理论物理学之一

经 典 力 学

张启仁 著

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书是作者在北京大学所用教材基础上修改而成的.在叙述从实验和观察事实总结出牛顿力学的基本规律之后,立即引导学生用分析方法迅速准确地掌握经典力学的一系列基本概念和抽象形式,并将它们用于实际.

全书共十章,有牛顿力学、运动学、拉格朗日力学、变分原理、哈密顿力学、刚体动力学、转动、振动和波、弹性力学、流体力学、相对论力学、广义相对论力学.书后有附录:矩阵及其本征值、南部力学.每章后均有一定量的习题.本书适合于综合大学物理类专业师生、有关专业的研究人员和工程师阅读.

图书在版编目(CIP)数据

经典力学/张启仁著.-北京:科学出版社,2002

(理论物理学;1)

ISBN 7-03-009479-4

Ⅰ.经… Ⅱ.张… Ⅲ.经典力学-高等学校-教材 Ⅳ.O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15103 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 1 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2002 年 1 月第一次印刷 印张:25 1/4

印数:1—3 000 字数:466 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序　言

理论物理是一个整体,经典力学是它的基础.这里指的不是逻辑关系.理论物理学的各分支间是不能演绎的.这里是指,经典力学是人们进入理论物理宏伟殿堂必经的第一层台阶.在这里,人们首次领略物理规律的精确、严密,首次感受到自然规律的深邃、和谐与统一.经典力学规律有极其普遍的形式,可以推广到经典物理,乃至工程的许多分支.深邃的经典力学还孕育着相对论和量子论的胚芽,现代物理的这两大支柱可以说是在新的实验事实的指引下从它脱胎而出的.可见,学好经典力学是学好整个理论物理的前提.

在有些人看来,抽象的东西必定是不直观的,难懂的,很难应用的,因而采取回避的态度.实际上,正确的抽象能把握住本质的东西,因而显得更直观,更易掌握,更方便应用.这也是人们在认识的理性阶段要实行抽象的意义所在.这一点在学习经典力学的过程中会逐渐明白.像学习理论物理的其他分支一样,学习经典力学有助于提高认识论与方法论水平,有助于正确对待理论及其与实践的关系.

学习经典力学的首要目的当然是了解力学规律本身并将它用于实际.这也是我们安排本书内容时的第一标准.现代力学始于牛顿,在第一章中我们详细阐述了牛顿力学中惯性、力和作用的相互性等基本概念的客观基础、物理含义和可能的发展.在后来众多的形式发展中我们也着意剖析每一形式的物理内含.精确的定量推算是理论物理的特征.经典力学所用到的数学工具与理论物理的其他分支相比是很有限的.我们采取讲彻底的态度,这有助于对问题的准确了解,也有助于培养严谨的学风.对众多实例彻底求解不仅可以示范实际应用,且可使读者由于深入认识自己周围的力学现象而兴味盎然.为了增进实际处理力学问题的能力,我们特辟摄动论一节,介绍力学中这一常用的近似方法.

学习经典力学的目的还在于为学习理论物理的其他分支做准备.场的基本规律与力学的基本规律有相同的形式,而统计物理则是在场和力学规律的基础上做统计.力学中的最直路径原理和最小作用量原理直接为广义相对论的几何表述做了准备.而经典力学与几何光学的相似,作用量的绝热不变性等则为量子力学的发现做了准备.对一束彼此无关联的粒子(粒子系综),每一自

由度的坐标分散程度与动量分散程度的乘积积分(5.308)在运动过程中的不变性可当作量子力学中的测不准关系在经典力学中的胚芽.学习这些规律不仅因为它们本身有用,而且因为对学习后续理论物理课程,以及对物理的统一理解有益.

经典力学已有数百年历史,是理论物理中最成熟的一支.然而它仍然在发展中.这不仅表现在现有力学的新形式、新方法和新用途诸方面,也不仅表现在与新兴学科如突变论和混沌理论等的结合上,还表现为新力学体系的建立.一个有趣的例子是南部阳一郎建立的南部力学.这一力学是一个自洽的逻辑系统,给出运动的轨道方程.由于它不同于现有力学也就与我们周围实际发生的力学现象不尽相符.但是否存在某些领域,在那里发生的现象要由南部力学或其他逻辑上自洽的力学描述而不由现有力学描述呢? 这是一个有趣的问题.非欧几何曾被认为是虚构,是没有实用价值的.可现在证明这种看法错了,它在广义相对论和一些实际工程问题中派上了大用场.发现彼此根本不同而又各自逻辑上自洽的几何体系是人类认识上的一大进步.发现逻辑上自洽的不同力学体系应当是这种进步的延续.因此我们将在附录中讲南部力学,以开阔眼界,活跃思想.让我们共同欣赏这多姿的力学世界.

本书由作者在北京大学技术物理系讲授理论力学的讲义发展而成.由于经验和水平都很有限,缺点、错误在所难免,敬请指正.

作者

2001 年 1 月于承泽园

目　录

第一章　牛顿力学 ……（1）
§1.1　惯性与惯性系　牛顿第一定律……（1）
§1.2　惯性与作用的定量表示　质量与力　牛顿第二定律　简谐振动……（3）
§1.3　功　动能与势能　能量守恒……（6）
§1.4　中心场　角动量及其守恒　平面运动及面积定理……（7）
§1.5　行星运行　开普勒定律　平方反比力……（9）
§1.6　作用与反作用　牛顿第三定律　无外力作用的多体系动量守恒与角动量守恒……（12）
§1.7　牛顿万有引力定律　引力常数与卡文迪什实验　用地面单位称天体质量……（14）
§1.8　多体系　相对运动与质心运动的分离　折合质量……（17）
习题一 ……（20）
第二章　运动学 ……（23）
§2.1　质点与质点系　坐标与广义坐标　机械运动和轨道方程……（23）
§2.2　质点的位置、速度和加速度等力学量用笛卡儿坐标和曲线坐标的表达式……（25）
§2.3　约束　完整约束与非完整约束　自由度与运动状态的完全描述　完备力学量组……（28）
§2.4　刚体运动学　达朗贝尔定理　欧拉角……（31）
§2.5　位形空间的度规与测地线……（36）
§2.6　坐标变换中的反变量、协变量和不变量　位形空间的曲率张量和曲率……（42）
习题二 ……（46）
第三章　拉格朗日力学　变分原理的微分形式 ……（50）
§3.1　虚位移　虚功　约束反作用力与理想约束……（50）
§3.2　静力学　虚功原理　广义力……（53）

§3.3 静力学举例:简单机械与初等静力学 滑杆问题 悬链问题和悬链线……(57)
§3.4 动力学 惯性力 达朗贝尔原理与拉格朗日方程……(64)
§3.5 势函数 拉格朗日函数 有势系统的拉格朗日方程 能量和保守系……(68)
§3.6 完整系统动力学举例:单摆 复摆 滑杆摆 旋轮摆……(70)
§3.7 非完整系统动力学举例:单刀与双刀简单冰橇 水平面与斜面上的直立滚盘……(78)
§3.8 高斯最小约束原理……(85)
§3.9 赫兹最小曲率原理或最直路径原理……(88)
习题三 ……(91)
第四章 拉格朗日力学 变分原理的积分形式 ……(94)
§4.1 哈密顿原理 拉格朗日方程 等效势……(94)
§4.2 旋转坐标系 惯性离心力与科里奥利力 地球上的落体与傅科摆……(96)
§4.3 力学相似性 开普勒第三定律的定性理解与普遍意义位力定理……(102)
§4.4 循环坐标 勒让德变换 罗斯函数与罗斯方程 球摆……(106)
§4.5 最小作用量原理……(112)
§4.6 作用量的雅可比形式 最短路程原理 力学的几何化……(115)
§4.7 协变微商与矢量平移 协变曲率 普遍的最小曲率原理……(119)
§4.8 经典力学与几何光学的相似 折射……(125)
习题四 ……(127)
第五章 力学的正则形式 哈密顿力学 ……(129)
§5.1 哈密顿正则方程 广义坐标与广义动量描述运动状态 哈密顿原理的正则形式……(129)
§5.2 力学量随时间的变化 泊松括号 正则变量 守恒量与对称性 泊松定理……(131)
§5.3 通用积分不变量 李华宗定理 经典力学的普遍性质……(138)
§5.4 正则变换 拉格朗日括号与泊松括号 哈密顿主函数与

哈密顿-雅可比方程 …… (143)
§5.5 作用量-角变量 …… (151)
§5.6 开普勒运动的正则不变量与作用量-角变量轨道根数 …… (153)
§5.7 含时间与不含时间的摄动论 非球形太阳周围的行星运动 非简谐振动…… (161)
§5.8 作用量的绝热不变性 磁塞…… (172)
§5.9 哈密顿主函数与几何光学中程函的相似 束流光学中发射度的不变性…… (178)
习题五 …… (182)
第六章 刚体动力学 转动 …… (185)
§6.1 刚体动能 转动惯量张量 惯量椭球与惯量主轴 正交坐标系间的正交变换…… (185)
§6.2 角动量及其泊松括号 角动量守恒…… (191)
§6.3 刚体绕定点自由转动的潘索描绘…… (193)
§6.4 刚体运动方程 欧拉方程…… (195)
§6.5 自由陀螺的转动、进动和章动 …… (197)
§6.6 重对称陀螺 对称陀螺在外力作用下绕定点的转动 拉格朗日情形…… (200)
§6.7 重对称陀螺直立转动的稳定性…… (206)
习题六 …… (208)
第七章 振动与波 弹性力学 …… (210)
§7.1 平衡位形附近的微振动 简正坐标与本征频率…… (210)
§7.2 阻尼振动与强迫振动 共振 格林函数…… (215)
§7.3 系统在平衡态附近的涨落 复正则描述与薛定谔型方程 …… (222)
§7.4 恢复力 陀螺力 耗散力 瑞利耗散函数 一般定常线性系统及其通解…… (230)
§7.5 物体的形变张量与应力张量 胡克定律与弹性模数 形变能…… (233)
§7.6 弹性体的平衡形状与平衡方程 弹性静力学及其在杆与壳上的应用举例…… (239)
§7.7 弹性动力学与弹性波 纵波与横波 波动方程及其平面波解 波的相位与相速度…… (248)
§7.8 声波 波动声学与几何声学 几何声学与质点力学的相似

……（253）
§7.9 波方程的通解 波包与群速度 波包的扩散……（263）
习题七 ……（267）
第八章 流体力学 ……（270）
§8.1 流体的密度场、速度场和压力场 连续性方程、欧拉方程和物态方程 理想流体……（270）
§8.2 伯努利积分与拉格朗日积分 不可压缩流体与无旋流体……（273）
§8.3 速度环量及其守恒 汤姆孙定理……（275）
§8.4 重力场中流体的表面波 深水波 浅水波 孤波与孤子 KdV 方程及其解 ……（276）
§8.5 黏力张量与黏度 纳维尔-斯托克斯方程 黏性流体的量纲分析与雷诺数……（285）
§8.6 管流 泊肃叶定理……（288）
§8.7 流体中物体的运动和受力 球受阻力的斯托克斯公式 翼受举力的茹可夫斯基定理……（290）
§8.8 流体中的声波 亚音速与超音速运动 冲击波……（297）
§8.9 流体力学解的稳定性与不稳定性 层流与湍流……（302）
习题八 ……（305）
第九章 相对论力学 ……（307）
§9.1 光速不变原理与相对性原理 洛伦兹变换 闵可夫斯基几何与四矢量……（307）
§9.2 同时的相对性 运动物体的长度收缩与时间膨胀 速度相加定理 快度及其相加……（314）
§9.3 质点的相对论运动方程和拉格朗日量 质量与速度的关系 质能关系 能量动量四矢量……（319）
§9.4 相对论开普勒问题……（324）
§9.5 质点碰撞 碰撞质点系的能量动量守恒 不变质量与质心系能量 对撞机原理……（329）
§9.6 运动介质中的波 相对论多普勒效应……（332）
§9.7 相对论流体力学……（335）
§9.8 光速极限与因果性……（340）
习题九 ……（341）
第十章 广义相对论力学 ……（344）
§10.1 等效原理与广义相对性原理 ……（344）

§10.2 引力场中质点的运动方程 牛顿引力势在广义相对论中的对应 …… (346)
§10.3 时空曲率与物质分布的关系 爱因斯坦场方程 张量分析与黎曼时空 …… (349)
§10.4 质点周围的中心对称引力场 爱因斯坦场方程的施瓦氏解 …… (357)
§10.5 广义相对论开普勒问题 水星的近日点进动 …… (360)
§10.6 光的引力折射 …… (364)
§10.7 时间的引力膨胀与光频的引力红移 …… (368)
§10.8 广义相对论流体力学 球对称引力场中的流体静力学致密星体结构 …… (371)
习题十 …… (374)
附录一 矩阵及其本征值问题 …… (376)
§A1.1 基本定义 …… (376)
§A1.2 相似变换 正交变换与幺正变换 …… (378)
§A1.3 厄米矩阵的本征值问题与矩阵的对角化 …… (381)
§A1.4 任意矩阵的本征值问题与矩阵的上三角化 …… (388)
附录二 南部力学 …… (389)

第一章　牛顿力学

经典力学的系统理论始于牛顿[①].虽然在三百年的发展中数度更新,但就实质内容而言,它已完成于牛顿诸定律中.学习经典力学自应由此开始.另外,在这一原始形态中,比较容易看清诸如惯性、惯性系、力等基本概念是如何从实际中抽象出来的,不至于被后来华丽的数学形式掩盖,把它们当作主观随意引进的东西.可以说,牛顿诸定律是我们进入经典力学这一华丽殿堂的第一个台阶.

§1.1　惯性与惯性系　牛顿第一定律

古人认为,外界推动是物体运动的原因,没有外界推动的物体将维持静止状态.即使已在运动的物体,如果没有外界推动维持,运动也会逐渐静止下来.这似乎也是我们日常生活中惯见的现象.不深入思考的人很容易产生这种观念.到了现代文明的启蒙时期,理性思维逐渐被重视,实验方法逐渐被确立.人们先是注意到,运动物体逐渐静止下来正是外界摩擦作用的结果.进而人们设计各种实验来检验这种概念.发现,随着摩擦作用的减弱,物体越来越长时间地维持原来的运动方式.于是最后抽象出一个概念:在完全没有外界作用的条件下,物体应维持原有的运动方式不变,即维持原来的运动方向和速度不变,这就是惯性.可见惯性概念是实验研究的成果,也是理性思维的成果.完全没有外界作用的条件是不可能实现而只能逼近的.完全的惯性运动实际并不存在,它只是实际运动的一种极限,是一种理想的情况.天体运动是非常理想的情况了,它不受摩擦作用的阻尼(如果不考虑极稀薄的星际物质的影响).正因如此,天体运行的研究成为人类建立经典力学的场所.然而天体也无法摆脱引力的作用,牛顿意义下的惯性运动在这里也只是一种理想情况,只是一种抽象.经典力学这一最基本的规律不是对实际运动的简单描写,而是对实际运动一种极限的描写,一种抽象的描写.这种极限并非实际发生的,然而却是实际运动中的本质性、规律性的东西.很难想象,如果没有这种抽象,怎么能建立起

① I. Newton, Principia(1687)

经典力学的体系,又怎样发展以后的科学、技术和文明.

对惯性的认识还与人们对运动的另一思考有关,那就是力学运动的相对性问题.力学运动是物体位置的移动.对位置的描写需要一参考物系统,称为参考系.对位置移动的描写自然也需要参考系.所有力学运动都是相对于某个参考系而言的.在长期的观察中,人们发现相对作等速直线运动的两个参考系能同样好地用来研究力学运动,是等价的.力学规律在其中的表现是一样的.这就是力学的相对性原理.按这种了解,如果一个不受外界作用的物体从一个参考系看是静止的,从另一个与之等价的参考系看却是等速直线运动的.静止与等速直线运动从一个参考系看是两种不同的形态,然而从所有彼此等价的参考系全体来看,它们却属于同一类形态.惯性表现为不受外界作用的物体"静者恒静,动者恒等速直线运动"就是自然的事.

为了明确表现出静止与等速直线运动的相对性,我们看看相对作等速直线运动的两个参考系之间的变换.在这两个参考系上分别建立直角坐标系 S 和 S′.它们在起始时刻重合,随后 S′沿 S 的 x 轴方向以速度 v 相对 S 运动.将起始时刻取作 S 和 S′中计时的零点,用同样的时钟在 S 和 S′中计时,用同样的直尺在 S 和 S′中测距.设一件在 S 系看来发生在时刻 t 坐标 x、y、z 处的事件在 S′系看来发生在时刻 t' 坐标 x'、y'、z' 处.由日常经验可直观判断

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1.1}$$

这就是著名的伽利略(Galileo)变换.按此变换在 S′系中静止的物体在 S 系看来却以等速 v 沿 x 方向运动.或者一般地说,在 S′系中作等速直线运动(包括静止)的物体在 S 系看来也作等速直线运动(包括静止).将静止与等速直线运动统称惯性运动类,以上关系又可表示为:惯性运动类在伽利略变换(1.1)下是不变的.这就是伽利略的力学相对性原理在惯性运动中的表现.

变换(1.1)还提示我们,只有两参考系彼此作等速直线运动时,等速直线运动(包括静止)才变换成等速直线运动(包括静止).相反,如两参考系彼此作加速运动,一个参考系看来作等速直线运动(包括静止)的物体在另一参考系看来却作加速运动.可见"在不受外界作用的条件下静者恒静,动者恒等速直线运动"的规律只对某些参考系的观察者成立,而对另一些参考系不成立.幸好,人们采用的大部分参考系中这一规律都很好地成立,使人们较容易地认识了它.但对它的准确表达则应是

"存在一类参考系,称为惯性系,相对于惯性系一个不受外界作用的物体将保持其静止或等速直线运动的状态."

这就是惯性定律,或牛顿第一定律.

像惯性运动一样,惯性系也是一种抽象,是实际参考系的一种极限.人们最初以自己周围的物体作为参考系,初步认识了惯性规律.然后认识到这实际

是以地球作参考系，而地球在绕太阳公转并且在自转，因而不是理想的惯性系．这一点为实际观察到的地面上的非惯性运动(相对于真正惯性系的惯性运动)所证实．于是将参考系搬到太阳上，完成了从地心说到日心说的转移．然而太阳在银河系中运行也受其他星体的摄动而作变速运动．这就使它也不是完全的惯性系．当然可以进一步把银河中心作为参考系，这样会更接近惯性系．然而银河系也受河外星云的摄动……宇宙间物体无不在相互作用中运动，这就使惯性系与惯性定律只能是一种抽象，是实际参考系和实际运动的一种极限的描写．这种抽象，这种对实际的极限的描写在理论的发展中是非常有用的，因为它们反映了实质性的规律性的东西．另一方面，既然是抽象，是极限的描写，那就只是我们的一种认识，包含了主观的东西．因此这一规律不应是凝固的，而应是发展的．特别现在已将宇宙作为一个整体来研究，研究其中物质的相互作用和运动．惯性定律在这种研究中也应采取相适应的形式．我们会在有关章节再讨论这一问题．

§1.2 惯性与作用的定量表示 质量与力 牛顿第二定律 简谐振动

取定坐标系原点 O 后，可用一条由原点到粒子所在位置的矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示粒子位置．$\boldsymbol{r}$ 称为径矢量．它对时间的微商即是粒子速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2}$$

在不受外界作用时粒子将保持 $\boldsymbol{v}$ 的方向和大小不变，这就是惯性运动．外界的作用改变速度 $\boldsymbol{v}$，即产生加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.3}$$

粒子在外界作用下的运动规律表现为 $\boldsymbol{a}$ 与外界作用的定量关系．为此我们需要对外界作用的定量描述．

日常生活中广泛使用力的概念．力有方向，有大小．方向的概念是明确的，无需多说．力的大小却需定义，要有一定的规则来衡量．一种简单的想法是：就用它产生的加速度来衡量．产生的加速度越大就说力越大，产生的加速度大一倍就说力也大一倍．于是产生了力与加速度成正比的概念．用 $\boldsymbol{F}$ 代表力，与它产生的加速度 $\boldsymbol{a}$ 成正比的关系可写成

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{1.4}$$

其中比例常数 m 称为被加速物体的质量．在同样的力作用下质量大的物体加速度小，因而质量反映了物体惯性的大小．(1.4)式中的质量 m 称为惯性质量．

(1.4)就是熟知的牛顿第二定律.然而它在这里又像是关于力的度量的定义.而按一般认识,定律是客观规律的表述,定义则是一种主观规定,二者不会是同一件事.(1.4)确是客观规律的表述而不是主观随意的规定.设有两个方向相同而大小不同的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,它们在一个物体上分别产生加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$,在另一物体上分别产生加速度 $\boldsymbol{a}_1'$ 和 $\boldsymbol{a}_2'$.按(1.4)应有比例关系

$$\boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1' : \boldsymbol{a}_2'. \tag{1.5}$$

这是一个要由实验检验的命题,而不是可以随意规定的.实验当然早已证实了比例关系(1.5),从而证实了客观规律(1.4).加速度确实可以通过(1.4)来度量力,但这是建立在上述客观规律基础上的度量方法.正是比例关系(1.5)使这种度量成为可能.

一个量可用多种不同方式度量,显示出物理规律内部的协调一致.力的度量也是这样.除可根据牛顿第二定律用加速度度量外,也可根据胡克定律用弹性体的形变程度来度量.弹簧秤就是用这种方式量物体受的重力的.弹性体形变,其中分子或原子离开平衡位置,它们之间的作用产生恢复力与外界作用相平衡.用形变度量力就是用形变物体的恢复力度量力,或者说用其中分子、原子间的相互作用来度量力.弹性体中原子、分子的作用在这里被用作标准来度量其他各种力.这种度量力的方式与牛顿第二定律的一致表现出后者的客观基础,表现出经典力学规律的自洽.

像牛顿定律这样的基本定律的正确性自然不只取决于上述简单论证,也不只取决于个别实验,它的正确性取决于它的全部结论在广泛范围内与实际的全面一致.如果力 $\boldsymbol{F}$ 是粒子位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数,在(1.4)中牛顿第二定律便表现为坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 的对时间的二阶微分方程.因此只要知道起始位置 $\boldsymbol{r}(0)$ 和起始速度 $\boldsymbol{v}(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 就可用它算出粒子在任何时刻 t 的位置 $\boldsymbol{r}(t)$ 和速度 $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,因而算出粒子运动的全部情况.这种计算结果在广泛范围内与实际的一致证明了这一定律的正确性.

一维简谐运动是一个简单例子.一个下垂弹簧的下端悬一小球,当弹簧拉力与重力平衡时小球的位置取作坐标原点,一维坐标 x 轴垂直向下.当沿 x 方向拉伸或挤压弹簧时它的弹性力发生变化.变化后的弹性力与重力的合力构成小球受到的恢复力,它指向平衡位置.在弹性限度内,按胡克定律,恢复力与离开平衡位置的距离成比例.即恢复力

$$F = -kx, \tag{1.6}$$

k 为弹簧的劲度系数.将此力代入牛顿方程(1.4),注意对这个一维问题加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \tag{1.7}$$

得运动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{1.8}$$

其中常数

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{1.9}$$

在下面表现为振动的角频率.常系数二阶线性常微分方程(1.8)有通解

$$x = x_0 \sin(\omega t + \delta), \tag{1.10}$$

积分常数 x_0 和 δ 由起始条件 $x(0)$和 $v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$ 定:

$$x(0) = x_0 \sin\delta, \qquad v(0) = x_0 \omega \cos\delta. \tag{1.11}$$

由此解得

$$x_0 = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}, \qquad \tan\delta = \frac{\omega x(0)}{v(0)}. \tag{1.12}$$

它们规定了振动的振幅 x_0 和相角 δ.一维简谐振子的轨道方程(1.10)的正确性是人们熟知的.

按伽利略变换(1.1)

$$\dot{x}' \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \equiv \dot{x} - v, \qquad \dot{y}' = \dot{y}, \qquad \dot{z}' = \dot{z}, \tag{1.13}$$

$$\ddot{x}' \equiv \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}, \qquad \ddot{y}' = \ddot{y}, \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}. \tag{1.14}$$

(1.13)表明相对作等速直线运动的两个坐标系看来,同一个粒子的运动速度是不同的,它们之间差坐标系相对运动的速度.而(1.14)则表明,这样两个不同的坐标系看来,同一粒子的加速度是相同的.一个自然的假设是,力和质量在两个相对作等速直线运动的坐标系看来也是相同的.如此,牛顿第二定律在两个相对作等速直线运动的坐标系看来同样有效.或者说,牛顿方程(1.4)在伽利略变换下是不变的.这就是伽利略的力学相对性原理在动力学中的表现.

如果两坐标系相对作加速运动,情况就根本不同.在这样两个不同坐标系看来同一粒子的加速度也不相同.如果在一个坐标系中,它满足牛顿方程(1.4),则在另一坐标系中看来就不满足.

牛顿第二定律因此应表述为:

"在惯性系中,粒子的加速度与它受到的作用力成正比而与它的质量成反比."

相对于惯性系作加速运动的坐标系称为非惯性系.在它看来,牛顿方程(1.4)不成立是因为,对同一个粒子,从它看到的加速度与从惯性系看到的不

同,而作用在粒上的力和粒子质量则被认为从所有坐标系看来是一样的.这就使在惯性系中成立的(1.4)在非惯性系中不成立.然而,如果认为非惯性系中的力也不同于惯性系,则(1.4)仍可成立.为此在非惯性系中需附加的力称为惯性力.在转动坐标系中的离心力和科里奥利(Coriolis)力就是惯性力.在广义相对论中将惯性力等效于万有引力,将在以后讨论.

引入动量

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.15}$$

牛顿方程(1.4)又可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{1.16}$$

它表明动量随时间的变化率等于力,力是动量变化的原因.(1.16)优于(1.4),便于推广,例如推广到要用相对论的情况.这时只需改变动量的定义(1.15),运动方程还保持为牛顿方程(1.16)的形式.

将(1.16)对时间积分,得

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t)\mathrm{d}t \equiv M. \tag{1.17}$$

力沿粒子运动轨道的时间积分 $\boldsymbol{M}$ 称为冲量.此式表明动量的变化等于冲量.(1.16)适于讨论运动状态的连续变化.然而,实际存在着运动状态的突然变化,例如,刚球的碰撞以及打击事件就是.对这类事件,宜用方程(1.17),只考虑事件前后运动状态的变化而不问事件本身的瞬间过程.

§1.3 功 动能与势能 能量守恒

设粒子在时刻 t_a 位于 a 点,到时刻 t_b 运动到了 b 点.将牛顿方程(1.4)两边沿粒子轨道作线积分,右边得

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.18}$$

它是粒子从 a 到 b 的运动过程中外力作的功.左边得

$$\begin{aligned}\int_a^b m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{t_a}^{t_b} m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\mathrm{d}t \\ &= T(t_b) - T(t_a),\end{aligned} \tag{1.19}$$

其中

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.20}$$

为粒子的动能.两边相等得

$$T(t_b) - T(t_a) = W, \tag{1.21}$$

它表示粒子动能的变化等于外力作的功.

另一方面,在很多情况下力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$可表示成一个函数 $V(\boldsymbol{r})$的负梯度:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}), \tag{1.22}$$

$V(\boldsymbol{r})$称为力 $\boldsymbol{F}$ 的势.将此式两边沿粒子运动的轨道作线积分得

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_a^b \nabla V(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_a) - V(\boldsymbol{r}_b), \tag{1.23}$$

其中 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}_b$ 分别为 a 和 b 两点的坐标.此式表明力 $\boldsymbol{F}$ 在粒子从 a 到 b 的运动过程中对粒子作的功等于势函数 V 在这两点取值的差.与(1.21)比较可见,动能的增加(减少)是以势函数取值的减小(增大)为代价的.这就使得它们的和

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\boldsymbol{r}) \tag{1.24}$$

在运动过程中不变.此式定义的 E 称为粒子的机械能,在力学中可简称能量,$V(\boldsymbol{r})$称为势能.规律

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.25}$$

称为机械能守恒或简称能量守恒.

上节讨论过的一维简谐振动中恢复力(1.6)的势函数为

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1.26}$$

很容易验证,由轨道方程(1.10)表示的简谐振动能量守恒.其中动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \delta), \tag{1.27}$$

势能为

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \delta), \tag{1.28}$$

两者的和

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2[\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)] \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \end{aligned} \tag{1.29}$$

不随时间变化.它也就是简谐振子运动到最远距离时的势能,这时动能为零.

§1.4 中心场 角动量及其守恒 平面运动及面积定理

如果存在一个中心,粒子受力的大小只与它和这个中心的距离有关,方向

在中心与粒子的联线上,则称这个力场为中心场,这个中心为力心.用 $\boldsymbol{r}$ 表示从力心到粒子的径矢量,中心力场可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \equiv F(r)\boldsymbol{r}_0, \tag{1.30}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为由中心指向粒子的单位矢量.中心力场恒存在势函数

$$V(r) = -\int^{r} F(r')\mathrm{d}r' = \int_{r} F(r')\mathrm{d}r', \tag{1.31}$$

与中心力(1.30)间符合关系(1.22).(1.31)中的另一积分限是可任意选定的常数,在与力心的那个距离上势函数取成零.例如对平方反比力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{C}{r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.32}$$

这个距离可取作无穷大,因而势函数为

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{C}{r'^2}\mathrm{d}r' = \frac{C}{r}. \tag{1.33}$$

对三维各向同性恢复力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -k\boldsymbol{r} = -kr\boldsymbol{r}_0 \tag{1.34}$$

这个距离可取作零,因而势函数为

$$V(r) = k\int_{0}^{r} r'\mathrm{d}r' = \frac{1}{2}kr^2. \tag{1.35}$$

中心场既然都有势,故可用势函数定义.如果势函数的值只与粒子所在位置与一确定点的距离有关而与方向无关,则这个势场以及相应力场称为中心场.

中心场具有绕力心各向同性的特点,由此引伸出一些重要性质.定义角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{1.36}$$

为径矢量 $\boldsymbol{r}$ 与动量 $\boldsymbol{p}$ 的矢量积,它是动量绕径矢量原点的矩,又称动量矩.角动量垂直于 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 组成的瞬间运动平面.将它对时刻 t 求导数,利用(1.2)、(1.15)、(1.16)和(1.30)得

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} + \frac{F(r)}{r}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0, \tag{1.37}$$

它表明中心场中角动量守恒.我们立即得到一个很简明的概念:中心场中粒子的运动平面不随时间变化,粒子作平面运动.

粒子在运动平面中的位置可用它在这平面内的极坐标 r 和 θ 表示.r 为它的径矢长度,θ 为径矢 $\boldsymbol{r}$ 与运动平面内的一固定极轴间的交角.将速度和动量分解:

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{r}_0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0, \qquad \boldsymbol{p} = m\dot{r}\boldsymbol{r}_0 + mr\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0, \tag{1.38}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_0$ 为运动平面内垂直于 $\boldsymbol{r}$ 指向 θ 增加方向的单位矢量. 于是得角动量

$$\boldsymbol{L} = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{\theta}_0, \tag{1.39}$$

$\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{\theta}_0$ 为运动平面内互相垂直的单位矢量, 因而 $\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{\theta}_0$ 为垂直运动平面的单位矢量. 角动量守恒表明

$$r^2\dot{\theta} = \text{常数}. \tag{1.40}$$

此式左边为粒子径矢量单位时间扫过的面积的二倍, 可称为面积速度. (1.40) 表明角动量守恒导致面积速度不变, 或者说粒子径矢量在单位时间内扫过的面积不随时间变化. 这又称为面积定理.

§1.5 行星运行 开普勒定律 平方反比力

自古人们由于各种动机观察天象. 发现大多数星辰虽在一日内不同时辰和一年内不同季节会出现在不同位置, 但它们之间的相对位置却维持不变, 组成一个个星座, 称为恒星. 然而有少数几颗星穿行于各星座之间, 相对于各恒星的位置在不断地但很有规律地变化. 这几颗星称为行星. 这几颗行星的运行很难纳入地心说的理论体系, 是困扰古代天文学家的问题. 直到 16 世纪, 哥白尼(Copernicus)建立日心说, 这才真相大白. 原来这几颗行星是在绕太阳运行. 从 1543 年哥白尼出版《天体运行》到 17 世纪初, 又经过半个多世纪的观察与分析, 最后由开普勒(Kepler)总结成三条定律, 世称开普勒三定律. 第一、二定律发表于 1609 年, 第三定律发表于 1619 年. 这三定律是

一、每个行星沿一条椭圆轨道运动, 太阳位于椭圆轨道的一个焦点上.

二、以太阳为原点, 每个行星的径向量在单位时间内扫过的面积不随时间变化.

三、行星绕太阳运动的周期的平方与它的椭圆轨道半长轴的立方成正比.

由开普勒第一、二定律可以立刻判断, 行星是在以太阳为力心的中心力场作用下运动. 进一步的分析还可了解这一中心力场的具体形式. 办法是算出行星运行的加速度, 按牛顿第二定律乘上行星的质量就得到它受到的力.

既然是考虑中心力作用下的平面运动, 自然宜用平面极坐标. 以太阳所在的焦点为原点, 以指向近日点的长轴为极轴, 行星的轨道椭圆可用方程

$$r = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta} \tag{1.41}$$

表示, 其中 e 为偏心率

$$\eta = a(1 - e^2),$$

a 为半长轴的长度. 将(1.38)中的速度对时间求微商可得加速度. 在这样做时, 要注意单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 随着粒子运动而变化方向, 因此也应当对时间求

微商.可直接看出

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = -\dot{\theta}\boldsymbol{r}_0, \tag{1.42}$$

因此加速度为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{\theta}_0. \tag{1.43}$$

对于中心场中的运动,由面积定理(1.40)知

$$r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0, \tag{1.44}$$

故(1.43)变为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}_0. \tag{1.45}$$

加速度在径向上.这对中心场中的运动是理所当然的.运动中 r 与 θ 均为时间 t 的函数,因而彼此有函数关系 $r(\theta)$,它表示运动的轨迹.利用这种关系可将随时间的变化只用一个函数 $\theta(t)$表示,而有

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta},$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta}^2 + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\ddot{\theta} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]\dot{\theta}^2,$$

最后一等式处用了(1.44).代入(1.45)得

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - r\right]\dot{\theta}^2\boldsymbol{r}_0, \tag{1.46}$$

采用变量 $u = \dfrac{1}{r}$可简化此式:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\dot{\theta}^2\boldsymbol{r}_0 = -h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\boldsymbol{r}_0, \tag{1.47}$$

其中 $h = r^2\dot{\theta}$ 为常数面积速度.将行星椭圆轨道(1.41)用变量 u 表示:

$$u = \frac{1}{\eta}(1 + e\cos\theta), \tag{1.48}$$

代入(1.47)得行星加速度

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{h^2u^2}{\eta}\boldsymbol{r}_0 = -\frac{h^2}{\eta r^2}\boldsymbol{r}_0. \tag{1.49}$$

按牛顿第二定律知质量为 m 的行星受的力为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mh^2}{\eta}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_0. \tag{1.50}$$

利用开普勒第三定律可进一步确定此力.在一周期 τ 中行星向径扫过椭圆轨道包围的全部面积 πab,其中 $b = a\sqrt{1-e^2}$为椭圆的半短轴的长度.因而有

$$h\tau = 2\pi ab = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}. \tag{1.51}$$

由此可得周期平方与轨道半长轴立方之比

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a(1-e^2)}{h^2} = \frac{4\pi^2\eta}{h^2}. \tag{1.52}$$

按开普勒第三定律此值对太阳系的所有行星相同，记作$\frac{4\pi^2}{k^2}$，k^2 称为太阳的高斯(K.F.Gauss)常数.于是(1.50)进一步具体化为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mk^2}{r^2}\boldsymbol{r}_0. \tag{1.53}$$

行星受的力指向太阳，大小与行星质量成正比，而与行星和太阳之间距离平方成反比，比例常数 $k^2>0$ 即为高斯常数.与距离平方成反比的力统称平方反比力.太阳与行星间的吸引力就是一种平方反比力.

采用中心场的形式(1.30)和中心场中的加速度表示式(1.47)，牛顿第二定律(1.4)给出

$$-h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = \frac{F}{m}, \tag{1.54}$$

它规定了粒子在中心场中的径向运动.对平方反比力，

$$\frac{F}{m} = -\frac{A}{r^2} = -Au^2, \tag{1.55}$$

A 为与坐标无关的常数.$A>0$ 代表吸力，$A<0$ 代表斥力.对太阳与行星间的吸引力，$A=k^2$即高斯常数.电荷间的静电力也是平方反比力.同种电荷间为斥力，$A<0$;异种电荷间为吸力，$A>0$.将(1.55)代入(1.54)得平方反比中心力作用下的径向运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{1}{\eta}, \tag{1.56}$$

其中

$$\eta = \frac{h^2}{A} \tag{1.57}$$

为常数.(1.56)为具常数非齐次项的常系数线性微分方程，通解为

$$u = \frac{1}{\eta}[1 + e\cos(\theta - \theta_0)], \tag{1.58}$$

e 和 θ_0 为积分常数.选取适当极轴方向可使 $\theta_0=0$，从而有

$$r = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta}, \tag{1.59}$$

即平方反比力作用下粒子的轨迹恒为圆锥曲线.对吸力 $\eta>0$，$|e|<1$ 时，轨迹为椭圆.其中 $e>0$ 表示 $\theta=0$ 处为近日点，$e<0$ 表示 $\theta=0$ 处为远日点.$|e|=1$ 时轨迹为抛物线，太阳在焦点上.其中 $e>0$ 表示 $\theta=0$ 处为抛物线的顶点，$e<0$ 表示 $\theta=\pi$ 处为抛物线的顶点.η 为抛物线的焦点与准线的距离.

$|e|>1$时轨迹为双曲线，实际上是双曲线的一支，太阳在这一支的焦点上．其中 $e>0$ 表示 $\theta=0$ 处为这一支双曲线的顶点，$e<0$ 表示 $\theta=\pi$ 处为这一支双曲线的顶点．受太阳吸引而作抛物线或双曲线运动的星体为彗星．

力(1.50)的势能为

$$V(r)=-\frac{mA}{r}. \tag{1.60}$$

由(1.59)和(1.57)知，运行到 θ 方向时势能为

$$V=-\frac{mh^2}{\eta^2}(1+e\cos\theta). \tag{1.61}$$

另一方面，由(1.20)和(1.38)知，按(1.59)运行的粒子动能为

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2\right]\dot{\theta}^2=\frac{mh^2}{2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2\right]=\frac{mh^2}{2\eta^2}(1+2e\cos\theta+e^2). \tag{1.62}$$

与(1.61)相加得总能量

$$E=\frac{mh^2}{2\eta^2}(e^2-1). \tag{1.63}$$

沿椭圆轨道运动的粒子 $e^2<1$，具负能量，沿抛物线轨道运动的粒子 $e^2=1$，具零能量；而沿双曲线轨道运动的粒子 $e^2>1$，具正能量．

对排斥的平方反比力，$\eta<0$．为保证 $r\geqslant 0$，必须 $|e|>1$，且在 $e<0$ 时只在 $|\theta|\leqslant\arccos\frac{1}{|e|}$ 的方向上运动；在 $e>0$ 时只在 $|\pi-\theta|\leqslant\arccos\frac{1}{e}$ 的方向上运动．运动的轨迹也是双曲线的一支，只是斥力心在这一支以外的另一焦点上．斥力情形下的势能(1.60)，动能(1.62)和总能(1.63)自然均大于零．

§1.6 作用与反作用 牛顿第三定律 无外力作用的多体系动量守恒与角动量守恒

从日常经验就能了解，作用总伴随着反作用．甲用力作用于乙，乙就会对甲反作用以力，且作用力越大反作用力也越大．只是在对力有了科学定义和度量方法以后才能对作用力和反作用力作定量比较．比较的结果表明：

‘作用力与反作用力大小相等，方向相反，且作用在一条直线上．’

这就是牛顿第三定律．对两个力而言，作用在一条直线上包括以下含义：受力物体可用一个点代表，称为力的作用点；将力矢量标在它的作用点上；作用力矢量、反作用力矢量、以及联结这两个力作用点的直线共线．这个论断也可简单准确地表示为：作用力与反作用力皆平行于联结这两个力作用点的直线．和其他牛顿定律一样，这个定律的正确性也不只是为一两个实验证实，而

在于它的全部结论与人类在经典力学适用范围内迄今的全部经验一致.下面先看它的两个重要结论:在无外力作用的系统中总动量和总角动量分别守恒.

考虑两个粒子,分别称为粒子 1 和粒子 2,它们组成一个系统.设这个系统不受外力作用.即粒子 1 受的力 $\boldsymbol{F}_1$ 完全由粒子 2 提供,粒子 2 受的力 $\boldsymbol{F}_2$ 则完全由粒子 1 提供.这是一对作用力与反作用力,因此

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0. \tag{1.64}$$

用 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 分别表示 1、2 两粒子的动量,并定义它们的总动量

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2. \tag{1.65}$$

由(1.16)和(1.64)得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0, \tag{1.66}$$

即总动量在系统运动过程中守恒.类似地,用 $\boldsymbol{r}_i$ 表示第 i 粒子的径矢量,$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ 表示第 i 粒子的角动量,定义总角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2. \tag{1.67}$$

用 m_i 表示第 i 粒子质量,由(1.15)和(1.16)得

$$\dot{\boldsymbol{L}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \frac{1}{m_i}\boldsymbol{p}_i \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{J}_i, \tag{1.68}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i \equiv \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{1.69}$$

为第 i 粒子受到的力矩.由(1.64)知

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{L}}_1 + \dot{\boldsymbol{L}}_2 = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 = 0. \tag{1.70}$$

最后一个等号处用到作用力与反作用力在一条直线上的论断.$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 为由粒子 1 指向粒子 2 的矢量,按此论断应与 $\boldsymbol{F}_2$ 平行或反平行,因而与 $\boldsymbol{F}_2$ 的矢量积为零.(1.70)表明,这个二粒子系的总角动量在运动过程中守恒.

一般地考虑 N 粒子系.用下标 $i = 1, 2, \cdots, N$ 表示一个量是属于 i 粒子的.粒子系的总动量为

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i, \tag{1.71}$$

总角动量为

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i. \tag{1.72}$$

由(1.16)得

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i, \tag{1.73}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{L}}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{J}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i. \tag{1.74}$$

用 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 表示 j 粒子对 i 粒子的作用力，$\boldsymbol{J}_{ij}$ 表示这个力产生的对 i 粒子的力矩. 由前面对二粒子系的讨论知，牛顿第三定律保证

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}, \qquad \boldsymbol{J}_{ij} = -\boldsymbol{J}_{ji}. \tag{1.75}$$

如果没有外力作用，

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{N}{}' \boldsymbol{F}_{ij}, \qquad \boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N}{}' \boldsymbol{J}_{ij}. \tag{1.76}$$

和上式一起，导致

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i,j=1}^{N}{}' \boldsymbol{F}_{ij} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{J}_i = \sum_{i,j=1}^{N}{}' \boldsymbol{J}_{ij} = 0. \tag{1.77}$$

上面和号上的一撇表示其中不含 $i=j$ 的项. 将此式代入(1.73)和(1.74)得

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{L}} = 0, \tag{1.78}$$

即总动量和总角动量守恒. 不受外力作用的系统总动量守恒和总角动量守恒是牛顿第三定律的直接结果. 它们的普遍成立也就是牛顿第三定律普遍成立的证据. 值得注意的是，总动量守恒只要求作用力与反作用力大小相等方向相反，而总角动量守恒则进一步要求此二力作用在一条直线上. 若二力不作用在一条直线上，则形成力偶，总力矩不为零.

§1.7 牛顿万有引力定律 引力常数与卡文迪什实验[①] 用地面单位称天体质量

太阳对行星的引力(1.53)大小为 $\frac{mk^2}{r^2}$，方向由行星指向太阳. 按牛顿第三定律，行星也应对太阳有引力，方向由太阳指向行星，大小也是 $\frac{mk^2}{r^2}$. 即吸引是相互的. 太阳对行星吸引力的大小既正比于行星的质量 m，行星对太阳的吸引力大小就应正比于太阳的质量 M，可见它们之间相互吸引力的大小正比于 mM. 这要求太阳的高斯常数

$$k^2 = GM, \tag{1.79}$$

$G>0$ 为引力常数. 由此可将太阳对行星的引力(1.53)表示为

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0, \tag{1.80}$$

引力势表示为

---

① H. Cavendish, *Phil. Trans. Roy. Soc.* London, **18**(1798)388.

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r}. \tag{1.81}$$

固定太阳位置，将此势对行星坐标求负梯度，即得太阳对行星的吸引力(1.80)；固定行星位置，此势对太阳坐标的负梯度即为行星对太阳的吸引力.由于每一物体均有质量，表达式(1.80)或(1.81)有普遍性.于是牛顿设

“有引力作用在每一对物体之间，其大小与这二物体的质量成正比，与它们距离的平方成反比.”

这就是牛顿万有引力定律.可将(1.80)或(1.81)一般地作为万有引力定律的数学表示式，只须将其中的 M 和 m 解释为互相吸引的两物体的质量，对太阳与行星间的吸引力，它们就是太阳和行星的质量.由高斯常数的定义和(1.52)知

$$k^2 = \frac{h^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}. \tag{1.82}$$

行星轨道半长轴长度 a、偏心率 e 和运行的面积速度 h 都可从天文观测中定得，代入此式即得太阳的高斯常数 k^2.如果知道太阳质量 M 即可求得引力常数 $G = k^2/M$，从而使万有引力表达式(1.80)和(1.81)成为确定的.为此要测量太阳的质量.

测量一个量先要选取这个量的单位.由(1.82)知高斯常数的量纲为(长度)^3(时间)$^{-2}$，选定长度和时间单位后，它就是一定的数.例如，在标准单位制中，长度单位为米，用 m 表示；时间单位为秒，用 s 表示.实测得的太阳的高斯常数为

$$k^2 = 1.327 \times 10^{20}\mathrm{m^3 s^{-2}}. \tag{1.83}$$

至此质量单位尚未确定，可以任选.惟一的限制是保持牛顿第二定律的表达式(1.4)成立.这要求力的单位与质量的单位保持一致.在时间和长度的单位已定，从而加速度的单位也已确定的情况下，力的单位与质量的单位只能以同样的倍数增大或缩小.如果规定质量的单位是基本的，力的单位跟随质量单位变化，质量单位就可任意变化.在天体力学中可以一个天体的质量为单位去称其他天体的质量.在这种情况下，按(1.79)，引力常数 G 与被当作质量单位的那个天体的高斯常数 k^2 在数值上相等.太阳质量常被作为质量单位，并记作 $M_\odot$.如果采用这一质量单位，而长度和时间单位仍分别用 m 和 s，则引力常数的值就是 1.327×10^{20}.由于引力常数 G 对所有物体被设为相同的，一个天体的高斯常数正比于它的质量.用一个天体的质量去衡量另一天体的质量，就是用它的高斯常数去衡量那个天体的高斯常数.对一个有卫星的行星或有行星的恒星，可用(1.82)求得它的高斯常数.这只需将观测到的卫星或行星的运行周期 τ 和轨道半长轴长度 a 代入此式右端即可.对我们居住的地球事情更

简单.除用月球轨道数据外,还可用地球半径 R 和重力加速度 g 来计算地球的高斯常数.由(1.53)和牛顿第二定律(1.4)知,它应为

$$k'^2 = R^2 g. \tag{1.84}$$

取 $R = 6.38 \times 10^6 \mathrm{m}$, $g = 9.80\ \mathrm{ms}^{-2}$,得

$$k'^2 = 3.99 \times 10^{14} \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^{-2}, \tag{1.85}$$

从而得地球质量为

$$M_\oplus = 3.01 \times 10^{-6} M_\odot. \tag{1.86}$$

设月球绕地球作圆周运动,即近似取其轨道偏心率 $e = 0$,轨道半长轴 a 就是此轨道圆周的半径,并取其值为 $3.84 \times 10^8 \mathrm{m}$.取它的运动周期的为 27.3 日 = $2.36 \times 10^6 \mathrm{s}$.代入(1.82),得到的地球高斯常数为 $4.02 \times 10^{14} \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^{-2}$.它与(1.85)表示的值在 1% 范围内精确相符.这 1% 的差别除由于计算中的近似处理外,还来自其他天体对月球和地面物体的吸引力有细微差别.对月球运行和地面落体的统一理解是牛顿万有引力定律的重要依据.

取 $G = 1$ 的单位制在引力理论中是方便的,就像高斯单位制在电磁理论中极为方便一样.在这种单位制中一个天体的质量在数值上等于它的高斯常数.几何单位制即这种单位制,它取 $G = c = 1$, c 为光速.此外它以厘米为长度单位,记作 cm.时间不再是独立的单位,它的单位为

$$1\mathrm{cm}/c = 1\mathrm{cm}. \tag{1.87}$$

原来的时间单位秒现在是

$$1\mathrm{s} = 2.99792458 \times 10^{10} \mathrm{cm}, \tag{1.88}$$

太阳的质量现在是

$$M_\odot = k^2 = 1.476 \times 10^5 \mathrm{cm}, \tag{1.89}$$

而地球的质量则为

$$M_\oplus = k'^2 = 0.444\mathrm{cm}. \tag{1.90}$$

物理学致力于对宇宙的统一理解.因此必须把天体力学和地面上的力学纳入同一框架.这就要把天体力学的单位制与地面上的单位制统一起来,用地面上的单位来称天体质量.例如采用标准单位制:以 m、s 和 kg 分别作长度、时间和质量的单位,质量单位 kg 读作千克.如果能测得标准单位制中的引力常数 G,即可用(1.79)从测得的高斯常数定出标准单位制中的天体质量.不过,为测地面单位制中的引力常数,必须测量用地面单位称过的物体间的万有引力,即测地面物体间的万有引力.由于这种力很小,这种测量是极为困难的.卡文迪什是做出这种测量的第一人,这类实验就称为卡文迪什实验.

卡文迪什将两端挂着小球的轻横梁悬在一根细丝上.在横梁两侧靠近小球的地方各放一个重铅球,铅球对小球的引力使横梁绕细丝转动.观测达到平衡时的扭转角,由细丝的扭转弹性系数即可测得小球受到的铅球的引力.卡文

迪什在1798年测得的引力常数为 $6.754\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. 引力常数是一个极为重要的常数,在卡文迪什以后,人们一再对它测量,以改进精度. 它的最新值是①

$$G = 6.67259\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}. \tag{1.91}$$

相应的太阳质量为

$$M_\odot = 1.989\times10^{30}\mathrm{kg}. \tag{1.92}$$

§1.8 多体系 相对运动与质心运动的分离 折合质量

在讨论行星绕日运动时,设太阳是不动的,它只是提供一个引力心,只有行星在绕日运动. 这自然是一种近似. 实际上太阳和众行星都在运动. 它们是一个运动的多体系统,其中每一物体的运动都遵从牛顿运动方程. 在一个 N 体系中,第 i 粒子的运动方程为

$$\boldsymbol{F}_i = m_i\boldsymbol{a}_i, \qquad i = 1,2,\cdots,N, \tag{1.93}$$

各量的下标 i 表示这是第 i 物体的量. 这一组 N 个矢量方程组成 N 体运动方程的完备系,由此可解出 N 体运动.

两体问题是最简单的多体问题. 没有外力作用的两体问题特别简单. 它的运动方程为

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_1, \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_2, \tag{1.94}$$

且

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2. \tag{1.95}$$

定义两体的相对坐标和质心坐标

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \qquad \boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.96}$$

将(1.94)中两式相加,由(1.95)知

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{1.97}$$

即两体质心作匀速运动,是自由的. 将 m_2 除第二式减去 m_1 除第一式,(1.94)导致

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_2, \tag{1.98}$$

其中也用到(1.95). 定义物体2相对物体1的加速度

---

① Particle data group, *Phys. Rev.*, **D50**(1994)1233.

$$\boldsymbol{a} \equiv \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{1.99}$$

物体 1 对物体 2 作用的力

$$\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}_2, \tag{1.100}$$

并由

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{1.101}$$

定义折合质量 μ,(1.98)可表示为

$$\boldsymbol{F} = \mu\boldsymbol{a}. \tag{1.102}$$

此式和(1.97)表明,无外力作用的两体问题严格等价于两个单体问题.其中一个单体为这两体的质心,它自由地作等速直线运动.另一单体问题中两体中的一体被看作不动的,另一体相对这个'不动'物体的运动可由单体牛顿运动方程(1.102)描写.其中等效运动物体受的力就是'不动'物体对运动物体作用的力,只是质量已不是运动物体的质量 m_2,而是折合质量 μ.换句话说,将 m_2 换成 μ 就相当于考虑了物体 1 的运动.

若两物体受外力作用,但外力不破坏关系(1.95),即外力对两物体的作用也是大小相等方向相反的,则上述结论不变.带有大小相等符号相反电荷的两物体在均匀外电场作用下的运动即属这种情形.若两物体受外力,且外力破坏关系(1.95),但每一物体上受的外力与该物体的质量成正比,则(1.97)变为

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_t \tag{1.103}$$

其中 $M = m_1 + m_2$ 为二体系的总质量,$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ 为二体系统受到的总力.由于二物体间彼此作用的力大小相等方向相反,这个总力即总外力,亦即二物体所受外力之和.在这种情形下(1.102)不变,不过其中的力 $\boldsymbol{F}$ 已不由(1.100)表示,它不是第二物体受的全部力,而只是其中第一物体对第二物体作用的内力.可见这类二体问题也等价于两个单体问题.其中质心运动满足牛顿运动方程(1.103),好像是一个质量为二体总质量的物体在总外力作用下的运动.相对运动则可看成一个物体在另一物体内力作用下的运动.这另一物体好像是不动的,它的运动仅表现为相对它运动物体的质量改为折合质量.在均匀外引力场中两物体的运动属这种情形,在同样引力场中各物体受的力与该物体的质量成正比.前面讨论月亮绕地球运动时没有理会太阳的引力.然而,虽然月日距离比月地距离大三个量级,按平方反比律这会使引力减小六个量级,但太阳的质量比地球的质量大六个量级,这使它的引力也大六个量级.总的结果是太阳对月球的引力与地球对月球的引力同数量级,即相差不足十倍.仔细的估计还表明,太阳对月球的引力甚至比地球对月球的引力还略大.在这

种情况下讨论月地运动不理会太阳的引力对吗？由于月地距离比地日距离小三个量级，在太阳看来月地就是一个点，在月地所在的空间小范围内太阳提供的引力场可以很好地当作均匀的，月球和地球受到的太阳引力分别与各自的质量成正比.这就使月地相对运动可以很好地近似为与太阳的引力无关，只是在计算中要考虑地球的运动，而这又只表现为要将月球质量用月地折合质量代替，在这种替代后地球可当作不动的.太阳引力的作用是使月地二体系的质心像一个质量为月地总质量的物体那样运动.

多体系运动的问题称多体问题.多体问题随其中物体数目增多而迅速变得越来越复杂.三体或更多体的问题已无一般求解方法，只能按具体情况设计专门的解法.只在个别情况下能得到精确解.大多数情况要求助于近似方法.如果其中各物体均不受作用，情况自然简单，各物体分别作等速直线运动就是.也可换一种观点来看这种情形.既然都不受力，其中任何一对物体的运动都可等效地看成自由的质心运动和自由的相对运动.其中自由运动的质心又可与另一自由运动的物体或质心组成自由运动的二体系，并将这个系统的运动分解为自由的质心运动和自由的相对运动.如此不断进行下去，最后将那个多体系的运动分解成它的质心运动和它内部各种相对运动的集合.为完善这一概念还须证明，如此一级一级求出的多体系的质心和直接求出的质心是同一的.设将 N 体系分成两部分，分别含 N_1 个物体和 N_2 个物体，$N_1+N_2=N$.第 1 部分的质心坐标为

$$\boldsymbol{R}_1=\frac{\sum_{i=1}^{N_1}m_i\boldsymbol{r}_i}{M_1},\qquad M_1=\sum_{i=1}^{N_1}m_i, \tag{1.104}$$

第 2 部分的质心坐标为

$$\boldsymbol{R}_2=\frac{\sum_{i=N_1+1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i}{M_2},\qquad M_2=\sum_{i=N_1+1}^{N}m_i. \tag{1.105}$$

这两部分的质心坐标为

$$\boldsymbol{R}=\frac{M_1\boldsymbol{R}_1+M_2\boldsymbol{R}_2}{M_1+M_2}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i}{M},\quad M=\sum_{i=1}^{N}m_i, \tag{1.106}$$

它就是整个多体系的质心.这就证明了上面要求的同一性.

现在设这些物体间有相互作用，不过其中有一个特别物体，就称它为物体 1.它对其他每一个物体的作用远大于其他物体间的作用，且它的质量远大于其他任何物体的质量.对这种多体系可依次将一个物体与物体 1 或含物体 1 的子多体系的质心组成二体系，分解出新的质心运动和相对运动.由于物体 1

的质量远大于其他物体的质量,每次求出的质心位置都几乎与物体 1 的位置重合,而新加进来的物体与原已组成的子多体系的质心的相对运动实际就是这个物体与物体 1 的相对运动.它与子多体系的折合质量也几乎就是它与物体 1 的折合质量.又由于物体 1 对其他物体的作用远大于其他物体间的作用,物体与物体 1 或含物体 1 的子多体系质心的相对运动主要就由物体 1 对这个物体的作用决定.可见,这种多体系运动的基本形象就是物体 1 与其他一个个物体分别组成的二体系运动的综合.相对于这一基本形象的偏差是小的,可用近似方法计算,这将在以后讨论.太阳系就是这种多体系,其中太阳就是特别物体,它的质量比其中各行星的质量大许多量级.最重的行星是木星,质量也仅是太阳质量的千分之一.水、金、地、火等几颗主要行星质量都比太阳质量小百万倍左右.除小行星以外的最轻的行星是冥王星,质量不到太阳质量的一亿分之一.太阳系的质心几乎与太阳位置重合.即使所有行星在太阳一侧排成一条直线时,太阳系的质心离太阳表面也仅约一个太阳半径的距离.用

$$1\text{ 天文单位(ua)} \equiv \text{地日平均距离} = 1.49598 \times 10^{8}\text{km} \tag{1.107}$$

衡量,太阳半径

$$6.9599 \times 10^{5}\text{km} = 4.652 \times 10^{-3}\text{ua} \tag{1.108}$$

是可以忽略不计的.离太阳最近的行星——水星离太阳的距离也比太阳半径大约百倍.比较太阳对行星的作用和行星间的作用,由于引力与距离平方成反比而与各星球的位置有关.一般说来,太阳对行星的作用确实远大于行星间的作用.在这种情况下,太阳系内的运动可很好地近似为各行星分别在太阳作用下的运动.其他行星的影响可当作小"摄动".天体力学已发展了系统的"摄动论"来考虑这些小摄动的影响.

习 题 一

1. 设垂直下落的物体同时受到不变的空气阻力,列出并求解它的运动方程,讨论初速度为零、高度一定的落体落地时间与它的质量的关系.

2. 同时考虑重力与空气阻力对运动物体的作用.其中,空气阻力的方向与运动方向相反,大小正比于运动速率.列出并求解物体的运动方程,对垂直下落、平抛和斜抛等情况分别作出讨论.

3. 设水滴在湿度已饱和的空气中下落,空气中的水蒸气继续在水滴上凝聚,单位时间的凝聚量与水滴表面积成正比.由于一定凝聚量导致的水滴半径增量与水滴表面积成反比,水滴半径与时间呈线性关系.设空气阻力与水滴横截面积成正比,列出并求解水滴下落的运动方程.

4. 设火箭垂直向上发射.用 m 和 v 分别表示它在 t 时刻的质量和向上运动的速度.向下喷射的气体相对于火箭本身的速度 v_0 为常数.试证它的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - mg, \tag{1.109}$$

g 为重力加速度.设 g 为常数,单位时间内喷射气体的质量正比于火箭质量,即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -fm, \tag{1.110}$$

f 为常数,试由(1.109)解出火箭所达高度 x 与时间 t 的关系.若单位时间内火箭喷射气体的质量 μ 为常数,x 与 t 的关系又当如何.

5. 设沿 x 方向作一维运动的粒子除受恢复力 $-kx$ 的作用外还受一强迫力 $f\sin(\omega' t)$ 的作用,k、f 和 ω' 为独立常数.列出和求解这个强迫振动的粒子的运动方程.讨论粒子振动的振幅和圆频率 ω' 的关系,特别是 ω' 接近固有频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 时的共振现象.m 为粒子的质量.

6. 设上题中的振子还受一阻尼力 $-\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的作用,γ 为常数,列出并求解它的运动方程,讨论共振现象.

7. 设第 5 题中的强迫力改由任意函数 $F(t)$ 表示,试证运动方程的通解为

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) + \frac{1}{2m\omega}\left\{\int_{-\infty}^{t} \sin[\omega(t-s)]F(s)\mathrm{d}s + \int_{t}^{\infty} \sin[\omega(s-t)]F(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{1.111}$$

其中 A 与 δ 为积分常数.

8. 设一质量为 m 的粒子在恢复力

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} \tag{1.112}$$

作用下作三维运动,其中 k 为常数,$\boldsymbol{r}$ 为粒子的径矢量.这种粒子叫三维各向同性谐振子.列出并求解它的运动方程.试证

(1)它作平面运动;

(2)它遵守面积定理;

(3)它的轨道为一以原点为中心的椭圆周(包括圆周);

(4)它的运动周期与椭圆半长轴长度无关而只与振子质量 m 和恢复力常数 k 有关,即为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1.113}$$

9. 已知地球半径 $R = 6.38 \times 10^6$m,地表重力加速度 $g = 9.80\ \mathrm{ms}^{-2}$,试计算

(1)标准单位制中的地球质量;

(2)能绕地球飞行的最低速度(第一宇宙速度);

(3)能逃离地球的最低速度(第二宇宙速度);

(4)能从地球逃离太阳系的最低速度(第三宇宙速度).

10. 试证质量为 m_1 和 m_2,速度为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的两粒子总动量为

$$\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \equiv m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = M\boldsymbol{V}, \tag{1.114}$$

其中 $M = m_1 + m_2$ 为两粒子总质量,

$$\boldsymbol{V} \equiv \dot{\boldsymbol{R}} \tag{1.115}$$

为质心运动速度,$\boldsymbol{R}$ 为(1.96)定义的质心坐标;总动能为

$$T \equiv T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \equiv \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2, \tag{1.116}$$

其中 μ 为(1.101)定义的折合质量,

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1 \equiv \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \tag{1.117}$$

为两粒子相对运动速度,$\boldsymbol{r}$ 为(1.96)定义的相对坐标.

11. 设在一惯性系中看,起始时粒子 1 是静止的,称为靶粒子,粒子 2 以速度 $\boldsymbol{v}_2$ 向粒子 1 运动,称为入射粒子.这种坐标系叫实验室坐标系.其中两粒子的质心以速度

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_2}{M}\boldsymbol{v}_2 \tag{1.118}$$

等速直线运动.可见,跟随质心运动的坐标系也是惯性系,称质心系,从其中看质心是静止的.质心系与实验室系间由伽利略变换联系.试证

(1)两粒子间的相对速度在伽利略变换下不变,因此质心系中的相对运动速度就是实验室系中的相对运动速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$;

(2)质心系中两粒子的总动能 T' 与实验室系中两粒子的总动能 T 之间有关系

$$T' = \frac{\mu}{m_2}T = \frac{m_1}{M}T. \tag{1.119}$$

12. 设一个原子核分裂成两个核,质量分别为 m_1 和 m_2,并放出能量 E.问这两个子核各分得多少能量?

13. 设入射粒子 2 轰击靶粒子 1 并将它激发.粒子 1 的激发态能量与它的起始态能量差为 E.要实现这种碰撞,粒子 2 入射能量至少要多高?

14. 设质量相同的两个粒子互相散射,在质心系中看,各散射到 90°方向.试证,在实验室系中看,这一散射中入射粒子的散射方向与靶粒子的反冲方向分别在入射方向两侧 45°处.

第二章　运　动　学

从本章起，在牛顿力学基础上，逐步系统展开经典力学理论．理论物理要求有明确定义的概念和完整的原理，一切应由此逻辑地导出．通常将力学分成运动学、静力学和动力学三部分．运动学研究运动的描述．静力学研究静止的条件，动力学则研究运动的规律．本章介绍运动学．

§2.1　质点与质点系　坐标与广义坐标　机械运动和轨道方程

力学研究机械运动，即物体位置的移动．为了描述这种运动，首先要描写物体的位置．如果一个物体尺度比起它在空间移动的尺度来可以忽略不计，就可以把该物体当作一个点，称为质点．质点的位置可由它的空间坐标描述．在讨论绕太阳的公转时，每颗行星都可当作质点，太阳也可当作一个质点．如果一个作机械运动的系统可分解为若干部分，每一部分都可当作一个质点，就称为一个质点系．在研究太阳系内行星与太阳的相对运动时，太阳系就是一个质点系．同一个物体在不同问题中要作不同对待．例如，当研究太阳内部的运动时，就不能把它当一个质点．此时研究的是太阳内各部分的位置移动，这种移动的尺度自然比太阳本身的尺度小．为了研究这种运动，可将太阳人为分割成许多部分，每一部分的尺度比这种运动的尺度小得多．可把这每一部分当作一个质点，太阳成了一个质点系．太阳内部的运动可当作一个质点系的运动．行星内部运动也是这样．例如，地球有自转，大气层风起云涌，河流、海洋环流和地震等等．为了研究这些运动，要把地球人为地划分为许多小部分，每一部分的尺度比它所参与的运动范围尺度小得多．这每一小部分就可看作一个质点，地球也成了一个质点系，地球内部的运动就是这个质点系的运动．这种做法显然有普遍性．经典力学研究的物体都可细分为质点系，物体的机械运动也都可当作适当分成的质点系的运动．将质点系中各质点位置的集合定义为质点系的位置．又称质点系的位形或组态．将其中各质点坐标的集合定义为质点系的坐标．质点系的位置就由它的坐标描述．质点系的机械运动即其中各质点的位置移动，可由它的坐标随时间变化的函数关系表示．坐标随时间变化的函数关

系称轨道方程，可用来描述系统的机械运动．例如，取互相垂直交于一点 O 的三条固定直线为轴，分别称为 x、y 和 z 轴，组成 $O\,xyz$ 坐标系．每一质点的位置可由沿三轴的坐标(x、y、z)表示．此坐标称为笛卡儿(Descartes)坐标．含 N 个质点的质点系的位形可由 $3N$ 个笛卡儿坐标($x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N$)表示，其中($x_i, y_i, z_i$)为第 i 质点的笛卡儿坐标．$3N$ 个坐标可对应 $3N$ 维空间的一个点．这样定义的 $3N$ 维空间称 N 质点系的位形空间．N 质点系的位形在其中对应的一点称为这个 N 质点系的代表点．随着时间的推移，质点系的位形变化，它的代表点便在 $3N$ 维位形空间划出一条轨道．表示坐标随时间 t 变化的函数集($x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \cdots, x_N(t), y_N(t), z_N(t)$)完全描述了这条轨道，故称为轨道方程．

一个质点的位置也可用其他类型的坐标表示．例如球坐标(r, θ, φ)，它与笛卡儿坐标(x, y, z)的关系为

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}, \\ x &= r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

如图 2-1 所示；又如柱坐标(ρ, θ, z)，它与笛卡儿坐标的关系为

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \\ x &= \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

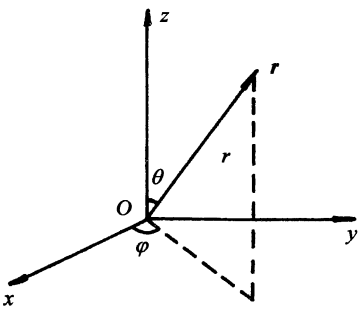

图 2-1　球坐标

z 共用，如图 2-2 所示；等等．这些坐标统称曲线坐标．相应地，含 N 个质点的质点系的位形可用 $3N$ 个曲线坐标表示．质点系的坐标并不一定是各质点坐标的集合．可按(1.96)引进两质点的质心坐标 $\boldsymbol{R}$ 和相对坐标 $\boldsymbol{r}$，它们同样可描述两质点系的位形．一般地说，如果一组明确定义的数能确定地描述一个系统的位形，就称它是这个系统的一组广义坐标．

其实，经典力学研究的任何物体或物体的任何部分都不是一个点．质点只是一种抽象概念，就像几何学中的点本身就是一种抽象概念一样．以质点系为对象的理论力学实际是力学的数学模型．建立数学模型是理论物理的一般方法．正是这种抽象方法使人们得以对力学作彻底分析，揭示其本质，从而比它的原始形态更好地逼近了实际．

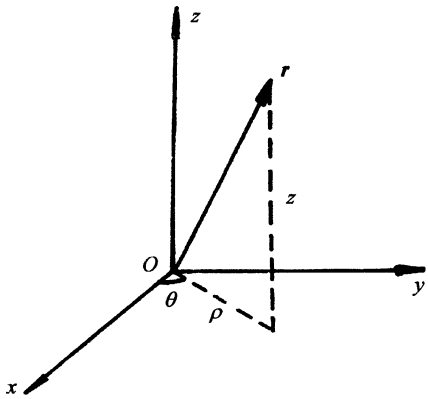

图 2-2　柱坐标

§2.2　质点的位置、速度和加速度等力学量用笛卡儿坐标和曲线坐标的表达式

机械运动既可理解为质点系的位置移动，对质点运动的描述就是对一般机械运动描述的基础．在时刻 t，质点的位置由此时的径矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示．速度为径矢量对时间的微商

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{2.3}$$

加速度则是速度对时间的微商

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

力学量之间关系的这种矢量形式与坐标种类的选择无关．不过，为了得到关系的具体形式还须选择适当坐标架将矢量表示出来．例如选择固定在空间的正交坐标架 $O\,xyz$，沿 x、y 和 z 轴的单位矢量 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 是固定的．径矢量

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{x}_0 + y(t)\boldsymbol{y}_0 + z(t)\boldsymbol{z}_0 \tag{2.5}$$

由它的笛卡儿坐标 (x, y, z) 表示．这种坐标中任一坐标为常数的点组成一平面，这些面之间的交线为直线．由于基矢 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 是固定的，矢量的微分只是各分量的微分．于是用笛卡儿坐标表示的速度为

$$\boldsymbol{v} \equiv v_x\boldsymbol{x}_0 + v_y\boldsymbol{y}_0 + v_z\boldsymbol{z}_0, \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \tag{2.6}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{x}_0 + a_y\boldsymbol{y}_0 + a_z\boldsymbol{z}_0, \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \tag{2.7}$$

采用曲线坐标时情形变复杂,要选择与这种坐标相适应的单位矢量构造坐标架.例如采用球坐标(r,θ,φ)时可选取互相垂直的三个单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$,$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 做成正交坐标架.其中 $\boldsymbol{r}_0$ 沿径向 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{\theta}_0$ 在 $\boldsymbol{z}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 构成的平面内指向 θ 增加的方向,而 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 则垂直于 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 指向 φ 增加的方向.采用这种坐标架和球坐标,径矢量

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0 \tag{2.8}$$

有最简单的形式.然而这种坐标架在各点是不同的.例如,在球坐标为(r,θ,φ)的点,

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0 &= \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 + \cos\theta\boldsymbol{z}_0,\\ \boldsymbol{\theta}_0 &= \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 - \sin\theta\boldsymbol{z}_0,\\ \boldsymbol{\varphi}_0 &= -\sin\varphi\boldsymbol{x}_0 + \cos\varphi\boldsymbol{y}_0,\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

它们都随坐标(r,θ,φ)变化.在质点运动时,它的坐标随时间变,固定在它上面的球坐标架也跟着变.将(2.9)诸式两边对时间求微商,得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}_0 &= \dot\theta\boldsymbol{\theta}_0 + \sin\theta\dot\varphi\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = -\dot\theta\boldsymbol{r}_0 + \cos\theta\dot\varphi\boldsymbol{\varphi}_0,\\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0 &= -\sin\theta\dot\varphi\boldsymbol{r}_0 - \cos\theta\dot\varphi\boldsymbol{\theta}_0.\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

它们也可从简单的几何考虑直接得到.利用这些关系,得速度的球坐标表示

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot r\boldsymbol{r}_0 + r\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot r\boldsymbol{r}_0 + r\dot\theta\boldsymbol{\theta}_0 + r\sin\theta\dot\varphi\boldsymbol{\varphi}_0 = v_r\boldsymbol{r}_0 + v_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + v_\varphi\boldsymbol{\varphi}_0,\\ v_r &= \dot r, \qquad v_\theta = r\dot\theta, \qquad v_\varphi = r\sin\theta\dot\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

将此式两边再对时间求微商并用(2.10)得加速度的球坐标表示

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{r}_0 + a_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + a_\varphi\boldsymbol{\varphi}_0, \quad a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\dot\varphi^2,\\ &a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2, \quad a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta + r\ddot\varphi\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

如果质点只受中心力,则 $a_\theta = a_\varphi = 0$.这组方程的一个解是 $\theta = \frac{\pi}{2}$,$r^2\dot\varphi$ 为常数.它表示质点作平面运动,运动平面就是 xy 平面,且满足面积定理.此时 $a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2$,与(1.45)一致.在质点作圆周运动时 $\ddot r = 0$,此式更简化为

$$\boldsymbol{a} = -r\omega^2\boldsymbol{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{r}_0, \tag{2.13}$$

其中 $\omega = \dot\varphi$ 为质点绕原点转动的角速度值,$v = r\omega$ 为它的线速度值.(2.13)即通常向心加速度的表达式,它指向圆运动轨道的中心.

定义径矢在 xy 平面的分量

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0. \tag{2.14}$$

这个方向上的单位矢量为

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\rho}/\rho = \cos\theta \boldsymbol{x}_0 + \sin\theta \boldsymbol{y}_0, \tag{2.15}$$

(ρ, θ, z)为(2.2)式定义的柱坐标. $\boldsymbol{\rho}$ 与 z 方向的单位矢量 $\boldsymbol{z}_0$ 垂直. 再取垂直于 $\boldsymbol{z}_0$ 和 $\boldsymbol{\rho}_0$ 并指向 θ 增加方向的单位矢量

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -\sin\theta \boldsymbol{x}_0 + \cos\theta \boldsymbol{y}_0. \tag{2.16}$$

$\boldsymbol{\rho}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 组成一正交坐标架. 采用这种坐标架和柱坐标, 质点的径矢量可表示为

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{\rho}_0 + z\boldsymbol{z}_0. \tag{2.17}$$

这种坐标架也是随点而异的, 三个基矢中只有 $\boldsymbol{z}_0$ 固定: $\dot{\boldsymbol{z}}_0 = 0$. 由(2.15)和(2.16)得

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0, \qquad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = -\dot{\theta}\boldsymbol{\rho}_0. \tag{2.18}$$

将(2.17)两边对时间求微商, 再用此式得速度的柱坐标表示式

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_0 + \rho\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \dot{z}\boldsymbol{z}_0 = \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_0 + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0 + \dot{z}\boldsymbol{z}_0 \equiv v_\rho\boldsymbol{\rho}_0 + v_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + v_z\boldsymbol{z}_0, \\ &v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

将此式两边对时间微分, 再次用(2.18)得到加速度的柱坐标表示式

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a} \equiv a_\rho\boldsymbol{\rho}_0 + a_\theta\boldsymbol{\theta}_0 + a_z\boldsymbol{z}_0, \\ &a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho^2\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}, \quad a_z = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

利用微分几何知识可对质点运动的轨道更深入地了解. 曲线上两点 $\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1, z_1)$和 $\boldsymbol{r}_2(x_2, y_2, z_2)$间的曲线长度定义为

$$s \equiv \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \tag{2.21}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \tag{2.22}$$

选定一个起点后, 曲线上的每一点可当成一个终点, 从而对应从起点到这一点的曲线长度. 即曲线上的每一点$(x(s), y(s), z(s))$都是到这一点的曲线长度 s 的函数. 在每一点上可定义切矢量

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \tag{2.23}$$

它显然是一单位矢量. 质点运动速度,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\boldsymbol{\tau}, \tag{2.24}$$

其中

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2.25}$$

为速度的值,称为速率.切矢量既是单位矢量,它对曲线长度 s 的微商必垂直于切矢量本身,指向曲线弯曲的方向.称这个方向上的单位矢量为法矢量,记作 $\boldsymbol{n}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n}, \tag{2.26}$$

θ 为微分中两条切矢量的交角.$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$称为所在点曲线的曲率.它的倒数

$$\rho \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^{-1} \tag{2.27}$$

叫曲率半径.(2.26)又可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}. \tag{2.28}$$

将(2.24)对时间微分,得加速度

$$\boldsymbol{a} = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n}. \tag{2.29}$$

其中

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{2.30}$$

为切向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{2.31}$$

为法向加速度.这法向加速度很像圆周运动向心加速度(2.13)的值,只是用曲率半径 ρ 代替了圆周半径 r.任意曲线运动好像是由瞬时圆周运动组成,只是每一瞬时圆周半径 ρ 各不相同,圆周平面也可不断改变.将 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$ 和垂直它们的单位矢量

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n} \tag{2.32}$$

组成一正交坐标系,称曲线在该点的本性坐标系.$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 组成的平面称曲线在该点的密切平面.质点在每一瞬间都在它轨道的瞬时密切平面内运动.

§2.3 约束 完整约束与非完整约束 自由度与运动状态的完全描述 完备力学量组

能确定质点系位形的独立广义坐标的个数称为这个质点系的自由度数,常记作 f.例如 N 个在三维空间中运动的质点组成的质点系自由度数为 $f = 3N$.它的 $3N$ 个广义坐标不必是 N 个质点的广义坐标的集合,而可以是它们的 $3N$ 个独立函数

$$q_\sigma(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N), \quad \sigma = 1, 2, \cdots, 3N. \tag{2.33}$$

为了使这组广义坐标与 N 个质点坐标的集合在一定区域一一对应,函数集

(2.33)必须在此区域有反函数集

$$x_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}), \quad y_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}), \quad z_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.34}$$

这就要求变换(2.33)的雅可比(Jacobi)行列式

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_1}{\partial z_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial y_2} & \frac{\partial q_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial x_N} & \frac{\partial q_1}{\partial y_N} & \frac{\partial q_1}{\partial z_N} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial z_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial y_2} & \frac{\partial q_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial x_N} & \frac{\partial q_2}{\partial y_N} & \frac{\partial q_2}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_1} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_2} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_2} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_N} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_N} & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \tag{2.35}$$

在该区域不为零.

质点的运动可能受到约束.如水平台面上的小球运动是二维的平面运动.如在台面上取 x 轴和 y 轴,垂直台面取 z 轴组成 $O\,xyz$ 正交笛卡儿坐标系,这种运动受到约束 $z=0$,而只剩下 x 和 y 两个可以独立变化的坐标.自由度数减为 2.当然,这种约束是小球所受重力与台面支撑力互相平衡的结果.约束的概念使人不必去详察这种平衡而直接研究剩余自由度的运动.又如在半径为 R 的球面上爬行的小虫,在以球心为原点的笛卡儿坐标系 $O\,xyz$ 中看,受到约束

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{2.36}$$

这个约束用球坐标(r, θ, φ)表示,则为

$$r = R. \tag{2.37}$$

这种约束也是小虫吸附力和球面支撑力平衡的结果.约束概念也使人们不必详察这种平衡而直接研究小虫在球面上的二维运动.用球坐标表示,小虫运动的独立变化坐标只剩 θ 和 φ 两个,自由度数也减为 2.

一般地考虑有 f 个自由度的力学系统,它的位形由 f 个广义坐标 q_σ, $\sigma = 1, 2, \cdots, f$ 表示.若它还受 n 个约束

$$\Phi_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, t) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.38}$$

这里一般地设约束可与时间 t 有关,则 f 个广义坐标中只有

$$f' = f - n \tag{2.39}$$

个可以独立地变化,其余 n 个可由约束条件(2.38)解出.(2.38)中的每个约束使自由度数减 1.n 个约束使自由度数减 n,由 f 变为 f'.剩下的 f' 个可独立变化的广义坐标可以是原来 f 个广义坐标中的 f' 个,也可以选成另外的 f' 个,只要能表示出系统符合约束条件(2.38)的位形即可.广义坐标对时间的微商 $\dot{q}_\sigma$ 称为广义速度,它不同于速度用广义坐标的表示式.例如速度的球坐标

表示式为(2.11)中的 v_r、v_θ 和 v_φ，然而取球坐标 r、θ 和 φ 为广义坐标，则广义速度就是 $\dot{r}$、$\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$. 当然，它们之间有简单关系(2.11). 类似地可以定义广义加速度 $\ddot{q}_\sigma$，它是广义坐标对时间的两次微商. 牛顿运动方程将质点的加速度与受的力相联系. 加速度是径矢量对时间的二次微商. 采用广义坐标表示系统的位形，加速度可用广义坐标、广义速度和广义加速度表示出. 采用球坐标时，这就是(2.12)式. 而质点受的力一般只与它的位置有关，至多可与它的速度有关. 用广义坐标表示位形，力只是广义坐标和广义速度的函数，即可用广义坐标和它们对时间的一次微商表出. 牛顿运动方程给出广义加速度用广义坐标和广义速度表达的关系式，将广义坐标对时间的二次微商用广义坐标和它对时间的一次微商表达出来. 将这种运动方程两边再对时间求微商，可将广义加加速度 $\dddot{q}_\sigma$ 用广义坐标、广义速度和广义加速度表达，而其中的广义加速度又可借运动方程用广义坐标和广义速度表达. 如此不断进行下去，即可将广义坐标对时间的任意高次微商用广义坐标和广义速度表达. 可见，一个力学系统在任一给定时刻的任何力学量都可用该时刻的广义坐标和广义速度表达. 另一方面，将广义坐标和广义速度在一给定时刻展成时间增量的泰勒级数，各次系数可由广义坐标在这一时刻对时间的各次微商表出. 如前所述，这些微商都可借助运动方程用广义坐标和广义速度在这一时刻的值表出. 换一种方式说，由于运动方程为广义坐标对时间的二阶微分方程，起始条件为一给定时刻的广义坐标和它对时间的一次微商. 知道了这一起始条件，即若已知一给定时刻的广义坐标和广义速度，就可借助运动方程算出过去未来任何时刻的广义坐标和广义速度，从而可算出任何时刻的任何力学量. 可见，一个时刻的广义坐标和广义速度不仅包含了这个时刻任何力学量的信息，也包含了这一时刻它们自身如何变化以及各力学量如何变化的信息. 可以说，它们包含了运动的全部信息. 将一个时刻运动的全部信息定义为这个时刻的运动状态，则每一时刻的广义坐标和广义速度一起完全描述了该时刻的运动状态. 由于广义坐标和广义速度定了，运动状态也就定了，也可以说，广义坐标和广义速度一起完全确定了运动状态. 能够完全确定运动状态的力学量组称为完备力学量组. 广义坐标和广义速度一起构成一个完备力学量组. 对受约束(2.38)的系统，有 f 个独立的广义坐标和 f 个独立的广义速度，完备力学量组中有 $2f$ 个互相独立的力学量. 完备力学量组中独立力学量的个数为自由度数的 2 倍. 这 $2f$ 个力学量可以取成广义坐标和广义速度，也可取成另一些力学量，只要能惟一地确定状态，亦即惟一地确定广义坐标和广义速度就行.

(2.38)表示的约束有一特点，即约束函数 Φ_i 只与广义坐标 q_σ 和时间 t 有关，而与广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 无关. 这种约束称为完整约束. 也可以考虑与广义速度有关的约束

$$\phi_i(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n'. \quad (2.40)$$

这种约束称为非完整约束.自然,完整约束(2.38)也可表成这种形式.将它两边对时间求微商即得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (2.41)$$

此式左边是 Φ_i 对时间的全微分,因而是可积的.约束关系(2.41)左边虽含广义速度却可积分成不含广义速度的约束.这种约束不能称为非完整约束而仍是完整约束.这里完整的含义对(2.38)即为已积分的意思,对(2.41)即为可积分的意思.只当左边不可积时,(2.40)表示的才是非完整约束.非完整的含义即是不可积.

约束(2.40)中广义坐标的值可以任取.取定广义坐标后,可从其中解出 n' 个广义速度.非完整约束可视为对广义速度的约束.可见,非完整约束不改变自由度数,却改变完备力学量组中独立力学量的个数,将它从 $2f$ 降为 $2f - n'$.如果非完整约束的个数等于自由度数,$n' = f'$,则可从其中解出全部广义速度,仅广义坐标即可完全描述运动状态,完备力学量组中独立力学量的个数降为自由度数 f'.此种情况下不再需要运动方程.f' 个非完整约束可视为 f' 个广义坐标的 f' 个一阶微分方程.任意时刻的 f' 个广义坐标值确定后即可由 f' 个非完整约束解出过去未来任何时刻的广义坐标,再从 f' 个非完整约束算出任何时刻的广义速度,从而算出任何时刻的任意力学量.若 $n' < f'$,则仍需 $f' - n'$ 个运动方程,它们将广义加速度用广义坐标和广义速度表示出来,可视为含广义加速度的约束.我们本有足够的运动方程.例如 N 质点系有 $3N$ 个牛顿运动方程,足以解出它的 $3N$ 个坐标随时间的变化.在有约束的情况下,原则上只需从中适当选择,组合成 $f' - n'$ 个与约束相容又独立于约束的运动方程.这是动力学的任务,将在以下各章研讨.

§2.4 刚体运动学 达朗贝尔定理 欧拉角

一个各部分之间距离恒固定不变的物体称为刚体.设想将刚体划分成 N 部分,N 足够大,以致这样划分得到的每一部分都可视为质点,则刚体可视为一 N 质点系.不过它受到约束,即任意二质点之间的距离都固定不变.用 (x_i, y_i, z_i) 和 (x_j, y_j, z_j) 分别表示其中 i 和 j 两质点的笛卡儿坐标,这些约束可表示为

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - r_{ij}^2 = 0, \qquad i > j = 1, 2, \cdots, N. \quad (2.42)$$

r_{ij} 为常数.这 $N(N-1)/2$ 个约束并非都是独立的.先固定刚体上不共线的三个点,就称它们为 1、2 和 3.一个点若与这三个点的距离都固定了,则它的位

置也就固定了.确切地说是将这个点的位置固定到相对这三个点构成的平面可能差一个镜像反演的程度.由于经典力学研究的运动中各质点的位置是连续变化的,刚体不可能作镜像反演,这个点的位置也就惟一地确定了.从代数看,与三点的距离固定即是三个形如(2.42)的约束,恰可解出这个点的三个坐标(x,y,z).只是(2.42)中的约束均为二次方程,有两个根,要用不允许镜像反演排除其中的一个。从几何看,与三点的固定距离使这个点同时在以三个点为心以相应固定距离为半径的三个球面上.两个球面的交线为一圆周,第三球面与这圆周一般有两个交点.同样用不允许镜像反演排除其中的一个,这个点的位置就完全确定下来.点既固定,其他约束不再起独立作用.可见,除最初选定的三点外,刚体上其他 $N-3$ 个点受到 $3(N-3)=3N-9$ 个独立约束.这三个点彼此的三个距离固定,因而受 3 个独立约束.刚体的 N 个质点共受 $3N-9+3=3N-6$ 个形如(2.42)的独立约束,从而自由度数为

$$f=3N-(3N-6)=6. \tag{2.43}$$

这个结果与刚体分成的质点数 N 无关,在 $N\to\infty$ 的条件下仍成立,是一严格结果.从前面的讨论还可看到,刚体上不共线的三点位置确定后,其他点的位置就都确定了,刚体的位形可由这三点的位形代表,或者说,由以这三点为顶点的刚三角形的位形代表.由于这三点彼此距离固定,描写它的位形需 6 个坐标.例如可将其中的三个坐标选为点 1 的坐标(x_1,y_1,z_1).点 2 与点 1 的距离 r_{12}固定,因而在以点 1 为心 r_{12}为半径的球面上.为确定它在这球面上的位置只须确定它以点 1 为原点的径矢方向.为此须确定两个坐标,例如以点 1 为原点的球坐标中的方位角 θ、φ.1、2 两点的位置都确定后,点 3 的位置应在以点 1 和点 2 为心、半径分别为 r_{31}和 r_{23}的球面交线上.这是一个圆周,为确定它在这圆周上的位置还须确定一个坐标,例如以圆周的心为原点的平面极坐标的方位角 θ'.六个坐标 x_1、y_1、z_1、θ、φ、θ'确定了这个刚三角形的位形,从而也就确定了刚体的位形.

比较刚体在 t'和 t 两个时刻的位形.在刚体上选定一点,例如它的质心.这点在 t'时刻的空间位置为O',t 时刻的空间位置为O,作平移,将 O'点移到 O 点.将刚体的这一新位形与它在 t 时刻的位形相比,有一点重叠于 O.刚体有一点不动的运动称为转动,那个不动的点称为转动中心.这两个有一点重叠于 O 的位形相差一个以 O 为中心的转动.可见,刚体从一个位形到另一位形的运动恒等价于一个平移和一个转动的结果.刚体每一瞬间的运动恒可分解为一个瞬间平移和一个瞬间转动.瞬间平移的积分即是刚体位置的空间移动,可由其上所选一点的移动代表.瞬间转动的积分即是刚体绕其上所选一点的转动.空间移动前面已有一些讨论,下面着重讨论绕定点的转动.它的一条重要性质是:绕点的转动恒为绕轴的转动.它的确切含义是

达朗贝尔(J.d'Alembert)定理 刚体绕定点从一个位形到另一位形的转动中,恒存在一条过此定点的直线,其上每一点的位置在这一转动中皆不变.这条位置不变的直线称为这一转动的轴.

证 以转动中心为心作一球面.球面上的点转动后仍留在球面上.在球面上取两点,转动前分别在 A' 和 B' 处,转动后到达 A 和 B 处.作大圆弧 AA' 和 BB',再分别作这两条弧的中垂大圆弧.称两条中垂弧的交点为 Ω,联结球心和 Ω 点的直线为 Ω 轴.比较球面三角形 $A'\Omega B'$ 和 $A\Omega B$.由图 2-3 可见,由于中垂大圆弧的性质,大圆弧 $\overset{\frown}{A'\Omega}=\overset{\frown}{A\Omega}$, $\overset{\frown}{B'\Omega}=\overset{\frown}{B\Omega}$, $\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{AB}$.这两个球面三角形由于三边相等而全同.于是,球面角

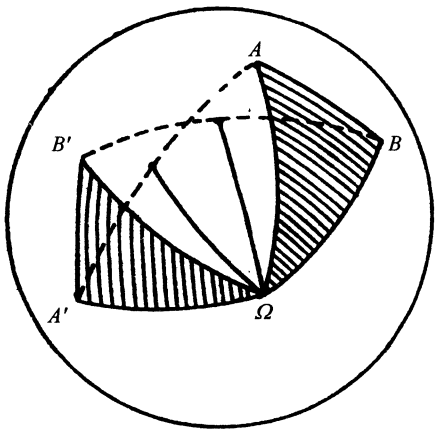

图 2-3 刚体转动轴

$$\measuredangle A'\Omega B'=\measuredangle A\Omega B. \tag{2.44}$$

两边加上球面角 $\measuredangle B'\Omega A$,得

$$\measuredangle A'\Omega A=\measuredangle B'\Omega B. \tag{2.45}$$

绕 Ω 轴转此角,可将 A' 点转到 A 点,同时将 B' 点转到 B 点.转动中心位置不变,在 O 点.即是说,它将刚体上的一个三角形从起始位置转到了末了位置,从而也就将整个刚体从起始位形转到了终了位形.而在这一转动中,直线 Ω 轴上每一点的位置都不改变.证毕.

这个定理告诉我们,刚体每一瞬间转动都是绕轴转动,因而可用瞬间转动轴和转动角描写.描写转动轴的方向需两个坐标,描写转动角的大小需一个坐标.因而描写转动共需三个坐标.描写刚体的移动,即描写其上选定的一个代表点的移动,另需三个坐标.描写刚体运动共需六个坐标.这与前面关于刚体自由度数为 6 的认识一致.

最常用的表示定点转动自由度的广义坐标为欧拉(Euler)角,它表示出两个坐标系的相对取向.由于只表示取向,坐标原点是不重要的,可以都取在转动中心 O 上.其中一个坐标系 $Oxyz$ 的三个轴 x、y 和 z 指空间的固定方向.另一个坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 固定在刚体上.它们都取成右旋正交笛卡儿坐标系.如图2-4,欧拉角 θ、φ 和 φ_ζ 中的前两个,即 θ 和 φ 用来表示本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的 ζ 轴取向,它们就是 ζ 方向单位矢量 $\boldsymbol{\zeta}_0$ 的球坐标方位角.第三个欧拉角 φ_ζ 为本体坐标系绕 ζ 轴转动的角度.将 $\xi\eta$ 平面与 xy 平面的交线称为 y' 轴,它必垂直于 $z\zeta$ 平面.将 y' 轴的正方向取在 $z\zeta$ 的右手螺旋方向,再按右手规则取 x' 轴垂直于 $y'\zeta$ 平面.于是有一半固定笛卡儿正交坐标系 $Ox'y'\zeta$,它的 $x'y'$ 平面与 $\xi\eta$ 平面重合.φ_ζ 就定义为 ξ 轴相对于 x' 轴的偏转角,亦即 η 轴与 y' 轴的夹角.欧拉角的优点是可以独立变化,三个角的变化区间分别为

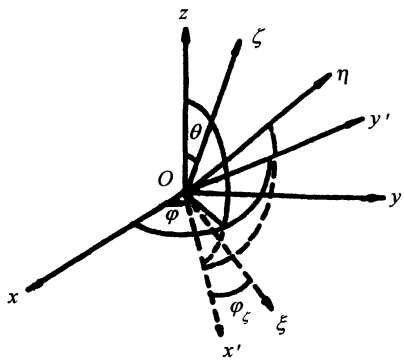

图 2-4　欧拉角

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant\varphi<2\pi,\qquad 0\leqslant\varphi_\zeta<2\pi. \tag{2.46}$$

代价则是:它们不再都是绕固定轴的转角.其中 θ 为绕 y' 轴的转角,φ 为绕 z 轴的转角,φ_ζ 为绕 ζ 轴的转角.三条轴中只有 z 轴在空间是固定的.不过,若不细究每一瞬间的转动,而只问从一个位形到另一位形转动的总效果,则恒可表示成转角为欧拉角的三个绕固定轴转动的合成.即先绕 z 轴转 φ_ζ 角,再绕 y 轴转 θ 角,最后绕 z 轴转 φ 角.

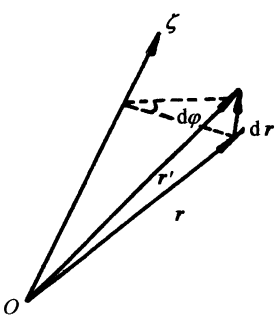

图 2-5　绕定轴的无穷小转动

计算绕定点转动的刚体上各点的速度.将转动中心 O 取为坐标原点,称瞬时转动轴为 ζ,其上单位矢量为 $\boldsymbol{\zeta}_0$.设在这一瞬间无穷小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内刚体绕 ζ 轴转动

无穷小角度 $\mathrm{d}\varphi$，由图 2-5 可见 $\boldsymbol{r}$ 处一点径矢增量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi, \tag{2.47}$$

因而速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{2.48}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\zeta}_0 = \omega\boldsymbol{\zeta}_0 \tag{2.49}$$

称为刚体的瞬间角速度，它沿瞬时转轴方向 $\boldsymbol{\zeta}_0$，值为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{2.50}$$

将刚体细分为许多部分，每一部分可视为一个质点，刚体可视为质点系. 用 $\mathrm{d}m$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 处的质点质量. 刚体动量即这个质点系的总动量，为

$$\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{v}\mathrm{d}m = \boldsymbol{\omega} \times \int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m = M\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}. \tag{2.51}$$

这里不带积分限的积分表示在刚体所在范围的体积分，$M = \int \mathrm{d}m$ 为刚体质量，

$$\boldsymbol{R} = \int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m/M \tag{2.52}$$

为刚体质心径矢量. (2.51)表明，刚体定点转动时动量

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V} \tag{2.53}$$

仍为它的质量和速度的积，其中

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \tag{2.54}$$

为定点转动时刚体质心的速度. 由于(2.52)右边的 $\boldsymbol{r}$ 是刚体上的点以转动中心为原点的径矢量，左边的 $\boldsymbol{R}$ 也就是刚体质心以转动中心为原点的径矢量. 若转动中心即是刚体质心，则 $\boldsymbol{R}=0$，从而有 $\boldsymbol{V}=0$ 和 $\boldsymbol{P}=0$. 在空间取一固定坐标系，将这一坐标系中转动中心的径矢量记为 $\boldsymbol{r}_0$，则刚体上一点在这一坐标系中的径矢量为 $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}$，在 $\mathrm{d}t$ 时间中它的增量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi. \tag{2.55}$$

在转动中心本身运动的情形下 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 \neq 0$. 于是，刚体上一点的运动速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{2.56}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} \tag{2.57}$$

为转动中心速度. 质心速度为

$$\boldsymbol{V} = \int \boldsymbol{v}\mathrm{d}m/M = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{2.58}$$

刚体动量为

$$\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{v}\mathrm{d}m = M\boldsymbol{V} = M\boldsymbol{v}_0 + M\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}. \tag{2.59}$$

$\boldsymbol{R}$ 仍为从转动中心计算的质心径矢量,当转动中心即是质心时 $\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_0$.

若已知欧拉角随时间 t 的变化 $\theta(t)$、$\varphi(t)$ 和 $\varphi_\zeta(t)$,则可将刚体上径矢量的增量表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y}'_0 \times \boldsymbol{r}\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi_\zeta, \tag{2.60}$$

其中 $\boldsymbol{y}'_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_0$ 分别为图 2-4 中 y' 轴、z 轴和 ζ 轴的单位矢量.(2.48)~(2.59)诸式除角速度表达式(2.49)和(2.50)外均成立.(2.49)变为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{y}'_0 + \dot{\varphi}\boldsymbol{z}_0 + \dot{\varphi}_\zeta\boldsymbol{\zeta}_0 = \omega_{y'}\boldsymbol{y}'_0 + \omega'_z\boldsymbol{z}_0 + \omega'_\zeta\boldsymbol{\zeta}_0, \tag{2.61}$$

(2.50)变为

$$\omega_{y'} = \dot{\theta}, \quad \omega'_z = \dot{\varphi}, \quad \omega'_\zeta = \dot{\varphi}_\zeta. \tag{2.62}$$

由于

$$\boldsymbol{y}'_0 = -\sin\varphi\boldsymbol{x}_0 + \cos\varphi\boldsymbol{y}_0 = \sin\varphi_\zeta\boldsymbol{\xi}_0 + \cos\varphi_\zeta\boldsymbol{\eta}_0, \tag{2.63}$$

$$\boldsymbol{z}_0 = -\sin\theta\cos\varphi_\zeta\boldsymbol{\xi}_0 + \sin\theta\sin\varphi_\zeta\boldsymbol{\eta}_0 + \cos\theta\boldsymbol{\zeta}_0, \tag{2.64}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_0 = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 + \cos\theta\boldsymbol{z}_0, \tag{2.65}$$

角速度又可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{x}_0 + \omega_y\boldsymbol{y}_0 + \omega_z\boldsymbol{z}_0 = \omega_\xi\boldsymbol{\xi}_0 + \omega_\eta\boldsymbol{\eta}_0 + \omega_\zeta\boldsymbol{\zeta}_0, \tag{2.66}$$

$$\omega_x = -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}_\zeta\sin\theta\cos\varphi, \quad \omega_y = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\varphi}_\zeta\sin\theta\sin\varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi}_\zeta\cos\theta + \dot{\varphi}, \tag{2.67}$$

$$\omega_\xi = \dot{\theta}\sin\varphi_\zeta - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi_\zeta, \quad \omega_\eta = \dot{\theta}\cos\varphi_\zeta + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi_\zeta, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}_\zeta. \tag{2.68}$$

§2.5 位形空间的度规与测地线

日常生活中质点速度远小于光速,时间和空间可分别独立地考虑.日常生活中万有引力可很好地用牛顿定律(1.80)表示,空间性质很好地符合欧几里得几何,称为欧氏空间.这构成非相对论的经典力学的背景.不过经典力学以质点系为对象,与它直接有关的是质点系的位形空间.它已是 f 维模型空间而不是 3 维现实空间.受 n 个完整约束的 N 质点系自由度数

$$f = 3N - n. \tag{2.69}$$

了解这个 f 维位形空间的性质有助于掌握质点系力学.在许多受约束的情形下,它不再遵从欧几里得几何,而要用非欧几里得几何描写.位形空间一般为

非欧空间.

一个不受约束质点的位形空间即现实的 3 维欧几里得空间.取笛卡儿坐标系 $Oxyz$,三个方向上坐标间隔分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 的两点间距离平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2.70}$$

采用广义坐标 q^i, $i=1,2,3$,用它们表出笛卡儿坐标

$$x = x(q^1, q^2, q^3), \quad y = y(q^1, q^2, q^3), \quad z = z(q^1, q^2, q^3), \tag{2.71}$$

则有

$$\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i, \quad \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i, \quad \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i. \tag{2.72}$$

代入(2.70)右边得

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j, \tag{2.73}$$

其中

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q^i}\frac{\partial x}{\partial q^j} + \frac{\partial y}{\partial q^i}\frac{\partial y}{\partial q^j} + \frac{\partial z}{\partial q^i}\frac{\partial z}{\partial q^j}. \tag{2.74}$$

(g_{ij})共有 9 个分量,称为这个空间的度规张量,简称度规.若就取笛卡儿坐标为广义坐标,$q^1 = x$, $q^2 = y$, $q^3 = z$,注意 q 的上标不是幂次,(2.74)成为

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j, \\ 1, & \text{若 } i = j. \end{cases} \tag{2.75}$$

此式也可直接从(2.70)看出,它是欧几里得空间的基本性质.一般地考虑 f 维空间,$q^i(i=1,2,\cdots,f)$为它的一组广义坐标.模仿(2.73),定义坐标间距为 $\mathrm{d}q^i$, $i=1,2,\cdots,f$,的两点间距离平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{f} g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j, \tag{2.76}$$

度规张量(g_{ij})共有 f^2 个分量.作坐标变换,变换后的 f 个广义坐标记为 q'^i, $i=1,2,\cdots,f$.用它们可表示出原来的广义坐标

$$q^i = q^i(q'^1, q'^2, \cdots, q'^f), \qquad i = 1,2,\cdots,f. \tag{2.77}$$

微分得

$$\mathrm{d}q^j = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\mathrm{d}q'^i. \tag{2.78}$$

代入(2.76)得

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{f} g'_{ij}\mathrm{d}q'^i\mathrm{d}q'^j, \tag{2.79}$$

其中

$$g'_{ij} = \sum_{i',j'=1}^{f} g_{i'j'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^{i}} \frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^{j}}. \tag{2.80}$$

这是与坐标变换相随的度规变换.同一空间若用不同广义坐标,度规可具不同形式.如果存在一组广义坐标使度规具有形式(2.75),则称此空间是欧几里得的,简称欧氏空间.这组坐标称为此空间的一组笛卡儿坐标.

无约束 N 质点系在它的 $3N$ 维位形空间两个无穷靠近的代表点间的距离尚无定义.一个自然的定义是它的平方为各质点在自身 3 维位形空间代表点间距离的平方和.即定义它的平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\iota=1}^{N} \mathrm{d}s_\iota^2 = \sum_{\iota=1}^{N} (\mathrm{d}x_\iota^2 + \mathrm{d}y_\iota^2 + \mathrm{d}z_\iota^2). \tag{2.81}$$

没有理由要求各质点平等求和,即可更一般地定义

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\iota=1}^{N} \mu_\iota \mathrm{d}s_\iota^2 = \sum_{\iota=1}^{N} \mu_\iota (\mathrm{d}x_\iota^2 + \mathrm{d}y_\iota^2 + \mathrm{d}z_\iota^2), \tag{2.82}$$

μ_ι 为常数.取 $\mu_\iota = 1$ 即得特例(2.81).可用 $x^i (i = 1,2,\cdots,3N)$表示 N 质点系的全部坐标,质点 ι 的三个坐标分别为

$$x_\iota = x^{3\iota-2}, \qquad y_\iota = x^{3\iota-1}, \qquad z_\iota = x^{3\iota}. \tag{2.83}$$

注意这里 x 的上标不表示幂次.质点系代表点距离的定义可进一步推广为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3N} \mu_i (\mathrm{d}x^i)^2, \tag{2.84}$$

μ_i 为常数.作变换 $\xi^i = \sqrt{\mu_i} x^i$, 得

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3N} (\mathrm{d}\xi^i)^2 = \sum_{i,j=1}^{3N} g_{ij} \mathrm{d}\xi^i \mathrm{d}\xi^j, \qquad g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{2.85}$$

表明在 3 维欧氏空间中运动的无约束 N 质点系的 $3N$ 维位形空间也是欧几里得空间,$\xi^i (i = 1,2,\cdots,3N)$是它的一组笛卡儿坐标.

加上 n 个完整约束,N 质点系的自由度数降为 $f = 3N - n$,原 $3N$ 维欧几里得位形空间的笛卡儿坐标可由 f 个广义坐标 $q^i (i = 1,2,\cdots,f)$表出:

$$\xi^i = \xi^i (q^1, q^2, \cdots, q^f), \qquad i = 1,2,\cdots,3N. \tag{2.86}$$

微分得

$$\mathrm{d}\xi^i = \sum_{i'=1}^{f} \frac{\partial \xi^i}{\partial q^{i'}} \mathrm{d}q^{i'}, \qquad i = 1,2,\cdots,3N. \tag{2.87}$$

它表示 N 质点系符合约束条件的坐标变化.代入(2.85),得受约束 N 质点系在它的 f 维位形空间两个无穷近代表点间的距离平方

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{f} g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j, \quad g_{ij} = \sum_{i'=1}^{3N} \frac{\partial \xi_{i'}}{\partial q^i} \frac{\partial \xi_{i'}}{\partial q^j}, \quad i,j = 1,2,\cdots,f. \tag{2.88}$$

这个位形空间却不一定是欧几里得的.

将距离的微分积分,即得任意两点间一条联线 l 的长度

$$s(l) = \int_l \mathrm{d}s = \int_l \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j}. \tag{2.89}$$

从此式到下节末采用爱因斯坦(A. Einstein)求和约定,即若一项中有一对相同的上下标即自动对它们从 1 到 f 求和.在(2.89)右边根号下对 i 和 j 都要从 1 到 f 求和.两点间联线长度的极小值称这两点间的距离.长度为此极小值的联线称这两点间的测地线.在欧氏空间中测地线为直线.这就是通常所说,两点间直线最短.在有些空间中可能根本没有直线,测地线为直线的推广.例如一个约束在球面上的质点,位形空间即为球面.球面上无直线,两点间的测地线为联结这两点的大圆弧.取一参数 τ,它可以是 f 个坐标中的一个,也可以是自某点量起的曲线长度 s,或者其他别的量,只要它的一个值与曲线上一点对应即可.曲线可表示为参数方程 $q^i(\tau), i=1,2,\cdots,f$.(2.89)可表示成

$$s(l) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau \tag{2.90}$$

$q_a^i = q^i(\tau_a)(i=1,2,\cdots,f)$为线 l 始点 a 的坐标,$q_b^i = q^i(\tau_b)(i=1,2,\cdots,f)$为线 l 终点 b 的坐标.变更联结 ab 的线 l,在此式两边取变分得

$$\begin{aligned}\delta s &= \int_{\tau_a}^{\tau_b}\delta\sqrt{g_{jk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau_a}^{\tau_b}\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\tau}\delta q^i + 2g_{ij}\frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\right).\end{aligned} \tag{2.91}$$

g_{jk}与广义坐标可以有关,却不会与人为选择的参数 τ 有关,也不会与坐标对 τ 的微商有关.为得此式右边括号内的第二项,用了度规张量的对称性

$$g_{ij} = g_{ji}, \tag{2.92}$$

它可由(2.88)看出.对此项作部分积分,由于变分是在端点 a、b 固定的条件下进行的,$\delta q_a^i = \delta q_b^i = 0$,积出部分为零.选择 τ 使$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}$为常数,从而使剩下的积分在适当改写求和标号后可表示为

$$\delta s = -\int_{\tau_a}^{\tau_b}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2q^j}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma_{ijk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta q^i\mathrm{d}\tau, \tag{2.93}$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right). \tag{2.94}$$

线长取极值的条件为,它的变分为零:

$$\delta s = 0. \tag{2.95}$$

(2.93)右边积分号下广义坐标的变分 δq^i 在 a、b 两点间是任意的.线长变分为零的条件(2.95)导致测地线的微分方程

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2q^j}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma_{ijk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{2.96}$$

由

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k\equiv\begin{cases}0, & \text{若 } i\neq k,\\ 1, & \text{若 } i=k,\end{cases} \tag{2.97}$$

定义反变度规张量(g^{ij}),而称(g_{ij})为协变度规张量.将(2.96)的下标 i 改记作 i',在它两边同乘 $g^{ii'}$ 并对 i' 从 1 到 f 求和,利用(2.97)得

$$\frac{\mathrm{d}^2q^i}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\tau}=0, \tag{2.98}$$

其中

$$\Gamma^i_{jk}\equiv g^{ii'}\Gamma_{i'jk}=\frac{1}{2}g^{ii'}\left(\frac{\partial g_{i'j}}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{ki'}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^{i'}}\right) \tag{2.99}$$

称为克里斯托费尔(Christoffel)符号.(2.98)为测地线微分方程的标准形式.欧几里得空间存在笛卡儿坐标使度规具形式(2.75),而与坐标无关.这使克里斯托费尔符号 $\Gamma^i_{jk}=0$,按(2.98)$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\tau}$为常数.即在欧几里得空间中各笛卡儿坐标沿测地线按一定比例变化,测地线有一定斜率,因而是直线.

微分(2.1)式两边可得三维欧几里得空间笛卡儿坐标和球坐标的微分关系

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x&=\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}r+r\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\\ \mathrm{d}y&=\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta+r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\\ \mathrm{d}z&=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\right\} \tag{2.100}$$

代入(2.70)得三维欧几里得空间中

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{2.101}$$

考虑一个约束在球面上的质点.设球半径为 1,在球面上 $\mathrm{d}r=0$,球面无穷近两点间距离平方为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{2.102}$$

取 $q^1=\theta$, $q^2=\varphi$,球面上度规张量诸分量为

$$g_{11}=1,\qquad g_{12}=g_{21}=0,\qquad g_{22}=\sin^2\theta; \tag{2.103}$$

反变度规张量诸分量为

$$g^{11}=1,\qquad g^{12}=g^{21}=0,\qquad g^{22}=\frac{1}{\sin^2\theta}. \tag{2.104}$$

由此按(2.99)算得克里斯托费尔符号诸分量为

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=0,\quad \Gamma^1_{22}=-\sin\theta\cos\theta,\\ &\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=0,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\cot\theta.\end{aligned}\right\} \tag{2.105}$$

测地线方程为

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \tag{2.106}$$

球面赤道

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = A\tau + B \tag{2.107}$$

是它的一个解;子午线

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \theta = A\tau + B \tag{2.108}$$

是它的另一组解. A、B 和 φ_0 为积分常数. 这些解都是球面上的大圆. 由于球面两点间恒可用大圆弧相联,适当选取球面坐标又恒可将任一给定大圆作为赤道或子午线,球面两点间的测地线就是联结它们的大圆弧,它相当于平面上的直线. 平面上用直线构成多边形,球面上则应用大圆弧构成多边形. 例如上节证明达朗贝尔定理时球面三角形就是用大圆弧组成的.

微分(2.2)式两边可得三维欧氏空间中直线坐标与柱坐标的微分关系

$$dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta, \quad dz = dz. \tag{2.109}$$

代入(2.70),得三维欧几里得空间中

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2. \tag{2.110}$$

考虑一约束在半径为 ρ 的圆柱面上的粒子, $d\rho = 0$,适当选取长度单位可使 $\rho = 1$. 柱面上无穷近两点间距离平方为

$$ds^2 = d\theta^2 + dz^2. \tag{2.111}$$

取 $q^1 = \theta$, $q^2 = z$,柱面上的度规张量

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2. \tag{2.112}$$

柱面是一二维欧几里得空间. 按(2.99)柱面的克里斯托费尔符号 $\Gamma^i_{jk} = 0$,测地线满足方程

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0. \tag{2.113}$$

它们的解为

$$\theta = A_\theta\tau + B_\theta, \qquad z = A_z\tau + B_z, \tag{2.114}$$

A_θ、B_θ、A_z 和 B_z 为积分常数. 这组参数方程在 θz 平面上的图像为一条直线,在圆柱上则是一条螺旋线. 若 $A_\theta = 0$,螺旋线蜕化为一条平行于圆柱轴的直线;若 $A_z = 0$,螺旋线蜕化为一条与柱轴垂直的圆周. 可见圆柱面上两点间的测地线为联结它们的螺线、直线或圆周.

这个例子表明,欧几里得位形空间的测地线在现实的三维空间中并不一定是直线. 这使人有理由怀疑球面上的几何是否一定不是欧几里得的,即是否一定找不到一组坐标令球面的度规张量具有形式(2.112). 为了澄清这一疑

问,须对坐标变换中各量的变换性质深入地考察.

§2.6 坐标变换中的反变量、协变量和不变量 位形空间的曲率张量和曲率

坐标的一般变换(2.77)及其逆变换导致坐标微分的变换(2.78)及其逆变换

$$\mathrm{d}q'^{i}=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{i'}}\mathrm{d}q^{i'}. \tag{2.115}$$

按这种方式变换的一组量 $\mathrm{d}q^{i}(i=1,2,\cdots,f)$称为一反变矢量.设 ϕ 为空间点的函数,即在每一空间点它有一定值而与这点的坐标表示无关.作坐标变换 $(q^{i})\to(q'^{i})$,它不变,它对坐标的微商却会变,

$$\frac{\partial\phi}{\partial q'^{i}}=\frac{\partial\phi}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^{i}}. \tag{2.116}$$

按这种方式变换的一组量$\frac{\partial\phi}{\partial q^{i}}(i=1,2,\cdots,f)$称为一协变矢量.如果一组 f^{n} 个分量 $T^{i_1i_2\cdots i_n}(i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots,f)$在坐标变换$(q^{i})\to(q'^{i})$时变成另一组 f^{n} 个分量 $T'^{i_1i_2\cdots i_n}(i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots,f)$,变换关系为

$$T'^{i_1,i_2\cdots i_n}=\frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{i'_1}}\frac{\partial q'^{i_2}}{\partial q^{i'_2}}\cdots\frac{\partial q'^{i_n}}{\partial q^{i'_n}}T^{i'_1i'_2\cdots i'_n}, \tag{2.117}$$

则称这组分量$(T^{i_1i_2\cdots i_n})$为一 n 阶反变张量.比较此式与(2.115)知,反变矢量为 1 阶反变张量.类似地,可用与坐标变换相随的变换

$$T'_{i_1i_2\cdots i_m}=T_{i'_1i'_2\cdots i'_m}\frac{\partial q^{i'_1}}{\partial q'^{i_1}}\frac{\partial q^{i'_2}}{\partial q'^{i_2}}\cdots\frac{\partial q^{i'_m}}{\partial q'^{i_m}} \tag{2.118}$$

定义 m 阶协变张量$(T_{i_1i_2\cdots i_m})$.比较此式与(2.116)和(2.80)知,协变矢量为1阶协变张量,度规张量(g_{ij})为 2 阶协变张量.由于

$$\frac{\partial q^{i}}{\partial q'^{j}}\frac{\partial q'^{j}}{\partial q^{k}}=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{j}}\frac{\partial q^{j}}{\partial q'^{k}}=\delta^{i}{}_{k}, \tag{2.119}$$

应设反变度规张量的变换性质为

$$g'^{ij}=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q'^{j}}{\partial q^{j'}}g^{i'j'}. \tag{2.120}$$

它保证

$$g'^{ij}g'_{jk}=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q'^{j}}{\partial q^{j'}}g^{i'j'}g_{j''k'}\frac{\partial q^{j''}}{\partial q'^{j}}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^{k}}=\delta^{i}{}_{k}, \tag{2.121}$$

即保证(g'^{ij})是(q'^{i})坐标系中按(2.97)定义的反变度规张量.(2.120)表明反

变度规张量确为 2 阶反变张量.还可由变换关系

$$T'^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m} = \frac{\partial q'^{i_1}}{\partial q^{i_1}} \frac{\partial q'^{i_2}}{\partial q^{i_2}} \cdots \frac{\partial q'^{i_n}}{\partial q^{i_n}} T'^{i'_1 i'_2 \cdots i'_n}_{j'_1 j'_2 \cdots j'_m} \frac{\partial q^{j'_1}}{\partial q'^{j_1}} \frac{\partial q^{j'_2}}{\partial q'^{j_2}} \cdots \frac{\partial q^{j'_m}}{\partial q'^{j_m}} \tag{2.122}$$

定义 $n+m$ 阶混合张量,具体说是 n 阶反变 m 阶协变张量($T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$).由(2.119)知

$$\delta^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^{i'}} \delta^{i'}_{j'} \frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}. \tag{2.123}$$

它表明(δ^i_j)是一 2 阶混合张量,且这个张量在所有坐标系中是一样的.

这样,按坐标变换中的变换性质将各种量分类为各阶张量.其中最简单的是坐标变换中的不变量,例如(2.116)前定义的空间点的函数 ϕ.这种量称为标量,它只有 $f^0=1$ 个分量,可称为 0 阶张量.(2.122)表明,若($T^{i_1 i_2 \cdots i_{n_1}}_{1 j_1 j_2 \cdots j_{m_1}}$)是一个 n_1 阶反变 m_1 阶协变张量,($T^{i_1 i_2 \cdots i_{n_2}}_{2 j_1 j_2 \cdots j_{m_2}}$)是一个 n_2 阶反变 m_2 阶协变张量,则($T^{i_1 i_2 \cdots i_{n_1}}_{1 j_1 j_2 \cdots j_{m_1}} \quad T^{i'_1 i'_2 \cdots i'_{n_2}}_{2 j'_1 j'_2 \cdots j'_{m_2}}$)是一个 n_1+n_2 阶反变 m_1+m_2 阶协变张量,称为原来两个张量的直乘或并.(2.119)则表明,若($T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$)为一 n 阶反变 m 阶协变张量,则($T^{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} k}_{j_1 j_2 \cdots j_{m-1} k}$)为一 $n-1$ 阶反变 $m-1$ 阶协变张量,称为原来张量的收缩.例如反变矢量(V^i)和协变矢量(U_j)可并成 2 阶混合张量($V^i U_j$).它的收缩

$$W = V^i U_i \tag{2.124}$$

是一标量,称为矢量(V^i)和(U_j)的标量积.又如,利用任一 2 阶反变张量(t^{ij})可将张量($T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$)的一个下标变成上标,组成 $n+1$ 阶反变 $m-1$ 阶协变张量($T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_{m-1} j} t^{ij}$).也可利用 2 阶协变张量($t_{ij}$)将张量($T^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$)的一个上标变成下标,组成 $n-1$ 阶反变 $m+1$ 阶协变张量($T^{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i}_{j_1 j_2 \cdots j_m} t_{ij}$).通常用度规张量来升降指标.例如由

$$V_i = g_{ij} V^j \tag{2.125}$$

定义与反变矢量(V^j)对应的协变矢量(V_i),由

$$U^i = g^{ij} U_j \tag{2.126}$$

定义与协变矢量(U_j)对应的反变矢量(U^i).

一个张量的所有分量全为零则称这个张量为零.由于张量在坐标变换时恒作线性齐次变换(2.122),它的各分量虽一般都会变化,但是否为零则与坐标的选择无关.在一个坐标系中为零的张量在所有坐标系中皆为零,在一个坐标系中非零的张量在所有坐标系中皆非零.这一点可用来研究与坐标选择无

关的空间几何性质.

在欧氏空间中恒有笛卡儿坐标系,其中克里斯托费尔符号为零.看看此量的变换性质.由度规张量的变换(2.80)得它的微商的变换

$$\frac{\partial g'_{ij}}{\partial q'^k}=\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial q^{k'}}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}\frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^i}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}+g_{i'j'}\frac{\partial^2 q^{i'}}{\partial q'^i\partial q'^k}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}+g_{i'j'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^i}\frac{\partial^2 q^{j'}}{\partial q'^j\partial q'^k}. \tag{2.127}$$

将此式及由此轮换标号 ijk 得到的表达式代入(2.94)知,坐标变换后 Γ_{ijk} 变为

$$\begin{aligned}\Gamma'_{ijk}&\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{ij}}{\partial q'^k}+\frac{\partial g'_{ki}}{\partial q'^j}-\frac{\partial g'_{jk}}{\partial q'^i}\right)\\&=\Gamma_{i'j'k'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^i}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}+g_{i'j'}\frac{\partial q^{i'}}{\partial q'^i}\frac{\partial^2 q^{j'}}{\partial q'^j\partial q'^k},\end{aligned} \tag{2.128}$$

Γ_{ijk} 不是张量.将此中的标号 i 改记为 i_1,两边乘 g'^{ii_1} 后对 i_1 求和,利用(2.120)、(2.119)和(2.97)得克里斯托费尔符号的变换关系

$$\Gamma'^i_{jk}=\Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial q'^i}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}+\frac{\partial q'^i}{\partial q^{i'}}\frac{\partial^2 q^{i'}}{\partial q'^j\partial q'^k}, \tag{2.129}$$

它不同于张量的变换关系.右边第二项,称非齐次项,使诸分量均为零的克里斯托费尔符号在坐标变换后可能出现非零分量.即是说,欧几里得空间在用曲线坐标描述时可能出现非零克里斯托费尔符号.非零克里斯托费尔符号并非非欧空间特征.

设法由克里斯托费尔符号构造一个张量.关键在消除变换关系中的非齐次项.在(2.129)两边同乘 $\frac{\partial q^{l'}}{\partial q'^i}$ 并对 i 求和.利用(2.119),移项将结果表示成非齐次项的表达式,得

$$\frac{\partial^2 q^{l'}}{\partial q'^j\partial q'^k}=\frac{\partial q^{l'}}{\partial q'^i}\Gamma'^i_{jk}-\Gamma^{l'}_{j'k'}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}, \tag{2.130}$$

两边对 q'^l 求微商,并重复利用此式消去新出现的二阶微商,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 q^{l'}}{\partial q'^j\partial q'^k\partial q'^l}&=\Gamma'^i_{jk}\left(\frac{\partial q^{l'}}{\partial q'^s}\Gamma'^s_{il}-\Gamma^{l'}_{j'k'}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^i}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^l}\right)\\&\quad-\Gamma^{l'}_{j'k'}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}\left(\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^s}\Gamma'^s_{kl}-\Gamma^{k'}_{s't'}\frac{\partial q^{s'}}{\partial q'^k}\frac{\partial q^{t'}}{\partial q'^l}\right)\\&\quad-\Gamma^{l'}_{j'k'}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}\left(\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^s}\Gamma'^s_{jl}-\Gamma^{j'}_{s't'}\frac{\partial q^{s'}}{\partial q'^j}\frac{\partial q^{t'}}{\partial q'^l}\right)\\&\quad+\frac{\partial q^{l'}}{\partial q'^i}\frac{\partial\Gamma'^i_{jk}}{\partial q'^l}-\frac{\partial\Gamma^{l'}_{j'k'}}{\partial q^{s'}}\frac{\partial q^{s'}}{\partial q'^l}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q'^j}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q'^k}.\end{aligned}$$

合并同类项,适当调整求和指标的记法后得

$$\frac{\partial^3 q^{l'}}{\partial q^{'j}\partial q^{'k}\partial q^{'l}}=\frac{\partial q^{l'}}{\partial q^{'i}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{i}_{jk}}{\partial q^{'l}}+\Gamma'^{i}_{ls}\Gamma'^{s}_{jk}\right)$$
$$-\frac{\partial q^{j'}}{\partial q^{'j}}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'k}}\frac{\partial q^{s'}}{\partial q^{'l}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{l'}_{j'k'}}{\partial q^{s'}}-\Gamma'^{l'}_{t'k'}\Gamma'^{t'}_{j's'}-\Gamma'^{l'}_{j't'}\Gamma'^{t'}_{k's'}\right)$$
$$-\Gamma'^{l'}_{j'k'}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q^{'s}}\left(\Gamma'^{s}_{jl}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'k}}+\Gamma'^{s}_{kl}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'j}}+\Gamma'^{s}_{jk}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'l}}\right). \tag{2.131}$$

从此式减去由它交换标号 k、l 得到的表达式，左边因微商结果与微商次序无关而为零，右边含 Γ 和 Γ' 乘积的第三项由于

$$\Gamma^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{kj} \tag{2.132}$$

而为零. 再次调整指标记法后得

$$0=\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^{'t}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{t}_{jk}}{\partial q^{'i}}-\frac{\partial \Gamma'^{t}_{jl}}{\partial q^{'k}}+\Gamma'^{t}_{ls}\Gamma'^{s}_{jk}-\Gamma'^{t}_{ks}\Gamma'^{s}_{jl}\right)$$
$$-\frac{\partial q^{j'}}{\partial q^{'j}}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'k}}\frac{\partial q^{l'}}{\partial q^{'l}}\left(\frac{\partial \Gamma'^{i'}_{j'k'}}{\partial q^{l'}}-\frac{\partial \Gamma'^{i'}_{j'l'}}{\partial q^{k'}}+\Gamma'^{i'}_{l's'}\Gamma'^{s'}_{j'k'}-\Gamma'^{i'}_{k's'}\Gamma'^{s'}_{j'l'}\right).$$

两边同乘 $\frac{\partial q^{'i}}{\partial q^{i'}}$ 并对 i' 求和，由(2.119)得

$$R'^{i}_{jkl}=\frac{\partial q^{'i}}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^{j'}}{\partial q^{'j}}\frac{\partial q^{k'}}{\partial q^{'k}}\frac{\partial q^{l'}}{\partial q^{'l}}R^{i'}_{j'k'l'}, \tag{2.133}$$

其中

$$R^{i}_{jkl}\equiv\frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial q^{l}}-\frac{\partial \Gamma^{i}_{jl}}{\partial q^{k}}+\Gamma^{i}_{ls}\Gamma^{s}_{jk}-\Gamma^{i}_{ks}\Gamma^{s}_{jl}. \tag{2.134}$$

(2.133)是此量的变换关系，表明它组成一个 1 阶反变 3 阶协变混合张量. 这个张量称为黎曼(B. Riemann)曲率张量. 由它可收缩出里奇(G. Ricci)二阶协变张量

$$R_{jl}\equiv R^{i}_{jil}. \tag{2.135}$$

还可进一步收缩出标量

$$R\equiv g^{jl}R_{jl}, \tag{2.136}$$

称为曲率. 曲率的值与坐标选择无关，表示的是空间本身的几何性质.

对欧氏空间可选用笛卡儿坐标计算曲率张量. 由于度规张量各分量均为常数，克里斯托费尔符号恒为零，黎曼曲率张量为零，曲率也是零. 如前所述，这个结果与坐标选择无关，是欧几里得空间本身的性质. 一个空间如曲率非零必是非欧空间. 曲率非零是非欧空间的特征.

