

1983 年，東星北先生(左)与王淦昌先生合影。

序　言

束星北先生1907年10月1日诞生于江苏省南通市。幼时聪慧异常，少年时即有独力奋斗精神。1924年入杭州之江大学，翌年转学到济南齐鲁大学就学。1926年他远涉重洋，走勤工俭学道路，先后在美国堪萨斯城拜克大学、旧金山加州大学，德国汉诺威工业大学、英国爱丁堡大学求学。他在德国期间，曾任爱因斯坦的研究助手。1930年，他作为研究生，进英国剑桥大学，旋又转到美国麻省理工学院，1931年获博士学位。"九一八"事变后，他即回国，被南京中央军官学校聘为物理教官。1932—1935年间他在杭州浙江大学物理系任副教授。由于不满当时浙大校长郭任远的专横，1935年物理系全体师生愤然离开浙大，束星北先生去上海任暨南大学数学系主任兼交通大学物理教授。1936年竺可桢出任浙大校长，束先生及物理系原班人马回到浙大。直至1952年全国各大学院系调整，原有七个学院的综合性的浙江大学，压缩成为一个工科大学，束星北先生遂被分配到在青岛的山东大学。

我于1936年由山东大学转到杭州浙江大学，开始认识束星北先生。那时我们都在物理系任教，接触渐多，相互了解亦渐深。我很钦佩他的物理基础的坚实，思维的敏捷，对问题的看法很有独到之处。因此我常请教他，得益匪浅。他的授课，非常吸引人，在当时物理系里，是最受学

生欢迎的教师。著名物理学家李政道教授，常常感叹地回忆起自己1943—1944年间在浙大学习时，受束先生教导，得到很多的启发。他在教“理论力学”时，开头一个月，专门讲牛顿运动三定律，把力学的基本原理，阐述得如此透澈，如此生动，使学生们都为之神往。他教“热力学”时，同样用一个月的时间，讲“熵”的概念和热力学第二定律。这些都是学生们最难理解的问题，经他的讲述，学生们就感到轻松愉快地进入了物理学的殿堂。“狭义相对论”和“电磁学”更是他的两门拿手好戏。这次印行的《狭义相对论》就是他几十年教授这门课程的结晶。书中有些内容属于他自己的独创，是一般同名的教科书所见不到的。至于“电磁学”他也曾写过一部讲义，可惜由于文化大革命的动乱，原稿几经辗转，已下落不明。

束星北先生秉性耿直、豪爽，热爱祖国，热爱真理。1947年浙大学生自治会主席于子三遭反动当局杀害，为抗议这一暴行，经他创议浙大教授会通过决议，罢教一天，有力地支援了学生的民主斗争。解放后，他更加热爱党、热爱祖国，致力于物理学的教学与研究工作，历经人世沧桑。党的十一届三中全会前后，他的境遇开始有所改善。1978年他被国家海洋局第一研究所聘任为研究员，主持“动力海洋学进修班”，为培训中级研究人员尽心尽力。1979年，他的冤案彻底平反，名誉完全恢复。1981年，他当选为山东物理学会名誉理事长和中国海洋物理学会名誉理事长。正当他以充沛的精力，满怀信心地去追回被迫荒废了的岁月时，不幸于1983年10月30日猝然病逝于

青岛。

这部《狭义相对论》遗稿，大概是束星北先生在1957年“反右”运动以后开始撰写的，在他去世之前，还认真地进行了修改、补充。束星北先生是一位十分严谨的科学家。在青岛出版社同志的热情支持下，这部遗稿经过束先生的亲人和学生的整理，终于能够同读者见面了。这不仅有助于我国相对论物理学的教学和研究，也是对这位才华出众的爱国科学家坎坷一生的一种意义深长的纪念。

王淦昌

一九九二年十二月于北京

前　言

“狭义相对论”本身可分为两部分，一部分是爱因斯坦的“不能决定坐标绝对速度”的相对论原理；另一部分是 *Minkowski* 的“时空统一，四维宇宙”的理论。两部分虽然相互联系，但是物理意义和教学方法有些不同，有时用一种方法容易解决的问题，用另一种方法却不容易，甚至无法解决，所以本书也依次分成两部分进行研究。

首先应当解释一下，在许多很好的相对论书籍出版之后，再写一本关于相对论的《狭义相对论》的书的原因。

1. 导出的方法稍有不同。*more physical than mathematical*. §2.2—§2.3。

2. 强调二个质点运动在相对力学中的困难及克服，通常相对论书中这一点不甚强调，例如质点系统的动量（除接触力之外），一般不能守恒，一般不是四维矢量。

3. 一般相对论书中都认为系统的熵为标量，实则由于同时观念的改变（由于时间剖面的不同），系统的熵的数值视所取的时间剖面的不同，除特殊情况外，一般熵也不是标量。有的书中有此错误，甚至有些相对论专家在这方面也不严格。

书中有些内容，如§7.6有关热流应力场能张量的整章，§7.7中非平衡状态下热力学热平衡方程及统计力学以及§7.2中内禀角动量和积，§7.5中的一些例子和

§2.2用的推论方法，§4.4中的推论和引例等等，是作者的个人创造，文责自负。由于本人的哲学和科学水平有限，对质量能量问题也只能写出个人的看法。

本书如被用作教科书，则可视课时长短酌量略去几节，如§5.5、§5.6、§5.7、§6.4、§7.2(C)，§7.6(A)、(C)、(D)、§7.9等节可以略去而无损于本书的连续性。

书中名词绝大多数依照1956年9月科学出版社出版的《物理学名词》一书，人名一般直接用原文写出。书中拉丁指标一般只代表1、2、3的空间部分；希腊指标一般代表1、2、3、4时空部分。

书中内容有些是自己多年来的研究成就，有的没有发表过，有的只发表了些简单结论，在晚年时，将一些研究成果写出来，供后人参考是有一定意义的。

束星北

1983年5月于青岛

目　录

序言

前言

第一篇　狭义相对论(即特殊相对论)

第一章　古典物理学与相对论 …… (3)

§1.1　牛顿力学(物体在空间位置变化的规律) …… (3)

§1.2　力学方法完全不能确定绝对空间 …… (5)

§1.3　电磁学定律可以确定绝对空间吗? …… (10)

§1.4　光速与光源速度无关的实验证明 …… (14)

§1.5　不同参照系上波动进行的古典研究 …… (15)

第二章　爱因斯坦的狭义相对论
(即"特殊相对论") …… (22)

§2.1　狭义相对论原理 …… (22)

§2.2　运动系统上钟和尺变化的推论 …… (24)

§2.3　钟尺变化的相对性和实测纪录的不变性 …… (35)

§2.4　洛伦兹变换式 …… (44)

§2.5　相对速度在任意方向的洛伦兹变换式 …… (50)

§2.6　洛伦兹变换式数学的导出方法 …… (54)

第三章　相对论使运动学改变 …… (58)

§3.1　点运动的变换式 …… (58)

§3.2　"刚体"在非匀速运动下的变形 …… (66)

§3.3　平面简谐波频率、方向及速度的变换 …… (71)

§3.4　运动坐标上几何图形的改变 …… (79)

§3.5 平面波的射线速度…… (82)
§3.6 随平面波移动几何图形的改变…… (86)
第四章 相对论使物理学改变 …… (92)
§4.1 动量守恒定律…… (92)
§4.2 牛顿力学方程的改变…… (98)
§4.3 质量、能量与热量…… (105)
§4.4 质点的视质量和时钟的快慢率不是加速度的函数 …… (112)
§4.5 电磁方程 …… (119)
§4.6 光的几个性质 …… (127)
§4.7 洛伦兹力方程协变性要求 …… (139)
§4.8 一般碰撞问题 …… (145)
第二篇 四维宇宙(数学部分)
第五章 时空统一的四维宇宙…… (161)
§5.1 Minkowski 的四维宇宙 …… (161)
§5.2 四维宇宙图示法 …… (166)
§5.3 保角变换 …… (180)
§5.4 洛伦兹变换的广泛研究 …… (185)
§5.5 四元数 …… (194)
§5.6 实数洛伦兹变换的四元数表示法 …… (198)
§5.7 洛伦兹变换的群性 …… (206)
第六章 N 维空间笛卡儿张量…… (214)
§6.1 导言及张量定义 …… (214)
§6.2 张量的基本性质 …… (219)
§6.3 四维矢量及二阶反对称张量的几个性质 …… (226)
§6.4 旋量 …… (244)
第三篇 经典物理学概论

第七章　物理定律的四维表示 …… (261)
§7.1　质点力学 …… (261)
§7.2　物理学中三大守恒定律的阐述 …… (271)
§7.3　微观电动力学 …… (301)
§7.4　宏观电动力学 …… (320)
§7.5　连续体力学系统的绝热变化 …… (352)
§7.6　连续体在非绝热情况下的变化及各种
场能张量 …… (385)
§7.7　热力学及统计力学 …… (426)
§7.8　场论的变分法 …… (460)
§7.9　Dirac 质点的波动方程 …… (474)

第一篇

狭义相对论

（即特殊相对论）

第一章　古典物理学与相对论

§1.1　牛顿力学(物体在空间位置变化的规律)

牛顿在观察各种物体运动之后,总结出著名的运动三定律。在牛顿、伽利略之前,人们对"力"的了解模糊不清,一般以为物体的"速度"和力成比例。如物体不受外力推动,则即停止运动,但牛顿观察到这只是由于外界对它摩擦力的影响;假使没有外界阻力和其他力的作用,则运动的物体将沿着直线永远地等速进行。牛顿总结实验和观察作出运动第一定律:"如无外力作用,则物体的运动情况(运动的速度及方向)不变",这又称为物质运动的"惯性",是物质内在的性质。

牛顿又观察到当有外力影响时(这种影响除万有引力以及后来发现的电磁力之外,都是宏观上在互相"接触"时才发生),物体的运动情况就起变化。此运动情况 $m\boldsymbol{V}$ 的变化率与外力的大小和方向成正比:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{F} \tag{1.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{V}$ 为物体的速度。严格地讲,牛顿力学原先只指理想的"质点",$\boldsymbol{V}$ 是"质点"的速度,$\boldsymbol{F}$ 为外力。力的大小及方向可以用另外方法测量;m 是物体自身的惯性质量(n 个完全相同物体的惯性质量为一个物体的 n 倍),[过去的一切实验,似乎证明质量 m 的数值不受外力、温度、压力以及分裂、聚合或运动速度的影响而改变,因之在一切情形下 m 似乎是不变的常数(质量守恒定律)],是物质内在的性质,是变化的根据。

现在有一点必须澄清，速度 V 以及 dV/dt 究竟对什么“参考系统”计算？一个在火车内保持静止的物体，地面上人看来则是以火车的速度 V 行进，而车内人看来则是速度为零。在式(1.1.1)内应当用哪一种看法(所谓“参考系统”或“参照系”)呢？假使火车速度不变，则由于两种看法都是 $dV/dt=0$，所以定律(1.1.1)不受影响，但是当火车有加速 a 时，地面上人照式(1.1.1)的结论，这个物体必定受到力

$$F = m\frac{dV}{dt} = ma \tag{1.1.2}$$

的作用，而车上人则以为物体始终保持静止。

$$F = m \cdot o = o \tag{1.1.3}$$

现在，我们可以用实验来区别，到底是式(1.1.2)对，还是式(1.1.3)对？实验结果证明是式(1.1.2)对面否定式(1.1.3)，这可以用弹簧钩住物体，看火车加速时弹簧是否伸长来验证。因之车内人的观察不符合实验，不能作为“参考系统”，由此可见牛顿第二定律(1.1.1)里面的 V 和 dV/dt 必定是对某种不动或恒速运动的参考系统*而言的，但是我们知道地球本身在空间也有运动，因之从理论上讲，牛顿定律必须是对所谓“绝对静止或恒速运动”的空间而言，也只有这样，方程(1.1.1)才不发生本身的矛盾。否则一个物体在各种不同的加速系统看来可具有不同的加速度；那么 F 的数值就变成可大可小，甚至可有可无的符号；那就不能表示外物对它的客观影响。

力 F 的大小方向可以用另法计算。例如万有引力依照牛顿引力定律为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}r_0$$

---

* 或称“参照系”，亦常称为参考“坐标”. 本书在§4.8之前，只用“系”或“系统”字词

电磁力则依照电磁定律推算；接触力一般与物体的接触情况和接触物的变形有关。

目前，一切的实验指出两物体互相作用的力只与物体的“相对”情况有关。例如两吸引物的相对距离、弹簧两端的相对长度以及空气对物体的相对速度等等，因之力的大小，并不依赖于绝对位置的观念。

牛顿在观察两物体的互相作用之后，证明“当甲乙两物互相作用时，甲给乙的力大小与乙给甲的力相等，但是方向相反”，此称牛顿第三定律，简称“作用等于反作用”定律。再由式(1.1.1)可见，当 n 个物体互相作用时，其“总动量”

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i \tag{1.1.4}$$

的数值不因时间而改变(n 物体之外的力不计)，此称“动量守恒定律”。我们也可以从牛顿力学，用适当的定义和一定的假设导出能量守恒定律及角动量守恒定律，这里就不讨论了。

但是这三个基本定律(动量守恒定律、能量守恒定律和角量守恒定律)所包括的范围比牛顿力学广。在很多情况下，牛顿力学定律已被证明为不准确(例如在原子物理和其它很多的情形下，牛顿力学几乎完全被推翻)，但上面三个守恒定律仍旧成立。因之这三大守恒定律似乎是宇宙中的基本原则，不受牛顿力学的限制。所谓“力学”讲的只是机械运动，限于物质在空间位置变化的范围。

§1.2 力学方法完全不能确定绝对空间

假使有一个参考系统 S' 在绝对空间中以恒速 $\boldsymbol{V}$ 行进，对这个参考系统，物体“加速度”的大小及方向同于在绝对空间的加速度大小和方向，因之，方程(1.1.1)分不出 S' 与绝对空间系统的差别。换言之，我们不能从牛顿力学确定 S' 系统究竟是否绝对静止的系统或是恒速运动的系统。用数学表示，设 S 为绝对静止的系

统，S'为以恒速 V

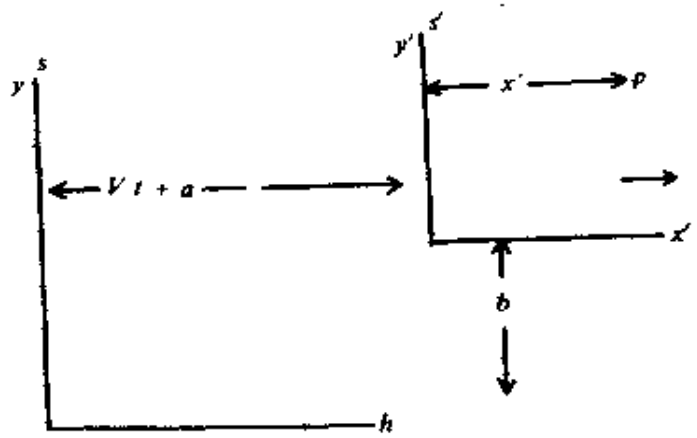


图 1.1

在共同 x 方向行进的系统；则用同样的钟和尺：

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt - a, \quad y' = y - b \\ z' &= z - c, \qquad\quad t' = t + d \end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

方程(1.2.1)亦称伽利略变换。字上加一撇的是 S' 系统的测量数值。V、a、b、c、d 均为常数。所以

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V, \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}; \tag{1.2.2}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.2.3}$$

经验证明，力 F 的作用大小及方向只和两物体 P、Q 的相对位置及相对速度有关。由于

$$\left.\begin{aligned} x_2' - x_1' &= x_2 - x_1, \\ \frac{dx_2'}{dt'} - \frac{dx_1'}{dt'} &= \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.4}$$

等等，所以

$$F' = F \tag{1.2.5}$$

S' 系统观察的质量 m'，由经验看来也与 S 系统观察的质量 m 相同，所以

$$m' = m \tag{1.2.6}$$

因之式(1.1.1)对 S' 系统也一样成立。所以牛顿力学定律也完全可以用恒速系统作为参考，而不感觉区别；因之不能依据力学定律找出“绝对空间”。

虽然 S' 所观察物理量的数值，例如动量

$$m' \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - mV \tag{1.2.7}$$

及动能

$$\frac{1}{2}m'\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}mV^2 - mV\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.8}$$

均与 S 系所观察的不同，但是从方程(1.1.1)的相对性来看，一切力学定律(定律是两种数值的互相“关系”，而不是数值本身)，亦即力学因果关系均不应由于系统不同而有所改变。这种关系可举碰撞为例。设有 m_1 及 m_2 两物，在碰撞前的速度为 $\dot{x}_1, \dot{x}_2$，碰撞后的速度为 $\bar{\dot{x}}_1$、$\bar{\dot{x}}_2$，设质量不发生变换，即碰撞前后的质量保持不变，则动量守恒定律为

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = m_1\bar{\dot{x}}_1 + m_2\bar{\dot{x}}_2 \tag{1.2.9}$$

以式(1.2.2)及(1.2.6)代入得

$$m'_1(\dot{x}'_1 + V) + m'_2(\dot{x}'_2 + V) = m'_1(\bar{\dot{x}}_1 + V) + m'_2(\bar{\dot{x}}'_2 + V),$$

亦即

$$m'_1\dot{x}'_1 + m'_2\dot{x}'_2 = m'_1\bar{\dot{x}}'_1 + m'_2\bar{\dot{x}}'_2, \tag{1.2.10}$$

多余的 mV 恰在两边消去。同样，能量守恒定律

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\bar{\dot{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\bar{\dot{x}}_2^2, \tag{1.2.11}$$

以式(1.2.2)、(1.2.6)及(1.2.9)代入仍得

$$\frac{1}{2}m'_1\dot{x}_1'^2+\frac{1}{2}m'_2\dot{x}_2'^2=\frac{1}{2}m'_1\bar{\dot{x}}_1'^2+\frac{1}{2}m'_2\bar{\dot{x}}_2'^2 \quad (1.2.12)$$

我们看出式(1.2.12)之所以成立有赖于式(1.2.9)的成立。

另外，也有似乎关于数值本身的问题，假使碰撞后动能减少．其减少数可以使碰撞体发热，因之可以从温度表的水银高度测出，这样似乎数值本身也含有重要性。今设

$$\bar{\dot{x}}_2-\bar{\dot{x}}_1=e(\dot{x}_1-\dot{x}_2), \quad (1.2.13)$$

$0\leqslant e\leqslant 1$ 称恢复系数。动量守恒律(1.2.9)显然成立，所以

$$\left.\begin{aligned}\bar{\dot{x}}_1&=\frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2+em_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)}{m_1+m_2}\\ \bar{\dot{x}}_2&=\frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2+em_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)}{m_1+m_2}\end{aligned}\right\} \quad (1.2.14)$$

因之两物碰撞后动能的损失为("损失"是前后数值的差)：

$$\begin{aligned}\triangle E&=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}(m_1\bar{\dot{x}}_1^2+m_2\bar{\dot{x}}_2^2)\\ &=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 \quad (1.2.15)\end{aligned}$$

由于式(1.2.9)及(1.2.13)在 S' 系统也成立，因之式(1.2.14)及(1.2.15)在 S' 系统也应成立，而

$$\dot{x}_1-\dot{x}_2=\dot{x}'_1-\dot{x}'_2,\quad e'=e,$$

故

$$\triangle E'=\triangle E \quad (1.2.16)$$

换言之，碰撞后损失能量的数值，S' 看来仍与 S 相同，前后数值的关系仍旧不变。

总之，一切由牛顿力学导出的物质关系，在另一个恒速运动的系统中，也必然成立。我们只能从牛顿力学来决定系统在空间的加速，但不能从牛顿力学来决定系统在空间的速度。

用数学术语来说："牛顿力学方程，依式(1.2.1)的变换而协变"。亦即不因式(1.2.1)的变换而改变形式。但对其他加速系统或旋转系统，牛顿力学方程则不具协变性。其表现为"人工制造"的"惯性力"。例如在地球系统上，由于地球的旋转，使人工制造的"离心力"、"科里奥利力"能影响空气的运动，赤道本身的膨涨，以及傅科摆的运动。加速系统也是绝对的。船舶的颠簸就使乘客头昏，感觉晕船并不需要"仪器"测量。这些经验和实验都与下面的理论符合。设 S' 原点以加速度 a 在空间行进。设 ξ 为该原点在空间的位置，则一质点在空间的位置 x 为

$$x = x' + \xi, \qquad t' = t \tag{1.2.17}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + \frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt'^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} + a \tag{1.2.18}$$

因之，牛顿方程(1.1.1)为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = m\left(\frac{d^2x'}{dt^2} + a\right)$$

或在 S' 系坐标中，牛顿力学方程"改"成

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F - ma \tag{1.2.19}$$

换言之，如用 S' 系作参考系统时，则必须在其他真实作用力 F 之外另加"惯性力"$-ma$(所谓"人工制造"的力)。例如汽车减速停止时，车内人感觉受有向前"惯性力"$-ma$ 的作用；炮弹停止时其中引火铁锤以"惯性力"$-ma$ 向前撞击引火药使之爆炸等等。此种由参考系统加速而引进的"惯性力"不是从其它物质作用来的，因之不存在"作用与反作用"的问题。它只是一种虚构的力，使牛顿定律(1.2.19)"能"应用于加速参考系统而已。

牛顿力学(1.1.1)如参考坐标的方向改变也不能有所改变。如 S' 轴 x' 方向与 S 轴的 x 方向成 θ 角

$$\left.\begin{aligned} y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.20}$$

设 s 为绝对空间的参考坐标，s' 坐标以 θ 旋转，所以

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= \dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta + x'\dot{\theta} \\ \dot{x}' &= \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta - y'\dot{\theta} \\ \ddot{y}' &= \ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta + y\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}'\dot{\theta} + x'\ddot{\theta} \\ \ddot{x}' &= \ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta + x'\dot{\theta}^2 - 2\dot{y}'\dot{\theta} - y'\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

因之，如以旋转的 S' 作参考，则力学方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}' &= \mathrm{F}_x\cos\theta - \mathrm{F}_y\sin\theta + mx'\dot{\theta}^2 - 2m\dot{y}'\dot{\theta} - my'\ddot{\theta} \\ m\ddot{y}' &= \mathrm{F}_x\sin\theta + \mathrm{F}_y\cos\theta + my'\dot{\theta}^2 + 2m\dot{x}'\dot{\theta} + mx'\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.22}$$

右方前两项为外力在 x' 及 y' 方向的分量，第三项为“离心力”，第四项为“科里奥利力”简称“偏向力”。最后一项在恒速旋转时不起作用。前两种惯性力在以地球作参考系统时占重要地位，离心力与物体运动速度无关，与地心吸力相合成，表观的引力只改变引力的方向及大小而已；但偏向力与物质的相对速度成正比，在大气运动时，则起主要作用。如以 ω 代表 S' 参考系在空间的旋转速度，则在此参考系统中，力学方程应为

$$m\ddot{x}' = F + m\omega \wedge [\omega x'] + 2m[\omega \wedge \dot{x}'] + m[\dot{\omega} \wedge x'] \tag{1.2.23}$$

这当然与式(1.1.1)不合。因之我们完全可以用力学实验来测定 ω，实际上也这样做了。换言之，力学实验只是不能确定参考系统在空间的绝对速度而已，但是完全可以确定该系统在空间是否有加速以及某个方向是否“固定”在绝对空间的问题。加速和旋转即在通常生活中亦不具相对性（至少在空间、时间的观念未彻底改变之前）。

§1.3 电磁学定律可以确定绝对空间么？

电磁学定律，因之光学定律，不具有依式(1.2.1)变换而协变的性质。换言之，电磁学定律在恒速的 S' 中也改变了形式；因之我

们可能从光学或电磁学的实验中来决定绝对空间。* 但是改变得很少，必须在精密的实验中才可能发现地球的空间运动速度。

Trouton、Noble 曾做过这种实验。他们在实验室内用细丝悬挂一个电容器。由于电容器内电荷随着地球运动产生的磁场影响着电荷的运动，“理论”上电容器应有扭动现象，但是 Trouton、Noble 观察的结果否定“理论”上的扭转现象。

最准确而又最不牵涉到经典“理论”的应当推 Michelon-Morley 两人 1887 年以及后来经多人重复的光学实验。其构造约如下图：

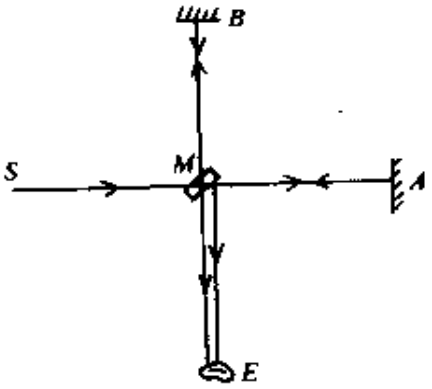


图 1.2

光源 S 发出的光线 SM 以 45°角射在半镀银的平面镜 M 上，分为透射的 MA 及反射的 MB 两线，如图 1.2 所示。在 A 及 B 两处各置平面反射镜，使光线沿原路线反射后，再由 M 的作用使 AM 的一部分反射到 E，BM 的一部分也透射到 E，在 E 处置一望远镜，则由于两组光线经过路程时间的不同，可以看出干涉条纹，全副仪器成一个刚体浮在水银托盘上以便旋转。

---

* 当然电学、光学实验和力学一样，可以确定系统的旋转；Saynac 曾用光在地面上兜一个圈子，测出地球的旋转角速度 ω。事实上我们也认为地面上的磁场是由于地球旋转的缘故。

设实验室以绝对速度 V 向图 1.2 的右方移动，则光线在绝对空间的行程可计算如下，光从 M 到 A 时，由于地球前进速度 V 的移动，A 亦向右移动到 A' 处，由于光在绝对空间的速度为 C（理论和实验见 §1.4，均证明光在绝对空间的速度与光源的速度无关），因之光由 M 到镜 A' 所需的时间 t_1 为. 如图 1.3，$ct_1=l_1+Vt_1$，

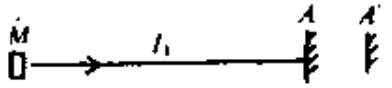


图 1.3

l_1 为 MA 的长度，因之

$$t_1=\frac{l_1}{C-V} \tag{1.3.1}$$

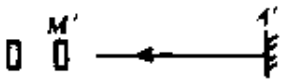


图 1.4

当镜 A 反射光到 M 时，半银镜 M 迎上前去，因之所需时间 t_2 为，图 1.4，

$$ct_2=l_1-Vt_2,\text{或}\quad t_2=\frac{l_1}{C+V} \tag{1.3.2}$$

所以光由 M 到 A 再回到 M 共费时 T_A 为

$$T_A=t_1+t_2=\frac{2L_1}{C\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)} \tag{1.3.3}$$

但光由 M 到 B 的时间 t 为，见图 1.5，

$(ct)^2=l_2^2+(Vt)^2$，因之

$$t=\frac{l_2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

所以光由 M 到 B 再回到 M 共需时间 T_B 为

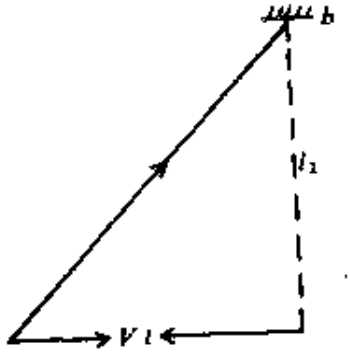


图 1.5

$$T_B = \frac{2l_2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \qquad (1.3.4)$$

两者的时间差为

$$T_A - T_B = \frac{2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} - l_2\right) \qquad (1.3.5)$$

这表现在 E 处的干涉条纹。现在把仪器慢慢地旋转 90°，则照以前的方法算出 MAM 和 MBM 的所需时间 T_A' 及 T_B' 为

$$T_A' = \frac{2l_1}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \qquad T_B' = \frac{2l_2}{C(1-\frac{V^2}{C^2})}$$

所以 $$T_A' - T_B' = \frac{2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right) \qquad (1.3.6)$$

因之在旋转时，望远镜中条纹应当逐渐从式(1.3.5)转变到式(1.3.6)，这样就可以计算出地球在绝对空间的速度 V。但是 Michelson-Morley 极细心的观察找不出这种干涉条纹改变的现象。而且以后更精细的实验，也几乎全部证实原来实验的结论：没有条纹改变现象。换言之，$V=0$。春夏秋冬总是如此。这当然是不可能的，因为地球绕着太阳在转，二个季度的速度必然有差别！

这个出乎意外的结论立刻引起了全世界物理界的注意。很多人做出这样那样的解释。其中最可能的解释为洛伦兹(Lorentz)和 Fitzgerald 独立的，但几乎同时的，一种猜测。他们假设一切物体在绝对空间运动时的长度不同于静止时的长度，假设物体在沿运动方向的长度缩短

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (1.3.7)$$

倍，而垂直于运动方向的长度不变，则式(1.3.3)T_A应改为

$$\overline{T}_A=\frac{2l_1\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{C\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}=\frac{2l_1}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

但T_B不变，所以式(1.3.5)应改为

$$\overline{T}_A-T_B=\frac{2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}(l_1-l_2) \tag{1.3.8}$$

在旋转90°后，l_2缩短，因之T_A'不变，T_B'改为

$$\overline{T}_B'=\frac{2l_2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{C\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}=\frac{2l_2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

因之式(1.3.6)应改为

$$T_A'-\overline{T}_B'=\frac{2}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}(l_1-l_2) \tag{1.3.9}$$

这样式(1.3.9)与(1.3.8)相同，也就没有条纹的变化，但是这种缩短不能用实验室内的尺来直接测量，因为量尺本身也同样的按这个比例缩短，因之这个假设究竟是否可靠也很难断定。

§1.4 光速与光源速度无关的实验证明

在解释Michelson-Morley实验时，有人建议光在绝对空间的速度不是C而是C加上光源的速度V；一如枪在运动时枪弹的绝对速度为$C+V$，这样，式(1.3.1)就改成

$$\bar{t}_1=\frac{l_1}{C} \tag{1.4.1}$$

其余一切也相应的改变。式(1.3.5)或(1.3.6)均改成

$$\frac{2}{C}(l_1 - l_2) \tag{1.4.2}$$

那当然也就没有干涉条纹变动的现象了。这似乎是很简单的假设，但是这个假设与一切过去的理论和实验都发生矛盾，特别电磁波的发生是由于电子的振动，这样一来，光的速度就随时依电子的速度而变！惠更斯的原则根本无法运用；更多由理论导出而又经过实验证明的结果(见§1.5)也无法解释。

最令人信服的简单反证，大概是 Comstock 及 deSitter 分析"双星"的结果。我们为简便起见，可取双星为一发光体绕另一不发光体旋转，此发光体在迎地球方向运动时，光色向紫移；在离地球方向运动时，光色红移(此为多普勒效应，实验结果也证明如此)。假使光速有所不同，则两次发的光到达地球所需的时间也有不同，设双星离地球的距离为 D，则两者相差时间大致为

$$\triangle t = \frac{D}{C_1} - \frac{D}{C_2} = D\left(\frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2}\right) \tag{1.4.3}$$

C_1 及 C_2 为两种不同光速，由于 D 的数值很大，上式相差的时间可以很大，甚至可以超过双星的旋转周期。因之，偏紫光出现的时间间隔与偏红光出现的时间间隔必有离奇的差别发生，但是 deSitter 分析若干双星的结果证明没有这种离奇的现象。这样就直接否定以上的假定，而实际上也验证了光速与光源无关的理论要求。

§1.5 不同参照系上波动进行的古典研究

设在 S 系统中有一简谐平面波

$$A\cos\varphi = A\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{lx + my + nz}{u}\right), \tag{1.5.1}$$

φ 称波相，表示波的峰或谷。等相以

$$2\pi\nu\left(t-\frac{lx+my+nz}{u}\right)=C \qquad (1.5.2)$$

表示。ν、l、m、n、u 均为常数。因之在某一 t 时，等相面是法线在(l，m，n)方向的平面。在另一时间 t_0，亦为一同方向的平面

$$2\pi\nu(t_0-\frac{lx_0+my_0+nz_0}{ut})=C \qquad (1.5.3)$$

式(1.5.2)与(1.5.3)相减，消去 C，得两平面的关系：

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=u(t-t_0) \qquad (1.5.4)$$

平面(1.5.3)上的任意一点(x_0，y_0，z_0)与平面(1.5.2)上的任意另一点(x，y，z)的距离在波平面法线方向投影的长度为 $u(t-t_0)$，图1.6。因之 u 即等相平面(1.5.2)的移动速度，u 亦称“相速”。波峰在适合方程

$$\nu(t-\frac{lx+my+nz}{u})=n \qquad (1.5.5)$$

的时间和地点，n 为一任意整数，在同一地点，经过 $\nu\triangle t=1$ 或 $\triangle t=1/\nu$ 时间之后，又出现一波峰。因之 ν 为波的“频率”。

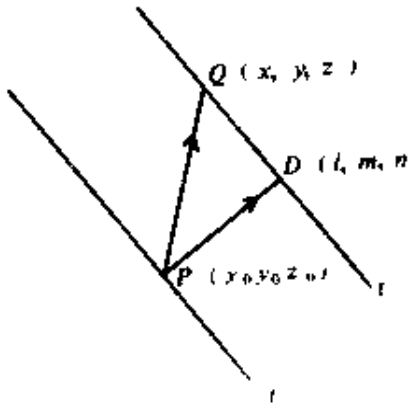


图 1.6

在 S' 系统，相应的波峰(1.5.5)则出现在，以式(1.2.1)代入

$$\nu(1-\frac{lV}{u})(t'-\frac{lx'+my'+nz'}{u-lV}+\frac{la+lVd+mb+nc}{u-lV})$$

$$\equiv \nu'\left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{u'} + c'\right) = n \qquad (1.5.6)$$

的时间和地点。完全相同的讨论证明在 S' 系内此波亦为同方向的平面波。在 t' 时，其等相面为

$$lx' + my' + nz' - (u - lv)t' = D \qquad (1.5.7)$$

平面，因之相平面的法线 l'、m'、n'，为

$$l' = l, \quad m' = m, \quad n' = n, \qquad (1.5.7)'$$

但是相速现在是

$$u' = u - lV, \qquad (1.5.8)$$

与波的进行方向有关，其频率 ν' 的改变为

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{lV}{u}\right) \qquad (1.5.9)$$

频率的变化称多普勒效应，亦与波的进行方向有关。式(1.5.9)亦称“古典多普勒效应”。

关于波的传播问题，亦即 t_0 时平面(1.5.3)上某点 (x_0, y_0, z_0) 发出的“影响”在 t 时传播到什么地方去的问题可以用惠更斯的包迹法解决。

设在 S 系，波各方向传播速度皆相等。则在 t_0 时，(x_0, y_0, z_0) 处所发生的影响在 t 时即传播到

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = u^2(t - t_0)^2 \qquad (1.5.10)$$

的 x, y, z 各处。另一邻近点 $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0)$ 处 t_0' 时发出的影响在 t 时也到达 x, y, z 处

$$(x - x_0 - \delta x_0)^2 + (y - y_0 - \delta y_0)^2 + (z - z_0 - \delta z_0)^2 = u^2(t - t_0)^2 \qquad (1.5.11)$$

今设此若干邻近 (x_0, y_0, z_0) 各处的 $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0)$ 发出的波为同相，亦即各处均同在(1.5.3)的相平面之上：

$$l\delta x_0 + m\delta y_0 + n\delta z_0 = 0 \qquad (1.5.12)$$

并设在 t 时，这些波一齐到达同一点 (x,y,z)。则在该处又均是同相波因之加强，此加强点可以求出。由式(1.5.10)及(1.5.11)得同 t。同 t 同 x,y,z，但不同 x_0,y_0,z_0，的各点满足方程

$$(x-x_0)\delta x_0+(y-y_0)\delta y_0+(z-z_0)\delta z_0=0, \tag{1.5.13}$$

因之由式(1.5.12)及(1.5.13 两式得 (x,y,z) 处波在 t 时同相加强的条件为

$$x-x_0=\lambda l, y-y_0=\lambda m, z-z_0=\lambda n, \tag{1.5.14}$$

λ 为一待定数，以之代入式(1.5.10)得 $\lambda^2=u^2(t-t_0)^2$ 或

$$\lambda=\pm u(t-t_0), \tag{1.5.15}$$

正号代表图 1.6 上前进的波 $(t>t_0)$，因之加强点 (x,y,z) 满足条件

$$x-x_0=lu(t-t_0)\ ,\ y-y_0=mu(t-t_0),$$
$$z-z_0=nu(t-t_0) \tag{1.5.16}$$

换言之，(x_0,y_0,z_0) 的影响也是沿法线 (l,m,n) 方向以速度 u 传播，此种传播速度亦称“射线传播速度”。

但在 S' 系统看来球面(1.5.10)为，以式(1.2.2)代入，

$$(x'-x_0'+Vt'-Vt_0')^2+(y'-y_0')^2+(z'-z_0')^2=u^2(t'-t_0')^2; \tag{1.5.17}$$

是一个中心循 x' 方向以速度 V 向后退的球面。各邻近同相点 $(x_0'+\delta x_0', y_0'+\delta y_0', z_0'+\delta z_0')$ 在同 t_0' 时发出的相应球面为在 t' 时到达点 x',y',z'，满足方程

$$(x'-x_0'+Vt'-Vt_0')\delta x_0'+(y'-y_0')\delta y_0'+(z'-z_0')\delta x_0'=0 \tag{1.5.18}$$

其中 $\delta x_0', \delta y_0', \delta z_0'$ 由于同相的关系式(1.5.7)满足方程

$$l\delta x_0'+m\delta y_0'+n\delta z_0'=0 \tag{1.5.19}$$

的同相条件，因之各不同 $\delta x_0', \delta y_0', \delta z_0'$ 但同相点在 t_0' 时所发出的波在 t'，(x',y',z') 满足，解(1.5.19)及(1.5.18)方程

$$x'-x_0'+Vt'-Vt_0'=\mu l\ ,\ y'-y_0'=\mu m\ ,\ z'-z_0'=\mu n \tag{1.5.20}$$

的关系，以之代入(1.5.17)内得出 μ，

$$\mu^2=u^2(t'-t_0')^2,\ \mu=\pm u(t'-t_0') \qquad (1.5.21)$$

正号，由于 $t'>t_0'$，代表在 l,m,n，方向前进的波，负号可不计。因之对 S' 系看来，影响的传播依方程

$$\left.\begin{aligned} &x'-x_0'=(lu-V)(t'-t_0'),\\ &y'-y_0'=mu(t-t_0')\ ,\ z'-z_0'=nu(t'-t_0') \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.22)$$

此种"射线速率"

$$W=\sqrt{(lu-V)^2+m^2u^2+n^2u^2}=\sqrt{u^2+V^2-2luV}, \qquad (1.5.23)$$

与相速不同，且其进行方向

$$l'=\frac{lu-V}{\sqrt{u^2+V^2-2luV}},\quad m'=\frac{mu}{\sqrt{u^2+V^2-2luV}},$$

$$n'=\frac{nu}{\sqrt{u^2+V^2-2luV}} \qquad (1.5.24)$$

也与波相进行的方向一般不同。但以式(1.5.22)与(1.5.16)比较，见射线速度适合于质点速度(1.2.2)的矢量加法，图1.7[波的相速(1.5.8)一般不适合矢量加法]。

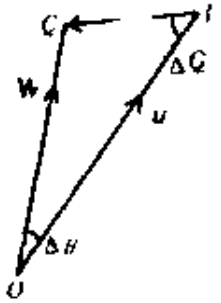


图 1.7

Bradley 在 1727 年发现远处恒星所发的光到达地球上时由于恒星的运动，望远镜必须指到另一个方向，冬天和夏天指的方向不同，此种现象称"光行差"现象，一般用光的"射线速度"来计算。由图 1.7 得

$$\sin\triangle\psi=\frac{V}{W}\sin\psi=\frac{V\sin}{\sqrt{C^2+V^2-2CV\cos\theta}}$$

由于 $V\ll C$，上式近似于 Bradley 的公式

$$\triangle\psi=\frac{V}{C}\sin\theta \qquad (1.5.25)$$

$\triangle\psi$ 称为光行差。普通简单的书上常是用微粒法解释。为简化计，

设“光粒”的射入垂直于 V(图 1.8),由于地球的运动,望远镜必须放在 OQ 方向,才能收到光粒:

$$\tan\triangle\psi = \frac{V}{C} \qquad (1.5.26)$$

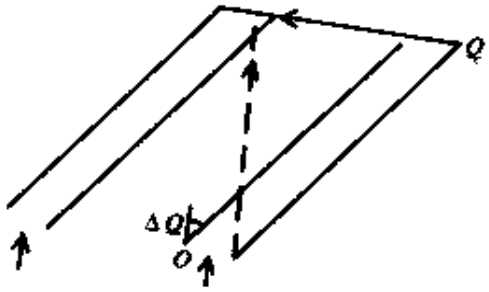


图 1.8

因此时 $\psi=\frac{\pi}{2}$,上式即方程(1.5.25)的特殊情况,不过微粒法与光的波动说不合。Airy 于 1871 年用水放在望远镜筒内观察出来的光行差数值不变,也与微粒说有矛盾,实际上即“射线”方法也不真正解决问题*。我们现在可以详细地分析一下。

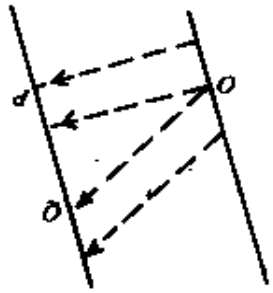


图 1.9

设图 1.9 上 OP 为波平面的方向,OQ 为射线方向,在 PQ 平面上光波各处均同相,设望远镜放在 Q 处,则望远镜筒究竟应当放在什么方向才能使光波在望远镜中成像呢?望远镜的构造是使同“相”的光波聚到焦点上来。因之我们必定要把望远镜放在于波相平面 PQ 垂直的方向,也就是“波”进行的方向,才能使之在焦点上成像。

假使望远镜筒被放在平行于 OQ 的方向则由于同时进入物镜

---

* 例如 mØller:The Theory of Relativity 1955 P. 25,即用射线法

的光波不同"相"的缘故，它们不会在焦点上成像。

当同相波垂直射入镜筒之后，则不管筒内装不装水，它们总是在焦点处同"相"，加强成像，所以 Airy 的实验与 Bradley 的观察基本上是一样。

因之，我们认为通常用射线方法解释 Bradley 的观察是不可靠的，和微粒法的解释犯了不同的错误，真正的解释应当是"相"变化的方法，从方程(1.5.7)可见古典方法不能解释光行差的现象。留到后面再谈，见方程(3.3.14)。

不同系统上波的进行也可以从波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \tag{1.5.27}$$

直接研究，由(1.2.1)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\\ \frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-V\frac{\partial}{\partial x'}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'}\end{aligned}\right\} \tag{1.5.28}$$

因之，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(1-\frac{V^2}{u^2}\right)\frac{\partial^2}{2x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\frac{2V}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{1.5.29}$$

所以波方程(1.5.27)有了改变，从式(1.5.29)也可以求出在 S' 系内波的性质。

例如右手的算符允许平面波

$$f(l'x'+m'y'+n'z'-u't') \tag{1.5.30}$$

形式的解答，f 可为任意连续函数，以之代入式(1.5.29)就可以求出 u'：

$$u'=\pm u-l'V,$$

与式(1.5.8)相合

这种研究方法很别扭，我们不如还是将式(1.5.29)用(1.2.1)"数学"地变回到式(1.5.27)。解决之后，再用式(1.2.1)"数学"地变换到 x' 系统便当些，不过这个方法和本节所用的方法完全没有什么两样，仅是现在是"数学"地，不加物理意义而已

第二章　爱因斯坦的狭义相对论（即“特殊相对论”）

§2.1　狭义相对论原理

在上一章内已经证明过不能用古典力学的方法测出参考系统在绝对空间的恒速运动。古典电磁学和光学在理论上应当可以测出参考系统的绝对运动，不过精细的实验特别是 Michelson—Morley 实验，并没有得出预料的结果。实验结果似乎说明不管冬天夏天，我们实验室在空间的绝对速度总是零。显然，这是不可能的。由于地球绕日运动能使夏天和冬天的速度差达到每秒 60 公里，因之不会每次都是零！Bradley 光行差的观察也给了相反的证明。

我们对所以测不出的理由曾予以各种不同的解释，特别是 Lorentz 及 Fitzgerald 建议的长度收缩假设，这些解释是否可靠，我们也难肯定。但是和其他力学方法一样，“用光学方法也测不出实验室在空间的绝对速度”则是一个重要的事实。因之，爱因斯坦于 1905 年提一个总的原则：“一切的物理关系均不因参考系统在绝对空间的恒速运动而受影响”。这句话可以说得具体些：“任何实验者不能证实我们的‘绝对’速度（包括静止在内，其速度为零）”。或者，更直接了当，“没有任何方法可以决定我们在绝对空间的速度”。爱因斯坦避免用“绝对空间不存在”几个字，但这就已经够了。

爱因斯坦认为这一个原理是宇宙间的基本原理，凡是和它矛盾的一切新旧理论或观点，必须加以必要的改变，我们将在以后的讨论中看到甚至时间、空间和质量的观念也必须改变。这并不足为奇，由于那些旧老观念是在我们过去的粗浅经验和不精密的实验

基础上形成的；现在既然我们的经验提高，实验更精密（“经验”也就是粗浅的“实验”），我们当然不能还老抱住那种老观念不放，何况一切事实证明，经过此原理“改造”过的观念和理论不独解释了过去的一切经验、实验，而且还解释了和预告了过去许多不能解释的或者“想不通”的理论和实验，从这一个原理预言的（看来和我们旧有观念发生抵触的）结果也被陆续出现的事实证明是正确的，而旧的是错误的。尤其重要的是，这一个原理改变了人类对时间和空间的基本认识。所以这一个原理可称为“人类对物质宇宙认识的一场革命”。

本书就是依照这个原理来“改造”我们过去的观念和理论的。

先从时空的观念说起。由于过去的经验，时空对我们似乎已成了一种固定的观念，但是过去的经验究竟是局限的、粗浅的、表面性的，严格的认识就必须有定量的和精密的研究。测量，就必需要有一种可以测量的工具。我们可先假设有若干个准确的、相同的小“时钟”来计时。这种“钟”的计数可以由例如铀内的含铅数量来测量，或者用一只表来近似地测量。我们再假设有若干“不变”的“刚体”小“尺”来测量空间的距离。不过由于一切物质都是由原子构造成的，而其中间又有若干间隙，因之世界上最好的“刚体”也受力和温度的作用而发生长短的变化，刚体小尺的假设很难成立（我们将要看到“刚体”观念的本身就和狭义相对论矛盾）。爱因斯坦在狭义相对论中仍旧假设这些“小刚尺”的存在来测定两点的距离，是一个缺点，但是爱因斯坦假设的目的只是给两点距离以“一定的”、“可以测量的”物理意义；我们在研究问题时只要留意到这些假定就行了。不必过于拘泥固执，以致寸步难行，当然到某种程度时，回顾考查也可能带出建设性的发展。

由于空间各处的相同性，我们可以假设同样的时钟在同样的情况下，尽管在不同的地点其所计的时间快慢率均仍相同。但是两个计数器的“原点”如何校对？这是一个比较复杂的问题。我们如

何知道当一处钟的计数为"5"时，另一处钟的计数也同样是"5"呢？如果有一种无限速度的讯号，则当 A 钟为"5"时可以发讯号到各处立即联系，则"对时"没有困难，但是我们知道世界上没有这种无限快的讯号，最快的就是光讯号或是电磁波讯号了。爱因斯坦利用光在真空中的传播来校对两处的时间，由于光在真空中传播的速度在理论和实验上都被证明与光源的速度无关，（§1.4 及 §1.5）皆为 C。因之，爱因斯坦提出另外一个"光在真空中，以速度 C 传播，与光源运动无关"的假设。这样在校对两处的时间上就有方法可依（事实上日常生活中校对两不同处的时间也是利用无线电的讯号，而无线电波和光波一样，都是电磁波）。而不只是抽象的"对时"了。

有人批评相对论把"光"放在首要的地位，甚至用它来"建筑"两地的时间观念，爱因斯坦认为这个问题应当从实际角度来看，要校对两处的时间，我们总需要一种手段和步骤。我们为什么不用比较肯定可靠，如光在真空中传播的步骤呢？本书特别指出式（2.2.20）可以把两只钟先校对好之后再慢慢的移到不同地点来"对时"而不一定需要用光讯号来校"对时"。这就是说，不一定把"光"放在"首要地位了。但是结论仍旧相同。即是，"同时"的观念和"时间"的观念、"空间的观念"一样，也不是绝对的，而是相对的。

下一节将用狭义相对论的原理和光速与光源无关的原理来导出钟和尺在运动中的变化，以此得出时间和空间的相对性，也得出"同时"观念的相对性。和其它书上所用的方法不完全一样，我们用的方法是比较具体而形象化的。因之，认为是能具有较深刻的物理印象而可能引起读者兴趣的。

§2.2 运动系统上钟和尺变化的推论

我们放弃钟的快慢及尺的长短和该物体的速度没有关系的假设，而只依靠上一节的"不能证实我们的'绝对'速度"的狭义相对

论原理。利用“光速与光源运动无关”的实验定律来加以推断。

推论 I “运动的尺，设其运动的方向与尺垂直，则尺的长度不起变化”。

证：

取 A，A' 两个同样的正矩形板互相叠合，假设其长边 a 与实验室在空间的运动方向相合，其 b 边与之垂直，见图 2.1。



图 2.1

今使 A' 板沿 A 板在 a 方向以相对速度 V 运动。看 b' 边与 b 边的长短关系(这是很容易看出的)。再使 A' 板沿 A 板在相反方向以同一个相对速度 V 运动。再看 b' 边与 b 边的长短关系(在以上的实验中，我们也可以用各种不同的 V 来做)。设两者长短的变化有所不同，则我们可以肯定我们实验室在绝对空间中有速度，以致产生出这种不对称的现象，但是这样就和相对论矛盾(在空间“有”速度!)。因之，这种不对称的现象不会发生，否则和相对论原理矛盾，既然必定对称，那么假使两者总变长了一样的数值或是短了一样的数值，则证明我们实验室在空间是“静止”的，否则不可能产生这种任何 V 以及任何时(冬天或夏天)皆对称的现象。但是这样又和相对论矛盾(在空间静止)。因之，唯一的可能性是“尺的长度 b 不因在 a 方向的空间速度起任何变化”。这样不管如何运动，总是一样长，就没法断定我们实验室在空间究竟是静止，还是运动了？因之得上述推论 1。

不过注意 a' 边和 a 边长短的比较不能直接看出，必须另外“想法子“测量”(见推论 II)，因之暂时对 a 边难下结论；我们暂时只能断定垂直于运动方向的尺度不起变化。

推论 Ⅱ “运动的钟必定变慢”。

证：

假设系统 S'（实验室）在绝对空间以速度 V 运动。取 V 方向为 X' 轴，在原点 O' 处置一钟及一光源。

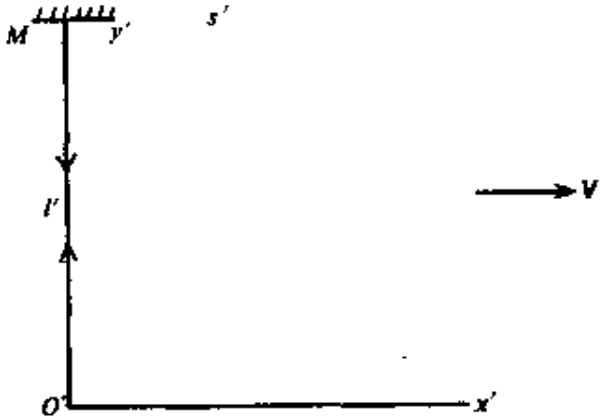


图 2.2

再在 y' 轴上距原点 l' 处置一反射镜 M，调整之使由 O' 处射出的其中某一光线经 M 反射后仍回到 O' 处，现在我们看 O' 处的钟对光经过 $O'MO'$ 这样来回一次所计的时间，由相对论原理，S' 系既可以认为自己在绝对空间静止，又可以认为它自己在空间有速度 V。但 O' 钟的计数仍须相同。否则，由 O' 钟的计数比较起来则 S' 可以决定它自己在空间究竟静止还是运动了。

当 S' 系认为它在绝对空间静止的话，则 O' 处的计数应为

$$\triangle t' = \frac{2l'}{c} \tag{2.21}$$

但是假设认为它在绝对空间是沿 V 移动的话则光在绝对空间的路线是一个等腰三角形的两边，如图 2.3 所示。

由推论 Ⅰ，见 l' 在绝对空间的长度仍为 l'，又由光速与光源的运动无关的结论，因之从 O' 到 M 所需的时间 t_1 为 $c^2t_1^2 = l'^2 + V^2t_1^2$ 或

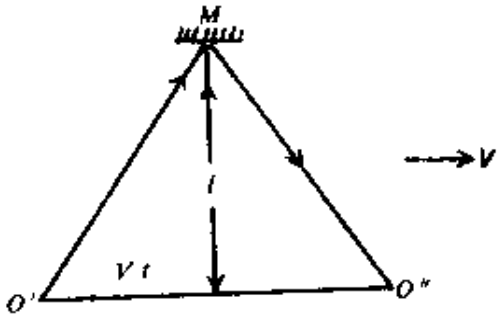


图 2.3

$$t_1 = \frac{l'}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.2.2}$$

从 M 到 O''所需的时间也相同，因之共需时间为

$$\triangle t = \frac{2l'}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.2.3}$$

此式显然和式(2.2.1)不同。l'及 c 均为已知数，那么 O' 处的钟假使指的是式(2.2.3)则可以求出 V，假使指的是式(2.2.1)则可以证明实验室在空间静止。但两者皆和相对论矛盾，因之唯一的可能性就是图 2.3 上 O'的钟在运动时同时变慢$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$倍，因之在假设它运动时它的计数只是式(2.2.3)的$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$倍或

$$\triangle t' = \triangle t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = \frac{2l'}{c} \tag{2.2.4}$$

这样 O'钟的计数就和式(2.2.1)完全相同。由于我们只有 O'处的钟而找不到"静止"的钟，也就没法断定我们 S'系在绝对空间究竟是静止还是运动，这样就不和相对论原理矛盾了。也只有这样，方

程(2.2.4),这个实验才能不与相对论矛盾。

由于 S' 系上各处附着的钟皆处于相同的运动情况(任何处皆可以作为原点 O'),因之 S' 系上各处附着的钟都应变慢 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍。由上式可见,各参考系统的速度 V 必小于 C,否则时间成为虚数即失去真实性了。

在§2.3的最后一段,我们将用另外的方法来证明运动的钟必然需要变慢的这一个推论,我们通常喜欢用力学或其他的物理原因来解释或说明"为什么运动的钟会变慢"。不过,过去的力学或物理定律从未准确到 V^2/C^2 的程度,事实上我们还要照现在推出的结果来改变力学和其它物理定律。因之,"解释"是多余的。换言之,我们认为本节的推论是基本的,物理定律要照这些基本推论来加以更改使之适合于它的要求,而不是用它来符合过去不精确的"物理定律"。

这种运动钟的变慢应当表现在铀以及其它物质的蜕变律,原子光谱以及其它一切可以用作计时的东西,例如生物的变化率上,否则一种计时器变慢而另一种不变慢,则又可以告诉我们系统 S' 在空间不是静止的了,这样又和相对论矛盾。

"时间变慢"的结论已由 Ives 等人用光谱的实验证明为正确,因之时间的绝对性已经打破。μ 介子的生命在低速时一般只有 10^{-6} 秒,但在高速度时,我们由它穿过空气层厚度计算出来的生命常常在 10^{-6} 秒的一百倍之上。我们从理论和实验的研究,相信这种变慢是真的,而不是幻想,由于 C 的数值很大,在通常的速度下,这种变慢不过亿万分之一,超出了仪器的精密度,所以从未被人注意过。

推论Ⅲ "运动的尺,设其运动方向沿着长度的方向,则必缩短"。

证:

在上述 S' 系统中沿 X' 轴上 L' 距离处置一镜 M'，反射由 O' 处发射到 M 的光使再回到 O'。如图 2.4。

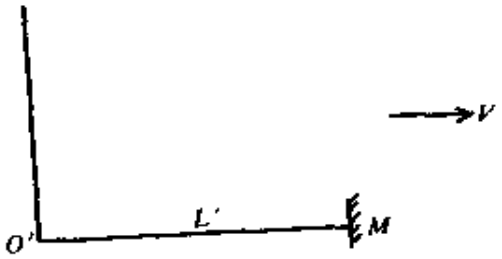


图 2.4

假使 S' 认为它自己在绝对空间不动的话，则光由 O' 到 M 再回到 O' 共需时为

$$\triangle t' = \frac{2L'}{C} \tag{2.2.5}$$

但是假设 S' 在绝对空间是向右以速度 V 移动，则在绝对空间，光由 O' 到 M 时，M 同时也移到 M'。如图 2.5。



图 2.5

我们假设图 2.4 上 $O'M$ 的距离在绝对空间看来为 L，此数值不一定等于 L'，则光从 O' 处到达反射镜 M' 所需的时间 t_1 为 $Ct_1 = L + Vt_1$ 或

$$t_1 = \frac{L}{C - V} \tag{2.2.6}$$

当 M 反射回到 O' 时，O' 亦向前进行若干路程到 O''，见图 2.6。因之光由 M' 反射到 O'，只须时 t_2。$Ct_2 = L - Vt_2$ 或

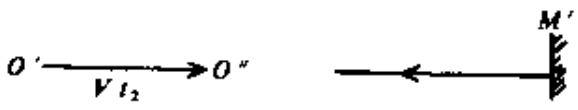


图 2.6

$$t_2 = \frac{L}{C+V} \tag{2.2.7}$$

因之光线来往一次共需时为

$$\triangle t = t_1 + t_2 = \frac{2L}{C\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)} \tag{2.2.8}$$

现在看 O' 处钟的计数应当是多少，由于 S' 系的运动，O' 处钟也跟着运动；又由于运动钟的计数较实际小 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍，因之 O' 处钟的计数应为

$$\triangle t' = \triangle t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = \frac{2L}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.2.9}$$

将式(2.2.9)与式(2.2.5)比较，可见要合于相对论不能确定实验室在空间绝对速度的原则，L 就不能等于 L' 而应当是

$$L = L'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}, \tag{2.2.10}$$

亦即 $O'M$ 在绝对空间的距离应小于在 S' 系的距离 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍，此与 Lorentz－Fitzgerald 的假设完全相同。换言之，相对论证明 Lorentz－Fitzgerald 的刚尺收缩原则是对的，而不是胡思乱想的假设。在通常速度下，这种缩短也只是亿万分之一，是难以觉察的。

推论 IV　“当 S' 运动系统上认为该系统上两处钟的零点已经校对准确时，则在‘静止系统’S 看来并不一定校准”。

证一：用光讯号校对两处的钟。

爱因斯坦所用的方法，是以光讯号连系两处的钟（其他有关相对论的著作上也都是用光讯号连系）。当 S' 在 A' 处，$t_{A'}$ 时发出的光讯号到达 B' 处时，设 B' 将钟拨到

$$t_{B'} = t_{A'} + \frac{r'_{AB}}{C} \tag{2.2.11}$$

以上 r'_{AB} 为 $A'B'$ 两点距离(S' 量的)，则 S' 系认为两处钟即已校对准确(因为 S' 按相对论原则，可以把自己当静止看待而不引起任何矛盾)。我们现在看，假设 S' 在空间有速度 V 则从静止系统 S 来计算 S' 这种对钟的方法是否可以把 A'、B' 两处的钟校对准确。

设 $A'B'$ 与 V 方向垂直，则光讯号在空间的路程为图 2.3 的 $O'M$(改以 $A'B'$ 代表)，因之所费时间在 S 看来应为式(2.2.2)的

$$\triangle t = \frac{r'_{AB}}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.2.12}$$

由于 A' 处及 B' 的钟都比 S 钟慢 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍，因之，当 B 收到讯号时如将上述数字缩小，乘以 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$，亦即如将 B' 钟拨到

$$t_{B'} = t_{A'} + \triangle t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = t_{A'} + \frac{r'_{AB}}{C} \tag{2.2.13}$$

则在 S 看来，B' 处的钟和 A' 处的钟就校对准确，这和式(2.2.11)相同，因之设 $A'B'$ 垂直于 V 的方向则在 S 系统看来，S' 用式(2.2.11)对钟没有问题。但是假使 $A'B'$ 与 V 的方向平行，则由图 2.5 及方程(2.2.6)看来，其由 A' 到达 B'(该图上由 O' 到达 M')的时间为 S 系的

$$\triangle t = \frac{L}{C-V} \tag{2.2.13}$$

由于运动尺的收缩，方程(2.2.10)

$$L = r'_{AB}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}, \text{所以 } \triangle t = \frac{r'_{AB}}{C-V}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{2.2.14}$$

再由于 S' 系上 B' 处及 A' 处钟的变慢，因之 S 认为 B' 应当将 B' 处

的钟拨到

$$t_{B'} = t_A + \Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = t_{A'} + \frac{r'_{AB}}{C-V}\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)$$

$$= t_{A'} + \frac{r'_{AB}}{C} + \frac{r'_{AB}V}{C^2} \qquad (2.2.15)$$

就和 A' 处的钟校对准确。但是这和 S' 用的方法(2.2.11)不同，因之 S 系认为 S' 在 个情形下用的方法不对，B' 钟少拨了

$$\frac{Vr'_{AB}}{C^2} = \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}'_{AB}}{C^2} \qquad (2.2.16)$$

但是由于相对论原理，S' 不能同意这样的看法。而且由于没法断定 V，S' 也没法照式(2.2.16)调整他的钟。因此只能说：当 S' 照他的方法(2.2.11)校准两地的钟时，另外一个系统 S 认为他的钟并未校准，前面的钟应当再向前拨(2.2.16)。换言之，S' 认为两处同时发生的事，在 S 看来则不是同时发生的。此称"同时"的相对性原理，与我们通常的想法不同*，我们通常认为"当我们在这里写书时，远处一个恒星上发生一件什么事情"一句话有绝对的意义。但是由相对论看来，这要看我们用什么参考系统?式(2.2.16)的数值一般很小，因 r'_{AB}/C 为光讯号从 一处到另一处的时间，而 V 总是小于 C〔由式(2.2.4)及(2.2.10)可以看出 V 如大于 C，则失去真实性〕，因之，在任何参考系统看来，"同时"观念引进的相差时间，不会大过 r'_{AB}/C。例如在地面上不会超过几分之一秒，所以通常都认为"同时"观念的绝对性，因为差别在地球上的确是太小了！但是对远处的恒星而言，则地而上和它"同时"发生的事件，从不同系统看起来就可能相差到若干年了！ 相对论推广了人的眼界。

有人认为以上的结果是由于用光讯号对钟而引起来的"错

* 通常物理现象例如能量动量守恒定律或电荷守恒定律总是"同时"的数量加起来，在做相对论研究时我们常常会由于忘记"同时的相对性"而弄错结论

误”，并不是“客观的事实”。我们现在再用另外的方法来证明这种“同时的相对性”。

证二：我们可以将 A'，B' 两只钟先放在一起，在校对准快慢率及零点后，再慢慢的把一只钟 B' 移到 B' 处（我们由量纲分析可以看出运动钟的快慢率不可能和它的加速度有关，见 § 4.4。但是为了避免加速度的影响，可以在本节内仍使钟 B' 保持极小的恒速运动）。在 S' 系统看来，运动的钟 B' 比 A' 处钟慢

$$\sqrt{1-\frac{(\triangle \boldsymbol{V}')^2}{C^2}} \tag{2.2.17}$$

倍，由于 A' 到 B' 处则 B' 钟计数和 A' 钟计数相差为

$$\int_{A'}^{B'} \mathrm{d}t'\left(1-\sqrt{1-\frac{(\triangle \boldsymbol{V}')^2}{C^2}}\right) \tag{2.2.17}$$

再由于 $\triangle V'$ 为小数，上式可展开为

$$\int_{A'}^{B'} \mathrm{d}t' \frac{1}{2}\frac{\triangle \boldsymbol{V}'^2}{C^2}=\frac{1}{2}\frac{\triangle \boldsymbol{V}'}{C^2}\cdot\int_{A'}^{B'}\triangle \boldsymbol{V}\mathrm{d}t'=\frac{1}{2}\frac{\triangle \vec{\boldsymbol{V}}'}{C^2}\vec{\boldsymbol{r}}_{AB}$$

当 $\triangle V'\to O$ 时，相差为零，因之当 B' 钟走得足够慢时，则 S' 看来 B' 钟的计数与 A' 钟的计数相同。但是由 S 看来，A' 钟的速度为 $\boldsymbol{V}$，B' 钟的速度为

$$\boldsymbol{V}+\triangle \boldsymbol{V}$$

$\triangle \boldsymbol{V}$ 为一小数，但不一定等于 $\triangle \boldsymbol{V}'$，因之钟 A' 的计数为

$$t_{A'}=\int \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{V}^2}{C^2}}$$

钟 B' 的计数为

$$t_{B'}=\int \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{V}+\triangle \boldsymbol{V})^2}{C^2}}$$

两者计数的相差为

$$t_{A'}-t_{B'}=\int \mathrm{d}t\left(\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{V}^2}{C^2}}-\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{V}+\triangle \boldsymbol{V})^2}{C^2}}\right)$$

由于$\triangle V$为小数，展开得

$$t_{A'}-t_{B'}=\int\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{V}}{C^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{V}^2}{C^2}}}\mathrm{d}t=\frac{\boldsymbol{V}}{C^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{V}^2}{C^2}}}\cdot\int\triangle\boldsymbol{V}\mathrm{d}t \tag{2.2.18}$$

但$\int\triangle\boldsymbol{V}\mathrm{d}t$为现在$B'$钟和$A'$钟的相对距离(全是$S$系看的)。

所以

$$t_{A'}-t_{B'}=\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{X}}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.2.19}$$

化成S'上看的距离，式(2.2.10)，则B'钟与A'钟如同在X轴上则所记时间相差：

$$t_A'-t_B'=\frac{VX'}{C^2} \tag{2.2.20}$$

换言之，S看来B'钟的计数较A'钟少计了

$$\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{X}'}{C^2} \tag{2.2.21}$$

也就是和式(2.2.16)比较，仍旧"犯了"同样的"错误"，由此可见"同时"的相对性并不局限于用光讯号来对钟。至于用其它机械的方法，例如用一个棍子的两端连系两处的钟，棍子的一端A'移动时开A'处的钟，而另一端移动时则开B'处的钟。我们通常以为当A'移动时，B'亦"立即"移动。实际上，这种"影响"是以声速传播的，不独不是"立即"而且其传播速度一般($<10^6$)远小于光速。由于机械定律从来没有被证明准确到这样的程度——两处距离一万公里的两个钟要准确到1/30秒之上——我们不能依靠已知的力学定律来计算。事实上我们还要改变我们的一切物理定律使之符合本节内的一切推论。

当然，假使有"理想的刚体"存在，A'一端动起来，B'一端也

"立即"动起来;换言之,它的弹性系数无限大,则它可以用无限大的速度传播讯号。那么,我们的结论就要推翻。不过由于物质是原子构成的,而中间又有空隙存在,这种理想不能成立。爱因斯坦的小刚尺只是一种用以测量两点距离的一种假定方法,并不能具有上面传递讯号的性持。

设将 A' 及 B' 两处钟的记数的差数用 S 系的时间来度量,则由式(2.2.20)考虑 S' 系上钟的变慢,得

$$t_A - t_B = \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{X}'}{C^2\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}} \qquad (2.2.22)$$

"同时相对性"是相对论理论中似乎是最和日常生活经验以及通常想法矛盾的一点,也许有人认为这种"同时的相对性"只是由于我们"对时"的"物理步骤所造成"并不一定是"客观事实",但是"客观事实"只有从实践去认识。假使每次实践(这里只叙述了两个比较可靠的实践方法)都得出同样的结果,为什么我们不抛去过去由于较低速度中($V\ll C$)所得出"同时绝对性"粗浅的古老的观念呢?

§2.3 钟尺变化的相对性和实测纪录的不变性

关于前节钟尺变化的几个推论,我们或多或少的可以用常理测度,当原来静止的系统加速时,S' 系统上前后点的速度未必一样。假使前面的速度小些,后面的速度大些;则物质挤紧,尺就要缩短。当物质有挤紧的现象时它的变化率较慢些,也无不可了解之处。至于前后钟零点的不同,则是由于 S' 对钟的方法不合,也无可以惊奇之处。

但是根据狭义相对论原理,S' 可以把自己当作在绝对空间静止的坐标,而 S 系在相反的方向运动,这样 S' 看来:(i)S 系的钟应当慢,(ii)S 系的尺应当缩短,(iii)S 系的各处钟的零点没对准,这是不是有矛盾呢?

上述第三个结论，毫不足怪，因为既然 S' 认为自己各处的钟是对准的，则当然认为 S 系各处的钟是没校对准；何况 S 系对钟也是用的 S' 用过的方法呢？上述第二个结论也并不奇怪。由于量一个运动物体的长短，则必须知道该物体两端的“同时”位置；但“同时”的观念 S 与 S' 不同，因之 S' 的量法与 S 的量法也不同。所以这种缩短的现象也是相对的。但是第一个结论，“S' 认为 S 的钟比 S' 慢，而 S 又认为 S' 系的钟比 S 慢”似乎有矛盾，究竟是谁慢呢？例如两个人在同样年纪时以相对速度 V 分开之后，再回来比较，究竟谁的年纪轻些呢？这是相对论中著名的“钟的佯谬”问题。狭义相对论只谈匀速坐标的相对性，并不涉及加速坐标受“加速”（再回来的人不能作为参考系统）。§ 4.4 内说明钟的快慢率不受加速的影响，因之我们可以肯定加速回来的人比不受加速的人年纪轻。但是这并不和“狭义”相对论矛盾，我们还没说过“加速”是相对的。事实上，设以加速坐标作参考，则在古典力学内必须加入各

事实上由于“同时”观念的相对性，当 S' 认为 $\triangle X'$ 尺两端同时以同速度进行，则 S 认为后面是以较前面迟，如

$$\triangle t = \frac{\frac{V}{C^2}\triangle X'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

时的速度进行。设系统以加速 a 前进，则 S 看两点相对速度为（$\triangle X'$ 为小数）

$$V_{后} - V_{前} = a\triangle t = \frac{\frac{aV}{C^2}\triangle X'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

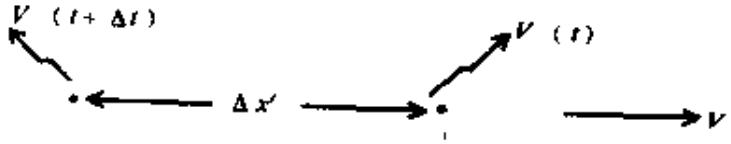


图 2.7

种幻想的“惯性力”(如在地球面上必须加“离心力”和“科里奥利力”来计算大气的运动);Sagnac 也用光的闭路实验算出地球的旋转速度。晕船等等现象均说明加速不是相对的,所以此处不存在“相对”问题(在“狭义”相对论范围内)。

但是,对两个一直互作匀速运动的钟,则这种相对性必须严格成立。当然可以不考虑当初是谁受了加速,而只考虑在已成匀速运动再对准零点,两钟以后的快慢问题。我们看这里有没有矛盾?



