目　　录

前言

第一章　质点运动学 …… （ 1 ）

§1　速度　加速度 …… （ 1 ）

§2　角速度 …… （ 13 ）

习题 …… （ 14 ）

第二章　质点动力学 …… （ 20 ）

§1　运动定律　基本定理和守恒定律　保守力 …… （ 20 ）

§2　万有引力　引力势能 …… （ 35 ）

§3　质点在均匀重力场中的运动 …… （ 40 ）

§4　线性振动 …… （ 44 ）

§5　约束运动 …… （ 55 ）

§6　带电粒子在电磁场中的运动 …… （ 62 ）

习题 …… （ 68 ）

第三章　质点的相对运动 …… （ 77 ）

§1　伽里略变换与牛顿的相对性原理 …… （ 77 ）

§2　相对运动运动学 …… （ 79 ）

§3　相对运动动力学 …… （ 88 ）

习题 …… （ 97 ）

第四章　质点系动力学 …… （101 ）

§1　质点系的基本定理和守恒定律 …… （102 ）

§2　变质量物体的运动 …… （117 ）

习题 …… （124 ）

第五章　拉格朗日力学 …… （128 ）

§1　虚功原理 …… （128 ）

§2　平衡及其稳定性 …… （134 ）

§3　拉格朗日方程 …… （144 ）

习题 …… (179)
第六章 微振动 …… (189)
§1 单自由度系统平衡位置附近的微振动 …… (189)
§2 多自由度耦合系统的微振动 …… (200)
习题 …… (236)
第七章 中心力场中的运动 …… (243)
§1 中心力场中运动的一般特征 …… (243)
§2 开普勒问题 反平方力 …… (256)
§3 圆形轨道的稳定性 运动的稳定性 …… (280)
§4 散射 实验室坐标系和质心坐标系 …… (289)
习题 …… (300)
第八章 刚体的运动 …… (311)
§1 刚体运动的描述 …… (311)
§2 质量几何 动能和角动量 …… (325)
§3 刚体的运动方程和平衡方程 …… (337)
§4 定轴转动、平面运动和定点运动 …… (341)
§5 打击理论 …… (384)
习题 …… (406)
第九章 哈密顿动力学 …… (419)
§1 力学原理及其分类 …… (419)
§2 变分运算 …… (421)
§3 哈密顿原理 哈密顿正则方程 …… (427)
§4 正则变换 …… (440)
§5 泊松括号和泊松定理 …… (446)
§6 哈密顿-雅可比 (H-J) 方程 …… (451)
习题 …… (461)
附录一 坐标变换 矩阵 向量 坐标系 本征值问题 …… (464)
附录二 简单均质刚体的形心位置和转动惯量 …… (479)

第一章　质点运动学

运动学是运动的几何学，是物理体系在三维空间和时间中运动的几何描述。它主要通过位置向量r，位移dr，速度v，加速度a，角速度ω等运动学量，来描述物体是怎样运动的。

一个质点可看作没有延展性的物体。质点的位置可以用三维空间的一个点来表示，它的大小与它的运动轨道及周围的物体相比非常地小。在运动学中，质点就是几何点。

质点运动学，是研究质点系或有延展性的物体运动学的基础。

§1　速度　加速度

理论要点

1．参考系　坐标系　计算系统

由于运动的相对性，判定物体静止还是运动及如何运动，必须选定另外的物体作标准。这个被选定的物体或物体群，称为**参考系**。参考系选定后，对物体运动的描述就确定了。

物体的运动可以用向量表示。以向量表达物理规律十分简洁，但为了应用数学的分析表达式并进行具体运算，还必须在参考系中建立坐标系，以便用一组数来表示一个向量，进行数学运算。对运动学来说，参考系的选择是任意的，但对动力学来说则不是所有参考系都是等价的，要区别惯性系和非惯性系。物体的动力学方程式，对于不同的参考系是不同的。

坐标系确定后，加上计时方法，就构成一个**计算系统**.

2. 速度、加速度及其在各种坐标系中的表达式

（1）位置向量、速度向量和加速度向量

位置向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，它表出了质点位置随时间变化的规律，称为**运动方程**. 质点在空间描画的连续曲线，就是位置向量端点的轨迹，称为**轨道**.

速度向量

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1}$$

加速度向量

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.2}$$

（2）笛卡儿坐标系

右手笛卡儿坐标系一组基矢以（$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$）表示. 在无转动和加速度的笛卡儿坐标系中，基矢为常量.

$$\boldsymbol{r}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=\sum_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{v}=(\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{x}_3)=\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{x}_1,\ \ddot{x}_2,\ \ddot{x}_3)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.5}$$

（3）平面极坐标系

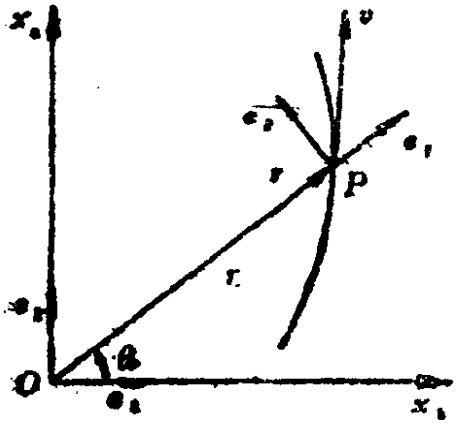


图 1.1

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r=(r,\ 0) \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta=(\dot{r},\ r\dot{\theta}) \tag{1.7}$$

$$v^2=(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2 \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+\ddot{r}\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta}+\ddot{r}\theta) \tag{1.9}$$

（4）圆柱坐标系

$$\boldsymbol{R}=re_r+ze_z \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}e_r+r\dot{\theta}e_\theta+\dot{z}e_z$$

$$=(\dot{r},\ r\dot{\theta},\ \dot{z}) \tag{1.11}$$

$$v^2=(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2+(\dot{z})^2 \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)e_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})e_\theta+\ddot{z}e_z$$

$$=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta},\ \ddot{z})^2 \tag{1.13}$$

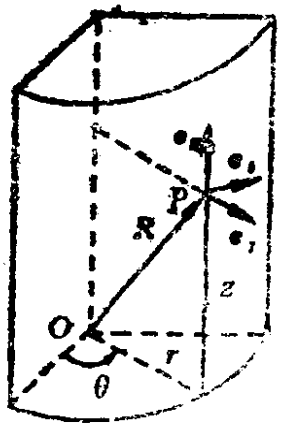


图 1.2

（5）球极坐标系

$$\boldsymbol{r}=re_r=(r,\ 0,\ 0) \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}e_r+r\dot{\theta}e_\theta+r\sin\theta\dot{\varphi}e_\varphi \tag{1.15}$$

$$v^2=(\dot{r})^2+r^2((\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2) \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{a}=[\ddot{r}-r((\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2)]e_r+[2\dot{r}\dot{\theta}+r(\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta(\dot{\varphi})^2)]e_\theta+[2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}+r(2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}+\sin\theta\ddot{\varphi})]e_\varphi \tag{1.17}$$

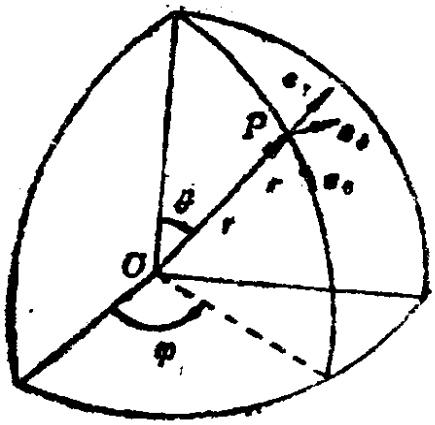


图 1.3

（6）自然坐标系

右手坐标系正交基矢为（t, n, b），坐标系原点取为轨道上每瞬间与运动质点重合的点。

$$\boldsymbol{r}=r(s),\ s=s(t) \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{s}\boldsymbol{t}=v\boldsymbol{t}=(v,\ 0,\ 0) \tag{1.19}$$

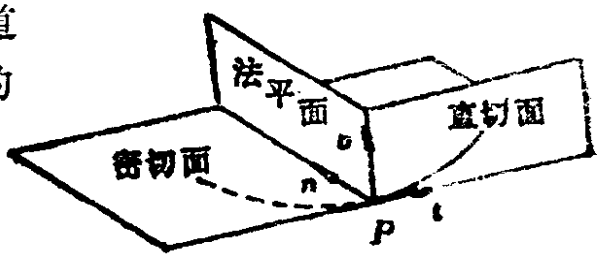


图 1.4

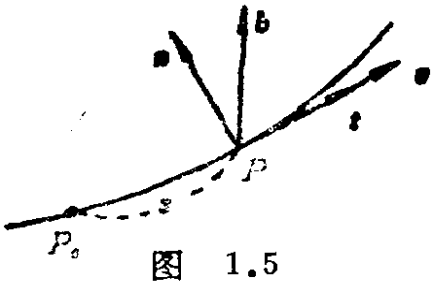


图 1.5

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{v}\boldsymbol{t}+v\dot{\boldsymbol{t}}$$

$$=\dot{v}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{b}$$

$$=\left(\dot{v},\ \frac{v^2}{\rho},\ 0\right) \qquad (1.20)$$

（五种坐标系的讨论，请参阅附录一）

例　　题

1.1 （1）证明 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$，其中 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ 是平面极坐标的单位向量。

〔解〕 由图1.6，极坐标基矢和笛卡儿坐标基矢的变换方程为

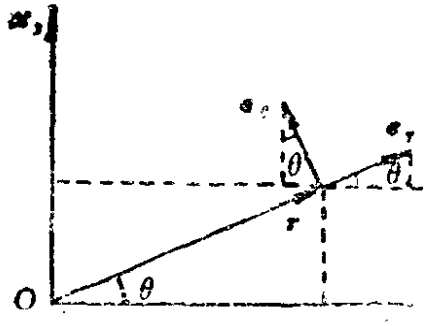


图 1.6

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_\theta=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r=-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$

$$=(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)\dot{\theta}$$

$$=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta=-\cos\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$

$$=-(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\dot{\theta}$$

$$=-\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$$

（2）试求圆柱坐标系中元弧长的平方 $(ds)^2$。

〔解一〕 $x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$x_3=z$

$dx_1=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr$，$dx_2=r\cos\theta d\theta+\sin\theta dr$

$$dx_3 = dz$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$= (-r\sin\theta d\theta + \cos dr)^2 + (r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + dz^2$$

〔解二〕 位置向量 $\boldsymbol{R} = r\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + r\sin\theta \boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$

$$d\boldsymbol{R} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial r}dr + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial z}dz$$

$$= (\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2)dr + (-r\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + r\cos\theta \boldsymbol{e}_2)d\theta + \boldsymbol{e}_3 dz$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 dz$$

$$ds^2 = d\boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{R}$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 + (dz)^2$$

$$= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$$

1.2 证明参量方程为 $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $x_3 = x_3(s)$ 的曲线的曲率半径

$$\rho = \left(\sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}\right)^{-1}$$

〔解〕 $\boldsymbol{r} = x_1(s)\boldsymbol{e}_1 + x_2(s)\boldsymbol{e}_2 + x_3(s)\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\boldsymbol{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\boldsymbol{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d^2x_1}{ds^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{d^2x_2}{ds^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{d^2x_3}{ds^2}\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$$

$$\kappa = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}}$$

1.3 一个质点以速率v(常数)沿曲线$r=k(1+\cos\theta)$运动，求$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_r$，$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_\theta$，$|\ddot{\boldsymbol{r}}|$及$\dot{\theta}$.

〔解〕 由$r=k(1+\cos\theta)$有

$$\dot{r}=-k\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned}(\dot{r}^2+r^2(\dot{\theta})^2)&=k^2\sin^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2+r^2(\dot{\theta})^2\\&=k^2\sin^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2+k^2(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)^2\\&=2k^2(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)\\&=\frac{2k^2(\dot{\theta})^2}{k}\,r=2kr(\dot{\theta})^2=v^2\end{aligned}$$

$$(\dot{\theta})^2=\frac{v^2}{2kr},\quad \dot{\theta}=\frac{v}{\sqrt{2kr}} \tag{1}$$

对（1）式求导得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{\dot{r}v^2}{2kr^2}$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{-k\sin\theta\cdot\dot{\theta}v^2}{4kr^2\dot{\theta}}=\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2}$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}&=-k\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2-k\sin\theta\cdot\ddot{\theta}\\&=-k\cos\theta\cdot\frac{v^2}{2kr}-k\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2}\\&=-(r-k)\frac{v^2}{2kr}-\frac{k\left[1-\left(\frac{r-k}{k}\right)^2\right]v^2}{4r^2}\\&=-\frac{v^2}{4k}\end{aligned}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_r=\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2=-\frac{v^2}{4k}-\frac{v^2}{2k}=-\frac{3v^2}{4k} \tag{2}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$=r\cdot\frac{\sin\theta\cdot v^2}{4r^2}+2(-k\sin\theta\cdot\dot{\theta})\frac{v}{\sqrt{2kr}}$$

$$=-\frac{3}{4r}v^2\sin\theta$$

$$=-\frac{3}{4}\quad\frac{v^2\sin\theta}{k(1+\cos\theta)} \tag{3}$$

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}|=\frac{3v^2}{4k}\sqrt{1+\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}=\frac{3v^2}{4k}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \tag{4}$$

1.4 一半径为 r 的圆轮以等速 v_0 沿直线滚动。求轮缘上一点 A 的运动方程及 A 点的速度和加速度。

〔解〕 设 $t=0$ 时，A 点与坐标系 $O\text{-}x_1x_2$ 原点重合。由图 1.7可见

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{s}{r}=\frac{v_0t}{r}\\ x_1&=s-r\sin\theta\\ &=v_0t-r\sin\left(\frac{v_0t}{r}\right)\\ x_2&=r(1-\cos\theta)\\ &=r\left[1-\cos\left(\frac{v_0t}{r}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

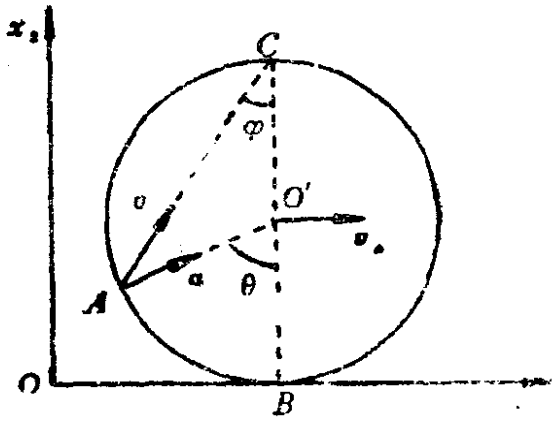


图 1.7

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=v_0\left[1-\cos\left(\frac{v_0t}{r}\right)\right]\\ \dot{x}_2&=v_0\sin\left(\frac{v_0t}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$v=((\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2)^{1/2}=v_0\left[2\left(1-\cos\frac{v_0t}{r}\right)\right]^{1/2}$$

$$=2v_0\sin\left(\frac{v_0t}{2r}\right)$$

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{v_0^2}{r}\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right),$$

$$a_2 = \ddot{x}_2 = \frac{v_0^2}{r}\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right) \qquad (3)$$

$$a = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2} = \frac{v_0^2}{r}$$

v 的方向：

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\sin\left(\frac{v_0 t}{r}\right)}{1-\cos\left(\frac{v_0 t}{r}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{v_0 t}{2r}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{ctg}\varphi \qquad (4)$$

a 的方向：

$$\frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \operatorname{ctg}\frac{v_0 t}{r} = \operatorname{ctg}\theta \qquad (5)$$

1.5 小船被水冲走后，由一荡桨人以不变的相对速度 c_2 朝岸上 A 点划回（图1.8），假定河水流速是 c_1，且沿河宽不变，小船可以看成质点，求船的轨迹。

〔解〕 由图1.8易见

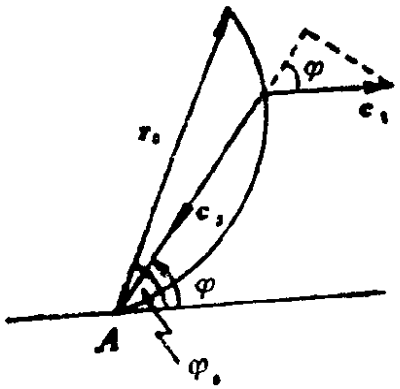


图 1.8

$$\frac{dr}{dt} = -c_2 + c_1\cos\varphi \qquad (1)$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = -c_1\sin\varphi \qquad (2)$$

（1）、（2）相除得

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{c_2}{c_1\sin\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right)d\varphi$$

$$\ln r = \int\left(\frac{c_2}{c_1}\csc\varphi - \operatorname{ctg}\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{c_2}{c_1}\ln\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \ln\operatorname{sig}\varphi + c$$

令 $\frac{c_2}{c_1}=k$，$\alpha=\frac{\varphi}{2}$，则

$$\ln r=\ln\mathrm{tg}^k\alpha-\ln\sin 2\alpha+c$$

$$=\ln\frac{\mathrm{tg}^k\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+c=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+c$$

设 $t=0$ 时，$r=r_0$，$\alpha=\alpha_0$，则

$$c=\ln r_0-\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$$

所以

$$\ln r=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+\ln r_0-\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$$

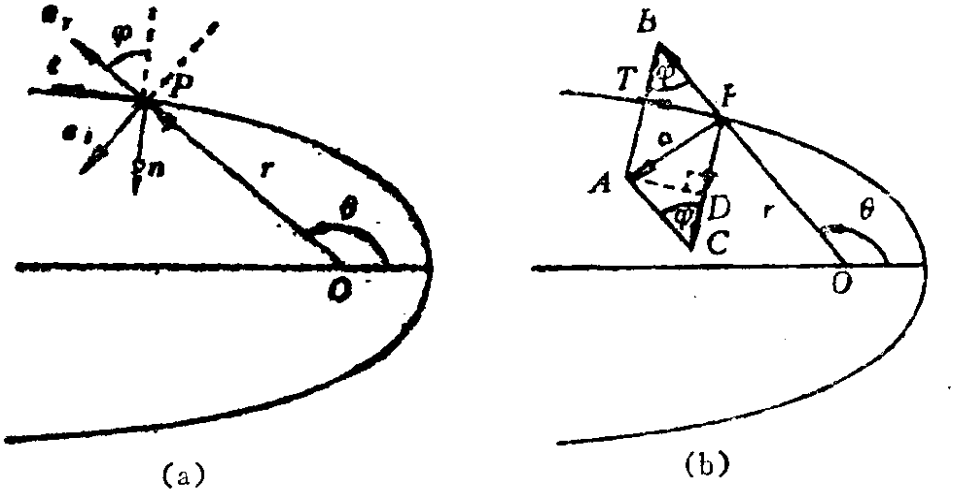
$$r=r_0\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha}\frac{\cos^{k+1}\alpha_0}{\sin^{k-1}\alpha_0}$$

1.6 点 P 在抛物线上运动，质点到焦点距离为 r，速率为 v(图1.9(a))。将加速度按径向及法向分解成分量 a'_r 及 a'_n，证明：

$$a'_r=v\frac{dv}{dr},\quad a'_n=\sqrt{\frac{a}{2r^3}}\frac{d}{dr}(v^2r)$$

抛物线半正焦弦为 $4a$。

〔解〕 将加速度按法向、切向分解，如图1.9(b)所示，有



(a) (b)

图 1.9

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = PD, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = PT$$

如将加速度按径向、法向分解，则

$$a'_r = PB = \frac{dv}{dt}\csc\varphi$$

$$a'_n = PC = \frac{v^2}{\rho} + \frac{dv}{dt}\operatorname{ctg}\varphi$$

到 $\frac{dr}{ds} = \sin\varphi$，$r\frac{d\theta}{} = \cos\varphi$，$\operatorname{ctg}\varphi = r\frac{d\theta}{dr}$，则有

$$\frac{dv}{t} \cdot \frac{ds}{dr} = v\frac{dv}{dr}$$

$$a'_n = \frac{v^2}{} + r\frac{dv}{dt}\frac{d\theta}{dr}$$

$$= \frac{v^2}{\rho} \quad \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dr}$$

$$= \frac{v^2}{\rho} + rv\frac{dv}{dr}\frac{d\theta}{ds}$$

由于

$$ds = \sqrt{(rd\theta)^2 + (dr)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{r^3}{a}}d\theta \qquad \left(\text{其中用到 } r = \frac{4a}{1+\cos\theta}\right)$$

极坐标下的曲率半径

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}} = \sqrt{\frac{4r^3}{a}} = 2\frac{ds}{d\theta}$$

$$a'_n = \frac{v^2}{\rho} + \frac{2}{\rho} rv\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}(v^2 r) = \sqrt{\frac{a}{2r^3}}\ \frac{d}{dr}(v^2 r)$$

1.7 一宽度为 a 的汽车，沿直线车道的边缘以常速 V 行驶，车前方 d 距离处，一步行者以恒定速度穿过这条马路，求步行者平安穿过马路的最小速率及步行方向。

〔解〕 人、车的运动在 x_1 方向上满足如下方程：

车：$x_1 = Vt + s$

人：$x'_1 = v\cos\psi \cdot t + d + s$

人横穿马路的时间

$$t_1 = \frac{a}{v\sin\psi}$$

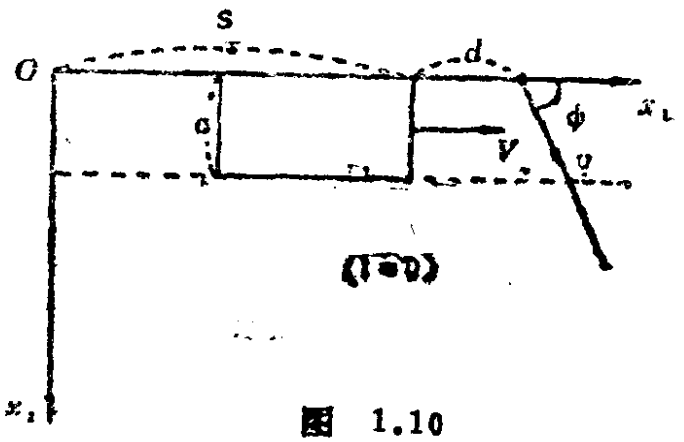


图 1.10

安全横穿要求 $x'_1 - x_1 > 0$，即

$$d + v\cos\psi \cdot t_1 - Vt_1 > 0$$

临界情形，设人行速度为 v_1，则

$$d + v_1\cos\psi \cdot t_1 - Vt_1 = 0$$

$$v_1 = \frac{Vt_1 - d}{\cos\psi \cdot t_1} = \frac{Va/v_1\sin\psi - d}{\cos\psi \cdot a/v_1\sin\psi}$$

$$= \frac{Va - dv_1\sin\psi}{a\cos\psi}$$

$$v_1 = \frac{Va}{a\cos\psi + d\sin\psi}$$

要使 v_1 取最小值，须分母取极大值，即

$$\frac{d}{d\psi}(a\cos\psi + d\sin\psi) = -a\sin\psi + d\cos\psi = 0$$

步行方向：$\mathrm{tg}\psi = \frac{d}{a}$

$$\frac{d^2}{d\psi^2}(a\cos\psi+d\sin\psi)\Big|_{\mathrm{arctg}\frac{d}{a}}$$

$$=(-a\cos\psi-d\sin\psi)\Big|_{\mathrm{arctg}\frac{d}{a}}$$

$$=-a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-d\cdot\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}=-\sqrt{a^2+d^2}<0$$

故 $\psi=\mathrm{arctg}\frac{d}{a}$ 时 v_1 为极小值。

$$v_1=\frac{Va/\cos\psi}{a+d\,\mathrm{tg}\psi}=\frac{Va\sqrt{a^2+d^2}}{a\left(a+d\frac{d}{a}\right)}=\frac{Va}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

1.8 一只猫沿公园直篱笆墙边跑着，一条犬伏在离墙距离 b 处。当猫跑到最近处被犬发现，犬立即以两倍于猫的速率追赶，速度的方向总是指向猫。求出从猫被发现到被捉所经历的时间，并证明猫被捉前跑的距离为 $\frac{2}{3}b$。

〔解〕 取相对于猫 C 为静止的参考系，犬 D 的速度由相对速度 $2v$ 及牵连速度 v 合成。

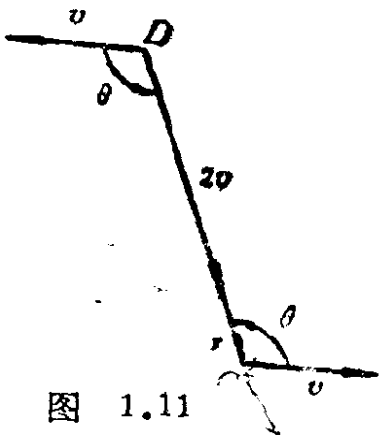


图 1.11

$$\dot{r}=-v(2+\cos\theta)\quad(1)$$

$$r\dot{\theta}=v\sin\theta\quad(2)$$

(1)、(2) 相除得

$$\frac{dr}{r}=-\left(\frac{2}{\sin\theta}+\mathrm{ctg}\theta\right)d\theta$$

积分得

$$\ln r=-2\ln\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\ln\sin\theta+\ln c$$

$$\frac{c}{r}=\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

当 $\theta=\pi/2$ 时，$r=b$，故$c=b$。

$$\frac{b}{r}=\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\sin\theta=2\sin^3\frac{\theta}{2}\Big/\cos\frac{\theta}{2} \qquad (3)$$

由（2）式有

$$\dot{\theta}=v\sin\theta/r$$

$$=\frac{4v}{b}\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$dt=\frac{b}{4v}\csc^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

积分得

$$t=\frac{b}{4v}\int_{\pi/2}^{\pi}\csc^4\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{2}{3}b/v$$

$$s=vt=\frac{2}{3}b$$

§2 角 速 度

理论要点

有限角位移虽有大小、方向，但不满足平行四边形相加规则，即不满足向量交换律，这可以从一本书在O-$x_1x_2x_3$坐标系中，先绕x_1轴、后绕x_3轴各转$\pi/2$，及先绕x_3轴、后绕x_1轴各转$\pi/2$，结果位置并不相同看出。

无限小角位移与此不同，它满足向量交换律。证明如下：

以$\delta\boldsymbol{A}=\delta A\boldsymbol{e}$表示一质点绕以$\boldsymbol{e}$为单位向量的轴作一微小转动的角位移，$\delta A$表示转角的大小，$\theta$表示径向和$\boldsymbol{e}$的夹角。由图1.12知$|\delta\boldsymbol{r}|=r\sin\theta\delta A$，$\delta\boldsymbol{r}$的方向垂直于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{e}$，于是可以借用向量的叉积表示$\delta\boldsymbol{r}$，即

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta A\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r} \qquad (1.21)$$

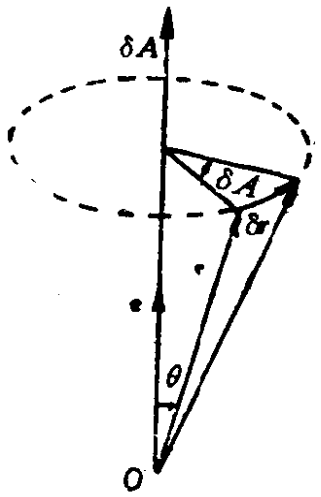


图 1.12

质点的速度

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}=\dot{A}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r} \tag{1.22}$$

设质点先进行无限小转动δA_1（转轴$\boldsymbol{e}_1$），再接着进行转动δA_2（转轴$\boldsymbol{e}_2$），第一次转动，使位置向量$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}+\delta A_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}$，两次转动的位移为

$$\delta \boldsymbol{r}_{12}=\delta A_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}+\delta A_2\boldsymbol{e}_2\times(\boldsymbol{r}+\delta A_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r})$$

略去高阶小量$\delta A_1\delta A_2$项，有

$$\delta \boldsymbol{r}_{12}=(\delta A_1\boldsymbol{e}_1+\delta A_2\boldsymbol{e}_2)\times\boldsymbol{r} \tag{1.23}$$

如将转动次序倒过来，同样有

$$\delta \boldsymbol{r}_{21}=\delta \boldsymbol{r}_{12}$$

或

$$(\delta \boldsymbol{A}_1+\delta \boldsymbol{A}_2)\times\boldsymbol{r}=(\delta \boldsymbol{A}_2\times\delta \boldsymbol{A}_1)\times\boldsymbol{r}$$

即无限小转动满足向量加法交换律。它是个向量。

定义

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{1.24}$$

dt是标量，$d\boldsymbol{A}$是向量，因而$\boldsymbol{\omega}$也是向量。

习　　题

1.1　一质点沿曲线$\boldsymbol{r}=(t^3-4t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+4t)\boldsymbol{e}_2+(8t^2-3t^3)\boldsymbol{e}_3$运动，$t$是时间。求当$t=2$时，其加速度的切向和法向分量的大小。

答：$a_t=16$，$a_n=2\sqrt{73}$。

1.2　一质点以常角速率ω沿等角螺线$r=ae^{\theta\operatorname{ctg}\alpha}$（$a$，$\alpha$为常数）运动，求：

（1）加速度的径向分量；

（2）加速度的大小；

（3）角速率 $\dot{\theta}$.

1.3 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 都是时间的显函数，证明：

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})]=r^2\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}$$

1.4 如果一个点的速率为常数，证明该点要么是作匀速直线运动，要么其加速度垂直于它的速度，并讨论后者是否一定是圆运动，请举例说明之.

1.5 证明加速度切向分量大小 $a_t=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$，而法向分量大小 $a_n=(a^2-a_t^2)^{1/2}$.

1.6 证明 $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{a}})$

1.7 球极坐标系 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 定义为

$$x_1=r\cos\varphi\sin\theta,\quad x_2=r\sin\varphi\sin\theta,\quad x_3=r\cos\theta$$

其中 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 坐标轴的单位向量是

$$\boldsymbol{e}_r=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{e}_\theta=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$$

质点在三维空间的位置向量为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$$

求质点的速度和加速度分量.

如 $\varphi=$ 常数，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$ 的公式约化成什么形式？

1.8 一质点的位置向量为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})t$，$0<t<\infty$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是常向量，证明质点沿一直线运动.

1.9 一质点沿一半径为 b 的圆运动，如果质点的速率按方程 $v=At^2$ 随时间变化，问 t 取什么值，或什么样一些值时，加速度同速度向量成45°角？

1.10 一质点沿一螺旋路径运动，在柱坐标系中其位置是

$r=b$，$\theta=\omega t$，$z=ct^2$

求速率及加速度的大小作为 t 的函数。

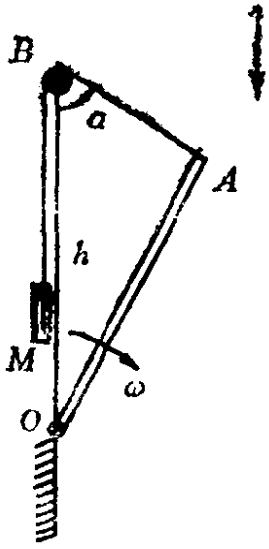
1.11　求上题（1.10题）中加速度的切向和法向分量作为时间 t 的函数。

1.12　已知质点的运动方程为

$$r=e^{at}，\quad \theta=bt$$

试求它的加速度分别在切向和法向的分量。

1.13　设杆OA以角速度ω绕O点在平面内转动，其A端系以绕过滑轮B的绳，绳的末端挂一重物M。



1.13题图

试证M的速度为 $v_m=h\omega\sin\alpha$，其中 $OB=h$。

1.14　（1）求螺旋线$x_1=a\cos\varphi$，$x_2=a\sin\varphi$，$x_3=k\varphi$（a，k为常数）的切线、主法线、副法线的方向及曲率半径。

（2）如质点沿螺旋线以常速v行进，求其加速度。

（提示：切线方向余弦为$\frac{dx_i}{ds}$，$i=1$，2，3，主法线的方向余弦为$\rho\frac{d^2x_i}{ds^2}$，$i=1$，2，3）

答：$\rho=\frac{a^2+k^2}{a}$，加速度$a=\frac{av^2}{a^2+k^2}$。

1.15　一质点沿径向及横向的速度分别为λr及$\mu\theta$，式中λ及μ是常数，试证其沿径向及横向的加速度分别为

$$\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}，\quad \mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$

1.16　质点作平面运动，它到原点的距离为r，曲率半径为ρ，到轨道上定点的距离为s，原点到切线的垂直距离为p，

当 $h=pv$ 时，如将加速度沿径向及切向分解，则其分量为

$$a_r=\frac{h^2r}{p^3\rho},\quad a_t=\frac{h}{p^2}\frac{dh}{ds}$$

试证明之。

1.17 证明以速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$表示的曲率半径公式为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{v^3}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}|$$

1.18 一质点沿抛物线 $y^2=2px$ 运动，其切向加速度为法向加速度的 $-2k$ 倍，如此质点从正焦弦的一端$\left(\frac{p}{2},\ p\right)$以速率 u 出发，试求其达到正焦弦另一端时的速率。

答：$v=ud^{-k\pi}$。

1.19（1）宽度为 d 的河流，其流速与到河岸的距离成正比。在河岸处，水流速为零，在河流中心处，其值为 c。一小船以相对速率 u 沿垂直于水流的方向行驶，求船的轨迹以及船在对岸靠拢的地点。

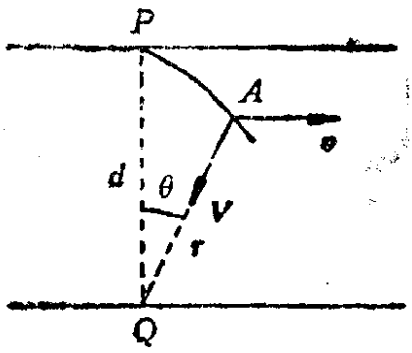
答：以船离岸处为坐标原点，x_1 轴平行于河岸，x_2 轴垂直于河岸。船的轨迹为

$$x_1=\frac{c}{ud}x_2^2\quad\left(x_2\leqslant\frac{d}{2}\right)$$

$$x_1=\frac{2c}{u}x_2-\frac{c}{ud}x_2^2-\frac{cd}{2u}\left(x_2\geqslant\frac{d}{2}\right)$$

靠岸地点 $x_1=\frac{cd}{2u}$。

（2）一艘船从河一侧的 P 点出发，以匀速 V 向对岸与 P 点正好相对的 Q 点方向前进，PQ 的距离为 d。如果 r 是从 Q 到船的瞬时距离，θ 是 r 与 PQ 之间的夹角，河水的流速为 v，试证明船的路径是



1.19题图

$$r=\frac{d(\sec\theta)}{(\sec\theta+\mathrm{tg}\theta)^{V/v}}.$$

1.20（1）试求球极坐标系中元弧长的平方$(ds)^2$。

答：$(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$

（2）证明球极坐标系是正交的。

（3）证明 $\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta=-\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta$$

1.21 试求以$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$表示的球极坐标系的单位向量$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$和$\boldsymbol{e}_\varphi$，和以$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$表示的$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$。

答：$\boldsymbol{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2+\cos\theta\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2-\sin\theta\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1+\cos\varphi\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{e}_1=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$

$\boldsymbol{e}_2=\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$

$\boldsymbol{e}_3=\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$

1.22 一质点沿曲线$\boldsymbol{r}=(t^3-4t)\boldsymbol{e}_1+(t^2+4t)\boldsymbol{e}_2+(8t^2-3t^3)\boldsymbol{e}_3$运动，式中$t$是时间。求当$t=2$时，加速度的切向和法向分量的大小。

答：切向16；法向$2\sqrt{73}$。

1.23 对空间曲线$x_1=t-t^3/3$，$x_2=t^2$，$x_3=t+t^3/3$，求（1）单位切向量$\boldsymbol{t}$，（2）曲率k，（3）主法向$\boldsymbol{n}$，（4）副法向$\boldsymbol{b}$，（5）挠率τ。（参阅附录一）

答：（1）$\boldsymbol{t}=\dfrac{(1-t^2)\boldsymbol{e}_1+2t\boldsymbol{e}_2+(1+t^2)\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}(1+t^2)}$

（2） $k=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

（3） $\boldsymbol{n}=-\dfrac{2t}{1+t^2}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\boldsymbol{e}_2$

（4） $\boldsymbol{b}=\dfrac{(t^2-1)\boldsymbol{e}_1-2t\boldsymbol{e}_2+(t^2+1)\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{2}(1+t^2)}$

（5） $\tau=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

1.24 一空间曲线以弧长 s 为参量定义为 $x_1=\operatorname{arctg}s$，$x_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln(s^2+1)$，$x_3=s-\operatorname{arctg}s$。求（1）$\boldsymbol{t}$，（2）$\boldsymbol{n}$，（3）$\boldsymbol{b}$，（4）$k$，（5）$\tau$，（6）$\rho$，（7）$\sigma$。（参阅附录一）

答：（1） $\boldsymbol{t}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\sqrt{2}s\boldsymbol{e}_2+s^2\boldsymbol{e}_3}{s^2+1}$

（2） $\boldsymbol{n}=\dfrac{-\sqrt{2}s\boldsymbol{e}_1+(1-s^2)\boldsymbol{e}_2+\sqrt{2}s\boldsymbol{e}_3}{s^2+1}$

（3） $\boldsymbol{b}=\dfrac{s^2\boldsymbol{e}_1-\sqrt{2}s\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3}{s^2+1}$

第二章　质点动力学

动力学阐明物理体系运动的原因，即体系怎样运动和为什么这样运动。它通过那些涉及运动原因的量，即动力学量，如力、动量、动能、势能、角动量等，建立起一些基本的假设、公理、定理和力律等知识，由此来决定体系的运动。我们首先考虑最简单的体系——质点的动力学问题。

§1　运动定律　基本定理和守恒定律　保守力

理　论　要　点

1．牛顿运动定律

（1）第一定律（惯性定律）

每个物体都保持它的静止或匀速直线运动状态，除非有力的作用迫使它改变那种状态。

（2）第二定律（运动定律）

物体动量的变化与作用在物体上的力成正比，并沿力的方向发生。

（3）第三定律（作用与反作用定律）

任何作用总存在相等相反的反作用。或，两物体的相互作用力总是大小相等，方向相反。

2．运动微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{2.1}$$

或 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$，$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$

在各种坐标系中的表达式：

（1）笛卡儿坐标系

$$m\ddot{x}_1\boldsymbol{e}_1+m\ddot{x}_2\boldsymbol{e}_2+m\ddot{x}_3\boldsymbol{e}_3=F_1\boldsymbol{e}_1+F_2\boldsymbol{e}_2+F_3\boldsymbol{e}_3$$

$$m\ddot{x}_1=F_1,\quad m\ddot{x}_2=F_2,\quad m\ddot{x}_3=F_3 \tag{2.2}$$

（2）平面极坐标系

$$m\left[\left(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta\right]=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$m(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)=F_r,\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=F_\theta \tag{2.3}$$

（3）自然坐标系

$$m\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n\right)=F_t\boldsymbol{e}_t+F_n\boldsymbol{e}_n+F_b\boldsymbol{e}_b$$

$$m\frac{dv}{dt}=F_t,\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n,\quad F_b=0 \tag{2.4}$$

（4）圆柱坐标系

$$m\left[(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta+\ddot{z}\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\theta\boldsymbol{e}_\theta+F_z\boldsymbol{e}_z$$

$$m(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)=F_r,\quad m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right]=F_\theta,\quad m\ddot{z}=F_z \tag{2.5}$$

（5）球极坐标系

$$m\Big[(\ddot{r}-r(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta-r(\dot{\theta})^2)\boldsymbol{e}_r$$

$$+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r(\dot{\varphi})^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi\Big]$$

$$=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\theta\boldsymbol{e}_\theta+F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$m(\ddot{r}-r(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta-r(\dot{\theta})^2)=F_r,$$

$$m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r(\dot{\varphi})^2\sin\theta\cos\theta)=F_\theta, \tag{2.6}$$

$$m(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)=F_\varphi.$$

3. 基本定理和守恒定律

（1）动量定理

质点的动量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$

动量定理的微分形式 $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}$ (2.7)

积分形式 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0=\int_0^t\boldsymbol{F}dt$ (2.8)

$\left(\int_0^t\boldsymbol{F}dt=\hat{\boldsymbol{F}}\text{称为合力}\boldsymbol{F}\text{的冲量}\right)$

当$\boldsymbol{F}=0$时，则有

$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0$（动量守恒定律） (2.9)

（2）角动量定理

质点关于定点O的角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}$

质点所受的关于O点的力矩 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

角动量定理的微分形式 $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}$ (2.10)

积分形式 $\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0=\int_0^t\boldsymbol{N}dt$ (2.11)

$\left(\int_0^t\boldsymbol{N}dt=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}\text{，称为合力}\ \boldsymbol{F}\text{的冲量矩}\right)$

当$\boldsymbol{N}=0$时，则有

$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0$（角动量守恒定律） (2.12)

（3）动能定理

将 $m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$ 两边点乘$\boldsymbol{v}$ 得 $m\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$，乘$dt$积分，

左边 $=d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=dT$，右边 $=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$，得：

动能定理的微分形式　$dT=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$　　(2.13)

积分形式　$T-T_0=\int_{P_0}^{P}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$　　(2.14)

4．保守力　势能　能量守恒定律

① 保守力

如质点沿曲线C从P_0点运动到P点力$\boldsymbol{F}$所作的总功为

$$W=\int_{P_0}^{P}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=V(P_0)-V(P)\qquad(2.15)$$

则所作的功与连接P_0，P两点的路径C无关。

定义：如果一个力场使质点从一点运动到另一点所作的功与连接这两点的路经无关，则这个力场就称为**保守力场**．$\boldsymbol{F}$为**保守力**。

或等价地

定义：对任一不相交的封闭曲线C，当且仅当

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0\qquad(2.16)$$

时，连续可微力场$\boldsymbol{F}$是保守力场。

② 势能

如有一标量V使$\boldsymbol{F}=-\nabla V$，则标量V称为质点在保守力场$\boldsymbol{F}$中的势能。

依势能定义，（2.15）式中的W可表为

$W=V_0-V$　　$(V_0=V(P_0),\ V=V(P))$

如此定义的势能有一任意常数，令P_0点为势能零点，则势能表为

$$V=-\int_{P_0}^{P}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\qquad(2.17)$$

③ 保守力微分形式的判据

因$\boldsymbol{F}=-\nabla V$是保守场，等价地

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{2.18}$$

是判定保守力场的充要条件。写成分量式为

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2},\quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3},\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \tag{2.19}$$

④ 能量守恒定律

如$\boldsymbol{F}$是保守力，则

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\nabla V\cdot d\boldsymbol{r}$$

左右两边积分得

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2$$

即在保守力场中，势能和动能之和（总能量）是一常数。

$$T + V = E \tag{2.20}$$

称为能量守恒定律。

例　　题

2.1 质点作一维运动时，如果作用力

（1）仅是坐标的函数；

（2）仅是速度的函数；

（3）仅是时间的函数，

求出运动微分方程解的表达式。

〔解〕 （1） $m\ddot{x} = F(x)$

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \qquad \left(\frac{d}{dt} = v\frac{d}{dx}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\int F(x)\,dx + c_1}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\int F(x)dx + c_1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\int F(x)dx + c_1}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt + c_2 \Longrightarrow x = x(t)$$

(2) $m\ddot{x} = F(v)$

$$m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

$$\int m\frac{dv}{F(v)} = \int dt + c_1 \Longrightarrow v = v(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad x = \int v(t)dt + c_2 \Longrightarrow x = x(t)$$

(3) $m\ddot{x} = F(t)$

$$m\frac{dv}{dt} = F(t)$$

$$m\int dv = \int F(t)dt + c_1 \Longrightarrow v = v(t)$$

$$m\int dx = \int\left[\int F(t')dt' + c_1\right]dt + c_2 \Longrightarrow x = x(t)$$

2.2 质量为 m 的质点 P 的坐标为 (x_1, x_2)，受到斜边为 $AC = 2a$ 的等腰直角三角形三个顶点的吸引，吸引力的大小为 $F_i = mk^2 r_i$，式中 r_i 为质点 P 到各顶点的距离 r_A，r_B，r_C。初始时，质点 P 在顶点 C 处静止，求质点的轨迹和速度。

〔解〕 取二维笛卡儿坐标系，如图2.1所示。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_A &= (a + x_1)\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{r}_B &= x_1\boldsymbol{e}_1 - (a - x_2)\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{r}_C &= -(a - x_1)\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}\right\} (1)$$

作用力

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_A &= -k^2 m\boldsymbol{r}_A \\ \boldsymbol{F}_B &= -k^2 m\boldsymbol{r}_B \\ \boldsymbol{F}_C &= -k^2 m\boldsymbol{r}_C \end{aligned}\right\} (2)$$

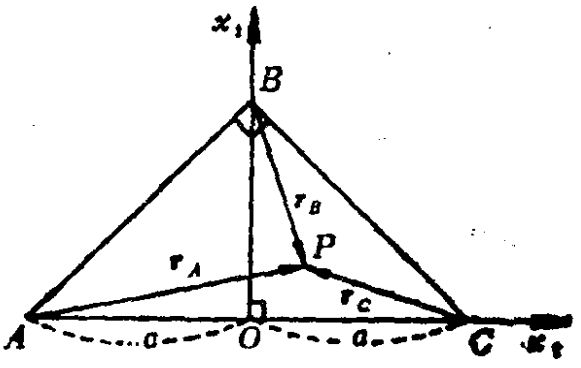


图 2.1

作用于质点P的合力

$$\boldsymbol{F}=-k^2m(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C)$$

$$=-k^2m[3x_1\boldsymbol{e}_1+(3x_2-a)\boldsymbol{e}_2] \qquad (3)$$

分量式为

$$F_1=-3k^2mx_1$$

$$F_2=-3k^2mx_2+mak^2$$

令$3k^2=\omega^2$，运动微分方程式为

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0 \qquad (4)$$

$$\ddot{x}_2+\omega^2\left(x_2-\frac{a}{3}\right)=0 \qquad (5)$$

由（4）式得

$$x_1=a_1\cos(\omega t+\epsilon_1)$$

$$\dot{x}_1=-a_1\omega\sin(\omega t+\epsilon_1)$$

由（5）式得

$$x_2=a_2\cos(\omega t+\epsilon_2)+\frac{a}{3}$$

$$\dot{x}_2=-a_2\omega\sin(\omega t+\epsilon_2)$$

$t=0$时，$x_1=a$，$x_2=0$，$\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$，故有

$$\epsilon_1=0,\quad a_1=a,\quad \epsilon_2=0,\quad a_2=-\frac{a}{3}$$

所以运动方程为

$$x_1=a\cos\omega t,\qquad x_2=\frac{a}{3}(1-\cos\omega t)$$

速度为

$$\dot{x}_1=-a\omega\sin\omega t,\quad \dot{x}_2=\frac{a}{3}\omega\sin\omega t$$

速度方向： $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=-\dfrac{1}{3}$

轨迹： $x_2=\dfrac{1}{3}(a-x_1)$

质点运动范围： $-a\leqslant x_1\leqslant a$， $0\leqslant x_2\leqslant\dfrac{2a}{3}$

由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=-k^2m[3x_1\boldsymbol{e}_1+(3x_2-a)\boldsymbol{e}_2]\\&=-3k^2m[x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{3}a\boldsymbol{e}_2]\\&=-3k^2m[\boldsymbol{r}-\frac{1}{3}a\boldsymbol{e}_2]\\&=-3k^2m[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0]\end{aligned}$$

$\boldsymbol{F}$为弹性力，$\boldsymbol{r}_0=\dfrac{1}{3}a\boldsymbol{e}_2$ 即为力心位置.

2.3 质量为m的质点受引力作用在Ox轴上运动，当$x\geqslant a$时，引力为$-\mu ma^2/x^2$，当$x\leqslant a$时，引力为$-m\mu x/a$，如果质点初始时在$x=2a$处静止，证明到达原点时的速度为$\sqrt{2\mu a}$，并证明到达原点的时间为$\left(1+\dfrac{3\pi}{4}\right)(a/\mu)^{1/2}$.

〔解〕 当$t=0$时，$x=2a$，$\dot{x}=0$，质点受力为

$$F(x)=-m\mu x/a \qquad (x\leqslant a)$$

$$F(x)=-m\mu a^2/x^2 \qquad (a\leqslant x\leqslant 2a)$$

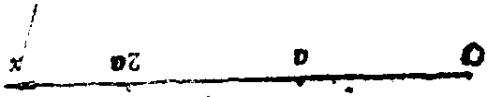


图 2.2

因作用力是坐标的函数，要求质点在一定位置（原点）的速度，宜用动能定理

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

设质点到达原点时的速度为v，则

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_{2a}^{a}(-m\mu a^2/x^2)dx+\int_{a}^{0}(-m\mu x/a)dx$$

$$=m\mu a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2}m\mu a=m\mu a$$

$v^2=2\mu a$，$v=-\sqrt{2\mu a}$

以下求到达原点的时间。在 $a\leqslant x\leqslant 2a$ 处有

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2=\int_{2a}^{x}(-m\mu a^2/x^2)dx=\frac{1}{2}m\mu a\left(\frac{2a}{x}-1\right)$$

$$\dot{x}=-\sqrt{\mu a}\cdot\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

当 $x=a$ 时

$$\dot{x}=-\sqrt{\mu a}$$

从 $2a\to a$ 所用的时间为

$$t_1=-\int_{2a}^{a}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\mu a(2a-x)}}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

在 $0\leqslant x\leqslant a$ 处有

$$\int_{-\sqrt{\mu a}}^{\dot{x}}d\left(\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right)=\int_{a}^{x}\frac{-m\mu x}{a}dx$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2-\frac{1}{2}m\mu a=-\frac{1}{2a}m\mu x^2+\frac{1}{2a}m\mu a^2$$

$$(\dot{x})^2=\frac{\mu}{a}(2a^2-x^2)$$

$$\dot{x}=-\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{2a^2-x^2}$$

$$dt=\frac{dx}{-\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{2a^2-x^2}}$$

从$x=a\longrightarrow 0$所用的时间为

$$t_2=\int_a^0\frac{dx}{-\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{2a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

从$2a\longrightarrow 0$所用的时间为

$$t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{\mu}}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left(1+\frac{3\pi}{4}\right)$$

2.4 一固定光滑金属线呈心脏线$r=a(1+\cos\theta)$形，极轴竖直向下。一小环质量为m，可沿线滑动，且此环被一自然长为a，弹性系数为$4mg/a$的弹性绳系于心脏线$r=0$之点O（图2.3）。如当绳水平时，小环自静止开始运动，试证明

$$a\dot{(\theta)}^2(1+\cos\theta)-g\cos\theta(1-\cos\theta)=0$$

〔解〕 系统是保守的，可应用能量守恒定律。动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{(r)}^2+r^2\dot{(\theta)}^2)$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\left[\sin\theta^2\dot{(\theta)}^2+(1+\cos\theta)^2\dot{(\theta)}^2\right]$$

$$=ma^2\dot{(\theta)}^2(1+\cos\theta)$$

重力势能（取过O的水平线为势能零点）

$$-mgr\cos\theta=-mg\cos\theta\cdot a(1+\cos\theta)$$

弹性势能

$$\frac{1}{2}\frac{4mg}{a}(r-a)^2=2mga\cos^2\theta$$

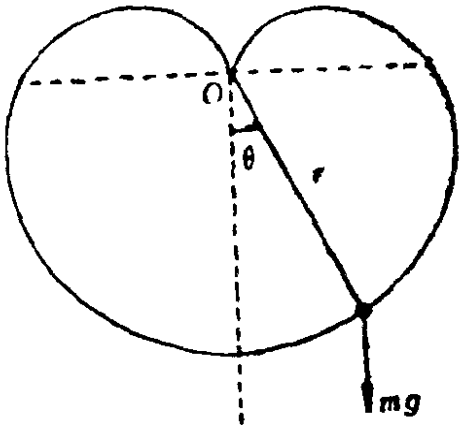


图 2.3

由能量守恒定律($T+V=E$(常数))有

$$ma^2\dot{(\theta)}^2(1+\cos\theta)+2mga\cos^2\theta-mga\cos\theta(1+\cos\theta)=E$$

因为 $t=0$ 时，$\theta=\pi/2$，$\dot{\theta}=0$，所以 $E=0$，故

$$ma^2(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)+2mga\cos^2\theta-mga\cos\theta(1+\cos\theta)=0$$

$$a(\dot{\theta})^2(1+\cos\theta)+g\cos\theta(\cos\theta-1)=0$$

2.5 证明 $\boldsymbol{F}=(2x_1x_2+x_3^3)\boldsymbol{e}_1+x_1^2\boldsymbol{e}_2+3x_1x_3^2\boldsymbol{e}_3$ 是保守力场。并求出势能。

〔解〕 力是保守力的充分必要条件是 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，本题中

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 2x_1x_2+x_3^3 & x_1^2 & 3x_1x_3^2 \end{vmatrix}=0$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 是保守力场。

下面求势能。

方法Ⅰ：因力是保守力，$\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 与连结 (x_1', x_2', x_3') 和 (x_1, x_2, x_3) 的路径无关。我们可以选择一折线路径：

$$(x_1',x_2',x_3')\xrightarrow{l_1}(x_1,x_2',x_3')\xrightarrow{l_2}(x_1,x_2,x_3')\xrightarrow{l_3}(x_1,x_2,x_3)$$

$$V=-\left(\int_{x_1'}^{x_1}F_1(x_1,x_2',x_3')dx_1+\int_{x_2'}^{x_2}F_2(x_1,x_2,x_3')dx_2\right.$$

$$\left.+\int_{x_3'}^{x_3}F_3(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right)$$

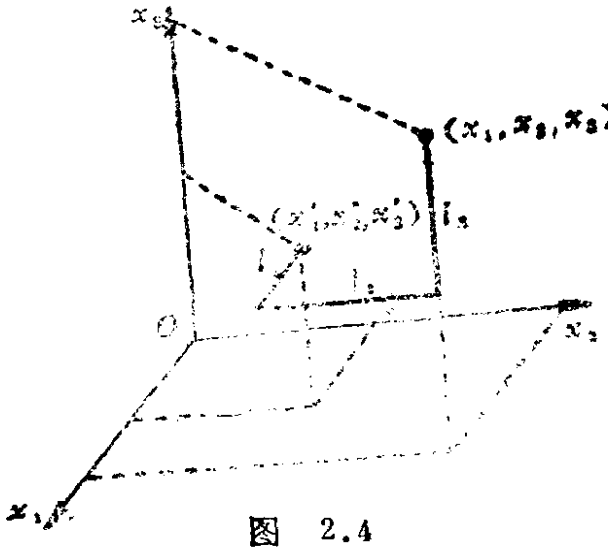


图 2.4

本题中

$$V(x_1,x_2,x_3)$$

$$=-\left[\int_{x_1'}^{x_1}(2x_1x_2'+x_3'^3)dx_1\right.$$

$$\left.+\int_{x_2'}^{x_2}x_1^2\,dx_2+\int_{x_3'}^{x_3}3x_1x_3^2dx_3\right]$$

$$= -\left[(x_1^2x_2' + x_1x_3'^3)\Big|_{x_1'}^{x_1} + x_1^2x_2\Big|_{x_2'}^{x_2} + x_1x_3^3\Big|_{x_3'}^{x_3}\right]$$

$$= -\left[x_1^2x_2' + x_1x_3'^3 - x_1'^2x_2' - x_1'x_3'^3 + x_1^2x_2 - x_1^2x_2' + x_1x_3^3 - x_1x_3'^3\right]$$

$$= -(x_1^2x_2 + x_1x_3^3) + c \text{（常数）}$$

方法Ⅱ：由$\boldsymbol{F} = -\nabla V$有

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$$

$$= (2x_1x_2 + x_3^3)\boldsymbol{e}_1 + x_1^2\boldsymbol{e}_2 + 3x_1x_3^2\boldsymbol{e}_3$$

所以

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2x_1x_2 + x_3^3, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_2} = x_1^2, \quad -\frac{\partial V}{\partial x_3} = 3x_1x_3^2$$

将三式分别积分得

$$V = -x_1^2x_2 - x_1x_3^3 + f_1(x_2, x_3)$$

$$V = -x_1^2x_2 + f_2(x_1, x_3)$$

$$V = -x_1x_3^3 + f_3(x_1, x_2)$$

可以选$f_1(x_2, x_3) = 0, f_2(x_1, x_3) = x_1x_3^3, f_3(x_1, x_2) = -x_1^2x_2$，

$$V = -x_1^2x_2 - x_1x_3^3 + c$$

方法Ⅲ：$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\nabla V\cdot d\boldsymbol{r}$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3}dx_3 = -dV$$

$$dV = -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= -(2x_1x_2 + x_3^3)dx_1 - x_1^2dx_2 - 3x_1x_3^2dx_3$$

$$= -(2x_1x_2dx_1 + x_1^2dx_2) - (x_3^3dx_1 + 3x_1x_3^2dx_3)$$

$$= -d(x_1^2x_2) - d(x_1x_3^3) = -d(x_1^2x_2 + x_1x_3^3)$$

$$V = -x_1^2x_2 - x_1x_3^3 + c$$

2.6 质量为M的物体被一锤所击。设锤加的压力是均匀增减的，在冲击时间的一半时，增至极大值P，以后又均匀减

小至零。求物体在各时刻的速率及压力所作的功。

〔解〕 t 从 $0\to\tau/2$（τ是打击的时间）时，$F(t)$ 均匀增加，故

$$\frac{dF(t)}{dt}=c_1 \quad (常数)$$

$$F(t)=c_1t+c_2$$

$t=0$时，$F(t)=0$，所以$c_2=0$。$t=\tau/2$时，$F(t)=P$，

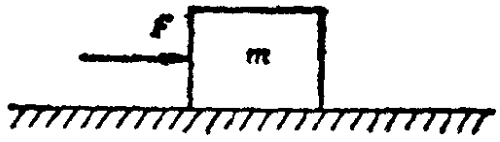


图 2.5

$c_1=2P/\tau$，故

$$F(\tau)=\frac{2P}{\tau}t$$

t 从 $\tau/2\longrightarrow\tau$ 时

$$\frac{dF(t)}{dt}=-c_3$$

$$F(t)=-c_3t+c_4$$

$t=\tau/2$时，$F(t)=P$，

$$P=-c_3\frac{\tau}{2}+c_4 \qquad (1)$$

$t=\tau$时，$F(t)=0$，

$$0=-c_3\tau+c_4 \qquad (2)$$

由（1）、（2）两式解得

$$c_3=\frac{2P}{\tau},\quad c_4=2P$$

所以

$$F(t)=-\frac{2P}{\tau}t+2P=2P\left(1-\frac{t}{\tau}\right)$$

以下用动量定理求时-速关系。

$$d(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}dt,\qquad m\boldsymbol{v}=\int\boldsymbol{F}dt+\boldsymbol{c}$$

设 $t=\tau/2$ 时速率为v_1，则

$$\int_0^{v_1} m dv = \int_0^{\tau/2} F dt = \int_0^{\tau/2} \frac{2P}{\tau} t dt$$

$$mv_1 = \frac{P}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = \frac{\tau P}{4}, \qquad v_1 = \frac{\tau P}{4m}$$

设 $t=\tau$ 时速率为v_2，则

$$\int_{\tau P/4m}^{v_2} m dv = \int_{\tau/2}^{\tau} 2P\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dt$$

$$mv_2 - \frac{\tau P}{4} = 2P(\tau - \tau/2) - \frac{P}{\tau}\left[\tau^2 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2\right] = \frac{P\tau}{4}$$

$$v_2 = \frac{P\tau}{2m}$$

$0 \leqslant t \leqslant \tau/2$ 时的速率：

$$\int_0^{v} m dv = \int_0^{t} \frac{2P}{\tau} t dt$$

$$mv = \frac{P}{\tau} t^2$$

$$v = \frac{Pt^2}{m\tau}$$

$\tau/2 \leqslant t \leqslant \tau$ 时的速率：

$$\int_{P\tau/4m}^{v} m dv = \int_{\tau/2}^{t} 2P\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dt$$

$$mv - \frac{P\tau}{4} = 2P\left[t - \frac{\tau}{2} - \frac{t^2}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\right]$$

$$= 2Pt - \frac{P\tau}{2} - \frac{P}{2}t^2$$

$$v = \frac{P}{2m\tau}(4\tau t - \tau^2 - 2t^2)$$

由动能定理，压力作的功为

$$W = \frac{1}{2}mv^2(\tau)$$

而

$$v(\tau)=\frac{P}{2m\tau}(4\tau^2-\tau^2-2\tau^2)=\frac{P\tau}{2m}$$

所以

$$W=\frac{P^2\tau^2}{8m}$$

2.7 一质量为 m 的质点沿直线运动，受到的阻力为 mkv^n（n 为自然数）。如初始速度是 v_0，求到运动停止时所行的距离及所用的时间。

〔解〕 设到停止时所行距离 l，所用时间 T。

$$\frac{dv}{dt}=-kv^n,\quad T=-\int_{v_0}^{0}\frac{v^{-n}}{k}dv$$

如 $n\neq 1$

$$T=-\frac{v^{-n+1}}{k(1-n)}\Big|_{v_0}^{0}=\frac{v_0^{1-n}}{k(1-n)}$$

$n=1$

$$T=-\frac{1}{k}\ln v\Big|_{v_0}^{0}=\infty$$

$$v\frac{dv}{dx}=-kv^n$$

$$-\frac{1}{k}v^{1-n}dv=dx$$

$$l=-\frac{1}{k}\int_{v_0}^{0}v^{1-n}dv$$

如 $n\neq 2$

$$l=-\frac{v^{2-n}}{k(2-n)}\Big|_{v_0}^{0}=\frac{v_0^{2-n}}{k(2-n)}$$

$n=2$

$$l=-\frac{1}{k}\ln v\Big|_{v_0}^{0}=\infty$$

§2 万有引力 引力势能

理 论 要 点

1. 万有引力

宇宙中任何两质点间都彼此以力相吸引。力的大小与两质点质量的乘积成正比，与两质点的距离平方成反比，力的方向沿两质点的连线，这个力称为万有引力。

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}}\right) \tag{2.21}$$

$\boldsymbol{F}_{ij}$是第i 个质点受第j个质点的万有引力。$\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$。$G=(6.6720\pm0.0041)\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$称为万有引力常数。

2. 均质球与质点间的引力

先计算均质球壳的引力。将球壳分成同轴的许多环，设单位面积球壳上质量为ρ。环质量为$dM\approx2\pi R^2\rho\sin\theta d\theta$。

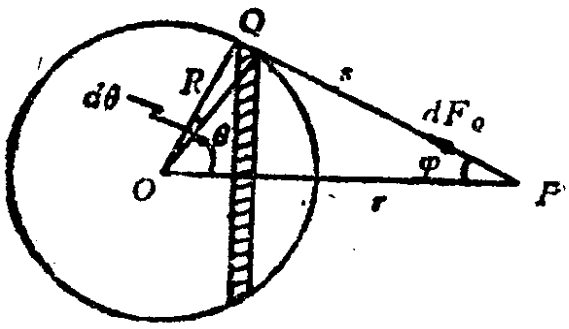


图 2.6

环上一质点Q对P的引力分解成沿PO方向和垂直PO方向的分力，沿PO的力大小为$dF_Q\cos\varphi$，环上各点引力沿PO方向的合力是

$$dF=G\frac{m\,dM}{s^2}\cos\varphi$$

$$=G\frac{2\pi\rho mR^2\sin\theta\cos\varphi}{s^2}d\theta$$

整个球壳对P的引力为

$$F=Gm\,2\pi\rho R^2\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cos\varphi d\theta}{s^2}$$

利用余弦定理

$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta = s^2$$

微分得

$$rR\sin\theta d\theta = sds$$

又 $\cos\varphi = \dfrac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs}$，所以

$$F = Gm2\pi\rho R^2 \int_{r-R}^{r+R} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2 s^2} ds$$

$$= \frac{GmM}{r^2} \qquad (M = 4\pi\rho R^2)$$

这表明，球壳对球外一点 P的引力，如同球壳质量集中在球心一样，整个实心球也是如此，只是M代表整个球的质量而已。

质点放在均质球壳内部时，所受引力为零。

3. 引力势能

一质点在另一质点的引力场中给定点的势能

$$V(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} \qquad (2.22)$$

质点在均质球壳引力场中的势能

$$V = -G\int \frac{mdM}{s}$$

$$= -G\int \frac{2\pi\rho R^2 \sin\theta d\theta}{s}$$

$$= -G\frac{2\pi\rho R^2}{rR}\int_{r-R}^{r+R} ds$$

$$= -\frac{GMm}{r} \qquad (M\text{——球壳质量})$$

质点在实心球引力场中的势能

$$V = -\frac{GMm}{r} \qquad (M\text{——实心球质量})$$

例　题

2.8　求半径为R的薄球壳对距球心为$r>R$处的质量为m的质点P的引力。

〔解〕　图2.7中环形面积元

$$dS=2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)$$
$$=2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

设球壳面密度为σ，环形面积元对质点m的引力为

$$dF=\frac{G(2\pi R^2\sigma\sin\theta d\theta)m}{b^2}\cos\varphi \qquad (1)$$

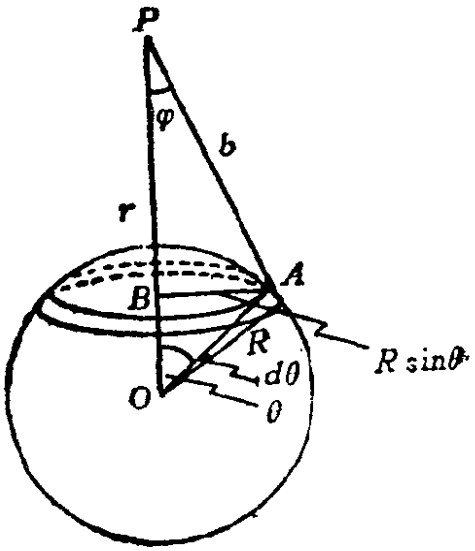


图　2.7

由对称性知，引力的方向由P指向O，据余弦定理

$$b^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta$$

又

$$\cos\varphi=\frac{PB}{AP}=\frac{r-R\cos\theta}{b}$$

所以

$$dF=\frac{G(2\pi R^2\sigma\sin\theta d\theta)(r-R\cos\theta)m}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}$$

$$F=2\pi GR^2\sigma m\int_0^{\pi}\frac{(r-R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}d\theta \qquad (2)$$

作变量代换$\theta\longrightarrow b$，由于

$\theta=0$，$b^2=R^2+r^2-2Rr=(r-R)^2$，$r>R$，$b=r-R$

$\theta=\pi$，$b^2=R^2+r^2+2Rr=(r+R)^2$，$b=r+R$

$$r-R\cos\theta=r-R\left(\frac{R^2+r^2-b^2}{2Rr}\right)=\frac{b^2-R^2+r^2}{2r}$$

$$2bdb=2Rr\sin\theta d\theta$$

由（2）式得

$$F=2\pi GR^2\sigma m\int_{r-R}^{r+R}\frac{b^2-R^2+r^2}{b^3(2r)}\cdot\frac{b}{Rr}db$$

$$=\frac{\pi GR\sigma m}{r^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(1+\frac{R^2-r^2}{b^2}\right)db$$

$$=\frac{4\pi GR^2\sigma m}{r^2}$$

$$=\frac{GMm}{r^2}\qquad(M:\text{球壳质量})$$

$$\boldsymbol{F}=-F\boldsymbol{e}_r$$

2.9 求上题（2.8题）中当$r<R$时(图2.8)，球壳对质点的吸引力.

〔解〕 引力同样由上题（2）式给出为

$$F=2\pi GR^2\sigma m\int_0^{\pi}\frac{(r-R\cos\theta)\sin\theta}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^{3/2}}d\theta$$

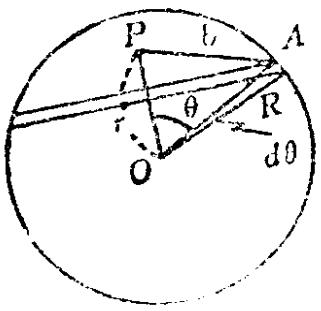


图 2.8

$$b^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta$$

$\theta=0$时，$b=R-r$

$\theta=\pi$时，$b=R+r$

$$F=\frac{\pi GR\sigma m}{r^2}\int_{R-r}^{R+r}\left(1+\frac{R^2-r^2}{b^2}\right)db$$

$$=\frac{\pi GR\sigma m}{r^2}\left(2r+\frac{R^2-r^2}{b}\Big|_{R-r}^{R+r}\right)$$

$$=0$$

这说明质点在球壳内不受力的作用，将处于平衡状态.

2.10 一杆长为$2l$，质量分布均匀，在杆的中垂线上距离为d处有一质量为m的质点，求杆对质点的引力.

〔解〕 取坐标系$O-x_1x_2$如图2.9所示，质点m在Ox_2轴上，杆沿Ox_1轴放置。设杆的线密度为η。则杆的质量元ηdx_1与m之间的引力为

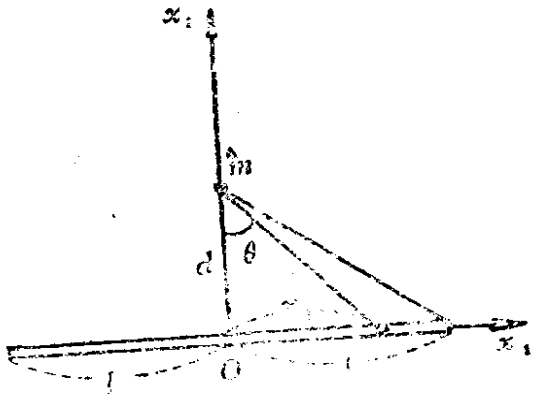


图 2.9

$$d\boldsymbol{F}=\frac{Gm\eta dx_1}{x_1^2+d^2}(\sin\theta\boldsymbol{e}_1-\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\sin\theta=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+d^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{d}{\sqrt{x_1^2+d^2}}$$

$$d\boldsymbol{F}=\frac{Gm\eta x_1dx_1}{(x_1^2+d^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_1-\frac{Gm\eta ddx_1}{(x_1^2+d^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{F}=\int_{-l}^{l}\frac{Gm\eta x_1dx_1}{(x_1^2+d^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_1-\int_{-l}^{l}\frac{Gm\eta ddx_1}{(x_1^2+d^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_2$$

$$=0-2\int_0^l\frac{Gm\eta ddx_1}{(x_1^2+d^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_2$$

由于$x_1=d\mathrm{tg}\theta$，且当$x_1=0,\theta=0$；$x_1=l,\theta=\mathrm{arctg}\frac{l}{d}$，故

$$\boldsymbol{F}=-2Gm\eta d\boldsymbol{e}_2\int_0^{\mathrm{arctg}(\frac{l}{d})}\frac{d\sec^2\theta d\theta}{(d^2\sec^2\theta)^{3/2}}$$

$$=-\frac{2Gm\eta l}{d\sqrt{d^2+l^2}}\boldsymbol{e}_2$$

$$=-\frac{GMm}{d\sqrt{d^2+l^2}}\boldsymbol{e}_2\qquad(M=2\eta l)$$

§3 质点在均匀重力场中的运动

理 论 要 点

1. 无阻尼的抛体运动

运动微分方程 $m\ddot{x}_1 = 0,\ m\ddot{x}_2 = -mg$ (2.23)

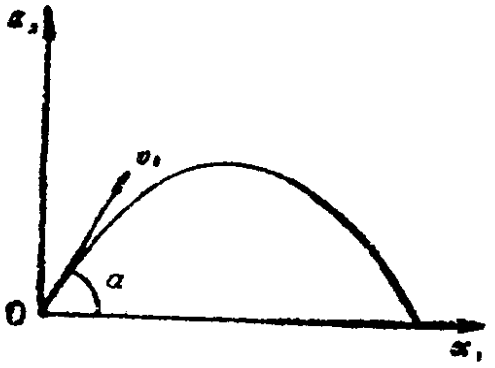


图 2.10

加速度 $\ddot{x}_1 = 0,\ \ddot{x}_2 = -g$ (2.24)

速度 $\dot{x}_1 = v_0\cos\alpha$

$\dot{x}_2 = v_0\sin\alpha - gt$ (2.25)

位置 $x_1 = v_0\cos\alpha \cdot t$

$x_2 = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

轨迹 $x_2 = x_1\mathrm{tg}\alpha - gx_1^2/(2v_0^2\cos^2\alpha)$

水平射程 $l = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

最高点 $h = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

到最高点时间 $t = \dfrac{v_1\sin\alpha}{g}$

2. 阻力与速度成正比

$R = -mkv$

运动微分方程 $m\ddot{x}_1 = -mk\dot{x},\ m\ddot{x}_2 = -mk\dot{x}_2 - mg$ (2.26)

加速度 $\ddot{x}_1 = -k\dot{x}_1,\ \ddot{x}_2 = -g - k\dot{x}_2$ (2.27)

速度 $\dot{x}_1 = v_0\cos\alpha e^{-kt}$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{k} + \left(v_0^2\sin^2\alpha + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} \qquad (2.28)$$

位置 $x_1=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt})$

$$x_2=-\frac{g}{k}t+\frac{1}{k}\left(v_0^2\sin^2\alpha+\frac{g}{k}\right)(1-e^{-kt})$$

收尾速度 $t\to\infty$，$\dot{x}_1\to 0$，$\dot{x}_2\to -g/k$。

3. 阻力与速度平方成正比

铅直运动微分方程

上升 $\ddot{x}_2=-g-k(\dot{x}_2)^2$

下降 $\ddot{x}=-g+k(\dot{x}_2)^2$ (2.29)

例 题

2.11 一质点在媒质中被以任意方式抛射出去，单位质量所受阻力为$-kv$，试讨论质点的运动。

〔解〕 质点的运动微分方程为

$$\ddot{x}_1=-k\dot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\ddot{x}_2=-g-k\dot{x}_2 \qquad (2)$$

由（1）得

$$\frac{d\dot{x}_1}{\dot{x}_1}=-kdt$$

$$\ln\dot{x}_1=-kt+c$$

由（2）得

$$\frac{d\dot{x}_2}{g+k\dot{x}_2}=-dt$$

$$\ln(g+k\dot{x}_2)=-kt+c'$$

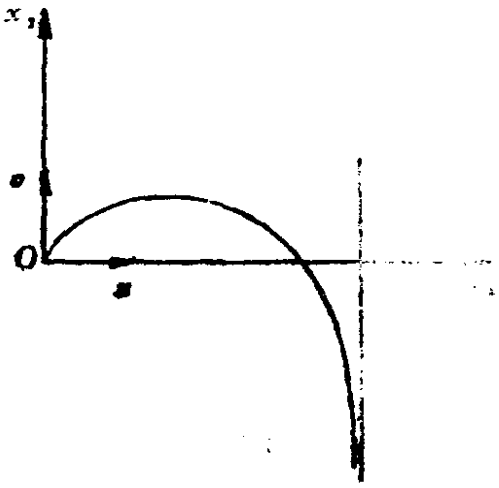


图 2.11

设 $t=0$ 时，$\dot{x}_1=u$，$\dot{x}_2=v$，则

$$c=\ln u$$

$$c'=\ln(g+kv)$$

所以

$$\dot{x}_1=ue^{-kt} \tag{3}$$

$$k\dot{x}_2+g=(g+kv)e^{-kt} \tag{4}$$

令 $t=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=0$，再作积分得

$$x_1=\frac{u}{k}(1-e^{-kt}) \tag{5}$$

$$kx_2+gt=\frac{g+kv}{k}(1-e^{-kt}) \tag{6}$$

由（5）解出 $t=-\frac{1}{k}\ln\left(1-\frac{x_1k}{u}\right)$，代入（6）消去 t 得轨迹方程

$$x_2=x_1\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{g}{ku}\right)+\frac{g}{k^2}\ln\left(1-\frac{kx_1}{u}\right)$$

$\left(\mathrm{tg}\alpha=\frac{v}{u}\text{即投射角正切}\right)$

注意到 $t\to\infty$ 时，$x_1\to\frac{u}{k}$，所以轨道有一渐近线 $x_1=\frac{u}{k}$。

当 $t\to\infty$ 时，$\dot{x}_2=-\frac{g}{k}$，$\dot{x}_1=0$，$-\frac{g}{k}$ 为质点在媒质中的收尾速度。

2.12 一质点质量为 m，沿一光滑斜面下滑，它受到重力 mg 和一与速度 v 的平方正比的阻力 mkv^2。证明质点从静止出发运动距离 d 所需时间为 $t=\frac{\mathrm{ch}^{-1}(e^{kd})}{(kg\sin\alpha)^{1/2}}$，式中 α 是斜面倾角。

〔解〕 质点运动微分方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mkv^2\boldsymbol{e}_1 + mg\sin\alpha\boldsymbol{e}_1 - mg\cos\alpha\boldsymbol{e}_2 + N\boldsymbol{e}_2$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (g\sin\alpha - kv^2)\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}_1\boldsymbol{e}_1$$

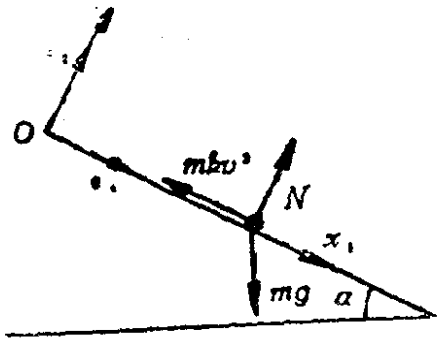


图 2.12

所以

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - kv^2$$

$$\int \frac{dv}{g\sin\alpha - kv^2} = \int dt$$

令 $a^2 = \dfrac{g\sin\alpha}{k}$，则

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = k\int dt$$

$$\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right]dv = kt + c$$

$$\ln\frac{a+v}{a-v} = 2a(kt + c)$$

$t = 0$ 时，$v = 0$，故 $c = 0$，所以

$$\frac{a+v}{a-v} = e^{2akt}$$

$$v = a\frac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1} = a\,\mathrm{th}(akt)$$

再积分，并利用初始条件：$t = 0$ 时，$x_1 = 0$，得

$$x_1 = \frac{1}{k}\ln\mathrm{ch}(akt)$$

当 $x_1 = d$ 时

$$e^{kd}=\mathrm{ch}(akt)$$

$$t=\frac{\mathrm{ch}^{-1}(e^{kd})}{ak}=\frac{\mathrm{ch}^{-1}(e^{kd})}{(kg\sin\alpha)^{1/2}}\cdot$$

§4 线性振动

理论要点

1. 一维谐振动

运动微分方程

$$m\ddot{x}=-kx\quad(k>0)\tag{2.30}$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0$$

其解为

$$x=A\cos(\omega_0t+\alpha)\tag{2.31}$$

角频率 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

位相 $\omega_0t+\alpha$ （α：初位相）

势能 $V=-\int_0^x(-kx)dx=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0t+\alpha)$

动能 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0t+\alpha)$

总能量 $E=T+V=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$

平均动能 $\overline{T}=\frac{1}{4}mA^2\omega_0^2=\frac{1}{2}E$

平均势能 $\overline{V}=\frac{1}{4}mA^2\omega_0^2=\frac{1}{2}E$

对于给定的初始条件 x_0，$\dot{x}_0$，有

振幅平方　$A^2=\dfrac{m(\dot{x}_0)^2+kx_0^2}{k}$　　(2.32)

初相角　$\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-\dot{x}_0}{\omega x_0}$　　(2.33)

2. 二维谐振动

$F=-kr$.　$k_1=k_2=k$,　$\omega_1=\omega_2=\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, 则

运动微分方程

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1&=-kx_1\\ m\ddot{x}_2&=-kx_2\end{aligned}\qquad(2.34)$$

$$x_1=A\cos(\omega_0 t+\alpha)$$

$$x_2=B\cos(\omega_0 t+\beta)$$

将x_2改写为

$$x_2=B\cos(\omega_0 t+\alpha+\delta)\quad \delta=\beta-\alpha$$

$$=B[\cos(\omega_0 t+\alpha)\cos\delta$$

$$-\sin(\omega_0 t+\alpha)\sin\delta]$$

将　$\cos(\omega_0 t+\alpha)=x_1/A$代入，

取平方得

$$B^2x_1^2-2ABx_1x_2\cos\delta+A^2x_2^2$$

$$=A^2B^2\sin^2\delta\qquad(2.35)$$

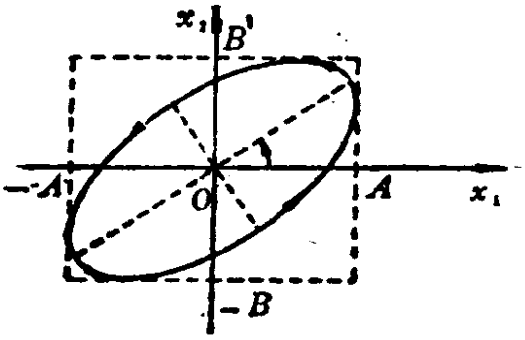


图　2.13

此为二次曲线方程，由判别式

$$b^2-4ac=\left(\frac{2\cos\delta}{AB}\right)^2-\frac{4}{A^2B^2}=-\left(\frac{2\sin\delta}{AB}\right)^2<0$$

可见，轨道方程为椭圆方程。

当$\delta=\pi/2$时，方程化为

$$\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{x_2^2}{B^2}=1$$

此为标准椭圆方程。当$A=B$时，化为圆方程。

当 $\delta=0$ 时，得

$$(Bx_1-Ax_2)^2=0, \qquad x_2=\frac{B}{A}x_1$$

为直线方程。当 $\delta=\pm\pi$ 时

$$x_2=-\frac{B}{A}x_1$$

为斜率相反的直线。

3. 三维谐振动

$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$。$k_1=k_2=k_3=k$，$\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，则运动微分方程

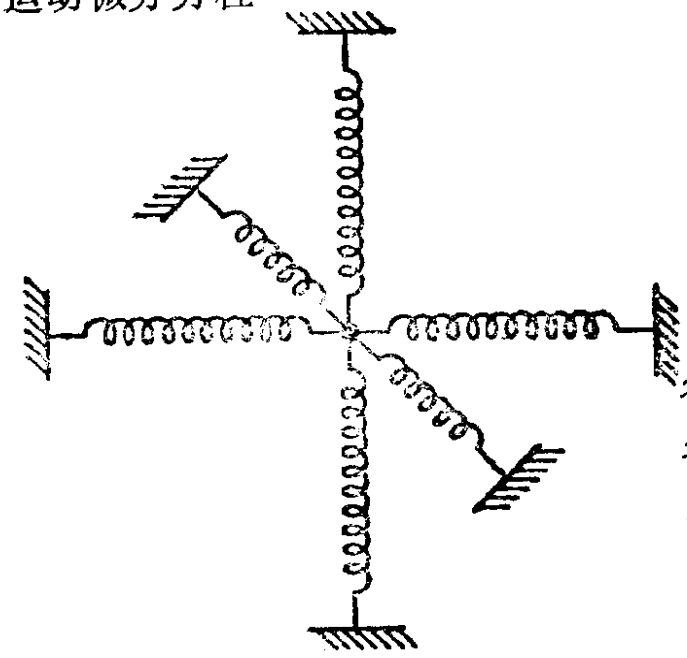


图 2.14

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1&=-kx_1\\ m\ddot{x}_2&=-kx_2\\ m\ddot{x}_3&=-kx_3 \end{aligned} \qquad (2.36)$$

其解为

$$\begin{aligned} x_1&=A_1\sin\omega_0 t+B_1\cos\omega_0 t\\ x_2&=A_2\sin\omega_0 t+B_2\cos\omega_0 t\\ x_3&=A_3\sin\omega_0 t+B_3\cos\omega_0 t \end{aligned}$$

这组方程用向量表示，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\sin\omega_0 t+\boldsymbol{B}\cos\omega_0 t \qquad (2.37)$$

显然运动完全发生在向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 所成的平面内，轨迹也是椭圆，如同二维情形一样。

4. 阻尼振动

设质点在媒质中运动受到与质点的速度成正比的阻力 $-b\dot{x}$ 的作用，运动微分方程为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \qquad (2.38)$$

或

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0,\quad\left(\beta=\frac{b}{2m},\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

特征根为 $r_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

$$r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

通解为 $x=e^{-\beta t}\left[A_1e^{\omega t}+A_2e^{-\omega t}\right]$ (2.39)

$$\omega=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

$\beta^2<\omega_0^2$ 次阻尼 (见图2.15(a))

$$x(t)=Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1t-\delta) \tag{2.40}$$

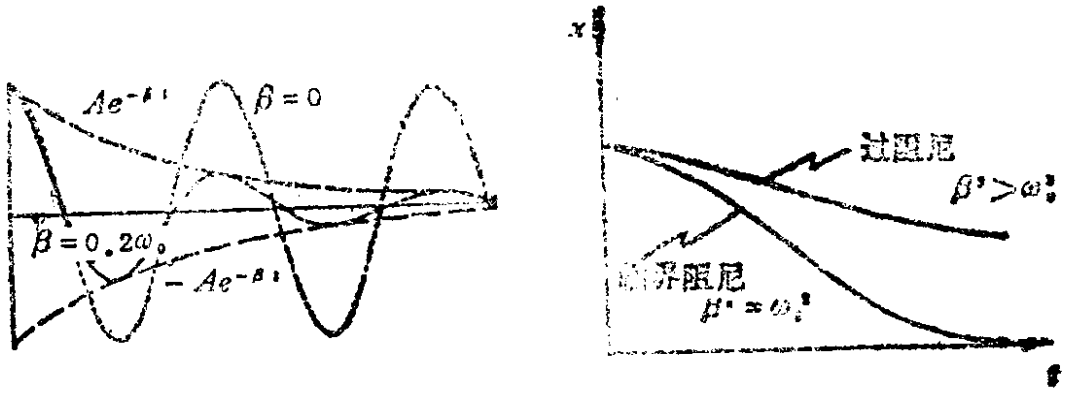
$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$\beta^2=\omega_0^2$ 临界阻尼 $x(t)=(A+Bt)e^{-\beta t}$ (2.41)

$\beta^2>\omega_0^2$ 过阻尼 $x(t)=(A_1e^{\omega_2 t}+A_2e^{-\omega_2 t})e^{-\beta t}$

(见图2.15(b)) (2.42)

$$\omega_2=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$



(a) (b)

图 2.15

5. 受迫振动

当策动力随时间作简谐变化时，运动微分方程为

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F\cos\omega t \tag{2.43}$$

或

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$$

齐次方程的解

$$x_c(t)=e^{-\beta t}\left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}+A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right] \tag{2.44}$$

特解

$$x_p(t)=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}\cos(\omega t-\delta) \tag{2.45}$$

$$\delta=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\beta^2}\right)$$

通解

$$x(t)=x_c(r)+x_p(t) \tag{2.46}$$

$t\gg\frac{1}{\beta}$ 时，$x(t)=x_p(t)$，运动变成稳定的简谐振动.

振幅

$$D=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

由 $\left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R}=0$ 得

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \tag{2.47}$$

称为**振幅共振频率**（振幅谐频）.

由

$$\dot{x}=\frac{-f\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}\sin(\omega t-\delta)$$

得速度振幅

$$D'=\frac{f}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega}\right)^2+4\beta^2}}$$

由 $\left.\frac{dD'}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_E}=0$ 得

$$\omega_E=\omega_0 \tag{2.48}$$

称为**速度共振频率（速度谐频）**。

注意：振幅（位能）共振与速度（动能）共振发生于不同的频率．仅对自由振动而言，两者才是相等的．

例　题

2.13　在图2.16所示的体系中，质量为 m 的质点由长 l 的弹性绳悬挂着，平衡时，绳伸长距离 d．质点被进一步拉下距离 b 然后放开，求在以后的运动中，质点所达到的最大高度．

〔解〕　设弹性系数为 k，平衡时有

$$kd = mg, \qquad k = \frac{mg}{d}$$

取平衡点 B 为重力势能零点．

在质点被拉到 D 以后的运动中达到静止时可能有两种情形：弹性绳或者伸长，或者是松弛的．我们讨论一种临界情形，即质点在绳刚刚变得松弛时（$x = -d$）达到静止．达到静止的瞬间，质点能量为 mgd．由能量守恒

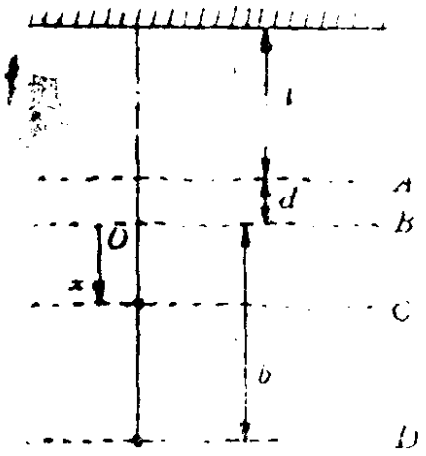


图　2.16

$$mgd = \frac{1}{2}k(d+b)^2 - mgb$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{mg}{d}(d+b)^2 - mgb$$

$$d^2 = \frac{1}{2}(d+b)^2 - bd$$

$$d^2 = b^2$$

$$d = b$$

这表明，如初始时质点被拉到平衡位置以下 d 的距离，质点将在绳变得松弛时达到静止。

（i）如 $b<d$，质点将在绳变得松弛前，即 A 点以下达到静止．设此时绳的伸长为 a，则由能量守恒

$$\frac{1}{2}k(d+b)^2-mgb=\frac{1}{2}ka^2+(d-a)mg$$

$$\frac{mg}{2d}(d+b)^2-mgb=\frac{mg}{2d}a^2+(d-a)mg$$

$$(d+b)^2-2bd=a^2+2d(d-a)$$

$$a^2+d^2-2da-b^2=0$$

$$a=d\pm b$$

因初始时弹性绳伸长为 $a=d+b$，故所求最大高度

$$a=d-b \quad (>0)$$

（ii）如 $c>d$，质点在达到静止时，弹性绳是松弛的，质点在重力作用下运动．如质点达到的最大高度为 $c+d$，则

$$\frac{1}{2}k(d+b)^2-mgb=mg(c+d)$$

$$(d+b)^2-2bd=2d(c+d)$$

$$c=\frac{b^2-d^2}{2d} \quad (>0)$$

2.14 求简谐振动的平均动能，并求当质点位移为振幅之半时，位能与动能之比．

〔解〕 $$\langle T\rangle=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t+\varepsilon)dt$$

$$=\frac{1}{2\tau}ma^2\omega^2\int_0^{\tau}\sin^2(\omega t+\varepsilon)dt$$

$$=\frac{ma^2\omega^2}{4\tau}\int_0^{\tau}2\sin^2(\omega t+\varepsilon)dt$$

$$= \frac{ma^2\omega^2}{4\tau}\int_0^{\tau}[1-\cos(2\omega t+2\varepsilon)]dt$$

$$= \frac{ma^2\omega^2}{4}$$

当 $x=a\cos(\omega t+\varepsilon)=a/2$ 时，$\cos(\omega t+\varepsilon)=1/2$

$$V=\frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega t+\varepsilon)=\frac{1}{2}ka^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}ka^2$$

$$T=\frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t+\varepsilon)=\frac{1}{2}ka^2[1-\cos^2(\omega t+\varepsilon)]$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{8}ka^2$$

$$\frac{V}{T}=\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$$

2.15 一阻尼振动位移 $x=ae^{-\alpha t}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\delta\right)$，求：

（1）x 取极大值 x_1 的时刻及取次极大值 x_2 的时刻；

（2）$x_1:x_2$ 的值；

（3）连续同向通过 $x=0$ 的时间间隔；

（4）x 曲线与 $ae^{-\alpha t}$ 相切点 t_1，t_2 之间的间隔；

（5）t_1 时 x 值 a_1 与 t_2 时 x 值 a_2 之比。

〔解〕（1）x 的极大值满足 $\frac{dx}{dt}=0$，即

$$-aae^{-\alpha t}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\delta\right)$$

$$-\frac{2\pi a}{T}e^{-\alpha t}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\delta\right)=0$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi t}{T}+\delta\right)=-\frac{\alpha T}{2\pi}\quad(1)$$

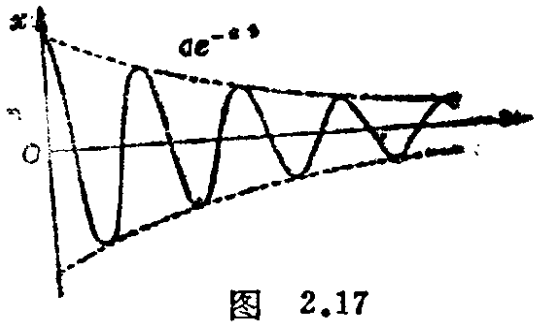


图 2.17

（可证 $\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{x=x_1}>0$，此处略）此式给出 x 取极大值的时刻 t。

$t+\tau$时刻x取次极大值。由（1）式有

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi(t+\tau)}{T}+\delta\right)=-\frac{aT}{2\pi}$$

$$\tau=T \qquad (2)$$

（2）因 $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\theta}$，由（1）式

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\delta\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{4\pi^2}}}$$

$$x_1=\frac{2\pi a e^{-at}}{\sqrt{4\pi^2+a^2T^2}},\quad x_2=\frac{2\pi a e^{-a(t+T)}}{\sqrt{4\pi^2+a^2T^2}}$$

所以

$$\frac{x_2}{x_1}=e^{aT} \qquad (3)$$

（3）$x=0$ 要求 $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\delta\right)=0$。连续两次同向通过 $x=0$ 的时间间隔为

$$\Delta t=T \qquad (4)$$

（4） $\cos\left(\frac{2\pi t_1}{T}+\delta\right)=1$

$$\cos\left(\frac{2\pi t_2}{T}+\delta\right)=1$$

$$\frac{2\pi(t_2-t_1)}{T}=2\pi$$

$$t_2-t_1=T \qquad (5)$$

（5） $a_1=a^{-at_1}$，$a_2=ae^{-at_2}$

$$\frac{a_1}{a_2}=e^{-at_1+at_2}=e^{a(t_2-t_1)}=e^{aT} \qquad (6)$$

2.16 滑轮上系一不可伸长的绳，绳上悬一弹簧，弹簧另

一端挂一重为W的物体，当滑轮以匀速转动时，物体以匀速v_0下降。如将滑轮突然停住，试求弹簧的最大伸长及最大张力。假定弹簧受W作用时的静伸长为l_0。

〔解一〕 运动微分方程

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = W - \frac{W}{l_0}x$$

$$\ddot{x} = g - \frac{g}{l_0}x$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l_0}(x - l_0) = 0$$

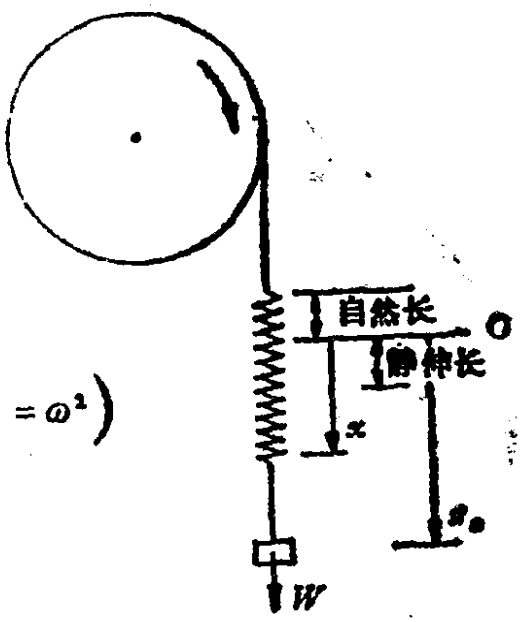


图 2.18

令 $x - l_0 = u$，则

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \left(\frac{g}{l_0} = \omega^2\right)$$

$$u = a\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{u} = -a\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$t = 0$时，$x = l_0$，$u = 0$

$\dot{x} = v_0$，$\dot{u} = v_0$

$0 = a\cos\varphi$，$v_0 = -a\omega\sin\varphi$

从而求得 $\varphi = \pi/2$，$a = -\frac{v_0}{\omega}$，故有

$$x = l_0 + u = l_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

由此求得最大伸长

$$x_{max} = l_0 + \frac{v_0}{\omega} = l_0 + v_0\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

最大张力

$$T_{max} = \frac{W}{l_0}x_{max} = W\left(1 + \frac{v_0}{\sqrt{l_0 g}}\right)$$

〔解二〕 简谐振动振幅A的平方

$$A^2=\frac{m(\dot{x}_0)^2+kx_0^2}{k}=\frac{\frac{W}{g}v_0^2+\frac{W}{l_0}\cdot 0}{W/l_0}=\frac{l_0}{g}v_0^2$$

$$A=v_0\sqrt{\frac{l_0}{g}}\qquad\text{(取平衡位置为坐标原点)}$$

故弹簧最大伸长为

$$x_{max}=l_0+v_0\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

最大张力

$$T_{max}=W\left(1+\frac{v_0}{\sqrt{l_0 g}}\right)$$

本题也可用能量守恒方程方便地解出。

2.17 如单摆长l，质量为m，振幅较小，受到与瞬时速度成正比的阻尼力作用，试讨论其运动。

〔解〕 单摆的运动微分方程

$$m\frac{d^2s}{dt^2}t=-mg\sin\theta t-\beta\frac{ds}{dt}t$$

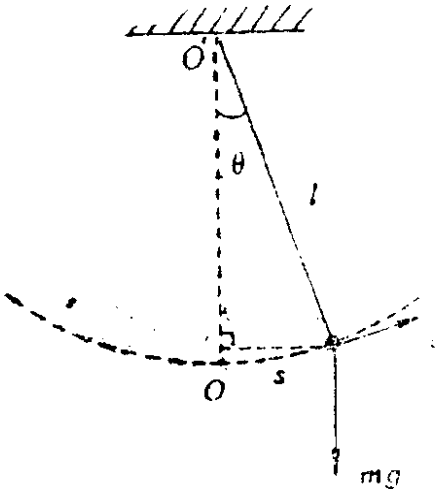


图 2.19

$$\frac{d^2s}{dt^2}+g\sin\theta+\frac{\beta}{m}\frac{ds}{dt}=0$$

由于单摆振幅较小，$\sin\theta\approx\theta$，$s=l\theta$。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$$

(i) 当$\frac{\beta^2}{4m^2}<\frac{g}{l}$时

$$\theta=e^{-\frac{\beta}{2m}t}(A\cos\omega t+\beta\sin\omega t)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{\beta^2}{4m^2}}$$

为次阻尼运动。

(ii) 当$\frac{\beta^2}{4m^2}=\frac{g}{l}$时

$$\theta=e^{-\frac{\beta}{2m}t}(A+Bt)$$

为临界阻尼运动。

(iii) 当$\frac{\beta^2}{4m^2}>\frac{g}{l}$时

$$\theta=e^{-\frac{\beta}{2m}t}(ce^{\lambda t}+De^{-\lambda t}),\quad \lambda=\sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2}-\frac{g}{l}}$$

为过阻尼运动。

§5 约束运动

理论要点

1. 约束运动　约束力

质点的运动，如其位置和速度受到一定的限制，称为**约束运动**。质点受到约束就是受到力的作用，这个力称为**约束力**。

约束力的大小、方向与外力、运动情况及约束有关，它是一种被动力，一般是未知力。

2. 约束运动微分方程　拉格朗日乘子法

运动微分方程

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}$$

其中$\boldsymbol{F}$为主动力，$\boldsymbol{R}$为约束力。

笛卡儿坐标下的分量方程

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=F_1+R_1\\ m\ddot{x}_2&=F_2+R_2\\ m\ddot{x}_3&=F_3+R_3\end{aligned}\qquad(2.49)$$

如质点约束在曲面 $f(x_1, x_2, x_3, t)=0$ 上运动，曲面光滑，约束力沿曲面法线方向，则

$$\boldsymbol{R}=\lambda\nabla f \tag{2.50}$$

系数 λ 称为**拉格朗日乘子**。运动微分方程分量式为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{2.51}$$

约束方程

$$f(x_1, x_2, x_3, t)=0$$

由这四个方程联立，解出 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$，λ，则运动和约束力同时解出。

如质点被约束在光滑曲线上运动，曲线可以看作两个曲面的交线，即满足

$$f_1(x_1, x_2, x_3, t)=0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, t)=0$$

则曲线对质点的约束力

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2=\lambda_1\nabla f_1+\lambda_2\nabla f_2$$

运动微分方程分量式为

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{2.52}$$

加上两个约束方程联立求解，即可求出 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$ 及 λ_1、λ_2。

3．利用本性（内禀）方程解理想约束问题

如曲面或曲线是光滑的，则约束是理想约束，没有摩擦力作功。

例如光滑曲线约束问题，在自然坐标系中写出动力学方程为

$$m\frac{dv}{dt}=F_t$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=F_n+R \tag{2.53}$$

在切向方程中不含约束力，因而可将未知力与未知的运动分开求解。

如主动力是保守力，约束是稳定的（约束方程中不显含 t）理想约束，还可用能量守恒定律求解。

例　题

2.18　质点约束在铅垂面内一光滑圆滚线上运动(图2.20)，证明质点往复运动的等时性。圆滚线方程为

$$x_1=a(2\theta+\sin2\theta),\quad x_2=a(1-\cos2\theta)$$

〔解〕 $dx_1=2a(1+\cos2\theta)d\theta,\ dx_2=2a\sin2\theta d\theta$

$$s=\int_0^P\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2}$$

$$=\int_0^\theta\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

$$=\int_0^\theta 4a\cos\theta d\theta$$

$$=4a\sin\theta$$

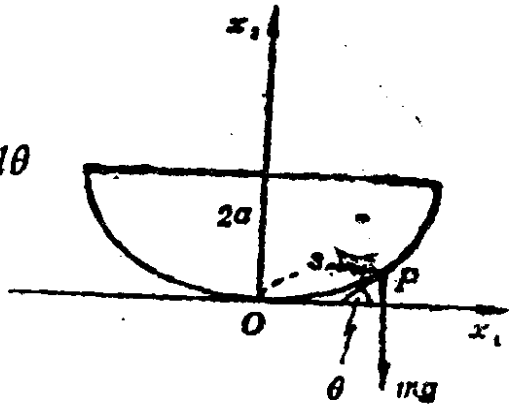


图　2.20

质点运动的切向方程为

$$m\frac{d^2s}{d\theta^2}=-mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2s}{d\theta^2}+\frac{gs}{4a}=0$$

令 $\omega=\sqrt{\frac{g}{4a}}$，则 $T=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$。由此可见周期与振幅无关，质点的运动为等时振动。

2.19 一内面光滑的半顶角为 α 的中空圆锥，轴铅直，顶点在下面，圆锥固定不动。在距顶点为 z 的曲面内侧某点处，质点以水平速度 v_0 沿切向射出，求质点所达到的最低点的高度。

〔解〕 设 P 是任意时刻质点的位置。

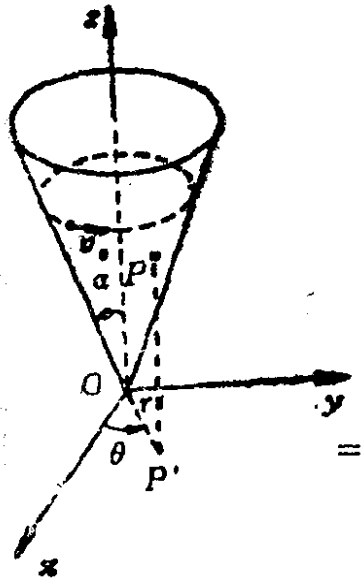


图 2.21

$$r=z\operatorname{tg}\alpha,\quad r^2\dot{\theta}=h$$

$$r\dot{\theta}=\frac{h}{r}=\frac{h}{z\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\dot{r}=\dot{z}\operatorname{tg}\alpha$$

$$E=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2+(\dot{z})^2]+mgz$$

$$=\frac{1}{2}m\left[(\dot{z})^2\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{h^2}{z^2\operatorname{tg}^2\alpha}+(\dot{z})^2\right]+mgz$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2+mgz_0$$

$$h=v_0z_0\operatorname{tg}\alpha$$

代入能量方程得

$$\frac{1}{2}mv_0^2+mgz_0=\frac{1}{2}m\left[(\dot{z})^2\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{v_0^2z_0^2\operatorname{tg}^2\alpha}{z^2\operatorname{tg}^2\alpha}+(\dot{z})^2\right]+mgz$$

$$z^2v_0^2+2gz_0z^2=(\dot{z})^2z^2\operatorname{tg}^2\alpha+v_0^2z_0^2-z^2(\dot{z})^2+2gz^3$$

在最低点处 $\dot{z}=0$，所以

$$2gz^3-(v_0^2+2gz_0)z^2+v_0^2z_0^2=0$$

$$(z-z_0)(2gz^2-v_0^2z-v_0^2z_0)=0$$

$z \neq z_0$，$z>0$ 的根为

$$z=\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+8v_0^2gz_0}}{4g}$$

此即最低点高度.

2.20 质点约束在不光滑圆滚线上运动，且质点自圆滚线的尖端自由下滑到圆滚线的最低点时停止运动，则摩擦系数 μ 应满足下式

$$\mu^2 e^{\mu\pi}=1$$

试证明之.

〔解〕 质点运动的法向方程为

$$N=m\frac{v^2}{\rho}+mg\cos\theta$$

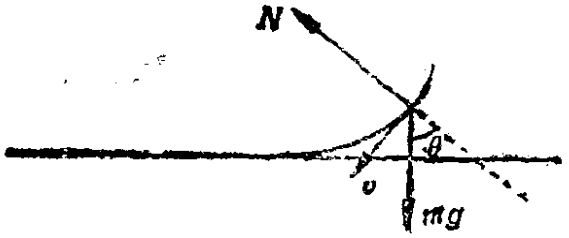


图 2.22

由动能定理得

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-mg\sin\theta ds-\mu Nds$$

$$=-mg\sin\theta ds-\mu mg\cos\theta ds-\mu m\frac{v^2}{\rho}ds$$

$$\frac{1}{2}dv^2=-g(\sin\theta+\mu\cos\theta)ds-\frac{\mu v^2}{\rho}ds \qquad (1)$$

由 (2.18) 题得

$$s=4a\sin\theta,\quad ds=4a\cos\theta d\theta$$

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}=4a\cos\theta$$

将 s，ρ 代入 (1) 式

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{d\theta}=-g(\sin\theta+\mu\cos\theta)4a\cos\theta-\mu v^2$$

$$\frac{dv^2}{d\theta}+2\mu v^2=-4ag[\sin2\theta+\mu(1+\cos2\theta)] \qquad (2)$$

令 $-4ag[\sin2\theta+\mu+\mu\cos2\theta]=f(x)$

方程形为

$$\frac{dy}{dx}+2\mu y=f(x)$$

通解是

$$y=e^{-\int 2\mu dx}\left(\int f(x)e^{\int 2\mu dx}dx+c\right)$$

故（2）式解为

$$\begin{aligned}v^2&=-4age^{-2\mu\theta}\left[\int\sin2\theta e^{2\mu\theta}d\theta+\int\mu\cos2\theta e^{2\mu\theta}d\theta\right.\\&\quad\left.+\int\mu e^{2\mu\theta}d\theta+c'\right]\\&=-4age^{-2\mu\theta}\left[\frac{e^{2\mu\theta}(2\mu\sin2\theta-2\cos2\theta)}{4(\mu^2+1)}\right.\\&\quad\left.+\mu\frac{e^{2\mu\theta}(2\sin2\theta+2\mu\cos2\theta)}{4(\mu^2+1)}+\frac{\mu}{2\mu}e^{2\mu\theta}\right]+ce^{-2\mu\theta}\\&=\frac{-ag}{\mu^2+1}[4\mu\sin2\theta-2\cos2\theta(1-\mu^2)]-2ag+ce^{-2\mu\theta}\end{aligned}$$

由初始条件：$\theta=-\frac{\pi}{2}$，$v=0$，得

$$\begin{aligned}0&=\frac{-ag}{\mu^2+1}[2(1-\mu^2)]-2ag+ce^{\mu\pi}\\&=-2ag\left[\frac{1-\mu^2}{\mu^2+1}+1\right]+ce^{\mu\pi}\\&=\frac{-4ag}{\mu^2+1}+ce^{\mu\pi}\end{aligned}\qquad(3)$$

当 $\theta=0$ 时 $v=0$，则

$$0=\frac{-ag}{\mu^2+1}[-2(1-\mu^2)]-2ag+c$$

$$= 2ag\left[\frac{1-\mu^2}{\mu^2+1}-1\right]+c$$

$$= \frac{-4ag\mu^2}{\mu^2+1}+c \qquad (4)$$

由（3）、（4）得 $\mu^2 e^{\mu x}=1$。

2.21 用拉格朗日乘子法求解下面的问题。一质点m在重力场中被约束在固定光滑直杆上运动，杆与水平成α角，求质点的运动规律及杆的约束反作用力。设质点自静止开始运动。

〔解〕 取静系O-x_1x_2，如图2.23所示。约束方程为

$$f(x_1,x_2)=x_2-kx_1=0 \qquad (1)$$

$$k=\mathrm{tg}\alpha$$

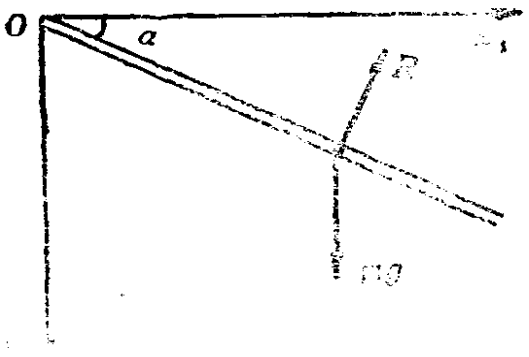


图 2.23

杆的约束反作用力$\boldsymbol{R}$的分量为

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}=-k\lambda \\ R_2 &= \lambda\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

质点运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k\lambda \\ m\ddot{x}_2 &= mg+\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

由（3）得

$$m\ddot{x}_1+mk\ddot{x}_2=mkg \qquad (4)$$

由（1）知

$$\ddot{x}_2=k\ddot{x}_1 \qquad (5)$$

将（5）代入（4），得$(1+k^2)\ddot{x}_1=kg$，即

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \cos^2\alpha\cdot kg \\ \ddot{x}_1 &= \cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot g \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$t=0$ 时，$\dot{x}_1=0$，$x_1=0$，所以有

$$x_1=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$x_2=kx_1=\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha$$

将（6）代入（3）的第一式得

$$\lambda=-\frac{m}{k}\ddot{x}_1=-mctg\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot g=-mg\cos^2\alpha$$

将 λ 代入（2）式，得

$$R_1=mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$R_2=-mg\cos^2\alpha$$

§6 带电粒子在电磁场中的运动

理论要点

带电粒子在电磁场中的运动是现代物理和工程技术中有重大意义的课题．在粒子加速器、等离子体研究以及天体物理学中都有广泛应用．

1．在均匀恒定电场中的运动

设有均匀恒定电场，强度为 $\boldsymbol{E}$，一带电粒子电量为 q，质量为 m，进入电场后受力

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$$

则按牛顿第二定律，粒子获得加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \qquad (2.54)$$

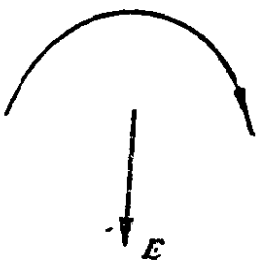


图 2.24

这与质点在均匀重力场中的运动完全相似．运动轨迹一般为抛物线（相当于平抛、斜抛），见图2.24．在特殊的初始条件下，运

动轨迹为直线（相当于上抛、下抛、自由下落）.