考虑一个半径为 a 的球面. 平行于(2.101)～(2.105)的讨论知，采用球面坐标 $q^1=\theta$, $q^2=\varphi$，度规张量为

$$g_{11}=a^2,\quad g_{12}=g_{21}=0,\quad g_{22}=a^2\sin^2\theta, \tag{2.137}$$

反变度规张量为

$$g^{11} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta}. \tag{2.138}$$

克里斯托费尔符号仍由(2.105)表示.将它们代入(2.134),算得黎曼曲率张量.它的16个分量中不为零的四个分量为

$$R^1_{212} = -R^1_{221} = -\sin^2\theta, \quad R^2_{121} = -R^2_{112} = -1. \tag{2.139}$$

由此算得里奇张量的四个分量,

$$R_{11} = -1, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = -\sin^2\theta. \tag{2.140}$$

最后按(2.136)得到球面的曲率

$$R = -\frac{2}{a^2}. \tag{2.141}$$

可见,球面作为二维空间是非欧几里得的.与此对照,柱面作为二维空间是欧几里得的,曲率为零.在三维空间看,球面与柱面皆为曲面,可为什么一个曲率非零,是非欧空间,另一个曲率为零,是欧氏空间?这里曲率是何含义?有一直观理解.平行于轴将柱面剪开,可将它摊开成平面.而对球面,则怎样剪开都摊不成平面.这就是两种曲面迥然不同的性质.说柱面是曲面是指它嵌入三维空间的方式.它是卷曲着嵌入的.至于它本身的性质则与平面一样.说球面是曲面时并未在意它嵌入三维空间的方式,而是指它本身的性质.它的性质与平面根本不同.上世纪初,高斯对球面的内禀几何作了详细研究,为后来非欧几何的发展打下了基础.他定义的曲率

$$K = -\frac{R}{2} \tag{2.142}$$

与黎曼曲率 R 差一因子 $-\frac{1}{2}$.球面的高斯曲率为

$$K = \frac{1}{a^2}, \tag{2.143}$$

与半径 a 的平方成反比.

习 题 二

1.用笛卡儿坐标和平面极坐标写出等速圆周运动质点的轨道方程,并导出它的速度和加速度表达式.

2.已知质点的轨道方程为

$$x = \xi_1\cos(\omega t + \delta), \qquad y = \xi_2\sin(\omega t + \delta), \tag{2.144}$$

ξ_1、ξ_2、ω 和 δ 为常数,画出它的轨迹,算出它的速度和加速度,并对结果作简单的几何说明.

3. 已知质点的轨道方程为①

$$x = \eta_1 \mathrm{ch}(\epsilon t + \delta), \qquad y = \eta_2 \mathrm{sh}(\epsilon t + \delta), \tag{2.145}$$

η_1、η_2、ϵ 和 δ 为常数，画出它的轨迹，算出它的速度和加速度，并对结果作简单几何说明.

4. 一质点作平面运动，采用平面极坐标，径向速度 $v_r = \mu r$，横向速度 $v_\theta = \lambda r\theta$，$\mu$ 与 λ 为常数，解出轨道方程，并计算加速度.

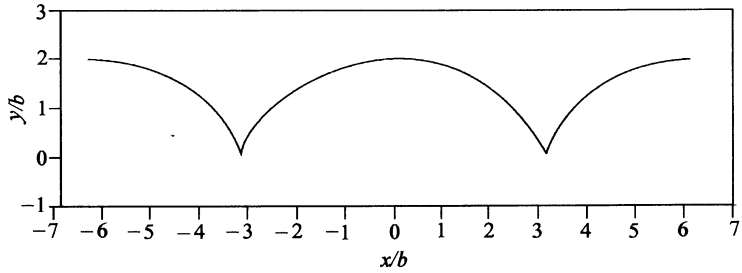

图 2-6　旋轮线

5. 一个轮子在平面上沿直线滚动，其上一点划出的曲线称旋轮线，如图 2-6. 取滚动方向为 x 轴，高的方向为 y 轴，旋轮线的参数方程为

$$x = b(\theta + \sin\theta), \qquad y = b(1 + \cos\theta), \tag{2.146}$$

b 为轮子的半径，参数 θ 为转动角，$\theta = 0$ 时轮子中心在 $x = 0$ 处，该点在轮子顶部. 设一质点沿此线运动，速率 v 为常数. 试导出它的速度和加速度与转动角 θ 的关系，证明它在 y 方向上加速度为常数.

6. 试证绕定点转动刚体上一点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \tag{2.147}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度，$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 为角加速度，$\boldsymbol{r}$ 为从转动中心指向该点的径矢量.

7. 试证图 2-4 中本体坐标系三个单位矢量 $\boldsymbol{\xi}_0$、$\boldsymbol{\eta}_0$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_0$ 与空间固定坐标系三个单位矢量 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{z}_0$ 间有关系

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_0 &= (\cos\varphi_\zeta\cos\theta\cos\varphi - \sin\varphi_\zeta\sin\varphi)\boldsymbol{x}_0 + (\cos\varphi_\zeta\cos\theta\sin\varphi + \sin\varphi_\zeta\cos\varphi)\boldsymbol{y}_0 - \cos\varphi_\zeta\sin\theta\boldsymbol{z}_0,\\
\boldsymbol{\eta}_0 &= -(\sin\varphi_\zeta\cos\theta\cos\varphi + \cos\varphi_\zeta\sin\varphi)\boldsymbol{x}_0 - (\sin\varphi_\zeta\cos\theta\sin\varphi - \cos\varphi_\zeta\cos\varphi)\boldsymbol{y}_0 + \sin\varphi_\zeta\sin\theta\boldsymbol{z}_0,\\
\boldsymbol{\zeta}_0 &= \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 + \cos\theta\boldsymbol{z}_0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.148}$$

8. 用欧拉角分别在空间固定坐标系 $Oxyz$ 和本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 表示出 $\dot{\boldsymbol{\xi}}_0$、$\dot{\boldsymbol{\eta}}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_0$.

9. 用欧拉角分别在空间固定坐标系 $Oxyz$ 和本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 表示出角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

10. 在 xy 平面内取 A、B 两点，笛卡儿坐标分别为 $(c, 0)$ 和 $(-c, 0)$，$c > 0$ 为常数. 平面内一点 (x, y) 与这两点的距离分别为

---

① $\mathrm{sh}\xi \equiv \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$ 为双曲线正弦函数，$\mathrm{ch}\xi \equiv \dfrac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}$ 为双曲线余弦函数.

$$r_A = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad r_B = \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{2.149}$$

定义

$$\xi \equiv \frac{r_B + r_A}{2c}, \qquad \eta \equiv \frac{r_B - r_A}{2c}, \tag{2.150}$$

为该点的椭圆坐标. ξ = 常数表示一以 A、B 为焦点的椭圆, η = 常数表示一以 A、B 为焦点的双曲线. 试证

(1)(2.150)的逆变换为

$$x = c\xi\eta, \qquad y = \varepsilon c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \tag{2.151}$$

在上半平面内 $\varepsilon = 1$, 下半平面内 $\varepsilon = -1$;

(2)等 ξ 线和等 η 线的单位法向矢量分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_0 &= \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}}\eta\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}}\xi\boldsymbol{y}_0, \\ \boldsymbol{\eta}_0 &= \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}}\xi\boldsymbol{x}_0 - \varepsilon\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}}\eta\boldsymbol{y}_0, \end{aligned}\right\} \tag{2.152}$$

它们彼此正交组成所在点的正交坐标架;

(3)无穷靠近两点间距离平方为

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\mathrm{d}\xi^2 + \frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta^2\right). \tag{2.153}$$

11. 由(2.150)定义的椭圆坐标 ξ、η 和 z 方向的笛卡儿坐标 z 一起组成椭圆柱坐标. 它在每一点的正交坐标架由(2.152)定义的 $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$ 和 z 方向单位矢量 $\boldsymbol{z}_0$ 组成. 试用这套坐标表示质点的径矢量、速度和加速度.

12. 设一质点约束在 ξ = 常数的椭圆柱面上作二维运动. 写出这位形空间的度规张量, 计算克里斯托费尔符号、黎曼张量和曲率, 求解测地线, 证明它是欧几里得空间.

13. 设一质点约束在 η = 常数的双曲柱面上作二维运动. 写出这位形空间的度规张量, 计算克里斯托费尔符号、黎曼张量和曲率, 求解测地线, 证明它是欧几里得空间.

14. 记

$$r_A = \sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}, \qquad r_B = \sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}, \tag{2.154}$$

定义旋转长椭球坐标

$$\xi = \frac{r_B + r_A}{2c}, \quad \eta = \frac{r_B - r_A}{2c}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}. \tag{2.155}$$

它的逆变换为

$$x = c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi, \quad y = c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi, \quad z = c\xi\eta. \tag{2.156}$$

试证

(1)等 ξ 面(旋转长椭球面)、等 η 面(旋转双曲面)、和等 φ 面(含 z 轴的平面)的单位法向矢量分别为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_0 &= \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}}\xi\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 + \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}}\xi\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 + \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}}\eta\boldsymbol{z}_0,\\
\boldsymbol{\eta}_0 &= -\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}}\eta\cos\varphi\boldsymbol{x}_0 - \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}}\eta\sin\varphi\boldsymbol{y}_0 + \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}}\xi\boldsymbol{z}_0,\\
\boldsymbol{\varphi}_0 &= -\sin\varphi\boldsymbol{x}_0 + \cos\varphi\boldsymbol{y}_0,
\end{aligned}\right\} \tag{2.157}$$

它们彼此正交组成所在点的正交坐标架;

(2)无穷近两点间距离平方为

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\mathrm{d}\xi^2 + \frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta^2 + (\xi^2-1)(1-\eta^2)\mathrm{d}\varphi^2\right]. \tag{2.158}$$

15. 试用旋转长椭球坐标表示质点的径矢量、速度和加速度.

16. 设一质点约束在 ξ = 常数的旋转长椭球面上作二维运动.写出这位形空间的度规张量,计算克里斯托费尔符号、黎曼张量和曲率,判断它是否欧几里得空间.

17. 设一质点约束在 η = 常数的旋转双曲面上作二维运动.写出这位形空间的度规张量,计算克里斯托费尔符号、黎曼张量和曲率,判断它是否欧几里得空间.

18. 试证黎曼张量 R^i_{jkl} 对下标 k 和 l 反对称,即

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}. \tag{2.159}$$

第三章　拉格朗日力学　变分原理的微分形式

§3.1　虚位移　虚功　约束反作用力与理想约束

取 $q_1、q_2,\cdots q_f$ 为 N 质点系的 $3N$ 个广义坐标，$f=3N$. 它受到 n 个约束①

$$\phi_i(q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f)=0,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3.1}$$

其中可含完整约束也可含非完整约束. ϕ_i 通过 q_σ 和 $\dot{q}_\sigma$ 与时间有关，也可直接与时间有关. 如第 i 约束是完整的，则 ϕ_i 可积. 即它或在它上面乘一恰当非零因子后可对时间积分，使约束具有形式

$$\Phi_i(q_1,q_2,\cdots,q_f)=0. \tag{3.2}$$

将此式对时间微分得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial\Phi_i}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}=0. \tag{3.3}$$

可见即使将完整约束写成微分形式，约束函数与广义速度的关系也是线性的. 许多非完整约束的约束函数 ϕ 与广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 的关系也是线性的. 约束函数与广义速度具线性关系的约束称线性微分约束，可表示为

$$\sum_{\sigma=1}^{f}A_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f)\dot{q}_\sigma+A_0(q_1,q_2,\cdots,q_f)=0. \tag{3.4}$$

它包括完整约束

$$\Phi(q_1,q_2,\cdots,q_f)=0, \tag{3.5}$$

此时

$$A_\sigma=\frac{\partial\Phi}{\partial q_\sigma},\qquad A_0=\frac{\partial\Phi}{\partial t}; \tag{3.6}$$

也包括线性非完整约束，此时约束函数

$$\phi(q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f)=\sum_{\sigma=1}^{f}A_\sigma\dot{q}_\sigma+A_0 \tag{3.7}$$

---

① 为简化书写，一个没有明确表达式的函数，只要未申明它不显含 t，即使没有标出自变量 t，一般都设它可与 t 有关.

不可积,即它不是某函数 Φ 对时间的全微商,也不存在恰当因子与它相乘后成为某函数 Φ 对时间的全微商.实际问题中碰到的约束几乎都能写成线性微分约束(3.4)的形式,不过本章的理论可用于一般的约束(3.1),包括非线性非完整约束.

在广义坐标 q_σ 固定后,(3.1)就是对广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 的约束.在给定时刻给定位形条件下两组符合约束的广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 和 $\dot{q}'_\sigma$ 的差

$$\delta\dot{q}_\sigma = \dot{q}'_\sigma - \dot{q}_\sigma, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{3.8}$$

称为广义速度的变更.当 $\delta\dot{q}_\sigma$ 可作无穷小量处理时则称为广义速度的变分.由约束条件(3.1)知广义速度变分满足方程

$$\sum_{\sigma=1}^{f} B_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f)\delta\dot{q}_\sigma = 0, \tag{3.9}$$

其中

$$B_\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial\dot{q}_\sigma}. \tag{3.10}$$

此处省去了约束的下标 i.对线性微分约束(3.4),

$$B_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f) = A_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f) \tag{3.11}$$

与广义速度无关.在时间微分 $\mathrm{d}t$ 中的微位移为

$$\mathrm{d}q_\sigma = \dot{q}_\sigma\mathrm{d}t, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.12}$$

符合约束条件的广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 给出符合约束条件的微位移 $\mathrm{d}q_\sigma$.两个符合约束条件的微位移的差

$$\delta q_\sigma = \mathrm{d}q'_\sigma - \mathrm{d}q_\sigma = \delta\dot{q}_\sigma\mathrm{d}t, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{3.13}$$

称为虚位移.在(3.9)两边乘 $\mathrm{d}t$ 即得虚位移满足的方程

$$\sum_{\sigma=1}^{f} B_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f)\delta q_\sigma = 0. \tag{3.14}$$

对线性微分约束,此式变为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} A_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f)\delta q_\sigma = 0. \tag{3.15}$$

设所取广义坐标 $q_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$,为 N 个质点的直线坐标,其中第 ι 质点的三个直线坐标为

$$x_\iota = q_{3\iota-2}, \quad y_\iota = q_{3\iota-1}, \quad z_\iota = q_{3\iota}. \tag{3.16}$$

作用在第 ι 粒子上的力 $\boldsymbol{F}_\iota$ 在同一直线坐标系中的三个分量 $F_{\iota x}$, $F_{\iota y}$, $F_{\iota z}$ 可分别记为

$$F_{3\iota-2} = F_{\iota x}, \quad F_{3\iota-1} = F_{\iota y}, \quad F_{3\iota} = F_{\iota z}. \tag{3.17}$$

作用在各质点上各力的各分量合起来可用 $F_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$表示.当质点系作微位移($\mathrm{d}q_\sigma$)时力($F_\sigma$)作功

$$dW = \sum_{\sigma=1}^{f} F_\sigma dq_\sigma . \tag{3.18}$$

在此式右边用虚位移 δq_σ 代替实位移 dq_σ 即得虚功

$$\delta W = \sum_{\sigma=1}^{f} F_\sigma \delta q_\sigma . \tag{3.19}$$

如前所述,约束本身可视为某种力作用的结果.例如,将小虫约束在球面上,是由于,小虫用吸附力作用于球面,球面对它有反作用力;这个力和球面对小虫的支持力一起表现为对小虫的约束.由约束表现出来的力称约束反作用力.质点受的力与它受的约束反作用力的差称为对它的作用力.作用力的性质一般比较简单;而约束反作用力的性质则较复杂,不仅与约束有关,而且与被约束质点的运动有关,并因此而和它受的作用力有关.例如,球面的小虫如果爬行,则有一向心加速度,它的大小和方向与小虫爬行的路径和速度有关.为了将它约束在球面上,必须附加一约束反作用力.即小虫必须根据要爬行的路径和速率调节对球面的吸附力以获得相应的反作用力.这些自然是由小虫的本能把握的.恰当地处理约束,给出约束反作用力的简单表达式,并在相当广泛的条件下消去约束反作用力,是牛顿以后经典力学的一项重要进展.这一进展的第一步是定义理想约束:

约束反作用力虚功为零的约束为理想约束.

用 $R_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$表示约束反作用力.这个约束为理想约束的条件是

$$\sum_{\sigma=1}^{f} R_\sigma \delta q_\sigma = 0. \tag{3.20}$$

也可将理想条件加于一组 n 个约束.用(R_σ)表示这组约束的约束反作用力之和.(3.20)就是这组约束为理想约束的条件.这个条件比要求其中每个约束皆为理想约束的条件松.(3.20)和虚位移的约束条件(3.14)决定了约束反作用力的普遍形式.在(3.14)中加入下标 i 得虚位移的 n 个约束条件

$$\sum_{\sigma=1}^{f} B_{\sigma i}\delta q_\sigma = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.21}$$

这使得 f 个虚位移中只有$g=f-n$ 个可任意取值,另外 n 个要由 n 个线性方程(3.21)求解.在(3.21)的第 i 个方程两边同乘待定因子λ_i,对 i 从 1 到 n 求和,将结果从(3.20)中减去,得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\left(R_\sigma - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}\right)\delta q_\sigma = 0. \tag{3.22}$$

设不能任意取值而须由(3.21)解出的虚位移就是 δq_σ, $\sigma = 1, 2, \cdots, n$.令(3.22)中与它们相乘的因子为零,对 $\sigma=1,2,\cdots,n$ 得

$$R_\sigma = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}. \tag{3.23}$$

将它们看作 n 个未知数$\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$,的一组 n 个非齐次线性代数方程,$B_{\sigma i}$为系数,R_σ 为非齐次项.这个方程组的系数行列式$|B_{\sigma i}|$就是(3.21)作为$\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,n)$的非齐次线性代数方程组的系数行列式.能解出这 n 个虚位移表明,这行列式非零,从而可从(3.23)解出乘子 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$.将它们代入(3.22)得

$$\sum_{\sigma=n+1}^{f}\left(R_\sigma-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}\right)\delta q_\sigma=0. \tag{3.24}$$

由于此式中的 $g=f-n$ 个虚位移 $\delta q_\sigma, \sigma=n+1,n+2,\cdots,f$,均可任意取值,它成立的充分兼必要条件就是,与这些虚位移相乘的因子个个为零.这使(3.23)对 $\sigma=1,2,\cdots,f$ 都成立.这里用的推导方法叫拉格朗日乘子法,λ_i 称为拉格朗日乘子,简称拉氏乘子.

实际问题中碰到的约束大多可很好地当作理想约束.在明显偏离理想约束的场合,可将约束反作用力虚功非零的部分分离出来,并入作用力中,例如当摩擦力处理等等.剩下的约束反作用力虚功为零,约束仍可当作理想的.因此,以下恒设约束为理想的.

§3.2 静力学 虚功原理 广义力

位形不变为静止.静力学研究物体静止的条件.将物体分解为质点系,静止即指其中每一质点皆静止,速度为零.对有约束的情形,物体静止的必要条件是它有符合约束条件的静止状态,其中各质点速度皆为零.在此前提下,物体维持在这种静止状态中的充分必要条件是各质点加速度为零,因而受的力为零.这就是力平衡条件.每质点受的力 $\boldsymbol{F}_i$ 可分解为对它的作用力 $\boldsymbol{Q}_i$ 和约束反作用力 $\boldsymbol{R}_i$:

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{Q}_i+\boldsymbol{R}_i. \tag{3.25}$$

对质点系则有

$$F_\sigma=Q_\sigma+R_\sigma,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.26}$$

对 N 个质点$f=3N$.力平衡条件为

$$F_\sigma=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.27}$$

将(3.23)代入(3.26)的结果代入此式,得

$$Q_\sigma+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.28}$$

作用力(Q_σ)和系数

$$\left(B_{\sigma i}=\frac{\partial \dot{\phi}_i}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \tag{3.29}$$

一般都是坐标(q_σ)和速度($\dot{q}_\sigma$)的函数.不过在讨论静止条件时要将其中的速度置零,即令

$$\dot{q}_\sigma = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.30}$$

约束(3.1)给定后系数($B_{\sigma i}$)由(3.29)给定.在作用力(Q_σ)给定并将速度置零的情况下,(3.28)就是 f 个坐标(q_σ)和 n 个拉氏乘子(λ_i)的 f 个方程.在(3.1)中将速度置零后可得坐标(q_σ)的另 n 个方程.它们和(3.28)一起共是 $f+n$ 个方程,可用来确定能成为静止位形的坐标(q_σ)和在静止位形中各拉氏乘子 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$的值,从而按(3.23)确定静止时各质点受的约束反作用力.速度置零的(3.1)和(3.28)是静力学的一套完备方程组,完全确定了静止位形.在(3.1)中含完整约束的情形中,宜将其中的完整约束写成完整形式.即若 $\phi_i=0$ 为完整约束,宜用它的完整形式(3.2)代替它.这些完整约束和(3.1)中其余非完整约束与(3.28)一起,在速度置零后组成静力学的完备方程组,可作为静力学的基本方程.由于推导中用了理想约束的约束反作用力表达式(3.23),这套基本方程成立的前提是:质点系受的约束为理想约束.

符合力平衡条件(3.27)的力(F_σ)虚功当然是零.如果质点系受的是理想约束,在作分解(3.26)后,约束反作用力(R_σ)的虚功为零.因此,符合平衡条件的作用力(Q_σ)的虚功也必为零.作用力虚功为零成了理想约束下质点系保持静止的必要条件.在有了上节推导约束反作用力表达式(3.23)的经验后,比较(3.28)和(3.23)使人猜想,这很可能也是保持静止的充分条件.下面将证明确实如此.即静力学的基本原理可表示为

虚功原理 理想约束下质点系保持静止的充分必要条件为所受作用力的虚功为零.

证 必要性上面已证明,现只需证明充分性,即证明,理想约束下质点系所受作用力的虚功若为零,则能保持静止.作用力(Q_σ)的虚功为零即

$$\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma = 0. \tag{3.31}$$

在(3.21)的第 i 式两边同乘拉氏乘子 λ_i,对 i 从 1 到 n 求和后与此式相加,得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\Big(Q_\sigma + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}\Big)\delta q_\sigma = 0. \tag{3.32}$$

将不能任意取值而须由约束条件(3.21)解出的 n 个虚位移记为 δq_σ,$\sigma=1,2,\cdots,n$,令(3.32)中与它们相乘的因子为零,即得

$$Q_\sigma + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i} = 0, \tag{3.33}$$

其中 $\sigma=1,2,\cdots,n$.将此式看作未知数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$的一组 n 个非齐次线性代数方程,$B_{\sigma i}$为系数,$-Q_\sigma$ 为非齐次项.由于已设 $\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,n)$能

从(3.21)解出,该式作为未知数 $\delta q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,n)$ 的非齐次线性代数方程有解,由元素 $B_{\sigma i}(\sigma,i=1,2,\cdots,n)$ 组成的行列式 $|B_{\sigma i}|$ 非零,(3.33)有解.将解得的拉氏乘子代入(3.32)得

$$\sum_{\sigma=n+1}^{f}\left(Q_\sigma+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}\right)\delta q_\sigma=0. \tag{3.34}$$

此式中的 $g=f-n$ 个虚位移 $\delta q_\sigma(\sigma=n+1,n+2,\cdots,f)$ 已不受任何约束而可任意变化,它成立的充分必要条件就是与这些虚位移相乘的因子逐个为零.这使(3.33)对 $\sigma=1,2,\cdots,f$ 都成立.这就是力平衡条件(3.28),它保证静止状态得以保持.证毕.

以上证明中认定(3.33)第二项就是(3.28)第二项,都是(3.23)右边表示的约束反作用力.即认定这两项中拉氏乘子(λ_i)是相同的.这种认定的根据在于,拉氏乘子就是由这组方程和约束条件解出的.方程组(3.33)和(3.28)既然相同,约束条件又一样,解出的拉氏乘子自然相同.这一证明还有意与约束反作用力(3.23)的推导几乎逐字重复,为的是加深对拉氏乘子法的印象.这是一个非常重要和有用的方法.

虚功原理可代替力平衡条件(3.27)作为静力学的基本原理.它与约束一起可完全确定质点系的静止位形和静止状态下的约束反作用力.它的优点在于,保持静止的条件只加在作用力(Q_σ)上,从而省去了与约束反作用力相关的麻烦.将 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 当作广义坐标,考虑它到另一套广义坐标 $q'_{\sigma'}(\sigma'=1,2,\cdots,f')$ 的变换.设(3.1)中包括若干完整约束,其中 n_1 个已积成完整形式(3.2).此时可只考虑 $f'=f-n_1$ 个独立的广义坐标.其余 n_1 个可从已积成完整形式的 n_1 个完整约束解出.即在上述坐标变换中可有 $f'<f$.这样变换广义坐标后,n_1 个完整约束的影响即已考虑完毕,剩下 $n'=n-n_1$ 个约束还须考虑.将上述坐标变换写作

$$q_\sigma=q_\sigma(q'_1,q'_2,\cdots,q'_{f'}),\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.35}$$

对时间求微商得

$$\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma'=1}^{f'}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}\dot{q}'_{\sigma'}+\frac{\partial q_\sigma}{\partial t},\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.36}$$

注意两套坐标系中广义速度的关系是线性的.固定时间和位形,即固定 t 与(q_σ),亦即固定 t 与($q'_{\sigma'}$),广义速度变分的变换关系为

$$\delta\dot{q}_\sigma=\sum_{\sigma'=1}^{f'}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}\delta\dot{q}'_{\sigma'},\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.37}$$

两边乘时间微分,即得虚位移的变换关系

$$\delta q_\sigma=\sum_{\sigma'=1}^{f'}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}\delta q'_{\sigma'},\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.38}$$

认真地说，当 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 为广义坐标时，δq_σ 应称为广义虚位移，$\delta q'_{\sigma'}$ 自然也应称为广义虚位移.不过习惯上将此处的定语“广义”省去，直接称它们为虚位移.作用力的虚功为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \delta q_\sigma = \sum_{\sigma'=1}^{f'} Q'_{\sigma'} \delta q'_{\sigma'}, \tag{3.39}$$

其中

$$Q'_{\sigma'} = \sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}. \tag{3.40}$$

当 (q_σ) 为广义坐标时，(Q_σ) 称广义力.$(Q'_{\sigma'})$ 自然是广义力.将(3.35)和(3.36)代入(3.1)左边，其中已考虑过的 n_1 个完整约束自动满足.剩下的 n' 个约束可表示为

$$\phi'_i(q'_1, q'_2, \cdots, q'_{f'}, \dot{q}'_1, \dot{q}'_2, \cdots, \dot{q}'_{f'}) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n'. \tag{3.41}$$

ϕ_i 的上标一撇只是用来与 ϕ_i 区别，并没有微商的意思.在时间和位形固定的条件下，广义速度的变分满足条件

$$\sum_{\sigma'=1}^{f} B'_{\sigma' i} \delta \dot{q}'_{\sigma'} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n',$$

两边乘以 $\mathrm{d}t$ 后得

$$\sum_{\sigma'=1}^{f} B'_{\sigma' i} \delta q'_{\sigma'} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n', \tag{3.42}$$

其中

$$B'_{\sigma' i} = \frac{\partial \phi'_i}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial \phi_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} = \sum_{\sigma=1}^{f} B_{\sigma i} \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}, \tag{3.43}$$

$$\sigma' = 1,2,\cdots,f', \quad i = 1,2,\cdots,n'.$$

此式末一等号处用了(3.36)，而

$$B_{\sigma i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{3.44}$$

则是加了下标 i 的(3.10).连同(3.43)的(3.42)也可由(3.21)和(3.38)得到.由于(3.39)，虚功原理也可表示为

$$\sum_{\sigma'=1}^{f} Q'_{\sigma'} \delta q'_{\sigma'} = 0. \tag{3.45}$$

(3.41)、(3.42)和(3.45)不过是加了上标撇的(3.1)、(3.21)和(3.31).这表明，由此三式导出的上述全部结果并不依赖于采用笛卡儿坐标，采用任意广义坐标均成立，而且在用完整约束消去一些广义坐标后也成立.这一理论有很广泛的适应性.另一方面，下面将看到，实际碰到的约束常常很简单，可表示为线性齐次微分约束，即线性微分约束(3.4)中非齐次项 $A_0=0$ 的情形.它包括

与时间无关的完整约束

$$\Phi(q_1, q_2, \cdots, q_f) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{3.46}$$

这种约束可表示为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} A_\sigma \dot{q}_\sigma = 0, \tag{3.47}$$

乘上时间微分 dt 后成为对位移的约束

$$\sum_{\sigma=1}^{f} A_\sigma dq_\sigma = 0. \tag{3.48}$$

与(3.15)比较知,在此情形下,虚位移可解释为符合约束条件的位移,或可能位移.虚功也就成了对可能位移作的功.

§3.3 静力学举例:简单机械与初等静力学 滑杆问题 悬链问题和悬链线

简单机械中力的平衡是初等静力学中反复讨论的问题.所用的原理就是初等形态的虚功原理,只是在这种简单情形中表现为能量守恒.图 3-1 中画了三种简单机械,依次为杠杆、斜面和滑轮.在杠杆的力点向下施力 P,令其下移 δ_p.此时重点处受重力 Q 的物体被举起 δ_q,从而获得势能 $Q\delta_q$.设这一举物过程无限慢,物体并未因此获得任何动能.力 P 作的功全部转化为物体的势能,因而有

$$P\delta_p - Q\delta_q = 0. \tag{3.49}$$

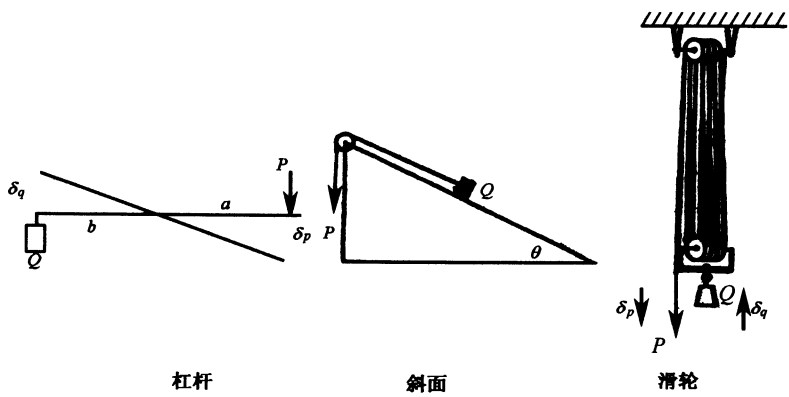

图 3-1 简单机械

由于力点位移 δ_p 和力臂 a 组成的三角形与重点位移 δ_q 和重臂 b 组成的三角形相似，δ_p 与 δ_q 之比等于两臂长 a 与 b 之比，即

$$b\delta_p - a\delta_q = 0. \tag{3.50}$$

此式与(3.49)联立得力平衡关系

$$P/Q = b/a. \tag{3.51}$$

它的上述初等论证现在可用虚功原理的语言重述.(3.50)为可能位移的关系，在这个问题里就是虚位移的约束关系.而(3.49)就是虚功原理在这个问题中的表现.它们合起来给出力平衡关系(3.51).对斜面和滑轮可作类似讨论.功能关系对它们同样导致(3.49)，P 为将绳向下拉的力，Q 为被举物体受的重力.此式对它们同样可当作虚功原理的表现.不过对斜面，虚位移的约束方程应改为

$$\delta_q - \sin\theta\delta_p = 0, \tag{3.52}$$

θ 为斜面的仰角(见图 3-1).此式与(3.49)联立得斜面的力平衡方程

$$P/Q = \sin\theta. \tag{3.53}$$

对滑轮，虚位移的约束方程为

$$\delta_p - 2n\delta_q = 0, \tag{3.54}$$

n 为绳绕上下滑轮组的匝数，下滑轮组可看成由 $2n$ 根绳吊起的.此式与(3.49)联立得滑轮的力平衡方程

$$P/Q = \frac{1}{2n}. \tag{3.55}$$

在以上考虑中完全忽略了摩擦力.这相当于理想约束假定.

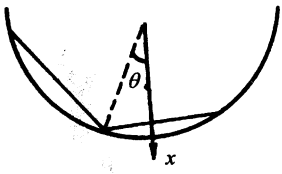

图 3-2　杆在半圆槽内的平衡位形

虚功原理自然不是为这些简单问题设计的.它可用于复杂问题，并将问题简化.下面由简到繁，再举几个例子说明虚功原理的应用.

例 1　两条长为 r，质量分别为 m_1 和 m_2 的均匀细杆一端相联.两杆绕接点可随意地无摩擦转动.将它们放入一半径为 r 的半圆形容器内(如图 3-2)，设它们可在其中无摩擦地滑动.求它们在重力作用下的平衡位置.

解　如图 3-2，取到二杆联接点的半径与铅垂半径的交角 θ 为广义坐标，铅垂半径为 x 轴.杆 1 与杆 2 重心(中点)的 x 坐标分别为

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos(\theta + 30^\circ), \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos(\theta - 30^\circ). \tag{3.56}$$

它们的变分为

$$\delta x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} r\sin(\theta + 30^\circ)\delta\theta, \qquad \delta x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} r\sin(\theta - 30^\circ)\delta\theta. \tag{3.57}$$

用 g 表示重力加速度.铅直向下重力的虚功为①

$$\begin{aligned}\delta W &= m_1 g\delta x_1 + m_2 g\delta x_2 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} gr[m_1\sin(\theta + 30^\circ) + m_2\sin(\theta - 30^\circ)]\delta\theta \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} gr[\sqrt{3}(m_1 + m_2)\sin\theta + (m_1 - m_2)\cos\theta]\delta\theta. \end{aligned} \tag{3.58}$$

无摩擦表明,约束是理想的,作用力仅为重力.虚功原理 $\delta W = 0$ 导致平衡条件

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)\sqrt{3}}. \tag{3.59}$$

若两杆质量相等,$m_1 = m_2$,平衡位形为 $\theta = 0$,两杆接点在圆心的正下方.若 $m_2 \to \infty$,$\theta \to 30^\circ$,平衡位形趋于杆 2 水平,杆 2 重心趋于圆心正下方.解毕.

例 2 n 条长为 a 的细轻杆首尾相连.每杆末端有一质量为 m 的质点.第一杆顶端悬挂在一固定悬点上.末杆末端受一大小固定为 P 的水平力作用.每杆都可绕它顶端联接处在包含悬点和水平力的铅垂平面内自由转动.求此链在重力作用下的平衡位形.

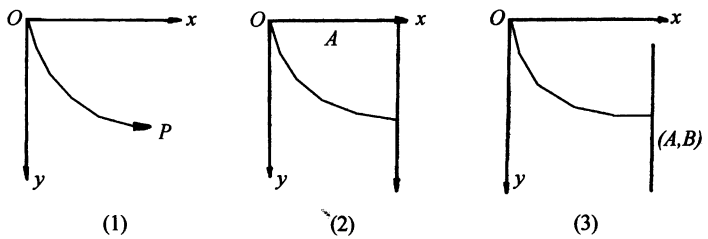

图 3-3 多节链在不同条件下的平衡位形

解 如图 3-3(1),取各杆相对铅垂方向的偏角 θ_i 为广义坐标,$i = 1, 2, \cdots, n$.再取悬点为原点,水平力的方向为 x 轴,铅垂方向为 y 轴,作一直线坐标架.第 i 质点的直线坐标为

$$x_i = a\sum_{i'=1}^{i}\sin\theta_{i'}, \quad y_i = a\sum_{i'=1}^{i}\cos\theta_{i'}. \tag{3.60}$$

---

① 此处用到:重力对物体作的功等于它对物体重心作的功并设物体质量集中于重心.见习题三第 1 题.

它们的变分为

$$\delta x_i = a\sum_{i'=1}^{i}\cos\theta_{i'}\delta\theta_{i'}, \quad \delta y_i = -a\sum_{i'=1}^{i}\sin\theta_{i'}\delta\theta_{i'}. \tag{3.61}$$

作用力对此链的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= mg\sum_{i=1}^{n}\delta y_i + P\delta x_n \\ &= a\sum_{i=1}^{n}[P\cos\theta_i - mg(n-i+1)\sin\theta_i]\delta\theta_i.\end{aligned} \tag{3.62}$$

由于每杆都可在铅垂面内自由转动,无摩擦,约束是理想的,可用虚功原理.而对广义坐标(θ_i)已无约束,($\delta\theta_i$)为独立自由变分,$\delta W=0$ 导致(3.62)和号下各方括号皆为零.由此得平衡位形

$$\tan\theta_i = \frac{p}{mg(n-i+1)}, \qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.63}$$

解毕.

例3 如上题中链的末端不是受一固定力,而是被限制在 xy 平面内与 y 轴平行且与 y 轴相距为 A 的直线上[图 3-3(2)].设它在此直线上可自由滑动,求此链在重力作用下的平衡位形.

解 由于链的末端可在直线上自由滑动,无摩擦,约束仍是理想的.可用虚功原理.现在作用力只剩重力,对链的虚功为

$$\delta W = -mga\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\sin\theta_i\delta\theta_i. \tag{3.64}$$

不过广义坐标(θ_i)却还受一约束

$$x_n = a\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i = A, \tag{3.65}$$

虚位移($\delta\theta_i$)因而受约束

$$\delta x_n = a\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i\delta\theta_i = 0. \tag{3.66}$$

虚功原理只要求,对符合此条件的虚位移,虚功(3.64)为零.为解决虚位移不再能独立任意取值的问题,引进拉氏乘子 λ.用它乘(3.66)后与命为零的(3.64)相加,得

$$a\sum_{i=1}^{n}[\lambda\cos\theta_i - mg(n-i+1)\sin\theta_i]\delta\theta_i = 0. \tag{3.67}$$

选择 λ,使与不能任意取值的那个虚位移相乘的方括号为零,其余的方括号则由于与它们相乘的虚位移可任意取值而为零.(3.67)中的各方括号皆为零.由此得平衡位形

$$\tan\theta_i = \frac{\lambda}{mg(n-i+1)}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.68}$$

(3.63)中的水平力 P 在这里被拉氏乘子代替.这很合理,因为直线对链末端的约束是理想的,约束反作用力垂直于直线,因而是水平力.不过现在此力要由约束条件(3.65)决定.由(3.68)得

$$\sin\theta_i = \frac{\lambda}{\sqrt{m^2g^2(n-i+1)^2+\lambda^2}}. \tag{3.69}$$

代入(3.65)得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a\lambda}{\sqrt{m^2g^2(n-i+1)^2+\lambda^2}} = A. \tag{3.70}$$

由此可解出拉氏乘子 λ,从而可由(3.68)或(3.69)完全确定静止时链上各节的偏转角 θ_i.解毕.

例 4 若在上题中进一步固定链末端的纵坐标 $y_n = B$[图 3-3(3)],求此链在重力作用下的平衡位形.

解 约束仍是理想的,可用虚功原理.虚功的表达式仍为(3.64).不过现在广义坐标(θ_i)受两个约束.除末端横坐标的约束(3.65)外,还有末端纵坐标的约束

$$y_n = a\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i = B. \tag{3.71}$$

将它变分得虚位移的约束

$$\delta y_n = -a\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\delta\theta_i = 0. \tag{3.72}$$

用拉氏乘子 λ_1 和 λ_2 分别乘(3.66)和此式,然后与命为零的(3.64)相加,得

$$a\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_1\cos\theta_i - [\lambda_2 + mg(n-i+1)]\sin\theta_i\}\delta\theta_i = 0. \tag{3.73}$$

由拉氏乘子法知,此式中的每一花括号皆为零,从而得平衡位形

$$\tan\theta_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + mg(n-i+1)}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.74}$$

这组表达式含两个待定参数.这是合理的,因为问题本身就依赖于两个参数,即链末端的直线坐标(A,B).由(3.74)得

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_i &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+[\lambda_2+mg(n-i+1)]^2}},\\ \cos\theta_i &= \frac{\lambda_2+mg(n-i+1)}{\sqrt{\lambda_1^2+[\lambda_2+mg(n-i+1)]^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{3.75}$$

分别代入(3.65)和(3.71)得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2+[\lambda_2+mg(n-i+1)]^2}}=\frac{A}{a},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_2+mg(n-i+1)}{\sqrt{\lambda_1^2+[\lambda_2+mg(n-i+1)]^2}}=\frac{B}{a}. \tag{3.76}$$

给定链末端坐标(A,B)后,即可由此求得 λ_1 和 λ_2.解毕.

例5 悬链线是柔顺而不可伸缩的均匀细绳在重力作用下的平衡位形.这里,柔顺指它的位形总是最大限度地适应外力的安排,不可伸缩指其中每一段的长度都不可变,均匀指质量的线密度 ρ 处处相同,细则指横截面积可忽略.

解 由于柔顺又只受重力的作用,此绳的平衡位形必在一铅垂平面内.取此平面为 xy 平面,在其上取一水平线为 x 轴,y 轴则垂直向下.绳上每点的 x 坐标和 y 坐标的函数关系 $y(x)$描绘出它的位形.同一曲线也可由参数方程 $x(s)$和 $y(s)$描写.参数 s 选为自某给定点到所在点的绳长.在重力作用下,函数 $y(x)$、$x(s)$和 $y(s)$都应当是单值的.考虑此绳的一段,它两端的直线坐标分别为(x_1,y_1)和(x_2,y_2),参数分别为 s_1 和 s_2.此段绳长 s_2-s_1.将它再分成许多等长的线段.分得足够细,使每段都可当作一质点,长度 $\mathrm{d}s$ 可当作微分.于是问题成了质点系的静力学.不过这个质点系是受约束的.首先各线段要首尾相联成为一根长 s_2-s_1 的绳.其次两端点的坐标必须是(x_1,y_1)和(x_2,y_2).在取 s 为自变量的计算中,绳长固定的要求已由自变量的固定区间(s_1,s_2)表达.两端点纵坐标固定的要求会在下面的变分运算中顾及.只有两端点横坐标固定的要求要用约束关系式表达.由于这个问题具有沿水平方向平移的对称性,要固定的是横坐标差 x_2-x_1.现在采用的是笛卡儿坐标,因此有 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$,这使

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2=1. \tag{3.77}$$

它表明函数 $x(s)$和 $y(s)$不是彼此独立的.

$$x(s)=x_1+\int_{s_1}^{s}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s'}\mathrm{d}s'=x_1+\int_{s_1}^{s}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s'}\right)^2}\,\mathrm{d}s', \tag{3.78}$$

由 $y(s)$可算得 $x(s)$.$y(s)$可单独表示绳的位形.固定两端点横坐标的差

$$x_2-x_1=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\mathrm{d}s \tag{3.79}$$

成了对函数 $y(s)$的一个约束.固定 x_2-x_1 即是要求此式右边的变分为零:

$$0=\delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\mathrm{d}s=\int_{s_1}^{s_2}\delta\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\mathrm{d}s$$

$$= -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}$$

$$= -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}.$$

作一次分部积分，由于两端点纵坐标固定为 y_1 和 y_2，变分 $\delta y(s_1) = \delta y(s_2) = 0$，积出的部分为零．剩下的积分给出约束关系

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\right] \delta y \mathrm{d}s = 0. \tag{3.80}$$

每一 s 处的微分线段当作一个质点，该处的纵坐标 y 就是它的广义坐标．函数 $y(s)$ 则是这个“质点系”的广义坐标．它的变分 δy 即表示位移．(3.80)是可能位移的约束条件．在这个问题中也就是虚位移的约束条件．注意其中 s_1 和 s_2 是固定的，y_1 和 y_2 固定的要求也在它的推导中用过了．(3.80)是剩下待考虑的惟一约束条件．重力对虚位移 δy 作的虚功为

$$\delta W = -\int_{s_1}^{s_2} \rho g \delta y \mathrm{d}s. \tag{3.81}$$

虚功原理要求，对符合约束条件(3.80)的虚位移 δy，此式表达的虚功为零．由拉格朗日乘子法可得，平衡位形满足的方程

$$-\rho g + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\right] = 0, \tag{3.82}$$

λ 为拉氏乘子．记 $y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，由(3.77)知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2} = y', \tag{3.83}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'^2}. \tag{3.84}$$

用这两式可将(3.82)改写为 y 对 x 的二阶常微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}, \tag{3.85}$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho g}$ 为常数，$y'' \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$．将此式写成

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{a}, \tag{3.86}$$

然后两边积分得

$$\ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{x}{a} + c, \tag{3.87}$$

c 为积分常数.将 y 轴挪到 $y'=0$ 处,从而使 $x=0$ 处 $y'=0$,(3.87)中的积分常数 $c=0$.两边取指数得

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{a}}. \tag{3.88}$$

由于 $(y' + \sqrt{1+y'^2})(-y' + \sqrt{1+y'^2}) = 1$,此式可变为

$$-y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-\frac{x}{a}}.$$

用(3.88)减此式,得

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

两边再对 x 积分一次得

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + c', \tag{3.89}$$

c' 为积分常数.将 x 轴挪到 $y=c'$ 处,在此新坐标系中,(3.89)变为

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{3.90}$$

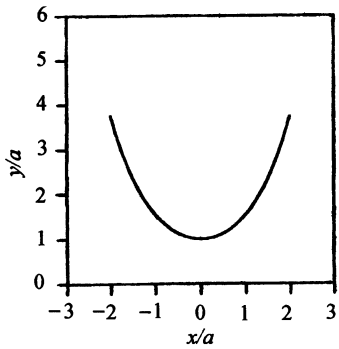

图 3-4 悬链线

此式表示的曲线称为悬链线(图 3-4),就是柔顺不可伸缩均匀细绳在重力作用下的平衡位形.解毕.

从这些例子看到,由于避开了对互相联接的杆之间、杆与约束它运动的壁之间、和杆与悬点之间力的分析,避开了对绳中张力的分析,总之避开了对约束反作用力的分析,虚功原理在解决静力学问题中确实很简便有效.

§3.4 动力学 惯性力 达朗贝尔原理与拉格朗日方程

动力学研究物体运动的规律.暂时仍用 $q_\sigma, \sigma=1,2,\cdots,f$ 表示 N 质点系的 $3N$ 个笛卡儿坐标,$f=3N$.牛顿方程(1.4)与力平衡方程(3.27)相似.这种相似在引进惯性力

$$\boldsymbol{I} = -\dot{\boldsymbol{p}} = -m\boldsymbol{a} \tag{3.91}$$

后更加明显.定义包含惯性力的总力

$$X_\sigma = F_\sigma + I_\sigma = Q_\sigma + R_\sigma + I_\sigma, \tag{3.92}$$

各质点的牛顿方程,即动力学方程可表示为

$$X_\sigma = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{3.93}$$

它就是包括惯性力在内的力平衡方程.§3.2 中关于静力学的一套论证可搬用过来,只要用 $Q_\sigma + I_\sigma$ 代替 Q_σ 即可.由于刚接触这种方法,为踏实掌握,此处不厌其烦地再重复论证一遍.

动力学方程又叫运动方程,表示运动状态变化的规律.即用它应能从一个时刻的运动状态算出其他时刻的运动状态.运动状态由广义坐标(q_σ)和广义速度($\dot{q}_\sigma$)描述.计算它的变化就要能从(q_σ)和($\dot{q}_\sigma$)算出广义加速度($\ddot{q}_\sigma$),即需要广义坐标对时间的 f 个二阶常微分方程.用它们可从起始时刻 t_0 的 f 个广义坐标($q_\sigma(t_0)$)和 f 个广义速度($\dot{q}_\sigma(t_0)$)解得任意时刻 t 的 f 个广义坐标($q_\sigma(t)$)和 f 个广义速度($\dot{q}_\sigma(t)$).将约束反作用力的表达式(3.23)代入(3.92)右边,再将结果代入(3.93)得

$$I_\sigma + Q_\sigma + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i} = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.94}$$

至少在采用笛卡儿坐标时,此式就是 f 个坐标对时间的二阶常微分方程.不过其中还含 n 个待定拉氏乘子(λ_i).恰好还有 n 个约束方程(3.1).它和(3.94)一起共含 $f+n$ 个方程,可解出 f 个广义加速度$\ddot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$和 n 个拉氏乘子 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,因而是一套完备的动力学方程.由于用了理想约束的约束反作用力表达式(3.23),这套方程成立的前提为质点系受的约束为理想约束.

在有了§3.2的经验后就会自然地由此认识到动力学的基本原理也可表成类似虚功原理的形式.即

达朗贝尔原理 理想约束下质点系的惯性力与它所受作用力之和的虚功为零.

证 由动力学方程(3.93)得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} X_\sigma \delta q_\sigma = 0, \tag{3.95}$$

即包括惯性力在内的所有力之和的虚功为零.由表达式(3.92)和理想约束条件(3.20),进一步从(3.95)得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}(Q_\sigma + I_\sigma)\delta q_\sigma = 0. \tag{3.96}$$

可见动力学方程符合达朗贝尔原理.另一方面,在虚位移的约束条件(3.21)两边乘拉格朗日乘子 λ_i,对 i 求和后再与达朗贝尔原理的表达式(3.96)相加,得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}(Q_\sigma + I_\sigma + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i})\delta q_\sigma = 0. \tag{3.97}$$

在 f 个虚位移中有 n 个不能随意取值而须由 n 个约束方程(3.21)求解.选择 n 个拉格朗日乘子的值使(3.97)中与这些虚位移相乘的括号为零,使这些项从(3.97)左边消失.剩下的括号则由于与它们相乘的虚位移可任意取值而必须为零.这就使运动方程(3.94)成立.可见,达朗贝尔原理也可以导出运动方程.达朗贝尔原理与运动方程等价.证毕.

可以期待,达朗贝尔原理用于动力学会像虚功原理用于静力学一样简便有效.因为它同样避开了约束反作用力,而且可用于任何广义坐标系统,包括用完整约束消去了若干自由度的广义坐标系统.这后一点可由逐字重复(3.35)～(3.45)的论证得知.此处只须多引进一个广义惯性力

$$I'_{\sigma'} = \sum_{\sigma=1}^{f} I_\sigma \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}, \quad \sigma' = 1,2,\cdots,f'. \tag{3.98}$$

它保持惯性力的虚功

$$\sum_{\sigma=1}^{f} I_\sigma \delta q_\sigma = \sum_{\sigma'=1}^{f'} I'_{\sigma'} \delta q'_{\sigma'} \tag{3.99}$$

在各广义坐标系中的表达式不变.对笛卡儿坐标,已知

$$I_\sigma = -m_\sigma \ddot{q}_\sigma, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{3.100}$$

其中

$$m_{3\iota-2} = m_{3\iota-1} = m_{3\iota} \tag{3.101}$$

为第 ι 质点的质量.代入(3.98)知,对任意广义坐标系 $q'_{\sigma'}, \sigma' = 1,2,\cdots,f'$,

$$I'_{\sigma'} = -\sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \ddot{q}_\sigma \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} = -\sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_\sigma \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} \right) - \dot{q}_\sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} \right) \right].$$

由(3.36)知

$$\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} \right), \tag{3.102}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} = \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}. \tag{3.103}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} I'_{\sigma'} &= -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \dot{q}_\sigma \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} \right) - \sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \dot{q}_\sigma \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}} \right] \\ &= -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} - \frac{\partial T}{\partial q'_{\sigma'}} \right], \quad \sigma' = 1,2,\cdots,f', \end{aligned} \tag{3.104}$$

其中

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \dot{q}_\sigma^2 \tag{3.105}$$

为质点系的动能.也可一般地证明,广义惯性力的表达式

$$I_\sigma = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \right], \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{3.106}$$

在坐标变换中不变,其中动能 T 可一般地为广义坐标(q_σ)、广义速度($\dot{q}_\sigma$)和时间 t 的函数.注意坐标变换(3.35)中,q_σ 与($\dot{q}'_{\sigma'}$)无关,而 $\dot{q}_\sigma$ 却可与 $q'_{\sigma'}$ 有关.由(3.102)和(3.103)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}}-\frac{\partial T}{\partial q'_{\sigma'}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}\right)-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}\right)$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right)\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}. \tag{3.107}$$

对照(3.98)知,它表明,如果在坐标系 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 中广义惯性力由(3.106)表示,则在变到坐标系 $q'_{\sigma'}(\sigma'=1,2,\cdots,f')$ 后广义惯性力仍由同类表达式(3.104)表示.在(q_σ)为笛卡儿坐标时,惯性力(3.100)可由动能(3.105)用(3.106)表示.因此任何坐标系中的惯性力都可表示为(3.106),只是在不同坐标系中,动能 T 与广义坐标(q_σ)和广义速度($\dot{q}_\sigma$)的关系不同.在曲线坐标中动能不具有(3.105)的简单形式.(3.107)进一步表明的是,即使物体不是在欧几里得空间运动,即使不存在任何直线坐标系,即使惯性力不具有(3.100)的简单形式或动能不具有(3.105)的简单形式,即使关系(3.101)不成立,从物理上讲即使质点的质量与它的空间位置、运动速度和时间都有关,只要存在一个动能函数 $T(q_1,q_2,\cdots,q_f;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_f,t)$,就可由(3.106)定义这个系统的惯性力,由达朗贝尔原理得到运动方程(3.94).可见,达朗贝尔原理不仅与牛顿运动方程等价,不仅用来更为简便有效,而且提供了推广牛顿力学的广泛可能性.将惯性力(3.106)代入(3.94),得到的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i},\quad \sigma=1,2,\cdots,f, \tag{3.108}$$

称为拉格朗日方程.对没有用完整约束消去多余自由度的 N 质点系,这是 $3N$ 个方程.它们要和 n 个约束方程(3.1)联立才能解出质点系的轨道方程.与此同时也解出约束反作用力.在此情况下要联立求解的方程共 $3N+n$ 个,比无约束情形多 n 个.而如果 n 个约束都是完整约束,则可用它们消去 n 个广义坐标,使自由度数 f 降为 $3N-n$.由于剩下的 f 个自由度不再受约束,从达朗贝尔原理导出的拉格朗日方程成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{3.109}$$

既然不受约束,这 f 个自由度自然不受约束反作用力.现在,只须解出 $f=3N-n$ 个联立方程即可得质点系的轨道方程.须联立求解的方程比无约束情形少 n 个.只受完整约束的系统称完整系统,(3.109)为完整系统的拉格朗日方程.含非完整约束的系统称非完整系统.对这种系统宜将完整约束用来消去多余自由度,剩下的自由度则只受非完整约束.将作用力和惯性力都在这种坐标系中表出,从达朗贝尔原理中导出的拉格朗日方程仍具(3.108)的形式,只是其中只含用完整约束消去多余自由度后剩下的自由度,且只含与 n 个非完整约束有关的拉氏乘子.这些方程与 n 个非完整约束方程联立可解出系统的轨

道方程和非完整约束的约束反作用力.

§3.5 势函数 拉格朗日函数 有势系统的拉格朗日方程 能量和保守系

如果存在一个函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f)$, 由它可表出广义力

$$Q_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{3.110}$$

则称这个系统为有势系统, 函数 V 称为势或势函数. 一般说来, 广义力可与时间有关, 势函数也就可与时间有关. 在(3.107)中用 V 代替 T, 整个推导过程依然成立. 即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} - \frac{\partial V}{\partial q'_{\sigma'}} = \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma}\right)\frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}. \tag{3.111}$$

由(3.40)知, 这恰是坐标变换中广义力应遵从的变换关系. 广义力表达式(3.110)在坐标变换中不变. 若势函数与广义速度($\dot{q}_\sigma$)无关, 则(3.110)成为

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{3.112}$$

在笛卡儿坐标系中, 这就是原先势的定义(1.22). 将(3.110)代入(3.108)右边, 经整理后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{3.113}$$

其中

$$L = T - V \tag{3.114}$$

称为拉格朗日函数, 又称拉格朗日量或拉氏量. (3.113)为有势系统的拉格朗日方程. 若这个系统还是完整的, 拉格朗日方程可进一步简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{3.115}$$

若不加说明地称呼拉格朗日方程, 指的就是这个方程.

拉格朗日方程可作为经典力学的基本方程. 它的优点是解除了完整约束, 且具有坐标变换中的不变性. 这使人们可自如地选择最合适的广义坐标解决问题. 在应用上极为方便. 这种形式的力学称为拉格朗日力学, 或力学的拉格朗日形式. 这种形式的基本量为拉氏量 L, 它是广义坐标(q_σ)和广义速度($\dot{q}_\sigma$)的函数, 且可直接与时间有关. 若按(3.114)取拉氏量, 则拉格朗日力学与牛顿力学等价. 然而拉格朗日力学本身并未要求一定要如此选择拉氏量. 选择拉氏量的最终标准是它的结果要与实验一致. 当拉氏量不取(3.114)的形式时, 拉格朗日力学就成为牛顿力学的推广. 可见它具有广泛的推广可能性, 在理论上

也是极方便的.

设存在笛卡儿坐标 $q_\sigma, \sigma=1,2,\cdots,f, f=3N$, 使 N 质点系的动能可以表示为(3.105), 且设势函数 V 与广义速度无关, 质点动量的各分量为

$$p_\sigma = m_\sigma \dot{q}_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}. \tag{3.116}$$

末一等号处采用了拉氏量的表达式(3.114). 由此可得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \dot{q}_\sigma^2 = 2T. \tag{3.117}$$

在势函数不显含 t 的条件下, 系统有能量

$$E = T + V = \sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \dot{q}_\sigma - L. \tag{3.118}$$

这些结果都可以推广. 即不论是否按(3.114)取拉氏量, 均定义广义动量为

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.119}$$

在拉氏量不显含 t 的条件下定义系统的能量

$$E = \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma - L. \tag{3.120}$$

由于(q_σ)与($\dot{q}'_{\sigma'}$)无关, 用(3.103)得坐标变换中广义动量的变换关系

$$p'_{\sigma'} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} = \sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \frac{\partial q_\sigma}{\partial q'_{\sigma'}}. \tag{3.121}$$

设坐标变换(3.35)与时间无关, 由(3.36)的逆变换和(3.121)得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}'_\sigma p'_\sigma = \sum_{\rho=1}^{f}\sum_{\tau=1}^{f}\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\rho p_\tau \frac{\partial q'_\sigma}{\partial q_\rho}\frac{\partial q_\tau}{\partial q'_\sigma} = \sum_{\rho=1}^{f} \dot{q}_\rho p_\rho, \tag{3.122}$$

其中用到偏微分关系

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial q'_\sigma}{\partial q_\rho}\frac{\partial q_\tau}{\partial q'_\sigma} = \delta_{\rho\tau} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \rho = \tau, \\ 0, & \text{若 } \rho \neq \tau. \end{cases} \tag{3.123}$$

由于是考虑完整系, 所有完整约束均已求解, 变换前后的自由度数同为 f. (3.122)表明, 在与时间无关的坐标变换中, 由(3.120)定义的能量不变, 在不同广义坐标系中取值相同. 将它对时间求全微商, 记住已设 L 不显含时间, 利用定义(3.119)和拉格朗日方程(3.115)得

$$\dot{E} = \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\dot{q}_\sigma \dot{p}_\sigma + \ddot{q}_\sigma p_\sigma - \dot{q}_\sigma \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \ddot{q}_\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) = 0. \tag{3.124}$$

即能量守恒. 拉氏量不显含 t 的系统称为保守系, 保守系可定义能量(3.120), 且这个能量守恒.

§3.6 完整系统动力学举例:单摆 复摆 滑杆摆 旋轮摆

例1 单摆.一质量为 m 的质点固定在长为 l 的轻杆一端,杆的另一端悬挂,质点随杆绕悬点在一平面内往复运动,是为单摆.

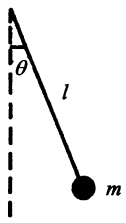

图 3-5 单摆

单摆运动可视为被约束在一铅垂平面内且与一点距离固定为 l 的质点在重力作用下的运动.质点受的是完整约束,属完整系.在用上述完整约束消去多余自由度后还剩下一个自由度,即轻杆与铅垂线的夹角(见图 3-5).取此角 θ 为广义坐标,质点速度的值为 $l\dot{\theta}$,动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}^2, \tag{3.125}$$

其中

$$\mathscr{I} = ml^2 \tag{3.126}$$

为质点绕悬点转动的转动惯量.以轻杆铅垂时质点的位置为计算其高 h 的零点,质点势能为

$$V = mgh = mgl(1 - \cos\theta), \tag{3.127}$$

拉氏量为

$$L = T - V = ml\left[\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2 - g(1 - \cos\theta)\right]. \tag{3.128}$$

代入拉格朗日方程(3.115),得单摆的运动方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0, \tag{3.129}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.130}$$

为常数.对绕平衡点 $\theta=0$ 处的微小摆动,$\sin\theta\approx\theta$,(3.129)简化为

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \tag{3.131}$$

它有简谐振动解

$$\theta = \theta_0\sin(\omega t + \delta), \tag{3.132}$$

其中 θ_0 与 δ 为积分常数,分别表示振幅与初相角.由此还可知,(3.130)定义的 ω 为振动圆频率.而振动周期为

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3.133}$$

这就是单摆的初等理论.进一步的研究要求解(3.129).在它两侧乘 $\dot{\theta}$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta\right] = 0. \tag{3.134}$$

由此得初积分

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta = C, \tag{3.135}$$

C 为积分常数.当 θ 达到最大值 θ_0 时质点速度为零,$\dot{\theta}=0$,可见

$$C = -\omega^2\cos\theta_0. \tag{3.136}$$

代入(3.135)得

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0) = 4\omega^2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{3.137}$$

将此式写成

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \omega.$$

两边积分得

$$\int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{\mathrm{d}\frac{\theta'}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta'}{2}}} = \omega t + \delta, \tag{3.138}$$

δ 为积分常数.作变换

$$u = \sin\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta_0}{2}, \tag{3.139}$$

$$\mathrm{d}u = \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta_0}{2}. \tag{3.140}$$

在作积分变量时,θ 和 u 分别改为 θ' 和 u',代入(3.138)左边得

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = \omega t + \delta, \tag{3.141}$$

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2}. \tag{3.142}$$

(3.141)左边为椭圆积分.式

$$x = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} \tag{3.143}$$

定义了 u 与 x 的一个函数关系,称 u 为 x 的椭圆正弦函数,记作

$$u = \mathrm{sn}(k, x), \tag{3.144}$$

k 为参数.于是,单摆严格的轨道方程可表示为

$$u(t) = \mathrm{sn}(k, \omega t + \delta). \tag{3.145}$$

这里,(3.139)定义的 u 被当作广义坐标,参数 k 由(3.142)定义.

椭圆函数的性质已被详尽研究过,可在常用的数学专著[①]中查到.由定义(3.143)可以看出

$$\mathrm{sn}(k,x)\xrightarrow{k\to 0}\sin x. \tag{3.146}$$

这就是振幅 θ_0 为小量时单摆的极限情况.此时 $|\theta|\leqslant\theta_0$ 自然也是小量,按(3.139) $u\to\theta/\theta_0$.轨道方程(3.145)在此极限下还原为(3.132).若将初始条件定为 $t=0$ 时 $\theta=0$,则应在(3.138)中取积分常数 $\delta=0$.(3.141)可写为

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}}=\omega t. \tag{3.147}$$

四分之一周期后 θ 达到它的最大值 θ_0,u 也就达到它的最大值 1.因此

$$\frac{1}{4}\omega\tau=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\equiv K(k). \tag{3.148}$$

作二项式展开

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}u^{2n}, \tag{3.149}$$

代入(3.148)后逐项求积.由于

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2},$$

经递推得

$$\int_0^1\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\frac{2n-1}{2n}\int_0^1\frac{u^{2(n-1)}}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\cdots=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},\quad n=1,2,\cdots \tag{3.150}$$

可见

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}. \tag{3.151}$$

单摆周期

$$\begin{aligned}\tau&=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}\\&=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{9k^4}{64}+\cdots\right).\end{aligned} \tag{3.152}$$

它与参数 k 有关,因而按(3.142)与振幅 θ_0 有关.k 很小时(3.152)中的级数

---

① 例如,王竹溪 郭敦仁,特殊函数概论(科学出版社 1965)第八章.

E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th ed. (Cambridge 1927) ChXX, ChXXII.

收敛甚快，可用其中的 k^2 项估计有限振幅引起的周期偏差. 例如，欲将偏差控制在万分之四以内，只须令 $\frac{1}{4}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2<0.04\%$，即令 $\theta_0<0.08\text{rad}=4.58^\circ$.

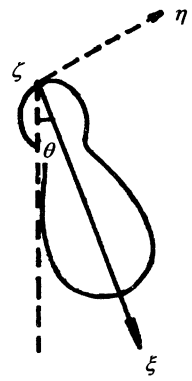

图 3-6 复摆

例 2 复摆. 如图 3-6，一刚体悬挂于水平轴，在重力作用下无摩擦地往复运动，是为复摆. 称此水平轴为 ζ，自 ζ 垂直地指向刚体重心的轴为 ξ，垂直于 $\zeta\xi$ 平面的轴为 η. $\xi\eta\zeta$ 组成复摆的一个本体坐标系. 复摆只有一个自由度，即绕 ζ 轴的转动. 用 ξ 轴与铅垂方向的夹角 θ 作广义坐标. 它也就是刚体绕 ζ 轴的转动角. 由(2.48)和(2.49)知，摆动时摆上 $\boldsymbol{r}$ 处一点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\theta}\boldsymbol{\zeta}_0\times\boldsymbol{r}.$$

用(ξ,η,ζ)表 $\boldsymbol{r}$ 处一点的本体坐标，设该处刚体密度为$\rho(\boldsymbol{r})$，$\mathrm{d}\tau$ 体积元的动能为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau v^2&=\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{r})\dot{\theta}^2(\boldsymbol{\zeta}_0\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\zeta}_0\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{r})(r^2-\zeta^2)\mathrm{d}\tau\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{r})(\xi^2+\eta^2)\mathrm{d}\tau\dot{\theta}^2.\end{aligned}$$

在第二等号处用了 $\boldsymbol{\zeta}_0\cdot\boldsymbol{r}=\zeta$，在第三等号处用了 $r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$. 将此式积分即得摆动时复摆的动能

$$T=\frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}^2,\tag{3.153}$$

其中

$$\mathscr{I}=\int\rho(\boldsymbol{r})(\xi^2+\eta^2)\mathrm{d}\tau\tag{3.154}$$

为复摆绕 ζ 轴的转动惯量. 如前所述，摆的重心在 ξ 轴上. 设它与 ζ 轴的距离为 a，将本体坐标系沿 ξ 方向平移，将原点挪到重心上. 新本体坐标系称为 $\xi'\eta'\zeta'$. 显然 ξ'轴即 ξ 轴，η'轴和 ζ'轴分别与 η 轴和 ζ 轴平行. 同一点的旧坐标与新坐标的关系为

$$\xi=\xi'+a,\quad\eta=\eta',\quad\zeta=\zeta'.\tag{3.155}$$

代入(3.154)得

$$\mathscr{I}=\mathscr{I}_a+\mathscr{I}',\tag{3.156}$$

$$\mathscr{I}_a=ma^2,\quad m=\int\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau,\tag{3.157}$$

$$\mathscr{I}'=\int\rho(\boldsymbol{r})(\xi'^2+\eta'^2)\mathrm{d}\tau.\tag{3.158}$$

m 为摆的质量，$\mathscr{I}_a$ 为设摆的质量集中于重心而得的绕 ζ 轴的转动惯量，$\mathscr{I}'$ 为摆绕通过质心与 ζ 轴平行的 ζ' 轴的转动惯量. 为得(3.156)，用到均匀重力场中物体的重心即是质心，因而

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\xi' \mathrm{d}\tau = \int \rho(\boldsymbol{r})\eta' \mathrm{d}\tau = \int \rho(\boldsymbol{r})\zeta' \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.159}$$

用 $\boldsymbol{r}'$ 表示从重心(亦即由质心)指向所在点的径矢，(3.159)又可表示为

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}' \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.160}$$

(3.154)，(3.157)～(3.160)中未标明积分区域的体积分皆为全摆体积上的积分. 由

$$\mathscr{I} = mb^2 \tag{3.161}$$

可定义一长度 b，它是质量为 m 且转动惯量为 $\mathscr{I}$ 的单摆长度. 当复摆从它的平衡位形偏转 θ 角时 ξ 处 $\mathrm{d}\tau$ 体积元获得势能 $\mathrm{d}\tau\rho g\xi(1-\cos\theta)$，全摆获得势能

$$V = \int \rho\xi \mathrm{d}\tau g(1-\cos\theta) = mag(1-\cos\theta). \tag{3.162}$$

复摆的拉氏函数为

$$L = m\left[\frac{b^2}{2}\dot{\theta}^2 - ga(1-\cos\theta)\right]. \tag{3.163}$$

将它代入拉氏方程(3.115)得复摆的运动方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0, \tag{3.164}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{3.165}$$

$$l = b^2/a. \tag{3.166}$$

复摆的运动方程(3.164)和圆频率表达式(3.165)分别与单摆的运动方程(3.129)和圆频率表达式(3.130)完全相同，只是对长度 l 的解释不同. 对单摆，它是摆长；对复摆，它是由(3.166)表示的等价长度. (3.130)以下对单摆的讨论遂完全适用于复摆.

例 3 滑杆摆. §3.3 例 1 中的滑杆在重力作用下绕平衡位形在铅垂平面内的往复运动称为滑杆摆. 摆动时两杆上每一点都以相同的角速度 $\dot{\theta}$ 绕容器圆心转动. 杆上距重心 ξ 的一点与圆心的距离为 $\sqrt{\frac{3}{4}r^2+\xi^2}$，因而有速度

$$v(\xi) = \sqrt{\frac{3}{4}r^2 + \xi^2}\dot{\theta}.$$

第 i 杆质量线密度为 $\rho_i = \frac{m_i}{r}$，因而有动能

$$T_i = \int_0^{\frac{r}{2}} \rho_i v^2(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\mathscr{I}_i\dot{\theta}^2, \tag{3.167}$$

其中

$$\mathscr{I}_i = \frac{3}{4}m_i r^2 + \frac{1}{12}m_i r^2 = \frac{5}{6}m_i r^2 \tag{3.168}$$

为杆 i 绕容器圆心的转动惯量.它可分为两项.(3.168)第一等号后的第一项为设杆的质量集中于重心绕容器圆心的转动惯量;第二项为杆绕自己重心的转动惯量.两杆总动能为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}^2, \tag{3.169}$$

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 = \frac{5}{6}mr^2, \tag{3.170}$$

$m = m_1 + m_2$ 为两杆总质量.以从圆心铅垂向下$\frac{\sqrt{3}}{2}r$ 处为计算高度的零点,两杆势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{2}gr\{m_1[1 - \cos(\theta + 30°)] + m_2[1 - \cos(\theta - 30°)]\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}gr\{m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}\cos(\theta - \theta_0)\}, \end{aligned} \tag{3.171}$$

其中

$$\tan\theta_0 = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)\sqrt{3}}. \tag{3.172}$$

与(3.59)比较知,θ_0 为平衡位形下 θ 的取值.改用

$$\theta' = \theta - \theta_0 \tag{3.173}$$

为广义坐标,$\dot{\theta}' = \dot{\theta}$.由(3.169)、(3.171)和(3.173)得拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}gr\{m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}\cos\theta'\}. \tag{3.174}$$

代入拉氏方程(3.115)得滑杆摆的运动方程

$$\ddot{\theta}' + \omega^2\sin\theta' = 0, \tag{3.175}$$

其中的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l'}}, \tag{3.176}$$

$$l' = \frac{5}{9}\sqrt{3}\,\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}}r. \tag{3.177}$$

此处的运动方程(3.175)和圆频率表达式(3.176)也分别与单摆的运动方程(3.129)和圆频率表达式(3.130)有完全相同的形式.(3.130)以下对单摆的讨论也完全适用于滑杆摆.

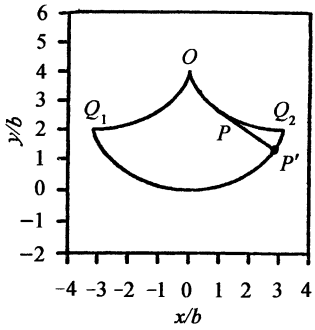

图 3-7　旋轮摆

单摆、复摆和滑杆摆还有一共同点，即摆动中摆上每一点都绕同一轴以相同的角速度转动，各自走圆周的一段. 这种摆称为圆周摆. 从这几个例子中可以看到，圆周摆有相同的运动规律.

例 4　旋轮摆. 将习题二第 5 题中的旋轮线上下翻转后上挪 $2b$，即得图 3-7 下部的旋轮线，它的参数方程为

$$x = b(\theta + \sin\theta), \quad y = b(1 - \cos\theta), \tag{3.178}$$

其中第一式即为(2.146)的第一式，y 则为 $2b$ 减去(2.146)第二式右边的结果. 一个质量为 m 的质点可静止于其底部，即 $\theta = x = y = 0$ 处. 将它挪离平衡位置后放开，它会在这位置附近往复运动. 若无摩擦，这种运动会永远保持下去，且是周期的，因而是一个摆动. 不过此摆不是圆周摆，它走的不是圆周的一段，而是旋轮线的一段. 质点在铅垂平面内，在重力作用下，无摩擦地沿旋轮线往复运动，称为旋轮摆.

微分(3.178)中的两式得

$$\mathrm{d}x = b(1 + \cos\theta)\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = b\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{3.179}$$

它们对应微分距离

$$\mathrm{d}s = \sqrt{2b^2(1 + \cos\theta)}\mathrm{d}\theta = 2b\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta. \tag{3.180}$$

沿旋轮线运动的质点速度的值为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2b\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta} = 4b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.181}$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = 8mb^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2. \tag{3.182}$$

就用 y 表示质点的高，旋轮摆的势能为

$$V = mgy = 2mgb\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.183}$$

可见宜取

$$\xi = b\sin\frac{\theta}{2} \tag{3.184}$$

为广义坐标. 旋轮摆的拉氏量遂为

$$L = 8m\dot{\xi}^2 - \frac{2mg}{b}\xi^2. \tag{3.185}$$

代入拉格朗日方程(3.115)得旋轮摆的运动方程

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \tag{3.186}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}. \tag{3.187}$$

此式表明旋轮摆作简谐振动,

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t + \delta). \tag{3.188}$$

其中圆频率 ω 由(3.187)表示,与振幅 ξ_0 无关.周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{b}{g}} \tag{3.189}$$

也就为常数,与振幅无关.旋轮摆是严格等时的.

惠更斯(C.Huygens)发现旋轮摆的等时性后,便想用它来制造有良好等时性的钟.为了避免摩擦,他利用旋轮线的渐伸线仍为旋轮线的性质设计了一种悬挂式旋轮摆.图 3-7 上部为两支形状与下部相同的旋轮线,可视为下部旋轮线上移 $2b$,再向左、右各移 πb 的结果,因而参数方程为

$$x = b(\theta' - \sin\theta'), \quad y = b(3 + \cos\theta'), \tag{3.190}$$

$\theta' = \theta \mp \pi$.微分此式得

$$\mathrm{d}x = 2b\sin^2\frac{\theta'}{2}\mathrm{d}\theta', \qquad \mathrm{d}y = -2b\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}\mathrm{d}\theta', \tag{3.191}$$

$$\mathrm{d}s = 2b\sin\frac{\theta'}{2}\mathrm{d}\theta'. \tag{3.192}$$

两支旋轮线在顶点 O 相联,O 点的笛卡儿坐标为 $x=0, y=4b$,参数 $\theta'=0$.它们底部最低点 Q_1 与 Q_2 的坐标为 $x = \mp b\pi, y=2b$,参数为 $\theta' = \mp\pi$.旋轮线从顶点 O 到底点 Q_1 或 Q_2 的长为

$$\int_0^{\pi} 2b\sin\frac{\theta'}{2}\mathrm{d}\theta' = 4b.$$

在顶点 O 悬一长 $4b$ 的细轻丝,末端挂一摆锤.此摆的最大偏转位形为全摆贴在一支旋轮线上,摆锤位于该支旋轮线的底点.在离开这最大偏转位形后,仍有一截 OP 贴在一支旋轮线上.摆的其余部分沿旋轮线上 P 点的切线方向一直向外伸.末端 P'点的轨迹就是旋轮线的渐伸线.旋轮线在 O、P 间的长度 s 与 P 的参数 θ' 间的关系为

$$s = 2b\int_0^{\theta'} \sin\frac{\theta''}{2}\mathrm{d}\theta'' = 4b\left(1 - \cos\frac{\theta'}{2}\right), \tag{3.193}$$

PP'的长度就是

$$4b - s = 4b\cos\frac{\theta'}{2}.$$

用 θ_1 表 PP' 与水平方向的夹角.由(3.191)和(3.192)知

$$\cos\theta_1 = \sin\frac{\theta'}{2}, \quad \sin\theta_1 = -\cos\frac{\theta'}{2}.$$

由此得 PP' 的 x 投影

$$4b\cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2} = 2b\sin\theta'$$

和 y 投影

$$-4b\cos^2\frac{\theta'}{2} = -2b(1+\cos\theta').$$

将它们与(3.190)表示的 P 点 x 坐标和 y 坐标相加,得 P' 点的 x 和 y 坐标

$$x' = b(\theta' + \sin\theta'),$$
$$y' = b(1 - \cos\theta').$$

将此式与(3.178)比较知,图 3-7 上部旋轮线的渐伸线恰是下部的旋轮线.惠更斯设计的上述摆的摆锤走的正好是旋轮线,因而是旋轮摆.

惠更斯用旋轮摆制钟的想法并没有实现.机械钟仍用单摆或复摆计时,直到现在.这是因为任何机械都不能免除摩擦.一个没有能源的机械会很快停下来,钟也不例外.为保持运行,要为钟装能源,如上紧了的发条.能源通过擒纵器为摆提供能量以抵消摩擦损耗.贝塞尔(Bessel)等的研究表明,擒纵器与摆的适当配置可使单摆或复摆在一恰当振幅处稳定下来,从而保证摆动的等时性.

§3.7 非完整系统动力学举例:单刀与双刀简单冰橇 水平面与斜面上的直立滚盘

例 1 单刀简单冰橇.单刀冰橇下固定一冰刀,它的取向规定冰橇在冰面上的移动方向.冰刀上有一支点,冰橇可绕通过此支点垂直于冰面的 ζ 轴转动.移动和转动都设为无摩擦的.若冰橇质心恰在转动轴 ζ 上,则称简单冰橇.ζ 轴在冰面上垂足的位置与冰刀的取向代表冰橇的位形.在冰面上取笛卡儿正交坐标系 Oxy,垂足的位置可用它的笛卡儿坐标 (x,y) 表示,冰刀取向可用它与 x 轴的交角 θ 表示(如图 3-8).x、y 和 θ 为冰橇的广义坐标.冰橇可在冰面上的任何位置,冰刀可取任何方向,即广义坐标 x、y 和 θ 的取值不受任何限制.冰橇作为一个质点系,所受的完整约束至此已考虑完毕.然而它的运动却仍受限制.平移方

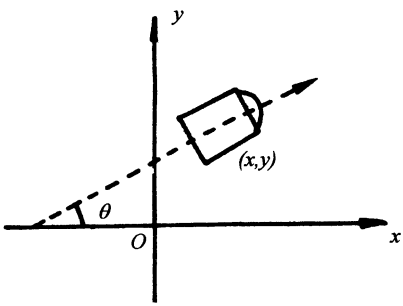

图 3-8 单刀简单冰橇

向为冰刀所指方向，意即轨道的切线方向为冰刀方向，轨道切线斜率为冰刀方向的正切：$\frac{dy}{dx}=\tan\theta$. 此式的微分形式为

$$\sin\theta dx-\cos\theta dy=0, \tag{3.194}$$

或

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0. \tag{3.195}$$

由于 x、y 和 θ 没有事先规定的关系，约束(3.194)或(3.195)是不可积的，因而是非完整约束. 冰橇为非完整力学系统. 设冰橇质量为 m，绕 ζ 轴的转动惯量为 $\mathscr{I}$，由于质心在 ζ 轴上，动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}^2. \tag{3.196}$$

设冰面水平，冰橇在其上各处势能相同. 可将此常数势能置零，拉格朗日函数即为动能

$$L=T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\mathscr{I}\dot{\theta}^2. \tag{3.197}$$

由于无摩擦，约束是理想的，可用非完整系的拉格朗日方程(3.113). 按定义(3.10)，约束(3.195)给出

$$B_x=\sin\theta,\qquad B_y=-\cos\theta,\qquad B_\theta=0. \tag{3.198}$$

将此式与上式一起代入(3.113)得运动方程

$$m\ddot{x}=\lambda\sin\theta,\quad m\ddot{y}=-\lambda\cos\theta,\quad \mathscr{I}\ddot{\theta}=0. \tag{3.199}$$

末式的一次积分

$$\dot{\theta}=\omega=\text{常数}$$

表示冰橇绕 ζ 轴作等角速度转动. 再次积分得

$$\theta(t)=\omega t+\theta_0, \tag{3.200}$$

θ_0 为冰刀的初始取向角. 用 $\cos\theta$ 乘(3.199)的第一式加 $\sin\theta$ 乘它的第二式得

$$\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta=0. \tag{3.201}$$

由于

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)=\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta-(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)\dot{\theta}$$

和约束条件(3.195)，(3.201)给出

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)=0. \tag{3.202}$$

一次积分给出

$$\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=v=\text{常数}. \tag{3.203}$$

它表明冰橇沿冰刀指向运动的速率 v 不变. 与约束条件(3.195)联立得

$$\dot{x}=v\cos\theta=v\cos(\omega t+\theta_0),\quad \dot{y}=v\sin\theta=v\sin(\omega t+\theta_0). \tag{3.204}$$

再次积分得

$$x = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t + \theta_0) + x_0, \qquad y = -\frac{v}{\omega}\cos(\omega t + \theta_0) + y_0. \tag{3.205}$$

此式和(3.200)一起为冰橇的轨道方程,表明冰橇在冰面上作等速圆周运动,周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.206}$$

即为它绕自身 ζ 轴转动的周期.这保证了冰刀始终指着圆周的切线方向.轨道圆周的半径

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{v\tau}{2\pi} \tag{3.207}$$

与速率 v 成正比,与转动角频率 ω 成反比.圆心在(x_0, y_0)处.

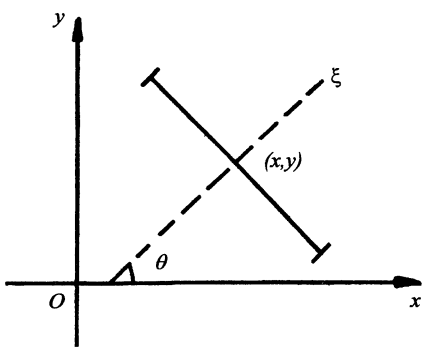

图 3-9 双刀简单冰橇

例 2 双刀简单冰橇.设装有两把相同冰刀的冰橇可视为两架单刀简单冰橇用刚性轻杆相联而成.长 l 的轻杆平行于冰面垂直于两把互相平行的冰刀,固定在两架单刀冰橇的 ζ 轴上.这种冰橇称为双刀简单冰橇.轻杆中心在水平面上的位置和轻杆取向代表冰橇的位形.采用上例中的笛卡儿坐标系 Oxy.用 x、y 表示轻杆中心的笛卡儿坐标.过此中心在冰橇上作 ξ 轴平行于冰面,垂直于轻杆,指向两把平行冰刀所指的方向(图 3-9).用 θ 表示ξ 轴与x 轴的交角.x、y 和 θ 可作为这双刀冰橇的广义坐标.它们彼此独立,取值不受限制,表明冰橇作为质点系所有的完整约束至此已考虑完毕.它绕过中心$(x、y)$垂直冰面的轴的转动是自由的,因为在这种转动中两把冰刀都沿着自己所指的方向移动.它的平移却受限制,只能沿 ξ 方向.因为只有在这种平移中两把冰刀才沿着自己所指方向移动.在这种允许的平移中$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta$,

$$\begin{aligned} &\sin\theta \mathrm{d}x - \cos\theta \mathrm{d}y = 0, \\ &\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{3.208}$$

由于 x、y 和 θ 没有事先规定的关系,这个约束不可积,是非完整约束.轻杆没有质量,也就没有转动惯量.双刀冰橇的动能为两架单刀冰橇动能之和.用 x_i、y_i、θ_i、m_i 和 $\mathcal{I}_i$ 表示第 i 单刀冰橇的广义坐标、质量和绕各自的 ζ 轴的转动惯量,它们与双刀冰橇的广义坐标和质量 m 有关系

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{l}{2}\sin\theta, \quad y_1 = y - \frac{l}{2}\cos\theta, \quad \theta_1 = \theta, \\ x_2 &= x - \frac{l}{2}\sin\theta, \quad y_2 = y + \frac{l}{2}\cos\theta, \quad \theta_2 = \theta, \end{aligned}\right\} \tag{3.209}$$

$$m = m_1 + m_2 = 2m_1. \tag{3.210}$$

此外还有关系

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2. \tag{3.211}$$

用 T_i 表示第 i 单刀冰橇的动能，双刀冰橇的动能即为

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \mathscr{A}_1\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{A}\dot{\theta}^2, \end{aligned} \tag{3.212}$$

其中

$$\mathscr{I} = 2\mathscr{A}_1 + \frac{1}{4}ml^2 \tag{3.213}$$

为双刀冰橇绕过中心(x, y)垂直冰面的轴(即中心轴)的转动惯量. 又由于水平冰面上冰橇处处势能相同，置此常数势能为零，冰橇拉氏量为

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{A}\dot{\theta}^2. \tag{3.214}$$

比较(3.208)、(3.214)与(3.195)、(3.197)可见，双刀简单冰橇与单刀简单冰橇有相同的自由度，受相同的约束，拉氏量也相同. 正是这些在例 1 中决定了单刀简单冰橇的运动. 逐字重复(3.197)以下关于单刀冰橇的论述可得双刀简单冰橇同样的运动过程. 它的中心轨道 $x(t)$、$y(t)$为等速圆周运动，运动周期与冰橇绕自身中心轴的转动周期相同. 这种同步的“公转”和“自转”保证它的移动方向时刻和冰刀指向一致.

例 3 水平面上的直立滚盘. 一个有粗糙边缘，能在平面上滚动的均匀圆盘称为滚盘. 设滚盘在水平面上滚动. 如运动中盘平面与水平面垂直，就是直立滚盘. 通过圆盘中心与盘平面垂直的轴为中心轴. 称中心轴为 ζ. 在盘边缘选定一点，称从盘心指向该点的直线为 ξ 轴. 在水平面取固定的笛卡儿坐标系 Oxy. 直立滚盘的位形由四个广义坐标表示. 它们包括圆盘中心 P 在水平面上的投影，亦即圆盘与水平面的切点 Q 的笛卡儿

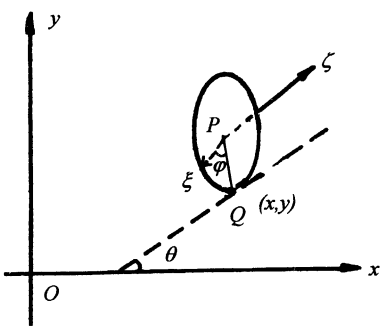

图 3-10 平面上的直立滚盘

坐标(x,y);ξ 轴与半径PQ 的交角φ;及 ζ 轴在水平面上的投影与 x 轴的交角θ(见图 3-10).这四个广义坐标取值不受限制,是彼此独立的.它们不再受完整约束.然而它们的变化却仍受约束.即有

$$\mathrm{d}x - r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = 0, \quad \mathrm{d}y + r\cos\theta\mathrm{d}\varphi = 0, \tag{3.215}$$

r 为滚盘半径.由于事先未规定 x、y、θ 和 φ 的关系,此二式不可积,为非完整约束.用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 为系数将它们重新组合得

$$\cos\theta\mathrm{d}x + \sin\theta\mathrm{d}y = 0, \quad \sin\theta\mathrm{d}x - \cos\theta\mathrm{d}y - r\mathrm{d}\varphi = 0. \tag{3.216}$$

其中第一式表示切点 Q 不能沿垂直于滚盘的方向 ζ 移动,第二式表示 Q 沿滚盘切线方向的移动是滚盘滚动的结果.将此二式写成微商关系即为

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = 0, \quad \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta - r\dot{\varphi} = 0. \tag{3.217}$$

称其中第一式为约束 1,第二式为约束 2,按(3.29)有

$$\left.\begin{aligned} &B_{x1} = \cos\theta, \quad B_{y1} = \sin\theta, \quad B_{\theta1} = B_{\varphi1} = 0, \\ &B_{x2} = \sin\theta, \quad B_{y2} = -\cos\theta, \quad B_{\theta2} = 0, \quad B_{\varphi2} = -r. \end{aligned}\right\} \tag{3.218}$$

将滚盘质量记为 m,它绕中心轴 ζ 的转动惯量为 $\mathscr{I}_\zeta$,绕其直径的转动惯量为 $\mathscr{I}_D$,由于均匀圆盘的中心即是质心,滚盘的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{I}_D\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathscr{I}_\zeta\dot{\varphi}^2. \tag{3.219}$$

直立滚盘质心与水平面距离固定为 r,势能处处相同而可置零.拉氏量即为其动能

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{I}_D\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathscr{I}_\zeta\dot{\varphi}^2. \tag{3.220}$$

将此式和(3.218)一起代入非完整系拉格朗日方程(3.113),得

$$m\ddot{x} = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta, \quad m\ddot{y} = \lambda_1\sin\theta - \lambda_2\cos\theta, \tag{3.221}$$

$$\mathscr{I}_D\ddot{\theta} = 0, \tag{3.222}$$

$$\mathscr{I}_\zeta\ddot{\varphi} = -\lambda_2 r. \tag{3.223}$$

由(3.222)立刻解得

$$\theta = \omega_D t + \theta_0, \tag{3.224}$$

其中 $\omega_D = \dot{\theta} =$ 常数为滚盘绕铅垂轴转动的角速度,θ_0 为 $t=0$ 时 θ 的初值,它们都是求解(3.222)时的积分常数.再用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 为系数重新组合(3.221)中的两式得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) + m(\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta)\dot{\theta} \\ &= mr\dot{\varphi}\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{3.225}$$

$$\lambda_2 = m(\ddot{x}\sin\theta - \ddot{y}\cos\theta)$$

$$= m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta) - m(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)\dot{\theta}$$

$$= mr\ddot{\varphi}. \tag{3.226}$$

这两式末一等号处均用了约束条件(3.217).将(3.226)代入(3.223)得

$$(\mathscr{I}_\zeta + mr^2)\ddot{\varphi} = 0.$$

$\mathscr{I}_\zeta$、m 和 r^2 均为正常数,此式的解为

$$\varphi = \omega_\zeta t + \varphi_0, \tag{3.227}$$

其中 $\omega_\zeta = \dot{\varphi}$ = 常数为滚盘绕自身中心轴 ζ 转动的角速度,φ_0 为 $t=0$ 时 φ 的初值,它们都是积分常数.而常数

$$v = r\dot{\varphi} = r\omega_\zeta \tag{3.228}$$

则为滚盘与水平面的切点 Q 移动线速度的值.将它代入(3.217)的第二式,两式联立得

$$\dot{x} = v\sin\theta = v\sin(\omega_D t + \theta_0), \quad \dot{y} = -v\cos\theta = -v\cos(\omega_D t + \theta_0). \tag{3.229}$$

再次积分得

$$x = -\frac{v}{\omega_D}\cos(\omega_D t + \theta_0) + x_0, \quad y = -\frac{v}{\omega_D}\sin(\omega_D t + \theta_0) + y_0. \tag{3.230}$$

这组轨道方程表明,切点 Q 在水平面上作等速圆周运动,圆心在(x_0, y_0)处,半径为$\frac{v}{\omega_D}$,周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_D} \tag{3.231}$$

就是滚盘绕铅垂轴转动的周期.

可以看出,滚盘与冰橇的运动非常相似.这是因为它们的移动方向都受到引导.冰橇受冰刀引导,滚盘则受它切线方向引导.这使它们的"公转"必须与"自转"同步.当然这种相似是形式的.两种运动的具体内容很不相同.冰橇是在绝对光滑的平面上滑动.绝对光滑消除了滑动摩擦.滚盘则是在绝对粗糙的平面上滚动.绝对粗糙保证滚盘不打滑,消除了滚动摩擦.

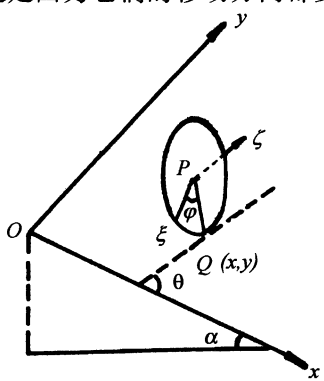

图 3-11 斜面上的直立滚盘

例 4 斜面上的直立滚盘.如图 3-11,让 xy 平面与水平面有一非零夹角 α,盘平面仍被约束垂直于 xy 平面.滚盘在此约束条件下运动,称为斜面上的直立滚盘.在解出所有完整约束后,广义坐标仍为 x、y、θ

和 φ，它们相对于 xy 平面的定义不变；非完整约束仍由(3.217)表示，(3.218)仍成立. 动能的表达式(3.219)也继续成立. 只是各处势能不尽相同. 由于 P 点比 Q 点恒高 $r\cos\alpha$，可用 Q 点高度代替质心 P 点高度计算势能. 让 y 轴水平，x 轴沿斜面指向下方，势能为

$$V = -mgx\sin\alpha. \tag{3.232}$$

拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathscr{I}_D\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathscr{I}_\zeta\dot{\varphi}^2 + mgx\sin\alpha. \tag{3.233}$$

水平面上的运动方程(3.221)～(3.223)中只有(3.221)的第一式应改为

$$m\ddot{x} = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta + mg\sin\alpha, \tag{3.234}$$

其余对斜面上的滚盘也适用. 随后的求解中，(3.224)适用于斜面，(3.225)和(3.226)则应分别修改为

$$\lambda_1 = mr\dot{\varphi}\dot{\theta} - mg\sin\alpha\cos\theta, \tag{3.235}$$

$$\lambda_2 = mr\ddot{\varphi} - mg\sin\alpha\sin\theta. \tag{3.236}$$

将这个 λ_2 的表达式代入(3.223)右边，利用(3.224)得

$$\mathscr{I}\ddot{\varphi} = mgr\sin\alpha\sin(\omega_D t + \theta_0), \tag{3.237}$$

其中

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}_\zeta + mr^2 \tag{3.238}$$

为绕 ζ 轴的有效转动惯量. (3.237)的初积分为

$$\dot{\varphi} = -\frac{mgr}{\mathscr{I}\omega_D}\sin\alpha\cos(\omega_D t + \theta_0) + \omega, \tag{3.239}$$

再积分得

$$\varphi = -\frac{mgr}{\mathscr{I}\omega_D^2}\sin\alpha\sin(\omega_D t + \theta_0) + \omega t + \delta. \tag{3.240}$$

ω 和 δ 为积分常数. 由约束条件(3.217)解得 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，并用(3.224)和(3.239)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{mgr^2}{2\mathscr{I}\omega_D}\sin\alpha\sin[2(\omega_D t + \theta_0)] + r\omega\sin(\omega_D t + \theta_0),\\ \dot{y} &= \frac{mgr^2}{2\mathscr{I}\omega_D}\sin\alpha\{1 + \cos[2(\omega_D t + \theta_0)]\} - r\omega\cos(\omega_D t + \theta_0).\end{aligned}\right\} \tag{3.241}$$

积分得

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{mgr^2}{4\mathscr{I}\omega_D^2}\sin\alpha\cos[2(\omega_D t + \theta_0)] - \frac{r\omega}{\omega_D}\cos(\omega_D t + \theta_0) + x_0,\\ y &= \frac{mgr^2}{4\mathscr{I}\omega_D^2}\sin\alpha\{2\omega_D t + \sin[2(\omega_D t + \theta_0)]\} - \frac{r\omega}{\omega_D}\sin(\omega_D t + \theta_0) + y_0.\end{aligned}\right\} \tag{3.242}$$

x_0 和 y_0 为积分常数. 若 $t=0$ 时 $x=y=0$, 滚盘初始切向沿 x 轴, 即 ζ 方向沿 y 轴, 从而 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$, 滚动初角速度 $\dot{\varphi}\Big|_{t=0}=0$, 从而 $\omega=0$, 则解(3.242)具体化为

$$x=\frac{mgr^2}{4\mathscr{I}\omega_D^2}\sin\alpha[1-\cos(2\omega_D t)],\quad y=\frac{mgr^2}{4\mathscr{I}\omega_D^2}\sin\alpha[2\omega_D t-\sin(2\omega_D t)]. \tag{3.243}$$

将(2.146)表示的旋轮线向 x 正方向平移 πb, 采用 $\theta'=\pi+\theta$ 作参数得

$$x=b(\theta'-\sin\theta'),\quad y=b(1-\cos\theta').$$

将轨道 方程(3.243)与此式比较知, 在上述起始条件下直立滚盘在斜面上切点的轨迹为旋轮线. 在 $\omega_D\to 0$ 极限下, (3.243)趋于

$$x=\frac{mr^2}{\mathscr{I}}g\sin\alpha\,\frac{t^2}{2},\quad y=0.$$

滚盘沿 x 方向向下加速滚动, 加速度 $mr^2g\sin\alpha/\mathscr{I}$ 与滚盘的质量、半径和转动惯量均有关.

§3.8 高斯最小约束原理

经典动力学的基本原理可用不同形式表达. 例如, 牛顿以直接给出运动方程的形式表达动力学原理. 达朗贝尔原理是同一原理的另一种表达形式, 它指出, 各种可能的运动中哪一种是实际发生的. 这种形式的原理称为变分原理. 运动方程成为这种原理的推论. 如前所述, 一个系统的广义坐标和广义速度合起来描述了这个系统的状态. 广义坐标和广义速度合起来张成的空间可作为经典力学的状态空间. 其中一点的坐标包括系统的全部广义坐标和广义速度, 因而对应一个经典运动状态. 达朗贝尔原理是针对一个给定状态表达的, 它指出在这个状态下状态变化, 即广义加速度, 必须满足的一个判据. 这种在态空间中逐点表达的变分原理称为微分形式的变分原理, 以区别于以后将讨论的积分形式的变分原理. 变分原理的积分形式表述为实际可行的运动轨道必须符合的判据. 本节要讨论的高斯最小约束原理是经典力学的另一个微分形式的变分原理. 它不同于达朗贝尔原理, 却又与达朗贝尔原理等价. 即这两个原理的形式不同而内容相同.

暂时再回到 N 质点系的笛卡儿坐标系 q_σ, $\sigma=1,2,\cdots,f$, $f=3N$. 它受到 n 个约束(3.1). 将它们对时间求全微商得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial\phi_i}{\partial\dot{q}_\sigma}\ddot{q}_\sigma\right)+\frac{\partial\phi_i}{\partial t}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.244}$$

对一定的运动状态，广义坐标(q_σ)和广义速度($\dot{q}_\sigma$)都一定，这组关系就成了广义加速度($\ddot{q}_\sigma$)亦即状态变化的约束条件．只要 $n<3N$，符合这组约束条件的广义加速度就不惟一．对一定的状态，符合约束条件的广义加速度张一个 $3N-n$ 维空间，其中每一点对应一组可能的加速度．两组可能加速度的差 $\delta\ddot{q}_\sigma$($\sigma=1,2,\cdots,f$)称为加速度变分．将这两组可能加速度代入(3.244)，将结果彼此相减得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} B_{\sigma i}\delta\ddot{q}_\sigma = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{3.245}$$

其中 $B_{\sigma i}=\dfrac{\partial \phi_i}{\partial \dot{q}_\sigma}$就是(3.29)定义的系数．此式即加速度变分的约束条件．定义量

$$Z = \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{1}{2m_\sigma}(m_\sigma\ddot{q}_\sigma - Q_\sigma)^2 \tag{3.246}$$

其中 m_σ 为 σ 自由度的质量，Q_σ 为作用力的 σ 分量．高斯称此量为约束．这是一个动力学变量，而(3.1)则是加于运动状态的条件．高斯指称，经典动力学可建立在下述基本原理上．

最小约束原理 对一定时刻的一定运动状态而言，运动状态的实际变化使约束 Z 取极小．

证 在一定时刻和一定状态下只有加速度($\ddot{q}_\sigma$)能变更，因而约束 Z 的变分为

$$\delta Z = \sum_{\sigma=1}^{f}(m_\sigma\ddot{q}_\sigma - Q_\sigma)\delta\ddot{q}_\sigma. \tag{3.247}$$

Z 取极小要求这个变分为零．然而加速度变分 $\delta\ddot{q}_\sigma$ 须符合约束条件(3.245)．按拉氏乘子法这使 Z 取极小的条件成为

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\Big(m_\sigma\ddot{q}_\sigma - Q_\sigma - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}\Big)\delta\ddot{q}_\sigma = 0, \tag{3.248}$$

而每一个与 $\delta\ddot{q}_\sigma$ 相乘的括号也因此为零．即有

$$m_\sigma\ddot{q}_\sigma = Q_\sigma + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_{\sigma i}. \tag{3.249}$$

这正是运动方程(3.94)．可见 Z 取极小导致正确的运动方程．另一方面，运动方程(3.94)使(3.248)成立，从而对于符合约束条件(3.245)的加速度变分($\delta\ddot{q}_\sigma$)，有 $\delta Z=0$，约束 Z 取极值．从(3.246)还可看出，Z 对 $\ddot{q}_\sigma$ 的二次变分商为 $m_\sigma>0$，从而确知，Z 的这个极值为极小值．最小约束原理成立．证毕．

本章以下正文中重新区分上下标并使用爱因斯坦求和约定．广义坐标的微分是反变矢量，就用上标来记它，将它写为 q^σ，$\sigma=1,2,\cdots,f$．这里上标不是幂次而是区分自由度的记号．(3.40)、(3.43)和(3.107)表明广义力，包括广义

作用力、广义约束反作用力和广义惯性力都是协变矢量，仍用下标标记. 将(3.36)再对时间做一次全微分，在时间、坐标和速度不变的前提下，加速度变分的变换关系为

$$\delta\ddot{q}^{\sigma} = \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\sigma'}}\delta\ddot{q}'^{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.250}$$

在一个坐标系中固定时间、坐标和速度对加速度的变分在另一坐标系中也表现为固定时间、坐标和速度对加速度的变分，且加速度变分的变换与速度变分和坐标变分的变换是同一个线性变换. 这三组变分分别各自组成一反变矢量. (3.247)可写为

$$\delta Z = -(I_{\sigma} + Q_{\sigma})\delta\ddot{q}^{\sigma}, \tag{3.251}$$

表明约束 Z 的变分为标量，即坐标变换下的不变量. 加速度变分的约束(3.245)则可写成

$$B_{\sigma i}\delta\ddot{q}^{\sigma} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.252}$$

它的左边也是标量. 由正交笛卡儿坐标 $q^{\sigma}(\sigma = 1,2,\cdots,f, f = 3N)$所张的 N 质点系位形空间中，坐标间隔为$(\mathrm{d}q^{\sigma})$的无穷近两点微分距离的平方可定义为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^{\sigma}\mathrm{d}q^{\tau}, \tag{3.253}$$

$$g_{\sigma\tau} = m_{\sigma}\delta_{\sigma\tau}. \tag{3.254}$$

按(2.97)可得反变度规张量

$$g^{\sigma\tau} = \frac{1}{m_{\sigma}}\delta_{\sigma\tau}. \tag{3.255}$$

用它可将约束 Z 的表达式(3.246)写为

$$Z = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}(I_{\sigma} + Q_{\sigma})(I_{\tau} + Q_{\tau}). \tag{3.256}$$

它表明，高斯定义的约束量 Z 是标量，在坐标变换中不变. 既然约束 Z 的表达式和值在各坐标系的表示中是一样的，取极小值的条件就与坐标的选择无关. 对加速度变分的条件又一样，高斯最小约束原理的形式和内容就都与坐标系的选择无关.

采用约束 Z 在任一广义坐标系中的表达式(3.256)，由最小约束原理推导运动方程. $g^{\sigma\tau}$和 Q_{σ} 均与广义加速度无关，对一定运动状态取定值，不参与变分. 动能在笛卡儿坐标系中的表达式(3.105)按(3.254)可表示为

$$T = \frac{1}{2}g_{\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}. \tag{3.257}$$

广义速度的变换关系(3.36)用现在的符号应表示为

$$\dot{q}^{\sigma} = \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial q'^{\sigma'}}\dot{q}'^{\sigma'} + \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial t}. \tag{3.258}$$

代入上式得

$$T = T' + T_1, \tag{3.259}$$

$$T' = \frac{1}{2} g'_{\sigma'\tau'} \dot{q}'^{\sigma'} \dot{q}'^{\tau'}, \tag{3.260}$$

$$T_1 = g_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial q^\sigma}{\partial t} \frac{\partial q^\tau}{\partial q'^{\tau'}} \dot{q}'^{\tau'} + \frac{1}{2} \frac{\partial q^\sigma}{\partial t} \frac{\partial q^\tau}{\partial t} \right). \tag{3.261}$$

其中用到度规张量的变换关系(2.80). T'为变换后的广义速度二次型, T_1 为广义速度 $\dot{q}'^{\tau'}$的一次式. 其中的系数只与广义坐标 $q'^{\sigma'}$和时间 t 有关. 可见 $\frac{\partial T}{\partial q'^{\sigma'}}$不含广义加速度, 不参与运动状态固定条件下的变分. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}'^{\sigma'}}$也不含广义加速度, 不参与类似变分. 因此在变换后的广义坐标系中, 惯性力由于广义加速度变更而有的变分为

$$\delta I'_{\sigma'} = -\delta \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}'^{\sigma'}} \right) = - g'_{\sigma'\tau'} \delta \ddot{q}'^{\tau'}. \tag{3.262}$$

此式可一般地表示为

$$\delta I_\sigma = - g_{\sigma\tau} \delta \ddot{q}^\tau, \tag{3.263}$$

它在任何广义坐标系中成立. 对(3.256)表示的约束量变分, 用此式和(2.97)得

$$\delta Z = - (I_\sigma + Q_\sigma) \delta \ddot{q}^\sigma. \tag{3.264}$$

要求这个变分对符合条件(3.245)的变更($\delta \ddot{q}^\sigma$)为零, 由拉氏乘子法即得运动方程(3.94)的广义形式, 其中的广义惯性力 I_σ 由(3.106)表达. 这也就是拉格朗日方程(3.108).

§3.9 赫兹最小曲率原理或最直路径原理

力学不仅要有正确的运动方程, 以便精确推测力学系统的过去未来, 而且还要理解和阐明这些方程以及它们依据的原理表达的自然规律. 赫兹(H. Hertz)的最小曲率原理及相关论证就是这方面的内容. 就形式而言, 这个原理只是特殊情形下的高斯原理. 它的意义在于把高斯约束这一力学量与曲率这一几何量联系起来, 从而阐明了力学的几何内容.

设系统受的作用可完全用约束表示, 作用力 $Q_\sigma = 0, \sigma = 1, 2, \cdots, f$. 高斯约束成为

$$Z = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} I_\sigma I_\tau. \tag{3.265}$$

再设系统受的是§3.2 末讲的线性齐次微分约束, 理想约束反作用力虚功为零的条件导致它对符合约束的实际位移作功为零. 这使系统的总动能 T 守恒. 比较笛卡儿坐标系中微分距离的表达式(3.253)和动能表达式(3.257)知

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{2}, \tag{3.266}$$

其中

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{\sigma\tau}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\tau} \tag{3.267}$$

为 N 质点系代表点在位形空间中的运动速率. 动能 T 守恒即速率 v 不随时间变化. 因此

$$\dot{q}^\sigma = v\frac{dq^\sigma}{ds}, \quad \ddot{q}^\sigma = v^2\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}. \tag{3.268}$$

惯性力的笛卡儿坐标表达式(3.100)可写成

$$I_\sigma = -v^2 g_{\sigma\tau}\frac{d^2q^\tau}{ds^2}. \tag{3.269}$$

按(2.97),(3.265)可写为

$$Z = \frac{1}{2}v^4 g_{\sigma\tau}\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}\frac{d^2q^\tau}{ds^2} = \frac{1}{2}v^4K^2, \tag{3.270}$$

其中

$$K = \sqrt{g_{\sigma\tau}\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}\frac{d^2q^\tau}{ds^2}} \tag{3.271}$$

为一几何量,称为代表点所描曲线的曲率. 为了清晰了解这一名称,采用新的笛卡儿坐标

$$\xi^\sigma = \sqrt{m_\sigma}q^\sigma, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{3.272}$$

按(2.80)和(3.253),新的度规为

$$g_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau}, \tag{3.273}$$

它是欧几里得空间的标准度规. 曲率的表达式(3.271)可写为

$$K = \sqrt{g_{\sigma\tau}\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\frac{d^2\xi^\tau}{ds^2}} = \sqrt{\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\right)^2}. \tag{3.274}$$

现在(ξ^σ)为代表点在这 f 维欧几里得空间的径矢量,$\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}$为这径矢量对曲线长度 s 的二阶微商. 在§2.2 末尾曾对此二阶微商的含义讨论过. 那是在三维现实的欧几里得空间中讨论的,因而可形象地理解. 径矢对线长 s 的一阶微商为曲线的单位切向矢量,二阶微商则指向法向,即指向曲线弯曲方向并垂直于切向,大小为曲线单位长度上切向矢量方位角的变化,因而表示了曲线的弯曲程度,称为曲率. (3.274)右边正是 f 维欧几里得空间中径矢(ξ^σ)对线长 s 二阶微商所得矢量$\left(\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\right)$的长度. 称它为曲率正是三维空间中形象概念的抽象

推广.(3.267)定义的 v 只与广义坐标(q^σ)和广义速度($\dot{q}^\sigma$)有关而与广义加速度($\ddot{q}^\sigma$)无关,因此不参与固定运动状态条件下的变分.要求(3.270)表达的约束量 Z 极小,即要求 K^2 极小,也就是要求曲率 K 极小.于是达到下述结论.

最小曲率原理 在没有作用力的条件下,力学体系的代表点在位形空间的各种可能的轨迹中,实际轨迹的曲率最小.

可以将这一原理表达得一般些.比较(3.245)和(3.21)知,加速度变分($\delta\ddot{q}^\sigma$)和虚位移(δq^σ)的约束条件相同.如果作用力的虚功为零,必有

$$Q_\sigma \delta\ddot{q}^\sigma = 0. \tag{3.275}$$

代入(3.264)得

$$\delta Z = - I_\sigma \delta\ddot{q}^\sigma. \tag{3.276}$$

它相当于将约束量重新按(3.265)定义得到的结果.再设系统只受线性齐次微分约束,虚功为零的作用力对符合约束的实际位移作功为零.这就保证动能守恒,(3.267)定义的代表点速率 v 不随时间改变.重复(3.267)以后的讨论可知,在这种情况下,高斯最小约束原理也可表述为最小曲率原理.即

若作用力的虚功为零,力学体系的代表点在位形空间的各种可能的轨迹中实际的轨迹曲率最小.

赫兹致力于力学的几何化.19 世纪的几何学是不包含时间的,自然也不包含力.几何化就是要从力学中消去时间和力.称不含时间的完整约束为几何约束.如 §3.2 末指出的,这种约束对时间作一次全微商即得线性齐次微分约束,正是前述赫兹原理的论证中用到的.设力学系统除此种约束外不受其他作用.对这种力学系统,达朗贝尔原理、高斯原理和赫兹原理彼此等价.称时间无关的坐标变换为几何变换.对这种变换,(3.36)成为

$$\dot{q}^\sigma = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^{\sigma'}} \dot{q}'^{\sigma'}. \tag{3.277}$$

与(2.115)比较知,此式表明,广义速度($\dot{q}^\sigma$)为反变矢量.这使(3.257)表示的动能 T 在这种变换中为标量,即由笛卡儿坐标经几何变换达到的任何坐标系中动能恒具(3.257)表示的广义速度的二次齐次形式.由于作用力为零,又无非完整约束,用几何变换消去全部完整约束后拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = 0. \tag{3.278}$$

将(3.257)代入,注意笛卡儿坐标系中 $g_{\sigma\tau}$ 与时间无关,几何变换又与时间无关,因此在由此达到的任何坐标系中 $g_{\sigma\tau}$ 都与时间无关,得

$$g_{\sigma\tau}\ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma\tau\rho}\dot{q}^\tau\dot{q}^\rho = 0, \tag{3.279}$$

其中 $\Gamma_{\sigma\tau\rho}$ 由(2.94)定义。再由(2.97)得

$$\ddot{q}^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}\dot{q}^{\tau}\dot{q}^{\rho} = 0, \tag{3.280}$$

$\Gamma^{\sigma}_{\tau\rho}$为(2.99)定义的克里斯托费尔符号. 与(2.98)比较,注意 $v = \frac{ds}{dt}$不随时间变化,知此式为测地线的微分方程,时间 t 为参数. 可见,一质点系若只受几何约束而不受其他力作用,则它的代表点在位形空间走一条测地线. 按赫兹原理,测地线必是曲率最小的线,或者说是最直的路径. 赫兹原理又称最直路径原理.

赫兹曾努力论证他的原理的普遍性. 为此,他设法将力和势能用力学系统各部分间的耦合以及系统与外界的耦合代替,将能量归结为动能. 这种作法虽嫌累赘且缺乏实际成果,然而力学几何化的思想却在相对论特别是广义相对论力学的发展中起了积极作用. 不过所说的几何已不是只有空间的几何,而是包含时间和空间的世界几何. 在一个消去了力和势能的力学系统中,质点只能在相互碰撞时交换能量,在两次碰撞间,在约束允许的范围内是自由的. 这种图像已在现今量子场论中再现. 按量子论,世界可说由场组成,也可说由粒子组成,粒子是场的量子. 粒子只在相互碰撞中交换能量,碰撞间是自由的. 当然,这种粒子的运动已不是经典的,而是量子的. 探讨赫兹思想进一步的影响是一件很有意义的事. §4.7 将证明,即使在经典力学水平上,最小曲率原理也具有普遍性.

习 题 三

1. 证明质点系在均匀重力场中的势能为

$$V = Mgh \tag{3.281}$$

M 为质点系中各质点质量之和,g 为重力加速度,h 为质心高度. 质心在这类问题中又称重心.

2. 证明刚体动能为

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2 \tag{3.282}$$

其中 M 为刚体质量,$\boldsymbol{v}$ 为其质心速度,$\boldsymbol{\omega}$ 为它绕质心转动的角速度,$\mathcal{I}$为它绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴的转动惯量.

3. 一块矩形均匀平面薄板置于一水平半圆柱形槽内,一边与圆柱的一条母线重合,并靠在槽的一边上(如图 3-12). 设板的质量为 m,宽 a 大于圆柱直径 d,并可在槽内无摩擦地滑动,求它在重力作用下的平衡位形.

4. 设放在上题所述半圆柱水平槽内的是两条长度相同质量分别为 m_1 和 m_2 的细直杆,它们平行圆柱的轴并被两根长 $d/\sqrt{2}$的细轻杆撑开成矩形(图 3-13),设这个矩形框可在槽内无摩擦地滑动,求它在重力作用下的平衡位形.

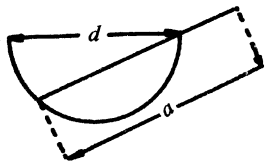

图 3-12　薄板在半圆槽内的平衡位形

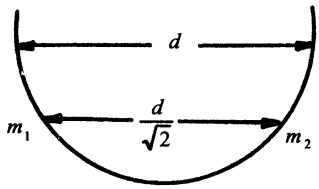

图 3-13　框在半圆槽内的平衡位形

5. 如图 3-14,两块质量为 m 长 l 宽 s 的均匀矩形薄板沿宽 s 的一边绞联.两板可绕绞联轴自由转动,轴的两个对边则置于光滑水平面上.两板中心各缀一长 $\frac{l}{4}$ 的细轻线,下端共缀一质量为 m' 的小球.求此系统在重力作用下的平衡位形.

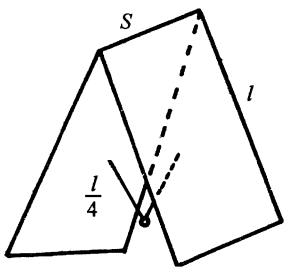

图 3-14　绞联板在水平面上的平衡位形

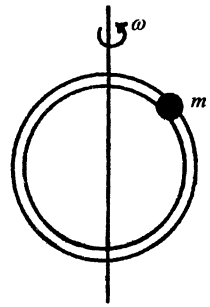

图 3-15　转环上的小球

6. 若在上题两板中心间改用一长 $\frac{l}{2}$ 劲力系数为 K 的弹簧联接,求它在重力作用下的平衡位形.

7. 一条柔顺不可伸缩的细链两端固定,上有与水平间距成比例的重量负载.求证它在重力作用下的平衡位形为抛物线(吊桥问题).

8. 设第 4 题中两杆偏离平衡位形,列出并求解它的运动方程.讨论所得结果.

9. 设第 3 题中平面薄板偏离平衡位形,列出它的运动方程,求出初积分.

10. 设第 5 题中两板偏离平衡位形,列出它的运动方程,做出初积分.

11. 设第 6 题中两板偏离平衡位形,列出它的运动方程,做出初积分.

12. 一光滑圆环绕它的一条铅垂直径以固定角速度 ω 转动.环上穿有一质量为 m 的小球,可无摩擦地沿环滑动.写出此球在重力作用下的运动方程,求出初积分(参阅图 3-15).

13. 一光滑水平台面上有一质量为 m 的小球.一根长 l 的细轻线一端与此球相联.线穿过台面中心的小孔铅垂向下,另一端与一质量为 m' 的小球相联.写出此系统在重力作用下的运动方程,求出初积分,并对运动作定性讨论(参阅图 3-16).

14. 求解单刀简单冰橇在斜面上的运动.

15. 求解双刀简单冰橇在斜面上的运动.

16. 求解单刀简单冰橇在水平面上运动时受的约束反作用力.

17. 两个完全相同的滚盘装在长 l 的轻轴两端,可分别独立地以轻轴为中心轴转动. 求解这种双轮车在完全粗糙的水平面上的运动.

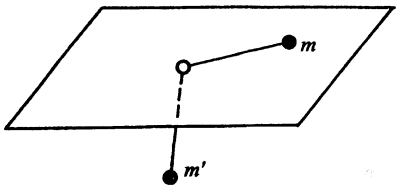

图 3-16 惯性离心力与重力的平衡

18. 求解上题中所述的双轮车在重力作用下在完全粗糙的斜平面上的运动.

第四章　拉格朗日力学　变分原理的积分形式

§4.1　哈密顿原理　拉格朗日方程　等效势

熟悉变分法的人一眼可看出，拉氏方程(3.115)就是变分问题

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t=0 \tag{4.1}$$

的欧拉方程，亦即此式成立的充要条件．本书不要求读者事先熟悉变分法，因此将在下面证明这一结果．由拉氏量 $L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)$ 定义作用量

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

它具有能量·时间量纲．于是有

哈密顿原理　一个理想完整有势系统，在所有符合给定边条件 $t_0,q_\sigma(t_0)$ 和 $t_1,q_\sigma(t_1),\sigma=1,2,\cdots,f$，且符合约束的轨道中，实际轨道使作用量(4.2)取极值．

证　设已解出全部完整约束，消去了多余自由度，剩下的广义坐标 q_σ，$\sigma=1,2,\cdots,f$，不再受约束．考虑两条符合上述边条件和约束的无限邻近的轨道，将它们代入(4.2)分别算出的作用量之差即为变分

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_0}^{t_1}\delta L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4.3}$$

第一等号后的积分号下取的是同一时刻相邻轨道上相应坐标和速度变分引起的 L 变分，其中不含时间变分．由和差的结合律知 $\delta\dot{q}_\sigma=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma$，在第三等号处做了部分积分．积出部分为右边第一项．由于各坐标在始末时刻 t_0 和 t_1 取值是给定的，变分 $\delta q_\sigma(t_0)=\delta q_\sigma(t_1)=0$，此项为零．即有

$$\delta S=-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

在使 S 取极值的轨道处变分

$$\delta S = 0, \tag{4.5}$$

就像函数在它取极值处的微分为零一样. 由于 f 个广义坐标均已不受约束，除 t_0 和 t_1 两时刻外它们的变分 $\delta q_\sigma(t)$ 是完全任意的. 可令除指定的一个分量 σ 在指定时刻 t 附近无穷小时间间隔内的变分以外的坐标变分一概为零. 对如此选定的坐标变分，(4.4)使极值条件(4.5)成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma(t)\mathrm{d}t = 0.$$

由于 $\delta q_\sigma(t)\mathrm{d}t \neq 0$，此式要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0. \tag{4.6}$$

它对 $\sigma = 1, 2, \cdots, f$ 诸分量和区间 (t_0, t_1) 内的任何时刻 t 均成立. 由于任何时刻都可设想在某两端点 t_0 和 t_1 之间，此式对任何时刻都成立. 它就是拉格朗日方程(3.115)，是作用量 S 取极值的必要条件. 它显然足以使(4.4)表示的作用量变分为零，从而又是 S 取极值的充分条件. 总之拉格朗日方程是使作用量(4.2)取极值的充要条件. 这就是要证明的. 证毕.

可见哈密顿(Hamilton)原理与拉格朗日方程等价，因而可作为经典力学的基本原理. 它的前提，即完整有势系统可不当作对原理普遍性的限制. 因为约束不过是表达作用的一种方式. 同样的作用也可用其他方式例如力或势来表达. 而一般认为，如果把一切相互作用的各部分都包括到所考虑的系统中，则系统将是保守的，因而是有势的. 当然也可将哈密顿原理推广，以包括无势和非完整约束等情况. 不过这种刻意的追求只是专业力学工作者的事. 何况上一章已详述过这类情况的有效处理办法，并不一定将它们表成哈密顿原理的形式. 将完整有势系统的力学基本原理表成哈密顿原理的形式，一方面为了探讨力学原理的本质，显示它简单明了的内在美，另一方面也为探讨这种独特形式可能有的独特应用，寻求可能的发展方向. 例如由它可直接推论，在拉格朗日函数上附加时间和坐标的任意函数对时间的全微商不会改变力学规律. 即拉格朗日函数 $L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)$ 和

$$L'(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t) = L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q_\sigma, t) \tag{4.7}$$

给出同样的运动方程，其中 $F(q_\sigma, t)$ 是时间 t 和坐标 $q_\sigma, \sigma = 1, 2, \cdots, f$ 的任意函数. 这是因为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L'(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)\mathrm{d}t = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \delta\int_{t_0}^{t_1} L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)\mathrm{d}t + \delta F(q_\sigma(t_1), t_1) - \delta F(q_\sigma(t_0), t_0)$$

$$=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,t)\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

末一等号是由于端点时间 t_0、t_1 和端点坐标 $q_\sigma(t_1)$、$q_\sigma(t_0)$在变分中是固定的,变分为零,导致 F 在端点的变分为零.另一直接推论是可随意作坐标变换.用任一坐标系表示的拉格朗日函数给出的拉格朗日方程(3.115)都是同样有效的,表达着同一力学规律.这是因为按哈密顿原理它们是作用量(4.2)取极值的结果,作用量的值以及取极值的条件自然都与坐标系的选取无关.一个含时间的坐标变换可将对运动的描写从固定在空间的静止坐标系变换到任意运动坐标系,从而可将惯性系变换为非惯性系.它表明拉格朗日力学对惯性系和非惯性系具有相同的形式,可作统一的处理.在含时间的坐标变换中,广义速度的变换(3.258)是非齐次的.其中的非齐次项$\frac{\partial q_\sigma}{\partial t}$使原静止坐标系中的速度二次型动能(3.257)变为新坐标系中速度的二次多项式(3.259)~(3.261).其中的速度二次型 T'可定义为新坐标系的动能.新坐标系的拉氏函数 L'却应等于原来的拉氏函数 L.它是 L 经坐标变换而得到的.如要在新坐标系中维持关系(3.114),即要求

$$L' = T' - V', \tag{4.9}$$

则应令

$$V' = V - T_1. \tag{4.10}$$

称 V'为新坐标系中的等效势,它是广义速度的一次式.代入(3.110)得新坐标系中的等效广义力

$$Q'_{\sigma'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V'}{\partial \dot{q}'_{\sigma'}} - \frac{\partial V'}{\partial q'_{\sigma'}}, \quad \sigma' = 1,2,\cdots,f'. \tag{4.11}$$

在从惯性系到非惯性系的变换中,此式自动给出坐标系非惯性运动导致的附加力.其中与速度有关的即科里奥利力.

§4.2 旋转坐标系 惯性离心力与科里奥利力 地球上的落体与傅科摆

人类生活在地球上,观察事物最自然的参考系即是地球.地球是自转的.自转物体上每一点都作加速运动,且各点加速度不是一致的.旋转坐标系不是惯性系.有趣的是,正是在这个非惯性系中发现了惯性定律.这部分是由于地球很大,或者从另一方面说,它的转动角速度很小,一天才转一周,非惯性效应不大.取地球半径为 6.4×10^6 m,可估算出地表赤道附近物体在失去重力的情况下飞离地球的离心加速度为 $0.03\mathrm{m/s^2}$,与重力加速度 $9.8\mathrm{m/s^2}$ 相比可以

忽略不计.加之地表本身就是在重力和惯性离心力的合力作用下形成的.长期的地壳运动和风吹雨打使地表平均说来与这一合力垂直.在日常生活中,人们将这一合力笼统地当成重力.而按惯性力与重力等效的现代原理,用局部的实验来区分这两种力也是不可能的.要在地球上观察地球自转的非惯性效应须借助科里奥利力.

考虑一质点相对地球的运动.它们都受太阳引力的作用,一起绕太阳公转.然而类似§1.8对月球绕地运动的讨论可知,它们之间的相对运动可当作质点在静止地球引力作用下的运动,地球的运动只表现为将质点质量换成折合质量.这里'可当作'一词包含可取一以地球为中心取向在空间固定的坐标系视为惯性系的意思.质点相对地球的运动符合这个惯性系中的运动方程.其中的力为地球引力,质量为质点与地球的折合质量.由于质点与地球质量相差悬殊,这个折合质量实际就是质点质量.这个以地球为中心,取向固定于空间的坐标系称为空间固定坐标系,简称固定坐标系.它可视为固定在恒星上的坐标系经平移将原点挪到地球上的结果.现在把地球当作一个刚体.固定坐标系的原点取在它的质心上.再取一个坐标系,原点也在地球质心上,不过三条轴不是固定于空间而是固定在地球上.这个坐标系称为地球的本体坐标系,简称本体坐标系.本体坐标系随地球自转,因而不是惯性系.本节研究相对于这个非惯性系的运动.为简化,设地球绕定轴作匀速转动.