图 2.8

设甲乙两人互作匀速运动,当两人在某处见面时,年龄相等如图 2.8(a)。若干年后,设甲用望远镜看乙的年龄和自己的年龄比较来考察究竟谁的年龄轻,图 2.8(b)。

因之两者的长度在 dt 时间内缩短

$$-\delta(\triangle X)=(V_{后}-V_{前})dt=\frac{\frac{aV}{C^2}\triangle X'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}dt$$

由 $V=O$ 积分到 V,使$\triangle X'$保持不变,则共缩短

$$\triangle X_V-\triangle X_o=\int_o^V\delta(\triangle X)=-\int_O^V\frac{\frac{aV}{C^2}\triangle X'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}dt$$

$$=\int_o^V\triangle X'd\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}=\triangle X'(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}-1)$$

因$\triangle X_o=\triangle X'$为 $V=O$ 的长度,

所以 $$\triangle X_o=\triangle X'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\qquad Q.E.D$$

当 $V=$常数时,再积分则得任何长度 L' 的收缩

这里有一个问题，当甲看到乙的年龄和自己的年龄比较时，中间隔着一段光由乙到甲的时间，甲在计算乙“现在”年龄时，必须把这一段时间计算进去，这一段时间并不一定很小，而且甲在计算时有点困难，因为假使甲认为自己的静止的则这一段时间仅是

$$\frac{D}{C} \tag{2.3.1}$$

D 是乙发光时的两者距离，但是假使甲认为自己是向后运动，而乙是静止的话，则这一段时间 t 应为 $ct=D+Vt$ 或

$$t=\frac{D}{C-V} \tag{2.3.2}$$

直接测量的结果只是甲在望远镜中看乙发光时的年龄为 $T''_{乙}$，而在收到光时甲的年龄为 $T_{甲}$，我们可从这两种不同的观点计算出 $T''_{乙}$ 与 $T_{甲}$ 的关系。(1)甲认为自己是静止的，因之乙该时的年龄应缩短为

$$T'_{乙}=(T_{甲}-\frac{D}{C})\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{2.3.3}$$

由于 D 为 $T_{甲}-\frac{D}{C}$ 时两者的距离，因之 $D=V(T_{甲}-D/C)$ 或

$$D=\frac{VT_{甲}}{1+\frac{V}{C}} \tag{2.3.4}$$

代入式(2.3.3)得

$$T'_{乙}=T_{甲}\sqrt{\frac{1-\frac{V}{C}}{1+\frac{V}{C}}} \tag{2.3.5}$$

的关系。

(2)乙是静止的，而甲向左以 V 运动，我们可以从乙的观点来计算。乙的光线射出时甲乙相差的距离为

$$D'=VT'_{乙}$$

光由乙到甲须时为 $D'/(C-V)$ 或 $VT'_{乙}/(C-V)$，因之当光到达甲时，甲的年龄由乙计算应缩短为。

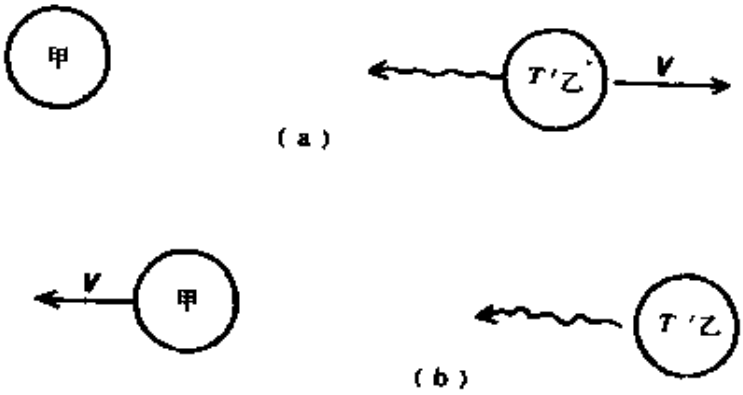


图 2.9(a)(b)

$$T_{甲}=(T'_{乙}+\frac{D'}{C-V})\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}=T'_{乙}\frac{C}{C-V}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

以上 $T'_{乙}+D'/(C-V)$ 是乙计算甲收到的时间，如图 2.9(b)。因

$$T_{甲}=T'_{乙}\sqrt{\frac{1+\frac{V}{C}}{1-\frac{V}{C}}} \qquad (2.3.6)$$

之但此关系与式(2.3.5)完全相同。因之不管假设谁的时间缩短，实测的关系却完全相同。换言之，毫无矛盾之处，"谁的年纪轻"、"谁的钟慢"在这里只是个人的"计算"而已。

也可以设想另外一种方法来比较上述 S' 和 S 系上的钟。我们可以设想在 S 系上放着许多校对好的钟，当 S' 系上某种运动时，它可以和 S 上的各个钟逐个地比较，而不一定用光讯号和它们连系。

例如，当 S' 系上钟 O' 指 t'_1 时，O' 在 S 系上钟 A 之处；该时 A 的指数为 t_1。当钟 O' 指 t'_2 时，O' 钟在 S 系钟 B 之处；该时 B 的指数为 t_2。这些全是实验纪录。我们现在从两种不同的观点来计算这

些纪录。

1. 假设 S 系静止，则由 S' 钟的变慢得

$$(t'_2 - t'_1) = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \qquad (2.3.7)$$

2. 假设 S' 静止，S 系上各种均向左运动；则 S 系上各钟变慢，但是由于 S 的运动，故 S 系上 A、B 两处的钟并没对准，其相差为 $\overline{AB}V/C^2$，因之不是

$$(t_2 - t_1) = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \qquad (2.3.8)$$

而是

$$(t_2 - \frac{\overline{AB}V}{C^2} - t_1) = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \qquad (2.3.8)$$

$\overline{AB}$ 为 S 系测量的两钟距离，由于

$$\overline{AB} = V(t_2 - t_1), \qquad (2.3.9)$$

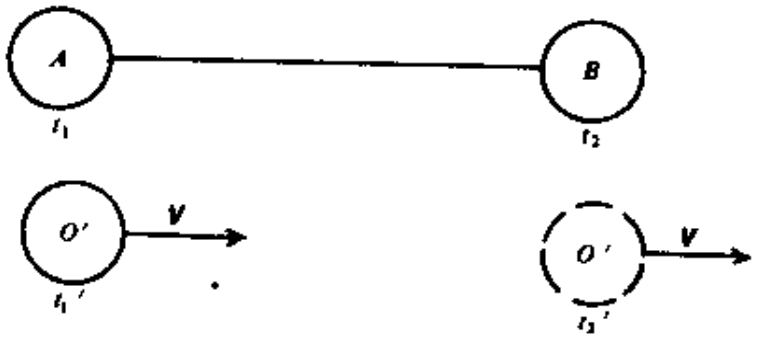
以之代入式(2.3.8)得

$$(t'_2 - t'_1) = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \qquad (2.3.10)$$

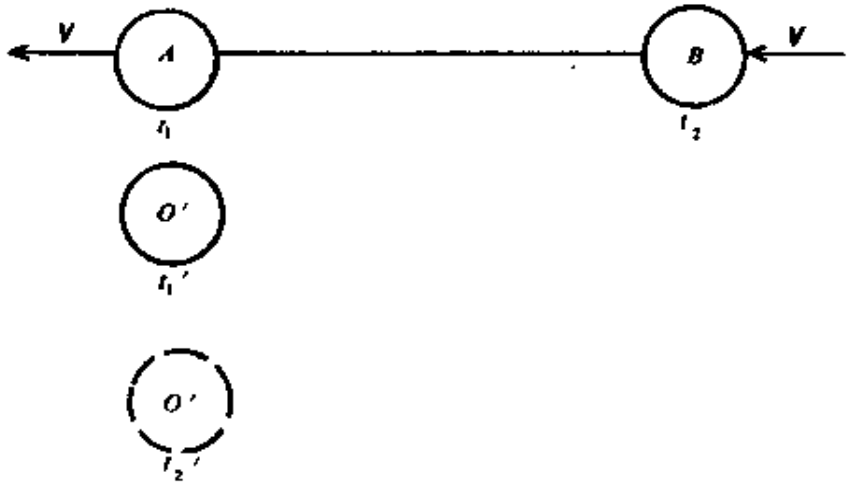
此结果又与式(2.3.7)相同，所以从两种不同的观点仍得出相同的实验纪录。

相对论中“不同的观点，因之也是不同的理论，必须导致同样的实测结论”是一个很有创造力的工作和研究的方法，我们现在用这种方法来证明运动钟必须变慢 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍的已知推论。

设有 A、B 两钟作相对匀速运动，其相对速度为 V。设当两钟匀为零时，两钟互相叠合，以后再分开。设当 A 钟为 T 时 A 发一光讯号到 B；B 收到光讯号时，B 钟的指在 T'。T，T' 均为实测结果。第一种观点：A 钟静止，B 钟以速度 V 向右运动。



(c)



(d)

图 2.9(c)(d)

当 A 在 T_A 时发光讯号，该时 A、B 两钟的距离为 VT_A，光由 A 到 B 需时 t 为

$$t = VT_A/(C - V)$$，见方程(2.2.6) 及图 2.10(a)

因之光到达 B 时，A 钟的指数据计算应为

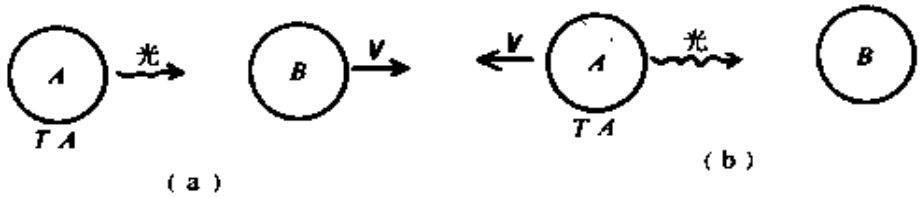


图 2.10

$$T_A + t = T_A + \frac{VT}{C - V} = \frac{T_A}{1 - \frac{V}{C}} \qquad (2.3.11)$$

设 B 种的计数比 A 钟小 λ 倍，则 B 收到讯号时计数应为

$$T_B' = \lambda \frac{T_A}{1 - \frac{V}{C}} \qquad (2.3.12)$$

第二钟观点：B 种静止，A 钟以速度 V 向左移动，这样 A 钟计数应较 B 钟小 λ 倍(由空间的对称性看出两个 λ 相同)。当 A 钟在 T_A 时发光讯号，则 B 认为是在 T_A/λ 时发出。此时两者距离经 B 的计算为

$$V \frac{T_A}{\lambda} \qquad (2.3.13)$$

光由 A 到 B 须时为

$$\frac{1}{C}\left(\frac{VT_A}{\lambda}\right), \qquad (2.3.14)$$

因之 B 收到时应为

$$T_B' = \frac{T_A}{\lambda} + \frac{1}{C}\left(\frac{VT_A}{\lambda}\right) = \left(1 + \frac{V}{C}\right)\frac{T_A}{\lambda} \qquad (2.3.15)$$

但由相对论原则，第一种方法计算的(2.3.12)结论应与第二种方法计算的(2.3.15)结论相同(因 T_A, T'_B 均为实验纪录)，相比得

$$\lambda \frac{T_A}{1 - \frac{V}{C}} = \left(1 + \frac{V}{C}\right)\frac{T_A}{\lambda}, \qquad (2.3.16)$$

或 $\lambda^2=1-\frac{V^2}{C^2}$,

所以
$$\lambda=\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{2.3.17}$$

λ 取正号以避免时间次序的颠倒。换言之,"认为运动的钟必较认为静止的钟慢$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$倍"这一段推论的方法不用"垂直尺度不变"的性质,较上节的推论Ⅱ用的方法更具优点。我们也可以从这里倒推出上节的推论Ⅰ,而不须用原来两个板子叠合的方法。

例如仍旧用§2.2中推论Ⅱ作法(图2.2的方法)以 S' 系作为静止看待,则光由 O' 到 M 来回一次所需的时间在 O' 钟计出应为

$$\triangle t'=\frac{2l'}{C} \tag{2.3.18}$$

假使以 S' 系作为向右运动的看待,则由图2.3看出光由 O' 到 M 再反射回来共需时为(此处当然不假设 S 系测的 l 等于 S' 测的 l')

$$\triangle t=\frac{2l}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \tag{2.3.19}$$

但由于运动钟 O' 慢 $\lambda=\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍,因之 O' 钟计数应为

$$\triangle t'=\triangle t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}=\frac{2l}{C} \tag{2.3.20}$$

由于相对论这两种计算方法的结果应当相同($\triangle t'$ 为 O' 钟实记的数字,是实验的结果),因之式(2.3.18)应与式(2.3.20)相等。

所以
$$\frac{2l'}{C}=\frac{2l}{C} \qquad \text{或 } l'=l \tag{2.3.21}$$

换言之,垂直于运动方向的尺不应改变长度。此为该节的推论Ⅰ。由式(2.3.17),我们可以用搬钟的方法来校对两处的钟(用上节推论Ⅳ的第二个方法)得出"同时"观念的不同;再用图2.4的方法(或本节开始的脚注)可以推出运动尺的缩短,这样可以推出该节

中的一切推论。

§2.4 洛伦兹变换式

由于两相对运动系统钟尺的改变，因之$(x'、y'、z'、t')$与(x,y,z,t)的相互关系就不能用式(1.2.1)表示。

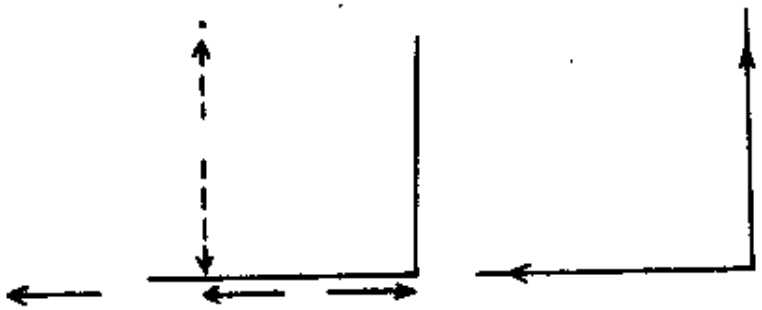


图 2.11

为简便起见，我们取 S' 运动方向在 x' 轴方向，并使 x 轴与 x' 轴叠合。我们再假设当 O' 处钟为零时，两坐标的原点 O 与 O' 叠合，且该时 O 处钟亦为零。因之 O' 点在 x 轴上移动。O,O' 的距离为 Vt，设有一事件发生在 P 点，其位置由 S 看来为(x,y,z)，由 S' 看来为(x',y',z')，则由于运动尺的缩短，$O'x'$ 的距离由 S 看来为

$$x'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}},$$

因之 S 系看来 x 的数值应为

$$x = Vt + x'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (2.4.1)$$

由于垂直运动方向的长度不变，故

$$y' = y \quad 和 \quad z' = z, \qquad (2.4.2)$$

式(2.4.1)及(2.4.2)为两系统测量 P 点位置的关系。

今再询问在 P 发生的某件事情，不同观察者看发生的时间有何不同。

设在 P 处有两个钟 C 及 C'，C' 固着于 S' 系统上，它曾经由 S' 系用某种合理的方法，例如在 §2.2 节推论Ⅳ中用的任何一种方法，使它和 S' 原点 O' 处的钟校对准确。另一个 C 固着于 S 系统上，它也曾经由 S 用同样的方法使它和 S 原点 O 处的钟校对准确。设发生该事之时，S' 认为是在 t'，亦即 C' 记录为 t'，今由 S 计算 C 钟的 t 应当是多少。

第一，S 看此时 O' 处钟的记录 t_0' 与 C' 的记录不同

$$t'_0 = t' + \frac{Vx'}{C^2};$$

第二，由于 O' 处钟的零点曾经和 O 处钟的零点在两者叠合之时对好，因之由 S 系看来 O' 处钟记的时间比 S 系 O 处钟记的时间小 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍。

所以
$$t_0=\frac{t_0'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\frac{t'+\frac{Vx'}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

因 S 系上各处的钟，均经 S 系校对准确，所以由 S 系看来，当 O 处钟记 t_0 时，C 处钟也必记 t_0。因之当在 P 发生某事，C' 钟的记录为 t' 之时，S 认为是在 t 时

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.4.3}$$

当然这也是 C 钟记录的时间（否则将发现矛盾）。以上全是 S 系的计算，但是 C 钟记录该事发生的时间 t 和 C' 钟记录该事发生的时

间 t'，都是实验的记录，因之式(2.4.1)及(2.4.3)关系，不管谁计算，都应当是一样的。*

由式(2.4.1)及(2.4.2)、(2.4.3)得

$$x'=\frac{X-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},y'=y,z'=z,t'=\frac{t-\frac{V}{C^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\quad(2.4.4)$$

及

$$x=\frac{x'+Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},y=y',z=z',t=\frac{t'+\frac{V}{C^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\quad(2.4.5)$$

的关系，或称“变换形式”。由以上的关系的对称，可以看出从 S' 的观点出发也是同样的结果。当 $C\gg V$ 时，此变换蜕化为古典变换式，与式(1.2.1)相同。如在 $t'=0$ 时，原点 o' 在 $x=a_1,y=a_2,z=a_3$ 处该时 0 钟指 t_0，则上式改为

---

* 如由 S' 来计算，则 S' 看 S 向左以速度 V 运动，因之当 C 记 t 时，O 处钟应为

$$t-\frac{Vx}{C^2},$$

x 为 S 所量 ox 的距离，因 S' 认为 S 是运动的，所以 O 处钟变慢

$$t-\frac{Vx}{C^2}=t_0'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

S' 认为 P 处 C' 钟记时 t' 与 O' 钟记时 t_0' 相同，因之

$$t'=t_0'=\frac{t-\frac{Vx}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

由上式及(2.4.1)可以导出式(2.4.3)。换言之，任何方法计算都得出同样的结果(2.4.3)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(x-a_1)-V(t-t_0)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\ y' = y-a_2 \\ z' &= z-a_3,\quad t' = \frac{(t-t_0)-\frac{V}{C^2}(x-a_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (2.4.6)$$

与式(2.4.4)只差常数 a_1、a_2、a_3、t_0，此常数与 x，y，z，t 的数值无关，仅为时钟原点及坐标原点(开始计数点)的常数迁移，一般没有什么重要性，例如两件"事"的差

$$\left.\begin{aligned} (x_2'-x_1') &= \frac{(x_2-x_1)-V(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\ y_2'-y_1' = y_2-y_1, \\ z_2'-z_1' &= z_2-z_1,\quad t_2'-t_1' = \frac{(t_2-t_1)-\frac{V}{C^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (2.4.7)$$

则可从式(2.4.4)或(2.4.6)得出一样的结果，所以我们常常直接用式(2.4.4)及式(2.4.5)变换式称"洛伦兹变换式"，为狭义相对论的基础方程(洛伦兹于1904年即以上式解决运动电荷的电磁场问题，但未予以物理意义)。从式(2.4.7)也可以证明§2.2节内的一切推论。

例如式(2.4.7)中第二方程，即为§2.2的推论Ⅰ、谈到 O' 处的钟，它的位置是 $x_2'=x_1'$ 从式(2.4.7)的第一方程得出

$$x_2-x_1 = V(t_2-t_1),$$

代入第四方程得

$$(t_2'-t_1') = (t_2-t_1)\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}},$$

亦即 O' 钟的计数变少，此为 § 2.2 节的推论 Ⅰ 。

如 S 系要测量一根运动尺的长短，则先决条件是尺的两端必在 S 系认为同一时间 $t_2=t_1$，这时两端的 x_2-x_1，才是尺的长度（我们总不能今天量一个运动尺的一头位置，明天量尺那一头的位置来决定尺的长短！）。由第一方程见

$$(x_2 - x_1) = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}},$$

因之尺缩短，此即推论 Ⅱ 在 S' 系上认为同时的两点 $t_2'=t_1'$ 则式 (2.4.7) 的第四式为

$$(t_2 - t_1) = \frac{V}{C^2}(x_2 - x_1)$$

再用第一式消去 x_2-x_1 得

$$t_2 - t_1 = \frac{V}{C^2}\frac{(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

这就是推论 Ⅳ，方程(2.2.22)。换言之，§ 2.2 中一切推论皆可导出，因之通常方法只以导出式(2.4.4)或(2.4.7)为最后手段，再由此得出有关狭义相对论的各种结论，不过用这种方法导出的结论似乎没有什么深刻的“物理”的印象，有时只给人以“纯数学”的并不真正有说服力的感觉。

从式(2.4.5)由式(2.4.4)导出的事实，我们断定以上的一切结论均具有相对性，而不会发生矛盾。

特别值得注意的是由式(2.4.7)得出

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - C^2(t_2' - t_1')^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - C^2(t_2 - t_1)^2 \qquad (2.4.8)$$

的一个重要结果。这一个结果被 Minkowski 发现为“四维宇宙”，改变过去的宇宙观，这一点将在第五章内予以述说。

另外，我们看到假使另一系统 S''对 S'以 V'在同 x 方向运动，则仿式(2.4.4)得

$$x''=\frac{x'-V't'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},y''=y',z''=z',t''=\frac{t'-\frac{V'x}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V'^2}{C^2}}}$$

将式(2.4.4)代入上式得

$$x''=\frac{x-wt}{\sqrt{1-\frac{w^2}{C^2}}},y''=y,z''=z,t''=\frac{x-\frac{wx}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.4.9}$$

上式中

$$w=\frac{V+V'}{1+\frac{VV'}{C^2}} \tag{2.4.10}$$

由于式(2.4.9)和(2.4.4)为同一形式，我们说变换式(2.4.4)具有“群性”。唯如两者速度方向不同，则一般不具有这种性质〔见下节方程(2.5.15)〕

方程(2.4.4)又可变成以下两种形式。第一，式(2.4.4)可以写成

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cosh\varphi-ct\sinh\varphi,y'=y,\\ ct'&=-x\sinh\varphi+ct\cosh\varphi,z'=z,\end{aligned}\right\} \tag{2.4.11}$$

其中

$$\tanh\varphi=\frac{V}{C}, \tag{2.4.11}'$$

或写成

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos\varphi+x_4\sin\varphi,y'=y\\ x_4'&=-x\sin\varphi+x_4\cos\varphi,z'=z,\end{aligned}\right\} \tag{2.4.12}$$

形式，其中

$$x_4 = ict, x_4' \equiv ict', \tan\varphi = i\frac{V}{C} \qquad (2.4.12)'$$

特别在式(2.4.12)中，出人意外的看出“洛伦兹变换”可以当作在$(x、ict)$平面上旋转的一个虚角φ，这样式(2.4.9)的“群性”就容易解释了。经过在平面上两个旋转φ及φ'之后，结果的旋转角ψ显然为

$$\psi = \varphi + \varphi' \qquad (2.4.13)$$

因之以式(2.4.12)′代入得

$$\frac{iw}{c} = \tan\psi = \frac{\tan\varphi + \tan\varphi'}{1 - \tan\varphi + \tan\varphi'} = \frac{i}{c}\frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{C^2}} \qquad (2.4.14)$$

亦即公式(2.4.10)。

§2.5 相对速度在任意方向的洛伦兹变换式

如V的方向不在x方向则可将任意一点P的坐标r'分为两项，一沿V方向其值为

$$V\frac{(r' \cdot V)}{V^2} \qquad (2.5.1)$$

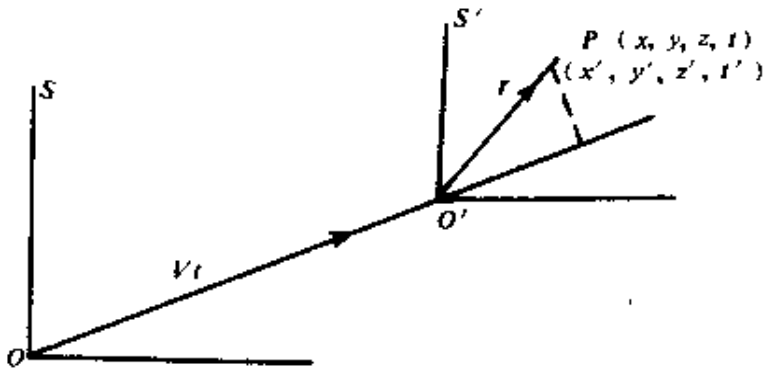


图 2.12

另一项为垂直于 V 方向的长度

$$r'-V\frac{(r'\cdot V)}{V^2} \tag{2.5.2}$$

因沿 V 方向的长度收缩 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍，垂直方向的长度不起变化，由图 2.12 可见(**设当 o 与 o' 叠合时 $t=o, t'=o$**)

$$r=Vt+\left(r'-V\frac{(r'\cdot V)}{V^2}\right)+V\frac{(r'\cdot V)}{V^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{2.5.3}$$

设 S' 在 p 处的钟计数为 t'，则由 s 系看来，o' 处钟此时为

$$t'+\frac{(V\cdot r')}{C^2} \tag{2.5.4}$$

因之 S 的钟计数应为

$$t=\frac{t_o'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\frac{t'+\frac{(V\cdot r')}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.5.5}$$

解式(2.5.3)及(2.5.5)得

$$r=r'+V\frac{(V\cdot r')}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)+V\frac{t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\quad t=\frac{t'+\frac{(V\cdot r')}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{2.5.6}$$

设 $t=o$ 时，S' 的原点不与 O 叠合，且 O' 时钟指数亦不是零，则可以在上式右方加适当的常数，由式(2.5.6)可解出

$$\left.\begin{aligned} r'&=r+V\frac{(V\cdot r)}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)-V\frac{t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\ t'&=\frac{t-\frac{(V\cdot r)}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{2.5.7}$$

仅掉换 V 的符号，此为速度在任何方向的洛伦兹转移。

如以 $x_i'(i=1.2.3)$ 代表 x',y',z'；$x_i(i=1.2.3)$ 代表 x,y,z，则当 r' 系的轴与 r 系的轴平行时，

$$x_i'=x_i+V_i\frac{V_jX_j}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)-V_i\frac{t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

以上 $V_i(i=1、2、3)$ 代表 $V_x、V_y、V_z$；V_jX_j 代表 $\sum_{j=1}^{3}V_jX_j$。如再以 $x_4=ict$，$x_4'=ict_4'$，则式(2.5.7)可写成

$$\left.\begin{aligned}x_i'&=a_{ij}x_j+a_{i4}x_4\\x_4'&=a_{4j}x_j+a_{44}x_4\end{aligned}\right\}\qquad(2.5.8)$$

形式，以上

$$\left.\begin{aligned}a_{ij}&=\delta_{ij}+\frac{V_iV_j}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right),\\a_{i4}&=i\frac{Vi}{C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=-a_{4i},\quad a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(2.5.9)$$

其中 δ_{ij} 为 kronecker 符号，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 设\ i\neq j\\1, & 设\ i=j\end{cases}\qquad(2.5.10)$$

其逆变换只掉换 $a_{i4}、a_{4i}$ 的符号。

式(2.5.8)可写成矩阵形式：

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x & y & z & ict \\
x' & 1+\frac{V_x^2}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & \frac{V_xV_y}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & \frac{V_xV_z}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & i\frac{V_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
y' & \frac{V_xV_y}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & 1+\frac{V_y^2}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & \frac{V_yV_z}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & i\frac{V_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
z' & \frac{V_xV_z}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & \frac{V_yV_z}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & 1+\frac{V_z^2}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) & i\frac{V_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
ict' & \frac{-iV_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-iV_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-iV_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{array}
\qquad (2.5.11)
$$

以上 $\beta^2 \equiv V^2/C^2$，V 为 S′ 系对 S 系的速度。

研究任何变换时，其“微变换”，“逆变换”及“递次变换”的性质均具重要性。

设 V 为微数 δV，则略去其二次方，上式则为

$$
\left.\begin{aligned} r' &= r - \delta V t \\ t' &= t - \frac{\delta V \cdot r}{C^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.12)
$$

其第一式与伽利略变换相同，第二式只有“同时”观念的改正，钟、尺的收缩为二次方，可不计及。此种式(2.5.12)的变换亦称“洛伦兹微变换”。逆变换(2.5.6)，只须掉换上述变换中每个 V_i 的符号。因之

$$
\left.\begin{aligned} x_i &= a_{ij}' x_j' + a_{i4}' x_4' \\ x_4 &= a_{4j}' x_j' + a_{44}' x_4' \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.13)
$$

为“逆变换”，其中 a′ 系数为式(2.5.9)内 a 系数中 V_i 掉换为 $-V_i$，所以

$$
\left.\begin{aligned} a_{ij}' &= a_{ij}, \quad a_{i4}' = -a_{i4} = a_{4i}, \\ a_{4j}' &= -a_{4j} = a_{j4}, \quad a_{44}' = a_{44} \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.13)'
$$

设另有 S″系，其原点以 V′对 S' 系行进且 S''轴与 S' 轴亦平行。例如 S''对 S' 在 y' 方向以 u 进行，则仿式(2.4.4)得出：

$$x''=x',\ y''=\frac{y'-ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}},\ z''=z',\ t''=\frac{t'-\frac{u}{c^2}y'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

(2.5.14)

如 S' 系再对 S 系以速度 V 进行，则得式(2.4.4)以之代入式(2.5.14)内，得

$$\left.\begin{aligned} x''&=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\quad y''=\frac{y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}-\frac{uV_x}{C^2}-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\ z''&=z,\qquad t''=\frac{t-\frac{Vx}{C^2}-\frac{u}{C^2}y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\}$$

(2.5.15)

由这个式子看出 x''、y''中 t 的系数不同于 t''中 x、y 的系数，因之不是式(2.5.7)或(2.5.11)的形式。换言之，一般递次(2.5.7)的变换不能成群，与式(2.4.9)不同。在§5.7内，我们将要看到这是由于 S''轴与 S 轴不平行；加一适当的空间旋转后上式可以成式(2.5.7)的形式。因之本节就不再谈递次的变换。

§2.6 洛伦兹变换式数学的导出方法

通常书上洛伦兹变换系直接利用两系统内光速均为 C 的原则用数学方法导出，这虽然缺乏物理印象，但可以从它看出数学的严格性来。

在 S 系，光速方程为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-C^2(t_2-t_1)^2=0$$

(2.6.1)

在 S' 系，光速方程为

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - C^2(t_2' - t_1')^2 = 0 \tag{2.6.2}$$

我们问(x')与(x)应为何种关系时，式(2.6.1)才可以转变到式(2.6.2)？

问题的一般的讨论留在§5.3再谈。现在限于两系统的 x 轴互相叠合，且 S' 沿 x 轴以速度 V 进行的情形。如图 2.13y、y'上两根叠合的虚线可以作为固定在 S 及 S' 上两根互滑的横木，由于相对论，S 也可被看作在 S' 上滑走，又由于空间的对称性，y'的长度不能比 y 矮或高，否则相对性即被破坏，因之两根横木永远叠合。

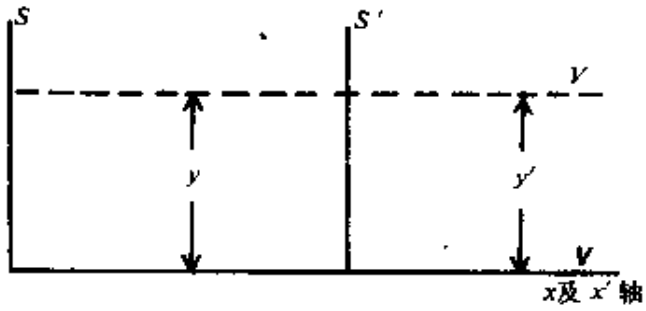


图 2.13

$$y' = y, \quad z' = z \tag{2.6.3}$$

式(2.6.1)，(2.6.2)可写成

$$\left.\begin{aligned}(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= C^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \\ (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 &= C^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2\end{aligned}\right\} \tag{2.6.4}$$

由于式(2.6.3)，(2.6.4)两式的左边应当相等，因之右边也必相等：

$$C^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = C^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 \tag{2.6.5}$$

以

$$\left.\begin{aligned}(x_2' - x_1') &= a(x_2 - x_1) + b(t_2 - t_1)\\ (t_2' - t_1') &= f(x_2 - x_1) + e(t_2 - t_1)\end{aligned}\right\} \tag{2.6.6}$$

a、b、f、e 为待定数，也不限定为常数，将式(2.6.6)代入式(2.6.5)的右方予以比较则得

$$\left.\begin{aligned}&a^2 - c^2f^2 = 1, \quad b^2 - c^2e^2 = -c^2\\ &ab - c^2ef = 0\end{aligned}\right\} \tag{2.6.7}$$

此为 a、b、f、e 必须满足的条件，解 b、f、e 得

$$\left.\begin{aligned}(x_2' - x_1') &= a(x_2 - x_1) \pm C\sqrt{a^2 - 1}(t_2 - t_1)\\ (t_2' - t_1') &= \pm\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{C}(x_2 - x_1) + a(t_2 - t_1)\end{aligned}\right\} \tag{2.6.8}$$

如时间及坐标差数的符号在两系统均相同(左右前后次序不变)，则 a 必为正数。又因当 x_2-x_1 及 t_2-t_1 为实数时，$x_2'-x_1'$ 及 $t_2'-t_1'$ 亦必是实数，因之 $a^2\geqslant 1$。由上可见 a 本身必大于或等于 $+1$，设 φ 为另一任意数，则 a 可写成 $\cosh\varphi(\geqslant 1)$，或(2.6.8)成为

$$\left.\begin{aligned}(x_2' - x_1') &= (x_2 - x_1)\cosh\varphi + C(t_2 - t_1)\sinh\varphi\\ C(t_2' - t_1') &= (x_2 - x_1)\sinh\varphi + C(t_2 - t_1)\cosh\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.6.9}$$

形式，其正负号吸收到 $\sinh\psi$ 内，不须再予写出。设式(2.6.1)及(2.6.2)对任意(x_1)、(x_2)两点皆成立，我们可取 $x_1'=0$，$t_1'=0$ 及 $x_1=0$，$t_1=0$，则

$$\left.\begin{aligned}x' &= x\cosh\varphi + ct\sinh\varphi\\ ct' &= x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.6.10}$$

因原点 O' 以速度 V 在 x 轴上进行，亦即 $x'=0$ 一点的方程为

$$x = Vt, \tag{2.6.11}$$

这样定出 φ 为常数，

$\tanh\varphi = -\frac{V}{C}$，所以 $\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$，$\sinh\varphi = \frac{-V}{c\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$

代入式(2.6.10)内，得

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{C^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.6.12)$$

洛伦兹变换，从这个公式我们可以用式(2.4.7)之后的方法说明一切钟尺的变化现象。

第三章　相对论使运动学改变

§3.1　点运动的变换式

设式(2.4.7)中两点 x_1、x_2 系一质点 P 在两邻近时间 t_1 及 t_2 的位置，以 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}t$ 代表，则 S' 测得相应的 $\mathrm{d}x'$ 及 $\mathrm{d}t'$ 为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= \frac{\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}t' &= \frac{\mathrm{d}t - \frac{V}{C^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{3.1.1}$$

解之得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y', \mathrm{d}z = \mathrm{d}z', \\ \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}t' + \frac{V}{C^2}\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{3.1.2}$$

如用式(2.5.7)，V 不限于 x 方向则得

$$\left.\begin{aligned}
d\boldsymbol{x}' &= d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x})}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right) - \boldsymbol{V}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\
dt' &= \frac{dt - \frac{(\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x})}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}; \\
d\boldsymbol{x} &= d\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x}')}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right) + \boldsymbol{V}\frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\
dt &= \frac{dt' + \frac{(\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x}')}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

设以 $\boldsymbol{q}$ 代表 S 系所测 P 的速度，$\boldsymbol{q}'$ 为 S' 所测 P 的速度，由式(3.1.1)及(3.1.2)得

$$q_x' = \frac{q_x - V}{1-\frac{q_x V}{C^2}}, q_y' = \frac{q_y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1-\frac{q_x V}{C^2}}, q_z' = \frac{q_z\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1-\frac{q_x V}{C^2}} \tag{3.1.4}$$

及

$$q_x = \frac{q_x' + V}{1+\frac{q_x' V}{C^2}}, q_y = \frac{q_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{q_x' V}{C^2}}, q_z = \frac{q_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{q_x' V}{C^2}} \tag{3.1.5}$$

当 V 不限定在 x 方向时，则由式(3.1.3)得

$$q' = \frac{q\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} + V\frac{(q\cdot V)}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) - V}{1-\frac{(q'\cdot V)}{C^2}},$$

(3.1.6)

$$q = \frac{q'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} + V\frac{(q'\cdot V)}{V^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) + V}{1+\frac{(q'\cdot V)}{C^2}}.$$

(3.1.7)

设将 q' 分成在 V 方向的分量

$$V\frac{q'\cdot V}{V^2}$$

及垂直于 V 的分量

$$q' - V\frac{q'\cdot V}{V^2}$$

则可以从简单的变换公式(3.1.4)、(3.1.5)得出一般的变换公式(3.1.6)。式(3.1.6)说明相对于 S 系速度为 V 的质点，在 S' 系看来速度为零；相对于 S' 系速度为 $-V$ 的质点，在 S 系看来速度亦为零，设在 S 系两个质点的相对速度 q_1-q_2 为零，则在 S' 系其 $q_1'-q_2'$ 亦为零。这些结论都与普通的观念相合。再取上式的 $q\cdot V$ 及 $q\wedge V$ 得

$$qV\cos\alpha = \frac{(q'V\cos\alpha' + V^2)}{1+\frac{(q'\cdot V)}{C^2}}, qV\sin\alpha = \frac{q'V\sin\alpha'}{1+\frac{(q'\cdot V)}{C^2}},$$

因之质点速度与 V 所成的方向 α、α' 的关系为

$$\tan\alpha = \frac{q'\sin\alpha'}{q\cos\alpha' + V} \qquad (3.1.8)$$

此亦与用通常方法

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{V},$$

所以 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}=\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}+V^2,\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{V}=\boldsymbol{q}'\wedge V;$

所以
$$\tan\alpha=\frac{q\sin\alpha'}{q'\cos\alpha'+V},\tag{3.1.8}$$

得出的结果相同。但是其它的结论则一般不同，特别如$|\boldsymbol{q}|=C$，则$|\boldsymbol{q}|'$亦为C。

由式(3.1.6)和(3.1.7)得

$$\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}}\tag{3.1.9}$$

及

$$\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}}\tag{3.1.10}$$

因之得出

$$\left(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}\right)\left(1+\frac{(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}\right)=1-\frac{V^2}{C^2}\tag{3.1.11}$$

的简单关系。

式(3.1.9)或(3.1.10)表示两不同系统中收缩因子$\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}$的互相关系，例如一个运动的钟：

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t_o}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\qquad \mathrm{d}t'=\frac{\mathrm{d}t_o}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}},$$

所以
$$dt=\frac{dt'\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{dt'\left(1+\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.1.12}$$

表示一个系统所测时间和另一个系统所测时间的关系。

公式(3.1.4)→(3.1.11)只是S'系所测速度$\boldsymbol{q}'$与S系所测速度q的关系，今设S系测p的坐标为$\boldsymbol{r}_p$，测S'系原点o'的坐标为$\boldsymbol{r}_{o'}$，测P对o'的"相对位置"由S定义应为

$$\boldsymbol{r}_{po'}=\boldsymbol{r}_p-\boldsymbol{r}_{o'}, \tag{3.1.13}$$

其"相对速度"由S看来为

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{po'}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_p}{dt}-\frac{d\boldsymbol{r}_{o'}}{dt}$$

因S系测P的速度为$\boldsymbol{q}$，o'的速度为$\boldsymbol{V}$，故上式即为

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{po'}}{dt}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{V} \tag{3.1.14}$$

的普通矢量加法，但上面这个"相对"位置$\boldsymbol{r}_{o'}$和相对速度$d\boldsymbol{r}_{o'}/dt$全是S系的测量，有些人说相对论速度加法与矢量加法矛盾，这是由于混淆两种不同的测量所致。假使一个人测量，则没有这种矛盾发生，式(3.1.13)及(3.1.14)，而式(3.1.7)左边的$\boldsymbol{q}'$是S'的测量，它的右边$\boldsymbol{q}$是S的测量；两者既用不同的钟、尺，当然也就不能希望它们合于矢量加法。所以"相对速度"的矢量加法与等式(3.1.6)并不矛盾。

我们从式(3.1.1)的导出可以知道在导出过程中没有"质点"的字样，因之以上方程的关系并不限于"质点"的速度。任何两"点"之间的"连系"皆适合式(3.1.1)以及由之导出的其它关系〔参考波的射线速度方程(3.5.10)→(3.5.13)〕。

由式(3.1.9)可以看出当$|\boldsymbol{V}|<C$时，设$|\boldsymbol{q}|<C$，则右边为虚数，左边亦应为虚数。换言之，$|\boldsymbol{q}'|$亦应小于C；设$|\boldsymbol{q}|>C$，则$|\boldsymbol{q}'|$亦应大于C；设$|\boldsymbol{q}|=C$，则$|\boldsymbol{q}'|$亦应等于C，因之光在真空中的速

率对任何系统总是一样；小于或大于 C 的速度，在任何系统看来总是小于或大于 C。C 在相对论上为一奇特的速度。再当 $|q_x|>C$，我们可以选另一系统的速度 V，使

$$V=\frac{C^2}{q_x},(\text{当然小于 } C), \tag{3.1.15}$$

则由式(3.1.4)看出，此时 $q_x'\to\infty$。换言之，任何超光的速度对某一适当系统看来可成为无限大的速度！同样设 $|q_x|<C$，则可以选 V 使 $q_x'=o$。

因两系统的相对速度不能大于 C(否则为虚数)，由此可见，在相对论中超光速和无限大的速度是分不开的；小于 C 的速度与"静止"又是分不开的。但是小于 C 和大于 C 的速度却有基本的差别，任何大于 C 的速度在适当系统中可为无限大；任何小于 C 的速度，在适当系统中可为零；而等于 C 的速度则对任何系统皆是一样为 C。作为速度变换的例题，我们可以讨论一下"宇宙扩张"的问题，有人假设宇宙中一切星及星云在遥远古代时为一个大质量向各方以不同速度分裂爆炸的结果，这样在爆炸后 t 时，各个星对中心爆炸点的距离

$$r=qt \tag{3.1.16}$$

q 为小于 C 的任何恒速，现在证明这个公式是相对的。设取其中任一星作为坐标 S' 的原点 O'。由于在 $t=O$ 时各星全聚在一点，取该时的 $t'=O$，则公式(2.5.7)可以适用。以式(3.1.16)代入并由式(3.1.6)得图(3.1)

$$q'=\frac{r'}{t'} \tag{3.1.17}$$

t' 为该系所测量宇宙分裂爆炸后的时间，与古典运动学的结论同。*

---

* 从古典运动学导出相同的结论，由图 3.1 看出

$r_1'=q_1t'-vt$ 因 $q_1'=q_1-v$ 又因 $t=t'$ 所以 $r_1'=q_1't'$

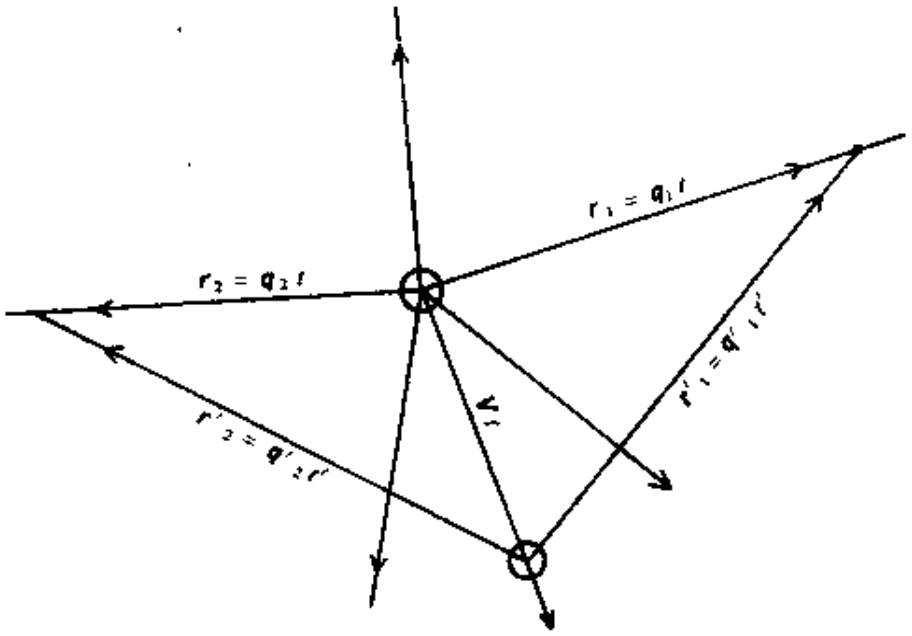


图 3.1

因之对任一星看来，各星对他皆以恒速(3.1.17)向四外发射，所以任一观察者皆可应用方程(3.1.16)而静止的将自己看作"宇宙原始爆炸中心"，在任一 t' 时各处的星对他皆以与距离成正比的速度后退(方程 3.1.17)。实则在天文上，现在距离有关的也就是相对速度 q' 最大的。Hubble 早就观察到这种现象，并由方程(3.1.16)从 r 及由 Doppler 推出的 q 计算宇宙的形式是在 $t=35$ 亿年前，这个数字和用其它方法估计的也大致相合。因 $|q|$ 小于 C，$|q'|$ 也小于 C，所以宇宙的半径一定小于 35 亿"光年"。质点的加速度可以由式(3.1.5)求出。因

$$dq_x' = \frac{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}{\left(1-\frac{q_xV}{C^2}\right)^2}dq_x, \qquad (3.1.18)$$

以式(3.1.1)的 dt' 分除两边，得加速度的关系

$$a_x' = \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{3/2} a_x \Big/ \left(1 - \frac{q_x V}{C^2}\right)^3 \qquad (3.1.19)$$

$$a_y = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)}{\left(1 - \frac{q_x V}{C^2}\right)^2}\left[a_y - \frac{q_y \frac{V a_x}{C^2}}{1 - \frac{q_x V}{C^2}}\right] \qquad (3.1.20)$$

当 $\boldsymbol{V}$ 为任何方向，则由式(3.1.6)及(3.1.1)得

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V})}{c^2}\right)^2}\boldsymbol{a} + \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V})}{c^2}\right)^3}$$

$$\left\{\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a})}{c^2}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a})}{V^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)\right\} \qquad (3.1.21)$$

掉换 $\boldsymbol{V}$ 的符号，即掉换 S 一撇与 S 的关系，其它各级偏导，亦可如此求出。从上式及式(3.1.9)得

$$\frac{(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{V})}{\left(1 - \frac{q'^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V})}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \qquad (3.1.22)$$

亦即在 $\boldsymbol{V}$ 方向的加速分量除以$\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}$为一不变量，我们由式(3.1.21)及(3.1.6)得

$$\frac{(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{a}')}{\left(1 - \frac{q'^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a})}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}} - \frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a})}{\left(1 - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (3.1.23)$$

除特殊情形，$\boldsymbol{V}\parallel\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{q}\cdot a=0$ 外，不一定有 $\boldsymbol{q}'\cdot a'=0$。在一个系统内的速度与加速垂直，另一个系统看起来则不一定垂直。(当然指的是通常速度和加速度)。

§3.2 “刚体”在非匀速运动下的变形

我们举两个例子证明“刚体”在非匀速运动情形下的变形，一是在线加速的情形之下，另一个是在旋转之下。

设有一“刚体”沿 x' 方向以在 S' 系统看来各部分同一速度及同一加速进行，因之在 S' 系保持“刚体”形式。但在 S 系看来，各部分的同一速度，并不在同一时间，因之必有变形状况。今设 S' 系对 S 系的运动为在 x 方向的速度 V、在此刚体上取沿 x 方向的两点 P 及 Q，Q 在 P 之前，当 S' 系看此两点同一速度时，$t'_Q=t'_P$，由于同时的相对性，这一个同一速度在 S 系看来并不在同一个时间，具体的讲起来设 S' 在

$$t'_Q = t'_P, q'_Q(t'_Q) = q'_P(t'_P); \tag{3.2.1}$$

则在 S 系看，此种相同的速度

$$q = \frac{q' + V}{1 + \frac{q'V}{c^2}} \tag{3.2.2}$$

分别发生在不同的时间：

$$t_Q = \frac{t_Q' + \frac{V}{c^2}x'_Q}{\sqrt{1-\beta^2}}, t_P = \frac{t'_P + \frac{V}{c^2}x_P'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.3}$$

将式(3.2.1)代入，得

$$t_Q - t_P = \frac{V'}{c^2}\frac{(x'_Q - x'_P)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{VL'}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.4}$$

换言之，P 先达到这个速度，而 Q 要在 P 达到之后

$$\frac{VL'}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.5}$$

时，才能有这个同样速度，假使刚体沿正 x 方向加速，则在同一时间 t，P 点的速度要比 Q 点来得大。所以此刚体由 S 系看来在 x 方向缩短了。换言之，S 系看“刚体变形”，不能成为“刚体”了。

我们可以计算缩短的数量，取任一小段$\triangle x'$，则$\triangle x'$两端相差的速度为

$$q_P = q_Q + a\triangle t$$

a为$\triangle x'$的加速，$\triangle t$为式(3.2.5)使两端达到同样速度相差的时间，因之其相对速度(S看)为

$$q_P - q_Q = a\triangle t = a\frac{V}{c^2}\frac{\triangle x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.6}$$

但P、Q的相对速度为刚尺$\triangle x$长度的变化率

所以
$$q_P - q_Q = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\triangle x = \frac{aV}{c^2}\frac{\triangle x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.2.7}$$

对t积分，因$\triangle x'$假设不变，V为常数

所以

$$\triangle x(t) = -q(t)\frac{V\triangle x'}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} + \triangle x_0, \tag{3.2.8}$$

$\triangle x_0$为该段$\triangle x'$在$q=0$时，S系观察的长度，上式还可以简化，因为在$q=0$，S'系看此刚尺的速度为

$$q' = -V$$

所以S'系此时看刚尺的长度应为

$$\triangle x' = \triangle x_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{3.2.9}$$

在以上的计算中，我们似乎略去加速的影响，因$\triangle x_0$及$\triangle x'$均为小数，由于量纲的关系$\triangle x'$右边如有加速影响则必为

$$\triangle x' = \triangle x_0 f\left(\frac{V}{c}, \frac{a\triangle x_0}{c^2}, \cdots\right) \tag{3.2.10}$$

形式。但当$\triangle x_0$极小时二次方可以略去，所以加速a无法出现。式(3.2.9)为正确的方程。

将式(3.2.9)代入式(3.2.8)，得$\triangle x$与$\triangle x'$在任何时间的关系：

$$\triangle x(t) = \frac{\left(1 - \frac{q \cdot V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \triangle x' \qquad (3.2.11)$$

当 q 逐渐增加时，$\triangle x$ 尺逐渐缩小，上式由式(3.1.9)看出为

$$\frac{\triangle x}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \frac{\triangle x'}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{c^2}}} = \triangle x'' \qquad (3.2.12)$$

形式，$\triangle x''$ 为刚尺在相对静止系统中所量的长短。这一个例子，同时也解释了运动尺缩短的原因。

现在再谈旋转的情形，设有* 若干平行相同的齿轮，等距离的穿在一根中心轴上。每个轮齿的相对位置也是一样的，这样固定起来作为一个刚体，见图 3.2。今以此中心轴为 x' 轴，设相对于某 S' 系，各齿轮同时绕该轴以同样大小的角速度旋转，当然此"刚体"在 S' 系中保持"刚体"形式。但在另一向左以速度 V 运动的 S 系看来，开始旋转时就不是同时，p 转动时 Q、R、S 还没有转动。

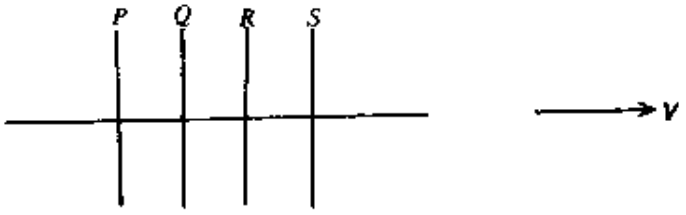


图 3.2

他看见 P 先转动，Q、R、S 再按次地转动。两齿轮前后开始旋转的时间相差为式(3.2.4)的

$$\triangle t = \frac{VL'}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (3.2.13)$$

---

* M. Von Laue: Die Relativitäts theovie *I*. (第六版 1955.) p. 44　此书以后简称 V. Laue I

所以 S 系发现此"刚体"有扭转现象，P 轮扭在 Q 之前 $W\triangle t$，Q 在 R 之前，R 在 S 之前……等等（由于相对论原则，此 S 系可作为静止系统而齿轮轴向右以速度 V 移动，S' 系则为与轴相对静止的系统）。

我们可以计算这种扭转的角度，设在 S' 系中为等角速旋转，因齿轮是在 $y'-z'$ 平面上，齿上任何一点的速度为

$$q'_y = \omega' z', q'_z = \omega' y' \tag{3.2.14}$$

由 S 系看来因

$$\left.\begin{aligned} q_y &= \frac{q_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q_x' V}{c^2}} = q_y' \sqrt{1-\beta^2} = \omega' \sqrt{1-\beta^2} z \\ q_z &= -\omega' \sqrt{1-\beta^2} y_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.15}$$

各齿轮亦以等角速

$$\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2} \tag{3.2.16}$$

旋转。p 齿轮扭转的角度较前面距 L' 处齿轮多

$$\Phi = \omega \triangle t = \frac{\omega' V}{c^2} L' \tag{3.2.17}$$

V. laue 举了下面一个理想实验来证明方程(3.2.17)的正确。

设上述"刚体"在恒角速旋转时，由左方射入光线通过各齿孔，设每个齿轮具有 N 个齿，在 S' 系看来，光从第一齿轮穿过到达第二齿需时为

$$\triangle t' = \frac{D'}{C}, \tag{3.2.18}$$

式中 D' 为两齿轮的间隔距离。设该时第二齿轮恰已转过整数 n 个孔，则光线可以透过，因之光线透过的条件在 S' 看为

$$\omega' \frac{D'}{C} = \frac{2\pi}{N} n \tag{3.2.19}$$

设 ω' 保持上述条件，则光线可以通过无阻，这种通过无阻的现象是实验的事实，不依系统的选择而改变。

S 系看光由第一齿孔穿过到达第二齿轮的时间 $\triangle t$ 因第二齿同时向右走 $V\triangle t$，因此

$$C\triangle t = D + V\triangle t \tag{3.2.20}$$

或

$$\triangle t = \frac{D}{C-V} \tag{3.2.20'}$$

但 $D=D'\sqrt{1-\beta^2}$ 为 S 测量的两齿间隔，在此时间内第二个齿轮转动角度为

$$\omega\triangle t = \frac{\omega D}{C-V}, \tag{3.2.21}$$

因之穿过第二齿孔的条件为

$$\frac{\omega D}{C-V} - \Phi = \frac{2\pi}{N}n \tag{3.2.22}$$

Φ 为第二齿轮上齿落后于第一齿轮上齿的待定角度，亦即扭转角度，以 $\omega=\omega'\sqrt{1-\beta}$，$D=D'\sqrt{1-\beta^2}$ 代入上式得

$$\frac{\omega' D'}{C}\left(1+\frac{V}{C}\right) - \Phi = \frac{2\pi}{N}n, \tag{3.2.23}$$

用式(3.2.19)得

$$\Phi = \frac{\omega' V}{c^2}D' \tag{3.2.24}$$

亦即式(3.2.17)。由此可见这种扭转现象必然的存在，否则与相对论矛盾。

做以上的实验当然不限于“光线”。我们可以用质点来代替光线穿入齿孔，例如用分子射进去来测量分子的速度。

设分子速度在 S' 系看来为 q'，则能通过的条件在 S' 系为

$$\omega'\frac{D'}{q'} = \frac{2\pi}{N}n \tag{3.2.25}$$

由 S 系看来，方程(3.2.20)→(3.2.22)仍旧成立，只须用 q 代替 C：

因此
$$\frac{\omega D}{q-V}-\Phi=\frac{2\pi}{N}n \tag{3.2.26}$$

用速度变换公式
$$q=\frac{q'+V}{1+\frac{q'V}{C^2}}$$

代入式(3.2.26)，并从式(3.2.25)消去 n，得
$$\Phi=\frac{\omega' V}{C^2}D' \tag{3.2.27}$$

同样的结论。

§3.3 平面简谐波频率、方向及速度的变换

设在 S' 系内有一平面简谐波
$$\cos\pi\nu'\left(t'-\frac{l'x'+m'y'+n'z'}{u'}\right) \tag{3.3.1}$$

一如§1.5所叙述，l'，m' n'为波平面法线方向，u'为平面在单位时间在 l'，m'，n'方向移动的垂直距离，ν'为波频，今以 S 系沿 l' 方向运动，在 S 系峰谷的相应位置，则由
$$\cos 2\pi\nu'\left\{\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{l'\left(\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)+m'y'+n'z'}{u'}\right\} \tag{3.3.2}$$

决定式(3.3.2)仍为平面波
$$\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{lx+my+nz}{u}\right) \tag{3.3.3}$$

的形式，因之 S 系看来 S' 系的平面简谐波(3.3.1)仍为平面简谐

波(3.3.3),其频率改变为

$$\nu=\frac{\nu'\left(1+\frac{l'V}{u'}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\tag{3.3.4}$$

其法线方向亦有改变(与§1.5古典运动学不同)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\nu l}{u}=\frac{\nu'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{l}{u}+\frac{V}{c^2}\right),\\&\frac{\nu m}{u}=\frac{\nu' m'}{u'},\frac{\nu n}{u}=\frac{\nu' n'}{u'}\end{aligned}\right\}\tag{3.3.5}$$

解式(3.3.4)及(3.3.5)得

$$\left.\begin{aligned}&\nu'=\frac{\nu\left(1-\frac{lV}{u}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\frac{\nu' m'}{u}=\frac{\nu m}{u},\\&\frac{\nu' n}{u'}=\frac{\nu n}{u},\frac{\nu' l'}{u'}=\frac{\nu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{l}{u}-\frac{V}{c^2}\right)\end{aligned}\right\}.\tag{3.3.6}$$

由此可见四个分量。

$$\left(\frac{\nu' l'}{u'},\frac{\nu' m'}{u'},\frac{\nu' n'}{u'},\frac{\nu'}{c^2}\right)$$

与

$$\left(\frac{\nu l}{u},\frac{\nu m}{u},\frac{\nu n}{u},\frac{\nu}{c^2}\right)$$

的变换关系完全相同于(x',y',z',t'),与(x,y,z,t)的关系(2.4.4)*。或写成

---

* 原因是式(3.3.1)是"标量"

$$\left(\frac{\nu l}{u},\frac{\nu m}{u},\frac{\nu n}{u},\frac{\nu}{c^2}\right)\sim(x,y,z,t),\qquad(3.3.7)$$

$\sim$符号代表变换形式(我们将在张量分析中看出这是由于波相为"标量"的关系)。V 在任意方向则以式(2.5.7)代入式(3.3.1)或直接照式(3.3.7)变换写出

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu' l'}{u'}&=\frac{\nu}{u}\left\{l+V\frac{(V\cdot l)}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-1\right)\right.\\&\left.-V\frac{u}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right\}\\\nu'&=\frac{\nu\left\{1-\frac{(V\cdot l)}{u}\right\}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(3.3.8)$$

改变上式中 V 的符号则得$\frac{\nu l}{u}$与$\frac{\nu' l'}{u'}$的逆变换关系。

波频的改变公式(3.3.4)与通常的多普勒效应差$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$因子,Ives 于 1938 年起,由高速离子光谱证明方程(3.3.4)的准确性,这个实验实际上也证明了运动时间的收缩性,其原因如下:

设 A 为运动的光源,在该点,假设有一个钟附着其上,并设其零点与静止钟的零点校对过,设 A 在零时,发一讯号到达距离为 L 的一不动点 B 之处,则 B 收到时,t_1 应为

$$t_1=\frac{L}{C}$$

设当 A 钟指 τ' 时 A 到达 A' 处(如图 3.3),此时 A 再发一讯号。由于 A 钟的计数率与 B 钟的计数率不一定相同,设成 λ 倍的关系,则 B 钟收到时应为

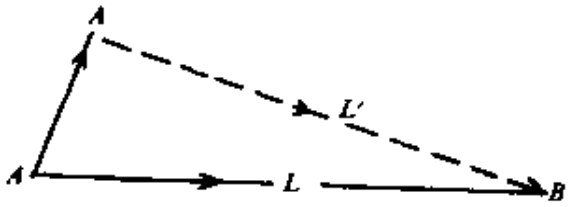


图 3.3

$$t_2 = \lambda\tau' - \frac{L'}{C}$$

B 收到此两讯号的相隔时间为

$$t_2 - t_1 = \lambda\tau' + \frac{L' - L}{C} \qquad (3.3.9)$$

因(我们一切计算均从 B 静止出发)

$$L'^2 = L^2 + \overline{AA'}^2 - 2L\,\overline{AA'}\cos\theta$$

设 $L>>\overline{AA'}$,则

$$L' = L\left(1 - \frac{\overline{AA'}}{L}\cos\theta\right) = L - \overline{AA'}\cos\theta,$$

以其代入式(3.3.9)内,得

$$t_2 - t_1 = \lambda\tau' - \frac{\overline{AA'}}{C}\cos\theta$$

但(全是 B 看)由于$\overline{AA'}=V(\lambda\tau')$

$$\text{所以 } t_2 - t_1 = \lambda t'\left(1 - \frac{V}{c}\cos\theta\right) \qquad (3.3.9)$$

讯号频率为两讯号间隔时间的倒数,故

$$\nu' = \frac{1}{\tau'}, \nu = \frac{1}{t_2 - t_1} \qquad (3.3.10)$$

代入式(3.3.9)′内,得

$$\nu' = \lambda\nu\left(1 - \frac{V}{C}\cos\theta\right) \qquad (3.3.11)$$

此为 B 收到 A 处发出的讯号频率。

设 A 钟的计数率与 B 钟相同，$\lambda=1$，上式即为通常的多普勒效应(1.5.9)。公式(3.3.4)(应当改变 V 的符号)的验证说明*

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2}+\cdots, \qquad (3.3.12)$$

亦即运动的 A 钟须放大$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$倍才与静止的 β 钟相合，所以 Ives 的实验证明运动钟此处以光的周期代表的收缩性。在以上的证明内，我们丝毫没有用相对论原则。

由式(3.3.5)得相平面的法线方向与 x 轴，即 V 方向，所成的角度 α 为

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'+\frac{Vu'}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (3.3.13)$$

及

$$\tan\alpha'=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\frac{V^u}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (3.3.13)$$

当 α 与 α' 之差为微数时亦即当 $V\ll C$ 时，上式可以展开为

$$\tan\alpha'=\tan\alpha+\frac{V^u}{C^2}\sin\alpha$$

或当 $u=C$ 时，

$$\triangle\alpha=\frac{V}{C}\sin\alpha \qquad (3.3.14)$$

此为两不同系统观察光的"相平面方向所发生的误差"因之 参考 §1.5 的讨论，可见相对论才真正解释了 Bradeey 和 Airy 光行差的观察。

---

* Ives 虽然只证明到此式的 $V^2/2C^2$ 项，但足以说明钟的变慢

我们虽不能知道 α 究竟应当是多少，但由相隔六个月的观察可以测出地球在两不同时间 α 的差数，因之得出速度的差数为

$$V_1 - V_2 = 60 \text{ 公里 / 秒} \qquad (3.3.15)$$

的结论，此亦即地球绕日速度 30 公里/秒的两倍，绝对的 V 值还是测不出。

从式(3.3.13)可以注意到波平面倾斜度的关系与质点速度倾斜的关系(3.1.8)一般不同(但 $u=C$ 是例外的情形，此时两个公式相同)

$$u'^2 = \frac{C^2(u - lV)^2}{(u - lV)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{C^2}\right)C^2}$$

由式(3.3.4)及(3.3.5)得

$$u^2 = C^2 \frac{(u' + l'V)^2}{(u' + l'V)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2}{C^2}\right)C^2} \qquad (3.3.16)$$

因之尽管 u' 为异向同性但 u 的数值一般随方向而变，一如异向异性体，当只有在 $u'=C$ 时 u 亦为 C。因之，相速为 C 的波(光波)在任何坐标上的相速皆为 C。设用 S 系的 l 代替式(3.3.16)内的 l' 则得出

$$u^2\left(1 - \frac{u'^2V^2}{C^4}\right) - 2luV\left(1 - \frac{u'^2}{C^2}\right) + \left(1 - \frac{u'^2}{C^2}\right)l^2V^2 - \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)u'^2 = 0 \qquad (3.3.17)$$

一个二次方程来解决 u 与 l, u' 的关系。以上相速及波方向的变换式与点速度(3.1.5)显然不同，但如 $u'=C$，则 $u=C$，将式(3.3.5)除以式(3.3.4)得

$$\left.\begin{aligned} lC &= \frac{l'C+V}{1+\frac{l'CV}{C^2}}, mC = \frac{m'C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'CV}{C^2}}, \\ nC &= \frac{n'C\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'CV}{C^2}} \end{aligned}\right\} \quad (3.3.18)$$

这是与点速度变换式(3.1.5)完全相同的公式。

$$(l_c, m_c, n_c) \sim (q_x, q_y, q_z) \quad (3.3.18)$$

另外在 $u' \neq C$ 时，设 $l'=1, m'=0, n'=0$，则由式(3.3.16)得

$$u = \frac{u'+V}{1+\frac{u'V}{C^2}} \quad (3.3.19)$$

亦与点速度变换式相同，事实上由式(3.3.16)可以看出也只有在这两种情形下($u=C$ 或 $l=1$)相速才能与质点速度的变换相同。Fizean 于 1853 年以沿流水方向及逆流水方向的两道光线使之干涉，得出

$$W = \frac{C}{n} + V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

的结果，其中 n 为水的折射率，系数

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.3.20)$$

称 Fresnel(1818)“曳引系数”，有些相对论书上经常以

$$q'_x = \frac{C}{n}$$

代入质点速度的式(3.1.5)中略去 V^2 得出上式作为 Fizean 实验的解释。其实只是一种巧合，因为“干涉”是由于“相”的关系。相速不是“点速度”，不能依式(3.1.5)的方法而只能依本节的方法计算。但是在 $l'=1$ 的情形下，式(3.3.20)与(3.1.5)相同。质点解释

不能应用与 $l\neq1$ 的斜射情形之下，这个结论是可以用斜射的实验证明的。

相对论可以将一切有关运动（匀速）的波动问题化成在 S' 系上静止的问题，而再转换回来予以解决。例如光透穿运动玻璃后的情况，可以先化成 S' 系上透穿静止玻璃的情况予以解决后再转变回到 S 系。设玻璃两端为 $x'=0$，$x'=L'$，并设在 S' 系光频为 ν'，如图 3.4。穿入玻璃之前，设振动为

$$\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'}{C}\right) \tag{3.3.21}$$

形式，透出后振动为

$$\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'}{C}+\alpha\right) \tag{3.3.21)'}$$

与玻璃中光的振动 $\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{n'x'}{C}+\in\right)$ 比较*，则在 $x'=0$ 时，$\cos2\pi\nu'(t'+\in)$ 等于式(3.3.21)的 $\cos2\pi\nu't'$，因之 $\in=0$. 在 $x'=L'$ 时，$\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{n'L'}{C}\right)$ 等于 (3.3.21)' 的 $\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{L'}{C}+\alpha\right)$，因之 $\alpha=-(n'-1)L'/C$ 透出后的振动为

$$\cos2\pi\nu'\left(t'-\frac{x'}{C}-\frac{(n'-1)L'}{C}\right) \tag{3.3.22}$$

其中 ν' 为 S' 所观察的频率，n' 为玻璃对频率 ν' 的折射率，将式(3.3.21)及(3.3.22)转回到 S 系。用式(2.4.4)代入，即得射入与透出光波的振动，分别为

$$\cos2\pi\nu\left(t-\frac{x}{C}\right),\cos2\pi\nu\left\{t-\frac{x}{C}-\frac{(n'-1)\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{V}{C}}\frac{L'}{C}\right\} \tag{3.2.23}$$

---

* 在边界上两边的波相角必定要相等才能适合边界条件

以上 ν 为实验中用以透过运动玻璃的光频：

$$\nu = \nu' \frac{\left(1 + \frac{V}{C}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}} \tag{3.3.24}$$

因之透出光与入射光的相角差为

$$\varphi = \frac{(n' - 1)}{1 + \frac{V}{C}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \frac{L'}{C} \tag{3.3.25}$$

由于 n' 为玻璃对 ν' 的折射率，其对 ν 的折射率 n 则近似的为

$$n = n' + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu} \cdot (\nu - \nu')$$

如速度 V 的平方可以不计，则式(3.3.25)的相角差为

$$\varphi = (n - 1)\frac{L'}{C} - \frac{VL'}{C^2}\left(n - 1 - \nu \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu}\right) \tag{3.3.26}$$

设玻璃不动，则仅有前一项，两者相差为

$$- \frac{VL'}{C^2}\left(n - 1 - \nu \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu}\right) \tag{3.3.27}$$

这个结论已有 Zeeman(1920) 予以实验证明。

由此可见相对论如何轻松地解决光在运动物质内的动态。

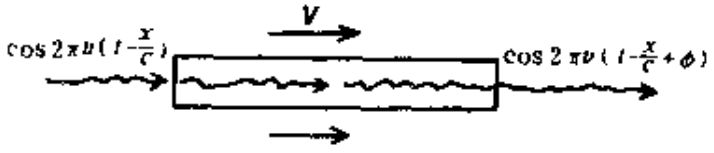


图 3.4

§3.4 运动坐标上几何图形的改变

几何图形分两种，一种是相对静止坐标 S' 系上的图在 S 系的瞬时照片，$t_1 = t_2$ 由式(2.4.7)见

$$(x_2 - x_1) = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}},$$

$$(y_2 - y_1) = (y_2' - y_1'), (z_2 - z_1) = (z_2' - z_1')$$

即在 x 方向(运动方向)的长度一律较 S' 系小 $\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$ 倍。因之代数方程的次数不变，n 次方程仍为 n 次方程，直线仍为直线，二次曲线仍为二次曲线；唯球形变成椭圆形，两直线所成的角度一般均有改变，例如一直线与 V 方向所成的角度，则由于沿 V 方向长度的缩短，垂直于 V 方向长度的不变。如图 3.5(a)，(b)

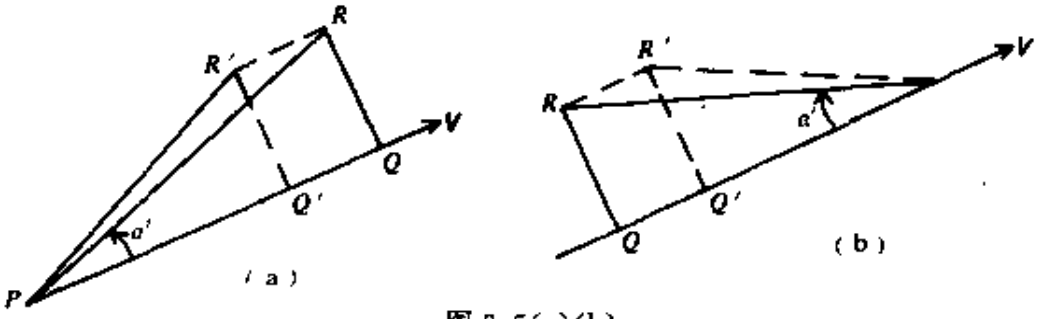


图 3.5(a)(b)

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\tan\alpha' \qquad (3.4.1)$$

所以图 2.12 在 S' 上的两个垂直轴在 S 系看来其所成的角度超过 90°，反之亦然。从式(2.5.3)，用 $\triangle r \triangle t$、$\triangle r'$ 代替 r、t、r'，再使 $\triangle t = 0$，得出任意一个直线在两个坐标的关系：

$$\triangle r = \triangle r' - V\frac{(V \cdot \triangle r')}{V^2} + V\frac{(V \cdot \triangle r')}{V^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (3.4.2)$$

所以

$$|\triangle r| = |\triangle r'|\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}\cos^2(\widehat{V \cdot r'})} \qquad (3.4.3)$$

为任何方向长度的变化，$(\widehat{V \cdot r'})$ 代表 r' 与 V 所成的角度。两不同方向的 $\triangle r_1$，与 $\triangle r_2$ 所成的标量积和矢量积分别为

$$(\triangle \boldsymbol{r}_1 \cdot \triangle \boldsymbol{r}_2) = (\triangle \boldsymbol{r}_1' \cdot \triangle \boldsymbol{r}_2') - \frac{(\boldsymbol{V} \cdot \triangle \boldsymbol{r}_1')(\boldsymbol{V} \cdot \triangle \boldsymbol{r}_2')}{C^2} \tag{3.4.4}$$

$$\triangle \boldsymbol{r}_1 \wedge \triangle \boldsymbol{r}_2 = \triangle \boldsymbol{r}_1' \wedge \triangle \boldsymbol{r}_2' \sqrt{1-\beta^2} + \frac{\boldsymbol{V}}{V^2} \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \triangle \boldsymbol{r}_1' \wedge \triangle \boldsymbol{r}_2')(1-\sqrt{1-\beta^2}) \tag{3.4.5}$$

用式(3.4.3)得

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \frac{V^2}{C^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}_1'})\cos(\widehat{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}_2'})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}\cos^2(\widehat{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}_1'})}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}\cos^2(\widehat{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}_2'})}} \tag{3.4.5}'$$

为一般角度的变换关系，面积的大小和方向正弦可从式(3.4.5)$\triangle \boldsymbol{r}_1 \wedge \triangle \boldsymbol{r}_2$ 求出，体积 Ω 的变化，则由于运动方向长度的缩短，简单的为

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{3.4.6}$$

另一种几何图形变化系属于不同时间的轨迹问题，可以用洛伦兹变换直接代入解决之。下面举一个例子。

设在 S' 系有一以 p 点(x_0', y_0', z_0')为中心以 $u'(t'-t_0')$为半径的球面波

$$(x'-x_0')^2 + (y'-y_0')^2 + (z'-z_0')^2 = u'^2(t'-t_0')^2 \tag{3.4.7}$$

则，依洛伦兹变换(2.4.7)，S 系看来为

$$\frac{\left(1-\frac{u'^2V^2}{C^4}\right)}{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}\left\{(x-x_0) - \frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)\right\}$$

$$+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\frac{u'^2\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)^2 \tag{3.4.8}$$

的椭球波。其中心不是如通常想像的以速度 V 向前移动，方程(1.5.17)，而是以速度

$$\frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}} \tag{3.4.9}$$

向前，仍在 x 轴上移动，而且在 $t=t_1$ 常数时，此椭圆形也不是简单的在 x 方向缩短$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$的情形。当 $u'=C$ 时，此椭圆化为中心不动的正圆形(换言之，合于相对论的要求)。此椭球体积的改变也不同于式(3.4.6)，见方程(3.6.9)。

§3.5 平面波的射线速度

由式(3.3.3)见 S' 系中的平面波在 S 系仍为平面波。设在 t_0 时，其同相面由 S 系观察为

$$lx_0+my_0+nz_0-ut_0=C, \tag{3.5.1}$$

则在 t 时其同相面为同方向的平面

$$lx+my+nz-ut=C \tag{3.5.2}$$

邻近 x_0,y_0,z_0 但与之同时同相的各点 $x_0+\delta_{x0},y_0+\delta_{y0},z_0+\delta_{z0}$ 均满足方程

$$l\delta_{x0}+m\delta_{y0}+n\delta_{z0}=0 \tag{3.5.3}$$

此各不同邻近点发出的椭圆球(3.4.8)在 t 时与 x,y,z 处同相加强，其加强处由

$$\frac{\left(1-\frac{u'^2V^2}{C^4}\right)}{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}\left\{(x-x_0)-\frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)\right\}$$

$$\delta_{x0}+(y-y_0)\delta_{y0}+(z-z_0)\delta_{z0}=0 \qquad (3.5.4)$$

决定。从式(3.5.3)及(3.5.4)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left\{(x-x_0)-\frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)\right\}&=\lambda l\\ y-y_0&=\lambda m\\ z-z_0&=\lambda n\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.5)$$

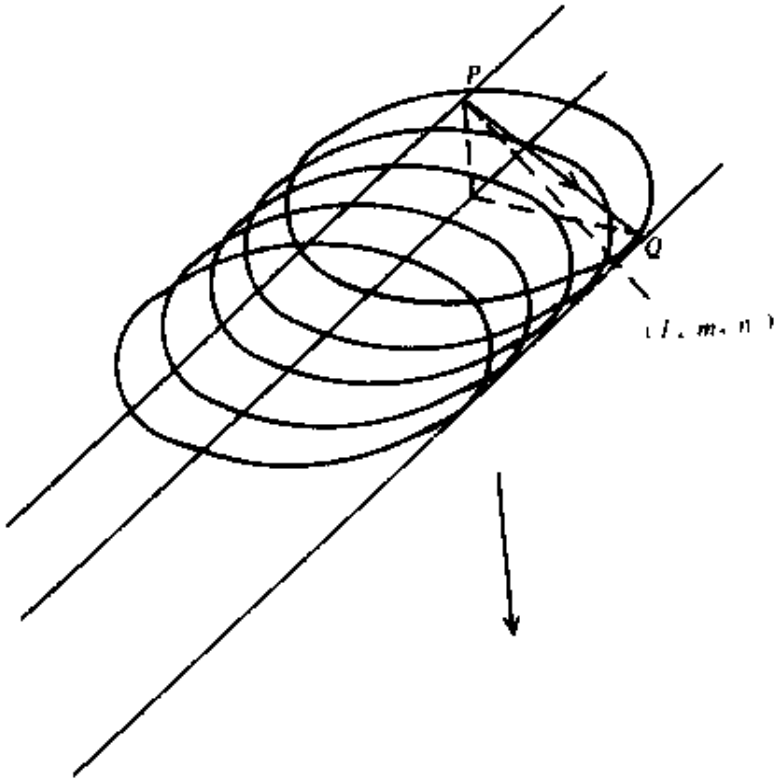


图 3.6

以上式代入式(3.4.8)内得出未定乘数 λ 之值为

$$\lambda^2=\frac{u'^2\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)(t-t_0)^2}{l^2\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)+(m^2+n^2)\left(1-\frac{u'^2V^2}{C^4}\right)} \tag{3.5.6}$$

再代回式(3.5.5)内得比较麻烦的

$$\frac{x-x_0}{t-t_0},\frac{y-y_0}{t-t_0},\frac{z-z_0}{t-t_0} \tag{3.5.7}$$

"射线的速度"。今用 S' 内的 l'、m'、n' 代替上式中的 l、m、n，由式(3.3.8)得

$$\begin{aligned} l&=\frac{l'+\frac{Vu'}{C^2}}{\sqrt{\left(l'+\frac{Vu'}{C^2}\right)^2+(1-l'^2)\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}}\\ &=\frac{l'+\frac{Vu'}{C^2}}{\sqrt{\frac{1}{C^2}(u'+l'V)^2+\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}} \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

代入式(3.5.6)内得

$$\lambda^2=\frac{u'^2(t-t_0)^2\left\{\frac{(u'+l'V)^2}{C^2}+\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)\right\}}{\left(1+\frac{l'u'V}{C^2}\right)^2} \tag{3.5.9}$$

再代入式(3.5.5)的第一式，得简单的(λ 为正号)

$$\frac{x-x_0}{t-t_0}=\frac{V+l'u'}{1+\frac{l'u'V}{C^2}} \tag{3.5.10}$$

形式，再由式(3.3.5)的第二式及式(3.3.16)得

$$m=\frac{m'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{\frac{(u'+l'V)^2}{C^2}+\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}} \tag{3.5.11}$$

代入式(3.5.5)的第二式内，得

$$\frac{y-y_0}{t-t_0}=\frac{m'u'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}}, \tag{3.5.12}$$

及

$$\frac{z-z_0}{t-t_0}=\frac{n'u'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}} \tag{3.5.13}$$

但 $l'u'$、$m'u'$、$n'u'$ 为波在 S' 系的射线速度〔这一个结论可以从§1.5的首段方程(1.5.17)或直接由式(3.3.1)求出〕。因之式(3.5.10)，(3.5.12)及(3.5.13)表示射线速度，依质点方程(3.1.6)变换。这也可以简单看出：因为式(3.1.6)的导出，只限于两"点"，而不限于"质"点。此地 t_0,x_0,y_0,z_0 及 t,x,y,z，即为两点！相速 u' 只是相平"面"移动的速度，而不是任何点的移动速度。因之除 $u'=C$ 特别情形(3.3.18)及 $l'=1$ 的特别情形(3.3.20)之外，并不适合点速度的变换。

我们也可以用另外方法证明等式(3.5.10)的成立。因在 t 时包迹点 (x,y,z) 必为椭圆球(3.4.8)与平面(3.5.2)

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=u(t-t_0) \tag{3.5.14}$$

的切点，参考图3.6。在该处，椭圆球(3.4.8)的法线方向必为平面的法线方向 l,m,n。

所以

$$l:m:n=\frac{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left\{(x-x_0)-\frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)\right\}$$

$$:(y-y_0):(z-z_0) \qquad (3.5.15)$$

右方椭圆球〔注 10〕的法线方向系从式(3.4.8)用偏导 $\partial F/\partial X$，$\partial F/\partial y$，$\partial F/\partial z$ 得出。但由式(3.3.5)又得

$$l:m:n=\frac{l'+\frac{u'V}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}:m':n' \qquad (3.5.16)$$

以 λ 为式(3.5.15)及(3.5.16)右边的比例数，则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left\{(x-x_0)-\frac{V\left(1-\frac{u'^2}{C^2}\right)}{1-\frac{u'^2V^2}{C^4}}(t-t_0)\right\}=\lambda\frac{l+\frac{u'V}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\&y-y_0=\lambda m'\\&z-z_0=\lambda n'\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.17)$$

代入式(3.4.8)内，得

$$\lambda=\pm\frac{u'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}(t-t_0)}{1+\frac{l'u'V}{C^2}} \qquad (3.5.18)$$

取正号再代入前式，得式(3.5.10)、(3.5.12)及(3.5.13)。

§3.6 随平面波移动几何图形的改变

设在 S' 系中有一随平面波进行的几何图形。由于在 S' 系中，波上任何点的速度为 $l'u'$、$m'u'$、$n'u'$，因之方程

$$F(x'-l'u't',y'-m'u't',z'-n'u't')=0 \qquad (3.6.1)$$

在任何时均固定于该波的相应点上，为随波移动的图形。F 的函数形式可以从任一时间例如 $t'=0$ 时函数形式决定，上式可写成

$$F(\xi',\varepsilon',\zeta')=0 \qquad (3.6.1)'$$

式中

$$\xi'=x'-l'u't',\ \varepsilon'=y'-m'u't',\ \zeta'=z'-n'u't'$$

(3.6.1)′不是 t' 的显示函数，所以 F 相对地固定在波上，此图形以速度 $l'u'$ 进行。今将式(2.4.4)代入式(3.6.1)，并以

$$\left.\begin{aligned}\xi&\equiv x-\frac{V+l'u'}{1+\frac{l'u'V}{C^2}}t,\\ \varepsilon&\equiv y-\frac{m'n'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}}t,\\ \zeta&\equiv z-\frac{n'u'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}}t\end{aligned}\right\} \qquad (3.6.2)$$

则式(3.6.1)化成

$$F\left\{\frac{\xi\left(1+\frac{l'u'V}{C^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\varepsilon+\frac{m'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\zeta+\frac{n'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\xi\right\}=0, \qquad (3.6.3)$$

也不是 t 的显示函数，因之此图形的“射线速度”(3.6.2)随 S 系看的平面波进行，并固定其上，式(3.6.3)表示方程的次数不变。今设在 S' 系上为一随波进行的球面：

$$(x'-l'u't')^2+(y'-m'u't')^2+(z'-n'u't')^2=R^2, \qquad (3.6.4)$$

则在 S 系为

$$\frac{\left(1+\frac{u'^2V^2}{C^4}+\frac{2l'u'V}{C^2}\right)}{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}+\xi^2+\epsilon^2+\zeta^2+\frac{2u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}(m'\xi\epsilon+n'\xi\zeta)=R^2,$$

(3.6.5)

一个复杂的椭圆图形，我们可以证明在上式中，长度不变的方向垂直于 l' 及 V'。由于交义项 $\xi\epsilon,\xi\zeta$ 的存在，此椭圆并非仅在 x 方向改变长短(由于各方向的波速不同)。上式在经过坐标的适当空间旋转后，可以化成

$$\lambda_1\xi'^2+\lambda_2\epsilon^2+\lambda_3\zeta'^2=R^2 \qquad (3.6.6)$$

形式：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(1+\frac{u'^2V^2}{C^4}+\frac{2l'u'V}{C^2}\right)-\lambda, & \frac{m'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & \frac{n'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\ \frac{m'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & 1-\lambda, & 0 \\ \frac{n'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & 0, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的根，见附录(A.1.3.6)及以后方程。特别

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} \frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(1+\frac{u'^2V^2}{C^4}+\frac{2l'u'V}{C^2}\right), & \frac{m'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & \frac{n'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\ \frac{m'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & 1, & 0 \\ \frac{n'u'V}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(1+\frac{l'u'V}{C^2}\right)^2 \qquad (3.6.7)$$

因之此椭球式(3.6.6)的体积为

$$\Omega=\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}=\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)}}{\left(1-\frac{l'u'V}{C^2}\right)} \tag{3.6.8}$$

由于原体积

$$\Omega_0=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

所以体积改变为

$$\Omega=\Omega_0\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}} \tag{3.6.9}$$

这个结果与"球"形无关,应为一般性的关系。

公式(3.6.9)可以用另外方法证明。设在 S' 系有一假想的固定闸门;门在 $y'-z'$ 平面上,设波的方向为 l',m',n',则在 $\triangle t'$ 时间之内,经过此闸门向右输出的体积 Ω' 为图 3.7(a)阴影区的

$$\Omega'=A'l'u'\triangle t', \tag{3.6.10}$$

以上 A' 为闸门的面积。

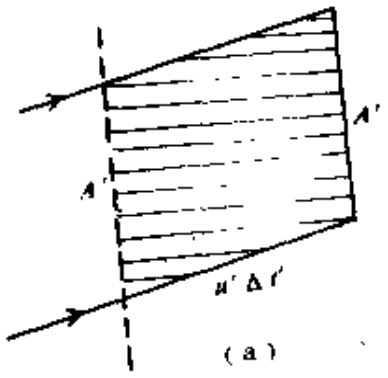


图 3.7(a)

在 S 系看来此闸门以速度 V 向右移动,设在 $\triangle t$ 内由 QP 移到 DC,经过闸门的波的体积在相应时间 $\triangle t$ 内为图 3.7(*b*)阴影区的体积 Ω。pp'、QQ' 为射线速度。因为 $\triangle t$ 开始时,闸门在 PQ 处;此时射到 Q 处的波在 $\triangle t$ 后已离开闸门依射线速度传到 Q' 点:$QQ'=W\triangle t$,W 为射线速度,QD 上各点的影响也分别地传到 $Q'D$ 直线上各处,三角形 $QQ'D$ 之内不存在波动,同样 P 处的影响已传到 P' 处,通过 PC 边界传过的波分别达到 $P'C$ 直线之上,在闸门

中间的部份波分别传到 $Q'P'DC$ 之内。因之经过闸门向右传过的波体积为以闸门 A 为底的阴影区域，由于平行四边形 $DQ'P'C$ 等于平行四边形 $QQ'P'P$ 的面积减去正方形 $QDCP$ 的面积，又因

$$\square QQ'P'P = AW_x\triangle t,$$

$$\square QDCP = AV\triangle t;$$

所以

$$\Omega = A\triangle t(W_x - V) \tag{3.6.11}$$

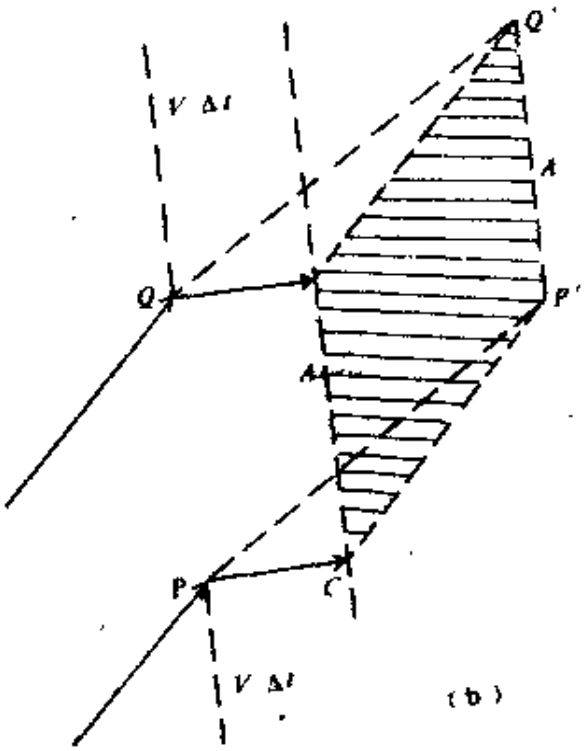


图 3.7(b)

以射线速度(3.5.10)代入，得

$$\Omega = A\triangle t\,\frac{l'u'\left(1-\dfrac{V^2}{C^2}\right)}{1+\dfrac{l'u'V}{C^2}} \tag{3.6.12}$$

但因

$$A = A',\ \triangle t = \frac{\triangle t' + \dfrac{V^2}{C^2}\triangle x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

而闸门的位置在 S 系上为固定，

所以 $$\triangle x' = 0, \triangle t = \frac{dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

代入式(3.6.12)，并用式(3.6.10)，得

$$\Omega = \Omega' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{l'u'V}{C^2}} \tag{3.6.13}$$

此为两系统所计算波动经过此假想闸门在相应时间内向右移动相应体积的关系，与式(3.6.9)相同。由此也可以看出式(3.6.9)的关系并不限于“球形”体积。

第四章　相对论使物理学改变

§4.1　动量守恒定律

当速度的变换式为(1.2.2)时，我们证明经典力学不能决定参考系统在空间的速度。但现在速度的变换式为(3.1.4)，和以前不同，就需要重新加以研究。

仍从两质点的碰撞研究起。经典力学告诉我们，当两质点碰撞时前后的总动量不变：

$$\left.\begin{aligned} m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2&=\bar{m}_1\bar{\dot{x}}_1+\bar{m}_2\bar{\dot{x}}_2,\\ m_1\dot{y}_1+m_2\dot{y}_2&=\bar{m}_1\bar{\dot{y}}_1+\bar{m}_2\bar{\dot{y}}_2,\\ m_1\dot{z}_1+m_2\dot{z}_2&=\bar{m}_1\bar{\dot{z}}_1+\bar{m}_2\bar{\dot{z}}_2, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.1}$$

以上 $\bar{m}_1$、$\bar{m}_2$、$\bar{\dot{x}}_1$、$\bar{\dot{x}}_2$ 等等字上加一横的为碰撞后的质量和速度。此地不再假设碰撞前后的质量相同，以式(3.1.5)代入得

$$m_1\frac{\dot{x}_1'+V}{1+\frac{\dot{x}_1'V}{C^2}}+m_2\frac{\dot{x}_2'+V}{1+\frac{\dot{x}_2'V}{C^2}}=\bar{m}_1\frac{\bar{\dot{x}}_1+V}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_1'V}{C^2}}+\bar{m}_2\frac{\bar{\dot{x}}_2'+V}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_2'V}{C^2}} \tag{4.1.2}$$

$$m_1\frac{\dot{y}_1'\sqrt{1-\frac{V^2}{C_2}}}{1+\frac{\dot{x}_1'V}{C^2}}+m_2\frac{\dot{y}_2'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\dot{x}_2'V}{C^2}}$$

$$=\bar{m}_1\frac{\bar{\dot{y}}_1'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_1'V}{C^2}}+\bar{m}_2\frac{\bar{\dot{y}}_2'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_2'V}{C^2}} \tag{4.1.3}$$

$$m_1\frac{\dot{z}_1'\sqrt{1-\frac{V^2}{C_2}}}{1+\frac{\dot{x}_1'V}{C^2}}+m_2\frac{\dot{z}_2'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\dot{x}_2'V}{C^2}}$$

$$=\bar{m}_1\frac{\bar{\dot{z}}_1'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_1'V}{C^2}}+\bar{m}_2\frac{\bar{\dot{z}}_2'\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{\bar{\dot{x}}_2'V}{C^2}} \tag{4.1.4}$$

上面的方程必须化为

$$\left.\begin{aligned}m_1'\dot{x}_1'+m_2'\dot{x}_2'&=\bar{m}_1'\bar{\dot{x}}_1'+\bar{m}_2'\bar{\dot{x}}_2'\\ m_1'\dot{y}_1'+m_2'\dot{y}_2'&=\bar{m}_1'\bar{\dot{y}}_1'+\bar{m}_2'\bar{\dot{y}}_2'\\ m_1'\dot{z}_1'+m_2'\dot{z}_2'&=\bar{m}_1'\bar{\dot{z}}_1'+\bar{m}_2'\bar{\dot{z}}_2'\end{aligned}\right\} \tag{4.1.5}$$

形式，动量守恒定律才具有相对性，其中 m'、$\dot{x}'$…等均为 S' 系所观察的质量速度。这里也不须假设 S' 系观察的质量与 S 系所观察的质量相同，但由于 m 为三维空间的标量，S' 与 S 观察 m 的不同只能是由于该质点的相对速率不同。因之 m 只能为速率的函数

$$m=f(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=f(q^2), \tag{4.1.6}$$

而不能有其他的关系。设在 $q=0$ 时，m 以 m_0 代表，则不同系统观察同一质点的质量只能采取

$$m'=m_0F(q'^2),m=m_0F(q^2) \tag{4.1.7}$$

形式，由式(4.1.5)的第二式及式(4.1.3)可见，由于 $\dot{y}'$ 为任意数，而且

$$m_{01}F(q_1'^2)=\frac{m_{01}F(q_1^2)}{1+\frac{\dot{x}_1V}{C^2}}f(V) \tag{4.1.8}$$

的关系必须成立，式(4.1.3)才能化成式(4.1.5)第二式的形式。其中 $f(V)$ 可为任意 V 的，但不能为各个质点 $\dot{x}_1$ 的函数。由上式得

$$F(q_1'^2)=\frac{F(q_1^2)}{1+\frac{\dot{x}_1 V}{C^2}}f(V) \tag{4.1.9}$$

由式(3.1.10)得

$$F(q_1'^2)=\frac{F(q_1^2)\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_1'^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}f(V) \tag{4.1.10}$$

以上方程的解答为

$$F(q_1'^2)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{q_1'^2}{C^2}}},f(V)=\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{4.1.11}$$

λ 为不含 q 的常数，由于式(4.1.7)，当

$$q=0,F(q^2)=1,\text{所以 }\lambda=1, \tag{4.1.12}$$

式(4.1.7)变成

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \tag{4.1.13}$$

上式为公式(4.1.3)、(4.1.4)能化成式(4.1.5)第二，三。两式必须满足的条件。换言之，动量守恒定律在爱因斯坦相对论的成立的条件下要求质量(由于不同系统观察的不同故又称为“视质量”)随质点的速度以式(4.1.13)形式的改变。这一个关系已经被大量的实验所证明。

再谈式(4.1.2)，用式(4.1.13)则第一项为。

$$\frac{m_{10}(\dot{x}'_1+V)}{\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}\left(1+\frac{\dot{x}'_1V}{C^2}\right)}=\frac{m_{10}(\dot{x}'+V)}{\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=m'_1\frac{(\dot{x}'_1+V)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

(4.1.14)

因之式(4.1.2)为

$$m'_1\dot{x}'_1+m'_2\dot{x}'_2+(m'_1+m'_2)V=\overline{m}'_1\,\overline{\dot{x}}'_1+\overline{m}'_2\,\overline{\dot{x}}'_2+(\overline{m}_1'+\overline{m}'_2)V$$

