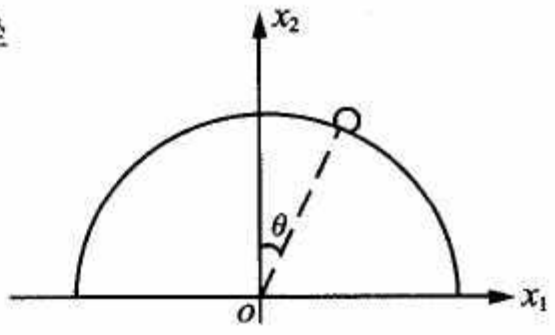


图 2.13

$$\lambda = -ma\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

另外，由关于 θ 的 Lagrange 方程，有

$$a\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} - g\sin\theta = 0$$

或

$$a\dot{\theta}^2 + 2g(\cos\theta - 1) = 0$$

将上式代入 λ 得表达式，有

$$\lambda = mg(3\cos\theta - 2)$$

于是，约束反力为

$$N = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = mg(3\cos\theta - 2)$$

(2)当质点脱离球面时，$N=0$，从而得到

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

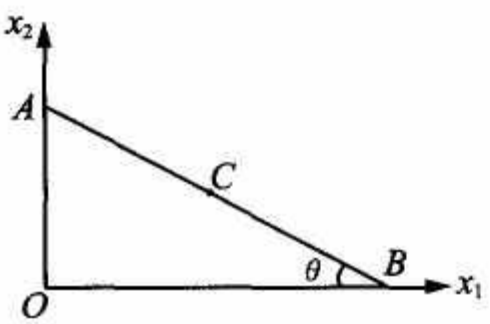


图 2.14

【例 2.19】 已知：质量为 m 长为 $2l$ 的匀质棒 AB，在重力作用下其 A 端可沿光滑墙面滑动，其 B 端可沿光滑的水平面滑动；匀质棒 AB 与水平面之间的夹角为 θ；初始时，匀质棒 AB 静止且 $\theta=\theta_0$(图 2.14).

求：(1)匀质棒 AB 的角速度 $\dot{\theta}$；

(2)匀质棒 AB 的 A 端脱离墙面时 θ 的大小.

解：(1)以水平面与墙根的交点为原点，水平面为 x_1 轴，墙面向上方向为 x_2 轴，建立坐标系. 匀质棒 AB 的质心 C 的坐标为 $C(l\cos\theta, l\sin\theta)$. 匀质棒 AB 绕质心 C 转动的转动惯量为 $\left(\frac{1}{3}ml^2\right)$. 因此，系统的 Lagrangian 为

$$L = \frac{1}{2}m[(-l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta)^2] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$$

$$= \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$$

将上式改写为

$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{3g}{4l}\cos\theta$$

然后在等号两边积分，并代入初始条件，得到

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{2l}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

故

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\sin\theta_0-\sin\theta)}$$

(2)对质心 C 的 x_1 方向的坐标求两次导数,有

$$\ddot{x}_1=-l(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

将运动微分方程和 $\dot{\theta}$ 的表达式代入上式,得到

$$\ddot{x}_1=\frac{3g}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta_0\right)$$

设匀质棒 AB 的 A 端的约束反力为 N^A. 根据 Newton 的质心运动定理

$$m\ddot{x}_1=N^A$$

有

$$N^A=\frac{3}{2}mg\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta_0\right)$$

当匀质棒 AB 的 A 端脱离墙面时,$N^A=0$,得到

$$\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta_0\right)=0$$

其中 $\cos\theta=0$,即 $\theta=\frac{\pi}{2}$不合题意. 而由$\frac{3}{2}\sin\theta=\sin\theta_0$,可得

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$$

【例 2.20】 已知:质量为 m 长为 $2l$ 的匀质棒 AB,其两端 A 和 B 分别沿一光滑框架的铅垂杆和水平杆作无摩擦滑动,而框架则以等角速度 ω 绕铅垂杆转动;匀质棒 AB 与铅垂杆之间的夹角为 θ(图 2.15).

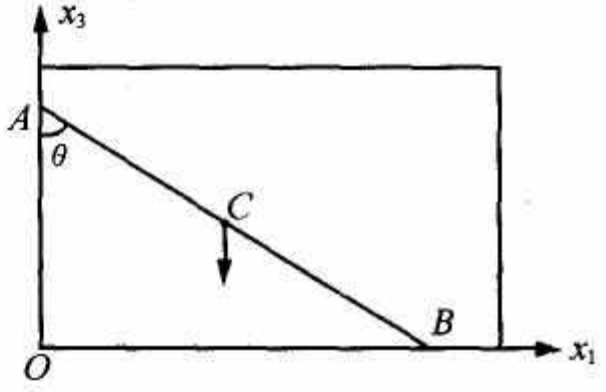


图 2.15

求:系统的运动微分方程.

解:以水平杆与铅垂杆的交点为原点,x_1 轴和 x_2 轴在水平面上,铅垂向上方向为 x_3 轴,建立坐标系. 匀质棒 AB 的质心 C 的坐标为 $C(l\sin\theta\cos\omega t, l\sin\theta\sin\omega t, l\cos\theta)$. 光滑框架以等角速度 ω 绕铅垂杆转动所产生的牵连角速度为 $\omega\sin\theta$. 匀质棒 AB 绕质心 C 转动的转动惯量为$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)$因此,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t-l\omega\sin\theta\sin\omega t)^2+(l\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t+l\omega\sin\theta\cos\omega t)^2\\&\quad+(-l\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta\\&=\frac{2}{3}ml^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta\end{aligned}$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta}-\sin\theta\left(g+\frac{4}{3}l\omega^2\cos\theta\right)=0$$

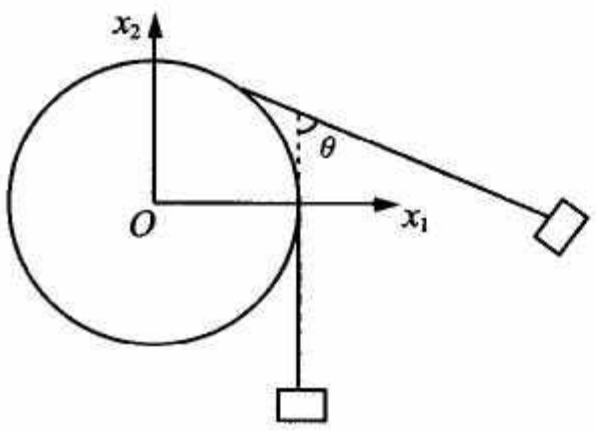


图 2.16

【例 2.21】 已知:半径为 a 的轮子不转动,其轮缘绕有细绳;绳下有一质量为 m 的质点;质点摆动到垂直位置时细绳长为 l;质点摆动到任意位置时细绳与垂直向下方向之间的夹角为 θ(图 2.16).

求:系统的运动微分方程.

解:以轮心为原点,水平方向为 x_1 轴,垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 系统的自由度数为 1,广义坐标为 θ. 质点摆动到任意位置时的坐标为

$$(a\cos\theta+(l+a\theta)\sin\theta, a\sin\theta-(l+a\theta)\cos\theta)$$

因而,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(-a\dot{\theta}\sin\theta+a\dot{\theta}\sin\theta+(l+a\theta)\dot{\theta}\cos\theta)^2+(a\dot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}\cos\theta+(l+a\theta)\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$

$$-mg(a\sin\theta-(l+a\theta)\cos\theta)=\frac{1}{2}m(l+a\theta)^2\dot{\theta}^2-mga\sin\theta+mgl\cos\theta+mga\theta\cos\theta$$

由于

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(l+a\theta)^2\ddot{\theta}+2ma(l+a\theta)\dot{\theta}^2\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=ma(l+a\theta)\dot{\theta}^2-mg(l+a\theta)\sin\theta\end{cases}$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$(l+a\theta)\ddot{\theta}+a\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$$

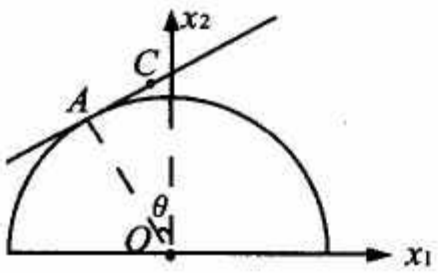


图 2.17

【例 2.22】 已知:长为 l 的匀质杆置于半径为 a 的粗糙不动半圆柱的顶端,并在小扰动下左右摆动;柱心 O 和切点 A 的连线,与垂直向上直线之间的夹角为 θ(图 2.17).

求:系统的运动微分方程.

解:以柱心 O 为原点,水平方向为 x_1 轴,垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 此时,匀质杆质心 C 的坐标是 $(a\sin\theta-a\theta\cos\theta, a\cos\theta+a\theta\sin\theta)$. 于是,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(a\dot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}\cos\theta+a\theta\dot{\theta}\sin\theta)^2+(-a\dot{\theta}\sin\theta+a\dot{\theta}\sin\theta+a\theta\dot{\theta}\cos\theta)^2]$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2-mg(a\cos\theta+a\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2-mg(a\cos\theta+a\theta\sin\theta)$$

由于

$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\left(a^2\theta^2+\dfrac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\left(a^2\theta^2+\dfrac{1}{12}l^2\right)\ddot{\theta}+2ma^2\theta\dot{\theta}^2\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=ma^2\theta\dot{\theta}^2-mga\theta\cos\theta\end{cases}$$

所以，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\ddot{\theta}+a^2\theta\dot{\theta}^2+ga\theta\cos\theta=0$$

【例 2.23】 已知：质量为 m 半径为 a 的匀质半圆柱对于其过质心 C、且与过柱心 O 的对称轴平行的轴的转动惯量为 $I=mk^2=ma^2\left[1-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right]$；质心 C 与柱心 O 之间的距离为 b；在重力作用下，半圆柱的圆周部分在水平面上作无滑滚动；质心 C 和柱心 O 的连线与竖直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.18).

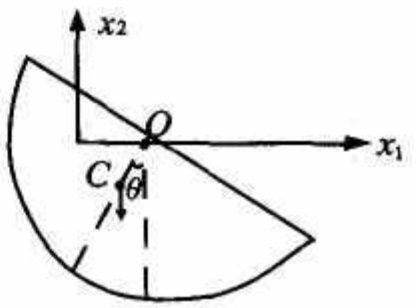


图 2.18

求：系统的运动微分方程.

解：由于柱心 O 并非固定不动的点，因此不能被选作坐标系的原点. 但是，不管半圆柱的圆周部分在水平面上滚动到什么位置，柱心 O 到水平面之间的距离总是不变的. 所以，坐标系的原点一定在过柱心 O 且与水平面平行的直线上. 至于原点的真正位置，则应在 $\theta=0$ 处，亦即半圆柱的过直径的截面与水平面平行时.

以 $\theta=0$ 处的柱心为原点建立惯性坐标系，水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴. 因而，$\theta\neq0$时柱心 O 的坐标是$(a\theta,0)$，质心 C 的坐标是$(a\theta-b\sin\theta,-b\cos\theta)$.

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(v^C)^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-V=\frac{1}{2}m[(a\dot{\theta}-b\dot{\theta}\cos\theta)^2+(b\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2+mgb\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}m(k^2+a^2+b^2-2ab\cos\theta)\dot{\theta}^2+mgb\cos\theta$$

由于

$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(k^2+a^2+b^2-2ab\cos\theta)\dot{\theta}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(k^2+a^2+b^2-2ab\cos\theta)\ddot{\theta}+2mab\dot{\theta}^2\sin\theta\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=mab\dot{\theta}^2\sin\theta-mgb\sin\theta\end{cases}$$

所以，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$(k^2+a^2+b^2-ab\cos\theta)\ddot{\theta}+ab\dot{\theta}^2\sin\theta+gb\sin\theta=0$$

【例 2.24】 已知：一轻质刚性连杆长为 l，刚性地连接质量均为 m 的轮子 A 和质点 B；半径为 a 的轮子 A 可在水平面上作无滑滚动，质点 B 则下垂作摆动；连杆与竖直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.19).

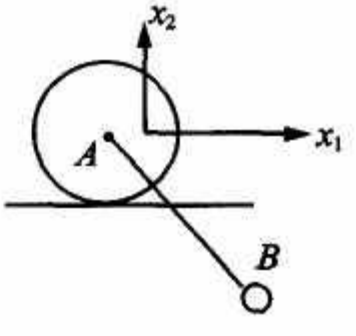


图 2.19

求：系统的运动微分方程.

解：由于系统是刚性连接，所以质点 B 摆动时连带轮子 A 也作滚动. 任意时刻的轮心坐标不能选为原点. 坐标系的原点应选 $\theta=0$ 处(即质点 B 摆动到最低位置时)的轮心. 以水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴，建立坐标系. 轮子 A 的轮心和质点 B 的坐标分别是，$A(-a\theta,0)$，

$B(-a\theta+l\sin\theta,-l\cos\theta)$.

于是,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(-a\dot{\theta}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(l\dot{\theta}\sin)^2]+\frac{1}{2}m(-a\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta\right)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

由于

$$\begin{cases}p_\theta=m\left(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta\right)\dot{\theta}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\left(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta\right)\ddot{\theta}+2mal\dot{\theta}^2\sin\theta\\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=mal\dot{\theta}^2\sin\theta-mgl\sin\theta\end{cases}$$

所以,代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta)\ddot{\theta}+mal\dot{\theta}^2\sin\theta+gl\sin\theta=0$$

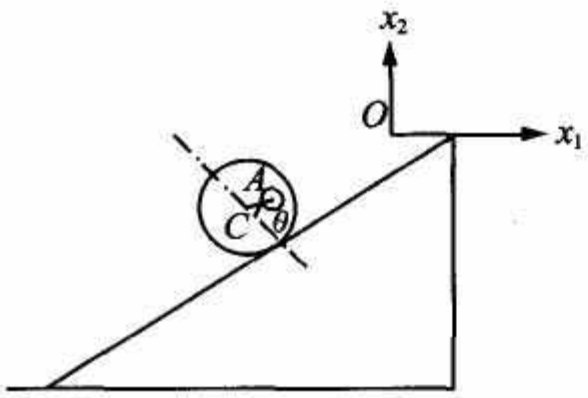


图 2.20

【例 2.25】 已知:半径为 a 的轻质圆盘嵌有一质量为 m 的质点 A;质点 A 到圆盘中心 C 的距离为 b;圆盘沿仰角为 α 的斜面滚下;CA 与斜面法线之间的夹角为 θ(图 2.20).

求:系统的运动微分方程.

解:以圆盘中心的初始位置为原点 O,水平方向为 x_1 轴竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 由于 CO 平行于斜面,因而 C 和 A 的坐标分别是

$$C(-a\theta\cos\alpha,-a\theta\sin\alpha)$$

$$A(-a\theta\cos\alpha+b\sin(\theta+\alpha),-a\theta\sin\alpha-b\cos(\theta+\alpha))$$

于是,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(-a\dot{\theta}\cos\alpha+b\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha))^2+(-a\dot{\theta}\sin\alpha+b\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha))^2]$$

$$-mg(-a\theta\sin\alpha-b\cos(\theta+\alpha))=\frac{1}{2}m(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\dot{\theta}^2+mg(a\theta\sin\alpha+b\cos(\theta+\alpha))$$

由于

$$\begin{cases}p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\dot{\theta}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\ddot{\theta}+2mab\dot{\theta}^2\sin\theta\\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=mab\dot{\theta}^2\sin\theta+mg(a\sin\alpha-b\sin(\theta+\alpha))\end{cases}$$

所以,代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$(a^2+b^2-2ab\cos\theta)\ddot{\theta}+ab\dot{\theta}^2\sin\theta+gb\sin(\theta+\alpha)-mga\sin\alpha=0$$

【例 2.26】 已知:质量为 m 长为 $2l$ 的匀质棒 AB,其 A 端可在水平槽内无摩擦地滑动,而匀质棒 AB 本身又可在竖直平面内绕 A 端摆动;除重力外,B 端还受有一水平力 F 的作用;BA 与过 A 点且与水平面垂直的直线之间的夹角为 θ(图 2.21).

求:系统的运动微分方程.

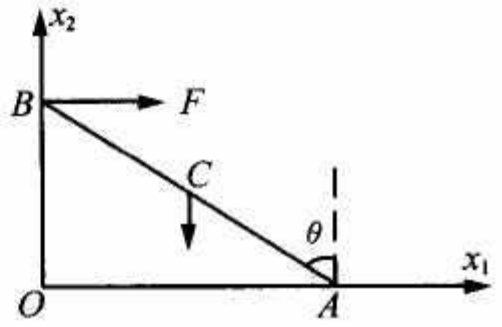


图 2.21

解:以水平面为 x_1 轴,垂直向上直线为 x_2 轴,建立坐标系. 匀质棒 AB 的质心 C 的坐标为 $(x_1-l\sin\theta, l\cos\theta)$. 因而,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1 - l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - ml\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta - mgl\cos\theta \end{aligned}$$

本题中,外加的广义力不等于零,而是

$$\begin{cases} Q_1 = F \\ Q_\theta = 2Fl\cos\theta \end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 - ml\dot{\theta}\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\ddot{x}_1 - ml\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta} - ml\dot{x}_1\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x}_1\cos\theta + ml\dot{x}_1\dot{\theta}\sin\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{x}_1\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta \end{cases}$$

于是,将 Lagrangian L 和广义力代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 - l\ddot{\theta}\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta) = F \\ m\left(\dfrac{4}{3}l\ddot{\theta} - \ddot{x}_1\cos\theta - g\sin\theta\right) = 2F\cos\theta \end{cases}$$

【例 2.27】 已知:质量为 M 半径为 a 的匀质圆盘,可绕通过盘心 O 的水平轴无摩擦地转动;在盘缘 A 处悬一质量为 m 摆长为 l 的平面单摆;盘心 O 和盘缘 A 点的连线与水平线之间的夹角为 φ,摆线与竖直向下直线之间的夹角(摆角)为 θ(图 2.22).

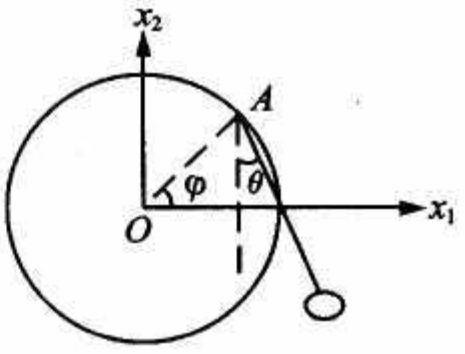


图 2.22

求:系统的运动微分方程.

解:以盘心为原点,水平方向为 x_1 轴,垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 摆锤的坐标为 $(a\cos\varphi + l\sin\theta, a\sin\varphi - l\cos\theta)$.

因而，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(-a\dot{\varphi}\sin\varphi+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(a\dot{\varphi}\cos\varphi+l\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\varphi}^2-mg(a\sin\varphi-l\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)-mg(a\sin\varphi-l\cos\theta)$$

因为

$$\begin{cases}p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\varphi}-mal\dot{\theta}\sin(\varphi-\theta)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a^2\ddot{\varphi}-mal\ddot{\theta}\sin(\varphi-\theta)-mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+mal\dot{\theta}^2\cos(\varphi-\theta)\\ \dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=-mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-mga\cos\varphi\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}-mal\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\ddot{\theta}-mal\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)+mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-mal\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta)\\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta}=mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-mgl\sin\theta\end{cases}$$

于是，将 Lagrangian L 代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a\ddot{\varphi}-ml\ddot{\theta}\sin(\varphi-\theta)+mal\dot{\theta}^2\cos(\varphi-\theta)+mg\cos\varphi=0\\ l\ddot{\theta}-a\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)-a\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta)+g\sin\theta=0\end{cases}$$

【例 2.28】 已知：质量为 M 半径为 a 的匀质圆环可绕环上某一固定点 O 在圆环自身所在的竖直平面内转动；圆环上套有一质量为 m 并可沿圆环无摩擦滑动的小珠 A；圆环圆心 C 和原点 O 的连线 CO 与水平线之间的夹角为 θ_1，圆环圆心 C 和小珠 A 的连线 CA 与水平线之间的夹角为 θ_2（图 2.23）.

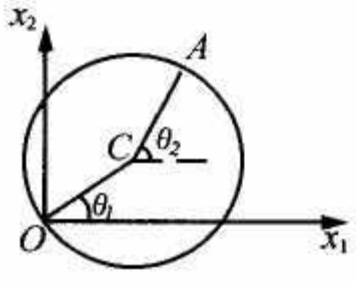


图 2.23

求：系统的运动微分方程.

解：以固定点 O 为原点，水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 小珠 A 的坐标为 $(a\cos\theta_1+a\cos\theta_2, a\sin\theta_1+a\sin\theta_2)$. 圆环对圆心 C 的转动惯量为 Ma^2，而对原点 O 的转动惯量为 $2Ma^2$. 因而，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}ma^2[(-\dot{\theta}_1\sin\theta_1-\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2+(\dot{\theta}_1\cos\theta_1+\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2]+\frac{1}{2}(2Ma^2)\dot{\theta}_1^2$$
$$-Mg(a\sin\theta_1)-mg(a\sin\theta_1+a\sin\theta_2)$$
$$=\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_2^2+ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-(M+m)ga\sin\theta_1-mga\sin\theta_2$$

因为

$$\begin{cases} p_{\theta 1}=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=(2M+m)a^2\dot{\theta}_1+ma^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=(2M+m)a^2\ddot{\theta}_1+ma^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)+ma^2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}=-ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-(M+m)ga\cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{\theta 2}=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=ma^2\dot{\theta}_2+ma^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=ma^2\ddot{\theta}_2+ma^2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)+ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-ma^2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2}=ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-mga\cos\theta_2 \end{cases}$$

于是，将 Lagrangian L 代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} (2M+m)a\ddot{\theta}_1+ma\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+ma\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+(M+m)g\cos\theta_1=0 \\ a\ddot{\theta}_2+a\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-a\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\cos\theta_2=0 \end{cases}$$

讨论：若设圆环圆心 C 和原点 O 的连线 CO 与圆环圆心 C 和小珠 A 的连线 CA 之间的夹角为 θ_2，则系统的 Lagrangian 为

$$L=(M+m)a^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_2^2+ma^2\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2+ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2+ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$-(M+m)ga\sin\theta_1-mga\sin(\theta_1+\theta_2)$$

而运动微分方程为

$$\begin{cases} 2(M+m)a\ddot{\theta}_1+2ma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2+ma\ddot{\theta}_2\cos\theta_2+ma\ddot{\theta}_2-2ma\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2-ma\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 \\ \quad +(M+m)g\cos\theta_1+mg\cos(\theta_1+\theta_2)=0 \\ a\ddot{\theta}_2+a\ddot{\theta}_1\cos\theta_2+a\ddot{\theta}_1+a\dot{\theta}_1^2\sin\theta_2+g\cos(\theta_1+\theta_2)=0 \end{cases}$$

这种形式的运动微分方程在本书稍后处有用（主要是第二个方程）.

【例 2.29】 已知：长为 l 的轻质杆 OA 可绕固定悬点 O 作自由转动；A 点处是一个质量为 m 半径为 a 且可绕 A 点作无摩擦自由转动的圆盘；圆盘边缘 B 点处粘有一质量为 m 的质点；轻质杆 OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，AB 连线与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2（图 2.24）.

求：系统的运动微分方程 .

解：以固定悬点 O 为原点，水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系 . A、B 两点的坐标分别为

$$A(l\sin\theta_1,-l\cos\theta_1)$$
$$B(l\sin\theta_1+a\sin\theta_2,-l\cos\theta_1-a\cos\theta_2)$$

因而，系统的 Lagrangian 为

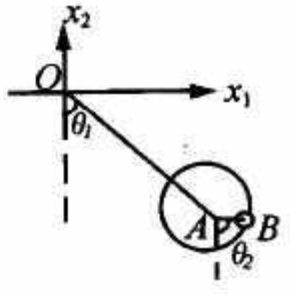


图 2.24

$$
\begin{aligned}
L=&\frac{1}{2}M[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\theta}_2^2\\
&+\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1+a\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2+(l\dot{\theta}_1\sin\theta_1+a\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2]\\
&-Mg(-l\cos\theta_1)-mg(-l\cos\theta_1-a\cos\theta_2)\\
=&\frac{1}{2}(M+m)l^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\theta}_2^2+mla\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\
&+(M+m)gl\cos\theta_1+mga\cos\theta_2
\end{aligned}
$$

因为，

$$
\begin{cases}
p_{\theta_1}=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=(M+m)l^2\dot{\theta}_1+mla\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}=(M+m)l^2\ddot{\theta}_1+mla\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-mla\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\\
\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=-mla\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-(M+m)gl\sin\theta_1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
p_{\theta_2}=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}=\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\theta}_2+mla\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}=\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a^2\ddot{\theta}_2+mla\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-mla\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\\
\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=mla\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-mga\sin\theta_2
\end{cases}
$$

于是，将 Lagrangian L 代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$
\begin{cases}
(M+m)l\ddot{\theta}_1+ma\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+ma\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+(M+m)g\sin\theta_1=0\\
\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a\ddot{\theta}_2+ml\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-ml\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+mg\sin\theta_2=0
\end{cases}
$$

2.5 Lagrange 方程的首次积分和守恒定律

一、运动积分的概念

在运动过程中始终保持不变的、以自变量$(q_k,\dot{q}_k)$表示的某种函数，被称之为“Lagrange方程的运动积分”.

系统的 Lagrangian $L=L(q_k,\dot{q}_k,t)(k=1,\cdots,m)$一般来说是$(q_k,\dot{q}_k,t)$的函数. Lagrange 方程的通解一般可表示为

$$\begin{cases} q_k = q_k(t, c_1, \cdots, c_{2m}) \\ \dot{q}_k = \dot{q}_k(t, c_1, \cdots, c_{2m}) \end{cases} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{2.5.1}$$

式中，$(c_1, \cdots, c_{2m})$为 $2m$ 个积分常数(因为 Lagrange 方程是二阶微分方程)．将(2.5.1)式中的时间 t 消去，可以得到$(2m-1)$个方程：

$$c_\alpha = c_\alpha(q_k, \dot{q}_k) \quad (k = 1, \cdots, m;\ \alpha = 1, \cdots, 2m-1) \tag{2.5.2}$$

显而易见，此$(2m-1)$个 c_α 是相互独立的；它们都是 Lagrange 方程的运动积分．

因此，m 个自由度的力学系统共有$(2m-1)$个独立的运动积分．$(2m-1)$是运动积分数目的极限，不可能比$(2m-1)$个更多．一个 3 自由度的不受约束的单个质点，至多只有 5 个运动积分；一个 5 自由度的双原子分子，至多只有 9 个运动积分；一个 6 自由度的刚体，至多只有 11 个运动积分．

原则上说，只要问题是可解的，总可以用运动积分来取代所有的 Lagrange 方程．问题既然可解，则一定有(2.5.1)式；它们当然可以取代所有的 Lagrange 方程．

但是，一句“消去时间 t”说起来容易，做起来难，尤其是对那些非线性方程．而对一般问题而言，由 Lagrange 方程得到的运动微分方程基本上都是非线性的，除非是特别简单的问题．于是，以上讨论仅仅是理论上的，具体寻找运动积分要困难得多．

Lagrange 方程的首次积分(包括循环积分和能量积分)，是根据 Lagrange 方程的对称性所能找到的最显而易见的运动积分．

二、广义动量积分(循环积分)

1. 循环坐标和可遗坐标

所谓“循环坐标”就是指在动能 T 中不出现的坐标．

所谓“可遗坐标”就是指在 Lagrangian L 中不出现的坐标．

当然，如果某些坐标不在 Lagrangian L 中出现，那么它们肯定也不会在动能 T 中出现；因为 Lagrangian L 是由动能 T 和势能 V 组成的．因此，“可遗坐标”必然是“循环坐标”，而“循环坐标”未必是“可遗坐标”．

但是，许多经典力学或分析力学教科书的作者往往混用这两个不同的概念。

2. 循环积分

若 Lagrangian L 中有某一个“可遗坐标” q_k，则由于$\dfrac{\partial L}{\partial q_k}=0$ 和 Lagrange 方程，使

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}=0$，从而使共轭于该“可遗坐标”的广义动量 $p_k=\text{const}$ 成为守恒量．

在这里有两点必须注意：①q_k“可遗”，但 $\dot{q}_k$ 不一定“可遗”；②q_k“可遗”，p_k 守恒，但 $\dot{q}_k$ 不一定守恒．

3. 关于循环积分的讨论

1)关于循环积分的物理意义

当"可遗坐标"q_k为通常的 DesCartes 坐标或 Lagrange 位形时,对应的广义动量p_k即为通常的 Newton 动量或 Lagrange 动量,循环积分则为通常的动量守恒定律.例如,在重力场中,Lagrangian L 是

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-mgx_3 \tag{2.5.3}$$

式中,(x_1,x_2)为"可遗坐标".因此,对应的循环积分就是在这两个方向上的动量守恒定律

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1=\text{const.} \\ p_2=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2=\text{const.} \end{cases} \tag{2.5.4}$$

当"可遗坐标"q_k为角坐标θ时,对应的广义动量p_k即为角动量,循环积分则为角动量守恒定律.例如,在中心势场中,Lagrangian L 是

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r) \tag{2.5.5}$$

式中,θ为"可遗坐标".因此,对应的循环积分就是角动量守恒定律

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\text{const.} \tag{2.5.6}$$

而如果中心势场中的 Lagrangian L 是球坐标的形式

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-V(r) \tag{2.5.7}$$

式中,θ和φ均为"可遗坐标";则对应的循环积分就有两个:

$$\begin{cases} p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\text{const.} \\ p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{const.} \end{cases} \tag{2.5.8}$$

2)"可遗坐标"反映了对称性

当 DesCartes 坐标或 Lagrange 位形是"可遗坐标"时,导致了动量守恒定律;但 DesCartes 坐标或 Lagrange 位形是"可遗坐标"的情况,反映的是"平移不变性";因此,动量守恒定律是与"平移不变性"一致的.

当角坐标θ是"可遗坐标"时,导致了角动量守恒定律;但角坐标θ是"可遗坐标"的情况,反映的是"转动不变性";因此,角动量守恒定律是与"转动不变性"一致的.

当角坐标θ和φ均是"可遗坐标"时,导致了角动量所有分量的守恒定律;但角坐标θ和φ均是"可遗坐标"的情况,反映的是"球对称性";因此,角动量所有分量的守

恒定律是与“球对称性”一致的.

3)广义动量守恒定律要比通常的动量守恒定律更具普遍性

这不仅仅是因为广义动量定律包括了动量守恒定律和角动量守恒定律,而且是即使在 Newton 第三定律不成立的条件下(例如存在电磁场时)仍能得到守恒定律. 众所周知, Newton 第一定律就是单个质点的动量守恒定律,Newton 第三定律就是两个质点之间的动量守恒定律;因而 Newton 第一定律和 Newton 第三定律只不过是动量守恒定律的代名词而已. 当存在电磁场时,一般来说,Newton 第三定律是不成立的. 因为,若设电磁场的矢势为 A_k,当 x_k 为“可遗坐标”时,则有

$$p_k = m\dot{x}_k + \frac{e}{c}A_k = \text{const.} \tag{2.5.9}$$

换言之,$m\dot{x}_k$ 并不守恒(也就是说,通常的动量不守恒),守恒的是它与 $\frac{e}{c}A_k$ 之和. 至于(2.5.9)式是如何得到的,将在本书的稍后部分(参阅【例 3.4】)给出.

4. 关于引入 Routh 方法的理由

以中心势场中单个质点的运动为例. 其 Lagrangian L 是

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

因为 θ 为“可遗坐标”,因此,对应的循环积分就是角动量守恒定律:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} = J_0$$

或者

$$\dot{\theta} = \frac{J_0}{mr^2} \tag{2.5.10}$$

而另一个关于 r 的运动微分方程,则可以由 Lagrange 方程得到

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{2.5.11}$$

将(2.5.10)式代入(2.5.11)式,就有

$$m\ddot{r} - \frac{J_0^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{2.5.12}$$

以上(2.5.10)式和(2.5.12)式是关于这个问题的正确解答.

但是,也有人认为可以先将(2.5.10)式代入 Lagrangian L(2.5.5)式,然后再应用 Lagrange 方程. 他的结果是

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J_0^2}{2mr^2} - V(r) \tag{2.5.13}$$

和

$$m\ddot{r} + \frac{J_0^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{2.5.14}$$

最后发现,(2.5.14)式与(2.5.12)式相比,等号左边第二项正好南辕北辙;他百思不得其解.

这里面有一个谁先谁后的问题.前一种方法是先应用 Lagrange 方程,然后代入循环积分;后一种方法是先代入循环积分,然后再应用 Lagrange 方程.前一种方法按部就班,无可挑剔,当然是完全正确的;后一种方法疑点颇多,肯定是不对的.问题是如何解释.这使人想起了在求解微分方程时,是否应该将初始条件先代入方程的问题.显而易见,先代入初始条件是完全错误的.所以,正确的做法不能像(2.5.13)那样.

难道就没有其他办法来化简 Lagrangian L 了吗?答案是:有!正确的做法是应用 Routh 方法.关于此问题,将在本书的 3.3 节中介绍.

Routh 方法的实质就是利用循环积分从 Lagrangian L 中消去"可遗坐标",从而达到化简 Lagrangian 的目的.它的作用相当于利用约束条件消去不独立的坐标以引入广义坐标.所以,"循环积分"也可以视为"非完整约束".然而,这种"非完整约束"不同于原先的"非完整约束".原先的"非完整约束"是事前加之于力学系统之上的,而这种"非完整约束"则是力学系统运动的结果.原先的"非完整约束"与力学系统的动能无关,但这种"非完整约束"却使力学系统中一部分动能变成了"势能".

三、广义能量积分

Lagrange 方程的广义能量积分有两种:在稳定约束情况下的广义能量积分被称为"Hamiltion 积分",在不稳定约束情况下的广义能量积分被称为"Jacobi 积分".

1. Hamiltion 积分

当 Lagrangian L 中不显含时间 t,即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,则由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial L}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial q_k}+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\&=0+\dot{q}_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\end{aligned}\tag{2.5.15}$$

(在演绎时已代入了 Lagrange 方程)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=0\tag{2.5.16}$$

记

$$H(q_k,\dot{q}_k,t)=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{2.5.17}$$

则(2.5.16)式就是

$$\frac{\mathrm{d}H(q_k,\dot{q}_k)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.5.18}$$

从而，得到 Lagrange 方程的广义能量(Hamiltion 积分)

$$H(q_k,\dot{q}_k)=\text{const.} \tag{2.5.19}$$

可以证明，$H(q_k,\dot{q}_k)$是系统的总能量．对总动能是广义速度的二次齐次式的保守系来说，证明是简单的．因为

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{2.5.20}$$

所以

$$\begin{aligned} H&=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-(T-V)\\ &=2T-(T-V)=T+V \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

证明时用到了两个条件：①总动能是广义速度的二次齐次式；②保守系．这第二个条件是显而易见的，因为既然有 Lagrangian L，而且在演绎时所代入的 Lagrange 方程并无非保守广义力，则系统当然是保守的．但第一个条件却并不一定．然而，尽管第一个条件并不一定，却是最普遍的，而且是在推理过程中最常用的；因此，可以粗略地认为，$H(q_k,\dot{q}_k)$就是系统的总能量．

也正是由于在一般情况下第一个条件并不一定得到满足，因此在计算系统的总能量时，“放之四海而皆准”的公式是(2.5.17)式而不是 $H=T+V$．只有在满足总动能是广义速度的二次齐次式之极特殊的情况中，才有 $H=T+V$.

公式(2.5.17)式看上去似乎比 Newton 力学中的机械能守恒定律更严格，即除了要求力是保守力之外，还加上了一个“约束与时间无关”的条件；但实际上二者并非完全相同的能量．在 Newton 力学的机械能守恒定律中，系统能量变化包含所有力做的功，其中也有约束反力所作的功；但 Lagrange 方程的广义能量积分仅含主动力所作功，并无约束反力所作功．然而，对稳定约束而言，二者又没有本质上的区别；因为当约束不随时间而变时，真实位移与虚位移之间没有区别，而约束反力在虚位移上是不做功的．

必须提请注意的是，系统的总能量 $H(q_k,\dot{q}_k)$或者 $H(q_k,\dot{q}_k,t)$并非本书第三章中所述的“Hamiltonian”．“Hamiltonian”中的自变量，除了时间 t 之外，是(p_k,q_k)，而不是$(\dot{q}_k,q_k)$．区别于“Hamiltonian”，$H(q_k,\dot{q}_k,t)$被称为“广义能量”.

2. Jacobi 积分

在不稳定情况下，

$$T=T_0+T_1+T_2$$

式中，(T_0,T_1,T_2)分别是广义速度 $\dot{q}_k$ 的零次、一次、二次齐次函数．因而，在不稳定约束情况下，只要 Lagrangian L 中不显含时间 t ，即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ 时，仍有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=0$$

记

$$h=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.5.22}$$

则由于 V 与 $\dot{q}_k$ 无关，根据 Euler 定理，有

$$\begin{aligned} h&=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=\dot{q}_k\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}-(T_0+T_1+T_2-V)\\ &=T_1+2T_2-(T_0+T_1+T_2-V)\\ &=T_2+V-T_0 \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

所以，Jacobi 积分是

$$h=T_2+V-T_0=\text{const.} \tag{2.5.24}$$

满足 Jacobi 积分的系统，被称为“非自然系统”.

3. 由 Hamiltion 积分推导运动微分方程

Lagrange 方程的循环积分就是一个运动微分方程，那么由 Lagrange 方程的 Hamiltion 能量积分能否得到运动微分方程呢？答案是肯定的．具体做法将在本书的 3.3 节中得到解决．然而，很明显的是，以下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J_0^2}{2mr^2}+V(r)\right]=0 \tag{2.5.25}$$

就是方程(2.5.12)式；而方程(2.5.25)中方括号里的量，正好就是对应于 Lagrangian L(2.5.5)式的 Lagrange 方程的 Hamiltion 能量积分

$$H=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J_0^2}{2mr^2}+V(r) \tag{2.5.26}$$

而(2.5.25)式实际上就是$\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$.

于是，可以得到结论：对应于有一个“可遗坐标”的 Lagrangian L(2.5.5)式的两个运动微分方程，一个可以从循环积分得到，另一个则可以由(代入循环积分后的)广义能量积分得到．从这一意义上来说，对于有一个“可遗坐标”的两个自由度的问题，循环积分和广义能量积分就已足够，而根本无需应用 Lagrange 方程．

换言之，每一个循环积分都可以顶替一个运动微分方程，广义能量积分可以单独顶替一个运动微分方程．

4. 具有多余约束问题 Lagrange 方程的广义能量积分

具有多余约束问题的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k} \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.27}$$

其约束方程为

$$f_\beta(q_k)=0 \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.28}$$

式中,λ_β 为 Lagrange 未定乘子.

若 Lagrangian L 中不显含时间 t,即若$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,则由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial L}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0+\dot{q}_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\right)+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\lambda_\beta\dot{q}_k\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\end{aligned}$$

可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=\lambda_\beta\dot{q}_k\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k} \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.29}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}f_\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f_\beta}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k} \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_\beta f_\beta)=\lambda_\beta\frac{\mathrm{d}f_\beta}{\mathrm{d}t}+\dot{\lambda}_\beta f_\beta \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.31}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_\beta f_\beta)-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial t}-\dot{\lambda}_\beta f_\beta$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H-\lambda_\beta f_\beta)=-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial t}-\dot{\lambda}_\beta f_\beta \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.32}$$

于是,当约束方程 $f_\beta(q_k)=0$ 与时间 t 无关、Lagrange 未定乘子 λ_β 与时间 t 无关时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H-\lambda_\beta f_\beta)=-\dot{q}_k\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial q_k}f_\beta \qquad (k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s) \tag{2.5.33}$$

如果进一步当 Lagrange 未定乘子 λ_β 是常数时,则有

$$H-\lambda_\beta f_\beta=\text{const.} \tag{2.5.34}$$

【例 2.30】 已知:质量为 m 的小珠 A 套在质量 M 为半径为 a 的细圆环上;圆环可在竖直平面内沿水平直线作无滑滚动;圆环的转角为 φ,小珠所在处的矢径与垂直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.25).

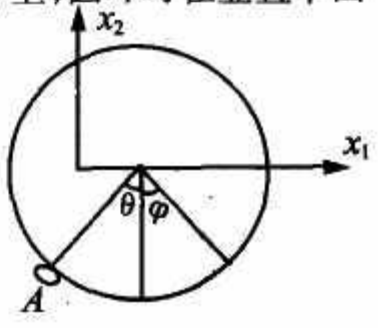


图 2.25

求:(1)系统的 Lagrangian;

(2)系统的循环积分和广义能量积分;

(3)系统的运动微分方程.

解:(1)本题中细圆环的圆心是动点,不能选为坐标系的原点. 坐标系的原点应选在小珠处于圆环最低处时(即 $\theta=0$ 或 $\varphi=0$)的圆心. 以过

此点的水平线为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴，建立坐标系．因而，细圆环的圆心的坐标为$(a\varphi,0)$，小珠 A 的坐标为

$$(a\varphi-a\sin\theta,-a\cos\theta)$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(a\dot{\varphi}-a\dot{\theta}\cos\theta)^2+(a\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}M(a\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}(Ma^2)\dot{\varphi}^2+mga\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2M+m)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-ma^2\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta+mga\cos\theta$$

(2)因为 φ 为“可遗坐标”，立得循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(2M+m)a^2\dot{\varphi}-ma^2\dot{\theta}\cos\theta=\text{const.}=J_\varphi$$

即

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi+ma^2\dot{\theta}\cos\theta}{(2M+m)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\frac{1}{2}(2M+m)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-ma^2\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta-mga\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-\frac{m^2a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2(2M+m)}-mga\cos\theta$$

式中，常数项已被删去．

(3)本题中有两个运动微分方程．其中一个就是循环积分；另一个可以由 Lagrange 方程得到

$$a\ddot{\theta}-a\ddot{\varphi}\cos\theta+g\sin\theta=0$$

或

$$a\ddot{\theta}-\frac{ma}{2M+m}(\ddot{\theta}\cos^2\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta)+g\sin\theta=0$$

此式也可以由$\frac{dH}{dt}=0$得到．

【例 2.31】 已知：质量为 m 长度为 $2l$ 的匀质棒 OA，以光滑销钉铰结在一质量为 M 半径为 a 的匀质轮子的轮心 O 上；匀质轮子可在水平轨道上作无滑滚动；匀质棒 OA 的摆角为 θ，轮子的转角为 φ(图 2.26)．

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程．

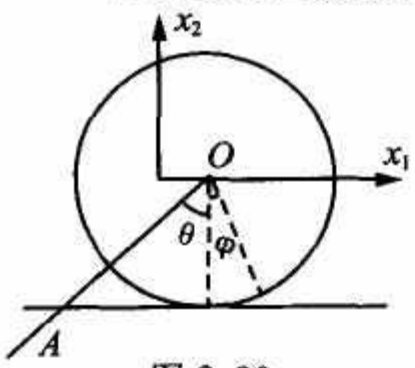


图 2.26

解：(1)本题中轮心 O 是动点，不能作为坐标系的原点．坐标系的原点应当是匀质棒 OA 处于垂直位置时(即 $\theta=0$ 或 $\varphi=0$)的轮心．以这时的轮心为原点，水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴，建立坐标系．因而，轮心 O 的坐标为$(a\varphi,0)$，匀质棒 OA 的质心的坐标为$(a\varphi-l\sin\theta,-l\cos\theta)$．

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(a\dot{\varphi}-l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(l\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M(a\dot{\varphi})^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\varphi}^2+mgl\cos\theta$$

$$=\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2-mal\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+mgl\cos\theta$$

(2)因为 φ 为“可遗坐标”,立得循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\left(\frac{3}{2}M+m\right)a^2\dot{\varphi}-mal\dot{\theta}\cos\theta=\text{const.}=J_\varphi$$

即

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi+mal\dot{\theta}\cos\theta}{\left(\frac{3}{2}M+m\right)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2-mal\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta-mgl\cos\theta$$

$$=\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2\left(\frac{3}{2}M+m\right)}-mgl\cos\theta$$

式中,常数项已被删去.

(3)本题中有两个运动微分方程. 其中一个就是循环积分;另一个可以由 Lagrange 方程得到

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta}-a\ddot{\varphi}\cos\theta+g\sin\theta=0$$

或

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta}-\frac{ml}{\frac{3}{2}M+m}(\ddot{\theta}\cos^2\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta)+g\sin\theta=0$$

此式也可以由 $\frac{dH}{dt}=0$ 得到.

【例 2.32】 已知:质量为 M 半径为 a 的空心薄壁圆筒 B 的转动对称轴 O 是固定的;圆筒内壁有一质量为 m 半径为 $(a-c)$ 的匀质圆柱体 A 可在圆筒内壁作无滑滚动;空心薄壁圆筒 B 与匀质圆柱体 A 的中心连线为 c;中心连线与竖直向下直线之间的夹角为 θ;空心薄壁圆筒 B 的转角为 φ.

求:(1)系统的 Lagrangian;

(2)系统的循环积分和广义能量积分;

(3)系统的运动微分方程.

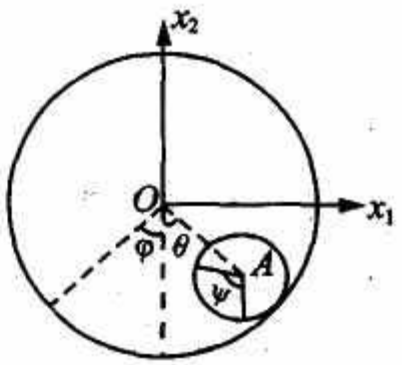


图 2.27

解:(1)以 O 为原点,水平方向为 x_1 轴,垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 圆柱体 A 的质心在坐标系中的坐标是 $(c\sin\theta,-c\cos\theta)$.

设 B 圆筒的转动惯量为 $I^B=\frac{1}{2}Ma^2$;A 圆柱绕质心转过 ψ 角,其转动惯量为 $I^A=\frac{1}{2}m(a-c)^2$. 另外,这两个圆筒和圆柱的周边是啮合的.

啮合条件为 $a(\theta+\varphi)=(a-c)(\psi+\theta)$；即在$(\theta,\varphi,\psi)$之间，只有两个是独立的．因此，解出

$$\psi=\frac{c}{a-c}\theta+\frac{a}{a-c}\varphi$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}I^B\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^A)^2+(\dot{x}_2^A)^2]+\frac{1}{2}I^A\dot{\psi}^2-mgx_2^A$$

$$=\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mc^2\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}\dot{\varphi}+mgc\cos\theta$$

(2)因为 φ 为“可遗坐标”，立得循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}=\text{const.}=J_\varphi$$

即

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi-\frac{1}{2}mac\dot{\theta}}{\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}\dot{\varphi}-mgc\cos\theta$$

$$=\frac{3M+m}{2(2M+m)}mc^2\dot{\theta}^2-mgc\cos\theta$$

式中，常数项已被删去．

(3)系统有两个运动微分方程．其中一个就是循环积分，另一个可以由 Lagrange 方程得到

$$\frac{3}{2}c\ddot{\theta}+\frac{1}{2}a\ddot{\varphi}+g\sin\theta=0$$

即

$$\frac{3M+m}{2(2M+m)}c\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

这个方程也可由$\frac{dH}{dt}=0$得到．

【例 2.33】 已知：质量为 M 半径为 a 的空心薄壁圆筒 B 可在粗糙的水平面上无滑滚动；圆筒内壁有一质量为 m 半径为$(a-c)$的匀质圆柱体 A 可在圆筒内壁作无滑滚动；空心薄壁圆筒 B 与匀质圆柱体 A 的中心连线为 c；中心连线与竖直向下直线之间的夹角为 θ；空心薄壁圆筒 B 的转角为 φ.

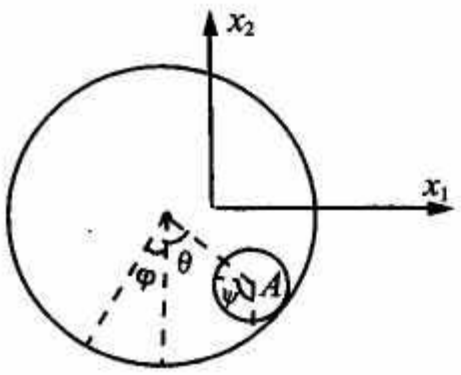


图 2.28

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程．

解：(1)本题中圆筒 B 的中心不能被设为坐标系原点，因为此点是动点．但水平 x_1 轴应该是过这原点的．所以，本题中应以系统初始状态(即 A 圆柱处于 B 圆筒的最底部)时圆筒 B 的柱心为原点，水

平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系．

设 B 圆筒的转动惯量为 $I^B=\frac{1}{2}Ma^2$；A 圆柱绕质心转过 ψ 角，其转动惯量为 $I^A=\frac{1}{2}m(a-c)^2$．于是，两个圆柱的柱心坐标分别是

$$B(-a\varphi,0)$$

$$A(-a\varphi+c\sin\theta,-c\cos\theta)$$

另外，这两个圆筒和圆柱的周边是啮合的．啮合条件为 $a(\theta+\varphi)=(a-c)(\psi+\theta)$；即在 (θ,φ,ψ) 之间，只有两个是独立的．因此，解出

$$\psi=\frac{c}{a-c}\theta+\frac{a}{a-c}\varphi$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1^B)^2+\frac{1}{2}I^B\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^A)^2+(\dot{x}_2^A)^2]+\frac{1}{2}I^A\dot{\psi}^2-mgx_2^A$$

$$=\left(M+\frac{5}{8}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{5}{8}mc^2\dot{\theta}^2+mac\dot{\theta}\dot{\varphi}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)+mgc\cos\theta$$

(2)因为 φ 为“可遗坐标”，立得循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\left(2M+\frac{5}{4}m\right)a^2\dot{\varphi}+mac\dot{\theta}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)=J_\varphi$$

也就是

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi-mac\dot{\theta}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)}{\left(2M+\frac{5}{4}m\right)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\left(M+\frac{5}{8}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{5}{8}mc^2\dot{\theta}^2+mac\dot{\theta}\dot{\varphi}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)-mgc\cos\theta$$

$$=\frac{5}{8}mc^2\dot{\theta}^2-\frac{m^2c^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)^2}{2\left(2M+\frac{5}{4}m\right)}-mgc\cos\theta$$

式中，已删去了常数项．

(3)系统的一个运动微分方程就是循环积分，另一个可以由 Lagrange 方程得到

$$\frac{5}{4}c\ddot{\theta}+a\ddot{\varphi}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)+g\sin\theta=0$$

或将循环积分代入其中有

$$\frac{5}{4}c\ddot{\theta}-\frac{mc}{2M+\frac{5}{4}m}\left[\ddot{\theta}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)+\dot{\theta}^2\sin\theta\right]+g\sin\theta=0$$

这个方程也可由 $\frac{dH}{dt}=0$ 得到．结果是一样的．

【例 2.34】 已知:质量为 m 半径为$(c-a)$的圆柱 A,和质量为 M 半径为 a 的圆柱 B 的对称轴都是水平的,且重心处在同一竖直平面内;A、B 两圆柱的连心线长为 c;A、B 两圆柱的连心线与竖直向上直线之间的夹角为 θ;初始时,系统是静止的且 A 圆柱处于 B 圆柱的顶端(图 2.29).

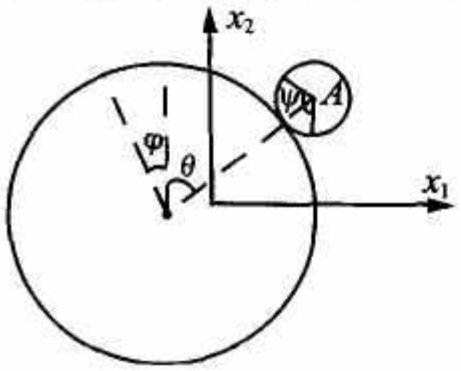


图 2.29

求:(1)系统的 Lagrangian;

(2)系统的循环积分和广义能量积分;

(3)圆柱 A 的柱心在任意时刻的位置.

解:(1)本题中圆柱 B 的柱心不能被设为坐标系原点,因为此点是动点. 但水平 x_1 轴应该是过这原点的. 所以,本题中应以系统初始状态(即 A 圆柱处于 B 圆柱的顶端)时圆柱 B 的柱心为原点,水平方向为 x_1 轴垂直向上方向为 x_2 轴,建立坐标系.

设 B 圆柱绕质心转过 φ 角,其转动惯量为 $I^B=\frac{1}{2}Ma^2$;A 圆柱绕质心转过 ψ 角,其转动惯量为 $I^A=\frac{1}{2}m(c-a)^2$. 于是,两个圆柱的柱心坐标分别是

$$B(-a\varphi,0)$$

$$A(-a\varphi+c\sin\theta,c\cos\theta)$$

另外,这两个圆柱的周边是啮合的. 啮合条件为 $a(\theta+\varphi)=(c-a)(\psi-\theta)$;即在$(\theta,\varphi,\psi)$之间,只有两个是独立的. 因此,解出

$$\psi=\frac{c}{c-a}\theta+\frac{a}{c-a}\varphi$$

于是,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1^B)^2+\frac{1}{2}I^B\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^A)^2+(\dot{x}_2^A)^2]+\frac{1}{2}I^A\dot{\psi}^2-mgx_2^A$$

$$=\frac{3}{4}(M+m)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}\dot{\varphi}(1-2\cos\theta)-mgc\cos\theta$$

(2)因为 φ 为"可遗坐标",立得循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{3}{2}(M+m)a^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}(1-2\cos\theta)=J_\varphi$$

也就是

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi-\frac{1}{2}mac\dot{\theta}(1-2\cos\theta)}{\frac{3}{2}(M+m)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\frac{3}{4}(M+m)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mac\dot{\theta}\dot{\varphi}(1-2\cos\theta)+mgc\cos\theta$$

$$=\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2-\frac{m^2c^2\dot{\theta}^2(1-2\cos\theta)^2}{12(M+m)}+mgc\cos\theta$$

式中,已删去了常数项.

(3)由初始条件知,$J_\varphi=0$,于是删去常数项更有理由. 故

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}(M+m)a^2\dot{\varphi}+\dfrac{1}{2}mac\dot{\theta}(1-2\cos\theta)=0\\ H=\dfrac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2-\dfrac{(mc)^2}{12(M+m)}\dot{\theta}^2(1-2\cos\theta)^2+mgc\cos\theta\end{cases}$$

将上述第一式积分，又有

$$\frac{3}{2}(M+m)a^2\varphi+\frac{1}{2}mac(\theta-2\sin\theta)=\varphi_0$$

由初始条件又知，$\varphi_0=0$，故可得

$$\varphi=\frac{(2\sin\theta-\theta)mc}{3(M+m)a}$$

最后，将 φ 代入 $A(-a\varphi+c\sin\theta,c\cos\theta)$，得到

$$\begin{cases}x_1^A=\dfrac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}c\\ x_2^A=c\cos\theta\end{cases}$$

【例 2.35】 已知：质量为 m 长度为 l 的匀质杆 A 置于质量为 M 半径为 a 的圆球 B 的顶端；在小扰动作用下，匀质杆 A 绕球心 C 转过 θ 角，而圆球 B 也绕球心 C 转过 φ 角(图 2.30).

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程.

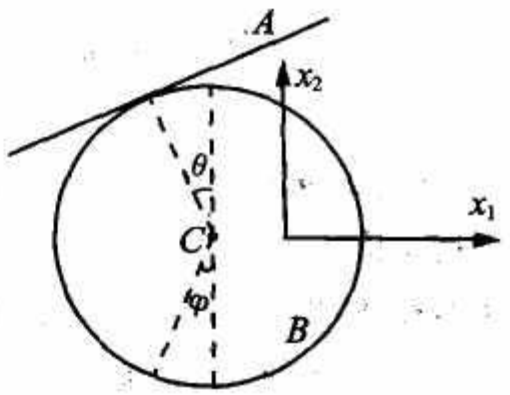


图 2.30

解：(1)本题中圆球 B 的球心 C 不能被设为坐标系原点，因为此点是动点. 但水平 x_1 轴应该是过这原点的. 所以，本题中应以系统初始状态(即匀质杆 A 处于圆球 B 的顶端)时其 B 的球心为原点，水平方向为 x_1 轴，垂直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 因此，球心 C 的坐标为 $(-a\varphi,0)$，匀质杆 A 的质心的坐标为

$$(-a\varphi-a\sin\theta+a\theta\cos\theta,a\cos\theta+a\theta\sin\theta)$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(-a\dot{\varphi}-a\dot{\theta}\cos\theta+a\dot{\theta}\cos\theta-a\theta\dot{\theta}\sin\theta)^2+(-a\dot{\theta}\sin\theta+a\dot{\theta}\sin\theta+a\theta\dot{\theta}\cos\theta)^2]$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M(-a\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\dot{\varphi}^2-mg(a\cos\theta+a\theta\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2+ma^2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta-mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

(2)因为 φ 为“可遗坐标”，立得循环积分

$$p_\varphi=\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2\dot{\varphi}+ma^2\theta\dot{\theta}\sin\theta=\text{const.}=J_\varphi$$

即

$$\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi-ma^2\theta\dot{\theta}\sin\theta}{\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2}$$

而广义能量积分为

$$H=\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2+ma^2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2-\frac{m^2a^2\theta^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta}{2\left(\frac{7}{5}M+m\right)}+mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

式中,已删除了常数项.

(3)系统的运动微分方程有两个.一个就是循环积分;另一个可以由Lagrange方程得到

$$\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\ddot{\theta}+a^2\theta\dot{\theta}^2+a^2\theta\ddot{\varphi}\sin\theta+ga\theta\cos\theta=0$$

即

$$\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\ddot{\theta}+a^2\theta\dot{\theta}^2-\frac{ma^2}{\frac{7}{5}M+m}(\theta^2\ddot{\theta}\sin^2\theta+\theta\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\theta^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)+ga\cos\theta=0$$

此式也可以由$\frac{dH}{dt}=0$得到.

【例 2.36】 已知:一根弯成任意平面曲线形状的金属丝可绕曲线所在平面中的固定轴以等角速度ω旋转;金属丝上套着一质量为m的小珠;小珠所具有的势能为$V(r)$;r是金属丝上各点至转动对称轴的距离;$r=f(s)$是曲线的方程;s是小珠在金属丝上的弧坐标.

求:系统的 Jacobi 能量积分.

解:因为

$$(dr)^2+(dx_3)^2=(ds)^2$$

即

$$\dot{r}^2+\dot{x}_3^2=\dot{s}^2$$

所以,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\omega^2r^2)-V(r)=\frac{1}{2}m[\dot{s}^2+\omega^2f^2(s)]-V(s)$$

由于

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{s}}=m\dot{s}$$

于是,系统的 Jacobi 能量积分为

$$h=\frac{1}{2}m\dot{s}-\frac{1}{2}m\omega^2f^2(s)+V(s)$$

其中,第一项$\frac{1}{2}m\dot{s}^2$是小珠作相对运动的动能,第三项$V(r)$是小珠所具有的势能;而第二项$-\frac{1}{2}m\omega^2f^2(s)$与小珠牵连运动的动能$\frac{1}{2}m\omega^2f^2(r)$南辕北辙,正好差一个负号.所以,系统的Jacobi能量积分什么都不是.

2.6 广义动量定理:瞬时力问题

一、瞬时力和广义冲量

1. 瞬时力

若有某种主动力 $F_i(i=1,\cdots,3n)$作用的时间很短,尽管 F_i 的值很大,但其冲量

$$G_i = \int_0^{\Delta t} F_i \mathrm{d}t \tag{2.6.1}$$

的值有限,则称这种主动力为"瞬时力".

2. 广义冲量

广义冲量定义为"d'Alembert 冲量"在广义坐标空间(Lagrange 位形空间)的投影:

$$G_k = G_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \int_0^{\Delta t} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} Q_k \mathrm{d}t \quad (i=1,\cdots,3n;k=1,\cdots,m) \tag{2.6.2}$$

二、广义动量定理

1. 由"d'Alembert 动量定理"推导广义动量定理

"d'Alembert 动量定理"是"d'Alembert 位形空间"中的 Newton 动量定理:

$$p_i(\Delta t) - p_i(0) = \int_0^{\Delta t} F_i \mathrm{d}t = G_i \qquad (i=1,\cdots,3n) \tag{2.6.3}$$

式中,$p_i(0)$是 $t=0$ 时刻的"d'Alembert 动量",$p_i(\Delta t)$是 $t=\Delta t$ 时刻的"d'Alembert 动量".

将"d'Alembert 动量定理"投影到广义坐标空间(Lagrange 位形空间),即在(2.6.3)式等号两边同时"点乘"$\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$,有

$$p_k(\Delta t) - p_k(0) = \int_0^{\Delta t} Q_k \mathrm{d}t = G_k \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.6.4}$$

此即广义动量定理.

2. 由 Lagrange 方程推导广义动量定理

对理想、完整系统的 Lagrange 方程的等号左边两项和右边分别从$t=0$时刻至

$t=\Delta t$时刻求积分，有

$$\begin{cases}\int_0^{\Delta t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}t=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big|^{\Delta t}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big|_0=p_k(\Delta t)-p_k(0)\\ \int_0^{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{\max}\Delta t\to 0\\ \int_0^{\Delta t}Q_k\mathrm{d}t=G_k\end{cases}\tag{2.6.5}$$

上述第二个式子中，由于$\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)_{\max}$是一个有限值，因此在$\Delta t\to 0$时趋于零.

由(2.6.5)式，同样可以得到广义动量定理(2.6.4)式.

于是，本书用两种方法推导了广义动量定理. 两种方法完全等价.

三、吴大猷先生的“猝量理论”

吴大猷先生(1907～2000)于1997年发现的“猝量理论”与上述广义动量定理有异曲同工之妙.“猝量理论”中的“猝量”定义为

$$\Lambda_i=\int_0^{\Delta t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\ddot{x}_i)\mathrm{d}t=m\ddot{x}_i(\Delta t)-m\ddot{x}_i(0)=F_i(\Delta t)-F_i(0)\qquad(i=1,\cdots,3n)\tag{2.6.6}$$

将(2.6.6)式投影到广义坐标空间(Lagrange位形空间)后，有

$$\Lambda_k=Q_k(\Delta t)-Q_k(0)\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{2.6.7}$$

它表示广义力的瞬时变化.

在Newton力学中，当

$$\overline{F}_i=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}F_i\mathrm{d}t\tag{2.6.8}$$

时，冲量

$$G_i=\overline{F}_i\tau\tag{2.6.9}$$

而在“猝量理论”中，当

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t}\right)}=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\tag{2.6.10}$$

时，“猝量”

$$\Lambda_i=\overline{\left(\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t}\right)}\tau\tag{2.6.11}$$

吴大猷先生说：“文中是Newton以来300余年第一次有人分析猝变运动的细

节．所引人的新名词 jumpulse $\left(\overline{\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}t}}\right)\tau$ 乃沿自冲量(impulse) $\overline{F_\tau}$．我乃完全用Newton力学，无新假设；但可能在实用上(如制动，高尔夫球手)有发展处．”

必须指出的是，在运动学中曾有过“急度”或“急动度”(位移对时间的三次导数)方面的研究(在讨论速度或加速度的极值时需要“急度”或“急动度”)，但它们与动力学问题的“猝量理论”完全是两码事．“猝量”与“急动度”之间的关系犹如“冲量”与“加速度”之间的关系．至于与“猝量理论”相关的 Lagrange 方程，则应有“广义经典力学”的形式．通常的 Lagrange 方程是无法描述“猝量”的．

【例 2.37】 已知：4 根质量均为 m 长度均为 l 的匀质杆，端点铰连成菱形并置于光滑水平面上；菱形的初始形状为正方形，质心为 C；以过相对两端点 B 和 A 的直线为 x_2 轴，垂直方向为 x_1 轴，建立惯性坐标系；系统的自由度数为 2，广义坐标为质心 C 在 x_2 轴上的坐标 x_2^C 和杆与 x_1 轴之间的夹角 θ(图 2.31)．

(1)若系统初始时静止，而后在 A 点突然受到沿 AB 方向的冲量 G．

求：冲击终结时 A 点的速度．

(2)若初始时系统以速度 v_0 沿 BA 方向运动，而后突然将 A 点固定．

求：A 点固定后质心 C 的速度和杆的角速度；以及系统的能量损失．

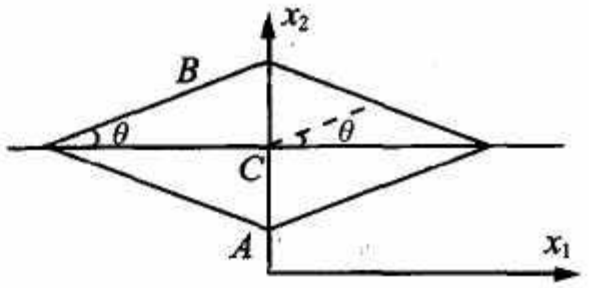


图 2.31

解：由 J. S. König 定理可知，系统的总动能等于质心 C 的动能 $\left[\frac{1}{2}(4m)(\dot{x}_2^C)^2\right]$ 加上 4 根匀质杆相对于质心 C 的动能；而每根匀质杆的动能又等于每根匀质杆质心的动能 $\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}\right)^2\right]$ 加上每根匀质杆绕其质心的转动动能 $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2\right]$．于是，由于系统是置于光滑水平面上的，故其 Lagrangian等于总动能，即

$$L = T = \frac{1}{2}(4m)(\dot{x}_2^C)^2 + 4\left[\frac{1}{2}m(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2)\dot{\theta}^2\right] = 2m(\dot{x}_2^C)^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

从而

$$\begin{cases} p_2^C = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2^C} = 4m\dot{x}_2^C \\ p_\theta = \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta} \end{cases}$$

而 A 点的位矢是

$$\boldsymbol{r}^A = (x_2^C - l\sin\theta)\boldsymbol{i}_2$$

求时间导数后是 A 点的速度

$$\boldsymbol{v}^A = (\dot{x}_2^C - l\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{i}_2$$

(1)初始静止，A 点突然受到沿 AB 方向的冲量 $G = \int_0^{\Delta t} F\mathrm{d}t$，因而广义冲量是

$$\begin{cases} G_{C2}=\int_0^{\Delta t}\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^A}{\partial \dot{x}_2^C}\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}F\mathrm{d}t=G \\ G_\theta=\int_0^{\Delta t}\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}^A}{\partial \dot{\theta}}=-\int_0^{\Delta t}Fl\cos\theta\mathrm{d}t=-\dfrac{l}{\sqrt{2}}G \end{cases}$$

其中第二式最后一步是由于冲量作用 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时得到的.

将以上结果代入广义冲量定理,并利用 $\dot{x}_2^C(0)=0$ 和 $\dot{\theta}(0)=0$,有

$$\begin{cases} 4m\dot{x}_2^C=G \\ \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta}=-\dfrac{l}{\sqrt{2}}G \end{cases}$$

进一步代入 $\boldsymbol{v}^A$ 的表达式,并应用 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 的条件,得到

$$\boldsymbol{v}^A=\left(\dot{x}_2^C-\frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i}_2=\left(\frac{G}{4m}+\frac{3G}{8m}\right)\boldsymbol{i}_2=\frac{5G}{8m}\boldsymbol{i}_2$$

(2)系统原先以等速度($-v_0\boldsymbol{i}_2$)运动,而后突然将 A 点固定,即有

$$\dot{x}_2^C-\frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\theta}=0$$

这种情况可视为由于 A 点受到一个外加冲量 G' 的结果. 利用 $\dot{x}_2^C(0)=-v_0$ 和 $\dot{\theta}(0)=0$,可写出广义动量定理为

$$\begin{cases} 4m(\dot{x}_2^C+v_0)=G' \\ \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}G' \end{cases}$$

从这 3 个式子中消去 G' 联立求解,得到

$$\begin{cases} \dot{x}_2^C=-\dfrac{3}{5}v_0 \\ \dot{\theta}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\left(\dfrac{v_0}{l}\right) \end{cases}$$

系统的能量损失为

$$\Delta T=\frac{1}{2}(4m)v_0^2-\left[-2m\left(-\frac{3}{5}v_0\right)^2+\frac{2}{3}ml^2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{v_0}{l}\right)^2\right]=\frac{4}{5}mv_0^2$$

由此可见,在这种情况下,能量是不守恒的.

【例 2.38】 (1)已知:质量为 m 的匀质杆其两端的速度分别为(u_i,v_i),($i=1,2,3$).

求证:其动能为 $T=\frac{1}{6}m(u^2+v^2+u_iv_i)$.

(2)3 根质量均为 m 长度均为 l 的匀质杆 OA、AB、BC 在 A 和 B 处铰连;整个系统以 O 为悬点被悬挂着,并在重力作用下处于平衡状态;今 AB 杆突然受到一冲量矩 $\boldsymbol{K}$ 的作用.

求:A、B、C 3 点的速度,及受冲击后的瞬时动能.

(1)**证**:设匀质杆质心坐标为(x_1,x_2),匀质杆与过质心的水平线之间的夹角为 θ;则匀质杆两端的坐标分别为

$$\begin{cases}\left(x_1-\frac{l}{2}\cos\theta, x_2-\frac{l}{2}\sin\theta\right)\\ \left(x_1+\frac{l}{2}\cos\theta, x_2+\frac{l}{2}\sin\theta\right)\end{cases}$$

而两端的速度分别为

$$\begin{cases}(\dot{x}_1+\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \dot{x}_2-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\\ (\dot{x}_1-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \dot{x}_2+\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}&u^2+v^2+u_iv_i\\ &=\left[\left(\dot{x}_1+\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\dot{x}_2-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right]+\left[\left(\dot{x}_1-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2+\left(\dot{x}_2+\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2\right]\\ &\quad+\left[\left(\dot{x}_1+\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\left(\dot{x}_1-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)+\left(\dot{x}_2-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\left(\dot{x}_2+\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\right]\\ &=3(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2=\frac{6}{m}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot{\theta}^2\right]=\frac{6}{m}T\end{aligned}$$

从而

$$T=\frac{1}{6}m(u^2+v^2+u_iv_i)$$

(2)**解**:由 $T=\frac{1}{6}m(u^2+v^2+u_iv_i)$,有

$$\begin{cases}T^{OA}=\frac{1}{6}mv_A^2\\ T^{AB}=\frac{1}{6}m(v_A^2+v_B^2+v_Av_B)\\ T^{BC}=\frac{1}{6}m(v_B^2+v_C^2+v_Bv_C)\end{cases}$$

根据广义动量定理,可列出方程组(势能与速度无关,从略)

$$\begin{cases}\frac{\partial T^{OA}}{\partial v_A}=\frac{1}{3}mv_A=G_A\\ \frac{\partial T^{AB}}{\partial v_A}=\frac{1}{3}mv_A+\frac{1}{6}mv_B=-G_A+\frac{K}{l}\\ \frac{\partial T^{AB}}{\partial v_B}=\frac{1}{3}mv_B+\frac{1}{6}mv_A=G_B-\frac{K}{l}\\ \frac{\partial T^{BC}}{\partial v_B}=\frac{1}{3}mv_B+\frac{1}{6}mv_C=-G_B\\ \frac{\partial T^{BC}}{\partial v_C}=\frac{1}{3}mv_C+\frac{1}{6}mv_B=0\end{cases}$$

从而可以解得

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{27}{13}\left(\dfrac{K}{ml}\right) \\ v_B = -\dfrac{30}{13}\left(\dfrac{K}{ml}\right) \\ v_C = \dfrac{15}{13}\left(\dfrac{K}{ml}\right) \end{cases}$$

瞬时动能为

$$T = T^{OA} + T^{AB} + T^{BC} = \frac{57}{26}\left(\frac{K^2}{ml^2}\right)$$

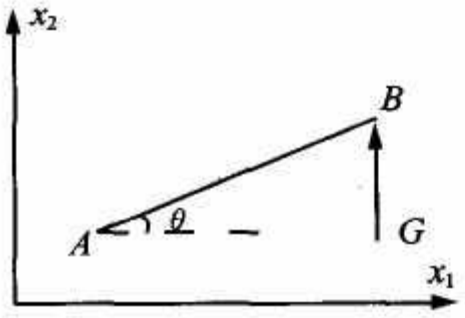


图 2.32

【例 2.39】 已知:质量均为 m 的两个质点由长度为 l 的轻质杆刚性连接;质点 A 的坐标为(x_1, x_2),轻质杆与 x_1 轴之间的夹角为 θ;初始时系统静止不动且 $\theta(0)=0$;今在质点 B 处作用一个与 x_2 轴平行的冲量 G(图 2.32).

求:系统受冲击后的广义速度.

解:因为质点 B 的坐标为$(x_1+l\cos\theta, x_2+l\sin\theta)$,所以系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1 - l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{x}_2 + l\dot{\theta}\cos\theta)^2]$$

$$= m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - ml\dot{x}_1\dot{\theta}\sin\theta + ml\dot{x}_2\dot{\theta}\cos\theta$$

于是

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 - ml\dot{\theta}\sin\theta \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 2m\dot{x}_2 + ml\dot{\theta}\cos\theta \\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - ml\dot{x}_1\sin\theta + ml\dot{x}_2\cos\theta \end{cases}$$

代入广义动量定理,有方程组

$$\begin{cases} 2m\dot{x}_1 - ml\dot{\theta}\sin\theta = 0 \\ 2m\dot{x}_2 + ml\dot{\theta}\cos\theta = G \\ ml(l\dot{\theta} - \dot{x}_1\sin\theta + \dot{x}_2\cos\theta) = Gl\cos\theta \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{G}{2m}\sin\theta\cos\theta \\ \dot{x}_2 = \dfrac{G}{2m}\sin^2\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{G}{ml}\cos\theta \end{cases}$$

再代入初始条件 $\theta(0)=0$,又有

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = 0\\ \dot{\theta} = \dfrac{G}{ml}\end{cases}$$

2.7 广义势能和带电粒子在电磁场中的 Lagrangian

一、广义势能

仔细观察一下 Lagrange 方程就可发现，只要将广义力写成如下形式：

$$Q_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \qquad (k = 1,\cdots,m) \tag{2.7.1}$$

则 Lagrangian 仍可有原有的形式

$$L = T - U \tag{2.7.2}$$

而同时保证 Lagrange 方程形式不变.

由(2.7.1)式可以看出，$U = U(q_k, \dot{q}_k, t)$除了与广义坐标 q_k 有关外，还是广义速度 $\dot{q}_k$ 和时间 t 的函数. 这种形式的势能，被称为“广义势能”或“与速度有关的势能”(“速度相关势”).

“广义势能”或“与速度有关的势能”最早是由 W. E. Weber (1804～1891)在经典电动力学中提出来的；但 Weber 的推导有错. 1973 年，德国数学家 E. Schering 重新推导了经典电动力学中的“带电粒子在电磁场中的 Lagrangian”，并得到了正确的结果. 由此，E. T. Whittaker 爵士在他的《论粒子和刚体的分析动力学》(1904)一书中将这种势能称为“Schering 势”.

【例 2.40】 已知：质量为 m 的质点在平面内运动，它所受到的中心对称力为

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2\ddot{r}r - \dot{r}^2}{c^2}\right)$$

式中 r 为质点到力心之间的距离.

求：(1)产生该力的广义势；

(2)系统的 Lagrangian.

解：(1)首先分析广义势的可能形式：由于中心对称力与 r^2 成反比，因此广义势一定与 r 成反比；另外，广义势必须是标量，即分子上应该是 r^2 和 $\dot{r}^2$(不可能有 $\ddot{r}^2$ 项)这些量的线性组合. 然后，用“待定系数法”，可求得

$$U = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

可以验证

$$F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\dot{r}}{c^2 r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$
$$=\frac{2}{c^2}\left(\frac{\ddot{r}}{r}-\frac{\dot{r}^2}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{2r\ddot{r}-\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

(2)系统的 Lagrangian 为

$$L=T-U=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{r}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

【例 2.41】 已知:U 为广义势;系统的 Lagrangian$L=T-U$;动能 T 是广义速度 $\dot{q}_k$ 的二次齐次函数;

求:(1)系统的广义能量或总能量 $H(q_k,\dot{q}_k)$;

(2)当 $H=T-U$ 时 U 的形式.

解:(1)由

$$H=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\dot{q}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}-(T-U)=2T-T+U-\dot{q}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

可以得到

$$H=T+U-\dot{q}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

(2)若 $H=T-U$,则有

$$T+U-\dot{q}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}=T-U$$

即

$$\dot{q}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}=2U$$

因而,U 的形式必须是广义速度 $\dot{q}_k$ 的二次齐次函数.

讨论:有人从物理学上证明,U 的形式不能是广义速度 $\dot{q}_k$ 的二次齐次函数,否则在广义力中将出现广义加速度 $\ddot{q}_k$,而"这是不可能的"(参阅 Rosenberg,《离散系统分析动力学》,中译本,1981).但在本书 2.14 提到的"广义经典力学"中,将没有这个限制.

二、带电粒子在电磁场中的 Lagrangian

讨论带电粒子在电磁场中的 Lagrangian,实际上主要就是写出带电粒子在电磁场中的广义势.

由第一对 Maxwell 方程组(参阅附录中的(B1)式)

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}\tag{2.7.3}$$

可以得到(参阅附录中的(B8)式)

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \end{cases} \tag{2.7.4}$$

而 Lorentz 力是(参阅附录中的(B9)式)

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.7.5}$$

式中,$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$分别为电场和磁感,$(\phi,\boldsymbol{A})$分别为电磁场的标势和矢势,$e$ 为电荷,$\boldsymbol{v}$ 为电荷运动速度,c 为光速,$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}$.

将(2.7.4)式代入(2.7.5)式,并写成张量形式,有

$$\begin{aligned} F_i &= e(E_i + e_{ikl}\beta_k B_l) = e\left[-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + e_{ikl}\beta_k(e_{lpq}\partial_p A_q)\right] \\ &= e\left[-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + (\delta_{ip}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{kp})\beta_k\partial_p A_q\right] \\ &= e\left[-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + (\beta_k\partial_i A_k - \beta_k\partial_k A_i)\right] \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

由于在动力学中,v_k(即 $\beta_k c$)与 x_k 是相互独立的变量,因而

$$\beta_k\partial_i A_k = \partial_i(\beta_k A_k) \tag{2.7.7}$$

另外,由全导数算符$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+v_k\partial_k$,有

$$\beta_k\partial_k A_i = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{2.7.8}$$

将(2.7.7)和(2.7.8)两式代入(2.7.6)式,得到

$$F_i = e\left[-\partial_i(\phi - \beta_k A_k) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\right] \tag{2.7.9}$$

因为电磁场的矢势 A_i 与电荷运动速度 v_i 无关,所以(2.7.9)式又可写成

$$\begin{aligned} F_i &= e\left[-\partial_i(\phi - \beta_k A_k) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_i}(\beta_k A_k)\right] \\ &= e\left[-\partial_i(\phi - \beta_k A_k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_i}(\phi - \beta_k A_k)\right] \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

其中最后一步是由于电磁场的标势 ϕ 与电荷运动速度 v_i 无关. 于是,Lorentz 力成为

$$F_i = e\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_i} - \partial_i\right](\phi - \beta_k A_k) \tag{2.7.11}$$

将(2.7.11)式与(2.7.1)式相比较,可知

$$\begin{cases} x_k \Leftrightarrow q_k \\ v_k \Leftrightarrow \dot{q}_k \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial v_k} - \partial_k\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial}{\partial q_k}\right) \end{cases} \tag{2.7.12}$$

而广义势就是

$$U = e(\phi - \beta_k A_k) = e\left(\phi - \frac{1}{c} v_k A_k\right) \tag{2.7.13}$$

最后，写出带电粒子在电磁场中的 Lagrangian 为

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - e\left(\phi - \frac{1}{c} v_k A_k\right) \tag{2.7.14}$$

在本书第三章中将要把此 Lagrangian 变换为 Hamiltonian. 通过算符代换，又可将 Hamiltonian 写成算符，进而得到量子力学中的相关的 Schrödinger 方程.

但是，这里有一个问题，即：经典电动力学是符合相对论的，而(2.7.14)式中带电粒子的动能却是“非相对论”的，二者无法匹配；这在物理上无论如何说不过去. 正确的写法，应该全都是相对论的才有道理，即

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e(\phi - \beta_k A_k) \tag{2.7.15}$$

换言之，电磁场中的量子力学必然是相对论的，而相对论的量子力学必须是“系综诠释”的. 所有的“去相对论化”，都是不科学的.

【例 2.42】 已知：质量为 m 电荷为 e 的粒子在均匀电场 $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{i}_2$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{i}_3$ 中运动.

求：粒子的 Lagrangian 和运动微分方程.

解：由 $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{i}_2$ 和 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{i}_3$ 可知(必须满足 Coulomb 规范条件(B14)式)

$$\begin{cases} \phi = -E_0 x_2 \\ \boldsymbol{A} = \dfrac{1}{2} B_0 (-x_2 \boldsymbol{i}_1 + x_1 \boldsymbol{i}_2) \end{cases}$$

因而

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + e\left[E_0 x_2 + \frac{B_0}{2c}(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)\right]$$

式中 x_3 是“可遗坐标”，立得

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 = \text{const.}$$

另两个方程由 Lagrange 方程得到

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 - \dfrac{e}{c} B_0 \dot{x}_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \dfrac{e}{c} B_0 \dot{x}_1 = eE_0 \end{cases}$$

2.8 非完整体系的 Lagrange 方程(Routh 方程)

非完整体系的问题一直困扰力学家们达几十年,许多似是而非的想法及奇谈怪论由此而生. 问题的关键在于这些力学家只是在极力模仿完整体系中的做法而不问这些做法是否合理或无法解释清楚这些做法到底是否合理.

一、线性非完整约束问题的处理

在 Lagrange 力学中,若有 n 个质点受到 s 个完整约束和 r 个非完整约束的限制,则体系的自由度数为 $m=3n-s-r$;同时,理想完整约束条件下成立的 d'Alembert原理是

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r) \tag{2.8.1}$$

式中 L 为 Lagrangian, q_k 和 $\dot{q}_k$ 分别为广义坐标和广义速度;重复的上标和下标按 Einstein 约定求和(在本节中,采用重复的上标和下标求和的约定,以避免概念混淆). 由于其中有 r 个非完整约束,故 $(m+r)$ 个 δq^k 中只有 m 个是独立的,从而不能令上式中每个 δq^k 的系数都是零.

在通常的分析力学教科书中只能处理线性非完整系统的约束问题;在这类问题中,其 r 个线性非完整约束方程是

$$a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.2}$$

或改写成

$$a_0^\beta\mathrm{d}t+a_k^\beta\mathrm{d}q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r,;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.3}$$

将(2.8.3)式中的真实位移换成虚位移,即将微分换成变分,并考虑到等时变分条件 $\delta t=0$,有

$$a_k^\beta\delta q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.4}$$

用 Lagrange 未定乘数法,以时间 t 的任意函数 $\lambda_\beta(t)$ 标乘(2.8.4)式,然后在(2.8.1)式中减去它们的标积,便可得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta a_k^\beta\right)\delta q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.5}$$

选择 $\lambda_\beta(t)$,使不独立的 r 个虚位移前的系数为零,因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了. 于是,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta a_k^\beta \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.6}$$

将(2.8.6)式与线性非完整约束方程(2.8.2)式联立,称之为 Routh 方程组;$\lambda_\beta(t)$被称为 Lagrange 未定乘数. 方程组共有$(m+2r)$个方程;未知函数亦为$(m+2r)$个:$(m+r)$个 q_k 和 r 个$\lambda_\beta(t)$. 所以方程组是完备的.

以上处理非完整系统动力学问题的方法是经典的. 一般来说并无异议. 只有郭仲衡和高普云对由(2.8.2)式或(2.8.3)式到(2.8.4)式的做法说过:"变分和微分是两个不同的数学概念,它们间的替代并无逻辑的根据."这可能是唯一的异议. 但是,若承认变分运算规则与微分运算规则相同(现在没有理由认为这两种运算规则不同,如果不同则怎样定义变分运算规则又成了更复杂的问题.),亦即承认 d—δ 之间的普遍交换性,那么郭仲衡和高普云的异议就没有道理.

1933 年,N. G. Chetaev 引入著名的"Chetaev 条件":

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.7}$$

其中 $f^\beta = f^\beta(q_k,\dot{q}_k;t)=0$ 在线性非完整系统中,恰好就是线性非完整约束方程(2.8.2)式:

$$f_1^\beta = a_0^\beta + a_k^\beta \dot{q}^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.8}$$

正如梅凤翔先生(1938～)所说,Chetaev 条件有点怪:偏导数对 $\dot{q}_k$,变分则对 q_k. "于是,有人怀疑它,认为它是强加的."

另一个称之为"Vacco 模型"的数学结构大概是在 1982～1983 年间提出来的. Vacco模型的出发点是 Hamilton 原理(关于 Hamilton 原理将在 2.14 节中提到)

$$\delta\int (L+\lambda_\beta f_1^\beta)\mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.9}$$

由 Hamilton 原理(2.8.9)式可得所谓"Vacco 条件":

$$\left[\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_1^\beta}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)-\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right]\delta q^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots r) \tag{2.8.10}$$

此外,由 $\delta f_1^\beta=0$,可得

$$\left(\frac{\partial f_1^\beta}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k\right)=0 \quad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.11}$$

若应用 Chetaev 条件(2.8.7)式,则由(2.8.11)式有

$$\frac{\partial f_1^\beta}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.12}$$

从而"Vacco 条件"(2.8.10)式就是"Chetaev 条件"(2.8.7)式.