用 $\boldsymbol{\omega}$ 表地球自转角速度.其上 $\boldsymbol{r}$ 处一定点在 $\mathrm{d}t$ 时间内随之有位移 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}t$.设 $\boldsymbol{r}$ 处一质点相对本体坐标系在 $\mathrm{d}t$ 时间内位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,在固定坐标系看来,即有位移

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}t, \tag{4.12}$$

从而有速度

$$\boldsymbol{v}' \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{4.13}$$

其中

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{4.14}$$

为它相对于本体坐标系的速度.这里研究对象为本体坐标系中的运动,其中各量均不带撇,而将撇用来标志固定坐标系的各量.拉氏方程(3.109)两边的动能和广义力必须取同一坐标系中的相应量.设惯性系中粒子受的力已知,即已知粒子在固定坐标系受的力 $\boldsymbol{F}'$.若在(3.109)右边代入这个力,左边即应代入固定坐标系中的动能

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m[v^2 + 2\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2], \tag{4.15}$$

m 为质点质量.将固定坐标系中的拉氏方程(3.109)写入本体坐标系,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T'}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial T'}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}'. \tag{4.16}$$

其中对矢量的微商表对其各分量的微商组成的矢量.右边写成矢量形式的力包含了它在各坐标系中的表示,下面将用它在本体坐标系中的表示.用矢量关系

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}), \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2 = 2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega}, \tag{4.18}$$

可将(4.16)写成

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}' + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega} + 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{4.19}$$

它具有牛顿方程的形式,只是右边本体坐标系中的等效力

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}' + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega} + 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{4.20}$$

除惯性系中本已有的力 $\boldsymbol{F}'$ 外还含惯性离心力

$$\boldsymbol{F}_c = m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\omega} = m[\omega^2\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}] \tag{4.21}$$

和科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_{co} = 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{4.22}$$

它们都是坐标系非惯性运动的效应,或者说是质点惯性在非惯性系中的表现,因而统称惯性力.其中惯性离心力只与质点在本体坐标系中的位置有关,又与质点质量成正比,因而可与地心引力合并,成为平时称量的重力.(4.21)右边方括号内的第一项沿地球径向,第二项却与地轴(反)平行.正是这与地轴(反)平行的项使地球成为扁椭球,以使平均地表与重力垂直.科里奥利力则只与质点在本体坐标系中的速度有关.这有别于重力,而易于观察.地轴从南极指向北极,因而在北半球的径向投影为正,在南半球的径向投影为负.一个头朝上的生灵在北半球看到科里奥利力指向运动方向的右侧,在南半球则看到它指向运动方向的左侧.这种情形在发生于地球表面的大规模运动中已明显地看到.例如北半球河流对右岸的冲刷比对左岸的冲刷严重,南半球河流则对左岸的冲刷比对右岸的冲刷严重.这就是地质学中关于河流位移的巴尔(Baer)定律.与此相联系,北半球右岸的水位比左岸略高,南半球则相反.洋流也有类似情形,在北半球向右偏,在南半球则向左偏.气象学上的贝-巴洛(Buys-Ballot)定律指出:风向仅在赤道上与气压降低的方向一致,在北半球明显右偏,在南半球则明显左偏.为了定量研究地球自转对地表物体运动的影响,要建立一个地表坐标系,如图 4-1,它的 ζ 轴垂直于地面向上,ξ 轴平行地面沿子午线向南,η 轴则沿纬度线向东,原点为 O.$O\xi\eta\zeta$ 为一笛卡儿右手坐标系.一个质量为 m 的质点受的重力 mg 中已含惯性离

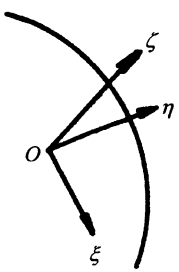

图 4-1 地表坐标系

心力,惯性力只剩下科里奥利力.在没有其他力作用的条件下,运动方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4.23}$$

以北半球为例作分析.(4.23)在地表坐标系中的三个分量方程为

$$\ddot{\xi} = 2\dot{\eta}\omega\sin\varphi, \quad \ddot{\eta} = -2\dot{\zeta}\omega\cos\varphi - 2\dot{\xi}\omega\sin\varphi, \quad \ddot{\zeta} = -g + 2\dot{\eta}\omega\cos\varphi. \tag{4.24}$$

其中 φ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 与当地子午线所夹锐角,在 ζ 轴与径向重合的条件下即为当地纬度.分别用 $\dot{\xi}$、$\dot{\eta}$ 和 $\dot{\zeta}$ 乘这三个方程,相加后整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + g\dot{\zeta} = 0.$$

积分后乘 m 得

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\zeta = 常数, \tag{4.25}$$

即在此坐标系中仍有机械能守恒.这是因为,(4.22)表示的科里奥利力恒与运动方向垂直,从而不作功.设起始条件为高 ζ_0 处的自由落体,即

$$\xi(0) = \eta(0) = 0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0. \tag{4.26}$$

(4.24)第一、三两方程符合此条件的初积分分别为

$$\dot{\xi} = 2\eta\omega\sin\varphi, \qquad \dot{\zeta} = -gt + 2\eta\omega\cos\varphi. \tag{4.27}$$

代入其中的第二式得

$$\ddot{\eta} + 4\omega^2\eta = 2gt\omega\cos\varphi. \tag{4.28}$$

这相当于一个圆频率为 2ω,强迫力为 $2gt\omega\cos\varphi$ 的强迫振动方程.它符合起始条件(4.26)的解为

$$\eta = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right), \tag{4.29}$$

表明落体沿纬度方向东移.代入(4.27)并用条件(4.26)得

$$\left.\begin{aligned} \xi &= g\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right), \\ \zeta &= \zeta_0 - \frac{1}{2}gt^2 + g\cos^2\varphi\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

落体下落时间为秒的量级,ω 则为每天一周角,即为 $7.27\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$,$2\omega t$ 为 10^{-4}量级,故可将(4.29)和(4.30)展成 $2\omega t$ 的幂级数,取其不为零的最低次贡献得

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{gt^2}{6}(\omega t)^2\sin\varphi\cos\varphi, \quad \eta = \frac{gt^2}{3}\omega t\cos\varphi, \\ \zeta &= \zeta_0 - \frac{gt^2}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(\omega t)^2\cos^2\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

它们表明科里奥利力还会使落体南偏并降低下落速度.不过这两个效应与东

偏效应相比属更高级的小修正.由于 ωt 属万分之一的量级,它们的效应常被其他效应,如空气阻力和风力等,所掩盖,是极难观察的.

从上面的分析可知,观察地面现象以发现地球自转效应的困难来自自转角速度 ω 太小.为了克服此困难,可观察大规模的运动.实验室中只能观察小规模的运动,克服困难的办法就只能是延长观察的时间.自由落体不适于用来观察这种效应,是因为下落时间太短.只有不断往复的运动才能延长观察时间,这使人想到摆.摆实际上就是往复运动的落体.傅科(Foucault)摆成为在实验室中观察地球自转效应的设备就不足为奇了.傅科摆就是设计精良的优质单摆,摆长 l 特别长,因而可在偏转角很小的条件下有很大的摆幅和较长的周期,在一周期中摆平面有显著转动.摆锤的运动就是加上了约束

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2 = 0 \tag{4.32}$$

的落体运动.对它微分,得虚位移的约束方程

$$\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = 0. \tag{4.33}$$

可见约束反作用力为

$$R_\xi = \lambda\xi, \quad R_\eta = \lambda\eta, \quad R_\zeta = \lambda\zeta, \tag{4.34}$$

λ 为拉氏乘子.将它们加入(4.24)右侧得摆的运动方程

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\dot{\eta}\omega\sin\varphi + \lambda\xi, \quad \ddot{\eta} = -2\dot{\zeta}\omega\cos\varphi - 2\dot{\xi}\omega\sin\varphi + \lambda\eta, \\ \ddot{\zeta} &= -g + 2\dot{\eta}\omega\cos\varphi + \lambda\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

此式与约束方程(4.32)一起组成完备方程组,从中可解出轨道方程 $\xi(t)$、$\eta(t)$、$\zeta(t)$和拉氏乘子 $\lambda(t)$.(4.32)已设摆的悬点为原点,摆的轻杆长 l;(4.34)则表明约束反作用力方向沿轻杆,实际就是杆的张力.设摆是在平衡位置 $\xi=\eta=0, \zeta=-l$ 附近做小振动,$\frac{\xi}{l}$ 与 $\frac{\eta}{l}$ 为一级小.用 l^2 除(4.32)两边即知 $\frac{\zeta^2}{l^2}-1$ 为二级小.由于 $\frac{\zeta}{l}\sim -1$, $\frac{\zeta}{l}-1$ 为 1 的量级,可见

$$\left(\frac{\zeta^2}{l^2}-1\right)\Big/\left(\frac{\zeta}{l}-1\right) = \frac{\zeta}{l}+1$$

也是二级小.这使 $\zeta+l$、ζ 和 $\ddot{\zeta}$ 都是二级小.在(4.35)第三式略去所有小量后得 $0=-g-\lambda l$,即

$$\lambda = -\frac{g}{l}. \tag{4.36}$$

代入(4.35)前两式,略去二级小量后得

$$\ddot{\xi} - 2\omega'\dot{\eta} + \frac{g}{l}\xi = 0, \quad \ddot{\eta} + 2\omega'\dot{\xi} + \frac{g}{l}\eta = 0, \tag{4.37}$$

其中

$$\omega' = \omega\sin\varphi. \tag{4.38}$$

用 i 乘(4.37)第二式然后与第一式相加,这组两个实函数 $\xi(t)$和 $\eta(t)$的联立方程合并成一个复函数

$$X(t) = \xi(t) + \mathrm{i}\eta(t) \tag{4.39}$$

的微分方程

$$\ddot{X} + 2\mathrm{i}\omega'\dot{X} + \frac{g}{l}X = 0. \tag{4.40}$$

这是一个常系数线性常微分方程,可设解为 $\mathrm{e}^{\Omega t}$.代入(4.40),得二次代数方程

$$\Omega^2 + 2\mathrm{i}\omega'\Omega + \frac{g}{l} = 0. \tag{4.41}$$

它的根为

$$\Omega = -\mathrm{i}\omega' \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}. \tag{4.42}$$

可见(4.40)的通解为

$$X(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\left[A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}t} + A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}t}\right], \tag{4.43}$$

A_1 与 A_2 为积分常数.设起始时摆锤略向南偏离平衡位置一段距离 a,即 $t=0$ 时

$$\xi = a, \quad \eta = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0, \quad X = a, \quad \dot{X} = 0. \tag{4.44}$$

在此起始条件下

$$A_1 + A_2 = a, \quad A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 = 0, \tag{4.45}$$

其中

$$\Omega_1 = -\omega' + \sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}, \quad \Omega_2 = -\omega' - \sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}. \tag{4.46}$$

由(4.45)解得

$$A_1 = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}}\right], \quad A_2 = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}}\right]. \tag{4.47}$$

代入(4.43)得

$$X(t) = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\left[\cos\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t + \frac{\mathrm{i}\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}}\sin\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t\right]. \tag{4.48}$$

它的实部和虚部分别为

$$\left.\begin{aligned}
\xi(t) &= a\left[\cos\omega' t\cos\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t + \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}}\sin\omega' t\sin\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t\right], \\
\eta(t) &= a\left[-\sin\omega' t\cos\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t + \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}}\cos\omega' t\sin\sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}}t\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.49}$$

令

$$\xi_0(t)=a\cos\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}t,\quad \eta_0(t)=\frac{a\omega'}{\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}}\sin\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}t. \tag{4.50}$$

解(4.49)可表示为

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\cos\omega' t\xi_0(t)+\sin\omega' t\eta_0(t),\\ \eta(t)&=-\sin\omega' t\xi_0(t)+\cos\omega' t\eta_0(t).\end{aligned} \tag{4.51}$$

可见傅科摆的运动包含两种成分.其一是(4.50)表示的简谐振动.摆锤在$\xi_0\eta_0$平面内画一椭圆.长轴沿 ξ_0 方向,长为 $2a$,短轴沿 η_0 方向,长为$\frac{2a\omega'}{\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}}$.

圆频率为$\sqrt{\omega'^2+\frac{g}{l}}$.即使取 $l\approx 10$ m,仍有$\frac{g}{l}\approx 1\ \mathrm{s}^{-2}$.而 $\omega'\approx 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$,$\omega'^2\approx 10^{-9}\mathrm{s}^{-2}$,因此这个椭圆实际上已蜕化成沿 ξ_0 方向的直线,振动圆频率可以很好近似为$\sqrt{\frac{g}{l}}$.这就是单摆的运动.不过由于地球自转,$\omega'=\omega\sin\varphi$ 在赤道以外地区非零.这使傅科摆的运动还含另一成分(4.51).它表示单摆摆锤所画直线以圆频率 ω'绕ζ 轴的反方向匀速转动.或者说由 ξ_0 和 ζ 轴组成的铅垂摆平面绕ζ 轴的反方向以圆频率ω'匀速转动.在固定坐标系看,这正是傅科摆惯性的表现:它"不愿"随地球一起转动.转动圆频率 ω'比单摆圆频率$\sqrt{\frac{g}{l}}$小得多,却是显著的.即使在 30°纬度处这样接近亚热带的地方,傅科摆每小时也可进动 7.5°.人们终于在地面实验室中观察到了地球自转的效应.

§4.3 力学相似性 开普勒第三定律的定性理解与普遍意义 位力定理

朗道等[①]用哈密顿原理直接分析力学运动的相似性,简单明了地揭示了一些力学规律.本节介绍这一有趣分析.

在笛卡儿坐标系中动能为速度的二次齐次函数,而与坐标无关.在轨道方程 $q_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,f)$中,用因子 α 乘每一坐标,β 乘时间,则速度的每一分量$\frac{\mathrm{d}q_\sigma}{\mathrm{d}t}$乘了因子$\alpha\beta^{-1}$,动能 T 乘了因子$\alpha^2\beta^{-2}$.如果势函数为坐标的 K 次齐次函数而与速度和时间无关,则在这种标度变换中乘了因子 α^K.选择 α 和β,令

① Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, 2изд(Москва 1965) § 10.

$\alpha^2\beta^{-2}=\alpha^K$，即

$$\beta = \alpha^{1-\frac{K}{2}}, \tag{4.52}$$

则在标度变换中，拉氏量 $L=T-V$ 只是乘了一常数因子 α^K，作用量 S 只是乘了一常数因子 $\alpha^K\beta$. 这一变换将所有可能轨道的全体变为所有可能轨道的全体，将彼此邻近的轨道变为彼此邻近的轨道，而只将它们的作用量 S 乘一公共常因子 $\alpha^K\beta$. 可见变换前令 S 取极值的轨道变换后仍令 S 取极值，即实际轨道仍变为实际轨道. 这就是力学相似性，它指出：若将一条实际轨道的空间尺度 α 倍，时间尺度 β 倍，倍数 α 和 β 符合关系(4.52)，则得到的仍是一条实际轨道. 牛顿万有引力势(1.81)是坐标的 -1 次齐次函数，在它的作用下，彼此相似的轨道空间尺度的倍数 α 和时间尺度的倍数 β 之间的关系(4.52)具体化为

$$\beta = \alpha^{\frac{3}{2}}. \tag{4.53}$$

即时间倍数的平方为空间倍数的立方. 对其中的一条椭圆轨道，周期 τ 可作时间尺度，半长轴长 a 可作空间尺度. 在彼此相似的轨道族中任选一条作标准，将周期和半长轴长分别记为 τ_0 和 a_0. 这族轨道中的其他轨道的周期和半长轴长便分别为

$$\tau = \beta\tau_0, \quad a = \alpha a_0. \tag{4.54}$$

由(4.53)得

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{\tau_0^2}{a_0^3} = \text{常数}. \tag{4.55}$$

这正是开普勒第三定律. 可见开普勒第三定律乃是力学相似性的结果，是这种相似性在平方反比力场中的特例. 力学相似性则是更普遍的规律. 这是一个很好的例子，表明理论的抽象化是如何与它的具体化形象化联系在一起的. 哈密顿原理无疑是比牛顿方程更抽象的力学原理，然而它却简单明了地演绎出力学相似性这一形象规律，使开普勒第三定律这种看上去的纯数学关系得到形象的定性的理解. 抽象化自然伴随着普遍化. 在平方反比力场中不仅有闭合的椭圆轨道，还有开放的抛物轨道和双曲轨道. 每类轨道中都可随意挑选标志时间尺度的量 τ 和标志空间尺度的量 a，它们之间恒有关系(4.55). 这可看作开普勒第三定律的推广.

对一般的齐次中心势场

$$V(r) = Ar^K, \tag{4.56}$$

力学相似关系(4.52)表现为其轨道的时间尺度 τ 和空间尺度 a 之间的关系

$$\frac{\tau^2}{a^{2-K}} = \text{常数}. \tag{4.57}$$

它是开普勒第三定律(4.55)在这类势场中的推广.其中一个重要情形是 $K=2$.此时势场可写为

$$V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2), \tag{4.58}$$

是三维各向同性简谐振动势,m 为粒子质量,ω 为振动圆频率.将这个势函数和动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{4.59}$$

一起代入拉氏方程得

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \ddot{y}+\omega^2y=0,\quad \ddot{z}+\omega^2z=0. \tag{4.60}$$

(4.58)为中心力势,粒子在其中作平面运动.可将运动平面取为 xy 平面,因而,不失一般性,可将(4.60)的解表示为

$$x=x_0\sin(\omega t+\delta_1),\quad y=y_0\sin(\omega t+\delta_2),\quad z=0. \tag{4.61}$$

振幅 x_0 和 y_0 以及初相角 δ_1 和 δ_2 为积分常数.这是一个周期运动,周期 $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$ 与振幅 x_0、y_0 无关,与振动的空间尺度无关,是一常数.这种周期为常数的特征可直接从力学相似关系(4.57)得到.将 $K=2$ 代入它的左边即得这种运动的任何时间尺度 $\tau=$常数,与空间尺度无关.它可视为这种情况下的"开普勒第三定律".这个结论还不只适用于各向同性谐振子,也适用于势函数为

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2+\omega_3^2z^2) \tag{4.62}$$

的各向异性谐振子,只要势函数是坐标的二次齐次函数就行.在 $\tau_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ 和 $\tau_2=\frac{2\pi}{\omega_2}$ 不可通约,即 $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ 不是有理数的情况下,两个不同方向的振动没有共同的周期,轨道是不闭合的.即使在这种情况下,只要能定义一个时间尺度,它就与空间尺度无关.

相似性也存在于不同质量的粒子在不同强度的力作用下的运动之间.设势函数仍为坐标的 K 次齐次函数,且与时间和速度无关.在粒子质量上乘 μ 倍,势函数上乘 ν 倍,坐标上乘 α 倍,时间上乘 β 倍,则动能上乘了 $\mu\alpha^2\beta^{-2}$ 倍,势能上乘了 $\nu\alpha^K$ 倍.可见只要

$$\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\alpha^{1-\frac{K}{2}} \tag{4.63}$$

就只是在拉氏函数上乘了一个常数因子 $\nu\alpha^K$,作用量上乘了一个常数因子 $\nu\alpha^K\beta$,不改变所考察的轨道是否令作用量取极值的性质.这种变换将一个系统的实际轨道变为另一系统的实际轨道,也只将实际轨道变为实际轨道.由于相

似轨道之间只有关系(4.63),可以随意改变轨道的空间尺度或时间尺度,只要使时间尺度或空间尺度按(4.63)作相应改变即可.若再加上作用量不变的条件,则

$$\nu\alpha^K\beta = 1. \tag{4.64}$$

与(4.63)联立得

$$\alpha = (\mu\nu)^{-\frac{1}{2+K}}, \tag{4.65}$$

或

$$\beta = \mu^{\frac{K}{2+K}}\nu^{-\frac{2}{2+K}}. \tag{4.66}$$

在此条件下,相似轨道间空间尺度有一定比率,时间尺度也有一定比率.仍以平方反比力为例,$K=-1$.在作用强度不变的条件下,相似轨道的空间尺度与质量成反比,时间尺度也与质量成反比.而对质量相同的粒子,则相似轨道的空间尺度与作用强度成反比,时间尺度却与作用强度的平方成反比.已知的平方反比力有两种,即万有引力和静电力.万有引力的强度与被作用的粒子质量有关,因而质量比 μ 和作用强度比 ν 不是独立变量.静电力的强度与被作用粒子的电荷有关,却与它的质量无关.μ 与 ν 为独立变量.原子、分子中的电子受的即为静电力.可以用其他带负电的粒子,例如 μ 子,代替原子和分子中的电子.可以考察这种替代导致的运动的空间尺度和时间尺度的变化.也可改变原子核的正电荷以改变作用在这些负电粒子上的静电力强度,考察由此引起的空间和时间尺度的变化.有趣的是,虽然原子、分子中的运动已不服从经典力学而遵从量子力学,相似运动过程中空间尺度和时间尺度的关系(4.65)和(4.66)却仍适用.代替作用量相同的条件为量子数相同.即(4.65)和(4.66)在粒子质量不同作用强度不同的系统的量子数相同的相似运动状态间成立.

从上面的讨论中看到,相似轨道间动能和势能是按比例增减的.这使人有兴趣进一步探讨这种比例关系.由于受作用,一个系统的动能和势能会相互转化,比率会不断变化.只有作长时间平均后才可能有一定的比例关系.设势函数与速度无关而是坐标的 K 次齐次函数;取笛卡儿坐标系,动能与坐标无关而是速度的二次齐次函数.因此

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma} &= \sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma} = 2T,\\ \sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} &= -\sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = -KV.\end{aligned}\right\} \tag{4.67}$$

由拉氏方程(3.115)得

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma p_\sigma\right) - 2T + KV, \tag{4.68}$$

其中 $p_\sigma=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$ 为 σ 自由度的广义动量. 将此式在 t_1 和 t_2 间对时间求平均, 右边第一项的平均为

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f} q_\sigma p_\sigma\right)} \equiv \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f} q_\sigma p_\sigma\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{t_2-t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(q_\sigma(t_2)p_\sigma(t_2)-q_\sigma(t_1)p_\sigma(t_1)\right). \quad (4.69)$$

对有界的运动 q_σ 和 p_σ 均有界, 此式右边的和有界. 当时间 t_2-t_1 趋于无穷时此项为零. 将此结果代入(4.68)右边的长时间平均知, 对系统的有界运动, 动能和势函数的长时间平均满足关系

$$2\overline{T} = K\overline{V}. \quad (4.70)$$

是为位力定理. 对保守系的有界运动, 能量的长时间平均即为它的守恒值

$$E = \overline{E} = \overline{T}+\overline{V} = \frac{2+K}{K}\overline{T} = \frac{2+K}{2}\overline{V}. \quad (4.71)$$

对平方反比力系统 $K=-1$,

$$\overline{T} = -\frac{\overline{V}}{2}, \quad E = -\overline{T} = \frac{\overline{V}}{2}. \quad (4.72)$$

对简谐振子 $K=2$,

$$\overline{T} = \overline{V}, \quad E = 2\overline{T} = 2\overline{V}. \quad (4.73)$$

§4.4 循环坐标 勒让德变换 罗斯函数与罗斯方程 球摆

在给定坐标系中, 拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数. 若它与某广义坐标无关, 那个坐标就叫循环坐标. 从下面的例子中可以看出, 不在拉格朗日函数中出现的坐标常常是表示循环运动进程的坐标, 于是就被一概称为循环坐标. 设 q_σ 为循环坐标, 则

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0. \quad (4.74)$$

按拉氏方程(3.115)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0. \quad (4.75)$$

它表明相应的广义动量 $p_\sigma=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$ 守恒.

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = \text{常数} \quad (4.76)$$

称为广义动量初积分.由此可解出广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 与这个循环自由度的动量 p_σ 以及其他自由度的广义坐标和广义速度的关系.将这种关系代回拉氏量,可从中消去循环自由度的广义速度.对所有循环自由度完成这一手续就消去了这些自由度的广义速度,代之以广义动量.这些广义动量又都不随时间变化,这种变换应能简化运动方程的求解.不过多元函数的性质与取哪些变量为独立自变量有关.拉氏方程(3.115)中拉氏量 L 被当作独立变量 q_σ 和 $\dot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$的函数,其中的偏微分是以此为前提的.例如,计算$\dfrac{\partial L}{\partial q_1}$时,恒设 $\dot{q}_1$、q_σ、$\dot{q}_\sigma(\sigma=2,3,\cdots,f)$不变;计算$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$时,恒设 q_1、q_σ、$\dot{q}_\sigma(\sigma=2,3\cdots,f)$不变.如将若干广义速度换成广义动量,则同一个偏微商取值也可能改变.例如若取 q_σ、$\dot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f-1)$、$q_f$、$p_f$ 为独立变量,计算$\dfrac{\partial L}{\partial q_1}$时改设 $\dot{q}_1$、q_σ、$\dot{q}_\sigma(\sigma=2,3,\cdots,f-1)$、$q_f$、$p_f$ 不变,所得的值即可能不同.不可误将这种偏微商代入拉氏方程.为了将简化求解的进程继续下去,可作勒让德(Legendre)变换.设 f 个自由度中有 n 个循环自由度,$f_1=f-n$ 个非循环自由度.设 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f_1)$为非循环坐标,$q_\sigma(\sigma=f_1+1,f_1+2,\cdots,f)$为循环坐标.取

$$R=\sum_{\sigma=f_1+1}^{f}\dot{q}_\sigma p_\sigma-L \tag{4.77}$$

并将它当作独立变量 q_σ、$\dot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f_1)$和 $p_\sigma(\sigma=f_1+1,f_1+2,\cdots,f)$的函数,其中原有广义速度 $\dot{q}_\sigma(\sigma=f_1+1,f_1+2,\cdots,f)$已由这些独立变量表出.$R$ 的偏微商均以它是这些独立变量的函数为前提,L 的偏微商则仍以它是独立变量 q_σ 和 $\dot{q}_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$的函数为前提.于是对非循环自由度 $\sigma=1,2,\cdots,f_1$ 有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial q_\sigma}&=\sum_{\sigma'=f_1+1}^{f}\frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}p_{\sigma'}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\sum_{\sigma'=f_1+1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma'}}\frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}=-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma},\\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma}&=\sum_{\sigma'=f_1+1}^{f}\frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial \dot{q}_\sigma}p_{\sigma'}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\sigma'=f_1+1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma'}}\frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial \dot{q}_\sigma}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}.\end{aligned}\right\} \tag{4.78}$$

两式的第二等号处均用了(4.76).由拉氏方程(3.115)知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial R}{\partial q_\sigma}=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f_1. \tag{4.79}$$

此式称为罗斯(Routh)方程,其中由(4.77)定义的 R 称为罗斯量或罗斯函数.由 L 到 R 的变换(4.77)称为勒让德变换.由于循环自由度的广义动量 $p_\sigma(\sigma=f_1+1,f_1+2,\cdots,f)$都是积分常数,在罗斯函数中可只当成参数.(4.79)只是非循环自由度未知函数 $q_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,f_1)$的联立微分方程组,可单独求解.这就将联立微分方程的个数由 f 降至 f_1,减少了 n 个,确实简化了求

解. 至于对循环自由度 $\sigma = f_1 + 1, f_1 + 2, \cdots, f$, 则有

$$\frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = \dot{q}_\sigma + \sum_{\sigma' = f_1+1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} p_{\sigma'} - \sum_{\sigma' = f_1+1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma'}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} = \dot{q}_\sigma,$$

第二等号处也用了(4.76). 将它写成广义速度的表达式

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma}, \qquad \sigma = f_1 + 1, f_1 + 2, \cdots, f, \tag{4.80}$$

自应与从(4.76)中解出的一致. 非循环自由度的轨道方程解出后代入这种表达式, 经一次积分即可求出循环自由度的轨道方程.

例 球摆. 与单摆类似, 一质量为 m 的质点(摆锤)由长为 l 的轻杆与悬点 O 相联. 它与单摆的区别在于, 它不限于在一铅垂平面内摆动. 质点只受一个完整约束, 即与 O 点的距离为 l, 约束在以 O 点为心 l 为半径的球面上, 因而称为球摆. 约束在球面上的质点在重力作用下的运动就是球摆的运动. 取以 O 为心, 由它铅直向下的轴为极轴的球面坐标 θ、φ. θ 为轻杆与极轴的夹角, φ 为轻杆在水平面上的投影与水平面上任意选定的一条轴之间的夹角. 球摆的动能为

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2), \tag{4.81}$$

势能为

$$V = mgl(1 - \cos\theta), \tag{4.82}$$

铅直向下的位置为势能的零点. 拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) - mgl(1 - \cos\theta). \tag{4.83}$$

φ 为循环坐标. 此循环自由度的广义动量

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} \tag{4.84}$$

守恒. 由此解得

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2\theta}. \tag{4.85}$$

罗斯函数为

$$R = \dot{\varphi} p_\varphi - L = -\left\{ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \left[mgl(1 - \cos\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} \right] \right\}. \tag{4.86}$$

花括号内好像是一个单自由度系统的拉氏函数

$$L' = T' - V', \tag{4.87}$$

等效动能为

$$T' = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \tag{4.88}$$

等效势能为

$$V' = mgl(1-\cos\theta) + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta}. \tag{4.89}$$

与(3.128)比较可看出,这个等效系统类似单摆,只是有一项附加势能

$$\Delta V = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta}, \tag{4.90}$$

是 φ 方向运动动能的表现,亦即球摆绕铅垂轴转动的惯性离心能.将罗斯函数(4.86)代入罗斯方程(4.79),得运动方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta - b^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0, \tag{4.91}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad b = \frac{p_\varphi}{ml^2}. \tag{4.92}$$

在考虑一般求解(4.91)之前,先看两个特殊情况.一是广义动量 $p_\varphi = 0$ 的情况.由(4.85)知,在此情况下 $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi =$ 常数,球摆在一铅垂平面内运动.由(4.92)知,此情况下 $b = 0$,(4.91)还原为单摆的运动方程(3.129).可见,这种情况下,球摆作单摆运动.另一是 $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ 的情况.由(4.91)知,此情况下

$$\sin^4\theta - \beta^2\cos\theta = 0, \qquad \beta = \frac{b}{\omega}. \tag{4.93}$$

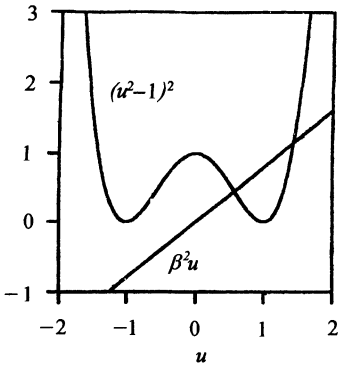

图 4-2 方程(4.95)的图解

它是

$$u = \cos\theta \tag{4.94}$$

的四次方程

$$u^4 - 2u^2 - \beta^2 u + 1 = 0, \tag{4.95}$$

因而可用根式解出①.不过由图 4-2 可以看出,这个方程在 $|u| \leqslant 1$ 的区域中只有一个实根.可以直接验证,它就是

$$u = a_1 - a_2\cos\frac{\delta}{2} \equiv u_0, \tag{4.96}$$

其中

① 参阅例如:王竹溪,郭敦仁,特殊函数概论(科学出版社 1965)附录二.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2 + \frac{4}{3}\right)^{1/2}, \\ a_2 &= \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{A_1 + A_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(A_1 - A_2)^2\right]^{\frac{1}{4}}, \\ \cos\delta &= a_2^{-2}\left(\frac{4}{3} - \frac{A_1 + A_2}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4.97}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{\beta^4}{2} + \frac{64}{27} + \frac{8}{9}\beta^2\sqrt{3\left(\frac{27}{256}\beta^4 + 1\right)}\right]^{\frac{1}{3}}, \\ A_2 &= \left[\frac{\beta^4}{2} + \frac{64}{27} - \frac{8}{9}\beta^2\sqrt{3\left(\frac{27}{256}\beta^4 + 1\right)}\right]^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.98}$$

δ 在区间$(0,\pi)$中取值. 从图 4-2 中还可看出 $u_0>0$, 因而 $\theta_0\equiv\arccos u_0<\frac{\pi}{2}$. 在 $\theta=\theta_0$ 处 $\ddot{\theta}=0$, 只要起始时 $\dot{\theta}=0$, 即可保持 $\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$, $\theta=\theta_0$ 不变. θ_0 是球摆相对极轴的平衡偏角. 按(4.85), 在此平衡条件下, 摆与极轴组成的铅垂摆平面绕极轴以匀速

$$\Omega = \frac{b}{1 - u_0^2} \tag{4.99}$$

转动, 循环坐标

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0, \tag{4.100}$$

φ_0 为摆平面的初始方位角. 平衡条件(4.93)也可由要求(4.89)表示的等效势 V'取极值得到. 正根(4.96)保证了这个极值为极小值, 使平衡成为稳定的. 将运动方程(4.91)左边后两项在 $\theta=\theta_0$ 附近展开成幂级数. 设 θ 相对θ_0 的初始偏离很小, 或 $\dot{\theta}$ 相对 0 的初始偏离很小, 可在这幂级数中只取到一次项. 在此情况下 $\theta'\equiv\theta-\theta_0$ 随时间变化的微分方程为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\theta}' + \omega'^2\theta' = 0, \\ &\omega' = \omega\sqrt{3u_0 + \frac{1}{u_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.101}$$

它表示 θ 绕平衡值θ_0 以圆频率 ω'作微小的谐振动. 摆偏角的这种小幅振荡按(4.85)会调制摆平面绕极轴的转动速度 $\dot{\varphi}$.

在(4.91)上乘 $\dot{\theta}$ 后对时间积分得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta + \frac{b^2}{2\sin^2\theta} = \varepsilon, \tag{4.102}$$

ε 为积分常数. 与(4.81)、(4.82)、(4.88)、(4.89)比较, 并注意(4.85)和(4.92)知, 这是一个能量初积分. 球摆能量

$$E = T + V = T' + V' = ml^2\varepsilon + mlg. \tag{4.103}$$

将(4.102)写成微分形式即

$$\mathrm{d}t = \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\sin^2\theta(\varepsilon + \omega^2\cos\theta) - b^2}} = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(1-u^2)(\varepsilon + \omega^2 u) - b^2}}. \tag{4.104}$$

将此式积分即可得轨道方程 $\theta(t)$ 或 $u(t)$. 除一积分常数外左边的积分为时间 t, 右边则是第一类椭圆积分, 结果可用椭圆函数表出. 若

$$x = \int_{\infty}^{y} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}, \tag{4.105}$$

则称 y 为 x 的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)椭圆函数, 记作 $y = \wp(x; g_2, g_3)$. 作变换

$$u = -\xi - \frac{\varepsilon}{3\omega^2}, \tag{4.106}$$

(4.104)变为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}, \\ g_2 &= 4\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3\omega^4}\right), \\ g_3 &= \frac{2b^2}{\omega^2} - \frac{8\varepsilon}{3\omega^2} + \frac{8}{27}\frac{\varepsilon^3}{\omega^6}. \end{aligned}\right\} \tag{4.107}$$

两边积分, 右边的积分上限应为 $\xi = -u - \frac{\varepsilon}{3\omega^2}$, 得

$$u(t) = -\wp\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}t + \eta; g_2, g_3\right) - \frac{\varepsilon}{3\omega^2}, \tag{4.108}$$

η 为积分常数.

由(4.85), (4.92)和(4.104)知

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{b\mathrm{d}t}{\sin^2\theta} = -\frac{b\mathrm{d}u}{(1-u^2)\sqrt{2(1-u^2)(\varepsilon + \omega^2 u) - b^2}}. \tag{4.109}$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_s = &-\int_{u_s}^{u} \frac{b\mathrm{d}u'}{2(1-u')\sqrt{2(1-u'^2)(\varepsilon + \omega^2 u') - b^2}} \\ &-\int_{u_s}^{u} \frac{b\mathrm{d}u'}{2(1+u')\sqrt{2(1-u'^2)(\varepsilon + \omega^2 u') - b^2}}, \end{aligned} \tag{4.110}$$

其中 φ_s 和 u_s 分别为 φ 和 u 的起始值. 此式右边为两个魏尔斯特拉斯第三类

椭圆积分，它们的性质均已详尽研究过[①]，因而属已知量．球摆问题至此解毕．

§4.5 最小作用量原理

最小作用量原理称：在所有可能的运动中，实际运动的作用量取极值．这里“极值”并不一定是极小值，也可能是极大值或逗留值，总之是变分为零的意思．“最小”一词是历史用语的沿袭，当初以为它只取极小．可见哈密顿原理即是最小作用量原理．这是从广义上讲．狭义地讲，最小作用量原理专指这一原理的一种具体形式，它确实不同于哈密顿原理．上面关于原理的陈述是极广泛的，有两点须具体化．不同的具体化导致不同的原理．一是何为作用量．哈密顿原理将它具体化为(4.2)定义的拉氏量的时间积分．二是“所有可能的运动”究竟包括哪些运动．哈密顿原理将它具体化为所有 t_0 时刻在$(q_\sigma(t_0))$处，t_1 时刻到达$(q_\sigma(t_1))$的运动，即始末时刻和始末位置均固定的一切可能运动．下面将讲到的最小作用量原理则与此不同．

作用量的概念最初由莱布尼茨(Leibniz)提出．按他的概念，作用量应为动能 T 的时间积分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t. \tag{4.111}$$

设势函数 V 与速度无关，因而

$$p_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}. \tag{4.112}$$

再设动能为广义速度的二次齐次函数，因而

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} = 2T. \tag{4.113}$$

最后设系统是保守的，因而按(3.120)定义了能量，将(4.113)代入该式得

$$E = T + V. \tag{4.114}$$

因此

$$2T = T + E - V = L + E. \tag{4.115}$$

(4.111)的被积函数与(4.2)的被积函数只差一常数 E．这启发人们去比较能量相同轨道的作用量(4.111)．以此为基础的最小作用量原理由莫培督(Maupertuis)于 1747 年提出，后来为拉格朗日所证明，因而又称莫培督-拉格朗日原理．由于能量相同的不同轨道通过空间两定点所需时间不同，作用量(4.111)变分时，端点时间 t_0 和 t_1 不能固定．哈密顿原理比较的轨道能量不

① 王竹溪，郭敦仁，特殊函数概论(科学出版社 1965)，第八章．

固定,通过两端点的时刻固定,莫培督-拉格朗日原理比较的轨道能量固定,通过两端点的时刻却不固定,这就是两个原理的区别.

一般认为,如果将所有相互作用的各部分都包含在所考虑的系统中,且只有不含时间的完整约束,则系统总是保守的.要求系统保守不是对普遍性的限制.在非相对论力学中,拉氏函数被设为广义速度的二次多项式,其中广义速度二次项的和被定义为动能.动能为广义速度的二次齐次函数也不是对普遍性的限制.拉氏函数中广义速度的一次项与零次项之和取负号后成为系统的势函数

$$V = V_0 + V_1, \tag{4.116}$$

其中 V_0 与速度无关,

$$V_1 = \sum_{\sigma=1}^{f} G_\sigma \dot{q}_\sigma \tag{4.117}$$

为广义速度的一次齐次函数,$G_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$可与广义坐标有关却与广义速度无关.可见,一般说来(4.112)并不成立.(4.113)则应为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - V_1 = 2T - V_1. \tag{4.118}$$

(4.114)在一般情况下为

$$E = T + V_0. \tag{4.119}$$

(4.115)则为

$$2T - V_1 = T + E - V_0 - V_1 = L + E. \tag{4.120}$$

要使作用量中的被积函数与拉氏函数 L 只差一常数 E,就应将(4.111)推广为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (2T - V_1) \mathrm{d}t. \tag{4.121}$$

在势函数与速度无关的条件下,$V_1 = 0$,此式还原为(4.111).有趣的是,从(4.113)和(4.118)看到,两种情况下的作用量(4.111)和(4.121)可统一地表示为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma \mathrm{d}t = \sum_{\sigma=1}^{f} \int_{q_{\sigma 0}}^{q_{\sigma 1}} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma, \tag{4.122}$$

$q_{\sigma 0}$和 $q_{\sigma 1}(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$分别为系统的起始位形和终了位形的广义坐标,对所有互相比较的轨道是同样给定的.通常称(4.111)为拉格朗日作用量,以区别于(4.2)表示的哈密顿作用量.本章以下正文中的作用量即指它的推广(4.121),在申明势函数与速度无关的条件下则指(4.111).(4.122)是莫培督提出的作用量的一般表达,称为作用量的莫培督形式,或简称莫培督作用量.于是有

最小作用量原理 一个理想完整保守系统，在符合约束的位形空间给定两点间，所有能量相同的可能轨道中实际轨道使作用量取极值.

证 这是作用量(4.121)在条件(4.119)下的极值问题，其中 E 为给定常数，轨道始末点的广义坐标也是给定的.对保守系，动能、势函数和拉氏量都不显含时间，整个问题不因时间平移而变.在比较两条轨道时不必顾及它们过始点的时刻，而只须关注它们在始末点间经历的时间.故可设它们过始点的时刻 t_0 相同，$\delta t_0=0$.到达终点的时刻 t_1 则可不同，$\delta t_1\neq 0$.采用拉氏乘子法，这个极值问题即变分问题

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}F\mathrm{d}t=0, \tag{4.123}$$

$$F=2T-V_1+\lambda(T+V_0-E), \tag{4.124}$$

$\lambda(t)$为拉氏乘子.变更后的轨道在 $t_1+\delta t_1$ 时到达终点$(q_{\sigma 1})$，t_1 时刻应在

$$(q_{\sigma 1}-\dot{q}_\sigma\delta t_1)\equiv(q_{\sigma 1}+\delta q_\sigma|_{t_1}),$$

$$\delta q_\sigma|_{t_1}=-\dot{q}_\sigma\delta t_1. \tag{4.125}$$

可见

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1}F\mathrm{d}t&=F\delta t_1+\int_{t_0}^{t_1}\delta F\mathrm{d}t\\&=F\delta t_1+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma+\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)\mathrm{d}t\\&=F\delta t_1+\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\Big|_{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\mathrm{d}t\\&=\left(F-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\right)\Big|_{t_1}\delta t_1-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

在引入拉氏乘子后，所有的变分都可认为是独立的，故由此式得

$$\left(F-\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}\dot{q}_\sigma\right)\Big|_{t_1}=0, \tag{4.126}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{4.127}$$

用 $\dot{q}_\sigma$ 乘(4.127)后，对 σ 求和得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_\sigma}-F\right)=0. \tag{4.128}$$

将 F 的表达式(4.124)代入(4.126)和(4.128)，利用 T 和 V_1 的齐次函数性质和条件(4.119)分别得

$$2(1+\lambda)T\Big|_{t_1}=0, \tag{4.129}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2(1+\lambda)T]=0. \tag{4.130}$$

在初始条件(4.129)下解(4.130)得

$$2(1+\lambda)T=0. \tag{4.131}$$

系统要从一种位形运动到另一位形,除在若干孤立点外速度不会为零,因而动能非零.要满足(4.131)必须也只须 $\lambda=-1$.对经典力学中的连续的运动过程,$\lambda(t)$应为时间的连续函数,因而,即使在上述"若干孤立点"上也有 $\lambda=-1$.将它代入(4.124)得

$$F=L+E. \tag{4.132}$$

将此式代入(4.127)即得拉氏方程(3.115).可见,最小作用量原理与动力学基本方程等价,本身也就是动力学原理的一种形式.证毕.

§4.6 作用量的雅可比形式 最短路程原理 力学的几何化

本节和下节再次区分上下标并采用爱因斯坦求和约定.按(3.257)

$$2T=g_{\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}.$$

按(4.119)

$$2T=2(E-V_0).$$

取二式的几何平均得

$$2T=\sqrt{2(E-V_0)g_{\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}}. \tag{4.133}$$

用(4.117),作用量(4.121)可表示为

$$\begin{aligned}S&=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sqrt{2(E-V_0)g_{\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau}}-G_{\sigma}\dot{q}^{\sigma}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{(q_0^{\sigma})}^{(q_1^{\sigma})}\left[\sqrt{2(E-V_0)g_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^{\sigma}\mathrm{d}q^{\tau}}-G_{\sigma}\mathrm{d}q^{\sigma}\right],\end{aligned} \tag{4.134}$$

(q_0^{σ})和(q_1^{σ})分别为始末两点的广义坐标.对速度无关势 $V=V_0$, $G_{\sigma}=0$,此式简化为

$$S=\int_{(q_0^{\sigma})}^{(q_1^{\sigma})}\sqrt{2(E-V)}\,\mathrm{d}s, \tag{4.135}$$

其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{g_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^{\sigma}\mathrm{d}q^{\tau}} \tag{4.136}$$

为位形空间中坐标间距为$(\mathrm{d}q^{\sigma})$的两点间的微分距离.(4.135)称为作用量的雅可比形式,或简称雅可比作用量.(4.134)是它的推广.它们的共同特点是与

时间因素无关.不仅与时间无关而且与各量对时间的微商无关.这后一点使它区别于作用量的莫培督形式(4.122),后者虽不显含时间,却与广义动量有关,从而与坐标对时间的微商有关.作用量的雅可比形式(4.135)及其推广(4.134)都是只与空间因素有关的量,即纯几何量.对一个只受几何约束而未受任何作用力的系统,势函数 $V=0$,作用量(4.135)取极值即是始末两点(q_0^σ)和(q_1^σ)之间路程长度

$$S=\int_{(q_0^\sigma)}^{(q_1^\sigma)}\mathrm{d}s \tag{4.137}$$

取极值.由§2.5知,系统的代表点因此在约束规定的位形空间中走一条测地线,它是欧几里得空间中的直线在一般空间中的推广.若系统受到作用力,势函数 V 非零却与速度无关,则可将作用量(4.135)写为

$$S=\int_{(q_0^\sigma)}^{(q_1^\sigma)}\mathrm{d}S, \tag{4.138}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^\sigma\mathrm{d}q^\tau}, \tag{4.139}$$

$$\widetilde{g}_{\sigma\tau}=2(E-V)g_{\sigma\tau}. \tag{4.140}$$

可见,在此情况下的作用量 S 仍可解释为始末两点间路程的长度,它的微分 $\mathrm{d}S$ 可解释为微分距离,只是度规张量被势函数 V 修改为按(4.140)定义的 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}$,并与能量 E 有关.这种形式下的最小作用量原理就成了"最短路程原理".力学被几何化了.同样,"最短"一词也是历史用语的沿袭.原理要求的是路程长度取极值,并不一定最短.

回头看一般情形下的作用量(4.134).将它表示为

$$\begin{aligned}S&=\int_{(q_0^\sigma)}^{(q_1^\sigma)}\left(\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^\sigma\mathrm{d}q^\tau}-G_\sigma\mathrm{d}q^\sigma\right)\\&=\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}\left(\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}}-G_\sigma\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}\widetilde{S}\\&=\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}\left(1-G_\sigma\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\right)\mathrm{d}\widetilde{S},\end{aligned} \tag{4.141}$$

其中

$$\mathrm{d}\widetilde{S}=\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\mathrm{d}q^\sigma\mathrm{d}q^\tau}, \tag{4.142}$$

$$\widetilde{g}_{\sigma\tau}=2(E-V_0)g_{\sigma\tau}. \tag{4.143}$$

积分元 $\mathrm{d}\widetilde{S}$ 可解释为坐标间隔为$(\mathrm{d}q^\sigma)$的两点间的微分距离,$\widetilde{S}_0$ 为自某给定点到所考虑的始点(q_0^σ)的路程长度,$\widetilde{S}_1$ 为从该点到所考虑的终点(q_1^σ)的路程长度.所考虑的始点到终点的路程长度为

$$\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0 = \int_{(q_0^\sigma)}^{(q_1^\sigma)} \sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau} \mathrm{d}q^\sigma \mathrm{d}q^\tau} = \int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1} \mathrm{d}\widetilde{S}. \tag{4.144}$$

(4.141)表示的 S 已不能解释为长度.长度与路程两端有关,却与这两端何为始点何为终点无关,即与路程方向无关.此量被积括号中的第一项符合这一条件,改变积分方向其值不变;第二项却不符此条件,改变积分方向它变号.不过这个量仍只与空间因素有关,是一个几何量.研究它和它的极值条件是一个几何问题.以 $\widetilde{S}$ 为自变量,考虑函数 $q^\sigma(\widetilde{S})(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 的变更.这种变更不是任意的.定义(4.142)导致条件

$$\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau} \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}} = 1 \tag{4.145}$$

要求(4.141)表示的作用量 S 相对这种条件下的变更取极值是一个条件变分问题.按拉氏乘子法就是变分问题

$$\delta \int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1} F \mathrm{d}\widetilde{S} = 0, \tag{4.146}$$

$$F = \sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau} \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}} - G_\sigma \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} + \lambda \left(\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau} \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}} - 1 \right). \tag{4.147}$$

将开始计算长度的"某给定点"就取作(q_0^σ),则 $\widetilde{S}_0 = 0, \delta\widetilde{S}_0 = 0$.可见,此处的变分问题与变分问题(4.123)在形式上相同,差别只在于 F 的具体表达式,且自变量由 t 改成了 $\widetilde{S}$.该处与这些细节无关的形式结果都可搬用过来.其中(4.126)和(4.128)分别成为

$$\left(F - \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \right)} \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \right) \Bigg|_{\widetilde{S}_1} = 0, \tag{4.148}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \left[\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \right)} - F \right] = 0. \tag{4.149}$$

将(4.147)代入此二式分别得

$$\lambda \Big|_{\widetilde{S}_1} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\widetilde{S}} = 0. \tag{4.150}$$

它们的解为

$$\lambda = 0. \tag{4.151}$$

代回(4.147)和(4.146)知,只须解变分问题

$$\delta S = \delta \int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1} \left(\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau} \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}} - G_\sigma \frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \right) \mathrm{d}\widetilde{S} = 0. \tag{4.152}$$

由于这是拉氏乘子法的结果，条件(4.145)已考虑完毕，变分问题(4.152)已无条件。端点的变分也已考虑过，(4.152)中不再考虑。于是其中第一项可按(2.91)～(2.93)的推导得

$$\delta\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}}\,\mathrm{d}\widetilde{S}=-\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}\left(\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}^2q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2}+\widetilde{\Gamma}_{\sigma\tau\rho}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\right)\delta q^\sigma\,\mathrm{d}\widetilde{S},\tag{4.153}$$

其中用到关系(4.145)，

$$\widetilde{\Gamma}_{\sigma\tau\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{\sigma\tau}}{\partial q^\rho}+\frac{\partial\widetilde{g}_{\rho\sigma}}{\partial q^\tau}-\frac{\partial\widetilde{g}_{\tau\rho}}{\partial q^\sigma}\right).\tag{4.154}$$

第二项为

$$-\delta\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}G_\sigma\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\mathrm{d}\widetilde{S}=-\int_{\widetilde{S}_0}^{\widetilde{S}_1}F_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\delta q^\sigma\,\mathrm{d}\widetilde{S},\tag{4.155}$$

$$F_{\sigma\tau}=\frac{\partial G_\tau}{\partial q^\sigma}-\frac{\partial G_\sigma}{\partial q^\tau}.\tag{4.156}$$

代回(4.152)，利用变分 $\delta q^\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$ 的任意性得

$$\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}^2q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2}+\widetilde{\Gamma}_{\sigma\tau\rho}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{S}}+F_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}=0,\quad\sigma=1,2,\cdots,f.\tag{4.157}$$

或者用(2.97)定义的反变度规张量将此式表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2}+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{S}}+F^\sigma_\tau\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}=0,\quad\sigma=1,2,\cdots,f,\tag{4.158}$$

其中

$$\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}=\widetilde{g}^{\sigma\sigma'}\widetilde{\Gamma}_{\sigma'\tau\rho},\tag{4.159}$$

$$F^\sigma_\tau=\widetilde{g}^{\sigma\sigma'}F_{\sigma'\tau},\tag{4.160}$$

$\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}$ 为以 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}$ 为度规的克里斯托费尔符号，($\widetilde{g}^{\sigma\sigma'}$)即相应的反变度规张量.在(4.157)上乘$\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}$后对 σ 求和，利用反对称性

$$F_{\tau\sigma}=-F_{\sigma\tau}\tag{4.161}$$

和 $\widetilde{\Gamma}_{\sigma\tau\rho}$ 的表达式(4.154)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\right)=0.\tag{4.162}$$

从而有初积分

$$\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}=\text{常数}.\tag{4.163}$$

此式表明，只要取初值时顾及了(4.145)，方程(4.157)保证此条件始终满足.可见方程(4.157)[从而(4.158)]与条件(4.145)自洽.

(4.158)是一组几何方程.它的解 $q^\sigma(\widetilde{S})$ 描绘出位形空间的一条轨迹，却

不表示系统的代表点沿这条轨迹移动的进程.一个力学理论应能描绘出这种进程,即应给出轨道方程 $q^\sigma(t)$.为此,除方程(4.158)外还需一个 $\widetilde{S}$ 与 t 的关系.这可由(4.142)、(4.143)、(4.133)和(4.119)构造出来,即

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{S}}{\mathrm{d}t} = 2(E - V_0). \tag{4.164}$$

(4.157)保证(4.145)成立.将它们与此式联立可反过来得到(4.119),其中动能 T 由(3.257)定义.用这些关系可将(4.157)变换成对时间 t 的二阶微分方程组.由直接的计算可以认出,这样得到的正是拉氏方程(3.115).

§4.7 协变微商与矢量平移 协变曲率 普遍的最小曲率原理

方程(4.157)或它的反变形式(4.158)是对任意广义坐标系导出的,它们的形式不因坐标变换而变.方程形式不因坐标变换而变的性质称为它的协变性.应当指明一个方程在哪种变换中是协变的.例如拉氏方程(3.115)在任意广义坐标变换中是协变的.(4.157)和(4.158)为只涉及空间因素的几何方程,对它们来说最广泛的变换为几何变换,即与时间无关的广义坐标变换.上面关于它们的陈述精确说来就是,(4.157)或(4.158)在不含时间的任意广义坐标变换中是协变的.为了更详尽的了解,下面分析其中各项在这种变换中的变换性质.(2.115)表明($\mathrm{d}q^\sigma$)为反变矢量.(3.257)~(3.261)的分析表明 $g_{\sigma\tau}$ 为二阶协变张量.设势函数中 V_0 是坐标变换中的不变量.(3.122)及其以后的分析表明,在与时间无关的坐标变换中,能量 E 也是不变的.这就使(4.142)定义的 $\mathrm{d}\widetilde{S}$ 为标量.可见$\left(\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\right)$为反变矢量,即在坐标变换

$$q'^\sigma = q'^\sigma(q^1, q^2, \cdots, q^f), \quad \sigma = 1,2,\cdots,f \tag{4.165}$$

中它按

$$\frac{\mathrm{d}q'^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}} = \frac{\partial q'^\sigma}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\mathrm{d}q^{\sigma'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \tag{4.166}$$

变换.两边对 $\widetilde{S}$ 再求一次微商得

$$\frac{\mathrm{d}^2 q'^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2} = \frac{\partial q'^\sigma}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\mathrm{d}^2 q^{\sigma'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2} + \frac{\partial^2 q'^\sigma}{\partial q^{\sigma'} \partial q^{\tau'}} \frac{\mathrm{d}q^{\sigma'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\mathrm{d}q^{\tau'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}. \tag{4.167}$$

右边第二项使$\left(\frac{\mathrm{d}^2 q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2}\right)$不能组成一个矢量.这是由于,变换系数$\frac{\partial q'^\sigma}{\partial q^{\sigma'}}$本身与空间位置有关.对所有的矢量都有这个问题.设(A^σ)为一反变矢量,即它在坐标变换中按

$$A'^{\sigma} = \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} A^{\sigma'} \tag{4.168}$$

变换. 设它沿某一路径取值, 是自某给定点算起的路程长度 $\widetilde{S}$ 的函数. 将(4.168)两边对 $\widetilde{S}$ 求微商, 得

$$\frac{\mathrm{d}A'^{\sigma}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} = \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\mathrm{d}A^{\sigma'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} + \frac{\partial^2 q'^{\sigma}}{\partial q^{\tau'} \partial q^{\rho'}} A^{\tau'} \frac{\mathrm{d}q^{\rho'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}. \tag{4.169}$$

此式表明矢量的微商不再是矢量. 这种破坏变换性质的情形以前也曾遇到过. 将(2.129)用这里的符号写出来就是

$$\widetilde{\Gamma}'^{\sigma}_{\tau\rho} = \widetilde{\Gamma}^{\sigma'}_{\tau'\rho'} \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\partial q'^{\tau}}{\partial q^{\tau'}} \frac{\partial q^{\rho'}}{\partial q'^{\rho}} + \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\partial^2 q^{\sigma'}}{\partial q'^{\tau} \partial q'^{\rho}}. \tag{4.170}$$

其中右边第二项即使得克里斯托费尔符号不成为张量. 将恒等式

$$\frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\partial q^{\sigma'}}{\partial q'^{\tau}} = \delta^{\sigma}{}_{\tau}$$

两边对 q'^{ρ} 求微商, 移项后得

$$\frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\partial^2 q^{\sigma'}}{\partial q'^{\tau} \partial q'^{\rho}} = -\frac{\partial^2 q'^{\sigma}}{\partial q^{\tau'} \partial q^{\rho'}} \frac{\partial q^{\tau'}}{\partial q'^{\tau}} \frac{\partial q^{\rho'}}{\partial q'^{\rho}}.$$

将它代入(4.170)右边第二项得

$$\widetilde{\Gamma}'^{\sigma}_{\tau\rho} = \widetilde{\Gamma}^{\sigma'}_{\tau'\rho'} \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\partial q^{\tau'}}{\partial q'^{\tau}} \frac{\partial q^{\rho'}}{\partial q'^{\rho}} - \frac{\partial^2 q'^{\sigma}}{\partial q^{\tau'} \partial q^{\rho'}} \frac{\partial q^{\tau'}}{\partial q'^{\tau}} \frac{\partial q^{\rho'}}{\partial q'^{\rho}}. \tag{4.171}$$

与(4.169)比较, 提示定义

$$\frac{\mathrm{D}A^{\sigma}}{\mathrm{D}\widetilde{S}} \equiv \frac{\mathrm{d}A^{\sigma}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} + \widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho} A^{\tau} \frac{\mathrm{d}q^{\rho}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{4.172}$$

由(4.169)和(4.171)知, 在广义坐标变换(4.165)中, 它按反变矢量变换, 即

$$\frac{\mathrm{D}A'^{\sigma}}{\mathrm{D}\widetilde{S}} = \frac{\partial q'^{\sigma}}{\partial q^{\sigma'}} \frac{\mathrm{D}A^{\sigma'}}{\mathrm{D}\widetilde{S}}. \tag{4.173}$$

$\left(\frac{\mathrm{D}A^{\sigma}}{\mathrm{D}\widetilde{S}}\right)$ 是一反变矢量, 称为矢量(A^{σ})沿所选路径的协变微商. 类似地, 一个协变矢量(A_{σ})在坐标变换(4.165)中按

$$A'_{\sigma} = A_{\sigma'} \frac{\partial q^{\sigma'}}{\partial q'^{\sigma}} \tag{4.174}$$

变换. 将此式两边沿一选定路径对路长求微商得

$$\frac{\mathrm{d}A'_{\sigma}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} = \frac{\mathrm{d}A_{\sigma'}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} \frac{\partial q^{\sigma'}}{\partial q'^{\sigma}} + \frac{\partial^2 q^{\rho'}}{\partial q'^{\sigma} \partial q'^{\tau}} A_{\rho'} \frac{\mathrm{d}q'^{\tau}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}. \tag{4.175}$$

可见协变矢量的微商也不再是矢量. 将(4.170)中的标号 $\sigma\tau\rho$ 轮换后与此式比较知, 应定义

$$\frac{\mathrm{D}A_{\sigma}}{\mathrm{D}\widetilde{S}} \equiv \frac{\mathrm{d}A_{\sigma}}{\mathrm{d}\widetilde{S}} - \widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\sigma\tau} A_{\rho} \frac{\mathrm{d}q^{\tau}}{\mathrm{d}\widetilde{S}}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{4.176}$$

为协变矢量 $A_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$的协变微商.由(4.170)和(4.175)知它按

$$\frac{\mathrm{D}A'_\sigma}{\mathrm{D}\widetilde{S}}=\frac{\mathrm{D}A_{\sigma'}}{\mathrm{D}\widetilde{S}}\frac{\partial q^{\sigma'}}{\partial q'^{\sigma}} \tag{4.177}$$

变换.由(4.172)知,反变矢量$\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}$的协变微商为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\widetilde{S}}\left(\frac{\mathrm{d}q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\right)=\frac{\mathrm{d}^2q^\sigma}{\mathrm{d}\widetilde{S}^2}+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}\frac{\mathrm{d}q^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{S}}. \tag{4.178}$$

它正是方程(4.158)左边前两项之和.这个方程的协变性表明,它的第三项也必是一个反变矢量.或者说(4.157)左边第三项必是一协变矢量.由(2.125)前面的讨论知,要确认这一点必须也只须确认($F_{\sigma\tau}$)为二阶协变张量.拉氏函数是广义坐标变换下的不变量保证(G_σ)在不含时间的广义坐标变换中为一协变矢量.按(4.156),要认明 $F_{\sigma\tau}$的变换性质就要先了解矢量偏微商的变换性质.平行于(4.168)~(4.177)的讨论知,可定义反变矢量(A^σ)的协变偏微商

$$A^\sigma_{;\rho}\equiv\frac{\partial A^\sigma}{\partial q^\rho}+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}A^\tau \tag{4.179}$$

和协变矢量(A_σ)的协变偏微商

$$A_{\sigma;\tau}\equiv\frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\tau}-\widetilde{\Gamma}^\rho_{\sigma\tau}A_\rho. \tag{4.180}$$

它们分别组成二阶混合张量和二阶协变张量,且与协变全微商(4.172)和(4.176)有普通关系

$$\frac{\mathrm{D}A^\sigma}{\mathrm{D}\widetilde{S}}=A^\sigma_{;\rho}\frac{\mathrm{d}q^\rho}{\mathrm{d}\widetilde{S}},\quad \frac{\mathrm{D}A_\sigma}{\mathrm{D}\widetilde{S}}=A_{\sigma;\tau}\frac{\mathrm{d}q^\tau}{\mathrm{d}\widetilde{S}}. \tag{4.181}$$

由克里斯托费尔符号对下标的对称性知

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial q^\sigma}-\frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\tau}=A_{\tau;\sigma}-A_{\sigma;\tau}. \tag{4.182}$$

协变张量之差仍为协变张量,此式左边就是一个二阶反对称协变张量.可见(4.156)定义的($F_{\sigma\tau}$)确为一二阶协变张量.方程(4.157)和(4.158)的协变性是由于它们为矢量方程.具体地说,它们表达的是,矢量的每一分量为零.在坐标变换中矢量作线性齐次变换.如果它的每一分量在一个坐标系中都是零,经这种线性齐次变换到另一坐标系后,各分量必仍为零.这就是矢量方程在坐标变换中的协变性.

将一个矢量沿一条路径移动.若移动中矢量的协变微商为零,则称这种移动为平行移动,简称平移.按(4.172),反变矢量(A^σ)在平移中有增量

$$\delta A^\sigma=-\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}A^\tau\delta q^\rho, \tag{4.183}$$

δq^ρ 为移动中坐标 q^ρ 的增量.按(4.176),协变矢量(A_σ)在平移中的增量为

$$\delta A_\sigma=\widetilde{\Gamma}^\rho_{\sigma\tau}A_\rho\delta q^\tau. \tag{4.184}$$

平移中一个矢量会变，是由于 $\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}\neq 0$，而这又是空间各点度规 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}$ 不同所致. 这可反过来理解协变微商的含义. 由于空间各点度规不同，不能直接比较不同点上的矢量. 而微商恰巧要比较不同点上的量. 为了比较不同点的矢量，要将它们平移到同一点，然后再比较. 例如，做微商就要先将 $(q^{\sigma}+\delta q^{\sigma})$ 点上的矢量平移到 (q^{σ}) 点，减去原来在 (q^{σ}) 点的矢量，再除以坐标增量 δq^{σ} 或路长增量 $\delta\widetilde{S}$. 这就导致了协变微商表达式(4.172)、(4.176)、(4.179)和(4.180)右边的第二项. $\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}$ 或第二章中的 Γ^{i}_{jk} 表示平移中的矢量变化，又称为仿射联络.

协变微商以及与它相关联的矢量平移的概念定义并不是惟一的. 协变微商只是在普通微商上附加一项，使结果具有矢量或张量的变换性质. 符合这种要求的附加项有无穷多种. 如果有一项符合要求，那么在上面再加一具有所要求的矢量或张量变换性质的项仍符合要求. 例如在(4.172)右边再加一个反变矢量，在(4.176)右边再加一个协变矢量，在(4.179)右边再加一个二阶混合张量，在(4.180)右边再加一个二阶协变张量，就可得到协变微商的另一种定义. 在这无穷多种定义中，究竟取哪一种，视所研究的问题而定. 在能充分解决问题的前提下，应取最简单的. 而在确有必要或确有意义的情况下，该附加甚么项就附加甚么项. 例如，若认为 G_{σ} 与度规 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}$ 同是有意义的几何量，$F_{\sigma\tau}$ 和 F^{σ}_{τ} 就是有意义的几何量. 可将反变矢量协变微商的定义(4.172)和(4.179)分别修改为

$$\frac{DA^{\sigma}}{D\widetilde{S}}\equiv\frac{dA^{\sigma}}{d\widetilde{S}}+\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}A^{\tau}\frac{dq^{\rho}}{d\widetilde{S}}+F^{\sigma}_{\tau}\frac{dq^{\tau}}{d\widetilde{S}},\tag{4.185}$$

$$A^{\sigma}_{;\rho}\equiv\frac{\partial A^{\sigma}}{\partial q^{\rho}}+\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}A^{\tau}+F^{\sigma}_{\rho}\ .\tag{4.186}$$

反变矢量的平移公式(4.183)修改为

$$\delta A^{\sigma}=-\widetilde{\Gamma}^{\sigma}_{\tau\rho}A^{\tau}\delta q^{\rho}-F^{\sigma}_{\tau}\ \delta q^{\tau}.\tag{4.187}$$

按此定义，轨迹方程(4.158)表示的乃是坐标对路程长度的二阶协变微商为零：

$$\frac{D^{2}q^{\sigma}}{D\widetilde{S}^{2}}=0.\tag{4.188}$$

$\frac{dq^{\sigma}}{d\widetilde{S}}$ 本组成反变矢量，可表示为一协变微商

$$\frac{Dq^{\sigma}}{D\widetilde{S}}\equiv\frac{dq^{\sigma}}{d\widetilde{S}}.\tag{4.189}$$

(4.188)左边即是对这个一阶协变微商的协变微商

$$\frac{D^{2}q^{\sigma}}{D\widetilde{S}^{2}}\equiv\frac{D}{D\widetilde{S}}\left(\frac{Dq^{\sigma}}{D\widetilde{S}}\right).\tag{4.190}$$

上章末提到赫兹曾力图将最小曲率原理普遍化. 有了协变微商的概念后

这成了轻而易举的事. 由于$\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}$不组成矢量,(3.271)定义的曲率 K 不是标量. 只当仿射联络(4.159)为零时,那个定义才有意义. 这就难怪那里不得不将最小曲率原理局限于无作用力的情形. 普遍的最小曲率原理首先需要普遍的曲率定义. (3.271)的自然推广是将其中的微商改为协变微商,即将曲率定义为

$$K = \sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{D^2q^\sigma}{D\widetilde{S}^2}\frac{D^2q^\tau}{D\widetilde{S}^2}}, \tag{4.191}$$

并称之为协变曲率. 从前面的讨论知,实际运动中系统的代表点在位形空间描绘的轨迹由于(4.188)曲率为零. 这使人相信,在加上一些约束,特别是加上一些非完整约束后,可得到一个更加普遍的原理. 称拉氏函数不显含时间且约束反作用力对符合约束的位移作功为零的系统为理想保守系统,这个原理便是

最小曲率原理 一个理想保守系,它的代表点在位形空间的各种可能轨迹中,实际的轨迹协变曲率最小.

证 按定义,理想保守系拉氏函数不显含时间,约束反作用力对符合约束的位移作功为零,因而存在由(3.120)定义的守恒能量,定义(4.142)和(4.143)成立. 线性齐次微分约束自动满足这个条件. 不过此处不拟将约束限定为这种具体形式. 用(4.164)得

$$\dot{q}^\sigma = 2(E - V_0)\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}}. \tag{4.192}$$

以此可将约束(3.1)中的广义速度 $\dot{q}^\sigma$ 用$\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}}$替换. 从而有

$$\mathscr{B}_{\sigma i} \equiv \frac{\partial\phi_i}{\partial\left(\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}}\right)} = 2(E - V_0)B_{\sigma i}, \tag{4.193}$$

其中 $B_{\sigma i}$由(3.29)表达. 在位形空间的一定点比较切线相同的不同轨迹的曲率. 即在变分中(q^σ)和$\left(\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}}\right)$是固定的,只有$\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}$变更. 将约束(3.1)对 $\widetilde{S}$ 求全微商得

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial q^\sigma}\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}} + \mathscr{B}_{\sigma i}\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{4.194}$$

固定(q^σ)和$\left(\frac{dq^\sigma}{d\widetilde{S}}\right)$对此式变分得

$$\mathscr{B}_{\sigma i}\delta\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{4.195}$$

要求(4.191)定义的曲率 K 在这种变更中取极小,即要求它由符合此条件的

变更 $\delta\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}$ 引起的变分为零. 按拉氏乘子法, 这导致

$$\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{D^2q^\tau}{D\widetilde{S}^2}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathscr{B}_{\sigma i}=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{4.196}$$

推导中用到表达式

$$\frac{D^2q^\sigma}{D\widetilde{S}^2}=\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\tau\rho}\frac{dq^\tau}{d\widetilde{S}}\frac{dq^\rho}{d\widetilde{S}}+F^\sigma{}_\tau\frac{dq^\tau}{d\widetilde{S}}, \tag{4.197}$$

且将因子 $\sqrt{\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{D^2q^\sigma}{D\widetilde{S}^2}\frac{D^2q^\tau}{D\widetilde{S}^2}}$ 吸收到了拉氏乘子 λ_i 中. 用(4.164)可将(4.196)变换成对时间 t 的二阶微分方程. 直接计算即可认出, 在将有的因子吸收进拉氏乘子后, 这样得到的正是拉氏方程(3.113). 此方程中的拉氏乘子与(4.196)中的拉氏乘子本可不同. 且拉氏乘子由方程和约束条件本身决定, 其中含哪些因子并不重要. 可见曲率最小的要求确实导致正确的运动方程. 另一方面, 上面的论证也表明, 符合拉氏方程的运动使轨迹的曲率取极值. 为了判明这个极值是否极小, 要求二次变分. 代替 K 本身, 考虑

$$K^2=\widetilde{g}_{\sigma\tau}\frac{D^2q^\sigma}{D\widetilde{S}^2}\frac{D^2q^\tau}{D\widetilde{S}^2}. \tag{4.198}$$

它的二次变分为

$$\frac{\delta^2(K^2)}{\delta\left(\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}\right)\delta\left(\frac{d^2q^\tau}{d\widetilde{S}^2}\right)}=2\widetilde{g}_{\sigma\tau}. \tag{4.199}$$

(4.143)表明其中 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}$ 含两个因子. 一个因子 $g_{\sigma\tau}$ 来自动能(3.257). 动能的正定性使

$$g_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau\geqslant 0,$$

等号只当 $\xi^\sigma=0,\sigma=1,2,\cdots,f$, 成立. 即此式左边的二次型是正定的. 另一因子

$$2(E-V_0)\geqslant 0,$$

等号在 $V_0=E$, 即动能为零处成立. 动能为零的点称为拐点, 运动中一般只有若干孤立拐点. 这使二次型

$$\widetilde{g}_{\sigma\tau}\xi^\sigma\xi^\tau\geqslant 0 \tag{4.200}$$

为半正定的, 即除若干孤立拐点外是正定的. 正是这种半正定性使(4.198)定义的 $K^2\geqslant 0$, 从而使 $K\geqslant 0$ 为实数. K^2 极小处 K 也极小. 在极值处将 K^2 的增量 ΔK^2 展成变分 $\delta\left(\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}\right)$ 的幂级数, 一次项为零, 到二次幂

$$\Delta K^2=\frac{1}{2}\delta^2(K^2)=\widetilde{g}_{\sigma\tau}\delta\left(\frac{d^2q^\sigma}{d\widetilde{S}^2}\right)\delta\left(\frac{d^2q^\tau}{d\widetilde{S}^2}\right). \tag{4.201}$$

由半正定性(4.200)知,除若干孤立拐点外,K^2 的极值皆极小值.而在拐点上 $\widetilde{g}_{\sigma\tau}=0$ 直接导致 $K^2=0$,这正是 K^2 的最小值.即,无论如何,K^2 的极值皆极小值,从而 K 的极值也都是极小值.这就是要证明的.证毕.

用反变度规张量($\widetilde{g}^{\sigma\tau}$),可将(4.196)写成反变矢量方程

$$\frac{\mathrm{D}^2 q^\sigma}{\mathrm{D}\widetilde{S}^2}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathscr{B}^\sigma{}_i=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f, \tag{4.202}$$

其中

$$\mathscr{B}^\sigma{}_i=\widetilde{g}^{\sigma\tau}\mathscr{B}_{\tau i}. \tag{4.203}$$

§4.8 经典力学与几何光学的相似 折射

考虑一个质点在现实的三维空间中的轨迹.用径矢量 $\boldsymbol{r}$ 或者它的笛卡儿坐标(x,y,z)表示质点的位置,m 表示它的质量.设势函数 $V(\boldsymbol{r})$与速度无关且不显含时间.按通常方式,定义坐标间隔为$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$的两点间微分距离为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}. \tag{4.204}$$

作用量的雅可比形式(4.135)现可表示为

$$S=\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2m(E-V)}\,\mathrm{d}s. \tag{4.205}$$

最小作用量原理指称,质点从 $\boldsymbol{r}_0$ 处到 $\boldsymbol{r}_1$ 处走的轨迹使此量取极值.经典力学的这一原理与几何光学中的费马(Fermat)原理极为相似.该原理称,从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的光线使光程

$$S=\int_{r_0}^{r_1}n\,\mathrm{d}s \tag{4.206}$$

取极值.其中被积函数 $n(\boldsymbol{r})$为 $\boldsymbol{r}$ 处的折射指数.将作用量(4.205)写成光程(4.206)的形式,其中的折射指数应为

$$n(\boldsymbol{r})=\sqrt{2m(E-V(\boldsymbol{r}))}\,C. \tag{4.207}$$

由于在被积函数上乘以常数不改变一条轨迹是否使积分取极值的性质,质点的"折射指数"只是与$\sqrt{2m(E-V)}$成比例而不一定与它相等,C 就是比例常数.现在用费马原理或最小作用量原理来确证,n 符合熟知的折射指数定义.

如图 4-3,一平面将空间分成两部分,上部 I 中折射指数为 n_1,下部 II 中折射指数为 n_2.n_1 和 n_2 分别在区域 I 和 II 中为常数,彼此却可不同.现在问,质点或光要从 I 中的点 1 到 II 中的点 2 将走哪条路径?

解 从点 1 和点 2 向界面作垂线,垂足分别为点 1′和点 2′.11′//22′因而可组成一平面,与界面交于 1′2′.从点 1 到点 2 的路径必在此平面内.因为从

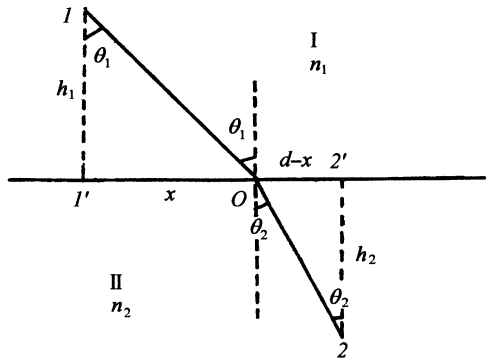

图 4-3　折射

点 1 到点 2 的任何曲线均可投影到此平面，因而对应此平面内的一条曲线．它们在区域 I 和 II 的部分分别长于在此面上的相应投影．由于 $n>0$，它们乘上 n_1 或 n_2 后得到的光程必大于投影的光程．将区域 I 和 II 的光程加起来也必大于相应投影的光程．可见，此平面外的路径不可能使光程取极值．在此平面内的路径在区域 I 或 II 的部分必分别为直线，因为任何曲线的长度大于相应直线，乘上 n_1 或 n_2 后的光程也必大于相应直线的光程．任何曲线的光程都非极值．质点或光从点 1 到点 2 的路径必是先从点 1 取直线到直线 1′2′上的一点 O，再从 O 取直线到点 2．在界面上的点 O 处直线可能改变方向，即发生折射．可见要找出从 1 到 2 的路径只须找出 O 点的位置．设点 1 到界面的垂线 11′长 h_1，点 2 到界面的垂线 22′长 h_2，两垂足 1′和 2′距离为 d．设点 O 距垂足 1′为 x，因而距垂足 2′为 $d-x$．从点 1 到点 2 的光程即为

$$S = n_1\sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}. \tag{4.208}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=0$ 得

$$n_1\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - n_2\frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0. \tag{4.209}$$

如图 4-3，用 θ_1 和 θ_2 分别表示入射角和折射角，此式即为

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2,$$

或

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{4.210}$$

这正是折射定律．可见质点或光从点 1 到点 2 的路径由折射定律确定，其中的折射指数即(4.206)中的 n．解毕．

将(4.209)左边对 x 再微商一次得

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}x^2} = \frac{n_1}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}\left(1 - \frac{x^2}{h_1^2 + x^2}\right)$$

$$+ \frac{n_2}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}\left[1 - \frac{(d-x)^2}{h_2^2 + (d-x)^2}\right] > 0. \qquad (4.211)$$

可见符合折射定律的光程不仅取极值，而且是取极小值.因此费马原理又称最短光程原理.不过很容易看到，光程取极值是普遍的，而取极小值却并不普遍.一个最通俗的光程取极值却并非极小的例子是，光或质点在椭圆柱面上的反射.椭圆柱的横截面为椭圆，椭圆的焦点也在这横截面上.现在问，从其中的一个焦点发出的光或质点经椭圆柱上哪点可反射到另一焦点.与求解折射问题类似的论证知，质点或光的路径必在椭圆面内，经椭圆周上的一点反射到另一焦点.然而，椭圆周上每一点与两焦点距离之和都等于椭圆长轴长，是常数.可见从一焦点经椭圆周上任一点到另一焦点的光程都是一样的.或者说光程对反射点沿椭圆周的变分为零，取极值.这种极值对反射点沿椭圆周的变更而言显然不是极小，也不是极大，而是逗留值.质点或光从椭圆的一个焦点经椭圆周上任一点反射都到达椭圆的另一焦点.这就是椭圆周的聚焦性能.

从(4.207)看到质点路径的折射指数与质点能量有关.这种关系也无独有偶.光的折射指数与光的颜色有关.不同颜色的光折射不同，这就是早在牛顿的三棱镜实验中就已发现的色散现象.按光的波动理论，颜色表现的是光波的频率.可见，光的折射指数与光波频率有关.最小作用量原理与费马原理的对应，折射指数的对应(4.207)，连同质点折射指数与质点能量有关和光折射指数与光波频率有关的对应，表现出经典力学与几何光学的相似.对这种相似的认识在发现量子力学的过程中起了重要作用.

习 题 四

1. 一质点约束在自由下落的无旋转球面上，写出并求解它的运动方程.讨论结果的几何含义.

2. 一质点约束在自由下落的无旋转圆柱面上，写出并求解它的运动方程.讨论结果的几何含义.

3. 一质点约束在自由下落并绕过球心的定轴等速旋转的球面上.在跟随球面转动的坐标系中写出它的运动方程并求出初积分.

4. 在上题中以旋转轴为极轴，取球面坐标 $\theta\varphi$ 表示质点位置.求质点沿赤道运动，即 $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$ 的特解.

5. 在上题中求 $\dot{\varphi} = -\omega$ 的特解，其中 ω 为球绕极轴旋转的角速度.将结果与第1题中质点沿子午线运动的特解比较，讨论其含义.

6. 设习题三第12题中的光滑圆环上也有质量均匀分布，且无外界作用力保证它绕铅

垂直径的转动为等速的，转动角速度本身由运动方程决定.写出环和小球组成的系统的运动方程，求出初积分.将结果与原题结果比较，讨论其含义.

7. 一长为 l 质量为 M 的均匀细杆一端套在竖直轴上，可绕轴无摩擦地在水平面内转动.杆上套一质量为 m 的小球，球可无摩擦地沿杆滑动.写出此系统的运动方程，求出初积分，并判断在何条件下球不致从杆上甩出去.

8. 求解质点在中心场

$$V(r) = Ar^k$$

中的圆周运动.以圆周半径为空间尺度，圆运动周期为时间尺度，检验 § 4.3 的力学相似性理论.

9. 试证：无论有无循环坐标，也无论 $q_\sigma, \sigma = f_1+1, f_1+2, \cdots, f$ 是否为循环坐标，恒可作勒让德变换(4.77)，所得罗斯函数 R 为 $q_\sigma, \sigma = 1,2,\cdots,f, \dot{q}_\sigma, \sigma = 1,2,\cdots,f_1$，和 $p_\sigma, \sigma = f_1+1, f_1+2, \cdots, f$ 的函数，且

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial R}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f_1, \\ &\dot{q}_\sigma = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial R}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = f_1+1, f_1+2, \cdots, f, \end{aligned}\right\} \tag{4.212}$$

为完备运动方程组.

10. 势能相同的面称为等势面.力的方向恒垂直等势面，因而只有垂直等势面的动量分量会改变.试用这一点和能量守恒证明质点的折射定律(4.210)和折射指数的表达式(4.207).

11. 试分别用最短路程原理和最短光程原理证明质点和光的反射定律.

12. 试用动量平行于等势面的分量不变和能量守恒证明质点的反射定律.

13. 一电荷为 e 的质点在磁感强度为 $\mathscr{B}$ 的恒定磁场中受力

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times \mathscr{B}, \tag{4.213}$$

称洛伦兹力，其中 $\boldsymbol{v}$ 为质点的速度，

$$\mathscr{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{4.214}$$

$\boldsymbol{A}$ 称为矢势，不显含时间.试证此质点的拉氏函数可写为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}), \tag{4.215}$$

m 为质点质量.

14. 设作一维运动的质点拉氏函数为

$$L = \mathrm{e}^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right), \tag{4.216}$$

其中 γ、m 和 k 为常数.导出并求解拉氏方程，讨论所得结果.

15. 经典力学的一种可能推广是允许拉氏函数与坐标对时间的二阶或更高阶微商有关.试就含二阶和三阶微商的拉氏函数作具体讨论和评价.

第五章　力学的正则形式　哈密顿力学

§5.1　哈密顿正则方程
广义坐标与广义动量描述运动状态
哈密顿原理的正则形式

在拉格朗日力学中，运动方程为拉氏方程．它是广义坐标的二阶微分方程，因此初条件包括广义坐标及其对时间的一阶微商，即广义速度．知道了一个时刻的广义坐标和广义速度，不仅能算出该时刻一切力学量的值，而且借助拉氏方程可算出任何其他时刻的广义坐标和广义速度，从而算出其他时刻的一切力学量．这就叫作：一个时刻系统的广义坐标和广义速度是该时刻系统运动状态的完全描述．广义坐标和广义速度一起组成拉格朗日力学的基本量．§4.4 将基本量作了一点变换，即将循环自由度的广义速度用广义动量表达．这种变换可进行到底，即不限于循环自由度．对每一自由度定义有广义动量

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}, \qquad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.1}$$

它一般是全体广义坐标和广义速度的函数．对给定的广义动量 $p_\sigma, \sigma = 1,2,\cdots f$，从 f 个方程(5.1)可解出 f 个广义速度 $\dot{q}_\sigma, \sigma = 1,2,\cdots,f$，它们一般都是全体广义坐标和广义动量的函数．将解得的广义速度代入各力学量的表达式中，可从中消去广义速度，从而表示成广义坐标和广义动量的函数．这使得，只要知道一个时刻系统的广义坐标和广义动量，就可算得它在此时刻的一切力学量．定义哈密顿量

$$H = \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma - L. \tag{5.2}$$

将它表示成广义坐标 q_σ 和广义动量 $p_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,f)$的函数．求偏微商

$$\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = \sum_{\sigma'=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial q_\sigma} p_{\sigma'} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \sum_{\sigma'=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma'}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} = -\dot{p}_\sigma,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} = \dot{q}_\sigma + \sum_{\sigma'=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} p_{\sigma'} - \sum_{\sigma'=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma'}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} = \dot{q}_\sigma,$$

第一式的第三等号处用了拉氏方程.将此二式整理得

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{5.3}$$

这就是哈密顿正则方程.它是$2f$个函数$q_\sigma(t)$、$p_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,f)$的$2f$个联立方程,因而是完备的.它们都是一阶常微分方程,起始条件只包括起始时刻的广义坐标和广义动量.可见,只要知道了一个时刻系统的全部广义坐标和广义动量,就不仅能算出该时刻系统的任何力学量,而且可借助哈密顿正则方程(5.3)算出任何其他时刻系统的全部广义坐标和广义动量.即广义坐标和广义动量完全描述了系统的运动状态.相应的运动方程为哈密顿正则方程.f个广义坐标和f个广义动量共$2f$个数可对应$2f$维空间中的一个点,称为相点.这个$2f$维空间称为系统的相空间.由于它的每个点对应系统的一个状态,因而又称状态空间.这种用广义坐标和广义动量描述运动状态,以哈密顿正则方程作运动方程的力学称为哈密顿力学.经典力学的这种表述形式称为正则形式.

哈密顿正则方程也可由变分原理导出.按(5.2),拉氏量为

$$L = \sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma - H. \tag{5.4}$$

作用量(4.2)因而可表示为

$$S = \int_{(q_{\sigma 0}),t_0}^{(q_{\sigma 1}),t_1} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t \right), \tag{5.5}$$

其中$(q_{\sigma 0})$和$(q_{\sigma 1})$分别为系统在t_0和t_1时刻的广义坐标.(4.2)表示的作用量S由时间t的f个函数$q_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,f)$确定,称为这$f$个函数的泛函.其中的$\dot{q}_\sigma(t)$不是独立的函数,而是$q_\sigma(t)$对时间$t$的微商,随$q_\sigma(t)$而确定.$S$的变分就取决于这$f$个独立函数的变分,即取决于$f$个独立的变分$\delta q_\sigma(t)$,$\sigma=1,2,\cdots,f$.另一方面,(5.5)可表示为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} \dot{q}_\sigma p_\sigma - H \right) \mathrm{d}t, \tag{5.6}$$

它由$2f$个函数$q_\sigma(t)$,$p_\sigma(t)(\sigma=1,2,\cdots,f)$确定,是这$2f$个函数的泛函.广义动量与广义速度的关系(5.1)在力学的正则形式中是哈密顿正则方程(5.3)的第一式.它应从变分原理中导出,而不在作用量表达式(5.6)中事先假定.广义动量$p_\sigma(t)$被当作独立函数对待.固定始末时刻t_0和t_1,对作用量(5.6)变分得

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\dot{q}_\sigma \delta p_\sigma + p_\sigma \delta \dot{q}_\sigma - \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{f}(p_{\sigma 1}\delta q_{\sigma 1} - p_{\sigma 0}\delta q_{\sigma 0}) + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma - \left(\dot{p}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\right]\mathrm{d}t, \tag{5.7}$$

在第二等号处作了部分积分，$p_{\sigma 1}$和 $p_{\sigma 0}(\sigma=1,2,\cdots,f)$分别为 t_1 和 t_0 时刻的广义动量.如进一步固定始末时刻的广义坐标($q_{\sigma 0}$)和($q_{\sigma 1}$)，即置 $\delta q_{\sigma 1}=\delta q_{\sigma 0}=0,\sigma=1,2,\cdots,f$,(5.7)变为

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)\delta p_\sigma - \left(\dot{p}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma\right]\mathrm{d}t. \tag{5.8}$$

可见符合正则方程(5.3)的相空间轨道使作用量的变分为零.按 $q_\sigma(t)$和 $p_\sigma(t)$为独立函数，从而 $\delta q_\sigma(t)$和 $\delta p_\sigma(t)$为独立变分，作用量变分为零的条件导致正则方程(5.3).总之，可得出结论，哈密顿正则方程等价于正则形式的

哈密顿原理 一个理想完整有势系统，在所有符合约束且符合给定边条件 t_0、$q_\sigma(t_0)$和 t_1、$q_\sigma(t_1)(\sigma=1,2,\cdots,f)$的相空间轨道中，实际轨道使作用量(5.6)取极值.

§5.2 力学量随时间的变化 泊松括号 正则变量守恒量与对称性 泊松定理

力学的正则形式以广义坐标与广义动量为基本量，将一切力学量表示成广义坐标、广义动量和时间的函数.一个力学量随时间的变化来自两个方面.一是由于广义坐标和广义动量随时间变化，作为它们的函数一般力学量也会随时间变化.另外，有些力学量还可以直接与时间有关，这种力学量称为显含时间的.若力学量 F 显含时间，则它有对时间的非零偏微商$\frac{\partial F}{\partial t}\neq 0$. F 对时间的全微商为

$$\dot{F}\equiv\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}\right),$$

末一等号处用了哈密顿正则方程(5.3).定义广义坐标和广义动量的任意二个函数 F 和 G 的泊松(Poisson)括号

$$[F,G]\equiv\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial G}{\partial q_\sigma}\right), \tag{5.9}$$

上式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F,H]. \tag{5.10}$$

将 q_σ 和 p_σ 分别代入此式中的 F，利用

$$\frac{\partial q_\sigma}{\partial p_{\sigma'}} = \frac{\partial p_\sigma}{\partial q_{\sigma'}} = 0,$$

$$\frac{\partial q_\sigma}{\partial q_{\sigma'}} = \frac{\partial p_\sigma}{\partial p_{\sigma'}} = \delta_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma = \sigma', \\ 0, & \text{否 \quad 则}, \end{cases} \tag{5.11}$$

即得哈密顿正则方程(5.3).(5.10)可视为哈密顿正则方程对任意力学量的推广，亦可称为正则方程.直接将任一力学量随时间的变化用一个公式表出是力学正则形式的一个优点.泊松括号因此在力学中扮演重要角色.它有简单性质

$$\left.\begin{aligned} &[F, G] = -[G, F], \quad [F, F] = 0, \\ &[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G], \\ &[F, G_1 + G_2] = [F, G_1] + [F, G_2], \\ &[cF, G] = [F, cG] = c[F, G], \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

c 为与广义坐标和广义动量均无关的常数.这些关系都是一目了然的.此外还有

$$\left.\begin{aligned} &[F_1F_2, G] = [F_1, G]F_2 + F_1[F_2, G], \\ &[F, G_1G_2] = [F, G_1]G_2 + G_1[F, G_2], \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

它们可由乘积微商的莱布尼茨公式导得，以及雅可比恒等式

$$[F_1, [F_2, F_3]] + [F_2, [F_3, F_1]] + [F_3, [F_1, F_2]] = 0. \tag{5.14}$$

只有这个恒等式不显然，因而需要证明.

证 将(5.14)左边按定义(5.9)展开成许多项，每项都含 F_1、F_2 和 F_3 的偏微商，且是两个一阶微商和一个二阶微商的乘积. F_3 的二阶微商全在(5.14)左边前两个泊松括号中.把它们搜集起来就是

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma',\sigma=1}^{f} \Bigg[& \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_\sigma \partial q_{\sigma'}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial p_{\sigma'}} - \frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma'}} \frac{\partial F_2}{\partial p_\sigma} \right) \\ & + \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_\sigma \partial p_{\sigma'}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_{\sigma'}} \frac{\partial F_2}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F_1}{\partial p_\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial q_{\sigma'}} \right) \\ & + \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_{\sigma'} \partial p_\sigma} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma'}} \frac{\partial F_2}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial F_1}{\partial q_\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial p_{\sigma'}} \right) \\ & + \frac{\partial^2 F_3}{\partial p_\sigma \partial p_{\sigma'}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_\sigma} \frac{\partial F_2}{\partial q_{\sigma'}} - \frac{\partial F_1}{\partial q_{\sigma'}} \frac{\partial F_2}{\partial q_\sigma} \right) \Bigg] = 0. \end{aligned}$$

此式为零是由于求和号下的方括号对下标 σ 和 σ' 反对称，即交换 σ 和 σ' 使它变号.由(5.14)左边对下标 1、2 和 3 的轮换对称知，其中含 F_1 和 F_2 的二阶微商项也各自抵消而为零.这使它整个为零，即雅可比恒等式(5.14)成立.证毕.

利用(5.11)可得

$$[q_\sigma, q_{\sigma'}] = [p_\sigma, p_{\sigma'}] = 0, \quad [q_\sigma, p_{\sigma'}] = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{5.15}$$

它们是基本量间的泊松括号,且具简单形式,因而称为基本泊松括号.有意思的是,在相当广泛的基础上,可由这套基本泊松括号以及泊松括号的基本性质(5.12)和(5.13)导出(5.9),从而代替它作为泊松括号的定义.现由(5.12)、(5.13)和(5.15)证明下列命题.

命题一 常数 c 和任一力学量 F 的泊松括号为零.

证 由于$[c, F] = -[F, c]$,可只证$[F, c] = 0$.由(5.12)的末式知对任意力学量 G 有

$$[F, cG] = c[F, G].$$

由(5.13)的末式则得

$$[F, cG] = [F, c]G + c[F, G].$$

两式比较知

$$[F, c]G = 0.$$

取 $G = 1$ 即得$[F, c] = 0$,证毕.

命题二 广义坐标的函数 $F(q_1, q_2, \cdots, q_f)$在解析处有

$$[F, p_\sigma] = \frac{\partial F}{\partial q_\sigma}. \tag{5.16}$$

证 解析即可展成泰勒级数.若 F 在点(a_σ)处解析,则在此点附近可展成

$$F(q_1, q_2, \cdots, q_f) = \sum_{n_1, n_2, \cdots, n_f = 0}^{\infty} C_{n_1, n_2, \cdots, n_f} (\Delta q_1)^{n_1} (\Delta q_2)^{n_2} \cdots (\Delta q_f)^{n_f}, \tag{5.17}$$

$$\Delta q_\sigma = q_\sigma - a_\sigma,$$

且在收敛半径内可逐项微积分,按(5.12)第三式还可逐项求泊松括号.因此先对幂函数证(5.16),即证

$$[(\Delta q_\sigma)^{n_\sigma}, p_\sigma] = n_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma - 1}. \tag{5.18}$$

用数学归纳法.若此式对 n_σ 幂成立,可算得

$$\begin{aligned}[(\Delta q_\sigma)^{n_\sigma + 1}, p_\sigma] &= [(\Delta q_\sigma)^{n_\sigma}, p_\sigma]\Delta q_\sigma + (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma}[\Delta q_\sigma, p_\sigma] \\ &= n_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} + (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} = (n_\sigma + 1)(\Delta q_\sigma)^{n_\sigma},\end{aligned}$$

即它对 $n_\sigma + 1$ 幂也成立.由命题一知,(5.18)对 $n_\sigma = 0$ 成立,可见它对任何非负整幂 n_σ 都成立.由(5.15)可将它推广为

$$[(\Delta q_{\sigma'})^{n_{\sigma'}}, p_\sigma] = \delta_{\sigma\sigma'} n_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma - 1}. \tag{5.19}$$

于是可算得

$$[F, p_\sigma] = \sum_{n_1, \cdots, n_\sigma, \cdots, n_f = 0}^{\infty} C_{n_1, \cdots, n_\sigma, \cdots, n_f} n_\sigma (\Delta q_1)^{n_1} \cdots (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma - 1} \cdots (\Delta q_f)^{n_f}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial q_\sigma}.$$

这就是要证明的.证毕.

用类似方法可证明

命题三 广义动量的函数 $G(p_1, p_2, \cdots, p_f)$在解析处有

$$[q_\sigma, G] = \frac{\partial G}{\partial p_\sigma}. \tag{5.20}$$

用命题一和(5.13)的第二式可将(5.19)推广为

$$[(\Delta q_{\sigma'})^{n_{\sigma'}}, (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma}] = \delta_{\sigma\sigma'} n_{\sigma'} (\Delta q_{\sigma'})^{n_{\sigma'}-1} m_\sigma (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma - 1}, \tag{5.21}$$

其中 $\Delta p_\sigma = p_\sigma - b_\sigma$, b_σ 为常数.用(5.12)的第一式又可将此式写为

$$[(\Delta p_{\sigma'})^{m_{\sigma'}}, (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma}] = -\delta_{\sigma\sigma'} m_{\sigma'} (\Delta p_{\sigma'})^{m_{\sigma'}-1} n_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma - 1}. \tag{5.22}$$

利用此二式可计算幂函数

$$\begin{aligned} F^{(n,m)} &\equiv (\Delta q_1)^{n_1} (\Delta q_2)^{n_2} \cdots (\Delta q_f)^{n_f} (\Delta p_1)^{m_1} (\Delta p_2)^{m_2} \cdots (\Delta p_f)^{m_f} \\ &= \prod_{\sigma=1}^{f} (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma} \end{aligned} \tag{5.23}$$

的泊松括号,其中 $n = (n_1, n_2, \cdots, n_f)$和 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_f)$分别为 f 个非负整数的缩写.用(5.13)、(5.21)和(5.22)得

$$\begin{aligned} [F^{(n,m)}, F^{(n',m')}] &= \Big[\prod_{\sigma=1}^{f} (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma}, \prod_{\sigma'=1}^{f} (\Delta q_{\sigma'})^{n'_{\sigma'}} (\Delta p_{\sigma'})^{m'_{\sigma'}}\Big] \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f} [(\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma}, (\Delta q_\sigma)^{n'_\sigma} (\Delta p_\sigma)^{m'_\sigma}] \\ &\quad \times \prod_{\sigma' \neq \sigma} (\Delta q_{\sigma'})^{n_{\sigma'}} (\Delta p_{\sigma'})^{m_{\sigma'}} (\Delta q_{\sigma'})^{n'_{\sigma'}} (\Delta p_{\sigma'})^{m'_{\sigma'}} \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f} \big[n_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma - 1} (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma} (\Delta q_\sigma)^{n'_\sigma} m'_\sigma (\Delta p_\sigma)^{m'_\sigma - 1} \\ &\quad - (\Delta q_\sigma)^{n_\sigma} m_\sigma (\Delta p_\sigma)^{m_\sigma - 1} n'_\sigma (\Delta q_\sigma)^{n'_\sigma - 1} (\Delta p_\sigma)^{m'_\sigma}\big] \\ &\quad \times \prod_{\sigma' \neq \sigma} (\Delta q_{\sigma'})^{n_{\sigma'} + n'_{\sigma'}} (\Delta p_{\sigma'})^{m_{\sigma'} + m'_{\sigma'}} \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f} \Big[\frac{\partial F^{(n,m)}}{\partial q_\sigma} \frac{\partial F^{(n',m')}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial F^{(n,m)}}{\partial p_\sigma} \frac{\partial F^{(n',m')}}{\partial q_\sigma}\Big]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

至此已可证明

命题四 力学量 F 与 G 在相空间中共同解析处的泊松括号可表示为(5.9).

证 设在相空间的点 $q_\sigma = a_\sigma$、$p_\sigma = b_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$处 F 与 G 均解析,

则它们在此点附近皆可作泰勒展开

$$F=\sum_{(n,m)}C_{(n,m)}F^{(n,m)},\quad G=\sum_{(n,m)}D_{(n,m)}F^{(n,m)}.$$

由(5.12)第三、四两式及(5.24)得

$$\begin{aligned}[F,G]&=\sum_{(n,m)(n',m')}C_{(n,m)}D_{(n',m')}[F^{(n,m)},F^{(n',m')}]\\&=\sum_{\sigma=1}^{f}\sum_{(n,m)(n',m')}C_{(n,m)}D_{(n',m')}\\&\quad\times\left[\frac{\partial F^{(n,m)}}{\partial q_\sigma}\frac{\partial F^{(n',m')}}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial F^{(n,m)}}{\partial p_\sigma}\frac{\partial F^{(n',m')}}{\partial q_\sigma}\right]\\&=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial p_\sigma}\frac{\partial G}{\partial q_\sigma}\right).\end{aligned}$$

这正是(5.9)式.证毕.

用基本泊松括号(5.15)和性质(5.12)、(5.13)可定义力学量在相空间解析点上的泊松括号,且这种定义与定义(5.9)是等价的,可以通用.当然,不是每个力学量在相空间的每一点上都解析.特别是哈密顿量,其中的势函数是多种多样的,常常有奇点,即非解析点.例如质点产生的万有引力势(1.81)在$r=0$处趋于无穷,因而是非解析的.不过质点系的代表点在实际运动中通常不经过这种奇点.它们在相空间中所到之处通常都是各力学量的解析点.在这种前提下,可将泊松括号的两种定义等价对待.这就增加了理论分析的灵活性.

设有$2f$个力学量$Q_\sigma,P_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$,按定义(5.9)算得的泊松括号为

$$[Q_\sigma,Q_{\sigma'}]=[P_\sigma,P_{\sigma'}]=0,\quad [Q_\sigma,P_{\sigma'}]=\delta_{\sigma\sigma'}.\tag{5.25}$$

(Q_σ,P_σ)自然是广义坐标和广义动量(q_σ,p_σ)的函数.也可将这种关系看作$2f$个变量(q_σ,p_σ)到$2f$个变量(Q_σ,P_σ)的一个变换.设这种变换是可逆的,即可将(q_σ,p_σ)看作变量(Q_σ,P_σ)的$2f$个函数.由于每个力学量都是(q_σ,p_σ)的函数,通过这种关系也就可表示成新变量(Q_σ,P_σ)的函数.将(5.25)当作基本泊松括号.用它代替(5.15),按前面的推理知,它和泊松括号的性质(5.12)、(5.13)一起导致

$$[F,G]=\sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial P_\sigma}-\frac{\partial F}{\partial P_\sigma}\frac{\partial G}{\partial Q_\sigma}\right).\tag{5.26}$$

特别地,以Q_σ和P_σ代入此式中的F,以哈密顿量H代入其中的G,由(5.10)得

$$\dot{Q}_\sigma=\frac{\partial Q_\sigma}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial P_\sigma},\quad \dot{P}_\sigma=\frac{\partial P_\sigma}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial Q_\sigma},\tag{5.27}$$

其中对时间t的偏微商是以将Q_σ和P_σ当作独立变量(q_σ,p_σ)和t的函数并

保持(q_σ, p_σ)不变为前提的.若变换$(q_\sigma, p_\sigma)\to(Q_\sigma, P_\sigma)$与时间无关,则

$$\frac{\partial Q_\sigma}{\partial t} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial t} = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.28}$$

上式变为

$$\dot{Q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial P_\sigma}, \quad \dot{P}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial Q_\sigma}. \tag{5.29}$$

此式具有哈密顿正则方程(5:3)的形式,只是用(Q_σ, P_σ)代替了(q_σ, p_σ).对与时间无关的变换$(q_\sigma, p_\sigma)\to(Q_\sigma, P_\sigma)$,固定$(q_\sigma, p_\sigma)$即固定$(Q_\sigma, P_\sigma)$,因而对任何力学量 F 都有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{Q_\sigma, P_\sigma} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{q_\sigma, p_\sigma} \tag{5.30}$$

可见力学量随时间变化的一般正则方程(5.10)在用(Q_σ, P_σ)代替(q_σ, p_σ)后依然成立.在运动学中和动力学中,新变量(Q_σ, P_σ)与旧变量(q_σ, p_σ)具有了完全等同的地位.在用它们代替旧变量后整个力学的正则形式不变.因此称任何一组有基本泊松括号(5.25)的 $2f$ 个变量 Q_σ、$P_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,f)$为正则变量.以与时间无关的变换互相联系的正则变量以同样的正则形式表达出整个力学,且其中的哈密顿量是一样的,Q_σ 仍称广义坐标,但在一般情况下,不一定只表达系统的位形,也可表达系统的运动;P_σ 仍称广义动量,但在一般情况下,不一定只表达系统的运动,也可表达系统的位形.Q_σ 与 P_σ 称为互相正则共轭的,P_σ 称为 Q_σ 的正则共轭动量,Q_σ 称为 P_σ 的正则共轭坐标.力学的正则形式表现了力学在更广泛的变换下具有不变的形式,因而显示了更广泛的对称性.这种保持力学形式不变的变换不仅包括坐标变换而且包括正则变量的变换,称正则变换.一般的正则变换还可与时间有关,将在§5.4作系统讨论.

现在回到力学量随时间变化的一般正则方程(5.10).如果一个力学量不随时间变化,就称它是守恒的,是守恒量或运动积分.(5.10)表明,力学量 F 守恒的条件为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0. \tag{5.31}$$

许多力学量作为正则变量的函数本身与时间无关,称为不显含时间.若 F 不显含时间,$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$,守恒条件就成为

$$[F, H] = 0, \tag{5.32}$$

即与哈密顿量的泊松括号为零.一个不显含时间的力学量常可选作一套新正则变量中的一个,且令新旧正则变量间由一与时间无关的变换联系.可见讨论正则变量的守恒条件具有普遍意义.由哈密顿正则方程(5.29)看到,若哈密顿

量 H 与某一广义坐标 Q_σ 无关，$\frac{\partial H}{\partial Q_\sigma}=0$，则 $\dot{P}_\sigma=0$，即与此广义坐标正则共轭的广义动量守恒．若哈密顿量与某一广义动量 P_σ 无关，$\frac{\partial H}{\partial P_\sigma}=0$，则 $\dot{Q}_\sigma=0$，即与此广义动量正则共轭的广义坐标守恒．总之，若哈密顿量与某正则变量无关，则与此量正则共轭的变量守恒．由哈密顿正则方程知，哈密顿量是控制系统动力学的量，它与某量无关表示不论此量取何值系统动力学性质都是一样的，因而表明了系统动力学的一种对称性．由此可知系统的守恒性质与它的对称性质相关．一种对称性对应一个守恒量，一个守恒量对应一种对称性．例如，若哈密顿量与系统在 x 方向的位置无关，即它有 x 方向平移的对称性，则 $\frac{\partial H}{\partial x}=0$，因而 $\dot{p}_x=0$，即 x 方向的动量守恒．又如，若哈密顿量与系统绕 z 轴的方位角 φ 无关，即它有绕 z 轴转动的对称性，则 $\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$，与 φ 正则共轭的动量即 z 方向的角动量 L_z 守恒，$\dot{L}_z=0$．抽象理论在这里再一次表现出定性的直观的结果．守恒与对称的另一有趣对应为，时间平移对称与能量守恒的关系．若系统有时间平移对称，则哈密顿量不显含时间，它对时间的全微商按(5.10)为

$$\dot{H}=[H,H]=0, \tag{5.33}$$

即它自身成为守恒量．参照(3.118)和(3.120)，称守恒的哈密顿量为能量，可见时间平移对称导致能量守恒．

寻找守恒量是求解运动方程的一种方法．每一个守恒量都是运动方程的一个积分，因此又称运动积分．守恒量的值即是积分常数．如能找到 $2f$ 个运动积分，$2f$ 个哈密顿正则方程即被完全积出．即使不能找到全部 $2f$ 个运动积分，也要尽可能多找运动积分，每找到一个运动积分都将运动方程的求解推进一步．泊松括号提供了一种寻找运动积分的方法．它的依据是

泊松定理 若 F_1 和 F_2 为两个守恒量，则它们的泊松括号 $[F_1,F_2]$ 也是一个守恒量．

证 F_1 和 F_2 守恒表明

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+[F_1,H]=\frac{\partial F_2}{\partial t}+[F_2,H]=0.$$

由此可算得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial[F_1,F_2]}{\partial t}+[[F_1,F_2],H]\\&=\left[\frac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right]+\left[F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}\right]+[F_1,[F_2,H]]+[F_2,[H,F_1]]\\&=\left[\frac{\partial F_1}{\partial t}+[F_1,H],F_2\right]+\left[F_1,\frac{\partial F_2}{\partial t}+[F_2,H]\right]=0.\end{aligned}$$

第一等号处用了乘积微商的莱布尼茨规则、(5.12)的第一式和雅可比恒等式(5.14),第二等号处再次用到(5.12)的第一式并用到其中的第三、四式,末一等号则由于任何量与零的泊松括号为零.此式表明$[F_1, F_2]$确实守恒.证毕.

一组守恒量的任意函数自然也是个守恒量,这种守恒量未包含新内容,对原来的那组守恒量而言不是独立的.在求解运动方程时要找的是彼此独立的守恒量.两个守恒量的泊松括号与这两个量不一定彼此独立.只当它们彼此独立时泊松定理提供的才是新守恒量.

§5.3 通用积分不变量 李华宗定理 经典力学的普遍性质

·哈密顿正则方程(5.3)的简明而对称的形式使人相信,经典力学有其自身的普遍性质.这种性质为所有遵从经典力学的系统所共有而与这些系统的特性无关.从数学上讲就是,这些性质由正则方程(5.3)决定,而与其中哈密顿量H的具体性质无关.存在通用积分不变量即是经典力学的普遍性质.

设t_0时刻系统的广义坐标和广义动量为$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$,对应相空间的一个点;$t_1$时刻系统的广义坐标和广义动量为$(q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1})$,对应相空间的另一点.这两点可由相空间的一条路径联接.每条路径按(5.5)对应作用量S的一个值.固定始末时刻t_0和t_1,变更路径,包括变更路径的始末点$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$和$(q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1})$,得作用量的变分(5.7).对于系统的实际运动路径,由于遵从哈密顿正则方程(5.3),(5.7)式末积分号下被积函数为零,从而有

$$\delta S = \sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 1}\delta q_{\sigma 1} - \sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\delta q_{\sigma 0}, \tag{5.34}$$

让始末时刻t_0和t_1也变更.t_1的变更δt_1使作用量(5.6)在积分上限处增加

$$\Big[\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 1}\dot{q}_{\sigma 1} - H((q_{\sigma 1}p_{\sigma 1}), t_1)\Big]\delta t_1 = \sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 1}\delta_t q_{\sigma 1} - H_1\delta t_1, \tag{5.35}$$

其中$\dot{q}_{\sigma 1}\equiv\dot{q}_\sigma(t_1), \delta_t q_{\sigma 1}\equiv\dot{q}_{\sigma 1}\delta t_1$是时间变分$\delta t_1$引起的坐标$q_{\sigma 1}$的附加变分,$H_1\equiv H((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)$则为路径末端系统哈密顿量的值.$t_0$的变更$\delta t_0$使作用量(5.6)在积分下限处减少

$$\Big[\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\dot{q}_{\sigma 0} - H((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)\Big]\delta t_0 = \sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\delta_t q_{\sigma 0} - H_0\delta t_0, \tag{5.36}$$

其中$\dot{q}_{\sigma 0}\equiv\dot{q}_\sigma(t_0), \delta_t q_{\sigma 0}\equiv\dot{q}_{\sigma 0}\delta t_0$是时间变分$\delta t_0$引起的坐标$q_{\sigma 0}$的附加变分,$H_0\equiv H((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$则为路径始端系统哈密顿量的值.由(5.34)+(5.35)-(5.36)得作用量在相空间一条实际路径附近变分的一般表达式

$$\delta S = \Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 1}\delta q_{\sigma 1} - H_1\delta t_1\Big) - \Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\delta q_{\sigma 0} - H_0\delta t_0\Big), \tag{5.37}$$

其中的 $\delta q_{\sigma 1}$ 为(5.34)中的 $\delta q_{\sigma 1}$ 与(5.35)中的 $\delta_t q_{\sigma 1}$ 之和，$\delta q_{\sigma 0}$ 为(5.34)中的 $\delta q_{\sigma 0}$ 与(5.36)中的 $\delta_t q_{\sigma 0}$ 之和. 由于将时间包括进来，最好采用 $2f$ 维相空间与 1 维时间的直积空间. 这个 $2f+1$ 维空间称为增广相空间. 在这空间中任取一条闭合回路 c_0，从其上一点 $((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$ 可按哈密顿正则方程(5.3)引一条唯一的实际路径，表示以 t_0 时的状态 $(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$ 为初条件的系统的过去未来. 由 c_0 上各点引出的这些实际路径的集合组成一实际路径管(图 5-1). 回路 c_0 为这管的一个截口. 设 $q_{\sigma 0}(\alpha)$、$p_{\sigma 0}(\alpha)(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$ 和 $t_0(\alpha)$ 为 c_0 的一组参数方程，α 为参数. 管上的每条实际路径与 α 的一个值对应. 在管上另取一截口 c_1，其上一点必有唯一的一条管上的实际路径通过，因而对应 α 的一个值. 即 c_1 也有参数方程 $q_{\sigma 1}(\alpha)$、$p_{\sigma 1}(\alpha)(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$ 和 $t_1(\alpha)$. α 的一个值对应管上的一条实际路径，也对应这条路径与回路 c_0 和 c_1 的交点 $((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$ 和 $((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)$. 这条实际路径在这两个交点间的作用量 $S(\alpha)$ 自然也是参数 α 的函数. 设想(5.37)中的 $((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$ 和 $((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)$ 分别在闭合回路 c_0 和 c_1 上，它表示的就是 $S(\alpha)$ 沿管壁的变分. 将这个变分沿管壁积分一周. 由于积分的终了位置与起始位置相同，积分为零. 因此有

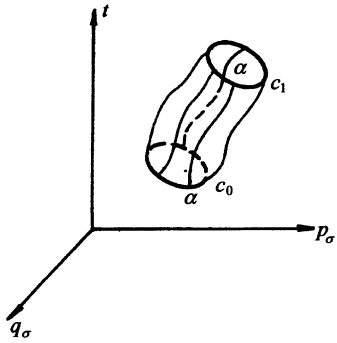

图 5-1　路径管

$$0 = \oint_{c_1}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 1}\delta q_{\sigma 1} - H_1\delta t_1\Big) - \oint_{c_0}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\delta q_{\sigma 0} - H_0\delta t_0\Big). \tag{5.38}$$

可见，沿一条实际路径管每一截口 c 积分

$$J_1 = \oint_{c}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma\delta q_\sigma - H\delta t\Big) \tag{5.39}$$

的值都是一样的. 如果用超平面 $t =$ 常数横截这条管，截口 c 上各点时间相同，这个积分简化为

$$J_1 = \oint_{c}\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma\delta q_\sigma. \tag{5.40}$$

不同的这种截口时间 t 不同，上述论断又可表示为积分(5.40)不随时间变化. 这种沿路径管不变的积分称为积分不变量. 又由于这种不变性直接来源于经

典力学的普遍原理而与力学系统的具体性质无关，这些积分不变量被称为通用积分不变量.(5.40)为庞加莱(Poincaré)线性相对积分不变量.线性是指它是线积分，即一维积分.相对则指它只对闭合回路上的积分才是不变的.(5.39)是(5.40)的推广，称为庞加莱-嘉当(Cartan)积分不变量.

暂时回到$2f$维相空间.一般地考虑其中一条闭合回路上的线积分

$$J = \oint \sum_{\sigma=1}^{f} (A_\sigma \delta q_\sigma + B_\sigma \delta p_\sigma), \tag{5.41}$$

A_σ、B_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)为相空间点的函数.将向量分析中的斯托克斯(Stokes)定理推广到$2f$维空间并用于积分(5.41)得

$$J = \iint_s \sum_{\sigma<\sigma'=1}^{f} \left[\left(\frac{\partial A_{\sigma'}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial q_{\sigma'}} \right) \delta q_\sigma \delta q_{\sigma'} + \left(\frac{\partial B_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial B_\sigma}{\partial p_{\sigma'}} \right) \delta p_\sigma \delta p_{\sigma'} \right]$$

$$+ \iint_s \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} \left(\frac{\partial A_{\sigma'}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial B_\sigma}{\partial q_{\sigma'}} \right) \delta p_\sigma \delta q_{\sigma'}. \tag{5.42}$$

积分区域s为闭合回路所包围，对求和指标的限制使每对正则变量只在其中贡献一项.在将(5.42)与(5.41)等同时，还要注意(5.41)中线积分的走向，它应是从p_σ轴正向走向$q_{\sigma'}$的正向，而对$\sigma<\sigma'$的情形从q_σ轴正向走向$q_{\sigma'}$正向，从p_σ轴正向走向$p_{\sigma'}$的正向.将(5.42)用于(5.40)得

$$J_2 = \iint_s \sum_{\sigma=1}^{f} \delta p_\sigma \delta q_\sigma = J_1. \tag{5.43}$$

它表明这个二重积分沿实际路径管也是不变的，而且它的值与庞加莱线性相对积分不变量相等.J_2称为庞加莱二维绝对积分不变量.这里“绝对”是指s不必是一闭合子空间.而在s为闭合子空间的场合，积分(5.43)为零，J_2成为一平庸的积分不变量.

总共有$2f$个庞加莱通用积分不变量，J_1和J_2是其中最简单的.由于以下只用到这两个积分不变量，而其他积分不变量的形式与不变性的证明都与J_1和J_2相似，只是越来越繁复，因而不再赘述.

为了进一步深入探讨，最好采用更简练的符号和表达方式.用ξ^μ($\mu = 1, 2, \cdots, 2f$)表示相空间一点的$2f$个坐标：

$$\xi^\mu = \begin{cases} q_\mu, & \text{若 } \mu \leqslant f, \\ p_{\mu-f}, & \text{若 } \mu > f. \end{cases} \tag{5.44}$$

定义$H_\mu \equiv \dfrac{\partial H}{\partial \xi^\mu}$，

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \nu = \mu + f, \\ -1, & \text{若 } \mu = \nu + f, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{5.45}$$

在采用这套符号时恒采用爱因斯坦求和约定.哈密顿正则方程(5.3)可统一表示为

$$\dot{\xi}^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} H_{\nu}. \tag{5.46}$$

设想一 $2f$ 维矢量,其第 μ 分量为 $\mathrm{d}\xi^{\mu}$,其余分量为零;再设想另一矢量,其第 ν 分量为 $\mathrm{d}\xi^{\nu}$,其余分量为零.由此二矢量组成的反对称张量记为 $\mathrm{d}\xi^{\mu} \wedge \mathrm{d}\xi^{\nu}$,它表示微分 $\mathrm{d}\xi^{\mu}$ 和 $\mathrm{d}\xi^{\nu}$ 组成的面积.斯托克斯定理(5.42)藉此可简练地表示为

$$\oint_{c} A_{\mu} \mathrm{d}\xi^{\mu} = \iint_{S} F_{\mu\nu} \mathrm{d}\xi^{\mu} \wedge \mathrm{d}\xi^{\nu}, \tag{5.47}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial \xi^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \xi^{\nu}}. \tag{5.48}$$

下面介绍一条重要定理,即

李华宗[①]定理 除一常数因子外,庞加莱通用积分不变量就是全部通用积分不变量.

这条定理断言,一个 d 维通用积分不变量恒可表为 d 维庞加莱通用积分不变量与一常数的积.下面就线性相对积分不变量和二维绝对积分不变量证明这一论断.即证明任何线性相对通用积分不变量恒可表示为(5.40)中的 J_1 与一常数的积,而任何二维绝对通用积分不变量恒可表示为(5.43)中的 J_2 与一常数的积.

证 斯托克斯定理(5.47)表明,线性相对积分不变量总与一个二维绝对积分不变量相等.因此,若证得二维绝对通用积分不变量总可表示为庞加莱二维绝对通用积分不变量 J_2 与一常数之积,也就可由(5.43)断定,与它相等的那个线性相对通用积分不变量可表示为庞加莱线性相对通用积分不变量 J_1 与一常数的积.即只须就二维绝对通用积分不变量证明上述论断.

设

$$J = \iint_{S} G_{\mu\nu} \delta\xi^{\mu} \wedge \delta\xi^{\nu} \tag{5.49}$$

为一二维绝对通用积分不变量.由正则方程(5.46)变分得

$$\delta\dot{\xi}^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} H_{\nu\lambda} \delta\xi^{\lambda}, \tag{5.50}$$

其中 $H_{\nu\lambda} \equiv \dfrac{\partial^2 H}{\partial \xi^{\nu} \partial \xi^{\lambda}}$.利用此式计算这个积分不变量对时间的全微商,得

$$\dot{J} = \iint_{S} \left[\dot{G}_{\mu\nu} \delta\xi^{\mu} \wedge \delta\xi^{\mu} + G_{\mu\nu} (\delta\dot{\xi}^{\mu} \wedge \delta\xi^{\nu} + \delta\xi^{\mu} \wedge \delta\dot{\xi}^{\nu}) \right]$$

---

① H.-C. Lee, *Proc. Roy. Soc.* (Edin.)Ser. A,62(1947)237.

$$= \iint_S [\dot{G}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\lambda\rho}(G_{\lambda\nu}H_{\rho\mu} + G_{\mu\lambda}H_{\rho\nu})]\delta\xi^{\mu} \wedge \delta\xi^{\nu}. \tag{5.51}$$

J 既然是积分不变量，这个微商自应对任何积分区域都是零，从而被积函数为零.即

$$\dot{G}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\lambda\rho}(G_{\lambda\nu}H_{\rho\mu} + G_{\mu\lambda}H_{\rho\nu}) = 0. \tag{5.52}$$

将第一项全微商做出来得

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} + \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda\rho}H_{\rho} + \varepsilon^{\lambda\rho}(G_{\lambda\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} + G_{\mu\lambda}\delta^{\sigma}_{\nu})H_{\rho\sigma} = 0. \tag{5.53}$$

J 既然是通用积分不变量，此式就应对任何哈密顿量都成立.先令 $H_{\rho\sigma}=0$，由 H_{ρ} 的任意性得

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda\rho} = 0. \tag{5.54}$$

定义

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mu = \nu + f, \\ -1, & \text{若 } \nu = \mu + f, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{5.55}$$

显然有

$$\varepsilon_{\mu\rho}\varepsilon^{\rho\nu} = \varepsilon^{\mu\rho}\varepsilon_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu}. \tag{5.56}$$

以 $\varepsilon_{\rho\sigma}$ 乘(5.54)第二式的两端并对 ρ 求和，由(5.56)得

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \xi^{\sigma}} = 0. \tag{5.57}$$

此式与(5.54)第一式一起表明，$G_{\mu\nu}$ 与时间 t 及相空间坐标 ξ^{μ} ($\mu = 1, 2, \cdots, 2f$)都无关，是一常数.由于(5.54)，(5.53)成为

$$\varepsilon^{\lambda\rho}(G_{\lambda\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} + G_{\mu\lambda}\delta^{\sigma}_{\nu})H_{\rho\sigma} = 0, \tag{5.58}$$

$H_{\rho\sigma}$ 对下标 ρ 和 σ 是对称的，即 $H_{\rho\sigma} = H_{\sigma\rho}$.除此之外，$H_{\rho\sigma}$ 是完全任意的.由这种任意性，从(5.58)推知

$$\varepsilon^{\lambda\rho}(G_{\lambda\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} + G_{\mu\lambda}\delta^{\sigma}_{\nu}) + \varepsilon^{\lambda\sigma}(G_{\lambda\nu}\delta^{\rho}_{\mu} + G_{\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\nu}) = 0. \tag{5.59}$$

在 J 的表达式(5.49)中，积分元 $\delta\xi^{\mu} \wedge \delta\xi^{\nu}$ 对上标 μ 和 ν 是反对称的，这使得 $G_{\mu\nu}$ 中只有对 μ 和 ν 反对称的部分对 J 有贡献，因而恒可设 $G_{\mu\nu}$ 对下标 μ 和 ν 反对称.在(5.59)中令 $\sigma = \nu$ 并对 ν 求和，利用 $G_{\mu\nu}$ 的反对称性得

$$2f\varepsilon^{\lambda\rho}G_{\mu\lambda} + G\delta^{\rho}_{\mu} = 0, \tag{5.60}$$

其中

$$G = \varepsilon^{\lambda\nu}G_{\lambda\nu}. \tag{5.61}$$

用 $\varepsilon_{\rho\nu}$ 乘(5.60)两边并对 ρ 求和得

$$G_{\mu\nu} = -\frac{G}{2f}\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{5.62}$$

代入(5.49)并恢复原来的符号即得

$$J = -\frac{G}{2f}\iint_s \varepsilon_{\mu\nu}\delta\xi^\mu \wedge \delta\xi^\nu$$

$$= -\frac{G}{2f}\iint_s \sum_{\sigma=1}^{f}\delta p_\sigma \delta q_\sigma. \tag{5.63}$$

它正是常数$-\frac{G}{2f}$乘J_2.证毕.

§5.4 正则变换 拉格朗日括号与泊松括号 哈密顿主函数与哈密顿-雅可比方程

再回头深入探讨正则变换.为此重新定义正则变量.$2f$个独立变量Q_σ、$P_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$若能完全描述运动状态且随时间演化的方程具哈密顿正则方程的形式:

$$\dot{Q}_\sigma = \frac{\partial K}{\partial P_\sigma}, \quad \dot{P}_\sigma = -\frac{\partial K}{\partial Q_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.64}$$

则称为一组正则变量.此处的哈密顿量K不必与(5.3)中的H相等.广义坐标q_σ和广义动量$p_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$满足哈密顿正则方程(5.3),自然是一组正则变量.下面将证明,这一定义与§5.2用基本泊松括号对正则变量的定义是一致的.正则变换仍定义为正则变量之间的变换,这种变换一般可与时间有关.

考虑正则变量q_σ、$p_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$与正则变量$Q_\sigma$、$P_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$之间的变换,它们分别满足哈密顿正则方程(5.3)和(5.64).由于它们都可完全描述运动状态,因而可相互表达:

$$\left.\begin{aligned} Q_\sigma &= Q_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f,t),\\ P_\sigma &= P_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f,t), \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \end{aligned}\right\} \tag{5.65}$$

$$\left.\begin{aligned} q_\sigma &= q_\sigma(Q_1,Q_2,\cdots,Q_f,P_1,P_2,\cdots,P_f,t),\\ p_\sigma &= p_\sigma(Q_1,Q_2,\cdots,Q_f,P_1,P_2,\cdots,P_f,t), \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

这就是它们之间的变换关系,是可逆的.在$2f+1$维增广相空间中任取一条闭合回路c.对正则变量(q_σ, p_σ)有庞加莱-嘉当积分不变量(5.39).对正则变量(Q_σ, P_σ)自然也有庞加莱-嘉当积分不变量

$$I_1 = \oint_c \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \delta Q_\sigma - K\delta t\right) \tag{5.67}$$

过 c 上每一点的实际路径组成实际路径管，取此管在 t_0 时刻的等时截口 c_0. 在此截口上(5.39)定义的庞加莱-嘉当积分不变量等于庞加莱线性相对通用积分不变量

$$J_1 = \oint_{c_0} \sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \delta q_\sigma ; \tag{5.68}$$

而对正则变量(Q_σ, P_σ)则有

$$I_1 = \oint_{c_0} \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \delta Q_\sigma . \tag{5.69}$$

这也是一个通用积分不变量，且可用变换(5.65)表示成正则变量(q_σ, p_σ)的一个线积分

$$I_1 = \oint_{c_0} \sum_{\sigma=1}^{f} (A_\sigma \delta q_\sigma + B_\sigma \delta p_\sigma). \tag{5.70}$$

即 I_1 也是一个线性相对通用积分个变量. 按李华宗定理必有

$$I_1 = \lambda J_1, \tag{5.71}$$

λ 为一常数. 它表明，对任意闭合回路 c，

$$\oint_c \left[\lambda\left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\right)\right] = 0, \tag{5.72}$$

式中积分元的符号已从 δ 改成了 d，以表明积分回路 c 是任意的，不再具围绕实际路径管的含义，积分元也不再具相对实际路径变分的含义. 此式表明，从始点$((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$到终点$((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)$的积分

$$W = \int_{((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)}^{((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)} \left[\lambda\left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\right)\right] \tag{5.73}$$

只与这两个端点有关而与在它们间取的路径无关. 固定始点，W 为积分终点的函数. 将终点重新记为$((q_\sigma, p_\sigma), t)$，(5.73)右边积分号下的表达式为函数 $W(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$的全微分：

$$\mathrm{d}W = \lambda\left(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t\right) - \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\right). \tag{5.74}$$

W 称为这个正则变换的母函数. 以上证明的即任何正则变换皆有一母函数. 另一方面，若有一母函数 $W(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$使(5.74)成立，从而使积分(5.73)与路径无关，则这个积分在始末两端$((q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}), t_0)$和$((q_{\sigma 1}, p_{\sigma 1}), t_1)$固定条件下的变分必为零：$\delta W = 0$. 这使得在同样条件下

$$\delta \int_{((Q_{\sigma 0}, P_{\sigma 0}), t_0)}^{((Q_{\sigma 1}, P_{\sigma 1}), t_1)} \left(\sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\right)$$

$$= \lambda\delta\int_{((q_{\sigma 0},p_{\sigma 0}),t_0)}^{((q_{\sigma 1},p_{\sigma 1}),t_1)}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t\Big), \tag{5.75}$$

其中$(Q_{\sigma 0},P_{\sigma 0})$和$(Q_{\sigma 1},P_{\sigma 1})$分别为 t_0 和 t_1 时刻由$(q_{\sigma 0},p_{\sigma 0})$和$(q_{\sigma 1},p_{\sigma 1})$按(5.65)变换而来.设$(q_\sigma,p_\sigma)$为一组正则变量,满足以 H 为哈密顿量的正则方程(5.3),则按正则形式的哈密顿原理,(5.75)右边的变分在实际路径处为零.由此推知,在实际路径处必有

$$\delta\int_{((Q_{\sigma 0},P_{\sigma 0}),t_0)}^{((Q_{\sigma 1},P_{\sigma 1}),t_1)}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\Big) = 0. \tag{5.76}$$

按同一个哈密顿原理,此式表明,(Q_σ,P_σ)满足以 K 为哈密顿量的正则方程(5.64),是一组正则变量.它们与(q_σ,p_σ)间的变换(5.65)是正则变换.这就证明了一个母函数可按(5.74)产生一正则变换.细心的读者可能注意到,哈密顿原理中的变分是在固定始、末时刻 t_0、t_1 和始、末广义坐标$(q_{\sigma 0})$、$(q_{\sigma 1})$条件下进行的,并不要求固定始、末广义动量$(p_{\sigma 0})$、$(p_{\sigma 1})$;而(5.75)中的变分则固定了始末广义动量,从而加强了变分的条件.不过这种加强不改变(5.7)~(5.8)的推导,因此不改变正则方程与作用量变分为零的等价.这使上述论证成立.