4.1.15)

若与式(4.1.5)的第一式相合，则必须

$$(m'_1+m'_2)=(\overline{m}'_1+\overline{m}'_2) \qquad (4.1.16)$$

换言之，在s'系中碰撞前后的总质量亦必须守恒。再看在S系的总质量是否也守恒，否则式(4.1.16)又不具有相对性。因

$$m'=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(1-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}\right),$$

故式(4.1.16)为，去掉共同的$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$因子，

$$m_1-m_1\frac{\dot{x}_1V}{C^2}+m_2-m_2\frac{\dot{x}_2V}{C^2}=\overline{m}_1-\overline{m}_1\frac{\overline{\dot{x}}_1V}{C^2}+\overline{m}_2-\overline{m}_2\frac{\overline{\dot{x}}_2V}{C^2}$$

由于式(4.1.1)的第一式，故

$$m_1+m_2=\overline{m}_1+\overline{m}_2 \qquad (4.1.17)$$

因之视质量守恒定律在S系亦成立，所以动量守恒定律在相对论中包括质量守恒定律。总起来说：动量守恒定律的成立要求质点的视质量随速度依方程(4.1.13)而改变；并要求碰撞前后的总质量(4.1.17)亦适合守恒定律。另外将式(4.1.13)代入式(4.1.17)内，得

$$\frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}}+\frac{m_{20}}{\sqrt{1-\frac{q_2^2}{C^2}}}=\frac{\overline{m}_{10}}{\sqrt{1-\frac{\overline{q}_1^2}{C^2}}}+\frac{\overline{m}_{20}}{\sqrt{1-\frac{\overline{q}_2^2}{C^2}}} \qquad (4.1.18)$$

当 $q^2 << C^2$，上式乘以 C^2 并展开，得

$$(\bar{m}_{10}+\bar{m}_{20})C^2-(m_{10}+m_{20})C^2=(\frac{1}{2}m_{10}q_1^2+\frac{1}{2}m_{20}q_2^2)$$

$$-(\frac{1}{2}\bar{m}_{10}\bar{q}_1^2+\frac{1}{2}\bar{m}_{20}\bar{q}_2^2) \qquad (4.1.19)$$

因之碰撞前后的静止质量一般并不守恒，此与牛顿力学不同！碰撞后静止静量的增加约为碰撞过程中的动能损失。这一个问题我们以后再讨论，不过现在似乎已看出损失掉动能的出路问题。

由式(4.1.13)，(3.1.5)及(3.1.9)，

$$\left.\begin{aligned} m'&=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}=\frac{m\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}=m\frac{1-\frac{\dot{x}V}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\frac{m-\frac{V}{C^2}m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\ m'\dot{x}'&=m\frac{1-\frac{\dot{x}V}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{\dot{x}-V}{1-\frac{\dot{x}V}{C^2}}=\frac{m\dot{x}-Vm}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\ m'\dot{y}'&=m\frac{1-\frac{\dot{x}V}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\cdot\frac{\dot{y}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1-\frac{\dot{x}V}{C^2}}=m\dot{y},m'\dot{z}'=m\dot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.20)$$

V 为任何其他方向，则由式(3.19)及(3.1.6)得

$$
\left.
\begin{aligned}
' &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}} = \frac{m\sqrt{\frac{1-q^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}} = m\frac{(1-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V}}{C^2})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\
&\frac{m-\frac{V}{C^2}\cdot mq}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\
'\boldsymbol{q}' &= \frac{m\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}} = m\boldsymbol{q} + \boldsymbol{V}\frac{(m\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right\} - \frac{m\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4.1.20)'
$$

与式(3.1.1)或(3.1.3)比较，见$(mq、m)$的变换和坐标$(x、t)$的变换相同。换言之，动量，质量的变换

$$(m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}, m) \sim (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}t) \qquad (4.1.21)$$

碰撞问题可以推广到几个质点的同时碰撞。两个或三个物体在碰撞后可以合成一个或一个质点在"碰撞"后可以分成几个质点。牛顿的动量守恒定律(4.1.1)的推广在任何 S 系中必然成立：

$$\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_j \overline{m}_j\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}_j \qquad (4.1.22)$$

用方程(4.1.13)的关系，可以证明上式确实成立。且方程(4.1.17)的推广

$$\sum_i m_i = \sum_j \overline{m}_j \qquad (4.1.23)$$

亦须成立；$i、j$ 可为任意数目且两边的质点数不一定相同(包括分裂和合成)。如以 M_α 代表$(\alpha=1、2、3、4.)$

$$M_\alpha = (m\dot{x}、m\dot{y}、m\dot{z}、icm)$$

则以上方程可以写成 $\qquad \sum_i M_\alpha = \sum_j m_\alpha^j \qquad (4.1.24)$

一个定律(四个方程)的形式。

我们又可以选一个系统，使各质点的总动量在该系统内为零。

事实上，我们如选系统 S'，使其相对速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\mathbf{V}=\frac{\sum miqi}{\sum mi}, \tag{4.1.25}$$

则由于式(4.1.20)′，得

$$\sum_i m'_i q'_i=\sum m_i q_i+\boldsymbol{V}\frac{(\sum m_i q_i)\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)-\frac{(\sum mi)\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

以式(4.1.25)代入上式，即得

$$\sum_i m'_i q'_i=0 \tag{4.1.26}$$

再由式(4.1.20)′得

$$\sum_i m'_i=(\sum_i m_i)\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{4.1.27}$$

由上式可见

$$\sum_i m'_i<\sum_i m_i \tag{4.1.28}$$

换言之，在此系统内(称质能中心系统或质量中心系统)质点的总动量为零，总质量为最小值。从式(4.1.25)看出$|V|<C$。

§4.2 牛顿力学方程的改变

现在质量既为式(4.1.13)的关系，则牛顿力学的第二定律应当初步改变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right)=Fx,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right)=Fy,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right)=F_z \tag{4.2.1}$$

形式，为研究方便起见，我们再添入

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}m=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=F_t \tag{4.2.2}$$

的一个公式，F_t 的意义待定，但因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{1}{C^2}(\dot{x}F_x+\dot{y}F_y+\dot{z}F_z)+\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{C^2}P+\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}=F_t, \tag{4.2.3}$$

P 照牛顿定义是力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功率，若静质量 m_0 不变，则 C^2F_t 即为功率；此时方程(4.2.3)说明视质量的改变，是由于外力对它所做的功(除以 C^2)。

从式(4.2.1)看出碰撞时动量守恒定律的成立要求(至少在碰撞时)牛顿第三定律。

$$\boldsymbol{F}(b\to a)=-\boldsymbol{F}(a\to b) \tag{4.2.4}$$

现在先研究方程(4.2.1)及(4.2.2)是否在 S' 系统中亦可成立为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}m'\dot{x}'=F_x',\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}m'\dot{y}'=F_y',\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}m'\dot{z}'=F_z',\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}m'=F_t'\end{aligned}\right\} \tag{4.2.6}$$

形式？否则方程(4.2.1)不能符合相对论的要求。

以式(3.1.2)

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t'+\frac{V}{C^2}\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(1+\frac{V}{C^2}\dot{x}'\right) \tag{4.2.7}$$

及式(3.1.5)，(3.1.10)代入式(4.2.1)及(4.2.2)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{1}{1+\frac{V\dot{x}'}{C^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C_2}}}\right) \tag{4.2.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{V\dot{x}'}{C^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0\dot{y}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}} \tag{4.2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\frac{V\dot{x}'}{C^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0\dot{z}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}} \tag{4.2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{1}{1+\frac{V\dot{x}'}{C^2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+\frac{V}{C^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}\right) \tag{4.2.11}$$

由于式(3.1.10)的关系

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} &= \frac{\dfrac{F''_x}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+V\dfrac{F'_t}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\
\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} &= \frac{F'_y}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}},\quad \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} = \frac{F'_z}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}, \\
\frac{F_t}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} &= \frac{\dfrac{F'_t}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+\dfrac{V}{C^2}\dfrac{F'_x}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V}{C^2}}};
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.12}$$

则方程(4.2.6)亦可以成立。

换言之，如不同系统上力的变换是式(4.2.12)的形式，亦即

$$\left\{\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{F_t}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right\}\sim(x,y,z,t), \tag{4.2.13}$$

与(2.4.5)式中坐标变换相同，则牛顿定律(4.2.1)及(4.2.2)在任何系统中均成立。

设 $\overline{V}$ 为任何方向，则由式(3.1.7)及(4.2.6)得出 F 必须满足的

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}&=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}}\left\{\boldsymbol{F}'+\frac{\boldsymbol{V}F'_t}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\overline{\boldsymbol{V}}\cdot\overline{\boldsymbol{F}}')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\right\}\\ F_t&=\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{q}'\boldsymbol{V}}{C^2}}\left(F'_t+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}'}{C^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.2.14}$$

一般变换关系；$\beta\equiv V/C$。从式(3.1.10)及(2.5.6)看出此种变换关系仍然和式(4.2.13)一样。

设以 $f_\alpha(\alpha=1,2,3,4)$

$$f_\alpha\equiv\left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{\boldsymbol{F}t}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right) \tag{4.2.15}$$

则 f_α 的变换式应与坐标的变换式(2.5.6)相同。

以后所述的几种已知的作用力特别是电磁作用力(4.7.1)确具有这样的性质(4.7.3)；接触作用力(7.5.39)'以及包括热传导在内的接触作用(7.6.26)也均被证明依照上述的公式变换。

设 m_0 不变，则式(4.2.1)可以写成

$$\frac{m_0\ddot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}+\frac{m_0\dot{\boldsymbol{x}}}{\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)^{3/2}}\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}})}{C^2}=\boldsymbol{F} \tag{4.2.16}$$

形式，这也可以写成老的牛顿形式

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{4.2.17}$$

唯当 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{V}$ 时，$M=m_0\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}$；当 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{V}$ 时 M 必须为 $M=m_0/\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)^{3/2}$。此种方法介绍的 M 有所谓“纵质量”及“横质量”之分，当然并不便利，如质点在 y 方向不受力，$F_y=0$，则由式(4.2.16)得

$$\frac{\ddot{y}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=-\frac{m_0\dot{y}}{\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)^{3/2}}\cdot(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})$$

(4.2.18)

换言之，尽管在 y 方向没有力的作用，但 y 方向的加速（除非 $\dot{y}$ 为零）一般不为零，与牛顿力学不同！从式(4.2.1)的微分形式看出这是由于其他方向作用的力使速率，因之，质量

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}$$

起了变化的缘故。因为当 y 方向没有力作用时 $m\dot{y}$ 要维持常数，设 m 变化则 $\dot{y}$ 必须也起变化。同样，假使静质量 m_0 可以变化则尽管为恒速运动，仍须力

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{\dot{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\frac{\mathrm{d}m_0}{dt} \qquad (4.2.19)$$

以维持。否则物体的速度必将发生变化使动量 $m_0\dot{x}/\sqrt{1-q^2/C^2}$ 守恒。

方程(4.2.12)关于力的变换使牛顿第三定律不能无条件的保持式(4.2.4)的协变形式。设有两个不同速度的质点 a 及 b 产生了碰撞，则动量质量守恒定律要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m^a\boldsymbol{q}^a+m^b\boldsymbol{q}^b)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m^a+m^b)=0 \qquad (4.2.20)$$

由于式(4.2.1)及(4.2.2)，上式要求牛顿第三定律

$$\boldsymbol{F}^a+\boldsymbol{F}^b=0,\quad F_i^a+F_i^b=0 \qquad (4.2.21)$$

成立。F 上冠以 a 字的为质点 b 对 a 所作用的力，冠以 b 字的代表质点 a 对 b 所作用的力，但是从式(4.2.12)的变换看来，在 S' 系中 F' 例如 F_y' 为

$$F_y^{a'}=\frac{\sqrt{1-\frac{q_a'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_a^2}{C^2}}}F_y^a,\ F_y^{b'}=\frac{\sqrt{1-\frac{q_b'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_b^2}{C^2}}}F_y^b \qquad (4.2.22)$$

当 $q_a\neq q_b$ 时则尽管 $F_y^a+F_y^b=0$，但一般

$$F_y^{a'}+F_y^{b'}\neq 0\,! \qquad (4.2.23)$$

这样看来似乎动量质量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m^{a'}q^{a'}+m^{b'}q^{b'})=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(ma'+mb')=0 \qquad (4.2.24)$$

不能成立，这个结论也似乎可以从方程(4.2.9)直接看出。

反之，从方程(3.1.5)及(3.1.10)可以导出

$$\mathrm{d}(m^a\dot{y}^a+m^b\dot{y}^b)=\mathrm{d}(m^{a'}\dot{y}^{a'}+m^{b'}\dot{y}^{b'}) \qquad (4.2.25)$$

的结论，那么式(4.2.20)的成立将显然使式(4.2.24)的 y 分量成立，上面的这个矛盾怎会发生呢？

问题的关键在式(4.2.7)的 $\mathrm{d}t$ 变换上，$\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}t'$ 的变换与该质点的速度有关，当 $\mathrm{d}t_a=\mathrm{d}t_b$ 时，$\mathrm{d}t_a'$ 一般并不等于 $\mathrm{d}t_b'$。在图 3.8 上我们将“接触”的范围放大；a_1、a_2 代表质点 a 的两个时空位置，其时间间隔为 $\mathrm{d}t_a$，b_1 及 b_2 代表质点 b 的两个时空

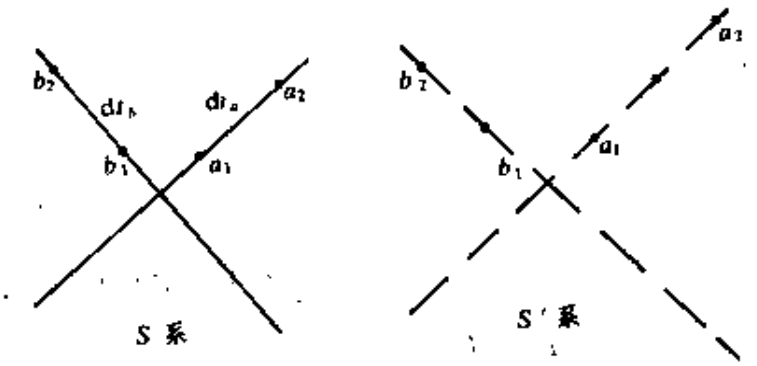


图 3.8

位置，其时间间隔为 $\mathrm{d}t_b$(事实上由于“接触”作用只是一种经过一段微距离和微时间的宏观极限，这一段时间间隔是必需的)，方程

(4.2.23)或(4.2.9)只表示

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'_a}m^{a'}\dot{y}^{a'}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'_b}m^{b'}\dot{y}^{b'}\neq 0 \qquad (4.2.26)$$

由于 $\mathrm{d}t_a'\neq\mathrm{d}t_b'$，这个方程并不和式(4.2.24)或(4.2.25)矛盾，事实上照通常的看法，相互作用的力必在同样时间的间隔内互相作用；也只有在这种作用时间相同的情况下，我们才希望牛顿第三定律的成立；也只有这样，动量守恒定律才能成立。

但是从式(4.2.22)的变换看出即在此不同的 $\mathrm{d}t'$ 情形下

$$F_y^{a'}\delta t'_a=\frac{\sqrt{1-\frac{q_a'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_a^2}{C^2}}}F_y^a\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\dot{x}_a'V}{C^2}}\delta t_a=F_y^a\delta t_a,$$

$$F_y^{b'}\delta t'_b=F_y^a\delta t_b$$

因之当 $F_y^a\delta t_a+F_y^b\delta t_b=0$ 时，

$$F_y^{a'}\delta t'_a+F_y^{b'}\delta t'_b=0 \qquad (4.2.27)$$

这一个结论也不限于 y 方向，因之设

$$\mathrm{d}(m^a\boldsymbol{q}^a+m^b\boldsymbol{q}^b)=0,\mathrm{d}(m^a+m^b)=0 \qquad (4.2.28)$$

成立，则

$$\mathrm{d}(m^{a'}\boldsymbol{q}^{a'}+m^{b'}\boldsymbol{q}^{b'})=0,\mathrm{d}(m^{a'}+m^{b'})=0 \qquad (4.2.29)$$

亦成立。但式(4.2.26)则除 $\mathrm{d}t_a'=\mathrm{d}t_b'$ 之外一般不能成立，所以牛顿第三定律实质上是动量交换定律(4.2.27)。当 S 系认为在同时 $\mathrm{d}t_a=\mathrm{d}t_b$ 互相作用时，则 $F_a+F_b=0$；当 S' 系认为在同时 $\mathrm{d}t_a'=\mathrm{d}t_b'$ 互相作用，则 $F'_a+F'_b=0$。但是由于式(4.2.7)的变换关系，这两个条件(除非互相作用的物体为同一速度之外)一般不能同时满足，这样就发生式(4.2.23)的佯谬问题。

§4.3 质量、能量与热量

牛顿力学中，动能增加为外力对它所做的功：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mg^2=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{F} \tag{4.3.1}$$

不能从式(4.2.1)导出这样的定律，但是代之者有式(4.2.3)的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mC^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{F}+\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_0C^2 \tag{4.3.2}$$

方程。当 m_0 为常数且 $q<<C$ 时，上式左方可以展开使与式(4.3.1)相同。因之，牛顿的动能定律必为式(4.3.2)的近似情况。

我们先研究 m_0 不变的情形，在这个情形下式(4.3.2)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_2}{C^2}}}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{F} \tag{4.3.3}$$

将此式由 $q=0$ 起积分到 q，得

$$\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-m_0C^2=\int_o^t(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{d}t=W, \tag{4.3.4}$$

右式为外力对此物体所做的功，左式的近似值为牛顿的动能。新的动能定义应为

$$\text{动能}=m_0C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-1\right), \tag{4.3.5}$$

以保持相对论中的能量定律(当 $q\to C$ 时，上式定义的动能为无限大，因之质点的速度在任何情形下必小于 C)。前面已经说过

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=m \tag{4.3.5}'$$

为现在质点的视质量，式(4.3.4)又说明外力对物体所做的功使物

体的视质量增加(常数 C^2 相当于计算单位的变换,一如卡路里化尔格时的 $J=4.2\times10^7$ 热功当量,可以无须提及)。质量与能量在相对论的论理上有合一的倾向,究竟有什么联系呢?爱因斯坦对此种合一性设想了一个简单但令人信服的理论证明。

设想一长形车厢的两端各置一个通常认为完全相同的物质,只是一个 A 含的能量比另一个 B 含的能量多些,例如同是氢原子,A 处于受激态,B 处于基态。设由于某种装备,A 可以在适当的情形下将多余的能量 E 以电磁波的形式辐射到 B,如图 4.1(a)所示。由电磁学理论和实验,我们知道辐射有反作用*。这个反作用将使 A 连同车厢向左以恒速 V 后退,当 E 到达 B 被 B 吸收后,此辐射将再给车厢以同样的相反的冲力使车停止进行,在 B 吸收 E 后则 B 含的能量将要比 A 多 E。我们可以在车内用一种机械方法使此时 B 和 A 调换位置。假使 B 的质量与 A 的质量相同,则此种调换不会影响车子的运动,调换后整个情形和方才相类似,那么,再由于同样设备,B 又可再将多余能量 E 辐射到 A,如图 4.1(b),车厢又要向后退。如此继续不断的作用,则车子可以不由外力的作用(A、B 一直在车内)而连续不断地后退,这与我们的力学观点基本相反!但是如果我们承认含能量多的质量较含能量少的质量大些,则在调换 B 和 A 的时候,A、B 的重心改变位置,车厢必被迫向右动,这样可能使车厢回到原来位置,而不致与力学原则矛盾。

现在,计算此种质量必需的改变如下。设辐射的能量为 E,则 A 发出 E 时冲量*为 E/C,其反作用使车后退,设车厢总共质量为 M(不计算 E)则此冲量的力学作用使车以速度 V 向左运动,其数

---

* 因一切在真空电磁波的能量密度为 $\frac{|E|^2+|B|^2}{8\pi}=\frac{|E|^2}{4\pi}$,动量密度为 $\frac{E\wedge B}{4\pi c}=l\frac{|E|^2}{4\pi c}$,其中 l 为波进行的方向。换言之,动量为能量的 $1/c$ 倍。Lebeder 等人曾用实验证明这个电磁动量的力学作用

值为

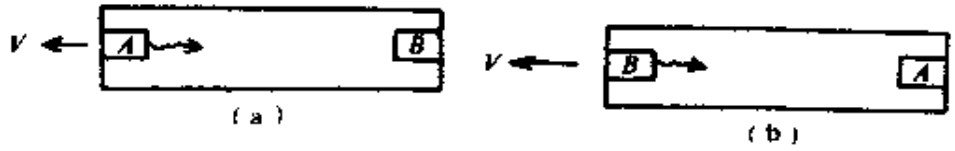


图 4.1

$$MV=\frac{E}{C} \tag{4.3.6}$$

设车厢长 l，辐射 E 由 A 到 B 的时间为*

$$t=\frac{l}{c} \tag{4.3.7}$$

从 A 发出 E 使车后退一直到 B 收到 E 时使车停止的一段时间内，车厢整个向后移动的距离为

$$Vt=l\frac{E}{MC^2} \tag{4.3.8}$$

设 B 收到 E 后质量多$\triangle m$，则在交换 B、A 时，$\triangle m$ 后移 l。因之车厢必向前移 x，使

$$\triangle ml=Mx \tag{4.3.9}$$

以保持交换中质量中心的位置不变。现在 x 必须等于上次后移的距离(4.3.8)，才可以恢复车子原来的位置，这样就使整个步骤还原而不致和力学观点相矛盾。因之

$$\frac{\triangle ml}{M}=l\frac{E}{MC^2},$$

或质量的改变$\triangle m$ 为

$$\triangle m=\frac{E}{C^2} \tag{4.3.10}$$

---

* 我们为简便起见，在此地略去一切与结论无关的精细计算，换言之可假设 V≪C，以略去 M 的相对论影响，并略去车厢运动在式(4.3.7)中的影响等等。式(4.3.10)的结论则可作为在 V→C 时的结论，换言之$\triangle m$ 为"静质量"

换言之，当 B 收到能量 E 时其质量必同时增加 E/C^2；否则车厢不受外力作用而可以一直后退，与力学的基本原则矛盾。

上面的 A、B 如为同样的氢原子；A 处于受激态，B 处于基态，则由上面看出，受激态原子的质量必较基态多 E/C^2！同样，热水要比冷水重些！

由以前的方程(4.1.18)，我们也看出碰撞后物体静质量的增加适为碰撞过程中动能(4.3.5)的损失：

$$(\bar{m}_{10}+\bar{m}_{20})C^2-(m_{10}+m_{20})C^2=m_{10}C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}}-1\right)$$
$$+m_{20}C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q_2^2}{C^2}}}-1\right)$$
$$-\bar{m}_{10}C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}_1^2}{C^2}}}-1\right)-\bar{m}_{20}C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}_2^2}{C^2}}}-1\right) \tag{4.3.11}$$

但是由实验知道，碰撞后动能的损失变成热的形态以增加物质的内能，因之物质内能增加，同时也使它的静质量增加，这样又得出

$$\triangle m_0=\frac{E}{C^2} \tag{4.3.12}$$

的结论。最近，原子核分裂的实验以及其它一切有关的实验和理论均证明爱因斯坦预见性的准确并定量地验证了上面的公式。

由于能量与质量的合一性，方程(4.1.18)亦可称为能量守恒定律。其中

$$mC^2=\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{4.3.13}$$

可以"认为"是物质所含的"能量"，内能与动能之和*。方程(4.3.2)说明物体内能和动能的增加分为两个部分，除外力对它所做的功

$$\delta W' = \dot{x} \cdot F \delta t \tag{4.3.14}$$

之外，还有一项是

$$\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\delta(m_0C^2) \tag{4.3.15}$$

这一项必是除 δw 功之外的能量转换。换言之，除功之外的能量转换才能使该物体的静质量增加。前面两个例子，也充分的说明了这一点，这里也说明"功"与其它能量变换有差别。在热力学第一定律中，此种除功之外的能量转换采取热的形式，因之如以 δQ 代表吸收的热量，则

$$\delta Q = \sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\delta(m_0C^2) \tag{4.3.16}$$

在相对静止的系统上 $q=0$，

所以

$$\delta Q_0 = \delta(m_0C^2), \tag{4.3.17}$$

因之

---

* 严格地讲，相对论只证明了方程(4.3.12)中 $\triangle m_0$ 与能量的变换关系(这个关系是狭义相对论对人类知识的重要贡献之一，并已为众所周知的为近代物理中的大量事实所证明)，但是并没有证明含静质量 m_0 物质本身即含有内能 m_0C^2。

目前的实验均显示基本粒子的静质量不是一个可变量。例如，原子核的总质量虽然小于其组成粒子，中子及质子的总的静质量，但是这种"质量的亏损"是由于组成粒子的"结合能"，而并不是基本粒子本身静质量的"亏损"；再如受激态氢原子发射光子后，能量因之质量的损失是由于电子和原子核中间势能的减少而并不是电子和质子静质量本身的变化。式(4.3.12)只是"宏观"的方程。

通常的说物质的"湮灭"和"产生"似乎表示物质可以整个的化为能量而致"湮灭"，但从 Dirac 理论[(7.9.88)及讨论]看来，所谓"湮灭"只是负能阶的填塞，而所谓"产生"也只是将基本粒子击出负能阶，并不是真正的"湮灭"和"产生"(到现在为止，还没有可靠理论和实验的根据来推翻原来的 Dirac 理论)，因之还难肯定地说基本粒子 m_0 含有能量 m_0C^2；当然也难肯定地说这种"能量"可以加以利用(近代物理中所说"湮灭"的"反基本粒子"都是先由人工"产生"出来的，所需要的能量 $2m_0C^2$ 是由"产生"时先供给的)

$$\delta Q = \delta Q_0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}} \qquad (4.3.18)$$

必为热量的变换关系，这和其它的能量变换关系，例如(4.3.13)完全不同。

牛顿第三定律的推广式(4.2.5)说明，当两物体 a、b 互相接触时，

$$F_i^a = \dot{x}_a \cdot F_a \delta t + \delta Q_a = - \dot{x}_b \cdot F_b \delta t - \delta Q_b = - F_i^b,$$

以上 δQ_a、δQ_b 分别为物体 a 及 b 所吸收的热量；Fa、F_b 为分别所受的力。所以 $\delta Q_a + \delta Q_b$ 为这个步骤"产生"的热量。由于

$$F_b = - Fa,$$

所以

$$(\dot{x}_a - \dot{x}_b) \cdot F_b \delta t = \delta Q_a + \delta Q_b, \qquad (4.3.19)$$

因之如在两物体接触要有相对速度且有切应力作用时，则产生热量使物体总的静质量增加，这一个已知的力学事实现在由相对论联系起来成为牛顿第三定律的推广。

在结束这一节时，我们除说明质量与能量有同一性之后还须再强调两者的不同性。如上页脚注所述，我们从未观察到(而且很有理由怀疑这种可能性)基本粒子静质量的改变；我们也没有可靠的理论或实验来肯定"基本粒子"的产生和湮灭。式(4.3.12)是宏观的方程。[洛伦兹电磁力否定静质量的变化(4.7.6)]。

用不同坐标时，粒子质量的变换是简单的变换关系，而一般能量的变换公式则是复杂不同的变换形式，以后 §7.2 到 §7.6 节中将分别讨论。

除此之外，还可以再考虑另一个问题，大家都知道"热"是能量的一种形式，但是这样是否就可以做出结论，"热"和其它的能量性质"完全"相"同"呢？热力学第二定律基本上否定这一点！由现有的实验记录和理论研究看来，我们或者也要等到另一种甚么定律发现之后才能真正了解物质与能量的全面关系。目前只能做出结

论——如热力学第一定律的式(4.3.10)。

基本粒子的"静质量",至少和通常的能量不同,是一种凝缩的但又"量子化"的形式,这种"量子化"的形式和其它如光子的量子化 $h\nu$ 的形式又有所不同;因为它是不随参考坐标变化的标量,而 $h\nu$ 却随坐标的改变而改变。

这些有关物质的基本问题还有待于新的理论和实验,值得进一步的研究以了解物质与能量的全面关系。

§4.4 质点的视质量和时钟的快慢率不是加速度的函数

在方程(4.2.1)内质点的速度一般为变数,但质量 m 任何时仍为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{4.4.1}$$

由此可见,质点的质量只是速度的函数,而不是它加速度的函数。这个结论也可以从量纲分析看出,因质点的质量 m 如为 a 的函数,也只能采取

$$m = f(m_0, q, c, a) \tag{4.4.2}$$

形式。但只有

$$m = m_0 F\left(\frac{q}{c}\right)$$

的形式,才能使两边的量纲相同,单从 a 得不出无因次的数量来!同样的分析说明运动钟的快慢率也只能是速度的函数,与加速无关。事实上在§7.1内,我们将要看出方程(4.2.1)是"矢量方程"。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\left(m_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t_0}\right) = f_x, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\left(m_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t_0}\right) = f_y, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\left(m_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t_0}\right) = f_z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\left(m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\right) = f_t \end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

的变化形式亦即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\dot{x}\right)=\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t}f_x=F_x,\cdots,\cdots,\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\right)=\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}t}f_t=F_t,\dot{x}\equiv\frac{dx}{dt},\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(4.4.4)$$

(4.2.1)内的因子

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}\qquad(4.4.5)$$

实即 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t_0$ 的数字。既然方程(4.4.4)的成立不限于恒速运动，因之我们可以断定式(4.4.5)的成立也不限于恒速运动。

我们在§2.2内曾用搬钟法来证明 S' 系上"对钟"受到式(2.2.21)的差误，当时由于不能决定加速度是否影响钟的快慢率，所以只能用微匀速方法搬钟。现在既然式(4.4.5)成立，则可以用任何可变速度将 A' 处钟搬到 B' 处，如图 4.3。

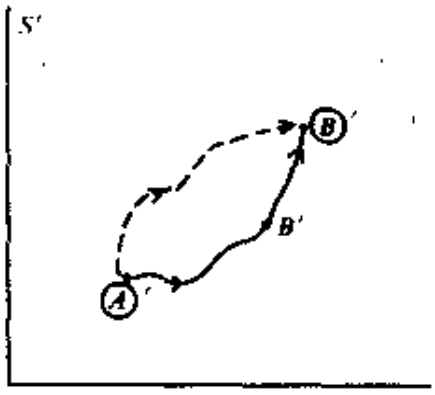


图 4.3

现在看这种搬钟的对时是否也必引起同样的"差误"。钟 B' 由 S' 系看来，其计数 $\mathrm{d}t_B$ 为

$$\mathrm{d}t_B=\mathrm{d}t_A\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}},\qquad(4.4.6)$$

此式，照方才的证明，并不受 B' 钟加速度的影响。当到达 B' 处时，

S'系认为将 B'钟再向前拨。

$$\triangle' = \int(\mathrm{d}t_{A'} - \mathrm{d}t_{B'}) = \int \mathrm{d}t_{A'}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{q'^2}{C^2}}\right)$$

$$= \int \mathrm{d}t_{B'}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{C^2}}} - 1\right), \qquad (4.4.7)$$

则 B'处钟即与 A'处钟对准。

从 S 系看来 A'处钟的速度为 V，钟 B'的速度为 q，

所以 $$\triangle t_{A'} = \triangle t\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}, \mathrm{d}t_{B'} = \triangle t\sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}} \qquad (4.4.8)$$

由于 $\mathrm{d}t_{B'}$为运动钟“B'的指示数”(不管 S'或 S 看来总是一样)，而 $\triangle t$、$\triangle t_{A'}$只是 S 系“认为”与 $\mathrm{d}t_{B'}$“相应”的时间。式(4.4.6)的 $\mathrm{d}t_{A'}$是 S'系“认为”与 $\mathrm{d}t_{B'}$“相应”的时间。一般

$$\mathrm{d}t_{A'} \neq \triangle t_{A'} \qquad (4.4.9)$$

当钟到达 B'时，S 系认为将钟 B'再向前拨

$$\triangle = \int(\triangle t_{A'} - \mathrm{d}t_{B'}), \qquad (4.4.10)$$

则 B'钟与 A'钟可以对准。但这个$\triangle$与式(4.4.7)的$\triangle'$一般不同。由式(4.4.10)及(4.4.7)得

$$\triangle - \triangle' = \int \mathrm{d}t_{B'}\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}}} - 1\right) - \int \mathrm{d}t_{B'}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{C^2}}} - 1\right)$$

$$= \int \mathrm{d}t_{B'}\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q'^2}{C^2}}}\right) \qquad (4.4.11)$$

我们再看 q 与 q'的关系(3.1.10)。该式的成立不限于 q、q'是否恒速。以之代入式(4.4.11)则得

$$\triangle - \triangle' = \int dt_{B'} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}\left(\frac{q' \cdot V}{C^2}\right) = \int dt_{A'} \frac{q' \cdot V}{C^2} \tag{4.4.12}$$

由于 V 为常数，可以放在积分之外，而

$$\int q' \cdot dt_{A'} = r'_{AB} \tag{4.4.13}$$

为 S' 系所测 A'、B' 两点的距离。因之不论 q' 是否以同方向或匀速进行，式(4.4.12)化成

$$\triangle - \triangle' = \frac{(V \cdot r'_{AB})}{C^2} \tag{4.4.14}$$

此式亦即方程(2.2.21)。由此可见任何速度搬钟皆得出同样的"差误"结论，方程(4.4.5)也得到进一步的验证。从这一个理想实验我们可以看出，钟 B' 不管加速与否，确系记录它的"原时"：

$$dt_{B'} = dt_{A'}\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}} = \triangle t\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}} \tag{4.4.15}$$

爱因斯坦当初认为很难证明运动钟所记录的时间就是它的"原时"

$$dt' = dt\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}, \tag{4.4.16}$$

甚至认为是"无法证明"*的假设。但我们现在的理想实验"证明"了运动钟确是记录它的原时，否则得不出不矛盾的结论例如式(4.4.14)来。我认为这一个结果可以从高加速度的离子光谱和放射性原子的半衰期得到证明，从量纲看，运动钟不记录它的原时能记录什么呢？

Minkowski 似乎当初认为运动的钟绕一个圈子回来之后所记录的时间应当与静止钟相同，但图 4.3 上钟 B' 走虚线记录的时间

---

* Sommerfeld 解释 Minkowski 的演讲时曾提及此事。见 Einstein and others: The principle of Relativity (1923 Methuen 本)p. 94(4)

当然不一定和钟 B′ 走实线所记录的时间相同，一般

$$\int_{A'\text{虚线}}^{B} dt_0 \neq \int_{A'\text{实线}}^{B} dt_0; \tag{4.4.17}$$

因之 t_0 不是全微分。其实我们并无理由认为绕一个圈子回来钟记录的时间与静止记录的相同，这是一个未经证明的假设！相反的由后来广义相对论看出它们的记录也不会相同（所谓钟的佯谬问题）。当原来相对静止的坐标加速成为相对匀速 V 运动时，我们从本节的研究看出动坐标上的钟所记的时间

$$\int_1^2 dt' = \int_1^2 dt \sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}} \tag{4.4.18}$$

和当时加速运动的情况有关。但是这至少不和狭义相对论矛盾。在狭义相对论中，两个人是在已成匀速运动之后再对时，在这步手续之后，公式

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{q^2}{C^2}} \tag{4.4.19}$$

才成立，并没有说在匀速运动之前先对时而加速后

$$\underset{\text{一种方法}}{\int dt'} = \underset{\text{另一种方法}}{\int dt'} \tag{4.4.20}$$

因之式(4.4.18)中 t' 的非全微分性质并不和相对论矛盾。

我们再做下面一个理想实验来说明加速钟的记时。设有两个钟 A 及 B 本作相互运动，在原来相遇时两个钟将零点校对好，等分离若干时后 B 钟经加速再回到 A 处对两个钟所记的时间。

现在从两种不同的观点来计算这个问题。

1. A 钟静止，B 钟运动（由于 A 钟在上述过程中未受加速因之可以始终保持静止），见图 4.4(a)。

设 B 原来以速度 V 向右移动，在到达某处 B' 时突受力的作用使之在相反的方向加速（为简化问题，此处可作为无限大的加速）以同样大的速度 V 向左移动，B 可再回到原来 A 处以比较两钟所记录的分离时间。

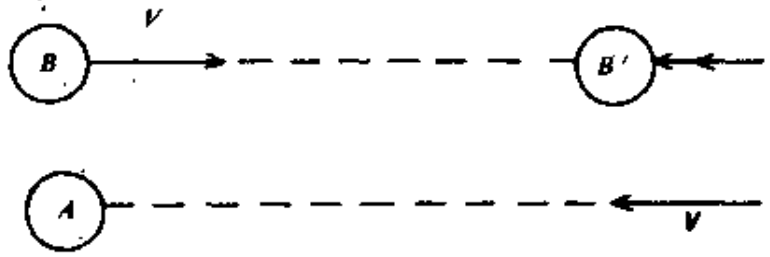


图 4.4(a)

由于钟的快慢率 dt_0，如方程(4.4.5)所述，只是速度的函数而与加速无关，因之钟 B 的计数 t_B 由 A 计算起来应当是

$$t_B = t_A\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}, \qquad (4.4.21)$$

t_A 为两个钟再"对时"时的 A 钟计数，所以从 A 看来，钟 B 收缩，所记的时间较 A 为小。

2. B 钟原来静止，A 钟以速度 V 向左移动，见图 4.4(b)。当 A 到达某处 A' 时，B 钟突受力的作用以速度 U 向左追 A(狭义相对论内用的参考坐标本身不能受力加速，所以坐标仍是静止的)，等到追上 A 两个再遇在一起时互相比较所记的分离时间(图 4.4(c))。

这一个看法和刚才不同，但是仍属于狭义相对论的范围。

设 B 加速时为 t_1，该时钟 A 的距离为 Vt_1，其记数应当是 $t_1\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$。设 B 在加速后追上 A 钟需时 T，则

$$UT = Vt_1 + VT \qquad \text{所以 } T = \frac{Vt_1}{U-V}, \qquad (4.4.22)$$

钟 A 所记的时间--共是

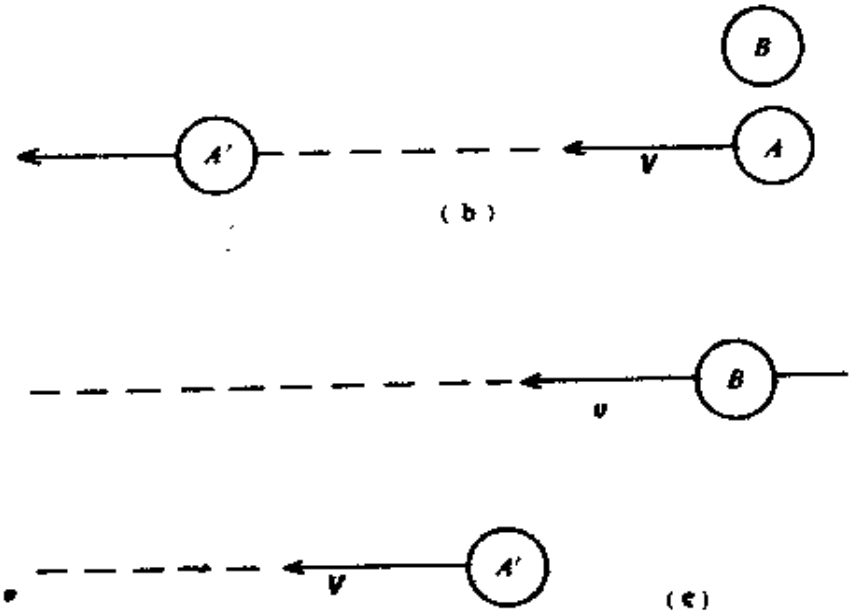


图 4.4(b)(c)

$$t_A = (t_1 + T)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} = \frac{Ut_1}{U - V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \quad (4.4.23)$$

钟 B 所记的时间在加速前应当仍是 t_1(该时 B 钟静止)。在以速度 U 进行时其所记的时间应当是 $T\sqrt{1-U^2/C^2}$,因之 B 钟总共记录的时间为

$$t_B = t_1 + T\sqrt{1 - \frac{U^2}{C^2}} = t_1 + \frac{Vt_1}{U - V}\sqrt{1 - \frac{U^2}{C^2}} \quad (4.4.24)$$

但对 A 讲起来,B 加速后的速度为 V,因之由相对论的速度合成法得

$$\frac{U - V}{1 - \frac{UV}{C^2}} = V \qquad \text{所以 } U = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{C^2}} \quad (4.4.25)$$

以之代入式(4.4.23)及(4.4.24)内，得

$$t_A = \frac{2t_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \qquad t_B = 2t_1, \tag{4.4.26}$$

所以当两钟再相遇时由上式得

$$t_B = t_A\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{4.4.27}$$

此和用第一种观点所计算的公式(4.4.21)完全相同。换言之，在两个钟分开后再会合的"实验"上，不管认为原先谁的钟静止，其结果总是受加速的钟所记的时间少些。假设是两个人的话，则受加速的人年纪轻些。

从这个理想的实验也可以看出，运动钟所记的时间确是它的原时 dt_0(4.4.5)，且不受加速的影响(否则很难得出这种互相符合的结果)。

§4.5 电磁方程

设以 $\boldsymbol{E}$ 代表绝对空间的电场，$\boldsymbol{B}$ 代表绝对空间的磁场，σ 代表电荷密度，$q_i(i=1,2,3)$代表电荷在绝对空间三方向的速度，则麦洛氏 Maxwell—Lorentz 电磁方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}+\sigma q_x\right)=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y},\\
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}+\sigma q_y\right)=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z},\\
&\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}+\sigma q_z\right)=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}, \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x},
\end{aligned}\right\} \tag{4.5.1}$$

及

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\sigma,\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_x}{\partial z}=0 \quad (4.5.2)$$

其 σ 前的 4π 因子略去不写。由洛伦兹转换(3.1.1)得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial}{\partial t'}-V\frac{\partial}{\partial x'}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'},\\
&\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{V}{C^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (4.5.3)$$

以之代入式(4.5.1),应用式(3.1.5)并利用式(4.5.2)消去不需要的各项得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t'}E_x+\frac{\sigma q_{x'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q_{x'}V}{C^2}}=c\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-c\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+\frac{\sigma q_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q_{x'}V}{C^2}}=c\frac{\partial}{\partial z'},B_x-c\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+\frac{\sigma q'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q'_xV}{C^2}}=c\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-c\frac{\partial}{\partial y'}B_x,\\
&\frac{\partial}{\partial x'}E_x+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q_x'V}{C^2}},\\
&\frac{\partial}{\partial t'}B_x=c\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-c\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta_2}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=c\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{E_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-c\frac{\partial}{\partial z'}E_x,\\
&\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=c\frac{\partial}{\partial y'}E_x-c\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{E_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial x'}B_x+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=0,
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.5.4}
$$

以上 $\beta^2\equiv V^2/C^2$。式(4.5.4)与式(4.5.1)系完全相似的形式，因之麦—洛氏方程在 S' 系内，亦可采取与式(4.5.1)及式(4.5.2)同样的形式以合于相对论的要求。其相应*的电磁场 $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{B}'$ 则为

---

* 这种结论的是否可靠还需要实验，至少是理论的实验的证明。以后的讨论式(4.5.7)，(4.5.11)，(4.5.13)以及(4.5.24)等公式都证明这种相应量的可靠性，因之也证明麦—洛氏方程的“协变性”

$$\left.\begin{aligned} E'_x = E_x, E'_y = \frac{E_y - \beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, E'_z = \frac{E_z + \beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B'_x = B_x, B'_y = \frac{B_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, B'_z = \frac{B_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{4.5.5}$$

电荷密度则为

$$\sigma' = \frac{\sigma\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{q'_x V}{C^2}} = \sigma\frac{\sqrt{1-q^2/c^2}}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \tag{4.5.6}$$

式(4.5.6)说明

$$\sigma'\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}} = \sigma\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}} = \sigma$$

为不变量，σ_0 为相对静止系所观察的电荷密度，因小体积 $d\Omega$ 与相对坐标 $d\Omega_0$ 的关系为 $d\Omega = d\Omega_0\sqrt{1-q^2/C^2}$，所以 $\sigma d\Omega = \sigma_0 d\Omega_0$

因而
$$e = \int de = \int \sigma d\Omega = \int \sigma_0 d\Omega_0 = e \tag{4.5.7}$$

换言之，电荷为不变量。与质量不同，电荷的数值不受运动的影响。

由式(4.5.6)得

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{\sigma' + \frac{V}{C^2}\sigma q'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \sigma q_x = \frac{\sigma' q'_x + V\sigma'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \sigma q_y = \sigma' q'_y, \sigma q_z = \sigma' q'_z \end{aligned}\right\} \tag{4.5.8}$$

因之

$$(\sigma q_x, \sigma q_y, \sigma q_z, \sigma) \sim (dx, dy, dz, dt), \tag{4.5.9}$$

电流密度与电荷密度的变换式——如 dx、dy、dz 与 dt 的变换式。

式(4.5.5)说明在单纯磁场的空间运动的物体，$q = V$，除感觉磁场为

$$\boldsymbol{B}' = \left(B_x, \frac{B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{4.5.10}$$

与“实际”的 $\boldsymbol{B}$ 稍有不同之外，另感觉有电场

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}' \tag{4.5.11}$$

作用。而在纯电场运动的物体，除感觉电场为

$$\boldsymbol{E}' = \left(E_x, \frac{E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{4.5.12}$$

之外，另有磁场

$$\boldsymbol{B}' = -\frac{1}{c}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{E}' \tag{4.5.13}$$

作用。这些结论与通常的想法也大致相同：电荷运动时受磁场的力，“磁荷”运动时受电场的力分别为式(4.5.11)及(4.5.13)。

由于方程(4.5.4)皆可普通乘以 $\varphi(\beta)$ 而不改变，因之式(4.5.5)及(4.5.6)的右方皆可普遍乘以 $\varphi(\beta)$ 而仍保证麦一洛氏方程的相对性，这样式(4.5.5)及(4.5.6)似不可靠，但是相对论可以证明此 $\varphi(\beta)=1$。例如式(4.5.5)的第一式

$$E'_x = \varphi(\beta)E_x$$

由相对论对称性的要求，可见 S' 系对 S 系以 $-V$ 运动。因之

$$E_x = \varphi(-\beta)E'_x$$

应当成立。由上面两式得

$$\varphi(\beta)\varphi(-\beta) = 1 \tag{4.5.14}$$

我们再从一个简单情况可以看出 φ 必为 V 的偶函数 $\varphi(\beta)=\varphi(-\beta)$。例如当 $E=0, B_x=0, B_z=0$ 时，则由式(4.5.5)得

$$\left.\begin{aligned} &E_x' = 0, E_y' = 0, E_z' = \varphi(\beta)\frac{\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ &B_x' = 0, B_y' = \varphi(\beta)\frac{B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, B'z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.5.15}$$

此电磁场的方向如图 4.5 所示。

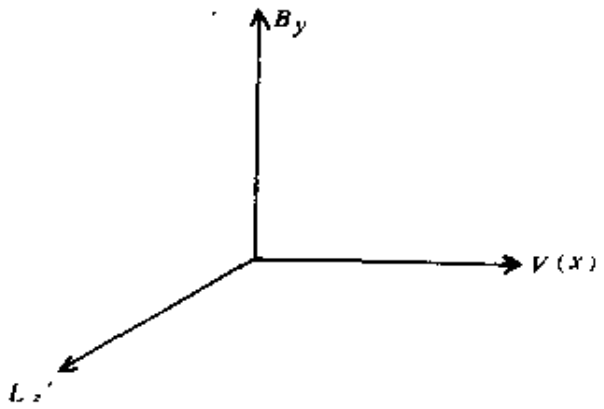


图 4.5

设将轴依 B_y 方向旋转使 V 指负 x 方向，y 方向不变，则由空间对称性，可见现在 S' 观察的电场数值应与刚才相同，但方向相反。

在式(4.5.15)中以 $-\beta$ 代以 β，则

$$E''_z = \varphi(-\beta)\cdot\frac{-\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = -E'_z = -\varphi(\beta)\frac{\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.5.16}$$

互相比较得

$$\varphi(-\beta) = \varphi(\beta)$$

故(4.5.14)方程为

$$\{\varphi(\beta)\}^2 = 1, \qquad \text{所以 } \varphi(\beta) = \pm 1$$

但当 $\beta=0$ 时，$E'_x = E_x$ 等等，因之 $\varphi(o)=+1$，

所以

$$\varphi(\beta) = +1 \tag{4.5.17}$$

所以式(4.5.5)为正确的变换方程，不需再加 $\varphi(\beta)$。

我们知道电磁场可以从电磁势 $\boldsymbol{A}$ 及 φ 导出

$$\left.\begin{aligned} &E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, \\ &B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{4.5.18}$$

由式(4.5.5)及(4.5.3)得

$$\left.\begin{aligned}
E'_x &= -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\varphi-\beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{A_x-\beta\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),\\
E'_y &= -\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\varphi-\beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(A_y),\\
B'_x &= \frac{\partial}{\partial y'}(A_z)-\frac{\partial}{\partial z'}(A_y),\\
B'_y &= \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{A_x-\beta\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial x'}(A_z),\\
B'_z &= \frac{\partial}{\partial x'}(A_y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A_x-\beta\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.5.19}$$

因之电磁势的变换为

$$A_x' = \frac{A_x-\frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad A_y'=A_y,\qquad A_z'=A_z,$$

$$\varphi' = \frac{\varphi-\frac{V}{c}A_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.5.20}$$

换言之

$$(A_x,A_y,A_z,\frac{\varphi}{c}) \sim (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}t) \tag{4.5.21}$$

作为一个例题，我们可将点荷的静电场用公式(4.5.5)变换成一匀速运动电荷的电磁场。以坐标 S' 为随此电荷作匀速运动的坐标则在此坐标中电磁场为

$$E_x' = \frac{ex'}{r'^3}, E_y' = \frac{ey'}{r'^3}, E_z' = \frac{ez'}{r'^3}, \boldsymbol{B}' = 0 \tag{4.5.22}$$

变到 S 系坐标，用式(4.5.5)的关系解出 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 并以式(2.4.4)代入，得

$$E_x = E_x' = \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{(x-Vt)}{\left\{\frac{(x-Vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right\}^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{ey'}{\sqrt{1-\beta^2}\left\{\frac{(x-Vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right\}^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{\sqrt{1-\beta^2}\left\{\frac{(x-Vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2\right\}^{3/2}}$$

在图 4.6 上以 $\boldsymbol{r} \equiv \overrightarrow{o'p}$，$o'$ 是电荷的位置，

所以

$$x - Vt = r\cos\theta, y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta$$

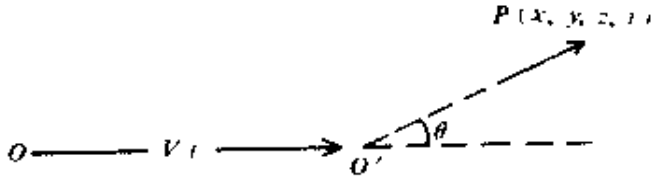


图 4.6

由此得出 $\boldsymbol{r}$ 与 S' 系上 $\boldsymbol{r}'$ 的关系

$$r'^2 = \frac{r^2}{1-\beta^2}(1 - \beta^2\sin^2\theta) \qquad (4.5.23)$$

将以上数值代入 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的表式，得匀速运动点荷的电磁场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}(1-\beta^2)}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}, \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{E} \qquad (4.5.24)$$

这个结果与通常直接求出的相同。由此也可以看出方程(4.5.5)的可靠性。

从式(4.5.24)看出：

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = o = \boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{B}',$$

$$E^2 - B^2 = \frac{e^2(1-\beta^2)^2}{r^4(1-\beta^2\sin^2\theta)^2} = \frac{e^2}{r'^4} = E'^2 - B'^2 \tag{4.5.25}$$

的不变关系。

电磁势的变换公式为

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}' = 0, \varphi' = \frac{e}{r'}, \\ &A_x = \frac{eV_x}{cr\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}, A_y = 0, A_z = 0 \\ &\varphi = \frac{e}{r\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}} \end{aligned}\right\} \tag{4.5.26}$$

由于电磁方程(4.5.1)是线性的方程，所以几个不同匀速运动电荷的电磁场可以从式(4.5.24)迭加算出。

其它有关匀速运动的电磁学问题也可依样从静止的电磁学问题求出(参考下节等例题)。

§4.6 光的几个性质

在真空中进行的平面简谐线偏振光波电磁场的变化具有下列形式：

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \sim \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 2\pi\nu\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right) \tag{4.6.1}$$

以之代入式(4.5.1)及(4.5.2)，见 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{l}$ 三个方向为互相垂直成右手坐标关系的三个矢量：

$$\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{l}E^2 = \boldsymbol{l}B^2 \tag{4.6.2}$$

在 S' 系坐标内，此平面波仍为简谐波。以式(2.4.5)及(4.5.5)代入式(4.6.1)得出

$$(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}') \sim \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} 2\pi\nu'\left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right) \tag{4.6.3}$$

(4.6.2)的关系，由于麦-洛氏方程的不变性，当然仍然成立：

$$\boldsymbol{B}' \wedge \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{E}', \boldsymbol{l}' \wedge \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{B}', \boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{l}' E'^2 = \boldsymbol{l}' B'^2$$

其相应频率及方向的关系为（β 为 S' 系对 S 系的 $\boldsymbol{V}/c$，$\boldsymbol{V}$ 在正 x 方向）

$$\left.\begin{aligned} \nu' &= \nu \frac{(1 - l\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad l' = \frac{l - \beta}{1 - l\beta}, \\ m' &= \frac{m\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - l\beta}, \quad n' = \frac{n\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - l\beta} \end{aligned}\right\} \tag{4.6.4}$$

以上关系完全是相对的，由式(4.6.4)解出

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \nu' \frac{1 + l'\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad l = \frac{l' + \beta}{1 + l'\beta}, \\ m &= \frac{m'\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + l'\beta}, \quad n = \frac{n'\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + l'\beta} \end{aligned}\right\} \tag{4.6.4'}$$

只换 β 的符号。设以波平面法线与 $\boldsymbol{V}$ 方向所成的夹角为 θ，由上式得出

$$\left.\begin{aligned} &\nu \sin\theta = \nu' \sin\theta, \\ &\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan\frac{\theta'}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.6.5}$$

两个比较容易记忆的方程。

$\boldsymbol{E}'^2$ 或 $\boldsymbol{B}'^2$ 的数值，由式(4.5.5)得出为

$$\boldsymbol{E}'^2 = \boldsymbol{E}^2 \frac{(1 - l\beta)^2}{1 - \beta^2}, \boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}'^2 \frac{(1 + l'\beta)^2}{1 - \beta^2} \tag{4.6.6}$$

随波进行一固定图形的体积由式(3.6.9)得出，为

$$\Omega = \Omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + l'\beta}, \tag{4.6.7}$$

因此处为光波，$u' = c = u$。Ω_0 相应于在 S' 系看的任一个固定体积。式(4.6.7)也是完全对称的（光波的速度总是 C，对任何系统没有

特殊)。

$$\Omega' = \Omega_0 = \frac{1 + l'\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Omega = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-l\beta}\Omega \tag{4.6.8}$$

在随波进行一个固定体积内所含有的光能 ε' 为

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \frac{1}{\theta\pi}\{(\boldsymbol{E}')^2 + (\boldsymbol{B}')^2\}\Omega' = \frac{1}{4\pi}|\boldsymbol{E}'|^2\Omega' \\ &= \frac{1}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\frac{(1-l\beta)^2}{1-\beta^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-l\beta}\Omega = \varepsilon\frac{(1-l\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

以上 ε 为 S 系所看在此相应体积内的光波能量。同样可以看出

$$\varepsilon = \varepsilon'\frac{(1 + l'\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.6.9}'$$

值得注意的是,光波含的能量 ε 的变换形式与光频的变换形式(4.6.4)或(4.6.4)′完全相同。换言之

$$\frac{\varepsilon'}{\nu'} = \frac{\varepsilon}{\nu} \tag{4.6.10}$$

为一不变量。此比例不因参照系统的变换而改变*。

由等式(4.6.6)看出在光波内的简单变换关系

$$\frac{|\boldsymbol{E}'|}{|\boldsymbol{E}|} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{\Omega'}{\Omega} \tag{4.6.11}$$

成立。

电磁场动量密度的变换在光波中是

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{E}' \wedge \boldsymbol{B}'}{4\pi c} = l'\frac{|\boldsymbol{E}'|^2}{4\pi c} &= \left(\frac{l-\beta}{1-l\beta}, \frac{m\sqrt{1-\beta^2}}{1-l\beta}, \frac{n\sqrt{1-\beta^2}}{1-l\beta}\right) \\ &\frac{(1-l\beta)^2}{(1-\beta^2)}\cdot\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi c}\end{aligned} \tag{4.6.12}$$

因之,在随波进行的一固定体积 Ω' 内所含的动量为

---

* 从这里可以看出爱因斯坦以 $\varepsilon = h\nu$ 的原因

$$\boldsymbol{l}'\frac{|\boldsymbol{E}'|^2}{4\pi c}\Omega'=\boldsymbol{G} \tag{4.6.13}$$

以式(4.6.8)代入式(4.6.12)得 S' 系中的动量为

$$G_x'=\frac{l-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi c}\Omega,G_y'=m\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi c}\Omega,G_z'=n\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi c}\Omega$$

或连同式(4.6.9)得

$$\left.\begin{aligned}G_x'&=\frac{G_x-V\dfrac{\varepsilon}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},G_y'=G_y,\\G_z'&=G_Z,\varepsilon'=\frac{\varepsilon-VG_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\} \tag{4.6.14}$$

的关系。由上可见在任一固定体积内光波所含动量及能量的变换

$$(G_x,G_y,G_z,\frac{\varepsilon}{C^2})\sim(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}t)$$

换言之,光波所含动量、能量的变换与质点动量、能量的变换式(4.1.2)相同。以上结果与光波体积的大小无关。

再由式(4.6.4)见

$$(G_x,G_y,G_z,\frac{\varepsilon}{C^2})\sim(\frac{\nu l}{C},\frac{\nu m}{C},\frac{\nu n}{C},\frac{\nu}{C^2})\sim(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}t), \tag{4.6.15}$$

换言之,光波所含的能量及动量与质量为$\frac{h\nu}{C^2}$、动量为$\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}$的质点完全相似(不过这种"质点"不能对任何参考系统静止,其速度对任何参考系统均为 C),h 可为任意常数。以上的研究大约是引导爱因斯坦假设"光子"存在(几乎与"狭义相对论"同时发表的论文)的主要原因。"光子"的性质——如质点,其能量及动量假设为

$$\varepsilon=h\nu,\boldsymbol{G}=\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}, \tag{4.6.16}$$

h 称 Planck 常数。由式(4.6.14)及(4.6.15)见这种假设,既合于电磁波性质的要求又合于相对论的要求。

对相速不是 C 的波，则频率的变换为公式(3.3.7)。如仍能当“质点”能量 $h\nu$ 看待，则此“质点”的速度必为

$$V=\frac{C^2}{u}l \tag{4.6.17}$$

否则变换式不同，则这种假设不可能成立。式(4.6.17)代表 de-Broglie“质点波”的性质。不过我们还需要证明在某体积内所含能量、动量满足方程(4.6.16)，才合于波的理论。

相对论可以将许多有关运动的问题简化。例如取爱因斯坦提出光射到运动平面镜上反射的问题。可以将镜子系统作为 S'，则反射定律在 S' 系统与不动的镜子相同，设镜子为平面 $x'=0$，以字上加一横作为反射后的光波，则

$$\bar{l}'=-l',\bar{m}'=m',\bar{n}'=n',|\bar{E}'|^2=|E'|^2,\bar{\nu}'=\nu' \tag{4.6.18}$$

再变回到 s 系，用式(4.6.4)成为

$$\frac{\bar{l}-\beta}{1-\bar{l}\beta}=\frac{l-\beta}{1-l\beta},\frac{\bar{m}}{1-\bar{l}\beta}=\frac{m}{1-l\beta},\frac{\bar{n}}{1-\bar{l}\beta}=\frac{n}{1-l\beta}$$

因之，光波射到速度为 V' 镜子上反射后的方向为

$$\bar{l}=-\frac{l-2\beta+l\beta^2}{1+\beta^2-2l\beta},\bar{m}=m\frac{(1-\beta^2)}{1+\beta^2-2l\beta},\bar{n}=n\frac{(1-\beta^2)}{1+\beta^2-2l\beta} \tag{4.6.19}$$

由此可见反射角 $\bar{\theta}$ 一般不等于入射角 θ。其频率

$$\bar{\nu}=\frac{1+\beta^2-2l\beta}{(1-\beta^2)}\nu \tag{4.6.20}$$

反射后波的强度改变成

$$|\bar{E}|^2=|E|^2\frac{(1+\beta^2-2l\beta)^2}{(1-\beta^2)^2} \tag{4.6.21}$$

如不用相对论的方法而直接地由电动力学解决，则问题就很

复杂。方程(4.6.20)可以解释为两次“多普勒效应”。镜子收到频率 ν 光波的频率为(4.6.4)。

$$\nu' = \nu\frac{(1-l\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

镜子再向 $-l'$ 方向发出频率 ν' 光波，S 收到的频率为

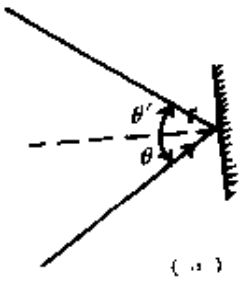
$$\bar{\nu} = \nu'\frac{1-\beta l'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu\frac{(1-l\beta)(1-\beta l')}{1-\beta^2}$$

以式(4.6.4)的 l' 代入即得式(4.6.20)。(4.6.19)各式也可以这样解释。

如以入射角为 θ，反射角为 $\bar{\theta}$ 如图 4.7(a)，则从方程(4.6.19)，(4.6.20)及(4.6.21)得出整洁的关系：

$$\left.\begin{aligned} &\bar{V}\sin\bar{\theta} = V\sin\theta \qquad |\bar{E}|^2\sin^2\bar{\theta} = |E|^2\sin^2\theta \\ &\tan\frac{\bar{\theta}}{2} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\tan\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad (4.6.22)$$

现在对以上公式几个有趣方面稍加讨论：第一，当 S' 系认为平行于镜面的光掠过镜面 $l'=0$ 时，则当然不发生“反射”。在 S 系看来，$l=\beta\neq 0$ 式(4.6.4)似乎应有反射，但由式(4.6.19)得 $\bar{l}=\beta=l$，“反射”光仍同方向。换言之，也没有反射，只是两系统看的角度不同而已。事实上，S 系上不反射的条件为“反射光”的方向与“入射光”的方向相同：$\bar{l}=l$，以之代入式(4.6.19)内，得



(a)

图 4.7

$$l = \frac{1}{\beta}, l = \beta$$

的两种情况。第一种情况使 $l>1$，显然不能成立，只有第二个 $l=\beta$，亦即上述的 $l'=0$ 为唯一不被反射的情形。当(图 4.7(b))

$$ct\cos\theta < Vt \qquad \text{或} \; l < \beta$$

时，则光射不到镜子上去，此时由式(4.6.4)得出的 $l'<0$。因之，一切可以反射的光的入射角为 $\theta<\cos^{-1}\beta$。当 $\theta>\cos^{-1}\beta$ 时，S' 系则认为是从镜后入射。

再如光为垂直射入 $l=1$，则 $\bar{l}=-1$，亦为垂直反射。当入射角为(图 4.7(c))

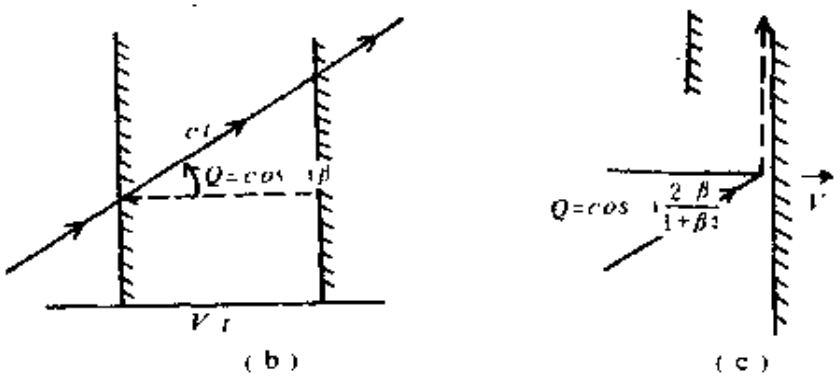


图 4.7

$$l=2\frac{\beta}{1+\beta^2}$$

时，则 $\bar{l}=0$，此时反射光为“掠射”。

由式(4.6.20)见反射光的频率和强度为

$$\bar{\nu}=\left\{1-\frac{2\beta(l-\beta)}{1-\beta^2}\right\}\nu,\ |\overline{\boldsymbol{E}}|^2=|\boldsymbol{E}|^2\frac{\bar{\nu}^2}{\nu^2}\qquad(4.6.23)$$

由于 $l>\beta$，才合反射条件，所以当

$\beta>0,\bar{\nu}<\nu;|\overline{\boldsymbol{E}}|<|\boldsymbol{E}|;\beta<0,\bar{\nu}>\nu,|\overline{\boldsymbol{E}}|>|\boldsymbol{E}|$(4.6.23)′

因之当光射则运动镜时，镜子迎光反射则频率及强度均增加；否则减弱。以上各种结论均经实验或多或少地证明。

可以再用同样的方法计算反射后光波总能量的损失或增加。* S' 系中，镜子在 $\triangle t'$ 时间内共受到入射波的能量动量为

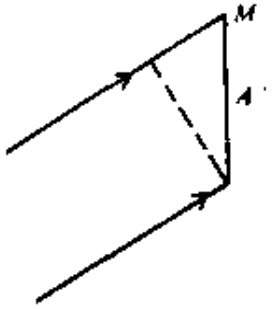


图 4.8

$$\varepsilon' = \frac{|E'|^2}{4\pi}\Omega', G_x' = \frac{l'(E')^2}{4\pi C}\Omega',$$

$$G_y' = \frac{m'(E')^2}{4\pi c}\Omega', G_z' = \frac{n'(E')^2}{4\pi c}\Omega'$$

以上 Ω' 为镜子在 $\triangle t$ 时间内所接触入射波的体积：

$$\Omega' = A'l'C\triangle t' \qquad (4.6.24)$$

S' 系中反射的能量、动量为

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{|\bar{E}'|^2}{4\pi}\bar{\Omega}', \bar{G}_x' = \frac{l'(\bar{E}')^2}{4\pi C}\bar{\Omega}',$$

$$\bar{G}_y' = \frac{m'(\bar{E}')^2}{4\pi C}\bar{\Omega}', \bar{G}_z = \frac{n'(\bar{E}')^2}{4\pi C}\bar{\Omega}'$$

由于静止镜 M 将光的能量全部反射，因之能量没有变化，$\bar{\varepsilon}' = \varepsilon'$ 再由于 $|\bar{E}'| = |E'|$

所以

$$\bar{\Omega}' = \Omega', \bar{G}_x' = G_x', \bar{G}_y' = G_y', \bar{G}_z' = G_z' \qquad (4.6.25)$$

现在再回到 S 系来。因光所含的动量满足式(4.6.14)的变换形式，所以

$$\left.\begin{aligned} G_x &= \frac{G_x' + \frac{V}{C^2}\varepsilon'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \varepsilon = \frac{\varepsilon' + VG_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, G_y = G_y', G_z = G_z' \\ \bar{G}_x &= \frac{\bar{G}_x' + \frac{V}{C^2}\bar{\varepsilon}'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}' + V\bar{G}_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \bar{G}_y = \bar{G}_y', \bar{G}_z = \bar{G}_z' \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.26)$$

* 这个问题也可以应用式(3.6.13)直接的解决，不过此地还是用“变换方法”来显示相对论的“用途”

因而

$$\epsilon-\bar{\epsilon}=\frac{2VG_x'}{\sqrt{1-\beta^2}},G_x-\overline{G}_x=\frac{2G_x'}{\sqrt{1-\beta^2}},G_y-\overline{G}_y=G_z-\overline{G}_z=0 \tag{4.6.27}$$

由上式可见

$$\epsilon-\bar{\epsilon}=(G_x-\overline{G}_x)V \tag{4.6.28}$$

换言之，能量的损失等于冲量的改变乘镜子的速度，此与普通观念相同。

由式(4.6.8)及式(4.6.24)得

$$\Omega=\frac{1-l\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Omega'=\frac{1-l\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot A'l'C\triangle t'$$

因镜子在 S' 系的位置不变，$\triangle x'=0$ 则从洛伦兹变换得

$$\triangle t=\frac{\triangle t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

再用 $A'=A$ 以及 l' 与 l 的关系(4.6.4)得镜子在$\triangle t$ 时间内遇到入射波的体积 Ω 为

$$\Omega=A(l-\beta)\triangle t \tag{4.6.29}$$

从等式(4.6.27)得

$$\triangle\epsilon=\epsilon-\bar{\epsilon}=\frac{2V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{l'|\boldsymbol{E}'|^2}{4\pi C}\Omega'=\frac{2V}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{l-\beta}{1-l\beta}$$

$$\cdot\frac{(1-l\beta)^2}{(1-\beta^2)}\cdot\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi C}\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-l\beta}\cdot A(l-\beta)C\triangle t$$

$$=2V\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi}\frac{(l-\beta)^2}{(1-\beta^2)}\cdot A\triangle t, \tag{4.6.30}$$

$$\triangle G_x=2\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi}\frac{(l-\beta)^2}{(1-\beta^2)}A\triangle t \tag{4.6.31}$$

为光波能量及动量的改变，上式全已换成 S 系所观察入射波的数值。

由动量守恒定律，可见镜子在单位时间内受到的动量改变亦必为式(4.6.31)或镜子在单位面积上受到压力

$$P = 2\frac{|\boldsymbol{E}|^2}{4\pi}\cdot\frac{(l-\beta)^2}{1-\beta^2}, \qquad (4.6.32)$$

此力对镜子每秒做功

$$\triangle\varepsilon = PV \qquad (4.6.33)$$

从这一个例子看出，我们如何应用相对论方法简单地解决运动物体的若干电磁问题(爱因斯坦 1905 年那篇相对论文章题目是"运动物体的电动力学"。当然现在看起来，那篇文章的重要性比原来的"题目"大得多了)。

爱因斯坦在另一篇文章里(1905 年)曾用光的能量公式证明当物体发射光时，静止的质量减少。其证明如下：

设物体以匀速 V 进行，在某时发射两能量 ε 相同但方向相反的光 $l_1'=-l_2'$，$m_1'=-m_2'$，$n_1'=-n_2'$。开始时，物体的动能为

$$M_0C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\approx\frac{1}{2}M_0V^2 \qquad (4.6.34)$$

设发光后静质量为 $\overline{M}_0$，则动能为

$$\overline{M}_0C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\approx\frac{1}{2}\overline{M}_0V^2 \qquad (4.6.35)$$

以上我们不先假设 $\overline{M}_0=M_0$，但放射后的能量在 S' 系看来，依能量守恒定律应为

$$\overline{E}' = E' - 2\varepsilon, \qquad (4.6.36)$$

E'、$\overline{E}'$ 为 S' 系观察物体发射前后、所含的能量。再从 S 系看同样的问题，由式(4.6.9)'得出 S 系所观察的能量损失为

$$\overline{E} = E - \frac{(1-\frac{V}{c}l')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\varepsilon - \frac{(1+\frac{V}{c}l')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\varepsilon \qquad (4.6.37)$$

E、$\bar{E}$ 为 S 系在前后所观察物体含的能量。从上面两式得

$$(\bar{E}-\bar{E}')=(E-E')-2\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right) \tag{4.6.38}$$

但 E' 是对物体相对静止观察者所测量的能量，而 E 为对物体运动观察者所测量的能量，两者的差别应当定义为该物体的“动”能。* 因之该物体前后动能的差别为

$$(E-E')-(\bar{E}-\bar{E}')=2\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{C^2}\right)V^2$$

与式(4.6.35)及(4.6.34)比较，可见静质量的损失为

$$\triangle M_0=(M_0-\bar{M}_0)=\frac{2\varepsilon}{C^2}=\frac{\triangle E'}{C^2}, \tag{4.6.39}$$

和他用另外方法导出的结果(4.3.10)相同，证明辐射使静质量减少。

单独的平面光波虽无特殊坐标，但设有两不同方向和不同频率的平面光波，则我们可以从式(3.3.8)选一个适当坐标使之成为方向恰恰相反、而频率相同的两个光波。由式(3.3.8)及 $u=u'=c$ 的性质(3.3.16)，可见此坐标的速度为

$$\boldsymbol{V}=c\frac{\nu_1\boldsymbol{l}_1+\nu_2\boldsymbol{l}_2}{\nu_1+\nu_2}, \tag{4.6.40}$$

其共同的频率为

$$\nu'=\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\frac{(1-\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}=\sqrt{\nu_1\nu_2}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{4.6.41}$$

---

* 这个理由似乎不够充足，但爱因斯坦认为很“明显”。事实上，除此之外也很难定义“动”能。这是爱因斯坦第一次用别种能量联系到质量，似乎没有后来式(4.3.10)的证明令人信服

θ 为两光波原来所成的夹角。由于 $|l_1|=|l_2|=1$，式(4.6.40)表示除非原来两个波在同一个方向，则总可以找出一个坐标 $|V|<C$ 来满足这个条件(用“光子”的说法，这一个坐标是该两个“光子”的质能中心坐标)。

在同方向进行，同频率但不同振动方向和不同相的两个线振平面波可以结合成一椭振平面波。例如，s 系有两个互相垂直的线振波如图 4.9。其进行方向均指向纸内，一个为余弦式，

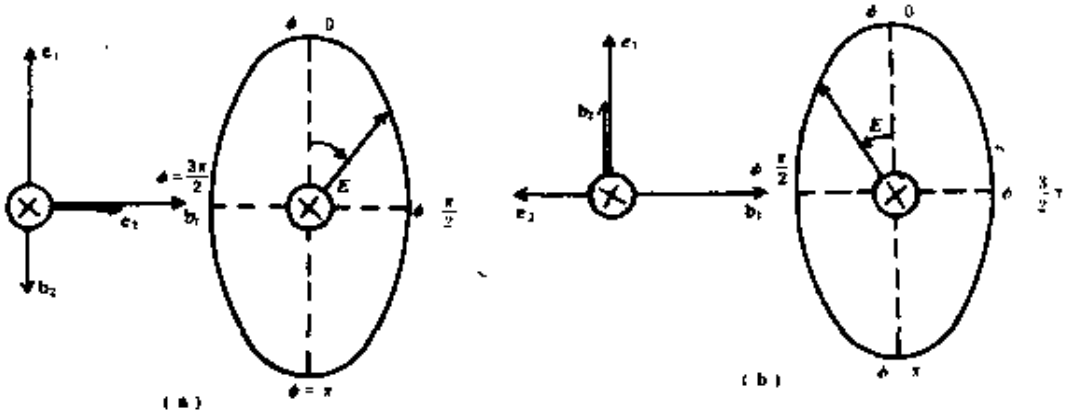


图 4.9

另一个为正弦式的波($\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}$ 均为恒方向的矢量)：

$$(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}_1)\cos\varphi;(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}_2)=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}_2)\sin\varphi \quad (4.6.42)$$

$$\varphi=2\pi\nu\left(t-\frac{lx+my+nz}{C}\right)$$

由于假设互相垂直，因之右旋波为图 4.9(a)(取 $0<\lambda<1$ 为例)

$$\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2=-\lambda\boldsymbol{e}_1 \quad (4.6.43)$$

左旋波为图 4.9(b)

$$\boldsymbol{e}_2=-\lambda\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2=\lambda\boldsymbol{e}_1; \quad (4.6.44)$$

λ 为两个波振幅的比例，特别当 λ＝1 时上式蜕化成圆振波。从式(4.6.43)或(4.6.44)得 $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0$ 的条件。

在 S' 系，由式(4.5.5)的变换公式及式(4.6.43)得(不计相角)

$$E_{2x}' = E_{2x} = \lambda B_{1x} = \lambda B_{1x}', E_{2y}' = \frac{E_{2y} - \beta B_{2x}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\lambda B_{1y} + \beta\lambda E_{1x}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \lambda B_{1y}',$$

$$E_{2x}' = \frac{E_{2x} + \beta B_{2y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\lambda B_{1x} - \lambda\beta E_{1y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \lambda B_{1x}', \cdots$$

所以

$$\boldsymbol{e}_2' = \lambda \boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2' = \lambda \boldsymbol{e}_1' \qquad (4.6.45)$$

因之式(4.6.43)为不变的关系。换言之，右旋波在 S' 系仍为右旋的椭圆波且椭圆率亦不变。由此可见，在不同坐标中尽管光的频率可以改变，但偏振的性质不变，线振波仍为线振波，圆振波仍为圆振波，椭振波仍为椭振波且右手左手旋振的性质和椭圆率均不改变。

§4.7 洛伦兹力方程协变性要求

带电荷 e 的质点所受电磁场的力，在 S 系中为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right) = \boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{B}\right), \qquad (4.7.1)$$

在 S' 系中为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{m_0 q'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}\right)=\boldsymbol{F}'=e\left(\boldsymbol{E}'+\frac{1}{c}\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{B}'\right)\qquad(4.7.2)$$

左方适合方程(4.2.8)→(4.2.11)的变换关系，因之右方 $\boldsymbol{F}'$ 及 $\boldsymbol{F}$ 也必须满足式(4.2.12)的变换关系，才能保持方程的协变性。现在看是否如此？

将式(4.5.5)代入式(4.7.2)内，得

$$F_x'=e\left(E_x+\frac{1}{C}q_y'\frac{B_z-\beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{1}{C}q_z'\frac{B_y+\beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

再用式(3.1.4)及(3.1.9)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_x'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}&=\frac{\dfrac{F_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-\dfrac{eV}{C^2}\dfrac{(q_xE_x+q_yE_y+q_zE_z)}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\\ \frac{F_y'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}&=\frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\quad\frac{F_z'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}=\frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(4.7.3)$$

以之与式(4.2.12)比较(在调换一撇时只须调整 V 的符号)，如式(4.7.1)具有协变性，则必需的条件为

$$F_t=\frac{e}{C^2}(q_xE_x+q_yE_y+q_zE_z)=\frac{1}{C^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}\qquad(4.7.4)$$

但由式(4.2.3)见

$$F_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{1}{C^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q})+\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t},$$

(4.7.5)

因之

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4.7.6}$$

为洛伦兹方程(4.7.1)具协变性的条件。换言之，当力学方程采取式(4.2.1)的形式时，洛伦兹力(4.7.1)不能改变质点的静质量。在§4.3 方程(4.3.10)及上节式(4.6.39)中，我们已经证明电磁辐射和吸收的作用必改变物质的静质量。不过那种改变一般只限于宏观物质*(§4.3)，而宏观物质受的电磁场力并不是这种形式，可参考(7.4.39)；“基本粒子”的静质量则从未被发现有任何变化。

作为一个例题，设电场在 x 方向为均匀不变值，磁场为零。则由式(4.7.1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0q_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=eE,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0q_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0q_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=0 \tag{4.7.7}$$

所以

$$\frac{m_0q_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=eEt+K_1,\frac{m_0q_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=K_2,\frac{m_0q_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=K_3, \tag{4.7.8}$$

由此得

$$\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{m_0^2C^2}\{(eEt+K_1)^2+K_2^2+K_3^2\}}} \tag{4.7.9}$$

---

* “基本粒子”动能及相互“势能”构成宏观物质“静质量”的一部分，这当然可以变化

将这个因子代入式(4.7.8)内可见，尽管在 y、z 方向没有力的作用 q_y、q_z，除非原来为零，仍起变化。设在 $t=0$ 时，$q_x=\dot{x}_0$，$q_y=\dot{y}_0$，$q_z=\dot{z}_0$。以 $\beta_0^2=(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)/C^2$，则

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{\dot{x}_0+\frac{eE}{m_0}\sqrt{1-\beta_0^2}\quad t}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}_0^2}{C^2})+\frac{1}{C^2}(\dot{x}_0+\frac{eE}{m_0}\sqrt{1-\beta_0^2}\quad t)^2}},\\ q_y &= \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}_0^2}{C^2})+\frac{1}{C^2}\left(\dot{x}_0+\frac{eE}{m_0}\sqrt{1-\beta_0^2}\quad t\right)^2}},\\ q_z &= \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{(1-\frac{\dot{x}_0^2}{C^2})+\frac{1}{C^2}(\dot{x}_0+\frac{eE}{m_0}\sqrt{1-\beta_0^2}\quad t)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.7.10}$$

为质点的瞬时速度。

式(4.7.10)中的第一式可以积分为

$$(x-a)^2-C^2(t+\frac{m_0\dot{x}_0}{eE\sqrt{1-\beta_0^2}})^2=\frac{m_0^2C^2}{e^2E^2(1-\beta_0^2)}(1-\frac{\dot{x}_0^2}{C^2}) \tag{4.7.11}$$

形式。上式在 x-t 图上为双曲线，故此种运动亦称“双曲线”运动。

另外一个有趣的问题是在均匀不变磁场 $\boldsymbol{H}$ 中的运动，此时设电场为零，则由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}\frac{m_0\boldsymbol{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{e}{c}\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{H}, \tag{4.7.12}$$

因之作用力与速度垂直 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}=0$，由第四个方程得速率

$$q^2=q_0^2=C^2\beta_0^2 \tag{4.7.13}$$

为常数。方程(4.7.12)为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{e}{m_0C}\sqrt{1-\beta_0^2}\,q\wedge H, \qquad (4.7.14)$$

此方程与古典力学完全相同。仅以 $m_0\sqrt{1-\beta_0^2}$ 代替古典力学中的质量而已。今亦可将 q 分为两项 $q_{\parallel}$，在 H 方向及 $q_{\perp}$，垂直于 H 方向的速度。代入上式得 $q_{\parallel}$ 之值不变。由于式(4.7.13)，所以 $q_{\perp}^2$ 的数值亦不变，写出为

$$\frac{\mathrm{d}q_{\parallel}}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}q_{\perp}}{\mathrm{d}t}=\frac{q_{\perp}^2}{\rho}=\frac{e}{m_0c}\sqrt{1-\beta_0^2}\,q_{\perp}H \qquad (4.7.15)$$

因之质点轨道为沿 H 方向以匀速进行的螺旋线，其投影在垂直于 H 平面上，圆的曲率半径 ρ 由

$$\frac{m_0q_{\perp}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}=\frac{e}{c}H\rho \qquad (4.7.16)$$

决定，反之我们也可以从观察到 $H\rho$ 的数值求出质点的动量。在以上两个问题中，我们均不计质点自己产生电磁场的作用。

方程(4.7.1)可以写成拉格朗日形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial xi}=0 \qquad i=1,2,3 \qquad (4.7.17)$$

以上 L 为拉氏函数：

$$L=-m_0C^2\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}-e\varphi+\frac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A}), \qquad (4.7.18)$$

φ、$\boldsymbol{A}$ 电磁势为 Xi 及 t 的函数. 设以 P_i 代表三维广义动量：

$$p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\dot{x}_i+\frac{e}{C}A_i, \qquad (4.7.19)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-\frac{e}{C}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{e}{C}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x_i} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x_i} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x_i}\right)$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_i = \frac{A_i(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z, t+\mathrm{d}t) - A_i(x,y,z,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_i}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_i}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_i}{\partial t},$$