于是问题来了:从逻辑上粗粗一看,(2.8.10)式似乎比(2.8.7)式更严格,更理性;显然,将线性非完整约束方程(2.8.8)式代入(2.8.10)式可以得到(2.8.4)式;这

与将(2.8.8)式代入(2.8.7)式可以得到(2.8.4)式的结果的确相同．但是，“Chetaev条件”从何而来？看上去没有什么道理且“有点怪”的 Chetaev 模型，既不能由力学分析的形式得到(即不能从 Hamilton 原理得到)，又不能由约束方程的逻辑诱导得到(即不能从 $\delta f_1^\beta=0$ 得到)，更不符合变分学方法的规范程序(即为何“偏导数对 $\dot{q}_k$，变分则对 q_k”)，但应用 Chetaev 条件确实可以导出系统的真实轨道方程，起码对线性非完整约束是如此．为什么？如果在非线性非完整系统中 Chetaev 条件不成立，则 Vacco 条件是否在任何情况中都正确？由此引发了“Vacco 模型”和“Chetaev 模型”长达 20 多年的争论．

二、一类非线性非完整系统的 Routh 方程

在回答上述问题之前，先研究一类非线性非完整系统的 Routh 方程．

设有非完整约束方程 $f^\beta=f^\beta(\dot{q}_k)=0$；当 $f^\beta(\dot{q}_k)$ 在 $\dot{q}_k=0$ 的小邻域内有任意阶微商时，此非完整约束方程可展成 MacLaurin 级数的形式：

$$f^\beta(\dot{q}_k)=(f^\beta)_0+\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f^\beta}{\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^j\dot{q}^k+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f^\beta}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k+\cdots$$

$$=a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\dot{q}^k+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k+\cdots=0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.13}$$

式中 $(a_0^\beta,a_k^\beta,a_{jk}^\beta,a_{ijk}^\beta\cdots)$ 为 Taylor 展开系数．(2.8.13)式等号右边的级数的收敛性是没有任何问题的，因为它本来就是由一个确定的函数展开得到的．由(2.8.13)式第一个等号右边的前两项组成的非完整约束方程是 $f_1^\beta=a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k=0$，亦即“线性非完整约束方程”．

仿照处理线性非完整约束方程的方法，先将(2.8.13)式写成微分形式：

$$a_0^\beta\mathrm{d}t+a_k^\beta\mathrm{d}q^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\mathrm{d}q^k+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\mathrm{d}q^k+\cdots=0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.14}$$

再将(2.8.14)式中的真实位移换成虚位移，即将微分换成变分，并利用等时变分条件 $\delta t=0$，有

$$a_k^\beta\delta q^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}_k^j\delta q^k+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\delta q^k+\cdots=0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.15}$$

用 Lagrange 未定乘数法，以时间 t 的任意函数 $\lambda_\beta(t)$ 标乘(2.8.15)式，然后在(2.8.1)式中减去它们的标积，便可得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)\right]\delta q^k=0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.16}$$

选择 $\lambda_\beta(t)$，使不独立的 r 个虚位移前的系数为零，因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了．于是，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.17}$$

将(2.8.17)式与非线性非完整约束方程(2.8.13)式联立，便得到非线性非完整系统的 Routh 方程组．在(2.8.17)式中可以看得很清楚：Routh 方程等号右端的括号$(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots)$并不一般地等于$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_k}$(除非是在线性非完整约束条件下)；换言之，Chetaev 条件并不一般地成立．

三、Chetaev 条件的分析力学解释

在以上非线性非完整系统的 Routh 方程(2.8.17)式等号右端，因为有

$$\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)\dot{q}^k=a_k^\beta\dot{q}^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\dot{q}^k+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k+\cdots$$

$$=f^\beta-(f_0^\beta)=f^\beta-a_0^\beta$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.18}$$

所以(2.8.17)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\left(\frac{f^\beta-a_0^\beta}{\dot{q}_k}\right)\qquad(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.19}$$

式中 $\dot{q}_k\dot{q}^l=\delta_k^l$，而 δ_k^l 为 Krörnecker 符号．(2.8.18)式中第一个等号左端的形式，可以使人马上联想起 Euler 定理．

接下来，将 f^β 中的每一项用级数 g_l^β 表示出来，其中 l 为项数，也表示本项是 $\dot{q}$ 的 l 次齐次函数；即

$$f^\beta=g_0^\beta+g_1^\beta+g_2^\beta+g_3^\beta+\cdots+g_l^\beta+\cdots\qquad(\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.20}$$

根据 Euler 定理，因为(2.8.20)式中每一项是 $\dot{q}$ 的$(0,1,2,3,\cdots l,\cdots)$次齐次函数，而且每一项中都有 $\dot{q}^k$ 这一公因子，所以

$$\dot{q}_k\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}^k}=\dot{q}_k\frac{\partial g_0^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\dot{q}_k\frac{\partial g_1^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\cdots+\dot{q}_k\frac{\partial g_l^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\cdots$$

$$=0\cdot g_0^\beta+g_1^\beta+2g_2^\beta+\cdots+lg_l^\beta+\cdots$$

$$=g_1^\beta+2g_2^\beta+\cdots+lg_l^\beta+\cdots$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.21}$$

对线性非完整约束方程 $f_1^\beta=a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k=0$ 来说，上述 Euler 定理是

$$\dot{q}_k \frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}^k} = g_1^\beta = f_1^\beta - a_0^\beta \quad (k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.22}$$

从而

$$\frac{f_1^\beta - a_0^\beta}{\dot{q}_k} = \frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.23}$$

于是,只有在线性非完整系统中,才有满足 Chetaev 条件的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda_\beta \frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.24}$$

而在其他的非线性非完整系统中,例如约束方程为 $f_2^\beta = a_0^\beta + a_k^\beta \dot{q}^k + \frac{1}{2!}a_{jk}^\beta \dot{q}^j \dot{q}^k = 0$ 的系统中就没有同样形式的 Routh 方程.

当然,也可以引入函数 $U^\beta(\dot{q}_k)$,使

$$a_k^\beta + \frac{1}{2!}a_{jk}^\beta \dot{q}^j + \frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta \dot{q}^i \dot{q}^j + \cdots = -\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} \tag{2.8.25}$$
$$(i,j,k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r)$$

或

$$U^\beta = -\left(a_k^\beta \dot{q}^k + \frac{1}{2\cdot 2!}a_{jk}^\beta \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{1}{3\cdot 3!}a_{ijk}^\beta \dot{q}^i \dot{q}^j \dot{q}^k + \cdots\right)$$
$$(i,j,k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.26}$$

于是,同样有根据(2.8.18)式得到的 Euler 定理

$$\dot{q}^k \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} = -(f^\beta - a_0^\beta) \quad (k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.27}$$

及

$$\frac{f^\beta - a_0^\beta}{\dot{q}_k} = -\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \tag{2.8.28}$$

但是,(2.8.28)式中的 $-U^\beta(\dot{q}_k)$ 不是 $f^\beta(\dot{q}_k)$,只有在线性非完整系统中它们才是一回事.

结论是:"偏导数对 $\dot{q}_k$,变分则对 q_k",而且"有点怪"的 Chetaev 条件,实际上其偏导数因子来自 Euler 定理中的一个因子;而且其形式仅对线性非完整系统有效. 对非线性非完整系统而言,类似于 Chetaev 条件中的被导函数不再是原来的非完整约束方程,但与它有关联.

四、非完整系统中的广义约束反力

从(2.8.15)式可以看出,以上演绎都是在理想约束条件下进行的. 加在适用于理想完整系统 d'Alembert 原理(2.8.1)式上的是

$$-\lambda_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.29}$$

在理想约束条件下，它表示约束反力必须与广义虚位移 δq^k 相互垂直．因而由(2.8.29)式可知广义约束反力是

$$Q_k = -\lambda_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_\beta\left(a_k^\beta + \frac{1}{2!}a_{jk}^\beta \dot{q}^j + \frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta \dot{q}^i\dot{q}^j + \cdots\right)$$
$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.30}$$

显而易见，由 Chetaev 条件得到的

$$\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_\beta\left(a_k^\beta + a_{jk}^\beta \dot{q}^j + \frac{1}{2!}a_{ijk}^\beta \dot{q}^i\dot{q}^j + \cdots\right)$$
$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.31}$$

决非广义约束反力，尽管 $\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 与 $-\lambda_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 之间有某种关联．换言之，所有依赖 Chetaev条件对非完整系统所作的分析，都是非理想的．

牛青萍利用 Jourdain 原理得到的

$$\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.32}$$

本意是想证明引入 Chetaev 条件的合理性，现在反而成了证明 $\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 不是广义约束反力的有力旁证；因为与此因子(不能称之为“力”)相互垂直的是广义“虚速度”$\delta \dot{q}^k$ 而并非广义虚位移 δq^k．也正因为它不是广义约束反力，所以决不能将其加入仅适用于理想完整系统的 d'Alembert 原理(2.8.1)式中．

对利用 Gauss 拘束原理得到的

$$\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta \ddot{q}^k = 0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.33}$$

也可以说同样的话，因为与 $\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 相互垂直的是广义“虚加速度”$\delta \ddot{q}^k$ 而并非广义虚位移 δq^k．但是为什么 $\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 既垂直于广义“虚速度”$\delta \dot{q}^k$ 又垂直于广义“虚加速度”$\delta \ddot{q}^k$ 呢？这又是问题．难道 Jourdain 原理和 Gauss 拘束原理二者之一有毛病？(当然，Jourdain 原理的成立更欠有理．)但不管如何，与 $\lambda_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}_k}$ 相互垂直的决非广义虚位移 δq^k 却是肯定的．

由于，所有依赖 Chetaev 条件对非完整系统所作的分析都是非理想的，所以当然从以满足理想约束方程为首要条件的 d'Alembert 原理和 Hamilton 原理等出发，都是得不到它的．

五、关于 Vacco 条件

在线性非完整约束系统中，由于$-U^{\beta}(\dot{q}_k)$就是$f^{\beta}(\dot{q}_k)$，所以 Vacco 条件(2.8.11)式碰巧与 Chetaev 条件(2.8.7)式相当．但是在非线性非完整约束系统中，由于一般情况下(2.8.11)式并无非要等于(2.8.7)式的理由，所以由 Hamilton 原理得到的 Vacco 条件，与由假设得到的 Chetaev 条件有可能相距甚远．V. V. Kozlov 按照变分学中的规范步骤，对非线性非完整约束系统应用 Hamilton 原理，最后得到的是系统的测地轨道方程而并非 Routh 方程．

值得一提的是，在非线性非完整系统中，由(2.8.11)式可知，$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right)$这一项非但不会与另一项$\left(\frac{\partial f^{\beta}}{\partial q_k}\right)$相抵消(当$f^{\beta}=f^{\beta}(q_k,\dot{q}_k,t)$时)，反而会出现广义加速度$\ddot{q}^k$因子．众所周知，在通常的 Lagrange 方程或通常的 Routh 方程等号的右端，是绝不允许出现广义加速度的．

仅就这些理由就可断定，在非线性非完整约束系统中，Vacco 模型也行不通．

六、用 Euler 条件统一 Chetaev 条件和 Vacco 条件

正确的做法是，由(2.8.27)式出发：

$$\dot{q}^k\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}+(f^{\beta}-a_0^{\beta})=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.34}$$

先将(2.8.34)式改写成

$$\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}q^k+(f^{\beta}-a_0^{\beta})\mathrm{d}t=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.35}$$

再将(2.8.35)式中的真实位移换成虚位移，即将微分换成变分，并考虑到等时变分条件$\delta t=0$，有

$$\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r) \tag{2.8.36}$$

(2.8.36)式由于来自 Euler 定理，所以被称为“Euler 条件”.

用 Lagrange 未定乘数法，以时间t的任意函数$\lambda_{\beta}(t)$标乘(2.8.36)式，然后在(2.8.1)式中加上它们的标积，便可得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}+\lambda_{\beta}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k=0 \qquad (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r)$$

(2.8.37)

选择 $\lambda_\beta(t)$，使不独立的 r 个虚位移前的系数为零，因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了．于是，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\lambda_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\qquad(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.38}$$

将(2.8.38)式与非线性非完整约束方程(2.8.13)式联立，便可得到非线性非完整系统的 Routh 方程组．

另外，当 $f^\beta=f^\beta(q_k,\dot{q}_k,t)$ 亦即相当于 $U^\beta=U^\beta(q_k,\dot{q}_k,t)$ 时，若令

$$\delta\int(\lambda_\beta U^\beta)\mathrm{d}t=0\qquad(\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.39}$$

则可得

$$\lambda_\beta\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k-\dot{\lambda}_\beta\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k\right)=0$$
$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.40}$$

将 Euler 条件代入其中，有

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.41}$$

然后，取(2.8.39)式用于 Hamilton 原理

$$\delta\int(L-\lambda_\beta U^\beta)\mathrm{d}t=0\qquad(\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.42}$$

便可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\qquad(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r)\tag{2.8.43}$$

而(2.8.43)式与(2.8.38)式没有本质上的区别．于是，用 Euler 条件统一了 Chetaev 条件和 Vacco 条件．而且，因为使用了 Euler 条件，也使非线性非完整系统中的 d'Alembert原理和 Hamilton 原理得到了统一．

七、有关非完整问题的讨论

(1) 对于一类可展开成 MacLaurin 级数的非线性非完整约束方程，可以仿照处理线性非完整约束方程的方案，用 Lagrange 未定乘数法和 d'Alembert 原理，建立起对于非线性非完整系统有效的 Routh 方程．一般来说，非线性非完整约束方程都能展开成 MacLaurin 级数的形式．在整个建立 Routh 方程的过程中，非线性非完整约束都是理想的．

(2) 从建立非线性非完整系统 Routh 方程的过程中可以看到，一般来说 Chetaev 条件并不成立．Chetaev 条件的成立，仅对线性非完整系统碰巧有效，而且看上去是专为线性非完整系统满足理想约束条件所设计的．

(3) 也只有在线性非完整系统中，Vacco 条件才与 Chetaev 条件碰巧相当．而在

较一般的非线性非完整系统中，二者可能相距甚远．

(4) 建立在 Chetaev 条件之上的非完整系统中的广义约束反力，并不与广义虚位移相互垂直，因而 Chetaev 约束是非理想的．只有建立在所谓“Euler 条件”之上的非完整系统中的广义约束反力，才与广义虚位移相互垂直，所以只有“Euler 约束”才是理想的．

(5) 所谓“Euler 条件”，是来自 Euler 定理的一个最自然的约束条件．用“Euler 条件”，可以统一 Chetaev 条件和 Vacco 条件，从而在非线性非完整系统中(当然包括在线性非完整系统中)无论是用 d'Alembert 原理还是用 Hamilton 原理，都能建立起具有统一形式的 Routh 方程．

(6) 尽管本节赖以讨论的基础是一类可展开为 MacLaurin 级数的非线性非完整约束方程的特殊情况，但由于任何的正规函数都能展开成 MacLaurin 级数，因而本节的结果具有普遍意义．实际上，只要能找到不仅与非线性约束方程有关联而且满足 Euler 定理的 Euler 函数 U^{β}，则其它所有非线性非完整系统的 Routh 方程都可以被正确地得到．

(7) 本节引入 Euler 条件和 Euler 函数的方法，不仅对非线性非完整系统有效，而且对摩擦力与广义速度成非线性关系的耗散力学问题也有效．

【例 2.43】 已知：质量为 m 半径为 a 的圆环从长度为 l 仰角为 α 的往下滚而不滑；斜面向下方向为 x 轴方向，圆环的转角为 θ(图 2.33)．

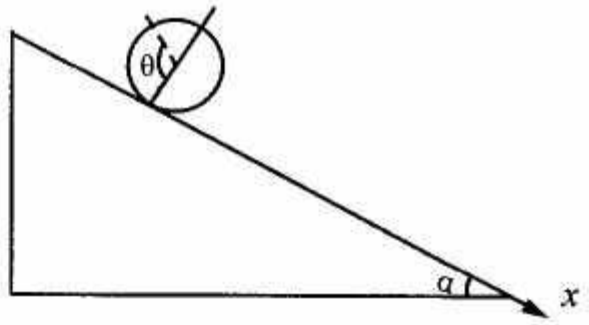


图 2.33

求：系统的运动微分方程．

解：系统应该只有 1 个自由度，但广义坐标取了两个：(x,θ)因此，有一个约束方程

$$\dot{x} = a\dot{\theta}$$

即，$\mathrm{d}x - a\mathrm{d}\theta = 0$，或换成变分是 $\delta x - a\delta\theta = 0$；此约束方程是线性非完整约束方程．将它写成标准形式是

$$a_\theta \delta\theta + a_x \delta x = 0$$

其中

$$\begin{cases} a_\theta = a \\ a_x = -1 \end{cases}$$

系统的 Lagrangian 则为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(ma^2)\dot{\theta}^2 - mg(l-x)\sin\alpha$$

而式中的常数项 $-mgl\sin\alpha$ 可以被删去．将所有这些代入 Routh 方程，有

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mg\sin\alpha = -\lambda \\ ma^2\ddot{\theta} = \lambda a \end{cases}$$

与约束方程 $\dot{x} = a\dot{\theta}$ 联立，解得

$$\begin{cases}\lambda = \dfrac{1}{2}mg\sin\alpha \\ \ddot{x} = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha \\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{2a}\sin\alpha\end{cases}$$

讨论:(1)若圆环作为 m 质点不滚而滑,则根据中学物理学知识可知 $\ddot{x}=g\sin\alpha$. 而本题中的结果只有它的一半,因此 Lagrange 未定乘子 λ 起到了摩擦力的作用.

(2)由于约束方程 $\dot{x}=a\dot{\theta}$ 可积分为 $x=a\theta$,所以本题也可以用完整约束的方法来处理.

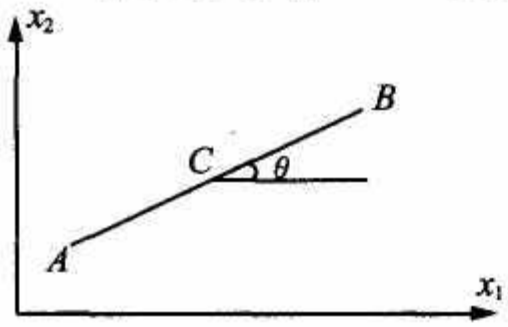


图 2.34

【例 2.44】 已知:两个质量均为 m 的质点 A 和 B 用一根长度为 l 的轻质杆相连接;质心 C 的坐标为 (x_1,x_2),轻质杆与过质心的水平线之间的夹角为 θ;整个系统只能在竖直平面内运动;约束条件是质心 C 的速度必须沿轻质杆 AB 的方向(图 2.34).

求:质点 A 和 B 的运动.

解:因为质点 A 和 B 的坐标分别为

$$\left(x_1-\frac{l}{2}\cos\theta, x_2-\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

$$\left(x_1+\frac{l}{2}\cos\theta, x_2+\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

所以系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^A)^2+(\dot{x}_2^A)^2+(\dot{x}_1^B)^2+(\dot{x}_2^B)^2]-mg(x_2^A+x_2^B)$$

$$=m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2-2mgx_2$$

式中 θ 为"可遗坐标",故立得

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}=\text{const.}=J_\theta$$

由于质心 C 的速度必须沿轻质杆 AB 的方向,所以系统的约束方程为

$$\dot{x}_1\sin\theta-\dot{x}_2\cos\theta=0$$

这也是线性非完整约束,但是约束方程不能积分. 将此约束方程写成

$$\sin\theta\mathrm{d}x_1-\cos\theta\mathrm{d}x_2=0$$

然后与标准方程

$$a_{lk}\,\mathrm{d}q_k+a_{l0}\,\mathrm{d}t=0$$

相比较,可得

$$\begin{cases}a_1=\sin\theta \\ a_2=-\cos\theta \\ a_\theta=a_0=0\end{cases}$$

将所有这些代入 Routh 方程,有

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 = \lambda\sin\theta \\ 2m\ddot{x}_2 + 2mg = -\lambda\cos\theta \\ ml^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

由上述第三个方程，可得

$$\theta = c_1 t + c_2 \tag{2.8.44}$$

式中(c_1, c_2)为积分常数，$c_1 = \frac{2J_\theta}{ml^2}$. 由第一、第二两个方程，又有

$$\ddot{x}_1 = -\operatorname{tna}\theta(\ddot{x}_2 + g) \tag{2.8.45}$$

再用θ来表示(x_1, x_2)，根据(2.8.44)式，有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_1 \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} \\ \dot{x}_2 = c_1 \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 = c_1^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}\theta^2} \\ \ddot{x}_2 = c_1^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\theta^2} \end{cases}$$

将它们代入约束方程和(2.8.45)式，有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = \cot\theta \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} \tag{2.8.46}$$

和

$$c_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cot\theta\left(c_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\theta^2} + g\right) \tag{2.8.47}$$

再由(2.8.46)式对θ求导，然后代入(2.8.47)式，经整理后得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\theta^2} - \cot\theta \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} + \frac{g}{c_1^2}\sin^2\theta = 0 \tag{2.8.48}$$

其解为

$$x_2 = -\frac{c_3}{c_1}\cos\theta - \frac{g}{2c_1^2}\cos^2\theta + c_4 \tag{2.8.49}$$

式中(c_3, c_4)为积分常数．将(2.8.49)式代入约束方程，又有

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \mathrm{d}x_1 = \int\left(\frac{c_3}{c_1}\cos\theta + \frac{g}{c_1^2}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{c_3}{c_1}\sin\theta + \frac{g}{2c_1^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) + c_5 \end{aligned} \tag{2.8.50}$$

式中c_5为积分常数．

最后，将(2.8.49)和(2.8.50)两式代回质点A和B的坐标表达式，并连同(2.8.44)式，得到

$$\begin{cases} (x_1)_B^A = \dfrac{c_3}{c_1}\sin\theta + \dfrac{g}{2c_1^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) \mp \dfrac{l}{2}\cos\theta + c_5 \\ (x_2)_B^A = -\dfrac{c_3}{c_1}\cos\theta - \dfrac{g}{2c_1^2}\cos^2\theta \mp \dfrac{l}{2}\sin\theta + c_4 \\ \theta = c_1 t + c_2 \end{cases}$$

2.9 耗散问题的 Lagrange 方程

一、Rayleigh 耗散函数

当非保守力是摩擦力时，Lagrange 方程有特殊的形式．

至今为止，物理学对摩擦力的解释还不是令人满意的．实验测量的结果表明，在通常情况下，摩擦力正比与粒子的运动速度；而当粒子的运动速度增高时，摩擦力则有可能正比于粒子运动速度的二次方（或任何分数次方）甚至三次方．

以通常情况为例，摩擦力等于

$$F_k^D = -\mu_k \dot{x}_k \quad （不对\ k\ 求和） \tag{2.9.1}$$

式中，μ_k 为比例系数，它一般是常数．这种以(2.9.1)式形式表示的摩擦力，可以用一个被称为“Rayleigh 耗散函数”的 D 对速度 $v_k = \dot{x}_k$ 的负偏导数来表示（Lord Rayleigh勋爵，1842～1919，原名 John William Strutt）：

$$F_k^D = -\frac{\partial D}{\partial v_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k} \tag{2.9.2}$$

其中，Rayleigh 耗散函数为

$$D = \frac{1}{2}\mu_k \dot{x}_k^2 = \frac{1}{2}\mu_k v_k^2 \tag{2.9.3}$$

(2.9.2)式也可以表示为矢量形式

$$\boldsymbol{F}^D = -\nabla_v D \tag{2.9.4}$$

二、Rayleigh 耗散函数的物理学解释

由于系统克服摩擦力所做的元功是

$$\mathrm{d}W^D = -F_k^D \mathrm{d}x_k = -F_k^D \dot{x}_k \mathrm{d}t = \mu_k \dot{x}_k^2 \mathrm{d}t = 2D\mathrm{d}t \tag{2.9.5}$$

所以

$$D = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}W^D}{\mathrm{d}t} \tag{2.9.6}$$

即：Rayleigh 耗散函数 D 是摩擦力引起的能量耗散率的一半．必须注意的是，D 的量纲是功率．

三、由摩擦力引起的广义力

将摩擦力(2.9.2)式在广义坐标系(Lagrange 位形坐标系)上投影,有

$$Q_k^D = F_i^D \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.9.7}$$

即:由摩擦力引起的广义力,是 Rayleigh 耗散函数 D 对广义速度的负偏导数.

四、有 Rayleigh 耗散函数 D 时的 Lagrange 方程

将(2.9.7)式代入有非保守力的 Lagrange 方程,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.9.8}$$

当然,如果还有除摩擦力以外的其他非保守力 Q_k,则(2.9.8)式应推广为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.9.9}$$

因此,在耗散问题中为了得到运动微分方程,必须先给出 Lagrangian L 和 Rayleigh 耗散函数 D.

五、有 Rayleigh 耗散函数 D 时的广义能量积分

当系统的 Lagrangian 中不显含时间 t 时,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial q_k} + \ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 + \dot{q}_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}\right) + \ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \dot{q}_k\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + 2D\end{aligned} \tag{2.9.10}$$

其中最后一步用到了 Rayleigh 耗散函数 D 是速度的二次齐次函数的性质和 Euler 定理.

由(2.9.10)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -2D \tag{2.9.11}$$

式中,$H=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L$ 是系统的总机械能. 将(2.9.6)式代入(2.9.11)式,又有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H+W^D)=0 \tag{2.9.12}$$

即

$$H+W^D = \text{const.} \tag{2.9.13}$$

它实际上就是热力学第一定律．换言之，系统的总机械能与系统耗散在周围环境中的能量之和是守恒量；它守恒于初始总机械能．随着时间的推移，系统的总机械能越来越少，而系统耗散在周围环境中的能量却越来越多，直至总机械能消耗殆尽．

六、一般情况下的耗散问题

在一般情况下，耗散力正比于粒子运动速度的 n 次方；此时，就要用到上一节所说的 Euler 函数．设

$$Q_k^D = -\frac{1}{n!}\mu_k^{\overbrace{ij\cdots}^{(n个)}}\underbrace{\dot{q}_i\dot{q}_j\cdots}_{(n个)} \tag{2.9.14}$$

则耗散函数为

$$D_{(n)} = -\frac{1}{(n+1)!}\mu_k^{\overbrace{ij\cdots}^{(n个)}}\underbrace{\dot{q}_i\dot{q}_j\cdots}_{(n+1个)} \tag{2.9.15}$$

式中，$D_{(n)}$ 就是 Euler 函数．从而

$$Q_k = -\frac{\partial D_{(n)}}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.9.16}$$

根据系统克服摩擦力所做的元功是

$$\mathrm{d}W^D = -Q_k^D\mathrm{d}q_k = -Q_k^D\dot{q}_k\mathrm{d}t \tag{2.9.17}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}W^D}{\mathrm{d}t} = (n+1)D_{(n)} \tag{2.9.18}$$

有耗散函数 $D_{(n)}$ 时的 Lagrange 方程仍旧是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial D_{(n)}}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.9.19}$$

同样，其广义能量积分是

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -(n+1)D_{(n)} \tag{2.9.20}$$

但热力学第一定律仍保持不变：

$$H + W^D = \text{const.} \tag{2.9.21}$$

如果热力学第一定律发生变化，那倒是一件非常奇怪的事．

【例 2.45】 已知：系统的 Lagrangian 为

$$L = \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)\exp(\mu t)$$

而“点变换”（“点变换”概念将在 3.6 中详述）为

$$x = q\exp(\mu t)$$

求:(1)运动微分方程;

(2)"点变换"后的 Lagrangian;

(3)"点变换"后的运动微分方程.

解:(1)因为

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}\exp(\mu t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m(\ddot{q}+\mu\dot{q})\exp(\mu t) \\ \dfrac{\partial L}{\partial q}=-kq\exp(\mu t) \end{cases}$$

所以,运动微分方程是

$$m\ddot{q}+kq=-\mu m\dot{q}$$

(2)因为

$$\begin{cases} q=x\exp(-\mu t) \\ \dot{q}=(\dot{x}-\mu x)\exp(-\mu t) \end{cases}$$

所以

$$L=\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\mu m x\dot{x}+\frac{1}{2}(m\mu^2-k)x^2\right]\exp(-\mu t)$$

(3)因为

$$\ddot{q}=(\ddot{x}-2\mu\dot{x}+\mu^2 x)\exp(-\mu t)$$

所以

$$m\ddot{x}+kx=\mu m\dot{x}$$

本题的结果表明,"衰减"的 Lagrangian 相当于存在耗散函数.

【例 2.46】 已知:质量为 m 的质点在旋转抛物面 $r^2=bx_3$ 上运动(x_3 轴方向向上);质点除受重力外,还受到与速度成正比的阻力 $\boldsymbol{F}^D=-k\boldsymbol{v}$ 的作用;关于 x_3 轴的转角为 θ;以 (r,θ) 为广义坐标.

求:系统的运动微分方程.

解:因为质点的坐标为 $\left(r\cos\theta,r\sin\theta,\dfrac{r^2}{b}\right)$,于是,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned} L&=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{x}_3^2)-mgx_3 \\ &=\frac{1}{2}m\left(1+\frac{4}{b^2}r^2\right)\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{b}mgr^2 \end{aligned}$$

而系统的 Rayleigh 耗散函数 D 为

$$D=\frac{1}{2}kv^2=\frac{1}{2}k\left[\left(1+\frac{4}{b^2}r^2\right)\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right]$$

因为 θ 为"可遗坐标"(但由于在耗散问题中 Lagrange 方程已变,故 p_θ 不是循环积分),而

$$\begin{cases} p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\left(1+\dfrac{4}{b^2}r^2\right)\dot{r} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\left(1+\dfrac{4}{b^2}r^2\right)\ddot{r}+\dfrac{8}{b^2}m\dot{r}^2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial r} = \dfrac{4}{b^2}m\dot{r}^2+mr\dot{\theta}^2-\dfrac{2}{b}mgr \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial \dot{r}} = k(1+\dfrac{4}{b^2}r^2)\dot{r} \\ \dfrac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = kr^2\dot{\theta} \end{cases}$$

所以，系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{4}{b^2}r^2\right)\ddot{r}+\dfrac{4}{b^2}r\dot{r}^2-r\dot{\theta}^2+\dfrac{2}{b}gr=-\dfrac{k}{m}(1+\dfrac{4}{b^2}r^2)\dot{r} \\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-\dfrac{k}{m}r\dot{\theta} \end{cases}$$

【例 2.47】 已知：质量为 m 的质点被约束在半径为 a 的水平圆周上运动；该质点在运动过程中受到与速度平方成正比的阻力，比例系数为 mk；质点在圆周上的转角为 θ；初始时，$\theta(0)=0$，$v(0)=v_0$.

求：运动微分方程和运动规律.

解：因为系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

系统的耗散函数为

$$D_{(2)}=\frac{1}{3}mka^2\dot{\theta}^3$$

所以，系统的运动微分方程为

$$\ddot{\theta}+k\dot{\theta}^2=0$$

其满足初始条件的运动规律为

$$\theta=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

【例 2.48】 已知：在两个自由度系统的微振动问题中，动能、势能和 Rayleigh 耗散函数分别为

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+a_{22}\dot{q}_2^2) \\ V=\dfrac{1}{2}(b_{11}q_1^2+b_{22}q_2^2) \\ D=\dfrac{1}{2}(c_{11}\dot{q}_1^2+2c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+c_{22}\dot{q}_2^2) \end{cases}$$

式中 $(a_{11},a_{22},b_{11},b_{22},c_{11},c_{12},c_{22})$ 均为常数.

求：运动规律.

解:本来,在动能 T 中应有 $2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2$ 项,在势能 V 中应有 $2b_{12}q_1q_2$ 项,然而应用"简正变换"后,可消去这两项. 至于"简正变换"的具体操作,将在后面 2.13 节中介绍.

将动能、势能和 Rayleigh 耗散函数代入耗散问题的 Lagrange 方程,有

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}q_1 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 = 0 \\ a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}q_2 + c_{12}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} q_1 = A_1\exp(\lambda t) \\ q_2 = A_2\exp(\lambda t) \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} (a_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + b_{11})A_1 + c_{12}\lambda A_2 = 0 \\ c_{12}\lambda A_1 + (a_{22}\lambda^2 + c_{22}\lambda + b_{22})A_2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11}\lambda^2+c_{11}\lambda+b_{11} & c_{12}\lambda \\ c_{12}\lambda & a_{22}\lambda^2+c_{22}\lambda+b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0$$

这是"久期方程". 当(A_1, A_2)不全为零时,有其系数行列式为零,即

$$(a_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + b_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}\lambda + b_{22}) - (c_{12}\lambda)^2 = 0$$

然后,对小阻尼(c_{11}, c_{22}, c_{12}较小)和大阻尼(c_{11}, c_{22}, c_{12}较大)两种情况讨论上述方程的解. 具体不再继续求解.

2.10 Lagrangian 的不确定性和非惯性系中的 Lagrangian

在前面的内容中经常说到 Lagrangian 中的常数项可以被删去. 这当然是显而易见的事. 本节的内容将要证明,除了常数项外,在 Lagrangian 中还有一些项也可被删去. 由于 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$,使得广义动量中也有一些东西可被删去. 这种性质,被称为"不确定性". Lagrangian 的不确定性可被用于讨论非惯性系中的问题(Lagrangian 和 Lagrange 方程),广义动量的不确定性则是 Hamilton 力学中"接触变换"的根据(参阅 3.6 节).

一、Lagrangian 的不确定性和广义动量的不确定性

1. Lagrangian 的不确定性

定理:若两个 Lagrangian L 和 L' 只相差一个关于广义坐标 q_k 和时间 t 的函数

$f(q_k,t)$的全导数$\dfrac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t}$，则这两个 Lagrangian L 和 L' 是等价的；换言之，Lagrangian准确到相差一个关于广义坐标q_k和时间 t 的函数 $f(q_k,t)$的全导数$\dfrac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t}$.

证：设

$$L'=L+\frac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.10.1}$$

其中，Lagrangian L 满足 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{2.10.2}$$

将L'代入$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\partial L'}{\partial q_k}$，并注意到 $f(q_k,t)$是关于广义坐标 q_k 和时间 t 的函数，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial f}{\partial q_l}\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\left(\delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial q_j}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial f}{\partial q_l}\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial f}{\partial q_l}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial q_k}+\dot{q}_l\frac{\partial^2 f}{\partial q_l\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_k\partial t}+\dot{q}_l\frac{\partial^2 f}{\partial q_k\partial q_l}\right)=0\end{aligned}$$

$$(j,k,l=1,\cdots,m) \tag{2.10.3}$$

即，L'亦满足相同的 Lagrange 方程．于是，定理得证．在证明过程的(2.10.3)式中，其倒数第二个等号前，实际上等于在证明$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与$\dfrac{\partial}{\partial q_k}$之间的“可对易性”.

2. 广义动量的不确定性

设分别都满足 Lagrange 方程的两个 Lagrangian 为 L 和 L'，分别都满足广义动量定义式的两个广义动量为 p_k 和 $p_k{}'$，即

$$\begin{cases}p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\[2ex] p_k{}'=\dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\end{cases} \tag{2.10.4}$$

因为

$$L'=L+\frac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t}=L+\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{2.10.5}$$

所以

$$p_k' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\right) = p_k + \frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{2.10.6}$$

换言之,广义动量精确到 $f(q_k,t)$对广义坐标 q_k 的偏导数.

二、非惯性系中的 Lagrangian 和 Lagrange 方程

Lagrange 方程是 d'Alembert 位形空间中的 Newton 方程在广义坐标空间(Lagrange位形空间)的投影,因而 Lagrange 方程与 Newton 方程一样仅适合于惯性坐标系;Lagrangian 也同样是在惯性坐标系中写出来的. 但这绝非说,Lagrange 方程对非惯性系无所作为,也绝非说,Lagrangian 不可以用相对位矢和相对速度表示. 下面,就是对这一问题的讨论.

1. 非惯性系中的 Lagrangian

设 x_k 为绝对位矢的分量,x_k'为相对位矢的分量,x_k^0 为非惯性系的原点 O'在惯性系中位矢的分量;$v_k=\dot{x}_k$ 为绝对速度的分量,$v_k'=\dot{x}_k'$为相对速度的分量,$v_k^0=\dot{x}_k^0$为非惯性系的原点O'在惯性系中速度的分量.

根据初等运动学知识,有

$$v_k = v_k^0 + v_k' + e_{kji}\omega_j x_i' \tag{2.10.7}$$

则

$$v^2 = (v^0)^2 + 2v_k^0(v_k' + e_{kji}\omega_j x_i') + (v_k' + e_{kji}\omega_j x_i')^2 \tag{2.10.8}$$

于是,Lagrangian 可以写成

$$L = \frac{1}{2}m(v^0)^2 + mv_k^0(v_k' + e_{kji}\omega_j x_i') + \frac{1}{2}m(v_k' + e_{kji}\omega_j x_i')^2 - V(x_i') \tag{2.10.9}$$

首先,等号右边第一项可以被表示为

$$\frac{1}{2}m(v^0)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{2}m(v^0)^2\,\mathrm{d}t \tag{2.10.10}$$

因为$(v^0)^2$ 是已知的时间函数,所以$\int \frac{1}{2}m(v^0)^2\,\mathrm{d}t$ 可以被理解为(2.10.1)式中的函数 $f(q_k,t)$;换言之,(2.10.10)式这一项可以从 Lagrangian(2.10.9)式中删去.

其次,(2.10.9)式等号右边第二项可以被改写为

$$mv_k^0(v_k' + e_{kji}\omega_j x_i') = mv_k^0\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' x_k' + e_{kji}\omega_j x_i'\right] = mv_k^0\frac{\mathrm{d}x_k'}{\mathrm{d}t} \tag{2.10.11}$$

式中,$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'$为相对导数,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$为绝对导数,而对任意函数 A_k 来说,都有

$$\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'A_k+e_{kji}\omega_jA_i \tag{2.10.12}$$

于是,(2.10.9)式等号右边第二项最终可以被改写为

$$mv_k^0(v_k'+e_{kji}\omega_jx_i')=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_k^0x_k')-mx_k'\frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} \tag{2.10.13}$$

而(2.10.13)式等号右边第一项正是全导数$\frac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t}$的形式,所以这第一项也可以被从 Lagrangian(2.10.9)式中删去.

从而,Lagrangian(2.10.9)式可以被简化为

$$\begin{aligned}L'&=\frac{1}{2}m(v_k'+e_{kji}\omega_jx_i')^2-mx_k'\frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t}-V(x_i')\\&=\frac{1}{2}m(v')^2+mv_k'e_{kji}\omega_jx_i'+\frac{1}{2}m(e_{kji}\omega_jx_i')^2-mx_k'\frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t}-V(x_i')\end{aligned} \tag{2.10.14}$$

可以看出,L'要比 L 简单,但也并非$\frac{1}{2}m(v')^2-V(x_i')$.

2. 非惯性系中的 Lagrange 方程

在(2.10.14)式中,是将$(x_k',\dot{x}_k')$作为自变量的,所以,它必然满足 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_k'}-\frac{\partial L'}{\partial q_k'}=0\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.10.15}$$

当然其中的$(q_k',\dot{q}_k')$就是$x_k',\dot{x}_k'$. 但是,方程(2.10.15)式中的时间导数仍然是绝对导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$;它能否换成相对导数$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'$呢? 回答是肯定的;因为①Lagrangian L'是标量;②广义坐标和广义速度$(q_k',\dot{q}_k')$也都是标量;③绝对导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$和相对导数$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'$对标量的作用是相同的. 于是,非惯性系中的 Lagrange 方程又可写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)'\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_k'}-\frac{\partial L'}{\partial q_k'}=0\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.10.16}$$

换言之,在非惯性系中的 Lagrange 问题,可以与惯性系中的 Lagrange 问题同样来处理;但非惯性系中的 Lagrangian L'则与惯性系中的 Lagrangian L 有所不同(但是相关的).

至于广义动量的不确定性的应用,将在 3.6 节中探讨.

【例 2.49】 已知:在非惯性系中,由相对位矢和相对速度表示的 Lagrangian 为

$$L' = \frac{1}{2}m(v_k' + e_{kji}\omega_j x_i')^2 - mx_k' \frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} - V(x_i')$$

$$= \frac{1}{2}m(v)^{2\prime} + mv_k' e_{kji}\omega_j x_i' + \frac{1}{2}m(e_{kji}\omega_j x_i')^2 - mx_k' \frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} - V(x_i')$$

求:运动微分方程.

解:因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L'}{\partial v_k'} = mv_k' + me_{kji}\omega_j x_i' \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' \dfrac{\partial L'}{\partial v_k'} = m\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' v_k' + me_{kji}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\omega_j'\right]x_i' + me_{kji}\omega_j\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' x_i' \\ \dfrac{\partial L'}{\partial x_k'} = -me_{kji}\omega_j\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' x_i' - me_{kji}\omega_j(e_{ipq}\omega_p x_q') - m\dfrac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\partial V}{\partial x_k'} \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\omega_j' = \beta_j \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)x_i' = v_i' \end{cases}$$

所以,运动微分方程是

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)' v_k' + m\left[\frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\beta_i x_i' + e_{kji}\omega_j(e_{ipq}\omega_p x_q')\right] + 2me_{kji}\omega_i v_j' + \frac{\partial V}{\partial x_k'} = 0$$

式中,$m\left[\dfrac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} + e_{kji}\beta_j x_i' + e_{kji}\omega_j(e_{ipq}\omega_p x_q')\right]$为牵连惯性力,$2me_{kji}\omega_j v_i'$为"Coriolis 力"(G. G. Coriolis,1792~1843);而β_j为角加速度分量.

这个方程与在 Newton 力学中的完全一样.

【例 2.50】 已知:质量为M半径为a的匀质圆环可绕环上某一固定点O在圆环自身所在的水平面内转动;圆环上套有一质量为m并可沿圆环无摩擦滑动的小珠A;圆环圆心C和原点O的连线CO与水平线之间的夹角为$\theta_1 = \omega t$,圆环圆心C和原点O的连线CO与圆环圆心C和小珠A的连线CA之间的夹角为θ_2.

求:系统的运动微分方程.

解:本题与【例 2.28】基本相同,只是【例 2.28】中的圆环在竖直平面内,而本题中的圆环在水平面内.

(1)根据【例 2.28】中的结果,在惯性系中,系统的 Lagrangian 为

$$L = (M+m)a^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_2^2 + ma^2\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2 + ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + ma^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

或

$$L = \frac{1}{2}ma^2[\dot{\theta}_1^2 + 2\omega\dot{\theta}_2 + 2(\omega+\dot{\theta}_2)\omega\cos\theta_2] + (M+m)a^2\omega^2$$

而运动微分方程由前一个 Lagrangian 得到

$$\begin{cases} 2(M+m)\ddot{\theta}_1 + 2m\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 + m\ddot{\theta}_2 - 2m\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - m\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1^2\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

将 $\theta_1=\omega t$ 代入其中，得到关于 θ_2 的运动微分方程为

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\sin\theta_2 = 0$$

当然此运动微分方程亦可由第二个 Lagrangian 得到．

(2)以圆环圆心 C 为原点，圆环圆心 C 和原点 O 的连线 CO 为 x_1' 轴，其垂直方向为 x^2' 轴，建立相对坐标系．此处的相对坐标系是非惯性系．非惯性系的 Lagrangian 为

$$L' = \frac{1}{2}m(v')^2 + mv_k'e_{kji}\omega_j x_i' + \frac{1}{2}m(e_{kji}\omega_j x_i')^2 - mx_k'\frac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t}$$

因为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\boldsymbol{e}_r) = a\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = a\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{v}^0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CO) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\boldsymbol{i}_1) = a\omega\boldsymbol{i}_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^0}{\mathrm{d}t} = -a\omega^2\boldsymbol{i}_1 \end{cases}$$

式中($\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$)为非惯性 DesCartes 系的单位矢量，($\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_3$)为非惯性柱坐标系的单位矢量$\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{e}_3$，为垂直于圆环平面的 $x_3=x_3'$ 轴的单位矢量；而且 $\boldsymbol{i}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 之间的夹角为 $\theta=\theta_2$．所以

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m(v')^2 = \dfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_2^2 \\ mv_k'e_{kji}\omega_j x_i' = ma^2\omega\dot{\theta}_2 \\ \dfrac{1}{2}m(e_{kji}\omega_j x_i')^2 = \dfrac{1}{2}ma^2\omega^2 \\ -mx_k'\dfrac{\mathrm{d}v_k^0}{\mathrm{d}t} = ma^2\omega^2\cos\theta_2 \end{cases}$$

于是

$$L' = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}_2^2 + 2\omega\dot{\theta}_2 + \omega^2 + 2\omega^2\cos\theta_2)$$

将其代入非惯性系的 Lagrange 方程，得到系统的运动微分方程为

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\sin\theta_2 = 0$$

可以看出，在以上两种方法中，只要广义坐标选得相同，则不论用何种方法，所得到的运动微分方程都是相同的；但 Lagrangian 可以不一样．于是，对于不习惯非惯性系的人来说，这是一个福音：他可以自始至终选用惯性系，除非题目中规定非要用非惯性系来解不可．

2.11 多自由度体系的微幅振动和简正坐标

从前面的例题中可以看出，由 Lagrange 方程及其循环积分或广义能量积分得到的运动微分方程基本上都是非线性的，除了个别极简单的问题之外．但是，非线性的运动微分方程很难求解；另外，作为定性分析，有时候也需要一个参考解答作为比较；基于这些考虑，将运动微分方程“线性化”是必需的．“微振动”或“小振动”，就是这种“线性化”考虑的物理解释．

一、振动的分类和线性振动的近似性

1. 振动的分类

振动，可以从不同的角度进行分类．若从能量角度分类，就有：①自由振动；②阻尼振动；③强迫振动．对自由振动来说，能量不增不减，始终不变；对阻尼振动来说，能量是有损耗的；对强迫振动来说，由于有外加能量，可以使系统的能量永不衰竭．

如果从自由度角度分类，则有：①单自由度的；②多自由度的．多自由度的中间，又可分为“有限多自由度”的和“无限多自由度”的．但从自由度角度进行分类，没有任何实质上的意义；因为“单自由度”只是“多自由度”的一个特例．

另外一种分类的角度，就是从方程的“线性”和“非线性”来分．目前，能够用系统的方法来求解的微分方程，是线性的微分方程；对非线性微分方程来说，只有个别类型才可求解．

2. 线性振动的近似性

然而，线性微分方程只是非线性微分方程的一个特例，因而这种分类也没有任何实质上的意义．可以用两位科学家的话来说明这个问题．

第一个当然是 A. Einstein(1879～1955). Einstein 的“广义相对论”“场方程”(数学家 A. D. Aczel 称之为“上帝的方程式”，参阅《God's Equation: Einstein, Relativity, and the Expanding Universe》, Four Walls Eight Windows, 1999；有中译本)是物理学中的“高度非线性理论”(参阅 L. E. H. Trainor and M. B. Wise: 《From Physical Concept to Mathematical Structure: An Introduction to Theoretical Physics》, University of Toronto Press, 1981；有中译本). Einstein 说：“所有逻辑简单的物理学方程必然是非线性的．” Einstein 这里所说的是“逻辑简单”而不是“形式简单”. 在广义相对论中，只有两条假设，即“相对效原理”和引力与惯性力之间的“等价原理”(在狭义相对论中，只有“相对性原理”和“光速不变原理”两条假设). 这在逻

辑上是最简单的.

第二个科学家是 L. de Broglie(1892～1987). de Broglie 在 1927 年创立,并在 1956 年重新提出的量子力学"双重解理论",其中有一个方程就是非线性的. de Broglie的"双重解理论"曾得到 Einstein 的赞同. de Broglie 的话是由他的学生 G. Lochak 转述的:"非线性不是一种特征,而是没有特征;线性则是一种特征."换言之,非线性是无条件的,线性则是有条件的.

因此,尽管线性运动微分方程看上去简单,但是逻辑上比较复杂,它所引入的额外条件较多;而看上去形式复杂的非线性运动微分方程,在逻辑上却简单得多.

在 L. E. H. Trainor 和 M. B. Wise 的书中还说到量子力学. 他们认为,"量子力学是高度发展和取得高度成功的线性理论的一个引人注目的例子."

对振动问题来说也是如此. 当力学系统在平衡位置附近作"微振动"或"小振动"时,不论振动的能量如何,自由度有多少,其最低级的近似是用线性运动微分方程来描述的.

3. Lagrange-Dirichlet 定理:稳定性准则和不稳定性准则

(1)稳定性准则:若保守系的势能有严格的极小值,则此平衡的位置是系统的稳定平衡位置.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}>0\end{cases}\qquad\text{(单自由度)}\qquad(2.11.1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial q_1}=\dfrac{\partial V}{\partial q_2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}>0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}>0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}-\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\right)^2>0\end{cases}\qquad\text{(双自由度)}\qquad(2.11.2)$$

(2)不稳定性准则:若保守系的势能有严格的极大值,则此位置是系统的不稳定平衡位置.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}<0\end{cases}\qquad\text{(单自由度)}\qquad(2.11.3)$$

(3)非稳定性准则:若保守系的势能是常数,则此位置是系统的"随遇平衡"位置

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}=0\end{cases}\qquad\text{(单自由度)}\tag{2.11.4}$$

Lagrange-Dirichlet 定理是 Lagrange 于 1788 年提出来的，L. Dirichlet(1805～1859)后来在数学上进行了严格证明.

二、双自由度保守系的自由振动

设系统的动能为广义速度的二次齐次式，$T=\frac{1}{2}M_{kl}\dot{x}_k\dot{x}_l$；广义质量 M_{kl} 和势能 V 都是广义坐标(x_1,x_2)的函数；平衡位置为势能零点. 将广义质量 M_{kl} 和势能 V 在平衡位置附近作 Taylor 展开，有

$$\begin{cases}M_{kl}(x_1,x_2)=M_{kl}(0,0)+\left(\dfrac{\partial M_{kl}}{\partial x_m}\right)_0x_m+\cdots\\[2ex]V(x_1,x_2)=V(0,0)+\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_m}\right)_0x_m+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2V}{\partial x_m\partial x_n}\right)_0x_mx_n+\cdots\end{cases}\tag{2.11.5}$$

首先来看势能. ①由于 $V(0,0)$为平衡位置处的势能，已定义为势能零点，故 $V(0,0)=0$；②由于是平衡位置，根据 Lagrange-Dirichlet 定理的稳定性准则，有 $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_m}\right)_0=0$. 于是，在势能的 Taylor 展开式中，略去高阶小量后得到

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial x_m\partial x_n}\right)_0x_mx_n=\frac{1}{2}(b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2)\\&=\frac{1}{2}b_{kl}x_kx_l\qquad(k,l=1,2)\end{aligned}\tag{2.11.6}$$

其次再来看广义质量. 由于动能 T 也只要保留与势能同级的二级小量，故 $M_{kl}(x_1,x_2)$取零级近似即可：

$$M_{kl}(x_1,x_2)=M_{kl}(0,0)=a_{kl}\qquad(k,l=1,2)\tag{2.11.7}$$

于是

$$T=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2+2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+a_{22}\dot{x}_2^2)=\frac{1}{2}a_{kl}\dot{x}_k\dot{x}_l\qquad(k,l=1,2)\tag{2.11.8}$$

式中，a_{kl} 被称为“惯性系数”，b_{kl} 被称为“准弹性系数”(或“恢复系数”).

将如此的动能 T 和势能 V 代入 Lagrange 方程以验证其运动微分方程“线性”性，果然有

$$\begin{cases}a_{11}\ddot{x}_1+a_{12}\ddot{x}_2+b_{11}x_1+b_{12}x_2=0\\a_{12}\ddot{x}_1+a_{22}\ddot{x}_2+b_{12}x_1+b_{22}x_2=0\end{cases}\tag{2.11.9}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.11.10}$$

也就是

$$a_{kl}\ddot{x}_l + b_{kl}x_l = 0 \qquad (k,l = 1,2) \tag{2.11.11}$$

运动微分方程果然是线性的．所以，只要将动能化成广义速度的二次齐次式，同时将势能化成广义坐标的二次齐次式，则运动微分方程就一定是线性的．

取试探解

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \exp[i(\omega t + \alpha)] \\ x_2 = A_2 \exp[i(\omega t + \alpha)] \end{cases} \tag{2.11.12}$$

或

$$x_l = A_l \exp[i(\omega t + \alpha)] \qquad (l = 1,2) \tag{2.11.13}$$

代入(2.11.10)式或(2.11.11)式后，得到“久期方程”：

$$\begin{pmatrix} b_{11} - a_{11}\omega^2 & b_{12} - a_{12}\omega^2 \\ b_{12} - a_{12}\omega^2 & b_{22} - a_{22}\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.11.14}$$

或

$$(b_{kl} - a_{kl}\omega^2)A_l = 0 \qquad (k,l = 1,2) \tag{2.11.15}$$

要使“久期方程”有不全为零的解，必须有

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\omega^2 & b_{12} - a_{12}\omega^2 \\ b_{12} - a_{12}\omega^2 & b_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.11.16}$$

或

$$|b_{kl} - a_{kl}\omega^2| = 0 \qquad (k,l = 1,2) \tag{2.11.17}$$

即

$$(b_{11} - a_{11}\omega^2)(b_{22} - a_{22}\omega^2) - (b_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0 \tag{2.11.18}$$

在《高等数学》中已经证明，方程(2.11.18)有两个正的实根的条件是：

$$\begin{cases} a_{11} > 0 \\ a_{22} > 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} b_{11} > 0 \\ b_{22} > 0 \\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0 \end{cases} \tag{2.11.19}$$

其中第二组式子正好就是 Lagrange-Dirichlet 条件(2.11.2)式．

【例 2.51】 已知：摆锤质量均为 m、摆长均为 l 的两个单摆 OA 和 AB 连成“双摆”；O 为悬点；OA 与垂直向下直线之间的夹角为 θ_1，AB 与垂直向下直线之间的夹角为 θ_2(图 2.35)．

求：(1)系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2)微振动时系统的 Lagrangian 和运动微分方程及其解．

解：(1)以 O 为原点，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴，建立坐标系．因而 A、B 两点的

坐标分别是

$$\begin{cases}(l\sin\theta_1,-l\cos\theta_1)\\(l\sin\theta_1+l\sin\theta_2,-l\cos\theta_1-l\cos\theta_2)\end{cases}$$

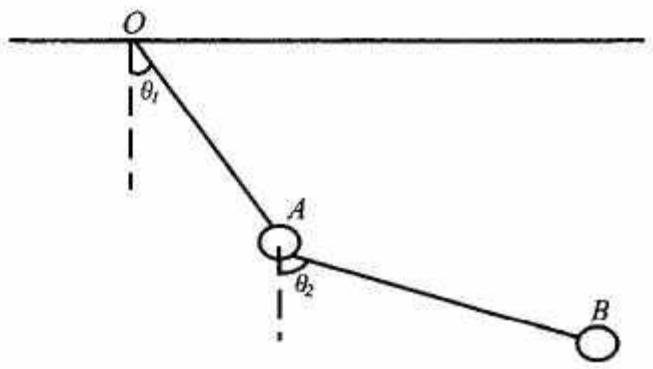


图 2.35

于是,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}m[(l\dot\theta_1\cos\theta_1)^2+(l\dot\theta_1\sin\theta_1)^2]\\&+\frac{1}{2}m[(l\dot\theta_1\cos\theta_1+l\dot\theta_2\cos\theta_2)^2+(l\dot\theta_1\sin\theta_1+l\dot\theta_2\sin\theta_2)^2]\\&+mg(l\cos\theta_1)+mg(l\cos\theta_1+l\cos\theta_2)\\=&ml^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot\theta_2^2+ml^2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)+mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)\end{aligned}$$

代入 Lagrange 方程后得到其运动微分方程为

$$\begin{cases}2l\ddot\theta_1+l\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0\\l\ddot\theta_2+l\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

(2)在微振动条件下,系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式,故

$$L=\frac{1}{2}ml^2(2\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+2\dot\theta_1\dot\theta_2)-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

代入 Lagrange 方程后得到其运动微分方程为

$$\begin{cases}2l\ddot\theta_1+l\ddot\theta_2+2g\theta_1=0\\l\ddot\theta_2+l\ddot\theta_1+g\theta_2=0\end{cases}$$

令 $\theta_i=A_i\sin(\omega t+\alpha)$,可得"久期方程"为

$$\begin{pmatrix}2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) & -\omega^2\\ -\omega^2 & \frac{g}{l}-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=0$$

要使"久期方程"有不全为零的解,必须其系数行列式为零,即

$$2\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)^2-\omega^4=0$$

解得

$$\begin{cases}\omega_1^2=\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})\\\omega_2^2=\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})\end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases}\dfrac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\dfrac{2\left(\dfrac{g}{l}-\omega_1^2\right)}{\omega_1^2}=\sqrt{2}\\[2ex]\dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\dfrac{2\left(\dfrac{g}{l}-\omega_2^2\right)}{\omega_2^2}=-\sqrt{2}\end{cases}$$

式中$(A_1^{(1)},A_2^{(1)},A_1^{(2)},A_2^{(2)})$为方程的根．经线性组合后，得到

$$\begin{cases}\theta_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ \theta_2=\sqrt{2}A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)-\sqrt{2}A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{cases}$$

式中$(A_1^{(1)},A_1^{(2)},\alpha_1,\alpha_2)$为待定常数，由初始条件决定．

三、m 个自由度保守系的自由振动

以上对双自由度保守系自由振动的处理方法可以方便地推广到 m 个自由度保守系的自由振动问题．原则是相同的，只是取值范围由 2 变成 m.

在 m 个自由度保守系的自由振动问题中，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}a_{kl}\dot{x}_k\dot{x}_l-\frac{1}{2}b_{kl}x_kx_l\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{2.11.20}$$

将(2.11.20)式代入 Lagrange 方程后得到其运动微分方程为

$$a_{kl}\ddot{x}_l+b_{kl}x_l=0\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{2.11.21}$$

取试探解

$$x_l=A_l\exp[i(\omega t+\alpha)]\qquad(l=1,\cdots,m)\tag{2.11.22}$$

有“久期方程”

$$(b_{kl}-a_{kl}\omega^2)A_l=0\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{2.11.23}$$

要使“久期方程”有不全为零的解，必须其系数行列式为零，即

$$|b_{kl}-a_{kl}\omega^2|=0\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{2.11.24}$$

然后依法求解．

四、简正坐标和简正变换

1. 简正坐标和简正振动

在处理线性振动问题时，若广义坐标选得合适，即，使系统的动能 T 和势能 V 同时成为广义速度 $\dot{q}_k$ 和广义坐标 q_k 的“完全平方和”的形式，则可以使问题变得十分简单．因为当

$$\begin{cases}T=\dfrac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+\cdots+a_{mm}\dot{q}_m^2)\\[2ex] V=\dfrac{1}{2}(b_{11}q_1^2+\cdots+b_{mm}q_m^2)\end{cases}\tag{2.11.25}$$

时，由 Lagrange 方程得到的运动微分方程是

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}q_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{mm}\ddot{q}_m + b_{mm}q_m = 0 \end{cases} \tag{2.11.26}$$

所以，实际上不用解任何方程，问题便可全部解决.

这样的广义坐标 q_k，被称为“简正坐标”(或“主坐标”). 相应的振动，被称为“简正振动”(或“本征振动”).

【例 2.52】 已知：在“双摆”【例 2.51】中，不取(θ_1,θ_2)为广义坐标，而取广义坐标为

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\theta_2 \\ q_2 = \theta_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\theta_2 \end{cases}$$

求：微振动时系统的 Lagrangian 和运动微分方程及其解.

解：将

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2) \\ \theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2) \end{cases}$$

代入微振动时系统的 Lagrangian，有

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\dot{q}_1^2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\dot{q}_2^2\right] - \frac{1}{2}mgl(q_1^2+q_2^2)$$

其相应的运动微分方程是

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\left(\dfrac{g}{l}\right)q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\dfrac{g}{l}\right)q_2 = 0 \end{cases}$$

立得其通解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ q_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{l}(2-\sqrt{2}) \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{l}(2+\sqrt{2}) \end{cases}$$

再将(q_1,q_2)代回(θ_1,θ_2)，得到

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \dfrac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \theta_2 = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \dfrac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}$$

式中$(A_1,A_2,\alpha_1,\alpha_2)$是由初始条件决定的待定常数.

可以看出,解得的结果与在【例 2.51】中得到的结果没有原则性的差别;但是现在的方法要方便得多. 问题是,(q_1,q_2)与(θ_1,θ_2)之间的变换是如何想出来的?

2. 简正变换:寻找简正坐标的一般方法

为了一般地寻找简正变换,可以设

$$x_k = c_{kl}q_l \qquad (k,l=1,\cdots,m) \tag{2.11.27}$$

它使得

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}a_{kl}\dot{x}_k\dot{x}_l \\ V=\dfrac{1}{2}b_{kl}x_kx_l \end{cases} \qquad (k,l=1,\cdots,m) \tag{2.11.28}$$

"同时"化为

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}\tilde{a}_{kk}\dot{q}_k^2 \\ V=\dfrac{1}{2}\tilde{b}_{kk}q_k^2 \end{cases} \qquad (k=1,\cdots m) \tag{2.11.29}$$

式中,$\tilde{a}_{kk}$和$\tilde{b}_{kk}$如果理解为矩阵的话就是"对角矩阵". 动能或势能二者之中,如果单独一个完成此变换是很容易的;问题的关键就在于"同时"二字.

(1)首先考虑将势能V化成"完全平方和"的形式.

将变换(2.11.27)式代入势能表达式,有

$$V=\frac{1}{2}b_{kl}(c_{ki}q_i)(c_{lj}q_j)=\frac{1}{2}b_{kl}c_{ki}c_{lj}q_iq_j \tag{2.11.30}$$

然后,再将(2.11.30)式与$V=\dfrac{1}{2}\tilde{b}_{kk}q_k^2$相比较,可以得到两个等式:

$$\begin{cases} b_{kl}c_{ki}c_{lj}=\lambda\delta_{ij} \\ c_{ki}c_{kj}=\delta_{ij} \end{cases} \tag{2.11.31}$$

其中第二个等式实际上就是变换矩阵(或张量)的"正交性"定义. 由于

$$b_{kl}c_{ki}c_{lj}=\lambda\delta_{ij}=\lambda c_{ki}c_{kj}=\lambda c_{ki}c_{lj}\delta_{kl} \tag{2.11.32}$$

因而由(2.11.32)式首末两个表达式可得

$$(b_{kl}-\lambda\delta_{kl})c_{ki}c_{lj}=0 \tag{2.11.33}$$

上述(2.11.33)式也是一种"久期方程". 当c_{ki}不全为零时,必有

$$|\,b_{kl}-\lambda\delta_{kl}\,|=0 \tag{2.11.34}$$

这个(2.11.34)式实际上是说,将b_{kl}这一"对称矩阵"(或"对称张量",因为$b_{kl}=b_{lk}$)化为"对角矩阵"$\tilde{b}_{kl}$就应如此进行;而且规定,"对角矩阵"$\tilde{b}_{kl}$中的每个"对角元素"是相同的;同时,作为变换的"基",则是"单位矩阵"(或"单位张量").

从(2.11.34)式中解出"本征值"λ后,再由

$$\begin{cases}(b_{kl}-\lambda\delta_{kl})c_{ki}=0\\ c_{ki}c_{kj}=\delta_{ij}\end{cases}\tag{2.11.35}$$

就可求出 c_{ki}，从而可以确定变换(2.11.27)式，并得到 $\tilde{b}_{kl}$.

仅仅考虑势能一方面，这种变换还是简单的.

(2)其次考虑将势能 V 和动能 T“同时”化成“完全平方和”的形式.

此时要注意，重复刚才的方法一般来说不能保证势能 V 和动能 T“同时”化成“完全平方和”的形式，因为再对动能作变换时将破坏前面对势能已作的变换. 这时候必须另想其他办法.

可以回想一下对物理学公式进行“相对论化”处理的过程.(P. A. M. Dirac 曾说过：“那时候，一旦看到了一些用非相对论形式表示的物理学，人们就能将它修改成适合狭义相对论的. 这很像是一种游戏. 一有机会我就沉溺于此.”)在对某一种“能量动量张量”(比如说，流体动力学中的“能量动量张量”)进行“相对论化”处理，即让它“对角化”并能够适合狭义相对论时，所用的“对角化基”并非单位张量 δ_{kl} 而是狭义相对论中的“度规张量”$\eta_{\mu\nu}$：

$$(\eta_{\mu\nu})=\pm\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\tag{2.11.36}$$

换言之，作为变换的“基”，不一定非要是“单位张量”，只要求它是“对角的”就可以；而变换后的“对角矩阵”中的每个“对角元素”也不一定要全部相同.

在目前所要处理的问题中，如果将变换时作为比较的“对角化基”选为已“对角化”的 $\tilde{b}_{kl}$ 而不是单位张量 δ_{kl}，就可以保证在将动能 T 化成“完全平方和”的形式的同时，不破坏势能 V 的“完全平方和”的形式.

于是，在第二步处理过程中，“久期方程”应该是

$$|a_{kl}-\lambda'\tilde{b}_{kl}|=0\tag{2.11.37}$$

而求 c'_{ki} 的方程则应该是

$$\begin{cases}(a_{kl}-\lambda'\tilde{b}_{kl})c_{ki}'=0\\ c_{ki}'c_{kj}'=\delta_{ij}\end{cases}\tag{2.11.38}$$

3. 简正变换：寻找简正坐标的特殊方法

寻找简正坐标的特殊方法是用待定系数法. 在通常的习题中，总是可以在势能 V 和 T 动能表达式中，尤其是“交叉项”的系数之间发现进行“配方”的蛛丝马迹. 通过合适的“配方”并采用待定系数法，就能将势能 V 和动能 T“同时”化成“完全平方和”的形式.

但是，这种方法有很强的“猜测性”和“偶然性”. 如果这种方法行不通，就只能采

用一般方法.

【例 2.53】 已知:在"双摆"【例 2.51】中,微振动条件下,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2+2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

求:势能 V 和动能 T"同时"化成"完全平方和"的形式.

解:本题中,势能 V 已经是"完全平方和"的形式,因此可直接进行第二步计算.

因为

$$\frac{1}{2}\left|a_{kl}-\lambda'\tilde{b}_{kl}\right|=\begin{vmatrix} ml^2-\lambda' mgl & \frac{1}{2}ml^2 \\ \frac{1}{2}ml^2 & \frac{1}{2}ml^2-\frac{1}{2}\lambda' mgl \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(ml)^2\left[(l-\lambda' g)^2-\frac{1}{2}l^2\right]=0$$

所以

$$\lambda'_{1,2}=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)\frac{l}{g}$$

首先,将 λ_1' 代入 $(a_{kl}-\lambda'\tilde{b}_{kl})c_{kl}'=0$ 之中,有

$$\begin{cases} ml^2c_{11}'+\frac{1}{2}ml^2c_{21}'=\frac{2+\sqrt{2}}{2}ml^2c_{11}' \\ \frac{1}{2}ml^2c_{11}'+\frac{1}{2}ml^2c_{21}'=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}ml^2\right)c_{21}' \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -\sqrt{2}c_{11}'+c_{21}'=0 \\ c_{11}'-\frac{\sqrt{2}}{2}c_{21}'=0 \end{cases}$$

其一组"归一化"[即满足 $(c_{11}')^2+(c_{21}')^2=1$]解是

$$\begin{cases} c_{11}'=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ c_{21}'=\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

其次,将 λ_2' 代入 $(a_{kl}-\lambda'\tilde{b}_{kl})c_{kl}'=0$ 之中,也有

$$\begin{cases} c_{12}'=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ c_{22}'=-\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

故,简正变换为

$$(c')=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

最后，由

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$$

得到新旧坐标之间的变换关系为

$$\begin{cases}\theta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(q_1+q_2)\\ \theta_2=\sqrt{\frac{2}{3}}(q_1-q_2)\end{cases}\text{或}\begin{cases}q_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta_1+\frac{\theta_2}{\sqrt{2}}\right)\\ q_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta_1-\frac{\theta_2}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

于是，系统的 Lagrangian 变换为

$$L=\frac{1}{3}ml^2\left[(2+\sqrt{2})\dot{q}_1^2+(2-\sqrt{2})\dot{q}_2^2\right]-\frac{2}{3}mgl(q_1^2+q_2^2)$$

【例 2.54】 已知：质量为 m 长度为 $2l_2$ 的匀质杆 AB，以长度为 l_1 的细绳 OA 系于 A 点悬于 O 点；OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2（图 2.36）.

求：(1) 系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2) 微振动时系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

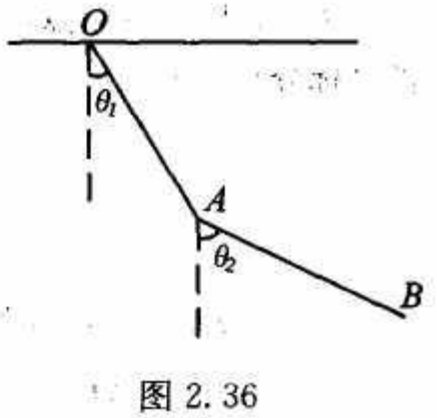


图 2.36

解：(1) 以 O 为原点，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系 . 因而 A 点和匀质杆 AB 的质心 C 点的坐标分别为

$$\begin{cases}(l_1\sin\theta_1,-l_1\cos\theta_1)\\ (l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2,-l_1\cos\theta_1-l_2\cos\theta_2)\end{cases}$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m\left[(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2+(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2\right]\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml_2^2\right)\dot{\theta}_2^2+mg(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\\&=\frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{2}{3}ml_2^2\dot{\theta}_2^2+ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+mg(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\end{aligned}$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}l_1\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_1=0\\ \frac{4}{3}l_2\ddot{\theta}_2+l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

(2) 在微振动条件下，系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式，故

$$L=\frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{2}{3}ml_2^2\dot{\theta}_2^2+ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-\frac{1}{2}mg(l_1\theta_1^2+l_2\theta_2^2)$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_1 = 0 \\ \frac{4}{3}l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

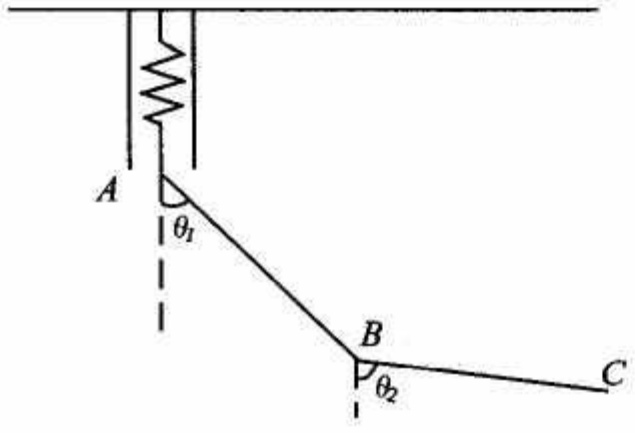


图 2.37

【例 2.55】 已知:摆锤质量均为 m 摆长均为 l 的"双摆"AB-BC 悬在弹性系数为 k 的轻质弹簧 OA 的下方 A 点;A 点是质量为 M 的质点;O 点为弹簧的初始平衡位置;AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1,BC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2;整个系统只能在竖直平面内运动(图 2.37).

求:(1)系统的 Lagrangian 和运动微分方程;

(2)微振动时系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

解:(1)以 O 为原点,水平方向为 x_1 轴竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 因而 A、B、C 三点的坐标分别是

$$\begin{cases} (0, -x_2) \\ (l\sin\theta_1, -x_2 - l\cos\theta_1) \\ (l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2, -x_2 - l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2) \end{cases}$$

于是,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (-\dot{x}_2 + l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2] \\ & + \frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (-\dot{x}_2 + l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2] \\ & - \frac{1}{2}kx_2^2 - Mgx_2 - mg(-x_2 - l\cos\theta_1) - mg(-x_2 - l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2) \\ = {} & \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - 2ml\dot{x}_2\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - mgl\dot{x}_2\theta_2\sin\theta_2 \\ & + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}kx_2^2 + (M+2m)gx_2 + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{aligned}$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} (M+2m)\ddot{x}_2 - 2ml\ddot{\theta}_1\sin\theta_1 - ml\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 - 2ml\dot{\theta}_1^2 - ml\dot{\theta}_2^2 + kx_2 - (M+2m)g = 0 \\ 2l\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{x}_2^2\sin\theta_1 + l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g\sin\theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_2 - \ddot{x}_2\sin\theta_2 + l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

从以上第一个方程中可以看出,$(M+2m)g$ 这一项实际上不写也无关系;因为若坐标系原点选得合适,重力与弹簧的弹性力是相互抵消的.

(2)在微振动条件下,系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式,故

$$L = \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2 - \theta_2^2)$$

由此，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}(M+2m)\ddot{x}_2+kx_2=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+l\ddot{\theta}_2+2g\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+l\ddot{\theta}_1+g\theta_2=0\end{cases}$$

【例 2.56】 已知：质量为 M 的小环 A 套在竖直平面内的抛物线 $z=ax^2$ 上，并可沿此抛物线运动；在小环上附有摆锤质量均为 m 摆长均为 l 的“双摆” AB-BC；AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，BC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2；整个系统只能在竖直平面内运动.（图 2.38）

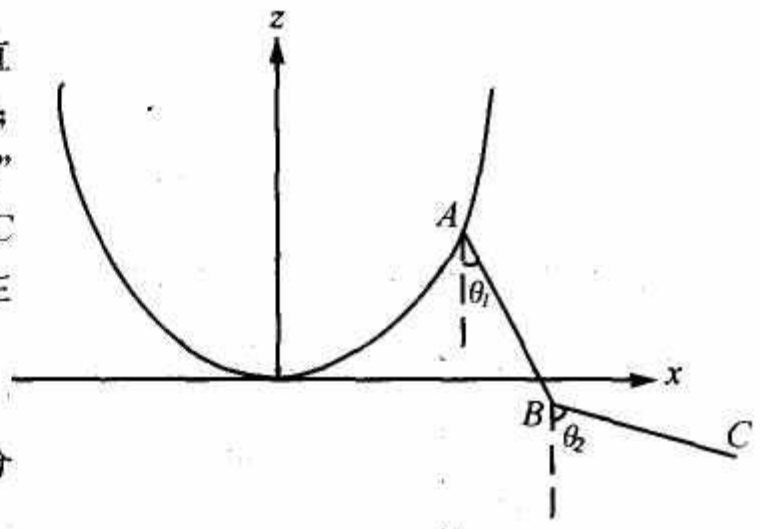


图 2.38

求：(1)系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2)微振动时系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

解：(1)A、B、C 三点的坐标分别是

$$\begin{cases}(x,ax^2)\\ (x+l\sin\theta_1,ax^2-l\cos\theta_1)\\ (x+l\sin\theta_1+l\sin\theta_2,ax^2-l\cos\theta_1-l\cos\theta_2)\end{cases}$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}M[\dot{x}^2+(2ax\dot{x})^2]+\frac{1}{2}m[(\dot{x}+l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(2ax\dot{x}+l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2]\\&+\frac{1}{2}m[\dot{x}+l\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2+(2ax\dot{x}+l\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2]\\&-Mgax^2-mg(ax^2-l\cos\theta_1)-mg(ax^2-l\cos\theta_1-l\cos\theta_2)\\=&\frac{1}{2}(M+2m)(1+4a^2x^2)\dot{x}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\&+2ml\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2+4mlax\dot{x}\dot{\theta}_1\sin\theta_1+2mlax\dot{x}\dot{\theta}_2\sin\theta_2\\&-(M+2m)gax^2+mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)\end{aligned}$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}(M+2m)[(1+4a^2x^2)\ddot{x}+4a^2x\dot{x}^2]+2ml\ddot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\ddot{\theta}_2\cos\theta_2+4mlax\ddot{\theta}_1\sin\theta_1\\ \quad+2mlax\ddot{\theta}_2\sin\theta_2-2ml\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1-ml\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2+4mlax\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1+2mlax\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2+2(M+2m)gax=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+2\ddot{x}\cos\theta_1+4a\dot{x}^2\sin\theta_1+4ax\ddot{x}\sin\theta_1+l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+\ddot{x}\cos\theta_2+2a\dot{x}^2\sin\theta_2+2ax\ddot{x}\sin\theta_2+l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

(2)在微振动条件下，系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式，故

$$L=\frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+2ml\dot{x}\dot{\theta}_1+ml\dot{x}\dot{\theta}_2$$
$$-(M+2m)gax^2-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

由此,代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}(M+2m)\ddot{x}+2ml\ddot{\theta}_1+ml\ddot{\theta}_2+2(M+2m)gax=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+2\ddot{x}+l\ddot{\theta}_2+2g\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+\ddot{x}+l\ddot{\theta}_1+g\theta_2=0\end{cases}$$

【例 2.57】 已知:质量为 M 的小环 A 套在竖直平面内的、长半轴为 a 短半轴为 b 的椭圆形线圈上,并可沿此椭圆形线圈运动;在小环上附有摆锤质量均为 m 摆长均 l 为的"双摆"AB-BC;椭圆中心 O 与 A 点的连线与竖直向下直线之间的夹角为 φ,AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1,BC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2;整个系统只能在竖直平面内运动(图 2.39).

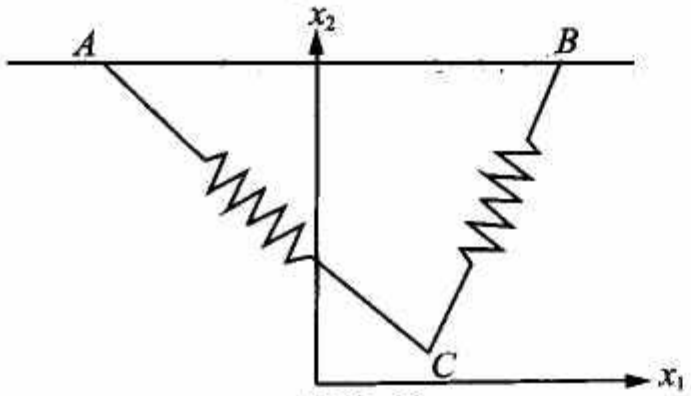


图 2.39

求:(1)系统的 Lagrangian 和 $a=b$ 时的运动微分方程;

(2)微振动 $a=b$ 时系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

解:(1)以椭圆中心 O 为原点,水平方向为 x_1 轴,竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系. 由此,A、B、C 三点的坐标分别是

$$\begin{cases}(a\sin\varphi,-b\cos\varphi)\\ (a\sin\varphi+l\sin\theta_1,-b\cos\varphi-l\cos\theta_1)\\ (a\sin\varphi+l\sin\theta_1+l\sin\theta_2,-b\cos\varphi-l\cos\theta_1-l\cos\theta_2)\end{cases}$$

于是,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{M}{2}[(a\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+(b\dot{\varphi}\sin\varphi)^2]+\frac{m}{2}[(a\dot{\varphi}\cos\varphi+l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(a\dot{\varphi}\sin\varphi+l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2]$$
$$+\frac{m}{2}[(a\dot{\varphi}\cos\varphi+l\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2+(b\dot{\varphi}\sin\varphi+l\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2]$$
$$+Mgb\cos\varphi+mg(b\cos\varphi+l\cos\theta_1)+mg(b\cos\varphi+l\cos\theta_1+l\cos\theta_2)$$
$$=\frac{1}{2}(M+2m)(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$+2ml(a\cos\varphi\cos\theta_1+b\sin\varphi\sin\theta_1)\dot{\varphi}\dot{\theta}_1+ml(a\cos\varphi\cos\theta_2+b\sin\varphi\sin\theta_2)\dot{\varphi}\dot{\theta}_2$$
$$+(M+2m)gb\cos\varphi+mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

当 $a=b$ 时,系统的 Lagrangian 简化为

$$L=\frac{1}{2}(M+2m)a^2\dot{\varphi}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+2mla\dot{\varphi}\dot{\theta}_1\cos(\varphi-\theta_1)+mla\dot{\varphi}\dot{\theta}_2\cos(\varphi-\theta_2)$$
$$+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+(M+2m)ga\cos\varphi+mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}(M+2m)a\ddot{\varphi}+2ml\ddot{\theta}_1\cos(\varphi-\theta_1)+ml\ddot{\theta}_2\cos(\varphi-\theta_2)\\ \quad+2ml\dot{\theta}_1^2\sin(\varphi-\theta_1)+ml\dot{\theta}_2^2\sin(\varphi-\theta_2)+(M+2m)g\sin\varphi=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+2a\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta_1)-2a\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta_1)+l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+a\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta_2)-a\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta_2)+l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

(2)微振动 $a=b$ 时，系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式，故

$$L=\frac{1}{2}(M+2m)a^2\dot{\varphi}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+2mla\dot{\varphi}\dot{\theta}_1+mla\dot{\varphi}\dot{\theta}_2+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$-\frac{1}{2}(M+2m)ga\varphi^2-\frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2+\theta_2^2)$$

由此，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}(M+2m)a\ddot{\varphi}+2ml\ddot{\theta}_1+ml\ddot{\theta}_2+(M+2m)g\varphi=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+2a\ddot{\varphi}+l\ddot{\theta}_2+2g\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+a\ddot{\varphi}+l\ddot{\theta}_1+g\theta_2=0\end{cases}$$

【例 2.58】 已知：摆锤质量均为 m 摆长均为 l 的两个单摆 OA 和 $O'A'$，其悬点 O 和 O' 处在同一水平位置，相距为 a；两个单摆 OA 和 $O'A'$ 均在竖直平面内摆动；摆锤 A 和 A' 之间用一根弹性系数为 k 固有长度为 a 的弹簧相连；OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，$O'A'$ 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2（图 2.40）.

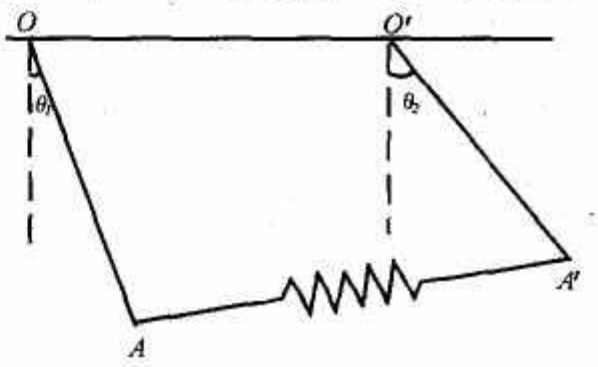


图 2.40

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)微振动时的运动微分方程 .

解：(1)以 O 为原点，OO' 延长线为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系 . 由此，摆锤 A 和 A' 的坐标分别为

$$\begin{cases}(l\sin\theta_1,-l\cos\theta_1)\\ (a+l\sin\theta_2,-l\cos\theta_2)\end{cases}$$

于是，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(l\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2]+\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}_2\cos\theta_1)^2+(l\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2]$$
$$-\frac{1}{2}k[\sqrt{(a+l\sin\theta_2-l\sin\theta_1)^2+(-l\cos\theta_2+l\cos\theta_1)^2}-a]^2+mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$
$$=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)-\frac{1}{2}k[\sqrt{a^2+2l^2-2l^2\cos(\theta_1-\theta_2)-2al(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}-a]^2$$
$$+mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

(2)微振动时，系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式，故

$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)-\frac{1}{2}kl^2(\theta_1-\theta_2)^2-\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

由此，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{l\theta}_1 + kl(\theta_1 - \theta_2) + mg\theta_1 = 0 \\ m\ddot{l\theta}_2 - kl(\theta_1 - \theta_2) + mg\theta_2 = 0 \end{cases}$$

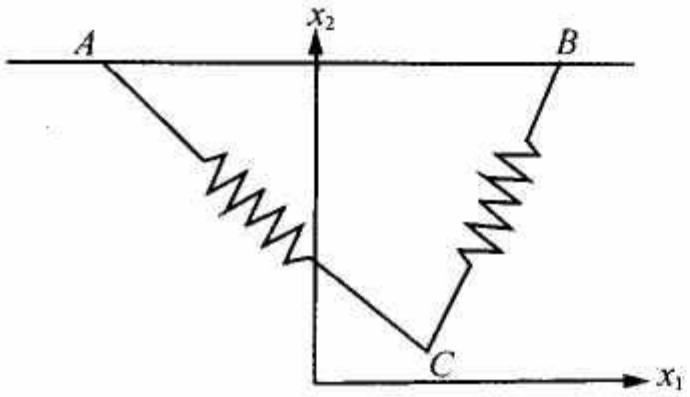


图 2.41

【例 2.59】 已知：质量为 m 的质点 C，用两根弹性系数为 k 固有长度为 a 的弹簧连接在同一水平线的 A、B 两点；A、B 两点相距等于 a；整个系统只能在竖直平面内运动(图 2.41).

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)微振动时的运动微分方程 .

解：以质点 C 处于对称位置(即两根弹簧处于固有长度)时那一点为原点，水平方向为 x_1 轴，竖直向上方向为 x_2 轴建立坐标系 . 质点 C 在任意时刻的坐标为 (x_1, x_2). 因而，系统的 Lagrangian 为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2$$

$$-\frac{1}{2}k\left\{\left[\sqrt{\left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-x_2 + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} - a\right]^2 + \left[\sqrt{\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-x_2 + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} - a\right]^2\right\}$$

(2)微振动时，系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式，由于弹性势能中第一个方括号近似等于 $\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)$，第二个方括号近似等于 $\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)$，故

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2 - \frac{1}{2}k\left[\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - mgx_2 - \frac{1}{4}k(x_1^2 + 3x_2^2)$$

由此，代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}kx_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \frac{3}{2}kx_2 + mg = 0 \end{cases}$$

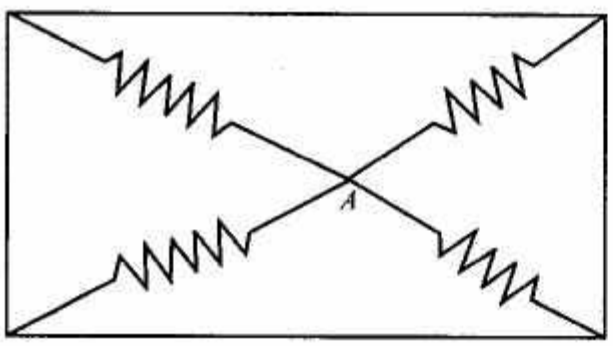


图 2.42

【例 2.60】 已知：4 根等长的、弹性系数为 k 的弹簧，它们的一端固定在长为 $2a$ 宽为 $2b$ 的矩形的 4 个顶点上，另一端则连接在同一个质量为 m 的质点 A 上；当质点 A 处在矩形正中心 O 时 4 根弹簧都是固有长度；整个系统置于光滑的水平面上(图 2.42).

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)微振动时的运动微分方程 .

解:(1)以矩形正中心 O 为原点,矩形长度方向为 x_1 轴,宽读方向为 x_2 轴建立坐标系. 设质点 A 的坐标为(x_1,x_2),弹簧固有长度为 $l=\sqrt{a^2+b^2}$. 由此,系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}k\{[\sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2}-l]^2+[\sqrt{(x_1+a)^2+(x_2-b)^2}-l]^2$$
$$+[\sqrt{(x_1+a)^2+(x_2+b)^2}-l]^2+[\sqrt{(x_1-a)^2+(x_2+b)^2}-l]^2\}$$

(2)微振动时,系统的 Lagrangian 中只保留广义速度的二次齐次式和广义坐标的二次齐次式,故

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{2k}{a^2+b^2}(a^2x_1^2+b^2x_2^2)$$

由此,代入 Lagrange 方程后得到运动微分方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\dfrac{4ka^2}{m(a^2+b^2)}x_1=0\\ \ddot{x}_2+\dfrac{4kb^2}{m(a^2+b^2)}x_2=0\end{cases}$$

【例 2.61】 已知:系统的动能和势能分别为

$$\begin{cases}T=\dfrac{1}{2}(3\dot{x}_1^2+2\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2+2\dot{x}_2\dot{x}_3+2\dot{x}_3\dot{x}_1+4\dot{x}_1\dot{x}_2)\\ V=\dfrac{1}{2}k(6x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+8x_2x_3+8x_3x_1+10x_1x_2)\end{cases}$$

求:(1)简正变换,使动能变成 $T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$;

(2)变换后的势能.

解:(1)仔细观察动能中的交叉项,进行配方,有

$$T=\frac{1}{2}[(\dot{x}_1+\dot{x}_2+\dot{x}_3)^2+(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\dot{x}_1^2]$$

因此,可令

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}$$

就有 $T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$.

(2)对势能,亦可同样进行配方,有

$$V=\frac{1}{2}k[4(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2)^2+x_1^2]$$

于是,变换后的势能为

$$V=\frac{1}{2}k(q_1^2+q_2^2+4q_3^2)$$

【例 2.62】 已知:系统的动能和势能分别为

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}[(b_1^2+c_1^2)\dot{x}_1^2+(c_2^2+a_2^2)\dot{x}_2^2+(a_3^2+b_3^2)\dot{x}_3^2+2a_2a_3\dot{x}_2\dot{x}_3+2b_3b_1\dot{x}_3\dot{x}_1+2c_1c_2\dot{x}_1\dot{x}_2] \\ V=\dfrac{1}{2}k[(b_1^2b_2^2+c_3^2c_1^2)x_1^2+(c_2^2c_3^2+a_1^2a_2^2)x_2^2+(a_3^2a_1^2+b_2^2b_3^2)x_3^2] \\ \qquad +k[a_1^2a_2a_3x_2x_3+b_1b_2^2b_3x_3x_1+c_1c_2c_3^2x_1x_2] \end{cases}$$

求:(1)简正变换,使动能变成 $T=\dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$;

(2)变换后的势能.

解:(1)仔细观察动能中的交叉项,进行配方,可令

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

就有 $T=\dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$.

(2)对势能,亦可同样进行配方. 变换后的势能为

$$V=\frac{1}{2}k[(a_1q_1)^2+(b_2q_2)^2+(c_3q_3)^2]$$

2.12 r-l-c 电路中的 Lagrange 方程

Lagrange 方程的优点之一,是易于将处理力学系统的方法,移植至非力学系统,甚至非物理系统(例如数理经济学). 本节主要讨论 Lagrange 方程在电路系统中的应用. 由于许多符号已被力学系统占用,因而电路理论中的电阻、电感、电容、电流、电位等都改用小写字母表示.