(5.71)~(5.74)中的常数 λ 称为正则变换的价.上章已知,在拉氏量上可随意乘一常数而不改理论的内含.由(5.1)和(5.2)知,这会在广义动量 p_σ $(\sigma=1,2,\cdots,f)$和哈密顿量 H 上乘以相同的常数,因而是一种标度变换.它自然也不改理论的内含却会改变正则变换的价 λ.可见正则变换的价可由标度变换简单地改变.只须研究一种价的正则变换,其他价的正则变换性质可由标度变换得知.以下只讨论一价正则变换.这种变换又称切触变换.取 $\lambda=1$,(5.74)成为

$$\mathrm{d}W = \sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t - \Big(\sum_{\sigma=1}^{f}P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma - K\mathrm{d}t\Big), \tag{5.77}$$

下面分四种情形讨论.

情形一 设 $q_\sigma, Q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$为一组独立变量,其他变量 $p_\sigma, P_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$可由它们表出.于是母函数可表示为

$$W = W_1(q_1,q_2,\cdots,q_f,Q_1,Q_2,\cdots,Q_f,t). \tag{5.78}$$

它的全微分为

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 = \sum_{\sigma=1}^{f}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial q_\sigma}\mathrm{d}q_\sigma + \frac{\partial W_1}{\partial Q_\sigma}\mathrm{d}Q_\sigma\Big) + \frac{\partial W_1}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{5.79}$$

与(5.77)比较知

$$p_\sigma = \frac{\partial W_1}{\partial q_\sigma}, \quad P_\sigma = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.80}$$

$$K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}. \tag{5.81}$$

由(5.80)的第一式可反解出 $Q_\sigma, \sigma = 1, 2, \cdots, f$，将它们表示成 q_σ、p_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)的函数.将这些 Q_σ 的表达式代入(5.80)的第二式即可将 P_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)表示成(q_σ, p_σ)的函数.这就得到了正则变换(5.65)的具体表达式.也可先由(5.80)第二式反解出 $q_\sigma, \sigma = 1, 2, \cdots, f$，将它们表示成 Q_σ、P_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)的函数.将这些 q_σ 的表达式代入(5.80)第一式，即可将 p_σ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)表示成(Q_σ, P_σ)的函数.这就得到了逆正则变换(5.66).将它们代入(5.81)消去(q_σ, p_σ)，即可得新哈密顿量 K 与新正则变量(Q_σ, P_σ)和 t 的关系.

情形二 设(q_σ, P_σ)为一组独立变量，其他变量(p_σ, Q_σ)可由它们表出.将母函数表示为

$$W = W_2(q_1, q_2, \cdots, q_f, P_1, P_2, \cdots, P_f, t) - \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma Q_\sigma. \tag{5.82}$$

它的全微分为

$$\mathrm{d}W = \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{\partial W_2}{\partial q_\sigma}\mathrm{d}q_\sigma + \left(\frac{\partial W_2}{\partial P_\sigma} - Q_\sigma\right)\mathrm{d}P_\sigma - P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma\right] + \frac{\partial W_2}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{5.83}$$

与(5.77)比较知

$$p_\sigma = \frac{\partial W_2}{\partial q_\sigma}, \quad Q_\sigma = \frac{\partial W_2}{\partial P_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.84}$$

$$K = H + \frac{\partial W_2}{\partial t}. \tag{5.85}$$

类似地，由(5.84)第一式解出 P_σ 与(q_σ, p_σ)的关系，代入其第二式得 Q_σ 与(q_σ, p_σ)的关系，从而得正则变换(5.65).由(5.84)第二式解出 q_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系代入其第一式得 p_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系，从而得逆变换(5.66).将它们代入(5.85)即得新哈密顿量 K 与新正则变量(Q_σ, P_σ)和时间 t 的关系.

情形三 设(p_σ, Q_σ)为一组独立变量，其他变量(q_σ, P_σ)可由它们表出.将母函数表示为

$$W = W_3(p_1, p_2, \cdots, p_f, Q_1, Q_2, \cdots, Q_f, t) + \sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma q_\sigma. \tag{5.86}$$

它的全微分为

$$\mathrm{d}W = \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\left(\frac{\partial W_3}{\partial p_\sigma} + q_\sigma\right)\mathrm{d}p_\sigma + \frac{\partial W_3}{\partial Q_\sigma}\mathrm{d}Q_\sigma + p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma\right] + \frac{\partial W_3}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{5.87}$$

与(5.77)比较知

$$q_\sigma = -\frac{\partial W_3}{\partial p_\sigma}, \quad P_\sigma = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.88}$$

$$K = H + \frac{\partial W_3}{\partial t}. \tag{5.89}$$

由(5.88)第一式解出 Q_σ 与(q_σ, p_σ)的关系后代入其第二式得 P_σ 与(q_σ, p_σ)的关系,便得正则变换(5.65).由(5.88)第二式解出 p_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系后代入其第一式得 q_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系,便得逆变换(5.66).再将得到的逆变换(5.66)代入(5.89),便将新哈密顿量 K 表示成了新正则变量(Q_σ, P_σ)和时间 t 的函数.

情形四 设(p_σ, P_σ)为一组独立变量,其他变量(q_σ, Q_σ)可由它们表出.将母函数表示为

$$W = W_4(p_1, p_2, \cdots, p_f, P_1, P_2, \cdots, P_f, t) + \sum_{\sigma=1}^{f}(p_\sigma q_\sigma - P_\sigma Q_\sigma). \tag{5.90}$$

它的全微分为

$$\mathrm{d}W = \sum_{\sigma=1}^{f}\left[\left(\frac{\partial W_4}{\partial p_\sigma} + q_\sigma\right)\mathrm{d}p_\sigma + \left(\frac{\partial W_4}{\partial P_\sigma} - Q_\sigma\right)\mathrm{d}P_\sigma + p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - P_\sigma \mathrm{d}Q_\sigma\right] + \frac{\partial W_4}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{5.91}$$

与(5.77)比较知

$$q_\sigma = -\frac{\partial W_4}{\partial p_\sigma}, \quad Q_\sigma = \frac{\partial W_4}{\partial P_\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{5.92}$$

$$K = H + \frac{\partial W_4}{\partial t}. \tag{5.93}$$

由(5.92)第一式解出 P_σ 与(q_σ, p_σ)的关系后代入其第二式得 Q_σ 与(q_σ, p_σ)的关系,从而得正则变换(5.65).由(5.92)第二式解出 p_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系后代入其第一式得 q_σ 与(Q_σ, P_σ)的关系,即得其逆变换(5.66).再将(5.66)代入(5.93)便得新哈密顿量 K 与新正则变量(Q_σ, P_σ)和时间 t 的关系.

适当选取母函数 W_1、W_2、W_3 或 W_4,可设计出各种各样的正则变换,从而提供了简化力学问题求解的可能性.在此基础上发展起来的哈密顿-雅可比方程已成为经典力学的重要内容.这一理论的基本思想是要设计一种正则变换,使变换后的哈密顿量 $K = 0$.这使得新正则变量(Q_σ, P_σ)按正则方程(5.64)皆不随时间变化.系统的状态和力学量自然依旧随时间变化,这种理论只是将这些变化转移到了变换之中.

将情形二中的母函数 W_2 改记为 S,并称之为哈密顿主函数.它是广义坐

标 $q_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$和时间 t 的函数.变换后的广义动量 $P_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$ 因不随时间变化,只是作为参数出现在其中.由(5.84)第一式知

$$p_e=\frac{\partial S}{\partial q_\sigma},\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{5.94}$$

将变换前的哈密顿量记为 $H(q_1,q_2,\cdots,q_f,p_1,p_2,\cdots,p_f,t)$,为使变换后的哈密顿量 $K=0$,哈密顿主函数应满足方程

$$H\left(q_1,q_2,\cdots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_f},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{5.95}$$

这就是哈密顿-雅可比方程.它与前面关于(P_σ)不随时间变化的假定自洽.这是未知函数 S 的一阶 $f+1$ 维偏微分方程,它的含 $f+1$ 个积分常数 $\alpha_i,i=1,2,\cdots,f+1$,的解 $S(q_1,q_2,\cdots,q_f,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{f+1},t)$称为完全解.由于哈密顿-雅可比方程(5.95)只含 S 的微商而不含 S 本身,$f+1$ 个积分常数中有一个是相加常数.即如 $S(q_1,q_2,\cdots,q_f,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,t)$是(5.95)的一个解,$S(q_1,q_2,\cdots,q_f,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,t)+\alpha_{f+1}$也是它的解.由于正则变换中正则变量恒表示成母函数的微商而与母函数本身无关,相加常数 α_{f+1}无贡献,可以置零.剩下的是含 f 个非相加积分常数的解 $S(q_1,q_2,\cdots,q_f,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,t)$,它属于完全解.将这 f 个积分常数解释为正则变换后 f 个新广义动量的值:$P_\sigma=\alpha_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$.它们因 $K=0$ 而不随时间变化.可按(5.84)第二式计算变换后的广义坐标 Q_σ,它们也因 $K=0$ 而不随时间变化.用 $\beta_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$,记它们的值.即 $Q_\sigma=\beta_\sigma$.于是由(5.84)第二式得

$$\beta_\sigma=\frac{\partial S}{\partial \alpha_\sigma},\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{5.96}$$

由这 f 个方程可解出原来问题中的 f 个广义坐标 $q_\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_f,t),\sigma=1,2,\cdots,f$.将它们代入(5.94)右边,消去$(q_\sigma)$后可得原来问题中的 f 个广义动量 $p_\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_f,t),\sigma=1,2,\cdots,f$.可见若解出了哈密顿主函数 S,也就解出了广义坐标和广义动量.其中 $2f$ 个积分常数 α_σ、β_σ $(\sigma=1,2,\cdots,f)$可由 $2f$ 个正则变量 q_σ、$p_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$的初值或边值确定.求解哈密顿正则方程被求解哈密顿-雅可比方程代替.另一方面,由(5.94)和(5.95)可得 S 对时间的全微商

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial S}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma+\frac{\partial S}{\partial t}=\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma\dot{q}_\sigma-H. \tag{5.97}$$

将它从一始点$(q_{\sigma 0}),t_0$ 积到$(q_\sigma),t$,得

$$S=\int_{(q_{\sigma 0}),t_0}^{(q_\sigma),t}\left(\sum_{\sigma=1}^{f}p_\sigma \mathrm{d}q'_\sigma-H\mathrm{d}t'\right). \tag{5.98}$$

将积分变量写作$(q'_\sigma),t'$是为了与积分上限$(q_\sigma),t$ 相区别.积分沿实际路径,

即符合正则方程(5.3)的路径进行.与(5.37)相同的推导可得如此确定的函数 S 对始末点微分的表达式

$$\mathrm{d}S = \Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma - H\mathrm{d}t\Big) - \Big(\sum_{\sigma=1}^{f} p_{\sigma 0}\mathrm{d}q_{\sigma 0} - H_0\mathrm{d}t_0\Big), \tag{5.99}$$

其中(p_σ)与 H 为广义动量和哈密顿量在积分上限(q_σ), t 处的值,而$(p_{\sigma 0})$与 H_0 则为它们在积分下限$(q_{\sigma 0})$, t_0 处的值.此式表明$\dfrac{\partial S}{\partial q_\sigma} = p_\sigma$, $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -H$,即(5.98)表达的 S 确是满足(5.94)和(5.95)的哈密顿主函数.可见,解出哈密顿正则方程后即可按此得到哈密顿-雅可比方程的解.总之,哈密顿-雅可比方程与哈密顿正则方程等价.它们分别都是经典力学的完备的表达形式.

在(5.98)中固定 t_0,便定义了一个(q_σ),$(q_{\sigma 0})$和 t 的函数$S(q_1, q_2, \cdots, q_f, q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{f0}, t)$.将它当作情形一中的正则变换母函数 W_1,便定义了一个正则变换$(q_\sigma, p_\sigma) \Longrightarrow (q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$,其中

$$p_\sigma = \frac{\partial S}{\partial q_\sigma}, \quad p_{\sigma 0} = -\frac{\partial S}{\partial q_{\sigma 0}}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.100}$$

与(5.80)相符.哈密顿-雅可比方程(5.96)使变换后的哈密顿量 $K=0$,导致正则变量$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$不随时间改变.这个正则变换将$(q_\sigma, p_\sigma)$变为它们的初值,无非表示初值$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$不仅描述了 t_0 时刻的状态,而且按正则方程(5.3)决定了系统的过去未来,从而可描述任何其他时刻 t 的状态.它的逆变换$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0}) \to (q_\sigma, p_\sigma)$则表明,系统的实际运动可看成随时间不断进行的正则变换.

将 W 看作正则变量(q_σ, p_σ)和时间 t 的函数,(5.77)可写为

$$\mathrm{d}W = \sum_{\sigma=1}^{f}(A_\sigma \mathrm{d}q_\sigma + B_\sigma \mathrm{d}p_\sigma) - \left(H + \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \frac{\partial Q_\sigma}{\partial t} - K\right)\mathrm{d}t, \tag{5.101}$$

$$A_\sigma = p_\sigma - \sum_{\sigma'=1}^{f} P_{\sigma'} \frac{\partial Q_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}, \quad B_\sigma = -\sum_{\sigma'=1}^{f} P_{\sigma'} \frac{\partial Q_{\sigma'}}{\partial p_\sigma}. \tag{5.102}$$

(5.101)右边为全微分的条件包括

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial q_{\sigma'}} = \frac{\partial A_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}, \quad \frac{\partial A_\sigma}{\partial p_{\sigma'}} = \frac{\partial B_{\sigma'}}{\partial q_\sigma}, \quad \frac{\partial B_\sigma}{\partial p_{\sigma'}} = \frac{\partial B_{\sigma'}}{\partial p_\sigma}. \tag{5.103}$$

将(5.102)代入其中,这些条件成为

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_\sigma}\frac{\partial P_\rho}{\partial q_{\sigma'}} = \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_{\sigma'}}\frac{\partial P_\rho}{\partial q_\sigma},\\
&\sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_\sigma}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_{\sigma'}} - \delta_{\sigma\sigma'} = \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_{\sigma'}}\frac{\partial P_\rho}{\partial q_\sigma},\\
&\sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_\sigma}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_{\sigma'}} = \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_{\sigma'}}\frac{\partial P_\rho}{\partial p_\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.104}$$

这是(5.101)能成立的必要条件.其实也是充分条件.因为它保证(5.101)在 $dt=0$ 的条件下成立,而只要取

$$K = H + \sum_{\sigma=1}^{f} P_\sigma \frac{\partial Q_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{5.105}$$

就保证了(5.101)在 $dt\neq 0$ 的条件下也成立.可见(5.104)是变换$(q_\sigma, p_\sigma)\Longrightarrow (Q_\sigma, P_\sigma)$存在一个母函数 W 的充分必要条件,亦即这个变换是正则变换的充分必要条件.设 u 和 v 是 $2f$ 个独立变量中的两个,定义

$$[u, v]_L \equiv \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\frac{\partial q_\sigma}{\partial u} \frac{\partial p_\sigma}{\partial v} - \frac{\partial q_\sigma}{\partial v} \frac{\partial p_\sigma}{\partial u} \right) \tag{5.106}$$

为它们的拉格朗日括号,正则变量(q_σ, p_σ)间的拉格朗日括号显然有简单性质

$$[q_\sigma, q_{\sigma'}]_L = [p_\sigma, p_{\sigma'}]_L = 0, \quad [q_\sigma, p_{\sigma'}]_L = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{5.107}$$

用(Q_σ, P_σ)代替(q_σ, p_σ)可定义新变量系统中的拉格朗日括号

$$[u, v]_L^{(Q_\sigma, P_\sigma)} \equiv \sum_{\sigma=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_\sigma}{\partial u} \frac{\partial P_\sigma}{\partial v} - \frac{\partial Q_\sigma}{\partial v} \frac{\partial P_\sigma}{\partial u} \right). \tag{5.108}$$

变换$(q_\sigma, p_\sigma)\Longrightarrow(Q_\sigma, P_\sigma)$为正则变换的充分必要条件(5.104),可表示为

$$[q_\sigma, q_{\sigma'}]_L^{(Q_\sigma, P_\sigma)} = [p_\sigma, p_{\sigma'}]_L^{(Q_\sigma, P_\sigma)} = 0, \quad [q_\sigma, p_{\sigma'}]_L^{(Q_\sigma, P_\sigma)} = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{5.109}$$

即原来正则变量的拉格朗日括号在这变换中不变.(5.77)中(q_σ, p_σ)与(Q_σ, P_σ)地位完全对等,变换(5.65)有母函数,从而是正则变换的充分必要条件,也可反过来表示为

$$[Q_\sigma, Q_{\sigma'}]_L = [P_\sigma, P_{\sigma'}]_L = 0, \quad [Q_\sigma, P_{\sigma'}]_L = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{5.110}$$

即新变量(Q_σ, P_σ)的拉格朗日括号具有与基本拉格朗日括号(5.107)相同的性质.

重新采用(5.44)定义的符号 ξ^μ,并类似地定义 Ξ^μ, $\mu=1,2,\cdots,2f$

$$\Xi^\mu = \begin{cases} Q_\mu, & \text{若 } \mu \leqslant f, \\ P_{\mu-f}, & \text{若 } \mu > f. \end{cases} \tag{5.111}$$

再定义

$$\xi^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \Xi^\nu}, \quad \Xi^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \Xi^\mu}{\partial \xi^\nu}. \tag{5.112}$$

采用爱因斯坦求和约定与定义(5.55),可将变换(5.65)为正则变换的充分必要条件(5.104)或(5.109)紧凑地表示为

$$\Xi^\mu{}_\nu \varepsilon_{\mu\rho} \Xi^\rho{}_\sigma = \varepsilon_{\nu\sigma}. \tag{5.113}$$

再采用(5.45)定义的符号,在此式两边乘 $\varepsilon^{\sigma\tau}\Xi^\lambda{}_\tau \xi^\nu{}_{\mu'}\varepsilon^{\kappa\mu'}$ 并按约定求和,利用(5.56)和

$$\Xi^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}{}_{\mu'} = \frac{\partial \Xi^{\mu}}{\partial \Xi^{\mu'}} = \delta^{\mu}_{\mu'}, \tag{5.114}$$

得

$$\Xi^{\kappa}{}_{\sigma}\varepsilon^{\sigma\tau}\Xi^{\lambda}{}_{\tau} = \varepsilon^{\kappa\lambda}. \tag{5.115}$$

按定义(5.44),(5.45),(5.111)和(5.112)将此式用原来的符号表示出来就是变量(Q_σ, P_σ)的基本泊松括号(5.25).因此正则变量(q_σ, p_σ)到变量(Q_σ, P_σ)的变换为正则变换的充分必要条件又可表示为"新变量(Q_σ, P_σ)具基本泊松括号(5.25)".这也就是新变量(Q_σ, P_σ)为正则变量的充分必要条件.本节用哈密顿正则方程对正则变量的定义与§5.2用基本泊松括号对正则变量的定义一致.用复合函数微分法和基本泊松括号(5.25),可按定义(5.9)计算任意二个力学量F和G的泊松括号

$$\begin{aligned}[F,G] &= \sum_{\sigma',\sigma=1}^{f}\left\{\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial Q_{\sigma'}}[Q_\sigma, Q_{\sigma'}] + \left(\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial P_{\sigma'}} - \frac{\partial F}{\partial P_{\sigma'}}\frac{\partial G}{\partial Q_\sigma}\right)[Q_\sigma, P_{\sigma'}]\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial P_\sigma}\frac{\partial G}{\partial P_{\sigma'}}[P_\sigma, P_{\sigma'}]\right\} \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_\sigma}\frac{\partial G}{\partial P_\sigma} - \frac{\partial F}{\partial P_\sigma}\frac{\partial G}{\partial Q_\sigma}\right)\end{aligned} \tag{5.116}$$

可见任意两个力学量采用任一套正则变量按同样表达式(5.9)或(5.116)算出的泊松括号相同.泊松括号在正则变换中不变.

§5.5 作用量-角变量

作用量-角变量是一套很有用的正则变量.其中角变量相当于广义坐标,作用量相当于广义动量.它适用于可分离变量的多周期保守系统.多周期指各自由度分别作周期运动.在各自由度周期运动频率不可通约的情形中整个系统的运动并不是周期的,即在任何有限时间内整个系统不会回到初始状态.考虑对正则变量(q_σ, p_σ)的一个正则变换,其母函数$W(q_1, q_2, \cdots, q_f, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f)$不显含时间且符合方程

$$H\left(q_1, q_2, \cdots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = \alpha_1. \tag{5.117}$$

这自然只对保守系,即哈密顿量H不显含时间的系统才可能.将$\alpha_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$解释成变换后的广义动量,$W$即为上节情形2中正则变换的母函数$W_2$.由于不显含$t$,它生成的正则变换后的哈密顿量$K$与变换前的$H$相等,而按(5.118)即为常数$\alpha_1$.这个哈密顿量与变换后的全部广义坐标

$$\beta_\sigma = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.118}$$

无关，新正则变量系统$(\beta_\sigma, \alpha_\sigma)$中所有广义坐标$(\beta_\sigma)$均为循环坐标，所有广义动量$(\alpha_\sigma)$因而守恒．系统可分离变量，意即

$$W = \sum_{\sigma=1}^{f} W_\sigma(q_\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f). \tag{5.119}$$

因此，变换前的广义动量

$$p_\sigma = \frac{\partial W}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{5.120}$$

σ 自由度运动一个周期的作用量为

$$J_\sigma = \oint p_\sigma \mathrm{d}q_\sigma = \oint \frac{\partial W_\sigma}{\partial q_\sigma} \mathrm{d}q_\sigma. \tag{5.121}$$

这里要注意，例如在转动的情形中，系统某一自由度运动一个周期后，该自由度的广义坐标并不一定回到它的初始值．而在广义坐标回到初始值的周期运动(例如振动)中，母函数 W 可以不是广义坐标的单值函数．这使(5.121)定义的一周期作用量 J_σ 不是零．在(5.121)右边完成对广义坐标 q_σ 的积分后，作用量 J_σ 成为 f 个参数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f$ 的函数．由于可得到 f 个独立函数 $J_\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f), \sigma = 1, 2, \cdots, f$，便可反解出 f 个参数 $\alpha_\sigma(J_1, J_2, \cdots, J_f)$，它们是 f 个作用量的函数．其中 $\alpha_1(J_1, J_2, \cdots, J_f)$ 即是变换后的哈密顿量 $H(J_1, J_2, \cdots, J_f)$．这相当于再作一次正则变换，将广义动量(α_σ)变为(J_σ)．也可将函数 $\alpha_\sigma(J_1, J_2, \cdots, J_f)(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$代入母函数 W，消去其中的参数(α_σ)，以(J_σ)作参数．这自然不会影响它满足方程(5.118)．利用这个母函数 $W(q_1, q_2, \cdots, q_f, J_1, J_2, \cdots, J_f)$按情形二作正则变换．$J_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$为变换后的广义动量，

$$\varphi_\sigma = \frac{\partial W}{\partial J_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.122}$$

即是被称为角变量的变换后的广义坐标．由于哈密顿量 H 只与作用量(J_σ)有关，角变量(φ_σ)皆为循环坐标．于是有

$$\dot{J}_\sigma = 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.123}$$

即作用量守恒．而

$$\dot{\varphi}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial J_\sigma} \equiv \nu_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.124}$$

亦均为常数．角变量随时间的变化

$$\varphi_\sigma = \nu_\sigma t + \beta'_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.125}$$

是线性的，常数 β'_σ 为角变量 φ_σ 的初值．在只有 σ' 自由度的广义坐标 $q_{\sigma'}$ 和广义动量 $p_{\sigma'}$ 变化一周期而其他自由度的广义坐标和广义动量均不变的条件下，σ 自由度的角变量变化

$$\Delta_{\sigma'}\varphi_\sigma = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_\sigma \partial q_{\sigma'}} \mathrm{d}q_{\sigma'} = \frac{\partial}{\partial J_\sigma} \oint p_{\sigma'} \mathrm{d}q_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \tag{5.126}$$

在第二和第三等号处分别用到(5.120)和(5.121).此式表明,一个自由度的角变量表示该自由度的周期运动,每周期增量为 1.(5.124)定义的角变量变化率 ν_σ 也就是单位时间内 σ 自由度运动的周期数,即 σ 自由度周期运动的频率.

由于 $W(q_1, q_2, \cdots, q_f, \alpha_1; \alpha_2, \cdots, \alpha_f)$满足方程(5.117),

$$\begin{aligned} &S(q_1, q_2, \cdots, q_f, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f, t) \\ &\quad = W(q_1, q_2, \cdots, q_f, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f) - \alpha_1 t \end{aligned} \tag{5.127}$$

必满足哈密顿-雅可比方程(5.95),因而是哈密顿主函数.在哈密顿量不显含时间 t 的条件下,哈密顿主函数即可如此分离变量,将时间 t 分离出来.剩下的不含时间的项 W 称为哈密顿特征函数.它所满足的方程(5.117)称为不含时间的哈密顿-雅可比方程.将函数 $\alpha_\sigma(J_1, J_2, \cdots, J_f)(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$代入(5.127)以消去$(\alpha_\sigma)$,将其中的参数换成$(J_\sigma)$.所得结果记为

$$\begin{aligned} &S(q_1, q_2, \cdots, q_f, J_1, J_2, \cdots, J_f, t) \\ &\quad = W(q_1, q_2, \cdots, q_f, J_1, J_2, \cdots, J_f) - H(J_1, J_2, \cdots, J_f)t. \end{aligned} \tag{5.128}$$

以 S 作母函数将正则变量(q_σ, p_σ)变换为$(\beta'_\sigma, J_\sigma)$,$(J_\sigma)$为变换后的广义动量.按情形二得,与$(J_\sigma)$正则共轭的广义坐标为

$$\beta'_\sigma = \frac{\partial S}{\partial J_\sigma} = \frac{\partial W}{\partial J_\sigma} - \frac{\partial H}{\partial J_\sigma} t = \varphi_\sigma - \nu_\sigma t, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{5.129}$$

此式即(5.125).这一正则变换得到的新广义坐标乃是角变量的初值.

§5.6 开普勒运动的正则不变量与作用量-角变量 轨道根数

称平方反比中心力作用下的单粒子运动为开普勒运动.本节以此为例具体讲述正则变换、哈密顿主函数、哈密顿-雅可比方程、正则不变量、和作用量-角变量等概念、理论和应用.藉此也可了解对天体和人造天体运动轨道的描述方式,并为下节摄动论对天体力学的应用作准备.平方反比中心力包括质点间的万有引力和点电荷间的静电力.前者只有引力,后者引力和斥力都有.作用量-角变量适用于多周期运动,这只在引力条件下才可能.本节以引力条件下的多周期运动为例,对开普勒运动而言,这就是周期运动.除作用量-角变量外,基本方法不难推广于非周期运动和斥力条件下的运动.吸引的平方反比中心力的势函数可表示为

$$V(r) = -\frac{C}{r}, \tag{5.130}$$

$C>0$ 为常数.对这种球形对称条件下的运动最好采用(2.1)定义的球坐标 (r,θ,φ).质点相对力心运动的速度由(2.11)表示,动能为

$$T = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2), \tag{5.131}$$

μ 为折合质量.拉氏量为

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + \frac{C}{r}. \tag{5.132}$$

由此按(5.1)得到,与球坐标 r、θ、φ 正则共轭的广义动量分别为

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \quad p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \tag{5.133}$$

再按(5.2)便得哈密顿量

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{C}{r}. \tag{5.134}$$

哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} - \frac{C}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{5.135}$$

此方程可分离变量.首先由于哈密顿量(5.134)不显含时间 t,可令

$$S(r,\theta,\varphi,t) = W(r,\theta,\varphi) - Et. \tag{5.136}$$

代入(5.135)得哈密顿特征函数 W 的方程

$$\frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} - \frac{C}{r} = E. \tag{5.137}$$

积分常数 E 的物理意义为能量.进一步令

$$W(r,\theta,\varphi) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi), \tag{5.138}$$

代入上式得

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2\right] = 2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right). \tag{5.139}$$

显然可令其中

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi, \tag{5.140}$$

α_φ 为积分常数.代入(5.139)得

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] = 2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right). \tag{5.141}$$

再令

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta^2, \tag{5.142}$$

α_θ 为另一积分常数.代入(5.141)得

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right). \tag{5.143}$$

至此,不含时间的哈密顿-雅可比方程(5.138)也已完全分离变量,成为三个一维微分方程(5.140)、(5.142)和(5.143),分别对应 φ、θ 和 r 三个自由度.由于只含未知函数的一阶微商,这三个方程的解都可简单地表示成不定积分.(5.140)最简单,除一相加常数外积分为

$$W_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \varphi. \tag{5.144}$$

(5.142)和(5.143)稍复杂,但也可由换元法积得.不过求积之前先要开方.由于$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}$和$\frac{\partial W_r}{\partial r}$分别为与$\theta$ 和r 正则共轭的广义动量,它们的符号有物理意义,不能随便给定.为确定它们的符号宜先对运动有一定性了解.以太阳系中的行星运动为例.各行星的卫星,包括月球和人造地球卫星,运动的描述是类似的.

地球公转轨道称为黄道.太阳在黄道平面内.春分时刻地球在黄道上的位置称为春分点.如图 5-2,以太阳为原点 O,以太阳指向春分点的直线为 x 轴,以黄道平面为 xy 平面,由太阳向北垂直 xy 平面的直线为 z 轴,按右手规则可建立日心笛卡儿坐标系 $Oxyz$.以此为基础,按(2.1)定义的球坐标系称为日心球坐标系.一点的球坐标(r, θ, φ)中,φ 称为该点的黄经,$90° - \theta$ 为该点的黄纬,又称北黄纬.若 $90° - \theta < 0$ 则称 $\theta - 90°$为该点的南黄纬.由于黄道平面与地球自转的赤道平面相交 23°27′,日心坐标系的极轴 z 与正北方夹角为 23°27′.极轴 z 所指方向称为北黄极,以区别于北天极,即北极.现在考虑一条行星轨道,它在平方反比中心力作用下为一椭圆.太阳在椭圆平面内的一个焦点上.轨道平面与黄道平面的夹角用 i 表示.它也就是轨道平面法向与 z 轴的夹角.行星轨道与黄道平面有两个交点,其中由南向北穿过黄道平面处 N 称为升交点.升交点的黄经由 Ω 表示.i 与Ω 表示了行星轨道平面的取向.行星近日点与升交点对太阳张的夹角 ω 则表示出行星轨道在它的轨道平面内的取向.轨道椭圆的偏心率 e 表示轨道形

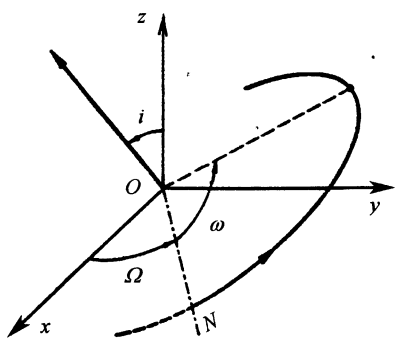

图 5-2　日心坐标系

状，半长轴 a 表示轨道尺度.这五个量一起完全表示出行星轨道的几何位形.再加上行星过近日点的一个时刻 t_1，六个参数

$$i、\Omega、\omega、e、a \text{ 和 } t_1$$

完全描绘出行星的运动.这六个参数称为行星的轨道根数.

在升交点附近，行星球坐标 θ 随行星运动减小，θ 自由度的广义动量为负.因此

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta) &= -\int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \alpha_\theta \arcsin\frac{\alpha_\theta\cos\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}} - \alpha_\varphi \arcsin\frac{\alpha_\varphi\cot\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}}. \end{aligned} \tag{5.145}$$

右边不定积分结果的正确性可由它的微商与被积函数相等直接验证.此式在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处为零，表明这个不定积分乃是从 $\frac{\pi}{2}$ 到 θ 处的定积分，积分常数已按此确定.在由近日点往远日点的运动过程中 r 增加，与它正则共轭的广义动量为正，因此

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2\mu\left(E+\frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}. \tag{5.146}$$

径向动量为实数，右边根号下不得小于零.作为 $\frac{1}{r}$ 的二次式，这个根号下表达式在 $\frac{1}{r}\to\pm\infty$ 处皆为负，因此只在它的两个实根

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\alpha_\theta^2}\left(\mu C + \sqrt{\mu^2C^2+2\mu E\alpha_\theta^2}\right) \tag{5.147}$$

和

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\alpha_\theta^2}\left(\mu C - \sqrt{\mu^2C^2+2\mu E\alpha_\theta^2}\right) \tag{5.148}$$

间为正.r_1 和 r_2 分别为近日点与远日点和太阳之间的距离.将(5.146)的不定积分取为由 r_1 到 r 的定积分.依此确定积分常数后得

$$\begin{aligned} W_r(r) &= \int_{r_1}\sqrt{2\mu\left(E+\frac{C}{r}\right)-\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \\ &= r\sqrt{2\mu\left(E+\frac{C}{r}\right)-\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} + \alpha_\theta\left(\arcsin\frac{\alpha_\theta^2-\mu Cr}{\sqrt{\mu^2C^2+2\mu E\alpha_\theta^2}\,r} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2\mu C^2}{-E}}\arctan\left[\frac{\sqrt{-2\mu E}\alpha_\theta}{\mu C+\sqrt{\mu^2C^2+2\mu E\alpha_\theta^2}} \right. \\ &\quad \left. \times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\alpha_\theta^2-\mu Cr}{\sqrt{\mu^2C^2+2\mu E\alpha_\theta^2}\,r}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.149}$$

可直接验证此式右边对 r 的微商为(5.146)右边,且在 $r=r_1$ 处为零.

将(5.144)、(5.145)和(5.149)代入(5.138),再将得到的哈密顿特征函数 W 代入(5.136),即得哈密顿主函数 $S(r,\theta,\varphi,E,\alpha_\theta,\alpha_\varphi,t)$,除一相加积分常数外,它就是哈密顿-雅可比方程的完全解.将它作母函数,按情形二作正则变换.参数 E、α_θ 和 α_φ 为变换后的不变广义动量,与它们正则共轭的不变广义坐标分别为

$$\beta_E=\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial W}{\partial E}-t=\frac{\partial W_r}{\partial E}-t, \tag{5.150}$$

$$\beta_\theta=\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta}=\frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_\theta}+\frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\theta}, \tag{5.151}$$

$$\beta_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi}=\frac{\partial W_\varphi}{\partial \alpha_\varphi}+\frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_\varphi}. \tag{5.152}$$

用(5.144)和(5.145)得

$$\beta_\varphi=\varphi-\arcsin\frac{\alpha_\varphi\cot\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}}, \tag{5.153}$$

或

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi}\sin(\varphi-\beta_\varphi). \tag{5.154}$$

在此式两边乘 $r\sin\theta$,并将右边的正弦函数用和差公式展开,按(2.1)得行星笛卡儿坐标(x,y,z)满足的方程

$$z=\frac{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}}{\alpha_\varphi}(y\cos\beta_\varphi-x\sin\beta_\varphi). \tag{5.155}$$

这一线性齐次方程表明,轨道确在一过原点的平面内.轨道平面法向单位矢量与轨道上行星的径矢因正交而标量积为零,因而

$$\sin\theta\cos\varphi\sin i\sin\Omega-\sin\theta\sin\varphi\sin i\cos\Omega+\cos\theta\cos i=0. \tag{5.156}$$

由此得

$$\cot\theta=\tan i\sin(\varphi-\Omega). \tag{5.157}$$

与(5.154)比较知

$$\cos i=\frac{\alpha_\varphi}{\alpha_\theta},\qquad \Omega=\beta_\varphi. \tag{5.158}$$

(5.142)只定义了 α_θ^2,并未定义它的符号,因此恒可取 α_θ 为正数.

由(5.145)右边对 α_θ 的微商直接得(5.151)右边第一项

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_\theta}=\arcsin\frac{\alpha_\theta\cos\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2-\alpha_\varphi^2}}. \tag{5.159}$$

这是一个角,记为 γ,有

$$\sin\gamma = \frac{\alpha_\theta\cos\theta}{\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}} = \frac{\cos\theta}{\sin i}, \tag{5.160}$$

末一等号处用了(5.158).升交点方向 ON 垂直于 z 轴和轨道平面的法向,因而垂直于此二方向矢量组成的平面.行星方向在此平面内的投影仍在轨道平面内,因而与轨道法向垂直.它与 z 轴的交角与 i 互为余角.可见,由(5.160)可判断,γ 乃是行星所在方向与升交点方向相对太阳的张角,即行星从升交点沿轨道转过的角度.(5.151)右边第二项可从(5.149)右边对 α_θ 微商得到,也可对其中的被积函数求微商后再积分,即计算

$$\frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\theta} = -\int_{r_1} \frac{\alpha_\theta \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}}$$

$$= \int_{\frac{1}{r_1}} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}}. \tag{5.161}$$

作变换

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\psi$$

$$= \frac{1}{\alpha_\theta^2}\left(\mu C + \sqrt{\mu^2C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\cos\psi\right). \tag{5.162}$$

逆变换为

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\alpha_\theta^2 - \mu C r}{\sqrt{\mu^2C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\, r}. \tag{5.163}$$

$\psi = 0$ 对应 $r = r_1$, $\psi = \pi$ 对应 $r = r_2$.将(5.162)代入(5.161)得

$$\frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\theta} = -\int_0 \mathrm{d}\psi = -\psi. \tag{5.164}$$

将此式和(5.159)、(5.160)一起代入(5.151)得

$$\beta_\theta = \gamma - \psi. \tag{5.165}$$

近日点处 $\gamma = \omega$, $\psi = 0$,因此

$$\beta_\theta = \omega. \tag{5.166}$$

代回(5.165)得

$$\psi = \gamma - \omega. \tag{5.167}$$

此式表明,ψ 为行星沿轨道自近日点绕太阳转过的角度.可见(5.162)表示的乃是行星的椭圆轨道.与(1.41)比较得

$$\alpha_\theta = \sqrt{\mu Ca(1 - e^2)}, \tag{5.168}$$

$$E = -\frac{C}{2a}. \tag{5.169}$$

(5.150)右边第一项最好也采用先微分后积分的办法算,即算

$$\frac{\partial W_r}{\partial E} = \int_{r_1} \frac{\mu \mathrm{d}r}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} = -\int_{\frac{1}{r_1}} \frac{\mu r^2 \mathrm{d}\frac{1}{r}}{\alpha_\theta \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}}. \tag{5.170}$$

作变换(5.162)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_r}{\partial E} &= \mu\alpha_\theta^3 \int_0 \frac{\mathrm{d}\psi}{\left(\mu C + \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E \alpha_\theta^2}\cos\psi\right)^2} \\ &= \frac{\alpha_\theta^2}{2E}\left[\frac{\sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\sin\psi}{\mu C + \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\cos\psi}\right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu C}{\sqrt{-2\mu E\alpha_\theta^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-2\mu E\alpha_\theta^2}}{\mu C + \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}} \tan\frac{\psi}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.171}$$

可直接验证,此式右边的微商确为前面的被积函数,且在 $r = r_1$ 处,即 $\psi = 0$ 处,表达式本身为零,因而是下限为 $r = r_1$ 或 $\psi = 0$ 的积分.代入(5.150)得

$$\begin{aligned}t + \beta_E &= \frac{\alpha_\theta^2}{2E}\left[\frac{\sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\sin\psi}{\mu C + \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}\cos\psi}\right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu C}{\sqrt{-2\mu E\alpha_\theta^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{-2\mu E\alpha_\theta^2}}{\mu C + \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}} \tan\frac{\psi}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{5.172}$$

在近日点处此式右边为零,$t = t_1$,因此

$$t_1 = -\beta_E. \tag{5.173}$$

此式与(5.158)、(5.166)、(5.168)和(5.169)一起将六个轨道根数 i、Ω、ω、e、a 和 t_1 与六个正则不变量 E、α_θ、α_φ、β_E、β_θ 和 β_φ 联系起来,将观察量与计算量联系起来.其中(5.158)的第二式、(5.166)和(5.173)将 Ω、ω 和 t_1 分别直接与 β_φ、β_θ 和 $-\beta_E$ 相等,其他三个关系也是简单的.这些关系对理论的进一步计算与进一步的天文观察的联系是重要的,将在下节作一些介绍.

(5.172)将时间 t 表示成了 ψ 的函数.它的反函数 $\psi(t)$表示出星的位置随时间的变化.φ 通过(5.157)与 θ 联系,θ 则通过(5.160)和(5.165)与 ψ 相联系.r 也通过(5.162)与 ψ 相联系.r、θ、φ 都表示成了 ψ 的函数,经 $\psi(t)$就都成了时间 t 的复合函数.这便是开普勒运动的轨道方程.在这里它们是由哈密顿-雅可比方程解出的.(5.149)、(5.171)和(5.172)都有 $-E$ 出现在根号下.这是合理的,不会导致虚数.因为本节讨论的是周期开普勒运动,质点的运动范围是有限的,不会趋于无限远,按势能的定义(5.130)能量 E 为负.而且

只当 $E<0$,(5.147)和(5.148)才是两个正根,(5.162)才能表示一条椭圆轨道.

在一周期中 φ 增加 2π,φ 自由度的作用量为

$$J_\varphi = \oint p_\varphi \mathrm{d}\varphi = \oint \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \alpha_\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\pi\alpha_\varphi. \tag{5.174}$$

θ 的变化区间受(5.145)中被积函数根号下不小于零的限制,两端 θ_1 和 θ_2 决定于

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{\alpha_\varphi}{\alpha_\theta}. \tag{5.175}$$

θ_1 对应轨道在黄道平面上方的端点,θ_2 对应轨道在黄道平面下方的端点.显然有 $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$,$\theta_2 \geqslant \frac{\pi}{2}$,因此

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{1}{\alpha_\theta}\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}, \quad \cot\theta_1 = \frac{1}{\alpha_\varphi}\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}, \\ \cos\theta_2 &= -\frac{1}{\alpha_\theta}\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}, \quad \cot\theta_2 = -\frac{1}{\alpha_\varphi}\sqrt{\alpha_\theta^2 - \alpha_\varphi^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.176}$$

θ 自由度一周期作用量可用不定积分(5.146)算得为

$$\begin{aligned} J_\theta &= \oint p_\theta \mathrm{d}\theta = -\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= -2\int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\varphi). \end{aligned} \tag{5.177}$$

用(5.163)可将(5.149)表示为

$$\begin{aligned} W_r(r) &= \int_{r_1} \sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\mathrm{d}r \\ &= r\sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} - \alpha_\theta\psi \\ &\quad + \sqrt{\frac{2\mu C^2}{-E}}\arctan\left(\frac{\sqrt{-2\mu E}\alpha_\theta}{\mu C + \sqrt{\mu^2C^2 + 2\mu E\alpha_\theta^2}}\tan\frac{\psi}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.178}$$

r 自由度一周期作用量为

$$\begin{aligned} J_r &= \oint p_r \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\mathrm{d}r - \int_{r_2}^{r_1} \sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r_\theta^2}}\mathrm{d}r \\ &= 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\left(E + \frac{C}{r}\right) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{5.179}$$

由(5.163)知,近日点 $r = r_1$ 处 $\psi = 0$,远日点 $r = r_2$ 处 $\psi = \pi$.代入(5.178)和

(5.179)得

$$J_r = \pi C\sqrt{\frac{2\mu}{-E}} - 2\pi\alpha_\theta. \tag{5.180}$$

能量与作用量的关系为

$$E = -\frac{2\mu\pi^2C^2}{J^2}, \qquad J = J_r + J_\theta + J_\varphi. \tag{5.181}$$

按(5.124),三个自由度周期运动的频率相同,为

$$\nu_r = \nu_\theta = \nu_\varphi = \frac{4\pi^2\mu C^2}{J^3} \equiv \nu. \tag{5.182}$$

若一个函数与其各自变量的关系可归结为与这些自变量的一些组合的关系,且这些组合的数目比原自变量的数目少,则称这个函数关系有简并.如(5.181)表示的能量与三个作用量 J_r、J_θ 和 J_φ 的关系即简并成了与组合 J 的关系.能量的这种简并导致各自由度周期运动频率之间的关联.若这种关联为可通约的,多周期运动即成为周期运动,轨道成为闭合的.开普勒运动能量的简并(5.181)使各自由度频率相同,轨道成为简单的闭合椭圆.从(5.181)和(5.182)中消去 J,再由(5.169)消去 E,得周期 $\tau = \frac{1}{\nu}$ 与椭圆半长轴 a 之间的联系

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{C}, \tag{5.183}$$

这正是开普勒第三定律(1.52).由(5.174)、(5.177)和(5.180)看到,作用量 J_r、J_θ 和 J_φ 与正则不变量 E、α_θ 和 α_φ 有简单关系.与它们正则共轭的角变量 φ_r、φ_θ 和 φ_φ 的初值就与正则不变量 β_E、β_θ 和 β_φ 有简单关系.它们可代替正则不变量 E、α_θ、α_φ、β_E、β_θ 和 β_φ 简单地表达出轨道根数.

§5.7 含时间与不含时间的摄动论[①] 非球形太阳周围的行星运动 非简谐振动

设系统的哈密顿量

$$H = H^0 + H', \tag{5.184}$$

以 H^0 为哈密顿量的运动方程已解出,H' 则是小量,称为摄动哈密顿量,简称摄动.系统的轨道方程应能由以 H^0 为哈密顿量的轨道方程经 H' 的小修正而得到.这种近似求解的理论叫摄动论.以 $S^0(q_1, q_2, \cdots, q_f, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_f, t)$ 表

① perturbation 一词在经典力学中译作摄动,在量子力学中译为微扰.一个意思,两种翻译,最好能统一.

示以 H^0 为哈密顿量的哈密顿-雅可比方程的完全解.用它为母函数按情形二作正则变换.$\alpha_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$为变换后的广义动量;$\beta_\sigma=\dfrac{\partial S^0}{\partial \alpha_\sigma}(\sigma=1,2,\cdots,f)$为变换后的广义坐标.变换前的广义坐标和广义动量可表示成它们和时间的函数

$$\begin{aligned} q_\sigma &= q_\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_f,t),\\ p_\sigma &= p_\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_f,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_f,t), \end{aligned} \quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{5.185}$$

当 $H'=0$,α_σ 和 $\beta_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$皆为常数,不随时间变化.这是因为变换后的哈密顿量 $K=0$.若出现非零摄动 H',则变换后有非零哈密顿量

$$K = H'. \tag{5.186}$$

H'本为(q_σ,p_σ)和 t 的函数,将(5.185)代入其中就成了正则变量$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$和 t 的函数.现在 β_σ 和$\alpha_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$不再为常数,而按正则方程

$$\dot\beta_\sigma = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_\sigma},\quad \dot\alpha_\sigma = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_\sigma},\quad \sigma=1,2,\cdots,f, \tag{5.187}$$

随时间变化.只是由于 H'很小,此式右边很小,$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$随时间变化缓慢.摄动表现为系统在未受摄动的轨道(5.185)间的缓慢过渡.例如在开普勒问题中,表现为轨道根数的缓慢变化.这里慢是相对于(q_σ,p_σ)随时间的变化而言的.反过来说(q_σ,p_σ)随时间的变化相对于$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$的变化而言很快.这使 H'在用(5.185)代入后,作为$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$的函数是高度时间有关的,在固定$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$的条件下,$H'$是一迅速变化的时间函数.若无摄动时,系统作周期运动,(5.185)为时间的周期函数.将它们代入 H'后,H'也成为时间的周期函数.它随时间迅速变化,使得在$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$发生显著变化前,$H'$已经历了许多周期.当$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$有可观察的变化时,$(q_\sigma,p_\sigma)$和 H'都经历了许多周期,它们对 α_σ 和 β_σ 的偏微商自然也经历了许多周期.因此,按(5.187),实测到的$(\dot\beta_\sigma,\dot\alpha_\sigma)$乃是它们在这些周期中的平均值.由于在许多周期内每个周期中的平均值都一样,这种平均等于它们在一个周期中的平均$(\bar{\dot\beta}_\sigma,\bar{\dot\alpha}_\sigma)$,表示出$(\beta_\sigma,\alpha_\sigma)$的久期变化.就用$(\dot\beta_\sigma,\dot\alpha_\sigma)$表示这种久期变化的速度,(5.187)成为

$$\dot\beta_\sigma = \overline{\frac{\partial H'}{\partial \alpha_\sigma}},\quad \dot\alpha = -\overline{\frac{\partial H'}{\partial \beta_\sigma}},\quad \sigma=1,2,\cdots,f, \tag{5.188}$$

右边的平均在(q_σ,p_σ)的一个周期内进行.这就是含时间的摄动论.

实际的太阳不是一个点,而有一非零体积.它的质量在这体积内分布.由于自身的旋转,质量分布不会是严格球形对称的.这使它对行星的引力偏离平方反比律.这种偏离很小,是一种摄动,可用含时间的摄动论研究它引起的行星轨道根数的变化.将坐标原点取在太阳质心上.用 $\boldsymbol{r}'$表太阳中的一点,$\rho(\boldsymbol{r}')$表该点的质量密度,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$表该点周围的微分体积元.体积元中有质量

$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，因而，对于 $\boldsymbol{r}$ 处质量为 m 的行星，有引力势

$$\mathrm{d}V = -G\frac{m\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{5.189}$$

此式在太阳内的体积分

$$V(\boldsymbol{r}) = -Gm\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{5.190}$$

即是太阳对这颗行星的引力势.太阳内一点与太阳质心的距离 r' 自然比行星与太阳的距离 r 小得多，$\frac{r'}{r}$ 为小量.幂级数

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\delta}} = \frac{1}{r}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos\delta+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\delta) \tag{5.191}$$

是很好地收敛的.式中 δ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角(图 5-3)，$\mathrm{P}_l(\cos\delta)$ 为 $\cos\delta$ 的 l 次多项式.(5.191)定义的多项式 P_l 称为勒让德多项式，整数 l 称为勒让德多项式的阶.幂级数(5.191)的系数可用标准的泰勒展开法求得.前三项系数分别为 0、1 和 2 阶勒让德多项式

$$\mathrm{P}_0(\cos\delta) = 1, \quad \mathrm{P}_1(\cos\delta) = \cos\delta,$$

和

$$\mathrm{P}_2(\cos\delta) = \frac{3}{2}\cos^2\delta - \frac{1}{2}. \tag{5.192}$$

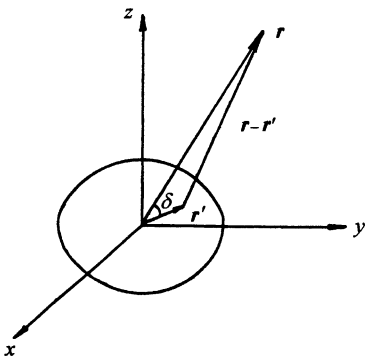

图 5-3 太阳内一点与太阳外一点的距离

用 r,θ,φ 表示 $\boldsymbol{r}$ 的球坐标，r',θ',φ' 表示 $\boldsymbol{r}'$ 的球坐标，

$$\cos\delta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'). \tag{5.193}$$

代入(5.192)的第三式得

$$\mathrm{P}_2(\cos\delta) = \mathrm{P}_2(\cos\theta)\mathrm{P}_2(\cos\theta') + \frac{3}{4}[\sin2\theta\sin2\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$+ \sin^2\theta\sin^2\theta'\cos2(\varphi-\varphi')]. \tag{5.194}$$

计算(5.191)幂级数前三项对太阳引力势(5.190)的贡献.第一项的贡献最简单，为

$$V_0(r) = -G\frac{Mm}{r}, \tag{5.195}$$

其中

$$M = \int\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{5.196}$$

为太阳的质量.这就是将太阳当作一个质量为 M,位于它的质心的一个点的引力势.设太阳内的质量分布虽不具球对称,却具绕极轴的轴对称,$\rho(\boldsymbol{r}')=\rho(r'\theta')$与 φ'无关.将(5.193)和(5.194)代入(5.191)再代入(5.190)后对 φ'的积分含 $\cos(\varphi'-\varphi)$和 $\cos2(\varphi'-\varphi)$在 0 到 2π 之间的积分.这两个函数都是 φ'的周期函数,周期分别为 2π 和 π,在 0 到 2π 之间的积分皆为零.可见(5.191)中第二项对太阳引力势(5.190)的贡献为

$$V_1(\boldsymbol{r})=-\frac{Gm}{r^2}\cos\theta\int r'\cos\theta'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=-G\frac{Mm}{r^2}\cos\theta\int\frac{z'\rho(\boldsymbol{r}')}{M}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

右边的积分乃是太阳质心的 z 坐标,在太阳的质心坐标系中为零.故有 $V_1(\boldsymbol{r})=0$.(5.191)幂级数第三项对太阳引力势(5.190)的贡献为

$$V_2(\boldsymbol{r})=-\frac{Gm}{r^3}I_2\mathrm{P}_2(\cos\theta),\tag{5.197}$$

其中

$$I_2=\int r'^2\mathrm{P}_2(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\frac{1}{2}\int(3z'^2-r'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\tag{5.198}$$

为太阳质量分布的四极矩.一般可定义

$$I_l\equiv\int r'^l\mathrm{P}_l(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\tag{5.199}$$

为太阳质量分布的 2^l 极矩.现在将太阳质量分布非球对称效应的考虑限于它的最低级贡献,设(5.191)右边幂级数第四项及其后各项的贡献均为零.这相当于设太阳质量分布高于四极的所有多极矩均为零.在此条件下太阳引力势(5.190)成为

$$V(\boldsymbol{r})=V_0(r)+V_2(\boldsymbol{r}).\tag{5.200}$$

作变换 $\zeta=\cos\theta'$,算得

$$\int_0^{\pi}\mathrm{P}_2(\cos\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_2(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3\zeta^2-1)\mathrm{d}\zeta=0.\tag{5.201}$$

对一个质量分布球对称的太阳,$\rho(\boldsymbol{r}')=\rho(r')$与 θ',φ'无关.它的四极矩按(5.198)为

$$I_2=\int_0^{\infty}r'^4\rho(r')\mathrm{d}r'\int_0^{\pi}\mathrm{P}_2(\cos\theta')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'=0.\tag{5.201'}$$

一个质量分布偏离球对称不远的太阳,四极矩应很小,V_2 应可作摄动考虑.

(5.162)可按(1.41)的方式表示成

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi}. \tag{5.202}$$

它将 r 表示成 ψ 的函数，轨道根数 a 和 e 为参数. 由(5.160)和(5.167)得

$$\cos\theta = \sin i \sin(\psi+\omega), \tag{5.203}$$

将 $\cos\theta$ 表示成了 ψ 的函数，轨道根数 i 和 ω 为参数. 微分(5.172)两边，用(5.171)和(5.162)得

$$\mathrm{d}t = \frac{\mu}{\alpha_\theta} r^2 \mathrm{d}\psi, \tag{5.204}$$

将时间进程与 ψ 的变化联系起来. 再用(5.168)、(5.183)和 $GmM = C$，得周期平均摄动

$$\begin{aligned}
\bar{V}_2 &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau V_2 \mathrm{d}t \\
&= -\frac{CI_2}{4\pi M a_\theta^3}\sqrt{\frac{\mu^3 C^3}{a^3}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\psi)[3\sin^2 i\,\sin^2(\psi+\omega)-1]\mathrm{d}\psi \\
&= -\frac{CI_2}{4\pi M a_\theta^3}\sqrt{\frac{\mu^3 C^3}{a^3}}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\psi)\left[\frac{3}{2}\sin^2 i - 1\right. \\
&\quad \left. -\frac{3}{2}\sin^2 i\cos^2(\psi+\omega)\right]\mathrm{d}\psi \\
&= -\frac{CI_2}{4Ma_\theta^3}\sqrt{\frac{\mu^3 C^3}{a^3}}(3\sin^2 i - 2) \\
&= -\frac{CI_2}{4Ma_\theta^3}\sqrt{\frac{\mu^3 C^3}{a^3}}(1-3\cos^2 i).
\end{aligned} \tag{5.205}$$

用(5.158)和(5.169)可将它表示为新正则变量的函数

$$\bar{V}_2 = -\frac{CI_2}{4Ma_\theta^3}\sqrt{(-2\mu E)^3}\left(1-3\frac{\alpha_\varphi^2}{\alpha_\theta^2}\right). \tag{5.206}$$

(5.188)右边的平均是对时间进行的，偏微商则是对正则变量进行的，两者可交换次序. 即可将它当作正则变量$(\beta_\sigma, \alpha_\sigma)$以平均摄动 $\bar{H}'$ 为哈密顿量的哈密顿正则方程. 现在的正则变量按(5.158)、(5.166)和(5.173)为 $-t_1$、ω、Ω、E、α_θ 和 α_φ. 它们的久期变化满足以(5.206)为哈密顿量的哈密顿正则方程. 这个哈密顿量与广义坐标 $-t_1$、ω 和 Ω 无关. 因此广义动量 E、α_θ 和 α_φ 守恒. 注意，这里的 E 是(5.138)定义的无摄动条件下的能量，并非系统的真正能量，它的守恒是摄动论的近似结果，且是一种久期表现. (5.204)可表示为

$$\alpha_\theta = \mu r^2 \dot{\psi}, \tag{5.207}$$

表明 α_θ 为行星绕日转动角动量. 由于摄动 V_2 破坏球对称，角动量不会严格守恒. 它的守恒也是摄动论的近似结果和久期表现. (5.158)第一式表明，α_φ

为角动量 α_θ 在 z 轴上的投影. 由于 V_2 不破坏绕 z 轴转动的对称性, α_φ 的守恒是严格的. 广义坐标中近日点方位角 ω 和升交点黄经 Ω 都是描写轨道位形的重要根数. 它们由于摄动 V_2 而发生的久期变化满足方程

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial \alpha_\theta}, \quad \dot{\Omega} = \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial \alpha_\varphi}. \tag{5.208}$$

重新用周期 τ 替换(5.206)中的 E 或(5.205)中的半长轴长 a, 得

$$\bar{V}_2 = -\frac{\pi\mu^2 C^2 I_2}{2Ma_\theta^3\tau}\left(1 - 3\frac{\alpha_\varphi^2}{\alpha_\theta^2}\right). \tag{5.209}$$

代入(5.208), 再利用(5.158)和(5.168)用轨道根数 i、a 和 e 替换正则变量 α_θ 和 α_φ, 得

$$\dot{\omega} = -\frac{3\pi I_2}{2Ma^2(1-e^2)^2\tau}(5\cos^2 i - 1), \tag{5.210}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{3\pi I_2}{Ma^2(1-e^2)^2\tau}\cos i. \tag{5.211}$$

(5.211)表明, 除非轨道平面与黄道平面垂直, 恒有升交点进动. (5.210)则表明, 倾角 i 为临界值

$$\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \begin{cases} 63°26' \\ 116°34' \end{cases}$$

的轨道无近日点进动. 在这两个临界倾角之间和这两个临界倾角以外的轨道近日点进动方向相反. 一般说来, 近日点进动与升交点进动速率同量级.

各行星中水星离太阳最近, 太阳引力相对平方反比律的偏离对它的影响也就最显著. 对长期积累的观测资料作各种校正并扣除其他行星引力摄动的效应后, 水星近日点进动尚余每世纪 $41.4'' \pm 0.9''$ 有待说明. 这已成为广义相对论的一大证据. 然而有人提议用太阳质量分布的非球对称来说明这一余额. 上面的讨论表明这会导致水星升交点量级相同的进动. 实际上却不存在待说明的升交点进动. 这种情形加强了水星近日点进动作为广义相对论证据的地位.

可用类似方法研究卫星绕行星的运动, 特别是人造卫星绕地球轨道根数的变化. 人造地球卫星离地很近, 对地球形状和地内质量分布颇敏感. 观察和分析它们的轨道根数变化可了解地质结构.

不含时间的摄动论则研究受摄动系统与未受摄动系统正则不变量的微小差别. 它用于可分离变量的多周期保守系统. 采用作用量-角变量. 仍用 H^0 表未受摄动系统的哈密顿量. 它的哈密顿特征函数 $W^{(0)}(q_1, q_2, \cdots, q_f, J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \cdots, J_f^{(0)})$ 满足方程

$$H^0\left(q_1, q_2, \cdots, q_f, \frac{\partial W^{(0)}}{\partial q_1}, \frac{\partial W^{(0)}}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial W^{(0)}}{\partial q_f}\right)$$
$$= E^{(0)}(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \cdots, J_f^{(0)}). \tag{5.212}$$

受摄动系统的哈密顿量仍由(5.184)定义，它的哈密顿特征函数 $W(q_1, q_2, \cdots, q_f, J_1, J_2, \cdots, J_f)$满足方程

$$H\left(q_1, q_2, \cdots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E(J_1, J_2, \cdots, J_f). \tag{5.213}$$

分别以 $W^{(0)}$和 W 为母函数，可按情形二将正则变量(q_σ, p_σ)变换为作用量-角变量$(\varphi_\sigma^{(0)}, J_\sigma^{(0)})$和$(\varphi_\sigma, J_\sigma)$，其中的角变量为

$$\varphi_\sigma^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial J_\sigma^{(0)}}, \quad \varphi_\sigma = \frac{\partial W}{\partial J_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{5.214}$$

不含时间的摄动论即研究 W、E、$(\varphi_\sigma, J_\sigma)$与 $W^{(0)}$、$E^{(0)}$、$(\varphi_\sigma^{(0)}, J_\sigma^{(0)})$的关系，进而研究频率

$$\nu_\sigma = \frac{\partial E}{\partial J_\sigma} \quad 与 \quad \nu_\sigma^{(0)} = \frac{\partial E^{(0)}}{\partial J_\sigma^{(0)}}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{5.215}$$

的关系.$(\varphi_\sigma^{(0)}, J_\sigma^{(0)})$与$(\varphi_\sigma, J_\sigma)$都是正则变量，它们间的关系为一正则变换.用 $W'(\varphi_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, J_1, J_2, \cdots, J_f)$表示这一变换的母函数，它按情形二将这两套正则变量联系起来.

将(5.184)中的摄动表示为

$$H' = \varepsilon H_1, \tag{5.216}$$

其中 H_1 与 H^0 同量级，ε 则为表示摄动量级的小常数.设 $E^{(0)}(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \cdots, J_f^{(0)})$已知，将欲求的能量 E 在它附近展成 ε 的幂级数，有

$$E(J_1, J_2, \cdots, J_f) = E^{(0)}(J_1, J_2, \cdots, J_f) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E^{(n)}(J_1, J_2, \cdots, J_f). \tag{5.217}$$

其中 n 次幂系数$E^{(n)}$表示能量的 n 级摄动.相应地，有频率的摄动展开

$$\nu_\sigma(J_1, J_2, \cdots, J_f) = \nu_\sigma^{(0)}(J_1, J_2, \cdots, J_f) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \nu_\sigma^{(n)}(J_1, J_2, \cdots, J_f). \tag{5.218}$$

其中频率的 n 级摄动

$$\nu_\sigma^{(n)} = \frac{\partial E^{(n)}}{\partial J_\sigma}. \tag{5.219}$$

W'则应在全同变换

$$W_0' = \sum_{\sigma=1}^{f} \varphi_\sigma^{(0)} J_\sigma \tag{5.220}$$

附近展成 ε 的幂级数

$$W'(\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, J_1, J_2, \cdots, J_f)$$
$$= W'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n W'_n(\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, J_1, J_2, \cdots, J_f). \quad (5.221)$$

按情形二，W'_0 将 $\varphi_\sigma^{(0)}$ 变为

$$\varphi_\sigma = \frac{\partial W'_0}{\partial J_\sigma} = \varphi_\sigma^{(0)},$$

将

$$J_\sigma^{(0)} = \frac{\partial W'_0}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} = J_\sigma$$

变为 J_σ，因而是全同变换. 由(5.221)还可得

$$J_\sigma^{(0)} = \frac{\partial W'}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} = J_\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial W'_n}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}}. \quad (5.222)$$

采用正则变量$(\varphi_\sigma^{(0)}, J_\sigma^{(0)})$的不含时间哈密顿-雅可比方程为

$$H\left(\varphi_1^{(0)}\varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_1^{(0)}}, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_2^{(0)}}, \cdots, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_f^{(0)}}\right)$$
$$= E(J_1, J_2, \cdots, J_f). \quad (5.223)$$

由于$(\varphi_\sigma^{(0)})$为未受摄动系统的循环坐标，在 H^0 中不出现，此方程成为

$$H^0\left(\frac{\partial W'}{\partial \varphi_1^{(0)}}, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_2^{(0)}}, \cdots, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_f^{(0)}}\right)$$
$$+ \varepsilon H_1\left(\varphi_1^{(0)}\varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_1^{(0)}}, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_2^{(0)}}, \cdots, \frac{\partial W'}{\partial \varphi_f^{(0)}}\right)$$
$$= E(J_1, J_2, \cdots, J_f). \quad (5.224)$$

将(5.222)代入此式左边，按 ε 的幂次合并同类项，算到二次幂得

$$H^0(J_1, J_2, \cdots, J_f)$$
$$+ \varepsilon\left(\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial W'_1}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} \frac{\partial H^0}{\partial J_\sigma} + H_1(\varphi_1^{(0)}\varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_f^{(0)}, J_1, J_2, \cdots, J_f)\right)$$
$$+ \varepsilon^2\left(\sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial W'_2}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} \frac{\partial H^0}{\partial J_\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} \frac{\partial W'_1}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} \frac{\partial^2 H^0}{\partial J_\sigma \partial J_{\sigma'}} \frac{\partial W'_1}{\partial \varphi_{\sigma'}^{(0)}}\right.$$
$$\left. + \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial W'_1}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}} \frac{\partial H_1}{\partial J_\sigma}\right) + \cdots.$$

(5.224)右边的展开式即是(5.217). 要求两边 ε 同次幂的系数相等，得能量的各级摄动

$$E^{(n)}(J_1, J_2, \cdots, J_f) = \sum_{\sigma=1}^{f} \nu_\sigma^{(0)} \frac{\partial W'_n}{\partial \varphi_\sigma^{(0)}}$$

$$+\Phi_n(\varphi_1^{(0)},\varphi_2^{(0)},\cdots,\varphi_f^{(0)},J_1,J_2,\cdots,J_f),\quad n=1,2,\cdots. \tag{5.225}$$

对前两级摄动具体算得右边第二项为

$$\Phi_1(\varphi_1^{(0)},\varphi_2^{(0)},\cdots,\varphi_f^{(0)},J_1,J_2,\cdots,J_f)$$
$$=H_1(\varphi_1^{(0)},\varphi_2^{(0)},\cdots,\varphi_f^{(0)},J_1,J_2,\cdots,J_f), \tag{5.226}$$

$$\Phi_2(\varphi_1^{(0)},\varphi_2^{(0)},\cdots,\varphi_f^{(0)},J_1,J_2,\cdots,J_f)$$
$$=\sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial W_1'}{\partial\varphi_\sigma^{(0)}}\frac{\partial H_1}{\partial J_\sigma}+\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}\frac{\partial W_1'}{\partial\varphi_\sigma^{(0)}}\frac{\partial^2 H^0}{\partial J_\sigma\partial J_{\sigma'}}\frac{\partial W_1'}{\partial\varphi_{\sigma'}^{(0)}}. \tag{5.227}$$

值得注意的是,(5.225)左边只与作用量(J_σ)有关,而它右边的各项却还与角变量($\varphi_\sigma^{(0)}$)有关.为使此式成立,右边各项与角变量的关系必须互相抵消,使总和与角变量无关.右边既与角变量无关自然就等于它对角变量的平均值.下面将证明它的第一项对角变量的平均值为零,于是有

$$E^{(n)}(J_1,J_2,\cdots,J_f)=\overline{\Phi_n(\varphi_1^{(0)},\varphi_2^{(0)},\cdots,\varphi_f^{(0)},J_1,J_2,\cdots,J_f)}, \tag{5.228}$$

平均对角变量进行.此式可用来计算能量的摄动.将它代回(5.225)得

$$\sum_{\sigma=1}^{f}\nu_\sigma^{(0)}\frac{\partial W_n'}{\partial\varphi_\sigma^{(0)}}=\bar{\Phi}_n-\Phi_n, \tag{5.229}$$

此式可用来计算母函数 W'.

现在证明

定理 若 $F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_f)$为 ξ_σ 的周期函数,则$\dfrac{\partial F}{\partial\xi_\sigma}$在一周期内的平均为零.

证 设周期为 τ,$\dfrac{\partial F}{\partial\xi_\sigma}$在一周期内的平均为

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial\xi_\sigma}}=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{\partial F}{\partial\xi_\sigma}\mathrm{d}\xi_\sigma=\frac{1}{\tau}(F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\tau,\cdots)-F(\xi_1,\xi_2,\cdots,0,\cdots)).$$

右边括号内相减的两项由于 F 的周期性而相等,差为零.证毕.

(5.225)右边第一项的平均即其中偏微商$\dfrac{\partial W_n'}{\partial\varphi_\sigma^{(0)}}$的平均.多周期运动中各量均为角变量的周期函数,母函数 W'及其展开系数 W_n' 亦应是 $\varphi_\sigma^{(0)}$ 的周期函数.按上述定理,各偏微商$\dfrac{\partial W_n'}{\partial\varphi_\sigma^{(0)}}$的平均皆为零.因此(5.225)右边第一项的平均为零.这就完成了(5.228)和(5.229)的论证.

作为例子,下面讨论非简谐振动.简谐摄动是在恢复力(1.6)作用下的一维运动.由(1.6)和(1.9)知,它有势能

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2, \tag{5.230}$$

拉氏函数为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{5.231}$$

与坐标 x 共轭的动量为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \tag{5.232}$$

哈密顿量为

$$H = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{5.233}$$

运动方程(1.8)有解(1.10),即

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta), \tag{5.234}$$

积分常数 x_0 和 δ 分别为振幅和初相角.代入(5.232)得

$$p(t) = m\omega x_0 \cos(\omega t + \delta). \tag{5.235}$$

将这两式代入(5.233)右边,得能量

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2, \tag{5.236}$$

这也就是 x 到最大值时的势能.(5.234)和(5.235)都是时间的周期函数,周期为

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{5.237}$$

由此得一周期的作用量

$$\begin{aligned} J &= \oint p\mathrm{d}x = \int_0^\tau m\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} m\omega x_0^2 \cos^2(\xi + \delta)\mathrm{d}\xi = \pi m\omega x_0^2, \end{aligned} \tag{5.238}$$

在第三等号处作了积分变量变换 $\xi = \omega t$.由此解得

$$x_0 = \sqrt{\frac{J}{\pi m\omega}}. \tag{5.239}$$

代入(5.236)得

$$E = J\nu, \tag{5.240}$$

其中

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.241}$$

为振动频率.(5.240)为能量与作用量的关系,它也直接表示出其中的 $\nu = \dfrac{\partial E}{\partial J}$ 为振动频率.为求角变量先求哈密顿特征函数 $W(x, J)$,它满足不含时间的哈密顿-雅可比方程

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = J\nu. \tag{5.242}$$

直接积分得

$$\begin{aligned} W &= \int_0 \sqrt{2mJ\nu - m^2\omega^2 x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{2mJ\nu - m^2\omega^2 x^2} + \frac{J}{2\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2J\nu}}x\right). \end{aligned} \tag{5.243}$$

再微分得角变量

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial J} = \nu t + \beta, \quad \beta = \frac{\delta}{2\pi}. \tag{5.244}$$

计算中用到表达式(5.234)、(5.239)和(5.241).简谐振动的运动方程(1.8)为线性方程,是线性恢复力引起的运动.而线性恢复力(1.6)则是二次势能函数(5.230)的结果.若势能中出现 x 的高次幂,恢复力将不再是线性的,运动方程也不再是线性的.这种非线性振动称为非简谐振动.其中最简单的情形可由摄动

$$H' = \lambda x^3 \quad (\lambda \text{ 为常数}) \tag{5.245}$$

引起.(5.233)成了未受摄动的哈密顿量

$$H^0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{5.246}$$

(5.234)~(5.244)成为未受摄动系统各量的关系;用上标'(0)'表示未受摄动的量,下面要用到其中的关系

$$x(\varphi^{(0)}, J) = \sqrt{\frac{J}{\pi m\omega}}\sin(2\pi\varphi^{(0)}), \tag{5.247}$$

$$E^{(0)}(J) = J\nu^{(0)}, \tag{5.248}$$

$$\nu^{(0)} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5.249}$$

由此得

$$H'(\varphi^{(0)}, J) = \lambda\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\sin^3(2\pi\varphi^{(0)}). \tag{5.250}$$

能量的一级修正为

$$\begin{aligned} \varepsilon E^{(1)}(J) &= \overline{H'(\varphi^{(0)}, J)} = \lambda\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\int_0^1 \sin^3(2\pi\varphi^{(0)})\mathrm{d}\varphi^{(0)} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\int_0^{2\pi}\sin^3\xi\mathrm{d}\xi = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{J}{\pi m\omega}\right)^{3/2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3\xi\mathrm{d}\xi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.251}$$

在第三等号处作了变换 $\xi = 2\pi\varphi^{(0)}$,第四等号处用了正弦函数的周期性,末一等号处则用到正弦函数为奇函数.按(5.229),由此还得到

$$\varepsilon\nu^{(0)}\frac{\partial W_1'}{\partial\varphi^{(0)}}=-H'. \tag{5.252}$$

(5.248)表明,(5.227)右边第二项为零.将(5.252)代入其中第一项,得能量的二级修正

$$\varepsilon^2E^{(2)}(J)=-\frac{1}{\nu^{(0)}}\overline{H'\frac{\partial H'}{\partial J}}=-\frac{1}{2\nu^{(0)}}\overline{\frac{\partial H'^2}{\partial J}}$$

$$=-\frac{3\lambda^2J^2}{2\pi^3m^3\omega^4}\int_0^{2\pi}\sin^6\xi\mathrm{d}\xi=-\frac{15\lambda^2J^2}{16\pi^2m^3\omega^4}. \tag{5.253}$$

由此得摄动后能量与作用量的关系

$$E(J)=J\nu^{(0)}-\frac{15\lambda^2J^2}{16\pi^2m^3\omega^4}, \tag{5.254}$$

和频率与作用量的关系

$$\nu=\frac{\partial E}{\partial J}=\nu^{(0)}-\frac{15\lambda^2J}{8\pi^2m^3\omega^4}. \tag{5.255}$$

此二式联立隐含了频率与能量的关系.取振幅 x_0 的零级近似(5.239),得频率与振幅的关系

$$\nu=\nu^{(0)}-\frac{15\lambda^2x_0^2}{8\pi m^2\omega^3}. \tag{5.256}$$

§5.8 作用量的绝热不变性 磁塞

作用量在经典力学中的基本重要性还表现为它的绝热不变性.即系统的哈密顿量无穷缓慢地从一种情形变到另一种情形的过程中,与一般力学量都会改变相对照,作用量是不变的.这再次反映出,它所表示的是经典力学的共性,而不是各种具体力学条件下的特性.设系统的哈密顿量含一组 n 个参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,当这些参数取定值时系统为可分离变量多周期保守的.采用哈密顿特征函数 $W(q_1,q_2,\cdots,q_f,J_1,J_2,\cdots,J_f,a_1,a_2,\cdots,a_n)$按情形二作正则变换,变换后的哈密顿量为 $H(J_1,J_2,\cdots,J_f,a_1,a_2,\cdots,a_n)$,角变量 $\varphi_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$为循环坐标,因而作用量 $J_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$皆守恒.现在让参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 随时间变化,仍用上述母函数 W 按情形二作正则变换.按(5.86),哈密顿量成为

$$K(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_f,J_1,J_2,\cdots,J_f,a_1,a_2,\cdots,a_n)=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$=H(J_1,J_2,\cdots,J_f,a_1,a_2,\cdots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}\dot{a}_i\frac{\partial W}{\partial a_i}. \tag{5.257}$$

右边第二项当参数(a_i)变化缓慢时为小量,可视为摄动.按变换后的正则方程

$$\dot{J}_\sigma = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_\sigma} = -\frac{\partial}{\partial \varphi_\sigma}\sum_{i=1}^{n}\dot{a}_i\frac{\partial W}{\partial a_i}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{5.258}$$

当$(\dot{a}_i)$很小时$(\dot{J}_\sigma)$很小，(J_σ)只在(φ_σ)经历许多周期后才可能有显著变化，因而有意义的是$(\dot{J}_\sigma)$的久期值，即它们在一周期内的平均．就用$(\dot{J}_\sigma)$表示它们的久期值，有

$$\dot{J}_\sigma = -\overline{\frac{\partial}{\partial \varphi_\sigma}\sum_{i=1}^{n}\dot{a}_i\frac{\partial W}{\partial a_i}}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{5.259}$$

将(a_i)变化无穷缓慢定义为此式有意义，且其中的$(\dot{a}_i)$在一周期内的变化可忽略，以致 $\sum_{i=1}^{n}\dot{a}_i\frac{\partial W}{\partial a_i}$ 为(φ_σ)的周期函数．按上节(5.229)后面的定理，在此条件下，(5.259)右边为零．从而

$$\dot{J}_\sigma = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{5.260}$$

这就是作用量的绝热不变性．

上述参数(a_i)可以任意多，乃至无穷多．甚至可将势函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$在位形空间每一点的值当作参数．各种各样势场中的运动千差万别，却有量当势场从一种情形无穷缓慢地变到另一种情形的过程中是不变的，这就是作用量．

除基本重要性外，作用量的绝热不变性在实际问题中也有它的应用．磁塞现象即是它的应用之一．为了解此现象，先要熟悉带电粒子在磁场中的运动．借此机会一般地介绍一下带电粒子在电磁场中的运动．带电荷 e 的粒子在电场$\mathscr{E}$中受电力

$$\boldsymbol{F}_e = e\,\mathscr{E}, \tag{5.261}$$

在磁场$\mathscr{B}$中受洛伦兹力

$$\boldsymbol{F}_m = e\,\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}, \tag{5.262}$$

$\boldsymbol{v}$ 为粒子速度．电磁场又可用标势 $\Phi(\boldsymbol{r},t)$和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$按

$$\mathscr{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5.263}$$

$$\mathscr{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5.264}$$

表示．将它们代入(5.261)和(5.262)知，电磁力合在一起可按(3.110)用势函数

$$V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = e\Phi(\boldsymbol{r},t) - e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \tag{5.265}$$

表示．具体算得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} &= -e\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + e\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - e\nabla\Phi \\ &= e\mathscr{E} + e\boldsymbol{v}\times\mathscr{B} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m.\end{aligned} \tag{5.266}$$

矢量的函数对自变量矢量的微商定义为一个矢量,它的各分量分别为函数对自变量矢量各分量的微商,例如$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\equiv\nabla V$.(5.266)第二等号处用了恒等式

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A}, \tag{5.267}$$

其中$\boldsymbol{A}$为坐标$\boldsymbol{r}$的函数而$\boldsymbol{v}$则独立于坐标$\boldsymbol{r}$.由(5.265)得带电粒子在电磁场中的拉氏量

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-e\Phi(\boldsymbol{r},t)+e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t). \tag{5.268}$$

与坐标$\boldsymbol{r}$正则共轭的动量为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t). \tag{5.269}$$

带电粒子在电磁场中的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}-L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+e\Phi(\boldsymbol{r},t)\\&=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+e\Phi,\end{aligned} \tag{5.270}$$

哈密顿正则方程为

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}), \tag{5.271}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\nabla H=e\nabla\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-e\nabla\Phi=e\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}+e\mathscr{E}+e\dot{\boldsymbol{A}}. \tag{5.272}$$

(5.271)即速度与动量的关系(5.269).(5.272)末一等号处用了(5.267)、(5.264)、(5.263)和

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A}. \tag{5.273}$$

将(5.269)代入(5.272)左边得

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=e\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}+e\mathscr{E}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}. \tag{5.274}$$

此即电磁力作用下的牛顿方程.设电场为零,带电粒子在磁场中的牛顿方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=e\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}. \tag{5.275}$$

右边的罗伦兹力与速度$\boldsymbol{v}$垂直,只改变速度的方向而不改变速度的大小.这使带电粒子在磁场中动能$T=\frac{1}{2}mv^2$守恒.进一步设磁场是恒定均匀的,即$\mathscr{B}$与时间和空间坐标均无关.将速度分解

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{/\!/}+\boldsymbol{v}_{\perp}, \tag{5.276}$$

其中$\boldsymbol{v}_{/\!/}$为速度与磁场$\mathscr{B}$平行的分量,称为纵向分量,$\boldsymbol{v}_{\perp}$为速度与磁场$\mathscr{B}$垂直的分量,称为横向分量.由于洛伦兹力与磁场方向垂直,在磁场方向无分量,$\boldsymbol{v}_{/\!/}$不随时间变化.粒子沿磁场方向匀速漂移.与粒子一起沿磁场方向以匀速$\boldsymbol{v}_{/\!/}$运动的坐标系自然还是惯性系.在这个坐标系中看,粒子没有纵向漂移,

只有横向运动.轨道在一垂直于磁场的平面内.它沿轨道运动的速率 $v_\perp$ 为常数,垂直轨道方向加速度的大小 $|ev_\perp \mathscr{B}/m|$ 也是常数,轨道曲率

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{ev_\perp \mathscr{B}}{m}/v_\perp^2\right| = \left|\frac{e\mathscr{B}}{mv_\perp}\right| \tag{5.277}$$

也就是常数.轨道为一圆周,圆周半径即常数曲率半径 ρ.回到原来的坐标系,看到粒子还有速度为 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$ 的沿磁场方向的漂移.轨道被拉成一条螺旋线,绕在一以磁场方向为轴,半径为 ρ 的圆柱上.螺距为

$$d = \frac{2\pi\rho v_{/\!/}}{v_\perp}. \tag{5.278}$$

将磁场方向取为 z 轴,$\boldsymbol{\mathscr{B}} = \mathscr{B}\boldsymbol{z}_0$.均匀恒定磁场中 $\mathscr{E} = 0$,$\mathscr{B}$ 为常数,因而标势 $\Phi = 0$,矢势可取为

$$A_x = -\frac{\mathscr{B}}{2}y, \quad A_y = \frac{\mathscr{B}}{2}x, \quad A_z = 0. \tag{5.279}$$

带电粒子在其中的势函数为

$$V = -\frac{e\mathscr{B}}{2}(xv_y - yv_x) = -\frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2\dot{\theta}, \tag{5.280}$$

ρ、θ 和 z 一起是(2.2)定义的柱坐标.利用此式和(2.19)得拉氏量

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2\dot{\theta}, \tag{5.281}$$

拉氏方程为

$$m\ddot{\rho} - (m\dot{\theta} + e\mathscr{B})\rho\dot{\theta} = 0, \tag{5.282}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\rho^2\dot{\theta} + \frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2\right) = 0, \tag{5.283}$$

$$m\ddot{z} = 0. \tag{5.284}$$

末一方程的初积分 $\dot{z}$ = 常数表示沿磁场方向的匀速漂移,与前面用牛顿方程(5.275)得到的一致.方程(5.282)和(5.283)貌似复杂,按前面牛顿方程的分析知它们应表示投影在垂直于磁场的平面上的圆周运动.对圆心在 z 轴上的轨道应有 ρ = 常数,从而有 $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.代入(5.282)得

$$\dot{\theta} = -\frac{e\mathscr{B}}{m}. \tag{5.285}$$

横向速度的大小 $v_\perp = |\rho\dot{\theta}| = \left|\frac{\rho e\mathscr{B}}{m}\right|$,与(5.277)一致.(5.283)表示与 θ 正则共轭的广义动量

$$p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2 \tag{5.286}$$

守恒.将(5.285)代入此式,知对圆心在 z 轴上的轨道

$$p_\theta = -\frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2. \tag{5.287}$$

θ 自由度作周期运动,一周期作用量为

$$J_\theta = \oint p_\theta \mathrm{d}\theta = -e\mathscr{B}\pi\rho^2, \tag{5.288}$$

它是常数 $-e$ 乘圆轨道包围的磁通量.

这样将目光集中于 ρ、θ 自由度,相当于仍从随粒子沿磁场漂移的惯性系看问题.看到的是一个二维问题.以 ρ 和 θ 为广义坐标,此问题的拉氏量即(5.281)中与 ρ 和 θ 有关的部分

$$L_2 = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}e\mathscr{B}\rho^2\dot{\theta}. \tag{5.289}$$

与 ρ 正则共轭的广义动量为 $p_\rho = m\dot{\rho}$,与 θ 正则共轭的广义动量就是(5.286)表示的 p_θ.哈密顿量为

$$H_2 = \dot{\rho}p_\rho + \dot{\theta}p_\theta - L_2 = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\theta - \frac{e\mathscr{B}}{2}\rho^2\right)^2. \tag{5.290}$$

(5.282)、(5.283)、(5.285)~(5.288)以及相关讨论都可视为拉氏量(5.289)[即哈密顿量(5.290)]对这个二维问题的推论.取母函数

$$W_2(\theta, J_\theta) = \frac{1}{2\pi}\theta J_\theta \tag{5.291}$$

按§5.4情形二对 θ 自由度作正则变换,得

$$p_\theta = \frac{\partial W_2}{\partial\theta} = \frac{J_\theta}{2\pi}, \qquad \varphi = \frac{\partial W}{\partial J_\theta} = \frac{\theta}{2\pi}. \tag{5.292}$$

其中第一式即(5.288)第一等号表示的关系.将(5.290)用正则变量(ρ, p_ρ)和(φ, J_θ)表示出,就是

$$H_2 = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{8\pi^2 m\rho^2}(J_\theta - e\mathscr{B}\pi\rho^2)^2. \tag{5.293}$$

角变量 φ 为循环坐标,因而作用量 J_θ 守恒.角变量的正则方程为

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H_2}{\partial J_\theta} = \frac{J_\theta - e\mathscr{B}\pi\rho^2}{4\pi^2 m\rho^2} = -\frac{e\mathscr{B}}{2\pi m}, \tag{5.294}$$

末一等号处用了(5.288).(5.292)的第二式表明,这就是(5.285).

对带电粒子在恒定均匀磁场中的运动,以上的讨论是严格的.现设磁场维持恒定和横向均匀,但沿纵向缓慢变化.在随粒子沿磁场方向漂移的坐标系看,带电粒子仍在垂直于磁场的平面内运动,磁场在运动平面内的分布是均匀的.不过,随着粒子沿磁场纵向的漂移,它感到磁场强度在缓慢地变化.由于磁场本身的规律,实际上不存在只沿纵向变化而无横向变化的磁场.只是可要求磁场沿纵向的变化足够缓慢,以致

1. 在与带电粒子轨道圆周尺度可比拟的范围内磁场的横向变化可忽略，

2. 在与带电粒子圆周运动周期可比拟的时间间隔内粒子由于纵向漂移而经历的磁场变化可忽略.

满足此二条件的磁场变化称为绝热的. 在随粒子沿磁场纵向漂移的坐标系中讲，绝热是指磁场横向均匀且在横向运动的几个周期内没有可察觉的变化的意思. 只是经历了许多周期后磁场的变化才显现出来. 可见，在绝热条件下，(5.285)～(5.294)关于横向运动的结论依然成立. 特别是(5.288)表示的作用量与轨道圆周包围的磁通的关系依然成立. 可以对哈密顿量(5.293)作修正. 由于在 φ 变化若干周期的时间间隔内磁场是不变的，哈密顿量与 φ 无关这一定性特征不会被修改. 特别对久期效应而言，各量均对 φ 在一周期内作了平均，不可能再与 φ 有关. 哈密顿量也会保持与 φ 无关. 这就导致作用量 J_θ 不随时间变化. 即作用量有绝热不变性. 按(5.288)，不变的作用量要求伴随磁场的变化带电粒子轨道圆周半径也必须相应变化，以保证轨道所围磁通量不变. 当粒子漂向磁场较强的区域时，横向圆周轨道收缩，它包围的圆面积与磁场强度成反比地减小，以保证二者的乘积不变. 另一方面，粒子的横向动能按(5.277)为

$$T_\perp = \frac{1}{2}mv_\perp^2 = \frac{e^2\mathscr{B}^2\rho^2}{2m} = -\frac{e\mathscr{B}J_\theta}{2m\pi}, \tag{5.295}$$

在 J_θ 不变的条件下随磁感应强度 $|\mathscr{B}|$ 成正比地增长. 然而粒子总动能

$$T = \frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}mv_{/\!/}^2 \equiv T_\perp + T_{/\!/} \tag{5.296}$$

为常数，$T_\perp$ 的增加导致纵向动能 $T_{/\!/}$ 和纵向速度 $v_{/\!/}$ 的减小. 最终将使向强磁场区域的漂移停下来. 接着开始向磁场较弱的区域漂移. 横向动能又逐渐转化为反方向漂移的纵向动能.

在受控热核聚变反应的研究中要将物质加热到 10^9K 的极高温度，以使两个原子核有足够的动能克服彼此间的静电斥力而靠近，创造融合的机会. 在此高温下，原子完全电离. 物质的这种状态称为等离子体. 等离子体不能装在普通容器内，它与器壁的任何接触都会导致温度的骤然下降而丧失融合反应的机会. 要把它装起来又不让接触器壁，人们想起了磁囚禁. 首先，强磁场使带电粒子绕磁场方向作小半径的螺旋运动. (5.277)表明，足够强的磁场可使螺旋半径足够小，使带电粒子不能横向逃逸. 其次，沿磁场方向向两端逐渐加强磁场，直到使两端磁场足够强. 这可阻挡带电粒子沿磁场向两端漂移，将它们推回工作区，使它们不能纵向逃逸. 如果将等离子体所在的区域比作一个瓶子，两端是瓶口，两端特别强的磁场就像是瓶口的塞子，称为磁塞，将瓶口塞住.

§5.9 哈密顿主函数与几何光学中程函的相似 束流光学中发射度的不变性

经典力学与几何光学的相似也明显表现在哈密顿主函数与几何光学的程函(eikonal)之间. 为说明这种相似,先略为介绍几何光学的程函形式. §4.8介绍的费马原理称. 从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的所有联线中光线使(4.206)定义的光程 S 取极值. 用 $\boldsymbol{r}$ 表示所取联线上一点的径矢量,坐标为 x、y 和 z. 联线可用函数 $y(x)$和 $z(x)$表示,x_0、$y_0=y(x_0)$和 $z_0=z(x_0)$为始点坐标,x_1, $y_1=y(x_1)$和 $z_1=z(x_1)$为终点坐标. 光程(4.206)可表示为

$$S=\int_{x_0}^{x_1} n(x,y(x),z(x))\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x, \tag{5.297}$$

其中 $y'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $z'(x)=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. 固定始末点,令此式的变分为零,重复(4.3)~(4.6)的推导. 将这里的 x 比作那里的 t, $y(x)$、$z(x)$比作那里的 $q_\sigma(t)$, $n\sqrt{1+y'^2+z'^2}$比作那里的 L,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\sqrt{1+y'^2+z'^2}\frac{\partial n}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{nz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\sqrt{1+y'^2+z'^2}\frac{\partial n}{\partial z}=0.$$

注意

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x, \tag{5.298}$$

上两式分别成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial y},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}.$$

由 y、z 和 x 的对等地位知,必定还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial x}.$$

三式可合并为一矢量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\nabla n. \tag{5.299}$$

此式规定了光线在每一点的曲率$\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$,是折射定律的逐点表现. 沿曲率方程(5.299)规定的光线作(4.206)右边的积分,得到光程与光线始末端坐标的函数关系 $S(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_0)$,称为程函. 它对光线始末端坐标 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的微分即(4.206)右边积分对它的下限和上限的变分. 先固定 x_0 和 x_1,对(5.297)作变分,得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{x_0}^{x_1}\delta\left[n(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial y}\delta y+\frac{\partial n}{\partial z}\delta z\right)\sqrt{1+y'^2+z'^2}+n\frac{y'\delta y'+z'\delta z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\mathrm{d}x\\ &= n\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z\right)\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)-\frac{\partial n}{\partial y}\right]\delta y\right.\\ &\quad\left.+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)-\frac{\partial n}{\partial z}\right]\delta z\right\}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x\\ &= n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y(x_1)+n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z(x_1)-n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta y(x_0)-n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta z(x_0).\end{aligned}$$

在第三等号处作了部分积分,在第四等号处用了(5.299).再看 δx_1 和 δx_0 的贡献

$$\begin{aligned}&n(x_1,y(x_1),z(x_1))\sqrt{1+y'^2(x_1)+z'^2(x_1)}\delta x_1\\ &\quad-n(x_0,y(x_0),z(x_0))\sqrt{1+y'^2(x_0)+z'^2(x_0)}\delta x_0\\ &=n(x_1,y_1,z_1)\frac{\delta x_1+y_1'^2\delta x_1+z_1'^2\delta x_1}{\sqrt{1+y_1'^2+z_1'^2}}\\ &\quad-n(x_0,y_0,z_0)\frac{\delta x_0+y_0'^2\delta x_0+z_0'^2\delta x_0}{\sqrt{1+y_0'^2+z_0'^2}}.\end{aligned}$$

分别用下标 1 和 0 表示各量在 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 处的值,注意

$$\delta y_1=\delta y(x_1)+y_1'\delta x_1,\qquad \delta z_1=\delta z(x_1)+z_1'\delta x_1,$$
$$\delta y_0=\delta y(x_0)+y_0'\delta x_0,\qquad \delta z_0=\delta z(x_0)+z_0'\delta x_0.$$

得

$$\begin{aligned}\delta S(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_0)&=n_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}\delta x_1+n_1\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s}\delta y_1+n_1\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s}\delta z_1\\ &\quad-n_0\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s}\delta x_0-n_0\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s}\delta y_0-n_0\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s}\delta z_0.\end{aligned}\tag{5.300}$$

另一方面应有

$$\begin{aligned}\delta S(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_0)=&\frac{\partial S}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial S}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial S}{\partial z_1}\delta z_1\\ &+\frac{\partial S}{\partial x_0}\delta x_0+\frac{\partial S}{\partial y_0}\delta y_0+\frac{\partial S}{\partial z_0}\delta z_0.\end{aligned}$$

两式比较知

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial x_1} = n_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y_1} = n_1 \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\partial S}{\partial z_1} = n_1 \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s}, \\
&\frac{\partial S}{\partial x_0} = -n_0 \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y_0} = -n_0 \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\partial S}{\partial z_0} = -n_0 \frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.301}$$

将此式与(5.101)比较可见几何光学与经典力学的相似.此式表明,程函对坐标的微商正比于该坐标对路程长度的微商.程函对坐标的微商为程函等值面法向矢量的分量.坐标对路程长度的微商则为光线切矢量的分量.关系(5.301)因而表明,光沿与程函等值面垂直的方向行进.同样的论证用于(5.101)就是,质点或质点系在位形空间的代表点沿与哈密顿主函数等值面垂直的方向行进.这里,正是理论的抽象得以将运动描绘得如此形象.将光线末端径矢 $\boldsymbol{r}_1$ 改记为 $\boldsymbol{r}$,将程函当作它的函数 $S(\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{r}_0$ 为参量.(5.301)第一组关系可表示为

$$\nabla S = n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}. \tag{5.302}$$

将此式两边平方,由于$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$为单位切矢量,得

$$(\nabla S)^2 = n^2. \tag{5.303}$$

作为对照,考虑保守势场 $V(\boldsymbol{r})$中的质点运动.既然是保守系,哈密顿主函数就可按(5.128)将时间变量分出.剩下的哈密顿特征函数记为 $W(\boldsymbol{r})$.按(5.128)和(5.101),动量可表示为

$$\boldsymbol{p} = \nabla W. \tag{5.304}$$

哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}), \tag{5.305}$$

不含时间的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}(\nabla W)^2 + V(\boldsymbol{r}) = E,$$

E 为能量.将此式略加整理得

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V). \tag{5.306}$$

比较(5.302)、(5.303)和(5.304)、(5.306),看到程函与哈密顿特征函数更密切的相似.这是自然的,它们都不含时间.特别值得注意的是,从(5.303)与(5.306)的比较中再次看到质点运动的量$\sqrt{2m(E-V)}$与光的折射指数 n 之间的对应.

在诸如带电粒子加速器、电子显微镜等一些装置中,带电粒子束在电磁场作用下运动.这些粒子束的流强一般不大,其中各粒子相距较远,之间的相互

作用可略.在这种情况下,粒子束的运动归结为其中每一粒子各自单独在电磁场中的运动.只须解各粒子运动的单体问题,而不必解涉及所有粒子的多体问题.这种粒子束的运动规律类似光束的运动规律,因而称为束流光学.求解哈密顿量为(5.270)的哈密顿-雅可比方程,得哈密顿主函数.每一粒子的动量都垂直于它的各等值面,这就决定了束流的运动.若为恒定电磁场,电磁势$\Phi(\boldsymbol{r})$与$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$与时间无关,则可将时间从哈密顿主函数中分离出来.剩下的哈密顿特征函数$W(\boldsymbol{r})$满足哈密顿量为(5.270)的不含时间的哈密顿-雅可比方程

$$(\nabla W - e\boldsymbol{A})^2 = 2m(E - e\Phi). \tag{5.307}$$

由于$W(\boldsymbol{r})$与哈密顿主函数只差一与坐标无关的项,它的等值面就是哈密顿主函数的等值面.束流运动的规律也可表述为其中各粒子的动量恒垂直于哈密顿特征函数$W(\boldsymbol{r})$的等值面.注意,(5.271)表明粒子速度的方向可不同于动量方向.即粒子行进的实际方向可不垂直于$W(\boldsymbol{r})$的等值面,它们之间的差别可由矢势$\boldsymbol{A}$按(5.271)算出.

可见,束流中各粒子虽各自独立地运动,束流却有其整体性质.例如其中各粒子的运动都由一共同的哈密顿主函数决定.用§5.3介绍的通用积分不变量可对束流的整体性质更深入地了解.在七维增广相空间中,每一粒子的运动由一条曲线表示.曲线上一点对应一给定时刻t和该时刻粒子的坐标(x, y, z)和动量(p_x, p_y, p_z).称此曲线为粒子的路径.束流中各粒子路径组成一路径管,在此管上定义了各种通用积分不变量.例如在$t=$常数的管的横截面上定义了庞加莱二维绝对积分不变量

$$J_2 = \iint \delta p_x \delta x + \iint \delta p_y \delta y + \iint \delta p_z \delta z, \tag{5.308}$$

积分在上述横截面上进行.它表示出束流中各粒子的坐标和动量在各方向上分散的程度,在束流光学中称为发射度(emittence).§5.3中证明了,这个发射度不随时间改变,且这种不变性源于经典力学规律本身,而和粒子受何种作用无关.即是说,一旦束流形成,它的发射度就定了,任何力学手段无法将它改变.这里说的力学手段是指改变束流中各单粒子受的作用.确实可用力学手段将束流聚焦,即缩小它空间分布的分散程度.然而发射度的不变性立即导致束流中粒子动量分布分散程度的增加,使束流中各粒子在离开焦点后迅速向各方向逃逸.自然并非完全无法改变发射度,只是为此必须改变力学系统本身.例如将束流中粒子的运动与另一系统耦合起来.设这个系统有f个自由度,耦合前的二维绝对积分不变量为

$$J_2' = \iint_S \sum_{\sigma=1}^{f} \delta p_\sigma \delta q_\sigma .$$

耦合后守恒的不再是J_2和J_2',而是它们的和.这就给人以机会,在不违背力

学规律的条件下减小 J_2，增加 J_2'. 即让另一系统带走束流“多余的”发射度. 这叫将束流“冷却”.

习 题 五

1. 一 N 质点系的势函数 $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, t)$ 与质点的速度无关，

(1)写出质点系的拉氏量；

(2)求出与第 i 质点坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 正则共轭的广义动量，确证它就是初等力学定义的质点动量；

(3)求出质点系的哈密顿量，确证在势函数不显含时间 t 的条件下它就是初等力学定义的机械能.

2. 设 N 质点系的势函数

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{G}_i, \tag{5.309}$$

V_0 和 $\boldsymbol{G}_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 都只是 N 个质点坐标 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ 和时间 t 的函数，与质点的速度无关，$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$ 则是第 i 质点的速度.

(1)写出质点系的拉氏量；

(2)证明与坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 正则共轭的动量为

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{G}_i, \tag{5.310}$$

m_i 为第 i 质点的质量；

(3)证明质点系的哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} (\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{G}_i)^2 + V_0. \tag{5.311}$$

3. 求出第 1 题质点系的哈密顿正则方程，确证它们就是动量的定义和拉格朗日方程，亦即牛顿方程.

4. 求出第 2 题质点系的哈密顿正则方程，确证它们就是广义动量的定义和拉格朗日方程，讨论广义动量和牛顿动量的区别，拉格朗日方程和牛顿方程在表达形式上的区别.

5. $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别为质点的坐标和(广义)动量，它绕坐标原点的(广义)角动量定义为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{5.312}$$

三个分量为

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x, \tag{5.313}$$

试证它们之间的泊松括号为

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y. \tag{5.314}$$

6. 分别用 $\boldsymbol{r}_i$、$\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ 表示第 i 质点的坐标、(广义)动量和绕原点的(广义)角动量，N 质点系绕原点的(广义)角动量定义为

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i. \tag{5.315}$$

试证它的分量间泊松括号也有关系(5.314).

7. 试证一个质点角动量的三个投影 L_x、L_y 和 L_z 与它的径矢量长 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

和动量平方 $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$ 的泊松括号皆为零，记作

$$[\boldsymbol{L},r]=0,\quad [\boldsymbol{L},p^2]=0. \tag{5.316}$$

由此进一步证明，这些投影与中心场中的哈密顿量 $H=\frac{p^2}{2m}+V(r)$ 的泊松括号也为零，从而得到 §1.4 中的结论：中心场中角动量守恒.

8. 试证角动量在互相垂直的三个方向上的三个投影中若有两个守恒则第三个投影也守恒，从而角动量守恒.

9. 折合质量为 μ 的质点在势场 $V(r)=-\frac{C}{r}$ 中作开普勒运动. 可定义拉普拉斯-龙格-楞茨(Laplace-Runge-Lenz)矢量

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{C}{r}\boldsymbol{r}. \tag{5.317}$$

证明此矢量守恒，恒取由力心到近日点的方向. 此矢量的守恒使近日点方向不变，从而保证了椭圆轨道的闭合.

10. 质量为 m 的质点在三维各向同性简谐振动势场(4.58)中运动，试证除角动量 $\boldsymbol{L}$ 外尚有下列各量守恒：

$$\left.\begin{aligned}
Q_0&\equiv\frac{m\omega}{2\sqrt{3}}(r^2-3z^2)+\frac{1}{2\sqrt{3}m\omega}(p^2-3p_z^2),\\
Q_1&\equiv\frac{m\omega}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{2m\omega}(p_x^2-p_y^2),\\
Q_{xy}&=m\omega xy+\frac{1}{m\omega}p_xp_y,\\
Q_{yz}&=m\omega yz+\frac{1}{m\omega}p_yp_z,\\
Q_{zx}&=m\omega zx+\frac{1}{m\omega}p_zp_x.
\end{aligned}\right\} \tag{5.318}$$

与开普勒运动类似，三维各向同性简谐振动的轨道也是闭合椭圆.

11. 由哈密顿正则方程的一半

$$\dot{q}_\sigma=\frac{\partial H}{\partial p_\sigma},\quad \sigma=1,2,\cdots,f,$$

反解出 p_σ 作为广义坐标(q_σ)和广义速度($\dot{q}_\sigma$)的函数. 代入逆勒让德变换

$$L=\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{q}_\sigma p_\sigma-H$$

右边，消去广义动量(p_σ). 这样得到的 L 为广义坐标、广义速度和时间的函数. 试证以它作为拉氏函数导出的拉格朗日方程与由原先哈密顿量 H 导出的正则方程等价.

12. 由哈密顿正则方程的另一半

$$\dot{p}_\sigma=-\frac{\partial H}{\partial q_\sigma},\quad \sigma=1,2,\cdots,f,$$

反解出 q_σ 作为广义动量(p_σ)及其对时间的全微商($\dot{p}_\sigma$)的函数. 代入逆勒让德变换

$$L=-\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{p}_\sigma q_\sigma-H$$

右边，消去广义坐标(q_σ). 这样得到的 L 为广义动量、广义动量对时间的全微商和时间的

函数.试证运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial p_\sigma}=0,\quad \sigma=1,2,\cdots,f. \tag{5.319}$$

讨论这一结果.

13. 全同变换 $q_\sigma\to Q_\sigma$, $p_\sigma\to P_\sigma$ 显然保持正则方程不变,因而是正则变换.它可由母函数 $W_2=\sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma P_\sigma$ 按情形二完成.问在其他三种情形中能否找到适当的母函数完成这一全同正则变换?

14. 广义坐标与广义动量间的交换 $q_\sigma\to -P_\sigma$, $p_\sigma\to Q_\sigma$ 也保持正则方程不变,因而是正则变换.它可由母函数 $W_1=\sum_{\sigma=1}^{f}q_\sigma Q_\sigma$ 按情形一完成.问在其他三种情形中能否找到适当的母函数完成这一交换正则变换?

15. 单纯的坐标变换

$$Q_\sigma=Q_\sigma(q_1,q_2,\cdots,q_f,t),\quad \sigma=1,2,3,\cdots,f,$$

不改变拉格朗日方程,却可改变广义动量.因此,配以适当的动量变换后可组成正则变换.试找出这种正则变换的一种方式和相应的母函数,并求出与之配套的动量变换.

16. 试证

$$Q_\sigma=q_\sigma\cos\alpha_\sigma-p_\sigma\sin\alpha_\sigma,\quad P_\sigma=q_\sigma\sin\alpha_\sigma+p_\sigma\cos\alpha_\sigma,\quad \sigma=1,2,\cdots,f, \tag{5.320}$$

为一正则变换,其中 $\alpha_\sigma,\sigma=1,2,\cdots,f$,为参数.若 $\alpha_\sigma\neq\frac{\pi}{2}$,这个正则变换可由母函数

$$W=\sum_{\sigma=1}^{f}\left[\frac{P_\sigma q_\sigma}{\cos\alpha_\sigma}-\left(\frac{q_\sigma^2}{2}+\frac{P_\sigma^2}{2}\right)\tan\alpha_\sigma\right] \tag{5.321}$$

按情形二实现.问在其他三种情形中能否找到适当母函数实现这个正则变换?

17. 设一个质点的万有引力也非严格的平方反比力,引力势除(5.131)外还有一个修正

$$V'=\frac{\lambda}{r^n},\quad n>1, \tag{5.322}$$

常数 λ 足够小,使此项势能修正可当摄动.试就 $n=2$、3 两种情形推导近日点进动公式.

18. 设 x 方向的一维简谐振动受

$$H'=\lambda x^4 \tag{5.323}$$

的摄动,λ 为小常数.试计算振动轨道参数随时间的变化.

19. 试计算摄动(5.323)引起的振动频率的变化.

20. 一质量为 m 的小球由长 l 的绳悬挂作小振幅单摆运动.设无限缓慢地将绳缩短到$\frac{l}{2}$,问须作功几许?

第六章　刚体动力学　转动

§6.1　刚体动能　转动惯量张量　惯量椭球与惯量主轴　正交坐标系间的正交变换

按§2.4的分析，刚体运动可分解为其上任一点的移动和绕这点的转动．称这点为刚体的转动中心，简称中心．按达朗贝尔定理，绕中心的转动恒为绕轴转动．称此轴为转动轴，它可随时间变化，但恒通过中心．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿转动轴方向．刚体上一点的速度为它相对中心的速度 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 与中心速度 $\boldsymbol{v}$ 之和，$\boldsymbol{r}$ 从中心指向此点．此点处质量为 $\mathrm{d}m$ 的一小点刚体因而有动能

$$\mathrm{d}T=\frac{\mathrm{d}m}{2}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2=\frac{\mathrm{d}m}{2}[v^2+2\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2]. \tag{6.1}$$

将它在全刚体积分即得刚体动能

$$T=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2+M\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})+T_\omega, \tag{6.2}$$

其中 $M=\int\mathrm{d}m$ 为刚体质量，$\boldsymbol{R}=\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}m/M$ 为从中心指向刚体质心的径矢量．第三项

$$\begin{aligned}T_\omega&=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\omega}\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\mathrm{d}m\\&=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\omega}\cdot[r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})]\mathrm{d}m.\end{aligned} \tag{6.3}$$

引进幺并矢或幺张量

$$\boldsymbol{I}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i, \tag{6.4}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3$ 为任选的三条互相垂直的轴上的单位矢量，有关系

$$\boldsymbol{\xi}_i\cdot\boldsymbol{\xi}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j,\\0, & \text{若 } i\neq j.\end{cases} \tag{6.5}$$

三维空间的任一矢量 $\boldsymbol{V}$ 可用此正交单位矢量系展开

$$\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{3}V_i\boldsymbol{\xi}_i, \tag{6.6}$$

由(6.5)得

$$V_i = \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\xi}_i. \tag{6.7}$$

代回(6.6)得

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \cdot \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i. \tag{6.8}$$

与(6.4)比较看出此式可表示为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{I}. \tag{6.9}$$

它表明,幺张量(6.4)与任一矢量左右点乘的结果都仍得此矢量,就像在上面乘1一样.这就是它的名称"幺"的来历.利用幺张量,(6.3)可表示为

$$T_\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathscr{I}}{2} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{6.10}$$

其中

$$\mathscr{I} = \int (r^2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{rr}) \mathrm{d}m \tag{6.11}$$

定义为刚体绕其转动中心的转动惯量张量.将径矢量展开式写作 $\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \boldsymbol{\xi}_i$,转动惯量张量可展开为

$$\mathscr{I} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_j, \tag{6.12}$$

$$\mathscr{I}_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \mathrm{d}m. \tag{6.13}$$

(6.10)可表示为

$$T_\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \omega_i \omega_j, \tag{6.14}$$

其中 $\omega_i = \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\omega}$ 为角速度在 $\boldsymbol{\xi}_i$ 方向上的投影.此式只与刚体绕中心转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 有关而与中心移动速度 $\boldsymbol{v}$ 无关,是刚体绕其中心的转动动能.如果刚体不受约束,最好取它的质心作中心.这使从中心到质心的径矢 $\boldsymbol{R} = 0$,动能(6.2)简化为

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \omega_i \omega_j. \tag{6.15}$$

它是质心移动动能与绕质心的转动动能之和.其中移动动能及其代表的质心移动与质点运动类似.本章着重讨论转动动能及其代表的转动.为此采用质心坐标系,即取质心为坐标原点,因此 $\boldsymbol{v} = 0$,(6.15)进一步简化为

$$T = T_\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \omega_i \omega_j. \tag{6.16}$$

在有些问题中,刚体上一点被固定.在这类问题中自然宜取此固定点为刚体的转动中心和坐标原点,而不论它是否为质心.按此选择 $\boldsymbol{v} = 0$,动能(6.2)直接简化为(6.16).这两类问题中要讨论的都是刚体绕定点的转动.

称瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向为 ζ，该方向的单位矢量记为

$$\boldsymbol{\zeta} = \sum_{i=1}^{3} \zeta_i \boldsymbol{\xi}_i, \tag{6.17}$$

ζ_1、ζ_2 和 ζ_3 为它的方向余弦．于是有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\zeta}, \qquad \omega_i = \omega \zeta_i. \tag{6.18}$$

代入(6.16)得

$$T = \frac{1}{2} \mathscr{I} \omega^2, \tag{6.19}$$

其中

$$\mathscr{I} \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \zeta_i \zeta_j \tag{6.20}$$

为刚体绕 ζ 轴的转动惯量，它是 ζ 取向的函数．定义矢量

$$\boldsymbol{\rho} \equiv \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\sqrt{\mathscr{I}}} = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \boldsymbol{\xi}_i, \qquad \rho_i = \frac{\zeta_i}{\sqrt{\mathscr{I}}}. \tag{6.21}$$

它长 $\frac{1}{\sqrt{\mathscr{I}}}$，在 ζ 方向上．以 $\mathscr{I}$ 除(6.20)两边，再用此式得

$$\sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij} \rho_i \rho_j = 1. \tag{6.22}$$

这是坐标 ρ_1、ρ_2 和 ρ_3 的二次方程，表明矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 的末端描绘出一个二次曲面．如果刚体为一以中心为球心的均匀球，这个二次曲面应为球面．因此，一般情形下它应能从一个球面连续形变得到．能从球面连续形变得到的二次曲面为椭球面，球面为它的特殊情形．可见(6.22)为一椭球面方程，它表示的椭球称为这刚体的惯量椭球．这是一个 $\boldsymbol{\rho}$ 空间的椭球．由于(6.22)只含 $\boldsymbol{\rho}$ 的偶次项，若 $\boldsymbol{\rho}$ 符合方程，$-\boldsymbol{\rho}$ 也必符合方程．因此椭球中心为 $\boldsymbol{\rho}$ 空间原点．从中心沿一方向到达椭球面的距离与刚体绕此方向转动惯量的平方根成反比．

作为一种几何构造，惯量椭球是刚体的一种性质，与表达方式无关．然而描绘它的方程(6.22)却与表达方式有关，具体说就是，与用来构造坐标架的三个单位矢量 $\boldsymbol{\xi}_1$、$\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3$ 的取法有关．用它们构造的坐标架称为 $O\xi_1\xi_2\xi_3$，O 为原点．可另取三个互相垂直的单位矢量 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$ 和 $\boldsymbol{\eta}_3$，它们满足

$$\boldsymbol{\eta}_i \cdot \boldsymbol{\eta}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j, \\ 0, & \text{若 } i \neq j. \end{cases} \tag{6.23}$$

用它们和原点 O 组成的坐标架 $O\eta_1\eta_2\eta_3$ 同样可表示矢量和张量．例如任一矢量

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i^{\xi} \boldsymbol{\xi}_i = \sum_{i=1}^{3} V_i^{\eta} \boldsymbol{\eta}_i, \quad V_i^{\xi} = \boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{V}, \quad V_i^{\eta} = \boldsymbol{\eta}_i \cdot \boldsymbol{V}. \tag{6.24}$$

为节省书写，可略去上标 ξ，这与前面的表示法一致．η 矢量与 ξ 矢量可互相展

开

$$\boldsymbol{\eta}_i = \sum_{j=1}^{3} \eta_{ji}\boldsymbol{\xi}_j, \quad \boldsymbol{\xi}_j = \sum_{i=1}^{3} \xi_{ij}\boldsymbol{\eta}_i, \tag{6.25}$$

且

$$\xi_{ij} = \boldsymbol{\eta}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{\xi}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i = \eta_{ji}. \tag{6.26}$$

由 η 单位矢量的正交性和 ξ 单位矢量的正交性分别得

$$\sum_{j=1}^{3} \eta_{ji}\eta_{ji'} = \delta_{ii'}, \quad \sum_{i=1}^{3} \xi_{ij}\xi_{ij'} = \delta_{jj'}. \tag{6.27}$$

由(6.26)知,它们又可表示为

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}\xi_{i'j} = \delta_{ii'}, \quad \sum_{i=1}^{3} \eta_{ji}\eta_{j'i} = \delta_{jj'}. \tag{6.28}$$

以 i 为行标,j 为列标,可将 ξ_{ij} 排成一矩阵

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}, \tag{6.29}$$

类似地可将 η_{ji} 排成矩阵

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

一个矩阵的一列或一行的元素可看成一个矢量的诸分量.按此看法,性质(6.27)和(6.28)表明矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$ 的三列恰为三个互相正交的单位矢量,它的三行也是互相正交的三个矢量.具有这种性质的矩阵叫正交矩阵.$\boldsymbol{\Xi}$ 为三行三列的正交矩阵.同理,性质(6.27)和(6.28)也表明 $\boldsymbol{H}$ 为三行三列的正交矩阵.另一方面(6.26)表明,若将行变列,列变行,则 $\boldsymbol{\Xi}$ 矩阵变为 $\boldsymbol{H}$ 矩阵,$\boldsymbol{H}$ 矩阵变为 $\boldsymbol{\Xi}$ 矩阵.两个矩阵间的这种关系称互为转置.$\boldsymbol{\Xi}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的转置矩阵,$\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{\Xi}$ 的转置矩阵,分别记为

$$\boldsymbol{\Xi} = \widetilde{\boldsymbol{H}}, \quad \boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}. \tag{6.31}$$

它们的正交性则可表示为[①]

$$\boldsymbol{\Xi}\widetilde{\boldsymbol{\Xi}} = \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}\boldsymbol{\Xi} = I, \quad \boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H} = I. \tag{6.32}$$

这里

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

① 矩阵乘法和一般的矩阵运算见附录一.

为三行三列的幺矩阵.将(6.25)代入(6.24)的第一式得

$$\sum_{i=1}^{3} V_i^{\xi}\boldsymbol{\xi}_i = \sum_{i=1}^{3} V_i^{\eta}\sum_{j=1}^{3}\eta_{ji}\boldsymbol{\xi}_j = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3}\eta_{ij}V_j^{\eta}\Big)\boldsymbol{\xi}_i,$$

$$\sum_{i=1}^{3} V_i^{\eta}\boldsymbol{\eta}_i = \sum_{i=1}^{3} V_i^{\xi}\sum_{j=1}^{3}\xi_{ji}\boldsymbol{\eta}_j = \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3}\xi_{ij}V_j^{\xi}\Big)\boldsymbol{\eta}_i.$$

可见

$$V_i^{\xi} = \sum_{j=1}^{3}\eta_{ij}V_j^{\eta}, \quad V_i^{\eta} = \sum_{j=1}^{3}\xi_{ij}V_j^{\xi}. \tag{6.34}$$

它们表明,同一矢量 $\boldsymbol{V}$ 的 ξ 表示(V_1^{ξ}, V_2^{ξ}, V_3^{ξ})和 η 表示(V_1^{η}, V_2^{η}, V_3^{η})间是由矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}$ 来变换的.这两个矩阵都是正交矩阵.一般说来.一个矢量用不同正交坐标架做出的不同表示间恒由正交矩阵变换.这种变换叫正交变换.

再看张量的不同表示间的变换.惯量张量的展开式(6.12)可采用不同坐标架.若采用 $O\eta_1\eta_2\eta_3$ 坐标架即成为

$$\mathscr{I} = \sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{I}_{ij}^{\eta}\boldsymbol{\eta}_i\boldsymbol{\eta}_j, \tag{6.35}$$

$$\mathscr{I}_{ij}^{\eta} = \int(r^2\delta_{ij} - r_i^{\eta}r_j^{\eta})\mathrm{d}m. \tag{6.36}$$

不论将(6.25)的两式分别代入(6.35)和(6.12),或将(6.34)两式分别代入(6.13)和(6.36)并利用(6.27)和(6.28),均得变换关系

$$\mathscr{I}_{ij}^{\xi} = \sum_{i',j'=1}^{3}\eta_{ii'}\eta_{jj'}\mathscr{I}_{i'j'}^{\eta}, \quad \mathscr{I}_{ij}^{\eta} = \sum_{i',j'=1}^{3}\xi_{ii'}\xi_{jj'}\mathscr{I}_{i'j'}^{\xi}. \tag{6.37}$$

一个张量用不同正交坐标架做的不同表示间也由正交矩阵变换.采用矩阵符号和矩阵乘法可将变换关系(6.34)和(6.37)表示得更简洁.将矢量 $\boldsymbol{V}$ 的 ξ 和 η 表示分别写成列矩阵

$$\boldsymbol{V}^{\xi} = \begin{bmatrix} V_1^{\xi} \\ V_2^{\xi} \\ V_3^{\xi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}^{\eta} = \begin{bmatrix} V_1^{\eta} \\ V_2^{\eta} \\ V_3^{\eta} \end{bmatrix}. \tag{6.38}$$

正交变换(6.34)可表示为

$$\boldsymbol{V}^{\xi} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{V}^{\eta}, \quad \boldsymbol{V}^{\eta} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{V}^{\xi}. \tag{6.39}$$

将惯量张量$\mathscr{I}$的 ξ 和 η 表示分别写成矩阵

$$\mathscr{I}^{\xi} = \begin{bmatrix} \mathscr{I}_{11}^{\xi} & \mathscr{I}_{12}^{\xi} & \mathscr{I}_{13}^{\xi} \\ \mathscr{I}_{21}^{\xi} & \mathscr{I}_{22}^{\xi} & \mathscr{I}_{23}^{\xi} \\ \mathscr{I}_{31}^{\xi} & \mathscr{I}_{32}^{\xi} & \mathscr{I}_{33}^{\xi} \end{bmatrix}, \quad \mathscr{I}^{\eta} = \begin{bmatrix} \mathscr{I}_{11}^{\eta} & \mathscr{I}_{12}^{\eta} & \mathscr{I}_{13}^{\eta} \\ \mathscr{I}_{21}^{\eta} & \mathscr{I}_{22}^{\eta} & \mathscr{I}_{23}^{\eta} \\ \mathscr{I}_{31}^{\eta} & \mathscr{I}_{32}^{\eta} & \mathscr{I}_{33}^{\eta} \end{bmatrix}. \tag{6.40}$$

(6.37)可表示为

$$\mathscr{I}^{\xi} = \boldsymbol{H}\mathscr{I}^{\eta}\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}\mathscr{I}^{\eta}\boldsymbol{\Xi}, \quad \mathscr{I}^{\eta} = \boldsymbol{\Xi}\mathscr{I}^{\xi}\widetilde{\boldsymbol{\Xi}} = \widetilde{\boldsymbol{H}}\mathscr{I}^{\xi}\boldsymbol{H}. \tag{6.41}$$

它们都是由正交矩阵实现的张量变换，称为张量的正交变换.

有了这些数学准备，便可讨论怎样选择坐标架 $O\eta_1\eta_2\eta_3$ 使惯量张量$\mathscr{I}$的表示最简单.惯量椭球的概念给人以直观启示.一个椭球有三条互相垂直的主轴.取椭球中心为原点 O，它的三条主轴为坐标轴 η_1、η_2 和 η_3，惯量椭球方程(6.22)将化成标准形式

$$\frac{\rho_1^2}{a_1^2}+\frac{\rho_2^2}{a_2^2}+\frac{\rho_3^2}{a_3^2}=1, \tag{6.42}$$

其中 a_1、a_2 和 a_3 分别为三条主轴的半轴长，坐标 ρ_i^η，$i=1,2,3$ 的上标 η 已略去.与(6.22)比较知，在此坐标系中，惯量张量诸分量

$$\mathscr{I}_{ij}^{\eta}=\mathscr{I}_i\delta_{ij}, \tag{6.43}$$

其中

$$\mathscr{I}_i=\frac{1}{a_i^2} \tag{6.44}$$

为绕第 i 主轴的转动惯量.惯量椭球的三条主轴称为惯量主轴.

剩下的问题是求出惯量主轴 η_1、η_2 和 η_3.在已取坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$ 的条件下即是求出这三主轴在 ξ 坐标系中的方向余弦，即(6.25)第一式中的展开系数 η_{ji}，$j,i=1,2,3$.它们按(6.30)组成正交矩阵 $\boldsymbol{H}$.现在要求它按(6.41)将一个给定矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 变成的$\mathscr{I}^{\eta}$ 具有简单形式(6.43).即要求它变得的

$$\mathscr{I}^{\eta}=\begin{pmatrix}\mathscr{I}_1 & 0 & 0\\ 0 & \mathscr{I}_2 & 0\\ 0 & 0 & \mathscr{I}_3\end{pmatrix} \tag{6.45}$$

是一对角矩阵，只在主对角线上有非零矩阵元.这种运算称为将变换前的矩阵 $\mathscr{I}^{\xi}$ 对角化.由于 $\boldsymbol{H}$ 是一正交矩阵，(6.41)第二式表明，这只要它的每一列经矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 运算后得到的是该列乘以常数即可.对第 i 列，这条件就是

$$\begin{bmatrix}\mathscr{I}_{11}^{\xi} & \mathscr{I}_{12}^{\xi} & \mathscr{I}_{13}^{\xi}\\ \mathscr{I}_{21}^{\xi} & \mathscr{I}_{22}^{\xi} & \mathscr{I}_{23}^{\xi}\\ \mathscr{I}_{31}^{\xi} & \mathscr{I}_{32}^{\xi} & \mathscr{I}_{33}^{\xi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_{1i}\\ \eta_{2i}\\ \eta_{3i}\end{bmatrix}=\mathscr{I}_i\begin{bmatrix}\eta_{1i}\\ \eta_{2i}\\ \eta_{3i}\end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

此方程称为矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 的本征方程.它的由分量 η_{1i}、η_{2i}和 η_{3i}组成的非零矢量解 $\boldsymbol{\eta}_i$ 称为矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 的本征矢量；使方程有本征矢解的常数 $\mathscr{I}_i$ 称为这个矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 本征值.求解本征方程(6.46)的问题称为矩阵$\mathscr{I}^{\xi}$ 的本征值问题.这个本征方程规定的是张量$\mathscr{I}$和矢量 $\boldsymbol{\eta}_i$ 的关系，应与表示法无关.可将它简洁地表示为

$$\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{\eta}_i=\mathscr{I}_i\boldsymbol{\eta}_i. \tag{6.47}$$

求惯量主轴的问题乃是惯量张量的本征值问题.为从(6.46)、(6.30)和(6.41)得到对角矩阵(6.45)，必须求得三个正交单位本征矢量，满足关系(6.27).这

由线性代数的一条定理保证.这条定理确认,一个 n 行 n 列的实对称矩阵恒有 n 个彼此正交的单位本征矢.(6.13)表明 $\mathscr{I}_{ij}^{\xi}=\mathscr{I}_{ji}^{\xi}$ 均为实数.具这种性质的矩阵 $\mathscr{I}^{\xi}$ 就叫实对称矩阵.按此定理,它确有三个正交单位本征矢.为使本书自给自足,已将此定理及其证明收在附录一中.