2. 在均匀恒定磁场中的运动

设磁场强度$\boldsymbol{B}$为均匀恒定，粒子在磁场中受洛仑兹力的作用，洛仑兹力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

如带电粒子垂直进入磁场($\boldsymbol{v}_0\perp\boldsymbol{B}$)，则本性方程为

$$m\frac{dv}{dt}=0 \qquad (2.55)$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=|q|vB$$

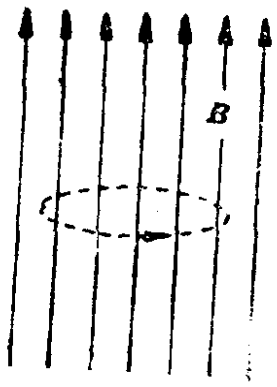


图 2.52

解之得

$v=v_0$（速率不变）

$\rho=\frac{mv_0}{|q|B}$（回转半径不变）

粒子将作匀速圆周运动. 回转角速度$\omega=\frac{qB}{m}$，当$q>0$时，左旋，当$q<0$时，右旋.

如带电粒子以任意方向进入磁场，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\perp+\boldsymbol{v}_{//}$$

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=q\boldsymbol{v}_\perp\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{F}_{//}=0$$

即在沿磁场方向作匀速率运动，在与磁场垂直的方向，粒子运动仍为圆周运动，两种运动的合成，为一螺旋运动.

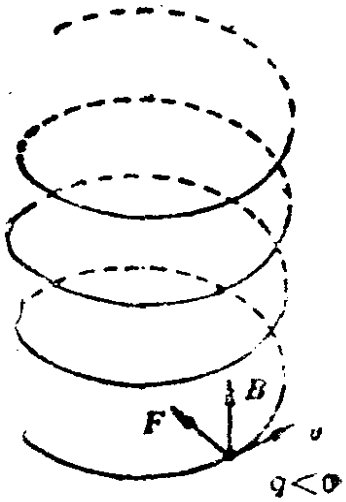


图 2.26

运动一周的时间

$$t=\frac{2\pi\rho}{v_\perp}=\frac{2\pi m}{|q|B} \qquad (2.56)$$

螺距 $d=v_{//}t=\frac{2\pi mv_{//}}{|q|B}$ (2.57)

在均匀恒定磁场中运动的粒子，如果它们具有同样的荷质比q/m，同样的初始位置和大体相同的$v_{//}$，尽管$v_{\perp}$各不相同，经过周期$\frac{2\pi}{\omega}$后，将汇聚到一点，这称为磁场的**聚焦性质**.

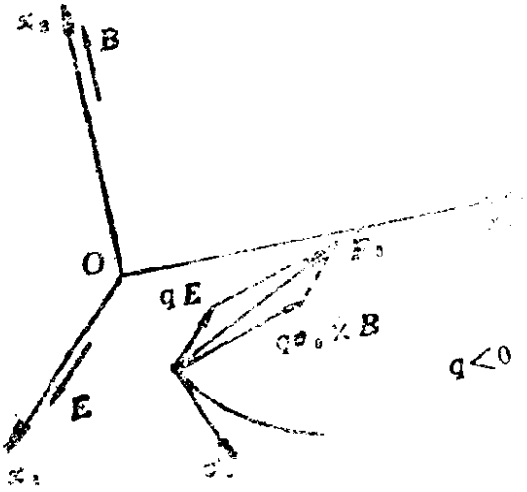


图 2.27

3. 在均匀恒定正交电磁场中的运动

如$\boldsymbol{v}_0 \perp \boldsymbol{B}$，则运动始终在$\boldsymbol{v}_0$和$\boldsymbol{F}_0 = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}$决定的平面内，是平面运动. 运动微分方程为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B} \tag{2.58}$$

在图2.27所示的坐标下为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega \dot{x}_2 + \frac{qE}{m} \\ \ddot{x}_2 &= -\omega \dot{x}_1 \end{aligned} \tag{2.59}$$

其中$\omega = \frac{qB}{m}$. 积分之，得

$$x_1 = x_1^0 + \frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_2^0 + \frac{q}{B}\right) - a\cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$x_2 = x_2^0 - \frac{\dot{x}_1^0}{\omega} - \frac{E}{B}t + a\sin(\omega t + \varepsilon)$$

轨迹方程为

$$(x_1 - b)^2 + (x_2 - c)^2 = a^2 \tag{2.60}$$

式中

$$b = x_1^0 + \frac{1}{\omega}\left(\dot{x}_2^0 + \frac{q}{B}\right)$$

$$c = x_2^0 - \frac{\dot{x}_1^0}{\omega} - \frac{E}{B}t$$

可见，这是一旋轮线运动：电荷沿半径为a的圆周运动，角速度为 $\omega = \frac{qB}{m}$（恒定）．此圆的圆心以 $-\frac{E}{B}$ 匀速沿Ox_2轴运动，即沿$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$方向漂移．漂移现象是由于磁场上叠加了附加电场引起的，而粒子的圆周运动则是由磁场引起的．

例　题

2.22　设有一带电粒子在恒定电场与恒定磁场共同作用的空间内运动，见图2.28，试求解粒子的运动．

〔解〕　粒子运动微分方程是

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

（$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}$不垂直，$\boldsymbol{E}$在$0-x_2x_3$平面内）

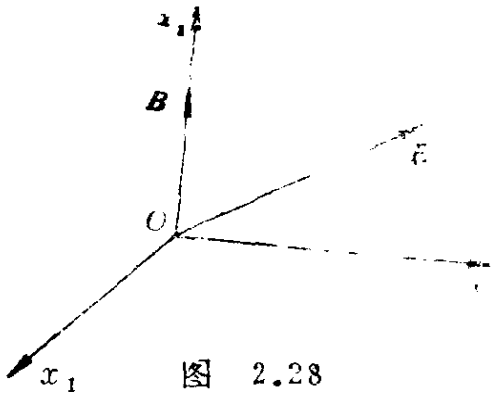


图　2.28

设 $t=0$ 时$\boldsymbol{r}(0)=0$，

$\boldsymbol{v}(0)=(v_{01},\ v_{02},\ v_{03})$

运动微分方程的分量式为

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{qE_2}{m} - \omega v_1 \qquad (2)$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{qE_3}{m} \qquad (3)$$

其中 $\omega = \frac{qB}{m}$．令 $a_2 = \frac{qE_2}{m}$，$a_3 = \frac{qE_3}{m}$，由（3）式得

$$v_3 = v_{03} + a_3 t, \quad x_3 = v_{03} t + \frac{1}{2} a_3 t^2$$

由（1）、（2）得

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} = \omega \frac{dv_2}{dt} = a_2 \omega - \omega^2 v_1 \qquad (4)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} = -\omega \frac{dv_1}{dt} = -\omega^2 v_2 \qquad (5)$$

由（5）得

$$v_2 = A\sin\omega t \qquad \text{(取初位相为零)} \qquad (6)$$

代入（1）式积分得

$$v_1 - v_{01} = \omega A \int_0^t \sin\omega t dt = A(1 - \cos\omega t) \qquad (7)$$

由（6）、（7）式积分得

$$x_1 = \int_0^t v_1 dt = v_{01} t + \frac{A}{\omega}(\omega t - \sin\omega t) \qquad (8)$$

$$x_2 = \int_0^t v_2 dt = \frac{A}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

此为旋轮线方程。

2.23 一束电子通过一小的阑孔进入均强磁场，磁场强度$\boldsymbol{B}$，各电子在阑孔处的速率为u，方向平行于磁场。忽略电子之间的相互作用，证明电子束将近似地在离阑孔距离为$2\pi mu/eB$处聚焦，式中m和$-e$分别表示电子的质量和电荷。

〔解〕 选以阑孔为坐标原点的笛卡儿坐标系$O\text{-}x_1x_2x_3$。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$。

单个电子运动微分方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

则

$$\dot{v}_1 = -\omega v_2 \qquad (1)$$

$$\dot{v}_2 = \omega v_1 \qquad (2)$$

$$\dot{v}_3 = 0 \qquad (3)$$

其中 $\omega = \frac{eB}{m}$。将第三式积分两次得

$$x_3 = u_3 t$$

这里初始条件为

$$r(0) = 0,\ v(0) = (u_1,\ u_2,\ u_3)$$

其中 u_1，u_2，u_3 满足 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$。由（1）、（2）得

$$\ddot{v}_1 = -\omega \dot{v}_2 = -\omega^2 v_1$$

从而有

$$v_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$v_2 = A\sin\omega t - B\cos\omega t$$

由 $v(0) = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ 得 $A = u_1$，$B = -u_2$，从而

$$v_1 = u_1\cos\omega t - u_2\sin\omega t$$

$$v_2 = u_1\sin\omega t + u_2\cos\omega t$$

积分，利用初始条件 $r(0) = 0$，得

$$x_1 = \frac{1}{\omega}\left\{u_1\sin\omega t - u_2(1-\cos\omega t)\right\}$$

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\left\{u_2\sin\omega t + u_1(1-\cos\omega t)\right\}$$

经时间 t，电子离 x_3 轴的距离为

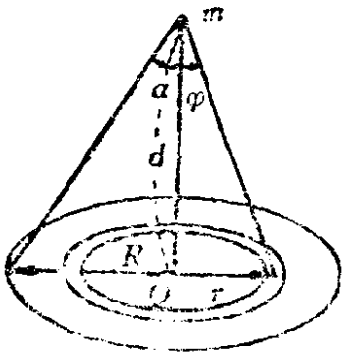
$$(x_1^2 + x_2^2) = \frac{u_1^2 + u_2^2}{\omega^2}\left\{\sin^2\omega t + (1-\cos\omega t)^2\right\}$$

$$= \frac{2(u_1^2 + u_2^2)}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

显然，如 $\cos\omega t = 1$，$x_1^2 + x_2^2 = 0$，即电子束收缩到x_3轴上，而电子束沿 x_3 方向的速度基本相等，即 u_1，$u_2 \ll u_3$，$u = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} \approx u_3$。在 $\omega t = 2n\pi$（n为自然数）时将收缩在 x_3 轴

上同一点，即发生聚焦，第一次聚焦点应在离阑孔为$x_3 = u_3 t = 2\pi u_3/\omega = 2\pi u/\omega = 2\pi mu/eB$的地方。

习　题



2.1 题图

2.1 一质量为 m 的质点位于一均质薄圆板的中垂线上距圆心为d处，圆板半径R，求圆板与质点间的引力。圆板的面密度为 σ。

答：$F = 2\pi Gm(1-\cos\alpha)$

(α是$r = R$时φ的值。)

2.2 一个半径为R的行星，具有半径为$R/2$的熔化核心，行星密度当 $r > \frac{R}{2}$时为ρ，而$r < \frac{R}{2}$时为5ρ(ρ是常数)。试计算行量内部各点的引力势。

答：$V(r) = G\pi\rho\left(\frac{10}{3}r^2 - 4R^2\right)$，　　$0 < r < \frac{R}{2}$

$$V(r) = G\pi\rho\left(-\frac{2}{3}\frac{R^3}{r} + \frac{2}{3}r^2 - 2R^2\right), \quad \frac{R}{2} < r < R$$

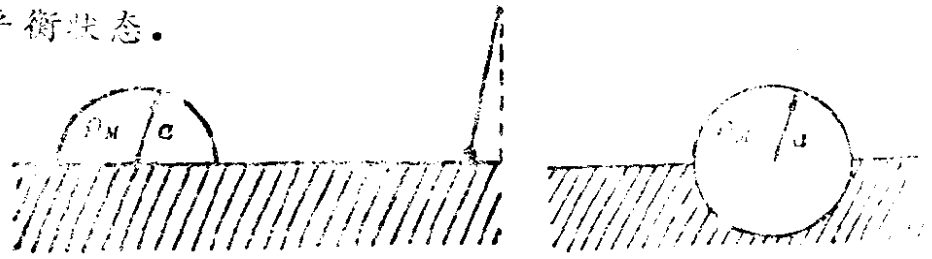
$$V(r) = G\pi\rho\left(-\frac{2R^3}{r}\right), \quad r > R$$

2.3 试求出一个行量的质量密度$\rho(r)$，由于这样的密度，整个行星内部各处的引力具有不变的大小。

答：$\rho(r) \propto \frac{1}{r}$

2.4 可以预料，靠近山区的地方，引力作用会使悬挂的铅锤对铅直线偏过一个小的角度。如果山脉可由一个无限长的

半圆柱代表，柱的半径为 a，密度为 ρ_M，并被横放在一个平面上，试证明在距圆柱轴 r_0 处的悬锤会偏斜一个角度 $\theta \approx \pi a^2 \cdot (\rho_M/(r_0 g))$。在对于这一影响所作的实际测量中观察到的偏斜要小得多。其次，假定山脉由漂浮在密度为 $2\rho_M$ 的液体中的圆柱来代表，圆柱半径为 a，密度为 ρ_M，试证明这个模型中因山脉造成的偏斜是零。由于后一结果与观测结果相当一致，所以有人提出，山以及大陆与其下层地壳岩石一起是处于各向等压的平衡状态。



(a)　　2.4题图　　(b)

2.5　在 $t=0$ 时，一个重量为 mg 的跳伞者位于 $x_3=0$ 处，并以速度 v_0 竖直地向下降落。如果作用于跳伞者的空气阻力正比于跳伞者的瞬时速度，求在任意时刻 $t(>0)$ 跳伞者的速度、经过的距离及加速度。

答：令 $\boldsymbol{e}_3$ 方向向下，并设空气阻力为 $-\beta v\boldsymbol{e}_3$。

$$v=\frac{mg}{\beta}+\left(v_0-\frac{mg}{\beta}\right)e^{\frac{-\beta t}{m}}$$

$$x_3=\frac{mgt}{\beta}+\frac{m}{\beta}\left(v_0-\frac{mg}{\beta}\right)\left(1-e^{\frac{-\beta t}{m}}\right)$$

$$a=\left(g-\frac{\beta v_0}{m}\right)e^{\frac{-\beta t}{m}}$$

2.6　将一质点以初速 v_0 抛出，v_0 与水平线所成之角为 α，此质点所受的空气阻力为其速度的 mk 倍，m 为质点的质量，k 为比例常数。试求当此质点的速度与水平线所成之角又为 α 时所需的时间。

答：$t=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{2kv_0\sin\alpha}{g}\right)$

2.7 质量为 M 的船以速度 v 行进时，所受阻力为 $f=av+bv^2$（a，b 为常数），如在速度为 v_0 时发动机停止工作，问船能走多远停下？

答：$s=\frac{M}{b}\ln\frac{a+bv_0}{a}$

2.8 平面内有 n 个力心，其分布确定，各自对同一质点施一与距离正比的吸引力

$$\boldsymbol{f}_i=-k_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)$$

试讨论质点的运动。（$\boldsymbol{r}$ 是质点的位置向量，$\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个力心的位置向量，k_i 为比例系数。）

答：质点受到一个在 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\sum_i k_i\boldsymbol{r}_i}{K}$（$K=\sum_i k_i$）处的力心作用，作二维谐振动。

2.9 将质量为 m 的质点竖直上抛于有阻力的媒质中，设阻力与速度平方成正比，即

$$R=mkgv^2$$

如上抛时的速度为 v_0，试证此质点又落至投掷点时的速度为

$$v_1=\frac{v_0}{\sqrt{1+kv_0^2}}$$

2.10 光滑圆球形碗的深度是半径 a 的 1.5 倍，一质点自碗底水平投掷时可升到碗缘，并在空中作一抛物线的运动后再落至另一侧的碗缘上。求证

（1）质点在抛物线顶点时的速率为 $\sqrt{ga/2}$。

（2）质点在抛物线顶点、碗缘及碗底的速率之比是：

$1:2:\sqrt{10}$。

2.11 一球被以速率 u 由地面上一点 O 抛向一竖直的高为 h 的墙，此墙到 O 点距离为 c，证明：如果

$$u^2/g<h+(h^2+c^2)^{1/2}$$

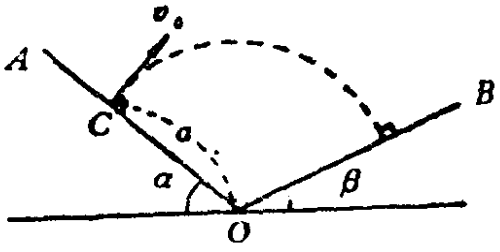
则球不能抛过墙（略去所有重力以外的作用力）。

2.12 一门大炮安放在壁立的高为 h 的海岸上，一军舰在离海岸水平距离为 R 的海面上，证明：如果 $R\leqslant(V^4/g^2+2V^2h/g)^{1/2}$，则军舰在大炮的射程里，$V$ 是炮弹的初速度。

如果炮弹以初速度 U 从军舰上发射，证明：若 $R\leqslant(U^4/g^2-2U^2h/g)^{1/2}$，则海岸炮在军舰的射程之内。

2.13 斜面 OA 与 OB 的倾角各为 α 与 β。设自 C 处射出一子弹，初速 v_0，且垂直于斜面 OA，距离 $OC=a$，子弹击中斜面时，其速度与 OB 恰好垂直，求证

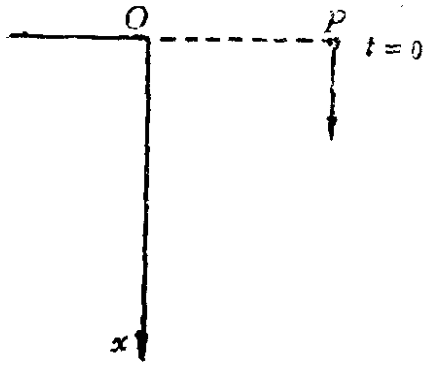
$$v_0^2=\frac{2ga\sin^2\beta}{\sin\alpha-\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}$$



2.13 题图

2.14 节日里燃放的礼花，由焰火弹在空中爆炸而成。设一焰火弹爆炸成的所有质点以相同的速率向各方向飞去，试讨论礼花的形状及其运动。假设焰火弹是铅直发射的。

2.15 质点在阻力等于 $mk(v^3+a^2v)$ 的介质中运动，其中 k 与 a 为常数。证明不论初速取什么值，质点移动的距离永远不会大于 $\pi/2ka$，且仅当 $t\to\infty$ 时，质点方才静止。



2.16题图

2.16 求自由落下的质点 P 关于 O 点的角速度作为 t 的函数，以及角速度取极大值的位置。

答：$\omega=\dfrac{4agt}{4a^2+g^2t^4}$

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

2.17 判断如下各力是否是保守力，如是，求出其势能函数。

（1） $\boldsymbol{f}=[x_2/(x_1^2+x_2^2)^{1/2}]\boldsymbol{e}_1-[x_1/(x_1^2+x_2^2)^{1/2}]\boldsymbol{e}_2$。

（2） $\boldsymbol{f}=2x_1x_2^3x_3^4\boldsymbol{e}_1+3x_1^2x_2^2x_3^4\boldsymbol{e}_2+4x_1^2x_2^3x_3^3\boldsymbol{e}_3$。

（3） $\boldsymbol{f}=(ax_1+bx_2^2)\boldsymbol{e}_1+(ax_3+2bx_1x_2)\boldsymbol{e}_2$
$+(ax_2+bx_3^2)\boldsymbol{e}_3$

（4） $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$

（5） $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$

答：（1）非保守力；（2）$V=-x_1^2x_2^3x_3^4+c$；

（3）$V=-(ax_1^2/2)-bx_2^2x_1-ax_2x_3-(bx_3^3/3)+c$；

（4）非保守力；（5）$V=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2/2+c$。

2.18 火车质量为m，功率为常数p，初速$v_0=0$，如火车所受阻力f为常数，则时间与速度的关系为

$$t=\frac{mk}{f^2}\ln\frac{k}{k-vf}-\frac{mv}{f}$$

如果f与速度v正比，则

$$t=\frac{mv}{2f}\ln\frac{k}{k-vf}$$

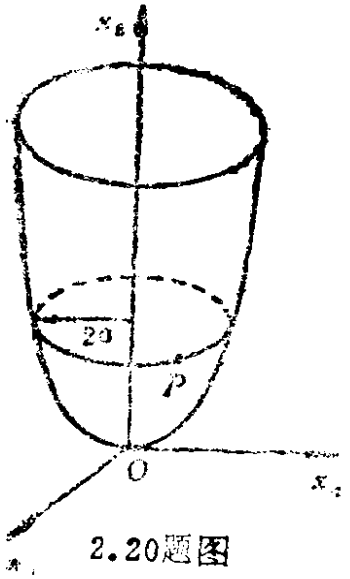
试证明之。

2.19 一列火车由静止开始运动，机车的牵引力等于常数F，阻力等于常数f，当列车达到速度v时，改变牵引力，但机车功率不变，证明在以后的运动中，速度由下式给出：

$$v=2\frac{Fvt-fx}{M}-\frac{Fv^2}{F-f}$$

式中M是列车的总质量，x及t分别是列车由静止开始所行驶的距离及所经过的时间。

2.20 一质量为m的质点P运动在一光滑旋转抛物面$x_1^2+x_2^2=4ax_3$的内表面上。如果它以常速率描画出一个半径

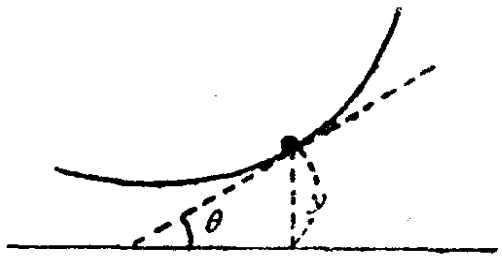


2.20题图

$2a$的水平圆周，求其关于Ox_3轴的角动量。当质点沿此圆周运动时，在通过x_3轴和质点的铅直平面内受到一个沿抛物面的冲击$m(2g)^{1/2}$，证明在其后的运动中，质点的路径限于两个水平面之间。

答：质点在$x_3=\frac{a}{2}$和$x_3=2a$之间运动。

2.21 一质点被约束在一凹面上振动，其周期与振幅无关，求此质点在凹面上的轨迹的微分方程。



2.21题图

答：$\omega^2 s=g\frac{dy}{ds}$

2.22 一质量为m的质点自光滑圆滚线的尖端无初速地滑下，试证在任何一点的压力为$2mg\cos\theta$，式中θ为水平线和质点运动方向间的夹角。已知圆滚线方程为

$$x_1=a(2\theta+\sin 2\theta)$$

$$x_2=-a(1+\cos 2\theta)$$

且$\dot{\theta}=\omega=k$，$a=g/4k^2$。

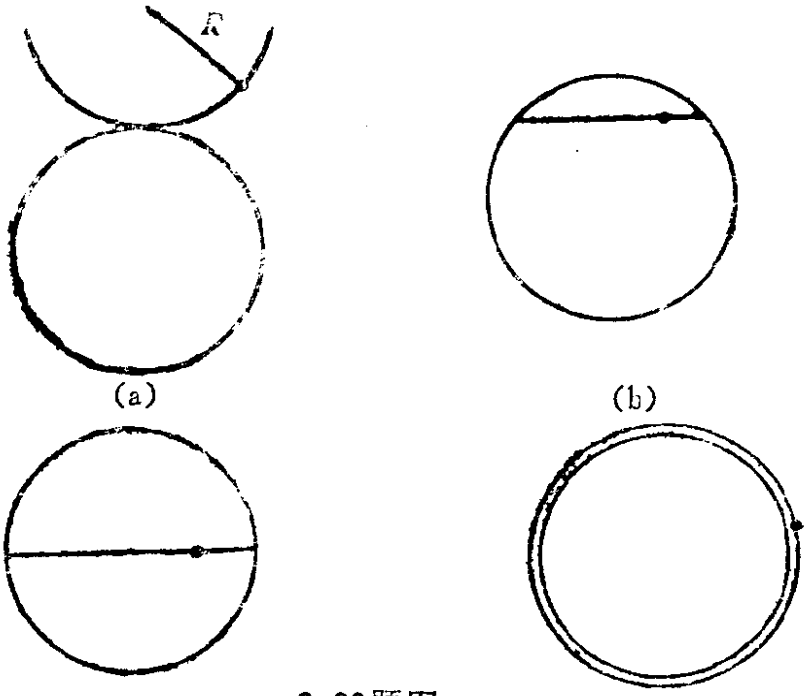
2.23 地球的质量为M，半径为R，证明下列时间间隔是相同的：

（1）在地球表面上长为R的摆作微振动的周期（图(a)）。

（2）质点在穿过地球的直线隧道中，关于平衡点的振动周期（图(b)）。

（3）质点在穿过地球中心的直线隧道中振动的周期（图(c)）。

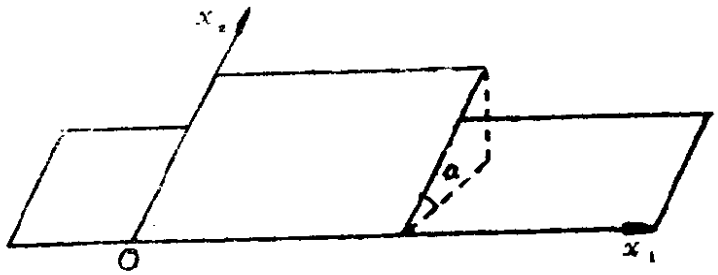
（4）运动在环绕地球的半径为R的圆形轨道上的人造卫星的旋转周期（图(d)）。



2.23题图

答：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}$

2.24 一质点被约束在与水平面成α角的光滑斜面上运动（$\alpha<90°$），设斜面与水平面的交线为x_1轴，在斜面上垂直于x_1轴的为x_2轴。试求出质点的运动方程，并证明在斜面上质点的轨道为一抛物线。已知$t=0$时$x_1=x_2=0$，$v=v_0$，沿$x_1=x_2$直线方向。



2.24题图

答：轨道方程为

$$\left(x_1-\frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\right)^2=-\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\left(x_2-\frac{v_0^2}{4g\sin\alpha}\right).$$

2.25 用笛卡儿坐标系求解两种情形下带电粒子在均匀恒定磁场中的运动。

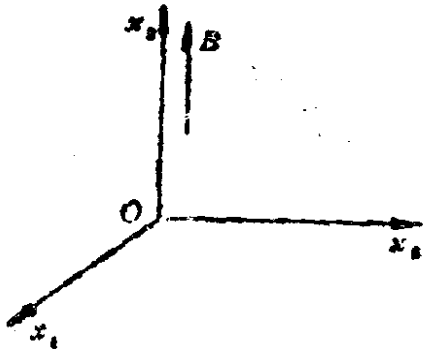
（1）带电粒子的初速与$\boldsymbol{B}$垂直；

（2）带电粒子的初速与$\boldsymbol{B}$成任意角度。

答：（1）$x_1=\frac{v^0}{\omega}\sin\omega t$

$$x_2=\frac{v^0}{\omega}(\cos\omega t-1)$$

$$\omega=\frac{qB}{m}$$



2.25 题图

x_1轴沿初速v_0方向。

（2）$x_1=\frac{v_\perp^0}{\omega}\sin\omega t$

$$x_2=\frac{v_\perp^0}{\omega}(\cos\omega t-1)$$

$$\omega=\frac{qB}{m}$$

$x_3=v_{/\!/}^0 t$，x_1轴沿初速$\boldsymbol{v}^0$在垂直于磁场方向的分量$v_\perp^0$方向。

2.26 一带电粒子质量为m，电荷为q，在均匀恒定磁场$\boldsymbol{B}$中以速度$\boldsymbol{v}$运动。令磁场沿笛卡儿坐标系的Ox_3轴。如果粒子的初位矢$\boldsymbol{r}_0=(a,\ b,\ c)$，且如初始速度$\boldsymbol{v}_0=(0,\ U,\ V)$，解运动方程并求出$\boldsymbol{r}$；如初始时$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$，证明粒子描绘一半径为$mU/qB$的圆。

答：$\boldsymbol{r}=\{a+U/\omega-U\cos(\omega t)/\omega,\ b+U\sin(\omega t)/\omega,$

$$c+Vt\}$$

$\omega=qB/m$。

2.27 一带电粒子质量为m，电荷为q，以速度$\boldsymbol{v}$在磁场$\boldsymbol{B}$和电场$\boldsymbol{E}$中运动。如选笛卡儿坐标系，有

$$\boldsymbol{B}=(0,\ 0,\ B),\ \boldsymbol{E}=(E_1,\ 0,\ E_3)$$

（这里B，E_1和E_3是常数）证明

$$\boldsymbol{v}=[(U+E_1/B)\sin(\omega t),\ (U+E_1/B)\cos(\omega t)-E_1/B,$$
$$V+qE_3t/m]$$

这里$\boldsymbol{v}(0)=(0,\ U,\ V)$，而$\omega=qB/m$。如果带电粒子的位矢$\boldsymbol{r}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，初位矢$\boldsymbol{r}=(a,\ b,\ 0)$，证明

$$\left[x_1-a+\frac{1}{\omega}(U+E_1/B)^2\right]+\left[x_2-b+E_1t/B\right]^2$$

$$=\frac{1}{\omega^2}(U+E_1/B)^2$$

求x_3并描述质点的运动性质。

答：$x_3=Vt+qE_3t^2/2m$；在x_3方向均匀加速，而运动在x_1x_2平面上的投影是一半径为$(1/\omega)(U+E_1/B)$的圆，其中心$\{a+(1/\omega)(U+E_1/B),\ b-E_1t/B\}$沿负$x_2$轴运动。

2.28 一束离子，质量、电荷相同，从同一点O（坐标原点）射入正交电磁场，如$\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_3$，初速度$\boldsymbol{v}_0$在$x_1x_2$平面里，证明：尽管离子初始速度的大小和方向有差别，但它们都会在某点F会聚，且距离OF与离子质量成正比。

答：$OF=2\dfrac{\pi mE}{qB^2}$。

第三章　质点的相对运动

一个物体的运动特征，与观察者所处的参考系的运动状态有关，从作相对运动的两个不同参考系去考察物体的运动，会得到不同的结果．然而无论从哪个参考系观察，物体运动的客观物理过程是唯一的．问题是我们必须找出这两个不同参考系中运动学量之间的关系．

按照牛顿定律，物体运动的加速度是由力决定的．我们从不同参考系中观察到同一物体可能有不同的加速度，这意味着作用在物体上的力是不同的．然而力仅仅是物体间的相互作用，它与参考系并无关系．为了反映物体之间真实的相互作用，我们必须找出在相互运动着的参考系中的动力学量之间的关系．

由于某些运动在惯性系中的方程是极其复杂的，而在非惯性系中描述运动则很简单，例如研究抛体运动，最好是选地球作参考系，但地球是一个转动着的有加速度的参考系，即非惯性系，在非惯性系中牛顿方程不再成立，因而必须建立在非惯性系中适用的运动学和动力学基本方程，以便直接在非惯性系中讨论问题．

§1　伽里略变换与牛顿的相对性原理

理论要点

1．伽里略变换

设参考系S'相对于惯性系S以速度V作匀速直线运动，分别固定在S'，S上的坐标系$O-x_1'x_2'x_3'$和$O-x_1x_2x_3$，在$t=0$

时原点重合。

当$|\boldsymbol{V}|\ll c$时，按牛顿的时空观，以相对于S'和S为静止的尺与时钟分别测得的距离和时间是相同的，因而向径

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}t \tag{3.1}$$

两参考系中

$$t=t' \tag{3.2}$$

(3.1) 和 (3.2) 式称为伽里略变换式。

将 (3.1) 式对时间微商，得

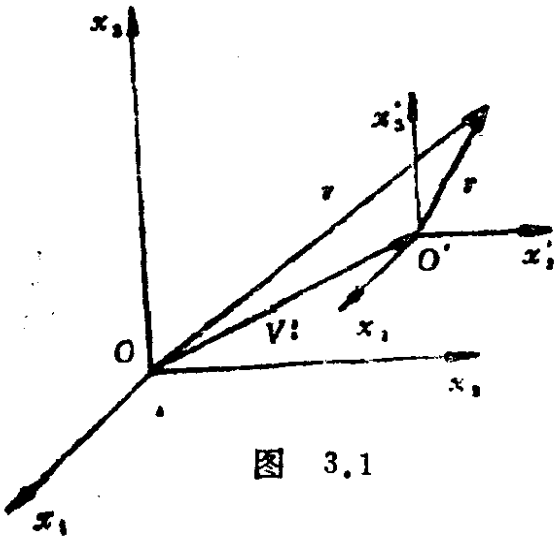


图 3.1

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}$$

再微商，得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}' \tag{3.3}$$

2. 牛顿的相对性原理

设S是惯性系，牛顿第二定律在其中成立，有

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

因在不同惯性系中测得的力、质量是相同的，即

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F} \qquad m'=m$$

由$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$ 知

$$m'\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}' \tag{3.4}$$

即在惯性系S'中牛顿第二定律也成立。

这表明：如果牛顿第二定律在一参考系中正确，则在对此

参考系作匀速运动的任何参考系中也正确．不同惯性系中力学运动方程形式不变，称为**牛顿的相对性原理**．

§2 相对运动运动学

理论要点

1．向量的时间变化率

设一向径$\boldsymbol{r}$，在某瞬间绕一瞬时轴以角速度ω转动，向量$\boldsymbol{r}$端点速度可以表为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{3.5}$$

如选$\boldsymbol{r}$为某坐标轴的单位向量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_i$，则

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i \tag{3.6}$$

如以$\boldsymbol{G}$表示任意向量，并设O-$\xi\eta\zeta$为固定坐标系，O-$x_1x_2x_3$为动坐标系，将$\boldsymbol{G}$在动系中表示为

$$\boldsymbol{G}=G_1\boldsymbol{e}_1+G_2\boldsymbol{e}_2+G_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}&=\frac{dG_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dG_2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dG_3}{dt}\boldsymbol{e}_3\\&\quad+G_1\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt}+G_2\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt}+G_3\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}\\&=\frac{dG_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dG_2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dG_3}{dt}\boldsymbol{e}_3\\&\quad+G_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_1+G_2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_2+G_3\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3\\&=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}\end{aligned} \tag{3.7}$$

式中，$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}$表示$\boldsymbol{G}$相对于静（空间）系的时间变化率，$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}$

$= \frac{dG_1}{dt}e_1 + \frac{dG_2}{dt}e_2 + \frac{dG_3}{dt}e_3$是$G$相对于动（本体）系的时间变

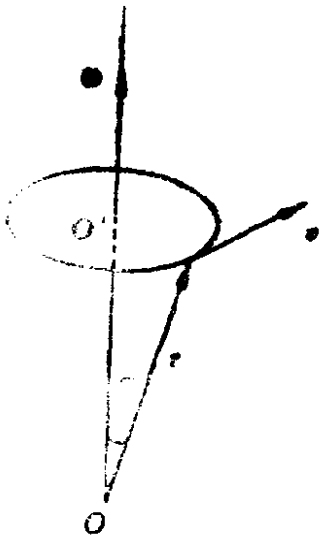


图 3.2

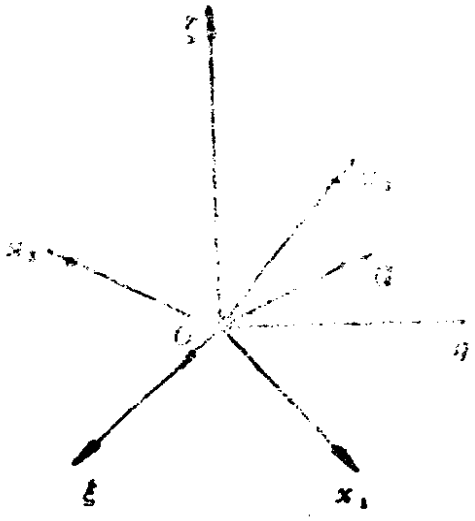


图 3.3

化率。（3.7）式虽然讲的是关于G的方程式，但实际上是两个坐标系中对时间微商的变换方程。为强调G的任意性，可改写成算符方程

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt} + \omega \times \tag{3.8}$$

而G可以是任意向量：r，V，P，L，ω…。当$G = \omega$时

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\tilde{d}\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{\tilde{d}\omega}{dt} \tag{3.9}$$

即角速度时间变化率在惯性系和非惯性系中有相同的值。

2．惯性系与非惯性系中运动学量的关系

设S'是惯性参考系，S是既有平动又有转动的非惯性系。坐标系$O'-\xi\eta\zeta$和$O'-x_1x_2x_3$分别固结于S'和S。认为$O'-\xi\eta\zeta$是静系，$O-x_1x_2x_3$是一般空间运动坐标系。

质点P参与三种运动：相对静系的运动是绝对运动；相对动系的运动（假定动系为不动时）称为相对运动；某瞬时质点在动系中占据的空间的几何点（重合点）对静系的运动是牵连

运动。

两坐标系中的运动学量的关系是

向径：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}$ （3.10）

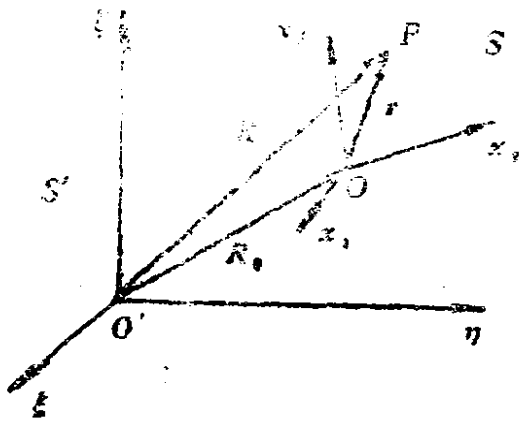


图 3.4

速度：$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt}$

$$=\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt}+\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\quad(3.11)$$

加速度：

$$\boldsymbol{a}=\underbrace{\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{R}_0}{dt^2}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}_{\boldsymbol{a}_t}+\underbrace{\frac{\bar{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}}_{\boldsymbol{a}_r}$$

$$+\underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}}_{\boldsymbol{a}_c}\qquad(3.12)$$

式中：$\boldsymbol{a}_t$——牵连加速度；$\boldsymbol{a}_r$——相对加速度；$\boldsymbol{a}_c$——科里奥利加速度（简称科氏加速度）。

科里奥利定理：在相对运动中，运动质点的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度和科氏加速度的向量和。

例　　题

3.1　半径为b的圆周在其自身的平面内以等角速度ω绕定点C沿反时针方向转动，一点M沿此圆周以2ω的匀角速度沿顺时针方向运动。开始时，M，O与C三点在一直线上，求M点的绝对速度与绝对加速度。

〔解〕本题要求的是绝对速度与绝对加速度，即用以考察

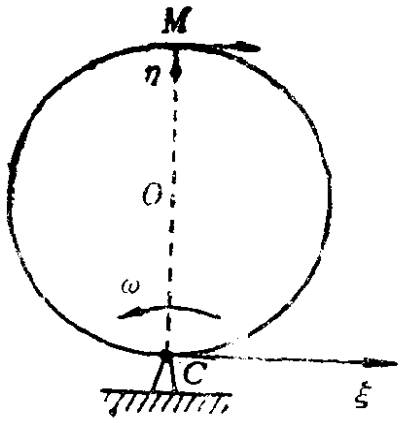


图 3.5

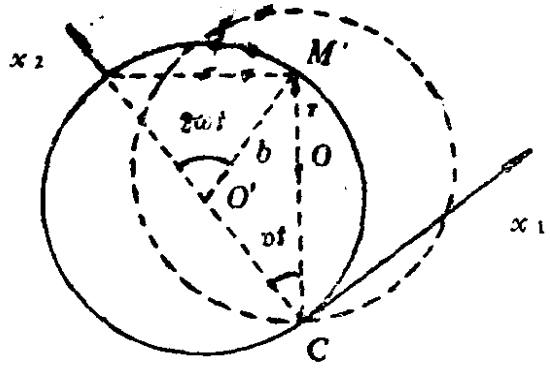


图 3.6

运动的参考系是固定系。但为了讨论问题的方便，我们可以选择固结于圆周的动坐标系，以$C-x_1x_2$表示之.固定系用$C-\xi\eta$表示，初始时，$C\xi$与Cx_1，$C\eta$与Cx_2相重合。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r-\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}=-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}$$

$$=-2\omega\boldsymbol{e}_3\times(b\cos 2\omega t\boldsymbol{e}_2+b\sin 2\omega t\boldsymbol{e}_1)$$

$$=2\omega b(\cos 2\omega t\,\boldsymbol{e}_1-\sin 2\omega t\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CM'}$$

$$=\omega\boldsymbol{e}_3\times(2b\cos\omega t)(\sin\omega t\boldsymbol{e}_1+\cos\omega t\boldsymbol{e}_2)$$

$$=b\omega\sin 2\omega t\,\boldsymbol{e}_2-2b\omega\cos^2\omega t\boldsymbol{e}_1$$

$$=b\omega\sin 2\omega t\boldsymbol{e}_2-b\omega(1+\cos 2\omega t)\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$=\omega b(\cos 2\omega t-1)\boldsymbol{e}_1-\omega b\sin 2\omega t\,\boldsymbol{e}_2$$

$$v^2=(\omega b)^2[(\cos 2\omega t-1)^2+(\sin 2\omega t)^2]$$
$$=4\omega^2 b^2\sin^2\omega t$$

所以

$$v=2\omega b\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{a}_r=\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-4\omega^2 b\sin 2\omega t\boldsymbol{e}_1-4\omega^2 b\cos 2\omega t\boldsymbol{e}_2$$

$$=-4\omega^2 b(\sin 2\omega t\boldsymbol{e}_1+\cos 2\omega t\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}=2\omega\boldsymbol{e}_3\times 2\omega b(\cos 2\omega t\boldsymbol{e}_1-\sin 2\omega t\,\boldsymbol{e}_2)$$

$$=4\omega^2 b(\cos 2\omega t\,\boldsymbol{e}_2+\sin 2\omega t\,\boldsymbol{e}_1)$$

$$\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c=0$$

因此

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-\omega^2\boldsymbol{r}$$
$$=-2b\omega^2\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_r\quad\text{(指向}C\text{点)}$$
$$=-2b\omega^2\cos\omega t(\sin\omega t\boldsymbol{e}_1+\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_2)$$

3.2 一等腰直角三角形OAB在自身平面以匀角速ω绕顶点O转动。某一点M以匀相对速度沿AB边运动，当三角形转了一周时，M点走过了AB.如已知$AB=b$，试求M点在A时的绝对速度与绝对加速度。

〔解〕 本题讨论的运动是“绝对的”，即以固定系为参考系的运动，但我们取运动坐标系描述运动却更方便。

选固定坐标系O-$\xi\eta$，及与$\triangle OAB$固结一起的动坐标系O-x_1x_2。

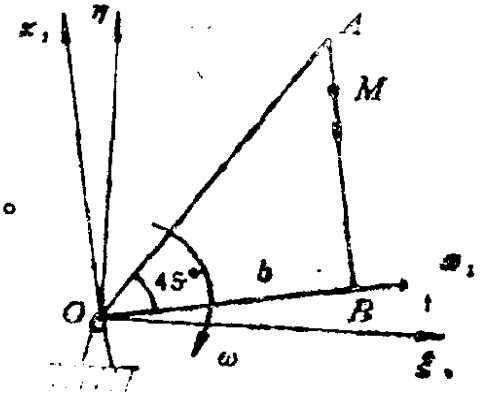


图 3.7

质点M的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OM}$$

$$\boldsymbol{v}_r=-v_r\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{\omega}=-\omega\ \boldsymbol{e}_3$$

$$\overrightarrow{OM} = be_1 + (b - v_r t)e_2$$

$$\boldsymbol{v} = -v_r\ e_2 + (-\omega)e_3 \times [be_1 + (b - v_r t)e_2]$$

$$= \omega(b - v_r t)e_1 - (v_r + \omega b)e_2$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c$$

$$\boldsymbol{a}_r = 0,\ \boldsymbol{a}_t = \omega \times (\omega \times r),\ \boldsymbol{a}_c = 2\omega \times \boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{a}_t = (-\omega e_3) \times \{(-\omega e_3) \times [be_1 + (b - v_r t)e_2]\}$$

$$= (-\omega e_3) \times [-\omega b e_2 + \omega b e_1 - \omega v_r t e_1]$$

$$= -b\omega^2 e_1 - b\omega^2 e_2 + v_r t\omega^2 e_2$$

$$\boldsymbol{a}_c = 2\omega \times \boldsymbol{v}_r = 2(-\omega e_3) \times (-v_r e_2) = -2\omega v_r e_1$$

$$\boldsymbol{a} = -(b\omega^2 + 2\omega v_r)e_1 - (b\omega^2 - v_r t\omega^2)e_2$$

由已知条件，三角形转一周M点走过AB，所以

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{T}} = \frac{b}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{b\omega}{2\pi}$$

A点的速度

$$\boldsymbol{v}_A = \omega(be_1) - \left[\left(\frac{b\omega}{2\pi}\right) + \omega b\right]e_2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{b^2\omega^2}{4\pi^2}\left(1 + 8\pi^2 + 4\pi\right)} = \frac{b\omega}{2\pi}\sqrt{1 + 8\pi^2 + 4\pi}$$

A点的加速度

$$\boldsymbol{a}_A = -(b\omega^2 + 2\omega v_r)e_1 - b\omega^2\ e_2$$

$$a_A^2 = \left(b\omega^2 + 2\omega \cdot \frac{b\omega}{2\pi}\right)^2 + (b\omega^2)^2$$

$$= \left(\frac{b\omega^2}{\pi}\right)^2\left[2\pi^2 + 2\pi + 1\right]$$

$$a_A = \frac{b\omega^2}{\pi}\sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1}$$

3.3　一光滑水平面以匀角速绕通过O点的一固定轴旋

转，轴与此平面垂直。有一质量为m的质点P，在此平面内受到A点的吸引，A与O的距离为c，引力与质点到A的距离r成正比，比例常数为$4\omega^2 m$。试证：如当$t=0$时，质点自$\left(\frac{8}{3}c, 0\right)$以速度$\frac{4}{3}c\omega$垂直于$Ox_1$轴发射，则质点相对于平面可作圆周运动，并求质点相对于固定坐标系的轨迹。

〔解〕选固定坐标系O-$\xi\eta$，动系A-x_1x_2。作用在质点上的力，在动系中表示有：

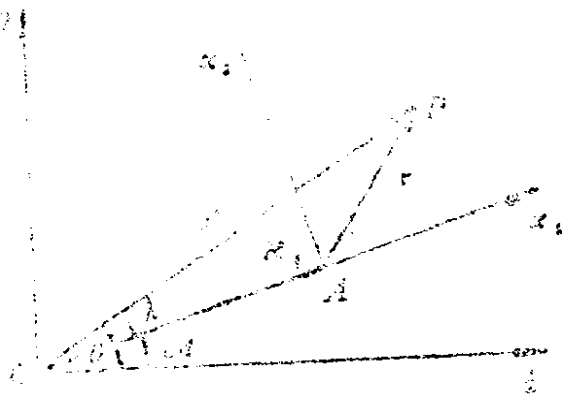


图 3.8

A点的吸引力

$$-4m\omega^2\boldsymbol{r}=-4m\omega^2(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)$$

牵连惯性力

$$m\omega^2 c\boldsymbol{e}_1+m\omega^2\boldsymbol{r}=m\omega^2(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)+m\omega^2 c\boldsymbol{e}_1$$

科里奥利力

$$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$=-2m\omega\boldsymbol{e}_3\times(\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{x}_2\boldsymbol{e}_2)=2m\omega(\dot{x}_2\boldsymbol{e}_1-\dot{x}_1\boldsymbol{e}_2)$$

运动微分方程为

$$m\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-4m\omega^2\boldsymbol{r}+m\omega^2\boldsymbol{r}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+m\omega^2 c\boldsymbol{e}_1$$

$$\ddot{x}_1=-3\omega^2x_1+2\omega\dot{x}_2+\omega^2c$$

$$\ddot{x}_2=-3\omega^2x_2-2\omega\dot{x}_1$$

令 $x_{11}=x_1-\frac{c}{3}$，则

$$\ddot{x}_{11}=-3\omega^2x_{11}+2\omega\dot{x}_2 \qquad (1)$$

$$\ddot{x}_2 = -3\omega^2 x_2 - 2\omega \dot{x}_{11} \qquad (2)$$

以（n）表示对t的n次微商，有

$$\begin{aligned} x_{11}^{(3)} &= -3\omega^2 \dot{x}_1 + 2\omega \ddot{x}_2 \\ &= -3\omega^2 \dot{x}_1 + 2\omega(-3\omega^2 x_2 - 2\omega \dot{x}_{11}) \\ &= -7\omega^2 \dot{x}_{11} - 6\omega^3 x_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

再微商得

$$\begin{aligned} x_{11}^{(4)} &= -7\omega^2 \ddot{x}_{11} - 6\omega^3 \dot{x}_2 \\ &= -7\omega^2 \ddot{x}_{11} - 3\omega^2(\ddot{x}_{11} + 3\omega^2 x_{11}) \\ &= -9\omega^4 x_{11} - 10\omega^2 \ddot{x}_{11} \end{aligned} \qquad (4)$$

将$x = e^{Dt}$代入（4）式得

$$D^4 + 10\omega^2 D^2 + 9\omega^4 = 0$$

$$(D^2 + 9\omega^2)(D^2 + \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \pm 3\omega,\ D = \pm\omega$$

所以

$$x_{11} = A\sin(3\omega t + \varepsilon_1) + B\sin(\omega t + \varepsilon_2) \qquad (5)$$

$$\dot{x}_{11} = 3\omega A\cos(3\omega t + \varepsilon_1) + \omega B\cos(\omega t + \varepsilon_2) \qquad (6)$$

$$\ddot{x}_{11} = -9\omega^2 A\sin(3\omega t + \varepsilon_1) - \omega^2 B\sin(\omega t + \varepsilon_2)$$

代入（1）式得

$$\dot{x}_2 = -3\omega A\sin(3\omega t + \varepsilon_1) + \omega B\sin(\omega t + \varepsilon_2) \qquad (7)$$

$$\ddot{x}_2 = -9\omega^2 A\cos(3\omega t + \varepsilon_1) + \omega^2 B\cos(\omega t + \varepsilon_2)$$

由（2）式得

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{3\omega^2}(\ddot{x}_2 + 2\omega \dot{x}_{11}) \\ &= A\cos(3\omega t + \varepsilon_1) - B\cos(\omega t + \varepsilon_2) \end{aligned} \qquad (8)$$

$t = 0$时，$x_{11} = x_1 - \frac{c}{3} = \frac{8}{3}c - c - \frac{c}{3} = \frac{4}{3}c$，$x_2 = 0$，$\dot{x}_1 = 0$

$\dot{x}_2 = \frac{4}{3}\omega c$。代入(5)、(6)、(7)、(8)式得

$$\varepsilon_1 = \pi/2,\ \varepsilon_2 = \pi/2,\ A = 0,\ B = \frac{4}{3}c$$

所以

$$x_{11} = \frac{4}{3}c\cos\omega t,\quad x_2 = \frac{4}{3}c\sin\omega t$$

$$\left(x_1 - \frac{c}{3}\right)^2 + x_2^2 = \left(\frac{4}{3}c\right)^2$$

即质点相对于动平面作圆周运动。

下面求质点相对于定系的轨迹。由图3.8可见

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{r}$$

P在定系中的坐标为$P(\xi,\ \eta)$

$$\xi = (c + x_1)\cos\omega t - x_2\sin\omega t$$

$$= \frac{4}{3}c(1+\cos\omega t)\cos\omega t - \frac{4}{3}c\sin^2\omega t$$

$$= \frac{4}{3}c(\cos\omega t + \cos 2\omega t)$$

$$= \frac{8}{3}c\cos\frac{3}{2}\omega t\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\eta = (c + x_1)\sin\omega t + x_2\cos\omega t$$

$$= \frac{8}{3}c\sin\frac{3\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$R^2 = \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{8}{3}c\cos\frac{\omega t}{2}\right)^2$$

由图3.8知$x_2 = R\sin\lambda$，已求得$x_2 = \frac{4}{3}c\sin\omega t$，故

$$\frac{8}{3}c\cos\frac{\omega t}{2}\sin\lambda = \frac{4}{3}c\cdot 2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\lambda=\frac{\omega t}{2},\qquad \theta=\lambda+\omega t=\frac{3\omega t}{2}$$

所以

$$R=\frac{8}{3}c\cos\frac{\theta}{3}$$

即为质点相对于定系的轨迹。

§3 相对运动动力学

理论要点

1。相对运动的微分方程 惯性力

将

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{R}_0}{dt^2}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}$$

代入惯性系S'中质点运动微分方程

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

移项得

$$m\frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}-m\frac{d^2\boldsymbol{R}_0}{dt^2}-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}}{dt}$$

即

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_0-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\quad(3.13)$$

这是非惯性系中质点运动的动力学方程式。将公式右边$\boldsymbol{F}$以外诸项称为**惯性力**，如同外力一样对待，则牛顿运动方程的形式在非惯性系中仍然成立。式中各项的意义是：

$m\boldsymbol{a}_r$：有效力；

$\boldsymbol{F}$：真实力；

$-m\boldsymbol{a}_0$：平移惯性力；

$-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$：横向力，方向垂直于$\boldsymbol{r}$；

$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$：惯性离心力，方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$，向外；

$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$：科里奥利力，方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}$。

惯性力与物理力：

经典力学中的物理力分为远作用力(如牛顿万有引力)及近作用力，尤其是接触力(如约束反力)。惯性力主要是牵连惯性力和科氏惯性力。物理力(或真实力)与惯性力(或虚假力)的共同点是：它们同样具有动力学效应和静力学效应，在非惯性系中引入惯性力后，质点的运动完全可作为惯性系中的问题处理。不同点是：惯性力不是物体间的相互作用；没有施力者(不是在广义相对论的意义上)；不满足牛顿第三定律；其大小、方向依赖于参考系及运动状况；惯性力不象物理力那样可利用仪器及传感器测量，其大小只能由它们与物理力相联系的公式间接确定。

2．相对于地球的运动

（1）地表坐标系

以地球上一固定点为原点，以向南、向东、向上三条射线为坐标轴组成的坐标系（南、东、天系），称为**地表坐标系**。处理地球表面附近物体的运动，取这种坐标系是方便的。

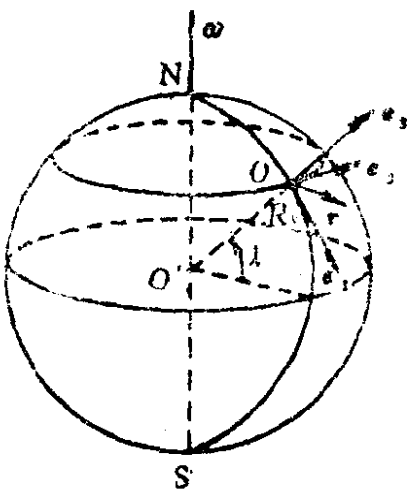


图 3.9

（2）地表附近质点的运动方程

一质点P，质量为m，相对于地球运动，其在地表坐标系中的向径为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$。运动微分方程为

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_c$$

即

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}_S + m\boldsymbol{g}_0 + \boldsymbol{f} - m[\boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_0) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})] - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \qquad (3.14)$$

式中$\boldsymbol{F}$是质点所受真实力，$\boldsymbol{F}_S$是太阳引力，$m\boldsymbol{g}_0$是地球引力，$\boldsymbol{f}$是其它物体的作用力，$\boldsymbol{a}_{O'}$是地球质心在太阳惯性系中的加

速度．ω是地球角速度向量，其值为7.292×10^{-5}rad/s．$\boldsymbol{R}_0$是地球半径向量．注意到，$m\boldsymbol{a}_O\approx\boldsymbol{F}_S$并引入**表观重力**(图3.10)

$$m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{g}_0-m\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r})] \tag{3.15}$$

则（3.14）式约化成

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{f}+m\boldsymbol{g}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{3.16}$$

此即为地表参考系中质点运动微分方程式．

地球角速度向量

$$\boldsymbol{\omega}=\omega(-\cos\lambda\boldsymbol{e}_1+\sin\lambda\boldsymbol{e}_3) \tag{3.17}$$

λ为O点所在纬度，方程（3.16）写成地表坐标系中的分量式为

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_1&=f_1+2m\omega\dot{x}_2\sin\lambda\\
m\ddot{x}_2&=f_2-2m\omega(\dot{x}_1\sin\lambda+\dot{x}_3\cos\lambda)\\
m\ddot{x}_3&=f_3-mg+2m\omega\dot{x}_2\cos\lambda
\end{aligned} \tag{3.18}$$

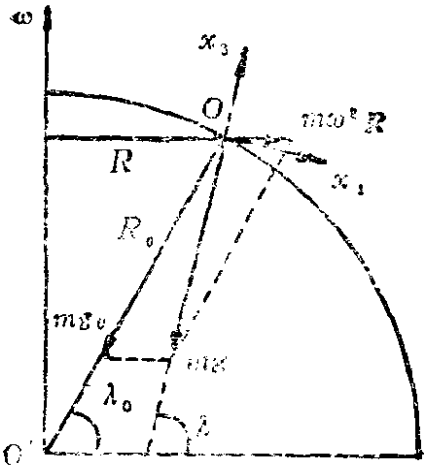


图3.10

（3）地球转动的力学效应

(i) 静力学效应

由于地球的转动，实际测得的物体的表观重力大小并不严格等于地球引力，而且随纬度变化；其方向也不正好指向地心．表观重力是地球引力和因地球自转产生的惯性离心力的向量和．

(ii)动力学效应

(a) 在海洋与大气的大质量运动中，特别是旋风与贸易风中，科氏力起重要作用．

(b) 河流的一岸（如北半球的右岸）冲刷为甚．

(c) 远程火箭因科氏力偏离航向．

(d) 因科氏力作用，在地球表面上方自由下落的物体落地点偏东．

(e) 长悬线、重摆锤的小振幅单摆，在长时间摆动过程中，摆动平面绕垂线转动，从而证明了地球的自转(傅科摆)。

例　　题

3.4　试推导在计及地球自转角速度时，地表坐标系中质点在重力作用下的运动方程式。

〔解〕在地表附近只受重力作用时，质点的运动微分方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\boldsymbol{e}_3 - 2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1)$$

$\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}$表示质点在地表坐标系中的位置向量、速度和加速度，$\boldsymbol{\omega}$是地球自转的角速度向量。将（1）式对时间积分

$$\int_0^t \ddot{\boldsymbol{r}}dt = -g\boldsymbol{e}_3\int_0^t dt - 2\boldsymbol{\omega}\times\int_0^t \dot{\boldsymbol{r}}dt = -gt\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}_0 = -gt\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

用迭代法，将$\dot{\boldsymbol{r}}$代回（1）式得

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\boldsymbol{e}_3 - 2m\boldsymbol{\omega}\times[-gt\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)] - 2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -g\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0 + 2gt\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

略去ω^2项得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \approx -g\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0 + 2gt\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3$$

积分得

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_0 - gt\boldsymbol{e}_3 - 2t\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0 + gt^2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3$$

再积分，得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\dot{\boldsymbol{r}}_0 - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{e}_3 - t^2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0 + \frac{1}{3}gt^3(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3)$$

即为地表附近仅在重力作用下质点的运动方程式。

3.5　北纬α度某地，以初速(v_1^0, v_2^0, v_3^0)发射一质点。

如落地点与发射点在同一高度，试求由于地球自转引起的飞行时间及落地点的偏离。

〔解〕取地表坐标系$O-x_1x_2x_3$，O取在发射点。$t=0$时，$\boldsymbol{r}_0=0$，$\dot{\boldsymbol{r}}_0=(v_1^0,\ v_2^0,\ v_3^0)$，地球自转角速度$\boldsymbol{\omega}=(-\omega\cos\alpha,\ 0,\ \omega\sin\alpha)$。

由3.4题的结果，在地表附近，仅受重力作用的质点的运动方程式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\dot{\boldsymbol{r}}_0-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{e}_3-t^2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_0+\frac{1}{3}gt^3(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3)$$

$$=0+t(v_1^0\boldsymbol{e}_1+v_2^0\boldsymbol{e}_2+v_3^0\boldsymbol{e}_3)-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{e}_3$$

$$-t^2\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -\omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha\\ v_1^0 & v_2^0 & v_3^0\end{vmatrix}+\frac{1}{3}gt^3\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -\omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=v_1^0t+\omega v_2^0t^2\sin\alpha\\ x_2&=v_2^0t-\omega t^2(v_1^0\sin\alpha+v_3^0\cos\alpha)+\frac{1}{3}gt^3\omega\cos\alpha\\ x_3&=v_3^0t-\frac{1}{2}gt^2+\omega t^2v_2^0\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

设质点飞行时间为t_1，落地时$x_3=0$，则

$$0=v_3^0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2+\omega t_1^2v_2^0\cos\alpha$$

$$t_1=\frac{2v_3^0}{g-2\omega v_2^0\cos\alpha}$$

$$=\frac{2v_3^0}{g}\left(1-\frac{2\omega v_2^0}{g}\cos\alpha\right)^{-1}$$

$$\approx\frac{2v_3^0}{g}+\frac{4v_2^0v_3^0\omega}{g^2}\cos\alpha\quad(3)$$

由地球自转引起的飞行时间的偏离为

$$\Delta t_1 = \frac{4v_2^0 v_3^0 \omega \cos\alpha}{g^2} \qquad (4)$$

将t_1值代入（2）中第一、二式，略去ω^2以上项，得

$$x_1 = \frac{2v_1^0 v_3^0}{g} + \frac{4v_2^0 v_3^0 \omega}{g^2}(v_1^0 \cos\alpha + v_3^0 \sin\alpha) \qquad (5)$$

$$x_2 = \frac{2v_2^0 v_3^0}{g} + \frac{4v_3^0 \omega}{g^2}\left[(v_2^0)^2 \cos\alpha - v_1^0 v_3^0 \sin\alpha - \frac{(v_3^0)^2}{3}\cos\alpha\right] \qquad (6)$$

由于地球自转引起的落地点的偏离为

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1 &= \frac{4v_2^0 v_3^0 \omega}{g^2}(v_1^0 \cos\alpha + v_3^0 \sin\alpha)\\ \Delta x_2 &= \frac{4v_3^0 \omega}{g^2}\left[(v_2^0)^2 \cos\alpha - v_1^0 v_3^0 \sin\alpha - \frac{(v_3^0)^2}{3}\cos\alpha\right]\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

3.6 试讨论一个长悬线、重摆锤、小振幅单摆（傅科摆）的运动。

〔解〕 在地表参考系中，摆锤受力有：

重力：$-mg\boldsymbol{e}_3$

悬线拉力：$\boldsymbol{T} = -T\frac{x_1}{l}\boldsymbol{e}_1 - T\frac{x_2}{l}\boldsymbol{e}_2 + T\frac{l-x_3}{l}\boldsymbol{e}_3$

科氏力：$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，

$$= -2m\omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -\cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \end{vmatrix}$$

$$= -2m\omega[-\dot{x}_2 \sin\lambda \boldsymbol{e}_1 + \dot{x}_1 \sin\lambda \boldsymbol{e}_2 + \cos\lambda \dot{x}_3 \boldsymbol{e}_2 - \cos\lambda \dot{x}_2 \boldsymbol{e}_3]$$

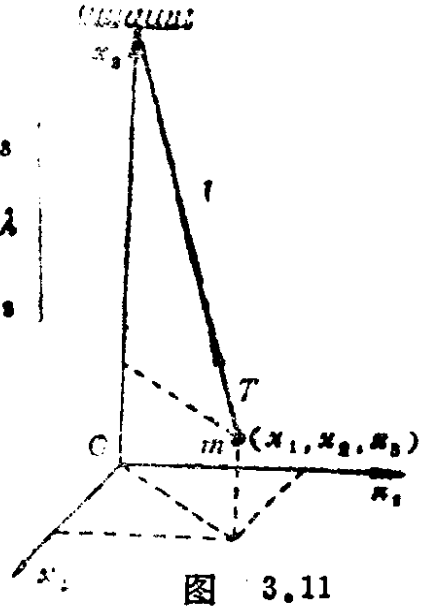


图 3.11

运动微分方程为

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$$

将它写成分量式为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 2m\omega\dot{x}_2 \sin\lambda - T\frac{x_1}{l} \\ m\ddot{x}_2 &= -2m\omega(\dot{x}_1 \sin\lambda + \dot{x}_3 \cos\lambda) - T\frac{x_2}{l} \\ m\ddot{x}_3 &= -mg + 2m\omega\dot{x}_2 \cos\lambda + T\frac{l - x_3}{l} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + (l - x_3)^2$$

$$x_3 = l - l\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)/l^2}$$

由于振动振幅很小，$\frac{x_1}{l}$，$\frac{x_2}{l}$是小量，作二项式展开，则得

$$\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{l^2}} = 1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2l^2} + \cdots$$

$$x_3 \approx \frac{x_1^2 + x_2^2}{2l}$$

$$\frac{x_3}{l} \approx \frac{x_1^2}{2l^2} + \frac{x_2^2}{2l^2}$$

只保留一级小量$\frac{x_1}{l}$，$\frac{x_2}{l}$，略去二级以上小量，则$x_3 \approx 0$，

$\dot{x}_3 = \ddot{x}_3 = 0$．（1）中的第三式化为

$$0 = -mg + 2m\omega\dot{x}_2 \cos\lambda + T$$

$$T = mg - 2m\omega\dot{x}_2 \cos\lambda$$

代入（1）的前二式，略去高级项，得

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 2m\omega\dot{x}_2 \sin\lambda - mg\frac{x_1}{l} \\ m\ddot{x}_2 &= -2m\omega\dot{x} \sin\lambda - mg\frac{x_2}{l} \end{aligned}\right. \quad (2)$$

注意到 $\omega \sin \lambda = \omega_3$，令 $\frac{g}{l} = \omega_0^2$，（2）化为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 2\omega_3 \dot{x}_2 \\ &\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -2\omega_3 \dot{x}_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

引入动坐标系$O\text{-}x_1' x_2' x_3'$，它以角速度$-\omega_3 e_3$相对于$O\text{-}x_1 x_2 x_3$转动，则

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos \omega_3 t + x_2' \sin \omega_3 t \\ x_2 &= -x_1' \sin \omega_3 t + x_2' \cos \omega_3 t \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将（4）代入（3）得

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1' + (\omega_0^2 + \omega_1^2) x_1' = 0 \\ &\ddot{x}_2' + (\omega_0^2 + \omega_1^2) x_2' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因$\omega_1 \ll \omega_0$，故（5）式近似地化为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1' + \omega_0^2 x_1' = 0 \\ &\ddot{x}_2' + \omega_0^2 x_2' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

这表明在坐标系$O\text{-}x_1' x_2' x_3'$中，摆锤运动是角频率为ω_0的简谐振动。

由（4）可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 t & \sin \omega_3 t \\ -\sin \omega_3 t & \cos \omega_3 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

转动矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 t & \sin \omega_3 t \\ -\cos \omega_3 t & \cos \omega_3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta = \omega_3 t$$

表明在$O\text{-}x_1 x_2 x_3$坐标系中，摆锤的振动平面以频率$\omega_3 = \omega \sin \lambda$转动，在北半球是顺时针转动，南半球为逆时针转动，这种转

动的观测，明确证明了地球的自转。

3.7 北纬α度某地，有质量为m的列车沿水平直线轨道匀速行驶，求当列车向东、西、南、北各方运行时，对轨道压力的大小和方向。

〔解〕由地表附近质点运动微分方程有

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} - mg\boldsymbol{e}_3 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1)$$

式中$\boldsymbol{F}$是列车受到的除重力以外的其它作用力。由于运动是匀速的，F主要是轨道的反作用力。

将（1）写成分量式

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 + 2m\omega\dot{x}_2 \sin\alpha \\ m\ddot{x}_2 &= F_2 - 2m\omega(\dot{x}_1 \sin\alpha + \dot{x}_3 \cos\alpha) \\ m\ddot{x}_3 &= F_3 - mg + 2m\omega\dot{x}_2 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

式中 $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = 0$，$\dot{x}_3 = 0$，方程简化为

$$\left.\begin{aligned} 0 &= F_1 + 2m\omega\dot{x}_2 \sin\alpha \\ 0 &= F_2 - 2m\omega\dot{x}_1 \sin\alpha \\ 0 &= F_3 - mg + 2m\omega\dot{x}_2 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

列车对轨道的压力 $P_i = -F_i$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 2m\omega\dot{x}_2 \sin\alpha \\ P_2 &= -2m\omega\dot{x}_1 \sin\alpha \\ P_3 &= -mg + 2m\omega\dot{x}_2 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

我们取地表坐标系为南东天坐标系，即x_1向南，x_2向东，x_3向天上，则

向东运动时，$\dot{x}_1 = 0$，$\dot{x}_2 = v$

$$P_1 = 2m\omega v \sin\alpha \qquad \text{(向南)}$$

$$P_2 = 0$$

$$P_3 = -mg + 2m\omega v\cos\alpha \qquad \text{(向下)}$$

向西运动时，$\dot{x}_1 = 0$，$\dot{x}_2 = -v$

$$P_1 = -2m\omega v\sin\alpha \qquad \text{(向北)}$$

$$P_2 = 0$$

$$P_3 = -mg - 2m\omega v\cos\alpha \qquad \text{(向下)}$$

向南运动时，$\dot{x}_1 = v$，$\dot{x}_2 = 0$

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -2m\omega v\sin\alpha \qquad \text{(向西)}$$

$$P_3 = -mg \qquad \text{(向下)}$$

向北运动时，$\dot{x} = -v$，$\dot{x}_2 = 0$

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = 2m\omega v\sin\alpha \qquad \text{(向东)}$$

$$P_3 = -mg \qquad \text{(向下)}.$$

习　　题

3.1　一个半径为R的圆盘，沿地面上一直线作纯滚动。一小虫沿盘边缘相对于圆盘以常速度u爬行。设$t=0$时，盘心速度$v_0=0$，小虫处于最高点A，以后盘心以匀加速a运动，求当小虫运动一周后再回到最高点时，它相对于地面的加速度。

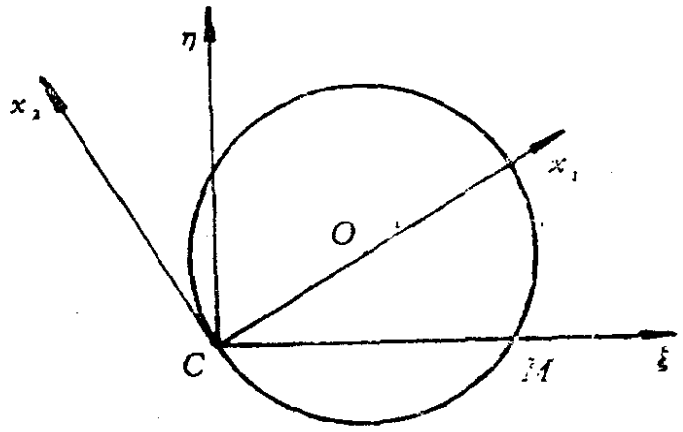
答：$a_t = 2a$，$a_n = 4\pi a + \dfrac{u_2}{R}$.

3.2　半径为R的圆周在其自身平面内以等角速度ω绕定点C按逆时针转动。圆上一点M以等角速2ω按顺时针方向运动。当$t=0$时，M，O和C在一直线上。求m点的绝对轨迹、速度和加速度。

答：绝对轨迹为$C\xi$轴；

绝对速度：$\dot{\xi}=-2R\omega\sin\omega t$，$\dot{\eta}=0$

绝对加速度：$\ddot{\xi}=-\omega^2\xi$，$\ddot{\eta}=0$



3.2题图

3.3 盛着水的圆桶，以匀角速度ω绕它的轴转动。如水随桶一起转动，并且不会溢出水桶，证明水面的形状为一旋转抛物面。

3.4 证明在北半球，从北、东、南、西面吹来的风，会分别偏向西、北、东、南面。利用这个道理解释旋风的成因。

3.5 解释为什么从竖直排水管流出的水总会发生旋转，转动方向如何？在南、北半球及赤道上各怎样？

3.6 在北纬λ度某地，有宽为l的河流，河水以速度v向北流去。问河流的东西岸哪一边的水位高？高多少？

答：$h=2l\omega v\sin\lambda/g$。

3.7 一质点在光滑水平面内具有速度v，试证明该质点由于地球转动将沿圆周运动，并求出该圆的半径。

答：$r=\dfrac{v}{2\omega\cos\theta}$

3.8 一小帆船停在赤道无风带，为使船开走船长决定采

取应急措施，把200kg的锚升到20m高的桅顶，船的其余部分的质量是1 000 kg（地球的半径是6400×10^{3}m）

（1）船将开始运动，为什么？

（2）船的方向如何？

（3）船的速度多大？

（4）使船运动的能量从何而来？

答：由于科氏力作用，船向西运动，船的末速度为

$$v=4.9\times10^{-4}\text{m/s}.$$

3.9 一球状行星，半径为R，以匀角速度ω转动。有效重力加速度g_{eff}在两极处是某一常量g，在赤道上则是$0.8g$。试把g_{eff}表为极角θ和g的函数。又问，火箭必须以多大速度由赤道铅直向上发射才能完全脱离该行星？

答：$g_{eff}=g\sqrt{1-0.6\sin^{2}\theta}$，　　$v=0.949\ v_{逃逸}$

3.10 在北纬λ度某地，以初速v_0竖直向上发射一子弹，到达h高后，复落至地面。假定空气阻力不计，试求落至地面时的偏差，并定性解释所求得的结果。

答：$\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{8h^{2}}{g}}\omega\cos\lambda$，　　偏西。

3.11 物体以初速度v_0下抛，证明在时间t后，物体向东偏离铅直方向的值为

$$\omega v_0\cos\lambda t^{2}+\frac{1}{3}\omega g\cos\lambda t^{3}$$

（λ为下抛物体处的纬度。）

3.12 试解释为什么在北半球地面上方观察时，付科摆摆动平面按顺时针方向转动，而在南半球观察时，它将按逆时针方向转动？

3.13 求作用在1.5kg物体上的科氏力的水平分量，它以100m/s水平速度向北运动，当地纬度为30°。

答： $F_c = 5.47 \times 10^{-3}\mathrm{N}$.

3.14 一子弹沿地表水平射击，试证明：在一级近似下，由科氏力产生的角度偏离以比率$\omega \sin\lambda$随时间线性变化，其中ω是地球自转的角速度，λ是纬度（在北半球）。

第四章　质点系动力学

质点系是指各质点间有相互作用的多质点系统，由于相互作用，其中每个质点的运动都可能与其它质点的位置和运动有关。

质点系问题在经典力学中占据中心的位置，因为实际物体总是由彼此相互作用的多质点组成的系统，即质点系。质点的运动和刚体的运动都是质点系运动的特殊情形。

质点系中每个质点的运动服从牛顿第二定律，如质点系有n个质点，方程为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i \qquad (i=1,\cdots,n)$$

式中

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\boldsymbol{F}_i^{(i)}$$

$$=\boldsymbol{F}_i^{(e)}(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t)+\boldsymbol{F}_i^{(i)}(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n,t)$$

$\boldsymbol{F}_i^{(e)}$表第i个质点所受系外力源的力，$\boldsymbol{F}_i^{(i)}$是系内质点的力。由方程可见：

(a) 它们不能单独求解，而必须联立求解；

(b) 质点系内质点的相互作用力$\boldsymbol{F}_i^{(i)}$很复杂，可能与所有质点的位置及速度有关，常常是未知力（如约束力）；

(c) 方程数目可能很大，甚至无穷多。

这反映了处理多体问题的困难。

从物理上看，在质点力学中，我们仅研究了受到作用力的质点的运动情况，而对质点的反作用，及由此引起的施力物体的运动和随之而来的作用力的改变没有顾及，要精确地考察运

动，就必须把所有发生作用的物体考虑在内才行。只有当反作用引起施力物体运动状态的变化可以忽略时，才可以只研究单个物体的运动。为了深入地研究运动而同时考虑两个以上质点的运动，这正是质点系力学要解决的问题。

§1 质点系的基本定理和守恒定律

理论要点

1. 内力　外力

质点系内质点间的相互作用力，称为**内力**。

质点系外的力源（物体或场）对质点系内质点的作用力，称为**外力**。

质点系的总内力

$$\boldsymbol{F}^{(i)}=\sum_{i}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ji}=\sum_{\substack{i\,j\\ j\neq i}}\boldsymbol{F}_{ji}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\,j\\ j\neq i}}(\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_{ij})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\,j\\ j\neq i}}(\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_{ij})$$

考虑到$\boldsymbol{F}_{ji}=-\boldsymbol{F}_{ij}$，所以

$$\boldsymbol{F}^{(i)}=0 \tag{4.1}$$

质点系所受的总外力

$$\boldsymbol{F}^{(e)}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{i}^{(e)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{F}_{ki} \tag{4.2}$$

$k=1,\cdots,m$，　m是外力源数，

$i=1,\cdots,n$，　n是系内质点数。

2. 质心　质心系

定义：向量$\boldsymbol{R}$是质点系中质点位置向量的权平均值，权重正比于质点的质量，$\boldsymbol{R}$定义的一个点C称为体系的**质心**。

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M}\qquad\left(M=\sum m_i\right)\quad(4.3)$$

这是质心的几何定义.

如果赋予质心以整个质点系的质量M，则这个位置以$\boldsymbol{R}$表示，速度以$\dot{\boldsymbol{R}}$表示的质点，在动力学意义上也称为质心．质心的动量，就是质点系的总动量，质心的速度即是其整体速度.

质心系是随质心平动的参考系，固结于其上的坐标架相对于静系没有转动.

质心系还可以另一种方式定义.

封闭的力学体系（即与一切外界物体的相互作用可以忽略的体系）相对于不同的惯性系有不同的动量值.如参考系S'以速度$\boldsymbol{V}$相对于参考系S运动，则$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}'_i+\boldsymbol{V}$，两系统中动量关系为

$$\boldsymbol{P}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{v}'_i+\boldsymbol{V}\sum_i m_i=\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{V}\sum_i m_i\quad(4.4)$$

总存在这样的参考系S'，其中总动量变为零.令上式中$\boldsymbol{P}'=0$，便求得了此参考系的速度为

$$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum_i m_i}\qquad(4.5)$$

这正是质心的速度，即$\boldsymbol{V}=\dot{\boldsymbol{R}}$．在$S'$系中总动量为零，称体系对$S'$是静止的.

定义：质点系的总动量在其中为零的参考系为质心系.

3．解决质点系问题的基本思想

解决质点系运动问题的基本思想，是先着眼于整个质点系（而不是个别质点）加以研究，借助于质点系的三个基本定理和相应的守恒定律，掌握质点系运动的总趋向和一般特征，即表征质点系整体运动的动力学量，如总动量、总角动量、总能量等在外力作用下的变化规律，质心的位置和运动等，然后再

求解个别质点的运动（如果需要的话）。有些问题仅用这些基本定理和守恒定律即可解决。

同质点动力学相似，质点系的动量定理和角动量定理，每个提供3个方程，动能定理提供1个，共7个方程。凡自由度 $f \leqslant 7$ 的质点系的运动，原则上可以完全解决。

4. 动量定理　动量守恒定律

质点系内第i个质点的运动微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji}$$

假定$\boldsymbol{F}_{ji}$和$\boldsymbol{F}_k^{(e)}$都服从弱形式的牛顿第三定律（两质点之间的相互作用力大小相等、方向相反），则质点系所受作用力为

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \boldsymbol{F}_{ji}$$

$$= \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)}$$

质点系总动量

$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$$

微分形式的动量定理

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{4.6}$$

质心运动定理

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{4.7}$$

积分形式的动量定理

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}^{(e)}\, dt \tag{4.8}$$

当$\boldsymbol{F}^{(e)} = 0$时，有动量守恒定律

$$\dot{\boldsymbol{P}} = 0 \tag{4.9}$$

质心运动定理表明，如不存在外力，内力不改变质心速度。但如有非均匀外力，则内力将影响质心的运动。

一系统即使不服从牛顿定律，只要是封闭的，动量守恒定

律仍然成立，如带电粒子本身动量不守恒，但加上辐射场的动量仍然守恒.

5．角动量定理　角动量守恒定律

（1）质点系对定点O的角动量定理

质点系的总角动量

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{L}_i=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{p}}_i$$

$$=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\left(\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ji}\right)$$

由于　$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ji}$，故

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}}\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ji}$$

$$=\boldsymbol{N}^{(e)}+\boldsymbol{N}^{(i)} \tag{4.10}$$

一般说，内力矩$\boldsymbol{N}^{(i)}$并不为零，仅当任意的质点间相互作用的内力大小相等、方向相反，而且沿两质点连线（即满足强形式的牛顿第三定律）时，才有　$\boldsymbol{N}^{(i)}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}}\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ji}=0$.这时有微分形式的角动量定理

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{N}^{(e)} \tag{4.11}$$

积分形式的角动量定理

$$\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{L}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{N}^{(e)}dt \tag{4.12}$$

当　$\boldsymbol{N}^{(e)}=0$时，有角动量守恒定律

$$\dot{\boldsymbol{L}}=0 \tag{4.13}$$

（2）对定点O的角动量和对质心C的角动量

设S为静系，S'为质心系．以定点O为参考点，

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i$$

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}'_i+\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}'_i+\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{L}=\sum_i \boldsymbol{R}\times m_i\boldsymbol{V}+\sum \boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i$$

$$+\left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\right)\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{R}\times\frac{d}{dt}\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i$$

后面两项中$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i=0$，所以

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}\times M\boldsymbol{V}+\sum_i \boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{p}'_i \tag{4.14}$$

即关于定点O的角动量，等于质心的角动量与相对于质心运动的角动量之和。

（3）质点系对质心的角动量定理

惯性系中第i个质点的运动微分方程为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\boldsymbol{F}_i^{(i)}$$

$$i=1,\cdots,n$$

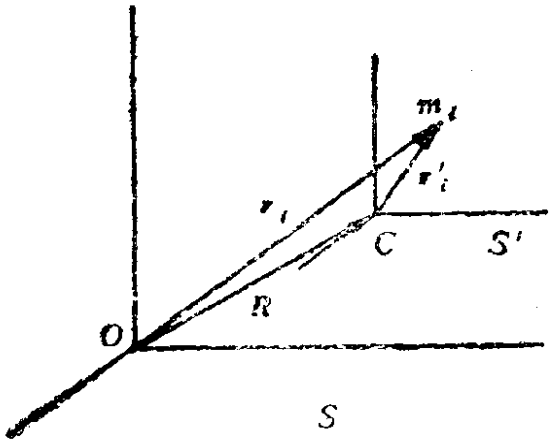


图 4.1

由于 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}'_i+\boldsymbol{r}_c$，故

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}'_i=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\boldsymbol{F}_i^{(i)}+(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_c)$$

这是质心系（它是加速平动参考系）中，第i个质点的运动微分方程，$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_c$是惯性力。以$\boldsymbol{r}'_i$左乘，并对$i$求和，得

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}'_i=\sum_i \boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum_i \boldsymbol{r}'_i\times\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}\boldsymbol{F}_{ji}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}'=\boldsymbol{N}'^{(e)}+\boldsymbol{N}'^{(i)}$$

当质点间内力满足强形式牛顿第三定律时，第二项为零，

则有微分形式的对质心的角动量定理

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{N}'^{(e)} \tag{4.15}$$

当 $\boldsymbol{N}'^{(e)} = 0$ 时，有对质心的角动量守恒定律

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = 0 \tag{4.16}$$

注意到某些力，如运动电荷间的作用力，对强、弱形式的牛顿第三定律均不服从，这种形式的角动量定理及守恒律不适用，但只要体系是封闭的，机械角动量与场的电磁角动量之和仍然是守恒的。

6. 动能定理　机械能守恒定律

质点系中第 i 个质点，经位移 $d\boldsymbol{r}$，力所作元功为

$$dW_i = \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dT_i$$

$$dW_i = (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji}) \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

所以

$$dT_i = \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

对 i 求和得微分形式的动能定理

$$dT = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{4.17}$$

积分形式的动能定理

$$T_2 - T_1 = \sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \int_1^2 \boldsymbol{F}_{ji} \cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{4.18}$$

机械能守恒定律

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 + \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} V_{ji} = E \tag{4.19}$$

（证明见例题4.5）

例　　题

4.1　两质点质量分别为m_1，m_2，由长为a的刚性轻杆连接，置于光滑的水平面上。初始时，给m_1以冲击，使之具有一定的速度v_0，m_2静止，求系统质心的速度$\boldsymbol{v}_c$，两质点在定系中的速度$\boldsymbol{v}_1(\theta)$，$\boldsymbol{v}_2(\theta)$，两质点在质心系中的速度$\boldsymbol{v}'_1(\theta)$，$\boldsymbol{v}'_2(\theta)$及两质点的相对速度$\boldsymbol{v}$.

〔解〕　因$\boldsymbol{F}^{(e)}=0$，$\boldsymbol{N}^{(e)}=0$（对定点O）及$\boldsymbol{N}'^{(e)}=0$（对质心C），故有体系的动量守恒，对定点及对质心的角动量守恒。又$\boldsymbol{F}^{(i)}$不作功，有机械能守恒。

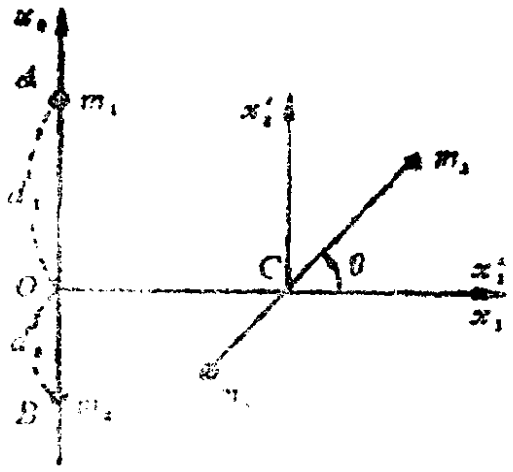


图　4.2

取起始时质心所在点为定系O-x_1x_2的原点，x_2沿杆的方向。质点的初始位置为

$$\boldsymbol{r}_{10}=d_1\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{r}_{20}=-d_2\boldsymbol{e}_2$$

其中$d_1=\dfrac{m_2}{M}a$，$d_2=\dfrac{m_1}{M}a$.

$$d_1+d_2=a,\qquad m_1+m_2=M$$

（1）求$\boldsymbol{v}_c$

$$M\dot{\boldsymbol{r}}_c=m_1\boldsymbol{v}_{10},\quad \boldsymbol{v}_c=\frac{m_1}{M}\boldsymbol{v}_{10}=\frac{m_1}{M}v_0\boldsymbol{e}_1\text{（常向量）}$$

（2）求$\dot{\theta}$

在质心系中，有角动量守恒，$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}'_0$（常向量）.

$$\boldsymbol{L}'_0=\boldsymbol{r}'_{10}\times m_1\boldsymbol{v}'_{10}+\boldsymbol{r}'_{20}\times m_2\boldsymbol{v}'_{20}$$

式中

$$\boldsymbol{v}'_{10}=\boldsymbol{v}_{10}-\boldsymbol{v}_c=\left(v_0-\frac{m_1}{M}v_0\right)\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{v}'_{20}=\boldsymbol{v}_{20}-\boldsymbol{v}_c=-\frac{m_1}{M}v_0\boldsymbol{e}_1$$

所以

$$\boldsymbol{r}'_{10}=\boldsymbol{r}_{10},\quad \boldsymbol{r}'_{20}=\boldsymbol{r}_{20}$$

$$\boldsymbol{L}'_0=\boldsymbol{r}'_{10}\times m_1\left(v_0-\frac{m_1v_0}{M}\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}'_{20}\times m_2\left(-\frac{m_1}{M}v_0\boldsymbol{e}_1\right)$$

$$=\boldsymbol{r}_{10}\times\frac{m_1m_2}{M}v_0\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{r}_{20}\times\frac{m_1m_2}{M}v_0\boldsymbol{e}_1$$

$$=-\frac{m_1m_2}{M}av_0\boldsymbol{e}_3$$

任意时刻，质心系中角动量为

$$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{r}'_1\times m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+\boldsymbol{r}'_2\times m_3\dot{\boldsymbol{r}}'_2$$

由于

$$\boldsymbol{r}'_1=d_1\ (\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{r}'_2=d_2[\cos(\theta+\pi)\boldsymbol{e}_1+\sin(\theta+\pi)\boldsymbol{e}_2]$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_1=d_1(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)\dot{\theta}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_2=d_2[-\sin(\theta+\pi)\boldsymbol{e}_1+\cos(\theta+\pi)\boldsymbol{e}_2]\dot{\theta}$$

故

$$\boldsymbol{L}'=m_1d_1^2\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\times(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)+m_2d_2^2\dot{\theta}(-\cos\theta\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\times(\sin\theta\boldsymbol{e}_1-\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$=(m_1d_1^2+m_2d_2^2)\dot{\theta}\boldsymbol{e}_3$$

$$=\frac{m_1m_2}{M}a^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{L}'_0,\quad -\frac{m_1m_2}{M}av_0=\frac{m_1m_2}{M}a^2\dot{\theta}$$

所以

$$\dot{\theta} = -\frac{v_0}{a} \text{（常数）}$$

（3）求$\boldsymbol{v}'_1$，$\boldsymbol{v}'_2$

$$\boldsymbol{v}'_1 = \dot{\boldsymbol{r}}'_1$$

$$= \frac{m_2 v_0}{M}(\sin\theta \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta \boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{v}'_2 = \dot{\boldsymbol{r}}'_2$$

$$= \frac{m_1 v_0}{M}(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2)$$

$$v'_1 = \frac{m_2 v_0}{M}, \quad v'_2 = \frac{m_1 v_0}{M}$$

（4）求$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}_c = \frac{m_2 v_0}{M}(\sin\theta \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta \boldsymbol{e}_2) + \frac{m_1}{M} v_0 \boldsymbol{e}_1$$

$$= [(m_1 + m_2 \sin\theta)\boldsymbol{e}_1 - m_2 \cos\theta \boldsymbol{e}_2]\frac{v_0}{M}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}'_2 + \boldsymbol{v}_c = [(1 - \sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2]\frac{m_1}{M} v_0$$

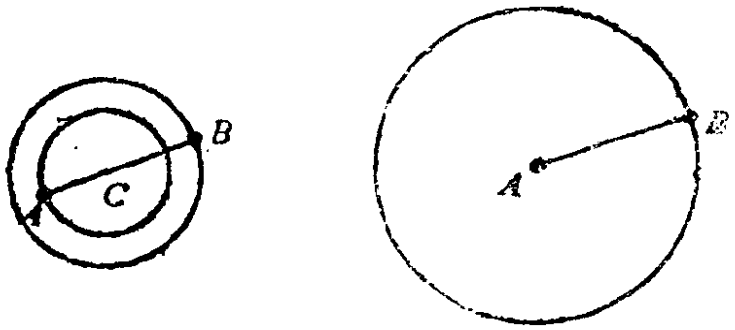


图 4.3

（5）求相对速度$\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1, \quad m_1 \boldsymbol{v}'_1 + m_2 \boldsymbol{v}'_2 = 0, \quad \boldsymbol{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{v}'_2$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2'+\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{v}_2'=\frac{M}{m_1}\boldsymbol{v}_2'$$

$$=\frac{M}{m_1}\cdot\frac{m_1v_0}{M}(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$=v_0(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

所以质心作匀速直线运动，A，B各绕质心作匀速圆周运动．B绕A，A绕B各作匀速圆周运动，见图4.3.

4.2 一金属圆环质量为M，吊在天棚上，有两个质量均为m的小环自金属圆环的最高点自由滑下，不计摩擦力．试求m/M至少要多大，才会使金属环向上跳？并求出在m/M比值为临界值的情形下，大环上跳时小环的位置及速度．

〔解〕系统的质心

$$x_c=\frac{\sum_i m_ix_i}{M+2m}=\frac{2mr\cos\theta}{M+2m}\qquad(1)$$

$$\dot{x}_c=\frac{2mr}{M+2m}(-\sin\theta\cdot\dot{\theta})\qquad(2)$$

$$\ddot{x}_c=-\frac{2mr}{M+2m}(\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2+\sin\theta\cdot\ddot{\theta})\qquad(3)$$

由能量守恒有

$$mgr(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta})^2\qquad(4)$$

微商得

$$mgr\sin\theta\cdot\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{g}{r}\sin\theta,\quad(\dot{\theta})^2=\frac{2g}{r}(1-\cos\theta)\qquad(5)$$

代入（3），得

$$\ddot{x}_c=-\frac{2mg}{M+2m}(2\cos\theta-3\cos^2\theta+1)\qquad(6)$$

系统的质心运动方程为

$$(M+2m)\ddot{x}_c = -(M+2m)g + T$$

T是绳的拉力，大环上跳时，$T=0$，此时$\ddot{x}_c = -g$．由（6）有

$$\frac{2mg}{M+2m}(2\cos\theta - 3\cos^2\theta + 1) = g$$

$$3\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{M}{2m} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3M/(2m)}}{3} \qquad (7)$$

由（7）式，$1 - \frac{3M}{2m} > 0$，即$m > \frac{3M}{2}$．在临界情形下，$m = \frac{3M}{2}$．大环上跳时，小环位置为

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}$$

此时

$$(\dot{\theta})^2 = \frac{2g}{r}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4g}{3r}, \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g}{3r}}$$

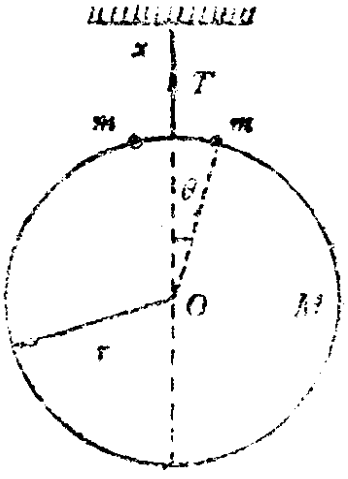


图 4.4

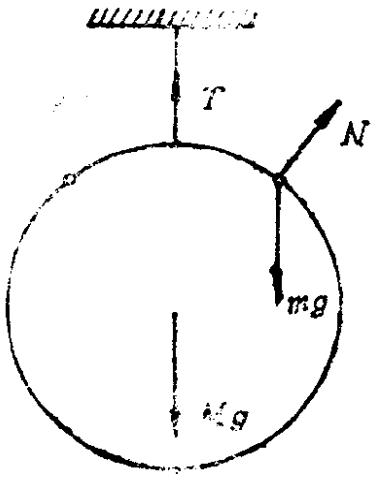


图 4.5

故小环速度

$$v = r\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{gr}{3}}$$

上述解法，是典型的求解质点系运动问题的方法，首先着眼于体系整体运动的性质，然后才考虑个别质点或物体的运动。本题也可以用别的方法，例如用隔离法求解。即分别列出大圆环质心的平衡方程，小圆环的运动微分方程，并运用能量积分求解。由图4.5可知

$$T = mg + 2N\cos\theta$$

$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{r}$$

$$mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

加上大圆环上跳时$T = 0$的条件，联立求解。试将两种方法作一比较。

4.3 一质量为M的铁道平板车，可无摩擦地沿一水平直线轨道运动。初始时，车静止不动，有N个人立于车上，每个人的质量均为m。

（1）若N个人一起跑向车的一端，在他们正要跳车时（所有的人都同时跳）相对于车的速度均为v_r，问N个人跳车之后，车的速度是多少？

（2）若N个人一个接一个地跑跳下车（在每一时刻只有一个人跳），每个人在跳离之前，对于车的相对速度均为v_r，求出平板车末速的表达式。

（3）在（1）和（2）中，哪种情况下平板车达到的速度较大？

〔解〕（1）设车、人的坐标分别为x_t，x_m。系统质心为

$$x_c = \frac{Mx_t + Nmx_m}{M + Nm} \qquad (1)$$

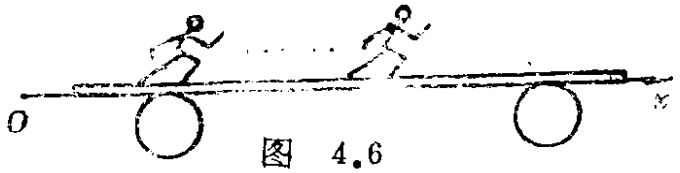


图 4.6

因水平方向无外力作用，$\dot{x}_c = 0$，所以

$$M\dot{x}_t + Nm\dot{x}_m = 0 \qquad (2)$$

在跳车时刻$\dot{x}_m = \dot{x}_t + v_r$，由（2）有

$$M\dot{x}_t + Nm(\dot{x}_t + v_r) = 0$$

$$v_t = \dot{x}_t = -\frac{Nm}{M+Nm} v_r$$

（2）设某时刻车上还有n个人（$n<N$），同车一起平动，平动速度为v_n，则体系的动量为$(M+nm)\ v_n$。

如有一个人以相对速度v_r跳下，车及车上余下的$n-1$个人的水平平动速度为v_{n-1}，则由车、车上的人及跳下的人组成的体系的动量为

$$[M+(n-1)m]v_{n-1} + m(v_{n-1}+v_r)$$

水平方向动量守恒，则

$$[M+nm]v_n = [M+(n-1)m]v_{n-1} + m(v_{n-1}+v_r)$$

$$[M+nm]v_n = [M+nm]v_{n-1} + mv_r \qquad (3)$$

$$v_{n-1} = v_n - \frac{m}{M+nm} v_r$$

因起初车上有N个人，，$v_N = 0$，则

$$v_{N-1} = v_N - \frac{m}{M+Nm} v_r = -\frac{m}{M+Nm} v_r$$

$$v_{N-2} = v_{N-1} - \frac{m}{M+(N-1)m} v_r$$

$$v_{N-3} = v_{N-2} - \frac{m}{M+(N-2)m} v_r$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_{N-N} = v_0 = v_1 - \frac{m}{M+m} v_r$$

将上面各式加起来，得

$$v_0 = -\sum_{n=1}^{N} \frac{m}{M+nm} v_r$$

此即车上人全部跳下后车的速度。

（3）因为 $M+nm \leqslant M+Nm$，$n=1, 2, \cdots, N$，所以（2）的情况下车的末速大。

4.4 在图4.7所示的机构中，定滑轮上以轻绳悬两个大秤盘，盘上各站立一人。两盘的质量均为m，两人的质量均为M。假如其中一个人在地面上能跳起h高，问他以同样的能量在秤盘上能跳起多高？起初系统是静止的。

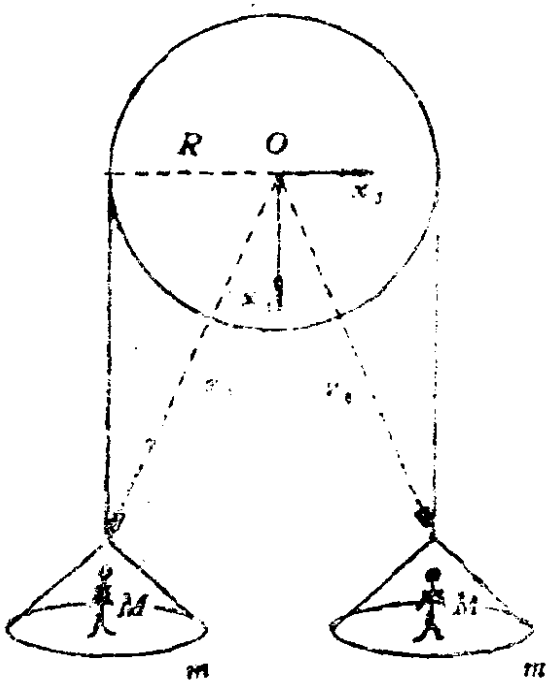


图 4.7

〔解〕在以人、秤盘、轻绳组成的系统内，有非机械能转变为机械能，机械能不守恒。有外力作用，动量不守恒，但关于O点的角动量守恒。初始时，系统静止，角动量$\boldsymbol{L}_0 = 0$，所以系统在任意时刻的角动量恒为零。

$$\boldsymbol{r}_1 \times Mv(-\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{r}_1 \times mu\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times (M+m)u(-\boldsymbol{e}_1) = 0 \quad (1)$$

其中v是人起跳的速度，u是此时盘获得的向下的速度。（1）式可化为

$$-RMv\boldsymbol{e}_3 + Rmu\boldsymbol{e}_3 + (M+m)\ uR\boldsymbol{e}_3 = 0$$

$$Mv - mu - (M+m)u = 0$$

$$u = \frac{Mv}{M+2m} \quad (2)$$

人跳跃作的功，转变为系统的动能

$$Mgh=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}(M+2m)u^2 \qquad (3)$$

设人在秤盘上跳起h'，则

$$\frac{1}{2}Mv^2=Mgh' \qquad (4)$$

将（4）代入（3）式，得

$$Mgh=Mgh'+\frac{1}{2}(M+2m)\left(\frac{Mv}{M+2m}\right)^2$$

$$=Mgh'+\frac{M^2v^2}{2(M+2m)}=Mgh'+\frac{M^2gh'}{M+2m}$$

$$h'=\frac{h}{1+\dfrac{M}{M+2m}}=h\left(1-\frac{M}{2(M+m)}\right)$$

4.5 试证明：如果所受的内力和外力均为保守力，则质点系的动能与内力、外力势能之和在运动中保持不变，即机械能守恒。

〔解〕由动能定理

$$dT=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}\boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{r}_i$$

其中

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i=-\sum_i \nabla_i V_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i$$

$$=-\sum_i\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_{1i}}dx_{1i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_{2i}}dx_{2i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_{3i}}dx_{3i}\right)$$

$$=-\sum_i dV_i$$

$$\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}\boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{r}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}(\boldsymbol{F}_{j\,i}\cdot d\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{j\,i}\cdot d\boldsymbol{r}_i) \quad \text{交换第二项中}i,j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} \boldsymbol{F}_{j\,i}\cdot d\boldsymbol{r}_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} \boldsymbol{F}_{i\,j}\cdot d\boldsymbol{r}_j$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}(\nabla_i V_{i\,j}\cdot d\boldsymbol{r}_i + \nabla_j V_{i\,j}\cdot d\boldsymbol{r}_j) \quad (V_{i\,j} = V_{j\,i})$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}}\left(\frac{\partial V_{i\,j}}{\partial x_{1\,i}}dx_{1\,i} + \frac{\partial V_{i\,j}}{\partial V_{2\,i}}dx_{2\,i} + \frac{\partial V_{i\,j}}{\partial x_{3\,i}}dx_{3\,i}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_{i\,j}}{\partial x_{1\,j}}dx_{1\,j} + \frac{\partial V_{i\,j}}{\partial x_{2\,j}}dx_{2\,j} + \frac{\partial V_{i\,j}}{\partial x_{3\,j}}dx_{3\,j}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} dV_{i\,j} \qquad (V_{i\,j} = V_{i\,j}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = V_{i\,j}(r_{i\,j}))$$

所以

$$dT = -\sum_i dV_i^{(e)} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} dV_{i\,j}$$

$$d\left(T + \sum_i V_i^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} V_{i\,j}\right) = 0$$

$$T + \sum_i V_i^{(e)} \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\\ j\neq i}} V_{i\,j} = E \text{（常数）}$$

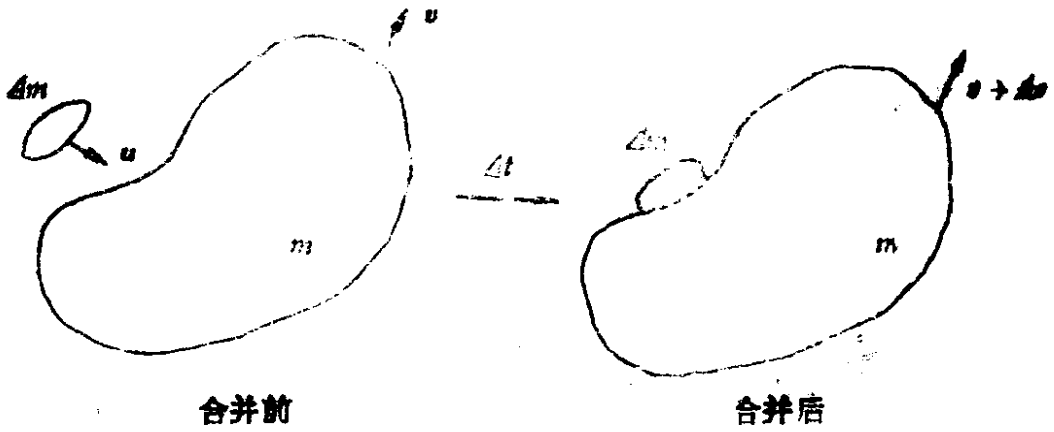
§2 变质量物体的运动

理论要点

1．变质量物体的运动方程

一物体质量$m = m(t)$，t时刻速度为$\boldsymbol{v}$，在Δt时间里，此物体与一小质量Δm的物体合并，后者的速度是$\boldsymbol{u}$，合并后

的物体质量为$m+\Delta m$，速度为$v+\Delta v$。设合并瞬间作用在m



合并前　　合并后

图 4.8

和Δm上的合外力为F，则由积分形式的动量定理，得

$$(m+\Delta m)(v+\Delta v)-mv-\Delta mu=F\Delta t$$

略去二级小量，将上式除以Δt，令$\Delta t\to 0$取极限，得

$$\frac{d}{dt}(mv)-\frac{dm}{dt}u=F$$

或

$$F=(v-u)\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt} \tag{4.20}$$

此即为变质量物体的运动微分方程。

仅当$u=0$时(4.20)式化为$F=\frac{d(mv)}{dt}$，它形式上与定质量的方程式相同，但本质上不同，区别是：这是一个质点系的方程，并且m为t的函数。

2．火箭的运动方程

对火箭来说，一般变质量物体运动方程(4.20)中的u是喷出物质在静系中的速度，v是火箭在静系中的速度，$\frac{dm}{dt}$是每单位时间放出的质量，$u-v=v_r$是放出物质相对于火箭的速度，因v_r沿火箭轨道切向的负方向，故$u-v=-v_r e_t$，火箭方程为

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}v_x\boldsymbol{e}_x \tag{4.21}$$

如火箭不受外力，$\boldsymbol{F} = 0$，则

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v},$$

$$= -v_x\frac{dm}{dt}\boldsymbol{e}_x \tag{4.22}$$

此式表明即使没有外力，火箭依靠抛出质量仍可改变运动状态，这就是火箭推进原理。

例　题

4.6　雨滴开始自由下落时质量为M，在下落过程中，单位时间凝结在它上面的水汽的质量为λ。略去空气阻力，试求雨点在t秒后所下落的距离。

〔解〕以雨滴开始下落时的位置为一维笛卡儿坐标系的原点O。

这是一个变质量问题。并入的水汽速度$\boldsymbol{u} = 0$，由(4.20)式有

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{v} - 0)\frac{dm}{dt} + m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

又

$$m = M + \lambda t$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{F} = mg\boldsymbol{e}$$

故

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg$$

$$\frac{d}{dt}(M + \lambda t)v = (M + \lambda t)g$$

$$\int_0^v d[(M+\lambda t)v] = \int_0^t (M+\lambda t)g\,dt$$

$$(M+\lambda t)v = Mgt + \frac{1}{2}\lambda g t^2$$

$$v = \frac{Mgt + \frac{1}{2}\lambda g t^2}{M+\lambda t} = \frac{1}{2} g t \frac{2M+\lambda t}{M+\lambda t}$$

$$dx = \frac{1}{2} g t \frac{2M+\lambda t}{M+\lambda t} dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{1}{2} g t \left(1 + \frac{1}{1+\lambda t/M}\right) dt$$

$$x = \frac{g}{2}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{M}{\lambda} t - \frac{M^2}{\lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{M} t\right)\right]$$

4.7 一截面为S，质量为m_0的四棱柱，沿轴向受一常力F的作用，从初速零开始运动，在行进方向上，有密度为ρ，速度为u的细小砂粒被吹到截面上并全部附着其上，问经时间t后，柱的速度和移动的距离是多少？

〔解〕由（4.20）式有

$$m\frac{dv}{dt} = F - \frac{dm}{dt}(u+v)$$

$$m\frac{d(u+v)}{dt} + \frac{dm}{dt}(u+v) = F \qquad (u = 常数)$$

$$d[(u+v)m] = F\,dt$$

$t = 0$时，$m = m_0$，$v = 0$，积分上式得

$$m(u+v) = Ft + m_0 u$$

$$v = \frac{Ft + m_0 u}{m} - u \qquad (1)$$

又

$$\frac{dm}{dt}=S\rho(u+v)=S\rho\frac{Ft+m_0u}{m}$$

所以

$$mdm=S\rho(Ft+m_0u)dt$$

$$=S\rho\,Ftdt+S\rho m_0udt$$

$$m^2=S\rho\,Ft^2+2S\rho\,m_0ut+m_0^2$$

$$=S\rho(Ft^2+2m_0ut)+m_0^2$$

$$v=\frac{(Ft+m_0u)}{\sqrt{S\rho(Ft^2+2m_0ut)+m_0^2}}-u \qquad (2)$$

移动距离

$$x=\int_0^t vdt$$

$$=\frac{1}{S\rho}\sqrt{S\rho(Ft^2+2m_0ut)+m_0^2}-\frac{m_0}{S\rho}-ut$$

4.8 地板上堆积着线密度为ρ的链条，其一端被提起，问

（1） 当提起部分的链条长为x，速度为v，加速度为时a，上端拉力多大？

（2） 如上端速度v=常数，拉力F=？

（3）如F=常数，提起部分链条长x时，v=？

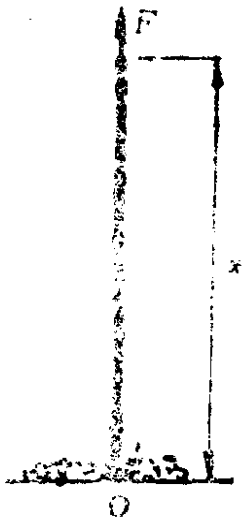


图 4.9

〔解〕（1）被提起部分链条为变质量物体，并入质量的初速度为零，运动微分方程为

$$F=v\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt}$$

$$=\frac{d(mv)}{dt}$$

公式中的F是作用在系统上的合外力，所以

$$F-(\rho x)g=\frac{d(\rho xv)}{dt} \qquad (1)$$

$$F=(\rho x)g+\rho v^2+\rho xa$$
$$=\rho(xg+v^2+xa)$$

（2）如 $v=$常数，则$a=0$，故

$$F=\rho(xg+v^2)$$

（3）如 $F=$常数，由（1）式，应用$\frac{d}{dt}=v\frac{d}{dx}$得

$$F-(\rho x)g=v\frac{d(\rho xv)}{dx} \qquad (2)$$

将（2）式两边乘$\frac{x}{\rho}$，得

$$vx\cdot\frac{d(xv)}{dx}=\frac{xF}{\rho}-x^2g$$

积分得

$$\frac{1}{2}(xv)^2=\frac{x^2F}{2\rho}-\frac{x^3}{3}g+c$$

$t=0$时，$x=x_0$，$v=0$，故$c=\frac{x_0^3}{3}g-\frac{x_0^2F}{2\rho}$，因此

$$\frac{1}{2}(xv)^2=\frac{F}{2\rho}(x^2-x_0^2)-\frac{g}{3}(x^3-x_0^3)$$

$$v=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{F}{\rho}(x^2-x_0^2)-\frac{2g}{3}(x^3-x_0^3)}$$

4.9 用右手提着线密度为ρ、长为l的链条的上端，用左手接着下端，放开右手，问当链条在空中下落距离为x时，左手受力多大？

〔解〕将空中部分链条看作变质量物体，分出部分的质量速度为零

$$\frac{d}{dt}[\rho(l-x)v]=\rho(l-x)g-F'$$

$$\rho(l-x)\dot{v}-\rho v^2=\rho(l-x)g-F'$$

（F'是已落下部分对空中部分的作用力）注意到$\dot{v}=\ddot{x}=g$，$(\dot{x})^2=2gx$，故

$$\rho(l-x)g-\rho v^2=\rho(l-x)g-F'$$

$$F'=\rho v^2=\rho(\dot{x})^2=2\rho gx$$

已落下部分对左手的静压力为ρxg，所以左手受到的压力为

$$F=F'+\rho xg=2\rho gx+\rho xg=3\rho gx$$

4.10 一火箭在均匀重力场中铅直升空，其尾部单位时间喷出质量为μ，相对速度为u'的气体，以向上推进火箭。火箭初始质量为m_0，初速为零，求时间t后的速度及上升的高度。

〔解〕 由于 $\frac{dm}{dt}=-\mu$，$v_r=-u't$，根据（4.20）式得

$$m\frac{dv}{dt}=-mg+\mu u'$$

又 $m=m_0-\mu t$，

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{\mu u'}{m_0-\mu t}$$

积分，并利用初始条件$t=0$时，$v=0$，得

$$v=-gt-u'\ln(m_0-\mu t)+u'\ln m_0$$

$$=-gt+u'\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$$

t时刻火箭上升的高度为

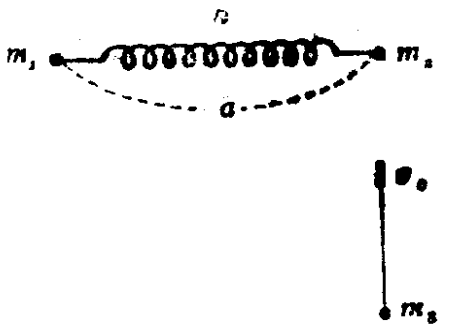
$$x=\int_0^t v\,dt=-\frac{1}{2}gt^2+\frac{m_0u'}{\mu}\left\{1+\frac{\mu}{m_0}t+\ln\left(1-\frac{\mu}{m_0}t\right)+\frac{\mu}{m_0}t\right\}$$

习　　题

4.1　从动量和能量守恒出发，重解例题4.1.