一、最简单的 r-l-c 电路

图 2.43 是最简单的 r-l-c 电路. 整个系统由电阻 r、电感 l、电容 c、电源电动势 ε 串联组成. 设电荷为 e,电流为 $i=\dfrac{de}{dt}$,电路中各元件两端的电位差为 u,因为

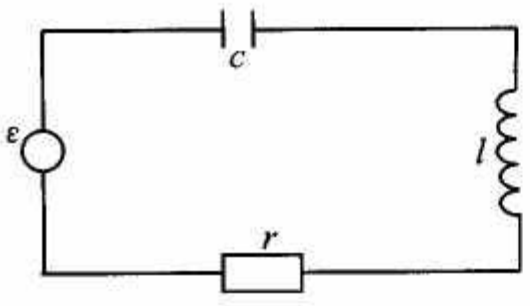


图 2.43

$$\begin{cases} u^l = l\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = l\dfrac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2} \\ u^r = ri = r\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \\ u^c = \dfrac{1}{c}\int i\mathrm{d}t = \dfrac{e}{c} \end{cases} \tag{2.12.1}$$

所以，根据 Ohm 定律(G. S. Ohm，1787～1854)，有

$$l\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{c} = \varepsilon(t) \tag{2.12.2}$$

最简单的 r-l-c 电路是一个很好、很实际的模型：它含有诸多“产生”、“消耗”、“储蓄”、“贸易”等元器件．“数理经济学”中的模型就来源与此．

二、最简单的耗散力学系统

图 2.44 是最简单的耗散力学系统．整个系统是质量为 m 的质点在并联的弹簧(弹性系数为 k)和阻尼器(阻尼系数为 μ)，以及强迫力 $f(t)$的联合作用下运动．由此，系统的动能、势能、Rayleigh 耗散函数、非保守广义力分别为

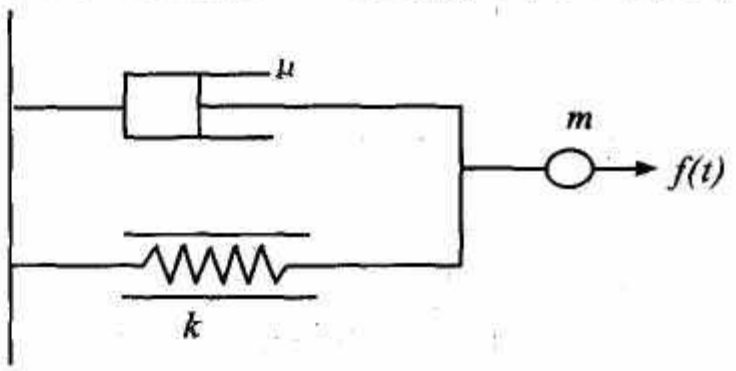


图 2.44

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}m\dot{q}^2 \\ V = \dfrac{1}{2}kq^2 \\ D = \dfrac{1}{2}\mu\dot{q}^2 \\ Q = f(t) \end{cases} \tag{2.12.3}$$

将(2.12.3)式代入有耗散函数的 Lagrange 方程，得到

$$m\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + kq = f(t) \tag{2.12.4}$$

可以看出，方程(2.12.4)式与方程(2.12.2)式是类似的，其中的物理量有可以类比之处．

三、r-l-c 电路与耗散力学系统之间的类比关系

对比(2.12.4)式与(2.12.2)式，有如下对应关系：

$$\begin{cases} \text{广义坐标 } q_k \Leftrightarrow \text{电源电动热 } e_k \\ \text{广义速度 } \dot{q}_k \Leftrightarrow \text{电流 } \dot{e}_k = i_k \\ \text{广义力 } Q_k \Leftrightarrow \text{电源电动势 } \varepsilon_k \end{cases} \tag{2.12.5}$$

$$\begin{cases} \text{广义质量 } M_{kl} \Leftrightarrow \text{电感 } l_{kl}(k = l \text{ 自感};k \neq l \text{ 互感}) \\ \text{阻尼系数 } \mu_k \Leftrightarrow \text{电阻 } r_k \\ \text{弹性系数 } k_k \Leftrightarrow \text{电容的倒数} \dfrac{1}{c_k} \end{cases} \tag{2.12.6}$$

$$\begin{cases} \text{动能 } T = \dfrac{1}{2} M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} l_{kl} \dot{e}_k \dot{e}_l \\ \text{弹性势能 } V = \dfrac{1}{2} k_k q_k^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{c_k} e_k^2 \\ \text{耗散函数 } D = \dfrac{1}{2} \mu_k \dot{q}_k^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} r_k \dot{e}_k^2 \end{cases} \tag{2.12.7}$$

这种类比有更深广的意义,其他学科(包括非物理学学科)也可作相应的类比.

四、电路方程与 Lagrange-Maxwell 方程

1. 电路方程

设 n 个回路的电场能量为 $U^e(e_l)$,n 个回路的磁场能量为 $U^m(\dot{e}_l)$,n 个回路的电耗散函数为 $D^e(\dot{e}_l)$;则电路方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial U^m}{\partial \dot{e}_l} - \frac{\partial U^e}{\partial e_l} = -\frac{\partial D^e}{\partial \dot{e}_l} + \varepsilon_l \qquad (l = 1, \cdots, n) \tag{2.12.8}$$

2. Lagrange-Maxwell 方程

在力学系统与电路系统耦合的问题中,Lagrangian 和耗散函数可定义为

$$\begin{cases} L = T(\dot{q}, q_k) - V(q_k) + U^m(\dot{q}_k, \dot{e}_l) - U^e(q_k, e_l) \\ D = D(\dot{q}_k) + D^e(\dot{e}_l) \end{cases} \tag{2.12.9}$$

于是,Lagrange-Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{e}_l} - \dfrac{\partial L}{\partial e_l} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{e}_l} + \varepsilon_k \qquad (l = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{2.12.10}$$

【例 2.63】 已知:3 个各自独立的 r-l-c 电路通过互感耦合在一起. 第一个回路的自感为 l_{11},互感为 l_{12} 和 l_{31},电阻为 r_1,电容为 c_1,电源电动势为 ε_1;其余两个回路中的元器件的编号依此类推.

求：系统的电流运动方程．

解：系统的动能、势能、耗散函数和广义力分别为

$$\begin{cases} T=\dfrac{1}{2}l_{11}\dot{e}_1^2+\dfrac{1}{2}l_{22}\dot{e}_2^2+\dfrac{1}{2}l_{33}\dot{e}_3^2+l_{23}\dot{e}_2\dot{e}_3+l_{31}\dot{e}_3\dot{e}_1+l_{12}\dot{e}_1\dot{e}_2 \\ V=\dfrac{1}{2c_1}e_1^2+\dfrac{1}{2c_2}e_2^2+\dfrac{1}{2c_3}e_3^2 \\ D=\dfrac{1}{2}r_1\dot{e}_1^2+\dfrac{1}{2}r_2\dot{e}_2^2+\dfrac{1}{2}r_3\dot{e}_3^2 \\ Q_k=\varepsilon_k \end{cases}$$

代入 Lagrange 方程，得到

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r_1\dot{e}_1 \\ r_2\dot{e}_2 \\ r_3\dot{e}_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_1/c_1 \\ e_2/c_2 \\ e_3/c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

或

$$l_{kl}\frac{\mathrm{d}^2e_l}{\mathrm{d}t^2}+r_k\frac{\mathrm{d}e_k}{\mathrm{d}t}+\frac{e_k}{c_k}=\varepsilon_k \qquad (\text{不对 } k \text{ 求和})$$

2.13 变分问题的 Euler 方程

M. von Laue(1879～1960)在《物理学史》(商务印书馆，1978)一书中说："从Euler的时代起，数学家已经建立了和运动方程等价的变分原理，事实上后者包括了前者．这种类型的原理的一个形式是以 de Maupertuis(1698～1759)的名字命名的，他以激烈的热情发表了这个原理；但是 Lagrange 第一个对这个原理作了正确的叙述．这些原理中最著名的一个是 Hamilton 最小作用量原理，1886 年 von Helmholtz把它应用到整整一系列非力学过程中．Planck(1858～1947)把这看作是所有自然规律中最概括的一个．这个问题涉及到一个关于动能和势能的差在两个固定时间点之间的时间积分，并认为，对于实际的运动，这个积分小于任何其他可以设想的从同一个始态到同一个终态的积分．当这样一类原理在 18 世纪出现以后，它们激起了极大的轰动．运动的微分方程根据紧接的前一瞬间的运动确定一定瞬间的事件，这和有关自然界的因果概念是一致的．在这些(变分)原理中，正好相反，对在有限的(非无限小的)时间间隔内的整个运动一起同时加以考虑，就好像未来也参与对现状的确定．似乎一种目的论因素在这里被引进了物理学……"

为了理解 Hamilton 最小作用量原理，首先来研究与之相关的 Euler 的变分问题．

一、Euler 方程

自 P. de Fermat(1601～1665)于 1657 年创建“最短光线”变分原理以来，在物理学及相关学科中已陆续出现了若干其他变分原理；例如：Jakob Bernoulli(1654～1705)于 1690 年发表的“悬链线”变分原理，于 1696 年发表的“最速落径”(brachistochrone)变分原理，P.-L. M. de Maupertuis(1698～1759)于 1744 年发表的“最小作用量”变分原理，L. Euler(1707～1783)于 1765 年发表的“短程线(geodesic line)”变分原理，W. R. Hamilton(1805～1865)爵士于 1834 至 1835 年发表的新“最小作用量”变分原理，D. Hilbert(1862～1943)于 1916 年发表的“引力作用量”变分原理，以及 20 世纪中叶出现的、用于连续介质力学的“最小位(势)能”变分原理等．Euler 方程的导出，将这些变分原理置于统一的框架之中．D. Hilbert 于 1916 年发表的“引力作用量”变分原理，就是将 Euler 方程用于“广义相对论”的一个成功范例，尽管他事前与 Einstein 讨论过“广义相对论”，尽管他比 Einstein 的论文迟发表 1 周．

L. Euler 于 1765 年发表的“短程线”变分原理的出发点是，希望在两个值 x_1 和 x_2 之间找到一条路径，使得函数 $f(y,\dot{y},x)$(注意此处 $\dot{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$)的线积分为一极值；换言之，对于适当的函数 y，积分

$$J=\int_A^B f(y,\dot{y},x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\max\\ \min\end{cases} \tag{2.13.1}$$

式中，路径的两个端点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$是固定的．实际上，在真实的物理学过程中，除了一个例外(即热力学中的“熵”)是取极大(被称为“Carnot 原理”(N. L. S. Carnot，1796～1832)或“Gibbs 原理”(J. W. Gibbs，1839～1903))，其他变分原理都是取极小．如果引入 E. Schrödinger(1887～1961)的“负熵”概念，则连这一个例外也没有．所以，在真实的物理学过程中，(2.13.1)式一般应该是

$$J=\int_A^B f(y,\dot{y},x)\mathrm{d}x=\min \tag{2.13.2}$$

1. Euler 方程的第一种推导：小参量法

在因变量 y 中引入小参量 α，使得小参量 α 的不同取值，表征着偏离“短程线”(或“捷径”)的不同路径，而 $\alpha=0$ 的路径则与“短程线”(或“捷径”)一致；即

$$\begin{cases}y(x)\to y(x,\alpha)\\ y(x,0)\Leftrightarrow \text{短程线时的 } y(x)\end{cases} \tag{2.13.3}$$

然后，对 $y(x,\alpha)$作 Taylor 展开，有

$$y(x,\alpha)=y(x,0)+\alpha\eta(x) \tag{2.13.4}$$

式中，$\eta(x)=\dfrac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ 是 x 的任意函数，而且它在两个端点 $A(x_1)$，$B(x_2)$ 处的值等于零，即

$$\left.\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_A^B=\left.\eta(x)\right|_A^B=0 \tag{2.13.5}$$

于是

$$J(\alpha)=\int_A^B f[y(x,\alpha),\dot{y}(x,\alpha),x]\mathrm{d}x \tag{2.13.6}$$

的极值条件为

$$\left(\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}=0 \tag{2.13.7}$$

因为 $\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}=0$，故

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}&=\int_A^B\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right)\mathrm{d}x=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\Big|_A^B-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\mathrm{d}x=\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\eta(x)\Big|_A^B-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.13.8}$$

将(2.13.5)式代入(2.13.8)式，得到

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}=-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta(x)\mathrm{d}x \tag{2.13.9}$$

在(2.13.9)式等号两边乘以变分 $\delta\alpha$，并定义 $\alpha=0$ 处的导数为 $\left(\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_0$，则

$$\begin{cases}\delta J=\left(\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right)_0\delta\alpha\\ \delta y=\left(\dfrac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right)_0\delta\alpha=\eta_0(x)\delta\alpha\end{cases} \tag{2.13.10}$$

因而，由(2.13.9)式有

$$\delta J=-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.13.11}$$

根据极值条件(2.13.7)式，得到

$$\delta J=-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2.13.12}$$

由于 δy 是任意的，故仅当

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{2.13.13}$$

时，才会有极值条件 $\delta J=0$.

方程(2.13.13)式被称为 Euler 方程.

2. Euler 方程的第二种推导："等 x 变分"法

定理：在"等 x 变分"(即，$\delta(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\delta y)$，$\delta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta)$)条件下，总可以由泛函 $J=\int_A^B f(y,\dot{y},x)\,\mathrm{d}x$ 的变分为零的要求得到 Euler 方程.

这一定理的证明实际上与上面的"小参量法"是雷同的，但相对来说要简单得多.因为

$$\begin{aligned}\delta J&=\delta\int_A^B f(y,\dot{y},x)\mathrm{d}x=\int_A^B\delta f(y,\dot{y},x)\mathrm{d}x=\int_A^B\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_A^B\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\Big|_A^B-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y\mathrm{d}x=-\int_A^B\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{2.13.14}$$

所以，极值条件 $\delta J=0$ 就相当于 Euler 方程(2.13.13)式成立. 证明过程中已使用了在两个固定端点处 $\delta y\big|_A^B=0$ 和 δy 是任意给出的条件.

二、Euler 方程的首次积分

(1) 若 Euler 方程中 f 不含有 y，则由于 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=0 \tag{2.13.15}$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\text{const.} \tag{2.13.16}$$

(2) 若 Euler 方程中 f 不显含自变量 x，则 Euler 方程有守恒量

$$\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f=\text{const.} \tag{2.13.17}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f\right)&=\left(\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}+\dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)-\left(\dot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\\&=\dot{y}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0\end{aligned} \tag{2.13.18}$$

三、Euler 方程与 Lagrange 方程之间的对比

细心的读者已经发现 Euler 方程与 Lagrange 方程之间存在某种相似性(表 2.1):

表 2.1

	Euler 方程	Lagrange 方程
变量	x	时间 t
	y	广义坐标 q_k
	$\dot{y}$	广义速度 $\dot{q}_k$
函数	$f(y,\dot{y},x)$	Lagrangian $L(q_k,\dot{q}_k,t)$
方程	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$
动量积分 (循环积分)	若$\frac{\partial f}{\partial y}=0$,则$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\text{const.}$	若$\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$,则 $p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\text{const.}$
广义能量积分	若$\frac{\partial f}{\partial x}=0$, 则 $\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f=\text{const.}$	若$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,则 $H=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=\text{const.}$

由于 Euler 方程与 Lagrange 方程之间的这种相似性,故 Lagrange 方程有时候也被称为“Euler-Lagrange 方程”.

四、Euler 方程在历史上的某些应用

1. 平面上两点之间的短程线(L. Euler,1765)

因为平面上的弧元 $\mathrm{d}s$ 长为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+\dot{y}^2}dx \tag{2.13.19}$$

因而

$$s=\int_A^B ds=\int_A^B\sqrt{1+\dot{y}^2}dx \tag{2.13.20}$$

令

$$f=\sqrt{1+\dot{y}^2} \tag{2.13.21}$$

可见，f 既不含有 y 也不显含自变量 x. 由于$\frac{\partial f}{\partial y}=0$,因此

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=\text{const.}=c \tag{2.13.22}$$

或

$$\dot{y}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}=a \tag{2.13.23}$$

即

$$y=ax+b \tag{2.13.24}$$

这是人所共知的直线.

如果用广义能量积分,最后也将得到(2.13.23)式,因而结果仍是(2.13.24)式.

2. 球面上的短程线

因为球面上的弧元 ds 长为

$$ds=a\sqrt{(d\theta)^2+(d\varphi)^2\sin^2\theta}=a\sqrt{1+\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta}d\theta=a\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}d\theta \tag{2.13.25}$$

因而

$$s=a\int_A^B\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}d\theta \tag{2.13.26}$$

令

$$f=\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta} \tag{2.13.27}$$

由于$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=0$,故

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\dot{\varphi}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}}=\text{const.}=c \tag{2.13.28}$$

或

$$\dot{\varphi}=\frac{c}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-c^2}} \tag{2.13.29}$$

上述(2.13.29)对所有的 θ 都对，而当 $\theta=0$ 时 $c=0$，故恒有 $c=0$. 于是

$$\dot{\varphi}=0 \tag{2.13.30}$$

即

$$\varphi=\text{const.} \tag{2.13.31}$$

换言之，球面上的短程线就是所有经过 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 的“球的两极”的大圆. 因为“球的两极”是任意选择的，所以球面上一切大圆都是短程线.

3. 最速落径(Jakob Bernoulli, 1696)

设质点降落速度为 v，则此质点降落一段弧元 $\mathrm{d}s$ 所需时间为 $\frac{\mathrm{d}s}{v}$. 由能量守恒定律 $\frac{1}{2}mv^2=mgy$，有 $v=\sqrt{2gy}$. 于是，质点降落的总时间为

$$t=\int_A^B\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}=\int_A^B\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{2.13.32}$$

由于常数 $\sqrt{2g}$ 在 Euler 方程中的每一项都出现，因此它将被消去而不起任何作用；故令

$$f=\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}} \tag{2.13.33}$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，所以有广义能量积分

$$y(1+\dot{y}^2)=\text{const.}=c_1 \tag{2.13.34}$$

作变量代换，以 θ 为参量，设

$$\dot{y}=\cot\theta \tag{2.13.35}$$

有

$$y=\frac{c_1}{1+\cot^2\theta}=\frac{c_1}{2}(1-\cos2\theta) \tag{2.13.36}$$

而

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\dot{y}}=2c_1\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \tag{2.13.37}$$

积分后是

$$x=\frac{c_1}{2}(2\theta-\sin2\theta)+c_2 \tag{2.13.38}$$

故最速落径的参量方程为

$$\begin{cases}x-c_2=\dfrac{c_1}{2}(2\theta-\sin2\theta)\\[2ex] y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos2\theta)\end{cases} \tag{2.13.39}$$

这组参量方程是旋轮线(或摆线)方程.

4. 悬链线(Jakob Bernoulli,1690)

设悬链的两个固定下点 A 和 B 处于同一水平高度,悬链的中心最低点的坐标为 $(0,a)$,悬链的线密度为 ρ,则悬链的势能为

$$V=\int_A^B \rho g y \mathrm{d}s=\rho g\int_A^B y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.13.40}$$

由于 ρg 为常数,可令

$$f=y\sqrt{1+\dot{y}^2} \tag{2.13.41}$$

因为$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$,所以有广义能量积分

$$\dot{y}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}-f=\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}-y\sqrt{1+\dot{y}^2}=\text{const.}=c \tag{2.13.42}$$

即

$$1+\dot{y}^2=\frac{y^2}{c^2} \tag{2.13.43}$$

或

$$\frac{c\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{y^2-c^2}}=\mathrm{d}x \tag{2.13.44}$$

积分(2.13.44)式,并代入边界条件 $x=0$ 时 $y=a$,得到

$$y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2.13.45}$$

它是悬链线的方程.

从以上这些计算中可以看出,由于在 Euler 方程中只有一个自由度,因此当$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ 或$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ 时,实际上用 Euler 方程的循环积分或广义能量积分就可解决问题,而根本用不着求解 Euler 方程.

【例 2.64】 已知:在 O-XY 平面上有两个位于 y 轴同侧的指定点 A 和 B;连接 A 和 B 的曲线方程为 $y=y(x)$;曲线 $y=y(x)$ 绕 y 轴旋转一周得到一个旋转曲面.

求:当旋转曲面的面积 Ω 最小时曲线方程 $y=y(x)$ 的具体形式.

解:因为旋转曲面的面积为

$$\Omega=\int_A^B 2\pi x\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x$$

便可令

$$f=x\sqrt{1+\dot{y}^2}$$

由于$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,所以有循环积分

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=\text{const.}=a$$

即

$$\dot{y}=\pm\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

积分后得到

$$y=a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+b$$

2.14 Hamilton 原理和 Maupertuis 原理

力学中的变分原理可以分成两类：一类是微分形式的，包括“虚功原理”和“d'Alembert原理”，另一类是积分形式的，就是上一节提到的由 P.-L. M. de Maupertuis(1698～1759)于 1744 年发表的“最小作用量”变分原理和由 W. R. Hamilton (1805～1865)爵士于 1834 至 1835 年发表的新“最小作用量”变分原理．当然，也可以其他的标准分类：一类服从“等时变分”$\delta t=0$，另一类服从“等能变分”$\delta E=0$；前者包括绝大多数变分原理，后者只有 Maupertuis“最小作用量”变分原理一家．

从上一节“Euler 方程与 Lagrange 方程之间的对比”中可以看出，由于 Euler 方程对应的变分原理是 $\delta J=\delta\int_A^B f(y,\dot{y},x)\mathrm{d}x=0$，因此根据它们之间的类比关系，立即可以得到对应于 Lagrange 方程的变分原理是 $\int_0^t L(q_k,\dot{q}_k,t)\mathrm{d}t=0$．本节从相反的方向来证明这一点；换言之，通过这一证明，表明 Euler 的“短程线”变分原理和 Hamilton的新“最小作用量”变分原理都是充分必要的．

除此之外，本节还要讨论有关与 Hamilton 原理相关的其他问题以及Maupertuis 原理．

一、Hamilton 原理的推导

1. $\delta t=0$ 条件下几个重要的变分表达式

(1)根据变分 δ 与微分 d 的可对易性和 $\delta t=0$，有

$$\begin{aligned}\delta L(q_k,\dot{q}_k,t)&=\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k\qquad(k=1,\cdots,m)\end{aligned}\tag{2.14.1}$$

(2)如果 $f_\beta(q_k,t)=0$ 是多余的完整约束条件，$\lambda_\beta(t)$是 Lagrange 未定乘数，则有

$$\delta(\lambda_\beta f_\beta)=\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\delta q_k\right)\qquad(k=1,\cdots,m;\ \beta=1,\cdots,s)\tag{2.14.2}$$

(3)如果 $U^\beta(q_k,\dot{q}_k,t)$是非线性非完整问题中的 Euler 函数,$\lambda_\beta(t)$是 Lagrange 未定乘数,则有

$$\begin{aligned}\delta(\lambda_\beta U^\beta)&=\lambda_\beta\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)\\&=\lambda_\beta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\lambda_\beta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k-\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\\&\qquad(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r)\end{aligned}\tag{2.14.3}$$

根据在 2.8 中的讨论,Euler 条件

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k=0\qquad(k=1,\cdots,m+r)\tag{2.14.4}$$

相当于

$$\lambda_\beta\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0\qquad(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r)\tag{2.14.5}$$

因此,(2.14.3)成为

$$\begin{aligned}\delta(\lambda_\beta U^\beta)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\\&(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r)\end{aligned}\tag{2.14.6}$$

2. 由 Lagrange 方程推导 Hamilton 原理

将 Lagrange 方程中各项乘以广义虚位移 δq_k 并求和,然后沿一条可能的路径(即 m 维空间的一条曲线)自共同端点 $A(t=0)$至共同端点 $B(t=\tau)$对时间 t 积分,有

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k\mathrm{d}t&=\int_0^\tau\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_0^\tau-\int_0^\tau\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)\mathrm{d}t=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_0^\tau-\int_0^\tau\delta L\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_0^\tau-\delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t=0\qquad(k=1,\cdots,m)\end{aligned}\tag{2.14.7}$$

由于在共同端点 $A(t=0)$和共同端点 $B(t=\tau)$处,有

$$\delta q_k\Big|_0^\tau=0\tag{2.14.8}$$

(在以下类似推导中,(2.14.8)式将略而不写)即(2.14.7)式中的$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_0^\tau=0$,因此可以省略. 于是,Lagrange 方程成立就相当于是

$$\delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t=0 \tag{2.14.9}$$

记“Hamilton 主函数”S 为

$$S=\int_0^\tau L\mathrm{d}t \tag{2.14.10}$$

所以，Lagrange 方程成立也相当于是

$$\delta S=0 \tag{2.14.11}$$

这就是 Hamilton 原理.

Hamilton 原理：力学系统其真实运动所必须符合的条件，是“Hamilton 主函数”S 的变分 $\delta S=0$；这里的变分 δ，其目的是从各种可能的路径（具有共同端点、并为约束所许可的若干条 m 维空间的曲线）中，挑出一条真实的路径.

3. 由具有多余约束 Lagrange 方程得到的 Hamilton 原理

将具有多余约束 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m;\ \beta=1,\cdots,s) \tag{2.14.12}$$

各项乘以广义虚位移 δq_k 并求和，然后沿一条可能的路径（即 m 维空间的一条曲线）自共同端点 $A(t=0)$ 至共同端点 $B(t=\tau)$ 对时间 t 积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k\mathrm{d}t&=-\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)+\delta(\lambda_\beta f_\beta)\right]\mathrm{d}t\\&=-\int_0^\tau\delta(L+\lambda_\beta f_\beta)\mathrm{d}t=-\delta\int_0^\tau(L+\lambda_\beta f_\beta)\mathrm{d}t=-\delta S-\delta\int_0^\tau(\lambda_\beta f_\beta)\mathrm{d}t=0\\&(k=1,\cdots,m;\beta=1,\cdots,s)\end{aligned} \tag{2.14.13}$$

所以，具有多余约束问题的 Hamilton 原理是

$$\delta S=-\delta\int_0^\tau(\lambda_\beta f_\beta)\mathrm{d}t\qquad(\beta=1,\cdots,s) \tag{2.14.14}$$

4. 由非完整系统 Lagrange 方程得到的 Hamilton 原理

将非完整系统 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial\dot{q}_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r) \tag{2.14.15}$$

各项乘以广义虚位移 δq_k 并求和，然后沿一条可能的路径（即 m 维空间的一条曲线）自共同端点 $A(t=0)$ 至共同端点 $B(t=\tau)$ 对时间 t 积分，代入(2.14.6)式后，有

$$\int_0^\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k\,\mathrm{d}t=-\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)-\delta(\lambda_\beta U^\beta)\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^\tau\delta(L-\lambda_\beta U^\beta)\,\mathrm{d}t=-\delta\int_0^\tau(L-\lambda_\beta U^\beta)\,\mathrm{d}t=-\delta S+\delta\int_0^\tau(\lambda_\beta U^\beta)\,\mathrm{d}t=0$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r) \tag{2.14.16}$$

所以，非完整系统的 Hamilton 原理是

$$\delta S=\delta\int_0^\tau(\lambda_\beta U^\beta)\,\mathrm{d}t\qquad(\beta=1,\cdots,r) \tag{2.14.17}$$

换言之，非完整系统的 Hamilton 原理(2.14.17)式等价于

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\partial U^\beta}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}=\dot{\lambda}_\beta\dfrac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\end{cases}\qquad(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r) \tag{2.14.18}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}=\dot{\lambda}_\beta\dfrac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\end{cases}\qquad(k=1,\cdots,m+r;\ \beta=1,\cdots,r) \tag{2.14.19}$$

5. 由有非保守力的 Lagrange 方程得到的 Hamilton 原理

有非保守力的 Lagrange 方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-Q_k=0\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.20}$$

将(2.14.20)式各项乘以广义虚位移并求和，然后沿一条可能的路径(即 m 维空间的一条曲线)自共同端点 $A(t=0)$ 至共同端点 $B(t=\tau)$ 对时间 t 积分，有

$$\int_0^\tau\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k\,\mathrm{d}t=-\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)+Q_k\delta q_k\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^\tau(\delta L+Q_k\delta q_k)\,\mathrm{d}t=-\delta S-\int_0^\tau Q_k\delta q_k\,\mathrm{d}t=0$$

$$(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.21}$$

所以，有非保守力问题的 Hamilton 原理是

$$\delta S=-\int_0^\tau Q_k\delta q_k\,\mathrm{d}t\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.22}$$

当然，非保守力问题的 Hamilton 原理(2.14.22)式中，也包括有耗散函数 $D_{(n)}$ 问题的 Hamilton 原理.

二、有关 Hamilton 原理的讨论

(1) Hamilton 原理的形式较为简洁．它包含了全部动力学，甚至多余完整约束的问题，非线性非完整约束问题，非保守力问题，都有相应的 Hamilton 原理．当然，在研究理论问题的时候，用得最多得仍是完整保守系的 Hamilton 原理．

(2) Hamilton 原理中只含有一些与广义坐标无关的物理量，而并不含有广义坐标和广义速度以及它们的导数等；其中的动能和势能，约束方程，Euler 函数，耗散函数等都是标量，因而绝不依赖系统坐标系的选择．

(3) Hamilton 原理可以方便地推广到其他一些非力学系统(例如电磁场，弹性力学场，基本粒子场等)中去．Hamilton 原理和 Lagrangian 一起，构成了一种隐含各种运动微分方程的简洁而不变的方法．用这种方法，可以导出 Newton 方程，Maxwell方程，Schrödinger 方程等．

(4) 由无区间不定积分 $S=\int L\mathrm{d}t$，可得 $\mathrm{d}S=L\mathrm{d}t$；其中 $L\mathrm{d}t$ 是一个“相对论不变量”(即“Lorentz 不变量”)．关于这一点，在 W. Pauli 或 L. D. Landau 的书中都有其证明．吴大猷先生也曾经证明过它．

(5) 对 $\mathrm{d}S=L\mathrm{d}t$ 等号两边求变分，有 $\delta(\mathrm{d}S)=\mathrm{d}(\delta S)=\delta(L\mathrm{d}t)$；在“等时变分”$\delta t=0$条件下，$\delta(L\mathrm{d}t)=\delta L\mathrm{d}t$；因而 $\delta S=\int(\delta L)\,\mathrm{d}t$，亦即变分 δ 和积分 $\int(\cdots)\mathrm{d}t$ 之间“可对易”．于是得到结论：变分 δ 和积分 $\int(\cdots)\,\mathrm{d}t$ 之间“可对易”的必要条件是“等时变分”$\delta t=0$．如果变分不是“等时”的，则变分 δ 和积分 $\int(\cdots)\mathrm{d}t$ 之间“不可对易”．

(6) 迄今为止，Hamilton 原理都与 Lagrange 方程有着千丝万缕的关系，也就是说，与 Newton 方程有着千丝万缕的关系．在下面的讨论中，物理学将撇开 Newton 方程而将 Hamilton 原理上升为“第一原理”的地位，由此可导出所谓“广义经典力学”的基本微分方程．在物理学中，撇开最初的理论根据而将后来得到的(当然必须是正确合理的)漂亮结果上升为“第一原理”的地位，是常有的事(例如在经典力学中曾将广义动量的定义由 $p_k=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}$ 改换为 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$，而且在广义经典力学中这一定义还将作出改换)；在量子力学中这种方法更被应用至极致，甚至到了有点过头的地步．

【例 2.65】 已知：(同【例 2.50】)质量为 M 半径为 a 的匀质圆环可绕环上某一固定点 O 在圆环自身所在的水平面内转动；圆环上套有一质量为 m 并可沿圆环无摩擦滑动的小珠 A；圆环圆心 C 和原点 O 的连线 CO 与水平线之间的夹角为 $\theta_1=\omega t$，圆环圆心 C 和原点 O 的连线 CO 与圆环圆心 C 和小珠 A 的连线 CA 之间的夹角为 θ_2．

求：系统的运动微分方程(用 Hamilton 原理).

解：系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}ma^2[\dot{\theta}^2+2\omega^2+2\omega\dot{\theta}+2(\omega+\dot{\theta})\omega\cos\theta]$$

因为

$$\delta S=\int_0^t ma^2[\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+\omega\delta\dot{\theta}+\omega\cos\theta\delta\dot{\theta}-(\omega+\dot{\theta})\omega\sin\theta\delta\theta]\mathrm{d}t$$

$$=ma^2\int_0^t\left[(\dot{\theta}+\omega+\omega\cos\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\theta)-(\omega+\dot{\theta})\omega\sin\theta\delta\theta\right]\mathrm{d}t$$

$$=ma^2(\dot{\theta}+\omega+\omega\cos\theta)\delta\theta\Big|_0^t-ma^2\int_0^t[(\ddot{\theta}-\omega\dot{\theta}\sin\theta)\delta\theta+(\omega+\dot{\theta})\omega\sin\theta\delta\theta]\mathrm{d}t$$

$$=-ma^2\int_0^t(\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta)\delta\theta\mathrm{d}t$$

所以由 $\delta S=0$ 可得

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

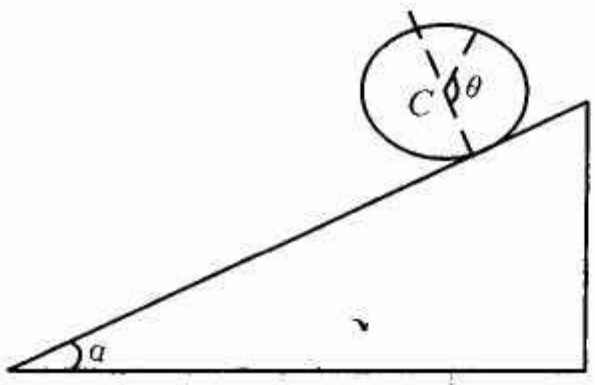


图 2.45

【例 2.66】 已知：质量为 m 半径为 a 的匀质圆盘置于仰角为 α 的粗糙斜面上，并由于重力作用而滚下；匀质圆盘的转角为 θ(图 2.45).

求：系统的运动微分方程(用 Hamilton 原理).

解：在适当的坐标系中，匀质圆盘质心 C 的坐标为 $(a\theta\cos\alpha,-a\theta\sin\alpha)$. 匀质圆盘的转动惯量为 $\frac{1}{2}ma^2$. 因此，系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m[(a\dot{\theta}\cos\alpha)^2+(-a\dot{\theta}\sin\alpha)^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\dot{\theta}^2+mga\theta\sin\alpha$$

$$=\frac{3}{4}ma^2\dot{\theta}^2+mga\theta\sin\alpha$$

因为

$$\delta S=\int_0^t\left(\frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+mga\sin\alpha\delta\theta\right)\mathrm{d}t=\int_0^t\left[\frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\theta)+mga\sin\alpha\delta\theta\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_0^t-ma\int_0^t\left(\frac{3}{2}a\ddot{\theta}-g\sin\alpha\right)\delta\theta\mathrm{d}t=-ma\int_0^t\left(\frac{3}{2}a\ddot{\theta}-g\sin\alpha\right)\delta\theta\mathrm{d}t$$

所以由 $\delta S=0$ 可得

$$a\ddot{\theta}=\frac{2}{3}g\sin\alpha$$

三、广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程

广义经典力学是 K. G. J. Jacobi(1804～1851)和 M. V. Ostrogradsky(1801～1862)在1848～1858年间发展起来的．广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程就是撇开 Newton 方程而将 Hamilton 原理上升为"第一原理"的地位所得到的方程．

1. Euler-Lagrange 方程

若 $L=L(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,t)$，而且当 q_k 和 $\dot{q}_k$ 在两个端点 $A(t=0)$ 和 $B(t=\tau)$ 处变分为零时 Hamilton 原理依然适用，则有(为了书写方便，已略去积分区间标记；而且两个端点变分为零的项也尽快省略)

$$\delta S=\delta\int L(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,t)\mathrm{d}t=\int\delta L(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q},t)\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\delta\ddot{q}_k\right)\mathrm{d}t=\int\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\dot{q}_k)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)\delta\dot{q}_k\right]$$

$$=\int\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_k)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int\left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)\delta q_k\right]+\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)\delta q_k\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k\mathrm{d}t$$

$$(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.23}$$

所以由 $\delta S=0$ 可得 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.24}$$

2. 广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程的广义能量积分

若 Lagrangian 中不显含时间 t，$L=L(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k)$，则

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial q_k}+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\dddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)-\ddot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}\right)+\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)+\dot{q}_k\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)$$

$$(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.25}$$

将 Euler-Lagrange 方程(2.14.24)式代入(2.14.25)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\qquad(k=1,\cdots,m)\qquad(2.14.26)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-L\right)=0\qquad(k=1,\cdots,m)\qquad(2.14.27)$$

于是,广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程的广义能量积分为

$$H=\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}-\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-L=\text{const.}\qquad(k=1,\cdots,m)$$

$$(2.14.28)$$

3. 关于广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程的讨论

(1)将广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程推广到更高阶的情况,一般可得

$$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}_k}+\cdots-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m)\qquad(2.14.29)$$

而(2.14.29)式的广义能量积分是

$$H=\left[\overset{(n)}{q}_k\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}_k}-\overset{(n-1)}{q}_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\dot{q}_k\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}_k}\right]+\cdots+\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-L=\text{const.}$$

$$(k=1,\cdots,m)\qquad(2.14.30)$$

与此同时,在广义经典力学中,广义动量定义为

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_k}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\frac{\partial L}{\partial\overset{(n)}{q}_k}\qquad(k=1,\cdots,m)$$

$$(2.14.31)$$

(2)广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程在 Newton 框架的质点力学中可能用处不大(目前仅在"猝量理论"中有用),但是在同样属于 Newton 框架的连续介质力学(例如弹性薄板)问题以及某些非线性波动问题中却大有用武之地. 不过,在处理连续介质力学问题前,要将广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程化为连续体系中的形式.

四、Maupertuis 原理

1744 年由 P.-L. M. de Maupertuis 于 1744 年发表的"最小作用量"变分原理实际上早于 Hamilton 原理的发表.

1. Maupertuis 原理的 Jacobi 形式

Maupertuis 原理指出:力学系统其真实运动所必须符合的条件,是使下列积分取极小值

$$W=\int\sqrt{E-V}\mathrm{d}s \tag{2.14.32}$$

式中，E 为总机械能，V 为势能，$\mathrm{d}s$ 为弧元．因此，Maupertuis 原理的 Jacobi 形式为

$$\delta W=\delta\int\sqrt{E-V}\mathrm{d}s=0 \tag{2.14.33}$$

2. Maupertuis 原理的 Hamilton 形式

Maupertuis 原理的 Hamilton 形式是

$$\delta W=\delta\int p_k\mathrm{d}q_k=0\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.34}$$

这是因为

$$H=\dot{q}_k p_k-L\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.35}$$

即

$$p_k\mathrm{d}q_k=(H+L)\mathrm{d}t\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.36}$$

而在总动能是广义速度的二次齐次式的条件下，由于有

$$H+L=2T=2(E-V) \tag{2.14.37}$$

所以

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{E-V}} \tag{2.14.38}$$

于是得到

$$p_k\mathrm{d}q_k=(H+L)\mathrm{d}t=\sqrt{2m}\sqrt{E-V}\mathrm{d}s\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.39}$$

3. Maupertuis 原理 Jacobi 形式的推导

因为

$$(\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_k\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.40}$$

所以

$$2(\mathrm{d}s)\delta(\mathrm{d}s)=2(\mathrm{d}x_k)\delta(\mathrm{d}x_k)\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.41}$$

即有

$$\delta(\mathrm{d}s)=\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\delta(\mathrm{d}x_k)\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.42}$$

另外，还有

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{2.14.43}$$

根据(2.14.42)和(2.14.43)两式，可以计算变分原理(2.14.33)式．设两个端点 A 和 B 处的 $\delta x_k\Big|_A^B=0$，便有

$$\delta W=\delta\int_A^B\sqrt{E-V}\,\mathrm{d}s=\int_A^B\left[\sqrt{E-V}\,\delta(\mathrm{d}s)-\frac{\delta V}{2\sqrt{E-V}}\mathrm{d}s\right]$$

$$=\int_A^B\left[\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\delta(\mathrm{d}x_k)-\frac{1}{2\sqrt{E-V}}\frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k\mathrm{d}s\right]$$

$$=\int_A^B\mathrm{d}\left[\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\delta x_k\right]-\int_A^B\mathrm{d}\left(\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)\delta x_k-\int_A^B\frac{1}{2\sqrt{E-V}}\frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$=\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\delta x_k\Big|_A^B-\int_A^B\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{1}{2\sqrt{E-V}}\frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$=-\int_A^B\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{1}{2\sqrt{E-V}}\frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.44}$$

由于 δx_k 的任意性，因此 $\delta W=0$ 相当于下式成立：

$$2\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sqrt{E-V}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{\partial V}{\partial x_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.45}$$

上述(2.14.45)式被称为“程函方程”. 由“程函方程”，利用等式

$$\begin{cases}v=\sqrt{\dfrac{2}{m}}\sqrt{E-V}\\ \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}s}{v}=\sqrt{\dfrac{m}{2}}\dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{E-V}}\end{cases}\qquad(v\text{ 为粒子运动速度})\tag{2.14.46}$$

或

$$\sqrt{E-V}=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\tag{2.14.47}$$

可以得到

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial V}{\partial x_k}\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{2.14.48}$$

即 Newton 方程.

于是，Maupertuis 原理的结果就是 Newton 方程. 当然，反过来也对. 这就证明了力学系统其真实运动所必须符合的条件，必须满足 Maupertuis 原理.

五、Maupertuis 原理与光学中 Fermat 原理之间的相似性条件

1. Fermat 原理的原始形式

Fermat 原理指出：光线所走过的路径所必须符合的条件，是使下列积分取极小值

$$W' = \int \frac{\mathrm{d}s}{v_p} \tag{2.14.49}$$

式中，v_p 为光波的“相速度”，它一般等于 $v_p = \nu\lambda$；其中 ν 为频率，λ 为波长.

2. Fermat 原理的另一种形式

设方向余弦为 $n_k(k=1,2,3)$，则

$$\begin{cases} \mathrm{d}q_k = n_k \mathrm{d}s \\ (v_p)_k = n_k v_p \end{cases} \quad (k=1,2,3) \tag{2.14.50}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{(v_p)_k} = \frac{n_k \mathrm{d}s}{n_k v_p} = 3\frac{\mathrm{d}s}{v_p} \quad (k=1,2,3) \tag{2.14.51}$$

从而有

$$W' = \int \frac{\mathrm{d}s}{v_p} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}q_k}{(v_p)_k} = \frac{1}{3\nu}\int \frac{\mathrm{d}q_k}{\lambda_k} \quad (k=1,2,3) \tag{2.14.52}$$

3. Maupertuis 原理与光学中 Fermat 原理之间的相似性条件

物理学家普遍认为，光线就是光子的路径，也就是量子力学中所说的“波粒二象性”成立；于是，适用于光学的 Fermat 原理与适用于粒子的 Maupertuis 原理之间应当是等价的，即

$$\begin{cases} W' = \dfrac{1}{3\nu}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q_k}{\lambda_k} \\ W = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}\displaystyle\int p_k \mathrm{d}q_k \end{cases} \quad (k=1,2,3) \tag{2.14.53}$$

之间必然具有相似性条件. 根据简单的计算就可以得到

$$p_k = \frac{h}{\lambda_k} \quad (k=1,2,3) \tag{2.14.54}$$

式中，h 即为量子力学中的“Planck 常数”；实验证实它确为常数.

以上推论，就是 L. de Broglie 于 1924 年在其博士论文中论述“波粒二象性”的两个理由之一.

六、Maupertuis 原理与 Hamilton 原理之间的比较

(1) 在 Maupertuis 原理中，真实位移上所要求的是“等能”$\delta E=0$；而在Hamilton 原理中，真实位移上所要求的是“等时”$\delta t=0$. 在“等时”条件下，变分 δ 与全导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 可对易，变分 δ 与积分 $\int(\cdots)\mathrm{d}t$ 可对易；但是在“等能”条件下，变分 δ 与积分 $\int(\cdots)\mathrm{d}t$ 就不可对易了. 可以证明，若在 Maupertuis 原理中再用“等时变分”条件，则它与

Hamilton原理之间是完全等价的.

(2) Maupertuis 原理与 Hamilton 原理都要求初末位置是固定的,二者的可能路径都必须为约束所许可.

(3) Maupertuis 原理仅适用于保守系,而 Hamilton 原理对非保守系也适用. 然而,在Hamilton原理中,即使对于能量守恒的保守系,也只是在真实路径上才会有能量守恒,而在其他一切可能的路径上能量并不守恒;因为在真实路径上才有"等时变分"条件 $\delta t=0$.

(4) Maupertuis 原理中没有时间 t,因而适宜于讨论轨道问题;而 Hamilton 原理则更适宜于建立动力学方程.

2.15 连续体系的 Lagrange 方程及其在弹性力学和电磁场中的应用

连续体系的 Lagrange 方程与离散体系的 Lagrange 方程是相仿的. 利用连续体系的 Lagrange 方程,可以将弹性力学和电磁场理论完全纳入"Lagrange 力学"的范畴.

一、连续体系的 Lagrange 方程

1. 连续体系的 Lagrangian 密度

对连续体系(包括 Lagrange 描述的和 Euler 描述的)来说,Lagrangian 表示成

$$L(q_k,\dot{q}_k,t)=\int\mathscr{L}\left(q_k,\dot{q}_k;x_l,\frac{\partial q_k}{\partial x_l};t\right)\mathrm{d}V \qquad (k=1,\cdots,m;\ l=1,2,3) \tag{2.15.1}$$

式中,$\mathscr{L}$ 被称为"Lagrangian 密度",$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ 为连续体系的体积元;而 q_k 为广义坐标,$\dot{q}_k=\dfrac{\partial q_k}{\partial t}$为广义速度;$x_l$ 为连续体系中"小单元"的平衡位置的坐标,它并非广义坐标;$\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}$为相对位移(包括相对线位移和相对角位移)或"应变". 举例来说,对弹性体而言,x_l 为各质点的平衡位置坐标,而 q_k 则是质点偏离平衡位置的位移(线位移或角位移):二者是不同的物理概念.

2. 连续体系的 Lagrange 方程

连续体系的 Lagrange 方程可以由 Hamilton 原理得到. 因为在端点处

$\delta q_k\Big|_0^\tau\Big|_A^B=0$，而 $\delta t=0$ 及 $\delta x_l=0$，故经分部积分有

$$\delta S=\delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t=\delta\iint_{0A}^{\tau B}\mathscr{L}\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\iint_{0A}^{\tau B}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}\delta\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)\right]\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$=\iint_{0A}^{\tau B}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\delta q_k-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k-\left[\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}\right]\delta q_k\right]\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$=\iint_{0A}^{\tau B}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}\right)}\right]-\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}\right]\delta q_k\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$(k=1,\cdots,m;l=1,2,3)\qquad(2.15.2)$$

于是，得到连续体系的 Lagrange 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}\right)}+\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m;\ l=1,2,3)$$

$$(2.15.3)$$

如果记

$$x_4=at\qquad(2.15.4)$$

式中，a 可以是光速，也可以是其他速度（如声速）；则方程(2.15.3)式可以被改写为

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_\alpha}\right)}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}=0\qquad(k=1,\cdots,m;\ \alpha=1,2,3,4)\qquad(2.15.5)$$

换言之，只要作如下代换：

$$\begin{cases}L(q_k,\dot{q}_k,t)\Leftrightarrow\mathscr{L}\left(q_k,x_\alpha,\dfrac{\partial q_k}{\partial x_\alpha}\right)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\Leftrightarrow\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_\alpha}\right)}\end{cases}\qquad(k=1,\cdots,m;\ \alpha=1,2,3,4)\qquad(2.15.6)$$

就可以将质点系的 Lagrange 方程代换为连续体系的 Lagrange 方程．

3. 连续体系 Lagrange 方程的广义能量积分和能量-动量张量

将(2.15.6)式代入离散体系 Lagrange 方程的广义能量积分(2.5.17)式，即得连续体系 Lagrange 方程的广义能量积分为

$$\mathscr{H}=(\partial_\alpha q_k)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha q_k)}-\mathscr{L}=\text{const.}\qquad(k=1,\cdots,m;\ \alpha=1,2,3,4)$$

$$(2.15.7)$$

式中，$\mathscr{H}$ 为广义能量密度或总能密度．

进一步，若将(2.15.7)式中的求和指标 α 换用不求和的指标 (μ,ν) 表示，则可得

连续体系的“能量-动量张量”$T_{\mu\nu}$(参阅附录(B47)式,与(B47)式差一负号):

$$T_{\mu\nu}=(\partial_\mu q_k)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu q_k)}-\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}\quad(k=1,\cdots,m;\ \mu,\nu=1,2,3,4)\tag{2.15.8}$$

值得注意的是,已知 $\mathscr{L}$ 可以求得 $T_{\mu\nu}$,但反过来已知 $T_{\mu\nu}$ 求 $\mathscr{L}$ 却不行,除非事先知道 $\mathscr{L}$ 是$(\partial_\nu q_k)$的某种类型的齐次函数.

连续体系的“能量-动量张量”常用于流体动力学和量子场论等学科.从这一点上来说,流体动力学离 Lagrange 力学较远.

二、广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程

1. 广义经典力学连续体系的 Lagrangian 密度

在广义经典力学连续体系中,仅举有广义坐标的二次导数项情况为例,其Lagrangian密度为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(q_k,x_\alpha,\frac{\partial q_k}{\partial x_\alpha},\frac{\partial^2 q_k}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\quad(k=1,\cdots,m;\ \alpha,\beta=1,2,3,4)\tag{2.15.9}$$

2. 广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程

仅举有广义坐标的二次导数项情况为例,将(2.15.6)式的代换关系代入(2.14.24)式,即可得广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程为

$$\partial_\alpha\partial_\beta\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta q_k)}\right]-\partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha q_k)}\right]+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}=0\tag{2.15.10}$$

$$(k=1,\cdots,m;\ \alpha,\beta=1,2,3,4)$$

若问题与时间 t 无关,则(2.15.10)式可被简化为

$$\partial_i\partial_j\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i\partial_j q_k)}\right]-\partial_i\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i q_k)}\right]+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}=0\tag{2.15.11}$$

$$(k=1,\cdots,m;\ i,j=1,2,3)$$

3. 广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程的广义能量积分

仅举有广义坐标的二次导数项情况为例,将(2.15.6)式的代换关系代入(2.14.28)式,即可得广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程的广义能量积分为

$$\mathscr{H}=(\partial_\alpha\partial_\beta q_k)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta q_k)}-(\partial_\alpha q_k)\partial_\beta\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta q_k)}\right]+(\partial_\alpha q_k)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha q_k)}-\mathscr{L}=\text{const.}$$

$$(k=1,\cdots,m;\alpha,\beta=1,2,3,4)\tag{2.15.12}$$

式中 $\mathscr{H}$ 为广义能量密度或总能密度。

三、连续体系的 Lagrange 方程在弹性力学中的应用

1. 弹性静力学的基本微分方程

在弹性静力学中，Lagrange 方程简化为

$$\partial_i\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i u_k)}\right]-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_k}=\mathscr{Q}_k \qquad (i,k=1,2,3) \tag{2.15.13}$$

式中，$\mathscr{Q}$ 为广义力密度．其 Lagrangian 密度为(参阅(1.3.46)式)

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\mathscr{V} \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.14}$$

式中，$\mathscr{V}$ 为势能密度；而 a_{ijkl} 是(参阅(1.3.39)式)

$$a_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.15.15}$$

将(2.15.14)式代入方程(2.15.13)式，并应用 Cauchy 方程(1.3.7)式

$$e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad (i,k,l=1,2,3) \tag{2.15.16}$$

立即得到

$$-\partial_i\left[\frac{\partial A(e)}{\partial e_{jl}}\frac{\partial e_{jl}}{\partial(\partial_i u_k)}\right]+\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial u_k}=\mathscr{Q}_k \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.17}$$

或

$$\partial_i[(\delta_{jk}+\partial_j u_k)\sigma_{ij}]+F_k=0 \qquad (i,j,k=1,2,3) \tag{2.15.18}$$

此方程是方程(1.3.30)的静力学情况，也正是钱伟长先生在《广义变分原理》一书中提到的方程．

2. 弹性力学振动问题的基本微分方程

在弹性力学振动问题中，其 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2-A(e)=\frac{1}{2}\rho(\partial_t u_k)^2-\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.19}$$

式中，ρ 为质量密度．将(2.15.19)式代入 Lagrange 方程

$$\partial_t\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t u_k)}\right]+\partial_i\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i u_k)}\right]-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_k}=\mathscr{Q}_k \quad (i,k=1,2,3) \tag{2.15.20}$$

并应用(2.15.16)式和“本构关系”(参阅(1.3.48)式)

$$\sigma_{kl}=\frac{E}{1+\nu}\left(e_{kl}+\frac{\nu}{1-\nu}\theta\delta_{kl}\right) \qquad (k,l=1,2,3) \tag{2.15.21}$$

就可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=&f_i+(c_p^2-c_s^2)\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+c_s^2\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l\partial x_l}\\&+\left[(c_p^2-2c_s^2)\theta\delta_{jk}+c_s^2\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\end{aligned} \tag{2.15.22}$$

式中，c_p 为纵波波速，c_s 为横波波速：

$$\begin{cases} c_p^2 = \dfrac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho} \\ c_s^2 = \dfrac{E}{2\rho(1+\nu)} = \dfrac{\mu}{\rho} \end{cases} \tag{2.15.23}$$

而

$$\theta = e_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad (k,l=1,2,3) \tag{2.15.24}$$

方程(2.15.22)式就是方程(1.3.53)式．只不过在振动问题中，外力 f_i 有时候可以取为零而已．

3. 弹性力学平面应变问题和平面应力问题的基本微分方程

在弹性力学平面应变问题和平面应力问题中，“Cauchy 方程”总是(参阅(1.3.64)和(1.3.65)式)

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\beta}\right)\right] \tag{2.15.25}$$

而“广义 Hooke 定律”变成

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\left(e_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-k\nu}e_{\lambda\lambda}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{2.15.26}$$

注意，式中 $e_{\lambda\lambda} \neq e_{kk}$，而

$$k = \begin{cases} 1 & \text{(对平面应力)} \\ 2 & \text{(对平面应变)} \end{cases} \tag{2.15.27}$$

其应变能密度为

$$A(e) = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-k\nu}(e_{\lambda\lambda})^2\right) \tag{2.15.28}$$

将(2.15.28)式代入 Lagrange 方程

$$\partial_\beta\left[\frac{\partial A(e)}{\partial(\partial_\beta u_\alpha)}\right] - \frac{\partial A(e)}{\partial u_\alpha} = \mathcal{Q}_\alpha \tag{2.15.29}$$

便可得到

$$\begin{aligned} \frac{2(1+\nu)\rho}{E}\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - f_\alpha\right) &= \left[\frac{1+(2-k)\nu}{1-k\nu}\right]\left(\delta_{\alpha\lambda} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\lambda}\right)\frac{\partial e_{\gamma\gamma}}{\partial x_\lambda} + \left(\delta_{\alpha\lambda} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\lambda}\right) \\ &\cdot \left(\delta_{\gamma\lambda} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\lambda}\right)\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \left[\left(\frac{2\nu}{1-k\nu}\right)e_{\gamma\gamma}\delta_{\beta\lambda} + \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\lambda}\right)\right]\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\lambda} \end{aligned} \tag{2.15.30}$$

式中，$(\alpha,\beta,\gamma,\lambda=1,2)$，而

$$e_{\lambda\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\lambda}\right)$$

方程(2.15.30)式就是方程(1.3.68)式．

4. 弹性薄板小挠度弯曲问题的基本微分方程

在弹性薄板小挠度弯曲问题中，Lagrange 方程是广义经典力学的：

$$\partial_i\partial_j\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i\partial_j u_k)}\right]-\partial_i\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i u_k)}\right]+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_k}=-\mathscr{Q}_k \quad (i,j,k=1,2,3) \tag{2.15.31}$$

而应变能密度则为(参阅(1.3.119)式)

$$A(w)=\frac{D}{2}\left[\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\right] \quad (\alpha,\beta=1,2) \tag{2.15.32}$$

式中，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$为“抗弯刚度”，$h$ 为薄板的厚度.

将(2.15.32)式，代入方程(2.15.31)式，立得 Sophie-Germain 方程(参阅(1.3.120)式)

$$D(\partial_\alpha\partial_\alpha)(\partial_\beta\partial_\beta)w=D\nabla^2\nabla^2 w=q \quad (\alpha,\beta=1,2) \tag{2.15.33}$$

式中，q 为 x_3 方向的外力分布.

5. 弹性薄板大挠度弯曲问题的 von Karman 方程

在弹性薄板大挠度弯曲问题的 von Karman 假设中，应变能密度为(参阅(1.3.123)式)

$$\begin{aligned}A(v,w)=\frac{E}{2(1+\nu)}\Big[&\frac{1}{4}(\partial_\alpha v_\beta+\partial_\beta v_\alpha)(\partial_\alpha v_\beta+\partial_\beta v_\alpha)+\frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta+\partial_\beta v_\alpha)(\partial_\alpha w)(\partial_\beta w)\\&+\frac{1}{4}(\partial_\alpha w\partial_\beta w)^2+\frac{\nu}{1-\nu}(\partial_\alpha v_\alpha)(\partial_\beta v_\beta)+\frac{\nu}{1-\nu}(\partial_\alpha v_\alpha)(\partial_\beta w)(\partial_\beta w)\\&+\frac{1}{4}\frac{\nu}{1-\nu}(\partial_\alpha w)^2(\partial_\beta w)^2\Big] \quad (\alpha,\beta=1,2)\end{aligned} \tag{2.15.34}$$

式中，v_α 为“中面”的位移矢量分量. 引入 Airy 应力函数 ϕ，使得(参阅(1.3.87)式)

$$\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\lambda\partial x_\lambda}\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta,\lambda=1,2) \tag{2.15.35}$$

将所有这些代入 Lagrange 方程

$$\partial_\beta\left[\frac{\partial A(v,w)}{\partial(\partial_\beta w)}\right]+\frac{q}{h}=0 \quad (\beta=1,2) \tag{2.15.36}$$

再用 Sophie-Germain 方程(2.15.31)式来顶替其中的 q，并结合 Airy 应力函数 ϕ 所满足的一个方程，最后得到

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\right)\phi=\dfrac{E}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\right)\right]\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_\beta x_\beta}\right)w=\dfrac{h}{D}\left[\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\beta\partial x_\beta}\right)-\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)+\dfrac{q}{h}\right]\end{cases} \tag{2.15.37}$$

这就是著名的 von Karman 方程(参阅(1.3.124)式). 然而,von Karman 方程在理论上极不协调,不是一个完满的理论;因为在(2.15.35)式的第二个方程中,其等号左边所用的约束条件是 $e_{23}=e_{31}=0$,而右边所用的约束条件则是 $\sigma_{33}=0$,而且等号两边所使用的 Cauchy 方程也不一样. 这无论如何说不过去,它只能算是满足工程需要的凑合理论. 因此,有人将弹性力学分为两种:满足理论一致性要求的被称为"数学弹性力学",而不满足理论一致性要求的 Sophie-Germain 理论和 von Karman 理论则被称为"应用弹性力学". 当然,"应用弹性力学"在理论上是不严密的,只有"数学弹性力学"才是理论上严密的. 严格根据"数学弹性力学"导出的弹性薄板大挠度弯曲问题基本微分方程,就是下面所述的"弹性动力学的基本微分方程".

6. 对弹性薄板大挠度弯曲问题基本微分方程的重新推导

对弹性薄板大挠度弯曲问题基本微分方程的重新推导,有两种方案;其中较好的一种方案是首先算出"中面"的应变能密度,然后对 x_3 从 $\left(-\frac{h}{2}\right)$ 到 $\left(\frac{h}{2}\right)$ 积分,得到其总的应变能密度为(参阅(1.3.132)式)

$$A(w)=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{h^3(1-\nu)}{12}(\partial_\alpha\partial_\beta w)(\partial_\alpha\partial_\beta w)+\frac{h^3\nu}{12}(\partial_\alpha\partial_\alpha w)^2\right.$$
$$\left.+\frac{h}{4}(\partial_\alpha w)(\partial_\alpha w)(\partial_\beta w)(\partial_\beta w)\right] \qquad (\alpha,\beta=1,2) \qquad (2.15.38)$$

将(2.15.38)式代入广义经典力学的 Lagrange 方程(2.15.31)式,最后得到其基本微分方程为

$$(\partial_\alpha\partial_\alpha)(\partial_\beta\partial_\beta)w=\frac{h}{D}\left\{\frac{6}{h^3}[(\partial_\alpha w)(\partial_\alpha w)(\partial_\beta\partial_\beta w)+(\partial_\beta w)\partial_\beta(\partial_\alpha w)^2]+\frac{q}{h}\right\}$$
$$(\alpha,\beta=1,2) \qquad (2.15.39)$$

在以上重新推导中,不但一次性地只使用了一种 Cauchy 方程,而且等号两边使用了相同的约束条件. 但是在此推导中,Cauchy 方程不是最一般的(2.15.14)式,而是与 von Karman 方程一样,使用的是以 Kirchhoff-Love 假设为基础的如下关系

$$e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}[\partial_\alpha v_\beta+\partial_\beta v_\alpha+(\partial_\alpha w)(\partial_\beta w)] \qquad (\alpha,\beta=1,2) \qquad (2.15.40)$$

可以验证,在(2.15.40)式中,e_{23} 和 e_{31} 并非恒等于零. 从这一点来看,重新推导的方程(2.15.39)式也有缺陷,只是它的缺陷比 von Karman 方程少了一大半而已. 如果在重新推导过程中使用最一般的 Cauchy 方程(2.15.16)式,则可得到关于"厚板"问题的基本微分方程:

$$[(\partial_\alpha w)(\partial_\alpha w)(\partial_\beta\partial_\beta w)+(\partial_\beta w)\partial_\beta(\partial_\alpha w)^2]+\frac{q}{D'}=0 \quad (\alpha,\beta=1,2) \qquad (2.15.41)$$

式中,$D'=\dfrac{E(1-2\nu+4\nu^2-2\nu^3)}{2\nu^2(1-\nu^2)}$.

在推导弹性力学平面应变问题和平面应力问题的基本微分方程以及弹性薄板大挠度弯曲问题基本微分方程(包括 von Karman 方程)时,必须提醒注意的是,类似于 $\partial_i u_k$ 或 $\partial_\alpha u_\beta$ 这样的量,并非对时间 t 的导数因此并非经典力学中的"广义速度",它们只是"应变能"("应变能"实际上是一种特殊的"势能")中的自变量或者"相对自变量";所以可以直接将约束条件代入其中以减少它们的数目,就像当初引入"广义坐标"时所作的那样.(对于"广义速度"则不能将约束条件直接代入,而必须用到第三章中的"Routh 方程".)

7. 弹性动力学的基本微分方程

在弹性动力学中,其 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2-A(e)-\mathscr{V}=\frac{1}{2}\rho(\partial_t u_k)^2-\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\mathscr{V}$$
$$(i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.42}$$

式中,a_{ijkl} 是(参阅(1.3.39)式)

$$a_{ijkl}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}+(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\right] \tag{2.15.43}$$

而 Cauchy 方程是未作简化的(2.15.16)式. 将以上 Lagrangian 密度(2.15.42)式代入 Lagrange 方程(2.15.20)式,即

$$\partial_t\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t u_k)}\right]+\partial_i\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i u_k)}\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_k}=\mathscr{Q}_k \qquad (i,k=1,2,3) \tag{2.15.44}$$

得到弹性动力学的基本微分方程是(参阅(1.3.53)式和(1.3.52)式)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=f_i+(c_p^2-c_s^2)\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+c_s^2\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l\partial x_l}$$
$$+\left[(c_p^2-2c_s^2)\theta\delta_{jk}+c_s^2\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}$$
$$(i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.45}$$

或

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho f_i+(\lambda+\mu)\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+\mu\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l\partial x_l}$$
$$+\left[\lambda\theta\delta_{jk}+\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}$$
$$(i,j,k,l=1,2,3) \tag{2.15.46}$$

方程(2.15.45)式或(2.15.46)式包含了全部弹性力学:当不考虑时间因素时就是弹性静力学,当略去高阶小量时就是线弹性力学,当约化为二维问题时就对应于弹性薄板的大挠度(von Karman 方程的疑难迎刃而解),当再略去高阶小量时就对应于弹性薄板的小挠度,当约化为一维问题时就对应于弹性细杆(这在生物物理学中模拟 DNA 很有用). 振动问题的基本微分方程(2.15.22)式就是上述(2.15.45)式,只是

在外力的表达上有所不同。当然，除了线弹性力学和振动问题外，后几个问题也可以利用 Lagrange 未定乘数法来求解．于是，全部弹性力学已完全纳入 Lagrange 力学的范畴．以物理学的眼光来看，弹性力学只不过是 Lagrange 力学中的一道稍大的例题而已．

四、连续体系的 Lagrange 方程在电磁场中的应用

经典电动力学包括两方面的内容：带电粒子和电磁场．在 2.7 节中已解决了带电粒子在电磁场中的 Lagrangian 问题，这里将研究电磁场本身的 Lagrangian 问题．只有这两个问题都解决了，才能说“经典电动力学已完全纳入 Lagrange 力学的范畴”．但电磁场问题与弹性力学问题不同的是，电磁场问题是“Euler 描述”的，而且是“相对论”的．

1. 电磁场的 Lagrangian 密度

在电磁场问题中，要分清或写出它的动能和势能是具有相当的难度的．为了正确写出电磁场的 Lagrangian 密度，通常的程序是从分析电磁场中的不变量出发，因为 Lagrangian 或 Lagrangian 密度就是不变量．在电磁场的“场量”中，不变量只有两个，即(B^2-E^2)和iE_kB_k(参阅附录(B38)式)；其中iE_kB_k是“赝不变量”，可以不用考虑．除此之外，在“有源”的问题中，$\rho\phi$和j_kA_k是另外两个不变量(或者，它们的线性组合是不变量)．于是，根据这些分析，可以写出

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(E^2-B^2)-4\pi\rho\phi+\frac{4\pi}{c}j_kA_k \qquad (k=1,2,3) \qquad (2.15.47)$$

由(2.15.47)式，可以证实能够得到 Maxwell 方程组．当然，由于电磁场的标势ϕ和矢势A_k来自第一对 Maxwell 方程

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases} \qquad (2.15.48)$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\end{cases} \qquad (2.15.49)$$

所以，由(2.15.47)式肯定能得到第一对 Maxwell 方程．下面，主要考虑的是，由(2.15.47)式能否得到第二对 Maxwell 方程？在(2.15.47)式中，可以将(ϕ,A_k)视为广义坐标．因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}=0\\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_l}\right)}=E_k\dfrac{\partial E_k}{\partial\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x_l}\right)}=E_k(-\delta_{kl})=-E_l\\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}=-4\pi\rho\end{cases}\tag{2.15.50}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_k}=E_l\dfrac{\partial E_l}{\partial \dot{A}_k}=E_l\left(-\dfrac{1}{c}\delta_{kl}\right)=-\dfrac{1}{c}E_k\\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)}=-B_j\dfrac{\partial B_j}{\partial\left(\dfrac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)}=-e_{jlk}B_j=e_{klj}B_j\\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_k}=\dfrac{4\pi}{c}j_k\end{cases}\tag{2.15.51}$$

所以,将(2.15.50)式和(2.15.51)式代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial E_k}{\partial x_k}+4\pi\rho=0\\ -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_k}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_l}(e_{klj}B_j)-\dfrac{4\pi}{c}j_k=0\end{cases}\tag{2.15.52}$$

此即第二对 Maxwell 方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{2.15.53}$$

于是,可以得到结论:由 Lagrangian 密度(2.15.47)式能够得到全部 Maxwell 方程组;换言之,(2.15.47)式是电磁场问题中正确的 Lagrangian 密度形式.

进一步,引入电磁场张量 $F_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,3,4)$:

$$(F_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -iE_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3\\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0\end{pmatrix}\tag{2.15.54}$$

由于

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2(B^2-E^2)\tag{2.15.55}$$

所以,Lagrangian 密度(2.15.47)式可以被改写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{4\pi}{c}j_\nu A_\nu\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4)\tag{2.15.56}$$

式中

$$\begin{cases} j_4 = ic\rho \\ A_4 = i\phi \end{cases} \tag{2.15.57}$$

再进一步,因为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{2.15.58}$$

并在

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] = (-\partial_\mu\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu) \tag{2.15.59}$$

中取 Lorentz 规范

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (\mu = 1,2,3,4) \tag{2.15.60}$$

则 Lagrangian 密度(2.15.47)式又可以被改写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu) + \frac{4\pi}{c} j_\nu A_\nu \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{2.15.61}$$

于是,电磁场的 Lagrangian 密度可以被写成 3 种形式:

$$\begin{cases} \mathscr{L} = \dfrac{1}{2}(E^2 - B^2) - 4\pi\rho\phi + \dfrac{4\pi}{c} j_k A_k \\ \mathscr{L} = -\dfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \dfrac{4\pi}{c} j_\nu A_\nu \qquad (k = 1,2,3) \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \\ \mathscr{L} = -\dfrac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu) + \dfrac{4\pi}{c} j_\nu A_\nu \end{cases} \tag{2.15.62}$$

在写出了电磁场的 Lagrangian 密度之后,电磁场问题就完全纳入了 Lagrange 力学的体系;再加上带电粒子的 Lagrangian 亦已写出,因此,整个经典电动力学已完全纳入了 Lagrange 力学的范畴. 当然,电磁场理论是一个比较特殊的理论体系,它除了可以被纳入 Lagrange 力学的范畴之外,还可以被纳入流体动力学的范畴;但是 Lagrange力学与流体动力学却只是单向相通的:由 Lagrangian 可以得到流体动力学中的能量-动量张量,反过来则不行(参阅附录(B47)式).

2. 电磁场的 Born-Infeld 理论

在 M. Born(1882～1970)和 L. Infeld(1898～1968)提出的非线性电磁场理论中,电磁场的 Lagrangian 密度被定义为(已作"无量纲"化处理)

$$\mathscr{L} = 1 - \sqrt{(E^2 - B^2) - (E_k B_k)^2} \qquad (k = 1,2,3) \tag{2.15.63}$$

若 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 比较小,则(2.15.61)式等于"无源"时的(2.15.47)式. 当$(E_k B_k)^2 = 0$ 时,(2.15.63)式又可被写成

$$\mathscr{L} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{2.15.64}$$

而(2.15.64)式的 Taylor 展开则是"无源"时的(2.15.56)式.

经过简化,Born 和 Infeld 将(2.15.63)式或(2.15.64)式缩写为如下形式:

$$\mathscr{L}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2} \tag{2.15.65}$$

式中，ϕ 对应于电磁场的“场量”例如 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{E}$. 因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_x\phi)}=\dfrac{\partial_x\phi}{\sqrt{1+(\partial_x\phi)^2-(\partial_t\phi)^2/c^2}}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\phi)}=-\dfrac{(\partial_t\phi)/c^2}{\sqrt{1+(\partial_x\phi)^2-(\partial_t\phi)^2/c^2}}\\[2ex]\partial_x\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\right]=\dfrac{\partial_x\partial_x\phi[1-(\partial_t\phi)^2/c^2]+(\partial_t\phi)(\partial_x\phi)(\partial_t\partial_x\phi)/c^2}{\sqrt{1+(\partial_x\phi)^2-(\partial_t\phi)^2/c^2}}\\[2ex]\partial_t\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\right]=-\dfrac{\partial_t\partial_t\phi[1+(\partial_x\phi)^2]/c^2-(\partial_t\phi)(\partial_x\phi)(\partial_t\partial_x\phi)/c^2}{\sqrt{1+(\partial_x\phi)^2-(\partial_t\phi)^2/c^2}}\end{cases} \tag{2.15.66}$$

所以，代入 Lagrange 方程后其运动微分方程为

$$\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}-\frac{1}{c^2}\left[1+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{2.15.67}$$

这就是通常所说的 Born-Infeld 方程.

Born-Infeld 方程有许多很好的性质，例如所有形如 $\phi(x-ct)$ 的解都满足方程(2.15.67)式，换言之，它的非线性解也以光速运动；另外，它所对应的 Hamilton-Jacobi方程中绝没有“量子势”(参阅 3.8 节中的(3.8.45)式)这样的一项存在，换言之，它的非线性解是“局域”的. Born-Infeld 方程的这些性质符合 Einstein 和 de Broglie 对量子力学的要求.

【例 2.67】 已知：弹性棒的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2-\frac{E}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2$$

求：弹性棒的运动微分方程.

解：因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}=\rho\dot{q}=\rho\left(\dfrac{\partial q}{\partial t}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)}=-E\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}=0\end{cases}$$

所以，代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\rho\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0$$

这是一个波动方程，其波速为$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

【例 2.68】 已知：(1)“无源”电磁场的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu)$$

(2)具有质量的“有源”电磁场的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu)+\frac{4\pi}{c}j_\nu A_\nu+\frac{k^2}{2}A_\nu A_\nu$$

求：相应的电磁波方程.

解：(1)代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\partial_\nu\partial_\nu A_\mu=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\mu=0$$

(2)代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\partial_\nu\partial_\nu A_\mu+k^2A_\mu=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+k^2\right)A_\mu=0$$

【例 2.69】 已知：某种流动的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\alpha}{6}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^3-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2$$

求：此流动的波动方程(用$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$表示).

解：因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)}=-\nu\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}+\alpha\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\\[2ex]\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)}=-\nu\dfrac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\end{cases}$$

所以，代入广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}+\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)+\nu\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

此即著名的 Kortweg-de Vries 方程(KdV 方程).

讨论：(1)在本题中，又看到了广义经典力学连续体系的 Lagrange 方程的应用.

(2)在流体动力学中，一般不能应用 Lagrange 方程；但对某些特殊问题来说，则有可能应用. 本题就是一个实例.

【例 2.70】 已知:系统的 Lagrangian 密度为

$$(1)\mathscr{L}=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi+V\psi^*\psi-\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\dot{\psi}-\dot{\psi}^*\psi)$$

$$(2)\mathscr{L}=-\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}+m^2\psi^*\psi\right)$$

$$(3)\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\psi^*\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\gamma_\nu\psi\right)-m\psi^*\psi$$

求:相应的波动方程.

解:(1)因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}=\dfrac{i\hbar}{2}\psi\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}=\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}=V\psi-\dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}\right)=\dfrac{i\hbar}{2}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\\[2ex]\nabla\cdot\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}\right]=\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\end{cases}$$

所以代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\psi$$

此即量子力学 Schrödinger 方程.

(2)因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\right)}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\right)}=-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_\nu\partial x_\nu}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}=-m^2\psi\end{cases}$$

所以代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\nu}-m^2\right)\psi=0\qquad(\nu=1,2,3,4)$$

此即量子力学 Klein-Gorden 方程.

(3)因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\right)}=\dfrac{1}{2}\gamma_\nu\psi\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\right)}=\dfrac{1}{2}\gamma_\nu\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*}=-\dfrac{1}{2}\gamma_\nu\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\nu}-m\psi\end{cases}$$

所以代入连续体系的 Lagrange 方程后得到

$$\left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+m\right)\psi=0\qquad(\nu=1,2,3,4)$$

此即量子力学 Dirac 方程.

习　题

1. 已知:在曲柄连杆机构中,曲柄 CA 的 A 点上所受的竖直向下力为 F_2 由活塞 D 上所受水平力 F_1 来维持平衡;C 为不动点;B 为 AB 杆与活塞 D 的连接点;$\angle ABC=\theta$,$\angle ACB=\pi-\varphi$(图 2.46).

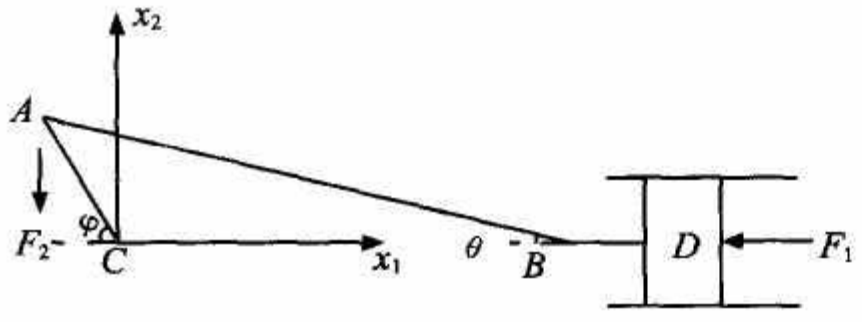


图 2.46

求:$\dfrac{F_2}{F_1}$.

答:$\dfrac{\sin(\theta-\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}$

2. 已知:三足架的每一足长度均为 l,且每一足均与铅垂线之间夹角为 α;此三足架置于光滑水平面上,且 3 个支点构成一个等边三角形;三足架及其所负重量为 mg;现用一绳圈套在此三足架的三足上,以使三足不能改变与铅垂线之间的夹角.

求:绳中张力 T.

答:$T=\dfrac{mg\tan\alpha}{3\sqrt{3}}$

3. 已知:水平放置的、质量为 m 长度为 l 的匀质杆 AB,在水平面内绕其固定端点 A 以匀角速度 ω 转动;C 为匀质杆 AB 上的一点,AC 的距离为 x.

求:C 点处的内力 T(用 d'Alembert 原理).

答:$T=\dfrac{m\omega^2}{2l}(l^2-x^2)$

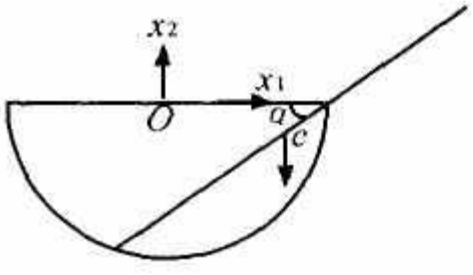


图 2.47

4. 已知:半径为 a 的光滑半球形碗固定在水平面上;一长为 l 的匀质棒(筷子)斜靠在碗缘;匀质棒有一部分在碗内,余下的部分在碗外;在碗内的那部分棒长为 b(图 2.47).

求:平衡时的棒长 l.

答:$l=4\left(\dfrac{b^2-2a^2}{b}\right)$

5. 已知:长为 l 的匀质杆的一端 A 靠在光滑的垂直平面上,另一端 B 搁在光滑的固定曲面上;匀质杆在与垂直平面之间的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的任意位置均可构成平衡(图 2.48).

求:固定曲面的方程.

答:$\left(\dfrac{x_1}{l}\right)^2+\left[\dfrac{x_2-\dfrac{l}{2}}{\dfrac{l}{2}}\right]^2=1$

6. 已知:4 根长为 l 的轻杆光滑地铰连成一菱形 $ABCD$,A 点在上,C 点在下,B 点和 D 点在同

一水平位置；AB 和 AD 两边支于同一水平线上相距为 $2a$ 的两根钉子 E 和 F 上，AB 和 AD 之间的夹角为 2α；B 点和 D 点之间用一轻绳相连；C 点下方系一质量为 m 质点(图 2.49).

求：平衡时时 BD 中的张力 G.

答：$G=mg\left(\tan\alpha-\dfrac{a}{2l\sin\alpha^2\cos\alpha}\right)$

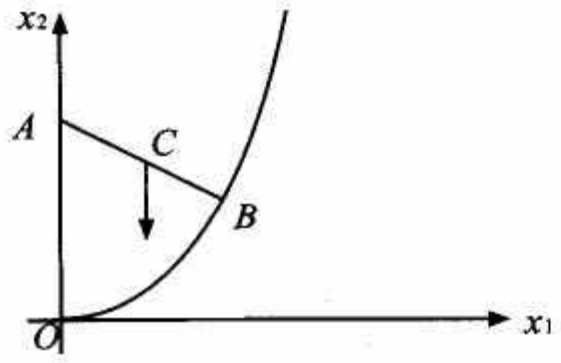


图 2.48

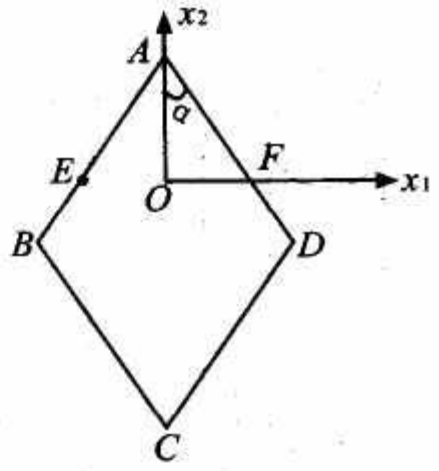


图 2.49

7. 已知：质量为 m 的匀质杆 AB 可在竖直平面内绕其 A 端自由转动；现将匀质杆自水平位置自由放下.

求：匀质杆 AB 的 B 端通过竖直位置时，支点 A 上的约束反力 N(用 d'Alembert 原理).

答：$N=\dfrac{5}{2}mg$

8. 已知：三角形斜面的两边仰角分别为 α 和 β；三角形两边的斜面上有质量分别为 m_α 和 m_β 的两个滑块用不可伸长的细绳相连并跨过三角形顶部的轻质滑轮.

求：系统的平衡条件.

答：$m_\alpha\sin\alpha=m_\beta\sin\beta$

9. 已知：起重机由 4 个质量均为 m_1 半径均为 a 的滑轮组成；上面的两个主动轮上作用有相同的力矩 M；皮带的紧边(内边)中的拉力是松边(外边)中的拉力的 2 倍；重物的质量为 m_2 (图 2.50).

求：重物由静止上升 s 距离时的加速度(用 d'Alembert 原理).

答：$a\ddot{\theta}=\dfrac{2M-m_2a}{(2m_1+m_2)a}g$

10. 已知：曲柄摇杆机构中，摇杆 OD 的质量为 m_2 长度为 $2l$、对 O 点的转动惯量为 I_0 质心为 C，O 点固定；曲柄 AB 长度为 a，其 B 端质点质量为 m_1 且可在摇杆 OD 上滑动，曲柄 AB 上还作用有常力矩 M；OA 之间的距离也等于 a；$\angle BAO=\alpha$，$\angle AOD=\theta$(图 2.51).

求：(1)摇杆 OD 的角加速度 $\ddot{\theta}$(用 d'Alembert 原理)；

(2)当 $\alpha=\pi$ 时，O 点上的约束反力.

答：(1)$\ddot{\theta}=\dfrac{2m_1 g a\sin\alpha+m_2 g l\cos\dfrac{\alpha}{2}-2M}{I_0+4m_2a^2}$

(2)$\begin{cases}N_1=\dfrac{M(I_0-2m_2 la)}{a(I_0+4m_2a^2)}\\ N_2=m_2g-\dfrac{m_2l[2\pi M-2(2m_1a+m_2l)g]}{I_0+4m_2a^2}\end{cases}$

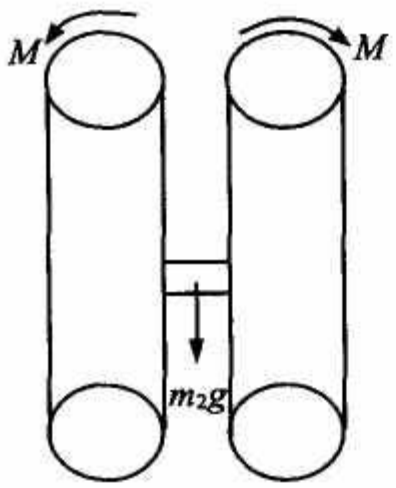


图 2.50

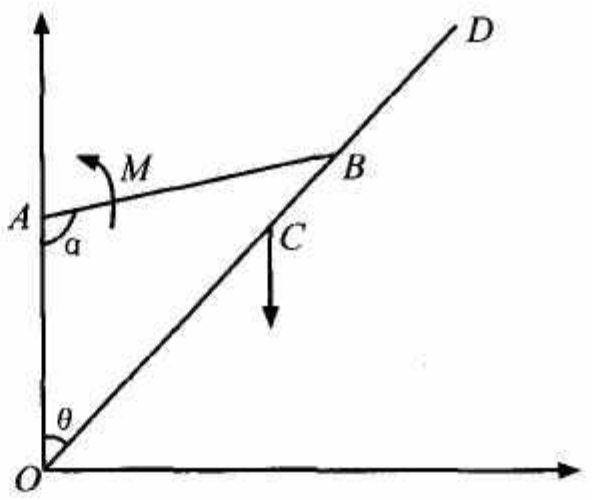


图 2.51

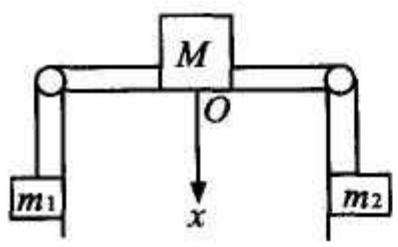


图 2.52

11. 已知：质量为 M 的滑块置于水平桌面上，该滑块两边分别被两根轻绳牵引并跨过两个定滑轮与质量为 m_1 和 m_2 的两个质点相连(图 2.52).

求：系统的加速度 a.

答：$a=\dfrac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}g$

12. 已知：系统的动能和势能的形式分别是

$$\begin{cases}T=\sum a_k(q_l)\dot{q}_k^2\\ V=\sum V_k(q_l)\end{cases}$$

求证：其对应的 Lagrange 方程可实行分离变量，并且总可以化为求积分的形式.

13. 已知：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_k}-\dfrac{\partial\Phi}{\partial q_k}=\psi_k\qquad(k=1,\cdots,m)$

式中 Φ 和 ψ 为 $(q_k,\dot{q}_k,t)$ 的函数.

求证：$\mathrm{d}\left(\dot{q}_k\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_k}-\Phi\right)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}\mathrm{d}t=\psi_k\mathrm{d}q_k$

14. 已知：系统的动能可表示为

$T_1=a_k(q_l,t)\dot{q}_k$

求证：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T_1}{\partial\dot{q}_k}-\dfrac{\partial T_1}{\partial q_k}=\dfrac{\partial a_k}{\partial t}+\omega_{kl}\dot{q}_l$

其中 $\omega_{kl}=\dfrac{\partial a_l}{\partial q_k}-\dfrac{\partial a_k}{\partial q_l}$

15. 已知：质量均为 m 的两个质点用一固有长度为 l 重量不计而弹性系数为 k 的弹性棒相连，

并置于半径为 a 的光滑固定圆球壳内；弹性棒在圆球壳内所对应的球心角为 θ.

求：平衡时球心角 θ 所满足的方程.

答：$mg\sin\theta-k(l-2a\sin\theta)\cos\theta=0$

16. 已知：两根质量均为 m 长度均为 l 的匀质杆在一个端点处铰连，然后置于半径为 a 的光滑水平圆柱上；两根匀质杆之间的张角为 θ；其角平分线与竖直向上直线之间的夹角为 φ(图 2.53).

求：平衡时，θ 和 φ 所满足的方程.

答：$\begin{cases}\varphi=0\\ l\tan^3\theta-a\tan^2\theta-a=0\end{cases}$

17. 已知：水平放置的木块中间被一张角为 2α 的斧子劈下；斧子的作用力为 F；木块两端有两个水平力 F_1 和 F_2 与之平衡(图 2.54).

求：平衡时水平力 F_1 和 F_2 的大小.

答：$F_1=F_2=\dfrac{1}{2}F\cot\alpha$

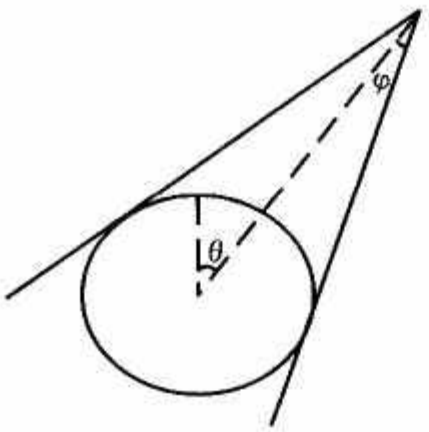


图 2.53

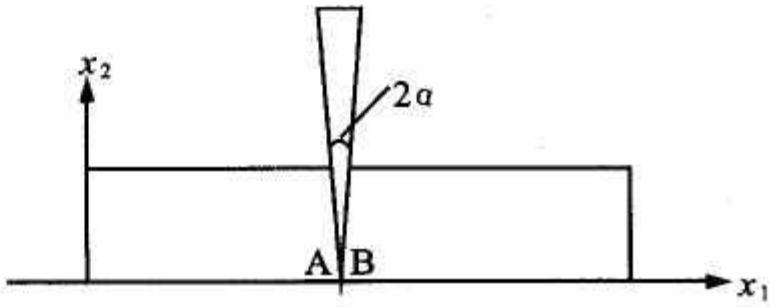


图 2.54

18. 已知：质量为 m_1 仰角为 α 的大三角形 A 置于光滑的水平面上，其光滑的斜面上有一质量为 m_2 的小三角形 B(图 2.55).

求：A 的加速度 a_1.

答：$a_1=\dfrac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1+m_2\sin^2\alpha}g$

19. 已知：质量均为 m 的 3 个质点铰连在 4 根长均为 l 的轻质杆中间；首末轻质杆的端点无摩擦地悬挂在相距为 $2l$ 的天花板下；第一和第四两杆与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，第二和第三两杆竖直向下直线之间的夹角为 θ_2(图 2.56).