因之

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}$$

$$+ \frac{e}{C}\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$- \frac{e}{C}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0$$

亦即式(4.7.1)的第一式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{C}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{C}\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$- \frac{e}{C}\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = eE_x + \frac{e}{C}(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

由拉氏函数 L 又可得哈密顿函数

$$H = \sum_i \dot{x}_i P_i - L \qquad (4.7.20)$$

以式(4.7.19)代入上式，得

$$H = \frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} + e\varphi, \qquad (4,7,20)'$$

为动能及势能之和。用 P_i 代替 $\dot{x}_i$，得

$$H(Pi,Xi,t) = C\sqrt{m_0^2C^2 + (\boldsymbol{p} - \frac{e}{C}\boldsymbol{A})^2} + e\varphi. \tag{4.7.21}$$

由哈密顿运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4.7.22}$$

也可以得出方程(4.7.1)。拉氏方程和哈密顿方程都是我们常用的力学方程。由于式(4.7.1)具相对论的协变性,所以与之相同的方程(4.7.17),(4.7.22)也必具相对论的协变性。如所熟知,拉氏方程(4.7.17)可以从变分学

$$\delta\int L\mathrm{d}t = 0 \tag{4.7.23}$$

导出,其中

$$L\mathrm{d}t = \left\{ -m_0C^2 - \frac{e\varphi}{\sqrt{1-\frac{q_2}{C^2}}} + \frac{e(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A})}{C\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \right\}\mathrm{d}t \tag{4.7.24}$$

$\mathrm{d}t_0$ 为从式(4.4.5)导出的"原时"。

从式(4.1.21)及(4.5.21)(4.5.7)看出

$$(P_x,P_y,P_z,\frac{1}{C^2}H) \sim (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\mathrm{d}t), \tag{4.7.25}$$

且从 $\boldsymbol{A}$、φ 的变换可以证明(4.7.24)

$$L\mathrm{d}t = L'\mathrm{d}t'$$

为不变量。

§4.8 一般碰撞问题

由于动量能量守恒定律在宇宙中必须成立,因之尽管对两个东西互相的作用力完全不了解,我们也可以得出若干有用的结论来。

碰撞的意思就是每个东西除和别的东西“碰撞”在一起的时间之外，在其余时间均保持其动量和能量不变。设有若干小系统，其碰撞前的动量、能量分别为

$$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3\cdots E_1,E_2,E_3\cdots \tag{4.8.1}$$

碰撞后，此若干小系统可以互相组合或分裂成另一批小系统，其动量、能量分别为

$$\overline{\boldsymbol{G}_1},\overline{\boldsymbol{G}_2},\overline{\boldsymbol{G}_3}\cdots;\overline{E_1},\overline{E_2},\overline{E_3}\cdots \tag{4.8.2}$$

则虽在碰撞后，个别的 $\boldsymbol{G},E$ 起了变化，小系统的数目也可以起变化，但动量、能量守恒定律要求下面方程成立：

$$\sum_1^n \overline{\boldsymbol{G}_i}=\sum_1^m \boldsymbol{G}i, \tag{4.8.3}$$

$$\sum_1^n \overline{E_i}=\sum_1^m E_i, \tag{4.8.4}$$

m、n 分别为碰撞前后小系统的数目。

在任何只含“光子”和“质点”的碰撞问题上，我们可以选一个运动坐标* S'，使总动量在该坐标内为零。此 S' 系称质能中心坐标。设以

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=\sum \boldsymbol{G}_i=m_1\boldsymbol{q}_1+m_2\boldsymbol{q}_2+\frac{h\nu_1}{C}\boldsymbol{l}_1+\frac{h\nu_2}{C}\boldsymbol{l}_2\cdots\equiv \boldsymbol{MV},\\ \frac{E}{C^2}&=\sum_i\frac{E_i}{C^2}=m_1+m_2+\frac{h\nu_1}{C^2}+\frac{h\nu_2}{C^2}+\cdots\equiv M;\end{aligned}\right\} \tag{4.8.5}$$

以上“光子”的动量为 $\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}$，能量为 $h\nu$，$\boldsymbol{l}$ 为光波进行的方向（见方程(4.6.16)和讨论）；m_i、$\boldsymbol{q}_i$ 为质点的质量和动量。从式(4.1.21)及(4.6.15)看出，这两个方程具有相对论的协变性。由式(4.8.5)的

---

* 本节以后常用词字参考“坐标”S、S′代替过去用的词字参考“系统”，以免混乱

定义(因为$|q|<C$)可见$|V|<C$(除非每个G_i均是同方向的光子，则$V=C$为不可能)。

式(4.8.5)内的各个分量由式(4.1.20)′及(4.6.15)看出均照

$$\sim (dx,dy,dz,dt) \tag{4.8.6}$$

的形式变换，因之$(G,\frac{E}{C^2})$也按上式变换。由式(4.8.5)见对速度为$V(<C)$的坐标

$$V=\frac{MV}{M}=\frac{\sum Gi}{\frac{1}{C^2}\sum E_i}<C \tag{4.8.7}$$

则相对的动量G'及E'为，见(3.1.3)。

$$G'=G+V\frac{(V\cdot G)}{V^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right\}-V\frac{E}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{4.8.8}$$

以式(4.8.7)代入，得

$$G'==0. \tag{4.8.9}$$

由式(4.8.8)可以看出除式(4.8.7)之外，再也没有其它坐标可使$G'=0$。在这个坐标内，式(3.1.3)总能量

$$E'=\frac{E-(V\cdot G)}{\sqrt{1-V^2/C^2}}=\sqrt{E^2-C^2G^2}$$

小于在任何其它坐标中的总能量。事实上，在其它坐标中由式(3.1.3)的变换得

$$E=\frac{E'}{\sqrt{1-\beta^2}},G=\frac{E'\beta}{C\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{4.8.10}$$

$C\beta$为该坐标对S'的速度比，S'的速度

$$V=\frac{m_1q_1+m_2q_2+\frac{h\nu_1}{C}l_1+\cdots}{m_1+m_2+\frac{h\nu_1}{C^2}+\cdots},\qquad(4.8.11)$$

相当于旧牛顿力学内质能中心速度的定义，因之 S' 称质能中心坐标或质能中心系。在这个坐标中，当然动量守恒定律及能量守恒定律仍然成立。

用质能中心系可以比较容易地得出若干有趣的结论。例如，从单独一个光子不能产生一个或几个质点和光子出来，因为设选后者的 S' 系使总动量为零，则由于动量守恒定律，原来的一个光子在此 S' 系中动量亦必为零。但对任何坐标光子的速度均为 c 而动量的绝对值

$$\left|\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}\right|=\frac{h\nu}{C},\qquad(4.8.12)$$

不可能为零。因之动量守恒定律势必不能成立，所以上述的步骤为不可能。例如一个光子就不能在空间产生*电子"偶对"。按照古典物理(如图 4.10(a)a 的情形)，

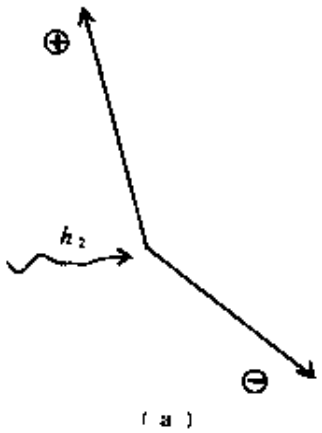
$$h\nu=(m_1+m_2)C^2$$

$$\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}=m_1\boldsymbol{V}_1+m_2\boldsymbol{V}_2$$

所以

$$(m_1+m_2)^2C^2=(m_1\boldsymbol{V}_1+m_2\boldsymbol{V})^2,$$

这个步骤并不与动量守恒定律及能量守恒定律冲突，但是(由于 $\boldsymbol{C}$ 在洛伦兹变换中的特性)这种情形按相对论却不能发生。同样几个质点和光子也不能凑和成一个光



(a)

图 4.10

* 本节中将"未填满的负能阶"作为"反质点"并用"产生"与"湮灭"以简化问题

子，道理和上述相同。不过几个质点和光子组合成一个单独“质点”或者单独一个“质点”分裂成几个质点和光子，则不与相对论冲突。在 S' 坐标中

$$M_0C^2 = m_1'C^2 + m_2'C^2 + \cdots + h\nu_1' + \cdots > (m_{10} + m_{20} + \cdots)C^2, \tag{4.8.13}$$

又可推出此单独质点的静质量必大于其分裂后质点或组合前质点的总静质量的。公式(4.8.3)及(4.8.4)共有四个方程。也就是说，共能决定四个未知数。换言之，在组合成“一个”东西时，这个东西的静质量 m_0 及三个速度 q 即由方程完全决定而没有其它选择性。但当末后成为两个东西时，则尚有四个未知数需另外方法决定(光子只有三个未知数，ν 及方向 l)，例如“弹性”碰撞时分别静质量不变，则又添了条件(质点分别的静质量不变为相对论上“弹性碰撞”的定义)。假使碰撞后的东西更多，则不能决定的未知数也更多。由于碰撞问题在近代物理中占重要地位，本节内试举几个例子以供参考。

以箭头代表碰撞前后的次序并以碰撞后的各量作为未知数，碰撞前的各量作为已知数，不过方程本身没有什么“前”“后”之分。我们也可以碰撞后的作为已知数，碰撞前的作为待定数(箭头倒过去)以此来推测碰撞前质点的静质量和能量、动量。

(1)光子＋质点→质点(吸光现象)

这是完全确定的情形

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l} + \frac{M_0\boldsymbol{q}}{\sqrt{1-q^2/C^2}} \equiv \frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l} + m\boldsymbol{q} = \frac{M_0\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-V^2/C^2}} \\ &\frac{h\nu}{C^2} + m = \frac{M_0}{\sqrt{1-V^2/C^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.8.14}$$

所以

$$V = \frac{\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l} + m\boldsymbol{q}}{\frac{h\nu}{C^2} + m}, \qquad (4.8.15)$$

亦为质能中心速度。组合成的质点静质量为

$$M_0^2 = m_0^2 + \frac{2mh\nu}{C^2}\left(1 - \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{q}}{C^2}\right) \qquad (4.8.15)'$$

所以 $M_0 > m_0$(碰撞后的静质量大于以前的静质量)。

(2) 质点→质点+光子(发光现象)

这是不完全确定的情形,共有七个未知数。守恒方程与式(4.8.14)相同,我们可以将问题简单化。取质量中心系,以式(4.8.14)的 q 代入 M_0^2 内,得(现在 $V=0$)

$$M_0^2 = m_0^2 + \frac{2mh\nu}{C^2}(1 + \frac{h\nu}{mC^2}),$$

再将

$$\frac{m_0^2 q^2}{1 - \frac{q^2}{C^2}} = (\frac{h\nu}{c})^2$$

代入上式,得

$$m_0 = M_0\sqrt{1 - \frac{2h\nu}{M_0C^2}} \qquad (4.8.16)$$

当 ν 决定后,即可知道后来产的 m_0。如 $h\nu << M_0C^2$,则上式为

$$m_0 \approx M_0 - \frac{h\nu}{C^2} \qquad (4.8.17)$$

另外还有两个未知数 $\boldsymbol{l}$,光子的方向,不能决定(此处以 ν 及 $\boldsymbol{l}$ 为不决定数)。

(3)光子+光子→质点,是完全确定的情形。

$$\left.\begin{aligned}\frac{h\nu_1}{C}\boldsymbol{l}_1+\frac{h\nu_2}{C}\boldsymbol{l}_2&=\frac{M_0\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\\ \frac{h\nu_1}{C^2}+\frac{h\nu_2}{C^2}&=\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.18)$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}&=C\,\frac{\nu_1\boldsymbol{l}_1+\nu_2\boldsymbol{l}_2}{\nu_1+\nu_2}\\ M_0&=\frac{2h}{C^2}\sqrt{\nu_1\nu_2}\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.19)$$

θ 为两光子所成的夹角。

(4)质点＋质点→质点，也是完全确定的情形。

由动量、能量守恒定律很容易得出此组合质点的静质量及速度：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}&=\frac{m_1\boldsymbol{q}_1+m_2\boldsymbol{q}_2}{m_1+m_2}\\ M_0^2&=m_{10}^2+m_{20}^2+2m_1m_2\left(1-\frac{\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2}{C^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.20)$$

(5)光子＋质点→光子＋质点(Compton 效应)

此问题含七个未知数。设质点为粒子弹性式碰撞，则碰撞后的静质量为已知。这样有六个未知数，仍有两个不能决定。

取质能中心坐标，则碰撞后(字上加一横的为碰撞后的相应量)

$$\left.\begin{aligned}\overline{m}'\overline{\boldsymbol{q}}'+\frac{h\overline{\nu}'}{c}\overline{\boldsymbol{l}}'&=0,\\ \overline{m}'+\frac{h\overline{\nu}'}{C^2}&=m'+\frac{h\nu'}{C^2}\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.21)$$

由上式第一式，并化成静质量，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m_0^2\bar{q}'^2}{1-\frac{\bar{q}'^2}{C^2}}=\frac{h^2\bar{\nu}'^2}{C^2},\\&\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}'^2}{C^2}}}+\frac{h\bar{\nu}'}{C^2}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+\frac{h\nu'}{C^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.8.22}$$

以上为两个方程解决两个未知数 $\bar{q}'^2$ 及 $\bar{\nu}'$。因之这两个未知数可以完全确定。用原来总动量为零的方程

$$\frac{m_0q'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}+\frac{h\nu'}{C}=0\qquad\text{所以}\frac{m_0^2q'^2}{1-\frac{q'^2}{C^2}}=\frac{h^2\nu'^2}{C^2}\tag{4.8.23}$$

作为辅助方程，可简化代数手续，得

$$\bar{q}'^2=q'^2,\bar{\nu}'=\nu'\tag{4.8.24}$$

为式(4.8.22)的解答。

换言之，在质量中心座标看来，这种碰撞并无能量交换在内，光频及粒子速率在碰撞前后不变！

可用已知的坐标变换关系回到原来坐标 S，所设"实验室参照系"S' 的速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\frac{m\boldsymbol{q}+\frac{h\nu}{C}\boldsymbol{l}}{m+\frac{h\nu}{C^2}}\tag{4.8.25}$$

应用式(3.3.8)，得

$$\nu'=\frac{\nu(1-\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{V}}{C})}{\sqrt{1-\beta^2}},\tag{4.8.26}$$

$\boldsymbol{l}$ 为 S 系中原来光子的方向及

$$\bar{\nu}=\nu\frac{(1-\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{V}}{C})}{\sqrt{1-\beta^2}},\tag{4.8.27}$$

$\bar{\boldsymbol{l}}$ 为 S 系中光子在碰撞后的方向。

所以

$$\bar{\nu}=\nu\frac{1-\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{V}}{C}}{1-\frac{\bar{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{V}}{C}}=\nu\frac{1-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{l}}{C}}{1-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\bar{\boldsymbol{l}}}{C}+\frac{h\nu}{mC^2}(1-\boldsymbol{l}\cdot\bar{\boldsymbol{l}})}\tag{4.8.28}$$

为 S 系看光子碰撞后的频率，其中 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{l}$ 为已知，$\bar{\boldsymbol{l}}$ 为不能由方程决定的两个未知数。设 $\boldsymbol{q}=0$，质点原来静止，则

$$\bar{\nu}=\frac{\nu}{1+\frac{2h\nu}{m_0C^2}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

或

$$\bar{\lambda}-\lambda=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2},\tag{4.8.29}$$

θ 为碰撞前后两光子进行方向 $\boldsymbol{l}$ 与 $\bar{\boldsymbol{l}}$ 所成的夹角，λ，$\bar{\lambda}$ 为碰撞前后的波长。此为熟知的 compton 结果，此种频率改变亦称 compton 效应。用坐标变换的方法也可求出碰撞后的 $\bar{\boldsymbol{q}}$。但光子碰撞后的方向不能决定，这是不能从动量、能量守恒定律决定的两个未知数。

Synge 认为可以从角动量守恒定律计算出 $\bar{\boldsymbol{l}}$，实际上他是用错了定律，角动量守恒律也帮不了忙（见 § 7.2 后段的讨论）。

(6)质点＋质点→质点＋质点

这是牛顿力学中的碰撞问题。如假设为弹性碰撞，则有六个未知数，因之仍有两个未知数不能确定。牛顿曾假设当两平滑球碰撞时，垂直于接触线方向的动量不改变。这里我们不能用这样的假

设，因之也不能确定出那两个未知数。

取质量中心系，则

$$\left.\begin{aligned}\bar{m}_1'\bar{q}_1' + \bar{m}_2'\bar{q}_2' &= 0,\\ \bar{m}_1' + \bar{m}_2' &= m_1' + m_2'\end{aligned}\right\} \tag{4.8.30}$$

由于静质量不变的弹性碰撞条件，上式可仿式(4.8.22)中所用的方法，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m_{10}^2\bar{q}_1'^2}{1-\frac{\bar{q}_1'^2}{C^2}} = \frac{m_{20}^2\bar{q}_2'^2}{1-\frac{\bar{q}_2'^2}{C^2}} \equiv A^2,\\ &\frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}_1'^2}{C^2}}} + \frac{m_{20}}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}_2'^2}{C^2}}} = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{q_1'^2}{C^2}}} + \frac{m_{20}}{\sqrt{1-\frac{q_2'^2}{C^2}}} \equiv B\end{aligned}\right\} \tag{4.8.31}$$

两个方程来决定两个未知数 $\bar{q}_1'^2, \bar{q}_2'^2$。因之 $q_1'^2$、$q_2'^2$ 可以完全确定。和碰撞前的动量方程[参考(4.8.23)]

$$\frac{m_{10}^2 q_1'^2}{1-\frac{q_1'^2}{C^2}} = \frac{m_{20}^2 q_2'^2}{1-\frac{q_2'^2}{C^2}} \tag{4.8.32}$$

比较，可见式(4.8.31)有一个解答是

$$\bar{q}_1'^2 = q_1'^2, \bar{q}_2'^2 = q_2'^2 \tag{4.8.33}$$

初看上式不一定是唯一的解答，但由式(4.8.31)得

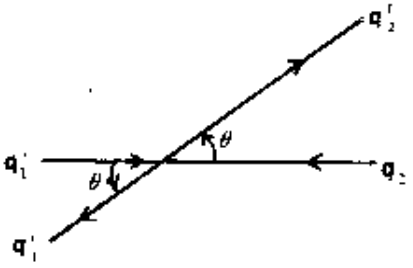
$$\bar{q}_1'^2 = \frac{C^2}{1+\frac{m_{10}^2C^2}{A^2}}, \bar{q}_2'^2 = \frac{C^2}{1+\frac{m_{20}^2C^2}{A^2}}, \tag{4.8.34}$$

以之代入(4.8.31)，得

$$\frac{A^2}{C^2}=\frac{B^4+(m_{10}^2-m_{20}^2)-2B^2(m_{10}^2+m_{20}^2)}{4B^2} \tag{4.8.35}$$

上式右方为已知，因之 A^2 为唯一的。由此可见，式(4.8.33)为唯一的正确解答，这也可以直接从式(4.8.35)计算[利用(4.8.32)的条件]。

因之在质量中心坐标看来，这种弹性碰撞并不交换能量，而只改变速度方向。如图 4.10(b)所示：各速度只经过一个角的旋转，这个施转方向是两个不定值。



(b)

图 4.10

以上关系当然可以变换到 S 系。不过似乎没有简单表示形式，因之也不讨论了。

(7)质点＋质点→光子＋光子("湮没"现象)

这个情形也是六个未知数。

取质能中心系则

$$\left.\begin{aligned}\frac{h\bar{\nu}_1'}{C}\bar{l}_1'+\frac{h\bar{\nu}_2'}{C}\bar{l}_2'&=0\\ m_1'+m_2'&=\frac{h\bar{\nu}_1'}{C}+\frac{h\bar{\nu}_2'}{C}\end{aligned}\right\} \tag{4.8.36}$$

由式(4.8.34)第一式可见

$$\left.\begin{aligned}\bar{\nu}_1'&=\bar{\nu}_2'\\ \bar{l}_2'&=-\bar{l}_1'\end{aligned}\right\} \tag{4.8.37}$$

亦即在质量中心坐标看来，两光子为同频率反方向的辐射，其共同

频率为

$$\bar{\nu}' = \frac{c}{2h}(m_1' + m_2') \tag{4.8.38}$$

因为总动量在此坐标中必为零，这一个结论至为明显，回到 S 坐标，则由式(4.1.21)见

$$m_1' + m_2' = \frac{m_1 + m_2 - \frac{V}{C}(m_1 q_1 + m_2 q_2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

$$= (m_1 + m_2)\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} \tag{4.8.39}$$

再由式(3.3.8)得频率 $\bar{\nu}$ 为

$$\bar{\nu} = \frac{C}{2h}(m_1 + m_2)\frac{(1 - \frac{V^2}{C^2})}{(1 - \frac{\underline{V}\cdot\underline{l}}{C})}, \tag{4.8.40}$$

其中

$$\underline{V} = \frac{m_1\underline{q}_1 + m_2\underline{q}_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.8.41}$$

因之频率 $\bar{\nu}$ 只依光子的方向决定，当然，光子总的能量是由

$$\frac{h}{C^2}(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) = m_1 + m_2 \tag{4.8.42}$$

决定的。光子的方向虽然不能确定，但其最大的频率却在总动量方向，此时

$$\bar{\nu}_{大} = \frac{C}{2h}(m_1 + m_2)(1 + \frac{|\underline{V}|}{C}), \tag{4.8.43}$$

其最小的频率在与总动量相反的方向，此时

$$\bar{\nu}_{小} = \frac{C}{2h}(m_1 + m_2)(1 - \frac{|\underline{V}|}{C}) \tag{4.8.44}$$

反过来，两个光子碰撞后产生两个质点问题的计算方程和上面完全相同，唯未知数有八个：$\overline{m}_{10}$，$\overline{\boldsymbol{q}}_1$，$\overline{m}_{20}$，$\overline{\boldsymbol{q}}_{20}$。如产生后的静质量为已知，则可以

$$\left.\begin{aligned}&\overline{m}_1'^2\overline{q}_1'^2=\overline{m}_2'^2\overline{q}_2'^2\\&\overline{m}_1'+\overline{m}_2'=\frac{h}{C^2}(\nu_1'+\nu_2')\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.45)$$

求出 $\overline{q}_1'^2$ 及 $\overline{q}_2'^2$（兹不述）。在质能中心坐标中，两质点产生后的速度方向恰恰相反，唯方向本身则不能决定。

(8)质点＋质点→质点＋光子

仍取质量中心系，则

$$\left.\begin{aligned}&m_1'\underline{\boldsymbol{q}}_1'+m_2'\underline{\boldsymbol{q}}_2'=\overline{M}'\overline{\theta}'+\frac{h\overline{\nu}'}{C}\overline{l}'=0\\&m_1'+m_2'=\overline{M}'+\frac{h\overline{\nu}'}{C^2}\end{aligned}\right\}\qquad(4.8.46)$$

本题有七个未知数，因之有三个不能确定。设产生出质点的静质量 M_0 为已知，则可由上式得出

$$h\nu'=\frac{(m_1'+m_2')^2-M_0^2}{2(m_1'+m_2')},\qquad(4.8.47)$$

$$\overline{Q}'^2=\frac{\{(m_1'+m_2')^2-M_0^2\}^2}{\{(m_1'+m_2')^2+M_0^2\}^2}\qquad(4.8.48)$$

的关系。

第二篇

四维宇宙

（数学部分）

第五章　时空统一的四维宇宙

§5.1　Minkowski 的四维宇宙

大约相对论对哲学的重大影响，除质能合一之外，要推 Minkowski 时空统一的宇宙观念。过去的经验认为时空各自独立存在，不相联系。古诗中有“洞中方七日，世上已千年”两句话只是诗人的幻想，相对论第一次真正把时间和空间联系成一整体。不同运动状态的观察者，观察到不同的时间和空间。

在狭义相对论中，Minkowski 观察到尽管不同运动状态的人经历着不同的时间和空间，但下面的关系成立：

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-C^2(t_2-t_1)^2$$
$$=(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-C^2(t_2'-t_1')^2 \quad (5.1.1)$$

以上(x_1,y_1,z_1,t_1)为一“点”在空间及时间的位置，(x_2,y_2,z_2,t_2)为另一“点”在空间及时间的位置。这些点有人（用动人的名词）称为“宇宙点”。在本书上一般的就称为“点”或“事件”。上式可以从式(2.5.6)直接证明通常的观念认为不同人看起来空间距离不变，时间间隔也不变：

$$\left.\begin{aligned}&(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=(x_2'-x_1')^2\\&+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2,\\&t_2-t_1=t_2'-t_1'\end{aligned}\right\} \quad (5.1.2)$$

（当然，我们此地指的是用同样的尺和钟）。式(5.1.2)符合式(5.1.1)。但在相对运动时，尺和钟起了变化，式(5.1.2)不再成立（时空混杂起来了）。唯从式(2.5.6)计算的结果，式(5.1.1)仍旧成立。换

言之，时空合一的式(5.1.1)不受相对论影响，代表着客观真理。空间及时间只是它的投影，一如(x_2-x_1)只是两点之间的空间距离在x轴上的投影而已。现在(t_2-t_1)也只是式(5.1.1)在时间轴上的投影。Minkowski在某次演讲中生动地说：从今之后，时间本身和空间本身均化为虚影，而只有某种"时空联合"才保留独立的真实性。这是一句至理名言。过去的时空各自的独立性，现在看起来，是由于我们"日常经验"中速度远小于光速C的缘故。这样使变换式(2.4.4)与(1.2.1)相仿，但这个"日常经验"是不可靠的特殊情况。

我们的客观宇宙实为一个不可分割的四维宇宙(空间三维，时间一维)。时间与空间只是人为的分割，并不是独立存在。

只是由于在式(5.1.1)内，时间部分前面的符号为负与空间部分的符号不同，我们不能"完全"用三维空间的观念推广到四维时空。再则通常可以旋转空间坐标使$x_2>x_1$变成$x_2'<x_1'$，在四维宇宙中，我们要考虑到是否可以旋转时间坐标，使因果律倒置的复杂问题。

我们可以证明* 在式(5.1.1)的情形下，唯一可以改变时间坐标(除故意颠倒时间次序之外)是由于不同运动情况下式(2.5.6)的变换，其中V可为任意小于C的数值：
所以

$$(t_2-t_1)=\frac{(t_2'-t_1')+\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1')}{C^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}} \qquad (5.1.3)$$

若使t_2-t_1与$t_2'-t_1'$符号相反，则如$t_2'-t_1'$为正号，

$$\frac{\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1')}{C^2}$$

* 见§5.4

必须为负号，且其绝对值要大于 $t_2'-t_1$ 才行。设 V 在 x 方向，则颠倒时间次序的条件为

$$\left|\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}\right|>\left|\frac{C^2}{V}\right| \tag{5.1.4}$$

假使在 (x_1',t_1') 处有一"因"，由其影响致在 (x_2',t_2') 处发生"果"：所以

$$t_2'>t_1' \tag{5.1.5}$$

除非此"影响"传播的速度

$$\left|\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}\right|=u>\frac{C^2}{V}, \tag{5.1.6}$$

则任何观察者看来 t_2 总是在 t_1 之后。(换言之，因果不会颠倒)。由于相对运动速度总是小于 C，因之式(5.1.6)要求此种影响的传播速度超过光速*，才能使因果律倒置。

在相对论中，质点的速度不能超过 C，因之式(5.1.6)不能用"射弹"满足。电磁波在真空中的传播速度为 C，因此也不能满足式(5.1.6)。在电磁介质中，相速可以超过 C。但"相速"不传递讯号。Sommerfeld 及 Brillouin 证明在此种情形下讯号速度仍旧小于 C，至多等于 C。因之也不能满足式(5.1.6)。

---

* 我们在§3.1提到"点速度"如超过光速，则可在某系统中视为无限大。实则如任何超光速的"影响"可以存在，则在一适当的系统看来此种影响即可以"无限速度"传播。设

$$(x_2-x_1)=u(t_2-t_1),u>c,$$

则在 S' 系中

$$u'=\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}=\frac{(x_2-x_1)-V(t_2-t_1)}{(t_2-t_1)-\frac{V}{C^2}(x_2-x_1)}=\frac{u-V}{1-\frac{uV}{C^2}}$$

我们可选 S' 系，使相对速度 V 为

$$V=\frac{C^2}{u}<C$$

(这是完全可能的)，此时在 S' 系中影响以速度 u' 传播，其

$$u'=\infty$$

亦即"立即"瞬时作用

只有理想的刚体可以用无限大速度传递影响。一根理想"刚体"棍子的一端被移动后，另一端按照通常看法也"立即"移动。不过实际上这种影响只以"弹性波"速度传递，而目前事实上最好"刚体"弹性波的速度却远远的小于 C，所以这种理想刚体并不存在。这也说明式(5.1.6)并不成立，也就是说因果律不会倒置。换言之，相对论不能颠倒因果。四维宇宙中的时间轴与一般的空间轴有基本的区别。从§2.2末尾的讨论也可以看出，"超光速"讯号的存在和相对论的基本"对时关系"矛盾。

我们称式(5.1.1)为两"点"，"宇宙点"或两"事件"(x_1, y_1, z_1, t_1)，(x_2, y_2, z_2, t_2)的"间隔"。由于式(5.1.1)，"间隔"的正负号不会改变。设将式(5.1.1)除以 C^2，以"光时"

$$\frac{1}{C}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

来计算两点的空间距离(我们在天文上计算恒星的距离即用"光年")。设两"事"发生时间的相差超过两事空间距离相差的光时，则从任何系统看来皆是如此。在这个情况下，由式(5.1.1)看出两边全应为负号。我们可以选适当 S' 系统使空间距离为零而只剩时间部分。因之这种"间隔"称为"时间性的间隔"。反之，如两事的发生时间的相差小于两事空间距离相差的光时(在任何系统看来也是如此)。则在这个情形下，由式(5.1.1)看出，我们不能选适当坐标 S' 使空间部分为零(正负号不对了)。但可以选适当的坐标使时间相差为零而只剩空间部分。因之这种"间隔"称为"空间性的间隔"(通常的空间几何中则没有这种区别)。

如两件事发生时间的相差等于光走的距离，则此种间隔称为"零间隔"或"光路"。由式(5.1.1)可见，在任何坐标中该两事发生时间的相差总是等于光走该距离所需的时间。

例如，限于讨论 x 方向，为

$$F=\frac{1}{C^2}(x_2-x_1)^2-(t_2-t_1)^2<0\text{ 时，}\qquad(5.1.8)$$

则可选 $x_2'-x_1'=0$。因

$$x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-V(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}. \qquad (5.1.9)$$

再由于式(5.1.8)$|t_2-t_1|>\frac{1}{C}|x_2-x_1|$故可以选适当的 V 使 $x_2'-x_1'=0$，且

$$|V|=\frac{|x_2-x_1|}{|t_2-t_1|}<C \qquad (5.1.10)$$

这个坐标是完全可以找到的，对这个坐标

$$F=-(t_2'-t_1')^2,$$

只有时间的间隔。换言之，两件事可以看成在同一地点发生。见式(5.2.14)。若

$$F=\frac{1}{C^2}(x_2-x_1)^2-(t_2-t_1)^2>0 \qquad (5.1.9)$$

则不能选坐标使 $x_2'-x_1'=0$。因此时式(5.1.10)的 V 要大于 C，这是不可能的，但是我们可以选 S' 系使 $t_2'-t_1'=0$。因

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{V}{C^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, \qquad (5.1.10)$$

由于式(5.1.9)

$$|x_2-x_1|>C|t_2-t_1|$$

所以选适当的 V 可以使式(5.1.10)的分子为零，而

$$|V|=\frac{C^2|t_2-t_1|}{|x_2-x_1|}<C \qquad (5.1.11)$$

因之有适当的坐标 S' 使式(5.1.10)的 $t_2'-t_1'=0$ 此时在该 S' 系

$$F=\frac{1}{C^2}(x_2'-x_1')^2,$$

内只有空间的间隔而没有时间的间隔。换言之，此两件事在 S' 系

看来为同时发生，见式(5.2.17)。一切空间间隔的两件事都不能有因果关系。因为在一个适当系统内，这两件事可以成为同时发生的两件事而空间距离又不是零(否则为"零间隔")。因之此种"因果关系"必以无限大的速度传播。这已经被证明为不可能。

零间隔和时间间隔的两件事都可以有因果关系(当然不一定有)。

所以四维宇宙将两"点"的"间隔"分为三种基本不同性质的间隔。"时间"与其它三维不同，在相对论中也占有特殊地位。

既然因果律没有被推翻，所以有些小说上描写人在时间上倒过来旅行的事至少在目前不能与相对论调和，也只能是"幻想"而已。

在下一节，如图 5.3 的图示法就可以看出任何 t' 轴只能和另一 t 轴成小于 45°的角度，而不能如空间旋转时，例如 y 轴和 y' 轴，两个轴可以成任何角度那样的自由。这是因果律不能倒置的结论，也是区别三种间隔的原因。

因之，在相对论中，时间先后的次序是绝对的。

§5.2 四维宇宙图示法

通常三维空间的一个点在四维宇宙看来是向 t 方向延长的一根直线；通常三维空间移动的点，如在 X 轴上移动的点，则在四维宇宙看来是一根在 t 方向延长，但又同时在 X 方向改变位置的倾斜曲线，如图 5.1 所示，设置在 o 处的一个空间点，它在四维宇宙图上是 $oo't$ 一根直线。设该点在 X 轴上以恒速运动，则在经过一段时间后成为如 op' 的一根倾斜线。假使它的速度改变，则成为一根适当的曲线如 $occ'c''$。

通常三维空间的一根直线，在四维宇宙看来是一个"面。例如图 5.1 上一根在 x 轴上直线 oA，四维宇宙看来在时间经过 t 之后成为 $oAo''A'$ 一个平面，一根空间的曲线在四维宇宙图上是一个曲面。假使这根线在空间可以改变形状和位置，则在四维宇宙图上还是一个面，不过古怪些而已。

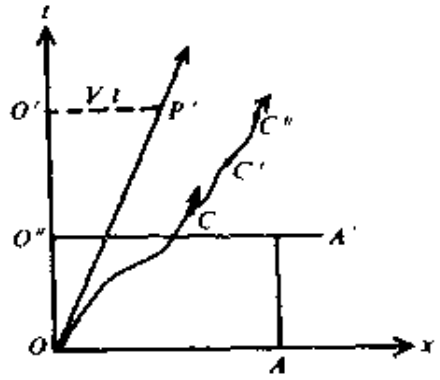


图 5.1

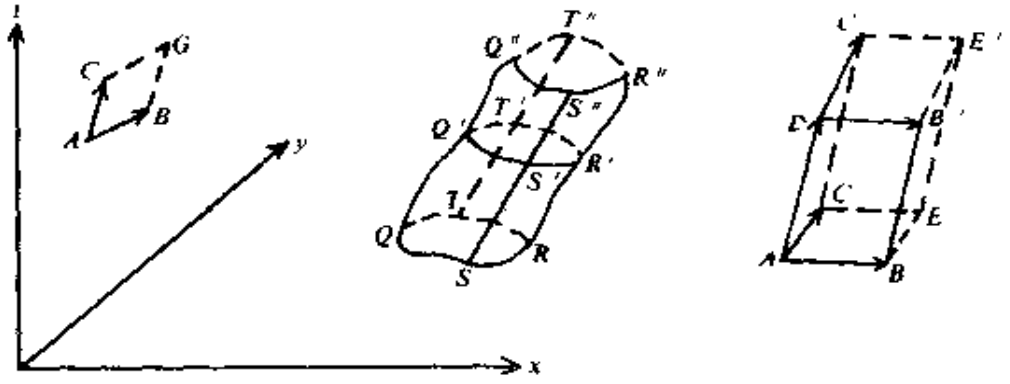


图 5.2

如图 5.2 的 xy 平面上一根曲线 QSR，停一会儿在该平面上为曲线 $Q'S'R'$，再停一会儿为 $Q''S''R''$，则四维宇宙看来为 QSR，$Q'S'R'$，$Q''S''R''$ 一个曲线面。

设 $QSRT$ 为一个闭合曲线，则在四维宇宙看来为一闭合曲面，中间包含一个体积，三维空间一个面积 $QSRT$，四维宇宙看来是一个为曲面 $QSRT$，$Q'S'R'T'$，$Q''S''R''T''$ 及上下两个 $t=t_1$，$t=t_2$ 平面所包围的“体积”。

现在没办法再看三维空间一个体积在四维宇宙的情形，但是我们可以想象是怎样一种情况。我们可以叫它为“超体积”。一般

在绘图时我们遏止空间的 Z 轴不画，Z 轴凭想像或者最可靠的方法是凭数学导出(数学导出不受"维数"的影响)，而以时间轴代表通常的 Z 轴。如同我们在图 5.2 上所用的一样，这样可以帮助我们把"四维"图画起来。

四维宇宙中的一个"点"如图 5.1 的 P' 点，只是三元"空间点"历史过程中的一个片段，在某一个固定时间某一个固定位置的才是一个"点"。例如"某年某月某日某处"才是四维宇宙图上一个"点"。

在宇宙图上也可以定义一个"矢量如图 5.1 的 OP' 就可以代表一个矢量，它在时间上的"分量"是 t，在空间的分量是 Vt，在图 5.1 曲线上任何一处 B 可以有一个"切线矢量"，它在时间的分量如为 $\triangle t$，则在空间的分量为 $V\triangle t$，V 是该点的瞬时速度，任何两个"宇宙点"总可以组成一个矢量。

两个在一处的矢量可以组成一个四维"面"，如图 5.2 的 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 两个矢量可组成一个"面" ABC，由于我们遏止住了 Z 轴没画，这个面看起来似乎有一根"法线"矢量。其实不对；"垂直"于它的不只是一根法线，而是另一个"法面"(由后面的数学分析可以看出)，它同时也垂直于遏制住的 Z 轴。

三个矢量如图 5.2 的 $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 三根矢量，造成一个体积 $ABEC$、$A'B'E'C'$，也由于遏止 Z 轴，这个体积确有一根法线；在图 5.2 上此"体积""垂直"于 Z 轴，Z 就是该法线方向，关于这些讨论(用数学方法就简单些)可参考 § 6.3 的末段。

$x-y$ 平面上的一个圆形在四维宇宙看来是一个圆柱而不是球。我们也可以想像三维空间的一个"球"在四维宇宙看来是一个"球柱"。四维宇宙的"超球"按照式(5.1.1)的办法应当定义为

$$x^2 + y^2 + z^2 - C^2t^2 = R^2$$

它在一空间平面上，例如 $y=z=o$ 平面上的截线是双曲线 $x^2-c^2t^2=R^2$，只在 t 等于常数的截面上才是一个通常的"球"状。

用解析几何方法，任一个

$$\varnothing(x,y,z,t) = o \qquad (5.2.1)$$

代表四维宇宙的一个“超面”，两个超面相交成一个二维面，三个超面相交成一曲线等等，这些也可以用参数方程表示，在此不赘述。

以上各种推论，都可以从常识推判出来，在四维图上唯一的困难为 c^2t^2 前的负号，先看不同坐标轴应当如何画法，才能表示两坐标间的变换关系。

我们如取 x-ct 为直角坐标(用量纲关系取 ct)，一匀速运动质点 P 的坐标关系为

$$x = Vt = \frac{V}{C}Ct \qquad (5.2.2)$$

因之在图 5.3 上是一根与 ct 轴成角 $\alpha = \tan^{-1}\frac{V}{C}$ 的直线 OP，因 $V < C$ 所以 $\alpha < 45°$(5.2.2)

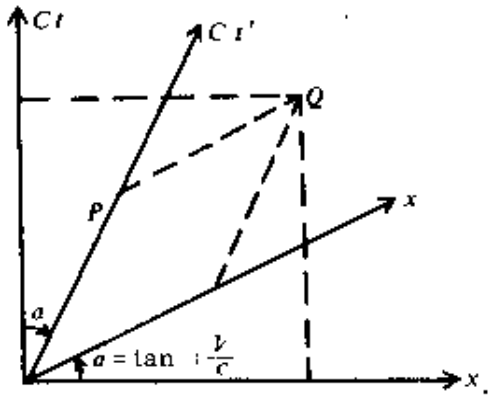


图 5.3

设有坐标 S' 附着于此 P 上，则对它来讲 X' 总是等于零，因之我们可取 OP 为它的 CT' 轴，在这轴上 $X' = o$，但是 X' 轴的方向有问题，设取 X' 轴垂直于 CT' 轴，则任一点 Q 的

$$x^2 + C^2t^2 = x'^2 + C^2t'^2$$

与式(5.1.1)的方程要求

$$x^2 - C^2t^2 = x'^2 - C^2t'^2)$$

显然不合；且 OP 的“长度”

$$x^2 + C^2t^2 = (V^2 + C^2)t^2$$

也不等于 P 钟所应计的时间，因之 Minkowski 第一步先使 S' 系用的尺度比 S 系用的尺度小

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\Big/\sqrt{1+\frac{V^2}{C^2}} \tag{5.2.3}$$

倍，这样 OP 的长度在 S' 系是

$$\sqrt{(x^2+C^2t^2)}\,\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1+\frac{V^2}{C^2}}} = Ct\sqrt{1+\frac{V^2}{C^2}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1+\frac{V^2}{C^2}}} = Ct\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \tag{5.2.4}$$

合于相对论方程(2.2.4)的要求，另外他再在与 X 轴成同样 $\alpha=\tan^{-1}\frac{V}{C}$ 角度画一直线作为 ox' 轴，作斜角坐标 $x'ot'$；各尺度均照式(5.2.3)大小同样的倍数，于是任一点 Q 的坐标(坐标的数值系依 x, Ct 或 x', Ct' 轴画平行四边图所截的长度为以 $\beta\equiv V/C$，在 (x, ct) 坐标上的投影

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'\cos\alpha + Ct'\sin\alpha) = \frac{x' + V't'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct &= \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}(Ct'\cos\alpha + x'\sin\alpha) = \frac{Ct' + \frac{V}{C}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.5}$$

与洛伦兹的变换关系相合。

S' 系上一个相对静止的钟在宇宙图上看来是 Ct' 方向的一根直线，它们记的时间 Ct'，在 S 系看来为

$$Ct = Ct'\cos\alpha\,\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = Ct'\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

它们的位置是

$$x = Ct'\sin\alpha\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = Vt$$

也与相对论的要求符合。

再由图 5.3 可以看出两个坐标"同时观念"的不同，例如 ox' 轴上的任两个点在 S' 看来为 $\triangle t' = o$，但 S 看来则相差时间为

$$C\triangle t = \triangle x'\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\alpha = \triangle x'\frac{V}{C\sqrt{1-\beta^2}}$$

而不是同时。同样，在 S 系看来是同时的两点，在 S' 系看来也不是同时，以上的方法虽好，不过假使要计算一根线，在 S' 系上的投影时就很别扭。

参考图 5.4 设一点 Q 其 OQ 与 x' 轴成角度 θ，与 Ct' 轴成夹角 $\varnothing$，$\varnothing = 90° - 2\alpha - \theta$，则

$$x' = (OQ')\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$= \{(OQ)\cos\theta - (OQ)\sin\theta\cot(90° - 2\alpha)\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$Ct' = \{(OQ)\cos\varnothing - (OQ)\sin\varnothing\cot(90° - 2\alpha)\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x' &= (OQ)\left\{\cos\theta - \frac{2\beta}{1-\beta^2}\sin\theta\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ ct' &= (OQ)\left\{\cos\varnothing - \frac{2\beta}{1-\beta^2}\sin\varnothing\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad (5.2.6)$$

以上代数结论只限于 Q 点在斜坐标夹角之内。若图 5.4 上 P 点的坐标则为

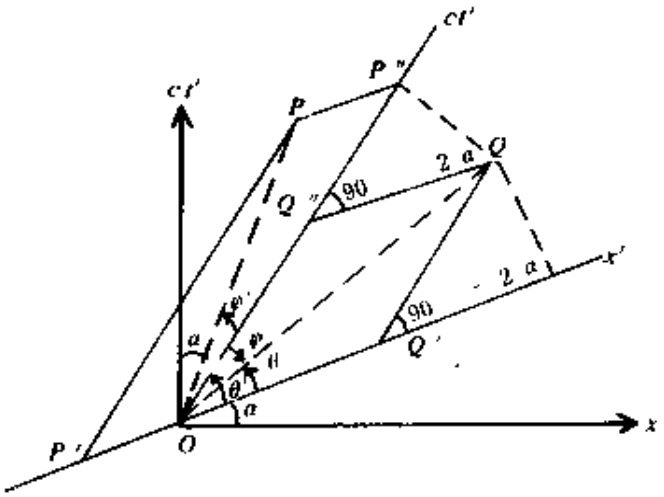


图 5.4

$$\left.\begin{aligned} Ct' &= (OP)\left\{\cos\pi\varnothing' + \frac{2\beta}{1-\beta^2}\sin\varnothing'\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ x' &= (OP)\left\{\cos\theta' - \frac{2\beta}{1-\beta^2}\sin\theta'\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.6)'}$$

形式.以上 θ' 与 α' 为 (OP) 与 x' 及 Ct' 轴分别所成的角度。由此可见对 P 点我们要改变式(5.2.6)内的符号，稍加研究后可得出斜角外某点如与角内某点所成角度同方向的则为正号角，反之取负号的规则。例如 S 系静止的钟在宇宙图上为 Ct 轴，其与 Ct' 轴所成角应为 $-\alpha$，与 x' 轴成 $+(90°-\alpha)$ 角度，以之代入式(5.2.6)，得

$$Ct' = Ct\left\{\cos\alpha + \frac{2\beta}{1-\beta^2}\sin\alpha\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{Ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = Ct\left\{\sin\alpha - \frac{2\beta}{1-\beta^2}\cos\alpha\right\}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

与相对论的要求相同，但计算方法远没有式(5.2.5)方法的容易，很不对称。

假使我们以 S' 系为直角坐标，则 S 系静止点 P 以速度 $-V$ 运

动，因之 Ct 轴为图 5.5 上所绘的直线 OP，此时在 S 系中所用的尺度应比 S' 尺度小 $\sqrt{1-\beta^2}/\sqrt{1+\beta^2}$ 倍，OX 轴也要斜画，虽然这样

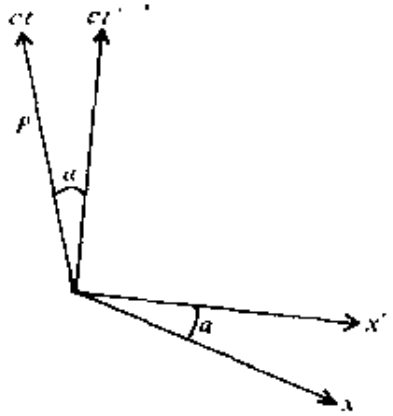


图 5.5

解决了在 S' 系投影的问题，但是在 S 系上的投影则和方才一样的麻烦，也是一样的别扭，这是 Minkowski 图的缺点。

另外的一种"对称"的方法是用虚数 $x_4=iCt$、$x_4'=iCt'$ 作坐标运动点 P' 的坐标关系

$$x = Vt = \frac{V}{iC}iCt$$

为一倾斜于 iCt 轴成 $\tan^{-1}(-\frac{iV}{C})=\tan^{-1}(-i\beta)$ 虚角的直线，虽然也很别扭，但是我们这样可以画两付完全对称的直角轴如图 5.6，任一点 Q 对 O 的距离合于

$$x^2 + (iCt)^2 = x'^2 + (iCt')^2$$

或

$$x^2 - C^2t^2 = x'^2 - C^2t'^2 \qquad (5.2.7)$$

的要求，而且也很容易得出

$$x' = x\cos\alpha - iCt\sin\alpha = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$iCt' = iCt\cos\alpha + x'\sin\alpha = iC\frac{t - \frac{V}{C^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

的变换关系。

在同一个图上，我们可以对称地得出

$$x = x'\cos\alpha + iCt'\sin\alpha = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$iCt = iCt'\cos\alpha - x'\sin\alpha = \frac{iCt + \frac{V}{C^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

任意两点的距离$\triangle x^2+(iC\triangle t)^2$均依照

$$\triangle x^2 - C^2\triangle t^2 = \triangle x'^2 - C^2\triangle t'^2$$

的公式，因之保留完全的对称性。既不需要尺度的改变又不要画两个图，在计算别的东西时也便利，例如S'系上静止钟的计时iCt'在S系iCt轴上的投影为

$$iCt = iCt\mathrm{Cos}\alpha = iC\frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5.2.8)$$

x'上一根静止的尺、长度OA'，在宇宙图5.6上为$OA'QP$一个面，其$t=O$的截线长度为OA、当S系量此尺长度时，则测量的结果为

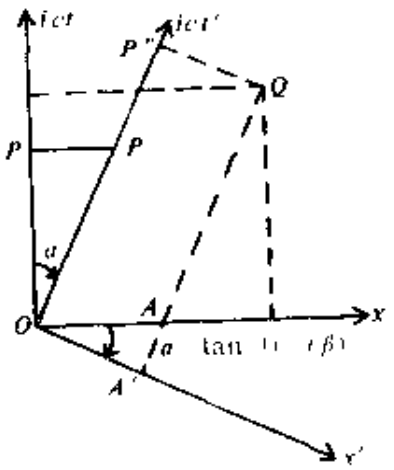


图 5.6

$$(OA)=\frac{(OA')}{\cos\alpha}=(OA')\sqrt{1-\beta^2} \qquad (5.2.9)$$

再说 S' 系上认为同时的两点，如 O,A' 两点或 P'',Q 两点，在 S 系看来是

$$\triangle t=OA'\sin\alpha=\frac{(OA')V}{C^2\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5.2.10)$$

也和相对论符合，用同一个图我们可以对称地从 S' 系看或从 S 系看。例如静止的钟 OP 在 t 轴上的投影则为

$$iCt'=iCt\cos\alpha=\frac{iCt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

与式(5.2.8)对称。在此图上也可以同样得出尺长度的相对缩短及同时观念等等的差别。所以图 5.6 上的 S,S' 轴完全对称，没有任何的不同处或“优先权”，与图 5.3 不同。

不过这种方法含有由于虚数引起的错觉，必须注意，例如

$$x^2+(iCt)^2=x^2-C^2t^2=O \qquad (5.2.11)$$

在此虚数图上的两根直线，很容易被误认为即是 O 处的一点，其实仍是两根与轴成 $i45°$ 虚角的线。我们在讨论问题上，可以任选一

种图形或两种并用。一般讲起来，不需两个参考坐标的用图 5.3 较好；需两个坐标作比较的用图 5.6。

以下研究用 Minkowski 的实数图 5.3。设在图 5.7 上画两根直线

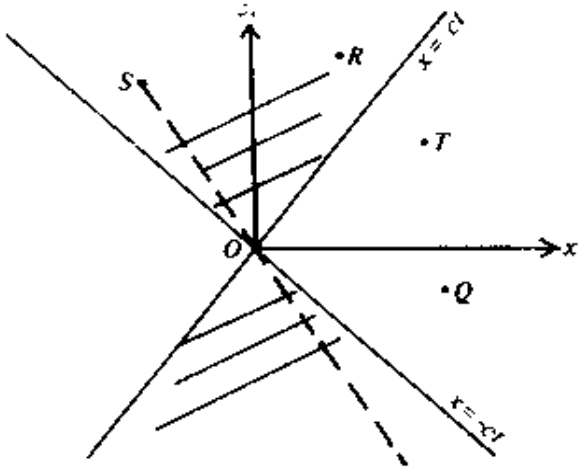


图 5.7

$$x - Ct = o \quad x + Ct = O; \tag{5.2.12}$$

假设有 y 轴则可画绕 Ct 轴旋转的一个 45°的锥体

$$x^2 + y^2 - C^2t^2 = O \tag{5.2.12)'}$$

在图 5.7 上面及下面阴影的角锥体内和 Ct 轴成小于或等于 45°角度中的任何一宇宙点如 R,S 等等的坐标满足

$$x^2 - C^2t^2 < O, x^2 + y^2 - C^2t^2 < O \tag{5.2.13}$$

的关系，我们可以照式(5.2.1)的方法选 Ct' 轴通过此点，使该点的

$$x' = O; y' = O; \tag{5.2.14}$$

面只剩时间 t' 部分，所以此种阴影部分各点与 O 点成“时间性间隔”的关系，例如我们可选 Ct' 轴为 OS 通过 S，只要 S' 系的速度 V 为

$$-\frac{V}{C} = \tan(\widehat{sot}) \tag{5.2.15}$$

就行，由于 $\widehat{sot}$ 角度小于 45°，所以 V 的绝对值小于 C，上面的 S' 坐

标可以存在，对于这一个坐标 S' 系看来，OS 的间隔只有时间 t' 的间隔。

同样在图上左边及右边非阴影的角锥处 T、Q…各点的坐标满足

$$x^2 - C^2t^2 > O, x^2 + y^2 - C^2t^2 > O \qquad (5.2.16)$$

的关系，我们可以选 x' 轴通过该点使该点的

$$t' = O,$$

而只剩空间 x' 部分。所以这些地点与 O 点成“空间性间隔”。例如我们可以选 x' 轴为 OT 通过 T 点，只要 S 系的速度 V

$$\frac{V}{C} = \tan\widehat{TOX}$$

则对该 S' 坐标的 $t'=O$，这个 V 的绝对值也小于 C，所以 S' 坐标可以存在，但是我们不能选 t' 轴通过 T；同样也不能选 x' 轴通过 S，因为这样将使 $|V|>C$，这种运动不能存在。

在 45°线上的各点亦即适合于

$$x^2 - C^2t^2 = O, x^2 + y^2 - C^2t^2 = O \qquad (5.2.17)$$

的各点与 O 点成“零间隔”，与其他间隔不同，我们既不能选 x' 轴也不能选 Ct' 轴通过该点，这样将使 $|V|=C$，这种坐标当然不能成立。

当然，原点可以取在任意处，例如取在 R 处，则可在该处画 x，Ct 轴。凡其他各点 Q 的 QR 直线与 Ct 成小于 45°角度的为时间性间隔，大于 45°的为空间性间隔，等于 45°的为零间隔。以上的结论可以推到 (x,y,z,Ct) 广泛的情形，所重要的只是 QR 与 Ct 轴所成的角度。

我们也可以在这些图上画任何矢量 $\boldsymbol{F}$，事实上“间隔”(x,Ct) 本身即相当于通常欧氏 (x,y) 图的 r 矢量。假设 $\boldsymbol{F}$ 的时间部份分量大于空间部份分量，亦即 $\boldsymbol{F}$ 与 Ct 或 iCt 所成角度小于 45°或 i45°，则此矢量称为时间性矢量。因为可以选 t' 轴在 $\boldsymbol{F}$ 方向，使它

在 S' 空间轴上的投影为零. 反之，如 $\boldsymbol{F}$ 与 Ct 轴所成角度大于 45°，亦即时间部分小于空间部分分量则此矢量称空间性矢量。因为我们可以选 x' 轴在 $\boldsymbol{F}$ 方向，使它在 S' 的 Ct' 轴的投影为零。设 $\boldsymbol{F}$ 与 Ct 成 45°角，空间与时间部分分量相等，则称零间性矢量。此时我们不能选任意轴使空间或时间部分为零。

这些矢量也可以用普通矢量方法加起来。在图 5.8 上 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ …的矢量和为矢量 $\boldsymbol{G}$

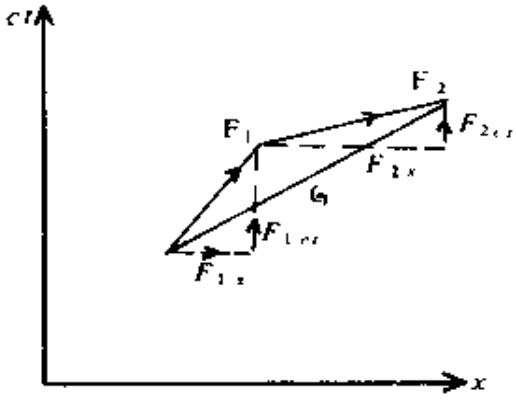


图 5.8

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots \tag{5.2.18}$$

其分量 G_x、G_{ct} 的数值

$$\left.\begin{aligned} G_x &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots \\ G_{ct} &= F_{1ct} + F_{2ct} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.2.19}$$

为各分量的相加(但其绝对值应取两个平方的“差”)，例如两个质点其动量分别为 $m_1\dot{x}_1$、$m_2\dot{x}_2$；其时间部分分别为 m_1c，m_2c；则其总动量为式(4.8.3)的

$$G_x = m_1\dot{x}_1 + M_2\dot{x}_2$$

总能量(C 因子不计)为式(4.8.4)的

$$G_{ct} = m_1c + m_2c$$

所以合乎上述矢量加法(5.2.19)。

现在，再证明凡时间性矢量及零间矢量相加的结果，一般仍为时间性矢量。其证明如下。设

$$F_{1x} \equiv M_1 q_{x1}, F_{1y} \equiv M_1 q_{y1}, F_{1z} \equiv M_1 q_{z1}, F_{1ct} \equiv M_1 C$$

$$F_{2x} \equiv M_2 q_{x2}, F_{2y} \equiv M_2 q_{y2}, F_{2z} \equiv M_2 q_{z2}, F_{2ct} \equiv M_2 C$$

等等；$M_1 q$ 为任意数，如各矢量皆为时间性的，则

$$|q_1| < C, |q_2| < C, \cdots \tag{5.2.20}$$

等等。

所以 $$|\Sigma Fx| = |M_1 q_{x1} + M_2 q_{x2}| < |(M_1 + M_2)|C < |\Sigma FCt| \tag{5.2.21}$$

上式中就有几个 $|q|=C$ 也没有关系，而且即使每个 $|q|=C$ 只要不是平行的，式(5.2.21)仍旧成立例如两个零间矢量

$$\boldsymbol{F}_1 = M_1 \boldsymbol{C}_1, F_{1ct} = M_1 C, |\boldsymbol{C}_1| = C, \tag{5.2.22}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = M_2 \boldsymbol{C}_2, F_{2ct} = M_2 C, |\boldsymbol{C}_2| = C, \tag{5.2.23}$$

$$|M_1 \boldsymbol{C}_1 + M_2 \boldsymbol{C}2|^2 = M_1^2 C^2 + M_2^2 C^2 + 2M_1 M_2 (\boldsymbol{C}_1 \cdot \boldsymbol{C}_2)$$

$$\leq (M_1 + M_2)^2 C^2 \tag{5.2.23}$$

上面的等号只有在 $\boldsymbol{C}_1$ 与 $\boldsymbol{C}_2$ 平行时才成立，因之零间性矢量的相加，一般也是时间性的矢量(除平行外)。

如取 Ct' 轴在此时间性(总是可以的)矢量方向则其空间分量为零。例如总动量为零的系即是所谓"质能中心系"。

但空间性的矢量之和则不具这种性质，因设

$$|q_1| > C \quad |q_2| > C \tag{5.2.24}$$

则

$$|M_1 q_1 + M_2 q_2|^2 = M_1^2 q_1^2 + M_2^2 q_2^2 + 2M_1 M_2 (q_1 \cdot q_2) \tag{5.2.25}$$

就不一定大于

$$(M_1 + M_2)^2 C^2 = M_1^2 C^2 + M_2^2 C^2 + 2M_1 M_2 C^2 \tag{5.2.26}$$

例如 $q_2 = -q_1$ $\quad M_1 = M_2$ 则尽管由于式(5.2.24)

$$M_1|q_1| > M_1C \qquad M_2|q_2| > M_2C$$

但式(5.2.25)的数值为零

$$|M_1q_1 + M_2q_2| = 0 < |(M_1 + M_2)|C \qquad (5.2.27)$$

反变成时间性的矢量了!

这些性质也可以从(x,y,ct)的图上直接推论出来,凡和ct方向成小于45°的矢量全是时间性的矢量,我们可以想像在三元空间内绕ct轴各个小于45°矢量的相加,如图5.8,其结果必然仍是小于45°的时间性矢量等等。

§5.3 保角变换

物理学上理论和实验均说明光在真空中是以恒速C直线进行,所以

$$(\triangle x)^2+(\triangle y)^2+(\triangle z)^2-C^2(\triangle t)^2=0 \qquad (5.3.1)$$

以上△代表任意两点的差别,例如$\triangle x=x_2-x_1$,并不一定是小数,我们在实际工作中也常利用光的这一个性质来测远处的距离并且用以校对两不同地点的时间。

由于光速为常数的要求,任何在空中以匀速运动的坐标S'上所测的光速亦为C,因之式(5.3.1)在该系统中必须同样成立。换言之,光的路程在S'系内也要满足方程:

$$(\triangle x')^2 + (\triangle y')^2 + (\triangle z')^2 - C^2(\triangle t')^2 = 0 \quad (5.3.2)$$

设光在真空中由P点(x,y,z,t)传到Q点$(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z, t+\triangle t)$则$S$系观察为式(5.3.1),而$S'$系观察为式(5.3.2),现在问题是$(x')$与$(x)$点应当怎样的联系,式(5.3.1)和(5.3.2)才不矛盾。

设以希腊字母$\alpha,\beta\cdots$表示1,2,3,4的各种指标,并以

$$X_\alpha \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

代表(x,y,z,ict),则式(5.3.1)为

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \triangle x_\alpha \triangle x_\alpha = 0 \tag{5.3.3}$$

式(5.3.2)为

$$\sum_{\beta=1}^{4} \triangle x_\beta' \triangle x_\beta' = 0 \tag{5.3.4}$$

本书中以后的记号方法常省去方程累加式前面的 Σ 符号(爱因斯坦的记号方法)。由于在累加时一般出现有两个同样的字母,如式(5.3.3)的 α,式(5.3.4)的 β,这种记号的方法并不容易被误会。

设△为足够小的微差,则式(5.3.2)当然仍旧成立,但由于此时

$$\triangle x_\beta' = \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\gamma} \triangle x_\gamma \tag{5.3.5}$$

因之式(5.3.4)为

$$\Sigma_\beta (\Sigma_\gamma \frac{\partial x_\beta'}{\partial x} \triangle x_\gamma) \Big(\sum_\delta \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\delta} \triangle x_\delta \Big) = 0 \tag{5.3.6}$$

或

$$\Sigma\beta\Sigma\gamma\Sigma\delta \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\delta} \triangle x_\gamma \triangle x_\delta \equiv \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\delta} \triangle x_\gamma \triangle x_\delta = 0 \tag{5.3.7}$$

我们注意到,上式中一个用 $\triangle x_\gamma$ 则另一个不能同时也用 γ 混杂(这样会只有 $\triangle x_\gamma$, $\triangle x_\gamma$ 的项,而没有交叉项 $\triangle x_\gamma$、$\triangle x_\delta$ 出现)。再者式(5.3.3)中的 α,可以换任何字母,反正总是从 1—4 累加,同样式(5.3.5)的 γ 也可换任何字母(这种字母称"傀标"),另外须注意,在两项相乘时,如式(5.3.6),第二项不能用同样的"傀标",否则定会弄错。这些符号用法在稍加练习,直接乘出练习,几次后,就可以明鹤。

因 $\triangle x_\gamma$ 为任意数值,则式(5.3.7)与(5.3.2)不矛盾的条件为

$$\Sigma_\beta \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\delta} = \lambda \delta_{\gamma\delta} \tag{5.3.8}$$

以上 λ 为任意函数,$\delta_{\gamma\delta}$ 为 Krönecker 符号

$$\delta_{\gamma\delta}=\begin{matrix}0 & \text{设} & \gamma\neq\delta\\ 1 & \text{设} & \gamma=\delta\end{matrix}\Big\} \tag{5.3.9}$$

这样式(5.3.7)成为

$$\lambda\Sigma_\gamma\Sigma_\delta\delta_{\gamma\delta}\triangle x_\gamma\triangle x_\delta=\lambda\Sigma_\gamma\triangle x_\gamma\triangle x_\gamma=0 \tag{5.3.10}$$

因 $\lambda\neq0$,故

$$\Sigma_\gamma\triangle x_\gamma\triangle x_\gamma=0 \tag{5.3.11}$$

所以式(5.3.8)是 x' 作为 x 函数,保持光速不变必须满足的条件。

这种 x' 与 x 的关系可称为保角变换关系。因在三维空间中,两小矢量$\triangle x$ 与 $\mathrm{d}x$ 所成夹角 θ 的定义是

$$\cos\theta=\frac{\Sigma_\alpha \mathrm{d}x_\alpha\triangle x_\alpha}{\sqrt{\Sigma_\gamma \mathrm{d}x_\gamma\mathrm{d}x_\gamma}\sqrt{\Sigma_\beta\triangle x_\beta\triangle x_\beta}},\alpha=1,2,3 \tag{5.3.12}$$

设在 S' 系内相应的小矢量,称为 $\mathrm{d}x'_\alpha$,$\triangle x'_\alpha$ 则其夹角 θ' 为

$$\cos\theta'=\frac{\Sigma_\alpha \mathrm{d}x'_\alpha\triangle x'_\alpha}{\sqrt{\Sigma_\alpha \mathrm{d}x'_\alpha\mathrm{d}x'_\alpha}\sqrt{\Sigma_\beta\triangle x'_\beta\triangle x'_\beta}} \tag{5.3.13}$$

将式(5.3.5)代入式(5.3.13)内,并应用(5.3.8),得夹角不变的方程

$$\cos\theta'=\cos\theta \tag{5.3.14}$$

上式(5.3.14)是一个很好练习"傀标"的习题,我们留给读者自做。

在四维空间我们也可仿照公式(5.3.12)定义 θ,其证明也完全相同,因之,我们也称式(5.3.1)到式(5.3.2)的变换为"保角变换"。这种保角变换已被充分的研究过,只含下列几种变换形式。一种是 $\lambda=1$,此时

$$\triangle x'^2+\triangle y'^2+\triangle z'^2-C^2\triangle t'^2=\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2-C^2\triangle t^2 \tag{5.3.15}$$

这一种称洛伦兹变换,我们在下一节再讨论。第二种是均匀膨胀,

$$x'=kx,y'=ky,z'=kz,t'=kt, \tag{5.3.16}$$

其中 k 为一常数。第三种为"反演"变换,

$$\left.\begin{aligned} X'_i &= \frac{R^2(x_i - b_i)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)^2 - C^2(t - t_o)^2} + b_i \qquad i = 1、2、3 \\ t' &= \frac{R^2(t - t_o)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)^2 - C^2(t - t_o)^2} + t \end{aligned}\right\} \tag{5.3.17}$$

b_1, b_2, b_3, t_o，为四个任意常数，称为“反演中心”。R 为另一常数，可称反演“半径”

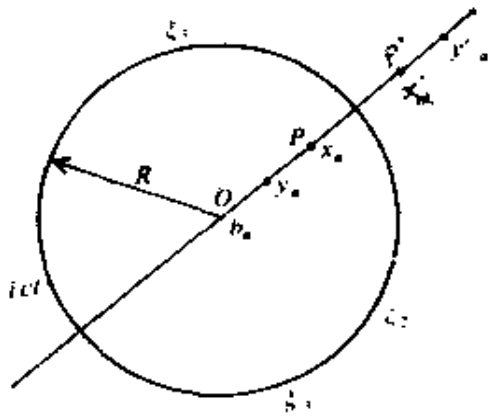


图 5.9

图 5.9 上“超球”上各点$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ict)$满足方程

$$\sum_{i=1}^{3}(\xi_i - b_i)^2 - C^2(t - t_o)^2 = R^2$$

$b_o = (bi, iCt_o)$为此超球的中心，R 为“半径”，设一点 P 离中心 O 的“距离”为 D，在 OD 直线上取 P' 点其距离 O 点 D' 适合

$$DD' = R^2, \quad \text{所以 } \boldsymbol{D}' = \frac{R^2}{D^2}\boldsymbol{D},$$

此 $\boldsymbol{D}'$ 在各坐标上的投影，即为式(5.3.17)的形式，因之 P' 即 P 的“反演点”。

读者可以直接验证，设有两点(x_1, x_2, x_3, x_4)及(y_1, y_2, y_3, y_4)，则由式(5.3.17)得

$$\{\Sigma_\alpha(y_\alpha' - x_\alpha')^2\} = \frac{R^4}{[\Sigma_\alpha(y_\alpha - b_\alpha)^2][\Sigma_\beta(x_\beta - b_\beta)^2]}(\Sigma_\gamma(y_\gamma - x_\gamma)^2) \tag{5.3.18}$$

以上 $b_\alpha = b_1, b_2, b_3, ict_0$，因之设式(5.3.1)

$$\Sigma_\alpha(y_\alpha - x_\alpha)^2 = 0$$

成立，则式(5.3.2)

$$\Sigma_\alpha(y_\alpha' - x_\alpha')^2 = 0$$

亦成立，这种反演变换也是交互的，由式(5.3.17)可以解出

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \frac{R^2(x'_i - b_i)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i' - b_i)^2 - C^2(t' - t_0)^2} + b_i \\ t_i &= \frac{R^2(t' - t_0)}{\sum_{i=1}^{3}(x_i' - b_i)^2 - C^2(t' - t_0)^2} + t_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3.19}$$

与式(5.3.17)相同。我们也可以证明

$$\Sigma\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\beta} = \frac{R^4}{\{\Sigma(x_\alpha - b_\alpha)^2\}^2}\delta_{\gamma\beta}$$

换言之条件(5.3.8)确已满足。

除以上三种变换外，再也没有其他变换使式(5.3.1)形式变成式(5.3.2)形式了。不过这种反演变换有一个危险：当分母为零时(凡一切与所谓"反演中心"可以用光讯号连系的宇宙点皆系如此)则在 S' 系统看来这些点皆是无限远。换言之，式(5.1.17)的变换使 S 系中有限值距离和有限值时间发生的事，在另一系统 S' 看来，可以是在无穷远的距离和无穷远的时间发生的事，这种变换似乎失去"物理的真实性"，因之我们不能采纳*。

式(5.3.16)的变换显然不受这个限制，设 S' 系沿正 x 方向以

---

* 在这方面 Bateman 等人作了很多有趣的工作，Bateman 证明，这种保角变换使麦氏电磁方程具协变性，Hill 证明这种保角变换使质点匀"加速"运动，仍为匀加速运动，不过由于上述理由，这种反演变换的物理真实性，颇为可疑

速度 V 进行，S' 系各尺度膨胀 R 倍，

$$x' = k(V)x, y' = k(V)y, z' = k(V)z, ct' = k(V)ct \tag{5.3.20}$$

则由于空间的对称性，S' 如沿负 x 方向进行亦必受同样影响

所以
$$k(-V)=k(V) \tag{5.3.21}$$

又由于相对论，S' 系沿正 x 方向进行时相当于 S' 系不动，而 S 系沿负 x 方向进行，因之仿式(5.3.20)得

$$x = k(-V)x', y = k(-V)y', z = k(-V)z', t = k(-V)t'$$

由上式及式(5.3.20)、(5.3.21)得 $k=1$，因之变换式(5.3.16)合于空间对称性及相对论原理的，只有 $k=1$ 一种。换言之，我们只剩有式(5.3.15)一种形式的变换。

所以保持光速不变，而又要使有限值的距离不成为无限值的距离的只有洛伦兹变换及均匀膨胀两种，但由于均匀膨胀不合空间对称性和相对论的要求，因之只剩洛伦兹变换的一种形式。

§5.4 洛伦兹变换的广泛研究

凡是保持式(5.3.1)及(5.3.2)

$$\sum_\alpha \triangle x_\alpha \triangle x_\alpha = \sum_\beta \triangle x_\beta' \triangle x_\beta' \tag{5.4.1}$$

的变换，必为线型变换(注意△并不限于微差)

$$x_\alpha' = \sum a_{\alpha\beta} x_\beta + b_\alpha \tag{5.4.2}$$

形式，以上 $a_{\alpha\beta}$ 及 b_α 均为常数，故

$$\triangle x'_\alpha = \sum a_{\alpha\beta} \triangle x_\beta \tag{5.4.3}$$

以之代入式(5.4.1)中得

$$\sum \triangle x'_\alpha \triangle x'_\alpha = \sum a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} \triangle x_\beta \triangle x_\gamma = \sum \triangle x_\beta \triangle x_\beta \tag{5.4.4}$$

因之

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta}a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \tag{5.4.5}$$

条件(5.4.5)亦称"正交条件。

式(5.4.2)内有十六个参数$a_{\alpha\beta}$及四个参数b_α。但式(5.4.5)内$a_{\alpha\beta}$有十个条件，因之$a_{\alpha\beta}$只有六个(可为复数)独立参数，洛伦兹变换群(5.4.1)为十个参数群。由于b_α只是原点计算的改变，并没有深入研究的价值。我们以后不再用它，而只研究六个复参数群$a_{\alpha\beta}$的性质

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta}x_\beta \tag{5.4.6}$$

将上式乘以$a_{\alpha\gamma}$对α累加，则从式(5.4.5)得逆变换，

$$x_\gamma = a_{\alpha\gamma}x'_\alpha \tag{5.4.7}$$

以方阵L为(参考附录 一)

$$L \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \quad \tilde{L} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{Vmatrix} \tag{5.4.8}$$

$a_{\alpha\beta}$可作为x'_α与x_β所成的"夹角余弦"。公式(5.4.6)可写成

$$x' = Lx, \tag{5.4.8}'$$

式(5.4.7)可写为

$$x = \tilde{L}x' \tag{5.4.8}''$$

$\tilde{L}$为方阵(5.4.8)行列交换的位调方阵，由此或由式(5.4.5)得出

$$L\tilde{L} = E$$

E为单位方阵，所以L的倒矩即为其身的位调方阵。取L的行列式，因$|\tilde{L}| = |L|$，所以

$$|L|^2 = 1, |L| = \pm 1, \tag{5.4.9}$$

$|L| = +1$为一切不经"反射"的变换。凡经过反射例如

$$x' = -x, y' = y, z' = z, t' = t \tag{5.4.10}$$

的，则行列式$|L| = -1$。至于其他反射如

$$x' = -x \quad y' = -y \quad z' = -z, t' = t \qquad (5.4.10)'$$

则可以从式(5.4.10)及绕 x 轴旋转($|L| = +1$)180°得出，事实上一切 $|L| = -1$ 的变换总是式(5.4.10)或者式(5.4.10)′，再加上 $|L| = +1$ 的变换。

在实数$(x, y, z, ct) \to (x', y', z', ct')$变换时，式(5.4.6)说 a_{ij}，a_{44}必为实数，而 a_{4i}, a_{i4}必为纯幻数，因之只剩六个实参数，条件(5.4.5)

$$a_{\alpha 4}a_{\alpha 4} = 1 = a_{44}^2 - \sum_{i=1}^{3} |a_{i4}|^2$$

说明在实数变换时

$$a_{44}^2 \geqslant 1, |a_{14}| \geqslant 1$$

所以

$$a_{44} \geqslant 1, \text{或 } a_{44} \leqslant -1 \qquad (5.4.11)$$

中间有一段

$$-1 < a_{44} < 1 \qquad (5.4.11)'$$

不能成立，同样我们也看出

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i4}^2 \geqslant 1 \qquad (5.4.12)$$

式(5.4.11)′及式(5.4.12)为一切实数洛伦兹变换(5.4.7)必须满足的条件。现在，再分别讨论 $a_{\alpha\beta}$的各种形式。

(1) 速度变换 V_x

设 S'的原点以速度 V_x, V_y, V_z 对 S 进行，亦即当

$$x'_1 = 0 \quad x'_2 = 0, x'_3 = 0 \text{ 时，}$$

$$x_1 = V_x t, x_2 = V_y t, x_3 = V_z t$$

则由式(5.4.7)见

$$V_x t = a_{41} iCt', \quad V_y t = a_{42} iCt',$$

$$V_z t = a_{43} iCt', \quad iCt = a_{44} iCt'$$

因之

$$a_{41}=\frac{V_x}{iC}a_{44},a_{42}=\frac{V_y}{iC}a_{44},a_{43}=\frac{V_z}{iC}a_{44}$$

设选 S' 轴使 S 原点以速度 $-V_x,-V_y,-V_z$ 对 S' 进行，亦即当

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0,$$

$$x_1'=-V_xt',\quad x_2'=-V_yt',x_3'=-V_zt\text{ 时},$$

则以之代入式(5.4.6)，得

$$a_{14}=-\frac{V_x}{iC}a_{44},a_{24}=-\frac{V_y}{iC}a_{44},a_{3.4}=-\frac{V_z}{iC}a_{44}$$

又由于

$$\sum\nolimits_a a_{4a}^2=1=\left(-\frac{V_x^2}{C^2}-\frac{V_y^2}{C^2}-\frac{V_z^2}{C^2}\right)\cdot a_{44}^2+a_{44}^2,$$

所以

$$a_{44}^2=\frac{1}{1-\beta^2},a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad(5.4.14)$$

取正号以避免时间次序的颠倒。现在，L 为下列形式：

$$L=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{iV_x}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{iV_y}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dfrac{iV_z}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{-iV_x}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-iV_y}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{-iV_z}{c\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{Vmatrix}\qquad(5.4.15)$$

因之 iCt' 轴于 x,y,z,iCt 轴所成的夹角余弦为

$$\left(\frac{-iV_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{-iV_y}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{-iV_z}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\qquad(5.4.16)$$

图 5.6 为 $V_y=V_z=0$ 的特殊情况。现在再求 a_{ij} 几个参数，从式(5.4.15)，则条件(5.4.5)改为(凡拉丁字母只代表 1、2、3)，

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} - \frac{V_jV_k}{C^2(1-\beta_2)} = \delta_{jk} \qquad (5.4.17)$$

及

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} - i\frac{V_k}{C(1-\beta^2)} = 0$$

上述第二式，亦即

$$\sum_{i=1}^{3} V_i a_{ik} = \frac{V_k}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5.4.17)$$

由于 a_{ij} 中只能含 V_i，且由于空间的对称性，a_{ik} 只能采取下列

$$a_{ik} = f(V)\delta_{ik} + F(V)V_iV_k \qquad (5.4.18)$$

的形式；$f(V)$，$F(V)$ 为标量 V 的函数，以之代入式(5.4.17)及式(5.4.17)′内，得

$$f + V^2F = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5.4.19)$$

及

$$f^2\delta_{ik} + \left\{F^2V^2 + 2fF - \frac{1}{C^2(1-\beta^2)}\right\}V_jV_k = \delta_{jk} \qquad (5.4.20)$$

由式(5.4.20)，得

$$f^2 = 1, \quad F^2V^2 + 2fF - \frac{1}{C^2(1-\beta^2)} = 0 \qquad (5.4.21)$$

f 必为 $+1$，因为 $V_i=0$ 时，$x'=x$，以避免人为的空间反射，由式(5.4.19)得

$$F = \frac{1}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \qquad (5.4.22)$$

此时，方程(5.4.21)亦自动满足。换言之

$$a_{ik}=\delta_{ik}+\frac{1}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)V_iV_k \qquad (5.4.23)$$

为式(5.4.15)的解答，此亦即方程(2.5.11)。特别当 $V_y=V_z=0$ 时，上式蜕化为洛伦兹转换(2.4.4)。

(2) 空间旋转

假使 S' 空间的原点 O' 不动，则可使之与 S 的原点 O 相合。换言之，

$$x'_1=0 \quad x'_2=0 \quad x'_3=0,$$

应转变为

$$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=0$$

由式(5.4.6)及式(5.4.7)见

$$a_{i4}=0 \quad a_{4i}=0 \qquad (5.4.24)$$

L 采取

$$L=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{Vmatrix} \qquad (5.4.25)$$

形式。由式(5.4.5)见

$$a_{44}^2=1 \quad a_{44}=+1, \qquad (5.4.26)$$

上式取正号为不故意颠倒时间次序的要求。

所以

$$\left.\begin{aligned} t' &= t, \\ x_i' &= a_{ij}x_j, \\ \sum\nolimits_i a_{ij}a_{ik} &= \delta_{jk} \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.27)$$

此为通常三维空间的旋转和反射。

因之洛伦兹转换(5.4.6)除速度转换((5.4.23)或(2.5.7)之外，就是三个空间的旋转和反射。当然两种合起来，又有速度又旋转，也是可以的，时间的反射则为简单的

$$x' = x, y' = y, z' = z, t' = -t$$

可不必叙述。

(3)微变换

设 x_α' 与 x_α 坐标相差为…微数，

$$x_\alpha' = x_\alpha + \omega_{\alpha\gamma}x_\gamma = (\delta_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma})x_\gamma, \qquad (5.4.28)$$

式中 $\omega_{\alpha\gamma}$ 为微数，其乘积可忽略不计。条件(5.4.5)成为

$$(\delta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})(\delta_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma}) = \delta_{\beta\gamma}$$

或

$$\omega_{\gamma\beta} + \omega_{\beta\gamma} = 0, \text{所以 } \omega_{\beta\gamma} = -\omega_{\gamma\beta} \qquad (5.4.29)$$

换言之，$\omega_{\alpha\beta}$ 必对指标 α、β 为反对称。由式(5.4.28)见

$$x_\alpha = (\delta_{\alpha\gamma} + \omega_{\gamma\alpha})x'_\gamma = (\delta_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\gamma})x'_\gamma, \qquad (5.4.30)$$

此与式(5.4.28)相差仅为 ω 数值的反号。

ω 的意义可从式(5.4.15)及式(5.4.25)看出，在微速度变换中，式(5.4.15)及式(5.4.23)指出

$$\omega_{j4} = i\frac{V_j}{c}, \qquad \omega_{ij} = 0 \qquad (5.4.31)$$

在空间旋转变换中，

$$\omega_{j4} = 0 \qquad x_i' = x_i + \omega_{ij}x_j \qquad (5.4.32)$$

由普通三维旋转，可见

$$(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) = \omega$$

为在空间旋转的小角，由两次式(5.4.28)的微变换

$$x''_\alpha = (\delta_{\alpha\beta} + \omega'_{\alpha\beta})x'_\beta = (\delta_{\alpha\beta} + \omega'_{\alpha\beta})(\delta_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma})x_\gamma$$
$$= (\delta_{\alpha\gamma} + \omega'_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma})x_\gamma, \qquad (5.4.33)$$

看出微变相加的性质。换言之，

$$\left.\begin{aligned}(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) &= \boldsymbol{\omega}\\ (\omega_{14}, \omega_{24}, \omega_{34}) &= i\frac{\boldsymbol{V}}{c}\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.34)$$

两个关系是一般性的：同时旋转及匀速进行只是两者系数的相加。在微变时，速度变换与空间旋转两不干扰。

微变的累积可以成为有限变换，唯只限于$|L|=+1$的变换。反射如式(5.4.10)则不能用微变表示。式(5.4.34)可写成δL微变方阵

$$\delta L = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} & i\dfrac{Vx}{c} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & i\dfrac{Vy}{c} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 & i\dfrac{Vz}{c} \\ -\dfrac{iVx}{c} & -\dfrac{iVy}{c} & -\dfrac{iVz}{c} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (5.4.35)$$

从式(5.4.32)看出，ω_{12}表示在x_1、x_2平面上由轴1到2方向旋转的一个小角度。如图5.10上只有$\omega_{12}=-\omega_{21}\neq 0$，其余$\omega_{ij}$均为零，则

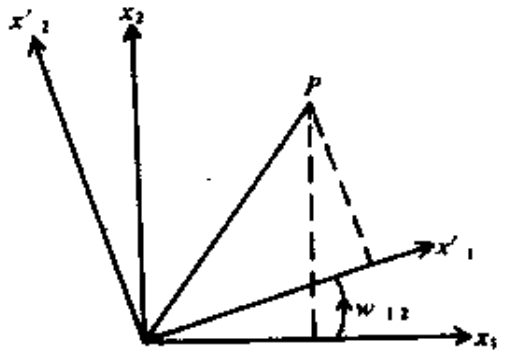


图5.10

$$x'_1 = x_1\cos\omega_{12} + x_2\sin\omega_{12} = x_1 + \omega_{12}x_2$$
$$x'_2 = x_2\cos\omega_{12} - x_1\sin\omega_{12} = x_2 - \omega_{12}x_1$$
$$x'_3 = x_3, \qquad x'_4 = x_4$$