4.2　如图所示，质点m_1，m_2以弹性系数为k的弹簧连接，静置于光滑水平面上。质点m_3以垂直于m_1，m_2连线的速度v_0射向m_2，碰后与m_2合为一体。问当v_0多大时，正好使弹簧伸长到$3a$？（a为弹簧自然长）

答：$v_0=\dfrac{a}{m_3}\sqrt{\dfrac{10k(m_2+m_3)}{m_1}}$。



4.2题图

4.3　质量为m_1的质点，沿顶角为θ的光滑直角劈滑下，劈本身的质量为m_2，可在光滑平面上自由滑动，试求：

（1）质点在水平方向的加速度$\ddot{x}_1$；

（2）劈的加速度$\ddot{x}_2$；

（3）劈对质点的反作用力R_1；

（4）水平面对劈的反作用力R_2。

答：$\ddot{x}_1=\dfrac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$

$\ddot{x}_2=-\dfrac{m_1\sin\theta\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$

$R_1=\dfrac{m_1m_2\cos\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$

$R_2=\dfrac{m_2(m_1+m_2)}{m_2+m_1\sin^2\theta}g$

4.4 质量为M，半径为a的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上，有一质量为m的质点沿此半球面滑下。设质点的初始位置与球心的连线和竖直向上的直线所成之角为α，并且起始时系统是静止的，求此质点滑到它与球心的连线和竖直向上直线间所成之角为θ时的$\dot{\theta}$之值。

答：$\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{2g(\cos\alpha-\cos\theta)}{a\left(1-\dfrac{m}{M+m}\cos^2\theta\right)}}$

4.5 一个人在水平圆台上沿着边缘走动。此台可绕过其中心的的铅垂轴自由转动。开始时，人与平台均为静止，试求人在平台上走完一周时，人的绝对角位移。假定人的重量与平台相等。

答：$\dfrac{2}{3}\pi$。

4.6 光滑水平面上有长为l，质量为m的均质杆，绕过中心的铅直轴以角速度ω_0转动（中心不固定），当突然将杆一端A按住，问杆的角速度将变为多大？动能有何变化？

答：$\omega=\dfrac{1}{4}\omega_0$，　$T=\dfrac{1}{4}T_0$。

4.7 一个质量为M的水平圆盘，可绕通过它边缘上一点的垂直轴自由转动。如果一只质量为M的狗沿着边缘走一圈，证明圆盘转过的角度可表示为

$$\int_0^{\pi}\frac{4m\cos^2\gamma\,d\gamma}{(3M/2)+4m\cos^2\gamma}$$

4.8 讨论在如下体系的运动中，动量、角动量及机械能的守恒定律是否成立？为什么？

（1）两个同号电荷以彼此平行的速度向量作匀速运动。

（2）两个正电荷，在同一平面内以同样大小的速度运动，其一的速度沿两个电荷的连线，指向另一电荷，而另一电

荷的速度则垂直于连线。

4.9 一个质量为M_A，半径为a的圆筒，开始时以角速度$\omega_A(0)$自由转动，另一个质量为M_B，半径为b $(b>a)$的圆筒安装在同一转轴上，也能自由转动，但开始时是静止的。在较小的圆筒内表面上，散布了薄薄一层砂子，其质量为M_S。在$t=0$时，内筒的小孔打开，细砂以恒定速率λ飞出，附在外筒的内壁上。求二者在这以后的角速度ω_A和ω_B，忽略砂子从内筒迁到外筒的时间。

（提示：如果$\lambda t=M_B$和$b=2a$，则$\omega_B=\omega_A(0)/8$）

答：$\omega_A=\omega_A(0)$，$\omega_B=\dfrac{\lambda t a^2\omega_A(0)}{(\lambda t+M_B)b^2}$。

4.10 一均匀圆盘，质量为M，半径为R，静止地放在一光滑水平面上，圆盘中心不固定。质量为m的人，原静止地站在圆盘边缘上。求当人以相对速率u沿圆盘边缘走动后，圆盘的运动。

答：圆盘中心O的速率$v_0=\dfrac{mu}{3m+M}$，O绕人与圆盘的质心C作圆周运动。圆盘的角速度

$$\omega=\frac{2m}{3m+M}\cdot\frac{u}{R}$$

4.11 球形雨滴在静止的雾中铅直降落，降落中不断有水汽附着其上，水汽的质量与水滴的表面积成比例。设单位时间单位表面积上凝结的水汽质量为a，雨滴的初始半径为r_0，初始速度为v_0，求雨滴的半径、速度及落下的距离如何随时间t变化。

答：$r=r_0+at$

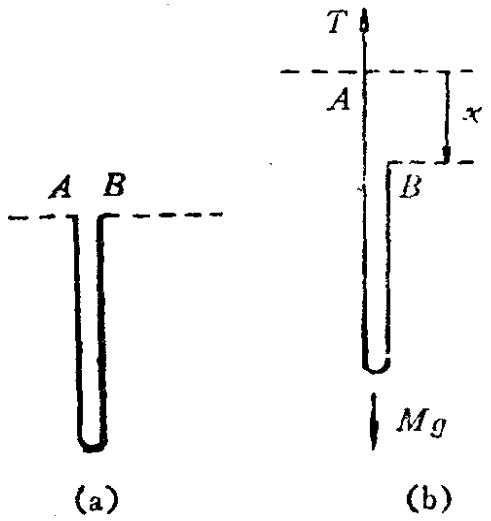
$$v=\frac{gr}{4a}+\frac{r_0^3}{r^3}\left(v_0-\frac{gr_0}{4a}\right)$$

$$x=\frac{gr_0^2}{8a^2}\left(\frac{r^2}{r_0^2}+\frac{r_0^2}{r^2}-2\right)+\frac{r_0v_0}{2a}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

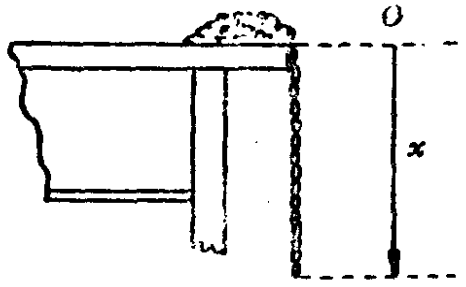
4.12　一条柔软、无弹性、质量均匀的绳索，竖直地自高处下坠至地板上。如绳索的长度等于l，每单位长度的质量等于σ，求当绳子剩在空中的长度等于x（$x<l$）时绳子的速度及它对地板的压力。设开始时，绳子的速度为零，它的下端离地板的高度为h。

答：$v^2=2g(h+l-x)$，$P=\sigma[2h+3(l-x)]g$。

4.13　一根长为a，质量为M的均质链按图(a)所示的方式竖直悬挂。$t=0$时，B端放开。试求当B落下x（$<a$）的距离时（见图(b)），A点的张力多大？



4.13　题图



4.14　题图

答：$T=\dfrac{Mg}{2}\left(1+\dfrac{3x}{a}\right)$

4.14　桌子的一端堆积有线密度为ρ的链，其一端向下落，求当链下落x时，其速度、加速度及所用的时间，并求机械能的变化。

答：$v=\sqrt{\dfrac{2}{3}gx}$，$a=\dfrac{g}{3}$，　$t=\sqrt{\dfrac{6x}{g}}$，$\Delta E=-\dfrac{1}{6}\rho g x^2$

4.15　与水平面成α角的斜面上有一层均匀的雪。当雪自上而下边滚落边加重时，雪球带走了所有的积雪。求雪球下落的加速度。

第五章　拉格朗日力学

历史上，以牛顿三定律为基石的牛顿力学，曾经是全部力学的基础．然而牛顿力学在自己的发展进程中也愈益遇到困难和挑战．一般说，要完全地决定质点或系统在时间与空间中的运动，需要满足三个条件：动力学条件（用力表达），初始条件和约束条件．这约束的参与使问题的求解变得复杂起来，因为约束力常常是未知力，而应用牛顿定律，需要知道包括约束力在内的作用在物体上的所有力，这增加了求解的困难，而且面对复杂系统的运动，牛顿力学的向量分析方法已显得十分费力．还有，牛顿力学的一个明显的缺点，是在各种坐标系中运动微分方程取不同的形式，并且有的很复杂．人们自然要问：能否不用明显解出系统各部分的约束力，不必进行繁杂的向量运算就得出系统的动力学方程式？能不能使动力学方程式对不同的力学系统和任意的曲线坐标都有统一的形式？能不能以一个特征量来代表一个力学系统，表征这一力学系统区别于另一系统的特征？等等．拉格朗日分析力学的问世，回答了这些问题，解决了牛顿力学难以解决的问题，把经典力学的发展，向前推进了一大步．

§1　虚功原理

理论要点

1．约束　自由度　广义坐标

（1）约束分类

约束的数学表述称为**约束条件**，它通常可以表成质点坐标、速度和时间的方程式，即**约束方程**（有时是不等式）．约束

可按约束方程分类。

(a) 完整约束	非完整约束
(几何约束及可化成几何约束的微分约束)	(又称微分约束或速度约束)
$f_i(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0$	$f_i(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n, t) = 0$
$i = 1, \cdots, m$ (m: 约束数)	$i = 1, \cdots, l$ (l: 约束数)
(b) 稳定约束	非稳定约束
(约束方程不显含时间)	(约束方程显含时间)
$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n) = 0$	$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0$
(c) 理想约束	非理想约束
(无摩擦力作功)	(有摩擦力作功)
(d) 可解约束	不可解约束
(单向约束)	(双向约束)
$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n) \leqslant 0$	$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n) = 0$

(2) 自由度 广义坐标

自由度：单值地确定一个体系的位形所必须给出的独立量的数目，称为这个体系的自由度的数目。它等于体系的坐标数减去独立的约束方程的数目。

广义坐标：任何一组明确表示系统位形的参数，在一般意义上都可以作为一种坐标系，称为**广义坐标**。

广义坐标的选择没有唯一性。

选择广义坐标的原则是：

(a) 它们的值能唯一地决定体系的位形；

(b) 它们可以任意地独立变化而不违背体系所受的约束；

(c) 数学上，应尽可能使问题得到简化。

2. 虚位移

(1) 虚位移

在稳定约束下，一切想象的、符合约束条件的、无限小的、即时的位置变更称作**虚位移**（也是可能位移），以 $\delta \boldsymbol{r}$ 表

示。这样的虚位移可能有很多甚至无穷多个，实位移是其中之一。图5.1表示稳定约束下的虚位移，图5.2表示非稳定约束下的虚位移、实位移和可能位移。

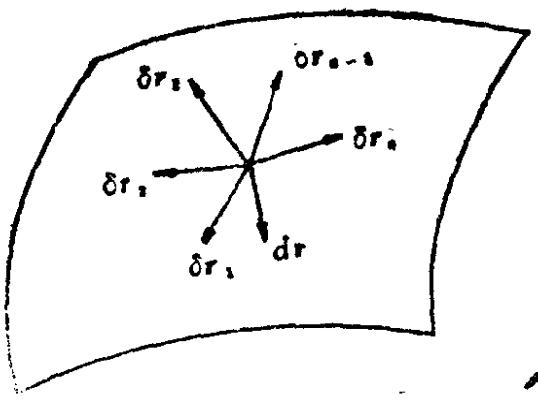


图 5.1

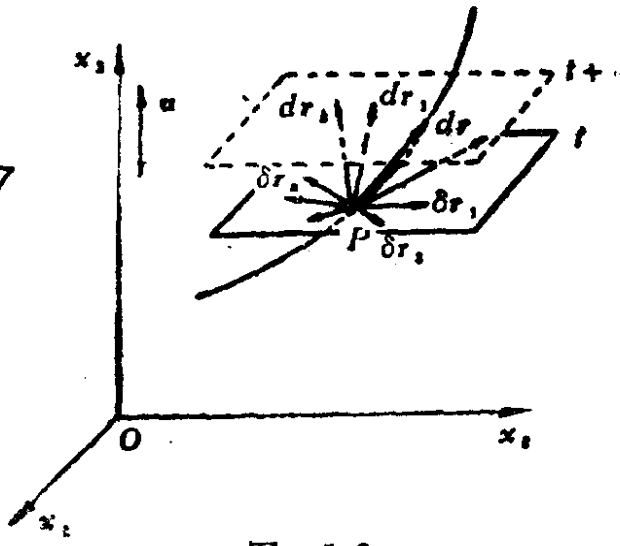


图 5.2

在非稳定约束下，虚位移不再是可能位移 $(dr_1, \cdots, dr_i, \cdots, dr_n)$，而是假定约束被瞬时冻结时的可能位移 $(\delta r_1, \delta r_2, \cdots, \delta r_n)$。实位移不再是虚位移中的一个，而是可能位移中的一个。

（2）约束对虚位移和实位移的限制

设一 n 个质点的系统，受有 m 个完整约束

$$f_\alpha(r_1, \cdots, r_n, t) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, m$$

如 $\delta r_1, \delta r_2, \cdots, \delta r_n$ 是一组满足约束条件的虚位移，则

$$f_\alpha(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \cdots, r_n + \delta r_n, t) = 0,$$

对 δr_i 作多元函数的泰勒展开，略去二次以上的项，得

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_i f_\alpha \cdot \delta r_i = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, m \qquad (5.1)$$

满足此式的一组 δr_i 称为与约束相符的虚位移。此式反映了约束对虚位移的限制。

对于实位移，同样有

$$f_a(\boldsymbol{r}_1+d\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2+d\boldsymbol{r}_2,\cdots,\ \boldsymbol{r}_n+d\boldsymbol{r}_n,\ t+dt)=0$$

对$d\boldsymbol{r}_i$展开，除以dt，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_i f_a\cdot\boldsymbol{v}_i+\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)=0$$

当$\frac{\partial f_a}{\partial t}=0$时

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla_i f_a\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{5.2}$$

这是约束对实位移的限制条件。

3。理想约束　虚功原理

（1）理想约束

虚功：质点作虚位移$\delta\boldsymbol{r}$时，作用于质点上的外力$\boldsymbol{F}$所作的功

$$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

称为**虚功**。

理想约束：如体系所受的约束力在任何虚位移上作的功总和等于零，则此种约束称为**理想约束（无功约束）**。理想约束条件可表为

$$\delta W_e=\sum_i\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{5.3}$$

式中$\boldsymbol{R}_i$是第i个质点所受的约束力。

理想约束的类型举例：

（i）静止或运动着的光滑平面、曲面、曲线（图5.3）。

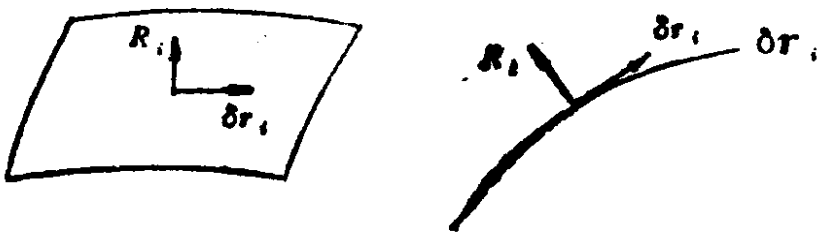


图　5.3

$$\delta W_e = \sum_i \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

(ii) 质点间的刚性连接（图5.4）。

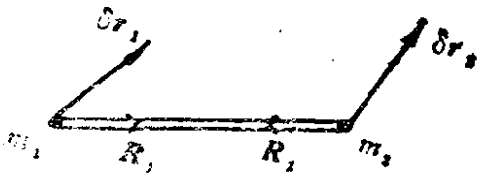


图 5.4

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 \\ &= \boldsymbol{R} \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) \\ &= \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{12} \\ &= 0\end{aligned}$$

(iii) 不可伸长的绳（图5.5）。



图 5.5

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \boldsymbol{T}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{T}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 \\ &= T_1 \delta r_1 \cos\varphi_1 + T_2 \delta r_2 \cos\varphi_2 \\ &= T_1 (\delta r_1 \cos\varphi_1 - \delta r_2 \cos\varphi_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

(iv) 铰链（图5.6）：$\delta W_e = \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$

(v) 纯滚动（图5.7）：$\delta W_e = \boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0 \quad (\delta \boldsymbol{r} = 0)$

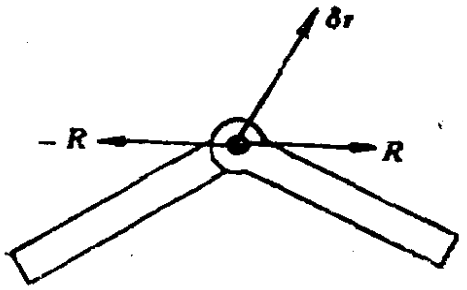


图 5.6

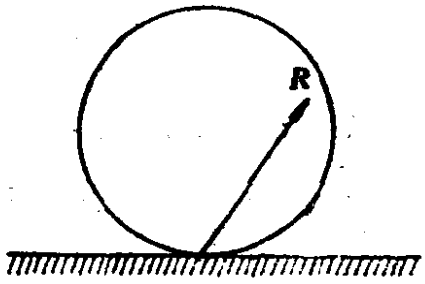


图 5.7

(2)虚功原理

(i)虚功原理

受有稳定、理想约束的体系，其平衡的充分必要条件是：

在任何虚位移上所有主动力所作的虚功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.4}$$

式中$\boldsymbol{F}_i$是作用在第i个质点上的主动力。

(ii) 广义坐标下的虚功原理　广义力

由 (5.4) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \right) \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma = 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

式中

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, f \tag{5.6}$$

称为广义坐标 q_σ 对应的**广义力**。

由于广义坐标q_σ是独立变量，δq_σ是独立变分，由(5.5)式得

$$Q_\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{5.5}$$

即为广义坐标下的虚功原理表达式。在广义坐标下，虚功原理可叙述为：在稳定理想约束下，体系平衡的充分必要条件是所有广义力等于零。

广义力 Q_σ，当相应的广义坐标 q_σ 为线量时，其量纲为力的量纲，当相应的广义坐标为角量时，其量纲为角动量量纲。$Q_\sigma \delta q_\sigma$ 总具有功的量纲。

广义力的求法：

由定义求：$Q_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma}$

由虚功求：$Q_\sigma = \dfrac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma}$ (5.8)

由势能求：当主动力为有势力时

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}$$

广义力一般不属于某一质点，也不对应于某一主动力分量，而可能与作用在体系上的所有及主动力所有质点有关。

§2 平衡及其稳定性

理论要点

1. 平衡的稳定性

（1）从直观上得到的平衡稳定性概念

一质点在重力场中被约束在图5.8所示平面曲线上运动

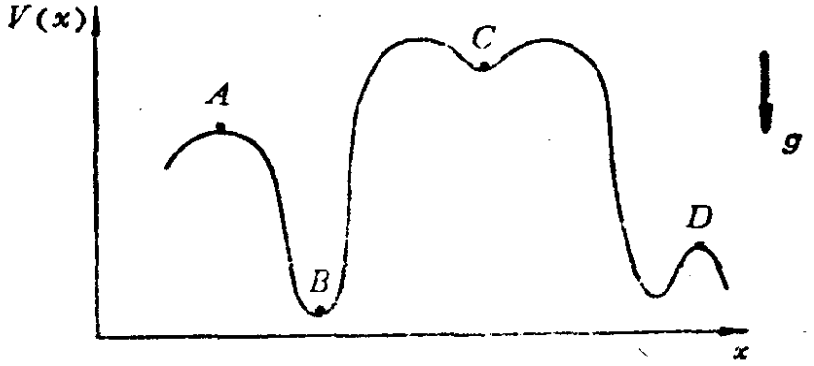


图 5.8

（曲线所在平面是铅直的）。曲线上有4个点A, B, C, D是平衡位置。质点放在这些位置上时，所受合力为零，即处在**平衡**状态。然而，在A, D位置，任何偏移都会破坏平衡，称为**不稳定**平衡位置。B, C则是稳定的，但C仅在小的微扰下才是稳定的。在**稳定**平衡位置，当质点被稍稍推离这个位置时，它将作振动。

（2）数学上的证明

上述直观的结果，可以从数学上加以证明。设曲线是光滑的，在A点附近，质点运动微分方程是(图5.9)

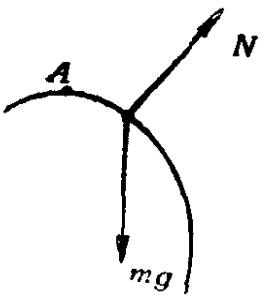


图 5.9

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = N\boldsymbol{e}_r - mg\cos\theta\boldsymbol{e}_r + mg\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -a(\dot{\theta})^2\boldsymbol{e}_r + a\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$\boldsymbol{e}_\theta$方向分量方程为

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta, \quad \theta \ll 1$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{a}\theta = 0$$

$$\theta = A\exp\left[\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t\right] + B\exp\left[-\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t\right]$$

当 $t\to\infty$，$\theta\to\infty$，所以A是不稳定平衡点。

同样，可列出 B 点附近质点运动横向方程为(图5.10)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$$

$$\theta = A\cos\left[\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t\right] + B\sin\left[\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}t\right]$$

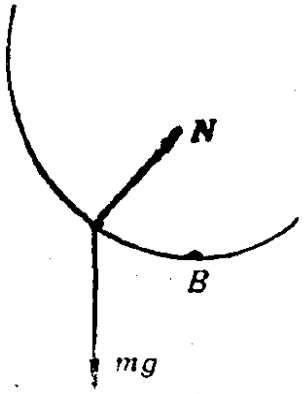


图 5.10

$t\to\infty$时，θ 为有界。

2. 微分方程平衡解的稳定性

设有微分方程

$$\ddot{x} = f(x)$$

(它正是单位质量受力为 $f(x)$的质点的运动微分方程) 平衡要求$\ddot{x}=0, \dot{x}=0$,则质点受力为零，即 $f(x)=0$，给出平衡位置 $x=x_0$。

设质点偏离平衡位置一个微小位移 ξ，$x = x_0 + \xi$，则

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} = f(x_0 + \xi)$$

在x_0附近作泰勒展开

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} = f(x_0) + \xi f'(x_0) + \frac{1}{2}\xi^2 f''(x_0) + \cdots$$

由于$f(x_0)=0$，并略去ξ^2以上项，则

$$\ddot{\xi} - f'(x_0)\xi = 0$$

如 $f'(x_0)<0$，有

$$f'(x_0) = -a^2 \quad (a \text{是正常数})$$

方程解为

$$\xi = A\sin(at) + B\cos(at)$$

解是有界的。

如 $f'(x_0)>0$，有

$$f'(x_0) = b^2 \quad (b \text{是正常数})$$

方程解为

$$\xi = Ce^{bt} + De^{-bt}$$

当 $t\to\infty$，$\xi\to\infty$，解是无界的。

定义：微分方程 $\ddot{x} = f(x)$ 的平衡解 $x = x_0(t)$，当 $f'(x_0)<0$ 是稳定的，当 $f'(x_0)>0$ 是不稳定的。

3. 稳定性与势能

这里我们只讨论单自由度情形，多自由度情形见第六章§2。

上述稳定性判据以势能表示为

$f'(x_0)<0$，即$V''(x_0)>0$，　平衡稳定；

$f'(x_0)>0$，即$V''(x_0)<0$，　平衡不稳定；

$f'(x_0)=0$，即$V''(x_0)=0$，　分别情况讨论：

如 $V(x) = \frac{1}{3!}V'''(x_0)\xi^3 \neq 0$，$V'''(x_0) \gtrless 0$均不稳定；

如 $V''(x_0) = 0, V(x) = \frac{1}{4!}V''''(x_0)\xi^4 \neq 0$，$V''''(x_0)>0$

稳定，$V''''(x_0)<0$不稳定。

……

依此类推。

总结起来，如在势能展开式中

$V''(x_0)=V'''(x_0)=\cdots=V^{(n-1)}(x_0)=0, V^{(n)}(x_0)\neq 0$

（(n)表示微商次数），则

当 n 为奇数时，$V^{(n)}(x_0)\gtrless 0$　平衡均不稳定；

当 n 为偶数时，$V^{(n)}(x_0)>0$　平衡稳定，

$V^{(n)}(x_0)<0$　平衡不稳定。

例　题

5.1　单摆由长为 l 的无重杆与质量为 m 的摆锤组成（图5.11）。试求其平衡位置，并讨论其稳定性。

〔解〕　取 O 为势能零点，则

$$V=-mgl\cos\theta$$

由

$$\frac{dV}{d\theta}=mgl\sin\theta=0$$

得　$\theta=0,\theta=\pi$　是摆的平衡位置。

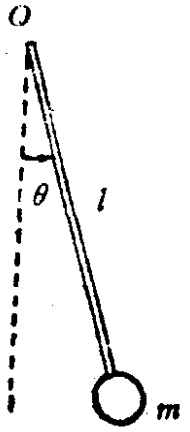


图　5.11

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=\left.mgl\cos\theta\right|_{\theta=0}=mgl>0$$

所以$\theta=0$是稳定平衡位置。

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi}=\left.mgl\cos\theta\right|_{\theta=\pi}=-mgl<0$$

所以 $\theta=\pi$ 是不稳定平衡位置。

5.2　在一轴为水平的半径为 a 的固定圆柱顶上，放一质量为M，边长为 $2l$ 的正立方体，求平衡位置并讨论其稳定性。

〔解〕 取O处水平面为势能零点（图5.12），则

$$V = Mgx_2$$

$$= Mg(l\cos\theta + a\theta\sin\theta + a\cos\theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = Mg(-l\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta - a\sin\theta)$$

$$= Mg(-l\sin\theta + a\theta\cos\theta) = 0$$

$$\Longrightarrow tg\theta = \frac{a\theta}{l} = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \text{ 为平衡位置.}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = Mg(-l\cos\theta + a\cos\theta - a\theta\sin\theta)\Big|_{\theta=0}$$

$$= Mg(-l + a)$$

当 $a>l$, $\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}>0$, V为极小值，$\theta=0$是稳定平衡位置.

当 $a<l$, $\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}<0$, V 为极大值,不稳定平衡.

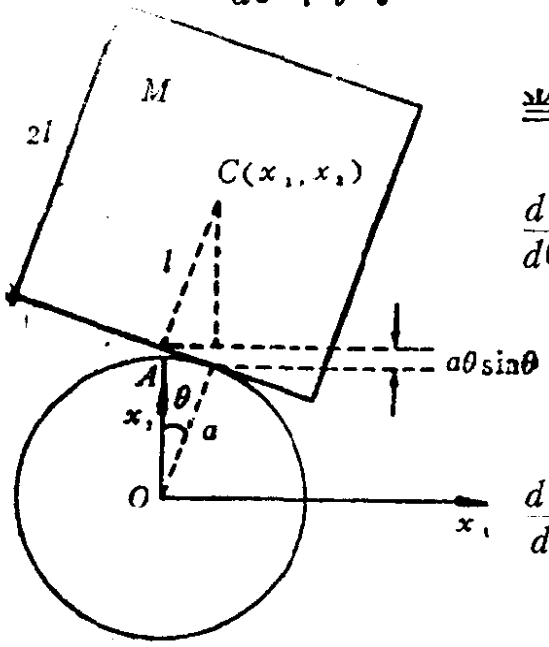


图5.12

当 $a=l$, $\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=0$ 时,

$$\left.\frac{d^3V}{d\theta^3}\right|_{\theta=0} = Mg(l\sin\theta - a\sin\theta - a\sin\theta - a\theta\cos\theta)\Big|_{\theta=0}$$

$$= 0$$

$$\left.\frac{d^4V}{d\theta^4}\right|_{\theta=0} = Mg[(l-2a)\cos\theta + a\theta\sin\theta - a\cos\theta]_{\theta=0}$$

$$= Mg(l-3a) < 0$$

$\theta=0$是不稳定平衡位置.

5.3 一质量为 m 的小环，能沿一竖直圆圈自由滑动，圆圈半径为 a。一自然长为 b，截面积为 b，弹性模量为 λ 的弹

簧一端系于环上，另一端固定在圆圈的最高点。求可能的平衡位置并研究其稳定性。

〔解〕 取A点为势能零点，则

$$V=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{b}(2\cos\varphi\cdot a-b)^2 - mg(2a\cos\varphi)\cos\varphi \qquad (1)$$

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{\lambda}{b}(2a\cos\varphi-b)(-2a\sin\varphi) + 4agm\cos\varphi\sin\varphi=0$$

$$2\sin\varphi\cdot a\left(\lambda-\frac{2a\lambda}{b}\cos\varphi+2mg\cos\varphi\right)=0$$

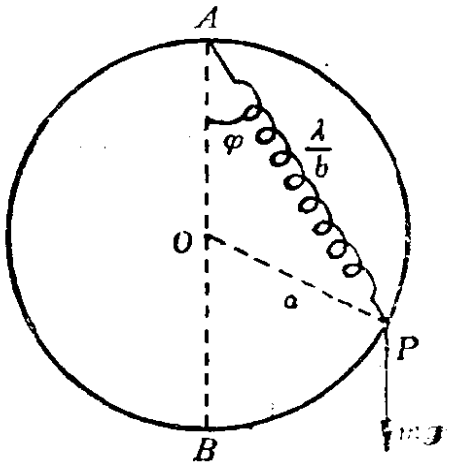


图 5.13

从而

$$\begin{cases}\sin\varphi=0\\ \cos\varphi=\dfrac{\lambda b}{2(a\lambda-mgb)}\end{cases} \qquad (2)$$

此二式表明$\varphi=0$总是一个平衡位置。另一个平衡位置通常既不是最高点，也不是最低点，而是$\varphi=\arccos\left[\dfrac{\lambda b}{2(a\lambda-mgb)}\right]$，

$$0<\varphi<\pi/2,\quad 0<\frac{\lambda b}{2(a\lambda-mgb)}<1$$

此式要求

$$a\lambda-mgb>0,\qquad a\lambda>mgb$$

以及

$$\lambda b<2(a\lambda-mgb),\qquad a\lambda>\left(mg+\frac{\lambda}{2}\right)b$$

这两个条件可统一写成

$$a\lambda>\left(mg+\frac{\lambda}{2}\right)b \qquad (3)$$

上述两个平衡位置的存在与否及其稳定性，取决于常数

a，b，λ 等的数值。

例如，若 $b=a$，$\lambda=mg$，代入不等式（3）得，

$$amg>\left(mg+\frac{\lambda}{2}\right)a\Longrightarrow 0>\frac{\lambda}{2}a$$

此不等式不成立，因此只存在 $\varphi=0$ 一个平衡位置。因为

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{\lambda}{b}(2a\cos\varphi-b)(-2a\sin\varphi)+4agm\cos\varphi\sin\varphi$$

$$=\frac{mg}{a}(2a\cos\varphi-a)(-2a\sin\varphi)+4agm\cos\varphi\sin\varphi$$

$$=2mga\sin\varphi$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=\left.2mga\cos\varphi\right|_{\varphi=0}=2mga>0$$

$\varphi=0$ 是稳定平衡位置。

又如 $b=a$，$\lambda=3mg$，代入不等式（3），得

$$a\cdot 3mg>(mg+1.5mg)a$$

$$3mga>2.5mga$$

所以平衡置有二：

$$\varphi=0$$

$$\varphi=\arccos\left[\frac{3mga}{2(3mga-mga)}\right]$$

$$=\arccos\frac{3}{4}$$

$$\frac{dV}{d\varphi}=\frac{3mg}{a}(2a\cos\varphi-a)(-2a\sin\varphi)+4agm\cos\varphi\sin\varphi$$

$$=6mga\sin\varphi-8mga\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=2mga(3\sin\varphi-2\sin 2\varphi)$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2}=2mga(3\cos\varphi-4\cos 2\varphi)$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=-2mga<0$$

即$\varphi=0$是不稳定平衡位置。

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\arccos\frac{3}{4}}=2mga\left(3\times\frac{3}{4}-4\times\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{2}mga>0$$

所以$\varphi=\arccos\frac{3}{4}$是稳定平衡位置。

5.4 长$2l$的棒，一端与光滑的铅直墙壁接触，并搭在墙壁前距离a处的水平光滑钉上，如图所5.14所示。求平衡位置并讨论其稳定性。

〔解〕 取O处水平面为势能零点，则

$$V=mgx_2=mg(l\sin\theta-a\operatorname{tg}\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=mg(l\cos\theta-a\sec^2\theta)=0$$

从而有

$$l\cos\theta=a\sec^2\theta$$

$$\cos^3\theta=\frac{a}{l}$$

故 $\theta_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ 为平衡位置。

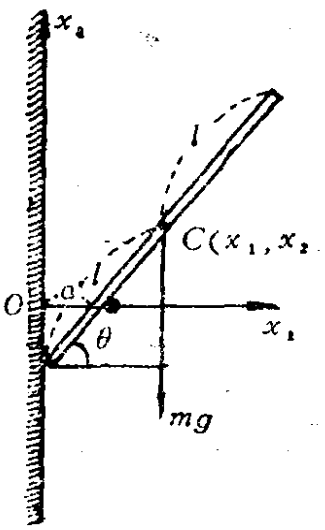


图 5.14

$$\left.\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}=mg\left(-l\sin\theta-2a\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)\Bigg|_{\theta=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}}}$$

$$=mg\left(-l\sin\theta-2a\cdot\frac{\sin\theta}{a/l}\right)\Bigg|_{\theta=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}}}$$

$$=-3mgl\sin\theta<0$$

θ_0是不稳定平衡位置。

5.5 在一半径为r的竖直半圆钢圈上，穿两个重为P及Q的小球，此二球用长为$2l$的不可伸长的绳连住。不计摩擦力，试用虚功原理求平衡位置。

〔解〕 自由度$f=1$，取绳与水平的夹角α为广义坐标。令

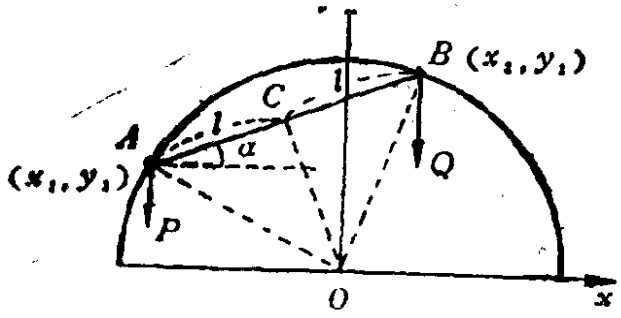


图 5.15

$$a=\sqrt{r^2-l^2}=\overline{OC}$$

$$y_1=a\cos\alpha-l\sin\alpha$$

$$y_2=a\cos\alpha+l\sin\alpha$$

依虚功原理，平衡时 $Q_\alpha=0$，而

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\alpha}=P\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}+Q\frac{\partial y_2}{\partial\alpha}$$

所以

$$P(-a\sin\alpha-l\cos\alpha)+Q(-a\sin\alpha+l\cos\alpha)=0$$

$$a(P+Q)\sin\alpha=l(Q-P)\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l(Q-P)}{a(Q+P)}=\frac{l(Q-P)}{\sqrt{r^2-l^2}(Q+P)}$$

5.6 一弹性圈自然长为 a，弹性模量为 λ，质量为 m，置于光滑铅直的圆锥面上。当圈静止时，圈面为水平。试用虚功原理求平衡时圈面离圆锥顶点的距离（圆锥顶角为2α）。

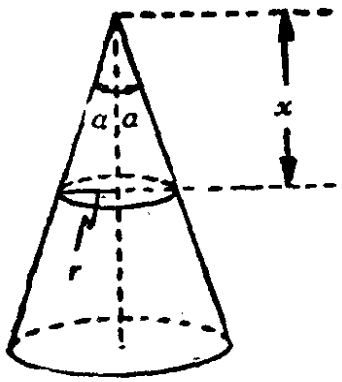


图 5.16

〔解〕 $f=1$，$r=\operatorname{tg}\alpha$，选 x 为广义坐标。

弹性圈中张力

$$T=\frac{\lambda}{a}(2\pi x\operatorname{tg}\alpha-a)$$

由虚功原理，系统平衡的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

$$mg\delta x-2\pi T\delta r=0$$

$$mg\delta x-2\pi\operatorname{tg}\alpha\cdot\delta x\cdot\frac{\lambda}{a}(2\pi x\operatorname{tg}\alpha-a)=0$$

因 δx 为独立变分，所以

$$mg\left[1-\frac{2\pi\mathrm{tg}\alpha}{mg}\cdot\frac{\lambda}{a}(2\pi x\mathrm{tg}\alpha-a)\right]=0$$

$$x=\frac{a}{2\pi\mathrm{tg}\alpha}\left(1+\frac{mg}{2\pi\mathrm{tg}\alpha\cdot\lambda}\right)$$

5.7 长为 l，质量为 m 的四根相同的均质棒，光滑铰接成菱形，对称地挂在两颗距离为 $2a$，光滑、水平的钉上，两钉高度相同，求体系的平衡位置及钉的约束反力。

〔解〕 $f=1$，取 θ 为广义坐标，见图5.17.

以 $G(x_1,x_2)$ 表示质心位置。

$$x_2=l\sin\theta-a\mathrm{tg}\theta$$

$$V=-4mgx_2$$

$$=-4mg(l\sin\theta-a\mathrm{tg}\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=-4mg(l\cos\theta-a\sec^2\theta)$$

$$=0$$

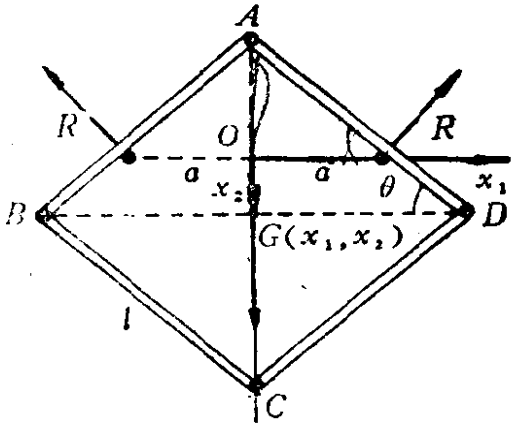


图 5.17

故

$$l\cos\theta=a\sec^2\theta,\quad \cos^3\theta=\frac{a}{l}$$

$\theta_0=\arccos\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ 为平衡位置。又

$$2R\cos\theta_0=4mg$$

$$R=2mg\sqrt[3]{\frac{l}{a}}$$

即为钉的约束反力。

5.8 上题中，如 BD 间以一轻绳连结，C 点上挂一重量 W 的重物，求绳中张力（不计棒的质量）。

〔解〕 考虑到绳子的约束，这是一个零自由度的体系。为了求约束力，我们可以“释放”绳的约束，代之以“主动力” T，因为约束也是通过力来实现的。由于释放了一个约束，系统有了一个自由度，选 φ 为广义坐标，O 点为势能零点。

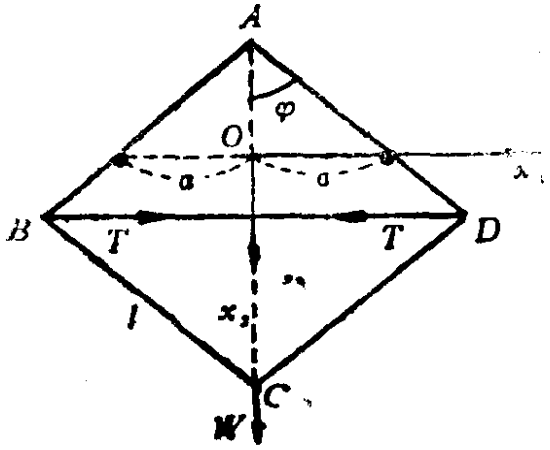


图 5.18

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$
$$= W\boldsymbol{e}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{T} \cdot \delta \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{T} \cdot \delta \boldsymbol{r}_D$$
$$= W\delta(2l\cos\varphi - a\operatorname{ctg}\varphi) + T\delta(-l\sin\varphi) - T\delta(l\sin\varphi)$$
$$= [W(-2l\sin\varphi + a\csc^2\varphi) - 2Tl\cos\varphi]\delta\varphi = 0$$

因 $\delta\varphi$ 是独立变分，所以

$$W(-2l\sin\varphi + a\csc^2\varphi) - 2Tl\cos\varphi = 0$$
$$T = W\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{a}{2l}\csc^3\varphi - 1\right)$$

§3 拉格朗日方程

理论要点

1. 达朗伯原理　达朗伯-拉格朗日方程

设体系有 n 个质点，根据牛顿第二定律

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

移项得

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{5.9}$$

运动微分方程转化为一平衡方程。式中 $\boldsymbol{F}_i$ 是主动力，$\boldsymbol{R}_i$ 是约束力，$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为**达朗伯惯性力**。

作用在一力学系统中每个质点上的主动力、约束力和达朗伯惯性力，形成一平衡力系，称为**达朗伯原理**。

将 (5.9) 式右乘 $\delta\boldsymbol{r}_i$，并利用理想约束条件，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5.10}$$

称为**达朗伯-拉格朗日方程**，表示在理想约束下，作用于每个

质点的主动力和达朗伯惯性力所作的虚功之和等于零。它是**动力学普遍方程**。

2．拉格朗日方程

（1）受有理想约束的**完整系拉氏方程**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma \qquad \sigma=1,2,\cdots,f \tag{5.11}$$

拉氏方程在数学上是广义坐标 q_σ 以时间 t 为变量的 f 个二阶微分方程。物理上是体系实际运动遵循的规律。式中 $T(q,\dot{q},t)$ 是以广义坐标、广义速度及时间表示的体系在惯性系中测得的动能。$V(q)$ 是以 q_σ 表示的在惯性系中测得的主动有势力的势能。$Q_\sigma(q,\dot{q},t)$ 是与 q_σ 相关的广义力。

定义 $L(q,\ \dot{q},\ t)=T-V$，是一标量函数，体系的特征量。保守系的所有动力学信息都包括其中了。由 L 及拉氏方程和初始条件，就可以完全确定完整保守体系的运动。L 称为**拉格朗日函数或拉氏函数**。完整系拉氏方程用一简单算符 Λ_σ 表示，可写为

$$\Lambda_\sigma T=Q_\sigma \qquad \sigma=1,2,\cdots,f \tag{5.12}$$

其中 Λ_σ 表示 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\sigma}$。拉氏方程中各项的意义：

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}=p_\sigma$——与广义坐标 q_σ 共轭的广义动量。

当 q_σ 是线量时，p_σ 是线动量分量；

当 q_σ 是角量时，p_σ 是角动量分量。

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$——广义动量的时间变化率。

当 q_σ 是线量时，$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$ 是力的分量；

当 q_σ 是角量时，$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)$ 是力矩分量。

$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$ ——称为拉格朗日力，是 $\frac{\partial q_\sigma}{\partial x} \neq$ 常数（选取曲线坐标作广义坐标）时出现的惯性力。

Q_σ ——是与 q_σ 相应的广义力。

完整系拉氏方程可表为：

广义动量的时间变化率 = 拉格朗日力 + 广义力

（2）完整保守系的拉氏方程

对于保守力系，广义力

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_\sigma}$$

将 Q_σ 与拉格朗日函数

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q) \qquad (5.13)$$

代入完整系拉氏方程，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \qquad \sigma = 1,2,\cdots,f \qquad (5.14)$$

或

$$\Delta_\sigma L = 0 \qquad (5.15)$$

称为**完整保守系拉氏方程，常简称为拉氏方程。**

（3）速度相关势（广义势）下的拉氏方程

设 U 依赖于广义速度，$U = U(q_\sigma, \dot{q}_\sigma)$ 是速度相关势，相应的广义力为

$$Q_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \qquad (5.16)$$

代入完整系拉氏方程，得与（5.14）相同形式的拉氏方程，只是其中的拉氏函数 $L=T-U$。

（4） 同时存在有势力和非有势力的拉氏方程

广义力

$$Q_\sigma=-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}+Q'_\sigma \tag{5.17}$$

其中Q'_σ包含作用于质点系但未隐含于位能中的所有的主动力$\boldsymbol{F}'_i$。拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=-\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}+Q'_\sigma$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=Q'_\sigma \qquad \sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ f,$$

或

$$\Lambda_\sigma L=Q'_\sigma \tag{5.18}$$

3．第一积分

（1） 循环积分

如 L 中不显含 q_σ，则由拉氏方程有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}=p_\sigma=\text{常数} \tag{5.19}$$

（5.19）式称为**循环积分**，其中 q_σ 称为**循环坐标**，p_σ称为与 q_σ 共轭的广义动量。循环积分表示广义动量守恒。

（2） 能量积分和广义能量积分

（i） 广义坐标下的动能表达式

$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2\cdots,\ q_f,\ t)\equiv\boldsymbol{r}_i(q,\ t) \qquad i=1,\ \cdots,\ n$

称为**变换方程**。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

动能 $$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{f} b_\alpha \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2} c \qquad (5.20)$$

$$= T_2 + T_1 + T_0$$

其中 $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$，$T_1 = \sum_{\alpha=1}^{f} b_\alpha \dot{q}_\alpha$，$T_0 = \frac{1}{2} c$。

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}$$

$$b_\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

(ii)哈密顿函数

由于惯性参考系中时间的均匀性，一封闭体系（及处在不变力场中的体系）的拉氏函数不明显地与时间有关，即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

则 $\frac{dL}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \ddot{q}_\sigma + \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma \right)$，由拉氏方程得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \dot{q}_\sigma - L \right) = 0$$

定义

$$H=\sum_{\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L=\sum_{\sigma}p_\sigma\dot{q}_\sigma-L \tag{5.21}$$

H为**哈密顿量**,则当 $\frac{dH}{dt}=0$, $H=$常数.

(iii) 能量积分 广义能量积分

(a) 欧勒定理：如果$f(y_\sigma)$是y_σ的n次齐函数，则

$$\sum_{\sigma=1}^{f}y_\sigma\frac{\partial f}{\partial y_\sigma}=nf \tag{5.22}$$

(b) 如势能不明显依赖广义速度，则

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$$

依欧勒定理，当变换方程不显含时间时，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，$T=T_2(q,\dot{q})$，故

$$H=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L=2T-(T-V)=T+V$$

若V不显含时间，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，则

$$H=T+V=E\ (\text{常量}) \tag{5.23}$$

称为**能量积分**.

如 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\neq 0$, $T=T_2+T_1+T_0$

$$H=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma-L$$

$$=2T_2+T-(T-V)=T_2-T_0+V$$

若 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，则

$$H = T_2 - T_0 + V = H_0 \text{（常量）} \tag{5.24}$$

称为**广义能量积分**。注意，H是否守恒由$\frac{\partial L}{\partial t}$判定：

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad \text{守恒}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0, \qquad \text{不守恒}$$

H是否代表总能量，由变换方程判定：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0, \qquad H\text{代表总能量}(T+V)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \neq 0, \qquad H\text{代表广义能量}(T_2 - T_0 + V)$$

如体系受有非稳定约束，或选用动坐标系，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \neq 0$，$H$不等于总能量，但不能改变能量可能守恒的物理事实。

4．用拉氏方程求解力学问题的一般程序

（a） 建立笛卡儿坐标系，分析约束，确定体系的自由度，选择广义坐标。

（b） 建立笛卡儿坐标和广义坐标的变换方程，即

$$x_i = x_i(q_\sigma, t) \quad i = 1,2,\cdots,3n, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f$$

以及

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)$$

（如能将T，V，L，Q_σ直接以广义坐标、广义速度表出，此步骤可以省略）。

（c） 对完整系，写出以广义坐标表示的动能T，广义力$Q_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$。

对完整保守系，写出以广义坐标表示的拉氏函数$L = T - V$。（注意，这里的T，V是惯性系中的动能和势能。）

（d） 列出拉氏方程。对完整系，先求$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$，$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$，代入

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma \qquad (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

得f个q_σ的二阶微分方程。对完整保守系，先求$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$，$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$，代入

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

得f个q_σ的二阶微分方程。

（e） 解所得的f个二阶微分方程，得

$$q_\sigma=q_\sigma(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{2f},\ t)$$

（f） 利用初始条件定积分常数c_1，c_2，$\cdots$，c_{2f}，最后求出 $q_\sigma=q_\sigma(t)$。

（g） 对结果进行讨论。

5. 处理力学问题的牛顿方式和分析力学方式的比较

（1） 借助图形，分析受力和运动情况，用微分方程将二者联系起来，较为形象、直观。	（1）站在更高的立足点上，从普遍的力学原理出发，处理力学问题更具抽象性和概括性。
（2） 着重于分析向量，如力、动量、速度、加速度、角动量、力矩等，建立方程（写加速度表达式）较为困难。	（2）着眼于标量，如动能、势能、广义力等。写出拉氏函数，建立拉氏方程较为容易。
（3）着重于分析外界作用——力。	（3）着重于分析与物体结合的量——动能、势能。
（4）约束力作为未知量明显出现在运动微分方程中，使问题变得困难、复杂。	（4）常常可以避开约束力，使问题大为简化，对处理有约束体系的问题十分有力。

（5）因为要处理向量，坐标系的变换较为麻烦，难于使用广义坐标。

（6）集中注意于实际实现的运动。

（7）功能关系只反映运动某一方面的特征。

（8）动力学方程式对于各种坐称系具有不同的形式。求解方程也没有统一的方法。

（9）物理图象简单、直观，适于处理简单问题。

（5）处理标量，便于变换到各种坐标系，可以使用广义坐标。

（6）考虑一切可能的运动，从中挑出真实的运动。

（7）功能关系是一切可能运动中的功能关系，足以决定力学系统的运动。

（8）把不同的运动微分方程在形式上统一起来。从写出方程到求解有一套完整普遍的方法。把不同的力学问题归结为 L（即T，V）和Q_α的不同。

（9）因坐标、速度，作用力等都是广义的，又数学推理较多，各种表达式的物理图象不甚简单、直观，适于处理复杂问题和从理论上进行普遍的讨论与推广。

例　题

5.9　证明拉格朗日方程和牛顿方程的等价性。

〔解〕　在笛卡儿坐标系下，单粒子运动的拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial x_i}=0$$

对于保守系统 T 只是 $\dot{x}_i$ 的函数，V 只是 x_i 的函数，所以

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}=0$$

又由于 $-\dfrac{\partial V}{\partial x_i}=F_i$，因此

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_j^2\right)$$

$$=\frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i)=\frac{d}{dt}p_i=\dot{p}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}=F_i$$

所以

$$F_i=\dot{p}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

即牛顿方程。等价性得证。

5.10 证明：如果 q_σ 是一转动坐标（角量），则广义力是总力矩关于转动轴的分量。

〔解〕 设质点 i 绕瞬时轴 e 转过 dq_σ 角，则

$$|d\boldsymbol{r}_i|=a\,dq_\sigma=r_i\sin\theta\,dq_\sigma$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma}\right|=r_i\sin\theta$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}_i$$

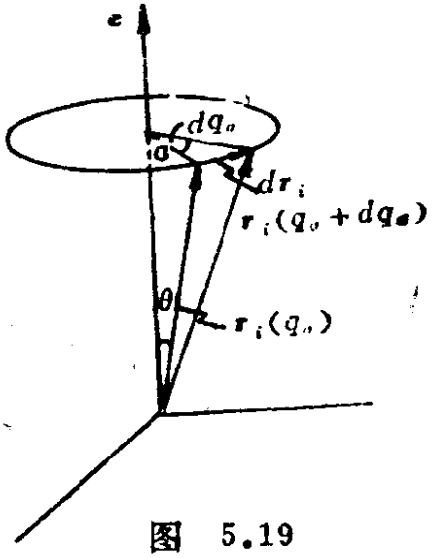


图 5.19

广义力 $Q_\sigma=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\sigma}$

$$=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}_i)$$

$$=\sum_i \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)$$

$$=\boldsymbol{e}\cdot\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$$

$$=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{N}$$

这表明广义力 Q_σ 正是总力矩在转轴方向的分量。

5.11 证明：如主动力$\boldsymbol{F}_i$是保守力，则广义力可表为

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

〔解〕 如力$\boldsymbol{F}_i(i=1, 2, \cdots n)$是保守力，则存在势能$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n)$而

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i V$$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_f) = \boldsymbol{r}_i(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_f(t)),$$
$$i = 1, 2, \cdots, n$$

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

5.12 一小方块，质量m，在质量为M的光滑斜劈上滑动，斜劈置于光滑水平面上。求系统的拉氏函数。

〔解一〕 $f=2$，选x_1, x为广义坐标(见图5.20)，约束方程为

$$\frac{x_1 - x}{h - y_1} = \operatorname{ctg}\theta$$

变换方程为

$$y_1 = h - \frac{x_1 - x}{\operatorname{ctg}\theta}$$

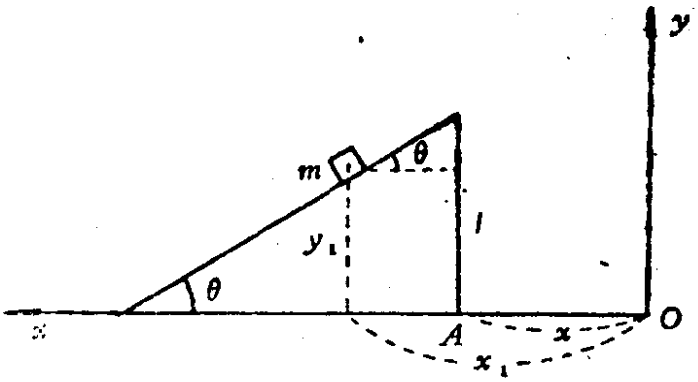


图 5.20

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1)^2]$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x})^2]$$

取O为势能零点，有

$$V = mgy_1 = mg[h - \operatorname{tg}\theta(x_1 - x)]$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2 + \mathrm{tg}^2\theta\,(\dot{x}_1 - \dot{x})^2]$$

$$- mg[h - (x_1 - x)\mathrm{tg}\theta]$$

〔解二〕 选 x, x' 为广义坐标（见图5.21），则

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x})^2 + (\dot{x}')^2 - 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta] - mgx'\sin\theta$$

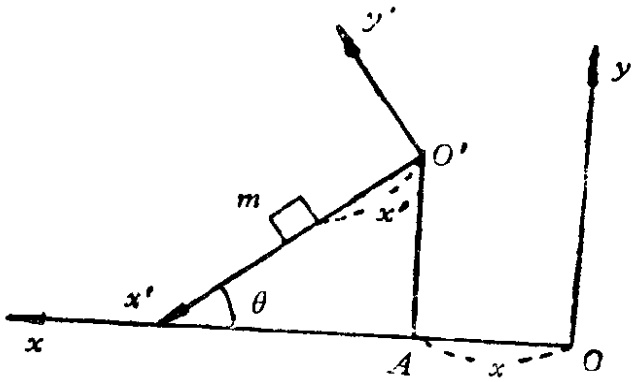


图 5.21

5.13 求图5.22所示复式阿特武德机的拉氏函数（不计摩擦力及滑轮质量）。

〔解〕 $f = 2$，选 x_1，x_3 为广义坐标，约束方程为

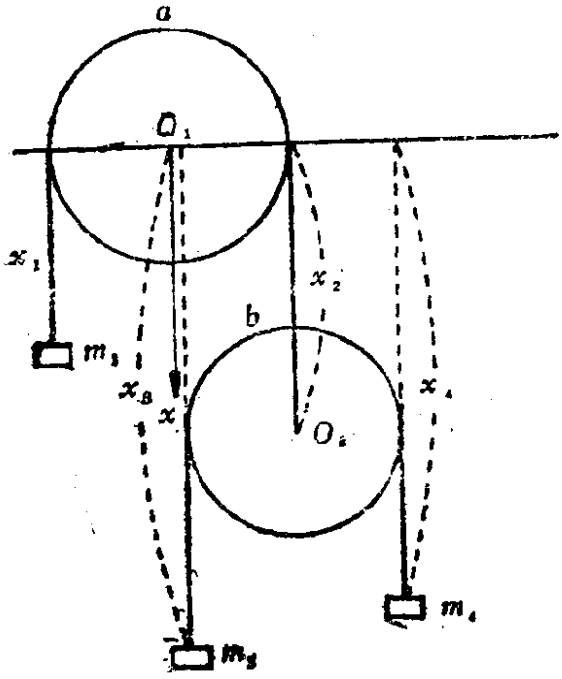


图 5.22

$$x_1 + a + x_2 = l_1 \quad (\text{常数})$$

$$x_3 + x_4 - 2x_2 + b = l_2 \quad (\text{常数})$$

（a, b 为圆 O_1, O_2 的半周长，l_1，l_2 为两绳长）

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

$$\dot{x}_3 + \dot{x}_4 = 2\dot{x}_2$$

$$\dot{x}_4 = 2\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_3$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_4)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}m_4(2\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2$$

$$V = -m_1gx_1 - m_3gx_3 - m_4gx_4$$
$$= -m_1gx_1 - m_3gx_3 - m_4g(-2x_1 - x_3)$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_3 + 2\dot{x}_1)^2$$
$$+ m_1gx_1 + m_3gx_3 - m_4g(x_3 + 2x_1)$$

5.14 如图5.23所示，两圆柱间及下面圆柱与地面间的接触为完全粗糙，求系统的拉氏函数。

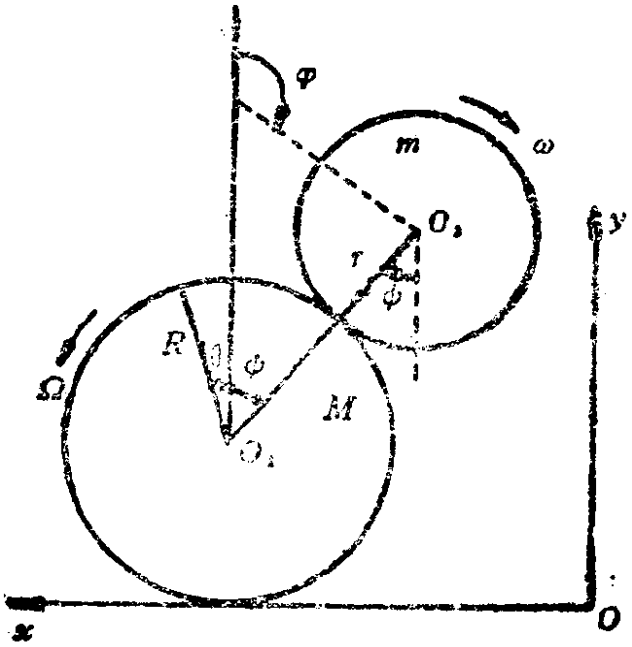


图 5.23

〔解〕 $f = 6 - 4 = 2$。这里有4个约束条件，包括两圆柱之间、下面圆柱与地面的纯滚动，O_1的 y 坐标不变，$\overline{O_1O_2}$长不变。

选连心线转过的角度 ψ 及大圆柱在空间转过的角度 θ 为广义坐标。约束方程为

$$R\dot{\theta} = \dot{x}_1$$
$$R(\theta + \psi) = r(\varphi - \psi)$$

$$y_1 = R, \quad \overline{O_1O_2} = R + r$$

由第二个约束方程推得

$$R(\dot{\theta} + \dot{\psi}) = r(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$$

令 $\dot{\theta} = \Omega$, $\dot{\varphi} = \omega$, 则

$$R\Omega + R\dot{\psi} = r\omega - r\dot{\psi}, \qquad R\Omega + (R + r)\dot{\psi} = r\omega$$

$$T = \frac{1}{2}m[R^2\Omega^2 + (R + r)^2(\dot{\psi})^2 - 2R\Omega(R + r)\dot{\psi}\cos\psi]$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}M(R\Omega)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\Omega^2$$

$V=mg(R+r)\cos\psi$　　（取 O_1 为势能零点）

$L=T-V$　　（略）

5.15　长$2l$，质量为M的相同的两杆 AB 和 AC 在A点自由铰接，被投放到光滑平面上运动（图5.24），求系统的拉氏函数。

〔解〕 $f=6-2=4$．系统质心 G 在 AC，AB 两杆中点连线的中点处。约束方程为

$$x_A=x_{A'},\quad y_A=y_{A'}$$

（A，A' 是两杆上互相铰接的点）变换方程为

$$x_1=x_G-l\sin\varphi\sin\theta$$

$$x_2=x_G+l\sin\varphi\sin\theta$$

$$y_1=y_G+l\sin\varphi\cos\theta$$

$$y_2=y_G-l\sin\varphi\cos\theta$$

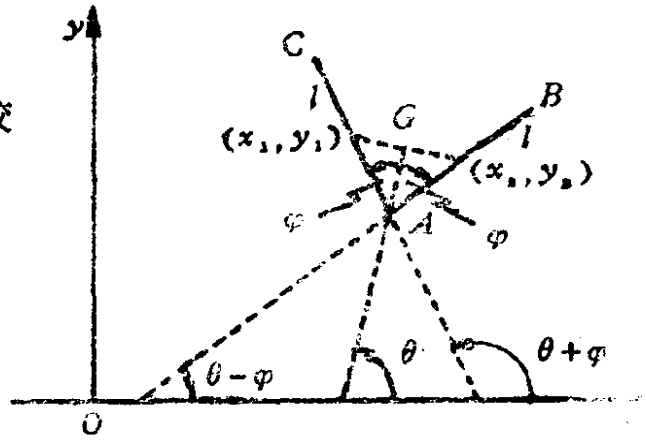


图　5.24

$$L=T=\frac{1}{2}M\{[(\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_1)^2]+[(\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_2)^2]\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)[(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+(\dot{\theta}-\dot{\varphi})^2]$$

$$=M\left[(\dot{x}_G)^2+(\dot{y}_G)^2+\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)l^2(\dot{\theta})^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}+\cos^2\varphi\right)l^2(\dot{\varphi})^2\right]$$

5.16　一质点被约束在半径为 R的圆周上运动，并在圆的平面内有力 $\boldsymbol{F}$ 作用于质点（图5.25）．求作用在质点上的广义力。

〔解〕 广义力 Q_α 是与选定的广义坐标 q_α相联系的。自由

度 $f=1$，选 φ 为广义坐标，则

$$Q_\varphi=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=F_1\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}+F_2\frac{\partial x_2}{\partial\varphi}$$

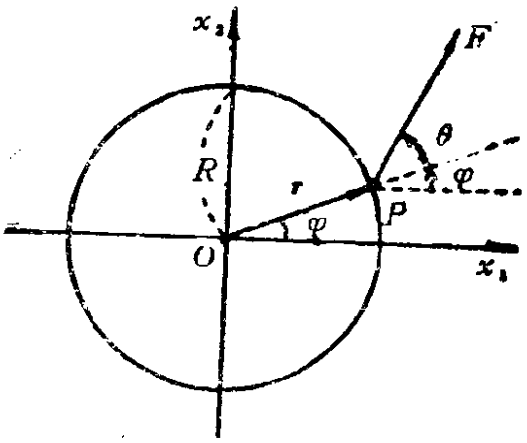


图 5.25

$$x_1=R\cos\varphi$$

$$x_2=R\sin\varphi$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi}=-R\sin\varphi,\quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}=R\cos\varphi$$

$$F_1=F\cos(\varphi+\theta)$$

$$F_2=F\sin(\varphi+\theta)$$

$$\begin{aligned}Q_\varphi&=F\cos(\varphi+\theta)(-R\sin\varphi)\\&\quad+F\sin(\varphi+\theta)R\cos\varphi\\&=FR\sin\theta\\&=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|=N\end{aligned}$$

正是作用在质点上的力对于 O 点的力矩.

如选弧长 s 为广义坐标，则

$\delta W=F\sin\theta\cdot R\delta\varphi=F\sin\theta\delta s$

$Q_s=F\sin\theta$

5.17 两质点m_1和m_2，以长为 l 的轻绳连接，在重力作用下无摩擦地运动于图 5.26 所示的两个斜面上. 如选 l_1 为广义坐标，求广义力.

〔解〕 $f=1$，选 l_1 为广义坐标，则

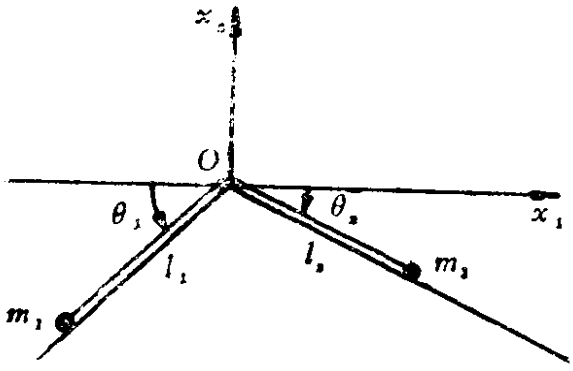


图 5.26

$$\boldsymbol{F}_1=-m_1g\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{F}_2=-m_2g\boldsymbol{e}_2$$

$$x_{21}=-l_1\sin\theta_1$$

$$x_{22}=-l_2\sin\theta_2$$

$$Q_{l_1}=\boldsymbol{F}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial l_1}+\boldsymbol{F}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial l_1}$$

$$= -m_1 g \cdot \frac{\partial x_{2\,1}}{\partial l_1} - m_2 g \cdot \frac{\partial x_{2\,2}}{\partial l_1}$$

$$= m_1 g \sin\theta_1 - m_2 g \sin\theta_2$$

5.18 均质棒AB，质量m，长$2a$，其A端可在光滑水平导槽上运动，而棒本身又可在竖直面内绕A摆动，如除重力作用外，B端还受有一水平的力F的作用，如图5.27所示，试用拉格朗日方程求其运动微分方程．如摆动的角度很小．则又如何？

〔解〕 $f=2$，选x，θ为广义坐标．变换方程为

$$x_1 = x + a\sin\theta, \quad x_2 = a\cos\theta$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + a\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = -a\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m[(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2] + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

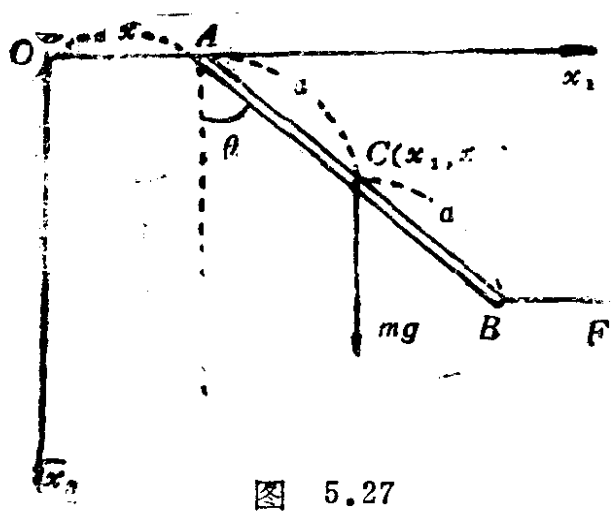


图 5.27

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2}{3} ma^2(\dot{\theta})^2$$

下面用两种方法求广义力

（1）按定义求

体系受的主动力有$mg\boldsymbol{e}_2$（作用点C），$F\boldsymbol{e}_1$（作用点B）．

$$\boldsymbol{r}_C = (x + a\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + a\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{r}_B = (x + 2a\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + 2a\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$Q_x = \boldsymbol{F}_C \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_C}{\partial x} + \boldsymbol{F}_B \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_B}{\partial x} = \boldsymbol{F}_C \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{F}_B \cdot \boldsymbol{e}_1 = F$$

$$Q_\theta = \boldsymbol{F}_C \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_C}{\partial \theta} + \boldsymbol{F}_B \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_B}{\partial \theta} = -amg\sin\theta + 2a\cos\theta \cdot F$$

（2）由虚功求

$$\delta W = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{F}_C \cdot \delta \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{F}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B$$

$$= mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_C + F\boldsymbol{e}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_B$$

$$= mg\delta(a\cos\theta) + F\delta(x + 2a\sin\theta)$$

$$= -mga\sin\theta\delta\theta + F\delta x + 2aF\cos\theta\delta\theta$$

$$= F\delta x + (2aF\cos\theta - mga\sin\theta)\delta\theta$$

$$= Q_x\delta x + Q_\theta\delta\theta$$

$$Q_x = F,\quad Q_\theta = 2aF\cos\theta - mga\sin\theta$$

将所求得的 T，Q_x 代入完整系拉氏方程 $\Lambda_x T = Q_x$，有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\sin\theta \cdot (\dot{\theta})^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\sin\theta \cdot (\dot{\theta})^2 = F \qquad (1)$$

将T，Q_θ代入$\Lambda_\theta T = Q_\theta$，则有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma\dot{x}\cos\theta + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ma\ddot{x}\cos\theta - ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}+ma\ddot{x}\cos\theta=2aF\cos\theta-mga\sin\theta \qquad (2)$$

当 $\theta\ll1$时，由（1）得

$$\ddot{x}+a\ddot{\theta}=\frac{F}{m}$$

由（2）得

$$\frac{4}{3}a\ddot{\theta}+\ddot{x}+g\theta=\frac{2F}{m}$$

5.19 求在球坐标系 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 中一质点自由运动的微分方程式.

〔解〕 球坐标系中单位向量与笛卡儿系中单位向量的变换方程为

$$\boldsymbol{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2+\cos\theta\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2-\sin\theta\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{e}_1+\cos\varphi\boldsymbol{e}_2$$

设质点受主动力为$\boldsymbol{F}$，位置向量$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，按定义

$$Q_r=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_r=F_r$$

$$Q_\theta=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=\boldsymbol{F}\cdot r\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}$$

$$=r\boldsymbol{F}\cdot(\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2-\sin\theta\boldsymbol{e}_3)$$

$$=r\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta=rF_\theta$$

$$Q_\varphi=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=r\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}=r\boldsymbol{F}\cdot(-\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_2)$$

$$=r\sin\theta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=r\sin\theta F_\varphi$$

广义力还可由虚功求：

$$\delta W=Q_r\delta_r+Q_\theta\delta\theta+Q_\varphi\delta\varphi$$

$$=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

$$=F_r\delta r+F_\theta r\delta\theta+F_\varphi r\sin\theta\delta\varphi$$

故

$$Q_r = F_r,\quad Q_\theta = rF_\theta,\quad Q_\varphi = r\sin\theta F_\varphi.$$

动能

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2]$$

代入 $\Lambda_r T = Q_r$，有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr(\dot{\theta})^2 + mr\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$m[\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2] = F_r$$

代入 $\Lambda_\theta T = Q_\theta$，有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta(\dot{\varphi})^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})$$

$$m[r\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta(\dot{\varphi})^2] = F_\theta$$

代入 $\Lambda_\varphi T = Q_\varphi$，有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2mr\dot{r}\sin^2\theta\dot{\varphi} + 2mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + mr^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}$$

$$m(2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + r\sin\theta\ddot{\varphi}) = F_\varphi$$

特例：质点约束在球面上运动，$r = R$，$\dot{r} = 0$，则

$$T=\frac{1}{2}mR^2[(\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2]$$

拉氏方程为 $-mR[(\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2]=F_r$

$$mR[\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta(\dot{\varphi}^2)]=F_\theta$$

$$mR[2\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}+\sin\theta\ddot{\varphi}]=F_\varphi$$

5.20 质量为 M，半经为 a 的薄球壳，其外表面是完全粗糙的，内表面则完全光滑，放在粗糙水平桌上。在球壳内放一质量为 m，长为 $2a\sin\alpha$ 的均质棒。设此系统由静止开始运动，且在开始的瞬间，棒在通过球心的竖直平面内，两端都与球壳相接触，并与水平线成 β 角。试用拉格朗日方程证明在以后的运动中，此棒与水平线所夹的角 θ 满足关系

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a(\dot{\theta})^2$$
$$=6g(5M+3m)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

〔解〕 $f=2$。选球心的坐标 x_1 及棒的倾角 θ 为广义坐标。

$$x_{1C}=x_1+a\cos\alpha\sin\theta$$

$$x_{2C}=a(1-\cos\theta\cos\alpha)$$

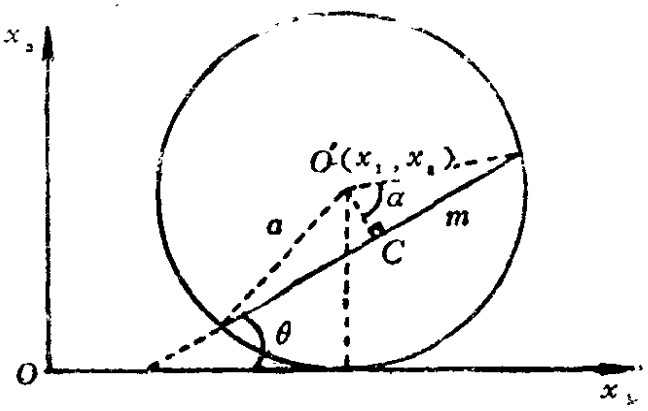


图 5.28

$$T=\frac{1}{2}M(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}Ma^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_{1C})^2+(\dot{x}_{2C})^2]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\sin^2\alpha\right)(\dot{\theta})^2$$

$$=\frac{5M+3m}{6}(\dot{x}_1)^2+ma^2(\dot{\theta})^2\frac{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{6}+$$

$$+ma\dot{\theta}\dot{x}_1\cos\alpha\cos\theta \qquad (1)$$

取O为势能零点，则

$$V=mga(1-\cos\alpha\cos\theta)+Mga \qquad (2)$$

注意到 $L=T-V$ 中不显含 x_1，x_1 是循环坐标，故有广义动量积分

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=\frac{5M+3m}{3}\dot{x}_1+ma\cos\theta\cos\alpha\cdot\dot{\theta}=常数 \qquad (3)$$

因 $t=0$时，$\dot{x}_1=0$，$\dot{\theta}=0$，所以

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=0 \qquad (4)$$

又因 L 不显含 t，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，且 $\frac{\partial r_i}{\partial t}=0$，所以

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0,\quad H=T+V=E\ (常数)$$

即有能量积分

$$\left[(5M+3m)(\dot{x}_1)^2/6\right]+m^2a^2(\dot{\theta})^2\left[(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)/6\right]$$
$$+m a\dot{\theta}\dot{x}_1\cos\alpha\cos\theta+mga(1-\cos\alpha\cos\theta)$$
$$=mga(1-\cos\alpha\cos\beta) \qquad (5)$$

由（3）、（4）有

$$\dot{x}_1=\frac{-3}{5M+3m}ma\cos\alpha\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$(\dot{x}_1)^2=\left(\frac{-3}{5M+3m}\right)^2m^2a^2\cos^2\alpha\cos^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2$$

代入（5）式得

$$\frac{9}{6(5M+3m)}m^2a^2\cos^2\alpha\cos^2\theta\cdot(\dot{\theta})^2+ma^2(\dot{\theta})^2(3\cos^2\alpha$$

$$+\sin^2\alpha)/6+ma\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta\left(\frac{-3}{5M+3m}ma\cos\alpha\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)$$

$$+mga(1-\cos\alpha\cos\theta)$$

$$=mga(1-\cos\alpha\cos\beta)$$

整理得

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a(\dot{\theta})^2$$
$$=6g(5M+3m)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

5.21　两个质量为 m 的质点由一无重量的长 l 的刚性轻杆连接，其中心被约束在一半径为 a 的圆周上运动，试用广义坐标建立动能表达式。

〔解〕　$f=3$，取 ψ，φ，θ 为广义坐标。如图5.29所示，ψ 是杆心 C 与原点连线和 x_1 轴夹角，φ 是杆在 x_1x_2 平面上的投影线与 x_1 轴的夹角，θ 是杆与 x_3 轴夹角。

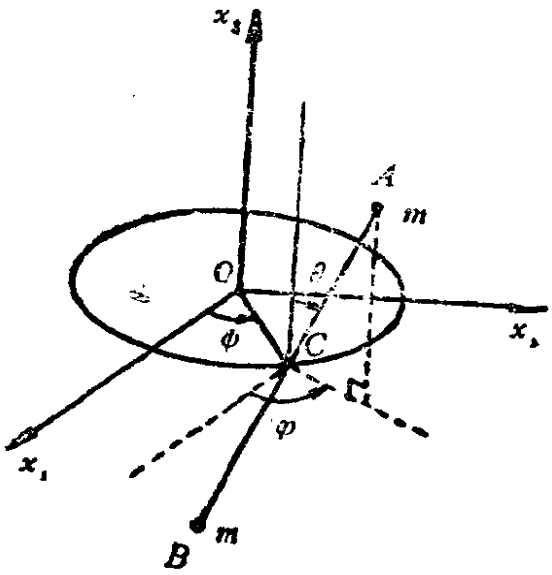


图　5.29

杆心 C 的坐标：

$$(a\cos\psi,\ a\sin\psi,\ 0)$$

质点 A 的坐标：

$$\left(a\cos\psi+\frac{l}{2}\cos\varphi\sin\theta,a\sin\psi+\frac{l}{2}\sin\varphi\sin\theta,\frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

质点 B 的坐标：

$$\left(a\cos\psi-\frac{l}{2}\cos\varphi\sin\theta,a\sin\psi-\frac{l}{2}\sin\varphi\sin\theta,-\frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

体系的动能

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(-a\sin\psi\cdot\dot{\psi}-\frac{l}{2}\sin\varphi\sin\theta\,\dot{\varphi}+\frac{l}{2}\cos\varphi\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2\right.$$

$$+\left(a\cos\psi\cdot\dot{\psi}+\frac{l}{2}\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot{\varphi}+\frac{l}{2}\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{l}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2\Big]+\frac{1}{2}m\Big[\Big(-a\sin\psi\cdot\dot{\psi}$$

$$+\frac{l}{2}\sin\varphi\sin\theta\cdot\dot{\varphi}-\frac{l}{2}\cos\varphi\cos\theta\cdot\dot{\theta}\Big)^2$$

$$+\left(a\cos\psi\cdot\dot{\psi}-\frac{l}{2}\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot{\varphi}-\frac{l}{2}\sin\varphi\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2$$

$$+\left(\frac{l}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}(2m)(a\dot{\psi})^2+\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{l}{2}\right)^2[(\dot{\theta})^2+(\sin\theta\cdot\dot{\varphi})^2]$$

$$=T_C+T'$$

第一项：质心动能；第二项：相对于质心运动的动能.

5.22 两个质量为m_1和m_2的质点，由一根穿过光滑桌面上一小孔的弦线相连接，m_1静止在桌面上，m_2悬挂着(图5.30)。假设m_2仅在垂直线上运动，试问系统的广义坐标是什么？列出系统的拉格朗日方程。如有可能，讨论一下其中任何一个可能具有的物理意义，把问题归结为一个简单的二阶微分方程，求出这个方程的第一积分，它的物理意义又如何？

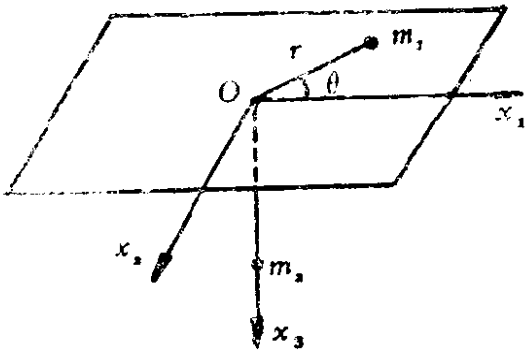


图 5.30

〔解〕 取原点在小孔处的柱坐标系 $(r,\ \theta,\ x_3)$，$f=3-1$，取r，θ为广义坐标。约束方程

$$r+x_3=l \qquad \text{(常数)}$$

$$T=\frac{1}{2}m_1[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_3)^2 \qquad (\dot{r}=-\dot{x}_3)$$

$$=\frac{1}{2}m_1[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}m_2(\dot{r})^2$$

取 O 为势能零点，则

$$V=-m_2gx_3$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}m^2(\dot{r})^2+m_2g(l-r) \quad (1)$$

由 $\Lambda_r L=0$ 得

$$(m_1+m_2)\ddot{r}-m_1r(\dot{\theta})^2+m_2g=0 \quad (2)$$

由 $\Lambda_\theta L=0$ 得

$$\frac{d}{dt}(m_1r^2\dot{\theta})=0,\ m_1r^2\dot{\theta}=l\ (\text{常数}) \quad (3)$$

（3）式表示系统关于 O 点角动量守恒.

将（3）代入（2），得

$$(m_1+m_2)\ddot{r}-\frac{l^2}{m_1r^3}+m_2g=0 \quad (4)$$

两边同乘 dr，得

$$(m_1+m_2)\dot{r}d\dot{r}-\frac{l^2}{m_1r^3}dr+m_2gdr=0$$

$$d\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{r})^2+\frac{l^2}{2m_1r^2}+m_2gr\right]=0$$

从而有

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{r})^2+\frac{l^2}{2m_1r^2}+m_2gr=E \quad (5)$$

（5）式是（4）式的第一积分，E 是系统的总能量，亦即（5）式表示总能量守恒.

5.23 质量为 m_1，半径为 a 的均质球 A，置于光滑水平面上. 质量 m_2，半径为 a 的球 B 放在 A 球的顶上，球 B 从静止开始自行滚下，两球的接触完全粗糙（图5.31），试求两球的连心线与铅直方向的夹角 θ 满足的方程式.

〔解〕 因 $F_x=0$，$\dot{x}_C=0$，质心沿铅直方向运动。将质心轨迹取为 y 轴，x 轴水平。

系统自由度 $f=6-3=3$，但 $x_C=0$ 已经解出，故只须取2个广义坐标即可描述运动。取 φ,θ 为广义坐标。φ 是 B 球相对于连心线 $\overline{O_1O_2}$ 转过的角度，θ 是连心线对铅直方向转过的角度。

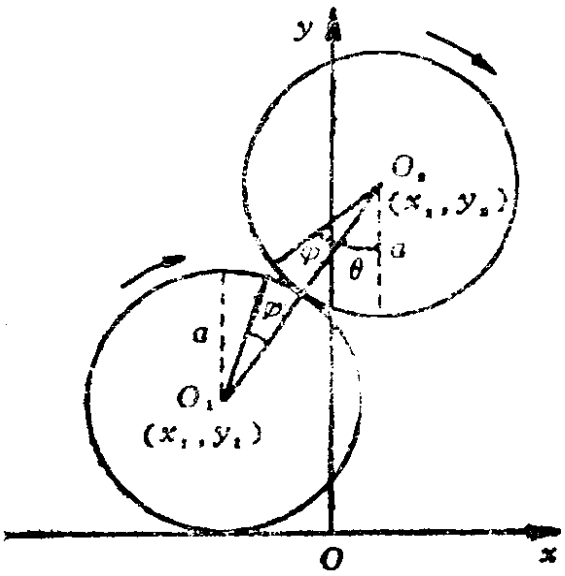


图 5.31

$$x_2-x_1=2a\sin\theta$$

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

所以

$$m_1x_1+m_2(x_1+2a\sin\theta)=0$$

变换方程为

$$x_1=\frac{-2a\sin\theta}{m_1+m_2}m_2$$

$$y_1=a$$

$$x_2=\frac{2a\sin\theta}{m_1+m_2}m_1$$

$$y_2=2a\cos\theta+a$$

两球的角速度

$$A:\ \dot{\theta}-\dot{\varphi},\qquad B:\ \dot{\theta}+\dot{\varphi}$$

$$T=\frac{1}{2}m_1[(\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_1)^2]+\frac{1}{2}m_2[(\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_2)^2]$$

$$+\frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}-\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2$$

$$V=2mga\cos\theta\qquad(\text{取}O_1\text{为势能零点})$$

将 $\dot{x}_1$，$\dot{y}_1$，$\dot{x}_2$，$\dot{y}_2$ 求出，代入 T 表达式，则

$$L=\frac{2a^2}{m_1+m_2}(m_1m_2+m_2^2\sin^2\theta)(\dot{\theta})^2+\frac{a^2}{5}\{(m_1$$

$$+m_2)[(\dot{\theta})^2+(\dot{\varphi})^2]+2(m_2-m_1)\dot{\theta}\dot{\varphi}\}-2mga\cos\theta$$

注意到 T 是广义速度 $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ 的二次齐次函数$\left(\text{这是因为}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0\right)$，

又 L 不显含时间，故哈密顿量守恒且代表总能量

$$H=T+V=E\ (\text{恒量})$$

即

$$\frac{2a^2}{m_1+m_2}\left(m_1m_2+m_2^2\sin^2\theta\right)(\dot{\theta})^2+\frac{a^2}{5}\{(m_1+m_2)[(\dot{\theta})^2+(\dot{\varphi})^2]+2(m_2-m_1)\dot{\theta}\dot{\varphi}\}+2mga\cos\theta=E=2am_2g \qquad (1)$$

又因 L 中不显含 φ，φ 为循环坐标，故有循环积分

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{2a^2}{5}[(m_1+m_2)\dot{\varphi}+(m_2-m_1)\dot{\theta}]=p_{\varphi_0}$$

因 $t=0$时，$\dot{\theta}=\dot{\varphi}=0$，故 $p_{\varphi_0}=0$，因此

$$(m_1+m_2)\dot{\varphi}+(m_2-m_1)\dot{\theta}=0 \qquad (2)$$

由（1）、（2）消去 $\dot{\varphi}$，得

$$a(\dot{\theta})^2(7m_1+5m_2\sin^2\theta)=5g(m_1+m_2)(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

5.24 一环状细管，以匀角速绕铅直轴转动，质量为 m 的质点可在管内无摩擦地滑动，试写出运动微分方程及第一积分。

〔解〕 $f=1$，选 θ 为广义坐标，如图5.32所示。

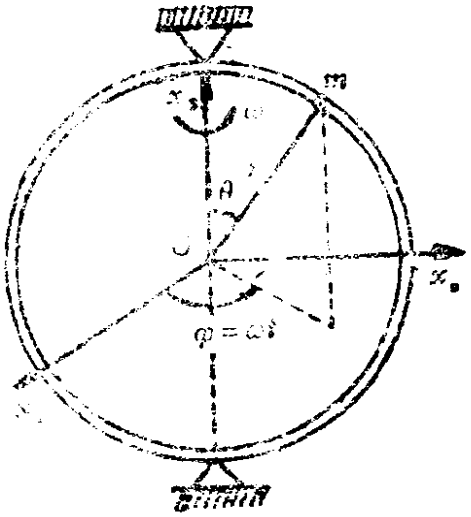


图 5.32

约束方程为

$$r=R,\quad \varphi=\omega t$$

变换方程为

$$x_1=R\sin\theta\cos\omega t$$

$$x_2=R\sin\theta\sin\omega t$$

$$x_3=R\cos\theta$$

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2+(\dot{x}_3)^2]=\frac{1}{2}mR^2[(\dot{\theta})^2+\omega^2\sin^2\theta]$$

$$V=mgR\cos\theta \qquad \text{(取 } O \text{ 为势能零点)}$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}mR^2[(\dot{\theta})^2+\omega^2\sin^2\theta]-mgR\cos\theta$$

将 L 代入拉氏方程 $\Delta_\theta L=0$，则

$$R\ddot{\theta}-R\omega^2\sin\theta\cos\theta-g\sin\theta=0$$

此即为质点的运动微分方程.

因 L 不显含时间，$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，从而有 H 守恒. 但 $\frac{\partial r}{\partial t}\neq 0$，

故 H 不等于总能量

$$H=T_2-T_0+V$$

即 H 代表广义能量. 由动能表达式知

$$H=\frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta})^2-\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta+mgR\cos\theta \quad \text{(常数)}$$

即广义能量积分.

5.25 在图5.33所示系统中，弹簧原长 l_0，质点质量为 m，弹簧支架以 v_0 沿 X 轴平动，求系统的拉氏函数及第一积分.

〔解〕 取弹簧的伸长 x 为广义坐标（弹簧自然长 l_0 处为原点 O）.

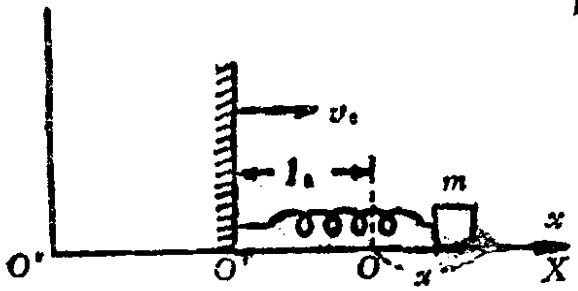


图 5.33

$$T=\frac{1}{2}m(v_0+\dot{x})^2$$

$$=\frac{1}{2}m[v_0^2+2v_0\dot{x}+(\dot{x})^2]$$

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

$$L=\frac{1}{2}mv_0^2+mv_0\dot{x}+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2-\frac{1}{2}kx^2$$

由于 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，故 H 守恒。广义坐标 x 与笛卡儿坐标 X 的变换方程为

$$X=x+v_0t+l,$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}=v_0\neq 0$$

故有广义能量积分。由于

$$T_0=\frac{1}{2}mv_0^2,\qquad T_1=mv_0\dot{x},\quad T_2=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$$

$$H=T_2-T_0+V$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x})^2-\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx^2\ (\text{常数})$$

因有外力（弹簧支架）作功，总能量不守恒。

5.26 一质点在一指向力心的力作用下在一平面内运动，受力大小为

$$F=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right)$$

其中 r 是质点到力心的距离。求产生此力的广义势，并求质点在此平面中运动的拉氏函数（这里的 F 表示电动力学中两电荷间的韦伯力）。

〔解〕 由 $F=-\frac{1}{r^2}\left[1-\frac{(\dot{r})^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right]$

$$Q_r=-\frac{1}{r^2}\left[1-\frac{(\dot{r})^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right]$$

$$Q_\theta=0$$

设有广义势 $U=U(r,\dot{r})$，代入拉氏方程得

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right)-\dfrac{\partial U}{\partial r}=-\dfrac{1}{r^2}\left[1-\dfrac{(\dot{r})^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right] \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial U}{\partial \theta}=0 \end{cases} \tag{1}$$

因

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-2\dot{r}}{c^2 r}\right)=-\frac{2\ddot{r}}{c^2 r}+\frac{2(\dot{r})^2}{c^2 r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[-\frac{(\dot{r})^2}{c^2 r}\right]=-\frac{2\dot{r}}{c^2 r}$$

令 $u=-\dfrac{(\dot{r})^2}{c^2 r}$，有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{(\dot{r})^2-2\ddot{r}r}{r^2c^2} \tag{2}$$

由（1）中第一式及（2）式，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(U-u)}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial(U-u)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}$$

$U-u$不含$\dot{r}$，易见

$$U-u=-\frac{1}{r},\quad U=-\frac{1}{r}\left[1+\frac{(\dot{r})^2}{c^2}\right]$$

拉氏函数为

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{r}\left[1+\frac{(\dot{r})^2}{c^2}\right]$$

5.27 求图5.34所示系统的拉氏函数和拉氏方程。

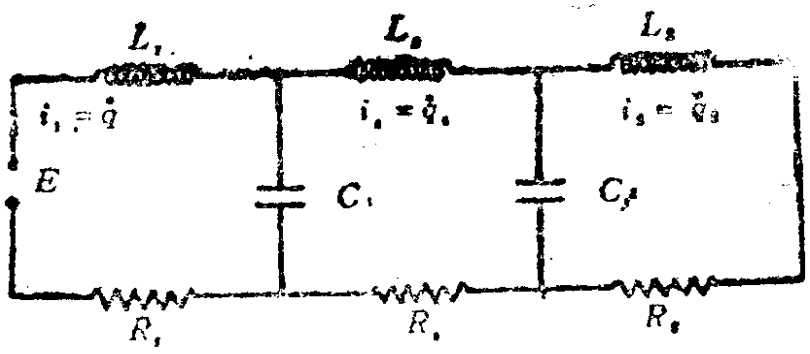


图 5.34

〔解〕 如电路内包含有限个电感、电容和电

阻　系统的拉氏函数

$$L=T_M-V_E$$

T_M是电路的磁能，类似于机械系统的动能，V_E是电路的电能，类似于势能，拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma$$

Q_σ是电阻产生的广义力，保守力含于 L 中．无电阻或耗散力时，$Q_\sigma=0$．

本题中，电容器 C_1 中电荷为 (q_1-q_2)，C_2 中电荷为 (q_2-q_3)，系统的磁能

$$T_M=\frac{1}{2}\left[L_1(\dot{q}_1)^2+L_2(\dot{q}_2)^2+L_3(\dot{q}_3)^2\right]$$

电能

$$V_E=\frac{1}{2}\left[\frac{(q_1-q_2)^2}{C_1}+\frac{(q_2-q_3)^2}{C_2}\right]-Eq_1$$

$$L=T_M-V_E$$

$$=\frac{1}{2}\left[L_1(\dot{q}_1)^2+L_2(\dot{q}_2)^2+L_3(\dot{q}_3)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{(q_1-q_2)^2}{C_1}+\frac{(q_2-q_3)^2}{C_2}\right]+Eq_1$$

将 L 分别代入拉氏方程 $\Lambda_{q_1}L=Q_1$，$\Lambda_{q_2}L=Q_2$，$\Lambda_{q_3}L=Q_3$，得

$$L_1\ddot{q}_1+\frac{q_1-q_2}{C_1}=Q_1+E$$

$$L_2\ddot{q}_2-\frac{q_1}{C_1}+q_2\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)-\frac{q_3}{C_2}=Q_2$$

$$L_3-\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_3}{C_2}=Q_3$$

当电流 i 通过电阻 R 时，耗散力为 $Q=-Ri$，所以

$$Q_1 = -R_1 i_1 = -R_1 \dot{q}_1,\quad Q_2 = -R_2 \dot{q}_2,\quad Q_3 = -R_3 \dot{q}_3$$

运动微分方程化为

$$L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1 - q_2}{C_1} = E - R_1 \dot{q}_1$$

$$L_2 \ddot{q}_2 - \frac{q_1}{C_1} + q_2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) - \frac{q_3}{C_2} = -R_2 \dot{q}_2$$

$$L_3 \ddot{q}_3 - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_2} = -R_3 \dot{q}_3$$

5.28 求电磁场中带电粒子的拉氏函数.