§6.2 角动量及其泊松括号 角动量守恒

以转动中心为原点,刚体上由径矢 $\boldsymbol{r}$ 表示的一点由于角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 的转动而有速度 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$.该处质量为 $\mathrm{d}m$ 的一点刚体有动量 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\mathrm{d}m$,因而有绕中心的角动量 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m$.将它在全刚体积分即得刚体绕其中心的角动量

$$\boldsymbol{L}=\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{\omega},\tag{6.48}$$

其中 $\mathscr{I}$ 即(6.11)表示的转动惯量张量.采用惯量主轴坐标系,并称之为 $O\xi\eta\zeta$,三轴上的三个单位矢量 $\boldsymbol{\xi}_0$、$\boldsymbol{\eta}_0$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_0$ 就是由(6.47)解出的三个互相正交的单位本征矢 $\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_2$ 和 $\boldsymbol{\eta}_3$,相应本征值现称为 $\mathscr{I}_{\xi}$、$\mathscr{I}_{\eta}$ 和 $\mathscr{I}_{\zeta}$.惯量椭球是刚体的性质,自然是固定在刚体上的.惯量主轴坐标系乃是一本体坐标系.在此坐标系中惯量张量的矩阵表示(6.45)成为对角的,因此

$$\mathscr{I}=\mathscr{I}_{\xi}\boldsymbol{\xi}_0\boldsymbol{\xi}_0+\mathscr{I}_{\eta}\boldsymbol{\eta}_0\boldsymbol{\eta}_0+\mathscr{I}_{\zeta}\boldsymbol{\zeta}_0\boldsymbol{\zeta}_0.\tag{6.49}$$

代入(6.48)得

$$\boldsymbol{L}=\mathscr{I}_{\xi}\omega_{\xi}\boldsymbol{\xi}_0+\mathscr{I}_{\eta}\omega_{\eta}\boldsymbol{\eta}_0+\mathscr{I}_{\zeta}\omega_{\zeta}\boldsymbol{\zeta}_0,\tag{6.50}$$

$$\omega_{\xi}\equiv\boldsymbol{\xi}_0\cdot\boldsymbol{\omega},\quad\omega_{\eta}\equiv\boldsymbol{\eta}_0\cdot\boldsymbol{\omega},\quad\omega_{\zeta}\equiv\boldsymbol{\zeta}_0\cdot\boldsymbol{\omega}.\tag{6.51}$$

刚体角动量的定义(6.48)直接基于牛顿力学,可称为刚体角动量定义的牛顿方式.这种方式的优点是直观,缺点则是与正则变量的关系不明显,不便用于强有力的分析力学.刚体角动量可按另一种方式(称为拉格朗日方式)来定义.用欧拉角作刚体转动自由度的广义坐标,将与它们正则共轭的广义动量定义为刚体角动量沿相应转轴的分量.单独考虑转动,在惯量主轴本体坐标系中,刚体转动动能(6.16)可表示为

$$T=\frac{1}{2}\mathscr{I}_{\xi}\omega_{\xi}^2+\frac{1}{2}\mathscr{I}_{\eta}\omega_{\eta}^2+\frac{1}{2}\mathscr{I}_{\zeta}\omega_{\zeta}^2.\tag{6.52}$$

用欧拉角 θ、φ 和 φ_{ζ} 表示惯量主轴本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 相对于空间固定坐标系 $Oxyz$ 的取向.将角速度的欧拉角表达式(2.68)代入(6.52),便得到动能 T 用欧拉角和它们对时间的微商的表达式.设刚体转动势函数与转速无关,角动量 $\boldsymbol{L}$ 沿 y'、z 和 ζ 方向的分量便分别定义为

$$\left.\begin{aligned} L_{y'} \equiv p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \mathscr{I}_\xi \omega_\xi \sin\varphi_\zeta + \mathscr{I}_\eta \omega_\eta \cos\varphi_\zeta, \\ L_z \equiv p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = -\mathscr{I}_\xi \omega_\xi \sin\theta\cos\varphi_\zeta + \mathscr{I}_\eta \omega_\eta \sin\theta\sin\varphi_\zeta + \mathscr{I}_\zeta \omega_\zeta \cos\theta, \\ L_\zeta \equiv p_{\varphi_\zeta} &= \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_\zeta} = \mathscr{I}_\zeta \omega_\zeta . \end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

另一方面,取角动量与(2.63)~(2.65)两边的标量积,得

$$\left.\begin{aligned} L_{y'} &= -\sin\varphi L_x + \cos\varphi L_y = \sin\varphi_\zeta L_\xi + \cos\varphi_\zeta L_\eta, \\ L_z &= -\sin\theta\cos\varphi_\zeta L_\xi + \sin\theta\sin\varphi_\zeta L_\eta + \cos\theta L_\zeta, \\ L_\zeta &= \sin\theta\cos\varphi L_x + \sin\theta\sin\varphi L_y + \cos\theta L_z . \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

角动量在惯量主轴 ζ 上的投影 L_ζ 已由(6.53)第三式给出.在另两主轴 ξ 和 η 上的投影 L_ξ 和 L_η 可由(6.54)前两式解出,它们左边的 $L_{y'}$ 和 L_z 由(6.53)前两式表达.其实,比较(6.53)和(6.54),可以看出这个解就是

$$L_\xi = \mathscr{I}_\xi \omega_\xi, \qquad L_\eta = \mathscr{I}_\eta \omega_\eta . \tag{6.55}$$

它们和(6.53)第三式一起就是(6.50).可见,角动量的两种定义一致.矢量在不同坐标系之间按一定方式变换,两个矢量只要在一个坐标系中有相同的表示,在所有坐标系中就都有相同的表示,就是同一个矢量.即是说,按拉格朗日方式(6.53)定义的刚体角动量在一般情形下的表达式也是(6.48).现在可将角动量用正则变量表示出.从(6.54)前两式反解出 L_ξ 和 L_η 作为欧拉角及与它们正则共轭的广义动量 $p_\theta = L_{y'}$、$p_\varphi = L_z$ 和 $p_{\varphi_\zeta} = L_\zeta$ 的函数.与(6.53)第三式一起为

$$\left.\begin{aligned} L_\xi &= p_\theta \sin\varphi_\zeta - p_\varphi \frac{\cos\varphi_\zeta}{\sin\theta} + p_{\varphi_\zeta} \cot\theta\cos\varphi_\zeta, \\ L_\eta &= p_\theta \cos\varphi_\zeta + p_\varphi \frac{\sin\varphi_\zeta}{\sin\theta} - p_{\varphi_\zeta} \cot\theta\sin\varphi_\zeta, \\ L_\zeta &= p_{\varphi_\zeta} . \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

由此可算得泊松括号

$$[L_\xi, L_\eta] = -L_\zeta, \quad [L_\eta, L_\zeta] = -L_\xi, \quad [L_\zeta, L_\xi] = -L_\eta . \tag{6.57}$$

同理,可从(6.54)的第一、三两式反解出 L_x 和 L_y,与(6.53)的第二式一起为

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -p_\theta \sin\varphi - p_\varphi \cot\theta\cos\varphi + p_{\varphi_\zeta} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}, \\ L_y &= p_\theta \cos\varphi - p_\varphi \cot\theta\sin\varphi + p_{\varphi_\zeta} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \\ L_z &= p_\varphi . \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

由此算得泊松括号

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y. \tag{6.59}$$

由(6.56)和(6.58)还算得

$$\left.\begin{aligned} &[L_x, L_\xi] = [L_x, L_\eta] = [L_x, L_\zeta] = 0, \\ &[L_y, L_\xi] = [L_y, L_\eta] = [L_y, L_\zeta] = 0, \\ &[L_z, L_\xi] = [L_z, L_\eta] = [L_z, L_\zeta] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

它们表明,角动量在空间固定坐标轴上的投影与在本体坐标轴上的投影间的泊松括号为零.

(2.68)表明,角速度分量为广义角速度 $\dot\theta$、$\dot\varphi$ 和 $\dot\varphi_\zeta$ 的线性齐次函数.将它们代入(6.52)得到的刚体动能 T 为广义速度的二次齐次函数.因此

$$\dot\theta p_\theta + \dot\varphi p_\varphi + \dot\varphi_\zeta p_{\varphi_\zeta} = \dot\theta \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} + \dot\varphi \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} + \dot\varphi_\zeta \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_\zeta} = 2T. \tag{6.61}$$

绕定点自由转动的刚体势函数为零,拉氏量就是动能 T,因此哈密顿量为

$$H = \dot\theta p_\theta + \dot\varphi p_\varphi + \dot\varphi_\zeta p_{\varphi_\zeta} - T = T.$$

用(6.53)第三式和(6.55)表示的角动量分量消去(6.52)中的角速度分量,代入上式得

$$H = \frac{L_\xi^2}{2\mathscr{I}_\xi} + \frac{L_\eta^2}{2\mathscr{I}_\eta} + \frac{L_\zeta^2}{2\mathscr{I}_\zeta}, \tag{6.62}$$

其中的角动量分量则理解为它们的正则变量表达式(6.56).由(6.60)立即看出

$$[L_x, H] = [L_y, H] = [L_z, H] = 0, \tag{6.63}$$

它们表明角动量在空间固定方向上的分量守恒.用空间固定的单位矢量将这些分量组合起来即得角动量 $\boldsymbol{L} = L_x\boldsymbol{x}_0 + L_y\boldsymbol{y}_0 + L_z\boldsymbol{z}_0$,它自然也守恒.

§6.3 刚体绕定点自由转动的潘索描绘

哈密顿量(6.62)不显含时间 t,是刚体绕定点自由转动的守恒能量.下面将看到,单凭角动量和能量守恒,就可对刚体绕定点的自由转动作出完全的几何描绘,这就是潘索(Poinsot)描绘.由于能量守恒,按(6.16)

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{I}_{ij}\omega_i\omega_j = 2T \tag{6.64}$$

为常数.角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的末端按此方程描绘出一个二次曲面.与(6.22)比较知,此曲面与惯量椭球面相似,亦为一椭球面,称为能量椭球面.两个椭球都以原点为中心,只是能量椭球的尺度为惯量椭球的 $\sqrt{2T}$ 倍.转动惯量张量是刚

体的性质，它的分量 $\mathcal{I}_{ij}$ 只在本体坐标系中不随时间变化. 与惯量椭球一样，能量椭球的位形在本体坐标系中不变，是固定在刚体上的，随刚体一起运动. 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的末端则在能量椭球面上运动. 另一方面，由(6.48)和(6.10)知

$$T = T_{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}. \tag{6.65}$$

由于角动量 $\boldsymbol{L}$ 和能量 T 都守恒，此式是 $\boldsymbol{\omega}$ 诸分量的线性方程，规定角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的末端必在一平面上. 这个平面称为潘索平面. 可见 $\boldsymbol{\omega}$ 的末端必在能量椭球面与潘索平面相交或相切的点上. 在这一点上求能量椭球面的法线方向，它就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的函数 $F(\boldsymbol{\omega})$ 的梯度方向. 由(6.64)得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{I}_{ij}\omega_j = L_i, \tag{6.66}$$

表明该点能量椭球面的法向就是潘索平面的法向 $\boldsymbol{L}$. 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的末端乃是在能量椭球面和潘索平面的切点上. 基于这种认识，潘索构造了对刚体绕定点自由转动的几何描绘，称为潘索描绘. 如图 6-1，能量椭球以定点为中心固定在刚体上. 它随刚体绕定点转动，并恒与潘索平面相切. 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 就从它的中心指向切点. 由于每瞬间刚体及固定在它上面的能量椭球恒绕 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，从刚体中心到切点的直线上每一点的瞬时速度均为零. 这表明能量椭球是在潘索平面上滚动，没有滑动. 在能量和角动量都给定的条件下，能量椭球的尺度和潘索平面的位置就都确定了，从中心到切点的距离，即能量椭球滚动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 也确定了. 整个滚动的情形都是确定的. 即是说，潘索描绘是对刚体绕定点自由转动的完全的几何描绘.

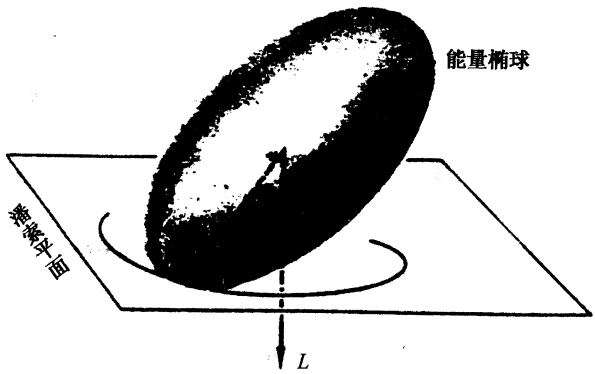

图 6-1　潘索描绘

§6.4 刚体运动方程 欧拉方程

本节以两种方式推导刚体绕定点转动的运动方程.一种方式直接基于牛顿方程,可称为牛顿方式.另一种方式按力学的正则形式,称为正则方式.两种方式推导的结果自然是一样的,只是以不同观点看同一问题.

先采用牛顿方式.$\boldsymbol{r}$ 处质量为 $\mathrm{d}m$ 的一小点刚体受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$,牛顿方程为

$$\mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}.$$

用径矢量 $\boldsymbol{r}$ 叉乘两边后对全刚体积分.左边得

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} - \int\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m\\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} - \int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

这里用了绕定点转动的速度公式 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 和向量与自身向量积为零的事实.右边得

$$\boldsymbol{J} = \int\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{f},$$

为刚体受的总力矩.两边相等即得熟知方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}, \tag{6.67}$$

可称为转动的牛顿方程.刚体各部分彼此作用的内力产生的力矩总和按牛顿第三定律为零,此式右边 $\boldsymbol{J}$ 为外力对刚体作用的总力矩.由于转动惯量张量的诸分量只在本体坐标系中是固定的,宜将(6.67)在本体坐标系中,最好在惯量主轴坐标系中,表示出来.重新称惯量主轴坐标系作 $O\eta_1\eta_2\eta_3$,η_1、η_2 和 η_3 为刚体的惯量主轴.注意角动量和其他向量一样,随时间的变化包括相对本体坐标系的变化和跟随本体坐标系的变化两部分,(6.67)的 η 表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}^{\eta}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}^{\eta}\times\boldsymbol{L}^{\eta} = \boldsymbol{J}^{\eta}. \tag{6.68}$$

由于总在惯量主轴坐标系中,本节以下再省去上标 η.将角动量在惯量主轴坐标系中的表示(6.50)改写为

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{3}\mathscr{I}_i\omega_i\boldsymbol{\eta}_i, \tag{6.69}$$

代入上式,并将它表示为分量的方程,得

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{I}_1\dot{\omega}_1 - (\mathscr{I}_2-\mathscr{I}_3)\omega_2\omega_3 &= J_1,\\ \mathscr{I}_2\dot{\omega}_2 - (\mathscr{I}_3-\mathscr{I}_1)\omega_3\omega_1 &= J_2,\\ \mathscr{I}_3\dot{\omega}_3 - (\mathscr{I}_1-\mathscr{I}_2)\omega_1\omega_2 &= J_3.\end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

这组方程为刚体绕定点运动方程的标准形式,称为欧拉方程.

再看正则方式.允许刚体受外力作用,在这种作用有势的条件下,刚体绕定点转动的哈密顿量由(6.62)扩充为

$$H = \frac{L_\xi^2}{2\mathscr{I}_\xi} + \frac{L_\eta^2}{2\mathscr{I}_\eta} + \frac{L_\zeta^2}{2\mathscr{I}_\zeta} + V(\theta, \varphi, \varphi_\zeta), \tag{6.71}$$

其中 L_ξ、L_η 和 L_ζ 按(6.56)由正则变量表出.用(5.10)可直接计算一个力学量随时间的变化.利用泊松括号的性质(5.12)和(5.13),以及关系(6.57)得

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}_\xi &= -\left(\frac{1}{\mathscr{I}_\eta} - \frac{1}{\mathscr{I}_\zeta}\right) L_\eta L_\zeta + [L_\xi, V], \\ \dot{L}_\eta &= -\left(\frac{1}{\mathscr{I}_\zeta} - \frac{1}{\mathscr{I}_\xi}\right) L_\zeta L_\xi + [L_\eta, V], \\ \dot{L}_\zeta &= -\left(\frac{1}{\mathscr{I}_\xi} - \frac{1}{\mathscr{I}_\eta}\right) L_\xi L_\eta + [L_\zeta, V]. \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

另一方面

$$\left.\begin{aligned} J_{y'} \equiv Q_\theta &= -\frac{\partial V}{\partial \theta} = [p_\theta, V], \qquad J_z \equiv Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = [p_\varphi, V], \\ J_\zeta &\equiv Q_{\varphi_\zeta} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_\zeta} = [p_{\varphi_\zeta}, V] \end{aligned}\right\} \tag{6.73}$$

分别为 θ、φ 和 φ_ζ 三个自由度的广义力,也就是绕 y'、z 和 ζ 三轴的力矩.取力矩 $\boldsymbol{J}$ 与(2.63)~(2.65)两边的标量积得

$$\left.\begin{aligned} J_{y'} &= -\sin\varphi J_x + \cos\varphi J_y = \sin\varphi_\zeta J_\xi + \cos\varphi_\zeta J_\eta, \\ J_z &= -\sin\theta\cos\varphi_\zeta J_\xi + \sin\theta\sin\varphi_\zeta J_\eta + \cos\theta J_\zeta, \\ J_\zeta &= \sin\theta\cos\varphi J_x + \sin\theta\sin\varphi J_y + \cos\theta J_z. \end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

由此解出

$$J_\xi = \sin\varphi_\zeta J_{y'} - \frac{\cos\varphi_\zeta}{\sin\theta} J_z + \cos\varphi_\zeta \cot\theta J_\zeta, \quad J_\eta = \cos\varphi_\zeta J_{y'} + \frac{\sin\varphi_\zeta}{\sin\theta} J_z - \sin\varphi_\zeta \cot\theta J_\zeta. \tag{6.75}$$

将(6.56)代入(6.72)右边的泊松括号中,利用(6.73),再将结果与(6.75)比较得

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}_\xi + \left(\frac{1}{\mathscr{I}_\eta} - \frac{1}{\mathscr{I}_\zeta}\right) L_\eta L_\zeta &= J_\xi, \quad \dot{L}_\eta + \left(\frac{1}{\mathscr{I}_\zeta} - \frac{1}{\mathscr{I}_\xi}\right) L_\zeta L_\xi = J_\eta, \\ \dot{L}_\zeta + \left(\frac{1}{\mathscr{I}_\xi} - \frac{1}{\mathscr{I}_\eta}\right) L_\xi L_\eta &= J_\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

由(6.53)第三式和(6.55)看出,这组方程正是欧拉方程(6.70).

§6.5 自由陀螺的转动、进动和章动

转动的刚体称为陀螺.陀螺转动问题是经典力学详细研究过的问题之一.不受外力作用能绕定点自由转动的陀螺称为自由陀螺.§6.3 曾介绍过对自由陀螺转动的潘索几何描述.本节结合解析解进一步探讨此问题.先看较简单的对称陀螺,它有一条惯量主轴为对称轴,陀螺具有绕此轴的对称性.取对称轴为陀螺本体坐标系的 ζ 轴,在垂直 ζ 的任何方向上陀螺的转动惯量都一样.过中心取垂直 ζ 的平面,在平面内取互相垂直的两轴,称为 ξ 和 η,让它们与 ζ 一起组成右手本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$. ξ 与 η 也是惯量主轴,且绕三主轴的转动惯量间有关系 $\mathscr{I}_\xi=\mathscr{I}_\eta\neq\mathscr{I}_\zeta$.若 $\mathscr{I}_\zeta<\mathscr{I}_\xi$,则惯量椭球的 ζ 主轴长于 ξ 和 η 主轴,为长回转椭球,若质量分布均匀则陀螺也呈长形.若 $\mathscr{I}_\zeta>\mathscr{I}_\xi$,则惯量椭球的 ζ 主轴短于 ξ 和 η 主轴,为扁回转椭球,若质量分布均匀则陀螺也呈扁形.按(6.62),对称陀螺绕定点自由转动的哈密顿量为

$$H=\frac{L^2}{2\mathscr{I}_\xi}+\left(\frac{1}{2\mathscr{I}_\zeta}-\frac{1}{2\mathscr{I}_\xi}\right)L_\zeta^2, \tag{6.77}$$

其中

$$L^2=L_\xi^2+L_\eta^2+L_\zeta^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2 \tag{6.78}$$

为角动量平方.$Oxyz$ 为任一以 O 为原点的笛卡儿坐标系,例如空间固定坐标系.利用(5.12)和(5.13),可由(6.57)导出

$$[L^2,L_\xi]=[L^2,L_\eta]=[L^2,L_\zeta]=0, \tag{6.79}$$

可见 $[L_\zeta,H]=0$ 对以 ζ 为对称轴的自由对称陀螺的哈密顿量(6.77)成立.自由对称陀螺角动量在对称轴上的投影守恒.

对此处讨论的自由对称陀螺,欧拉方程(6.70)为

$$\mathscr{I}_\xi\dot{\omega}_\xi=(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\zeta)\omega_\zeta\omega_\eta,\quad \mathscr{I}_\eta\dot{\omega}_\eta=(\mathscr{I}_\zeta-\mathscr{I}_\xi)\omega_\zeta\omega_\xi,\quad \mathscr{I}_\zeta\dot{\omega}_\zeta=0.$$

第三式中用了条件 $\mathscr{I}_\xi=\mathscr{I}_\eta$,由其中解得

$$\omega_\zeta=\text{常数}. \tag{6.80}$$

代回上式中的前两式得

$$\dot{\omega}_\xi=-\Omega\omega_\eta,\quad \dot{\omega}_\eta=\Omega\omega_\xi, \tag{6.81}$$

其中

$$\Omega=\frac{\mathscr{I}_\zeta-\mathscr{I}_\xi}{\mathscr{I}_\xi}\omega_\zeta \tag{6.82}$$

为常数.由(6.53)第三式知,(6.80)映证了角动量在对称轴上的投影 L_ζ 守恒.将(6.81)第一式对时间微商后用第二式消去 $\dot{\omega}_\eta$ 得

$$\ddot{\omega}_\xi+\Omega^2\omega_\xi=0. \tag{6.83}$$

它的通解为

$$\omega_\xi = A\cos(\Omega t + \delta), \tag{6.84}$$

A 与 δ 为积分常数.将此式代回(6.81)第一式得

$$\omega_\eta = A\sin(\Omega t + \delta). \tag{6.85}$$

可见角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢尖在本体坐标系中在与 $\xi\eta$ 平行且距它 ω_ζ 的平面内划出一半径为 A 的圆.这使角速度的大小

$$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_\zeta^2} \tag{6.86}$$

不随时间变化,方向却沿一顶在原点,轴为 ζ,底为上述圆的锥面,以匀角频率 Ω 进动.

即然角动量 $\boldsymbol{L}$ 守恒,可取它的方向为空间固定坐标系的 z 轴,因而 $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{z}_0$.表示本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 与空间固定坐标系 $Oxyz$ 相对取向的欧拉角随时间的变化,即轨道方程 $\theta(t)$、$\varphi(t)$和 $\varphi_\zeta(t)$,才直接表示出陀螺位形的变化.由于 L 和

$$L_\zeta = \boldsymbol{\zeta}_0 \cdot \boldsymbol{L} = L\boldsymbol{\zeta}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 = L\cos\theta \tag{6.87}$$

均守恒,θ 不随时间变化.在此条件下(2.68)成为

$$\omega_\xi = \dot{\varphi}\sin\theta\cos(\pi - \varphi_\zeta), \quad \omega_\eta = \dot{\varphi}\sin\theta\sin(\pi - \varphi_\zeta), \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}_\zeta. \tag{6.88}$$

用虚单位 i 乘第二式后与第一式相加,并将表达式(6.84)和(6.85)代入它的左边,得

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t+\delta)} = \dot{\varphi}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\varphi_\zeta)}. \tag{6.89}$$

在(6.84)中恒取 $A>0$,负号可由将 δ 改变 π 表达.在此约定下,由(6.89)得

$$\dot{\varphi}\sin\theta = \pm A, \tag{6.90}$$

$$\varphi_\zeta = \delta' - \Omega t, \tag{6.91}$$

δ'为常数.将 δ'的值限制在 $-\delta\pm\pi$ 之间,当(6.90)右边取正号时 $\delta' = \pi - \delta$,取负号时 $\delta' = -\delta$.总之有

$$\dot{\varphi}_\zeta = -\Omega. \tag{6.92}$$

将此式代入(6.88)第三式,用(6.82)、(6.87)和(6.53)第三式得

$$L = \mathscr{I}_\xi\dot{\varphi}. \tag{6.93}$$

恒有 $\mathscr{I}_\xi>0$,作为角动量的大小 $L>0$,因此 $\dot{\varphi} = L/\mathscr{I}_\xi>0$.$\theta$ 在 0 与 π 间取值,可见(6.90)右边只能取正号.(6.91)中的常数 $\delta' = \pi - \delta$.至此,自由对称陀螺的转动就完全地解析表达出来了.陀螺绕它的对称轴 ζ 以匀角频率 $-\Omega$ 转动,对称轴则绕陀螺角动量方向 z 以匀角频率 $L/\mathscr{I}_\xi$ 进动,进动中对称轴与角动量方向的夹角 θ 保持不变.与转动有关的诸量中,$\mathscr{I}_\xi$ 和 $\mathscr{I}_\zeta$ 以及对称轴在本体坐标系中的取向 ζ 由刚体的成分和结构决定;$\boldsymbol{L}$ 与 L_ζ 为守恒量,它们与转

动初相角 δ 一起由初条件决定.

这里的解析解与 §6.3 中的潘索描绘显然是一致的.对称惯量椭球导致对称能量椭球,它自然以匀速在潘索平面上滚动,这就是绕对称轴的匀速转动和对称轴的匀速进动.而且进动过程中对称轴与潘索平面的法向(即角动量方向)的夹角不变.

我们每日每时在其上生活的地球是一个近似的对称陀螺.它在非常均匀的引力场中向太阳自由下落.在一个与它一起绕太阳公转的坐标系中看,自由下落的惯性力恰与作用在地球上的引力抵消.将此坐标系当惯性系,地球相对它作自由运动.地球自转也就是它绕自身质心的定点自由转动.地球为略扁的近似回转椭球,$\mathscr{I}_\zeta$ 略大于 $\mathscr{I}_\xi$.具体测得

$$\frac{\mathscr{I}_\zeta - \mathscr{I}_\xi}{\mathscr{I}_\xi} \approx \frac{1}{300}.$$

按(6.82),转动轴绕对称轴的进动角频率为

$$\Omega \approx \frac{\omega_\zeta}{300}.$$

实际上转动轴很靠近对称轴,$\omega_\zeta \simeq \omega$.可见进动频率约为自转频率的$\frac{1}{300}$,进动周期也就约为自转周期的 300 倍,即约三百天,约合十个月.地球自转绕对称轴的进动为刚体的欧拉理论所预言,称为欧拉运动.天文上它应表现为北天极微小周期移动,地理上则应表现为纬度的微小周期变化.经长期观测确实发现,地球自转轴围绕对称轴的运动,但并非规则进动,而是显得有些杂乱无章的晃动.详细分析并排除周年的季节影响后,发现了一个十四月周期的晃动,称为钱德勒(Chandler)晃动.它的十四月周期称为钱德勒周期.一般相信钱德勒晃动即经过修正的欧拉运动.地球并非理想刚体,也不是理想弹性体.其上的洋流和气流属大规模流体运动.这类运动自然不能由刚体的欧拉方程描写,且包含不规则成分.这些使规则的进动变成不规则的晃动.自转还将物质对称地从自转轴推开,从而倾向于使自转轴变成对称轴.这种倾向会减小绕对称轴和绕其他主轴的转动惯量之差,从而按(6.82)减小进动角频率,延长进动周期.这正是在钱德勒晃动中看到的.

绕三主轴转动惯量各不相等的陀螺为不对称陀螺.不对称陀螺绕定点的自由转动也可解析地解出.然而不对称性使解析解大为复杂,且不便从其中掌握转动的定性特征,这里不作介绍.不对称陀螺的角动量仍然守恒,但它在每一惯量主轴上的投影都不守恒.这表明惯量主轴与角动量方向的夹角 θ 将随时间变化,称为章动.存在章动是不对称陀螺绕定点自由转动的一个重要特征.这也可从潘索描绘中看出.由于所选惯量主轴恒不是对称轴,能量椭球不具有绕此轴的对称性.当椭球在潘索平面上滚动时,所选主轴必上下摆动.此

轴与角动量方向的夹角 θ 作周期变化.这就是章动.三个欧拉角 θ、φ 和 φ_ζ 分别称为章动角、进动角和自转角.

§6.6 重对称陀螺

对称陀螺在外力作用下绕定点的转动
拉格朗日情形

图 6-2 是许多人儿时曾玩过的陀螺.它的外形具有轴对称,如果制作材料均匀,便是一个对称陀螺,对称轴为其几何形状的中心轴.陀螺下方尖端着地,可在地面移动.为简化对陀螺转动的研究,将此点固定,研究陀螺绕此定点的转动.考虑重力对陀螺的作用.受重力作用的陀螺称为重陀螺.可设想重力集中作用于它的重心.重心在对称轴上的对称重陀螺转动问题由拉格朗日解决,称为拉格朗日情形.外力作用下对称陀螺绕定点转动的一些其他问题可化作拉格朗日情形中重对称陀螺转动的问题.例如绕对称轴高速转动的炮弹呼啸而过,它的运动可分解为质心运动和绕质心的转动.就转动而言,这是一个以质心为转动中心的绕定点转动问题.飞行中炮弹受空气阻力.设这阻力可视为均匀恒定的.这一假设的合理性在于炮弹的尺度与阻力不均匀的空间尺度相比可以忽略不计,而炮弹高速转动的周期与阻力变化的时间尺度相比也可忽略不计.均匀恒定的阻力类似于重陀螺受的重力,可将它等效地集中于一阻力中心.阻力中心一般不在质心,而在炮弹对称轴上,因而对炮弹绕质心的转动产生力矩.由于重心与质心重合,重力不会对绕质心的转动产生力矩.于是,在随质心一起移动的坐标系中看,空气阻力作用下炮弹绕自身质心的转动类似拉格朗日情形中重对称陀螺绕定点的转动,可应用后者的理论结果.

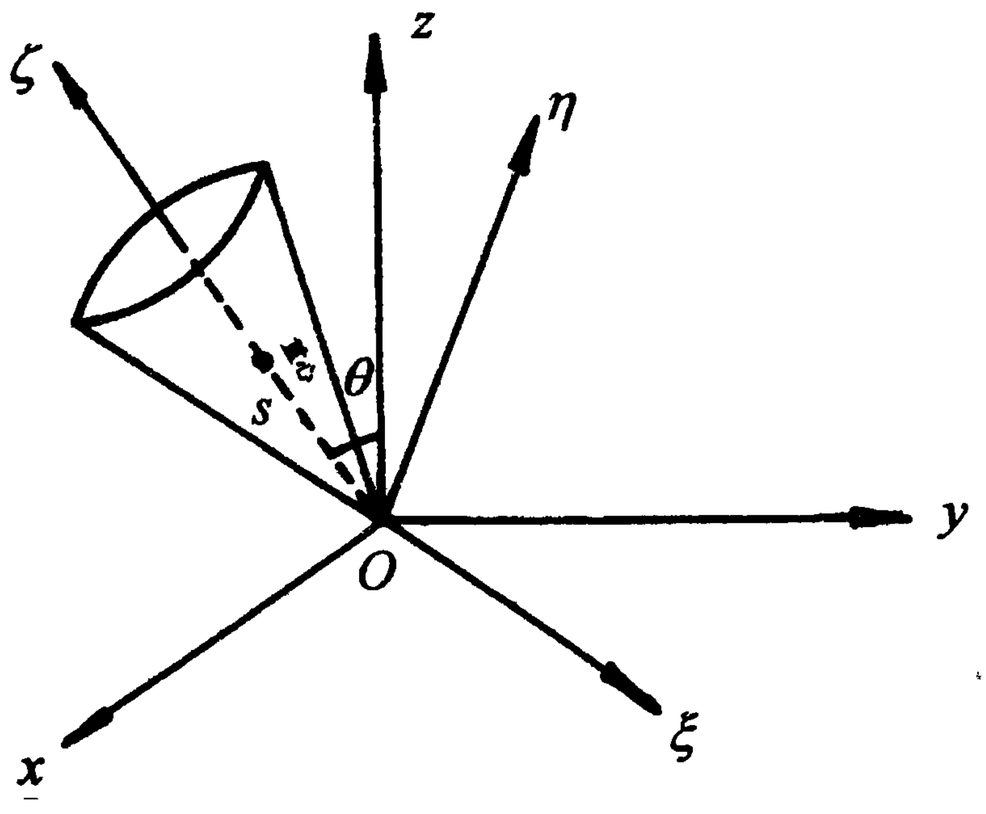

图 6-2 对称陀螺

回到图 6-2 中重对称陀螺绕定点运动问题.将此定点取为空间固定坐标系 $Oxyz$ 和本体坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的共同原点 O.空间固定轴 z 垂直地面向上.设陀螺质量为 M,受重力 $-Mgz_0$.质心在对称轴 ζ 上距定点 s 处.绕定点重力矩为

$$\boldsymbol{J} = s\boldsymbol{\zeta}_0 \times (-Mgz_0) = Mgs\sin\theta(\sin\varphi_\zeta\boldsymbol{\xi}_0 + \cos\varphi_\zeta\boldsymbol{\eta}_0). \tag{6.94}$$

陀螺的轴对称使 $\mathscr{I}_\xi = \mathscr{I}_\eta$.在这些条件下,欧拉方程(6.70)成为

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{I}_\xi\dot{\omega}_\xi - (\mathscr{I}_\xi - \mathscr{I}_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta &= Mgs\sin\theta\sin\varphi_\zeta, \\ \mathscr{I}_\xi\dot{\omega}_\eta + (\mathscr{I}_\xi - \mathscr{I}_\zeta)\omega_\zeta\omega_\xi &= Mgs\sin\theta\cos\varphi_\zeta, \\ \mathscr{I}_\zeta\dot{\omega}_\zeta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.95}$$

将表达式(2.68)代入,用 $\cos\varphi_\zeta$ 乘第一式减去 $\sin\varphi_\zeta$ 乘第二式得

$$\mathscr{I}_\xi(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) - \mathscr{I}_\zeta(\dot{\theta}\dot{\varphi}_\zeta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) = 0. \tag{6.96}$$

用 $\sin\varphi_\zeta$ 乘第一式加 $\cos\varphi_\zeta$ 乘第二式得

$$\mathscr{I}_\xi(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) + \mathscr{I}_\zeta(\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + \dot{\varphi}\dot{\varphi}_\zeta\sin\theta) = Mgs\sin\theta. \tag{6.97}$$

第三式表示的是角动量在对称轴上的投影 L_ζ 守恒,直接给出初积分

$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\varphi}_\zeta \equiv A, \tag{6.98}$$

A 为常数.将此式代入(6.96)后乘以积分因子 $\sin\theta$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{I}_\xi\dot{\varphi}\sin^2\theta + \mathscr{I}_\zeta A\cos\theta) = 0. \tag{6.99}$$

由此得第二个初积分

$$\mathscr{I}_\xi\dot{\varphi}\sin^2\theta + \mathscr{I}_\zeta A\cos\theta \equiv B, \tag{6.100}$$

B 为常数.由(6.55)、(2.68)和(2.64)可看出,此式左边恰为角动量在垂直地面的 z 轴上的投影 L_z,因而表示 L_z 守恒.重力沿 $-z$ 方向,重力矩必垂直于 z 轴,自然应有 L_z 守恒.在(6.96)上乘 $\dot{\varphi}\sin\theta$,在(6.97)上乘 $\dot{\theta}$,然后两式相加得

$$\mathscr{I}_\xi(\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\theta) - Mgs\dot{\theta}\sin\theta = 0.$$

此式左边为一全微分,积分后得第三个初积分

$$\frac{1}{2}\mathscr{I}_\xi(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + Mgs\cos\theta \equiv C, \tag{6.101}$$

C 为常数.此式左边第二项 $Mgs\cos\theta$ 为陀螺在重力场中的势能.由(2.68)知第一项为 $\frac{1}{2}\mathscr{I}_\xi(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)$.可见

$$C + \frac{1}{2}\mathscr{I}_\zeta A^2 = H \tag{6.102}$$

为陀螺的总机械能.A 既为常数,(6.101)表示的即是能量守恒.

记

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{I}_\zeta}{\mathscr{I}_\xi}A, \qquad \beta = \frac{Mgs}{\mathscr{I}_\xi}. \tag{6.103}$$

(6.100)和(6.101)可分别表示为

$$2\alpha\cos\theta + \dot{\varphi}\sin^2\theta = a, \tag{6.104}$$

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2\beta\cos\theta = b, \tag{6.105}$$

a、b 为常数.此二式和(6.98)一起可用来求解轨道方程 $\theta(t)$、$\varphi(t)$和 $\varphi_\zeta(t)$.

在(6.105)两边乘 $\sin^2\theta$,用(6.104)消去其中的 $\dot{\varphi}\sin^2\theta$,最后作变换

$$u = \cos\theta, \tag{6.106}$$

得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + (a - 2\alpha u)^2 + (2\beta u - b)(1 - u^2) = 0. \tag{6.107}$$

此方程确定对称重陀螺的章动.(6.104)可表示为

$$\dot{\varphi} = \frac{a - 2\alpha u}{1 - u^2}. \tag{6.108}$$

将解得的章动轨道方程 $u(t)$代入此式,即得进动角 φ 对时间的一阶微商,从而可积出进动轨道方程 $\varphi(t)$.最后,(6.98)可表示为

$$\dot{\varphi}_\zeta = A - \frac{a - 2\alpha u}{1 - u^2}u, \tag{6.109}$$

由此可解出自转角 $\varphi_\zeta(t)$.整个求解的关键是解章动方程(6.107).它可表示为

$$\dot{u}^2 = f(u), \tag{6.110}$$

其中

$$f(u) = (1 - u^2)(b - 2\beta u) - (a - 2\alpha u)^2 \tag{6.111}$$

称为陀螺函数.由(6.110)得

$$\mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)}}. \tag{6.112}$$

积分得

$$t - t_0 = \pm\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u'}{\sqrt{f(u')}}, \tag{6.113}$$

u_0 为 $t = t_0$ 时 u 的初值.$f(u)$为 u 的三次多项式,这使右边的积分可解析地积出,一般为反椭圆函数.不过有时对运动特征的定性了解更重要.为此分析陀螺函数根的分布及其与运动特征的关系.设 $u_1 < u_2$ 为 $f(u) = 0$ 的两个实根,在它们之间 $f(u) > 0$.按(6.110),此处 $\dot{u}$ 为实数.将(6.110)两边对时间微商后约去 $\dot{u}$ 得

$$\ddot{u} = \frac{1}{2}f'(u), \tag{6.114}$$

其中 $f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$.可见[参阅图 6-3(a)],$u$ 可随时间在 u_1 和 u_2 间变化.在 $f(u)$上升处 $\dot{u}$ 沿正向增加,$f(u)$下降处 $\dot{u}$ 减小.设在(6.112)和(6.113)中取 + 号,u 从 u_1 向 u_2 变化,到 u_2 时 $\dot{u} = 0$.按(6.114) $\ddot{u} < 0$, $\dot{u}$ 变为负值,在(6.112)和(6.113)中要改取 − 号.u 从 u_2 向 u_1 变化.开始时按(6.114) $\ddot{u} < 0$, $-\dot{u}$ 越来越大,u 以越来越快的速率靠近 u_1.过 $f(u)$的峰值后 $\ddot{u} > 0$,

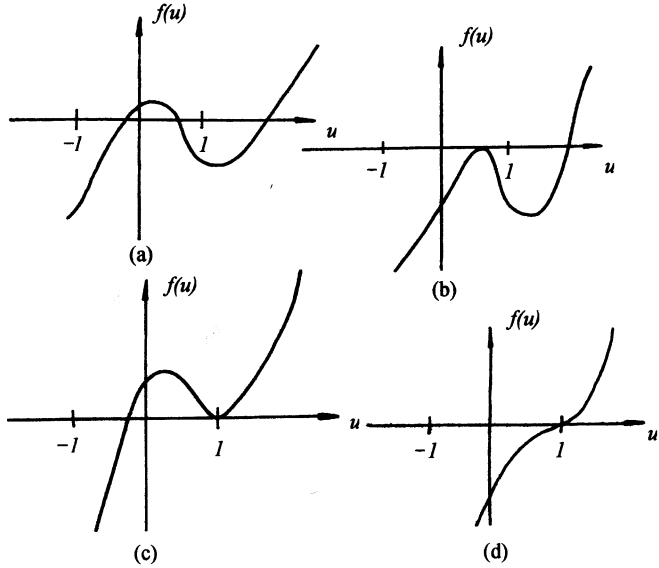

图 6-3　陀螺函数 $f(u)$

$-\dot{u}$ 变小，直到 u_1 处 $\dot{u}=0$. 而此处 $f'(u)>0$，按(6.114)$\ddot{u}>0$，$\dot{u}$ 重新变为正值，(6.112)和(6.113)中再取 + 号，u 又一次从 u_1 向 u_2 变化. 如此周而复始，u 在 u_1 和 u_2 间往复地作周期运动，θ 则在 $\arccos u_1$ 和 $\arccos u_2$ 间作周期往复运动. 这便是章动. 自然，这种章动只当两根 u_1 和 u_2 落在区间 $(-1,1)$ 中才能实现.

按(6.103)$\beta>0$，因此

$$f(-\infty)=-\infty,\quad f(-1)=-(a+2\alpha)^2. \tag{6.115}$$

由(6.105)知，区间 $(-1,1)$ 中必有实数 u 使 $b-2\beta u\geqslant 0$，从而任何 $u\leqslant -1$ 必使 $b-2\beta u\geqslant 0$. 按(6.111)，这使多项式 $f(u)$ 在 $u<-1$ 处无根. 另一方面

$$f(1)=-(a-2\alpha)^2,\quad f(\infty)=\infty, \tag{6.116}$$

表明 $f(u)$ 在区间 $(1,\infty)$ 中至少有一实根. 实际上 $u>1$ 处 $f(u)$ 至多只有一个实根. 这是因为按(6.106)和(6.110)陀螺变量 u 的取值受条件

$$-1\leqslant u\leqslant 1\quad 和\quad f(u)\geqslant 0 \tag{6.117}$$

限制. 若 $u>1$ 处有三个实根，则区间 $(-1,1)$ 中 $f(u)<0$，这在实际陀螺运动中不会发生. 三次多项式 $f(u)$ 的系数皆为实数，复根应成对出现. 若在 $u>1$ 处有两个实根，第三根必也是实根，且落在区间 $(-1,1)$ 中. 称此根为 u_1，与它相邻的大于 1 的根为 u_2，u_1 与 u_2 间 $f(u)>0$. 前面关于 u 在 u_1 和 u_2 间往复变化的论证成立. 然而在此情形下，当 u 趋于 u_2 时会越出区间 $(-1,1)$ 而

违背条件(6.117).这种非物理的解也不可能属于原欧拉方程(6.95),因而不能实现.

考虑 $f(u)$确有一实根 $u_3>1$ 的情形.若其余二根为一对复根,则 $f(u)$在区间$(-1,1)$中为负,违背条件(6.117)而不能实现.可见此情形中其余两根必为区间$(-1,1)$中的两个实根.设它们彼此不等,为 $u_1<u_2$.在 u_1 和 u_2 间 $f(u)>0$.前面关于 u 在 u_1 和 u_2 间往复变化的论证成立.由于整个变化落在区间$(-1,1)$内,是一实际可以发生的章动.为形象表示出章动和进动,以转动中心为球心作一半径为 1 的球面,考察对称轴上单位矢量 ζ_0 的矢尖在球面划出的图案.球面上球坐标 $\theta=\theta_i=\arccos u_i$ 的点组成一个圆,称为 C_i, $i=1,2$. ζ_0 的矢尖即在圆 C_1 和 C_2 之间章动,同时也绕 z 轴进动.(6.108)表明,章动中 u 随时间变化,进动角速度也随时间变化.ζ_0 矢尖图案取决于(6.108)右边分子的根

$$u' = \frac{a}{2\alpha}. \tag{6.118}$$

若 $u'>u_2$,则进动角速度 $\dot{\varphi}$ 虽然改变却不变号.ζ_0 矢尖图案由图 6-4(a)示意.若 $u_1<u'<u_2$,则在 u 从 u_1 变到 u_2 的过程中 $\dot{\varphi}$ 变号,图案由图 6-4(b)示意.若 $u'=u_2$,则章动到上圆 C_2 时进动角速度 $\dot{\varphi}=0$,图案由图 6-4(c)示意.

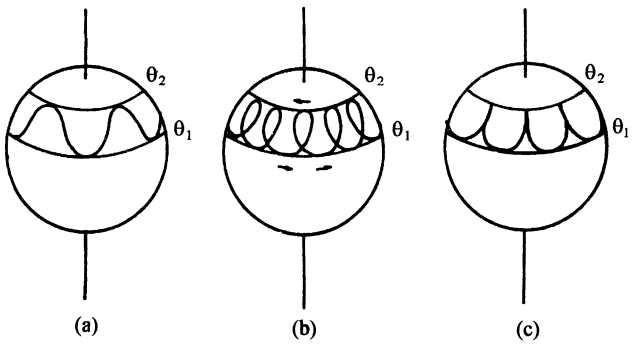

图 6-4 进动与章动

现在来求此情形中章动的解析解.陀螺函数可写为

$$f(u) = 2\beta(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3). \tag{6.119}$$

作变换

$$u = u_1 + (u_2-u_1)w^2, \tag{6.120}$$

代入上式得

$$f(u(w)) = 2\beta(u_2 - u_1)^2(u_3 - u_1)w^2(1 - w^2)(1 - k^2w^2), \tag{6.121}$$

$$k^2 \equiv \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \tag{6.122}$$

微分(6.120)得

$$\mathrm{d}u = 2w(u_2 - u_1)\mathrm{d}w. \tag{6.123}$$

在 $u = u_1$ 处 $w = 0$, $u = u_2$ 处 $w = \pm 1$. 将这些都代入(6.113), 将初始时刻 t_0 取为 $u = u_1$ 从而 $w = 0$ 的时刻, 稍加整理得

$$\mu(t - t_0) = \pm \int_0^w \frac{\mathrm{d}w'}{\sqrt{(1 - w'^2)(1 - k^2w'^2)}}, \tag{6.124}$$

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{\beta}{2}(u_3 - u_1)}. \tag{6.125}$$

按定义(3.143)和(3.144),

$$w(t) = \pm \mathrm{sn}(k, \mu(t - t_0)). \tag{6.126}$$

这里用了 $\mathrm{sn}(x)$ 为 x 的奇函数的性质, 可从它的定义看出.

如果 u_1 与 u_2 汇合成为重根[如图 6-3(b)], 则在重根 u_1 处

$$f'(u_1) = f(u_1) = 0, \quad \ddot{u} = \dot{u} = 0. \tag{6.127}$$

$u = u_1$, 从而 $\theta = \theta_1 \equiv \arccos u_1$ 在整个运动过程中不变, 没有章动. 由(6.108)和(6.109)知, 在此条件下 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\varphi}_\zeta$ 都不随时间改变, 进动和自转都是匀速的. 这种运动叫规则进动. u_2 与 u_3 汇合成重根的情形[图 6-3(c)]最为有趣. 它们只能汇合到 1, 因而 $u_2 = u_3 = 1$. 此时 $k = 1$, (6.124)蜕化为

$$\left.\begin{aligned} &\mu(t - t_0) = \pm \int_0^w \frac{\mathrm{d}w'}{1 - w'^2} = \pm \operatorname{arcth} w, \\ &w(t) = \pm \operatorname{th}[\mu(t - t_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{6.128}$$

其中 $\mathrm{th}\tau \equiv \dfrac{\mathrm{e}^{\tau} - \mathrm{e}^{-\tau}}{\mathrm{e}^{\tau} + \mathrm{e}^{-\tau}}$ 为 τ 的双曲线正切函数. 由变换(6.120)得

$$u(t) = u_1 + (1 - u_1)\mathrm{th}^2[\mu(t - t_0)]. \tag{6.129}$$

此式表明, u 或章动角 $\theta = \arccos u$ 在此情形中已不是时间 t 的周期函数, 而随 t 单调变化. 由于

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathrm{th}\tau = 1,$$

导致

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = 1, \quad \lim_{t \to \infty} \theta(t) = 0. \tag{6.130}$$

陀螺旋转的姿态渐近地趋于直立. 这一数学结果可能勾起一些人对儿时玩陀螺的回忆. 当陀螺转速渐慢而站不稳时就抽它一鞭子. 陀螺因此转速顿时大

增,同时也偏离了直立姿态.然而它滴溜溜转动着绕几圈后,又反抗着重力重新站了起来,最终恢复到直立姿态.这同一效应也使高速旋转的炮弹前锋自动选择迎着阻力的方向飞行.

最后,三个根 u_1、u_2 和 u_3 可能汇合成一三重根:$u_1=u_2=u_3=1$[图 6-3(d)].在此情形下,重根处

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=0,\quad \dot{u}=\ddot{u}=\dddot{u}=0. \tag{6.131}$$

陀螺将维持 $u=1,\theta=0$ 的直立旋转姿态不变.

§6.7 重对称陀螺直立转动的稳定性

重对称陀螺绕铅垂对称轴转动且重心高于转动中心的运动姿态称为直立转动.设有扰动使它偏离这种姿态.若扰动为无穷小,就能保持它对转动的偏离也永远在无穷小范围内,则称这直立转动是稳定的,否则是不稳定的.设起始时陀螺取直立姿态.$\theta=0,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$,由(6.104)和(6.105)得常数间的关系

$$a=2\alpha,\quad b=2\beta. \tag{6.132}$$

陀螺函数(6.111)成为

$$f(u)=(1-u)^2[2\beta(1+u)-4\alpha^2]. \tag{6.133}$$

它有二重根 1,另一根为$\dfrac{2\alpha^2}{\beta}-1$.这使

$$f'(1)=f(1)=0, \tag{6.134}$$

从而使 $\dot{u}$、$\ddot{u}$ 以及 u 对时间 t 的更高阶微商在 $u=1$ 处均为零.$u=1$ 即 $\theta=0$ 的直立姿态得以保持,直到 t_0 时刻扰动赋于$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$一个小正值$\varepsilon$,以 t_0 为起始时刻的初条件成为

$$\theta(t_0)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}=\varepsilon. \tag{6.135}$$

常数间的关系变为

$$a=2\alpha,\quad b=2\beta+\varepsilon^2. \tag{6.136}$$

陀螺函数成为

$$\begin{aligned} f(u)&=(1-u)[(1+u)(2\beta+\varepsilon^2-2\beta u)-4\alpha^2(1-u)]\\ &=2\beta(u-1)\left[u^2-\frac{4\alpha^2+\varepsilon^2}{2\beta}u+\frac{4\alpha^2-2\beta-\varepsilon^2}{2\beta}\right]. \end{aligned} \tag{6.137}$$

1 仍然是它的一个根,另两根是

$$u=\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-1\right)^2+\frac{\varepsilon^2}{\beta}}. \tag{6.138}$$

这后两根一个大于 1,一个小于 1,三根互不相等,属图 6-3(a)所示情形.按大小顺序排列,$u_1<u_2=1<u_3$.章动解为

$$u(t)=u_1+(1-u_1)\mathrm{sn}^2(k,\mu(t-t_0)),\tag{6.139}$$

其中 k 与 μ 分别由(6.122)和(6.125)定义.这是以直立转动姿态为一端的振荡,振幅为 $1-u_1$.若对任意小量 δ 恒能找到正数 ε,使初始条件(6.135)下章动(6.139)的振幅 $1-u_1<\delta$,则陀螺直立转动姿态是稳定的,否则是不稳定的.u_1 是(6.138)右边取负号的那个根.若 $\frac{\alpha^2}{\beta}>1$ 则恒有足够小的 ε 使 $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-1>0$,于是

$$u_1=\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-1\right)\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{\beta}\Big/\left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-1\right)^2}.$$

精确到 ε^2 幂,此式为

$$u_1=1-\frac{\varepsilon^2}{2(\alpha^2-\beta)},\tag{6.140}$$

章动振幅 $1-u_1$ 为 ε 的二级小量.它表明此情形中陀螺直立旋转姿态稳定.

若 $\frac{\alpha^2}{\beta}=1$,则

$$u_1=1+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^4}{16\beta^2}}.$$

精确到 ε 的一次幂,此式为

$$u_1=1-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\beta}},\tag{6.141}$$

章动振幅 $1-u_1$ 为 ε 的一级小量.它表明此情形中陀螺直立旋转姿态仍然稳定.若 $\frac{\alpha^2}{\beta}<1$ 则恒有足够小的 ε 使 $1-\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\varepsilon^2}{4\beta}>0$,于是

$$u_1=\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\varepsilon^2}{4\beta}-\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\varepsilon^2}{4\beta}\right)\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{\beta}\Big/\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\varepsilon^2}{4\beta}\right)^2}.$$

精确到 ε^2 幂,此式为

$$u_1=\frac{2\alpha^2}{\beta}-1+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta-\alpha^2}\right),\tag{6.142}$$

章动振幅

$$1-u_1=2\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}\right)+\frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2\beta(\beta-\alpha^2)}\tag{6.143}$$

在 $\varepsilon\to0$ 的条件下并不趋于零;不论扰动多小,它都会导致一有限振幅的章动,表明直立旋转姿态不稳定.

有意思的是,$\frac{\alpha^2}{\beta}<1$ 使未受扰动的陀螺函数(6.133)在二重根 1 以外的另

一根$\frac{2\alpha^2}{\beta}-1<1$，对应上节图 6-3(c)．在此情形下章动方程的解(6.129)表明，一个非直立旋转的陀螺会渐近地趋于直立旋转．然而本节的讨论却表明，同一情形下陀螺的直立旋转是不稳定的．任何扰动，不论多么微弱，都会使陀螺偏离直立旋转姿态，且偏离的程度有一固定下限，不会因扰动减弱而趋于零．这是陀螺力学非平庸内含的一例．不能单凭直观，要发挥理论和数学处理的作用．

习 题 六

1．计算一质量为 M，边长分别为 $a>b>c$ 的均匀长立方刚体材料绕其质心的转动惯量张量，绘出其惯量椭球．就 b、$c\to 0$ 的极限讨论结果与刚杆转动惯量的关系．

2．计算一半长轴为 a，半短轴为 b，质量为 M 的均匀长回转椭球形刚体材料绕其质心的转动惯量张量，绘出其惯量椭球，讨论惯量椭球与材料椭球形状的关系．

3．计算一底面半径为 a，高为 b，质量为 M 的均匀正圆锥体绕其顶点的转动惯量张量，绘出其惯量椭球，并讨论此椭球在何种条件下蜕化为球？

4．计算上题中的圆锥体绕其质心的转动惯量张量，绘出其惯量椭球，并讨论此椭球在何种条件下蜕化为球？

5．计算一边长为 a，质量为 M 的均匀等边三角形平面薄片绕其质心的转动惯量张量，并绘出其惯量椭球．

6．以欧拉角为广义坐标，将刚体动能 T 表示成广义坐标和广义速度的函数．由此导出刚体转动的拉格朗日方程，并证明它与欧拉方程等价．

7．由欧拉方程直接证明，绕定点自由转动的刚体动能(6.52)守恒．

8．由欧拉方程直接证明，绕定点自由转动的刚体角动量平方

$$L^2=\mathscr{I}_\xi^2\omega_\xi^2+\mathscr{I}_\eta^2\omega_\eta^2+\mathscr{I}_\zeta^2\omega_\zeta^2 \tag{6.144}$$

守恒，其中 ξ、η 和 ζ 为惯量主轴．

9．试证，用初积分(6.52)和(6.144)可将绕定点自由转动刚体角速度在两主轴上的分量 ω_ξ 和 ω_η 用它在第三主轴上的分量 ω_ζ 按下二式表出：

$$\omega_\xi^2=A(a^2-\omega_\zeta^2),\quad \omega_\eta^2=B(b^2-\omega_\zeta^2), \tag{6.145}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{\mathscr{I}_\zeta(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\zeta)}{\mathscr{I}_\xi(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\xi)},\quad a=C\sqrt{\frac{D(\mathscr{I}_\eta-D)}{\mathscr{I}_\xi(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\zeta)}},\\ B&=\frac{\mathscr{I}_\zeta(\mathscr{I}_\zeta-\mathscr{I}_\xi)}{\mathscr{I}_\eta(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\xi)},\quad b=C\sqrt{\frac{D(D-\mathscr{I}_\xi)}{\mathscr{I}_\zeta(\mathscr{I}_\zeta-\mathscr{I}_\xi)}},\end{aligned}\right\} \tag{6.146}$$

$$C=\frac{2T}{L},\qquad D=\frac{L^2}{2T}. \tag{6.147}$$

T 为动能，$L=\sqrt{L^2}$ 为角动量的绝对值．

10．试证，用(6.145)消去欧拉方程中的 ω_ξ 和 ω_η 后得到的 ω_ζ 随时间变化的方程可表示为

$$\dot{\omega}_\zeta \pm ab\sqrt{\frac{(\mathscr{I}_\zeta-\mathscr{I}_\xi)(\mathscr{I}_\eta-\mathscr{I}_\zeta)}{\mathscr{I}_\xi\mathscr{I}_\eta}}\sqrt{\left(1-\frac{\omega_\zeta^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\omega_\zeta^2}{b^2}\right)}=0. \tag{6.148}$$

11. 就 $a^2=b^2>0$ 的情形求解方程(6.148),讨论所得结果.

12. 在一般情况下,(6.148)的解 $\omega_\zeta(t)$ 可用椭圆函数表出.试按定义(3.143)和(3.144)写出这种表达式.就各种具体情况讨论此解的含义.

13. 一质量为 M 半径为 a 的均匀台球在水平台面上无滑动地滚动.写出它的动能、拉氏函数和约束方程.导出并求解它的拉氏方程.讨论所得结果.

14. 设上题中台面与水平面有夹角 α,写出球的拉氏函数和约束方程.导出并求解它的拉氏方程.其中转动部分表示成角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 随时间的变化即可.讨论所得结果.

15. 考虑滚盘在水平面上的滚动.取消 §3.7 例 3 中滚盘直立的约束条件,允许它向两侧自由倾斜.写出它的拉氏函数和约束方程,并导出拉氏方程.

16. 求上题中滚盘倾角和转速均固定的特解.

第七章　振动与波　弹性力学

§7.1　平衡位形附近的微振动　简正坐标与本征频率

势函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_f)$取极值的位形($q_{\sigma 0}$)称为平衡位形.平衡位形处广义力

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.1}$$

从而可保持广义速度为零:$\dot{q}_\sigma = 0, \sigma = 1, 2, \cdots, f$,即保持系统的静止状态.考虑相对平衡位形的偏离和由此而来的在平衡位形附近的运动.将势函数在它附近展成泰勒级数.由于可在势函数上随意加减一常数,恒可将平衡位形处势函数的值取为零.再由(7.1)知,到坐标增量($\xi_\sigma \equiv q_\sigma - q_{\sigma 0}$)的二次幂,可将势函数表示为

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} K_{\sigma\sigma'}\xi_\sigma\xi_{\sigma'}, \tag{7.2}$$

其中常数

$$K_{\sigma\sigma'} = K_{\sigma'\sigma}. \tag{7.3}$$

另一方面,在平衡位形附近,系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} M_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_{\sigma'}, \tag{7.4}$$

质量参数

$$M_{\sigma\sigma'} = M_{\sigma'\sigma}, \tag{7.5}$$

取它们在平衡位形处的值,因而是常数.拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} M_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_{\sigma'} - \frac{1}{2}\sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} K_{\sigma\sigma'}\xi_\sigma\xi_{\sigma'} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\xi}}\,\boldsymbol{M}\dot{\xi} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}\boldsymbol{K}\xi, \tag{7.6}$$

其中 ξ 为 f 个广义坐标 $\xi_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$组成的列矩阵,称为广义坐标矢量,$\tilde{\xi}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_f)$为它的转置行矩阵;$\dot{\xi}$ 和 $\dot{\tilde{\xi}}$ 分别为 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 对时间的微商,称为广义速度矢量

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1f} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{f1} & M_{f2} & \cdots & M_{ff} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1f} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{f1} & K_{f2} & \cdots & K_{ff} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

分别称为质量矩阵和弹性模数矩阵，由(7.5)和(7.3)知它们都是实对称矩阵. 拉氏量(7.6)定义的力学问题有简单的解析解.

由附录一知，实对称矩阵恒可由正交变换对角化. 即，存在正交矩阵

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1f} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{f1} & U_{f2} & \cdots & U_{ff} \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

使

$$\boldsymbol{M}_U=\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_f \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

为对角矩阵. 动能的正定性要求，对不为零的广义速度矢量 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$

$$T=\frac{1}{2}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}\,\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\xi}}=\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}\dot{\xi}_\sigma M_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_{\sigma'}>0. \tag{7.10}$$

$\boldsymbol{U}$ 的正交性保证

$$\sum_{\sigma=1}^{f}U_{\sigma\tau}U_{\sigma\tau}=1\neq 0,\quad \tau=1,2,\cdots,f. \tag{7.11}$$

因此(7.9)中的对角元

$$M_\tau=\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}U_{\sigma\tau}M_{\sigma\sigma'}U_{\sigma'\tau}>0. \tag{7.12}$$

定义对角矩阵

$$\boldsymbol{M}_U^{1/2}\equiv\begin{pmatrix} M_1^{1/2} & & & 0 \\ & M_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_f^{1/2} \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

进而定义矩阵

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}_U^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{U}} \equiv \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1f} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{f1} & W_{f2} & \cdots & W_{ff} \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$W_{\sigma\tau} = M_\sigma^{1/2} U_{\tau\sigma}, \quad \sigma, \tau = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.15}$$

显然

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{M}_U\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{M}, \tag{7.16}$$

这里用到 $\boldsymbol{U}$ 的正交性

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I} \tag{7.17}$$

和(7.9);$\boldsymbol{I}$ 为 f 阶幺矩阵,即 f 行 f 列的对角矩阵且对角元皆为 1.用矩阵 $\boldsymbol{W}$ 对广义坐标作线性变换,得新广义坐标系

$$\eta_\sigma = \sum_{\tau=1}^{f} W_{\sigma\tau}\xi_\tau, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.18}$$

由于 $\boldsymbol{W}$ 与时间无关,广义速度的变换为

$$\dot{\eta}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{f} W_{\sigma\tau}\dot{\xi}_\tau, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.19}$$

此二式的矩阵形式为

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{\xi}}. \tag{7.20}$$

由于(7.16),拉氏量(7.6)的新坐标表示成为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\eta}}}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{K}^{(W)}\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{f}\dot{\eta}_\sigma^2 - \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\,\sigma'=1}^{f}\eta_\sigma K_{\sigma\sigma'}^{(W)}\eta_{\sigma'}, \tag{7.21}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^{(W)} \equiv \begin{pmatrix} K_{11}^{(W)} & K_{12}^{(W)} & \cdots & K_{1f}^{(W)} \\ K_{21}^{(W)} & K_{22}^{(W)} & \cdots & K_{2f}^{(W)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{f1}^{(W)} & K_{f2}^{(W)} & \cdots & K_{ff}^{(W)} \end{pmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{W}}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{-1}. \tag{7.22}$$

由(7.14)、(7.15)、(7.17)和(7.3)知

$$K_{\sigma\sigma'}^{(W)} = \sum_{\tau,\,\tau'=1}^{f} M_\sigma^{-1/2}U_{\tau\sigma}K_{\tau\tau'}U_{\tau'\sigma'}M_{\sigma'}^{-1/2} = \sum_{\tau,\,\tau'=1}^{f} M_{\sigma'}^{-1/2}U_{\tau'\sigma'}K_{\tau'\tau}U_{\tau\sigma}M_\sigma^{-1/2} = K_{\sigma'\sigma}^{(W)}, \tag{7.23}$$

即 $\boldsymbol{K}^{(W)}$ 也是对称矩阵.故有正交矩阵

$$\boldsymbol{U}' \equiv \begin{pmatrix} U'_{11} & U'_{12} & \cdots & U'_{1f} \\ U'_{21} & U'_{22} & \cdots & U'_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U'_{f1} & U'_{f2} & \cdots & U'_{ff} \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

使

$$\boldsymbol{K}_{U'} \equiv \widetilde{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{K}^{(W)}\boldsymbol{U}' = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_f \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

为对角矩阵.用矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{U}}'$对广义坐标再作正交变换,得新广义坐标系

$$\zeta_\sigma = \sum_{\tau=1}^{f} U'_{\tau\sigma}\eta_\tau, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.26}$$

由于 $\widetilde{\boldsymbol{U}}'$不含时间,广义速度的变换为

$$\dot{\zeta}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{f} U'_{\tau\sigma}\dot{\eta}_\tau, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.27}$$

此二式的矩阵表示为

$$\boldsymbol{\zeta} = \widetilde{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{\eta}, \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \widetilde{\boldsymbol{U}}'\dot{\boldsymbol{\eta}}. \tag{7.28}$$

由于(7.25)和正交性

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}'\widetilde{\boldsymbol{U}}' = \boldsymbol{I}, \tag{7.29}$$

拉氏量(7.21)可表示为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}}\,\dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{K}_{U'}\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{f}(\dot{\zeta}_\sigma^2 - K_\sigma\zeta_\sigma^2). \tag{7.30}$$

能将拉氏量写成这种平方和形式的广义坐标 $\zeta_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,f)$称为简正坐标.采用简正坐标后系统的动力学便完全分离了变量,每一自由度有各自的运动方程

$$\ddot{\zeta}_\sigma + K_\sigma\zeta_\sigma = 0, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{7.31}$$

各自由度间已无耦合.这些常系数二阶线性齐次常微分方程的解是熟知的.可分三种情况.

1. $K_\sigma > 0$.令 $\omega_\sigma = \sqrt{K_\sigma}$,运动方程成为

$$\ddot{\zeta}_\sigma + \omega_\sigma^2\zeta_\sigma = 0. \tag{7.32}$$

这就是简谐振动方程(1.8),通解为

$$\zeta_\sigma(t) = \zeta_{\sigma 0}\sin(\omega_\sigma t + \delta_\sigma), \tag{7.33}$$

$\zeta_{\sigma 0}$和 δ_σ 为积分常数.这类自由度的运动为绕平衡位形的简谐振动.

2. $K_\sigma = 0$.运动方程为

$$\ddot{\zeta} = 0, \tag{7.34}$$

通解为

$$\zeta_\sigma(t) = v_\sigma t + \zeta_{\sigma 0}, \tag{7.35}$$

v_σ 和 $\zeta_{\sigma 0}$ 为积分常数. 它表示系统代表点在这一维上的投影作等速运动.

3. $K_\sigma < 0$. 令 $\gamma_\sigma = \sqrt{|K_\sigma|}$, 运动方程成为

$$\ddot{\zeta}_\sigma - \gamma_\sigma^2 \zeta_\sigma = 0, \tag{7.36}$$

通解为

$$\zeta_\sigma(t) = A_\sigma e^{\gamma_\sigma t}, \tag{7.37}$$

A_σ 和 B_σ 为积分常数. 此解包含一指数增长项和一指数衰减项. 只要增长项系数 $A_\sigma \neq 0$, 在衰减项很快趋于零后显露出来的即是该自由度广义坐标 ζ_σ 的指数增长.

如果各自由度均属情形 1, 即如

$$K_\sigma > 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.38}$$

则整个运动为 f 个独立简谐振动的集合, 称为绕平衡位形的微振动. 说微振动是强调振幅必须是小量以保证势函数的展开式(7.2)成立. 这是随后讨论的前提. 对角元 K_σ 为对角矩阵 $\boldsymbol{K}_U$ 的第 σ 个本征值, 按附录一, 也就是 $\boldsymbol{K}^{(W)}$ 的第 σ 个本征值. $\omega_\sigma = \sqrt{K_\sigma}$ 因而称为微振动的第 σ 个本征频率. 由(7.32)知

$$E_\sigma = \frac{1}{2}(\dot{\zeta}_\sigma^2 + K_\sigma \zeta_\sigma^2), \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.39}$$

守恒, 它们就是各自由度的能量积分. 可见

$$|\dot{\zeta}_\sigma(t)| \leqslant \sqrt{2E_\sigma}, \quad |\zeta_\sigma(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2E_\sigma}{K_\sigma}}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.40}$$

另一方面, 若起始时刻($t = 0$)系统相对平衡位形只有微小偏离, 从而有小正数 δ 使

$$|\dot{\zeta}_\sigma(0)| < \delta, \quad |\zeta_\sigma(0)| < \delta, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.41}$$

则

$$2E_\sigma < (1 + K_\sigma)\delta^2, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.42}$$

此后任何时刻

$$|\dot{\zeta}_\sigma(t)| < \sqrt{1 + K_\sigma}\delta, \quad |\zeta_\sigma(t)| < \sqrt{\frac{1 + K_\sigma}{K_\sigma}}\delta, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.43}$$

称 $\sqrt{1 + K_\sigma}$ 和 $\sqrt{\frac{1 + K_\sigma}{K_\sigma}}$ ($\sigma = 1, 2, \cdots, f$) 中的最大值为 λ, 可得如下结论: 对任何正数 ε 恒可找到一正数

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \tag{7.44}$$

只要起始时刻系统偏离平衡位形足够小，以致(7.41)对如此选定的 δ 成立，则以后任何时刻均有

$$|\dot{\zeta}_\sigma(t)| < \varepsilon, \quad |\zeta_\sigma(t)| < \varepsilon, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.45}$$

满足条件(7.38)的平衡位形为稳定的平衡位形. 相对它的偏离只要初始时是微小的以后恒保持为微小的. 平衡位形稳定的充分条件(7.38)即该位形势能取极小的条件.

对属情形 2 的自由度 σ，

$$\dot{\zeta}_\sigma(t) = v_\sigma \tag{7.46}$$

为常数. 不论在(7.41)中将 δ 取得多小，恒可有离开平衡位形的匀速漂移，最终使相对平衡位形的偏离越出任何限度.

对属情形 3 的自由度 σ，由(7.37)得

$$A_\sigma + B_\sigma = \zeta_\sigma(0), \quad \gamma_\sigma A_\sigma - \gamma_\sigma B_\sigma = \dot{\zeta}_\sigma(0). \tag{7.47}$$

由此解得

$$A_\sigma = \frac{\zeta_\sigma(0) + \gamma_\sigma^{-1}\dot{\zeta}_\sigma(0)}{2}, \quad B_\sigma = \frac{\zeta_\sigma(0) - \gamma_\sigma^{-1}\dot{\zeta}_\sigma(0)}{2}. \tag{7.48}$$

此式表明，不论初始时对平衡位形的偏离多么小，即不论 $|\zeta_\sigma(0)|$ 与 $|\dot{\zeta}_\sigma(0)|$ 多么小，只要比值

$$\frac{\dot{\zeta}_\sigma(0)}{\zeta_\sigma(0)} \neq -\gamma_\sigma, \tag{7.49}$$

系数 A_σ 即非零，$|\zeta_\sigma(t)|$ 和 $|\dot{\zeta}_\sigma(t)|$ 就会指数增长而超越任何限度. 可见，只要出现属于情形 2 或(和)情形 3 的自由度，平衡位形就不稳定. (7.38)，即势函数取极小，不仅是平衡位形稳定的充分条件，还是它的必要条件. 这个结果其实可直观地理解，因为只有在此条件下在各自由度上才都有阻止系统远离平衡位形的恢复力. 这里只是用精确的数学形式将结论表达出来.

§7.2 阻尼振动与强迫振动 共振 格林函数

系统的振动可能由于摩擦或其他耗散机制而衰减，也可能受外界强迫力而增强或偏离简谐模式. 为简单计，再次考虑质量为 m 的质点沿 x 方向的一维运动. 若只受恢复力 $-Kx$，则质点绕平衡位置作简谐振动，圆频率为 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$. 若还受摩擦力 $-\gamma\dot{x}$，$\gamma > 0$ 为阻尼常数，则运动方程成为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = 0. \tag{7.50}$$

这种常系数线性齐次常微分方程有形如 $e^{\Omega t}$ 的解.将此解代入运动方程,得常数 Ω 的方程

$$m\Omega^2 + \gamma\Omega + K = 0. \tag{7.51}$$

它的两个根为

$$\Omega = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}. \tag{7.52}$$

就 γ 与 K 的相对大小,可分三种情形讨论.

1. $\gamma^2 < 4mK$,(7.52)为两个互相共轭的复根

$$\Omega = -\lambda \pm i\omega_1, \tag{7.53}$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{2m}, \tag{7.54}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}. \tag{7.55}$$

运动方程(7.50)的通解为

$$x(t) = e^{-\lambda t}(ae^{i\omega_1 t} + be^{-i\omega_1 t}) = e^{-\lambda t}A\sin(\omega_1 t + \delta), \tag{7.56}$$

其中 a、b 或 A、δ 为积分常数.这是一种衰减中的振动,振幅 $e^{-\lambda t}A$ 逐渐衰减至零.

2. $\gamma^2 > 4mK$,(7.52)为两个彼此不等的负实根

$$-\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m} \quad 和 \quad -\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}. \tag{7.57}$$

运动方程(7.50)的通解为

$$x(t) = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t}, \tag{7.58}$$

a 和 b 为积分常数.这是一种没有振动的衰减.在 a 和 b 同号时衰减是单调的.但在 a 和 b 异号情况下(7.58)右边两项朝不同方向衰减.虽然衰减的最终结果仍是 $x(\infty)=0$,但在

$$t = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\left(-\frac{b\lambda_2}{a\lambda_1}\right) \tag{7.59}$$

时 $|x(t)|$ 达到一极大值.

3. $\gamma^2 = 4mK$,(7.52)为二重根

$$-\lambda = -\frac{\gamma}{2m}. \tag{7.60}$$

$e^{-\lambda t}$ 只是运动方程(7.50)的一个特解.不过容易验证,$te^{-\lambda t}$ 是(7.50)的另一线性独立的特解.从而有通解

$$x(t) = (a + bt)e^{-\lambda t}, \tag{7.61}$$

a 和 b 为积分常数.若 $b=0$ 则单调衰减.否则 $|x(t)|$ 在

$$t = \frac{b - \lambda a}{\lambda b} \tag{7.62}$$

时达到极大.

若质点除恢复力和摩擦力外还受强迫力 $F(t)$ 的作用,$F(t)$ 为时间 t 的已知函数,则运动方程成为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = F(t). \tag{7.63}$$

它又可写为

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{7.64}$$

其中 λ 和 ω 分别由(7.54)和(1.9)定义,

$$f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}. \tag{7.65}$$

(7.63)为常系数线性非齐次常微分方程,(7.50)为它的齐次方程.线性非齐次方程的通解为它的任一特解与其齐次方程的通解之和.齐次方程(7.50)的通解既已求得,就只需求非齐次方程(7.63)或(7.64)的一个特解.先看强迫力本身为时间 t 的简谐周期函数的情形.此情形中

$$f(t) = f_0\sin(\omega' t + \delta), \tag{7.66}$$

f_0 与 δ 为常数.设解为同频率的简谐振动

$$x(t) = x_0\sin(\omega' t + \delta'), \tag{7.67}$$

x_0 与 δ' 为常数.将此二式代入(7.64)两边得

$$(\omega^2 - \omega'^2)x_0\sin(\omega' t + \delta') + 2\lambda\omega' x_0\cos(\omega' t + \delta') = f_0\sin(\omega' t + \delta).$$

定义

$$\cos\eta = \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}}, \quad \sin\eta = -\frac{2\lambda\omega'}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}}, \tag{7.68}$$

上式变为

$$\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}\,x_0\sin(\omega' t + \delta' - \eta) = f_0\sin(\omega' t + \delta).$$

可见,取

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2}}, \quad \delta' = \delta + \eta, \tag{7.69}$$

(7.67)即为方程(7.64)的解.它表明,在简谐强迫力作用下,质点作同频率的简谐振动,只是相位相对强迫力移动了 η.(7.68)表明这种相移是由于阻尼引起的.在质点只受恢复力和强迫力的作用而无摩擦力阻尼的情况下,质点与强

迫力作同频率和同相位的简谐振动.(7.69)第一式则表明,强迫力振荡圆频率

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} \equiv \omega_r \tag{7.70}$$

时振子振幅

$$x_0 = \frac{f_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \tag{7.71}$$

达到它的极大值.这种现象称为共振.(7.70)定义的 ω_r 称为共振(圆)频率.在没有阻尼,即 $\lambda = 0$ 的情况下,$\omega_r = \omega$,共振频率即振子的固有频率.阻尼将它向小于固有频率处推移.另一方面,(7.71)表明,若无阻尼,共振振幅将为无穷大.阻尼将它变为有限值.但一般情形下,阻尼不大,共振振幅就会很大,甚至可达使系统崩溃的程度.如何利用共振和避免有害共振是力学和工程的一大课题.

对一般的强迫力可作傅里叶展开.将此展开写作

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega', \tag{7.72}$$

相应地将振子轨道函数展为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'. \tag{7.73}$$

将此二式代入运动方程(7.64)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega^2 - \omega'^2 - 2i\lambda\omega')\bar{x}(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'.$$

此式成立的充分必要条件为

$$\bar{x}(\omega') = \frac{\bar{f}(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2 - 2i\lambda\omega'}. \tag{7.74}$$

振子轨道方程遂为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2 - 2i\lambda\omega'}e^{-i\omega' t}d\omega', \tag{7.75}$$

在给定强迫力后即可将右边的积分作出.考虑一种特别的强迫力,它只在某时刻 t_0 无穷短的一瞬间起作用.这种强迫力随时间的变化可用 δ 函数表示.$\delta(t - t_0)$在 $t \neq t_0$ 时为零,而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0)dt = 1. \tag{7.76}$$

这显然不是一个普通的函数,它只在积分号下有定义.函数 $\delta(t)$的定义是,对任何函数 $\xi(t)$

$$\int_a^b \xi(t)\delta(t)dt \equiv \begin{cases} \xi(0), & \text{若 } 0 \in (a,b), \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \tag{7.77}$$

由此可得

$$\int_a^b \xi(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_{a-t_0}^{b-t_0} \xi(t'+t_0)\delta(t')\mathrm{d}t'$$

$$= \begin{cases} \xi(t_0), & \text{若 } t_0 \in (a,b), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{7.78}$$

在第一等号处作了变换 $t' = t - t_0$，并将 $\xi(t'+t_0)$ 当作自变换 t' 的函数；在第二等号处用了定义(7.77). 在各种具体理论中，对函数类[$\xi(t)$]有各种具体的界定，这种界定总是足够广，以包容该理论中要考虑的全部函数. 例如在振动理论中，可将[$\xi(t)$]界定为可作傅里叶展开的任何函数. 按傅里叶变换理论，傅里叶积分

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\xi}(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{d}\omega' \tag{7.79}$$

中的傅里叶系数

$$\bar{\xi}(\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\xi(t)\mathrm{d}t. \tag{7.80}$$

可见

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\xi(t')\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t')}. \tag{7.81}$$

与(7.78)比较，提示

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t')}\mathrm{d}\omega' = \lim_{B\to\infty} \frac{\sin[B(t-t')]}{\pi(t-t')} \tag{7.82}$$

为 δ 函数. 实际上由傅里叶变换理论中关于(7.79)和(7.80)的证明可看出，此式右边具有(7.78)表示的 δ 函数的性质. 直接地看，这个极限并不存在，因而也就不是一个普通意义下的函数. 然而将它放到积分号下，先积分，后取极限，则极限存在. 这种定义在积分号下的函数称为广义函数. 现在设振子受到 t_0 时刻的冲击力因而

$$f(t) = \delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t_0)}\mathrm{d}\omega'. \tag{7.83}$$

可将振子在这种条件下的轨道方程表示为

$$x(t) = g(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t_0)}\mathrm{d}\omega', \tag{7.84}$$

并称它为这个问题中的格林(Green)函数. 将此二式代入运动方程(7.64)，重复(7.72)～(7.75)的推导得

$$\bar{g}(\omega') = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega^2 - \omega'^2 - 2\mathrm{i}\lambda\omega'}, \tag{7.85}$$

$$g(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t_0)}}{\omega^2 - \omega'^2 - 2\mathrm{i}\lambda\omega'}\mathrm{d}\omega'. \tag{7.86}$$

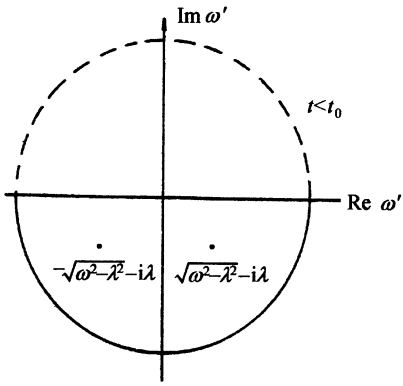

图 7-1　积分回路

将 ω' 当作复变量，此式右边为一复变函数在实轴上的积分. 如能将它化为一闭合回路上的积分，则可用留数定理积出. 可设想用以原点为心半径为无穷大的半圆周与实轴组成闭合回路(图 7-1)，用留数定理算出回路上的积分后扣除半圆周上的积分，即得实轴上的积分. 被积函数的指数因子 $e^{-i\omega'(t-t_0)}$ 对无穷远处半圆周上的积分值起决定作用. 在上半平面指数中的 $-i$ 因子与 ω' 的虚部相乘得正实数. 这使指数函数随 $|\omega'|\to\infty$ 在 $t>t_0$ 时指数地趋于无穷，而在 $t<t_0$ 时指数地趋于零. 与此相反，在下半平面指数中的 $-i$ 因子与 ω' 中的虚部相乘得负实数. 这使指数函数随 $|\omega'|\to\infty$ 在 $t>t_0$ 时指数地趋于零，而在 $t<t_0$ 时指数地趋于无穷. 可见 $t<t_0$ 时应选上半平面的半圆周与实轴组成闭合回路，而 $t>t_0$ 时应选下半平面的半圆周与实轴组成闭合回路. 影响半圆周上积分值的还有被积函数中的分母，它随 $|\omega'|\to\infty$ 而二次幂地趋于无穷，以及半圆周长，它随 $|\omega'|$ 线性地趋于无穷. 这两因素合起来对半圆周上积分的贡献为一按 $|\omega'|^{-1}$ 趋于零的因子。因此，在按上述办法选择的半圆周上的积分为零。回路上的积分即实轴上的积分. 现在看回路上的积分. 为用留数定理要求被积函数的奇点，它是其分母的根. 作为 ω' 的二次多项式，这个分母有两个根

$$\omega' = \frac{-2i\lambda \pm \sqrt{4\omega^2 - 4\lambda^2}}{2} = -i\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}. \tag{7.87}$$

它们的虚部皆负，都在下半平面. 这使绕上半平面的积分为零，即 $t<t_0$ 时 $g(t-t_0)=0$. 这是符合因果律的，t_0 时刻的冲击不影响 t_0 时刻以前振子的运动. 设此两根不等，它们都是被积函数的一阶奇点，即极点. (7.86)右边的被积函数为

$$\frac{e^{-i\omega'(t-t_0)}}{\omega^2 - \omega'^2 - 2i\lambda\omega'} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \cdot \left(\frac{e^{-i\omega'(t-t_0)}}{\omega' + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} + i\lambda} - \frac{e^{-i\omega'(t-t_0)}}{\omega' - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} + i\lambda} \right).$$

在极点 $-\sqrt{\omega^2-\lambda^2}-i\lambda$ 和 $\sqrt{\omega^2-\lambda^2}-i\lambda$ 处的留数分别为

$$\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} e^{\Omega_1(t-t_0)} \quad 和 \quad -\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} e^{\Omega_2(t-t_0)}, \tag{7.88}$$

其中

$$\Omega_1 = -\lambda + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \quad 和 \quad \Omega_2 = -\lambda - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \tag{7.89}$$

分别为(7.52)表示的(7.51)的两个根.这使 $t > t_0$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t_0)}}{\omega^2 - \omega'^2 - 2\mathrm{i}\lambda\omega'}\mathrm{d}\omega' = \frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}[\mathrm{e}^{\Omega_2(t-t_0)} - \mathrm{e}^{\Omega_1(t-t_0)}]. \tag{7.90}$$

代入(7.86)得到,在 $\omega > \lambda$,即 $\gamma^2 < 4mK$ 的条件下

$$g(t - t_0) = \theta(t - t_0)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\sin[\omega_1(t - t_0)], \tag{7.91}$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$,

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & 若\ t > t_0 \\ 0, & 否则 \end{cases}, \tag{7.92}$$

为阶跃函数.在 $\omega < \lambda$ 即 $\gamma^2 > 4mK$ 的条件下

$$g(t - t_0) = \theta(t - t_0)\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}[\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-t_0)} - \mathrm{e}^{-\lambda_2(t-t_0)}], \tag{7.93}$$

其中 $-\lambda_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$, $-\lambda_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$.注意这里 λ_1、λ_2 和 ω_1 的定义分别与(7.57)和(7.55)一致.在 $\omega = \lambda$ 即 $\gamma^2 = 4mK$ 的条件下,(7.87)表示的两个根蜕化为二重根 $-\mathrm{i}\lambda$.(7.86)右边的被积函数成为

$$-\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'+\mathrm{i}\lambda)(t-t_0)}}{(\omega' + \mathrm{i}\lambda)^2} = -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}}{(\omega' + \mathrm{i}\lambda)^2} + \frac{\mathrm{i}(t - t_0)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}}{\omega' + \mathrm{i}\lambda}$$

$$+\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}(t - t_0)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n(t - t_0)^n}{(n+2)!}(\omega' + \mathrm{i}\lambda)^n.$$

留数为

$$\mathrm{i}(t - t_0)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{7.94}$$

这使 $t > t_0$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'(t-t_0)}}{\omega^2 - \omega'^2 - 2\mathrm{i}\lambda\omega'}\mathrm{d}\omega' = -2\pi(t - t_0)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{7.95}$$

代入(7.86)得到,$\omega = \lambda$,即 $\gamma^2 = 4mK$ 条件下

$$g(t - t_0) = \theta(t - t_0)(t_0 - t)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{7.96}$$

分别比较(7.91)、(7.93)和(7.96)与(7.56)、(7.58)和(7.61)可以看出,t_0 时刻瞬间冲击的作用是激发起振子在 t_0 以后的固有运动.

格林函数满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(t - t_0)}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}g(t - t_0)}{\mathrm{d}t} + \omega^2 g(t - t_0) = \delta(t - t_0). \tag{7.97}$$

在此式两边乘 t_0 的任意函数 $f(t_0)$,然后对 t_0 在全区间积分.由于微分对 t

进行而积分对 t_0 进行，故可交换次序，即可改为先积分后微分.因而得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) f(t_0) \mathrm{d}t_0 \tag{7.98}$$

满足运动方程(7.64).利用格林函数可由积分 得到任意强迫力作用下运动方程的一个特解.与齐次方程的通解叠加即得任意强迫力作用下运动方程的通解.齐次方程即无强迫力条件下振子自身的运动方程，它的通解表示的是振子固有运动的一般情况.而由这个格林函数卷积得到的任意强迫力作用下运动方程的特解则是强迫力在各时刻激发起的振子固有运动的叠加.一般情况下受强迫力作用的振子运动即由这两部分运动叠加而成.

§7.3 系统在平衡态附近的涨落 复正则描述与薛定谔型方程

哈密顿量 $H(q_1, q_2, \cdots, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f)$取极值的运动状态$(q_{\sigma 0}, p_{\sigma 0})$称为平衡态.平衡态中

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} = 0, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.99}$$

即系统将维持于平衡态中，状态不变.考虑相对于平衡态的偏离和由此而来的运动状态在平衡态附近的涨落.将哈密顿量在它附近展成泰勒级数.由于可在哈密顿量上随意加减一常数，恒可将哈密顿量在所考虑的平衡态中的值取为零.再由(7.99)，即哈密顿量在平衡态对广义坐标和广义动量的一级微商全为零，得到坐标增量($\xi_\sigma \equiv q_\sigma - q_{\sigma 0}$)和动量增量($\rho_\sigma \equiv p_\sigma - p_{\sigma 0}$)的二次幂的展开式

$$H = \sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} \left[\frac{1}{2} (R_{\sigma\sigma'} \rho_\sigma \rho_{\sigma'} + K_{\sigma\sigma'} \xi_\sigma \xi_{\sigma'}) + G_{\sigma\sigma'} \xi_\sigma \rho_{\sigma'} \right], \tag{7.100}$$

其中

$$R_{\sigma\sigma'} = R_{\sigma'\sigma}, \quad K_{\sigma\sigma'} = K_{\sigma'\sigma}, \tag{7.101}$$

和 $G_{\sigma\sigma'}$ 皆为常数.平衡态附近的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_\sigma &= \frac{\partial H}{\partial \rho_\sigma} = \sum_{\sigma' = 1}^{f} (R_{\sigma\sigma'} \rho_{\sigma'} + \xi_{\sigma'} G_{\sigma'\sigma}), \\ \dot{\rho}_\sigma &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} = -\sum_{\sigma' = 1}^{f} (K_{\sigma\sigma'} \xi_{\sigma'} + G_{\sigma\sigma'} \rho_{\sigma'}), \end{aligned} \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.102}$$

取

$$W' \equiv \sum_{\sigma, \sigma' = 1}^{f} \pi_\sigma W'_{\sigma\sigma'} \xi_{\sigma'} = \widetilde{\pi} W' \xi \tag{7.103}$$

为母函数，按情形二作正则变换.其中 $\widetilde{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_f)$为新广义动量 π_σ，σ

$=1,2,\cdots,f$,组成的行矢量;矩阵

$$\boldsymbol{W}' \equiv \begin{pmatrix} W'_{11} & W'_{12} & \cdots & W'_{1f} \\ W'_{21} & W'_{22} & \cdots & W'_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W'_{f1} & W'_{f2} & \cdots & W'_{ff} \end{pmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{W} \tag{7.104}$$

就是§7.1中由广义坐标 $\boldsymbol{\xi}$ 到广义坐标 $\boldsymbol{\zeta}$ 的变换矩阵,在那里这个变换是分两步(7.20)和(7.28)进行的;按(7.14)定义 $\boldsymbol{W}$ 用的质量矩阵现取为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^{-1}, \tag{7.105}$$

其中

$$\boldsymbol{R} \equiv \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1f} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{f1} & R_{f2} & \cdots & R_{ff} \end{pmatrix}; \tag{7.106}$$

按(7.22)和(7.25)定义 $\boldsymbol{U}'$ 用的弹性模数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 仍由(7.7)中第二式定义,其中的矩阵元 $K_{\sigma\sigma'}$ 现在取自展开式(7.100).按(5.84),变换后的广义坐标为

$$\zeta_\sigma = \frac{\partial W'}{\partial \pi_\sigma} = \sum_{\sigma'=1}^{f} W'_{\sigma\sigma'}\xi_{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{7.107}$$

变换前的广义动量则为

$$\rho_\sigma = \frac{\partial W'}{\partial \xi_\sigma} = \sum_{\sigma'=1}^{f} \pi_{\sigma'}W'_{\sigma'\sigma}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.108}$$

此二式的矩阵形式分别为

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{\xi}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{W}'. \tag{7.109}$$

将其中第二式转置得

$$\boldsymbol{\rho} = \widetilde{\boldsymbol{W}}'\boldsymbol{\pi}. \tag{7.110}$$

它的逆变换为

$$\boldsymbol{\pi} = \widetilde{\boldsymbol{W}}'^{-1}\boldsymbol{\rho}. \tag{7.111}$$

(7.109)的第一式和此式一起,将正则变量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 变为正则变量 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$.同样,取(7.109)第一式的逆变换得

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{W}'^{-1}\boldsymbol{\zeta}. \tag{7.112}$$

此式与(7.110)一起将正则变量 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 变为正则变量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$.将(7.100)表为矩阵形式得

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\rho} + \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\rho} \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\rho} + \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi}) + \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\rho}, \end{aligned} \tag{7.113}$$

其中 $\boldsymbol{G}=(G_{\sigma\sigma'})$ 为由矩阵元 $G_{\sigma\sigma'}$ 排成的矩阵. 利用(7.110)、(7.112)和它们的转置将此哈密顿量用新正则变量表出,得

$$H=\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\pi}+\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{K}_{U'}\boldsymbol{\zeta})+\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{f}(\pi_\sigma^2+K_\sigma\zeta_\sigma^2)+\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}\zeta_\sigma\Gamma_{\sigma\sigma'}\pi_{\sigma'}, \tag{7.114}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}=\widetilde{\boldsymbol{W}}'^{-1}\boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{W}}', \tag{7.115}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_{\sigma\sigma'}$ 为它的矩阵元, $\boldsymbol{K}_{U'}$ 及其对角元 K_σ, $\sigma=1,2,\cdots,f$, 仍由(7.25)定义. (7.114)的推导中用到

$$\boldsymbol{W}'\boldsymbol{M}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{W}}'=\widetilde{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{I}, \tag{7.116}$$

它的逆

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}'\widetilde{\boldsymbol{W}}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{I} \tag{7.117}$$

可由(7.16)和(7.29)得到;还用到

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}'^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}'^{-1}=\widetilde{\boldsymbol{U}}'\widetilde{\boldsymbol{W}}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{K}_{U'}, \tag{7.118}$$

可由(7.22)和(7.25)得到. 由(7.114)得运动方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{\zeta}_\sigma&=\frac{\partial H}{\partial\pi_\sigma}=\pi_\sigma+\sum_{\sigma'=1}^{f}\zeta_{\sigma'}\Gamma_{\sigma'\sigma},\\ \dot{\pi}_\sigma&=-\frac{\partial H}{\partial\zeta_\sigma}=-K_\sigma\zeta_\sigma-\sum_{\sigma'=1}^{f}\Gamma_{\sigma\sigma'}\pi_{\sigma'},\end{aligned}\right\}\quad\sigma=1,2,\cdots,f. \tag{7.119}$$

定义

$$\omega_\sigma\equiv\sqrt{K_\sigma}, \tag{7.120}$$

$$\psi_\sigma\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma}}(\omega_\sigma\zeta_\sigma+\mathrm{i}\pi_\sigma),\quad\psi_\sigma^*\equiv\frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma}}(\omega_\sigma\zeta_\sigma-\mathrm{i}\pi_\sigma). \tag{7.121}$$

若 $K_\sigma>0$ 则 ω_σ 为正实数, ψ_σ 与 ψ_σ^* 互为共轭复数. 在(7.119)第一式两边乘 $\sqrt{\frac{\omega_\sigma}{2}}$, 第二式两边乘 $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\omega_\sigma}}$, 然后两式相加, 由(7.120)和(7.121)得

$$\dot{\psi}_\sigma=-\mathrm{i}\omega_\sigma\psi_\sigma-\sum_{\sigma'=1}^{f}(A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}-S_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}^*), \tag{7.122}$$

其中

$$A_{\sigma\sigma'}\equiv\frac{1}{2}(Z_{\sigma\sigma'}-Z_{\sigma'\sigma}), \tag{7.123}$$

$$S_{\sigma\sigma'}\equiv\frac{1}{2}(Z_{\sigma\sigma'}+Z_{\sigma'\sigma}), \tag{7.124}$$

$$Z_{\sigma\sigma'}\equiv\sqrt{\frac{\omega_{\sigma'}}{\omega_\sigma}}\Gamma_{\sigma\sigma'}. \tag{7.125}$$

两式相减得

$$\dot{\psi}_\sigma^* = \mathrm{i}\omega_\sigma\psi_\sigma^* - \sum_{\sigma'=1}^{f}(A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}^* - S_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}). \tag{7.126}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}\equiv(A_{\sigma\sigma'})$和 $\boldsymbol{S}\equiv(S_{\sigma\sigma'})$分别为矩阵 $\boldsymbol{Z}\equiv(Z_{\sigma\sigma'})$的反对称部分和对称部分.如果 $\boldsymbol{Z}$ 本身为反对称的,则 $Z_{\sigma'\sigma}=-Z_{\sigma\sigma'}$,由(7.124)得

$$S_{\sigma\sigma'} = 0, \quad \sigma,\sigma' = 1,2,\cdots,f, \tag{7.127}$$

即 $\boldsymbol{S}=0$.在此条件下,(7.122)和(7.126)分别简化为

$$\mathrm{i}\dot{\psi}_\sigma = \omega_\sigma\psi_\sigma - \mathrm{i}\sum_{\sigma'=1}^{f}A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}, \quad -\mathrm{i}\dot{\psi}_\sigma^* = \omega_\sigma\psi_\sigma^* + \mathrm{i}\sum_{\sigma'=1}^{f}A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}^*, \tag{7.128}$$

(ψ_σ)与(ψ_σ^*)两组变量间不再有耦合.它们的矩阵形式为

$$\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\psi}, \tag{7.129}$$

$$-\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{\psi}}^\dagger = \boldsymbol{\psi}^\dagger\boldsymbol{H}, \tag{7.130}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_f\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}^\dagger = [\psi_1^*,\psi_2^*,\cdots,\psi_f^*], \tag{7.131}$$

而矩阵 $\boldsymbol{H}\equiv(H_{\sigma\sigma'})$,

$$H_{\sigma\sigma'} = \omega_\sigma\delta_{\sigma\sigma'} - \mathrm{i}A_{\sigma\sigma'}. \tag{7.132}$$

(7.129)具有量子力学中薛定谔(Schrödinger)波动方程的形式,属薛定谔型方程.在 $K_\sigma>0$, ω_σ 为正实数,从而 ψ_σ 与 ψ_σ^* 互为复共轭对所有 f 个自由度皆成立的条件下,$\boldsymbol{\psi}^\dagger=\widetilde{\boldsymbol{\psi}}^*$ 称为 $\boldsymbol{\psi}$ 的厄米伴随,且

$$H_{\sigma'\sigma} = H_{\sigma\sigma'}^*, \quad \sigma,\sigma' = 1,2,\cdots,f. \tag{7.133}$$

具有此性质的矩阵 $\boldsymbol{H}$ 称为厄米矩阵.附录一中证明了一个 f 行 f 列的厄米矩阵必有 f 个实本征值.将 $\boldsymbol{H}$ 的 f 个实本征值记为 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_f$,相应的本征矢记为 $\boldsymbol{\Phi}_1,\boldsymbol{\Phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\Phi}_f$,它们之间符合本征方程

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Phi}_\sigma = \Omega_\sigma\boldsymbol{\Phi}_\sigma, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.134}$$

附录一还证明了厄米矩阵的全部本征矢可组成一厄米意义下的正交归一矢量系.对厄米矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的本征矢量系$[\boldsymbol{\Phi}_\sigma]$,这种正交归一性即

$$\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger\boldsymbol{\Phi}_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \equiv \begin{cases}1, & \text{若 } \sigma=\sigma',\\ 0, & \text{否则.}\end{cases} \tag{7.135}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger$ 为 $\boldsymbol{\Phi}_\sigma$的厄米伴随,即将 $\boldsymbol{\Phi}_\sigma$ 的各分量取复共轭后转置而得.具体地说,

$$\boldsymbol{\Phi}_\sigma = \begin{bmatrix} \Phi_{1\sigma} \\ \Phi_{2\sigma} \\ \vdots \\ \Phi_{f\sigma} \end{bmatrix} \tag{7.136}$$

的厄米伴随为

$$\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger = [\Phi_{1\sigma}^*, \Phi_{2\sigma}^*, \cdots, \Phi_{f\sigma}^*], \tag{7.137}$$

$\Phi_{\tau\sigma}^*$为$\Phi_{\tau\sigma}$的复共轭.将(7.135)用分量表示出,即为

$$\sum_{\tau=1}^{f} \Phi_{\tau\sigma}^* \Phi_{\tau\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{7.138}$$

一组彼此正交的矢量必是线性无关的.设

$$\sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'} \boldsymbol{\Phi}_{\sigma'} = 0,$$

左乘 $\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger$ 并用(7.135)得

$$0 = \boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'} \boldsymbol{\Phi}_{\sigma'} = \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'} \boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger \boldsymbol{\Phi}_{\sigma'} = \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} = c_\sigma.$$

这表明,将正交矢量系线性组合为零的常数 c_σ 必全为零,这就是该组矢量线性无关的意思.全部 f 个正交归一矢量 $\boldsymbol{\Phi}_\sigma$($\sigma = 1, 2, \cdots, f$)即然是彼此线性无关的,就可张开那个 f 维矢量空间.任何 f 维矢量都可展开为它们的线性叠加,这就叫矢量系[$\boldsymbol{\Phi}_\sigma$]的完备性.利用这些性质可求出方程(7.129)的通解.设 t 时刻 $\boldsymbol{\psi}$ 的展开式为

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{\sigma=1}^{f} c_\sigma(t) \boldsymbol{\Phi}_\sigma. \tag{7.139}$$

代入(7.129)两边,利用本征方程(7.134)得

$$\sum_{\sigma=1}^{f} \mathrm{i}\dot{c}_\sigma \boldsymbol{\Phi}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} c_\sigma \Omega_\sigma \boldsymbol{\Phi}_\sigma.$$

由于[$\boldsymbol{\Phi}_\sigma$]是一组彼此线性无关的矢量,两边展开式中相应系数应相等,即

$$\mathrm{i}\dot{c}_\sigma = \Omega_\sigma c_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.140}$$

这组无耦合的常系数一阶线性微分方程的解为

$$c_\sigma(t) = c_\sigma(0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_\sigma t}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.141}$$

$c_\sigma(0)$为积分常数,即 $c_\sigma(t)$在 $t = 0$ 时刻的值.0 时刻(7.139)为

$$\boldsymbol{\psi}(0) = \sum_{\sigma=1}^{f} c_\sigma(0) \boldsymbol{\Phi}_\sigma, \tag{7.142}$$

其中的系数

$$c_\sigma(0) = \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'}(0) \delta_{\sigma\sigma'} = \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'}(0) \boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger \boldsymbol{\Phi}_{\sigma'}$$

$$= \boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger \sum_{\sigma'=1}^{f} c_{\sigma'}(0)\boldsymbol{\Phi}_{\sigma'} = \boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger \boldsymbol{\psi}(0) \tag{7.143}$$

可由 $\boldsymbol{\psi}$ 的初值 $\boldsymbol{\psi}(0)$ 算出. 因此, 方程(7.129)的通解就是

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{\sigma=1}^{f} c_\sigma(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_\sigma t}\boldsymbol{\Phi}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{f} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_\sigma t}\boldsymbol{\Phi}_\sigma\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger\boldsymbol{\psi}(0). \tag{7.144}$$

在此解成立的条件下, 即对 $K_\sigma > 0(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$ 的情形, 方程(7.130)和(7.129)不是彼此独立的, 将(7.129)两边取复共轭后转置即得(7.130). 后者的通解也就是(7.144)的厄米伴随

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger(t) = \sum_{\sigma=1}^{f} \boldsymbol{\psi}^\dagger(0)\boldsymbol{\Phi}_\sigma\boldsymbol{\Phi}_\sigma^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_\sigma t}. \tag{7.145}$$

由解(7.144)和(7.145)的诸分量 $\psi_\sigma(t)$、$\psi_\sigma^*(t)$, $\sigma = 1, 2, \cdots, f$, 经(7.121)的逆变换

$$\zeta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\sigma}}(\psi_\sigma^* + \psi_\sigma), \quad \pi_\sigma = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega_\sigma}{2}}(\psi_\sigma^* - \psi_\sigma) \tag{7.146}$$

即得原先的广义坐标和广义动量随时间的变化 $\zeta_\sigma(t)$、$\pi_\sigma(t)$, $\sigma = 1, 2, \cdots, f$. 其实(7.121)也是一个正则变换, 变换后的广义坐标为 $\psi_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$, 与它们正则共轭的广义动量依次为 $\mathrm{i}\psi_\sigma^*$, $\sigma = 1, 2, \cdots, f$. 这可由它们之间的泊松括号判明. 正则变量 ζ_σ、$\pi_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, f)$ 间的泊松括号为

$$[\zeta_\sigma, \zeta_{\sigma'}] = [\pi_\sigma, \pi_{\sigma'}] = 0, \quad [\zeta_\sigma, \pi_{\sigma'}] = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sigma, \sigma' = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.147}$$

由(7.121)、(5.12)和此式得

$$[\psi_\sigma, \psi_{\sigma'}] = [\mathrm{i}\psi_\sigma^*, \mathrm{i}\psi_{\sigma'}^*] = 0, \quad [\psi_\sigma, \mathrm{i}\psi_{\sigma'}^*] = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad \sigma, \sigma' = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.148}$$

这就证实了上述论断. 这是一个与时间无关的正则变换, 哈密顿量不变. 将它用这组正则变量表出为

$$H = \sum_{\sigma=1}^{f} \psi_\sigma^*\omega_\sigma\psi_\sigma + \mathrm{i}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}\left[\frac{1}{2}(\psi_\sigma^* S_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}^* - \psi_\sigma S_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}) - \psi_\sigma^* A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}\right]. \tag{7.149}$$

在条件(7.127)下简化为

$$H = \sum_{\sigma=1}^{f} \psi_\sigma^*\omega_\sigma\psi_\sigma - \mathrm{i}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} \psi_\sigma^* A_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}. \tag{7.150}$$

可直接验证(7.122)和(7.126)为正则方程

$$\dot{\psi}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial \mathrm{i}\psi_\sigma^*}, \quad \mathrm{i}\dot{\psi}_\sigma^* = -\frac{\partial H}{\partial \psi_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.151}$$

其中 H 由(7.149)表达. 方程(7.128)也可表示为正则方程(7.151), 只要将哈

密顿量 H 取为(7.150).可见(7.121)以下的描述仍为正则描述,只是采用了复正则变量$(\psi_\sigma, \mathrm{i}\psi_\sigma^*)$,因而是复正则描述.这种复正则描述在条件(7.127)下表现出优越性.它消去了广义坐标与广义动量间的耦合,使变量(ψ_σ)与(ψ_σ^*)分离.这自然促使人们在条件(7.127)不满足时寻求变换$(\psi_\sigma, \psi_\sigma^*)\to(\psi'_\sigma, \psi'^*_\sigma)$,使此条件对新变量成立.

暂时回到正则变量$(\zeta_\sigma, \pi_\sigma)$,和哈密顿量(7.114).考虑用母函数

$$X \equiv \sum_{\sigma=1}^{f} \rho'_\sigma \zeta_\sigma + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} \zeta_\sigma X_{\sigma\sigma'} \zeta_{\sigma'} \tag{7.152}$$

按情形二作正则变换,其中 $\rho'_\sigma, \sigma = 1, 2, \cdots, f$,为新广义动量,

$$X_{\sigma\sigma'} = X_{\sigma'\sigma} \tag{7.153}$$

为常数.由(5.84)知,变换后的广义坐标为

$$\xi'_\sigma = \frac{\partial X}{\partial \rho'_\sigma} = \zeta_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.154}$$

即广义坐标在此变换中不变;变换前的广义动量则为

$$\pi_\sigma = \frac{\partial X}{\partial \zeta_\sigma} = \rho'_\sigma + \sum_{\sigma'=1}^{f} X_{\sigma\sigma'} \zeta_{\sigma'}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.155}$$

移项后此式成为

$$\rho'_\sigma = \pi_\sigma - \sum_{\sigma'=1}^{f} X_{\sigma\sigma'} \zeta_{\sigma'}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f, \tag{7.156}$$

它与(7.154)一起表示从正则变量$(\zeta_\sigma, \pi_\sigma)$到正则变量$(\xi'_\sigma, \rho'_\sigma)$的变换.它们的逆变换为

$$\zeta_\sigma = \xi'_\sigma, \quad \pi_\sigma = \rho'_\sigma + \sum_{\sigma'=1}^{f} X_{\sigma\sigma'} \xi'_{\sigma'}, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.157}$$

代入(7.114)得哈密顿量的新表达式

$$H = \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} \left[\frac{1}{2} (R'_{\sigma\sigma'} \rho'_\sigma \rho'_{\sigma'} + K'_{\sigma\sigma'} \xi'_\sigma \xi'_{\sigma'}) + G'_{\sigma\sigma'} \xi'_\sigma \rho'_{\sigma'} \right], \tag{7.158}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R'_{\sigma\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad K'_{\sigma\sigma'} = K_\sigma \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{\tau=1}^{f} (X_{\sigma\tau} X_{\tau\sigma'} + \Gamma_{\sigma\tau} X_{\tau\sigma'} + \Gamma_{\sigma'\tau} X_{\tau\sigma}), \\ G'_{\sigma\sigma'} = \Gamma_{\sigma\sigma'} + X_{\sigma\sigma'}. \end{aligned}\right\} \tag{7.159}$$

显然

$$R'_{\sigma\sigma'} = R'_{\sigma'\sigma}, \quad K'_{\sigma\sigma'} = K'_{\sigma'\sigma}. \tag{7.160}$$

现在可重复(7.101)以下的推导,只须将其后各式中各量在上角加一撇以示区别.相当于变换(7.109)~(7.112)的是从 $\boldsymbol{\xi}' \equiv (\xi'_\sigma)$和 $\boldsymbol{\rho}' \equiv (\rho'_\sigma)$到 $\boldsymbol{\zeta}' \equiv (\zeta'_\sigma)$

和 $\boldsymbol{\pi}' \equiv (\pi'_\sigma)$ 的正则变换

$$\boldsymbol{\zeta}' = \boldsymbol{W}'\boldsymbol{\xi}', \quad \boldsymbol{\pi}' = \widetilde{\boldsymbol{W}}'^{-1}\boldsymbol{\rho}', \tag{7.161}$$

及其逆变换

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{W}'^{-1}\boldsymbol{\zeta}', \quad \boldsymbol{\rho}' = \widetilde{\boldsymbol{W}}'\boldsymbol{\pi}', \tag{7.162}$$

其中变换矩阵 $\boldsymbol{W}'$ 模仿 $\boldsymbol{W}$ 定义，以使哈密顿量用 (ζ'_σ) 和 (π'_σ) 的表达式形如(7.114)，为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{f}(\pi'^2_\sigma + K'_\sigma\zeta'^2_\sigma) + \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}\zeta'_\sigma\Gamma'_{\sigma\sigma'}\pi'_{\sigma'}, \tag{7.163}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}' \equiv (\Gamma'_{\sigma\sigma'}) = \widetilde{\boldsymbol{W}}'^{-1}\boldsymbol{G}'\widetilde{\boldsymbol{W}}', \tag{7.164}$$

$\boldsymbol{G}' = (G'_{\sigma\sigma'})$. 接着平行于(7.120)～(7.126)有

$$\omega'_\sigma \equiv \sqrt{K'_\sigma}, \tag{7.165}$$

$$\psi'_\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega'_\sigma}}(\omega'_\sigma\zeta'_\sigma + \mathrm{i}\pi'_\sigma), \quad \psi'^*_\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega'_\sigma}}(\omega'_\sigma\zeta'_\sigma - \mathrm{i}\pi'_\sigma), \tag{7.166}$$

$$\dot{\psi}'_\sigma = -\mathrm{i}\omega'_\sigma\psi'_\sigma - \sum_{\sigma'=1}^{f}(A'_{\sigma\sigma'}\psi'_{\sigma'} - S'_{\sigma\sigma'}\psi'^*_{\sigma'}), \tag{7.167}$$

$$\dot{\psi}'^*_\sigma = \mathrm{i}\omega'_\sigma\psi'^*_\sigma - \sum_{\sigma'=1}^{f}(A'_{\sigma\sigma'}\psi'^*_{\sigma'} - S'_{\sigma\sigma'}\psi'_{\sigma'}), \tag{7.168}$$

$$Z'_{\sigma\sigma'} \equiv \sqrt{\frac{\omega'_{\sigma'}}{\omega'_\sigma}}\Gamma'_{\sigma\sigma'}, \tag{7.169}$$

$$A'_{\sigma\sigma'} \equiv \frac{1}{2}(Z'_{\sigma\sigma'} - Z'_{\sigma'\sigma}), \tag{7.170}$$

$$S'_{\sigma\sigma'} \equiv \frac{1}{2}(Z'_{\sigma\sigma'} + Z'_{\sigma'\sigma}). \tag{7.171}$$

注意，正则变换(7.154)和(7.156)以及变换后的正则理论中含 $n = \dfrac{f(f+1)}{2}$ 个自由参数 $X_{\sigma\sigma'}$，$\sigma \leqslant \sigma' = 1, 2, \cdots, f$. 调节这些参数可以改变理论的形式. 例如可对理论加 n 个条件

$$S'_{\sigma\sigma'} = 0, \quad \sigma \leqslant \sigma' = 1, 2, \cdots, f. \tag{7.172}$$

它们可当作 n 个参数 $(X_{\sigma\sigma'})$ 的 n 个方程. 将由这些方程解出的参数 $(X_{\sigma\sigma'})$ 代入变换(7.154)和(7.156)，随后的理论因符合条件(7.172)而得以将方程(7.167)和(7.168)简化为

$$\mathrm{i}\dot{\psi}'_\sigma = \omega'_\sigma\psi'_\sigma - \mathrm{i}\sum_{\sigma'=1}^{f}A'_{\sigma\sigma'}\psi'_{\sigma'}, \quad -\mathrm{i}\dot{\psi}'^*_\sigma = \omega'_\sigma\psi'^*_\sigma + \mathrm{i}\sum_{\sigma'=1}^{f}A'_{\sigma\sigma'}\psi'^*_{\sigma'}. \tag{7.173}$$

写成矢量形式便是

$$\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{\psi}}' = \boldsymbol{H}'\boldsymbol{\psi}', \tag{7.174}$$

$$-\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{\psi}}'^{\dagger} = \boldsymbol{\psi}'^{\dagger}\boldsymbol{H}', \tag{7.175}$$

其中 $\boldsymbol{H}' \equiv (H'_{\sigma\sigma'})$,

$$H'_{\sigma\sigma'} = \omega'_{\sigma}\delta_{\sigma\sigma'} - \mathrm{i}A'_{\sigma\sigma'}. \tag{7.176}$$

(7.174)便是薛定谔型方程.

§7.4 恢复力 陀螺力 耗散力 瑞利耗散函数 一般定常线性系统及其通解

对参数与时间无关的定常情形,(7.100)是最一般的二次型哈密顿量,(7.102)为最一般的线性正则方程.其中第一式的矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\rho} + \widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\xi}, \tag{7.177}$$

$\widetilde{\boldsymbol{G}}$ 为 $\boldsymbol{G} = (G_{\sigma\sigma'})$ 的转置矩阵,$\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{R} = (R_{\sigma\sigma'})$ 的逆矩阵.经整理,此式成为

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\xi}, \tag{7.178}$$

它将广义动量 $\boldsymbol{\rho}$ 表示成广义速度 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ 和广义坐标 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数.作逆勒让德变换,得到与哈密顿量(7.100)或(7.113)对应的拉格朗日量

$$L = \dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}\,\boldsymbol{\rho} - H = \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{K}^{(H)}\boldsymbol{\xi}, \tag{7.179}$$

第二等号处用了(7.177).为了保留符号 $\boldsymbol{K} \equiv (K_{\sigma\sigma'})$ 给拉氏量,此处将(7.100)中的 $K_{\sigma\sigma'}$ 改记为 $K^{(H)}_{\sigma\sigma'}$,(7.113)中的 $\boldsymbol{K} \equiv (K_{\sigma\sigma'})$ 改记为 $\boldsymbol{K}^{(H)} \equiv (K^{(H)}_{\sigma\sigma'})$.将(7.178)代入(7.179),以消去广义动量 $\boldsymbol{\rho}$,得

$$L = \frac{1}{2}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}\,\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi} - \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{\xi}}, \tag{7.180}$$

其中

$$\boldsymbol{K} \equiv \boldsymbol{K}^{(H)} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{G}}, \tag{7.181}$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{G}\boldsymbol{M}. \tag{7.182}$$

(7.180)中的拉氏量已成为广义坐标 $\boldsymbol{\xi}$ 和广义速度 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ 的函数.它定义的拉格朗日力学等价于(7.113)中的哈密顿量定义的哈密顿力学.这一点可直接验证.在(7.180)中称

$$T = \frac{1}{2}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}}\,\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} M_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_{\sigma}\dot{\xi}_{\sigma'} \tag{7.183}$$

为动能,

$$V = \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi} + \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} K_{\sigma\sigma'}\xi_{\sigma}\xi_{\sigma'} + \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} B_{\sigma\sigma'}\xi_{\sigma}\dot{\xi}_{\sigma'} \tag{7.184}$$

为势函数，$B_{\sigma\sigma'}$为$\boldsymbol{B}$的矩阵元.由此得广义力

$$Q_\sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{\xi}_\sigma} - \frac{\partial V}{\partial \xi_\sigma} = -\sum_{\sigma'=1}^{f} K_{\sigma\sigma'}\xi_{\sigma'} - \sum_{\sigma'=1}^{f}(B_{\sigma\sigma'} - B_{\sigma'\sigma})\dot{\xi}_{\sigma'}$$

$$\equiv Q_\sigma^{(r)} + Q_\sigma^{(t)}, \qquad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.185}$$

右边第一项

$$Q_\sigma^{(r)} \equiv -\sum_{\sigma'=1}^{f} K_{\sigma\sigma'}\xi_{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{7.186}$$

为恢复力，在$\boldsymbol{\xi}=0$为稳定平衡点的条件下它指向这一平衡点.第二项

$$Q_\sigma^{(t)} \equiv -\sum_{\sigma'=1}^{f}(B_{\sigma\sigma'} - B_{\sigma'\sigma})\dot{\xi}_{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f, \tag{7.187}$$

是一项速度有关力，称为陀螺力.陀螺力的特点是不作功，它的功率为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma^{(t)}\dot{\xi}_\sigma = -\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f}(B_{\sigma\sigma'} - B_{\sigma'\sigma})\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_{\sigma'} = 0. \tag{7.188}$$

任何矩阵都可分解为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{(s)} + \boldsymbol{B}^{(a)}, \tag{7.189}$$

其中

$$\boldsymbol{B}^{(s)} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \widetilde{\boldsymbol{B}}) = \widetilde{\boldsymbol{B}}^{(s)} \tag{7.190}$$

为对称矩阵，

$$\boldsymbol{B}^{(a)} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \widetilde{\boldsymbol{B}}) = -\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(a)} \tag{7.191}$$

为反对称矩阵.将(7.189)代入(7.180)，对称矩阵$\boldsymbol{B}^{(s)}$对拉氏量的贡献

$$-\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{B}^{(s)}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{B}^{(s)}\boldsymbol{\xi}\right) \tag{7.192}$$

为一对时间的全微商，因此可减去.在拉氏量(7.180)的矩阵$\boldsymbol{B}$中可只保留反对称部分.即恒可设该矩阵$\boldsymbol{B}$是反对称的.如此则陀螺力(7.187)可表示为

$$Q_\sigma^{(t)} = -2\sum_{\sigma'=1}^{f} B_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{7.193}$$

摩擦力或阻尼伴随机械运动向热运动的转移，机械能向热运动能量的耗散，因此又称耗散力.耗散已非纯力学过程，耗散力不能用势表示.不过可引进瑞利(Rayleigh)耗散函数

$$D = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} D_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_{\sigma'}, \tag{7.194}$$

其中

$$D_{\sigma\sigma'} = D_{\sigma'\sigma} \tag{7.195}$$

为常数.将耗散力表示为

$$Q_\sigma^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_\sigma} = -\sum_{\sigma'=1}^{f} D_{\sigma\sigma'}\dot{\xi}_{\sigma'}, \tag{7.196}$$

它的功率为

$$\sum_{\sigma=1}^{f} Q_\sigma^{(d)}\dot{\xi}_\sigma = -2D. \tag{7.197}$$

可见函数 D 表示的是耗散功率的一半,对于非零广义速度 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$,它应恒正.现在将拉氏方程写成(3.109)的形式,右边的广义力为

$$Q_\sigma = Q_\sigma^{(r)} + Q_\sigma^{(t)} + Q_\sigma^{(d)}. \tag{7.198}$$

这是 f 个广义坐标 $\xi_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,f)$的 f 个常系数二阶线性微分方程.也可将广义坐标和广义速度一起,用时间 t 的 $2f$ 个函数

$$x_\sigma(t) = \begin{cases} \xi_\sigma(t), & \text{若 } \sigma \leqslant f, \\ \dot{\xi}_{\sigma-f}(t), & \text{若 } \sigma > f, \end{cases} \quad \sigma = 1,2,\cdots,2f, \tag{7.199}$$

来描述系统的运动状态,将拉格朗日方程表示为这 $2f$ 个函数的一阶常系数线性微分方程组

$$\dot{x}_\sigma = \sum_{\sigma'=1}^{2f} C_{\sigma\sigma'}x_{\sigma'}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,2f, \tag{7.200}$$

$C_{\sigma\sigma'}(\sigma,\sigma'=1,2,\cdots,2f)$为常数.此式的矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}, \tag{7.201}$$

$\boldsymbol{x}$ 为 $x_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,2f)$组成的 $2f$ 维列矢量,$\boldsymbol{C}\equiv(C_{\sigma\sigma'})$为 $2f$ 行 $2f$ 列矩阵.这种运动方程可用代数方法求解.

若有矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 及其逆 $\boldsymbol{Y}^{-1}$,$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{-1}=\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}$,使

$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}^{-1}, \tag{7.202}$$

则称 $\boldsymbol{C}'$与 $\boldsymbol{C}$ 相似.附录一中证明了,任何矩阵都与一上三角矩阵相似;上三角矩阵即只在主对角线及其右上方有非零矩阵元、主对角线左下方矩阵元全为零的矩阵.设 $\boldsymbol{C}$ 经相似变换(7.202)得到的矩阵 $\boldsymbol{C}'$即是这种上三角矩阵.作变换

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{x}, \tag{7.203}$$

$\boldsymbol{C}$ 与时间无关,$\boldsymbol{Y}$ 自然也与时间无关.在(7.201)两边左乘 $\boldsymbol{Y}$,利用(7.203)和(7.202)得变换后的运动方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{x}'. \tag{7.204}$$

$\boldsymbol{C}'$为上三角矩阵意即$\sigma>\sigma'$的矩阵元$C'_{\sigma\sigma'}=0$.(7.204)写成分量形式即

$$\dot{x}'_\sigma = \sum_{\sigma'=\sigma}^{2f} C'_{\sigma\sigma'}x'_{\sigma'}. \tag{7.205}$$

可见 $\boldsymbol{x}'$第 $2f$ 个分量随时间变化的微分方程为常系数线性齐次一阶方程

$$\dot{x}'_{2f} = -\lambda x'_{2f}, \tag{7.206}$$

其中系数 $\lambda = -C'_{2f\,2f}$. 此方程的通解为

$$x'_{2f}(t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{7.207}$$

a 为积分常数. 若 $\lambda = \mathrm{i}\omega$ 为虚数, 此解表示简谐振动; 若 $\lambda > 0$ 为实数, 此解表示指数衰减; 若 $\lambda < 0$ 为实数, 此解表示指数增长; 若 λ 为复数则表示带衰减或带增长的振动, 视其实部大于零或小于零而定. 对 $\sigma < 2f$,

$$\dot{x}'_\sigma + \lambda_\sigma x'_\sigma = f_\sigma(t), \tag{7.208}$$

$$\lambda_\sigma = -C'_{\sigma\sigma}, \tag{7.209}$$

$$f_\sigma(t) = \sum_{\sigma'=\sigma+1}^{2f} C'_{\sigma\sigma'} x'_{\sigma'}(t), \tag{7.210}$$

在 $\sigma' > \sigma$ 的分量 $x'_{\sigma'}(t)$ 均已解出的条件下, $f_\sigma(t)$ 为已知函数, 在(7.208)中它表现为非齐次项. 按常数变异法可得(7.208)的通解

$$x'_\sigma(t) = [a_\sigma + \int_{t_0}^{t} f_\sigma(t')\mathrm{e}^{\lambda_\sigma t'}\mathrm{d}t']\mathrm{e}^{-\lambda_\sigma t}, \tag{7.211}$$

a_σ 为积分常数. 由 t_0 时刻 $x'_\sigma(t)$ 的初值定得

$$a_\sigma = x'_\sigma(t_0)\mathrm{e}^{\lambda_\sigma t_0}. \tag{7.212}$$

此式对 $\sigma = 2f$ 的分量也对, 只要将 a_{2f} 理解为 a, λ_{2f} 理解为 λ 即可.

§7.5 物体的形变张量与应力张量 胡克定律与弹性模数 形变能

考察一个具有一定大小的物体. 由于在它占据的空间内处处都有物质, 且物质性质在这范围内连续变化, 这种物体称为连续介质. 刚体就是一种连续介质. 只是刚体中任二点距离不变的假定太强, 过于理想. 实际物体的形状和大小都程度不同地可以变化, 这种变化统称形变. 本节讨论物体形变及其与内部应力和外部作用力的关系, 由此可判断一定外力作用下的平衡形状.

假想地将物体划分为许多小部分. 每一部分足够小, 以致在物体形变问题中可当作质点. 物体便可当作一个质点系, 它的形变可用这些质点的位移来描绘. 以下质点一词即指物体的这种"小部分". 将一种平衡形状作为问题的出发点, 形变即指实际形状相对这种平衡形状的偏离. 既是平衡形状, 其中各部分都是静止的, 内部各点的内应力与外作用力必相互抵消而可设为零. 用这种形状下各质点的位置 $\boldsymbol{r}$ 作为识别这些质点的标志. $\boldsymbol{r}$ 处的形变即由该处质点的位移 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 表示, $\boldsymbol{r}'$ 为该质点在形变后的位置. 不过, 若各点位移相同, 结果只是整个物体的平移, 仍无形变. 可见, 形变表现为各点位移的差别. 用 x_1、x_2 和 x_3 表示 $\boldsymbol{r}$ 的三个笛卡儿坐标, $u_i = x'_i - x_i\,(i = 1, 2, 3)$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 处位移矢

量 $\boldsymbol{u}$ 的三个笛卡儿坐标，形变表现为非零微商 $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. 说是连续介质，实际是由分子组成的，只是宏观看来是连续的罢了. 平衡条件下各分子在其平衡位置. 形变时分子间相对位置发生变化. 在一般弹性体中，这种变化与分子间距相比是很小的. 即使整体形变显著，在扣除整体的平移和转动后每一点附近的形变都很小，即 $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(i,j=1,2,3)$ 为小量. 坐标间隔为 $(\mathrm{d}x_i)$ 的两点间距离平方为 $\mathrm{d}l^2=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i^2$，形变后距离平方变为 $\mathrm{d}l'^2=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i'^2$. 两者相差

$$\mathrm{d}l'^2-\mathrm{d}l^2=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}x_i'^2-\mathrm{d}x_i^2). \tag{7.213}$$

由于

$$\mathrm{d}x_i'=\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}u_i,\quad i=1,2,3, \tag{7.214}$$

上式可表示为

$$\mathrm{d}l'^2-\mathrm{d}l^2=\sum_{i=1}^{3}(2\mathrm{d}x_i\mathrm{d}u_i+\mathrm{d}u_i^2)=2\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j, \tag{7.215}$$

其中

$$u_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right),\quad i,j=1,2,3, \tag{7.216}$$

组成一三行三列的矩阵，称为物体在该处的形变张量. 这显然是一对称张量，即

$$u_{ij}=u_{ji},\quad i,j=1,2,3. \tag{7.217}$$

由于 $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ 为小量，这个张量的各分量皆为小量. (7.216)右边括号内第三项更为二级小，可忽略. 忽略此项后

$$u_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right),\quad i,j=1,2,3. \tag{7.218}$$

由(7.215)得

$$\mathrm{d}l'=\mathrm{d}l\sqrt{1+2\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}n_in_j}, \tag{7.219}$$

其中 $n_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}l}(i=1,2,3)$ 为所考虑的两点间联线的方向余弦，以它们为分量组成的矢量 $\boldsymbol{n}$ 为联线方向的单位矢量. (7.219)右边根号下第二项为小量. 将根号展成它的幂级数，取到一次幂得

$$\mathrm{d}l'=\mathrm{d}l\left(1+\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}n_in_j\right). \tag{7.220}$$

此式表明,形变中这两点间距的相对伸长为

$$\frac{\mathrm{d}l' - \mathrm{d}l}{\mathrm{d}l} = \sum_{i,j=1}^{3} u_{ij} n_i n_j . \tag{7.221}$$

形变张量(u_{ij})由此形象地表示出该处的形变.像前面对张量和矩阵多次做过的那样,可求出矩阵(u_{ij})的三条互相垂直的本征矢和相应的本征值.沿这三条本征矢的轴称为这个形变张量的主轴,相应的本征值称为这个张量的主值.以主轴为坐标轴的坐标系称为主轴坐标系.在主轴坐标系中张量(u_{ij})是对角的,即 $i \neq j$ 的非对角元 $u_{ij} = 0$.而对角元 $u_{ii}(i = 1, 2, 3)$则分别为沿主轴的三条本征矢对应的矩阵(u_{ij})的本征值.在主轴坐标系中(7.221)简化为

$$\frac{\mathrm{d}l' - \mathrm{d}l}{\mathrm{d}l} = \sum_{i=1}^{3} u_{ii} n_i^2 . \tag{7.222}$$

表示沿三条主轴的相对伸长是彼此独立的,互相不干涉.如果所考虑的两点联线沿第 i 主轴,单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 即沿此主轴,它的第 i 分量 $n_i = 1$,其他分量为零.将此情形代入(7.222)得

$$\frac{\mathrm{d}l' - \mathrm{d}l}{\mathrm{d}l} = u_{ii} . \tag{7.223}$$

可见,形变张量的第 i 本征值表示的是沿第 i 主轴的两点间距的相对伸长.沿第 i 主轴的线段 $\mathrm{d}x_i$ 在形变后变为

$$\mathrm{d}x_i' = (1 + u_{ii})\mathrm{d}x_i , \tag{7.224}$$

仍沿第 i 主轴.以沿三条主轴的线段 $\mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2, 3$, 为棱的长方体体积 $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$,形变后体积变为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathscr{V}' &= \mathrm{d}x_1' \mathrm{d}x_2' \mathrm{d}x_3' = (1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33})\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \\ &= (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33})\mathrm{d}\mathscr{V}, \end{aligned} \tag{7.225}$$

最后一等号处用到 u_{ij} 为小量的情节.此式表明形变中体积的相对膨胀为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}' - \mathrm{d}\mathscr{V}}{\mathrm{d}\mathscr{V}} = \sum_{i=1}^{3} u_{ii} . \tag{7.226}$$

矩阵对角元素的和称为它的阵迹.附录一中证明了矩阵阵迹在相似变换中不变,从而在坐标系转动的正交变换中不变.因此,(7.226)在任何坐标系中都成立,而不限于主轴坐标系.据此,可将形变张量作分解

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \delta_{ij} . \tag{7.227}$$

由于 $\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3$,此式括号内的部分组成的矩阵阵迹为零.形变张量的这一部分代表体积不变的形变,这种形变称为切变.(7.227)的末项组成的矩阵为数

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} u_{ii} \tag{7.228}$$

乘三行三列幺矩阵 $\boldsymbol{I}$. 它是对角的, 表明所取坐标系已是这部分张量的主轴坐标系. 且沿三条主轴的相对伸长同为 $\bar{u}$, 可见它表示的是沿各方向按比例的胀缩. 这种形变称为纯胀缩, 简称胀缩. (7.227)表示形变由切变和胀缩两部分组成. 由于 $\bar{u}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 在坐标变换中都不变, 形变张量的分解(7.227)不依赖坐标系的选取.