在通常三维空间，我们常以 ω_{12} 为绕"z 轴"方向的旋转角。在四维宇宙，我们不能这样做，因为有两个方向 x_3、x_4 垂直于 x_1，x_2 平面。旋转只能用面来代表，此处是 x_1-x_2 面，同样 iVx/c 是平面 x_1-x_4 上 x_1 到 x_4 的旋转角。四维空间的四个轴组成六个平面，其"旋转角"分别为

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \to x_2 : \omega_{12}, x_1 \to x_3 : \omega_{13}, x_2 \to x_3 : \omega_{23} \\ &x_1 \to x_4 : iV_x/C, x_2 \to x_4 : iV_y/C, x_3 \to x_4 : iV_z/C \end{aligned}\right\} \tag{5.4.36}$$

从式(5.4.35)可以看出，在微数变换中，由于交叉项不出现，物理意义较明确；非微数变换中的相交叉项，使得观念混杂起来。

做为一个习题，我们可以计算下列问题。

设有 S，S'，S''三坐标系其相互关系为

$$x' = ax, \qquad x'' = (a + \mathrm{d}a)x$$

a 为速度变换方阵，其系数见式(2.5.9)。$a+da$ 亦为速度变换。但 S''的速度 V 与 S'的速度 V 稍差微数 $\mathrm{d}V$，现在求 x''与 x'的关系。

设
$$x'' = Fx' = Fax$$

F、a 均为方阵，则从上式得

$$Fa = a + \mathrm{d}a$$

或用方阵运算法得

$$F = (a + \mathrm{d}a)a^{-1},$$

所以

$$F_{\alpha\beta} = (a_{\alpha\gamma} + \mathrm{d}a_{\alpha\gamma})a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} + a_{\beta\gamma}\mathrm{d}a_{\alpha\gamma} \tag{5.4.37}$$

因之 F 为一微变，其数值可由式(5.4.37)及(2.5.9)计算出为

$$\left.\begin{aligned}\omega_{ij}&=\frac{V_i\mathrm{d}V_j-V_j\mathrm{d}V_i}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\\ \omega_{i4}&=\frac{i}{C}\left(\frac{\mathrm{d}V_i}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{V_i(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{V})}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right)\end{aligned}\right\}\tag{5.4.38}$$

由式(5.4.35)可见此坐标 S''对 S'以速度

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\left\{\mathrm{d}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{V})}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\right\}\tag{5.4.38}'$$

前进，此与式(3.1.6)的速度合成法所得的相同；并以

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\boldsymbol{V}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-1\right)\tag{5.4.39}$$

角度在空间旋转。此种旋转称“Thomas 进动”。换言之，S'与 S''的关系不能再是简单纯速度变换的关系。关于此点可参考§2.5后段及§5.7节的讨论(该处得出一般 S''与 S'的关系，而不限于微变)。

一如在普通数学中，微变总是容易计算(其乘积可以略去)。在相对论中，也常用微变方法来计算某些公式或证明某些定理。不过微变不包含坐标的反射，在计算时要注意这一点。

§5.5 四元数

我们可以仿三维空间的矢量形式用 Hamilton(1843)的四元数来研究四维空间，以

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}+a_4\equiv(\boldsymbol{a},a_4)\tag{5.5.1}$$

为“四元数”。a_α为数字，可为复数；$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为符号，所谓在 x,y,z 方

向的单位矢量，两四元数的加法定义为

$$A+B=(\boldsymbol{a},a_4)+(\boldsymbol{b},b_4)\equiv(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},a_4+b_4)$$
$$\equiv(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}+a_4+b_4 \tag{5.5.2}$$

两四元数乘法定义为*

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{5.5.3}$$

如乘以普通数字，则即在 a_4 上各乘一该数，由上见

$$A\cdot B=(\boldsymbol{a},a_4)(\boldsymbol{b},b_4)$$
$$=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+b_4\boldsymbol{a}+a_4\boldsymbol{b},a_4b_4-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\equiv(\boldsymbol{C},C_4)=C \tag{5.5.4}$$

其中 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为通常三元矢量的矢量乘积及标量乘积。此种四元数具有普通数学的计算规律，唯一般除 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行上，乘法不能交换：

$$AB\neq BA$$

由乘法的定义得

$$(\boldsymbol{a}^2+a_4^2)(\boldsymbol{b}^2+b_4^2)=\boldsymbol{c}^2+c_4^2,$$

以上

$$\boldsymbol{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

等等，我们称

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=\boldsymbol{a}^2+a_4^2\equiv|A| \tag{5.5.5}$$

为四元数 A 的绝对值，因之式(5.5.5)表示

$$|A||B|=|C| \tag{5.5.6}$$

“单位”四元数的定义为

$$E=(0.1) \tag{5.5.7}$$

所以

---

* 我们有时亦用 $i^2=j^2=k^2=+1$，这样 $i\cdot j=-k$ 等等亦作相应的改变

$$\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{AE} = \boldsymbol{A} \tag{5.5.8}$$

四元数的倒数为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{(-\boldsymbol{a}, a_4)}{\boldsymbol{a}^2 + a_4^2} = \frac{(-\boldsymbol{a}, a_1)}{|\boldsymbol{A}|}, \tag{5.5.9}$$

所以

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{A} = E \tag{5.5.10}$$

四元数也可以开方，如

$$A^2 = (\boldsymbol{a}, a_4)(\boldsymbol{a}, a_4) = (2a_4\boldsymbol{a}, a_4^2 - \boldsymbol{a}^2) \equiv (\boldsymbol{b}, b_4) = \boldsymbol{B},$$

则得出 $\boldsymbol{B}$ 的“开方根”，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}, a_4)$

$$a_4 = \pm\sqrt{\frac{b_4 \pm \sqrt{b_2 + b_4^2}}{2}}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{b}}{2a_4}$$

高次方根也可以求出，设

$$\boldsymbol{A}^N = \boldsymbol{B} \equiv B(\boldsymbol{e}\sin\varphi, \cos\varphi)$$

以上

$$B = \sqrt{\boldsymbol{b}^2 + b_4^2}, \quad \cos\varphi = \frac{b_4}{B}, \quad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|a|};$$

则

$$\boldsymbol{A} = B^{\frac{1}{N}}(\boldsymbol{e}\sin\theta, \cos\theta), \tag{5.5.11}$$

式中

$$\theta = \frac{\Phi + 2\pi m}{N} \qquad m = 0, 1, \cdots N - 1$$

即为所求的 N 次方根。

设四元数

$$\boldsymbol{X}' = (\boldsymbol{x}', x_4) = \boldsymbol{AX} = (\boldsymbol{a}, a_4)(\boldsymbol{x}, x_4), \tag{5.5.12}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 1$$

则 x'_α 与 x_α 为线型关系，且

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{5.5.13}$$

一般如*

$$\left.\begin{aligned} X' &= AXB \\ |A||B| &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.14}$$

则仍保持式(5.5.13)不变，将式(5.5.14)写出，以 $A=(a,a_4)$，$B=(b,b_4)$ 再用式(5.5.4)，上式为

$$\begin{aligned} x' + x'_4 = {} & (a\cdot b + a_4b_4)x - b(a\cdot x) - a(b\cdot x) + b_4a \wedge x \\ & - a_4b \wedge x + x_4(a\wedge b + a_4b + b_4a) + x_4(a_4b_4 - a\cdot b \\ & - a_4(b\cdot x) - b_4(a\cdot x) + (a\wedge b)\cdot x \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

由式(5.5.15)可见如以

$$A' = \lambda A, \quad B' = \frac{1}{\lambda}B \tag{5.5.16}$$

则 x' 与 x 的关系不改，因之我们在研究洛伦兹变换时，可以选 A 使 $|A|=1$，

$$\left.\begin{aligned} X' &= AXB, \\ |A| &= 0 \qquad |B| = 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.5.17}$$

以避免 A 的一部分不定性，不过 a_α, b_α 系数均仍可以乘一负号。

我们可以用二元方阵代表 i、j、k，使适合式(5.5.3)的条件，例如取

$$\left.\begin{aligned} i &= \begin{Vmatrix} O & i \\ i & O \end{Vmatrix}, \qquad j = \begin{Vmatrix} O & -1 \\ 1 & O \end{Vmatrix}, \\ k &= \begin{Vmatrix} i & O \\ O & -i \end{Vmatrix}, \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & O \\ O & 1 \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\}_{i=\sqrt{-1}} \tag{5.5.18}$$

则式(5.5.3)的关系成立，四元数 A 用这种方阵表示出成为

---

* 假使一齐写在前面

$$X' = ABX = CX$$

则仍为式(5.5.12)的形式，无须加以研究

$$A=\begin{Vmatrix} a_4+ia_3 & -a_2+ia_1 \\ a_2+ia_1 & a_4-ia_3 \end{Vmatrix} \tag{5.5.19}$$

形式，A 的行列式数值为 $|A|$。

当然我们也可以用不同的方法表示 i,j,k，事实上，如 S 为任何行列式不为零的二元方阵，则

$$i'=SiS^{-1},j'=SjS^{-1}\quad k'=SkS^{-1} \tag{5.5.20}$$

皆满足式(5.5.3)的关系，因之也可以取作 i,j,k 的表示，此时式(5.5.19)也作相应的变更，由于一般习惯以 z 方向(a_3)特殊些，本节就用式(5.5.18)及式(5.5.19)的表示形式。只要记得这只是"一种"表示方法，当换成式(5.5.20)的表示后，设原来的 A 为

$$A=a_1i+a_2j+a_3k+a_4E$$

则在新的表示中，A 换成

$$A'=(a_1i'+a_2j'+a_3k',a_4)=S(a_1i+a_2j+a_3k,a_4)S^{-1}=SAS^{-1} \tag{5.5.21}$$

§5.6 实数洛伦兹变换的四元数表示法

由式(5.5.15)看出，如 $x'=x_1',x_2',x_3',x=x_1,x_2,x_3;x_4'=ict',x_4=ict$；则实数$(x_1,x_2,x_3,ct)$到实数$(x_1',x_2',x_3',ct)$的变换条件为

$$b_4=\lambda a_4^*,b=-\lambda a^*, \tag{5.6.1}$$

数上加星号 $*$ 的为该数的共轭复数。由于

$$|B|=1,\text{所以}\ \lambda^2=1,\lambda=\pm 1, \tag{5.6.2}$$

因之设

$$A=(a_1+ia_2,a_{14}+ia_{24}), \tag{5.6.3}$$

a_1,a_2,a_{14},a_{24}全为实数，则实数洛伦兹转换要求为(除可以普遍加一负号之外)，

$$B=(-a_1+ia_2,a_{14}-ia_{24}) \tag{5.6.4}$$

此时如以 $\lambda=+1$，则

$$\begin{aligned}x'+x_4'=&(a_{14}^2+a_{24}^2-\boldsymbol{a}_1^2-\boldsymbol{a}_2^2)x+2\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{a}_1\cdot x)\\&+2\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{a}_2\cdot x)+2a_{14}\boldsymbol{a}_1\wedge x+2a_{24}\boldsymbol{a}_2\wedge x\\&-2ix_4(\boldsymbol{a}^2\wedge\boldsymbol{a}_1+a_{24}\boldsymbol{a}_1-a_{14}\boldsymbol{a}_2)+x_4(a_1^2+a_2^2+a_{14}^2+a_{24}^2)\\&+2ia_{24}\boldsymbol{a}_1\cdot x-2ia_{14}\boldsymbol{a}_2\cdot x+2i(\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2)\cdot x\end{aligned}\tag{5.6.5}$$

由上可见，设 $+t'\to+t$，则 λ 必为 $+1$，因之式(5.6.5)为不反射时间坐标的形式，因 $|A|=1$，

所以

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1^2+\boldsymbol{a}_{14}^2-\boldsymbol{a}_2^2-\boldsymbol{a}_{24}^2=1\\\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2+a_{14}a_{24}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.6.6}$$

为八个实系数 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,a_{14},a_{24}$ 必须满足的条件，所以此种变换是六个实数参数的变换。式(5.6.3)及(5.6.4)如以方阵(5.5.19)写出，则为

$$\boldsymbol{A}=\begin{Vmatrix}a_{14}-a_{23}+i(a_{24}+a_{13}), & -a_{12}-a_{21}+i(a_{11}-a_{22})\\a_{12}-a_{21}+i(a_{11}+a_{22}), & a_{14}+a_{23}+i(a_{24}-a_{13})\end{Vmatrix}\tag{5.6.7}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{Vmatrix}a_{14}-a_{23}-i(a_{24}+a_{13}), & a_{12}-a_{21}-i(a_{11}+a_{22})\\-a_{12}-a_{21}-i(a_{11}-a_{22}), & a_{14}+a_{23}-i(a_{24}-a_{13})\end{Vmatrix}\tag{5.6.8}$$

因之方阵 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}=\tilde{\boldsymbol{A}}^*\tag{5.6.9}$$

为 A 的共轭位调方阵，故不包括时间反射的洛伦兹实数变换为

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{A}}^*\tag{5.6.10}$$

如用么正方阵 $\boldsymbol{S}$ 改变 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的表示，则也不改变上述结论，因由式(5.5.21)得

$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{S}^{-1}=\tilde{\boldsymbol{A}}^*,$$

所以在实数坐标变换时，只有一个 $\boldsymbol{A}$ 可改变，$\boldsymbol{B}$ 必满足式(5.6.4)或(5.6.10)的条件。

设 A 为已定，则 L 当然可以决定，反之如 L 为已定，则 A 除负号外亦已决定。不过我们可以证明式(5.6.5)的 $|L|=+1$，例如我们无论如何不能从式(5.6.5)或(5.5.15)产生

$$x'=-x,y'=y,z'=z,t'=t$$

的变换。除去 $|L|=-1$ 的变换之外(这可以从下面的例子看出)，则总可以从式(5.6.10)及 $\lambda=-1$ 式(5.6.41)产生出来。

今再分述几种情况。

(1)A 为么正方阵

$$\tilde{A}^*=A^{-1},\tilde{A}^*A=E,$$

$$\text{或 } \tilde{A}^*=A^{-1} \tag{5.6.11}$$

由于式(5.5.9)，

$$A^{-1}=(-a_1-ia_2,a_{14}+ia_{21})$$

所以

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} a_{14}+a_{23}+i(a_{21}-a_{13}),a_{12}+a_{21}-i(a_{11}-a_{22}) \\ -a_{12}+a_{21}-i(a_{11}+a_{22}),a_{11}-a_{23}+i(a_{21}+a_{13}) \end{Vmatrix} \tag{5.6.12}$$

与式(5.6.8)比较，见

$$a^2=0,a_{24}=0 \tag{5.6.13}$$

或 A,B 简化为

$$A=(a_1,a_{14}),B=(-a_1,a_{14}) \tag{5.6.14}$$

形式(5.6.6)的条件为

$$a_1^2+a_{14}^2=1, \tag{5.6.15}$$

以之代入式(5.6.5)，得

$$\left.\begin{aligned} x'&=(1-2a_1^2)x+2a_1(a_1\cdot x)+2\sqrt{1-a_1^2}a_1\wedge x \\ t'&=t \end{aligned}\right\} \tag{5.6.16}$$

因之，么正变换为最广泛的空间旋转。式(5.6.16)末项的正负号，可由 a_1 的正负号决定，可以不必写出，因为 $a_1^2 \leqslant 1$，我们取

$$a_1 = a_0 \sin\frac{\theta}{2}, a_{14} = \cos\frac{\theta}{2}, \tag{5.6.17}$$

a_0 为单位矢量。式(5.6.16)蜕化为

$$x' = x\cos\theta + a_0(a_0 \cdot x)(1-\cos\theta) + \sin\theta(a_0 \wedge x) \tag{5.6.18}$$

由上式可见，在 a_0 方向的一切点均保持 $x'=x$ 不变，因之 a_0 为旋转轴方向。

如 a_0 在 x_1 方向，上式为

$$x_1' = x_1\cos\theta + x_1(1-\cos\theta) = x_1,$$
$$x_2' = x_2\cos\theta - x_3\sin\theta,$$
$$x_3' = x_3\cos\theta + x_2\sin\theta$$

代表以 x_1 为轴旋转 $-\theta$ 角(从 x_2 轴到 x_3 轴)的 S' 坐标，因之式(5.6.17)的 a_0 为空间旋转方向，$-\theta$ 为旋转角(右手螺旋)，今以

$$a_0 = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\alpha k \tag{5.6.19}$$

α,β,γ 为旋转轴与 x,y,z 轴所成的角度。

用右手螺旋规则，A 为

$$A = (-a_0\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$$
$$= \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\cos\gamma\sin\frac{\theta}{2}, & (\cos\beta - i\cos\alpha)\sin\frac{\theta}{2} \\ -(\cos\beta + i\cos\alpha)\sin\frac{\theta}{2}, & \cos\frac{\theta}{2} + i\cos\gamma\sin\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} \tag{5.6.20}$$

当 $\cos\gamma=1, \cos\beta=\cos\alpha=0$ 时，A 蜕化为

$$A = \begin{Vmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}}, & 0 \\ 0, & e^{i\frac{\theta}{2}}, \end{Vmatrix}, \tag{5.6.21}$$

此为绕 z 轴旋转 θ 角的变换。反之，我们可以证明如在变换时 $t'=t$，则 A 必为么正方阵〔可从式(5.6.5)证出〕。

(2)A 为厄密方阵

$$\tilde{A}^* = A \tag{5.6.22}$$

亦即

$$B = A.$$ 由式(5.6.8)及(5.6.7)见

$$a_1 = 0, a_{24} = 0,$$

故

$$A = B = (ia_2, a_{14}) \tag{5.6.23}$$

式(5.6.6)的条件为

$$a_{14}^2 - a_2^2 = 1 \tag{5.6.24}$$

以上式代入式(5.6.5),得

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + 2a_2(a_2 \cdot x) - 2Cta_{14}a_2 \\ t' &= (a_2^2 + a_{14}^2)t - \frac{2}{C}a_{14}(a_2 \cdot x) \end{aligned}\right\} \tag{5.6.25}$$

由式(5.6.24)见 $a_{14}^2 \geqslant 1$,由于 $-A$ 可以代替 A 不使式(5.6.25)发生改变,故可取 $a_{14} \geqslant 1$,因之我们以

$$a_2 = V_0 \sinh \frac{\varphi}{2}, a_{14} = \cosh \frac{\varphi}{2} \tag{5.6.26}$$

V_0 为在 a_2 方向的单位矢量,则

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + V_0(V_0 \cdot x)(\cosh\varphi - 1) - CtV_0\sinh\varphi \\ t' &= t\cosh\varphi - \frac{1}{C}(V_0 \cdot x)\sinh\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.6.27}$$

解 x,得

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + V_0(V_0 \cdot x')(\cosh\varphi - 1) + Ct'V_0\sinh\varphi \\ t &= t'\cosh\varphi + \frac{1}{C}(V_0 \cdot x')\sinh\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.6.28}$$

原点 $x' = 0$ 适合方程

$$x = Ct'V_0\sinh\varphi = CtV_0\tanh\varphi \tag{5.6.29}$$

故式(5.6.28)表示 s' 原点是以匀速

$$\boldsymbol{V}=\mathbf{V}_0 C\tanh\varphi$$

进行的系统。$\boldsymbol{V}_0$ 为速度的方向，速度的数量为

$$V=C\tanh\varphi,\text{或 }\tanh\varphi=\beta \tag{5.6.30}$$

代入式(5.6.27)，得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}'&=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x})}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\boldsymbol{V}\frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ t'&=\frac{t-\frac{1}{C^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x})}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\} \tag{5.6.31}$$

因之式(5.6.22)为最一般性的相对论速度变换式，如以 $\boldsymbol{V}$ 的方向为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\boldsymbol{A}$ 方阵为

$$\boldsymbol{A}=(iV_0\sinh\frac{\varphi}{2},\cosh\frac{\varphi}{2})$$

$$=\begin{Vmatrix}\cosh\frac{\varphi}{2}-\cos\gamma\sinh\frac{\varphi}{2}, & -(\cos\alpha+i\cos\beta)\sin\frac{\varphi}{2}\\ -(\cos\alpha-i\cos\beta)\sinh\frac{\varphi}{2}, & \cosh\frac{\varphi}{2}+\cos\gamma\sin\frac{\varphi}{2}\end{Vmatrix} \tag{5.6.32}$$

在 $\cos\gamma=1,\cos\beta=\cos\alpha=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 蜕化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{Vmatrix}e^{-\frac{\varphi}{2}}, & 0\\ 0 & e^{\frac{\varphi}{2}}\end{Vmatrix}$$

(3)$\boldsymbol{A}$ 为近于单位的变换(微变)

$\boldsymbol{A}\doteq\boldsymbol{E}$，由式(5.6.7)可见

$$a_{14}=1+\in_{14},$$

$$a_{2i},a_{1i},a_{24}\approx\in,$$

$\in$ 亦均为小数。由式(5.6.6)见 $\in_{14}=0$，由式(5.6.5)见

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + 2a_1 \wedge x + 2ia_2 x_4 \\ x_4' &= x_4 - 2ia_2 \cdot x, \end{aligned}\right\} \tag{5.6.33}$$

上式可写成

$$x_\alpha' = (\delta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) x_\beta$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \qquad \alpha = 1,2,3,4$$

形式，其中

$$-(\omega_{23},\omega_{31},\omega_{12}) = 2(a_{11},a_{12},a_{13}) = 2a_1$$

$$(\omega_{14},\omega_{24},\omega_{34}) = 2i(a_{21},a_{22},a_{23}) = 2ia_2$$

上面公式和式(5.4.28)相同，因之

$$a_1 = -\frac{1}{2}\omega, a_2 = \frac{1}{2C}V, \tag{5.6.34}$$

ω 为空间旋转小角，V 为原点速度，用四元数代表为

$$A = \left(-\frac{\omega}{2} + i\frac{V}{2C}, 1\right) \tag{5.6.35}$$

此式与从式(5.6.20)及(5.6.32)直接得出的相合，由此得出

$$B = \left(+\frac{\omega}{2} + i\frac{V}{2C}, 1\right) \tag{5.6.36}$$

如用方阵(5.6.7)表示，则

$$A = \begin{Vmatrix} 1+\frac{i}{2}\left(-\omega_x + i\frac{V_x}{C}\right), -\frac{1}{2}\left(-\omega_y + i\frac{V_y}{C} + \frac{i}{2}\left(\omega_x + i\frac{V_x}{C}\right)\right. \\ \frac{1}{2}\left(-\omega_y + i\frac{V_y}{C} + \frac{i}{2}\left(\omega_x + i\frac{V_x}{C}\right), 1 - \frac{i}{2}\left(-\omega_z + i\frac{V_z}{C}\right)\right. \end{Vmatrix} \tag{5.6.37}$$

或

$$A = \begin{Vmatrix} 1+\frac{i}{2}(-\omega_{12}+\omega_{34}), -\frac{1}{2}(-\omega_{31}+\omega_{24}) + \frac{i}{2}(-\omega_{23}+\omega_{14}) \\ \frac{1}{2}(-\omega_{31}+\omega_{24}) + \frac{i}{2}(-\omega_{23}+\omega_{14}), 1 - \frac{i}{2}(-\omega_{12}+\omega_{34}) \end{Vmatrix} \tag{5.6.38}$$

由式(5.5.18)定义的方阵 i,j,k,E，上式可写成

$$A = E - \frac{1}{2}(i\omega_{23} + j\omega_{31} + k\omega_{12}) + \frac{1}{2}(i\omega_{14} + j\omega_{24} + k\omega_{34}) \tag{5.6.39}$$

与 i,j,k 特别表示(5.5.18)无关的形式。

(4)时间反射

我们在找出

$$X' = AXA^*$$

形式的时候，以 $\lambda = +1$，式(5.6.2)不考虑时间反射问题，现在补充这方面的变换，由式(5.6.4)见，在 B 前如加负号，则时间空间即全部反射，特别以

$$a_1 = a_2 = 0, b_{14} = -a_{14}, a_{24} = 0,$$

则

$$x' = -x, \qquad x_4' = -x_4, \tag{5.6.40}$$

条件 $|A| = 1$，限制 $a_{14} = \pm 1$，因之

$$\left.\begin{aligned}(x', x'_4) &= (0,1)(x, x_4)(0, -1)\\ (x', x'_4) &= (0, -1)(x, x_4)(0,1)\end{aligned}\right\}, \tag{5.6.41}$$

均代表时空同时的反射。式(5.6.41)的两个形式实际上是一样的(本来在取 $|A| = 1$ 时就有 $\pm A$ 的两个可能性)。

一般对

$$t' = -t \tag{5.6.42}$$

的解答，也可以直接从式(5.6.4)求出。事实上在式(5.6.40)时空反射之后，再加一个空间 180°的旋转(5.6.18)，则使

$$x'' = -x' + 2a_0(a_0 \cdot x'), \tag{5.6.43}$$

a_0 为任何空间方向的单位矢量。如 a_0 在 z 方向，上述方程为

$$x''_1 = -x'_1, x''_2 = -x'_2, x''_3 = x'_3. \tag{5.6.44}$$

所以

$$x''_1 = x_1, x''_2 = x_2, x''_3 = -x_3, t'' = -t$$

这样就只剩 z 轴与 t 轴的反射，但是单单时间反射

$$x' = x, t' = -t \tag{5.6.45}$$

不能从

$$X' = AXB \tag{5.6.46}$$

的形式得出。此时要求

$$|L| = -1,$$

而此条件与式(5.6.46)为根本矛盾的条件。

§5.7 洛伦兹变换的群性

洛伦兹实数变换

$$X' = AX\tilde{A}^*, \tag{5.7.1}$$

再经一次变换后

$$X'' = BX'\tilde{B}^* = BAX\tilde{A}^*\tilde{B}^* \tag{5.7.2}$$

因

$$(\widetilde{BA})^* = \tilde{A}^*\tilde{B}^*$$

故上式为

$$X'' = CX\tilde{C}^* \tag{5.7.3}$$

换言之,洛伦兹实数变换有群性,称洛伦兹群。

由上节我们见空间旋转为么正方阵

$$X' = AXA^{-1} \qquad 5.7.4$$

经两度旋转后,

$$X'' = BX'B^{-1} = BAXA^{-1}B^{-1}.$$

由于

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1},$$

所以

$$X'' = CXC^{-1}, \quad C = BA \tag{5.7.5}$$

式(5.7.5)仍属式(5.7.4)的形式,因而纯空间旋转亦有群性。此为洛伦兹变换中的"子群"。因式(5.6.20)

$$A = (-a_0\sin\frac{\theta_1}{2}, \cos\frac{\theta_1}{2}), B = (-b_0\sin\frac{\theta_2}{2}, \cos\frac{\theta_2}{2}),$$

$$C = (-C_0\sin\frac{\theta_3}{2}, \cos\frac{\theta_3}{2})$$

则由式(5.5.4)得

$$C_0\sin\frac{\theta_3}{2}=-\boldsymbol{b}_0\wedge\boldsymbol{a}_0\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\boldsymbol{b}_0\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\boldsymbol{a}_0\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} \tag{5.7.6}$$

此为连续两空间旋转的组合方程，由 $\boldsymbol{b}_0\wedge\boldsymbol{a}_0$ 项的出现，可见除非两旋转轴平行(或者 θ_1,θ_2 均为小角，其交叉项可略去)则空间旋转不具交换性。

设 S' 轴与 S 轴平行，则速度交换为厄密方阵

所以

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AXA} \tag{5.7.7}$$

但在再经一次速度变换之后，(S''轴与 S' 轴平行)

$$\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{BX}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BAXAB} \tag{5.7.8}$$

上式除非二速度方向平行($\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}=0$)，则一般

$$\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{AB}$$

换言之，式(5.7.8)不再是速度变换形式(S''与 S 轴不平行)：

$$\boldsymbol{X}''\neq\boldsymbol{CXC};$$

所以纯速度变换不能成子群。但可将 S' 坐标加以适当的空间旋转，使之仍成为式(5.7.7)的形式。换言之，找出 R，使

$$\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{BX}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BR}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{CXC}, \tag{5.7.9}$$

上式要求 R 满足

$$\boldsymbol{BRA}=\boldsymbol{AR}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \tag{5.7.10}$$

的条件，由此也可以求出 R，以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为已知数，

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}=(i\boldsymbol{a},a_4),\boldsymbol{B}=(i\boldsymbol{b},b_4),\\&\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r},r_4),\boldsymbol{R}^{-1}=(-\boldsymbol{r},r_4)\end{aligned}\right\} \tag{5.7.11}$$

将式(5.7.10)乘出，可仿抄式(5.5.15)，得出条件

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})+r_4((\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})+\boldsymbol{r}(a_4b_4-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0\\&b_4(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})-a_4(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})=0\end{aligned}\right\} \tag{5.7.12}$$

上式的解答可以算出为

$$\boldsymbol{r}=\frac{r_4}{(a_4b_4-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a})$$

又由于 $\boldsymbol{r}^2+r_4^2=1$，

上式可写成

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}}{\sqrt{a^2b^2+a_4^2b_4^2-2a_4b_4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}}=-\boldsymbol{r}_0\sin\frac{\theta}{2} \tag{5.7.13}$$

决定 S' 轴必须旋转的方向 $\boldsymbol{r}_0$ 及旋转的角度 θ，可举一个简单例子说明。设 S' 对 S 为 $\boldsymbol{V}$，S'' 对 S' 为 $\triangle\boldsymbol{V}'$，$\triangle$ 为小数，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V}_0\sinh\frac{\theta}{2},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_0\sinh\frac{\varphi}{2}=\boldsymbol{b}_0\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\triangle\boldsymbol{V}',$$

$$\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}_0\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\triangle\boldsymbol{V}'\wedge\boldsymbol{V}_0\tanh\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\triangle\boldsymbol{V}'\wedge\boldsymbol{V}}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})$$

或旋转微角为

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{r}_0\psi=-\frac{\triangle\boldsymbol{V}'\wedge\boldsymbol{V}}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \tag{5.7.14}$$

如 S'' 原点对 S 的速度为 $\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V}$，则由式(3.1.7)得出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\triangle\boldsymbol{V}'\sqrt{1-\beta^2}+\boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{V}'}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})-\boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{V}'}{C^2},$$

所以

$$\boldsymbol{\Omega}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) \tag{5.7.15}$$

此即 Thomas 进动，方程(5.4.39)这种微数的简单情形可从其它方法直接算出，但是在有限旋转(5.7.13)情形下*，别的方法就难以应用了。

上面这个例子其实是从 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 直接求 $\boldsymbol{R}$，则由式(5.7.10)可消

---

* 作者相信关系式(5.7.13)是首次在文献中导出

去 $\boldsymbol{B}$,得

$$\boldsymbol{RA^{-1}C = CA^{-1}R^{-1}}$$

或

$$\boldsymbol{C^{-1}RA^{-1} = A^{-1}R^{-1}C^{-1}}$$

以 $\boldsymbol{C}=(i\boldsymbol{C},C_4)$,与式(5.7.10)比较则得公式

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2 + a_4^2c_4^2 - 2a_4C_4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}} \tag{5.7.16}$$

我们也可以旋转 S''坐标使 S''与 S 轴平行,成通常速度变换:

$$\boldsymbol{X'''} = \boldsymbol{RX''R^{-1}} = \boldsymbol{RBAXABR^{-1}} = \boldsymbol{DXD} \tag{5.7.17}$$

此时,R 的 r 可以仿上面的方法解出为

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + a_4^2b_4^2 + 2a_4b_4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}} \tag{5.7.18}$$

此式可留予读者自证。

我们可以用方程(5.7.13)变换式 (2.5.15)来验证上面的公式,由式(2.5.15)

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}, y'' = \frac{y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} + \frac{uV}{C^2}x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \\ z'' &= z, \qquad t'' = \frac{t - \frac{V}{C^2}x - \frac{u}{C^2}y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{5.7.19}$$

此处 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等数值为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i}\sinh\frac{\theta}{2}, \sinh\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)}, \\ a_4 &= \cosh\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}+1\right)} \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{j}\sinh\frac{\Phi}{2}, \sinh\frac{\Phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}-1\right)}, \\ b_4 &= \cosh\frac{\Phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}+1\right)} \end{aligned}\right\} \tag{5.7.20}$$

以之代入式(5.7.13),得出旋转角 ψ 为

$$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{k}_0\sin\frac{\psi}{2} = \frac{-\boldsymbol{h}\sinh\frac{\Phi}{2}\sinh\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sinh^2\frac{\theta}{2}\sinh^2\frac{\Phi}{2}+\cosh^2\frac{\theta}{2}\cosh^2\frac{\Phi}{2}}}$$

因之,旋转方向为 $\boldsymbol{h}$ 即 z 方向,其旋转角 ψ 为

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}+\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

$$\sin\psi = \frac{uV}{C^2\left(1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)}$$

旋转得的 S' 轴

$$\overline{x'} = x'\cos\psi + y'\sin\psi, \overline{y'} = -x'\sin\psi + y'\cos\psi, \overline{z'} = z', \overline{t'} = t'$$

这样使

$$x'' = \bar{x}' = \frac{x\left(1+\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right)+\frac{uV}{C^2}y-Vt\left(1+\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

$$y'' = \frac{\bar{y}' - u\bar{t}'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}} = \frac{y\left(1+\frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}\right)+\frac{uV}{C^2}x-ut\left(1+\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

$$z'' = z,$$

$$t'' = \frac{t' - \frac{u}{C^2}\bar{y}'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u2}{C2}}\sqrt{1-\frac{V2}{C2}}}\left(1-\frac{u2V2}{C^2}+\sqrt{1-\frac{u2}{C2}}\sqrt{1-\frac{V2}{C2}}\right)\quad\frac{Vx}{C2}\left[1+\frac{\sqrt{1-\frac{u2}{C2}}}{\sqrt{1-\frac{V2}{C2}}}\right]-\frac{uy}{C2}\left[1+\frac{\sqrt{1-\frac{V2}{C2}}}{\sqrt{1-\frac{u2}{C2}}}\right]}{1+\sqrt{1-\frac{u2}{C2}}\sqrt{1-\frac{V2}{C2}}}$$

与方程(2.5.7)比较可见此时 S 轴与 S''轴平行，确系速度变换，其相对速度 W_x, W_y 为

$$\left.\begin{aligned}\frac{W_x}{\sqrt{1-\frac{W^2}{C^2}}}&=\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}+\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},\\ \frac{W_y}{\sqrt{1-\frac{W^2}{C^2}}}&=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}\frac{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}+\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}$$

(5.7.21)

假使用公式(5.7.18)旋转 S''坐标(此地用 a、$b=0$,故旋转角相同,亦为 ψ),则

$$\overline{x}''=x''\cos\psi+y''\sin\psi$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{u^2}{C^2}+\frac{u^2V^2}{C^4}+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)+\frac{uV}{C^2}y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)}$$

$$-\frac{Vt}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

$$\overline{y}''=-x''\sin\psi+y''\cos\psi$$

$$=\frac{x\frac{uV}{C^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}+y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)}$$

$$-\frac{ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}},$$

$$\overline{z}''=z,$$

$$\bar{t}'' = t'' = \frac{t - \frac{Vx}{C^2} - \frac{u}{C^2}y\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

此亦系速度变换形式(2.5.7)其相对速度 W_x, W_y 为

$$\frac{W_x}{\sqrt{1-\frac{W^2}{C^2}}} = \frac{V}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

$$\frac{W_y}{\sqrt{1-\frac{W_2}{C^2}}} = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C^2}}}$$

上式可解出，得简单的关系

$$W_x = V, W_y = u\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} \qquad (5.7.22)$$

这一个 W 的绝对值当然和式(5.7.21)W 的绝对值相同，只是分量不同而已。

第六章　N 维空间笛卡儿张量

§6.1　导言及张量定义

在物理定律中，亦即在几种物理量的相互关系中，不应渗入任意的人为的主观因素，例如量尺单位大小的选择，以及坐标的选择均是人为的因素，因之均不应影响物理定律。

这样给物理定律提供了某些限制性，也就是说提供了某些寻找定律规律的方法。例如不随量尺单位大小的改变就要求一个方程两边的量纲相同。用这种数字方法寻找物理定律的方法称"量纲分析法"，大家也或多或少的熟悉它的用途。

不受坐标选择影响的数学方法在十九世纪末由 Ricci(1892) 加以系统的研究，称张量分析法。这样找出的方程对坐标的变换"具有协变性"。本书内主要研究不同方向的笛卡儿坐标情形，此可称"狭义"张量或"笛卡儿张量"。

张量的起源由于我们所熟悉的矢量而加以推广。例如三维空间速度矢量 $V(i=1,2,3)$ 当坐标转变时(dt 不变量)

$$V_i' = \frac{\mathrm{d}x'_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}V_j \qquad (6.1.1)$$

V_i' 与 V_i 为线型联系，其系数为 x_i 的微分转换系数。再如加速度 a_i'

$$a_i' = \frac{\mathrm{d}V_i'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 x_i'}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}V_j$$

$$= \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}a_j + \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_j \partial x_k}V_jV_k \qquad (6.1.2)$$

上式在

$$\frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{6.1.3}$$

时(如笛卡儿坐标变换,即是如此),亦与加速 a_i 成一如式(6.1.1)式的线型联系,因之牛顿第二定律(古典式的)在笛卡儿坐标中

$$F'_i = ma'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} ma_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} F_j, \tag{6.1.4}$$

不受人为选择坐标方向影响的条件是 F_i 也应如式(6.1.1)的变换:

$$F'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} F_j \tag{6.1.5}$$

这样,方程

$$F_i = ma_i \tag{6.1.6}$$

在 S' 系就仍变成("协变性")

$$F'_i = ma'_i \tag{6.1.7}$$

因之"协变性"的方程要求在坐标变换时,方程两边的物理量必具同样的变换形式。下面对这些物理量的变换作具体的研究。

不管在多少维的空间内,凡是 A^α 的变换与 $\mathrm{d}x^\alpha$ 变换相同的(变换相同的常以~符号代表)

$$A^\alpha \sim \mathrm{d}x^\alpha \tag{6.1.8}$$

均称矢量(严格称抗变矢量),因

$$\mathrm{d}x^{\alpha'} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x_\beta} \mathrm{d}x_\beta, \tag{6.1.9}$$

故抗变矢量的转变为

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x_\beta} A_\beta \tag{6.1.10}$$

我们将指标 α 写在上面的原因是由于 $\partial x'^\alpha$ 的 α 在分数上面。因符号

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}=\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

则凡是物理量 B_α 变换关系如

$$B_\alpha\sim\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{6.1.11}$$

亦即

$$B'_\alpha=\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}B_\beta \tag{6.1.12}$$

的也称矢量。唯称"协变"矢量，以区别于式(6.1.10)的"抗变"矢量。此处 α 写在下面的原故是由于 dx'_α 中的 α 在分数下面，在笛卡儿坐标转变中

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}=\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \tag{6.1.13}$$

两者均为 x'_α 轴与 x_β 轴所成夹角的余弦；因之"协变"(6.1.12)与"抗变"(6.1.10)的变换式完全相同，指标写在上面或写在下面也没有分别，但在其它坐标变换的情况下，则两者完全不同，需加以区别。

N 维张量的定义如下：设物理量 T 的分量以

$$T^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma}\qquad \alpha,\beta\cdots\gamma \text{ 均取 } 1、2、3\cdots N$$

值代表，设在坐标变换时 T 的转变为

$$T'^{\xi\eta\cdots}_{\cdots\zeta}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\eta}{\partial x_\beta}\cdots\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\zeta}\cdots T^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma} \tag{6.1.14}$$

则 T 称为张量，其抗变指标为 $\xi,\eta\cdots$，协变指标为$\cdots\zeta\cdots$。指标的个数 n 即右方$\frac{\partial x'}{\partial x}$或$\frac{\partial x}{\partial x'}$的次数称为张量的"阶"数(式中 $\xi,\eta,\zeta\cdots$等希腊字母亦分别取 1、2、3$\cdots N$ 等值)，所以一共有 N_n 个方程关系都是这样变换，例如 T^ξ 称一阶张量，$T^{\xi\eta}$称二阶张量，$T^{\xi\eta}_\zeta$ 称三阶张量等等。张量包括普通矢量，一阶张量及标量

$$\Phi'=\Phi$$

所谓"零阶"张量在内。现在举几个例子。

1. dx^α本身为一阶抗变张量(矢量);式(4.1.21),式(4.2.15)亦均为矢量。

2. 两微矢量 $dx^\alpha, \delta x^\alpha$ 的乘积

$$dx^{\alpha'}\delta x^{\beta'} = \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta}dx^\xi dx^\eta \tag{6.1.15}$$

为二阶抗变张量,其"面积"

$$(dx^{\alpha'}\delta x^{\beta'} - dx^{\beta'}\delta x^{\alpha'}) = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\xi}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\eta}(dx^\xi\delta x^\eta - dx^\eta dx^\xi) \tag{6.1.16}$$

亦为二阶抗变张量。

3. Kronecker 符号

$$\delta_\eta^\xi = \begin{matrix} 0 & \xi \neq \eta \\ 1 & \zeta = \eta \end{matrix} \tag{6.1.17}$$

亦具二阶张量性质,因

$$\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\eta}{\partial x_\beta'}\delta_\eta^\xi = \sum_\xi \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\xi}{\partial x_\beta'} = \delta'^\alpha_\beta \begin{matrix} = 0 & \alpha \neq \beta \\ = 1 & \alpha = \beta \end{matrix} \tag{6.1.18}$$

以之与式(6.1.14)相比较,相应地改换 α、β、ξ、η 字母,可见 Kronecker 符号 δ_η^ξ 符合抗变 ξ,协变 η 的二阶张量定义。

张量(6.1.14)的定义具有"群性",今可举抗变矢量为例。因为

$$T''^\xi = \frac{\partial x''_\xi}{\partial x'_\alpha}T'^\alpha = \frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\alpha'}\frac{\partial x_2'}{\partial x_\beta}T^\beta, \tag{6.1.19}$$

由于

$$\sum_\alpha \frac{\partial x''_\xi}{\partial x_\alpha'}\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\beta} = \frac{\partial x_\xi''}{\partial x_\beta},$$

所以上式为

$$T''^{\xi} = \frac{\partial x''_{\xi}}{\partial x_{\beta}} T^{\beta}, \tag{6.1.19}$$

也符合式(6.1.14)的定义。其它较复杂的张量也可以类似的证明。从上面可以看出这种群性是必需的。否则式(6.1.14)定义的本身就会暴露矛盾。

由式(6.1.14)可见，假使有两个物理量 T 及 S，其各个分量均为同 n 阶同型的张量，则 Nn 个方程

$$T^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma} = S^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma}, \tag{6.1.20}$$

经坐标变换后仍旧成为 Nn 个

$$T'^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma} = S'^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma}$$

方程。换言之，方程(6.1.20)不随坐标的改变而改变，亦即具有协变性质。

张量的符号和计算在稍加练习之后，就可运用自如，但初学者必须自做习题，否则，尤其傀标，很难弄清。现在给出三个习题。

例题 6.1.1

仿

$$\mathrm{d}x_1' = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_4}\mathrm{d}x_4,$$

$$\delta x_1' = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\delta x_3 + \frac{\partial x_1'}{\partial x_4}\delta x_4,$$

将

$$(\mathrm{d}x_1'\delta x_2' - \mathrm{d}x_2'\delta x_1')$$

全部写出后再和式(6.1.16)比较，看有什么值得注意之处，再独立地写出

$$(\mathrm{d}x_\alpha'\delta x'_\beta - \mathrm{d}x_\beta'\delta x_\alpha') = ?$$

设 $\alpha=\beta$，则右边如何？

例题 6.1.2

设 A^α 为抗变矢量，B_α 为协变矢量，将乘积 $A^\alpha B_\beta$ 的十六个分量全部写出，并证 $A^\alpha B_\beta$ 为二阶张量，证 $\sum_\alpha A^\alpha B_\alpha$ 是标量。

例题 6.1.3

证明在式(5.4.27)只有空间旋转的变换时，一四维张量 $T_{\alpha\beta}$ 的变换为

$$T_{i4}' = a_{ij}T_{i4}, T_{44}' = T_{44},$$

$$T_{ij}' = a_{ik}a_{jl}T_{kl}, T_{4i}' = a_{ij}T_{4j}.$$

换言之，时空部分为两个三元矢量，时间部分为一标量，空间部分为一空间三元张量。

§6.2 张量的基本性质

式(6.1.14)的张量变换的特点为只包括物理分量

$$T_{\cdots 1}^{11\cdots}, T_{\cdots 1}^{12\cdots}, T_{\cdots 1}^{13\cdots}$$

$$T_{\cdots 2}^{11\cdots}, T_{\cdots 2}^{12\cdots},$$

的线型组合。因之，

定理一 同阶同型(抗或协)的张量的相应分量可以互相加减，而成一新的同阶同型张量。从式(6.1.14)看出，同阶同型张量的任一个分量转换时的因数 $\partial x_\xi'/\partial x_\alpha\cdots$ 等值相同，所以在加减时可以取出。例如

$$T_{\cdots\gamma}^{\alpha\beta\cdots} - S_{\cdots\gamma}^{\alpha\beta\cdots}, \tag{6.2.1}$$

在一撇系统 S' 中变换为

$$(T'^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma} - S'^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma}) = \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\eta}\cdots\frac{\partial x_\zeta}{\partial x'_\gamma}(T_{\cdots\zeta}^{\xi\eta\cdots} - S_{\cdots\zeta}^{\xi\eta\cdots}) \quad (6.2.1)'$$

设式(6.2.1)为零，则式(6.2.1)′亦为零，保持物理关系不变，亦即上述张量方程具有与坐标选择无关的“协变性”。

张量乘以标量 Φ 之后明显的仍为同阶同型的张量，此无需证

明。

定理二　两张量的分量互乘后，予以适当排列则成为高次张量。例如，有 A^{α}，$\beta_{\beta\gamma}$ 两张量，则其分量的互乘

$$A'^{\xi}B'_{\eta\zeta}=\frac{\partial x'_{\xi}}{\partial x_{\alpha}}A^{\alpha}\frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\eta}}\frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\zeta}}B_{\beta\gamma}$$

$$=\frac{\partial x_{\xi}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial \eta_{\beta}}{\partial x'_{\eta}}\frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\zeta}}A^{\alpha}B_{\beta\gamma} \qquad (6.2.2)$$

为一三阶张量

定理三　张量本身的分量交换同型指标后的互相加减（并可在某分项前乘以标量），仍为同阶的张量。例如

$$T_{\xi\eta\zeta}'+\Phi' T_{\eta\xi\zeta}'=\frac{\partial x_{\xi}'}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x_{\eta}'}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\zeta}'}{\partial x_{\gamma}}T_{\alpha\beta\gamma}+\Phi'\frac{\partial x_{\eta}'}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x_{\xi}'}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\zeta}'}{\partial x_{\gamma}}T_{\alpha\beta\gamma}$$

交换右方第二式的傀标 α、β，得

$$T_{\xi\eta\zeta}'+\Phi' T_{\eta\xi\zeta}'=\frac{\partial x_{\xi}'}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial x_{\eta}'}{\partial x_{\beta}}\frac{\partial x_{\zeta}'}{\partial x_{\gamma}}(T_{\alpha\beta\gamma}+\Phi T_{\beta\alpha\gamma}) \qquad (6.2.3)$$

定理四　设取一高阶张量中某一抗变指标与另一协变指标相同的分量相加后，则成一低两阶的张量。

例如三阶张量中

$$\sum_{\beta}T^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\beta}=\frac{\partial x_{\alpha}'}{\partial x_{\xi}}\frac{\partial x_{\beta}'}{\partial x_{\eta}}\frac{\partial x_{\zeta}}{\partial x_{\beta}}T^{\xi\eta}_{\cdot\cdot\zeta}$$

$$=\sum_{\eta}\frac{\partial x_{\alpha}'}{\partial x_{\xi}}T^{\xi\eta}_{\cdot\cdot\eta} \qquad (6.2.4)$$

降为一阶张量，此称张量的“降秩”。

以上四个性质不管坐标如何转变均能成立，但在笛卡儿张量中，由于笛卡儿坐标转变的系数为常数。因之

定理五　任何笛卡儿张量的全微分仍为同性质的张量。

因为

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial x_{\alpha}'}{\partial x_{\xi}}\right)=0$$

微分式(6.1.14)

所以 $$dT'^{\xi\eta\cdots}_{\cdots\zeta}=\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\eta'}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\zeta}\cdots dT^{\alpha\beta\cdots}_{\cdots\gamma}$$

定理六　笛卡儿张量对坐标偏微分后的分量为高一阶的张量。

$$\frac{\partial T'^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x'_\delta}=\cdots\frac{\partial x_\rho}{\partial x_\delta}\frac{\partial}{\partial x_\rho}T^{\cdots}_{\cdots} \tag{6.2.5}$$

由于右方加一个因子

$$\frac{\partial x_\rho}{\partial x_\delta},$$

因之是高一阶的张量。以上六个定理已包含本书中所用张量的一切性质。

由定理六及定理四可见

$$\sum_\alpha A_\alpha B_\alpha,\ \sum_\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha},\ \sum_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\Phi \tag{6.2.6}$$

均为标量。

$$T^{\alpha\beta}A_\alpha\qquad\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta},\ \sum_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}A^\beta \tag{6.2.7}$$

均为矢量。由定理三见

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha},T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha},T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha},T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\beta\alpha\gamma}+T_{\gamma\alpha\beta}$$

均为张量;张量

$$T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\beta\alpha\gamma}$$

为对 α,β 对称的张量,张量

$$T_{\alpha\beta\gamma}-T_{\beta\alpha\gamma}$$

为对 α,β 反对称的张量,读者可自加证明。

定理七　任两同型指标对称或反对称张量的性质不因坐标变换而变换。由于

$$S'_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta}\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\zeta}S_{\xi\eta\gamma}, \tag{6.2.9}$$

$$S'_{\beta\alpha\gamma}=\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\eta}\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\zeta}S_{\xi\eta\gamma}=\frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta}\frac{\partial x_\gamma'}{\partial x_\zeta}S_{\eta\xi\gamma},\quad(6.2.10)$$

所以，当 $S_{\xi\eta\gamma}=S_{\eta\xi\gamma}$ 时，$S_{\alpha\beta\gamma}'=S_{\beta\alpha\gamma}'$。同样，设 $S_{\xi\eta\gamma}=-S_{\eta\xi\gamma}$，则 $S'_{\alpha\beta\gamma}=-S'_{\beta\alpha\gamma}$。

现研究 Levi-Civita N 维空间的一个特殊反对称张量。

如有依 1，2，3，…N 顺次排列的数字，今将以上任意两个数字的次序予以调换，例如调换 2 及 4 的次序，使成 1，4，3，2，5…N；如再调换一次例如在上式再调换 4 及 3 成为 1，3，4，2，5…N 等等。凡调换奇数次数的称“奇调换”，不调换的以及偶数次数调换的均称“偶调换”（例如一个行列式的行或列，经过奇调换后的行列值，为原行列值的负数，但经过偶调换后的数值的则不变）。

今定义 Levi-Civita 的 $\in$ 为

$$\left.\begin{aligned}&=1，设\ \alpha、\beta、\gamma、\delta\cdots\ 数字的次序为\ 1、2、3、4\cdots N\ 或其偶调换\\ \in^{\alpha\beta\gamma\delta}&=-1，设\ \alpha、\beta、\gamma、\delta\cdots\ 数字的次序为\ 1、2、3、4\cdots N\ 的奇调换\\ &=0，设\ \alpha，\beta\cdots\ 数字有三个或二个以上的相同\end{aligned}\right\}\quad(6.2.11)$$

例如在三维空间内

$$\left.\begin{aligned}\in^{123}=\in^{312}=\in^{231}&=1\\ \in^{213}=\in^{132}=\in^{321}&=-1\end{aligned}\right\}\quad(6.2.12)$$

其余如

$$\in^{111}=\in^{112}=\in^{113}=\in^{212}=\cdots=0$$

这种 $\in$ 在写行列式时颇为便利，例如行列式可写成下式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\in^{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}$$

在 N 维空间中任一 N 行列式均可写成下列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} \quad \cdots a_{NN} \end{vmatrix} = \in^{\alpha\beta\gamma\cdots} a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots = \in^{\alpha\beta\gamma\cdots} a_{\alpha 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \cdots$$

(6.2.13)

我们现在看数值

$$\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\eta'}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\zeta'}{\partial x_\gamma} \cdots \in^{\alpha\beta\gamma\cdots},$$

此为 N 行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_\xi'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_\xi'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_\xi'}{\partial x_3} \cdots \\ \dfrac{\partial x'_\eta}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_\eta}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_\eta}{\partial x_3} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdots \end{vmatrix} \tag{6.2.14}$$

的数值。设上式 $\xi,\eta,\zeta\cdots$ 等字中有任二字或二个以上字相同则其值为零。设 $\xi,\eta,\zeta\cdots$ 的次序为 $1,2,3\cdots N$ 或其偶调换，则其值为 $+J$。

$$J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3 \cdots)}{\partial(x_1, x_2, x_3 \cdots)} \tag{6.2.15}$$

设 $\xi,\eta,\zeta\cdots$ 的次序为 $1,2,3\cdots N$ 的奇调换，则其值为 $-J$。因之

$$\frac{\partial x'_\xi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\eta'}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\zeta'}{\partial x_\gamma} \cdots \in^{\alpha\beta\gamma\cdots} = J \in^{\xi\eta\zeta\cdots} \tag{6.2.16}$$

由定义(6.1.14)见 $\in$，除 J 因子之外，具有张量性质。因之通常称为"膺张量"。如坐标的变换只限于 $J=1$，则此膺张量即张量。在笛卡儿坐标转换时，因式(5,4,9)及式(5,4,10)，

$$x' = Lx = L^{\sim} x',$$

所以

$$J^2 = L^2 = 1,$$

$$J = \pm 1$$

于是，当变换限于 $J=|L|=+1$ 时，膺张量即张量。但若 $J=|L|=-1$ 时，膺张量与张量不同（$J=-1$ 为某一坐标的反射，例如 $x'=-x$）。

有时某种物理量在坐标变换时除 $\partial x'/\partial x$ 的系数外可能再乘以 J 的 n 次方，J^n。此种量称权 n 的膺张量。因 J(6.2.15)有下列性质

$$\frac{\partial(x'')}{\partial(x')}\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x'')}{\partial(x')} \tag{6.2.17}$$

所以这种“膺张量”亦具有“群”的性质。事实上，我们也可以把通常的张量作为权 $n=0$ 的“膺”张量。

由 $\in$，我们可以造成若干新的膺张量。例如三维空间的矢量乘积，

$$\in^{ijk} A_i B_j \tag{6.2.18}$$

即为一膺矢量，其矢量性质只限于不反射的坐标变换；三个矢量的“体积”

$$\in^{ijk} A_i B_j C_k = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{6.2.19}$$

也是一膺标量，其标量性质限于 $J=+1$ 的变换。

在四维空间，三个矢量 $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ 可成一膺矢量

$$V^\delta = \in^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\alpha B_\beta C_\gamma, \quad (\delta = 1,2,3,4) \tag{6.2.20}$$

而式(6.2.19)的空间体积只是它的时间分量，四个四维矢量可成一膺标量，

$$\in^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\alpha B_\beta C_\gamma D_\delta \tag{6.2.21}$$

此可称为四维"超体积"；在特别情形 $A_\alpha=(\mathrm{d}x_1,0,0,0)$，$B_\alpha=(0,\mathrm{d}x_2,0,0)$，$C_i=(0,0,\mathrm{d}x_3,0)$，$D_\alpha=(0,0,0,\mathrm{d}x_4)$之下，式(6.2.21)可蜕化为

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4, \qquad (6.2.21)'$$

所谓四维微体积。

两个矢量可组成反对称张量 $A_\alpha B_\beta-A_\beta B_\alpha$ 及一膺张量。

$$\sigma^{\gamma\delta}=\in^{\alpha\beta\gamma\delta}A_\alpha B_\beta \qquad (6.2.22)$$

其中 σ^i，$i=1、2、3$，三个分量为式(6,2,18)中的三项；$A_\alpha B_\beta$-$A_\beta B\alpha$ 或 $\sigma^{\gamma\delta}$亦称 A_α、B_β 所成的四维面积。

任何一个二阶张量 $F_{\gamma\delta}$在四维空间可利用$\in$产生一"缩合"膺张量。

$$G^{\alpha\beta}=\in^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \qquad (6.2.23)$$

式(6.2.22)亦即 $A_\alpha B_\beta$ 的缩合膺张量，其它张量或矢量亦有缩合膺张量或矢量。

膺张量与张量的性质不同。设 $F_{\alpha\beta}$张量，$H_{\alpha\beta}$为膺张量，则方程

$$F_{\alpha\beta}=H_{\alpha\beta} \qquad (6.2.24)$$

不能成立。因为当坐标的变换为 $J=-1$ 时，则此方程将变成

$$F_{\alpha\beta}'=-H_{\alpha\beta}'$$

换言之，方程(6.2.24)可以因人为的方向选择面改变，所以不能成为宇宙定律。但是，如方程两边全是膺张量，则也是协变方程。推广之，任何协变方程两边均应为同权的膺张量。

从张量的定义(6.1.14)可以看出张量是由几个矢量分量的乘积

$$A^\alpha B^\beta\cdots D_\gamma\cdots \qquad (6.2.25)$$

推广而来。指标的方法也就是按分量的指标次序写出。从这里看出颠倒指标的次序并不改变该张量的基本性质。

我们也可以用另外方法排列张量的分量。例如我们可以将二阶张量 $T_{\alpha\beta}=S_\xi$ $\xi=1、2、3、\cdots16$，写成十六个指标 $S_1,\cdots S_{16}$形式：

$$\left.\begin{aligned} &T_{11}\equiv S_1 \quad T_{12}\equiv S_2 \quad T_{13}\equiv S_3 \quad T_{14}\equiv S_4 \\ &T_{21}\equiv S_5 \quad T_{22}\equiv S_6 \quad T_{23}\equiv S_7 \cdots T_{44}\equiv S_{16} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.26}$$

这样做似乎不便表示变换的方程。不过有的时候也有用处。特别可以，例如，把一个张量和一个矢量“拼”成二十个分量的 Q_ξ，$\xi=1、2、\cdots、20$，而写出它们总的变换形式（二十行二十列的方阵）来加以研究。例如在微变情形下，Q_ξ 不管是怎样的组合，其变换必为

$$Q'_\alpha=(\delta_{\alpha\beta}+\Lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}W_{\gamma\delta})Q_\beta \tag{6.2.27}$$

形式。由于 $W_{\gamma\delta}$ 为微数，其平方可略去，$\Lambda^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ 必为不含 W 且对 $\gamma\delta$ 反对称的常系数；式(6.2.27)可以直接用来研究问题，参考方程(7.8.24)，简化了许多手续。

§6.3 四维矢量及二阶反对称张量的几个性质

在§5.2中已谈到三种矢量，

$$\left.\begin{aligned} &\text{时间性：}A_\alpha^2<0 \\ &\text{空间性：}A_\alpha^2>0 \\ &\text{零矢量：}A_\alpha^2=0 \end{aligned}\right\} \tag{6.3.1}$$

的不同性质。现在再证明凡是与时间性实数矢量 A_α“正交”

$$A_\alpha B_\alpha=0 \tag{6.3.2}$$

的矢量，除 B_α 全等于零之外，只有空间性矢量。为证明这个定理，我们用实数 A_0 代表 A_α 的时间部分，使 $A_0=-iA_4$，

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)\equiv(\boldsymbol{A},i\boldsymbol{A}) \tag{6.3.3}$$

所以

$$A_\alpha^2=\boldsymbol{A}^2-A_0^2, \tag{6.3.4}$$

$\boldsymbol{A}$，A_0 全为实数。设 A_α 为时间性矢量，则可选一适当坐标使 $\boldsymbol{A}'=0$ 而只剩 A'_0 部分，此时式(6.3.2)为

$$A'_0B'_0=0 \tag{6.3.5}$$

由于 $A'_0\neq0$，所以 $B'_0=0$

换言之，

$$B_\alpha^2=\boldsymbol{B}'^2-B'^2_0=\boldsymbol{B}'^2\geqslant 0$$

上式如为等号，则

$$B'_1=0 \qquad B'_2=0 \qquad B'_3=0 \qquad B'_0=0$$

B_α 是完全为零的东西。因之，除 B_α 完全为零之外，只有

$$B'^2_\alpha>0 \tag{6.3.6}$$

但上式为“标量方程”，不因坐标的变换而改变。因而，B_α 在任何坐标中必为空间性的矢量。

设 A_α 为零间性矢量，$\boldsymbol{A}^2=A_0^2$，则如 $B_\alpha(\boldsymbol{B},i\boldsymbol{B}_0)$ 与之正交

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-A_0B_0=0$$

或

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2=A_0^2B_0^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\cos^2\Phi=A_0^2\boldsymbol{B}^2\cos^2\Phi$$

所以

$$A_0^2(B_0^2-\boldsymbol{B}^2\cos^2\Phi)=0 \tag{6.3.7}$$

Φ 为三维空间矢量 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 所成的夹角。

由于 $A_0\neq 0$，否则 $\boldsymbol{A}^2=0$ 使 $A_1=0 \quad A_2=0 \quad A_3=0$ $A_0=0$，A_α 为全是零的量，

所以

$$B_0^2=\boldsymbol{B}^2\cos^2\Phi$$

因之

$$B_\alpha^2=\boldsymbol{B}^2-B_0^2=\boldsymbol{B}^2\sin^2\Phi\geqslant 0 \tag{6.3.8}$$

如 $\Phi=0$ 或 180°则 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 为同方向的三元矢量。

$$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{A},B_0^2=\boldsymbol{B}^2=\lambda^2\boldsymbol{A}^2=\lambda^2A_0^2$$

换言之，当式(6.3.8)为等号时，

$$B_\alpha=\lambda A_\alpha \tag{6.3.9}$$

除此之外，

$$B_\alpha^2=B^2-B_0^2>0 \tag{6.3.10}$$

换言之，B_α 为空间矢量。因之与零间性矢量正交的矢量，除与它本身同方向的零间性矢量外，也只有空间性矢量，但注意与空间性矢量正交的矢量就不能这样推定性质。因为我们尽可以选坐标使

$A'_1\neq 0$，其余为零，但这样只能结论 $B'_1=0$，而得不出标量方程来断定 B_α 的性质，事实上，各种性质的矢量都可以和空间性矢量“正交”。

我们可以将一切的矢量归一化为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{时间性} & A_\alpha^2=-1\\ \text{空间性} & A_\alpha^2=+1\\ \text{零间性} & A_\alpha^2=0\end{array}\right\} \tag{6.3.11}$$

三种。末了一种是定义，可以不必谈，其余两种如

$$A_\alpha^2=\pm K^2,$$

则由于 K 为标量，因之 A_2/K 亦为矢量，而

$$\left(\frac{A_\alpha}{K}\right)^2=\pm 1 \tag{6.3.12}$$

即“归一化”。我们现在再证明如有四个随坐标改变而改变的数字 B_α 与任一可变矢量 A_α 成

$$A_\alpha B_\alpha=C=A'_\alpha B'_\alpha \tag{6.3.13}$$

的标量关系，则 B_α 亦必为一矢量（唯如 $C=0$ 则可经过归一化手续）因

$$A'_\alpha B'_\alpha=C=\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}A_\beta B'_\alpha=A_\beta B_\beta,$$

所以

$$\left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}B'_\alpha-B_\beta\right)A_\beta=0 \tag{6.3.14}$$

既然 A_β 为可变数，四个 A_β 之间无联系存在，则上式表示

$$B_\beta=\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}B'_\alpha=\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha}B'_\alpha \tag{6.3.15}$$

因之，B_α 亦为矢量。但如 $C=0$，则式(6.3.13)为两个方程

$$A_\beta B_\beta=0,\ \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}A_\beta B'_2=0$$

所以

$$\left(B_\beta-\lambda B'_\alpha\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}\right)A_\beta=0 \tag{6.3.16}$$

λ 为一任意函数，由此只能结论

$$B_\beta=\lambda\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}B'_\alpha \tag{6.3.17}$$

B_α 并不一定为矢量。但如归一化 B_α 使

$$F_\alpha\equiv\frac{B_\alpha}{\sqrt{\pm B_\beta^2}} \tag{6.3.18}$$

根号内正负号的目的是使 F_α 为实数。为简便计，以下取正号，则由式(6.3.17)得

$$B_\beta^2=\lambda^2\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\beta}B'_\alpha B'_\gamma=\lambda^2B'^2_\beta,$$

$$F_\alpha=\frac{B_\alpha}{\sqrt{B_\beta^2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2B'^2_\beta}}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}B'_\alpha=\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}F'_\alpha \tag{6.3.19}$$

所以 F_α 为矢量。例如超面 $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ 上任何一段 $\mathrm{d}x_\alpha$ 满足

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3+\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}dx_4=0,$$

则 $\partial\Phi/\partial x_\alpha$ 经归一化后的矢量可称为该超面的法线余弦，式(6.3.18)$F_\alpha^2=+1$ 或 -1，视其空间性或时间性而定。

唯如 $B_\alpha^2=0$，则上述归一化手续不能进行，必须另外找 λ。

在式(3.3.1)中，波相的峰或谷为标量：

所以
$$\frac{\nu\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{x}}{u}-\nu t=C=\frac{\nu'\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{x}'}{u'}-\nu't';$$

因 x,t 经过坐标变换为矢量，所以

$$\left(\frac{\nu\boldsymbol{l}}{u},-\nu\right)$$

亦为矢量，可参考方程(3.3.7)。

以上方法在一定情况下可以推广到“与张量乘积为张量的，其本身亦必为张量”的理论。其证明方法相同，可以临时验算，此处不赘述。

在洛伦兹速度变换时，式(2.5.7)四维矢量的变换为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}'+\frac{A'_t\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{V})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}}-1\right)\\ A_t&=\frac{A'_t+\dfrac{(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{6.3.20}$$

形式。以上 $\boldsymbol{V}$ 为系统 S' 对系统 S 的相对速度，$A_t\equiv A_4/ic$。

比矢量稍为复杂点的是二阶反对称张量 $F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$，它在四维宇宙有六个不同的分量：

$$F_{12},F_{13},F_{23},F_{14},F_{24},F_{34},$$

所以 $F_{\alpha\beta}$ 亦称“六矢”。在三维空间，二阶反对称张量只有三个分量 $F_{ij}=-F_{ij}$；此时 F_{12},F_{23},F_{31} 通常亦混称三维矢量，实则为三维“膺”矢量，随坐标反射而改变符号(通称“轴矢量”)：

$$\frac{1}{2}\in^{ijk}F_{jk}=(F_{23},F_{31},F_{12})$$

我们在四维宇宙连系二阶反对称张量 $\boldsymbol{F}$ 一个二阶反对称膺张量 $\boldsymbol{F}^*$

$$F^*_{\alpha\beta}=\frac{i}{2}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \tag{6.3.21}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} F^*_{12}&=iF_{34},F^*_{23}=iF_{14},F^*_{31}=iF_{24}\\ F^*_{14}&=iF_{23},F^*_{24}=iF_{31},F^*_{34}=iF_{12} \end{aligned}\right\} \tag{6.3.21}'$$

以

$$\boldsymbol{B}=(F_{23},F_{31},F_{12}),\boldsymbol{A}=i(F_{14},F_{24},F_{34})$$

则

$$F_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iA_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iA_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iA_z \\ iA_x & iB_y & iA_z & 0 \end{Vmatrix} \quad F^*_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & A_z & -A_y & iB_x \\ -A_z & 0 & A_x & iB_y \\ A_y & -A_x & 0 & iB_z \\ -iB_x & -iB_y & -iB_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{6.3.22}$$

以 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$　　$\boldsymbol{F}^*=(\boldsymbol{B}^*,\boldsymbol{A}^*)$，则

$$\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{A},(\boldsymbol{F}^*)^*=-\boldsymbol{F} \tag{6.3.23}$$

在经空间旋转式(5.4.25)时，$F_{\alpha\beta}$的 $\boldsymbol{B}$ 的变换一如三维空间的赝矢量(6.3.21)。$\boldsymbol{A}$ 的变换为

$$F'_{\lambda\mu}=\frac{\partial x_\lambda'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\mu'}{\partial x_\beta}F_{\alpha\beta}=\frac{\partial x_\lambda'}{\partial x_i}F_{i\mu}$$

因之，$\boldsymbol{A}$ 亦为三维矢量。但经过洛伦兹速度变换后，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 混杂。以式(2.5.7)代入得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}'&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\boldsymbol{B}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B})(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}\\ \boldsymbol{A}'&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\boldsymbol{A}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}\end{aligned}\right\} \tag{6.3.24}$$

的变换公式。由上式可见

$$(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}')=(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}),(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{6.3.25}$$

换言之，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 方向的分量不受速度变换的影响。运算式(6.3.24)时可以看出我们在 $F_{\alpha\beta}$的 F_{i4}前加 i 的符号的原因是保持实数到实数的变换。由式(6.3.23)得出两个标量

$$\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}'^2-\boldsymbol{A}'^2 \tag{6.3.26}$$

$$\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^*_{\alpha\beta}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}' \tag{6.3.27}$$

换言之，两个三维矢量绝对值平方之差为不随洛伦兹转换而改变

的标量〔和式(6.3.4)比较看〕，同样这两个矢量的三维标量积，也不因洛伦兹转换而改变(如该两个空间矢量原来是垂直的，则在洛伦兹转换后或者仍是垂直或者一个为零)。电磁场和角动量都是这样的二阶反对称张量。两个四维矢量的乘积(图 6.1)

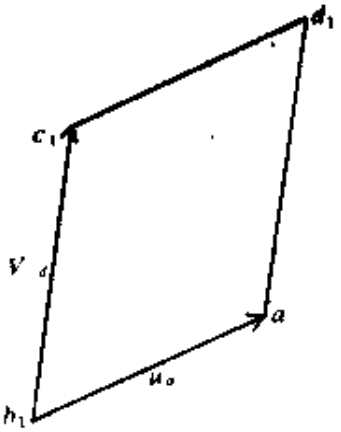


图 6.1

$$F_{\alpha\beta}=u_\alpha V_\beta-u_\beta V_\alpha \quad (6.3.28)$$

也是一种二阶反对称张量。式(6.3.28)的几何意义很明显，F 为两个四维矢量 $u_\alpha V_\beta$ 所成的“面积”，$F_{\alpha\beta}$ 为此“面积”在六个平面(12,23,31,14,24,34)上的“投影面积”(图 6.2)。

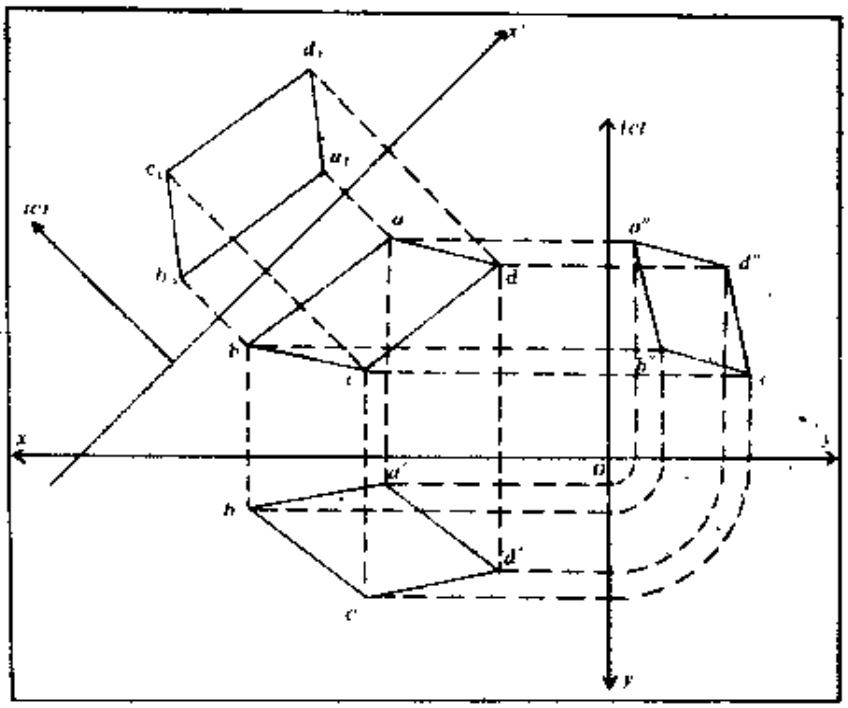


图 6.2

其分量(23,31,12)为纯空间部分投影，其(14,24,34)部分为时空

面上的投影。当坐标改变时投影的分量也改变，但如仅有空间坐标的改变，而时间坐标不动，则空时部分的绝对值$|A|$和空间部分的绝对值$|B|$。不应有所改变，一如在三维空间面积投影，当 xy 面转动时只有 xz，yz 投影互相改变，而 xy 面上投影不变的情形。式(6.3.28)的绝对值为

$$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2\{u^2V^2 - (u_\alpha V_\alpha)^2\} = 2u^2V^2\sin^2\theta \quad (6.3.29)$$

θ 为 $u_\alpha V_\alpha$ 所成的四维"角度"，2 的因子是由于 $F_{12}F_{12}$ 及 $F_{21}F_{21}$ 算了两次的原故。可以计算出式(6.3.28)满足

$$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}^* = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \quad (6.3.30)$$

〔由于 $F_{\alpha\beta}^*$，式(6.3.21)相当于该面的缔合面积(好象三维空间面的缔合矢量一样)，所以式(6.3.30)的结果是可以了解的〕。因之式(6.3.28)实为一种特殊的反对称张量。一般二阶反对称张量并不一定满足式(6.3.30)的条件。在式(6.3.28)的情形，我们可以选 x_1、x_2 或 x_1、x_4 轴使在 u_α、V_α 的平面上，这样 $F_{\alpha\beta}$ 只剩一个分量 F_{12} 或 F_{14} 了，(图 6.2)。不过只仅是限于这种特殊六矢，满足式(6.3.30)的情形，一般并不能如此选择。现在证明在任何情形下，我们可以选择适当的坐标，使任何"六矢"$F_{\alpha\beta}$ 只含两个分量。因为在任何情形下，$F_{\alpha\beta}$ 总可分成两个三维矢量 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}$(6.3.22)。今设 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，则我们可以使 $\boldsymbol{A}$ 为 x' 轴，$\boldsymbol{B}$ 为 y' 轴，则 F 剩二个分量，

$$F_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -B'_y & -iA'_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +B'_y & 0 & 0 & 0 \\ +iA'_x & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (6.3.31)$$

今设 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行，则可取此共同方向为 x'，$F_{\alpha\beta}$ 也剩两个分量

$$F_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i'A'_x \\ 0 & 0 & B'_z & 0 \\ 0 & -B'_y & 0 & 0 \\ iA'_x & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{6.3.32}$$

今设 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 不平行，亦即 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\neq 0$，则取 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$ 方向为 x 轴，

所以
$$A_x=0,\qquad B_x=0 \tag{6.3.33}$$

今在 x 方向再作一速度变换，则由式(6.3.24)见

$$\left.\begin{aligned} A'_x=A_x=0, A'_y&=\frac{A_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, A'_z=\frac{A_z+\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ B'_x=B_x=0, B'_y&=\frac{B_y+\beta A_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, B_z=\frac{B_z-\beta A_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{6.3.34}$$

再可选适当速度，使 $\boldsymbol{A}'$ 与 $\boldsymbol{B}'$ 平行，亦即使

$$\left.\begin{aligned} A_y-\beta B_z&=\lambda(B_y+\beta A_z) \\ A_z+\beta B_y&=\lambda(B_z-\beta A_y) \end{aligned}\right\} \tag{6.3.35}$$

所以
$$1+\beta^2+\beta\frac{A^2+B^2}{A_yB_z-A_zB_y}=0 \tag{6.3.35}'$$

以 [illegible]

$$|\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}|=(A_yB_z-A_zB_y)=AB\sin\theta, \tag{6.3.36}$$

θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 三维矢量所成的夹角，则式(6.3.35)的解答为

$$\beta=-\frac{A^2+B^2}{2AB\sin\theta}\pm\sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{2AB\sin\theta}\right)^2-1} \tag{6.3.37}$$

由于

$$(A^2-B^2)^2=A^4+B^4-2A^2B^2\geqslant 0$$

因之式(6.3.37)根号内为正数，β 为实数。现在还要证明 $|\beta|<1$，设

$$\lambda=\frac{A^2+B^2}{A\cdot B\sin\theta}<0 \qquad (6.3.38)$$

为负数，以

$$F(\beta)=1+\beta^2-|\lambda|\beta \qquad F(0)=1 \qquad F(1)=2-|\lambda|$$

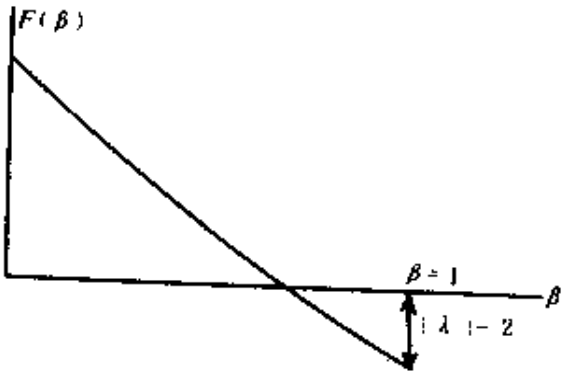


图 6.3

绘图如$|\lambda|>2$，则$F(\beta)$在$\beta=0$与$\beta=1$之间改号，所以在0与1之间必有一根。除非$\theta=0$，则

$$A^2+B^2>2AB|\sin\theta| \qquad \text{所以}|\lambda|>2$$

所以式(6.3.35)′有一根$|\beta|<1$。但$\theta=0$的情形已在式(6.3.22)讨论过，目前不成立，所以条件(6.3.35)′可以满足；A及B可以由式(6.3.34)的变换使之平行。今使此平行方向为x'方向，则$F_{\alpha\beta}$只剩F_{12}'及F'_{34}两分量了。式(6.3.38)的$\lambda>0$，则照同样的理由证明也有一个β

$$-1<\beta<0$$

存在，使式(6.3.35)′可以满足。

所以在任何情形下，可以选适当的轴，使$F_{\alpha\beta}$只含两个分量。我们习惯上也取上述共同方向为x'方向，那么，$F_{\alpha\beta}$也是化成式(6.3.32)的形式。这样就使二阶反对称张量在适当坐标下可以成

为方阵(6.3.31)或(6.3.32)的情形。在式(6.3.31)

$$\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{*}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (6.3.39)$$

的情形下，我们还可以选择坐标使它更加简化。设取 $\boldsymbol{A}$ 为 y 轴，$\boldsymbol{B}$ 为 z，则 $A_x=0, B_x=0, A_z=0, B_y=0$，再在 x 方向作速度变换，则依式(6.3.34)的变换得

$$A_x'=0, B_x'=0, A_y'=\frac{A_y-\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, A_z'=0,$$

$$B_y'=0, B_z'=\frac{B_z-\beta A_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

设

$$B^2-A^2>0 \quad \text{所以} |B_z|>|A_y|,$$

则可选 β 使 $A'_y=0$，而只剩 $B'_z=F'_{12}$。如

$$B^2-A^2<0, \quad \text{所以} |B_z|<|A_y|,$$

则可选 β 使 $B'_z=0$，只剩 $A'_y=iF'_{24}$，但如

$$B^2-A^2=0 \qquad |B_z|=|A_y|$$

则无法简化矣。我们可以叫这些轴全为 x 轴。总结起来说，$F_{\alpha\beta}$ 可简化为下列形式。

(Ⅰ)如 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$(不分时间性和空间性)

$$F'_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -iA'_x \\ 0 & 0 & B'_x & 0 \\ 0 & -B'_x & 0 & 0 \\ iA'_x & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &B'^2_x-A'^2_x=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2 \\ &A'_xB'_x=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \end{aligned} \qquad (6.3.40)$$

(Ⅱ)如 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 或 $F_{\alpha\beta}F^{*}_{\alpha\beta}=0$，则

1. $\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2>0$，空间性：$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}>0$，

$$F'_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B'_x & 0 \\ 0 & -B'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad B'^2_x=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2,\quad (6.3.41)$$

2. $\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2<0$，时间性：$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}<0$，

$$F'_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -iA'_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iA_x & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad -A'^2_x=\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2,\quad (6.3.42)$$

3. $\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2=0$，零间性：$F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=0$

$$F'_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -B'_y & -iA'_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B'_y & 0 & 0 & 0 \\ iA'_x & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad |B'_y|^2=|A'_x|^2,\quad (6.3.43)$$

其实在这末一个情形下，$\boldsymbol{F}$ 还是只有一个分量，

因为 $$|B'_y|=|A'_x|$$

由上式亦可见，设 $F_{\alpha\beta}$ 为空间性，则 $F^{*}_{\alpha\beta}$ 为时间性，其逆亦成立。

我们现在可以利用上述性质证明，凡是有一不完全为零的四维矢量 u_α 使

$$u_\alpha F_{\alpha\beta}=0, \qquad (6.3.44)$$

则 $\boldsymbol{F}$ 必为特殊六矢满足条件

$$F_{\alpha\beta}\cdot F^{*}_{\alpha\beta}=0 \qquad \text{或 } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (6.3.45)^{*}$$

假使 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 已为零，则不需证。因之，我们须先假设 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$，式(6.3.40)表明此种 $F_{\alpha\beta}$ 在适当坐标系统中，只有 F'_{14}，F'_{23} 存在，条件(6.3.44)在这个坐标中为

$$u_4'F'_{41}=0,u_3'F'_{32}=0,u_2'F'_{23}=0,u'_1F'_{14}=0 \qquad (6.3.46)$$

但在式(6.3.40)中，F_{14}，F_{23} 已假设不是零，上述方程只有

$$u_1'=u_2'=u_3'=u_1'=0$$

可以满足，又和条件矛盾。因之 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$ 的假设不能成立，而只能 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，所以证讫。

设此 $F_{\alpha\beta}$ 为时间性，则 $F'_{23}=0$，式(6.3.46)表示 $u_1'=0$ $u_4'=0$，因之，u_α 只能是空间性的矢量。设 $F_{\alpha\beta}$ 为零间性 $|F_{14}'|=|F_{13}'|\neq 0$，则

$$u_3'F_{31}'+u_4'F_{11}'=0 \quad u_1'F_{13}'=0,u_1'F_{14}'=0$$

所以 $$u_1'=0,|u_3'|=|u_4'|,$$

所以 $$u_\alpha^2=u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2-|u_4'|^2=u_2'^2\geqslant 0$$

因之，u_α 可为空间性及零间性两种矢量。但设 $F_{\alpha\beta}$ 为空间性，则又得不出肯定的结论。

我们现在再证明，凡有一个不全为零的四维矢量 u_α，即使

$$u_\alpha F_{\alpha\beta}=0 \qquad \text{又使 } u_\alpha F^{*}_{\alpha\beta}=0 \qquad (6.3.47)$$