求：平衡时 θ_1 和 θ_2 的大小.

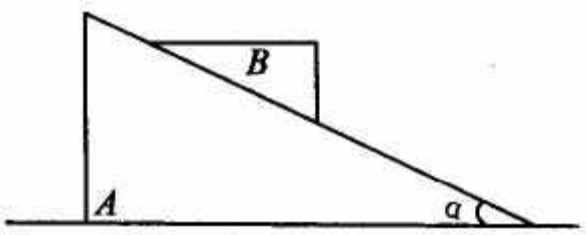


图 2.55

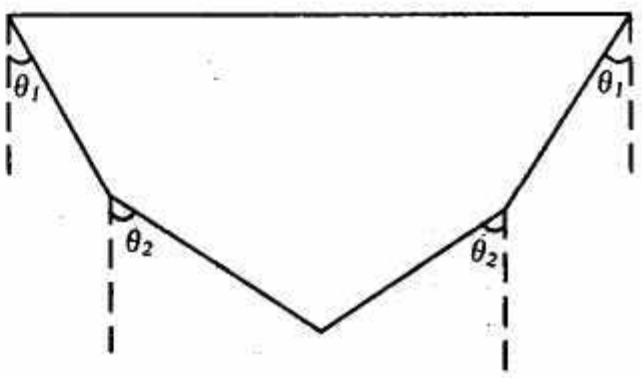


图 2.56

答：$3\tan\theta_1=\tan\theta_2$，可得到两组解

$$\begin{cases}\theta_1=17.8^\circ\\ \theta_2=43.9^\circ\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\theta_1=162.2^\circ\\ \theta_2=136.1^\circ\end{cases}$$

其中，第二组解是不稳定的（由$\frac{d^2V}{d\theta_1^2}>0$可确定其稳定，反之则不稳定）.

20. 已知：质量为 m、固有长度为 a、弹性系数为 k 的弹性圈被置于顶角为 2α 的光滑铅直圆锥体上；弹性圈与铅直圆锥体的顶点之间的距离为 x（图 2.57）.

求：平衡时 x 的大小 .

答：$x=\frac{l}{2\pi\tan\alpha}\left(a+\frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}\right)$

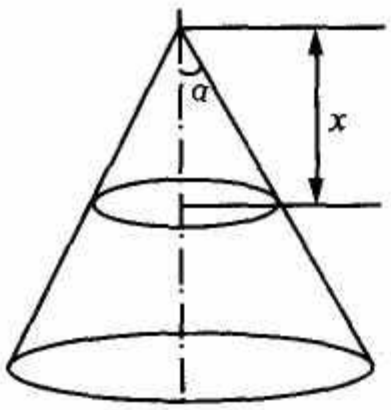


图 2.57

21. 已知：以(a_1,a_2,a_3)为对称中心的球对称力

$$\boldsymbol{F}=(x_1-a_1)\boldsymbol{i}_1+(x_2-a_2)\boldsymbol{i}_2+(x_3-a_3)\boldsymbol{i}_3$$

受到约束面

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_0=0$$

的约束.

求：约束面的约束反力 .

答：$N_i=\frac{a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+A_0}{A_1^2+A_2^2+A_3^2}A_i\qquad(i=1,2,3)$

22. 已知：在竖直平面中的心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 上，有一质量为 m 的小环 A；弹性系数为 k 的轻质弹簧其一端固定于原点 O，另一端则与小环 A 相连；弹簧的固有长度为 a.

求：(1)质点的平衡位置；

(2)系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：(1)$\begin{cases}\sin\theta=0\\ \cos\theta=\frac{mg}{ka-2mg}\end{cases}$

(2)$L=(1+\cos\theta)(ma^2\dot\theta^2+mga\cos\theta)-\frac{1}{2}ka^2\cos^2\theta$；

$$2ma(1+\cos\theta)\ddot\theta-ma\dot\theta^2\sin\theta+mg\sin\theta+2mg\sin\theta\cos\theta-ka\sin\theta\cos\theta=0$$

23. 已知：线性三原子对称分子 ABA 的 3 个原子顺序排列在 x 轴上，其质量分别为(m_1,m_2,m_1)，其坐标分别为(x_1,x_2,x_3)；分子势能仅依赖于距离 x_3-x_2 和 x_2-x_1，弹性系数为 k；设 $\mu=2m_1+m_2$，$q_1=x_1+x_3$，$q_2=x_3-x_1$.

求：系统的 Lagrangian.

答：$L=\frac{1}{4}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\mu\dot q_1^2+\frac{1}{4}m_1\dot q_2^2-\frac{1}{4}k\left(\frac{\mu}{m_2}\right)q_1^2-\frac{1}{4}kq_2^2$

24. 已知：(1)质量为 M 的滑块约束在水平 x_1 轴上作无摩擦滑动，滑块上附有一质量为 m 摆长为 l 的单摆；摆线与垂直向下直线之间的夹角为 θ；

(2)同上，但滑块通过弹性系数为 k 的弹簧与竖直墙面相连；

(3)同(1)，但滑块作简谐振动 $x_1=a\sin\omega t$.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：(1)$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta+mgl\cos\theta$；

$$\begin{cases}(M+m)\dot{x}_1+ml\dot{\theta}\cos\theta=\text{const.}\\ l\ddot{\theta}+\ddot{x}_1\cos\theta+g\sin\theta=0\end{cases}$$

(2)$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+ml\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta-\frac{1}{2}kx_1^2+mgl\cos\theta$；

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}_1+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+kx_1=0\\ l\ddot{\theta}+\ddot{x}_1\cos\theta+g\sin\theta=0\end{cases}$$

(3)$L=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+2la\dot{\theta}\omega\cos\theta\cos\omega t+a^2\omega^2\cos^2\omega t)+mgl\cos\theta$；

$$l\ddot{\theta}-a\omega^2\cos\theta\sin\omega t+g\sin\theta=0$$

25. 已知：质量为 M 的匀质木块置于两个质量均为 m 的匀质圆柱体上，并可在水平面上运动；木块上有水平力 F_1；木块与圆柱体、圆柱体与水平面之间均无滑动.

求：系统的 Lagrangian 和木块的加速度.

答：$L=T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{3}{4}m\right)\dot{x}_1^2$；$\ddot{x}_1=\dfrac{F_1}{M+\frac{3}{4}m}$

26. 已知：质量为 M 的匀质木块置于 3 个质量均为 m 的匀质圆柱体上，并可在水平面上运动；木块上有水平力 F_1；木块与圆柱体、圆柱体与水平面之间均无滑动.

求：系统的 Lagrangian 和木块的加速度.

答：$L=T=\frac{1}{2}\left(M+\frac{9}{8}m\right)\dot{x}_1^2$；$\ddot{x}_1\ \dfrac{F_1}{M+\frac{9}{8}m}$

27. 已知：质量为 m_1 锐角为 α 的直角三角形 A 其直角边靠在光滑的墙面上，其斜边与质量为 m_2 的棱形 B 接触；而棱形 B 可在水平面上无摩擦地滑动(图 2.58).

求：系统的 Lagrangian 以及三角形 A 和棱形 B 的加速度.

答：$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2\tan^2\alpha)(\dot{x}_2^A)^2+m_1gx_2^A$；

$$\begin{cases}\ddot{x}_2^A=\dfrac{m_1g}{m_1+m_2\tan^2\alpha}\\ \ddot{x}_1^B=\dfrac{m_1g\tan\alpha}{m_1+m_2\tan^2\alpha}\end{cases}$$

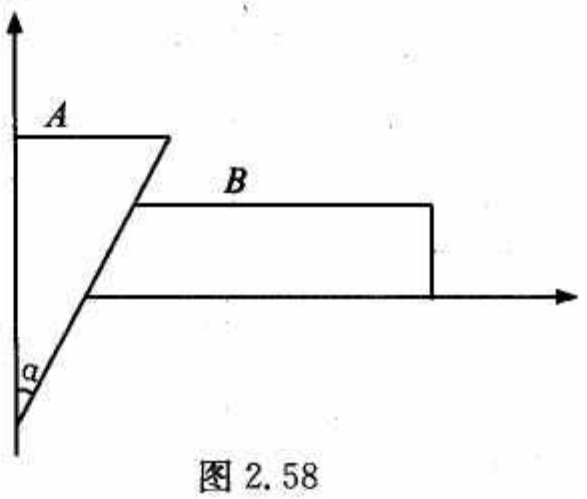


图 2.58

28. 已知：质量为 M 半径为 a 的匀质圆柱置于粗糙水平面上；圆柱外缘有一轻绳跨过轻质定滑轮悬挂着一个质量为 m 的质点；圆柱体滚而不滑，且圆柱体与定滑轮之间的绳子是水平的(图 2.59).

求：系统的 Lagrangian 以及圆柱体质心加速度和质点的加速度.

答：$L=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+4m\right)(\dot{x}_1^M)^2+2mgx_1^M$；

$$\begin{cases}\ddot{x}_1^M=\dfrac{4mg}{3M+8m}\\ \ddot{x}_2^m=\dfrac{8mg}{3M+8m}\end{cases}$$

29. 已知：质量为 m 摆长为 l 的平面单摆的摆角为 θ（图 2.60），其悬点分别为

(1)沿着半径为 a 的竖直的圆周以不变圆频率 ω 运动；

(2)以 $a\cos\omega t$ 的规律在水平方向振动；

(3)以 $a\cos\omega t$ 的规律在竖直方向振动.

求：系统的 Lagrangian.

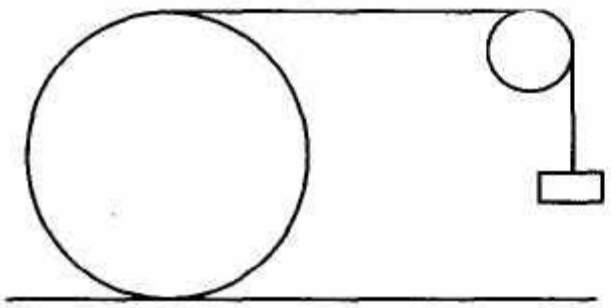


图 2.59

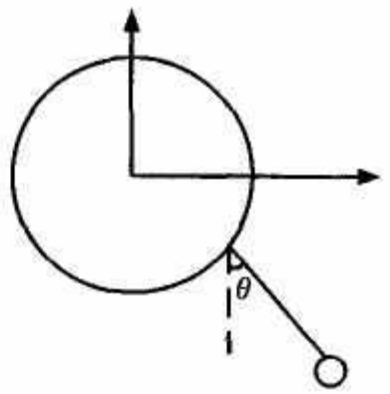


图 2.60

答：(1)$L=\dfrac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2+a^2\omega^2+2al\dot{\theta}\omega\cos(\theta-\omega t)]+mg(l\cos\theta+a\cos\omega t)$

(2)$L=\dfrac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+a^2\omega^2\sin^2\omega t-2al\dot{\theta}\omega\cos\theta\sin\omega t)+mgl\cos\theta$

(3)$L=\dfrac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+a^2\omega^2\cos^2\omega t-2al\dot{\theta}\omega\sin\theta\cos\omega t)+mg(l\cos\theta+a\cos\omega t)$

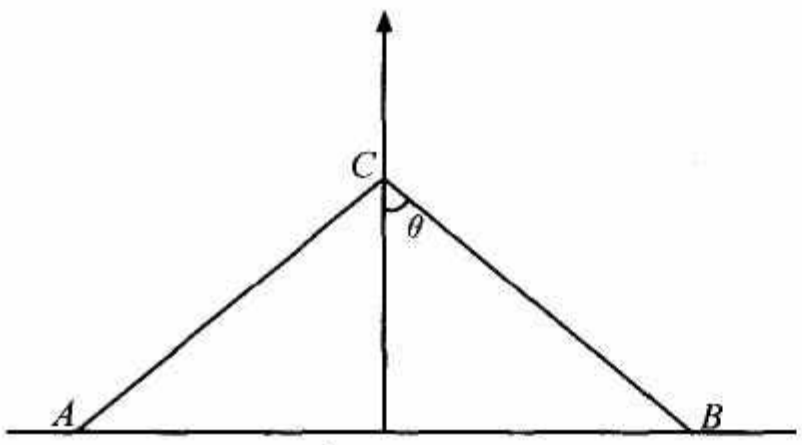


图 2.61

30. 已知：质量均为 m 长度均为 l 的两根匀质杆在 C 点铰连，另一端 A 或 B 置于光滑的水平面上；两杆与竖直向下直线之间的夹角为 θ（图 2.61）.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\dfrac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta$；

$$l\ddot{\theta}-\frac{3}{2}g\sin\theta=0$$

31. 已知：质量为 m 半径为 a 的圆形碟片关于其对称轴的转动惯量为 mk^2；该碟片的自转对称轴斜放在水平面上，自转对称轴与竖直向上直线之间的夹角为 θ；碟片的自转角速度为 ω，进动角速度为 $\dot{\psi}$（图 2.62）.

求：系统的 Lagrangian 和平衡时所满足的方程.

答：$L=\dfrac{1}{2}mk^2(\dot{\psi}\cos\theta-\omega)^2-mga\sin\theta$；

$$k^2(\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta-\omega\dot{\psi}\sin\theta)-ga\cos\theta=0$$

32. 已知：质量为 m 的物理摆其顶部刚性连接一半径为 a 的圆柱体；此圆柱体在水平面上作无滑滚动；摆相对于质心 C 的回转半径为 k；质心 C 至圆柱中心 O 的距离为 l；OC 于竖直向下直线之间的夹角为 θ（图 2.63）.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}m(a^2+l^2+k^2-2al\cos\theta)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$；

$$(a^2+l^2+k^2-2al\cos\theta)\ddot{\theta}+al\dot{\theta}^2\sin\theta+gl\sin\theta=0$$

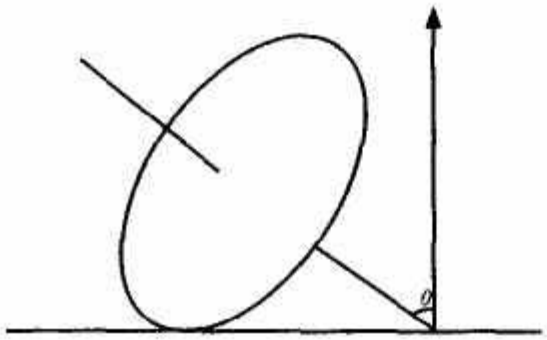


图 2.62

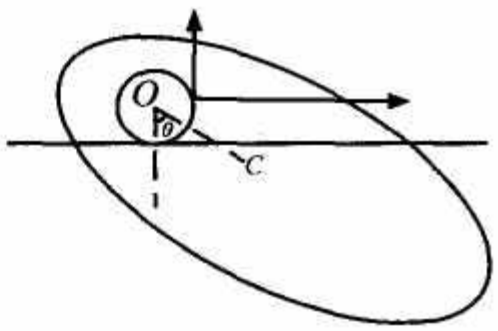


图 2.63

33. 已知：质量为 M 半径为 a 的匀质圆盘其圆心 A 用光滑销钉与质量为 m 长度为 l 的匀质杆 OA 连接；OA 杆的另一端 O 与天花板上的支点光滑铰连，而且 O 点是匀质圆盘所在的圆形轨道的圆心；匀质圆盘在圆形轨道中滚而不滑；OA 杆与竖直向下直线之间的夹角为 θ（图 2.64）.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+\frac{1}{3}m\right)l^2\dot{\theta}^2+\left(M+\frac{1}{2}m\right)gl\cos\theta$；

$$\left(\frac{3}{2}M+\frac{1}{3}m\right)l\ddot{\theta}+\left(M+\frac{1}{2}m\right)g\sin\theta=0$$

34. 已知：质量为 m_1 摆长为 l 的单摆 OA 悬于支点 O；另有一质量为 m_2 的小环套在单摆的 OA 杆上，并可沿直径是铅直线而且过 O 点的半圆形轨道滑动；半圆形轨道的半径为 a，摆角为 θ（图 2.65）.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}(m_1l^2+4m_2a^2)\dot{\theta}^2+m_1gl\cos\theta+2m_2ga\cos^2\theta$；

$$(m_1l^2+4m_2a^2)\ddot{\theta}+m_1gl\sin\theta+4m_2ga\sin\theta\cos\theta=0$$

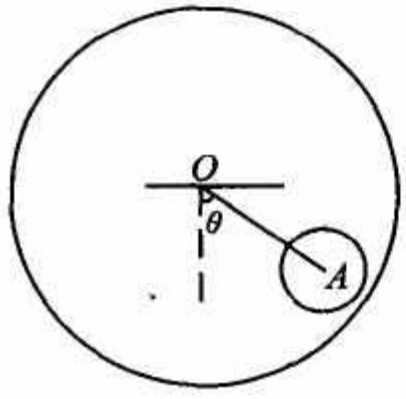


图 2.64

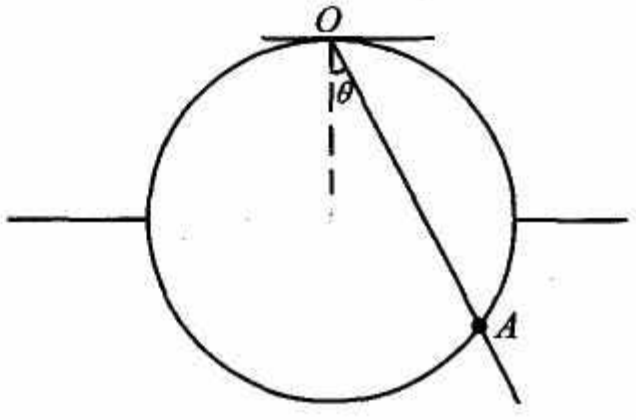


图 2.65

35. 已知：长度为$\sqrt{2}a$ 弹性系数为k 的轻质弹簧AB，其一端固定在水平放置的半径为a 的圆环(圆心为O)的直径的一头，另一端是质量m 为且可在圆环上滑动的小珠B；OB 与OA 之间的夹角为$\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$(图 2.66).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-ka^2(2+\sin\theta-2\sqrt{1+\sin\theta})$；

$$m\ddot{\theta}+k\frac{(\sqrt{1+\sin\theta}-1)\cos\theta}{\sqrt{1+\sin\theta}}=0$$

36. 已知：质量为M(质量分布在轮缘上)半径为a 的定滑轮上绕过一条不可伸长的细绳；细绳的一端悬有质量为m 的质点，另一端与一弹性系数为k 的弹簧相连，而弹簧下端接地(图 2.67).

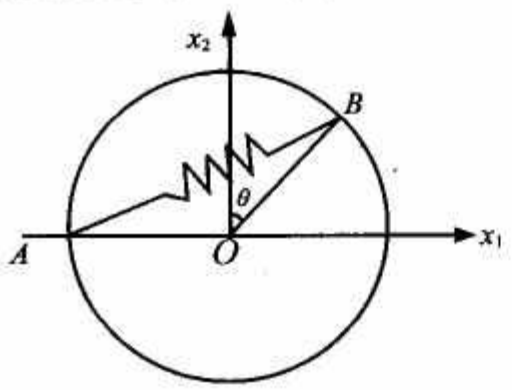


图 2.66

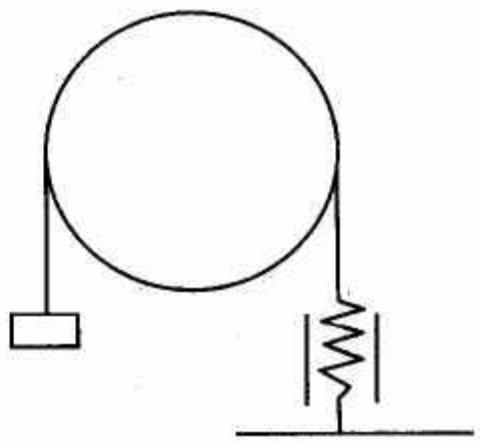


图 2.67

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2+mgx$；

$$(M+m)\ddot{x}+kx=0$$

37. 已知：质量为m 的质点A 由长度为l 的轻质杆OA 支承而构成“倒置摆”；“倒置摆”的销轴O 以$x_3=a\sin\omega t$ 的规律上下运动；OA 与竖直向上直线之间的夹角为θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2-2al\omega\dot{\theta}\sin\theta\cos\omega t+a^2\omega^2\cos^2\omega t)-mg(l\cos\theta+a\sin\omega t)$；

$$l\ddot{\theta}+a\omega^2\sin\theta\sin\omega t-g\sin\theta=0$$

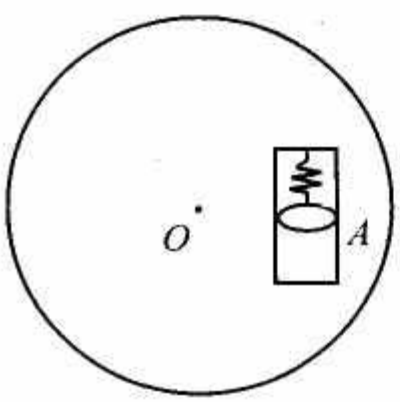


图 2.68

38. 已知：水平转台以等角速度ω 绕圆心O 转动；离圆心O 为a 处有一垂直并对称于直径的矩形小槽，在小槽内有一质量为m 的质点A 以弹性系数为k 的轻质弹簧连接在小槽的窄边；当质点A 处于小槽中心位置时，弹簧是固有长度；设弹簧的伸长为x(图 2.68).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-2a\dot{x}+\omega^2x+a^2)-\frac{1}{2}kx^2$；

$$m\ddot{x}-m\omega^2 x+kx=0$$

39. 已知：质量为 $3m$ 长度为 $2l$ 的匀质杆 AB 可绕其中点 O 作球面运动(其经度角为 φ，纬度角为 θ)；匀质杆的 A 端是质量为 m 的质点；系统绕铅垂线 x_3 轴以角速度 $\dot{\varphi}=\omega=\sqrt{\frac{2ng}{l}}$($n$ 为常数)转动.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=ml^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta$；

$$2l\ddot{\theta}-(2n\sin 2\theta+1)g\sin\theta=0$$

40. 已知：质量为 m 半径为 a 的偏心圆盘(盘心为 O，质心为 C)可在竖直平面内沿水平面作无滑滚动；OC 之间的距离为 b；偏心圆盘对质心 C 的转动惯量为 $I=mk^2$；OC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}m(a^2+b^2+k^2-2ab\cos\theta)\dot{\theta}^2+mgb\cos\theta$；

$$(a^2+b^2+k^2-2ab\cos\theta)\ddot{\theta}+ab\dot{\theta}^2\sin\theta+gb\sin\theta=0$$

41. 已知：半径为 b 的匀质圆球，可在一具有水平轴、半径为 a 的固定圆筒的内表面滚而不滑；柱心和球心的连线与竖直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.69).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{7}{10}m(a-b)^2\dot{\theta}^2+mg(a-b)\cos\theta$；

$$\frac{7}{5}(a-b)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

42. 已知：行星齿轮机构由半径为 a 的固定齿轮(其轮心为 O)，质量为 m_1 的匀质杆 OA，和质量为 m_2 半径为 b 的行星齿轮(其轮心为 A)组成；匀质杆 OA 带动行星齿轮在固定齿轮上滚动，OA 的转角为 θ；在匀质杆 OA 上有一恒力矩 M(图 2.70).

求：系统的 Lagrangian 和 $\ddot{\theta}$.

答：$L=T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+\frac{3}{2}m_2\right)(a+b)^2\dot{\theta}^2$；

$$\ddot{\theta}=\frac{6M}{(2m_1+9m_2)(a+b)^2}$$

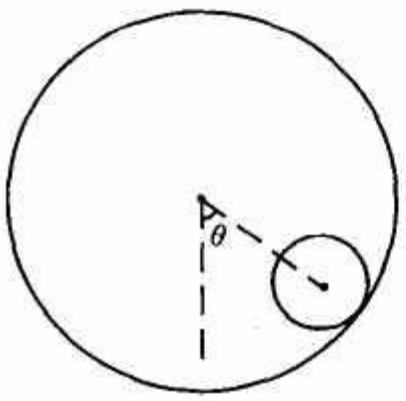


图 2.69

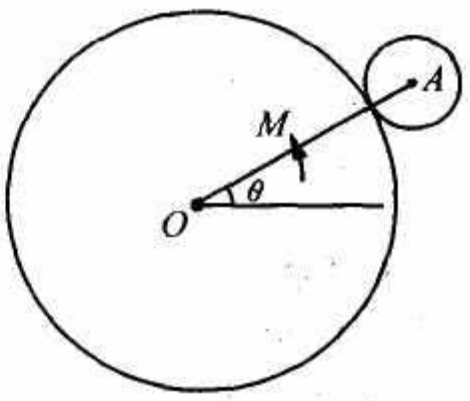


图 2.70

43. 已知：质量为 m 长度为 l 的匀质杆 AB，其 A 端置于足够粗糙的水平面上，其 B 端靠在竖直平面上并可沿此竖直平面滑落；任意时刻 B 端在竖直平面上的位置是 C 点；A 端所在的水平直线与竖直平面交于 O 点；$\angle OAB=\angle OAC=\alpha$；铅垂线与 OC 之间的夹角为 θ(图 2.71).

求：系统的 Lagrangian 和 $\dot{\theta}$.

答：$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mgl\sin\alpha\cos\theta$；

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3(1-\cos\theta)g}{l\sin\alpha}}$$

44. 已知：质量为 m 的质点 P 被固定在半径为 a 的轻质圆盘(盘心为 C)的轮缘上；轻质圆盘可在水平面上无滑滚动；CP 与竖直向上直线之间的夹角为 θ；初始时 $\theta=\frac{\pi}{3}$(图 2.72).

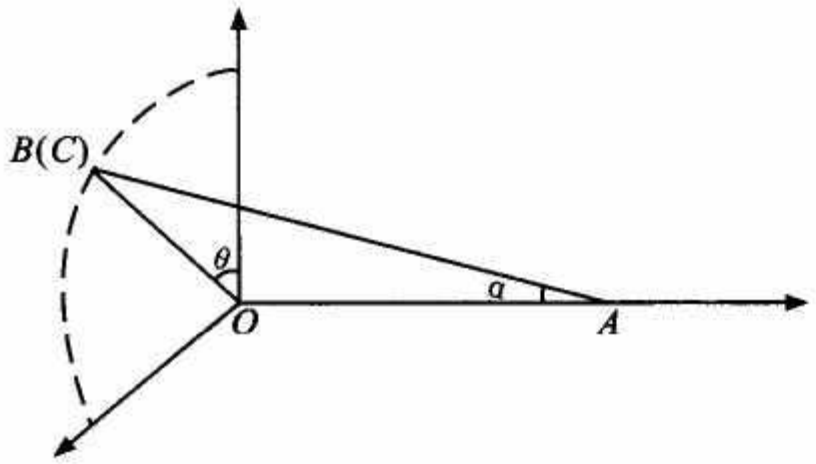


图 2.71

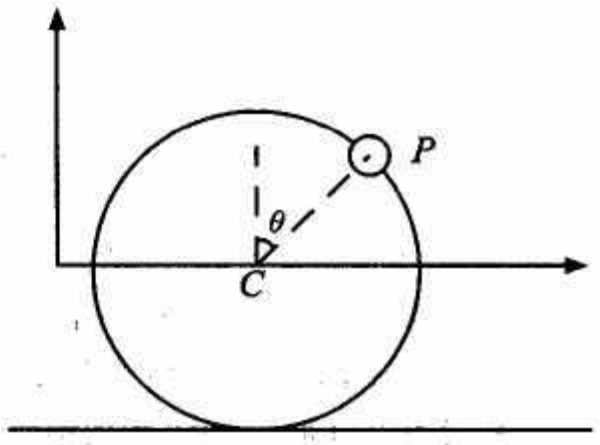


图 2.72

求：系统的 Lagrangian 和 $\dot{\theta}$.

答：$L=\left(\frac{7}{4}+\cos\theta\right)ma^2\dot{\theta}^2-mga\cos\theta$；

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2(1-2\cos\theta)g}{a(7+4\cos\theta)}}$$

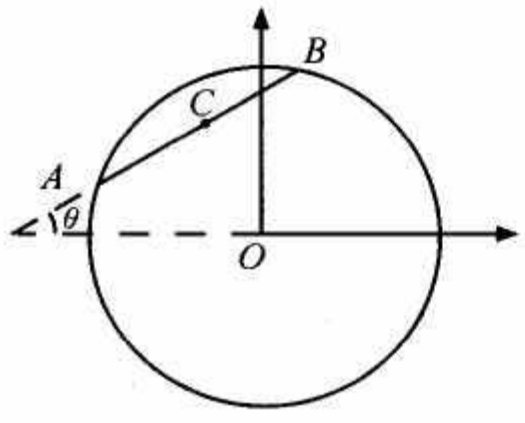


图 2.73

45. 已知：质量为 m 长度为 $2l$ 的匀质杆 AB，其两端 A 和 B 约束在半径为 a 的水平圆周上(圆心为 O)；在匀质杆 AB 上有一质量亦为 m 的质点，以恒定速度 v_0 自 AB 杆的中点 C 运动，至 t 时刻已到 AB 杆上的 D 点；任意时刻匀质杆 AB 与直径之间的夹角为 θ(图 2.73).

求：系统的 Lagrangian；

求证：$\left(2a^2-\frac{5}{3}l^2+v_0^2t^2\right)\dot{\theta}=\text{const.}$

答：$L=T=\frac{1}{2}m\left(2a^2-\frac{5}{3}l^2+v_0^2t^2\right)\dot{\theta}^2$

46. 已知：质量为 m 半径为 a 的匀质圆球(球心为 C)可在一具有水平轴、半径为 b 的固定圆筒(圆筒水平轴为 O)的内壁作无滑滚动；OC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.74).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{7}{10}m(b-a)^2\dot{\theta}^2+mg(b-a)\cos\theta$；

$$\frac{7}{5}(b-a)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

47. 已知：质量为 M 半径为 a 的定滑轮的轮缘，用细绳缠绕着一个质量为 m 半径为 b 的动滑轮；动滑轮自静止沿铅直方向下落；定滑轮的转角为 θ_1，动滑轮的转角为 θ_2（图 2.75）.

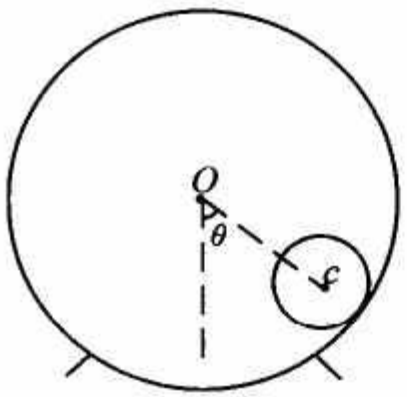


图 2.74

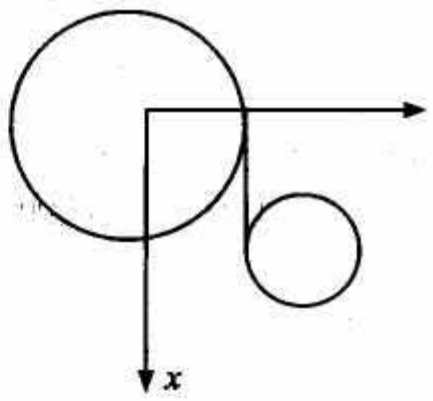


图 2.75

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程，以及动滑轮质心速度 $\dot{x}$ 与下落距离 x 之间的关系.

答：$L=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\dot{\theta}_1^2+\frac{3}{4}mb^2\dot{\theta}_2^2+mab\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+mg(a\theta_1+b\theta_2)$；

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}M+m\right)a\ddot{\theta}_1+mb\ddot{\theta}_2-mg=0\\ \frac{3}{2}b\ddot{\theta}_2+a\ddot{\theta}_1-g=0\end{cases};$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{4(M+m)gx}{3M+2m}}$$

48. 已知：同【例 2.5】.

求：离心调节器的 Lagrangian L.

答：$L=m_1l^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)+2m_2l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta-2(m_1+m_2)gl\cos\theta$

49. 已知："Atwood 机"为一无摩擦的定滑轮；质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点被一定长的轻绳连接在一起，并挂在"Atwood 机"两边（图 2.76）.

求：质点的加速度.

答：$\ddot{x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$，在用 Lagrange 方程解此题时，不出现绳中张力.

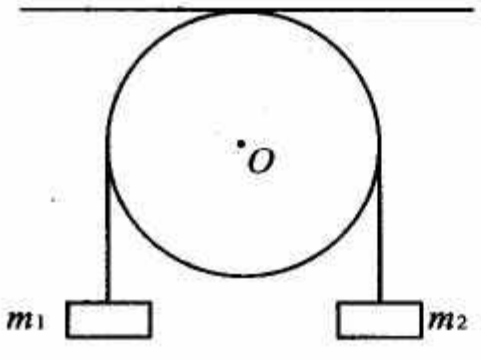


图 2.76

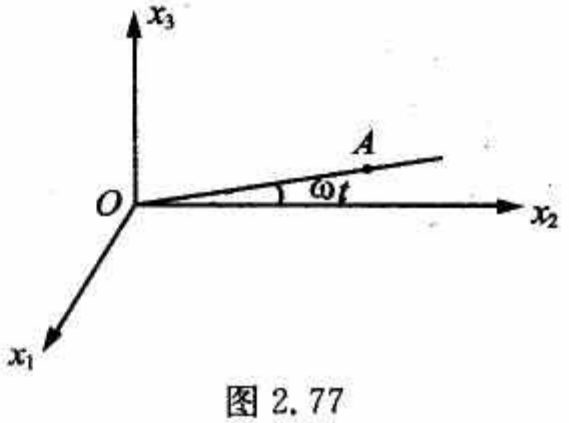


图 2.77

50. 已知：水平面上有一以等角速度 ω 转动的直杆；直杆上套着一个作无摩擦滑动的小珠.

求：小珠的向心加速度.

答：$\ddot{r}=\omega^2r$，注意：①系统的约束是不稳定的；②系统动能不是 $\dot{r}$ 的二次齐次式.

51. 已知：一光滑细杆在铅直平面 x_2x_3 内以等角速度 ω 绕水平轴 x_1 转动；细杆上套有一质量为 m 的小珠 A 并可沿细杆作无摩擦滑动；OA 的长度为 r；$t=0$ 时 $r=r_0$，$\dot{r}=v_0$（图 2.77，见上页）.

求：(1)系统的运动规律；

(2)细杆对小珠的约束反力 .

答：(1) $\dot{r}=r_0\omega\sinh\omega t+\left(v_0-\dfrac{g}{2\omega}\right)\cosh\omega t+\dfrac{g}{2\omega}\cos\omega t$

(2) $N=2mr_0\omega^2\sinh\omega t+m(2\omega v_0-g)\cosh\omega t+2mg\cos\omega t$

52. 已知：有一竖直方向的螺旋形光滑细管，其曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\alpha\cos\theta \\ x_2 = a\cos\alpha\sin\theta \\ x_3 = a\theta\sin\alpha \end{cases} \qquad (x_3 \text{ 轴方向向下})$$

式中，a 和 α 是常数；有一质量为 m 的质点在细管中由于重力而运动.

求：系统的运动微分方程 .

答：$a\ddot{\theta}-mg\sin\alpha=0$

53. 已知：质量为 m 的质点 A 沿仰角为 α、质量为 M 的直角三角形 B 的光滑斜面滑下，直角三角形 B 又可在光滑水平面上无摩擦地滑动（图 2.78）.

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)质点 A 和直角三角形 B 的水平加速度；

(3)直角三角形 B 对质点 A 的约束反力和水平面对直角三角形 B 的约束反力 .

答：(1) $L=\dfrac{1}{2}M(\dot{x}_1^B)^2+\dfrac{1}{2}m[(\dot{x}_1^A)^2+(\dot{x}_1^A-\dot{x}_1^B)^2\tan^2\alpha]-mg(x_1^A-x_1^B)\tan\alpha$

(2) $\begin{cases} \ddot{x}_1^A=-\dfrac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \\ \ddot{x}_1^B=\dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \end{cases}$

(3) $N^B=\dfrac{M(M+m)}{M+m\sin^2\alpha}g$

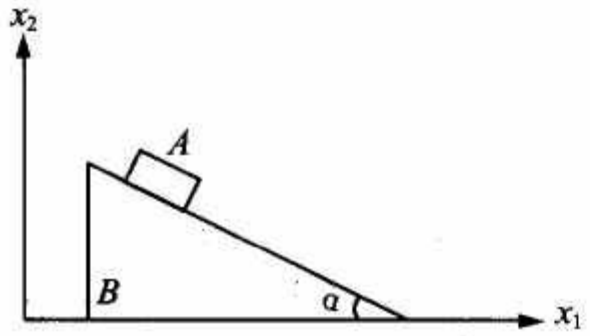


图 2.78

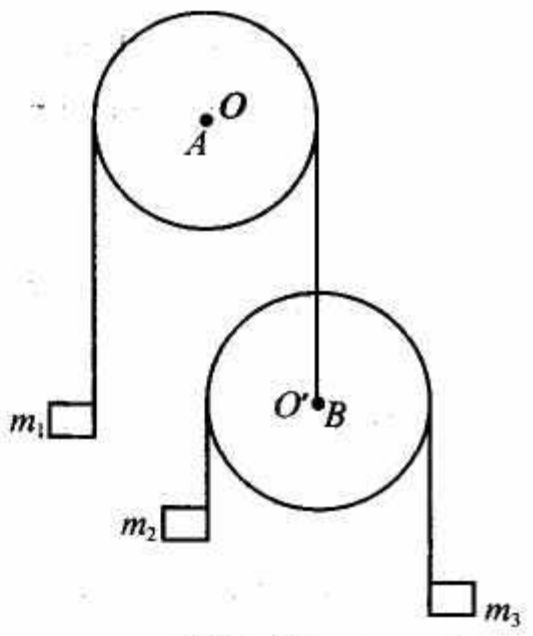


图 2.79

54. 已知：定滑轮 A 一边是质量为 m_1 的质点，另一边是轻质的动滑轮 B；动滑轮一边是质量为 m_2 的质点，另一边是质量为 m_3 的质点；定滑轮 A 的圆心为 O，动滑轮 B 的圆心为 O'，质量为 m_3 的质点为 C；设 OO' 为 q_1，$O'C$ 为 q_2（图 2.79）.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{q}_2^2+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2-(m_1-m_2-m_3)gq_1+(m_3-m_2)gq_2;$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1+(m_3-m_2)\ddot{q}_2+(m_1-m_2-m_3)g=0\\(m_2+m_3)\ddot{q}_2+(m_3-m_2)\ddot{q}_1-(m_3-m_2)g=0\end{cases}$$

55. 已知：质量为 m 长度为 $2l$ 的匀质杆 AB，其 A 端可在光滑的水平轨道中运动，其 B 端受一水平力 F 的作用在竖直平面内绕 A 端摆动；匀质杆 AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+ma\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+mgl\cos\theta$;

$$\begin{cases}m(\ddot{x}+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)=F\\m\left(\frac{4}{3}a\ddot{\theta}+\ddot{x}\cos\theta+g\sin\theta\right)=2F\cos\theta\end{cases}$$

56. 已知：质量为 m 的质点 A，用一根固有长度为 l 弹性系数为 k 的轻质弹簧悬于 O 点；OA 在任意时刻的长度为 r，且与竖直向下直线之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{2}k(r-l)^2+mgr\cos\theta$;

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-g\cos\theta)+k(r-l)=0\\r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+g\sin\theta=0\end{cases}$$

57. 已知：质量为 m_1 半径为 a 的圆柱体（其中心轴为 A），可在质量为 m_2 内半径为 b 的半圆形轨道槽（半圆形轨道槽的中心轴为 B）中作纯滚动，而半圆形轨道槽又可在水平面上滑动；半圆形轨道槽两边以弹性系数均为 k 的弹簧与固定墙面相连；当半圆形轨道槽处于中间位置时弹簧是固有长度；圆柱体在半圆形轨道槽中的方位角（即 BA 与竖直向下直线之间的夹角）为 θ（图 2.80）.

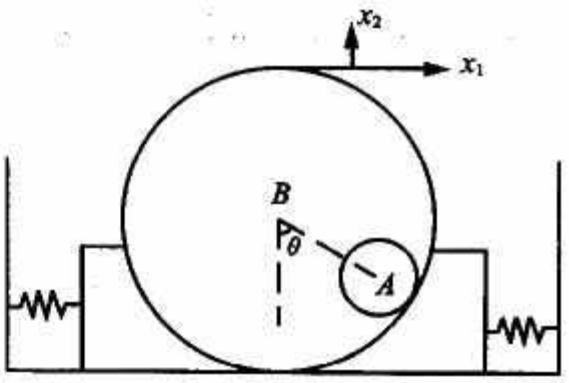


图 2.80

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程 .

答：$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}m_1(b-a)^2\dot{\theta}^2-m_1(b-a)\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta-kx_1^2+m_1g(b-a)\cos\theta$;

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}_1-m_1(b-a)\ddot{\theta}\cos\theta+m_1(b-a)\dot{\theta}^2\sin\theta+2kx_1=0\\\frac{3}{2}(b-a)\ddot{\theta}-\ddot{x}_1\cos\theta+g\sin\theta=0\end{cases}$$

58. 已知：质量为 m 长度为 $2l$ 的匀质杆的两端，下方有弹性系数各为 k_1 和 k_2 的竖直放置的弹簧作为底座；弹簧底座连在水平面上；以匀质杆在水平位置时的质心 C 为坐标原点，向上方向为 x

轴，匀质杆与水平方向之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)l^2\sin^2\theta+(k_1-k_2)lx\sin\theta$；

$$\begin{cases}m\ddot{x}+(k_1+k_2)x-(k_1-k_2)l\sin\theta=0\\ \frac{1}{3}ml\ddot{\theta}+(k_1+k_2)l\sin\theta\cos\theta-(k_1-k_2)x\cos\theta=0\end{cases}$$

59. 已知：质量为 m 半径为 a 的匀质圆球沿一质量为 M 仰角为 α 的三角形木块作无滑滚动，而三角形木块又可在水平面上作无涩滑动；匀质圆球的转角为 θ，水平方向为 x 轴；初始时两物体皆静止且球心在水平面上方高为 h 处(图 2.81).

求：系统的 Lagrangian 和两物体的运动规律.

答：$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{7}{10}ma^2\dot{\theta}^2-ma\dot{\theta}\dot{x}\cos\alpha+mga\theta\sin\alpha$；

$$\begin{cases}x=\dfrac{5mg\sin2\alpha}{4[7(M+m)-5m\cos^2\alpha]}t^2\\ \theta=\dfrac{a\cos\alpha-h}{a\sin\alpha}+\dfrac{5(M+m)g\sin\alpha}{2[7(M+m)-5m\cos^2\alpha]}t^2\end{cases}$$

60. 已知："双复摆"由质量为 m_1 转动惯量为 I_1 的复摆 OA 和质量为 m_2 转动惯量为 I_2 的复摆 AB 组成，两个复摆在 A 点铰连；复摆 OA 的质心为 C，复摆 AB 的质心为 D；$OC=a$，$AD=b$，$OA=c$；OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2(图 2.82).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

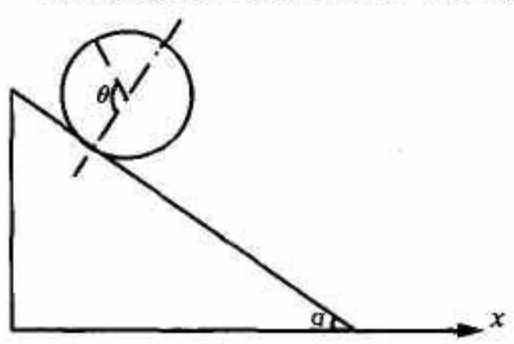


图 2.81

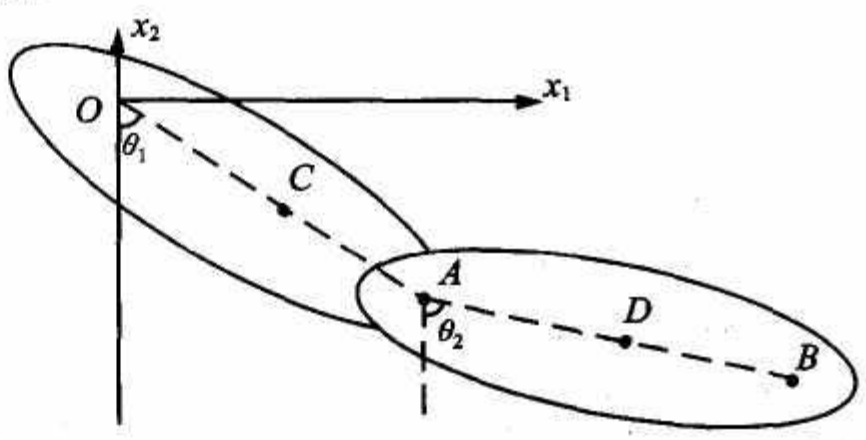


图 2.82

答：$L=\frac{1}{2}a_{11}\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}a_{22}\dot{\theta}_2^2+a_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+b_{11}\cos\theta_1+b_{22}\cos\theta_2$

其中

$$\begin{cases}a_{11}=m_1a^2+m_2c^2+I_1\\ a_{22}=m_2b^2+I_2\\ a_{12}=m_2bc\\ b_{11}=(m_1a+m_2c)g\\ b_{22}=m_2bg\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{11}\ddot{\theta}_1+a_{12}\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+a_{12}\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+b_{11}\sin\theta_1=0\\ a_{22}\ddot{\theta}_2+a_{12}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-a_{12}\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+b_{22}\sin\theta_2=0\end{cases}$$

61. 已知：质量为 m 的质点 A 被弹性系数为 k 固有长度为 l 的弹簧系于半径为 a 的圆周(圆心为 O)上的 B 点；OB 与圆周所在平面上某直径之间的夹角为 ωt，BA 与此直径之间的夹角为 θ，BA 长度为 r；整个系统在水平面上运动(图 2.83).

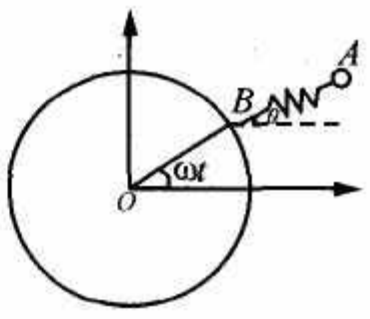


图 2.83

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}[\dot{r}+r^2\dot{\theta}^2+2a\omega\dot{r}\sin(\theta-\omega t)+2a\omega r\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)+a^2\omega^2]$

$$-\frac{1}{2}k(r-l)^2;$$

$$\begin{cases}m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-ma\omega^2\cos(\theta-\omega t)+k(r-l)=0\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+a\omega^2\sin(\theta-\omega t)=0\end{cases}$$

62. 已知：质量为 m 摆长为 l 的球面摆，其经度角为 φ，摆线与竖直向上直线之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta$;

$$\begin{cases}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{const.}\\ l\ddot{\theta}-l\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\theta+g\sin\theta=0\end{cases}$$

63. 已知：质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点 A 和 B，由一根穿过光滑水平面上一个小孔的细绳相连接；A 质点可在水平面上运动，B 质点则被悬吊着上下运动；小孔至 A 质点的距离为 r，该段细绳与固定方向之间的夹角为 θ(图 2.84).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2-m_2gr$;

$$\begin{cases}m_1r^2\dot{\theta}=\text{const.}\\ (m_1+m_2)\ddot{r}-m_1r\dot{\theta}^2+m_2g=0\end{cases}$$

64. 已知：小车由 4 个质量均为 m_1 半径均为 a 的车轮和一个质量为 M 仰角为 α 的直角三角形车身组成；在车身的斜面上是一个由质量为 m_2 的质点和弹性系数为 k 的轻质弹簧组成的谐振子；设水平地面为 x_1 方向，车身斜面为 x_2 方向(图 2.85).

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

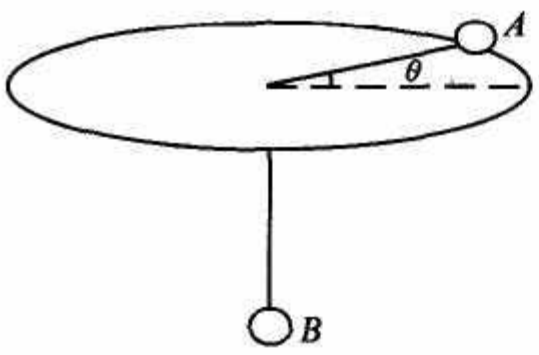


图 2.84

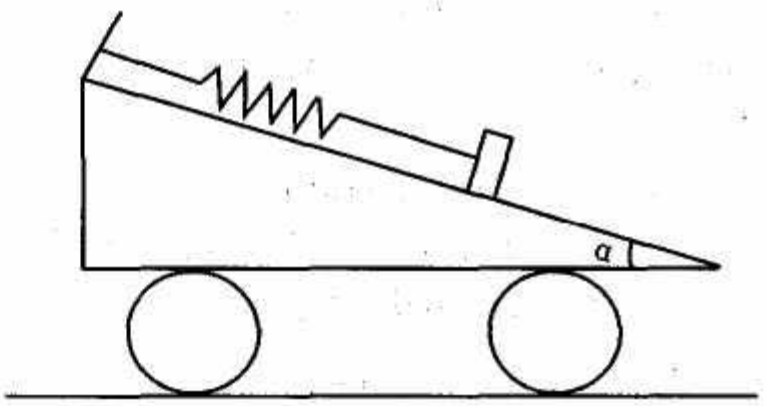


图 2.85

答：$L=\frac{1}{2}(M+3m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+m_2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha-\frac{1}{2}kx_2^2-m_2gx_2\sin\alpha$；

$$\begin{cases}(M+3m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2\cos\alpha=\text{const.}\\ m_2(\ddot{x}_2+\ddot{x}_1\cos\alpha+g\sin\alpha)+kx_2=0\end{cases}$$

65. 已知：质量为 M 半径为 a 的匀质细圆环(质心为 C)在竖直平面内沿水平面做无滑滚动；匀质细圆环上套着一质量为 m 的小珠 A，此小珠 A 可沿细圆环滑动；OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ，细圆环的转角为 φ.

求：(1)系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2)系统的广义能量积分.

答：(1)$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(2M+m)a^2\dot{\varphi}^2+ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+mga\cos\theta$；

$$\begin{cases}(2M+m)\dot{\varphi}+m\dot{\theta}\cos\theta=\text{const.}\\ a(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}\cos\theta)+g\sin\theta=0\end{cases}$$

(2)$H=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(2M+m)a^2\dot{\varphi}^2+ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta-mga\cos\theta=\text{const.}$

66. 已知：质量为 m 的质点 A 沿仰角为 α、质量为 M 的直角三角形 B 的光滑斜面滑下，直角三角形 B 又可在光滑水平面上无摩擦地滑动.

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程；

(4)直角三角形 B 的光滑斜面对质点 A 的约束反力(用“Lagrange 未定乘数法”).

答：(1) $L=\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_1^A)^2+\frac{1}{2}(M\cot^2\alpha+m)(\dot{x}_2^A)^2-M\dot{x}_1^A\dot{x}_2^A\cot\alpha-mgx_2^A$

(2) $\dot{x}_1^A=\frac{k+M\dot{x}_2^A\cot\alpha}{M+m}$；

$H=\frac{m(M+m\sin^2\alpha)}{2(M+m)\sin^2\alpha}(\dot{x}_2^A)^2+mgx_2^A$ 式中，常数项已经被删去.

(3) $(M\cot^2\alpha+m)\ddot{x}_2^A-M\ddot{x}_1^A\cot\alpha+mg=0$ 或 $(M+m\sin^2\alpha)\ddot{x}_2^A+(M+m)g\sin^2\alpha=0$

(4) $N=\frac{mM\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g$

67. 已知：质量为 m 的质点受重力作用，被约束在半顶角为 α 的、倒置的圆锥体的表面上运动；质点所在的圆锥体的某一截面上的位置的矢径为 r；该矢径与 x_1 轴之间的夹角(方位角)为 φ(图 2.86).

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程.

答：(1) $L=\frac{1}{2}m[(1+\cot^2\alpha)\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2]-mgr\cot\alpha$

(2) $\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi}{mr^2}$；$H=\frac{m}{2\sin^2\alpha}\dot{r}^2+\frac{J_\varphi^2}{2mr^2}+mgr\cot\alpha$

(3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}\ddot{r}-\frac{J_\varphi^2}{m^2r^3}+g\cot\alpha=0$

68. 已知：质量为 M 半径 a 为的薄球壳 A，其外表完全粗糙而内表面完全光滑；球壳置于粗糙的水平面上；在球壳内有一质量为 m 长度为 $2a\sin\alpha$ 的匀质棒 B，其两端都与球壳接触；α 为球心角的一半；匀质棒与水平面之间的夹角为 θ；整个系统在过球心 C 的竖直平面内运动；球心 C 的横坐标为 x；初始时系统静止且 $\theta=\theta_0$（图 2.87）.

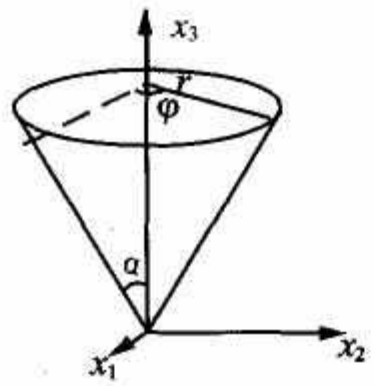


图 2.86

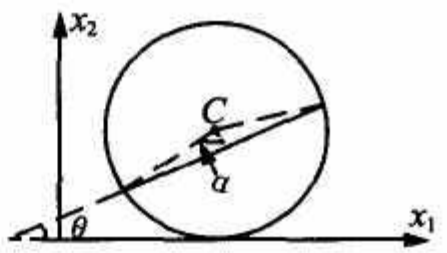


图 2.87

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)球心 C 的横坐标和角速度 $\dot{\theta}$ 的表达式.

答：(1) $L=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+ma\dot{\theta}\dot{x}_1\cos\theta\cos\alpha+mga\cos\theta\cos\alpha$

(式中，常数项已经略去)；

(2) $\dot{x}_1=-\frac{ma\dot{\theta}\cos\theta\cos\alpha}{\frac{5}{3}M+m}$；

$$H=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\frac{m^2a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\alpha}{2\left(\frac{5}{3}M+m\right)}-mga\cos\theta\cos\alpha$$

(3) $x_1=\frac{ma(\sin\theta-\sin\theta_0)\cos\alpha}{\frac{5}{3}M+m}$；

$$\dot{\theta}^2=\frac{6(5M+3m)g(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\alpha}{a[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\theta\cos^2\alpha]}$$

69. 已知：弹性系数为 k 的轻质弹簧只能在竖直方向作上下振动；弹簧下方有一质量为 M 的质点 A，质点 A 附有一质量为 m 摆长为 l 的球面摆 B；弹簧的平衡位置为 O；摆线与弹簧之间的夹角为 θ，球面摆的方位角为 φ（图 2.88）.

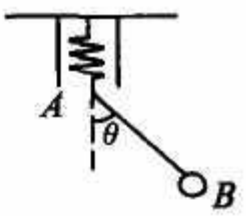


图 2.88

求：(1)系统的 Lagrangian；

(2)系统的循环积分和广义能量积分；

(3)系统的运动微分方程.

答：(1) $L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)-\left(\frac{1}{2}kx^2-Mgx-mgx\right)+mgl\cos\theta$；

(2) $\dot{\varphi}=\frac{J_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$；

$$H=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2+\frac{J_\varphi^2}{m^2l^2\sin^2\theta}-2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)+\left(\frac{1}{2}kx^2-Mgx-mgx\right)-mgl\cos\theta$$

(3) $l\ddot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta-\frac{J_\varphi^2\cos\theta}{m^2l^3\sin^3\theta}+g\sin\theta=0$

70. 求：62 题中的广义能量积分.

答：$H=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{J_\varphi^2}{2ml^2\sin\theta}-mgl\cos\theta=\text{const.}$

71. 求：63 题中的广义能量积分.

答：$H=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2+\frac{J_\theta^2}{2m_1r^2}+m_2gr=\text{const.}$

72. 求：64 题中的广义能量积分.

答：$H=m_2\dot{x}_2^2+\frac{k^2-(m_2\dot{x}_2\cos\alpha)^2}{2(M+3m_1+m_2)}+\frac{1}{2}kx_2^2+m_2gx_2\sin\alpha=\text{const.}$

73. 已知：半径为 a 的圆环(圆心为 O)以等角速度 ω 绕其直径转动；质量为 m 的小珠 A 套在圆环上并可沿圆环作无涩滑动；OA 与旋转轴之间的夹角为 θ.

求：系统的 Lagrangian 和广义能量积分.

答：$L=\frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)+mga\cos\theta$；

$$h=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta-mga\cos\theta=\text{const.}$$

74. 已知：质量为 m 的薄片置于光滑水平面上；其质心 C 坐标为 (x_1,x_2)，薄片上任一指定直线与 x_1 轴之间的夹角为 θ；系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+k^2\dot{\theta}^2)$$

式中 k 为常数；初始时薄片静止不动；今对距离质心 C 为 l 处且 CA 平行于 x_1 轴的 A 点施以垂直于 CA 的冲量 G(图 2.89).

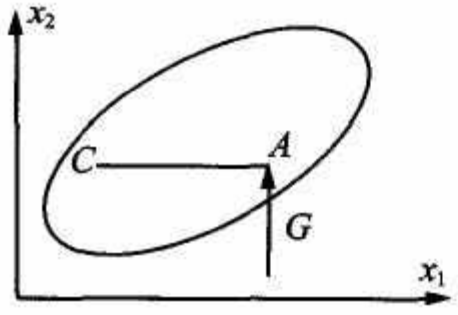


图 2.89

求：薄片受冲击后的广义速度.

答：$\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=\frac{G}{m}\\ \dot{\theta}=\frac{Gl}{mk^2}\end{cases}$

75. 已知：质量为 m 的质点在平面内运动，它所受到的中心对称力为

$$F=\frac{1}{r^3}[a+b(\ddot{r}-\dot{r}^2)]$$

式中 r 为质点到力心之间的距离.

求：(1)产生该力的广义势；

(2)系统的 Lagrangian.

答：(1) $F=\frac{1}{r^3}[a+b(\ddot{r}-\dot{r}^2)]$

(2) $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{2r^2}(a+b\dot{r}^2)$

76. 已知:形状为 $x_3=ax_1^2$ 的抛物线绕 x_3 轴以等角速度 ω 转动,成为旋转抛物面 $x_3=ar^2$;质量为 m 的小珠 A 套在此抛物线上作无涩滑动.

求:系统的 Lagrangian 和广义能量积分.

答:$L=\frac{1}{2}m[(1+4a^2r^2)\dot{r}^2+\omega^2r^2]-mgar^2$;

$$h=(1+4a^2r^2)\dot{r}^2+(2ga-\omega^2)r^2=\text{const.}$$

77. 已知:质量为 m 电荷为 e 的质点,其位置由柱坐标(r,θ,x_3)给定;此质点在轴对称电场 $\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{r}\boldsymbol{e}_r$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_3$ 中运动.

求:广义势 U 和运动微分方程.

答:$U=e\left(-E_0\ln r-\frac{B_0}{2c}r^2\dot{\theta}\right)$;

$$\begin{cases} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-\dfrac{eE_0}{r}-e\dfrac{B_0}{c}r\dot{\theta}=0 \\ mr^2\dot{\theta}+\dfrac{eB_0}{2c}r^2=\text{const.} \\ m\dot{x}_3=\text{const.} \end{cases}$$

78. 求:77 题中的广义能量积分.

答:$H=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{\left(J_\theta-\frac{eB_0}{2c}r^2\right)^2}{2mr^2}+\frac{k^2}{2m}-eE_0\ln r=\text{const.}$

79. 已知:$O\text{-}x_1x_2x_3$ 是惯性系,$O'\text{-}x_1'x_2'x_3'$ 为与 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 共原点的转动参考系,且 Ox_3' 轴与 Ox_3 轴重合;转动参考系的转动角速度为 ω;一质点的质量为 m;用相对坐标表示的广义力为 $Q_k(x_1',x_2',x_3')$.

求:系统的 Lagrangian 和运动微分方程(用相对坐标表示).

答:$L=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1')^2+(\dot{x}_2')^2+2\omega(x_1'\dot{x}_2'-x_2'\dot{x}_1')+\omega^2(x_1')^2+\omega^2(x_2')^2]-V(x_1',x_2',x_3')$;

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1-2\omega\dot{x}_2'-\omega^2x_1')=Q_1 \\ m(\ddot{x}_2'+2\omega\dot{x}_1'-\omega^2x_2'=Q_2 \end{cases}$$

或$L=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_k')^2+2\dot{x}_k'e_{kji}\omega_jx_i'+\omega^2(x_k')^2]-V(x_i')$;

$$m(\ddot{x}_k'+2e_{kji}\omega_j\dot{x}_i'-\omega^2x_k')=Q_k$$

80. 已知:质量为 M 的小环 A 套在水平的光滑直线上;在小环 A 上附有质量均为 m 摆长均为 l 的"双摆"$AB\text{-}BC$;AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1,BC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2;整个系统只能在竖直平面内运动(图 2.90).

求:系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答:$L=\frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+2ml\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$

$$+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+mgl(2\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$

$$\begin{cases}(M+2m)\dot{x}+2ml\dot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\dot{\theta}_2\cos\theta_2=\text{const.}\\ 2l\ddot{\theta}_1+2\ddot{x}\cos\theta_1+l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+\ddot{x}\cos\theta_2+l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

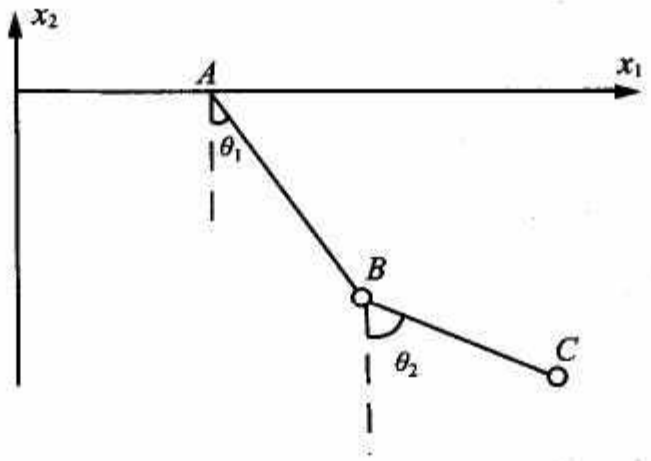


图 2.90

81. 求:80 题中的广义能量积分.

答:$H=\dfrac{k^2-(2ml)^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1-(ml)^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2-(2ml)^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{2(M+2m)}+ml^2\dot{\theta}_1^2$

$$+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-mgl(2\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

82. 已知:质量为 M 弹性系数为 k 的谐振子 A 套在水平的光滑直线上;在谐振子 A 上附有质量均 m 为摆长 l 均为的"双摆"AB-BC;AB 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1,BC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2;整个系统只能在竖直平面内运动.

求:系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答:$L=\dfrac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2+ml^2\dot{\theta}_1^2+\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+2ml\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$

$$+ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\frac{1}{2}kx^2+mgl(2\cos\theta_1-\cos\theta_2);$$

$$\begin{cases}(M+2m)\ddot{x}+2ml\ddot{\theta}_1\cos\theta_1+ml\ddot{\theta}_2\cos\theta_2-2ml\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1-ml\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2+kx=0\\ 2l\ddot{\theta}_1+2\ddot{x}\cos\theta_1+l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+l\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+2g\sin\theta_1=0\\ l\ddot{\theta}_2+\ddot{x}\cos\theta_2+l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-l\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

83. 已知:质量均为 m 的质点 A 和 B,由长度为 l 的轻质刚性杆相连;刚性杆在水平面内以等角速度 ω 转动;在质点 A 和 B 处装有刀刃,使得每个质点都不能具有沿刚性杆的速度分量,但却都可以沿垂直于刚性杆的方向无涩滑动;设系统质心坐标为 (x_1,x_2).

求:(1)系统的 Lagrangian 和非完整约束条件;

(2)系统的 Jacobi 积分.

答:(1)$\begin{cases}L=T=m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\dfrac{1}{4}ml^2\omega^2\\ \dot{x}_1\cos\omega t+\dot{x}_2\sin\omega t=0\end{cases}$

(2)$h=T_2-T_0+V=m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\dfrac{1}{4}ml^2\omega^2$

84. 已知：质量为 m 的质点的位置由直角坐标(x_1,x_2,x_3)给定；系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

非完整约束方程为

$$f=2\dot{x}_1+3\dot{x}_2+4\dot{x}_3+5=0$$

求：(1)系统的运动微分方程；

(2)动约束中的速度．

答：(1)$\begin{cases}m\ddot{x}_1+kx_1=2\lambda\\ m\ddot{x}_2+kx_2=3\lambda\\ m\ddot{x}_3+kx_3=4\lambda\end{cases}$

(2)$\boldsymbol{v}=\frac{1}{29}(-10\boldsymbol{i}_1-15\boldsymbol{i}_2-20\boldsymbol{i}_3)$

85. 已知：质量分别为 m_1 和 m_2 的二原子分子平衡时原子之间的距离为 a；它们之间的相互作用力是准弹性的，弹性系数为 k.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程．

答：$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1-a)^2$；

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1-k(x_2-x_1-a)=0\\ m_2\ddot{x}_2+k(x_2-x_1-a)=0\end{cases}$$

86. 已知：在 O -x_1x_2 水平面内有质量为 m_1 弹性系数为 k 的谐振子 OA，以及与 OA 垂直的、质量为 m_2 弹性系数为 k_2 的另一谐振子 AB(二者在 A 点铰连)；整个系统绕 x_3 轴以等角速度 ω 旋转；在某一时刻两个谐振子的长度分别为 r_1 和 r_2.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程．

答：$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2+m_2\omega(r_1\dot{r}_2-r_2\dot{r}_1)$

$$+\left[(m_1+m_2)\omega^2-\frac{1}{2}k_1\right]r_1^2+\left(m_2\omega^2-\frac{1}{2}k_2\right)r_2^2$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{r}_1-m_2\omega\dot{r}_2-[2(m_1+m_2)\omega^2-k_1]r_1=0\\ m_2\ddot{r}_2+m_2\omega\dot{r}_1-(2m_2\omega^2-k_2)r_2=0\end{cases}$$

87. 已知：质量均为 m 电荷均为 e 的两个金属小球 A 和 A' 分别用长度均为 l 绝缘细绳悬于水平距离相距为 a 的 O 和 O' 两点；OA 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_1，$O'A'$ 与竖直向下直线之间的夹角为 θ_2.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程．

答：$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)+mgl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$

$$-\frac{e^2}{\sqrt{a^2+2l^2-2l^2\cos(\theta_2-\theta_1)+2la(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}};$$

$$\begin{cases}ml^2\ddot{\theta}_1+mgl\sin\theta_1-\dfrac{e^2[l^2\sin(\theta_2-\theta_1)+la\cos\theta_1]}{\sqrt{a^2+2l^2-2l^2\cos(\theta_2-\theta_1)+2la(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}}=0\\ ml^2\ddot{\theta}_2+mgl\sin\theta_2+\dfrac{e^2[l^2\sin(\theta_2-\theta_1)+la\cos\theta_2]}{\sqrt{a^2+2l^2-2l^2\cos(\theta_2-\theta_1)+2la(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}}=0\end{cases}$$

88. 已知：在两个竖直平面 OC 之间的同一水平面上的 A（坐标为 x_1）、B（坐标为 x_2）两点，分别有质量为 m_1 和 m_2 的滑块；OA 之间有弹性系数为 k_1 的弹簧和阻尼系数为 μ_1 的阻尼器相连，AB 之间有弹性系数为 k_2 的弹簧和阻尼系数为 μ_2 的阻尼器相连，BC 之间有弹性系数为 k_3 的弹簧和阻尼系数为 μ_3 的阻尼器相连.

求：系统的 Lagrangian 和 Rayleigh 耗散函数.

答：$$\begin{cases} L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2+k_2x_1x_1-\frac{1}{2}(k_2+k_3)x_2^2 \\ D=\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)\dot{x}_1^2-\mu_2\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3)\dot{x}_2^2 \end{cases}$$

89. 已知：在竖直向上的 x 方向，由水平面上的并联的弹性系数为 $2k$ 的弹簧和阻尼系数为 2μ 的阻尼器顶着一个质量为 m 的质点 A（坐标为 x_2）；在质点 A 上，又有并联的弹性系数为 k 的弹簧和阻尼系数为 μ 的阻尼器顶着一个质量为 m 的质点 B（坐标为 x_1）.

求：系统的 Lagrangian 和 Rayleigh 耗散函数.

答：$$\begin{cases} L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}k(x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2) \\ D=\frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2+3\dot{x}_2^2) \end{cases}$$

90. 已知：质量分别为 m_1，m_2 和 m_3，弹性系数分别为 k_1，k_2 和 k_3 的 3 个谐振子串联成一行并悬挂于天花板下；以竖直向下方向为 x 轴；3 个谐振子的坐标分别为 x_1，x_2 和 x_3.

求：系统的 Lagrangian.

答：$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2-\frac{1}{2}(k_2+k_3)x_2^2-\frac{1}{2}k_3x_3^2$$
$$+k_2x_1x_2+k_3x_2x_3$$

91. 已知：在同一水平面上的 3 个质点 A、B、C 的质量分别为 m_1，m_2，m_3；AB 之间有弹性系数为 k_1 的弹簧相连，BC 之间有弹性系数为 k_2 的弹簧相连；弹簧的固有长度为 a；系统的质心不动；相对坐标为 $q_1=x_2-x_1-a$，$q_2=x_3-x_2-a$.

求：系统的 Lagrangian.

答：$$L=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}(k_1q_1^2+k_2q_2^2)$$

其中

$$\begin{cases} a_{11}=\dfrac{m_1m_3(m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2)}{m_2(m_1+m_2+m_3)^2} \\ a_{22}=\dfrac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2)}{m_2(m_1+m_2+m_3)^2} \\ a_{12}=\dfrac{m_3m_1[(m_1+m_2)(2m_2+m_3)+(m_2+m_3)(m_1+2m_2)]}{2m_2(m_1+m_2+m_3)^2} \end{cases}$$

92. 已知：同 88 题，但在 A、B 两滑块上施有强迫力 $F_1\cos\omega_0 t$ 和 $F_2\cos\omega_0 t$.

求：系统的运动微分方程.

答：$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+(\mu_1+\mu_2)\dot{x}_1-\mu_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1\cos\omega_0 t \\ m\ddot{x}_2-\mu_2\dot{x}_1+(\mu_2+\mu_3)\dot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=F_2\cos\omega_0 t \end{cases}$$

93. 已知：质量分别为 m_1，m_2 和 m_3 的 3 个质点(坐标分别为 x_1，x_2 和 x_3)，支在 3 根弹性系数分别为 k_1，k_2 和 k_3 的等高的弹性薄片的顶端；相邻的两个质点之间又用弹性系数分别为 k_{12} 和 k_{23} 的轻质弹簧相连；矩形位置是系统的平衡位置且弹簧是固有长度；整个系统只能在 x 方向振动(图 2.91).

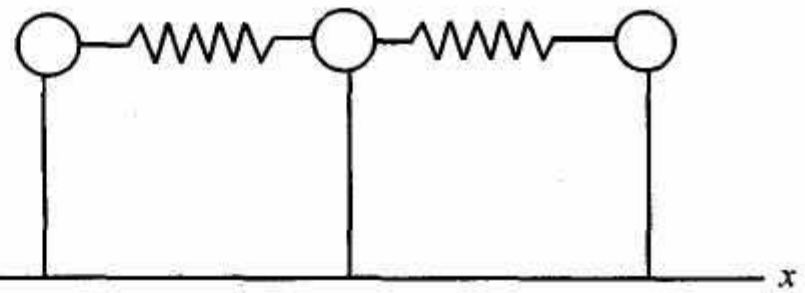


图 2.91

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2-\frac{1}{2}(k_1+k_{12})x_1^2-\frac{1}{2}(k_2+k_{12}+k_{23})x_2^2$

$$-\frac{1}{2}(k_3+k_{23})x_3^2-k_{12}x_1x_2-k_{23}x_2x_3$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_{12})x_1+k_{12}x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2+(k_2+k_{12}+k_{23})x_2+k_{12}x_1+k_{23}x_3=0 \\ m_3\ddot{x}_3+(k_3+k_{23})x_3+k_{23}x_2=0 \end{cases}$$

94. 已知：质量为 m_1 的质点 A 和质量为 m_2 的质点 B 由一根不可伸长的细绳所连接并跨过定滑轮；在质点 B 下方又用弹性系数为 k 的弹簧挂着另一质量为 M 的质点 C；初始时弹簧处于平衡位置；以竖直向上方向为 x 轴，质点 B 和质点 C 的坐标分别为 x_1 和 x_2.

求：系统的 Lagrangian 和运动微分方程.

答：$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-(m_1-m_2)gx_1+Mgx_2$；

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x}_1-k(x_2-x_1)+(m_1-m_2)g=0 \\ M\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)-Mg=0 \end{cases}$$

95. 已知：系统的 Lagrangian 为 $L=\frac{1}{2}mq_k\ddot{q}_k+\frac{1}{2}k(q_k)^2$

求：运动微分方程.

96. 已知：有两函数 $u(x)$ 和 $v(x)$；积分 I_1 和 I_2 定义为

$$\begin{cases} I_1=\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2+a^2(u^2+v^2)+\frac{c\exp(-bx)}{x}(u^2+v^2)+\frac{bv^2}{x^2}\right]\mathrm{d}x \\ I_2=\int_0^\infty[Pu^2+Qv^2+2Ruv]\mathrm{d}x \end{cases}$$

式中(a,b,c)均为常数，(P,Q,R)均为 x 的函数.

求证：变分问题 $\delta\left(\frac{I_1}{I_2}\right)=0$ 所满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\left(a^2+\frac{c\exp(-bx)}{x}\right)u=-A(Pu+Qv) \\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}-\left(a^2+\frac{c\exp(-bx)}{x}+\frac{b}{x^2}\right)v=-A(Qu+Rv) \end{cases}$$

式中 $A=\left(\frac{I_1}{I_2}\right)_{\min}$.

97. 已知：质量为 m 的质点其抛射运动的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-mgx_3$$

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases}\ddot{x}_1=0\\ \ddot{x}_2=0\\ \ddot{x}_3=-g\end{cases}$

98. 已知：质量为 m 的质点受重力作用，被约束在半顶角为 α 的、倒置的圆锥体的表面上运动；质点所在的圆锥体的某一截面上的位置的矢径为 r；该矢径与 x_1 轴之间的夹角(方位角)为 φ.

求：系统的运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha+g\sin\alpha\cos\alpha=0\\ m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})=0\end{cases}$

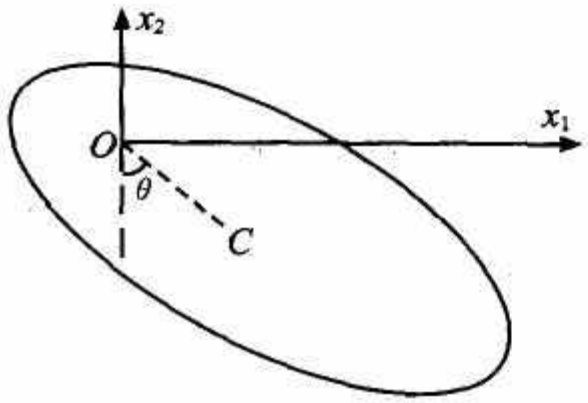


图 2.92

99. 已知：质量为 m 的物理摆绕通过坐标原点 O 的水平轴作摆动；物理摆对 O 点的转动惯量为 I_0；O 点至质心 C 点的距离为 l；OC 与竖直向下直线之间的夹角为 θ(图 2.92).

求：系统的运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$I_0\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$

100. 已知：同 62 题，质量为 m 摆长为 l 的球面摆，其经度角为 φ，摆线与竖直向上直线之间的夹角为 θ.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{const.}\\ l\ddot{\theta}-l\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\theta+g\sin\theta=0\end{cases}$

101. 已知：同 47 题，质量为 M 半径为 a 的定滑轮的轮缘，用细绳缠绕着一个质量为 m 半径为 b 的动滑轮；动滑轮自静止沿铅直方向下落；定滑轮的转角为 θ_1，动滑轮的转角为 θ_2.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}M+m\right)a\ddot{\theta}_1+mb\ddot{\theta}_2-mg=0\\ \dfrac{3}{2}b\ddot{\theta}_2+a\ddot{\theta}_1-g=0\end{cases}$

102. 已知：同 54 题，定滑轮 A 一边是质量为 m_1 的质点，另一边是轻质的动滑轮 B；动滑轮一边是质量为 m_2 的质点，另一边是质量为 m_3 的质点；定滑轮 A 的圆心为 O，动滑轮 B 的圆心为 O'，质量为 m_3 的质点为 C；设 OO' 为 q_1，$O'C$ 为 q_2.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases}(m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1+(m_3-m_2)\ddot{q}_2+(m_1-m_2-m_3)g=0\\ (m_2+m_3)\ddot{q}_2+(m_3-m_2)\ddot{q}_1-(m_3-m_2)g=0\end{cases}$

103. 已知：同 56 题，质量为 m 的质点 A，用一根固有长度为 l 弹性系数为 k 的轻质弹簧悬于 O 点；OA 在任意时刻的长度为 r，且与竖直向下直线之间的夹角为 θ.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-g\cos\theta)+k(r-l)=0 \\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}+g\sin\theta=0 \end{cases}$

104. 已知：同 57 题，质量为 m_1 半径为 a 的圆柱体(其中心轴为 A)，可在质量为 m_2 内半径为 b 的半圆形轨道槽(半圆形轨道槽的中心轴为 B)中作纯滚动，而半圆形轨道槽又可在水平面上滑动；半圆形轨道槽两边以弹性系数均为 k 的弹簧与固定墙面相连；当半圆形轨道槽处于中间位置时弹簧是固有长度；圆柱体在半圆形轨道槽中的方位角(即 BA 与竖直向下直线之间的夹角)为 θ.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x}_1-m_1(b-a)\ddot{\theta}\cos\theta+m_1(b-a)\dot{\theta}^2\sin\theta+2kx_1=0 \\ \dfrac{3}{2}(b-a)\ddot{\theta}-\ddot{x}_1\cos\theta+g\sin\theta=0 \end{cases}$

105. 已知：同 58 题，质量为 m 长度为 $2l$ 的匀质杆的两端，下方有弹性系数各为 k_1 和 k_2 的竖直放置的弹簧作为底座；弹簧底座连在水平面上；以匀质杆在水平位置时的质心 C 为坐标原点，向上方向为 x 轴，匀质杆与水平方向之间的夹角为 θ.

求：运动微分方程(用 Hamilton 原理).

答：$\begin{cases} m\ddot{x}+(k_1+k_2)x-(k_1-k_2)l\sin\theta=0 \\ \dfrac{1}{3}ml\ddot{\theta}+(k_1+k_2)l\sin\theta\cos\theta-(k_1-k_2)x\cos\theta=0 \end{cases}$

3 Hamilton 力学

William Rowan Hamilton(1805～1865)在 1834 年发表了一篇题名为“On a general method in dynamics, by which the study of the motion of all free systems attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function”(Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. Ⅱ, 1834, pp247～308)的学术论文,第二年又发表了一篇题名为“Second essay on a general method in dynamics”(Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. Ⅰ, 1835, pp95～144)的学术论文. 这两篇名著就构成了分析力学中今天被称之为“Hamilton 力学”的基础.

Hamilton 原始论文中的主要内容是“正则方程”和“正则变换”. “正则方程”是通过 LeGendre 变换由“Lagrange 方程”得到的. “正则变换”的目的则是为了找到更多的“可遗坐标”以便得到更多的“循环积分”. 推导“正则方程”最简单、最正确的方法就是直接从 Legendre 变换出发;任何以“推广的 Hamilton 原理”或“修正的 Hamilton原理”为名义的推导方法都有物理上的瑕疵. 这一问题是吴大猷先生首先指出的.

“正则方程”是由 $2m$ 个一阶微分方程组成的方程组,而“Lagrange 方程”则是由 m 个二阶微分方程组成的方程组. 由此看来,在“正则方程”中尽管方程的数目成倍增加,但微分方程的阶数却以相同的比例减少. 然而,“正则方程”的更重要的优越性却是方程组之间的对称性;这种对称性正是它在物理学其他领域例如量子力学和统计力学中得到广泛应用的理论基础. 从这一意义上来说,“Hamilton 力学”不同于“Lagrange 力学”之处,就在于它更侧重于理论体系的构建,以便于它更好地为后继课程服务.

当然,利用 Hamilton“正则方程”也能处理日常的力学问题. 但是,这种处理问题的范围往往受到限制;原因是“Hamiltonian”比“Lagrangian”难写,尤其是在多自由度有动能“交叉项”的情况下. 所以,例如 R. B. Lindsay 和 H. Margenau 就在一本题名为《物理学的基础》(中译本,商务印书馆,1964)的书中说过:“当建立了 Lagrange方程之后,通常就通过直接积分来求体系的状态;Hamilton 方程可以直接积分,但实际上从来没有这样做过……正则方程通常是不去直接积分的,它们的主要价值在于它们的形式对于某些类型的坐标变换的不变性……”除此之外,用“正则变

换”求解问题的实例至多也只有 20 多个.

Hamilton 力学中的另一重要内容是由 Edward John Routh (1831～1907)建立起来的所谓“Routh 方程”. 利用 Legendre 变换,将循环坐标从 Lagrangian 中剔除出去并将循环坐标所对应的动能改写成势能,从而建立新的“Routhian”是它的目标. Routh 方程的历史功劳不亚于 Lagrange 提出广义坐标.

“Poisson 括号”理论和“Hamilton-Jacobi 理论”也必须用到“正则方程”和“正则变换”的知识. “Poisson 括号”理论更像是一种数学游戏,但是它在量子力学中的应用方兴未艾、不容忽视. “Hamilton-Jacobi 理论”则主要是一种方法论,至于它能解决多少具体问题倒在其次. 量子力学的几种主要“诠释”例如“系综诠释”和 D. Böhm 的“量子势诠释”,都与 Hamilton-Jacobi 理论有千丝万缕的联系.

M. Born 在 1961 年一篇纪念 E. Schrödinger 的文章(Physikaliscke Blätter, 1961, (17), pp85～87)上说过:“他的名字是物理学出版物中出现最多的. 我们谁没有把 Schrödinger 方程式或 Schrödinger 函数写过无数次呢? 大概以后几代人也将这么做,并清晰地记住他的名字. ”其实,在学过“Hamilton 力学”之后,如果将 Born 原文中形容“Schrödinger”的话用来形容“Hamilton”那是再确切不过的事:“他的名字是物理学出版物中出现最多的. 我们谁没有把 Hamilton 正则方程式或 Hamiltonian 写过无数次呢? 大概以后几代人也将这么做,并清晰地记住他的名字. ”

3.1 Legendre 变换和 Hamilton 正则方程

一、Legendre 变换

Lagrangian $L(q_k,\dot{q}_k,t)$是广义坐标 q_k,广义速度 $\dot{q}_k(k=1,\cdots,m)$和时间 t 的函数. 现在的问题是,如果将分析力学问题中的自变量广义速度 $\dot{q}$ 变换成以广义动量 p_k 作为新的自变量,而保留自变量广义坐标 q_k 和时间 t 不变,则这一变换如何进行? 变换之后的分析力学问题又用什么函数来表示或导出? 已知,

$$p_k=\frac{\partial L(q_k,\dot{q}_k,t)}{\partial \dot{q}_k}\quad (k=1,\cdots,m)$$

这种变换是容易进行的,其变换工具就是法国数学天文学家 A. M. LeGendre (1752～1833)于 1814～1815 年间发现的“Legendre 变换”.

1. 关于一个仅有两个自变量的函数 $f(x,y)$的 Legendre 变换

首先,取函数 $f(x,y)$的全微分为

$$df(x,y)=udx+vdy \tag{3.1.1}$$

其中

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ v=\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

其次，为了使描述问题的独立自变量从(x,y)变换成(u,y)，从而可以用微分(du,dy)表示各微分量，人们选择利用 Legendre 变换. 引入一个新的函数$g(u,y)$，设

$$g(u,y)=xu-f \tag{3.1.3}$$

注意(3.1.3)的形式：它的前一项是需要变换的自变量x和将要变换成的自变量u之间的乘积，然后减去原来的函数$f(x,y)$. 当然这相减的两项颠倒一下位置也无妨.

于是，函数$g(u,y)$的全微分是

$$\begin{aligned} dg(u,y)&=xdu+udx-df=xdu+udx-udx-vdy \\ &=xdu-vdy \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

从而由(3.1.4)式，可得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\partial g}{\partial u} \\ v=-\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

而且，可以从(3.1.4)式和(3.1.5)看出，自变量已经从(x,y)变换成(u,y).

(3.1.5)式则与(3.1.2)式构成“互逆关系”.

类似(3.1.3)式的变换关系被称为“Legendre 变换”.

“Legendre 变换”在热力学中早就有所应用(参见附录(C14)式).

【例 3.1】 已知：热力学第一定律可以写成

$$du=Tds-pdv$$

式中u为 mol 内能，(T,s,p,v)分别是温度，mol 熵，压强和 mol 容积.

求：“Legendre 变换”，使独立自变量从(s,v)变换成(s,p).

解：在以(s,v)为独立自变量的热力学第一定律$du=Tds-pdv$中，有

$$\begin{cases} T=\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)_v \\ p=-\left(\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)_s \end{cases}$$

作“Legendre 变换”，令

$$h=u+pv$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h(s,p) &= \mathrm{d}u + p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v + p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p \\ &= T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p \end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} T = \left(\dfrac{\partial h}{\partial s}\right)_p \\ v = \left(\dfrac{\partial h}{\partial p}\right)_s \end{cases}$$

而 $h(s,p)$被称为 mol 焓.

类似的"Legendre 变换"共有 12 种;它们是

$$\begin{cases} u = f + Ts = g + Ts - pv = h - pv \\ f = g - pv = h - Ts - pv = u - Ts \\ g = h - Ts = u - Ts + pv = f + pv \\ h = u + pv = f + Ts + pv = g + Ts \end{cases}$$

式中,(u,f,g,h)分别被称为 mol 内能,mol Helmholtz 自由能,mol Gibbs 自由能和 mol 焓.

2. 关于一个有 m 个自变量的函数 $\phi(x_k)(k=1,\cdots,m)$的 Legendre 变换

首先,同样,取函数 $\phi(x_k)$的全微分为

$$\mathrm{d}\phi = u_k \mathrm{d}x_k \quad (k = 1,\cdots,m) \tag{3.1.6}$$

其中,

$$u_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (k = 1,\cdots,m) \tag{3.1.7}$$

其次,为了使描述问题的独立自变量从 x_k 变换成 u_k,从而可以用微分 $\mathrm{d}u_k$ 表示各微分量,人们可以同样选择利用 Legendre 变换. 引入一个新的函数 $\psi(u_k)$,设

$$\psi(u_k) = x_k u_k - \phi \quad (k = 1,\cdots,m) \tag{3.1.8}$$

于是,函数 $\psi(u_k)$的全微分是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi(u_k) &= x_k \mathrm{d}u_k + u_k \mathrm{d}x_k - \mathrm{d}\phi = x_k \mathrm{d}u_k + u_k \mathrm{d}x_k - u_k \mathrm{d}x_k \\ &= x_k \mathrm{d}u_k \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

从而,可得

$$x_k = \frac{\partial \psi}{\partial u_k} \quad (k = 1,\cdots,m) \tag{3.1.10}$$

可以由(3.1.9)式和(3.1.10)式看出,独立自变量已从 x_k 变换成 u_k.

(3.1.10)式则与(3.1.7)式构成"互逆关系".

(3.1.8)式就是一个有 m 个自变量的函数 $\phi(x_k)$的 Legendre 变换.

二、Hamiltonian 和 Hamilton 正则方程

1. Hamiltonian

在 Lagrange 力学中,曾经得到过"广义能量"或"总能"表达式为

$$H(q_k,\dot{q}_k,t)=\dot{q}_k p_k-L(q_k,\dot{q}_k,t) \tag{3.1.11}$$

对照(3.1.8)式和(3.1.11)式,就可发现:只要将 $H(q_k,\dot{q}_k,t)$ 换成 $H(q_k,p_k,t)$,(3.1.11)式正好就是 Legendre 变换.