〔解〕 带电粒子在电磁场中受力为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

其中 q 是粒子电荷，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 是电场，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ 是磁场. 一般说，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 可表为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

则

$$\boldsymbol{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right] \qquad (2)$$

写出 $\boldsymbol{F}$ 的分量式

$$(\nabla\varphi)_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$[\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_1 = v_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) - v_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)$$

$$= v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + v_3\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - v_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \left[v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right] \qquad (3)$$

A_1 对时间的全微商为

$$\frac{dA_1}{dt}=\frac{\partial A_1}{\partial t}+\left(v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+v_3\frac{eA_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{dA_1}{dt}-\frac{\partial A_1}{\partial t}=v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \qquad (4)$$

代入（3）式，得

$$[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]_1=\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{dA_1}{dt}+\frac{\partial A_1}{\partial t}$$

由（2）式

$$F_1=q\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial t}+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{dA_1}{dt}+\frac{\partial A_1}{\partial t}\right]\right\}$$

$$=q\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{dA_1}{dt}\right]$$

因 $\frac{\partial}{\partial v_1}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=A_1$，所以

$$F_1=q\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial v_1}(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})\right]\right\}$$

因 φ 中不含 $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial v_1}(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

故

$$F_1=q\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\dot{\partial x}_1}(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})\right]\right\}$$

广义势可写为

$$U=q\varphi-q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

广义力为

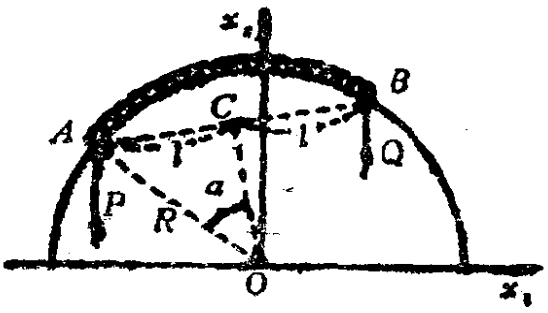
$$F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\dot{\partial x}_i}\right)\qquad(i=1,\ 2,3)$$

拉氏函数

$$L=T-U=T-q\varphi+q(v\cdot A) \qquad (5)$$

习　题

5.1　均质重链的两端连两球A和B，其重量各为P与Q，链放在半径为R的半圆柱面上。试用虚功原理求平衡时垂直于AB的直线OC和水平线所成的角φ。设a已知，链的单位长度的重量σ亦为已知。

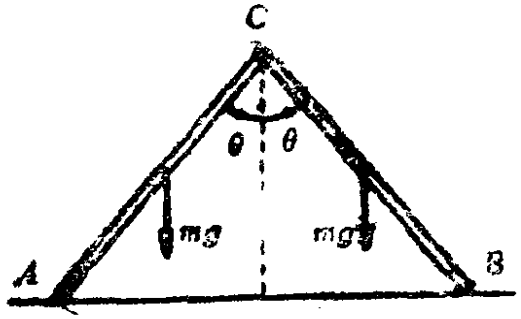


5.1题图

答：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(P+Q)\cos\alpha+2R\sigma\sin\alpha}{(P-Q)\sin\alpha}$$

5.2　两块矩形板质量形状完全相同，以各自的一边互相铰接，两板的下边置于粗糙水平面上，摩擦系数为μ，求平衡时θ满足的条件。

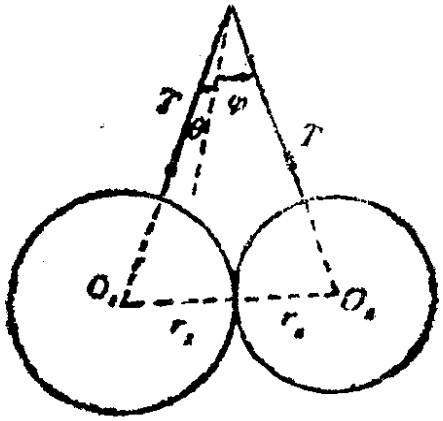


5.2题图

答：

$$\theta\leqslant\operatorname{arctg}2\mu.$$

5.3　半径为r_1，r_2，质量为m_1，m_2的两球绕过光滑钉子以长为l的绳连起来。求平衡位置及绳中张力。



5.3题图

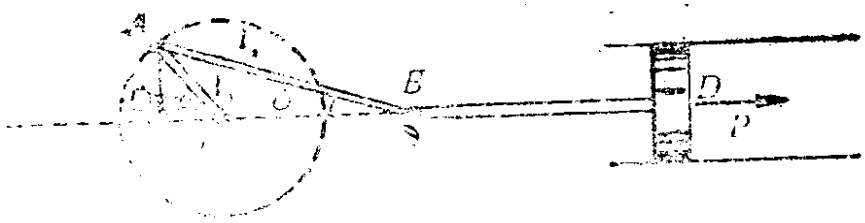
答：

$$\theta=\varphi$$

$$\cos^2\theta=\frac{(m_1+m_2)^2}{4m_1m_2}\frac{l(l+2r_1+2r_2)}{(l+r_1+r_2{}^2)}$$

$$T=\frac{(m_1+m_2)g}{2\cos\theta}$$

5.4 设在图示曲柄连杆机构中，曲柄端点 A 处所受的铅垂力 Q 与活塞 D 处所受的水平力 P 维持平衡。试用虚功原理求 Q/P。



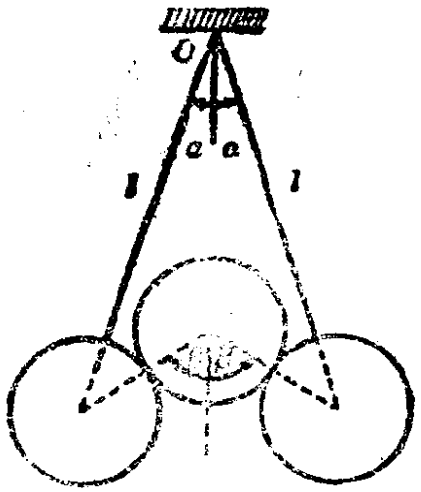
5.4题图

答：$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{l_2\sin\psi}{\sqrt{l_1^2-l_2^2\sin^2\psi}}-\mathrm{tg}\psi$

5.5 两根均质棒 AB，BC 在 B 处刚性连接，且 $\angle ABC$ 形成一直角。如将此棒的 A 点用绳系于固定点上，则当平衡时，AB 和竖直直线所成的角 θ_0 满足下列关系

$$\mathrm{tg}\theta_0=\frac{b^2}{a^2+2ab}$$

式中 a，b 为棒 AB 和 BC 的长度。试证明之。



5.6题图

5.6 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上，此二球同时又支持一个等重的均质球。求 α 角和 β 角之间的关系。

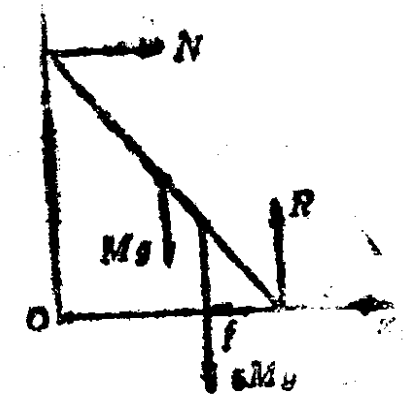
答：$\mathrm{tg}\beta=3\mathrm{tg}\alpha$

5.7 在光滑的竖直壁前距离 6m 的地面上，架靠长为 10 m，质量为 M(kg)的均质梯子，该梯的上端靠在墙壁上。设地板与梯子间的静摩擦系数为 1/2。

（1）求梯子上下两端的作用力。

（2）一个质量为 $5M$(kg) 的人开始爬梯，问能登到何处？

答：



5.7题图

（1） $N=\frac{3}{8}Mg$

$R=Mg$

$f=N$

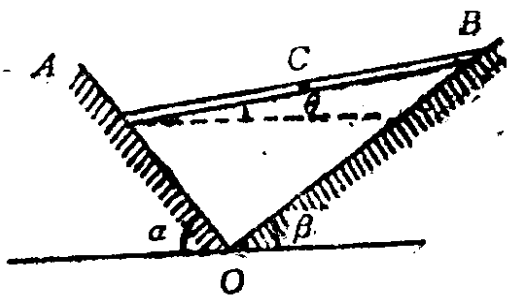
（2） $l<7\text{m}$

5.8 三个各重 W 完全相同的轴线平行的圆柱体，彼此接触地放在粗糙的平面上，两个柱体在下面，第三个柱体静放在它们上面。求柱体与平面间作用力的方向与铅垂线构成的最小的角度是多少？

答：$F_{水平}=W/(4+2\sqrt{3})$

极小角的正切为 $\text{tg}\theta=\frac{1}{3}(2+\sqrt{3})$

5.9 一均质棒置于两光滑斜面之间，如图所示，其中一斜面与水平成 α 角，另一斜面与它垂直，且交于 O 点，运动限于铅垂面内。试求棒的平衡位置，并讨论其稳定性。



5.9 题图

答：$\theta=2\alpha-\pi/2$，不稳定。

5.10 一半径为 r_1 的球置于半径为 r_2 的球的顶上，两球皆为粗糙，上面球的重心在两球中心连线 O_1O_2 上距接触点为 h 处，试讨论平衡的稳定性。

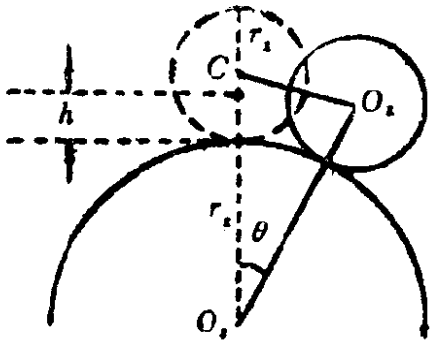
答：$V=Mg\{(r_1+r_2)\cos\theta-(r_1-h)\cos[(1+r_2/r_1)\theta]\}$

$\theta=0$时，

$\frac{1}{h}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$　　稳定；

$\frac{1}{h}<\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$　　不稳定；

$\frac{1}{h}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$　　不稳定。



5.10题图

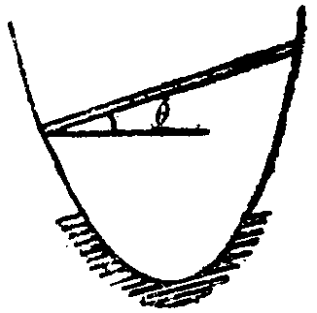
5.11　试从牛顿第二定律或达朗伯原理出发推导完整系以及完整保守系的拉格朗日方程式。

5.12　拉氏方程中$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$项称为拉格朗日力，它是怎样产生的？其物理意义如何？举例说明之。

5.13　均质杆长度为a，放在一内壁光滑的固定的旋转抛物面形的容器内，抛物面方程为$x_1^2=2px_2$，求杆的平衡位置。

答：$2p\geqslant a$时，$\theta=0$为平衡位置。

$2p<a$时，$\theta=0,\theta=\arccos\sqrt{\frac{2p}{a}}$为平衡位置。



5.13题图

5.14　三根等长的均质杆AB，AC，AD构成三脚架，A点为铰接点，三足B，C，D在光滑水平面上，且形成等边三角形。今用一绳套在三足上，使三脚架的位形不能改变。已知每根杆与竖直线的夹角为θ，重量均为W，求绳中张力。

5.15　一质点在x轴上运动并具势能

$$V=V_0(e^{-kx}+Cx)\qquad\text{（所有常数为正数）}$$

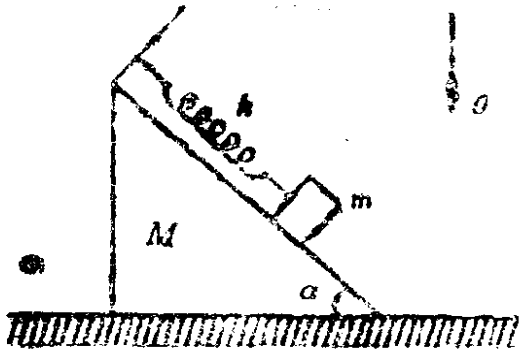
求平衡位置并讨论其稳定性。

5.16　写出如下完整保守系统的拉氏函数。要求分析约束，确定自由度，选定广义坐标，列出变换方程，求出T,V,L。（（1）—（8）小题中系统均作平面运动）

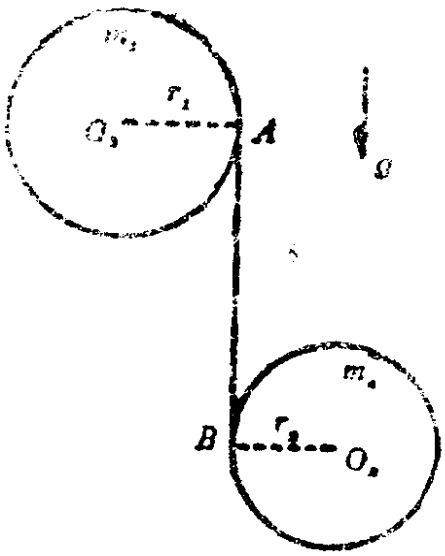
（1） 用弹簧系住的小方块沿光滑斜劈运动，斜劈沿光滑平面运动。

（2） 质量为 m，半径为 R 的均质球在水平面上依惯性作纯滚动。

（3） 圆盘 O_1 作定轴转动，O_2 在重力作用下下落，两盘间以轻绳缠绕。



5.16(1) 题图



5.16(3) 题图

答：$$L=\frac{1}{4}m_1r_1^2(\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}m_2(r_1\dot{\theta}_1+r_2\dot{\theta}_2)^2$$

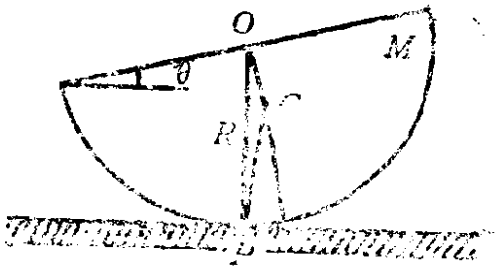
$$+\frac{1}{4}m_2r_2^2(\dot{\theta}_2)^2+m_2g(r_1\theta_1+r_2\theta_2)$$

（4） 长 $2l$，质量为 M 的均质杆在光滑平面上倒下。

（5） 均质半圆柱在粗糙水平面上作微小振动。

答：$$L=\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)(\dot{\theta})^2$$

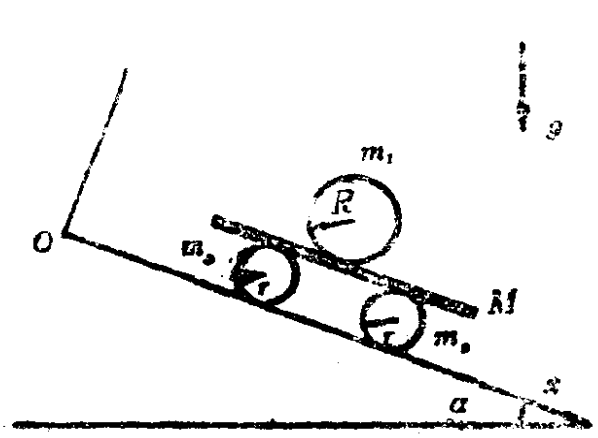
$$-MgR\left(1-\frac{4}{3\pi}\cos\theta\right)$$



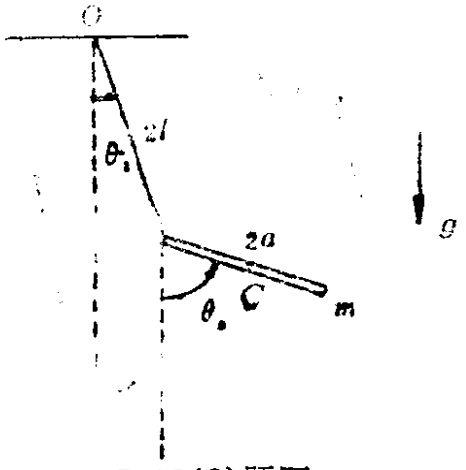
5.16(5)题图

（6） 四轮车上载一球，自斜面上下来，车轮与斜面及球与车之间的接触为完全粗糙的。

（7） 固定点 O 悬一轻绳，绳下挂一质量为 m，长为 $2a$ 的均质棒。系统在铅垂面内摆动。

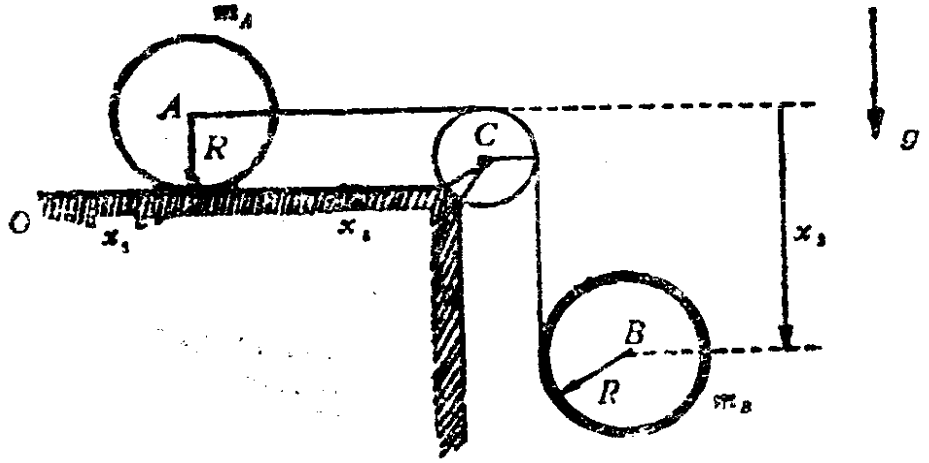


5.16(6)题图



5.16(7)题图

（8） A为实心均质圆柱，B 为薄圆筒，以轻绳连结，C 为定滑轮。A 沿水平面作纯滚动，B铅直下降。

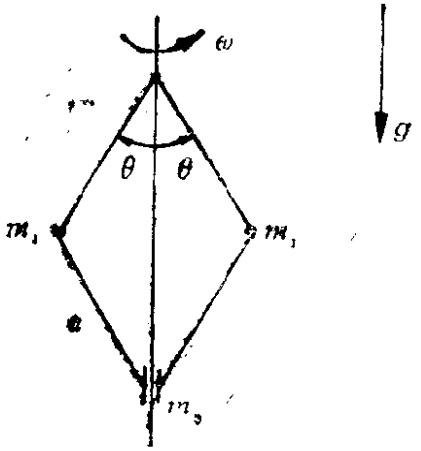


5.16(8)题图

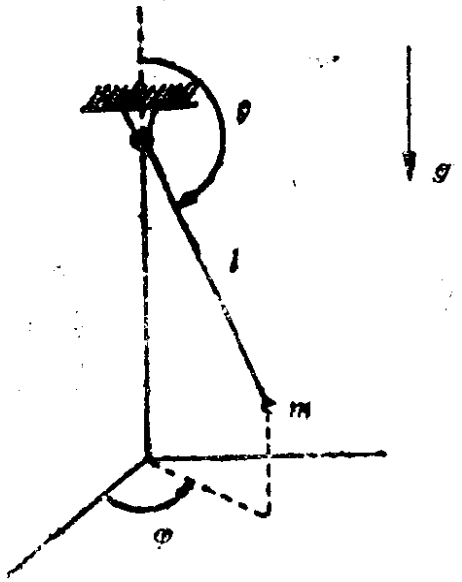
答：$L=\frac{1}{4}(3m_A+2m_B)\dot{x}_1^2+m_B\dot{x}_2^2-m_B\dot{x}_1\dot{x}_2+m_Bgx_2$

（9） 长皆为 a 的四轻杆铰接成菱形，杆重不计。其上缚三个质点质量各为 m_1，m_1 及 m_2，m_2 沿铅垂轴运动，体系绕该轴以角速度 ω 转动。

（10） 球面摆。摆长为 l，摆锤可看作质量为 m 的质点，在以 O 为原点、l 为半径的球面上运动。



5.16(9)题图



5.16(10)题图

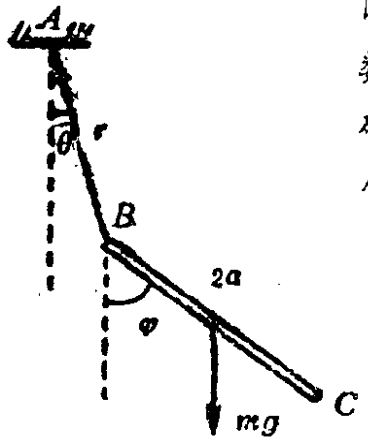
5.17 一质点在均匀重力场中运动。以球坐标描述质点的运动，求重力的广义分量Q_r，Q_θ及Q_φ。

5.18 一圆柱半径为a，质量为m，无滑动地滚动在与水平成α角的斜面上，运动是平面的。选择适当的广义坐标，并求作用在体系上的主动力的广义分量。

答：如取圆柱到斜面上端的距离s为广义坐标

$$Q_S = -mg\sin\alpha。$$

5.19 一均质杆BC，长$2a$，质量为m，以弹性丝AB悬于固定点A，弹性丝的自然长为b，弹性系数为k，系统的运动是平面的。以杆作为研究对象，选择适当的广义坐标集合，求作用在系统上的力的广义分量。



5.19题图

答：

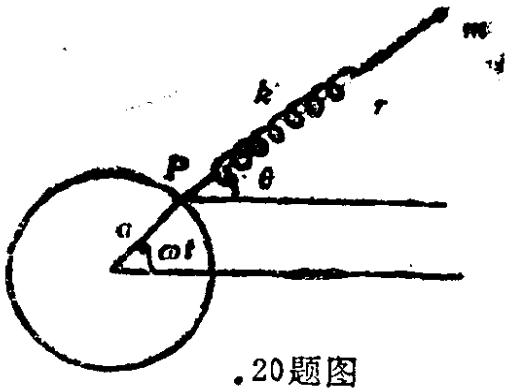
$$Q_r = mg\cos\theta$$

$$Q_\theta = -mgr\sin\theta$$

$$Q_\varphi = -mga\sin\varphi$$

5.20 质量为m的质点，由无质量弹簧系于P点，已知弹

弹簧的弹性系数为 k。自然长为 r_0，点 P 以匀角速 ω 沿半径为 a 的圆路径运动。假定质点在水平面上无摩擦地运动，试求出运动微分方程式。



.20题图

答：

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2\cos(\theta - \omega t) + k(r - r_0) = 0$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + ma\omega^2\sin(\theta - \omega t) = 0$$

5.21 求在无空气阻力的均匀引力场中一抛射体的运动微分方程。

答：$\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 + g\sin\theta = 0$

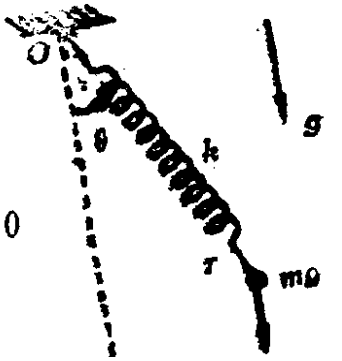
$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + g\cos\theta = 0$$

5.22 求在完全粗糙固定斜面上向下滚动的均匀固体球的加速度。

答：$\frac{5}{7}g\sin\alpha$

5.23 求在笛卡儿坐标系及柱坐标系中自由质点的运动微分方程式。

5.24 求弹性摆的运动微分方程式。弹性摆由一质点系在弹簧上构成。设质点质量为 m，弹簧自然长为 l_0，弹性系数为 k，运动限于一确定的铅垂平面内。



5.24 题图

答：$\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - g\cos\theta + \frac{k}{m}(r - r_0) = 0$

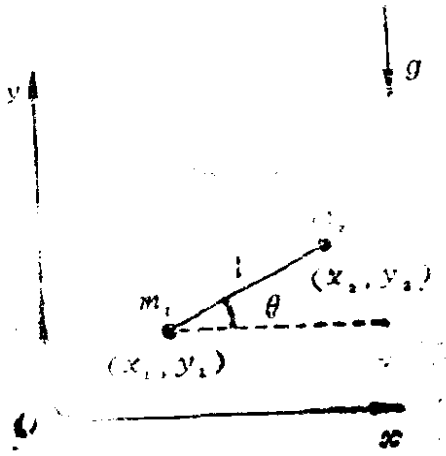
$$\frac{1}{2}r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0$$

5.25 一质量为 m 的质点，在力 $\boldsymbol{F} = -kr\cos\theta\boldsymbol{e}_r$ 作用下在

平面内运动，e_r是径向单位向量。

质点关于原点的角动量守恒否？证明你的论断。并证明质点的运动满足如下微分方程

$$\ddot{m}r - mr(\dot{\theta})^2 + kr\cos\theta = 0$$



5.26题图

5.26 两质点m_1，m_2以刚性轻杆连结，运动于铅垂平面内，求系统的运动微分方程。

答：

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l\ddot{\theta}\sin\theta - m_2 l(\dot{\theta})^2\cos\theta = 0$$

$$(m_1+m_2)\ddot{y}_1 + m_2 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2 l(\dot{\theta})^2\sin\theta + (m_1+m_2)g = 0$$

$$m_2 l\ddot{\theta} - m_2 l\ddot{x}_1\sin\theta - m_2 l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta + m_2 l\ddot{y}_1\cos\theta$$

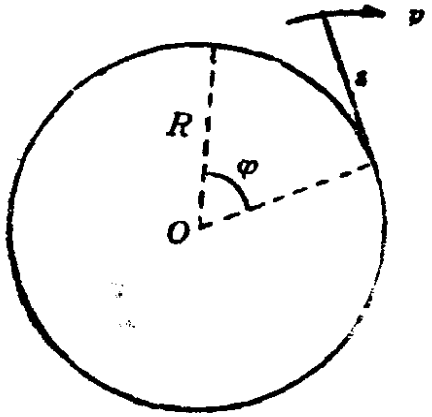
$$- m_2 l\dot{y}_1\dot{\theta}\sin\theta + m_2 gl\cos\theta = 0$$

5.27 把一无外力作用的质点m，系于一无重量的线上，线的另一端固定在半径为R的柱体上。起初线完全缠绕在柱体上使质点接触柱体。现给质点一径向冲量，使它开始摆脱缠绕。

(a) 以适当的广义坐标写出质点的运动微分方程。

(b) 求方程满足初始条件的一般解。

(c) 利用(b)的结果求质点绕圆柱轴的角动量。



5.27题图

答：(a) $\dfrac{d}{dt}(s\dot{s}) = 0$

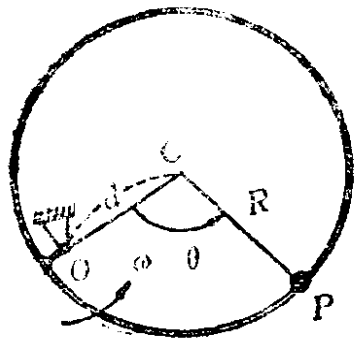
(b) $s^2 = 2Rv_0 t$。

(c) $l = m(2Rv^2 t)^{1/2}$

(l表示角动量)

5.28 半径为 R 的水平金属环，可以绕过 O 点的垂直于环平面的竖直轴转动，$OC=d$。金属环上有质点 P，可沿环自由滑动。已知圆环的转动角速度为 $\omega(t)$，如取 $\angle OCP=\theta$ 为广义坐标，不计摩擦，求证

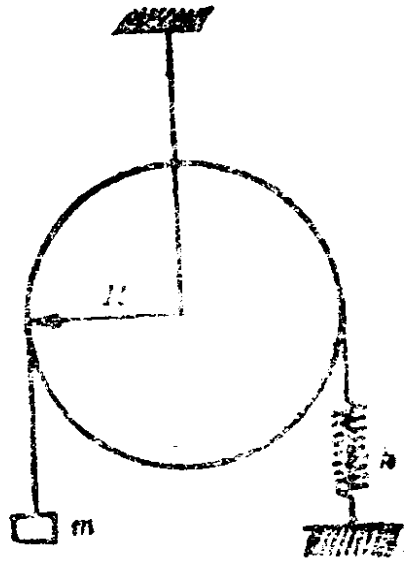
$$\ddot{R\theta}+\dot{\omega}(R-d\cos\theta)=d\omega^2\sin\theta$$



5.28题图

5.29 一滑轮可绕通过轮心的水平轴转动。在此滑轮上绕过一条不可伸长的绳，绳的一端悬一砝码，其质量为 m，另一端则固结在一竖直弹簧上，弹簧下端连地，设弹簧中张力与伸长成正比，比例系数为 k。已知滑轮的质量为 M，并分布在轮缘上，试用拉氏方程求砝码的振动周期，假定绳与滑轮之间无滑动。

答：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$。



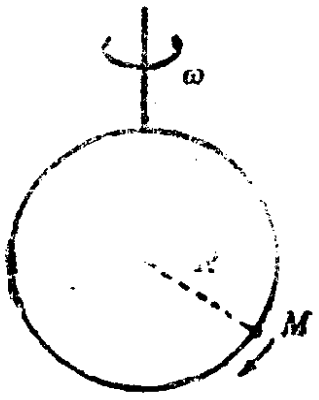
5.29题图

5.30 一个质量为 M 的小球，在重力场 g 内沿半径为 R 的圆环线作无摩擦的滑动。求在下列条件下以描述运动的独立坐标来表示该系统的严格的运动微分方程。

(a) 圆环绕过顶点的铅垂轴（圆环的直径）作自由转动，圆环线无质量。

(b) 与(a)的情形相同，只是圆环有质量 M。

(c) 和(a)形相同，只是轴以常角频率 ω 转动。



5.30 题图

答：(a) $MR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}=$常数 $(q_\alpha=\varphi)$

$$MR^2\ddot{\theta}-MR^2(\dot{\varphi})^2\sin\theta\cos\theta+MgR\sin\theta=0 \quad (q_\alpha=\theta)$$

(b) $$MR^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}+2MR^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi}=0$$

$(q_\alpha=\varphi)$ $q_\alpha=\theta$ 时方程同(a)。

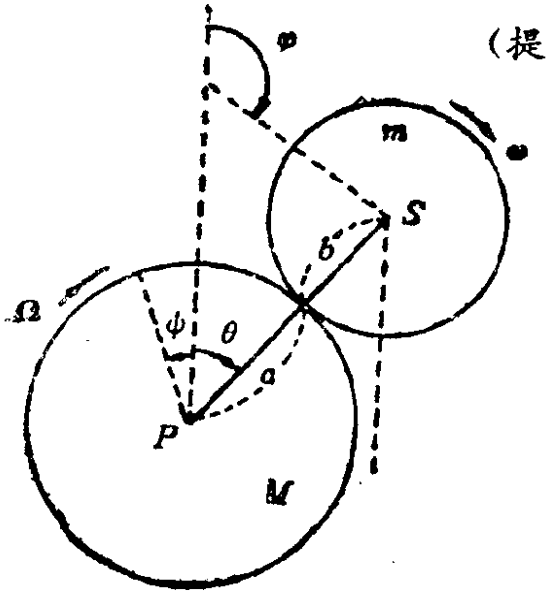
(c) $\dot{\varphi}=\omega$，由 θ 的方程

$$MR^2\ddot{\theta}-MR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+MgR\sin\theta=0$$

5.31 质量为 m 的圆柱体 S 在质量为 M 的圆柱体 P 上滚动，而 P 放在粗糙平面上。已知两圆柱的轴都是水平的，且重心在同一竖直平面内。开始时，此系统是静止的。若以圆柱体 P 的重心的初始位置为圆定坐标系的原点，则圆柱 S 的重心在任意时刻的坐标为

$$x=c\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)},\quad y=c\cos\theta$$

试证明之。式中 c 为两圆柱轴线间的距离，θ 为两圆柱连心线与铅垂线之间的夹角。



5.31题图

(提示：$\dot{\psi}=\Omega$，$\dot{\varphi}=\omega$，约束方程为

$$a(\theta+\psi)=b(\varphi-\theta)$$

$$L=\frac{1}{2}\{(a+b)^2(\dot{\theta})^2+a^2(\dot{\psi})^2$$

$$-2a\dot{\psi}\dot{\theta}(a+b)\dot{\theta}\cos\theta\}$$

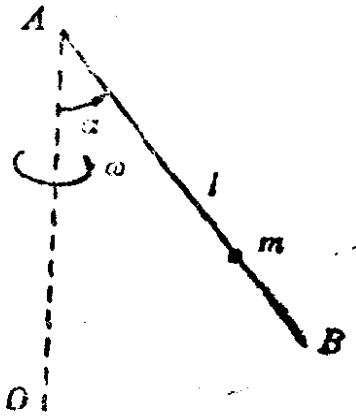
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mb^2\right)(\dot{\varphi})^2$$

$$+\frac{1}{2}M\left(a^2+\frac{1}{2}Ma^2\right)(\dot{\psi})^2$$

$$+mg(a+b)(1-\cos\theta))$$

5.32 AB 为一光滑金属线。A 点固定，OA 为铅垂线，AB

绕 OA 以恒定角速度 ω 旋转，并保持夹角 α 不变。一小环质量为 m，约束在 AB 直线上运动。如开始时小环恰在 A 点，AB 长为 l，求经多长时间小环能到达 B 端？



5.32题图

答：$$t=\frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left\{1+\frac{l\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\alpha}+\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right)^2-1}\right\}$$

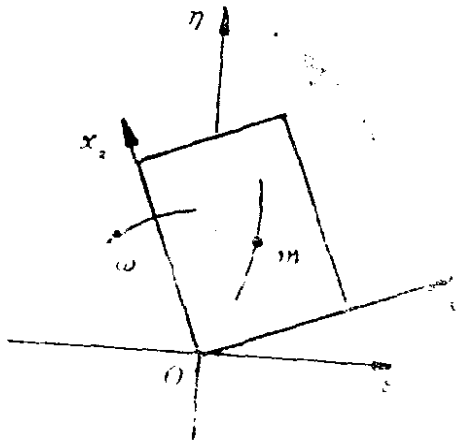
5.33 设有一质点在光滑平面 $O\text{-}x_1x_2$ 上运动，而此平面又绕过 O 点垂直于平面的轴作匀速转动，转动角速度为 ω，质点的质量为 m，其受到的力为保守力，试列出质点相对于转动平面的运动微分方程式，并求出第一积分。

答：

$$m\ddot{x}_1=2m\omega\dot{x}_2+m\omega^2x_1-\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$m\ddot{x}_2=-2m\omega\dot{x}_1+m\omega^2x_2-\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

$$T_2-T_0+V=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2+x_2^2)+V=\text{常数}.$$



5.33题图

5.34 一个系统，由质量均为 m 的三个质点组成，其中任何两个质点之间存在的力可以从势 $V=-ge^{-\beta r}$ 推得，此处 r 是两个质点间的距离。另外两个质点都对第三个质点施加一力，它们可以从下列形式的广义势推得：

$$U=-fv\cdot r$$

此处 v 是相互作用着的那些质点的相对速度，而 f 为一常数，

试用质心的位置向量 $\boldsymbol{R}$ 及下述两个向量

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3$$

建立系统的拉氏函数。试问系统的总动量守恒吗？

答：$$T = \frac{1}{2}m\left\{\left[\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{3}(2\dot{\boldsymbol{S}}_1 - \dot{\boldsymbol{S}}_2)\right]^2 + \left[\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{3}(2\dot{\boldsymbol{S}}_2 - \dot{\boldsymbol{S}}_1)\right]^2 + \left[\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{1}{3}(\dot{\boldsymbol{S}}_1 + \dot{\boldsymbol{S}}_2)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{3}{2}m(\dot{\boldsymbol{R}})^2 + \frac{1}{3}[(\dot{\boldsymbol{S}}_1)^2 + (\dot{\boldsymbol{S}}_2)^2 - \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2]$$

$$V = -g(e^{\mu S_1 - S_2} + e^{-\mu S_1} + e^{-\mu S_2}) - f[(\dot{\boldsymbol{S}}_1 - \dot{\boldsymbol{S}}_2)\cdot(\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2) + \dot{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \boldsymbol{S}_1 + \dot{\boldsymbol{S}}_2 \cdot \boldsymbol{S}_2]$$

$$L = T - V$$

第六章　微振动

本章讨论完整、稳定、保守系统在稳定平衡位形附近的微振动，这种运动是物理学中一种重要的运动形式，广泛存在于分子、晶格、等离子体、电磁场的运动以及工程机械等的运动中。这里处理微振动问题的方法，是系统地应用拉氏方程解决力学问题的典型例子.

§1　单自由度系统平衡位置附近的微振动

理论要点

1．微振动

在稳定平衡位置附近，体系以微小速度及微小位移所作的振动，称为**微振动**.

（1）一维势势能曲线

设质点在一维势场 $V(x)$ 中作直线运动。势能 $V(x)$ 的函数形式以图 6.1 的势能曲线表示。如质点总能量为 E，一维空间可分为如下几个区域：

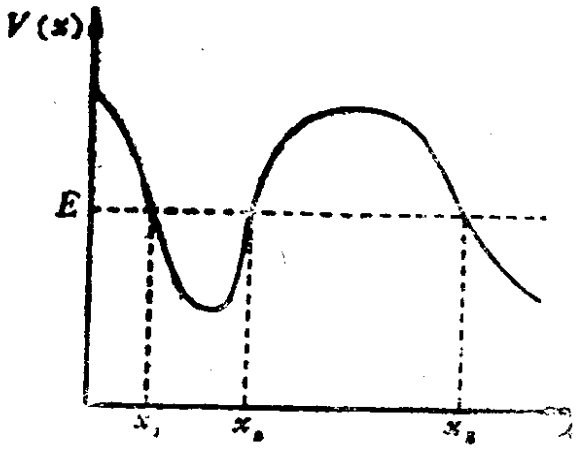


图　6.1

(a) $x<x_1$。其中 $E<V$，要求 $T<0$，$\dot{x}$ 为虚数，物理上不允许，是非物理区.

(b) $x_1\leqslant x\leqslant x_2$。其中 $E>V$，$T>0$，$\dot{x}$ 为实数，是物理区。在两个极端位置 $x=x_1$，

$x=x_2$处，$E=V$，$T=0$，因而$\dot{x}=0$，质点将掉转方向运动，此二位置称为**转向点**。质点在到达**势垒**处转向，只能在**势阱**中往返运动。

(c) $x_2<x<x_3$。其中$E<V$，要求$T<0$，是非物理区。

(d) $x_3\leqslant x<\infty$。如E总大于V，自$x_3\to\infty$为物理区。

（2）稳定平衡位置附近质点运动的性质

质点在稳定平衡位置ξ附近运动$\left(\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=\xi}=0,\ \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\xi}>0\right)$，总能量略高于势能最小值$V(\xi)$，即振动动能$\varepsilon=E-V(\xi)$是一小量，因而位移和速度也都是小量。几何上，总可以用抛物线近似地代替势能曲线凹部的形状。数学上，由$|x-\xi|$是一小量，可将$V(x)$在$x=\xi$附近展成泰勒级数

$$V(x)=V(\xi)+V'(\xi)(x-\xi)+\frac{1}{2!}V''(\xi)(x-\xi)^2+\frac{1}{3!}V'''(\xi)(x-\xi)^3+\cdots$$

令$V(\xi)=V_{min}=0$，又因$V'(\xi)=0$，所以

$$V(x)=\frac{1}{2!}V''(\xi)(x-\xi)^2+\frac{1}{3!}V'''(\xi)(x-\xi)^3+\cdots$$

移动坐标原点，令$\xi=0$，则

$$V(x)=\frac{1}{2}V''(0)x^2+\frac{1}{3!}V'''(0)x^3+\frac{1}{4!}V''''(0)x^4+\cdots$$

即

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{3!}\lambda x^3+\frac{1}{4!}\varepsilon x^4+\cdots \tag{6.1}$$

略去二级以上的小量，则

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2 \tag{6.2}$$

势能曲线为抛物线。式中

$$k = V''(0) = \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} \tag{6.3}$$

相应的有势力为

$$F(x) = -kx \tag{6.4}$$

这表明利用微小运动的条件已将力线性化。运动微分方程为

$$m\ddot{x} + V''(0)x = 0 \tag{6.5}$$

($V''(0) > 0$) 为简谐振动。

角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(0)}{m}} \tag{6.6}$$

周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \tag{6.7}$$

能量积分

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \text{ (常数)} \tag{6.8}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \tag{6.9}$$

在微小运动条件下，稳定平衡位置附近的微振动同其他谐振动对比见表一。

表一

系　　统	变　量	惯性因子	力 常 数	角 频 率
谐振子	x	m	k	$\sqrt{k/m}$
物理摆	θ	$I_0\left(=\frac{I}{m}\right)$	gl	$\sqrt{gl/I_0}$
扭转摆	θ	I	κ	$\sqrt{\kappa/I}$
单自由度质点微振动	x	m	$k(=V''(0))$	$\sqrt{k/m}$

例　题

6.1　一质量为 m 的电子在保守力场作用下沿直线运动，力场的势能

$$V=\frac{cx}{a^2+x^2}$$

其中 a，c 是正常数，x 是电子离开直线上固定点的位移。求稳定平衡位置，并求关于此位置的微振动周期。

〔解〕 $\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{c(a^2+x^2)-2cx^2}{(a^2+x^2)^2}=\dfrac{c(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}$

$a^2-x^2=0$，$x=\pm a$ 为平衡位置。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{-2cx(a^2+x^2)^2-4cx(a^4-x^4)}{(a^2+x^2)^4}=\frac{-2cx(3a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=a}=-\frac{4ca^3}{(2a^2)^3}=-\frac{c}{2a^3}<0 \qquad (\text{因}a>0,\ c>0)$$

$x=a$ 不是稳定平衡位置。

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=-a}=\frac{c}{2a^3}>0$$

$x=-a$ 是稳定平衡位置。

在 $x=-a$ 附近电子作微振动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(-a)}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c/2a^3}}=2\pi a\sqrt{\frac{2ma}{c}}$$

6.2　求单摆的振动周期。

〔解〕 单摆自由度 $f=1$。取摆锤的坐标 x 为轨道参量，$x_0=0$ 为势能零点。

$$V(x)=mg(l-\sqrt{l^2-x^2})$$

这势能函数不具 $\frac{1}{2}kx^2$ 的形式，运动不是简谐的。

作势能的线性谐振动近似，由

$$\frac{dV}{dx}=mg\left[-\frac{1}{2\sqrt{l^2-x^2}}(-2x)\right]$$

$$=mg\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}=0$$

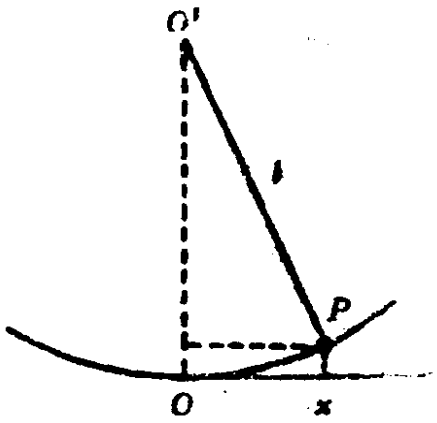


图 6.2

得 $x=0$，则

$$k=\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}$$

$$=mg\left[\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}+x\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{mg}{l}$$

线性谐振势能

$$V=\frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2$$

即在小振动近似下，振动角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{mg}{l}\cdot\frac{1}{m}}=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

6.3 两定点连线水平，距离 $2a$，每点上系一弹性绳。自然长均为 l，弹性系数均为 k，两绳的另一端同系在质量为 m 的质点上，平衡时，每绳与铅直方向夹角均为 α。若使质点自平衡位置沿铅直方向向下发生一微小位移 x，求质点振动的周期。

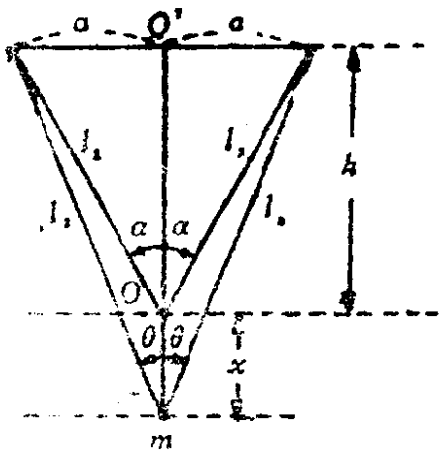


图 6.3

〔解一〕 平衡时，有

$$mg = 2k(l_1 - l)\cos\alpha, \quad l_1 = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$h = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$l_2 = \sqrt{a^2 + (a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + x)^2}$$

$$= (l_1^2 + 2a\,\mathrm{ctg}\,\alpha x + x^2)^{1/2}$$

$$\approx l_1(1 + a\,\mathrm{ctg}\,\alpha x / l_1^2)$$

运动微分方程为

$$m\ddot{x} = mg - 2k(l_2 - l)\cos\theta$$

$$m\ddot{x} = mg - 2k\left(l_1 - l + \frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha x}{l_1}\right)\left[\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + x}{l_1\left(1 + \frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot x}{l_1^2}\right)}\right]$$

将 $l_1 = \frac{a}{\sin\alpha}$ 代入，整理得

$$m\ddot{x} = -mg\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{a} \cdot \frac{a - l\sin^3\alpha}{a - l\sin\alpha}\,x$$

其中 $a - l\sin\alpha > 0$，$a - l\sin^3\alpha > 0$，故

$$\ddot{x} + \frac{g}{a}\,\mathrm{tg}\alpha\,\frac{a - l\sin^3\alpha}{a - l\sin\alpha}\,x = 0$$

为一谐振方程。周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{g}\,\frac{(a - l\sin\alpha)}{(a - l\sin^3\alpha)}}$$

〔解二〕 平衡时，有

$$2k\left(\frac{a}{\sin\alpha} - l\right)\cos\alpha = mg$$

弹性绳的弹性系数

$$k=\frac{mg\sin\alpha}{2\cos\alpha(a-l\sin\alpha)}$$

一维势

$$V(x)=2\times\frac{1}{2}k[\sqrt{(a\operatorname{ctg}\alpha+x)^2+a^2}-l]^2-mgx$$

$$=k[(a\operatorname{ctg}\alpha+x)^2+a^2-2l\sqrt{(a\operatorname{ctg}\alpha+x)^2+a^2}+l^2]-mgx$$

$$V'(x)=k\left[2(a\operatorname{ctg}\alpha+x)-2l\frac{a\operatorname{ctg}\alpha+x}{\sqrt{(a\operatorname{ctg}\alpha+x)^2+a^2}}\right]-mg$$

$$V''(x)=2k\left[1-\frac{la^2}{[(a\operatorname{ctg}\alpha+x)^2+a^2]^{3/2}}\right]$$

$$V''(0)=2k\left[1-l\frac{a^2}{(a^2\operatorname{ctg}^2\alpha+a^2)^{3/2}}\right]$$

$$=2k\left[1-l\frac{\sin^3\alpha}{a}\right]$$

$$=mg\operatorname{tg}\alpha\frac{a-l\sin^3\alpha}{a(a-l\sin\alpha)}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(0)}}=2\pi\sqrt{\frac{a\operatorname{ctg}\alpha(a-l\sin\alpha)}{g(a-l\sin^3\alpha)}}$$

6.4 一刚体有一圆形底部（球或圆柱），置于水平面上，如图 6.4 所示．求其在平衡位置附近作微振动（设为平面运动）的周期（刚体表面粗糙）．

〔解一〕 取 P 点为势能零点，则势能

$$V=mg(a-l\cos\theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta}=mgl\sin\theta=0$$

$\theta=0$ 是平衡位置．

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgl\cos\theta|_{\theta=0} = mg\,l > 0$$

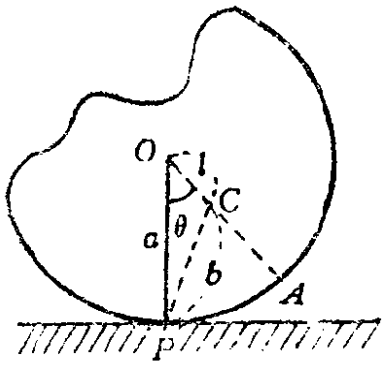


图 6.4

故 $\theta=0$ 是稳定平衡位置.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

I 是刚体对平衡时与平面的切点 A 的转动惯量.

〔解二〕 由能量积分

$$\frac{1}{2}I_P(\dot{\theta})^2 + mg(a-l\cos\theta) = E \quad (\text{常数})$$

微分得

$$I_P\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}(\dot{\theta})^2\frac{dI_P}{dt} + mgl\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} I_P &= I_C + mb^2 \\ &= [I-(a-l)^2m] + mb^2 \\ &= I + 2aml - a^2m - l^2m + b^2m \\ &= I + 2alm - (a^2+l^2-b^2)m \\ &= I + 2al(1-\cos\theta)m \end{aligned}$$

$$\frac{dI_P}{dt} = 2aml\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

代回（1）式，则第二项为 4 阶小量，略去. 利用微振动条件 $\sin\theta=\theta$，（1）式化为

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_P}\theta = 0 \qquad (2)$$

但 $\cos\theta = 1$，$I_P = I$，（2）式即

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$$

周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

6.5 一标尺的两端在一光滑的固定铅直圆环内滑动。如标尺长为 $2b$，圆环半径为 $a(b<a)$，标尺质量为 M，求标尺在平衡位置附近微振动的等效单摆长。

〔解〕 标尺对过其中心而与尺垂直的轴的转动惯量

$$I_0 = \frac{1}{3}Mb^2$$

标尺对于过 O 点、垂直圆环的轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}Mb^2 + (a^2 - b^2)M$$

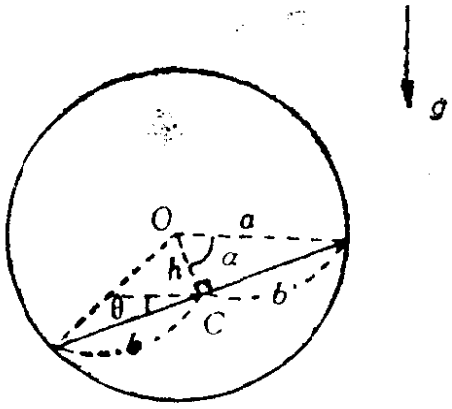


图 6.5

标尺与水平面成 θ 角，其运动微分方程为

$$I\ddot{\theta} = -Mga\cos\alpha\sin\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -Mga\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sin\theta$$

$$\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)\ddot{\theta} + g\sqrt{a^2-b^2}\,\theta \approx 0$$

等效单摆长 $l = \dfrac{a^2 - 2b^2/3}{\sqrt{a^2-b^2}}$。

也可以不用列出运动微分方程式，由

$$l = \frac{I}{Mh} = \frac{I}{M\sqrt{a^2-b^2}}$$

直接求出 l。

6.6 两固定点 A，B 在同一水平线上，距离为 $2a$，A，B 两点各悬长 l 的绳，两绳下端系于质量为 m 的均匀棒两端，求系统绕过棒心的垂线作微振动的周期。

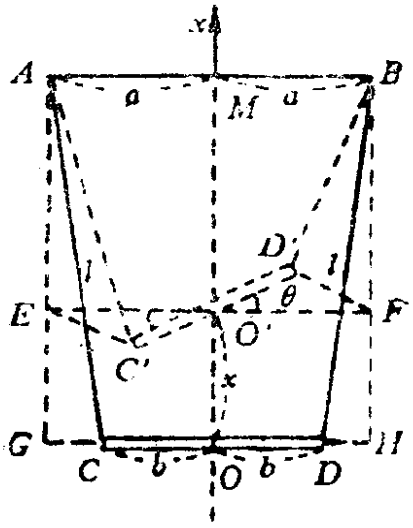


图 6.6

〔解一〕 设棒扭转后，变到虚线所在的位置．取 O 为坐标原点，OX 轴铅直向上．将 AB 线平移到 EF，由几何关系知

$$\begin{aligned} x &= AG - AE \\ &= \sqrt{AC^2 - (a-b)^2} \\ &\quad - \sqrt{AC'^2 - EC'^2} \\ &= \sqrt{l^2 - (a-b)^2} \\ &\quad - \sqrt{l^2 - (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)} \end{aligned}$$

由于 $\theta \ll 1$，$\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$，所以

$$x = \sqrt{l^2 - (a-b)^2} - \sqrt{l^2 - (a^2 + b^2 - 2ab + ab\theta^2)}$$

$$= \sqrt{l^2 - (a-b)^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{ab\theta^2}{l^2 - (a-b)^2}}\right]$$

令 $l^2 - (a-b)^2 = \overline{AG}^2 = h^2$，则

$$x = h\left[1 - \sqrt{1 - \frac{ab\theta^2}{h^2}}\right] = \frac{ab\theta^2}{2h}$$

$$V = mgx = mg\frac{ab\theta^2}{2h}, \qquad V'(\theta) = \frac{mg}{h}ab\theta$$

$$V''(\theta) = \frac{mgab}{h} = V''(0)$$

所以

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{V''(0)}} \qquad \left(I = \frac{1}{3}mb^2\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{Ih}{mgab}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{bh}{3ag}}$$

〔解二〕 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mgx$

$$\approx\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mg\frac{ab}{2h}\theta^2$$

代入 $\Lambda_\theta L=0$，得

$$I\ddot{\theta}+\frac{mg}{h}ab\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3ga}{bh}\theta=0$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{bh}{3ga}}$$

6.7. 由三根无重杆固结在一点组成的刚性结构，缚上两个质点，如图 6.7 所示，质点质量均为 m. 令刚性系统支持在一固定点 D，并以小振幅左右摆动. 求振动角频率及稳定振动对 l 的限制.

$(AB=BC=L,\ BD=l,\ \angle ABD=\angle DBC=\theta)$

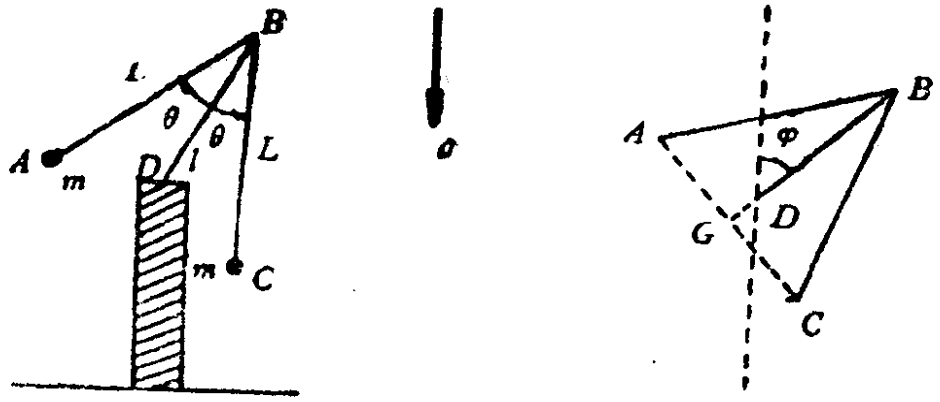


图 6.7

〔解〕 由图可见，系统质心 G 到过 D 点铅垂线的距离为

$$(L\cos\theta-l)\sin\varphi$$

系统对过 D 点、垂直于摆动平面的轴的转动惯量为

$$I=2m(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)$$

系统的运动微分方程为

$$I\ddot{\varphi} = -2mg(L\cos\theta - l)\sin\varphi$$

对于微振动，方程变为

$$\ddot{\varphi} + \left(\sqrt{\frac{g(L\cos\theta - l)}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\theta}}\right)^2 \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g(L\cos\theta - l)}{L^2 + l^2 - 2Ll\cos\theta}}$$

因为 $L^2 + l^2 - 2Ll\cos\theta$ 总大于零，所以要求 $L\cos\theta > l$.

§2 多自由度耦合系统的微振动

理 论 要 点

本节讨论的多自由度耦合系统的微振动，是具有下述特点的振动：

（i）体系是多自由度的**完整、稳定、保守系**. 即

约束方程 $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \cdots, \boldsymbol{r}_n) = 0$（不显含速度及时间 t）；

变换方程 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_f)$ 不显含时间，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$$

所有的广义力为保守力：$Q_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}$.

（ii）存在**稳定的**平衡位形 $q_{\alpha 0}(\alpha = 1, 2, \cdots, f)$.

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\alpha = q_{\alpha 0}} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, f) \qquad (6.10)$$

代表平衡位形. **对绝大多数有物理意义的情形，势能是广义坐标的二次齐次函数，即**

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_f)=\frac{1}{2}(k_{11}q_1^2+2k_{12}q_1q_2+k_{22}q_2^2+\cdots)$$

(6.11)

如果存在平衡位形 $q_{\alpha 0}(\alpha=1, 2, \cdots, f)$，我们总可以作一线性变换使 $q_{10}=q_{20}=\cdots=q_{n0}=0$ 为平衡位形. 则 $V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$ 中的各系数为

$$k_{11}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_f=0}$$

$$k_{12}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_f=0} \qquad (6.12)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$k_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_{q_1=q_2=\cdots=q_f=0}$$

平衡位形稳定的条件是势能函数为广义坐标的正定二次型（对任何 q_i，$V>0$）；势能函数为正定的充分必要条件是 $k_{ij}=k_{ji}$ 满足

$$k_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}>0, \cdots$$

(6.13)

(iii) 振动是微小的，即位移、速度均为小量。系统是耦合的，即振子间有能量交换。

1. 处理多自由度耦合系统微振动的一般程序

（1）将势能 $V=V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$ 在稳定平衡位形附近作泰勒展开

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_f)=V(0, 0, \cdots, 0)+\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\Big|_0 q_\alpha$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta}^{f}\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{0,0} q_\alpha q_\beta+\cdots$$

(6.14)

其中 $V(0,\ 0,\cdots,0)=V(0)$ 表示平衡位形势能，取为势能零点．因 $\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_0=0$，且略去三级以上项，得

$$V(q_1,\ q_2,\cdots,q_f)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right|_{00} q_\alpha q_\beta$$

即

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \tag{6.15}$$

式中

$$k_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right|_{00}=k_{\beta\alpha}\ \text{（准弹性系数）} \tag{6.16}$$

（2）变换动能表达式．以广义坐标表示的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{f} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2 \tag{6.17}$$

因系统稳定，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，故

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{f}\sum_{\beta=1}^{f} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{f} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \tag{6.18}$$

式中

$$m_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}=m_{\alpha\beta}(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_f) \tag{6.19}$$

将 $m_{\alpha\beta}$ 在平衡位形附近作泰勒展开

$$m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_f)$$

$$=m_{\alpha\beta}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)+\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial q_\sigma}\Big|_0 q_\sigma+\cdots \quad (6.20)$$

为保持 T 与势能同级近似，取 $m_{\alpha\beta}$ 零级项，即

$$m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=m_{\beta\alpha}\ (\text{惯性系数})$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta>0 \quad (6.21)$$

T 是正定二次型。

（3）写出系统的拉氏函数

$$L=\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \quad (6.22)$$

（4）建立系统的运动微分方程式。将 L 代入

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ f$$

得

$$\sum_{\beta=1}^{f}(m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+k_{\alpha\beta}q_\beta)=0 \qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ f \quad (6.23)$$

即

$$\begin{aligned}
&m_{11}\ddot{q}_1+m_{12}\ddot{q}_2+\cdots+m_{1f}\ddot{q}_f+k_{11}q_1+k_{12}q_2+\cdots+k_{1f}q_f=0\\
&m_{21}\ddot{q}_1+m_{22}\ddot{q}_2+\cdots+m_{2f}\ddot{q}_f+k_{21}q_1+k_{22}q_2+\cdots+k_{2f}q_f=0\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&m_{f1}\ddot{q}_1+m_{f2}\ddot{q}_2+\cdots+m_{ff}\ddot{q}_f+k_{f1}q_1+k_{f2}q_2+\cdots+k_{ff}q_f=0
\end{aligned} \quad (6.24)$$

（5）取特解形为 $q_\beta=a_\beta(\sin\omega t+e)$，代入 (6.23) 式得

$$\sum_{\beta=1}^{f}(k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega^2)a_\beta=0 \qquad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ f \quad (6.25)$$

即

$$\begin{aligned}
&(k_{11}-m_{11}\omega^2)a_1+(k_{12}-m_{12}\omega^2)a_2+\cdots+(k_{1f}-m_{1f}\omega^2)a_f=0\\
&(k_{21}-m_{21}\omega^2)a_1+(k_{22}-m_{22}\omega^2)a_2+\cdots+(k_{2f}-m_{2f}\omega^2)a_f=0\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&(k_{f1}-m_{f1}\omega^2)a_1+(k_{f2}-m_{f2}\omega^2)a_2+\cdots+(k_{ff}-m_{ff}\omega^2)a_f=0
\end{aligned}\tag{6.26}$$

（6）线性方程组（6.26）有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}
k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 & \cdots & k_{1f}-m_{1f}\omega^2\\
k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 & \cdots & k_{2f}-m_{2f}\omega^2\\
\cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
k_{f1}-m_{f1}\omega^2 & k_{f2}-m_{f2}\omega^2 & \cdots & k_{ff}-m_{ff}\omega^2
\end{vmatrix}=0\tag{6.27}$$

即

$$\Delta(\omega^2)=\|k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega^2\|=0\tag{6.28}$$

由此求出 f 个本征值 $\omega_r^2(r=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$，$\omega_r$（取正值）即为本征频率（或简正频率）。

（7）将各本征值分别代入代数方程组(6.26)，得出 f 组广义坐标的振幅系数(包括单位基准系数在内)$a_{\alpha r}(\alpha=1,\ \cdots,\ f)$。对应于每一个 ω_r^2，这一组 f 个振幅系数，称为一个本征向量，由此可得出微分方程组（6.23）的一组特解

$$q_{\alpha r}=a_{\alpha r}\sin(\omega_r t+\varepsilon_r)\qquad\begin{matrix}\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ f\\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ f\end{matrix}\tag{6.29}$$

式中 $a_{\alpha r}$ 及 ε_r 为待定常数。

（8）代数方程组(6.26)是一线性齐次代数方程组，不能将 f 个未知数完全定下来，只能给出它们的比例关系，即每一本征向量尚有一个常数未定。为将其相对地确定下来，附加一额外的归一化条件

$$\sum_{\alpha,\beta}^{f}m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta r}=1\tag{6.30}$$

这样，每个特解的振幅系数就相对确定了。微分方程组(6.23)的通解，应是所有特解的线性组合，即

$$q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} c_r q_{\alpha r}$$

或

$$q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} c_r a_{\alpha r} \sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, f \quad (6.31)$$

式中 c_r 和 ε_r 由初始条件定。

（9）微振动的通解 $q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r} c_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r)$ 可重新表为

$$q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r} \eta_r$$

其中

$$\eta_r = c_r \sin(\omega_r t + \varepsilon_r) \quad (6.32)$$

称为**简正坐标**。每个简正坐标各按简正频率作简谐振动，称为**简正振动**。描述微振动的普通广义坐标 q_α 可以表为简正坐标的线性组合，简正坐标 η_r 也可以表为 q_α 的线性组合。

在特定的初始条件下，系统的所有广义坐标只参加一种频率 ω_r 的简正振动（其它的简正振动不被激发），并有共同的位相，其振幅间有一确定的比例，称为一个**简正振动模式**，或称**简正模式**。换言之，**每一个简正频率以其相应的本征向量确定一个简正模式**。弄清了系统的所有简正模式，就弄清了系统的运动图象。

简正模式常可用图示法简单而形象地表示出来。

3. 微振动理论的公式化和矩阵表述

(见表二)

表　　二

(1) $V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$ $k_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha q_\beta}\right\|_{0\,0}=k_{\beta\alpha}$	$V=\frac{1}{2}[q]^T[K][q]$ $[q]=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_f\end{pmatrix}$, $[K]=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1f}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2f}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ k_{f1}&k_{f2}&\cdots&k_{ff}\end{pmatrix}$ (刚度矩阵)
(2) $T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ $m_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$	$T=\frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}]$ $[\dot{q}]=\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \dot{q}_f\end{pmatrix}$, $[M]=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}&\cdots&m_{1f}\\ m_{21}&m_{22}&\cdots&m_{2f}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ m_{f1}&m_{f2}&\cdots&m_{ff}\end{pmatrix}$ (惯量矩阵)
(3) $L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ $-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$	$L=\frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}]$ $-\frac{1}{2}[q]^T[K][q]$

续　　表

（4）将 L 代入拉氏方程，得 $\sum_{\beta=1}^{f}(m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+k_{\alpha\beta}q_\beta)=0$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$	$[M]\ddot{[q]}+[K][q]=0$
（5）将$q_\beta=a_\beta\sin(\omega t+\varepsilon)$代入上式得 $\sum_{\beta=1}^{f}(k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega^2)\ a_\beta=0$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$	$([K]-[M]\omega^2)\ [a]=0$ $[a]=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_f\end{pmatrix}$
（6）$\Delta(\omega^2)=\left\|\sum_{\alpha,\beta=1}^{f}(k_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta}\omega)\right\|=0$ $\Longrightarrow\omega_r^2$　　$(r=1, 2, \cdots, f)$	$\Delta(\omega^2)=\|[K]-[M]\omega^2\|=0$ $\Longrightarrow\omega_r^2$　　$(r=1, 2, \cdots, f)$ （久期方程）
（7）将ω_r^2代回（5）得$a_{\alpha r}$， $q_{\alpha r}=a_{\alpha r}\sin(\omega_r t+\varepsilon_r)$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$ $r=1, 2, \cdots, f$	$[a_r]=\begin{pmatrix}a_{1r}\\ a_{2r}\\ \vdots\\ a_{fr}\end{pmatrix}$ $[q_{\alpha r}]=[a_{\alpha r}]\sin(\omega_r t+\varepsilon_r)$

续　　表

（8）为使$a_{\alpha r}$确定下来，引入归一化条件： $\omega_r^2:\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta r}=1$ 不同本征值的本征向量满足正交性条件： $\omega_r^2\neq\omega_s^2:\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta s}=0$ 正交、归一化条件统一表为 $\sum_{\alpha,\beta=1}^{f} m_{\alpha\beta}a_{\alpha r}a_{\beta s}=\delta_{rs}$	$[a_r]^T[M][a_r]=1$ $[a_r]^T[M][a_s]=0$　　$r\neq s$ $[A]^T[M][A]=[1]$ $[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1f} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{f1} & a_{f2} & \cdots & a_{ff} \end{pmatrix}$（$\omega_1$ ω_2 … ω_f） $[A]$的各列代表$\omega_i(i=1, 2, \cdots, f)$对应的本征向量，各行为$q_i$向全部简正坐标$\eta_j(j=1, 2, \cdots, f)$展开的系数.
（9）通解 $q_\alpha=\sum_{r=1}^{f} c_r q_{\alpha r}=\sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r}\eta_r$ $\alpha=1, 2, \cdots, f$	$[q]=[a][\eta]$ $[\eta]=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_f\end{pmatrix}$　$\eta_r=\begin{cases} c_r\sin(\omega_r t+\varepsilon_r), & \text{当 } \omega_r^2>0 \\ At+B, & \text{当 } \omega_r^2=0 \end{cases}$

4．描述微振动的普通广义坐标和简正坐标

上述求解微振动问题的过程，从数学上看，就是作一坐标变换 $q_\alpha \to \eta_r (\alpha, r = 1, \cdots, f)$，变换方程就是通解表达式

$$q_\alpha = \sum_{r=1}^{f} a_{\alpha r}\eta_r \qquad 或 \qquad [q] = [A][\eta] \tag{6.33}$$

依线性代数理论，如两个二次型中，至少有一个是正定（恒正）的，总可以找到一个实的非奇异满秩代换，同时化两个二次型为平方和．前面将动能、势能分别化成了广义速度、广义坐标的二次齐次函数 正是这样的二次型．其中 T 为正定的．在坐标变换 $[q] = [A][\eta]$ 下，有

$$V = \frac{1}{2}[q]^T[k][q] = \frac{1}{2}[\eta]^T[A]^T[k][A][\eta]$$

令 $[\omega^2] = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \omega_f^2 \end{pmatrix}$，所以

$$V = \frac{1}{2}[\eta]^T[\omega^2][\eta]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\omega_r^2\eta_r^2 \tag{6.34}$$

$$T = \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[M][\dot{q}]$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{q}]^T[A]^T[M][A][\dot{\eta}]$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{\eta}]^T[\dot{\eta}]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\dot{\eta}_r^2 \tag{6.35}$$

二次型 T、V 同时化成了平方和，相应地，矩阵 $[M]$ 和 $[k]$ 同时对角化，即

$$[M]=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \tag{6.36}$$

$$[k]=\begin{pmatrix}\omega_1^2 & & 0\\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \omega_f^2\end{pmatrix}=[\omega^2] \tag{6.37}$$

拉氏函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}(\dot{\eta}_r)^2-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{f}\omega_r^2\eta_r^2 \tag{6.38}$$

将 L 代入拉氏方程，得

$$\begin{aligned}&\ddot{\eta}_1+\omega_1^2\eta_1=0\\ &\ddot{\eta}_2+\omega_2^2\eta_2=0\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ &\ddot{\eta}_f+\omega_f^2\eta_f=0\end{aligned} \tag{6.39}$$

由方程 (6.39) 可见，简正坐标的运动微分方程是互相独立的，其间没有耦合。方程

$$\ddot{\eta}_\sigma+\omega_\sigma^2\eta_\sigma=0 \qquad (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ f) \tag{6.40}$$

的解是：

$$\begin{aligned}&\eta_\sigma=A_\sigma\sin(\omega_\sigma t+\varepsilon_\sigma) && \text{当}\omega_\sigma^2>0\\ &\eta_\sigma=A_\sigma t+B_\sigma && \text{当}\omega_\sigma^2=0\\ &\eta_\sigma=A_\sigma\exp(\omega_\sigma t)+B_\sigma\exp(-\omega_\sigma t) && \text{当}\omega_\sigma^2<0\end{aligned}$$

这最后一种解是不存在的，因为可以证明，所有$\omega_r^2(r=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$及$a_{\sigma r}(\sigma,\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$都是实的，且$\omega_r^2$为正的实数。

例　题

6.8　试求解图 6.8 所示二度耦合谐振子的运动。

〔解〕　取平衡时两振子位置为原点的一维笛卡儿坐标x_1，

x_i为广义坐标。

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2$$

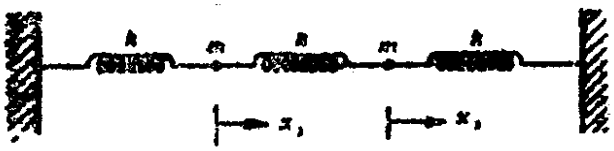


图 6.8

$$V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}kx_2^2$$

$$L=T-V$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2-\frac{1}{2}kx_1^2$$

$$-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_2^2 \qquad (1)$$

由$\Lambda_{x_1}L=0$，$\Lambda_{x_2}L=0$得

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1+k(2x_1-x_2)&=0\\ m\ddot{x}_2+k(2x_2-x_1)&=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

取如下形式特解：

$$x_1=A_1\sin(\omega t+\alpha)$$

$$x_2=A_2\sin(\omega t+\alpha)$$

则

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1&=-A_1\omega^2\sin(\omega t+\alpha)\\ \ddot{x}_2&=-A_2\omega^2\sin(\omega t+\alpha) \end{aligned} \qquad (3)$$

将（3）代入（2）中，消去$\sin(\omega t+\alpha)$，得

$$\begin{aligned} (2k-m\omega^2)A_1-kA_2&=0\\ -kA_1+(2k-m\omega^2)A_2&=0 \end{aligned} \qquad (4)$$

方程（4）有非零解的充分必要条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k\\ -k & 2k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

由此得

$$(2k-m\omega^2)^2-k^2=0$$

$$(2k-m\omega^2-k)(2k-m\omega^2+k)=0$$

$$\omega_1^2=\frac{3k}{m}$$

$$\omega_2^2=\frac{k}{m} \tag{5}$$

将 $\omega_1^2=\frac{3k}{m}$ 代入（4）式得

$$-kA_{11}-kA_{21}=0,\quad A_{11}=-A_{21}=A$$

将 $\omega_2^2=\frac{k}{m}$ 代入（4）式得

$$kA_{12}-kA_{22}=0,\quad A_{12}=A_{22}=B$$

当 $\omega^2=\omega_1^2$ 时

$$x_1=A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$$

$$x_2=-A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$$

当 $\omega^2=\omega_2^2$ 时

$$x_1=B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$x_2=B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

通解为

$$\begin{aligned} x_1&=A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ x_2&=-A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\end{aligned} \tag{6}$$

因为有两个二阶微分方程，这里有4个任意常数 A，B，α_1，α_2。

简正坐标

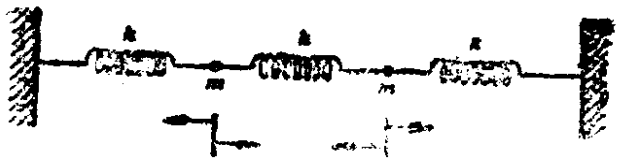
$$\eta_1=A\sin(\omega_1 t+\alpha_1),\quad \eta_2=B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$x_1=\eta_2+\eta_1,\quad x_2=\eta_2-\eta_1$$

$$\eta_1=\frac{1}{2}(x_1-x_2),\quad \eta_2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

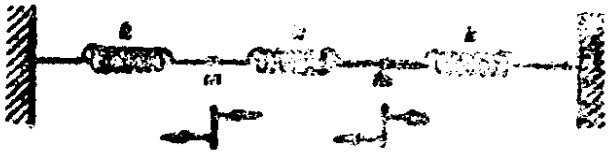
简正模式：

ω_1：$x_1 = -x_2$



反对称模式

ω_2：$x_1 = x_2$



对称模式

图 6.9

以上二度耦合谐振子运动的求解是严格的，未作任何近似，因而运动的解对微振动和有限振动都是适用的。

6.9 求图6.10所示二重摆在铅垂平面内作微振动的运动微分方程式。

〔解〕 自由度 $f=2$，取 θ_1，θ_2 为广义坐标。

体系的动能

$$T=\frac{1}{2}m_1[(\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_1)^2]+\frac{1}{2}m_2[(\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_2)^2]$$

势能

$$V=-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)$$

变换方程为

$$x_1=l_1\sin\theta_1,\quad y_1=l_1\cos\theta_1$$

$$x_2=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2$$

$$y_2=l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2$$

$$\dot{x}_1=l_1\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1$$

$$\dot{x}_2=l_1\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1+l_2\cos\theta_2\cdot\dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_1=-l_1\sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1$$

$$\dot{y}_2=-l_1\sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1-l_2\sin\theta_2\cdot\dot{\theta}_2$$

由于 $\theta_1\ll1$，$\theta_2\ll1$，故

$$\dot{x}_1=l_1\dot{\theta}_1,\quad \dot{x}_2=l_1\dot{\theta}_1+l_2\dot{\theta}_2$$

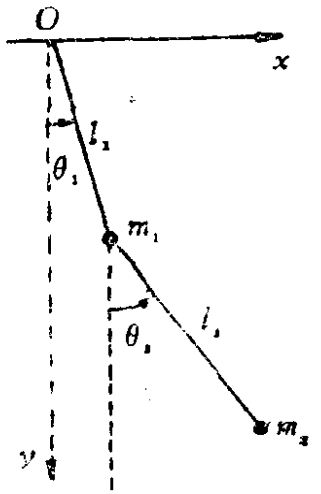


图 6.10

$$\dot{y}_1 = -l_1\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 = 0,\quad \dot{y}_2 = -l_1\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - l_2\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2$$

$$V = -m_1 g l_1\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) - m_2 g\left[l_1\left(1 - \frac{\theta_2}{2}\right) + l_2\left(1 - \frac{\theta_2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g\,l_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2\theta_2^2 + V_0$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2)^2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2 l_2\theta_2^2 \qquad (1)$$

由 $\Lambda_{\theta_1}L = 0$，$\Lambda_{\theta_2}L = 0$得

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2)g\theta_1 \qquad (2)$$

$$l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2 \qquad (3)$$

6.10 在上题中，令 $m_1 = m_2$，$l_1 = l_2$，求出简正频率及简正模式。

〔解〕 当 $m_1 = m_2 = m$，$l_2 = l_2 = l$ 时，运动微分方程（上题中（2），（3）式）简化为

$$\begin{aligned} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 &= 0 \\ l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

将试探解 $\theta_1 = a_1\sin(\omega t + \alpha)$，$\theta_2 = a_2\sin(\omega t + \alpha)$ 代入（1）式得

$$\begin{aligned} -2la_1\omega^2 - la_2\omega^2 + 2ga_1 &= 0 \\ -la_1\omega^2 - la_2\omega^2 + ga_2 &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)a_1 - \frac{1}{2}\omega^2 a_2 &= 0 \\ -\omega^2 a_1 + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)a_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

此方程组有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l}-\omega^2 & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l}-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)^2-\frac{1}{2}\omega^4=0$$

$$\left(\frac{g}{l}-\omega^2-\frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{g}{l}-\omega^2+\frac{\omega^2}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$\omega_1^2=(2+\sqrt{2})\frac{g}{l},\quad \omega_2^2=(2-\sqrt{2})\frac{g}{l} \qquad (3)$$

将（3）中本征值分别代入（2）式，得

$$a_{21}=-\frac{2(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}a_{11}=-\sqrt{2}a_{11}$$

$$a_{22}=-\frac{2(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}a_{12}=\sqrt{2}a_{12}$$

故

$$\theta_1=a_{11}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+a_{12}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$\theta_2=-\sqrt{2}a_{21}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+\sqrt{2}a_{22}\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

简正模式：

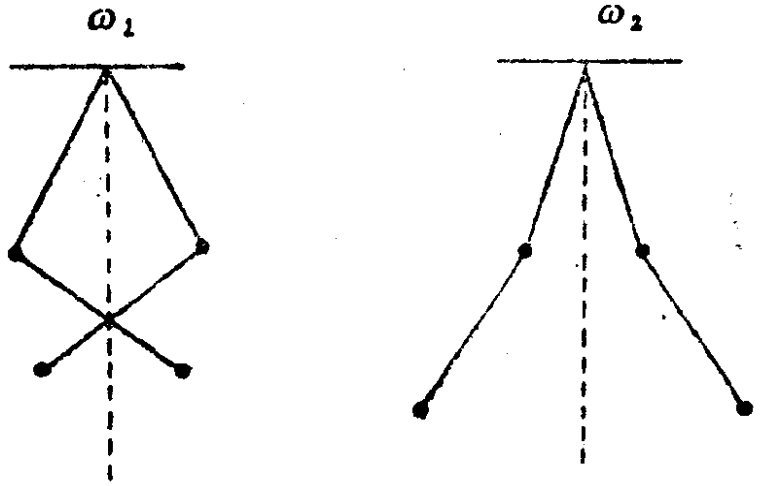


图 6.11

6.11　两个质点，质量分别为 $2m$ 和 m，按图6.12所示的方式悬挂在固定点．弹簧的弹性系数均为 k，只考虑垂直方向的振动．求这系统的简正频率，描述每一个简正振动．将上面一个质量为 $2m$ 的质点缓缓地从平衡位置拉下一个距离 l，然后释手，令系统进行自由振动，求下面质量为 m 的质点此后的运动．

〔解〕　取平衡时两质点所在位置为坐标原点，x_1，x_2 为广义坐标，则

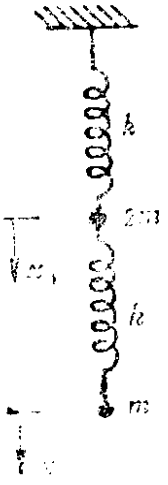


图　6.12

$$T=\frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

两弹簧的静伸长分别为：

$$s_1=\frac{2m+m}{k}g=\frac{3m}{k}g \qquad \text{（上面弹簧）}$$

$$s_2=\frac{m}{k}g \qquad \text{（下面弹簧）}$$

$$V=\frac{1}{2}k(x_1+s_1)^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1+s_2)^2$$

$$-\frac{1}{2}ks_1^2-\frac{1}{2}ks_2^2-2mgx_1-mgx_2$$

$$=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+kx_1s_1-kx_1s_2-2mgx_1$$

$$=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

$$L=m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{k}{2}(x_2-x_1)^2 \qquad (1)$$

代入方程 $\Lambda_{x_1}L=0$，$\Lambda_{x_2}L=0$ 得

$$2m\ddot{x}_1+2kx_1-kx_2=0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{x}_2-kx_1+kx_2=0$$

将试探解

$$x_1 = A_1\sin(\omega t+\alpha)$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega t+\alpha)$$

代入（2），得

$$\begin{aligned}(-2m\omega^2+2k)A_1 - kA_2 &= 0\\ -kA_1-(m\omega^2-k)A_2 &= 0\end{aligned}\qquad (3)$$

久期方程为

$$\begin{vmatrix} 2m\omega^2-2k & k\\ k & m\omega^2-k\end{vmatrix} = 0$$

$$2m^2\omega^4 - 4m\omega^2 k + k^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{4mk\pm\sqrt{(4mk)^2-8m^2k^2}}{4m^2} = \frac{4mk\pm 2\sqrt{2}mk}{4m^2}$$

$$= \left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{k}{m}$$

将 $\omega_1^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\dfrac{k}{m}$ 代入（3）式得

$$[-(2+\sqrt{2})k+2k]A_{11} - kA_{21} = 0$$
$$A_{21} = -\sqrt{2}A_{11} = -\sqrt{2}A$$

将 $\omega_2^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\dfrac{k}{m}$ 代入（3）式得

$$[-(2-\sqrt{2})k+2k]A_{12} - kA_{22} = 0,\ A_{22} = \sqrt{2}A_{12} = \sqrt{2}B$$

因此

$$\begin{aligned}x_1 &= A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ x_2 &= -\sqrt{2}A\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+\sqrt{2}B\sin(\omega_2 t+\alpha_2)\\ \dot{x}_1 &= A\omega_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+B\omega_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{2}A\omega_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\sqrt{2}B\omega_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\end{aligned}\qquad (5)$$

$t=0$时，$\dot{x}_1=0$，$x_1=l$，$\dot{x}_2=0$，$x_2=l$，所以

$$\begin{cases} l = A\sin\alpha_1+B\sin\alpha_2\\ l = -\sqrt{2}A\sin\alpha_1+\sqrt{2}B\sin\alpha_2\\ 0 = A\omega_1\cos\alpha_1+B\omega_2\cos\alpha_2\\ 0 = -\sqrt{2}A\omega_1\cos\alpha_1+\sqrt{2}B\omega_2\cos\alpha_2\end{cases}\qquad (6)$$

由前两式有

$$(\sqrt{2}+1)l=2\sqrt{2}B\sin a_2$$

再由后两式得

$$\cos a_2=0,\quad a_2=\pi/2,\quad B=\frac{2+\sqrt{2}}{4}l$$

$$\cos a_1=0,\quad a_1=\pi/2,\quad A=\frac{2-\sqrt{2}}{4}l$$

所以

$$x_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4}l\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2+\sqrt{2}}{4}l\sin\left(\omega_2 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l\sin\left(\omega_2 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

通解为

$$x_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)l\cos\omega_1 t+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)l\cos\omega_2 t$$

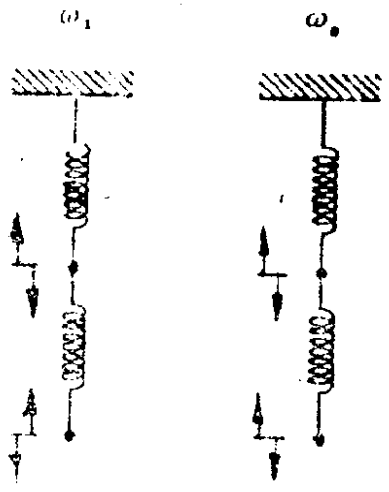


图 6.13

$$x_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l\cos\omega_1 t+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l\cos\omega_2 t$$

简正模式见图6.13.

6.12 一质量为 M，长度为 $2l$ 的均匀棒，其一端通过一力常数为 k 的弹簧悬挂起来. 该棒只能在一个竖直平面内摆动，而弹簧则因约束

只能在铅垂方向运动。试以拉格朗日方法建立运动微分方程。

〔解〕 设弹簧自然长x_0，棒与铅直方向成θ角。$f=2$，取x，θ为广义坐标。棒心C的坐标为

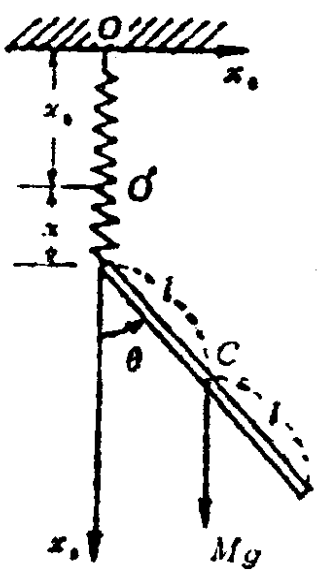


图 6.14

$$x_1 = l\sin\theta,\quad x_2 = x + l\cos\theta$$

动能

$$T_1 = \frac{1}{2}M\left\{\left[\frac{d}{dt}(x+l\cos\theta)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(l\sin\theta)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ml^2(\dot{\theta})^2 - Ml\ddot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T_2 = \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{6}Ml^2(\dot{\theta})^2$$

$$V \doteq -Mg(x+l\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{2}{3}Ml^2(\dot{\theta})^2 - Ml\ddot{x}\dot{\theta}\sin\theta + Mg(x+l\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2$$

代入拉氏方程$\Lambda_x L=0$与$\Lambda_\theta L=0$得

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} - Ml\dot{\theta}\sin\theta) - (Mg - kx) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}Ml^2\dot{\theta} - Ml\dot{x}\sin\theta\right) - (-Ml\ddot{x}\theta\cos\theta - Mgl\sin\theta) = 0$$

化简得

$$M\ddot{x}+kx=Mg+Ml[\ddot{\theta}\sin\theta+(\dot{\theta})^2\cos\theta]$$

$$\frac{3}{4}l\ddot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta+g\sin\theta=0$$

附注1　以上各二自由度系统微振动问题，是根据“要点”中所列用拉氏方程处理微振动问题的一般程序求解的。对于自由度 $f\geqslant 3$ 的情形，这样做就显得累赘，最好采用矩阵表述，可以使问题处理得异常简洁，免去许多不必要的步骤，而且解题方法更规范化。

以下通过一些例题，说明用矩阵表述的公式化方法。

6.13　讨论图6.15所示平行摆在铅直平面内的微振动。

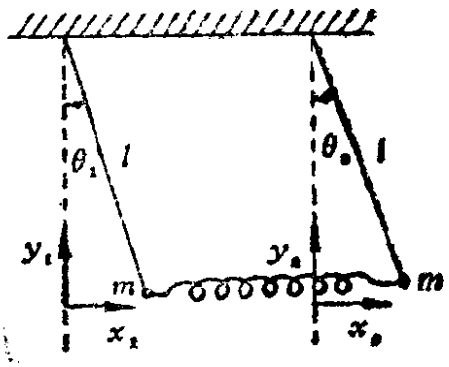


图　6.15

〔解〕　$f=2$，选 θ_1，θ_2 为广义坐标。

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_1)^2]+\frac{1}{2}m[(\dot{x}_2)^2+(\dot{y}_2)^2]$$

$$=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2]+\frac{1}{2}m[(\dot{y}_1)^2+(\dot{y}_2)^2]$$

$$V=mg(y_1+y_2)+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

$$x_1=l\sin\theta_1,\quad x_2=l\sin\theta_2$$

$$y_1=l(1-\cos\theta_1),\qquad y_2=l(1-\cos\theta_2)$$

$$\dot{x}_1=l\cos\theta_1\cdot\dot{\theta}_1,\qquad \dot{x}_2=l\cos\theta_2\cdot\dot{\theta}_2$$

$$\dot{y}_1=l\sin\theta_1\cdot\dot{\theta}_1,\qquad \dot{y}_2=l\sin\theta_2\cdot\dot{\theta}_2$$

所以

$$T=\frac{1}{2}ml^2[\cos^2\theta_1\cdot(\dot{\theta}_1)^2+\cos^2\theta_2\cdot(\dot{\theta}_2)^2]$$

$$+\frac{1}{2}ml^2[\sin^2\theta_1\cdot(\dot{\theta}_1)^2+\sin^2\theta_2\cdot(\dot{\theta}_2)^2]$$

$$=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_2)^2 \qquad (\theta_1\ll 1,\ \theta_2\ll 1)$$

$$=\frac{1}{2}ml^2[(\dot{\theta}_1)^2+(\dot{\theta}_2)^2]$$

$$V=mgl\left[\left(1-1+\frac{\theta_1^2}{2}\right)+\left(1-1+\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2$$

$$=\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2)+\frac{1}{2}kl^2(\theta_1^2+\theta_2^2)-kl^2\theta_1\theta_2$$

$$2V=(\theta_1\theta_2)\begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

$$[K]=\begin{pmatrix} mgl+kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2 \end{pmatrix}$$

$$2T=(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}$$

$$[M]=\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}$$

$$\|[K]-[M]\omega^2\|=0$$

$$\begin{vmatrix} mgl+kl^2-ml^2\omega^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2-ml^2\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$(mgl+kl^2-ml^2\omega^2)^2-(kl^2)^2=0$$

$$mgl+kl^2-ml^2\omega^2=kl^2, \qquad \omega_1^2=\frac{g}{l}$$

$$mgl+kl^2-ml^2\omega^2=-kl^2, \qquad \omega_2^2=\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}$$

$$\omega_1^2=\frac{g}{l}:$$

$$\begin{pmatrix} mgl+kl^2-ml^2\frac{g}{l} & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2-ml^2\frac{g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a_{11}=a_{21}=\alpha,\qquad [a_1]=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2=\frac{g}{l}-\frac{2k}{m}:$$

$$\begin{pmatrix} mgl+kl^2-ml^2\left(\frac{g}{l}-\frac{2k}{m}\right) & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl+kl^2-ml^2\left(\frac{g}{l}-\frac{2k}{m}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$=0$$

$$\begin{pmatrix} -kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & -kl^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow a_{12}=-a_{22}=\beta,\qquad [a_2]=\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

所以

$$[A]=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

由正交归一化条件：$[A]^T[M][A]=[1]$有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha ml^2 & \beta ml^2 \\ \alpha ml^2 & -\beta ml^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2 ml^2 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 ml^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此得

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2ml^2}} = \beta$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} & \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2ml^2}} \end{pmatrix}$$

$$[q] = [A][\eta]$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2ml}} & \frac{1}{\sqrt{2ml}} \\ \frac{1}{\sqrt{2ml}} & -\frac{1}{\sqrt{2ml}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$\eta_2 = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} (\eta_1 + \eta_2)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} (\eta_1 - \eta_2)$$

简正模式：

ω_1 $\theta_1 = \theta_2$ （对称模式）　　ω_2 $\theta_1 = -\theta_2$ （反对称模式）

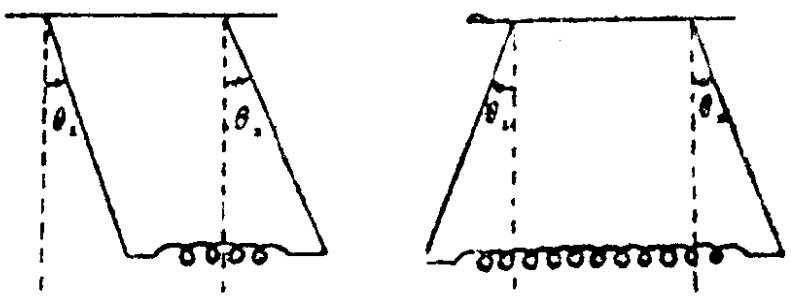


图 6.16

附注2　在上例中，我们采取了比较简单的求惯量矩阵〔M〕和刚度矩阵〔K〕的方法，即先根据微振动条件写出体系的动能、势能的表达式（它们分别是广义速度、广义坐标的二次齐次函数），把它们表成

$$2V=[q]^T[K][q]$$

$$2T=[\dot{q}]^T[M][\dot{q}]$$

直接写出〔K〕、〔M〕的矩阵元，从而得出整个矩阵。很多情形下，都可以这样做。尤其〔M〕矩阵，常常可以这样简单求出。至于刚度矩阵，也可以根据定义来求，即

$$k_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{\substack{q_\alpha=0\\ q_\beta=0}}\left(=\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\Big|_{0\,0}\right)$$

（见例题6.14）

6.14　从定义出发，写出图6.10所示二重摆的刚度矩阵。

〔解〕　$V=-m_1gy_1-m_2gy_2$

$$=-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)$$

〔K〕的各元素为：

$$k_{11}=\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2}\Big|_{\substack{\theta_1=0\\ \theta_2=0}}=m_1gl_1+m_2gl_1=(m_1+m_2)gl_1$$

$$k_{22}=\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2}\Big|_{\substack{\theta_1=0\\ \theta_2=0}}=m_2gl_2$$

$$k_{12}=k_{21}=\frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\Big|_{\substack{\theta_1=0\\ \theta_2=0}}=0$$

所以

$$[K]=\begin{pmatrix}(m_1+m_2)gl_1 & 0\\ 0 & m_2gl_2\end{pmatrix}$$

6.15　求解线性对称三原子分子YX_2（如CO_2）的微振动，设中心原子与两端原子间存在弹性键，并设弹性系数为k。两端原子间的耦合忽略。

〔解〕 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2+\frac{1}{2}M(\dot{x}_2)^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_3)^2$

$$2T=(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)\begin{pmatrix}m&0&0\\0&M&0\\0&0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}$$

$$[M]=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&M&0\\0&0&m\end{pmatrix}\quad(1)$$

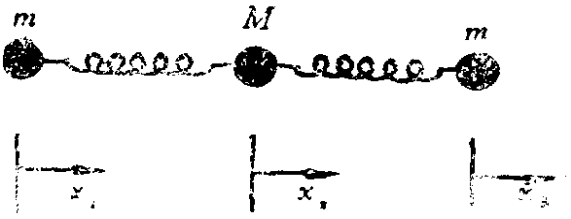


图 6.17

$$V=\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2$$

$$2V=k(x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3)$$

$$[K]=\begin{pmatrix}k&-k&0\\-k&2k&-k\\0&-k&k\end{pmatrix}\quad(2)$$

久期方程 $\|[K]-[M]\omega^2\|=0$

$$\begin{vmatrix}k-m\omega^2&-k&0\\-k&2k-M\omega^2&-k\\0&-k&k-m\omega^2\end{vmatrix}=0\quad(3)$$

$$(k-m\omega^2)^2(2k-M\omega^2)-2k^2(k-m\omega^2)=0$$

$$(k-m\omega^2)[k(2m+M)-Mm\omega^2]\omega^2=0$$

由此得 $\omega_1=0$，代表分子整体平动。

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_3=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1+\frac{2m}{M}\right)\quad(4)$$

由 $([K]-[M]\omega^2)[a]=0$ 有

$$\begin{pmatrix}k-m\omega_2&-k&0\\-k&2k-M\omega^2&-k\\0&-k&k-m\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=0\quad(5)$$

将 $\omega_1^2=0$代入（5）得

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a_{11}=a_{21}=a_{31}=a$$

所以

$$[a_1]=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

将 $\omega_2^2=\frac{k}{m}$代入（5）得

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 2k-\frac{Mk}{m} & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{22}=0, \\ a_{12}=-a_{32}=\beta \end{matrix}$$

所以

$$[a_2]=\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

将 $\omega_3^2=\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)$代入（5）得

$$\begin{pmatrix} -\frac{2mk}{M} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & -\frac{2mk}{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{matrix} a_{23}=-\frac{2m}{M}a_{13} \\ a_{13}=a_{33}=\gamma \end{matrix}$$

所以

$$[a_3]=\begin{pmatrix} \gamma \\ -\frac{2m}{M}\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

由此得

$$[A]=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & -\frac{2m}{M}\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{pmatrix}$$

由正交归一化条件 $[A]^T[M][A]=[1]$有

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \beta & 0 & -\beta\\ \gamma & -\frac{2m}{M}\gamma & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha & 0 & -\frac{2m}{M}\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha^2(2m+M) & 0 & 0\\ 0 & 2\beta^2 m & 0\\ 0 & 0 & 2\gamma^2 m+\frac{4m^2}{M}\gamma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

故

$$\alpha=\frac{1}{(2m+M)^{1/2}},\qquad \beta=\frac{1}{(2m)^{1/2}}$$

$$\gamma=\frac{1}{\left[2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)\right]^{1/2}}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}\\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & \frac{-2m/M}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}\\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}$$

其中 $\eta_1=a+bt$, $\eta_2=c_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$, $\eta_3=c_3\sin(\omega_3 t+\alpha_3)$

a, b, c_2, a_2, c_3, a_3 由初始条件定.

简正模式:

ω_1: $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$  (a)

ω_2: $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$  (b)

ω_3: $\begin{pmatrix} \gamma \\ -\frac{2m}{M}\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$  (c)

图 6.18

附注 3 如果我们讨论的体系是封闭系，即有相互作用但不处于外场中的质点系，那么，并不是所有的自由度都有振动的性质，除了在它平衡位形附近的振动外，体系的整体还可以平动和转动. 在上例的三原子分子的运动中，我们遇到了$\omega_1 = 0$的情形，它的本征向量是 $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$，即 $a_{11} = a_{21} = a_{31}$的情形. 这种角频率为零即周期无穷大的运动，并不是什么振动，对三原子分子体系，它代表质心平动，注意到封闭系质心动量守恒，它的位移只能是$a + bt$ (a, b是常数). 在下面的问题中，我们会看到，$\omega = 0$所决定的“简正模式”，不仅可以代表整体平动，还可以代表整体转动，转动的角位移也可以用$a + bt$表示.

6.16 质量均为m的三个质点，以三个弹性系数皆为k的同样的弹簧连接，约束在水平、光滑的固定圆周上运动. 求解系统的微振动.

〔解〕 $T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2+(\dot{x}_3)^2]$

$$V=\frac{1}{2}k[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2+(x_1-x_3)^2]$$

$$=\frac{1}{2}k[2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1]$$

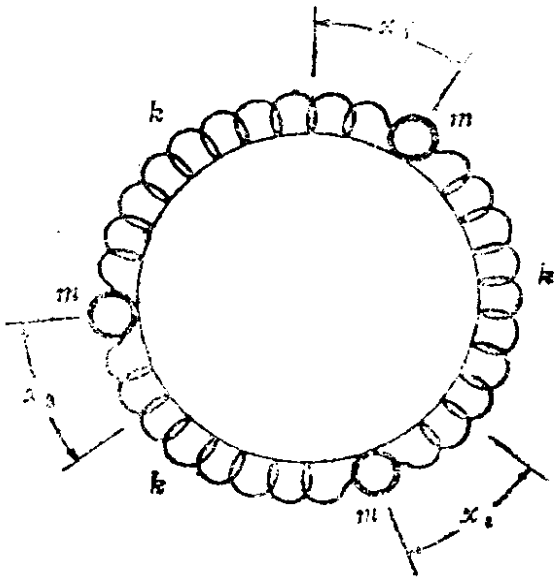


图 6.19

令 $m=1$, $k=1$, 则

$$[M]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$[K]=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\omega^2&-1&-1\\-1&2-\omega^2&-1\\-1&-1&2-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\omega^2)^3-2-(2-\omega^2)-2(2-\omega^2)=0$$

$$(2-\omega^2)^3-8+3\omega^2=0$$

$$\omega^2(\omega^4-6\omega^2+9)=0$$

由此得

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=3,\ \omega_3^2=3 \qquad \left(\text{单位}:\ \frac{k}{m}\right)$$

将 ω_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ 代入 $([K]-[M]\omega^2)[a]=0$:

$$\omega_1^2=0:\ \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}=0\Rightarrow \begin{matrix}a_{11}=a_{21}\\=a_{31}=a\end{matrix}$$

$$[a_1]=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2=3:\quad\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}=0\Rightarrow a_{12}+a_{22}+a_{32}=0$$

因 $\omega_2^2=\omega_3^2=3$（简并），可自由选择相关本征向量的一个分量值。例如，令$a_{22}=0$，则$a_{12}=-a_{32}$

$$[a_2]=\begin{pmatrix}\beta\\0\\-\beta\end{pmatrix}$$

为确定$\boldsymbol{a}_3$，利用正交性条件

$$[a_r]^T[M][a_s]=0\qquad(r\neq s)$$

$$[a_2]^T[M][a_3]=0$$

$$(\beta,\ 0,\ -\beta)\begin{pmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=0$$

$$(\beta,\ 0,\ -\beta)\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad a_{13}=a_{33}=\gamma$$

与$\boldsymbol{a}_2$情形相同，$a_{13}+a_{23}+a_{33}=0$，所以

$$a_{23}=-(a_{13}+a_{33})=-2\gamma$$

$$[a_3]=\begin{pmatrix}\gamma\\-2\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$$

$$[A]=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&0&-2\gamma\\\alpha&-\beta&\gamma\end{pmatrix}$$

利用正交归一条件有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & 0 & -\beta \\ \gamma & -2\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & -2\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 m & 0 \\ 0 & 0 & 6\gamma^2 m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3\alpha^2 m = 1, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3m}}$$

$$3\beta^2 m = 1, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{3m}}$$

$$6\gamma^2 m = 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{6m}}$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

式中 $\eta_1 = a + bt$ （整体匀速率转动）

$\eta_2 = c_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

$\eta_3 = c_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3)$

简正模式：

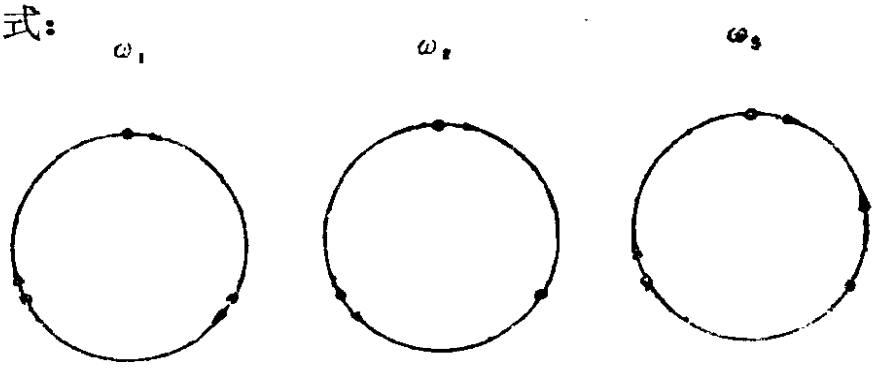


图 6.20

附注 4　本题中遇到两个问题：一是 $\omega_1^2=0$，这个简正频率对应的简正模式表示三个质点组成的系统整体绕圆心的转动，这与前题中的整体平动类似，以 $a+bt$ 表示这个简正坐标。第二个问题是重根（简并）。处理这个问题的方法，是任意选择两相关本征向量的一个分量值，定下一个本征向量（如果是三重根，就要任选两个这样的分量值，依此类推），然后，运用正交性条件，定下另外一个本征向量。

6.17　负载弦由长为4a的弹性绳等距地连结 3 个质量均为 m 的质点构成，求体系的横向（与绳垂直方向）微振动。

〔解〕　设质点横向位移分别为 x_1，x_2，x_3。

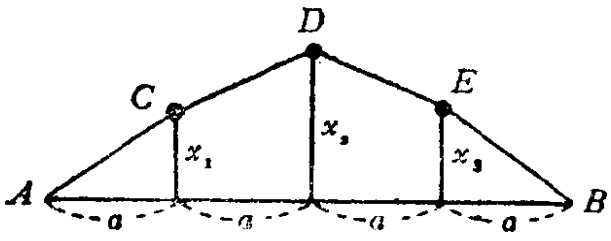


图　6.21

$$AC=(a^2+x_1^2)^{1/2}$$

$$=a\left(1+\frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2} \qquad x_1\ll a$$

$$=a\left(1+\frac{x_1^2}{2a^2}\right)$$

设绳中张力 f 不变，则 AC 中弹性势能为

$$V_1=(AC-a)f=\frac{1}{2}x_1^2\cdot\frac{f}{a}$$

$$CD=[a^2+(x_2-x_1)^2]^{1/2}=a\left[1+\frac{(x_2-x_1)^2}{2a^2}\right]$$

$$=a+\frac{(x_2-x_1)^2}{2a}$$

$$V_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2\frac{f}{a}$$

同样，DE的势能

$$V_3=\frac{1}{2}(x_3-x_2)^2\frac{f}{a}$$

ED 势能

$$V_4=\frac{1}{2}x_3^2\frac{f}{a}$$

系统的拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}\frac{f}{a}[x_1^2+(x_2-x_1)^2$$

$$+(x_3-x_2)^2+x_3^2]$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}k[2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-x_1x_2$$

$$-x_2x_1-x_3x_2-x_2x_3] \quad \left(k=\frac{f}{a}\right)$$

令 $m=1$，$k=1$。则

$$[M]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad [K]=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\|[K]-[M]\omega^2\|=0$$

$$\begin{vmatrix}2-\omega^2&-1&0\\-1&2-\omega^2&-1\\0&-1&2-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\omega^2)^3-2(2-\omega^2)=0$$

$$2-\omega^2=\pm\sqrt{2},\qquad 2-\omega^2=0$$

从而得

$$\omega_1^2=2-\sqrt{2},\ \omega_2^2=2,\ \omega_3^2=2+\sqrt{2}\quad \left(\text{单位：}\frac{k}{m}\right)$$

将 ω_1^2 代入

$$\begin{pmatrix}2-\omega^2&-1&0\\-1&2-\omega^2&-1\\0&-1&2-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=0$$

$\omega_1^2=2-\sqrt{2}$，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad a_{21} = \sqrt{2}a_{11}, \quad a_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{21} = a_{11}$$

$$[a_1] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\omega_2^2 = 2$：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad a_{22} = 0, \quad a_{12} = -a_{32}$$

$$[a_2] = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$\omega_3^2 = 2 + \sqrt{2}$：

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad a_{23} = -\sqrt{2}a_{13}, \quad a_{23} = -\sqrt{2}a_{33}$$

$$[a_3] = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\sqrt{2}\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \sqrt{2}\alpha & 0 & -\sqrt{2}\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

利用正交归一条件有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{2}\alpha & \alpha \\ \beta & 0 & -\beta \\ \gamma & -\sqrt{2}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \sqrt{2}\alpha & 0 & -\sqrt{2}\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 m & 0 \\ 0 & 0 & 4\gamma^2 m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$\eta_i = c_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

简正模式：

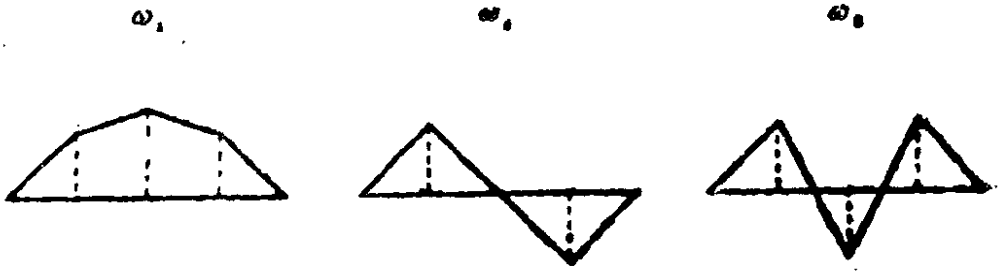


图 6.22

习　题

6.1　求关于如下势能的线性谐振动（LHO）近似及质点在平衡点附近振动的角频率。

（1）$V(x)=ax^{-2}+bx^2$

（2）$V(x)=\frac{A}{x}+Bx$

（3）$V(x)=A\sin bx$

（4）$V(x)=\frac{A}{x}+Bx^3$

（5）$V(x)=\frac{Ax^2}{x^2+a^2}$

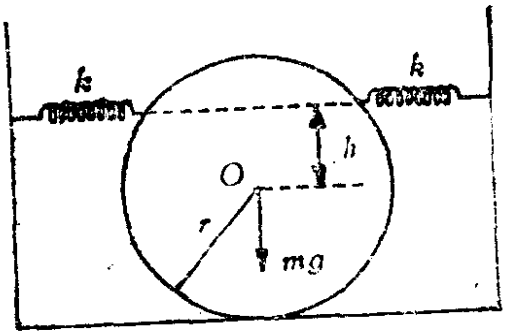
（6）$V(x)=A\mathrm{ch}bx-B\mathrm{sh}bx$　$(A>B)$

答：（1）$V_{\mathrm{LHO}}=4bx^2$，$k=8b$。

（4）$V_{\mathrm{LHO}}=6B\left(\frac{A}{3B}\right)^{1/4}x^2$，$k=12B\left(\frac{A}{3B}\right)^{1/4}$

6.2　求出下列系统在平衡位置附近作微振动的周期。（运动都是平面的）

（1）圆盘沿水平面作纯滚动，盘面铅直。



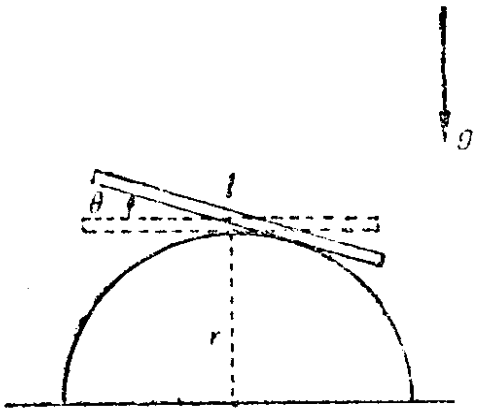
6.2 (1) 题图

答：$T=\frac{\pi}{\left(1+\frac{h}{r}\right)}\sqrt{\frac{3m}{k}}$

（2）半圆柱放在粗糙水平面上。（见5.16(5)题图）

答：$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{9}{8}\pi-2\right)}$

（3）均质杆质量为 M，长为 l，置于粗糙半圆柱上。

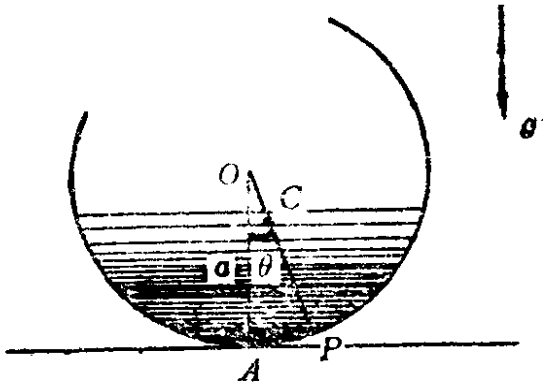


6.2（3）题图

答：$T=\dfrac{\pi l}{\sqrt{3gr}}$

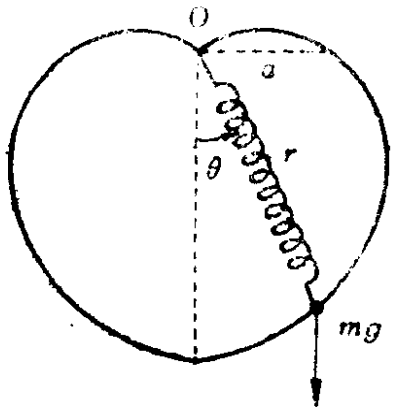
（4）半径为 a 的部分薄球壳，质量为 M，重心为 C。$OC=h$。关于平衡点 P 的转动惯量为 I。如内盛质量为 m 的液体，不计容器与液体的摩擦力。

答：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{I+ma^2}{Mgh}}$



6.2（4）题图

（5）质点沿心脏线运动，心脏线方程为 $r=a(1+\cos\theta)$。质点以弹簧系住，弹簧另一端固定于 O 点，弹簧原长 l，弹性系数为 k，不计摩擦力。



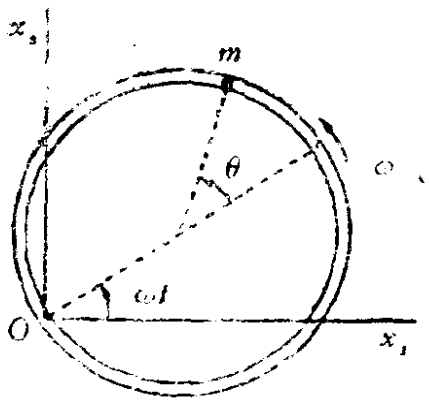
6.2（5）题图

答：当 $ka<3mg$ 时

$$T=4\pi\sqrt{\frac{ma}{3mg-ka}}$$

其余从略。

（6）空心圆环水平放置，并绕环上点 O 以常角速 ω 转



6.2 (6) 题图

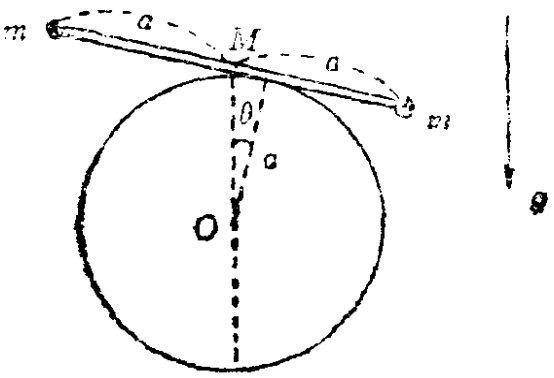
动，周期为 T，O 点固定，环内有一质点，质量为 m，作无摩擦的运动。

答：$T' = T$

（7）均质杆置于光滑圆柱上，两端各有一质点，平衡时杆心与圆柱最高点重合。

答：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a(M+6m)}{g(3M+6m)}}.$$



6.2 (7) 题图

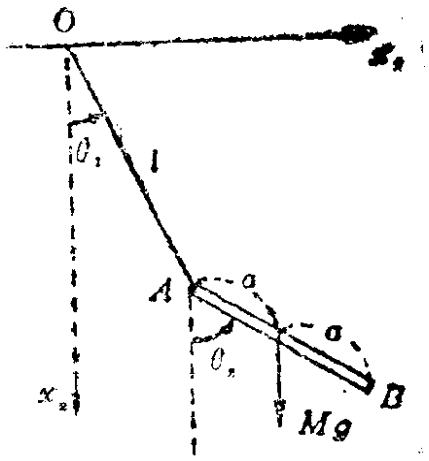
（8）质量为 m 的质点在水平面的上空受斥力作用而处于悬浮状态。斥力的大小与质点到这平面的距离成反比，比例系数为 λ，求质点在平衡位置附近作竖向微振动的周期。

答：$T = \dfrac{2\pi}{g}\sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}$.