则 $F_{\alpha\beta}$ 必为零间性，且 u_α 亦必为零间性；否则 $F_{\alpha\beta}$ 全为零。

因在适当的坐标下，$F_{\alpha\beta}$ 必为(6.3.40)→(6.3.43)四种情形下的一种，前三种 F_{11}'，F_{23}' 不全为零，式(6.3.47)表明

$$\left.\begin{array}{llll} u_4'F_{41}'=0 & u_3'F_{32}'=0 & u_2'F_{23}'=0 & u_1'F_{11}'=0 \\ u_4'F_{23}'=0 & u_3'F_{14}'=0 & u_2'F_{11}'=0 & u_1'F_{23}'=0 \end{array}\right\} \qquad (6.3.48)$$

---

* Vonlaue 在 Die Relativitäts thorie I (1955)认为这个条件的成立须"假设 u_α 不是零间性"(P73)的结论，大约是错的，他并没有证明，他只举了(6.3.48)成立的一个例子，但是这和(6.3.45)不是一件事

设 $F_{41}'\neq 0$，则 $u_1'=u_1'=u_3'=u_2'=0$ 与假设不合；设 $F_{23}'\neq 0$，则 $u_3'=u_2'=u_4'=u_1'=0$ 亦与假设不合，只有第四种 F_{13}'，$F_{14}'\neq 0$，F_{24}'，$F_{23}'\neq 0$ 式(6.3.47)的可能，式(6.3.47)表明

$$u_3'F_{31}'+u_1'F_{41}'=0 \qquad u_1'F_{13}'=0 \quad u_2'F_{14}'=0,$$

$$u_3'F_{11}'+u_1'F_{31}'=0 \quad u_2'F_{14}'=0 \quad u_2'F_{31}'=0$$

所以 $$u_1'=0 \qquad u_2'=0 \qquad |u_3'|=|u_4'|$$

所以

$$u_\alpha^2=u'^2_\alpha=0 \tag{6.3.48}$$

如 u_α^2 不满足(6.3.48)的条件，则 $F_{13}'=F_{14}'=0$。换言之，只有

$$F_{\alpha\beta}=0$$

一个可能性了，因之 u_α 必为零间性，F 亦为零间性。我们也可以用三维矢量方法来解决这一种问题。以

$$u_\alpha=(\boldsymbol{u},iu_0),F_{\alpha\beta}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}), \tag{6.3.50}$$

则

$$\left.\begin{aligned}F_{\alpha\beta}u_\beta&=(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B}+u_0\boldsymbol{A},i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A})\\F^*_{\alpha\beta}u_\beta&=(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{A}-u_0\boldsymbol{B},i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}\right\} \tag{6.3.51}$$

设 $F_{\alpha\beta}u_\beta=0$，则

$$u_0\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B},\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{6.3.52}$$

第二式只是第一式的结论，可不必述，上式的第一式

$$u_0\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0=\frac{1}{4}u_0F_{\alpha\beta}F^*_{\alpha\beta},$$

如 $u_0\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，但式(6.3.52)为协变方程，我们总可以选一个参照系使 $u'_0\neq 0$，因之

$$F_{\alpha\beta}F^*_{\alpha\beta}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{6.3.53}$$

一定在每个参照系上成立。又由于

$$u_0^2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{u}^2B^2\sin^2\theta, \tag{6.3.54}$$

θ 为 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 所成的空间角度，因之，设

$$\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=A^2-B^2>0, \tag{6.3.55}$$

则 $u_0^2<\boldsymbol{u}^2$，所以 u_α 为空间性。设 $A^2=B^2$，则 u_α 可为空间性或零间性，看 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否成直角而定，唯设 $\boldsymbol{B}^2>\boldsymbol{A}^2$，则 u_α 的性质无法决定，要看 θ 的角度：

$$u_0^2 \gtrless \boldsymbol{u}^2. \tag{6.3.56}$$

但设 u_α 为时间性，

$$u_0^2>\boldsymbol{u}^2, \tag{6.3.57}$$

则

$$\boldsymbol{A}^2<\boldsymbol{B}^2, \tag{6.3.58}$$

$\boldsymbol{F}$ 必为空间性。

我们由式(5.3.51)两式等于零，也可以推出 u_α 及 $F_{\alpha\beta}$ 均为零间性的矢量和张量的结论，兹留给读者自证。

设有两个反对称张量 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$。$\boldsymbol{F}$ 以 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 三维矢量代表其时间及空间部分，$\boldsymbol{G}$ 以 $\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 三维矢量代表其时间及空间部分。则

$$\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=-\frac{1}{2}F^*_{\alpha\beta}G^*_{\alpha\beta} \tag{6.3.59}$$

$$\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}G^*_{\alpha\beta}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}F^*_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \tag{6.3.60}$$

均为四维标量。第一式表示两“六矢”各空间部分矢量及时间部分矢量的三维标量和为四维标量(注意，时间部分前面$\sqrt{-1}$的符号产生$-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$前面负的符号)。第二式表示时空两部分交叉三维标量和亦为四维标量。式(6.3.26)的两式也可以如此解释。

我们现在用三维矢量方法再证明几个定理。

设

$$F_{\alpha\beta}u_\beta=0 \qquad F^*_{\alpha\beta}V_\beta=0 \tag{6.3.61}$$

则 u_α 必“垂直”于 V_α 或

$$u_\alpha V_\alpha=0 \tag{6.3.62}$$

因

$$u_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B}=0, V_0\boldsymbol{B}-\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}=0 \tag{6.3.63}$$

所以 $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{6.3.64}$$

$$u_0V_0\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{V}\wedge(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{V}),$$

$$(u_0\boldsymbol{V}_0-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{B}=0=-u_aV_a\boldsymbol{B} \tag{6.3.65}$$

总有一个坐标上 $\boldsymbol{B}\neq0$，因之以下标量方程成立：

$$u_aV_a=0$$

设有一四维矢量 u_a 同时满足

$$F_{\alpha\beta}u_\beta=0 \qquad G_{\alpha\beta}u_\beta=0 \tag{6.3.66}$$

以

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}),\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{D},\boldsymbol{C}),u_a=(u,iu_0),$$

得

$$u_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B}=0,u_0\boldsymbol{c}+\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{D}=0 \tag{6.3.67}$$

两式。则 u_a 除一共同因子外，已完全决定。换言之，u_a 的四维方向已由式(6.3.66)决定，且 F,G 必满足条件

$$F_{\alpha\beta}G^*_{\alpha\beta}=0 \tag{6.3.67}'$$

由

$$u_0\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+(\mathbf{uBD})=0,$$

得

$$u_0(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=0 \tag{6.3.68}$$

亦即式(6.3.60)的

$$\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^*_{\alpha\beta}=0$$

又因

$$u_0^2\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{D})=-u_0\boldsymbol{u}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}),$$

所以 $$\boldsymbol{u}=u_0\frac{\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})}=u_0\frac{\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})} \tag{6.3.69}$$

现在验证从式(6.3.69)这样决定出来的 u_a 确有四维矢量性质。我们从式(6.3.20)知道，在洛伦兹速度变换时，一个四维矢量前面三个分量的比例

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{u}}{u_0}$$

必须依照

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{S}'\sqrt{1-\beta^2}+\boldsymbol{V}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{V})(1-\sqrt{1-\beta^2})}{1+\left(\frac{\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}\right)} \tag{6.3.70}$$

的方式转变，现在 $\boldsymbol{S}$ 既为

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})} \tag{6.3.71}$$

而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 的转变，又均为已知形式(6.3.24)。今以之代入式(6.3.71)似乎成为一种无法控制的形式，但是由于 $\boldsymbol{V}$ 必为一空间矢量，以之为(不写一撇)

$$\boldsymbol{V}=\alpha\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{D}+\lambda\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C} \tag{6.3.72}$$

由于

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})=0,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})=-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),$$

设将上式 $\boldsymbol{V}$ 分别与 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}$ 成三维标量积，得

$$\alpha=\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{C})}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})},\beta=\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})}$$

再与 $\boldsymbol{V}$ 本身成标量积，得

$$\lambda=\frac{1}{(\boldsymbol{VAC})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})}\{\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{D})\} \tag{6.3.73}$$

或以 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{D}$ 成标量积，又得 $\lambda=(\boldsymbol{VBD})/(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2$，

所以

$$\boldsymbol{V}=\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{C})}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})}\boldsymbol{B}-\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})}\boldsymbol{D}+\frac{(\boldsymbol{VBD})}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})^2}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C} \tag{6.3.73}'$$

将上式内 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 全改成一撇，代入 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}$ 内，再用式(6.3.72)得。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}=&\left\{\boldsymbol{A}'\wedge\boldsymbol{C}'+\frac{\boldsymbol{V}}{C}\frac{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}')}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\\&\left\{\frac{1+\dfrac{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}')}{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}')}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\},\\(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=&\frac{\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}+\dfrac{1}{C}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}')}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\frac{1+\dfrac{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')}{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}')}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{6.3.74}$$

以之代入式(6.3.71)内，即得式(6.3.70)。设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}$ 中有平行的三维矢量，例如 $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{D}$，则由于$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=0$，所以$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})=-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=0$，则式(6.3.71)成为不可能，所以要使式(6.3.71)为有限值，三个矢量 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 中任两个均不能平行，因为 $\boldsymbol{V}$ 必为其线型组合(6.3.72)。

从上面我们又可以找出一个 V_α 来使

$$F^*_{\alpha\beta}V_\beta=0,G^*_{\alpha\beta}V_\beta=0\tag{6.3.75}$$

且此 V_α 和式(6.3.66)的 u_α 垂直。

因 $$F^*=(\boldsymbol{A},-\boldsymbol{B}),G^*=(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}),$$

在式(6.3.69)内，换以适当的相应量，得

$$\boldsymbol{V}=V_0\frac{\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{D}}{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})}\tag{6.3.76}$$

其转变关系仿式(6.3.74)，得

$$\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{D}=\left\{\boldsymbol{B}'\wedge\boldsymbol{D}'+\frac{\boldsymbol{V}}{C}\frac{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}')}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\left\{\frac{1+\dfrac{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}')}{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{C}')}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}\tag{6.3.77}$$

由式(6.3.69)及(6.3.76)得

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{V}=+u_0V_0,$$

所以 $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{V}-u_0V_0=0$$

现在可以总结我们上面研究的结果如下。

设有一不全为零的四维矢量，使

1. $F_{\alpha\beta}u_\beta=0$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，$F_{\alpha\beta}F^*_{\alpha\beta}=0$ (6.3.78)

设 $\boldsymbol{F}$ 为时间性，则 u 为空间性，设 $\boldsymbol{F}$ 为零间性，则 u 为零间性或空间性两种，设 u 为时间性，则 $\boldsymbol{F}$ 必为空间性。但上述逆定理不成立。

2. $F_{\alpha\beta}u_\beta=0$，及 $F^*_{\alpha\beta}u_\beta=0$， (6.3.79)

则 u 及 $\boldsymbol{F}$ 均为零间性。

3. 设有 u_α 满足

$F_{\alpha\beta}u_\beta=0$，$G_{\alpha\beta}u_\beta=0$， (6.3.80)

则

$$F_{\alpha\beta}G^*_{\alpha\beta}=F^*_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}=0 \tag{6.3.81}$$

且 u_α 方向完全由式(6.3.69)决定，我们又可以找一个 V_α 使

$$F^*_{\alpha\beta}V_\beta=0,G^*_{\alpha\beta}V_\beta=0 \tag{6.3.82}$$

此 V_α 的方向为式(6.3.76)，且 V_α 与上面 u_α 成

$$u_\alpha V_\alpha=0 \tag{6.3.83}$$

正交的关系。

§6.4 旋量

洛伦兹的变换形式用四元数表示

$$\underline{\boldsymbol{X}'}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{A}}^*, \tag{6.4.1}$$

及 $\boldsymbol{A}$ 的二元方阵表示法建议用一种较张量矢量更基础的变换方法。假设 a 为二维复矢，其变换形式为

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}, \tag{6.4.2}$$

则取上述方阵的共轭调位值，得

$$\boldsymbol{a}'^*=\boldsymbol{a}^*\tilde{\boldsymbol{A}}^* \tag{6.4.3}$$

所以
$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*)' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}\tilde{\boldsymbol{a}}^*)\tilde{\boldsymbol{A}}^* \tag{6.4.4}$$
换言之，$\boldsymbol{a}\tilde{\boldsymbol{a}}^*$ 的变换与 $\boldsymbol{X}$ 相同。我们从式(6.2.25)看出张量的观念是由矢量的乘积得出，现在看出矢量的观念又可从更基础量，称"旋量"的乘积得出。式(6.4.2)的变换显然具有群性。

设有一、二维复变数 ξ^i，$i=1,2$，设*
$$\xi^{i'} = f^i(\xi_1 \cdot \xi_2), \tag{6.4.5}$$
则
$$\mathrm{d}\xi^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi_j}\mathrm{d}\xi^j. \tag{6.4.6}$$
我们定义抗变旋量 a^i 的变换为
$$a^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi_j}a^j, \tag{6.4.7}$$
并定义协变旋量 b_i 的变换为
$$b_{i'} = \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi^{i'}}b_j, \tag{6.4.8}$$
式中抗变指标写在上面，协变指标写在下面。如以
$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \xi_1'}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial \xi_2'}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \xi_2'}{\partial \xi_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \tag{6.4.9}$$
则协变旋量的变换为

---

* 由于旋量的复数性质，过去物理学上很少有人注意，直到量子力学发现波函数 ψ 为复数，*Dirac* 在 1928 年将波方程写成合于相对论要求的一次微分方程之后，方引起系统的研究，本节一方面表示旋量与四元数的关系，另一方面连系 5.7.9 节的 *Dirac* 理论

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{21} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = EAE^{-1} \quad (6.4.10)$$

以上

$$E \equiv \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \| E_{ij} \|, E^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = -E \equiv \| E^{ij} \| \quad (6.4.11)$$

由于 α_{ij} 为复数，我们又可以定义抗协变共轭旋量为

$$a^{\dot{i}} = \overline{\frac{\partial \xi_i'}{\partial \xi_j}} a^j, b_{\dot{i}} = \overline{\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i'}} b_j, \quad (6.4.12)$$

变换系数上加一横表示共轭复数。上式变换系数写出后为

$$\begin{pmatrix} a^{\dot{1}} \\ a^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha}_{11}, & \bar{\alpha}_{12} \\ \bar{\alpha}_{21}, & \bar{\alpha}_{22} \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a^{\dot{1}} \\ a^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{\dot{1}}' \\ b_{\dot{2}}' \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha}_{11}, & \bar{\alpha}_{12} \\ \bar{\alpha}_{21}, & \bar{\alpha}_{22} \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} b_{\dot{1}} \\ b_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (6.4.13)$$

由上面的定义显然看出

$$\Sigma_i a_i' b^{\dot{i}} = \Sigma a_i b^{\dot{i}}, \Sigma a_i' b^{\dot{i}'} = \Sigma a_i b^{\dot{i}} \quad (6.4.14)$$

我们常利用 E 定义一个旋量本身相应的抗协量，

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ -a^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (6.4.15)$$

共轭抗协量的相应量也照上式掉换。换言之，可用式(6.4.11)的 E_{ij} 作为降指标之用，用 $-E$，以 E^{ij} 代表，作为升指标之用(有时 E 指标上加一横，其数值相同)，由

$$a_i = Ea^i,$$

所以 $a'_i = Ea^{i'} = EAa^i = EAE^{-1}a_i$

亦即为式(6.4.10)变换的形式，所以不产生矛盾。

可仿张量来定义高级旋量为

$$(a^{i\cdots}_{k\cdots})'=\frac{\partial\xi_r'}{\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_j'}{\partial\xi_m}\cdots\frac{\partial\xi_n}{\partial\xi_k'}\cdots a^{rj\cdots}_{sm\cdots}. \tag{6.4.16}$$

以前在张量内研究的一切定理，几乎可以全部应用于旋量，唯由于物理量只是$(x、y、z、t)$的函数，而并不是ξ的函数，因之对ξ的微分不成立，我们不能把微分概念硬搬过来。

在不受时间反射及$|L|=1$的$(x、y、z、t)$变换之下，旋量的变换A可由§5.6决定，空间旋转为(5.6.20)，速度变换为(5.6.32)，微变为(5.6.38)或(5.6.39)形式。当A决定之后，则协变旋量共轭旋量的变换亦已相应的决定。但由于A的方阵表示在于$i、j、k$的特殊方阵所表示，而这种表示又有一定程度的不定性，所以A也有一定程度的任意性。在固定$i、j、k$表示之后，则A除一负号外即可完全决定。我们现在用式(5.5.18)的$i、j、k$方阵，则任一四元数为

$$\overline{X}=\begin{Vmatrix} x_4+ix_3, & -x_2+ix_1 \\ x_2+ix_1, & x_4-ix_3 \end{Vmatrix} \tag{6.4.17}$$

由于

$$a\tilde{a}^*=\begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{\bar{1}} & a^{\bar{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a^1a^{\bar{1}} & a^1a^{\bar{2}} \\ a^2a^{\bar{1}} & a^2a^{\bar{2}} \end{Vmatrix} \tag{6.4.18}$$

而方程(6.4.4)表示坐标(6.4.17)的变换与式(6.4.18)的变换相同，因之一四维矢量x_α的变换为

$$\left.\begin{aligned} &x_4+ix_3\sim a^1a^{\bar{1}}\sim a^{1\dot{1}} \\ &-x_2+ix_1\sim a^1a^{\bar{2}}\sim a^{1\dot{2}} \\ &x_2+ix_1\sim a^2a^{\bar{1}}\sim a^{2\dot{1}} \\ &x_4-ix_3\sim a^2a^{\bar{2}}\sim a^{2\dot{2}} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.19}$$

以上a^{ij}代表二级抗变旋量。由上式解出

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\sim a^1a^{\dot{2}} + a^2a^{\dot{1}}, x_2 \sim -i(a^1a^{\dot{2}} - a^2a^{\dot{1}}) \\ x_3 &\sim a^1a^{\dot{1}} - a^2a^{\dot{2}}, x_4 \sim i(a^1a^{\dot{1}} + a^2a^{\dot{2}}) \end{aligned}\right\} \quad (6.4.20)$$

由式(6.4.15)及前面的变换关系，我们也可以利用协变旋量或抗协混合量来表示 x_α 坐标的变换形式。例如

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\sim -c_{\dot{2}}c_2 - c_2c_{\dot{1}}, x_2 \sim -i(c_1c_{\dot{2}} - c_2c_{\dot{1}}) \\ x_3 &\sim c_1c_{\dot{1}} + c_2c_{\dot{2}}, x_4 \sim i(c_1c_{\dot{1}} + c_2c_{\dot{2}}) \end{aligned}\right\} \quad (6.4.21)$$

等等。现在举 z 方向的旋转(5.6.21)的例子来验证式(6.4.20)。

因为

$$\alpha_{11} = e^{-i\frac{\theta}{2}}, \alpha_{22} = e^{i\frac{\theta}{2}}, \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$$

$$(a^1a^{\dot{1}})' = (\alpha_{11}a^1 + \alpha_{12}a^2)(\bar{\alpha}_{11}a^{\dot{1}} + \bar{\alpha}_{12}a^{\dot{2}}) = a^1a^{\dot{1}}$$

$$(a^1a^{\dot{2}})' = \alpha_{11}\bar{\alpha}_{22}a^1a^{\dot{2}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$(a^2a^{\dot{1}})' = \alpha_{22}\bar{\alpha}_{11}a^2a^{\dot{1}} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(a^2a^{\dot{2}})' = \alpha_{22}\bar{\alpha}_{22}a^2a^{\dot{2}} = a^2a^{\dot{2}},$$

因之式(6.4.20)

$$x' = (a^1a^{\dot{2}} + a^2a^{\dot{1}})' = a^1a^{\dot{2}}(\cos\theta - i\sin\theta) + a^2a^{\dot{1}}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -i(a^1a^{\dot{2}} - a^2a^{\dot{1}})' = -ia^1a^{\dot{2}}(\cos\theta - i\sin\theta) + ia^2a^{\dot{1}}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta) = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$z' = z, t' = t$$

用式(6.4.21)的表示，也得出同样的结果〔协变旋量的变换为式(6.4.10)形式〕。

也可以将式(6.4.20)写成不受 i,j,k 特殊选择影响的形式，如在式(6.4.20)前面乘以$\sqrt{-1}$，则

$$x_1 = \begin{Vmatrix} a^1, a^2 \\ 0, 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$x_2 = \begin{Vmatrix} a^1 & a^{\dot{2}} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$x_3=\begin{Vmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$x_4=\begin{Vmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a^1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{Vmatrix} \tag{6.4.22}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tilde{a}^* ia & x_2 &= \tilde{a}^* ja \\ x_3 &= \tilde{a}^* ka & x_4 &= -\tilde{a}^* Ea \end{aligned}\right\} \tag{6.4.23}$$

此为不受 i、j、k 特殊表示影响的形式。

类似的方法也可以用到协变旋量(6.4.21)上去。我们也可以将它们写成式(6.4.22)形式，将式(6.4.20)普遍除以 i，得

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\begin{Vmatrix} c_1,c_2 \\ 0,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0,+i \\ +i,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \bar{c}_1,0 \\ \bar{c}_2,0 \end{Vmatrix}, x_2=\begin{Vmatrix} c_1,c_2 \\ 0,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0,-1 \\ +1,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \bar{c}_1,0 \\ \bar{c}_2,0 \end{Vmatrix} \\ x_3&=\begin{Vmatrix} c_1,c_2 \\ 0,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} +i,0 \\ 0,-i \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \bar{c}_1,0 \\ \bar{c}_2,0 \end{Vmatrix}, x_4=\begin{Vmatrix} c_1,c_2 \\ 0,0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} +1,0 \\ 0,+1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \bar{c}_1,0 \\ \bar{c}_2,0 \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.24}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tilde{C}\, i\bar{C}, & x_2 &= \tilde{C}\, j\bar{C}, \\ x_3 &= \tilde{C}\, k\bar{C}, & x_4 &= \tilde{C}\, E\bar{C}, \end{aligned}\right\} \tag{6.4.25}$$

也可以用混合旋量表示 x_α，此处不赘述了。

将微分的观念推到旋量，我们可以注意到

$$(da^i)' \equiv a'^i_{x+dx} - a'^i_x = \alpha_{ij}a^j_{x+dx} - \alpha_{ij}a^j_x = \alpha_{ij}da^j,$$

所以 $da^{ij\cdots}_{k\cdots}$ 与 $a^{ij\cdots}_{k\cdots}$ 的变换式相同(变换系数 α_{ij} 为常数，在一切洛伦兹变换中)

$$da^{ij\cdots}_{k\cdots} = \frac{\partial a^{ij\cdots}_{k\cdots}}{\partial x_\beta}dx_\beta \tag{6.4.26}$$

即为与 a 同型的旋量，则

$$\frac{\partial a^{ij\cdots}_{h\cdots}}{\partial x_\beta} \tag{6.4.27}$$

必为旋量 i、$j\cdots$、$\bar{h}\cdots$矢量 β 的混合物，其抗协性质可从指标判定。

在式(6.4.3)中，如以另一不同的抗变旋量 $\tilde{b}^*$ 代表 $\tilde{a}^*$

$$b' = Ab, \qquad \text{所以} \tilde{b'}^* = \tilde{b}^* \tilde{A}^*,$$

方程(6.4.4)为

$$(a' \tilde{b'}^*) = A(a\,\tilde{b}^*)\tilde{A}^*,$$

则式(6.4.22)x_α 的变换为

$$x_1 \sim \tilde{b}^*\, ia, x_2 \sim \tilde{b}^*\, ja, x_3 \sim \tilde{b}^*\, ka, x_4 \sim \tilde{b}^*\, Ea \tag{6.4.28}$$

或

$$V_\alpha = \tilde{b}^* S_\alpha a, S_\alpha = (i.\ j.\ k.\ -E) \tag{6.4.29}$$

为四维矢量，其中 b、a 为任意抗变旋量，由此可见

$$\tilde{b}^* S_\alpha da = \tilde{b}^* S_\alpha \frac{\partial a}{\partial x_\beta} dx_\beta \tag{6.4.30}$$

亦必为四维矢量，

所以

$$\tilde{b}^* S_\alpha \frac{\partial a}{\partial x_\beta} \tag{6.4.31}$$

为四维张量。将上式降秩得标量

$$\tilde{b}^* S_\alpha \frac{\partial a}{\partial x_\alpha} \tag{6.4.32}$$

将上式写出为

$$\bar{b}^{1\prime} S_{\alpha.1j} \frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha} + \bar{b}^2 S_{\alpha.2j} \frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha} = \left(\bar{b}^{1\prime} S_{\alpha.1j} \frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha} + \bar{b}^{2\prime} S_{\alpha.2j} \frac{\partial a_j'}{\partial x'_\alpha} \right), \tag{6.4.33}$$

S_α、ij 为 S_α 的 ij 方阵素，仿用式(6.3.13)的方法可以证明

$$\left(S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha},S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}\right)\equiv(C_1,C_2) \tag{6.4.34}$$

为协变共轭旋量。其证明如下。

因为

$$\dot{b}^1S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}+\dot{b}^2S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}$$

$$=(\dot{\alpha}_{11}\dot{b}^1+\dot{\alpha}_{12}\dot{b}^2)S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j'}{\partial x_\alpha}+(\dot{\alpha}_{21}\dot{b}^1+\dot{\alpha}_{22}\dot{b}^2)S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j'}{\partial x'_\alpha},$$

所以

$$\dot{b}^1\left(S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}-\dot{\alpha}_{11}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j'}{\partial x'_\alpha}-\dot{\alpha}_{21}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a'_j}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$+\dot{b}^2\left(S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}-\dot{\alpha}_{12}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha}-\dot{\alpha}_{22}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha}\right)=0$$

因 $\dot{b}^1$、$\dot{b}^2$ 系独立的变数，

所以

$$S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}=\dot{\alpha}_{11}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha}+\dot{\alpha}_{21}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha},$$

$$S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}=\dot{\alpha}_{12}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j'}{\partial x'_\alpha}+\dot{\alpha}_{22}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha}$$

将第一式乘以 $\dot{\alpha}_{22}$，将第二式乘以 $-\dot{\alpha}_{21}$ 相加等等得

$$\left.\begin{aligned}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a'_j}{\partial x'_\alpha}&=\dot{\alpha}_{22}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}-\dot{\alpha}_{21}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}\\S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j'}{\partial x'_\alpha}&=-\dot{\alpha}_{12}S_{\alpha,1j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}+\dot{\alpha}_{11}S_{\alpha,2j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{6.4.35}$$

亦即式(6.4.13)形式。因共轭指标上加一横，故式(6.4.34)可以写成

$$C_{\dot{i}}=S_{\alpha,\dot{i}j}\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha} \tag{6.4.36}$$

用上式又可以证明算符

$$S_{\alpha,ij}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\equiv \bar{\partial}\bar{i}j=\left\|S_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right\| \tag{6.4.37}$$

为协变 j、共轭协变 $\bar{i}$ 的二级旋量算符。同样由

$$\mathrm{d}\,\tilde{b}^{\cdot}\,S_\alpha a=\frac{\partial \tilde{b}^{\cdot}}{\partial x_\beta}S_\alpha a\mathrm{d}x_\beta$$

推下去，则也证明

$$\frac{\partial b^{\dot{1}}}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,11}+\frac{\partial b^{\dot{2}}}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,21},\frac{\partial b^{\dot{1}}}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,12}+\frac{\partial b^{\dot{2}}}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,22}$$

或

$$\frac{\partial b^{\dot{i}}}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,ij}=C_j$$

为协变旋量，得出

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}S_{\alpha,ij}=S_{\alpha,ij}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

为协变 j、共轭协变 $\bar{i}$ 二级旋量算符的结论。

如从协变(6.4.25)表示开始，前面的 $\bar{C}$ 用 $\tilde{b}$ 代替，并以

$$x_i\sim-\tilde{b}\,s_i\bar{c},x_4\sim\tilde{b}\,s_4\dot{c}$$

或

$$x_\alpha=\tilde{b}\,T_\alpha\dot{c},T_\alpha\equiv(-i,-j,-k,-E), \tag{6.4.38}$$

得出

$$V_\alpha=\tilde{b}\,T_\alpha\mathrm{d}\dot{c}=\tilde{b}\,T_\alpha\frac{\partial\dot{c}}{\partial x_\beta}\mathrm{d}x_\beta$$

为四维矢量的结论。仿同样的方法推下去，

$$bT_\alpha\frac{\partial\dot{c}}{\partial x_\alpha}=b_1T_{\alpha,11}\frac{\partial\dot{c}_1}{\partial x_\alpha}+b_2T_{\alpha,21}\frac{\partial\dot{c}_1}{\partial x_\alpha}+b_1T_{\alpha,12}\frac{\partial\dot{c}_2}{\partial x_2}+b_2T_{\alpha,22}\frac{\partial\dot{c}_2}{\partial x_\alpha} \tag{6.4.39}$$

为标量，

$$T_\alpha^{j\dot{i}}\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha}=f^j \tag{6.4.40}$$

为抗变旋量。将 T 的 i、j 字写在上面表示抗变性质，T 的 i 上加一横，表示与 c_i 的累加不致混淆。当然只有写法变换，数字仍是一样，

$$\left.\begin{aligned} T_{a,11} &\equiv T_a^{11}, \quad T_{a,12} \equiv T_{a\cdot}^{\ 12} \\ T_{a,21} &\equiv T_a^{21}, \quad T_{a,22} = T_{a,}^{\ 22} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.41}$$

由式(6.4.40)，我们又可以结论算符

$$T_a^{\ji} \frac{\partial}{\partial x_a} \equiv \partial^{\ji} = \left\| T_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right\| \tag{6.4.42}$$

为抗变 j、共轭抗变 $\bar{i}$ 的二级旋量算符，T_i 的数字与 s_i 反号，但 T_4 与 s_4 同号。

现在将式(6.4.37)，(6.4.42)用我们特别 i、j、k 的表示写出，为

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{1,1} = i\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad \partial_{1,2} = i\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ &\partial_{2,1} = i\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad \partial_{2,2} = -i\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &\partial^{\cdot\bar{1}} = -i\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} = +\partial_{2,2}, \quad \partial^{\cdot\bar{2}} = -i\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} = -\partial_{1,2} \\ &\partial^{\cdot\bar{1}} = -i\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} = -\partial_{2,1}, \quad \partial^{\cdot\bar{2}} = i\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4} = +\partial_{1,1} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.43}$$

我们注意到

$$\partial_{i,j}\partial^{\bar{i}1} + \partial_{2,j}\partial^{\bar{i}2} = \delta_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_a^2} \tag{6.4.44}$$

δ_{jk} 为 kronecker 符号，且可利用式(6.4.11)的 E 升降指标。

$$\left.\begin{aligned} \partial^{ij} &= E^{ik}E^{jr}\partial_{kr} \\ \partial_{ij} &= E_{ik}E_{jr}\partial^{kr} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.45}$$

这样我们也可以导出 $\partial_j^{\ i}$ 等算符。从 x_a 的混合旋量仿式(6.4.38)→(6.4.42)也可以推出些矢量标量来。

利用旋量微分算符，可以得出旋量微分方程式，如

$$\left.\begin{aligned}\partial_{ij}a^{ik\cdots}_{l\cdots} &= \lambda b^{k\cdots}_{il\cdots}\\ \partial^{ij}c^{ik}_{jm\cdots} &= \mu f^{ik\cdots}_{\cdots\cdots}\end{aligned}\right\} \qquad (6.4.46)$$

等形式；λ、μ 为标量，这种方程在洛伦兹 $|L|=+1$ 及时间不反射的情况下，显然为协变方程。

但方程(6.4.1)不包括 $|L|=-1$ 的变换，例如空间反射

$$x'_i = -x_i \qquad i=1,2,3 \qquad x'_4 = x_4 \qquad (6.4.47)$$

就不在内(也不包括时间反射的变换)。换言之，我们不能保证旋量方程在坐标反射(6.4.47)下，仍然保持协变性，这是一个缺点(时间次序不能人为的颠倒，可暂不需考虑)。为达到这个目的，我们有好多种补充办法，例如在式(6.4.20)之内如以

$$(a^1, a^{2'}) = (\overline{a^2}, -\overline{a^1}),$$

所以

$$(\overline{a^{1'}}, \overline{a^{2'}}) = (a^2, -a^1), \qquad (6.4.48)$$

则

$$x'_1 = a^{1'}\,\overline{a^{2'}} + a^{2'}\,\overline{a^{1'}} = -a^1\bar{a}^2 - \bar{a}^2 a^2 = -x_1,$$

$$x'_2 = -x_2, x'_3 = -x_3, x'_4 = x_4 \qquad (6.4.49)$$

成空间反射。假使限于线型系数的变换，则可以用两套旋量组合，一种是另一种的共轭或者一种是抗变，另一种是共轭协变。例如将式(6.4.20)及(6.4.21)两项加起来，使成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\sim (a^1\bar{a}^2 + \bar{a}^1 a^2) - (c_1\bar{c}_2 + \bar{c}_1 c_2)\\ x_2 &\sim -i(a^1\bar{a}^2 - a^2\bar{a}^1) - i(c_1\bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2)\\ x_3 &\sim (a^1\bar{a}^1 - a^2\bar{a}^2) - (c_1\bar{c}_1 - c_2\bar{c}_2)\\ x_4 &\sim i(a^1\bar{a}^1 + a^2\bar{a}^2) + (c_1\bar{c}_1 + \bar{c}_2 c_2)\end{aligned}\right\} \qquad (6.4.50)$$

形式，由于线形关系，当然这些 x_α 仍旧是依照前面同样的洛伦兹变换而变换。以

$$\psi=\begin{pmatrix}a^1\\a^2\\\bar{c}_1\\\bar{c}_2\end{pmatrix},\psi^*=(\bar{a}^1,\bar{a}^2,c_1,c_2)\qquad(6.4.51)$$

代表两个旋量，a^i、$\bar{c}_i$ 组合，则式(6.4.23)在普遍乘以 i 之后，可写成

$$x_a=\psi^*\sigma_a\psi\qquad(6.4.52)$$

形式，其中 σ_a 为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\begin{Vmatrix}0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&-i&0\end{Vmatrix},\quad\sigma_2=\begin{Vmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{Vmatrix}\\\sigma_3&=\begin{Vmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{Vmatrix},\quad\sigma_4=i\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(6.4.53)$$

方阵，如用 i、j、k 小方阵代入，则得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\begin{Vmatrix}i&0\\0&-i\end{Vmatrix},\quad\sigma_2=\begin{Vmatrix}j&0\\0&-j\end{Vmatrix}\\\sigma_3&=\begin{Vmatrix}k&0\\0&-k\end{Vmatrix},\quad\sigma_4=\begin{Vmatrix}-E&0\\0&-E\end{Vmatrix}\end{aligned}\right\}(6.4.54)$$

上式当然和式(6.4.22)相似。如照下式掉换式(6.4.23)中的 a^i，$\bar{c}_i$：

$$\left.\begin{aligned}(a^1,a^2)'&=-i(\bar{c}_1,\bar{c}_2),\quad(\bar{c}^1,\bar{c}_2)'=i(a^1,a^2)\\\text{所以}\quad(\bar{a}^1,\bar{a}^2)'&=i(c_1,c_2),\quad(c_1,c_2)'=-i(\bar{a}^1,\bar{a}^2)\end{aligned}\right\}(6.4.55)$$

则式(6.4.23)中 x_2 的变换为

$$x_1'=-x_1,x_2'=-x_2,\quad x_3'=-x_3\quad x_4'=x_4\qquad(6.4.56)$$

此亦即空间坐标的反射，换言之，$|L|=-1$，为

$$\psi'=\begin{Vmatrix}0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\\ i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\end{Vmatrix}\psi \tag{6.4.57}$$

的变换，通常 A 的变换形式，见式(6.4.9)及(6.4.10)，则为

$$\psi'=\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & \in\overline{A}\in^{-1}\end{Vmatrix}\psi \tag{6.4.58}$$

此两种变换的组合产生 $|L|=+1$ 及 $|L|=-1$ 的两种变换。式(6.4.58)的 $|L|=+1$，而

$$\begin{Vmatrix}0 & -iE\\ iE & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & \in\overline{A}\in^{-1}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & -i\in\overline{A}\in^{-1}\\ iA & 0\end{Vmatrix},$$

则为 $|L|=+1$ 后，再加反射(6.4.29)，所以 $|L|=-1$。或

$$\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & \in\overline{A}\in^{-1}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0 & -iE\\ iE & 0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & -iA\\ iE\overline{A}\in^{-1} & 0\end{Vmatrix}$$

为反射之后再加 $|L|=+1$ 的变换，$|L|$ 也是 -1，以上两种都是

$$\begin{Vmatrix}0 & B\\ \in\overline{B}\in^{-1} & 0\end{Vmatrix} \tag{6.4.59}$$

格式，因之总结起来，式(6.4.58)的形式为 $|L|=+1$，式(6.4.59)的形式为 $|L|=-1$，后者为交换抗变旋量与协变共轭旋量。

由于式(6.4.50)中 x_4 的形式，ct 必为正数，因之这种方法不产生

$$t'=-t$$

的时间反射变换，时间前后的次序不能颠倒。因物理方程在颠倒时间次序上，并不一定保持协变形式，所以上面表示法并没有缺点

(例如阻力作用下的运钟物质不可能在时间颠倒之下保持协变形式。从热力学知道一切产生"热"现象的物理方程,在时间反射下不保持协变形式)。

所以,可以定义旋量为(6.4.51)的形式,使 ψ 的变换限于式(6.4.58)及(6.4.59)两种。式(6.4.58)和(6.4.59)的前后乘积都是(6.4.59)形式,或者我们也可以还是只用式(6.4.16)定义的旋量,而在做出方程之后再用

$$x'_1 = -x_1, \qquad x'_4 = x_4$$

来试验它们的协变性。

假使要包括可以颠倒时间次序的洛伦兹变换,则也可以用混合旋量的表示方法,由式(6.4.15)见 x_μ 的变换形式可以取为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\sim a^1\bar{c}_1 - a^2\bar{c}_2, & x_2 &\sim -i(a^1\bar{c}_1 + a^2\bar{c}_2) \\ x_3 &\sim -(a^1\bar{c}_2 + a^2\bar{c}_1), & x_4 &\sim -i(a^1\bar{c}_2 - a^2\bar{c}_1) \end{aligned}\right\} \tag{6.4.60}$$

上式当

$$\left.\begin{aligned} (a^1,a^2)' &= (\bar{c}_1,\bar{c}_2) \\ (\bar{c}_1,\bar{c}_2)' &= (a^1,a^2) \end{aligned}\right\} \tag{6.4.61}$$

时,则

$$\begin{aligned} x_1' &= (a^1\bar{c}_1 - a^2\bar{c}_2)' = \bar{c}_1 a^1 - \bar{c}_2 a^2 = x_1, \\ x_2' &= -i(a^1\bar{c}_1 + a^2\bar{c}_2)' = -i(\bar{c}_1 a^1 + \bar{c}_2 a^2) = x_2, \\ x_3' &= -(a^1\bar{c}_2 + a^2\bar{c}_1) = -(\bar{c}_1 a^2 + \bar{c}_2 a^1) = x_3, \\ x_4' &= -i(a^1\bar{c}_2 - a^2\bar{c}_1) = -i(\bar{c}_1 a^2 - \bar{c}_2 a^1) = -x_4 \end{aligned}$$

此即为时间反射的变换。当

$$\left.\begin{aligned} (a^1,a^2)' &= (\bar{c}_1,\bar{c}_2) \\ (\bar{c}_1,\bar{c}_2)' &= -(a^1,a^2) \end{aligned}\right\} \tag{6.4.62}$$

时,则

$$x_1' = (a^1\bar{c}_1 - a^2\bar{c}_2)' = -\bar{c}_1 a^1 + \bar{c}_2 a^2 = -x_1,$$

$$x_2'=-i(a^1\bar{c}_1+a^2\bar{c}_2)'=-x_2,$$

$$x_3'=-x_3,$$

$$x_4'=-i(a^1\bar{c}_2-a^2\bar{c}_1)'=-i(-\bar{c}_1a^2+\bar{c}_2a^1)=x_4$$

此即为空间反射。亦即

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} \tag{6.4.63}$$

为时间反射，

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} \tag{6.4.64}$$

为空间反射，通常不经时间反射，且$|L|=+1$的变换和式(6.4.58)一样。

第 三 篇

经典物理学概论

第七章　物理定律的四维表示

§7.1　质点力学

如用四维表示方法，则可以对物理定律进一步地得到了解。通常运动学中的速度 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t$，由于 $\mathrm{d}t$ 不是标量，显然不是四维矢量。但两邻近点的 $\mathrm{d}\tau$

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}{C^2} = \mathrm{d}t'^2 - \frac{\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2}{C^2} = \mathrm{d}\tau'^2, \tag{7.1.1}$$

则为四维标量。设此两邻近点为一质点运动时的两邻近点，则

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}} \tag{7.1.2}$$

当 $q=0$ 时，$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t_0$。故 $\mathrm{d}\tau$ 称为"原时"，为与质点同速度系统所测量的经过时间，q 为质点的速率。今定义另外一个

$$q_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau}\right), \tag{7.1.3}$$

则 q_α 显然为一四维矢量。其前面的三个分量数值与通常的速度分量相差极微。以三元速度表示此 q_α。则上式可写成常用的

$$q_\alpha = \left\{\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{iC}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right\}, \tag{7.1.4}$$

为四维"速度矢量"。由式(3.1.6)及式(3.1.9)可以证明 q'_α 确照式(3.1.3)的公式变换。

由图 5.6 可见质点的宇宙路线如为 OP'，质点自己的单位时间，则其在 t 及 x 轴上的投影为(可参考方程(5.4.16))

$$\mathrm{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \quad \mathrm{Sin}\alpha = -\frac{iV}{C\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}$$

由此可见 q^2 为 iC 乘本身的单位时间在 S 系各轴上的"投影"。事实上，一切四维矢量总可以作为某方向上的一段长度在各轴上的投影。上述矢量的标量绝对值为

$$q_\alpha^2 = \sum_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = -C^2 \tag{7.1.5}$$

此式也可以从本身 iC 的平方得出。所以加 iC 的目的只是叫它在空间三轴的投影近于通常速度而已。有时为了某种目的，在一个分量前面常常略去 i 或者略去 C。

四维加速度可定义为

$$\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2x_\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{7.1.6}$$

由式(6.2.5)可见四维加速仍为一矢量，且由式(7.1.5)见

$$\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2x_\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{7.1.7}$$

此种标量乘积为零的两个矢量亦常仿通常习惯称"正交"或"垂直"。上式表示四维速度矢量与加速矢量永远"垂直"(当然是四维宇宙中的"垂直"，由于 i 的出现，很多通常的规律不能拿来应用)。

如 m_0 为标量，则

$$m_0 q_\alpha = m_0 \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau},$$

显然亦为四维矢量，其空间部分

$$\frac{m_0\dot{x}_1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{m_0\dot{x}_2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{m_0\dot{x}_3}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{7.1.8}$$

为质点的动量(此处 m_0 称为"静质量"),时间部分

$$\frac{m_0 iC}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{7.1.9}$$

除常数因子之外,为质点的质量或能量,因之质点的动量和质量或能量为一不可分的物理量 $m_0 q_\alpha$。在相对静止系统 S' 中,上述矢量为 $(0,0,0,im_0C)$,只有"静质量"部分,它在 S 系的投影则为

$$G_\alpha = \left(\frac{m_0 \dot{x}_1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{m_0 \dot{x}_2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{m_0 \dot{x}_3}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{im_0 C}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \right) \tag{7.1.10}$$

换言之,动量质量矢量为质点本身静质量在四维轴上的投影。

四维牛顿力学应为下列的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m_0 \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} \right) = f_\alpha \tag{7.1.11}$$

协变形式,此处 f_α 必须为四维"矢量"。但由于动量守恒定律(4.1.1),此种 f_α 不合于牛顿第三定律,因为只有动量对时间变化的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0 \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} \right) = f_\alpha \sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}} \equiv F_\alpha, F_4 = iC\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.12}$$

中的 F_α 才能合于牛顿第三定律。由此可见,牛顿的"力" F_α 并不是四维矢量。不过在碰撞时,它却具有作用反作用相等的性质(参考§4.2的末段)。而四维矢量 f_α 却不一定具有这种性质。

由式(7.1.12)得

$$F_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 + m_0 \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2 x_\alpha}{\mathrm{d}\tau^2},$$

以式(7.1.5)及(7.1.7)代入,得

$$F_\alpha q_\alpha = F_\alpha \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -C^2 \frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.13}$$

换言之，"静质量"的变化率为"四维功率"的负数。

设以 a_α 为任一固定四维"点"(实在是某一固定时间的某一固定空间点)，则由式(7.1.11)得

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}\tau}\left\{(x_\alpha - a_\alpha)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}\tau} - (x_\beta - a_\beta)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right\}$$
$$= (x_\alpha - a_\alpha)f_\beta - (x_\beta - a_\beta)f_\alpha$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{m}_0\left\{(\mathrm{x}_\alpha - a_\alpha)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}\tau} - (x_\beta - a_\beta)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right\}$$
$$= (x_\alpha - a_\alpha)F_\beta - (x_\beta - a_\beta)F_\alpha, \qquad (7.1.14)$$

因之在碰撞中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Sigma m_0\left\{(x_\alpha - a_\alpha)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}\tau} - (x_\beta - a_\beta)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right\}\right] = 0 \qquad (7.1.15)$$

以

$$M_{\alpha\beta} \equiv m_0\left\{(x_\alpha - a_\alpha)\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}\tau} - (x_\beta - a_\beta)\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right\}, \qquad (7.1.16)$$

则 $M_{\alpha\beta}$ 显然为一反对称二阶张量，其空间部分二分量

$$M_{ij} = m\{(x_i - a_i)\dot{x}_j - (x_j - a_j)\dot{x}_i\} \qquad (7.1.17)$$

为对此固定点 $\boldsymbol{a}_i$ 的角动量。式(7.1.15)表示各质点对任一固定点的角动量在碰撞前后守恒。其时空部分三分量为

$$\frac{1}{iC}M_{i4} = m(x_i - a_i) - m\dot{x}_i(t - t_0); \qquad (7.1.18)$$

方程(7.1.14)表示当一个质量不受力的作用时，则上式

$$m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) - m\dot{\boldsymbol{x}}(t - t_0) = K = 常数 \qquad (7.1.19)$$

由于不受力作用时，$\dot{x}_i$ 亦为常数 $\dot{x}_0$、m 亦为常数；上式表示

$$\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{x}}_0 t + \boldsymbol{C}_1。$$

这是一个明显的结论。当两质点起碰撞时，如无外力作用，则式(7.1.17)表示碰撞前后的角动量守恒。式(7.1.19)表示

$$(m_1x_1 + m_2x_2) - (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)(t - t_0) = \boldsymbol{K} + (m_1 + m_2)\boldsymbol{a}$$

由于 m_1+m_2、$m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2$ 在碰撞前后均为常数，因之上式为

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2)}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2}\right)t + \boldsymbol{C} \qquad (7.1.20)$$

以

$$\boldsymbol{V} \equiv \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \boldsymbol{V}_0, \qquad (7.1.20)'$$

由于分子分母均具有守恒性，$\boldsymbol{V}$ 显然不受碰撞的影响。上式表示

$$\bar{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (7.1.21)$$

一点在碰撞前后均以恒速 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0$ 在空间进行。§4.8 节中，我们曾在方程(4.8.11)定义上述 $\boldsymbol{V}$ 为质能中心的速度，在此地则很自然地定义式(7.1.21)为"质能中心点"。式(7.1.20)表示质能中心点

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0t + \boldsymbol{C}, \qquad (7.1.22)$$

以恒速在空间运动，由于 m_1、m_2 均为可变数，式(7.1.21)的直接微分为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\right) = \boldsymbol{V} + \frac{\dot{m}_1m_2 - \dot{m}_2m_1}{(m_1 + m_2)^2}(x_1 - x_2) \qquad (7.1.23)$$

一般并不等于 $\boldsymbol{V}$。但是假使 $\dot{m}_1=0,\dot{m}_2=0$； $\qquad (7.1.23)'$

或是

$$\dot{m}_1\neq 0,\dot{m}_2\neq 0,\text{但 } x_1-x_2=0; \qquad (7.1.23)''$$

上式就可以与式(7.1.22)相同。在"碰撞"的情况下，碰撞的前后满足式(7.1.23)'的 $\dot{m}_1=0,\dot{m}_2=0$；而"碰撞"时又满足式(7.1.23)"的 $x_1-x_2=0$，因之在"碰撞"情况下，式(7.1.21)与(7.1.20)'不矛盾。

在古典力学中，牛顿第三定律也适用于不作接触的两点互相作用。在相对论中，这种推广不可能成立。假使两质点"同时"受到的力相同相反：

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2}=-\boldsymbol{F}_{2\to 1}\quad (t_1=t_2)) \tag{7.1.24}$$

则由于不同系统上"同时"观念的不同，因之除非两质点均在一处（接触作用），则式(7.1.24)不是不变的观念。换言之，假使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_{01}q_a+m_{02}q_a)=0, \tag{7.1.25}$$

q_{a1}，q_{a2}为 S 系所看两点"同时"的四维速度在 S 系成立；则在 S' 系内上式不能变换成（除非接触）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(m_{01}q'_{a1}+m_{02}q'_{a2})=0 \tag{7.1.26}$$

形式。q_{a1}'，q_{a2}'为 S' 系所看"同时"的四维速度。因为假使 q_{a1}' 在 t_1' 时相应于 q_{a1} 在 t_1 时的速度，则 q_{a2}' 在同一个 t_1' 的数值就不是 q_{a2} 在同一个 t_1 的相应值，而是 q_{a2} 在

$$t_2=t_1+\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{r}}{C^2}$$

时的相应值。由于 q_{a2} 的变化复杂，式(7.1.26)的 $q'_{a2}(t_1')$ 无法从式(7.1.25)的 $q_{a2}(t_1)$ 变换过来。因之，除非 q_a 不变（没有力作用），则 $q'_{a2}(t_1')$ 与 $q_{a2}(t_1)$ 决不可能有同于 $q'_{a2}(t_1')$ 与 $q_{a2}(t_2)$ 的矢量关系。换言之，式(7.1.26)不能成立。唯在接触作用时 $\triangle\boldsymbol{r}=0$，则 S' 与 S 可均"认为同时" $t_1=t_2$，这样式(7.1.26)也可能成立。

我们如再假设牛顿第三定律不一定是"同时"作用。设某一个质点在后一点时间的 F 为

$$\boldsymbol{F}_{2\to 1}=-\boldsymbol{F}_{1\to 2}\quad (t_2>t_1) \tag{7.1.27}$$

但此时连动量定律(7.1.25)也不能成立。因为两质点动量必须是同时的，加起来才能叫做"总动量"，不能一个是今天的，另一个是明天的。而且式(7.1.27)的"不对称性"也不符合物理学的想法（哪一个有"优先权"呢？）。由此可见，两个不在一处质点的相互作用是一个非常复杂的问题。

有人将不在一处两物体的作用，作为一个物体"吐"出一个"具

有动量能量的东西"被另一个"吸收"进去，成为两度碰撞问题。以此来交换能量和动量。这是合于守恒律和相对论的一个有趣假设。不过还有困难。第一，为什么吐出的东西，恰恰被另一个吸收？例如万有引力场中两个东西 A、B 的相互作用。A 要"吐出"多少这些东西来才会碰到 B 而被它"吸收"呢？假使 A 在各方面全无限制地吐，这要多少"能量"呢？第二，这种冲量碰撞，只起排斥作用而不能起吸引作用。除非再加额外假设，这种困难也无法解决。目前我们还是只相信在下一节以及 §7.6 中将要谈到的"力场"方法；远距离的"互相"作用是经过中间的"力场"。

通常在质点力学之后，就要谈到刚体力学问题。但由于刚体的存在和相对论矛盾，相对论力学中也没有刚体运动而只有连续体运动的问题。

连续体质点的相互作用可以当作碰撞式作用。在一微小体积 $\triangle\Omega$ 内，质点的动量与质量可以用* 质点密度 ρ，速度 $\dot{x}_i$

$$\rho\dot{x}_i\triangle\Omega,\quad i=1,2,3,\quad \rho\triangle\Omega, \tag{7.1.28}$$

表示，以上 ρ、$\dot{x}_i$ 均为(x,y,z,t)的函数。其变化率

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\dot{x}_i\triangle\Omega,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\triangle\Omega \tag{7.1.29}$$

可以由速度的变化计算如下。

任何质点本身性质 $F(x,y,z,t)$的改变，可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&=\frac{F(x+\dot{x}\mathrm{d}t,y+\dot{y}\mathrm{d}t,z+\dot{z}\mathrm{d}t,t+\mathrm{d}t)-F(x,y,z,t)}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{7.1.30}$$

质点所占体积 $\triangle\Omega$ 大小的变化率也可以从包该体积边面的变化率

---

* 此地单谈质点的能量动量，而不谈相互作用产生能量交流及由此产生的动量。§7.5 以及其他各节中将要推广这种作用

算出，因一个小边 ds 在 δt 之后扩大体积(图 7.1)

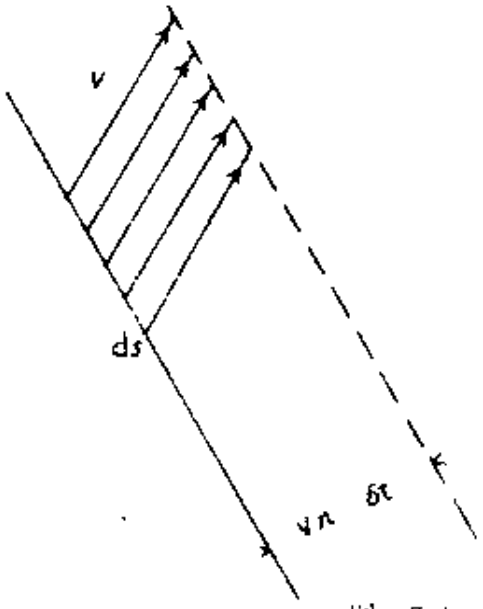


图 7.1

$$\delta(\triangle\Omega)=V_n\mathrm{d}s\delta t, \tag{7.1.31}$$

V_n 为边上质点速度(三维)在 ds 法线方向的分量。因之全部体积 $\triangle\Omega$ 的变化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega=\iint\dot{V}_n\mathrm{d}s=\iiint_{\triangle\Omega}\left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{7.1.32}$$

当$\triangle\Omega$足够小时，上式右手积分符号内可以作为常数。

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega=\sum\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}\triangle\Omega \tag{7.1.33}$$

将式(7.1.30)及式(7.1.33)代入式(7.1.29)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho\dot{x}_i\triangle\Omega=\left(\frac{\partial(\rho\dot{x}_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\dot{x}_i\dot{x}_j\right)\triangle\Omega \tag{7.1.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\triangle\Omega)=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\dot{x}_j\right)\triangle\Omega \tag{7.1.35}$$

由于

$$\triangle m=\frac{\triangle m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \triangle\Omega=\triangle\Omega_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{7.1.36}$$

以上 $\beta^2=\dot{x}_i^2$，$\triangle m_0$、$\triangle\Omega_0$ 为以速度 $\dot{x}$ 随质点运动观察者所测

的相应数值。

所以
$$\rho=\frac{\triangle m}{\triangle\Omega}=\frac{\triangle m_0}{\triangle\Omega_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{\rho_0}{1-\beta^2} \tag{7.1.37}$$

为密度与相对静止系统所测密度 ρ_0 的关系。

所以
$$\left.\begin{aligned}\rho\dot{x}_i\dot{x}_j&=\rho_0\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\dot{x}_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ iC\rho\dot{x}_i&=\rho_0\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{iC}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ -C^2\rho&=\rho_0\frac{iC}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{iC}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\} \tag{7.1.38}$$

用式(7.1.4)的矢量 q_α 代入式(7.1.34)及式(7.1.35)，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{x}\triangle\Omega)=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\rho_0q_\alpha q_\beta && \alpha=1,2,3\\ &\frac{iC}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\triangle\Omega)=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\rho_0q_\alpha q_\beta && \alpha=4\end{aligned}\right\}\quad \beta=1,2,3,4 \tag{7.1.39}$$

因之，单位体积内质点动量及质量的变化率

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho_0q_\alpha q_\beta)=f_\alpha \tag{7.1.40}$$

为一四维矢量。其右方应为单位体积的四维力。

假使知道力的作用，例如单位体积所受的力，可用方程

$$f_\alpha=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} \tag{7.1.41}$$

表示(上式中 Φ 必须为一标量，才合张量要求)，则力学方程可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho_0q_\alpha q_\beta-\Phi\delta_{\alpha\beta})=0 \tag{7.1.42}$$

等四维张量方程。

质点的拉格朗日方程(4.7.17)、(4.7.18)及哈密顿方程(4.7.20)——→(4.7.22)虽具相对论的协变性但不具明显的四维形

式。今设以

$$\mathscr{L}\equiv\frac{1}{2}m_0q_\alpha^2+\frac{e}{C}q_\alpha A_\alpha; \tag{7.1.43}$$

则由于 A_α，式(4.5.20)及(7.3.11)为四维矢量，$\mathscr{L}$ 显然为标量。方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_\beta}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\beta}=0 \quad (\beta=1,2,3,4) \tag{7.1.44}$$

为显然的四维矢量方程，参考式(6.2.5)定理六。上式展开为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_\beta}=m_0q_\beta+\frac{e}{C}A_\beta,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\beta}=\frac{e}{C}q_\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{7.1.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_\beta}\right)=\frac{\mathrm{d}(m_0q_\beta)}{\mathrm{d}\tau}+\frac{e}{C}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}\frac{\mathrm{d}x_\gamma}{\mathrm{d}\tau} \tag{7.1.45)'}$$

$$=\frac{\mathrm{d}(m_0q_\beta)}{\mathrm{d}\tau}+\frac{e}{C}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}q_\gamma$$

因之，式(7.1.44)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0q_\beta)=\frac{e}{C}q_\alpha\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.1.46}$$

用式(7.1.11)及(4.5.18)或参考后面的式(7.3.11)、(7.3.43)及(7.3.5)。则得式(4.7.1)及 $\beta=4$ 的能量方程。由于式(7.1.44)是四个方程，所以不能将条件(7.1.5)先代入。广义动量现在是

$$p_\alpha=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_\alpha}=m_0q_\alpha+\frac{e}{C}A_\alpha \tag{7.1.47}$$

与式(4.7.19)相同；其第四个分量为，(7.3.10)，

$$p_4=\frac{iCm_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{C^2}}}+i\frac{e}{C}\varphi, \tag{7.1.48}$$

(7.1.49)

亦即动能与势能之和。从式(7.1.43)又可以得出标量哈密顿函数

$$\mathscr{H}=q_\alpha p_\alpha-\mathscr{L}=\frac{1}{2}m_0q_\alpha{}^2=\frac{1}{2m_0}\left(p_\alpha-\frac{e}{C}A_\alpha\right)^2$$

(7.1.50)[1]

由此得相对性的矢量正则方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\alpha} \tag{7.1.51}$$

上式展开后，亦即

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{C}q_\beta\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{m_0}\left(p_\alpha-\frac{e}{C}A_\alpha\right)=q_\alpha, \tag{7.1.52}$$

亦即式(7.1.46)及(7.1.47)

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_\alpha}\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_\alpha}=0 \tag{7.1.53}$$

因之 $\mathscr{H}$ 具有守恒性，事实上由于式(7.1.5)

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}m_0{q_\alpha}^2=-\frac{1}{2}m_0C^2, \tag{7.1.54}$$

$\mathscr{H}$ 的守恒亦即 m_0 守恒的明显结论(4.7.6)。$\mathscr{L}$ 的形式并不一定是式(7.1.43)的形式。例如取*

$$\mathscr{L}=m_0C\sqrt{-q_\alpha^2}+m_0{q_\alpha}^2+\frac{e}{C}q_\alpha A_\alpha, \tag{7.1.55}$$

则可得同样的方程(7.1.45)⟶(7.1.48)；唯哈密顿函数改为

$$\mathscr{H}=q_\alpha p_\alpha-\mathscr{L}=-m_0C\sqrt{-{q_\alpha}^2}=-\frac{C}{m_0}\sqrt{\sum_\alpha\left(\frac{e}{C}A_\alpha-p_\alpha\right)^2} \tag{7.1.56}$$

再由式(7.1.51)用式(7.1.5)则得等式(7.1.52)。

§7.2 物理学中三大守恒定律的阐述

(A)孤立系统

动量守恒、能量守恒及角动量守恒定律为物理学的三大守恒

---

* 参考踏园兴：*Phil Mag. Vol.* 39. *P*790(1948)

定律。不独力学方程须遵守此三大守恒定律，即电磁场以及原子核子场均由实验证明遵守此种守恒原则。我们相信，一切目前尚未发现的物理定律亦必须遵守此三大守恒原则。

本来在物理学中，还有独立的质量守恒定律，但经相对论研究后，此质量守恒定律已归入能量守恒定律内成为一个质能守恒定律(除以上三守恒定律外，似乎只有电荷守恒定律最可靠了)。

现在证明凡物理定律中含有

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.2.1}$$

四个方程的，如其中 $T_{\alpha\beta}$ 为对称二阶张量，则此三大守恒定律即包括在内。例如式(7.1.41)即属此形式，式(7.3.57)也属此形式。

式(7.2.1)可以解释于下。

在空间作一六面正矩形体积

$$d\Omega=\triangle x\triangle y\triangle z$$

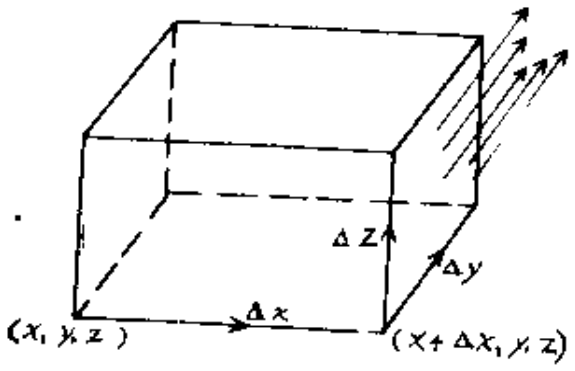


图 7.2

设每单位体积内含有某物理量 G，则其变化率在此体积内为

$$\frac{\partial}{\partial t}(Gd\Omega)$$

设经过 $x+\triangle x$ 处的 $\triangle y\triangle z$ 面，每秒向外输出 $(A\triangle y\triangle z)_{x+\triangle x}$ 这样多的量，于是在 x 处的 $\triangle y\triangle z$ 面每秒向内输入 $(A\triangle y\triangle z)$，这

样多的量，两者相差为

$$(A\triangle y\triangle z)_{x+\triangle x}-(A\triangle y\triangle z)=\frac{\partial A}{\partial x}\triangle x\triangle y\triangle z$$

同样经过 $y+\triangle y$ 处 $\triangle x\triangle z$ 面每秒设输出 $(B\triangle z\triangle x)_{x+\triangle y}$，经过 y 处 $\triangle x\triangle z$ 面输入 $(B\triangle z\triangle y)_y$，则经过此两边共输出

$$(B\triangle z\triangle x)_{y+\triangle y}-(B\triangle z\triangle x)_y=\frac{\partial B}{\partial y}\triangle x\triangle y\triangle z$$

同样经过 z 和 $z+\triangle z$ 两处边共输出

$$\frac{\partial C}{\partial z}\triangle x\triangle y\triangle z$$

因之在单位时间，六个面上共输出的量为

$$(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z})\triangle x\triangle y\triangle z$$

设此量 G 具有守恒性质，则

$$-\frac{\partial}{\partial t}(G\triangle\Omega)=(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z})\triangle x\triangle y\triangle z$$

或

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0 \qquad (7.2.2)$$

由上可见式(7.2.1)恰是式(7.2.2)的形式，G 分别可为 T_{14}，T_{24}，T_{34}，T_{11}。$T_{\alpha\beta}$的其余各项可分别作为此四种量在边上的输出率。

将式(7.2.1)依一孤立系统的体积积分。前三项变成面积分，由于孤立系统边上的 $T_{\alpha\beta}$必为零，因之

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}T_{\alpha 1}\mathrm{d}\Omega=0 \qquad (7.2.3)$$

此孤立系统内的总 $T_{\alpha 1}$具守恒性，α 可分别为 1，2，3，4 四个值。所以式(7.2.1)可称守恒定律。现在换用四维方法叙述，则又可以得到新的了解。

设取一任意不随 x，y，z，t 改变的常数四维矢量 b_α，则

$$A_\beta = b_\alpha T_{\alpha\beta} \tag{7.2.4}$$

为另一四维矢量。由于式(7.2.1)

所以

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} = 0 \tag{7.2.5}$$

将上式在四维时空积分，得

$$\iiiint \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_1}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 = 0 \tag{7.2.5}'$$

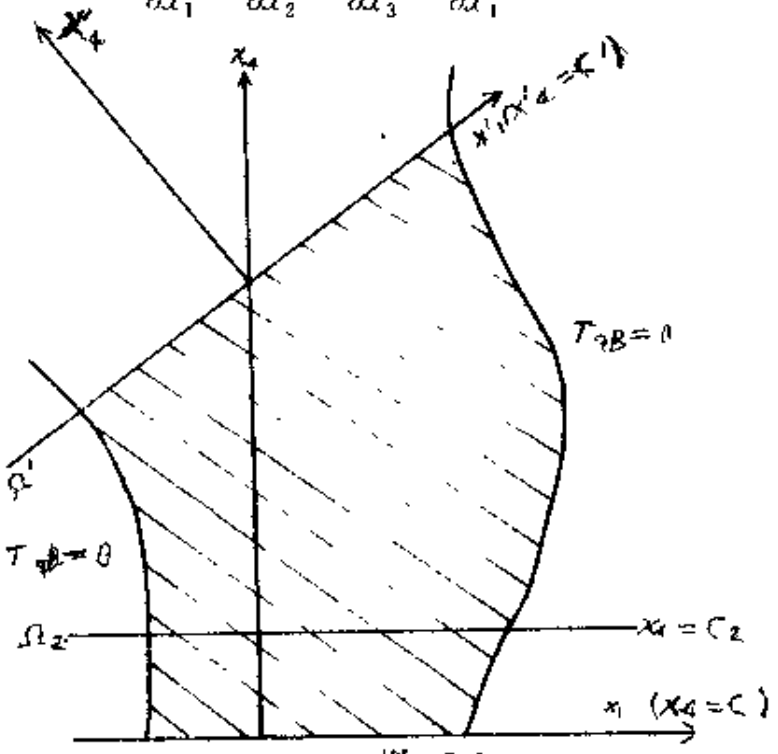


图 7.3

今取空间体积为 Ω，在 Ω 边上 $T_{\alpha\beta}$ 的数值为零(即所谓"孤立系统")。设取时间为 $x_4=C_1$，$x_4=C_2$ 两剖面，则由式(7.2.5)′看出前面三项积分到空间边缘为零，其第四项为

$$\iiint \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 = 0,$$

所以

$$\iiint_{x_4=C_2} A_4 \mathrm{d}\Omega - \iiint_{x_4=C_1} A \mathrm{d}\Omega = 0,$$

$$\iiint_{t=t_2} A_4 \mathrm{d}\Omega = \iiint_{t=t_1} A_4 \mathrm{d}\Omega \tag{7.2.6}$$

以 t_1 为相应于 $x_4=C$ 的时间，t_2 为相应于 $x_4=C_2$ 的时间，上式可写成

$$b_1\iiint_{t=t_2}T_{14}\mathrm{d}\Omega+b_2\iiint_{t=t_2}T_{24}\mathrm{d}\Omega+b_3\iiint_{t=t_2}T_{34}\mathrm{d}\Omega+b_4\iiint_{t=t_2}T_{44}\mathrm{d}\Omega$$
$$=b_1\iiint_{t=t_1}T_{14}\mathrm{d}\Omega+b_2\iiint_{t=t_1}T_{24}\mathrm{d}\Omega+b_3\iiint_{t=t_1}T_{34}\mathrm{d}\Omega+b_4\iiint_{t=t_1}T_{44}\mathrm{d}\Omega$$

由于 b_α 为任意数，因之

$$\iiint_{t=t_1}T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega=\iiint_{t=t_2}T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega=K_\alpha,\quad \alpha=1,2,3,4 \qquad (7.2.7)$$

K_α 为不因时间改变的常数，此亦即守恒定律(7.2.3)。

但式(7.2.5)又可以仿奥－格(Ostogradsky－Green)理论*化成四维宇宙的“面”积分：

$$\iiint A_n\mathrm{d}S=0, \qquad (7.2.8)$$

A_n 是矢量 A_α 在“面”“法线方向”的量。

今设积分为图 7.3 上 S 系的 $x_4=C$ 及 S' 系的 $x'_4=C'$ 两剖面中间所包含的阴影区域，则式(7.2.8)为

$$\iiint_{x'_4=c'}A_4'\mathrm{d}\Omega'-\iiint_{x_4=c}A_4\mathrm{d}\Omega=0,$$

以上 A_4' 为四维矢量 A“垂直”于 $\mathrm{d}\Omega'$ 的分量，亦即四维矢量 A 在 x_4' 方向的分量。A_4 为 A 在 x_4 方向的分量。因之由式(7.2.4)，得

$$b_1'\iiint_{t'=c'}T_{14}'\mathrm{d}\Omega'+b_2'\iiint_{t'=c'}T_{24}'\mathrm{d}\Omega'$$
$$+b_3'\iiint_{t'=c'}T_{34}'\mathrm{d}\Omega'+b_4'\iiint_{t'=c'}T_{44}'\mathrm{d}\Omega'$$

---

* 可用时间 ict 代替通常的 z 方向而考虑(x,y,ict)三维的奥格定理，再稍加想象，式(7.2.8)就可以无须证明

$$=b_1\iiint_{t=c}T_{14}\mathrm{d}\Omega+b_2\iiint_{t=c}T_{24}\mathrm{d}\Omega+b_3\iiint_{t=c}T_{34}\mathrm{d}\Omega+b_4\iiint_{t=c}T_{44}\mathrm{d}\Omega$$

由于 b_α 为任意矢量，如以 K_α、K_α' 代表式(7.2.7)在 S 系及 S' 系的数值，则

$$b_\alpha' K_\alpha' = b_\beta K_\beta \tag{7.2.9}$$

说明方程(6.3.13)中 K_α 为"四维矢量"；两不同坐标中的 K_α 满足条件

$$K_\alpha' = l_{\alpha\beta}K_\beta, \tag{7.2.10}$$

以上 $l_{\alpha\beta}$ 为四维坐标变换的系数。

设 $\sum_j |K_j^2| < |K_4^2|$，或 K_α 为时间性，则我们可以特别选一种坐标 S'，使

$$K_j' = 0 \qquad j=1,2,3$$

此 K' 称为系统的质能中心坐标*，事实上设坐标 S' 的原点对坐标 S 以恒速

$$\overrightarrow{V}_j = i\frac{K_j}{K_4}C, \quad \beta^2 = \frac{V^2}{C^2} = -\frac{K_jK_j}{K_4^2} \tag{7.2.11}$$

进行，则以式(2.5.9)代入式(7.2.10)，得

$$K_j' = 0, \quad K_4' = K_4\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.2.12}$$

矢量 K_α 可以写成

$$K_\alpha = \left(\frac{-iV_1K_4'}{C\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{-iV_2K_4'}{C\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{-iV_3K_4'}{C\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{K_4'}{C\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

形式，如以 $K_4' = iCM_0$，M_0 可称为系统的"静止质量"，则

$$\left.\begin{aligned} K_\alpha' &= (0,0,0,iCM_0) \\ K_\alpha &= \left(\frac{M_0V_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{M_0V_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{M_0V_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{iM_0C}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.2.13}$$

上式与式(7.1.10)相合，唯须注意 K_α 时间性的条件，否则式(7.