因此,通过

$$H(q_k,p_k,t)=\dot{q}_k p_k-L(q_k,\dot{q}_k,t) \tag{3.1.12}$$

就可完成将问题中的自变量广义速度 $\dot{q}_k$ 变换成以广义动量 p_k 为新的自变量的"Legendre 变换".

$H(q_k,p_k,t)$被称为"Hamiltonian",又被称为"正则函数";而广义坐标 q_k 和广义动量 p_k 则被称为"一对""正则变量". 注意,某些教科书将 $H(q_k,\dot{q}_k,t)$称作"Hamiltonian"是不对的,"Hamiltonian"必须用广义动量 p_k 来表示而不能用广义速度 $\dot{q}_k$ 来表示.

2. Hamilton 正则方程的推导

(1) 推导 Hamilton 正则方程有多种方法,其中最直接,最干净利落的方法就是从"Legendre 变换"(3.1.12)式下手. 在推导过程中,只要注意 $H(q_k,p_k,t)$和 $L(q_k,\dot{q}_k,t)$中的自变量是些什么量即可.

在(3.1.12)式中,共有$(t,q_k,\dot{q}_k,p_k)$4 种自变量. 于(3.1.12)式等号两边,分别对这 4 种自变量求偏导,有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial q_k}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}\\[2ex] 0=p_k-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k\end{cases} \tag{3.1.13}$$

在(3.1.13)式的第二、第三式中代入 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.1.14}$$

立得

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.1.15}$$

而(3.1.15)式与(3.1.13)中的第四式,即构成了"Hamilton 正则方程":

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\\[2ex] \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\end{cases} \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.1.16}$$

在这一推导中,还有(3.1.13)式的第一式

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.1.17}$$

(3.1.17)式有两层含义:一是 Hamiltonian 是否含时有赖于 Lagrangian 是否含时,二是 Lagrangian 与 Hamiltonian 之和肯定不含时.

(2) 第二种推导是从对"Legendre 变换"(3.1.12)式等号两边取微分出发. 其主要思路与第一种推导大致相仿,但看上去不如第一种推导干净利落.

由(3.1.12)式等号右边,有

$$\mathrm{d}H=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+p_k\mathrm{d}\dot{q}_k-\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \tag{3.1.18}$$

将广义动量的定义式和 Lagrange 方程

$$\begin{cases} p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_k}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_k \end{cases} \tag{3.1.19}$$

代入(3.1.18)式,得到

$$\mathrm{d}H=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k-\dot{p}_k\mathrm{d}q_k-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{3.1.20}$$

另外,由(3.1.12)式等号左边,有

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k+\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{3.1.21}$$

对比(3.1.20)和(3.1.21)两式等号右边,可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t} \\ \dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \tag{3.1.22}$$

式中,后两式即为"Hamilton 正则方程".

(3) 第三种推导,是由"Hamilton 原理"来导出"Hamilton 正则方程". 对这种推导的争议最大. 争议不是针对"Hamilton 原理",而是针对"Hamilton 原理"是否能无限制地推广成"相空间中的 Hamilton 原理"或"修正的 Hamilton 原理". 其中所谓"相空间"就是指由 m 个广义坐标 q_k 和 m 个广义动量 p_k 组成的 $2m$ 维数学空间(广义坐标空间本来就是数学空间,再加上与广义动量"直和",就更是数学空间了).

"Hamilton 原理"是经典力学中的一个很重要的变分原理. 通常的教科书(大概从 Goldstein 开始)中,在由"Hamilton 原理"导出"Hamilton 正则方程"时,标准步骤是首先将"Hamilton 原理"由"Lagrange 位形空间"(即广义坐标空间)推广到"相空间",称之为"相空间中的 Hamilton 原理";个别作者未作说明也这么干了. 然后再进

行变分运算得到正则方程. 对这一步骤许多人都习以为常、见怪不怪了. 其实其中隐藏着一个很深刻的物理学误区.

吴大猷先生(1907 ~ 2000) 首先发现其中的问题. 吴大猷先生说,在"Hamilton 原理" 中"我们是比较各不同途径的运动(在同一固定的时间中,$t_1 - t_0$ 从 q_k^0 到 q_k^1 的 $\int_0^\tau L\mathrm{d}t$ 值),这是 Hamilton 原理本身命题的一部分!不能忘记了!因为这个条件(各途径须以同一时间 $t_1 - t_0$ 走完),故在一运动路径 $q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k$ 中的 $p_k + \delta p_k$ 不能任意;否则走 $p_k + \delta p_k$ 径和走 $q_k + \delta q_k$ 径由 q_k^0 到 q_k^1 的时间,则可以不同了. 许多书的作者,大概根本不知道 Hamilton 原理本身有此部分!须知 Hamilton 原理是一个物理(力学) 原则 …… 在许多书中,彼此抄袭,根本未懂 Hamilton 原理的命题,可怜得很!" 他还说过:"关于 Hamilton 原理中之 δp 不能是任意的这一点,应是无疑问的. 许多人写书也好,教书也好,根本不记得命题是什么. 各比较的路径,是须在同一时间 $t_1 - t_0$ 中完成的,故 δp 不能任意取. 否则可以用很短的时间由 q_k^0 达到 q_k^1 了! Hamilton 原理不是一个单纯的变分问题,而是一个物理命题!很少人知道这一点. " 吴大猷先生在 1941 年于昆明"西南联大" 讲授经典力学时就指出了这一点,他在《古典动力学》(联经出版事业公司,1977;科学出版社,1983) 第 201 页上说过同样的话.

按照"Hamilton 原理",可以写出

$$\delta S = \delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t = \delta\int_0^\tau (\dot{q}_k p_k - H)\mathrm{d}t = 0 \tag{3.1.23}$$

由于等时变分

$$\delta t = 0 \tag{3.1.24}$$

故在写出对 H 的全变分时只有对广义坐标 q_k 的变分和对广义动量 p_k 的变分两项,而且对 $\mathrm{d}t$ 的变分为零,即

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_0^\tau \left[\dot{q}_k\delta p_k + p_k\delta\dot{q}_k - \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \left[\dot{q}_k\delta p_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_k\delta q_k) - \dot{p}_k\delta q_k - \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= (p_k\delta q_k)\,|_0^\tau + \int_0^\tau \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right]\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

由于在两个端点 $t=0$ 和 $t=\tau$ 处的广义虚位移为零,即

$$\delta q_k\,|_0^\tau = 0 \tag{3.1.26}$$

故,(3.1.25)式成为

$$\delta S = \int_0^\tau \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{3.1.27}$$

到了这一步，按照吴大猷先生的意见，应该代入由“Legendre 变换”得到的(3.1.13)式的第四式，即

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{3.1.28}$$

于是，便有

$$\delta S = -\int_0^\tau \left[\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{3.1.29}$$

因为广义虚位移 δq_k 是任意的，所以(3.1.29)式恒成立的充分必要条件是

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{3.1.30}$$

而(3.1.28)式和(3.1.30)式构成了“Hamilton 正则方程”.

但是，在这种推导所得的结果中，没有(3.1.22)式的第一式. 这不能不说是一个问题；其中所涉及的可能不光光是由于应用等时变分条件的缘故.

有些人云亦云的教科书上没有(3.1.28)式和(3.1.29)式的分析，直接由(3.1.27)式“得到”“Hamilton 正则方程”，并自以为是美其名曰“相空间中的Hamilton原理”；这是对物理命题理解上的错误. 吴大猷先生的意见是对的.

从比较中可以看出，第一种推导最直接，最干净利落.

3. 用 Lagrangian 表示 Hamiltonian 和用 Hamiltonian 表示 Lagrangian

将(3.1.13)式的第三式(也就是广义动量的定义式)和第四式代入“Legendre 变换”(3.1.12)式，可以得到

$$\begin{cases} H = \dot{q}_k p_k - L = \dot{q}_k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \\ L = p_k \dot{q}_k - H = p_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} - H \end{cases} \tag{3.1.31}$$

前一个公式表示用 Lagrangian 表示 Hamiltonian，后一个公式表示用 Hamiltonian 表示 Lagrangian. 所以，无论是先得到 Lagrangian $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ 还是先得到 Hamiltonian $H(q_k, p_k, t)$，总可以通过(3.1.31)式得到另一个. 需要注意的只是必须将其中的自变量化成 Hamiltonian $H(q_k, p_k, t)$ 或 Lagrangian $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ 所许可的形式.

类似于(3.1.31)式的公式在热力学中也有对应，可参阅本书附录中的【例 C1】. 由于这个缘故，可将(3.1.31)式称为“Gibbs-Helmholtz 型方程”.

三、由 Hamilton 正则方程推导 Lagrange 方程

当然，也可以将上述推导 Hamilton 正则方程的过程颠倒过来，用来推导 Lagrange方程.

由(3.1.13)式的第二、第三两个式子：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = -\dfrac{\partial L}{\partial q_k} \\ p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \end{cases} \tag{3.1.32}$$

再代入正则方程(3.1.30)式，就有

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

也就是 Lagrange 方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{3.1.33}$$

从而可得到结论：无论是先有 Lagrange 方程还是先有 Hamilton 正则方程，总可以通过“Legendre 变换”(3.1.12)式得到另一个.

四、关于 Hamilton 正则方程的讨论

(1) 通过“Legendre 变换”，可以将 Lagrangian 变换成 Hamiltonian，而且反过来也行.

(2) 通过“Legendre 变换”，可以将 Lagrange 方程变换成 Hamilton 正则方程，而且反过来也行.

(3) Hamilton 正则方程与 Lagrange 方程没有本质上的区别，这主要是指：①它们都是用能量来表示的；②它们均不含约束反力；③它们都是用来解决系统的动力学问题的.

(4) Hamilton 正则方程是由 $2m$ 个一阶方程组成的微分方程组，而 Lagrange 方程则是由 m 个二阶方程组成的微分方程组；因此各有优缺点.

(5) 求解 Hamilton 正则方程的一般步骤是：①先建立合适的坐标系，根据约束条件写出问题的 Lagrangian；②再由“Legendre 变换”写出问题的广义动量，进而将 Lagrangian 变换成 Hamiltonian；③代入 Hamilton 正则方程从而得到运动微分方程，最后解这些运动微分方程. 从这一求解步骤中可以看出，写对问题的 Lagrangian 是最关键的；另外，将问题的 Lagrangian 变换成 Hamiltonian 也极其重要. 正因为如此，Lagrangian 相对来说好写一些，而 Hamiltonian 相对来说较为难写，尤其是在多自由度、存在能量“交叉项”的问题中. 所以，直接通过求解 Hamilton 正则方程来处理日常力学问题的实例不是太多. 重要的是它在理论上的意义.

(6) 与在 Lagrange 力学中一样，Hamilton 正则方程对所谓“齐次问题”也不适用(“齐次问题”的 Hamiltonian 是 Dirac 型的(3.8.40)式，将它代入(3.1.31)式后得到的 Lagrangian 为零).

(7) Hamilton 正则方程同样适合于讨论相对论粒子的动力学问题(注意在动力学中,相对速度 β_r 是变量).

(8) Hamilton 正则方程无论是对"Lagrange 描述"的问题,还是对"Euler 描述"的问题,同样适用. 对 Hamilton 正则方程稍作变化,就能用来讨论"场"或"连续体系"的问题.

(9) 在 Hamilton 正则方程中,正则变量是 p_k 和 $q_k(k=1,\cdots,m)$;由 p_k 和 q_k 组成的空间被称为"相空间". 一个粒子所在的"相空间"是"μ 空间",而多粒子所在的"相空间"是"Γ 空间". 所以,Hamiltonian 是描述于"相空间"中的.

(10) 因为 Hamiltonian $H=H(p_k,q_k,t)$,所以在 Hamilton 力学中,p_k 是独立于 q_k 的自变量.

【例 3.2】 已知:质量为 m 的质点在有心力场中运动;有心力场的势能函数为 $V(r)$.

求:(1) 平面极坐标(r,θ)下的 Hamiltonian;

(2) 球坐标(r,θ,φ)下的 Hamiltonian.

解:(1) 平面极坐标(r,θ)下的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$$

由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$\begin{cases} p_r=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \\ p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \end{cases}$$

将上式反解,有

$$\begin{cases} \dot{r}=\dfrac{p_r}{m} \\ \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{mr^2} \end{cases}$$

于是,质点的 Hamiltonian 是

$$H=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta-L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)$$

$$=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+V(r)$$

(2) 球坐标(r,θ,φ)下的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-V(r)$$

由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$\begin{cases} p_r=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \\ p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \end{cases}$$

将上式反解，有

$$\begin{cases}\dot{r}=\dfrac{p_r}{m}\\ \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{mr^2}\\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\end{cases}$$

于是，质点的 Hamiltonian 是

$$\begin{aligned}H&=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta+\dot{\varphi}p_\varphi-L\\&=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+V(r)\\&=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+V(r)\end{aligned}$$

【例 3.3】 已知：(参阅【例 2.49】)粒子在以等角速度 ω_k $(k=1,2,3)$ 转动的坐标系中的 Lagrangian为

$$L=\frac{1}{2}mv^2+mv_ke_{kji}\omega_jx_i+\frac{1}{2}m(e_{kji}\omega_jx_i)^2-V$$

求：(1) 粒子的 Hamiltonian；

(2) 正则方程和运动微分方程.

解：(1) 由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial v_k}=m(v_k+e_{kji}\omega_jx_i)$$

注意，其中 $p_k\neq mv_k$. 将上式反解，有

$$v_k=\frac{p_k}{m}-e_{kji}\omega_jx_i$$

于是，粒子的 Hamiltonian 是

$$\begin{aligned}H&=p_kv_k-L=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(e_{kji}\omega_jx_i)^2+V\\&=\frac{1}{2m}p^2-p_ke_{kji}\omega_jx_i+V\end{aligned}$$

(2) 正则方程为

$$\begin{cases}v_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}=\dfrac{p_k}{m}-e_{kji}\omega_jx_i\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial x_k}=e_{kji}p_j\omega_i-\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\end{cases}$$

可以发现，其中第一个正则方程正是前面得到过的等式. 所以，第二个正则方程才是重要的. 将广义动量的表达式代入这第二个正则方程，并考虑到

$$\begin{cases}F_k=-\dfrac{\partial V}{\partial x_k}\\ \dot{v}_k=a_k+e_{kji}\omega_jv_i\end{cases}$$

最后有

$$ma_k = F_k - me_{kji}\omega_j e_{imn}\omega_m x_n - 2me_{kji}\omega_j v_i$$

其中,等号右边最末一项就是"Coriolis 力"(G. G. Coriolis, 1792～1843). "Coriolis 力"是"几何力".

【例 3.4】 已知:(参阅(2.7.14)式)带电粒子在电磁场中的 Lagrangian 为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\left(\phi - \frac{1}{c}v_k A_k\right)$$

式中 A_k 为电磁场的矢量势,ϕ 为电磁场的标量势.

求:带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian.

解:由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = mv_k + \frac{e}{c}A_k$$

注意,其中 $p_k \neq mv_k$. 将上式反解之,有

$$mv_k = p_k - \frac{e}{c}A_k$$

于是,带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian 为

$$H = v_k\frac{\partial L}{\partial v_k} - L = v_k\left(mv_k + \frac{e}{c}A_k\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2 - e\phi + \frac{e}{c}v_k A_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + e\phi = \frac{1}{2m}(mv_k)^2 + e\phi = \frac{1}{2m}\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right)^2 + e\phi$$

讨论:这个结果在量子力学中有很重要的应用. 只要引入算符

$$\begin{cases}\hat{E} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\\ \hat{p}_k = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial q_k}\end{cases}$$

就可建立对应的量子力学 Schrödinger 方程.

【例 3.5】 已知:(参阅(2.7.15)式)相对论带电粒子在电磁场中的 Lagrangian 为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v_k}{c}\right)^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}v_k A_k\right)$$

式中 A_k 为电磁场的矢量势,ϕ 为电磁场的标量势.

求:相对论带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian.

解:由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = \frac{m v_k}{\sqrt{1-\left(\frac{v_k}{c}\right)^2}} + \frac{e}{c}A_k$$

因而

$$p_k - \frac{e}{c}A_k = \frac{m v_k}{\sqrt{1-\left(\frac{v_k}{c}\right)^2}}$$

由于

$$H = v_k p_k - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_k}{c}\right)^2}} + e\phi$$

即

$$\frac{H - e\phi}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\left(\frac{v_k}{c}\right)^2}}$$

于是，相对论带电粒子在电磁场中的 Hamiltonian 为

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right)^2} + e\phi$$

讨论：这个结果在量子力学中也有很重要的应用. 只要引入算符

$$\begin{cases} \hat{E} = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \\ \hat{p} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_k} \end{cases}$$

就可建立对应的量子力学 Klein-Gordon 方程. 但是要注意，量子力学的 Klein-Gordon 方程必然是“系综诠释”的.

【例 3.6】 已知：在上一章“Lagrange 力学”的【例 2.50】中，说的是“质量为 m 的小环 M，套在半径为 a 的光滑圆圈 O' 上(圆心为 O')并可沿圆圈滑动；而圆圈又在水平面内以角速度 ω 绕圆圈上某一点 O 转动”；当时求得此系统在惯性系中的 Lagrangian 为

$$L = \frac{1}{2}ma^2[\dot{\theta}^2 + 2\omega^2 + 2\omega\dot{\theta} + 2(\omega + \dot{\theta})\omega\cos\theta]$$

求：(1) 系统的 Hamiltonian；

(2) 正则方程和运动微分方程.

解：(1)由 Lagrangian 写出其广义动量为

$$p_\theta = ma^2(\dot{\theta} + \omega + \omega\cos\theta)$$

将上式反解，有

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} - \omega(1 + \cos\theta)$$

于是，系统的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L \\ &= ma^2(\dot{\theta}^2 + \omega\dot{\theta} + \omega\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}ma^2[\dot{\theta}^2 + 2\omega^2 + 2\omega\dot{\theta} + 2(\omega + \dot{\theta})\omega\cos\theta] \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - p_\theta\omega(1 + \cos\theta) - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

(2) 正则方程中的第二个是

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_\theta\omega\sin\theta + ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

将广义动量的表达式代入上式，得运动微分方程为

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

此结果与在【例 2.50】中得到的结果完全一样.

【例 3.7】 已知:弹性系数为 k 的轻质弹簧上端固定,下端悬有一质量为 m 长为 $2l$ 的匀质杆;弹簧只能沿竖直方向运动,而匀质杆只能在竖直平面内摆动;以弹簧处于平衡状态时的位置作为坐标原点,向上方向为 x 轴的正向;设匀质杆与垂直向下直线间的夹角为 θ.

求:(1) 系统的 Hamiltonian;

(2) 正则方程.

解:(1) 首先建立坐标系. 此时匀质杆质心 C 的坐标为

$$(l\sin\theta,-x-l\cos\theta)$$

因此,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(-\dot{x}+l\dot{\theta}\sin\theta)^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kx^2+mg(x+l\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta-\frac{1}{2}kx^2+mgx+mgl\cos\theta\end{aligned}$$

由 Lagrangian 写出系统的广义动量为

$$\begin{cases}p_x=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}-ml\dot{\theta}\sin\theta\\p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta}-ml\dot{x}\sin\theta\end{cases}$$

将上式联立反解,可得

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\frac{4}{3}lp_x+\sin\theta p_\theta}{ml\left(\frac{4}{3}-\sin^2\theta\right)}\\\dot{\theta}=\dfrac{l\sin\theta p_x+p_\theta}{ml\left(\frac{4}{3}-\sin^2\theta\right)}\end{cases}$$

于是,系统的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned}H&=\dot{x}p_x+\dot{\theta}p_\theta-L\\&=\frac{\frac{2}{3}p_x^2-\frac{1}{2l^2}p_\theta^2+\frac{1}{l}p_xp_\theta\sin\theta}{m\left(\frac{4}{3}-\sin^2\theta\right)}+\frac{1}{2}kx^2-mg(x+l\cos\theta)\end{aligned}$$

(2) 正则方程中的第二对是

$$\begin{cases}\dot{p}_x=mg-kx\\\dot{p}_\theta=-\dfrac{\cos\theta}{m\left(\frac{4}{3}-\sin^2\theta\right)}\left[\sin\theta\left(4p_x^2+\frac{1}{l^2}p_\theta^2\right)+\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right)\frac{p_xp_\theta}{l}\right]-mgl\sin\theta\end{cases}$$

可以看出,在多自由度、有能量"交叉项"的问题中,系统的 Hamiltonian 和正则方程都很复杂.

【例 3.8】 已知:(参阅【例 2.51】)两个摆长均为 l,摆锤质量均为 m 的单摆串联在一起,被称为"双摆";"双摆"悬于 O 点,两摆与垂直向下直线之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2;以 θ_1 和 θ_2 为广义坐

标，可知其 Lagrangian 为

$$L = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

求：相应的 Hamiltonian.

解：由 Lagrangian 写出系统的广义动量为

$$\begin{cases} p_{\theta_1} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ p_{\theta_2} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

将上式联立反解，可得

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dfrac{p_{\theta_1} - p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{-p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2p_{\theta_2}}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \end{cases}$$

于是，系统的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}_1\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - L \\ &= ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \\ &= \frac{\frac{1}{2}p_{\theta_1}^2 + p_{\theta_2}^2 - p_{\theta_1}p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} - mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{aligned}$$

本题与上题一样，都是多自由度、有能量“交叉项”的问题，因此系统的 Hamiltonian 较为复杂.

3.2 正则方程的循环积分和能量积分，广义动量和 Hamiltonian 的不确定性

一、正则方程的循环积分

在 Hamilton 力学中，也有正则方程的循环积分，但推导过程要比在 Lagrange 力学中简单.

若 Hamiltonian H 中不含某一广义坐标 q_k（即 q_k 为“可遗坐标”时），则由正则方程

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \tag{3.2.1}$$

立即可得“循环积分”为

$$p_k = \text{const.} \tag{3.2.2}$$

其物理意义就是：若 Hamiltonian H 中某一广义坐标 q_k 是“可遗”的，则与此广义坐标相对应（或“共轭于此广义坐标”）的广义动量 p_k 就是一个守恒量.

二、正则方程的广义能量积分

在 Hamilton 力学中，也有正则方程的广义能量积分，其推导甚至比推导循环积分还简单.

若 Hamiltonian H 中不显含时间 t，即

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{3.2.3}$$

则由对 Hamiltonian H 的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ &= 0 + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

立即可得“广义能量积分”为

$$H = \text{const.} \tag{3.2.5}$$

因为

$$H = \dot{q}_k p_k - L$$

故而，在稳定情况下(3.2.5)式表示“广义能量”或“总能量”守恒，即

$$H = E \tag{3.2.6}$$

而在不稳定情况下(3.2.5)式表示

$$h = T_2 - T_0 + V = \text{const.} \tag{3.2.7}$$

式中，T_2 为动能中广义速度 $\dot{q}_k$ 的二次齐次部分，T_0 为零次齐次部分.

【例 3.9】 已知：长为 l 的轻杆，其两端各固定一质量为 m 的质点；初始时轻杆静止且竖直立于光滑的水平面上，经微扰后自然倒下；建立坐标系，以初始时轻杆与光滑的水平面的接触点为坐标原点，与竖直向上方向垂直的水平面上某方向为 x 轴正向. 设轻杆与水平面之间的夹角为 θ.

求：(1) 系统的 Hamiltonian；

(2) 系统的运动微分方程及倒地时轻杆的角速度.

解：(1) 系统的自由度数为 2，广义坐标为 (x,θ). 轻杆下端点的坐标为 $(x,0)$，上端点的坐标为 $(x-l\cos\theta, l\sin\theta)$. 于是，系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (l\dot{\theta}\cos\theta)^2\right] - mgl\sin\theta \\ &= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta\end{aligned}$$

由 Lagrangian 写出系统的广义动量为

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\dot{\theta}\sin\theta \\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\sin\theta \end{cases}$$

将上式联立反解，可得

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{lp_x - p_\theta\sin\theta}{ml(1+\cos^2\theta)} \\ \dot{\theta} = \dfrac{-lp_x\sin\theta + 2p_\theta}{ml^2(1+\cos^2\theta)} \end{cases}$$

于是，系统的 Hamiltonian 为

$$H = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{l^2p_x^2 - 2lp_xp_\theta\sin\theta + 2p_\theta^2}{2ml^2(1+\cos^2\theta)} + mgl\sin\theta$$

本题与上面两题一样，都是多自由度、有能量“交叉项”的问题，因此系统的 Hamiltonian 较为复杂.

(2) 因为 x 为可遗坐标，立得

$$p_x = 2m\dot{x} + ml\dot{\theta}\sin\theta = \text{const.} = c_1$$

根据初始条件

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

于是，$c_1 = 0$，即

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta$$

另一个运动方程可由系统的广义能量积分得到：

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) + mgl\sin\theta = mgl$$

将 $\dot{x}$ 的表达式代入上式，有

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g(1-\sin\theta)}{l(2-\sin^2\theta)}$$

当杆倒地时 $\theta = 0$，故倒地时轻杆的角速度为

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

【例 3.10】 已知：在 Lagrange 陀螺(转动惯量 $I_2 = I_1$)中，广义坐标为 Euler 角(θ, φ, ψ)；Euler 运动学方程为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

求：(1) Lagrange 陀螺的 Hamiltonian；

(2) 它的 3 个首次积分.

解:(1) 由

$$T=\frac{1}{2}I_1(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

及已知条件,可写出

$$L=\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mgl\cos\theta$$

式中,l 为质心到转动中心(定点)的距离.

由 Lagrangian 写出系统的广义动量为

$$\begin{cases} p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=I_1\dot{\theta} \\ p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\cos\theta \\ p_\psi=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}) \end{cases}$$

将上式联立反解,可得

$$\begin{cases} \dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{I_1} \\ \dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\ \dot{\psi}=\dfrac{p_\psi}{I_3}-\dfrac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \end{cases}$$

于是,系统的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H&=\dot{\theta}p_\theta+\dot{\varphi}p_\varphi+\dot{\psi}p_\psi-L \\ &=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta \end{aligned}$$

(2) 由于系统的 Hamiltonian 中的(φ,ψ)为可遗坐标,所以有两个循环积分

$$\begin{cases} p_\varphi=I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})\cos\theta=\text{const.}=c_1 \\ p_\psi=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\text{const.}=c_2 \end{cases}$$

将第二式代入第一式,又有

$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+c_2I_3\cos\theta=c_1$$

第三个首次积分是广义能量积分:

$$\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(c_1-c_2\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{c_2^2}{2I_3}mgl\cos\theta=\text{const.}=E$$

【例 3.11】 已知:Lotka-Volterra 弱肉强食模型("森林模型")的基本方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a_1u-b_1uv \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-a_2v+b_2vu \end{cases}$$

通过变换

$$\begin{cases} u = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)\exp(-p) \\ v = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)\exp(-q) \end{cases}$$

可将基本方程化为

$$\begin{cases} \dot{p} = -a_1[1-\exp(-q)] \\ \dot{q} = a_2[1-\exp(-p)] \end{cases}$$

求:(1) 此弱肉强食模型系统的 Hamiltonian(用 q 和 $\dot{p}$ 表示);

(2) 此弱肉强食模型系统的 Lagrangian.

解:(1) 因为此问题不显含时间 t,所以 Hamiltonian 的全导数可以写成

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = 0$$

式中已应用了正则方程. 将已知条件代入其中,有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = a_1[1-\exp(-q)]\dot{q} + a_2[1-\exp(-p)]\dot{p} = 0$$

积分上式,得

$$a_1[q+\exp(-q)] + a_2[p+\exp(-p)] = \text{const.} = H$$

(2) 由 Hamiltonian 的表达式,可得

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = a_2[1-\exp(-p)]$$

反解上式,有

$$p = -\ln\left(1-\frac{\dot{q}}{a_2}\right)$$

于是,系统的 Lagrangian 为

$$\begin{aligned} L &= p\frac{\partial H}{\partial p} - H \\ &= -\dot{q}\ln\left(1-\frac{\dot{q}}{a_2}\right) - a_1[q+\exp(-q)] - a_2[p+\exp(-p)] \\ &= (\dot{q}-a_2)\left[1-\ln\left(1-\frac{\dot{q}}{a_2}\right)\right] - a_1[q+\exp(-q)] \end{aligned}$$

至于本题中 q 与 p 的选择是否可以交换的问题,将在 3.6“正则变换”一节中解决.

三、Hamiltonian 的不确定性

在 Lagrange 力学中已知,Lagrangian 精确到(一个广义坐标 q_k 和时间 t 的函数) $f(q_k,t)$ 的全导数 $\frac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t}$;而广义动量精确到(一个广义坐标 q_k 和时间 t 的函数) $f(q_k,t)$ 对广义坐标 q_l 的偏导数 $\frac{\partial f(q_k,t)}{\partial q_l}$. 现在,又可以得到 Hamiltonian 的不确定性.

设分别都满足“Legendre 变换”或“Gibbs-Helmholtz 型方程”的两个

Hamiltonian为 H 和 H'，即

$$\begin{cases} H = \dot{q}_k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \\ H' = \dot{q}_k \dfrac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - L' \end{cases} \tag{3.2.8}$$

因为

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t} = L + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_l \frac{\partial f}{\partial q_l} \tag{3.2.9}$$

所以

$$\begin{aligned} H' &= \dot{q}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - L' = \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(L + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\right) - \left(L + \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_l \frac{\partial f}{\partial q_l}\right) \\ &= \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) + \dot{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial t} - \dot{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} = H - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

换言之，Hamiltonian 精确到(一个广义坐标 q_k 和时间 t 的函数) $f(q_k,t)$ 对时间 t 的偏导数.

这里值得比较的是 Lagrangian 和 Hamiltonian 这两个特征函数的不确定性. 总结一下，是

$$\begin{cases} L' = L + \dfrac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t} \\ H' = H - \dfrac{\partial f(q_k,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{3.2.11}$$

其中，Lagrangian 的不确定性与 $f(q_k,t)$ 对时间 t 的全导数有关，而 Hamiltonian 的不确定性则与 $f(q_k,t)$ 对时间 t 的偏导数有关，并且二者差一个负号. 在本书的 3.8 节中还要出现 Lagrangian 与“Hamilton 作用函数”$S(q_k,t)$ 之间的关系，以及 Hamiltonian 与“Hamilton 作用函数”$S(q_k,t)$ 之间的关系；这两个关系也同样是其中之一与 $S(q_k,t)$ 对时间 t 的全导数有关，另一个与 $S(q_k,t)$ 对时间 t 的偏导数有关，并且二者也差一个负号.

3.3 Routhian 和 Routh 方程，Binet 方程

一、部分变量的“Legendre 变换”

考虑一个有 m 个变量的函数 $\phi(x_l)(l=1,\cdots,m)$. 取它的全微分，有

$$\mathrm{d}\phi(x_l) = u_l \mathrm{d}x_l \quad (l = 1,\cdots,m) \tag{3.3.1}$$

式中，

$$u_l = \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \quad (l = 1,\cdots,m) \tag{3.3.2}$$

与先前不同的是，现在只将 m 个 $x_l(l=1,\cdots,m)$ 中的 s 个 $x_k(k=1,\cdots,s)(s<m)$ 变换为 u_k，其余$(m-s)$个自变量仍保留不变；换言之，“l 序列”是一个长序列而“k 序列”是一个短序列. 此时的“Legendre 变换”不可能是原来的形式，但仍遵守“它的前一项是需要变换的自变量和将要变换成的自变量之间的乘积，然后减去原来的函数”这一原则. 为此，可定义新的 Legendre 变换是

$$\Phi = x_k u_k - \phi \quad (k = 1,\cdots,s) \tag{3.3.3}$$

于是，(3.3.3)式的全微分是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= x_k \mathrm{d}u_k + u_k \mathrm{d}x_k - \mathrm{d}\phi \\ &= x_k \mathrm{d}u_k + u_k \mathrm{d}x_k - u_l \mathrm{d}x_l \quad (l = 1,\cdots,m; k = 1,\cdots,s) \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

由于“l 序列”是一个长序列而“k 序列”是一个短序列，因此 $u_k \mathrm{d}x_k \neq u_l \mathrm{d}x_l$，(3.3.4)式最后一个等号右边的第二、第三两项不能抵消.（附录 A 关于“Einstein 约定”中的一句话“累加或求和取值相同时，‘累加指标’或‘求和指标’换用其他文字不影响其累加或求和”，现在派上用场了！现在的情况是，累加或求和的取值不相同，因而不能换用其他文字指标!）为今之计，是把长序列“l 序列”拆成两个“短序列”：$k=1,\cdots,s$ 和 $\alpha=s+1,\cdots,m$. 从而，(3.3.4)式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= x_k \mathrm{d}u_k + u_k \mathrm{d}x_k - (u_k \mathrm{d}x_k + u_\alpha \mathrm{d}x_\alpha) \\ &= x_k \mathrm{d}u_k - u_\alpha \mathrm{d}x_\alpha \\ &(l = 1,\cdots,m; k = 1,\cdots,s; \alpha = s+1,\cdots,m) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

由(3.3.5)式，得到

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_k} & (k = 1,\cdots,s) \\ u_\alpha = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} & (\alpha = s+1,\cdots,m) \end{cases} \tag{3.3.6}$$

所以，部分变量的“Legendre 变换”由(3.3.3)式和(3.3.6)式组成. 这就是讨论 Routh 方程的理论基础.

二、Routhian 和 Routh 方程

1. Routhian

在一个有 m 个自由度的力学系统中，如果只要求其中的 $s(s<m)$ 个广义速度 $\dot{q}_k(k=1,\cdots,s)$ 通过 s 个关系 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ 变换成广义动量 p_k，而保留其余$(m-s)$个广义

速度 $\dot{q}_\alpha(\alpha=s+1,\cdots,m)$不变，则此时的部分变量的“Legendre 变换”是

$$R=\dot{q}_k p_k-L \tag{3.3.7}$$

式中，$R(q_l,\dot{q}_\alpha,p_k,t)(l=1,\cdots,m;k=1,\cdots,s;\alpha=s+1,\cdots,m)$被称为“Routhian”.

已知，全部变量的“Legendre 变换”是

$$H=\dot{q}_l p_l-L\quad(l=1,\cdots,m) \tag{3.3.8}$$

即

$$H=\dot{q}_k p_k+\dot{q}_\alpha p_\alpha-L\quad(k=1,\cdots,s;\alpha=s+1,\cdots,m) \tag{3.3.9}$$

所以，将(3.3.7)式代入(3.3.9)式后，有

$$R=H-\dot{q}_\alpha p_\alpha\quad(\alpha=s+1,\cdots,m) \tag{3.3.10}$$

2. Routh 方程的推导

(1) 第一种推导方法：直接从“Legendre 变换”出发. 这种方法最为干净利落. 首先注意到，在

$$\begin{cases}R=\dot{q}_k p_k-L & (k=1,\cdots,s)\\ R=H-\dot{q}_\alpha p_\alpha & (\alpha=s+1,\cdots,m)\end{cases} \tag{3.3.11}$$

中，有关物理量是哪些自变量的函数：

$$\begin{cases}L=L(q_l,\dot{q}_l,t) & (l=1,\cdots,m)\\ H=H(q_l,p_l,t) & (k=1,\cdots,s)\\ R=R(q_l,\dot{q}_\alpha,p_k,t) & (\alpha=s+1,\cdots,m)\end{cases} \tag{3.3.12}$$

其次，在(3.3.11)式等号两边，分别对自变量$(t,q_l,\dot{q}_\alpha,p_k)$求导数，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\\ \dfrac{\partial R}{\partial q_l}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_l} & (l=1,\cdots,m)\\ \dfrac{\partial R}{\partial p_k}=\dot{q}_k & (k=1,\cdots,s)\\ \dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}=-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} & (\alpha=s+1,\cdots,m)\end{cases} \tag{3.3.13}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial t}\\ \dfrac{\partial R}{\partial q_l}=\dfrac{\partial H}{\partial q_l} & (l=1,\cdots,m)\\ \dfrac{\partial R}{\partial p_k}=\dfrac{\partial H}{\partial p_k} & (k=1,\cdots,s)\\ \dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}=-p_\alpha & (\alpha=s+1,\cdots,m)\end{cases} \tag{3.3.14}$$

最后，由(3.3.13)式和部分变量的 Lagrange 方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=0 \quad (\alpha=s+1,\cdots,m) \tag{3.3.15}$$

而由(3.3.14)式和部分变量的 Hamilton 正则方程，又有

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial R}{\partial p_k}\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial q_k}\end{cases} \quad (k=1,\cdots,s) \tag{3.3.16}$$

联合方程组(3.3.15)式和(3.3.16)式被称为“Routh 方程”. Routh 方程中将广义速度 $\dot{q}_k$ 变换成广义动量 p_k 的那一部分遵守 Hamilton 正则方程，而没有变换成广义动量的另一部分仍然遵守 Lagrange 方程，同时特征函数又都是“Routhian”.

(2)第二种推导方法：对部分变量的“Legendre 变换”等号两边求全微分，然后代入部分变量的 Lagrange 方程和部分变量的 Hamilton 正则方程.

首先，对(3.3.7)式等号右边取全微分，并代入部分变量的 Lagrange 方程，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R&=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+p_k\mathrm{d}\dot{q}_k-\mathrm{d}L=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+p_k\mathrm{d}\dot{q}_k-\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\mathrm{d}q_l+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\mathrm{d}\dot{q}_l+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\\&=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+p_k\mathrm{d}\dot{q}_k-\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha\right)-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\dot{q}_k\mathrm{d}p_k-\dot{p}_k\mathrm{d}q_k-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\\&(l=1,\cdots,m;k=1,\cdots,s;\alpha=s+1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

其次，对(3.3.7)式等号左边取全微分，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R&=\frac{\partial R}{\partial q_l}\mathrm{d}q_l+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial R}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k+\frac{\partial R}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial R}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha\right)+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial R}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k+\frac{\partial R}{\partial t}\mathrm{d}t\\&(l=1,\cdots,m;k=1,\cdots,s;\alpha=s+1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

比较(3.3.17)和(3.3.18)两式，得到以下关系：

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.3.19}$$

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial R}{\partial p_k}\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial q_k}\end{cases} \quad (k=1,\cdots,s) \tag{3.3.20}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial q_\alpha}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}\\[2ex]\dfrac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}=-\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\end{cases}\quad(\alpha=s+1,\cdots,m)\tag{3.3.21}$$

由(3.3.21)和部分变量的 Lagrange 方程,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=0\quad(\alpha=s+1,\cdots,m)\tag{3.3.22}$$

结果与第一种推导方法得到的完全一样;但是其中少了几个关系式.

(3) 第三种推导方法:由 Hamilton 原理出发,但是其中要注意吴大猷先生所指出的 Hamilton 原理作为物理学命题的关键点.

将(3.3.7)式代入 Hamilton 原理,并注意 $R(q_l,\dot q_\alpha,p_k,t)$ $(l=1,\cdots,m;k=1,\cdots,s;\alpha=s+1,\cdots,m)$是哪些自变量的函数和应用"等时变分"条件,有

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t=\delta\int_0^\tau(\dot q_k p_k-R)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\Big[\dot q_k\delta p_k+p_k\delta\dot q_k-\Big(\frac{\partial R}{\partial q_l}\delta q_l+\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}\delta\dot q_\alpha+\frac{\partial R}{\partial p_k}\delta p_k+\frac{\partial R}{\partial t}\delta t\Big)\Big]\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\Big[\dot q_k\delta p_k+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_k\delta q_k)-\dot p_k\delta q_k-\Big(\frac{\partial R}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)+\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha-\frac{\partial R}{\partial p_k}\delta p_k\Big]\mathrm{d}t\\&=\Big(p_k\delta q_k-\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)\Big|_0^\tau+\int_0^\tau\Big[\Big(\dot q_k-\frac{\partial R}{\partial p_k}\Big)\delta p_k-\Big(\dot p_k+\frac{\partial R}{\partial q_k}\Big)\delta q_k+\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha\Big]\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

由于在端点 $t=0$ 和 $t=\tau$ 处 $\delta q_l=0$,也就是 $\delta q_k=0$ 和 $\delta q_\alpha=0$,所以积分出来的那一项为零. 于是,

$$\delta S=\int_0^\tau\Big[\Big(\dot q_k-\frac{\partial R}{\partial p_k}\Big)\delta p_k-\Big(\dot p_k+\frac{\partial R}{\partial q_k}\Big)\delta q_k+\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}\Big)\delta q_\alpha\Big]\mathrm{d}t=0\tag{3.3.24}$$

按照吴大猷先生的意见,先代入由部分变量的"Legendre 变换"得到的关系式

$$\dot q_k=\frac{\partial R}{\partial p_k}\quad(k=1,\cdots,s)\tag{3.3.25}$$

再根据 δq_l 的任意性,也就是 δq_k 和 δq_α 的任意性,最后有

$$\dot p_k=-\frac{\partial R}{\partial q_k}\quad(k=1,\cdots,s)\tag{3.3.26}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=0\quad(\alpha=s+1,\cdots,m)\tag{3.3.27}$$

从整个第三种推导方法中可以看出,吴大猷先生的意见完全正确:有一个理由

是，如果令(3.3.24)式中各微分量前的系数等于零将是不对称的，因为在这个表达式中广义坐标空间是 m 维的而广义动量空间是 s 维的.

3 种推导方法中，以第一种推导方法为优.

3. 关于“Routh 方程”的讨论

(1) 由部分变量的“Legendre 变换”和部分变量的 Hamilton 正则方程，可以得到两组变换关系(即“Gibbs-Helmholtz 型方程”)：

$$\begin{cases} R=\dot{q}_k\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L & (k=1,\cdots,s) \\ R=H-p_\alpha\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} & (\alpha=s+1,\cdots,m) \end{cases} \tag{3.3.28}$$

和

$$\begin{cases} L=p_k\dfrac{\partial R}{\partial p_k}-R & (k=1,\cdots,s) \\ H=R-\dot{q}_\alpha\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} & (\alpha=s+1,\cdots,m) \end{cases} \tag{3.3.29}$$

从这一意义上来说，Routhian R 与 Lagrangian L、Hamiltonian H 一样，都是力学系统的特征函数.

(2) Routh 方程目前首选的应用就是利用循环积分来减少 Lagrange 方程中的广义坐标的数目，而重新写出的(减少了广义坐标数目的)Lagrangian 仍旧满足 Lagrange方程. 众所周知，将循环积分直接代入 Lagrangian 所得到的“东西”是不满足 Lagrange 方程的；它什么都不是(参阅 2.5 节). 但是，利用 Routh 方程却能得到正确的结果. 原因是，本来的 Lagrange 方程有 m 个方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}-\frac{\partial L}{\partial q_l}=0 \quad (l=1,\cdots,m)$$

而现在 Routhian R 所满足的 Lagrange 方程只有$(m-s)$个：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=0 \quad (\alpha=s+1,\cdots,m)$$

因此，具体的做法是：取“可遗坐标”为满足正则方程的 q_k(而要完成这一步骤，只要取部分变量的“Legendre 变换”$R=\dot{q}_k p_k-L$ 就可以了)：

$$\begin{cases} \dot{q}_k=\dfrac{\partial R}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial q_k} \end{cases} \qquad (k=1,\cdots,s)$$

于是，$p_k=\text{const.}=\alpha_k$；而 $R=R(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\alpha_k,t)$，它的自变量中将不再出现广义动量 p_k. 换言之，s 个“可遗坐标”已从方程中完全消失了. 正是利用了这一点，可以用来达到“利用循环积分减少 Lagrange 方程中的广义坐标的数目”的目的.

(3) 利用(3. 3. 29)式的第二式,可以改写原来的 Hamiltonian. 改写后的Hamiltonian被称为"循环 Hamiltonian",而由"循环 Hamiltonian"得到的正则方程被称为"循环正则方程". 因为"循环 Hamiltonian"中的广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 只有$(m-s)$个,所以"循环正则方程"的数目也只有$(m-s)$个.

三、Binet 方程

Binet 方程的导出可视为 Routhian 和 Routh 方程的一个特殊应用.

在二维的轴对称问题中,Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r) \tag{3.3.30}$$

因为其中 θ 为"可遗坐标",故

$$mr^2\dot{\theta}=\text{const.}=J_0 \tag{3.3.31}$$

于是,Routhian 可写成

$$R=\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-L=-\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J_0^2}{2mr^2}+V(r) \tag{3.3.32}$$

必须立即指出,三维中心对称问题的 Routhian 与(3. 3. 32)式完全一样. (在三维中心对称问题中,可将 $\sqrt{\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}$ 视为一个"广义速度";而且实际上对所有 $\dot{\theta}=$const. 的轴对称问题来说,都是平面问题.)因而(3. 3. 32)式的 Routhian 适用于任何轴对称问题(不管是二维的还是三维的).

用 Binet 方法,设广义坐标为

$$q=\frac{1}{r} \tag{3.3.33}$$

从而有

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{J_0}{m}q^2\\[2ex]\dot{r}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\dot{\theta}}{q^2}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{J_0}{m}\left(\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}\right)\end{cases} \tag{3.3.34}$$

所以,Routhian(3. 3. 32)式可被改写成

$$R=-\frac{J_0^2}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}\right)^2-q^2\right]+V\left(\frac{1}{q}\right) \tag{3.3.35}$$

最后,将 Routhian(3. 3. 35)式代入 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial R}{\partial\left(\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}\right)}-\frac{\partial R}{\partial q}=0 \tag{3.3.36}$$

得到 Binet 方程

$$\frac{J_0^2}{m}q^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}\theta^2}\right)+q\right]=\frac{\partial V(q)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}=-F_r(q) \tag{3.3.37}$$

可以看出，当 $F_r\propto r^{-2}$ 或 $F_r\propto r^{-3}$ 时（也就是 $F_r\propto q^2$ 或 $F_r\propto q^3$ 时），Binet 方程(3.3.37)式是线性的；而在行星轨道问题和 Rutherford 散射问题中，确实有 $F_r\propto r^{-2}$ 即$F_r\propto q^2$. 因此在这两类问题中，用得着 Binet 方程.

【例 3.12】 已知：在【例 3.10】中，Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mgl\cos\theta$$

求：(1) Routhian；

(2) 关于广义坐标 θ 的运动微分方程；

(3) 系统的循环 Hamiltonian.

解：(1) 由于系统中的(φ,ψ)为可遗坐标，所以

$$R=\dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}+\dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}-L=-\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2+\frac{(c_1-c_2\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{c_2^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

式中

$$\begin{cases}I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+c_2I_3\cos\theta=c_1\\ \dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=c_2\end{cases}$$

(2) 因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}=-I_1\dot{\theta}\\ \dfrac{\partial R}{\partial\theta}=-\dfrac{(c_1-c_2\cos\theta)(c_1\cos\theta-c_2)}{I_1\sin^3\theta}-mgl\sin\theta\end{cases}$$

故，代入 Routh 方程后有

$$I_1\ddot{\theta}-\frac{(c_1-c_2\cos\theta)(c_1\cos\theta-c_2)}{I_1\sin^3\theta}-mgl\sin\theta=0$$

(3) 因为

$$p_\theta=\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}=-I_1\dot{\theta}$$

即

$$\dot{\theta}=-\frac{p_\theta}{I_1}$$

所以，系统的循环 Hamiltonian 为

$$H=R-\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(c_1-c_2\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{c_2^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

【例 3.13】 已知：张角为 2α、开口向上的两根细杆交于 O 点，可绕垂直对称轴以角速度 ω 自由转动，且转动惯量为 I；若有质量均为$\frac{m}{2}$、套在两根细杆的两小环自细杆上端离 O 点为 l 处向下

滑落;初始时两小环皆静止.

求:(1) Lagrangian;

(2) Routhian;

(3) 广义能量积分;

(4) 系统的循环 Hamiltonian.

解:(1) 以 O 点为原点、对称轴为向上坐标轴建立坐标系. 设两小环在任一时刻离 O 点的距离为 x,任一时刻的转角为 θ,则两小环在任一时刻的坐标分别为

$$(x\sin\alpha\cos\theta, x\sin\alpha\sin\theta, x\cos\alpha) \text{ 和 } (-x\sin\alpha\cos\theta, x\sin\alpha\sin\theta, x\cos\alpha)$$

因此,Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m[(\dot{x}\sin\alpha\cos\theta-x\dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta)^2+(\dot{x}\sin\alpha\sin\theta+x\dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta)^2+(\dot{x}\cos\alpha)^2]-mgx\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(I+mx^2\sin^2\alpha)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx\cos\alpha$$

(2) 因为 θ 为可遗坐标,故

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=(I+mx^2\sin^2\alpha)\dot{\theta}=\text{const.}=(I+ml^2\sin^2\alpha)\omega=k$$

即

$$\dot{\theta}=\frac{k}{I+mx^2\sin^2\alpha}$$

于是,Routhian 为

$$R=\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-L=-\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{k^2}{I+mx^2\sin^2\alpha}+mgx\cos\alpha$$

(3) 由于 Lagrangian 中不显含时间 t,所以广义能量积分是

$$h=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}(I+mx^2\sin^2\alpha)\dot{\theta}^2+mgx\cos\alpha$$

(4) 因为

$$p=\frac{\partial R}{\partial\dot{x}}=-m\dot{x}$$

即

$$\dot{x}=-\frac{p}{m}$$

所以,系统的循环 Hamiltonian 为

$$H=R-\dot{x}\frac{\partial R}{\partial\dot{x}}=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}\frac{k^2}{I+mx^2\sin^2\alpha}+mgx\cos\alpha$$

讨论:(1) 若不计 I,则有

$$l^2\omega=x^2\dot{\theta}$$

可得到

$$\theta=\omega l^2\int\frac{\mathrm{d}t}{x^2}$$

(2) 若不计 I,则 Routhian 为

$$R=-\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{k^2}{mx^2\sin^2\alpha}+mgx\cos\alpha$$

由于 Routhian 中不显含时间 t，所以广义能量积分是

$$h'=\dot{x}\frac{\partial R}{\partial\dot{x}}-R=-\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}\frac{k^2}{mx^2\sin^2\alpha}-mgx\cos\alpha$$

再令

$$\begin{cases}A=-2g\cos\alpha\\ B=-\dfrac{2h'}{m}\\ C=-\dfrac{k^2}{m^2\sin^2\alpha}\end{cases}$$

便可将广义能量积分化为

$$x^2\dot{x}^2=Ax^3+Bx^2+C$$

从而

$$t=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{Ax^3+Bx^2+C}}$$

【例 3.14】 已知：质量为 M、仰角为 α 的活动斜面置于光滑水平面上并可沿此水平面作无涩滑动；活动斜面的粗糙斜面上另有一质量为 m、半径为 a，且关于对称轴的转动惯量为 I 的均匀圆柱体可沿此粗糙斜面作无滑滚动；以活动斜面的质心横坐标 x 和均匀圆柱体的转角 θ 为广义坐标.

求：(1) 系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2) 系统的 Routhian 和运动微分方程；

(3) 系统的 Hamiltonian 和正则方程.

解：(1) 以过活动斜面质心的横轴上某一点为原点建立坐标系. 均匀圆柱体质心的坐标为 $(-a\theta\cos\alpha+x,-a\theta\sin\alpha)$，因此系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}[(\dot{x}-a\dot{\theta}\cos\alpha)^2+(-a\dot{\theta}\sin\alpha)^2]+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+mga\theta\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}(ma^2+I)\dot{\theta}^2-(ma\cos\alpha)\dot{x}\dot{\theta}+mga\theta\sin\alpha$$

其中，x 为可遗坐标；因而有循环积分：

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(M+m)\dot{x}-ma\dot{\theta}\cos\alpha=\text{const.}=k$$

另一个方程由 Lagrange 方程得到：

$$(ma^2+I)\ddot{\theta}-(ma\cos\alpha)\ddot{x}-mga\sin\alpha=0$$

将循环积分代入上述方程，又可将这两个方程改写为

$$\begin{cases}[(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\ddot{\theta}-(M+m)mga\sin\alpha=0\\ [(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\ddot{x}-(ma)^2g\sin\alpha\cos\alpha=0\end{cases}$$

(2) 由循环积分，有

$$\dot{x}=\frac{k+ma\dot{\theta}\cos\alpha}{M+m}$$

于是，系统的 Routhian 为

$$R=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2-\frac{1}{2}(ma^2+I)\dot{\theta}^2-mga\theta\sin\alpha$$

$$=-\frac{1}{2(M+m)}[(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\dot{\theta}^2+\frac{kma\cos\alpha}{M+m}\dot{\theta}-mga\theta\sin\alpha+\frac{k^2}{2(M+m)}$$

将其代入 Routh 方程，得到

$$[(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\ddot{\theta}-(M+m)mga\sin\alpha=0$$

它与前面得到的一个方程完全相同.

(3) 由

$$\begin{cases}p_x=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}-(ma\cos\alpha)\dot{\theta}\\ p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=(ma^2+I)\dot{\theta}-(ma\cos\alpha)\dot{x}\end{cases}$$

可反解出

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{(ma^2+I)p_x+(ma\cos\alpha)p_\theta}{(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2}\\ \dot{\theta}=\dfrac{(ma\cos\alpha)p_x+(M+m)p_\theta}{(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2}\end{cases}$$

于是，系统的 Hamiltonian 为

$$H=\dot{x}p_x+\dot{\theta}p_\theta-L$$

$$=\frac{(ma^2+I)p_x^2+(M+m)p_\theta^2+2(ma\cos\alpha)p_xp_\theta}{2[(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]}-mga\theta\sin\alpha$$

从而，其中一组正则方程是

$$\begin{cases}[(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\ddot{\theta}-(M+m)mga\sin\alpha=0\\ [(M+m)(ma^2+I)-(ma\cos\alpha)^2]\ddot{x}-(ma)^2g\sin\alpha\cos\alpha=0\end{cases}$$

它与前面得到的完全相同.

【例 3.15】 已知：悬于 O 点的、质量为 m 长为 $2l$ 的匀质杆 OA 可绕 O 点作球面摆动；以 O 点为坐标原点，设匀质杆 OA 与垂直轴之间的夹角为 θ，匀质杆 OA 绕垂直轴的转动角为 φ；初始时，匀质杆 OA 在水平位置(即 $\theta=\frac{\pi}{2}$)，且转动角速度为 ω.

求：(1) 系统的 Lagrangian 和运动微分方程；

(2) 系统的 Routhian；

(3) 系统的循环 Hamiltonian.

解：(1) 建立坐标系. 匀质杆 OA 的质心 C 的坐标为

$$(l\sin\theta\cos\varphi, l\sin\theta\sin\varphi, -l\cos\theta)$$

匀质杆 OA 绕质心 C 转动的转动惯量为

$$\begin{cases}I_\theta=\dfrac{1}{3}ml^2\\ I_\varphi=\dfrac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\end{cases}$$

因而，系统的 Lagrangian 是

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^C)^2+(\dot{x}_2^C)^2+(\dot{x}_3^C)^2]+\frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2-V(\theta,\varphi)$$

$$=\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+mgl\cos\theta$$

其中 φ 为可遗坐标，因此

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{const.}=\frac{4}{3}ml^2\omega$$

最后一个等号右边代入了初始条件. 故

$$\dot{\varphi}=\frac{\omega}{\sin^2\theta}$$

即

$$\varphi=\int\frac{\omega}{\sin^2\theta}\mathrm{d}t$$

另一个关于 θ 的运动微分方程由 Lagrange 方程得到：

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta}-\frac{4}{3}l\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+g\sin\theta=0$$

若将 $\dot{\varphi}=\frac{\omega}{\sin^2\theta}$ 代入上式，便有

$$\left(\frac{4}{3}\sin^3\theta\right)\ddot{\theta}-\frac{4}{3}\omega^2\cos\theta+\frac{g}{l}\sin^4\theta=0$$

(2) 由于 φ 为可遗坐标，所以 Routhian 是

$$R=\dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-L=-\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta-mgl\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{3k^2}{4ml^2\sin^2\theta}\right)-mgl\cos\theta$$

(3) 因为

$$p_\theta=\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}=-\frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}$$

即

$$\dot{\theta}=-\frac{3p_\theta}{4ml^2}$$

所以，系统的循环 Hamiltonian 为

$$H=R-\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3p_\theta^2}{8ml^2}+\frac{3k^2}{8ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta$$

讨论：由于在 Routhian 不显含时间 t，故可得 Routh 方程的广义能量积分为

$$h=\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}-R=-\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{3}{8}\frac{k^2}{ml^2\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$$

若设

$$\begin{cases} A = -\dfrac{3h}{2ml^2} \\ B = \dfrac{3g}{2l} \\ C = -\dfrac{9k^2}{16(ml^2)^2} \end{cases}$$

则广义能量积分化为

$$\dot{\theta}^2 \sin^2\theta = A\sin^2\theta + B\sin^2\theta\cos\theta + C$$

于是,有

$$t = \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{A\sin^2\theta + B\sin^2\theta\cos\theta + C}} \mathrm{d}\theta$$

【例 3.16】 已知:质量为 m 的质点在平面中心势场 $V(r)$ 中运动.

求:(1) 系统的 Routhian 和运动方程;

(2) 系统的循环 Hamiltonian.

解:(1) 系统的 Lagrangian 是

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

其中 θ 为可遗坐标,即

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} = J_0$$

于是,Routhian 是

$$R = \dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - L = -\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r)$$

从而由 Routh 方程得到

$$m\ddot{r} - \frac{J_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

(2) 因为

$$p_r = \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r}$$

即

$$\dot{r} = -\frac{p_r}{m}$$

所以,系统的循环 Hamiltonian 为

$$H = R - \dot{r}\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{J_0^2}{2mr^2} + V(r)$$

讨论:以上运动方程与直接由 Lagrangian $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$ 得到的运动方程完全相同,因而是正确的结果. 但如果将 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const.} = J_0$ 代入 Lagrangian,然后再代入 Lagrange方程,最后得到的是 $m\ddot{r} + \frac{J_0^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$,与正确的结果有所不同(等号左边第二项差一个

"负号"),它什么都不是.

3.4 广义经典力学的 Hamilton 正则方程

一、广义经典力学的 Legendre 变换

广义经典力学是 K. G. J. Jacobi(1804～1851)和 M. V. Ostrogradsky(1801～1862)在 1848～1858 年间发展起来的. 在前一章"Lagrange 力学"中,得到广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.4.1}$$

由(3.4.1)式,可求得其广义能量积分为

$$H=\ddot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}-\dot{q}_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-L \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.4.2}$$

这个广义能量积分也是"Gibbs-Helmholtz 型方程";它也可以被改造成"Legendre 变换".

为此,可令

$$\begin{cases}q_k'=\dot{q}_k\\ \dot{q}_k'=\ddot{q}_k\\ p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dot{p}_k'\\ p_k'=\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k'}\end{cases} \tag{3.4.3}$$

式中,p_k 和 p_k'的表达式的最后一个等号,是根据 $\dot{q}'=\ddot{q}_k$ 也就是 $q_k'=\dot{q}_k$ 写出来的. 于是由(3.4.3)式,广义能量积分(3.4.2)式可以被改写为

$$H=\dot{q}_k'p_k'+\dot{q}_kp_k-L \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.4.4}$$

式中,L 是广义经典力学的 Lagrangian,H 是广义经典力学的 Hamiltonian:

$$\begin{cases}L=L(t,q_k,q_k'=\dot{q}_k,\dot{q}_k')\\ H=H(t,q_k,q_k'=\dot{q}_k,p_k,p_k')\end{cases} \tag{3.4.5}$$

从下面的证明过程可以看出,(3.4.3)式的安排是完全合理的,完全正确的.

二、广义经典力学的 Hamilton 正则方程

(1) 第一种推导方法:直接从“Legendre 变换”出发. 这种方法同样最为干净利落.

首先注意到(3.4.5)式中的各自变量是些什么量,尤其要注意 $q_k'=\dot{q}_k$ 这个关系式. 其次,在等式(3.4.4)两边分别对$(t,q_k,\dot{q}_k,\dot{q}_k',p_k,p_k')$求偏导数,即有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial q_k}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial \dot{q}_k}=\dfrac{\partial H}{\partial q_k'}=p_k-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\[2ex]0=p_k'-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k'}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial p_k'}=\dot{q}_k'\end{cases}\tag{3.4.6}$$

最后,将(3.4.6)式的第二式代入广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程(3.4.1)式,并利用(3.4.3)式中的 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \ddot{q}_k}$,得到

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\tag{3.4.7}$$

另外,由(3.4.6)式的第三式$\dfrac{\partial H}{\partial q_k'}=p_k-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$和(3.4.3)式中的 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\dot{p}_k'$,又可得

$$\dot{p}_k'=-\frac{\partial H}{\partial q_k'}\tag{3.4.8}$$

于是,(3.4.7)式,(3.4.8)式和(3.4.6)式中的最末两式,组成了两对 Hamilton 正则方程:

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\\[2ex]\dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}\dot{q}_k'=\dfrac{\partial H}{\partial p_k'}\\[2ex]\dot{p}_k'=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k'}\end{cases}\tag{3.4.9}$$

(2) 第二种推导方法:对“Legendre 变换”(3.4.4)式等号两边求全微分,然后代入 Euler-Lagrange 方程(3.4.1)式和(3.4.3)式中的有关定义式. 实际上,对(3.4.4)式等号左边求全微分,有

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial H}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial H}{\partial q_k'}\mathrm{d}q_k'+\frac{\partial H}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k+\frac{\partial H}{\partial p_k'}\mathrm{d}p_k' \tag{3.4.10}$$

而对(3.4.4)式等号右边求全微分则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H=&\dot{q}_k'\mathrm{d}p_k'+p_k'\mathrm{d}\dot{q}_k'+\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+p_k\mathrm{d}\dot{q}_k-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathrm{d}\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k'}\mathrm{d}\dot{q}_k'\right)\\=&-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t-\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+\left(p_k-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\mathrm{d}\dot{q}_k+\left(p_k'-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k'}\right)\mathrm{d}\dot{q}_k'+\dot{q}_k'\mathrm{d}p_k'\end{aligned}$$

在上式中代入(3.4.3)式里关于 p_k' 的定义式，从而等号右边第五项为零；此外将 $q_k'=\dot{q}_k$ 这个关系式代入等号右边第四项的微分量；于是得到

$$\mathrm{d}H=-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t-\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+\dot{q}_k\mathrm{d}p_k+\left(p_k-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\mathrm{d}q_k'+\dot{q}_k'\mathrm{d}p_k' \tag{3.4.11}$$

比较(3.4.10)式和(3.4.11)式各微分量前的系数，可得 5 个关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial q_k}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_k}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial q_k'}=p_k-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial p_k}=\dot{q}_k\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial p_k'}=\ddot{q}_k=\dot{q}_k'\end{cases} \tag{3.4.12}$$

这 5 个关系式加上已被代入的关于 p_k' 的定义式，正好与(3.4.6)式完全一样. 因此后面的推导也完全一样. 所以，从本质上来说，第二种推导与第一种推导是相同的，只是没有第一种推导更干净利落.

(3) 第三种推导方法：由 Hamilton 原理出发，但是其中同样要注意吴大猷先生所指出的 Hamilton 原理作为物理学命题的关键点.

与前面对其他问题的正则方程的推导相仿，可以写出：

$$\begin{aligned}\delta S=&\delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t=\delta\int_0^\tau(\dot{q}_kp_k+\dot{q}_k'p_k'-H)\mathrm{d}t\\=&\int_0^\tau\left[\left(\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k-\left(\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k+\left(\dot{q}_k'-\frac{\partial H}{\partial p_k'}\right)\delta p_k'-\left(\dot{p}_k'+\frac{\partial H}{\partial q_k'}\right)\delta q_k'\right]\mathrm{d}t\\=&0\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

利用“Legendre 变换”：

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{q}_k{}' = \dfrac{\partial H}{\partial p_k{}'} \end{cases} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.4.14}$$

和广义虚位移 δq_k 和 $\delta q_k{}'$的任意性，就可得到

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{p}_k{}' = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k{}'} \end{cases} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.4.15}$$

三、讨论

(1) 可以看出，无论是广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程(3.4.1)式和它的广义能量积分(3.4.2)式，还是对广义经典力学的 Lagrangian 和广义经典力学的 Hamiltonian的各类偏导数，都很有规律；因此对于更高阶广义经典力学问题，亦可进行类似的推广.

(2) 广义经典力学问题，在通常条件下似乎用处不大；这实际上是一种误解. 例如，在将对时间的导数换成对四维时空的全导数的连续体广义经典力学中，这时就可能出现高阶导数(如弹性薄板问题中和某些非线性波动方程中那样)；于是就要用到广义经典力学的各类方程.

3.5 连续体系的 Hamilton 正则方程

在前一章“Lagrange 力学”2.15 节中，曾定义

$$L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}V \tag{3.5.1}$$

式中，$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(t, q_k, \dfrac{\partial q_k}{\partial t}, x_l, \dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)$为“Lagrangian 密度”，$q_k$ 为广义坐标，$\dfrac{\partial q_k}{\partial t} = \dot{q}_k$ 为广义速度，x_l 为连续体系中各质点的平衡位置坐标；$k = 1, \cdots, m$；$l = 1, 2, 3$. “Lagrangian 密度”所满足的“Euler-Lagrange 方程”是

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, m; l = 1, 2, 3) \tag{3.5.2}$$

若定义

$$x_4 = at \qquad (a \text{ 为任意常速度}) \tag{3.5.3}$$

则方程(3.5.2)式可被改写为

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_\nu}\right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1,\cdots,m;\nu = 1,2,3,4) \tag{3.5.4}$$

而 $\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(q_k, x_\nu, \dfrac{\partial q_k}{\partial x_\nu}\right)$.

一、连续体系的 Hamiltonian 密度和 Hamilton 正则方程

1. 连续体系的广义动量密度和 Hamiltonian 密度

(1) 连续体系的广义动量密度

原来的广义动量定义为

$$p_k = \frac{\partial L(q_k,\dot{q}_k,t)}{\partial \dot{q}_k}$$

现在的连续体系的“广义动量密度”则定义为

$$\pi_k = \frac{\partial \mathscr{L}\left(q_k, x_\nu, \dfrac{\partial q_k}{\partial x_\nu}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.5.5}$$

注意,其中$\dfrac{\partial q_k}{\partial t}=\dot{q}_k$.

(2) 连续体系的 Hamiltonian 密度

原来的 Hamiltonian 定义为

$$H = \dot{q}_k p_k - L = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

现在的连续体系的“Hamiltonian 密度”则定义为

$$\mathscr{H} = \dot{q}_k \pi_k - \mathscr{L} = \left(\frac{\partial q_k}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial t}\right)} - \mathscr{L} \tag{3.5.6}$$

从而可知,“Hamiltonian 密度”$\mathscr{H}=\mathscr{H}\left(q_k,\pi_k,x_\nu,\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)$, $k=1,\cdots,m$; $l=1,2,3$; $\nu=1,2,3,4$.

2. 连续体系的 Hamilton 正则方程

推导连续体系的 Hamilton 正则方程,只采用第一种方法,即直接从“Legendre 变换”出发. 这种方法也同样最为干净利落. 其他两种方法留作读者的作业.

首先,由(3.5.6)式,可以写出:

$$\mathscr{H}\left(q_k,\pi_k,x_\nu,\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)=\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}\right)\pi_k-\mathscr{L}\left(q_k,x_\nu,\frac{\partial q_k}{\partial t},\frac{\partial q_k}{\partial x_l}\right) \tag{3.5.7}$$

其次，对(3.5.7)式两边的动力学独立变量$\left(q_k,x_\nu,\frac{\partial q_k}{\partial t},\frac{\partial q_k}{\partial x_l},\pi_k\right)$分别求偏导数，有下面5个关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k}=-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_\nu}=-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\nu}\\[2ex]0=\pi_k-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial t}\right)}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}=-\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}\\[2ex]\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_k}=\dfrac{\partial q_k}{\partial t}=\dot{q}_k\end{cases} \tag{3.5.8}$$

最后，将(3.5.8)式中的第一，第三和第四式代入“Euler-Lagrange方程”(3.5.2)式，即得

$$\frac{\partial\pi_k}{\partial t}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k}+\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)} \tag{3.5.9}$$

因为

$$\dot{\pi}_k=\frac{\partial\pi_k}{\partial t} \tag{3.5.10}$$

所以(3.5.9)式和(3.5.8)式的第五式二者组成“连续体系的Hamilton正则方程”

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial q_k}{\partial t}=\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_k}\\[2ex]\dot{\pi}_k=\dfrac{\partial\pi_k}{\partial t}=-\left[\dfrac{\partial}{\partial q_k}-\dfrac{\partial}{\partial x_l}\dfrac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)}\right]\mathscr{H}\end{cases} \tag{3.5.11}$$

作为数学技术上的处理，引入“函数微商”的概念：

$$\frac{\delta}{\delta q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l}\right)} \tag{3.5.12}$$

于是，“连续体系的Hamilton正则方程”可写成紧凑和对称的形式：

$$\begin{cases}\dot{q}_k = \dfrac{\partial q_k}{\partial t} = \dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta \pi_k} \\ \dot{\pi}_k = \dfrac{\partial \pi_k}{\partial t} = -\dfrac{\delta \mathscr{H}}{\delta q_k}\end{cases} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.5.13}$$

以上这种推导“连续体系的 Hamilton 正则方程”的方法是最为简明的.

二、连续体系广义经典力学的 Hamilton 正则方程

1. 连续体系广义经典力学的 Hamiltonian 密度

在前一章“Lagrange 力学”中,曾得到连续体系广义经典力学的 Euler-Lagrange 方程为

$$\partial_\mu \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu q_k)}\right] - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu q_k)}\right] + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = 0$$
$$(k = 1, \cdots, m; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{3.5.14}$$

它的广义能量积分是

$$\mathscr{H} = (\partial_\mu \partial_\nu q_k) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu q_k)} - (\partial_\nu q_k)\left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu q_k)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu q_k)}\right] - \mathscr{L}$$
$$(k = 1, \cdots, m; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{3.5.15}$$

这个广义能量积分同样也是“Gibbs-Helmholtz 型方程”;它同样也可以被改造成“Legendre 变换”.

为此,可令

$$\begin{cases}\begin{cases} q_k' = \dfrac{\partial q_k}{\partial t} = \dot{q}_k \\ \dot{q}_k' = \dfrac{\partial^2 q_k}{\partial t^2} = \ddot{q}_k \end{cases} \\ \pi_k = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial t}\right)} - \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 q_k}{\partial t^2}\right)} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} - \dot{\pi}_k' \\ \pi_k' = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 q_k}{\partial t^2}\right)} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k'} \end{cases} \tag{3.5.16}$$

注意,在写出(3.5.16)式时,$\mu, \nu = 4$. 于是,广义能量积分(3.5.15)式可被改写为

$$\mathscr{H} = \left(\frac{\partial q_k}{\partial t}\right)\pi_k + \left(\frac{\partial q_k'}{\partial t}\right)\pi_k' - \mathscr{L} \tag{3.5.17}$$

2. 连续体系广义经典力学的 Hamilton 正则方程

仿照上一节的讨论,注意 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{L}$ 中相应的动力学独立变量是

$$\begin{cases}\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(q_k,q_k'=\dot{q}_k,\dot{q}_k',x_\nu,\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l},\dfrac{\partial^2 q_k}{\partial x_l\partial x_m}\right)\\ \mathscr{H}=\mathscr{H}\left(q_k,q_k'=\dot{q}_k,\pi_k,\pi_k',x_\nu,\dfrac{\partial q_k}{\partial x_l},\dfrac{\partial^2 q_k}{\partial x_l\partial x_m}\right)\end{cases}\tag{3.5.18}$$

式中，$k=1,\cdots,m;\nu=1,2,3,4;l,m=1,2,3.$

于是，当 $\mu,\nu=4$ 时，最终得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_k}{\partial t}=\dfrac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi_k}\\ \dfrac{\partial\pi_k}{\partial t}=-\dfrac{\delta\mathscr{H}}{\delta q_k}\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial q_k'}{\partial t}=\dfrac{\delta\mathscr{H}}{\delta\pi_k'}\\ \dfrac{\partial\pi_k'}{\partial t}=-\dfrac{\delta\mathscr{H}}{\delta q_k'}\end{cases}\quad(k=1,\cdots,m)\tag{3.5.19}$$

【例 3.17】 已知：(1) 自由电磁场的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\quad(\mu,\nu=1,2,3,4)$$

式中“电磁场张量”$F_{\mu\nu}$的定义参阅“附录 B”的(B26)和(B27)式；

(2) 有源电磁场的 Lagrangian 密度为(参阅(2.15.54)式)

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{4\pi}{c}j_\nu A_\nu\quad(\mu,\nu=1,2,3,4)$$

式中 j_ν 为四维电流密度，A_ν 为四维电磁势.

求：相应的 Hamiltonian 密度.

解：(1) 因为广义动量密度为

$$\pi_\nu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\nu}{\partial t}\right)}=-F_{4\nu}$$

所以

$$\mathscr{H}=-F_{4\nu}\dot{A}_\nu-\mathscr{L}=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-(F_{4k}\dot{A}_k+F_{44}\dot{A}_4)$$

由于

$$F_{44}=0$$

及由 $E_k=-\partial_k\varphi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_k}{\partial t}$ $(k=1,2,3)$和 $A_4=i\varphi$ 得到的

$$\dot{A}_k=\frac{\partial A_k}{\partial t}=ic\partial_k A_4-cE_k$$

故

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial t}\right)\pi_\nu-\mathscr{L}=-\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial t}\right)F_{4\nu}+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{2}(B^2-E^2)-F_{4\nu}(F_{4\nu}+\partial_\nu A_4)\\&=-\frac{1}{2}(B^2+E^2)-(iF_{4k}E_k+F_{4k}\partial_k A_4)\\&=\frac{1}{2}(B^2+E^2)+\left(E_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varphi\end{aligned}$$

由于在无源的电磁场中，

$$(\partial_k E_k) = 0$$

因而，最后有

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(B^2 + E^2) + \partial_k(\varphi E_k)$$

(2) 与前面相仿，有

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= -F_{4\nu}\dot{A}_\nu - \mathscr{L} \\ &= -(F_{4k}\dot{A}_k + F_{44}\dot{A}_4) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}j_\nu A_\nu\end{aligned}$$

因为

$$F_{44} = 0 \qquad \text{和} \qquad \begin{cases} j_4 = ic\rho \\ A_4 = i\phi \end{cases}$$

而在有源的电磁场中

$$(\partial_k E_k) = 4\pi\rho$$

所以

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= -(iF_{4k}E_k + F_{4k}\partial_k A_4) + \frac{1}{2}(B^2 - E^2) - \frac{4\pi}{c}(j_k A_k + j_4 A_4) \\ &= \frac{1}{2}(B^2 + E^2) + \partial_k(\varphi E_k) - \frac{4\pi}{c}j_k A_k\end{aligned}$$

讨论：由于 $H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}V$，而积分 $\int \partial_k(\phi E_k)\mathrm{d}V = \oint \phi E \mathrm{d}S_k$ 在全空间为零(用 Gauss 定理)；因而，通常将以上两个结果中等号右边第二项略去，而写成

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(B^2 + E^2) - \frac{4\pi}{c}j_k A_k$$

【例 3.18】 已知：量子力学中(参阅【例 2.70】)

(1) 对应于 Schrödinger 方程的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi - \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*)$$

(2) 对应于 Klein-Gordon 方程的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L} = -\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + m^2\psi^*\psi\right)$$

(3) 对应于 Dirac 方程的 Lagrangian 密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\psi^*\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\gamma_\nu\psi\right) - m\psi^*\psi$$

式中，ψ^* 是 ψ 的复数共轭，$\gamma_\nu(\nu=1,2,3,4)$ 为 Dirac 矩阵：

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

求：相应的 Hamiltonian 密度.

解：(1) 因为

$$\pi^*=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}^*}=\frac{i\hbar}{2}\psi\qquad \pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=-\frac{i\hbar}{2}\psi^*$$

所以

$$\mathscr{H}=\frac{i\hbar}{2}(\psi\dot{\psi}^*-\psi^*\dot{\psi})-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi-V\psi^*\psi+\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\dot{\psi}-\psi\dot{\psi}^*)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi-V\psi^*\psi$$

(2) 将 $\mathscr{L}$ 改写为

$$\mathscr{L}=-\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+m^2\psi^*\psi\right)$$

因为

$$\pi^*=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad \pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

所以

$$\mathscr{H}=\pi^*\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)+\pi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\mathscr{L}$$

$$=\frac{2}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+m^2\psi^*\psi\right)$$

$$=\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+m^2\psi^*\psi$$

(3) 将 $\mathscr{L}$ 改写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\psi^*\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4}\gamma_4\psi+\psi^*\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right)-m\psi^*\psi$$

因为

$$\pi^*=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4}\right)}=\frac{1}{2}\gamma_4\psi\qquad \pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right)}=-\frac{1}{2}\psi^*\gamma_4$$

所以

$$\mathscr{H}=\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4}\right)\pi^*+\pi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right)-\mathscr{L}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\psi^*\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4}\gamma_4\psi\right)+\frac{1}{2}\left(\psi^*\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4}\gamma_4\psi+\psi^*\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right)+m\psi^*\psi$$

$$=\left(\psi^*\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right)+m\psi^*\psi$$

讨论：(1)在对应于 Klein-Gordon 方程的 Hamiltonian 密度中，有 $\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 也就是 π 和 π^* 出

现;但是在对应于 Schrödinger 方程的 Hamiltonian 密度中和对应于 Dirac 方程的 Hamiltonian 密度中,却没有 π 和 π^* 出现.

(2) 对量子力学作如此描述,作如此处理的时候,实际上已假定量子力学可以用"场"的方式或"连续体系"的方式来"诠释". 因此,在现有的量子力学各种诠释中,对"系综诠释"最有利.

3.6 正则变换

一、正则变换的目的和 Hamilton 正则方程的接触变换

1. 正则变换的目的

正则变换的目的是希望找到更多的可遗坐标,以便得到更多的循环积分.

但有无可遗坐标,则与坐标系的选择有关. 例如在有心力场问题中,无论是对 Lagrangian 来说,还是对 Hamiltonian 来说,

$$\begin{cases} L=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r) \\ H=\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{1}{r^2}p_\theta^2\right)+V(r) \end{cases}$$

其中的 θ 都是可遗坐标,因而由

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dfrac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t}=0 \\ \dot{p}_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}=0 \end{cases}$$

总可以得到

$$p_\theta=\text{const.}$$

然而,在直角坐标系中,就不可能一下子得到这个结果.

2. Lagrange 方程的"点变换"和 Hamilton 正则方程的"接触变换"

在 Lagrangian $L=L(q_k,\dot{q}_k,t)$ 中,$(q_k,\dot{q}_k,t)$ 都是动力学独立变量;这也可以从"Lagrange 方程是对哪些自变量求导数的"这方面看出来. 然而,众所周知,$\dot{q}_k=\dfrac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$,因此从"运动学"角度来看,$\dot{q}_k$ 与 q_k 又是有关联的. 由于这个缘故,在 Lagrange 力学中,$\dot{q}_k$ 和 q_k 在"动力学"上是"独立变量"而在"运动学"上是"相关变量".

若对 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.6.1}$$

中的广义坐标作坐标变换

$$q_k^*=q_k^*(q_l,t) \tag{3.6.2}$$

则由于 $\dot{q}_k=\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$，使得广义速度的变换完全类似

$$\dot{q}_k^*=\dot{q}_k^*(\dot{q}_l,t) \tag{3.6.3}$$

于是，Lagrange 方程将保持不变的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k^*}-\frac{\partial L}{\partial q_k^*}=0 \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.6.4}$$

这种变换，被称为 Lagrange 方程的“点变换”.

但是，在 Hamiltonian $H=H(q_k,p_k,t)$ 中，无论是从“动力学”角度来看还是从“运动学”来看，(q_k,p_k,t) 都是独立变量. 尽管广义动量与广义速度之间存在关系 $p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$，然而由于 Lagrangian L 与 $L+\frac{\mathrm{d}f(q_l,t)}{\mathrm{d}t}$ 之间有“不确定性”，所以广义动量 p_k 与 $p_k+\frac{\partial f(q_l,t)}{\partial q_k}$ 之间也有“不确定性”(参阅(2.10.6)式)，即广义动量与广义速度之间的关系并不一一对应. 同时，在本书中曾多次强调，许多情况下 $p_k\neq m\dot{q}_k$.

因此，对 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\end{cases} \quad (k=1,\cdots,m) \tag{3.6.5}$$

作变量代换并保持其形式不变，用“点变换”(3.6.2)式就不合适了. 在这种场合，应该用变换：

$$\begin{cases}q_k^*=q_k^*(q_l,p_l,t)\\ p_k^*=p_k^*(q_l,p_l,t)\end{cases} \quad (k,l=1,\cdots,m) \tag{3.6.6}$$

这种变换，被称为 Hamilton 正则方程“接触变换”.

二、正则变换

所谓“正则变换”，就是既要保留 Hamilton 力学业已取得的一切成果，包括 Hamiltonian 与 Lagrangian 之间的“Legendre 变换”和 Hamilton 正则方程，同时又能增加一些可遗坐标的一种特殊的“接触变换”.

在这里必须首先明确一个概念，即“正则变换”必须在“真实的运动状态”中完成. 在“真实的运动状态”中，描述运动状态的动力学独立变量可以用 (q_l,p_l,t) 来表示，也

可以用(q_k^*, p_k^*, t)来表示;“正则变换”所讨论的就是这两组动力学独立变量之间的变换关系. 换言之,在“非真实的运动状态”中,是无所谓什么“正则变换”的.

既然“正则变换”是在“真实的运动状态”中完成的,那它就必须满足“Hamilton原理”即“主函数(本书 3.8 节中将证明它就是‘作用量’)最小原理”:

$$\begin{cases} \delta S = \delta\int_0^\tau L\mathrm{d}t = 0 & \text{(在真实运动状态中)} \\ \delta S^* = \delta\int_0^\tau L^*\,\mathrm{d}t = 0 & \text{(在真实运动状态中)} \end{cases} \tag{3.6.7}$$

式中,$L=L(q_k,\dot{q}_k,t)$,$L^*=L(q_k^*,\dot{q}_k^*,t)$;至于 S 和 S^* 中的自变量是什么,本书 3.8 节中将有所交待.

由“Hamilton 原理”即“主函数最小原理”,可以得到 Lagrange 方程;将 Hamiltonian与 Lagrangian 之间的“Legendre 变换”代入其中,又可以得到 Hamilton 正则方程. 现在要讨论的是作为“接触变换”特殊情况的“正则变换”,因而必须将 Hamiltonian与 Lagrangian 之间的“Legendre 变换”代入(3.6.7)式之中:

$$\begin{cases} \delta S = \delta\int_0^\tau (\dot{q}_k p_k - H)\mathrm{d}t = \delta\int_0^\tau (p_k\mathrm{d}q_k - H\mathrm{d}t) = 0 & \text{(在真实运动状态中)} \\ \delta S^* = \delta\int_0^\tau (\dot{q}_k^* p_k^* - H^*)\mathrm{d}t = \delta\int_0^\tau (p_k^*\,\mathrm{d}q_k^* - H^*\,\mathrm{d}t) = 0 & \text{(在真实运动状态中)} \end{cases} \tag{3.6.8}$$

式中,$H=H(q_k,p_k,t)$是原来的正则变量,$H^*=H(q_k^*,p_k^*,t)$是新的正则变量.

1. 正则变换的条件:Pfaff 方程

众所周知,在“真实的运动状态”中,“主函数”取极小. 既然是“极小”,就不可能有两个. 因而,不管是用(q_k,p_k,t)表示的“主函数”S,还是用(q_k^*,p_k^*,t)表示的“主函数”S^*,在“真实的运动状态”中是相等的:

$$\int_0^\tau (p_k\mathrm{d}q_k - H\mathrm{d}t) = \int_0^\tau (p_k^*\,\mathrm{d}q_k^* - H^*\,\mathrm{d}t) \quad \text{(在真实运动状态中)} \tag{3.6.9}$$

将(3.6.9)式中的积分上限视为“准静”的(即在具体问题中此端点是固定的,但在理论研究中假设它是可变的),等号两边积分,有

$$p_k\mathrm{d}q_k - p_k^*\,\mathrm{d}q_k^* - (H-H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1 \tag{3.6.10}$$

式中,$\mathrm{d}F_1$为全微分,因为 Hamiltonian 具有不确定性 $H'=H-\dfrac{\partial f}{\partial t}$,以及

$$\int_0^\tau \mathrm{d}F_1 = F_1\big|_0^\tau = \text{const.} \quad (\text{而}\ \delta\int_0^\tau \mathrm{d}F_1 = 0) \tag{3.6.11}$$

实际上,(3.6.10)式也可视为 Lagrangian 所具有的不确定性 $L'=L+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$(即 $L'\mathrm{d}t-L\mathrm{d}t=\mathrm{d}f$)的某种推广,只不过将 L' 换成 L^*,自变量换成用(q_k^*,p_k^*,t)表示罢了.

方程(3.6.10)式是 Pfaff 型的方程,被简称为"Pfaff 方程"(J. F. Pfaff,1765～1825).

可以证明,Pfaff 方程所描述的,正是正则变换. 首先,将 Pfaff 方程等号两边同时除以 $\mathrm{d}t$,有

$$p_k\dot{q}_k-p_k^*\dot{q}_k^*-(H-H^*)=\dot{F}_1 \tag{3.6.12}$$

另外,使(q_k,q_k^*)有任意的变分$(\delta q_k,\delta q_k^*)$;由于等时变分 $\delta t=0$,方程(3.6.10)式在变分形式下又可写成

$$p_k\delta q_k-p_k^*\delta q_k^*=\delta F_1 \tag{3.6.13}$$

在(3.6.12)式和(3.6.13)式中为消去 F_1,可以对(3.6.12)式作变分运算而对(3.6.13)式作全导数运算,将两式相减,利用 δ 与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$之间的互易关系,有

$$\delta(p_k^*\dot{q}_k^*)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_k^*\delta q_k^*)-\delta H^*=\delta(p_k\dot{q}_k)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_k\delta q_k)-\delta H \tag{3.6.14}$$

在(3.6.14)式等号右边应用正则方程和"Legendre 变换",可得

$$\begin{aligned}\delta(p_k\dot{q}_k)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_k\delta q_k)-\delta H&=\dot{q}_k\delta p_k+p_k\delta\dot{q}_k-\dot{p}_k\delta q_k-p_k\delta\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\\&=\left(\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\delta p_k-\left(\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k=0\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

于是,(3.6.14)式等号左边也等于零. 根据与得到(3.6.15)类似的运算,有

$$0=\left(\dot{q}_k^*-\frac{\partial H^*}{\partial p_k^*}\right)\delta p_k^*-\left(\dot{p}_k^*-\frac{\partial H^*}{\partial q_k^*}\right)\delta q_k^* \tag{3.6.16}$$

如果"Legendre 变换"成立,即

$$L^*=p_k^*\dot{q}_k^*-H^* \tag{3.6.17}$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H^*}{\partial t}=-\dfrac{\partial L^*}{\partial t}\\[2ex]\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*}=-\dfrac{\partial L^*}{\partial q_k^*}\\[2ex]0=p_k^*-\dfrac{\partial L^*}{\partial\dot{q}_k^*}\\[2ex]\dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*}=\dot{q}_k^*\end{cases} \tag{3.6.18}$$

于是,(3.6.16)式成为

$$\left(\dot{p}_k^* + \frac{\partial H^*}{\partial q_k^*}\right)\delta q_k^* = 0 \tag{3.6.19}$$

由(3.6.18)式和(3.6.19)式,得到正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} \end{cases} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.6.20}$$

这就证明了,Pfaff 方程所描述的,正是正则变换.

2. 正则变换的母函数

由于(3.6.10)式右边的 $\mathrm{d}F_1$ 为全微分,对照(3.6.10)式左边,因而可知 $F_1 = F_1(q_k, q_k^*, t)$,即

$$p_k \mathrm{d}q_k - p_k^* \mathrm{d}q_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k^*}\mathrm{d}q_k^* + \frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{3.6.21}$$

比较(3.6.21)式左右两端,可以得到正则变换的"变换公式":

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_k} \\ p_k^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \tag{3.6.22}$$

"变换公式"建立了 $F_1 = F_1(q_k, q_k^*, t)$ 与正则力学量和正则函数 H 之间的关系;而且可以看出,正则变换有赖于 $F_1 = F_1(q_k, q_k^*, t)$ 的选择;因此 $F_1 = F_1(q_k, q_k^*, t)$ 被称为正则变换的"母函数". 但必须注意的是,(3.6.22)式中 3 个等式应同时成立.