（9）一均质圆锥体，高度为 H，比重为 γ_1，浸在比重为 γ_2 的液体中，$\gamma_2 > \gamma_1$。圆锥顶点浮在液面之上而底面与液面平行。不计液体的阻力，求圆锥竖向微振动的周期。

答：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{H}{3g}} \cdot \dfrac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt[6]{\gamma_2(\gamma_2-\gamma_1)^2}}$

6.3 求解下列系统的微振动（求出系统的简正频率和对应的简正模式，并对物理状况进行描述）。从（1）题到（9）题，运动皆为平面的。



6.3 (1) 题图

（1）长为 l 的不可伸长的绳悬于定点 O，下端挂一长$2a$，质量为M的杆。

答：

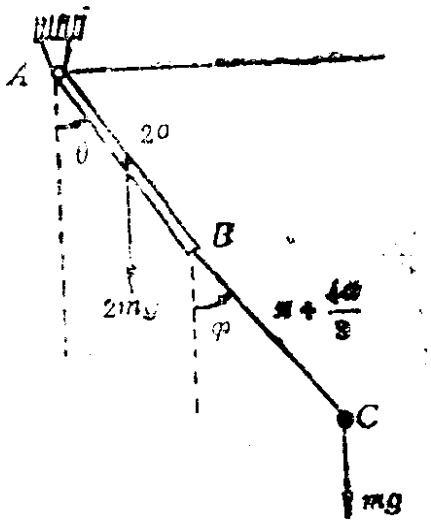
$$\omega^2=\frac{3l+4a\pm\sqrt{(3l+4a)^2-12al}}{2al}g$$

（2）AB是长为$2a$，质量为$2m$的均质杆，BC 为弹性绳。稳定平衡时，BC 长 $4a/3$，ε 为伸长量。C 处为一质量为 m的质点。

答：$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{\varepsilon}}$

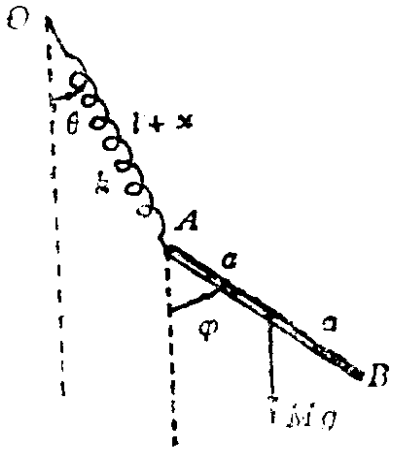
$\omega_2=\sqrt{\dfrac{3g}{8a}}$

$\omega_3=\sqrt{\dfrac{3g}{a}}$



6.3 (2) 题图

（3）O 点固定，OA为弹簧，自然长 l，弹性系数为 k，质量不计。AB为一均质棒，棒长$2a$，质量为 M。



6.3 (3) 题图

答：

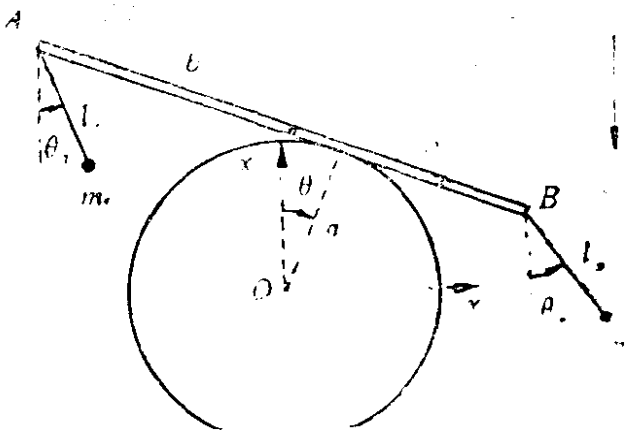
$$\omega^2=\{3l+4a\pm\sqrt{9l^2+12al+16a^2}\}\cdot(g/2al)$$

（4）均质杆两端各悬一单摆，置于粗糙圆柱上，平衡时杆心与圆柱最高点重合。

答：$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{l_1}}$

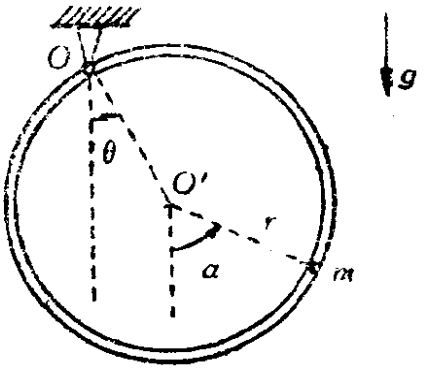
$\omega_2=\sqrt{\dfrac{g}{l_2}}$

$\omega_3=\sqrt{\dfrac{(2m+M)ag}{(2m+M/3)b^2}}$



6.3 (4) 题图

（5）圆环可绕过定点O的水平轴自由转动，质点m在圆环内无摩擦地运动。



6.3 (5) 题图

答：$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{2r}}$

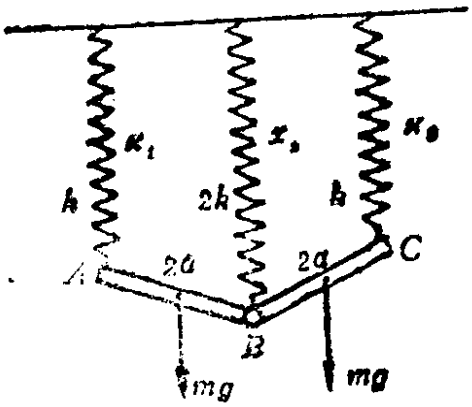
$\omega_2=\sqrt{\dfrac{2g}{r}}$

（6）两杆相同，铰接于B，以三根相同的弹簧对称地悬挂。平衡时A，B，C同高。

答：$\omega_1=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$\omega_2=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

$\omega_3=\sqrt{\dfrac{6k}{m}}$



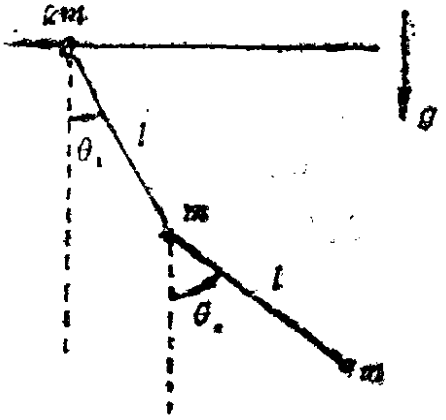
6.3 (6) 题图

（7）双摆上端系在质量为2m的小环上，小环可沿光滑水平杆滑动。

答：$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}$

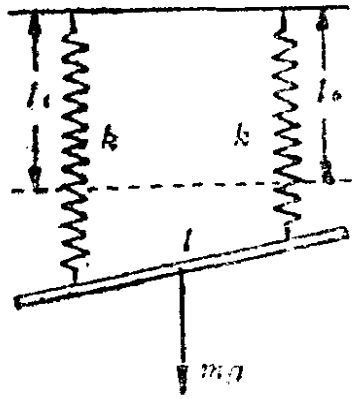
$\omega_2=2\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\omega_3=0$



6.3（7）题图

（8）两弹簧自然长均为l_0，无重量，弹性系数均为k，下端悬细棒，质量为m，长为l，因两弹簧拉伸情况不同而运动。

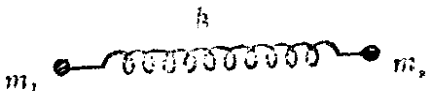


6.3（8）题图

答：$\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}$

$\omega_2=\sqrt{\frac{6k}{m}}$

（9）质量各为m_1，m_2的双原子分子，平衡时原子间距离为a，相互作用力为准弹性的，弹性系数为k。



6.3（9）题图

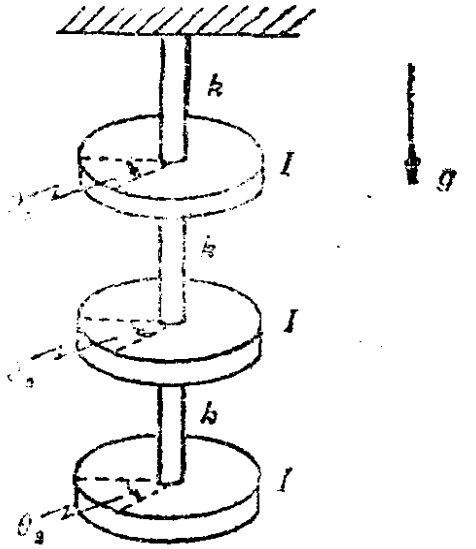
答：$\omega_1=0$，$\omega_2=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}k}$

（10）三根轻棒，扭转系数均为k，连接三个相同的圆盘，每个圆盘对各自的垂直于盘面的中心轴的转动惯量为I。

（提示：势能为

$$V=\frac{1}{2}k\theta_1^2+\frac{1}{2}k(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}k(\theta_3-\theta_2)^2$$

）



6.3（10）题图

答：$\omega_1 = 0.445\sqrt{k/I}$ ，$\omega_2 = 1.247\sqrt{k/I}$

$\omega_3 = 1.801\sqrt{k/I}$

6.4 求系统的简正坐标，此系统的拉氏函数为

（1） $L = \frac{1}{2}[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + axy$

（2） $L = \frac{1}{2}[m_1(\dot{x})^2 + m_2(\dot{y})^2] + \beta\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

答：（1） $q_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi$，$q_2 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

$\mathrm{ctg}(2\varphi) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)/(2a)$。

第七章　中心力场中的运动

中心力是经典力学中最为基本和重要的力之一。对中心力的研究，也是物理学中最重要的问题之一。在物理学史上，研究中心力曾使人类对自然界的认识发生过两次巨大的飞跃，即：在宏观尺度上对天体运动的研究，使人们认识了万有引力和天体运动规律；在微观领域中对带电粒子被原子核散射的研究，使人们认识了库仑静电力，并形成了原子的有核模型，从而打开了微观世界的大门。迄今为止，这两种中心力仍然是人们认识得最清楚的力。对中心力场中物体运动规律的探索，在许多科学技术领域仍具有重要的现实意义，如航天器的轨道控制就是中心力理论应用的一个重要方面。在近代物理中，经典的二体中心力对处理微观世界的问题，在定性的意义上仍然有用，但作精确的描述则不够了，必须让位于量子理论。

§1　中心力场中运动的一般特征

理论要点

1．中心力

狭义的中心力，是指这样的力：它总是指向或离开一**固定中心**，而力的大小只是到固定中心（原点）距离的函数。

一个系统由两个物体组成，二物体仅在沿两者中心连线的相互作用力的影响下运动，则该系统的运动也称为在中心力场中的运动，**或称中心力运动**；这个沿两物体中心连线的力，称为**广义的中心力，或中心力**，它的大小仅是两中心距离的函数。下面讨论的中心力，是广义中心力，狭义中心力是它的特

殊情形。

用球坐标可将中心力表示为

$$\boldsymbol{F}(r)=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=f(r)\boldsymbol{e}_r \tag{7.1}$$

($\boldsymbol{e}_r$是$\boldsymbol{r}$的单位向量) 如$f(r)>0$，为排斥力；如$f(r)<0$，为吸引力。

中心力的势函数为

$$V=-\int_{r_0}^{r}f(r)\,dr \tag{7.2}$$

2．二体问题约化为等价的一体问题

设有两个质点组成的保守系，所受作用力仅由它们的相互作用势$V(r)(r=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)$提供。描述这一系统的6个广义坐标，既可以取$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$的6个分量，也可以取质心位矢$\boldsymbol{R}$和相对位矢$\boldsymbol{r}$的6个分量（见图7.1），因而拉氏函数可写为

$$L=\frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2-V(r)$$

据克尼希定理又可写为

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2+\left(\frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}'_1)^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}'_2)^2\right)-V(r)$$

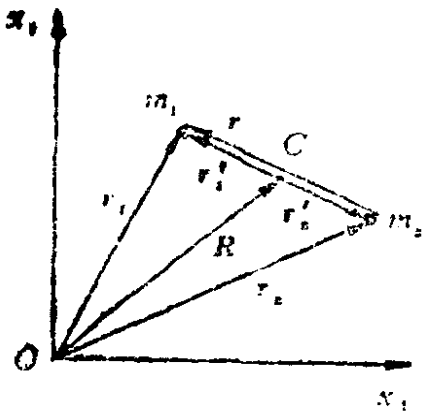


图 7.1

由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2$及$m_1\boldsymbol{r}'_1+m_2\boldsymbol{r}'_2=0$得

$$\boldsymbol{r}'_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}'_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \tag{7.3}$$

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(r)$$

即

$$L=\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(r)$$

$$M=m_1+m_2,\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ \text{（折合质量）}\qquad(7.4)$$

由拉氏函数知$\boldsymbol{R}$的分量是循环坐标，质心C静止或作匀速直线运动，略去拉氏函数第一项，在描述$\boldsymbol{r}$的分量的运动上与原来的拉氏函数等效，而系统的整体平移对质点的相对轨道并不重要，此时

$$L=\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(r)\qquad(7.5)$$

这正是质量为μ的质点在中心力场中单体运动的拉氏函数。

由此可见，任何两体中心力问题，形式上总可以约化成等效的一体问题。将$L=\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(r)$代入拉氏方程求出$\boldsymbol{r}(r)$，就可由（7.3）式求得每个质点的个别运动$\boldsymbol{r}'_1(t)$和$\boldsymbol{r}'_2(t)$，进而求出$\boldsymbol{r}_1(t)$和$\boldsymbol{r}_2(t)$，但这一步并不总是必要的，如果我们只关心两质点间的相对运动，就不必求出它们。

既然二体问题总可以化成一体问题，形式上我们可以只讨论质量为m的质点在势函数为$V(r)$的中心力场中的运动，即限于狭义中心力（力心固定）的情形，但是要牢记：如果两个物体都是运动的，则m实际上代表μ，r表示相对位矢。

3．运动微分方程和运动积分

（1）中心力运动的主要特征

中心力运动的主要特征是角动量守恒和能量守恒。

（a）角动量守恒。因为

$$\boldsymbol{F}(r)=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

在中心力场中运动的质点所受外力矩为

$$\boldsymbol{N}^{(e)}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\left(f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=0 \tag{7.6}$$

即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0\ (\text{角动量守恒})$$

由此推出两个结论：中心力运动是平面内的运动，且掠面速度守恒．证明如下：

因为$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$，所以$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{L}$，而$\boldsymbol{L}$是空间内恒向量，所以$\boldsymbol{r}$所处平面的法向必与$\boldsymbol{L}$平行；如$\boldsymbol{L}=0$，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=0$，必有$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=0$，这只有直线运动才可能．因此中心力运动总是在一个**平面内的运动**．

用平面极坐标表示拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]-V(r) \tag{7.7}$$

θ是循环坐标，相应的循环积分为

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=l\ (\text{常数})$$

向径在单位时间扫过的面积——掠面速度为

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{l}{2m}=\text{常数} \tag{7.8}$$

即**掠面速度守恒**，这正是开普勒行星运动第二定律．但应指出，掠面速度守恒并不仅限于反平方律力，对所有中心力都是普遍成立的．

(b) 能量守恒．将L代入关于r的拉氏方程A，$L=0$，

得

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\theta})^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

由 $mr^2\dot{\theta} = l$ 得

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

两边乘 $\dot{r}$，利用 $\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$，得

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V = E\ (\text{常数}) \qquad (7.9)$$

即总能量守恒。由于中心力是保守力，此式可根据能量守恒原理直接写出。

（2）运动方程和轨道方程

角动量守恒与能量守恒已给出了运动的两个第一积分，因问题中有两个变量，须 4 次积分给出运动方程式。

由能量积分得

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \qquad (7.10)$$

$$\Longrightarrow \quad t = t(r) \quad \Longrightarrow \quad r = r(t)\ (\text{径向运动方程})$$

由角动量积分 $l = mr^2\dot{\theta}$，得转动方程

$$\theta(t) = l\int \frac{dt}{mr^2(t)} \qquad (7.11)$$

作变换 $d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}dr$，再利用 $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ 得

$$\theta(r)=\int\frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E-V-\dfrac{l^2}{2mr^2}\right)}} \tag{7.12}$$

此即轨道方程

4. 等价的一维问题

在能量方程（7.9）中，令

$$V'(r)=\frac{l^2}{2mr^2}+V(r) \tag{7.13}$$

称为**有效势能**，则

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V'=E \tag{7.14}$$

V' 中第一项 $\dfrac{l^2}{2mr^2}\left(\text{即}\dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right)$ 是横向运动的动能，形式上表示成仅是 r 的函数，与势能有相似之处，称为**离心势能**.

有效势能 V' 相应的**有效力**为

$$f'(r)=-\frac{\partial V'}{\partial r}=f(r)+\frac{l^2}{mr^3} \tag{7.15}$$

式中第二项 $\dfrac{l^2}{mr^3}=mr\dot{\theta}^2$ 称为**惯性离心力**.

质点的径向方程可表为

$$m\ddot{r}=f'(r)$$

即

$$m\ddot{r}=f(r)+\frac{l^2}{mr^3} \tag{7.16}$$

这是 r 的运动微分方程，只含 r 及其对时间导数. 以 θ 代表的转动隐含在 l 中. 可以将质点的运动看作沿 r 轴的运动，而 r 又以 $\dot{\theta}$ 在轨道平面内转动. 这样，我们可以把径向运动作为独立的一维运动处理. 解此等价的一维问题，求得 $r(t)$，再代入 $mr^2\dot{\theta}=l$，求出 $\theta(t)$，问题原则上即得到解决.

5．轨道微分方程

令 $u=\frac{1}{r}$，则

$$\dot{\theta}=hu^2,\quad \dot{r}=-h\,du/d\theta$$

$$\ddot{r}=-h^2u^2\,d^2u/d\theta^2$$

将 $\dot{\theta}$ 及 $\ddot{r}$ 代入 $m[\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2]=f(r)$，得

$$-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=f\left(\frac{1}{u}\right) \tag{7.17}$$

称作**比内公式**，这是**轨道微分方程**。利用它，可由中心力求轨道，或反之由轨道求中心力。

可用于求轨道的，还有**降阶的比内公式**，它可由能量方程得出，即

$$\frac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]+V=E \tag{7.18}$$

6．势能曲线和轨道分类

（1）排斥性势能情形

斥力势能处处为正，$V_+>0$（令无穷远处为势能零点），并假定它单调地随 r 增大而减小，则只有无界轨道。

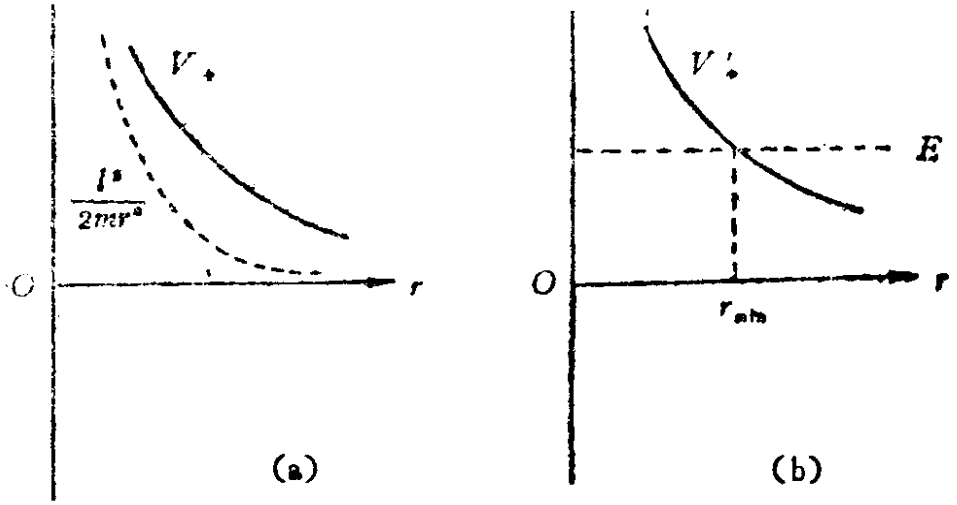


图 7.2（a）离心势能曲线和斥力势能曲线
（b）斥力的有效势能曲线

例：α 粒子被金属箔中的原子核散射(卢瑟福散射)。

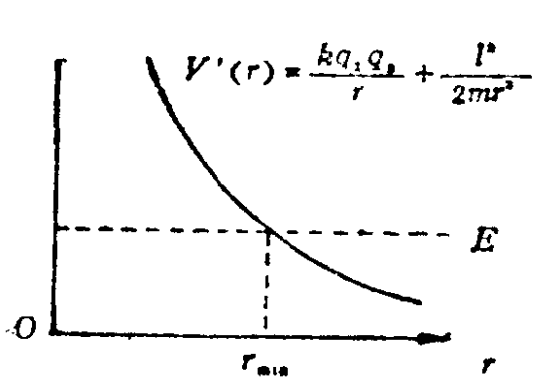


图7.3 卢瑟福散射的有效势能曲线

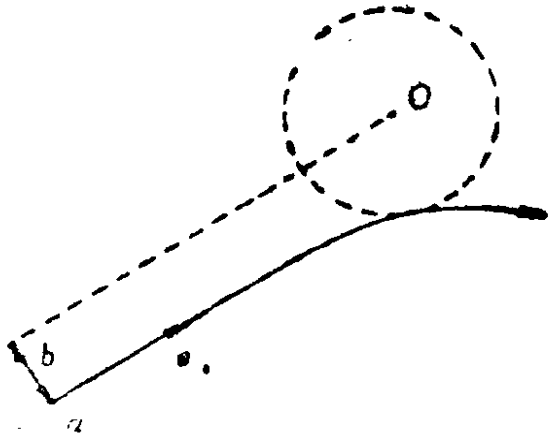


图7.4 在原子核附近 α 粒子的轨道

（2）吸引性势能情形

$V_-(r)<0$，并假定它单调地随 r 增大而增大。

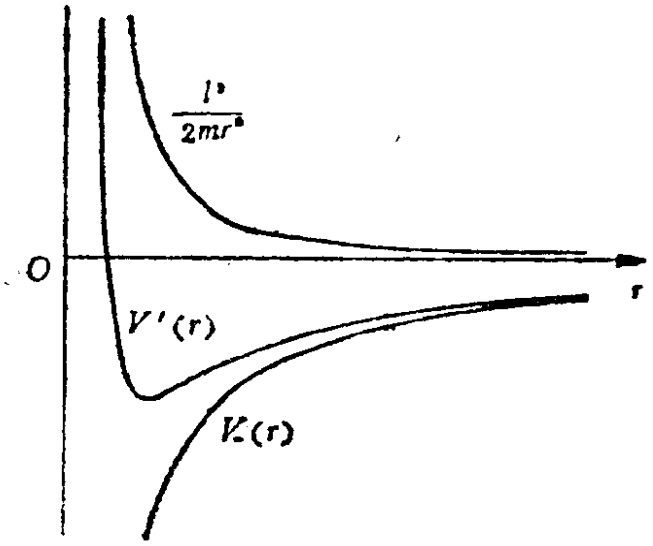


图7.5 吸引性中心力势能曲线、离心势能曲线和有效势能曲线

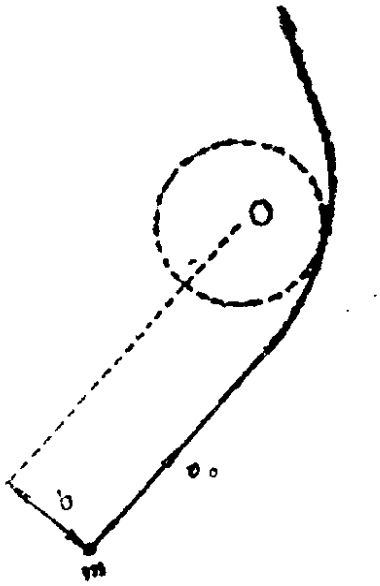


图7.6 彗星在太阳附近的轨道

例：彗星经过太阳时被散射。

（3）有效势能曲线

无论排斥力或吸引力，有效势能曲线要由势能与角动量共

同决定，因为$V'=V+\frac{l^2}{2mr^2}$，l不同，V'也不同。这表明，与一维情形不同，在中心力场中运动的普遍特性不仅依赖于能是依赖于E和l两者。

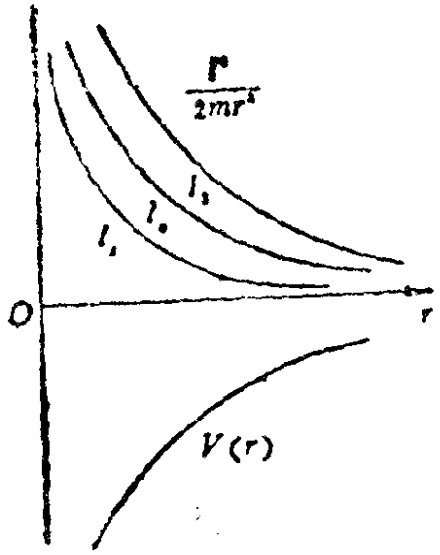


图7.7 引力势能曲线与不同l值的离心势能曲线

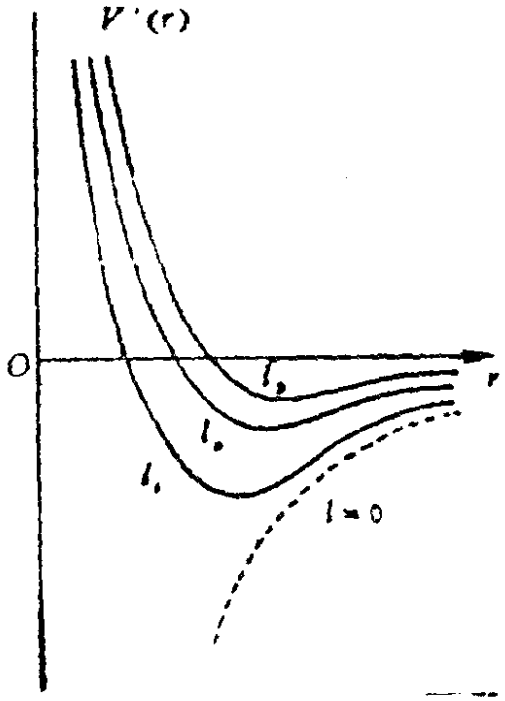


图7.8 不同l值的有效引力势能曲线

（4）典型有效势能曲线和吸引中心力场中的轨道分类

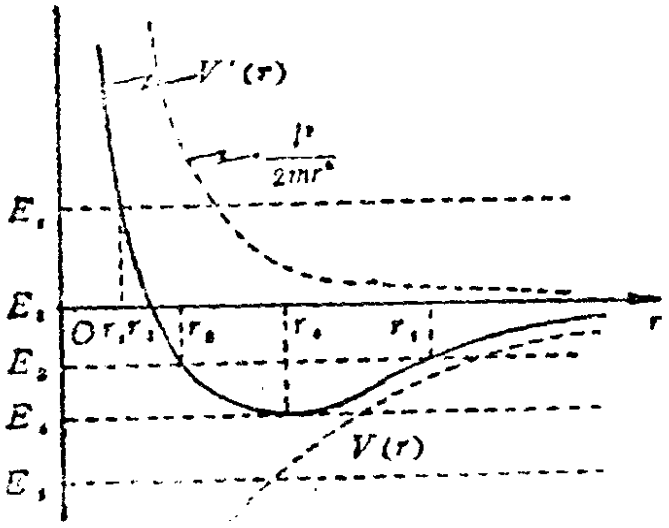


图7.9 吸引性中心力典型有效势能曲线（实线所示）

从图7.9所示典型势能曲线，可以得到质点在中心力场中

运动的普遍性质。图中 $V'(r)$ 对应于特定的 l，$E_i(i=1, 2, \cdots, 5)$ 代表总能量，$r_i(i=1, 2, \cdots, 5)$ 代表拱点（即转向点），在这些点上，$\dot{r}_i=0$。当

(a) $E=E_1>0$，$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-V'(r)]}=0$ 有一实根 r_1，

质点的运动介于 $r_1\leqslant r<\infty$，轨道无界。

(b) $E=E_2=0$，$E-V'(r)=0$ 有一实根 r_2，$r_2\leqslant r<\infty$，轨道无界。

(c) $E=E_3$，$E-V'(r)=0$ 有两个不等实根 r_3，r_5，$r_3\leqslant r\leqslant r_5$，运动束缚在两个拱点 r_3，r_5 之间，轨道有界，即局限在 $r_3\leqslant r\leqslant r_5$ 的环状区域中。

(d) $E=E_4=V'_{min}$，$E-V'(r)=0$ 有两实重根 r_4，因任何时刻总有 $r=r_4$，$\dot{r}=0$，即 r 为常数，因而轨道为圆形的。

(e) $E<V'_{min}$，这要求 $T<0$，$(\dot{r})^2<0$ 物理上不能实现。

对于中心力势，l 可影响 V' 曲线的细节，并不能改变轨道的类型。总的说来，中心力场中的轨道可分为：无界的（开放的），有界的（束缚的）和圆形的（当然也是有界的）。

（5）有界轨道和无界轨道

参照典型势能曲线图 7.9，当 $E=E_3$，运动束缚在两拱点 r_3，r_5 之间，轨道为有界。如果质点在径向极限 r_3，r_5 之间往返有限次后，又完全重复先前的运动，则轨道是闭合的，反之如经有限次往返后，轨道并不能闭合，则轨道是开口的。轨道闭合与否，决定于如下双周期运动的两个周期：

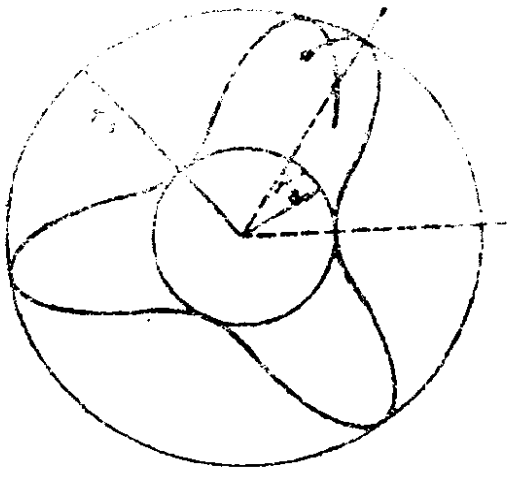


图 7.10

径向运动介于 r_3（极小）与 r_6（极大）之间，周期为 T_r，运动轨迹与半径为 r_3，r_6 的两圆相切，因为在这些切点上 $\dot{r}=0$（切向速度并不为零）。此外向径总是顺（或逆）时针地不断改变方向，经周期 T_θ，转过 2π 角。

如果 T_r 与 T_θ 可以通约，即 $\frac{T_r}{T_\theta}=\frac{m}{n}$（$m$，$n$ 为整数），则经过 T_r，T_θ 之最小公倍数那样长的时间后，轨道将闭合，否则永远不会闭合，只能弥漫于 r_3 与 r_6 之间的环形区域。用公式表示，仅当

$$\Delta\theta=2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}=2\pi\left(\frac{m}{n}\right)$$

时，轨道才能闭合。

例　题

7.1　证明：如果一个质点在指向圆周上一点的有心吸引力作用下描绘圆形轨道，则这个力将按距离的五次方反比规律变化。

〔解〕　根据比内公式

$$-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=f\left(\frac{1}{u}\right)$$

其中　$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{2a\cos\theta}$

$$\cos\theta=(2au)^{-1}$$

$$\sin\theta=\left(1-\frac{1}{4a^2u^2}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{4a^2u^2-1}{4a^2u^2}\right)^{1/2}$$

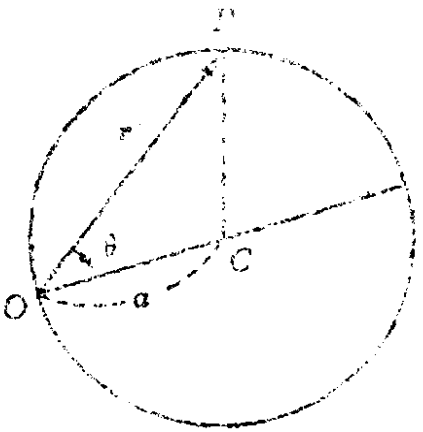


图　7.11

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{2a\cos\theta}\right]=\frac{1}{2a}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{2a}\left[\sec^3\theta+\sec\theta\tg^2\theta\right]$$

代入比内公式得

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=-mh^2u^2\left[\sec^3\theta+\sec\theta(1+\tg^2\theta)\right]\cdot\frac{1}{2a}$$

$$=-\frac{mh^2u^2}{2a}\cdot 2\sec^3\theta$$

$$=-8ma^2h^2u^5$$

$$f(r)=-8ma^2h^2r^{-5}$$

7.2 质量为 m 的质点受到一静止中心的吸引力 $F=-\frac{2m}{r^3}$，其中 r 为质点到力心的距离．起始时，$r_0=1$，$\theta_0=0$，$v_0=\sqrt{2}$，且 v_0 与径向成45°角，求质点的运动规律．

〔解〕 选原点在力心 O 的平面极坐标系．

$$F=-\frac{2m}{r^3}$$

$$V=-\int_\infty^r\left(-\frac{2m}{r^3}\right)dr=-\frac{m}{r^2}$$

$$h=|\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{v}_0|=1\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

$$E=T_0+V_0=\frac{1}{2}mv_0^2+\left(-\frac{m}{r_0^2}\right)=\frac{1}{2}m(\sqrt{2})^2-m=0$$

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)-\frac{h^2}{r^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{m}\left(0+\frac{m}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}}=\frac{1}{r}\qquad(\text{因 }\dot{r}_0>0,\ \dot{r}\text{取}(+))$$

$$\dot{r} = \frac{1}{r}, \quad t = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}, \quad r = \sqrt{2t+1}$$

由 $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ 得 $\dot{\theta} = \frac{1}{2t+1}$，$\theta = \frac{1}{2}\ln(2t+1)$

$$\theta = \frac{1}{2}\ln r^2 = \ln r$$

所以轨道方程为

$$r = e^{\theta} \qquad \text{（对数螺线）}$$

7.3 质量为m的质点在中心力$f(r) = -2ka^2r^{-5} + kr^{-3}$作用下沿半径为$a$的圆轨道运动，求其速率。

〔解〕 $f = -2ka^2r^{-5} + kr^{-3}$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$$

由比内公式得

$$-mh^2u^3 = -2ka^2u^5 + ku^3$$

$$-mh^2\frac{1}{a^3} = -2k\frac{1}{a^3} + k\frac{1}{a^3}$$

$$mh^2 = k$$

又由于 $h = av_0$，代入得

$$v_0 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

7.4 试导出下面中心力量值的公式

$$F = \frac{mh^2}{2}\frac{dp^{-2}}{dr}$$

式中 m 是质点的质量，r 为质点到力心的距离，$h = r^2\dot{\theta}$ = 常数，p 是力心到轨道切线的垂直距离。

〔解〕 $h^2 = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|^2 = r^2v^2$

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2}$$

由降阶的比内公式（7.18）得

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=v^2=\frac{h^2}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^2}=\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2$$

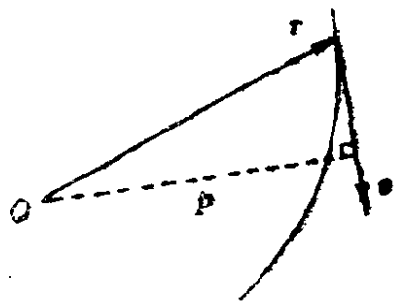


图 7.12

两边对 r 求微商

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr}=2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr}\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

将 $\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-u^2\frac{dr}{d\theta}$ 代入上式，且由比内公式得

$$\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}=u^2\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)=\frac{-F}{mh^2}$$

所以，中心力量值为

$$F=\frac{mh^2}{2}\cdot\frac{dp^{-2}}{dr}$$

§2 开普勒问题 反平方力

理论要点

1. 反平方力与开普勒问题

中心力场的一个极重要的情形是势能与 r 成反比，即相应的力与 r^2 成反比的情形。其中包括牛顿万有引力和库仑静电力，后者可能是吸引性的，也可能是排斥性的，由电荷异号或同号决定。反平方力可统一表为

$$f(r)=-\frac{k}{r^2} \tag{7.19}$$

在万有引力作用下天体（如行星）运动的轨道问题称为**开普勒问题**，我们着重讨论开普勒问题的轨道方程，而质点沿轨道

移动的时间进程则是一个极复杂的问题，这里不作详细讨论。

2．开普勒问题的轨道方程

（1）轨道方程

将万有引力势函数 $V=-\frac{k}{r}$ 代入中心力场轨道方程（7.12）得

$$\theta=\int_{r_0}^{r}\frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{r}-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}+\theta_0$$

令 $u=\frac{1}{r}$，并以不定积分表示，则

$$\theta=\theta'-\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}+\frac{2mku}{l^2}-u^2}}$$

积分之，得

$$\theta=\theta'-\arccos\frac{\frac{l^2u}{mk}-1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{mk}{l^2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')\right]$$

$$r=\frac{l^2/mk}{1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')}$$

$$=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta')} \qquad (7.20)$$

式中 θ' 由初始条件定，它是近日点位置向量与极轴之间的夹角（但不一定是初始时刻的角度 θ_0）。如将极轴转过一角度可使 $\theta'=0$，方程变为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{7.21}$$

这正是标准圆锥曲线方程．式中

$$p=\frac{l^2}{mk} \tag{7.22}$$

为半正焦弦．

$$e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}} \tag{7.23}$$

为偏心率．

$$k=GMm=\lambda m \qquad (\lambda=GM)$$

（2）圆锥曲线

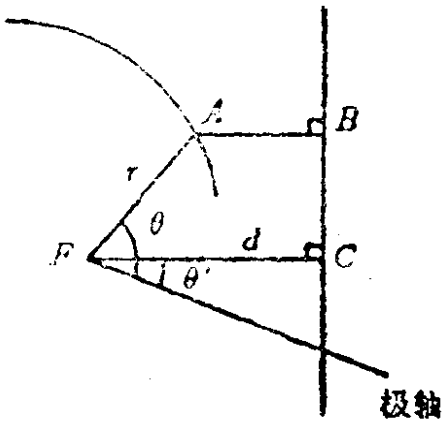


图 7.13

设有一点 F（焦点）到一直线（准线）垂直距离为 d，一动点 A，自 A 作准线的垂线 $\overline{AB}$，并连结 AF．如 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=e$ （常数），则称 A 点轨迹为圆锥曲线．以 F 为原点取极坐标，如图 7.13所示，则

$$e=\frac{r}{d-r\cos(\theta-\theta')}$$

令 $p=ed$，得

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta')}$$

将极轴转一角度可令 $\theta'=0$，则

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

式中 p 为半正焦弦，e 为偏心率．当 $e<1$，为椭圆；$e=1$，为抛物线；$e>1$，为双曲线．

如将准线取在焦点左侧，公式中各文字意义保持不变，圆锥曲线方程为

$$r=\frac{p}{1-e\cos(\theta-\theta')}$$

3．开普勒问题的轨道分类及其性质

（1）轨道分类

参阅反平方吸引力典型势能曲线图7.14，结合圆锥曲线性质，将开普勒问题的轨道分类，详见表三。

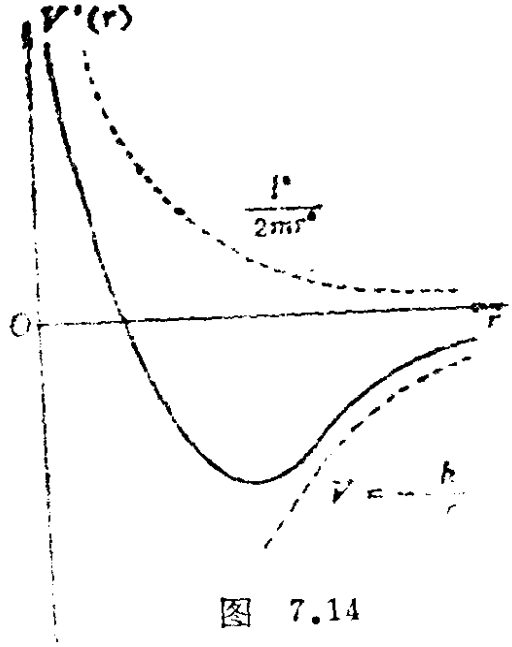


图 7.14

表三

能　量	偏心率	轨道类型
$E>0$	$e>1$	双曲线
$E=0$	$e=1$	抛物线
$V'_{min}<E<0$	$0<e<1$	椭　圆
$V'_{min}=E<0$	$e=0$	圆

（2）椭圆轨道

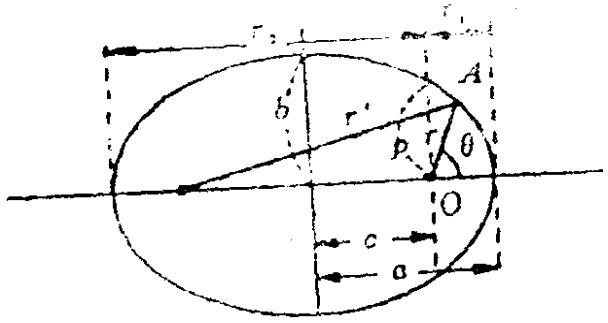


图 7.15

轨道方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

$(0<e<1)$

轨道参量及其关系：

$$r+r'=2a$$

$$r_{min}+r_{max}=2a$$

$$e=\frac{c}{a},\quad r_{min}=r_1=\frac{p}{1+e},\quad r_{max}=r_2=\frac{p}{1-e}$$

$$p=a(1-e^2)=b^2/a,\quad b^2=a^2-c^2=ap$$

轨道参量中用得较多的是 p 和 e，也可以用其它的参量，但独立的只有两个。

轨道参量与动力学参量 E、l 之间的关系：

$$p=\frac{l^2}{mk},\quad e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}},\quad E=-\frac{k}{2a}$$

$$l=m\sqrt{\lambda p}\qquad \left(\lambda=GM=\frac{k}{m}\right)$$

当 $e=0$ 时收缩为圆，此圆半径为

$$a=p=\frac{l^2}{mk}=-\frac{k}{2E}$$

（3）抛物线轨道

轨道方程 $r=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$　$(e=1)$

$p=2q(=2r_{\min})$

$E=0$

$l=m\sqrt{p\lambda}$

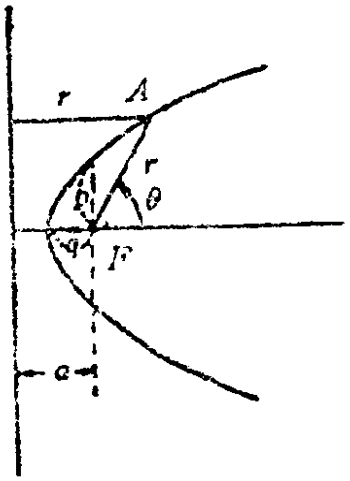


图 7.16

（4）双曲线轨道

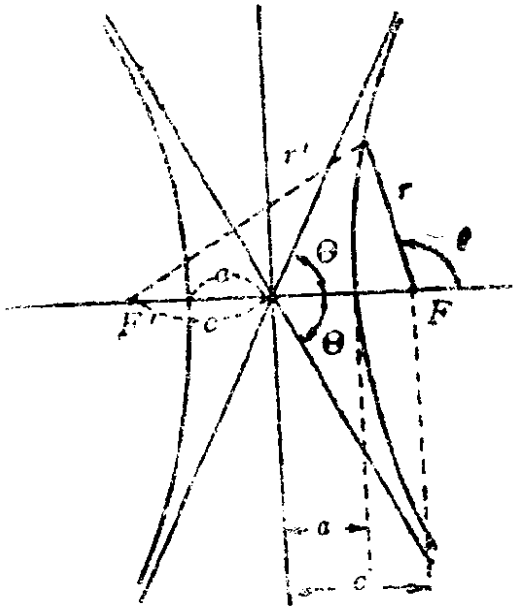


图 7.17

轨道方程 $r=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$

$(e>1)$

$p=a(e^2-1)$

$r_{\min}=\dfrac{p}{1+e}=a(e-1)$

$r\to\infty$，$\cos\theta=\dfrac{1}{e}$

$\theta=\arccos\left(\dfrac{1}{e}\right)=\Theta$

$E=\dfrac{k}{2a}$，$l=m\sqrt{\lambda p}$

（5）用几何参数表示的速度公式

由能量积分

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}=E$$

得出

$$v^2=\frac{2}{m}\left(E+\frac{k}{r}\right)$$

对于椭圆，有

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{7.24}$$

对于抛物线有

$$v^2=\frac{2\lambda}{r} \tag{7.25}$$

对于双曲线有

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right) \tag{7.26}$$

4．开普勒行星运动定律

（i）行星沿椭圆轨道绕太阳运行，太阳在椭圆的一个焦点上．

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}\qquad(0<e<1) \tag{7.27}$$

（ii）行星与太阳的联线扫过的面积与时间成正比．

$$\frac{dA}{dt}=\frac{l}{2\mu}=\text{常量} \tag{7.28}$$

（iii）各行星运动的周期的平方与它们的轨道半长轴的立方成正比．

$$T^2=\frac{4\pi^2\mu}{k}a^3 \tag{7.29}$$

5．人造星体的运动

（1）宇宙速度

第一宇宙速度（环绕速度）

$$v_1=\sqrt{gR_{地}}=7.9\text{km/s}$$

第二宇宙速度（逃逸速度）

$$v_2=\sqrt{2gR_{地}}=11.2\text{km/s}$$

第三宇宙速度（飞离太阳系的速度）

$$v_3=\sqrt{v_2^2+(v'-v_0)^2}=16.5\text{km/s}$$

其中

$$v'=\sqrt{\frac{2GM_{日}}{R_{日地}}}=42\text{km/s}$$

$$v_0=30\text{km/s}\quad\text{（地球公转速度）}$$

发射卫星时，v_1 应沿水平方向；飞离太阳系时，v_3 应沿地球绕太阳公转的速度方向．

（2）人造卫星的初值问题

人造卫星的初值问题，指给定初始位置和初始速度，决定卫星轨道的性质．

设切断条件（即火箭燃料燃尽时的条件）是 $r=r_0$，$\beta=\beta_0$，$v=v_0$，其中 β_0 是位置向量为 $\boldsymbol{r}_0$ 时，速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与横向的夹角，称为飞行角，则偏心率

$$e^2=1+\frac{2El^2}{mk^2}$$

$$=1+\frac{r_0v_0^2}{\lambda}\left(\frac{r_0v_0^2}{\lambda}-2\right)\cos^2\beta_0 \tag{7.30}$$

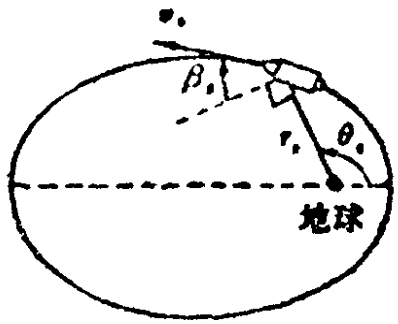


图 7.18

半正焦弦

$$p=\frac{l^2}{mk}=r_0^2v_0^2\cos^2\beta_0/\lambda \tag{7.31}$$

近地点位矢与初位矢的夹角 θ_0 满足下面的方程

$$\mathrm{tg}\theta_0 = \frac{(r_0 v_0^2/\lambda)\cos\beta_0 \sin\beta_0}{[(r_0 v_0^2/\lambda)\cos^2\beta_0 - 1]} \qquad (7.32)$$

例　　题

7.5　如果 E 代表行星的总能量，则

$$E = \frac{\lambda^2 m^3}{2l^2}(e^2 - 1) \qquad (\lambda = GM_S)$$

试证明之。

〔解〕　$E = T + V$

仅有的作用力是

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\lambda m}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \quad F = -\lambda m u^2$$

势能　$V = -\frac{\lambda m}{r}$，且 $v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$，所以

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\lambda m}{r}$$

$$= \frac{l^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - \lambda m u$$

将 F 代入比内公式（7.17）得

$$h^2 u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\lambda}{h^2}, \qquad u = \xi + \frac{\lambda}{h^2}$$

$$\xi = A\cos(\theta - \theta_0)$$

令 $\theta_0 = 0$，则

$$\xi = A\cos\theta, \qquad u = A\cos\theta + \frac{\lambda}{h^2}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -A\sin\theta$$

所以

$$E = \frac{l^2}{2m}\left[A^2\sin^2\theta + \left(A\cos\theta + \frac{\lambda}{h^2}\right)^2\right] - \lambda m\left(A\cos\theta + \frac{\lambda}{h^2}\right)$$

$$= \frac{l^2A^2}{2m} + \frac{l^2}{2m}\cdot 2A\cos\theta\cdot\frac{\lambda}{h^2} + \frac{l^2}{2m}\frac{\lambda^2}{h^4} - \lambda mA\cos\theta - \frac{\lambda^2 m}{h^2}$$

$$= \frac{l^2A^2}{2m} + mA\lambda\cos\theta + \frac{m\lambda^2}{2h^2} - \lambda mA\cos\theta - \frac{m\lambda^2}{h^2}$$

$$= \frac{l^2A^2}{2m} - \frac{m\lambda^2}{2h^2}$$

由于

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2/\lambda}{1 + \frac{Ah^2}{\lambda}\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

由此可得$e = \frac{Ah^2}{\lambda}$，故

$$E = \frac{l^2}{2m}\cdot\left(\frac{\lambda e}{h^2}\right)^2 - \frac{m\lambda^2}{2h^2}$$

$$= \frac{l^2\lambda^2e^2}{2mh^4} - \frac{m\lambda^2}{2h^2} = \frac{\lambda^2m^3}{2l^2}(e^2 - 1)$$

7.6 两个质点在引力作用下彼此相对地作圆形轨道运动，周期为τ，在一给定时刻，它们的运动突然停止，然后被释放，并允许它们相互接近。证明它们将在时间$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}$以后碰撞。

〔解一〕 设质点质量为m_1，m_2，将二体问题化为力心固定的单体问题，折合质量$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$。设初始时圆轨道半径

为 a，

$$\frac{k}{a^2}=\mu a\omega^2$$

圆运动周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

当质点运动突然停止，再释放后，质点将沿径向作直线运动。设质点到力心距离为 r，则

$$\mu\ddot{r}=-\frac{k}{r^2}$$

$t=0$ 时，$r=a$，$\dot{r}=0$，所以

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r})^2=k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right),\qquad (0<r<a,\ \dot{r}<0)$$

$$\dot{r}=-\sqrt{\frac{2k}{\mu}}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}$$

碰撞（到达力心）的时间为

$$T=\int_a^0(\dot{r})^{-1}dr=-\int_a^0\sqrt{\frac{\mu}{2k}}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\mu a}{2k}}\int_0^a\sqrt{\frac{r}{a-r}}dr$$

$$=\sqrt{2}\,a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}\int_0^\infty\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx\qquad\left(x=\sqrt{\frac{r}{a-r}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\,a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)d\theta\qquad(x=\mathrm{tg}\theta)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}a^{3/2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$=\frac{\tau}{4\sqrt{2}}$$

〔解二〕 质点跌落到中心上，可以看作椭圆运动的一种极限情形，即偏心率接近1的情形（但$E\neq 0$，并不是抛物线），碰撞时间为轨道周期之半.

由开普勒定律，周期$\tau\propto(-E)^{-3/2}$，$(E=T+V)$. 停止运动前$E_i=V_i/2$，停止后，只有势能$E_f=V_i=2E_i$，碰撞时间t与周期τ之比为

$$\frac{t}{\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{E_i}{E_f}\right)^{3/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$t=\frac{\tau}{4\sqrt{2}}$$

7.7 质点m受中心力$F=-m\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$的作用，其中$\mu$，$\nu$为常数，证明$m$的轨道是一个转动的圆锥曲线

$$r=\frac{p}{1+e\cos k\varphi}$$

〔解〕 首先求势能.

$$V_2-V_1=-\int\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{r_1}^{r_2}\left[-m\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)\right]dr$$

$$=-m\mu\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-m\nu\left(\frac{1}{2r_2^2}-\frac{1}{2r_1^2}\right)$$

$$=-m\left[\left(\frac{\mu}{r_2}+\frac{\nu}{2r_2^2}\right)-\left(\frac{\mu}{r_1}+\frac{\nu}{2r_1^2}\right)\right]$$

令$r_1=\infty$，位能为零，则

$$V=-m\left(\frac{\mu}{r}+\frac{\nu}{2r^2}\right)=-m\left(\mu u+\frac{\nu u^2}{2}\right)$$

由降阶的比内公式（7.18）式得

$$\frac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]-m\left(\mu u+\frac{\nu u^2}{2}\right)=E$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{h^2}\left[2\left(\mu u+\frac{\nu u^2}{2}\right)+\frac{2E}{m}-h^2u^2\right]$$

$$=\frac{h^2-\nu}{h^2}\left[-u^2+\frac{2\mu u}{h^2-\nu}-\frac{\mu^2}{(h^2-\nu)^2}+\frac{2E}{m(h^2-\nu)}+\frac{\mu^2}{(h^2-\nu)^2}\right]$$

$$=\frac{h^2-\nu}{h^2}\left[-\left(u-\frac{\mu}{h^2-\nu}\right)^2+\left(\frac{2E}{m(h^2-\nu)}+\frac{\mu^2}{(h^2-\nu)^2}\right)\right]$$

$$=\frac{h^2-\nu}{h^2}\left[-(u-a)^2+b^2\right]$$

式中

$$a=\frac{\mu}{h^2-\nu},\qquad b^2=\frac{2E}{m(h^2-\nu)}+\frac{\mu^2}{(h^2-\nu)^2}$$

开方得

$$\frac{du}{\sqrt{-(u-a)^2+b^2}}=\pm\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}\,d\varphi$$

积分得

$$-\arccos\frac{u-a}{b}=\pm\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}(\varphi-\varphi_0)$$

$$\frac{u-a}{b}=\cos\left[\mp\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}(\varphi-\varphi_0)\right]=\cos\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}(\varphi-\varphi_0)$$

$$u=a+b\cos\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}(\varphi-\varphi_0)$$

故

$$r=\frac{1/a}{1+\frac{b}{a}\cos\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}(\varphi-\varphi_0)}=\frac{p}{1+e\cos k(\varphi-\varphi_0)}$$

式中

$$p=\frac{1}{a}=\frac{h^2-\nu}{\mu},\quad e=\frac{b}{a}=\sqrt{1+\frac{2E(h^2-\nu)}{m\mu^2}}$$

$$k=\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}$$

令极轴转一角度φ_0，则

$$r=\frac{p}{1+e\cos k\varphi}$$

下面我们进行轨道分析。设 $E<0$，$0<e<1$，则

$$r_{min}=\frac{1}{1+e},\quad r_{max}=\frac{1}{1-e}$$

轨道有界。

设向径转过2π角，即φ从$0\to 2\pi$，则$k\varphi$从$0\to 2k\pi<2\pi$ $\left(k=\sqrt{\frac{h^2-\nu}{h^2}}<1\right)$，于是$r$不能回到原来（$k\varphi=0$时）的值，即$r|_{k\varphi=0}\neq r|_{k\varphi=2k\pi}$。当$k\varphi=0$时，$r$在近日点，而$k\varphi=2\pi k$时，$r$不能回到近日点，所以径向运动周期$T_r$不等于角运动周期$T_\varphi$.（$\varphi'=k\varphi$）。一般说，径向运动一周期时，角位移

$$\Delta\varphi'=2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}\neq 2\pi$$

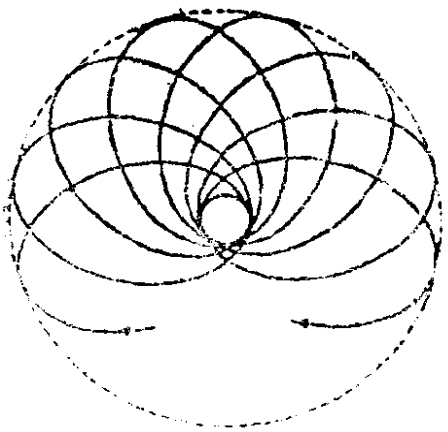


图 7.19

轨道一般不闭合，而是逐渐充满$r_{min}\to r_{max}$的整个空间，仅当

$$\Delta\varphi'=2\pi\left(\frac{m}{n}\right)$$（m，n是正整数）

时，轨道才能经有限次振荡后自行闭合，运动又完全自行重复。轨道是一转动着的类似椭圆的曲线。

7.8　一卫星沿关于地球的半径为 $2R_E$（R_E 为地球半径）的圆形轨道运动。在某一时刻，卫星的运动方向朝向地球改变了 α 角，而速率不变。求使卫星刚要接触地球之 α 角。

〔解〕　由 $v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$，当卫星沿半径为 $2R_E$ 的圆形轨道运动时，速率为

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{2R_E}-\frac{1}{2R_E}\right)=\frac{\lambda}{2R_E}$$

能量为

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{m\lambda}{r}$$

$$=\frac{m\lambda}{4R_E}-\frac{m\lambda}{2R_E}$$

$$=-\frac{m\lambda}{4R_E}$$

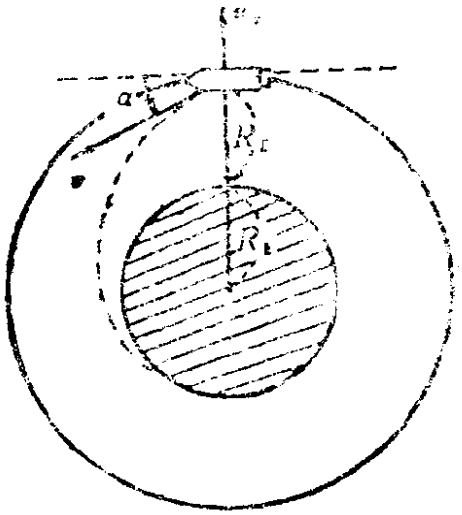


图　7.20

在某时刻，运动方向改变了 α 角，于是角动量改变了，但速率未变，因而能量也未变。新的角动量

$$l=m|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$$

$$=m(2R_E)\left(\frac{\lambda}{2R_E}\right)^{1/2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=m(2R_E\lambda)^{1/2}\cos\alpha$$

卫星刚好接触地球的条件是近地点距离 $r_1=R_E$，由能量方程有

$$E=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]-\frac{\lambda m}{r}\qquad\left((\dot{\theta})^2=\frac{l^2}{m^2r^4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((\dot{r})^2+\frac{l^2}{m^2r^2}\right)-\frac{\lambda m}{r}$$

在远近点（拱点），$\dot{r}=0$，所以

$$E=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{\lambda m}{r}$$

两边乘以$\frac{r^2}{E}$得

$$r^2+\frac{\lambda m r}{E}-\frac{l^2}{2mE}=0$$

此式称远近点方程。将l及E之值代入此式，得

$$r^2-4R_E r+4\cos^2\alpha R_E^2=0$$

近地点由下式给出

$$r_1=[2-(4-4\cos^2\alpha)^{1/2}]R_E=2(1-\sin\alpha)R_E$$

当 $r_1=R_E$时，$\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$，故$\alpha=30°$。

7.9 地球上方几百公里高处来自稀薄的上层大气的阻力，对于沿圆形轨道运行的卫星产生的效应竟是使卫星速率增大，如何解释这个“卫星怪象”？

如果上层大气的阻力是$F=Av^a$，v是卫星的速率，卫星到地心的径向距离r终归要以$\frac{dr}{dt}=C$的比率减小，C是正常数，它足够地小，使卫星每转一周的能量损失同总能量相比为一小量，求A和a的表达式。

〔解〕 在圆形轨道运动中，半长轴a即圆的半径r。

$$E=\frac{-k}{2a},\quad V=\frac{-k}{r}=\frac{-k}{a}$$

$$E=\frac{1}{2}V=-T \qquad (1)$$

由于大气阻力把机械能转变成热能，因而卫星的总能量E减少，轨道半径将因之减小。但由于上层大气十分稀薄，必须经过转许多圈，卫星高度才会有明显改变，在此之前，轨道仍保持近似圆形。由（1）式知，E减小T必然增大，这导致卫星

速率增大.

由于

$$\frac{dE}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Av^{a+1}$$

$$=\frac{dE}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=-C\left[\frac{GMm}{2r^2}\right] \qquad (2)$$

又因 $\frac{mr^2(\dot{\theta})^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$，所以

$$\frac{dE}{dt}=A\left[\left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\right]^{a+1}=A\left(\frac{GM}{r}\right)^{\frac{a+1}{2}} \qquad (3)$$

比较（2）与（3），a只能为3．因此有

$$-C\left(\frac{GMm}{2r^2}\right)=A\left(\frac{Gm}{r}\right)^{(3+1)/2}$$

$$-C\left(\frac{GMm}{2}\right)=A(Gm)^2$$

即

$$A=-\frac{M}{2Gm}C$$

7.10 一卫星匀速地运动在以地心O为中心，半径为$4a$的圆形轨道上，这里a是地球半径．点燃反推进火箭以减小卫星的速率，不改变其方向，因而其后它运动在一椭圆轨道上，它到O的最近距离是$2a$．证明卫星速率必须按照$\sqrt{2}:\sqrt{3}$的比例减小．

〔解〕 $v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$

对圆形轨道

$$v_0^2=\lambda\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{R}\right)=\frac{\lambda}{R}$$

因圆轨道半径为$4a$，故$v_0^2=\frac{\lambda}{4a}$.

设卫星的速率由 v_0 变到 kv_0，在以后的运动中，能量常数为

$$E = T + V = \frac{1}{2}mk^2\left(\frac{\lambda}{4a}\right) - \frac{m\lambda}{4a}$$

$$= \frac{m\lambda}{8a}(k^2 - 2)$$

$$l = m|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$

$$= m(4a)k\left(\frac{\lambda}{4a}\right)^{1/2} = mk(4a\lambda)^{1/2}$$

由远近点方程

$$r^2 + \frac{\lambda m r}{E} - \frac{l^2}{2mE} = 0$$

得

$$r^2 - \frac{8ar}{k^2 - 2} - \frac{16k^2a^2}{k^2 - 2} = 0$$

由题知，远地点距离是 $r = 4a$，它必是方程的一根，分解因式得

$$(r - 4a)\left(r + \frac{4k^2a}{k^2 - 2}\right) = 0$$

所以近地点距离必为 $\frac{4k^2a}{2 - k^2}$，而由题意知

$$\frac{4k^2a}{2 - k^2} = 2a$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

7.11 证明：循着椭圆轨道运动的行星，如其在远日点速度突然增加 δv 的话，则在近日点时行星到太阳的距离增加了 $4\delta v\{a^3(1-e)/\lambda(1+e)\}^{1/2}$。

〔解〕 行星在远日点速度突然增加一小量 δv，轨道仍是椭

圆，力心未变，仍是新椭圆的焦点．能量增加，a 随之增大．

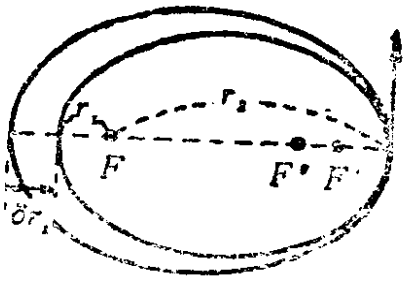


图 7.21

$$(r_1+\delta r_1)+r_2=2(a+\delta a)$$

由于 $r_1+r_2=2a$，所以

$$\delta r_1=2\delta a \qquad (1)$$

速度改变的瞬时 r 不变，故由公式

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

有

$$2v\delta v=\lambda\frac{\delta a}{a^2}$$

所以

$$\delta r_1=2\delta a=-\frac{4a^2v}{\lambda}\delta v$$

$$r=r_2=\frac{p}{1-e},\quad a=\frac{p}{1-e^2}$$

将 r，a 之值代入（2）得

$$v^2=\lambda\left(\frac{2(1-e)}{p}-\frac{1-e^2}{p}\right)=\frac{\lambda}{p}(1-e)^2=\frac{\lambda}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

$$v=\sqrt{\frac{\lambda}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

所以

$$\delta r_1=\frac{4a^2v}{\lambda}\delta v$$

$$=\frac{4a^2}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda}{a}\frac{1-e}{1+e}}\delta v=4\sqrt{\frac{a^3(1-e)}{\lambda(1+e)}}\delta v$$

7.12　设有一彗星的轨道是以太阳为焦点的抛物线，这个彗星在近日点处和另一质量相同的静止彗星相碰，碰后两个彗

星合成一个．证明这个大彗星的轨迹是一个偏心率为$\frac{1}{2}$的椭圆．

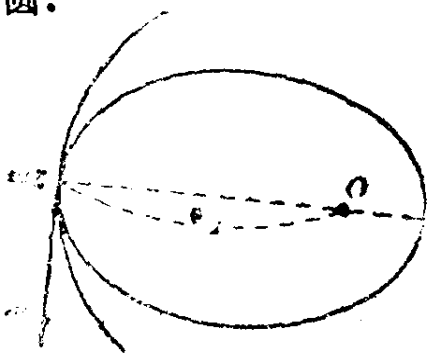


图 7.22

〔解〕 碰前运动彗星的轨迹是抛物线，其总能量为零，静止彗星只有势能，两者总能量之和为负值．碰撞为非弹性的，损失了能量，因而大彗星总能量$E<0$，轨迹必为椭圆．

设碰前运动彗星速度为v_0，抛物线的近日点距太阳为r_0，则

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{k}{r_0}=0$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$$

碰后瞬间大彗星的速度为v'，由切线方向动量守恒，得$v'=\frac{v_0}{2}$．

设大彗星角动量大小为l'，能量为E'，则

$$l'=2mr_0v'=2mr_0\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k}{mr_0}}=\sqrt{2kmr_0}$$

$$E'=2\left(\frac{1}{2}mv'^2-\frac{k}{r_0}\right)=\frac{1}{4}mv_0^2-\frac{2k}{r_0}$$

$$=\frac{1}{4}m\frac{2k}{mr_0}-\frac{2k}{r_0}=-\frac{3k}{2r_0}$$

$$e'=\sqrt{1+\frac{2E'l'^2}{m'k'^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{2m(2k)^2}\times\left(-\frac{3k}{2r_0}\right)\times 2kmr_0}$$

$$=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

由于

$$a=\frac{k'}{2|E'|}=\frac{2k}{2\times\frac{3k}{2r_0}}=\frac{2}{3}r_0$$

$$r_0=\frac{3}{2}a>a$$

故抛物线的近日点是新椭圆轨道的远日点.

7.13 一质点 P，质量为 m，在指向焦点 S 的吸引力 $\frac{k}{r^2}$ 作用下描画出一个半长轴为 a，偏心率为 e 的椭圆轨道. 另外一个质点 Q，质量为 M，在同样的吸引力 $\frac{k}{r^2}$ 作用下从很远处自静止出发沿直线向焦点 S 运动. 在 Q 到达 S 前，当 P 在最接近 S 的椭圆主轴端点 A 处与之相碰并合而为一. 证明合并后的质点将描画出以 S 为焦点的椭圆，半长轴 a' 为

$$a'=\frac{a(1-e)(m+M)^2}{m^2(1-e)+4mM}$$

〔解〕 由 $v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$ 知，在碰撞点 A 处，对质点 P 有

$$v_P^2=\lambda\left(\frac{2}{r_1}-\frac{1}{a}\right)=\lambda\left(\frac{2}{a(1-e)}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\lambda}{a}\,\frac{1+e}{1-e}$$

对质点 Q 有

$$v_Q^2=\frac{2\lambda}{SA}=\frac{2\lambda}{a(1-e)}$$

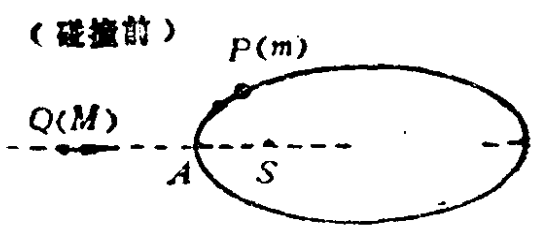


图 7.23

设碰后合并质点的速度为 v'，则如轨迹为一椭圆，必满足 $E<0$，或

$$v'^2 < \frac{2\lambda}{SA}$$

v' 沿 AS 方向的分量为 $\frac{Mv_Q}{M+m}$，v' 沿垂直于 AS 方向的分量为 $\frac{mv_P}{M+m}$，所以

$$v'^2 = \frac{M^2v_Q^2 + m^2v_P^2}{(M+m)^2}$$

$E<0$ 要求

$$\frac{M^2v_Q^2 + m^2v_P^2}{(M+m)^2} < \frac{2\lambda}{a(1-e)}$$

$$\frac{M^2 \cdot \frac{2\lambda}{a(1-e)} + m^2\frac{\lambda(1+e)}{a(1-e)}}{(M+m)^2} < \frac{2\lambda}{a(1-e)}$$

$$\frac{2M^2 + m^2(1+e)}{1-e} < \frac{2(M+m)^2}{1-e}$$

因 $1-e>0$，上式要求

$$2M^2 + m^2(1+e) < 2(M+m)^2$$

$$4Mm + m^2(1-e) > 0$$

此式显然成立，因而轨道是椭圆。其半长轴可由下式算出：

$$v'^2 = \lambda\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a'}\right)$$

$$\frac{1}{a'} = \frac{2}{a(1-e)} - \left\{\frac{2m^2 + m^2(1+e)}{a(1-e)}\right\}\Big/(M+m)^2$$

$$= \frac{4Mm + m^2(1-e)}{a(1-e)(M+m)^2}$$

7.14 一质点受万有引力作用描画一椭圆轨道。在短轴端点处，质点受到一与向径成直角的冲击作用，使之关于焦点的角动量增加一小量。求长轴与偏心率的变化，并证明焦点连线

转过的角度近似为

$$\frac{\delta h}{h}\ \frac{(a^2+b^2)b}{a^3e}$$

〔解〕 由 $v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$有

$$2v\delta v=\lambda\frac{\delta a}{a^2} \tag{1}$$

在短轴端点 B 处 $r=a$，$v^2=\lambda\frac{1}{a}$，$v=\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$，所以

$$\delta a=2v\frac{a^2}{\lambda}\delta v=2\sqrt{\frac{a^3}{\lambda}}\delta v \tag{2}$$

因冲击垂直于向径，径向速度分量未变，所以 $v\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}}$ 是瞬时常量，亦即

$$v\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}}=\sqrt{v^2-\frac{v^2s^2}{r^2}}$$

$$=\sqrt{v^2-\frac{h^2}{r^2}}$$

是常量．所以$v^2-\frac{h^2}{r^2}$=常量．

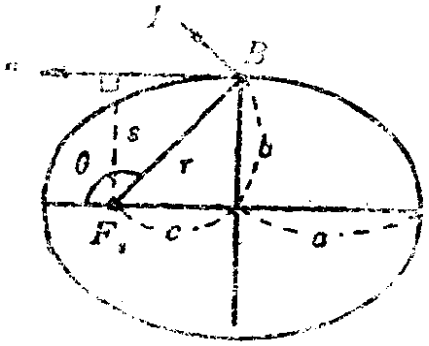


图 7.24

在 B 点，$r=a$，所以

$$v\delta v-\frac{h\delta h}{a^2}=0 \tag{3}$$

由（1）和（3）得

$$\delta a=\frac{2a^2}{\lambda}v\delta v=\frac{2a^2}{\lambda}\cdot\frac{h\delta h}{a^2}=\frac{2h\delta h}{\lambda}=2p\frac{\delta h}{h} \tag{4}$$

由 $h^2=\lambda a(1-e^2)$取对数、微商得

$$\frac{2\delta h}{h}=\frac{\delta a}{a}-\frac{2e\delta e}{1-e^2} \tag{5}$$

$$\frac{2\delta h}{h}=\frac{2p}{a}\frac{\delta h}{h}-\frac{2e\delta e}{1-e^2}$$

$$\frac{2\delta h}{h}e^2=-\frac{2e\delta e}{1-e^2}$$

所以

$$\delta e=-e(1-e^2)\frac{\delta h}{h} \qquad (6)$$

在 B 点 $r=a$，　由 $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 得

$$\frac{\delta p}{a}=\delta e\cos\theta+(-e)\sin\theta\delta\theta$$

由于　$\cos\theta=-e$，$\sin\theta=\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{2\delta h}{h}=\dfrac{\delta p}{p}$，故

$$e\frac{b}{a}\delta\theta=-\frac{2p}{a}\cdot\frac{\delta h}{h}+e^2(1-e)^2\frac{\delta h}{h}$$

$$=\{e^2(1-e^2)-2(1-e^2)\}\frac{\delta h}{h}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^2+b^2}{a^2}\right]\cdot\frac{\delta h}{h}$$

$$\delta\theta=-\frac{\delta h}{h}\cdot\frac{(a^2+b^2)b}{a^3e}$$

7.15　一质点在万有引力作用下沿椭圆轨道运动，在某一点突然受到切线方向的瞬时作用力而使速度发生一微小变化，从 v 变到 $v+\delta v$，求其后轨道的半长轴、半短轴、第二焦点及周期的变化。

〔解〕　在力作用瞬间，r 为常量，$\delta r=0$，根据

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

有

$$2v\delta v = \frac{\lambda \delta a}{a^2}$$

所以半长轴的变化

$$\delta a = \frac{2va^2}{\lambda}\delta v$$

由图 7.2 可见 $h = sv$，所以

$$\delta h = \delta(sv) = s\delta v = \frac{h}{v}\delta v$$

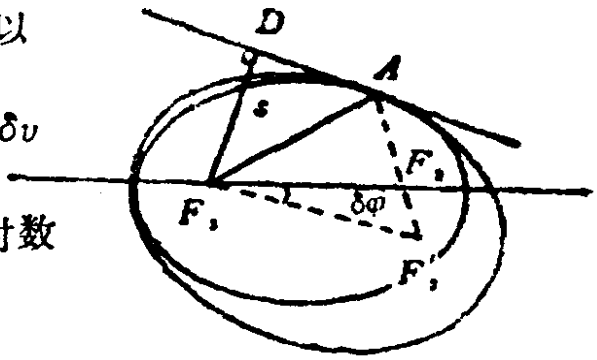


图 7.25

根据 $p = h^2/\lambda = b^2/a$，两边取对数

$$2\ln h - \ln\lambda = 2\ln b - \ln a$$

微商得

$$\frac{2\delta h}{h} = \frac{2\delta b}{b} - \frac{\delta a}{a}$$

$$\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta a}{2a} = \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta a}{2a} = \frac{\delta v}{v} + \frac{av}{\lambda}\delta v = \left(\frac{1}{v} + \frac{av}{\lambda}\right)\delta v$$

由此得半短轴的变化

$$\delta b = b\left(\frac{1}{v} + \frac{av}{\lambda}\right)\delta v$$

引力中心 F_1 是第一焦点，F_2 是第二焦点，速度发生变化后，F_1 仍为新轨道的第一焦点（因速度发生微小变化，轨道仍为椭圆）。设 F_2' 是新轨道的第二焦点，根据椭圆上任一点到两焦点的联线与该点切线夹角相等的性质，可知 A 仍为新椭圆的切点，故 F_2' 必在 AF_2 延长线上。又因

$$AF_1 + AF_2 = 2a,\quad AF_1 + AF_2' = 2(a + \delta a)$$

两式相减得

$$F_2F_2' = 2\delta a = \frac{4a^2v}{\lambda}\delta v$$

从而给出了第二焦点位置。

将 $T=\frac{2\pi ab}{h}$ 取对数得

$$\ln T=\ln 2\pi+\ln a+\ln b-\ln h$$

$$\frac{\delta T}{T}=\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}-\frac{\delta h}{h}=\left(\frac{2av}{\lambda}+\frac{1}{v}+\frac{av}{\lambda}-\frac{1}{v}\right)\delta v=\frac{3av}{\lambda}\delta v$$

所以周期的变化

$$\delta T=T\frac{3av}{\lambda}\delta v$$

附注 1　上面 (7.11)、(7.14)、(7.15) 等题目，是一类讨论小扰动对椭圆轨道影响的问题。这扰动可以是质点速度的变化，也可以是位置、力心强度，质量等的微小变化。求解这类问题。常可以写出连结 v，λ，a，p，e 等的公式，如

$$v^2=\lambda\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$vs=\sqrt{\lambda a(1-e^2)}\qquad (s:\text{力心到切线的垂距})$$

$$T=2\pi(a^3/\lambda)^{1/2}$$

及几何关系 $b^2=a^2(1-e^2)$，$r+r'=2a$ 等。在小扰动下，这些量中有的变，有的不变，对上述公式求变分，就可得到那些变化的量之间及其与已知量的关系。

§3　圆形轨道的稳定性　运动的稳定性

理论要点

1．中心力场中存在圆轨道的条件

首先，中心力必须是吸引性的。因为只有吸引性的中心力，才可能与惯性离心力平衡，使 $\dot{r}=0$。从典型有效势能曲线可以看到，圆轨道出现在 $\left.\frac{\partial V'}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0$ 时（V' 表示有效

势能），而

$$-\frac{\partial V'}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[V(r)+\frac{l^2}{2mr^2}\right]\Big|_{r=r_0}$$

$$=f(r_0)+\frac{l^2}{mr_0^3}$$

$\frac{\partial V'}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=0$ 要求

$$f(r_0)=-\frac{l^2}{mr_0^3}=-mr_0(\dot{\theta}_0)^2 \tag{7.33}$$

亦即在与质点一同运动的参考系中，中心力与惯性离心力平衡。这就是中心力场中存在圆轨道的条件。

2．圆形轨道的稳定性

存在圆轨道是一回事，圆轨道稳定与否是另一回事。如果质点沿 $r=r_0$ 的圆形轨道运动，受到径向微扰后，在 $r=r_0$ 附近作简谐振动，不会远离，则说这个圆形轨道是稳定的，否则就是不稳定的。

圆形轨道的稳定性取决于 $r=r_0$ 处有效势能取极大值还是极小值。

如有 $r=r_0$ 的圆形轨道，若

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}>0 \tag{7.34}$$

则 V' 为极小值，圆轨道稳定。若

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}<0$$

则 V' 为极大值，圆轨道不稳定。

圆轨道稳定的条件还可用力函数表示为

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[f(r)+\frac{l^2}{mr^3}\right]\Big|_{r=r_0}$$

$$= -\left.\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0$$

由$f(r_0) = -\dfrac{l^2}{mr_0^3}$，所以，当

$$\frac{\left.\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0}}{f(r_0)} + \frac{3}{r_0} > 0 \qquad (7.35)$$

圆轨道稳定．此式又可写为

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} + \frac{3}{r_0} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=r_0} > 0 \qquad (7.36)$$

在稳定圆轨道附近作微振动（图7.26）的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left.\dfrac{\partial^2 V'}{\partial r^2}\right|_{r=r_0}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{-\left.\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} - \dfrac{3}{r_0}f(r_0)}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} + \dfrac{3}{r_0} \cdot \left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=r_0}}} \qquad (7.37)$$

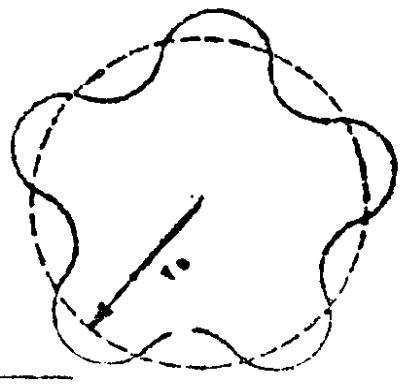


图 7.26

由（7.35）式表示的一般圆轨道稳定性条件得出：对乘方律吸引中心力

$$F(r) = -kr^{-n} \qquad (k>0)$$

存在稳定圆轨道的条件是

$$n<3 \qquad (7.38)$$

（见例题7.18）．

3．运动的稳定性

设有微分方程

$$\ddot{x}=f(\dot{x},\ x,\ t),$$

其解为$x=x_0(t)$，如$x=x_0+\xi$，当$\ddot{\xi}=g(\xi,\ \dot{\xi},\ t)$的解$\xi$在从$0\to\infty$时为有界，则称$x_0(t)$为稳定的解，否则是不稳定的解。

静力学的稳定性与运动的（或动力学的）稳定性可统一定义为：

设力学体系存在某一平衡位形或平衡运动，如对此平衡位形或平衡运动路径的任何微小位移产生关于此平衡位形或平衡路径的振动，称这未受扰动的位形或路径是稳定的；反之如果微小位移使得体系偏离平衡位形或路径越来越远，则称这未受扰动的平衡位形或路径是不稳定的。

和静力学的稳定性不同，动力学中稳定的运动并不总出现在势能的极小处，也可能出现在势能并非极小的地方（如中心力场中稳定的圆轨道出现在V'为极小但V并非极小的位置），甚至可能出现在势能极大值处。

例　题

7.16　考虑形式为$F(r)=-(k/r^2)\exp(-r/a)$的力。讨论在此力场中圆轨道的稳定性。

〔解〕　$F(r)=-(k/r^2)e^{-r/a}$

$$F'(r)=\frac{k}{r^2}\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)e^{-r/a}$$

$$\frac{F'(r_0)}{F(r_0)}+\frac{3}{r_0}=\frac{\frac{k}{r_0^2}\left(\frac{2}{r_0}+\frac{1}{a}\right)e^{-r_0/a}}{-\left(\frac{k}{r_0^2}\right)e^{-r_0/a}}+\frac{3}{r_0}$$

$$=\frac{1}{r_0}-\frac{1}{a}>0 \longrightarrow r_0<a$$

故圆轨道稳定的条件是 $r_0<a$。

在圆轨道附近微振动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{-F'(r_0)-\frac{3}{r_0}F(r_0)}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{m}{k\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{a}\right)}}\cdot r_0\exp\left(\frac{r_0}{2a}\right)$$

7.17 试从微分方程解的稳定性，证明在乘方律引力下，即单位质量受力 $f=-kr^{-n}$ 时，圆轨道稳定的条件是 $n<3$。

〔解〕 由比内公式有

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=ku^{n-2}/h^2 \qquad (1)$$

如质点描画出一半径为 R 的圆轨道，则 $u=\frac{1}{R}$。又

$$\frac{v^2}{R}=\frac{k}{R^n},\quad v^2=\frac{k}{R^{n-1}},\quad h^2=R^2v^2=kR^{-n+3}$$

方程（1）化为

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=R^{n-3}u^{n-2} \qquad (2)$$

设圆轨道受到一小的扰动，$u=\xi+\frac{1}{R}$，ξ 是小量，则（2）化为

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}+\xi+\frac{1}{R}=R^{n-3}\left(\frac{1}{R}+\xi\right)^{n-2}$$

$$=\frac{1}{R}[1+\xi R]^{n-2}$$

$$=\frac{1}{R}[1+\xi(n-2)R+\cdots]$$

略去二级以上小量得

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}+(3-n)\xi=0$$

这里可能有三种情形：

（i）$n<3$，解为$\xi=a\cos[(3-n)^{1/2}\theta+\alpha]$（$a$，$\alpha$为积分常数），表明质点将在圆轨道附近作微振动，圆轨道稳定。

（ii）$n>3$，解为$\xi=a\mathrm{ch}[(3-n)^{1/2}\theta+\alpha]$。当$\theta\to\infty$时，$\xi\to\infty$，圆轨道不稳定。

（iii）$n=3$时，$\xi=A\theta+B$，$\theta\to\infty$时，$\xi\to\infty$，不稳定。

7.18 质量为m的质点，在重力作用下，被约束在一半顶角为α的圆锥面上运动，试讨论圆轨道的稳定性。

〔解〕 $f=2$，选r，θ为广义坐标。

$$\begin{aligned}v^2&=(\dot r)^2+r^2(\dot\theta)^2+(\dot z)^2\\&=(\dot r)^2+r^2(\dot\theta)^2+(\dot r)^2\mathrm{ctg}^2\alpha\\&=(\dot r)^2\csc^2\alpha+r^2(\dot\theta)^2\end{aligned}$$

令$V_{z=0}=0$，则

$$V=mgz=mgr\mathrm{ctg}\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}m[(\dot r)^2\csc^2\alpha+r^2(\dot\theta)^2]-mgr\mathrm{ctg}\alpha$$

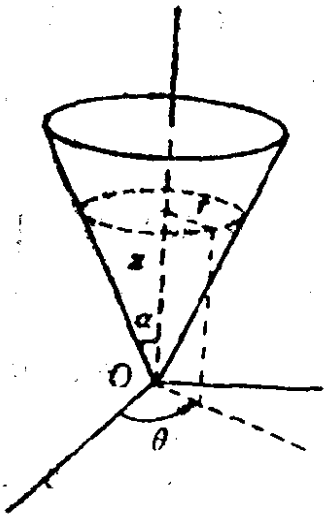


图 7.27

注意到θ是循环坐标，$\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$，而

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta=l\ (\text{常数})\qquad(1)$$

由$\Lambda,L=0$得

$$\ddot r-r(\dot\theta)^2\sin^2\alpha+g\sin\alpha\cos\alpha=0\qquad(2)$$

假定存在圆轨道$r=a$，给以小的扰动，$r\to a+\xi$，由（1）得

$$r(\dot\theta)^2=r\frac{l^2}{m^2r^4}=\frac{l^2}{m^2r^3}=\frac{l^2}{m^2}(a+\xi)^{-3}=\frac{l^2}{m^2a^3}\left(1-3\frac{\xi}{a}\right)$$

方程（2）可以写成

$$\ddot{\xi}-\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}\left(1-3\frac{\xi}{a}\right)+g\sin\alpha\cos\alpha=0$$

$$\ddot{\xi}+\frac{3l^2\sin^2\alpha}{m^2a^4}\xi-\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}+g\sin\alpha\cos\alpha=0 \qquad (3)$$

当 $r=a$ 时，$\ddot{r}=0$，由（2）得

$$a(\dot{\theta})^2\sin^2\alpha=g\sin\alpha\cos\alpha$$

即

$$\frac{l^2\sin^2\alpha}{m^2a^3}=g\sin\alpha\cos\alpha$$

所以（3）式最后两项相消，于是有

$$\ddot{\xi}+\frac{3l^2\sin^2\alpha}{m^2a^4}\xi=0$$

此为谐振方程，故圆轨道是稳定的。在圆轨道附近微振动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m^2a^4}{3l^2\sin^2\alpha}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{ma^2}{l\sin\alpha}$$

附注2　此题并不属中心力问题，但在圆轨道的稳定性方面，与中心力情形相似，下面一题也如此。

7.19　一质量为 m 的质点，能无摩擦地沿半径为 R 的圆环运动。圆环铅直放置，并绕着它的铅直直径以角速度 ω 旋转（ω 为常数）。

（1）θ 为何值时，质点能固定在圆环上的一点不上升也不下降而随圆环一起旋转？

（2）θ 为何值时是稳定的？确定围绕这些平衡位置作微振动的频率。

〔解〕（1）$f=1$，取 θ 为广义坐标。

$$T=\frac{1}{2}m[R^2(\dot{\theta})^2+\omega^2R^2\sin^2\theta]$$

$$V=-mgR\cos\theta \qquad (取O为势能零点)$$

$$L=\frac{1}{2}m[R^2(\dot{\theta})^2+\omega^2R^2\sin^2\theta]+mgR\cos\theta \qquad (1)$$

由$\Lambda, L=0$得

$$mR^2\ddot{\theta}-m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta+mgR\sin\theta=0$$

$$\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta+\frac{g}{R}\sin\theta=0 \qquad (2)$$

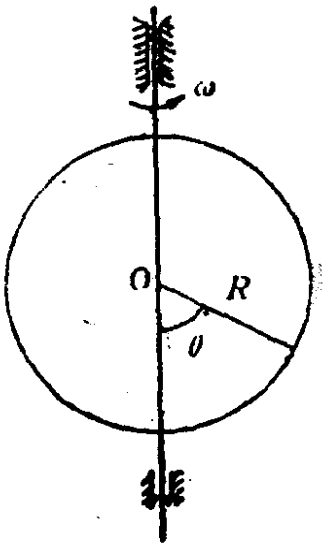


图 7.28

平衡时，$\theta=\theta_0$，$\ddot{\theta}=0$，所以

$$\sin\theta_0\left(\frac{g}{R}-\omega^2\cos\theta_0\right)=0 \qquad (3)$$

由此得 $\theta_0=0$，π 及 $\arccos\frac{g}{\omega^2R}$ (当$\omega^2R>g$)

为平衡位置. 当θ取这些值时，质点固定在圆环上一点，随圆环一起转动.

（2）令质点对上述平衡位置有小的偏离：

$$\theta=\theta_0+\xi \quad (\xi是小量)$$

则方程（2）变为

$$\ddot{\xi}-\omega^2\sin(\theta_0+\xi)\cos(\theta_0+\xi)+\frac{g}{R}\sin(\theta_0+\xi)=0$$

$$\ddot{\xi}-\frac{1}{2}\omega^2\sin2(\theta_0+\xi)+\frac{g}{R}\sin(\theta_0+\xi)=0$$

$$\ddot{\xi}-\frac{1}{2}\omega^2(\sin2\theta_0\cos2\xi+\cos2\theta_0\sin2\xi)$$

$$+\frac{g}{R}(\sin\theta_0\cos\xi+\cos\theta_0\sin\xi)=0$$

因$\cos\xi=\cos2\xi=1$，所以

$$\ddot{\xi}-\frac{1}{2}\omega^2(\sin2\theta_0+2\xi\cos2\theta_0)+\frac{g}{R}(\sin\theta_0+\xi\cos\theta_0)=0$$

$$\ddot{\xi}+\left(-\omega^2\cos2\theta_0+\frac{g}{R}\cos\theta_0\right)\xi-\frac{1}{2}\omega^2\sin2\theta_0$$

$$+\frac{g}{R}\sin\theta_0=0 \qquad (4)$$

当$\theta_0=0$时，方程为

$$\ddot{\xi}+\left(-\omega^2+\frac{g}{R}\right)\xi=0$$

如$g>\omega^2R$，稳定。此时对圆轨道（收缩为点）微振动的频率为$\omega_\xi=\sqrt{\frac{g}{R}-\omega^2}$。

当$\theta_0=\pi$时，方程为

$$\ddot{\xi}-\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\xi=0$$

不稳定。

当$\theta_0=\arccos\frac{g}{\omega^2R}$时，因为

$$\sin\theta_0=\sqrt{1-\frac{g}{\omega^4R^2}},\quad \cos2\theta_0=2\cos^2\theta_0-1=\frac{2g^2}{\omega^4R^2}-1$$

$$\sin2\theta_0=\sqrt{1-\left(\frac{2g^2}{\omega^4R^2}-1\right)^2}=\frac{2g}{\omega^2R}\sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4R^2}}$$

代入（4）式得

$$\ddot{\xi}+\left[\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2R^2}\right]\xi=0$$

当 $\omega^2>\frac{g^2}{\omega^2R^2}$，即$\omega^2R>g$时，运动将是稳定的，振动频率为

$$\omega_\xi=\sqrt{\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2R^2}}$$

§4 散射 实验室坐标系和质心坐标系

理论要点

1. 散射 散射截面

（1）散射

粒子从无穷远处沿直线飞向固定力心，经过力心时被吸引（或被排斥）而偏离了直线轨道，通过力心后，作用于粒子上的力终将消失，轨道再次趋于某直线，这种现象称为散射。

散射问题在物理学中尤其在近代物理学中具有极大的重要性。物理学的一个重要问题是由观测资料决定两质点或质点系间力的严格形式，以寻找物理体系的组成与结构的信息。而在微观领域里，轨道的概念已失去意义，由于实验手段不足以测定微客体的位置与速度，以及观测光线对被测粒子动量和轨道的影响无法排除等原因，由微商 $r(t)$ 或 $\theta(t)$ 求力的规律是不可能的。而能够精确测量的，是散射前后粒子的动量。近代物理中，人们常常是借助散射获得的信息来研究未知体系的结构和性质的。

通常讨论的散射在它的一体表述中，总是一束粒子被力心散射，如一束电子、α 粒子…，它们有相同的质量和能量。这些粒子束有一些共同的特点：

（a）粒子束沿投射方向是轴对称的；

（b）无论力心为排斥的或吸引的，粒子轨道都有一拱点 r_{min}，使 $\dot{r}\mid_{r=r_{min}}=0$；

（c）总能量 $E=\frac{1}{2}mv_0^2>0$；

（d）角动量

$$l=mv_0b=b\sqrt{2mE}$$

b 称为**碰撞（打击）参数**，表示若力心不施力于入射粒子，入射粒

子经过力心时的最近距离；

（e）在 $r=\infty$ 处，力强度减弱为零，轨迹趋于直线；

（f）入射束的性质，由入射强度（通量密度）I 表示。I 表示单位时间内穿过垂直于射束的单位面积的粒子数。

（2）散射截面

由图7.29可见，所有通过环形面积 $2\pi bdb$ 的粒子被散射到角度 θ 与 $\theta+d\theta$ 之间，θ 是散射方向和入射方向之间的夹角，

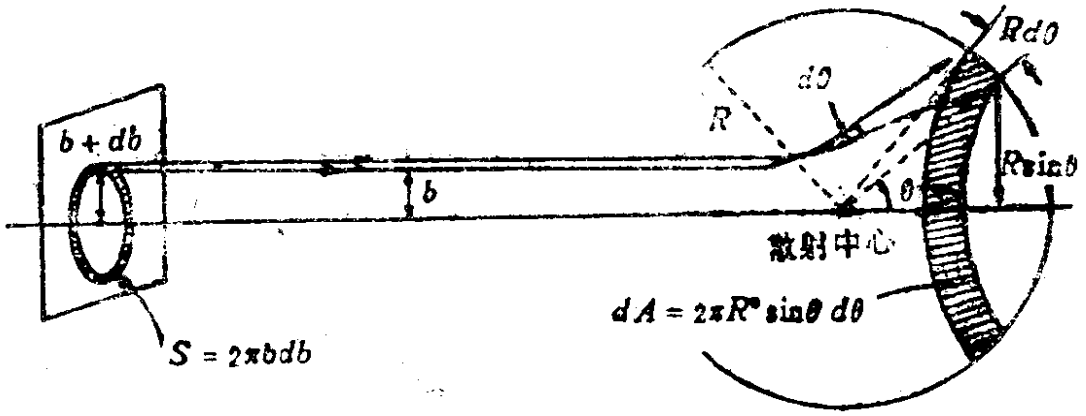


图 7.29

称为散射角。由粒子数守恒得

$$2\pi Ibdb=\sigma(\theta)Id\Omega \tag{7.39}$$

式中

$$d\Omega=\frac{dA}{R^2}=2\pi\sin\theta d\theta \tag{7.40}$$

是在半径为 R 的大球上，环带面积 dA 对应的立体角，即界于 θ 和 $\theta+d\theta$ 之间的立体角。（7.39）式右边的比例系数

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{7.41}$$

称为**微分散射截面**。“截面”一词，来自它具有面积的量纲。

$$\sigma(\theta)=\frac{\text{与靶粒子相互作用而以}\theta\text{角散射入}d\Omega\text{中的粒子数}}{\text{单位面积的入射粒子数}}$$

以 dN 表示单位时间散射入 $d\Omega$ 中的粒子数，则

$$\sigma(\theta)d\Omega=\frac{aN}{I}=\frac{\text{单位时间内散射入}d\Omega\text{内的粒子数}}{\text{入射强度}} \tag{7.42}$$

在单位时间内，以单位强度入射时在所有方向上散射的粒子总数，称为总散射截面，以 σ_T 表示，即

$$\sigma_T=\int_{4\pi}\sigma(\theta)d\Omega=2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\sin\theta d\theta \tag{7.43}$$

（3）卢瑟福散射

卢瑟福散射是库仑场引起的相斥散射。散射力场由固定电荷 $-Ze$ 产生，入射粒子电荷为 $-Z'e$，则

$$f=\frac{ZZ'e^2}{r^2} \tag{7.44}$$

碰撞参数为

$$b=\frac{ZZ'e^2}{2E}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

$$\sigma(\theta)=\frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2\csc^4\frac{\theta}{2} \tag{7.45}$$

2. 实验室坐标系和质心系

（1）实验室系和质心系中的散射角

我们已经讨论了狭义中心力（固定力心）的散射问题，这是一体问题，但实际的散射常常是二体的，即靶粒子会产生反冲，因而没有一个粒子是固定的。虽然我们证明了任何二体问题都可以约化成等效的一体问题，只须以折合质量 μ 代替 m，但实际上问题并不这样简单。由于散射角 ψ 的实际测量是在实验室里做的，而由等价的一体问题中算出的角度 θ，则是两粒子相对位矢的初、终方向之间的夹角，它与其中任一粒子在质心系中的散射角相等。ψ 和 θ 仅当靶粒子在散射过程中保持不动时才是相等的，否则有不同的值。因此，为研究散射问题，必须弄清实验室系（Lab）和质心系（C.M）中散射角及微

分散射截面的关系。

为方便计，采取如下符号规定：

m_1：入射粒子质量；m_2：靶粒子质量；

u_1：入射粒子散射前在实验室系中的速度；

u'_1：入射粒子散射前在质心系中的速度；

v_1：入射粒子散射后在实验室系中的速度；

v'_1：入射粒子散射后在质心系中的速度；

ψ：入射粒子在实验室系中的散射角；

ζ：靶粒子在实验室系中的反冲角；

θ：二粒子相对位矢在质心系中的散射角；

v：质心在实验室系中的速度。

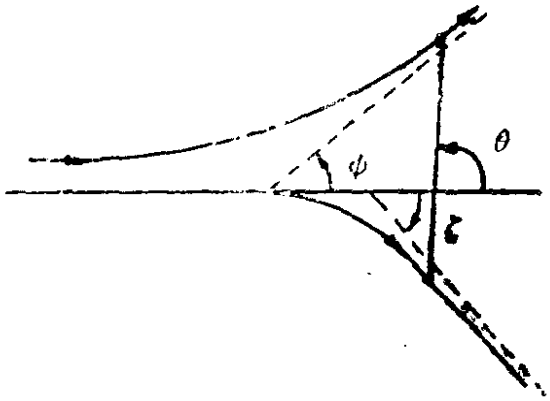


图7.30　实验室系内观察到的两质点散射

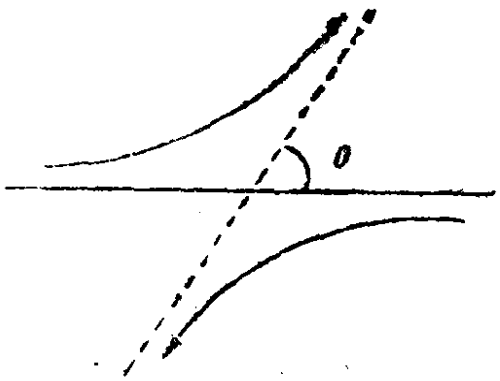


图7.31　质心系内察观到的两质点散射

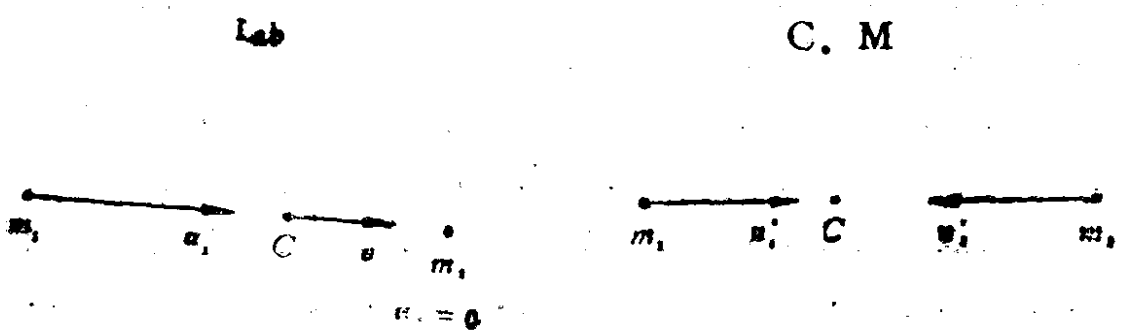


图7.32　散射的初状态

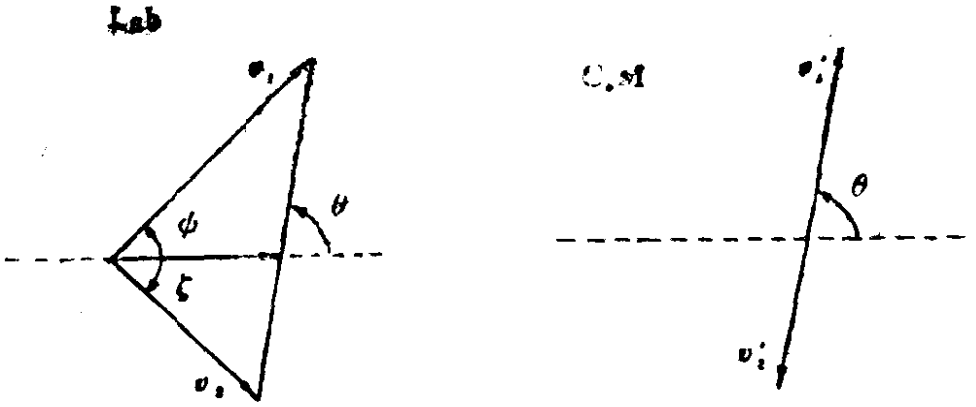


图7.33 散射的末状态

Lab系和 C.M 系中散射角的关系（图7.34）

$$v'_1\sin\theta = v_1\sin\psi$$

$$v'_1\cos\theta = v_1\cos\psi - v$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{v}{v'_1}} = \mathrm{tg}\psi \qquad (7.46)$$

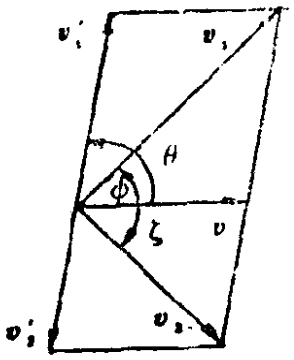


图7.34

由$m_1\boldsymbol{v}'_1 + m_2\boldsymbol{v}'_2 = 0$及克尼希定理推得

$$\frac{v}{v'_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \dfrac{m_1}{m_2}} = \mathrm{tg}\psi \qquad (7.47)$$

如 $m_1 \ll m_2$，$\psi = \theta$；如 $m_1 = m_2$，$\psi = \theta/2$。

（2）两种坐标系下微分散射截面的关系

对一散射过程而言，因散射而进入单位立体角的粒子数，对Lab系和 C.M 系必相同。如以 $d\Omega'$ 和 $d\Omega$ 分别代表质心系和实验室系中测得的同一立体角元，则

$$\sigma(\theta)d\Omega' = \sigma(\psi)d\Omega$$

$$\sigma(\theta)2\pi\sin\theta d\theta = \sigma(\psi)2\pi\sin\psi d\psi$$

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin\psi\, d\psi} \qquad (7.48)$$

利用 $\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi}=\frac{v}{v_1'}=\frac{m_1}{m_2}=\lambda$，得到 ψ 与 θ 的关系为

$$\theta=\arcsin(\lambda\sin\psi)+\psi \tag{7.49}$$

将 $\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin\psi}=\lambda$ 微商，求出 $\frac{d\theta}{d\psi}$，整理得

$$\sigma(\psi)=\sigma(\theta)\frac{[\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}\,]^2}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}} \tag{7.50}$$

特殊情况下，当

$$\begin{aligned} &m_1\ll m_2, && \sigma(\psi)\approx\sigma(\theta)\big|_{\theta=\psi}\\ &m_1=m_2, && \sigma(\psi)\approx\sigma(\theta)\big|_{\theta=2\psi}4\cos\psi \end{aligned} \tag{7.51}$$

例　题

7.20　求质点被一刚球散射的微分散射截面和总散射截面．球的半径为 a．

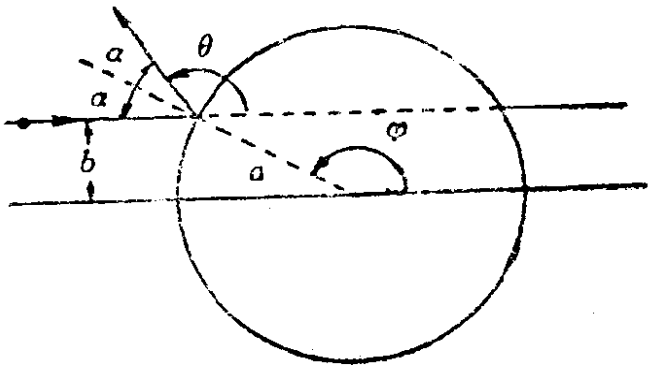


图 7.35

〔解〕　碰撞参数 $b=a\sin\varphi$，散射角 $\theta=\pi-2\alpha$．又由图 7.35 知 $\alpha+\theta=\varphi$．推得

$$\frac{\theta}{2}=\varphi-\frac{\pi}{2}$$

所以

$$b=a\sin\varphi=a\cos\frac{\theta}{2}\qquad(b<a)$$

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1}{4}a^2$$

$$\sigma_T=\int\sigma(\theta)d\Omega=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}a^2\cdot 2\pi\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2\left[-\int_0^{\pi}d\cos\theta\right]=\pi a^2$$

7.21 核物理中常常遇到的中心力势被定义为方势阱

$$V=0 \qquad r>a$$

$$V=-V_0 \qquad r\leqslant a$$

证明在经典力学中，由这种势引起的散射等同于光线经过半径为a，折射率为

$$n=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$$

的球时所产生的折射（这一等效性说明有可能用惠更斯和牛顿机械微粒两者来解释折射现象）。还要证明：微分散射截面为

$$\sigma(\theta)=\frac{n^2a^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

试求总散射截面。

〔解〕 方势阱表示在$0\leqslant r\leqslant a$处，势能为$-V_0$，在$r>a$处，势能为零，因而在球内及球外，粒子将作匀速直线运动。

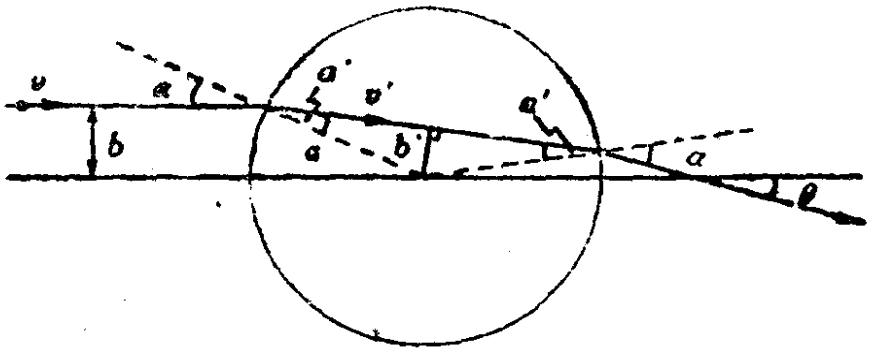


图7.36

在球面上沿法向势能梯度不为零，作用力沿半径指向球心，为一中心力。

设粒子在球内速度为v'，在球外为v。由中心力场中能量角动量守恒，有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2-V_0=E$$

$$bv=b'v'=\frac{l}{m}$$

又因 $\sin\alpha=\frac{b}{a}$，$\sin\alpha'=\frac{b'}{a}$，故

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\frac{b}{b'}=\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}=n$$

粒子在球面产生折射。正如同光线经过半径为a、折射率为$n=\sqrt{\frac{E+V_0}{E}}$的球产生的折射一样。

微分散射截面

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}=\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\theta}$$

易证：

$$\theta=2(\alpha-\alpha'),\quad \sin\alpha=n\sin\alpha'=n\sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-n\sin\theta}{1-n\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=-\frac{n}{2}\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-n\right)\left(1-n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-n\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

又因 $b=a\sin\alpha$，$\frac{db}{d\alpha}=a\cos\alpha$

$$b\frac{db}{da}=a^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=-a^2n\frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-n\cos\frac{\theta}{2}\right)}{1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}}$$

所以

$$\sigma(\theta)=\frac{n^2a^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

由于 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$，$0\leqslant\theta\leqslant2\arccos\left(\frac{1}{n}\right)$，故总散射截面

$$\sigma_T=2\pi\int_0^{2\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}\sigma(\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{n\pi a^2}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)(x-n)}{\left(x-\frac{n^2+1}{2n}\right)^2}dx\qquad\left(x=\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\pi a^2$$

这是势不为零区域的最大散射截面，即半径与势半径相同的圆面积。

7.22 证明由排斥中心力 $f=kr^{-3}$ 产生的散射，其微分散射截面为

$$\sigma(\varphi)d\varphi=\frac{k}{2E}\frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2\sin\pi x}$$

式中 $x=\frac{\varphi}{\pi}$，E 是能量，φ 是散射角。

〔解〕 将 $f=kr^{-3}=ku^3$ 代入比内公式得

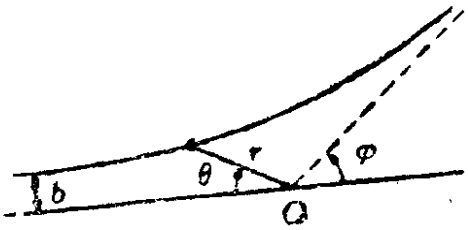


图 7.37

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{ku^3}{mh^2u^2}$$

$$=-\frac{ku}{mh^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\omega^2u=0$$

$$\left(\omega^2=1+\frac{k}{mh^2}\right)$$

其解为

$$u=A\sin(\omega\theta+\varepsilon)$$

当 $r\to\infty$，$u=0$，$\theta=0$，推得 $\varepsilon=0$，所以

$$u=A\sin\omega\theta=\frac{1}{r}$$

碰撞参数为

$$b=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to 0}} r\sin\theta=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{A\sin\omega\theta}=\frac{1}{A\omega}$$

当 $r=\infty$，$u=0$，$\omega\theta_\infty=\pi$，有

$$\varphi=\pi-\theta_\infty=\pi\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$E=\lim_{\substack{r\to\infty\\ \theta\to 0}}\frac{1}{2}m\dot{(r)}^2$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{2}\left(\frac{\omega\cos\omega\theta}{A\sin^2\omega\theta}\dot{\theta}\right)^2 \qquad (\dot{\theta}=hu^2=hA^2\sin^2\omega\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{m\omega^2A^2h^2}{2}\cos^2\omega\theta=\frac{m\omega^2A^2h^2}{2}=\frac{mh^2}{2b^2}$$

$$b^2=\frac{mh^2}{2E}=\frac{k}{2E(\omega^2-1)}$$

由于 $x=1-\frac{1}{\omega}$，$(x-1)^2=\frac{1}{\omega^2}$，$\omega^2-1=\frac{x(2-x)}{(x-1)^2}$，故

$$b^2=\frac{k(x-1)^2}{2Ex(2-x)}$$

$$\sigma(\varphi)d\varphi=\frac{k(1-x)dx}{2Ex^2(2-x)^2\sin\pi x}$$

7.23 一荷电的 π 介子(π^+或π^-)具有动能 T（非相对论性的）。一重核具有电荷 Ze，其有效半径为 R。按径典考虑，当 π 介子射向核时，只有当它与核最近的距离等于和小于 R 时才能发生碰撞或散射（忽略核的反冲和原子中的电子效应）。试证 π 介子的散射截面为

对于π^+ $\quad\sigma=\pi R^2\left(\frac{T_0-V}{T_0}\right)$

对于π^- $\quad\sigma=\pi R^2\left(\frac{T_0+V}{T_0}\right)$

其中 $V=\frac{Ze^2}{b}$。

〔解〕 因忽略核反冲及电子屏蔽效应，π 介子在核场中的势能简化为 $V=\pm\frac{Ze^2}{r}$（“+”：π^+，“−”：π^-）。

π 介子在双曲线轨道上距核最近处 $\dot{r}=0$，$r=R$，所以

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2\pm\frac{Ze^2}{R}$$

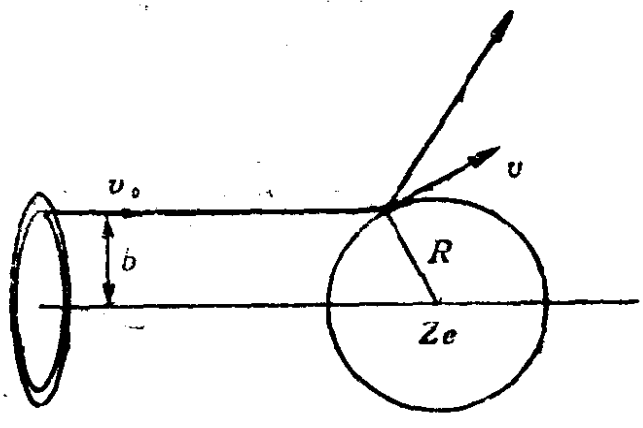


图 7.38

$$R\dot{\theta}=v,\quad bv_0=Rv$$

$$v=\frac{bv_0}{R}$$

$$T_0\mp V=\frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{R}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{b}{R}\right)^2=T_0\frac{b^2}{R^2}$$

$$b^2 = R^2\left(\frac{T_0 \mp V}{T_0}\right)$$

总散射截面

$$\sigma = \pi b^2 = \pi R^2\left(\frac{T_0 \mp V}{T_0}\right)$$

习　　题

7.1　质点受一与距离 3/2 次方成反比的引力作用在一直线上运动，试证此质点自无穷远到达 a 时的速率和自 a 从静止出发到达 $a/4$ 时的速率相同。

7.2　如果质点受中心力作用而作双纽线($r^2 = a^2\cos 2\theta$)运动时

$$F = -\frac{3ma^4h^2}{r^7}$$

试证明之。

7.3　如$\dot{s}_a$及$\dot{s}_p$为质点在远日点及近日点处速率，试证

$$\dot{s}_p : \dot{s}_a = (1+e) : (1-e)$$

7.4　质点在中心力作用下运动，此力的量值为质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即$v = \frac{a}{r}$。如果 $a^2 > h^2$ ($h = r^2\dot{\theta}$)，求质点的轨道方程。设当 $r = r_0$时，$\theta = 0$。

答：$r = r_0 \exp\left[\mp\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\theta\right]$，为对数螺线。

7.5　求质量为 m 的质点在火星表面受到的引力，用 g 表示。

答：1.48mg

7.6　某人造卫星的近地点在地面上方277km处，它在近地点处的速度是8km/s，试求卫星离地面的最大距离及其运行周期。

答：1080km；1.6h。

7.7　求当质点的轨道方程为

$$r = A(\cos n\varphi)^{-1/n} \qquad n \neq 0,\ 1$$

时的力律。

答：$f(r) = \dfrac{l^2}{mA^{2n}}(n-1)r^{2n-3}$。

7.8（a）试就按$1/r$规律变化的吸引势场中具有相同角动量的圆形轨道和抛物线来证明：抛物线近日点距离等于圆半径的一半。

（b）证明：在（a）中所示相同的中心力场中，质点在抛物线轨道上任何一点处的速率等于质点通过圆形轨道上相同点时的速率的$\sqrt{2}$倍。

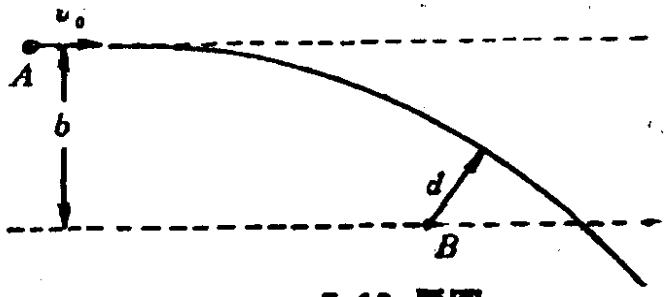
7.9　试证明用短促的火箭喷流改变轨道能量的最有效方式是沿平行于（或相反于）近地点处的运动方向点燃火箭，如果要使能量增加（或减小）的话。

7.10　某天体在万有引力作用下沿圆轨道运行时，突然引力减半，试证明天体将开始作抛物线运动。

7.11　哈雷彗星以周期76年绕太阳做椭圆运动。求其半长轴，且如$e=0.97$，求到太阳的近日点距离和远日点距离，用地球绕太阳的轨道的半径a_E表示之。

答：$a = 17.3a_E$，$r_a = 35.4a_E$，$r_p = 0.5a_E$。

7.12　质量为m的粒子A受到第二个粒子B的引力作用，B保持在原点不动。起初，当A离B很远（$r=\infty$）时，



7 12 题图

A 具有速度 v_0，方向沿图中所示直线，B 与这条直线的垂直距离为 b，粒子 A 由于 B 的作用而偏离原来的路线，沿图示的轨道运动。此轨道与 B 之间最短距离为 d，试推算 B 的质量，用上述已知量和引力常数 G 表示。

答：$m_B = v_0^2(b^2 - d^2)/2Gd$。

7.13 证明人造卫星在地球引力场中以椭圆轨道运动的速率由下式表示：

$$v = v_e\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)R}$$

其中 v_e 为脱离地球时的逃逸速度，R 是地球半径，a 是轨道的半长轴。

7.14 一卫星运动在绕地球的半径为 $aR_E(a>1)$ 的圆形轨道上。在某瞬间卫星的速度 v 突然变为 kv（k 是常数），求使卫星刚好能接触地球之 k 值。