---

* 本节中一切"参照系"皆以同"坐标"代替

2.11)及(7.2.12)均不能成立，且只在"孤立系统"中有效，否则式(7.2.9)不能成立。

在光波电磁场中，光的速度在任何坐标中均为C。我们不能取相对静止的坐标，此时因$\sum_\alpha K_\alpha^2=0$。式(7.2.13)当然也不成立。不过无论如何，在宇宙中具有守恒性质且以四维矢量变换的物理量也只有动量与能量(包括质量)。因之，我们很自然地解释

$$\left.\begin{aligned} G_i &\equiv \iiint_\Omega T_{i4}\mathrm{d}\Omega = K_i, \\ E &\equiv \frac{C}{i}\iiint_\Omega T_{44}\mathrm{d}\Omega = \frac{C}{i}K_4 \end{aligned}\right\} \tag{7.2.14}$$

为此系统的总动量及总能量。$T_{\alpha\beta}$亦称"能量-动量张量"(energy-momentum tensor)

在物理学中还有角动量守恒定律，此处大约是

$$\iiint(x_iT_{j4}-x_jT_{i4})\mathrm{d}\Omega \qquad i、j=1、2、3$$

的守恒。我们也试将上式变成四维张量开式。由

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(x_\alpha T_{\beta\gamma}-x_\beta T_{\alpha\gamma})=\delta_{\alpha\gamma}T_{\beta\gamma}-\delta_{\beta\gamma}T_{\alpha\gamma}+x_\alpha\frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}-x_\beta\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma}=(T_{\beta\alpha}-T_{\alpha\beta})$$

看出，设$T_{\alpha\beta}$为对称张量

$$T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}, \tag{7.2.15}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(x_\alpha T_{\beta\gamma}-x_\beta T_{\alpha\gamma})=0 \tag{7.2.16}$$

将上式依四维空时积分，仿式(7.2.3)得孤立系统中

$$M_{\alpha\beta}=\iiint(x_\alpha T_{\beta4}-x_\beta T_{\alpha4})\mathrm{d}\Omega=K_{\alpha\beta} \tag{7.2.17}$$

的守恒定律。再仿式(7.2.4)用一任意常数张量$b_{\alpha\beta}$乘之，照式(7.2.8)的方法，得出$K_{\alpha\beta}$为一反对称二阶四维张量的结论。"反"对称是由于

$$K_{\alpha\beta}=-K_{\beta\alpha}$$

相对于任意一固定点$(a_1,_2,a_3,iCt_0=a_4)$的

$$M_{\alpha\beta}=\iiint\{(x_\alpha-a_\alpha)T_{\beta 4}-(x_\beta-a_\beta)T_{\alpha 4}\}\mathrm{d}\Omega$$

$$=K_{\alpha\beta}-a_\alpha K_\beta+a_\beta K_\alpha, \qquad (7.2.17)'$$

由于右方全为常数，当然此$M_{\alpha\beta}$也具守恒性质，又由于a_α、K_α的矢量性质，上式显然仍为一个二阶反对称张量。上式相当于更换式(7.2.17)中坐标的原点(如果a_α不是固定值则如何？应予澄清)。

式(7.2.17)的空间部分为

$$K_{ij}=\iiint(x_iT_{j4}-x_jT_{i4})\mathrm{d}\Omega \qquad (i,j=1,2,3). \quad (7.2.18)$$

此K_{ij}明显地为此系统的角动量。式(7.2.17)的时空部分为

$$K_{i4}=\iiint x_iT_{44}\mathrm{d}\Omega-\iiint x_4T_{i4}\mathrm{d}\Omega \qquad (7.2.18)'$$

因x_4为常数，上式中x_4可以取出积分符号之外，变成

$$\iiint x_iT_{44}\mathrm{d}\Omega=K_{i4}+x_4\iiint T_{i4}\mathrm{d}\Omega=K_{i4}+x_4K_i \qquad (7.2.19)$$

今定义此孤立系统的质能中心为

$$\overline{x}_i\equiv\frac{\iiint x_iT_{44}\mathrm{d}\Omega}{\iiint T_{44}\mathrm{d}\Omega}, \qquad (7.2.20)$$

则方程(7.2.19)表示此系统的质能中心以式(7.2.11)的恒速V_i在空间运动：

$$\overline{x}_i=\frac{K_{i4}}{K_4}+iC\frac{K_i}{K_4}t \qquad (7.2.21)$$

事实上，如将方程(7.2.20)直接对t微分，则由于K_4的守恒，而x_i，t均为独立的变数，因之

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{K_4}\iiint x_i\frac{\partial T_{44}}{\partial t}\mathrm{d}\Omega=-\frac{iC}{K_4}\iiint x_i\frac{\partial T_{4j}}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega$$

变成面积分后得

$$x_i\partial T_{4j}/\partial x_j=\partial(x_iT_{4j})/\partial x_j-T_{4j}\delta_{ij}$$

所以

$$\dot{x}=\frac{iC}{K_4}K_{it}+C_i$$

可由式(7.2.18)′定出 C_i 的数值为 K_{i4}/K_4，因之式(7.2.17)共六个方程，除说明角动量守恒之外，并说明质能中心在空间的恒速运动。但这种恒速运动的结论，除定义一个质能中心之外，并没有新的结果。从方程(7.2.13)也可以直接看出。所以表面上式(7.2.14)及式(7.2.17)的守恒好象有十个守恒方程，实际上只有七个"独立"的守恒关系；三个动量，一个能量及三个角动量守恒定律，这当然不是偶然的，否则我们早就应当在物理学上注意到"十个"守恒方程了。

由式(7.2.17)见此孤立系统相对于质能中心的角动量

$$\iiint\{(x_i-\bar{x}_i)T_{j4}-(x_j-\bar{x}_j)T_{i4}\}\mathrm{d}\Omega=K_{ij}+\frac{K_{j4}K_i-K_{i4}K_j}{K_4} \tag{7.2.22}$$

亦具守恒性质。但由于式(7.2.20)，因之式(7.2.22)等方程，不是张量形式，在不同坐标中定义的质能中心一般不同。换言之，由式(7.2.20)定义的 $\bar{x}_\alpha$ 一般不是 S' 系

$$\bar{x}'_\alpha=\frac{\iiint x_\alpha'T_{44}'\mathrm{d}\Omega'}{\iiint T_{44}'\mathrm{d}\Omega'}$$

的相应点，当然两者中间也没有相应的矢量变换关系存在。设 K_α 为时间性，则在质能中心特殊坐标内定义的质能中心(亦称静质能中心)

$$\bar{x}'_{\alpha G}=\frac{\iiint x_\alpha'T_{44}'\mathrm{d}\Omega'}{\iiint T_{44}'\mathrm{d}\Omega'}\qquad\begin{matrix}\bar{x}_{40}'=x_4'\\ \alpha=1,2,3,4\end{matrix} \tag{7.2.23}$$

具有特殊地位。在任何坐标中其"相应点"则由定义为

$$\bar{x}_{\alpha G}=l_{\beta\alpha}\bar{x}'_{\beta G}$$

在任何坐标中，相对于此"静质能中心"的"角动量"定义为

$$m_{\alpha\beta}\equiv\iiint\{(x_\alpha-\bar{x}_{\alpha G})T_{\beta 4}-(x_\beta-\bar{x}_{\beta G})T_{\alpha 4}\}\mathrm{d}\Omega \quad (7.2.24)$$

因 $\bar{X}_{\alpha G}$是常数，可以从积分符号取出，再由式(7.2.7)及(7.2.17)得

$$m_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}-\bar{x}_{\alpha G}K_\beta+\bar{x}_{\beta G}K_\alpha \quad (7.2.24)'$$

由于 K_α，$\bar{x}_{\alpha G}$为矢量，且 $K_{\alpha\beta}$为张量，因之 $m_{\alpha\beta}$必为一反对称张量。此种定义当然具有协变性，且与坐标原点的改换无关。$m_{\alpha\beta}$亦称"内禀角动量"。

今证明此内禀角动量张量亦具守恒性质。因在质能中心坐标中，$K'_i=0$。从式(7.2.21)可得出 $\bar{x}'_i$的数值，再由于式(7.2.23)中的积分全在同一时间，因之 x'_4 可以从积分符号取出，所以静质能中心的坐标为

$$\bar{x}'_{iG}=\frac{K'_{i4}}{K'_4},\quad \bar{x}_{4G}'=x_{4G}'$$

其相应点在 S 坐标为 $\bar{x}_{\alpha G}=l_{\beta\alpha}\bar{x}'_{\beta G}$，

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{x}_{\alpha G}=l_{\beta\alpha}\frac{\mathrm{d}\bar{x}'_{\beta G}}{\mathrm{d}t}$$

因 $\mathrm{d}x_{iG}'=0$，只有 $\mathrm{d}x_{4G}'=iC\mathrm{d}t'$，又因

$$\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_{\alpha G}}{\mathrm{d}t}=l_{4\alpha}iC\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

再用式(2.5.9)，得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}_{\alpha G}}{\mathrm{d}t}=(V_1,V_2,V_3,iC)=iC\frac{K_\alpha}{K_4}$$

微分式(7.2.24)'，得

$$\frac{\mathrm{d}m_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t}=-K_\beta\frac{\mathrm{d}\bar{x}_{\alpha G}}{\mathrm{d}t}+K_\alpha\frac{\mathrm{d}\bar{x}_{\beta G}}{\mathrm{d}t}=0$$

此亦即 $m_{\alpha\beta}$的守恒性质。

$m_{\alpha\beta}$的空间部分为相对于静质能中心的角动量

$$\boldsymbol{A}=(m_{23},m_{31},m_{12}),$$

其时空部分为

$$m_{4i}=K_{4i}-\bar{x}_{4G}K_i+\bar{x}_{iG}K_4$$

用式(7.2.17)及(7.2.20)代入，得

$$m_{4i}=x_4K_i-\bar{x}_iK_4-\bar{x}_{4G}K_i+\bar{x}_{iG}K_4$$

由于式(7.2.24)的积分必在同一个 t 的时间，因之各个 x_4 相同，上式为

$$\bar{x}_i-\bar{x}_{iG}=\frac{m_{i4}}{K_4} \tag{7.2.25}$$

由于 m_{i4}、K_4 的守恒，因之说明 S 坐标定义的质能中心和静止质能中心的相应点虽然不是一个点，但两点之间距却保持不变。

从式(7.2.25)可以断定，在质能中心坐标中的

$$m_{i4}^0=0, \tag{7.2.26}$$

这也可以从式(7.2.24)′的定义直接算出。在质能中心坐标

$$K'_i=0,K_4'=iM_0C,$$

再由于式(7.2.24)′及(7.2.26)，得

$$m_{\alpha\beta}'K_\beta'=m_{\alpha4}'K_4'=0$$

但是上面方程是矢量方程，因之在任何坐标

$$m_{\alpha\beta}K_\beta=0, \tag{7.2.27}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
m_{12}K_2+m_{13}K_3+m_{14}K_4&=0,\\
m_{21}K_1+m_{23}K_3+m_{24}K_4&=0,\\
m_{31}K_1+m_{32}K_2+m_{34}K_4&=0,\\
m_{41}K_1+m_{42}K_2+m_{43}K_3&=0
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.28}$$

以 $\boldsymbol{V}$ 为系统质能中心的速度，并设 K_a 为时间性矢量

$$K_a=(M\boldsymbol{V},iMC), \tag{7.2.29}$$

则从方程(7.2.28)得出任何坐标中 m_{i4} 的数值为

$$m_{i4}=\frac{i}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A} \tag{7.2.30}$$

从方程(6.3.24)及(7.2.26)可得内禀角动量的变换公式

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}_0), \tag{7.2.31}$$

以上

$$\boldsymbol{A}_0=(m_{23}^0,m_{31}^0,m_{12}^0)$$

为质能中心坐标所观察的内禀角动量，V 为质能中心的速度。其时空分量由式(6.3.24)得出为

$$m_{i4}=i\frac{\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}_0}{C\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{i}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}$$

当然与式(7.2.30)相同。同时亦验证了公式(6.3.78)。

式(7.2.25)中两坐标定义质能中心的距离可写成

$$\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}_G=\frac{\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}_0}{M_0C^2}=\frac{\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}}{MC^2} \tag{7.2.32}$$

换言之，如内禀角动量不为零，则不同坐标定义的质能中心一般不同，但以不变的距离(7.2.32)分开，尽管系统趋近于极小“点”，式(7.2.32)的数字仍为有限值，并不能略去(必须注意我们研究的范围限于“孤立系统”)。尽管上述研究不适用于电子这样小的“体系”，我们从此推言：S 坐标所定义具自旋内禀角动量 $h/4\pi$ 电子的质能中心可以和静质能中心相差到

$$|\triangle x|=\beta\frac{h}{4\pi m_0C}\sin\theta\sim\beta\sin\theta\times10^{-11}\text{厘米} \tag{7.2.33}$$

的距离，θ 为角动量与线速所成的角度。但 10^{-11} 却远超过电子的“大小”！事实上，一个基本粒子只能是一个“点”；因为既然定义为

"基本粒子"就不能有"构造",否则不能称为"基本",既没有"构造"那就只能是几何"点"了。所以*除非 θ 等于零或180°,那时自旋方向与线速方向同向或反向,则式(7.2.33)的结果很难与古典观点相合〔可参考式(7.9.84)及(7.9.76)〕。

由式(7.2.31)见

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}_0),\\&(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A})=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}_0),\\&\text{所以}\qquad A^2(1-\beta^2\sin^2\theta)=A_0^2\end{aligned}\right\}\qquad(7.2.34)$$

表示在任何坐标中测量的内禀角动量总不会小于静内禀角动量。由式(7.2.17)见相对于原点的角动量张量(此原点当然可取为任何"定"点)为

$$M_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}+\bar{x}_{\alpha G}K_\beta-\bar{x}_{\beta G}K_\alpha$$

因之,对一固定点的角动量为相对于静质能中心的"内禀角动量" m_{ij} 加上此静质能中心对该固定点的角动量,一如整个线动量全聚在该中心点。这也和牛顿力学的观点相同。

即对一任何以恒速 iCK_α/K_4 运动的点

$$b_\alpha=a_\alpha+iC\frac{K_\alpha}{K_4}t,$$

a_α 为常数,其相对的角动量

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta}&=\int\{(x_\alpha-b_\alpha)T_{\beta4}-(x_\beta-b_\alpha)T_{\alpha4}\}\mathrm{d}\Omega\\&=K_{\alpha\beta}-a_\alpha K_\beta+a_\beta K_\alpha\\&=K_{\alpha\beta}-b_\alpha K_\beta+b_\beta K_\alpha\end{aligned}$$

或

$$M_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}+(\bar{x}_{\alpha G}-b_\alpha)K_\beta-(\bar{x}_{\beta G}-b_\beta)K_\alpha\qquad(7.2.35)$$

---

* 但这个条件一般讲起来不具相对论协变性

亦为内禀角动量 m_{ij} 加上此静质能中心对该运动点的角动量。

(B) 孤立系统的互相作用

两个或几个小孤立系统的总动量、总能量及总角动量的定义也可以从方程(7.2.1)积分得出(总的系统仍和上段一样为大的孤立系统)。总的积分明显的为各个小孤立系统之和:

$$\iiint_{\Omega} T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega=\iiint_{\Omega_1} T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega_1+\iiint_{\Omega_2} T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega_2+\cdots \qquad (7.2.36)$$

其中 Ω_1 的边上 $T_{\alpha\beta}$ 为零,为一小孤立系统。如图 7.4 所示。其 Ω_2, Ω_3…边外的 $T_{\alpha\beta}$…亦均为零。因之上式可写成

$$G_\alpha=\sum g_\alpha^{(i)} \qquad (7.2.36)'$$

形式。$g_\alpha^{(i)}$ 为各小孤立系统的动量或能量。对固定点 a_α 角动量的定义为

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}&=\iiint_{\Omega}\{(x_\alpha-a_\alpha)T_{\beta 4}-(x_\beta-a_\beta)T_{\alpha 4}\}\mathrm{d}\Omega \\ &=\iiint_{\Omega_1}\{(x_\alpha-a_\alpha)T_{\beta 4}^{(1)}-(x_\beta-a_\beta)T_{\alpha 4}^{(1)}\}\mathrm{d}\Omega_1 \\ &+\iiint_{\Omega_2}\{(x_\alpha-a_\alpha)T_{\beta 4}^{(2)}-(x_\beta-a_\beta)T_{\alpha 4}^{(2)}\}\mathrm{d}\Omega_2+\cdots \end{aligned} \qquad (7.2.37)$$

所以

$$M_{\alpha\beta}=\sum_i M_{\alpha\beta}^{(i)}, \qquad (7.2.37)'$$

亦即一"固定点"的总角动量为各分别角动量之和。质能中心的定义为

$$\bar{x}_\alpha\iiint T_{44}\mathrm{d}\Omega=\iiint x_\alpha T_{44}\mathrm{d}\Omega=\iiint x_\alpha^{(1)}T_{44}^{(1)}\mathrm{d}\Omega_1+\iiint x_\alpha^{(2)}T_{44}^{(2)}\mathrm{d}\Omega_2+\cdots \qquad (7.2.38)$$

所以

$$\bar{x}_\alpha=\frac{\bar{x}_\alpha^{(1)}E^{(1)}+\bar{x}_\alpha^{(2)}E^{(2)}+\bar{x}_\alpha^{(3)}E^{(3)}+\cdots}{E^{(1)}+E^{(2)}+E^{(3)}+\cdots}=\frac{\sum x_\alpha^{(i)}E^{(i)}}{\sum E^{(i)}}, \qquad (7.2.38)'$$

和牛顿的力学完全相同。但是这里就必须注意这些 $x,\bar{x}$ 全是一个坐标 S 的度量。由于 S 系定义的质能中心 $\bar{x}_a^{(1)}$ 与该小孤立系统内定义的静质量中心 $\bar{x}_{a0}^{(1)}$ 不同，因之不能将不同点混在一起(7.2.34)。

宇宙基本定律要求即使这些小孤立系统起了互相作用之后，总的动量、能量和角动量仍须守恒。这个定律在相对论中也应当成立。

证明很简单。因为既然整个系统是孤立的，它的总的动量、能量

$$G_a=\int T_{a4}d\Omega=K_a \tag{7.2.39}$$

由式(7.2.7)看出必然守恒。换言之，不管 T_{a4} 在个别空间如何变化，式(7.2.39)的守恒定律仍然成立且为一四维矢量。

这里两个图说明某一种互相作用的情形。

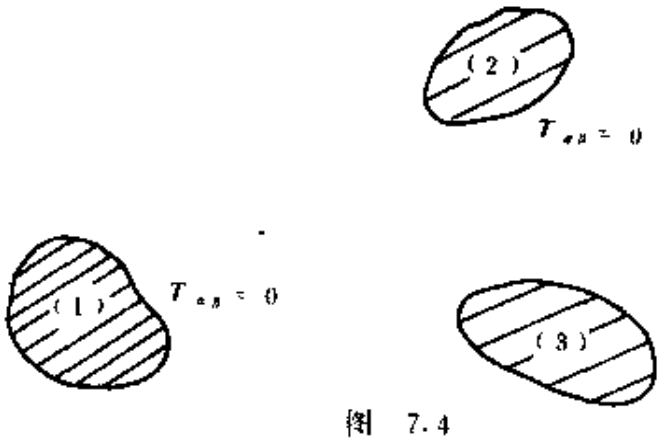


图 7.4

假使在互相作用之前，$T_{\alpha\beta}$的分布如图7.4，阴影范围之外的空间处 $T_{\alpha\beta}$数值皆为零。则式(7.2.36)的积分可分为三项

$$G_a=G_a^{(1)}+G_a^{(2)}+G_a^{(3)} \tag{7.2.40}$$

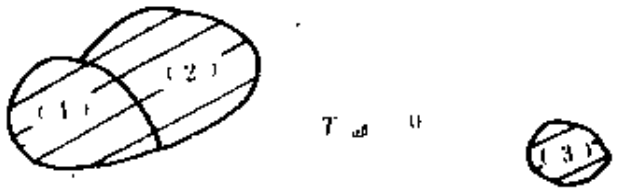


图 7.5

在互相作用之后，如图 7.5，则式(7.2.36)的积可分为两个小孤立系统：

$$\overline{G}_\alpha=\overline{G}_\alpha^{(1)+(2)}+\overline{G}^{(3)} \tag{7.2.41}$$

由于式(7.2.39)，动量能量守恒定律即采取

$$G_\alpha^{(1)}+G_\alpha^{(2)}+G_\alpha^{(3)}=\overline{G}_\alpha^{(1)+(2)}+\overline{G}^{(3)} \tag{7.2.42}$$

形式。图 7.4→图 7.5 为系统组合情形，图 7.5→图 7.4 为系统分裂情况。我们也可以想象其他复杂的情况，但式(7.2.39)的动量能量守恒定律总必须成立。同样张量

$$M_{\alpha\beta}=\sum_i M_{\alpha\beta}^{(i)} \tag{7.2.43}$$

也必然仍旧守恒。其空间部分为角动量守恒定律。其时空部分表示，式(7.2.27)总系统质能中心

$$\overline{x}_i=\frac{\int x_i T_{44}\mathrm{d}\Omega}{\int T_{44}\mathrm{d}\Omega}=\frac{\overline{x}_i^{(1)}E^{(1)}+\overline{x}_i^{(2)}E^{(2)}+\cdots}{E^{(1)}+E^{(2)}+\cdots} \tag{7.2.44}$$

以恒速

$$\overline{V}_i=\frac{C^2G_i}{E}=\frac{C^2(G_i^{(1)}+G_i^{(2)}+\cdots)}{E^{(1)}+E^{(2)}+\cdots} \tag{7.2.45}$$

在 S 空间进行。不管有无互相作用，

$$V_i=\frac{G_i^{(1)}+G_i^{(2)}+G_i^{(3)}+\cdots}{E^{(1)}+E^{(2)}+E^{(3)}+\cdots}=\frac{\overline{G}_i^{(1)+(2)}+\overline{G}_i^{(3)}+\cdots}{\overline{E}^{(1)+(2)}+\overline{E}^{(3)}+\cdots}=\overline{V}_i \tag{7.2.46}$$

均为常数。

所以方程(7.2.1)本身广义地包括牛顿第三定律。这些守恒定律与两孤立系统是否是"质点"毫无关系，而且也不限于"碰撞"问题。

现在将总的角动量(7.2.37)用各个小孤立系统的内禀角动量表示，因

$$x_\alpha-a_\alpha=(x_\alpha-\bar{x}_{\alpha G}^{(1)})+(\bar{x}_{\alpha G}^{(1)}-a_\alpha)=(x_\alpha-\bar{x}_{\alpha G}^{(2)})+(\bar{x}_{\alpha G}^{(2)}-a_\alpha)=\cdots$$

$\bar{x}_{\alpha G}^{(i)}$ 代表小系统(i)的静质能中心。所以式(7.2.37)为，参考(7.2.24)的定义，

$$M_{\alpha\beta}=\sum_i m_{\alpha\beta}^{(i)}+\sum_i\{(\bar{x}_{\alpha G}^{(i)}-a_\alpha)K_\beta^{(i)}-(\bar{x}_{\beta G}^{(i)}-a_\beta)K_\alpha^{(i)}\} \tag{7.2.47}$$

当 a_α 取为整个系统的静质量中心 $\bar{x}_{\alpha G}$ 时，则 M_{ij} 定义为"总内禀角动量"$\boldsymbol{A}$。由上式见总内禀角动量，与牛顿力学相同，为

$$\boldsymbol{A}=\sum_i \boldsymbol{A}^{(i)}+\sum_i(\bar{\boldsymbol{x}}_G^{(i)}-\bar{\boldsymbol{x}}_G)\wedge\boldsymbol{K}^{(i)} \tag{7.2.47}'$$

由于 t 的值皆相同(任何角动量，动量或能量的和必取在同一时间)，故相对于总静质能中心的

$$M_{j4}=\sum_i m_{j4}{}^{(i)}+\sum_i(\bar{x}_{jG}^{(i)}-\bar{x}_{jG})K_4^{(i)}.$$

从式(7.2.32)及(7.2.38)′，用式(7.2.30)得

$$M_{j4}=K_4(\bar{x}_j-\bar{x}_{jG}), \tag{7.2.47}''$$

$\bar{x}_j$ 为 s 系定义的质能中心，$\bar{x}_{jG}$ 为静质能中心的位置。此式当然与式(7.2.25)相合。今以 K_α 代表总动量、能量矢量，并设为时间性矢量。在总质能中心 S' 坐标中，由上式得矢量方程 $M'_{\alpha\beta}K'_\beta=0$，因之在任何坐标中

$$M_{\alpha\beta}K_\beta=0 \tag{7.2.48}$$

当然也与式(7.2.24)相同，所以相对于总静质能中心的

$$\boldsymbol{M}_{j4}=\frac{i}{C}\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{A}=K_4(\bar{x}_j-\bar{x}_{jG}), \tag{7.2.49}$$

Q 为质能中心坐标的速度，这当然和式(7.2.30)也相同。

式(7.2.49)连系系统静质能中心的位置 $\bar{x}_{\alpha G}$ 与其他小孤立系统的分别静质量中心的位置 $\bar{x}^{(i)}_{\alpha G}$。由式(7.2.32)及(7.2.38)

$$\bar{x}_{\alpha G}=\frac{1}{K_4}\Big(\sum_i \bar{x}^{(i)}_{\alpha G}K^{(i)}_4+\sum_i m^{(i)}_{\alpha 4}-M_{\alpha 4}\Big) \tag{7.2.50}$$

以 $H_{\alpha\beta}$ 代表各小孤立系统线动量对原点的角动量

$$H_{\alpha\beta}\equiv\sum_i(\bar{x}^{(i)}_{\alpha G}K^{(i)}_\beta-\bar{x}^{(i)}_{\beta G}K^{(i)}_\alpha) \tag{7.2.51}$$

代入式(7.2.47)，以 $a_\alpha=\bar{x}_{\alpha G}$ 则适当的运算* 表示总内禀角动量

$$M_{\alpha\beta}=\sum m^{(i)}_{\alpha\beta}+\frac{1}{M_0{}^2C^2}\Big\{\Big(\sum m^{(i)}_{\alpha\gamma}\Big)K_\beta K_\gamma-\Big(\sum m^{(i)}_{\beta\gamma}\Big)K_\alpha K_\gamma\Big\}$$

$$+H_{\alpha\beta}+\frac{1}{M_0^2C^2}\{H_{\alpha\gamma}K_\beta K_\gamma-H_{\beta\gamma}K_\alpha K_\gamma\} \tag{7.2.52}$$

其中 K_α 为总系统的动量、能量矢量，

$$\sum_\alpha K^2_\alpha=-M_0^2C^2 \tag{7.2.53}$$

特别应当注意到，即使质"点"碰撞，我们可取各个 $\bar{x}^{(i)}_{\alpha G}=0$，但 $\bar{x}_G$ 的数值(7.2.50)为

---

* 将式(7.2.50)及(7.2.51)代入式(7.2.47)得

$$M_{\alpha\beta}=\sum_i m^{(i)}_{\alpha\beta}+H_{\alpha\beta}+\frac{1}{K_4}\{(H_{\beta 4}+x_4K_\beta)K_\alpha-(H_{\alpha 4}+x_4K_\alpha)K_\beta\}$$

$$-\frac{1}{K_4}\Big\{\Big(\sum_i m^{(i)}_{\alpha 4}-M_{\alpha 4}\Big)K_\beta-\Big(\sum_i m^{(i)}_{\beta 4}-M_{\beta 4}\Big)K_\alpha\Big\}$$

从式(7.2.48)得

$$\Big(\sum m^{(i)}_{\alpha\beta}-H_{\alpha\beta}\Big)K_\beta=\frac{1}{K_4}\left\{\begin{array}{ll} H_{\alpha 4}K^2_\beta-H_{\beta 4}K_\alpha K_\beta & \Big(\sum_i m^i_{\alpha 4}\Big)K_\beta K_\beta+\Big(\sum_i m^i_{\beta 4}\Big)K^2_\beta \\ -M_{\alpha 4}K^2_\beta+M_{\beta 4}K_\alpha K_\beta & \end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{K_4}\Big\{\quad M_0C^2H_{\alpha 4}-H_{\beta 4}K_\alpha K_\beta-\Big(\sum m^i_{\beta 4}\Big)K_\alpha K_\beta\quad M_0C^2\Big(\sum m^i_{\alpha 4}\Big)+M_0C^2M_{\alpha 4}\Big\}$$

算出

$$\Big(\sum m^{(i)}_{\alpha\gamma}-H_{\alpha\gamma}\Big)K_\gamma K_\beta-\Big(\sum m^{(i)}_{\beta\gamma}-H_{\beta\gamma}\Big)K_\gamma K_\alpha=-M_0C^2(\bar{x}_{\alpha G}K_\beta-\bar{x}_{\beta G}K_\alpha)$$

代入 $M_{\alpha\beta}$ 即得式(7.2.52)

$$\bar{x}_{\alpha 4}=\frac{1}{K_4}\left(\sum m_{\alpha 4}^{(i)}-M_{\alpha 4}\right)=\frac{1}{MC^2}\left\{\sum_i \boldsymbol{V}^{(i)}\wedge\boldsymbol{A}^{(i)}-\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{A}\right\}$$

(7.2.54)

一般不能取为零。这和牛顿力学有特殊的分歧。从式(7.2.38)看来，当 $\bar{x}_\alpha^{(i)}$ 均为零时，$\bar{x}_\alpha$ 亦为零；但由于这些 $\bar{x}_\alpha^{(i)}$ 系 S 坐标定义的质能中心(不具四维矢量性质)，它们和各个的静质能中心差一个距离(7.2.32)，而这个距离不能忽略不计。

当小孤立系统起相互作用之后，式(7.2.52)的 $M_{\alpha\beta}$ 和 K_α 均具守恒性，似乎有十个守恒方程。但当 K_α 守恒时，则整个系统静质能中心的速度 $\boldsymbol{Q}$ 当然守恒，总角动量

$$\boldsymbol{A}=(M_{23},M_{31},M_{12}) \tag{7.2.55}$$

再守恒则

$$M_{j4}=\frac{i}{C}(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{A}) \tag{7.2.56}$$

即自动的守恒。因之 K_α，$M_{\alpha\beta}$ 守恒律只有七个独立条件。换言之，我们仍是只有三大守恒定律，相对论并没有添出个新的守恒条件来。

Synge 在他 1956 年的狭义相对论一书上大约是由于忽视了各坐标定义质能中心的不同，错误的忽略(7.2.52)后面的各项(可取碰撞点为原点，$H_{\alpha\beta}=0$。但还有其他 $\sum m_{\alpha\beta}^{(i)}$ 等项不能忽略。)以为

$$M_{\alpha\beta}=\sum_i m_{\alpha\beta}^{(i)} \tag{7.2.57}$$

这样式(7.2.56)就不成立，所以添出了三个"新"的守恒条件。因之他推出"两质点弹性碰撞后的情况可以完全确定"的结论(可参考该书第七章§9至§13的研究)。其实他书中的方程(134)在改正之后只有十七个是独立的。仍留下三个不确定数，所以他的结论是错误的。

在整个系统的质能中心坐标中

$$K'_i=0, K'_4=iM_0C, \tag{7.2.58}$$

$M_{\alpha\beta}$蜕化为

$$\left.\begin{aligned} M_{ij}&=\sum m_{ij}^{(i)}+H_{ij},\\ M_{i4}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.2.59}$$

此时总内禀角动量如不计 H_{ij}则确为

$$A=\sum_{(i)} A^{(i)} \tag{7.2.60}$$

但此时 M_{j4}恒等于零

$$0=M_{j4}\neq\sum_i m_{j4}^{(i)}, \tag{7.2.61}$$

并不能如 Synge 想象的作为独立方程运用。

(C) 非孤立及非闭合系统

到目前为止，我们还只肯定了在孤立系统中

$$\iiint T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega$$

积分的意义而没有肯定 $T_{\alpha\beta}$各个的意义。现在加以补充。

第一 $T_{\alpha 4}$的意义，在孤立系统中，常数 K_α

$$K_\alpha=\iiint_\Omega T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega \tag{7.2.62}$$

已被证明为矢量并已被解释，式(7.2.14)为系统的动量和能量。但是单从这个理由，我们不能解释 $T_{\alpha 4}$为动量、能量密度。由于上面积分只限于孤立系统，如在积分号内加入任何散度

$$\frac{\partial}{\partial x_j}R_{\alpha j} \tag{7.2.63}$$

则由于积分到此孤立系统边界时该处 R 可取为零。式(7.2.62)的数值仍不变)假使 K_α 变了，则不能得出动量、能量守恒定律)，但是这样

$$T_{\alpha 4}+\frac{\partial}{\partial x_j}R_{\alpha j}$$

也可以解释为能量密度，虽然张量性质要求上式改成

$$S_{\alpha 4}=T_{\alpha 4}+\frac{\partial}{\partial x_\gamma}R_{\alpha 4\gamma} \tag{7.2.64}$$

形式。那么也只要

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint R_{\alpha 44}\mathrm{d}\Omega=0, \tag{7.2.65}$$

则式(7.2.64)可以解释为动量、能量密度。设

$$R_{\alpha 44}=0 \tag{7.2.66}$$

成立，则上式(7.2.65)当然可以成立。

由于式(7.2.66)在任何坐标中成立，因之张量性质要求

$$R_{\alpha\beta\gamma} \tag{7.2.67}$$

为 β、γ 反对称。此时

$$S_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}+\frac{\partial R_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} \tag{7.2.68}$$

因为张量 $T_{\alpha\beta}$ 的散度为零，且 $R_{\alpha\beta\gamma}$ 为 β、γ 反对称，因此张量 $S_{\alpha\beta}$ 亦具散度为零的性质：

$$\frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.2.69}$$

初看式(7.2.68)的 $S_{\alpha\beta}$ 可以完全代替 $T_{\alpha\beta}$，但是宇宙中除去动量、能量守恒定律之外还有角动量守恒定律。此时又要求式(7.2.67)的 R 为 α、β 对称。但是一个“β、γ 反对称”、“α、β 对称”的张量必为零，其证明如下：

因为
$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma}&=R_{\beta\alpha\gamma}=-R_{\beta\gamma\alpha}=-R_{\gamma\beta\alpha}=R_{\gamma\alpha\beta}\\&=R_{\alpha\gamma\beta}=-R_{\alpha\beta\gamma},\end{aligned}$$

所以
$$2R_{\alpha\beta\gamma}=0 \tag{7.2.70}$$

因之

$$S_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}, \tag{7.2.71}$$

还是一样。所以一般讲起来，$T_{\alpha 4}$ 应当可以解释为动量、能量密度。

今将式(7.2.1)在一非孤立范围内积分得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} T_{i4}\mathrm{d}\Omega = -iC\oiint(lT_{ix}+mT_{iy}+nT_{iz})\mathrm{d}s \qquad (7.2.72)$$

既然 T_{i4} 被解释为动量密度，上式说明任一体积 Ω 内动量的变化。

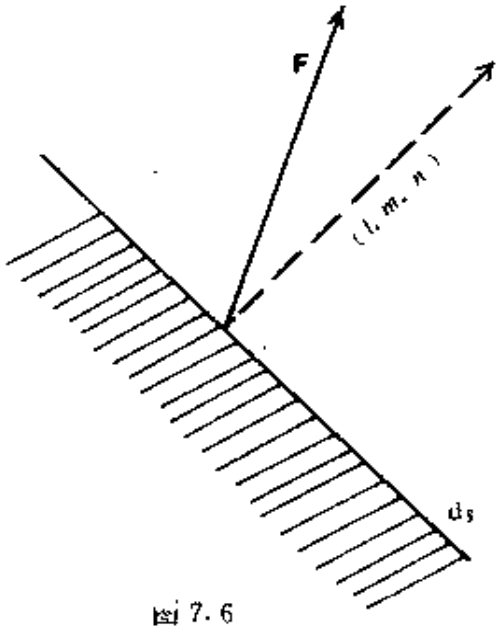


图 7.6

是由于包围此体积面上 T_{ij} 的作用。

$$-iC(lT_{ix}+mT_{iy}+nT\,iz) \qquad (7.2.73)$$

必须解释为单位面积上所受应力和输入的动量，如图 7.6 所示。因之

$$iC\begin{Vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{xy} & T_{zz} \end{Vmatrix} \equiv -iCT_{ij} \qquad (7.2.73)'$$

可以解释为边上作用的应力(包括动量输入)。第一个指标 i 表示力在 i 方向的分量；第二个指标 j 表示垂直于 j 轴面上的力。力的方向是从较小的 x_j 值到较大的 x_j 值。初看在式(7.2.72)的左方可以加入任一散度为零的物理量，使 T_{ij} 不是唯一形式，但如前所说，四维张量性质和张量守恒的特点不允许这种任意性。

角动量定律现在是

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}(x_iT_{j4}-x_jT_{i4})\mathrm{d}\Omega$$

$$=-iC\oint\{x_i(lT_{jx}+mT_{jy}+nT_{jz})-x_j(lT_{ix}+mT_{iy}+nT_{iz})\}\mathrm{d}s \tag{7.2.74}$$

也完全合于普通力学的观点。

式(7.2.72)的第四个分量，能量变化率为($K_4=\frac{i}{C}MC^2$)

$$\frac{C^2}{iC}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}T_{44}\mathrm{d}\Omega=-C^2\oint(lT_{4x}+mT_{4y}+nT_{4z})\mathrm{d}s \tag{7.2.75}$$

任一体积内能量的增加率为上式右边的面积分，因之

$$-C^2(lT_{4x}+mT_{4y}+nT_{4z}) \tag{7.2.76}$$

必须解释为在面积 $\mathrm{d}s$ 上，每秒每单位应力所做的功和能量的输入。如果该处没有物质存在，则上式(7.2.76)只含能量的输入。由图 7.6 见

$$C^2(T_{4x},T_{4y},T_{4z}) \tag{7.2.77}$$

必为每单位面积上每秒流出的能量，此亦称“能流矢量”(当然是三元空间的矢量)。从 $T_{\alpha\beta}$的对称性可见，如某处无物质存在，则能流为该处的“动量”密度的 C^2 倍。换言之，在能量传播的地方尽管没有物质，也必有“动量”存在，才能合于宇宙中的三大守恒定律。我们称这些动量为“场动量”。理由很简单，既然能量有质量性质，则当能量流动时，这些“质量”也必流动，所以产生“动量”。例如 μ 为能量密度，其相当的质量密度为 ρ。设 q 为流动速度，则能流矢量

$$\mu q=(\rho C^2)q=C^2(\rho q) \tag{7.2.78}$$

上式即表示能流矢量为动量密度的 C^2 倍。

角动量张量的时空部分为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}(x_iT_{44}-x_4T_{i4})\mathrm{d}\Omega=-iC\oiint x_i(lT_{4x}+mT_{4y}+nT_{4z})\mathrm{d}s$$
$$-C^2t\oiint(lT_{ix}+mT_{iy}+nT_{iz})\mathrm{d}s \qquad (7.2.79)$$

因对 $\mathrm{d}\Omega$ 的积分是在同一时间，上式为

$$\frac{C}{i}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}x_iT_{44}\mathrm{d}\Omega=-C^2\oiint x_i(lT_{4x}+mT_{4y}+nT_{4z})\mathrm{d}s+C^2\iiint_{\Omega}T_{i4}\mathrm{d}\Omega \qquad (7.2.80)$$

如以

$$\bar{x}_i=\frac{\iiint_{\Omega}x_iT_{44}\mathrm{d}\Omega}{\iiint_{\Omega}T_{44}\mathrm{d}\Omega} \qquad (7.2.81)$$

定义为该(非孤立系统)体积内的质能中心，则上式表示质能中心位置的变化是由于两个因素：一种是由于本身所含的动量，另一种是由于外来能量，致改变质能中心位置。假使没有"外来"的能量，则

$$\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial t}=\frac{\iiint T_{i4}\mathrm{d}\Omega}{\frac{1}{iC}\iiint T_{44}\mathrm{d}\Omega} \qquad (7.2.82)$$

和前面的结论式(7.2.21)完全相同。

设以 $\quad g_i=T_{i4},\quad hC^2\equiv\frac{C}{i}T_{44}$

代表动量、能量密度。在坐标变换时

$$g_i=T_{i4}=\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x'_\beta},h=\frac{1}{iC}T_{44}=\frac{1}{iC}\frac{\partial x_4}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x'_\beta}T'_{\alpha\beta} \qquad (7.2.83)$$

将式(2.5.13)代入上式得

$$g_i=\frac{g'_i\sqrt{1-\beta^2}+\frac{V_i}{V^2}(g'_jV_j)(1-\sqrt{1-\beta^2})+h'V_i}{(1-\beta^2)}+\frac{V_i(V_jT'_{4j})}{C^2(1-\beta^2)}$$

$$+\left\{\delta_{ij}+\frac{V_iV_j}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\frac{i(V_kT'_{jk})}{C\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.2.84}$$

$$h=\frac{h'+\frac{(V_jg_j')}{C^2}}{(1-\beta^2)}+\frac{(V_jT'_{4j})+\frac{i}{C}(V_iV_jT_{ij}')}{C^2(1-\beta^2)} \tag{7.2.85}$$

其中 V_i 是 S' 系对 S 系的速度。以上的变换公式和质点动量、能量密度，由式(7.1.37)的定义及式(3.1.10)，式(3.1.7)得出的

$$\rho=\frac{\delta m}{\delta\Omega}=\frac{\rho_0}{1-\frac{q^2}{C^2}}=\frac{\rho(1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2})}{(1-\frac{q'^2}{C^2}(1-\beta^2)}$$

$$=\frac{\rho'+\frac{(\rho'\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}}{1-\beta^2} \tag{7.2.86}$$

$$\rho\boldsymbol{q}=\frac{\rho_0}{1-\frac{q^2}{C^2}}\left\{\frac{\boldsymbol{q}'\sqrt{1-\beta^2}+\boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})+\boldsymbol{V}}{1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}}\right\}$$

$$=\frac{\rho'\boldsymbol{q}'\sqrt{1-\beta^2}+\boldsymbol{V}\frac{(\rho'\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})+\rho'\boldsymbol{V}}{(1-\beta^2)} \tag{7.2.87}$$

变换式不同。这种矛盾只是表面的。在式(7.2.1)之内，$T_{\alpha\beta}$包括整个系统的相互作用而在计算“质点密度”时我们没有考虑到质点的相互作用，直接的以能量、动量密度为

$$\rho C^2=\frac{\delta m}{\delta\Omega}C^2,\ \rho\boldsymbol{q}=\frac{\delta m}{\delta\Omega}\boldsymbol{q} \tag{7.2.88}$$

这样相互作用的场，就不能被包括在内。换言之，式(7.1.40)的右方须加相互作用(见§7.5)。例如式(7.1.41)中的

$$T_{i4}=iC\rho\dot{x}_i,\quad T_{44}=-C^2\rho-\varphi \tag{7.2.89}$$

由于 φ 是标量，则 T_{44}的变换式当然不能和单纯 ρ 的变换相同。

在比较上面两种 h、ρ 的交换式时要以看出质点密度(7.2.86)的变换只占问题的一部分。假使式(7.2.84)及式(7.2.85)中 $T'_{ij}=0, T''_{ij}=0$，没有应力作用及能量交换，则该两式就蜕化成为式(7.2.86)及式(7.2.87)质点密度变换的情形了。

再由于积分时所取的 t 值均相同，而不同坐标上时间的剖面不同，所以任意体积内 T_{a4} 的积分如图 7.7 的 $x_4=c$ 及 $x'_4=c'$ 两剖面一般没有相应关系，因之一般不能成为四维矢量。在孤立系统守恒情形下，式(7.2.10)，它们的矢量性质似乎是一种特殊现象。但从"质点"动量、能量的定义

$$G_a=M_0q_a \tag{7.2.90}$$

看来，则不管 G_a 是否守恒，G_a 总具有矢量的变换性质〔这可以从式(7.1.8)看出〕。这个原因如何解释呢？在 § 7.6 节内，例如方程(7.6.83)或(7.6.160)，我们将计算出式(7.2.90)的可靠性；亦即连续体某部物质的运动方程确可写成式(7.1.39)或式(7.1.40)的形式* 而保持质点部分的四维矢量性质。

另外，在任何场论中如 $T_{\alpha\beta}$ 可分成

$$T^{(1)}_{\alpha\beta}+T^{(12)}_{\alpha\beta}+T^{(2)}_{\alpha\beta} \tag{7.2.91}$$

三部分：$T^{(1)}$ 只含变量(1)的部分，$T^{(2)}$ 只含变量(2)部分，$T^{(12)}$ 含互相作用部分。将上式在一切变量(1)$T^{(1)}_{\alpha\beta}\neq 0$ 时体积内积分，包含此体积面外的 $T^{(1)}_{\alpha\beta}$ 均等于零，则此积分称(1)的"孤立系统"的积分。但这不是闭合系统，闭合系统的定义为式(7.2.1)方程的成立。由于单单变量(1)的 $T^{(1)}_{\alpha\beta}$ 不满足式(7.2.1)，所以单单变量(1)的 $T^{(1)}_{\alpha\beta}$ 是"非闭合系统"。我们以前证明一个孤立而且闭合系统的 $T_{\alpha 4}$ 积分为一矢量，现在再证明一个孤立的，但不是闭合系统的 $T^{(1)}_{\alpha\beta}$ 积分，

---

* 在方程(7.6.83)没有被发现之前，$T_{\alpha 4}$ 在任意体积内的积分"不能成为矢量"引起理论上的困难。Synge 在"狭义相对论"书上解释两质点互相作用为"吞吐"一个第三种质点，这样把相互作用变成孤立系统的"碰撞"问题〔在作用前后系统还是孤立系统，以保持式(7.2.90)的形式〕。可再参考 *Heitler*，*Quantum Theory of Radiation P.* 15

也可以在适当情形下成为一个矢量。

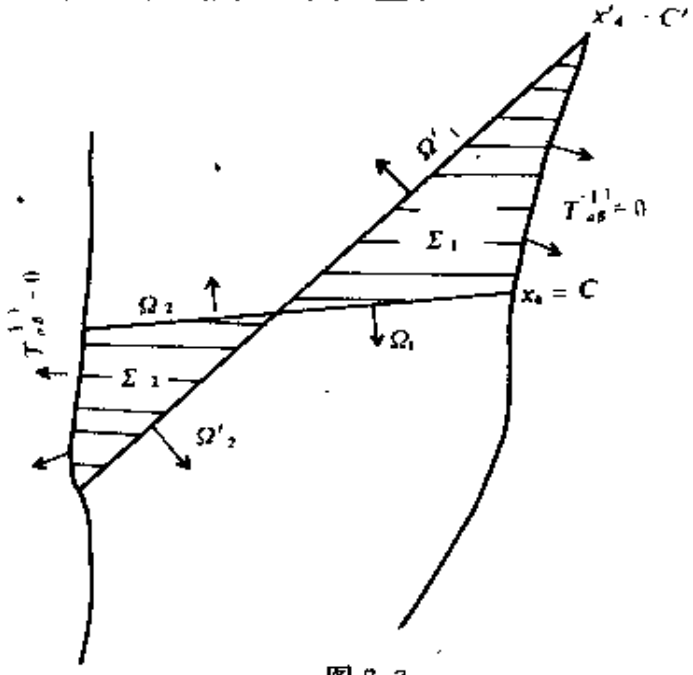


图 7.7

今设非闭合系统(1)的变化公式为

$$\frac{\partial T^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f_\alpha \neq 0 \tag{7.2.92}$$

以

$$b_\alpha T^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv A_\beta,$$

b_α 为一常数矢量，则

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} = b_\alpha f_\alpha, \tag{7.2.93}$$

将此式在图 7.7 $x'_4 = C'$，$x_4 = C$ 两剖面交叉的上半部 $\sum_1$ 积分得

$$\iiint \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} \mathrm{d}\sum_1 = \iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\sum_1$$

用格奥定理，上式为

$$\iiint_{t'=c'} A'_4 \mathrm{d}\Omega'_1 - \iiint_{t=c} A_4 \mathrm{d}\Omega_1 = \iiint b_\alpha f_\alpha d\sum_1, \tag{7.2.93)'}$$

$\mathrm{d}\Omega'_1$ 为 $x'_4 = c'$ 的空间体积，$\mathrm{d}\Omega_1$ 为 $x_4 = C$ 的空间体积，A'_4 为 S' 系

中 A 的第四分量，A_4 为 S 系中 A 的第四分量。其余边上的数值由于 $T^{(1)}_{\alpha\beta}=0$ 而消灭。

再将式(7.2.93)在图 7.7 交叉的下半部 $\sum_2$ 积分得

$$\iiint_{t=c} A_4 \mathrm{d}\Omega_2 - \iiint_{t'=c'} A'_4 \mathrm{d}\Omega'_2 = \iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\sum_2 \qquad (7.2.94)$$

式(7.2.93)与式(7.2.94)的差为

$$\iiint_{t'=c'} A'_4 \mathrm{d}\Omega' - \iiint_{t=c} A_4 \mathrm{d}\Omega = \iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\sum_1 - \iiint b_\alpha f_\alpha d\sum_2 \qquad (7.2.95)$$

因之如果我们能选 $t'=c'$“面”使上式右方的差数恰巧为零，则

$$\iiint_{t=c'} A'_4 \mathrm{d}\Omega' = \iiint_{t=c} A_4 \mathrm{d}\Omega,$$

或

$$\iiint_{t'=c'} (b_\alpha T^{(1)}_{\alpha 4})' \mathrm{d}\Omega' = \iiint_{t=c} (b_\alpha T^{(1)})_{\alpha 4}{}^{(1)} \mathrm{d}\Omega \qquad (7.2.96)$$

其 $t'=c'$ 的数值决定于

$$\iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\sum_1 = \iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\sum_2, \qquad (7.2.97)$$

或者由于 b_α 为常数矢量，决定于

$$\iiint f_\alpha \mathrm{d}\sum_1 = \iiint f_\alpha \mathrm{d}\sum_2 \qquad (7.2.97)'$$

当式(7.2.96)成立之后，则

$$b'_\alpha \iiint_{t'=c'} T^{(1)}_{\alpha 4} \mathrm{d}\Omega' = b_\beta \iiint_{t=c} T^{(1)}_{\beta 4} \mathrm{d}\Omega$$

因为 $b_\beta = l_{\alpha\beta} b'_\alpha$

所以

$$b'_\alpha \left\{ \iiint_{t'=c'} T^{(1)}_{\alpha 4} \mathrm{d}\Omega' - l_{\alpha\beta} \iiint_{t=c} T^{(1)}_{\alpha 4} \mathrm{d}\Omega \right\} = 0$$

或

$$\iiint_{t'=c'} T^{(1)'}_{\alpha 4} \mathrm{d}\Omega' = l_{\alpha\beta} \iiint_{t=c} T^{(1)}_{\alpha 4} \mathrm{d}\Omega, \qquad (7.2.98)$$

亦即所要求的矢量性质。

由方程(7.2.97)可以导出 dt 时之后相应的 dt' 数值以保证方程的继续成立。

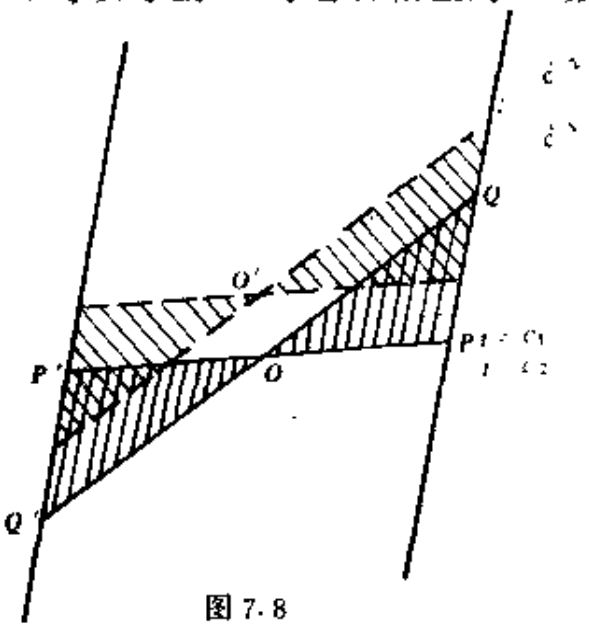


图 7.8

在 dt,dt' 之后图 7.8 的交叉点 0 移到 0′。由式(7.2.97)我们要求在 $t+dt$ 时

$$\iiint_{t+dt}(b_a f_a)\mathrm{d}\sum_1 \doteq \iiint_{t+dt}(b_a f_a)\mathrm{d}\sum_2 \qquad (7.2.99)$$

仍然成立,才能保持式(7.2.98)的矢量性质。设该时 t' 为 $t'=C_2'$ 剖面则由图 7.7 及 7.8 可见式(7.2.99)的左方与式(7.2.97)左方的差在忽略高次微数之后为

$$dt'\int(b_a f_a)'\mathrm{d}\Omega_1' - dt\int(b_a f_a)\mathrm{d}\Omega_1,$$

以上 $d\Omega_1'$ 在 OQ 面,$d\Omega_1$ 为在 OP 面上。其右方的差为

$$dt\int(b_a f_a)\mathrm{d}\Omega_2 - dt'\int(b_a f_a)'\mathrm{d}\Omega'_2,$$

以上 $d\Omega_2$ 为在 $P'O$,$d\Omega'_2$ 为在 $Q'O$ 面上的"空间体积"素。将以上两式相等,

所以
$$dt\int(b_\alpha f_\alpha)\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}t'\int(b_\alpha f_\alpha)'\mathrm{d}\Omega' \tag{7.2.100}$$
现在 $\mathrm{d}\Omega$ 的积分为整个空间 $P'OP$，$\mathrm{d}\Omega'$ 为整个 $Q'OQ$。上式表示 dt 与 $\mathrm{d}t'$ 的关系。我们看这种关系如何运用到"牛顿力学方程"。

由式(7.2.92)得方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}b_\alpha \mathrm{T}_{\alpha\beta}^{(1)}=b_\alpha f_\alpha \tag{7.2.101}$$

今对一四维 $\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$ 积分到孤立系统(1)的边界，则

$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t}\int b_\alpha \mathrm{T}_{\alpha 4}^{(1)}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t=\int b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$$

取 dt 为小数，两边消去 dt 得

$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t}\left\{\iiint_\Omega b_\alpha \mathrm{T}_{\alpha 4}^{(1)}\mathrm{d}\Omega\right\}=\iiint_\Omega b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\Omega, \tag{7.2.102}$$

所以
$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t}\left\{\iiint_\Omega T_{\alpha 4}{}^{(1)}\mathrm{d}\Omega\right\}=\iiint_\Omega f_\alpha \mathrm{d}\Omega \tag{7.2.103}$$

为孤立系统(1)的运动方程。要显示上述方程的协变性，将式(7.2.90)代入式(7.2.102)的左方得

$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t'}\left\{\iiint_\Omega (b_\alpha \mathrm{T}_{\alpha 4}^{(1)'})\mathrm{d}\Omega'\right\}\frac{\delta t'}{\delta t}=\iiint b_\alpha f_\alpha \mathrm{d}\Omega$$

以式(7.2.100)代入上式得

$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t'}\left\{\iiint_\Omega (b_\alpha \mathrm{T}_{\alpha 4}^{(1)'}\mathrm{d}\Omega'\right\}=\iiint_\Omega (b_\alpha f_\alpha)'\mathrm{d}\Omega', \tag{7.2.104}$$

或与式(7.2.103)完全相同的

$$\frac{1}{iC}\frac{\delta}{\delta t}\left\{\iiint_\Omega \mathrm{T}_{\alpha 4}{}'\mathrm{d}\Omega'\right\}=\iiint_\Omega f_\alpha{}'\mathrm{d}\Omega' \tag{7.2.105}$$

因之，只要可以选择 t' 使式(7.2.97)得以满足，则孤立系统(1)的动量、能量，即在外力作用之下(非闭合系统)，亦为一四维矢量。其运动方程(7.2.103)具有协变性。

对一个在"外力"作用之下的小体积素，它单位体积受的外力 f_α 一般的变化可以写成

$$f_\alpha = \varphi\lambda_\alpha$$

形式。以上 φ 可为变数如电荷密度，但 λ_α 为不变的常数如外力的方向。此时式(7.2.97)的条件

$$\iiint \varphi \mathrm{d}\sum_1 = \iiint \varphi \mathrm{d}\sum_2 \qquad (7.2.107)$$

就可以满足，t' 相应于加权 φ"中心"的时间。所以"外力"作用下小"素"的动量、能量具有矢量(7.2.90)的性质(见下节末段的例子)。

如 f_α 的方向变化很大，例如内力作用，则式(7.2.97)有四个独立方程，一般就不能被满足。此时式(7.2.98)也就不能成立。但是参考§7.6节的方程(7.6.84)、(7.6.100)及其说明则在某种情形下，式(7.2.98)仍旧可以成立。

有人*在式(7.2.103)的两方乘以 δt，以为由于

$$\mathrm{d}\Omega\delta t \qquad (7.2.108)$$

是标量，f_α 为四维矢量，因之结论(7.2.103)左方的

$$\delta\iiint_\Omega \mathrm{T}_{\alpha 4}^{(1)}\mathrm{d}\Omega \qquad (7.2.109)$$

"必"为四维矢量。其实不同坐标上积分的范围不同，S 系积分的范围为图 7.8 的 $P'OP$，而 S' 系积分的范围为该图上的 $Q'OQ$。不同范围的积分不能比较，f_α 在不同的时空点一般也"没有甚么矢量变换关系"。所以这个结论一般是错的。

§7.3 微观电动力学

由式(4.5.1)及(4.5.2)的第一组方程得

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma q_z) = 0 \qquad (7.3.1)$$

---

* Von Laue 在他的狭义相对论 1955 年版 173 页引用 Papapetrou 论文也错误地结论非闭合孤立系统中角动量的反对称张量性质

此方程的单独存在表示式(7.3.1)为

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{7.3.2}$$

的形式。因之

$$j_\alpha=(\sigma q_x,\sigma q_y,\sigma q_z,ic\sigma) \tag{7.3.3}$$

应为矢量。(4.5.8)麦洛氏的第一组方程表示 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 等量，必为一二阶张量，$F_{\alpha\beta}$才能使

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{j_\alpha}{c} \tag{7.3.4}$$

为四维形式。与(4.5.1)比较，见

$F_{11}=0,F_{12}=B_z,F_{13}=-B_y,F_{14}=-iE_x,F_{21}=-B_z,F_{22}=0,$

$F_{23}=B_x,F_{24}=-iE_y,F_{31}=B_y,F_{32}=-B_x,F_{33}=0,F_{34}=-iE_z,$

$F_{41}=iCE_x,F_{42}=iCE_y,F_{43}=iCEz$，因之 $F_{\alpha\beta}$二阶反对称张量为

$$F_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.3.5}$$

由式(6.3.24)得两个坐标中电磁场的相应关系，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}\right)-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) \\ \boldsymbol{B}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{B}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{E}\right)-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

以 j 代表电流密度，麦氏方程中 j 并不限定为 σq，但既然方程(7.3.2)成立，j 及 σ 必为一四维矢量，因之一般电流密度及电荷密度均照式(6.3.20)的

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{j}' + \frac{\sigma'\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{V})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \\ \sigma &= \frac{\sigma' + \dfrac{(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{V})}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7.3.7}$$

方程变换(在以上方程中,掉换 $\boldsymbol{V}$ 的符号,即得 S 系各量与 S' 系各量的逆关系)。由此可见,不独电场与磁场可以互相转变,即纯粹不带电荷的稳恒电流也可以被另外坐标看成为带电。这些电荷哪儿来的呢?设在 S' 坐标内,各处仅有稳恒电流,而无电荷:$\boldsymbol{j}' \neq 0, \sigma' = 0$。例如假设在均匀的物质内负电荷的质点一直静止不动,而带正电荷的质点在内一直连续等速移动;这样当然使宏观的电荷密度为零,而电流不是零。那么在 S 系看来,各处怎会带有电荷呢?这个问题的症结还是出在相对论内"同时"的观念上。在 S' 系认为各处正电荷同时以等速"开始"运动时,S 系则认为后面的先动。因此发生聚电现象。例如图7.9中表示在相差 $\triangle x'$ 的体积内,当 S' 系

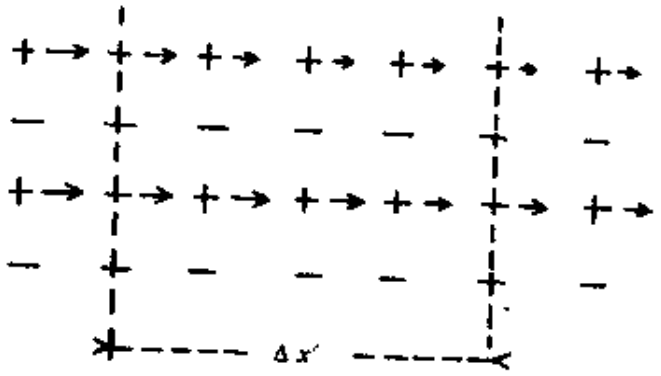


图 7.9

认为两边同时开始有等量电荷向右移动时,则 S 认为 $\triangle x'$ 左边在开始进入电荷的时候,右边的还没有走出。这样就发生体积内的聚电现象。其数量可以计算于下。为计算方便,这个稳恒电流发生的

开始，可作为连续渐次的增加。对 S' 系而言，因为没有聚电现象，所以在任何时 t'，各处的电流总是一样。但对 S 系则右边的电流较大

$$\frac{\partial j_x}{\partial t}\triangle t = \frac{\partial j_x}{\partial t}\cdot\frac{V\triangle x'}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

因之体积内聚电率

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\triangle x) = \frac{\partial j_x}{\partial t}\frac{V\triangle x'}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

由积分得

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\triangle x)\mathrm{d}t = \sigma\triangle x = \int_0^t \frac{\partial j_x}{\partial t}\frac{V\triangle x'}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\mathrm{d}t = \frac{j_x V\triangle x'}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}},$$

j_x 是稳定时的电流密度。由此可见，在 S' 系看作各处为匀电流不聚电的物体，S 系看来当电流开始时空间各处即逐渐形成聚电现象使物体各处带电。由于以上方程全在假设 S' 系上各处同时为均匀电流的基础导出，图 7.9 两端的 $\triangle t' = 0$ 所以 $\triangle x = \triangle x'/\sqrt{1-\beta^2}$。以之代入上式得

$$\sigma = \frac{j_x V}{C^2}$$

此亦即式(7.3.7)中将一撇与非一撇掉换，改变 V 的符号后再取 $\sigma' = 0$ 的结果。这样同时验证了式(7.3.7)的可靠性。

今定义 $F_{\alpha\beta}$ 的缔合膺张量：

$$F^*_{\alpha\beta}=\frac{i}{2}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}=\begin{Vmatrix} 0 & E_z & -E_y & iB_x \\ -E_z & 0 & E_x & iB_y \\ E_y & -E_x & 0 & iB_z \\ -iB_x & -iB_y & -iB_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.3.8}$$

则麦洛氏第二组方程

$$\frac{\partial F^*_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \text{ 或 } \in^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.3.9}$$

如用电磁势*

$$A_\alpha=(A_x,A_y,A_z,i\varphi), \tag{7.3.10}$$

并定义

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}, \tag{7.3.11}$$

A_α 显然为矢量。则麦洛氏第二组方程为式(7.3.11)的恒等式：

因为
$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}F^*_{\alpha\beta}=\frac{i}{2}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{\partial^2 A_\delta}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}-\frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial x_\beta\partial x_\delta}\right)=0 \tag{7.3.12}$$

(由于$\in$对于一切指标反对称，而 $\partial x_\beta,\partial x_\gamma$ 为 $\beta\gamma$ 对称)。

因之，总结麦洛氏电磁方程为式(7.3.11)及式(7.3.4)两组方程。将式(7.3.11)代入式(7.3.4)，得 A_α 的微分方程

$$\frac{\partial^2 A_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\beta}=\frac{j_x}{C} \tag{7.3.13}$$

$F_{\alpha\beta}$的数值(7.3.11)不因

$$A_\alpha\to A_\alpha+\frac{\partial\lambda}{\partial x_\alpha} \tag{7.3.14}$$

---

* 由式(4.7.24)看出，$\mathrm{L}dt=\left(-m_0c^2+\frac{1}{c}q_\alpha A_\alpha\right)\mathrm{d}t_0$ 为显然的标量

而改变。只要 λ 是标量，则上式 A_α 仍是矢量。我们可以选适当的 λ 使新的 A_α 满足“洛伦兹规计”[注11]*：

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} = 0 \tag{7.3.15}$$

由于 A_α 为四维矢量，上式显然为标量条件。此时式(7.3.13)就简化成

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \equiv \Box A_\alpha = -\frac{j_\alpha}{C}, \tag{7.3.16}$$

波动电磁场的微分方程。即使如此，式(7.3.15)还允许 A_α 作式(7.3.14)形式的变换，只要 λ 满足

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_\alpha^2} = 0 \tag{7.3.17}$$

就行。式(7.3.14)称“规计”[注11]变换，此种变换不改变物理量的数值，而仅改变用以描述物理量的“辅助量”A_α。

D'Alembert 方程可以用四维方法积分。设定义

$$R^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{4} (x_\alpha - a_\alpha)^2, \tag{7.3.18}$$

a_α 为常数。则

$$\Box \frac{1}{R^2} \equiv \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(\frac{1}{R^2}\right) = 0 \tag{7.3.19}$$

事实上在 n 维空间

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right) = 0 \tag{7.3.20}$$

今将

$$\psi\Box\varphi - \varphi\Box\psi = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)$$

在四维空间积分，得

---

* [注11]“洛伦兹规计”一般称为“洛仑兹规范”(陈芸注)

$$\iiint_{\Sigma}\{\psi\Box\varphi-\varphi\Box\psi\}\mathrm{d}\Sigma=\oiint_{s}(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\mathrm{d}s \quad (7.3.21)$$

s 为包围此四维空间的“面”，n 为此面的外“法线”方向。

今设 $\sum$ 为 x_1,x_2,x_3,x_4 实数的整个空间〔方程(7.3.21)是数学问题。不管 x_2 是否实数均成立〕。并取

$$\psi=\frac{1}{R^2}$$

ψ 除 $x_2=a_2$ 之外，在此实数空间内无奇点。式(7.3.21)现在是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3(\frac{\Box\varphi}{R^2})=\oiint(\frac{1}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{2\varphi}{R^3}\frac{\partial k}{\partial n})\mathrm{d}s \quad (7.3.22)$$

今作一小“球面”

$$R^2=b^2$$

包此奇点 $x_2=a_2$。如不计无限远处的面积分(这一点有点问题，不过我们现在不研究它)，则式(7.3.22)的右方仅剩包此奇点小球面上的积分。用“球坐标”

$$\xi_4=R\cos\alpha,\xi_3=R\sin\alpha\cos\beta,\xi_1=R\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$
$$\xi_2=R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \quad (7.3.24)$$

如 R,α,β,γ 是实数且其数值可取下列范围内的任何数值

$$R:0\to\infty,\alpha,\beta:0\to\pi,\gamma:0\to2\pi, \quad (7.3.25)$$

则 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 可取 $-\infty\to+\infty$ 中的任何值。以上

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=R^2 \quad (7.3.26)$$

因雅可毕 J 为

$$J\equiv\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial(R,\alpha,\beta,\gamma)}=-R^3\sin^2\alpha\sin\beta$$

所以

$$|J|=R^3\sin^2\alpha\sin\beta \quad (7.3.27)$$

因之用这个坐标的四维空间"体积"素[注12]* 为

$$R^3\sin^2\alpha\sin\beta\mathrm{d}R\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma \tag{7.3.28}$$

球面(7.3.23)上的"面积"素[注13]** 为

$$b^3\sin^2\alpha\sin\beta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma \tag{7.3.29}$$

式(7.3.22)的右方第一项当 b→0 时可以不计，其第二项由于

$$\frac{\partial R}{\partial n}=-1,$$

$$\iiint\frac{2\varphi}{b^3}\mathrm{d}s=2\varphi(a_\alpha)\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\sin\beta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma=4\pi^2\varphi(a_\alpha)$$

由此得

$$\varphi(a_\alpha)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\,\frac{\Box\varphi}{R^2} \tag{7.3.30}$$

用式(7.3.16)代入得

$$A_\alpha(a)=\frac{1}{4\pi^2c}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,\frac{j_\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)}{R^2} \tag{7.3.31}$$

对 a_α 微分得

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial a_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial a_\beta}=\frac{1}{2\pi^2c}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_4\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,\frac{j_\alpha(a_\beta-x_\beta)-j_\beta(a_\alpha-x_\alpha)}{R^4} \tag{7.3.32}$$

以上公式明显表示 A_α 和 $F_{\alpha\beta}$的四维张量性质。

对 x_4 的实数积分可以化成曲线复数积分。今设 $a_4=0$，则上式极点在 x_4 复平面上 $x_4=-ir$ 及 $x_4=ir$，其中

---

*[注 12]"体积"素一般称为体积元(陈芸注)

**[注 13]"面积"素一般称为面积元

$$r^2 \equiv (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + (a_3 - x_3)^2 \quad (7.3.33)$$

两处。今假设在复平面下半部$|x_4| \to \infty$时，式(7.3.31)及式(7.3.32)积分内数值$\to 0$，则x_4从$-\infty$到$+\infty$的积分可以用 *Jordan*补

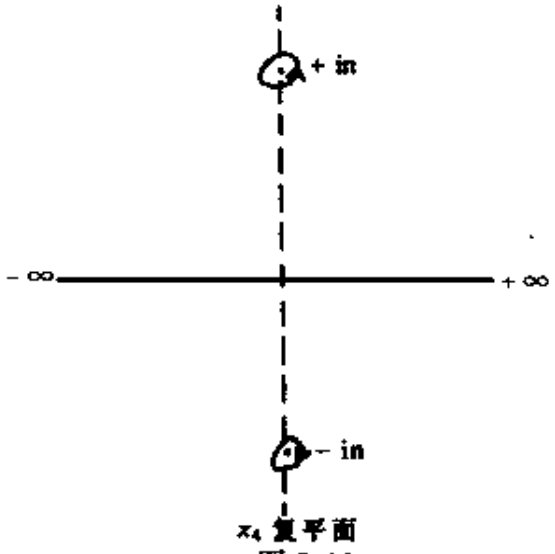


图 7.10

里化成绕

$$x_4 = -ir$$

定点小圆圈上的积分。

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_\alpha}{R^2} dx_4 = \oint \frac{j_\alpha}{(x_4 - ir)(x_4 + ir)} dx_4 = -2\pi i \left(\frac{j_\alpha}{x_4 - ir}\right)_{x_4 = -ir}$$

$$= \frac{\pi}{r}(i_\alpha)_t = -\frac{r}{C}$$

$$A_\alpha(\boldsymbol{a}, 0) = \frac{1}{4\pi C} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{(j_\alpha)_{t=-\frac{r}{C}}}{r} dx_1, dx_2 dx_3 \quad (7.3.34)$$

又·

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \frac{j_\alpha(a_\beta - x_\beta) - j_\beta(a_\alpha - x_\alpha)}{R^4} dx_4$$

$$= \oint \frac{j_\alpha(a_\beta - x_\beta) - j_\beta(a_\alpha - x_\alpha)}{(x_4 - ir)^2 (x_4 + ir)^2} dx_4$$

$$=-2\pi i\frac{\partial}{\partial x_4}\left\{\frac{j_\alpha(a_\beta-x_\beta)-j_\beta(a_\alpha-x_\alpha)}{(x_4-ir)^2}\right\}_{x_4=-ir}$$

所以 $$F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a},0)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\frac{\partial j_\alpha}{\partial t}(a_\beta-x_\beta)-\frac{\partial j_\beta}{\partial t}(a_\alpha-x_\alpha)}{Cr^2}\right.$$

$$\left.+\frac{j_\alpha(a_\beta-x_\beta)-j_\beta(a_\alpha-x_\alpha)}{r^3}-\frac{i(j_\alpha\delta_{\beta 4}-j_\beta\delta_{\alpha 4})}{r^2}\right\}_{t=-\frac{r}{C}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{7.3.35}$$

由此得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a},0)=\frac{1}{4\pi C}\iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\frac{\partial j}{\partial t}\wedge r_0}{Cr}+\frac{j\wedge r_0}{r^2}\right)_{t=-\frac{r}{C}}d\Omega \tag{7.3.36}$$

$$E(a,0)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\rho r_0}{r^2}+\frac{r_0}{Cr^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{Cr}\frac{\partial j}{\partial t}\right)_{t=-\frac{r}{C}}d\Omega \tag{7.3.37}$$

r_0 是从 j_α 指向场点 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量。这是通常的“推迟场”。式(7.3.34)及式(7.3.35)的形式隐蔽 A_α、$F_{\alpha\beta}$的四维性质，远不若式(7.3.31)及式(7.3.32)的明显。

现在再显示平面波解答的四维性质。由于平面波*

$$\cos 2\pi\gamma\left(t-\frac{lx+my+nz}{C}\right) \tag{7.3.38}$$

的峰谷为不变观念，相角必为标量。所以

$$\gamma^2=\left(\frac{\gamma l}{C},\frac{\gamma m}{C},\frac{\gamma n}{C},\frac{i\gamma}{C}\right) \tag{7.3.39}$$

---

* 设 f 为任何函数，则

$$\Box f(\gamma_\alpha x_\alpha)=\gamma_\beta^2 f''(\gamma_\alpha x_\alpha)$$

设 γ_α 为零间性，则任何 $f(\gamma_\alpha x_\alpha)$均满足 D' Alembert 方程$\Box f=0$

为四维矢量。将电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 作为平面波，则在真空中麦氏方程简化成

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{l}=\boldsymbol{E},\\ &\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3.40}$$

条件。上面两套方程的四维形式是

$$F_{\alpha\beta}\gamma_\beta=0,\qquad F^*_{\alpha\beta}\gamma_\beta=0 \tag{7.3.41}$$

可见式(7.3.40)为协变方程。由式(6.3.79)又得出 $F_{\alpha\beta}$、γ_β 均为零间性

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{B}^2,\quad \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \gamma_\beta^2=0 \tag{7.3.42}$$

的明显结论。

任一单位体积内电荷所受的洛伦兹力可以写成

$$f_\alpha=F_{\alpha\beta}\frac{j\beta}{C} \tag{7.3.43}$$

这显然是一个四维矢量。利用电磁方程得

$$\begin{aligned} f_\alpha=F_{\alpha\beta}\frac{j_\beta}{C}&=F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}=-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\beta}+F_{\gamma\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\\ &=-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\beta}+F_{\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\\ &=-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}\delta_{\alpha\gamma}F_{\beta\epsilon}F_{\beta\epsilon}\right) \end{aligned}$$

其中 $\delta_{\alpha\gamma}$ 为 Kronecker 符号。设上式括弧内以 $s_{\alpha\beta}$ 代表

$$f_\alpha=-\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{F_{\alpha\epsilon}F_{\beta\epsilon}-\frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}=-\frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \tag{7.3.44}$$

则 $s_{\alpha\beta}$ 显然为二阶对称张量，称电磁场能张量：

$$S_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(E_x^2+E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2}(B_x^2+B_y^2-B_z^2), & -E_xE_y-B_xB_y, & -E_xE_z-B_xB_z, & i(E_yB_z-E_zB_y)\\ -E_xE_y-B_xB_y, & \frac{1}{2}(E_x^2+E_z^2-E_y^2)+\frac{1}{2}(B_x^2+B_z^2-B_y^2), & -E_yE_z-B_yB_z, & i(E_zB_x-E_xB_z)\\ -E_xE_z-B_xB_z, & -E_yE_z-B_yB_z, & \frac{1}{2}(E_z^2+E_y^2-E_x^2)+\frac{1}{2}(B_z^2+B_y^2-B_x^2), & i(E_xB_y-E_yB_x)\\ i(E_yB_z-E_zB_y), & i(E_zB_x-E_xB_z), & i(E_xB_y-E_yB_x), & -\frac{1}{2}(E^2+B^2) \end{Vmatrix}$$

(7.3.45)

上式的空间部分($\equiv Sij$)为麦氏应力，时间部分为场的能量密度(负号)；时空部分为电磁场能流矢量或场动量密度(前面常数因子不计)。如用 Gauss 单位则 $s_{\alpha\gamma}$前面应加 $1/4\pi$。式(7.3.44)空间部分变成单位体积电荷 σ 受的力

$$f = \delta(E + \frac{1}{C}V \wedge B) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{(E \wedge B)_i}{4\pi C} - \frac{\partial}{\partial x_j}s_{ij},$$

(7.3.46)

s_{ij}为麦氏电磁场应力；f_α 的第四分量

$$f_4 = \frac{i}{C}(j \cdot E) = \frac{i}{C}\sigma(q \cdot E) = -\frac{i}{C}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{E^2 + B^2}{8\pi}) - i\mathrm{div}\frac{E \wedge B}{4\pi}$$

为功率(i/C 因子不计)

$$(j \cdot f) = \sigma(q \cdot E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{E^2 + B^2}{8\pi}) - \mathrm{div}(\frac{C}{4\pi}E \wedge B)$$

$$\iiint \sigma(q \cdot E)\mathrm{d}\Omega = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint(\frac{E^2 + B^2}{8\pi})\mathrm{d}\Omega - \oiint \frac{C(E \wedge B)_n}{4\pi}\mathrm{d}s$$

(7.3.47)

当场中无电荷时，式(7.3.44)为 $\partial s_{\alpha\beta}/\partial x_\beta = 0$，亦即式(7.2.1)的形式。因之，将式(7.3.46)和式(7.3.47)对任一电磁系统的积分，即表示 s_{i4}，s_{44}的电磁动量和能量密度的意义以及 s_{ij}电磁应力的意义。从式(7.3.46)、(7.3.47)也可得出同样结论。

从式(7.3.44)看出 $s_{\alpha\beta}$有特殊性质：

$$s_{\alpha\alpha} = 0 \qquad (7.3.48)$$

由张量 $s_{\alpha\beta}$能导出的标量也只有 $E^2 - B^2$ 及 $E \cdot B$，已知的 $F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$及 $F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}^*$ 两种并没有新的发现。因

$$(x_\alpha f_\beta - x_\beta f_\alpha) = -\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(x_\alpha s_{\beta\gamma} - x_\beta s_{\alpha\gamma}),$$

所以整个孤立系统的角动量定律为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}(x_\alpha s_{\beta 4}-x_\beta s_{\alpha 4})\mathrm{d}\Omega+\iiint(x_\alpha f_\alpha-x_\beta f_\alpha)\mathrm{d}\Omega=0 \tag{7.3.49}$$

亦即当电荷的角动量减少时，电磁场的角动量必定增加。

假使质点间除电磁场作用之外没有其他力(包括接触力)的作用，则由式(7.1.40)得

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\rho_0 q_\alpha q_\beta=f_\alpha, \tag{7.3.50}$$

式(7.3.46)即为式(7.2.1)的形式

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\rho_0 q_\alpha q_\beta+s_{\alpha\beta})=0 \tag{7.3.51}$$

因之，从式(7.3.46)及(7.3.47)得出此闭合孤立系统的动量、能量守恒律：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}&=\iiint_{t=C}\left\{\frac{\rho_0 iC\dot{\boldsymbol{x}}}{(1-\beta^2)}+i\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B}\right\}\mathrm{d}\Omega\\ k_4&=\iiint_{t=C}\left\{\frac{\rho_0(iC)^2}{1-\beta^2}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\right\}\mathrm{d}\Omega\end{aligned}\right\} \tag{7.3.52}$$

由于式(7.1.37)，上式可以写成

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{k}&=iC\iiint_{t=C}(\rho\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{C}\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})\mathrm{d}\Omega,\\ k_4&=-\iiint_{t=C}\left\{\rho C^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\right\}\mathrm{d}\Omega\end{aligned}\right\} \tag{7.3.53}$$

其中含 ρ 的各项显然是质点的动量和能量，因之后项为电磁"场"的动量及能量。虽然 s_{44} 的变换公式一般和 ρ 的变换公式不同，但是 k_α 在孤立(现在也是闭合)系统中已被证明具有四维矢量性质。因

$$|\dot{\boldsymbol{x}}|<C \qquad |\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B}|\leqslant\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2), \tag{7.3.54}$$

所以式(7.3.53)的 k_α 一般为时间性矢量。换言之，我们可以找到

一个质能中心坐标 S' 使整个电磁场和质点的动量均为零，且能量为最小值；但特别情形如各处

$$\rho = 0, \boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}, |\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}|, \tag{7.3.55}$$

则为例外，此时 k_α 为零间性矢量（电磁波）。由于 $T_{\alpha\beta}$ 为对称性张量。角动量守恒律必然成立，且整个系统的质能中心亦以恒速在空间进行。

假使质点中间除电磁场之外另有其他力的作用，设其场能张量以 $R_{\alpha\beta}$ 代表，则

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f_\alpha = -\frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{7.3.56}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}(R_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}) = 0 \tag{7.3.57}$$

由于此处 $s_{\alpha\beta}$ 为对称张量。所以角动量守恒律要求 $R_{\alpha\beta}$ 亦必为对称性张量。可参考后面 § 7.6 中的各种讨论。

现在举一个简单例子来说明闭合系统和非闭合系统的区别，并且说明孤立非闭合系统在什么情形之下，其动量、能量具有四维矢量性质。

有一个均匀布电的静止球面（相对于静止的坐标）。其球内电场为零，球外电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{e}{r^3}(x, y, z) \tag{7.3.58}$$

场能张量为

$$s_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{4\pi}\begin{Vmatrix} \frac{y^2+z^2-x^2}{2r^6}, & -\frac{xy}{r^6}, & -\frac{xz}{r^6}, & 0 \\ \frac{-xy}{r^6}, & \frac{z^2+x^2-y^2}{2r^6}, & -\frac{yz}{r^6}, & 0 \\ \frac{-xz}{r^6}, & -\frac{yz}{r^6}, & \frac{x^2+y^2-z^2}{2r^6}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2r^4} \end{Vmatrix}$$

(7.3.59)

在球面的外边有应力，但球面的内部应力为零，所以式(7.2.1)的条件在球面上不能满足。球面上外边应力分量 i 为

$$s_{xn} = \frac{x}{r}s_{xx} + \frac{y}{r}s_{xyx} + \frac{z}{r}s_{xz}$$

所以球面上应力为

$$s = \frac{e^2}{8\pi r^4}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{e^2}{8\pi a^4}n \qquad (7.3.60)$$

n 为球面法线方向的单位矢量。因之，球面上每单位面积均受垂直向外的拉力。这一个系统由于式(7.2.1)在球面上的不成立，所以不是闭合系统也不能用式(7.3.51)使之成立。但可以用式(7.3.57)，例如可以简单假设球内为

$$R_{\alpha\beta} = \Phi\delta_{\alpha\beta} \qquad (7.3.61)$$

形式的能量张量，使之在球面上产生的力与式(7.3.60)恰好对消*，在球内各处使 Φ 为常数。换言之，亦即使

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}(S_{\alpha\beta} + \Phi\delta_{\alpha\beta}) = 0 \equiv \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \qquad (7.3.62)$$

方程在空间各处包括球面上均成立，成一闭合系统。因在球外以及近球面处，

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0$$

所以我们可以在球外取 $\Phi=0$。在球内 $S_{\alpha\beta}=0$，我们可在球内取 Φ 为常数以满足式(7.3.62)。在跨过球面时，$S_{\alpha\beta}$突从零跳到式(7.3.59)。如何选 Φ 使满足式(7.3.62)？今以球面上某一小面积素作扁平盒，如图 7.14 的(b)。积分(7.3.62)，因 $\partial/\partial t=0$，式可化成扁平盒上的面积分。设 $\alpha=1$，则

$$(S_{xn})_{外} + (\Phi e)_{外} = (S_{xn})_{内} + (\Phi e)_{内}$$

---

* 由常识看来，这个球面上电荷互相排斥，因之不能达到电磁平衡

l 为该小面积素外法线与 x 轴所成的方向余弦。上式亦即

$$(S_{\alpha n})_{外} = (\Phi l)_{内}$$

如 $\alpha=2,3$，则 l 改成外法线与 y、z 所成的方向余弦。$\alpha=4$ 为恒等式 $0=0$。因之如在球内各处增加场能张量(7.3.61)

$$\Phi\delta_{\alpha\beta} = -\frac{e^2}{8\pi a^4}\delta_{\alpha\beta} = 常数 \tag{7.3.63}$$

则方程(7.3.62)就可以在各处满足。由上式见 Φ 为标量，也合于我们张量性质的要求。

现在 $S_{\alpha\beta}+\Phi\sigma_{\alpha\beta}$ 成为闭合系统。其总的能量积分为

$$-\iint(S_{44}+\Phi)\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2 4\pi}{8\pi a} + \frac{e^2}{8\pi a^4}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = +\frac{2e^2}{3a}, \tag{7.3.64}$$

动量积分为零。今设上述系统以匀速 $\boldsymbol{V}$ 进行，则球形变为椭圆。球面上电荷的分布示作适当的改变。今以上述相对静止的系统为一撇系统 S'，则从式(7.3.6)的电磁场变换式得椭球外的电磁场

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3} - \frac{\boldsymbol{V}}{V^2}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}')}{r'^3}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}\\ \boldsymbol{B} &= \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{r}'}{Cr'^3}\end{aligned}\right\} \tag{7.3.65}$$

及

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B} = \frac{e^2}{1-\beta^2}\left\{\frac{\boldsymbol{V}}{r'^6}\left[r'^2 - \frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}')}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right] - \frac{\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}')\sqrt{1-\beta^2}}{r'^6}\right\} \tag{7.3.66}$$

加一撇的为相对静止系统 S' 上测量的数值。

我们如取 $\boldsymbol{V}$ 为 x 方向，则上式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\left(\frac{ex'}{r'^3},\frac{ey'}{r'^3\sqrt{1-\beta^2}},\frac{ez'}{r'^3\sqrt{1-\beta^2}}\right)\\ \boldsymbol{B}&=\left(0,-\frac{e\beta z'}{r'^3\sqrt{1-\beta^2}},\frac{e\beta y'}{r'^3\sqrt{1-\beta^2}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(7.3.65)'$$

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B}=\left\{\frac{\beta}{1-\beta^2}\frac{e^2(y'^2+z'^2)}{r'^6},\frac{-\beta e^2x'y'}{\sqrt{1-\beta^2}r'^6},\frac{-\beta e^2x'z'}{\sqrt{1-\beta^2}r'^6}\right\}\quad(7.3.66)$$

$$\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2=\frac{e^2x'^2}{r'^6}+\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\left(\frac{e^2(y'^2+z'^2)}{r'^6}\right)\quad(7.3.67)$$

在椭球内，因 Φ 是标量，其数值不变。今将上式在 S 系积分：

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}},y'=y,z'=z\qquad(7.3.68)$$

因积分必在 S 系的同一时间，t 为常数。上述球形在 S 系为椭圆球：

$$x'^2+y'^2+z'^2=\left(\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+y^2+z^2=a^2\quad(7.3.69)$$

S 系中任一体积素为

$$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\sqrt{1-\beta^2}\qquad(7.3.70)$$

因之设改变积分变数到 x'，y'，z' 则

$$\iiint(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\mathrm{d}\Omega=\iiint(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\sqrt{1-\beta^2}$$

其 x'，y'，z' 积分的域限，仍是满足式(7.3.69)的“球形”公式。我们可用 x'，y'，z' 的球坐标来积分上式得出球外

$$\frac{1}{8\pi}\iiint(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\beta^2\right)\frac{e^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad(7.3.71)$$

及球内

$$-\iint \Phi \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{6a}\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.3.72}$$

所以 S 系看来，总能量是

$$\frac{1}{8\pi}\iint (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)\mathrm{d}\Omega - \iint \Phi \mathrm{d}\Omega = \frac{2e^2}{3a\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.3.73}$$

总动量是

$$\frac{1}{4\pi C}\iint (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B})\mathrm{d}\Omega = \frac{2e^2}{3ac^2}\frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.3.74}$$

以之与式(7.3.64)比较，可见此系统能量动量确成一四维矢量(加适当常数因子)

$$\left.\begin{aligned} K_4' &= (0,0,0,iC\frac{2e^2}{3aC^2}) \\ K_0 &= (\frac{2e^2\boldsymbol{V}}{3aC^2\sqrt{1-\beta^2}},0,0,iC\frac{2e^2}{3aC^2\sqrt{1-\beta^2}}) \end{aligned}\right\} \tag{7.3.75}$$

此系统相当于具有静质量

$$m_0 = \frac{2e^2}{3aC^2}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.3.76}$$

的系统。其质能中心，即球的中心以 $\boldsymbol{V}$ 运动。

现在再把这个球放在均匀电磁场内。假使不计它本身因加速产生的电磁场(这是一个还未能解答的复杂问题)，那么它任何时候

$$\iint T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega$$

的积分还是和方才一样，亦具四维矢量性质。它所受的力为由外力 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 发生的

$$\iint f_\alpha \mathrm{d}\Omega = e(\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}_0) \tag{7.3.77}$$

所以 $$\frac{\delta}{\delta t}\iiint T_{i4}\mathrm{d}\Omega=e(\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}_0)$$

此球在此均匀电磁场内的运动方程为(球的质量不计)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta t}K_i=e(\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}_0)\\&\frac{i}{c}\frac{\delta}{\delta t}K_4=e(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{V})\end{aligned}\right\}\qquad(7.3.78)$$

以上均为协变方程。另一坐标 S' 所看的 t' 为球中心的相应时间(7.2.107)。

不过假使在场能张量内只有电磁张量 $S_{\alpha\beta}$(7.3.59),成一非闭合系统,以 K_α 表示 $S_{\alpha4}$ 的体积分,则由式(7.3.62)看出此系统系在"外力",式(7.2.92)

$$\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=f_\alpha=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}$$

的作用之下。此时使 K_α 具四维矢量性质的条件是式(7.2.97)的

$$\iiint b_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}d\sum_1=\iiint b_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}\sum_2$$

上式可以化成三维"面"积分

$$\oiint b_n\Phi\mathrm{d}S_1=\oiint b_n\Phi\mathrm{d}S_2$$

参看图 7.8 得

$$b'_4\iiint\Phi'\mathrm{d}\Omega'_1-b_4\iiint\Phi\mathrm{d}\Omega_1=b_4\iiint\Phi\mathrm{d}\Omega_2-b'_4\iiint\Phi\mathrm{d}\Omega'_2$$

所以 $$b'_4\iiint\Phi\mathrm{d}\Omega'=b_4\iiint\Phi\mathrm{d}\Omega\qquad(7.3.79)$$

Ω,Ω' 为 S 系或 S' 系的整个空间. 上式又可化成

$$l_{41}b_1\int\Phi'\mathrm{d}\Omega'+l_{42}b_2\int\Phi'\mathrm{d}\Omega'+l_{43}b_3\int\Phi'\mathrm{d}\Omega'$$

$$+b_4(l_{44}\int\Phi'\mathrm{d}\Omega'-\int\Phi\mathrm{d}\Omega)=0$$

要这一个方程在任何 b_α 可以满足，则

$$\int \Phi' \mathrm{d}\Omega' = 0, \quad \int \Phi \mathrm{d}\Omega = 0$$

为唯一解答。但由式(7.3.63)可以看出

$$\int \Phi' \mathrm{d}\Omega' = -\frac{4}{3}\pi a^3 \frac{e^2}{8\pi a^4} \neq 0, \tag{7.3.80}$$

所以条件(7.2.97)不能满足。在这个情形下我们看出此非闭合系统的 K_α 不会具有四元矢量性质。只要把方程(7.3.73)及(7.3.74)中 Φ 的一项取消，就可以看出该时 K_α 的确不是(7.3.75)的形式。

§7.4 宏观电动力学

(A) 宏观方程的协变性。

在物质内电磁场变化复杂，研究时常取各值在某微小范围内的时空平均数成所谓"宏观方程"。设物质内除宏观电荷外另含电偶及磁矩。则式(4.5.1)的平均值已知为方程

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t}, & \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ J_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, & \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ J_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}, & \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{7.4.1}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{7.4.2}$$

以上 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 全为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的时空平均值，当然仍为二阶反对称张量；其中

$$\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{7.4.3}$$

$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{P}$ 为单位体积内的磁矩及电偶强度；J 及 P 为除电磁偶矩变化之外的电流及电荷密度。由于同阶的张量才可以加减，因之 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ 亦必须均为二阶张量。

上式方程可以写成积分形式。

$$\left.\begin{aligned} &\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \\ &\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}f \\ &\oiint D_n \mathrm{d}S = e \qquad \oiint B_n \mathrm{d}S = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.4.4}$$

以上 $\mathrm{d}S$ 为闭合面上的一个小面积。$\mathrm{d}f$ 为不闭合面上的小面积，$\mathrm{d}l$ 为绕此不闭合面边上闭合线的一段小线素。$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 及 $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 分别称为电动力及磁动力，它们的来源由上面前两个方程表示。

从式(7.4.1)看出

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

因之，J_i“，自由电流密度”及 ρ“，自由电荷密度”

$$J_\alpha = (J_x, J_y, J_z, ic\rho) \tag{7.4.5}$$

成一四维矢量。上式可写成

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{7.4.6}$$

式(7.4.1)及(7.4.2)的第二组方程在以

$$F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{7.4.7}$$

之后为恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \in^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = 0$$

设用 $F_{\alpha\beta}$的缩合张量

$$F^{*}_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & E_z & -E_y & iB_x \\ -E_z & 0 & E_x & iB_y \\ E_y & -E_x & 0 & iB_z \\ -iB_x & -iB_y & -iB_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.4.8}$$

则恒等式为

$$\frac{\partial F^{*}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0, \tag{7.4.9}$$

其第一组方程在导入张量

$$H_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.4.10}$$

之后为

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=J_\alpha \tag{7.4.11}$$

式(7.4.10)及式(7.4.11)两组方程均具协变性，因之麦氏宏观方程也合于相对论要求。由式(7.4.3)及式(7.3.5)我们可以写

$$H_{\alpha\beta}=F_{\alpha\beta}+P_{\alpha\beta} \tag{7.4.12}$$

$F_{\alpha\beta}$见式(7.3.5)

$$P_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & -M_z & M_y & -iP_x \\ M_z & 0 & -M_x & -iP_y \\ -M_y & M_x & 0 & -iP_z \\ iP_x & iP_y & iP_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.4.13}$$

为电偶磁矩强度二阶反对称张量。

由式(7.3.6)见，当 S' 系对 S 速度为 $\boldsymbol{V}$ 时，电偶磁矩的变换为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{P}'+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{M}'\right)-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),\\ \boldsymbol{M}&=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{M}'-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{P}'\right)-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{M}')\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)\end{aligned}\right\}$$

(7.4.14)

以及自由电荷、自由电流密度的变换式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\boldsymbol{J}'+\frac{\rho'\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{J}')}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),\\ \rho&=\frac{\rho'+\dfrac{(\boldsymbol{J}'\cdot\boldsymbol{V})}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{aligned}\right\}$$