3. Hamiltonian 中不显含时间变量时的正则变换

当 Hamiltonian 中不显含时间变量 t 时,以上"Pfaff 方程"(3.6.10)式简化为

$$p_k \mathrm{d}q_k - p_k^* \mathrm{d}q_k^* = \mathrm{d}F_1(q_k, q_k^*) \tag{3.6.23}$$

而"变换公式"(3.6.22)式简化为

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_k} \\ p_k^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*} \\ H^* = H \end{cases} \tag{3.6.24}$$

由此可见,在不显含时间变量的问题中,Hamiltonian 是不变的. 何谓"Hamiltonian是不变的"? 就是说,Hamiltonian 的"量值"(或"大小")不变,但描述此 Hamiltonian的力学量已由 (q_k, p_k) 换成了 (q_k^*, p_k^*).

这类不显含时间变量的问题，在物理学中，尤其在作业题中，经常遇到.

三、四类不同形式的正则变换

在推导正则变换 Pfaff 方程时，用到了“主函数”S 的表达式：

$$S=\int_0^\tau (p_k\mathrm{d}q_k - H\mathrm{d}t) \tag{3.6.25}$$

对(3.6.25)式作数学处理(分部积分)，可以写出

$$S=\int_0^\tau [\mathrm{d}(p_kq_k) - q_k\mathrm{d}p_k - H\mathrm{d}t] = (p_kq_k)\,|_0^\tau - \int_0^\tau (q_k\mathrm{d}p_k + H\mathrm{d}t)$$

$$= \text{const.} - \int_0^\tau (q_k\mathrm{d}p_k + H\mathrm{d}t) \tag{3.6.26}$$

而对常数的变分为零，因此“主函数”S 也可写成

$$S = -\int_0^\tau (q_k\mathrm{d}p_k + H\mathrm{d}t) \tag{3.6.27}$$

同理，对 S^* 也能作如此分部积分. 排列组合以后，共有 4 种可能，即有 4 类不同形式的正则变换.

兹将 4 类不同形式的正则变换罗列如下：

1. 第一类正则变换

“Pfaff 方程”是

$$p_k\mathrm{d}q_k - p_k^*\,\mathrm{d}q_k^* - (H-H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1(q_k, q_k^*, t) \tag{3.6.28}$$

“变换公式”是

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_k} \\ p_k^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \tag{3.6.29}$$

2. 第二类正则变换

“Pfaff 方程”是

$$p_k\mathrm{d}q_k + q_k^*\,\mathrm{d}p_k^* - (H-H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_2(q_k, p_k^*, t) \tag{3.6.30}$$

“变换公式”是

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_2}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \tag{3.6.31}$$

3. 第三类正则变换

“Pfaff 方程”是

$$-q_k \mathrm{d}p_k + q_k^* \mathrm{d}p_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_3(p_k, p_k^*, t) \tag{3.6.32}$$

“变换公式”是

$$\begin{cases} q_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_3}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \tag{3.6.33}$$

4. 第四类正则变换

“Pfaff 方程”是

$$-q_k \mathrm{d}p_k - p_k^* \mathrm{d}q_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_4(p_k, q_k^*, t) \tag{3.6.34}$$

“变换公式”是

$$\begin{cases} q_k = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_k} \\ p_k^* = -\dfrac{\partial F_4}{\partial q_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases} \tag{3.6.35}$$

这 4 类正则变换在形式上有很好的规律性，不难记. 兹将 4 类正则变换列表如下(表 3.1)：

表 3.1

	Pfaff 方程	变换公式
第一类正则变换	$p_k \mathrm{d}q_k - p_k^* \mathrm{d}q_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1(q_k, q_k^*, t)$	$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_k} \\ p_k^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$

续表

	Pfaff 方程	变换公式
第二类正则变换	$p_k\mathrm{d}q_k+q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_2(q_k,p_k^*,t)$	$\begin{cases}p_k=\dfrac{\partial F_2}{\partial q_k}\\ q_k^*=\dfrac{\partial F_2}{\partial p_k^*}\\ H^*=H+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}\end{cases}$
第三类正则变换	$-q_k\mathrm{d}p_k+q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_3(p_k,p_k^*,t)$	$\begin{cases}q_k=-\dfrac{\partial F_3}{\partial p_k}\\ q_k^*=\dfrac{\partial F_3}{\partial p_k^*}\\ H^*=H+\dfrac{\partial F_3}{\partial t}\end{cases}$
第四类正则变换	$-q_k\mathrm{d}p_k-p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_4(p_k,q_k^*,t)$	$\begin{cases}q_k=-\dfrac{\partial F_4}{\partial p_k}\\ p_k^*=-\dfrac{\partial F_4}{\partial q_k^*}\\ H^*=H+\dfrac{\partial F_4}{\partial t}\end{cases}$

四、正则变换与热力学第一定律之间的关系

细心的读者已经发现，本书中的第三类正则变换和第四类正则变换，与其他经典力学教科书中的这两个正则变换相比，正好是倒置的. 原因是，这样的编序，更有规律性.

为了说明这一点，可以对比一下热力学第一定律.

1. Pfaff 方程

正则变换的 Pfaff 方程可以改写如下：

$$\begin{cases}\mathrm{d}F_1(q_k^*,q_k,t)=-p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*+p_k\mathrm{d}q_k+(H^*-H)\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}F_2(p_k^*,q_k,t)=q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*+p_k\mathrm{d}q_k+(H^*-H)\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}F_3(p_k^*,p_k,t)=q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*-q_k\mathrm{d}p_k+(H^*-H)\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}F_4(q_k^*,p_k,t)=-p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*-q_k\mathrm{d}p_k+(H^*-H)\mathrm{d}t\end{cases}\tag{3.6.36}$$

而热力学第一定律实际上也是 Pfaff 方程(参阅“附录”(C15)式)

$$\begin{cases}\mathrm{d}U(S,V,n_i)=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V+\mu_i\mathrm{d}n_i\\ \mathrm{d}F(T,V,n_i)=-S\mathrm{d}T-p\mathrm{d}V+\mu_i\mathrm{d}n_i\\ \mathrm{d}G(T,p,n_i)=-S\mathrm{d}T+V\mathrm{d}p+\mu_i\mathrm{d}n_i\\ \mathrm{d}H(S,p,n_i)=T\mathrm{d}S+V\mathrm{d}p+\mu_i\mathrm{d}n_i\end{cases}\tag{3.6.37}$$

其间有很强的可对比性. 可以看出,若将第三类正则变换和第四类正则变换倒置编序,则这种可对比性将遭到破坏. 式中,(U,F,G,H)分别为热力学内能,Helmholtz 自由能,Gibbs 自由能和焓;(T,S,p,V,μ_i,n_i)分别为 Kelvin 温度,熵,压强,容积,各组分的化学势("热力学势"或"热势")和各组分的 mol 数.

2. Legendre 变换

正则变换中的 Legendre 变换可以写成

$$\begin{cases} F_3 = F_4 + q_k^* p_k^* = F_1 + q_k^* p_k^* - q_k p_k = F_2 - q_k p_k \\ F_4 = F_1 - q_k p_k = F_2 - q_k^* p_k^* - q_k p_k = F_3 - q_k^* p_k^* \\ F_1 = F_2 - q_k^* p_k^* = F_3 - q_k^* p_k^* + q_k p_k = F_4 + q_k p_k \\ F_2 = F_3 + q_k p_k = F_4 + q_k^* p_k^* + q_k p_k = F_1 + q_k^* p_k^* \end{cases} \tag{3.6.38}$$

热力学中与之对应的 Legendre 变换是(参见附录(C14)式)

$$\begin{cases} U = F + TS = G + TS - pV = H - pV \\ F = G - pV = H - TS - pV = U - TS \\ G = H - TS = U - TS + pV = F + pV \\ H = U + pV = F + TS + pV = G + TS \end{cases} \tag{3.6.39}$$

这两种不同问题的 Legendre 变换之间的"对仗"也十分"工整". 根据(3.6.38)式,可以方便地由一类正则变换的"母函数"求另一类"母函数";只要知道一个,就可以知道另外三个.

3. H. B. Callen 的"助忆关系"

为了帮助读者记住热力学量之间的复杂关系,H. B. Callen 发明了一张"助忆图"(参阅图 C1). 其规则是:①对圆弧上的 4 个热力学量(U,F,G,H)来说,由于 U 也可写成 E,因而这 4 个热力学量(E,F,G,H)按英文字母顺序正好是顺时针排列;其微分量就是两个相邻热力学参量的全微分. ②正对方的热力学参量必须与此"热力学参量的全微分"相乘. ③"箭头方向"指出时,这一项为正,"箭头方向"指入时,这一项为负.

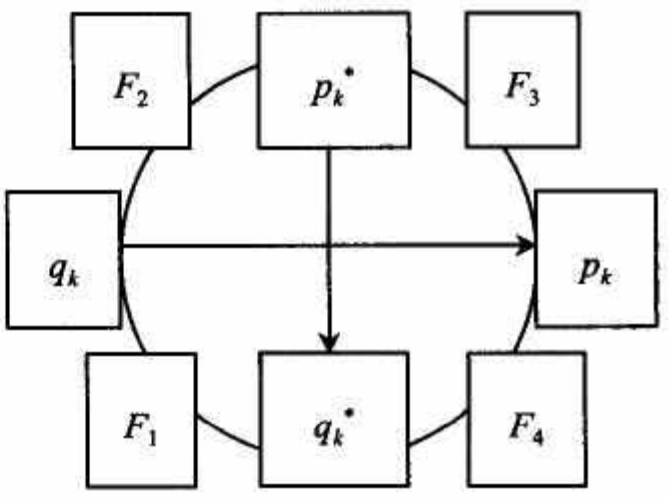


图 3.1

仿照 Callen 的"助忆关系"图,也可以画出 4 类正则变换之间复杂关系的另一种"助忆图"(图 3.1). 其规则与热力学中的"助忆图"规则完全相同.

这些规则可以自行验证.

必须指出的是,尽管热力学与 Hamilton 力学之间有很好的对应关系,但它们之间仍有不少差别;其中最主要的差别在于热力学中,内能 U 和焓 H 不必取极小,另

外熵 S 是递增的而温度 T 是单向的；各组分的化学势（“热力学势”或“热势”）μ_i 更类似于 Routhian 而不太像 Hamiltonian. 具体的讨论在“分析热力学”中；本书不涉及这方面问题.

五、判断正则变换的充分必要条件

变换

$$\begin{cases} q_k^* = q_k^*(q_l, p_l) \\ p_k^* = p_k^*(q_l, p_l) \end{cases} \quad (k,l = 1,\cdots,m) \tag{3.6.40}$$

是正则变换的充分必要条件是 Jacobi 行列式(Jacobian)等于 1，即

$$|J| = \left|\frac{\partial(p_k^*, q_k^*)}{\partial(p_l, q_l)}\right| = 1 \qquad (k,l = 1,\cdots,m) \tag{3.6.41}$$

1. 充分性

因为在(3.6.40)式中，不显含时间因子 t，所以对正则变换来说，必须有

$$H^* = H \tag{3.6.42}$$

将 (q_k^*, p_k^*) 作为中间变量，由于

$$\begin{cases} \dot{q}_l = \dfrac{\partial q_l}{\partial q_k^*}\dot{q}_k^* + \dfrac{\partial q_l}{\partial p_k^*}\dot{p}^* = \dfrac{\partial H}{\partial q_l} \\ \dot{p}_l = \dfrac{\partial p_l}{\partial q_k^*}\dot{q}_k^* + \dfrac{\partial p_l}{\partial p_k^*}\dot{p}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial q_l} \end{cases} \tag{3.6.43}$$

故反解后，有

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{-\dfrac{\partial H}{\partial q_l}\dfrac{\partial q_l}{\partial p_k^*} - \dfrac{\partial H}{\partial p_l}\dfrac{\partial p_l}{\partial p_k^*}}{\dfrac{\partial(p_l, q_l)}{\partial(p_j^*, q_j^*)}} = -\dfrac{\partial H}{\partial p_k^*}\left[\dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(p_l, q_l)}\right] \\ \dot{p}_k^* = \dfrac{\dfrac{\partial H}{\partial q_l}\dfrac{\partial q_l}{\partial q_k^*} + \dfrac{\partial H}{\partial p_l}\dfrac{\partial p_l}{\partial q_k^*}}{\dfrac{\partial(p_l, q_l)}{\partial(p_j^*, q_j^*)}} = \dfrac{\partial H}{\partial q_k^*}\left[\dfrac{\partial(p_j^*, q_j^*)}{\partial(p_l, q_l)}\right] \end{cases} \tag{3.6.44}$$

若变换是正则的，应有

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k^*} \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k^*} \end{cases} \tag{3.6.45}$$

所以，在(3.6.44)式中，必须有

$$\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)}=-1 \tag{3.6.46}$$

从而必须有(3.6.41)式.

2. 必要性

设正则变换是第二类的(其他各类也一样),则

$$\begin{cases} p_l=\dfrac{\partial F_2(q_l,p_k^*)}{\partial q_l} \\ q_k^*=\dfrac{\partial F_2(q_l,p_k^*)}{\partial p_k^*} \end{cases} \tag{3.6.47}$$

从而有

$$\frac{\partial p_l}{\partial p_k^*}=\frac{\partial^2 F_2(q_l,p_k^*)}{\partial p_k^*\partial q_l}=\frac{\partial q_k^*}{\partial q_l} \tag{3.6.48}$$

此(3.6.48)式相当于热力学中的 Maxwell 关系. 另外,在第二类正则变换中,独立变量是(q_l,p_k^*),即

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial q_l}=0 \tag{3.6.49}$$

所以

$$\frac{\partial q_k^*}{\partial q_l}\frac{\partial p_k^*}{\partial p_l}-\frac{\partial q_k^*}{\partial p_l}\frac{\partial p_k^*}{\partial q_l}=\frac{\partial p_l}{\partial p_k^*}\frac{\partial p_k^*}{\partial p_l}-0=1$$

即

$$\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)}=1 \tag{3.6.50}$$

于是,证明了(3.6.41)式.

关于"正则变换的充分必要条件是 Jacobi 行列式等于 1"的证明,在本书"3.10 Poincare 相空间体积不变性"一节中还有.

六、关于正则变换的讨论

(1) 正则变换后的广义坐标 q_k^* 和广义动量 p_k^* 已经没有"纯粹的"空间位形和动量的意义了. 例如,对第一类正则变换 $F_1(q_k,q_k^*)=q_kq_k^*$ 来说,可得

$$\begin{cases} p_k=\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k}=q_k^* \\ p_k^*=-\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*}=-q_k \end{cases} \tag{3.6.51}$$

该变换只是使动量和位形的名称互易而已. 因而在 Hamilton 力学的正则方程中,广义坐标和广义动量只是名称不同而已,在物理意义上并无任何差别. 所以,它们被称

为“一对共轭正则变量”. 实际上,“一对共轭正则变量”只要它们乘积具有作用量(或角动量)的量纲即可. 因为量纲[p]×[q]=[能量]×[时间],所以在这一意义下,能量 E 和时间 t 也是“一对共轭正则变量”.

必须指出的是,这种“正则变换只是使动量和位形的名称互易而已”的说法,只是在经典力学中才有意义,至多是在理论上才有意义. 许多理论物理学家,包括 P. A. M. Dirac在内,都认为这种动量和位形之间的对称性即是量子力学的根据之所在,并且是其优美之处. 但是,从物理学的观点来看却并非如此. 早在 1952 年,L. de Broglie就曾说过:“实际上,在所有能够实际加以测量的物理量中,位置单独作为一方,所有其他可能的变量的集合作为另一方,其间存在很强的非对称性. 一般说来,位置是任何物理学系统中惟一可以加以观测而无需制备的物理量. 你只需记录下,比如说,一列波撞到一堵壁上发生什么就行;利用一块感光板或任何记录仪,你就知道在何处,即在波的哪一点上,粒子是局域化的. ”换言之,在有思想的物理学家的眼中,这种对称性只是理论上的美好愿望.

此外,关于能量 E 和时间 t 这“一对共轭正则变量”,吴大猷先生说过另外一番话:“在古典力学中,t 和 E 形式上是类似于 x 和 p_x 的正则共轭变量;因此按 Lorentz 协变的要求应满足关系

$$\hat{E}\hat{t}-\hat{t}\hat{E}=\frac{\hbar}{i}$$

但是可以证明不存在满足这一关系的 Hermitian 算符(C. Hermite,1822～1901),即算符

$$\hat{t}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial E}$$

不存在(像对 x 存在 $\hat{x}=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p_x}$ 那样). ”

在量子力学中,位形表象下有“动量算符”,动量表象下有“位形算符”

$$\begin{cases}\hat{p}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial q_k} & \text{(位形表象下)}\\ \hat{q}=i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_k} & \text{(动量表象下)}\end{cases}\tag{3.6.52}$$

又有能量算符

$$\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tag{3.6.53}$$

竟然没有“时间算符”,这是较为奇怪的.

总而言之,在真实的物理世界中,情况比较复杂,不能故步自封.

(2) 通常意义下的坐标变换(即“点变换”)只是正则变换的一种特殊情况. 例如,对第二类正则变换 $F_2(q_k,p_k^*,t)=f_k(q_l,t)p_k^*$ 来说,有

$$q_k^* = \frac{\partial F_2}{\partial p_k^*} = f_k(q_l, t) \tag{3.6.54}$$

此即“点变换”;换言之,在这种变换下,坐标的变换与动量不发生关系. 关于这一点,当然是显而易见的.

(3) 正则变换的重要意义在于简化新的 Hamiltonian,使广义坐标尽可能多地转变为可遗坐标. 原则上讲,只要问题是可解的,则一个力学体系的所有广义坐标全都可以转变为可遗坐标.

(4) 正则变换的关键是选择合适的“母函数”. 但正确地选择“母函数”往往很难做到. 要彻底解决正则变换的问题,必须用到“3.8 Hamilton-Jacobi 理论”一节中的知识(参阅 3.9 节).

【例 3.19】 已知:质量为 m 的竖直上抛物体的 Hamiltonian 是

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + mgq$$

正则变换母函数为

$$F_1 = mg\left[\frac{1}{6}g(q^*)^3 + qq^*\right]$$

求:该物体的运动规律.

解:因为 H 中不显含 t,故 $H^* = H$. 正则变换为

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = mgq^* \\ p^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q^*} = -\dfrac{1}{2}mg^2(q^*)^2 - mgq \end{cases}$$

从而

$$q = -\frac{p^*}{mg} - \frac{1}{2}g(q^*)^2$$

于是

$$H^* = \frac{1}{2m}(mgq^*)^2 + mg\left[-\frac{p^*}{mg} - \frac{1}{2}g(q^*)^2\right] = -p^*$$

正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q}^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p^*} = -1 \\ \dot{p}^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q^*} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} q^* = -t + \beta \\ p^* = \alpha \end{cases}$$

式中,(α, β)均为积分常数. 将它们代入变换公式,有

$$q = -\frac{\alpha}{mg} - \frac{1}{2}g(-t+\beta)^2 = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

其中

$$\begin{cases} q_0 = -\dfrac{\alpha}{mg} - \dfrac{1}{2g}\beta^2 \\ \dot{q}_0 = g\beta \end{cases}$$

于是，可以看出，该物体的运动规律是抛物线.

讨论：(1) 由 $H^* = -p^*$ 可知，实际上 $\alpha = -E_0$.

(2) 由 $p = mgq^*$，可得 $\beta = \dfrac{p_0}{mg}$，于是 $g\beta = \dfrac{p_0}{m} = \dot{q}_0$ 确为该物体的初速.

【例 3.20】 已知：质量为 m、角频率分别为(ω_1, ω_2)的平面谐振子的 Hamiltonian 是

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2)$$

正则变换母函数为

$$F_1 = \frac{1}{2}m(\omega_1 q_1^2 \cot q_1^* + \omega_2 q_2^2 \cot q_2^*)$$

求：该系统的运动规律.

解：因为 H 中不显含 t，故 $H^* = H$. 正则变换为

$$\begin{cases} \begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1} = m\omega_1 q_1 \cot q_1^* \\ p_1^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_1^*} = \dfrac{1}{2}m\omega_1 q_1^2 \csc^2 q_1^* \end{cases} \\ \begin{cases} p_2 = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_2} = m\omega_2 q_2 \cot q_2^* \\ p_2^* = -\dfrac{\partial F_1}{\partial q_2^*} = \dfrac{1}{2}m\omega_2 q_2^2 \csc^2 q_2^* \end{cases} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2m}(m^2\omega_1^2 q_1^2 \cot^2 q_1^* + m^2\omega_2^2 q_2^2 \cot^2 q_2^*) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2) \\ &= \omega_1 p_1^* + \omega_2 p_2^* \end{aligned}$$

正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = \omega_k \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

因而 q_k^* 为可遗坐标. 积分后得到

$$\begin{cases} q_k^* = \omega_k t + \beta_k \\ p_k^* = \alpha_k \end{cases} \qquad (k = 1, 2)$$

式中(α_k, β_k)为积分常数. 将它们代入(p_1^*, p_2^*)的变换公式，有

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\dfrac{2\alpha_1}{m\omega_1}}\sin(\omega_1 t + \beta_1) \\ q_2 = \sqrt{\dfrac{2\alpha_2}{m\omega_2}}\sin(\omega_2 t + \beta_2) \end{cases}$$

【例 3.21】 已知:质量为 1、角频率为 ω 的谐振子的 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2q^2)$$

正则变换母函数为

$$F_1=\frac{1}{2}\omega\left[q\sqrt{(q^*)^2-q^2}+(q^*)^2\arcsin\frac{q}{q^*}\right]-\frac{1}{2}\omega^2(q^*)^2t$$

求:新的正则函数 H^*.

解:因为由母函数 F_1 的形式可知,H 中隐含时间 t,故 $H^*=H+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}$. 正则变换为

$$\begin{cases}p=\dfrac{\partial F_1}{\partial q}=\dfrac{1}{2}\omega\left[\sqrt{(q^*)^2-q^2}-\dfrac{q^2}{\sqrt{(q^*)^2-q^2}}+\dfrac{(q^*)^2}{\sqrt{(q^*)^2-q^2}}\right]\\ \quad=\omega\sqrt{(q^*)^2-q^2}\\ p^*=-\dfrac{\partial F_1}{\partial q^*}=-\dfrac{1}{2}\omega\left[\dfrac{qq^*}{\sqrt{(q^*)^2-q^2}}-\dfrac{qq^*}{\sqrt{(q^*)^2-q^2}}+2q^*\arcsin\dfrac{q}{q^*}\right]+\omega^2q^*t\\ \quad=-\omega q^*\arcsin\dfrac{q}{q^*}+\omega^2q^*t\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases}q^*=\sqrt{q^2+\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2}\\ p^*=\omega\sqrt{q^2+\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2}\left[\omega t-\arctan\left(\dfrac{\omega q}{p}\right)\right]\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}q=q^*\sin\left(\omega t-\dfrac{p^*}{\omega q^*}\right)\\ p=\omega q^*\cos\left(\omega t-\dfrac{p^*}{\omega q^*}\right)\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}H^*&=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}\\ &=\frac{1}{2}\left[\omega^2(q^*)^2\cos^2\left(\omega t-\frac{p^*}{\omega q^*}\right)+\omega^2(q^*)^2\sin^2\left(\omega t-\frac{p^*}{\omega q^*}\right)\right]-\frac{1}{2}\omega^2(q^*)^2\\ &=\frac{1}{2}\omega^2(q^*)^2-\frac{1}{2}\omega^2(q^*)^2=0\end{aligned}$$

这种将 Hamiltonian 化为零的正则变换,被称作“化零正则变换”.

【例 3.22】 已知:正则变换为

$$\begin{cases}q^*=q-pt+\dfrac{1}{2}gt^2\\ p^*=p-gt\end{cases}$$

求:(1) 此正则变换的第一类母函数和第二类母函数;

(2) 新老 Hamiltonian 之间的关系.

解:(1) 变换公式为

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F_1}{\partial q}=\dfrac{q-q^*}{t}+\dfrac{1}{2}gt \\ p^*=-\dfrac{\partial F_1}{\partial q^*}=p-gt=\dfrac{q-q^*}{t}-\dfrac{1}{2}gt \end{cases}$$

由此可得

$$F_1=\int\frac{\partial F_1}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial F_1}{\partial q^*}\mathrm{d}q^*=\int\left(\frac{q-q^*}{t}+\frac{1}{2}gt\right)\mathrm{d}q+\left(-\frac{q-q^*}{t}+\frac{1}{2}gt\right)\mathrm{d}q^*$$

$$=\frac{1}{2t}(q-q^*)^2+\frac{1}{2}gt(q+q^*)$$

或由变换公式

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial F_2}{\partial q}=p^*+gt \\ q^*=\dfrac{\partial F_2}{\partial p^*}=q-p^*t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

可得

$$F_2=\int\frac{\partial F_2}{\partial q}\mathrm{d}q+\frac{\partial F_2}{\partial p^*}\mathrm{d}p^*=\int(p^*+gt)\mathrm{d}q+\left(q-p^*t-\frac{1}{2}gt^2\right)\mathrm{d}p^*$$

$$=\left(q-\frac{1}{2}p^*t\right)(p^*+gt)$$

(2) 由变换公式,有

$$\begin{cases} H^*-H=\dfrac{\partial F_1}{\partial t}=-\dfrac{1}{2t^2}(q-q^*)+\dfrac{1}{2}g(q+q^*) \\ H^*-H=\dfrac{\partial F_2}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}p^*(p^*+gt)+g\left(q-\dfrac{1}{2}p^*t\right) \end{cases}$$

讨论:这种求母函数的方法不是普遍行得通的,因为全微分不易求得.

【例 3.23】 已知:有一变换为

$$\begin{cases} q^*=q^n\cos(mp) \\ p^*=q^n\sin(mp) \end{cases}$$

式中,(m,n)为常数.

求:(1) 该变换是正则变换时,(m,n)的值;

(2) 正则变换时的第三类母函数.

解:(1) 因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q^*}{\partial q}=nq^{n-1}\cos(mp) \\ \dfrac{\partial q^*}{\partial p}=-mq^n\sin(mp) \end{cases};\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p^*}{\partial q}=nq^{n-1}\sin(mp) \\ \dfrac{\partial p^*}{\partial p}=mq^n\cos(mp) \end{cases}$$

由 $\left|\dfrac{\partial(p^*,q^*)}{\partial(p,q)}\right|=1$,有

$$\begin{cases} 2n-1=0 \\ mn=1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m=2 \\ n=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(2) 该正则变换可写成

$$\begin{cases} q^* = \sqrt{q}\cos(2p) \\ p^* = \sqrt{q}\sin(2p) \end{cases}$$

算出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q^*}{\partial q} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\cos(2p) \\ \dfrac{\partial q^*}{\partial p} = -2\sqrt{q}\sin(2p) \end{cases}$$

因而

$$\mathrm{d}q^* = \frac{\partial q^*}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial q^*}{\partial p}\mathrm{d}p = \frac{1}{2\sqrt{q}}\cos(2p)\mathrm{d}q - 2\sqrt{q}\sin(2p)\mathrm{d}p$$

将此结果代入 $\mathrm{d}F_3$,有

$$\mathrm{d}F_3 = -q\mathrm{d}p - p^*\mathrm{d}q^* = -q\mathrm{d}p - \sqrt{q}\sin(2p)\left[\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos(2p)\mathrm{d}q - 2\sqrt{q}\sin(2p)\mathrm{d}p\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{d}[(q^*)^2\tan(2p)]$$

于是,正则变换时的第三类母函数为

$$F_3 = -\frac{1}{2}(q^*)^2\tan(2p)$$

【例 3.24】 已知:质量为 m 的粒子在柱对称的势场中运动,对称轴为 x_3 轴;其 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2})$$

作变换

$$\begin{cases} q_1^* = q_1\cos\omega t + q_2\sin\omega t \\ q_2^* = -q_1\sin\omega t + q_2\cos\omega t \\ q_3^* = q^3 \end{cases}$$

求证:该变换是正则变换;

求:该变换的母函数和新的 Hamiltonian.

证:因为 $p_k^* = p_k(k=1,2,3)$,所以

$$J = \frac{\partial(p_k^*, q_1^*, q_2^*, q_3^*)}{\partial(p_k, q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega t & \sin\omega t \\ 0 & 0 & -\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix} = 1$$

于是,该变换是正则变换.

解:由于

$$(q_1^*)^2+(q_2^*)^2=q_1^2+q_2^2,\quad q_3^*=q_3$$

所以

$$(q_1^*)^2+(q_2^*)^2+(q_3^*)^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2$$

另一方面，由于本题中的变换实际上是(3.6.54)式所讨论的“点变换”，因而

$$F_2=f_k(q_l,t)p_k^*=q_k^*p_k$$

在第二个等号右边已代入了已知条件. 于是，

$$F_2=(q_1\cos\omega t+q_2\sin\omega t)p_1+(-q_1\sin\omega t+q_2\cos\omega t)p_2+q_3p_3$$

由此可得

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}=\omega(-q_1\sin\omega t+q_2\cos\omega t)p_1+\omega(-q_1\cos\omega t-q_2\sin\omega t)$$
$$=\omega(q_2^*p_1-q_1^*p_2)$$

从而

$$H^*=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$$
$$=\frac{1}{2m}(p^*)^2+\omega(q_2^*p_1^*-q_1^*p_2^*)+V(\sqrt{(q_1^*)^2+(q_2^*)^2+(q_3^*)^2})$$

【例 3.25】 已知：在变换

$$\begin{cases}q_k^*=a_{kl}q_l\\ p_k^*=b_{kl}p_l\end{cases}$$

中，所有(a_{kl},b_{kl})都是常数；以A_{kl}表示二阶行列式$A=|a_{kl}|$中元素a_{kl}的代数余子式.

求证：对所有(k,l)来说，若$b_{kl}=\frac{a_{kl}}{A}$，则该变换是正则变换；

求：该正则变换的第二类母函数.

证：因为正则变换要求

$$J=\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)}=\begin{vmatrix}b_{kl}&0\\0&a_{kl}\end{vmatrix}=a_{kl}b_{kl}=1$$

所以，$b_{kl}=\frac{a_{kl}}{A}$是满足正则变换要求的充分必要条件.

解：改设

$$\begin{cases}q_k^*=\alpha_{kl}q_l\\ p_k^*=\alpha_{kl}p_l\end{cases}$$

其中，α_{kl}为夹角余弦矩阵，并满足正交性条件$\alpha_{il}\alpha_{kl}=\delta_{ik}$. 因此，

$$\mathrm{d}p_k^*=\alpha_{kl}\mathrm{d}p_l$$

于是

$$\mathrm{d}F_2=p_k\mathrm{d}q_k+q_k^*\mathrm{d}p_k^*=p_k\mathrm{d}q_k+\alpha_{kl}q_l(\alpha_{km}\mathrm{d}p_m)$$
$$=p_k\mathrm{d}q_k+\delta_{lm}q_l\mathrm{d}p_m=p_k\mathrm{d}q_k+q_k\mathrm{d}p_k$$
$$=\mathrm{d}(q_kp_k)$$

因而

$$F_2=q_kp_k=\alpha_{kl}p_l^*q_k$$

3.7 Poisson 括号

Poisson 括号在量子力学中有很重要的应用. 科学史上曾有这么一件事:1925 年夏天,量子力学创始人之一 W. Heisenberg 在英国剑桥大学作了一个题名为"运动学和力学关系的量子论再解释"的学术报告;8 月,他将论文寄到剑桥大学 R. H. Fowler 教授处. Fowler 将 Heisenberg 的论文转交给自己的研究生 P. A. M. Dirac. 10 月,Dirac 在一次乡间散步时,突然想起 Heisenberg 文章中的不可对易关系与经典力学中的 Poisson 括号十分相像,但具体是什么样子已经记不清楚了. 他立刻赶回住所,翻遍所有的书籍和笔记,仍旧查不到 Poisson 括号的确切定义. 不巧那天正是星期天,又是傍晚,图书馆全都闭馆了. Dirac"真是什么也不能干". 他度"时"如年地熬过了那一夜. 第二天一大早他迫不及待地冲进图书馆,终于在一本由 E. T. Whittaker 所著的《论粒子和刚体的分析动力学》(《A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies》, Combridge, 1904)书中找到了 Poisson 括号,并且一切正如自己所想. 在这一基础上,Dirac 创立了量子力学的"符号法". 根据这种类比,只要在本节下文所将讨论的"力学量的运动方程"等号左边第一项乘上一个因子 $i\hbar$,就可以得到"每个学物理的学生都应该知道的" Heisenberg 方程;只要在下文"基本 Poisson 括号"等号右边乘上一个因子 $i\hbar$,就可以得到"量子 Poisson 括号".

回到经典力学. 在经典力学中有正反两类问题. 第一类问题是利用可遗坐标求得循环积分,而要找到更多的可遗坐标,则要应用正则变换的方法;第二类问题与之相反:先有了一个力学量,然后再判断它是否是给定力学体系内的运动积分. 众所周知,给定力学体系的力学性质完全由其 Hamiltonian 决定;因此要判断一个力学量是否是给定力学体系内的运动积分,就要从这一力学量与体系的 Hamiltonian 之间的关系着手. Poisson 括号就是处理这第二类问题最好的工具.

一、Poisson 括号的引入

一个力学量 $f(q_k, p_k, t)$的全导数是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial f}{\partial p_k} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.7.1}$$

将给定力学体系的 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases}\dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k}\end{cases} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.7.2}$$

代入(3.7.1)式,有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.7.3}$$

引入记号

$$[H,f] = \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.7.4}$$

可将力学量 $f(q_k,p_k,t)$的全导数写成

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H,f] \tag{3.7.5}$$

式中,$[H,f]$被称为力学体系的 Hamiltonian $H(q_k,p_k,t)$与力学量 $f(q_k,p_k,t)$之间的"Poisson 括号".

若力学量 $f(q_k,p_k,t)$是运动积分,则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.7.6}$$

亦即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H,f] = 0 \tag{3.7.7}$$

方程(3.7.7)式被称为"力学量 $f(q_k,p_k,t)$的运动方程";换言之,若力学量 $f(q_k,p_k,t)$是力学体系中的守恒量的话,它必然满足方程(3.7.7)式.

如果此力学量又不显含时间 t 的话,方程(3.7.7)式可被简化为

$$[H,f] = 0 \tag{3.7.8}$$

以上方程(3.7.7)式或(3.7.8)式提供了判断一个力学量 $f(q_k,p_k,t)$是否是给定力学体系内的运动积分的便捷方法.

特别值得一提的是,当 $f=H$ 时,显然有

$$[H,H] = 0 \tag{3.7.9}$$

因而,Hamiltonian H 是运动积分的必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{3.7.10}$$

换言之,这个必要条件是:H 不显含时间 t!

将记号(3.7.4)式推广到任意两个力学量 $f(q_k,p_k,t)$和 $g(q_k,p_k,t)$之间,定义

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.7.11}$$

为 $f(q_k,p_k,t)$和 $g(q_k,p_k,t)$之间的“Poisson 括号”.

必须注意的是,在有些教科书中,$[f,g]$写成$[g,f]$;究其原因,是由于等号右边第一项中将对 q_k 求偏导数的那一个因子写在前面还是将对 p_k 求偏导数的那一个因子写在前面的缘故. 只要坚持“始终如一”的原则,最后计算结果是完全一样的;怕只怕“朝三暮四”,就要出现错误. 按照本书$[H,f]$的规定,将等号右边第一项中将对 p_k 求偏导数的那一个因子写在前面.

二、正则方程的 Poisson 括号表示

由于所有的(p,q)都是相互独立的,所以,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_k}{\partial q_l}=\delta_{kl}\\[2ex]\dfrac{\partial q_k}{\partial p_l}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p_k}{\partial q_l}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p_k}{\partial p_l}=\delta_{kl}\end{cases}\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{3.7.12}$$

另外,(p,q)与时间 t 之间也是相互独立的

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_k}{\partial t}=0\\[2ex]\dfrac{\partial p_k}{\partial t}=0\end{cases}\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{3.7.13}$$

但要注意 $\dot{q}_k\neq0,\dot{p}_k\neq0$. 由(3.7.12)式和(3.7.13)式,并利用“Poisson 括号”的定义,可将 Hamilton 正则方程写成完全对称的形式:

$$\begin{cases}\dot{q}_k=[H,q_k]\\ \dot{p}_k=[H,p_k]\end{cases}\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{3.7.14}$$

三、Taylor 展开式的 Poisson 括号表示

若力学量 $f(q_k,p_k)$不显含时间 t,则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[H,f]\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}=\left[H,\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]=[H,[H,f]]\\[2ex]\vdots\end{cases}\tag{3.7.15}$$

于是,力学量 $g(t)$ 的 Taylor 展开式可写成

$$g(t)=g_0+t[H,g]_0+\frac{t^2}{2!}[H,[H,g]]_0+\frac{t^3}{3!}[H,[H,[H,g]]]_0+\cdots \tag{3.7.16}$$

【例 3.26】 已知:物体作上抛运动,其 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2-mgq$$

求:它的运动规律.

解:因为

$$\begin{cases}[H,q]=\dfrac{p}{m}\\ [H,[H,q]]=\dfrac{1}{m}[H,p]=g\\ (\text{高阶括号均为零})\end{cases}$$

所以

$$q(t)=q_0+\frac{p_0}{m}t+\frac{1}{2}gt^2$$

四、Poisson 括号的性质

Poisson 括号的性质即是它的运算规则. 凡今后进行 Poisson 括号的运算,都要应用这些性质. 以下这些性质,前 9 项是显而易见的,就不加证明了.

1. $[c,f]=0$ (其中 $c=\text{const.}$) (3.7.17)

2. $[f,g]=-[g,f]$ (3.7.18)

3. $[-f,g]=-[f,g]$ (3.7.19)

4. $[f,\sum_k g_k]=\sum_k[f,g_k]$ 和 $[\sum_k f_k,g]=\sum_k[f_k,g]$ (3.7.20)

5. $[f_1f_2,g]=f_1[f_2,g]+f_2[f_1,g]$ (3.7.21)

6. $\dfrac{\partial}{\partial t}[f,g]=\left[\dfrac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\dfrac{\partial g}{\partial t}\right]$ (3.7.22)

7. $\begin{cases}\dot q_k=[H,q_k]\\ \dot p_k=[H,p_k]\end{cases}$ 和 $\ddot q=[H,[H,q_k]]\cdots\cdots$ (3.7.23)

$\dot f=[H,f]$ (若 $f=f(q_k,p_k)$) (3.7.24)

8. $\begin{cases}[f,q_k]=\dfrac{\partial f}{\partial p_k}\\ [f,p_k]=-\dfrac{\partial f}{\partial q_k}\end{cases}$ (3.7.25)

9. 基本 Poisson 括号

$$\begin{cases}[q_k,q_l]=0\\ [q_k,p_l]=-\delta_{kl}\\ [p_k,q_l]=\delta_{kl}\\ [p_k,p_l]=0\end{cases} \tag{3.7.26}$$

10. Jacobi 恒等式：

$$[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0 \tag{3.7.27}$$

上式的证明是直截了当的. 将 Poisson 括号的定义(3.7.11)式代入(3.7.27)式等号左边第一项，有

$$[f,[g,h]]=\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_k}+\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_i}\right)+\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_k}+\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_k}$$
$$-\left[\frac{\partial^2 h}{\partial q_i\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_k}+\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)+\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_k}+\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right]$$

然后对(f,g,h) 3 个力学量进行轮换，可得$[g,[h,f]]$和$[h,[f,g]]$；3 项正的与 3 项负的完全相等；相加后正好等于零.

11. Poisson 定理

Poisson 定理包括两方面内容：

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g\right]+\left[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right] \tag{3.7.28}$$

(2) Poisson 定理，即，若力学量 $f(q_k,p_k,t)$和 $g(q_k,p_k,t)$都是运动积分，则它们的 Poisson 括号$[f,g]$也是运动积分.

证明(3.7.28)式要用到性质 6 (3.7.22)式和性质 10 (3.7.27)式. 因为，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\frac{\partial}{\partial t}[f,g]+[H,[f,g]]$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]-[f,[g,H]]-[g,[H,f]]$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f],g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}+[H,g]\right]$$
$$=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g\right]+\left[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]$$

再根据(3.7.28)式，由于力学量 $f(q_k,p_k,t)$和 $g(q_k,p_k,t)$都是运动积分，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=0\end{cases}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=0$$

于是,$[f,g]$也是运动积分.

但是,Poisson 定理在逻辑上是有毛病的. 按照 Poisson 定理的逻辑,如果有两个运动积分就可以得到第三个运动积分,由第一个和第三个运动积分又可得到第四个运动积分,由第二个和第三个运动积分还可得到第五个运动积分……依次类推可以得到无穷多的运动积分. 然而,事实上对有 m 个自由度的力学体系来说,运动积分的总数只有$(2m-1)$个. 因此,Poisson 定理在逻辑上显然是荒唐的. 关于这一点,将在本节末了讨论.

12. Poisson 括号的正则不变性:

$$[f,g]_{p,q}=[f,g]_{p^*,q^*} \tag{3.7.29}$$

首先,将(p,q)作为下标写在 Poisson 括号的右下角,表示(f,g)都是(p_k,q_k)的函数. 所谓"Poisson 括号的正则不变性",指的就是要证明(3.7.29)式.

其次,将 $g(q_k,p_k,t)$以(p_l^*,q_l^*)作为中间变量展开;根据数学上的"链式关系",有

$$\begin{aligned}
[f,g]_{p,q}&=\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\\
&=\frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_l^*}\frac{\partial q_l^*}{\partial q_k}+\frac{\partial g}{\partial p_l^*}\frac{\partial p_l^*}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_k}\left(\frac{\partial g}{\partial q_l^*}\frac{\partial q_l^*}{\partial p_k}+\frac{\partial g}{\partial p_l^*}\frac{\partial p_l^*}{\partial p_k}\right)\\
&=\frac{\partial g}{\partial p_l^*}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial p_l^*}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial p_l^*}{\partial p_k}\right)+\frac{\partial g}{\partial q_l^*}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial q_l^*}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial q_l^*}{\partial p_k}\right)\\
&=\frac{\partial g}{\partial p_l^*}[f,p_l^*]_{p,q}+\frac{\partial g}{\partial q_l^*}[f,q_l^*]_{p,q}
\end{aligned} \tag{3.7.30}$$

在以上第三步运算中,实行了重新组合.

再次,在(3.7.30)式中作两种代换:$(f\to p_k^*,g\to f)$和$(f\to q_k^*,g\to f)$;有

$$\begin{cases}
[p_k^*,f]_{p,q}=\dfrac{\partial f}{\partial p_l^*}[p_k^*,p_l^*]_{p,q}+\dfrac{\partial f}{\partial q_l^*}[p_k^*,q_l^*]_{p,q}\\
[q_k^*,f]_{p,q}=\dfrac{\partial f}{\partial p_l^*}[q_k^*,p_l^*]_{p,q}+\dfrac{\partial f}{\partial q_l^*}[q_k^*,q_l^*]_{p,q}
\end{cases} \tag{3.7.31}$$

在(3.7.31)式中,等号右边有 4 个 Poisson 括号,目前尚不知其为何值;这些是需要计算的! 计算过程中要用到具体的正则变换. 兹以第一类正则变换为例,因为

$$\begin{cases}
p_k=\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k}\\
p_k^*=-\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*}
\end{cases} \tag{3.7.32}$$

所以有“Maxwell关系”：

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_l^*}=-\frac{\partial p_l^*}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \partial q_l^*} \tag{3.7.33}$$

另外，由于在第一类正则变换中 q_k^* 和 q_l 是相互独立的变量，即

$$\frac{\partial q_k^*}{\partial q_l}=0 \tag{3.7.34}$$

由(3.7.33)式和(3.7.34)式，可以计算出

$$\begin{cases}[q_k^*,q_l^*]_{p,q}=0\\ [q_k^*,p_l^*]_{p,q}=-\delta_{kl}\\ [p_k^*,q_l^*]_{p,q}=\delta_{kl}\\ [p_k^*,p_l^*]_{p,q}=0\end{cases} \tag{3.7.35}$$

以上(3.7.35)式中的4个Poisson括号也是“基本Poisson括号”. 实际上这4个Poisson括号也应该放到性质9 (3.7.26)式中去.

第四步，将“基本Poisson括号”(3.7.35)式代入(3.7.31)式，得到

$$\begin{cases}[p_k^*,f]_{p,q}=0+\dfrac{\partial f}{\partial q_l^*}\delta_{kl}=\dfrac{\partial f}{\partial q_k^*}\\ [q_k^*,f]_{p,q}=-\dfrac{\partial f}{\partial p_l^*}\delta_{kl}+0=-\dfrac{\partial f}{\partial p_k^*}\end{cases} \tag{3.7.36}$$

最后，将(3.7.36)式代回(3.7.30)式，就得到

$$[f,g]_{p,q}=\frac{\partial g}{\partial p_l^*}\left(-\frac{\partial f}{\partial q_l^*}\right)+\frac{\partial g}{\partial q_l^*}\left(\frac{\partial f}{\partial p_l^*}\right)=[f,g]_{p^*,q^*} \tag{3.7.37}$$

即，Poisson括号在正则变换$(q_k,p_k)\to(q_k^*,p_k^*)$条件下形式不变. 换言之，Poisson括号是正则不变的.

由于Poisson括号是正则不变的，所以，写在Poisson括号的右下角的下标(p,q)或(p^*,q^*)可以省略.

有了Poisson括号的这12条运算规则，就可以方便地进行Poisson括号的计算.

五、关于Poisson定理的讨论

前面已经提到，事实上对有 m 个自由度的力学体系来说，运动积分的总数只有$(2m-1)$个；因此，Poisson定理在逻辑上显然是荒唐的. 关于这个问题，有两点值得注意.

(1) 在许多情况下，由Poisson定理得到的新的运动积分往往是原有运动积分的线性组合. 举例来说，如果角动量

$$\begin{cases} J_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ J_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3 \end{cases} \tag{3.7.38}$$

是两个运动积分，则由 Poisson 定理

$$[J_1, J_2] = \frac{\partial J_1}{\partial p_k}\frac{\partial J_2}{\partial q_k} - \frac{\partial J_1}{\partial q_k}\frac{\partial J_2}{\partial p_k} = q_2 p_1 - (-q_1)(-p_2) = -J_3$$

也是运动积分. 然而，由于

$$\begin{cases} [J_2, J_3] = -J_1 \\ [J_3, J_1] = -J_2 \\ [J_1, J_2] = -J_3 \end{cases} \tag{3.7.39}$$

所以不可能有第四个运动积分. 所有的运动积分都是这三个运动积分的轮换.

(2) 在另外许多情况下，由 Poisson 定理得到的新的运动积分往往是恒等式. 举例来说，如果系统的 Hamiltonian 是运动积分(已暗中假定它不显含时间 t)，即

$$H = \text{const.} = E$$

若还找到另外一个运动积分

$$\phi(q_k, p_k, t) = \text{const.} = A$$

则由 Poisson 定理，

$$[H, \phi] = B$$

也是运动积分. 由于

$$[H, \phi] = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

所以

$$\phi = -Bt$$

也可以是运动积分. 依次类推，$\left[H, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right], \left[H, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right]$等等都可以是运动积分. 但是，实际上，$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -B = \text{const.}$，$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$……以上所有运动积分都等于零；没有任何实际意义，因而没有提供任何有实际意义的运动积分.

综上所述，可以看出，Poisson 定理并不可靠.

【例 3.27】 已知：定义“Lagrange 括号”为

$$\{u, v\} = \frac{\partial p_k^*}{\partial u}\frac{\partial q_k^*}{\partial v} - \frac{\partial p_k^*}{\partial v}\frac{\partial q_k^*}{\partial u} \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.7.40}$$

式中，(u, v)是(p_k, q_k) $(k=1, \cdots, m)$中的任意两个，或者是任意两个力学量.

求证：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{u, v\} = 0$.

证：因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{u, v\} = \frac{\partial \dot{p}_k^*}{\partial u}\frac{\partial q_k^*}{\partial v} + \frac{\partial p_k^*}{\partial u}\frac{\partial \dot{q}_k^*}{\partial v} - \frac{\partial \dot{p}_k^*}{\partial v}\frac{\partial q_k^*}{\partial u} - \frac{\partial p_k^*}{\partial v}\frac{\partial \dot{q}_k^*}{\partial u}$$

$$=-\frac{\partial q_k^*}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k^*}\right)+\frac{\partial p_k^*}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k^*}\right)+\frac{\partial p_k^*}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k^*}\right)-\frac{\partial p_k^*}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k^*}\right)$$

而

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial u}=\dfrac{\partial H}{\partial q_k^*}\dfrac{\partial q_k^*}{\partial u}+\dfrac{\partial H}{\partial p_k^*}\dfrac{\partial p_k^*}{\partial u}\\[2ex]\dfrac{\partial H}{\partial v}=\dfrac{\partial H}{\partial q_k^*}\dfrac{\partial q_k^*}{\partial v}+\dfrac{\partial H}{\partial p_k^*}\dfrac{\partial p_k^*}{\partial v}\end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{u,v\}=\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 H}{\partial v\partial u}=0$$

讨论:(1) 不能由于本题的结果,得出可以找出新的运动积分的结论;因为这里的运动积分实际上就是由 Poisson 定理得到的运动积分. 这个公式也可以与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=0$相对照,而在那里,$f$ 和 g 已经是运动积分.

(2) 由"Lagrange 括号"的定义,可得

$$\begin{cases}\{u,v\}=-\{v,u\}\\ \{u,u\}=\{v,v\}=0\end{cases}\tag{3.7.41}$$

而且有

$$\begin{cases}\{q_k^*,q_l^*\}=0\\ \{p_k^*,p_l^*\}=0\\ \{p_k^*,q_l^*\}=\delta_{kl}\end{cases}\tag{3.7.42}$$

对"Lagrange 括号"来说,也有"正则不变性";因而也有

$$\begin{cases}\{q_k,q_l\}=0\\ \{p_k,p_l\}=0\\ \{p_k,q_l\}=\delta_{kl}\end{cases}\tag{3.7.43}$$

另外,"Lagrange 括号"也可写成

$$\{u,v\}=\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(u,v)}\qquad(k=1,\cdots,m)\tag{3.7.44}$$

从而

$$[f,g]\cdot\{f,g\}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(p_k,q_k)}\cdot\frac{\partial(p_l^*,q_l^*)}{\partial(f,g)}=\frac{\partial(p_l^*,q_l^*)}{\partial(p_k,q_k)}=[p_l^*,q_l^*]=1\tag{3.7.45}$$

【例 3.28】 已知:角动量的分量为

$$J_l=e_{lij}q_ip_j\qquad(l,i,j=1,2,3)\tag{3.7.46}$$

求:(1) $\begin{cases}[p_k,J_l]\\ [q_k,J_l]\end{cases}$

(2) $\begin{cases}[p^2,J_l]\\ [q^2,J_l]\end{cases}$

(3) $\begin{cases}[p^2,J^2]\\ [q^2,J^2]\end{cases}$

解:(1) 计算时要明白 Levi-Civita 符号只是一个数.

$$[p_k, J_l] = [p_k, e_{lij} q_i p_j] = e_{lij}[p_k, q_i p_j] = e_{lij}([p_k, q_i] p_j + [p_k, p_j] q_i)$$

因为

$$\begin{cases} [p_k, p_j] = 0 \\ [p_k, q_i] = \delta_{ki} \end{cases}$$

所以

$$[p_k, J_l] = e_{lij}\delta_{ki} p_j = e_{lkj} p_j = \begin{cases} p_j & (lkj = 231, 312, 123) \\ -p_j & (lkj = 321, 132, 213) \\ 0 & (l = k) \end{cases} \tag{3.7.47}$$

同样

$$[q_k, J_l] = [q_k, e_{lij} q_i p_j] = e_{lij}[q_k, q_i p_j] = e_{lij}([q_k, q_i] p_j + [q_k, p_j] q_i)$$

因为

$$\begin{cases} [q_k, q_i] = 0 \\ [q_k, p_j] = -\delta_{kj} \end{cases}$$

所以

$$[q_k, J_l] = e_{lij}(-\delta_{kj}) q_i = -e_{lik} q_i = e_{lkj} q_j = \begin{cases} q_j & (lkj = 231, 312, 123) \\ -q_j & (lkj = 321, 132, 213) \\ 0 & (l = k) \end{cases} \tag{3.7.48}$$

(2) 由(3.7.47)式和(3.7.48)式,可得

$$\begin{cases} [p^2, J_l] = 2p_k[p_k, J_l] = 2e_{lkj} p_k p_j = 0 \\ [q^2, J_l] = 2q_k[q_k, J_l] = 2e_{lkj} q_k q_j = 0 \end{cases} \tag{3.7.49}$$

(3) 由(3.7.49)式,又可得

$$\begin{cases} [p^2, J^2] = 2[p^2, J_l] J_l = 0 \\ [q^2, J^2] = 2[q^2, J_l] J_l = 0 \end{cases} \tag{3.7.50}$$

本题结果表明:广义动量的二次式与角动量之间的 Poisson 括号等于零,广义坐标的二次式与角动量之间的 Poisson 括号也等于零.

如果两个力学量之间的 Poisson 括号等于零,就认为这两个力学量是"可对易"的;反之,则为"不可对易"的.

【例 3.29】 已知:角动量的分量为

$$J_l = e_{lij} q_i p_j \quad (l, i, j = 1, 2, 3)$$

系统的 Hamiltonian 为

$$H = a_{11} p^2 + 2a_{12} p_k q_k + a_{22} q^2 \tag{3.7.51}$$

求:$[H, J_l]$.

解:因为

$$\begin{cases} [p_k, p_l] = 0 \\ [q_k, q_l] = 0 \\ [p_k, q_l] = \delta_{kl} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}[H,J_l]&=[a_{11}p^2+2a_{12}p_kq_k+a_{22}q^2,e_{lij}q_ip_j]\\&=0+2a_{12}[p_kq_k,e_{lij}q_ip_j]+0=2a_{12}e_{lij}[p_kq_k,q_ip_j]\\&=2a_{12}e_{lij}(p_k[q_k,q_i]p_j+q_k[p_k,q_i]p_j+p_k[q_k,p_j]q_i+q_k[p_k,p_j]q_i)\\&=2a_{12}e_{lij}(q_kp_j\delta_{ki}-p_kq_i\delta_{kj})=2a_{12}e_{lij}(q_ip_j-p_jq_i)=0\end{aligned}\tag{3.7.52}$$

本题结果表明:若系统的 Hamiltonian 是广义坐标和广义动量的二次齐次函数,则此 Hamiltonian与角动量的 Poisson 括号为零. 换言之,它们之间是"可对易"的.

【例 3.30】 已知:中心对称力学系统的势能为 $V(r)$;角动量的分量为

$$J_l=e_{lij}q_ip_j\quad(l,i,j=1,2,3)$$

求:$[V(r),J^2]$.

解:计算本题要用到 Poisson 括号的性质 8 (3.7.25)式. 先计算$[V(q_k),J^2]$,然后再计算$[V(r),J^2]$. 因为

$$\begin{aligned}[V(q_k),J^2]&=2[V(q_k),J_l]J_l=2[V(q_k),e_{lij}q_ip_j]J_l\\&=2J_le_{lij}[V(q_k),q_ip_j]=2J_le_{lij}\{[V(q_k),q_i]p_j+[V(q_k),p_j]q_i\}\end{aligned}$$

而根据 Poisson 括号的性质 8 (3.7.25)式,有

$$\begin{cases}[V(q_k),q_i]=-\dfrac{\partial V(q_k)}{\partial p_i}=0\\[V(q_k),p_j]=\dfrac{\partial V(q_k)}{\partial q_j}\end{cases}$$

所以

$$[V(q_k),J^2]=2J_le_{lij}\left\{q_i\frac{\partial V(q_k)}{\partial q_j}\right\}=2e_{lmn}q_mp_ne_{lij}\left\{q_i\frac{\partial V(q_k)}{\partial q_j}\right\}$$

$$=2(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})q_mp_nq_i\frac{\partial V(q_k)}{\partial q_j}$$

即

$$[V(q_k),J^2]=2(q^2p_l-q_mp_mq_l)\frac{\partial V(q_k)}{\partial q_l}\tag{3.7.53}$$

由于

$$r^2=q_kq_k$$

因此

$$2r\mathrm{d}r=2q_k\mathrm{d}q_k$$

即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q_k}=\frac{q_k}{r}$$

将上式代入(3.7.53)式,得到

$$\begin{aligned}[V(r),J^2]&=2(q^2p_l-q_mp_mq_l)\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q_l}\\&=2(q^2p_l-q_mp_mq_l)\frac{q_l}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r}\end{aligned}$$

$$= 2(q^2 q_l p_l - q_m p_m q^2)\frac{1}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

亦即

$$[V(r), J^2] = 0 \tag{3.7.54}$$

本题结果表明:中心对称势场的势能与角动量平方之间的 Poisson 括号为零. 换言之,它们之间是"可对易"的.

讨论:实际上,在(3.7.54)式之前就有

$$[V(r), J_l] = 0 \tag{3.7.55}$$

因为

$$[V(q_k), J_l] = e_{lij}\left\{q_i \frac{\partial V(q_k)}{\partial q_j}\right\}$$

代入

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q_j} = \frac{q_j}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

后,就可得到

$$[V(r), J_l] = e_{lij} q_i q_j \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right\} = 0$$

因此,这一讨论表明:中心对称势场的势能与角动量之间的 Poisson 括号为零. 换言之,它们之间也是"可对易"的.

【例 3.31】 已知:角动量的分量为

$$J_l = e_{lij} q_i p_j \qquad (l,i,j = 1,2,3)$$

求:(1) $[J_k, J_l]$;

(2) $[J^2, J_l]$.

解:(1) 因为

$$\begin{aligned}[J_k, J_l] &= [e_{kji} q_j p_i, e_{lmn} q_m p_n] = e_{kji} e_{lmn} [q_j p_i, q_m p_n] \\ &= e_{kji} e_{lmn} (q_j [p_i, q_m] p_n + p_i [q_j, q_m] p_n + q_j [p_i, p_n] q_m + p_i [q_j, p_n] q_m) \\ &= e_{kji} e_{lmn} (\delta_{im} q_j p_n - \delta_{jn} p_i q_m) = e_{kji} e_{lin} q_j p_n - e_{kji} e_{lmj} p_i q_m \\ &= (\delta_{km}\delta_{jl} - \delta_{kl}\delta_{jm}) q_j p_n - (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) p_i q_m\end{aligned}$$

所以

$$[J_k, J_l] = p_k q_l - p_l q_k = -e_{ikl} J_i \tag{3.7.56}$$

此(3.7.56)式实际上包含了(3.7.39)式中的 3 个结果:

$$\begin{cases}[J_2, J_3] = -J_1 \\ [J_3, J_1] = -J_2 \\ [J_1, J_2] = -J_3\end{cases}$$

(2) 根据(3.7.56)式,可得

$$\begin{aligned}[J^2, J_l] &= 2J_k [J_k, J_l] = 2J_k(-e_{ikl} J_i) \\ &= -2e_{ikl} J_i J_k = 0\end{aligned} \tag{3.7.57}$$

本题结果表明:角动量平方与角动量之间的 Poisson 括号为零. 换言之,它们之间是"可对易"的.

【例 3.32】 已知:角动量的分量为

$$J_l = e_{lij} q_i p_j \qquad (l,i,j = 1,2,3)$$

求:$[e_{jkl} p_k J_l, J_i]$.

解:计算本题可利用【例 3.23】和【例 3.25】中的结果.

$$\begin{aligned}[e_{jkl} p_k J_l, J_i] &= e_{jkl}(p_k[J_l, J_i] + J_l[p_k, J_i]) \\ &= e_{jkl}(p_k e_{mil} J_m + J_l e_{mik} p_m) \\ &= (\delta_{jm}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{km}) p_k J_m - (\delta_{jm}\delta_{li} - \delta_{ji}\delta_{ml}) p_m J_l \\ &= p_i J_j - p_j J_i = (p_i \delta_{jk} - p_j \delta_{ik}) J_k\end{aligned}$$

若设

$$B_j = e_{jkl} p_k J_l \tag{3.7.58}$$

则本题的结果实际上就是

$$[B_j, J_i] = e_{kji} B_k \tag{3.7.59}$$

讨论:(1) 可见,当 $j=i$ 时,$[e_{jkl} p_k J_l, J_j]=0$. 即,此时它们之间是"可对易"的.

(2) 将 $j=i$ 时的这一结果与(3.7.55)式结合起来,就可证明 Laplace-Runge-Lenz 矢量 A_j 与角动量矢量是"可对易"的;式中

$$A_j = e_{jkl} p_k J_l - mk \frac{q_j}{r} \tag{3.7.60}$$

(3) 在(3.7.47)式,(3.7.48)式和(3.7.59)式,以及其他未指明的公式中有一个共同点. 看一下它们的结构就可明白:

$$\begin{cases}[p_k, J_l] = -e_{jkl} p_j \\ [q_k, J_l] = -e_{jkl} q_j \\ [B_k, J_l] = e_{jkl} B_j\end{cases} \tag{3.7.61}$$

【例 3.33】 已知:$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$,$J_k (k=1,2,3)$为角动量的分量.

求:(1) $[J_k, J_\pm]$;

(2) $[J^2, J_\pm]$.

解:(1)

$$\begin{cases}[J_1, J_\pm] = [J_1, J_1 \pm iJ_2] = \pm i[J_1, J_2] = \mp iJ_3 \\ [J_2, J_\pm] = [J_2, J_1 \pm iJ_2] = [J_2, J_1] = J_3 \\ [J_3, J_\pm] = [J_3, J_1 \pm iJ_2] = -J_2 \pm iJ_1 = \pm iJ_\pm\end{cases}$$

(2) 因为

$$J^2 = J_k J_k = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+ J_- + J_3^2$$

所以

$$\begin{aligned}[J^2, J_\pm] &= 2J_k[J_k, J_\pm] = 2J_1[J_1, J_\pm] + 2J_2[J_2, J_\pm] + 2J_3[J_3, J_\pm] \\ &= 2J_1(\mp iJ_3) + 2J_2 J_3 + 2J_3(\pm iJ_\pm) \\ &= 2J_3(\mp iJ_1 + J_2 \pm iJ_1 - J_2) = 0\end{aligned}$$

【例 3.34】 已知:有一无穷小变换为

$$\begin{cases} q_k^* = q_k + \mathrm{d}q_k = q_k + \dot{q}_k \mathrm{d}t \\ p_k^* = p_k + \mathrm{d}p_k = p_k + \dot{p}_k \mathrm{d}t \end{cases}$$

求证:此无穷小变换的 Poisson 括号$[p_k^*, q_k^*]$是正则不变的.

证:因为

$$\begin{aligned} [p_k^*, q_l^*] &= [p_k + \dot{p}_k \mathrm{d}t, q_l + \dot{q}_l \mathrm{d}t] \\ &= [p_k, q_l] + \mathrm{d}t([p_k, \dot{q}_l] + [\dot{p}_k, q_l]) + o(\mathrm{d}t)^2 \end{aligned}$$

略去 $\mathrm{d}t$ 的二阶小量,有

$$\begin{aligned} [p_k^*, q_l^*] &= [q_k, p_l] + \mathrm{d}t([p_k, [H, q_l]] + [[H, p_k], q_l]) \\ &= [p_k, q_l] + \mathrm{d}t(-[p_k, [q_l, H]] - [q_l, [H, p_k]]) \\ &= [p_k, q_l] + \mathrm{d}t[H, [p_k, q_l]] \end{aligned}$$

所以

$$[p_k^*, q_l^*] = \delta_{kl} + \mathrm{d}t[H, \delta_{kl}] = \delta_{kl}$$

当 $k=l$ 时,Poisson 括号$[p_k^*, q_k^*]$是正则不变的.

【例 3.35】 已知:质点 A 的位形为 $q_k^{(A)}$,动量为 $p_k^{(A)}$,质点 B 的位形为 $q_k^{(B)}$,动量为 $p_k^{(B)}$;以质点 A 处的位形 $q_k^{(A)}$,动量 $p_k^{(A)}$ 为参考.

求:$[p_k^{(B)} + p_k^{(A)}, q_l^{(B)} - q_l^{(A)}]$.

解:计算时要注意,不同质点的力学量之间的 Poisson 括号是等于零的. 于是,

$$\begin{aligned} [p_k^{(B)} + p_k^{(A)}, q_l^{(B)} - q_l^{(A)}] &= [p_k^{(B)}, q_l^{(B)}] - [p_k^{(B)}, q_l^{(A)}] + [p_k^{(A)}, q_l^{(B)}] - [p_k^{(A)}, q_l^{(A)}] \\ &= [p_k^{(B)}, q_l^{(B)}] - [p_k^{(A)}, q_l^{(A)}] = \delta_{kl} - \delta_{kl} = 0 \end{aligned}$$

本题结果表明,两质点的总动量与它们的相对位形之间的 Poisson 括号为零. 换言之,它们之间是"可对易"的. 这一点很重要,Einstein-Podolsky-Rosen 的文章(EPR 论证)曾讨论过此问题. (A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev., 1935, 47, pp777～780)

3.8 Hamilton-Jacobi 理论

求解 Hamilton 正则方程的方法有 3 种. 第一种方法是利用正则变换得到更多的可遗坐标,从而找到更多的循环积分;这种方法的缺点是寻找"母函数"时困难重重. 第二种方法是利用 Poisson 定理从两个已知的运动积分找到第三个运动积分,然后再找更多的运动积分;这种方法的缺点是 Poisson 定理不太靠得住. 第三种方法就是 Hamilton-Jacobi 理论. Hamilton-Jacobi 理论既是独立于前两种方法的第三种方法,又可以用来弥补第一种方法的不足,使得寻找"可遗坐标"变得更为数学化.

一、Hamilton-Jacobi 偏微分方程

1. 化零正则变换:由正则变换推导 Hamilton-Jacobi 方程

推导 Hamilton-Jacobi 方程的出发点是第二类正则变换. 第二类正则变换的 Pfaff 方程为

$$p_k \mathrm{d}q_k + q_k^* \,\mathrm{d}p_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_2(q_k, p_k^*, t) \tag{3.8.1}$$

其变换公式是

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial q_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial t} \end{cases} \tag{3.8.2}$$

选择 $F_2(q_l, p_l^*, t) = S(q_l, p_l^*, t)$,使得

$$H^* = 0 \tag{3.8.3}$$

条件(3.8.3)式就是"化零正则变换"这个名称的由来;其目的就是使新的正则方程等号右边都等于零,从而使新的正则变量都成为常数. 由(3.8.3)式可得正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = 0 \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.8.4}$$

因而

$$\begin{cases} q_k^* = \beta_k \\ p_k^* = \alpha_k \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.8.5}$$

式中,$(\alpha_k, \beta_k)(k=1, \cdots, m)$为积分常数;为了理论分析的需要,这些积分常数将暂时被保留作为参数;只是到了处理具体问题的最后一步,才代入问题给出的数值条件. 将(3.8.5)式代入(3.8.2)式,并注意到 $F_2(q_l, p_l^*, t) = S(q_l, p_l^*, t)$,便有

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial S(q_l, \alpha_l, t)}{\partial q_k} \\ \beta_k = \dfrac{\partial S(q_l, \alpha_l, t)}{\partial \alpha_k} \\ H = -\dfrac{\partial S(q_l, \alpha_l, t)}{\partial t} \end{cases} \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.8.6}$$

上述(3.8.6)式的第三式,被写全了就是

$$\frac{\partial S(q_l,\alpha_l,t)}{\partial t}+H\left(q_k,\frac{\partial S(q_l,\alpha_l,t)}{\partial q_k},t\right)=0 \qquad (k,l=1,\cdots,m) \qquad (3.8.7)$$

此式被称为“Hamilton-Jacobi 方程”. 式中，$S(q_l,\alpha_l,t)$被称为“Hamilton 主函数”. “Hamilton 主函数”实际上就是前面提到的“Hamilton 作用函数”；关于这一点将在下文证明.

对于单个质点来说，如果它的 Hamiltonian 可写成

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V(q_l) \qquad (3.8.8)$$

那么，与之对应的 Hamilton-Jacobi 方程就是

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)^2+V(q_k)=0 \qquad (3.8.9)$$

2. 关于 Hamilton-Jacobi 方程的讨论

(1) 由于体系的 Hamiltonian 在非相对论情况下都是广义动量 p_k 的二次式，因此在非相对论条件下 Hamilton-Jacobi 方程是一个一阶二次(非线性的)方程. 但是在相对论条件下(例如对 Dirac 形式的 Hamiltonian 而言)，就可能是一阶一次(线性的)方程.

(2) 由于在 Hamilton-Jacobi 方程中，独立自变量仅仅是 q_k 和 t，因此 Hamilton-Jacobi 方程的解中应含有$(m+1)$个积分常数：$S=S(q_k,t,\alpha_k,E)$.

(3) 公式

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k} \qquad (3.8.10)$$

不仅在 Hamilton-Jacobi 理论中处于重要地位，而且在波动力学(量子力学)中起着关键的作用. 在波动力学(量子力学)中，广义动量 p_k 是“粒子”所具有的力学量，而“Hamilton 主函数”(也就是“Hamilton 作用函数”)S 则是“波”所具有的“相位”(参阅下文【例 3.45】)；(3.8.10)式将“粒子”和“波”联系起来，反映了“波-粒二象性”. 所以，在波动力学中，(3.8.10)式被称为“de Broglie 向导公式”.

(4) Hamilton-Jacobi 理论只不过是将解 Hamilton 正则方程转换成解Hamilton-Jacobi 方程而已. 由于 Hamilton-Jacobi 方程一般来说是非线性方程，所以解 Hamilton-Jacobi方程也有它的困难之处. 但是，Hamilton-Jacobi 方程的导出，却在理论上指出了另外一条可行和可靠的途径.

【例 3.36】 已知：第三类正则变换

$$-q_k\mathrm{d}p_k+q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_3(p_k,p_k^*,t)$$

及其变换公式

$$\begin{cases} q_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_3}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$$

求：化零正则变换和母函数(仍用 S 表示)所满足的偏微分方程.

解：选择 $F_3(p_k, p_k^*, t) = S(p_k, p_k^*, t)$，使得

$$H^* = 0$$

因而可得正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = 0 \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

即

$$\begin{cases} q_k^* = \beta_k \\ p_k^* = \alpha_k \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

将此结果代入变换公式，有

$$\begin{cases} q_k = -\dfrac{\partial S(p_k, \alpha_k, t)}{\partial p_k} \\ \beta_k = \dfrac{\partial S(p_k, \alpha_k, t)}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, \cdots, m) \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \end{cases}$$

其中第三式即为母函数所满足的偏微分方程

$$\frac{\partial S(p_l, \alpha_l, t)}{\partial t} + H\left(p_k, -\frac{\partial S(p_l, \alpha_l, t)}{\partial p_k}, t\right) = 0 \qquad (k, l = 1, \cdots, m)$$

3. 关于 Hamilton 主函数 $S(q_l, \alpha_l, t)$ 的物理意义

因为 $S(q_l, \alpha_l, t)$ 中独立自变量仅仅是 q_k 和 t，因此

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.8.11}$$

但由(3.8.6)式，有

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial S}{\partial q_k} \\ H = -\dfrac{\partial S}{\partial t} \end{cases} \tag{3.8.12}$$

于是，(3.8.11)成为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_k p_k - H = L \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.8.13}$$

即

$$S=\int L\mathrm{d}t \tag{3.8.14}$$

式中，L 是 Lagrangian. 上述(3.8.14)式是不带上下限的“Hamilton 作用函数”. 所以，Hamilton 主函数与 Hamilton 作用函数是一回事；用不着加以区分. 有时候，可将它称之为“Hamilton 作用量”.

值得注意的是，Lagrangian 与“Hamilton 作用量”之间的关系，和 Hamiltonian 与“Hamilton 作用量”之间的关系，是不同的：

$$\begin{cases} L=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \\ H=-\dfrac{\partial S}{\partial t} \end{cases} \tag{3.8.15}$$

这同 Lagrangian 的不确定性和 Hamiltonian 的不确定性之间的差别(见(3.2.11)式)很相似：

$$\begin{cases} L'=L+\dfrac{\mathrm{d}f(q_k,t)}{\mathrm{d}t} \\ H'=H-\dfrac{\partial f(q_k,t)}{\partial t} \end{cases}$$

4. Hamilton 特征函数和 Maupertuis 作用量

先考虑稳定情况. 在稳定情况下，有

$$H=\text{const.}=E \tag{3.8.16}$$

即

$$H=-\frac{\partial S}{\partial t}=E \tag{3.8.17}$$

将(3.8.17)式对 t 积分，考虑到上式中间是对 t 的偏微分而不是全微分，同时考虑到由于 Hamilton-Jacobi 方程的解中应含有$(m+1)$个积分常数(其解必须具有 $S=S(q_k,t,\alpha_k,E)$的形式)，因此积分后应该是

$$S=-Et+W(q_k,\alpha_k,E) \tag{3.8.18}$$

式中，$W(q_k,\alpha_k,E)$被称为“Hamilton 特征函数”. 众所周知，Hamilton 作用量可被写成

$$S=\int_0^\tau L\mathrm{d}t=\int_0^\tau(\dot{q}_k p_k-H)\mathrm{d}t \tag{3.8.19}$$

将(3.8.16)式代入其中，可得

$$S=\int_0^\tau p_k\mathrm{d}q_k-Et \tag{3.8.20}$$

对比(3.8.18)式和(3.8.20)式，可知

$$W(q_k,\alpha_k,E)=\int_0^{\Sigma} p_k\mathrm{d}q_k \tag{3.8.21}$$

即："Hamilton 特征函数"$W(q_k,\alpha_k,E)$就是上限可变的"Maupertuis 作用量". 所以，今后对二者，没有必要加以区分.

顺便插一句，在上述(3.8.20)式中，如果广义动量 p_k 是不变的，则 Hamilton 作用量成为 $S=p_kq_k-Et$. 这就是为何经常将波函数中的"相位"写成 p_kq_k-Et 或 $kr-\omega t$的原因(因为 Einstein 关系 $E=\hbar\omega$ 和 de Broglie 关系 $p=\hbar k$).

在上一章中曾经提到，对"Hamilton 作用量"进行"等时变分"($\delta t=0$)可以得到系统的运动微分方程，对"Maupertuis 作用量"进行"等能变分"($\delta E=0$)也可以得到系统的运动微分方程，尽管最后得到的运动微分方程的形式可以不一样. 现在可以证明，在"等时变分"条件下，"Hamilton 原理"与"Maupertuis 原理"是等价的. 证明很简单. 对(3.8.18)式等号两边求"等时变分"，立得

$$\delta S=\delta W \tag{3.8.22}$$

这个结果还可以从下式得到验证(设上限可变)：

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_0^{\Sigma} L\mathrm{d}t=\delta\int_0^{\Sigma}(\dot{q}_kp_k-H)\mathrm{d}t\\&=\delta\int_0^{\Sigma} p_k\mathrm{d}q_k-\delta(Et)=\delta W\qquad(\because\delta t=0)\end{aligned} \tag{3.8.23}$$

于是，对稳定情况而言，在"等时变分"条件下，"Hamilton 原理"与"Maupertuis 原理"是等价的.

对稳定情况而言，"向导公式"(3.8.10)式可以被写成

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}=\frac{\partial W}{\partial q_k} \tag{3.8.24}$$

因此再由(3.8.17)式，可将 Hamilton-Jacobi 方程简单地写为

$$H\left(q_k,\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)=E \tag{3.8.25}$$

对不稳定情况而言，此时有

$$h=T_2+V-T_0=\text{const.} \tag{3.8.26}$$

类似地，也有

$$S=-ht+W(q_k,\alpha_k,h) \tag{3.8.27}$$

二、Hamilton-Jacobi 方程的解

上面已经讨论过，在非相对论条件下 Hamilton-Jacobi 方程是非线性的偏微分方程. 如果要一般地求解这样的非线性偏微分方程，不是易事. 但是，在某种条件(可

用 Stäckel 定理进行判断，本书不详述）下，若能分离变量，则问题就简单得多.

1. 用分离变量法求解 Hamilton-Jacobi 方程

在稳定情况下，若 Hamilton-Jacobi 方程(3.8.25)式可被写成如下形式：

$$H_{(1)}\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)+H_{(2)}\left(q_2,\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)+\cdots+H_{(m)}\left(q_m,\frac{\partial W}{\partial q_m}\right)=E \tag{3.8.28}$$

则可令

$$W=W_{(1)}(q_1)+W_{(2)}(q_2)+\cdots+W_{(m)}(q_m) \tag{3.8.29}$$

将(3.8.29)式代入方程(3.8.28)式，就可将方程(3.8.28)式分解成 m 个“小 Hamilton-Jacobi 方程”的线性叠加：

$$H_{(1)}\left(q_1,\frac{\partial W_{(1)}}{\partial q_1}\right)+H_{(2)}\left(q_2,\frac{\partial W_{(2)}}{\partial q_2}\right)+\cdots+H_{(m)}\left(q_m,\frac{\partial W_{(m)}}{\partial q_m}\right)=E \tag{3.8.30}$$

即

$$\begin{cases}H_{(k)}\left(q_k,\dfrac{\partial W_{(k)}}{\partial q_k}\right)=E_{(k)} & (k=1,\cdots,m)\\ E_{(1)}+E_{(2)}+\cdots+E_{(m)}=E\end{cases} \tag{3.8.31}$$

若从每一个“小 Hamilton-Jacobi 方程”$H_{(k)}\left(q_k,\dfrac{\partial W_{(k)}}{\partial q_k}\right)=E_{(k)}$ 中可以解出 $W_{(k)}$，则线性叠加后便可由(3.8.29)式得到 W. 整个问题从而可得到圆满解决.

以上只是理论上的处理方法. 在具体物理问题中，可以根据具体问题的特殊性“变通”进行分离变量. 明确地说，就是可以像在《数理方程》中处理问题那样进行分离变量.

2. 由 Hamilton-Jacobi 方程的解得到的结果

将 Hamilton-Jacobi 方程的解 $W(q_k,\alpha_k,E)$ 代入(3.8.6)式的前面两个公式，另外再考虑 $W(q_k,\alpha_k,E)$ 对参数 E 的偏导数，就有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial q_k}=\dfrac{\partial S}{\partial q_k}=p_k & \text{（确定广义动量）}\\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_k}=\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_k}=\beta_k & \text{（确定轨道方程）}\\ \dfrac{\partial W}{\partial E}=\dfrac{\partial S}{\partial E}+t=t-\tau & \text{（确定运动方程）}\end{cases} \tag{3.8.32}$$

其中，第一个公式可以被用来确定广义动量 p_k，第二个公式可以被用来确定运动轨道，第三个公式在反解后可以被用来确定运动积分.

3. 作用变量和角变量

在①系统的“Hamilton 特征函数”$W(q_k,\alpha_k,E)$ 存在；②系统的 $W(q_k,\alpha_k,E)$ 可被进行彻底的分离变量；③系统的广义坐标 q_k 和广义动量 p_k 在“相空间”的轨道是一条封闭曲线或周期性曲线的前提条件下，$W(q_k,\alpha_K,E)$ 中的参量 α_k 可以换用“作用变

量"Φ_k 来表示. 前面已经提到,$\alpha_k = p_k^*$;它是"化零正则变换"条件下,新的广义动量的积分. 现在的"作用变量"Φ_k 则定义为广义动量对广义坐标的积分,因此它的量纲是"作用量"的量纲:

$$\Phi_k = \oint \frac{\partial W_k(q_l, \alpha_l, E)}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k \qquad (\text{不对 } k \text{ 求和}) \tag{3.8.33}$$

于是,α_k 成了 Φ_k 的函数:

$$\alpha_k = \alpha_k(\Phi_l) \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.8.34}$$

另外,与广义坐标 q_k 同广义动量 p_k 互为共轭力学量一样,也可定义"角变量"Θ_k 同"作用变量"Φ_k 凑成一对共轭力学量:

$$\Theta_k = \frac{\partial W_{(k)}}{\partial \Phi_k} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.8.35}$$

在周期系统的运动过程中,有

$$\begin{cases} \Phi_k = \text{const.} \\ \Theta_k = \nu_k t + \varphi_k \end{cases} \tag{3.8.36}$$

式中,φ_k 由初始条件给出,$\nu_k = \dfrac{\partial E}{\partial \Phi_k}$ 则相当于平均频率.

总而言之,"作用变量"Φ_k 和"角变量"Θ_k 是一对相当于广义坐标 q_k 和广义动量 p_k 一样的一对共轭力学量. 对它们的定义,只有在理解了 Hamilton-Jacobi 方程的解之后才有所可能. 它的主要用途在天体力学中.

三、相对论粒子的 Hamilton-Jacobi 方程

近代物理必然是相对论的,也必须是相对论的. 非相对论条件只是一种特殊情况.

1. 自旋 0 粒子的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 - m_0^2 c^2 = 0 \tag{3.8.37}$$

与(3.8.37)式相对应的 Hamiltonian 是

$$H^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{3.8.38}$$

2. 自旋 1/2 粒子的 Hamilton-Jacobi 方程

$$i\gamma_\nu \frac{\partial S}{\partial x_\nu} + m_0 c = 0 \tag{3.8.39}$$

与(3.8.39)式相对应的 Hamiltonian 是

$$H = c\tilde{\gamma}_k p_k + m_0 c^2 \tilde{\gamma}_4 \tag{3.8.40}$$

式中,$(\tilde{\gamma}_k, \gamma_4)$是与"Dirac 矩阵"$\gamma_\nu$ 相关的另一种写法的矩阵:

$$\begin{cases}\tilde{\gamma}_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\end{cases} \quad (k=1,2,3) \tag{3.8.41}$$

而 σ_k 是 Pauli 矩阵，I 是单位矩阵：

$$\begin{cases}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{cases} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8.42}$$

Hamiltonian(3.8.40)式所表示的，就是前面提到过的所谓“齐次问题”. 可以看出，由(3.8.40)式所表示的 Hamiltonian，是无法得到 Lagrangian 的.

当然，必须注意的是，所谓“相对论粒子”，只有在“系综诠释”下才有其合理性.

【例 3.37】 已知：质量为 m、摆长为 l 的球面摆的 Hamiltonian 是

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

求：(1) Hamilton 特征函数；

(2) 轨道方程和运动方程.

解：(1) 对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2ml^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2 + mgl\cos\theta = E$$

设

$$W = W_{(1)}(\theta) + W_{(2)}(\varphi)$$

则可分离变量得到两个方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\varphi} = \alpha \\ \dfrac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{2ml^2\left(E - mgl\cos\theta - \dfrac{\alpha^2}{2ml^2\sin^2\theta}\right)}\end{cases}$$

于是

$$W = \alpha\varphi + \sqrt{2ml^2}\int\sqrt{E - mgl\cos\theta - \frac{\alpha^2}{2ml^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

(2) 所以，轨道方程为

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial\alpha} = \varphi - \frac{\alpha}{\sqrt{2ml^2}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - mgl\cos\theta - \dfrac{\alpha^2}{2ml^2\sin^2\theta}}}$$

而运动方程为

$$t-\tau=\frac{\partial W}{\partial E}=\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{E-mgl\cos\theta-\dfrac{\alpha^2}{2ml^2\sin^2\theta}}}$$

【例 3.38】 已知:质量为 m 的质点受到指向对称中心、弹性常数为 k 的弹性力$(-kr)$的作用,其 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)+\frac{1}{2}kr^2$$

初始条件是

$$\begin{cases}r(0)=r_{\max}\\ \dot{r}(0)=0\end{cases}$$

求:(1) 系统的 Hamilton 作用量;

(2) 运动方程 $r(t)$.

解:(1) 对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{2}kr^2=E$$

设

$$W=W_{(1)}(r)+W_{(2)}(\theta)$$

则可分离变量得到两个方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\theta}=\alpha\\ \dfrac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}r}=\sqrt{2m\left(E-\dfrac{1}{2}kr^2\right)-\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2}\end{cases}$$

于是

$$S=-Et+\alpha\theta+\int\sqrt{2mE-mkr^2-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

(2) 由$\dfrac{\partial W}{\partial E}=t-\tau$,并代入初始条件,可得运动方程为

$$r=\sqrt{\frac{E}{k}+\frac{1}{k}\sqrt{E^2-\frac{k\alpha^2}{m}}\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$$

【例 3.39】 已知:质量为 m、电荷为 e 的电子在原子序数为 Z 的核所产生的 Coulomb 场中运动,其 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)-\frac{Ze^2}{r}$$

求:(1) 系统的 Hamilton 作用量;

(2) 电子的轨道方程.

解:(1) 对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\right]-\frac{Ze^2}{r}=E$$

设

$$W = W_{(1)}(r) + W_{(2)}(\theta)$$

则可分离变量得到两个方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\theta} = \alpha \\ \dfrac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2mE + \dfrac{2mZe^2}{r} - \left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2} \end{cases}$$

于是

$$S = -Et + \alpha\theta + \int \sqrt{2mE + \frac{2mZe^2}{r} - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

(2) 轨道方程可由$\dfrac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$得到,即

$$\beta = \theta - \int \frac{\alpha \mathrm{d}r}{r\sqrt{2mEr^2 + 2mZe^2 r - \alpha^2}} = \theta - \arcsin\left(\frac{mZe^2 r^2 - \alpha^2}{r\sqrt{m^2e^4Z^2 + 2mE\alpha^2}}\right)$$

也就是

$$\frac{1}{r} = \frac{mZe^2}{\alpha^2} - \frac{\sqrt{m^2Z^2e^4 + 2mE\alpha^2}}{\alpha^2}\sin(\theta - \beta)$$

将上式与标准的圆锥曲线方程相比较,可知其偏心率是$\sqrt{1 + \dfrac{2E\alpha^2}{mZ^2e^4}}$.

【例 3.40】 已知:质量为 m 的质点在有心力场中运动的 Hamiltonian 是

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r)$$

求:(1) Hamilton 特征函数;

(2) 轨道方程和运动方程.

解:(1) 对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r) = E$$

设

$$W = W_{(1)}(r) + W_{(2)}(\theta) + W_{(3)}(\varphi)$$

则可分离变量得到 3 个方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W_{(3)}}{\mathrm{d}\varphi} = \alpha_\varphi \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \dfrac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta \\ r^2\left(\dfrac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}r}\right)^2 + 2mr^2(V - E) = -\alpha_\theta^2 \end{cases}$$

于是

$$W = \alpha_\varphi\varphi \pm \int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \pm \int \sqrt{2m\left(E - V - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}\right)}\,\mathrm{d}r$$

(2) 轨道方程是

$$\begin{cases}\beta_\varphi=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_\varphi}=\varphi\mp\displaystyle\int\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin^2\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2}}\\ \beta_\theta=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_\theta}=\pm\displaystyle\int\frac{\alpha_\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2}}\mp\int\frac{\alpha_\theta\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E-V-\frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}\right)}}\end{cases}$$

而运动方程是

$$t-\tau=\frac{\partial W}{\partial E}=\pm\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}\right)}}$$

【例 3.41】 已知:质量为 m 的质点在势场 $V=\frac{a}{r^2}-\frac{k}{r^3}x_3$ 中运动,其总能量为 E;式中(a,k)为常数.

求:系统的 Hamilton 作用量.