答：$k = [2/(1+e)]^{1/2}$。

7.15 一卫星沿绕地球的圆轨道运行，半径为 $2R_E$，其速度方向改变了 α，其大小保持不变，求使卫星最接近地球时距地球表面 $R_E/2$ 远之 α 值。

答：$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$。

7.16 对于一个卫星，在火箭燃料燃尽时的条件（初始条件）是

$$\beta = \beta_0,\ r = r_0,\ v = v_0$$

证明近地点距离是

$$r_p = r_0[1 - \{1 - k(2-k)\cos^2\beta_0\}^{1/2}]/(2-k)$$

而远地点距离是

$$r_a = r_0\{1 + [1 - k(2-k)\cos^2\beta_0]^{1/2}\}/(2-k)$$

其中 $k = r_0v_0^2/\lambda$。

7.17 人们打算把卫星置于圆形轨道（$r=a$）上，火箭燃

料燃尽时的条件是

$$r=a,\ v=\sqrt{\lambda/a},\ \beta=0$$

但由于火箭程序中的错误，初始条件是

$$r=a,\ v=\sqrt{\lambda/a},\ \beta=\alpha$$

估计一下飞行角误差对近地点及远地点高度的影响。

答：$\pm a\sin\alpha$。

7.18 火箭自地球表面发射，发射方向与竖直方向成α角，发射后按椭圆轨道运动。已知椭圆的长轴是地球半径的$n(n<2)$倍，试求火箭在空中飞行的时间。

答：$$t=\left(\frac{n^3R}{2g}\right)^{1/2}\left\{\pi+\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\cos\alpha-2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{n-1}\cos\alpha}{n-2+\sqrt{n^2-4(n-1)\sin^2\alpha}}\right\}$$

7.19 试证在力与距离平方成反比的椭圆运动中，动能对时间的平均值等于势能对时间的平均值的一半。

7.20 一质量为m的卫星，在绕地球的一椭圆轨道上。当卫星在它的近地点时，它到地心的距离为R_0，运行速率为v_0，地球的质量M比m大得多。

（1）如果椭圆轨道的长轴是$4R_0$，卫星在远地点处的速率是多少？用G，M和R_0表示。

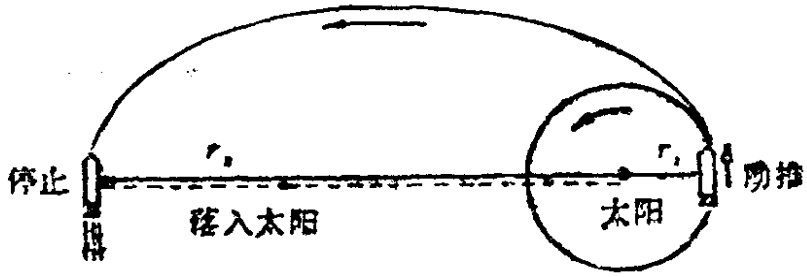
（2）证明椭圆轨道的短轴的长度是$2\sqrt{3}R_0$，并求出卫星的周期，用v_0和R_0表示。

答：（1）$v=v_0/3=(GM/6R_0)^{1/2}$

（2）$T=2\sqrt{3}(2\pi R_0/v_0)$。

7.21 用尽可能小的冲量（由点燃一火箭引擎给予飞船）把一宇宙飞船从地球轨道上投降到太阳上去的问题，不能通过在地球轨道运动的相反方向发射一火箭以使飞船的速度减低到零而得到解决。用一较小的火箭的一个两步过程可以实现这一目的。假设起初的轨道是一个以太阳为中心、半径等于r_1的圆。

通过一短暂的火箭燃烧，使飞船在轨道速度的方向上切向地加速而进入一椭圆轨道，其近日点与发射点重合。在这一轨道的远日点，飞船受到一个足以使它的空间速度减低到零的向后冲量，使它随即落到太阳上去（略去地球的引力效应）。



7.21题图

（1）对飞船的远日点 r_2 的一定值，计算在初级点火时所需给予它的速度增量。

（2）求出飞船在其远日点的速率，从而求出要使它掉到太阳上去而在两步中所必须给予它的速率增量之和。这一和数是火箭引擎所必须能够供给的总冲量的一个量度。对 $r_2=10r_1$ 的情形，把这一和数同飞船起初在地球轨道上的速率比较一下。

答：（1）r_{a_2}/r_0

$$=[1+(\Delta v_1/v_0)]^2/\{2-[1+(\Delta v_1/v_0)]^2\}$$

其中 r_{a_2} 是用AU（天文单位≒地球轨道半径）表示的远日点距离，v_0 是地球轨道速率，Δv_1 是增量。

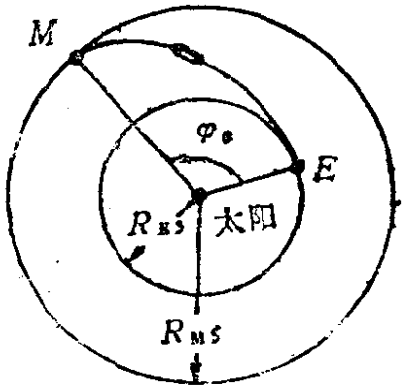
$$(2)\left(\frac{v_{a_2}}{v_0}\right)=\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]\left(\frac{r_E}{r_{a_2}}\right)$$

$$=\left\{2-\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]^2\right\}\Big/\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]$$

因而，$[(\Delta v)_{\text{总需要}}/v_0]=\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)+\left(\frac{v_{a_2}}{v_0}\right)$

$$=\left[1-\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]\Big/\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]$$

7.22 试计算为使一卫星从地球轨道转移到火星轨道上去所需的速度增量。设地球与火星轨道是共面圆，力心在太阳上，略去地球和火星对卫星的引力。



7.22题图

答：$$\delta v=\left(\frac{\lambda}{R_{ES}}\right)^{1/2}\{[2R_{MS}/(R_{MS}+R_{ES})]^{1/2}-1\}+\left(\frac{\lambda}{R_{MS}}\right)^{1/2}\{1-[2R_{ES}/(R_{MS}+R_{ES})]^{1/2}\}$$

$$=(2.8+2.6)\times10^3\text{m/s}=5.4\times10^3\text{m/s}$$

7.23 两个卫星 A 和 B，最初在半径为 R_0 的关于地球的同一轨道上运动，两者的半径夹一角度 ψ_0。设卫星 A 追赶卫星 B，进而假定 A 与 B 相会于 C，ψ_1 是 B 与 C 半径间的夹角。若 A 到 C 之前画出一椭圆轨道，而 B 继续沿其圆轨道运动到 C，求到会合时所用的时间。

答：$$t=2\pi\frac{R_0^{3/2}}{\lambda^{1/2}}\quad\frac{\alpha}{2\pi}=\alpha\frac{R_0^{3/2}}{\lambda^{1/2}}\quad(\alpha=(\psi_0+\psi_1)/2)$$

7.24 一卫星被以速率 $\sqrt{\lambda/R_E}$ 发射到地球赤道平面内距地球表面 $R_E/2$ 的高度，飞行角为 30°，求其轨道及卫星距地球表面的最大和最小高度。

答：$H_{max}=3.984R_E$，$H_{min}=0.016R_E$。

7.25 一弹道导弹要求一个 7.5×10^6m 的射程（射程即 αR_E，α 是发射点与目标点处地球的半径间夹角），求最适宜的飞行角 β_0，初速度 v_0 及导弹达到的最大高度 H。

答：$\beta=28°$，$v_0=4.7\times10^3$m/s，$H=1.2\times10^6$m。

7.26 一个沿轨道运行的航天站始终保持在地面观测站的垂直上方，问这个观测站必须建立在地球上的什么位置？这个航天站应朝什么方向以多大的速度发射？

答：$r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$，$v=\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$。

（T 是地球自转周期）

7.27 一质量为 m 的粒子，在一个重的力心 C 附近运动，受到吸引力 $-f(r)e_r$，其中 r 是从 C 测量的这个粒子的位置。如果这个粒子还受到一个减速的力 $-\lambda v$，而它起初相对于 C 的角动量为 L_0，试求它的角动量与时间的函数关系。

答：$L(t)=L_0e^{-\lambda t/m}$。

7.28 卫星在其关于地球的第一个椭圆轨道的近地点处受到了地球上层大气的拖曳，使其速率从 v_1 变为 $v_1(1-\varepsilon)$ 而不改变方向，其中 ε 是小的正常数。证明：关于地球的新的轨道偏心率近似为 $e-2\varepsilon(1+e)$，这里 e 是原来轨道的偏心率。

指出在通过 n 个近地点后的偏心率。

如 $e=0.9$，而 $\varepsilon=0.01$，在卫星轨道近似地变为圆形之前，又经过多少个近地点？

答：经过 n 个近地点后 $e_n\approx e-2n\varepsilon(1+e)$

对于圆形轨道 $e_n=0$，$n\approx e/[2\varepsilon(1+e)]$。

当 $e=0.9$，$\varepsilon=0.01$，则 $n=24$。（粗略近似）

7.29 一卫星在 $r_0=1.1R_E$，以 $r_0v_0^2/\lambda=1.2$ 被平行于地球表面发射，求远地点距离及远地点与近地点相对地面的高度之比。

答：$1.65R_E$，6.5。

7.30 有一小卫星在绕地球的圆轨道中运动，轨道半径为 r_1，现在改变卫星速度的方向，使它在绕地球的一个椭圆轨道中运动，速度是这样改变的：卫星失去其轨道角动量的一半，但总能量不变。试计算这新轨道的近地点和远地点距离（相对于地心来量度），用 r_1 表示。

答：$\left[1\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]r_1$。

7.31 一艘已经关掉引擎的宇宙飞船正在一团奇怪的气体云附近航行。飞船的指挥官注意到飞船正沿一圆形轨道走着，这轨道将直接引到这团云中去。他还根据飞船的运动推算出它相对于云团的角动量并无改变。有什么（中心）吸引力能说明这样一个轨道？

答：$F\propto\frac{1}{r^5}$。

7.32 用火箭推进的卫星在半径为r_0的圆形轨道上运行。火箭发动机使火箭的速度突然在它运行方向上增加8%，新轨道远地点的距离是多少？仔细画出最后的轨道图。画一图表示，由于这个冲击，等价的一维有效势如何变化？

答：远地点距离$1.40r_0$。

7.33 （1）某彗星的轨道为抛物线，其近日点距离为地球轨道（假定为圆形）半径的$\frac{1}{n}$，则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的$\frac{2}{3\pi}\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$倍，试证明之。

（2）试再证任何作抛物线轨道运动的彗星停留在地球轨道（仍假定为圆形）的最长时间为一年的$\frac{2}{3\pi}$倍或76日。

7.34 有一个在太阳周围按椭圆轨道运动的行星，当运动到某一点时，太阳的质量突然发生一微小变化，假如其后轨道的偏心率之值不变，求证该点即为椭圆短轴的端点。

7.35 一质点在万有引力作用下沿椭圆轨道运动，在某点A受瞬时法向力而使法向速度突然变化一小量δv，求此后轨道的半长轴、半短轴、第二焦点及周期的变化。

答：$\delta a\approx 0$，$\delta b=\frac{-p_2\delta v}{p_1 v}b$（$p_1$、$p_2$是力心到切线、法线的

距离），第二焦点到质点距离不变，但转过了$\frac{2\delta v}{v}$角度，$\delta T \approx 0$。

7.36 考虑一个质量为m的行星，处在围绕太阳(质量M)的轨道上。进一步假定太阳和行星周围的整个空间中，存在着均匀分布的尘埃，其密度为ρ。

（1）证明尘埃的作用就是增加一项附加的中心吸引力$F' = -mkr$，其中$k = \frac{4\pi}{3}\rho G$，G为引力常数。与尘埃粒子的碰撞所导致的任何阻力均可略去。

（2）考虑行星的一个圆轨道，相应的角动量为l。根据l，G，M和k给出轨道半径r_0满足的方程，方程不必求解。

（3）假定F'和太阳引力相比甚小，考虑一个稍稍偏离（2）中轨道的轨道，研究径向运动和方位角进动的频率。证明轨道是一个进动的椭圆，根据r_0，ρ，G和M计算进动角频率ω_r。

（4）椭圆进动轴的方向与轨道角速度的方向相同还是相反？

答：（1）$F' = -\frac{4}{3}\pi\rho G m r$；（2）$-\frac{GMm}{r_0} - mkr_0 + \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$；（3）$\omega_r = 2\pi\rho\left(\frac{r_0^3 G}{M}\right)^{1/2}$；（4）进动轴方向与轨道角速度方向相反。

7.37 如果一中心力场力函数具有如下形式

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{e}{r^4}$$

求其圆轨道稳定的条件。

答：$\rho^2 > \frac{e}{k}$。

7.38 证明中心力场中圆轨道稳定的条件

$$\frac{f'(r_0)}{f(r_0)}+\frac{3}{r_0}$$

等价于 $\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0}>0$，$V'$是等效一维势。

7.39 考虑质量为 m 的质点，它受约束而运动于方程为

$$r^2=4az$$

的抛物面上。如质点受重力作用，证明其对半径为$\rho=\sqrt{4az_0}$的圆轨道所作微振动频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2mg}{a+z_0}}$$

7.40 一颗很重的星，质量M，半径R，以速度v通过一质量密度为ρ的非常稀薄的气体，它以其引力场将粒子拉向自己并捕获所有打到它表面上的气体原子。近似地求对星的阻力。原子的热速度相对于$|v|$可以忽略，原子之间的相互作用可以忽略。

答：$F=\pi\rho v^2(R^2+2MGR/v^2)$

7.41 设有一束半径为 b 的刚性球被半径为 a 的刚性球散射，入射束是均匀的，试求微分散射截面和总散射截面。

答：$|\sigma(\theta)|=\frac{1}{4}(a+b)^2$

$$\sigma_T=\pi(a+b)^2$$

7.42 一个质量为 m 的粒子以速度v_0自无穷远处射来，它通过一个固定力心的反平方排斥力场（大小为k/r^2，k是常数）。假如它不被偏转的话，将在距固定力心为 b 处通过，求

（1）最接近力心的距离；

（2）实际上发生的角偏转；

（3）均匀的粒子束被此位势散射后的微分散射截面

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$。

答：（1）$r_{min}=\frac{k}{mv_0^2}+\sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2+b^2}$

（2）$\mathrm{ctg}\theta=\frac{2Eb}{k}$，

（3）$\frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta}$。

7.43 一质量为 m 的粒子在一排斥性的中心力 Am/r^3 的力场中运动，A 是常数。在离力心很远的地方，粒子的速率为 v_0，碰撞参数为 b，证明 m 到力心的最近距离为

$$r_{min}=(b^2+A/v_0^2)^{1/2}。$$

第八章　刚体的运动

如同“质点”概念一样，“刚体”这一概念也是一个重要的理想化的模型。刚体是这样的质点系，其中各质点间的距离因受到强烈的约束而在整个运动过程中保持不变。在自然界里，严格意义上的刚体并不存在，这是因为构成物体的原子等微粒总是在运动着，而且物体内还会发生宏观的形变或位移。然而通常微观粒子的运动在描述宏观运动时可以忽略，而对许多实际物体来说，例如一块坚硬的金属或岩石，其宏观形变也可以忽略，这样，用刚体模型描述它们可以得到十分准确的方程式。

刚体是一种特殊的质点系。质点系的所有基本定理对它都适用，而且是运动问题解决得最好的一类质点系。刚体所包括的体系范围很广，以分子到运动着的机械，乃至地球和星系，尽管其间差别很大，但仍有许多共同点，我们着重讨论它们转动的性质。

§1　刚体运动的描述

理论要点

1．描述刚体运动的独立坐标

（1）刚体的自由度

如果刚体中三个不共线的质点在空间中是固定的，则刚体在空间中也是固定不动的，因此，刚体的自由度数$\leqslant 9$；又由于这三个质点受有约束 $r_{12}=c_{12}$，$r_{23}=c_{23}$，$r_{31}=c_{31}$（c_{ij}是常数），所以刚体的自由度$\leqslant 6$。

（2）描述刚体运动的独立坐标

蔡斯尔定理指出：刚体的任一有限运动，可看作是刚体上某点（通常取质心）的平动加上对该点的一个转动。又据欧勒定理：刚体绕体内一个固定点的转动，相当于绕通过此点的某一轴的转动。我们称平动和转动是刚体的两种基本运动。

刚体位移时，如体内任意两点之间的直线保持平行，则称为平动。一般有自由度$f=3$，通常以x_1，x_2，x_3描述。

刚体位移时，如体内某直线上所有的点保持不动，则称为定轴转动。$f=1$，以角度φ描述。

刚体位移时，体内所有质点的运动总平行于已知的固定平面，称为平面平行运动，简称平面运动。$f=3$，以x_1，x_2及角度θ描述

刚体位移时，体内有一点保持固定，称为定点运动。$f=3$，以欧勒角φ，θ，ψ描述。

刚体位移时，体内没有一个点是固定的，称为刚体的一般运动或空间运动。$f=6$，通常以一点（如质心）的坐标x_1，x_2，x_3及φ，θ，ψ描述。

2．定轴转动

角速度：$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$

角速度向量：$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$沿瞬时转动轴线，指向由转动方向按右手螺旋定则决定。

刚体上任一点P，其速度为（图8.1）

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{8.1}$$

加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\\&=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{8.2}$$

式中：$\frac{d\omega}{dt}\times r$ 为切向加速度，即a_τ；$\omega\times(\omega\times r)$ 为法向加速度，即a_n。

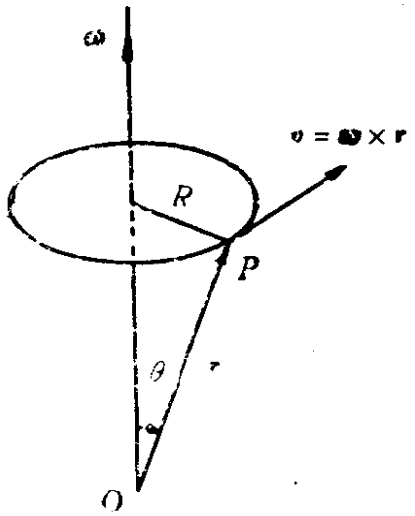


图 8.1

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

$$a=\sqrt{R^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+R^2\omega^4}$$

$$(\widehat{a,a_n})=\arccos\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\omega^4}}\right)$$

3. 刚体的平面平行运动

（1）各点速度和加速度

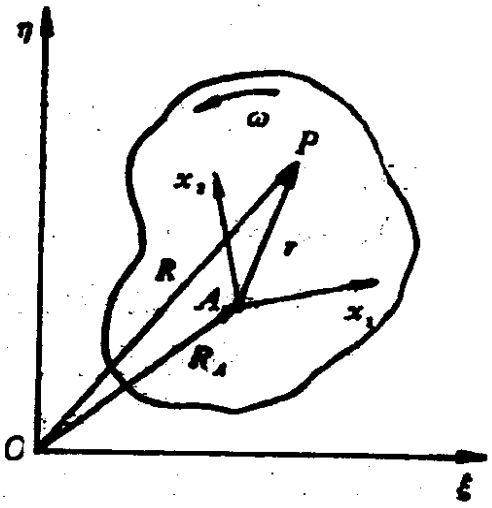
刚体平面运动中，与固定平面垂直的任意直线上各点运动情况相同，故只须考察刚体中平行于固定平面的一个截面（薄片）的运动即可。

刚体上任一点P的速度（图8.2）

$$v=\dot{R}=\frac{d}{dt}(R_A+r)$$

$$=v_A+\omega\times r \qquad (A\text{为基点})$$

(8.3)



加速度：

$$a=\frac{d}{dt}v=a_A+\frac{d\omega}{dt}\times r-\omega^2 r$$

(8.4)

式中$\boldsymbol{a}_A$是基点A的加速度；$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}$是转动加速度；$-\omega^2\boldsymbol{r}$是向心加速度。

（2）瞬时转动中心

在任一时刻，平面刚体上总有一点O速度为零，称为**瞬时转动中心**，简称**瞬心**．瞬心满足

$$\boldsymbol{v}_O=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_O=0 \tag{8.5}$$

$\boldsymbol{r}_O$，$\boldsymbol{v}_O$表示瞬心O对基点A的位置向量及在静系中的速度．$\boldsymbol{v}_A$是基点A在静系中的速度。

将（8.5）式在静系 O-$\xi\eta$ 上投影，可得瞬心在静系中的位置

$$\begin{aligned}\xi_O&=\xi_A-\frac{v_{A\eta}}{\omega}=\xi_A-\frac{d\eta_A}{d\varphi}\\ \eta_O&=\eta_A+\frac{v_{A\xi}}{\omega}=\eta_A+\frac{d\xi_A}{d\varphi}\end{aligned} \tag{8.6}$$

将（8.5）式投影到动系A-x_1x_2，可求出瞬心在动系中的位置

$$\begin{aligned}x_{1O}&=-\frac{v_{A2}}{\omega}\\ x_{2O}&=\frac{v_{A1}}{\omega}\end{aligned} \tag{8.7}$$

瞬心在静系中的轨迹称为**空间极迹**，瞬心在动系中的轨迹称为**本体极迹**。薄片的运动可视为本体极迹在空间极迹上无滑动地滚动，瞬心即为两极迹的公共切点。

刚体的平面运动可视为绕瞬心的单纯转动．利用瞬心，刚体上任何一点的速度可表为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{r}$是平面刚体上任一点相对瞬心的位置向量。

求速度瞬心，除解析法外，还可用几何法。

(a) 已知两点速度方向（速度方向与两点联线不垂直）：

如v_A不平行v_B，瞬心O在v_A，v_B垂线的交线上，见图8.3.

如$v_A \parallel v_B$，瞬心O在无穷远，平面刚体作瞬时平动，角速度为零，且各点速度相等（图8.4）.

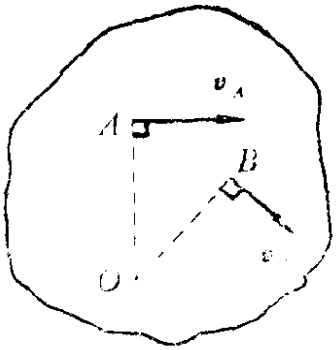


图 8.3

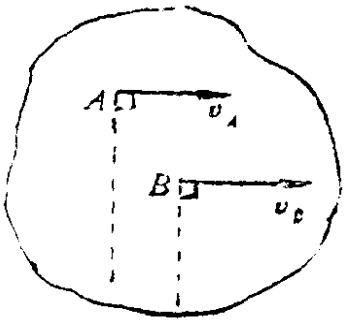


图 8.4

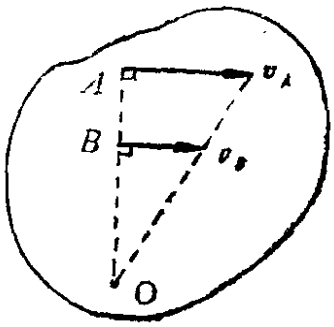


图 8.5

(b) 已知两点速度的大小和方向（速度方向与两点联线垂直）：瞬心位置如图8.5，8.6，8.7所示. 图8.7的情形，瞬心在无穷远.

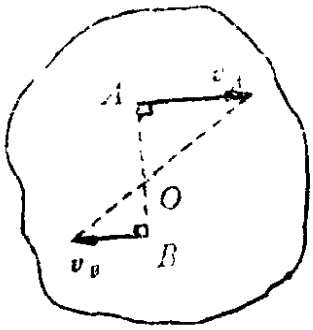


图 8.6

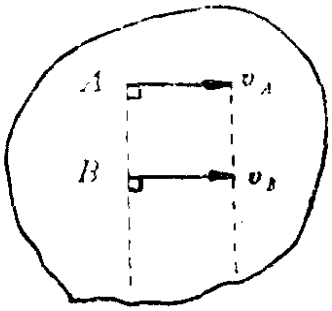


图 8.7

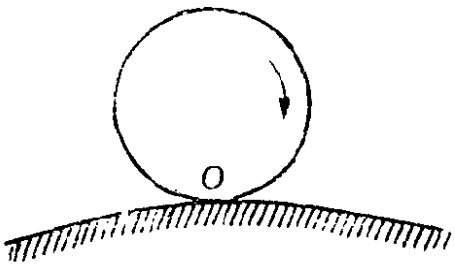


图 8.8

(c) 平面刚体在某固定平面上作无滑动滚动：瞬心 O 即接触点（图8.8）.

4. 定点运动

刚体在运动中只有一点固定，称为定点运动，此时所有其余各点只能在以此点为中心的球面上运动. 在过定点的任一直线上的各点，轨迹为同心球面曲线. 因此，只须讨论任一球面上各点的运动即可.

依欧勒定理，刚体定点运动，相当于绕过此定点的某一轴的

转动，因而可以用讨论定轴转动的同样的方法讨论定点运动。

定点运动的刚体内一点P的速度

$$v=\omega\times r \tag{8.8}$$

$$a=\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times(\omega\times r) \tag{8.9}$$

公式的形式，与定轴转动情形一样。但因ω大小、方向是时刻变化的，$\frac{d\omega}{dt}\times r$不一定还沿切向，$\omega\times(\omega\times r)$也不一定仍沿法线方向。

5. 刚体的一般空间运动

$$v=v_A+\omega\times r \tag{8.10}$$

式中A为基点，r是质点相对于基点的位置向量。

$$a=a_A+\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times(\omega\times r) \tag{8.11}$$

6. 角速度

角速度与基点的选择无关。刚体作一般空间运动时，其上任一点B相对静系$O\text{-}x_1x_2x_3$的速度（以A为基点）可表为（图8.9）

$$v_B=v_A+\omega\times(r_B-r_A)$$

同样，任一点C的速度

$$v_C=v_A+\omega\times(r_C-r_A)$$

$$v_B-v_C=\omega\times(r_B-r_C)$$

$$v_B=v_C+\omega\times(r_B-r_C)$$

这正是以C为基点的v_B的表达式。可见，无论选哪个点为基点，角速度向量ω都是同一个ω，角速度向量表征的是刚体作为整体运动的性质。

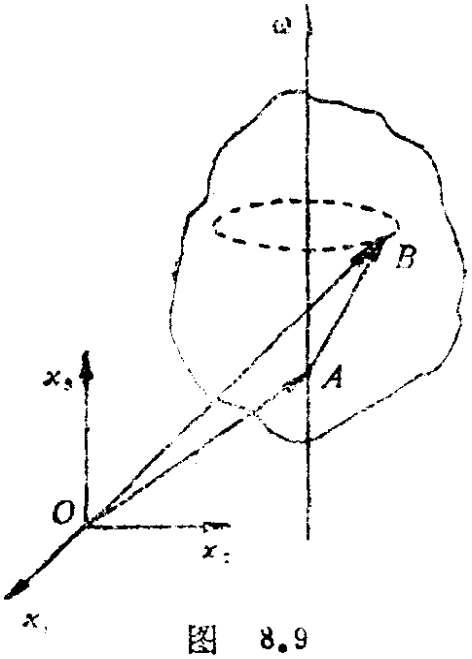


图 8.9

如刚体同时具有两个角速度 ω_1 和 ω_2，求其合角速度时分两种情形：

（i）ω_1 和 ω_2 相交，则可按平行四边形法则合成：$\omega = \omega_1 + \omega_2$，轴线通过交点。

（ii）如 ω_1 和 ω_2 的轴线不相交，其一种特殊情形为 ω_1，ω_2 大小相等、方向相反，形成角速度偶（图8.10），此时刚体中任一点 P 的速度

$$v_P = \omega \times \vec{AP} + (-\omega) \times \vec{BP} = \omega \times \vec{AB}$$

表明刚体中各点以同一速度运动（平动）。

一般情形：$\omega_1 \neq \omega_2$，可在 B 点加一对角速度 ω_3 及 $-\omega_3$ 使 $|\omega_3| = |\omega_1|$，$\omega_3 /\!/ \omega_1$（图3.11），则 ω_1 与 $-\omega_3$ 形成一角速度偶，它相当于刚体的平动，平动速度

$$v = \omega_1 \times \vec{AB}$$

对转动有贡献的只有 ω_2 和 ω_3，合角速度 $\omega = \omega_2 + \omega_3$。这表明：刚体一方面以 v 平动，同时绕过 B 点的轴以 ω 转动。

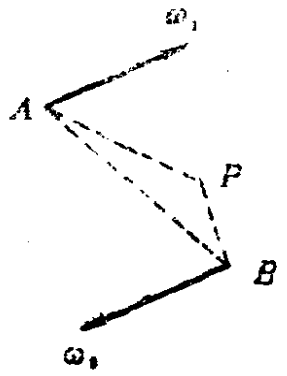


图 8.10

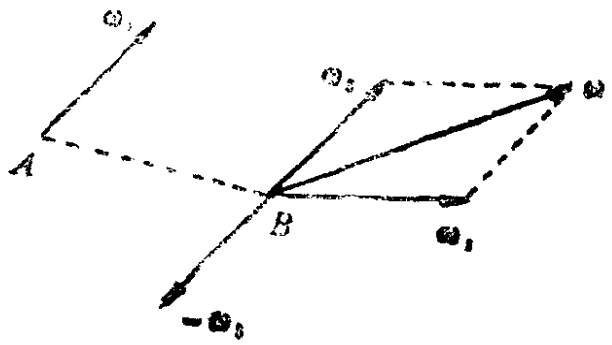


图 8.11

7. 欧勒角　空间坐标系的任意转动变换

由一笛卡儿坐标系到另一笛卡儿坐标系的变换，以矩阵方程

$$X' = AX \tag{8.12}$$

表示，其中 X' 为本体坐标系，A 为旋转（变换）矩阵，X 为空间坐标系。A 中包含三个独立角度，这些角可有许多不同的选

法，而选择欧勒角φ，θ，ψ是方便的。

欧勒角是由下列三次转动，将x_i系变到x'_i系得到的：

（i）使空间坐标系$O\text{-}x_1x_2x_3$绕x_3轴逆时针转动φ角（进动角），变到$O\text{-}\xi\eta\zeta$，变换矩阵为

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.13}$$

（ii）使$O\text{-}\xi\eta\zeta$坐标系绕ξ轴（节线）逆时针转θ角（章动角），变到$O\text{-}\xi'\eta'\zeta'$，变换矩阵为

$$A_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{8.14}$$

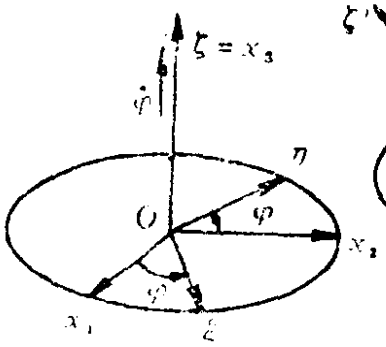


图 8.12

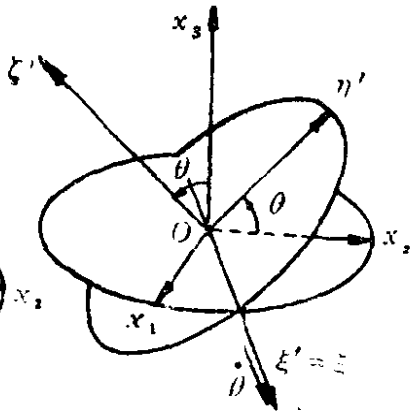


图 8.13

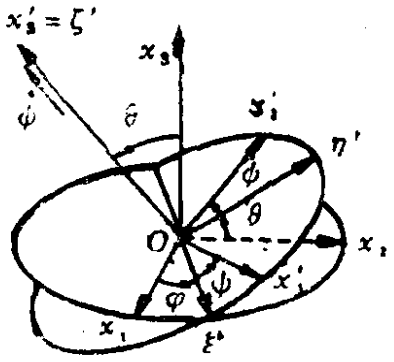


图 8.14

（iii）使$O\text{-}\xi'\eta'\zeta'$绕ζ'逆时针转ψ角（自转角），变到$O\text{-}x'_1x'_2x'_3$，变换矩阵为

$$A_\psi=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{8.15}$$

从x_i系（空间系）到x'_i系（本体系）的完整变换矩阵为

$$A=A_\psi A_\theta A_\varphi$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

其中 $A_1=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi$

$A_2=-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi$

$A_3=\sin\theta\sin\psi$

$B_1=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi$

$B_2=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$

$B_3=-\sin\theta\cos\varphi$

$C_1=\sin\psi\sin\theta$

$C_2=\cos\psi\sin\theta$

$C_3=\cos\theta$

从x'_i系(本体系)到x_i系(空间系)的变换为上述变换的逆变换

$$X=A^{-1}X' \tag{8.17}$$

此变换可直接由转置矩阵A^T给出，即$A^{-1}=A^T$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

关于欧勒角的这种选择，称为x约定.

8. 欧勒运动学方程式

一般情况下，刚体作定点运动时，进动角φ，章动角θ及自转角ψ都在变化，刚体的瞬时角速度可用以欧勒角表示的三个独立的角速度表示：

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_n \quad (\boldsymbol{e}_n\text{是节线}\xi\text{的单位向量})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \qquad \dot{\boldsymbol{\psi}}=\dot{\psi}\boldsymbol{e}'_3$$

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}$$

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$、$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$和$\dot{\boldsymbol{\psi}}$沿本体坐标轴的分量为

$\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$ $\quad\dot{\theta}_1=\dot{\theta}\cos\psi$ $\quad\dot{\psi}_1=0$

$\dot{\varphi}_2=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$ $\quad\dot{\theta}_2=-\dot{\theta}\sin\psi$ $\quad\dot{\psi}_2=0$

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \qquad \dot{\theta}_3 = 0 \qquad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$$

所以

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \tag{8.19}$$

这组方程式称为**欧勒运动学方程式**，它们给出了角速度沿本体坐标轴上的分量与欧勒角及其对时间的微商之间的关系。

例　题

8.1　一半径为 a 的圆盘以匀角速度 ω 绕其中心转动，另一半径为 b 的圆盘以匀角速度 ω' 在 A 外面无滑动地滚动。试证两圆盘连心线以角速度 $\dfrac{a\omega + b\omega'}{a+b}$ 转动，并求 B 圆盘绕 A 圆盘滚动一周所需的时间及 B 圆盘回到原来位置所需的时间。设运动维持在一个平面内。

〔解〕　设连心线角速度为 ω_1，则

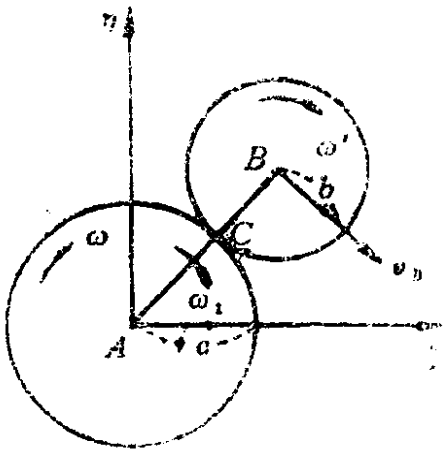


图　8.15

$$v_B = (a+b)\omega_1$$

圆盘 A 上接触点 C 的速度为 $a\omega$，

圆盘 B 上接触点 C 的速度为

$$v_B - b\omega' = (a+b)\omega_1 - b\omega'$$

则

$$\omega_1 = \frac{a\omega + b\omega'}{a+b}$$

B 圆盘回到原来位置的时间，即 C 点在固定圆 A 上转一周所需时间 t_1 满足

$$\omega_1 t_1 = 2\pi$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi(a+b)}{a\omega + b\omega'}$$

B绕A滚动一周是C点在和A圆盘固结在一起的动系中绕A一周，所需的时间为

$$t_2=\frac{2\pi}{\omega_1-\omega}=\frac{2\pi(a+b)}{b(\omega'-\omega)}$$

8.2　一行星齿轮，其臂杆OC以等角速度ω沿顺时针方向旋转，大轮以Ω反时针方向旋转．试求图中小齿轮上A，B，C各点的速度和加速度．

〔解〕　取定系$O\text{-}x_1'x_2'$，动系$O\text{-}x_1x_2$．臂杆OC角速度为$\omega=\dot{\varphi}$，大轮角速度为$\Omega=\dot{\psi}$，小轮角速度为$\omega_1=\dot{\varphi}$．α，ψ，φ是各刚体相对于铅直方向转过的角度．

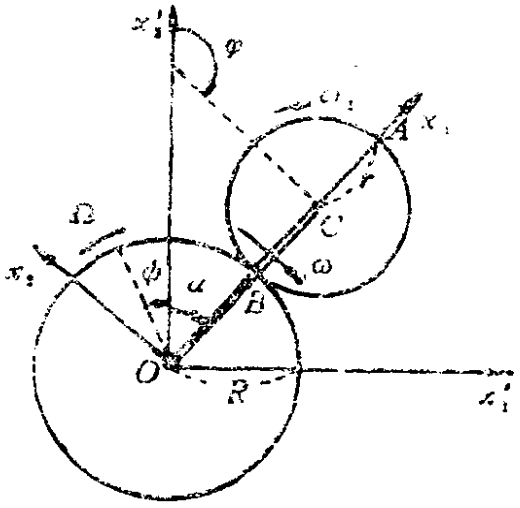


图　8.16

$$\boldsymbol{v}_C=-(R+r)\omega\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CB}$$

$$=-(R+r)\omega\boldsymbol{e}_2+\dot{\varphi}r\boldsymbol{e}_2$$

又

$$\boldsymbol{v}_B=R\dot{\psi}\boldsymbol{e}_2=R\Omega\boldsymbol{e}_2$$

所以

$$\dot{\varphi}r=(R+r)\omega+R\Omega,\quad \dot{\varphi}=\frac{1}{r}[R\Omega+(R+r)\omega]$$

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}_1\times\overrightarrow{CA}=-(R+r)\omega\boldsymbol{e}_2-r\omega_1\boldsymbol{e}_2$$

$$=-[(R+r)\omega+(R+r)\omega+R\Omega]\boldsymbol{e}_2$$

$$=-[2(R+r)\omega+R\Omega]\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_C=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OC})$$

$$=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OC})=-(R+r)\omega^2\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{a}_C-\omega_1^2\overrightarrow{CB}$$

$$=\{-(R+r)\omega^2+\frac{1}{r}[R\Omega+(R+r)\omega]^2\}\boldsymbol{e}_1$$

$$= -\{R\omega^2 - 2R\omega(\omega + R) - \frac{R^2}{r}(\omega + \Omega)^2\}\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \vec{CA})$$

$$= -[r\omega^2 + (R + r)\omega^2 + 2\omega R(\omega + \Omega) + \frac{R^2}{r}(\omega + \Omega)^2]\boldsymbol{e}_1$$

8.3 长度为 l 的直杆 AB 在平面内运动，其角速度为 ω，杆的一端在半径为 r，中心为 O 的圆周上运动，$\overline{OA}$ 线的角速度为 ω'．证明 $\overline{OB}$ 线的角速度为

$$\Omega = [\omega(R^2 + l^2 - r^2) + \omega'(R^2 + r^2 - l^2)]/2R^2$$

其中 R 为 B 点到中心 O 的距离．

〔解〕 取动系 O-x_1x_2 如图8.17所示．$\overline{OB}$ 是一动线，相当于一刚性杆．由题知，$\overline{OA}$ 的角速度为 ω'．设杆的瞬心为 C，则

$$v_A = \omega' r$$

又

$$v_A = \overline{AC} \cdot \omega$$

所以

$$\overline{AC} = \frac{\omega' r}{\omega}\text{（瞬心位置）}$$

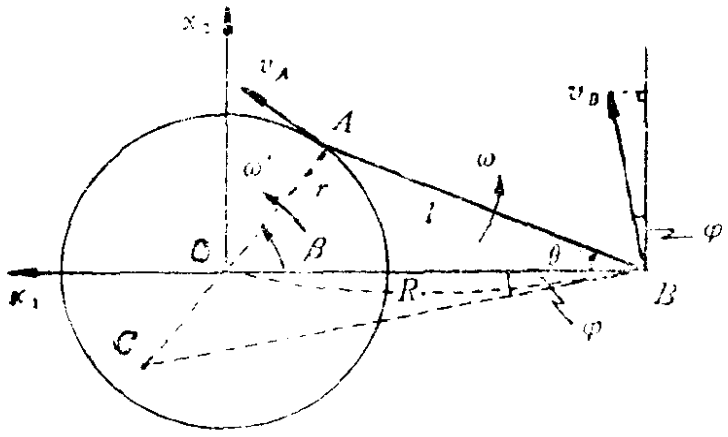


图 8.17

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \vec{AB}$$

$$= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (l\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 + l\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2)$$

$$= -\omega'\boldsymbol{e}_3 \times (-r\cos\beta\boldsymbol{e}_1 + \sin\beta\boldsymbol{e}_2)$$

$$-\omega\boldsymbol{e}_3 \times (-l\cos\theta\boldsymbol{e}_1 - l\sin\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$= \omega' r\cos\beta\boldsymbol{e}_2 + \omega' r\sin\beta\boldsymbol{e}_1 + \omega l\cos\theta\boldsymbol{e}_2 - \omega l\sin\theta\boldsymbol{e}_1$$

$$= (\omega' r\sin\beta - \omega l\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (\omega' r\cos\beta + \omega l\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

由 $r\cos\beta = \dfrac{r^2 + R^2 - l^2}{2R}$，$l\cos\theta = \dfrac{R^2 + l^2 - r^2}{2R}$ 得

$$v_B\cos\varphi = v_{2B} = \omega' r\cos\beta + \omega l\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2R}[\omega'(r^2+R^2-l^2)+\omega(R^2+l^2-r^2)]$$

$$\Omega = \frac{v_B\cos\varphi}{R} = \frac{1}{2R^2}[\omega(R^2+l^2-r^2)+\omega'(r^2+R^2-l^2)]$$

8.4 一半径为 a 的圆盘沿水平面运动，求其本体极迹和空间极迹.

〔解〕 圆盘上点P的速度

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_P - \boldsymbol{R}_A)$$

对于瞬心$\boldsymbol{v}_C = 0$，所以

$$0 = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A)$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A) = -\boldsymbol{v}_A,$$

以$\boldsymbol{\omega}$左叉乘之，得

$$\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A)]$$

$$= -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A$$

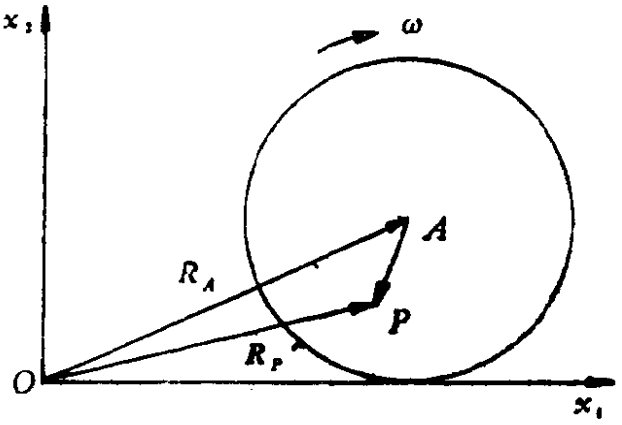


图 8.18

依向量公式

$$\text{左式} = [\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A)]\boldsymbol{\omega} - \omega^2(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A)$$

$$= -\omega^2(\boldsymbol{R}_C - \boldsymbol{R}_A)$$

所以

$$\boldsymbol{R}_C = \boldsymbol{R}_A + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A}{\omega^2}$$

因为 $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{v}_A = v_A\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_A = -\omega v_A\boldsymbol{e}_2$，故

$$\boldsymbol{R}_C = \boldsymbol{R}_A - \frac{v_A}{\omega}\boldsymbol{e}_2$$

写出分量式有

$$\boldsymbol{R}_A = x_{1A}\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{R}_C = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{R}_C = x_{1A}\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 - \frac{v_A}{\omega}\boldsymbol{e}_2$$

所以

$$x_1 = x_{1A},\quad x_2 = a - \frac{v_A}{\omega}$$

空间极迹是以$x_2 = a - v_A/\omega$表示的水平直线。如无滑动，$v_A = a\omega$，则$x_2 = 0$，空间极迹即x_1轴。

本体极迹为以 $r = \frac{v_A}{\omega}$ 为半径的圆，当无滑动时，$r = a$，即圆盘的圆周为本体极迹。

8.5 高为h，顶角为2α的圆锥在一平面上滚动而不滑动。如已知此锥以匀角速ω绕$O\xi$轴转动，试求圆锥底面A点的转动加速度a'和向轴加速度a''的量值。

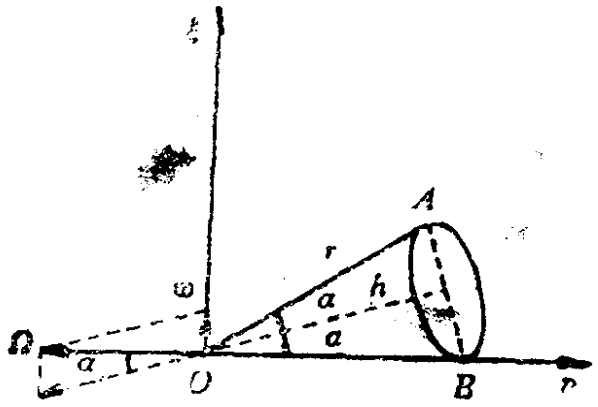


图 8.19

〔解〕 因圆锥系作纯滚动，与平面接触线上任意点速度为零，故为瞬轴，所以总角速度Ω沿$O\eta$的负方向。

$$\Omega = \omega \operatorname{ctg}\alpha$$

A点的转动加速度

$$a' = \frac{d\Omega}{dt} \times r$$

$$= (\omega \times \Omega) \times r$$

由于 $|\omega \times \Omega| = \omega^2 \operatorname{ctg}\alpha$，$r = \frac{h}{\cos\alpha}$，所以

$$a' = \omega^2 \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 h}{\sin\alpha}$$

A点的轴向加速度

$$a'' = \Omega \times (\Omega \times r)$$

$$a'' = 2h \sin\alpha \Omega^2$$

$$= 2h \sin\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \omega^2 = 2a' \cos^2\alpha$$

§2 质量几何 动能和角动量

理论要点

在刚体动力学中，表征刚体中质量分布的量起着重要作用，有关这些量的论述，称为质量几何。这里主要讨论二次矩，即质点系各质点质量与这些点的坐标的二次齐次函数之积，及其与动能、角动量的关系。

1. 刚体定点运动的角动量 惯量张量

刚体的角动量

$$\boldsymbol{L}=\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i[r_i^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_i] \quad (8.20)$$

对连续体

$$\boldsymbol{L}=\int\rho(r)[r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})]dV \quad (8.21)$$

此式表明：$\boldsymbol{L}$与$\boldsymbol{\omega}$一般不同向，仅当所有$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega}=0$，即只有平面运动和部分（不是所有的）定轴转动等特殊情形，两者才是同向的。

将（8.20）式写成分量并以矩阵表示

$$\begin{pmatrix} l_1\\ l_2\\ l_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13}\\ I_{21} & I_{22} & I_{23}\\ I_{31} & I_{32} & I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} \quad (8.22)$$

其中矩阵元为

$$I_{\alpha\alpha}=\sum_i m_i(r_i^2-x_{\alpha i}^2) \qquad (\alpha=\beta)\ \text{（转动惯量）}$$

$$I_{\alpha\beta}=-\sum_i m_i x_{\alpha i}x_{\beta i}=I_{\beta\alpha} \qquad (\alpha\neq\beta)\ \text{（惯量积）}$$

$(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$

统一写成

$$I_{\alpha\beta}=\sum m_i(r_i^2\delta_{\alpha\beta}-x_{\alpha i}x_{\beta i}) \tag{8.23}$$

对连续体

$$I_{\alpha\beta}=\int\rho(\boldsymbol{r})(r^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta)dV \tag{8.24}$$

$$I_{\alpha\alpha}=\int\rho(\boldsymbol{r})(r^2-x_\alpha^2)dV \qquad (\alpha=\beta)$$

$$I_{\alpha\beta}=-\int\rho(\boldsymbol{r})x_\alpha x_\beta dV \qquad (\alpha\neq\beta)$$

角动量可简写为

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{8.25}$$

式中

$$\mathrm{I}=\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{\omega}}=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13}\\ I_{21} & I_{22} & I_{23}\\ I_{31} & I_{32} & I_{33}\end{pmatrix} \tag{8.26}$$

称为惯量张量，它是一个二阶对称张量．I作为整体，表征刚体转动中的惯性的大小，如同m表征物体平动的惯性大小一样．I的各元素的物理意义，以下例说明：

设刚体绕x_1轴转动，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ 0,\ 0)$，则

$$l_1=I_{11}\omega_1,\ l_2=I_{21}\omega_1,\ l_3=I_{31}\omega_1$$

所以转动惯量I_{11}决定当刚体绕x_1轴转动时，角动量在x_1轴上分量的大小；I_{21}，I_{31}决定刚体绕x_1轴转动时角动量在x_2，x_3轴上分量的大小．余类推．

2．刚体定点运动的动能　转动惯量

刚体定点运动的动能

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}$$

由 $\boldsymbol{L}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$得

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{8.27}$$

令 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$是$\boldsymbol{\omega}$的单位向量，$\boldsymbol{n}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$），则

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{n} \tag{8.28}$$

令 $I=\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{n}$，则

$$T=\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

I 是刚体对于方向为$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$的瞬时轴线的转动惯量，它是标量。易证 I 的这一表式与初等表示式 $I=\sum_i m_i R_i^2$ 是一致的。

3. 关于转动惯量的定理

下面三个定理，不仅适用于刚体，也适用于一般质点系。

（1）平行轴定理

设 I 是质点系对 $m\ n$ 轴的转动惯量，I_C是质点系对平行于 $m\ n$ 并通过质点系质心的轴的转动惯量，d 为两轴之间的距离，M为质点系总质量，则有

$$I=I_C+Md^2 \tag{8.30}$$

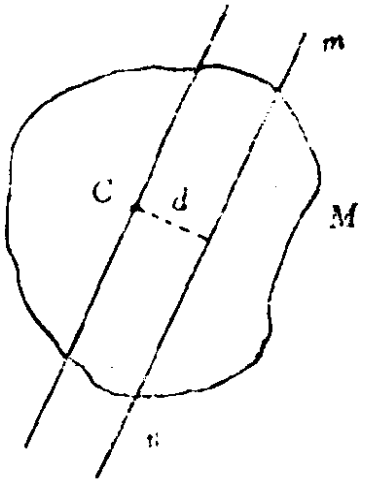


图 8.20

（2）垂直轴定理

如质点系的质量分布在笛卡儿坐标系$O\text{-}x_1x_2x_3$的x_1x_2平面内，设I_1，I_2，I_3分别是对x_1，x_2，x_3轴的转动惯量，则

$$I_3=I_1+I_2 \tag{8.31}$$

（3）相加定理

如两质点系 A，B，它们对转轴 mn 的转动惯量各为 I_A 和 I_B，则 A 与 B 组成的总质点系关于 mn 轴的转动惯量

$$I_{A+B}=I_A+I_B \tag{8.32}$$

4．惯量主轴与主转动惯量

（1）惯量主轴　主转动惯量

刚体绕某定点 O 以角速度 ω 转动时，$\boldsymbol{L}$ 与 ω 一般不同向。对于定点 O，能否找到一些特殊方向，当刚体绕这些方向转动时（即 ω 沿这些方向时），刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 也沿同一方向呢？回答是肯定的。这些方向称为**惯量主轴方向**。

从数学上看，要求 $\boldsymbol{L}$ 与 ω 同向，就是要求 $\boldsymbol{L}$ 与 ω 差一标量因子 I，即

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=I\boldsymbol{\omega}$$

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = I \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} \tag{8.33}$$

写成分量式为

$$\begin{aligned} (I_{11}-I)\omega_1+I_{12}\omega_2+I_{13}\omega_3&=0 \\ I_{21}\omega_1+(I_{22}-I)\omega_2+I_{23}\omega_3&=0 \\ I_{31}\omega_1+I_{32}\omega_2+(I_{33}-I)\omega_3&=0 \end{aligned} \tag{8.34}$$

这组方程式有非零解的充分必要条件是系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-I \end{vmatrix} = 0 \tag{8.35}$$

展开此行列式得 I 的**久期方程**，即 I 的三次代数方程。由于 I 是实对称矩阵（厄米矩阵），此方程的根一定为实的（见附录一），即本征值为实的。设本征值为 I_1，I_2，I_3，则每一本征值都是对应于某一主轴的转动惯量，称为**主转动惯量**。

将 I_1，I_2，I_3 分别代入线性代数方程组（8.34），可求出

至少三组两两正交的实本征向量，即三组角速度向量的分量比 $\omega_{1i}:\omega_{2i}:\omega_{3i}$（第二个指标 i 代表本征值 I_i），归一化后即可确定主转动惯量为 I_i 的那个主轴的方向余弦，这就给出了刚体上 O 点的惯量主轴方向。

（2）主轴坐标系

以刚体上 O 点为坐标原点，它的三个两两正交的惯量主轴构成的固结在刚体上的特殊本体坐标系，称为 O 点的**主轴坐标系**。

选取主轴系，惯量张量将有简单的对角形式。如刚体绕 x_1 轴转动，则

$$\boldsymbol{L}_1 = I_1\boldsymbol{\omega}_1$$

写成标量式为

$$l_1 = I_1\omega_1$$

同理

$$l_2 = I_2\omega_2,\quad l_3 = I_3\omega_3$$

这表示 $\mathbf{I}=\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$ 为对角的，故有

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

即角动量被简化成

$$\boldsymbol{L} = I_1\omega_1\boldsymbol{e}_1 + I_2\omega_2\boldsymbol{e}_2 + I_3\omega_3\boldsymbol{e}_3 \qquad (8.36)$$

同样，动能也被简化，即

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$T=\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2) \qquad (8.37)$$

注意：引入主轴系只简化了 L 与 T 的表示形式，并未改变刚体绕任意非主轴转动时 L 与 ω 方向不一致的物理事实，因为 I_i/ω_i 之值对不同的 $i(i=1, 2, 3)$ 并不相同.

（3）由对称性确定主轴的方法

对任何刚体上一任意选取的原点，永远存在至少一组主轴. 主轴的求法已如上述. 求主转动惯量和主轴方向（即使惯量张量对角化）的方法不只一种，还可以用适当的坐标旋转即相似变换来实现. 在刚体动力学中涉及的刚体，大多具有规则的形状，常可由物体的对称性直接找出主轴.

为了便于将平动与转动的自由度分开，本体坐标系的原点通常取为物体的质心.

求刚体上任一点 O 点的主轴依据的原则是：

（i）如果均匀刚体有通过 O 点的对称轴，则此对称轴是一主轴.

（ii）如一均匀刚体能找到一个通过 O 点的对称面，则通过 O 点、垂直于对称面的轴是一主轴.

（iii）找到两个互相垂直的主轴后，过 O 点与这两个主轴垂直的第三轴也一定是主轴.

（iv）当主转动惯量 $I_1=I_2$ 时，O-x_1x_2 平面上过 O 点的一切方向都是主轴方向. 当 $I_1=I_2=I_3$ 时，过 O 点的空间一切方向都是主轴方向.

（4）主轴的正交性

设关于原点 O 有主转动惯量 I_1，I_2，I_3，相应的主轴方向为 $[\omega_1]$，$[\omega_2]$，$[\omega_3]$，则

$$[l_1]=I_1[\omega_1],\ [l_2]=I_2[\omega_2],\ [l_3]=I_3[\omega_3]$$

或

$$[l_m]=I_m[\omega_m] \qquad m=1, 2, 3$$

亦即 $\begin{pmatrix} l_{1m} \\ l_{2m} \\ l_{3m} \end{pmatrix} = I_m \begin{matrix} \omega_{1m} \\ \omega_{2m} \\ \omega_{3m} \end{matrix}$

一般地 $[l_m]=[I][\omega_m]$ $([I]\equiv 1)$

$$[I][\omega_m]=I_m[\omega_m]$$

以 $[\omega_n]^T$ $(n=1, 2, 3)$ 左乘之得

$$[\omega_n]^T[I][\omega_m]=I_m[\omega_n]^T[\omega_m] \tag{a}$$

同样有

$$[I][\omega_n]=I_n[\omega_n]$$

以 $[\omega_m]^T$ 左乘之得

$$[\omega_m]^T[I][\omega_n]=I_n[\omega_m]^T[\omega_n] \tag{b}$$

将 (a) 式转置得

$$[\omega_m]^T[I]^T[\omega_n]=I_m[\omega_m]^T[\omega_n] \qquad ([I]^T=[I])$$

$$[\omega_m]^T[I][\omega_n]=I_m[\omega_m]^T[\omega_n] \tag{c}$$

由 (c)－(b) 得

$$0=(I_m-I_n)[\omega_m]^T[\omega_n]$$

所以，如 $I_m\neq I_n$，则 $[\omega_m]^T[\omega_n]=0$。如 $I_m=I_n$，例如 $I_2\approx I_3\neq I_1$，则不失一般性，必有 $[\omega_2]$ 与 $[\omega_1]$ 正交，$[\omega_3]$ 与 $[\omega_1]$ 正交，但 $[\omega_2]$ 与 $[\omega_3]$ 夹角不定。由 $I_2=I_3$ 知 $[\omega_1]$ 为对称轴，在 $[\omega_2]$，$[\omega_3]$ 所在平面内通过原点的轴都是主轴，可选 $[\omega_2]$ 与 $[\omega_3]$ 正交，则 $[\omega_1]$，$[\omega_2]$，$[\omega_3]$ 构成本体主轴系。

5．惯量椭球

刚体对于过 O 点、方向为 (α, β, γ) 的轴的转动惯量为

$$I=I_{11}\alpha^2+I_{22}\beta^2+I_{33}\gamma^2+2I_{12}\alpha\beta+2I_{23}\beta\gamma+2I_{31}\gamma\alpha$$

定义向量 $\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{\sqrt{I}}$ ($\boldsymbol{n}=\alpha\boldsymbol{e}_1+\beta\boldsymbol{e}_2+\gamma\boldsymbol{e}_3$，是轴线的单位向量)，显然

$$x_1=\frac{\alpha}{\sqrt{I}},\quad x_2=\frac{\beta}{\sqrt{I}},\quad x_3=\frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

代入 I 中可得

$$1 = I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{23}x_2x_3 + 2I_{31}x_3x_1 \tag{8.38}$$

如将此方程视为x_1，x_2，x_3三个变量的函数，它是一个椭球方程，此椭球称为刚体关于O点的**惯量椭球**。我们总可以作一坐标变换，使椭球方程具有标准的形式

$$1 = I_1(x_1')^2 + I_2(x_2')^2 + I(x_3')^2$$

这时椭球的主轴沿各新的坐标轴。将椭球方程化为标准形式的坐标变换，正是前面所讲的求主轴的过程，即所谓**主轴变换**。

关于质心的惯量椭球，称为**质心（中心）惯量椭球**，其主轴即**质心（中心）惯量主轴**。

引进惯量椭球的意义：

（a） 用几何方法表达出关于过O点的各个方向的轴的转动惯量的大小。 $I = \dfrac{1}{r^2}$ 。

（b） 借助椭球可确定对应于给定角速度ω的刚体角动量L的方向。

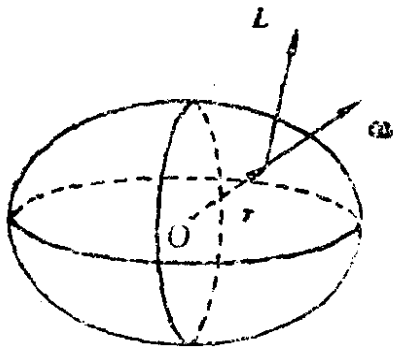


图 8.21

因为r沿n的方向，即ω的方向，故

$$x_1 : x_2 : x_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$$

$$l_1 : l_2 : l_3 = I_1\omega_1 : I_2\omega_2 : I_3\omega_3$$

$$l_1 : l_2 : l_3 = I_1x_1 : I_2x_2 : I_3\omega_3$$

令 $F(x_1, x_2, x_3) = I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2 - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3} = I_1x_1 : I_2x_2 : I_3x_3$$

所以

$$l_1 : l_2 : l_3 = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

即L方向平行于ω与椭球面交点的法线方向。

（c）因刚体的运动仅通过三个主转动惯量I_1，I_2，I_3与

物体的结构相联系（由下面讲的欧拉动力学方程式可明显看出），故任何刚体的运动可由这一等效椭球来代表。刚体的形状无论怎样不同，只要三个主转动惯量相同，就将以相同的方式运动。惯量椭球还提供了刚体绕定点作惯性运动的几何解释方法。

例　　题

8.6　求均质等腰直角三角形平面刚体关于质心 G 的主转动惯量。设刚体面密度为 η。

〔解〕　质心 G 坐标为 $(0, \frac{1}{3}a, 0)$，由对称性知 x_1，x_2，x_3 轴是 O 的惯量主轴。以 I_i' $(i=1, 2, 3)$ 表示 O 的主转动惯量。

$$I_1' = 2\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdot \eta x_2^2$$

$$= \frac{\eta a^4}{6} = \frac{1}{6}ma^2$$

$$I_2' = 2\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdot \eta x_1^2$$

$$= \frac{1}{6}ma^2$$

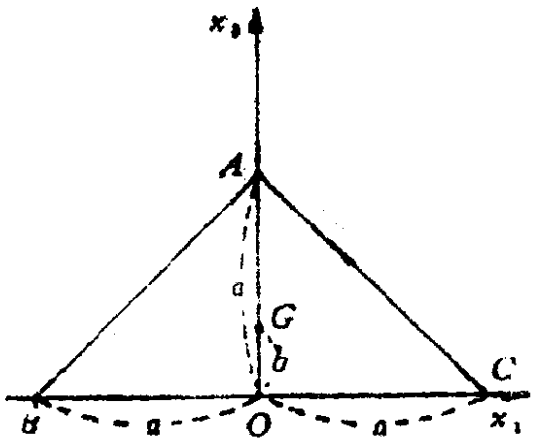


图　8.22

$$I_3' = 2\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdot \eta(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= \frac{1}{3}ma^2$$

以 I_1，I_2，I_3 表示质心 G 的主转动惯量，据平行轴定理

$$I_1' = I_1 + mb^2,\quad I_2' = I_2,\quad I_3' = I_3 + mb^2$$

由于　$b = \frac{1}{3}a$，故

$$I_1=\frac{1}{18}ma^2,\quad I_2=\frac{1}{6}ma^2,\quad I_3=\frac{2}{5}ma^2$$

8.7　一刚体由4个质量分别为m，$2m$，$3m$，$4m$的质点及连结它们的轻杆组成，这4个质点放在坐标(x_1, x_2, x_3)之值依次为(a, a, a)，$(a, -a, -a)$，$(-a, a, -a)$，$(-a, -a, a)$的位置上，构成一正四面体。试求

（1）刚体对原点O的惯量张量；

（2）原点O的三个主转动惯量；

（3）原点O的主轴方向。

〔解〕　（1）计算惯量张量

$$I_{11}=\sum_{i=1}^{4}m_i(x_{2i}^2+x_{3i}^2)=2ma^2(1+2+3+4)$$

$$=20ma^2=I_{22}=I_{33}$$

$$I_{12}=-\sum_{i=1}^{4}m_ix_{1i}x_{2i}$$

$$=-[ma^2+2m(-a^2)+3m(-a^2)+4ma^2]$$

$$=0=I_{21}$$

$$I_{13}=-\sum_{i=1}^{4}m_ix_{1i}x_{3i}=2ma^2=I_{31}$$

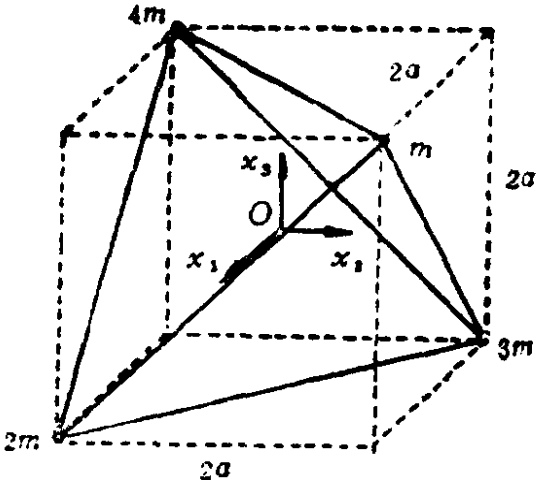


图　8.23

$$I_{23}=-\sum_{i=1}^{4}m_ix_{2i}x_{3i}$$

$$=4ma^2=I_{32}$$

$$\mathbf{I}=ma^2\begin{pmatrix}20 & 0 & 2\\ 0 & 20 & 4\\ 2 & 4 & 20\end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}$不是对角矩阵，故O-$x_1x_2x_3$不是主轴系。

（2）计算主转动惯量

$$\begin{vmatrix} 20-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 20-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(20-\lambda)^3-(20-\lambda)\cdot 20=0$$

$$\lambda_1=20,\ \lambda_2=20+\sqrt{20},\ \lambda_3=20-\sqrt{20}$$

$$I_1=20ma^2,\ I_2=(20+\sqrt{20})ma^2,\ I_3=(20-\sqrt{20})ma^2$$

（3）确定主轴方向

由$\lambda_1=20$有

$$\begin{pmatrix} 20-\lambda_1 & 0 & 2 \\ 0 & 20-\lambda_1 & 4 \\ 2 & 4 & 20-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}=0$$

得 $x_{31}=0$，$x_{11}=-2x_{21}$。令$x_{21}=1$，$x_{11}=-2$，则

$$x_{11}^2+x_{21}^2+x_{31}^2=5$$

$$e_1'=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)$$

同样，由 $\lambda_2=20+\sqrt{20}$，得

$$e_2'=\frac{1}{\sqrt{10}}e_1+\frac{2}{\sqrt{10}}e_2+\frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

由$\lambda_3=20-\sqrt{20}$，得

$$e_3'=\frac{1}{\sqrt{10}}e_1+\frac{2}{\sqrt{10}}e_2-\frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

e_1'，e_2'，e_3'即关于O点的惯量主轴方向。

8.8 试证通过均质正方体质心O的任意轴均为O点的主轴。

〔解〕 计算关于O的惯量张量。

$$I_{11}=\iiint_{-aZ_2}^{aZ_2}(x_2^2+x_3^2)\rho dx_1dx_2dx_3$$

$$=\rho\int_{-aZ_2}^{aZ_2}dx_3\int_{-aZ_2}^{aZ_2}(x_2^2+x_3^2)dx_2\int_{-aZ_2}^{aZ_2}dx_1$$

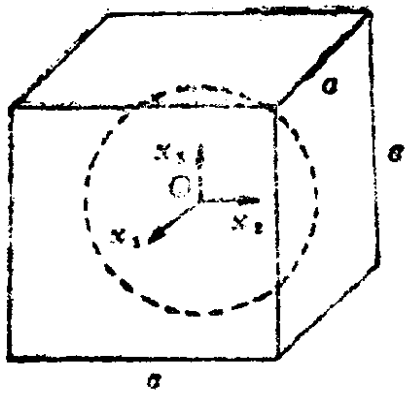


图 8.24

$$= 2\rho a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_3\left[\frac{a^3}{24} + ax_3^2\right]$$

$$= \frac{\rho a^5}{6} = \frac{1}{6}ma^2$$

$$= I_{22} = I_{33} = I$$

由对称性知，$I_{12} = I_{21} = I_{31} = I_{13} = I_{23} = I_{32} = 0$，故

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}ma^2[1]$$

惯量椭球为

$$I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{I} = \frac{6}{ma^2}$$

为一球面方程．所以对均质正方体，过质心的任何直线均为主轴，与均质球情形相同．

8.9 一均质棒AB，在任意瞬间，A，B两点的速度分别为$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$（图8.25）．已知棒长$2a$，质量为M，试证其动能为

$$\frac{1}{6}M(\boldsymbol{v}_A^2 + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_B^2)$$

〔解〕 质心C的主轴系可这样取：AB为第一主轴，单位向量$\boldsymbol{e}_1$，在角速度$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{e}_1$所在平面内，取$\boldsymbol{e}_2 \perp \boldsymbol{e}_1$为第二主轴，$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$为第三主轴．

由速度合成公式

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \vec{CA},\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \vec{CB}$$

$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B = 2\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\vec{CA} + \vec{CB}) = 2\boldsymbol{v}_C$$

所以

$$v_C = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$$

棒的三个主转动惯量为 0，

$$\frac{1}{3}Ma^2,\ \frac{1}{3}Ma^2.$$

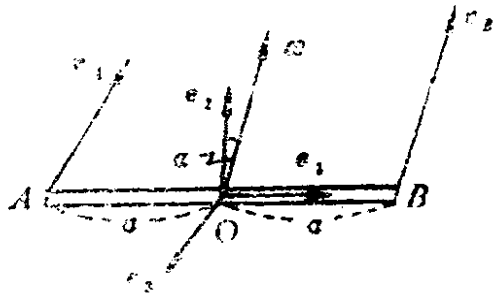


图 8.25

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2]$$

$$= \frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{4}(v_A + v_B)^2 + \frac{1}{2}\left[0 + \left(\frac{1}{3}Ma^2\right)(\omega \cdot e_2)^2 + \left(\frac{1}{3}Ma^2\right) \cdot 0\right]$$

$$= \frac{1}{8}M(v_A + v_B)^2 + \frac{1}{6}Ma^2(\omega \cdot e_2)^2$$

由于 $\omega \cdot e_2 = e_3\omega\cos\alpha = \omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)e_3 = \omega \times e_1$

$$a(\omega \times e_1) = v_B' = \frac{1}{2}(v_B - v_A)$$

故

$$T = \frac{1}{8}M(v_A + v_B)^2 + \frac{1}{6}Ma^2(\omega \times e_1)^2$$

$$= \frac{1}{8}M(v_A + v_B)^2 + \frac{1}{24}M(v_B - v_A)^2$$

$$= \frac{1}{6}M(v_A^2 + v_A \cdot v_B + v_B^2)$$

§3 刚体的运动方程和平衡方程

理论要点

1. 力系及其简化

（1）静力学基本概念和公理

静力学：研究一群力作用于物体（主要指刚体），物体仍旧保持平衡状态的科学。

力系：作用于物体上的一群力称为**力系**。

平衡：物体处于静止或匀速直线运动状态。

平衡力系：处于平衡状态物体上作用的**力系**。

力偶：大小相等、方向相反，作用线不在一直线上的二力，称为**力偶**。

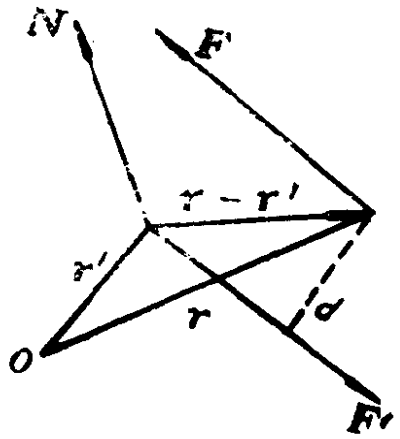


图 8.26

如图8.26所示，两力间的垂直距离 d 为**力偶臂**。Fd 为**力偶矩**。$N=r\times F+r'\times F'=(r-r')\times F$称为**力偶矩矢**。力偶可以滑动、可以平移，是**自由向量**。

二力平衡公理：作用于刚体上的二力平衡的条件是二力等值、反向、共线。

加减平衡力系公理：作用于刚体上的任意力系加上或减去任意一个平衡力系，并不改变原力系对刚体的效应。

推论：力的可传性——作用于刚体上的力可以沿其作用线移到刚体上任一点，而不改变对刚体的效应。力是**滑移向量**。

力的平行四边形公理：力的合成适合向量的平行四边形法则。

推论：三力平衡汇交原理——当刚体受不平行的三个力作用而平衡时，这三个力必汇交于一点。

作用反作用公理：即牛顿第三定律。

（2）力系的简化

等效定理：作用于刚体上某一点的一个力，等效于另一指定点上的一个同样大小、方向的力加上一个力偶。

如图8.27所示，作用于A点的力F_A，等效于作用于B点的

力F_B（F_B与F_A大小相等、方向相同）加上力偶（F_A，F_B）.

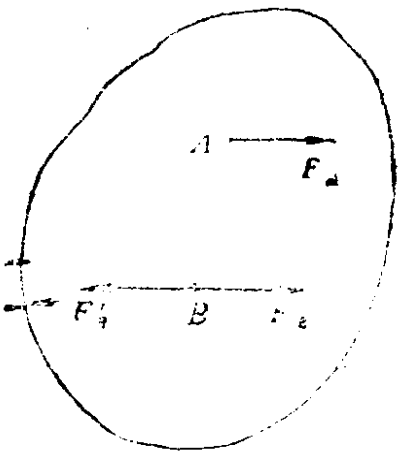


图 8.27

（i）一般力系的简化

如一般空间力系作用于刚体，可依等效定理将力系所有的力迁至刚体上任一点O（称简化中心），化成一空间汇交力系（汇交于O点）和一空间力偶系. 对此空间汇交力系可用平行四边形法则求出合力$\boldsymbol{R}$，称$\boldsymbol{R}$为原力系的主矢. 而空间力偶系的合力偶$\boldsymbol{N}$即各力在原来位置时对O点的力矩的向量和，称为原力系对简化中心O的主矩.

$$\text{主矢}\quad \boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{8.39}$$

$$\text{主矩}\quad \boldsymbol{N}_O=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{8.40}$$

（$\mathscr{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$表示力$\boldsymbol{F}_i$对中心O的矩）简化中心可以任意取，但通常选质心为简化中心.

附注：如同力矩、动量矩（角动量）一样任意向量$\boldsymbol{G}$对定点O的矩定义为

$$\mathscr{M}_O(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{G}$$

式中$\boldsymbol{r}$为向量$\boldsymbol{G}$的始端对O点的位置向量. $\mathscr{M}_O(\boldsymbol{G})$是一个始端在O点的确定向量.

向量$\boldsymbol{G}$对任意轴l的矩定义为

$$\mathscr{M}_{Ol}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{e}\cdot\mathscr{M}_O(\boldsymbol{G})$$

式中$\boldsymbol{e}$为轴l的单位向量，$\mathscr{M}_{Ol}$表示$\boldsymbol{G}$对l轴上任一点O的矩在该轴上的投影.

（ii）特殊力系的简化

空间汇交力系，简化成一单力 $\boldsymbol{R}=\sum_i \boldsymbol{F}_i$.

空间平行力系：同向平行力系简化为一个单力 $R=\sum_i P_i$，合力的作用点为 $\boldsymbol{r}_C=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} P_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$（平行力系中心的位置）。不同向平行力系简化为一单力或一力偶（按方向分成两组，分别求合力，化成反平行二力的力系）。

平面一般力系、平面汇交力系、平面平行力系等的简化方法相同。

2．刚体的运动微分方程和平衡方程

（1）运动微分方程

由质点系质心运动定理，有

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_C=\boldsymbol{F} \tag{8.41}$$

其中 M 为刚体总质量；$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 为外力主矢。

由质点系角动量定理，有

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N} \tag{8.42}$$

其中 $\boldsymbol{N}$ 为外力对静系中定点 O 的主矩，$\boldsymbol{N}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}$。或

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt}=\boldsymbol{N}' \tag{8.43}$$

$\boldsymbol{N}'$ 为外力对质心 C 的主矩，$\boldsymbol{N}'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}$。

由质点系动能定理，有

$$dT=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{8.44}$$

当体系为保守系时

$$T+V=E\text{（总能量）}$$

这里共7个方程，而刚体自由度 $f\leqslant 6$，原则上完全可以解决刚体运动问题。

（2）平衡方程

刚体平衡时，作用在刚体上的力系构成平衡力系。对一般空间力系，平衡方程为

$$\boldsymbol{F}=0\text{，即}F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0 \tag{8.45}$$

$$\boldsymbol{N}=0\text{，即}N_1=0,\ N_2=0,\ N_3=0 \tag{8.46}$$

对一般共面力系，平衡方程为

$$F_1=0,\ F_2=0,\ N_3=0$$

共面共点力系

$$F_1=0,\ F_2=0$$

共面平行力系

$$F_2=0,\ N_3=0$$

§4 定轴转动、平面运动和定点运动理论要点

1. 定轴转动

运动微分方程（角动量定理）

$$I\ddot{\varphi}=N \tag{8.47}$$

N是外力对转轴的合力矩。

动能：$T=\frac{1}{2}I\omega^2$

角动量：$l=I\omega$

外力的功：$W=\int N\,d\theta$

能量守恒：如作用于刚体的力是保守力，刚体具有势能 V，则

$$T+V=\frac{1}{2}I\omega^2+V=E\text{（常数）} \tag{8.48}$$

例：物理摆（复摆）

一刚体在重力作用下，绕一固定水平轴作自由振动，称此刚体为物理摆（或复摆）。

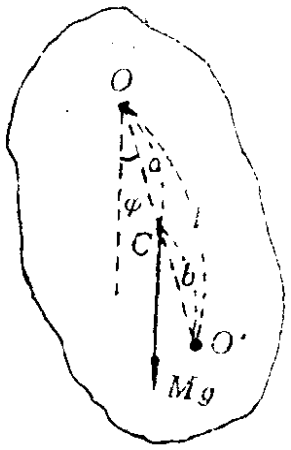


图 8.28

设C为刚体质心，$\overline{OC}=a$，$\overline{OC}$与铅垂方向夹角为φ，刚体质量为M，对转轴的转动惯量为I，运动微分方程为

$$I\ddot{\varphi}=-Mga\sin\varphi$$

微振动周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}$

等效单摆长：$l=\frac{I}{Ma}=\frac{k^2}{a}$

（令$I=Mk^2$，k称为刚体对转轴O的回转半径）如图 8.28 所示，在振动平面上，取OC延长线上一点O'，使$CO'=b$，当摆以O'为轴振动时，等效单摆长$l'=\frac{I'}{Mb}=\frac{k'^2}{a}$（$k'$为摆对转轴$O'$的回转半径）。如要求 $l=l'$，则 $b=\frac{k_C^2}{a}$（k_C为对 C 的回转半径），O，O'互称**共轭中心（互为打击中心）**。

2．刚体的平面运动

运动微分方程

$$M\ddot{x}_1=F_1,\quad M\ddot{x}_2=F_2 \tag{8.49}$$

$$I\dot{\omega}=N \tag{8.50}$$

(8.49) 为质心运动方程，(8.50) 是相对于质心转动的方程。

动　量：$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}_C$

角动量：$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}_C\times M\boldsymbol{v}_C+I_C\boldsymbol{\omega}$

动　能：$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$

能量守恒，当外力为保守力时，有

$$\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2+V=E\text{（常数）}\qquad(8.51)$$

I_C为关于通过质心垂直于平面的轴的转动惯量.

刚体平面运动的自由度 $f=3$，(8.49)、(8.50)和(8.51)提供了4个方程，取其中3个，即可以解决刚体平面运动问题.

3．刚体的定点运动和空间运动

（1）定点运动和空间运动

定点运动微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}\qquad(8.52)$$

$\boldsymbol{N}$为作用于刚体的外力对定点O的主矩.

利用 $\frac{d}{dt}=\frac{\tilde{d}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times$ ，有

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{L}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}$$

选用本体主轴系$O\text{-}x_1x_2x_3$，则

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{L}=I_1\omega_1\boldsymbol{e}_1+I_2\omega_2\boldsymbol{e}_2+I_3\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

将$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{L}$表示式代入（8.52）得

$$\left.\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3&=N_1\\I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1&=N_2\\I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2&=N_3\end{aligned}\right\}\qquad(8.53)$$

称为欧勒动力学方程式，是刚体定点运动的基本动力学方程

式。由于一般说来，N_1，N_2，N_3 与刚体对惯性系的位置有关，即可能是（θ，φ，ψ，ω_1，ω_2，ω_3，t）的函数，故须将欧勒动力学方程式与欧勒运动学方程式

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{8.54}$$

联立求解。这 6 个非线性常微分方程含 6 个未知数 ω_1，ω_2，ω_3，φ，θ，ψ 及它们的一阶微商，原则上，如已知所受外力和初始位置、初始角速度，即可将运动全部解出（也可以消去 ω_1，ω_2，ω_3，将方程化成三个欧勒角 θ，φ，ψ 的二阶微分方程，以 θ_0，φ_0，ψ_0，$\dot{\theta}_0$，$\dot{\varphi}_0$，$\dot{\psi}_0$ 为初始条件解出）。事实上，由于 N_1，N_2，N_3 的复杂性，求解这组方程异常困难，即使在刚体只受重力作用绕定点运动的特殊情形下，一般也不能以解析方法求解。只有三种特殊情况可解。

如刚体受的力是保守力，还可以能量积分

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + V(\theta, \varphi, \psi) = E\ (\text{常数}) \tag{8.55}$$

代替上面 6 个方程中的一个。

刚体的空间运动微分方程式：

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_c}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{8.56}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}' \tag{8.57}$$

（8.56）为质心运动方程式，（8.57）为相对于质心的转动方程式。

当取关于质心 C 的本体主轴系时，转动方程的分量式即为欧勒动力学方程式。

（2）部分固结在刚体上的坐标系

在讨论刚体定点运动时，我们采用了本体主轴系，并由此得到了欧勒动力学方程。这里，作了两次简化：选用本体系，使刚体对坐标系的质量分布确定，各惯性系数不再是时间函数；而选用主轴系，又使诸惯量积为零，惯量张量对角化，因而角动量（以及动能）的表式变得十分简单。

在研究对称刚体的定点运动时发现，采取只有部分坐标轴固结在刚体上的坐标系是很方便的。如图8.29所示，O-$\xi\eta\zeta$是静系，O-$x_1x_2x_3$是动系，当角动量守恒时，常取静系第三轴ζ沿角动量方向，动系第三轴x_3沿刚体对称轴，x_1轴沿节线，x_2轴垂直于x_3和x_1轴，且在$Ox_3\zeta$平面内。坐标系O-$x_1x_2x_3$不随刚体自转，但参加刚体的进动和章动。由于刚体是对称的，尽管动坐标系不完全固结在刚体上，但在任何时刻看来，动坐标系总能保持为主轴系。

刚体的角速度可用三个独立的角速度表示，即

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}$$

现在，动坐标系不参加刚体的自转，动坐标系角速度为$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}-\dot{\boldsymbol{\psi}}=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}$。刚体的角动量在动系中的表达式为

$$\boldsymbol{L}=I_1\omega_1\boldsymbol{e}_1+I_2\omega_2\boldsymbol{e}_2+I_3\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}\\&=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_2+\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_3\\&=\Omega_1\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\boldsymbol{e}_2+\Omega_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\qquad(8.58)$$

为$\boldsymbol{\Omega}$在动系中的表达式。将$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{\Omega}$表达式代入

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{L}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}$$

并注意到$I_1=I_2$，得

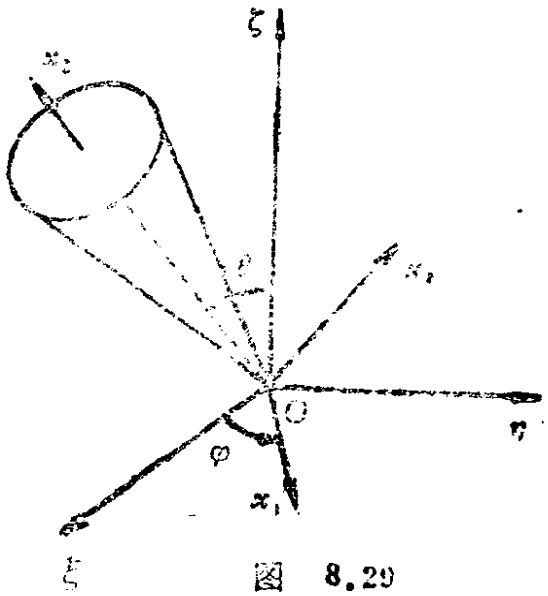


图 8.29

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - I_1\omega_2\Omega_3 + I_3\omega_3\Omega_2 &= N_1 \\ I_1\dot{\omega}_2 - I_3\omega_3\Omega_1 + I_1\omega_1\Omega_3 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - I_1\omega_1\Omega_2 + I_1\omega_2\Omega_1 &= N_3 \end{aligned}\right\} \qquad (8.59)$$

由$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\psi}}$，并将（8.58）代入，得

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}\right\} \qquad (8.60)$$

（8.58）、（8.59）和（8.60）是这一坐标系中对称刚体定点运动的基本方程式.

（3）欧勒动力学方程的应用

（i）无力矩刚体的运动

所谓**无力矩刚体**，指的是不受任何净力或净力矩作用的自由运动的刚体，其质心静止或作匀速直线运动，在质心静止的参考系内，系统的运动微分方程是

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.61)$$

这组方程还可以描述外力合力通过固定点O的情形，其特例是定点O与质心C相重合——欧勒-潘索情形（刚体形状不限）.

地球运动在不考虑其公转时，可看成绕地心作定点自由运动的对称刚体（$I_1 = I_2$）.

将$I_1 = I_2 = I_{12}$代入方程（8.61）解之，得

$$\omega_1(t) = A\cos\Omega t \qquad \left(\Omega = \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}}\omega_3\right)$$

$$\omega_2(t) = A\sin\Omega t$$

$$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{常量} \qquad \omega_3 = \text{常量}$$

又因 $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} = $常量，$\boldsymbol{L} = $常量，故$\boldsymbol{\omega}$绕$\boldsymbol{L}$进动，且与$\boldsymbol{L}$

成定角．令L与空间第3轴ζ重合，则ω绕ζ描出一圆锥（空间极迹），又绕x_3描出一圆锥（本体极迹），本体圆锥在固定圆锥上滚动（图8.31）．

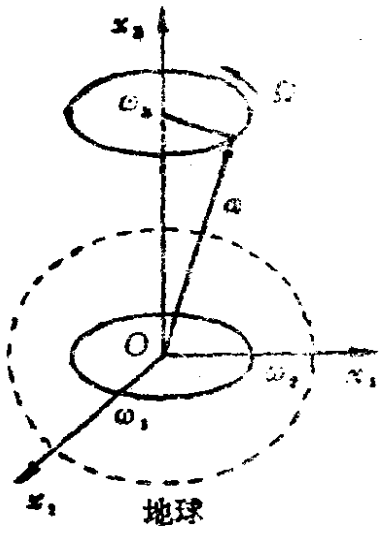


图 8.30

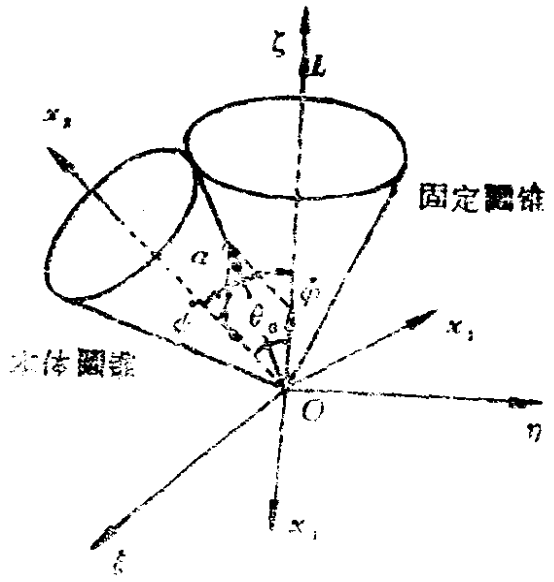


图 8.31

对地球而言，ω绕对称轴进动角速度$\Omega=\dfrac{I_3-I_{12}}{I_{12}}\omega_3\simeq\dfrac{\omega_3}{300}$．

将ω_1，ω_2，ω_3的表式与欧拉运动学方程式联立，得运动的第二积分为

$$\left.\begin{aligned}&\theta=\theta_0\ (\text{常数})\\&\psi=\frac{\pi}{2}-(\Omega t+\varepsilon)\\&\varphi=\sec\theta_0(\omega_3+\Omega)t+\varphi_0\end{aligned}\right\}\qquad(8.62)$$

这种没有章动，而进动和自转角速度保持为常数的自由对称陀螺的定点运动称为规则进动．

（ii）一点固定的对称陀螺的运动

这种运动称为拉格朗日-泊松情形．其特点是：刚体对固定点的惯量椭球是旋转椭球，$I_1=I_2=I_{12}$，刚体的质心在动力对称轴上（动力对称轴指惯量椭球主轴，对均匀刚体，几何对称轴也是动力对称轴）．

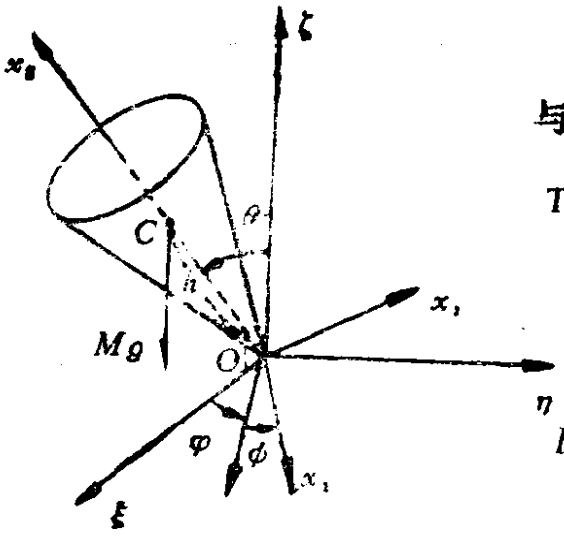


图 8.32

$$T=\frac{1}{2}I_{12}(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

与欧勒运动学方程联立，得

$$T=\frac{1}{2}I_{12}[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

$$L=\frac{1}{2}I_{12}[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]-\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-Mgh\cos\theta \qquad (8.63)$$

φ，ψ为循环坐标，故

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(I_{12}\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi}+I_3\dot{\psi}\cos\theta=\text{常量}=I_3\omega_3$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)=\text{常量}$$

由此二式得

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi-I_3\dot{\psi}\cos\theta}{I_3} \qquad (8.64)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta}{I_{12}\sin^2\theta} \qquad (8.65)$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{I_3}-\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)\cos\theta}{I_{12}\sin^2\theta} \qquad (8.66)$$

又因总能量守恒

$$\frac{1}{2}I_{12}[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2+Mgh\cos\theta=E\ (\text{常量})$$

$$E'=E-\frac{1}{2}I_3\omega_3^2=\frac{1}{2}I_{12}[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+Mgh\cos\theta=\text{常量}$$

利用（8.65）式此式可化为

$$E' = \frac{1}{2}I_{12}(\dot{\theta})^2 + V'(\theta)$$

其中

$$V'(\theta) \equiv \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_{12}\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta$$

可认为是有效势.

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_{12}}(E' - V'(\theta))}} \qquad (8.66)$$

反解出 $\theta(t)$，由（8.65）、（8.66）求出 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，解即求出.

利用和中心力场中的运动相类似的方法，可由有效势能对运动作出某些定性的结论.

图8.33给出了有效势能 V' 随角度 θ 变化的曲线. 与中心力问题中有效势能曲线相似，在能量 E_1' 下，$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$，即陀螺的倾角局限在一有限区间内；而当 $E_2' = V'_{min}$ 时，$\theta = \theta_0$ 乃是一固定值，这与中心力场中圆轨道相似. 为求 θ_0，令 $V'(\theta)$ 导数为零

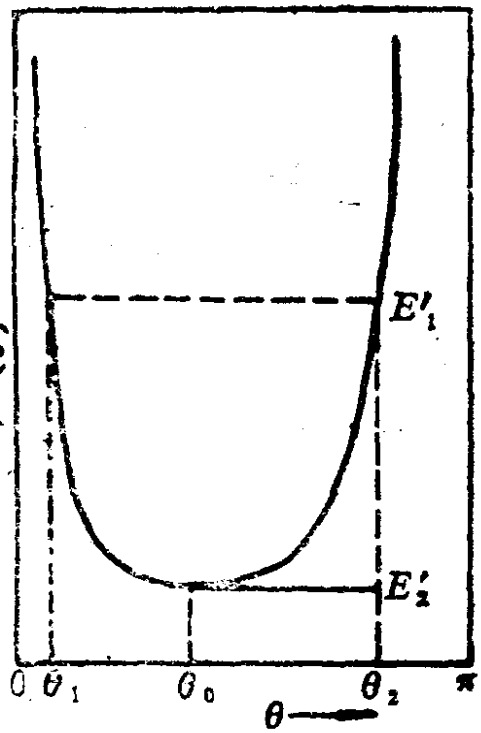


图 8.33

$$\left.\frac{\partial V'}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

即

$$\frac{-\cos\theta_0(p_\varphi - p_\psi\cos\theta_0)^2 + p_\psi\sin^2\theta_0(p_\varphi - p_\psi\cos\theta_0)}{I_{12}\sin^3\theta_0}$$

$$-Mgh\sin\theta_0 = 0$$

令　$\beta = p_\psi - p_\varphi \cos\theta_0$，上式变为

$$\cos\theta_0 \beta^2 - (p_\varphi \sin^2\theta_0)\beta + MghI_{12}\sin^4\theta_0 = 0$$

$$\beta = \frac{p_\varphi \sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MghI_{12}\cos\theta_0}{p_\varphi^2}}\right]$$

β 为实量，要求 $p_\varphi^2 \geqslant 4MghI_{12}\cos\theta_0$。由 $p_\varphi = I_3\omega_3$，得

$$\omega_3 \geqslant \frac{2}{I_3}\sqrt{MghI_{12}\cos\theta_0}$$

仅当满足此条件时，才能有倾角不变（$\theta = \theta_0$）的稳定进动。

由 $\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_{12}\sin^2\theta}$ 知，若 $\dot{\varphi}$ 不变号，陀螺绕 ζ 轴单调进动，并在 θ_1-θ_2 之间章动，如图8.34(a) 所示，它给出了陀螺对称轴在定系单位球上的投影轨迹。

若 $\dot{\varphi}$ 在 θ_1 与 θ_2 之间变号，则在 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ 时，进动角速度符号相反，对称轴有回线运动（画圈），如图 8.34(b) 所示。

若 $\dot{\varphi}\Big|_{\theta=\theta_1} = 0$；$\dot{\theta}\Big|_{\theta=\theta_1} = 0$，即 θ_1，θ_2 之一与 $\dot{\varphi}$ 之零点相合，则陀螺对称轴的投影画出尖齿形轨迹，如图 8.34(c) 所示。

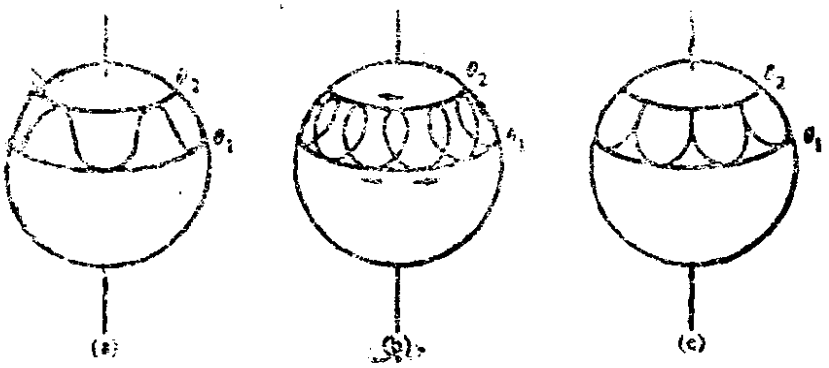


图　8.34

如果陀螺高速自转，常可用近似理论处理。

严格说，陀螺的对称轴方向、总角速度方向和角动量方向

是不同的，但在陀螺高速自转情形下，$\dot{\psi} \gg \dot{\varphi}$，若忽略章动，可以认为三者方向是一致的，均沿动力对称轴方向。

由于

$$\boldsymbol{N} = \vec{OC} \times \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{L} = I_3 \boldsymbol{\omega} = I_3 \dot{\boldsymbol{\psi}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{L} = I_3 \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \dot{\boldsymbol{\psi}}$$

故

$$hP \sin(\pi - \theta) = I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin\theta \qquad (P = Mg)$$

由此得

$$\dot{\varphi} = \frac{hP}{I_3 \dot{\psi}} \tag{8.67}$$

表明进动角速度和陀螺关于对称轴的转动惯量及自转角速度成反比，与重心偏离定点的距离及重量成正比。

(iii) 回转现象及其应用

（a）回转现象　迅速地绕对称轴转动的均匀的刚体，称为回转仪（或陀螺）。在陀螺的快速转动中，因惯性力而发生一些特殊现象，称为回转现象，凡有重物快速转动的地方就有这种现象。它们在技术上有重要应用。

（b）回转效应　由回转仪的近似理论知，进动是由外力 P 的力距的存在而产生的，由于进动才阻止其下落，即由于进动出现了回转仪惯性力力矩，它抵抗使回转仪翻倒的重力矩，而使之无效，称为恢复力矩$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{K}$与重力矩$\boldsymbol{N}$应相等相反，即

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L} \times \dot{\boldsymbol{\varphi}} = I_3 \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{8.68}$$

$\boldsymbol{K}$也称回转效应。

一般地，如迫使有角速度$\boldsymbol{\omega}$的回转仪以角速度$\boldsymbol{\Omega}$绕某一轴进动，则将产生恢复力矩

$$\boldsymbol{K} = I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{8.69}$$

即运动遵从格柳埃定则：在使迅速绕其轴转动的回转仪绕另一根轴旋转时发生力偶（力矩），此力偶力图转动回转仪的轴使和旋转轴平行。

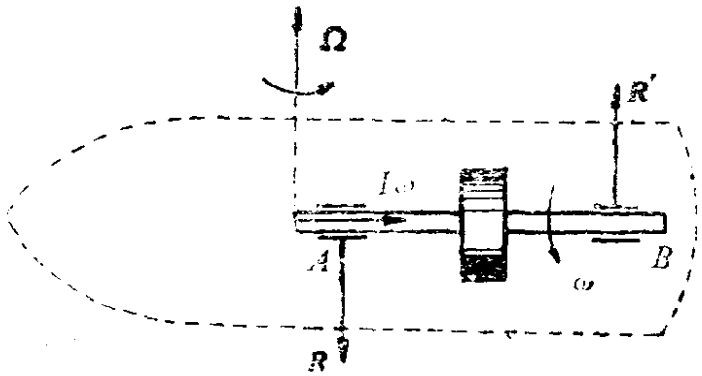


图 8.35

如图8.35所示，若使轮船的涡轮绕水平或铅直轴急剧地以角速度Ω旋转，则恢复力矩

$$\boldsymbol{K} = I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}$$

$$K = I\omega\Omega$$

设此力偶对轴承附加压力为R，则

$$R \cdot \overline{AB} = I\omega\Omega$$

$$R = \frac{I\omega\Omega}{\overline{AB}} \tag{8.70}$$

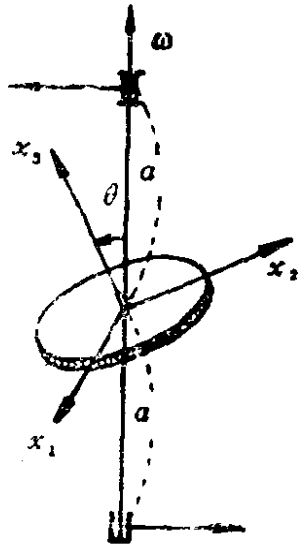


图 8.36

因Ω很大，故R很大，对轴承破坏作用很强，必须防止。以回转仪轴的稳定性为基础（此稳定性来自打击等非持久的力不能改变回转仪轴的方向），可制成回转罗盘、回转导航仪、回转水平仪等稳定器。

(c) 严格计算轴承上的动反力　图8.36所示薄圆盘以定角速度ω绕定轴转动。因安装不善，盘面法线与轴成一θ角。依欧勒动力学方程式

$$\left.\begin{aligned} -(I_2-I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ 0 &= N_2 \\ 0 &= N_3 \end{aligned}\right\} \tag{8.71}$$

及 $I_1=I_2=\frac{1}{4}Mr^2$，$I_3=\frac{1}{2}Mr^2$，得

$$\frac{1}{2}(I_2-I_3)\omega^2\sin 2\theta = N_1$$

$$F=\frac{1}{8a}Mr^2\omega^2\sin 2\theta$$

它的反作用力即为附加动反作用力。仅当$\theta=0$时，$F=0$.

例　　题

8.10　一均质圆盘半径为a，令其盘面铅直，并以初速v和角速度ω沿一粗糙水平面抛出去，求圆盘的运动。

〔解〕　可分三种情形讨论圆盘的运动。

（i）初始时v向右，ω顺时针，$v>a\omega$。在此情形下P点（圆盘上与平面接触的点）速度大小为$v-a\omega$，方向向右。滑动摩擦力大小为μMg，方向向左。

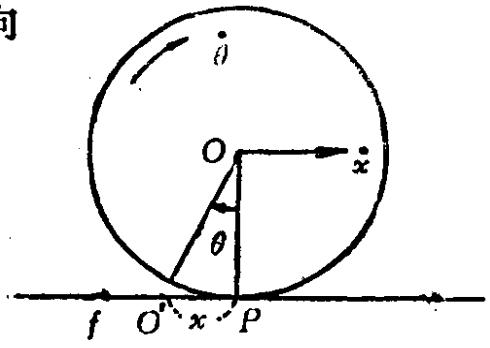


图　8.37

圆盘的运动微分方程为

$$M\ddot{x}=-\mu Mg \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta}=\mu Mga \qquad (2)$$

（力矩顺时针为正）

$t=0$时，$\dot{x}=v$，由（1）得

$$\dot{x}=v-\mu gt \quad \text{（质心速度）}$$

$t=0$时，$\dot{\theta}=\omega$，由（2）得

$$\dot{\theta} = \omega + \frac{2\mu g}{a} t \qquad \text{（角速度）}$$

P 点的速度

$$v_P = \dot{x} - a\dot{\theta} = v - \mu g t - a\left(\omega + \frac{2\mu g}{a} t\right)$$

$$= v - a\omega - 3\mu g t$$

开始作纯滚动时，$v_P = 0$，即

$$v - a\omega - 3\mu g t = 0, \quad t = \frac{v - a\omega}{3\mu g}$$

开始纯滚动时质心的速度为

$$\dot{x} = v - \mu g \cdot \frac{v - a\omega}{3\mu g} = \frac{2v + a\omega}{3}$$

纯滚动开始后，圆盘的运动微分方程式为

$$M\ddot{x} = -F \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} Ma^2 \ddot{\varphi} = Fa \qquad (4)$$

（F是静摩擦力，方向假定为向左）约束方程

$$\dot{x} = a\dot{\varphi} \qquad (5)$$

由（5）式，$\ddot{x} = a\ddot{\varphi}$，代入（3），得

$$Ma\ddot{\varphi} = -F$$

与（4）比较得

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad F = 0$$

这表明圆盘不受外力作用，在粗糙水平面上作纯滚动时，静摩擦力为零。

（ii）初始时 v向右，ω 顺时针，$v < a\omega$，f向右。运动微分方程式为

$$M\ddot{x} = \mu Mg \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -\mu Mga \qquad (7)$$

$t=0$时，$\dot{x}=v$，$\dot{\theta}=\omega$，由（6）和（7）式得

$$\dot{x} = v + \mu gt$$

$$\dot{\theta} = \omega - 2\mu gt/a$$

P点的速度

$$v_P = \dot{x} - a\dot{\theta}$$

$$= v + \mu gt - a\left(\omega - \frac{2\mu gt}{a}\right)$$

$$= v - a\omega + 3\mu gt$$

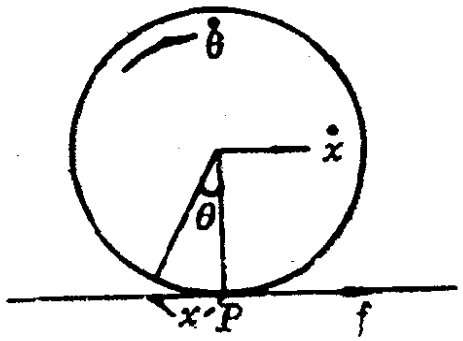


图 8.38

开始纯滚动时，$v_P = 0$，即

$$v - a\omega + 3\mu gt = 0$$

$$t = -\frac{v - a\omega}{3\mu g}$$

开始纯滚动时盘中心的速度

$$\dot{x} = v + \mu gt = v - \mu g \cdot \frac{v - a\omega}{3\mu g} = \frac{2v + a\omega}{3} \quad (>v)$$

（iii）初始时v向右，ω逆时针，f向左.