物体内各部分受的力由两部分组成. 一部分是长程力的直接作用, 例如穿入物体内部的重力场和电磁场对物体各部分的作用. 另一部分是作用于物体表面的力依靠物体分子间短程作用逐层传入物体内部的力和它们的反作用力. 这部分力称为物体的内应力, 简称应力. 长程力对物体各部分的作用与对质点的作用相同, 不需要专门讨论. 应力则是只出现于物体内部的力, 此处宜略作分析. 用 $\boldsymbol{f}$ 表示应力密度, $\mathrm{d}\mathscr{V}$ 体积元受到的应力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{7.229}$$

它的分量形式为

$$\mathrm{d}F_i = f_i\mathrm{d}\mathscr{V}, \quad i = 1,2,3. \tag{7.230}$$

体积 $\mathscr{V}$ 内的应力为

$$F_i = \int_{\mathscr{V}} f_i\mathrm{d}\mathscr{V}, \quad i = 1,2,3. \tag{7.231}$$

应力既是逐层传递的, 体积 $\mathscr{V}$ 内的应力总和 $\boldsymbol{F}$ 必来自它的表面 s 用 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathrm{d}\sigma\boldsymbol{n}$ 表示 s 上的一个面积元, $\mathrm{d}\sigma$ 表示此面积元的值, $\boldsymbol{n}$ 为此面元的向外单位法矢量. 它的分量形式为

$$\mathrm{d}\sigma_i = \mathrm{d}\sigma n_i, \quad i = 1,2,3. \tag{7.232}$$

来自表面的应力应可表示为面积分

$$F_i = \int_s \sum_{j=1}^{3} \mathscr{P}_{ij}\mathrm{d}\sigma_j = \int_{\mathscr{V}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j}\mathrm{d}\mathscr{V}, \quad i = 1,2,3. \tag{7.233}$$

末一等号处用高斯定理将面积分化成了体积分. 与(7.231)比较, 得应力密度的表达式

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3. \tag{7.234}$$

由 $\mathscr{P}_{ij}(i,j=1,2,3)$ 组成的张量称为应力张量. 由应力密度可计算应力矩密度 $x_if_j - x_jf_i$, 进而计算作用在体积 $\mathscr{V}$ 上的总应力矩

$$J_{ij} = \int_{\mathscr{V}} (x_if_j - x_jf_i)\mathrm{d}\mathscr{V} = \int_{\mathscr{V}} \sum_{k=1}^{3} \left(x_i \frac{\partial \mathscr{P}_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \mathscr{P}_{ik}}{\partial x_k} \right) \mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \int_{\mathscr{V}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i\mathscr{P}_{jk} - x_j\mathscr{P}_{ik})\mathrm{d}\mathscr{V} - \int_{\mathscr{V}} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\mathscr{P}_{jk} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k}\mathscr{P}_{ik} \right) \mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \int_s \sum_{k=1}^{3} (x_i \mathscr{P}_{jk} - x_j \mathscr{P}_{ik}) \mathrm{d}\sigma_k - \int_{\mathscr{V}} (\mathscr{P}_{ji} - \mathscr{P}_{ij}) \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{7.235}$$

在末一等号处用高斯定理将第一个体积分化成了面积分，同时用$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$化简了第二个体积分.牛顿第三定律要求相邻两点间的作用力和反作用力大小相等方向相反作用在一条直线上.这就不仅使体积$\mathscr{V}$内各点彼此作用力之和为零，应力总和只能来自体积的表面，而且使体积$\mathscr{V}$内各点彼此作用的力矩之和为零，应力矩总和也只能来自体积的表面.即是说，它只能来自(7.235)右边的第一项，而第二项应为零.由于对任何体积此项都应为零，它的被积函数必为零，从而

$$\mathscr{P}_{ij} = \mathscr{P}_{ji}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{7.236}$$

即应力张量也是对称张量.

现在计算物体形变时应力作的功.设在 $\boldsymbol{r}$ 处有位移 $\delta \boldsymbol{u}$，该处应力的作功密度为

$$\sum_{i=1}^{3} f_i \delta u_i = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i .$$

对整个物体作的功为

$$\delta W = \int_{\mathscr{V}} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \mathrm{d}\mathscr{V}$$

$$= \int_s \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{P}_{ji} \delta u_i \mathrm{d}\sigma_j - \int_{\mathscr{V}} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{P}_{ji} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathscr{V},$$

其中积分限 $\mathscr{V}$ 和 s 分别为整个物体所占的空间和它的表面.给形变加上边界条件使右边的面积分为零.许多自然的边界条件有这种性质，例如令物体表面位移 $\delta \boldsymbol{u}$ 为零等.使表面积分为零的边界条件统称周期边界条件.在此条件下，上式变为

$$\delta W = -\int_{\mathscr{V}} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{P}_{ij} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathscr{V} = -\int_{\mathscr{V}} \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{P}_{ij} \delta u_{ij} \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{7.237}$$

末一等号处用了应力张量的对称性(7.236)和形变张量的线性化(7.218).作功导致形变势能减小.用 U 表形变势能密度，

$$\delta W = -\delta \int_{\mathscr{V}} U \mathrm{d}\mathscr{V} = -\int_{\mathscr{V}} \delta U \mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{7.238}$$

与上式比较得 $\delta U = \sum_{i,j=1}^{3} \mathscr{P}_{ij} \delta u_{ij}$，可见

$$\mathscr{P}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial u_{ij}}. \tag{7.239}$$

将形变势能密度展成形变张量各分量(u_{ij})的幂级数.将无形变时的形变势能密度取为零,此幂级数的零次项为零.无形变时形变势能密度应取极小值,它对(u_{ij})各分量的一级微商应为零,此幂级数的一次项亦为零.因此,精确到形变张量各分量的二次幂,形变势能密度可表示为

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j,i'j'=1}^{3} u_{ij}\lambda_{iji'j'}u_{i'j'}, \tag{7.240}$$

($\lambda_{iji'j'}$)为一四阶张量.由于(u_{ij})为对称张量,($\lambda_{iji'j'}$)对交换下标 i 和 j 或交换下标 i' 和 j' 分别可取成对称的.自然还可将它取为对交换下标对(ij)和($i'j'$)为对称的.于是有

$$\lambda_{iji'j'} = \lambda_{jii'j'} = \lambda_{ijj'i'} = \lambda_{i'j'ij}. \tag{7.241}$$

将(7.240)代入(7.239)得

$$\mathscr{P}_{ij} = \sum_{i',j'=1}^{3} \lambda_{iji'j'}u_{i'j'}. \tag{7.242}$$

应力张量与形变张量的这种线性关系是中学物理中学过的"应力与形变成正比"的胡克定律的普遍形式,就称为胡克定律.四阶张量($\lambda_{iji'j'}$)称为弹性模数张量.(7.240)与(7.242)是极普遍的,使用中却因此显得太繁.且含待定参数过多.在用对称性(7.241)消除重复后,弹性模数张量仍含 21 个独立分量.过多参数会损害理论的美,降低它的实用价值.幸运的是,在仍然很普遍的情况下可大大简化理论.这就是对各向同性物体.通常碰到的物体大都各向同性,就形变运动而言,即其内部各处形变运动的规律不因坐标架方向的不同选择而变.只有单晶体是各向异性的.以下以各向同性物体为例作进一步研讨.有了这方面的经验后,在必须用一般关系(7.240)和(7.242)研讨各向异性物体的形变运动时也不会有原则困难.

各向同性物体中形变势能密度应与形变方向无关,因而只与由形变张量(u_{ij})组成的标量有关.标量为转动变换下的不变量.到分量的二次幂,由形变张量可组成两个独立标量,即矩阵(u_{ij})的阵迹 $\sum_{i=1}^{3} u_{ii}$ 和这个矩阵平方的阵迹 $\sum_{i,j=1}^{3} u_{ij}^2$. 形变势能密度的普遍形式遂为

$$U = \frac{\lambda}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} u_{ii}\Big)^2 + \mu\sum_{i,j=1}^{3} u_{ij}^2, \tag{7.243}$$

其中常数 λ 和 μ 称为拉梅系数.鉴于形变张量的分解(7.227),最好用其中的切变张量和胀缩张量表示出势能密度.可直接验证,(7.243)可表示为

$$U = \mu\sum_{i,j=1}^{3}\Big(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'}\Big)^2 + \frac{K}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} u_{ii}\Big)^2, \tag{7.244}$$

其中常数 μ 与(7.243)中的相同,

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{7.245}$$

由于无形变时 U 应取极小,(7.244)右边应恒不小于零.对纯切变, $\sum_{i=1}^{3} u_{ii} = 0$, 它的第二项为零,因而必有 $\mu \geqslant 0$.对纯胀缩, $u_{ij} \propto \delta_{ij}$, 它的第一项为零,因而必有 $K \geqslant 0$.微分(7.244)得

$$\mathrm{d}U = 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \right) \left(\mathrm{d}u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \mathrm{d} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \right) + K \sum_{i=1}^{3} u_{ii} \mathrm{d} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'}.$$

由于

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \right) \delta_{ij} = 0, \tag{7.246}$$

上式变为

$$\mathrm{d}U = 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \right) \mathrm{d}u_{ij} + K \sum_{i=1}^{3} u_{ii} \, \mathrm{d} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'}. \tag{7.247}$$

按(7.239),此式给出

$$\mathscr{P}_{ij} = 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \right) + K \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \delta_{ij}. \tag{7.248}$$

这就是各向同性物体中的胡克定律.它已只含两个参数,其中 μ 称为切变模数, K 称为压缩模数,统称弹性模数.此式用拉梅系数表出,则为

$$\mathscr{P}_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} \delta_{ij}. \tag{7.249}$$

§7.6 弹性体的平衡形状与平衡方程 弹性静力学及其在杆与壳上的应用举例

弹性体的未变形状称为平衡形状.这里形状一词不仅指外形,而且指内部各点的相对位置.在质心静止的惯性坐标系里,弹性体形状平衡的条件为其上各点均静止,即速度均为零.维持速度为零的充分必要条件为所受的力为零,弹性体维持平衡形状的条件乃是其上各点受的力均为零.各点所受的力包括内应力和外作用力.其中外作用力又包括能深入物体内部的长程力和只作用在物体表面的接触力.前者与被它作用的每一小部分的体积成正比,又称体积力.设外作用体积力密度为 $\boldsymbol{f}^{(e)}$,上标(e)表示它是外作用力密度,以区别于内应力密度(7.234).后者与被它作用的每一小块表面的面积成正比,又称面积力.设外作用面积力的面密度为 $\mathscr{P}^{(e)}$,上标(e)表示它是外作用力的面密度,以

区别于应力张量.于是弹性体形状平衡条件为:体内每一点

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j}+f_i^{(e)}=0,\quad i=1,2,3; \tag{7.250}$$

表面每一点

$$\mathscr{P}_i^{(e)}-\sum_{j=1}^{3}\mathscr{P}_{ij}n_j=0,\quad i=1,2,3. \tag{7.251}$$

此式第二项为弹性体内应力在表面的作用面密度,$n_j, j=1,2,3$ 为表面在该点外向法线的方向余弦.将胡克定律(7.249)代入并采用形变张量的线性式(7.218),(7.250)可表示为位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 的偏微分方程

$$\mu\nabla^2 u_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+f_i^{(e)}=0,\quad i=1,2,3, \tag{7.252}$$

其中$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$为拉普拉斯算符;(7.251)则为位移矢量的边界条件

$$\mathscr{P}_i^{(e)}-\mu\sum_{j=1}^{3}n_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\lambda n_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad i=1,2,3. \tag{7.253}$$

写成矢量形式,此二式分别为

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}^{(e)}=0, \tag{7.254}$$

$$\mathscr{P}^{(e)}-\mu[(\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{u}]-\lambda\boldsymbol{n}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0. \tag{7.255}$$

这里,梯度算符∇有两重身份.它既是微分运算,在矢量运算中又是一个第 i 分量为$\frac{\partial}{\partial x_i}$的矢量.例如散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ 可看作∇与 $\boldsymbol{u}$ 的标量积,而张量$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$可看作$\nabla$与 $\boldsymbol{u}$ 的并矢.在一定边界条件下,例如在边界条件(7.255)下,求解偏微分方程(7.254)可得空间各点的位移矢量 $\boldsymbol{u}$,从而了解弹性体的形变.

平衡条件(7.250)和(7.251)也可从虚功原理导出.由(7.239)和(7.218)以及应力的对称性(7.236)可算得内应力对弹性体各点虚位移 $\delta u_i(i=1,2,3)$作的虚功

$$\begin{aligned}-\delta\int_{\mathscr{V}}U\mathrm{d}\mathscr{V}&=-\int_{\mathscr{V}}\delta U\mathrm{d}\mathscr{V}=-\int_{\mathscr{V}}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{P}_{ij}\delta u_{ij}\mathrm{d}\mathscr{V}\\&=-\int_{\mathscr{V}}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{P}_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}\mathscr{V}=-\int_{\mathscr{V}}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{P}_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}\mathscr{V}\\&=\int_{\mathscr{V}}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\mathrm{d}\mathscr{V}-\int_{\mathscr{S}}\sum_{i,j=1}^{3}\mathscr{P}_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{7.256}$$

右边第一项为弹性体内的体积分，表示内应力的体虚功；第二项为弹性体表面的面积分，表示内应力对表面虚位移的面虚功．外力对弹性体的体虚功和面虚功分别为

$$\int_{\mathscr{V}} \sum_{i=1}^{3} f_i^{(e)} \delta u_i \mathrm{d}\mathscr{V} \quad 和 \quad \int_{s} \sum_{i=1}^{3} \mathscr{P}_i^{(e)} \delta u_i \mathrm{d}\sigma .$$

可见总虚功为

$$\delta W = \int_{\mathscr{V}} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathscr{P}_{ij}}{\partial x_j} + f_i^{(e)} \right) \delta u_i \mathrm{d}\mathscr{V} + \int_{s} \sum_{i=1}^{3} \left(\mathscr{P}_i^{(e)} - \sum_{j=1}^{3} \mathscr{P}_{ij} n_j \right) \delta u_i \mathrm{d}\sigma . \tag{7.257}$$

要求对任意虚位移(δu_i)的虚功均为零即得(7.250)和(7.251)二式．

边界条件(7.251)是加在应力张量上的．(7.253)或(7.255)虽是形变张量的边界条件，却是从应力张量的边界条件(7.251)导出的．也可将边界条件直接加在形变张量上，或更直接地加在表面的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 上，例如令其为零等．究竟采用何种边界条件取决于问题本身．以下举例说明如何用平衡方程和边界条件确定物体的平衡形状和其中的应力分布．

例 1 杆的扭转．若一物的三维中有一维尺度特别大，其他两维的尺度与这一维相比都小得多，可作小量处理，则称为杆．杆尺度大的那一维方向称纵向，其他两维方向称横向．纵向尺度称为长．杆沿横向的截面称为它的横截面，它垂直于纵向．杆的扭转指它的横截面绕纵向的相对转动．这可由加于两端的相反力矩(拧)引起．长可视为无穷的均匀杆有沿纵向的平移对称．在此条件下只须考察相邻横截面的相对扭转．整杆的扭转是这种元扭转沿纵向的重复．取此杆纵向中心轴为 z 轴．取任一离两端甚远的横截面为 xy 平面，在其上取过 z 轴互相垂直的两轴为 x 轴和 y 轴．设沿纵向相距 $\mathrm{d}l$ 的两截面间相对扭转角为 $\mathrm{d}\varphi$，单位长度的扭转角为

$$\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} . \tag{7.258}$$

无穷长杆的均匀扭转中，α 为常数．扭转前邻近 xy 平面的一点 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 扭转后位移

$$\boldsymbol{u} = \alpha z \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{r}, \tag{7.259}$$

$\boldsymbol{z}_0$ 为纵向单位矢量．它的 x 分量和 y 分量分别为

$$u_x = -\alpha z y \quad 和 \quad u_y = \alpha z x, \tag{7.260}$$

z 分量 $u_z = 0$．然而下面将看到，扭转中，内应力一般会使横截面扭曲，不再为平面，其上的点可有纵向位移．这种位移是扭转引起的，应随 α 趋于零而趋于零，故可设

$$u_z = \alpha \zeta(x, y). \tag{7.261}$$

ζ 称为扭转函数，由于各横截面应以同样方式扭曲，它与 z 无关，而只与 x、y 有关. 由位移矢量诸分量(7.260)和(7.261)得形变张量诸分量

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = u_{xy} = 0, \tag{7.262}$$

$$u_{yz} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + x\right), \quad u_{zx} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - y\right). \tag{7.263}$$

其中(7.262)表明，分解(7.227)中第二项为零，因而形变中体积不变，是纯切变. 将此二式代入(7.248)或(7.249)得应力张量诸分量

$$\mathscr{P}_{xx} = \mathscr{P}_{yy} = \mathscr{P}_{zz} = \mathscr{P}_{xy} = 0, \tag{7.264}$$

$$\mathscr{P}_{yz} = \mu\alpha\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + x\right), \quad \mathscr{P}_{zx} = \mu\alpha\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - y\right). \tag{7.265}$$

整个问题只有一个未知函数 $\zeta(x, y)$ 待解. 在扭转中外作用体积力与内应力相比可忽略. 令 x、y 和 z 与 x_1、x_2 和 x_3 分别对应，将(7.264)和(7.265)代入平衡方程(7.250)并将其中的外力密度($f_i^{(e)}$)置零，其中 $i = 1$、2 的两个方程自动满足，$i = 3$ 的方程则成为

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0. \tag{7.266}$$

这是扭转函数 ζ 的二维拉普拉斯方程，解法是熟知的. 设杆长无穷，它的边界即周围表面，不含两端. 表面法向与 z 方向垂直，$n_z = 0$. 杆的周围表面也不受外力作用. 将(7.264)和(7.265)代入边界条件(7.251)，并将($\mathscr{P}_i^{(e)}$)置零，其中 $i = 1$、2 的两个方程也自动满足，$i = 3$ 的方程为

$$\left(n_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + n_y \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_s = (n_x y - n_y x)_s, \tag{7.267}$$

下标 s 表示在表面取值.

设无纵向位移，$\zeta = 0$. 这自然满足平衡方程(7.266)，却也使边界条件(7.267)左边为零. 它的右边也应为零，因而在表面 $\frac{n_x}{n_y} = \frac{x}{y}$，外向法线沿径向. 这说明横截面周线为圆周. 只有圆杆在扭转时无纵向位移. 横截面为其他形状的杆扭转时，为使表面应力为零必须有纵向位移. 例如周线由

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

描写的椭圆横截面长杆，此式的微分

$$\frac{x\mathrm{d}x}{a^2} + \frac{y\mathrm{d}y}{b^2} = 0.$$

表明它的表面法向余弦 $n_x \propto \frac{x}{a^2}$，$n_y \propto \frac{y}{b^2}$，$n_z = 0$. 代入(7.267)，边界条件成为

$$\left[\frac{x}{a^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - y\right) + \frac{y}{b^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + x\right)\right]_s = 0. \tag{7.268}$$

取平衡方程(7.266)的解

$$\zeta(x,y) = \zeta_0 xy, \tag{7.269}$$

ζ_0 为常数.代入上式得

$$\left(\frac{\zeta_0 - 1}{a^2} + \frac{\zeta_0 + 1}{b^2}\right) xy\Big|_s = 0.$$

此式对表面每一点都成立的条件是括号内的值为零.由此解得

$$\zeta_0 = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \tag{7.270}$$

将它代入(7.269),即得椭圆杆的扭转函数,再代入(7.261),即得纵向位移.它和(7.260)一起描写扭转中杆内各点的位移.将 ζ 代入(7.265),它和(7.264)一起描写扭转中杆内的应力分布.

例 2 横杆在重力作用下的弯曲.一长 l 宽 a 高 h 的杆两端置于等高的两点,两端之间悬空.若不考虑重力,杆应取平直姿态与水平面平行,称为横杆或梁.在重力作用下中间悬空部分会下弯.通常梁的强度足够高,使这种下弯甚微.取平直姿态梁的中心为原点,纵向中心轴为 x 轴,沿宽和高的方向取 y 轴和 z 轴.下弯主要是 z 方向的位移.用 $\zeta(x)$ 表示中心轴上的 z 向位移.由于 y、z 方向的尺度 a、h 都很小,作为零级近似可认为 z 向位移在梁的横截面上各点都是一样的,只是纵向坐标 x 的函数,记作

$$u_z^{(0)} = \zeta(x). \tag{7.271}$$

设梁的周围无面积力作用,应力为零.y 方向两侧面法向沿 y 或 $-y$ 方向.在弯曲甚微的条件下,z 方向两侧面法向也可认为沿 z 或 $-z$ 方向.于是,表面应力为零要求在 y 方向两侧面上

$$\mathscr{P}_{xy} = \mathscr{P}_{yy} = \mathscr{P}_{zy} = 0, \tag{7.272}$$

z 方向两侧面上

$$\mathscr{P}_{xz} = \mathscr{P}_{yz} = \mathscr{P}_{zz} = 0. \tag{7.273}$$

在相距很近的两侧面上成立的关系应在两侧面间也很好成立.故可认为此二式在整个梁内成立.应力张量的六个独立分量中只有 $\mathscr{P}_{xx}$ 可异于零.由胡克定律(7.248)知

$$\mathscr{P}_{xy} = 2\mu u_{xy}, \quad \mathscr{P}_{yz} = 2\mu u_{yz}, \quad \mathscr{P}_{zx} = 2\mu u_{zx}. \tag{7.274}$$

再由(7.272)和(7.273)得

$$u_{xy} = u_{yz} = u_{zx} = 0. \tag{7.275}$$

由其中的 $u_{zx}=0$ 和(7.218)知

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}. \tag{7.276}$$

将 u_z 的零级近似(7.271)代入右边得 u_x 的一级近似对 z 的微商

$$\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z} = -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}. \tag{7.277}$$

此式右边与 z 无关,对 z 的积分为

$$u_x^{(1)} = -z\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}. \tag{7.278}$$

下弯的梁中心轴以上被压缩,以下被拉伸,中心轴上各点因而无纵向位移.这使此式中积分常数为零.此式对 x 的微分为 u_{xx} 的一级近似

$$u_{xx}^{(1)} = -z\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}. \tag{7.279}$$

类似地,由 $u_{yz}=0$ 得 u_y 的零级近似

$$u_y^{(0)} = -z\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \tag{7.280}$$

末一等号由于 ζ 与 y 无关.此式对 y 的微商得 $u_{yy}^{(0)}=0$,与(7.278)一起按(7.218)得 $u_{xy}^{(0)}=0$.(7.271)则给出 $u_{zz}^{(0)}=0$.在这一近似下(7.275)成立,从而满足

$$\mathscr{P}_{xy} = \mathscr{P}_{yz} = \mathscr{P}_{zx} = 0 \tag{7.281}$$

却不能在一级近似内满足 $\mathscr{P}_{yy}=\mathscr{P}_{zz}=0$.按胡克定律(7.249)这要求

$$(2\mu+\lambda)u_{yy} + \lambda u_{zz} = -\lambda u_{xx}, \quad \lambda u_{yy} + (2\mu+\lambda)u_{zz} = -\lambda u_{xx}. \tag{7.282}$$

解此联立方程得

$$u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}u_{xx} = \frac{2\mu-3K}{2\mu+6K}u_{xx}. \tag{7.283}$$

将 u_{xx} 的一级近似(7.279)代入右边得 u_{yy} 和 u_{zz} 的一级近似

$$u_{yy}^{(1)} = u_{zz}^{(1)} = -\frac{2\mu-3K}{2\mu+6K}z\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}. \tag{7.284}$$

积分得 u_y 和 u_z 的二级近似

$$u_y^{(2)} = -\frac{2\mu-3K}{2\mu+6K}yz\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}, \tag{7.285}$$

$$u_z^{(2)} = \zeta(x) + \frac{2\mu-3K}{2\mu+6K}\frac{y^2-z^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}. \tag{7.286}$$

$u_z^{(2)}$ 中积分常数的选择保证了与零级近似(7.271)的一致和 $u_{yz}^{(2)}=0$.现在 $u_{xy}^{(2)}$ 和 $u_{zx}^{(2)}$ 不是零,即不符合(7.275);然而它们与零的差别为二级小,在一级近似范围内仍满足(7.275).在形变张量中保留到一级小,代入(7.244)得形变势能密度

$$U = \frac{9K\mu}{2(\mu+3K)}z^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\right)^2. \tag{7.287}$$

形变能为

$$V=\int_{\mathcal{V}}U\mathrm{d}\mathcal{V}=\frac{9K\mu}{2(\mu+3K)}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}y\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z z^2\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\right)^2$$

$$=\frac{3K\mu}{8(\mu+3K)}ah^3\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x. \tag{7.288}$$

设 x 处梁沿 z 方向虚位移 $\delta\zeta(x)$，应力作虚功

$$-\delta V=-\frac{3K\mu}{8(\mu+3K)}ah^3\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}2\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2\delta\zeta}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3K\mu}{4(\mu+3K)}ah^3\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\delta\zeta}{\mathrm{d}x}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}^3\zeta}{\mathrm{d}x^3}\frac{\mathrm{d}\delta\zeta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{3K\mu}{4(\mu+3K)}ah^3\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\delta\zeta}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^3\zeta}{\mathrm{d}x^3}\delta\zeta\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}^4\zeta}{\mathrm{d}x^4}\delta\zeta\mathrm{d}x\right], \tag{7.289}$$

后二等号处各作了一次部分积分.设梁是均匀的，密度 ρ_0 为常数.重力作的虚功为

$$-\int_{\mathcal{V}}\rho_0 g\delta\zeta\mathrm{d}\mathcal{V}=-\rho_0 gah\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\delta\zeta\mathrm{d}x,$$

g 为重力加速度.在无载荷条件下没有外面积力，虚功即为此二部分的和，即是

$$\delta W=-\frac{3K\mu}{4(\mu+3K)}ah^3\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\delta\zeta}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^3\zeta}{\mathrm{d}x^3}\delta\zeta\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^4\zeta}{\mathrm{d}x^4}+b\right)\delta\zeta\mathrm{d}x\right], \tag{7.290}$$

其中

$$b=\frac{4\rho_0 g(\mu+3K)}{3h^2K\mu} \tag{7.291}$$

为常数.由于梁内各点虚位移不受约束，虚功原理要求平衡形状的梁内

$$\frac{\mathrm{d}^4\zeta}{\mathrm{d}x^4}+b=0. \tag{7.292}$$

这就是自身重力作用下梁的平衡方程.(7.290)中在端点取值的项给出边界条件.如对虚位移 $\delta\zeta$ 在端点的值无约束，则在两端有边界条件 $\frac{\mathrm{d}^3\zeta}{\mathrm{d}x^3}=0$.如对虚位移的微商 $\frac{\mathrm{d}\delta\zeta}{\mathrm{d}x}$ 在端点的值无约束，则在两端有边条件 $\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2}=0$.如对端点虚位移或其微商有约束，则约束条件本身构成边界条件.设梁两端水平地嵌入两

壁,边界条件为 $x=\pm\frac{l}{2}$ 处

$$\zeta=\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}=0. \tag{7.293}$$

平衡方程(7.292)的解为 x 的四次多项式,四次幂系数为 $-\beta=-\frac{b}{24}$,其他四个系数由梁两端的四个边界条件确定.边界条件(7.293)确定的解为

$$\zeta(x)=-\beta\left(x^2-\frac{l^2}{4}\right)^2=-\beta\left(x^4-\frac{l^2}{2}x^2+\frac{l^4}{16}\right). \tag{7.294}$$

可见无载荷条件下梁弯曲为一四次曲线(图 7-2).将(7.294)代入(7.278)、(7.285)、(7.286)、(7.279)和(7.284),可得位移矢量和形变张量的所有非零分量,再由胡克定律便得应力张量.由此可了解梁内形变和应力分布的细节.

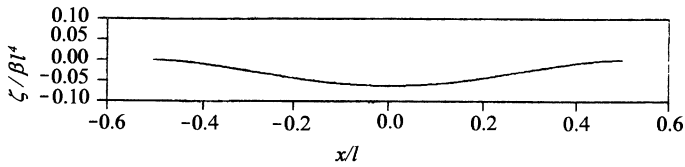

图 7-2 梁的弯曲

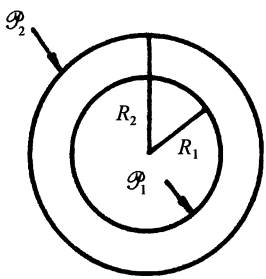

图 7-3 球壳

例 3 球壳在内外压力下的形变与应力分布.考察一内、外半径分别为 R_1、R_2 的均匀球壳(图 7-3).半径为 R_1 的内表面上受到沿径向的均匀压力,压强为 $\mathscr{P}_1$;半径为 R_2 的外表面上则受到逆着径向的均匀压力,压强为 $\mathscr{P}_2$.于是按(7.251),内、外表面上应力张量分别有边界条件

$$\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_{rr}=0 \quad 和 \quad \mathscr{P}_2+\mathscr{P}_{rr}=0. \tag{7.295}$$

均匀球壳是球对称的,各点的位移矢量都应沿径向,且矢量的值只与球心到该点的距离 r 有关.取球心为原点,可将它表示为

$$\boldsymbol{u}=u(r)\boldsymbol{r}_0=\frac{u(r)}{r}\boldsymbol{r}, \tag{7.296}$$

$\boldsymbol{r}$ 为径矢,$\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为径向单位矢量.由于外作用体积力为零,平衡方程(7.254)成为

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0, \tag{7.297}$$

直接验算知,径向矢量(7.296)的旋度为零,即 $\nabla\times\boldsymbol{u}=0$.将它代入恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\nabla^2\boldsymbol{u}. \tag{7.298}$$

左边得零,从而有$\nabla^2\boldsymbol{u}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$.对径向矢量(7.296),平衡方程(7.297)左边两项可以合并,表示为$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0$,从而有初积分

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\text{常数}. \tag{7.299}$$

直接计算(7.296)的散度,得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=r\frac{\mathrm{d}u(r)/r}{\mathrm{d}r}+3\frac{u(r)}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2u(r)).$$

将它代入上式,并取右边的常数为$3a$得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2u)=3ar^2.$$

再积分一次即得解

$$u(r)=ar+\frac{b}{r^2}, \tag{7.300}$$

b为另一积分常数.常数a、b可由边界条件(7.295)确定.过原点任取一正交坐标系,径矢量$\boldsymbol{r}$在该坐标系中的分量记为x_1、x_2和x_3.将解(7.300)代入(7.296)得位移矢量诸分量

$$u_i=\left(a+\frac{b}{r^3}\right)x_i,\quad i=1,2,3. \tag{7.301}$$

按(7.218)得形变张量诸分量

$$u_{ij}=\left(a+\frac{b}{r^3}\right)\delta_{ij}-\frac{3b}{r^5}x_ix_j,\quad i,j=1,2,3. \tag{7.302}$$

将1、2、3三个方向分别取为所在点的r、θ、φ方向,则$x_1=r$,$x_2=x_3=0$,可见

$$u_{rr}=a-\frac{2b}{r^3},\quad u_{\theta\theta}=u_{\varphi\varphi}=a+\frac{b}{r^3},\quad u_{r\theta}=u_{\theta\varphi}=u_{\varphi r}=0. \tag{7.303}$$

由此还可得

$$\sum_{i=1}^{3}u_{ii}=u_{rr}+u_{\theta\theta}+u_{\varphi\varphi}=3a. \tag{7.304}$$

代入胡克定律(7.248)得应力张量诸分量

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{P}_{rr}&=3Ka-\frac{4\mu b}{r^3},\quad \mathscr{P}_{\theta\theta}=\mathscr{P}_{\varphi\varphi}=3Ka+\frac{2\mu b}{r^3},\\ \mathscr{P}_{r\theta}&=\mathscr{P}_{\theta\varphi}=\mathscr{P}_{\varphi r}=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.305}$$

代入边界条件(7.295)得联立方程

$$3Ka-\frac{4\mu b}{R_1^3}=-\mathscr{P}_1,\quad 3Ka-\frac{4\mu b}{R_2^3}=-\mathscr{P}_2. \tag{7.306}$$

由此解得

$$a=\frac{1}{3K}\frac{\mathscr{P}_1R_1^3-\mathscr{P}_2R_2^3}{R_2^3-R_1^3},\quad b=\frac{R_1^3R_2^3}{4\mu}\frac{\mathscr{P}_1-\mathscr{P}_2}{R_2^3-R_1^3}. \tag{7.307}$$

将它们代入(7.303)和(7.305)便分别得到壳内形变和应力分布.

§7.7 弹性动力学与弹性波 纵波与横波 波动方程及其平面波解 波的相位与相速度

考察弹性体在内应力作用下的运动.在可当作质点的小体积元 $\mathrm{d}\mathscr{V}$ 内有质量 $\rho\mathrm{d}\mathscr{V}$,$\rho$ 为弹性体在该处的质量密度;加速度为该处位移矢量对时间 t 的二次微商 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$;受的力为

$$\left[\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\left(K+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\mathscr{V},$$

方括号内的应力密度就是平衡方程(7.254)左边前两项之和.由牛顿方程知

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\mu\nabla^2\boldsymbol{u}-\left(K+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0. \tag{7.308}$$

这就是纯应力作用下弹性体的动力学方程.它也可由哈密顿原理导出.形变体动能为

$$T=\int_{\mathscr{V}}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{7.309}$$

形变势能为其密度(7.244)的体积分,表示成矢量形式,为

$$V=\int_{\mathscr{V}}\left[\left(\frac{K}{2}-\frac{\mu}{3}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2+\frac{\mu}{2}(\nabla\times\boldsymbol{u})^2+\mu\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\mathscr{V}. \tag{7.310}$$

被积函数的末项需略为解释.∇u 为张量,ij 分量为 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$.按矢量乘法 $\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ 也是张量,ij 分量为 $\sum\limits_{l=1}^{3}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_i}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_l}$,因此阵迹

$$\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

由动能与势能之差得弹性动力学的拉格朗日量

$$L=T-V\equiv\int_{\mathscr{V}}\mathscr{L}\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{7.311}$$

其中

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{K}{2}-\frac{\mu}{3}\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2-\frac{\mu}{2}(\nabla\times\boldsymbol{u})^2-\mu\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) \tag{7.312}$$

为拉格朗日量密度.(7.311)中的体积分遍及整个弹性体,如果弹性体占据了

整个空间就遍及整个空间.从 t_0 到 t_1 的时间中作用量为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{V}} \mathscr{L} \mathrm{d}\mathcal{V}\mathrm{d}t. \tag{7.313}$$

将弹性体内各点的位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$当作广义坐标,标志各点位置的坐标 $\boldsymbol{r}$ 便起着一般理论中自由度标志 σ 的作用.广义坐标 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$的变分导致拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 的变分,进而引起拉氏量 L 的变分,最后引起作用量 S 的变分.得

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{V}} \delta\mathscr{L} \mathrm{d}\mathcal{V}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\left[\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial t} - \left(K - \frac{2\mu}{3}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{u})(\nabla \cdot \delta \boldsymbol{u})\right. \\
&\quad \left. - \mu(\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot (\nabla \times \delta \boldsymbol{u}) - 2\mu \mathrm{tr}(\nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{u})\right] \\
&= \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \mathrm{d}\mathcal{V}\Big|_{t_0}^{t_1} \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_s \mathrm{d}\sigma\left[\left(K - \frac{2\mu}{3}\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{u}) + \mu(\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{n} \times \delta \boldsymbol{u})\right. \\
&\quad \left. + 2\mu \mathrm{tr}(\nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\delta \boldsymbol{u})\right] \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\mathcal{V}\left[\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} - \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\right] \cdot \delta \boldsymbol{u},
\end{aligned} \tag{7.314}$$

在末一等号处作了部分积分.右边第一项是对时间部分积分积出的部分;第二项是用高斯定理对体积分部分积分积出的部分,其中第二个积分号的下标 s 表示这是在弹性体表面 s 上的面积分,$\mathrm{d}\sigma$ 为表面面积元的大小,$\boldsymbol{n}$ 为这个面积元的外向单位法矢.第三项为部分积分后剩下的体积分和时间积分.变分中如固定始末时刻 t_0 和 t_1 的广义坐标 $\boldsymbol{u}$,令其变分在此二时刻为零,则右边第一个积分为零.如固定弹性体表面的广义坐标,令 $\delta \boldsymbol{u}$ 在其上为零,则第二个积分也是零.要求作用量(7.313)在此条件下取极值,即要求它由位移矢量在弹性体内的任意变分 $\delta \boldsymbol{u}$ 引起的变分(7.314)为零,也就是要求它右边第三项积分号下与 $\delta \boldsymbol{u}$ 点乘的因子为零.由此得到的正是动力学方程(7.308).

在一空间区域分布着的矢量称为一矢量场,由矢量随坐标变化的函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$描写.若此矢量函数的散度为零,即若 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$,则称此矢量场为横场;若此矢量函数的旋度为零,即若 $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$,则称此矢量场为纵场.按此定义,同一矢量场可以既是横场也为纵场.最简单的例子为一均匀场,其中的矢量 $\boldsymbol{u}$ 与位置无关.这种矢量函数对坐标的任何微商都是零,因此散度和旋度都是零.一般地说,纵场的旋度既为零,按斯托克斯定理,它沿闭合回路的线积分必为零.这使它从一点到另一点的线积分值与所沿路线无关而只与始末点有关.这是因为从一点到另一点的两条不同路线恰围成一闭合回路,纵场沿此闭合

回路的积分等于它沿两点间两条不同路线线积分的差.闭合回路上积分为零可直接推论沿两条不同路线的线积分相等.于是可用与某一固定点间的线积分值在空间各点定义一数值函数 $\phi(\boldsymbol{r})$.它有性质

$$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta x\boldsymbol{x}_0)-\phi(\boldsymbol{r})=\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta x\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}_0\mathrm{d}x=u_x\Delta x,$$

从而有 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=u_x$.在 y、z 方向也有类似关系,从而

$$\nabla\phi=\boldsymbol{u}.$$

即纵场恒可表示为一数值函数的梯度.若它同时是一横场,散度为零,则

$$\nabla^2\phi=0, \tag{7.315}$$

ϕ 满足拉普拉斯方程.拉普拉斯方程的解称为谐和函数.谐和函数的梯度场既是纵场又是横场.

设有一矢量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$,散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=Q(\boldsymbol{r}).$$

求解泊松方程

$$\nabla^2\phi=Q(\boldsymbol{r}),$$

得函数 $\phi(\boldsymbol{r})$.由它的梯度定义一矢量场

$$\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})\equiv\nabla\phi(\boldsymbol{r}).$$

由于 $\nabla\times\nabla\phi\equiv0$,这种梯度场恒为纵场.它的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l=\nabla^2\phi=Q(\boldsymbol{r}).$$

因此又可定义一矢量场

$$\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{r})\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r}).$$

由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t=\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\nabla\cdot\boldsymbol{u}_l=0$,这是一横场.将此式移项整理得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{r}). \tag{7.316}$$

可见任何矢量场都可分解为一个纵场和一个横场的叠加.不过由于存在既是纵场又是横场的矢量场,这种分解不是惟一的.设 $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r})$为某谐和函数的梯度,因而既是纵场又是横场.定义

$$\boldsymbol{u}_l^{(0)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{u}_t^{(0)}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}).$$

显然有

$$\nabla\times\boldsymbol{u}_l^{(0)}=\nabla\times\boldsymbol{u}_l-\nabla\times\boldsymbol{u}_0=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}_t^{(0)}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}_t+\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0,$$

即 $\boldsymbol{u}_l^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{u}_t^{(0)}$ 仍分别为纵场和横场;且

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}_l^{(0)}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{u}_t^{(0)}(\boldsymbol{r}), \tag{7.317}$$

即原矢量场也可分解成这套新的纵场和横场的叠加.

弹性体内各点的位移矢量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$组成一矢量场.将它按(7.317)分解为纵场 $\boldsymbol{u}_l^{(0)}(\boldsymbol{r})$与横场 $\boldsymbol{u}_t^{(0)}(\boldsymbol{r})$的叠加.它们都会随时间变化.代入动力学方程

(7.308)得

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_t^{(0)}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}_t^{(0)} + \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_l^{(0)}}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4\mu}{3} \right) \nabla^2 \boldsymbol{u}_l^{(0)} = 0, \tag{7.318}$$

推导中用到$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_t^{(0)} = 0$和$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_l^{(0)}) - \nabla^2 \boldsymbol{u}_l^{(0)} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}_l^{(0)}) = 0$. 此式左边纵场和横场是分开的. 定义

$$\boldsymbol{j} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_t^{(0)}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}_t^{(0)}, \tag{7.319}$$

代入上式得

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_l^{(0)}}{\partial t^2} - \left(K + \frac{4\mu}{3} \right) \nabla^2 \boldsymbol{u}_l^{(0)} = -\boldsymbol{j}. \tag{7.320}$$

在(7.319)两边取散度,右边得零,因而$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$. 在(7.320)两边取旋度,左边得零,因而$\nabla \times \boldsymbol{j} = 0$. 再定义

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t''), \tag{7.321}$$

它满足方程

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_0}{\partial t^2} = \boldsymbol{j}. \tag{7.322}$$

(7.321)右边只对时间积分,对空间坐标的微分,包括取散度和旋度都可在积分号下进行,从而有$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$, $\nabla \times \boldsymbol{u}_0 = 0$. $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}, t)$既是纵场又是横场,因而必有满足拉普拉斯方程(7.315)的谐和函数$\phi(\boldsymbol{r}, t)$使

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \phi(\boldsymbol{r}, t). \tag{7.323}$$

此式和(7.315)保证$\boldsymbol{u}_0$本身满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_0 = 0. \tag{7.324}$$

故可定义纵场

$$\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}_l^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}, t)$$

和横场

$$\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}_t^{(0)}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r}, t),$$

位移矢量场可对它们作分解

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{r}, t), \tag{7.325}$$

而(7.319)、(7.320)、(7.322)和(7.324)诸式则保证它们满足方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_t - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_t}{\partial t^2} = 0, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{7.326}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_l - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_l}{\partial t^2} = 0, \quad c_l = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}. \tag{7.327}$$

于是弹性体内位移矢量场的一个动力学方程(7.308)分解成了其中横场和纵

场的两个动力学方程(7.326)和(7.327).且这两个方程有共同的形式

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 0. \tag{7.328}$$

容易验证,它有解

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta), \tag{7.329}$$

其中矢量 $\boldsymbol{k}$ 的长度 k 与 ω 间满足关系

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \tag{7.330}$$

$\boldsymbol{A}$ 与 δ 为积分常量.(7.329)表示出矢量 $\boldsymbol{u}$ 随时间 t 和位置 $\boldsymbol{r}$ 的周期变化,因而是一波动.正弦函数的自变量

$$\Phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta \tag{7.331}$$

称为波的相位,或简称相.一定时刻相位相同的点组成等相位面.令(7.331)中的 Φ 为常数,对一定时刻 t 满足这一要求的点组成平面.它表示波动(7.329)的等相位面为平面.这种波称为平面波.其中 $\boldsymbol{k}$ 为平面波的波矢量,ω 为它的圆频率.积分常数 δ 的意义为初相位,即原点在初始时刻 $t=0$ 的相位.矢量 $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{A}_0$ 中长度 $\boldsymbol{A}$ 称为波的振幅,单位矢量 $\boldsymbol{A}_0$ 表示波的偏振方向.在(7.331)中固定相位 Φ 的值却不固定时刻 t,可了解等相位面随时间的变化.很明显,不同时刻等相位面的法向都是 $\boldsymbol{k}$ 方向,因此是沿 $\boldsymbol{k}$ 方向移动的.设时间改变 Δt,位置沿 $\boldsymbol{k}$ 方向移动 Δl 能保持相位 Φ 不变.由(7.331)知

$$k\Delta l - \omega\Delta t = 0.$$

可见等相位面以匀速

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = c \tag{7.332}$$

沿 $\boldsymbol{k}$ 方向移动,c 称相速度.由于相位出现在正弦号下,改变 2π 对应完全相同的情况.使相位改变 2π 的时间

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{7.333}$$

称为周期.使相位改变 2π 的距离

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{7.334}$$

称为波长.单位时间内振动的周期数

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.335}$$

称为频率.单位长度内的波长数

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \tag{7.336}$$

称为波数.方程(7.328)因有波动解而称为波动方程,其中常数 c 的物理意义

为波的相速度.

(7.326)和(7.327)表明,弹性体内位移矢量场中横场和纵场分别满足波动方程.它们的波动解描写的是弹性波.横场的波动称为横波,纵场的波动称为纵波.由于 $K>0$,

$$c_l > \sqrt{\frac{4}{3}} c_t, \tag{7.337}$$

纵波相速大于横波相速.取平面波(7.329)的散度和旋度得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta), \quad \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta). \tag{7.338}$$

可见横波 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} = 0$,偏振方向与传播方向垂直;纵波 $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A} = 0$,偏振方向与传播方向平行.这正是横波与纵波的通常解释.虽然一般说来一个矢量场可以既是纵场又是横场,然而就波动而言,由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 均非零,纵波绝不是横波,横波也不可能是纵波.将波划分为纵波和横波的方式是惟一的.

波动方程(7.328)的平面波解也可写成

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta), \tag{7.339}$$

它与(7.329)只有$\frac{\pi}{2}$的相位差.将它与(7.329)线性组合可得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta)} \tag{7.340}$$

或

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta)}. \tag{7.341}$$

由于(7.328)为线性方程,此二式也是它的解.这种复形式在计算中颇为方便.当最后的物理结果要用实函数表达时可在计算终了后再取复形式的实部或虚部.只要计算中涉及的都是实系数线性方程,这最后的实部和虚部必皆满足这些方程.

§7.8 声波 波动声学与几何声学 几何声学与质点力学的相似

声波是空气中的疏密波,是一种纵弹性波.这种波也能在其他连续介质中传播.水下听到的声音乃是在水中传播的纵弹性波.空气和水有一共同点,即可以流动而不具一定形状.这种物质称为流体.确切地说,在其中任取一曲面,曲面两侧物质可沿曲面切向相对移动而无恢复力作用.即切变模数为零.流体可定义为切变模数 $\mu = 0$ 的连续介质.(7.326)表明,流体中横位移场的运动方程成为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_t}{\partial t^2} = 0, \tag{7.342}$$

在空间固定点看为匀速移动，即流动.纵位移场的运动方程仍为波动方程(7.327)，只是波速成为

$$c_l = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \tag{7.343}$$

这就是流体中的声速公式.下章专门讲述流体力学的基本内容，本节只讲其中的弹性波，即声波.从日常生活中可知，声音也可借固体传播.人和动物都会把耳朵贴在地面上监听远处的响动.这是因为远处的响动会激发地面的弹性波.传到监听处的地面弹性波又会激发空气中的声波敲击监听者的耳膜.虽然"听"到的仍然是空气中的声波，然而这声音和其中的信息是借固体中的弹性波自远方传来的.从这种意义讲，所有的弹性波，不论是流体中的还是固体中的，也不论是横波还是纵波，都可称为声波.弹性波的理论就是广义的声学理论.不过本节还是以狭义声波，即流体中的纵弹性波为例作讨论.好在其中大部分的内容只依据波的共性，从而也适用于其他波动.只有很少几处涉及纵波特性而只适用于声波.

设 $\mu=0$，胡克定律(7.248)成为

$$\mathscr{P}_{ij} = K\sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'}\delta_{ij}, \tag{7.344}$$

应力张量成为对角的，且各对角元的值相等.应力张量的这种形式适用于任一正交坐标系.它表示外界作用在小体积元的任何表面元上的力恒垂直该面元，即是一种压力.单位面积上外界向内的压力为

$$\mathscr{P} = -K\sum_{i'=1}^{3} u_{i'i'} = -K\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{7.345}$$

这也就是小体积元内部物质向外的压力.代入上式即得流体中的应力张量

$$\mathscr{P}_{ij} = -\mathscr{P}\delta_{ij}. \tag{7.346}$$

另一方面，质量为 $\mathrm{d}m$ 的小体积元形变前后的体积分别为 $\mathrm{d}\mathscr{V}=\frac{\mathrm{d}m}{\rho}$ 和 $\mathrm{d}\mathscr{V}'=\frac{\mathrm{d}m}{\rho'}$，$\rho$ 和 ρ' 为此体积元中的质量密度.将它们代入(7.226)左边得

$$\sum_{i=1}^{3} u_{ii} = -\frac{1}{\rho'}(\rho'-\rho). \tag{7.347}$$

在平衡条件下 $\rho'=\rho$，$\mathscr{P}=0$.在相对于平衡状态只有微小偏离的条件下，$\mathscr{P}$ 和 $\rho'-\rho$ 都是小量，因而可将 $\mathscr{P}/(\rho'-\rho)$ 写作 $\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}$.将(7.347)代入(7.345)并利用此结果得

$$K = \rho\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}. \tag{7.348}$$

再将此式代入(7.343)即得流体力学中的声速公式

$$c_l = \sqrt{\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \rho}}. \tag{7.349}$$

取(7.327)的散度得

$$\nabla^2 Q - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0, \tag{7.350}$$

其中

$$Q = \nabla \cdot \boldsymbol{u}_l = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_{ii} = -\frac{\rho' - \rho}{\rho}. \tag{7.351}$$

由于 $\rho' - \rho$ 为小量,右边分母 ρ' 已换成了 ρ.(7.350)有平面波解

$$Q(\boldsymbol{r}, t) = Q_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta), \tag{7.352}$$

Q_0 与 δ 为积分常数,$\omega = c_l k$.(7.351)表明,这是一个密度偏离平衡值的波动,即是该流体中的疏密波,或声波.位置偏离平衡位置的波动表现为密度偏离平衡值的波动.

波的传播可用它的等相位面的移动表示.如前所述,形如(7.352)的平面波等相位面为与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面,沿波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向以匀速 c_l 移动.波方程只在一定条件下有平面波解,对(7.350)而言,即要求 c_l 为常数.由(7.343)知,压缩模数 K 和密度 ρ 为常数的均匀介质符合这一要求.然而一般讲来,介质不会完全均匀,有的甚至很不均匀.在不均匀介质中,波会有折射和反射.这些现象不能由一个平面波表示.下面看看不均匀介质中声波是如何传播的.

对 $\mu = 0$ 的介质,拉氏量密度(7.312)简化为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2 - \frac{K}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2, \tag{7.353}$$

其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ 为纵场,从而有

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = 0. \tag{7.354}$$

按(7.313)构造拉氏量和作用量,并对作用量 S 作变分.对 $\mu = 0$ 的不均匀介质,对应(7.314)的是

$$\delta S = \int_{\mathscr{V}} \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\mathscr{V}\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_s \mathrm{d}\sigma K(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{u}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\mathscr{V}} \mathrm{d}\mathscr{V}\left[\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \nabla(K \nabla \cdot \boldsymbol{u})\right] \cdot \delta \boldsymbol{u}. \tag{7.355}$$

在固定始末时刻和介质表面的位移矢量的条件下,要求变分 $\delta S = 0$,得动力学方程

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \nabla(K \nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0. \tag{7.356}$$

它只当 K 为常数时才能表示为波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = 0.$$

为将(7.356)表示得更对称些,先用 ρ 除它,再取散度,并引进量

$$\widetilde{Q}(\boldsymbol{r},t) \equiv \sqrt{K}Q(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{K}\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \tag{7.357}$$

得

$$\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial t^2} - \sqrt{K}\,\nabla\cdot\frac{1}{\rho}\nabla\sqrt{K}\widetilde{Q} = 0. \tag{7.358}$$

此式可当作波动方程(7.350)在非均匀介质中的推广.由于(7.354),纵位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 有势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi. \tag{7.359}$$

代入(7.357)得

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{K}}\widetilde{Q}. \tag{7.360}$$

由波动方程(7.358)解出 $\widetilde{Q}(\boldsymbol{r},t)$ 后代入此式,可解出位移势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$,再由(7.359)即可得纵位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 的空间分布和时间变化的一切细节.(7.358)和(7.360)一起组成纵位移场的完备方程组.然而,这种普遍方程只当给出了 K 和 ρ 随位置变化的具体函数形式时才能求解,即只能针对每一具体问题专门处理.下面针对一类相当普遍的"具体"情形对声波的传播作相当普遍的讨论.

设介质虽不均匀,K 与 ρ 却只在大尺度范围才有显著变化.这里,尺度的大小是与波的特征尺度即波长相比而言的.具体说来这里设的是,在若干波长的范围内 K 与 ρ 可当作常数.它们对坐标的微商与表示波动的量如 $\phi(\boldsymbol{r},t)$、$Q(\boldsymbol{r},t)$ 等对坐标的微商相比可忽略不计.即可置

$$\nabla K = \nabla\rho = 0, \tag{7.361}$$

按(7.343)也可置

$$\nabla c_l = 0. \tag{7.362}$$

在此条件下,(7.358)还原成波动方程(7.350),其中 Q 仍由(7.351)定义.下面还要用到(7.350)对时间的微商

$$\nabla^2\dot{Q} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\dot{Q}}{\partial t^2} = 0, \tag{7.363}$$

其中

$$\dot{Q} \equiv \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{7.364}$$

另一方面,用(7.359)和(7.362)可将纵场波动方程(7.327)写为

$$\nabla\left(\nabla^2\phi-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)=0.$$

它的积分为

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a, \tag{7.365}$$

其中 a 为积分"常数",与空间坐标无关,但可与时间有关.此式的一个特解是

$$\phi_0(t)=-c_l^2\int_0^t \mathrm{d}t'\int_0^{t'}\mathrm{d}t''a(t''),$$

它显然也与空间坐标无关,因而 $\nabla\phi_0=0$.设(7.365)的解 $\phi_1(\boldsymbol{r},t)$ 的梯度正确给出位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$.重新定义

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\phi_1(\boldsymbol{r},t)-\phi_0(t),$$

它的梯度 $\nabla\phi=\nabla\phi_1-\nabla\phi_0=\nabla\phi_1$ 给出同一位移场,因此符合定义(7.359).又由于 ϕ_1 和 ϕ_0 都满足非齐次方程(7.365),它们的差 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 遂满足齐次方程

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0. \tag{7.366}$$

这些结果也可在前提(7.361)下从拉氏量密度(7.353)导出.由于(7.359),该式可表示为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\rho(\nabla\dot{\phi})^2-\frac{K}{2}(\nabla^2\phi)^2,\quad \dot{\phi}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{7.367}$$

它表明,可只用 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 作为声场的广义坐标,位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 可由它按(7.359)导出.由 ϕ 的变分引起的作用量变分为

$$\begin{aligned}
\delta S&=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{\mathscr{V}}\mathrm{d}\mathscr{L}\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{\mathscr{V}}[\rho(\nabla\dot{\phi})\cdot(\nabla\delta\dot{\phi})-K(\nabla^2\phi)(\nabla^2\delta\phi)]\mathrm{d}\mathscr{V}\\
&=\int_{\mathscr{V}}\rho(\nabla\dot{\phi})\cdot(\nabla\delta\phi)\mathrm{d}\mathscr{V}\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_s\rho(\nabla\ddot{\phi})\cdot\boldsymbol{n}\delta\phi\,\mathrm{d}\sigma\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_s K[(\nabla^2\phi)\boldsymbol{n}\cdot\nabla\delta\phi-\boldsymbol{n}\cdot(\nabla Q)\delta\phi]\mathrm{d}\sigma\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{\mathscr{V}}(\rho\ddot{Q}-K\nabla^2Q)\delta\phi\,\mathrm{d}\mathscr{V},
\end{aligned} \tag{7.368}$$

在末一等号处作了几次部分积分,并用了关系

$$Q=\nabla^2\phi \tag{7.369}$$

和记号 $\ddot{Q}\equiv\dfrac{\partial^2Q}{\partial t^2}$.要求在始末时刻 t_0 和 t_1 广义坐标固定从而 $\delta\phi=0$,且介质表面广义坐标及其法向微商固定,从而 $\delta\phi=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{u}=0$.这使(7.368)右边前

三项积分为零.在此条件下要求作用量对介质内广义坐标的任意变分为零,即要求对任意函数 $\delta\phi(\boldsymbol{r},t)$,(7.368)右边最后一个积分也是零.满足此要求的充分必要条件是该积分号下括号内的表达式在介质内处处为零.由此导得的正是波动方程(7.350).由(7.369)和(7.359),又可将它表示为

$$\nabla\cdot\left(\nabla^2\boldsymbol{u}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right)=0.$$

此式表明矢量场

$$\nabla^2\boldsymbol{u}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\boldsymbol{j} \tag{7.370}$$

的散度为零,从而是横场.可它又是由纵场 $\boldsymbol{u}$ 经微商而得到的,仍应是纵场.由它对时间积分得到的

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r},t)=-c_l^2\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t'')$$

仍既是横场又是纵场,且满足

$$\nabla^2\boldsymbol{u}_0-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_0}{\partial t^2}=\boldsymbol{j}.$$

设(7.370)的解 $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{r},t)$是实际位移场的纵场部分.从其中扣出 $\boldsymbol{u}_0$ 并入横场.剩下的 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_0$ 为实际位移场按新划分的纵场部分.这部分满足齐次波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=0. \tag{7.371}$$

这就回到了声波场的基本方程.

拉氏量

$$L=\int_{\mathcal{V}}\left[\frac{\rho}{2}(\nabla\dot{\phi})^2-\frac{K}{2}(\nabla^2\phi)^2\right]\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{7.372}$$

的值取决于两个函数 $\phi(\boldsymbol{r},t)$和 $\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)$,即是这两个函数的函数.函数的函数称为泛函.现在讨论的连续介质力学的拉氏量(7.372)是 ϕ 与 $\dot{\phi}$的泛函.与函数的微分对应,泛函可以变分.对(7.372)变分得

$$\begin{aligned}\delta L&=\int_{\mathcal{V}}[\rho(\nabla\dot{\phi})\cdot(\nabla\delta\dot{\phi})-K(\nabla^2\phi)(\nabla^2\delta\phi)]\mathrm{d}\mathcal{V}\\&=\int_s[\rho(\nabla\dot{\phi})\cdot\boldsymbol{n}\delta\dot{\phi}-K(\nabla^2\dot{\phi})\boldsymbol{n}\cdot\nabla\delta\phi+K\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\nabla^2\phi)\delta\phi]\mathrm{d}\sigma\\&\quad+\int_{\mathcal{V}}(-\rho\ddot{Q}\delta\dot{\phi}-K\nabla^2Q\delta\phi)\mathrm{d}\mathcal{V}.\end{aligned} \tag{7.373}$$

称右边体积分号下 $\delta\dot{\phi}$ 的系数为 L 对 $\dot{\phi}$ 的变商，记作

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = -\rho\dot{Q}; \tag{7.374}$$

$\delta\phi$ 的系数为 L 对 ϕ 的变分商，记作

$$\frac{\delta L}{\delta\phi} = -K\nabla^2 Q. \tag{7.375}$$

波方程(7.350)可表为

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} - \frac{\delta L}{\delta\phi} = 0. \tag{7.376}$$

这是以 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ 为广义坐标的连续介质拉格朗日方程. 对照质点力学还可定义连续介质的广义动量. 此处与 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ 正则共轭的广义动量为

$$\pi(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = -\rho\dot{Q} = -\rho\nabla^2\dot{\phi}, \tag{7.377}$$

哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathscr{V}} \pi(\boldsymbol{r}, t)\dot{\phi}(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}\mathscr{V} - L \\ &= \int_{\mathscr{V}} \left[-\frac{\rho}{2}\dot{Q}\dot{\phi} + \frac{K}{2}(\nabla^2 Q)\phi\right]\mathrm{d}\mathscr{V}, \end{aligned} \tag{7.378}$$

末一等号处作了部分积分，并设介质表面加了周期边条件，因此积得的面积分为零. 可由(7.377)解出 $\dot{\phi}$，将它用广义动量表示出，代入(7.378)，将此哈密顿量表示成广义坐标 $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ 和广义动量 $\pi(\boldsymbol{r}, t)$ 的泛函. 由此可得连续介质的哈密顿正则方程

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta\pi}, \qquad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta\phi}. \tag{7.379}$$

由微分与变分的对应，模仿(5.2)到(5.3)的推导，可证明这组方程. 类似方法还可证明，连续介质的哈密顿量若不显含时间也必守恒，并被称为它的能量. 总之，只要将对坐标和动量的微分换成变分，质点系的规律全部适用于连续介质. 哈密顿量(7.378)不显含时间，因此是声波场的守恒能量. 对该式右边积分号下括号内的第一项作一次部分积分，第二项作两次部分积分，利用周期边界条件将积得的面积分置零，并利用(7.369)后得声波场能量

$$E = H = \int_{\mathscr{V}} \left[\frac{\rho}{2}(\nabla\dot{\phi})^2 + \frac{K}{2}(\nabla^2\phi)^2\right]\mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{7.380}$$

这正是拉氏量(7.372)中的动能与形变势能之和.

(7.363)和(7.366)表明 $\dot{Q}$ 与 ϕ 满足同一波动方程，它们的任意线性组合

必也满足该方程.取复线性组合

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{c_l}{\sqrt{2\rho}}(\rho\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)+\mathrm{i}\pi(\boldsymbol{r},t))$$

$$=\sqrt{\frac{K}{2}}(\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)-\mathrm{i}\dot{Q}(\boldsymbol{r},t)), \tag{7.381}$$

它自应满足波动方程

$$\nabla\Psi-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0. \tag{7.382}$$

任何复数 Ψ 可用它的绝对值 A 和相角 Φ 按

$$\Psi=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{7.383}$$

表示出,其中 $A\geqslant 0$ 和 Φ 皆为实数.将复波函数(7.381)按此方式表示出,与(7.340)比较,提示 $A(\boldsymbol{r},t)$ 为波的振幅,$\Phi(\boldsymbol{r},t)$ 为波的相位.将它代入(7.382)得

$$\nabla^2A+2\mathrm{i}\nabla A\cdot\nabla\Phi+A\mathrm{i}\nabla^2\Phi-A(\nabla\Phi)^2$$

$$-\frac{1}{c_l^2}\left[\frac{\partial^2A}{\partial t^2}+2\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+A\mathrm{i}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right]=0,$$

非零因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}$ 已约去.复数为零即它的实部和虚部分别为零.此式左边实部为零即

$$\nabla^2A-\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2A}{\partial t^2}-A\left[(\nabla\Phi)^2-\frac{1}{c_l^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right]=0, \tag{7.384}$$

虚部为零即

$$-\frac{1}{c_l^2}\left(2\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+A\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)+2\nabla A\cdot\nabla\Phi+A\nabla^2\Phi=0. \tag{7.385}$$

乘积分因子 A 后,此式可表示为连续性方程

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0, \tag{7.386}$$

其中

$$\mathscr{E}\equiv-\frac{1}{c_l^2}A^2\frac{\partial\Phi}{\partial t},\qquad \boldsymbol{J}\equiv A^2\nabla\Phi. \tag{7.387}$$

由(7.383)和(7.381)可算得

$$\mathscr{E}=\frac{1}{c_l^2}\mathrm{Re}\left(\Psi^*\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\delta t}\right)=\frac{\rho}{2}(\dot{\phi}\ddot{Q}-\dot{Q}\dot{\phi})$$

$$=-\frac{\rho}{2}\dot{Q}\dot{\phi}+\frac{K}{2}\dot{\phi}\nabla^2Q, \tag{7.388}$$

$$\boldsymbol{J}=\mathrm{Re}[\Psi^*(-\mathrm{i}\nabla)\Psi]=\frac{K}{2}(\dot{Q}\nabla\phi-\phi\nabla\dot{Q}). \tag{7.389}$$

(7.388)的第二等号处用到声速的表达式(7.343),第三等号处用到波方程(7.350),并再次用了(7.343).与(7.378)比较知,$\mathscr{E}$ 可解释为声场的能量密度.将(7.386)在体积 $\mathscr{V}$ 内积分,利用高斯定理得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{V}}\mathscr{E}\mathrm{d}\mathscr{V}=-\int_{s}\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{7.390}$$

此式给出连续性方程的一般解释,即体积 $\mathscr{V}$ 内以 $\mathscr{E}$ 为密度的量增减完全来自它的表面 s.它提示将 $\boldsymbol{J}$ 解释为该量的流密度矢量,方向表示该量流动的方向,大小表示单位时间内通过垂直于它的单位面积流过的该量.这样,(7.390)右边即可解释为单位时间内通过表面 s 流入体积 $\mathscr{V}$ 的该量.(7.390)表示的便是体积 $\mathscr{V}$ 内该量的增加恰等于从表面 s 流入的该量.该量不会产生,不会消灭,只会不生不灭地流动.连续性方程表示的乃是该量的守恒.现在,(7.388)表示的 $\mathscr{E}$ 既是声场能量密度,(7.389)表示的 $\boldsymbol{J}$ 便是声场的能量流密度矢量,而连续性方程(7.386)表示的即为能量守恒.Φ 既是波的相位,$\Phi=$常数便给出每一时刻的等相位面,$\nabla\Phi$ 垂直于等相位面.(7.387)第二式表明,声波能量流动的方向垂直于等相位面.这从能量的角度表现出,波是沿与等相位面垂直的方向传播的.通常将波振幅的平方称为波的强度.(7.387)表明,一处声波的能量密度和能流密度皆正比于该处声波的强度.

在波的复表示中,具有一定频率的波函数的坐标变量 $\boldsymbol{r}$ 与时间变量 t 可以分离,即可表示为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{7.391}$$

ω 为此波的圆频率.相应地,在表示(7.383)中,具有一定频率的波相位

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=W(\boldsymbol{r})-\omega t, \tag{7.392}$$

振幅 $A(\boldsymbol{r})$ 与时间无关.代入(7.384)得

$$\nabla^2A-A[(\nabla W)^2-k^2]=0, \tag{7.393}$$

其中

$$k^2=\frac{\omega^2}{c_l^2}. \tag{7.394}$$

注意,由于 c_l 随位置缓慢变化,k 亦随位置缓慢变化,波方程(7.382)不再有平面波解.平面波的振幅为常数.波方程(7.382)的解既已不是平面波,表示成形式(7.383)后振幅 A 不会是常数.不过在 c_l 变化极缓的条件(7.362)下,解(7.383)应非常接近平面波,从而 A 非常接近常数.如果到达可在(7.393)中忽略 ∇^2A 的程度,便称到达了几何声学极限.此极限下

$$(\nabla W)^2=k^2, \tag{7.395}$$

W 称为声的程函.对一定介质,c_l 及其随空间位置的变化是一定的.对一定的频率 ω,(7.395)右边的函数 k^2 按(7.394)完全定下来.由此可解出程函 W.

(7.395)使人想起§5.9关于几何光学与质点力学相似性的讨论.质点有哈密顿特征函数,并垂直于特征函数的等值面运动.借此便可解出质点运动的轨迹.光有程函,并垂直于程函的等值面传播.借此也可解出光走的路线,即光线.现在声也有程函,并垂直于程函的等值面传播.类似的办法必也能解出声走的路线,即声线.比较(7.395)与(5.306)可看出,声的程函与质点的哈密顿特征函数满足的方程有完全相同的形式,只是这里的 k^2 在那里是 $2m(E-V)$.与(5.303)比较,则看到声的程函与光的程函也满足形式相同的方程.只是这里的 k^2 在那里是 n^2, n 为折射指数.(5.297)到(5.303)之间的推导还提供了方程(7.395)的一个解法.首先定义从一点 $\boldsymbol{r}_0$ 经一路径到另一点 $\boldsymbol{r}_1$ 的声程

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} k(x,y,z)\mathrm{d}l, \tag{7.396}$$

其中线元

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

声程 W 不仅是始末点位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的函数,且是(7.396)右边线积分所沿路径的泛函.要求 W 取极值可定出从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的一条路径,它满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\right) = \nabla k \tag{7.397}$$

称极值路径.沿极值路径作(7.396)右边的线积分,得到的声程就只是路径始末点 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的函数.它作为路径末端 $\boldsymbol{r}$ 的函数 $W(\boldsymbol{r})$ 满足方程(7.395),因而是程函.它与极值路径的切向单位矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}$ 间有关系

$$\nabla W = k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}, \tag{7.398}$$

说明极值路径处处垂直于程函等值面,因而是实际声线.可见在从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}_1$ 的所有路径中实际声线使声程(7.396)取极值.这便是最短声程原理.它相当于光学中的费马原理和质点力学中的最小作用量原理.这更深化了几何声学与质点力学的相似.

几何声学分别考虑不同频率的声.程函方程(7.395)就是对一定频率的声而言的.将一定频率的波(7.391)代入波动方程(7.382),得具有一定频率的波方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \tag{7.399}$$

其中 k 仍由(7.394)定义.此式与(7.395)的对应就是波动声学与几何声学的对应.

§7.9 波方程的通解 波包与群速度 波包的扩散

均匀介质中 k 为常数,(7.399)有解

$$\psi(r) = Ae^{i(k\cdot r+\delta)}, \tag{7.400}$$

其中波矢量 k 的长为 k,它的方向与 A 和 δ 同为积分"常数".代入(7.391)得

$$\Psi(r,t) = Ce^{i(k\cdot r-\omega t)}, \tag{7.401}$$

其中

$$C = Ae^{i\delta}, \qquad \omega = kc_l. \tag{7.402}$$

这就是方程(7.382)的平面波解.即使 c_l 为常数,平面波解也只是波方程的一种特解,它的振幅 A 为常数,既不随位置变化也不随时间变化.这是很特别的,一般情形中波的振幅不必是常数.作为微分方程,(7.382)应对任何起始条件有解.可见,至少在起始时刻可令振幅随位置任意变化.当然,在一个严密的理论中对"任何"总是有规范的.但一个好理论应将实际遇到的各种情况都包含在它的规范中.在波动理论中可将"任何函数"规范为任何可作傅里叶分解的函数.可以说这包含了平时实际遇到的所有函数.例如,有限范围内的连续函数,其绝对值必然可积,因而可展成傅里叶积分.有限介质中的波函数都符合此规范.由于 c_l 为实数,(7.401)的复共轭也是波方程(7.382)的解.又由于这是一个线性方程,解的任意线性叠加仍是解.可见

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int[C_+(k)e^{i(k\cdot r-\omega t)} + C_-(k)e^{-i(k\cdot r-\omega t)}]d^3k \tag{7.403}$$

为波方程(7.382)的解,其中 ω 与 k 由(7.402)第二式互相关联,$C_+(k)$和 $C_-(k)$为 k 的两个任意函数,

$$\int d^3k \equiv \int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\int_{-\infty}^{\infty}dk_z \tag{7.404}$$

为 k 空间中的体积分.设起始时刻 $t=0$ 波函数为

$$\Psi(r,0) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int C_0(k)e^{ik\cdot r}d^3k,$$

波函数对时间的偏微商为

$$\dot{\Psi}(r,0) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int C_1(k)e^{ik\cdot r}d^3k.$$

按傅里叶积分理论,其中的傅里叶系数

$$C_0(k) = \int e^{-ik\cdot r}\Psi(r,0)d\mathcal{V}, \quad C_1(k) = \int e^{-ik\cdot r}\dot{\Psi}(r,0)d\mathcal{V}.$$

体积分在整个空间进行.给定起始条件 $\Psi(r,0)$和 $\dot{\Psi}(r,0)$也就给定了这些系数.另一方面,由解(7.403)得

$$\Psi(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(C_+(\boldsymbol{k})+C_-(-\boldsymbol{k}))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k,$$

$$\dot{\Psi}(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int(C_+(\boldsymbol{k})-C_-(-\boldsymbol{k}))(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k.$$

两相比较得方程组

$$C_+(\boldsymbol{k})+C_-(-\boldsymbol{k})=C_0(\boldsymbol{k}),\quad -\mathrm{i}\omega(C_+(\boldsymbol{k})-C_-(-\boldsymbol{k}))=C_1(\boldsymbol{k}).$$

由此解得

$$C_+(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2}(C_0(\boldsymbol{k})+\frac{\mathrm{i}}{\omega}C_1(\boldsymbol{k})),\quad C_-(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2}(C_0(-\boldsymbol{k})-\frac{\mathrm{i}}{\omega}C_1(-\boldsymbol{k})).$$

将它们代回(7.403),即定得方程(7.382)的符合给定起始条件的特解.由于只要适当选取积分"常数"$C_+(\boldsymbol{k})$和$C_-(\boldsymbol{k})$的值便可得到符合任意给定起始条件的解,(7.403)是波动方程(7.382)的通解.

由(7.402)第二式定义的ω恒正.(7.403)积分号下两项频率符号相反.其中第一项称正频率项,第二项称负频率项.若取复共轭,正频率项就变成负频率项,负频率项则变成正频率项.因此,与取复共轭无关的结果应对正负频率项同样适用.以下的讨论可对正负频率项平行进行.为节省书写,只叙述对正频率项的讨论,结果也适用于负频率项.既然如此,且将波函数写为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int C(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\mathrm{d}^3k. \tag{7.405}$$

空间分布局限在一小范围内的波称为波包或波群.

$$\Psi(\boldsymbol{r},0)=\mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2}{2a^2}+\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}} \tag{7.406}$$

即是一波包.中心在$\boldsymbol{r}_0$处,此处波的强度最大;在与$\boldsymbol{r}_0$距离为a的地方波的振幅降到中心值的$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,强度降到中心值的$\mathrm{e}^{-1}$倍.随着离中心距离越来越远,振幅和强度都迅速下降为零.这个波只分布在中心附近的小范围内,分布的尺度可用a表示.a可取得很小,对波包空间分布尺度的大小没有限制.将波包(7.406)表示成(7.405)的形式,其中

$$\begin{aligned}C(\boldsymbol{k})&=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2}{2a^2}}\mathrm{d}\mathcal{V}\\&=\prod_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_j-k_{0j})x_j-\frac{(x_j-x_{0j})^2}{2a^2}}\mathrm{d}x_j\\&=\prod_{j=1}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_j-k_{0j})x_{0j}-\frac{a^2(k_j-k_{0j})^2}{2}}\int_{\Gamma}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}\mathrm{d}\xi\\&=(\sqrt{2\pi})^3a^3\mathrm{e}^{-\frac{a^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{2}-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}_0}.\end{aligned} \tag{7.407}$$

式中 k_j、k_{0j}、x_j 和 x_{0j}分别为$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}_0$、$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 的第 j 分量;第三等号处将被积函数指数上的二次式配了方,并作了变换

$$\xi = x_j - x_{0j} + a^2(k_j - k_{0j})\mathrm{i}; \tag{7.408}$$

积分路线 Γ 为复平面上与实轴平行且在实轴上方$a^2(k_j - k_{0j})$处的直线.由于在 Γ 与实轴间被积函数无奇点,$\pm\infty$两端对积分的贡献又是零,故可将积分路线从 Γ 移到实轴上.这使积分成为高斯积分,并导致最后结果.将(7.407)代回(7.405)得

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{a^3}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \mathrm{e}^{-\frac{a^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{2}-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\boldsymbol{r}_0+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\mathrm{d}^3k. \tag{7.409}$$

为完成积分,需要 ω 与$\boldsymbol{k}$ 的关系.这种关系称为色散关系.不同介质中的不同波动有不同的色散关系,是介质与波的特征关系.(7.402)第二式为声波的色散关系.下面的讨论并不用这个特殊关系,而着力显示色散关系对波动的一般影响.(7.407)中振幅随 $\boldsymbol{k}$ 的变化也有一个中心 $\boldsymbol{k}_0$,$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0$ 处振幅取极大,$\boldsymbol{k}$ 偏离 $\boldsymbol{k}_0$ 振幅便减小.振幅只在 $\boldsymbol{k}_0$ 附近的一个区域中显著不为零.这个区域的尺度为$\frac{1}{a}$量级.由于实际上只有这个区域对(7.407)中的积分有显著贡献,在$\frac{1}{a}$为小量的条件下可将$\omega(\boldsymbol{k})$在 $\boldsymbol{k}_0$ 附近展成 $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$ 的幂级数.取到一次幂,

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega_0 + (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\nabla_k\omega, \tag{7.410}$$

其中 $\omega_0\equiv\omega(\boldsymbol{k}_0)$,$\nabla_k\omega$ 为 ω 在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的梯度,即是一个分别以$\frac{\partial\omega}{\partial k_x}$、$\frac{\partial\omega}{\partial k_y}$和$\frac{\partial\omega}{\partial k_z}$为 x、y 和 z 分量的矢量,在此式中它也在 $\boldsymbol{k}_0$ 处取值.代入(7.409)得

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{a^3}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \mathrm{e}^{-\frac{a^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{2}+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0-\nabla_k\omega t)}\mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)} \\
&= \frac{a^3}{(\sqrt{2\pi})^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}\prod_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{a^2(k_j-k_{0j})^2}{2}+\mathrm{i}(k_j-k_{0j})\left(x_j-x_{0j}-\frac{\partial\omega}{\partial k_j}t\right)}\mathrm{d}k_j \\
&= \frac{a^3}{(\sqrt{2\pi})^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}\prod_{j=1}^{3}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_j-x_{0j}-\frac{\partial\omega}{\partial k_j}t\right)^2}{2a^2}}\int_{\Gamma}\mathrm{e}^{-\frac{a^2\xi^2}{2}}\mathrm{d}\xi \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0-\nabla_k\omega t)^2}{2a^2}+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}.
\end{aligned} \tag{7.411}$$

这一积分过程与(7.407)相似,只是积分变量为 k_j,变换也就改成了

$$\xi = k_j - k_{0j} - \frac{1}{a^2}\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial\omega}{\partial k_j}t\right)\mathrm{i}, \tag{7.412}$$

积分路线 Γ 相应地变为平行实轴然而在其下方$\frac{1}{a^2}\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial\omega}{\partial k_j}t\right)$处的直

线.(7.411)表明,起始时为(7.406)的波包随时间的变化乃是速度为

$$\boldsymbol{v}_g = \nabla_k \omega \tag{7.413}$$

的移动.波包移动的速度$\boldsymbol{v}_g$称为它的群速度.群速度表达式(7.413)虽是以高斯型波包(7.406)为例导出的,却是普遍的.一般地设(7.405)是一波包,起始$t=0$时振幅的空间分布在中心$\boldsymbol{r}_0$附近,波矢量分布在中心$\boldsymbol{k}_0$附近.将傅里叶分量写为

$$C(\boldsymbol{k}) \equiv \widetilde{C}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot \boldsymbol{r}_0},$$

(7.405)可写为

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \widetilde{C}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega t]} \mathrm{d}^3 k .$$

采用展开式(7.410)得

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \widetilde{C}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0-\nabla_k \omega t)} \mathrm{d}^3 k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}. \tag{7.414}$$

右边最后的相因子是绝对值为1的数,不表示波的振幅和强度随空间位置和时间的变化.与它相乘的因子表示出这种变化.从中可以看出起始时在$\boldsymbol{r}_0$处的波包中心t时刻到了$\boldsymbol{r}_0 + \nabla_k \omega t$处,即以群速度(7.413)移动.这就一般地证明了群速度公式(7.413).

如果色散关系为(7.403)的第二式,则群速度

$$\boldsymbol{v}_g = \nabla_k \omega = c_l \frac{\boldsymbol{k}}{k}, \tag{7.415}$$

与相速度相等.若色散关系并非这种线性关系则群速度不同于相速度.自然界中许多种类的波,它们的圆频率ω与波矢量长k之间的关系不是线性的,因而一般地说应仔细区分群速度与相速度.

(7.411)或(7.414)表示的波包运动都只是整体位置的移动.波包中振幅空间分布的形状和尺度都不随时间变化.这是近似(7.410)的结果.群速度$\nabla_k \omega$是波包振幅随波矢量分布的中心$\boldsymbol{k}_0$的函数.试想将波包振幅的分布在$\boldsymbol{k}$空间中细分成许多子波包,每个子包的波矢量中心自会彼此不同从而会有不同的群速度.可见波包振幅在现实空间中分布的形状和尺度应随时间变化,称为波包的扩散.从上面的分析知,这种现象由圆频率ω对波矢量$\boldsymbol{k}$的各分量的二阶微商决定.将ω在$\boldsymbol{k}_0$附近对$\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0$的幂级数展开取到二次幂得

$$\omega(\boldsymbol{k}) \approx \omega_0 + (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\nabla_k \omega + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{3} \omega_{jj'}(k_j - k_{0j})(k_{j'} - k_{0j'}), \tag{7.416}$$

其中$\omega_{jj'} \equiv \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial k_j \partial k_{j'}}$.在各向同性的介质中$\omega$只是波矢量长$k$的函数而与它的方向无关.因此

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial k_j} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{k_j}{k},$$

第二等号处用了 $k = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} k_j^2}$. 再微商一次得

$$\omega_{jj'} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{1}{k}\delta_{jj'} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\frac{1}{k^2} - \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{1}{k^3}\right)k_j k_{j'}. \tag{7.417}$$

在(7.416)中 $\omega_{jj'}$ 要在 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$ 处取值. 若取 $\boldsymbol{k}_0$ 方向为第三轴, 则 $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_0$. 上式变成

$$\omega_{jj'} = \omega_{jj}\delta_{jj'}, \qquad \omega_{11} = \omega_{22} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{1}{k}, \qquad \omega_{33} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}. \tag{7.418}$$

代入(7.416)得

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega_0 + (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)\cdot \nabla_k \omega + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\omega_{jj}(k_j - k_{0j})^2. \tag{7.419}$$

以此替换(7.410)代入(7.409), 作平行于(7.411)的计算, 只是在相应位置将 a 换成

$$a_j = \sqrt{a^2 + \mathrm{i}\omega_{jj}t}, \tag{7.420}$$

得

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r} - \omega_0 t)}\prod_{j=1}^{3}\frac{a}{a_j}\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial \omega}{\partial k_j}t\right)^2}{2a_j^2}}. \tag{7.421}$$

此式表明, 波包除以群速度 $\nabla_k \omega$ 移动外, 振幅的空间分布也发生了变化. 原来高斯分布的第 j 维指数现在成为

$$-\frac{\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial \omega}{\partial k_j}t\right)^2}{2(a^2 + \mathrm{i}\omega_{jj}t)} = -\frac{\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial \omega}{\partial k_j}t\right)^2}{2(a^4 + \omega_{jj}^2 t^2)}(a^2 - \mathrm{i}\omega_{jj}t).$$

由于虚指数只给出一绝对值为 1 的因子, 第 j 维振幅分布由高斯因子 $\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_j - x_{0j} - \frac{\partial \omega}{\partial k_j}t\right)^2}{2b_j^2}}$ 表示, 分布的空间尺度

$$b_j = \sqrt{a^2 + \frac{\omega_{jj}^2}{a^2}t^2} \tag{7.422}$$

确实随时间 t 增长. 这就是波包的扩散.

习 题 七

1. 两相同单摆末端由一轻弹簧相联. 弹簧的自然长度为自然下垂的两摆间距离[图 7-4(a)], 试讨论此耦合摆在两摆组成的平面内的微振动, 求出简正坐标和本征频率.

2. 设上题中弹簧的自然长度长于[图 7-4(b)]或短于[图 7-4(c)]自然下垂的两摆间

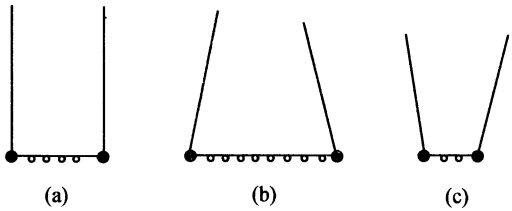

图 7-4　耦合摆

距.先求此耦合摆的平衡位形,再讨论它绕平衡位形的微振动,求出简正坐标和本征频率.

3. 两单摆,一个悬于定点,另一个悬于前一个的摆锤上,两摆均可绕自己的悬点自由摆动,是为双摆.讨论双摆在自身平面内绕平衡位形的微振动,求出简正坐标和本征频率.

4. 有一带电的各向同性简谐振子受到一均匀恒定磁场的作用.写出并求解其运动方程.

5. 一系统的拉氏函数为

$$L = \mathrm{e}^{-\lambda t}\Big(\sum_{\sigma=1}^{f} m_\sigma \dot{q}_\sigma^2 - \sum_{\sigma,\sigma'=1}^{f} k_{\sigma\sigma'} q_\sigma q_{\sigma'}\Big)/2,$$

写出它的拉氏方程和瑞利耗散函数.

图 7-5　耦合弹簧的纵向运动

6. 求出上题系统中各自由度的广义动量.进一步写出此系统的哈密顿量和哈密顿正则方程,讨论所得结果.

7. 三个质点由两条不可弯曲的轻弹簧联成直线(图 7-5),讨论此系统在无重力作用的条件下沿所联直线方向的运动.

8. n 个相同质点由 $n+1$ 条不可弯曲的相同轻弹簧联成直线(图 7-6),联线的两端被固定,讨论此系统在无重力作用的条件下沿所联直线方向的运动.

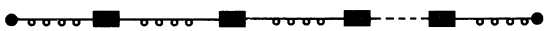

图 7-6　两端固定的多重耦合弹簧

9. n 个相同质点由 n 条相同轻弹簧首尾相联地联成一圆周(图 7-7).试讨论此系统在无重力作用条件下沿此圆周的运动.

10. 试求解一铅直地竖于重力场中的均匀长圆柱体内的形变和应力分布.

11. 设一均匀球表面受压力 $\mathscr{P}$,求球内的形变与应力分布.

12. 试推导水平放置的均匀薄板在重力场中的平衡方程.

13. 试求解周边水平地嵌入墙内的圆形均匀薄板在重力作用下的形变和应力分布.

14. 球形弹性体沿径向的振动称为单极振动,又称呼吸模式.试求无外力作用下均匀球单极振动频率须满足的条件.

15. 试推导细杆纵向振动沿杆传播的波动方程,并导出其相速度公式.

16. 设上题中的细杆结构均匀，一端固定，另一端自由，求其中纵向振动的频率.

17. 模仿从(5.297)到(5.303)的推导，详细写下从(7.396)到(7.398)的推导，并证明其中得到的 $W(r)$ 确实满足程函方程(7.395).

18. 对负频率波

$$\Psi(r,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int C(k)e^{-i(k\cdot r-\omega t)}d^3k$$

证明群速度公式(7.413)，并进而证明此公式对既含正频率项又含负频率项的一般情形(7.403)也成立.

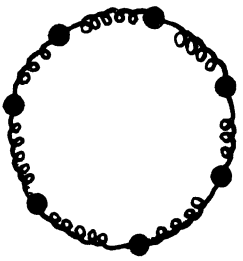

图 7-7　弹簧圈

第八章　流体力学

§8.1　流体的密度场、速度场和压力场 连续性方程、欧拉方程和物态方程　理想流体

流体中切变模数 $\mu=0$，任一曲面两侧的流体可沿曲面切向相对移动，无限远离，而无切应力使之恢复原来位形．相对切向运动的流体间可有黏滞力相互作用．这是一种摩擦力或耗散力．与切应力不同，黏滞力是非保守的，破坏机械能守恒．黏滞力为零的流体为保守系统，称为理想流体．黏滞力非零的流体称为黏滞流体．流体占据一空间区域，由此区域中坐标的一组函数来描写．密度随坐标的变化 $\rho(\boldsymbol{r})$称为密度场，速度随坐标的变化$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$称为速度场，压力在空间的分布 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r})$称为压力场．下面将看到，这组场完全描述了流体．

由密度和速度可组成流密度矢量

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}), \tag{8.1}$$

它的方向表示所在点 $\boldsymbol{r}$ 处流体流动的方向，大小表示沿该方向单位时间内通过单位面积流过的质量．流动中质量不会自生自灭．一个体积内质量的增加只能是从表面流入的结果．因此有连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{8.2}$$

将流体设想为由许多小部分组成．如一个小部分的尺度与问题涉及的尺度比可以忽略，则可将它当作一个质点，称为流点．流体可视为由大量流点组成．流体的运动便归结为这些流点的运动．t 时刻在$\boldsymbol{r}$ 处的一个流点质量为

$$\mathrm{d}m=\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau,$$

$\mathrm{d}\tau$ 为它所占据的体积．这个流点以速度$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$运动，在经过 $\mathrm{d}t$ 时间后到达$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t$ 处，从而有速度

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\mathrm{d}t,t+\mathrm{d}t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}t,$$

右边第二项括号内的量在 $\boldsymbol{r},t$ 处取值．它的加速度遂为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\equiv\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}. \tag{8.3}$$

此量称为流体速度对时间的全微商，即流点速度对时间的微商．另一方面，体

积 τ 内理想流体受的力只有来自表面 s 的压力，它的合力为

$$\boldsymbol{F} = -\int_s \mathscr{P}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\int_\tau \nabla\mathscr{P}\mathrm{d}\tau. \tag{8.4}$$

将体积缩小到流点的体积 $\mathrm{d}\tau$，得作用在流点上的力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} \doteq -\nabla\mathscr{P}\mathrm{d}\tau.$$

将前面已得的流点质量和加速度的积与此力相等，约去 $\mathrm{d}\tau$ 后得

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\nabla\mathscr{P}. \tag{8.5}$$

这便是流体的运动方程，称为欧拉方程. 前面的推导表明，它就是流点的牛顿运动方程.

理想流体有五个未知函数；其中，密度场有一个 $\rho(\boldsymbol{r},t)$，速度场有三个 $v_x(\boldsymbol{r},t)$、$v_y(\boldsymbol{r},t)$和 $v_z(\boldsymbol{r},t)$，压力场还有一个 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$. 它们需要五个方程来确定. 现已有其中的四个. 连续性方程(8.2)是其中的一个，欧拉方程(8.5)的每个分量各是其中的一个. 尚缺的一个由物态方程

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\rho) \tag{8.6}$$

补充，它是流体中压力与密度的关系. 物态方程不是力学方程，表示的不是力学规律而是流体的物性，在经典力学范围内不能从理论导出，而只能由实验观察总结得到. 如果要给它以理论说明或推导，则必须借助微观理论，这超出本书范围. 重要的是，它与欧拉方程(8.5)和连续性方程(8.2)一起组成理想流体的完备方程组. 由这组方程可解出理想流体的全部未知函数. 在这组方程中，连续性方程(8.2)和欧拉方程(8.5)是普遍的，适用于任何理想流体，体现理想流体的共性. 物态方程则是专属的，每种流体各有自己的物态方程，反映出这种流体的特性.

将流体看作流点组成的质点系. 与固态弹性体中当作质点的小部分不同，流点没有平衡位置. 可以用它在任一选定时刻的位置为起点计算位移 $\boldsymbol{u}$，并以此位移作为该流点的广义坐标. 各流点位移的集合便是流体的广义坐标. 位移对时间的全微商

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} \tag{8.7}$$

为流点的速度. t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处占据体积元 $\mathrm{d}\tau$ 的流点有动能

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{r},t)\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}\right)^2\mathrm{d}\tau,$$

它的积分为 t 时刻流体的动能

$$T = \frac{1}{2}\int\rho\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}\right)^2\mathrm{d}\tau. \tag{8.8}$$

积分区域为流体占据的空间. 在(7.244)中置 $\mu=0$ 得流体形变势能密度

$$U = \frac{K}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} u_{ii}\Big)^2 = \frac{K}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2. \tag{8.9}$$

它的体积分为流体内应力导致的势能

$$V = \frac{1}{2}\int K(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}\tau. \tag{8.10}$$

这里不写积分限的体积分都遍及全流体，面积分都遍及流体表面. 于是得流体的拉格朗日量

$$L = T - V = \frac{1}{2}\int\left[\rho\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}\right)^2 - K(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2\right]\mathrm{d}\tau. \tag{8.11}$$

进而可按(4.2)得从 t_0 时刻到 t_1 时刻的作用量. (8.11)中的动力学变量包括位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 和密度 ρ. 不过，一个流点的质量 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}\tau$ 是一个不变量，导致变分的约束条件

$$\delta(\rho \mathrm{d}\tau) = 0. \tag{8.12}$$

在此条件下作用量的变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1}\delta L \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int\left[\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}\cdot\frac{\mathrm{D}\delta\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} - K(\nabla\cdot\boldsymbol{u})(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int K(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int\left(\rho\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t^2} - K\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{8.13}$$

在末一等号处作了部分积分，右边第一项为左边第一项对时间部分积分积出的部分，右边第二项为左边第二项对空间部分积分积出的部分，右边第三项是部分积分后剩下的部分. 给流体加边界条件. 一种边界条件为自由表面，即流体表面不受作用，从而压力为零. 按胡克定律(7.345)，这要求表面处 $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$. 另一种边界条件固定流体表面的法向位移，这使它的变分 $\delta\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$. 两种边界条件都使(8.13)右边第二项积分为零. 固定始末时刻流点的位移则使(8.13)右边第一项积分为零. 于是哈密顿原理要求(8.13)右边第三项积分对流体内各流点位移的任意变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 都是零. 满足此要求的充分必要条件便是其积分号下括号内的表达式为零，即

$$\rho\frac{\mathrm{D}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t^2} - K\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0. \tag{8.14}$$

由(8.7)、(8.3)和(7.345)知此式就是欧拉方程(8.5).

设流体受到外力场的作用，外作用力密度为 $\boldsymbol{f}^{(e)}$，则欧拉方程应修改为

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\nabla\mathscr{P} + \boldsymbol{f}^{(e)}, \tag{8.15}$$

(8.14)相应地修改为

$$\rho \frac{\mathrm{D}^2 \boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t^2} - K \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{(e)}. \tag{8.16}$$

最常见的外力场为重力场.例如对地表水的流动

$$\boldsymbol{f}^{(e)} = -\rho g \boldsymbol{z}_0, \tag{8.17}$$

g 为重力加速度,$\boldsymbol{z}_0$ 为垂直地面向上的单位矢量.

§8.2 伯努利积分与拉格朗日积分 不可压缩流体与无旋流体

欧拉方程是非线性的,不易求解.不过已求出了一些有意义的积分,被广泛使用.将欧拉方程写作

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathscr{P}. \tag{8.18}$$

设物态方程(8.6)有逆

$$\rho = \rho(\mathscr{P}), \tag{8.19}$$

定义

$$w(\mathscr{P}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\rho}, \tag{8.20}$$

积分常数可任意取定.于是(8.18)可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla w. \tag{8.21}$$

利用恒等式

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \tag{8.22}$$

又可将上式表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \nabla w = 0. \tag{8.23}$$

考虑恒稳流动,各量与时间无关,只是坐标的函数,因而$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$.(8.23)变为

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0. \tag{8.24}$$

称给定时刻处处与速度矢量$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$相切的曲线为该时刻的流线.沿流线将此式积分.左边第二项因与速度矢量垂直对积分无贡献.结果得

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \Bigg|_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} = 0,$$

$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 为同一流线上的两点.此式表示在一条流线上量

$$\frac{v^2}{2} + w = C \tag{8.25}$$

为常数，称为欧拉方程的伯努利(D. Bernoulli)积分. 压缩模数 $K = \infty$ 的流体称为不可压缩流体. 由于必需无穷大压力才能改变密度，这种流体的密度为常数. (8.20)成为 $w = \mathscr{P}/\rho$，伯努利积分(8.25)成为

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \mathscr{P} = C', \tag{8.26}$$

C' 仍为常数. 这就是普通物理和中学物理学过的伯努利原理，现在由流体的运动方程——欧拉方程导出. 流点的轨迹称为流体的迹线. 恒稳流动中迹线就是流线. 因此伯努利积分(8.25)在迹线上也成立.

速度场旋度处处为零的流体为无旋流体. 无旋条件即

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0, \tag{8.27}$$

因而有速度势 ϕ，它的梯度即是速度

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi. \tag{8.28}$$

将此式代入(8.23)左边第一项，注意其中第三项对无旋流体为零，得

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0.$$

可见

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = C_1(t). \tag{8.29}$$

这是欧拉方程的另一积分，称拉格朗日积分. 右边的 $C_1(t)$ 与坐标无关却可与时间有关. 对恒稳流动各量均与时间无关，$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$，此式成为

$$\frac{v^2}{2} + w = C_1, \tag{8.30}$$

现在 C_1 已是与时间无关的常数. 与(8.25)比较，知此式即伯努利积分. 不过(8.25)中的 C 只在一条流线上为常数，在不同流线上取值不同. 而(8.30)中的 C_1 则在整个流体为常数，在各流线上取值相同. 这个加强的结论是对无旋流体作出的.

不可压缩流体密度为常数，既不随时间变化也不随位置变化. 由(8.1)和(8.2)知，这种流体的连续性方程简化为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{8.31}$$

它表明，不可压缩流体是无散的. 若它同时又是无旋流体，速度由(8.28)表达，则有

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{8.32}$$

速度势满足拉普拉斯方程. 对给定的边界条件，拉普拉斯方程的解是惟一的.

不可压缩无旋流体的速度场便完全由边界条件确定.方程(8.32)不含时间,速度场随时间的变化也由边界条件的变化决定.如此,速度场可单独解出,密度又是常数,欧拉方程(8.5)遂成了求压力 $\mathscr{P}$ 的方程.

§8.3 速度环量及其守恒 汤姆孙定理

设作用在单位质量上的外力有势 $w^{(e)}$,外力密度可表示为

$$\boldsymbol{f}^{(e)} = -\rho\nabla w^{(e)}. \tag{8.33}$$

代入(8.15),重新定义

$$w = \int \frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\rho} + w^{(e)}, \tag{8.34}$$

外力场中流体的运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla w. \tag{8.35}$$

它形如质量为 1 的质点在势场 w 中的运动方程.流体的运动可由这种质点运动轨道的集合来描写.由 §5.3 知,质点轨道的集合有庞加莱通用积分不变量.采用笛卡儿坐标系,并注意质点质量为 1 从而动量 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}$,通用积分不变量(5.40)成为速度 $\boldsymbol{v}$ 的线积分

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{8.36}$$

积分路线为现实的三维空间中的一条闭合回路.随着时间的推移,回路上每一流点都在移动,回路也就在空间移动.由连续性知,移动中回路保持为闭合的.回路上各流点的速度也在变.说(8.36)表示的是通用积分不变量意即:虽然回路在变,回路上每点的速度也在变,速度在此回路上的线积分 Γ 却不变.在流体力学中,(8.36)定义的速度沿闭合回路的线积分 Γ 称为速度环量.它不随时间变化意即速度环量守恒.这一守恒律称汤姆孙[W. Thomson(Lord Kelvin)]定理(也可按其封号"开尔芬勋爵"称开尔芬定理).它是经典力学存在通用积分不变量这一普遍规律在流体力学中的具体表现.

也可由欧拉方程(8.35)直接证明此定理.在(8.36)两边对时间求微商得

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \oint \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{Dd}\boldsymbol{l}}{\mathrm{D}t}.$$

回路上的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为回路上点的径矢量 $\boldsymbol{r}$ 的微分,因此 $\frac{\mathrm{Dd}\boldsymbol{l}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{Dd}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t}$ 为回路上流点的速度.将此结果与欧拉方程(8.35)一起代入上式得

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \oint(-\nabla w)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \oint \mathrm{d}\left(-w + \frac{v^2}{2}\right) = 0, \quad (8.37)$$

因为全微分 $\mathrm{d}\left(-w+\frac{v^2}{2}\right)$ 在闭合回路上的积分为零.此式意即速度环量不随时间改变.

流体中速度在某点的旋度

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (8.38)$$

称为它在该点的涡度.涡度沿一曲面 s 的面积分

$$\Phi = \int_s \boldsymbol{\Omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad (8.39)$$

称为流体在该曲面上的涡通量.由矢量分析中的斯托克斯定理知

$$\Phi = \int_s (\nabla \times \boldsymbol{v})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Gamma, \quad (8.40)$$

线积分回路为曲面的边缘.此式表明,流体在一曲面上的涡通量等于它沿该曲面边缘的速度环量.既然速度环量守恒,涡通量也就守恒.具体说来就是,在流体流动中一曲面上各流点都在动,由它们组成的曲面位置和形状都在变,各流点的速度及其涡度都在变,然而曲面上的涡通量却不变.

无旋流体中处处涡度为零.这使每一曲面的涡通量都是零,从而每一闭合回路上的速度环量都是零.速度环量守恒使这种情形可保持到永远.即每一曲面上的涡通量永远都是零,从而永远处处涡度为零.由此推得:无旋流体将永远维持为无旋流体.特别若起始时流体为静止(自然无旋),由于外力(如重力)作用而流动,则流动必是无旋的.这一推论似与常识相悖.日常经验告诉我们,高山流水中会溅起旋涡,不是无旋的.速度环量守恒律与日常经验如此明显相悖是由于它的依据——欧拉方程(8.35)只适用于无黏滞的理想流体.正是黏滞性破坏速度环量守恒,在高山流水中造成旋涡.下面会介绍有黏滞性的实际流体.这里要强调的则是:不考虑黏滞性的理想流体理论有其广泛的适用范围.下面用它研究一个同样是日常生活中常见的例子.

§8.4 重力场中流体的表面波 深水波 浅水波 孤波与孤子 KdV[①]方程及其解

重力场中静止的流体表面与重力方向垂直,为等高面,称水平面.扰动(例如投石)破坏流体表面的平静,激起表面波.水波即日常生活中熟悉的水表面波.本节研究表面波.

---

① D.J.Korteweg and G. de Vrieg, *Phil. Mag.* **39**(1895)422.

考虑理想流体.由于有重力作用,应采用含外力的欧拉方程(8.15).重力有势,此方程仍可写成(8.21)的形式,只是其中的函数 w 应由(8.34)定义.这使(8.21)以下的推论均成立.设流体不可压缩且无旋,因而有由(8.28)定义的速度势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$并满足拉普拉斯方程(8.32).这使流体运动完全由边界条件确定.取笛卡儿坐标系,以静止条件下的流体表面为 xy 平面,z 轴铅直向上.由于密度 ρ 为常数,按(8.34)

$$w = \frac{\mathscr{P}}{\rho} + gz,$$

g 为重力加速度.代入拉格朗日积分(8.29)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{\mathscr{P}}{\rho} + gz = C_1(t). \tag{8.41}$$

从 $\phi(\boldsymbol{r},t)$中减去一与坐标无关的不定积分 $\int C_1(t)\mathrm{d}t$ 不影响它满足(8.28)和(8.32)却能使此式右端为零.对如此重新定义的速度势 ϕ,

$$\mathscr{P} = -\rho\left(gz + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{8.42}$$

设流体表面受常数压力 $\mathscr{P}_0$.对日常生活中的水波,$\mathscr{P}_0$ 即大气压力.于是得流体表面的边界条件

$$\left(g\zeta + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = -\frac{\mathscr{P}_0}{\rho} = \text{常数}, \tag{8.43}$$

$\zeta(x,y,t)$为 t 时刻(x,y)处的表面高度.从 $\phi(\boldsymbol{r},t)$中再次减去与坐标无关的量 $-\frac{\mathscr{P}_0}{\rho}t$,也不影响它满足(8.28)和(8.32),却能使此式右端为零.对如此重新定义的 $\phi(\boldsymbol{r},t)$,表面边界条件(8.43)简化为

$$\left(g\zeta + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0. \tag{8.44}$$

为进一步简化求解,再作两点假定.一是设流体速率 v 为小量,此式左边 v^2 项为二级小.到一级近似,流体表面边界条件(8.44)简化为

$$\left(g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0. \tag{8.45}$$

这一简化步骤称为线性化,它使流体表面边界条件成为未知函数 ζ 和 ϕ 的线性式.另一是设流体在水平方向是无限广延的,且沿一固定方向流动;沿此固定方向取 x 轴,各量与 y 无关.无限广延免去了水平方向的边界条件,沿 y 方向的平移对称则将问题约化到 zx 平面内,成为二维流动问题.未知函数 $\zeta(x,t)$和 $\phi(x,z,t)$均与 y 无关.最后设流体深 h,底部为水平面 $z=-h$.底部边界条件为垂直于底面的速度为零.用速度势表示出,即

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h}=0. \tag{8.46}$$

速度势 ϕ 的拉普拉斯方程(8.32)与边界条件(8.44)和(8.46)一起构成决定流体表面波的完备方程组.在 v 为小量的条件下,(8.44)可近似为(8.45).

函数 ζ 和 ϕ 并非彼此独立的.表面流点速度的 z 分量

$$v_z(z=\zeta)=\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}+v_x\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{z=\zeta}=\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{z=\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

另一方面 $v_z=\dfrac{\partial \phi}{\partial z}$.因此

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\zeta}=\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{z=\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{8.47}$$

在 $v_x=\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ 为小量的条件下略去此式右边的第二项,得

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\zeta}=\frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

将(8.45)两边对时间求偏微商,得

$$\left.g\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{z=\zeta}=0.$$

比较此二式知

$$\left(g\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta}=0. \tag{8.48}$$

在流体很深,深度 h 远大于表面位移 ζ 的条件下,此式可近似为

$$\left(g\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}=0. \tag{8.49}$$

在边界条件(8.46)和(8.49)下求解二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0. \tag{8.50}$$

设其解为

$$\phi(x,z,t)=f(z)\cos(kx-\omega t). \tag{8.51}$$

代入(8.50),微商后约去余弦函数得

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}-k^2 f=0; \tag{8.52}$$

代入(8.46)得边界条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-h}=0. \tag{8.53}$$

(8.52)满足此条件的解为

$$f(z)=A\mathrm{ch}[k(z+h)].$$

代回(8.51)得

$$\phi(x,z,t) = A\,\mathrm{ch}[k(z+h)]\cos(kx-\omega t). \tag{8.54}$$

代入边界条件(8.49)得

$$gk\,\mathrm{sh}(kh) - \omega^2\mathrm{ch}(kh) = 0.$$

由此解得表面波的色散关系

$$\omega^2 = kg\,\mathrm{th}(kh). \tag{8.55}$$

按(8.28)可由速度势(8.54)算出流体中各点的速度

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = -Ak\,\mathrm{ch}[k(z+h)]\sin(kx-\omega t), \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \\ v_z &= \frac{\partial\phi}{\partial z} = Ak\,\mathrm{sh}[k(z+h)]\cos(kx-\omega t). \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

此式表明,速度在 zx 平面内作圆频率为 ω 的简谐振动.速度矢量的末端划一椭圆,长轴沿 x 方向,短轴沿 z 方向,两轴长之比为 $\mathrm{th}[k(z+h)]$,偏心率为 $\dfrac{1}{\mathrm{ch}[k(z+h)]}$.沿流点的轨道将速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间积分即得流点的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 随时间的变化.设流点的位移比流体内速度波(8.56)的波长小得多,在对时间 t 积分时可固定函数(8.56)中的坐标值.如此积得位移矢量诸分量

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -A\frac{k}{\omega}\mathrm{ch}[k(z+h)]\cos(kx-\omega t), \quad u_y = 0, \\ u_z &= -A\frac{k}{\omega}\mathrm{sh}[k(z+h)]\sin(kx-\omega t). \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

位移矢量末端在 zx 平面内划出同样形状的椭圆.在流体表面 $z=0$, u_z 即是 ζ.因此

$$\zeta(x,t) = -A\frac{k}{\omega}\mathrm{sh}[kh]\sin(kx-\omega t) = -\frac{A\omega}{g}\mathrm{ch}[kh]\sin(kx-\omega t). \tag{8.58}$$

在第二等号处用了色散关系(8.55).

将表面波表示成

$$\zeta(x,t) = \zeta_0\sin(kx-\omega t), \tag{8.59}$$

与上式比较得

$$A = -\frac{g\zeta_0}{\omega\,\mathrm{ch}(kh)}. \tag{8.60}$$

代入(8.54)、(8.56)和(8.57)后求它们在 $h\to\infty$ 时的极限,即深水极限.得

$$\phi(x,z,t) = -\frac{g\zeta_0}{\omega}\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t), \tag{8.61}$$

$$v_x = \omega\zeta_0\mathrm{e}^{kz}\sin(kx-\omega t), \quad v_y = 0, \quad v_z = -\omega\zeta_0\mathrm{e}^{kz}\cos(kx-\omega t), \tag{8.62}$$

$$u_x = \zeta_0 e^{kz}\cos(kx - \omega t), \quad u_y = 0, \quad u_z = \zeta_0 e^{kz}\sin(kx - \omega t). \tag{8.63}$$

伴随表面波，整个流体在波动.随深度增加($-z$ 增加)，波动幅度逐渐变小.在深水极限下，波动幅度随深度指数衰减.在此极限下，色散关系(8.55)简化为

$$\omega^2 = kg. \tag{8.64}$$

A 或 ζ_0 为积分常数，在线性近似下应不受限制.然而在理论推导中用了表面位移与深度相比为小量的条件，使它的结论只在 ζ_0 为小量时适用.

在表面位移可与流体深度相比的条件下，须对流体表面的边界条件作较细致的处理.若仍设表面波振幅比它的波长小得多，则流体深度也必比此波长小得多，因而可作小量处理.将速度势展成 $z+h$ 的幂级数，

$$\phi(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(z+h)^n F_n(x,t). \tag{8.65}$$

代入拉普拉斯方程(8.50)得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)F_{n+2}(x,t) + \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}\right](z+h)^n = 0.$$

幂级数为零的充分必要条件为其各次幂系数全为零.由此得递推关系

$$F_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{8.66}$$

将(8.65)代入底部边界条件(8.46)得

$$F_1(x,t) = 0.$$

此式和递推关系(8.66)一起使(8.65)右边所有奇次幂项为零.而偶次幂系数可由 $F_0(x,t)$ 经递推关系(8.66)导出，得

$$F_{2n}(x,t) = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n} F_0}{\partial x^{2n}}, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{8.67}$$

为简化书写，定义 $F(x,t) \equiv F_0(x,t)$.用此符号并将(8.67)代入(8.65)得

$$\phi(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+h)^{2n}\frac{\partial^{2n}F(x,t)}{\partial x^{2n}}. \tag{8.68}$$

其中零次项 $F(x,t)$ 为流体底部($z=-h$)的速度势，$\frac{\partial F}{\partial x}$ 即底部沿 x 方向的流速.在波动过程中底部流速也应围绕一平均值振荡，因此可设

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v_0 + v'(x,t); \tag{8.69}$$

平均值 v_0 为常数，与深度 h 和重力加速度 g 一起表示表面波所处的条件；v' 为小量且平均为零，与 ζ 一起为未知函数.关系(8.47)和边界条件(8.44)提供了求解这两个未知函数的方程组.将(8.68)代入(8.44)会出现一项 $\frac{\partial F}{\partial t}$.为

消去此项以得到 ζ 和 v' 的方程，将它对 x 求微商，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[g\zeta+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{z=\zeta}\right\}=0. \tag{8.70}$$

在(8.69)的基础上，对 x 的每次微商相当于除以波长．当波长远大于深度 h 时，幂级数(8.68)的越高次幂项越小．设每一因子 ζ 或 v' 都代表一级小，对 x 的每次微商也都代表一级小．对 t 微商的量级则不能如此简单地确定．这种不确定性显示内容的丰富：为它指定不同的量级会得到不同的结果，对应不同的实际．例如指定对 t 的每次微商也代表一级小．将(8.68)代入关系(8.47)和边界条件(8.70)，则到二级小量分别得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+v_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}+h\frac{\partial v'}{\partial x}=0,\qquad g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial t}+v_0\frac{\partial v'}{\partial x}=0. \tag{8.71}$$

推导中用到(8.69)，并特别注意了在(8.70)中以 ζ 代入 z 后再对 x 求微商．(8.71)是一组常系数线性齐次偏微分方程，有波动解

$$\zeta(x,t)=\zeta_0\sin(kx-\omega t),\quad v'(x,t)=v'_0\sin(kx-\omega t). \tag{8.72}$$

代入上式并约去非零因子 $\cos(kx-\omega t)$ 后得

$$(v_0k-\omega)\zeta_0+hkv'_0=0,\quad gk\zeta_0+(v_0k-\omega)v'_0=0. \tag{8.73}$$

这是振幅 ζ_0 和 v'_0 的一组线性齐次代数方程．要求的自然是它的非零解，即 ζ_0 和 v_0 不同时为零的解．存在这种解的充分必要条件为其系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} v_0k-\omega & hk \\ gk & v_0k-\omega \end{vmatrix}=0.$$

乘开后即

$$(v_0k-\omega)^2-ghk^2=0.$$

作为 ω 的二次代数方程，它的根为

$$\omega=(v_0\pm\sqrt{gh})k. \tag{8.74}$$

这就是现条件下表面波的色散关系．按(7.332)和(7.413)，这种表面波的相速度和群速度都是

$$c=v_0\pm\sqrt{gh}, \tag{8.75}$$

与波的频率和波长无关．波速与频率无关称为无色散．这种表面波是无色散的．(8.75)还表明，这种波是叠加在一速度为 v_0 的均匀流动上传播的．若流体本为静止，$v_0=0$，这种表面波的波速成为

$$c=\sqrt{gh}. \tag{8.76}$$

由于此条件下根号前的符号只代表波的传播方向，故略去．将(8.74)代入(8.73)，其中两方程成为相依的，其中一个的解必满足另一个．由此解得振幅

间的关系 $v'_0 = \pm\sqrt{\frac{g}{h}}\zeta_0$，因此

$$v'(x,t) = \pm\sqrt{\frac{g}{h}}\zeta(x,t). \tag{8.77}$$

在(8.74)的根号前取负号并令 $v_0 = \sqrt{gh}$. 在此条件下 $\omega = 0$，波是不动的. 然而谁也没见过不动的表面波，这一理论结果与实际不符. 这是因为，此条件下对 t 的微商为零，与对 x 的微商已不属同级小，不符合导出(8.71)的条件. 设对 x 的每次微商仍代表一级小，在 $v_0 \approx \sqrt{gh}$ 的条件下指定对 t 的每次微商代表三级小. 将(8.68)代入(8.44)和(8.70)，到四级小量分别得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_0\frac{\partial\zeta}{\partial x} + h\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \zeta\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 v'}{\partial x^3} = 0,\\
&\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0\frac{\partial v'}{\partial x} + g\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{v_0h^2}{2}\frac{\partial^3 v'}{\partial x^3} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.78}$$

(8.74)中既取负号，(8.77)中也应取负号. 取负号的(8.77)在新近似中不再成立，但它提示作变换

$$v'(x,t) = -\sqrt{\frac{g}{h}}\zeta(x,t) + \psi(x,t), \tag{8.79}$$

$\psi(x,t)$ 为高级小. 将此式代入(8.78)，令 $v_0 = \sqrt{gh}$，设 ψ 为三级小，到四级小量得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta}{\partial t} + h\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\sqrt{\frac{g}{h}}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{v_0h^2}{6}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} = 0,\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t} - h\frac{\partial\psi}{\partial x} - \sqrt{\frac{g}{h}}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{v_0h^2}{2}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.80}$$

两式相加后除以 2 得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{v_0h^2}{6}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} = 0. \tag{8.81}$$

作自变量变换

$$\xi = -\left(\frac{6}{v_0h^2}\right)^{1/3}x, \tag{8.82}$$

上式变为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \alpha\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + \frac{\partial^3\zeta}{\partial\xi^3} = 0, \tag{8.83}$$

$$\alpha = \left(\frac{81g}{4h^4}\right)^{1/3}, \tag{8.84}$$

(8.83)称为 KdV 方程，描写上列特定条件下重力场中流体的表面波. 它是非线性的，却有精确解.

设方程(8.83)有形如 $\zeta(s)$, $s=\xi-\beta t$ 的解. 将此解代入(8.83)得

$$(\alpha\zeta-\beta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}^3\zeta}{\mathrm{d}s^3}=0.$$

此式对 s 积分得

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}s^2}+\frac{\alpha}{2}\zeta^2-\beta\zeta+a_1=0,$$

a_1 为积分常数. 要求无穷远处 ζ 及其各级微商皆为零, 则 $a_1=0$. 将 a_1 置零后再在此式上乘$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s}$然后积分, 得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\alpha}{6}\zeta^3-\frac{\beta}{2}\zeta^2=0,$$

其中的积分常数已按上述要求置零. 作变换

$$\zeta(s)=\frac{1}{\eta^2(s)}, \tag{8.85}$$

代入上式, 将结果乘以 $\eta^6(s)$得

$$2\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}\right)^2-\frac{\beta}{2}\eta^2+\frac{\alpha}{6}=0.$$

此式又可写为

$$\mathrm{d}\eta=\frac{\sqrt{\beta}}{2}\sqrt{\eta^2-\frac{\alpha}{3\beta}}\mathrm{d}s. \tag{8.86}$$

此处已设 $\beta>0$, 且在根号前取了正号. 下面会看到, 结果与根号前的符号无关. 在此式两边除以$\sqrt{\eta^2-\frac{\alpha}{3\beta}}$后积分得

$$\frac{\sqrt{\beta}}{2}s+\delta=\int\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\eta^2-\frac{\alpha}{3\beta}}}=\operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3\beta}{\alpha}}\eta\right),$$

δ 为积分常数, arch 表双曲线余弦函数的反函数. 可见

$$\eta(s)=\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}s+\delta\right).$$

代回(8.85)并由 s 的定义知

$$\zeta(\xi,t)=\frac{3\beta}{\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left[\frac{\sqrt{\beta}}{2}(\xi-\beta t)+\delta\right]}. \tag{8.87}$$

改变(8.86)中根号前的符号只会改变此式中双曲线余弦函数自变量的符号. 双曲线余弦函数为偶函数, 值与自变量的符号无关. 这就印证了前面关于结果与此符号无关的断言. 双曲线余弦函数在自变量为零处取极小值 1, 当自变量趋于正或负无穷时其值对称而单调地趋于无穷. 可见由(8.87)表示的流体表

面向上的位移 ζ 在

$$\xi = \xi_0 \equiv \beta t - \frac{2}{\sqrt{\beta}}\delta \tag{8.88}$$

处达到极大值 $\frac{3\beta}{\alpha}$，并随与中心 ξ_0 的距离 $|\xi - \xi_0|$ 增大而减小，当距离 $|\xi - \xi_0| \to \infty$ 时趋于零. 中心的起始位置在 $\xi = -\frac{2}{\sqrt{\beta}}\delta$ 处，以 $\left(\frac{v_0 h^2}{6}\right)^{1/3}$ 为长度单位的运动速度为 β. 这是一束结构不变，运动仅表现为空间移动的波，称为孤立波，简称孤波. 又由于它像一个有一定结构的粒子，也称为孤子. 孤波现象于 1834 年 8 月首先由罗素(J. Scott Russell)观察到. 当时他正骑马沿一条航道行进，看到一条由两匹马牵引的快船突然停下. 聚集在船头被推着前进的水一阵骚动后离开船头迅速向前运动，形成一孤立而庞大的高水位，一个浑圆光滑完全确定的水堆. 它顺着航道继续前进，并保持形状和速度不变. 他骑马尾随了一两英里后在航道弯曲处将它丢失. 大约十年后，罗素报告并发表了他的发现，引起物理学家长达半个世纪的热烈争论，直到 1895 年科特维格和德弗里发表他们有孤波解的水力学方程，给孤波以完全解析的解释. 现在孤波的概念和理论在科学和技术的许多领域被广泛应用.

在无色散的波动中，可用平面波叠加出各种形状和大小的波包，由于各平面波以相同的速度前进这种波包在运动中的形状和大小均不变，只是位置移动. 这并不是孤波，因为它可以有各种形状，而孤波的形状是固定的. 而且无色散常常只是近似的，些微的色散即可逐渐改变波包的形状和大小. 即波包形状和大小的保持并非稳定的，而孤波的形状和大小的保持则是稳定的. 孤波形状和大小的保持由孤波方程中的非线性项保证，是一种非线性效应. 流体表面孤波就是靠欧拉方程的非线性项保证的，是流体运动中的非线性效应.

在前面的理论推导中曾两次指定对时间微商的量级. 这种推导前的“指定”必须与它所导得的方程自洽才是合法的. 第一次指定对 t 的每次微商代表一级小. 它所导致的方程(8.71)中对 t 的一级微商与对 x 的一级微商并列，而后者确为一级小. 这使得，一般情况下，对 t 的一级微商成为一级小，而与原来的指定一致. 只当对 t 的微商为零时才须另作考虑. 第二次指定对 t 的每次微商代表三级小. 它所导致的方程(8.81)中对 t 的一级微商与对 x 的三级微商并列. 后者恰为三级小，这使得，一般情况下，对 t 的一级微商成为三级小，因而与原指定一致. 类似地，曾指定(8.79)中的 ψ 为三级小. 它所导致的方程(8.80)中 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$ 和 $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ 并列，后二者皆为四级小. 这使得，一般情况下，$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ 为四级小，ψ 也就是三级小，与原指定一致. 本节所有“指定”都与结果自洽，因而都是合法的.

重力场中流体的表面波常称为重力波.波长远大于流体深度的重力波则常称为重力长波.

§8.5 黏力张量与黏度 纳维尔-斯托克斯方程 黏性流体的量纲分析与雷诺数

实际流体都有黏性,离开黏性甚至连一些基本的流体现象(例如旋涡的产生)都无法解释.为研究黏性对流体运动的影响,首先要定量地描述它.黏滞即流体的内摩擦,只在流体各部分有相对运动时才表现出来,表现为这些部分间的摩擦力,称为黏力.描述黏性即描述黏力.连续介质内各部分间的力是通过这些部分间的表面彼此作用的.由对弹性体应力的描述经验知,这种力应由一力张量描写.即黏力应由一黏力张量(Π_{ij})描写.通过 j 方向面积元 $\mathrm{d}\sigma_j$ 作用的黏力 i 分量为 $\Pi_{ij}\mathrm{d}\sigma_j$.另一方面,相对运动由速度梯度描写.速度 $\boldsymbol{v}$ 为矢量,梯度算符 ∇ 也是矢量.这使速度梯度 $\nabla\boldsymbol{v}$ 为并矢,即是一二阶张量,它的第 ij 分量为 $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$.三个互相垂直方向上笛卡儿坐标间隔分别为 δx_1、δx_2 和 δx_3 的两流点间距离平方为 $(\delta l)^2=\sum\limits_{i=1}^{3}(\delta x_i)^2$.它对时间的全微商为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}(\delta l)^2}{\mathrm{D}t}&=2\sum_{i=1}^{3}\delta x_i\frac{\mathrm{D}\delta x_i}{\mathrm{D}t}=2\sum_{i=1}^{3}\delta x_i\delta\left(\frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t}\right)\\&=2\sum_{i=1}^{3}\delta x_i\delta v_i=2\sum_{i,j=1}^{3}\delta x_i\delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\delta x_i\delta x_j\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right).\end{aligned}\tag{8.89}$$

流点间距离的变化是其中相对运动的表现.此式表明,速度梯度张量的对称部分

$$v_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\tag{8.90}$$

描写了流体中的相对运动.与此对照,速度梯度张量 $\nabla\boldsymbol{v}$ 的反对称部分

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3},\quad\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1},\quad\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

恰为速度旋度,即涡度的三个分量.它们描写的是流体的旋涡运动,即转动.按(8.89),张量(v_{ij})又称应变率张量.黏力张量应是应变率张量的函数.在没有相对运动的条件下无黏力作用.这要求应变率张量为零的条件下黏力张量为零.将黏力张量展成应变率张量的幂级数,零次幂项应为零.若速度梯度为小

量,可只取到一次幂项.在此近似下,黏力张量

$$\Pi_{ij} = \sum_{i',j'=1}^{3} \lambda'_{iji'j'} v_{i'j'}, \tag{8.91}$$

为应变率张量的线性函数.比例常数 $\lambda'_{iji'j'}$, $i,j,i',j' = 1,2,3$,组成一四阶张量,称为黏度张量.它有对称性

$$\lambda'_{iji'j'} = \lambda'_{jii'j'} = \lambda'_{ijj'i'} = \lambda'_{i'j'ij}. \tag{8.92}$$

由二阶张量(v_{ij})可组成线性不变量 $\sum_{i=1}^{3} v_{ii}$,它在从一个正交坐标系到另一个正交坐标系的正交变换中不变.另一方面,幺张量(δ_{ij})在正交变换中也不变.这使含速度梯度一次幂的二阶张量 $\left(\sum_{i'=1}^{3} v_{i'i'}\delta_{ij}\right)$ 在正交变换中不变.应变率张量可作分解

$$(v_{ij}) = \left(v_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{i'=1}^{3} v_{i'i'}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{i'=1}^{3} v_{i'i'}\delta_{ij}\right). \tag{8.93}$$

右边第一项张量阵迹为零,第二项张量为一不变量与幺张量的积.这都是正交变换下的不变性质.阵迹为零的张量经正交变换得到的仍是阵迹为零的张量,不变量与幺张量的积变换后得到的是同一不变量与幺张量的积.张量的这种在正交变换下不变的分解称为约化.约化中的分解自然是指到不同性质的张量的分解.(8.93)右边的两个张量性质就不相同,一个阵迹为零,另一个阵迹非零却是幺张量的不变倍数.不可约化的张量称不可约张量.(8.93)右边两项都不能再约化,都是不可约张量.每个二阶张量都可先分解为对称和反对称两部分,其中的对称张量可模仿(8.93)再分解为阵迹为零和幺张量的不变倍数两部分.模仿(7.235)及其后关于应力张量对称性的证明,可由内力矩总和为零证得黏力张量也是对称张量.(8.92)的第一等号就由此得来.黏力张量也可约化为

$$(\Pi_{ij}) = \left(\Pi_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{i'=1}^{3} \Pi_{i'i'}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{i'=1}^{3} \Pi_{i'i'}\delta_{ij}\right). \tag{8.94}$$

设流体是各向同性的.线性关系(8.91)应与坐标系方向的选取无关.不同取向的坐标系之间由正交变换联系.线性关系(8.91)应在正交变换下不变.由于各不可约张量性质不同,线性关系只能存在于同一种不可约张量之间;而且这种关系应是正比关系,以保证在正交变换下不变.于是,(8.91)简化为

$$(\Pi_{ij}) = 2\eta\left(v_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{i'=1}^{3} v_{i'i'}\delta_{ij}\right) + \zeta\sum_{i'=1}^{3} v_{i'i'}\delta_{ij}, \tag{8.95}$$

比例常数 η 和 ζ 称为黏度.体积 $\mathcal{V}$ 内流体各部分之间互相作用的黏力总和由于牛顿第三定律而为零.净剩的黏力只能来自它的表面 s.此力的 i 分量为

$$F'_i = \int_s \sum_{j=1}^{3} \Pi_{ij} \mathrm{d}\sigma_j = \int_{\mathscr{V}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}\mathscr{V} \equiv \int_{\mathscr{V}} f'_i \mathrm{d}\mathscr{V}, \tag{8.96}$$

其中

$$f'_i \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.97}$$

为黏力密度 $\boldsymbol{f}'$ 的 i 分量. 将(8.95)代入此式右边, 由(8.90)得

$$\begin{aligned} f'_i &= \sum_{j=1}^{3} \left[\eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] \\ &= \eta \nabla^2 v_i + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{8.98}$$

将三个分量合起来得矢量表达式

$$\boldsymbol{f}' = \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}). \tag{8.99}$$

将此项黏力密度补充到欧拉方程(8.15)右边, 得黏性流体的运动方程

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right] = - \nabla \mathscr{P} + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}^{(e)}. \tag{8.100}$$

对不可压缩流体 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, 此式简化为

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right] = - \nabla \mathscr{P} + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}^{(e)}, \tag{8.101}$$

称为纳维(Navier)-斯托克斯方程, 其中已只剩一个黏度 η. 若外力密度 $\boldsymbol{f}^{(e)} = 0$, 此式还可简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla \mathscr{P} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v}, \tag{8.102}$$

其中

$$\nu \equiv \frac{\eta}{\rho} \tag{8.103}$$

称为运动黏度, 以区别于动力黏度 η. 运动方程(8.100), 连续性方程(8.2)和物态方程(8.6)一起组成未知函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$, $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r}, t)$ 的完备方程组. 对不可压缩的黏性流体, 则由纳维-斯托克斯方程(8.101)或(8.102)与连续性方程(8.31)组成未知函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ 和 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r}, t)$ 的完备方程组. 密度 ρ 在此情形中为给定常数.