解:系统的 Lagragian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta)-\frac{1}{r^2}(a-k\cos\theta)$$

由 Lagragian,可得广义动量为

$$\begin{cases}p_r=\dfrac{\partial L}{\partial\dot r}=m\dot r\\ p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta\\ p_\varphi=\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=mr^2\dot\varphi\sin^2\theta\end{cases}$$

于是,系统的 Hamiltonian 是

$$\begin{aligned}H&=\dot r p_r+\dot\theta p_\theta+\dot\varphi p_\varphi-L\\&=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{1}{r^2}(a-k\cos\theta)\end{aligned}$$

由于 φ 为可遗坐标,因而可设

$$W=W_{(1)}(r)+W_{(2)}(\theta)+\alpha_\varphi\varphi$$

所以对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+\frac{1}{r^2}(a-k\cos\theta)=E$$

分离变量后得到两个方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}r}=\sqrt{2mE-\dfrac{\alpha_\theta}{r^2}}\\ \dfrac{\mathrm{d}W_{(2)}}{\mathrm{d}\theta}+2m(a-k\cos\theta)=\alpha_\theta-\left(\dfrac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2\end{cases}$$

从而,系统的 Hamilton 作用量为

$$S=-Et+\alpha_\varphi\varphi+\int\sqrt{2mE-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,\mathrm{d}r+\int\sqrt{\alpha_\theta-2m(a-k\cos\theta)-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-Et+\alpha_\varphi\varphi+r\sqrt{2mE-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}-\sqrt{\alpha_\theta}\arccos\left(\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{\alpha_\theta}{2mE}}\right)$$
$$+\int\sqrt{\alpha_\theta-2m(a-k\cos\theta)-\left(\frac{\alpha_\varphi}{\sin\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

【例 3.42】 已知:质量为 m、转动惯量为($I_1=I,I_2=I,I_3$)的对称重陀螺的 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2I}\left[p_\theta^2+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

式中 l 为质心到定点的距离.

求:(1) Hamilton 特征函数;

(2) 轨道方程和运动方程.

解:(1) 由于 φ 和 ψ 为可遗坐标,因而可设

$$W=W_{(1)}(\theta)+\alpha_\varphi\varphi+\alpha_\psi\psi$$

所以对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2I}\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_{(1)}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\frac{(\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]+\frac{\alpha_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta=E$$

于是

$$W=\alpha_\varphi\varphi+\alpha_\psi\psi\pm\int\sqrt{2I\left[E-\frac{1}{2I}\left(\frac{\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-\frac{\alpha_\psi^2}{2I_3}-mgl\cos\theta\right]}\,\mathrm{d}\theta$$

(2) 令

$$V(\theta)=\frac{1}{2I}\left(\frac{\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+\frac{\alpha_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

则轨道方程是

$$\begin{cases}\beta_\varphi=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_\varphi}=\varphi\mp\displaystyle\int\frac{(\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta)}{\sin^2\theta\sqrt{2I[E-V(\theta)]}}\mathrm{d}\theta\\ \beta_\psi=\dfrac{\partial W}{\partial\alpha_\psi}=\psi\pm\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2I[E-V(\theta)]}}\left[\frac{(\alpha_\varphi-\alpha_\psi\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{I}{I_3}\alpha_\psi\right]\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

而运动方程是

$$t-\tau=\frac{\partial W}{\partial E}=\pm\int\frac{I\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2I[E-V(\theta)]}}$$

【例 3.43】 已知:同【例 3.39】. 质量为 m、电荷为 e 的电子在原子序数为 Z 的核所产生的 Coulomb 场中运动,其 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2\right)-\frac{Ze^2}{r}$$

求:(1) "作用变量"之和 $\Phi_r+\Phi_\theta$;

(2) "平均频率" ν_r 和 ν_θ.

解:(1) 对应的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\right]-\frac{Ze^2}{r}=E$$

于是

$$S=-Et+\alpha\theta+\int\sqrt{2mE+\frac{2mZe^2}{r}-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

因此可得

$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial S}{\partial\theta}=\alpha\\ p_r=\dfrac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{2mE+\dfrac{2mZe^2}{r}-\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2}\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\Phi_\theta=\oint p_\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\alpha\\ \Phi_r=\oint p_r\mathrm{d}r=\oint\sqrt{2mE+\dfrac{2mZe^2}{r}-\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r=2\pi\left(-\alpha+Ze^2\sqrt{-\dfrac{m}{2E}}\right)\end{cases}$$

从而

$$\Phi_r+\Phi_\theta=2\pi Ze^2\sqrt{-\frac{m}{2E}}$$

(2) 因为由上式有

$$E=-\frac{2m(\pi Ze^2)^2}{(\Phi_r+\Phi_\theta)^2}$$

所以

$$\left.\begin{matrix}\nu_r=\dfrac{\partial E}{\partial\Phi_r}\\ \nu_\theta=\dfrac{\partial E}{\partial\Phi_\theta}\end{matrix}\right\}=\frac{4m(\pi Ze^2)^2}{(\Phi_r+\Phi_\theta)^3}=\frac{1}{\pi Ze^2}\sqrt{-\frac{2E^3}{m}}$$

【例 3.44】 已知:单个质点的 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V=0$$

向导公式可以写成 $p_k=(\nabla S)_k$ 或 $v_k=\dfrac{1}{m}(\nabla S)_k$.

求:Newton 运动方程.

解:对上述 Hamilton-Jacobi 方程等号两边同时求梯度,有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla S)+\frac{1}{m}(\nabla S\cdot\nabla)(\nabla S)+\nabla V=0$$

代入向导公式,得到

$$m\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

即

$$m\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

这就是 Newton 运动方程.

讨论:从推导过程中(尤其是第二步得到的方程)可以看出,严格说来,所得到的实际上是流体动力学中的 Euler 方程,而不是对单个粒子成立的 Newton 运动方程. 这一点关系到问题是"Euler

描述”还是“Lagrange 描述”.

【例 3.45】 已知:Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V=0$$

今设

$$\psi=A\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$$

式中 A 为常数,$\hbar$ 为单位作用量.

求:ψ 所满足的方程.

解:因为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\dfrac{i}{\hbar}\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}\right)A\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}S\right)=\dfrac{i}{\hbar}\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}\right)\psi\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}=\dfrac{i}{\hbar}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_k}\right)A\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}S\right)=\dfrac{i}{\hbar}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_k}\right)\psi=\dfrac{i}{\hbar}p_k\psi\end{cases}$$

由于 p_k 与 x_k 是相互独立的变量,因此如下对第二式再次求导时恒有$\dfrac{\partial p_k}{\partial x_l}=0$. 故

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\partial x_k}=\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2\psi=-\frac{1}{\hbar^2}(\nabla S)^2\psi$$

即有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{1}{\psi}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)\\ (\nabla S)^2=-\dfrac{\hbar^2}{\psi}\nabla^2\psi\end{cases}$$

将上述两式代入 Hamilton-Jacobi 方程,得到

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x_k)\right]\psi \tag{3.8.43}$$

这就是量子力学中的 Shrödinger 方程.

讨论:(1) 从假设 $\psi=A\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}S\right)$ 中可以看出:“作用量 S 只在相位中出现;相位必须是无量纲量,而 S 却是有量纲的. 这时 Planck 常数恰好被用上了;它正具有作用量的量纲,可以用来扮演作用量的量子(最小单位)的角色. ”

(2) 与上题【例 3.44】相联系,如果 Hamilton-Jacobi 是同流体动力学中的 Euler 方程相关的话,则量子力学的“系综诠释”是最合适不过了. 尽管写出来的 Hamilton-Jacobi 方程貌似单个粒子,但实际上是“系综”中的一员;这种做法可以与统计力学中的雷同. 量子力学本来就是统计性的理论.

(3) 撇开量子力学的“诠释”不谈,可以看出,解线性的 Shrödinger 方程比解非线性的 Hamilton-Jacobi方程来得简单. 另外,还可以看出,某些非线性方程能够变换为线性方程;当然不是全部.

(4) 本题中的“波幅”A 是常数. 当“波幅”不再是常数时,即 $\psi=R(x_k,t)\exp\left(\dfrac{i}{\hbar}S\right)$ 时,最后导出的方程是

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x_k)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}\right]\psi \tag{3.8.44}$$

式中

$$Q=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R} \tag{3.8.45}$$

被称为“量子势”. 有些量子力学教科书认为“量子势”很小,可以被忽略;这是不对的. “量子势”最初是由 L. de Broglie 于 1927 年发现的,后来在 1952 年被 D. Böhm 重新发现. D. Böhm 已经证明,“量子势”可以很大. (3.8.45)式的存在,就是 Böhm“量子势诠释”的出发点. 当然,在量子力学“系综诠释”中,也可将“量子势”改写为“量子焓”.

3.9 化动量正则变换和化动能正则变换

在上一节开头曾经提到,Hamilton-Jacobi 理论既是独立于前两种方法的第三种方法,又可以用来弥补第一种方法的不足,使得寻找“可遗坐标”变得更为数学化. 本节内容就是用 Hamilton-Jacobi 理论来弥补正则变换理论中的不足.

在 Hamilton-Jacobi 理论中,用的是“化零正则变换”技术;这里所要阐述的则是“化动量正则变换”和“化动能正则变换”技术. 为什么要采用“化动量正则变换”和“化动能正则变换”技术? 因为在“正则变换”那一节中人们已经发现,如果“母函数”选得好的话,可以将 Hamiltonian(正则函数)化得只剩下广义动量或动能,使得所有广义坐标都成为可遗坐标.

在 V. I. Arnold (1937 ~) 所著的《Mathematical Method of Classical Mechanics》(1978,此书被誉为经典力学“三大圣经”之一)中,曾经提到过类似于这里所要阐述的“化动量正则变换”和“化动能正则变换”的想法,但他从来没有具体计算过.

一、化动量正则变换

推导“化动量正则变换”基本方程的出发点也是第二类正则变换. 第二类正则变换的 Pfaff 方程为

$$p_k\mathrm{d}q_k+q_k^*\,\mathrm{d}p_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_2(q_k,p_k^*,t) \tag{3.9.1}$$

其变换公式是

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial q_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial t} \end{cases} \tag{3.9.2}$$

选择 $F_2(q_l, p_l^*, t) = \tilde{S}(q_l, p_l^*, t)$，(严格说来 $\tilde{S}$ 不是 Hamilton 作用量)使得

$$H^* = c_k p_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.3}$$

条件(3.9.3)式就是“化动量正则变换”这个名称的由来；其目的就是使新的正则函数成为只剩下广义动量的线性叠加. 式中，c_k 为“非全为零”的常数. 由(3.9.3)式可得正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = \dfrac{\partial (c_l p_l^*)}{\partial p_k^*} = c_k \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = -\dfrac{\partial (c_l p_l^*)}{\partial q_k^*} = 0 \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.4}$$

因而

$$\begin{cases} q_k^* = c_k t + \beta_k \\ p_k^* = \alpha_k \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.5}$$

式中，(α_k, β_k) $(k=1, \cdots, m)$ 为积分常数. 将(3.9.5)式代入(3.9.2)式，并注意到 $F_2(q_l, p_l^*, t) = \tilde{S}(q_l, p_l^*, t)$，便有

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial q_k} \\ c_k t + \beta_k = \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial \alpha_k} \\ H + \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial t} = c_k \alpha_k \end{cases} \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.9.6}$$

上述(3.9.6)式的第三式，被写全了就是

$$\frac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial q_k}, t\right) = c_k \alpha_k \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.9.7}$$

对稳定情况而言，有

$$H = E \tag{3.9.8}$$

因而(3.9.7)式成为

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = E - c_k \alpha_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.9}$$

于是，(3.9.9)式的积分是

$$\tilde{S} = -(E - c_k\alpha_k)t + \ddot{W}(q_k, \alpha_k, E) \tag{3.9.10}$$

将(3.9.10)式代入方程(3.9.7)式,得到

$$H\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = E \tag{3.9.11}$$

上述(3.9.11)式正好就是前面得到的定态 Hamilton-Jacobi 方程,而且 W 也正好就是前面提到的 Maupertuis 作用量.

对稳定情况而言,因为

$$H = H^* = c_k p_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.12}$$

所以,方程(3.9.11)式可以被改写为

$$H\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = c_k p_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.13}$$

利用方程(3.9.13)式和变换公式

$$\begin{cases} c_k p_k^* = H \\ q_k^* = \dfrac{\partial W}{\partial p_k^*} \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.14}$$

就可方便地求得"化动量正则变换".

二、化动能正则变换

同样,推导"化动能正则变换"基本方程的出发点也是第二类正则变换. 第二类正则变换的 Pfaff 方程为

$$p_k \mathrm{d}q_k + q_k^* \,\mathrm{d}p_k^* - (H - H^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_2(q_k, p_k^*, t) \tag{3.9.15}$$

其变换公式是

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial q_k} \\ q_k^* = \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial p_k^*} \\ H^* = H + \dfrac{\partial F_2(q_l, p_l^*, t)}{\partial t} \end{cases} \tag{3.9.16}$$

选择 $F_2(q_l, p_l^*, t) = \tilde{S}(q_l, p_l^*, t)$,(严格说来 $\tilde{S}$ 不是 Hamilton 作用量)使得

$$H^* = \frac{1}{2} p_k^* p_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.17}$$

条件(3.9.17)式就是"化动能正则变换"这个名称的由来;其目的就是使新的正则函数成为只剩下动能. 由(3.9.17)式可得正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_k^*} = p_k^* \\ \dot{p}_k^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_k^*} = \dot{0} \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.18}$$

因而

$$\begin{cases} q_k^* = \int p_k^* \, \mathrm{d}t + \beta_k \\ p_k^* = \alpha_k \end{cases} \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.19}$$

式中，(α_k, β_k) $(k=1, \cdots, m)$为积分常数. 将(3.9.19)式代入(3.9.16)式，并注意到 $F_2(q_l, p_l^*, t) = \tilde{S}(q_l, p_l^*, t)$，便有

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial q_k} \\ \int p_k \mathrm{d}t + \beta_k = \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial \alpha_k} \\ H + \dfrac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\alpha_k \alpha_k \end{cases} \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.9.20}$$

上述(3.9.20)式的第三式，写全了就是

$$\frac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial \tilde{S}(q_l, \alpha_l, t)}{\partial q_k}, t\right) = \frac{1}{2}\alpha_k \alpha_k \qquad (k, l = 1, \cdots, m) \tag{3.9.21}$$

对稳定情况而言，有

$$H = E \tag{3.9.22}$$

因而(3.9.21)式成为

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = E - \frac{1}{2}\alpha_k \alpha_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.23}$$

于是，(3.9.23)式的积分是

$$\tilde{S} = -\left(E - \frac{1}{2}\alpha_k \alpha_k\right)t + W(q_k, \alpha_k, E) \tag{3.9.24}$$

将(3.9.24)式代入方程(3.9.21)式，得到

$$H\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = E \tag{3.9.25}$$

上述(3.9.25)式正好就是前面得到的定态 Hamilton-Jacobi 方程，而且 W 也正好就是前面提到的 Maupertuis 作用量.

对稳定情况而言，因为

$$H = H^* = \frac{1}{2} p_k^* p_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3.9.26}$$

所以，方程(3.9.25)式可以改写为

$$H\left(q_k,\frac{\partial W}{\partial q_k}\right)=\frac{1}{2}p_k^* p_k^* \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.9.27}$$

利用方程(3.9.27)式和变换公式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}p_k^* p_k^* = H\\ q_k^* = \dfrac{\partial W}{\partial p_k^*}\end{cases} \qquad (k=1,\cdots,m) \tag{3.9.28}$$

就可方便地求得“化动能正则变换”.

三、关于中心力场问题的化动量正则变换

在中心力场问题中,质量为 m 的质点的 Hamiltonian 一般写成

$$H=\frac{1}{2m}p_r^2+\frac{J_0^2}{2mr^2}+V(r) \tag{3.9.29}$$

式中,J_0 为守恒角动量. 在(3.9.29)式的条件下,讨论“化动量正则变换”通常很困难. 但是,可以参考在光学和量子力学中处理这一类问题时所作的一个称之为“s 态近似”的假设,即令

$$J_0=0 \tag{3.9.30}$$

于是,为了能够讨论中心力场问题中的“化动量正则变换”,可以将光学和量子力学中这一假设移植过来,将 Hamiltonian 写成

$$H=\frac{1}{2m}p_r^2+V(r) \tag{3.9.31}$$

从而,对应的定态 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)^2+V(r)=E \tag{3.9.32}$$

由(3.9.32)式可得

$$W=\int\sqrt{2m[E-V(r)]}\,\mathrm{d}r \tag{3.9.33}$$

令

$$\begin{cases}p=p_r\\ q=r\end{cases} \tag{3.9.34}$$

并应用前面所说的“化动量正则变换”技术,有

$$\begin{cases}p^* = \dfrac{1}{2m}p^2+V(q)\\ q^* = \dfrac{\partial W}{\partial p^*}=\sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{p^*-V(q)}}\end{cases} \tag{3.9.35}$$

对于具体的中心力场问题,将 $V(q)$ 的具体形式代入(3.9.35)式并保证(3.9.35)式能

够积分就行.

当然,中心力场问题,也有"化动能正则变换".

四、经典对易子的概念

如果两个力学量 P_k 和 $Q_l(k,l=1,\cdots,m)$之间的经典对易满足如下 Poisson 括号:

$$[P_k,Q_l]=\pm\delta_{kl}\qquad(k,l=1,\cdots,m)\tag{3.9.36}$$

则称力学量 Q_l 是力学量 P_k 的"经典对易子".

若力学量都是用(p_k,q_l)表示的,则(3.9.36)式可以被特殊地写成

$$\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(p_l,q_l)}=1\tag{3.9.37}$$

因此,"经典对易子"的概念与"正则变换"的概念有关. 换言之,寻找某一个力学量的"经典对易子",就是要找一个与这个力学量成"正则变换"关系的另一个力学量;或者说,就是要找一个与这个力学量共同满足基本 Poisson 括号的另一个力学量.

可以看出,"化动量正则变换"和"化动能正则变换"正好就是为寻找"经典对易子"服务的;起码可以说,"化动量正则变换"和"化动能正则变换"解决了寻找某些 Hamiltonian 的"经典对易子"的问题.

然而必须提请注意的是,有了"经典对易子"但不一定有"量子对易子". 原因是,经典力学中的某些力学量,在量子力学中根本没有定义(例如力学量开平方根,力学量的三角函数等). 于是,可以得到一个结论:量子力学的应用范围有时候不见得比经典力学来得广.

【例 3.46】 已知:质量为 m 的质点在重力场中运动,其 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+mgq$$

求:它的"化动量正则变换".

解:对应于 Hamiltonian 的定态 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2+mgq=E$$

从而

$$W=\int\sqrt{2m(E-mgq)}\,\mathrm{d}q$$

令

$$p^*=H^*=H=\frac{1}{2m}p^2+mgq$$

则

$$q^* = \frac{\partial W}{\partial p^*} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{p^* - mgq}} = -\frac{1}{mg} \sqrt{2m(p^* - mgq)}$$

将 p^* 的表达式代入上式，得到

$$q^* = -\frac{p}{mg}$$

于是，“化动量正则变换”是

$$\begin{cases} p^* = \dfrac{1}{2m}p^2 + mgq \\ q^* = -\dfrac{p}{mg} \end{cases}$$

可以验证，$\dfrac{\partial(p^*, q^*)}{\partial(p, q)} = 1$. 它确为正则变换. 此结果与通常经典力学教科书中的结果完全一致.

（可参阅【例 3.19】）

【例 3.47】 已知：质量为 m、角频率为 ω 的质点在谐振系统中运动，其 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

求：它的“化动量正则变换”.

解：对应于 Hamiltonian 的定态 Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$$

从而

$$W = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)}\,\mathrm{d}q$$

令

$$p^* = H^* = H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

则

$$q^* = \frac{\partial W}{\partial p^*} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{p^* - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}} = \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{m}{2}}\omega q}{\sqrt{p^* - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}}\right)$$

将 p^* 的表达式代入上式，得到

$$q^* = \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{m\omega q}{p}\right)$$

于是，“化动量正则变换”是

$$\begin{cases} p^* = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2 \\ q^* = \dfrac{1}{\omega}\arctan\left(\dfrac{m\omega q}{p}\right) \end{cases}$$

可以验证，$\dfrac{\partial(p^*, q^*)}{\partial(p, q)} = 1$. 它确为正则变换. 此结果也与通常经典力学教科书中的结果完全一致.

(可参阅【例 3.20】和【例 3.21】)

【例 3.48】 已知:中心力场问题中,质量为 m 的质点在指数势系统中运动,其 Hamiltonian 在"s 态近似"的假设下可写为

$$H=\frac{1}{2m}p^2-V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)$$

式中 V_0 和 a 为常数.

求:它的"化动量正则变换".

解:设

$$p^*=H^*=H=\frac{1}{2m}p^2-V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)$$

则直接应用(3.9.35)式后得到它的经典对易子是

$$q^*=\frac{\partial W}{\partial p^*}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{p^*+V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}$$

$$=a\sqrt{\frac{2m}{\frac{p^2}{2m}-V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}\tanh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\frac{1}{2m}}{\frac{p^2}{2m}-V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}p\right]$$

【例 3.49】 已知:中心力场问题中,质量为 m 的质点在 Morse 势系统中运动,其 Hamiltonian 在"s 态近似"的假设下可写为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V_0\left[1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\right]^2-V_0$$

式中 V_0 和 a 为常数.

求:它的"化动量正则变换".

解:设

$$p^*=H^*=H=\frac{1}{2m}p^2+V_0\left[1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\right]^2-V_0$$

则直接应用(3.9.35)式后得到它的经典对易子是

$$q^*=\frac{\partial W}{\partial p^*}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{p^*-V_0\exp\left(-\frac{2q}{a}\right)+2V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}$$

$$=-a\sqrt{\frac{\frac{m}{2}}{\frac{p^2}{2m}+V_0\left[1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\right]^2-V_0}}$$

$$\cdot\tanh^{-1}\left[\frac{\sqrt{2m}}{p}\frac{\frac{p^2}{2m}+V_0\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\left[\exp\left(-\frac{q}{a}\right)-1\right]}{\sqrt{\frac{p^2}{2m}+V_0\left[1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)\right]^2-V_0}}\right]$$

【例 3.50】 已知：中心力场问题中，质量为 m 的质点在 Hulthén 势系统中运动，其 Hamiltonian在“s态近似”的假设下可写为

$$H=\frac{1}{2m}p^2-V_0\frac{\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}$$

式中 V_0 和 a 为常数.

求：它的“化动量正则变换”.

解：设

$$p^*=H^*=H=\frac{1}{2m}p^2-V_0\frac{\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}$$

则直接应用(3.9.35)式后得到它的经典对易子是

$$q^*=\frac{\partial W}{\partial p^*}=a\sqrt{2m}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{2m}-V_0\frac{\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2m}}{\frac{p^2}{2m}-V_0\frac{\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}}p\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{2m}-\frac{V_0}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2m}}{\frac{p^2}{2m}-\frac{V_0}{1-\exp\left(-\frac{q}{a}\right)}}}p\right)\right]$$

【例 3.51】 已知：中心力场问题中，质量为 m 的质点在 Woods-Saxon 势系统中运动，其 Hamiltonian在“s 态近似”的假设下可写为

$$H=\frac{1}{2m}p^2-\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}$$

式中 V_0 和 a 为常数.

求：它的“化动量正则变换”.

解：设

$$p^*=H^*=H=\frac{1}{2m}p^2-\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}$$

则直接应用(3.9.35)式后得到它的经典对易子是

$$q^{\cdot}=\frac{\partial W}{\partial p^{\cdot}}=a\sqrt{2m}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{2m}-\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2m}}{\frac{p^2}{2m}-\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}}}p\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{2m}+V_0\frac{\exp\left(\frac{q}{a}\right)}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2m}}{\frac{p^2}{2m}+V_0\frac{\exp\left(\frac{q}{a}\right)}{1+\exp\left(\frac{q}{a}\right)}}}p\right)\right]$$

3.10 Poincare 相空间体积不变性和 Liouville 定理

Hamilton 力学中，在正则变换条件下保持形式不变的表达式有 3 个：其一为 Hamilton 的正则方程，其二为 Poisson 的括号(包括 Lagrange 的括号)，其三就是 Poincare(H. Poincare，1854～1912)的相空间体积.

由 Poincare 相空间体积不变性可以得到 Liouville 定理(J. Liouville，1809～1882).

一、Poincare 相空间体积不变性

1. 几个名词

(1)相空间：以体系的 m 个广义坐标和 m 个广义动量为坐标轴的 $2m$ 维空间，被称为“相空间”，又被称为“Γ 空间”. 由此可知，“相空间”或“Γ 空间”实际上是比位形空间更复杂的数学空间，而仍然不是物理空间.

(2)相点：体系在每一时刻的状态，可以用“相空间”或“Γ 空间”中的一个点来描述；这个点被称为“相点”.

(3)相轨道：体系运动时，其“相点”在“相空间”或“Γ 空间”所划出的一道线，被称为“相轨道”.

(4)相空间体积元：即

$$\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_m\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\cdots\mathrm{d}p_m=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{d}q_k\mathrm{d}p_k$$

2. 定理一:相空间体积在正则变换条件下是不变的

即

$$\prod_{k=1}^{m} \mathrm{d}q_k \mathrm{d}p_k = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{d}q_k^* \mathrm{d}p_k^* \tag{3.10.1}$$

众所周知,在积分学中,当被积函数的体积元由 $\prod_{k=1}^{m} \mathrm{d}q_k \mathrm{d}p_k$ 变换成 $\prod_{k=1}^{m} \mathrm{d}Q_k \mathrm{d}P_k$ 时,它们之间的变换关系是

$$\prod_{k=1}^{m} \mathrm{d}Q_k \mathrm{d}P_k = |J| \prod_{l=1}^{m} \mathrm{d}q_l \mathrm{d}p_l \tag{3.10.2}$$

式中,J 是 Jacobian(Jacobi 行列式). 换言之,定理一是要求证在正则变换条件下 Jacobian必须等于±1,即

$$|J| = \left| \frac{\partial(p_k^*, q_k^*)}{\partial(p_l, q_l)} \right| = 1 \tag{3.10.3}$$

这一点在正则变换条件下是显然的;前面已经证明过. 但是在此地需用另外的方法来证明. 定理一的证明如下.

1) 对只有 1 个自由度的体系

可以直接算出

$$J = \frac{\partial(p^*, q^*)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p^*}{\partial p} & \dfrac{\partial p^*}{\partial q} \\ \dfrac{\partial q^*}{\partial p} & \dfrac{\partial q^*}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{\partial p^*}{\partial p}\frac{\partial q^*}{\partial q} - \frac{\partial p^*}{\partial q}\frac{\partial q^*}{\partial p}$$

$$= [p^*, q^*]_{p,q} = 1 \tag{3.10.4}$$

2) 对有 m 个自由度的体系

这时要用到 Jacobian 的两个重要性质:①在某种意义下,可将 Jacobian 看作一个"分式",其"分子"和"分母"可以被同一个"因子"相乘或相除;②当 Jacobian 的"分子"和"分母"中出现相同的"变量"时,可以将这个相同的"变量"从"分子"和"分母"中同时消去,而使原来的 Jacobian 化为变量较少的"新 Jacobian";而且,在进行一切微分运算时可将这些被消去的"变量"视为常数.

Jacobian 的这两个重要性质在热力学中有广泛的应用.

【例 3.52】 已知:(x, y, z)是任意 3 个热力学量.

求证:链式关系

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

证:应用 Jacobian 的性质,立即有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(x, z)}{\partial(y, z)} \cdot \frac{\partial(y, x)}{\partial(z, x)} \cdot \frac{\partial(z, y)}{\partial(x, y)}$$

$$=\left[-\frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)}\right]\cdot\left[-\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,x)}\right]\cdot\left[-\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}\right]$$

$$=-\frac{\partial(z,x)\partial(x,y)\partial(y,z)}{\partial(y,z)\partial(z,x)\partial(x,y)}=-1 \quad \text{(证毕)}$$

有关 Jacobian 的这两个重要性质在热力学中的应用，还可以参阅本书附录中的【例 C5】.

回到定理一的证明. 应用 Jacobian 的这两个重要性质，有

$$J=\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)}=\frac{\dfrac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_k^*)}}{\dfrac{\partial(p_l,q_l)}{\partial(p_l,q_k^*)}}=\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_k^*)}\cdot\frac{\partial(p_l,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)} \tag{3.10.5}$$

再应用第四类正则变换的“母函数”$F_4(p_k,q_k^*,t)$及其变换公式

$$\begin{cases} p_k^*=-\dfrac{\partial F_4}{\partial q_k^*} \\ q_l=-\dfrac{\partial F_4}{\partial p_l} \end{cases} \tag{3.10.6}$$

可由(3.10.5)式得到

$$J=(-1)^m\frac{\partial\left(-\dfrac{\partial F_4}{\partial q_k^*},q_k^*\right)}{\partial(p_l,q_k^*)}\cdot\frac{\partial(p_l,q_k^*)}{\partial\left(p_l,-\dfrac{\partial F_4}{\partial p_l}\right)}=\frac{\det\left(\dfrac{\partial^2 F_4}{\partial q_k^*\partial p_l}\right)}{\det\left(\dfrac{\partial^2 F_4}{\partial p_l\partial q_k^*}\right)}=1 \tag{3.10.7}$$

由于行列式的“行”和“列”可以互换，于是，定理一的证明得以完成.

二、Liouville 定理

1. Liouville 定理的基础

(1) Poincare 相空间体积不变性：相空间体积在正则变换条件下是不变的，即

$$\mathrm{d}\Gamma^*=\mathrm{d}\Gamma \tag{3.10.8}$$

这里所指的“在正则变换条件下”，包括体系在运动时广义动量 p_k 和广义坐标 q_k 在“无穷小变换”$(p_k+\dot{p}_k\mathrm{d}t,q_k+\dot{q}_k\mathrm{d}t)$下的正则变换. 可参阅【例 3.26】.

(2) “统计系综”的概念：所谓“系综”，就是大量宏观性质完全相同的力学体系的集合. 统计力学中的系综描述，相当于流体动力学中的 Euler 描述. “Euler 描述”是 Euler 于 1755 年提出来的，与之相对的“Lagrange 描述”的名称则是同一个 Euler 于 1757 年提出来的. 在流体动力学中，将着眼于“流体质点”的分析方法称为“Lagrange 描述”，而将着眼于“流场空间中固定点”的分析方法称为“Euler 描述”. 换言之，“Lagrange描述”是“质点的描述”，而“Euler 描述”则是“场的描述”. 统计力学中的“Maxwell 最可几理论”和“Darwin-Fowler 平均值理论”都着眼于“粒子”，因此都是

"Lagrange 描述";而"系综理论"则相当于"Euler 描述". 对统计力学中的"系综"概念作出最通俗解释的是田长霖(见 Chang L. Tien and John H. Lienhard. Statistical Thermodynamics. Hemisphere Pub. Co.,1979. 有中译本,清华大学出版社,1987)关于田长霖的解释,本书 1.3 节中已作了介绍. 根据"统计系综"的理论,系综中的粒子数 dN 是不变的,即

$$dN = \text{const.} \tag{3.10.9}$$

(3) **定理二**:当相空间中任何一个"区域"的边界点按照正则方程运动时,"区域"的体积在运动中不变. 这里所说的"区域",就是"Euler 描述"中的"体积元"(它区别于真实物体的体积元).

2. 定理二的证明

设相空间中任何一个"区域"的"体积元"在 t_0 时刻为 Γ_0,而在任意时刻 t 为 Γ;因而有

$$\Gamma = \int_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial(p_k, q_k)}{\partial(p_l^0, q_l^0)} d\Gamma_0$$

于是,其时间导数是

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial(\dot{p}_k, q_k)}{\partial(p_l^0, q_l^0)} + \frac{\partial(p_k, \dot{q}_k)}{\partial(p_l^0, q_l^0)}\right] d\Gamma_0 \tag{3.10.10}$$

因为

$$d\Gamma = \frac{\partial(p_k, q_k)}{\partial(p_l^0, q_l^0)} d\Gamma_0$$

即

$$d\Gamma_0 = \frac{\partial(p_l^0, q_l^0)}{\partial(p_k, q_k)} d\Gamma \tag{3.10.11}$$

所以,将(3.10.11)式代入(3.10.10)式后得到

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial(\dot{p}_k, q_k)}{\partial(p_k, q_k)} + \frac{\partial(p_k, \dot{q}_k)}{\partial(p_k, q_k)}\right] d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}\right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\right] d\Gamma \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.10.12}$$

由(3.10.12)式的 $\frac{d\Gamma}{dt}=0$,立即有

$$\Gamma = \text{const.} \tag{3.10.13}$$

定理二是 Poincare 相空间体积不变性在"统计系综"概念下的补充. 在证明"Poincare 相空间体积不变性"时,没有用到"统计系综"的概念;换言之,它无论是对"Lagrange 描述"还是对"Euler 描述"来说都成立. 但是,定理二只对"Euler 描述"成

立，也就是说只对“统计系综”成立. 当然，“相空间”概念的成功应用，至今为止也只是在“统计系综”中.

定理二除了已证明统计“区域”的体积在运动中不变外，还证明了

$$\frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k}+\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}=0 \tag{3.10.14}$$

上述(3.10.14)式实际上就是“相空间中的不可压缩条件”.

众所周知，流体动力学中的“不可压缩条件”是

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \tag{3.10.15}$$

将(3.10.15)式推广到“相空间”中的形式就是(3.10.14)式.

3. Liouville 定理

Liouville 定理指的是

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3.10.16}$$

式中，ρ 为“统计系综”的“数密度”，即

$$\rho=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Gamma} \tag{3.10.17}$$

根据(3.10.9)式和(3.10.13)式(或(3.10.8)式)，这一点((3.10.16)式的结论)是显然的.

关于这一点，还可以从流体动力学中得到验证. 流体动力学的连续性方程是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)=0 \tag{3.10.18}$$

将(3.10.18)式等号左边第二项展开，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\left(v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\rho+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \tag{3.10.19}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0 \tag{3.10.20}$$

对于“统计系综”来说，“相空间中的不可压缩条件”是(3.10.14)式；对于流体动力学来说，“不可压缩条件”是(3.10.15)式. 在这两种“不可压缩条件”下，都有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$$

亦即“Liouville 定理”成立；而且，在“统计系综”中，“相空间中的不可压缩条件”(3.10.14)式是无条件的，因为有定理二成立.

由此可以看出，“系综理论”的统计力学，就是“相空间”中的流体动力学，而且是“不可压缩条件”的流体动力学. 还可以看出，“系综理论”就是流体动力学中的

"Euler描述".

三、Liouville 方程

1. Liouville 方程的两种形式

因为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+[H,\rho] \tag{3.10.21}$$

所以将表达式(3.10.21)式代入 Liouville 定理(3.10.16)式后,就得到 Liouville 方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+[H,\rho]=0 \tag{3.10.22}$$

有时为了方便,将方程(3.10.22)式等号两边同时乘以 $i=\sqrt{-1}$,成为

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}=\hat{L}\rho \tag{3.10.23}$$

方程(3.10.23)式也被称为"Liouville 方程". 必须立即提醒注意的是,在写出方程(3.10.23)式之前,已经将 ρ 的定义域由实数解析开拓到复数. 式中,$\hat{L}$ 被称为"Liouville算符":

$$\hat{L}=-i\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}+i\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{3.10.24}$$

写成(3.10.23)式形式的"Liouville 方程"与量子力学 Schrödinger 方程十分相像,因此在计算时可以模仿 Schrödinger 方程的求解(见 I. Prigogine 的《Non-Equilibrium Statistical Mechanics》, InterScience Publishers, 1962).

2. Liouville 算符的 Hermitian(厄密性)

所谓 Hermitian(厄密性),就是指:若定义

$$l_{mn}=\int f_m^*(\hat{L}f_n)\mathrm{d}p_k\mathrm{d}q_k \tag{3.10.25}$$

则

$$l_{mn}=l_{nm}^* \tag{3.10.26}$$

式中,l_{nm}^* 是 l_{mn} 的"转置"的"复共轭",(f_m,f_n) 是 (p_k,q_k) 的任意函数.

如果一个力学量的算符是 Hermitian 的,则此力学量的本征值是"实数". 所以,一个力学量是否 Hermitian,对力学量是否有物理意义很重要.

但是,还有一个比"Hermitian 算符"更重要的概念是"自伴算符"(或被称为"自共轭算符"、"超级大算符",它要求 $\hat{F}\psi=\hat{F}^*\psi$). "自伴算符"一定是"Hermitian 算符",但"Hermitian 算符"不一定是"自伴算符". 数学上只证明了"自伴算符"的本征

函数集是完备的，而没有一般性地证明“Hermitian 算符”的本征函数集也是完备的. 不过，对“有界算符”，自伴性等价于 Hermitian；而对“无界算符”，自伴性强于 Hermitian. 在量子力学中有意义的，应该是“自伴算符”而不是“Hermitian 算符”；然而，一般不作严格深究时，量子力学中都是用 Hermitian 来代替自伴性的. 关于这个问题，本书点到为止，不再继续讨论.

现在来证明 Liouville 算符的 Hermitian. 用的方法是“分部积分”法：

$$l_{mn}=\int f_m^*(\hat{L}f_n)\mathrm{d}p\mathrm{d}q=i\int f_m^*\left(-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f_n}{\partial q_k}+\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f_n}{\partial p_k}\right)\mathrm{d}p_k\mathrm{d}q_k$$

$$=i\int\left(-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\mathrm{d}p_k\int f_m^*\frac{\partial f_n}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k+i\int\frac{\partial H}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k\int f_m^*\frac{\partial f_n}{\partial p_k}\mathrm{d}p_k \qquad (3.10.27)$$

对(3.10.27)式中的每一项都用“分部积分”法，并考虑到(f_m,f_n)在边界上等于零，即“被积分出去的项”可以忽略；可以得到

$$l_{mn}=-i\int f_n\left(-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f_m^*}{\partial q_k}+\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f_m^*}{\partial p_k}\right)\mathrm{d}p_k\mathrm{d}q_k=l_{nm}^* \qquad (3.10.28)$$

于是，正如前面所说，Liouville 算符是 Hermitian 的，其本征值是有物理意义的“实数”. 从而，也可以看出，将 Liouville 方程写成(3.10.23)式的形式比将它写成(3.10.22)式的形式更具优越性.

四、等离子体 Vlasov 方程

将 Liouville 方程应用于等离子体所得的方程，被称为“Vlasov 方程”. 因此，只要将 Liouville 方程(3.10.22)式或(3.10.23)式中的 Hamiltonian 特定地写成

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_k-\frac{e}{c}A_k\right)^2+e\phi \qquad (3.10.29)$$

得到的就是 Vlasov 方程.

有时候，可以将 Liouville 方程还原成如下形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\dot{q}_k\frac{\partial\rho}{\partial q_k}+\dot{p}\frac{\partial\rho}{\partial p_k}=0 \qquad (3.10.30)$$

根据 Newton 第二定律，(3.10.30)式中的 $\dot{p}_k$ 可以被写成 $\dot{p}_k=F_k$；式中 F_k 是“Newton力”. 然后，将 Lorentz 力代入其中：

$$F_k=e\left(E_k+\frac{1}{c}e_{kji}v_jB_i\right) \qquad (3.10.31)$$

最后也能得到 Vlasov 方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\frac{e}{m}\left(E_k+\frac{1}{c}e_{kji}v_jB_i\right)\frac{\partial\rho}{\partial v_k}=0 \qquad (3.10.32)$$

式中，(E_k,B_k)分别为电场和磁感. “Vlasov 方程”是 A. A. Vlasov 于 1938 年提出

来的. “Vlasov 方程”不仅可被视为 Liouville 方程当Hamiltonian为带电粒子广义能量或总能量时的特例，而且也可被视为 Boltzmann 方程在无碰撞项时的特例. Vlasov 方程精确解既是 Liouville 方程的精确解之一，又是求解 Boltzmann 方程的初级近似. 在 20 世纪 70 年代之前，尚没有关于 Vlasov 方程精确解的任何一例；20 世纪 70 年代之后，才出现了一些在特殊情况下关于 Vlasov 方程的精确解.

当然，必须理解到，尽管 Hamiltonian(3. 10. 29)式或 Lorentz 力(3. 10. 31)式是描述一个“离子”的，但这个“离子”只不过是“全同离子”中的一个代表而已；整体而言，Vlasov 方程也是描述“系综”的.

在有些问题中，如果有两种“离子”，则必须分别写出相互关联的两个 Vlasov 方程，然后联立求解.

在另外一些问题中，如果电场和磁感(E_k, B_k)未知；这时候就必须将 Vlasov 方程与经典电动力学中的 Maxwell 方程组联立在一起求解.

【例 3. 53】 已知：质量分别为(m_1, m_2)的两个粒子沿一条直线作弹性碰撞；碰撞前后两粒子的坐标和动量分别为(q_k, p_k)和(q_k', p_k')，$k=1,2$.

求证：$|J| = \left|\dfrac{\partial(p_k', q_k')}{\partial(p_l, q_l)}\right| = 1$.

证：由 Newton 力学中的动量守恒和机械能守恒，有

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \\ \dfrac{p_1^2}{2m_1} + \dfrac{p_2^2}{2m_2} = \dfrac{p_1'^2}{2m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2m_2} \end{cases}$$

从中解出

$$\begin{cases} p_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} p_2 \\ p_2' = \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_2 \end{cases}$$

因而

$$J = \frac{\partial(p_1', p_2', q_1', q_2')}{\partial(p_1, p_2, q_1, q_2)} = \frac{\partial(p_1', p_2')}{\partial(p_1, p_2)} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{vmatrix} m_1 - m_2 & 2m_1 \\ 2m_2 & -(m_1 - m_2) \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = -1$$

故

$$|J| = 1$$

【例 3. 54】 已知：质点在 DesCartes 坐标系中的动量是

$$p_k = m\dot{x}_k \qquad (k = 1,2,3)$$

它在球坐标系中的动量是

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

求证：相空间体积元相等，即 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3 = \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi$.

证：可以解得

$$\begin{cases} p_1 = p_r\sin\theta\cos\varphi + \dfrac{p_\theta}{r}\cos\theta\cos\varphi - \dfrac{p_\varphi}{r}\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \\ p_2 = p_r\sin\theta\sin\varphi + \dfrac{p_\theta}{r}\cos\theta\sin\varphi + \dfrac{p_\varphi}{r}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ p_3 = p_r\cos\theta - \dfrac{p_\theta}{r}\sin\theta \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \\ \dfrac{\partial(p_1,p_2,p_3)}{\partial(p_r,p_\theta,p_\varphi)} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta} \end{cases}$$

因而

$$J = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)}{\partial(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi)} = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)/\partial(r,\theta,\varphi,p_1,p_2,p_3)}{\partial(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi)/\partial(r,\theta,\varphi,p_1,p_2,p_3)}$$
$$= \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\cdot\frac{\partial(p_1,p_2,p_3)}{\partial(p_r,p_\theta,p_\varphi)} = (r^2\sin\theta)\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\right) = 1$$

于是

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3 = \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi$$

【例 3.55】 已知：对于有耗散力的力学体系，正则方程为

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} - \dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \\ \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \qquad (k = 1,\cdots,m)$$

式中 H 为系统的不含时的 Hamiltonian，D 为 Rayleigh 耗散函数.

求证：(1) “统计系综”的“数密度”ρ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \rho\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_l}\right)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_l}\right)$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$.

证：(1) 在相空间中，因为有

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial\dot{p}_k}{\partial p_k} + \frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_k}\right) + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)$$
$$= -\frac{\partial^2 D}{\partial p_k\partial\dot{q}_k} = -\frac{\partial^2 D}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial p_k}\right) = -\frac{\partial^2 D}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_l}\left[\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l}\right)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right)$$

所以，由连续性方程(3.10.20)式

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\rho\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l}\right)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}\right)$$

(2) 由于 H 为系统的不含时的 Hamiltonian 而 Rayleigh 耗散函数是广义速度 $\dot{q}_k$ 的二次齐次函数，所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_k\frac{\partial H}{\partial q_k}+\dot{p}_k\frac{\partial H}{\partial p_k}=\frac{\partial H}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)+\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

$$=-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}=-\dot{q}_k\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}=-2D\leqslant 0$$

3.11 Liouville 方程的精确解

“Liouville 方程”是 J. Liouville 于 1838 年得到的；它原来只是一个纯经典力学的运动方程，本身并无任何特殊假设；直到 1946 年 N. N. Bogoliubov 和 M. Born 等人将其用于讨论大量粒子的宏观(平均)效果并进而讨论 Boltzmann 方程的理论基础之时，才需要引入统计力学的“系综”概念.

此外，Liouville 方程在讨论量子力学基础理论方面的意义亦非同小可. L. de Broglie 在《Une Tentative d'Interprétation Causale et Non-Linéaire de la Mécanique Ondulatoire》(Gauthier-Villars，1956；有中译本《非线性波动力学》)一书中就已指出，Liouville 方程的解类似于量子力学 Schrödinger 的解(模方). 量子力学系综诠释集大成者 L. E. Ballentine 在《Quantum Mechanics: A Modern Development》(World Scientific，1998)一书中也断言：“量子力学的经典极限总是经典的统计力学而非经典的质点力学. ”换言之，量子力学中的分布函数在经典极限下满足 Liouville 方程.

“Liouville 方程”的求解，实际上与前面所讨论的“化动量正则变换”，“经典对易子”，“Poisson 括号”等内容都有关系.

一、Liouville 方程的平凡解

这里所讨论的 Liouville 方程，是指(3.10.22)式，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+[H,\rho]=0 \tag{3.11.1}$$

当 Hamiltonian H 与 ρ 无关(表示粒子间无"明显"相互作用)时,Liouville 方程是关于"统计系综"的"数密度"ρ 的一阶线性偏微分方程. 为此,可用"分离变量法",将 ρ 写成

$$\rho=C\exp\left(-\frac{H}{k_BT}\right)[1+f(p_k,q_k)\exp(-m\omega t)] \tag{3.11.2}$$

式中,k_B 为 Boltzmann 常数,T 为 Kelvin 温度,m 为总的自由度数;ω 为恒正常数,且具有频率的量纲;而

$$\rho_0=\exp\left(-\frac{H}{k_BT}\right) \tag{3.11.3}$$

是 Liouville 方程的"平凡解".

"平凡解"(3.11.3)式满足"齐次 Liouville 方程"(Poisson 括号形式):

$$[H,\ln\rho_0]=0 \tag{3.11.4}$$

实际上,任何 $\rho_0=\rho_0(H)$ 形式的解都满足齐次方程(3.11.4)式. $\ln\rho_0(H)$ 的 Taylor 展开式的前两项可被写成

$$\ln\rho_0(H)=A+BH \tag{3.11.5}$$

式中,A,B 为常数. 考虑到 $\ln\rho_0$ 必须无量纲以及 ρ_0 必须与 Maxwell 分布律相协调,再加上对边界情况(趋于零)的综合估计,应该有

$$B=-\frac{1}{k_BT} \tag{3.11.6}$$

而常数 A 则可以被吸收到常数 C 中去.

二、关于 $f(p_k,q_k)$ 所满足的方程

将(3.11.2)式代入 Liouville 方程(3.11.1)式,可得

$$[H,\ln f]=m\omega \tag{3.11.7}$$

令

$$\phi=\ln f \tag{3.11.8}$$

而方程(3.11.7)式成为

$$[H,\phi]=m\omega \tag{3.11.9}$$

利用 Poisson 括号的正则不变性,又有

$$[H^*,\phi^*]_{p^*,q^*}=m\omega \tag{3.11.10}$$

即

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_k^*}\frac{\partial \phi^*}{\partial q_k^*}-\frac{\partial H^*}{\partial q_k^*}\frac{\partial \phi^*}{\partial p_k^*}=m\omega \tag{3.11.11}$$

当然(H^*,ϕ^*)与原来的(H,ϕ)在数值大小方面是相同的，只不过自变量由(p_k,q_k)变换成(p_k^*,q_k^*)而已.

若 H^* 中所有广义坐标 q_k^* 都是可遗的，则(3.11.11)式等号左边第二项为零. 于是，得到

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_k^*}\frac{\partial \phi^*}{\partial q_k^*}=m\omega \tag{3.11.12}$$

方程(3.11.12)式的解可以是如下两组中的任一组：

$$\begin{cases} H^* = \omega(p_1^* + \cdots + p_m^*) \\ \phi^* = q_1^* + \cdots + q_m^* \end{cases} \tag{3.11.13}$$

$$\begin{cases} H^* = p_1^* + \cdots + p_m^* \\ \phi^* = \omega(q_1^* + \cdots + q_m^*) \end{cases} \tag{3.11.14}$$

仔细研究一下就可发现，方程(3.11.12)式或者前面的方程(3.11.9)式，只不过是Jacobian等于 1 的方程的一种变化而已：

$$J=\frac{\partial(p_k^*,q_k^*)}{\partial(p_l,q_l)}=1 \tag{3.11.15}$$

因此，求解 $f(p_k,q_k)$所满足的方程，实质上就是算出“经典对易子”.

如果用“化动能正则变换”，也可得到同样的结果.

三、Liouville 方程精确解举例

1. “重力势”系统 Liouville 方程精确解

此问题的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+mgq \tag{3.11.16}$$

其“化动量正则变换”已经算出来是

$$\begin{cases} p^* = \dfrac{1}{2m}p^2+mgq \\ q^* = -\dfrac{p}{mg} \end{cases} \tag{3.11.17}$$

于是

$$f(p,q)=\exp\left[-\frac{\omega}{mg}(p_1+\cdots+p_m)\right] \tag{3.11.18}$$

由于“非齐次线性微分方程”的通解，等于“齐次线性微分方程”的通解加上“非齐次线性微分方程”的特解，因此将(3.11.18)式代入(3.11.2)式，就可以得到此类问题的 Liouville 方程精确解.

2. 谐振系统 Liouville 方程精确解

此问题的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2 \tag{3.11.19}$$

其"化动量正则变换"已经算出来是

$$\begin{cases} p^*=\dfrac{1}{2m}p^2+\dfrac{1}{2}m\omega^2q^2 \\ q^*=\dfrac{1}{\omega}\arctan\left(\dfrac{m\omega q}{p}\right) \end{cases} \tag{3.11.20}$$

于是

$$f(p,q)=\exp\left[\arctan\left(\frac{m\omega q_1}{p_1}\right)+\cdots+\arctan\left(\frac{m\omega q_m}{p_m}\right)\right] \tag{3.11.21}$$

将(3.11.21)式代入(3.11.2)式,就可以得到此类问题的 Liouville 方程精确解.一般说来,对不同的势能函数,Liouville 方程会有不同形式的精确解.

四、关于 Liouville 方程精确解的讨论

(1) 若要研究 Liouville 方程的精确波动解以与量子力学的解相比较,则应将基本方程选为(3.10.23)式,即

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}=\hat{L}_\rho \tag{3.11.22}$$

而它的解则应"分离变量"设为

$$\rho=f(p_k,q_k)\exp(-i\omega t) \tag{3.11.23}$$

(2) 可以看出,所谓求 Liouville 方程精确解,实际上最后归纳为求"经典对易子". 因而求解过程与"化动量正则变换","Poisson 括号"等内容都有关系.

(3) 所谓"时间不可逆性",在方程(3.11.1)式中是体现不出来的;只是由于所求得的精确解是有选择性的,才表现出"时间不可逆性". 对方程(3.11.22)来说,也没有"时间不可逆性".

(4) 如果将"齐次"Liouville 方程的通解算入"非齐次 Liouville 方程的特解" $\exp\left(-\dfrac{H}{k_BT}\right)$ 中,则总的效果就是"加速"或"加温".

(5) 可将 Liouville 方程精确解作为讨论 Boltzmann 方程解析解的一级近似. 对 Boltzmann 方程来说,是有"时间不可逆性"的.

3.12 Birkhoff 系统动力学概论

"Birkhoff 系统动力学"的概念是美国数学家 G. D. Birkhoff (1884～1944)在 1927 年出版的书《Dynamical Systems》中提出来的. 他在书中所得到的方程,被后人称为"Birkhoff 方程". 1983 年,美国物理学家 R. M. Santilli 出版了一本题名为《Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics》的书,在书中 Santilli 研究了 Birkhoff 方程,Birkhoff 方程的变换理论及其 Galileo 相对性(G. Galileo,1564～1642)推广等问题,并对"Birkhoff 方程"的起源和其后的发展作了很全面的总结. 从 Santilli 的书名就可以看出,"Birkhoff系统动力学"是 Hamilton 力学的推广.

一、 Birkhoff 方程的形式

1978 年,Santilli 提议将如下方程命名为"Birkhoff 方程":

$$\left(\frac{\partial R_\nu(t,x)}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,x)}{\partial x_\nu}\right)\dot{x}_\nu-\left[\frac{\partial B(t,x)}{\partial x_\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,x)}{\partial t}\right]=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.1}$$

Santilli 所提议的这个方程,要比 Birkhoff 原来的方程更为一般. 式中,$B(t,x)$被称为"Birkhoffian",$R_\mu(t,x)$被称为"Birkhoff 函数组". 方程(3.12.1)式等号左边第一项,用 $\Omega_{\mu\nu}$标记,被称为"Birkhoff 张量":

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.2}$$

1. 关于"Birkhoff 张量"

"Birkhoff 张量"(3.12.2)式与经典电动力学中的"电磁场张量"$F_{\mu\nu}$十分相像(见附录(B26)式):

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{3.12.3}$$

在经典电动力学中有如下两个不变量(见附录(B38)式):

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\text{const.} \\ e_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}=\text{const.} \end{cases} \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{3.12.4}$$

与之相仿,在"Birkhoff 系统动力学"中也有如下两个不变量:

$$\begin{cases} \Omega_{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}=\text{const.} \\ e_{\mu\nu\lambda\rho}\Omega_{\mu\nu}\Omega_{\lambda\rho}=\text{const.} \end{cases} \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.5}$$

2. 关于“自治”的“Birkhoff 方程”

若“Birkhoffian” $B(t,x)$和“Birkhoff 函数组”$R_\mu(t,x)$中都“不显含”时间 t，则 Birkhoff 方程化为“自治”形式：

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{x}_\nu-\frac{\partial B(x)}{\partial x_\mu}=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.6}$$

3. 关于“半自治”的“Birkhoff 方程”

若仅仅是“Birkhoff 函数组”$R_\mu(t,x)$中“不显含”时间 t，则 Birkhoff 方程化为“半自治”形式：

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{x}_\nu-\frac{\partial B(t,x)}{\partial x_\mu}=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.7}$$

4. 关于“非自治”的“Birkhoff 方程”

若“Birkhoffian” $B(t,x)$和“Birkhoff 函数组”$R_\mu(t,x)$中都“显含”时间 t，则 Birkhoff 方程恢复为原有形式，并被称之为“非自治”的“Birkhoff 方程”：

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{x}_\nu-\frac{\partial B(t,x)}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,x)}{\partial t}=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.8}$$

5. 关于“Birkhoff 方程”的“正规”和“退化”

若行列式

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{3.12.9}$$

则称“Birkhoff 方程”是“正规”的；反之，若行列式

$$\det(\Omega_{\mu\nu})=0 \tag{3.12.10}$$

则称“Birkhoff 方程”是“退化”的.

6. 关于“Birkhoff 方程”的等价形式

若定义 $\Omega^{-1}_{\mu\nu}$为 $\Omega_{\mu\nu}$的代数余子式，即

$$\Omega_{\mu\lambda}\Omega^{-1}_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu} \tag{3.12.11}$$

则“Birkhoff 方程”(3.12.8)式可被写成其等价形式：

$$\dot{x}_\mu-\Omega^{-1}_{\mu\nu}\left[\frac{\partial B(t,x)}{\partial x_\nu}+\frac{\partial R_\nu(t,x)}{\partial t}\right]=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2m) \tag{3.12.12}$$

二、“Birkhoff 方程”与 Hamilton 力学之间的关系

1. “Birkhoff 方程”与 Hamilton 正则方程之间的关系

若将

$$(\Omega^{-1}_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0_{m\times m} & +1_{m\times m} \\ -1_{m\times m} & 0_{m\times m}\end{pmatrix} \tag{3.12.13}$$

(式中下标 $m\times m$ 表示矩阵的“行”数和“列”数. 实际上式有点类似于 Pauli-Dirac 矩阵的扩展.)代入“自治”的“Birkhoff 方程”

$$\dot{x}_\mu = \Omega^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial x_\nu} \qquad (\mu,\nu = 1,\cdots,2m) \tag{3.12.14}$$

并令

$$\begin{cases} \dot{x}_\mu = \begin{cases} q_\mu & (\mu = 1,\cdots,m) \\ p_{\mu-m} & (\mu = m+1,\cdots,2m) \end{cases} \\ B(x) = H(p,q) \qquad (同上) \end{cases} \tag{3.12.15}$$

则(3.12.14)式就是 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \qquad (k = 1,\cdots,m) \tag{3.12.16}$$

2. "Birkhoff 方程"与正则变换之间的关系

在"Birkhoff 系统动力学"中,正则变换条件即 Pfaff 方程是

$$(R_\mu \mathrm{d}x_\mu - B\mathrm{d}t) - (R^*_\mu \mathrm{d}x^*_\mu - B^*\mathrm{d}t) = \mathrm{d}F(t,x_\mu,x^*_\mu) \tag{3.12.17}$$

式中,$F(t,x_\mu,x^*_\mu)$为正则变换的母函数.

若设 $F=F(t,x^*_\mu)$,则有

$$\left(R_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial x^*_\mu} - R^*_\mu - \frac{\partial F}{\partial x^*_\mu}\right)\mathrm{d}x^*_\mu + \left(B^* - B + R_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{3.12.18}$$

由此得到变换公式为

$$\begin{cases} R^*_\mu = R_\nu\dfrac{\partial x_\nu}{\partial x^*_\mu} - \dfrac{\partial F}{\partial x^*_\mu} \\ B^* = B - R_\nu\dfrac{\partial x_\nu}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{cases} \qquad (\mu,\nu = 1,\cdots,2m) \tag{3.12.19}$$

Hamilton 力学中的正则变换公式正好是(3.12.19)式的特例.

3. "Birkhoff 方程"与 Poisson 括号之间的关系

对某函数 $A=A(x)$按"半自治"情况的"Birkhoff 方程"求时间 t 的全导数,可得

$$\dot{A}(x) = \frac{\partial A}{\partial x_\mu}\dot{x}_\mu = \frac{\partial A}{\partial x_\mu}\Omega^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial x_\nu} = [A,B]^* \tag{3.12.20}$$

由(3.12.20)式所定义的 Poisson 括号同样满足所谓"Lie 代数"公理:

$$\begin{cases} [A,B]^* + [B,A]^* = 0 \\ [[A,B]^*,C]^* + [[B,C]^*,A]^* + [[C,A]^*,B]^* = 0 \end{cases} \tag{3.12.21}$$

因此,$[A,B]^*$ 被称为"广义 Poisson 括号".

4. "Birkhoff 方程"与"化零正则变换"之间的关系

在"半自治"的"Birkhoff 方程"(3.12.7)式中,设有广义正则变换

$$\begin{cases} t = t \\ x^*_\mu = x^0_\mu(t,x_\nu) \end{cases} \tag{3.12.22}$$

使得新的“Birkhoffian” $B(t,x)$恒为零，即

$$B^* = B - \frac{\partial x_\mu}{\partial t} R_\mu = 0 \tag{3.12.23}$$

则“半自治”的“Birkhoff 方程”(3.12.7)式成为

$$(\partial_\mu R_\nu^0 - \partial_\nu R_\mu^0)\dot{x}_\nu^0 = 0 \tag{3.12.24}$$

按一般假定，“Birkhoff 张量”是“正规”的，故由(3.12.24)式可得

$$\dot{x}_\nu^0 = 0 \tag{3.12.25}$$

即

$$x_\nu^0 = \text{const.} \tag{3.12.26}$$

从(3.12.22)式中可以反解出

$$x_\mu = x_\mu(t, x_\nu^0) \tag{3.12.27}$$

其中，x_ν^0 扮演着任意常数的角色.

5. “Birkhoff 方程”与 Hamilton-Jacobi 理论之间的关系

在上限可变的 Pfaff 作用量

$$S = \int_0^t \left(R_\mu \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} - B\right)\mathrm{d}t \tag{3.12.28}$$

等号两边求微分，有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \mathrm{d}\int_0^t (R_\mu \mathrm{d}x_\mu - B\mathrm{d}t) = (R_\mu \mathrm{d}x_\mu - B\mathrm{d}t)\Big|_0^t \\ &= R_\mu \mathrm{d}x_\mu - B\mathrm{d}t - R_\mu^0 \mathrm{d}x_\mu^0 \end{aligned} \tag{3.12.29}$$

式中，$R_\mu^0 = R_\mu(x_\nu^0)$. 由此得到

$$\begin{cases} R_\mu = \dfrac{\partial S}{\partial x_\mu} \\ R_\mu(x_\nu^0) = -\dfrac{\partial S}{\partial x_\mu^0} \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + B(t, x_\nu) = 0 \end{cases} \tag{3.12.30}$$

在(3.12.30)式中，第一、第二两式是类似于“de Broglie 向导公式”的变换公式，而第三式正是 Hamilton-Jacobi 方程. 由 Birkhoff 方程，可将(3.12.30)式的第三式最终化为形式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{B}\left(t, \frac{\partial S}{\partial x_\mu}\right) = 0 \tag{3.12.31}$$

三、由 Pfaff-Birkhoff 原理推导 Birkhoff 方程

Pfaff-Birkhoff 原理指的是，对上限固定的 Pfaff 作用量的变分为零；即

$$\delta S=\delta\int_0^\tau(R_\mu\dot{x}_\mu-B)\mathrm{d}t=0 \tag{3.12.32}$$

实际上,(3.12.32)式中的被积函数有点类似于 Legendre 变换. 因为“等时变分”条件 $\delta t=0$,故

$$\begin{aligned}\delta S=\delta\int_0^\tau(R_\mu\dot{x}_\mu-B)\mathrm{d}t&=\int_0^\tau\left[\delta R_\mu\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}+R_\mu\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\delta x_\mu\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu\right)\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu\delta x_\mu)-\left(\frac{\mathrm{d}R_\mu}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_\mu-\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\delta x_\mu\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_\nu+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu\delta x_\mu)-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_\mu-\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\delta x_\mu\right]\mathrm{d}t\\&=(R_\mu\delta x_\mu)\,|_0^\tau+\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\right)\dot{x}_\nu-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\right)\right]\delta x_\mu\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于在两个端点处 $\delta x_\mu|_0^\tau=0$,因此 Pfaff-Birkhoff 原理相当于

$$\delta S=\int_0^\tau\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\right)\dot{x}_\nu-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\right)\right]\delta x_\mu\mathrm{d}t=0 \tag{3.12.33}$$

因为 δx_μ 是任意的,于是 Birkhoff 方程成立:

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial x_\nu}\right)\dot{x}_\nu-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x_\mu}\right)=0 \tag{3.12.34}$$

四、Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的特例

在 Pfaff-Birkhoff 原理中,取

$$\begin{cases}B=H\\R_\nu=R_\nu^0\end{cases} \tag{3.12.35}$$

而

$$R_\nu^0=\begin{cases}p_\nu & (\nu=1,\cdots,m)\\0 & (\nu=m+1,\cdots,2m)\end{cases} \tag{3.12.36}$$

$$x_\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,\cdots,m)\\p_{\mu-m} & (\mu=m+1,\cdots,2m)\end{cases} \tag{3.12.37}$$

则 Pfaff-Birkhoff 原理可以写成

$$\delta\int_0^\tau(p_k\dot{q}_k-H)\mathrm{d}t=0\qquad(k=1,\cdots,m) \tag{3.12.38}$$

此即 Hamilton 原理.

五、Birkhoff 方程的进一步缩写

Birkhoff 方程还可以进一步缩写. 出发点仍然是 Pfaff-Birkhoff 原理,但必须引入"原时间隔"$d\tau$ 的概念(注意不要与积分上限 τ 搞混淆了),并将"等时变分"$\delta t=0$ 换成"等原时变分"$\delta\tau=0$.

首先,设

$$\begin{cases} x_{2m+1}=it \\ R_{2m+1}=iB \end{cases} \tag{3.12.39}$$

或设

$$\begin{cases} x_{2m+1}=ict \\ R_{2m+1}=i\dfrac{B}{c} \end{cases} \tag{3.12.40}$$

(式中 c 为光速)则上限固定的 Pfaff 作用量可以被改写为

$$\begin{aligned} S&=\int_0^\tau (R_\mu \dot{x}_\mu - B)\mathrm{d}t=\int_0^\tau (R_\mu \mathrm{d}x_\mu - B\mathrm{d}t) \\ &=\int_0^\tau (R_\mu \mathrm{d}x_\mu + R_{2m+1}\mathrm{d}x_{2m+1})=\int_0^\tau R_\alpha \mathrm{d}x_\alpha \\ &=\int_0^\Delta \left(R_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.12.41}$$

式中,$\mu=1,\cdots,2m$;而 $\alpha=1,\cdots,2m+1$. 换成对"原时间隔"$d\tau$ 积分时,积分上限要换成 Δ.

其次,由 Pfaff-Birkhoff 原理,

$$\begin{aligned} \delta S&=\delta\int_0^\Delta \left(R_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau=\int_0^\Delta \left[(\delta R_\alpha)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}+R_\alpha\delta\left(\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]\mathrm{d}\tau \\ &=\int_0^\Delta \left[\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(R_\alpha\delta x_\alpha)-\left(\frac{\mathrm{d}R_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta x_\alpha\right]\mathrm{d}\tau \\ &=(R_\alpha\delta x_\alpha)\Big|_0^\Delta+\int_0^\Delta \left[\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta x_\beta-\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta x_\alpha\right]\mathrm{d}\tau \\ &=(R_\alpha\delta x_\alpha)\Big|_0^\Delta+\int_0^\Delta \left[\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right]\delta x_\beta\mathrm{d}\tau=0 \end{aligned}$$

由于在两个端点处 $\delta x_\alpha|_0^\Delta=0$,因此 Pfaff-Birkhoff 原理相当于

$$\delta S=\int_0^{\Delta}\left[\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right]\delta x_\beta \mathrm{d}\tau=0 \tag{3.12.42}$$

因为 δx_β 是任意的，于是“缩写的 Birkhoff 方程”成立：

$$\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=0 \qquad (\alpha,\beta=1,\cdots,2m+1) \tag{3.12.43}$$

亦即

$$\Omega_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=0 \qquad (\alpha,\beta=1,\cdots,2m+1) \tag{3.12.44}$$

式中，$\Omega_{\alpha\beta}$ 可以被称为“扩展的 Birkhoff 张量”或“$2m+1$ 维的 Birkhoff 张量”.

可以验证，方程(3.12.43)式或(3.12.44)式与原来的 Birkhoff 方程是一样的.

综观以上推导可以发现，在(3.12.33)式之前和在(3.12.42)式之前是没有任何问题的；但在这两个方程之后，难免有用到了“推广的 Hamilton 原理”或“修正的 Hamilton 原理”之嫌，而这两个所谓的“原理”在物理上是有疑问的. 然而，必须提请注意的是，“Birkhoff 系统动力学”只是一种形式体系，它不针对任何具体物理内容，因此也不应作任何物理上的严格批评.

习　题

1. 用对“Legendre 变换”等号两边求全微分，然后代入 Euler-Lagrange 方程的方法，推导连续体系的 Hamilton 正则方程.

2. 用 Hamilton 原理推导连续体系的 Hamilton 正则方程.

3. 已知：质量为 m 的质点在重力场中沿铅垂线 q 运动，并受到一个与速度 $\dot{q}$ 平方成正比的阻力(比例系数为 k).

求：系统的 Hamiltonian 和正则方程.

答：$H=\frac{1}{2m}p^2+mgq$；

$$\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{p}{m}\\ \dot{p}=-mg-k\dot{q}^2\end{cases}$$

4. 已知：谐振子的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2$$

求：(1) 运动微分方程；

(2) 相轨道方程.

答：(1) $\ddot{q}+\frac{k}{m}q=0$

(2) $\frac{1}{A^2+B^2}\left(q^2+\frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)=1$，式中$(A,B)$为积分常数，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

5. 已知:质量为 m 的质点可在由细管弯成半径为 a 的圆环内作无涩滑动(质点的位置是以与铅直轴之间的夹角 θ 来表示的),而细环可以绕铅直轴作转动(细环对铅直轴的转动惯量为 $I=ma^2$),转角为 φ;初始条件为

$$\begin{cases}\theta(0)=\dfrac{\pi}{2}\\ \dot{\theta}(0)=0\\ \dot{\varphi}(0)=2\sqrt{\dfrac{g}{a}}\end{cases}$$

求:(1) 正则方程;

(2) $\dot{\varphi}_{\max}$.

答: $\begin{cases}\dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{ma^2(1+\sin^2\theta)}\\ p_\varphi=ma^2(1+\sin^2\theta)\dot{\varphi}=\alpha_\varphi\end{cases}$, $\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{ma^2}\\ \dot{p}_\theta=\dfrac{p_\varphi^2\sin\theta\cos\theta}{ma^2(1+\sin^2\theta)^2}+mga\sin\theta\end{cases}$;

$$\dot{\varphi}_{max}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}\sqrt{\frac{g}{a}}$$

6. 已知:质量为 m 的质点在水平面上作无摩擦运动,质点受有非稳定约束

$$\sin t^2\,\mathrm{d}x_1-\cos t^2\,\mathrm{d}x_2=0$$

初始条件为

$$\begin{cases}p_1(0)=mv_0\\ p_2(0)=0\end{cases}$$

求:广义动量(p_1, p_2)和 Lagrange 未定乘子.

答: $\begin{cases}p_1=mv_0\cos t^2\\ p_2=mv_0\sin t^2\end{cases}$; $\lambda=-2mv_0t$

7. 已知:滑块在水平面 x 轴上作简谐振动 $x=a\sin\omega t$,滑块下方附有一质量为 m 摆长为 l 的单摆;其 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+2la\omega\dot{\theta}\cos\omega t\cos\theta+a^2\omega^2\cos^2\omega t)+mgl\cos\theta$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{(p_\theta-mla\omega\cos\omega t\cos\theta)^2}{2ml^2}-\dfrac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\omega t-mgl\cos\theta$

8. 已知:质量为 m 半径为 a 的轮子的轮心 A,与质量也为 m 的单摆 B,以杆长为 l 的轻质钢性连杆钢性相连;A 轮可在水平桌面上作无滑滚动;单摆 B 在桌面下方摆动;以连杆与垂直向下直线之间的夹角 θ 为广义坐标,则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m\left(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta\right)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{2m\left(\frac{5}{2}a^2+l^2-2al\cos\theta\right)}-mgl\cos\theta$

9. 已知:物理摆的上端钢性地连接一半径为 a 的圆柱体,它们的总质量为 m;圆柱体可在桌面上作无滑滚动;物理摆相对于质心 C 的回转半径为 k;质心 C 至圆柱中心的距离为 l;以质心 C 至圆柱中心的连线与垂直向下直线之间的夹角 θ 为广义坐标,则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(k^2+a^2+l^2-2al\cos\theta)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{2m(k^2+a^2+l^2-2al\cos\theta)}-mgl\cos\theta$

10. 已知:质量为 m 半径为 a 的匀质半圆柱对于其质心 C,且与其母线平行的轴的转动惯量为 $I=mk^2$,质心 C 与半圆柱纵截面之间的距离为 l;在重力作用下其圆周部分在水平面上作无滑滚动;以质心与柱心的连线和竖直向下直线之间的夹角 θ 为广义坐标,则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(k^2+a^2+l^2-2al\cos\theta)\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{2m(k^2+a^2+l^2-2al\cos\theta)}-mgl\cos\theta$

11. 已知:半径为 a 的定滑轮的轮缘绕有细绳,绳下连着质量为 m 的质点;质点摆动至垂直位置时细绳长为 l,而摆动至任意位置时则细绳长为 $(l+a\theta)$,其中 θ 为切点处定滑轮半径与水平方向之间的夹角;因而系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(l+a\theta)^2\dot{\theta}^2+mg[(l+a\sin\theta)-(l+a\theta)\cos\theta]$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{2m(l+a\theta)^2}-mg[(l+a\sin\theta)-(l+a\theta)\cos\theta]$

12. 已知:质量为 m 长为 l 的匀质杆,置于半径为 a 的粗糙固定圆柱的顶端并有扰动;以柱心 O 与切点 A 的连线和垂直向上直线之间的夹角 θ 为广义坐标,则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2-mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

求:系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{2m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)}+mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$

13. 求:【例 2.5】中系统的 Hamiltonian.

答: $H=\dfrac{p_\theta^2}{4(m_1+2m_2\sin^2\theta)l^2}-ml^2\omega^2\sin^2\theta+2(m_1+m_2)gl\cos\theta$

14. 已知:系统的 Lagrangian 为

$$L=-k_1\ln(k_2-\dot{q})+k_3\ln q-k_2q+k_1(\ln k_1-1)$$

求:(1) 系统的 Hamiltonian;

(2) 正则方程.

答:(1) $H=k_2(p+q)-k_1\ln p-k_3\ln q$

(2) $\begin{cases}\dot{q}=k_2-\dfrac{k_1}{p}\\ \dot{p}=-k_2+\dfrac{k_3}{q}\end{cases}$

15. 已知:质量为 m 半径为 a 的匀质圆球,自半径为 b 的固定圆球的顶端无初速地滚下;以球心连线与垂直向上直线之间的夹角 θ 为广义坐标.

求:(1) 系统的 Hamiltonian;

(2) 正则方程以及动球球心下降的线加速度.

答:(1) $H=\dfrac{5p_\theta^2}{14m(a+b)^2}+mg(a+b)\cos\theta$

(2) $\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{5p_\theta}{7m(a+b)^2}\\ \dot{p}_\theta=mg(a+b)\sin\theta\end{cases}$; $(a+b)\ddot{\theta}=\dfrac{5}{7}g\sin\theta$

16. 已知:质量为 m 的质点被约束在半径为 a 的光滑圆柱面 $x_1^2+x_2^2=a^2$ 上运动;质点绕圆柱对称轴 x_3 轴的方位角为 θ;质点还受到一力心在坐标原点 O 的有心力的作用,其势能为

$$V=\frac{1}{2}k(a^2+x_3^2)$$

式中 k 为常数;以 (θ,x_3) 为广义坐标.

求:(1) 系统的 Hamiltonian;

(2) 正则方程.

答:(1) $H=\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{p_\theta^2}{a^2}+p_3^2\right)+\dfrac{1}{2}k(a^2+x_3^2)$

(2) $\begin{cases}\dot{p}_\theta=0\\ \dot{p}_3=-kx_3\end{cases}$; $\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{ma^2}\\ \dot{x}_3=\dfrac{p_3}{m}\end{cases}$

17. 已知:在一个自由度的问题中,系统的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{p^2}{2m}-mgqp\exp(-\omega t)+\frac{1}{2}m^2gq^2\exp(-\omega t)[m+mg\exp(-\omega t)]+\frac{1}{2}kq^2$$

式中 ω,k 均为常数.

求:(1) 系统的 Lagrangian;

(2) 运动微分方程.

答:(1) $L=\dfrac{1}{2}m\dot{q}^2+m^2gq\dot{q}\exp(-\omega t)-\dfrac{1}{2}m^3gq^2\exp(-\omega t)-\dfrac{1}{2}kq^2$

(2) $\ddot{q}-mg\omega q\exp(-\omega t)+m^2gq\exp(-\omega t)+\dfrac{k}{m}q=0$

18. 已知:质量分别为 M 和 m 的两个质点,由一根通过光滑水平面上一小孔的细绳相连接;质点 M 可在水平面上运动,而质点 m 则被悬吊着上下运动;以小孔到质点 M 之间的距离 r 和该段细绳与固定方向之间的夹角 θ 为广义坐标,则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2+\frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2-mgr$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2+\frac{J_\theta^2}{2Mr^2}+mgr$

19. 已知：质量为 m 的质点受重力作用，被约束在半顶角为 α 的倒置的圆锥体的表面内运动；圆锥体的母线为 x，圆锥体垂直截面上的极角为 θ；以 (x,θ) 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2\sin^2\alpha)-mgx\cos\alpha$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{k^2}{2mx^2\sin^2\alpha}+mgx\cos\alpha$

20. 已知：质量为 m 长为 l 的匀质棒 OA，以光滑销钉铰结在质量为 M 半径为 a 的匀质圆盘的盘心 O 上；圆盘可在水平桌面上作无滑滚动；匀质棒在桌面下方摆动；以摆角 θ 和圆盘的转角 φ 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\left(\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mal\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta+\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{\left(k-\frac{1}{2}mal\dot{\theta}\cos\theta\right)^2}{2\left(\frac{3}{2}M+m\right)a^2}-\frac{1}{2}mgl\cos\theta$

21. 已知：质量为 m 长为 l 的匀质杆，置于质量为 M 半径为 a 的、粗糙、可在水平面上作无滑滚动的圆球的顶端，并有扰动；以球心 C 与切点 A 的连线和垂直向上直线之间的夹角 θ，以及圆球绕球心 C 转过的 φ 角为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left(a^2\theta^2+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2+ma^2\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta-mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{2}m\left(a^2\theta+\frac{1}{12}l^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{(k-ma^2\theta\dot{\theta}\sin\theta)^2}{2\left(\frac{7}{5}M+m\right)a^2}+mga(\cos\theta+\theta\sin\theta)$

22. 已知：质量为 m 的滑块沿质量为 M 倾角为 α 的三角形斜面运动，而三角形斜面又可在水平面作无涩滑动；以滑块的坐标 (x_1,x_2) 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}(M\cot^2\alpha+m)\dot{x}_2^2-M\dot{x}_1\dot{x}_2\cot\alpha-mgx_2$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{2}(M\cot^2\alpha+m)\dot{x}_2^2+\frac{(k+M\dot{x}_2\cot\alpha)^2}{2(M+m)}+mgx_2$

23. 已知：质量为 M 半径为 a 的薄球壳置于粗糙的水平面上，其外表面完全粗糙而内表面完全光滑；在球壳内有一质量为 m 长为 $2a\sin\alpha$ 的匀质棒（α 为圆心角的一半）；以水平方向 x 和水平线与匀质棒的延长线之间的夹角 θ 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\dot{\theta}^2+ma\dot{\theta}\dot{x}\cos\alpha\cos\theta+mga\cos\alpha\cos\theta$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\dot{\theta}^2+\frac{(k-ma\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta)^2}{2\left(\frac{5}{3}M+m\right)}-mga\cos\alpha\cos\theta$

24. 已知：质量为 M 半径为 a 的空心薄壁圆筒可在粗糙水平面上无滑滚动；圆筒内壁有一质量为 m 半径为 b 的匀质圆柱体可在圆筒内壁作无滑滚动；圆筒与圆柱体的中心连线为 $c=a-b$；以中心连线与竖直向下直线之间的夹角 θ 和圆筒的转角 φ 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\left(M+\frac{5}{8}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{5}{8}mc^2\dot{\theta}^2+mac\dot{\varphi}\dot{\theta}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)+mgc\cos\theta$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{5}{8}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{\left[J_\varphi-mac\dot{\theta}\left(\frac{1}{4}-\cos\theta\right)\right]^2}{2\left(2M+\frac{5}{4}m\right)a^2}-mgc\cos\theta$

25. 已知：质量为 m 半径为 b 的匀质圆柱体可在质量为 M 半径为 a 的圆筒的内壁作无滑滚动；薄壁圆筒的水平转轴 O 是固定的；圆筒与圆柱体的中心连线为 $c=a-b$；以中心连线与竖直向下直线之间的夹角 θ 和圆筒的转角 φ 为广义坐标，则系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mac\dot{\varphi}\dot{\theta}+mgc\cos\theta$$

求：系统的 Routhian.

答：$R=-\frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{\left(J_\varphi-\frac{1}{2}mac\dot{\theta}\right)^2}{2\left(M+\frac{1}{2}m\right)a^2}-mgc\cos\theta$

26. 已知：以悬点为坐标原点写出来的球面摆的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta$$

式中，l 为摆长，(θ,φ) 为两个球面角.

求：(1) 球面摆的 Routhian 和 Routh 方程；

(2) 球面摆的循环 Hamiltonian.

答：(1) $R=-\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{k^2}{2ml^2\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$；$ml^2\ddot{\theta}-\frac{k^2\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta}-mgl\sin\theta=0$

(2) $H=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+\frac{k^2}{2ml^2\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$

27. 已知：某系统的自由度数为 2，广义坐标为 (q_1,q_2)，动能和势能分别是

$$\begin{cases}T=\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2}+\frac{1}{2}\dot{q}_1^2\\V=c+dq_1^2\end{cases}$$

式中 (a,b,c,d) 为常数.

求：系统的 Routhian 和 q_1 的运动方程.

答：$R=\frac{1}{2}(a+bq_1^2)\alpha_2^2-\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+c+dq_1^2$；$\ddot{q}_1+(b\alpha_2^2+2d)q_1=0$

28. 已知：如果正则变量并不全部独立，而是满足约束条件

$$f_\beta(p_k,q_k,t)=0$$

求证:正则方程可以表示为

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}+\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial p_k}\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}-\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial q_k}\end{cases}$$

式中 λ_β 为 Lagrange 未定乘子.(注:本题与非完整系统的问题无关.)

29. 求证:变换

$$\begin{cases}q_k^*=\sqrt{p_k+f_k(q_l)}\exp(q_k)\\ p_k^*=\sqrt{p_k+f_k(q_l)}\exp(-q_k)\end{cases}\qquad(k,l=1,\cdots,m)$$

为正则变换,式中 $f_k(q_l)$ 为 q_l 的任意的、但可积分的函数.

30. 求证:变换

$$\begin{cases}q^*=\ln\left(\dfrac{1}{q}\sin p\right)\\ p^*=q\cot p\end{cases}$$

为正则变换.

31. 求证:变换

$$\begin{cases}q_1^*=q_1\\ q_2^*=p_2\\ p_1^*=p_1\\ p_2^*=-q_2\end{cases}$$

为正则变换.

32. 求证:变换

$$\begin{cases}q^*=\tan q\\ p^*=(p-mv_0)\cos^2 q\end{cases}$$

为正则变换,式中 m 为质点的质量,v_0 为常速度.

33. 求证:变换

$$\begin{cases}q^*=\sin q\\ p^*=\dfrac{p-mv_0}{\cos q}\end{cases}$$

为正则变换,式中 m 为质点的质量,v_0 为常速度.

34. 求证:变换

$$\begin{cases}q^*=p^2+q\\ p^*=p+t\end{cases}$$

为正则变换.

35. 求证:变换

$$\begin{cases}q_1^*=q_1\\ q_2^*=p_2\\ p_1^*=p_1-2p_2\\ p_2^*=-2q_1-q_2\end{cases}$$

为正则变换.

36. 求证:变换

$$\begin{cases} q_1^* = p_1^2 \\ q_2^* = p_2^2 + q_2 \\ p_1^* = -\dfrac{q_1}{2p_1} + t \\ p_2^* = p_2 + t \end{cases}$$

为正则变换.

37. 求证:变换

$$\begin{cases} q_1^* = q_1 q_2 \\ q_2^* = \dfrac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2) \\ p_1^* = \dfrac{q_2 p_1 + q_1 p_2}{q_1^2 + q_2^2} \\ p_2^* = \dfrac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1^2 + q_2^2} \end{cases}$$

为正则变换.

38. 求证:变换

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{1}{a}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) \\ q_2^* = \dfrac{1}{a}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \\ p_1^* = \dfrac{a}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2) \\ p_2^* = \dfrac{a}{2}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 - p_2) \end{cases}$$

为正则变换,式中 a 为任意固定常数.

39. 求证:变换

$$\begin{cases} q_1^* = q_1^2 \\ q_2^* = q_2 \sec p_2 \\ p_1^* = \dfrac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2} \\ p_2^* = \sin p_2 - 2q_1 \end{cases}$$

为正则变换.

40. 求证:变换

$$\begin{cases} q^* = p + iaq \\ p^* = \dfrac{1}{2ia}(p - iaq) \end{cases}$$

为正则变换,式中 a 为任意固定常数.

41. 已知:变换

$$\begin{cases} q^* = \dfrac{ap}{q} \\ p^* = bq^2 \end{cases}.$$

求：此变换为正则变换时 a 与 b 之间的关系.

答：$ab=-\dfrac{1}{2}$.

42. 已知：某系统的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2}+p^2q^4\right)$$

求：正则变换，使得 Hamiltonian 化为谐振子形式.

答：$\begin{cases} q^* = -\dfrac{1}{q} \\ p^* = pq^2 \end{cases}$

43. 已知：(1) 第一类母函数为 $F_1=q_kq_k^*$；(2) 第二类母函数为 $F_2=q_kp_k^*$.

求：它们所对应的正则变换.

答：(1) $\begin{cases} p_k = q_k^* \\ p_k^* = -q_k \end{cases}$

(2) $\begin{cases} p_k = p_k^* \\ q_k^* = q_k \end{cases}$

44. 已知：第一类母函数为

$$F_1=\frac{1}{2}\omega\left[q\sqrt{(q^*)^2-q^2}+(q^*)^2\arcsin\left(\frac{q}{q^*}\right)\right]-\frac{1}{2}\omega^2(q^*)^2t$$

求：它所对应的正则变换.

答：$\begin{cases} q^* = \sqrt{q^2+\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2} \\ p^* = \sqrt{(\omega q)^2+p^2}\left[\omega t-\arctan\left(\dfrac{\omega q}{p}\right)\right] \end{cases}$

45. 已知：(q_k,p_k) 与 (q_k^*,p_k^*) 之间是正则变换关系.

求证：对 $(q-p)$ 相空间中的任意封闭曲线 l，都有

$$\oint_l p_k\,\mathrm{d}q_k=\oint_l p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*$$

46. 已知：(q,p) 为正则变量，母函数是

$$F_4=-(\exp q^*-1)^2\tan p$$

求：新的正则变量 $q^*(q,p)$ 和 $p^*(q,p)$.

答：$\begin{cases} q^* = \ln(1+\sqrt{q}\cos p) \\ p^* = 2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p \end{cases}$

47. 已知：有一变换为

$$\begin{cases} q^* = p \\ p^* = \dfrac{pt}{m}-q \end{cases}$$

体系的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V(q)$$

求证:(1) 该变换为正则变换;

(2) 正则变换的第一类母函数为 $F_1=qq^*-\frac{t}{2m}(q^*)^2$,第二类母函数为 $F_2=\frac{m}{2t}(p^*+q)^2$;

(3) 新的 Hamiltonian 为 $V(q)$.

48. 已知:有一变换为

$$\begin{cases}q^* = a_1q+a_2p+a_3\\ p^* = b_1q+b_2p+b_3\end{cases}$$

式中(a_k,b_k)均为常数$(k=1,2,3)$.

求:此变换是正则变换的充分必要条件.

答:$a_1b_2-a_2b_1=1$

49. 已知:有一变换为

$$\begin{cases}q_1^* = q_1q_2\\ q_2^* = q_1+q_2\\ p_1^* = \dfrac{p_1-p_2}{q_2-q_1}+1\\ p_2^* = \dfrac{a_2p_2-a_1p_1}{q_2-q_1}-(q_1+q_2)\end{cases}$$

式中(a_1,a_2)为常数.

求:此变换是正则变换的充分必要条件.

答:$a_2-a_1=q_2-q_1$

50. 已知:质量为 m、角频率分别为(ω_1,ω_2)的平面谐振子的 Hamiltonian 是

$$H=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2q_1^2+\omega_2^2q_2^2)$$

角动量

$$J_3=q_1p_2-q_2p_1$$

求:$[H,J_3]$,并讨论此角动量的守恒性.

答:$[H,J_3]=mq_1q_2(\omega_2^2-\omega_1^2)$

51. 已知:第三类正则变换的母函数 $F_3(p_k,p_k^*,t)=0$.

求证:$q_k\dfrac{\partial p_l^*}{\partial q_k}=0$.

52. 求证:“Lagrange 括号”

$$\{u,v\}=\frac{\partial p_k^*}{\partial u}\frac{\partial q_k^*}{\partial v}-\frac{\partial p_k^*}{\partial v}\frac{\partial q_k^*}{\partial u}\qquad(k=1,\cdots,m)$$

的正则不变性.

53. 求证:“Lagrange 括号”的 Jacobi 恒等式

$$\frac{\partial\{u,v\}}{\partial w}+\frac{\partial\{v,w\}}{\partial u}+\frac{\partial\{w,u\}}{\partial v}=0$$

54. 已知:若一个一维系统的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2q^2}$$

求证:它有一个运动积分

$$f=\frac{pq}{2}-Ht$$

55. 已知:若系统的 Hamiltonian 为

$$H=|\ p_k\ |^n-\frac{a}{|\ q_k\ |^n}$$

求证:它有一个运动积分

$$f=\frac{p_kq_k}{n}-Ht$$

56. 已知:质量为 m 的质点作匀速运动时的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{p^2}{2m}$$

求证:它有一个运动积分

$$f=q-\frac{pt}{m}$$

57. 已知:谐振子的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

求证:它有一个运动积分

$$f=\ln(p+im\omega q)-i\omega t$$

58. 已知:一个二维系统的 Hamiltonian 为

$$H=p_1q_1-p_2q_2-aq_1^2+bq_2^2$$

式中(a,b)为常数.