$v_P = v + a\omega$（方向向右）

$$M\ddot{x} = -\mu Mg \qquad (8)$$

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = \mu Mga \qquad (9)$$

$t=0$时，$\dot{x}=v$，$\dot{\theta}=-\omega$，所以

$$\dot{x} = v - \mu gt,\ \dot{\theta} = \frac{2\mu gt}{a} - \omega$$

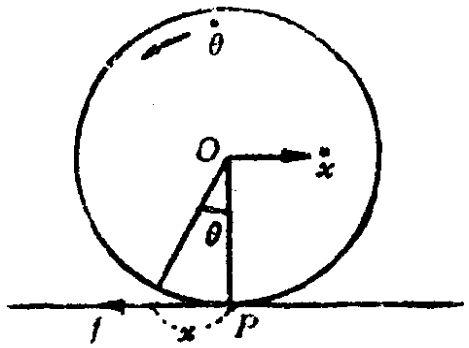


图 8.39

当$\dot{x} - a\dot{\theta} = 0$时，发生纯滚动，由

$$v - \mu gt = a\left(\frac{2\mu gt}{a} - \omega\right) \Rightarrow t = \frac{v + a\omega}{3\mu g}$$

此时盘心速度

$$\dot{x} = v - \mu g \cdot \frac{v + a\omega}{3\mu g} = \frac{2v - a\omega}{3}$$

可见，在开始纯滚动时

如 $2v > a\omega$，$\dot{x}$向右；

如 $2v = a\omega$，$\dot{x} = 0$，刚好停下来；

如 $2v < a\omega$，$\dot{x}$向左，即圆盘已经回头运动了。

圆盘折回时，$\dot{x} = 0$，$\dot{x} = v - \mu g t = 0$

$$t_{折} = \frac{v}{\mu g}$$

在$2v < a\omega$情形下，显然有

$$t_{折} = \frac{v}{\mu g} = \frac{3v}{3\mu g}$$

$$= \frac{2v + v}{3\mu g} < \frac{a\omega + v}{3\mu g}$$ （开始发生纯滚动的时间）

即先折回，后开始纯滚动。

8.11 一球半径为a，沿斜面滚下（图8.40），求其加速度及作纯滚动的条件。

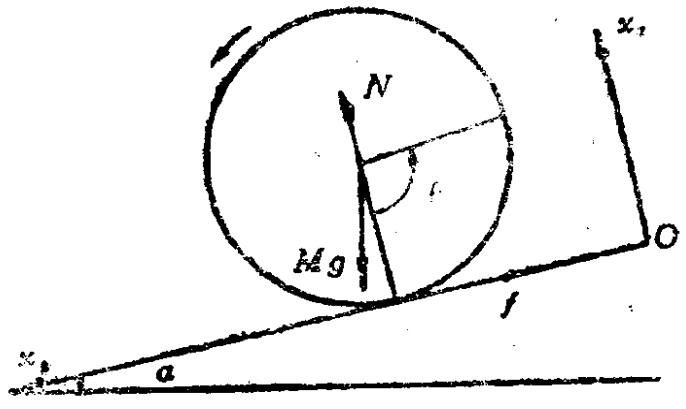


图 8.40

〔解〕 $M\ddot{x}_1 = Mg\sin\alpha - f$ （1）

$$0 = -Mg\cos\alpha + N \qquad (2)$$

$$\frac{2}{5}Ma^2\ddot{\theta} = fa \qquad (3)$$

约束方程

$$\dot{x}_1 = a\dot{\theta} \qquad (4)$$

由（1）、（4）得

$$Ma\ddot{\theta} = Mg\sin\alpha - f$$

$$Ma^2\ddot{\theta} = Mga\sin\alpha - fa \qquad (5)$$

由（3）、（5）得

$$\frac{7}{5}a\ddot{\theta} = g\sin\alpha$$

由（4）知

$$\frac{7}{5}\ddot{x}_1 = g\sin\alpha$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{5}{7}g\sin\alpha \qquad (6)$$

由（6）、（1）得

$$\frac{2}{7}g\sin\alpha = \frac{f}{M}$$

又由（2）有$N = Mg\cos\alpha$，所以

$$\frac{f}{N} = \frac{\frac{2}{7}Mg\sin\alpha}{Mg\cos\alpha} = \frac{2}{7}\mathrm{tg}\alpha$$

如无滑动，即摩擦力为静摩擦力，必须

$$\frac{f}{N} = \frac{2}{7}\mathrm{tg}\alpha < \mu$$

即只有 $\mu > \frac{2}{7}\mathrm{tg}\alpha$ 才能发生纯滚动。

8.12 一均质杆放在粗糙水平地板上，杆铅直放置，从静

止放开，杆在与铅直方向成 β 角时，下端开始滑动，求杆与地板之间的摩擦系数。

〔解〕 杆的质心运动微分方程是

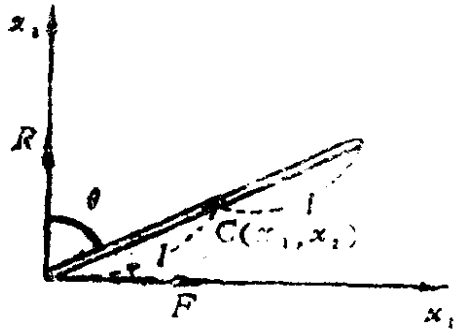


图 8.41

$$M\ddot{x}_1 = F \tag{1}$$

$$M\ddot{x}_2 = R - Mg \tag{2}$$

由能量守恒有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + Ml^2\right)(\dot{\theta})^2 = Mgl(1-\cos\theta) \tag{3}$$

由于 $x_1 = l\sin\theta$，$\ddot{x}_1 = -l\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}$，由（1）得

$$F = M\ddot{x}_1 = Ml[\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2] \tag{4}$$

又 $x_2 = l\cos\theta$，$\ddot{x}_2 = -l(\dot{\theta})^2\cos\theta - l\sin\theta\cdot\ddot{\theta}$，故由（2）得

$$R = M\ddot{x}_2 + Mg$$

$$= -Ml[\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + \sin\theta\cdot\ddot{\theta}] + Mg \tag{5}$$

由（3）得

$$(\dot{\theta})^2 = \frac{3g}{2l}(1-\cos\theta) \tag{6}$$

求微商得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta \tag{7}$$

将（6）、（7）代入（4）、（5）得

$$R = -Ml\left[\cos\theta\cdot\frac{3g}{2l}(1-\cos\theta) + \sin\theta\cdot\frac{3g}{4l}\sin\theta\right] + Mg$$

$$= \frac{1}{4}Mg(1-3\cos\theta)^2$$

$$F = Ml\left[\cos\theta \cdot \frac{3g}{4l}\sin\theta - \sin\theta \cdot \frac{3g}{2l}(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{3Mg}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

因$\theta = \beta$时，杆下滑开始滑动，故

$$\mu = \frac{F}{R} = \left.\frac{\frac{3}{4}Mg\sin\theta(3\cos\theta-2)}{\frac{1}{4}Mg(1-3\cos\theta)^2}\right|_{\theta=\beta}$$

$$= \frac{3\sin\beta(3\cos\beta-2)}{(1-3\cos\beta)^2}$$

8.13 一圆环质量m，半径为a，以速度v沿倾角为α的粗糙斜面抛下，同时给它以一使之向斜面上滚动的角速度。起初，环在距平面底端垂直高度为h的地方，环在运动中保持铅直并刚好在斜面底端停下来。求环与斜面间的摩擦系数及环的初始角速度。

〔解〕 环的运动微分方程为

$$ma' = Mg\sin\alpha - f \qquad (1)$$

$$I\beta = -fa \qquad (2)$$

a'是环心的加速度，β是环的角加速度，f是摩擦力，$I = ma^2$。由(1)、(2)整理得

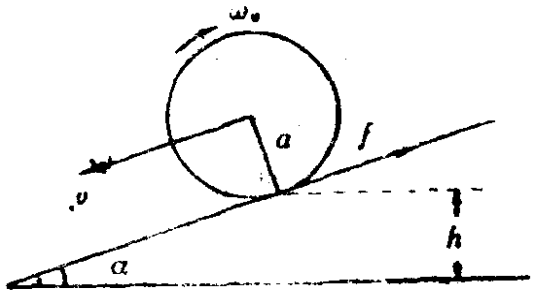


图 8.42

$$a' = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

$$\beta = -\frac{fa}{ma^2} = -\frac{f}{ma}$$

$$f = \mu mg\cos\alpha = 常数$$

又

$$-v^2 = 2a' \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = 2\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$f = Mg\sin\alpha + \frac{mv^2\sin\alpha}{2h} = \mu mg\cos\alpha$$

由此得摩擦系数

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha + \frac{v^2\mathrm{tg}\alpha}{2gh} = \mathrm{tg}\alpha\left(1 + \frac{v^2}{2gh}\right)$$

由$v_t = v + a't = 0$得，

$$t = -\frac{v}{a'} = \frac{-v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

由 $\omega_t = \omega_0 + \beta t = 0$得

$$\omega_0 + \left(-\frac{mg\cos\alpha \cdot \mu}{ma}\right)t = 0$$

$$\omega_0 = \frac{\cos\alpha}{a}\mu g t$$

$$= -\mu g\frac{\cos\alpha}{a} \cdot \frac{v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\mu v}{a(\mu - \mathrm{tg}\alpha)} = \frac{2h}{av}\left(g + \frac{v^2}{2h}\right)$$

8.14 一大圆筒，可绕过中心的轴线自由转动，一小圆柱置于圆筒内，其轴线与圆筒轴线平行，求小圆柱的运动微分方程式及作微振动时的等效单摆长。

〔解〕 小圆柱的运动微分方程为

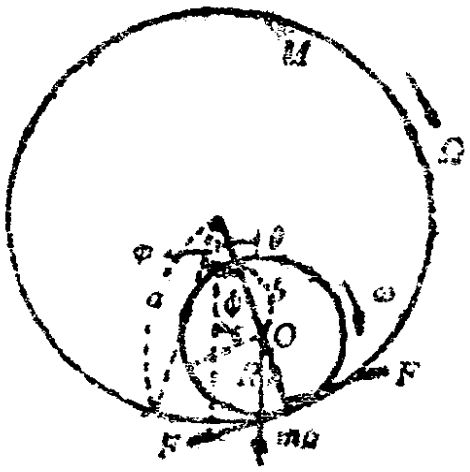


图 8.43

$$m(a-b)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mb^2 \cdot \ddot{\psi} = -Fb \qquad (2)$$

大圆筒运动微分方程为

$$ma^2 \cdot \ddot{\varphi} = Fa \qquad (3)$$

约束方程

$$(a-b)\dot{\theta} - b\dot{\psi} = -a\dot{\varphi} \qquad (4)$$

式中 $\dot{\psi} = \omega$（小圆柱角速度），

$\dot{\varphi}=\Omega$（大圆筒角速度）。由（4）式得

$$(a-b)\ddot{\theta}-b\ddot{\psi}=-a\ddot{\varphi} \tag{5}$$

由（2）、（3）、(5) 可得

$$b\ddot{\psi}=-\frac{2F}{m},\quad a\ddot{\varphi}=\frac{F}{M}$$

所以

$$b\ddot{\psi}-a\ddot{\varphi}=-F\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{m}\right)=(a-b)\ddot{\theta}$$

$$F=-\frac{a-b}{\frac{2}{m}+\frac{1}{m}}\ddot{\theta}=-\frac{Mm(a-b)}{2M+m}\ddot{\theta} \tag{6}$$

将（6）代入（1），得

$$\ddot{\theta}\left[m(a-b)+\frac{Mm(a-b)}{2M+m}\right]=-mg\sin\theta$$

$$(a-b)\frac{3M+m}{2M+m}\ddot{\theta}=-g\sin\theta$$

微振动时，$\sin\approx\theta$，故

$$(a-b)\frac{3M+m}{2M+m}\ddot{\theta}+g\theta=0$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(a-b)(3M+m)}{(2M+m)g}}=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

等效单摆长

$$l'=\frac{(a-b)(3M+m)}{(2M+m)}$$

8.15　一小球置于大球顶上，初始时静止，受微小扰动而下落。大球可绕过球心的水平轴转动。求两球的角速度及两球分离时，球心连线与铅垂方向夹角 θ 之值。

〔解〕　$m(a+b)\ddot{\theta}=mg\sin\theta-F$　　（1）

$$m(a+b)(\dot{\theta})^2 = mg\cos\theta - N \qquad (2)$$

$$\frac{2}{5}mb^2\dot{\omega}_2 = Fb \qquad (3)$$

$$\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega}_1 = Fa \qquad (4)$$

约束方程

$$(a+b)\dot{\theta} - b\omega_2 = a\omega_1 \qquad (5)$$

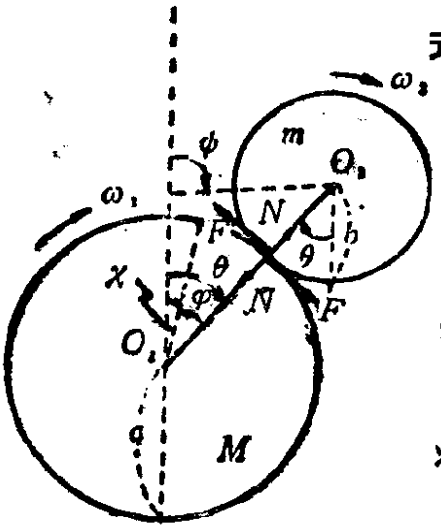


图 8.44

式中$\omega_1 = \dot{\chi}$，$\omega_2 = \dot{\psi}$。由（3）、（4）得

$$\left.\begin{aligned} b\dot{\omega}_2 &= \frac{5F}{2m} \\ a\dot{\omega}_1 &= \frac{5F}{2M} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

由（5）有

$$(a+b)\ddot{\theta} = b\dot{\omega}_2 + a\dot{\omega}_1$$

将（6）代入

$$(a+b)\ddot{\theta} = \frac{5F}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$F = \frac{2Mm}{5(M+m)}(a+b)\ddot{\theta}$$

代入（1）得

$$m(a+b)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - \frac{2Mm}{5(M+m)}(a+b)\ddot{\theta}$$

$$(a+b)\frac{7M+5m}{5(M+m)}\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

将$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$代入，并积分得

$$(a+b)\frac{7M+5m(\dot{\theta})^2}{5(M+m)\ 2} = g(1-\cos\theta)$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{10g(M+m)(1-\cos\theta)}{(a+b)(7M+5m)}}$$

将（3）式两边乘 a，（4）式两边乘 b，相减得

$$aM\ddot{\omega}_1=bm\ddot{\omega}_2$$

积分之

$$aM\omega_1=bm\omega_2,\quad \omega_2=\frac{aM}{bm}\omega_1$$

代入（5）式

$$(a+b)\dot{\theta}=a(M+m)\omega_1/m$$

$$\omega_1=\frac{(a+b)m}{a(M+m)}\dot{\theta},\quad \omega_2=\frac{(a+b)M}{b(M+m)}\dot{\theta}$$

由（2）式，两球分离时$N=0$，所以

$$m(a+b)\dot{\theta}^2=mg\cos\theta$$

$$(a+b)\frac{10g(M+m)(1-\cos\theta)}{(a+b)(7M+5m)}=g\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{10(M+m)}{17M+15m}$$

$$\theta=\arccos\frac{10(M+m)}{17M+15m}$$

8.16　长$2l$，质量为M的均质杆，放在两光滑支点上，两支点连线水平且到杆两端等距．当其中之一突然去掉时，求另一支点上约束反力的瞬时变化．

〔解〕　杆心坐标为

$$x_1=s\cos\theta,\quad x_2=s\sin\theta$$

杆的运动微分方程为

$$M\ddot{x}_1=R\sin\theta \qquad (1)$$

$$M\ddot{x}_2=Mg-R\cos\theta \qquad (2)$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta}=Rs \qquad (3)$$

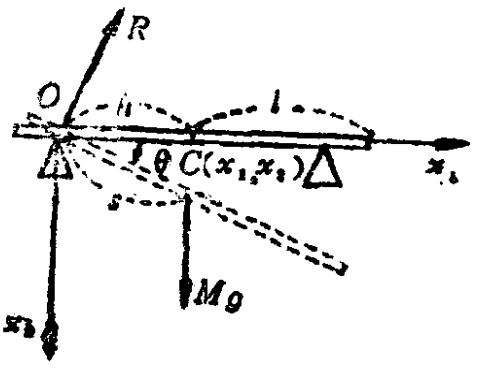


图 8.45

右边的支点被突然撤掉的瞬间，杆尚未发生显著位移，$\cos\theta = 1$，$\sin\theta = \theta$，$\dot{s}$ 亦为小量。略去二级小量有

$$\dot{x}_1 = \dot{s}\cos\theta - s\sin\theta \cdot \dot{\theta} = \dot{s}, \quad \ddot{x}_1 = \ddot{s}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{s}\sin\theta + s\cos\theta \cdot \dot{\theta} = s\dot{\theta}, \quad \ddot{x}_2 = s\ddot{\theta}$$

刚刚撤掉右边支点的时刻，$\theta = 0$，$s = h$，所以

$$M\ddot{x}_1 = 0 \tag{1'}$$

$$M\ddot{x}_2 = Mg - R \tag{2'}$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} = Rh \tag{3'}$$

$$\ddot{x}_2 = h\ddot{\theta} \tag{4'}$$

将（4′）代入（2′）式

$$Mh\ddot{\theta} = Mg - R, \quad \ddot{\theta} = \frac{Mg - R}{Mh}$$

代入（3′）得

$$l^2(Mg - R) = 3Rh^2$$

$$R = \frac{Mgl^2}{l^2 + 3h^2} \tag{5}$$

未撤右支点时，约束反力是$R_0 = \frac{Mg}{2}$。令$R = R_0$，则由（5）式得

$$\frac{Mgl^2}{l^2 + 3h^2} = \frac{Mg}{2}, \quad h = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

仅当 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$时，突然撤掉一支点，另一支点上的瞬时反力与未撤时相同。

8.17　一均匀直棒，质量M，长$2b$，两端约束在一水平的半径为a的光滑圆环上运动。棒的一端，有一质量为m的昆

虫，沿棒向另一端爬行．

（1）试求出系统的角动量表达式．

（2）求当昆虫爬到棒另一端时，棒转过多大角度？

（3）证明：如昆虫以匀速率 v 相对于棒运动，以 φ 表示在 t 时刻棒与固定方向的夹角，则当 $M=m$ 时

$$\dot{\varphi}\left(2a^2-\frac{5}{3}b^2+v^2t^2\right)=\text{常数}$$

〔解〕 （1）取动坐标系 $C\text{-}x_1x_2$，如图8.46所示．昆虫在任意位置 D 处

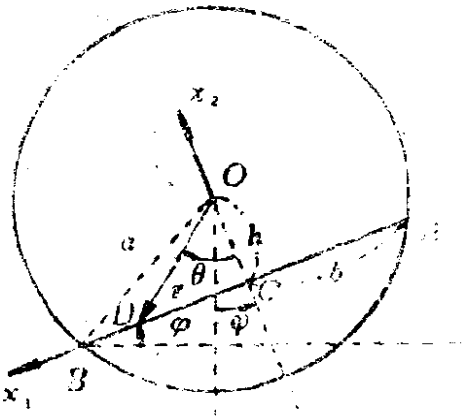


图 8.46

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{虫}&=\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}_r\\&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1\\&=-\omega\boldsymbol{e}_3\times\left[x_1\boldsymbol{e}_1-\sqrt{a^2-b^2}\,\boldsymbol{e}_2\right]+\dot{x}_1\boldsymbol{e}_1\\&=-x_1\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2+\left[\dot{x}_1-\sqrt{a^2-b^2}\,\dot{\varphi}\right]\boldsymbol{e}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{虫}&=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}_{虫}\\&=m\left(x_1\boldsymbol{e}_1-\sqrt{a^2-b^2}\,\boldsymbol{e}_2\right)\\&\quad\times\left[-x_1\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2+\left(\dot{x}_1-\sqrt{a^2+b^2}\,\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_1\right]\\&=-\left(mr^2\dot{\varphi}-m\dot{x}_1h\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{虫}+\boldsymbol{L}_{杆}=-\left(I\dot{\varphi}+mr^2\dot{\varphi}-m\dot{x}_1h\right)\boldsymbol{e}_3$$

由于

$$I=\frac{b^2}{3}M+h^2M=\left(a^2-\frac{2b^2}{3}\right)M$$

$$r^2=x_1^2+h^2=x_1^2+a^2-b^2$$

故

$$\boldsymbol{L}=-\left[\left(a^2-\frac{2b^2}{3}\right)M\dot{\varphi}+m\left(x_1^2+a^2-b^2\right)\dot{\varphi}-m\dot{x}_1\sqrt{a^2-b^2}\right]\boldsymbol{e}_3$$

（2）由角动量守恒 $\boldsymbol{L}=0$ 得

$$I\dot{\varphi}+mr^2\dot{\varphi}-m\dot{x}_1h=0$$

$$\left(\frac{I}{m}+h^2+x_1^2\right)\dot{\varphi}=h\dot{x}_1$$

$$d\varphi=\frac{h}{\frac{I}{m}+h^2+x_1^2}dx_1$$

积分之，得

$$\varphi=\int_{-b}^{b}\frac{h}{\frac{I}{m}+h^2+x_1^2}dx_1$$

$$=h\frac{1}{\sqrt{\frac{I}{m}+h^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{I}{m}+h^2}}\right]_{-b}^{b}$$

$$=2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\frac{I}{m}+a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{\frac{I}{m}+a^2-b^2}}$$

（3）$T\fallingdotseq T_{棒}+T_{虫}$

$$=\frac{1}{2}I(\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}m(v_{虫})^2 \qquad (M\fallingdotseq m,\ \dot{x}_1=v)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(a^2-\frac{2b^2}{3}\right)(\dot{\varphi})^2$$

$$+\frac{1}{2}m\{v^2(\dot{\varphi})^2t^2+[v-(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi}]^2\}$$

注意到T中不显含φ，$L=T$ $(V=0)$，φ是循环坐标，所以

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\text{常数}$$

$$m\left(a^2-\frac{2b^2}{3}\right)\dot{\varphi}-m(a^2-b^2)^{1/2}[v-(a^2-b^2)^{1/2}\dot{\varphi}]$$

$$+mv^2t^2\dot{\varphi}=\text{常数}$$

即

$$\dot{\varphi}\left(2a^2-\frac{5}{3}b^2+v^2t^2\right)=\text{常数}$$

8.18 用拉格朗日方程推导欧勒动力学方程式.

〔解〕 在本体主轴系中，刚体定点运动的动能是

$$T=\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2)$$

据欧勒运动学方程式

$$\omega_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

有

$$T=\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)^2$$

$$+\frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)^2$$

$$+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

关于欧勒角 ψ 的欧勒动力学方程

$$\Lambda_\psi T=Q_\psi$$

Q_ψ表示绕轴转动 ψ 角的广义力，即自转轴上的力矩分量N_3.

$$\frac{\partial T}{\partial\psi}=I_1(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi)(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)$$

$$+I_2(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi)(-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi-\dot{\theta}\cos\psi)$$
$$=I_1\omega_1\omega_2+I_2\omega_2(-\omega_1)$$
$$=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=I_3\omega_3$$

拉氏方程为

$$I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=N_3 \qquad (1)$$

据对称性，其余方程可由置换下标求得

$$I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=N_1 \qquad (2)$$

$$I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=N_2 \qquad (3)$$

注意，（2）、（3）式并不能直接由对应于θ和φ的拉格朗日方程直接求得，即关于θ和φ的拉氏方程并不等同于（2）、（3）式，但可间接推出（2）、（3）式。

8.19 试证明对称刚体不受力矩作用绕质心自由转动（欧勒-潘索情形）时，作规则进动，即章动角不变，其余两个欧勒角为时间t的线性函数。

〔解〕 选取进动坐标系O-$x_1x_2x_3$，令x_2，x_3与定系第三轴ζ与保持在同一平面内。欧勒动力学方程式是

$$\begin{aligned}&I_1\dot{\omega}_1-I_1\omega_2\Omega_3+I_3\omega_3\Omega_2=0\\&I_1\dot{\omega}_2-I_3\omega_3\Omega_1+I_1\omega_1\Omega_3=0\\&I_3\dot{\omega}_3-I_1\omega_1\Omega_2+I_1\omega_2\Omega_1=0\end{aligned} \qquad (1)$$

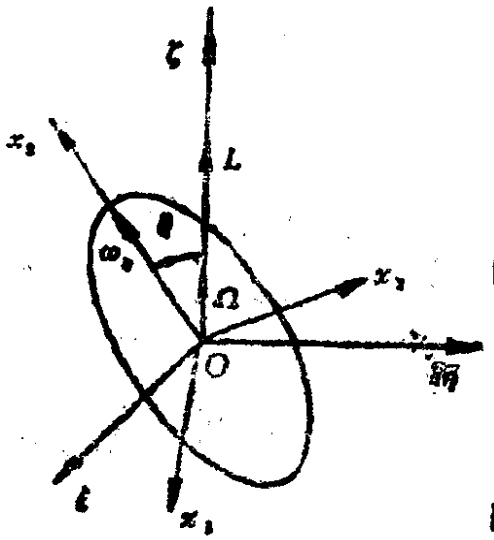


图 8.47

由（2）第二式得

由 $\Omega_1=\omega_1=0$，（1）简化为

$$\left.\begin{aligned}-I_1\omega_2\Omega_3+I_3\omega_3\Omega_2&=0\\I_1\dot{\omega}_2&=0\\I_3\dot{\omega}_3&=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

由（2）第三式得

$I_3\omega_3=c_3'$（常数）

$\omega_3=c_3$（常数）

$I_3\omega_3=l_3=l\cos\theta$

由角动量守恒，L是恒向量，故有$\theta=\theta_0$，即章动角不变。

$$\omega_3 = c_3 = \Omega\sin\theta_0, \quad \Omega = \frac{c_3}{\sin\theta_0} = \dot{\varphi} = 常数$$

所以

$$\varphi = a + bt$$

又

$$\omega_3 = \dot{\psi} = c_3 - \Omega\cos\theta_0 = 常数$$

故

$$\psi = a' + b't$$

8.20 一质量为M的均质固体球在粗糙水平面上作无滑动的滚动，此平面以一常角速度绕一铅直轴转动，如果除了重力和接触点的摩擦力外没有力作用在球上，证明球心的轨迹是一圆.

〔解〕 取转动轴上距平面与转轴交点B为a的点O为坐标原点. 质心C的位置向量为$\boldsymbol{r}$，球的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，接触点处的反作用力为$\boldsymbol{R}$.

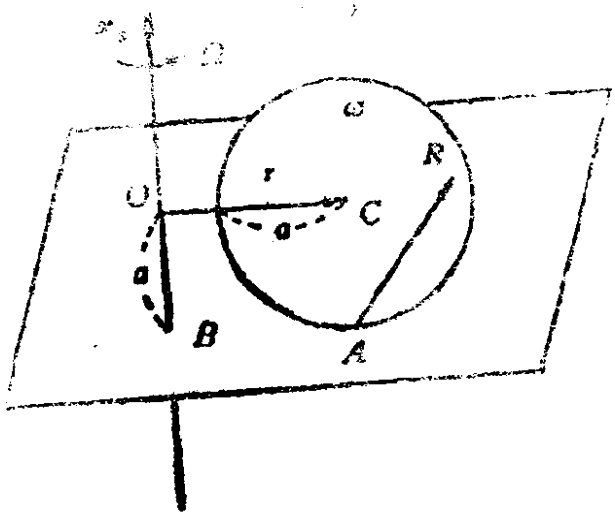


图 8.48

球的运动微分方程为

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R} - Mg\boldsymbol{e}_3 \qquad (1)$$

$$\frac{2}{5}Ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{R} \qquad (2)$$

约束方程为

$$\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (-a\boldsymbol{e}_3) = \Omega\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{r} \qquad (3)$$

将（1）代入（2）得

$$\frac{2}{5}a\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{e}_3 \times (\ddot{\boldsymbol{r}} + g\boldsymbol{e}_3) = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{e}_3 \qquad (4)$$

将（3）微商，得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} - \Omega\boldsymbol{e}_3 \times \dot{\boldsymbol{r}} = a\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{e}_3 \qquad (5)$$

将（4）代入（5），得

$$\frac{2}{5}(\ddot{\boldsymbol{r}}-\Omega\boldsymbol{e}_3\times\dot{\boldsymbol{r}})=(\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{e}_3\times\ddot{\boldsymbol{r}})$$

$$=(\boldsymbol{e}_3\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{e}_3-(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3)\ddot{\boldsymbol{r}}=-\ddot{\boldsymbol{r}}$$

因$\boldsymbol{e}_3\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$，故

$$\frac{7}{5}\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{2}{5}\Omega\boldsymbol{e}_3\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{2}{7}\Omega\boldsymbol{e}_3\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{2}{7}\Omega\boldsymbol{e}_3\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$\boldsymbol{r}_0$是任意常向量. 所以质心C画出一圆，其圆心在$\boldsymbol{r}_0$端点，半径为$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$，此圆以$\frac{2\Omega}{7}$角速度画出.

8.21 一台球放在一有摩擦的桌面上，施一打击作用，使之具有一初速度和一初角速度. 试证明在发生纯滚动之前，球的质心沿一抛物线运动.

〔解〕 取固定坐标系O-xyz，质心坐标系C-$x_1x_2x_3$，如图8.49所示. O点在桌面上. 设球的角速度为ω，球所受约束力为$\boldsymbol{R}=(R_x,R_y,R_z)$，球心$C$的位置以$(x, y, z)$表示.

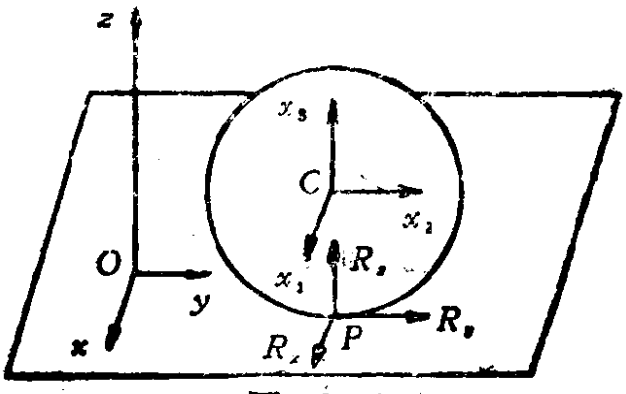


图 8.49

台球的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=R_x \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}=R_y \qquad (2)$$

$$\left(\frac{2}{5}ma^2\right)\dot{\omega}_1=aR_y \qquad (3)$$

$$\left(\frac{2}{5}\ ma^2\right)\dot{\omega}_2 = -aR_x \qquad (4)$$

$$\left(\frac{2}{5}\ ma^2\right)\dot{\omega}_3 = 0 \qquad (5)$$

球上与桌面接触的点P的速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP}\\ &= (\dot{x}\boldsymbol{e}_1 + \dot{y}\boldsymbol{e}_2) + (\omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3) \times (-a)\boldsymbol{e}_3\\ &= (\dot{x} - a\omega_2)\boldsymbol{e}_1 + (\dot{y} + a\omega_1)\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

速度的分量式为

$$v_x = \dot{x} - a\omega_2 \qquad (6)$$

$$v_y = \dot{y} + a\omega_1 \qquad (7)$$

桌面对球的摩擦力

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = ma = \mu mg$$

由（3）、（4）有

$$\dot{a\omega}_1 = \frac{5R_y}{2m} \qquad (8)$$

$$\dot{a\omega}_2 = \frac{-5R_x}{2m} \qquad (9)$$

由（6）、（7）、（8）、（9）得

$$\dot{v}_x = \ddot{x} - \dot{a\omega}_2 = \frac{R_x}{m} + \frac{5R_x}{2m} = \frac{7R_x}{2m}$$

$$\dot{v}_y = \ddot{y} + \dot{a\omega}_1 = \frac{R_y}{m} + \frac{5R_y}{2m} = \frac{7R_y}{2m}$$

所以

$$\frac{\dot{v}_y}{\dot{v}_x} = \frac{R_y}{R_x}$$

但因$\frac{v_y}{v_x}=\mathrm{tg}\theta=\frac{R_y}{R_x}$，故有

$$\frac{\dot{v}_y}{\dot{v}_x}=\frac{v_y}{v_x},\quad \frac{dv_y}{v_y}=\frac{dv_x}{v_x}$$

积分得

$$\ln v_y=\ln v_x+\ln c$$

$$\frac{v_y}{v_x}=c\ (\text{常数})$$

$$\frac{R_y}{R_x}=\text{常数}=\mathrm{tg}\theta$$

所以R的大小、方向均不变，即为一常向量。

令固定系在xy平面上转一角度，使$O\text{-}xyz$变到$O\text{-}x'y'x'$，并令Ox'轴沿接触点速度方向，则

$$R_{x'}=-\mu mg,\qquad R_{y'}=0$$

$$\ddot{x}'=-\mu g,\ \dot{x}'=-\mu gt+\dot{x}'_0,\ x'=-\frac{1}{2}\mu gt^2+\dot{x}'_0t+x'_0$$

$$\ddot{y}'=0,\ \dot{y}'=\dot{y}'_0,\ y'=\dot{y}'_0t+y'_0$$

这正是球心的抛物线方程。

8.22 半径为a、质量为m的球，在半径为b、内面粗糙的竖直固定圆筒内壁上作纯滚动，试证其在竖直方向的运动，将是简谐振动。

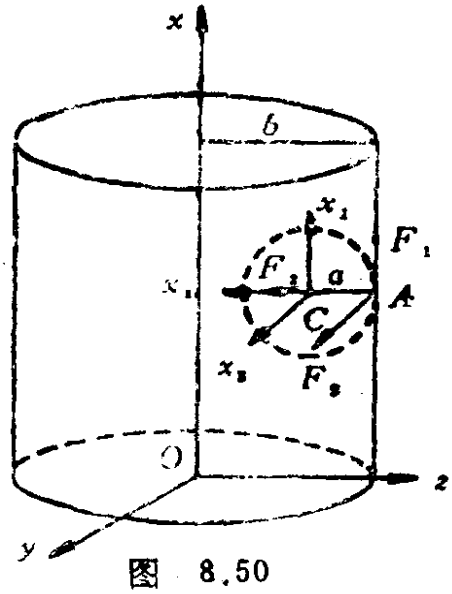


图 8.50

〔解〕 取定系$O\text{-}xyz$，动系$C\text{-}x_1x_2x_3$，如图8.50所示。令θ表示通过球心与圆筒轴线的平面和通过轴线的固定平面的夹角。

取x_1轴沿铅直方向向上，x_2轴垂直于圆筒轴。$C\text{-}x_1x_2x_3$只参加球心绕x轴的转动，是部分固结于球的

动坐标系.

动系的角速度 $\Omega=(\dot{\theta},\ 0,\ 0)$，球心速度在定系中的分量为

$$u=\dot{x},\ v=0,\ w=(b-a)\dot{\theta}$$

球的角速度在动系中为 $(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$，球在圆筒内壁上作纯滚动，约束方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_A&=\boldsymbol{v}_C+\omega\times\vec{CA}\\&=u\boldsymbol{e}_1+w\boldsymbol{e}_3+(\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3)\times(-a)\boldsymbol{e}_2\\&=(u+a\omega_3)\boldsymbol{e}_1+(w-a\omega_1)\boldsymbol{e}_3=0\end{aligned}$$

$$u+a\omega_3=0,\ w-a\omega_1=0$$

质心运动微分方程

$$m\ddot{x}=F_1-mg \tag{1}$$

$$m(b-a)\ddot{\theta}=F_3 \tag{2}$$

$$-m(b-a)\dot{\theta}^2=F_2 \tag{3}$$

对于均质球，$I_1=I_2=I_3=I$，且本题中

$$\Omega_3=\Omega_2=0,\ \Omega_1=\dot{\theta},\quad I=\frac{2}{5}ma^2$$

$$N_1=-F_3a,\ N_2=0,\ N_3=F_1a$$

$$\omega_1=\frac{w}{a}=(b-a)\dot{\theta}/a,\ \omega_3=-\frac{u}{a}=-\dot{x}/a$$

代入欧勒方程

$$I(\dot{\omega}_1-\omega_2\Omega_3+\omega_3\Omega_2)=N_1$$

$$I(\dot{\omega}_2-\omega_3\Omega_1+\omega_1\Omega_3)=N_2$$

$$I(\dot{\omega}_3-\omega_1\Omega_2+\omega_2\Omega_1)=N_3$$

得

$$-\frac{2}{5}m(b-a)\ddot{\theta}=F_3 \tag{4}$$

$$\frac{2}{5}m(\ddot{x}-a\omega_2\dot{\theta})=-F_1 \qquad (5)$$

$$a\dot{\omega}_2+\dot{x}\dot{\theta}=0 \qquad (6)$$

由（2）、（4）得 $\ddot{\theta}=0$，$\dot{\theta}=n$（常数），代入（6）得

$$a\dot{\omega}_2+\dot{x}n=0$$

$$a\omega_2+xn=\text{常数}=ak \qquad (7)$$

由（1）、（5）得

$$\frac{7}{5}\ddot{x}-\frac{2}{5}a\omega_2\dot{\theta}+g=0$$

将（7）代入得

$$\frac{7}{5}\ddot{x}-\frac{2}{5}(ak-nx)n+g=0$$

亦即

$$\frac{7}{5}\ddot{x}+\frac{2}{5}n^2x=\frac{2}{5}akn-g$$

所以球的竖直运动为简谐振动。

8.23 一半径为 a，质量为 m 的均质薄圆盘，固定在无摩擦的轴承上，它绕过中心的固定轴以角速度 ω 自由地转动，转动轴和圆盘的对称轴成 θ 角，求作用在圆盘和轴间的力矩的大小和方向。

〔解〕 取圆盘中心 O 的本体主轴系 $O\text{-}x_1x_2x_3$。在此坐标系中

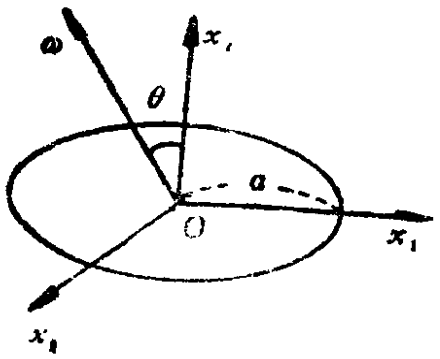


图 8.51

$$\boldsymbol{\omega}=-\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\omega\cos\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{L}=I_1\omega_1\boldsymbol{e}_1+I_2\omega_2\boldsymbol{e}_2$$

$$=I_1(-\omega\sin\theta)\boldsymbol{e}_1+I_2(\omega\cos\theta)\boldsymbol{e}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{L}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=(-\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\omega\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\times(-I_1\omega\sin\theta\boldsymbol{e}_1+I_2\omega\cos\theta\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=(-I_2\omega^2\sin\theta\cos\theta+I_1\omega^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_3$$

$$=(I_1-I_2)\omega^2\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_3$$

$$N_3=(I_1-I_2)\omega^2\cos\theta\sin\theta$$

$$=\left(\frac{1}{4}ma^2-\frac{1}{2}ma^2\right)\omega^2\cos\theta\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{8}ma^2\omega^2\sin2\theta$$

8.24 图8.52所示滚磨为一均质圆盘，半径r，质量M，沿半径为a的圆周滚动。杆OO'的角速度为Ω，不计杆重。试计算滚磨对底盘的正压力。（$d\ll a$）

〔解〕 选用进动坐标系$O\text{-}x_1x_2x_3$，它只参加滚磨的进动，不参加自转，没有章动。

坐标系的角速度即刚体的进动角速度$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{e}_3$，以$\boldsymbol{\omega}'=-\omega'\boldsymbol{e}_3$表示滚磨自转角速度，则滚磨的总角速度$\boldsymbol{\omega}=\Omega\boldsymbol{e}_2-\omega'\boldsymbol{e}_3$

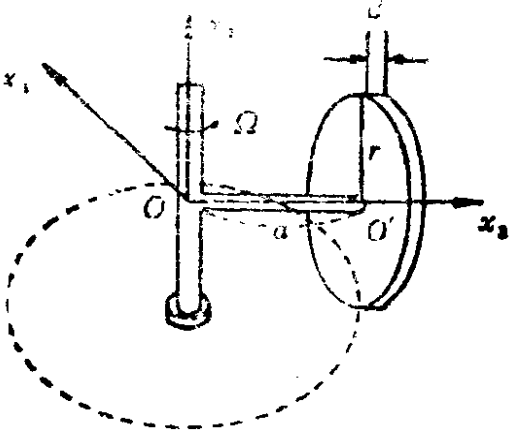


图 8.52

$$\omega'=\frac{a}{r}\Omega\qquad\text{（纯滚动条件）}$$

$$I_1=Ma^2+\frac{1}{4}Mr^2=I_2$$

$$I_3=\frac{1}{2}Mr^2$$

$$N_1=a(Mg-R),\quad N_2=N_3=0$$

将以上诸式代入欧勒动力学方程组

$$I_1\dot{\omega}_1-I_1\omega_2\Omega_3+I_3\omega_3\Omega_2=N_1$$

$$I_1\dot{\omega}_2 - I_3\omega_3\Omega_1 + I_1\omega_1\Omega_3 = N_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - I_1\omega_1\Omega_2 + I_1\omega_2\Omega_1 = N_3$$

因 $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$，$\Omega_1 = \Omega_3 = \omega_1 = 0$，方程组的二、三式皆为恒等式，仅剩下

$$I_3\omega_3\Omega_2 = N_1$$

即

$$\frac{1}{2}Mr^2 \cdot \left(-\frac{a}{r}\Omega\right) \cdot \Omega = a(Mg - R)$$

$$R = Mg + \frac{1}{2}Mr\Omega^2$$

滚磨对底盘的压力$P = -R$，当Ω足够大时，此动压力可能远大于静压力（滚磨重量）。

8.25 对称陀螺的轴位于竖直位置，陀螺以很大的角速度ω_2作稳定的自转。今突然在离开顶点a处受到一与陀螺的对称轴垂直的冲量$\hat{I}$作用。试证陀螺在以后的运动中，最大章动角近似地为$2\mathrm{arctg}\left(\frac{\hat{I}\,d}{I_3\omega_3}\right)$，式中$I_3$是陀螺绕对称轴转动的转动惯量。

〔解〕 因陀螺是对称陀螺，其惯量椭球是旋转椭球，$I_1 = I_2 = I_0 \neq I_3$，陀螺重心在动力对称轴上，故属拉格朗日情形。

先求出陀螺运动的三个第一积分。由欧勒运动学方程式有

$$\omega_1^2 = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2$$

$$= (\dot{\varphi})^2\sin^2\theta\sin^2\psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi\cos\psi + (\dot{\theta})^2\cos^2\psi$$

$$\omega_2^2 = (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2$$

$$= (\dot{\varphi})^2\sin^2\theta\cos^2\psi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi\sin\psi + (\dot{\theta})^2\sin^2\psi$$

$$\omega_3^2 = (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

$$T=\frac{1}{2}I_0\omega_1^2+\frac{1}{2}I_0\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

$$=\frac{1}{2}I_0[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

$V=mgl\cos\theta$ （0 为势能零点）

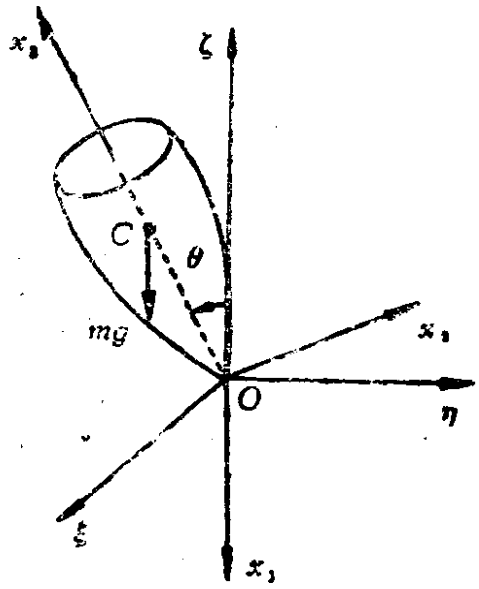


图 8.53

$$L=\frac{1}{2}I_0[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]$$

$$+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mgl\cos\theta \qquad (1)$$

φ，ψ是循环坐标，故有

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(I_0\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi}$$

$$+I_3\dot{\psi}\cos\theta$$

$$=\alpha\ (\text{常数}) \qquad (2)$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=I_3s=\beta\ (\text{常数}) \qquad (3)$$

$$(s=\omega_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})$$

（2）式可改写为

$$p_\varphi=I_0\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\cos\theta(\cos\theta\dot{\varphi}+\dot{\psi})=\alpha$$

即

$$I_0\dot{\varphi}\sin^2\theta+\beta\cos\theta=\alpha \qquad (4)$$

由于 $E=T+V=$常数，故

$$\frac{1}{2}I_0[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2+mgl\cos\theta=E$$

$$I_0[(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta+(\dot{\theta})^2]+I_3s^2=2(E-mgl\cos\theta) \qquad (5)$$

（3）、（4）、（5）式为三个第一积分。

由题知，$\theta=0$ 时

$$I_0\dot{\theta}=\hat{I}d,\qquad \dot{\theta}=\frac{\hat{I}d}{I_0}$$

又由（3）、（4）知，$\theta=0$时

$$a=\beta=I_3s=I_3\omega_3 \tag{6}$$

且由（5）式得

$$I_0\left(\frac{\hat{I}d}{I_0}\right)^2+I_3s^2+2mgl=2E$$

将此式代回（5）式，得

$$I_0(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)=2mgl(1-\cos\theta)+\frac{(\hat{I}d)^2}{I_0} \tag{7}$$

将（6）代入（4），得

$$I_0\dot{\varphi}\sin^2\theta=I_3s(1-\cos\theta)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{I_3s(1-\cos\theta)}{I_0\sin^2\theta} \tag{8}$$

当θ达到最大章动角时，$\dot{\theta}=0$，连同（8）式一起代入（7）式得

$$I_0\sin^2\theta\left(\frac{I_3s(1-\cos\theta)}{I_0\sin^2\theta}\right)^2=4mgl\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(\hat{I}d)^2}{I_0}$$

$$\frac{I_3^2s^2}{I_0}\left[\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right]^2=4mgl\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(\hat{I}d)^2}{I_0}$$

$$\frac{I_3^2s^2}{I_0}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=4mgl\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(\hat{I}d)^2}{I_0}$$

$$\frac{I_3^2s^2}{I_0}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{4I_0mgl}{I_3^2s^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{(\hat{I}d)^2}{I_0}$$

因为s很大，左式括号中第二项可略去，故

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\approx\left(\frac{\hat{I}d}{I_3s}\right)^2$$

$$\theta = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\hat{I}d}{I_3 s}\right) = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\hat{I}d}{I_3\omega_3}\right)$$

8.26 一回转仪 $I_1 = I_2 = 2I_3$，依惯性绕重心转动，并作规则进动。已知此回转仪的自转角速度为ω_s，并知其自转轴与进动轴间的夹角 $\theta = 60°$，求进动角速度ω_p的量值。

〔解一〕 外力主矢通过重心(定点)，刚体依惯性运动，属欧勒-潘索情形。

$$N_1 = N_2 = N_3$$

取定系$O\text{-}\xi\eta\zeta$，本体主轴系$O\text{-}x_1x_2x_3$，则

$$\dot{\varphi} = \omega_p, \qquad \dot{\psi} = \omega_s$$

欧勒动力学方程式为

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

将N_i，I_i $(i = 1, 2, 3)$ 之值代入（1）得

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - \frac{I_1}{2}\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \frac{I_1}{2}\omega_3\omega_1 &= 0 \\ \frac{1}{2}I_1\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

（2）式简化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 - \frac{1}{2}\omega_2\omega_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \frac{1}{2}\omega_3\omega_1 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

由于 $\theta = 60°$，$\dot{\theta} = 0$，故由欧勒运动学方程式得

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\\ \omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\\ \omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

对 t 求微商，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\cdot\dot{\psi}\\ \dot{\omega}_2 &= -\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\cdot\dot{\psi}\\ \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

将（4）、（5）代入（3），得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\cdot\dot{\psi}-\frac{1}{2}(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0\\ &-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\cdot\dot{\psi}+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)=0\\ &\dot{\omega}_3=0\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

将（6）化简得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\psi}-\frac{1}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0\\ &-\dot{\psi}+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=0\\ &\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\text{常数}\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\dot{\psi}-\dot{\varphi}\cos\theta=0$$

由于 $\dot{\varphi}=\omega_p$，$\dot{\psi}=\omega_b$，$\theta=60°$，所以

$$\omega_p=2\omega_b$$

〔解二〕 取部分固着于刚体的进动坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$。令 x_2，x_3，ζ 轴共面，x_1 与此面垂直（见图8.47，图中 ω_0 即 ω_b）。

欧勒动力学方程式为

$$\left.\begin{aligned}&I_1\dot{\omega}_1-I_1\omega_2\Omega_3+I_3\omega_3\Omega_2=N_1\\ &I_2\dot{\omega}_2-I_3\omega_3\Omega_1+I_1\omega_1\Omega_3=N_2\\ &I_3\dot{\omega}_3-I_1\omega_1\Omega_2+I_1\omega_2\Omega_1=N_3\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

因 $\omega_p=\Omega$，$\Omega_1=0$，$\omega_1=0$，$N_1=N_2=N_3=0$，故（1）式可化为

$$\left.\begin{aligned} -I_1\omega_2\Omega_3+I_3\omega_3\Omega_2&=0\\ \dot{I}_1\omega_2&=0\\ \dot{I}_3\omega_3&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

由（2）中二、三式得

$$\omega_2=c_1,\quad \omega_3=c_2$$

由（2）第一式得

$$\frac{\omega_2}{\omega_3}=\frac{I_3\Omega_3}{I_1\Omega_3}=\frac{1}{2}\frac{\Omega_2}{\Omega_3}=\frac{1}{2}\mathrm{tg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c_1=\omega_2=\Omega\sin\theta=\sqrt{3}\,\Omega/2$$

$$c_2=\omega_3=\omega_b+\Omega\cos\theta=\omega_b+\Omega/2$$

从而 $\omega_b=\Omega/2=\omega_p/2$。

8.27 试讨论不受力矩作用的刚体转动的稳定性。

〔解〕 我们考虑一不受任何力或力矩作用的刚体绕其主轴之一转动的稳定性，稳定的定义仍然是：如对系统施一小的扰动，它仍将恢复到以前的状态或绕原来的状态作小振动。

设有一刚体，关于质心 O（取为中心主轴坐标原点）的主转动惯量各不相同，$I_1<I_2<I_3$。

引入正常数 $A_1=\dfrac{I_3-I_2}{I_1}$，$A_2=\dfrac{I_3-I_1}{I_2}$，$A_3=\dfrac{I_2-I_1}{I_3}$，刚体不受力矩运动的欧勒动力学方程式为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1+\omega_2\omega_3A_1&=0\\ \dot{\omega}_2-\omega_3\omega_1A_2&=0\\ \dot{\omega}_3+\omega_1\omega_2A_3&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

首先，设刚体绕 x_1 轴转动，$\omega=\omega_1e_1$，如施一小的扰动，角速度向量变为

$$\omega = \omega_1 e_1 + \xi e_2 + \eta e_3 \qquad (2)$$

ξ，η为小量，$\omega_2 = \xi$，$\omega_3 = \eta$，欧勒方程变为

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 常数 \\ \dot{\xi} &= \eta\omega_1 A_2 \\ \dot{\eta} &= \xi\omega_1 A_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

由（3）得

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\omega_1^2 A_2 A_3 \xi \\ \ddot{\eta} &= -\omega_1^2 A_2 A_3 \eta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

（4）式的解为

$$\xi(t) = A\sin(\omega_1\sqrt{A_2A_3}\ t + \delta)$$

$$\eta(t) = B\sin(\omega_1\sqrt{A_2A_3}\ t + \alpha)$$

所以，使ω在x_2, x_3方向上引入小扰动后，它们并不随时间增加，只在$\xi = 0$，$\eta = 0$附近振动，即绕x_1轴的转动是稳定的.

同样地，可分析绕x_2, x_3轴的转动.

如 $\omega_2 \gg \omega_1 \approx \omega_3$，则$\omega_2 =$常数.

$$\ddot{\omega}_1 - (\omega_2^2 A_1 A_3)\omega_1 = 0$$

$$\ddot{\omega}_3 - (\omega_2^2 A_1 A_3)\omega_3 = 0$$

ω_1, ω_3的解的形式为$A\exp[\omega_2\sqrt{A_1A_3}t] + B\exp[-\omega_2\sqrt{A_1A_3}t]$。当$t \to \infty$时，变为无界. 所以，刚体绕$x_2$轴的转动不稳定.

如 $\omega_3 \gg \omega_1 \approx \omega_2$，$\omega_1$，$\omega_2$有界，以角频率$\omega_3\sqrt{A_1A_2}$变化.

结论：对任一刚体，其三个主转动惯量不相等，绕相应于最大或最小转动惯量的主轴的转动是稳定的，而绕转动惯量居间的主轴的转动是不稳定的. 即当$I_1 < I_2 < I_3$时，关于1，3轴的转动稳定，关于2轴的转动不稳定.

还可证明：

$I_1 = I_2 < I_3$，关于3轴的转动稳定；

$I_1 < I_2 = I_3$，关于1轴的转动稳定；

$I_1 = I_2 = I_3$，关于任意轴的转动都稳定.

8.28 假定运动是无章动的匀速进动，根据欧勒运动方程求证均匀引力场中对称陀螺作匀速进动的条件为

$$Mgl = \dot{\varphi}[I_3\dot{\psi} - (I_1 - I_3)\dot{\varphi}\cos\theta_0]$$

〔解〕 对称陀螺的欧勒方程为

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$
$$I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = N_3$$

$$N_1 = Mgl\sin\theta\cos\psi$$
$$N_2 = -Mgl\sin\theta\sin\psi$$
$$N_3 = 0$$
$$(\boldsymbol{N} = \overrightarrow{OC} \times \boldsymbol{G})$$

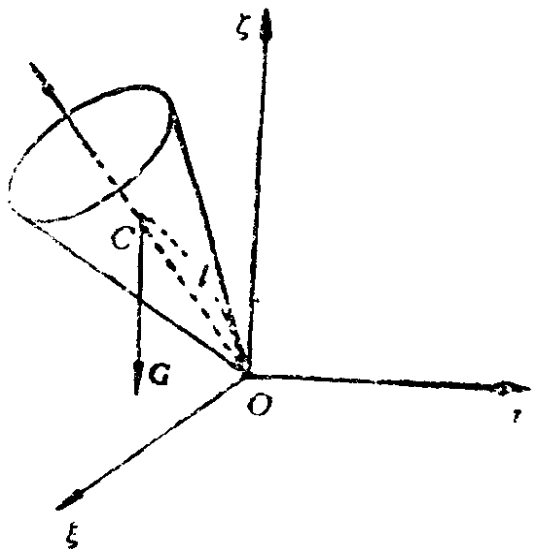


图 8.54

运动无章动，$\dot{\theta} = 0$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

微分之，得

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\dot{\omega}_2 = \ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\dot{\omega}_3 = \ddot{\varphi}\cos\theta + \ddot{\psi}$$

代入欧勒方程，得

$$I_1(\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi) - (I_1 - I_3)\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = Mgl\sin\theta\cos\psi \quad (1)$$

$$I_2(\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi) + (I_1 - I_3)\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = -Mgl\sin\theta\sin\psi \quad (2)$$

$$I_3(\ddot{\varphi}\cos\theta + \ddot{\psi}) = 0 \quad (3)$$

由（3）式得 $\ddot{\varphi}=0$，$\ddot{\psi}=0$，代入（1）、（2），联立得

$$I_1\dot{\varphi}\dot{\psi}-(I_1-I_3)\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=Mgl$$

因 $\theta=\theta_0$，整理得

$$Mgl=\dot{\varphi}[I_3\dot{\psi}-(I_1-I_3)\dot{\varphi}\cos\theta_0]$$

§5 打 击 理 论

理论要点

1．质点的打击理论

（1）打击的概念

由微分形式的动量定理 $d(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}dt$，如力 $\boldsymbol{F}$ 可以表为时间的函数，将方程在 O—τ 时间内积分，得

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_0^\tau \boldsymbol{F}dt=\hat{\boldsymbol{F}}$$

$\hat{\boldsymbol{F}}$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 在时间 τ 内的冲量。

然而，如果力 $\boldsymbol{F}$ 非常大，而时间 τ 又非常短，则动量的变化为一有限值。所谓打击，就是一个很大的力，在很短的时间内作用于一质点，使之发生一有限的动量（速度）变化的现象。如以 $\boldsymbol{F}^*$ 表示打击时间内力 $\boldsymbol{F}$ 的平均值，据中值定理

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{F}^*\tau$$

打击时，$\boldsymbol{F}^*$ 很大，τ 很小，乘积为有限。

在打击时间 τ 内，有限力的作用可以略去不计。讨论打击问题，并不研究固体相击时发生的形变的性质。

打击时间内位移为无限小。由 $m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\hat{\boldsymbol{F}}$，积分得

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{v}_0\tau+\frac{1}{m}\int_0^\tau\hat{\boldsymbol{F}}dt \qquad \left(\hat{\boldsymbol{F}}=\int_0^\tau \boldsymbol{F}dt\right)$$

$$=\boldsymbol{v}_0\tau+\frac{1}{m}\hat{\boldsymbol{F}}^*\tau$$

$\hat{F}^*$, v_0是有限量，故Δr是小量。

（2）打击的基本方程式

方程式

$$\Delta m\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{F}} \tag{8.72}$$

表示质点在打击时间内获得的动量等于打击冲量。这一方程对打击问题的重要性可与牛顿第二定律对质点动力学的重要程度相比。由它，可根据打击冲量求动量变化，或反之。但这是一个代数方程而非微分方程。

（3）角动量定理

由$\Delta m\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{F}}$，左乘$\boldsymbol{r}$，得

$$\Delta(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{F}} \tag{8.73}$$

即质点对某一中心的角动量的增量，等于打击冲量对同一中心的矩。

（4）恢复系数

质点m，具有速度v，在运动中遇到一固定面，因约束的瞬时加放受到打击而改变速度。

设v'为打击后的速度，$\hat{R}$为打击冲量，则

$$m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{R}}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_t,\quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'_n + \boldsymbol{v}'_t$$

如约束是理想的，反作用打击冲量沿法向，切向速度不变，即

$$\boldsymbol{v}'_t = \boldsymbol{v}_t$$

故

$$m\boldsymbol{v}'_n - m\boldsymbol{v}_n = \hat{\boldsymbol{R}}$$

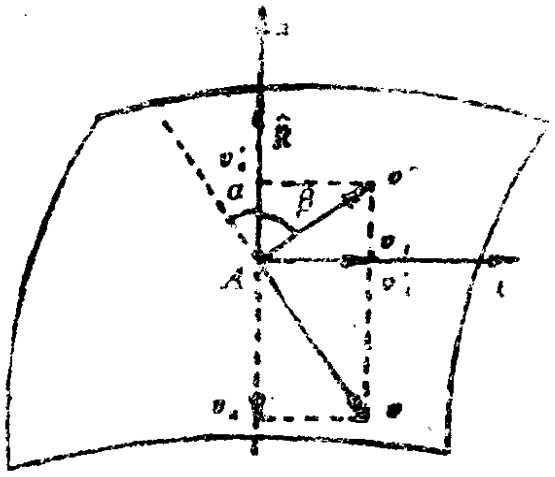


图 8.55

当 $v'_n = -ev_n$时，为非完全弹性碰撞，$0 < e < 1$；

当 $v'_n = 0$时，为完全非弹性碰撞，$e = 0$；

当 $v'_n = -v_n$时，为完全弹性碰撞，$e = 1$。

统一表为

$$v'_n = -ev_n \tag{8.74}$$

e 称为恢复系数，它表征碰撞物体的弹性、范性。

（5）质点碰撞时的动能定理（卡诺定理）

瞬时地加上约束时，质点损耗的动能等于损耗速度的动能；瞬时地去掉约束时，质点获得的动能等于所获得的速度的动能。

加上约束时，有

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}m(v - v')^2 \tag{8.75}$$

2．质点系的打击理论

（1）基本方程

$$M\Delta v_C = \sum_{i=1}^{n} \hat{F}_i^{(e)} \tag{8.76}$$

即质点系在打击时间内获得的动量等于所有施于质点系的外打击冲量之和。

（2）角动量定理

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \hat{N}_i^{(e)} \left(= \sum_{i=1}^{n} r_i \times \hat{F}_i^{(e)} \right) \tag{8.77}$$

即质点系对某一中心的角动量在打击时间内的变化，等于所有外打击冲量对同一中心的矩之和。

（3）动能定理（卡诺定理）

瞬时加放理想约束，有

$$T - T' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i(v_i - v'_i)^2 \tag{8.78}$$

瞬时去掉理想约束，有

$$T' - T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (v'_i - v_i)^2 \tag{8.79}$$

3. 刚体的打击理论

（1）对于有一定点的刚体

由（8.77）式有

$$\left.\begin{aligned} I_1(\omega_1 - \omega_{10}) &= \hat{N}_1 \\ I_2(\omega_2 - \omega_{20}) &= \hat{N}_2 \\ I_3(\omega_3 - \omega_{30}) &= \hat{N}_3 \end{aligned}\right\} \tag{8.80}$$

ω_i和ω_{i0}（$i = 1, 2, 3$）是打击后与打击前瞬时角速度的投影，$\hat{N}_1$、$\hat{N}_2$，$\hat{N}_3$是主动力打击冲量的主矩在坐标轴上的投影.

（2）对于有一固定轴的刚体

（i）角动量定理

$$I_3(\omega - \omega_0) = \hat{N}_3 \tag{8.81}$$

I_3是刚体对x_3轴的转动惯量，$\hat{N}_3$是主动力打击冲量对x_3轴的矩.

（ii）打击不传到轴上的条件（见例题8.29）

（a）转动轴应是刚体对于该轴上一点的惯量主轴.

（b）打击冲量应在过O点垂直于转轴的平面内.

（c）打击冲量应垂直于过质心和转动轴的平面.

（d）打击冲量作用线和这一平面的交点P，应该和质心C在转动轴的同一侧，到转轴的距离为

$$x_2 = \frac{I_3}{M x_{2C}} \tag{8.82}$$

P点称为对x_3轴的打击中心（图8.56）.

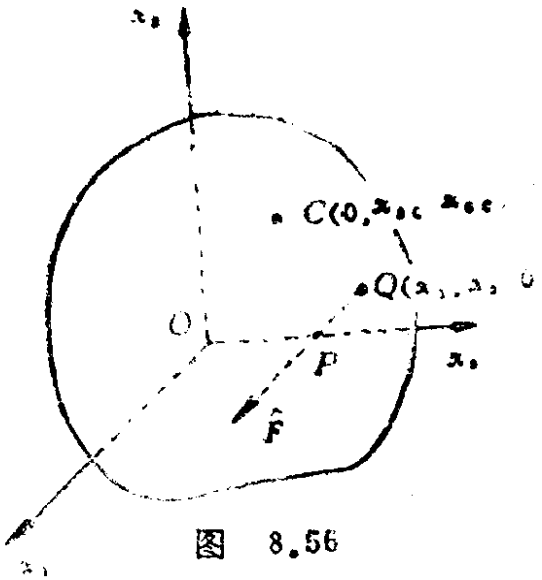


图 8.56

4. 打击问题的拉格朗日方程

由第二类拉氏方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma \qquad (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

即

$$\dot{p}_\sigma-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma$$

对 t 积分

$$\int_{t_1}^{t}\left[\dot{p}_\sigma-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right]dt=\int_0^t Q_\sigma dt$$

因 $\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$ 在打击时间内为有限力，故

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}dt=0$$

所以

$$\Delta p_\sigma=\hat{Q}_\sigma \tag{8.83}$$

其中 $\hat{Q}_\sigma=\int_0^\tau Q_\sigma dt$ $(\sigma=1,\cdots,f)$ 称为广义冲量。此式表明：

广义动量的增量等于与相应的广义坐标相联系的广义打击冲量。

类似于

$$\delta W = \sum_{\sigma} Q_{\sigma}\delta q_{\sigma} \qquad (\sigma = 1,\ 2,\ \cdots,\ f)$$

有冲击虚功

$$\delta \hat{W} = \sum_{\sigma} \hat{Q}_{\sigma}\delta q_{\sigma} \qquad (\sigma = 1,\ 2,\ \cdots,\ f) \qquad (8.84)$$

δq_{σ} 是打击运动的任意虚位移。

例　　题

8.29　试讨论对定轴转动的刚体打击不传到轴上的条件。

〔解〕　设刚体可绕定轴转动，现将此轴取为和刚体固结在一起的直角坐标系O-$x_1x_2x_3$的x_3轴（原点和另两轴暂任取）。

只要打击冲量$\hat{\boldsymbol{F}}$作用到刚体上，一般说，就要引起轴的两个支点（例如轴承）对刚体的约束反作用打击冲量。因为定轴转动可以看作有两个固定点A和B的刚体的运动，对轴的反作用打击冲量可以化为对轴上两点A和B的打击冲量$\hat{\boldsymbol{A}}$和$\hat{\boldsymbol{B}}$。以$\hat{A}_1$，$\hat{A}_2$，$\hat{A}_3$，$\hat{B}_1$，$\hat{B}_2$，$\hat{B}_3$表示反作用打击冲量$\hat{\boldsymbol{A}}$和$\hat{\boldsymbol{B}}$的投影。

由打击问题的基本方程式和角动量定理

$$\Delta \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{F}}_i^{(e)}$$

$$\Delta \boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{N}}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \hat{\boldsymbol{F}}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{F}}_i^{(e)})$$

假定打击后刚体绕x_3轴得到非无限小的角速度增量，则

$$\Delta \boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{F}} + \hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$$

$$\Delta \boldsymbol{L} = \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{F}}) + \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{A}}) + \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{B}})$$

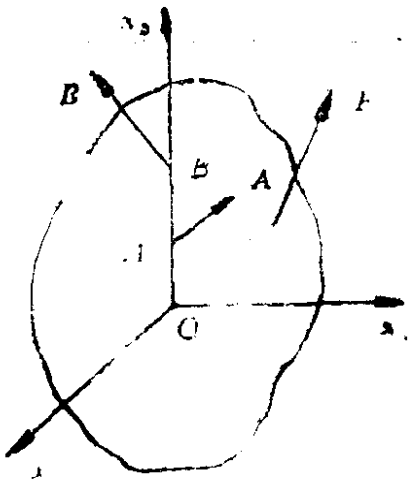


图 8.57

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta \sum m\boldsymbol{v} = \Delta \sum (m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$= \Delta(\boldsymbol{\omega} \times \sum m\boldsymbol{r})$$

$$= \Delta\boldsymbol{\omega} \times \sum m\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta\left(\sum m\boldsymbol{r}\right)$$

由于 $\Delta \sum m\boldsymbol{r} = \Delta m\boldsymbol{r}_C$ 是小量，所以

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta\boldsymbol{\omega} \times M\boldsymbol{r}_C$$

$$= -Mx_2\Delta\omega\boldsymbol{e}_1 + Mx_1\Delta\omega\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta\boldsymbol{L} = \mathrm{I} \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \\ \Delta L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{13}\ \Delta\omega \\ I_{23}\ \Delta\omega \\ I_{33}\ \Delta\omega \end{vmatrix}$$

写出投影式

$$\Delta p_1 = -\ \Delta\omega M x_2 = \hat{F}_1 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1$$

$$\Delta p_2 = \Delta\omega M x_1 = \hat{F}_2 + \hat{A}_2 + \hat{B}_2$$

$$\Delta p_3 = 0 = \hat{F}_3 + \hat{A}_3 + \hat{B}_3$$

$$\Delta L_1 = I_{13}\Delta\omega = \mathscr{M}_1(\hat{\boldsymbol{F}}) + \mathscr{M}_1(\hat{\boldsymbol{A}}) + \mathscr{M}_1(\hat{\boldsymbol{B}})$$

$$\Delta L_2 = I_{23}\Delta\omega = \mathscr{M}_2(\hat{\boldsymbol{F}}) + \mathscr{M}_2(\hat{\boldsymbol{A}}) + \mathscr{M}_2(\hat{\boldsymbol{B}})$$

$$\Delta L_3 = I_{33}\Delta\omega = \mathscr{M}_3(\hat{\boldsymbol{F}})$$

为使打击不传到轴上，必须使

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_3 = 0$$

方程组变为

$$-\Delta\omega M x_2 = \hat{F}_1 \qquad (1)$$

$$\Delta\omega M x_1 = \hat{F}_2 \qquad (2)$$

$$0 = \hat{F}_3 \qquad (3)$$

$$\Delta\omega I_{13} = \mathscr{M}_1(\hat{\boldsymbol{F}}) \qquad (4)$$

$$\Delta\omega I_{23} = \mathscr{M}_2(\hat{\boldsymbol{F}}) \qquad (5)$$

$$\Delta\omega I_{33} = \mathscr{M}_3(\hat{\boldsymbol{F}}) \qquad (6)$$

由（3）式知$\hat{\boldsymbol{F}}$必和Ox_3垂直。

重新选择坐标原点及x_1，x_2轴。方法是：

令x_3轴不动，使x_1x_2平面通过$\hat{\boldsymbol{F}}$，因$\boldsymbol{F}\perp Ox_3$，这是可以做到的。这时x_3轴与通过$\hat{\boldsymbol{F}}$的平面的交点O便是坐标原点。再令x_1轴平行于$\hat{\boldsymbol{F}}$，则有$\boldsymbol{F}_2=0$。以a表示$\hat{\boldsymbol{F}}$作用线与x_2轴的交点P到O的距离。这样，6个方程简化为

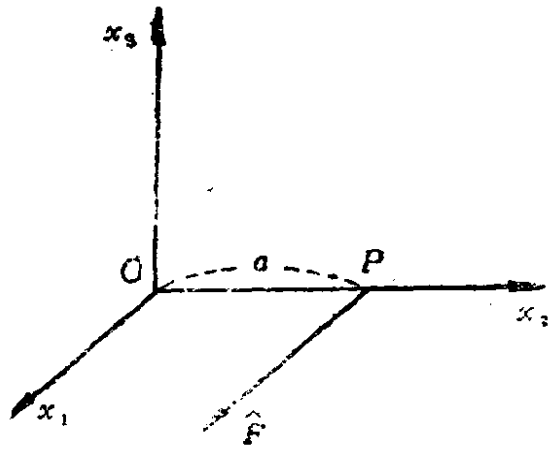


图 8.58

$$-\Delta\omega M x_2 = \hat{F}_1 \quad (1)'$$

（负号表示$\hat{F}_1$为正时顺时针转）

$$\Delta\omega M x_1 = 0 \quad (2)'$$

（表明质心在x_2x_3平面内）

$$0 = F_3 \quad (3)' \quad （表明\hat{F}与x_3轴垂直）$$

$$\Delta\omega I_{13} = 0 \quad (4)'$$

$$\Delta\omega I_{23} = 0 \quad (5)' \quad （表明x_3轴应是O点的主轴）$$

$$\Delta\omega I_{33} = -a\hat{F}_1 \quad (6)' \quad （与\ (1)'\ 联立给出打击冲量作用线到转轴的距离）。$$

结论：为使作用到刚体上的打击冲量不传到轴上，必须

（1）转动轴应是刚体对于该轴上一点O的惯量主轴。

（2）主动力的打击冲量应该在垂直于转动轴并通过主点O的平面内（即图8.57的x_1x_2平面内）。

（3）打击冲量应垂直于通过质心和转动轴的平面（O-x_1x_2平面）。

（4）打击冲量作用线和上述平面的交点P应和质心在转动轴的同一侧，位置在距转轴为

$$a=\frac{I_{3s}}{Mx_2}$$

处，这样决定的 P 点，称为对 x_3 轴的打击中心.

8.30 一杆质量 M，长 $2l$，静置于光滑水平面上，在某点 D 沿垂直于杆的方向给杆一打击，冲量为 $\hat{F}$，$\hat{F}$ 平行于水平面. 求

（1）杆的瞬时转动中心；

（2）杆两端的速度；

（3）杆获得的动能.

〔解〕 （1） $Mv=\hat{F}$

$$I_0\omega=a\hat{F}$$

（式中 v 是打击后质心的速度，ω 是打击后杆的角动量，$I_0=\frac{1}{3}Ml^2$）

$$v=\frac{\hat{F}}{M},\qquad \omega=\frac{3a\hat{F}}{Ml^2}$$

设 O 为瞬时转动中心，则

$$v-b\omega=0$$

$$v-b\cdot\frac{3a\hat{F}}{Ml^2}=0,\quad a=\frac{l^2}{3b}$$

相应地，D 点即为关于 O 的打击中心.

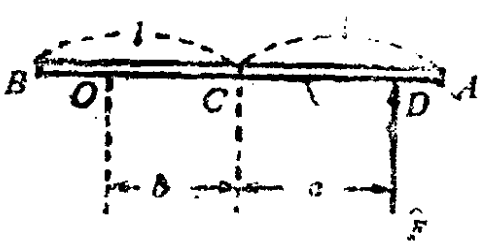


图 8.59

（2） A 端的速度为 $(l+b)\omega$，

B 端的速度为 $-(l-b)\omega=(b-l)\omega$

$$v_A=(b+l)\omega$$

$$=\left(\frac{l^2}{3a}+l\right)\cdot\frac{3a\hat{F}}{Ml^2}$$

$$=\left(1+\frac{3a}{l}\right)\frac{\hat{F}}{M}$$

$$v_B=(b-l)\omega=\left(\frac{l^2}{3a}-l\right)\cdot\frac{3a\hat{F}}{Ml^2}=\left(1-\frac{3a}{l}\right)\frac{\hat{F}}{M}$$

（3）动能

$$T=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}M\left(\frac{\hat{F}}{M}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\cdot\left(\frac{3a\hat{F}}{Ml^2}\right)^2$$

$$=\frac{l^2+3a^2}{2l^2}\frac{\hat{F}^2}{M}$$

8.31 一均质杆可在光滑水平面上绕过一端点O的铅直轴自由转动（见图8.59，将O点移到B点），起初杆静止，如沿平面垂直杆的方向给一冲击，冲量$\hat{F}$，作用点为D，求作用在轴O上的反作用冲量。

〔解〕 $\hat{F}(l+a)=I_0\omega$ （1）

$$I_0=\frac{1}{3}ml^2+ml^2=\frac{4}{3}ml^2$$

$v_C=l\omega$ （2）

$$\omega=\frac{3\hat{F}(l+a)}{4ml^2},\qquad v_C=\frac{3\hat{F}(l+a)}{4ml}$$

v_C并不等于$\frac{\hat{F}}{m}$，因为在冲量$\hat{F}$作用的同时，轴对杆也有一反作用冲击作用于O点，称此冲量为$\hat{\boldsymbol{F}}_0$。作用在杆上的总冲量应为$\hat{\boldsymbol{F}}+\hat{\boldsymbol{F}}_0$。

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{\hat{\boldsymbol{F}}+\hat{\boldsymbol{F}}_0}{m}$$

$$v_C=\frac{\hat{F}+\hat{F}_0}{m}$$

$$\frac{3(l+a)\hat{F}}{4ml}=\frac{\hat{F}+\hat{F}_0}{m}\qquad\left(\hat{F}_0=\hat{F}\,\frac{3a-l}{4l}\right)$$

此即轴对杆的反作用冲量的大小。由此式知，如原来冲量的作用点选得适当，可能使反作用冲量为零，即打击不传到轴上。此原来冲量的作用点，即为打击中心。在这里，关于O的打击中心为$a=\frac{l}{3}$。

8.32 两等长、等质量的均质杆，各以一端相互铰接，静置于光滑水平面上。在其中一杆的另一端，沿平面并垂直于杆的方向施一打击，冲量为$\hat{p}$，求体系的运动。

〔解〕 设两杆质量均为m，长均为$2a$，质心各为A，B，质心速度为(u_A, v_A)、(u_B, v_B)，角速度各为ω_A，ω_B，约束冲量为$\hat{p}'$，则

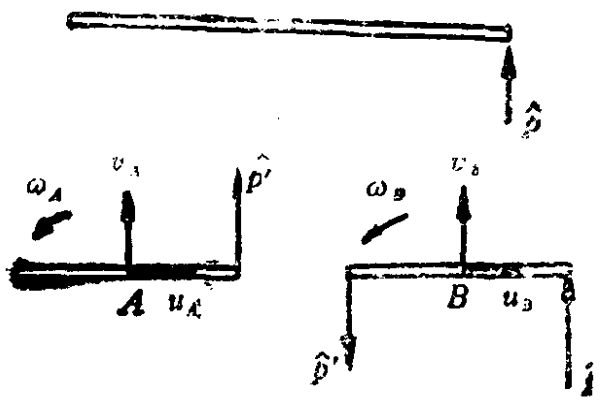


图 8.60

$$mu_A=0 \qquad (1)$$

$$mv_A=\hat{p}' \qquad (2)$$

$$I_C\omega_A=a\hat{p}' \qquad (3)$$

$$mu_B=0 \qquad (4)$$

$$mv_B=(\hat{p}-\hat{p}') \qquad (5)$$

$$I_C\omega_B=a(\hat{p}+\hat{p}') \qquad (6)$$

$$v_A+a\omega_A=v_B-a\omega_B \qquad (7)$$

这里共7个方程、7个未知量：

$\hat{p}'$，u_A，u_B，v_A，v_B，ω_A，ω_B

由（5）、（2）得

$$mv_B-mv_A=\hat{p}-2\hat{p}' \qquad (8)$$

将（3）、（6）代入（7）得

$$m(v_B-v_A)=a(\omega_B+\omega_A)m$$

$$=ma\left(\frac{a(\hat{p}+\hat{p}')}{I_C}+\frac{a\hat{p}'}{I_C}\right)=\frac{ma^2}{\frac{1}{3}ma^2}(\hat{p}+2\hat{p}')$$

$$=3(\hat{p}+2\hat{p}') \qquad (9)$$

由（8）、（9）得

$$\hat{p}-2\hat{p}'=3\hat{p}+6\hat{p}'$$

$$\hat{p}'=-\frac{1}{4}\hat{p}$$

由此得

$$v_A=\frac{\hat{p}'}{m}=-\frac{\hat{p}}{4m}$$

$$v_B=\frac{1}{m}(\hat{p}-\hat{p}')=\frac{1}{m}(\hat{p}+\frac{1}{4}\hat{p})=\frac{5\hat{p}}{m}$$

$$\omega_A=\frac{a\hat{p}'}{I_C}=\frac{-a}{4I_C}\hat{p}=-\frac{3\hat{p}}{4ma}$$

$$\omega_B=\frac{a(\hat{p}+\hat{p}')}{I_C}=\frac{a\left(\hat{p}-\frac{1}{4}\hat{p}\right)}{\frac{1}{3}ma^2}=\frac{9\hat{p}}{4ma}$$

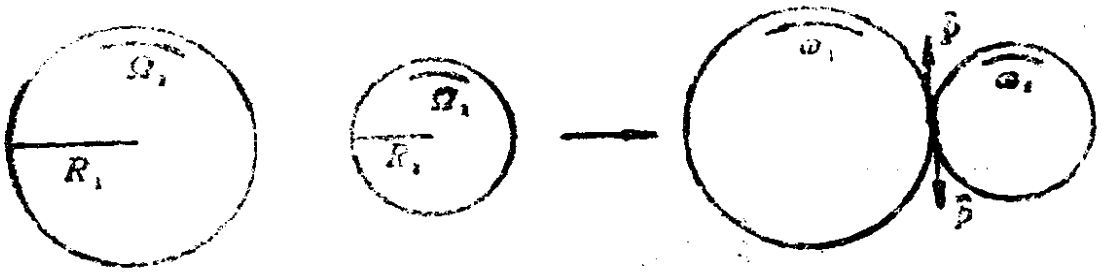
8.33　两个均匀圆柱各自独立地绕它们自身的轴转动，两轴互相平行。一个圆柱的半径为 R_1，质量为 M_1，另一个半径为 R_2，质量 M_2。起初，它们分别以角速度 Ω_1 和 Ω_2 沿同一方向转动，然后移动它们，使之互相接触。它们达到稳定状态后，问每个圆柱的最终角速度是什么？

〔解〕　设 ω_1，ω_2 是两个圆柱体的最终角速度。达到稳定状态时应有

$$\omega_1 R_1=-\omega_2 R_2$$

设 $\hat{N}_1$ 是圆柱 1 受到圆柱 2 作用的冲量矩，$\hat{N}_2$ 是圆柱 2 受到的圆柱 1 作用的冲量矩，则

$$\frac{\hat{N}_1}{R_1}=\frac{\hat{N}_2}{R_2}=\hat{p}$$



(a) 图 8.61 (b)

$\hat{p}$是相互作用的冲量。

$$\hat{N}_1 = I_1(\omega_1 - \Omega_1)$$

$$\hat{N}_2 = I_2(\omega_2 - \Omega_2) = I_2\left(\frac{-\omega_1 R_1}{R_2} - \Omega_2\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2$$

$$\frac{I_1}{R_1}(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{I_2}{R_2}\left(-\omega_1\frac{R_1}{R_2} - \Omega_2\right)$$

$$M_1R_1(\omega_1 - \Omega_1) = M_2R_2\left(-\omega_1\frac{R_1}{R_2} - \Omega_2\right)$$

$$\omega_1 = \frac{M_1R_1\Omega_1 - M_2R_2\Omega_2}{R_1(M_1 + M_2)}$$

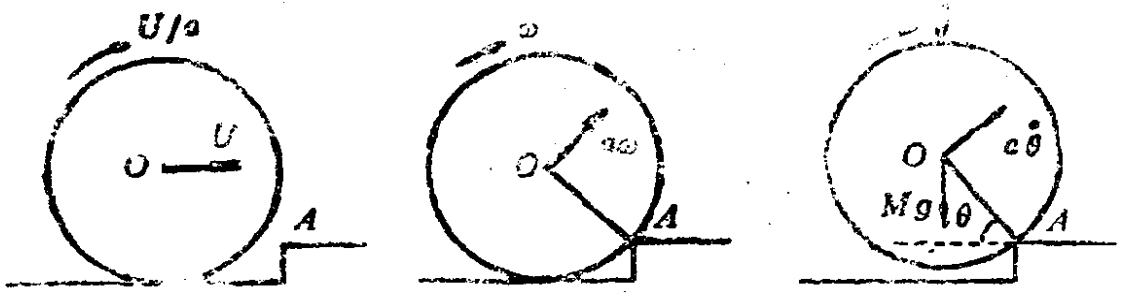
$$\omega_2 = -\frac{M_1R_1\Omega_1 - M_2R_2\Omega_2}{R_2(M_1 + M_2)}$$

8.34 一完全粗糙圆环，半径为a，质量为M，在水平地板上以速度U滚向一非弹性台阶。台阶高 $h\left(<\frac{1}{2}a\right)$，环面铅直，且垂直于台阶的棱。证明：

（1）如果 $4a^2hg < U^2(2a-h)^2 < 4a^2(a-h)g$，环能在任何阶段不失与台阶的接触而登上台阶。

（2）如环在垂直于台阶边的铅直平面内以速度v在台阶上向台阶边运动，它能滚下台阶而不失接触的条件是$v^2 < (a - h/2)g$。

〔解〕（1）环与台阶碰撞前、碰撞中及碰撞后的情形分别如图8.62（a），（b），（c）所示.



（a）　（b）　（c）

图　8.62

在碰前到碰撞结束这一阶段，对A点的角动量守恒（因为对A点取矩，反作用冲击力矩为零）.

从碰撞结束到圆环上升到AO与水平成θ角的位置，在这一过程中存在重力矩，对A点角动量不守恒. 然而由于圆环粗糙，上升过程中并无滑动，因而能量守恒.

根据上面的分析，写出第一阶段角动量守恒及第二阶段能量守恒式：

对A点的角动量

$$MU(a-h)+Ma^2(U/a)=Ma^2\omega+Ma^2\omega \qquad (1)$$

ω是碰撞结束开始上台阶时的角速度. 取A为重力势能零点，则由能量守恒有

$$\frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta})^2+Mga\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}M(a\omega)^2+\frac{1}{2}Ma^2\omega^2+Mga\left(1-\frac{h}{a}\right)$$

整理得

$$a(\dot{\theta})^2+g\sin\theta=\frac{U^2}{a}(1-h/2a)^2+g\left(1-\frac{h}{a}\right) \qquad (2)$$

当$\theta=\pi/2$时，（2）式变为

$$a(\dot{\theta})^2=\left(\frac{U^2}{a}\right)(1-h/2a)^2-\frac{gh}{a}$$

注意到U，h，a的组合必须使 $a(\dot{\theta})^2>0$，即

$$\left(\frac{U^2}{a}\right)(1-h/2a)^2-gh/a>0$$

$$U^2(2a-h)^2>4gha^2 \qquad (3)$$

建立图8.62（c）中的关于A的法向方程

$$Mg\sin\theta-R=Ma(\dot{\theta})^2 \qquad (4)$$

由（2）、（4）得

$$R=Mg\sin\theta-Ma(\dot{\theta})^2$$

$$=2Mg\sin\theta-\left(\frac{MU^2}{a}\right)\left(1-\frac{h}{2a}\right)^2-Mg(1-h/a)$$

不脱离接触的条件，可表为R的最小值大于零，即 $R_{min}>0$，但知 $\sin\theta_{min}=1-h/a$，所以

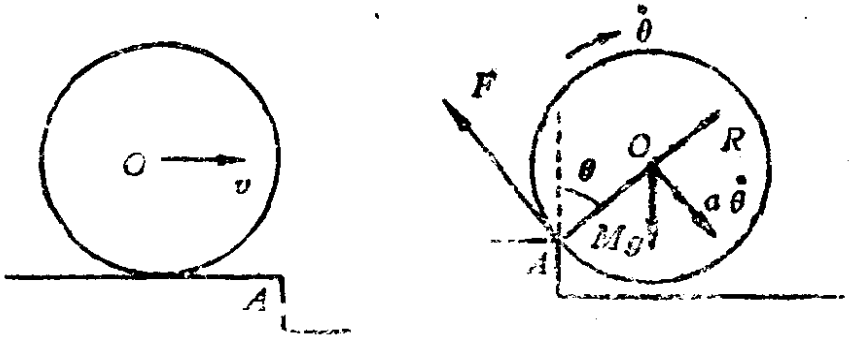
$$R_{min}=Mg(1-h/a)-\left(\frac{MU^2}{a}\right)(1-h/a)^2>0$$

$$U^2(2a-h)^2<4a^2g(a-h)$$

所以，如

$$4a^2gh<U^2(2a-h)^2<4a^2g(a-h)$$

则环能不失接触地滚上台阶。



(a) (b)

图 8.63

（2）由能量守恒

$$\frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}Ma^2(\dot{\theta})^2+Mga\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}Mv^2+Mga+\frac{1}{2}Ma^2\left(\frac{v}{a}\right)^2$$

$$a(\dot{\theta})^2+g\cos\theta=\frac{v^2}{a}+g \qquad (5)$$

法向方程

$$Mg\cos\theta-R=Ma(\dot{\theta})^2 \qquad (6)$$

由（5）、（6）得

$$R=Mg\cos\theta+Mg\cos\theta-\frac{MU^2}{a}-Mg$$

$$=M\left(2g\cos\theta-\frac{v^2}{a}-g\right)$$

当θ最大时，R最小，即

$$(\cos\theta)_{min}=1-h/a$$

$$R_{min}=M[g(1-2h/a)-v^2/a]$$

如$R_{min}>0$，则$R\neq 0$，即不失接触。所以环滚下台阶不失接触的条件是

$$g(1-2h/a)-v^2/a>0$$

亦即

$$v^2<g(a-2h)$$

（题给条件$h<\frac{1}{2}a$保证了这一条件可能成立。）

8.35 一根棒放置在两根固定、水平、平行的粗糙的细棒上，其一端抬起后任其落下。假设棒无弹性，在垂直于两细棒的铅垂平面内运动，求棒作往复运动的条件及摆动时质心升起的高度。

〔解〕 设棒的右边抬起后任其落下，碰撞前角速度ω，碰

撞后角速度ω'，棒对质心回转半径为k。

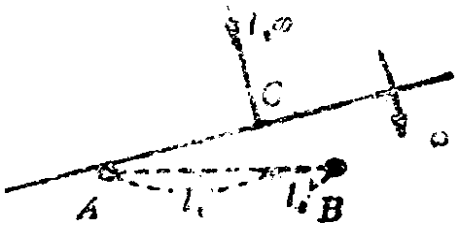
碰撞前后，略去常规力(重力)矩，对B点冲量矩$\hat{\boldsymbol{N}}_B=0$，故

$$\Delta \boldsymbol{L}=0$$

即

$$m(k^2+l_2^2)\omega'=mk^2\omega+ml_1\omega l_2$$

$$\omega'=\frac{k^2-l_1l_2}{k^2+l_2^2}\omega$$



棒若摆动，必须$\omega'>0$。

(1) 如$k^2=l_1l_2$，$\omega'=0$，不能摆动。$v'_A=0$（A'表示杆上与细棒A接触的点），A'是瞬时中心，B'是打击中心。

(2) 如$k^2<l_1l_2$，$\omega'<0$，表示两根细棒上各有一冲击作用。

(3) 如$k^2>l_1l_2$，棒摆动。设初始时，质心升高h_0，由能量守恒得

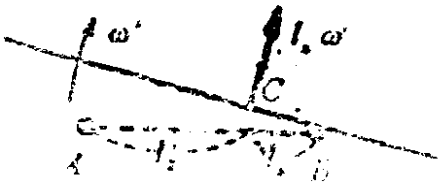


图 8.64

$$\frac{1}{2}(k^2+l_1^2)\omega^2=gh_0$$

设碰后质心升高h，则

$$\frac{1}{2}(k^2+l_2^2)(\omega')^2=gh$$

所以

$$\frac{h}{h_0}=\frac{(k^2+l_2^2)(k^2-l_1l_2)^2}{(k^2+l_1^2)(k^2+l_2^2)^2}=\frac{(k^2-l_1l_2)^2}{(k^2+l_1^2)(k^2+l_2^2)}$$

8.36 在一粗糙水平面上，放一质量为M、半径为a的均质球。在通过球心的铅垂面内，给球一水平冲击，冲量为$\hat{I}$，求球的运动（球与平面间滑动摩擦系数为μ）。

〔解〕

$$Mv_0 = \hat{I} \tag{1}$$

$$\frac{2}{5}Ma^2 \cdot \omega_0 = \hat{I}h \tag{2}$$

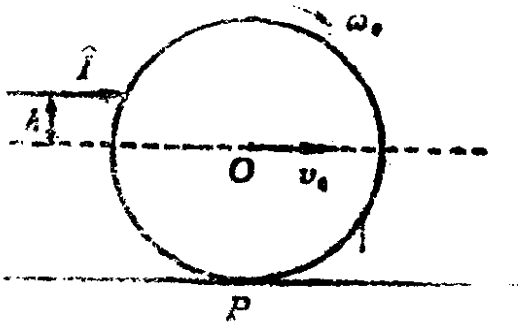


图 8.65

由此得

$$v_0 = \frac{\hat{I}}{M}$$

$$\omega_0 = \frac{5\hat{I}h}{2Ma^2}$$

如果 $v_0 = a\omega_0$ 则开始就作纯滚动，这要求

$$\frac{\hat{I}}{M} = \frac{5\hat{I}h}{2Ma}, \quad 5h = 2a, \quad h = \frac{2a}{5}$$

如果 $h > \frac{2}{5}a$，则$\omega_0 a > v_0$，$v - a\omega_0 < 0$，v_P向左，滑动摩擦力 f 向右．运动微分方程式为

$$M\dot{v} = \mu Mg \tag{3}$$

$$\frac{2}{5}Ma^2 \cdot \dot{\omega} = -\mu Mga \tag{4}$$

即

$$\dot{v} = \mu g$$

$$a\dot{\omega} = -\frac{5}{2}\mu g$$

积分得质心速度

$$v = v_0 + \mu gt$$

角速度

$$\omega = \omega_0 - \frac{5}{2a}\mu gt$$

接触点的速度

$$v_P = v - a\omega = v_0 + \mu g t - a\omega_0 + \frac{5}{2}\mu g t$$

$$= v_0 - a\omega_0 + \frac{7}{2}\mu g t$$

发生纯滚动时，$v_P = 0$，即

$$v_0 - a\omega_0 + \frac{7}{2}\mu g t = 0$$

$$t_1 = \frac{a\omega_0 - v_0}{\frac{7}{2}\mu g} = \frac{(5h-2a)\hat{I}}{7\mu g a M}$$

开始纯滚动时的质心速度

$$v_1 = \mu g t_1 + v_0$$

$$= \frac{(5h-2a)\hat{I}}{7aM} + \frac{\hat{I}}{M} = \frac{5(h+a)\hat{I}}{2aM}$$

如果 $0 < h < \frac{2}{5}a$，则

$v_0 - a\omega_0 > 0$，v_P向右，f向左

发生纯滚动的时刻为

$$t_2 = \frac{(2a-5h)\hat{I}}{2a\mu M g}$$

此时质心速度 $v_2 = \frac{5(a+h)\hat{I}}{7aM}$.

当 $h < 0$ 时，v_P向右，ω_0逆时针，f向左。球一边前进，一边向后旋转。可证，经时间 $t = \frac{(2a+5|h|)\hat{I}}{7a\mu M g}$，球将停止前进，然后反向运动。

8.37 AB，BC，CD是三根相同的杆，自由地铰接形成正

方形的三个边，它们被放在一光滑的水平桌面上，并过A端在桌上装有枢轴。如果在D端给一沿AD方向的冲击，冲量为$\hat{F}$，证明这些杆的初角速度之比为1：0：11。

〔解〕 三杆质心的坐标为

AB 质心：$(a\cos\theta, a\sin\theta)$

BC 质心：$(2a\cos\theta + a\cos\varphi, 2a\sin\theta + a\sin\varphi)$

CD 质心：$(2a\cos\theta + 2a\cos\varphi - a\cos\psi, 2a\sin\theta + 2a\sin\varphi - a\sin\psi)$

$$T = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m[(-2a\sin\theta\cdot\dot{\theta} - a\sin\varphi\cdot\dot{\varphi})^2 + (2a\cos\theta\cdot\dot{\theta} + a\cos\varphi\cdot\dot{\varphi})^2]$$

$$+ \frac{1}{2}m[(-2a\sin\theta\cdot\dot{\theta} - 2a\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + a\sin\psi\cdot\dot{\psi})^2 + (2a\cos\theta\cdot\dot{\theta} + 2a\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - a\cos\psi\cdot\dot{\psi})^2]$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2[(\dot{\theta})^2 + (\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2]$$

$$= \frac{2}{3}ma^2[7(\dot{\theta})^2 + 4(\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2 + 9\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - 3\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\psi-\theta) - 3\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)]$$

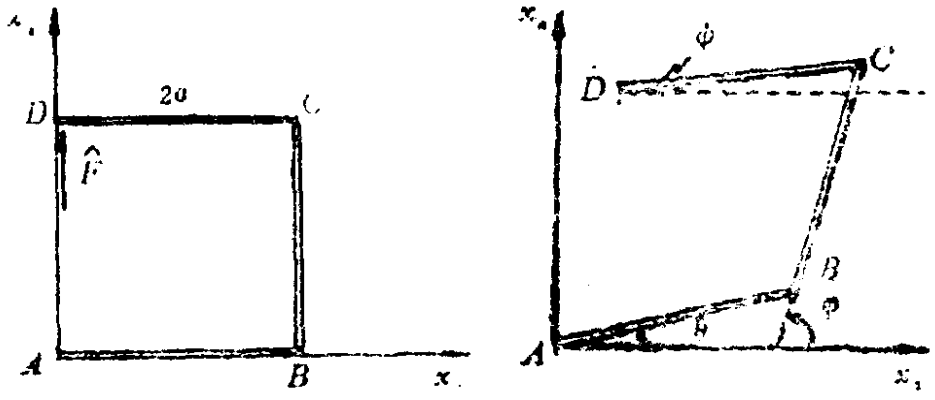


图 8.6

冲击虚功

$$\delta\hat{W}=\sum_{\sigma}\hat{\theta}_{\sigma}\delta q_{\sigma}$$

本题中

$$\delta\hat{W}=\hat{F}\delta x_{2D}$$

$$x_{2D}=2a(\sin\theta+\sin\varphi-\sin\psi)$$

$$\delta x_{2D}=2a(\cos\theta\delta\theta+\cos\varphi\delta\varphi-\cos\psi\delta\psi)$$

$$\delta W=2a\hat{F}\cos\theta\delta\theta+2a\hat{F}\cos\varphi\delta\varphi-2a\hat{F}\cos\psi\delta\psi$$

$$=\hat{\theta}_{\theta}\delta\theta+\hat{\theta}_{\varphi}\delta\varphi+\hat{\theta}_{\psi}\delta\psi$$

所以

$$\hat{Q}_{\theta}=2a\hat{F}\cos\theta$$

$$\hat{Q}_{\varphi}=2a\hat{F}\cos\varphi$$

$$\hat{Q}_{\psi}=-2a\hat{F}\cos\psi$$

初始时$\theta=0$，$\varphi=\pi/2$，$\psi=0$，所以

$$\hat{Q}_{\theta}=2a\hat{F},\quad \hat{Q}_{\varphi}=0,\quad \hat{Q}_{\psi}=-2a\hat{F}$$

根据拉氏力学中打击问题基本方程式

$$\Delta p_{\sigma}=\hat{Q}_{\sigma}$$

及广义动量定义，得

$$p_{\theta}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\frac{2}{3}ma^2[14\dot{\theta}+9\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-3\dot{\psi}\cos(\psi-\theta)]$$

$$p_{\varphi}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{2}{3}ma^2[8\dot{\varphi}+9\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-3\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)]$$

$$p_{\psi}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=\frac{2}{3}ma^2[2\dot{\psi}-3\dot{\theta}\cos(\psi-\theta)-3\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)]$$

打击后

$$p_{\theta}=\frac{2}{3}ma^2(14\dot{\theta}-3\dot{\psi})$$

$$p_\theta = \frac{2}{3} ma^2(8\dot{\varphi})$$

$$p_\psi = \frac{2}{3} ma^2(2\dot{\psi} - 3\dot{\theta})$$

所以

$$\frac{2}{3}ma^2(14\dot{\theta} - 3\dot{\psi}) = 2a\hat{F}$$

$$\frac{2}{3} ma^2(8\dot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{2}{3} ma^2(2\dot{\psi} - 3\dot{\theta}) = -2a\hat{F}$$

故

$$\dot{\theta} : \dot{\varphi} : \dot{\psi} = 1 : 0 : 11$$

8.38 两根均匀棒AB, BC, 质量分别为m_1, m_2, 长度为$2a$, $2b$, 光滑地铰接于 B. 初始时, 它们静置于光滑桌面上并成一直线. AB棒在A点受到一垂直于AB的打击, 冲量为 $\hat{I}$, 用打击问题的拉氏方程求刚刚碰后系统的运动.

〔解〕 取A, B, C三点的x 坐标x_A, x_B, x_C为广义坐标.

刚碰后, A, B, C垂直于棒的速度为

$$u_A = \dot{x}_A, \quad u_B = \dot{x}_B$$

$$u_C = \dot{x}_C$$

棒的反时针转动角速度为

AB: $(u_B - u_A)/2a$

BC: $(u_C - u_B)/2b$

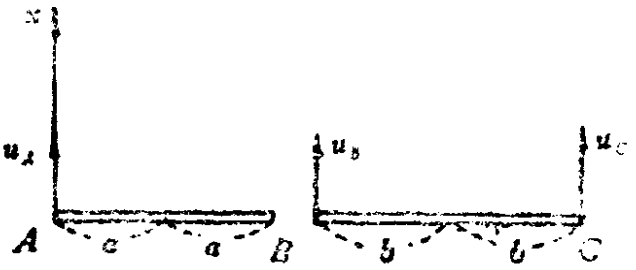


图 8.67

由于打击, 系统获得动能

$$T = \frac{1}{2}m_1\left[\frac{1}{2}(u_A + u_B)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1a^2\right)[(u_B - u_A)/2a]^2$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\left[\frac{1}{2}(u_B + u_C)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_2b^2\right)[(u_C - u_B)/2a]^2$$

$$= \frac{1}{6}m_1(u_A^2 + u_A u_B + u_B^2) + \frac{1}{6}m_2(u_B^2 + u_B u_C + u_C^2)$$

$$\delta\hat{W} = \hat{I}\delta x_A = \hat{Q}_A\delta x_A + \hat{Q}_B\delta x_B + \hat{Q}_C\delta x_C$$

由此得

$$\hat{Q}_A = \hat{I}, \quad \hat{Q}_B = 0, \quad \hat{Q}_C = 0$$

$$p_A = \frac{\partial T}{\partial u_A} = \frac{1}{6}m_1(2u_A + u_B)$$

$$p_B = \frac{\partial T}{\partial u_B} = \frac{1}{6}m_1(u_A + 2u_B) + \frac{1}{6}m_2(2u_B + u_C)$$

$$p_C = \frac{\partial T}{\partial u_C} = \frac{1}{6}m_2(u_B + 2u_C)$$

打击运动的拉氏方程为 $\Delta p_\sigma = \hat{Q}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$，故有

$$\frac{1}{6}m_1(2u_A + u_B) = \hat{I}$$

$$\frac{1}{6}m_1(u_A + 2u_B) + \frac{1}{6}m_2(2u_B + u_C) = 0$$

$$\frac{1}{6}m_2(u_B + 2u_C) = 0$$

由这组方程，可解出u_A，u_B，u_C。（下略）

习　　题

8.1　一圆盘半径为R，盘心O作匀加速运动，加速度为a，求圆盘最高点的加速度的大小和方向（运动是平面的）。

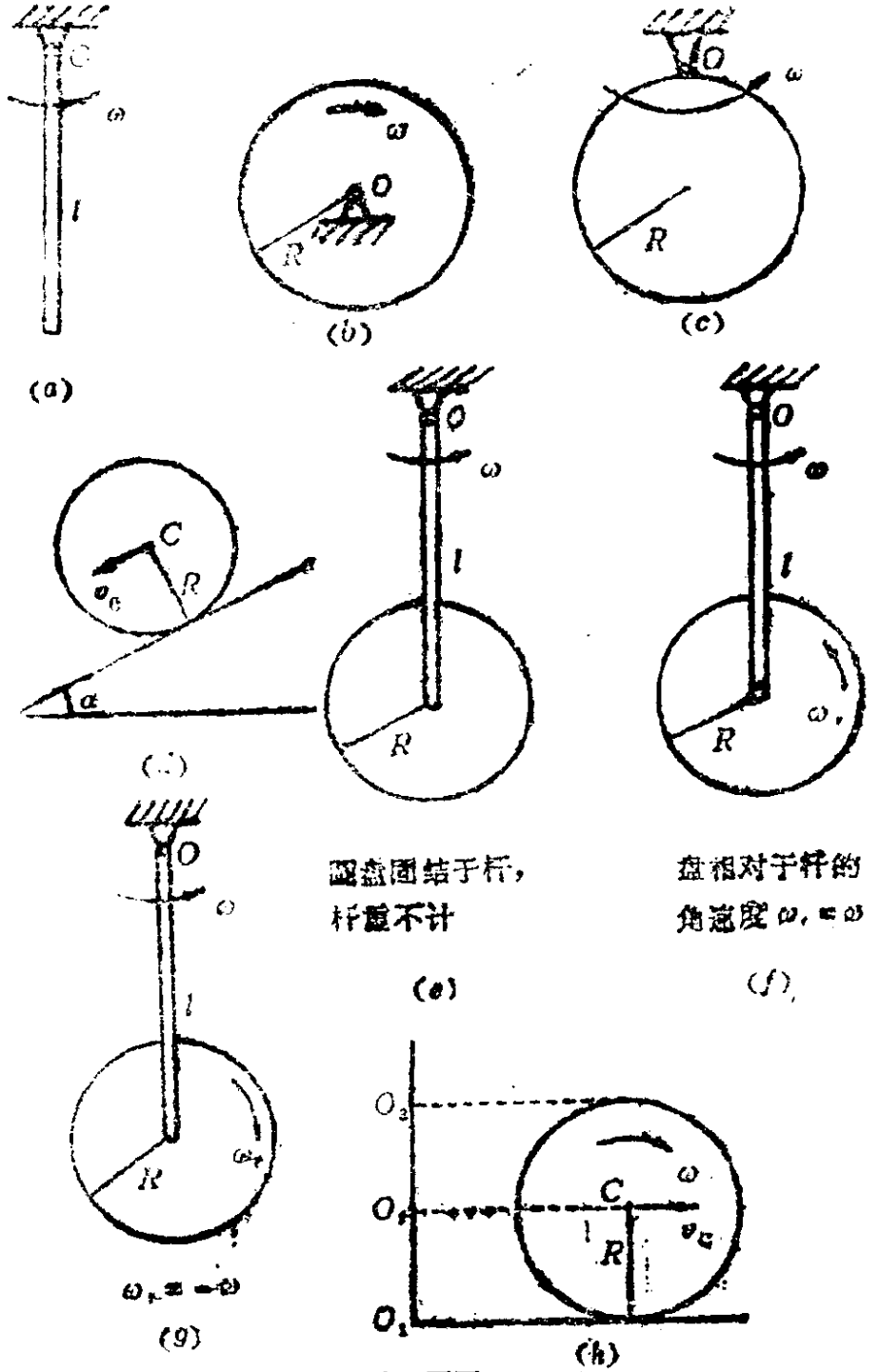
答：最高点A的加速度$\boldsymbol{a}_A = 2a\boldsymbol{e}_1 - \frac{(at)^2}{R}\boldsymbol{e}_2$。

8.2　一矩形板$ABCD$平行于自身运动，其角速度为定值ω，在某一瞬时A点的速度为v，其方向沿对角线AC，试求此瞬时B点的速度，以v，ω及矩形的边长等表示之。假定$AB = a$，$BC = b$。

答：$v_B=\left[v^2+2v\omega\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\omega^2a^2\right]^{1/2}$

v_B和BC边的夹角为$\operatorname{arc\,tg}\frac{va}{\omega a\sqrt{a^2+b^2}+vb}$。

8.3 图中各刚体及刚体系中，圆盘皆为均质，质量M，

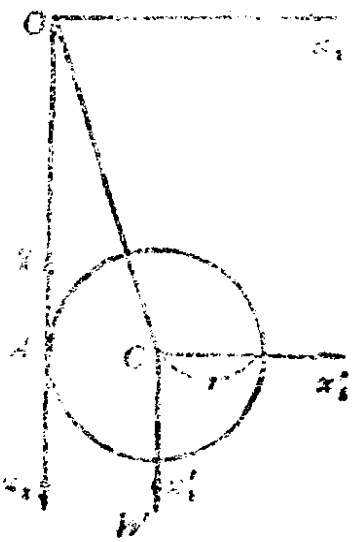


8.3 题图

(a) 中均质杆质量亦为 M，(e)、(f)、(g) 中杆的质量不计。各刚体均作平面运动。

试求：（1）各刚体的动量；（2）各刚体对垂直于运动平面的轴O的角动量（在 (h) 中求出对O_1，O_2，O_3各点的角动量）；（3）各刚体的动能。((d), (h)中圆盘作纯滚动)。

8.4 一端固定在天花板上的绳绕在一个半径为r，重W的圆盘上，求盘的中心向下运动的加速度、圆盘的角加速度和绳的张力，并写出



8.4 题图

（1）在定系O-x_1x_2中，关于原点O的角动量定理表达式，动能定理表达式。

（2）在质心系C-$x_1'x_2'$中的动能定理表达式及角动量定理表达式。

（3）机械能守恒定律表达式。

8.5 一均匀固体球，质量m，半径为a，在一水平面上运动，其质心的速率为v，关于水平直径转动的角速度为Ω，求球的动能，并求球的角动量：

（1）关于球上同平面接触的点；

（2）关于平面上同球接触的点；

（3）关于接触点，把它看作沿平面以速率v运动的点；

（4）关于球心；

（5）关于球的最高点。

答：(1) $(7ma^2\Omega/5)e_3$；(2) $[(\pm 2ma^2\Omega/5) - mva]\,e_3$，式中±号决定于$\Omega$的方向；(3) $(2ma^2\Omega/5)e_3$；(4) $(2ma^2\Omega/5)e_3$；(5) 决定于“最高点”的含意。

8.6 重为W_1的木板受水平力F的作用，在一不光滑的平

面上运动。板与平面间的摩擦系数为 μ，在板上放一重为 W_2 的实心圆柱，此圆柱在板上滚而不滑，试求木板的加速度。

答：$a=\dfrac{F-\mu(W_1-W_2)}{W_1+W_2/3}g$。

8.7 （1）长$2a$的棒的一端置于光滑水平面上，另一端则靠在光滑墙上，且棒与地面的倾角为 α。如任其自此位置开始下滑，则当棒与地面的倾角变为$\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$时，棒将与墙分离。试证明之。

（2）试研究（1）中棒与墙分离后的运动，并求棒落地时的角速度。

答：$\Omega=\left\{\dfrac{3g\sin\alpha}{2a}\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{9}\right)\right\}^{1/2}$

8.8 一均质棒长$2a$，质量为m，立于地板上。如地板完全粗糙，棒稍为倾斜而自由倾倒，如果棒关于过质心 C 而垂直于棒的轴的转动惯量为mk^2。试证：若 $k^2<a^2/3$，则棒与地面的接触点将在棒成为水平之前离开地面。

再证：如果地板非完全粗糙，且棒在与铅直方向成$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$角度时开始滑动，则摩擦系数必为18/49。

8.9 一薄圆环半径为 a，被以初速度 v 和初角速度 Ω（它使环向下运动）抛射到一与水平面成 α 角的斜面上。

如果$v>5a\Omega$，且摩擦系数为$\frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$，证明：环绝不会作纯滚动，它将在经历时间 $4(2v-a\Omega)/9g\sin\alpha$ 时停止上升，并将滑回到抛射点。

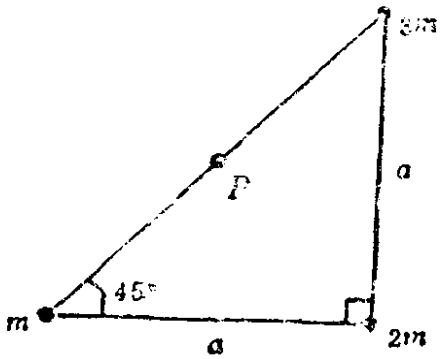
8.10 质量为m，半径为 a 的小球，置于固定的、半径为 b 的完全粗糙的大球上，小球从两球中心连线与铅直方向成θ_0角时由静止开始向下滚落，问小球何时离开大球？并求小球的

角速度。

答：$\theta = \arccos\left(\frac{10}{17}\cos\theta_0\right)$

$$\omega = \frac{1}{a}\sqrt{g(a+b)(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

8.11 三个质点固着在图中所示的三角形三个顶点上，求系统关于斜边中点P的主转动惯量及主轴方向。（三角形三边质量不计）



8.11题图

答：

$I_1 = ma^2$

$I_3 = 3ma^2$

$I_2 = 2ma^2$

8.12 三个等质量质点分别固着于$(a, 0, 0)$、$(0, a, 2a)$和$(0, 2a, a)$各点。求系统相对于原点的主转动惯量及一组主轴。

答：$I_1 = 10ma^2$（二重根），$I_2 = 2ma^2$。

8.13 通过向量处理直接证明转动惯量的定义

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

$$= \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n})$$

可以化成 $I = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{n}$ 的形式。

8.14（1）求边长为a的均质正方形板对图示坐标系的惯量张量。

（2）求关于O点的主转动惯量及主轴系三轴的方向。

答：O点主转动惯量为

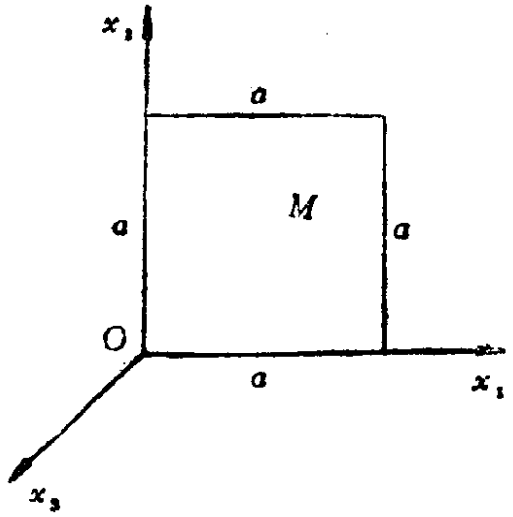
$$I_1=\frac{1}{12}Ma^2$$

$$I_2=\frac{7}{12}Ma^2$$

$$I_3=\frac{2}{3}Ma^2$$

主轴方向：e_1+e_2，

e_1-e_2，e_3。



8.14题图

8.15 一“刚体”由6个质量均为m，分别固定在三根各长为$2a$，$2b$，$2c$的轻杆两端的质点组成，这些杆在它们的中点彼此垂直相交。试证明由杆所决定的坐标系是一主轴系，写出在此坐标系中体系的惯量张量。

8.16 试求边长为l的正立方体关于下列各点的惯量椭球：（1）中心点；（2）一边中点；（3）一顶点。

答：中心点：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{6}{Ml^2}$

一边中点：$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$

$$a_1=a_3=\sqrt{\frac{3}{2Ml^2}},\quad a_2=\sqrt{\frac{6}{Ml^2}}$$

一顶点：$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$

$$a_1=\sqrt{\frac{6}{Ml^2}},\quad a_2=a_3=\sqrt{\frac{12}{11Ml^2}}$$

8.17 试求边长为$2a$，$2b$的长方形均匀板中心点的惯量椭球。

答：$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$

$$a_1=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{3}{m}},\quad a_2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{m}},\quad a_3=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{3}{m}}$$

8.18 构成质点系的三个质点，其一质量为$4m$，位于$(a,-a,a)$；其二质量为$3m$，位于$(-a,a,a)$；其三质量为$2m$，位于(a,a,a)。

（1）求关于坐标原点的惯量张量。

（2）应用（1）的结果，求关于通过原点、单位向量为$n=(1/\sqrt{2})e_1+(1/\sqrt{2})e_2$的轴的转动惯量。

答：(1) $$ma^2\begin{pmatrix}18 & 5 & -3\\ 5 & 18 & -1\\ -3 & -1 & 18\end{pmatrix}$$

(2) $23ma^2$

8.19 一质量为m的矩形薄板被这样放置：其四个顶点分别位于$(0,0,0)$，$(a,0,0)$，$(a,b,0)$和$(0,b,0)$各点。

（1）求关于原点O的惯量张量。

（2）应用（1）的结果求出关于通过原点沿对角线的轴的转动惯量。

（3）求在$b=2a$的情形下主轴与主转动惯量。

答：(1) $$\frac{m}{12}\begin{pmatrix}4b^2 & -3ab & 0\\ -3ab & 4a^2 & 0\\ 0 & 0 & 4(a^2+b^2)\end{pmatrix}$$

(2) $ma^2b^2/[6(a^2+b^2)]$

(3) $I_1=(5+3\sqrt{2})(ma^2/6)$

$I_2=(5-3\sqrt{2})(ma^2/6)$

$I_3=5ma^2/3$

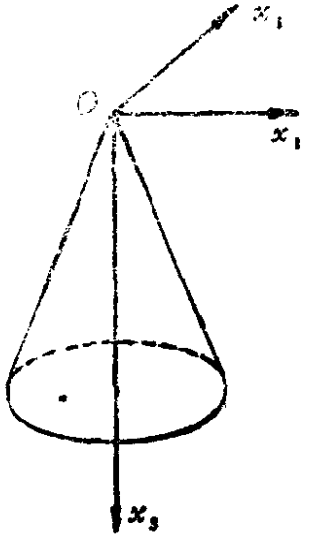
$e'_1=(4-2\sqrt{2})^{-1/2}[e_1+(1-\sqrt{2})e_2]$