量纲分析是一种重要的定性方法, 在流体力学中广泛应用. 现以无外力条件下纳维-斯托克斯方程(8.102)的求解为例简略介绍此方法. 黏力张量具有压力的量纲, 即

$$\text{质量} \cdot \text{长度} \cdot \text{时间}^{-2} / \text{长度}^2 = \text{质量} \cdot \text{长度}^{-1} \cdot \text{时间}^{-2}$$

的量纲.速度梯度量纲则为时间$^{-1}$.由(8.95)知,黏度 η 的量纲为质量·长度$^{-1}$·时间$^{-1}$.又由于密度 ρ 的量纲为质量·长度$^{-3}$,按(8.103)运动黏度 ν 的量纲为

$$\text{长度}^2 \cdot \text{时间}^{-1} = \text{长度} \cdot \text{速度}.$$

如果在流体运动中有一特征速度 v_0 和一特征长度 l_0,则可组成无量纲数

$$R_n = v_0 l_0 / \nu, \tag{8.104}$$

称为雷诺(Reynolds)数.它是这一流动过程的特征数.v_0 和 l_0 的选取不是惟一的.通常取 v_0 为流体自无穷远处流来时的速度,称为来流速度.l_0 则可取为在流体中运动的某物体的尺度,若该物为一球可取它的半径.由 v_0 可定义无量纲速度 $\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{v}/v_0$,由 l_0 可定义无量纲径矢 $\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{r}/l_0$.由前面的分析还得到 $\mathscr{P}/\rho$ 的量纲为速度^2,因而可定义相应的无量纲量 $\psi \equiv \mathscr{P}/(\rho v_0^2)$.无量纲时间可定义为 $\tau \equiv v_0 t/l_0$.纳维-斯托克斯方程(8.102)由这些无量纲量表出,即为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla_\xi)\boldsymbol{\Phi} = -\nabla_\xi \psi + \frac{1}{R_n}\nabla_\xi^2 \boldsymbol{\Phi}, \tag{8.105}$$

其中 ∇_ξ 为对无量纲径矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的梯度.连续性方程(8.31)也可表示为

$$\nabla_\xi \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0, \tag{8.106}$$

它与(8.105)一起组成未知函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 ψ 的完备方程组.将边界条件和初始条件也用无量纲时空坐标 τ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 表示出.称这种无量纲边界条件和初始条件相同的情形为彼此几何相似的情形.完备方程组(8.105)和(8.106)对所有彼此几何相似的情形可一次解出.它们的解 $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau; R_n)$ 和 $\psi(\boldsymbol{\xi}, \tau; R_n)$ 只和一个参数 R_n 有关.彼此几何相似,雷诺数又相同的所有情形有相同的无量纲解.它们各自的特点只表现在一个标度变换

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = v_0 \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l_0}, \frac{v_0 t}{l_0}; R_n\right), \quad \mathscr{P}(\boldsymbol{r}, t) = v_0^2 \rho \psi\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l_0}, \frac{v_0 t}{l_0}; R_n\right) \tag{8.107}$$

之中.这种规律称为相似律,是研究流体力学的有力工具.

§8.6 管流 泊肃叶定理

考虑黏性流体在管中的流动.设管是直的,长可视为无穷,横截面一定.取管的中心轴为 z 轴,任取一横截面为 xy 平面,它与 z 轴的交点 O 取为原点,过原点在 xy 平面上取互相垂直的两轴为 x 轴和 y 轴,组成右手笛卡儿坐标系 $Oxyz$.考虑定常流动,即速度场和压力场均不随时间变化的情况.由于沿 z 方向的平移对称,流体恒沿 z 方向流动,速度场 $\boldsymbol{v} = v(x, y)\boldsymbol{z}_0$ 只是 x 和 y 的函数.它自动满足常数密度条件下的连续性方程(8.31).流体运动方程

(8.100)也自动成为(8.101).在外力密度为零的条件下就是纳维-斯托克斯方程(8.102),其中 ρ 为常数.对定常流动,此方程中对时间的微商项为零.余下的部分,x 分量和 y 分量给出 $\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}=\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y}=0$, z 分量给出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{\eta}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial z}. \tag{8.108}$$

由此可知,压力 $\mathscr{P}$ 与 x 和 y 无关,在横截面上为常数.方程(8.108)左边与 z 无关,因此两边都只能是常数.将常数 $\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial z}$ 记为 $-\delta$, δ 是单位管长的压力降.压力 $\mathscr{P}=\mathscr{P}_0-\delta z$, $\mathscr{P}_0$ 为原点处的压力.代入(8.108)右边得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\delta}{\eta}. \tag{8.109}$$

设管壁对流体是完全粗糙的,流体相对管壁不可能有任何滑动,因而受到在管壁上速度为零的约束.在此约束规定的边界条件下解(8.109)可得流速在管的横截面上的分布.

进一步求解要针对不同的横截面来做.设横截面为圆形,原点取在圆心上.采用以原点为极的平面极坐标 r, θ.由于绕中心轴的转动对称,速度场 $v=v(r)$ 与 θ 无关.代入(8.109)左边,利用关系 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 算出对 x 和 y 的二次微商,得

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\delta}{\eta}. \tag{8.110}$$

经两次积分得

$$v(r)=-\frac{\delta r^2}{4\eta}+a\ln r+b, \tag{8.111}$$

a 和 b 为积分常数.右边第二项的对数函数在 $r=0$ 处为 $-\infty$,实际流速自然是有限的,因此应取 $a=0$ 以消去此非物理项.以 R 表圆管半径,边界条件 $v(R)=0$ 要求取积分常数 $b=\frac{\delta R^2}{4\eta}$.于是得

$$v(r)=\frac{\delta}{4\eta}(R^2-r^2), \tag{8.112}$$

速度的径向分布为一顶在中心的抛物线.由此可得单位时间内通过横截面的流体质量

$$M=\int_0^R \rho v 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi\delta}{8\nu}R^4. \tag{8.113}$$

此式称为泊肃叶(J.L.M. Poiseuille)公式.整个推导中已设密度 ρ 为常数,而压力则沿管的纵向线性变化.这只在流体不可压缩的条件下成立.因此,结果的完整叙述是

泊肃叶定理 在一定压力降条件下，不可压缩黏性流体单位时间内通过圆管横截面的流量与管径的四次幂成正比.

此定理已被实验证实.它赖以导出的运动方程和边界条件也就被证实.在给定压力降条件下实测(8.113)右边的比例常数便可算出流体的黏滞系数 ν.这是实测黏度的一种方法.

§8.7 流体中物体的运动和受力 球受阻力的斯托克斯公式 翼受举力的茹可夫斯基定理

流体和其中的固态物体可相对运动.设一物体在原先静止的流体中运动.它会带动周围的流体，流体运动还会逐渐向远处扩展.但在有限时间内无穷远处的流体还是静止的.无穷远处流体静止的坐标系称为流体坐标系.在流体坐标系看，物体及其周围的流体在动.设稳定下来后，均匀各向同性流体中的物体作等速直线运动.固定在这种物体上的坐标系称本体坐标系.在本体坐标系看，物体及附着于其周围的流体是静止的，无穷远处的流体则等速直线运动.由于相对只作等速直线运动，流体坐标系和本体坐标系可以同为惯性系.可视方便取其中任一个作为描述运动的坐标系，二者间只差一伽利略变换.

先考虑在不可压缩黏性流体中匀速直线运动的小球受到的阻力.取本体坐标系，小球固定，流体绕小球而过，无穷远处流速为 $\boldsymbol{v}_0$.由于力在伽利略变换下不变，在这种情况下算出的流体对小球的作用力就是小球在流体坐标系中以 $-\boldsymbol{v}_0$ 速度运动时受到的力.在达到稳定流动的条件下速度场不随时间变化，纳维-斯托克斯方程(8.102)成为

$$\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla\mathscr{P}+\eta\nabla^2\boldsymbol{v}.$$

在速度为小量的条件下，略去它的二次幂，此式成为

$$\eta\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla\mathscr{P}. \tag{8.114}$$

此式与连续性方程(8.31)一起组成未知函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$，和 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 的完备方程组.在此式两边取旋度，右边为零，因此

$$\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{v})=0. \tag{8.115}$$

作分解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$，由于无穷远处 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$，$\lim\limits_{r\to\infty}\boldsymbol{v}'=0$.又由(8.31)得 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$.因此可寻求形如

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}_0 \tag{8.116}$$

的解.径矢量 $\boldsymbol{r}$ 反向的变换 $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ 称反演变换.在反演变换下速度矢量也反向，即按 $\boldsymbol{v}\to-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_0\to-\boldsymbol{v}_0$ 变换.反演变换下反向的矢量称为极矢量.梯度算符 ∇ 在反演变换下也反号，因此也是一极矢量.然而要(8.116)在反演变换下也成立，$\boldsymbol{A}$ 在反演中不能变号.反演中不变的矢量称为轴矢量.(8.116)右

边的 $\boldsymbol{A}$ 即为轴矢量.解(8.116)自然应从问题提供的矢量组成.问题本身只提供两个基本矢量,一是径矢 $\boldsymbol{r}$,另一是无穷远处的速度 $\boldsymbol{v}_0$,它们都是极矢量.这两个极矢量只能构成一个独立的轴矢量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_0$,其余轴矢量必与它成比例,比例系数应在反演变换下不变.故轴矢 $\boldsymbol{A}$ 应具 $f'(r)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_0$ 的形式,其中 $f'(r)$ 为 r 的函数,$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为径向单位矢量.于是有

$$\boldsymbol{A}=(\nabla f)\times\boldsymbol{v}_0=\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0),$$

$f(r)$ 为 $f'(r)$ 对 r 的不定积分.由此得

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times[\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0)]+\boldsymbol{v}_0, \tag{8.117}$$

为求速度场只须求出未知函数 $f(r)$.此式的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times\{\nabla\times[\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0)]\}=-\nabla^2[\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0)].$$

代入(8.115)得

$$\nabla^4(\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0)]=0,$$

其中 $\nabla^4\equiv\nabla^2\nabla^2$.由于 $\boldsymbol{v}_0$ 为常矢量,$\nabla\times(f\boldsymbol{v}_0)=(\nabla f)\times\boldsymbol{v}_0$,此式又可写为

$$\nabla^4[(\nabla f)\times\boldsymbol{v}_0]=[\nabla^4(\nabla f)]\times\boldsymbol{v}_0=[\nabla(\nabla^4 f)]\times\boldsymbol{v}_0=0.$$

$\nabla(\nabla^4 f)$ 为径向矢量,一般不与 $\boldsymbol{v}_0$ 平行或反平行,要此式成立必须且只须

$$\nabla(\nabla^4 f)=0,$$

即 $\nabla^4 f$ 为常数.另一方面,

$$\boldsymbol{v}'=\nabla\times[(\nabla f)\times\boldsymbol{v}_0]=(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\nabla f-\boldsymbol{v}_0\nabla^2 f$$

在无穷远处为零.此式右边两项矢量方向一般不同,且随方位角的变化方式各异,彼此线性独立,无穷远处只能分别趋于零.可见,无穷远处 $\nabla^2 f$ 为零,$\nabla^4 f$ 因此也为零.$\nabla^4 f$ 既是常数便处处为零,即

$$\nabla^4 f=0. \tag{8.118}$$

对径向函数可用 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 作出对 x、y 和 z 的各次微商,得

$$\nabla^4 f=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\nabla^2 f}{\mathrm{d}r}\right)=0. \tag{8.119}$$

积分得

$$\nabla^2 f=\frac{2a}{r}+a',$$

a 和 a' 为积分常数.由于无穷远处 $\nabla^2 f$ 为零,$a'=0$,

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{2a}{r}. \tag{8.120}$$

再积分得

$$f(r)=ar+\frac{b}{r}, \tag{8.121}$$

b 为积分常数.另有一相加积分常数已命为零.这是因为在有物理意义的表达式中 f 恒在微分号下,相加常数的值无意义.将(8.121)代入(8.117)右边得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0 - a\frac{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0)}{r} + b\frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0) - \boldsymbol{v}_0}{r^3}. \quad (8.122)$$

用 R 表球的半径.要求球表面流速为零得

$$\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right)\boldsymbol{v}_0 - \left(\frac{a}{R} - \frac{3b}{R^3}\right)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n} = 0.$$

$\boldsymbol{v}_0$ 和 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{n}$ 是两个线性无关的矢量函数,要此式成立必须也只须它们前面的系数分别为零.由此解得

$$a = \frac{3}{4}R, \quad b = \frac{1}{4}R^3. \quad (8.123)$$

代回(8.121)和(8.122)分别得

$$f(r) = \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{4}\frac{R^3}{r}, \quad (8.124)$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0 - \frac{3}{4}R\frac{\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0)}{r} - \frac{1}{4}R^3\frac{\boldsymbol{v}_0 - 3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0)}{r^3}. \quad (8.125)$$

将(8.117)代入(8.114)左边得

$$\nabla\mathscr{P} = \eta\nabla^2\{\nabla\times[(\nabla f)\times\boldsymbol{v}_0]\} = \eta\nabla^2[(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\nabla f - \boldsymbol{v}_0\nabla^2 f].$$

由于(8.118),此式右边方括号内第二项的贡献为零;第一项的项献在交换微分顺序后给出

$$\nabla\mathscr{P} = \nabla\{\eta\nabla^2[(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)f]\}. \quad (8.126)$$

积分得

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\boldsymbol{r}) &= \eta\nabla^2[(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)f] + \mathscr{P}_0\\ &= \mathscr{P}_0 - \frac{2\eta a}{r^2}\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{n} = \mathscr{P}_0 - \frac{3\eta R}{2r^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0, \end{aligned} \quad (8.127)$$

第二等号处在交换微分顺序后用了(8.120),第三等号处用了(8.123).可以看出,积分常数 $\mathscr{P}_0$ 的物理意义为无穷远处的压力.由速度场(8.125)和压力场(8.127)可计算任何流体力学量.

任取三个互相垂直的方向 1、2 和 3,用在这三个方向上的投影表示矢量.径矢 $\boldsymbol{r}$ 的三个分量即坐标 x_1、x_2 和 x_3.速度场(8.122)的分量表示为

$$v_i = v_{0i} - a\frac{v_{0i}r^2 + x_i\sum_{i'=1}^{3}x_{i'}v_{0i'}}{r^3} + b\frac{3x_i\sum_{i'=1}^{3}x_{i'}v_{0i'} - r^2v_{0i}}{r^5}, \quad i = 1,2,3.$$

由此,按(8.90)得应变率张量诸分量

$$v_{ij} = \frac{a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0}{r^2}(3n_in_j - \delta_{ij}) + \frac{3b}{r^4}[v_{0i}n_j + n_iv_{0j} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0(5n_in_j - \delta_{ij})]. \tag{8.128}$$

采用球坐标 r、θ、φ，取所在点的三个球坐标轴.令方向 1 沿径向 $\boldsymbol{n}$.以 $\boldsymbol{v}_0$ 为极轴，θ 轴在 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{n}$ 组成的平面内，垂直于 $\boldsymbol{n}$，指向 θ 增加的方向，这就是方向 2.φ 轴垂直于 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{n}$ 组成的平面，指向 φ 增加的方向，这就是方向 3.于是有 $n_1=1$，$n_2=n_3=0$，$v_{01}=v_0\cos\theta$，$v_{02}=-v_0\sin\theta$，$v_{03}=0$，其中 θ 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 的夹角.代入(8.128)，并用下标 r、θ 和 φ 代替下标 1、2 和 3，得球坐标系中应变率张量诸分量

$$\left.\begin{aligned} v_{rr} &= \frac{3R}{2r^2}v_0\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right),\\ v_{\theta\theta} &= v_{\varphi\varphi} = -\frac{3R}{4r^2}v_0\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right),\\ v_{r\theta} &= v_{\theta r} = -\frac{3R^3}{4r^4}v_0\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{8.129}$$

其余分量为零.对不可压缩流体

$$\sum_{i=1}^{3} v_{ii} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,$$

(8.129)可直接验证此式.在此条件下(8.95)成为

$$\Pi_{ij} = 2\eta v_{ij}. \tag{8.130}$$

将(8.129)代入右边，得黏力张量诸分量

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{rr} &= \frac{3\eta R}{r^2}v_0\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right),\\ \Pi_{\theta\theta} &= \Pi_{\varphi\varphi} = -\frac{3\eta R}{2r^2}v_0\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right),\\ \Pi_{r\theta} &= \Pi_{\theta r} = -\frac{3\eta R^3}{2r^4}v_0\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{8.131}$$

其余分量为零.

作用在球上的力包括两部分，一部分来自压力 $\mathscr{P}$，另一部分来自黏力(Π_{ij})，它们都作用在球表面的每一面元上，总力即这些面元上力的积分.由于此过程只有一个特殊方向，即无穷远处流速 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向，必有绕过球心沿此方向的轴的对称性.将每一面元上的力分解为沿 $\boldsymbol{v}_0$ 和垂直 $\boldsymbol{v}_0$ 的两部分，垂直 $\boldsymbol{v}_0$ 的部分绕轴的积分由于此对称性而为零，只剩下沿 $\boldsymbol{v}_0$ 分量的积分，总力即沿 $\boldsymbol{v}_0$ 方向.球面面元沿径向，黏力张量诸分量中只有 Π_{rr}、$\Pi_{\theta r}$ 和 $\Pi_{\varphi r}$ 有贡献.然而 $\Pi_{\varphi r}=0$，球面上 Π_{rr} 也是零，$\boldsymbol{v}_0$ 方向球受力的代数值遂为

$$F = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}(-\mathscr{P}(R)\cos\theta - \Pi_{\theta r}(R,\theta)\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\eta v_0 R\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = 6\pi\eta v_0 R, \tag{8.132}$$

第二等号处用了表达式(8.127)和(8.131).此值为正,表明在本体坐标系看球受流体沿$\boldsymbol{v}_0$方向的拽力,在流体坐标系看,运动的球受流体迎面的阻力.力的大小正比于球的半径R、运动速度v_0和黏度η.(8.132)称为斯托克斯公式.

此式的推导依赖于略去速度的二次项$(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$,因此只适用于低速运动的情形.可将此条件再具体化一些.将此项与纳维-斯托克斯方程的另一项$\nu\nabla^2\boldsymbol{v}$比较.略去速度二次项的条件为

$$|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}| \ll |\nu\nabla^2\boldsymbol{v}|.$$

依量纲考虑,左边可估计为v_0^2/R,右边可估计为$\nu v_0/R^2$.上式成立的条件为

$$\frac{v_0 R}{\nu} \ll 1. \tag{8.133}$$

若将v_0作为此过程的特征速度,R为特征长度,此式左边即这一过程的雷诺数.斯托克斯公式(8.132)成立的条件遂为雷诺数远小于1.只当雷诺数很小时才能用斯托克斯公式.雷诺数综合了速度、长度和黏性诸因素,小雷诺数条件比小速度条件更便于全面审核斯托克斯公式的适用性.

以流体与物体相对运动的方向为参考,与此方向平行或反平行的力称拽力或阻力,与此方向垂直的力称举力.空气对翼的举力是熟知的,流体力学对此有详细结果.如图8-1,机翼上下两侧形状不同.水平气流从翼的前方到它的后方,在上下两侧走的路程不同,速度也不相同.一般说来,在定常流动的条件下,路程长的一侧气流速度快,路程短的一侧气流速度慢.对不可压缩有势理想流体,可由伯努利积分(8.26)判断,气流快的一侧压力小,气流慢的一侧压力大.两侧压力不同导致净举力.对图8-1中的翼,上侧压力小,下侧压力大,水平气流导致向上的举力.另一方面,两侧气流速度不同表示绕翼的气流速度环量非零.对翼的举力与绕翼的速度环量应有关系.这些概念已为流体力学的详细理论和实验证实,成为现代航空工程的基础.在丰硕的理论成果中,这里略为介绍举力与速度环量的关系.也借此机会略为介绍流体力学中强有力的复变函数方法.

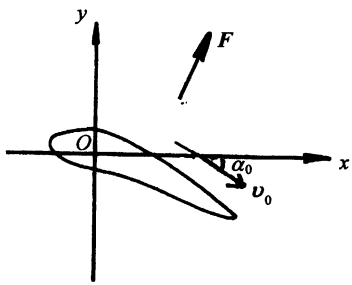

图8-1 流体对翼的举力

为得解析结果要建立关于实际情况的数学模型,其中包括若干简化假定.一是设流体为理想无旋不可压缩的,从而可

用无旋流体的伯努利积分.另一设在翼的三维尺度中翼展比翼宽和翼厚大得多,可视为无穷长,且有沿翼展的平移对称和翼展方向的反演对称.这使所有极矢量在翼展方向的分量为零,流体场可由垂直翼展的平面内的场代表,成为平面场.整个空间中的流体场为这种平面场沿翼展方向的重复.图 8-1 即是一个垂直于翼展方向的平面.在翼的横截面内取原点 O,建立此平面的笛卡儿坐标系 Oxy.速度场

$$\boldsymbol{v}(x,y) = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j},$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x、y 方向的单位矢量,可由速度势 $\phi(x,y)$给出

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{8.134}$$

连续性方程(8.31)现在是

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

它表明存在一函数 $\psi(x,y)$,使

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8.135}$$

沿流线取微分 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$.流线切向即 $\boldsymbol{v}$ 的方向,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{v_y}{v_x}$,因此

$$v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x = 0.$$

将上式代入得沿流线

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0,$$

表明在一条流线上 ψ 为常数,$\psi(x,y)$因而称为流函数.比较(8.134)和(8.135)知它与势函数 $\phi(x,y)$有微分关系

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8.136}$$

取复坐标 $z = x + \mathrm{i}y$,定义它的复函数 $W(z) \equiv \phi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y)$.(8.136)恰为复变函数 $W(z)$为解析函数的柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件.此式成立表明 $W(z)$为 z 的解析函数.称 $W(z)$为复势,

$$W'(z) \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - \mathrm{i}v_y \tag{8.137}$$

为复速度.它的绝对值 $|W'| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$ 就是速度的绝对值,从而可写为

$$W' = v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}, \tag{8.138}$$

$\alpha = \arctan\dfrac{v_y}{v_x}$为速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角.xy 平面现在就是复 z 平面.在其中取一闭合回路,作复变函数 $W'(z)$在此回路上的积分

$$\oint W'\mathrm{d}z = \oint (v_x - \mathrm{i}v_y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$= \oint (v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint (v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x). \qquad (8.139)$$

右边所得实部正是沿此回路的速度环量 Γ. 以回路包围的平面为横截面作一柱,单位时间内流出单位长度柱面的流体质量为(8.139)右边虚部与流体密度 ρ 的积. 不可压缩流体在无源且不被吸收的条件下流出或流入任一封闭面的质量为零,回路积分(8.139)应取实值.

$W(z)$ 在流体所占的区域中为 z 的解析函数,它的微商 $W'(z)$ 在同一区域解析. 在图 8-1 中,这就是在翼的横截面以外的区域. 翼的横截面内 $W(z)$ 和 $W'(z)$ 无定义,自然谈不上解析. 在此情况下,可将它们展成罗朗(Laurent)级数. 将复速度的罗朗级数写为

$$W'(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{a_l}{z^l},$$

l 取正、负整数和零. 设无穷远处速度为常矢量 $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}$, 因而 $\lim\limits_{|z|\to\infty} W'(z) = v_0 e^{-i\alpha_0}$, 其中 $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$, $\alpha_0 = \arctan\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$, 这使 l 为负整数的系数 $a_l = 0$,

$$W'(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{z^l}, \quad a_0 = v_0 e^{-i\alpha_0}. \qquad (8.140)$$

此函数有一奇点 $z=0$, 留数为 a_1. 这使绕翼的横截面的任何封闭回路上

$$\oint W'\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_1.$$

与(8.139)比较得

$$a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}, \qquad (8.141)$$

Γ 为沿该封闭回路的速度环量.

用 $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$ 表示流体作用在沿翼展方向单位长度翼上的合力,则

$$F_x - \mathrm{i}F_y = -\oint_L (\mathscr{P}\mathrm{d}y + \mathrm{i}\mathscr{P}\mathrm{d}x) = -\mathrm{i}\oint_L \mathscr{P}(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

L 为翼的横截面周线. 用伯努利积分(8.26)和复速度表达式(8.138)得

$$F_x - \mathrm{i}F_y = -\mathrm{i}\oint_L \left(C' - \frac{1}{2}\rho W'W'^*\right)\mathrm{d}z^*.$$

对无旋流体, C' 在整个流体中为常数. 常数在任何闭合回路上的积分皆为零,

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \frac{\mathrm{i}}{2}\rho\oint_L W'W'^*\mathrm{d}z^*.$$

流体在静止物体表面的边界条件为垂直于表面的速度分量为零,此处即为垂

直于翼的横截面周线的速度分量为零.周线上的流体只能沿周线流动,周线 L 遂为一条流线.其上 $\mathrm{d}\psi=0$,因此

$$W'^{*}\mathrm{d}z^{*}=(W'\mathrm{d}z)^{*}=(\mathrm{d}W)^{*}=\mathrm{d}\phi-\mathrm{i}\mathrm{d}\psi=\mathrm{d}\phi$$
$$=\mathrm{d}\phi+\mathrm{i}\mathrm{d}\psi=\mathrm{d}W=W'\mathrm{d}z.$$

代入上式得

$$F_x-\mathrm{i}F_y=\frac{\mathrm{i}}{2}\rho\oint_L W'^{2}\mathrm{d}z. \tag{8.142}$$

W'^{2} 在翼的横截面周线以外也是解析的,也可表为罗朗级数.由(8.140)和(8.141)知此级数为

$$W'^{2}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{z^l},$$

其中 $b_0=a_0^2=v_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha_0}$, $b_1=2a_0a_1=\dfrac{\Gamma v_0}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}$.用留数定理算出(8.142)中的积分,得

$$\begin{aligned}F_x-\mathrm{i}F_y&=\mathrm{i}\rho\Gamma v_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0}=\rho\Gamma v_0(\sin\alpha_0+\mathrm{i}\cos\alpha_0),\\ F_x&=\rho\Gamma v_0\sin\alpha_0,\quad F_y=-\rho\Gamma v_0\cos\alpha_0,\\ \boldsymbol{F}&=\rho\Gamma v_0(\sin\alpha_0\boldsymbol{i}-\cos\alpha_0\boldsymbol{j})=\rho\Gamma(v_0\cos\alpha_0\boldsymbol{i}+v_0\sin\alpha_0\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}\\ &=\rho\boldsymbol{v}_0\times(\Gamma\boldsymbol{k}),\end{aligned} \tag{8.143}$$

$\boldsymbol{k}$ 为按右手规则垂直于 xy 平面的单位矢量.流体对翼的作用力垂直于翼展和无穷远处的气流,确实是举力.举力的大小正比于绕翼速度环量 Γ 的绝对值.这个关系称为库塔(Kutta)-茹可夫斯基(Н.Е.Жуковский)定理,简称茹可夫斯基定理.

§8.8 流体中的声波 亚音速与超音速运动 冲击波

考虑一处于稳定平衡状态的静止流体.记其密度为 ρ_0,压力为 $\mathscr{P}_0$.设有一扰动使某处密度增加,超过 ρ_0,稳定平衡要求该处流体压力也增加,超过 $\mathscr{P}_0$,以便向外膨胀,减低密度.反之,若某处密度减小,低于 ρ_0,稳定平衡要求该处流体压力也减小,以使向内压缩成为可能,密度得以增高.可见 ρ_0 处 $\dfrac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}>0$,使

$$c\equiv\sqrt{\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}} \tag{8.144}$$

为实数.其中 $\dfrac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}$ 恒在 ρ_0 处取值,c 便是流体的一个常数.扰动使流体不再静止,出现一速度场 $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$.密度和压力也偏离它们的平衡值,成为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0+\rho'(\boldsymbol{r},t),\quad \mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{P}_0+\mathscr{P}'(\boldsymbol{r},t) \tag{8.145}$$

$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$、$\rho'(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{P}'(\boldsymbol{r},t)$均为小量,可用来表示受扰动流体的运动.连续性方程(8.2)、欧拉方程(8.5)和物态方程(8.6)用它们表出,精确到一级小分别为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0, \tag{8.146}$$

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}=-\nabla\mathscr{P}', \tag{8.147}$$

$$\mathscr{P}'=\left.\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\rho}\right|_{\rho_0}\rho'=c^2\rho'. \tag{8.148}$$

将(8.147)两边对时间微商,按(8.148)用ρ'代换$\mathscr{P}'$,再用(8.146)消去$\frac{\partial\rho'}{\partial t}$,得到速度场的微分方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}'}{\partial t^2}=c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}').$$

设速度场$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$无旋,利用恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}')=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}')-\nabla^2\boldsymbol{v}'$$

得$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}')=\nabla^2\boldsymbol{v}'$.代入上式,整理后得

$$\nabla^2\boldsymbol{v}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{v}'}{\partial t^2}=0. \tag{8.149}$$

这是流体速度场的波动方程,可看作纵位移场波动方程(7.371)对时间微商的结果.波速c的表达式(8.144)也与纵弹性波速度表达式(7.349)一样.将(8.146)对时间求微商,按(8.147)用$\nabla\mathscr{P}'$消去$\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}$,再按(8.148)用$\rho'$消去$\mathscr{P}'$,整理得

$$\nabla^2\rho'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}=0. \tag{8.150}$$

密度扰动ρ'也满足波速为c的波动过程.此式其实就是纵波方程(7.350),即声波方程.可见流体中扰动以声波形式传播.

一般地用$\Psi(\boldsymbol{r},t)$表示速度场$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r},t)$的任一分量或密度场$\rho'(\boldsymbol{r},t)$,波动方程(8.149)或(8.150)都可表示为

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0. \tag{8.151}$$

它的复形式平面波解可表示为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{8.152}$$

也可表示为此式的共轭复数.取实值的力学量可用它的实部或虚部表示出.圆频率ω与波矢量$\boldsymbol{k}$的关系为

$$\omega = ck. \tag{8.153}$$

按§7.9,可在一波矢量 $\boldsymbol{k}$ 附近把不同平面波叠加起来成一个波包,它只在空间一点附近强度显著不是零;这种波包的位置会移动,移动速度即群速度(7.413).

现在设扰动不是发生在静止流体中,而是发生在以常速度 $\boldsymbol{v}_0$ 匀速直线运动的平衡流体中.不过在同样以常速度 $\boldsymbol{v}_0$ 匀速直线运动的坐标系看,流体还是静止的,上述结果成立.在空间固定坐标系中看到的现象和这种流体坐标系中看到的现象由伽利略变换联系.用 $\boldsymbol{r}$ 和 t 表示一个事件在空间固定坐标系中的坐标和时间,$\boldsymbol{r}'$和 t'表示同一事件在流体静止的流体坐标系中的坐标和时间,后者以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 相对前者运动,它们之间的伽利略变换为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}_0 t', \quad t = t'. \tag{8.154}$$

用∇和∇'分别表示空间固定坐标系和流体坐标系中的梯度算符,由复合函数微分法和(8.154)知

$$\nabla' = \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla. \tag{8.155}$$

为表示波动方程(8.151)现在成立于流体坐标系,将其中的∇和$\frac{\partial}{\partial t}$分别改写为$\nabla'$和$\frac{\partial}{\partial t'}$.再经(8.155)可将它变成空间固定坐标系中的方程

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla\right)^2 \Psi = 0, \tag{8.156}$$

其中算符

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla\right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\,\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)^2$$

$$\equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\,\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla). \tag{8.157}$$

(8.156)为运动流体中声的波动方程,在 $\boldsymbol{v}_0 \to 0$ 条件下还原成静止流体中声的波动方程(8.151).类似地,将平面波(8.152)及其色散关系(8.153)中的 $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{r}$、ω 和 t 分别改写为$\boldsymbol{k}'$、$\boldsymbol{r}'$、ω'和 t',以表示它们属于流体坐标系.然后按伽利略变换(8.154)用 $\boldsymbol{r}$ 和 t 表达其中的$\boldsymbol{r}'$和 t'.如果 Ψ 本身的取值不因这一伽利略变换而变,得到的是空间固定坐标系的平面波(8.152),只是其中的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和圆频率ω 与流体坐标系中的波矢量$\boldsymbol{k}'$和圆频率ω'之间有关系

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}', \qquad \omega = \omega' + \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{v}_0. \tag{8.158}$$

此式可视为波矢量与圆频率的伽利略变换.由于 $\omega' = k'c$,由此式可得运动流体中声波的色散关系

$$\omega = kc + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_0. \tag{8.159}$$

可直接验证,具有此色散关系的平面波(8.152)满足运动流体中的波动方程(8.156).按(7.413),这个色散关系给出运动流体中声波的群速度

$$\boldsymbol{v}_g = c\frac{\boldsymbol{k}}{k} + \boldsymbol{v}_0, \tag{8.160}$$

它由静止流体中的声速 $c\frac{\boldsymbol{k}}{k}$ 与流体本身的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 合成.用 θ 表示波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与流速 $\boldsymbol{v}_0$ 的夹角,(8.159)可表示为

$$\omega = kc\left(1 + \frac{v_0}{c}\cos\theta\right). \tag{8.161}$$

$v_0 < c$ 的流动称亚音速流动,$v_0 > c$ 的流动称超音速流动.(8.161)表明这两种流动中的声波有很不相同的性质.在超音速流动中有一特征角 θ_s,

$$\cos\theta_s = -\frac{c}{v_0}, \tag{8.162}$$

波矢量与流速夹角 $\theta = \theta_s$ 的声波频率为零.这种波称为冲击波,超音速流动的流体中会出现冲击波.频率为零表明冲击波中各量与时间无关,带冲击波的流体仍作定常流动.然而,波矢量 $\boldsymbol{k}$ 不为零表明冲击波中各量随位置变化,带冲击波的流体流动不再是均匀的.如图 8-2,以超音速 $\boldsymbol{v}_0$ 均匀流动的流体在 A 点遇到障碍物,在其中激发出声波.声波在流体坐标系中以速率 c 朝各方向传播;在空间固定坐标系中,以速度矢量按合成规则(8.160)由 A 指向以 O 为中心 c 为半径的圆周上一点,与 $\boldsymbol{v}_0$ 的最大夹角 α 称为马赫(E. Mach)角,

$$\sin\alpha = \frac{c}{v_0}. \tag{8.163}$$

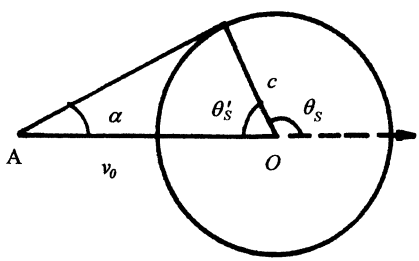

图 8-2 流体中的超音速运动

可见,障碍物 A 在流体中引起的扰动局限在以 A 为顶点、$\boldsymbol{v}_0$ 为轴、顶角为 2α 的圆锥面包围的区域内.锥面以外的流体不受任何影响,就像不存在任何障碍物一样.这是超音速流动的一个显著特点.将受扰动区域和不受扰动区域分开的圆锥面称为马赫面.从上章知,圆频率为 ω 的强迫力产生圆频率为 ω 的强迫振动.要产生圆频率为 ω 的声波须有圆频率为 ω 的振动源.若障碍物是静

止的，位形不随时间变化，或者说它的位形随时间变化的傅里叶分量中只有 $\omega=0$ 的成分，则只能产生 $\omega=0$ 的声波．对亚音速流动而言，这就是不产生任何声波，流体不受扰动，静止的障碍物只是规定了定常流动的边界条件．对超音速流动而言，这就是只产生冲击波．带冲击波的超音速流动在空间固定坐标系中仍是定常的，只是出现一马赫面．马赫面两侧流动大不相同，有些量在马赫面上还是不连续的．这种有量不连续的面称为流体的间断面．研究冲击波就是研究这些间断面．间断面的状况由流体在其上的边界条件表示．

将圆锥形马赫面的外侧称为区域 0，其中各量加下标 0 表示，内侧称为区域 1，其中各量加下标 1 表示．在定常流动中马赫面上没有质量消涨，质量流密度矢量(8.1)垂直于马赫面的分量在马赫面上应连续．用下标 n 和 t 分别表示一个矢量垂直和平行于马赫面的分量，质量流密度矢量法向分量在马赫面上连续的条件可表示为

$$\rho_0 v_{0n} = \rho_1 v_{1n} \equiv j_n . \tag{8.164}$$

这个边界条件可视为流体在马赫面上的连续性方程．马赫面两侧的压力 $\mathscr{P}_0$ 和 $\mathscr{P}_1$ 可以不同，其差 $\mathscr{P}_0-\mathscr{P}_1$ 就是垂直于马赫面作用在通过单位面积马赫面的流体上的力．这也就是单位时间内通过单位面积马赫面的流体获得的垂直于马赫面的动量．单位时间内由 0 侧流入单位面积马赫面的法向动量为 $\rho_0 v_{0n} v_{0n}$，切向动量为 $\rho_0 v_{0n} v_{0t}$；单位时间内由单位面积马赫面流入 1 侧的法向动量为 $\rho_1 v_{1n} v_{1n}$，切向动量为 $\rho_1 v_{1n} v_{1t}$．上述动力学关系即为

$$\rho_1 v_{1n}^2 - \rho_0 v_{0n}^2 = \mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_1, \quad \rho_1 v_{1n} v_{1t} = \rho_0 v_{0n} v_{0t} .$$

其中第一式移项后为

$$\mathscr{P}_0 + \rho_0 v_{0n}^2 = \mathscr{P}_1 + \rho_1 v_{1n}^2, \tag{8.165}$$

第二式因(8.164)而成为

$$v_{0t} = v_{1t} . \tag{8.166}$$

此二式可视为流体在马赫面上的运动方程．用流体的连续性方程、运动方程和物态方程，加上间断面上的边界条件(8.164)～(8.166)以及无穷远处的边界条件，原则上可完全求解冲击波问题．

实际的冲击波问题常常是复杂的．这不仅指它的力学方面，而且指它常伴随热交换和其它热力学过程．详细的讨论超出力学的范围，不可能在此叙述．不过，仅从边界条件(8.164)～(8.166)也能了解一些粗略情况．将马赫面的法向取为由 0 侧指向 1 侧，$v_{0n}>0$，由(8.164)知，亦有 $v_{1n}>0$．来流受障碍物 A 阻挡，进入 1 侧后速度应减小．由于(8.166)，这意味着 $v_{1n}<v_{0n}$．据此，由(8.164)知 $\rho_1>\rho_0$．另一方面，用(8.164)可将(8.165)写为

$$\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_0 = \frac{j_n^2}{\rho_0 \rho_1}(\rho_1 - \rho_0) . \tag{8.167}$$

由$\frac{j_n^2}{\rho_0\rho_1}>0$和$\rho_1>\rho_0$判断，$\mathscr{P}_1>\mathscr{P}_0$. 可见冲击波导致流体被压缩.

换一种方式看问题. 设物体 A 以速度$\boldsymbol{v}_0$相对静止流体运动. 这又回到了流体坐标系. 用伽利略变换再回到物体 A 静止的坐标系，在此情况下流体以$-\boldsymbol{v}_0$速度运动. 用ω_0表示 A 的本体坐标系中声波的圆频率，(8.159)改为

$$\omega_0 = kc - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0,$$

原来的$\boldsymbol{v}_0$改成了现在的$-\boldsymbol{v}_0$. 用θ'表示流体坐标系中声波波矢量$\boldsymbol{k}$与物体 A 的运动速度$\boldsymbol{v}_0$的夹角，此式变为

$$\omega_0 = kc\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\theta'\right).$$

用流体坐标系中声波的色散关系(8.153)，此式可写为

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\frac{v_0}{c}\cos\theta'}. \tag{8.168}$$

在 A 的本体坐标系中声波的圆频率ω_0应等于声源 A 的振动圆频率，此式表示的乃是静止流体中声波圆频率ω与运动声源的圆频率ω_0之间的关系. 在静止流体中听到的声波频率与运动声源的速度v_0及听闻方向与声源运动方向的夹角θ'有关，这便是多普勒(C. Doppler)效应. 若物体 A 作亚音速运动，$v_0<c$，(8.168)右边分母为正，只有非零ω_0才能导致非零ω. 可见亚音速运动物体只当振动时，即其位形随时间变化的傅里叶分析中含非零频率成分时，才能在静止流体中激发出声波. 若物体 A 作超音速运动，$v_0>c$，则存在一特征角θ'_s(参看图 8-2)，

$$\cos\theta'_s = \frac{c}{v_0}, \tag{8.169}$$

在与物体运动方向夹角为θ'_s的方向上，(8.168)右边分母为零，零ω_0可导致非零ω. 可见，超音速运动物体即使不振动也能在静止流体中激发出沿(8.169)规定的方向传播的声波. 这便是冲击波. 一个亚音速飞行物原则上可通过消除本身的振动消除飞行引起的噪音. 然而一个超音速飞行物即使消除了本身的振动仍会发出冲击波. 这就是超音速飞机掠过上空时的呼啸声. 冲击波带走能量，使超音速飞行能耗增加. 飞行物从亚音速到超音速的转变过程中必须支付冲击波所需能量，经受冲击波的振撼. 这被称为通过音障.

§8.9 流体力学解的稳定性与不稳定性 层流与湍流

原则上可从流体力学诸方程和实际问题的边界条件解出流体的速度场、密度场和压力场. 虽然由于实际困难常常只求得近似解，但总可设精确解是存

在的，流体按照精确解流动.按照微分方程，解的流动应是规则的.实际上确实存在很规则的流动，称为层流.然而也确实存在极为紊乱的流动，称为湍流.湍流的出现是由于，按流体力学解得的规则流动不稳定.§6.7讨论过刚体转动的稳定性.类似的方式可定义流体力学解的稳定性.如果相对一个解的偏差只要足够小就会随着时间的流逝而消失，这个解就是稳定的.反之，如果相对一个解的某种偏差不论起始时怎样小都会随时间增长，导致相对这个解的有限大乃至无限大的偏离，则称这个解为不稳定的.由于实际上总有使流动偏离任何解的扰动，不稳定解对应的流动不可能存留.如果流动相对这个解的偏离发展得足够快，这个解对应的流动就根本观察不到.

以不可压缩的黏性流体为例.设$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r},t)$为满足纳维-斯托克斯方程(8.102)和连续性方程(8.31)的速度场和压力场.设有扰动导致实际流动相对于这个解的微小偏离，使速度场和压力场分别变为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t),\qquad \mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r},t)+\mathscr{P}_1(\boldsymbol{r},t), \tag{8.170}$$

偏差$\boldsymbol{v}_1$和$\mathscr{P}_1$为小量.这个流体场自然仍应满足方程(8.102)和(8.31).将它们代入这两个方程.由于$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$也满足这两个方程，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1=-\frac{1}{\rho}\nabla\mathscr{P}_1+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}_1, \tag{8.171}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=0. \tag{8.172}$$

这是一组$\boldsymbol{v}_1$和$\mathscr{P}_1$的方程，ρ和$\boldsymbol{v}_0$在其中为已知量.若扰动足够小，可略去$\boldsymbol{v}_1$的二次项，(8.171)简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0=-\frac{1}{\rho}\nabla\mathscr{P}_1+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}_1. \tag{8.173}$$

此式和(8.172)组成未知函数$\boldsymbol{v}_1$和$\mathscr{P}_1$的完备线性齐次微分方程组.若解$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$是定常的，与时间无关，则这组线性方程的系数与时间无关，从而可将时间变量与坐标变量分离.可设

$$\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t)=T(t)\,\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}),\quad \mathscr{P}_1(\boldsymbol{r},t)=T(t)\mathscr{P}'(\boldsymbol{r}). \tag{8.174}$$

代入(8.172)得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0; \tag{8.175}$$

代入(8.173)后除以$T(t)$，移项得

$$(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}'+(\boldsymbol{v}'\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0+\frac{1}{\rho}\nabla\mathscr{P}'-\nu\nabla^2\boldsymbol{v}'=-\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}'. \tag{8.176}$$

此式左边与时间无关，右边自应与时间无关，$-\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\equiv\Omega$必为常数.于是这

个方程分离为两个方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\Omega T, \tag{8.177}$$

$$(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v}' \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{\rho}\nabla\mathscr{P}' - \nu\nabla^2\boldsymbol{v}' = \Omega\boldsymbol{v}'. \tag{8.178}$$

(8.177)的积分为

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\Omega t}. \tag{8.179}$$

此式右边本有一相乘积分常数,但由于(8.175)和(8.178)为线性方程组,可将此常数转乘到$\boldsymbol{v}'$和$\mathscr{P}'$上.含待定常数Ω的方程组(8.178)和(8.175)称本征方程组.使这个方程组有解的常数Ω称为本征值,解$\boldsymbol{v}'$和$\mathscr{P}'$称本征函数.它们由这个方程组和边界条件解出.本征值和本征函数一般取复值.由这种方法解得的是$\boldsymbol{v}_1$和$\mathscr{P}'$的复形式.好在线性方程组(8.172)和(8.173)的系数都取实值,这使由它们解出的复值函数的实部和虚部分别仍是这组方程的解.这些部分取实值,可代表物理量.

设方程组(8.178)和(8.175)的一个本征值为

$$\Omega = \lambda + \mathrm{i}\omega, \tag{8.180}$$

代入(8.179)得

$$T(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t - \mathrm{i}\omega t}. \tag{8.181}$$

将此式连同相应本征函数$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r})$和$\mathscr{P}'(\boldsymbol{r})$代入(8.174)右边,得偏差函数$\boldsymbol{v}_1$和$\mathscr{P}_1$.可见偏差随时间的变化由因子(8.181)决定.本征值(8.180)的虚部给出一随时间周期变化的因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,它既不衰减也不增长.若本征值的实部$\lambda>0$,则有随时间衰减的因子$\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{-|\lambda| t}$.若所有本征值的实部皆正,则相对于解$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$的任何微小偏差都会指数衰减至零.流体力学解$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r},t)$便是稳定的.若$\lambda<0$,则有随时间指数增长的因子$\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{|\lambda| t}$.方程组(8.178)和(8.175)一般有许多不同本征值,对应许多彼此线性无关的解随时间变化.其中只要有一个本征值实部$\lambda<0$,流体就会通过相应的本征偏差越来越远地偏离$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$.流体力学解$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$便是不稳定的.按(8.181),在此情况下偏差可以达到无穷.这自然在实际上不会发生.当偏差大到一定程度,由(8.171)到(8.173)的线性近似便不再成立.非线性项$(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1$会阻止偏差的进一步增长.

若解$\boldsymbol{v}_0$和$\mathscr{P}_0$不是定常的,与时间有关,则前面(8.174)以下分离变量的步骤不能实行.设扰动在t_0时刻发生并导致偏差

$$\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t_0) = \varepsilon\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}), \quad \mathscr{P}_1(\boldsymbol{r},t_0) = \varepsilon\mathscr{P}'(\boldsymbol{r}). \tag{8.182}$$

这里将初始偏差分解为两个因子,一个因子$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r})$和$\mathscr{P}'(\boldsymbol{r})$表示偏差的空间分

布，称偏差模式；另一个因子 $\varepsilon>0$ 表示偏差的大小，称偏差值．由于偏差方程(8.172)和(8.173)是线性的，t_0 时刻以后偏差的发展方式只取决于初偏差的模式，初偏差的值只是按比例地影响尔后偏差的值．值为 ε_1 和 ε_2 的两个模式相同的初偏差，经发展到任何以后时刻仍然成比例，且比值仍为 $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ 不变．这一切的前提只是从(8.171)到(8.173)的线性近似成立，为此初偏差的值必须足够小．现在可具体地一般定义流体力学解的稳定性和不稳定性．如果相对于一个流体力学解 $v_0(r,t)$ 和 $\mathscr{P}_0(r,t)$ 的任何模式的初偏差，只要值足够小就会随着时间的发展趋于零，则这个解 v_0 和 $\mathscr{P}_0$ 是稳定的．反之，如果解 v_0 和 $\mathscr{P}_0$ 存在一个偏差模式，这种模式的初偏差不论值如何小都会发展成为有限大或无限大偏差，则这个解称为不稳定的，这种偏差模式称为不稳定模式．

设流体力学解 v_0 和 $\mathscr{P}_0$ 是不稳定的．自然界不可避免的微小扰动会触发它的不稳定偏差模式．于是它便按流体力学方程发展成一个新解．改称这个解为 v_0 和 $\mathscr{P}_0$，并重复上述考察．如果经若干次(也可能就是一次)偏离和发展达到一个稳定解，则在实际上表现为流体经一阵混乱达到一种规则的流动，最终作层流．如果经一次次的扰动-偏离-发展，始终达不到一个稳定解，则实际上表现为流体的无休止的混乱，称为湍流．湍流不仅是无休止的混乱流动，而且是越来越混乱的流动．这是因为自然界的扰动是随机的，而不稳定偏离模式常常不止一种，甚至可能有无穷多种．同样的初始解可能受到不同的扰动而按不同的模式偏离和发展．每一次扰动-偏离-发展都是随机的，都为流动带来不确定性和混乱．流体运动方程的非线性使初偏离的值也影响发展的结果．每次扰动导致的初偏差的值也是随机的，也为流动带来不确定性和混乱．这使湍流理论不得不采用统计方法．

在以上分析中将一次次扰动-偏离-发展分开讨论．实际上扰动无时不在，第二次扰动并不一定等到第一次扰动引起的偏离充分发展后再发生．说时迟那时快，不论从不稳定流动到最后的层流或湍流，发展都可以是瞬间完成的．湍流理论由于自身的复杂性至今仍在蓬勃的发展中，是流体力学、力学乃至物理学的一个前沿方向．

习 题 八

1．伽利略变换中长度不变因而体积和面积都不变，又由于质量和力也不变，在伽利略变换中密度和压力都不变．试据此证明欧拉方程和纳维-斯托克斯方程在伽利略变换中不变．

2．试证连续性方程(8.2)在伽利略变换中不变．

3．设一中心静止的球半径 $R(t)$ 按规定方式随时间变化，试求解其周围不可压缩无旋理想流体的速度场和压力场，并求出它所受压力．

4. 设一半径为 R 的球中心按轨道方程 $\boldsymbol{r}(t)$ 在不可压缩无旋理想流体中运动，试求解流体的速度场和压力场.

5. 一圆柱形容器绕自身的铅垂中心轴以角速度 Ω 旋转. 其中不可压缩流体被容器部分地带动. 在圆柱面上流体速度为圆柱面该点速度的 a 倍，$0<a\leqslant 1$. 试求重力作用下流体表面的形状.

6. 试由方程(8.50)和边界条件(8.49)、(8.46)证明一维重力波有驻波解

$$\phi(x,z,t) = A\mathrm{ch}[k(z+h)]\cos(kx+\delta)\cos\omega t, \tag{8.183}$$

且 ω 与 k 之间有色散关系(8.55).

7. 设一维重力波(8.183)沿 x 方向的长度限定为 L，求 k 与 ω 的可能值.

8. 设线性化条件(8.45)和流体深度 h 远大于波长的条件依然成立，但流体在水平方向并非无限广延，而是局限在一有限范围内. 速度势 $\phi(x,y,z,t)$ 满足三维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{8.184}$$

试证，对于这种二维重力波，边界条件(8.46)和(8.49)依然成立.

9. 一水池长 a 宽 b 深 h. 试证，其中可激发起波长远小于 h 的重力驻波

$$\left.\begin{aligned}&\phi(x,y,z,t) = A\mathrm{ch}[k(z+h)]\cos(k_1x+\delta_1)\cos(k_2y+\delta_2)\cos\omega t,\\&k=\sqrt{k_1^2+k_2^2},\end{aligned}\right\} \tag{8.185}$$

求 ω 与 k 的关系和 k_1 与 k_2 的可能值.

10. 一圆形水池半径为 R，深为 h. 以其中心轴为 z 轴，z 轴与水表面的交点为原点，建立柱坐标 (ρ,θ,z)，它与笛卡儿坐标 (x,y,z) 的关系为(2.2). 由此按复合函数微分法可得拉普拉斯算符的柱坐标表示式

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{8.186}$$

试证此池中可激发起波长远小于 h 的重力驻波

$$\phi(\rho,\theta,z,t) = A\mathrm{ch}[k(z+h)]F(\rho)G(\theta)\cos\omega t, \tag{8.187}$$

解出函数 F 和 G，求出色散关系 $\omega(k)$，确定 k 和 ω 的可能值.

11. 试求长 a 宽 b 高 h 的长方箱内流体中声驻波的可能频率.

12. 试求长为 l 半径为 a 的圆管内流体中声驻波的可能频率.

13. 试证第 5 题的结果对理想流体和黏性流体同样成立.

14. 两张互相平行相距为 h 的无穷宽广粗糙平板以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 相对平行移动. 求充满其间的不可压缩黏性流体定常流动的速度场、压力场及两板受的力.

15. 设不可压缩黏性流体在外径为 R_1 和内径为 $R_2>R_1$ 的两同轴圆管间定常流动，求其速度场、压力场和单位时间流量.

16. 半径为 R 的球在不可压缩黏性流体中以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 移动，并绕其一直径以角速度 Ω 转动. 设小雷诺数条件成立，求它受的力和力矩.

第九章　相对论力学

§9.1　光速不变原理与相对性原理　洛伦兹[①]变换　闵可夫斯基[②]几何与四矢量

弹性力学和流体力学成功地将声学纳入力学使人产生将光学纳入力学的奢望.在麦克斯韦(J. C. Maxwell)建立电磁场理论体系进而发现电磁波后,光被确认为一种电磁波.于是人们便希望将整个电磁理论纳入力学,将电磁场当作某种连续介质的形变场和应力场.电位移矢量这一名称就是这种希望的表露.人们为这种介质取名"以太".由于光可在星际,在真空中传播,以太应无所不在.千百年来,人们认为有一绝对空间,相对于它可以绝对地判别一个物体是静止还是在运动.最初人们以为与地相联的空间便是绝对空间.发现地是球形后,又认为地球是这绝对空间的中心,日月星辰都绕地运动,这便是地心说.后来发现地球并不是静止的,它和其它行星一起绕太阳运动,便认为太阳是这绝对空间的中心,是为日心说.很快便发现太阳也在运动,而且茫茫星海中竟找不到一个静止的天体.绝对空间概念需另觅支持.以太概念提供了这种可能性.到19世纪末的倾向性意见是,以太绝对静止,代表绝对空间.相对以太的运动便是相对于绝对空间的运动,是绝对运动.若果真如此,则应能由观察判断每一物体是绝对静止还是绝对运动,特别应能判断,借以观察运动的参考系本身相对于以太是静止还是在运动.说以太绝对静止,是就其整体而言的.它的局部还可相对其整体运动.这种运动也应能观察到.为了检验存在绝对静止以太的概念是否正确,人们设计了各种实验来观察相对以太的运动,包括局部以太相对于其整体的运动.从§8.8知,声波的传播与它所在介质的运动有关.静止介质中波动方程最简单.从声波的传播可判断所用参考系是否相对介质在运动.于是人们希望从光的传播,或一般地从电磁场运动,推测相对于以太的运动.

星光在天文望远镜中的光行差(Aberration)是地球绕太阳公转的地面效

---

① H. A. Lorentz, *Proc. Amst. Acad.* (English edn), **VI**(1903)809.

② H. Minkowski, *Gott. Nach*, (1908)53, Math. Ann. **LXVIII**(1910)472.

应，曾被当作地球相对以太运动的证据.设一束星光自天顶铅垂向下射入长 l 的天文望远镜，从物镜到目镜历时 $\frac{l}{c}$，c 为光速.望远镜随地球以速度 v 向前运动，在此时间内，目镜前进距离 $v\frac{l}{c}$.若光的传播未受地球运动影响，星的成像位置将不在望远镜的正下方，而相对于望远镜向地球运动的后方移动了 $v\frac{l}{c}$.这使星的视位置偏离天顶，光传播的视方向也非铅直向下，而向地球运动的后方偏斜 θ 角，

$$\tan\theta = v\frac{l}{c}\Big/l = \frac{v}{c}. \tag{9.1}$$

将地球公转平均线速度 $v=3\times10^4$ m/s 和光速 $c=3\times10^8$ m/s 代入此式，得 $\theta=20.5''$.不过星的真实位置本身须从观察中得知，凭一次观察得到的成像位置不可能判断光传播的方向有否偏斜.好在，半年后地球公转速度反向，星光视方向应向另一侧偏斜.相隔半年的两次观察中天顶星光视方向应有夹角 $2\theta=41''$.这一夹角已被定量地观察到，是为光行差.它表现出地球绕太阳的公转，并表明贴近地面的光传播未受地球运动的影响.这后一点按以太概念可解释为，虽然地球在运动它周围的以太却是绝对静止的，完全未被地球带动.地球相对于绝对静止的以太在运动.不过要注意，这里看到的是星光视方向的变化，从中只能察觉地球运动速度的变化，而不能察觉地球运动速度本身.

人们设计各种实验观测地球相对以太的运动速度.其中最著名的是迈克耳孙-莫雷[①]实验.它的装置示意于图 9-1.由光源 S 发出的光经半透明片 M 部分反射到镜 A，另一部分透射到镜 B.这两束光分别被 A、B 反射回到半透明片 M 后分别透射和反射到底片 P 上成像.设两臂 MA 和 MB 分别长为 l_1 和 l_2，可以算得两束光从光源 S 到底片所经历的时间差，从而算得在底片上应出现的干涉条纹.令 MA 与地球运动的方向平行，MB 与此方向垂直.按伽利略变换，光在 M 与 A 间往返运动的速度应分别为 $c-v$ 和 $c+v$，其中 c 为相对于以太的光速，v 为地球相对于以太的运动速度.因此光在 M 与 A 间往返的时间应为

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9.2}$$

另一方面，当光从 M 运动到 B 时，M 和 B 都与地球一起沿 MA 方向移动了一段距离 b，在相对以太静止的坐标系看，光走的路径为一底为 b 高为 l_2 的直

① A.A.Michelson and E.W. Morley, *phil. Mag. Dec.* (1887).

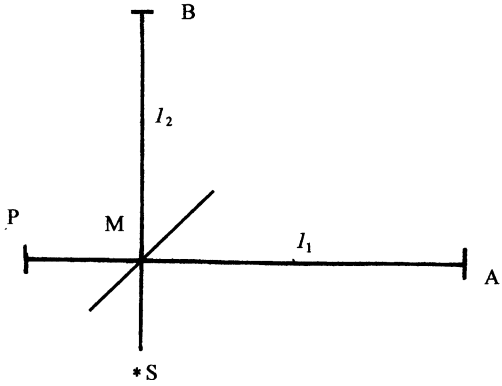

图 9-1　迈克耳孙-莫雷干涉仪

角三角形的斜边，此边长 $\sqrt{l_2^2+b^2}$. 光走此边历时 $\frac{1}{c}\sqrt{l_2^2+b^2}$. 在此时间内地球沿 MA 方向移动距离 $b=\frac{v}{c}\sqrt{l_2^2+b^2}$. 由此可解得 $b=\frac{v}{c}l_2\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. 最后算得光在 M 和 B 间往返时间为

$$t_2=\frac{2}{c}\sqrt{l_2^2+b^2}=\frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.3}$$

沿两条路径的光在光源和底片间经历的时间差为

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(l_2-\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \tag{9.4}$$

与地球相对以太的运动速度 v 有关. 从底片上的干涉条纹可确定时间差 Δt，从而量出速度 v. 为了抵消可能存在的系统误差可将装置转 90°后再测一遍；转后臂 MB 沿地球运动方向，MA 垂直此方向，时间差变为

$$\Delta t'=\frac{2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-l_1\right). \tag{9.5}$$

由于实验关系到极为根本的问题，它被极为小心地，反复地做过许许多多遍. 结果却出乎当时人们意料之外：$v=0$，称为零结果. 它表明，要么根本没有绝对静止的以太和与之相联的绝对空间，要么地表以太完全被地球带动以致相对地球仍为静止. 然而光行差已表明以太应设为完全未被地球带动. 同一事物

在不同现象中既表现出如此自相矛盾的性质,表明它只能是一种虚构.为检验以太概念设计的各种实验都表明,不存在绝对静止的以太,也不存在与此相联的绝对空间.

绝对静止和绝对空间诸概念既被认为已由实验证伪,与它们相反的力学相对性概念再次被认真考虑.然而作为伽利略力学相对性原理基础的伽利略变换也被同一类实验否定.例如迈克耳孙-莫雷实验就表明,光速 c 在固定于恒星的坐标系中和跟随地球运动的坐标系中取值相同,从而与伽利略变换矛盾.如果将光速在所有惯性系中相同作为一个实验事实,应当修改的只能是伽利略变换.光速的值是光和电磁现象的特征量,它在所有惯性系中相同,正显示光和电磁规律可能与力学规律一样也符合相对性原理.推广后的**相对性原理**应是:

在所有惯性系中物理规律皆相同.

为将物理学重新建立在这一原理基础上,并以实验检验这种修正的正确性,需要物理量在惯性系间的变换关系.它应当是对伽利略变换的修正.修正的依据是

光速在所有惯性系中相同.

这便是**光速不变原理**.光速成为物理学的一个普适常数,记为 c.它的最新实验值为[①]

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}. \tag{9.6}$$

最基本的变换为坐标和时间的变换.在两个彼此作等速直线运动的惯性参考体上建立正交直线坐标系 S 和 S′.设起始时刻二者重合,将此时刻定为 S 和 S′中计时的零点,$t = t' = 0$.随后 S′相对 S 沿 x 轴所指方向以匀速 v 运动.在 S 和 S′中用相同的钟计时,以相同的尺测距,一个在 S 中看在 t 时刻发生在 (x, y, z)点的事件在 S′中看发生在 t'时刻(x', y', z')点处.现在问(x, y, z, t)和(x', y', z', t')间的变换关系.

设空间和时间是均匀的,在 S 系中看同方向上等距离的点在 S′系中看也应是同方向上等距离的点,即变换应是线性的.$x = y = z = t = 0$ 的事件就是 $x' = y' = z' = t' = 0$ 的事件,变换应是齐次的.S′相对 S 沿 x 方向以速度 v 运动,其中每一固定点在 S 系看来便都以速度 v 沿 x 方向运动,因而 $x - vt$ 为常数.在两坐标系看来,同一事件的 y 和 z 坐标分别是一样的.综合这些考虑,变换应为

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right), \tag{9.7}$$

---

① Particle data Group, *Phys. Rev*, **D45** Pt2(1992).

α、β 和 γ 为无量纲参数.其中第二、三两式与伽利略变换(1.1)的第二、三两式相同;第一式与(1.1)中第一式相比多一待定常数 α.只有第四式与(1.1)中第四式完全不同.在这一变换中两坐标系的时间可以不同,在一个坐标系中看同时发生的事在另一坐标系中看可发生于不同时刻,且发生的时刻在不同位置还不同.若取参数 $\alpha=\gamma=1,\beta=0$,这个变换就还原为伽利略变换(1.1).不过现在要用从实验中获得的知识来确定这些参数.

设在 S 与 S′重合的起始时刻从两坐标系的共同原点发出一闪光.在 S 系中看它在时刻 t 照亮了(x,y,z)处的目标并被吸收.在 S′系中看这同一事件发生在时刻 t'的(x',y',z')处.x、y、z、t 和 x'、y'、z'、t'由(9.7)变换.由光速不变原理知

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2. \tag{9.8}$$

由于(9.7)的第二、三两式,此式简化为

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2.$$

再将(9.7)的第一、四两式代入此式右边,整理得

$$(1-\alpha^2+\beta^2\gamma^2)x^2-\left(1-\gamma^2+\alpha^2\frac{v^2}{c^2}\right)c^2t^2+(\alpha^2v-\gamma^2\beta c)2xt=0.$$

由于 t 与 x 为独立变量,此式成立的充分必要条件为三项的系数分别为零,从而得

$$\alpha^2-\beta^2\gamma^2=1,\quad \gamma^2-\alpha^2\frac{v^2}{c^2}=1,\quad \alpha^2v-\gamma^2\beta c=0. \tag{9.9}$$

从末式解出 $\alpha^2=\frac{c}{v}\gamma^2\beta$,代入前两式分别得

$$\gamma^2\left(\frac{c}{v}\beta-\beta^2\right)=1,\quad \gamma^2\left(1-\beta\frac{v}{c}\right)=1. \tag{9.10}$$

可见

$$\beta^2-\left(\frac{c}{v}+\frac{v}{c}\right)\beta+1=0,$$

它的两个根为 $\beta=\frac{v}{c}$和$\beta=\frac{c}{v}$.然而第二根使(9.10)第二式成为 $0=1$,不合理,弃之.于是

$$\beta=\frac{v}{c}. \tag{9.11}$$

代入(9.9)和(9.10)得

$$\alpha^2=\gamma^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

开平方,为使(9.7)在低速极限 $v\to0$ 条件下趋于伽利略变换(1.1),应取正根

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{9.12}$$

代入(9.7)得

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.13}$$

此式首先由洛伦兹导出①,称洛伦兹变换.

洛伦兹变换(9.13)与伽利略变换(1.1)的最大区别是把时间和空间坐标摆在了对等的地位,也参加变换.按伽利略变换(1.1),用事先对好的钟量时间,同一事件在不同惯性坐标系看发生的时间是相同的.只有事件发生的空间坐标在各惯性系看可以不同,需要变换.而按洛伦兹变换(9.13),即使用事先对好的完全相同的钟量时间,同一事件在不同惯性坐标系看发生的时间也不相同,需要和空间坐标一起作线性变换.原来分开的时间和空间现在统一成时间-空间,简称时空.为了明显表现出这种统一,用 x^1, x^2 和 x^3 表空间坐标 x、y 和 z,用

$$x^0 = ct \tag{9.14}$$

表时间坐标,它们都具长度量纲.在一定惯性系 S 看,一定时刻发生在一定位置的事件对应一组这样的坐标 x^μ, $\mu = 0,1,2,3$,称它表示一时空点.同一事件或同一时空点在另一惯性系 S′看则对应另一组时空坐标 x'^μ, $\mu = 0,1,2,3$.同一时空点在不同惯性系的坐标间由线性变换

$$x'^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.15}$$

联系.这里开始重新用爱因斯坦求和约定:若一项中有重复的希腊文指标则自动对它由 0 到 3 求和.变换中须保持的光速不变条件(9.8)现在可表示为

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g'_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu, \tag{9.16}$$

$$g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{若 } \mu \neq \nu, \\ -1, & \text{若 } \mu = \nu = 0, \\ 1, & \text{若 } \mu = \nu = 1,2,3. \end{cases} \tag{9.17}$$

一般地称符合条件(9.16)的变换(9.15)为洛伦兹变换.将四维坐标排成一列矢量

① H. A. Lorentz, 前引文.

$$X = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \qquad X' = \begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}, \tag{9.18}$$

称为四矢量.洛伦兹变换(9.15)可表示为矩阵形式

$$X' = AX, \tag{9.19}$$

其中 $A = (a^\mu{}_\nu)$ 为由(9.15)中的变换系数排成的四行四列矩阵.

于是,世界上发生的每一事件都对应一个时空点,而每一时空点又对应一四维列矢量,它在不同惯性系间作洛伦兹变换.将(9.17)表示的$(g_{\mu\nu})$看作这四维时空的度规,条件(9.16)意即洛伦兹变换中每一时空点与时空原点的时空距离不变.如前所述,时间空间均匀,表现为变换系数 $a^\mu{}_\nu(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ 为常数,本身与时空点无关.这使得(9.15)在两个时空点间的差为

$$\Delta x'^\mu = a^\mu{}_\nu \Delta x^\nu. \tag{9.20}$$

定义坐标间隔为 $\Delta x^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$的两个时空点间的时空距离平方

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{9.21}$$

比较(9.20)和(9.15),再从(9.21)与(9.16)的比较中得知,两时空点间的时空距离在洛伦兹变换中不变.在三维空间中转动不改变任二点间的距离,在四维时空中洛伦兹变换不改变任二时空点间的时空距离.在这一意义上,洛伦兹变换是三维空间中转动变换的推广.在第二章末尾已讲到,一个空间的度规决定这一空间的几何性质.(9.17)定义的时空度规也决定了时空的几何性质.这种时空的几何称为闵可夫斯基几何.是他首先将几何概念引入相对论的时空研究①.闵可夫斯基采用虚数时间坐标

$$x^4 = \mathrm{i}x^0 = \mathrm{i}ct, \tag{9.22}$$

使洛伦兹变换中的不变量成为

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=1}^{4} (\Delta x^\mu)^2. \tag{9.23}$$

这更像欧几里得空间距离平方的表达式,从而使四维时空的几何更像欧几里得几何.时间的特性完全由它的坐标为虚数表达.距离平方由(9.23)表达却含虚数坐标的几何又称赝欧几里得几何.

洛伦兹变换保证固定于恒星的坐标系和瞬时地随地球移动的坐标系中光速的值相同,这就自然地解释了迈克耳孙-莫雷实验的零结果.现在看能否解释光行差.将星光自天顶到达望远镜物镜的时刻定为 $t' = t = 0$.此时固定于

---

① H. Minkowski,前引文.

恒星的坐标系 S 与瞬时地随地球移动的坐标系 S′重合，原点都在星光与物镜相交处，x 和 x' 轴指地球移动方向，y 和 y' 轴铅直向下．在 S 系中看 $t=\frac{l}{c}$ 时星光到达望远镜目镜所在水平面 $y=l$，$x=0$ 处．按洛伦兹变换(9.13)，在 S′中看星光也到达目镜 $y'=l$，$x'=-v\frac{l}{c}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 处．星光方向向地球运动后方偏斜 θ 角，

$$\tan\theta=\frac{v}{c}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9.24}$$

由于 $\frac{v}{c}$ 为 10^{-4} 量级，此式与(9.1)在 10^{-8} 精度内一致因而与观察结果相符．光行差现象不用以太也能解释．

洛伦兹变换的正确性自然不只是能说明这两个实验结果．作为相对论的基础，它的正确性表现为相对论的全部结果与迄今的全部实验结果一致．

§9.2 同时的相对性　运动物体的长度收缩与时间膨胀　速度相加定理　快度及其相加

在坐标系间相对运动速度 v 比光速 c 小得多以致可忽略的条件下，洛伦兹变换(9.13)还原为伽利略变换(1.1)，由它导出的结果与由伽利略变换导出的结果相同．日常生活中遇到的正是这种情形．伽利略变换既是由日常生活经验中引出的，在这种情形下洛伦兹变换自然与日常经验一致．这也是洛伦兹变换正确性的证明．然而当速度 v 接近光速 c，二者可以相比的条件下，洛伦兹变换的结果与伽利略变换的结果可大不相同，而与从日常经验获得的知识相悖．在高速条件下出现的种种奇特现象称为相对论效应．在下面的讨论中要用(9.13)的逆变换．这只须将其中第一、四两式作为 x 和 t 的线性非齐次联立方程求解即可．结果是

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.25}$$

此式也可由在(9.13)中交换 x、y、z、t 和 x'、y'、z'、t' 并将相对运动速度 v 换成 $-v$ 得到．v 是 S′相对 S 的速度，$-v$ 是 S 相对 S′的速度．可见洛伦兹变换是相对的，可从 S 变到 S′，也可从 S′变到 S．在两种方向的变换中代入各自相应的相对运动速度，变换关系便是一样的．这与相对性原理的精神一致．

将(9.25)第四式在两个事件间求差得

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.26}$$

若这两个事件在S′中看是同时发生的，则 $\Delta t'=0$，此式变为

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x' \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

它表明，若这两个事件在S′中看发生于不同地点，$\Delta x' \neq 0$，则 $\Delta t \neq 0$，在S系中看就发生于不同时刻. 同时性是相对于一定坐标系而言的. 在一个坐标系看同时发生的事在另一坐标系看未必同时. 这称为同时的相对性. 从日常生活经验看，这已是奇异的事.

现在看S′系中沿 x 方向一条长 l_0 的静止直线，它随S′沿 x 方向相对S系运动. 问在S系中看它长几许？一条运动直线的长度可定义为一定时刻它的两端点间距离. 在这个问题中，S系看到的直线长度应为一给定时刻它的两端点 x 坐标之差. 将(9.25)第一式在两事件间求差，得在S系中看这两事件的 x 坐标差

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.27}$$

直线在S′中是静止的，它的两端点 x' 坐标差 $\Delta x' = l_0$ 即它在S′系中的长度. 现在要在S系中同时测定此线两端的 x 坐标. 这两事件在S系中的时间差 $\Delta t = 0$. 将它代入(9.26)左边得

$$\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x' = 0.$$

可见

$$\Delta t' = -\frac{v}{c^2}\Delta x' = -\frac{v}{c^2}l_0.$$

将此式代入(9.27)右边即得此直线在S系中的长度

$$l = \Delta x = \frac{\Delta x' - \frac{v^2}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0. \tag{9.28}$$

由于恒有 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leqslant 1$，运动中的直线长度 l 短于它在静止条件下的长度 l_0. 运动导致长度收缩，称为洛伦兹收缩.

再看静止于S′系的一只钟. 它随S′系以匀速 v 相对S系沿 x 方向运动.

两次报时在 S′中看时间间隔为 $\Delta t'$, x'坐标间隔为 $\Delta x'=0$. 代入(9.26)得 S 系中测得的时间间隔

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.29}$$

在 S 系从运动时钟读得的时间间隔 Δt 大于在 S′系从静止时钟读得的时间间隔 $\Delta t'$. 当然,从两个坐标系看,同一时钟所示数字(讯号)是一样的. 只是当 S 系中的观察者用静止于自己坐标系的钟核对静止于 S′系的那个钟时发现它慢了,它显示的一秒用 S 系的钟量出来是

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.30}$$

秒,这称为运动物体的时间膨胀.

这些以日常经验看颇为奇特的现象已在实验中观察到. 运动 μ 子寿命的延长是时间膨胀的早期证据. μ 子是一种质量约为电子质量二百倍,静止时平均寿命为 2.2×10^{-6}s 的不稳定基本粒子,最初发现于次级宇宙射线中. 宇宙射线中的 μ 子是在 10～20 km 高空由原始宇宙射线中的原子核与大气表层原子核相互碰撞的产物衰变而成. 由于寿命极短, μ 子在衰变前即使以光速运动平均也只能穿过 0.66 km,似乎不可能从高空到达地面. 实际观察却发现,宇宙射线中的 μ 子很大一部分能到达地面. 这直接表明,运动 μ 子寿命长于静止 μ 子,时间确实因运动而膨胀. 精密实验还表明,时间膨胀公式(9.29)定量成立. 同一现象也可由运动物体长度收缩来理解. 在跟随 μ 子运动的坐标系看, μ 子是静止的,平均寿命只有 2.2×10^{-6} s. 在地面看, μ 子以接近光速的速度奔向地面;在 μ 子看,则是地面以接近光速的速度迎面而来. μ 子看到的地面并不在十余公里之外,由于洛伦兹收缩,地面距它只有一两公里之遥. 于是很大一部分 μ 子得以在有生之微秒迎接地面. 由于时间膨胀因子为 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,长度收缩因子恰为 $\frac{1}{\gamma}$,从这两方面说明同一现象时,不仅定性结果相同,定量结果也一致.

由于光速在随地球运动的坐标系中和固定于恒星的坐标系中都是(9.6)表示的 c,(9.4)和(9.5)分别成为

$$\Delta t = \frac{2}{c}(l_2-l_1), \qquad \Delta t' = \frac{2}{c}(l_2-l_1), \tag{9.31}$$

从而轻而易举地说明了迈克耳孙-莫雷实验的零结果. 现在看,这同一结果如何在固定于恒星的坐标系来说明. 如图9-1,先设臂MA与地球运动方向平

行.由于洛伦兹收缩,在此坐标系中看,它长

$$\bar{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l_1.$$

当光从臂的一端沿地球运动方向历时 t_{11} 赶上另一端时,该端已前进 vt_{11},因此

$$t_{11} = \frac{\bar{l} + vt_{11}}{c}.$$

由此解得

$$t_{11} = \frac{\bar{l}}{c - v}.$$

当光从此端逆着地球运动方向历时 t_{12} 回到起始端时,该端又向它移动了 vt_{12},因此

$$t_{12} = \frac{\bar{l} - vt_{12}}{c}.$$

由此解得

$$t_{12} = \frac{\bar{l}}{c + v}.$$

光往复此臂共历时

$$t_1 = t_{11} + t_{12} = \frac{\bar{l}}{c - v} + \frac{\bar{l}}{c + v} = \frac{2\bar{l}}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

t_2 的计算过程和结果则同(9.3).于是代替(9.4)和(9.5)的便是

$$\Delta t = \frac{2}{c}(l_2 - l_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta t' = \frac{2}{c}(l_2 - l_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.32}$$

与(9.31)比较只是多了一时间膨胀因子 γ.然而与跟随地球运动的坐标系相比,此坐标系的时间都按比例 γ 膨胀,光的周期也按此比例膨胀.若以光的周期作量时间的单位,(9.32)表示的时间差与(9.31)表示的便是一样,因而应导致同样的干涉条纹.从固定于恒星的坐标系看,迈克耳孙-莫雷实验也应该得到零结果.

时间膨胀最直接的实验证明是原子钟的环球航行实验.将校准的两组原子钟一组留在地面,另一组乘飞机绕地球飞一周后落地比较.结果发现时间膨胀效应确实存在,且理论值与测量值在误差范围内一致.

洛伦兹变换的另一奇特性质是速度不能按普通方式相加.设 S′系相对 S 系沿 x 方向以速度 v 运动.有一质点相对 S′系沿 x' 方向以速度 u' 运动,它自

然相对 S 也沿 x 方向运动.问这一运动的速度 u 为何? 微分(9.25)的第一、四式得

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u' + v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t', \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{vu'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}t'.$$

其中用到 $u' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$.用第二式除第一式得微商

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u' + v}{1+\frac{vu'}{c^2}}. \tag{9.33}$$

此式称为爱因斯坦速度相加定理.由它算得

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1-\frac{u'^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}.$$

又当 $u' = v = c$ 时,(9.33)给出 $u = c$.可见对正数 $u' \leqslant c$ 和 $v \leqslant c$,此式给出 $\frac{\partial u}{\partial u'} \geqslant 0, \frac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0$,从而 $u \leqslant c$,等号只在 $u' = c$ 或(和)$v = c$ 条件下成立.不超过光速的速度无论如何相加都不可能超光速.光速为一种速度极限.

速度由于复杂的相加关系和有上限 c,有时用起来不方便.于是人们定义快度

$$Y = \frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v}. \tag{9.34}$$

它的符号同 v,绝对值随 $|v|$ 增加,也可表示运动的快慢.然而它没有上限,而且可按普通方式相加.前一点是显然的,现在证明后一点.用 Y_i 表示与速度 v_i 相对应的快度,$i = 1,2$.设 v_1 和 v_2 在同一方向上,可按(9.33)加成速度

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{9.35}$$

现在按普通方式将两个快度相加,得

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{c+v_1}{c-v_1} + \ln\frac{c+v_2}{c-v_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c+v_1}{c-v_1}\frac{c+v_2}{c-v_2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{c^2+v_1v_2+c(v_1+v_2)}{c^2+v_1v_2-c(v_1+v_2)} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v}, \end{aligned}$$

其中 v 即(9.35)表示的 v_1 与 v_2 的合成速度.可见合成速度 v 对应的快度

$$Y = Y_1 + Y_2 \tag{9.36}$$

确是 v_1 与 v_2 分别对应的快度之和.

§9.3 质点的相对论运动方程和拉格朗日量 质量与速度的关系 质能关系 能量动量四矢量

由于将时间和空间坐标放在一起作线性变换,洛伦兹变换会改变牛顿方程(1.4)的形式.若取洛伦兹变换为惯性系之间的变换,牛顿方程(1.4)在不同惯性系将具不同形式,因而不符合相对性原理.如果认定相对性原理为物理学普遍的基本原理,就必须修改质点的运动方程,以使它在洛伦兹变换下不变.又由于牛顿方程在速度比光速小得多的条件下与实验相符,质点的相对论运动方程还必须在低速极限下与牛顿方程一致.这便是寻找相对论运动方程的指导思想.如前所述,矢量和张量作线性齐次变换,如果在一个坐标系中为零,即各分量全为零,则在任何坐标系中各分量皆为零,矢量或张量本身即为零.可见,如将方程表示成了矢量或张量形式,它的形式在这种变换中就不变.洛伦兹变换为时间和空间坐标的线性齐次变换,这提示,将方程表示成此变换的矢量或张量形式.在(9.20)和(9.21)中令时空坐标间隔趋于零,得微分关系

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu}\mathrm{d}x^{\nu}, \tag{9.37}$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}. \tag{9.38}$$

(9.37)表明 $\mathrm{d}x^{\mu}(\mu = 0,1,2,3)$组成一反变四矢量,(9.38)则表明时空距离 $\mathrm{d}s$ 为标量,即洛伦兹变换的不变量.将 $\mathrm{d}x^{\mu}$ 作为质点运动轨道上一点附近的坐标微分,(9.38)可写为

$$(\mathrm{d}s)^2 = -c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathrm{d}t)^2, \tag{9.39}$$

其中

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{9.40}$$

为质点在该点的速度.这提示定义

$$(\mathrm{d}\tau)^2 \equiv -\frac{1}{c^2}(\mathrm{d}s)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathrm{d}t)^2, \tag{9.41}$$

在低速极限下 $\mathrm{d}\tau$ 趋于时间的微分 $\mathrm{d}t$.τ 因此称为原时.原时 τ 与时间 t 不同处在于它的微分 $\mathrm{d}\tau$ 为标量,在洛伦兹变换下不变.用它可定义四矢量

$$u^{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.42}$$

其中的三个空间分量(u^1, u^2, u^3)组成一三维矢量

$$\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}, \tag{9.43}$$

$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$即质点的三维速度.可以看出 $\boldsymbol{u}$ 的低速极限即是速度$\boldsymbol{v}$,四矢量(u^μ)便称为质点的四速度,可视为三维速度$\boldsymbol{v}$ 的四维推广.由四速度可定义四动量

$$p^\mu = m_0 u^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.44}$$

m_0 为标志质点性质的常数.四动量为一四矢量,它的三个空间分量(p^1, p^2, p^3)组成一三维矢量

$$\boldsymbol{p}=m_0\boldsymbol{u}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}\equiv m\,\boldsymbol{v}, \tag{9.45}$$

末了的恒等号给出 m 的定义.与(1.15)比较知 $\boldsymbol{p}$ 可定义为质点动量,只是其中的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{9.46}$$

与速度有关,在速度为零时就是 m_0. m_0 因而称为质点的静止质量.将动量(9.45)代入牛顿方程(1.16)便得到相对论的质点运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \boldsymbol{F}, \tag{9.47}$$

$\boldsymbol{F}$ 为粒子受的力.现在的问题是如何保证这个方程的形式确实在洛伦兹变换下不变.

在(9.47)两边同乘 γ 因子,左边得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = m_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\tau},$$

这是四矢量$\left(m_0\dfrac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$的空间分量.如果右边得到的

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{F} \tag{9.48}$$

也是一个四矢量(Q^μ)的三个空间分量,则将此方程扩充成四维方程后就是一矢量方程,在洛伦兹变换下会保持其形式不变.左边的第零分量除掉 γ 因子后成为

$$\frac{\mathrm{d}m_0u^0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{c}\gamma^3\,\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\,. \tag{9.49}$$

另一方面,取空间分量方程(9.47)与速度$\boldsymbol{v}$的标量积,右边得到的

$$w=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{9.50}$$

为力对质点作功的功率;左边得

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=m_0\,\boldsymbol{v}\cdot\left(\gamma\dot{\boldsymbol{v}}+\gamma^3\frac{\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}\,\boldsymbol{v}\right)=m_0\gamma^3\,\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\,, \tag{9.51}$$

它应当是质点在单位时间获得的能量.仍用E表示质点能量,将此式与(9.49)比较知

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.52}$$

积分得

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+A=mc^2+A, \tag{9.53}$$

A为积分常数.由(9.44)、(9.42)和(9.14)知

$$p^0=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=mc. \tag{9.54}$$

为了保持方程式的形式在洛伦兹变换下不变,宜将动力学变量直接与四维矢量或张量联系.可见宜在(9.53)中取积分常数$A=0$.这使得

$$E=p^0c=mc^2. \tag{9.55}$$

此式将质点的能量与它的四动量第零分量相联系,进一步又与它的质量联系起来.质量与能量的这种关系简称质能关系.四动量因而又称能量动量四矢量.现在可将三维运动方程(9.47)扩充成四维关系,并将它表示为四矢量方程

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}=Q^\mu,\qquad \mu=0,1,2,3. \tag{9.56}$$

(Q^μ)的三个空间分量(Q^1,Q^2,Q^3)组成的矢量$\boldsymbol{Q}$由(9.48)定义,由(9.49)~(9.52)的讨论知道,它的时间分量为

$$Q^0=\gamma\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}/c. \tag{9.57}$$

运动方程(9.47)在洛伦兹变换下不变的条件为:(Q^μ)组成一四矢量.

由(9.38),(9.41)和(9.42)得

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2, \tag{9.58}$$

再由(9.44)得

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m_0^2c^2. \tag{9.59}$$

由度规张量的表达式(9.17)和能量与四动量第零分量的关系(9.55),可将此式表为通常的三维形式

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{9.60}$$

这便是质点的能量动量关系.

相对论牛顿方程(9.47)也可由哈密顿原理导出,表示成拉格朗日方程的形式.先看自由运动质点的情形,此情形中力 $\boldsymbol{F}=0$.以 $x^i(i=1,2,3)$为广义坐标,取拉氏量

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -m_0c\sqrt{c^2-\sum_{i=1}^{3}(\dot{x}^i)^2}. \tag{9.61}$$

代入拉氏方程(3.115)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad i=1,2,3. \tag{9.62}$$

将它写成三维矢量形式即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0, \tag{9.63}$$

正是在(9.47)中取 $\boldsymbol{F}=0$ 的结果.将拉氏量(9.61)代入(4.2)得作用量

$$S = -\int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))} m_0c\sqrt{-g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} = -\mathrm{i}m_0c\int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))}\mathrm{d}s = -m_0c^2\int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))}\mathrm{d}\tau, \tag{9.64}$$

其中 $x^\mu(0)\equiv x^\mu(t_0)$, $x^\mu(1)\equiv x^\mu(t_1)$.除一常数因子 $-\mathrm{i}m_0c$ 外此式与(4.138)很像,只是此处(x^μ)除空间坐标外还含时间坐标 x^0,而那里(q^σ)只含表示空间位形的广义坐标.代替那里的度规$(\tilde{g}_{\sigma\tau})$的是由(9.17)定义的闵可夫斯基度规$(g_{\mu\nu})$.模仿从(4.138)到(4.141)的推广,可将作用量(9.64)推广为

$$S = \int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))}(-\mathrm{i}m_0c\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} + eA_\mu\mathrm{d}x^\mu), \tag{9.65}$$

e 为常数,$A_\mu(\mu=0,1,2,3)$为空间坐标和时间的函数.并设它们组成一协变四矢量.每一反变四矢量(A^μ)都有一协变四矢量(A_μ)伴随,它们之间的关系为

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \qquad \mu=0,1,2,3. \tag{9.66}$$

由此又可将作用量(9.65)表示成

$$S = \int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))} (-\mathrm{i}m_0 c \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} + e g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu A^\nu). \tag{9.67}$$

其中的反变矢量(A^ν)可由协变矢量(A_μ)经(9.66)的逆变换

$$A^\nu = g^{\nu\mu}A_\mu \tag{9.68}$$

得到.反变度规张量$(g^{\nu\mu})$可表示为

$$g^{\nu\mu} = \begin{cases} 0, & \text{若 } \nu \neq \mu, \\ -1, & \text{若 } \nu = \mu = 0, \\ 1, & \text{若 } \nu = \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{9.69}$$

它与(9.17)定义的协变度规张量$(g_{\mu\nu})$有如(2.97)的关系

$$g^{\nu\mu}g_{\mu\nu'} = \delta^\nu{}_{\nu'}.$$

说(A^μ)是一四矢量即指它在惯性系间按(9.15)作洛伦兹变换.为保证光速不变条件(9.16),其中的变换系数$(a^\mu{}_\nu)$应有关系

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}a^{\mu'}{}_\mu a^{\nu'}{}_\nu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{9.70}$$

设在惯性系 S 中的两个四矢量(A^μ)和(B^μ)在惯性系 S′中的表示为(A'^μ)和(B'^μ),由(9.70)知

$$g_{\mu\nu}A'^\mu B'^\nu = g_{\mu'\nu'}a^{\mu'}{}_\mu a^{\nu'}{}_\nu A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu, \tag{9.71}$$

即量

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu \tag{9.72}$$

在洛伦兹变换下不变,为一标量,称为四矢量(A^μ)和(B^μ)的标量积.可见由(9.67)或(9.65)表示的作用量 S 为一标量,它的值在各惯性系中是一样的.由它取极值确定的运动方程在各惯性系中自然也是一样的.这就保证了运动方程在各惯性系中有相同的形式,从而符合相对性原理.

将作用量(9.65)表示成(4.2)的形式,其中的拉氏量便是

$$L = -m_0 c\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3}(\dot{x}^i)^2} + eA_0 c + e\sum_{i=1}^{3}A_i\dot{x}^i, \tag{9.73}$$

其中 x^i 和 $\dot{x}^i(i=1,2,3)$分别为广义坐标和广义速度.由于一个四矢量的反变形式和协变形式中空间分量是一样的,在只涉及空间分量时不必分反变和协变,上下标可以混用.也可将广义坐标和广义速度分别写作 x_i 和 $\dot{x}_i(i=1,2,3)$.将拉氏量(9.73)代入拉氏方程(3.115),注意其中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$是随质点(系)运动轨道对时间的微商,因而

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{i'=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x^{i'}}\dot{x}^{i'}, \tag{9.74}$$

得运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=F_i,\qquad i=1,2,3, \tag{9.75}$$

其中力的第 i 分量为

$$F_i=e\left[\left(\frac{\partial A_0}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^0}\right)c+\sum_{i'=1}^{3}\left(\frac{\partial A_{i'}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^{i'}}\right)\dot{x}^{i'}\right]$$

$$=eF_{i\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}=e\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}F_{i\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{9.76}$$

而

$$F_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},\qquad \mu,\nu=0,1,2,3, \tag{9.77}$$

则组成一二阶协变张量. 引进三维矢量 $\mathscr{E}=(\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3)$ 和赝矢量 $\mathscr{B}=(\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3)$, 其各分量的定义为

$$\mathscr{E}_i\equiv\left(\frac{\partial A_0}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^0}\right)c\equiv-\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial t}, \tag{9.78}$$

$$\mathscr{B}_1\equiv\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3},\quad \mathscr{B}_2\equiv\frac{\partial A_1}{\partial x^3}-\frac{\partial A_3}{\partial x^1},\quad \mathscr{B}_3\equiv\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}. \tag{9.79}$$

如果确认 $\Phi=cA^0=-cA_0$ 为电磁场的标势; (A_1,A_2,A_3) 为它的三维矢势, 此二式即式(5.263)和(5.264), 其中定义的 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 便分别是电场强度和磁感应强度. (9.76)表示的就是力

$$\boldsymbol{F}=e\mathscr{E}+e\boldsymbol{v}\times\mathscr{B} \tag{9.80}$$

的第 i 分量. 与(5.261)和(5.262)比较知, 此式右边第一项是电磁场对质点作用的电力, 第二项为磁力, 即洛伦兹力. 常数 e 乃是质点的电荷. (9.80)表示的电磁力的功率为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=e\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{v}=-ec\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}F_{0\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{ec}{\gamma}F^0{}_\mu\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{9.81}$$

末一等号处用到 $F^0{}_\mu=g^{0\nu}F_{\nu\mu}=-F_{0\mu}$. 按定义(9.48)和(9.57), (9.76)和(9.81)给出

$$Q^\mu=eF^\mu{}_\nu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau},\qquad \mu=0,1,2,3. \tag{9.82}$$

它们显然组成一反变四矢量. 这便保证了力(9.76)作用下质点的运动方程(9.75)的形式在洛伦兹变换下不变, 从而符合相对性原理.

§9.4 相对论开普勒问题

质点在平方反比力

$$\boldsymbol{F} = -\frac{C}{r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{9.83}$$

作用下的相对论力学问题称为相对论开普勒问题. 平方反比力为中心力, (1.37)证明的角动量守恒在此条件下成立, 质点因而作平面运动. 可采用以力心为极的平面极坐标 r 和 θ 表示质点在运动平面内的位置. 按(1.38)第一式质点速度的极坐标表示为

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{r}_0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0. \tag{9.84}$$

取拉氏函数

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{C}{r} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2}{c^2}} + \frac{C}{r}, \tag{9.85}$$

代入拉氏方程(3.115), 可得平方反比力(9.83)作用下质点的相对论运动方程(9.47). 由这个拉氏函数可得与广义坐标 r 和 θ 正则共轭的广义动量

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0\dot{r}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad 和 \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_0r^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.86}$$

拉氏函数不显含时间, 因而存在由(3.120)定义的守恒能量

$$E = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{C}{r}, \tag{9.87}$$

恰为质点本身的能量(9.55)和平方反比力(9.83)的势能

$$V(r) = -\frac{C}{r} \tag{9.88}$$

之和. 由(9.84)得

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = -\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{c^2m_0^2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right).$$

由此解得

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{1}{c^2m_0^2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right). \tag{9.89}$$

利用此式可从(9.87)右边消去 v, 整理后得

$$\left(\frac{E+\frac{C}{r}}{m_0c^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{c^2m_0^2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right). \tag{9.90}$$

θ 为循环坐标, p_θ 守恒, 此式实为 r 对时间的一阶微分方程, 原则上可由积分得到 r 随时间的变化. 然而更令人感兴趣的是运动轨道的几何图像, 它表现

为 r 与 θ 的关系. 由(9.86)得

$$\frac{p_r}{p_\theta}=\frac{\dot r}{r^2\dot\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta},\tag{9.91}$$

其中 $u\equiv\frac{1}{r}$. 代入(9.90)得

$$1+\frac{p_\theta^2}{m_0^2c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2\right]=\left(\frac{E+Cu}{m_0c^2}\right)^2.\tag{9.92}$$

将此式两边对 θ 微商一次后成为

$$p_\theta^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\frac{C}{c^2}(E+Cu)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}.$$

约去公因子$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$后整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\lambda^2(u-\zeta)=0,\tag{9.93}$$

其中

$$\lambda^2=1-\frac{C^2}{p_\theta^2c^2}\quad\text{和}\quad\zeta=\frac{CE}{p_\theta^2c^2-C^2}.\tag{9.94}$$

为常数. 自然,公因子$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$只在它不为零处才能约掉. 然而,一般说来$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=0$只在一些孤立点上成立,除这些孤立点外(9.93)成立. 由于经典力学中各量皆连续变化,(9.93)在这些孤立点上必也成立. 只有一种情形要另作处理,即圆轨道. 在此轨道上处处$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=0$. 好在这是最简单的情形,容易处理.

线性非齐次方程(9.93)的通解为

$$u=\zeta\{1+e\cos[\lambda(\theta-\theta_0)]\},$$

e 与 θ_0 为积分常数. 适当选取极轴方向可令 $\theta_0=0$,从而

$$u=\zeta[1+e\cos(\lambda\theta)],$$

或

$$r=\frac{\eta}{1+e\cos(\lambda\theta)},\tag{9.95}$$

其中常数

$$\eta\equiv\frac{1}{\zeta}=\frac{p_\theta^2c^2-C^2}{CE}.\tag{9.96}$$

如果 $\lambda=1$,方程(9.95)为一圆锥曲线. 开普勒轨道为圆锥曲线正是§1.5中非相对论力学的结果. 现在(9.94)第一式表明 $\lambda^2<1$,(9.95)表示的不再是圆锥曲线. 不过它所表示的曲线与圆锥曲线有密切关系. 将此曲线与具相同常数 η 和 e 的圆锥曲线(1.59)比较,存在点与点间的对应. 用(r_1,θ_1)表圆锥曲线

(1.59)上一点的极坐标,(r_2,θ_2)表曲线(9.95)上对应点的极坐标.对应关系为

$$r_2 = r_1, \quad \lambda\theta_2 = \theta_1.$$

由于 $\lambda<1$, $\theta_2=\dfrac{\theta_1}{\lambda}>\theta_1$,与圆锥曲线 θ_1 方向上一点对应的曲线(9.95)上的点在 θ_2 方向上,相对前者进动了

$$\theta_2 - \theta_1 = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\theta_1.$$

对应圆锥曲线为椭圆的情形最形象.设 $\theta_1=\theta_2=0$ 对应轨道的近日点,即与力心最近的一点. $\theta_1=2\pi$ 为质点沿椭圆轨道运行一周后到达近日点的极角,近日点还在原来位置上.沿轨道(9.95)运行的质点回到近日点的极角为 $\theta_2=\dfrac{2\pi}{\lambda}$,近日点已不在原来位置上而进动了角度

$$\Delta\theta = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)2\pi. \tag{9.97}$$

这立刻使人想到§5.7提到的水星近日点进动有待说明的每世纪 $41.45'' \pm 0.9''$的余额.然而由水星参数按(9.97)和(9.94)算出的近日点进动仅 $7''$每世纪,远不足以说明这一余额.

将(9.89)代入(9.87)右边得哈密顿量

$$H = \sqrt{\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right)c^2 + m_0^2c^4} - \frac{C}{r}, \tag{9.98}$$

它不显含时间.引进哈密顿特征函数 $W(r,\theta)$,它满足不含时间的哈密顿-雅可比方程

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]c^2 + m_0^2c^4} - \frac{C}{r} = E, \tag{9.99}$$

E 为质点包括静能 m_0c^2 在内的总能量.移项后平方可将此式有理化为

$$\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]c^2 = \left(E + \frac{C}{r}\right)^2 - m_0^2c^4. \tag{9.100}$$

显然可分离变量,即作分解

$$W(r,\theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta). \tag{9.101}$$

代入上式得

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]c^2 = \left(E + \frac{C}{r}\right)^2 - m_0^2c^4. \tag{9.102}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}W_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = p_\theta \tag{9.103}$$

为常数,(9.102)成为径向方程

$$\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r} = \pm\sqrt{E^2 - m_0^2c^4 + \frac{2EC}{r} - (p_\theta^2c^2 - C^2)\frac{1}{r^2}}\,\frac{1}{c}. \tag{9.104}$$

由于

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r} \tag{9.105}$$

为实数,(9.104)右边根号下不得为负数.对 $E < m_0c^2$ 的情形这使 r 不得趋于无穷,质点只在有限范围内运动,成为多周期运动.对这种可分离变量的多周期运动宜采用 §5.5 介绍的作用量-角变量.方向变化一周期 θ 增加 2π,θ 自由度一周期作用量遂为

$$J_\theta = \oint p_\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi p_\theta. \tag{9.106}$$

对 $p_\theta^2c^2 > C^2$ 的情形,为保证(9.104)根号下非负,r 也不得趋于零.于是,这个根号下表达式作为 $\frac{1}{r}$ 的二次式的两个根

$$\frac{1}{r_1} = \frac{EC + \sqrt{E^2C^2 + (E^2 - m_0^2c^4)(p_\theta^2c^2 - C^2)}}{p_\theta^2c^2 - C^2} \tag{9.107}$$

和

$$\frac{1}{r_2} = \frac{EC - \sqrt{E^2C^2 + (E^2 - m_0^2c^4)(p_\theta^2c^2 - C^2)}}{p_\theta^2c^2 - C^2} \tag{9.108}$$

皆正且 $r_1 < r_2$.由于 $\frac{1}{r} \to +\infty$ 处这个表达式为负,它在此二根之间取正值,r 的变化区间遂为 (r_1, r_2);$r = r_1$ 处为近日点,质点与力心距离最小;$r = r_2$ 处为远日点,质点与力心距离最大.在从 r_1 到 r_2 运动时 $p_r > 0$,(9.104)右边根号前应取正号,从 r_2 向 r_1 运动时 $p_r < 0$,该处应取负号.径向一周期作用量为

$$\begin{aligned} J_r &= \oint p_r \mathrm{d}r = \frac{2}{c}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{E^2 - m_0^2c^4 + \frac{2CE}{r} - (p_\theta^2c^2 - C^2)\frac{1}{r^2}}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{c}\int_{r_1}^{r_2}(p_\theta^2c^2 - C^2)^{1/2}\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{9.109}$$

作变换

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\psi \\ &= A + B\cos\psi, \end{aligned} \tag{9.110}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{EC}{p_\theta^2c^2-C^2},\\ B &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{\sqrt{E^2C^2+(E^2-m_0^2c^4)(p_\theta^2c^2-C^2)}}{p_\theta^2c^2-C^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9.111}$$

(9.109)中的积分

$$\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}\,\mathrm{d}r=\int_0^{\pi}\frac{B^2\sin^2\psi}{(A+B\cos\psi)^2}\mathrm{d}\psi. \tag{9.112}$$

容易验证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left[\frac{B\sin\psi}{A+B\cos\psi}-\psi+\frac{2A}{\sqrt{A^2-B^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}\tan\frac{\psi}{2}\right)\right]=\frac{B^2\sin^2\psi}{(A+B\cos\psi)^2}, \tag{9.113}$$

因此

$$\int_0^{\pi}\frac{B^2\sin^2\psi}{(A+B\cos\psi)^2}\mathrm{d}\psi=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}-1\right)\pi. \tag{9.114}$$

将这个结果代入(9.112)右边并将 A 和 B 的表达式(9.111)代入其中,再将所得代入(9.109)得

$$J_r=\frac{2\pi}{c}\left(\frac{EC}{\sqrt{m_0^2c^4-E^2}}-\sqrt{p_\theta^2c^2-C^2}\right). \tag{9.115}$$

从其中解出 E 得能量与作用量的关系

$$E=\left\{1+\frac{(2\pi C)^2}{[J_rc+\sqrt{(J_\theta c)^2-(2\pi C)^2}]^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}m_0c^2. \tag{9.116}$$

索末菲(A. Sommerfeld)曾在旧量子论框架内将此式量子化以表达原子内电子运动的相对论效应和光谱的精细结构.虽然后来知道索末菲的理论欠缺了一些实质性内容,但当时理论结果与实验数据的高度一致确实令人惊讶,至今仍耐人寻味.原子内电子运动的相对论效应和光谱的精细结构在相对论量子力学中得到完全的说明.

§9.5 质点碰撞 碰撞质点系的能量动量守恒 不变质量与质心系能量 对撞机原理

相遇于一点的质点间的瞬时相互作用称为碰撞,只有碰撞而无其它相互作用的质点系称为碰撞质点系.设质点系所在的空间是均匀的,具有空间平移对称性,哈密顿量与质点系的整体位置无关,则总动量守恒.设质点系经历的时间是均匀的,具有时间平移对称性,哈密顿量不显含时间 t,则系统是保守

的,总能量守恒.在碰撞前和碰撞后以及在两次碰撞之间,总之在没有碰撞的时刻,各质点都是自由的,质点间没有相互作用.在这种时刻,质点系的总能量 E 为各质点能量之和,质点系的总动量 $\boldsymbol{P}$ 为各质点动量之和.用 E_i 和 $\boldsymbol{p}_i$ 表示第 i 质点的能量和动量,这种关系即是

$$E = \sum_i E_i, \qquad \boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i, \tag{9.117}$$

求和遍及该时刻的全部质点.每一质点的能量和动量都组成一四矢量.用 p_i^μ ($\mu=0,1,2,3$)表示第 i 质点的四动量.它们的和

$$P^\mu = \sum_i p_i^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.118}$$

自然也组成一四矢量,这便是质点系的总能量动量四矢量,即总四动量.总能量和总动量守恒就是总四动量守恒.由总四动量与自身的标量积

$$P_\mu P^\mu = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu \equiv - M_0^2 c^2 \tag{9.119}$$

可定义质点系的不变质量 M_0,它自然也守恒.将此式用三维符号写出即

$$E^2 = \boldsymbol{P}^2 c^2 + M_0^2 c^4. \tag{9.120}$$

碰撞质点系的动力学可以很丰富.每次碰撞不仅可以改变各质点的能量和动量,改变各质点的运动方向,还可改变各质点的成分、结构和内部的运动状态,甚至可改变质点的数目,消灭一些质点,产生出另外一些质点.即碰撞不限于散射,也可发生反应.每种反应都有自己的阈能,即发生该反应所需的最低能量.质点系能量越高,能发生的反应种类就越多.观察质点间碰撞的结果是了解质点的性质和结构,了解质点系动力学的手段.一些特定的反应也常用于特定目的.为了实现这类碰撞和反应须供给质点系足够能量.粒子加速器即为此目的而设计建造.(9.120)表明,质点系能量含两部分,一部分 M_0c^2 是与质点系整体运动无关的固有能量,另一部分 Pc 则是质点系整体运动的能量.这两部分的平方和为质点系能量的平方.固有能量 M_0c^2 在各惯性系中取值相同,运动能量 Pc 在各惯性系中取值则可不同.定义总动量 $\boldsymbol{P}=0$ 的惯性系为质点系的质心系,在质心系中质点系的能量即为其固有能量 M_0c^2.反应是一种事件,是否发生了此事件在各坐标系中看是一样的,只是事件发生的时空位置在各坐标系看可不相同.可见反应发生的条件应是在洛伦兹变换下不变的,从而应和质点系的整体运动无关.反应产生的能量条件便只表现为对固有能量 M_0c^2 的要求,也就是对不变质量 M_0 的要求.这一点又可表述为:质点系能量 E 中只有固有能量 M_0c^2 可用来产生反应,而运动能量 Pc 则要留作维持质点系整体运动之用.

传统的二质点碰撞实验中,一个质点固定不动,称为靶质点,另一质点射向靶质点,称为入射质点.这样观察碰撞的坐标系称为实验室系.为了达到给

定反应的阈能只能加速入射质点.这样做的结果也使质点系的质心被加速,输给质点系的能量中一部分成了不能引起反应的质心运动能量而被浪费.当加速能量与质点本身的固有能量相比很小时这种浪费不严重,尚可接受;当加速能量大大超过质点本身的固有能量时这种浪费变得很严重,成为不可接受的.以两个静止质量同为 m_0 的质点间的碰撞为例.称靶质点为质点 1,它的能量和动量分别为

$$E_1 = m_0c^2 \quad 和 \quad \boldsymbol{p}_1 = 0.$$

称入射质点为质点 2,它的能量和动量分别为

$$E_2 = mc^2 = \gamma m_0c^2 \quad 和 \quad \boldsymbol{p}_2,$$

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 为时间膨胀因子.这个二质点系的总能量和总动量分别为

$$E = E_1 + E_2 = (\gamma + 1)m_0c^2 \quad 和 \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2.$$

它的固有能量便是

$$\begin{aligned} M_0c^2 &= \sqrt{E^2 - \boldsymbol{P}^2c^2} = \sqrt{(m_0c^2 + E_2)^2 - \boldsymbol{p}_2^2c^2} \\ &= \sqrt{2m_0c^2(m_0c^2 + E_2)} = \sqrt{2(\gamma + 1)}\,m_0c^2, \end{aligned}$$

第三等号处用了质点 2 的能量动量关系 $E_2^2 - \boldsymbol{p}_2^2c^2 = m_0^2c^4$.固有能量与总能量之比

$$\frac{M_0c^2}{E} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \tag{9.121}$$

为总能量用于碰撞的利用系数.当质点 2 的速度 v 趋于光速时 $\gamma \to \infty$,此系数趋于零.当前,电子与电子间高能碰撞实验中 γ 已达 10^4 或更高.这说明,若只加速其中的一个电子,而让靶电子静止,则能量仅 10^{-2},即百分之一被用于碰撞,99% 被浪费于两个电子的整体移动.在核子与核子间或核与核间的高能碰撞中,γ 也已达到或将要达到 10^2 至 10^3 量级.若只加速一个核子或核,而让另一靶核子或核静止,能量也仅有十分之一用于碰撞,十分之九被浪费于两个核子或两个核的整体移动中.为避免这种损失可采用质点对撞的办法.即将两个质点向相反方向加速,让它们在动量大小相等方向相反的条件下迎头相撞.对静止质量相同的两个质点,就是将它们向相反方向加速到同样能量,然后令它们迎头相撞.在这种碰撞中,二质点系总动量为零,输给质点系的能量全部成为用于碰撞的固有能量,利用系数为 1 而无浪费.碰撞直接在质心系中实行.这便是对撞机的原理.

当然有利必有弊.对撞无能量浪费是以质点互相撞着为前提的.对撞双方质点均在束流中,没有高密度的靶.这使质点互相撞着的机会大大降低,没有

撞着的质点便连同其能量一起浪费掉.要使对撞机发挥优越性必须有高流强加速器技术.

§9.6 运动介质中的波 相对论多普勒效应

考虑在某种介质中传播的波.设介质均匀,其中波的基本形式便是平面波

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

这是复形式,实际物理量的波动可用它的实部或虚部表示.本节考虑波的传播,并不关心波的具体内容,即不关心它是什么波,在什么介质中传播.因此集中注意其相位

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t, \tag{9.122}$$

特别是其中的色散关系 $\omega(\boldsymbol{k})$.设介质相对于惯性系 S′静止.在此坐标系看 t' 时刻 $\boldsymbol{r}'=(x',y',z')$处波的相位为

$$\Phi'(\boldsymbol{r}',t') = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}' - \omega' t' = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t'. \tag{9.123}$$

另有一惯性系 S,起始时刻 $t=t'=0$ 与 S′重合,即此时它的原点和 x、y、z 轴与 S′的原点和 x'、y'、z'轴重合.S′相对 S 以速度 v 沿 x 方向运动.S 则以速度 $-v$ 沿 x'方向相对 S′运动.两坐标系的时空坐标按(9.13)或(9.25)作洛伦兹变换.在不同坐标系看,同一时空点上波的相位应相同,因此在 S 系看,t 时刻 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$处波的相位应是

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \Phi'(\boldsymbol{r}',t'). \tag{9.124}$$

将(9.13)代入(9.123)右边再将结果代入此式右边,与(9.122)比较得

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{v}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z, \quad \omega = \frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.125}$$

这便是波的圆频率和波矢量的洛伦兹变换.将其中的第一、四两式微分得

$$\mathrm{d}k_x = \frac{\mathrm{d}k'_x + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}\omega'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{v}{c^2}u'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}k'_x, \quad \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\omega' + v\mathrm{d}k'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u'_x + v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathrm{d}k'_x,$$

其中 $u'_x \equiv \frac{\partial\omega'}{\partial k'_x}$为 S′系中看到的波的群速度 x 分量.两式相比得 S 系中看到的波的群速度 x 分量

$$u_x \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_\lambda} = \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}. \tag{9.126}$$

对沿 x 方向传播的波，群速度只有 x 分量，此式成为 S 系中沿 x 方向波的群速度 u 和 S′系中沿 x 方向波的群速度 u' 的关系

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{9.127}$$

与(9.33)比较知，波的群速度与粒子的速度满足同样的速度相加定理.

设波在静止介质中以光速 c 传播，$u' = c$，代入(9.127)右边得 $u = c$，即在 S 系中看，运动介质中波也以光速 c 传播.注意，这里用到介质、静止介质和运动介质诸概念.不妨设这介质是以太，看会得什么结果.设 S′为静止于绝对静止的以太中的坐标系，S 为随地球运动的坐标系，它以速度 v 相对以太沿 $-x$ 方向运动.既然光行差的存在表示以太未被地球带动，在迈克耳孙-莫雷实验中它也应未被带动.以太相对地球成了运动介质.那么，在其中以光速 c 传播的光在地球上看传播速度是多大呢？按速度相加定理(9.127)，它还是 c，与地球相对以太的运动速度无关.这样也给出迈克耳孙-莫雷实验的零结果.可见，为解释迈克耳孙-莫雷实验并在同一基础上解释光行差以及类似现象，并不必否定绝对静止的以太，也就不必否定绝对空间.在这里，它是速度相加定理(9.127)的结果，也就是借以导出此定理的洛伦兹变换的结果.只要采用洛伦兹变换，说有绝对空间或绝对静止的以太也好，说没有绝对空间或没有绝对静止的以太也好，都能解释实验.而违背洛伦兹变换则不论怎么说都不能解释实验.自洛伦兹等老一辈物理学家辞世后，已没有什么显赫的物理学家坚持绝对空间和绝对静止以太的概念，来反对相对论.这并不是因为这种概念被实验证伪，而恰是因为人们认识到这些概念既不能被实验证实也不能被实验证伪，是形而上学的.这里采用西方哲学对形而上学的定义，即是物理学后面的(metaphysics)，或非物理学的.物理学要求它的每一概念和命题都要能被实验证实.作为它的对立面，形而上学只要求它的概念和命题不被证伪，因而可包含既不能证实也不能证伪的纯思辨内容.物理学既拒绝思辨内容，便只保留去掉了这些内容的相对性原理.这就是相对论.

采用时空坐标 x^μ，$\mu = 0,1,2,3$，记

$$k_1 \equiv k_x, \quad k_2 \equiv k_y, \quad k_3 \equiv k_z, \quad \text{和} \quad k_0 \equiv -\frac{\omega}{c}, \tag{9.128}$$

(9.122)可表示为

$$\Phi = k_\mu x^\mu. \tag{9.129}$$

将(9.15)的逆变换写作

$$x^\mu = b^\mu{}_\nu x'^\nu, \tag{9.130}$$

代入上式右边得

$$\Phi = k'_\mu x'^\mu,$$

其中

$$k'_\mu = k_\nu b^\nu{}_\mu. \tag{9.131}$$

由(9.130)知

$$b^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}, \tag{9.132}$$

按定义(2.116),变换(9.131)表明四个分量

$$k_\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{9.133}$$

组成一协变四矢量.由于它的三个空间分量是波矢量 $\boldsymbol{k}$,这个四矢量被称为波四矢.它的反变形式为 $k^\mu = g^{\mu\nu}k_\nu$, $\mu = 0,1,2,3$.用三维等号写出就是

$$k^1 = k_x, \quad k^2 = k_y, \quad k^3 = k_z, \quad \text{和} \quad k^0 = \frac{\omega}{c}. \tag{9.134}$$

再看运动波源产生的波.设波源相对介质以速度 v_0 沿 x 方向运动.在波源静止的坐标系中圆频率为 ω_0 的源振动产生圆频率为 ω_0 的波,介质则以速度 $-v_0$ 沿 x 方向运动.在介质静止的坐标系中看,这个波的圆频率 ω 和波矢量沿波源运动方向的分量 k_x 按(9.125)第四式与 ω_0 有关系

$$\omega_0 = \frac{\omega - v_0 k_x}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}.$$

设静止介质中波的色散关系为 $\omega = ku$, k 为波矢量长, u 为波速,上式可表示为

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \dfrac{v_0}{u}\cos\theta'} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}, \tag{9.135}$$

其中 θ' 为波传播方向与波源运动方向的夹角.运动波源产生的波的圆频率 ω 与波源的圆频率 ω_0 不同,这便是多普勒效应.与这一效应的非相对论表达式(8.168)相比,此处只多一因子 $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}$,是时间膨胀效应的表现.由于 c 已专用于表示光速,该处的波速 c 现改用 u 表示.对沿与波源运动方向垂直的方向传播的波, $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta' = 0$.按非相对论表达式(8.168),在此方向上 $\omega = \omega_0$,没有多普勒效应.而按相对论表达式(9.135),在此方向上

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}, \tag{9.136}$$

仍有因时间膨胀导致的多普勒效应,称横向多普勒效应.横向多普勒效应是一

种相对论效应.对以光速 c 传播的波,(9.135)成为

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\theta'}\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \tag{9.137}$$

§9.7 相对论流体力学

流体由密度场、速度场和压力场描述.这种描述自然与坐标系有关.在每一时空点可选择一坐标系,令该时空点流体的速度为零.如此定义的惯性系为流体在该时空点的瞬时局域静止坐标系.这种坐标系与统一描写流体的惯性系之间差一洛伦兹变换,这一变换给出流体在该点的速度,称为洛伦兹推动.对每一个场 $f(\boldsymbol{r},t)$ 可定义另一个场 $f_0(\boldsymbol{r},t)$,它取 $f(\boldsymbol{r},t)$ 变换到 $(\boldsymbol{r},t)$ 时空点瞬时局域静止坐标系的值.例如由密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 可定义 $\rho_0(\boldsymbol{r},t)$,称为静止密度场.压力场 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 本身就是在瞬时局域静止坐标系中定义,因而有 $\mathscr{P}_0(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$.不论采取何种惯性系来统一描写流体,各量变到瞬时局域静止坐标系后取值都一定,即 $f_0(\boldsymbol{r},t)$ 在洛伦兹变换下不变,是一个标量.静止密度场 $\rho_0(\boldsymbol{r},t)$ 和压力场 $\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$ 都是标量场.经洛伦兹推动后,$(\boldsymbol{r},t)$ 处流体获得速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$,这使沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的长度收缩成原来长度的 $\gamma^{-1}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍,而垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的两个方向上的长度不变.结果使体积收缩成原来体积的 γ^{-1} 倍,其中所含流体的静止质量却不变,因而静止质量密度

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \gamma\rho_0(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho_0(\boldsymbol{r},t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9.138}$$

这就是流体的密度场.要注意的是,在相对论中质量随速度变化,不同于静止质量而与能量成正比,这种质量密度实际就是能量密度.流体力学中不同于能量密度场 $\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的密度场 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 乃是静止质量的密度场.

$\rho_0(\boldsymbol{r},t)$ 既是标量,它与(9.42)定义的四速度相乘便是一四矢量

$$j^\mu(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(\boldsymbol{r},t)u^\mu(\boldsymbol{r},t), \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{9.139}$$

由(9.41)和(9.43)知它的时间分量和空间分量分别为

$$j^0(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(\boldsymbol{r},t)\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \rho(\boldsymbol{r},t)c, \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t). \tag{9.140}$$

与(8.1)比较知,其中的空间分量 $\boldsymbol{j}$ 为流密度矢量,而时间分量 j^0 则与密度 ρ

仅差一常因子 c. 由于 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu=0,1,2,3$, 按协变矢量变换,

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} \tag{9.141}$$

为一标量. 这便保证了连续性方程(8.2)在洛伦兹变换下不变, 从而已满足相对性原理.

欧拉方程(8.5)是由非相对论的牛顿方程导出的, 不会满足洛伦兹变换下的相对性原理. 为了将它改造成相对论的, 先作一点分析. 在牛顿力学的范围内, ρ 既是质量密度 ρv 便是动量密度. 它的第 i 分量可记为

$$\frac{1}{c}T^{i0} \equiv \rho v^i. \tag{9.142}$$

由于流体流动而导致的动量 i 分量沿 i' 方向的流密度应为 $\rho v^i v^{i'}$. 不过动量的变化不仅由于动量随流体的流动而且由于流体受的力. 在没有外力作用的条件下这力便来自流体本身的压力 $\mathscr{P}$. 在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 单位时间内流出单位体积的 i 方向动量为 $\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(\rho v^i v^{i'})$, 由于压力从单位体积传出的 i 方向动量为 $\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^i}$. 定义

$$T^{ii'} \equiv \rho v^i v^{i'} + \mathscr{P}\delta_{ii'}, \qquad i, i' = 1,2,3, \tag{9.143}$$

t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处单位时间单位体积损失 i 方向动量 $\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial T^{ii'}}{\partial x^{i'}}$. 注意单位体积 i 方向动量即 i 方向动量密度(9.142), 可见动量守恒要求

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} = -\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial T^{ii'}}{\partial x^{i'}}.$$

将此式写成四维形式即

$$\frac{\partial T^{i\mu}}{\partial x^\mu} = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{9.144}$$

按爱因斯坦求和约定左边对 $\mu=0,1,2,3$, 求了和. 将(9.142)和(9.143)代入此式, 连续性方程(8.2)保证

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(\rho v^{i'}) = 0,$$

这使(9.144)只剩下

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho \sum_{i'=1}^{3} v^{i'} \frac{\partial v^i}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^i} = 0.$$

这正是矢量欧拉方程(8.5)的第 i 分量. 欧拉方程在此表现为流体动量密度的连续性方程, 表示动量守恒.

将三维方程(9.144)扩大成四维方程应能得到四矢量方程, 从而满足相对

性原理.为此要定义 $T^{0\mu}$. T^{i0}为 i 方向动量的密度, $T^{ii'}$则为 i 方向动量沿 i' 方向的流密度.能量与动量组成四矢量, T^{00}应为能量密度, $T^{0i'}$则应为能量沿 i' 方向的流密度. $T^{\mu\nu}$, $\mu,\nu=0,1,2,3$,应组成四维二阶反变张量,称为流体的能量动量张量.如找到这个张量的表达式便可建立能量和动量的连续性方程

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0,\quad \mu=0,1,2,3. \tag{9.145}$$

这是一个四维矢量方程因而在洛伦兹变换下形式不变.其中的三个空间分量便是欧拉方程的相对论形式.

为求 $\boldsymbol{r}$ 点 t 时刻的能量动量张量,先变换到该时空点的瞬时局域静止坐标系.在这一坐标系中能量动量张量最简单.由于流体速度为零,按(9.142)和(9.143)

$$T^{i0}=0,\quad T^{ii'}=T^{i'i}=\mathscr{P}g^{ii'},\quad i,i'=1,2,3. \tag{9.146}$$

其中后一式表明($T^{ii'}$)作为三维二阶张量是对称的.设此对称性可推广到四维,则 $T^{0i}=T^{i0}$.用 $\mathscr{E}_0$ 表示此点的静止能量密度,便有

$$T^{00}=\mathscr{E}_0,\quad T^{0i}=0,\quad i=1,2,3. \tag{9.147}$$

沿 x 方向产生速度 v 的洛伦兹推动即洛伦兹变换(9.25).其实可把任何方向称为 x 方向,将 x 方向理解为$\boldsymbol{v}$ 的方向,(9.25)可表为三维矢量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2}\cdot\boldsymbol{r}'+\gamma\boldsymbol{v}t',\quad t=\gamma t'+\frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'. \tag{9.148}$$

将此式再表示成(9.130)的形式,得其中的系数

$$\left.\begin{aligned} &b^0{}_0=\gamma,\quad b^0{}_i=\gamma\frac{v_i}{c},\quad b^i{}_0=\frac{v^i}{c},\quad i=1,2,3,\\ &b^i{}_{i'}=\delta^i{}_{i'}+(\gamma-1)\frac{v^iv_{i'}}{v^2},\quad i,i'=1,2,3, \end{aligned}\right\} \tag{9.149}$$

$v^i=v_i$ 为速度$\boldsymbol{v}$ 的第 i 分量,

$$\delta^i{}_{i'}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=i',\\ 0, & \text{否则.}\end{cases} \tag{9.150}$$

将(9.145)和(9.147)定义的瞬时局域静止坐标系中的能量动量张量($T^{\mu\nu}$)改记为($T'^{\mu\nu}$),腾出($T^{\mu\nu}$)表示统一描写流体的惯性坐标系中的能量动量张量,它由($T'^{\mu\nu}$)经洛伦兹推动(9.130)得到:

$$T^{\mu\nu}=b^{\mu}{}_{\mu'}b^{\nu}{}_{\nu'}T'^{\mu'\nu'},\quad \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{9.151}$$

将(9.146)、(9.147)和(9.149)代入此式右边得

$$T^{\mu\nu}=\mathscr{P}g^{\mu\nu}+(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^{\mu}u^{\nu}}{c^2},\qquad \mu,\nu=0,1,2,3, \tag{9.152}$$

(u^{μ})为(9.42)定义的四速度.此式表示的显然是一四维二阶反变张量的诸分

量,它们组成流体的能量动量张量.将此张量代入(9.145),它的时间分量方程便是

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^0u^\nu}{c^2}\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}. \tag{9.153}$$

注意四速度的空间分量与时间分量的关系

$$u^i=\gamma v^i=\frac{u^0}{c}v^i,\quad i=1,2,3, \tag{9.154}$$

(9.145)中空间分量方程可表示为

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x^i}+\frac{v^i}{c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^0u^\nu}{c^2}\right]+(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{u^0u^\nu}{c^3}\frac{\partial v^i}{\partial x^\nu}=0,\quad i=1,2,3. \tag{9.155}$$

将(9.153)代入左边第二项,经整理后可将此式表示成三维形式

$$(\mathscr{P}+\mathscr{E}_0)\frac{\gamma^2}{c^2}\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\left[\nabla\mathscr{P}+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}\right]. \tag{9.156}$$

这就是相对论化了的欧拉方程,称为相对论欧拉方程.如前所述,(9.145)的空间分量部分表示动量守恒,时间分量部分表示能量守恒.能量与动量并非彼此独立的,它们之间有能量动量关系.可以认为,欧拉方程(9.156)作为(9.145)的三个空间分量方程包含了方程组(9.145)中四个方程的全部内容.用(9.156)替换(8.5),流体力学方程仍是五个,即欧拉方程(9.156)的三个分量方程,一个连续性方程(8.2),和一个物态方程.未知函数却多出一个$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r},t)$,而成为六个,即速度场$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$的三个分量,压力场$\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$,以及定义在瞬时局域静止坐标系的静止质量密度$\rho_0(\boldsymbol{r},t)$和能量密度$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r},t)$.不过三个函数$\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$,$\rho_0(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r},t)$之间有关系.在力学范围内,在无外力作用的条件下,正是压力作功改变能量.对能量为E体积为$\mathscr{V}$的大块物质,$\mathrm{d}E=-\mathscr{P}\,\mathrm{d}\mathscr{V}$,因而$\mathscr{P}=-\frac{\partial E}{\partial\mathscr{V}}$.现在对流体中某单位静止质量用这个关系.单位静止质量的体积ρ_0^{-1}称为比容,单位静止质量的能量$\mathscr{E}_0\rho_0^{-1}$称为比能,按上述关系

$$\mathscr{P}=-\frac{\partial\mathscr{E}_0\rho_0^{-1}}{\partial\rho_0^{-1}}=\rho_0\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial\rho_0}-\mathscr{E}_0. \tag{9.157}$$

可见只要知道了$\mathscr{E}_0$与ρ_0的关系就可知道$\mathscr{P}$与ρ_0的关系.用关系

$$\mathscr{E}_0=\mathscr{E}_0(\rho_0) \tag{9.158}$$

作流体物质的物态方程.用此方程和(9.157)一起取代原先的物态方程(8.6).它们连同欧拉方程(9.156)和连续性方程(8.2)共有六个方程,恰为六个未知函数$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$,$\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t)$,$\rho_0(\boldsymbol{r},t)$和$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r},t)$的完备方程组.连续性方程中诸量可按

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad 和 \quad \boldsymbol{j}=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v} \tag{9.159}$$

用 ρ_0 和 $\boldsymbol{v}$ 表出. 用(9.157)可将(9.156)表示为

$$\rho_0\mu_0\gamma^2\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\left[\nabla\mathscr{P}+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}\right], \tag{9.160}$$

其中

$$\mu_0\equiv\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial\rho_0} \tag{9.161}$$

称为流体物质的化学势. 在 $v<<c$ 的条件下, $\gamma\sim1$, $\mu_0\sim1$, $\rho_0\sim\rho$, $\frac{v}{c}\sim0$, (9.160)遂还原为非相对论欧拉方程(8.5). 用(9.161)可将(9.157)改写为

$$\mathscr{P}=\rho_0\mu_0c^2-\mathscr{E}_0. \tag{9.162}$$

将此式两边对任一时空坐标 ξ 作偏微商

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\xi}=\rho_0\frac{\partial\mu_0}{\partial\xi}c^2+\mu_0c^2\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi}-\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi}.$$

再次用(9.161)得

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial\xi}=\rho_0c^2\frac{\partial\mu_0}{\partial\xi}. \tag{9.163}$$

代入(9.160)右边可将它变为

$$\mu_0\gamma^2\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\left[c^2\nabla\mu_0+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mu_0}{\partial t}\right]. \tag{9.164}$$

采用对时间的全微商符号

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla), \tag{9.165}$$

(9.164)可表示为

$$c^2\nabla\mu_0+\boldsymbol{v}\frac{\partial\mu_0}{\partial t}+\mu_0\gamma^2\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=0.$$

用并矢 $\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{c^2}$ 左乘此式, 得

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\mu_0+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\mu_0}{\partial t}\boldsymbol{v}+\mu_0\frac{\gamma^2}{c^2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=0.$$

用 γ^2 乘此式后与上式相加, 得

$$c^2\nabla\mu_0+\gamma^2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\mu_0+\gamma^2\frac{\partial\mu_0}{\partial t}\boldsymbol{v}+\gamma\mu_0\frac{\mathrm{D}\gamma\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=0.$$

以 γ 除此式, 合并左边第二、三两项, 得

$$\gamma^{-1}\nabla\mu_0c^2+\gamma\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{D}\mu_0}{\mathrm{D}t}+\mu_0\frac{\mathrm{D}\gamma\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=0.$$

将后两项合并再将 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 代入，可将此式表示为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\mu_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\nabla(\mu_0 c^2). \tag{9.166}$$

这是与欧拉方程(9.156)相当的流点运动方程，它具有典型的相对论质点运动方程的形式.