求证:它有两个运动积分

$$\begin{cases}f_1=\dfrac{p_1-aq_1}{q_2}\\ f_2=q_1q_2\end{cases}$$

59. 已知:第一类正则变换

$$p_k\,\mathrm{d}q_k-p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_1(q_k,q_k^*,t)$$

及其变换公式

$$\begin{cases}p_k=\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k}\\ p_k^*=-\dfrac{\partial F_1}{\partial q_k^*}\\ H^*=H+\dfrac{\partial F_1}{\partial t}\end{cases}$$

求:化零正则变换和母函数(仍用 S 表示)所满足的偏微分方程.

60. 已知:第四类正则变换

$$-q_k\mathrm{d}p_k-p_k^*\,\mathrm{d}q_k^*-(H-H^*)\mathrm{d}t=\mathrm{d}F_4(p_k,q_k^*,t)$$

及其变换公式

$$\begin{cases}q_k=-\dfrac{\partial F_4}{\partial p_k}\\ p_k^*=-\dfrac{\partial F_4}{\partial q_k^*}\\ H^*=H+\dfrac{\partial F_4}{\partial t}\end{cases}$$

求:化零正则变换和母函数(仍用 S 表示)所满足的偏微分方程.

61. 已知:$\int(M_k\delta q_k+N_k\delta p_k)$ 是积分不变量,即$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(M_k\delta q_k+N_k\delta p_k)=0$.

求证:$\begin{cases}\dfrac{\partial M_k}{\partial t}+[H,M_k]+\left(M_l\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_l\partial q_k}-N_l\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_l\partial q_k}\right)=0\\ \dfrac{\partial N_k}{\partial t}+[H,N_k]+\left(M_l\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_l\partial p_k}-N_l\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_l\partial p_k}\right)=0\end{cases}$

62. 已知:微分方程组 $\dot{x}_k=X_k(x_l,t)$ $(l=1,\cdots,m)$有一运动积分 $F(x_l,t)=\text{const.}$.

求证:$\int\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\delta x_k$ 是积分不变量.

63. 已知:一维谐振子的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

设

$$\begin{cases}Q=\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}q\\ P=\dfrac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p\end{cases}$$

并令

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP)\\ a^+=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP)\end{cases}$$

求:(1) $[P,Q]$;

(2) $[a,a^+]$;

(3) $[a,a^+a]$和$[a^+,a^+a]$;

(4) 用 a 和 a^+ 表示的 Hamiltonian.

答:(1) $[P,Q]=\dfrac{1}{\hbar}$;

(2) $[a,a^+]=\dfrac{i}{\hbar}$;

(3) $\begin{cases}[a,a^+a]=\dfrac{ia}{\hbar}\\ [a^+,a^+a]=-\dfrac{ia^+}{\hbar}\end{cases}$;

(4) $H=\left(a^+a+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$

64. 已知:$[a,a^+]=\dfrac{i}{\hbar}$.

求证:$\exp(\lambda a^+a)a\exp(-\lambda a^+a)=a\exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}\lambda\right)$.

65. 已知:p_k 为广义动量,$\boldsymbol{r}=x_k\boldsymbol{i}_k$;$r=|\boldsymbol{r}|$.

求:(1) $\left[p_k,\dfrac{1}{r}\right]$;

(2) $[p^2,r^2]$;

(3) $\left[p^2,\dfrac{1}{r}\right]$;

(4) $\left[p^2,\dfrac{x_k}{r}\right]$.

答:(1) $\left[p_k,\dfrac{1}{r}\right]=-\dfrac{x_k}{r^3}$;

(2) $[p^2,r^2]=2(x_kp_k+p_kx_k)$;

(3) $\left[p^2,\dfrac{1}{r}\right]=-\dfrac{1}{r^3}(x_kp_k+p_kx_k)$;

(4) $\left[p^2,\dfrac{x_k}{r}\right]=\dfrac{2p_k}{r}-\dfrac{2x_k}{r^3}(x_lp_l)$.

66. 已知:$\boldsymbol{r}=x_k\boldsymbol{i}_k$;$r=|\boldsymbol{r}|$.

求:$[[\nabla^2,x_1^lx_2^mx_3^n],r^2]$.

答:$[[\nabla^2,x_1^lx_2^mx_3^n],r^2]=4(l+m+n)x_1^lx_2^mx_3^n$.

67. 已知:质量为 m、弹性系数为 k 的一维谐振子的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{k}{2}q^2$$

求:(1) Hamilton 特征函数;

(2) 运动方程 $q(t)$.

答:(1) $W=\dfrac{1}{2}\sqrt{km}\left[q\sqrt{\alpha^2-q^2}-\alpha^2\arcsin\left(\dfrac{q}{\alpha}\right)\right]$,式中 $\alpha^2=\dfrac{2E}{k}$;

(2) $q=\sqrt{\dfrac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-\varphi_0\right)$,式中 φ_0 为积分常数.

68. 已知:质量为 m 半径为 a 的匀质圆盘可在与水平面成倾角为 α_0 的斜面上作无滑滚动,滚动角为 θ;初始条件为

$$\begin{cases}\theta(0)=0\\ \dot\theta(0)=\dot\theta_0\end{cases}$$

求:圆盘的运动方程(用 Hamilton-Jacobi 理论)和 $\theta(t)$.

答：$t=\frac{1}{g\sin\alpha_0}\sqrt{\frac{3}{m}}\left[\sqrt{a+mga\theta\sin\alpha_0}-\sqrt{a}\right]$

$\theta=\dot{\theta}_0 t+\frac{g\sin\alpha_0}{3a}t^2$

69. 已知：质量为 m 的质点，$t=0$ 时离地面的高度和速度分别为

$$\begin{cases} q(0)=h \\ \dot{q}(0)=0 \end{cases}$$

求：它的运动方程.

答：$q=h-\frac{1}{2}gt^2$

70. 已知：质量为 m、转动惯量为 I 的物理摆(复摆)的 Lagragian 为

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$$

式中 l 为质心到悬点的距离.

求：系统的 Hamilton 作用量.

答：$S=-Et+\sqrt{2I}\int\sqrt{E+mgl\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

71. 已知：质量为 m 的质点在光滑曲面 $x_3=x_1^2+x_2^2$ 上运动；设

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta \\ x_2=r\sin\theta \end{cases}$$

则质点的坐标为$(r\cos\theta,r\sin\theta,r^2)$；质点所受的主动力为重力；以$(r,\theta)$为广义坐标.

求：系统的 Hamilton 特征函数.

答：$W=J_0\theta+\int\sqrt{2m(1+4r^2)\left(E-\frac{J_0^2}{2mr^2}-mgr^2\right)}\,\mathrm{d}r$

72. 已知：Kepler 问题的势能函数为

$$V(r)=-\frac{k}{r}$$

求：(1) Kepler 问题的 Hamilton 特征函数；

(2) Kepler 问题的轨道方程和运动方程.

答：(1) $W(r,\theta,\varphi)=\alpha_\varphi\varphi+\int\sqrt{\alpha_\theta^2-\frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta+\int\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{r}\right)-\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r$

当 $\alpha_\varphi=0,\alpha_\theta=J_0$ 时(即轨道平面是赤道平面)，

$$W=(r,\varphi)=J_0\varphi+\int\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\left(\frac{J_0}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r$$

$$(2)\begin{cases} \varphi-\varphi_0=\int\dfrac{J_0\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE+\dfrac{2mk}{r}-\left(\dfrac{J_0}{r}\right)^2}} \\ t-t_0=\int\dfrac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2mE+\dfrac{2mk}{r}-\left(\dfrac{J_0}{r}\right)^2}} \end{cases}$$

73. 已知：谐振子的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

求证:其 Hamilton 作用量是

$$S=\frac{m\omega}{2}(q^2+\alpha^2)\cot(\omega t)-m\omega q\alpha\csc(\omega t)$$

74. 已知:有一质量为 m 的单摆;摆线为一弹性系数为 k 的弹性轻绳;当单摆处于平衡时弹性轻绳长为 l;当单摆处在运动过程中时弹性轻绳长为 $l+r$;从竖直向下方向算起的摆角为 θ;以 (r,θ) 为广义坐标.

求:(1) 系统的 Hamiltonian;

(2) 当 $r\ll1$(小振动)时的 Hamilton 作用量.

答:(1) $H=\frac{1}{2m}\left[p_r^2+\frac{p_\theta^2}{(l+r)^2}\right]+\frac{1}{2}kr^2-mg(l+r)\cos\theta$

(2) $S=-Et+\int\sqrt{2m\left(E-\alpha_\theta-\frac{1}{2}kr^2\right)}\,\mathrm{d}r+\int\sqrt{2ml^2(\alpha_\theta+mgl\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

75. 已知:质量为 m 的质点,其位置由球坐标 (r,θ,φ) 确定;它的总能量为 E,势能是

$$V=\frac{1}{m}\left[V_1(r)+\frac{1}{r^2}V_2(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}V_3(\varphi)\right]$$

求:系统的 Hamilton 特征函数.

答:$W=\int\sqrt{2mE-\frac{2\alpha_\theta}{r^2}-2V_1(r)}\,\mathrm{d}r+\int\sqrt{2\alpha_\theta-\frac{2\alpha_\varphi}{\sin^2\theta}-2V_2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta+\int\sqrt{2\alpha_\varphi-2V_3(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$

76. 已知:系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{k}{q_1^2+q_2^2}\qquad(k>0)$$

求:运动轨道(用 Hamilton-Jacobi 理论);

求证:$\int\frac{\mathrm{d}q_1}{\sqrt{q_1^2+a^2}}-\int\frac{\mathrm{d}q_2}{\sqrt{q_2^2-b^2}}=\text{const.}$

式中 $\begin{cases}a^2=\frac{(2\alpha_1-k)}{2\alpha_i}\geqslant0\\ b^2=\frac{(2\alpha_1+k)}{2\alpha_i}>0\end{cases}$

答:$\frac{q_1+\sqrt{q_1^2+a^2}}{q_2+\sqrt{q_2^2-b^2}}=C$(双曲线)

77. 已知:力学系统的动能和势能分别为

$$\begin{cases}T=\frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_m)(b_1\dot{q}_1^2+\cdots+b_m\dot{q}_m^2)\\ V=\frac{V_1+\cdots+V_m}{a_1+\cdots+a_m}\end{cases}$$

式中 (a_k,b_k) $(k=1,\cdots,m)$ 均为常数,V_k 只是一个广义坐标 q_k 的函数.

求证:此力学系统可用分离变量法求解.

78. 已知:系统的 Hamiltonian 为

$$H=\frac{f_1(p_1,q_1)+\cdots+f_m(p_m,q_m)}{g_1(p_1,q_1)+\cdots+g_m(p_m,q_m)}$$

求：系统的 Hamilton 作用量.

答：$S=-Et+\sum_k W_{(k)}$，而 $W_{(k)}$ 满足方程 $f_k\left(\frac{\partial W_{(k)}}{\partial q_k},q_k\right)=Eq_k\left(\frac{\partial W_{(k)}}{\partial q_k},q_k\right)$

79. 已知：在正负平方幂函数势系统中，Hamiltonian 为

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V_0\left(\frac{a}{q}-\frac{q}{a}\right)^2 \qquad (q>0)$$

求：它的“化动量正则变换”.

答：$$\begin{cases} p^*=\dfrac{1}{2m}p^2+V_0\left(\dfrac{a}{q}-\dfrac{q}{a}\right)^2 \\ q^*=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2V_0}}\arctan\left[\dfrac{\dfrac{p^2}{2m}+V_0\left(\dfrac{a}{q}-\dfrac{q}{a}\right)\left(\dfrac{a}{q}+\dfrac{q}{a}\right)}{\sqrt{\dfrac{2V_0}{m}}\left(\dfrac{q}{a}\right)p}\right] \end{cases}$$

80. 已知：二维(平面)“引力”势系统的 Lagrangian 为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)+\frac{a}{r}$$

求：它的“化动量正则变换”.

答：$$\begin{cases} p^*=\dfrac{m}{2J_0^2}p^2+\dfrac{J_0^2}{2m}\left(q-\dfrac{m}{J_0^2}a\right)^2 \\ q^*=\arctan\left[\dfrac{J_0\left(q-\dfrac{m}{J_0^2}a\right)}{mp}\right] \end{cases} \qquad \left(\text{其中 } q=\frac{1}{r},J_0=mr^2\dot\theta\right)$$

附　　录

A. 张　　量

一、Einstein 约定

1916 年 A. Einstein 在“广义相对论的基础”(范岱年. 赵中立. 许良英,编译. Einstein 文集:第 2 卷. 北京:商务印书馆,1979:278～334)第五节“抗变的和协变的四元矢量”文末有一段“关于表示式书写方法的简化的注释”. Einstein 说:“看一下这一节的方程就会明白,对于那个在累加符号后出现两次的指标,总是被累加起来的,而且确实也只对出现两次的指标进行累加. 因此就能够略去累加符号,而不丧失其明确性. 为此我们引进这样的规定:除非作了相反的声明,否则,凡在式子的一个项里出现两次的指标,总是要对这指标进行累加的. ”“协变四元矢量同抗变四元矢量之间的区别在于变换规则. 在上述一般性讨论的意义上,这两种形式都是张量;它们的重要性就在于此. 仿照 Ricci 和 Levi-Civita,我们把指标放在上面以表示抗变性,放在下面则表示协变性. ”

Einstein 的这一规定,后来被称为“Einstein 约定”. 数学家陈省身在 1980 年说:“Einstein(在广义相对论中)引进了有用的和式约定,对微分几何的影响是令人震撼的. ”

以下,本书将“Einstein 约定”作重新表述. 在本书中,由于不涉及弯曲时空和为了书写方便,将不对逆变(抗变)指标和协变指标加以区分,而统统放在下面(除非出现特殊需要时另有“上标”).

(1) 每一文字指标,若在式子的每一项中只出现一次,就称为“自由指标”,假定它取一切可能的值;

(2) 在式子里每一项中重复出现的指标,称为“累加指标”或“求和指标”(又称为“傀儡指标”,“哑标”,“盲标”);累加或求和是对一切可能的值取的;累加或求和取值

相同时,“累加指标”或“求和指标”换用其他文字不影响其累加或求和,但不得换用本项中已出现过的文字指标.

【例 A1】 (1) 矢量的分量可表为 A_k. 其中下标 k 为“自由指标”.

(2) 微分算子矢量的分量可表为$\frac{\partial}{\partial x_k}=\partial_k$. 其中下标 k 为“自由指标”. 等号右边的形式比等号左边的形式更简单.

(3) 二阶张量可表为 T_{ji}. 其中下标 i 和 j 皆为“自由指标”.

(4) 二阶张量的“转置”可表为 T_{ij}. 若将二阶张量理解为矩阵时,则下标 i 和 j 之间的对换就表示矩阵的转置. 但不是任何张量都能写成矩阵形式的.

(5) 矢量“内积”可表为 A_kB_k. 其中 k 为“求和指标”. 因为此处 k 是重复出现的指标.

(6) 二阶张量与矢量之间的“内积”可表为 A_kT_{kl} 或 $T_{lk}A_k$. 其中 l 为“自由指标”,而 k 为“求和指标”. 当然,$A_kT_{kl}\neq T_{lk}A_k$,即此内积无“交换律”.

(7) 两个二阶张量之间的“一次内积”可表为 $T_{jk}S_{kl}$ 或 $S_{jk}T_{kl}$. 其中 j 和 l 为“自由指标”,而 k 为“求和指标”. 当然,$T_{jk}S_{kl}\neq S_{jk}T_{kl}$,即此一次内积无“交换律”.

(8) 矢量的散度可表为$\frac{\partial A_k}{\partial x_k}=\partial_k A_k$. 其中 k 为“求和指标”.

(9) 二阶张量的散度可表为$\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k}=\partial_k T_{kl}$. 其中 k 为“求和指标”,而 l 为“自由指标”. 在有些教科书中将 $\partial_k T_{kl}$ 写成另一种 $T_{kl,k}$ 的形式;本书中不用后一书写方式.

在统计力学中,有人仿照“Einstein 求和约定”提出了所谓“求积约定”:省去积分符号,对两次重复出现的自变量自动求积分. 例如,

$$\int J(x_k)K(x_k)\mathrm{d}x_k = J(k)K(k)$$

$$\int J(x_k)K(x_k,x_l)L(x_l)\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l = J(k)K(k,l)L(l)$$

等等. 本书中不涉及“求积约定”.

二、张量

自 1916 年 Einstein 提出“求和约定”,广义相对论获得普遍赞誉以来,物理学和力学方面的学术论文基本上都是用张量书写的. 张量运算方面的知识已成为科学研究(起码是理论研究)的必要条件.

(1) 二阶张量的定义:若一个物理量在 n 维空间是用 n^2 个数 $T_{kl}(k,l=1,\cdots,n)$ 来表示的,且其在坐标(旋转)变换下新老物理量之间的变换关系为

$$T^*_{ji} = \alpha_{jk}\alpha_{il}T_{kl} \qquad (j,i,k,l=1,\cdots,n) \tag{A1}$$

则称此物理量是二阶张量;其中 α_{ji} 为 n 维空间坐标轴在有一转动时的夹角余弦.

(2) r 阶张量的定义:若一个物理量在 n 维空间是用 n^r 个数 $T_{\underbrace{kl\cdots m}_{r个}}(k,l=1,\cdots,n)$

来表示的，且其在坐标(旋转)变换下新老物理量之间的变换关系为

$$\underbrace{T^{*}_{ji\cdots a}}_{r\text{个}} = \underbrace{\alpha_{jk}\alpha_{il}\cdots\alpha_{am}}_{r\text{个}}\underbrace{T_{kl\cdots m}}_{r\text{个}} \qquad (j,i,\cdots,a;k,l\cdots,m=1,\cdots,n) \tag{A2}$$

则称此物理量是 r 阶张量；其中 α_{ji} 为 n 维空间坐标轴在有一转动时的夹角余弦.

在上述定义中已用到了 Einstein“求和约定”.

另外，从上述定义中可看出，矢量就是一阶张量，其新老物理量之间变换关系为

$$T^{*}_{i} = \alpha_{ik}T_{k} \qquad (i,k=1,\cdots,n) \tag{A3}$$

同时，标量就是零阶张量，其新老物理量之间变换关系为

$$T^{*} = T \tag{A4}$$

由于坐标矢量可用 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 来表示，因而

$$\mathrm{d}x^{*}_{i} = \alpha_{ik}\mathrm{d}x_{k} \qquad (i,k=1,\cdots,n) \tag{A5}$$

于是

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x^{*}_{i}}{\partial x_{k}} \qquad (i,k=1,\cdots,n) \tag{A6}$$

即：n 维空间坐标轴在有一转动时的夹角余弦 α_{ji}，实际上是新坐标在老坐标上的投影之比值；而且夹角余弦 α_{ji} 的转置是

$$\alpha_{ki} = \frac{\partial x_{k}}{\partial x^{*}_{i}} \qquad (i,k=1,\cdots,n) \tag{A7}$$

【例 A2】 矢量外积(并矢)

第一个矢量其新老物理量之间变换关系为

$$A^{*}_{i} = \alpha_{ik}A_{k}$$

第二个矢量其新老物理量之间变换关系为

$$B^{*}_{j} = \alpha_{jl}B_{l}$$

则这两个矢量的外积

$$(A_iB_j)^{*} = A^{*}_{i}B^{*}_{j} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}A_kB_l$$

是二阶张量. 以上运算称为“并矢”.

三、正交性定义

若 n 维空间坐标轴在有一转动时的夹角余弦矩阵 α_{ji} 满足关系

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij} \qquad (i,j,k=1,\cdots,n) \tag{A8}$$

则此张量为正交张量. 式中 δ_{ij} 为 Krönecker 符号，其定义如下.

平直空间中的正交张量被称为“DesCartes 张量”. 本书中用到的都是“DesCartes张量”.

四、两个重要的符号

1. Krönecker 符号(替换符号,单位张量)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{A9}$$

其性质是

(1) 对称性

$$\delta_{ji}=\delta_{ij} \tag{A10}$$

意味着,若将二阶张量视为矩阵时,Krönecker 符号就是对称的单位矩阵.

(2)各向同性

$$\delta'_{kl}=\delta_{kl} \tag{A11}$$

意味着,不管坐标系如何旋转,Krönecker 符号是不变的.

(3)替换性

$$\delta_{ik}A_k=A_i \tag{A12}$$

意味着,Krönecker 符号与任何物理量作用,只是替换此物理量的下标.

【例 A3】 经常遇到的 Krönecker 符号,如

$$\partial_j x_i=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ji}$$

同理

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j}=\delta_{ji}$$

式中 $\dot{x}_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$ 为速度.

【例 A4】 求证:δ_{ji} 为二阶张量.

证:由各向同性,有

$$\delta'_{ji}=\delta_{ji}$$

由正交性,有

$$\delta_{ji}=\alpha_{jk}\alpha_{ik}$$

由替换性,有

$$\alpha_{ik}=\alpha_{il}\delta_{kl}$$

因此

$$\delta'_{ji}=\alpha_{jk}\alpha_{il}\delta_{kl}$$

它符合二阶张量的定义式. 所以,δ_{ji} 为二阶张量.

2. Levi-Civita 符号(排列符号,三阶完全反对称张量)

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & (i,j,k=231,312,123)\\ -1 & (i,j,k=321,132,213)\\ 0 & (i,j,k\text{ 中至少有两个相同时})\end{cases}\tag{A13}$$

其性质是

(1) 反对称性

$$e_{ijk}=-e_{jik}\tag{A14}$$

意味着,相邻的下标互换时或相邻下标作奇数次交换时,Levi-Civita 符号改变正负号. 反对称性的另一表现是

$$(e_{ijk}A_k)=\begin{pmatrix}0 & A_3 & -A_2\\ -A_3 & 0 & A_1\\ A_2 & -A_1 & 0\end{pmatrix}\tag{A15}$$

等号右端是一个反对称矩阵.

(2) 各向同性

$$e^{*}_{ijk}=e_{ijk}\tag{A16}$$

意味着,不管坐标系如何旋转,Levi-Civita 符号是不变的.

(3) 排列性

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=e_{ijk}A_jB_k\tag{A17}$$

意味着,可将矢量之间的矢乘写成张量求和的形式. 此式的正确性可通过代入具体数字直接验证.

【例 A5】 (1) 反对称微分算子张量可表为:

$$(e_{ijk}\partial_k)=\begin{pmatrix}0 & \partial_3 & -\partial_2\\ -\partial_3 & 0 & \partial_1\\ \partial_2 & -\partial_1 & 0\end{pmatrix}$$

(2) 矢量的旋度可表为:

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_i=e_{ijk}\partial_kA_j$$

(3) 二阶张量的旋度可表为:

$$e_{jkl}\partial_lT_{ki}$$

其中"求和指标"k 和 l 的前后次序是按习惯排列的.

五、张量的运算规则

此处仅以二阶张量为例.

(1) 张量之间的加法:

$$A_{kl}+B_{kl}=C_{kl}$$

表示若将二阶张量理解为矩阵的话，只有相同“行”相同“列”的元素才可相加，而且它们的和也在相同“行”相同“列”上. 张量之间的加法有交换律和结合律.

(2) 张量与标量之间的乘法：

$$\lambda A_{kl}$$

有两种分配律：第一种

$$(\lambda+\mu)A_{kl}=\lambda A_{kl}+\mu A_{kl}$$

第二种

$$\lambda(A_{kl}+B_{kl})=\lambda A_{kl}+\lambda B_{kl}$$

还有结合律

$$\mu(\lambda A_{kl})=(\mu\lambda)A_{kl}$$

(3) 张量与矢量之间的内乘：

$$A_kT_{kl}\neq T_{lk}A_k$$

表示无交换律.

(4) 张量与张量之间的一次内乘：

$$T_{jk}S_{kl}\neq S_{jk}T_{kl}$$

表示无交换律. 但是，有结合律

$$T_{ji}(S_{ik}R_{kl})=(T_{ji}S_{ik})R_{kl}$$

(5) 张量与张量之间的二次内乘：

$$\mathrm{spur}(T_{ji}S_{ik})=T_{ki}S_{ik}$$

(6) 张量与张量之间的外乘：

$$T_{ji}S_{kl}=R_{jikl}$$

表示其积(被称为“张量积”或“Krönecker 积”)为四阶张量. 张量与张量之间的外乘有时用符号⊗表示. 有结合律，无交换律. 其特例为“并矢”.

(7) 张量的缩并(缩阶)：将一个张量的两个指标等同而加之(“求和约定”)，称为“张量的缩并”. 经过缩并后的张量比原张量低二阶，因而又称为“张量的缩阶”. 若干次缩并后的最后结果，要么是一阶张量(矢量)，要么是零阶张量(标量).

【例 A6】 (1) 二阶张量 A_{ij} 的一次缩并为：

$$A_{kk}=A_{11}+A_{22}+A_{33}+\cdots$$

(2) Krönecker 符号的一次缩并为：

$$\delta_{kk}=1+1+1=3$$

(3) Levi-Civita 符号的一次缩并为：

$$e_{jjk}=0_k \qquad (0_k \text{ 是零矢量的分量})$$

六、e_{ijk} 与 δ_{kl} 之间的关系

e_{ijk} 与 δ_{kl} 之间的关系是

$$e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{jl}&\delta_{kl}\\\delta_{im}&\delta_{jm}&\delta_{km}\\\delta_{in}&\delta_{jn}&\delta_{kn}\end{vmatrix} \tag{A18}$$

将(A18)式中的指标 n 与 k 缩并,可得

$$e_{ijk}e_{lmk}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{jl}\\\delta_{im}&\delta_{jm}\end{vmatrix}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{A19}$$

再将(A19)式中的指标 m 与 j 缩并,又可得

$$e_{ijk}e_{ljk}=2\delta_{il} \tag{A20}$$

最后,将(A20)式中的指标 l 与 i 缩并,还可得

$$e_{ijk}e_{ijk}=(e_{ijk})^2=6=3! \tag{A21}$$

以上诸式,除(A18)式较为难证外,其他都很容易证明. 当然,在(A19)式被证后,其余都不在话下.

【例 A7】 求证:$e_{ijk}e_{lmk}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{jl}\\\delta_{im}&\delta_{jm}\end{vmatrix}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

证:利用矢算公式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$$

因为

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k=e_{klm}A_lB_m$$

$$[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}]_i=-e_{ijk}(e_{klm}A_lB_m)C_j=e_{ijk}e_{lmk}A_mB_lC_j$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=A_mC_m=\delta_{jm}A_mC_j$$

$$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=B_lC_l=\delta_{jl}B_lC_j$$

$$[(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}]_i=(\delta_{jm}A_mC_j)B_i=\delta_{il}\delta_{jm}A_mB_lC_j$$

$$[(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}]_i=(\delta_{jl}B_lC_j)A_i=\delta_{im}\delta_{jl}A_mB_lC_j$$

运算中用到了矢算规则(反向矢乘变号),Krönecker 符号的替换性等;注意,"求和指标"不要重复使用! 等号两边的自由指标应该相同!

将这些表达式代入前面的矢算公式,就有

$$e_{ijk}e_{lmk}A_mB_lC_j=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_mB_lC_j$$

所以,

$$[e_{ijk}e_{lmk}-(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})]A_mB_lC_j=0$$

由于 A_m,B_l,C_j 不为零,于是有

$$e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}=\begin{vmatrix}\delta_{il}&\delta_{jl}\\\delta_{im}&\delta_{jm}\end{vmatrix},$$

此式亦可用矢算公式$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$证. 读者可作为练习.

此式得到证明后,(A20)和(A21)式就成为显然的.

七、张量典型例题

【例 A8】 求:(1) $\delta_{ik}\delta_{ik}$;(2) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{li}$.

解:提示:首先将其中一个 Krönecker 符号理解为替换符号,其余理解为"任意"张量;然后一步一步算.

(1) $\delta_{ik}\delta_{ik}=\delta_{kk}=3$

(2) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{li}=\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}=\delta_{ij}\delta_{ji}=\delta_{ii}=3$

【例 A9】 已知:T_{ij} 为二阶正交张量.

求证:(1) T_{ii},(2) $T_{ik}T_{ki}$,(3)$T_{ij}T_{jk}T_{ki}$ 为标量.

证:(1)

$$T_{ii}^{*}=\alpha_{ik}\alpha_{il}T_{kl}=\delta_{kl}T_{kl}=T_{kk}$$

(2)

$$\begin{aligned}(T_{ik}T_{ki})^{*}&=T_{ik}^{*}T_{ki}^{*}=(\alpha_{ij}\alpha_{kl}T_{jl})(\alpha_{km}\alpha_{in}T_{mn})=(\alpha_{ij}\alpha_{in})(\alpha_{kl}\alpha_{km})T_{jl}T_{mn}\\&=\delta_{jn}\delta_{lm}T_{jl}T_{mn}=T_{nm}T_{mn}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(T_{ij}T_{jk}T_{ki})^{*}&=T_{ij}^{*}T_{jk}^{*}T_{ki}^{*}\\&=(\alpha_{il}\alpha_{jn}T_{lm})(\alpha_{jn}\alpha_{kp}T_{np})(\alpha_{kq}\alpha_{ir}T_{qr})=(\alpha_{il}\alpha_{ir})(\alpha_{jn}\alpha_{jn})(\alpha_{kp}\alpha_{kq})T_{lm}T_{np}T_{qr}\\&=\delta_{lr}\delta_{mn}\delta_{pq}T_{lm}T_{np}T_{qr}=T_{lm}T_{mp}T_{pl}\end{aligned}$$

在证明过程中用到了二阶张量的定义,正交性定义,以及 Krönecker 符号的替换性.

【例 A10】 已知:T_{ij} 为二阶正交张量.

求证:$T_{ij}T_{jk}$ 也是二阶张量.

证:用二阶张量的定义,正交性定义,以及 Krönecker 符号的替换性,有

$$\begin{aligned}(T_{ij}T_{jk})^{*}&=T_{ij}^{*}T_{jk}^{*}=(\alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm})(\alpha_{jn}\alpha_{kp}T_{np})\\&=\alpha_{il}(\alpha_{jm}\alpha_{jn})\alpha_{kp}T_{lm}T_{np}=\alpha_{il}\delta_{mn}\alpha_{kp}T_{lm}T_{np}=\alpha_{il}\alpha_{kp}T_{lm}T_{mp}\end{aligned}$$

它满足二阶张量的定义.

【例 A11】 已知:T_{ik} 为二阶对称张量,S_{ik} 为二阶反对称张量.

求:$T_{ik}S_{ik}$.

解:根据对称性

$$T_{ik}=T_{ki}$$

根据反对称性

$$S_{ik}=-S_{ki}$$

因此

$$T_{ik}S_{ik}=-T_{ki}S_{ki}$$

由 Einstein 约定,累加或求和取值相同时,"累加指标"或"求和指标"换用其他文字不影响其累加或求和,所以将两个"求和指标"i 和 k 互换后又有

$$T_{ik}S_{ik}=-T_{ik}S_{ik}$$

从而

$$T_{ik}S_{ik}=0$$

这是一个重要结果:一个二阶对称张量和另一个二阶反对称张量的二次内积等于零!

【例 A12】 已知:坐标矢量满足关系 $x_j^{*}=\alpha_{ji}x_i$ 和 $\alpha_{ji}\alpha_{ki}=\delta_{jk}$;$f$ 为任意物理量.

求：$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x_i^*}$ 之间的变换关系.

解：

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}=\frac{\partial(a_{ik}x_k)}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i^*}=a_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i^*}$$

$$=a_{ik}\delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_i^*}=a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i^*}$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i^*}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*}=a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

本题结果表明，“梯度”算符之间的变换关系与矢量之间的变换关系相同.

【例 A13】 已知：J_k 为角动量矢量的分量；定义 $J_{mn}=e_{mnk}J_k$.

求：用 J_{mn} 表示 J_k 的公式.

解：在定义式两边同时作用 e_{mnl}，注意“求和指标”不要重复使用. 有

$$e_{mnl}J_{mn}=e_{mnl}e_{mnk}J_k=2\delta_{kl}J_k=2J_l$$

所以

$$J_l=\frac{1}{2}e_{mnl}J_{mn}$$

换“自由指标”后得

$$J_k=\frac{1}{2}e_{mnk}J_{mn}$$

其中用到了(A20)式.

B. 经典电动力学

一、真空中的 Maxwell 方程组

第一对 Maxwell 方程(无源方程)是

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}\tag{B1}$$

第二对 Maxwell 方程(有源方程)是

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \end{cases} \tag{B2}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为电场，$\boldsymbol{B}$ 为磁感，ρ 为电荷密度，$\boldsymbol{j}$ 为电流密度. ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 是电磁场的“源”. 且

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \tag{B3}$$

而 $\boldsymbol{v}$ 为电荷运动速度. 本书中用的是 Gauss 单位制. .

二、真空中的 Maxwell 方程组的积分形式

第一对 Maxwell 方程(无源方程)的积分形式是

$$\begin{cases} \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{1}{c}\int \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \end{cases} \tag{B4}$$

第二对 Maxwell 方程(有源方程)的积分形式是

$$\begin{cases} \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dfrac{1}{c}\int \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \dfrac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi \int \rho \mathrm{d}V \end{cases} \tag{B5}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为线元，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为面元，$\mathrm{d}V$ 为体积元. 利用 Maxwell 方程组的积分形式可以建立电磁场微分方程组的边界条件.

三、介质中的 Maxwell 方程组

第一对 Maxwell 方程(无源方程)是

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{B6}$$

其形式与真空中的第一对 Maxwell 方程(无源方程)完全相同.

第二对 Maxwell 方程(有源方程)是

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \end{cases} \tag{B7}$$

式中，$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}$ 为电感，$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$ 为磁场；ε 为介电常数，μ 为导磁系数. 很显然，在真空中，$\varepsilon=1$ 和 $\mu=1$.

通常将

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases}$$

称为“本构方程”. 它只是最一般的“本构方程”

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \end{cases}$$

的 Taylor 展开的一级近似.

四、电磁场的标势和矢势

第一对 Maxwell 方程(无源方程)无论在真空中还是在介质中都是相同的形式. 由第一对 Maxwell 方程(无源方程)可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \end{cases} \tag{B8}$$

式中,ϕ 为电磁场的“标势”,$\boldsymbol{A}$ 为电磁场的“矢势”. 由 Aharonov-Böhm 效应(AB 效应)可知,ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 也是“物理实在”.

五、Lorentz 力

设 e 为电荷,则 Lorentz 力为

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) \tag{B9}$$

式中,$\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}$,而 c 为光速.

单位质量的 Lorentz 力是

$$\boldsymbol{f} = \rho\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) = \rho \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{B10}$$

六、电荷守恒定律

在经典电动力学中,以下“电荷守恒定律”是必须严格遵守的:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{B11}$$

从这一意义上来说,“似稳场问题”并非严格遵守 Maxwell 电磁场理论(而“静电场问题”、“稳恒磁场问题”则是 Maxwell 电磁场理论中的特例). 当然,Maxwell 电磁场理论也存在某种近似性,例如 Born-Infeld 就提出过另一种更为符合实际的“非线性电

磁场理论".

七、Coulomb 规范和 Lorentz 规范

由于$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$和$(\phi,\boldsymbol{A})$之间以导数相联系,故它们之间不是一一对应的. 若设Ω为标函数,则

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}+\nabla\Omega\\ \phi^{*}=\phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}\end{cases}\tag{B12}$$

同样满足(B8)式. 因为Ω为标函数,所以用$(\phi,\boldsymbol{A})$表示的经典电动力学基本方程必须有"一个"约束条件来"规范". 这种约束条件被称为"规范条件". 通常用到的是 Coulomb 规范和 Lorentz 规范.

所谓"用$(\phi,\boldsymbol{A})$表示的经典电动力学基本方程",是将(B8)式代入第二对Maxwell方程(有源方程)(B7)式得到的. 运算中用到了本构方程. 结果是

$$\begin{cases}\nabla^{2}\phi+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho\\ \left(\nabla^{2}-\dfrac{\varepsilon\mu}{c^{2}}\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\boldsymbol{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\dfrac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{B13}$$

1. Coulomb 规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\tag{B14}$$

在 Coulomb 规范条件下,用$(\phi,\boldsymbol{A})$表示的经典电动力学(介质中的)基本方程(B13)成为

$$\begin{cases}\nabla^{2}\phi=-\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho\\ \left(\nabla^{2}-\dfrac{\varepsilon\mu}{c^{2}}\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\boldsymbol{A}-\dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\phi=-\dfrac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{B15}$$

2. Lorentz 规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\tag{B16}$$

在 Lorentz 规范条件下,用$(\phi,\boldsymbol{A})$表示的经典电动力学(介质中的)基本方程(B13)成为

$$\begin{cases}\left(\nabla^{2}-\dfrac{\varepsilon\mu}{c^{2}}\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\phi=-\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho\\ \left(\nabla^{2}-\dfrac{\varepsilon\mu}{c^{2}}\dfrac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right)\boldsymbol{A}=-\dfrac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{B17}$$

可以看出,(B17)式比(B15)式更对称,因而 Lorentz 规范条件比 Coulomb 规范条件更优越. 在以后的理论发展和讨论中,都用 Lorentz 规范.

当然，在“静电场问题”、“稳恒磁场问题”中，(B17)式与(B15)式是一样的.

八、电磁场理论的流体力学形式

利用单位质量的 Lorentz 力的表达式(B10)，

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$$

和恒等式

$$\begin{cases}(\partial_k D_k)E_i+e_{ijk}(e_{jlm}\partial_l E_m)D_k=\partial_k(E_kD_i)-\dfrac{1}{2}\partial_i(E_kD_k)\\(\partial_k B_k)H_i+e_{ijk}(e_{jlm}\partial_l H_m)B_k=\partial_k(H_kB_i)-\dfrac{1}{2}\partial_i(H_kB_k)\end{cases}\tag{B18}$$

并记：

(1) 能量密度为

$$u=\frac{1}{8\pi}(E_kD_k+H_kB_k)\tag{B19}$$

(2) 动量密度(或“能流密度”，“Poynting 矢量”)为

$$S_i=\frac{c}{4\pi}e_{ikl}E_kH_l\tag{B20}$$

(3) 动量流密度(或“Maxwell 电磁应力张量”)为

$$T_{ij}=-\frac{1}{2}(E_kD_k+H_kB_k)\delta_{ij}+(E_iD_j+H_iB_j)\tag{B21}$$

可导出经典电动力学的“流体力学形式”基本微分方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\partial_k S_k=-j_kE_k\\\dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial S_i}{\partial t}-\dfrac{1}{4\pi}\partial_k T_{ik}=-f_i\end{cases}\tag{B22}$$

经典电动力学的“流体力学形式”基本微分方程可用于讨论“磁流体力学”等与电磁场有关的交叉学科问题. 另外，由经典电动力学的“流体力学形式”基本微分方程，可以研究电磁场的守恒定律.

也有人反过来将流体力学的 Euler 运动方程化为经典电动力学 Maxwell 方程组的形式. 但必须注意的是，满足相对论协变关系的经典电动力学 Maxwell 方程组，与流体力学尤其是“非相对论流体力学”的 Eulcr 运动方程有本质的不同. 例如，经典电动力学中的“光速”与流体力学中的“声速”就是两个完全不同的概念.

另外，《经典电动力学》教科书与《流体力学》教科书有着相仿的逻辑结构：都是先建立基本微分方程，然后对各种特殊情况进行演绎. 在《经典电动力学》，是先建立 Maxwell 方程组，然后讨论诸如“静电场”，“稳恒磁场”，“似稳场”，“电磁波的传播”，

"电磁波的衍射,散射,辐射"这些具体问题. 在《流体力学》,则是先建立Navier-Stokes方程,然后讨论诸如"定常流","不可压缩流","无旋流","可压缩流","粘性流","湍流"等具体问题. 最后都是归结为解"数理方程". 学过其中的一门,就可知另一门大概是怎么回事. 联系到经典电动力学 Maxwell 方程组与流体力学的 Euler 运动方程之间可以互相演化的事实,就可看出这种逻辑结构方面的相仿,是有其必然性的.

在经典电动力学中经常要用到张量. 通常只需"DesCartes 张量". 习惯上,以拉丁字母下标表示物理空间的 3 个方向($i,j,k,l,m,n,\cdots=1,2,3$),以希腊字母下标表示物理时空的 4 个方向($\alpha,\beta,\mu,\nu,\lambda,\rho,\cdots=1,2,3,4$).

九、经典电动力学基本微分方程的四维形式

经典电动力学基本微分方程的四维形式直接与狭义相对论和 Lorentz 协变性有关.

令

$$\begin{cases} x_4 = ict \\ j_4 = ic\rho \\ A_4 = i\phi \end{cases} \tag{B23}$$

其中包括

$$v_4 = \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}t} = ic \tag{B24}$$

则可将电荷守恒方程(B11)式,Lorentz 规范(B16)式,用$(\phi,\boldsymbol{A})$表示的经典电动力学(介质中的)基本方程(B17)式化为

$$\begin{cases} \partial_\nu j_\nu = 0 \\ \partial_\nu A_\nu = 0 \\ \partial_\nu \partial_\nu A_\mu = -\dfrac{4\pi}{c} j_\mu \end{cases} \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{B25}$$

式中,j_μ 为四维电流密度,A_μ 为电磁场的四维矢势.

在真空中可定义"电磁场张量"$F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{B26}$$

其具体形式是

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{B27}$$

则真空中第一对 Maxwell 方程和第二对 Maxwell 方程可以简写为

$$\begin{cases}\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0\\ \partial_\mu F_{\mu\nu}=-\dfrac{4\pi}{c}j_\nu\end{cases}\tag{B28}$$

或

$$\begin{cases}e_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu F_{\nu\lambda}=0\\ \partial_\mu F_{\mu\nu}=-\dfrac{4\pi}{c}j_\nu\end{cases}\tag{B29}$$

式中 $e_{\mu\nu\lambda\rho}$ 为四维 Levi-Civita 符号(四阶完全反对称单位张量):

$$e_{\mu\nu\lambda\rho}=\begin{cases}1 & (\mu\nu\lambda\rho\text{ 为 }1234\text{ 的偶次置换})\\ -1 & (\mu\nu\lambda\rho\text{ 为 }1234\text{ 的奇次置换})\\ 0 & (\mu\nu\lambda\rho\text{ 中至少有两个相同时})\end{cases}\tag{B30}$$

由第二对 Maxwell 方程 $\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\dfrac{4\pi}{c}j_\nu$ 可知,电荷守恒方程又可写成

$$\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu}=0\tag{B31}$$

此结果亦可由"电磁场张量"$F_{\mu\nu}$的反对称性 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$得到.

如果电磁场在介质中而不是在真空中,则"电磁场张量"$F_{\mu\nu}$被"电磁感应张量"$H_{\mu\nu}$所代替:

$$H_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}+4\pi M_{\mu\nu}\tag{B32}$$

式中,$M_{\mu\nu}$为"极化-磁化张量":

$$M_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & M_3 & -M_2 & iP_1\\ -M_3 & 0 & M_1 & iP_2\\ M_2 & -M_1 & 0 & iP_3\\ -iP_1 & -iP_2 & -iP_3 & 0\end{pmatrix}\tag{B33}$$

而 $\boldsymbol{P}$ 为极化矢量,$\boldsymbol{M}$ 为磁化矢量. 于是,利用 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$,由(B32)可知,"电磁感应张量"$H_{\mu\nu}$的具体形式是:

$$(H_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0 & H_3 & -H_2 & -iD_1\\ -H_3 & 0 & H_1 & -iD_2\\ H_2 & -H_1 & 0 & -iD_3\\ iD_1 & iD_2 & iD_3 & 0\end{pmatrix}\tag{B34}$$

从而,介质中的第二对 Maxwell 方程是

$$\partial_\mu H_{\mu\nu}=-\frac{4\pi}{c}j_\nu\tag{B35}$$

十、对偶场张量和电磁场的不变量

在真空中的电磁场理论中可引入“对偶场张量”$G_{\mu\nu}$：
其具体形式是

$$(G_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & -iE_3 & iE_2 & B_1 \\ iE_3 & 0 & -iE_1 & B_2 \\ -iE_2 & iE_1 & 0 & B_3 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{B36}$$

则真空中第一对 Maxwell 方程和第二对 Maxwell 方程又可以进一步简写为

$$\begin{cases} \partial_\mu G_{\mu\nu}=0 \\ \partial_\mu F_{\mu\nu}=-\dfrac{4\pi}{c}j_\nu \end{cases} \tag{B37}$$

根据“两个张量之间的二次内积是标量”这一特性，可知真空中电磁场的不变量只有两种可能，即：

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\text{const.} \\ 2F_{\mu\nu}G_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}=\text{const.} \end{cases}$$

将(B27)式和(B36)式代入其中，具体得到

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2(B^2-E^2) \\ 2F_{\mu\nu}G_{\mu\nu}=e_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}=8iB_kE_k \end{cases} \tag{B38}$$

由于 $B_kE_k(k=1,2,3)$在空间反演下呈“奇性”，故后一个不变量被称为“赝不变量”.

十一、电磁场的能量动量张量

1. 四维力密度

因为 $\boldsymbol{j}$ 和 $j_4=ic\rho$ 可构成四维电流密度 j_ν，而$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$可用“电磁场张量”$F_{\mu\nu}$表示，所以由 j_ν 和 $F_{\mu\nu}$可以构成一个四维矢量的可能途径是

$$f_\mu=j_\nu F_{\mu\nu} \tag{B39}$$

不难验证，此四维矢量正好就是方程(B22)等号右端的(f_i,ij_kE_k). 当然，在真空中 $\varepsilon=1$及 $\mu=1$. 从而，f_μ 被称为“四维力密度”：

$$f_\mu=\begin{cases} f_i & (\mu=1,2,3) \\ ij_kE_k & (\mu=4) \end{cases} \tag{B40}$$

另外，由第二对 Maxwell 方程又有

$$f_\mu=j_\nu F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\left(-\frac{c}{4\pi}\partial_\lambda F_{\lambda\nu}\right)=-\frac{c}{4\pi}F_{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\lambda\nu} \tag{B41}$$

2. 电磁场的能量动量张量和场方程

电磁场的能量动量张量被定义为

$$T_{\mu\nu}=\frac{c}{4\pi}\left(F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\right) \tag{B42}$$

对其求四维散度后得

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=\frac{c}{4\pi}\left[(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}+F_{\mu\beta}(\partial_\nu F_{\beta\nu})+\frac{1}{4}\partial_\nu(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\delta_{\mu\nu}\right]$$

可以证明，上式中第一项与第三项相抵消.

首先，利用 $F_{\mu\beta}$ 的反对称性，有

$$(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}=(\partial_\nu F_{\beta\mu})F_{\nu\beta}$$

其次，将等号右端两个“求和指标”β 与 ν 互换，有

$$(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}=(\partial_\beta F_{\nu\mu})F_{\beta\nu}$$

再次，对上述两式等号右端取算术平均（并利用 $F_{\beta\mu}$ 的反对称性），有

$$(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}=\frac{1}{2}(\partial_\nu F_{\mu\beta}+\partial_\beta F_{\nu\mu})F_{\beta\nu}$$

尔后，代入第一对 Maxwell 方程，有

$$(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\beta\nu})F_{\beta\nu}=-\frac{1}{4}\partial_\mu(F_{\beta\nu}F_{\beta\nu})$$

最后，将末端那个等号右边的两个“求和指标”β 和 ν 换成 α 和 β，得到

$$(\partial_\nu F_{\mu\beta})F_{\beta\nu}=-\frac{1}{4}\partial_\mu(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$$

这证明了 $\partial_\nu T_{\mu\nu}$ 中确实是“第一项与第三项相抵消”. 于是

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=\frac{c}{4\pi}F_{\mu\beta}(\partial_\nu F_{\beta\nu})=-\frac{c}{4\pi}F_{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\lambda\nu} \tag{B43}$$

式末，将“求和指标”β 换成了 ν，同时将 ν 换成了 λ（并利用 $F_{\lambda\nu}$ 的反对称性）.

将(B41)式代入(B43)式，从而有“场方程”：

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=f_\mu \tag{B44}$$

电磁场的能量动量张量可具体写成

$$(T_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} & & & -iS_1\\ & -(T_{ik}) & & -iS_2\\ & & & -iS_3\\ -iS_1 & -iS_2 & -iS_3 & u\end{pmatrix} \tag{B45}$$

式中，T_{ik} 为 Maxwell 电磁应力张量（动量流密度），$T_{i4}=T_{4i}=-iS_i$，S_i 为 Poynting 矢量，$T_{44}=u$ 为电磁能量密度.

可以看出，电磁场的“场方程”，实际上就是经典电动力学的“流体力学形式”基本微分方程的另一种“紧凑”的写法.

在本书第二章“Lagrange 力学”中，有“电磁场的 Lagrangian 密度”如

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu) \tag{B46}$$

则可以通过 Lagrangian 密度与能量动量张量之间的一般关系式

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-(\partial_\mu A_\lambda)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)} \tag{B47}$$

得到电磁场的能量动量张量为

$$T_{\mu\nu}=(\partial_\mu A_\lambda)(\partial_\nu A_\lambda)-\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\lambda)(\partial_\rho A_\lambda)\delta_{\mu\nu} \tag{B48}$$

C. 热 力 学

一、热力学状态参量和状态方程

1. 广延量和强度量

广延量：在给定状态下，与系统质量成正比的参量；一般用大写字母表示，如内能 U（有时用 E），Helmholtz 自由能 F，Gibbs 自由能 G，焓 H，容积 V，熵 S 等；但也有用小写字母表示的，如 mol 数 n_i（下标 i 为组元编号）.

强度量：在给定状态下，不依赖于质量的参量；一般用小写字母表示，如压强 p，mol 数 n_i，化学势（或称为“热势”，“热力学势”）μ_i（下标 i 为组元编号）等；但也有用大写字母表示的，如温度 T.

2. 广延量的比量和 mol 比量

广延量的比量：广延量与系统质量之比；即每单位质量的该广延量. 广延量的比量与质量无关，是一个强度量. 因此，广延量的比量用小写字母表示.

mol 比量：广延量与系统 mol 数之比；即每 mol 的该广延量. mol 比量亦用小写字母表示，如 mol 内能 u，mol Helmholtz 自由能 f，mol Gibbs 自由能 g，mol 焓 h，mol 容积 v，mol 熵 s 等.

用相同的小写字母表示“广延量的比量”和“mol 比量”不会引起混淆. 因为在这两种“比量”出现的公式中，几乎都有能指明其为哪一种“比量”的其他量；如果没有这种其他量，则公式对两种“比量”都适用.

在绝大多数情况中，用“广延量的比量”或“mol 比量”表示的热力学公式使用起来较为方便，因为此时热力学公式将与特定系统的质量无关.

3. 热力学状态方程

通常用于理论计算的热力学状态方程有以下几种：

(1) 理想气体

$$pv = RT \tag{C1}$$

(2) van der Waals 气体

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \tag{C2}$$

(3) Dieterici(A)气体

$$\left(p+\frac{a}{v^n}\right)(v-b) = RT \tag{C3}$$

(4) Berthelot 气体

$$\left(p+\frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT \tag{C4}$$

和 Clausius 气体

$$\left[p+\frac{a}{T(v+c)^2}\right](v-b) = RT \tag{C5}$$

(5) 某真实气体

$$\left(p+\frac{a}{T^n v^2}\right)(v-b) = RT \tag{C6}$$

(6) Dieterici(B)气体

$$p = \frac{RT}{v-b}\exp\left(-\frac{a}{RT^n v}\right) \tag{C7}$$

(7) Onnes 方程为

$$pv = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \cdots \tag{C8}$$

$$pv = A + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} + \frac{D'}{v^3} + \cdots \tag{C9}$$

(8) 满足 Curie 定律的理想顺磁物质：

$$m = C\frac{B}{T} \tag{C10}$$

是类似于理想气体的另一种理想热力学体系(只不过在理想气体模型中，广义力与 mol 广义坐标成反比；而在理想顺磁模型中，广义力与 mol 广义坐标成正比；与此同时，它们同温度的关系都是简单的). 式中广义力 B 为磁感强度，mol 广义坐标 m 为磁化强度(磁化强度是 mol 强度量)，C 为常数.

(9) 橡胶棒的状态方程一般写成

$$F = kL_0 T\left[\left(\frac{L}{L_0}\right) - \frac{V}{V_0}\left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right]$$

为简单起见，可将此状态方程写成

$$\sigma = kT\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \tag{C11}$$

式中 σ 为应力，$\varepsilon = \frac{L}{L_0}$ 为应变，k 为常数.

(10) 任意两个相关的物理量，其一级相关(按 Taylor 级数展开)都是线性的. 因而，许多物理定律都是线性相关的，例如弹性力学中的(广义)Hooke 定律，电介质极化定律，磁介质磁化定律等. 以 Hooke 定律为例，

$$\sigma = k(T)\varepsilon \tag{C12}$$

式中 σ 为应力，ε 为应变；$k = k(T)$ 为弹性常数，它是 T 的任意的可微函数.

二、热力学定律

(1) 热力学第零定律：在热力学系统中存在“温度”这么一个“内参量”；热力学系统之间的“热平衡”就是由温度相等来表征的.

(2) 热力学第一定律(能量转化和守恒定律)：自然界所有物质都具有能量；在热力学系统中存在一个“内能”函数. 能量有各种不同的形式，能够从一种形式转化为另一种形式，从一个物体传递到另一个物体；在转化和传递过程中，能量的数值不变.

闭系中的热力学第一定律的微分形式是以下 Pfaff 方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}f = -s\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p \end{cases} \tag{C13}$$

它们之间由 Legendre 变换相联系：

$$\begin{cases} u = f + Ts = g + Ts - pv = h - pv \\ f = g - pv = h - Ts - pv = u - Ts \\ g = h - Ts = u - Ts + pv = f + pv \\ h = u + pv = f + Ts + pv = g + Ts \end{cases} \tag{C14}$$

而开系中的热力学第一定律的微分形式则是以下 Pfaff 方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu_i \mathrm{d}n_i \\ \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu_i \mathrm{d}n_i \\ \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu_i \mathrm{d}n_i \\ \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu_i \mathrm{d}n_i \end{cases} \tag{C15}$$

式中，重复的指标 i 按“Einstein 约定”求和.

应用(C13)式和(C14)式，可以得到“Gibbs-Helmholtz 方程”.

【例 C1】 已知：mol 内能 u，mol Helmholtz 自由能 f，mol Gibbs 自由能 g，mol 焓 h 之间的关

系是

$$u=f+Ts=g+Ts-pv=h-pv$$
$$f=g-pv=h-Ts-pv=u-Ts$$
$$g=h-Ts=u-Ts+pv=f+pv$$
$$h=u+pv=f+Ts+pv=g+Ts$$

求：Gibbs-Helmholtz 方程.

解：由

$$T=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v=\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p \qquad s=-\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v=-\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p$$
$$p=-\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s=-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \qquad v=\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T=\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s$$

可得

$$\begin{cases} u=f-T\left(\dfrac{\partial f}{\partial T}\right)_v-g-T\left(\dfrac{\partial g}{\partial T}\right)_p-p\left(\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)_T=h-p\left(\dfrac{\partial h}{\partial p}\right)_s \\ f=g-p\left(\dfrac{\partial g}{\partial p}\right)_T=h-s\left(\dfrac{\partial h}{\partial s}\right)_p-p\left(\dfrac{\partial h}{\partial p}\right)_s=u-s\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)_v \\ g=h-s\left(\dfrac{\partial h}{\partial s}\right)_p=u-s\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)_v-v\left(\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)_s=f-v\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)_T \\ h=u-v\left(\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)_s=f-T\left(\dfrac{\partial f}{\partial T}\right)_v-v\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)_T=g-T\left(\dfrac{\partial g}{\partial T}\right)_p \end{cases}$$

这些都是 Gibbs-Helmholtz 方程.

为了帮助读者记住(C13)式或(C15)式中热力学量之间的复杂关系，H. B. Callen 发明了一张“助忆图”. “助忆图”如图 C1 所示. 其规则是：①对圆弧上的 4 个热力学量 (u,f,g,h)来说，由于 u 也可写成 e，因而这 4 个热力学量(e,f,g,h)按英文字母顺序正好是顺时针排列；其微分量就是两个相邻热力学参量的全微分；②正对方的热力学参量必须与此“热力学参量的全微分”相乘；③“箭头方向”指出时，这一项为正，“箭头方向”指入时，这一项为负. 这些规则可以自行验证.

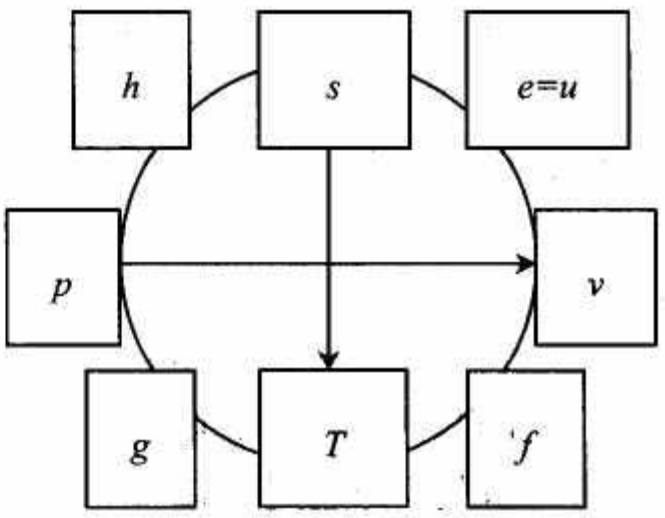


图 C1

在非气体的热力学理论中，$(-p)$用“广义力”X_k 代替，同时 V 用“广义位移”x_k 代替$(k=1,2,\cdots)$.

(3) 热力学第二定律：(Kelvin 即 W. Thomson 表述)不可能通过非生物的作用，将物质的任何一部分冷却到环境中最冷物体的温度以下，而获得机械效益. (Planck 表述)不可能造成一种机器，它在循环工作中将一个重物升高的同时，使得一冷库冷

却而不产生其他影响.（Clausius 表述）不可能有这样的过程，它的唯一结果是将热量从较冷物体转移到较热物体.

热力学第二定律中引入了“熵”的概念. 在平衡态热力学系统中，熵取极大值. 如果引入 Schrödinger 的“负熵”概念，则在平衡态热力学系统中，负熵取极小值. Einstein 说过：“熵定律是所有科学定律中的第一定律.”

热力学第二定律可以用“Gibbs 变分原理”来表示. “Gibbs 变分原理”来自“热动平衡”的三大判据：

①熵最大判据：热力学系统在内能和容积不变的情形下，对于各种可能的“虚变动”，平衡态的熵最大.

②Helmholtz 自由能最小判据：热力学系统在温度和容积不变的情形下，对于各种可能的“虚变动”，平衡态的 Helmholtz 自由能最小.

③Gibbs 自由能最小判据：热力学系统在温度和压强不变的情形下，对于各种可能的“虚变动”，平衡态的 Gibbs 自由能最小.

Bazarov 指出，平衡态热力学中的变分法是“Gibbs 仿造 Lagrange 静力学的方式发展起来的，即把虚位移原理推广到热力学系统.”Pauli 将此变分法称之为“Gibbs 变分法”. Gibbs 变分法表述形式可在文献中找到. 吴大猷先生将 Gibbs 在热力学中所引入的、类似于分析力学中“虚位移”的变动，称为“虚变”；而王竹溪先生则将这种“相当于静力学上的虚位移”称为“可能的变动”和“无穷小的虚变动”.

最原始的 Gibbs 变分原理所考虑的是熵差（取到二级变分项）

$$\Delta S = \delta S + \delta^2 S \tag{C16}$$

根据热力学第二定律，“在平衡态热力学系统中，熵取极大值”，即“熵最大判据”

$$\Delta S < 0 \tag{C17}$$

因此有

$$\delta S = 0 \qquad \text{和} \qquad \delta^2 S < 0 \tag{C18}$$

可以证明，“熵最大判据”与“Helmholtz 自由能最小判据”或“Gibbs 自由能最小判据”是等价的. 即还同时有

$$\Delta F > 0 \tag{C19}$$

或

$$\Delta G > 0 \tag{C20}$$

【例 C2】 已知：在平衡态热力学中，除了热力学第一定律

$$\begin{cases} \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}n \end{cases}$$

外，最根本的就是 Gibbs 变分原理. Gibbs 变分原理可由熵差(取到二级变分项)

$$\Delta S = \delta S + \delta^2 S$$

和平衡态条件(Gibbs 条件)及“熵最大判据”(热力学第二定律)

$$\Delta S < 0$$

得到；亦即

$$\delta S = 0 \qquad \delta^2 S < 0$$

求证：Gibbs 变分原理的另外两种形式

(1) $\delta F=0, \delta^2 F>0$，(在温度和容积不变条件下)；

(2) $\delta G=0, \delta^2 G>0$，(在温度和压强不变条件下).

证：由

$$\begin{cases} \mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}n \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} S = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,n} \\ S = -\left(\dfrac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,n} \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \delta S = -\delta\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,n} = -\left[\dfrac{\partial(\delta F)}{\partial T}\right]_{V,n} \\ \delta S = -\delta\left(\dfrac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,n} = -\left[\dfrac{\partial(\delta G)}{\partial T}\right]_{p,n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta^2 S = -\left[\dfrac{\partial(\delta^2 F)}{\partial T}\right]_{V,n} \\ \delta^2 S = -\left[\dfrac{\partial(\delta^2 G)}{\partial T}\right]_{p,n} \end{cases}$$

证明中用到了 Gibbs 变分 δ 与对温度的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial T}$可对易的假设(相当于建立了一个“等温变分”假设). 证明是对开系而言的，所以还有“mol 数不变”的条件(对闭系而言则无此条件). 于是 $\delta F=0$ 或 $\delta G=0$ 时，必有 $\delta S=0$；而 $\delta^2 F>0$ 或 $\delta^2 G>0$ 时，必有 $\delta^2 S<0$；换言之，当 F 或 G 取极小值时，S 取极大值.

(4) 热力学第三定律：不可能使一个物体冷到绝对温度的零度.

三、Maxwell 关系

1. 数学上的全微分条件

若

$$\mathrm{d}Z = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$$

其中

$$X = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

则全微分条件为

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$$

即

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

2. Maxwell 关系

由(C13)式和全微分条件,立即可得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)_s=-\left(\dfrac{\partial p}{\partial s}\right)_v & \left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_T=-\left(\dfrac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ \left(\dfrac{\partial s}{\partial v}\right)_T=\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_v & \left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\left(\dfrac{\partial v}{\partial s}\right)_p\end{cases} \tag{C21}$$

当然,将以上 4 式中的分子与分母互换所得的另外 4 式也成立. 这 8 个公式,统称为"Maxwell 关系".

【例 C3】 已知:热力学第一定律为

$$\mathrm{d}u=T\mathrm{d}s-p\mathrm{d}v$$

式中 u 为 mol 内能;若(x,y)是两个任意的独立变量.

求证:$\dfrac{\partial(T,s)}{\partial(x,y)}=\dfrac{\partial(p,v)}{\partial(x,y)}$;并由此导出 Maxwell 关系式.

证:因为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u(x,y)&=T\mathrm{d}s(x,y)-p\mathrm{d}v(x,y)\\&=\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_y-p\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y\right]\mathrm{d}x+\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_x-p\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y=T\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_y-p\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_y\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x=T\left(\dfrac{\partial s}{\partial y}\right)_x-p\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_x\end{cases}$$

根据 $\mathrm{d}u(x,y)$是全微分的充分必要条件,得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$$

即

$$\frac{\partial(T,s)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(p,v)}{\partial(x,y)}$$

于是

$$\frac{\partial(T,s)}{\partial(p,v)}=1$$

或者说,以(p,v)为正则变量的 Poisson 括号

$$[T,s]_{p,v}=1$$

成立.

讨论:可以得到如下 Maxwell 关系式

(1)当$\begin{cases}x=s\\y=v\end{cases}$时,有$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v=-\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s$;

(2)当$\begin{cases}x=s\\y=p\end{cases}$时,有$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$;

(3)当$\begin{cases}x=T\\y=v\end{cases}$时,有$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$;

(4)当$\begin{cases}x=T\\y=p\end{cases}$时,有$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=-\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$.

【例 C4】 已知:链式关系

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

和一个 Maxwell 关系式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s=-\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

求:另外 3 个 Maxwell 关系式.

解:(1) 由链式关系和已知的 Maxwell 关系式,有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v=1$$

于是,得 Maxwell 关系式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T$$

(2) 由链式关系

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T=-1$$

和刚才已证的 Maxwell 关系式,有

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p=-1$$

于是,得 Maxwell 关系式

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

(3) 由链式关系

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p=-1$$

和刚才已证的 Maxwell 关系式,有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p=1$$

于是,得 Maxwell 关系式

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$$

【例 C5】 已知:一个 Maxwell 关系式

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

求:另外 3 个 Maxwell 关系式(用 Jacobian 的性质).

解:(1) 引进中间变量(s,v),因为

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial(s,T)}{\partial(p,T)} = \frac{\partial(s,T)}{\partial(s,v)} \cdot \frac{\partial(s,v)}{\partial(p,T)} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

所以

$$\frac{\partial(s,T)}{\partial(s,v)} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{\partial(p,T)}{\partial(s,v)} = -\frac{\partial(p,v)}{\partial(p,T)} \cdot \frac{\partial(p,T)}{\partial(s,v)} = -\frac{\partial(p,v)}{\partial(s,v)} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

于是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

(2) 同样,在上述 Maxwell 关系式中引入中间变量(s,p),因为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = \frac{\partial(T,s)}{\partial(v,s)} = \frac{\partial(T,s)}{\partial(s,p)} \cdot \frac{\partial(s,p)}{\partial(v,s)} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

所以

$$\frac{\partial(T,s)}{\partial(p,s)} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \frac{\partial(v,s)}{\partial(p,s)} = -\frac{\partial(p,v)}{\partial(s,v)} \cdot \frac{\partial(v,s)}{\partial(p,s)} = \frac{\partial(p,v)}{\partial(p,s)} = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p$$

于是

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p$$

(3) 同样,在上述 Maxwell 关系式中引入中间变量(T,v),可得

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

3. Maxwell 关系的应用

由 Maxwell 关系可算得许多热力学公式,如:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s - p$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_s = s\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v - p \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_p = s\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_T - p$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_s = -s\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p + v \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_v = -s\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_T + v$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + v \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_v = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s + v$$

和

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_p = -s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p - p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_s = -s\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_v = -s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v - v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_s = s\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v + v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v + v\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v + v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$

以及

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = c_v \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_s = -p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = pv\kappa_s$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_v = -s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v = -\frac{sT}{c_v} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_T = -p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = pv\kappa_T$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_p = -s\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = -\frac{sT}{c_p} \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_T = v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -k_T$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = c_p \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_s = v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -k_s$$

其中，α 为等压膨胀系数，β 为等容压强系数，κ_T 为等温压缩系数，κ_s 为等熵压缩系数，k_T 为等温弹性模量，k_s 为等熵弹性模量，

$$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \qquad \beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \qquad \kappa_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$$

$$k_T = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{\kappa_T} \qquad k_s = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \frac{1}{\kappa_s}$$

c_v 为 mol 等容热容量，c_p 为 mol 等压热容量：

$$\begin{cases} c_v = \left(\dfrac{\partial u}{\partial T}\right)_v = T\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_v \\ c_p = \left(\dfrac{\partial h}{\partial T}\right)_p = T\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_p \end{cases} \tag{C22}$$

以上这些公式可以作为习题加以验证.

加拿大籍华人科学家姚玉林(Y. L. Yao. 不可逆过程热力学. 北京：科学出版社，1981)认为："除了流体动力学和电动力学以外，没有哪一门学科像热力学一样推导了如此丰富的公式. "可见，这 3 门物理学学科都是以"公式多"而著称的. 由于主题和篇幅限制，本书不再继续介绍其他热力学公式；有兴趣的读者可参阅沈惠川教授和郑久仁教授所著《热物理习题精解(下)》(科学出版社，2004).

参 考 文 献

[1] APPELL P. Traité de mécanique rationnelle. Paris:[s. n.]. 1896,1899,1953,1955.
全书共5卷;在第2卷第24章"分析动力学的普遍方程"中提出了著名的讨论非完整系统的Appell方程.

[2] ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1978.
此书被誉为经典力学的三本"圣经"之一;书中在许多问题(例如正则方程的推导)方面高瞻远瞩并讨论了"混沌".

[3] D'ALEMBERT J R. Traité de dynamique. Paris:[s. n.]. 1743.
全书两部分7章;书中指出Newton第二定律也适用于非自由物体和完全固定的物体,从而开辟了对非自由质点系动力学的研究;书中提出的原理,后来演变为d'Alembert原理的现代说法.

[4] GOLDSTEIN H. Classical mechanics. 2nd ed. Mass.: Addison-Wesley Publishing Co. 1980. (中译本:陈为恂,译. 经典力学. 北京:科学出版社,1986.) GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. Classical mechanics. 3nd ed. Mass: Addison-Wesley Publishing Co.,2002.
此书几十年来一直是流行的标准教科书,书中资料很多,第3版中增加了"混沌"一章. 但此书中对"推广的Hamilton原理"的说法受到吴大猷先生的批评;另外作为教科书,书中习题没给出答案也是很遗憾的.

[5] GREENWOOD D T. Principles of dynamics. New York: Prentice-Hall,1965.
此书是《Classical Dynamics》的初版.

[6] GREENWOOD D T. Classical dynamics. New York: Prentice-Hall,Inc.,1977. (中译本:孙国锟,译. 经典动力学. 北京:科学出版社,1982.)
此书也是流行的教科书,书中对"推广的Hamilton原理"有一种自圆其说的说法;有习题答案,但习题不多.

[7] HAMEL G. Theoretische mechanik. Berlin: Springer-Verlag,1949.
此书第9章"有限自由度的非完整系统"中导出了著名的准坐标下的Boltzmann-Hamel方程并给出了二阶非完整约束的实例.

[8] HAMILTON W R. On a general method in dynamics, by which the study of the motion of all free systems attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation or characteristic function. Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. II,1834:247～308.

[9] HAMILTON W R. Second essay on a general method in dynamics. Phil. Trans. of the Roy. Soc., T. I,1835:95～144.
这篇论文和上面那篇论文奠定了Hamilton力学的基础;文中提出了Hamilton原理和正则方程.

[10] HERTZ H. Die prinzipien der mechanik in neuem zusammenhange dargestellt. Leibzig:

[s. n.]. 1894.

此书首次将约束和力学系统分为完整的和非完整的两大类;全书共 3 卷,第 1 卷为运动学,第 2 卷为动力学,第 3 卷为杂文和电波.

[11] JACOBI C G. Vorlesungen über dynamik. Berlin:[s. n.]. 1866.

此书是 Hamilton-Jacobi 方程的最早记录;书中介绍了正则方程的解法(Hamilton-Jacobi 理论)和正则变换,给出了最小作用量原理的 Jacobi 形式.

[12] LAGRANGE J L. Mécanique analytique. Paris:[s. n.]. 1788.

全书静力学 8 章,动力学 12 章;1815 年的第 3 版增加 8 篇附录;书中由变分原理出发建立了受约束力学系统的平衡和运动方程,并首次引入广义坐标和广义速度等概念;整本书用分析的形式写成,没有一张图;书中还讨论了微振动理论和刚体定点转动问题.

[13] LANCZOS C. The variational principles of mechanics. 4th ed. Toronto: University of Toronto Press,1970.

此书在基本概念和变分方法方面很有特色,给出了分析力学的一些主要观点,尤其是时间变换和 Hamilton 力学部分更值得一读.

[14] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Mechanics. 3rd ed. Course of theoretical physics, vol. 1. Oxford: Pergamon Press,1976. (中译本:力学. 理论物理教程第 1 卷. 北京:高等教育出版社,1959.)

此书是物理学名著的第 1 卷,具有 Landau 特色,物理学气味很浓.

[15] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Theory of elasticity. 3rd ed. Course of theoretical physics, vol. 7. Oxford: Butterworth-Heinemann,1986. (中译本:彭旭麟,译. 连续介质力学:理论物理教程第 7 卷. 北京:人民教育出版社,1958.)

此书在很短的篇幅内就导出了弹性力学的基本方程;尽管此书很薄,但物理学家感兴趣的弹性力学问题尽收其中.

[16] MARION J B. Classical dynamics of particles and Systems. 2nd ed. New York: Academic Press,1970. (中译本:李笙,译. 质点与系统的经典动力学. 北京:高等教育出版社,1986.)

此书对 Lagrange 方程的主要特点,Hamilton 原理以及它与 Lagrange 方程和正则方程之间的关系作了充分讨论.

[17] NEWTON I. Philosophiae naturalis principia mathematica. London:[s. n.]. 1686. (中译本:郑太朴,译. 自然哲学之数学原理. 北京:商务印书馆,1931;王克迪,译. 自然哲学之数学原理. 武汉:武汉出版社,1992.)

此书是经典力学的开山之作,也是理论物理学的开山之作. 全书共 3 卷 193 命题(还有 82 问题,111 定理,47 引理),卷首有 8 定义,3 定律,6 推论. 王克迪的译本另附《宇宙体系》.

[18] NIELSEN J. Vorlesungen über elmentare mechanik. Berlin: Springer-Verlag,1980.

此书导出了 Lagrange 方程的 Nielsen 形式.

[19] PARS L A. A treatise on analytical dynamics. Oxford: Heinemann,1965.

全书共 30 章;用另一种方法导出了 Lagrange 方程;对 Lagrange 方程及其应用,基本方程的 6 种形式,Hamilton 原理和变分原理等讨论得相当详细.

[20] POISSON S D. Traité de dynamique. Paris:[s. n.]. 1833.

此书曾长期作为标准的教科书;书中引入了 Poisson 括号并提出了 Poisson 定理.

[21] ROUTH E J. A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Elementary Part and Advanced Part, New York: New York, 1955.
此二卷本中的资料几乎是独一无二的.

[22] RUND H. The hamilton-jacobi theory in the calculus of variation. London: D. van Nostrand Company, Ltd., 1966.
此书以几何观点对 Hamilton 原理、非完整系统和积分不变量以及 Hamilton-Jacobi 理论作了很好的讨论.

[23] SANTILLI R M. Foundations of theoretical mechanics I. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
此书对 Birkhoff 方程及其变换理论作了详尽的研究,并对 Birkhoff 方程的起源及其发展作了很好的总结.

[24] SOMMERFELD A N. Lectures on theoretical physics: Vol. 1. New York: Academic Press, 1952.
此书对陀螺的研究尤为详尽.

[25] SYNGE J L. Classical dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1960.
此书的特色是侧重几何观念.

[26] SYNGE J L. BYRON A G. Principles of mechanics. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.
此书的特色同样是侧重几何观念.

[27] TER HARR D. Elements of Hamiltonian Mechanics. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1971.
此书有大量实例讨论微振动,并且在形式上将时间和能量也推广为一对正则变量;书中的许多论述(例如作用角变量)是独特的.

[28] THOMSON W (LORD KELVIN), PETER G T. Reprinted as principles of mechanics and dynamics. New York: Dover, 1962.
此书对能量的理解十分深刻.

[29] WHITTAKER E T. A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937.
此书总结了 20 世纪前分析力学的成就,对虚位移、广义坐标和约束等概念作了极好的讲述,并从 Newton 方程出发重新导出了 Lagrange 方程;P. A. M. Dirac 的量子力学符号法的提出就是受了此书的启发.

[30] 陈滨. 分析动力学. 北京:北京大学出版社,1982.

[31] 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京:北京工业学院出版社,1985.

[32] 梅凤翔,刘桂林. 分析力学基础. 西安:西安交通大学出版社,1987.

[33] 梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京:北京工业学院出版社,1987.

[34] 梅凤翔. 分析力学专题. 北京:北京工业学院出版社,1988.

[35] 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社, 1991.

[36] 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1996.

[37] 梅凤翔. 史荣昌,张永发,朱海平. 约束力学系统的运动稳定性. 北京:北京理工大学出版社,1997.

[38] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社,1999.

[39] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京,北京理工大学出版社,2004.

[40] 沈惠川. Liouville 方程的八类精确解. 物理学报,2000,49(2):201～209.

[41] 沈惠川. 一类非线性非完整系统的 Routh 方程:从 Chetaev 条件到 Euler 条件. 物理学报,2005,54(6):2468～2473.

[42] 沈惠川. Vlasov 方程的精确解. 数学物理学报,1996,16(1):40～47.

[43] 沈惠川. 弹性力学的 Lagrange 形式:用 Routh 方法建立弹性有限变形问题的基本方程. 数学物理学报,1998,18(1):78～88.

[44] SHEN HUICHUAN (沈惠川). Dynamical stress function tensor. Applied Mathematics and Mechanics, 1982,3(6):899～940.

[45] SHEN HUICHUAN. The fission of spectrum line of monochoromatic elastic wave. Applied Mathematics and Mechanics,1984,5(4):1509～1519.

[46] SHEN HUICHUAN. The solution of deflection of elastic thin plate by the joint action of dynamical lateral pressure, force in central surface and external field on the elastic base. Applied Mathematics and Mechanics,1984,5(6):1791～1801.

[47] SHEN HUICHUAN. The relation of von Karman equation for elastic large deflection problem and Schröodinger equation for quantum eigenvalues problem. Applied Mathematics and Mechanics,1985,6(8):761～775.

[48] SHEN HUICHUAN. General solution of elastodynamics. Applied Mathematics and Mechanics,1985,6(9):853～858.

[49] SHEN HUICHUAN. The Schrödinger equation of thin shell theories. Applied Mathematics and Mechanics,1985,6(10):957～973.

[50] SHEN HUICHUAN. The Schrödinger equation in theory of plates and shells with orthorhombic anisotropy. Applied Mathematics and Mechanics,1987,8(4):367～376.

[51] SHEN HUICHUAN. Further study of the relation of von Karman equation for elastic large deflection problem and Schrödinger equation for quantum eigenvalues problem. Applied Mathematics and Mechanics,1987,8(6):539～546.

[52] SHEN HUICHUAN. General solutions of elasticity and peristaltic fluid dynamics. in "Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China "(ed by Chien Weizang). International Academic Publishers and Pergamon Press,1990,2:145～154.

[53] SHEN HUICHUAN. Application of inverse scattering method in vibration of sandwich plates with large deflection. in "Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China "(ed by Chien Weizang). International Academic Publishers and Pergamon Press,1991,3:51～63.

[54] 沈惠川. 动力应力函数张量及弹性静力学的通解. 中国科学技术大学学报,1984,14(增刊1):95～102(84016).

[55] 沈惠川. 吴大猷先生点评《经典力学》. 物理,2000,29(12):743～746/739.
此文披露了吴大猷先生对某些经典力学教科书中所谓"推广的 Hamilton 原理"的批评,并提供了吴大猷先生的"猝量理论"的一些想法.

[56] 钱伟长，等. 弹性力学. 北京：科学出版社，1956.
此书详细介绍了弹性力学中的一些具体问题.
[57] 钱伟长. 广义变分原理. 上海：知识出版社，1985.
此书关于广义变分原理的资料十分丰富，其积分形式可以方便地变换成微分形式；书中还有关于 Lagrange 未定乘数法与胡海昌的辩论材料.
[58] 吴大猷. 古典动力学. 台北：联经出版事业公司，1977.（北京：科学出版社，1983.）
此书的原稿是第一本以物理学家的眼光写成的华文经典力学教科书，其成书年代甚至早于 Goldstein H.；书中首次纠正了所谓“推广的 Hamilton 原理”的错误说法.
[59] 杨来伍，梅凤翔. 变质量系统力学. 北京：北京理工大学出版社，1989.
[60] 张福范. 弹性薄板. 北京：科学出版社，1963.
此书是系统介绍弹性薄板的第一本华文科技书.
[61] 赵跃宇，梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京：科学出版社，1999.

人名索引

陈省身(1911～2004) 405
高普云 172
郭仲衡(1933～1993) 172
胡海昌(1928～) 123
梅凤翔(1938～) 172
牛青萍 176
彭恒武(1915～) 64
钱伟长(1912～) 56,57,123,124,235
田长霖(1935～2002) 57,373
王竹溪(1911～1983) 426
吴大猷(1907～2000) 162,225,273,279,280,296,307,326,426
姚玉林 431
王克迪 1,13
郑太朴(1901～1949) 1
汤川秀树(Yukawa H. 1907～1981) 15
Aczel A. D. 193
Aharonov Y. (1932～) 415
Airy J. G. B. (1801～1892) 73,75,78,83,93,237
Arnold V. I. (1937～) 361
Atwood 257
Avogadro L. R. A. C. (1776～1856) 31
Babokovich 76,77,80,81
Ballentini L. E. 379
Beltrami E. (1835～1900) 67,68
Bernoulli Jakob (1654～1705) 214,219,220
Bernoulli Johann (1667～1748) 81
Berthelot P. E. M. (1827～1907) 423
Betti E. (1823～1892) 77
Bianchi L. (1856～1928) 73
Binet J. (1786～1856) 292,298,299
Birkhoff G. D. (1884～1944) 383～389
Bogoliubov N. N. (1909～) 379
Böhm D. (1917～1992) 274,361,415
Boltzmann L. E. (1844～1906) 31,377,379～382
Born M. (1882～1970) 64,242,243,274,279,415
Boussinesq J. V. (1842～1929) 76,77,79,80
Brillouin L. (1889～1969) 57
Callen H. B (1919～1993) 323,425
Carnot S. (1796～1832) 214
Cauchy B. A. L. (1789～1857) 58,59,66,68,69,82～85,236,238,239
Cayley A. (1821～1895) 41,42
Chasles M. (1793～1880) 35,43
Chetaev N. G. (1902～1953) 104,172～179
Chladni E. F. F. (1756～1827) 81
Clausius R. J. E. (1822～1888) 30,423,426
Coriolis G. G. (1792～1843) 11,12,191,284
Curie P. (1859～1906) 423
Darwin C. G. (1887～1962) 57,372
d'Alembert J. L. R. (1717～1783) 95～97,101～104,108,110～113,119～121,126～128,131,132,161,175,176,178,179,189,221
de Broglie L. (1892～1987) 1,194,231,243,326,348,351,361,379,386

de Coulomb C. A. (1736～1806) 15,355,416
de Fermat P. (1601～1665) 214,230,231
de LaPlace P. S. M. (1749～1827) 21,22,345
de Maupertuis P.-L. M. (1698～1759) 99,213,214,221,228～232,350,351,364
de Saint Venant A. J. C. A. (1797～1866) 58～60,67,68
de Vries G. 244
Debye P. J. W. (1884～1966) 55
Deleanu S. 104
DesCartes R. (1596～1650) 4,7,14,96,148,192,407,418
Dieterici S. F. W. (1790～1859) 423
Dirac P. A. M. (1902～1984) 1,43,96,201,326,333,348,353,384
Dirichlet P. G. L. (1805～1859) 194～196
Einstein A. (1879～1955) 1,2,14,32,49,82,102,120,121,171,193,194,214,243,293,351,405～407,424,426
Eubanks R. A. 80
Euclid (约前 330～前 260) 1,3,13
Euler L. (1707～1783) 32,38～41,43,47,48,52,53,56～58,81,95,96,110,114,133,152,174,175,177,178,179,183,184,213,214,216,217,219～222,225,227,228,232,240,282,298,305,306,308,310,311,372,373,375,417,418
Feynman R. P. (1918～1988) 96
Fok V. A. (1898～1974) 73
Foucault J. L. (1819～1868) 12
Fowler R. H. (1889～1944) 57,333,372
Frenet J. F. (1816～1900) 4
Galerkin B. G. (1871～1945) 76,80
Galileo G. (1564～1642) 2,383
Gauss K. F. (1777～1855) 31,61,62,102～104,176,414
Germain Sophie (1776～1831) 81,83,84,237,238
Gibbs J. W. (1839～1903) 214,323,422
Goldstein H. 23,278
Gordon W. (1839～1940) 245,285,313,314
Green G. (1793～1841) 66
Gurtin M. E 80
Hamilton W. R. (1805～1865) 1,42,95,96,132,172,173,176～179,187,213,214,221～229,231,232,243,273,274,276～282,287,288,292,295～297,304,306～311,315～317,323,325,333,335,346～353,361～365,370,383～387,389
Heisenberg W. (1901～1976) 333
Hermite C. (1822～1901) 326
Hilbert D. (1862～1943) 214
Hooke R. (1635～1703) 15,55,63,66,67,69,83,236,424
Infeld L. (1898～1968) 243,244,415
Jacobi K. G. J. (1804～1851) 150～152,227～229,243,274,305,324,325,327,337,346～348,350～353,361,363,364,371,386
Jehle H. (1907～) 96
Jourdain P. E. B. (1879～1919) 102,103,104,176
Klein F. (1849～1925) 41,42
Klein O. (1894～1977) 245,285,313,314
Kirchhoff G. R. (1824～1887) 81,82,85,238
König J. S. 1,28,29,43,163
Kortweg D. J. 244
Kowalewskaja S. V. (1850～1891) 48
Kozlov V. V. 177
Krönecker L. (1823～1891) 174,407,410,411
Krutkov Y. A. (1890～1952) 73～75
LaGrange C. J. L. (1736～1813) 1,48,56～58,61,62,68,69,81,85,95～97,101,

102,108,111,112,119～124,126,128～134,146～153,161～163,167,171～173,177,178,182～184,187～190,193～196,198,199,210～213,217,221～225,227,228,232～243,273,274,276～278,280～282,287,291,295～298,305,306,308,310,311,315～317,370,372,373,389,422,426
Lame G. (1795～1870) 65～67,76,79
Landau L. D. (1908～1968) 55,56,225
LeGendre A. M. (1752～1833) 274～278,280,292～297,305～307,309,318,323,387
Lennard-Jones J. E. (1894～1954) 15
Lenz W. (1888～1957) 21,22,345
Levi-Civita T. (1873～1941) 59,62,73,74,405,409,410,419
Lienhard J. H 57,373
Lifshitz E. M. (1915～1985) 55,56
Lindsay R. B. 273
Liouville J. (1809～1882) 370,372,374～377,379～382
Lochak G. 194
Lorentz H. A. (1853～1928) 13,15,97,169,225,242,326,376,377,415～418
Lotka A. J. (1880～1949) 290
Love A. E. H. (1863～1940) 81,82,85,238
MacLaurin C. (1698～1746) 173,178,179
Magneron D. 104
Margenau H. (1901～) 273
Maxwell J. C. (1831～1879) 57,64,73～75,168,212,225,240,241,325,339,372,377,380,413～421,427,428,430
Michell J. H. (1863～1940) 67,68
Mindlin 84
Morera G. (1856～1909) 73～75
Navier C. L. M. H. (1785～1836) 55,61,62,66～68,81,418
Neuber G. 76,77,80,81
Newton I. (1643～1727) 1～3,9,11～21,23～25,30,32,61,126～128,131,133,148,149,151,161～163,189,225,228,230,376
Ohm G. S. (1787～1854) 211
Onnes H. K. (1853～1926) 423
Ostrogradsky M. V. (1801～1862) 227,305
Pauli W. (1900～1958) 32,43,225,354,384,426
Pfaff J. F. (1765～1825) 318～322,347,361,363,385,386,388,424
Planck M. (1858～1947) 213,231,425
Poincare H. (1854～1912) 325,370,372,373
Podolsky B. (1896～1966) 346
Poinsot L. (1777～1859) 36,48
Poisson S. D. (1781～1840) 10,11,48,65,66,81,274,333～340,346,366,370,379,380,382,385
Poynting J. H. (1852～1914) 417,421
Prigogine I. (1917～2003) 55,375
Reissner E. 85
Ricci-Curbastro G. (1853～1925) 405
Rosen N. (1909～) 346
Rosenberg 168
Routh E. J. (1831～1907) 98,149,150,171～175,177～179,239,274,292～295,297～299
Runge C. D. T. (1856～1927) 21,22,345
Rutherford E. (1871～1937) 299
Salam A. (1926～1996) 15
Santilli R. M. (1935～) 383
Schering E. (1824～1889) 167
Schrödinger E. (1887～1961) 14,170,214,225,246,274,315,375,379,426
Serret J. A. (1819～1885) 4
Stäckel P. G. S. (1862～1919) 352
Sternberg E. 80
Stokes G. G. (1819～1903) 75,79,418