$e'_2=(4+2\sqrt{2})^{-1/2}[e_1+(1+\sqrt{2})e_2]$

$e'_3=e_3$

8.20 计算一高为 h，底半径为 a 的圆锥关于其顶点的主转动惯量。比值 h/a 为何值时，通过顶点的任何轴都是一主轴？在此情形下，求出质心的位置及关于它的主转动惯量。

答：以顶点 O 为原点的坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$（x_3 轴沿圆锥线）为主轴系。此三轴方向也是质心 C 的主轴方向。



8.20题图

$$I_1(O)=I_2(O)$$
$$=(3M/20)(a^2+4h^2)$$
$$I_3(O)=3Ma^2/20$$

$h/a=1/2$ 时，过 O 点的任何轴都是主轴。质心位置 $(0,\ 0,\ 3a/8)$，$I_1(c)=I_2(c)=51Ma^2/320$，$I_3(c)=3Ma^2/10$。

8.21 试用欧勒动力学方程式证明：在欧勒-潘索情形中，角动量与动能均守恒。

8.22 如绕定点运动的刚体的角动量于任何时刻皆垂直于刚体的瞬时角速度，则此刚体的动能为常数，试证明之。

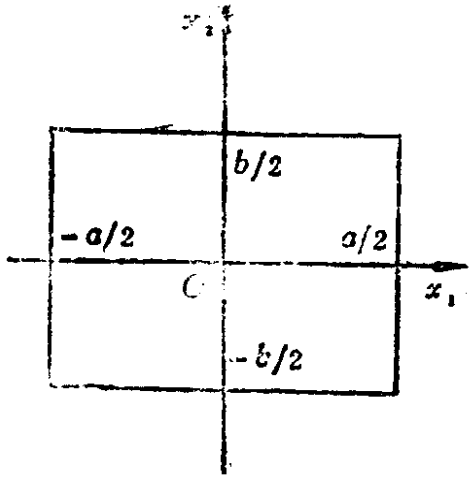
8.23 设一旋转对称刚体（$I_1=I_2$）在外力作用下绕对称轴上一定点作规则进动。以 ω_1 表示自转角速度，ω_2 表示进动角速度，θ 表示章动角。试用角动量定理证明对固定点外力矩总和为 $N=I_3(\omega_2\times\omega_1)\left[1+\dfrac{I_3-I_1}{I_3}\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]$。

8.24 一个高为 l，顶角为 90° 的正圆锥支于顶点，在重力作用下作陀螺运动。开始时，以自转角速度 $5\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$ 绕对称轴转动，和铅直向上的方向成 60° 角。证明在随后的运动中，章动角总介乎 60° 与 120° 之间。

8.25 证明对称陀螺不受力运动时，$\boldsymbol{L}$，ω 和 e_3 为共面向量。讨论三个向量中哪个在中间。

8.26 （1）求边长为 a 和 b，质量为 M，忽略厚度的均匀矩形板的质心的主转动惯量。

（2）求此平板绕对角线以常角速度 ω 转动所必须的力矩（向量）。



8.26题图

答：（1）$Mb^2/12$，$Ma^2/12$，

$$\frac{M}{12}(a^2+b^2)。$$

（2）以 e_1，e_2，e_3 表示本体系基矢，以 e'_1，e'_2，e'_3 表示固定系基矢，$t=0$ 时两者重合。

$$N=\frac{M\omega^2 ab(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}e_3$$

或

$$N=\frac{M\omega^2 ab(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(be'_1-ae'_2)\sin\omega t+e'_3\cos\omega t\right\}$$

8.27 一木块恢复系数为 e，沿一水平槽以速率 v_1 无摩擦地滑动，它撞上了在同一方向较慢地运动的一个同样质量的木块，计算碰后两木块的速度的大小和方向。在碰撞中能量损失多少？

答：$v'_1=\frac{1}{2}[(1-e)v_1+(1+e)v_2]$，方向同 v_1

$v'_2=\frac{1}{2}[(1+e)v_1+(1-e)v_2]$，方向同 v_2

能量损失为 $(m/4)(1-e^2)(v_1-v_2)^2$

8.28 一球从高 h 处掉落地板上。如恢复系数是 e，求此球第 n 次跳起的高度。

答；he^{2n}。

8.29　一乒乓球由高 a 处落到坚硬、光滑、固定的桌上。它跳起高度为 b。计算球的恢复系数及跳起 n 次后损失的能量。

答：$e=(b/a)^{1/2}$，能量损失为 $mga[1-e^{2n}]$。

8.30　如果两物体进行一次正碰，证明动能的损失等于

$$\frac{1}{2}\mu v^2(1-e^2)$$

其中 μ 是折合质量，v 是碰前的相对速度，e 是恢复系数。

8.31　一球质量 m，速度为 v，撞到一等质量的静止球上，两球的接触线与第一个球的初速度成 α 角。球是光滑的，恢复系数为 e。求碰后两球的速度的大小与方向。

答：$v'_1=(v/2)[(1-e)^2\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha]^{1/2}$，同入射方向夹角为 $\beta=[(1+e)\sin\alpha\cos\alpha]/[2-(1+e)\cos^2\alpha]$

$v'_2=(v/2)(1+e)\cos\alpha$　同入射方向夹角为 α。

8.32　一质点质量 m，以速率 v 及与墙的法线成 θ 角的方向，撞到这墙上。墙是粗糙的。质点同墙之间的静、动摩擦系数分别是 μ 和 $\overline{\mu}$，碰撞的恢复系数为 e。求质点弹回后其速度的大小和方向。

答：$\operatorname{tg}\theta\leqslant\mu$（或 $\overline{\mu}(1+e)$）：$v'=ev\cos\theta$，$\theta'=0$，

$\operatorname{tg}\theta>\mu$（和 $\overline{\mu}(1+e)$）：

$$v'=v\{e^2\cos^2\theta+[\sin\theta-\overline{\mu}(1+e)\cos\theta]^2\}^{1/2}$$

$$\theta'=\operatorname{arctg}\{(\operatorname{tg}\theta/e)-[\overline{\mu}(1+e)/e]\}$$

8.33　两个完全相同的均匀球，质量均为 M。一个球无滑动地作水平滚动，以速度 v 撞向另一个静止的球。假定摩擦力足够小，使得它在碰撞过程中可以忽略，而碰撞可以看成是完全弹性的。

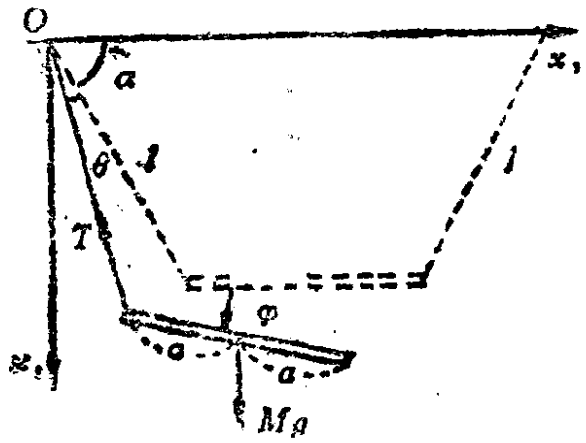
（1）在碰撞后足够长的时间之后，每个球又作无滑动的滚动，试求这时每个球的速度。

（2）初始能量中由于摩擦力而转换为热能的比率是多少？质量为 M、半径为 R 的球体对于它的球心的转动惯量为 $\frac{2}{5}MR^2$。

答：（1）$v_1'=\frac{2}{7}v$，$v_2'=\frac{5}{7}v$。

（2）能量“损失”与初始能量之比为20/49。

8.34 质量M，长$2a$的棒用长为 l 的两根绳水平地悬挂起来，绳与水平线成 α 角。当右边的绳突然剪断时，另一根绳中的张力是右边绳切断前的多少倍？并求切断后瞬间，棒的角加速度。

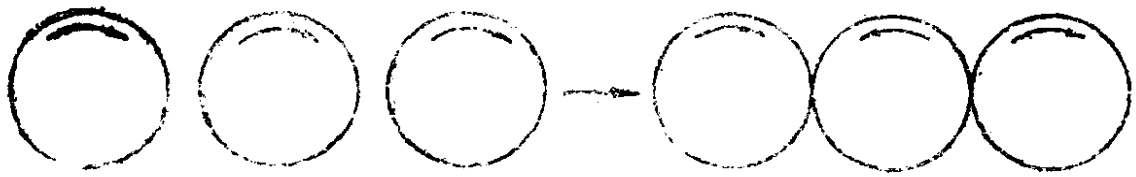


8.34题图

答：$\frac{T}{T_0}=\frac{2\sin^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$

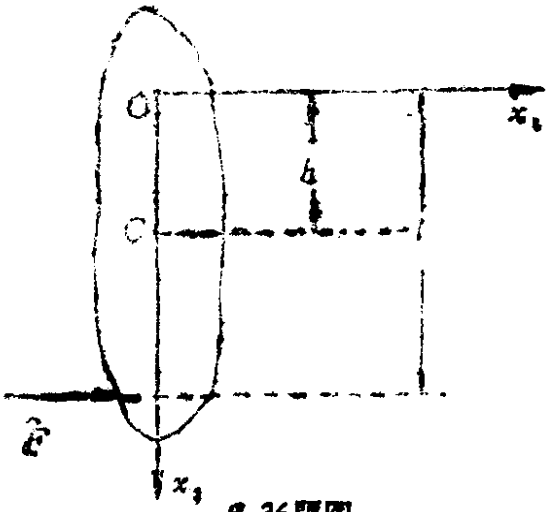
$\ddot{\varphi}=\frac{3g\sin^2\alpha}{a(1+3\sin^2\alpha)}$。

8.35 三个相同的圆筒以同样的角速度Ω绕彼此平行的过中心的轴转动。将它们拿到一起令其接触而保持轴平行，当在接触线上，一个圆筒对相邻的圆筒没有滑动时，达到了新的稳定态。问原来的自转动能现在还剩下多少？（第一与第二个接触及第二与第三个接触的次序没关系，转动轴垂直于纸面。）


8.35题图

答：$\omega_1=\omega_3=-\omega_2=\Omega/3$，$\frac{T'}{T}=\frac{1}{9}$。

8.36 刚体做成的摆，质量为M，转轴水平，在图示位置



8.36题图

受到一与轴垂直的水平冲量$\hat{F}$，求轴上产生的约束反作用冲量。

答：

$$\hat{R}_1 = 0$$

$$\hat{R}_2 = \hat{F}[(Mhl/I_3) - 1]$$

8.37 一平面刚体在其自身平面内运动着，质心速度为v，转动角速度为ω。如突然固定平面刚体中一点A，试求此后瞬间的角速度和作用于A点的反作用冲量。

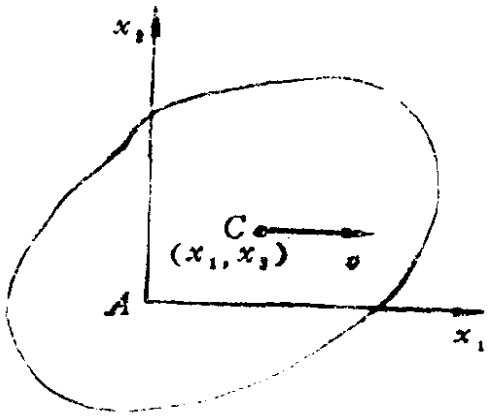
答：

$$\omega_1 = \frac{I_C\omega - Mvx_2}{I_A}$$

$$\hat{F}_{1A} = M(-x_2\omega_1 - \omega)$$

$$\hat{F}_{2A} = Mx_1\omega_1$$

（取Ax_1轴 // v）



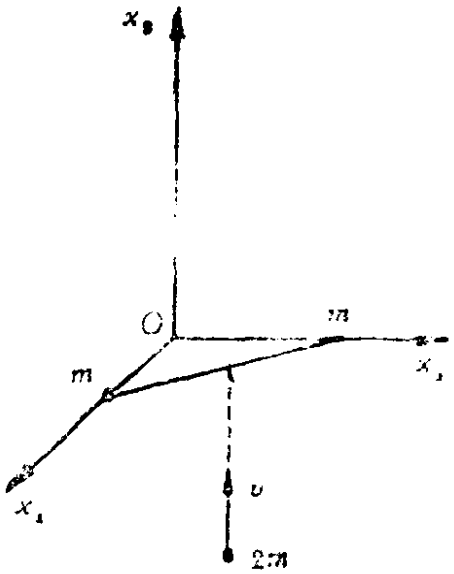
8.37题图

8.38 有一个无质量的等腰直角三角形刚性框架，直角边的长度为d，开始时直角边静止在与固定的x_1和x_2轴相合的位置上。有一个数值为$2m$不计形状大小的质量沿x_3方向以速度v射到框架的斜边中点处并撞击框架。求在以下三种初始安排条件下撞击后的总动能T。

（1）在框架的x_1和x_2轴的顶点上放置相等质量m。直角顶点是一固定的枢轴，可绕它在任意方向上自由转动。

（2） 和(1)情形相同，只是在x_1轴上的质量是$2m$。

（3） 和(2)情形相同，只是固定枢轴用一个自由的质量m所代替（于是框架成了完全自由的）。



8.38题图

答：（1） $T=\frac{1}{2}mv^2$

（2） $T=\frac{3}{7}mv^2$

（3） $T=\frac{3}{7}mv^2$

第九章　哈密顿动力学

在第五章里，讨论了分析力学的第一部分——拉格朗日动力学。现在，开始讨论分析力学的第二部分——哈密顿动力学，这是一种更重要、更有力的处理力学问题的方法。事实上，这一部分还包括了泊松、雅可比等人的贡献。

在拉格朗日力学中，我们引入f个广义坐标q_σ($\sigma=1, 2, \cdots, f$)和拉氏函数L来描述f个自由度的力学系统，拉氏方程给出了f个二阶微分方程，由它们来决定q_σ对时间的依赖关系。在本章里，我们将用哈密顿方法处理力学问题，以$2f$个变量代替拉氏力学中的f个变量，以新的哈密顿函数H代替拉氏函数L，以$2f$个一阶方程代替f个二阶拉氏方程。哈密顿函数$H(q_\sigma, p_\sigma, t)$代替拉氏函数$L(q, \dot{q}, t)$，并不意味着增加了新的物理内容（哈密顿力学和拉格朗日力学是等价的），而是表示由一组基矢$(q, \dot{q}, t)$变到另一组基矢(q, p, t)。在拉氏力学里，广义速度显含在拉氏函数中，但它并不是独立变量。哈密顿力学中，每个广义坐标q_σ的共轭广义动量p_σ，却是独立变量。哈密顿力学的主要优越性，在于引入$2f$个独立变量后，能容许进行较为广泛的坐标变换，以用来解决实际问题。

§1 力学原理及其分类

理论要点

原理，是指不加证明而直接给予的公理式命题。

原理是根据丰富的经验事实和规律总结出来的。它的正确性与适用范围，只能由它导出的结论是否符合事实来检验。力学的基本原理也是如此，它一旦被提出，整个力学体系即可由它建立起来。分析力学发展中的一个重要方面，即提出了各种新的力学原理，它们各有不同的适用范围，但在力学领域中，都与牛顿定律等价，以之为基础，可以推出力学的其它基本原理及各种结论。

任何一个力学基本原理，都必须把动力学中所作真实的运动和运动学上所允许作的运动区别开来。按照区分标志的提法，力学原理可以分为：

（a）不变分的原理：直接指明真实运动所具有的一定的公共的性质。

（b）变分原理：它提出区分真实运动与可能运动的标志，即给出一定的泛函（它是自变量、应变量及其导数的函数），与一切运动学上可能的运动相比，对于真实的运动来说，泛函的积分取极值。因此，从变分原理求得运动方程式的问题，归结为在这种或那种条件下的变分问题。

按照区分标志所牵涉的时间久暂，又分为：

（a）微分原理：提供每一瞬间真实运动的准绳。

（b）积分原理：提供在非无限短时间内真正运动的准绳。

按上述标志：

牛顿第二定律属不变分的微分原理；

虚功原理为变分的微分原理；

达朗伯原理为不变分的微分原理；

哈密顿原理为变分的积分原理；

最小作用原理为变分的积分原理。

§2 变分运算

理论要点

1. 位形空间

设一系统，以 q_1，q_2，…，q_f 这 f 个广义坐标来描述其瞬时位形，此位形对应于以 f 个 q 构成坐标轴的笛卡儿超空间中某个特定点，此 f 维空间称为**位形空间**，此点称为**系统点**。

系统状态随时间变化时，系统点在位形空间内运动，所经的路径，称为**系统运动路径**。

2. 变分法的基本问题

变分法的基本问题是要求确定函数 $y(x)$，使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(y(x),\ y'(x);\ x)dx \tag{9.1}$$

取极值。其中 x 是**自变量**，$y(x)$ 是**应变量**，$y'(x)\equiv\frac{dy}{dx}$，f 称为泛函，它的函数形式是已知的，积分限固定。$y(x)$ 是要待选的，以最后使 I 取极值。

如函数 $y=y(x)$ 给出积分 I 一个极小值，则 $y(x)$ 的任何相邻函数不管怎样接近 $y=y(x)$，都将使 I 增加。定义 y 的一个参数式

$$y=y(0,\ x)+\alpha\eta(x) \tag{9.2}$$

$\alpha=0$ 时，$y=y(0,x)=y(x)$ 即使 I 取极值的函数。式中 $\eta(x)$ 具有一阶连续导数，并满足 $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$。由此

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha,\ x),\ y'(\alpha,\ x);\ x)dx$$

取极值的必要条件是

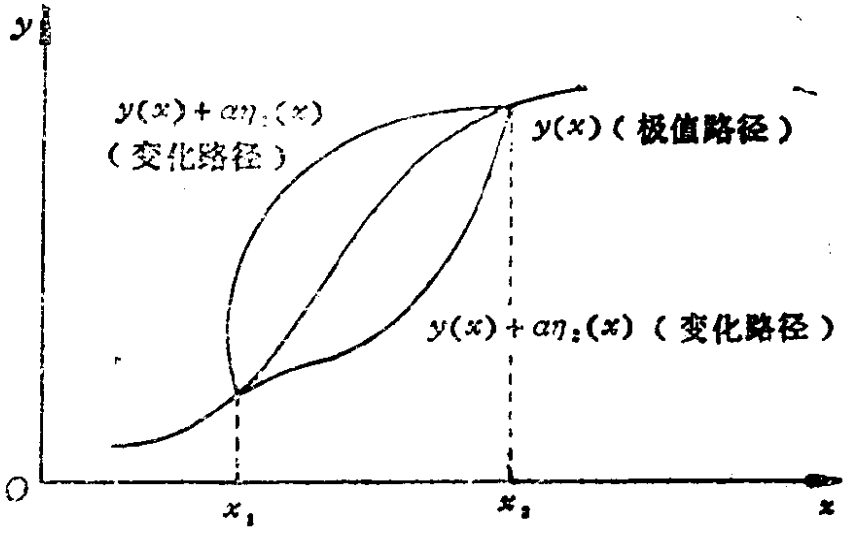


图 9.1

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=0 \tag{9.3}$$

计算得（见例题9.1）：

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{9.4}$$

即为泛函I取极值的必要条件，称为欧勒-拉格朗日方程.

3．变分符号δ

δ表示的变分运算有如下法则（与微分相同）

$$\left.\begin{aligned}&\delta(A+B)=\delta A+\delta B\\&\delta(AB)=A\delta B+B\delta A\\&\delta\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{B\delta A-A\delta B}{B^2}\end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

此外，对于等时变分（$\delta t\equiv 0$），d与δ的先后次序可换，δ与$\frac{d}{dt}$的先后次序也可换，即

$$\left.\begin{aligned}&\delta(dr)=d(\delta r)\\&\delta\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\delta r)\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

对于不等时变分（以Δ表示），Δ与$\frac{d}{dt}$的先后次序不可换。

例　题

9.1　设$y(\alpha, x)=y(0, x)+\alpha\eta(x)$，其中$\eta(x)$是$x$的某种函数，具有连续的一阶导数，且在路径端点为零，即$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$，试证明：积分

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha,x); x\}dx$$

取极值的必要条件$\left.\frac{\partial I}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$可以表成$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$.

〔解〕　$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)dx$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial\alpha}dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta(x)}{dx}dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)dx+\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)dx\right]$$

因为$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$，故

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx \qquad (1)$$

因$\left.\frac{\partial I}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$，$\eta(x)$是满足题设条件的任意函数，故（1）

式被积函数必为零，即

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \qquad (2)$$

此为泛函I取极值的必要条件，称为欧勒-拉格朗日方程.

推广到多个应变数的情形：

$$f=f(y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ y_1'(x),\ y_2'(x),\ \cdots,\ y_n'(x);\ x)$$

$$y_1(x,\ \alpha)=y_1(x,\ 0)+\alpha\eta_1(x)$$

$$y_2(x,\ \alpha)=y_2(x,\ 0)+\alpha\eta_2(x)$$

$$\cdots\quad\cdots\qquad\cdots\quad\cdots\qquad\cdots\quad\cdots$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\sum_i\left\{\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\right\}\eta_i(x)dx$$

由 $\left.\dfrac{\partial I}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$ 推得

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (3)$$

即欧勒-拉格朗日方程.

9.2 求证：空间中任意两点间的最短距离为一直线.

〔解〕 设空间中两点，始点为$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，终点为$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，两点间曲线长

$$I=\int_1^2 ds=\int_1^2\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$$

令 $f=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

代入欧勒-拉格朗日方程得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0$$

故有

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_1,\quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_2$$

$$y'=\frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2-c_2^2}},\quad z'=\frac{c_2}{\sqrt{1-c_1^2-c_2^2}}$$

，z都是x的一次函数，该曲线是直线。因此空间中两个直线间距离最短。

9.3 最速落径问题。一质点在恒定保守力场F中，起初静止在某一点O，在力F作用下运动到另一点(x_1, y_1)，求所用时间为最短的路径。

〔解〕 设v表示质点沿曲线运动的速率。则从O到(x_1, y_1)所用时间为

$$t_{12}=\int_1^2\frac{ds}{v}\qquad (1\text{表示}O\text{点，}2\text{表示点}(x_1, y_1))$$

不考虑摩擦力，$T+V=E$（常数）。

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}^2)+(\dot{y})^2]=\frac{1}{2}mv^2$$

$$V=-Fx=-mgx$$

$$v=\sqrt{2gx}$$

$$t_{12}=\int_1^2\frac{ds}{v}=\int_0^{x_1}\left[\frac{1+y'^2}{2gx}\right]^{1/2}dx$$

$(2g)^{-1/2}$因子不影响最后的方程，可将函数f写为

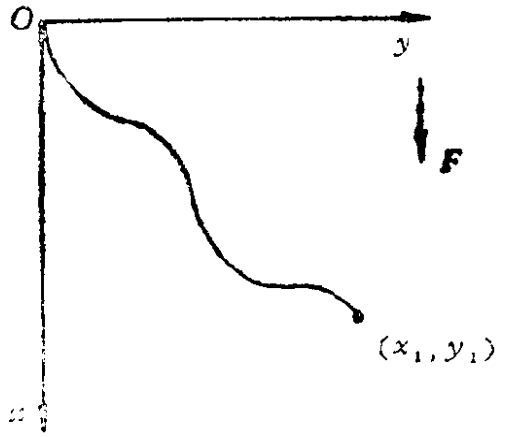


图 9.2

$$f=\left[\frac{1+y'^2}{x}\right]^{1/2}$$

因 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$，所以欧勒-拉格朗日方程变为

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\text{常数}=\frac{1}{\sqrt{2a}}\qquad\text{(假定)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)}=\frac{1}{2a}$$

$$y'=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}$$

作代换 $x=a(1-\cos\theta)$，$dx=a\sin\theta d\theta$，则

$$\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

所以

$$y=\int a(1-\cos\theta)d\theta=a(\theta-\sin\theta)+c$$

因 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，$\theta=0$，故 $c=0$，所以

$$x=a(1-\cos\theta)$$

$$y=a(\theta-\sin\theta)$$

此为通过原点的旋轮线方程，即**最速落径是一旋轮线.**

§3 哈密顿原理 哈密顿正则方程

理论要点

1．哈密顿原理（完整保守系）

一个动力系统，在给定时间内，在位形空间中从一点运动到另一点的一切可能路径中，实际所循的路径总是使系统的拉氏函数对时间的积分取极值．

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)dt = 0 \tag{9.7}$$

即 $\delta S = 0$，$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$（称为主函数）．

2．一般完整系的哈密顿原理

如果主动力不限于有势力，哈密顿原理为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum_\sigma Q_\sigma \delta q_\sigma\right)dt = 0 \tag{9.8}$$

3．修正的哈密顿原理

将 $L = \sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - H(q_\sigma, p_\sigma, t)$ 代入（9.7）式得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - H\right)dt = 0 \tag{9.9}$$

此即为修正的哈密顿原理．

4．以变分计算求正则方程

由（9.9）式得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \delta\dot{q}_\sigma + \dot{q}_\sigma \delta p_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta q_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\right)dt = 0$$

利用

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\sigma=0}^{f}p_\sigma\delta\dot{q}_\sigma\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\sigma}p_\sigma\frac{d}{dt}(\delta q_\sigma)dt$$

分部积分，并利用边界条件$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_\sigma-\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma-\left(\dot{p}_\sigma+\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\right]dt=0$$

q_σ，δp_σ代表独立变分，故

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_\sigma&=\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\\ \dot{p}_\sigma&=-\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\end{aligned}\right\}\qquad(9.10)$$

称为哈密顿正则方程.

5．正则方程的第一积分

如 $\dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}=0$，则 $q_\sigma=q_{\sigma0}$（常数）

如 $\dfrac{\partial H}{\partial q_\sigma}=0$，则 $p_\sigma=p_{\sigma0}$（常数）

如 $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$，$\dfrac{\overline{\partial r_i}}{\partial t}=0$，则$H=T+V=E$（常数）　(9.11)

如 $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$，$\dfrac{\overline{\partial r_i}}{\partial t}\neq0$，则$H=T_2-T_0+V$（常数）

附注　写出体系哈密顿函数应注意的问题：

哈密顿函数定义为

$$H(q,\ p,\ t)=\sum_{\sigma}p_\sigma\dot{q}_\sigma-L(q,\ \dot{q},t)$$

应当明确其独立变量是正则变量p，q，定义式中出现的广义速度$\dot{q}$必须表示成$\dot{q}_\sigma=\dot{q}_\sigma(q,\ p,\ t)$，即正则变量与时间的函数，然后才能求偏微商，建立正则方程.

哈密顿函数有时可直接写成$H=T+U$，但这是有条件的，仅当变换

方程不显含时间t，即$\frac{\partial r_i}{\partial t}=$时，才可以这样写，否则必须按定义求·

例　　题

9.4　试由哈密顿原理推导拉氏方程.

〔解〕　哈密顿原理指出：完整保守的力学体系，在相同时间内由位形空间中的一点移到另一点，其沿循的所有可能路径中，真实运动所行的路径，使拉氏函数的时间积分取极值，即

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_\sigma,\ \dot{q}_\sigma;\ t)dt = 0$$

将其按例题9.1作如下对应：

$$x\longrightarrow t$$

$$y_\sigma(x)\longrightarrow q_\sigma(t)$$

$$y'_\sigma(x)\longrightarrow \dot{q}_\sigma(t)$$

$$f(y_\sigma,\ y'_\sigma;\ x)\longrightarrow L(q_\sigma,\ \dot{q}_\sigma;\ t)$$

则由

$$\frac{\partial f}{\partial y_\sigma}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_\sigma}\right)=0$$

推得

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)=0$$

9.5　求例题6.12中所描述的系统的哈密顿函数，并求这一系统的哈密顿正则方程.

〔解〕　已求得

$$L=\frac{1}{2}M(\dot{x})^2+\frac{2}{3}Ml^2(\dot{\theta})^2-Ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

$$+Mg(x+l\cos\theta)-\frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

广义动量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} - Ml\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{2}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}Ml^2\dot{\theta} - Ml\sin\theta\cdot\dot{x} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_c p_\sigma \dot{q}_\sigma - L \\ &= p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{1}{2}M(\dot{x})^2 + \frac{2}{3}Ml^2(\dot{\theta})^2 - Ml\sin\theta\cdot\dot{x}\dot{\theta} \\ &\quad - Mg(x + l\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned} \tag{4}$$

由（2）、（3）得

$$\dot{x} = \frac{1}{M}\,\frac{\frac{4}{3}p_x + \sin\theta\frac{p_\theta}{l}}{\frac{4}{3} - \sin^2\theta} \tag{5}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{Ml}\,\frac{\frac{p_\theta}{l} + \sin\theta p_x}{\frac{4}{3} - \sin^2\theta} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{M\left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta\right)}\left[\frac{2}{3}p_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta}{l}\right)^2 + \sin\theta p_x\frac{p_\theta}{l}\right] \\ &\quad - Mg(x + l\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

$$-\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = -Mg + kx \tag{7}$$

$$\begin{aligned} -\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} &= \frac{\cos\theta}{M\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right)^2}\left\{\sin\theta\left[4p_x^2 + \left(\frac{p_\theta}{l}\right)^2\right]\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta\right)p_x\frac{p_\theta}{l}\right\} + Mgl\sin\theta \end{aligned} \tag{8}$$

（5）、（6）、（7）、（8）即为哈密顿正则方程.

9.6 试求球面摆的哈密顿函数及哈密顿正则方程式.

〔解〕 $L=\frac{1}{2}ml^2[(\dot{\theta})^2+\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2]-mgl\cos\theta$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}$$

$$H=\frac{p_\theta}{ml^2}p_\theta+\frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}p_\varphi$$

$$-\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\theta^2}{m^2l^4}+\frac{p_\varphi^2}{m^2l^4\sin^2\theta}\right.$$

$$+mgl\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2ml^2}p_\theta^2+\frac{1}{2ml^2\sin^2\theta}p_\theta^2$$

$$+mgl\cos\theta$$

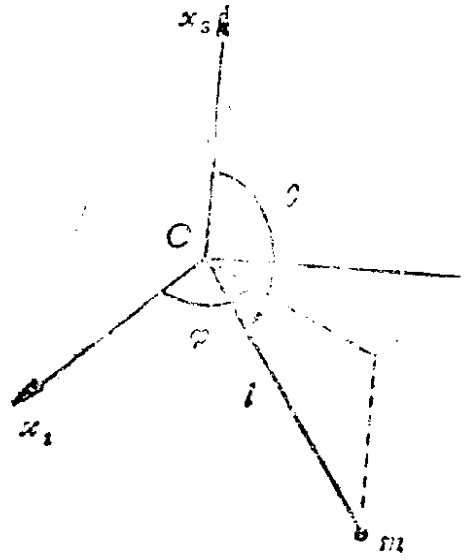


图 9.3

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ml^2},\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$$

$$-\dot{p}_\theta=\frac{\partial H}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta}p_\varphi^2-mgl\sin\theta$$

$$-\dot{p}_\theta=\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0$$

后面四式即为正则方程式.

9.7 韦伯电动力学中认可的速度相关势为

$$U=-\frac{1}{r}\left[1+\frac{(\dot{r})^2}{c^2}\right]$$

求在这种势的作用下，运动的单个质点的哈密顿函数.

〔解〕 $L=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2]+\frac{1}{r}\left[1+\frac{(\dot{r})^2}{c^2}\right]$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}+\frac{2\dot{r}}{c^2 r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$H=\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta-L$$

$$=\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{c^2 r}\right)(\dot{r})^2+\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta})^2-\frac{1}{r}$$

$$=\frac{p_r^2}{2m\left(1+\frac{2}{mc^2 r}\right)}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\frac{1}{r}$$

9.8 试求圆柱坐标系下自由质点运动的哈密顿正则方程.

〔解〕 $x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta,\ x_3=z$

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{r})^2+r^2(\dot{\theta})^2+(\dot{z})^2]$$

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

$$p_z=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}$$

$$\dot{r}=\frac{p_r}{m} \qquad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{2}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} \tag{3}$$

$$H = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2\right) + V$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \tag{4}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{5}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{6}$$

（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）即为正则方程。

9.9 试求球坐标系下自由质点运动的哈密顿函数和哈密顿正则方程。

〔解〕 $x_1 = r\sin\theta\sin\varphi$，$x_2 = r\sin\theta\cos\varphi$，$x_3 = r\cos\theta$

$$T = \frac{1}{2} m[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2 + r^2\sin^2\theta(\dot{\varphi})^2]$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \tag{2}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \tag{3}$$

$$H=T+V=\frac{1}{2m}\left[p_r^2+p_\theta^2/r^2+p_\varphi^2/r^2\sin^2\theta\right]+V(r,\theta,\varphi)$$

$$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2-\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial V}{\partial r} \tag{4}$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{1}{mr^2}\left(\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\right)-\frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{5}$$

$$\dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial \varphi} \tag{6}$$

（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）即正则方程.

9.10 试求单摆的哈密顿函数和哈密顿正则方程.

〔解〕 $T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2$, $V=mgl(1-\cos\theta)$

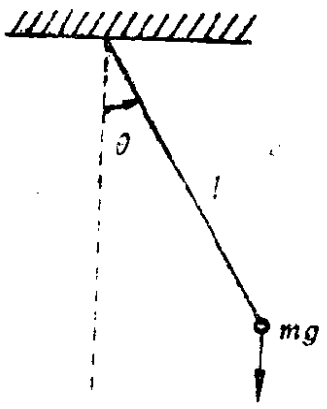


图 9.4

$$L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2-mgl(1-\cos\theta)$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ml^2} \tag{1}$$

$$H=p_\theta\dot{\theta}-L$$

$$=\frac{p_\theta^2}{ml^2}-\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2+mgl(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+mgl(1\cos\theta)$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta \tag{2}$$

（1）、（2）即单摆正则方程. 由（1）、（2）得

$$\ddot{\theta} = \frac{-mg\sin\theta}{ml}$$

或

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

即为单摆运动微分方程式.

9.11 试求中心力场中自由质点运动的哈密顿函数和哈密顿正则方程.

〔解〕 $$T = \frac{1}{2}m[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2],\quad V = V(r)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2] - V(r)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (2)$$

$$H = T + V$$

$$= \frac{1}{2}m[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2] + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta}{2mr^2} + V(r)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \qquad (3)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad (4)$$

（1）、（2）、（3）、（4）即正则方程。由（1）、（3）得

$$\ddot{r}=\frac{\dot{p}_r}{m}=\frac{p_\theta}{m^2r^3}-\frac{1}{m}\frac{dV}{dr}\left(\frac{dV}{dr}=-F(r)\right)$$

$$m\ddot{r}=\frac{p_\theta^2}{mr^3}+F(r)$$

$$m\ddot{r}=mr(\dot{\theta})^2+F(r) \qquad (5)$$

由（2）、（4）式得

$$mr^2\dot{\theta}=l\ (\text{常数}) \qquad (6)$$

（5）、（6）即运动微分方程。

9.12 试写出自由质点在匀速转动坐标系中的哈密顿函数。

〔解〕 设动系 $O-x_1x_2x_3$ 以匀角速 Ω 相对于定系 $O-\xi\eta\zeta$ 转动。

质点的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}m[v'+(\Omega\times r)]^2$$

$$=\frac{1}{2}m\{[\dot{x}_1+(\Omega_2x_3-x_2\Omega_3)]^2+[\dot{x}_2+(\Omega_3x_1-x_3\Omega_1)]^2+[\dot{x}_3+(\Omega_1x_2-x_1\Omega_2)]^2\}$$

$$L=T-V(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}=m(\dot{x}_1+\Omega_2x_3-x_2\Omega_3)$$

$$\dot{x}_1=\frac{p_1}{m}-\Omega_2x_3+x_2\Omega_3$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}=m(\dot{x}_2+\Omega_3x_1-x_3\Omega_1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} - \Omega_3 x_1 + x_3 \Omega_1$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m(\dot{x}_3 + \Omega_1 x_2 - x_1 \Omega_2)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{p_3}{m} - \Omega_1 x_2 + x_1 \Omega_2$$

$$H = \sum_\sigma p_\sigma \dot{q}_\sigma - L$$

$$= p_1\left(\frac{p_1}{m} - \Omega_2 x_3 + x_2 \Omega_3\right) + p_2\left(\frac{p_2}{m} - \Omega_3 x_1 + x_3 \Omega_1\right) + p_3\left(\frac{p_3}{m} - \Omega_1 x_2 + x_1 \Omega_2\right)$$

$$- \frac{1}{2} m\left(\frac{p_1}{m}\right)^2 - \frac{1}{2} m\left(\frac{p_2}{m}\right)^2 - \frac{1}{2} m\left(\frac{p_3}{m}\right)^2 + V(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - p_1(\Omega_2 x_3 - x_2 \Omega_3) - p_2(\Omega_3 x_1 - x_3 \Omega_1) - p_3(\Omega_1 x_2 - x_1 \Omega_2) + V(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - p \cdot (\Omega \times r) + V$$

9.13 已知一带电粒子在电磁场中的拉氏函数为

$$L = T - q(\phi - \frac{1}{c} v \cdot A)$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - q\left(\phi - \frac{1}{c} v \cdot A\right)$$

式中v是粒子速度，m为粒子质量，q为粒子所带电荷，ϕ为标量势，A为矢量势。试由L写出其哈密顿函数。

〔解〕 在笛卡儿坐标系中

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{q}{c}A_i\right)$$

$$H = H(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t)$$

$$= \sum_i p_i \dot{x}_i - L$$

$$= \sum_i \left(m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i\right)\dot{x}_i - L$$

$$= mv^2 + \frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - L$$

$$= mv^2 + \frac{q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}mv^2 + q\left(\phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + q\phi$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\right]^2 + q\phi(\boldsymbol{r},t)$$

9.14 一半径为R的圆盘，盘面铅直，有一长为$l+\pi R/2$的不可伸长的轻绳，上端固定在圆盘顶，上边一段绕在圆盘边缘上。绳下端系质量为m的质点，求质点的运动微分方程及作微振动的频率。

〔解〕 $f=1$，取θ为广义坐标。已知 $AP = l + \pi R/2$

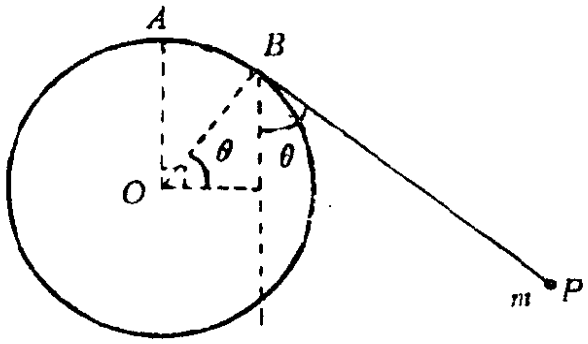


图 9.5

$$AB = \frac{\pi R}{2} - R\theta$$

$$BP = AP - AB$$
$$= l + \pi R/2 - \pi R/2 + R\theta$$
$$= l + R\theta$$

P点的速度为$(l+R\theta)\dot{\theta}$。取O为势能零点，则

$$V=[-(l+R\theta)\cos\theta+R\sin\theta]mg$$

$$T=\frac{1}{2}m(l+R\theta)^2(\dot{\theta})^2$$

$$L=\frac{1}{2}m(l+R\theta)^2(\dot{\theta})^2-mgR\sin\theta+mg(l+R\theta)\cos\theta \quad (1)$$

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m(l+R\theta)^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m(l+R\theta)^2} \quad (2)$$

$$H=p_\theta\dot{\theta}-L$$

$$=\frac{p_\theta^2}{m(l+R\theta)^2}-\frac{1}{2}m(l+R\theta)^2\frac{p_\theta^2}{m^2(l+R\theta)^4}$$

$$+mgR\sin\theta-mg(l+R\theta)\cos\theta$$

$$=\frac{p_\theta^2}{2m(l+R\theta)^2}+mgR\sin\theta-mg(l+R\theta)\cos\theta \quad (3)$$

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=\frac{Rp_\theta^2}{m(l+R\theta)^3}-mg(l+R\theta)\sin\theta \quad (4)$$

将（2）、（4）联立，得

$$\frac{d}{dt}[m(l+R\theta)^2\dot{\theta}]-mR(l+R\theta)(\dot{\theta})^2=-mg(l+R\theta)\sin\theta$$

$$m(l+R\theta)^2\ddot{\theta}+mR(l+R\theta)(\dot{\theta})^2=-mg(l+R\theta)\sin\theta \quad (5)$$

为质点运动微分方程式。

当微振动时，$\sin\theta\approx\theta$，$\dot{\theta}^2\approx 0$，$\theta^2\approx 0$，（5）式变为

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\theta$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

为一谐振动方程，角频率 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$.

§4 正则变换

理论要点

1. 目的

一给定体系可以用多个广义坐标的集合来描述，如果我们能通过变数变换，使H中出现尽可能多的循环坐标，就能使问题大大简化。为此进行正则变换。求解正则方程的问题，可以借助于正则变数的变换来完成。

2. 定义

如果通过正则变数的变换$p, q \to P, Q$，使H变为新的函数H^*而保持正则方程的形式不变，称这种变换为**正则变换**。

3. 条件

变换

$$\begin{aligned} P_\sigma &= P_\sigma(p_1, p_2, \cdots, p_f; q_1, q_2, \cdots, q_f; t) \\ Q_\sigma &= Q_\sigma(p_1, p_2, \cdots, p_f; q_1, q_2, \cdots, q_f; t) \end{aligned} \tag{9.12}$$

为正则变换的条件是

$$\sum_{\sigma=1}^{f}(p_\sigma dq_\sigma - P_\sigma dQ_\sigma) + (H^* - H)dt = dU \tag{9.13}$$

式中dU为一恰当微分，H^*是用新变量P_σ，Q_σ表示的哈密顿函数，U称为**母函数**。

如果变换方程（9.12）及H中不显含t，则正则变换的条件简化为

$$\sum_{\sigma=1}^{f}(p_\sigma dq_\sigma - P_\sigma dQ_\sigma) = dU \tag{9.14}$$

这一条件满足时，正则方程形式不变。

4. 勒让德变换

两个变量的勒让德变换. 设$f=f(x, y)$, 则

$$df=udx+vdy \tag{9.15}$$

其中 $u=\frac{\partial f}{\partial x}, v=\frac{\partial f}{\partial y}$. 可以将$x, y, u, v$中任何两个作为独立变量, 如将$u$, y当作独立变量, 则

$$x=x(u, y),\ v=v(u, y) \tag{9.16}$$

以u, y表示的函数则为

$$\bar{f}(u, y)=f[x(u, y), y] \tag{9.17}$$

由

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}=v+u\frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}=u\frac{\partial x}{\partial u}$$

得

$$\left.\begin{aligned} v&=-\frac{\partial}{\partial y}(-\bar{f}+ux)\\ x&=\frac{\partial}{\partial u}(-\bar{f}+ux)\end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

令

$$g(u, y)=-\bar{f}+ux=\left(-f+\frac{\partial f}{\partial x}x\right)_{x=x(u, y)}$$

有

$$\left.\begin{aligned} v&=-\frac{\partial g}{\partial y}\\ x&=\frac{\partial g}{\partial u}\end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

结论: 勒让德变换是一组独立变数向另一组独立变数的变换, 当独立变数改变时, 函数形式也随之改变, 新的函数(如g)等于进行变换的两个变量x和u的乘积与原来的函数f之差. 一般地可表为

$$G(u,\ y)+F(x,\ y)=ux \tag{9.20}$$

G，F分别表示新函数和原函数，x，u是变换的变量。

5．母函数　正则变换的不同形式

由正则变换的条件(9.13)式知，母函数$U=U(q,\ Q,\ t)$时

$$dU=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}dq_\sigma+\frac{\partial U}{\partial Q_\sigma}dQ_\sigma\right)+\frac{\partial U}{\partial t}$$

与(9.13)比较系数得

$$U=U_1(q,\ Q,\ t),\ p_\sigma=\frac{\partial U}{\partial q_\sigma},\ P_\sigma=-\frac{\partial U}{\partial Q_\sigma},\ H^*-H=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9.21}$$

同理有

$$U=U_2(q,\ P,\ t),\ p_\sigma=\frac{\partial U}{\partial q_\sigma},\ Q_\sigma=\frac{\partial U}{\partial P_\sigma},\ H^*-H=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9.22}$$

$$U=U_3(p,\ Q,\ t),\ q_\sigma=-\frac{\partial U}{\partial p_\sigma},\ P_\sigma=-\frac{\partial U}{\partial Q_\sigma},\ H^*-H=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9.23}$$

$$U=U_4(p,\ P,\ t),\ q_\sigma=-\frac{\partial U}{\partial p_\sigma},\ Q_\sigma=\frac{\partial U}{\partial P_\sigma},\ H^*-H=\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9.24}$$

正则变换的关键是如何选取适当的母函数，如母函数选得好，变换后的H^*能有很多甚至完全是循环坐标，问题的求解将大大简化。

例　题

9.15　两组坐标之间的变换方程为

$$Q=\log(1+q^{1/2}\cos p)$$

$$P=2(1+q^{1/2}\cos p)q^{1/2}\sin p$$

（1） 直接根据这些变换方程证明，如果q和p是正则变量，则Q，P也是正则变量。

（2）证明生成这一变换的函数为

$$F_3=-(e^Q-1)^2\mathrm{tg}p$$

〔解〕（1）$P\dot{Q}=\dot{q}\sin p\cdot\cos p-2q\dot{p}\sin^2 p$

$$P\dot{Q}-p\dot{q}=\frac{d}{dt}\left((\sin p\cdot\cos p-p)q\right)$$

变换是正则变换。

（2）由以上结果

$$-q\dot{p}=P\dot{Q}-p\dot{q}-q\dot{p}-\frac{d}{dt}\left((\sin p\cdot\cos p-p)q\right)$$

$$=P\dot{Q}-\frac{d}{dt}(q\sin p\cos p)$$

因为 $e^Q-1=q^{1/2}\cos p$，所以

$$F_3(p,Q,t)=-\left(\frac{e^Q-1}{\cos p}\right)^2\sin p\cos p=-(e^Q-1)^2\mathrm{tg}p$$

9.16 证明变换

$$Q=\sqrt{2q}\,e^{\cdot}\cos p$$

$$P=\sqrt{2q}\,e^{-\cdot}\sin p$$

是一正则变换。

〔解〕

$$dQ=(2q)^{-1/2}e^{\cdot}\cos p\,dq-(2q)^{1/2}e^{\cdot}\sin p\,dp$$

$$PdQ-pdq=\sin p\cos p\,dq-2q\sin^2 p\,dp-pdq$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2p-p\right)dq-2q\sin^2 p\,dp$$

$$=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}q\sin 2p-pq\right)dq$$

$$+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}q\sin 2p-pq\right)dp$$

$$= \frac{\partial U}{\partial q} dq + \frac{\partial U}{\partial p} dp$$

$$= dU \qquad \left(U = \frac{1}{2} q \sin 2p - pq \right)$$

右式为一恰当微分，变换是正则变换.

9.17 证明 $q = \sqrt{2P}\sin Q \quad p = \sqrt{2P}\cos Q$ 是一正则变换.

〔解〕 $dq = \sqrt{2P}\cos Q dQ + (2P)^{-1/2}\sin Q dP$

$$pdq = 2P\cos^2 Q dQ + \sin Q \cos Q dP$$

$$pdq - PdQ = 2P\cos^2 Q dQ + \sin Q \cos Q dP - PdQ$$

$$= (2P\cos^2 Q - P)dQ + \frac{1}{2}\sin 2Q dP$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)dQ + \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)dP$$

$$= \frac{\partial U}{\partial Q} dQ + \frac{\partial U}{\partial P} dP = dU \quad \left(U = \frac{1}{2} P \sin 2Q \right)$$

所以变换是正则变换.

9.18 证明 $Q = \log(q^{-1}\sin p)$，$P = q\operatorname{ctg} p$ 是一正则变换.

〔解〕 $$dQ = \frac{q}{\sin p}(-q^{-2}\sin p dq + q^{-1}\cos p dp)$$

$$= -q^{-1}dq + \operatorname{ctg} p dp$$

$$PdQ - pdq = q\operatorname{ctg} p(-q^{-1}dq + \operatorname{ctg} p dp) - pdq$$

$$= -(\operatorname{ctg} p + p)dq + q\operatorname{ctg}^2 p dp$$

$$= d[-q(p + \operatorname{ctg} p)] \qquad (U = -q(p + \operatorname{ctg} p))$$

$$= dU$$

所以变换是正则变换.

9.19 证明 $p = m\omega q\operatorname{ctg} Q$，$P = \frac{m\omega}{2} q^2 \csc Q$ 为正则变换.

〔解〕 $pdq - PdQ = (m\omega q\mathrm{ctg}Q)dq - \left(\frac{m\omega}{2}q^2\csc^2 Q\right)dQ$

$$= d\left(\frac{m\omega}{2}q^2\mathrm{ctg}Q\right)$$

$$= dU \quad \left(U = \frac{m\omega}{2}q^2\mathrm{ctg}Q\right)$$

所以变换是正则变换.

9.20 利用上题（9.19题）的正则变换求谐振子运动方程.

〔解〕 一维谐振子哈密顿函数为

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad (1)$$

正则变换

$$p = m\omega q\mathrm{ctg}Q, \qquad P = \frac{m\omega}{2}q^2\csc^2 Q \qquad (2)$$

由（2）的第二式得 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$，代入（2）的第一式得 $p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q$.

由 x，$p \longrightarrow Q$，P 的变换方程为

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \qquad (3)$$

将（3）代入（1）式得

$$H(x, p) = \frac{2m\omega P\cos^2 Q}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q$$

$$= \omega P$$

$$= H^*(Q, P)$$

$H^*(Q, P)$ 的正则方程为

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q} = 0$$

$$P = \alpha \text{（常数）}$$

即新的哈密顿函数H^*与原来的H不同，有一个循环积分。

又因H及H^*不显含时间，有能量积分

$$H = H^* = E = \omega P = \omega\alpha$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P} = \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{\partial(\omega\alpha)}{\partial \alpha} = \omega$$

$$Q = \omega t + \beta$$

由（3）式

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \beta)$$

$$p = m\dot{x} = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \beta)$$

设 $t = 0$时，$x = x_0$，$\dot{x}_0 = 0$，故$\beta = 0$．令$\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = x_0$

则

$$x = x_0 \sin\omega t$$

§5 泊松括号和泊松定理

理论要点

1．泊松括号

设$f(p, q, t)$是坐标、动量和时间的函数。它对时间的全微商

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma\right)$$

将哈密顿正则方程中的$\dot{p}_\sigma$，$\dot{q}_\sigma$的表示式代入得

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,\ H]$$

其中

$$[H,\ f]=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\frac{\partial f}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\right)\tag{9.25}$$

称为H和f的泊松括号.

一般地，$\varphi(p,\ q,\ t)$ 和$\psi(p,\ q,\ t)$ 的泊松括号为

$$[\varphi,\ \psi]=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma}\right)\tag{9.26}$$

2. 泊松括号的性质

设 φ，ψ，θ均为q，p，t的函数，a，b，c是常数，则有

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ [\varphi,\ \varphi]=0\\
&(2)\ [\varphi,\ c]=0\\
&(3)\ [\varphi,\ \psi]=-[\psi,\ \varphi]\ \text{（反对称性）}\\
&(4)\ [a\varphi+b\psi,\ \theta]=a[\varphi,\theta]+b[\psi,\theta]\ \text{（线性）}\\
&(5)\ [\varphi\psi,\ \theta]=[\varphi,\ \theta]\psi+\varphi[\psi,\ \theta]\\
&(6)\ \frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\ \psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right]+\left[\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\\
&(7)\ a[\varphi,\ \psi]=[a\varphi,\ \psi]=[\varphi,\ a\psi]\\
&(8)\ [\varphi,[\psi,\theta]]+[\psi,[\theta,\varphi]]+[\theta,[\varphi,\psi]]=0\\
&\qquad\qquad\text{（雅可比恒等式）}
\end{aligned}\right\}\tag{9.27}$$

3. 基本泊松括号

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ [q_\alpha,\ q_\beta]=0\\
&(2)\ [p_\alpha,\ p_\beta]=0\\
&(3)\ [q_\alpha,\ p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & \alpha\neq\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{9.28}$$

4. 泊松定理

（1）运动守恒量

由 $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f, H]$知，力学量是运动积分或守恒量$\left(\frac{df}{dt}=0\right)$的条件可写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[f, H]=0 \tag{9.29}$$

如 f 不显含时间，则可写为

$$[f, H]=0 \tag{9.30}$$

（2）泊松定理

已知力学量 φ,ψ 都是体系的运动守恒量（正则方程的第一积分），则由它们组成的泊松括号也必定是守恒量。即如果

$$\varphi(p_\sigma, q_\sigma, t)=c_1,\ \psi(p_\sigma, q_\sigma, t)=c_2$$

则

$$[\varphi, \psi]=c_3 \tag{9.31}$$

泊松定理原则上提供了从已知守恒量得到新守恒量的途径。

例　题

9.21　证明：$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \psi\right]+\left[\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$

〔解〕

$$\begin{aligned}
\text{右式}=&\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial q_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}{\partial p_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial q_\sigma}\right)\\
&+\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial q_\sigma}\right)\\
=&\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial q_\sigma}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\ \psi] = \text{左式}$$

9.22 求正则方程的泊松括号形式.

〔解〕 $\dot{q}_\sigma = \dfrac{\partial H}{\partial p_\sigma}$

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}$$

$$[q_\sigma, H] = \sum_\beta\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\frac{\partial q_\sigma}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta}\right)$$

$$= \sum_\beta \delta_{\sigma\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}$$

$$[p_\sigma,\ H] = \sum_\beta\left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\frac{\partial p_\sigma}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta}\right)$$

$$= -\sum_\beta \delta_{\beta\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\beta} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}$$

所以

$$\dot{q}_\sigma = [q_\sigma,\ H],\quad \dot{p}_\sigma = [p_\sigma,\ H]$$

即以泊松括号表示的正则方程.

9.23 求力学量的时间变化率的泊松括号表示式.

〔解〕 设力学量为$F = F(q,\ p,\ t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t}+[F,\ H]$$

如 $F=q_\sigma$，则 $\dot{q}_\sigma=[q_\sigma, H]$

如 $F=p_\sigma$，则 $\dot{p}_\sigma=[p_\sigma, H]$

即用泊松括号表示的正则方程。

9.24 计算质点的角动量$\boldsymbol{L}$的笛卡儿分量组成的泊松括号。

〔解〕 $l_i=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}x_jp_k$

$$l_1=x_2p_3-x_3p_2$$
$$l_2=x_3p_1-x_1p_3$$
$$l_3=x_1p_2-x_2p_1$$

$$[l_1, l_1]=\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{\partial l_1}{\partial x_\sigma}\frac{\partial l_1}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial l_1}{\partial p_\sigma}\frac{\partial l_1}{\partial x_\sigma}\right)=0$$

$$[l_2, l_2]=[l_3, l_3]=0$$

$$[l_1, l_2]=\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{\partial l_1}{\partial x_\sigma}\frac{\partial l_2}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial l_1}{\partial p_\sigma}\frac{\partial l_2}{\partial x_\sigma}\right)=x_1p_2-x_2p_1=l_3$$

$$[l_2, l_3]=l_1,\ [l_3, l_1]=l_2$$
$$[l_2, l_1]=-l_3,\ [l_3, l_2]=-l_1,\ [l_1, l_3]=-l_2$$

9.25 计算p_1，p_2，p_3，$p_1^2+p_2^2+p_3^2$，$l_1^2+l_2^2+l_3^2$各与l_3组成的泊松括号。

〔解〕 $$[l_3, p_1]=\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_1}-\frac{\partial l_3}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_2}\frac{\partial p_1}{\partial p_2}-\frac{\partial l_3}{\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_3}\frac{\partial p_1}{\partial p_3}-\frac{\partial l_3}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial x_3}\right)$$
$$=\frac{\partial l_3}{\partial x_1}=p_2$$

$$[l_3, p_2]=\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\frac{\partial p_2}{\partial p_1}-\frac{\partial l_3}{\partial p_1}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_2}\frac{\partial p_2}{\partial p_2}-\frac{\partial l_3}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_3}\frac{\partial p_2}{\partial p_3}-\frac{\partial l_3}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial x_3}\right)$$

$$=\frac{\partial l_3}{\partial x_2}=-p_1$$

$$[l_3,\ p_3]=\frac{\partial l_3}{\partial x_3}=0$$

$$[l_3,\ p_1^2+p_2^2+p_3^2]$$

$$=\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial p_1}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{\partial l_3}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial p_2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$$

$$=p_2\cdot 2p_1-p_1\cdot 2p_2=0$$

$$[l_3,\ l_1^2+l_2^2+l_3^2]$$

$$=[l_3,\ l^2]\qquad (l^2=(x_2p_3-x_3p_2)^2+(x_3p_1-x_1p_3)^2+(x_1p_2-x_2p_1)^2)$$

$$=\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_1}\frac{\partial l^2}{\partial p_1}-\frac{\partial l_3}{\partial p_1}\frac{\partial l^2}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial l_3}{\partial x_2}\frac{\partial l^2}{\partial p_2}-\frac{\partial l_3}{\partial p_2}\frac{\partial l^2}{\partial x_2}\right)$$

$$=p_2\cdot 2(x_2^2p_1+x_3^2p_1-x_1x_2p_2-x_1x_3p_3)$$
$$+x_2\cdot 2(x_1p_2^2+x_1p_3^2-x_2p_1p_2-x_3p_1p_3)$$
$$+(-p_1)\cdot 2(-x_1x_2p_1+x_1^2p_2+x_3^2p_2-x_2x_3p_3)$$
$$-x_1\cdot 2(x_2p_1^2+x_2p_3^2-x_1p_1p_2-x_3p_2p_3)$$
$$=0$$

§ 6 哈密顿-雅可比（H-J）方程

理论要点

1．哈密顿-雅可比方程

正则变换的目的，是力求使所有正则变数变为常数．如果

我们能找到一个特殊的正则变换，使得新哈密顿函数$H^*\equiv 0$，则由正则方程，Q_σ, P_σ必为积分常量，$P_\sigma=\alpha_\sigma, Q_\sigma=\beta_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, f)$。以$(q, P, t)$为变量的母函数$S(q, P, t)$可改写为$S(q, \alpha, t)$，变换方程为

$$p_\sigma=\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_\sigma},$$

$$Q_\sigma=\beta_\sigma=\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_\sigma} \qquad (\sigma=1, 2, \cdots, f)$$

由此得

$$q_\sigma=q_\sigma(\alpha, \beta, t) \qquad (\sigma=1, 2, \cdots, f)$$
$$p_\sigma=p_\sigma(\alpha, \beta, t)$$

即为正则方程的解，α, β由初始条件定。所以，这里把正则方程的求解问题归结成为求使$H^*\equiv 0$的母函数的问题。

由 $H^*=H+\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t}$，$S$满足方程

$$\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t}+H(q, p, t)=0$$

因 $P_\sigma=\alpha_\sigma$，$p_\sigma=\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t}$，有

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t}+H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)=0 \qquad (9.32)$$

称为哈密顿-雅可比方程，它是决定母函数$S(q, P, t)$的一阶线性偏微分方程。它的解又称为哈密顿主函数。求得哈密顿主函数后，由变换方程得到的正则变数都是常数，作逆变换，回到原来的正则变数，问题即得到解决。

如果H不显含时间且约束为稳定的，则H-J方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0$$

S只是t的线性函数，设为

$$S = W(q) - Et + c$$

方程变为

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \tag{9.33}$$

其中W仅是q的函数，不含t，称**哈密顿-雅可比特性函数**。这时，求解正则方程的问题又转化为由（9.33）求W的问题。若约束为不稳定的，(9.33) 式中的E当以广义能量积分H_0代替，其它不变。

2．分离变量法

H-J方程为非线性方程，可解情形较少，求完全解的一种有用的方法是分离变量法。

当哈密顿主函数S能被分解成两个相加部分，一部分仅与坐标q_i有系，另一部分则与q_i完全无关时，称H-J方程中的坐标q_i是可以分离的；如果问题中的所有坐标与时间都可以分离，则H-J方程的变数称为完全可分离的。此时，S能写成

$$\begin{aligned} S &= W_1(q_1) + W_2(q_2) + \cdots + W_f(q_f) + F(t) \\ &\equiv W(q) + F(t) \end{aligned}$$

其中 $W(q_1) = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \cdots + W_f(q_f)$.

方程（9.33）可分解成f个一阶微分方程

$$\varphi_\sigma\left(q_\sigma; \frac{dW_\sigma}{dq_\sigma}\right) = C_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \tag{9.34}$$

（C_σ是任意常数）

如求出了每个W_σ，则

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma} = p_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, f) \\ &\frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} + t = t - t_0 \\ &\frac{\partial W}{\partial \alpha_\sigma} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\sigma} = \beta_\sigma \quad (\sigma = 2, 3, \cdots, f) \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

由（9.35）中第一式可求广义动量，由第二式可求运动规律，由第三式可求轨道.

循环坐标的分离变量尤为简便. 设q_α为循环坐标，H中不显含q_α，方程（9.34）中也不显含q_α，方程变为

$$\frac{dW_\alpha}{dq_\alpha}=\alpha_\alpha$$

积分得 $W_\alpha=\alpha_\alpha q_\alpha$，其中$\alpha_\alpha$即循环坐标$q_\alpha$的共轭广义动量 $p_\alpha=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$.

例　题

9.27　应用哈密顿-雅可比方程求解质点在均匀重力场中铅直下落问题.

〔解〕　$H=T+V$

$$=\frac{p^2}{2m}+mgy \qquad (1)$$

令　$p=\frac{\partial S}{\partial y}$，则

$$H(y,\ p,\ t)=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+mgy \qquad (2)$$

新的哈密顿函数$H^*=0$，则哈密顿雅可比方程为

$$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+mgz+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

方程的解为

$$S(y,\ \alpha,\ t)=W(y,\ \alpha)-\alpha t \qquad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha$$

方程（3）化为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + mgy - \alpha = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - mgy}$$

$$W = \sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha - mgy}\,dy + c \qquad (5)$$

代入（4）得

$$S = \sqrt{2m}\int\sqrt{\alpha - mgy}\,dy + c - \alpha t$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{\alpha - mgy}} - t$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}}\ \frac{2}{mg}\sqrt{\alpha - mgy} - t$$

$$(\beta + t)^2 = \frac{1}{g^2}\ \frac{2}{m}(\alpha - mgy)$$

$$y = -\frac{1}{2}g(\beta + t)^2 + \frac{\alpha}{mg} \qquad (6)$$

$t = 0$时，$y = y_0$，$p = 0$，即

$$p = \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - mgy} = 0$$

所以$\alpha = mgy_0$，代入（6）得

$$y = -\frac{1}{2}g(\beta + t)^2 + y_0$$

$t = 0$时，$y = y_0$，故$\beta = 0$，所以

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

9.28 应用哈密顿-雅可比方程求解反平方中心力场中的开普勒问题。

〔解〕 $$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{k}{r} \tag{1}$$

$$p_r=\frac{\partial S}{\partial t},\quad p_\theta=\frac{\partial S}{\partial \theta}$$

H-J方程为

$$\frac{\partial S}{\partial r}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right\}-\frac{k}{r}=0 \tag{2}$$

H中不显含t，可令

$$S=s_1(r)+s_2(\theta)-Et \tag{3}$$

（2）式可写成

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2\right\}-\frac{k}{r}=E \tag{4}$$

将（4）式两边乘以$2mr^2$，移项得

$$\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2=r^2\left\{2mE+\frac{2mk}{r}-\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2\right\}$$

方程两边各只与r或θ有关，只能每边都等于常数，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{ds_2}{d\theta}&=\beta_2\\ \frac{ds_1}{dr}&=\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}s_2&=\beta_2\theta\\ s_1&=\int\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$S=\int\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+\beta_2\theta+Et \tag{7}$$

以β_2，E表示新动量P_r，P_θ。

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\int\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+\theta=\gamma_1 \\ Q_t &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\int\sqrt{2mE+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+t=\gamma_2 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Q_r, Q_θ均为常数γ_1, γ_2, 由（8）得

$$\int\frac{\beta_2/r^2\,dr}{\sqrt{2mE+2mk/r-\beta_2^2/r^2}}=\theta-\gamma_1 \quad (9)$$

$$\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2mE+2mk/r-\beta_2^2/r^2}}=t+\gamma_2 \quad (10)$$

以$r=\frac{1}{u}$代入（9）积分得

$$r=\frac{\beta_2^2/mk}{1-\sqrt{1+\frac{2E\beta_2^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')}\qquad\left(\theta'=\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

β_2为角动量l, 这正是开普勒问题的轨道方程式.

9.29 用分离变量法, 求粒子在势场$V=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}$中运动的哈密顿主函数$S$.

〔解〕 选用球坐标系, 粒子的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2} \quad (1)$$

粒子运动的哈密顿-雅可比方程是

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+2mb(\theta)\right]+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2=E \quad (2)$$

φ为循环坐标, 故有

$$S=p_\varphi\varphi+W_1(r)+W_2(\theta)-Et$$

对W_1，W_2有下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2+a(r)+\frac{\alpha_2}{2mr^2}=E\\&\left(\frac{dW_2}{d\theta}\right)^2+2mb(\theta)+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\alpha_2\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

将（3）积分得

$$S=p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\alpha_2-2mb(\theta)-\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$+\int\sqrt{2m\left[E-a(r)-\frac{\alpha_2}{r^2}\right]}dr-Et$$

式中α_2，p_φ，E为积分常数。

9.30 用分离变量法解质点在中心力场中运动的轨道问题。

〔解〕 当所有的广义坐标除一个以外都是循环坐标时，可以采用分离变量法求解H-J方程。本题即属这种情形。

质点在中心力场中运动的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+V(r)$$

φ是循环坐标，r是非循环坐标。哈密顿特征函数为

$$W=W_1(r)+\alpha_\varphi\varphi$$

$\alpha_\varphi=p_\varphi$，是共轭于φ的常角动量。

H-J方程可写为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}\right]+V(r)=\alpha_1$$

α_1表示系统总能量。

$$\frac{dW_1}{dr}=\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

$$W=\int\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r}}\,dr+\alpha_\varphi\varphi$$

变换方程为

$$t+\beta_1=\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}$$

$$\beta_2=\frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi}=-\int \frac{\alpha_\varphi dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_1-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}+\varphi$$

令 $u=\frac{1}{r}$，则

$$\varphi=\beta_2-\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\varphi^2}(\alpha_1-V)-u^2}}$$

正是轨道方程。

9.31 由H-J理论说明：围绕太阳的行星轨道是以太阳为一焦点的椭圆。

〔解〕 太阳与行星之间作用力为

$$F=-\frac{GMm}{r^2}$$

势能为

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}$$

系统的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{GMm}{r} \qquad (1)$$

体系为保守系，哈密顿函数表示总能量

$$H=\alpha_1=E$$

$$p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}=2mE+\frac{2m^2GM}{r} \qquad (2)$$

注意到H中不显含 t，可以分离变量。

取哈密顿特征函数W作为变换的生成函数，则

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

（2）可写成

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = 2mE + \frac{2m^2GM}{r} \qquad (3)$$

分离变数 $W = W_r(r) + W_\theta(\theta)$，则

$$\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_\theta}{d\theta}\right)^2 = 2mE + \frac{2m^2GM}{r} \qquad (4)$$

注意到中心力场中，角动量守恒，p_θ = 常数，取

$$\left.\begin{aligned} p_\theta &= \frac{dW_\theta}{d\theta} = \alpha_2 \qquad (常数) \\ W_\theta &= \alpha_2\theta + c \qquad (常数) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

代入（4）得

$$\frac{dW_r}{dr} = \sqrt{2mE + \frac{2m^2GM}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}$$

$$W_r = \int\sqrt{2mE + \frac{2m^2GM}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr$$

$$W = W_\theta + W_r = \alpha_2\theta + \int\sqrt{2mE + \frac{2m^2GM}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr + c$$

因

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i \neq 1)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \theta - \int\frac{\alpha_2 dr}{r^2\sqrt{2mE + \frac{2m^2GM}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}}$$

积分之，得

$$\frac{1}{r}=\frac{m^2GM}{\alpha_2^2}-\left(\frac{m^4G^2M^2}{\alpha_2^4}+\frac{2mE}{\alpha_2^2}\right)^{1/2}\cos(\theta-\beta_2'),$$

$$(\beta_2'=\beta_2+\pi/2)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{m^2GM}{\alpha_2^2}\left[1-\left(1+\frac{2E\alpha_2^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}\cos(\theta-\beta_2')\right] \quad (6)$$

令

$$p=\frac{\alpha_2^2}{m^2GM},\quad e=\left(1+\frac{2E\alpha_2^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2} \quad (7)$$

则

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}[1-e\cos(\theta-\beta_2')]$$

$$2a=\frac{2p}{1-e^2}=\frac{2\alpha_2^2}{GMm^2}\left(-\frac{G^2M^2m^3}{2E\alpha_2^2}\right)=-\frac{GMm}{E}$$

$$E=-\frac{GMm}{2a}<0$$

由（7）式，$e<1$，轨道为椭圆.

习　　题

9.1　试写出线性谐振子的哈密顿函数，列出正则方程式.

9.2　试写出氢原子的哈密顿函数，列出正则方程式.

9.3　试写出复摆的哈密顿函数，列出正则方程式.

9.4　试写出双原子分子的密顿函数.

答：　$$H=\frac{1}{2M}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2\mu}p_r^2$$

$$+\frac{1}{2I}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)+V(r)$$

$$M=m_1+m_2,\quad I=\mu r^2$$

9.5 试写出质点在与距离平方成反比的中心力场中运动的哈密顿函数，列出正则方程。

9.6 试写出在以加速度 a 作匀加速运动的车上悬着的单摆的哈密顿函数，列出正则方程式。

9.7 试用哈密顿正则方程式求复式阿特武德机中三个物体的运动加速度。

9.8 一半径为 a 的均质球，自半径为 b 的固定圆球顶端自由滚下，试用哈密顿正则方程，求动球球心下降的角加速度。

答：$\ddot{\theta}=\frac{5}{7}\frac{\sin\theta}{a+b}g$.

9.9 试写出地球附近均匀重力场中质点运动的哈密顿函数，列出正则方程。

9.10 试写出三维各向同性谐振子的哈密顿函数，列出正则方程。（在笛卡儿坐标和球坐标下分别求出。）

9.11 如果函数 $F=F(q,\ p,\ t)$，$G=G(q,\ p,\ t)$，证明：

（1）$[F,\ G]=-[G,\ F]$

（2）$[F_1+F_2,\ G]=[F_1,\ G]+[F_2,\ G]$

（3）$[F,\ q_r]=-\frac{\partial F}{\partial p_r}$

（4）$[F,\ p_r]=-\frac{\partial F}{\partial q_r}$

9.12 如 H 是哈密顿函数，$f=f(p,\ q,\ t)$，则

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,\ f]$$

试证明之。

9.13 试计算由 x_1，x_2，x_3，$x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 与 L_3 组成的泊松括号。

9.14 如果φ是坐标和动量的任意标量函数，即$\varphi = ar^2 + br \cdot p + cp^2$，其中$a$，$b$，$c$为常数，试证

$$[\varphi, l_s] = 0$$

9.15 证明变换$(Q_r, P_r) \longrightarrow (q_r, p_r)$为一正则变换

$$p_r = \sqrt{P_r + f_r(Q_r)}e^{-q_r}$$

$$q_r = \sqrt{P_r + f_r(\theta_r)}e^{q_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

试中$f_r(Q_r)$为Q_r的任意但可积分的函数。

9.16 如正则变换方程为

$$p_r = Q_r, \quad q_r = -P_r \qquad (r = 1. 2, \cdots, n)$$

试求其母函数。

答：$F(q, Q, t) = \sum_{r=1}^{n} q_r Q_r$

9.17 试用哈密顿原理求线性谐振子的运动微分方程。

9.18 试用哈密顿原理，求均质圆柱沿倾角为α的粗糙斜面自由滚下时质心的加速度。

9.19 试用哈密顿原理讨论质点在光滑平面上的惯性运动。

9.20 试用哈密顿-雅可比方程求解单摆问题。

9.21 试用哈密顿-雅可方比程求解谐振子问题。

9.22 试用哈密顿-雅可比方程求解复摆问题。

9.23 试证哈密顿主函数满足哈密顿-雅可比方程。

附录一　坐标变换　矩阵向量

坐标系　本征值问题

1. 坐标变换

（1）坐标变换

在以正交基矢$\{e_1, e_2\}$定义的平面笛卡儿坐标系内，一点P的坐标为(x_1, x_2)。当坐标系在坐标平面内转过θ角（O点不动）时，生成的新坐标系基矢为$\{e_1', e_2'\}$，点P在新坐标系内的坐标为(x_1', x_2')，见图1。

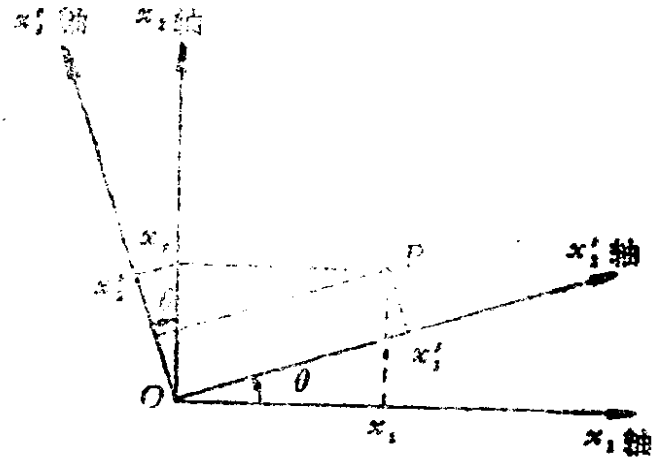


图　1

令λ_{ij}表示x_i'轴对x_j轴的方向余弦

$$\lambda_{ij}\equiv\cos(x_i', x_j)$$

由几何关系知

$$x_1' = x_1\cos\theta + x_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2$$

$$x_2' = x_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + x_2\cos\theta$$
$$= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2$$

即两坐标系变换关系为

$$x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2$$
$$x_2' = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2$$

推广到三维空间，当坐标系$S\to S'$时，基矢由$\{e_1, e_2, e_3\}$变到$\{e_1', e_2', e_3'\}$。变换关系为

$$x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3$$
$$x_2' = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3$$
$$x_3' = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3$$

简写为

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

将x_i'轴对于x_j轴的方向余弦λ_{ij}排成一个方阵，称为**矩阵**，以 A 表示，即

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

A称为**变换矩阵或旋转矩阵**。

在上面所述的情况下，空间中的 P点不动，是基矢的变换引起点的坐标的变化，是坐标的变换（图 2）。但是，也可以使坐标轴保持不动，令点 P反向（和坐标轴转动方向相反）转动θ角，并保持P与原点距离不变，结果所得的变换矩阵与 A相同。这种基矢保持不变，点从P变到P'的变换，称为**点变换**(图3)。

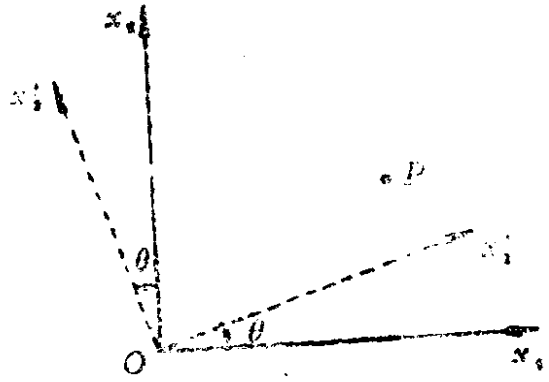


图 2

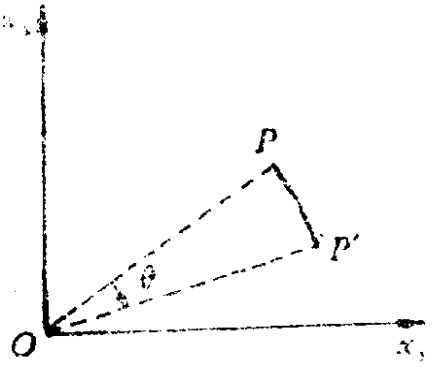


图 3

（2）变换矩阵的性质

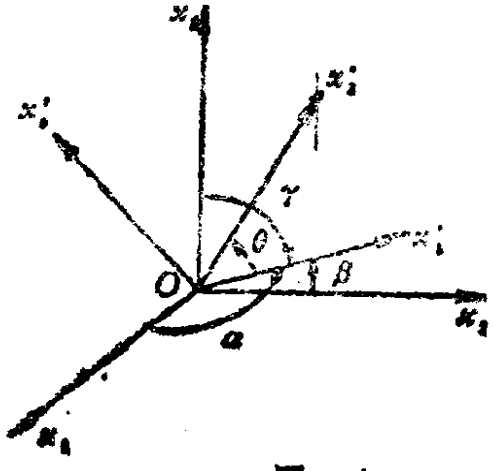


图 4

设坐标系O-$x_1x_2x_3$绕O点转动到任意位置，新坐标系为O-$x_1'x_2'x_3'$。x_1'轴作为一条直线，在坐标系O-$x_1x_2x_3$中对坐标轴的方向余弦满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

即

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 = 1$$

设x_2'轴的方向余弦为$\cos\alpha'$，$\cos\beta'$，$\cos\gamma'$，由三角学知

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

（θ是x_1'与x'的夹角）

即

$$\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} = 0$$

同样

$$\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{23}^2 = 1$$

$$\lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 = 1$$

$$\lambda_{21}\lambda_{31} + \lambda_{22}\lambda_{32} + \lambda_{23}\lambda_{33} = 0$$

$$\lambda_{31}\lambda_{11} + \lambda_{32}\lambda_{12} + \lambda_{33}\lambda_{13} = 0$$

简写之

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = 0 \qquad i \neq k$$

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = 1 \qquad i = k$$

写在一起为

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \qquad (3)$$

（3）式称为**正交条件**。δ_{ik}称为克罗尼克δ符号。满足正交条件的矩阵称为**正交矩阵**。如将x_i轴看作x_i'中的直线，得正交条件为

$$\sum_i \lambda_{ij}\lambda_{ik} = \delta_{jk} \qquad (4)$$

2．矩阵

（1）矩阵乘法

将前面定义的矩阵推广，它不一定是方阵，可以是m行n列的矩阵（m，n是正整数）．一般可表为

$$A=[a_{ij}]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i是行指标，j是列指标。

一个点的坐标，可以表为列矩阵

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

或行矩阵

$$X=(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

将x_i'，x_i表成列矩阵，则

$$x_i'=\sum_j \lambda_{ij}x_j$$

可以表为

$$X'=\Lambda X \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

这里所用的矩阵乘法应当与（1）式一致，即乘得的结果应当是

$$x_1'=\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\lambda_{13}x_3$$
$$x_2'=\lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\lambda_{23}x_3$$
$$x_3'=\lambda_{31}x_1+\lambda_{32}x_2+\lambda_{33}x_3$$

推广到一般情形：如C是矩阵A与矩阵B的乘积，即

$$C=AB$$

则C的i行j列元素C_{ij}应是A的第i行与B的第j列元素对应相乘的和。例如

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{22} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$$

两矩阵能够相乘的必要条件是前面矩阵的列数等于后面矩阵的行数。如

$$C = AB$$

C 的矩阵元

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} \tag{8}$$

矩阵乘法一般不可对易，即 $AB \neq BA$。

（2） 其它若干定义和规则

转置矩阵 矩阵A的**转置矩阵**A^T定义为

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] \tag{9}$$

两次转置的结果是没有转置，即

$$(A^T)^T = A \tag{10}$$

两矩阵乘积的转置

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{11}$$

多个$n \times n$矩阵乘积的转置

$$(ABCD\cdots G)^T = G^T \cdots D^T C^T B^T A^T \tag{12}$$

对称矩阵 如

$$A = A^T \qquad \text{或} [a_{ij}] = [a_{ji}] \tag{13}$$

则称A为**对称矩阵**。

反对称矩阵　如

$$A=-A^T,\ 或[a_{ij}]=-[a_{ji}] \tag{14}$$

则称A为**反对称矩阵**。

矩阵的行列式

$$\det A=|A|=\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{15}$$

$\sum$表示对$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的所有置换$j_1j_2j_3\cdots j_n$求和。符号$\pm$依置换$j_1j_2\cdots j_n$为偶或奇决定。

奇异矩阵　如$|A|=0$，A为奇异矩阵。

零矩阵　所有元素都是0的矩阵，记为0。

对角矩阵

$$A=(k_i\delta_{ij})=\mathrm{diag}(k_1, k_2, \cdots, k_n)=\begin{pmatrix}k_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k_n\end{pmatrix} \tag{16}$$

标量矩阵

$$A=(k\delta_{ij})=\begin{pmatrix}k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k\end{pmatrix} \tag{17}$$

单位矩阵

$$I=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{18}$$

转置共轭矩阵　矩阵A的转置共轭矩阵为

$$A^+\equiv(A^*)^T\equiv(A^T)^*\equiv[a_{ij}]^{*T}\equiv[a_{ji}]^* \tag{19}$$

矩阵的和　如A和B是两个同行同列的矩阵，A和B的和C定义为

$$C = A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \tag{20}$$

数乘矩阵　如λ是纯数，则

$$\lambda A = A\lambda = [\lambda a_{ij}] \tag{21}$$

其它规则：

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

其中k_1，k_2，k是纯数。

如A，B均为对角矩阵，则

$$AB = BA$$

$$AI = A,\ IA = A$$

$$A0 = 0,\ 0A = 0$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

3．向量

（1）　向量的代数定义

我们假定读者已熟悉向量的几何陈述，这里从不同的角度讨论向量，即用变换的（代数的）方法为向量下定义。

设有如下形式的坐标变换

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \qquad i,\ j = 1,2,3 \tag{22}$$

且变换矩阵满足正交条件

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} \tag{23}$$

如在此变换下量φ不变，则称φ为**标量**。

如一组有序数（A_1，A_2，A_3），在坐标系x_i经变换矩阵A变换到x'_i时，A_i的变换如同一点的坐标一样，即

$$A_i' = \sum_j \lambda_{ij} A_j \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{24}$$

则这组有序数$\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$称为**向量**.

（2）向量和标量的运算

三维空间单位向量（基矢）

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (A_1, A_2, A_3)\\ &= (A_1, 0, 0) + (0, A_2, 0) + (0, 0, A_3)\\ &= A_1(1, 0, 0) + A_2(0, 1, 0) + A_3(0, 0, 1)\\ &= A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{26}$$

基本运算 （$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为向量, m, n为标量）

$$\left.\begin{aligned}&A_i + B_i = B_i + A_i\\ &A_i + (B_i + C_i) = (A_i + B_i) + C_i\\ &m + n = n + m\\ &m + (n + p) = (m + n) + p\\ &m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' \text{ 仍为向量}\\ &mn = p \text{ 仍为标量}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

向量的标量积

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_i A_i B_i \tag{28}$$

向量的向量积

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

$$c_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$\boldsymbol{C} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \boldsymbol{e}_i \tag{29}$$

式中$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i, j, k\text{中任何两个指标相等}\\ 1, & i, j, k\text{成1, 2, 3的偶排列}\\ -1, & i, j, k\text{成1, 2, 3的奇排列}\end{cases}$

ε_{ijk}称为勒维-奇维塔密度。例如

$$\varepsilon_{112}=\varepsilon_{122}=\varepsilon_{323}=\cdots=0$$
$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=\cdots=1$$
$$\varepsilon_{213}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\cdots=-1$$

ε_{ijk}的一个重要性质：

$$\sum_{k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{30}$$

其他性质：

$$\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}=0$$

$$\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=2\delta_{il}$$

$$\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$$

单位向量的标量积

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\\&\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

（3）向量对标量的微商

向量对标量的微商是向量。因为

$$A_i'=\sum_j\lambda_{ij}A_j$$

$$\frac{dA_i'}{ds'}=\frac{d}{ds'}\sum_j\lambda_{ij}A_j=\sum_j\lambda_{ij}\frac{dA_j}{ds'}$$

$$\frac{dA_i'}{ds'}=\left(\frac{dA_i}{ds}\right)'=\sum_j\lambda_{ij}\left(\frac{dA_j}{ds}\right)$$

满足向量定义。

微商规则：

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{A}}{ds}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{A}}{ds}\times\boldsymbol{B} \qquad (32)$$

$$\frac{d}{ds}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\frac{d\boldsymbol{A}}{ds}+\frac{d\varphi}{ds}\boldsymbol{A}$$

（4） 梯度算符

设有标量函数 $\varphi=\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)=\varphi(\boldsymbol{r})$

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3$$

$$d\boldsymbol{r}=(dx_1,\ dx_2,\ dx_3)$$

$$d\varphi=\mathrm{grad}\varphi\cdot d\boldsymbol{r}$$

其中

$$\mathrm{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$

是一向量，称为标量函数的梯度，简写成

$$\nabla\varphi\equiv\mathrm{grad}\varphi\equiv\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$

如将φ换成$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$\nabla\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)$$

形式不变。为表示标量函数的任意性，写成算符式

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$= \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{33}$$

∇称为梯度算符.

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot dr$$

$$d\varphi = |\nabla\varphi||dr|\cos(\widehat{\nabla\varphi, dr}) \quad (ds = |dr|)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\nabla\varphi|\cos(\widehat{\nabla\varphi, dr})$$

$\frac{d\varphi}{ds}$的意义，是$\nabla\varphi$沿dr方向的投影．如φ=常数，$d\varphi = 0$，则$\nabla\varphi = 0$，或$\nabla\varphi \perp dr$.

4．坐标系

（1）笛卡儿坐标系

基矢：$\{e_1, e_2, e_3\}$

任意向量：

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$
$$= (A_1\ A_2\ A_3)$$
$$= \sum_i A_i e_i$$

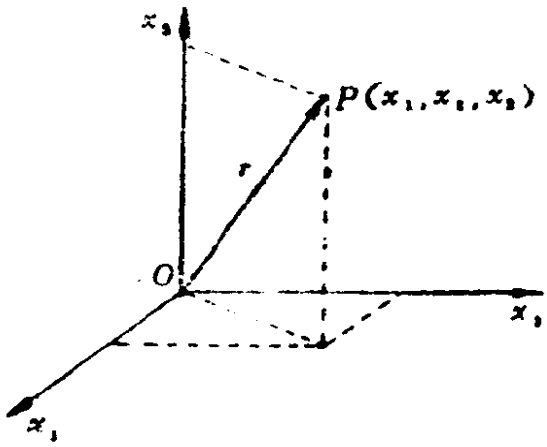


图 5

（2）平面极坐标系

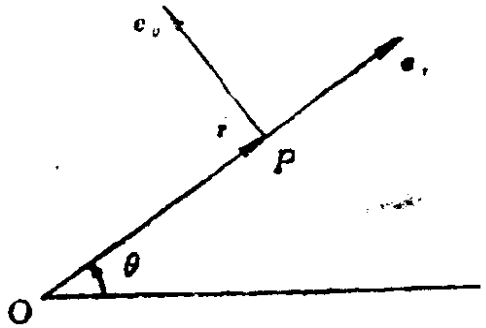


图 6

基矢：$\{e_r, e_\theta\}$

位置向量：$x_1 = r\cos\theta$

$x_2 = r\sin\theta$

或

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\theta = \frac{x_2}{|x_2|}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

基矢变换：
$$\left.\begin{aligned} e_r &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ e_\theta &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

时间变化率：$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta$

$$\dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r$$

（3）圆柱坐标系

基矢：$\{e_r, e_\theta, e_z\}$

位置向量：$x_1 = r\cos\theta$

$x_2 = r\sin\theta$

$x_3 = z$

或

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\theta = \frac{x_2}{|x_2|}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

$z = x_3$

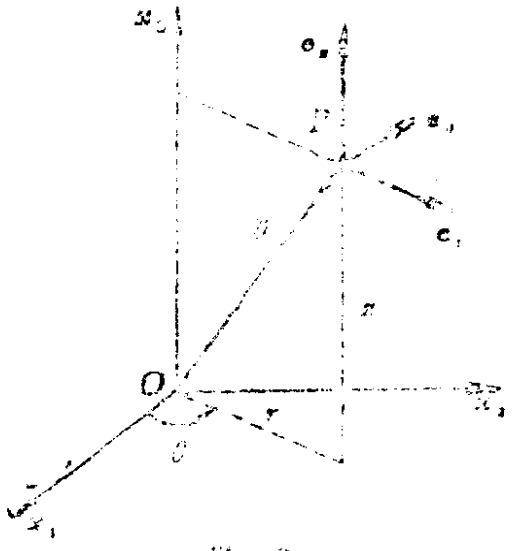


图 7

基矢变换：
$$\left.\begin{aligned} e_r &= \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ e_\theta &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

时间变化率：$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta$

$\dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r$

（4）球极坐标系

基矢：$\{e_r, e_\theta, e_\varphi\}$

位置向量：$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$

$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$

$x_3 = r\cos\theta$

或

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\theta = \arccos\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\varphi = \frac{x_2}{|x_2|}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

$r = re_r$

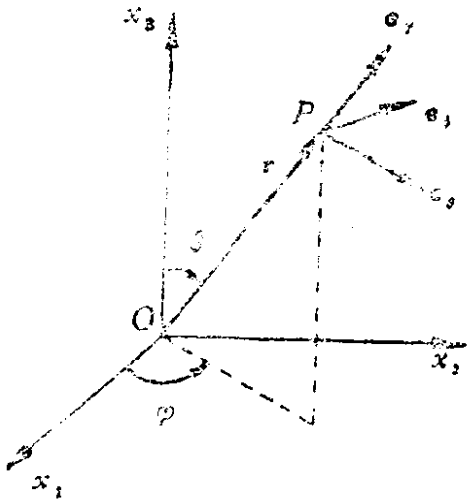


图 8

基矢变换：
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_2 - \sin\theta\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

时间变化率：
$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_r &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

（5）自然坐标系

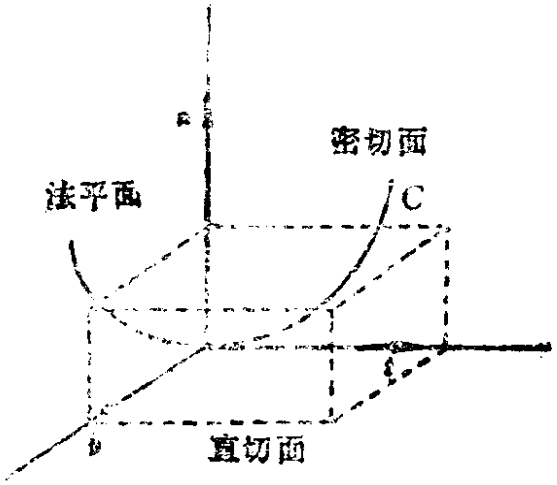


图 9

坐标原点取为轨道上与运动的质点位置重合的点。基矢（$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$）形成右手系，分别代表切向、主法向、副法向。

空间曲线C由$\boldsymbol{r}(s)$定义，s为由C上某固定点量起的弧长，$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}$是$C$的单位切向量。

Frenet-Serret公式：

（a）
$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \equiv \kappa\boldsymbol{n} \quad (37)$$

由$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$，$\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=0$，则$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\perp\boldsymbol{t}$。如$\boldsymbol{n}$是$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$方向的单位向量，$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\kappa\boldsymbol{n}$，称$\boldsymbol{n}$是主法向，$\kappa$是曲率，$\rho=1/\kappa$是曲率半径。

（b）
$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n} \quad (38)$$

证：令$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$，则
$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} + \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} + \kappa\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

因 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$\boldsymbol{b}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0$，$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\perp\boldsymbol{b}$，故$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$在$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$的平面内。因为$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\perp\boldsymbol{t}$，它必平行于$\boldsymbol{n}$，则$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$是副法向，$\tau$是挠率，$\sigma=1/\tau$为挠率半径。

(c) $$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\tau\boldsymbol{b}-\kappa\boldsymbol{t} \tag{39}$$

证：因$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$形成右手系 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$，则

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}$$

$$=\boldsymbol{b}\times\kappa\boldsymbol{n}-\tau\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t}$$

$$=\tau\boldsymbol{b}-\kappa\boldsymbol{t}$$

5．本征值问题

设A是一任意给定的$n\times n$矩阵，试问是否能找到一个非零向量X，使得

$$AX=\lambda X \tag{40}$$

（式中λ为一标量）就是说能找到一向量X，使其在A的变换下，变成一个平行或反平行于X的向量？这称为**本征值问题**。

将（22）式改写成

$$(A-\lambda I)X=0 \tag{41}$$

这是有n个未知数x_k的齐次线性方程组，这样一个代数方程组有非零解（$X\neq 0$）的充分必要条件是

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{42}$$

由此产生一个关于λ的n次代数方程

$$(-\lambda)^n+a_{n-1}(-\lambda)^{n-1}+\cdots-a_1\lambda+a_0=0 \tag{43}$$

由代数理论知它有n个根λ_1，λ_2，…，λ_n。λ_i可能为实的或复

的，可能彼此相同也可能不同。λ_i称为矩阵A的**本征值**。将每个λ_i逐个代回代数方程组（41），我们得到n个向量$X^{(i)}$。$X^{(i)}$称为A的属于本征值λ_i的**本征向量**。由于线性代数方程组（41）为齐次的，$X^{(i)}$的任何非零倍数仍然是本征向量。通常要求$X^{(i)}$是单位向量，即

$$X^{(i)T}X^{(i)} = 1 \tag{44}$$

这时，称作本征向量已归一化。

定理1：实对称矩阵的本征值是实的。

证：设λ_i及$X^{(i)}$是复数，则

$$AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)} \tag{a}$$

$$AX^{(i)*} = \lambda_i^* X^{(i)*} \tag{b}$$

以$X^{(i)*T}$左乘（a）有

$$X^{(i)*T}AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)*T}X^{(i)}$$

$$\text{左边} = (A^T X^{(i)*})^T X^{(i)} = (AX^{(i)*})^T X^{(i)}$$

$$= \lambda_i^* X^{(i)*T}X^{(i)}$$

则

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)X^{(i)*T}X^{(i)} = 0$$

因 $X^{(i)*T}X^{(i)}$为实的，且>0，则有

$$\lambda_i = \lambda_i^*$$

即λ_i为实数。

定理2：如实对称矩阵的两个本征值不同，则相应的本征向量正交。

证：$AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)}$

以$X^{(j)T}$左乘，得

$$X^{(j)T}AX^{(i)} = X^{(j)T}\lambda_i X^{(i)} = \lambda_i (X^{(j)T}X^{(i)})$$

$$\text{左边} = (AX^{(j)})^T X^{(i)} = (\lambda_j X^{(j)})^T X^{(i)}$$

$$= \lambda_j (X^{(j)T}X^{(i)})$$

所以

$$(\lambda_i - \lambda_j)X^{(j)T}X^{(i)} = 0$$

因 $\lambda_i \neq \lambda_j$，故

$$X^{(j)T}X^{(i)} = 0$$

即正交。

定理3：给定一实对称矩阵A，其本征值为A_1，A_2，…，A_f，则总可以找到一实正交矩阵P将A对角化。

$$P^TAP = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & O\ A_f \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_f)$$

（证明略）。

定理4：两个实对称矩阵A，B，其中A是正定的，则总能找到一个实的非奇异矩阵P将它们同时对角化：

$$P^TAP = I \qquad (I\text{是单位矩阵})$$

$$P^TBP = \mathrm{diag}\ (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_f)$$

对任意的λ，如果

$$P^TBP - \lambda P^TAP = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda,\ \lambda_2 - \lambda,\ \cdots,\ \lambda_f - \lambda)$$

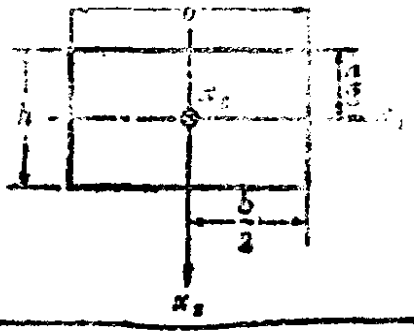
成立，则λ_1，λ_2，…，λ_f是方程

$$\det(B - \lambda A) = 0$$

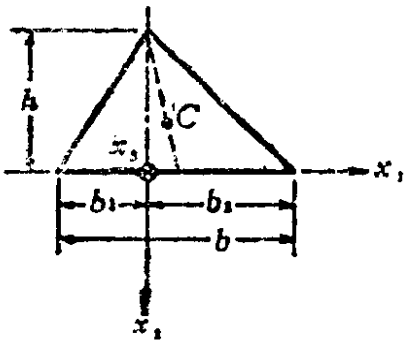
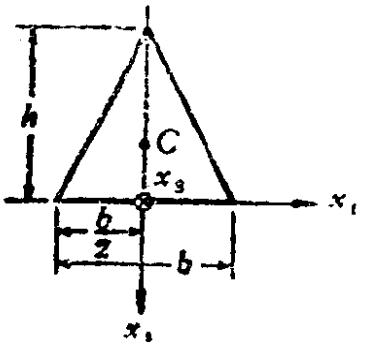
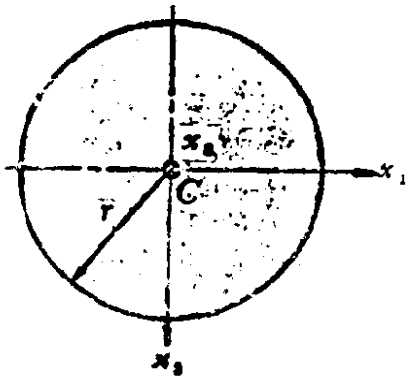
的本征值（证明略）。

附录二　简单均质刚体的形心位置和转动惯量

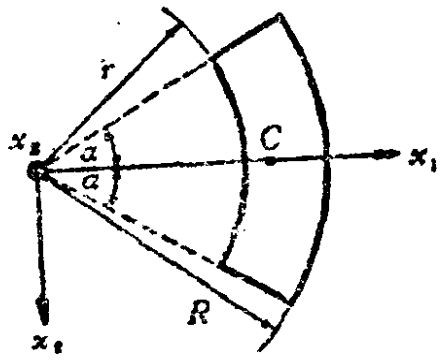
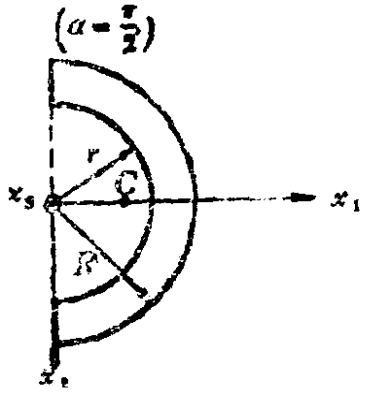
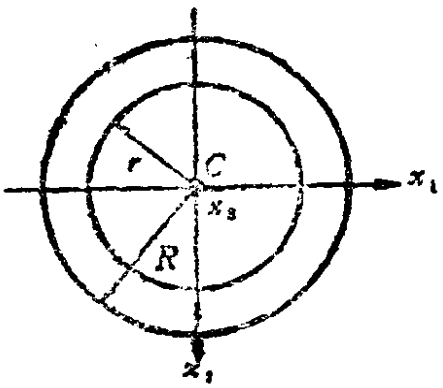
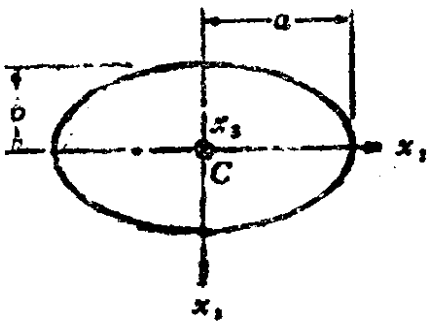
表　1

面　积　型	转动惯量及形心位置
	$I_1 = \frac{bh^3}{12}$　　$I_2 = \frac{b^3h}{12}$ $I_p = I_3 = I_1 + I_2$ $= \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$ $x_{1c} = x_{2c} = x_{3c} = 0$

续表1

面　积　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=\frac{bh^3}{12}$ $I_2=\frac{h}{12}(b_1^3+b_2^3)$ $I_p=I_3=I_1+I_2$ $=\frac{h}{12}(bh^2+b_1^3+b_2^3)$ $x_{1C}=\frac{2b_2-b}{3}$ $x_{2C}=-\frac{h}{3}$ $x_{3C}=0$
	$I_1=\frac{bh^3}{12}$ $I_2=\frac{b^3h}{48}$ $I_p=I_3=I_1+I_2$ $=\frac{bh}{48}(4h^2+b^2)$ $x_{1C}=0$ $x_{2C}=-\frac{h}{3}$ $x_{3C}=0$
	$I_1=I_2=\frac{\pi}{4}r^4$ $I_3=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}r^4$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$

续表 1

面　积　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=\frac{R^4-r^4}{8}(2\alpha-\sin 2\alpha)$ $I_2=\frac{R^4-r^4}{8}(2\alpha+\sin 2\alpha)$ $I_3=I_1+I_2=\frac{R^4-r^4}{2}\alpha$ $x_{1C}=\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $x_{2C}=x_{3C}=0$
	$I_1=I_2=\pi\frac{R^4-r^4}{8}$ $I_3=I_1+I_2=\pi\frac{R^4-r^4}{4}$ $x_{1C}=\frac{4}{3\pi}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}$ $x_{1C}=x_{3C}=0$
	$I_1=I_2=\pi\frac{R^4-r^4}{4}$ $I_3=I_1+I_2=\pi\frac{R^4-r^4}{2}$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$
	$I_1=ab^3\frac{\pi}{4}$ $I_2=a^3b\frac{\pi}{4}$ $I_3=I_1+I_2=\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$

续表 1

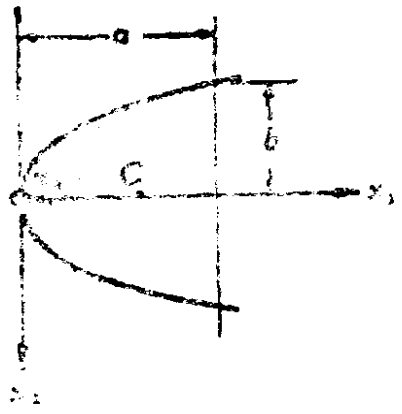
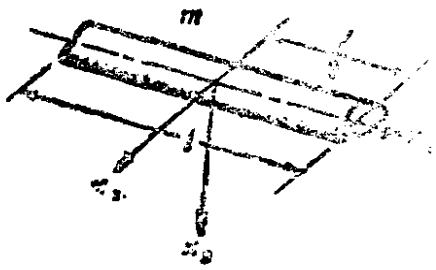
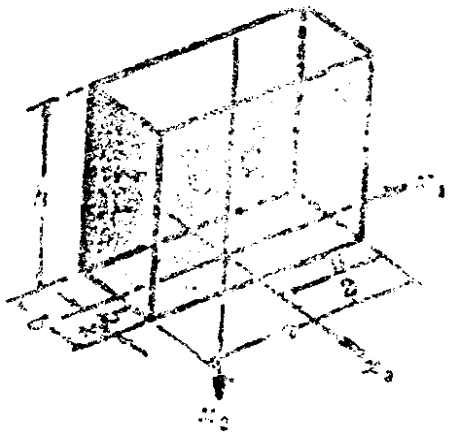
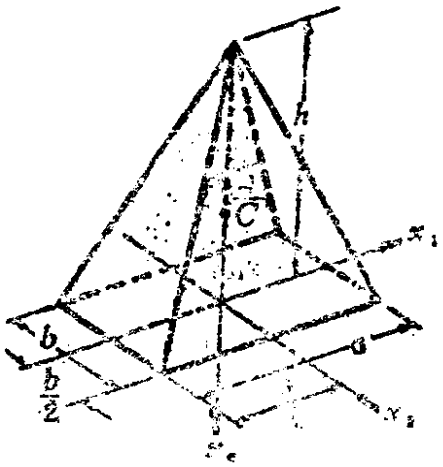
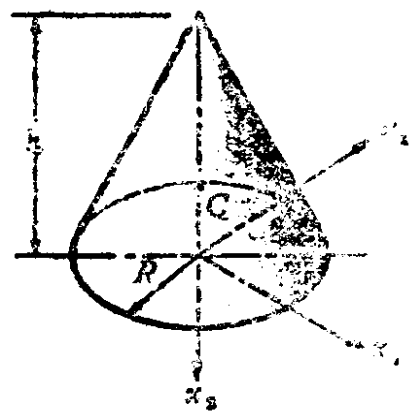
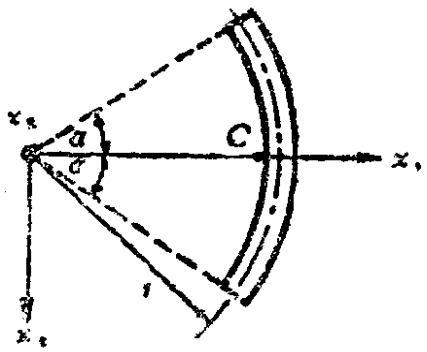
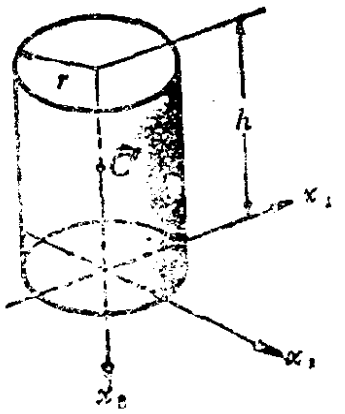
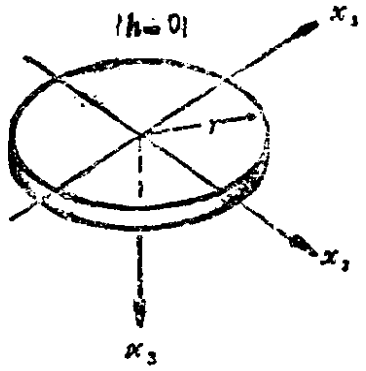
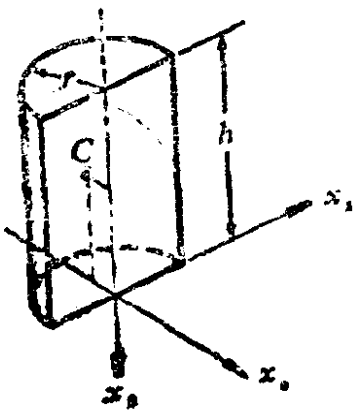
面　积　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=\frac{4ab^2}{15}$ $I_2=\frac{4a^3b}{7}$ $I_3=I_1+I_2$ $=\frac{88}{105}ab(a^2+b^2)$ $x_{1C}=\frac{3}{5}a$ $x_{2C}=x_{3C}=0$

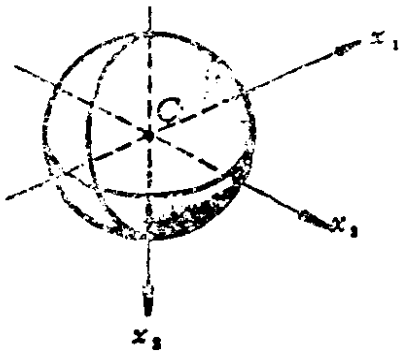
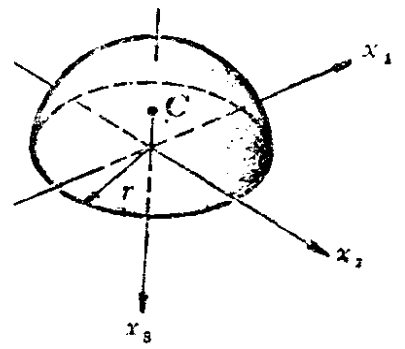
表　2

质　量　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=0$ $I_2=I_3=m\frac{l^2}{12}$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$
	$I_1=m\frac{b^2+4h^2}{12}$ $I_2=m\frac{a^2+4h^2}{12}$ $I_3=m\frac{a^2+b^2}{12}$ $x_{1C}=x_{2C}=0$ $x_{3C}=-\frac{h}{2}$

质　量　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=m\frac{b^2+2h^2}{20}$ $I_2=m\frac{a^2+2h^2}{20}$ $I_3=m\frac{a^2+b^2}{20}$ $x_{1C}=x_{2C}=0$ $x_{3C}=-\frac{h}{4}$
	$I_1=I_2=\frac{m}{10}\left(\frac{3}{2}R^2+h^2\right)$ $I_3=\frac{3}{10}mR^2$ $x_{1C}=x_{2C}=0$ $x_{3C}=-\frac{h}{4}$
	$I_1=m\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $I_2=m\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $I_3=mr^2$ $x_{1C}=\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ $x_{2C}=x_{3C}=0$

续表 2

质　量　型	转动惯量及形心位置
	$I_1=I_2=\frac{1}{12}m(3r^2+4h^2)$ $I3=m\frac{r^2}{2}$ $x_{1C}=x_{2C}=0$ $x_{3C}=-\frac{h}{2}$
	$I_1=I_2=m\frac{r^2}{4}$ $I_3=m\frac{r^2}{2}$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$
	$I_1=I_2=\frac{1}{12}m(3r^2+4h^2)$ $I_3=m\frac{r^2}{2}$ $x_{1C}=0$ $x_{2C}=-\frac{4}{3}\ \frac{r}{\pi}$ $x_{3C}=-\frac{h}{2}$

质　量　型	转动惯量及形心位置
	球壳 $I_1=I_2=I_3=m\dfrac{2r^2}{3}$ 球体 $I_1=I_2=I_3=m\dfrac{2r^2}{5}$ $x_{1C}=x_{2C}=x_{3C}=0$
	$I_1=I_2=I_3=m\dfrac{2r^2}{5}$ $x_{1C}=x_{2C}=0$ $x_{3C}=-\dfrac{3}{8}r$