认为静止质量密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 满足连续性方程(8.2)便假设了流体的总静止质量守恒.这只有当流动为纯力学的、其间未发生反应、没有物质转化的条件下才是正确的.在流速可与光速相比的相对论条件下，物质的转化和反应是很可能发生的事.在这种反应中，一部分静止质量可能被释放为运动能量，也可能有运动能量凝固成静止质量.静止质量很可能不守恒.如果出现这种情况就要另找一个守恒量，用它的密度 ρ 和流密度 $\boldsymbol{j}$ 代替静止质量的密度和流密度.(8.2)也应理解为这一量的连续性方程.经此替代后流体力学的整个形式理论体系仍然成立.在实际问题中，这种替代的守恒量并不难找.最常用的是某种粒子的数目，例如重子数或轻子数等.

§9.8 光速极限与因果性

(9.46)和(9.47)表明，一个静止质量非零的质点当速度接近光速时质量会越来越大，从而越来越难加速.(9.55)和(9.46)则表明，要使它达到光速必须向它作功无穷，输给它无穷多的能量.换句话说，就是任何有穷的作用不可能使它达到光速.只有静止质量为零的质点会以光速运动.在此条件下，质点的能量为不定型，即可取任何值.静止质量为零的质点的任意小能量的运动恒以光速进行.于是相对论为人们描写了这样一幅运动图像：静止质量非零的质点以低于光速的速度运动，静止质量为零的质点以光速运动.光速表现为速度的极限.

光速极限概念常遭误解，例如，以为这使人在有生之年到达数兆光年之遥的星体成为不可能的事.其实不然.只要能使飞船获得足够能量，从而非常接近光速，在飞船中的人看到的是那颗星体以非常接近光速的速度迎面而来.由于洛伦兹收缩，他发现那颗星体与他的距离不是数兆光年而是很近，例如只有十光年.于是大约十年后他便到达那个星球.如果那颗星真的适合人类生存，他和与他同行的伙伴便可在上面建立新家园.不过，他留在地球上的伙伴是看不到这一切的.在他们看来，那颗星仍有数兆光年之遥，在飞船飞行不到这个

距离的万分之一，即不到一百光年的时候，便一个个离开了人世．只有那活过两兆岁的精灵才能收到一兆年前从那颗星球发回的电视信息．精灵看到那个二十岁时离开地球的宇航员一兆零二十岁了，还像三十岁人那样年轻．这便是时间膨胀．可见光速极限并不限制人的行为能力，而只限制观察结果．

现在看看，若有超光速运动会出现什么现象．将此运动的方向称为 x 方向．设在 S 坐标系看 t_1 时刻有信息自 x_1 处发出，在 $t_2=t_1+\Delta t$ 时刻到达 $x_2=x_1+\Delta x$ 处并被接收，$\Delta t>0$，$\Delta x>0$．于是 t_1 时刻在 x_1 处发出信号在先，是原因；t_2 时刻在 x_2 处收到信号在后，是结果．按(9.13)，起始时刻 $t'=t=0$ 与 S 重合相对 S 以速度 v 沿 x 方向运动的坐标系 S′中看，事件(x_1, t_1)发生在时刻

$$t'_1=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

事件(x_2, t_2)发生在时刻

$$t'_2=\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

两式相减得时间差

$$\Delta t'=t'_2-t'_1=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1-\frac{v}{w}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Delta t, \tag{9.167}$$

其中

$$w=\frac{c^2}{u}, \tag{9.168}$$

而 $u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$是 S 系中看到的信号传递速度．若这速度超光速，$u>c$，则 $w<c$，因而有小于光速的速度 $v>w$．当 S′系以此速度 v 相对 S 运动时其中的观察者看到了 $\Delta t'<0$，即看到信号被接收的事件(x_2, t_2)在先，它的发射事件(x_1, t_1)在后．因果时序被颠倒，因果律被破坏．可见超光速的信息传递导致因果律的破坏．实际上并未发现任何破坏因果律的事例，而一般认为因果律是不能破坏的．由此得出的结论便是：不存在超光速的信号传递．或者说不存在超光速运动．

习 题 九

1．从洛伦兹变换(9.13)解出 x、y、z 和 t，将它们表示成 x'、y'、z'和 t'的函数．试证，

这样得到的逆变换正是洛伦兹变换(9.25).

2. 从速度相加公式(9.33)中解出 u',将它表示成 u 和 v 的函数.试证,此函数为

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \tag{9.169}$$

可称为速度相减公式.这个结果表明速度的加减法虽复杂,相减仍是相加的逆运算.

3. 设惯性系 S′相对惯性系 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动.用 $(\boldsymbol{r}, t)$ 表示 S 系中观察到的一事件的径矢量和时间,$(\boldsymbol{r}', t')$ 表示 S′系中观察到的同一事件的径矢量和时间.起始时刻两坐标系原点重合.试证,由 S 系到 S′系的洛伦兹变换可表示为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{v^2} \cdot \boldsymbol{r} - \gamma \boldsymbol{v} t, \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}, \tag{9.170}$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ 为时间膨胀因子.

4. 将上题中的洛伦兹变换表示成(9.15)的形式,求出其中变换系数 $a^{\mu}{}_{\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ 的表达式.

5. 设在第 3 题所述情形中有一质点相对 S′系以速度 $\boldsymbol{u}'$ 运动.试证此质点相对 S 系的运动速度为

$$\boldsymbol{u} = \frac{\gamma^{-1}\boldsymbol{u}' + \left[1 + (1 - \gamma^{-1})\dfrac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\right]\boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}}. \tag{9.171}$$

此式是速度相加公式(9.33)的推广.

6. 设在第 3 题所述的情形中另有一惯性坐标系 S″,起始时原点与 S 和 S′的原点重合,它相对 S′以速度 $\boldsymbol{v}'$ 运动.在 S 看来在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 出现而在 S′系看来在 $(\boldsymbol{r}', t')$ 出现的那个事件在 S″系看来在 $(\boldsymbol{r}'', t'')$ 处出现.试证 S″系与 S 系间的洛伦兹变换可表示为

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r} + (\gamma'' - 1)\frac{\boldsymbol{v}''\boldsymbol{v}''}{v''^2} \cdot \boldsymbol{r} - \gamma'' \boldsymbol{v}'' t, \quad t'' = \gamma'' t - \frac{\gamma''}{c^2}\boldsymbol{v}'' \cdot \boldsymbol{r}, \tag{9.172}$$

其中 $\gamma'' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v''^2}{c^2}}}$,

$$\boldsymbol{v}'' = \frac{\gamma^{-1}\boldsymbol{v}' + \left[1 + (1 - \gamma^{-1})\dfrac{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\right]\boldsymbol{v}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}}. \tag{9.173}$$

7. 设在第 3 题所述情形中有一波包以群速度 $\boldsymbol{u}'$ 相对 S′系运动.试证,此波包相对 S 系运动的群速度 $\boldsymbol{u}$ 也由(9.171)式表达.

8. 设在纬度为 30°的某宇航基地垂直向上发射一宇宙飞船.发射前,面向东的宇航员看见北极星在他左侧偏离前方 60°处.发射后飞船很快加速到 $0.8c$,并沿直线向前飞行,未发生绕前进方向的转动.求此时宇航员看到的北极星方位.

9. 设上题中宇航员的目标是距地球 8 光年的某星球,问他用了多长时间才到达该星球?

10. 平均寿命为 τ 的某种粒子 N_0 个，时间 t 后尚余

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9.174}$$

个，此式可作为 τ 的定义. 已知 μ 子静止时的平均寿命为 2.2×10^{-6} s，问 N_0 个 μ 子以速度 $0.5c$ 飞行 20 km 后尚余多少？

11. 写出带电粒子在均匀恒定电场中的相对论运动方程，解出它的轨道方程，讨论质量随速度变化的效应.

12. 写出并求解带电粒子在均匀恒定磁场中的相对论运动方程.

13. 设有某致密星体，质量为 2.5×10^{30} kg，半径为 1.25 km，试用牛顿万有引力定律求出它的表面重力加速度，然后用相对论力学求解它表面的自由落体运动.

14. 设 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 为一标量场. 试证积分

$$S = -\mathrm{i}\int_{(x^\mu(0))}^{(x^\mu(1))}(m_0+\phi)c\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} \tag{9.175}$$

在洛伦兹变换下不变. 将此积分写成(4.2)的形式，求出拉氏函数，导出拉氏方程. 将此方程与流点的运动方程(9.166)比较，讨论所得结果.

15. 将(9.116)右边当作相对论开普勒问题的哈密顿量，试证作用量 J_r 与 J_θ 守恒，并导出径向运动频率 ν_r 和转动频率 ν_θ 的表达式.

16. 分别用 $x^\mu(\mu=0,1,2,3)$ 和闵可夫斯基时空坐标 $x^\mu(\mu=1,2,3,4)$ 两种符号表示出洛伦兹变换(9.13)和(9.25).

17. 用闵可夫斯基坐标表示洛伦兹变换(9.170)和(9.148).

18. 模仿(9.42)和(9.44)定义闵可夫斯基四速度和四动量

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad 和 \quad p^\mu = m_0u^\mu, \quad \mu = 1,2,3,4, \tag{9.176}$$

写出它们与三维量 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{p}$ 和 E 的关系.

19. 模仿(9.133)定义闵可夫斯基波四矢

$$k_\mu = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1,2,3,4, \tag{9.177}$$

写出它与三维量 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 的关系.

20. 试证闵可夫斯基四矢量的协变形式和反变形式相同，因而不必区分协变和反变.

第十章　广义相对论力学

§10.1　等效原理与广义相对性原理

上章叙述的相对性原理只适用于一类特别的参考系，即惯性系，因而称为特殊相对性原理或狭义相对性原理．爱因斯坦不满足于这一原理，不仅由于它只适用于一类参考系，不是普遍的，而且还由于，如本书一开始就指出的，它适用的惯性系只是实际参考系的一种极限或一种抽象，严格说来，在实际中它并不存在．卫星绕行星转；行星绕恒星转；恒星们组成星云和星系团，这些星云和星系团也各自绕一个中心在转．遥远的星系团之间也以引力相互作用，彼此并非作等速直线运动．严格的惯性系何处可建？面对此情此景，一个彻底相对论者的自然选择便是取消惯性系的特殊地位，将物理规律表达成对所有坐标系相同的形式．广义相对性原理的思想由此而生．然而在一个坐标系看来作等速直线运动的质点在另一相对此坐标系作加速运动的坐标系看来则在作加速运动．为了将力学规律在这两个坐标系中表达成相同的形式，必须认为在后一坐标系中质点还受到一项附加力的作用．这就是§1.2介绍过并在§4.1和§4.2中讨论过的惯性力．不过一般人认为，惯性力只是一种虚假的力，是惯性在非惯性系中的表现，将它称为力是人为的．爱因斯坦却希望将惯性力等价于一种自然力，这样广义相对性原理才表现为自然的，而不是人为的．他注意到惯性力与万有引力间的共同点，即它们导致的质点加速度与质点本身的性质无关，或者说它们的大小都与受作用质点的质量成正比．这一论断的正确性是以牛顿运动方程(1.4)右边的质量 m，即惯性质量，与牛顿万有引力定律(1.80)右边的质量 m，即引力质量，相等为前提的．由于可改变引力常数 G，实际上只要求这两种质量成正比即可．只是要作为一个基本理论的基础，这种正比关系必须是严格的而不是近似的，就像作为狭义相对论基础的光速不变原理要求光速是一个严格的常数而不是近似的常数那样．

牛顿本人即以严肃态度检验他的两个定律中的质量是否相等．他用金、银、玻璃、面包、食盐、木头、水、小麦等不同材料做成重量相同的芯，放在大小、形状和重量都相同的木盒子中，成为重量、形状和大小都相同的摆锤悬于

11ft* 长的相同细线的末端，做成单摆. 让它们在相同起始条件下摆动，比较摆的周期. 按 § 3.6 例 1 的推理，单摆周期应正比于 $\sqrt{\frac{m_I}{m_G}}$，其中 m_I 和 m_G 分别为摆锤的惯性质量与引力质量. 若各种材料的这两种质量比值都相同，各单摆的周期应相等，否则周期应不等. 牛顿未观察到超出实验误差范围的差别，并估算得

$$\eta \equiv \frac{|m_I - m_G|}{m_I} < 10^{-3}. \tag{10.1}$$

这类单摆实验后来被多次重复和改进，到 20 世纪初已从它判断[①]

$$\eta < 3 \times 10^{-6}.$$

郁特玉斯[②]采用一种新实验装置将 η 的上限压低到 10^{-9} 量级. 由于这一数据的基本重要性，人们在郁特玉斯的基础上不断提高实验的精确度，已经确证 $\eta < 10^{-12}$. 这类实验称为郁特玉斯实验. 此实验将重量相同的两不同物体悬于一优质扭秤两臂的端点. 物体受的重力中，地心引力沿地球半径向内指向地心；而地球自转导致的惯性离心力则垂直于地轴向外，除沿地球半径向外指向天空的分量外，还有一平行地面指向赤道的分量. 若不同材料比值 $\frac{m_I}{m_G}$ 不同，重量相同的不同物体惯性离心力的水平分量便不同，将它们悬于扭秤两臂端点就会导致绕地球径向的力矩，引起秤的扭转. 在臂沿东西方向时力矩最大，扭转也最明显. 交换两臂端点的物体，秤将向另一方向扭转. 量出这两次扭转位置的差，便可算出 η 值.

郁特玉斯的实验已使爱因斯坦确信：

每一物体的引力质量恒等于它的惯性质量. 这便是**等效原理**. 在此基础上他进一步确信**广义相对性原理**：

在所有坐标系中物理规律皆相同.

是一条自然规律. 坐标系加速导致的附加惯性力被确认为与万有引力属同一本质. 爱因斯坦还特别用密封在升降机内的观察者来说明广义相对性. 当升降机相对地面作加速运动时，观察者只觉得升降机内每一物体受的力都变了，然而他无法用升降机内的实验判断，这究竟是由于升降机在相对地面作加速运动呢，还是重力“真的”发生了变化. 特别当升降机自由下落时，他发现所有物体受的重力全部消失，他的升降机宛如一个无重力条件下的理想惯性参考系.

---

* 1 ft = 0.3048 m.

① H. H Potter, *Proc. Roy. Soc.* (London) **104**(1923)588, **113**(1927)731.

② R. v. Eötvös, *Math. Nat. Ber. Ungarn*, **8**(1890)65.

由(9.46)和(9.47)知,物体的惯性质量随它的速度变化.等效原理要求引力质量也以相同的方式随速度变化.或者说按质能关系(9.55),每份能量,不论它是物体静止时就有的固有能量还是因运动而获得的动能,抑或由于各部分相互作用而来的势能,都应以相同的方式对惯性质量和引力质量作贡献.这一认识是否正确还需实验检验.其实,稍作分析便知,这一认识已由前述实验证实.各种材料都由原子和分子组成,原子和分子又都由原子核和电子组成,原子核本身则由核子组成.当这些基本粒子组成宏观物体时,不仅它们各自的静止质量成为物体静止质量的一部分,而且电子和原子核在原子分子内部,以及核子在原子核内部运动的动能和它们间相互作用的势能都已按质能关系(9.55)成为物体静止质量的一部分.在原子核层次这一点已很明显.原子核内核子运动的动能和相互作用的势能平均约贡献原子核静止质量的0.9%,而且其中动能的贡献为正,势能的贡献为负,0.9%是它们互相抵消的结果.动能和势能各自贡献的绝对值要由理论推算.原子核理论尚不成熟,多种模型理论并存,推算的结果各异.算得低的也有5%,算得高的可达15%,总之,占物体静止质量的显著部分.不同材料的静止质量中,各基本粒子的静止质量、动能和势能占的百分比各不相同.如果对各种材料证实了惯性质量与引力质量的比$\frac{m_I}{m_G}$为一常数,也就证明了其静止质量中的各成分,即各基本粒子的静止质量、动能和势能,贡献的惯性质量与引力质量的比为同一常数.在取恰当单位后它们各自贡献的惯性质量便都等于引力质量.

如前所叙,等效原理保证可通过变换到自由下落的坐标系消去均匀恒定引力场.然而,如果引力场不是均匀恒定的,便不可能如此消去.不过仍然可以期望如此消去某一点附近的引力场,即

"在每一时空点可选择一坐标系,从其中看,自然规律在该点附近的表现与在无重力条件下的惯性系中的表现相同."

这一陈述是前述等效原理的加强,称为**强等效原理**.原先陈述的等效原理称为弱等效原理.有了强等效原理,便可从狭义相对论中已知的自然规律经一坐标变换得到引力场中的广义相对论的自然规律.弱等效原理有相当精密的实验证明,强等效原理则无直接的实验证明.它是在弱等效原理的启发下提出的.而它本身的正确性只能由它的推论与实验的比较来检验,由广义相对论与实验的比较来检验.

§10.2 引力场中质点的运动方程 牛顿引力势在广义相对论中的对应

从两个坐标系S和S′看同一事件,S系看它发生于时空点x^μ,$\mu=0,1,2,$

3, S′系看它发生于时空点 x'^{μ}, $\mu=0,1,2,3$. 两组坐标(x^{μ})和(x'^{μ})表示的是同一时空点, 因而有变换关系

$$x'^{\mu}=x'^{\mu}(x^0,x^1,x^2,x^3),\quad \mu=0,1,2,3. \tag{10.2}$$

它自然应有逆变换

$$x^{\mu}=x^{\mu}(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3),\quad \mu=0,1,2,3, \tag{10.3}$$

除此之外没有别的限制. 变换(10.2)或(10.3)是任意的. 在一时空点附近可将变换写成微分形式

$$\mathrm{d}x'^{\mu}=a^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}x^{\nu},\quad \mu=0,1,2,3,\quad a^{\mu}{}_{\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}},\quad \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{10.4}$$

$$\mathrm{d}x^{\mu}=b^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}x'^{\nu},\quad \mu=0,1,2,3,\quad b^{\mu}{}_{\nu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}},\quad \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{10.5}$$

(10.4)相当于(9.37), (10.5)则相当于(9.130)的微分形式. 只是现在 $a^{\mu}{}_{\nu}$ 和 $b^{\mu}{}_{\nu}$ 不再是常数, 而可以与时空坐标有关. 像§2.6 中那样, 是坐标的微分($\mathrm{d}x^{\mu}$)而不是坐标本身组成反变矢量. 不过现在的坐标除空间坐标(x^1, x^2, x^3)外, 还含时间坐标 x^0. 除此之外, §2.6 的一般结果都可以搬用过来. 时空坐标间隔为($\mathrm{d}x^{\mu}$)的两点间距离平方仍由(9.38)定义, ($g_{\mu\nu}$)为度规张量. 作为二阶协变张量($g_{\mu\nu}$)和两个反变矢量($\mathrm{d}x^{\mu}$)和($\mathrm{d}x^{\nu}$)的标量积, (9.38)定义的距离平方$(\mathrm{d}s)^2$ 在一般坐标变换(10.4)中不变, 是标量. 如前所述, 对每一时空点都存在一个坐标系, 在其中看自然规律在此点的表现与在无重力惯性系中的表现相同. 称此坐标系为该时空点的局域惯性坐标系. 在一点的局域惯性坐标系中该点的度规张量由(9.17)表示. 而在其他坐标系看, 该点的度规张量应由(9.17)经变换得到. S 系的度规张量($g_{\mu\nu}$)和 S′系的度规张量($g'_{\mu\nu}$)间按

$$g_{\mu'\nu'}=g'_{\mu\nu}a^{\mu}{}_{\mu'}a^{\nu}{}_{\nu'},\quad \mu',\nu'=0,1,2,3, \tag{10.6}$$

变换. 设 S′系为某点的局域惯性坐标系, 将(9.17)代入此式右边, 即得 S 系中看该点的度规张量. 一般说来, 这样得到的度规张量不必与(9.17)相同. 即使在一点的局域惯性系中, 其他点的度规张量也不必与(9.17)相同. 一般说来, $g_{\mu\nu}$为时空坐标的函数.

在狭义相对论中, 由作用量(9.64)可导出质点在惯性系中的自由运动方程(9.63). 由于在每一点都可通过变换到局域惯性坐标系将该点的引力消去, 引力场中质点在每一时空点附近的作用量元应可从(9.64)在该点的作用量元变换得到. 由于时空距离元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}} \tag{10.7}$$

和原时元

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} = \frac{i}{c}ds \tag{10.8}$$

都是标量,(9.64)在每一时空点附近的作用量元在变换中都不变.因此可采用(9.64)为引力场中质点运动的作用量,只是其中的 $g_{\mu\nu}$ 与时空坐标有关,不受(9.17)限制.质点的运动轨道使作用量(9.64)取极值就是使两点间的时空距离

$$s = \int_{(x^{\mu}(0))}^{(x^{\mu}(1))} ds = \int_{(x^{\mu}(0))}^{(x^{\mu}(1))} \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} \tag{10.9}$$

取极值.平行于(2.89)~(2.99)的推导,得到符合此条件的质点运动方程

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\kappa}}{d\tau} = 0, \tag{10.10}$$

其中

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\mu'}\left(\frac{\partial g_{\mu'\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu'}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu'}}\right) \tag{10.11}$$

为时空的仿射联络,τ 为(10.8)定义的原时,反变度规张量($g^{\mu\nu}$)由

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa} = \begin{cases} 0, & 若\ \mu \neq \kappa, \\ 1, & 若\ \mu = \kappa, \end{cases} \tag{10.12}$$

定义.(10.10)的解在时空中对应的轨迹为此时空的测地线.

为了理解(10.10),将它用于弱恒定引力场中质点的缓慢运动.由于 $\frac{dx^i}{d\tau} \sim v^i$, $i=1,2,3$, $\frac{dx^0}{d\tau} \sim c$,可在它左边第二项的求和中只保留 $\nu=\kappa=0$ 的项,得近似

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{00}c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \tag{10.13}$$

场是恒定的,$g_{\mu\nu}$ 应与时间无关,按(10.11)

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu'}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\mu'}}. \tag{10.14}$$

场既弱,可设度规($g_{\mu\nu}$)接近闵可规斯基度规(9.17),后者可表示为

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & 若\ \mu \neq \nu, \\ -1, & 若\ \mu = \nu = 0, \\ 1, & 若\ \mu = \nu = 1,2,3. \end{cases} \tag{10.15}$$

弱场度规可表示为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}, \tag{10.16}$$

$\frac{1}{c^2}h_{\mu\nu}$为小量.将此式代入(10.14)右边,取到一级小量,

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2c^2}\eta^{\mu\mu'}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\mu'}}, \tag{10.17}$$

其中闵可夫斯基反变度规张量 $\eta^{\mu\mu'} = \eta_{\mu\mu'}$.将此式代回(10.13),其中的空间分量和时间分量分别为

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0. \tag{10.18}$$

其中第二式表明$\frac{dt}{d\tau}$为常数.将此常数的平方除第一式两边得牛顿方程

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\nabla\phi, \tag{10.19}$$

其中

$$\phi = -\frac{1}{2}h_{00} \tag{10.20}$$

为牛顿引力势.此式右边本有一任意相加积分常数.由于无穷远处边界条件 $g_{00}\to\eta_{00}$, $h_{00}\to 0$,若将无穷远处 ϕ 的值也取为零,则此积分常数应定为零.度规与引力势的关系便是

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right). \tag{10.21}$$

§10.3 时空曲率与物质分布的关系 爱因斯坦场方程 张量分析与黎曼时空

为探讨广义相对论的引力方程,先看它的牛顿极限.设有一质量密度分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$,由于它的引力 $\boldsymbol{r}$ 处质量为 m 的质点有势能

$$V(\boldsymbol{r}) = m\phi(\boldsymbol{r}), \tag{10.22}$$

引力势

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}', \tag{10.23}$$

G 为引力常数.用拉普拉斯算符作用此式两边,为算出右边的结果,需计算它对因子$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$的作用,作用中偏微分只对变量 $\boldsymbol{r}$ 进行.由

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= \sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\\ &= \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\end{aligned}$$

直接算得

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$=-\frac{3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').$$

在 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ 处右边两项恰抵消,结果为零.在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 处,结果为两项无穷大的差,在此式中成为不定型.为将此不定型定下来,将此式第一等号两边在以 $\boldsymbol{r}'$ 为心半径为 ε 的球内积分,得

$$\int_\varepsilon\nabla 2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\sigma\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=-\int_\sigma\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\sigma\mathrm{d}\sigma=-4\pi,$$

其中 σ 为体积分区域的表面,即以 $\boldsymbol{r}'$ 为心半径为 ε 的球面.定义

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\tag{10.24}$$

它有性质

$$\int_\mathscr{V}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{cases}0, & \text{若积分区域 }\mathscr{V}\text{ 中不含 }\boldsymbol{r}',\\ 1, & \text{若积分区域 }\mathscr{V}\text{ 中含 }\boldsymbol{r}'.\end{cases}\tag{10.25}$$

这种函数称为三维 δ 函数.由定义(10.24)知

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}),\tag{10.26}$$

因此(10.25)等价于

$$\int_{\mathscr{V}'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\begin{cases}0, & \text{若积分区域 }\mathscr{V}'\text{ 中不含}\boldsymbol{r},\\ 1, & \text{若积分区域 }\mathscr{V}'\text{ 中含}\boldsymbol{r}.\end{cases}\tag{10.27}$$

利用(10.24)和此式得

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})=4\pi G\rho(\boldsymbol{r}).\tag{10.28}$$

推导中用到

$$\int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\int_{\varepsilon'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$=\rho(\boldsymbol{r})\int_{\varepsilon'}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\rho(\boldsymbol{r}),\tag{10.29}$$

其中 ε' 为 $\boldsymbol{r}'$ 在 $\boldsymbol{r}$ 附近的一个无穷小区域.(10.28)为牛顿引力势 $\phi(\boldsymbol{r})$ 的微分方程,称牛顿引力场方程.由对应关系(10.21),可将此方程表示为

$$\nabla^2 g_{00}=-\frac{8\pi G}{c^2}\rho.\tag{10.30}$$

为符合广义相对性原理,要将它改造成张量方程.质量密度 ρ 乘以常数 c^2 便是能量密度,也就是能量动量张量($T_{\mu\nu}$)的 00 分量.先将(10.30)写成

$$\nabla^2 g_{00}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{00}.\tag{10.31}$$

右边已是张量的一个分量,左边却是度规张量的同一分量经拉普拉斯算符作用的结果.这一结果已不是张量的分量.如能找到一个张量($G_{\mu\nu}$),它的分量G_{00}在牛顿极限下还原成$\nabla^2 g_{00}$,便可用 G_{00}代替(10.31)的左边,并将替代的结果看成张量方程

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{10.32}$$

的第 00 分量方程.($G_{\mu\nu}$)应有下列性质:

1. ($T_{\mu\nu}$)为对称张量,($G_{\mu\nu}$)也应为对称张量,

$$G_{\nu\mu} = G_{\mu\nu}. \tag{10.33}$$

2. (10.32)右边的量纲为(长度)$^{-2}$,$G_{\mu\nu}$也应有此量纲.

3. 在狭义相对论中能量动量守恒可表示为

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0,$$

它在广义相对论中的自然推广为

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{10.34}$$

其中

$$T^{\mu\nu}{}_{;\sigma} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} T^{\tau\nu} + \Gamma^{\nu}_{\tau\sigma} T^{\mu\tau} \tag{10.35}$$

为 $T^{\mu\nu}$的协变微商.平行于(4.168)~(4.180)的论证表明,($T^{\mu\nu}{}_{;\sigma}$)为二阶反变一阶协变张量.(10.34)要求

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{10.36}$$

4. 在牛顿极限下

$$G_{00} \sim \nabla^2 g_{00}. \tag{10.37}$$

除能量动量张量外,已知的对称张量有两个,一是度规张量($g_{\mu\nu}$),另一是瑞奇张量($R_{\mu\nu}$),它的分量按(2.135)定义为

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}, \tag{10.38}$$

其中

$$R^{\sigma}{}_{\mu\tau\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\tau} - \Gamma^{\sigma}_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{10.39}$$

为(2.134)定义的黎曼曲率张量的分量.下面的讨论需要略为深入了解黎曼张量与瑞奇张量.定义全协变黎曼张量的诸分量

$$R_{\sigma\mu\tau\nu} \equiv g_{\sigma\sigma'} R^{\sigma'}{}_{\mu\tau\nu}. \tag{10.40}$$

由仿射联络的定义(10.11)得

$$R_{\sigma\mu\tau\nu} = \frac{1}{2} g_{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ g^{\sigma'\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\rho}} \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{2}g_{\sigma\sigma'}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\left\{g^{\sigma'\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right]\right\}$$

$$+g_{\sigma\sigma'}[\Gamma^{\sigma'}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\tau}-\Gamma^{\sigma'}_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}].$$

由(10.12)、(10.11)和$(g_{\mu\nu})$的对称性知

$$g_{\sigma\sigma'}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g^{\sigma'\rho}=-g^{\sigma'\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g_{\sigma\sigma'}=-g^{\sigma'\rho}(\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma'}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma'}g_{\lambda\sigma}).$$

代入上式,可将它简化为

$$R_{\sigma\mu\tau\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\tau}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}}\right]$$

$$-(\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma'}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma'}g_{\lambda\sigma})\Gamma^{\sigma'}_{\mu\tau}+(\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma}g_{\lambda\sigma'}+\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma'}g_{\lambda\sigma})\Gamma^{\sigma'}_{\mu\nu}+g_{\sigma\sigma'}(\Gamma^{\sigma'}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\tau}-\Gamma^{\sigma'}_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}).$$

将含两个 Γ 因子的项抵消一部分后得

$$R_{\sigma\mu\tau\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\tau}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}}\right]$$

$$+g_{\lambda\sigma'}(\Gamma^{\sigma'}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma}-\Gamma^{\sigma'}_{\mu\tau}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}). \tag{10.41}$$

此式表现出协变黎曼张量的高度对称性质.它包括

1. 对称性

$$R_{\tau\nu\sigma\mu}=R_{\sigma\mu\tau\nu}, \tag{10.42}$$

2. 反对称性

$$R_{\sigma\mu\tau\nu}=-R_{\mu\sigma\tau\nu}=-R_{\sigma\mu\nu\tau}=R_{\mu\sigma\nu\tau}, \tag{10.43}$$

3. 循环对称性

$$R_{\sigma\mu\tau\nu}+R_{\sigma\nu\mu\tau}+R_{\sigma\tau\nu\mu}=0. \tag{10.44}$$

由(10.42)及反变度规张量$(g^{\mu\nu})$的对称性即得由(10.38)定义的瑞奇张量$(R_{\mu\nu})$的对称性.

(10.7)表明度规张量$(g_{\mu\nu})$无量纲,单独不符合对$(G_{\mu\nu})$的第二点要求.(10.38)、(10.39)和(10.11)则表明,瑞奇张量$(R_{\mu\nu})$恰具有(长度)$^{-2}$量纲,符合对$(G_{\mu\nu})$的第二点要求,可作为其中的一项.此外(2.136)定义的曲率

$$R\equiv R^{\mu}_{\ \mu}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{10.45}$$

为一标量,也具有(长度)$^{-2}$量纲.这使张量$(Rg_{\mu\nu})$符合对$(G_{\mu\nu})$的第二点要求,也可成为$(G_{\mu\nu})$中的一项.于是有

$$G_{\mu\nu}=C_1R_{\mu\nu}+C_2g_{\mu\nu}R. \tag{10.46}$$

如果不愿引进具有量纲的参数,这便是符合第1、2两点要求的 $G_{\mu\nu}$ 的一般形式,其中的常数 C_1 和 C_2 可由第3、4两条件确定.

在一点的局域惯性坐标系中看,质点在该点作自由运动,加速度为零,从而

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3.$$

与(10.10)比较知,这表明该点的仿射联络

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0, \qquad \lambda,\mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{10.47}$$

这使许多关系变得简单.特别是协变微商在该点成为普通微商.为使由此作的分析有扎实基础,先证明每一时空点都确实有局域惯性坐标系,从其中看(10.47)在该点成立.设已有一坐标系 S,一点的坐标在其中用(x^μ)表示.对所考虑的那个时空点,S 系坐标为

$$x^\mu = x^\mu_0, \quad \mu = 0,1,2,3.$$

变换到另一坐标系 S′,一点的坐标在其中用(x'^μ)表示.对所考虑的那个时空点,S′系坐标为

$$x'^\mu = 0, \quad \mu = 0,1,2,3.$$

将从 S 系到 S′系的坐标变换在此点附近展成泰勒级数,将它表示为

$$x'^\mu = x^\mu - x^\mu_0 + \frac{1}{2!}C^\mu_{\nu\lambda}(x^\nu - x^\nu_0)(x^\lambda - x^\lambda_0)$$

$$+ \frac{1}{3!}C^\mu_{\nu\kappa\lambda}(x^\nu - x^\nu_0)(x^\kappa - x^\kappa_0)(x^\lambda - x^\lambda_0) + \cdots. \tag{10.48}$$

由此得,在所考虑的点(x^μ_0)处

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu, \qquad \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = C^\mu_{\nu\lambda}. \tag{10.49}$$

仿射联络间的变换关系(2.129)可表示为

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma'^{\mu'}_{\nu'\lambda'}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial^2 x'^{\mu'}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}, \tag{10.50}$$

其中 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$为 S 系的仿射联络,$\Gamma'^{\mu'}_{\nu'\lambda'}$为 S′系中的仿射联络.用

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu''}} = \delta^{\mu'}_{\mu''}.$$

可将(10.50)改写为

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma'^{\mu'}_{\nu'\lambda'}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x'^{\mu'}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}. \tag{10.51}$$

将(10.49)代入此式得,(x^μ_0)处

$$\Gamma^{\mu'}_{\nu\lambda} = \Gamma'^{\mu'}_{\nu\lambda} + C^{\mu'}_{\nu\lambda}, \quad \mu',\nu,\lambda = 0,1,2,3.$$

此式表明,若在变换(10.48)中取

$$C^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}, \tag{10.52}$$

则在变换后的 S′系看,在所考虑的时空点 $x'^\mu = 0(\mu = 0,1,2,3)$处仿射联络 $\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = 0$.S′系为此点的局域惯性坐标系.这种变换在每一时空点都可实现.

由(10.11)、(10.12)与($g_{\mu\nu}$)的对称性知

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = g_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} + g_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}. \tag{10.53}$$

在一点的局域惯性系中此点的仿射联络既为零，按此式便有

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0.$$

微分(10.12)后，用此式得

$$\frac{\partial g^{\mu\nu'}}{\partial x^{\lambda}} g_{\nu'\kappa} = 0.$$

乘以 $g^{\kappa\nu}$ 后对 κ 求和，再用(10.12)，此式成为

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0.$$

在仿射联络为零的点，协变微商等于普通微商. 在此点的局域惯性系中

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0, \quad g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0. \tag{10.54}$$

此二式都已是张量方程，在一坐标系中成立便在所有坐标系中都成立. 它们是度规张量的普遍性质.

(10.41)表明，在一点的局域惯性系中此点全协变黎曼张量的协变微商

$$R_{\sigma\mu\tau\nu;\lambda} = \frac{\partial R_{\sigma\mu\tau\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[\frac{\partial^2 g_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\tau}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\tau}}\right].$$

由此容易验证

$$R_{\sigma\mu\tau\nu;\lambda} + R_{\sigma\mu\lambda\tau;\nu} + R_{\sigma\mu\nu\lambda;\tau} = 0. \tag{10.55}$$

这是一张量方程，在一坐标系成立便在所有坐标系中都成立. 这一普遍关系称为比安基(Bianchi)恒等式.

现在计算

$$R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (g^{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\tau\sigma}R_{\sigma\mu'\tau\nu'})_{;\nu}.$$

还是用局域惯性坐标系，以便随意将协变微商写成普通微商或将普通微商写成协变微商，随意将度规张量放在微分号下或抽到微分号外. 于是有

$$R^{\mu\omega}{}_{;\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g^{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\tau\sigma}R_{\tau\nu'\sigma\mu'}) = g^{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\tau\sigma}R_{\tau\nu'\sigma\mu';\nu} = -g^{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\tau\sigma}(R_{\tau\nu'\nu\sigma;\mu'} + R_{\tau\nu'\mu'\nu;\sigma})$$

$$= g^{\nu\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\tau\sigma}(R_{\tau\nu'\sigma\nu;\mu'} - R_{\nu\mu'\nu'\tau;\sigma}) = \frac{\partial g^{\mu\mu'}R}{\partial x^{\mu'}} - \frac{\partial R^{\mu\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = (Rg^{\mu\mu'})_{;\mu'} - R^{\mu\omega}{}_{;\nu},$$

除用到局域惯性系的方便之处外，在第三等号处用了比安基恒等式(10.55)，第四等号处用了反对称性(10.43)和对称性(10.42). 将右边末项移到左边，然后两边再除以 2 得

$$R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}(Rg^{\mu\nu})_{;\nu}. \tag{10.56}$$

此式已是张量方程，因而在任何坐标系中都成立. 将(10.46)代入(10.36)后再

用此式得

$$\left(\frac{C_1}{2}+C_2\right)(g^{\mu\nu}R)_{;\nu}=0.$$

$(g^{\mu\nu}R)_{;\nu}$不会恒等于零,要此式成立,必须也只须$\frac{C_1}{2}+C_2=0$,从而 $C_2=-\frac{C_1}{2}$.代入(10.46)得

$$G_{\mu\nu}=C_1\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right). \tag{10.57}$$

常数 C_1 应由第4个条件(10.37)确定.

在弱场极限下,度规($g_{\mu\nu}$)与(10.15)定义的闵可夫斯基度规($\eta_{\mu\nu}$)的偏差为小量,因而它的微商以及由其微商构成的仿射联络(10.11)也是小量.这使 $R_{\mu\nu}$和R 为小量.在此极限下,(10.57)可近似为

$$G_{\mu\nu}=C_1\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R\right).$$

它是两个小量的差,自然是小量.考虑压力为零的情形.(9.152)显示,在低速运动条件下能量动量张量($T_{\mu\nu}$)的空间分量与时间分量相比是小量.按(10.32),($G_{\mu\nu}$)的空间分量与时间分量相比也应是小量.故可在零级近似中取 $G_{ij}=0, i,j=1,2,3$,从而

$$R_{ij}=\frac{1}{2}\eta_{ij}R,\quad i,j=1,2,3.$$

在此近似下

$$R\simeq\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=\sum_{i=1}^{3}R_{ii}-R_{00}.$$

利用上式,$R_{ii}=\frac{1}{2}R, i=1,2,3$,得

$$R=\frac{3}{2}R-R_{00},$$

即

$$R=2R_{00},$$

于是有

$$G_{00}=C_1\left(R_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}R\right)=2C_1R_{00}. \tag{10.58}$$

到一级近似

$$R_{00}=\eta^{\sigma\tau}R_{\sigma0\tau0}=\sum_{i=1}^{3}R_{i0i0}-R_{0000}. \tag{10.59}$$

在全协变黎曼张量的表达式(10.41)右边,含两个 Γ 因子的项属二级小.到一

级近似

$$R_{\sigma\mu\tau\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\tau\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right].$$

牛顿极限不仅是弱场和低速极限，而且要求引力场恒定，与时间无关，从而任何对时间的微商为零. 由此式得，在此极限下

$$R_{0000} = 0, \qquad R_{i0i0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{i2}}.$$

代入(10.59)得

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00},$$

将此式代回(10.58)得

$$G_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00}.$$

与(10.37)比较知 $C_1 = 1$，从而

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{10.60}$$

将此表达式代入(10.32)便得到度规场($g_{\mu\nu}$)的方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{10.61}$$

称为爱因斯坦场方程. 它将表示时空曲率的曲率张量与表示物质能量动量分布的能量动量张量联系起来. 凡有物质存在的地方能量动量张量非零，曲率张量便也不是零. 物质的存在导致时空的弯曲，而这种弯曲又表现为影响质点运动的引力. 弯曲的时空称为黎曼时空.

如果时空中每点的度规都是(9.17)定义的闵可夫斯基度规，对时空坐标的微商处处为零，则按(10.41)和(10.11)曲率处处为零. 这表明闵可夫斯基时空是不弯曲的，是平直的，相当于欧几里得空间. 若用曲线时空坐标来表示这同一个闵可夫斯基时空，度规张量的各分量自然不再是常数，它们对时空坐标的微商不再总是零，由(10.11)定义的仿射联络也不再恒为零. 然而曲率组成张量，如果在一个坐标系中看它的每一分量在所有时空点上都是零，则在任何坐标系中看它的每一分量也在所有时空点上都是零. 不论从哪个坐标系看闵可夫斯基时空都是处处平直的. 这同一结果也可反过来表达：如果在某一坐标系中看曲率张量的某些分量在某些时空点上非零，则没有任何坐标变换能将所有时空点上的度规都变成闵可夫斯基度规(9.17)，时空必不是平直的，不是闵可夫斯基时空. 能表示成张量方程的关系是与坐标系的主观选择无关的客观关系. 这就是相对论(不论是狭义还是广义相对论)采用张量分析作为数学工具的原因. 相对论强调观察结果总与坐标系的选择有关，是相对的. 然而它追求的却是这种观察所反映的与坐标系选择无关的客观规律，是绝对的客观

实在.

如果允许引进具量纲的常数,则可修改场方程(10.61).爱因斯坦本人就在宇宙论研究中考虑过将(10.61)修改为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{10.62}$$

其中 λ 为具有(长度)$^{-2}$量纲的常数,称宇宙论常数.由于其中的附加项会破坏牛顿极限(10.37),为了保持理论与现有的天文观察一致,常数 λ 必须足够小.

§10.4 质点周围的中心对称引力场 爱因斯坦场方程的施瓦氏解

考虑一个质量为 M 的质点周围的引力场.若无其他物质,此质点应作惯性运动.取随质点运动的坐标系,从其中看质点是静止的.求此质点周围的静态引力场即求周围空间中与时间无关的度规.若只有这一质点,则应有以它所在空间点为中心的中心对称.取此中心为坐标原点,时空位置为$(t, \boldsymbol{r})$和$(t + \mathrm{d}t, \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r})$的两事件间具有此对称的时空距离平方的一般静态形式为

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 = {} & C(r)(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) + D(r)(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2 \\ & + 2E(r)c(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\mathrm{d}t - F(r)c^2(\mathrm{d}t)^2.\end{aligned} \tag{10.63}$$

采用球坐标(r, θ, φ),$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\boldsymbol{r}_0 + r\mathrm{d}\theta\boldsymbol{\theta}_0 + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{\varphi}_0, \tag{10.64}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 分别为 r、θ 和 φ 方向的单位矢量,它们互相垂直.代入上式得

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 = {} & C(r)[(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] \\ & + D(r)r^2(\mathrm{d}r)^2 + 2E(r)cr\mathrm{d}r\mathrm{d}t - F(r)c^2(\mathrm{d}t)^2.\end{aligned} \tag{10.65}$$

为消去时间微分与空间微分的交叉项,作时间变换

$$t' \equiv t + \Phi(r), \qquad \mathrm{d}t = \mathrm{d}t' - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r.$$

这相当于在与中心的不同距离处按不同的方式校准时间.代入(10.65)并令

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{E(r)r}{F(r)c},$$

得

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 = {} & C(r)[(\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] \\ & + G(r)(\mathrm{d}r)^2 - F(r)c^2(\mathrm{d}t')^2,\end{aligned} \tag{10.66}$$

其中

$$G(r) = \left[D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)}\right]r^2.$$

再作变换

$$r' = \sqrt{C(r)}r,$$

这相当于在与中心不同距离处按不同方式校准长度.经此变换后,(10.66)变为

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r')(\mathrm{d}r')^2 + r'^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - B(r')c^2(\mathrm{d}t')^2, \tag{10.67}$$

其中

$$B(r') = F(r), \quad A(r') = \left[1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right]\left[1 + \frac{r}{2C(r)}\frac{\mathrm{d}C(r)}{\mathrm{d}r}\right]^{-2}.$$

去掉 r 和 t 上面的一撇,记 $x^0 = ct$,(10.67)成为

$$(\mathrm{d}s)^2 = A(r)(\mathrm{d}r)^2 + r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2] - B(r)(\mathrm{d}x^0)^2. \tag{10.68}$$

此式或(10.67)称为中心对称时空距离平方的标准形式.它含两个未知函数 $A(r)$和 $B(r)$,应由爱因斯坦场方程和边界条件解出.

在除原点 $r=0$ 以外的整个空间求解爱因斯坦方程(10.61).由于在求解的空间中除引力场外无物质,$T_{\mu\nu}=0$,此方程成为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

乘 $g^{\mu\nu}$后对 μ、ν 求和,第一项得收缩

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R,$$

第二项得收缩

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu}R = 2R,$$

两项相减得

$$R = 0,$$

代回原方程得

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{10.69}$$

由(10.68)看出,在标准形式中,度规张量只有对角分量不是零,它们是

$$g_{00} = -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta. \tag{10.70}$$

反变度规张量便也只有对角分量非零,它们是

$$g^{00} = -\frac{1}{B(r)}, \quad g^{rr} = \frac{1}{A(r)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \tag{10.71}$$

由(10.11)可算出仿射联络,其中的非零分量只有

$$\Gamma^0_{0r} = \Gamma^0_{r0} = \frac{1}{2B(r)}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r}, \tag{10.72}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^r_{00} = \frac{1}{2A(r)}\frac{\mathrm{d}B(r)}{\mathrm{d}r}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2A(r)}\frac{\mathrm{d}A(r)}{\mathrm{d}r}, \\ &\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)}, \end{aligned}\right\} \tag{10.73}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{10.74}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta. \tag{10.75}$$

由(2.135)和(2.134)知

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}. \tag{10.76}$$

将(10.72)～(10.75)代入此式,算得瑞奇张量也只有对角分量不为零,它们是

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\ R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\ R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)}\right) - 1, \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{10.77}$$

每一撇代表对 r 的一次微商.可见(10.69)的 10 个分量方程中 6 个非对角分量方程自动满足.剩下的四个对角分量方程又由于(10.77)的末式只要求解其中的三个,即

$$R_{00} = 0, \qquad R_{rr} = 0, \qquad R_{\theta\theta} = 0. \tag{10.78}$$

由(10.77)的前两式得

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right).$$

由此式和(10.78)的前两式知,在 r 和 $A(r)$有限处

$$\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} = 0. \tag{10.79}$$

此式的积分为 $\ln A + \ln B =$ 常数,即 $AB =$ 常数.要求无穷远处引力趋于零,度规成为闵可夫斯基的,

$$\lim_{r\to\infty} g_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = \eta_{\mu\nu}, \tag{10.80}$$

应有

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1. \tag{10.81}$$

这便确定了积分常数,得

$$A(r)B(r) = 1. \tag{10.82}$$

(10.79)使(10.77)的第二式成为

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)}.$$

由(10.78)的第二个方程知

$$rB''(r) + 2B'(r) = 0.$$

此式的积分为 $r^2B'(r)=$常数,或

$$B'(r) = \frac{\text{常数}}{r^2}.$$

再积一次分,并用无穷远处的边条件(10.81)得

$$B(r) = 1 - \frac{\text{常数}}{r}.$$

最后由(10.70)第一式,(10.21)和质量为 M 的质点周围的牛顿引力势

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \tag{10.83}$$

得上式中的积分常数$=\frac{2GM}{c^2}$,从而有

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \tag{10.84}$$

由(10.82)还得到

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}. \tag{10.85}$$

(10.84)由(10.78)的第二个方程解出,它和(10.85)一起又满足(10.79),因而满足(10.78)的第一个方程.利用(10.79)和(10.82)可将(10.77)第三式表示为

$$R_{\theta\theta} = B(r) + rB'(r) - 1. \tag{10.86}$$

(10.84)显然使此式右边为零,从而满足(10.78)的第三个方程.标准形式(10.68)连同 $A(r)$和 $B(r)$的表达式(10.85)和(10.84)完全满足场方程(10.69)和边界条件(10.80),并符合牛顿极限的要求(10.21).此解于 1916 年由施瓦氏(Schwarzschild)求得,称施瓦氏解.

§10.5 广义相对论开普勒问题 水星的近日点进动

此处将开普勒问题定义为一个质点在另一质点周围引力场中运动的问题.不过引力场已不由牛顿引力势表示,而由爱因斯坦场方程(10.69)的施瓦氏解(10.68)、(10.84)和(10.85)表示.这隐含着假定:运动质点的质量很小,

不影响运动空间的度规.

将(10.74)代入(10.10),得 θ 自由度的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=0. \tag{10.87}$$

此式有特解 $\theta=\frac{\pi}{2}$,表示质点在 xy 平面内运动.由于问题有中心对称,每一过中心的平面都可作 xy 平面,此结果乃是中心对称条件下质点作平面运动的规律在广义相对论中的表现.将(10.72)、(10.73)和(10.75)代入(10.10),得质点在 xy 平面中的运动方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{B'}{B}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=0,\\&\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{B'c^2}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\frac{A'}{2A}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{r}{A}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=0,\\&\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=0.\end{aligned}\right\} \tag{10.88}$$

在此平面内的原时平方按(10.8)和(10.68)为

$$(\mathrm{d}\tau)^2=B(\mathrm{d}t)^2-\frac{A}{c^2}(\mathrm{d}r)^2-\frac{r^2}{c^2}(\mathrm{d}\varphi)^2,$$

由此得

$$B\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]=1. \tag{10.89}$$

此式可作为(10.88)的一个初积分,不难由直接微分验证.(10.88)的第一式和第三式还分别有初积分

$$B\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\kappa \tag{10.90}$$

和

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=h, \tag{10.91}$$

皆可由直接微分验证.κ 和 h 为积分常数.其中 h 为相对论面积速度,即单位原时质点径矢扫过面积的二倍.(10.91)表示的是相对论面积速度守恒,因此是相对论面积定理.(10.90)则相当于能量积分.用(10.90)消去(10.89)中的 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$,用(10.84)消去 B,整理后得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{2GM}{r}=(\kappa^2-1)c^2+\frac{2GM}{c^2}r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2. \tag{10.92}$$

两边除以 $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$ 以消去 $\mathrm{d}\tau$,然后用(10.91)消去 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$,得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + r^2 - \frac{2GM}{h^2}r^3 = (\kappa^2 - 1)c^2\frac{r^4}{h^2} + \frac{2GM}{c^2}r. \tag{10.93}$$

采用变量 $u = \frac{1}{r}$ 可将此式变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2GM}{h^2}u = \frac{\kappa^2 - 1}{h^2}c^2 + \frac{2GM}{c^2}u^3. \tag{10.94}$$

对 φ 微分一次，约去 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$，整理后得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2}\left(1 + \frac{3h^2}{c^2}u^2\right). \tag{10.95}$$

与(1.56)比较知，广义相对论的修正为此式右边括号内的第二项.追溯它的来源则是(10.92)右边的末项.用(10.91)消去此项中的 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$ 后，与该式左边末项相比，可将此修正用一附加势能

$$V_1(r) = -\frac{\zeta}{r^3} \tag{10.96}$$

表示，其中 $\zeta = \frac{GMmh^2}{c^2}$ 为运动常数.

(10.95)右边括号中的第二项

$$\frac{3h^2}{c^2}u^2 = \frac{3r^2}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{3v^2}{c^2} \ll 1, \tag{10.97}$$

其中 $v = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$ 为单位原时内质点走过的横向距离，可解释为质点的横向速度，在非相对论运动中远小于光速 c.可见，此项为典型的相对论修正.记

$$\varepsilon \equiv \frac{3h^2}{c^2}, \qquad \eta \equiv \frac{h^2}{GM}, \tag{10.98}$$

(10.95)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{1}{\eta}(1 + \varepsilon u^2). \tag{10.99}$$

适当选取长度单位可使 u 的量级为 1，此式右边括号内第二项远小于 1，就表现为 $\varepsilon \ll 1$.若置 $\varepsilon = 0$，(10.99)还原为(1.56)，只是将其中的变量 θ 改记成了 φ.因此解为

$$u = \frac{1}{\eta}(1 + e\cos\varphi). \tag{10.100}$$

这是一个椭圆，偏心率为 e，原点 $u = \infty$ 为其一个焦点.e 取为正值，近日点在 $\varphi = 0$ 方向上.这相当于在解(1.58)中置积分常数 $\theta_0 = 0$.若 ε 虽非零却很小，(10.99)的解应可在(10.100)的基础上经小修正得到.设它为

$$u = \frac{1}{\eta}\left[1 + e\cos(\lambda\varphi) + \varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cos(n\lambda\varphi)\right]. \tag{10.101}$$

e 仍为积分常数，$\eta' - \eta$ 和 $\lambda - 1$ 为小量；谐波之和为修正项，也应是小量，因此在其前抽出一因子 ε. 代入(10.99)左边得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{\eta'}\left[1 + e(1-\lambda^2)\cos(\lambda\varphi) + \varepsilon\sum_{n=2}^{\infty} a_n(1-n^2\lambda^2)\cos(n\lambda\varphi)\right].$$

代入它的右边，保留到 ε 的一级小量得

$$\frac{1}{\eta}(1+\varepsilon u^2) = \frac{1}{\eta}\left\{1 + \frac{\varepsilon}{\eta'^2}[1 + 2e\cos(\lambda\varphi) + e^2\cos^2(\lambda\varphi)]\right\}$$

$$= \frac{1}{\eta}\left\{1 + \frac{\varepsilon}{\eta'^2}\left[1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos(\lambda\varphi) + \frac{e^2}{2}\cos(2\lambda\varphi)\right]\right\}.$$

与上式比较常数项、基波和各次谐波系数得

$$\frac{1}{\eta'} = \frac{1}{\eta}\left[1 + \frac{\varepsilon}{\eta'^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\right], \quad 1 - \lambda^2 = \frac{2\varepsilon}{\eta\eta'},$$

$$(1-4\lambda^2)a_2 = \frac{e^2}{2\eta\eta'}; \quad a_n = 0, \quad \text{若 } n > 2.$$

由此得近似表达式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\eta'} = \frac{1}{\eta} + \frac{\varepsilon}{\eta^3}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \quad \lambda^2 = 1 - \frac{2\varepsilon}{\eta^2}, \\ &a_2 = -\frac{e^2}{6\eta^2}; \quad a_n = 0, \quad \text{若 } n > 2. \end{aligned}\right\} \tag{10.102}$$

代入(10.101)便得到方程(10.99)精确到 ε 的一级小的解.

解(10.101)表明，u 为 φ 的周期函数，周期为 $\frac{2\pi}{\lambda}$. 质点两次经过近日点方位角 φ 的变化即为此周期. 质点绕中心转一周 φ 的变化为 2π，与此相比质点要多转

$$\Delta\varphi = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)2\pi \tag{10.103}$$

才能回到近日点. 这便是每周期近日点进动角. 由(10.102)知

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\eta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon}{\eta^2}.$$

在零级近似解(10.100)中

$$\eta = a(1-e^2),$$

a 为椭圆轨道的半长轴长. ε 由(10.98)的第一式表示，其中的面积速度按(1.51)为

$$h = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}/\tau,$$

其中 τ 为质点运动周期，即绕中心转一周的时间. 利用这些表达式可得质点每周期近日点进动角的爱因斯坦公式

$$\Delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2\tau^2(1-e^2)}. \tag{10.104}$$

利用(1.82)可用中心的高斯常数 k^2 消去周期 τ，此式成为

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k^2}{ac^2(1-e^2)}. \tag{10.105}$$

将(9.6)式表示的光速 c、(1.83)式表示的太阳高斯常数 k^2、水星轨道椭圆的半长轴长 $a=5.791\times10^{10}$m 和偏心率 $e=0.2056$ 代入此式，算得水星每运行一周近日点进动的弧度数. 这是个很小的数. 乘以每世纪水星运行周数 415，得水星每世纪近日点进动的弧度数. 再乘 $\frac{180}{\pi}\times3600$ 便是每世纪水星近日点进动的角秒数. 如此算得的水星近日点进动为每世纪 42.95″，与观察值中待说明的余额：每世纪 41.9″±0.5″相符甚好. 水星近日点进动被认为已得到完全的说明. 虽然不时地有人提出这样或那样的质疑，但至今没有确凿的证据否定理论和观察的这种很好的一致.

§10.6 光的引力折射

引力既表现为时空几何结构的变化，便应影响每一时空进程，成为“万有”的. 光的传播是一种时空进程，自然也应受它的影响. 质点运动方程(10.10)是测地线方程，它规定的质点运动轨道使质点经过的任二时空点间的时空距离取极值. 还可模仿 §4.7 引进四维时空中的矢量平移、协变微商和协变曲率诸概念，测地线方程(10.10)表示的就是四速度 $\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$ 的协变微商为零，从中解出的测地线在四维时空中的协变曲率为零. 在平直的闵可夫斯基时空中协变微商便是微商，协变曲率就是曲率，测地线即是直线. 而闵可夫斯基时空中的直线在三维空间看乃是等速直线运动. 另一方面，§10.3 的分析表明，每一时空点都有一局域惯性系，其中仿射联络 $(\Gamma^\lambda_{\mu\omega})$ 在该点的每一分量都是零. 按(10.10)，质点在该点的四加速度 $\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right)$ 为零. 可见运动方程(10.10)的物理意义是，质点每一时刻在自己的局域惯性系中作等速直线运动. 这是等效原理的表现. 这一切自然都应适用于光的传播. 在惯性系中无引力作用的条件下光作等速直线运动. 按等效原理，在一般情形中，在一时空点上的光在该点的局域惯性系中应作瞬时等速直线运动. 然而将方程(10.10)和以上分析直接用于光，有一点困难. 那便是由于光以光速运动，从而在局域惯性系中按(9.41)

$$d\tau = 0. \tag{10.106}$$

由于 $d\tau$ 是标量，此式在所有坐标系中成立. 这使得不能用光本身的原时 τ 的

变化表示光的传播进程.引进另一表示进程的标量 σ 代替 τ 便可克服这一困难.这里要注意,表示是否等速直线运动的是 dx^0、dx^1、dx^2 和 dx^3 的相对比值,而与采用哪个标量 σ 来表示运动的进程无关.

用 σ 代替 τ,(10.10)成为

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu_{\nu\kappa}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\kappa}{d\sigma}=0. \tag{10.107}$$

在此式上乘 $2g_{\mu\mu'}\frac{dx^{\mu'}}{d\sigma}$ 后对 μ 与 μ' 求和,利用(10.11)和(10.12),并注意对下标的对称性得

$$\frac{d}{d\sigma}\left(g_{\mu\mu'}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^{\mu'}}{d\sigma}\right)=0.$$

它的积分为

$$g_{\mu\mu'}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^{\mu'}}{d\sigma}=\text{常数}. \tag{10.108}$$

对光的传播路径,应将右边的积分常数置零,从而有

$$g_{\mu\mu'}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^{\mu'}}{d\sigma}=0. \tag{10.109}$$

与(10.8)比较知,这就是 $d\tau=0$.可见(10.107)与(10.106)相洽.

考虑光在一质点产生的引力场中传播,时空度规由施瓦氏解(10.68)、(10.84)和(10.85)表示.(10.87)现改为

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2=0. \tag{10.110}$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 是它的一个特解,表示光在 xy 平面内传播.光在 xy 平面内的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2t}{d\sigma^2}+\frac{B'}{B}\frac{dt}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma}=0,\\&\frac{d^2r}{d\sigma^2}+\frac{B'c^2}{2A}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2+\frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2-\frac{r}{A}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2=0,\\&\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{dr}{d\sigma}=0,\end{aligned}\right\} \tag{10.111}$$

相当于质点的运动方程(10.88).代入施瓦氏度规后初积分(10.109)成为

$$B\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[A\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2\right]=0, \tag{10.112}$$

它相当于质点运动的初积分(10.89).从(10.111)的第一、三两式也可得初积分

$$B\frac{dt}{d\sigma}=\kappa, \tag{10.113}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}=h. \tag{10.114}$$

它们分别相当于质点运动的初积分(10.90)和(10.91).用$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2$除(10.112)中的每一项得

$$B\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[A\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+r^2\right]=0.$$

用(10.114)除(10.113)得

$$\frac{B}{r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\kappa}{h}.$$

用此式消去上式中的$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}$得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=\frac{\kappa^2c^2}{h^2}r^4-Br^2.$$

再次采用变量$u=\frac{1}{r}$,并用(10.84)消去B得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=\frac{\kappa^2c^2}{h^2}-u^2+\frac{2GM}{c^2}u^3. \tag{10.115}$$

右边末项表示引力效应,在引力不强的条件下,为小修正.若此项可略,方程成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2=\frac{\kappa^2c^2}{h^2}. \tag{10.116}$$

它显然有解

$$u=\frac{1}{R}\cos(\varphi-\varphi_0),\quad \frac{1}{R}\equiv\frac{\kappa c}{h}, \tag{10.117}$$

φ_0为积分常数.适当选取x轴的方向,可将此积分常数置零,从而

$$u=\frac{1}{R}\cos\varphi. \tag{10.118}$$

此式表示$r\cos\varphi=R$为常数,因此是一条与y轴平行且距离为R的直线.引力可略的条件下,光走直线,自然是合理的.

将(10.115)对φ微分一次后约去$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=\frac{3GM}{c^2}u^2. \tag{10.119}$$

在弱引力场中右边为小修正.用零级近似(10.118)代入右边的u中,由此引起的误差应为高级小,因而可略去.如此得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=\frac{3GM}{c^2R^2}\cos^2\varphi. \tag{10.120}$$

它有解

$$u = \frac{GM}{c^2R^2}(1 + \sin^2\varphi), \tag{10.121}$$

属一级小.零级近似(10.118)为(10.120)的齐次方程的解,它与(10.121)的和

$$u = \frac{1}{R}\cos\varphi + \frac{GM}{c^2R^2}(1 + \sin^2\varphi) \tag{10.122}$$

仍为(10.120)的解.第一项为零级近似,第二项为一级修正.直接验证知,到$\frac{GM}{c^2R}$的一级小量,此式满足方程(10.115),且 $\varphi=0$ 方向上 u 达到极大值

$$\frac{1}{R}\left(1 + \frac{GM}{c^2R}\right) \simeq \frac{1}{R},$$

R 为光线与引力中心的最小距离.无穷远处 $u=0$,按(10.122)

$$\frac{1}{R}\cos\varphi + \frac{GM}{c^2R^2}(1 + \sin^2\varphi) = 0. \tag{10.123}$$

若左边表示引力修正的第二项可略,此方程的解为 $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$,表示光线与 y 轴平行.考虑第二项的修正,可令此式中的 $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + \delta$,并将它的左边展成 δ 的幂级数.取到一次幂得

$$\delta = \pm\frac{2GM}{c^2R}, \tag{10.124}$$

其中 $\pm$ 号的取法与$\frac{\pi}{2}$前面 $\pm$ 号的取法相同,即无穷远处光线渐近方位角

$$\varphi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2GM}{c^2R}\right). \tag{10.125}$$

光线在引力场中偏折了

$$2\,|\,\delta\,|\, = \frac{4GM}{c^2R}. \tag{10.126}$$

一个星球对掠它表面而过的光线引力折射最大.对这种最大折射,此式中的 R 为星球半径.太阳半径为

$$R_\odot = 6.9599 \times 10^8\ \mathrm{m}, \tag{10.127}$$

它的高斯常数 $k^2 = GM_\odot$ 由(1.83)表示.将它们代入(10.126),同时将(9.6)式表示的光速 c 代入,得太阳引力对光线的最大偏折角为 $1.75''$.掠过太阳表面的星光要日蚀时才能看到.将它的方向与半年前或半年后夜间看到的同一颗星的星光方向比较,方可定得太阳引力对光线折射的最大偏折角.自 1919 年 5 月日全蚀的首次引力折射观测以来,经许多次日蚀,对数百颗星光的观测,确证了光的引力折射现象.观测到的太阳引力对光线折射的最大偏折角在 $1.57''$到 $2.37''$之间,平均为 $1.89''$,与广义相对论的计算值相符甚好.

§10.7 时间的引力膨胀与光频的引力红移

考察空间中一定点的时间演变.起始事件与终了事件空间坐标相同,$dx^i=0, i=1,2,3$,时间坐标不同,$dx^0=cdt\neq 0$,按(10.8),两事件原时差

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}dt. \tag{10.128}$$

在一点的局域惯性坐标系中,该点的度规为闵可夫斯基度规,$g_{00}=\eta_{00}=-1$,$d\tau=dt$,表明原时 τ 是物体在自己的局域静止惯性系中的时间.这里加了限定词"静止"是为了表明所选局域惯性系相对于原坐标系的瞬时速度为零,以保证在该瞬时从其中看事件发生的空间位置依然静止.实际测量的时间是事先选择的坐标系中的时间 t.由于各时空点的度规可能不同,这个时间 t 称为地方时.在一个空间点不仅可测量该点发生的事件演变中的地方时变化 dt,也可测量其他空间点发生的事件演变中的地方时变化 dt',只要有讯号从发生事件的地点 r' 传到观察者所在地点 r.在恒定引力场中时空结构不随时间变化,起始时刻发出的讯号从 r' 传到 r 所需的时间与终了时刻发出的讯号从 r' 传到 r 所需的时间相等.这使在 r 处接收到两个讯号的时间差 dt' 就是在 r' 处发出两个讯号的时间差,也就是 r' 处发生的事件演变中的地方时变化.这使人可以对不同地点的地方时作实验比较.另一方面,静止惯性系有一定时标,相同的过程经历相同的时间.这使相同过程的原时相同.若在恒定引力场中,一过程在 r 处经历时间 Δt,这同一过程在 r' 处经历时间 $\Delta t'$,由于它们对应同一原时,按(10.128)便有

$$\sqrt{-g_{00}(r)}\Delta t = \sqrt{-g_{00}(r')}\Delta t',$$

或

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r')}}. \tag{10.129}$$

可按此对不同地点的时间作理论比较.还可按(10.21)将此式用引力势 $\phi(r)$ 表示,即

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1+2\phi(r)/c^2}{1+2\phi(r')/c^2}}. \tag{10.130}$$

它表示,同一过程在高引力势处经历时间短,在低引力势处经历时间长.在高引力势处的观察者发现同一过程在低引力势处经历的时间长了,这便是时间的引力膨胀.

最容易比较的时间间隔是光的周期,光本身便可作为从一处传到另一处的讯号.在静止惯性系中,每一种原子发的光频率是固定的,周期是频率的倒

数,因而也是固定的.然而,在引力场中的不同地点,它表现出的周期却不同.可以将(10.130)中的 Δt 和 $\Delta t'$ 分别理解为同一种原子在 $\boldsymbol{r}$ 处和 $\boldsymbol{r}'$ 处发出的同一条光谱线的周期,该式即是这种周期的关系.频率为周期的倒数,用 ν 和 ν' 分别表示同一种原子在 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 处发出的同一条光谱线的频率,按(10.130)有

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi(\boldsymbol{r})/c^2}{1 + 2\phi(\boldsymbol{r}')/c^2}}. \tag{10.131}$$

对不强的引力场,ϕ/c^2 为小量,可将此式右边作二项式展开,取到 ϕ/c^2 的一次项得

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{1 + \phi(\boldsymbol{r})/c^2}{1 + \phi(\boldsymbol{r}')/c^2} = 1 + [\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}')]/c^2.$$

记 $\Delta\nu \equiv \nu' - \nu$,此式又可表示为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r})}{c^2}. \tag{10.132}$$

这结果表明,高引力势处的观察者看低引力势处一个原子发出的一条光谱线频率比那种原子在自己所在处发出的同一条光谱线的频率低.如果是可见光,则光谱线向红色方向移动,称为引力红移.它是时间引力膨胀的表现.

1911 年爱因斯坦预言引力红移后,人们对此作了大量的观察分析和实验检验.第一个目标自然是太阳,它表面的引力势为 $-2.12\times10^{-6}c^2$.地球表面引力势与之相比可当作零.地球上看太阳表面原子光谱与地面原子光谱相比应有红移

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -2.12\times10^{-6}.$$

此量虽小,尚可测量,问题是有其他起因的比这大的频移.例如太阳表面原子热运动引起的多普勒效应频移可达此值的三倍.好在热运动各向同性,迎面而来的原子发的光频率增高,谱线紫移;飞向远方的原子发的光频率降低,谱线红移.这使太阳表面原子光谱线加宽,中心位置尚不致移动.然要确定一个分布的中心只有分布宽度三分之一的移动是困难的,结果不能很精确.加之太阳表面知之不详的对流运动引起的原子光谱的多普勒频移带来更多不确定因素,早年关于太阳表面引力红移的实验结果只做到数量级上与理论一致.到 20 世纪 60 年代初才做到实验值与理论值之比为 1.05 ± 0.05.为了减小其他频移因素的影响,人们把注意力移向密度大的白矮星,例如天狼 B 和波江座 40B.它们的质量为一个太阳质量的量级,半径却比太阳半径小一两个量级.这使它们表面的引力红移比太阳表面大一两个量级,$\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|$ 达 10^{-5}或 10^{-4}量级.这就把引力红移从其他频移中突显出来,有利于提高测量精度.然而对这些远方恒星的质量和半径未能测精确,使引力红移的理论值算不精确,同样导

致理论与实验比较中的困难.估算得波江座 40B 表面引力红移

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -(5.7 \pm 1) \times 10^{-5},$$

实测值为 $-(7 \pm 1) \times 10^{-5}$,也只能说是数量级相符.

1958 年穆斯堡尔[①]发现了能消除 γ 辐射核反冲的效应,称为穆斯堡尔效应.在此基础上发展起一种能精确控制和测量 γ 光频率的技术,使人能测地面上的引力红移.地面高 H 处引力势为 gH, $g = 9.8\text{ms}^{-2}$ 为重力加速度.从该处向上发射 γ 光到高 $H + \Delta H$ 处,按(10.132)应有引力红移

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{g}{c^2}\Delta H = -1.09\Delta H \times 10^{-16}, \tag{10.133}$$

其中 ΔH 为以 m 计的高度差.1960 年蓬德[②]等让 ^{57}Fe 核发出的 14.4keV 的 γ 辐射下落 22.6m,观测它被 ^{57}Fe 核的共振吸收,测得紫移 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$.将 $\Delta H = -22.6\text{m}$ 代入(10.133)得紫移理论值 $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2.46 \times 10^{-15}$,与实测值很好符合.几年后他们将结果改进为

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{实验}} \Big/ \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{理论}} = 0.9990 \pm 0.0076. \tag{10.134}$$

水星近日点进动、光的引力折射和光频的引力红移称为对广义相对论的三个经典实验检验.广义相对论通过了这一系列检验,得到了首肯.然而人们并不满足于此,便去想一个反问题:是否只有广义相对论才能通过这些实验检验?为此提出了一些其他的引力理论.它们也能在当时的精度上符合这些实验.几十年过去了,随着这三个经典实验检验做得越来越细致精确,随着更多的实验检验的提出和实现[③],人们发现广义相对论是能通过所有实验检验的最自然最简单的理论.其他理论总有这样或那样未经实验证明的附加概念.而原有实验精度的每一次提高和每一个新实验的结果,总是有利于广义相对论而不利于其他理论的附加概念.这使越来越多的人相信,广义相对论是这一领域现阶段的最佳理论.

---

① R. L. Mössbauer, *Z. Phys.*, **151**(1958)124, Naturwiss. **45** (1958)538.

② R. V. Pound and G. A. Rebka, *Phys. Rev. Lett.*, **4**(1960)337.

③ 例如参阅秦荣先、阎永廉,广义相对论与引力理论实验检验,上海科学技术文献出版社 1987.

§10.8 广义相对论流体力学
球对称引力场中的流体静力学 致密星体结构

狭义相对论流体力学中流密度四矢量(j^μ)的定义(9.139)和能量动量张量($T^{\mu\nu}$)的定义(9.152)均可推广到广义相对论.它们的连续性方程(8.2)和(9.145)中的微商则应改为协变微商.经此替换后这两式分别成为

$$j^\mu{}_{;\mu} = 0, \tag{10.135}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{10.136}$$

压力表达式(9.157)和物态方程(9.158)是标量间关系,毋需修改,可直接用于广义相对论.这些便构成广义相对论的流体力学方程.协变微商中出现的仿射联络($\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$)代表引力对流体的作用.将能量动量张量(9.152)代入爱因斯坦方程(10.61)右边,得流体的引力场方程.与上述流体力学方程联立,便是流体与引力场组成的系统的完备方程组.

考虑球对称条件下的流体静力学,即流体与引力场均具球对称且不随时间改变的条件.在此条件下,各量均与时间无关,且流体四速度的空间分量 u^1、u^2 和 u^3 处处为零;还可采用时空距离平方的标准形式(10.68),其中度规张量只有对角分量非零,由(10.70)表示.这使

$$j^\mu{}_{;\mu} = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} j^\lambda = \Gamma^\mu_{\mu 0} j^0,$$

而

$$\Gamma^\mu_{\mu 0} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^\nu}\right) = 0, \tag{10.137}$$

因此连续性方程(10.135)自动满足.由(9.152)、(10.35)、(10.54)和(10.137)算得

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{00}(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0)\frac{u^0 u^0}{c^2}. \tag{10.138}$$

其中

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}\right) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \tag{10.139}$$

由(9.58)知,在局域惯性系中标量

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2, \tag{10.140}$$

此式应在所有坐标系中成立.在静止流体中它成为 $g_{00} u^0 u^0 = -c^2$,因此

$$u^0 u^0 = -\frac{c^2}{g_{00}}.$$

将此式和(10.139)一起代入(10.138)得

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2}(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) g_{00}^{-1} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}\right]. \tag{10.141}$$

方程(10.136)可写为

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2}(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) g_{00}^{-1} \frac{\partial g^{00}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{10.142}$$

这好像是四个方程,但在球对称静止流体中各量都只与径向坐标 r 有关,这使 t、θ、φ 三个分量方程成为 $0=0$,自动满足.只剩下径向方程

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial r} = -\frac{1}{2}(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) g_{00}^{-1} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = -\frac{1}{2}(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) \frac{B'}{B}, \tag{10.143}$$

末一等号处用了(10.70)第一式.球对称静止流体中速度场既处处为零,表示流体状态的便是函数 $\mathscr{P}(r)$、$\mathscr{E}_0(r)$和 $\rho_0(r)$.这三个函数有两个关系(9.157)和(9.158),因此只有一个是独立的.将它取为 $\mathscr{P}(r)$,流体状态便由压力场描述.在一定引力场中 $B(r)$一定,压力场可由微分方程(10.143)解出.

现在看问题的另一半,求流体的引力场.为此要解爱因斯坦场方程(10.61).它右边的能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \mathscr{P} g_{\mu\nu} + (\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) \frac{u_{\mu} u_{\nu}}{c^2}. \tag{10.144}$$

采用球对称引力场度规的标准形式(10.70),此式右边第一项只有对角分量非零.静止流体中四速度空间分量为零,使右边第二项只对 00 分量有贡献

$$(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) \frac{u_0 u_0}{c^2} = (\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) g_{00}^2 \frac{u^0 u^0}{c^2} = -(\mathscr{P} + \mathscr{E}_0) g_{00}.$$

将(10.70)代入,能量动量张量的全体非零元素为

$$T_{00} = \mathscr{E}_0 B, \quad T_{rr} = \mathscr{P} A, \quad T_{\theta\theta} = \mathscr{P} r^2, \quad T_{\varphi\varphi} = \mathscr{P} r^2 \sin^2\theta. \tag{10.145}$$

由于这个张量比(10.77)表示的瑞奇张量简单,便于计算,最好改变一下爱因斯坦场方程的形式.在(10.61)两边乘 $g^{\mu\nu}$后对 μ、ν 求和,做收缩,得

$$-R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \tag{10.146}$$

其中

$$T \equiv T^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \tag{10.147}$$

将(10.146)表示的 $-R$ 代回(10.61)左边,移项后得

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{10.148}$$

用 $g^{\mu\nu}$对此式作收缩,便又得到(10.146).代回此式右边就变回到(10.61).可见此式与(10.61)等价,是爱因斯坦场方程的另一形式.将(10.71)和(10.145)代入(10.147),得

$$T = 3\mathscr{P} - \mathscr{E}_0. \tag{10.149}$$

将此式与(10.70)、(10.145)和(10.77)一起代入(10.148),其中 00, rr 和 $\theta\theta$ 三个分量方程分别为

$$\left.\begin{aligned} -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} &= -\frac{4\pi G}{c^4}(\mathscr{E}_0 + 3\mathscr{P})B, \\ \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} &= -\frac{4\pi G}{c^4}(\mathscr{E}_0 - \mathscr{P})A, \\ -1 + \frac{r}{2A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} &= -\frac{4\pi G}{c^4}(\mathscr{E}_0 - \mathscr{P})r^2. \end{aligned}\right\} \tag{10.150}$$

$\varphi\varphi$ 分量方程与 $\theta\theta$ 分量方程只差一因子 $\sin^2\theta$,因此不是独立的.非对角分量方程皆为 0=0,因而自动满足.用 $2B$ 除(10.150)中的第一式,$2A$ 除第二式,r^2 除第三式,然后将结果相加,得

$$-\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}\mathscr{E}_0.$$

乘以 r^2,移项,此式成为

$$-\frac{rA'}{A^2} + \frac{1}{A} = 1 - \frac{8\pi G}{c^4}\mathscr{E}_0 r^2. \tag{10.151}$$

左边为全微分,可表示为

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - \frac{8\pi G}{c^4}\mathscr{E}_0 r^2. \tag{10.152}$$

此式作为 $A(r)$的微分方程,有满足边界条件(10.81)的解

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1}, \tag{10.153}$$

其中

$$M(r) \equiv \int_0^r \mathscr{E}_0(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r'/c^2 \tag{10.154}$$

表示半径为 r 的球内的流体质量.将(10.143)作为$\frac{B'}{B}$的表达式,与 A 的表达式(10.153)一起代入(10.150)的第三式,并用关系(10.151)得

$$-1 + \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right]\left[1 - \frac{r\mathscr{P}'}{\mathscr{E}_0 + \mathscr{P}}\right] + \frac{GM}{c^2 r} = \frac{4\pi G}{c^4}\mathscr{P}r^2.$$

解出 $\mathscr{P}'$,可将此式写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM\mathscr{E}_0}{c^2 r^2}\left(1 + \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{E}_0}\right)\left(1 + \frac{4\pi\mathscr{P}r^3}{c^2 M}\right)\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}. \tag{10.155}$$

将(10.154)对 r 求微商得

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \mathscr{E}_0/c^2. \tag{10.156}$$

将(9.158)代入(9.157)可得函数 $\mathscr{P}(\rho_0)$,与(9.158)表示的函数 $\mathscr{E}_0(\rho_0)$一起可解出函数 $\mathscr{E}_0(\mathscr{P})$及其逆 $\mathscr{P}(\mathscr{E}_0)$.将 $\mathscr{E}_0(\mathscr{P})$代入(10.155)和(10.156),用 $\mathscr{P}$消去 $\mathscr{E}_0$后此二式成为函数 $\mathscr{P}(r)$和 $M(r)$的完备联立方程组.这是两个一阶微分方程,只要给定 $\mathscr{P}$与 M 的初值即可定解.(10.154)表明

$$M(0) = 0. \tag{10.157}$$

可见,只要给定球心的压力 $\mathscr{P}(0)$,即可解出此球形静止流体的压力分布 $\mathscr{P}(r)$和质量分布 $M(r)$.再由函数关系 $\mathscr{E}_0(\mathscr{P})$和 $\rho_0(\mathscr{P})$,便可得其中的分布 $\mathscr{E}_0(r)$和 $\rho_0(r)$.这种球对称静止流体可当作宇宙中一类星体的模型.宇宙中存在密度甚高的星体,称为致密星体,其中物质分布与引力场的相洽,要用广义相对论研究.只要知道了星体物质的物态方程 $\mathscr{P}(\mathscr{E}_0)$或 $\mathscr{E}_0(\mathscr{P})$便可用(10.155)和(10.156)作这种研究.人们发现,这组方程存在$\lim\limits_{r\to\infty}\mathscr{P}(r)=0$的解,当 r 超过某定值时,$\mathscr{P}(r)$便实际上成为零,$M(r)$也实际上不再增长;此定值的下限 R_m 便是此星的半径,$M(R_m)$便是此星的质量,它们都是星中心压力 $\mathscr{P}(0)$的函数.(10.155)和(10.156)最早被奥本海默和沃尔科夫[①]用于致密星体研究,称为奥本海默-沃尔科夫方程.

习 题 十

1. 设电荷为 e 的质点在由四矢势(A_μ)表示的电磁场作用下,在无引力的惯性坐标系中的拉氏量由(9.73)表示.试按等效原理写出它在电磁场和引力场联合作用下的拉氏量,并由之导出运动方程.

2. 试由(9.175)按等效原理写出质点在标量场 $\phi(r,t)$和引力场联合作用下的作用量和拉氏量,导出运动方程.

3. 将狭义相对论中开普勒运动质点的近日点进动公式(9.97)用力心高斯常数 k^2、质点轨道半长轴 a 和偏心率 e 表示出来,并与广义相对论公式(10.105)比较,证明它恰为广义相对论进动值的六分之一.

4. 用第五章讲述的摄动论计算附加势能(10.96)对非相对论开普勒运动的修正.证明它所导致的每周期近日点进动恰由(10.105)表示,

5. 写出质量为 2.5×10^{30}kg,半径为 1.25×10^{3}m 的致密星体表面的时空度规,讨论其上的自由落体运动,并与狭义相对论和非相对论的结果比较.

6. 设有钠原子在上述致密星体表面发出它波长为 5.89×10^{-7}m 的著名黄光,求此光到达地球时的波长.

7. 设某时某地上述致密星体正在天顶,此致密星体发出的可见光极弱,肉眼和一般仪器均观测不到.然而此时此地天顶却有可见星光,据分析是从比致密星体远得多的某星 S 发出的.求 S 星方向与天顶的夹角.

---

① J.R.Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **55**(1939)374.

8. 金星轨道半长轴长 10.821×10^{10}m，偏心率 0.0068，每世纪绕太阳 163 圈，求它每世纪近日点进动的角秒数.与观测值 $8.4''\pm4.8''$比较，作出讨论.

9. 地球轨道半长轴长 14.96×10^{10}m，偏心率 0.0168，求它每世纪近日点进动的角秒数.与观察值 $5.0''\pm1.2''$比较，作出讨论.

10. 如在计算太阳表面光谱相对地面光谱的红移中计及地表引力场的影响，对结果有多大校正.

11. 试估计从月面观测地面光谱红移的可行性.

12. 设某流体物质的物态方程为 $\mathscr{P}=\frac{\mathscr{E}_0}{3}$，试将奥本海默-沃尔科夫方程表示为 $M(r)$ 和 $\mathscr{E}_0(r)$的微分方程，并证明它有一精确解 $\mathscr{E}_0(r)=\frac{3c^4}{56\pi Gr^2}$.讨论此结果.

附录一　矩阵及其本征值问题

§A1.1　基本定义

定义一　排成 f 行 f' 列的 ff' 个数 $\boldsymbol{A}$ 称为一个 $f\times f'$ 矩阵. 其中每个数 $a_{ii'}$ 称为一个矩阵元, 它带两个整数下标, 第一个下标 i 表示它所在的行, 第二个下标 i' 表示它所在的列. 矩阵 A 因而又可表示为 $(a_{ii'})$. $f\times f$ 矩阵为方阵, 称为 f 维矩阵.

定义二　f 行一列矩阵 $\boldsymbol{V}$ 称为 f 维列矢量, 由 f 个数组成. 其中每个数 v_i 称为一个分量, 整数下标 i 表示它所在的行. 矢量 $\boldsymbol{V}$ 因而又可表示为 (v_i).

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \tag{A1.1}$$

为一 2×3 矩阵, 其中 $a_{11}=a_{23}=1$, $a_{12}=a_{22}=2$, $a_{13}=a_{21}=3$.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \tag{A1.2}$$

为一二维矢量, 其中 $v_1=1$, $v_2=0$.

定义三　对每一 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ii'})$ 可定义一 $f'\times f$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ii'})$, 它的矩阵元

$$b_{ii'}=a_{i'i}, \tag{A1.3}$$

这样定义的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵, 记作 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. 即

$$\boldsymbol{B}=\widetilde{\boldsymbol{A}}. \tag{A1.4}$$

例(A1.1)表示的 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

将一个矩阵转置即是将它的行变列, 列变行. 可见转置关系是相互的. 即若 $\boldsymbol{B}=\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 则 $\boldsymbol{A}=\widetilde{\boldsymbol{B}}$.

定义四　f 维列矢量 $\boldsymbol{V}$ 的转置矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ 为一行 f 列矩阵, 称为一 f 维行矢量.

例 列矢量(A1.2)的转置

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = (1 \quad 0)$$

为一二维行矢量.

定义五 由两个 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ii'})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ii'})$ 可定义一个 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ii'})$,其中的矩阵元

$$c_{ii'} \equiv a_{ii'} + b_{ii'}, \quad i = 1,2,\cdots,f, \quad i' = 1,2,\cdots,f'. \tag{A1.5}$$

这样定义的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和,记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}. \tag{A1.6}$$

若将(A1.5)改为

$$c_{ii'} = a_{ii'} - b_{ii'}, \quad i = 1,2,\cdots,f, \quad i' = 1,2,\cdots,f', \tag{A1.7}$$

则称这样定义的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差,记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}. \tag{A1.8}$$

定义六 由一个数 a 和一个 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ii'})$ 可定义一个 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ii'})$,其中的矩阵元

$$c_{ii'} \equiv ab_{ii'}, \quad i = 1,2,\cdots,f, \quad i' = 1,2,\cdots,f'. \tag{A1.9}$$

这样定义的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 a 与 $\boldsymbol{B}$ 的积,记为

$$\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{B} \tag{A1.10}$$

定义七 由一个 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ii'})$ 和一个 $f'\times f''$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{i'i''})$ 可定义一个 $f\times f''$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ii''})$,其中的矩阵元

$$c_{ii''} \equiv \sum_{i'=1}^{f} a_{ii'}b_{i'i''}, \quad i = 1,2,\cdots,f, \quad i'' = 1,2,\cdots,f''. \tag{A1.11}$$

这样定义的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积,记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}. \tag{A1.12}$$

定义八 f 维矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ii'})$ 中 $i=i'$ 的矩阵元 a_{ii} 称为对角元,$i\neq i'$ 的矩阵元 $a_{ii'}$ 称为非对角元.所有非对角元为零的矩阵称为对角矩阵.

定义九 所有对角元皆为 1 的对角矩阵称为幺矩阵,并记为 $\boldsymbol{I}$.

按矩阵乘法的定义七,f 维幺矩阵与任意 $f\times f'$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和任意 $f'\times f$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的积

$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{BI} = \boldsymbol{B}. \tag{A1.13}$$

矩阵中的 $\boldsymbol{I}$ 类似数中的 1.

定义十 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有关系

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \tag{A1.14}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵,记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{A1.15}$$

定义十一 将一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的所有矩阵元都取复共轭，得一矩阵 $\boldsymbol{A}^*=(a_{ij}^*)$. 此矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复共轭.

定义十二 若 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵.

定义十三 若 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

定义十四 称矩阵

$$\boldsymbol{A}^\dagger \equiv \widetilde{\boldsymbol{A}}^* \tag{A1.16}$$

为矩阵 A 的厄米伴随.

定义十五 若 $\boldsymbol{A}^\dagger=\boldsymbol{A}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为厄米矩阵或自伴矩阵. 实厄米矩阵是对称矩阵.

定义十六 若 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定义十七 若 $\boldsymbol{A}^\dagger=\boldsymbol{A}^{-1}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为幺正矩阵.

定义十八 两个 f 维列矢量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的矩阵乘积 $\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{V}$ 为一一行一列矩阵，即是一数，称为此二矢量的对称标量积，也称为行矢量 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ 的对称标量积. $\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{V}$ 也是一数，称为此二矢量的厄米标量积，也称为行矢量 $\boldsymbol{U}^\dagger$ 和 $\boldsymbol{V}^\dagger$ 的厄米标量积.

定义十九 对称标量积为零的二矢量称为彼此对称正交；厄米标量积为零的二矢量称为彼此厄米正交.

由定义十六——十九以及定义十可知：正交矩阵的不同行作为行矢量彼此对称正交，不同列作为列矢量也彼此对称正交，这就是正交矩阵名称的来历. 正交矩阵每一行或每一列与自身的对称标量积为 1. 幺正矩阵的不同行作为行矢量彼此厄米正交，不同列作为列矢量也彼此厄米正交，每一行或每一列与自身的厄米标量积为 1，这就是幺正矩阵名称的来历.

§A1.2 相似变换 正交变换与幺正变换

定义廿 若对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 存在一有逆的矩阵 $\boldsymbol{A}$，使

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}, \tag{A1.17}$$

则称 $\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 从 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{B}'$ 的变换称为相似变换. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，此式可写为

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{A}}, \tag{A1.18}$$

称为从 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{B}'$ 的正交变换. 若 $\boldsymbol{A}$ 为幺正矩阵，(A1.17)可写为

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^\dagger, \tag{A1.19}$$

称为从 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{B}'$ 的幺正变换.

正交变换与幺正变换都是相似变换，对相似变换的一切结论都适用于它们.

定义廿一 f 维矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 对角元的和称为它的阵迹，记为

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) \equiv \sum_{i=1}^{f} b_{ii}. \tag{A1.20}$$

定理一 矩阵的阵迹在相似变换中不变.

证 设 f 维矩阵 $\boldsymbol{B}'=(b'_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 相似，则必有 f 维矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{A}^{-1}$，使

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{ABC}.$$

写成矩阵元的关系便是

$$b'_{il} = \sum_{j,k=1}^{f} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 既互为逆矩阵，按定义十和九，它们的矩阵元有关系

$$\sum_{j=1}^{f} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{f} c_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = k, \\ 0, & \text{若 } i \neq k. \end{cases}$$

可见

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}') = \sum_{i=1}^{f} b'_{ii} = \sum_{i,j,k=1}^{f} a_{ij}b_{jk}c_{ki} = \sum_{j,k=1}^{f} b_{jk} \sum_{i=1}^{f} c_{ki}a_{ij}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{f} b_{jk}\delta_{jk} = \sum_{j=1}^{f} b_{jj} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}).$$

这正是要证的，证毕.

f 维矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 f 维矢量 $\boldsymbol{V}=(v_i)$ 按矩阵乘法相乘，所得为一 f 维矢量

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AV} = (u_i), \quad u_i = \sum_{j=1}^{f} a_{ij}v_j. \tag{A1.21}$$

因此矩阵可视为对矢量的变换或运算. 这种运算是线性的，即若 $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{AV}_1$，$\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{AV}_2$ 则

$$a_1\boldsymbol{U}_1 + a_2\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{A}(a_1\boldsymbol{V}_1 + a_2\boldsymbol{V}_2), \tag{A1.22}$$

a_1 和 a_2 为两个任意的数. 最常用作运算的矩阵为实对称矩阵，如第六章中刚体的转动惯量张量，第七章中的形变张量和应力张量，第八章中的速度梯度张量和黏滞力张量等. 当采用复表示时则常用厄米矩阵作运算，如 §7.3 中的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵等. 实对称矩阵也是厄米矩阵，对厄米矩阵的一切结论都适用于实对称矩阵. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用作对矢量的变换时，常设它有逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 这种矩阵称为非奇异矩阵，或有逆矩阵. 设它将一组矢量 $\boldsymbol{V}_i$，$i=1,2,\cdots,f'$. 变换成另一组矢量

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{AV}_i, \quad i = 1,2,\cdots,f'. \tag{A1.23}$$

若矢量 $\boldsymbol{V}_i$，$i=1,2,\cdots,f'$，是 f' 个线性独立的矢量，则由非奇异矩阵 A 变换得到的 f' 个矢量(A1.23)也是线性独立的. 因否则必存在 f' 个不全为零的数

$a_i, i=1,2,\cdots,f'$，使

$$0 = \sum_{i=1}^{f'} a_i \boldsymbol{U}_i = \sum_{i=1}^{f'} a_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{A}\sum_{i=1}^{f'} a_i \boldsymbol{V}_i .$$

用 $\boldsymbol{A}^{-1}$乘此式两边得

$$0 = \sum_{i=1}^{f'} a_i \boldsymbol{V}_i ,$$

表明 $\boldsymbol{V}_i, i=1,2,\cdots,f'$，不是线性独立的，与前提矛盾.这便证明了上列陈述.

若 $\boldsymbol{A}$ 还是正交矩阵，则由(A1.23)得

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_i \boldsymbol{U}_{i'} = \widetilde{\boldsymbol{V}}_i \widetilde{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}_{i'} = \widetilde{\boldsymbol{V}}_i \boldsymbol{V}_{i'} . \tag{A1.24}$$

此式表明两个矢量间的对称标量积不因用正交矩阵的变换而变.正交变换把对称正交的两矢量变成对称正交的两矢量.若 $\boldsymbol{A}$ 是幺正矩阵，则由(A1.23)得

$$\boldsymbol{U}_i^{\dagger} \boldsymbol{U}_{i'} = \boldsymbol{V}_i^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{A} \boldsymbol{V}_{i'} = \boldsymbol{V}_i^{\dagger} \boldsymbol{V}_{i'} . \tag{A1.25}$$

幺正矩阵实现的变换称为幺正变换，此式表明它不改变两矢量间的厄米标量积，从而把厄米正交的两矢量变换为厄米正交的两矢量.在大多数情况下，经典力学中用的矢量为实矢量，每个分量都是实数.这种矢量的对称标量积和厄米标量积相同，都等同于通常所说的矢量间的标量积.对称正交与厄米正交因此也相同，都等同于通常矢量正交的概念.在现实的三维空间中，正交就是夹角为 90°的意思.实矢量间的正交变换矩阵，矩阵元必全为实数，称为实正交矩阵.实正交矩阵对实矢量的变换为实正交变换.实正交矩阵也是幺正矩阵，实正交变换就是幺正变换.对幺正变换的一切结论皆适用于实正交变换.在第六至八章中讨论的矢量主要为现实的三维空间的实矢量，涉及的变换为矢量系与坐标系的相对转动，这种转动不改变矢量间的标量积，因此是实正交变换，也就是实幺正变换.本节和下节集中讨论厄米矩阵(包括实对称矩阵)的性质和幺正变换(包括实正交变换).

f 维厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对 f 维矢量 $\boldsymbol{V}$ 运算得 f 维矢量

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{V} . \tag{A1.26}$$

用有逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变换矢量，分别将 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 变为

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \quad 和 \quad \boldsymbol{U}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U} . \tag{A1.27}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 有逆，$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{V}'$是一一对应的：每一个 $\boldsymbol{V}$ 对应一个 $\boldsymbol{V}'$，每一个 $\boldsymbol{V}'$都有一个 $\boldsymbol{V}$ 与它对应.且不同 $\boldsymbol{V}$ 对应不同 $\boldsymbol{V}'$，全体 $\boldsymbol{V}$ 对应全体 $\boldsymbol{V}'$.现在问运算(A1.26)在变换后的矢量集中表现为什么关系.为回答此问题，用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对(A1.26)两边的矢量作变换，得

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{V}' . \tag{A1.28}$$

这是一个用矩阵

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$$

对变换后矢量的运算.矩阵 $\boldsymbol{B}'$ 正是用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作相似变换(A1.17)的结果.在 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵或幺正矩阵的情况下,此式分别成为对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的正交变换(A1.18)或幺正变换(A1.19).对厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的幺正变换(A1.19)有性质

$$\boldsymbol{B}'^{\dagger} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\dagger}\boldsymbol{B}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{B}', \tag{A1.29}$$

表明厄米矩阵经幺正变换后仍为厄米矩阵.对实数范围内的问题,$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 为实矢量,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵.$\boldsymbol{B}$ 成为实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 成为实正交矩阵,$\boldsymbol{A}$ 实现的是实正交变换.再具体一点,将(A1.27)中 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}'$ 的变换等同于坐标架转动引起的矢量各分量的变换,$\boldsymbol{A}$ 便是转动变换的实正交矩阵,而实对称张量 $\boldsymbol{B}$ 在坐标架转动中的变换则为实正交变换(A1.18)

§A1.3 厄米矩阵的本征值问题与矩阵的对角化

给定一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可建立它的本征方程

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V} = b\boldsymbol{V}, \tag{A1.30}$$

$\boldsymbol{V}$ 为未知矢量,b 为未知数,能使此方程有非零矢量解 $\boldsymbol{V}$ 的数 b 称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的本征值,而解 $\boldsymbol{V}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与此本征值相应的本征矢量.求解本征值和本征矢的问题称为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的本征值问题.设 $\boldsymbol{B}$ 为 f 维矩阵,矩阵元为 $b_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, f$, $\boldsymbol{V}$ 必为 f 维矢量,用 $v_i (i = 1, 2, \cdots, f)$ 表示它的分量.将(A1.30)左边按矩阵乘法乘开,移项整理后得

$$\left.\begin{aligned} (b_{11} - b)v_1 + b_{12}v_2 + \cdots + b_{1f}v_f &= 0, \\ b_{21}v_1 + (b_{22} - b)v_2 + \cdots + b_{2f}v_f &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{f1}v_1 + b_{f2}v_2 + \cdots + (b_{ff} - b)v_f &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A1.31}$$

这是 f 个未知数 $v_1, v_2, \cdots, v_f$ 的 f 个线性齐次联立方程,有非零解的充分必要条件为系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - b & b_{12} & \cdots & b_{1f} \\ b_{21} & b_{22} - b & \cdots & b_{2f} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{f1} & b_{f2} & \cdots & f_{ff} - b \end{vmatrix} = 0. \tag{A1.32}$$

将左边的行列式乘开得未知数 b 的一个 f 次代数方程,它有 f 个根.每个根代入(A1.31)都得到它的一组非零解 $v_1, v_2, \cdots, v_f$,它们组成的矢量 $\boldsymbol{V}$ 和根 b 一起满足本征方程(A1.30).这样就证明了

引理一 任何矩阵的本征方程都有解.

设 $\boldsymbol{V}_1$ 为一 f 维非零矢量,它至少有一个分量不是零.不失一般性,可称此非零分量为第一分量,记为 v_{11},其他分量记为 v_{i1}, $i=2,3,\cdots,f$.另构造 $f-1$ 个 f 维矢量 $\boldsymbol{V}_j$, $j=2,3,\cdots,f$. $\boldsymbol{V}_j$ 的第 i 分量为

$$v_{ij}=\delta_{ij},\qquad i=1,2,\cdots,f,\qquad j=2,3,\cdots,f.$$

这些矢量与 $\boldsymbol{V}_1$ 一起组成 f 个线性独立的矢量.因若有 f 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_f$ 使

$$\sum_{j=1}^{f}a_j\boldsymbol{V}_j=0, \tag{A1.33}$$

则

$$\sum_{j=1}^{f}v_{ij}a_j=0,\qquad i=1,2,\cdots,f.$$

要其中第 1 式成立必须 $v_{11}a_1=0$.由于 $v_{11}\neq0$,得 $a_1=0$.而要其中 $i\geqslant2$ 的诸式成立,必须

$$0=\sum_{j=2}^{f}\delta_{ij}a_j=a_i,\qquad i=2,3,\cdots,f.$$

总之要(A1.33)成立,必须 $a_j=0$, $j=1,2,\cdots,f$.这便证明了

引理二 给定一 f 维非零矢量,必有一含此矢量的矢量集,其中共有 f 个彼此线性独立的 f 维矢量.

在以下讨论中简称厄米标量积为标量积,厄米正交为正交,称与自身标量积为 1 的矢量为归一矢量.对任何非零矢量 V 恒可定义矢量

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{V})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{V},$$

它显然是归一的,且与原矢量只差一常数因子.这种从 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{U}$ 的运算称为对矢量 $\boldsymbol{V}$ 的归一化,所乘常数 $(\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{V})^{-\frac{1}{2}}$ 称为归一化因子.现设有一组 f 个彼此线性独立的 f 维矢量 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\cdots,\boldsymbol{V}_f$.由它们可定义矢量

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_1\equiv a_1\boldsymbol{V}_1,\\
&\boldsymbol{U}_2\equiv a_2(\boldsymbol{V}_2-a_{12}\boldsymbol{U}_1),\\
&\boldsymbol{U}_3=a_3(\boldsymbol{V}_3-a_{13}\boldsymbol{U}_1-a_{23}\boldsymbol{U}_2),\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&\boldsymbol{U}_f=a_f\Big(\boldsymbol{V}_f-\sum_{i=1}^{f-1}a_{if}\boldsymbol{U}_i\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{A1.34}$$

其中

$$a_{ij}=\boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{V}_j, \tag{A1.35}$$

a_i 则为归一化因子,使 $\boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{U}_i=1$.由于原来的矢量 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2,\cdots,\boldsymbol{V}_f$ 彼此线性独立,(A1.34)右边括号内的矢量组合非零,使归一化成为可能.(A1.34)定义的

f 个矢量 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_f$ 有性质

$$\boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{U}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j, \\ 0, & \text{若 } i \neq j, \end{cases} \tag{A1.36}$$

称为正交归一化矢量系. 其中的 $\boldsymbol{U}_1$ 与原来的 $\boldsymbol{V}_1$ 只差一归一化因子. 这些讨论与引理二一起便证明了

引理三 给定一 f 维非零矢量, 必可构造一正交归一矢量系, 其中共有 f 个彼此正交的 f 维归一矢量, 给定的那个矢量归一化后亦在其中.

正交非零矢量系中各矢量是彼此线性独立的. 这是因为若有常数 $a_1, a_2, \cdots, a_f$, 将正交矢量 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_f$ 组合为零, 即

$$\sum_{j=1}^{f} a_j \boldsymbol{U}_j = 0,$$

则由此式两边与 $\boldsymbol{U}_i$ 的标量积

$$0 = \boldsymbol{U}_i^{\dagger} \sum_{j=1}^{f} a_j \boldsymbol{U}_j = \sum_{j=1}^{f} a_j \boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{U}_j = a_i \boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{U}_i$$

和 $\boldsymbol{U}_i^{\dagger}\boldsymbol{U}_i \neq 0$ 知所有常数 $a_i = 0, i = 1, 2, \cdots, f$. 这正是矢量 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_f$ 彼此线性独立的定义.

借助以上知识可详尽讨论厄米矩阵的本征值问题.

定理二 厄米矩阵的本征值全为实数.

证 设本征方程(A1.30)中 $\boldsymbol{B}$ 为厄米矩阵. 按引理一它有解. 将解得的本征值 b 和本征矢 $\boldsymbol{V}$ 代入其中, 等式成立. 取两边矢量的厄米伴随, 即转置后取复共轭得

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{B}^{\dagger} = b^* \boldsymbol{V}^{\dagger}.$$

由 $\boldsymbol{B}^{\dagger}$ 的厄米性, 此式成为

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{B} = b^* \boldsymbol{V}^{\dagger}.$$

取此式两边与 V 的标量积得

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V} = b^* \boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{V}.$$

另一方面, 取 $\boldsymbol{V}^{\dagger}$ 与(A1.30)两边的标量积得

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V} = b\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{V}.$$

与上式比较, 并用 $\boldsymbol{V}^{\dagger}\boldsymbol{V} \neq 0$, 知 $b^* = b$, b 为实数. 证毕.

定理三 厄米矩阵两个不同本征值对应的本征矢正交.

证 设 $b_1 \neq b_2$ 是厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的两个本征值, 对应的本征矢分别为 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$, 即有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1 = b_1 \boldsymbol{V}_1, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_2 = b_2 \boldsymbol{V}_2.$$

取第一式的厄米伴随得

$$\boldsymbol{V}_1^{\dagger}\boldsymbol{B} = b_1 \boldsymbol{V}_1^{\dagger}.$$

其间已用了 $\boldsymbol{B}$ 的厄米性和 b_1 为实数的性质.取此式两边与 $\boldsymbol{V}_2$ 的标量积和上列第二式两边与 $\boldsymbol{V}_1^\dagger$ 的标量积,分别得

$$\boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_2 = b_1 \boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{V}_2, \quad \boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_2 = b_2 \boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{V}_2.$$

两式相减得

$$0 = (b_1 - b_2)\boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{V}_2.$$

由 $b_1 - b_2 \neq 0$ 知

$$\boldsymbol{V}_1^\dagger \boldsymbol{V}_2 = 0,$$

此二本征矢正交.证毕.

定理四 f 维厄米矩阵有 f 个彼此正交的本征矢.

证 由引理一知,f 维厄米矩阵 B 必有本征值和本征矢.用 b_1 记其中一个本征值,$\boldsymbol{V}_1$ 记相应的本征矢.矩阵的本征方程为线性方程,在本征矢上乘一常数仍是本征矢,且相应的本征值不变.于是恒可设已在本征矢上乘了归一化常数,使本征矢都是归一化的.按引理三可构造一个正交归一矢量系 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_f$,其中 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{V}_1$.再构造一个 f 维矩阵 $\boldsymbol{A}_1$,其中第 i 行为 $\boldsymbol{U}_i^\dagger$.由于各行作为行矢量是线性无关的,此矩阵有逆.它的厄米伴随 $\boldsymbol{A}_1^\dagger$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{U}_i$.由正交归一性

$$\boldsymbol{U}_i^\dagger \boldsymbol{U}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, f,$$

知

$$\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_1^\dagger = \boldsymbol{I}.$$

此式两边左乘 $\boldsymbol{A}_1^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{A}_1^\dagger = \boldsymbol{A}_1^{-1},$$

表明如此构造的 $\boldsymbol{A}_1$ 为幺正矩阵.用它对厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作幺正变换,按(A1.29)变得的矩阵

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}_1^\dagger \tag{A1.37}$$

仍为厄米矩阵.由 $\boldsymbol{A}_1$ 的构造方式和本征方程

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1 = b_1 \boldsymbol{U}_1 \tag{A1.38}$$

知 $\boldsymbol{B}'$ 的第 i 行第 1 列矩阵元

$$b'_{i1} = \boldsymbol{U}_i^\dagger \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1 = b_1 \boldsymbol{U}_i^\dagger \boldsymbol{U}_1 = b_1 \delta_{i1}. \tag{A1.39}$$

再由 $\boldsymbol{B}'$ 的厄米性及 b_1 的实性知

$$b'_{1i} = b'^{*}_{i1} = b_1 \delta_{i1} \tag{A1.40}$$

因此

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \boldsymbol{B}_1' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{A1.41}$$

$\boldsymbol{B}_1'$ 为 $f-1$ 维厄米矩阵.用 $\boldsymbol{A}_1$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的本征矢 $\boldsymbol{V}_1$ 作幺正变换,得

$$\boldsymbol{V}_1' = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{V}_1. \tag{A1.42}$$

由 $\boldsymbol{A}_1$ 的构造方式知此矢量的第 i 分量为

$$\boldsymbol{U}_i^{\dagger} \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{U}_i^{\dagger} \boldsymbol{U}_1 = \delta_{i1},$$

表明

$$\boldsymbol{V}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A1.43}$$

它显然是(A1.41)表示的 $\boldsymbol{B}'$ 的本征矢,本征值为 b_1.

现在对(A1.41)中的 $f-1$ 维子厄米矩阵 $\boldsymbol{B}_1'$ 重复以上推导.用 b_2 和 $\boldsymbol{U}_2'$ 表示它的一个本征值和相应的归一本征矢.构造一个含 $\boldsymbol{U}_2'$ 的正交归一矢量系,它含 $f-1$ 个 $f-1$ 维矢量 $\boldsymbol{U}_2', \boldsymbol{U}_3', \cdots, \boldsymbol{U}_f'$.用它们可组成一矩阵 $\boldsymbol{A}_2'$,它的第 i 行为 $\boldsymbol{U}_i'^{\dagger}$.这是一个 $f-1$ 维幺正矩阵.用它对 $\boldsymbol{B}_i'$ 作幺正变换得

$$\boldsymbol{B}_1'' = \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{B}_1' \boldsymbol{A}_2'^{\dagger}. \tag{A1.44}$$

由 $\boldsymbol{A}_2'$ 的构造方式和本征方程

$$\boldsymbol{B}_1' \boldsymbol{U}_2' = b_2 \boldsymbol{U}_2'$$

知 $\boldsymbol{B}_1''$ 的第 i 行第 1 列矩阵元

$$(b_1'')_{i1} = \boldsymbol{U}_{i+1}'^{\dagger} \boldsymbol{B}_1' \boldsymbol{U}_2' = b_2 \boldsymbol{U}_{i+1}'^{\dagger} \boldsymbol{U}_2' = b_2 \delta_{i1}.$$

由于 $\boldsymbol{B}_1''$ 是厄米的,它的第 1 行第 i 列矩阵元

$$(b_1'')_{1i} = (b_1'')_{i1}^{*} = b_2 \delta_{i1}.$$

可见

$$\boldsymbol{B}''_1 = \begin{pmatrix} b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \boldsymbol{B}'_2 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{A1.45}$$

$\boldsymbol{B}_2'$ 为 $f-2$ 维厄米矩阵.现在构造一个 f 维矩阵

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \boldsymbol{A}_2' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{A1.46}$$

由直接验证可知,它是一幺正矩阵.用它对(A1.41)表示的 f 维厄米矩阵 B' 作幺正交变换,由它的构造方式(A1.46),以及(A1.44)和(A1.45),知得到的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{B}'_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{A1.47}$$

此式左边

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_1^{\dagger}\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^{\dagger}. \tag{A1.48}$$

由

$$(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^{\dagger} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1^{\dagger}\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = \boldsymbol{I},$$
$$(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^{\dagger}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1) = \boldsymbol{A}_1^{\dagger}\boldsymbol{A}_2^{\dagger}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1^{\dagger}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{I},$$

知 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ 为幺正矩阵.(A1.48)就是用它对 $\boldsymbol{B}$ 作的幺正变换.由 $\boldsymbol{A}_2$ 的构造方式可知,$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ 的第一行就是 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一行 $\boldsymbol{U}_1^{\dagger}$,$(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^{\dagger}$ 的第一列便是 $\boldsymbol{A}_1^{\dagger}$ 的第一列 $\boldsymbol{U}_1$.可见 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_1$ 的差别[或者说$(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^{\dagger}$ 与 $\boldsymbol{A}_1^{\dagger}$ 的差别]仅在于构造正交归一矢量系 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \cdots, \boldsymbol{U}_f$ 时与 $\boldsymbol{U}_1$ 配套的矢量 $\boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3, \cdots, \boldsymbol{U}_f$ 选择的不同.$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$ 可看作对这些配套矢量重新选择后的 $\boldsymbol{A}_1$.基于这种认识,将(A1.47)的右边重新称为 $\boldsymbol{B}'$,而将该式记为

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_1^{\dagger}\boldsymbol{A}_2^{\dagger} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{B}'_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{A1.49}$$

将这一推导重复 $f-1$ 次得一幺正矩阵

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{f-1}\boldsymbol{A}_{f-2}\cdots\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 \tag{A1.50}$$

它是各次推导中依次构造的幺正矩阵的积.用它可将厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 幺正变换为对角厄米矩阵

$$\boldsymbol{B}' \equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \begin{pmatrix} b_1 & & & & 0 \\ & b_2 & & & \\ & & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{f-1} \\ 0 & & & & b_f \end{pmatrix}, \tag{A1.51}$$

对角元 $b_1, b_2, \cdots, b_{f-1}, b_f$ 都是实数. 可以直接验证这些对角元都是矩阵 $\boldsymbol{B}'$ 的本征值, 相应本征矢 $\boldsymbol{V}'_1, \boldsymbol{V}'_2, \cdots, \boldsymbol{V}'_{f-1}, \boldsymbol{V}'_f$ 中第 i 本征值 b_i 对应的本征矢 $\boldsymbol{V}'_i$ 只有第 i 分量为 1, 其余分量皆为零. 它们之间显然满足本征方程

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{V}'_i = b_i\boldsymbol{V}'_i, \qquad i = 1,2,\cdots,f, \tag{A1.52}$$

和正交归一关系

$$\boldsymbol{V}'^{\dagger}_i\boldsymbol{V}'_j = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,f. \tag{A1.53}$$

(A1.51)的逆变换为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'^{\dagger}, \quad \boldsymbol{A}' \equiv \boldsymbol{A}^{\dagger}. \tag{A1.54}$$

$\boldsymbol{A}'$显然是幺正矩阵, 此逆变换便是由它实现的幺正变换. 用它还可实现矢量的幺正变换

$$\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{V}'_i, \quad i = 1,2,\cdots,f. \tag{A1.55}$$

由此式、(A1.54)、(A1.52)和 $\boldsymbol{A}'$的幺正性知

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_i = b_i\boldsymbol{V}_i, \qquad i = 1,2,\cdots,f, \tag{A1.56}$$

$$\boldsymbol{V}^{\dagger}_i\boldsymbol{V}_j = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\cdots,f, \tag{A1.57}$$

表明 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \cdots, \boldsymbol{V}_f$ 为 f 个正交归一的矢量, 其中每一个都是 $\boldsymbol{B}$ 的本征矢. 这正是要证明的. 证毕.

(A1.55)表明, 厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 本征矢 $\boldsymbol{V}_i$ 为幺正矩阵 $\boldsymbol{A}'$的第 i 列; (A1.56)则表明 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 本征值为对角矩阵 $\boldsymbol{B}'$的第 i 对角元. 厄米矩阵的本征值问题等价于它的对角化问题. 也可从另一方向来看这一结果. 设已解得厄米矩阵的全部正交归一本征矢. 将其中每一本征矢作一列, 排出一个矩阵, 称为 $\boldsymbol{A}'$. 它显然是幺正的.

$$\boldsymbol{A}'^{\dagger}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}'^{\dagger} = \boldsymbol{I}. \tag{A1.58}$$

用 $\boldsymbol{A}'^{\dagger}$对 $\boldsymbol{B}$ 作幺正变换得

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}'^{\dagger}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}'. \tag{A1.59}$$

由 $\boldsymbol{A}'$的构造方式和(A1.56)、(A1.57)直接验证知, 变换的结果 $\boldsymbol{B}'$为对角矩阵, 对角元为 $\boldsymbol{B}$ 的本征值. 这就是对厄米矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对角化. 变换(A1.59)为(A1.54)的逆变换. 如 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵元全为实数, 便是一实对称矩阵. 它的本征值

既是实数,本征矢也可取成实的.以上定理便成为

系:f 维实对称矩阵有 f 个彼此正交的实本征矢.

§A1.4 任意矩阵的本征值问题与矩阵的上三角化

在上节定理四的证明中,只有一处用到矩阵的厄米性,即(A1.40)式.取消此式,(A1.41)变为

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} b_1 & b'_{12} & b'_{13} & \cdots & b'_{1f} \\ 0 & & & & \\ 0 & & \boldsymbol{B}'_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{A1.60}$$

$b'_{1i}, i=2,3,\cdots,f$,不一定为零,$\boldsymbol{B}'_1$ 也不一定厄米.在后来的重复推导中还要取消低维矩阵与(A1.40)类似的关系.同样经 $f-1$ 次重复推导可得一形如(A1.50)的幺正矩阵,它将给定的任意矩阵 $\boldsymbol{B}$ 变换为上三角矩阵

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \begin{pmatrix} b_1 & b'_{12} & b'_{13} & \cdots & b'_{1f} \\ & b'_2 & b'_{23} & \cdots & b'_{2f} \\ & & b'_3 & \cdots & b'_{3f} \\ & & & & \vdots \\ & 0 & & & b'_f \end{pmatrix}, \tag{A1.61}$$

其中对角元 b_1 为 $\boldsymbol{B}$ 的本征值,b'_i, $i=2,3,\cdots,f$ 为第 i 次推导中求解的 $f-i+1$维矩阵的本征值.

附录二　南部[①]力学

科学不仅研究已知客观存在的规律，建立这种规律的理论体系，还研究逻辑上自洽却尚无客观对应的理论体系.这种理论体系有的后来被证实，反映了客观存在的深层规律.这方面的一个突出例子是黎曼几何.人们在建立这种理论时只是因为它在逻辑上是自洽的，无矛盾的.而现实中的几何与欧几里得几何很好地一致.只是在大半个世纪后人们才发现，大范围内的时空，特别是强引力场中的时空应由黎曼几何描写，并在此基础上发展了广义相对论.现在，力学中也出现了并非反映已知的力学规律却在逻辑上自洽的力学理论系统.1973年南部阳一郎提出并被人称为南部力学的便是一种这样的力学理论系统.

力学的正则形式中基本力学量为正则变量，即各自由度的广义坐标和广义动量.先考虑只有一个自由度的系统.用 ξ_1 表示它的广义坐标，ξ_2 表示它的广义动量.运动方程为

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2}, \qquad \dot{\xi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \tag{A2.1}$$

其中 H 为哈密顿量，是正则变量 ξ_1 和 ξ_2 的函数，且可显含时间.任意力学量 $F(\xi_1, \xi_2, t)$一般为正则变量 ξ_1、ξ_2 和时间的函数，它随时间变化的方程为

$$\dot{F} \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H], \tag{A2.2}$$

其中

$$[F, H] \equiv \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} \equiv \frac{\partial (F, H)}{\partial (\xi_1, \xi_2)} \tag{A2.3}$$

为 F 与 H 的泊松括号.此式右边

$$\frac{\partial (F, H)}{\partial (\xi_1, \xi_2)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial H}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial H}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \tag{A2.4}$$

为函数 F、H 对自变量 ξ_1、ξ_2 的雅可比行列式.用此符号，正则方程(A2.1)可

---

① Y. Nambu, *Phys. Rev.*, D7(1973)2405.

统一写成

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial(\xi_i, H)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}, \qquad i = 1,2. \tag{A2.5}$$

现在设有 f 个自由度 $f>1$. σ 自由度的广义坐标和广义动量分别为 $\xi_{1\sigma}$ 和 $\xi_{2\sigma}$, $\sigma=1,2,\cdots,f$. 正则方程(A2.1)现应拓广为

$$\dot{\xi}_{1\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \xi_{2\sigma}}, \quad \dot{\xi}_{2\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_{1\sigma}}, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{A2.6}$$

哈密顿量 H 和任意力学 F 一般都是各自由度的广义坐标 $\xi_{1\sigma}$ 和广义动量 $\xi_{2\sigma}$ ($\sigma=1,2,\cdots,f$)的函数,且可显含时间 t. 力学量 F 随时间变化的方程仍可表示为(A2.2),但其中的泊松括号应扩充为

$$\begin{aligned}[F,H] &= \sum_{\sigma=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{1\sigma}}\frac{\partial H}{\partial \xi_{2\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial \xi_{2\sigma}}\frac{\partial H}{\partial \xi_{1\sigma}}\right) \\ &= \sum_{\sigma=1}^{f}\frac{\partial(F,H)}{\partial(\xi_{1\sigma},\xi_{2\sigma})}.\end{aligned} \tag{A2.7}$$

正则方程(A2.6)也可统一表示为

$$\dot{\xi}_{i\sigma} = \frac{\partial(\xi_{i\sigma}, H)}{\partial(\xi_{1\sigma}, \xi_{2\sigma})}, \quad i = 1,2, \quad \sigma = 1,2,\cdots,f. \tag{A2.8}$$

上述力学的正则形式可以推广. 先仍只考虑一个自由度. 设它的基本力学量不是两个正则变量,而是 n 个变量 ξ_1、ξ_2、…、ξ_n. 哈密顿量不止一个,而是 $n-1$个: H_1、H_2、…、H_{n-1}. 基本变量随时间变化的运动方程为

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial(\xi_i, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)}, \qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{A2.9}$$

n 个自变量 ξ_i($i=1,2,\cdots,n$)的 n 个函数, $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 的雅可比行列式定义为

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}. \tag{A2.10}$$

任意力学量 $F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, t)$一般为 n 个基本变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和时间 t 的函数,它随时间变化的方程为

$$\dot{F} \equiv \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial(\xi_i, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}], \tag{A2.11}$$

其中括号

$$[F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}] \equiv \frac{\partial(F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)} \tag{A2.12}$$

是泊松括号的推广,被称为南部括号.

设有 f 个自由度,$f>1$,每个自由度有 n 个基本变量.σ 自由度的基本变量用 $\xi_{1\sigma}, \xi_{2\sigma}, \cdots, \xi_{n\sigma}$ 表示,$\sigma = 1, 2, \cdots, f$.(A2.8)和(A2.9)的推广便是运动方程

$$\dot{\xi}_{i\sigma} = \frac{\partial(\xi_{i\sigma}, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_{1\sigma}, \xi_{2\sigma}, \xi_{3\sigma}, \cdots, \xi_{n\sigma})}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \quad \sigma = 1, 2, \cdots, f. \tag{A2.13}$$

哈密顿量 $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$ 和任意力学量 F 一般都是各自由度基本变量 $\xi_{i\sigma}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\sigma = 1, 2, \cdots, f$, 的函数,且可显含时间.力学量 F 随时间变化的方程现为

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{f} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_{i\sigma}} \dot{\xi}_{i\sigma} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial(F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_{1\sigma}, \xi_{2\sigma}, \xi_{3\sigma}, \cdots, \xi_{n\sigma})}$$

$$\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}], \tag{A2.14}$$

其中

$$[F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}] \equiv \sum_{\sigma=1}^{f} \frac{\partial(F, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1})}{\partial(\xi_{1\sigma}, \xi_{2\sigma}, \xi_{3\sigma}, \cdots, \xi_{n\sigma})} \tag{A2.15}$$

是多自由度系统的南部括号.

这便是南部力学,它显然是一个完备的力学理论体系.由于它含参数 n,实际上是一类完备力学理论.现实世界力学的正则形式是其中 $n=2$ 的特例.人们试图在现实世界中寻找 $n>2$ 的力学系统,如探索将 $n>2$ 的南部力学用于奇异哈密顿系统或用于受约束的哈密顿系统的子系统等.南部在提出他的力学时就已指出,在现实世界力学中至少有一例可用它的 $n=3$ 的力学,这便是刚体转动.以刚体角动量在三个惯量主轴上的投影 $L_i = \mathscr{I}_i \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 为基本变量,令

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} L_i^2, \qquad H_2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{L_i^2}{2\mathscr{I}_i}, \tag{A2.16}$$

三个运动方程便是

$$\dot{L}_1 = \frac{\partial(L_1, H_1, H_2)}{\partial(L_1, L_2, L_3)} = \frac{\partial H_1}{\partial L_2}\frac{\partial H_2}{\partial L_3} - \frac{\partial H_1}{\partial L_3}\frac{\partial H_2}{\partial L_2} = \left(\frac{1}{\mathscr{I}_3} - \frac{1}{\mathscr{I}_2}\right) L_2 L_3,$$

$$\dot{L}_2 = \frac{\partial(L_2, H_1, H_2)}{\partial(L_1, L_2, L_3)} = \frac{\partial H_1}{\partial L_3}\frac{\partial H_2}{\partial L_1} - \frac{\partial H_1}{\partial L_1}\frac{\partial H_2}{\partial L_3} = \left(\frac{1}{\mathscr{I}_1} - \frac{1}{\mathscr{I}_3}\right) L_3 L_1,$$

$$\dot{L}_3 = \frac{\partial(L_3, H_1, H_2)}{\partial(L_1, L_2, L_3)} = \frac{\partial H_1}{\partial L_1}\frac{\partial H_2}{\partial L_2} - \frac{\partial H_1}{\partial L_2}\frac{\partial H_2}{\partial L_1} = \left(\frac{1}{\mathscr{I}_2} - \frac{1}{\mathscr{I}_1}\right) L_1 L_2.$$

将 L_i 用角速度在第 i 惯量主轴上的投影 ω_i 表出，经整理得

$$\mathscr{I}_1\dot{\omega}_1 - (\mathscr{I}_2 - \mathscr{I}_3)\omega_2\omega_3 = 0,$$

$$\mathscr{I}_2\dot{\omega}_2 - (\mathscr{I}_3 - \mathscr{I}_1)\omega_3\omega_1 = 0,$$

$$\mathscr{I}_3\dot{\omega}_3 - (\mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_2)\omega_1\omega_2 = 0.$$

与(6.70)比较知，这正是刚体自由转动的欧拉方程.