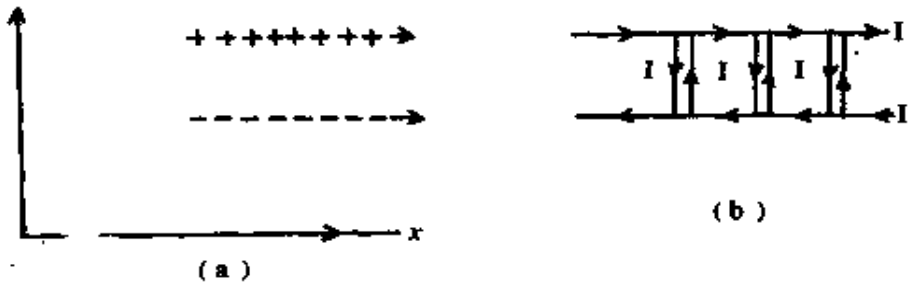
(7.4.15)

此种自由电流产生的电荷已在式(7.3.7)中解释过。但式(7.4.14)表示电偶在运动时产生的磁矩，也应当加以解释，否则 $P_{\alpha\beta}$ 的张量性不能被证明成立，麦氏方程(7.4.1)的协变性也不能成立。

为简便起，设电偶皆为排在 y 方向每单位长度两头各带均匀电荷 P_y 的分布，如图 7.11(a)所示。当电偶向右方以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动时，则发生电流

$$I_x=\frac{V}{c}P_y$$

上面电流方向向右，但下面，因电荷为负号，电流方向向左。



(a)　　(b)

图 7.11

我们可以人工的在中间垂直方向(同一个地方)加两道大小相同、但方向相反的电流 I 如图 7.11(b)。这样不改变物理实质。但使每单位面积上有一"闭合"电流线路。因之单位体积带有磁矩

$$M_z = -\frac{V}{C}P_y$$

如在式(7.4.14)之内,以 $M'=0 \quad p'=P_y'$ 则得

$$P_y = P_y'/\sqrt{1-\beta^2}$$

所以

$$M_z = -\frac{V}{C}\frac{P_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{V}{C}P_y,$$

与我们计算的相同。较复杂的情形也可以计算出产生和式(7.4.14)相合的同样结果,读者可以自己验证。

再谈磁矩如何会产生电偶。因磁矩相当于"电流圈",设此电流圈为单位长度的立方框如图 7.12(a)。该图中

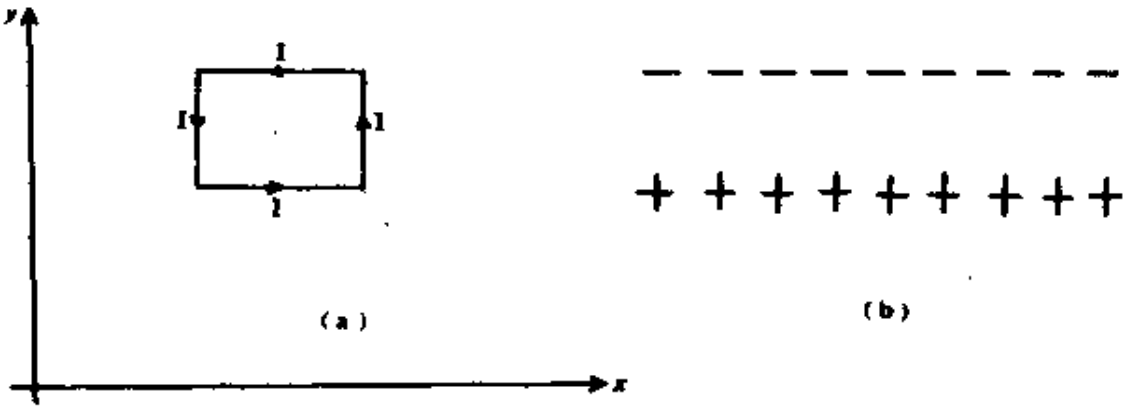


图 7.12

$$I = M_z$$

当 S' 系认为此系统不带电荷,则 S 系看来认为带电(7.4.15)

$$\rho = \frac{J' \cdot V}{C\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{J \cdot V}{C}$$

因之方框下面带正电，上面带负电，产生电偶(图 7.12b)

$$P_y = -\frac{V}{C}M_x$$

此结果也和式(7.4.14)内以 $M' = M'_x, P' = 0$ 代入的相同。所以式(7.4.14)的结果及麦氏方程的协变性是对的；同时也证实了式(7.4.1)的可靠性。由式(7.4.12)亦得 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ 的变换关系

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{H} - \frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D}) - \frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H})(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)\\ \boldsymbol{D}' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{D} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{H}) - \frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{D})(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)\end{aligned}\right\} \tag{7.4.16}$$

从以上张量及仿式(7.3.8)定义 $P_{\alpha\beta}$的缩合膺张量 $P_{\alpha\beta}^*$ 可以得出若干标量

$$\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}^2 - \boldsymbol{H}^2, \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}^2 - \boldsymbol{M}^2,$$

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{7.4.17}$$

以及其他若干导出的标量。在坐标变换时，以上数值均不改变。例如我们可以从式(7.4.14)验证

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}'\cdot\boldsymbol{M}'$$

麦氏宏观方程也允许平面波的解答。设 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ 场均含

$$e^{2\pi\nu}(t - \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{x}}{u}) \tag{7.4.18}$$

的时空变化因素，其中 $\nu, u, \boldsymbol{l}$ 为常数；则在无自由电荷及自由电流存在的地方，麦氏方程为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{E} = \frac{u}{C}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{H} = -\frac{u}{C}\boldsymbol{D},\\ &\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.4.19}$$

这些方程全是协变方程

$$F_{\alpha\beta}u_\beta = 0, \qquad H_{\alpha\beta}u_\beta = 0 \tag{7.4.20}$$

以上，由于式(7.4.18)，

$$u_\beta \equiv (\frac{\nu}{u}\boldsymbol{l}, i\frac{\nu}{C}) \tag{7.4.21}$$

为四维矢量。我们从式(7.4.19)可以推出

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{7.4.22}$$

因之，$F_{\alpha\beta}$及$H_{\alpha\beta}$现在是特殊六矢，其结果当然和式(6.3.78)相同。

由式(7.4.19)得出

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{C}{u}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}) \tag{7.4.23}$$

$$\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B}=\frac{c}{u}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{7.4.24}$$

的关系。从式(6.3.82)及(6.3.83)可以断定有一个四维矢量V_α存在，使

$$u_\alpha V_\alpha=0, \tag{7.4.25}$$

且

$$F^*_{\alpha\beta}V_\beta=0 \qquad G^*_{\alpha\beta}V_\beta=0 \tag{7.4.26}$$

我们现在找这个矢量(6.3.76)。但从式(7.4.23)可以看出

$$\frac{\nu}{u}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})-\frac{\nu}{2c}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})=0 \tag{7.4.27}$$

因之，从式(6.3.17)就可以看出

$$V_\beta=\Big\{\lambda\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H},\frac{i\lambda}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\Big\}, \tag{7.4.28}$$

λ为适当的因子，就是所要求的四维矢量V_α。假使u_β为时间性，换言之，设波的相速

$$u>C \tag{7.4.29}$$

则上面的矢量V_β为空间性，不过一般波相速

$$u<C \tag{7.4.30}$$

u_β为空间性，则不能从垂直性(7.4.25)结论V_β的性质，只有从式(7.4.28)的

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2 \gtrless (\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})^2 \tag{7.4.31}$$

或式(7.4.24)从

$$(\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})^2\frac{u^2}{C^2} \gtrless (\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})^2 \tag{7.4.32}$$

来判断 V_β 的时间性，零间性或空间性。上面的关系均具协变性，不受坐标变换的影响。

设物质为线型异向同性介质，在相对静止的坐标 S' 中，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 可以写成

$$\boldsymbol{D}' = \in_0 \boldsymbol{E}', \quad \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{H}'$$

$\in_0$，μ_0 为该物体介质常数。这时电磁波的 $\boldsymbol{D}'$ 垂直于 $\boldsymbol{B}'$，$\boldsymbol{E}'$ 垂直于 $\boldsymbol{H}'$，且

$$\in_0 \boldsymbol{E}'^2 = \mu_0 \boldsymbol{H}'^2, \quad u' = \frac{C}{\sqrt{\in_0\mu_0}}$$

因之式(7.4.31)的条件是

$$\in_0\mu_0 \gtrless 1$$

在这个情况下，如

$$u' < C \qquad \in_0\mu_0 > 1,$$

则 V_β 为时间性。这个时间性的结论不受坐标变换的影响，因之此时在任何坐标中 V_β 都是时间性矢量。

我们可以用式(6.3.70)的方法来验证 V_β 的

$$\frac{\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}}{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})} \equiv q_1 \tag{7.4.33}$$

或 u_β，用式(7.4.24)的

$$\frac{\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})} \equiv q_2 \tag{7.4.34}$$

均依照速度变换的公式(3.1.7)而变换(不管 $|q|$ 大于 C 或小于 C)。如上面任一个矢量为时间性，则可归一化成

$$\left\{\frac{\boldsymbol{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{iC}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right\} \tag{7.4.35}$$

形式。也有可能上面两种矢量都不是时间性，不能化成式(7.4.35)的形式*。

我们又可以仿式(7.3.21)的导出得

$$\frac{1}{C}F_{\alpha\beta}J_\beta = -\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(F_{\alpha\beta}H_{\gamma\beta}-\frac{1}{4}\delta_{\alpha\gamma}F_{\beta\varepsilon}H_{\beta\varepsilon})$$
$$+\frac{1}{4}(H_{\beta\varepsilon}\frac{\partial F_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\alpha}-F_{\beta\varepsilon}\frac{\partial H_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\alpha})$$

以

$$S_{\alpha\gamma}\equiv F_{\alpha\beta}H_{\gamma\beta}-\frac{1}{4}\delta_{\alpha\gamma}F_{\beta\varepsilon}H_{\beta\varepsilon}, \tag{7.4.36}$$

则上式可写成

$$\frac{1}{C}F_{\alpha\beta}J_\beta+\frac{1}{4}(F_{\beta\varepsilon}\frac{\partial P_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\alpha}-P_{\beta\varepsilon}\frac{\partial F_{\beta\varepsilon}}{\partial x_\alpha})=-\frac{\partial S_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} \tag{7.4.37}$$

Minkowski 认为这个 $S_{\alpha\gamma}$ 应作为宏观电磁场的四维场能张量，其分量

$$\left.\begin{aligned}&S_{ij}=-E_iD_j-H_iB_j+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\delta_{ij}\\&S_{i4}=i\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B},S_{4i}=i\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H},S_{44}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}\right\} \tag{7.4.38}$$

S_{ij} 是“应力”(用 Gauss 单位，则普遍除以 4π)。另外，电磁“场动量密度”为 $\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B}$，能量密度为 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$，能流矢量是 $\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}$(前面常数因子不计)。

这个场能张量不对称，但

---

* V. Laue 等人均假设 V_β 是时间性以讨论问题

$$S_{ji} - S_{ij} = E_iD_j - E_jD_i + H_iB_j - H_jB_i$$
$$= E_iP_j - E_jP_i + H_iM_j - H_jM_i$$

设作为应力，参考图 7.19(b)及讨论，则这种不对称是完全必需的。它们在单位体积内产生力偶

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H}$$

合于通常的想法，至于场动量和场能流的不等则不易解释，不过由于物质的作用没有被包括在内，真正的了解还需进一步的研究。

我们可以在式(7.4.37)的右方加一适当的散度以改变 $S_{\alpha\gamma}$。不过这样做是否合宜。导出来左边的两个四维力是否是物质所受的力？这是一个复杂的问题，只能留在"电磁学"书内详细研究。目前主要的只是讨论物理方程的"协变性"。

设物质中的场能张量为 Minkowski 的(7.4.37)形式，则可以从该式左方看力的作用。"自由"电荷每单位体积所受的力是左方第一项

$$f_\alpha = (\rho \boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B}, \frac{i}{C}\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}) \qquad (7.4.39)$$

和通常洛伦兹力相合。电磁矩所受的力照 Minkowski 看法应当是式(7.4.37)左方的第二项

$$f_\alpha = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_\alpha} - \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{P} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_\alpha} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial x_\alpha}\right) \qquad (7.4.39)$$

由于 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ 全是平均值，我们很难判断上式的准确性。事实上一个电偶 $\boldsymbol{P}$ 在微观电磁场内所受的力应当是

$$(P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z})(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B})$$

与上式显然不同。不过另有一个判据。我们知道

$$C^2F_i - \dot{x}_iF_i = \frac{C}{i}F_4 - \dot{x}_iF_i = \frac{\delta Q}{\delta z} \qquad (7.4.40)$$

代表除功率之外的能量增加率，可参考式(4.2.3)及(4.3.14)至

(4.3.18)的说明。今以式(7.4.40)代入，则每单位体积内热量的增加率为

$$\frac{1}{Z}\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{M}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{P}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{dt}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{M}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$$

$$=\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}\right)-\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\cdot \tag{7.4.41}$$

$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 为随物质运动的变化率。在 $\mathrm{d}\Omega$ 体积内 $\mathrm{d}t$ 时中共发生的热量为

$$\delta Q=(\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p})\mathrm{d}\Omega-\frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{M}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}) \tag{7.4.41}'$$

经一回圈后产生的热量是

$$\oint\delta Q=\mathrm{d}\Omega\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{M}+\mathrm{d}\Omega\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

$$=\mathrm{d}\Omega\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B}+\mathrm{d}\Omega\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{D} \tag{7.4.42}$$

这个结果和通常理论及实验的结果符合。

由于式(7.4.40)的四维矢量性质，

$$-q_\alpha f_\alpha=\frac{-\dot{x}_i f_i-iCf_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

必为标量。$\mathrm{d}\Omega$ 体积内在 $\mathrm{d}t$ 时中发生的热量是

$$\delta Q=-(iCf_4+\dot{x}_i f_i)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega=(q_\alpha f_\alpha)_0\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t_0\mathrm{d}\Omega \tag{7.4.43}$$

以 δQ_0。为相对静止系统中所观察的热量，则得到

$$\delta Q=\delta Q_0\sqrt{1-\beta^2}$$

与式(4.3.18)相同的结果(不过这个结果和式(7.4.39)′特殊表示

的 f_α 无关)。从式(7.4.41)看出电磁场对物体所做的功应当是 $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{D}$,它除增加介质的场能$\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})$之外全变成热能。这也和通常想法相同。

(B) 本构方程式

式(7.4.1)、(7.4.2)八个方程,含有 $H_{\alpha\beta}$,$F_{\alpha\beta}$及 J_α 十六个变数。我们必需找出另外的关系才能解决问题。"线性介质"假定下列六个方程

$$H_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta,\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{7.4.43)'}$$

成立;$\Lambda_{\alpha\beta,\mu\nu}$ 为四阶张量,其数值与 $F_{\mu\nu}$、$H_{\alpha\beta}$无关;又由于张量性质,它们的数值可从相对静止介质中转变过来。但 Λ 的分量太多,应用起来很不方便,我们常常直接用另外方法简化。

在线性各向同性的静止介质中,下列关系

$$\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0 \qquad\qquad \boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$$

成立。这些关系如何保持协变形式?以 q_α 代表某处介质的四维速度,考虑两矢量方程

$$\left.\begin{aligned} H_{\alpha\beta}q_\beta&=\varepsilon_0F_{\alpha\beta}q_\beta,\\ H^*_{\alpha\beta}q_\beta&=\frac{1}{\mu_0}F^*_{\alpha\beta}q_\beta,\end{aligned}\right\} \tag{7.4.44}$$

其中 ε_0,μ_0 为标量,$H^*_{\alpha\beta}$为仿(7.3.8)定义的 $H_{\alpha\beta}$的缩合膺张量*

$$\frac{i}{2}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}H_{\gamma\delta}=H^*_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} O & D_z & -D_y & iH_x\\ -D_z & O & D_x & iH_y\\ D_y & -D_x & O & iH_z\\ -iH_x & -iH_y & -iH_z & O\end{Vmatrix} \tag{7.4.45}$$

在静止介质中

---

* [注 13]线型异向同性即线性各向同性(陈芸注)

$$q_2 = (O,O,O,iC),$$

式(7.4.44)蜕化成通常关系。但式(7.4.44)为协变方程。因之在任何系统均应成立，所以可取为式(7.4.43)的简化形式。由式(7.4.44)得出电偶磁矩强度为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \in_0(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{H}) \\ \boldsymbol{M} &= \mu_0(\boldsymbol{H} - \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{H} - \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{E}), \end{aligned}\right\} \tag{7.4.46}$$

以上 $\boldsymbol{V}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ 为介质的三元速度，或

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{H} &= \in_0(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{B} - \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{E} &= \mu_0(\boldsymbol{H} - \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{D}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4.46)'}$$

从上式得

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{H}, \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{D} = \in_0 \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{E}$$

的关系。我们可以将式(7.4.46)′改成 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的关系：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}(1 - \in_0\mu_0\beta^2) &= \in_0\boldsymbol{E}(1-\beta^2) - \frac{1}{C}(1-\in_0\mu_0)\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{H} + \frac{\in_0}{C^2}(1-\in_0\mu_0)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}) \\ \boldsymbol{B}(1 - \in_0\mu_0\beta^2) &= \mu_0\boldsymbol{H}(1-\beta^2) + \frac{1}{C}(1-\in_0\mu_0)\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{E} + \frac{\mu_0}{C^2}(1-\in_0\mu_0)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4.47}$$

WiLson 在 1914 年用 $\mu_0>1$ 的介质，在磁场中运动得出与式(7.4.47)忽略 β^2 后

$$\boldsymbol{D} = \frac{(\mu_0 \in_0 - 1)}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{H}$$

相同的实验结果。但从旧的电磁理论中，却得不出这样的结论。

这两个式子(7.4.46)′也可以用相对论方法从相对静止系统 S' 关系直接变换过来，而不需要式(7.4.44)的方程。因在 S' 系中，

$$\boldsymbol{D}' = \in_0 \boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{H}'$$

由式(7.4.16)及(7.3.6)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{D}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{H})-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{D})(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$=\in_0\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B})-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)\right\}$$

因为 $$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{D}=\in_0\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}$$

所以 $$\boldsymbol{D}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{H}=\in_0(\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B})$$

同样

$$\boldsymbol{B}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{E}=\mu_0(\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D})$$

亦即式(7.4.46)的两式。我们这里用了相对论研究中所用的两种方法。一种是导出协变方程式如(7.4.44)的形式；另一种是假设某种关系在相对静止的坐标成立再把它变到运动坐标去，如同上面所用的以及在第三第四两章所用的方法。我们常常几种方法相互并用来交叉保证方程的正确性。在导体中欧姆定律

$$\boldsymbol{J}_0=\lambda_0\boldsymbol{E}_0 \tag{7.4.48}$$

λ 代表导电率，也可以化成四维形式。用式(7.4.5)的 J_α，则矢量方程

$$J_\alpha+\frac{1}{C^2}J_\beta q_\beta q_\alpha=\frac{\lambda_0}{C}F_{\alpha\beta}q_\beta \tag{7.4.49}$$

在相对静止导体中蜕化为式(7.4.48)。上式写出后为

$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{V}+\lambda_0\frac{\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}-\boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}}{C^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} \tag{7.4.49'}$$

亦即运动导体的电流与电磁场的关系。这个方程也可以从静止坐标中变换过来。

在这种物体内，式(7.4.39)发生的热量是

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}-\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E}-\frac{1}{C}(\boldsymbol{VJB})=\lambda_0\frac{(\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B})^2-\frac{1}{C^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.4.50}$$

用相对静止坐标中 $\boldsymbol{E}_0$ 代入，则 $\delta\Omega$ 体积内 δt 时中发生的热量为

$$\delta Q=\lambda_0\boldsymbol{E}_0^2\sqrt{1-\beta^2}\delta t\delta\Omega=\delta Q_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.4.50)'}$$

这和热量转变关系(4.3.18)当然相合，也同时验证了焦耳定律。

介质所受的力可从式(7.4.39)′求出。由于 f_α 的四维矢量性质，我们可以从

$$\begin{aligned}f_\alpha&=l_{\alpha\beta}f'_\beta\\&=l_{\alpha\beta}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial x_\beta'}-\boldsymbol{B}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{M}'}{\partial x_\beta'})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial x_\beta'}-\boldsymbol{E}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}'}{\partial x_\beta'})\right\}\\&=l_{\alpha\beta}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial x'_\beta}-\boldsymbol{H}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial x_\beta'})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial x_\beta'}-\boldsymbol{E}'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}'}{\partial X'_\beta})\right\}\end{aligned}$$

计算。从式(7.4.39)′得出

$$f_\alpha=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}_0^2\frac{\partial\mu_0}{\partial x_\alpha}+\boldsymbol{E}_0^2\frac{\partial\in_0}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.4.51}$$

换言之，设介质内的 $\in_0$，μ_0 不起变化，则介质不受力的作用。在两介质的边界层上，这个力的作用最大。其发生的热量为

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}_0^2\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{E}_0^2\frac{\mathrm{d}\in_0}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega \tag{7.4.51)'}$$

由此可见，当介质的 $\in_0$ 或 μ_0 增加时，则产生热量；$\in_0$ 或 μ_0 减小时，例如介质膨胀，则物体变冷。

(C) 边界条件

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}^*&\equiv\boldsymbol{D}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{H}\qquad\boldsymbol{E}^*\equiv\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B},\\\boldsymbol{B}*&\equiv\boldsymbol{B}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{E},\quad\boldsymbol{H}^*\equiv\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D},\end{aligned}\right\} \tag{7.4.52}$$

则式(7.4.46)′可简写成

$$\boldsymbol{D}^* = \in_0 \boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{B}^* = \mu_0 \boldsymbol{H}^* \tag{7.4.53}$$

形式。假使用这些 $\boldsymbol{D}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{H}^*$，则宏观方程(7.4.1)及(7.4.2)可以写成含 $\boldsymbol{V}$ 的方程：

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{E}^* = -\frac{1}{C}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}\right)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}^* = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{D}\right) + \boldsymbol{J}$$

将上式依一曲面积分得

$$\left.\begin{aligned} \oint \boldsymbol{E}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} + \frac{1}{C}\oint \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ \oint \boldsymbol{H}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\iint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} - \frac{1}{C}\oint \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \iint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \end{aligned}\right\} \tag{7.4.54}$$

以上 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为该曲面边上的一段曲线素，其方向依 Stokes 定律规定，亦即用右方螺旋方法决定。见图 7.13(a)。

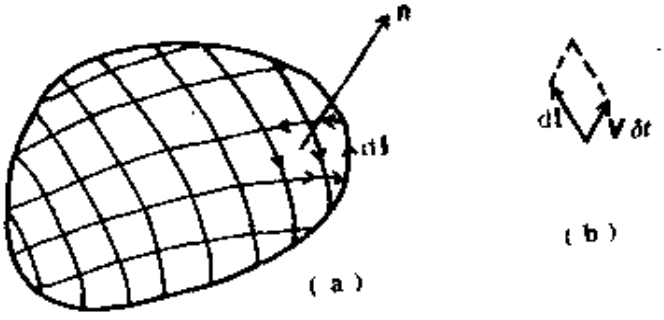


图 7.13

设此曲面在运动，则 $\mathrm{d}t$ 时之后其 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 边前进面积扩大，见图 7.13(b)

$$\boldsymbol{V} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{l}\,\mathrm{d}t \tag{7.4.55}$$

此扩大的面积多包含磁力线 $\boldsymbol{B}$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{l}\mathrm{d}t = \oint \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\mathrm{d}t$$

以上积分系沿全部的边沿曲线。

另外如边不动，但曲面可以凸出纸外，凸出的面积，包含的磁力线为，用奥格定理。

$$\iint_{\text{凸出后的面}} B_n \mathrm{d}f = \iint_{\text{未凸出前的面}} B_n \mathrm{d}f + \iiint_{\text{两个面包含的体积}} \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega$$

其凸出的体积素是

$$\mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}f\mathrm{d}t \tag{7.4.56}$$

另外由于各处 $\boldsymbol{B}$ 值的变化，此曲面不增加磁力线

$$\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}f$$

在无限小的时间内，各种方法增加，磁力线的和为总的增加量。因之

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint B_n \mathrm{d}f &= \oint \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \iint \mathrm{div}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}f + \iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}f \\ &= \iint \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\mathrm{div}\boldsymbol{B} \right) \cdot \mathrm{d}f\end{aligned} \tag{7.4.57}$$

上式对任何三元矢量的面积分皆成立，当然不限于磁力线 $\boldsymbol{B}$。

方程(7.4.54)现在可以被写成随物体运动的变化率形式：

$$\oint \boldsymbol{E}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}f \tag{7.4.58}$$

$$\oint \boldsymbol{H}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}f + \frac{1}{C}\int \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}f - \frac{1}{C}\iint \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}f \tag{7.4.59}$$

上面方程(7.4.58)很早就被人猜测来代替麦氏方程(7.4.1)，实则 $\boldsymbol{E}^*$ 指的是 $\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}$，(洛伦兹力或通常称"推动力"亦可称为"推动电场")。而不是电场 $\boldsymbol{E}$(以上"力"字实指"场"，但混用已惯，姑置之)。从式(7.4.52)及(7.4.50)可以看出，这个推动"力"在引极化

及电流时起主要作用。事实上设忽略 V^2，并略去远流流，则传导电流即为

$$J \approx \lambda_0 E^*$$

方程(7.4.59)或(7.4.54)与介质的性质并无关系，可以运用到任何含电偶和磁矩的物质里去。在下面讨论边界问题时也不限制介质的性质。运动介质边界问题也是相对论上一个有趣的问题。我们试用几种不同的方法予以解决。

依图 7.14(a)的边界面上，作极近边界的两根等长平行线，一根在物质 1 之内，另一根在物质 2 之内。用式(7.4.58)沿此两线作闭合线路的积分

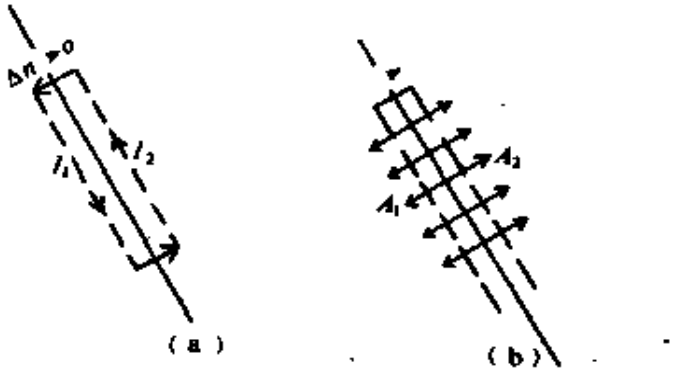


图 7.14

$$\oint E^* \cdot d\vec{s} = (E_{t1}^* - E_{t2}^*)l + (\overline{E})\triangle n = -\frac{1}{C}\frac{d}{dt}\{(B_n)l\triangle n\} \tag{7.4.60}$$

t_1, t_2 为沿边界的分量，$\triangle n \ll l$，为连接两 l 线边端的矩线。$\frac{d}{dt}$为随物体运动的变化率。$(\overline{E})$是沿 $\triangle n$ 的某种"平均"数量，其数值不会是无穷大。因之当 $\triangle n \to o$，而 Bn 的变化率又不是无穷大时，上式成为

$$E_{t1}^* = E_{t2}^* \tag{7.4.61}$$

换言之，沿边界"推动电场"具连续性。

因为边界在运动着，所以我们不能用(7.4.1)方程部分

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{E}_{t1} - \boldsymbol{E}_{t2})l = -\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}nl\triangle n) \quad (7.4.62)$$

来推断 $\boldsymbol{E}_{t1}=\boldsymbol{E}_{t2}$。当边界运动时，短时间内"固定在空间"一个地方的场可以从一种物质跳到第二种物质；假使两边任何场量，有不连续现象，则这种运动使固定在空间一个地方的场，发生无穷大的变化率，式(7.4.62)的右边，就不一定因 $\triangle n\to o$ 而忽略不计。事实上，我们也可以从式(7.4.62)得出式(7.4.61)的结果来。将图7.14的(a)放大成图 7.15(a)，其阴影处代表两边界中间的交界层，图上(b)为该地带的放大形。空间一固定点 P 处的 $\boldsymbol{B}n$，n 的方向指出纸面，在经过 $\triangle t$ 时间后，从 $\boldsymbol{B}n_2$ 跳到 $\boldsymbol{B}n_1$

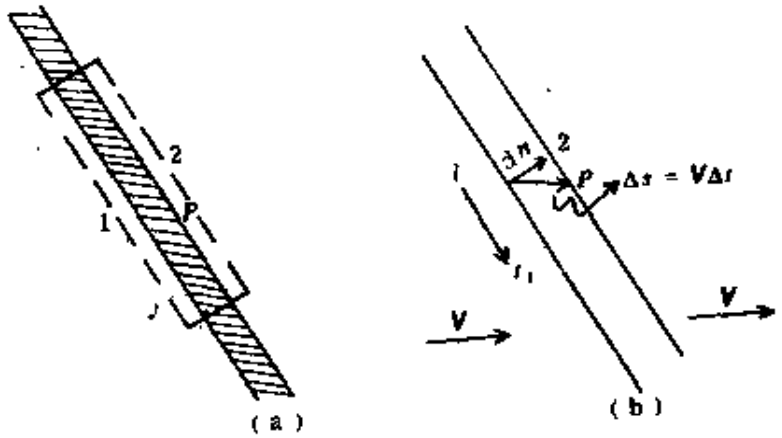


图 7.15

$$\delta \boldsymbol{B}n = \boldsymbol{B}n_1 - \boldsymbol{B}n_2 \quad (7.4.63)$$

介质走的距离为

$$\triangle S = V\triangle t = \frac{\mathrm{d}n}{\cos\theta}, \quad (7.4.64)$$

$\mathrm{d}n$ 为交界层的厚度，θ 为 $\boldsymbol{V}$ 与该"交界层"法线所成的夹角。式(7.4.62)右边 $\boldsymbol{B}n$ 变化最快的就是上面的情形。在物质 2 之内的各处，如 $\triangle t$ 之后，仍在物质 2 之内，则变化率不大，可以略去不计。所以式(7.4.62)右边的 $\triangle n$，只限于 $\mathrm{d}n$ 的薄薄宽度内才有大值。由上两式得

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}\mathrm{d}n = \frac{\boldsymbol{Bn}_1 - \boldsymbol{Bn}_2}{\mathrm{d}n}V\cos\theta\mathrm{d}n = (\boldsymbol{Bn}_1 - \boldsymbol{Bn}_2)V\cos\theta$$

因之式(7.4.62)成为

$$\boldsymbol{Et}_1 - \boldsymbol{Et}_2 = -\frac{V}{C}\cos\theta(\boldsymbol{Bn}_2 - \boldsymbol{Bn}_2)$$

或

$$\underline{\boldsymbol{E}}t_1 + \frac{V}{C}\cos\theta\boldsymbol{Bn}_1 = \underline{\boldsymbol{E}}t_2 + \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{C}}\cos\theta\,\underline{\boldsymbol{B}}n_2 \qquad (7.4.65)$$

$\boldsymbol{Bn}$ 为透出纸面方向磁场的分量。我们现在看 $V \wedge \boldsymbol{B}$ 在 t_1 方向的分量。设以 t_2 为 x 方向，$\mathrm{d}n$ 为 y 方向，出纸面的方向为 Z，则由于 V 在 Z 方向分量为零。

$$(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B})_x = V_y B_z - V_z B_y = V\cos\theta B_n - 0 = V\cos\theta Bn$$

所以式(7.4.65)式中第二项，即 $\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}$ 为 t_1 方向的分量。因之

$$(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}}{C})t_1 = (\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}}{C})t_2 \qquad (7.4.66)$$

亦即方程(7.4.61)的

$$\boldsymbol{E}^* t_1 = \boldsymbol{E}^* t_2$$

式(7.4.2)的另外两个方程

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho, \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \qquad (7.4.67)$$

不含时间变化因素，可以直接应用到边界上去。取小体积如图7.14(b)的一个小扁平粉盒，面积为 $A_1 = A_2$，厚度为 $\triangle n$，$\triangle n \to 0$。积分式(7.4.67)的第二式得

$$\oiint \boldsymbol{Bn} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = Bn_2 A_2 - Bn_1 A_1 + \text{沿小厚度边上的面积分} = 0,$$

其沿小厚度 $\triangle n$ 的面积分，在当 $\triangle n \to 0$，而 $\boldsymbol{B}$ 的数值又不是无穷大时，可以忽略不计。因之

$$Bn_2 = Bn_1 \qquad (7.4.68)$$

式(7.4.67)第一式可以照样积分。惟在边界上 ρ 常常为无穷大，

$$(Dn_2 - Dn_1)A = \rho A \triangle n$$

以

$$\rho\triangle n \to \sigma \tag{7.4.69}$$

σ 称为"自由"电荷的面密度，则

$$Dn_2 - Dn_1 = \sigma \tag{7.4.70}$$

设边上电流密度也是无限大，则式(7.4.59)积分后为

$$H^*t_1 - Ht_2 = (J\triangle n) - \sigma V t_1 = g_{t\wedge n} - \sigma V_n$$

g 为电流面密度 $J\triangle n$，n 为由物质 1 指向物质 2 的边界法线方向，$g_{t\wedge n}$ 为电流面密度在 $t\wedge n$，与 t 垂直与 n 亦垂直，仍沿边界方向的分量。上式可写成

$$n \wedge H_2^* - n \wedge H_1^* = g - \sigma V \tag{7.4.71}$$

现在验证这些边界条件确系合于相对论的要求。在 S' 系随物质运动的系统上，通常的边界条件必然成立，由式(7.4.1)及(7.4.2)得

$$\left.\begin{aligned} &Et_1' = Et_2' \qquad Bn_1' = Bn_2' \\ &Dn_2' - Dn_1' = \sigma', n' \wedge H'_2 - n' \wedge H'_1 = g' \end{aligned}\right\} \tag{7.4.72}$$

此地 σ'，g' 代表"面密度"$\rho'\triangle n'$，$J'\triangle n'$。以上均为 S' 系"同时"量值。

我们要将上式化成在 S 系上同时的相应场量。但 S 认为同时，S' 认为不是同时。其两边邻近点相差时间为图 7.15

$$\triangle t' = -\frac{V \cdot \mathrm{d}n'}{C^2} \tag{7.4.73}$$

在 S' 系上，式(7.4.72)的量为连续变化。因之当 $\mathrm{d}n' \to o$ 时，式(7.4.72)不起甚么大的变化。换言之，设化为 S 系的同时，但 S' 系相差为式(7.4.73)的无限小时间，则式(7.4.72)的形式，仍然成立。

任何一个方向 l 和 l' 的关系可以从式(2.5.7)得出。现在既然 S 系为同时，$\triangle t = 0$

所以

$$\triangle x' = \triangle x + V\frac{(V \cdot \triangle x)}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} - 1\right) \tag{7.4.74}$$

由此得出两方向单位矢量 $\boldsymbol{L}'$ 及 $\boldsymbol{l}$ 的关系为

$$\boldsymbol{l}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\left\{\boldsymbol{l}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{l})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\}, \tag{7.4.75}$$

以上 $\beta=V/C$，θ 为 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 所成的夹角。

取 $\boldsymbol{l}'$ 为沿边切线方向，则由式(7.4.72)的第一式，用式(7.3.6)的 $\boldsymbol{E}'$ 代入得

$$\boldsymbol{E}'_{n} = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{l}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}\boldsymbol{l}\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}\right) \tag{7.4.76}$$

其后面几项恰巧对消。因之式(7.4.72)的第一个边界条件成为式(7.4.61)的

$$\boldsymbol{E}^*_{n1} = \boldsymbol{E}^*_{n2} \tag{7.4.77}$$

换言之，式(7.4.61)具协变性。

要计算第二个边界条件，则 n 方向发生了复杂问题。由于"空间垂直"的观念不具协变性，如选 n' 和方才的 l' 垂直。则仿式(7.4.75)导出 n 一般不与 l 垂直。我们设法从式(7.4.72)的 n' 方向条件导出 n 方向的条件。现在要选 n' 的适当相应方向 n，使当

$$\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{n}' = 0 \qquad \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{7.4.78}$$

则可以将 S' 系的边界条件化成 S 系的边界条件。我们知道 n 与 n' 的关系在 V，一如式(7.4.75)以

$$\lambda\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n} + \mu\boldsymbol{V}$$

λ，μ 为待定常数。以式(7.4.75)代入

$$\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{n}' = o$$

内得

$$0 = (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n})\sqrt{1-\beta^2} + \frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V})(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{l})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})$$

$$+ \mu(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{l})\sqrt{1-\beta^2} + \mu(\boldsymbol{V}.\boldsymbol{l})(1-\sqrt{1-\beta^2})$$

但 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=o$

所以　　$\mu=-\dfrac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})$

再归一化 $|\boldsymbol{n}'|^2=1$，

所以　　$$\boldsymbol{n}'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}}\left\{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\right\} \tag{7.4.79}$$

θ 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 所成的夹角，式(7.4.79)是唯一 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}'$ 的关系，可以使得 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}'=0$ 变成 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$。用这个数值的 $\boldsymbol{n}'$ 代入式(7.4.72)的第二式内，再用式(7.3.6)$\boldsymbol{B}'$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系得

$$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{B}'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos\theta}}$$

$$\left\{\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}-\frac{1}{C}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{E})-\frac{1}{C^2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\cdot\left\{(1-\beta^2)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{V}}{C}\cdot\left\{\boldsymbol{n}\wedge\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}\right)\right\}\right\} \tag{7.4.80}$$

因之(7.4.72)边界条件的第二式成为

$$(1-\beta^2)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1+\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{C}}\cdot(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_1^*)$$

$$=(1-\beta^2)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2+\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{C}}\cdot(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_2^*)$$

但由于式(7.4.77)

$$\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_1^*=\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_2^* \tag{7.4.81}$$

因此，上式就变成

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2 \tag{7.4.82}$$

和式(7.4.72)第二式一样的条件了。

$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 的变换同于式(7.3.6)$\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{E}$ 的变换。由式(7.4.79)得

$$\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{H}^{*}=\sqrt{1-\beta^{2}\cos^{2}\theta}$$
$$\cdot\left\{\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}'-\frac{\boldsymbol{V}}{V^{2}}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}')(1-\sqrt{1-\beta^{2}})\right\}\tag{7.4.83}$$

及

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\sqrt{1-\beta^{2}\cos^{2}\theta}}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\left\{\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{D}'+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}'\right\}\tag{7.4.84}$$

其中

$$\boldsymbol{H}^{*}=\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D}$$
$$=\sqrt{1-\beta^{2}}\left\{\boldsymbol{H}'+\frac{\boldsymbol{V}}{V^{2}}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H}')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}-1\right)\right\}\tag{7.4.85}$$

$\boldsymbol{n}$ 由式(7.4.79)解出为

$$\boldsymbol{n}=\sqrt{1-\beta^{2}\cos^{2}\theta}\left\{\boldsymbol{n}'+\frac{\boldsymbol{V}}{V^{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}-1\right)(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{V})\right\}\tag{7.4.86}$$

由于边界层度的缩短，

$$\triangle n=\triangle n'\sqrt{1-\beta^{2}\cos^{2}\theta}\tag{7.4.87}$$

(7.4.84)式为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\triangle n}{\triangle n'}\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{D}'+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}'}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\right\}\tag{7.4.88}$$

再者

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{V}+\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{H}^{*}$$
$$=\frac{\triangle n}{\triangle n'}\left\{\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}'+\frac{\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{D}'}{\sqrt{1-\beta^{2}}}+\frac{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{H}')}{V^{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^{2}}}-1\right)\right\}\tag{7.4.89}$$

取式(7.4.88)在两物质边界的差数，并以式(7.4.72)后两式代入得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\frac{\triangle n}{\triangle n'}\frac{\sigma'+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{g}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.4.90}$$

由方程(7.4.15),交换其中一撇与无撇系统改变 $\boldsymbol{V}$ 的符号,并注意$\triangle n'$及$\triangle n$得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma \tag{7.4.91}$$

以上 σ 为 S 系所测量的面密度。取式(7.4.89)在边界层两边的差,再以式(7.4.15)的第一式代入得

$$\sigma\boldsymbol{V}+\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{H}_2^*-\boldsymbol{H}_1^*)=\triangle n\boldsymbol{J}=\boldsymbol{g} \tag{7.4.92}$$

$\boldsymbol{g}$ 为 S 系测量的面密度或

$$\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{H}_2^*-\boldsymbol{H}_1^*)=\boldsymbol{g}-\sigma\boldsymbol{V} \tag{7.4.93}$$

因之(7.4.72)静坐标的条件除末项。运流面密度不产生边界层两边切线 $\boldsymbol{H}$ 的突变外,其余均具协变性质。

我们可以将边界条件写成张量形式。两边界邻近点

$$\triangle x_2=(\triangle x,\triangle y,\triangle z,iC\triangle t) \tag{7.4.94}$$

显然为一四维矢量,以

$$u_a=\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{iC}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{7.4.95}$$

代表物体的四维速度矢量,方程

$$u_a\triangle x_a=0 \tag{7.4.96}$$

显然为标量方程。由此解出 $iC\triangle t$ 代入式(7.4.94)内得

$$\triangle t=\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{x}}{C^2}$$

因之

$$\triangle x_a=(\triangle x,\triangle y,\triangle z,\frac{iC(\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{x})}{C^2}) \tag{7.4.97}$$

为一四维矢量,其标量绝对值为

$$\triangle S^2 = \triangle x_a^2 = \triangle x_i^2 - \frac{(\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{x})^2}{C} = (\triangle n)^2(1-\beta^2\cos^2\theta),$$

(7.4.98)

其中

$$\triangle n^2 = \sum_{i=1}^{3}\triangle x_i^2$$

为两点的空间矩离，因之

$$n_a \equiv \frac{\triangle x_a}{\triangle s} = \left\{\frac{\triangle x}{\triangle n}, \frac{\triangle y}{\triangle n}, \frac{\triangle z}{\triangle n}, i\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{x})}{c\triangle n}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}}$$

必为四维矢量，$\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{V}$ 与 $\triangle\boldsymbol{x}$ 所成的空间夹角。以

$$n_i = \left(\frac{\triangle x}{\triangle n}, \frac{\triangle y}{\triangle n}, \frac{\triangle z}{\triangle n}\right) \tag{7.4.99}$$

为空间三元方向余弦，则

$$n_a = \left(\boldsymbol{n}, i\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{C}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}} \tag{7.4.100}$$

为相仿于三维方向的四维方向矢量

$$\sum_{a=1}^{4} n_a^2 = 1, \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$$

今以 $\boldsymbol{n}$ 为边界层的法线方向，则方程

$$\in^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\beta F_{\gamma\delta_1} = \in^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\beta F_{\gamma\delta_2} \tag{7.4.101}$$

为协变方程，上式可写成

$$n_\beta(\triangle F^*_{\alpha\beta}) = 0 \tag{7.4.101}'$$

$\triangle$ 为两边差数。在相对静止坐标 S' 中，上式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{E}'_1 &= \boldsymbol{n}'\wedge\boldsymbol{E}'_2\\ \boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{B}'_1 &= \boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{B}'_2\end{aligned}\right\} \tag{7.4.102}$$

在 S 系中，式(7.4.101)为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{C}\boldsymbol{B}_1 &= \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{E}_2 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{C}\boldsymbol{B}_2,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1 &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2\end{aligned}\right\} \tag{7.4.103}$$

但因

$$\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V}),\quad(7.4.104)$$

以之代入式(7.4.103)内，消去$(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{B}$，则得式(7.4.81)及(7.4.82)的方程，

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2,\\&\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{E}_2+\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}_2)\end{aligned}\right\}$$

7.4.105)所以方程(7.4.101)为前两个边界条件的四维形式。再看

$$n_\beta(\triangle H_{\alpha\beta})=\frac{1}{C}J_\alpha\triangle S\equiv\frac{1}{C}g_\alpha\qquad(7.4.106)$$

其中

$$\triangle S=\triangle n\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

为标量(7.4.98)，因之 g_α 为“四维矢量面密度”。

在静止坐标 S' 中，上式为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}'\cdot\triangle\boldsymbol{D}'=\rho'\triangle S'=\sigma'\\&\boldsymbol{n}'\wedge\triangle\boldsymbol{H}'=\frac{1}{C}\boldsymbol{J}'\triangle S'=\frac{1}{C}\boldsymbol{g}'\end{aligned}\right\}\qquad(7.4.106)'$$

在 S 系，上式为

$$\boldsymbol{n}\cdot\triangle\boldsymbol{D}=\rho\triangle n(1-\beta^2\cos^2\theta)\qquad(7.4.107)$$

$$\boldsymbol{n}\wedge\triangle\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{V}}{C}\right)=\frac{1}{C}\boldsymbol{J}\triangle n(1-\beta^2\cos^2\theta)$$

第二式可以化成

$$\boldsymbol{n}\wedge\triangle(\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D})=(\frac{1}{C}\boldsymbol{J}-\rho\boldsymbol{V})\triangle n(1-\beta^2\cos^2\theta)$$

(7.4.108)

我们可再将$\triangle n$ 化成 S 系的同时距离 $\mathrm{d}n$(图 7.16)

$$\mathrm{d}n=\triangle n-(\boldsymbol{V}\triangle t)\cdot\boldsymbol{n}\qquad(7.4.109)$$

因(7.4.99)

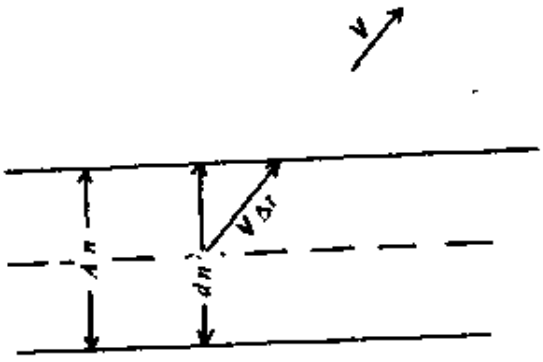


图 7.16

$$\triangle t=\frac{\boldsymbol{V}\cdot\triangle\boldsymbol{X}}{C^2}=\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{C^2}\triangle n,$$

所以
$$\mathrm{d}n=\triangle n\left(1-\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})^2}{C^2}\right)=\triangle n(1-\beta^2\cos^2\theta) \quad (7.4.110)$$

所以
$$\boldsymbol{n}\cdot\triangle\boldsymbol{D}=\rho\mathrm{d}n$$

$$\boldsymbol{n}\wedge\triangle\boldsymbol{H}^*=\left(\frac{1}{C}\boldsymbol{J}-\rho\boldsymbol{V}\right)\mathrm{d}n$$

当

$$\mathrm{d}n\to 0,\ \triangle n\to 0,\ \rho J\to\infty$$

$$\lim_{\mathrm{d}n\to 0}\rho\mathrm{d}n\to\sigma\ ,\ \lim_{\mathrm{d}n\to 0}\boldsymbol{J}\mathrm{d}n\to g \quad (7.4.111)$$

则式(7.4.107)及(7.4.108)为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\triangle\boldsymbol{D}&=\sigma\\ \boldsymbol{n}\wedge\triangle\boldsymbol{H}^*&=\frac{1}{C}g-\sigma\boldsymbol{V}\end{aligned}\right\} \quad (7.4.112)$$

此时$\triangle t\to 0$，两边 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}^*$ 均为同时值。所以边界条件可以写成(7.4.101)′及(7.4.106)′的张量条件。

总结起来，我们一共用了四种不同的方法来推定界层两边的条件。第一直接从 S 系用随物质进行的全微分变化法得出。第二

直接从麦氏方程，用式(7.4.62)等方法推算。第三由式(7.4.72)相对静止系统上成立的条件，设法转换到 S 系统上去。第四找出一个方向四维矢量，接近于三维方向矢量，再由此导出协变方程(7.4.101)及(7.4.106)。这样交叉使用，既可以作为练习发现新的问题，又可以互相校正，改正缺陷。

作为一个边界条件的例子。我们可以计算 Wilson 用 $M\neq1$ 的介质，在磁场中运动的实验结果。图 7.17 上的磁场，在 y 方向，指向纸内。电容器上加电压 Φ，在 Wilson 实验中，$\Phi=0$。

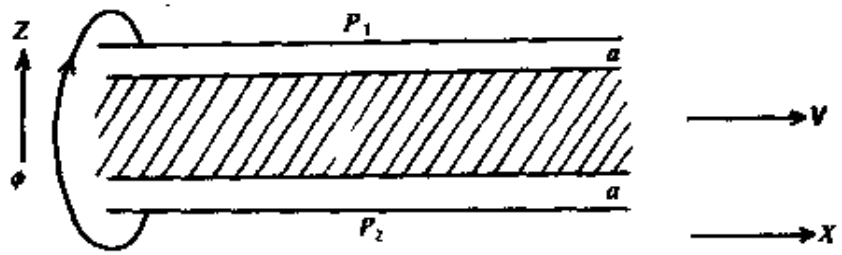


图 7.17

中间夹有厚 l 的介质，以速度 V 在 x 方向移动。由于 $\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}$ 的力，介质必然极化，致使金属板上带电。今计算板上面带的电荷。

以 a 代表介质与金属板中的真空间隔距离。在静止导体内 $\boldsymbol{E}_n=0$，所以导体上电荷面密度，即真空 a 中的电场 $D_{za}=E_{za}$。

今以介质系统作为 S' 系。在这个系统上，通常的边界条件(7.4.72)可以适用。介质上无自由电荷。因之在介质边界上

$$D'_{za}=E'_{za}=D'_{zl}=\in E'_{zl} \tag{7.4.113}$$

$$H'_{yl}=H'_{ya} \tag{7.4.114}$$

$$2aE'_{za}+lE'_{zl}=\Phi' \tag{7.4.115}$$

$\in$ 为静止介质常数。

所以

$$E'_{za}=\frac{\in\Phi'}{2a\in+l} \tag{7.4.116}$$

为介质与板间隔真空中的电场。今将此式化成 S 系中的 E_{za} 数值

由方程(4.5.5)得

$$E_{za}=\frac{E'_{za}-\beta B'_{ya}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\frac{\in \Phi'}{2a\in+l}-\beta B'_{ya}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7.4.117)$$

再将上式 Φ' 及 B'_{ya} 用 S 系的 Φ 及磁矧 h 表示，

因为 $\Phi=2aE_{za}+lE_{zl}=\frac{2a(E'_{za}-\beta B'_{ya})+l(E'_{zl}-\beta B'_{yl})}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$=\frac{\Phi'-\beta(2a+\mu)B'_{ya}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B'_{ya}=H'_{ya}=\frac{B_{ya}+\beta E_{za}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

代入式(7.4.117)内得

$$E_{za}=\frac{\in\Phi(1-\beta^2)+\beta l(\in\mu-1)B_{ya}}{2a\in(1-\beta^2)+l(1-\beta^2\in\mu)} \quad (7.4.118)$$

此亦即金属板上电荷面密度。上板带负电，下板带正电。

在 Wilson 实验中 $a\ll l$，$\Phi=0$，$\beta^2\ll 1$

所以 $$\sigma=\beta(\in\mu-1)H_{ya} \quad (7.4.119)$$

与实验的结果符合。旧的洛伦兹理论内没有 μ 出现，Hertz 的理论是 $\beta\in\mu B$，所以都和实验不同。

这一个问题也可利用运动介质中 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 关系及边界条件来解决。

在介质的运动边界上

$$D_{za}=E_{za}=D_{zl}, \quad (7.4.120)$$

$$(\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D})_{ya}=(\boldsymbol{H}-\frac{1}{C}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{D})_{yl}$$

所以 $$\boldsymbol{H}_{ya}=\boldsymbol{H}_{yl} \quad (7.4.121)$$

$$\Phi = 2aE_{xa} + lE_{xl} = 2aD_{xl} + lE_{xl} \qquad (7.4.122)$$

在介质内，

$$\left.\begin{aligned} D_{lx} + \beta H_{ly} &= \in (E_{lx} + \beta B_{ly}) \\ B_{ly} + \beta E_{lz} &= \mu(H_{ly} + \beta D_{lz}) \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.123)$$

以上$\in$、μ均为静止的介质常数。上式解出为

$$\left.\begin{aligned} D_{xl}(1 - \mu \in \beta^2) &= \in (1 - \beta^2)E_{xl} + (\in \mu - 1)\beta H_{yl} \\ B_{yl}(1 - \mu \in \beta^2) &= \mu(1 - \beta^2)H_{yl} + (\in \mu - 1)\beta E_{xl} \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.124)$$

再解出式(7.4.122)的D_{xl}得出

$$\sigma = -D_{xa} = -D_{xl} = -\frac{\in \Phi(1 - \beta^2) + \beta l(\in \mu - 1)B_{ya}}{2a \in (1 - \beta^2) + l(1 - \beta^2 \in \mu)}$$

与式(7.4.118)相同的结论。

我们为甚么不可以先在S'系统中，直接求出σ'，再用式(7.3.15)的变换变成S系的σ呢？在导体中，我们一般的假设是$\lambda_0 \to \infty$，因之，式(7.4.49)′，S'系看导体中的

$$\boldsymbol{E}' + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{E}'}{C^2} = 0 \qquad (7.4.125)$$

此时导体向左移动，因之导体内电场E'_{x}是

$$E'_{xl} = \beta B_{yl}' \qquad (7.4.126)$$

但是如何运用边界条件呢？介质是相对静止的(在S'系内)。但导体向左方以V移动；边界上一个动，一个不动的条件还没研究过。不过在我们情形下，这个问题不发生。我们中间有个真空间隔。“真空”部分可以假设是动的，也可以假设是静止的。

我们先求导体内$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$的关系。由式(7.4.124)，此时$\beta$为负号，并用式(7.4.126)代入得

$$B_{yl}' = \mu' H_{yl}', D_{xl}' = \beta H_{yl}' = E_{xl}' \qquad (7.4.127)$$

μ'为导体静止的磁导率，在这个情形下，$\in'$不出现。边界条件，作为一齐向左移动，为

$$D_{zc}' - D_{za}' = \sigma' ,$$

$$H_{yc}' - \beta D_{zc}' - H_{ya}' + \beta D_{za}' = -\frac{1}{C}(g_x' + \sigma' V) \tag{7.4.128}$$

以上 g'_x 为 S' 系所观察的边界面电流。用式(7.4.126)及(7.4.127)得出

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \beta H_{ya}' - E_{za}' \\ \frac{g_x'}{C} &= H_{ya}' - H_{yc}' \end{aligned}\right\} \tag{7.4.129}$$

此处由于边界面与速度方向平行，所以 σ 与 ρ 的变换相同。因之，由式(7.4.15)得

$$\sigma = \frac{\sigma' + \frac{g_x' V}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{E_{za}' - \beta H_{ya}'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.4.130}$$

也是与式(7.4.117)完全相同的结论，我们又得出电流面密度为

$$g_x = \frac{g_x' + \sigma' V_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{H_{ya}' - \beta E_{za}'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} H_{yc}' \tag{7.4.131}$$

和由 S 系直接得出的，

$$g_x = -\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H}_1 = -H_{yc} + H_{ya}$$

$$= -\frac{H_{yc}' - \beta E_{zc}'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{H_{ya}' - \beta E_{za}'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

相同(以(7.4.127)代入)。我们这里又用了三种方法研究 Wilson 实验，在这个不计 a 的情形下，也可以直接从式(7.4.47)得出实验结果。

由于边界条件的协变性，一切有关运动边界的电磁现象，例如电磁波的反射问题，都可以先化成 S 系静止边界的问题，再用变换

关系变换到 S 系去。

§7.5 连续体力学系统的绝热变化

在连续体(当然是宏观的概念)内质点互相作接触性的影响，因之牛顿的作用与反作用定律成立。今考虑一长方形体积中的物质，在其六面上，有外边接触物质对它的作用的力，此种作用力应与接触物质的多少，换言之，与接触面积的大小成正比。

设右边的 x 面(即面的外法线在 x 方向)外，右方物体对它的拉力是

$$t_{xx}\triangle y\triangle z, t_{yx}\triangle y\triangle z, t_{zx}\triangle y\triangle z. \tag{7.5.1}$$

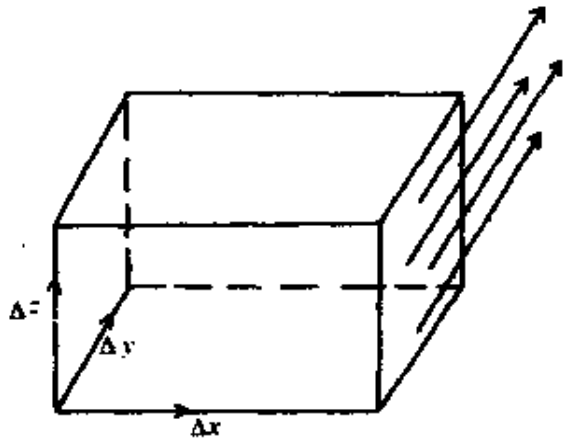


图 7.18

t_{ij} 称机械应力，指标第二字 j 指作用面的法线方向，第一字 i 指力在 i 方向的分量。在另一个左边 x 面上，左方物体对它的拉力必为(注意牛顿第三定律)，

$$-(t_{xx}-\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\triangle x)\triangle y\triangle z,$$

$$-(t_{yx}-\frac{\partial t_{yx}}{\partial x}\triangle x)\triangle y\triangle z, -(t_{zx}-\frac{\partial t_{zx}}{\partial x}\triangle x)\triangle y\triangle z$$

这两个面上对体内物质所设施力的和为

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\triangle\Omega, \frac{\partial t_{yx}}{\partial x}\triangle\Omega, \frac{\partial t_{zx}}{\partial x}\triangle\Omega, \tag{7.5.2}$$

其中

$$\triangle\Omega \equiv \triangle x\triangle y\triangle z$$

为此长方形的体积，在 y 方向面及 z 方向面，亦有类似作用，因之小体积共受接触作用的力为

$$\left.\begin{aligned} x\text{ 方向} &= \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}\right)\triangle\Omega \\ y\text{ 方向} &= \left(\frac{\partial t_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}\right)\triangle\Omega \\ z\text{ 方向} &= \left(\frac{\partial t_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}\right)\triangle\Omega \end{aligned}\right\} \tag{7.5.3}$$

设单位体积内质点动量为 g_i。设此 g_i 系质点的性质随质点的位置而转移。则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_i\triangle\Omega)=\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\triangle\Omega \tag{7.5.4}$$

因，参考式(7.1.30)、(7.1.33)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \frac{\mathrm{d}\triangle\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j}\triangle\Omega \tag{7.5.5}$$

用式得(7.1.34)得

所以

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(g_i\dot{x}_j-t_{ij})=0 \tag{7.5.6}$$

设此单位体积内能量为 h，并设此 h 亦系质点的性质，随质点的位置而转移，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega)=\text{六个面上外力对它所作的功率}$$

$$\text{十六个面上传入的其它能量率。} \tag{7.5.7}$$

在 x 面右方物质对它所做的功率是

$$(\dot{x}t_{xx}+\dot{y}t_{yx}+\dot{z}t_{zx})\triangle y\triangle z=\dot{x}_it_{ix}\triangle y\triangle z$$

因之，仿式(7.5.3)，六个面上共对它做的功率是

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_it_{ij})\triangle\Omega.$$

假使不计其他能量传递，则代入式(7.5.7)内得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_i t_{ij})\triangle\Omega \tag{7.5.8}$$

或

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(h\dot{x}_j-\dot{x}_i t_{ij})=0 \tag{7.5.9}$$

方程(7.5.6)及(7.5.9)具有(7.2.1)的

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.5.10}$$

形式。其中

$$\left.\begin{aligned} &T_{ij}=g_i\dot{x}_j-t_{ij},\quad T_{i4}=icg_i\\ &T_{4i}=\frac{i}{C}(h\dot{x}_i-\dot{x}_k t_{ki})\quad T_{44}=-h\end{aligned}\right\} \tag{7.5.11}$$

因之在孤立力学体系中

$$K_i=ic\iiint g_i\mathrm{d}\Omega \tag{7.5.12}$$

及

$$K_4=-\iiint h\mathrm{d}\Omega \tag{7.5.13}$$

均具守恒性，且成一四维矢量。设 K_α 为时间性。则有“静止坐标”存在。(这个“静”坐标在物理上明显的存在，因之 K_α 必为时间性)。此体系以恒速度(7.2.11)，

$$V_i=\frac{\iiint g_i\mathrm{d}\Omega}{\frac{1}{C^2}\iiint h\mathrm{d}\Omega} \tag{7.5.14}$$

在空间进行。

角动量守恒定律，要求 $T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}$。这样

$$g_i=\frac{h}{C^2}\dot{x}_i-\frac{1}{C^2}\dot{x}_j t_{ji} \tag{7.5.15}$$

同时

$$t_{ik} - t_{ki} = g_i\dot{x}_k - g_k\dot{x}_i, \tag{7.5.16}$$

$$t_{ik} - t_{ki} = \dot{x}_i\dot{x}_j t_{jk} - \dot{x}_k\dot{x}_j t_{ji} \tag{7.5.17}$$

我们现在来解释上面的方程。

式(7.5.15)动量密度 g_i 的第一项

$$\frac{h}{C^2}\dot{x}_i$$

完全可以理解为质能动量。其第二项

$$\dot{x}_j t_{ji} \tag{7.5.18}$$

为左方物质对右方物质每秒在单位面积上所做的功率。也就相当于每秒向右方流入的能量。但能量具有质量性质。因之，每秒有质量

$$-\frac{1}{C^2}\dot{x}_j t_{ji} \tag{7.5.19}$$

经过单位横截面向正 $\dot{x}_i$ 方向流出。对质点来讲，每秒经过单位横截面向 x_i 方向流出的质量 $\rho\dot{x}_i$ 亦即“每单位体积的动量”。(电磁场中场动量密度与能流数值相等的原因，也可以这样解释)。所以 g_i 有两部分。

假使还有其他能量传递，例如热的传导，则式(7.5.13)T_{ii}的项，还要加上这一项能流。那么上面的讨论，要求这一项也有相应的动量密度，使 $T_{\alpha\beta}$对称化。

“广义应力”T_{ij}分为两项，也可以了解，因为

$$g_i\dot{x}_j \tag{7.5.20}$$

是每秒经过 j 面上单位面积流出 i 方向的动量，因之相当于在 j 面上有上述应力，在 i 方向的分量(方向相反)。所以

$$-T_{ij} = t_{ij} - g_i\dot{x}_j \tag{7.5.21}$$

为机械应力 t_{ij}及输入动量的和。也由于这个原因，机械应力本身不

一定适合对称的条件。

式(7.5.4)的积分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint g_i \mathrm{d}\Omega = \oiint t_{in}\mathrm{d}s \tag{7.5.22}$$

表示某固定范围内动量的变化，只由于包面上的机械应力 t_{ij} 的作用。设面积取在 $t_{ij}=0$ 处，则成"孤立"系统的动量守恒定律。式(7.5.8)的积分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint h\mathrm{d}\Omega = \oiint \dot{x}_i t_{in}\mathrm{d}s \tag{7.5.23}$$

表示某体积内能量的变化，也只由于边界机械应力作功的原故。当面积取在 $t_{ij}=0$，上式成能量守恒定律。方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint (g_i x_j - g_j x_i)\triangle\Omega\\ &=\iiint (x_j\frac{\mathrm{d}(g_i\triangle\Omega)}{\mathrm{d}t} - x_i\frac{\mathrm{d}(g_j\triangle\Omega)}{\mathrm{d}t}) + \iiint (g_i\dot{x}_j - g_j\dot{x}_i)\triangle\Omega\\ &=\oiint (x_j t_{in} - x_i t_{jn})\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{7.5.24}$$

表示角动量的变化，也只有机械应力作用在内。设面取在 $t_{ij}=0$ 处，则为角动量守恒定律。

应力 t_{ik} 一般不对称，惟当 $\dot{x}_i=0$ 时，亦即对该点相对静止的坐标 S^0，则由式(7.5.17)见

$$t^0_{ik} = t^0_{ki} \tag{7.5.25}$$

机械应力，在相对静止的坐标中，具对称性质。在此坐标 S^0 内，

$$T^0_{i4}=0 \quad T^0_{ik} = -t^0_{ik}, \quad T^0_{44} = -h^0 \tag{7.5.26}$$

我们现在用坐标变换将 $T_{\alpha\beta}$ 与 $T^0_{\alpha\beta}$ 连系起来。因

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^0_\gamma}\frac{\partial x_\beta}{\partial x^0_\delta}T^0_{\gamma\delta} = a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}T^0_{\gamma\delta}, \tag{7.5.27}$$

其中*，见式(2.5.11)。

---

* 我们将要在§7.6(B)看出 $\dot{x}_i$ 并不限于常数 V_i，而确系质点的速度 $\dot{x}_i$

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{q^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} - 1\right), \\ a_{i4} &= -a_{4i} = -i\frac{\dot{x}_i}{C\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \\ a_{44} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{7.5.28}$$

计算 T_{44}，则得

$$h = \frac{h^0 - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{C^2}t^0_{ij}}{\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)} \tag{7.5.29}$$

由上式见能量密度的变换关系，除在特殊情况下，一般与孤零零质点的质量密度变换关系(7.1.17)不同。由方程(7.2.1)也可以看出式(7.1.17)一般不能成立。能量密度 T_{44}，只是能量张量的一个分量，不能用(7.1.17)的简单变换形式。质点的互相作用力 t_{ij}，使能量密度复杂化。关于这一点可参考方程(7.6.84)及其讨论。

再由

$$T^0_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^0_\alpha}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x^0_\beta}{\partial x_\delta}T_{\gamma\delta} \tag{7.5.30}$$

其系数为式(7.5.28)中 $\dot{x}_i$ 反向的数值，得

$$T^0_{44} = -\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)h - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_jt_{ij}}{C^2}$$

或

$$h = \frac{h^0 - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_jt_{ij}}{C^2}}{\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)} \tag{7.5.31}$$

由式(7.5.29)及(7.5.31)得

$$\dot{x}_i\dot{x}_j t_{ij} = \dot{x}_i\dot{x}_j t^0_{ij} \tag{7.5.32}$$

由不变标量

$$T_{aa} = T^0_{aa} \tag{7.5.33}$$

关系得出

$$\sum_{i=1}^{3} t_{ii} = \sum_{i=1}^{3} t^0_{ii} \tag{7.5.34}$$

的结果。换言之，三面垂直机械应力之和，必为四维标量，不因坐标的选择而改变。此结果证明，通常粘滞性流体运动中的一个常用的假设。式(7.5.34)不独为三维空间标量，且为四维性的标量，不因流体的运动而改变。

再由 T_{ii} 的变换得

$$g_i = \frac{h}{C^2}\dot{x}_i - \frac{1}{C^2}\dot{x}_j t_{ji}$$

$$= \frac{h}{C^2}\dot{x}_i - \left\{ \frac{\dot{x}_k t^0_{ik}}{C^2\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j\dot{x}_k t^0_{jk}}{q^2C^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} - 1 \right) \right\} \tag{7.5.35}$$

或

$$g_i = \frac{h^0\dot{x}_i}{C^2\left(1-\frac{q^2}{C^2}\right)} - \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j\dot{x}_k t^0_{jk}}{q^2C^2\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} - 1 \right)$$

$$- \frac{\dot{x}_j t^0_{ji}}{C^2\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{7.5.36}$$

从 T_{ij} 的变换，并以式(7.5.36)代入得

$$t_{ik} = t^0_{ik} + \frac{\dot{x}_i\dot{x}_j t^0_{jk}}{q^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} - 1 \right) - \frac{t^0_{ij}\dot{x}_j\dot{x}_k}{q^2}\left(1 - \sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}} \right)$$

$$-\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}{q^4}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-1\right)^2 \dot{x}_i\dot{x}_k\dot{x}_l\dot{x}_m t^0_{lm}, \quad (7.5.37)$$

亦即 S 系统观察的应力与原应力的关系。因之，如原应力为零，则在任何系统看来，应力亦均为零。从上式也可以直接验证方程(7.5.32)及(7.5.34)。

方程(7.5.35)→(7.5.37)比较复杂不易了解。今取速度方向为 x 方向，则上式蜕化为

$$\left.\begin{aligned}
&t_{xx}=t^0_{xx}, t_{xy}=\frac{t^0_{xy}}{\sqrt{1-\beta^2}}, t_{xz}=\frac{t^0_{xz}}{\sqrt{1-\beta^2}}\\
&t_{yx}=\sqrt{1-\beta^2}t^0_{yx}, t_{yy}=t^0_{yy}, t_{yz}=t^0_{yz}\\
&t_{zx}=\sqrt{1-\beta^2}t^0_{zx}, t_{zy}=t^0_{zy}, t_{zz}=t^0_{zz}\\
&g_x=\frac{(h^0-t^0_{xx})V}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{h-t_{xx}}{C^2}V, g_y=-\frac{Vt^0_{xy}}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{Vt_{xy}}{C^2}\\
&g_z=-\frac{Vt^0_{xz}}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{Vt_{xz}}{C^2}, h=\frac{h^0-\beta^2t^0_{xx}}{(1-\beta^2)}
\end{aligned}\right\} \quad (7.5.38)$$

简单形式。g_i 的解释已在式(7.5.19)内讲过，此处不必再赘。

我们注意应力的改变，只和 β^2 有关。在 x 面上的应力是

$$t_{xx}=t^0_{xx}, t_{yx}=\sqrt{1-\beta^2}t^0_{yx}, t_{zx}=\sqrt{1-\beta^2}t^0_{zx}$$

将上式乘以 x 面上的面积素 $\triangle y\triangle z=\triangle y^0\triangle z^0$ 得该面积素上作用力

$$\left.\begin{aligned}
&F_x=t_{xx}\triangle y\triangle z=t^0_{xx}\triangle y^0\triangle z^0=F^0_x,\\
&F_y=\sqrt{1-\beta^2}F^0_y, \quad F_z=\sqrt{1-\beta^2}F^0_z
\end{aligned}\right\} \quad (7.5.39)$$

在 y 面上，因面积素

$$\triangle z\triangle x=\triangle z^0\triangle x\sqrt{1-\beta^2}$$

所以 $$F_x = t_{xy}\triangle z\triangle x = \frac{t^0_{xy}}{\sqrt{1-\beta^2}}\triangle z^0\triangle x^0\sqrt{1-\beta^2} = F^0_x$$

$$F_y = t_{yy}\triangle z\triangle x = t^0_{yy}\triangle z^0\triangle x^0\sqrt{1-\beta^2} = F^0_y\sqrt{1-\beta^2}$$

$$F_z = t_{zy}\triangle z\triangle x = t^0_{zy}\triangle z^0\triangle x^0\sqrt{1-\beta^2} = F^0_z\sqrt{1-\beta^2}$$

也和 x 面上的变换相同。z 面上力的变换，也是一样。

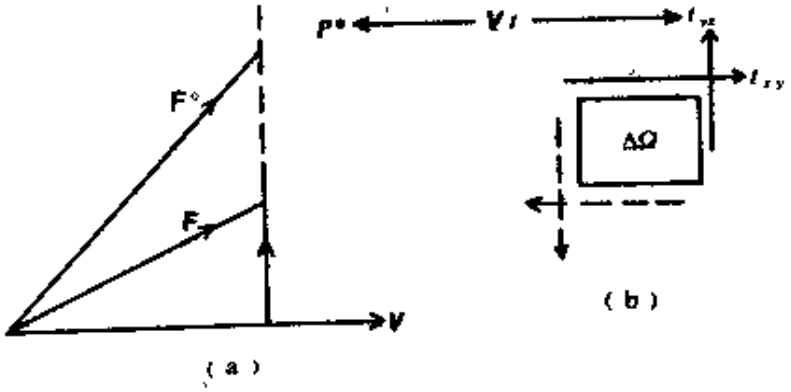


图 7.19

因之任何小面积素上作用的力，在坐标变换时，向 V 的方向倾斜，使在 V 方向的分量不变。垂直方向的分量小$\sqrt{1-\beta^2}$倍，见图 7.19 (a)。

我们从式(7.5.37)及(3.4.5)可以找出应力的一般变换简单意义。以

$$t_{ik}(\triangle\gamma_1 \wedge \triangle\gamma_2)_k \equiv Fi, \qquad (7.5.39)'$$

用式(3.4.5)得关系为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^0\sqrt{1-\beta^2} + \boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}^0)}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \qquad (7.5.39)''$$

但是力的变换，另有别的方法找出，从式(7.1.12)见

$$\left\{\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \frac{iCF_t}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right\}$$

为一四维矢量，所以由式(6.3.20)及式(7.4.40)见

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}}\left\{\boldsymbol{F}'\sqrt{1-\beta^2}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}')(1-\sqrt{1-\beta^2})\right.$$

$$\left.+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{F}')+\frac{\boldsymbol{V}}{C^2}\frac{\delta Q^2}{\delta t'}\right\} \qquad (7.5.40)$$

为力的一般变换。在现在的情况下 $\boldsymbol{q}'=0$。将式(7.5.40)和(7.5.39)′比较，可见目前的研究在不传热的情况下就和以前相同。(事实上是限于除功之外没有别的能量交换下)这也是应当的，否则在式(7.5.23)的右方应当加热的传递，则式(7.5.37)也要改变了，见式(7.6.27)。

从式(7.5.40)，以 $\boldsymbol{q}'=0$，$\delta Q'=0$，得到

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}',\quad \boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{F}'\sqrt{1-\beta^2}$$

和方才相同的结论，图 7.19。

从图 7.19(b)看出小体积素 $\triangle\Omega$ 所受的力偶在 z 方向是

$$(t_{yx}\triangle y\triangle z)\triangle x-(t_{xy}\triangle x\triangle z)\triangle y=(t_{yx}-t_{xy})\triangle\Omega$$

从式(7.5.17)看来，上式现在是 $-\frac{V^2}{C^2}t_{xy}\triangle\Omega$。但 Vt_{xy} 是每秒从上面 y 面向体积内流入的能量，所以 $-Vt_{xy}\triangle\Omega$ 也就是该体积内向上的动量。由于物质的运动，$-\frac{1}{C^2}V^2t_{xy}\triangle\Omega$ 是该体积对 S 空间一固定点 P 的角动量增加率。这样就解释为甚么 t_{ij} 不对称的原故。从

$$t_{yx}-t_{xy}=-\frac{1}{C^2}V^2t_{xy}$$

也可以得出与式(7.5.38)相合的 $t_{yx}=(1-\beta^2)t_{xy}$ 方程。

我们现在举几个例子来说明些问题。

假使有一根棍子在相对静止的坐标中，两头受有沿棍长大小相同，方向相反的两个力 F_0 保持平衡，图 7.20(a)。在 S 系看来，两个力的大小也相同，方向也相反；但是方向倾斜，产生一个力偶：

$$L=F_xl\sin\alpha-F_yl\cos\alpha$$

$$= F_x l_0 \sin\alpha_0 - F_y l_0 \cos\alpha_0 \sqrt{1-\beta^2}$$
$$= F_0 l_0 \beta^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0$$
$$= \frac{\beta^2}{2} F_0 l_0 \sin^2\alpha \qquad (7.5.41)$$

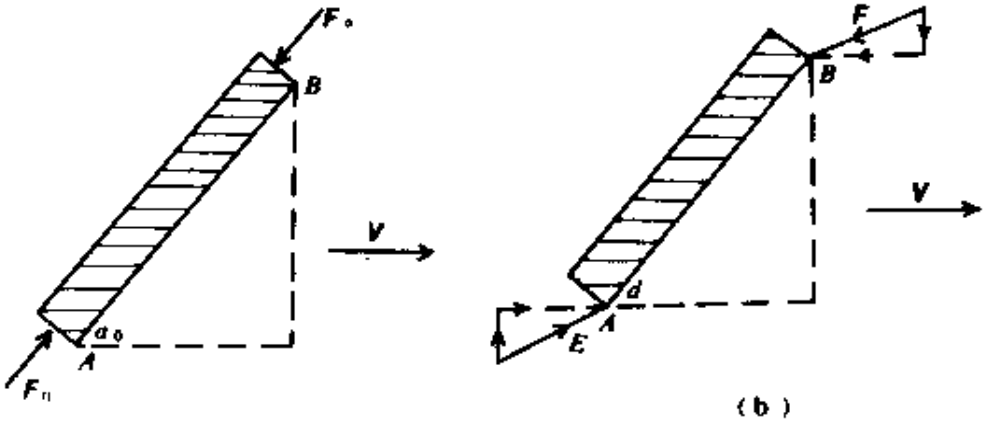


图 7.20

初看(照古典力学看法)这根棍子,在这个力偶的作用下要转动,但是在相对论中,计算角动量(7.5.24)时必须包括从能流产生的动量密度。由于图 7.20(b)上 A、B 两点都在移动,A 处外力 F 对棍子每秒做功 $F_x V$,B 处棍子对外力每秒做功 $F_x V$。所以每秒有能量 VF_x 从 A 端流向 B 端。如以 A 代表棍子的横截面,则棍内动量密度由于能量的流动是

$$g = \frac{VF_x}{C^2 A},$$

方向是沿着棍子从 A 到 B。对 S 系空间任一固定点 P,这个动量 g 产生的角动量,见图 7.21(a),是

$$M = Vt\sin\theta \int gA\,dl = Vt\cos\theta \frac{VF_x}{C^2} l \qquad (7.5.42)$$

式中 θ 是垂直于棍子的线和 V 方向所成的角度,所以

$$\theta = 90^\circ - \alpha,$$

而

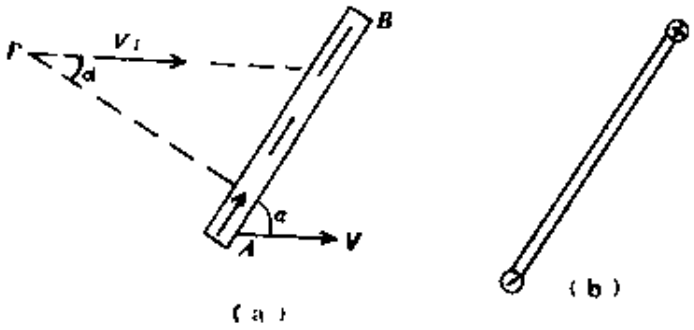


图 7.21

$$M = \beta^2 t F_x l \sin\alpha$$

由于棍子在垂直于 V 方向的长度投影不变，即 $l\sin\alpha = l_0\sin\alpha_0$，所以

$$M = \beta^2 t F_x l \sin\alpha = \beta^2 t F_x l_0 \sin\alpha_0 = \beta^2 t F_0 l_0 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \tag{7.5.43}$$

这种角动量的改变恰是式(7.5.41)的力矩作用，所以棍子本身不会转动。

对这个问题还可以作进一步的研究。我们可以把这个 F 引进到系统内，使成一闭合系统。如在棍子两端放置两个电荷，图 7.21 的(b)，一带正电，一带负电，则在相对静止系统看来，电荷受吸力

$$F_0 = \frac{e^2}{l_0^2} \tag{7.5.44}$$

所以棍子上也受这种应力，如图 7.20(a)。由 S 系看来，这些正负电荷都在运动，其产生的电磁场是方程(4.5.24)。电荷所受的电磁场力是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}\right) = e\left[\boldsymbol{E}(1-\beta^2) + \frac{1}{C^2}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})\right] \\ &= \frac{e^2(1-\beta^2)}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \cdot \left[\boldsymbol{r}(1-\beta^2) + \boldsymbol{V}\frac{Vr\cos\theta}{C^2}\right] \end{aligned} \tag{7.5.45}$$

这个力在 V 方向的分量是

$$F_x = \frac{1}{V}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{e^2(1-\beta^2)r\cos\theta}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{e^2(1-\beta^2)(x-Vt)}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

由于式(4.5.23)得

$$F_x = \frac{e^2}{r'^3}x' = F_x^0 \tag{4.5.46}$$

其与 $\boldsymbol{V}$ 垂直方向的分量

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{1}{V}|\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{V}| = \frac{e^2(1-\beta^2)^2 r\sin\theta}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \\ &= \frac{e^2(1-\beta^2)y}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = F_y^0\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \tag{7.5.47}$$

上述结果当然是和式(7.5.39)一般力的变换相同。这两个电荷受电磁场的力造成力偶，仿式(7.5.41)计算，得

$$L = \frac{\beta^2}{2}F_0 l_0\sin 2\alpha_0 = \frac{e^2\beta^2}{2l_0}\sin 2\alpha_0 \tag{7.5.48}$$

我们看出图 7.20(b)上力的倾斜在这里是由于磁场对电荷的作用(Tronton 及 Noble 曾以电容器的两个板代替上面的电荷，企图从电荷产生的磁场对另一个电荷的作用找出这个力偶的数值，从而测定实验室的速度 β)。

电荷本身除受电磁场的作用之外，还有棍子对它们的反作用力，两者恰恰对消。而棍子受的力偶恰使能流角动量(7.5.43)改变，因之棍子本身并不转动。这也就是 Tronton、Noble 测不出电容器转动的原因。

还有，从棍子下端每秒流向上端的能量 VF_x 到哪里去了呢？在上端棍子的应力对上面电荷做功，功率是 VF_x。所以棍子上流来的能量恰恰流上端的电荷。但是上端电荷本身又受有电磁场作用的力 $\boldsymbol{F}$。这个 $\boldsymbol{F}$，如上所述，恰和棍子对它的作用力相反。因之上端电荷对电磁场做功，其功率也是 VF_x，方程(7.3.47)。换言之，从棍子传到电荷的能量又被电荷传递到电磁场去。同样可以看出，电磁场又将能量传递到下面的电荷。这样轮流不息的传递着能量。

用式(7.3.44)的 $S_{\alpha\beta}$ 加入我们的 $T_{\alpha\beta}$ 得

$$\frac{\partial(T_{\alpha\beta}+S_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.5.49}$$

则物质和电磁场成一闭合系统。在孤立闭合系统内动量能量必定守恒。质能中心以恒速 V 在空间运动。对任一固定点的总角动量应当保持常数。式(7.5.43)中与时间变化部分的角动量，必为电磁场的角动量抵消(积分困难，这里不讲了)。

V. Laue 曾举一个直角弯形尺受力作用的简单但著名的例子。

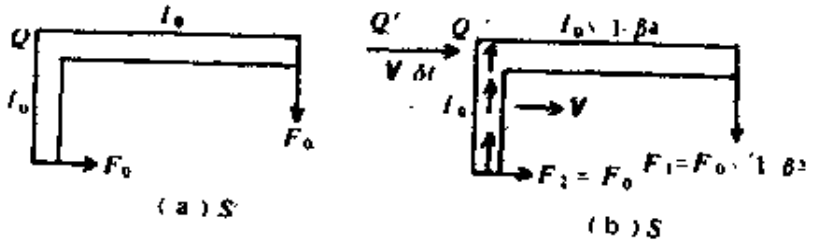


图 7.22

该直角尺具有同样长的两臂，以同样大小的力 F_0 扯着，如图 7.22(a)。Q 点钉在板上，角尺可以绕 Q 点转动。在 S' 系，尺是静止的。在 S 系看来[图(7.22)(b)]$F_2=F_0$，数值不变，但 F_1 缩小 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍，该尺臂亦收缩 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍。因之力矩不平衡：

$$L=F_0l_0-F_0\sqrt{1-\beta^2}l_0\sqrt{1-\beta^2}=\beta^2F_0l_0 \tag{7.5.50}$$

但由于尺的运动，力 F_2 对尺做功，功率为 VF_2。因之尺内有能量从 F_2 流入 Q，该处钉子的反作用力对板子做功。仿式(7.5.43)的计算，可见此种能流对原 Q' 点(这个例子和图 7.20(b)的例子，都是非孤立系统，角动量定律要按方程(7.5.24)计算)的角动量是，$Q'Q=V\delta t$，

$$\delta M=\frac{1}{C^2}V\delta tF_0Vl_0=\beta^2\delta tF_0l_0 \tag{7.5.51}$$

此变化率亦即上面式(7.5.50)的力矩数。所以角尺本身也不转动

(当然哪，否则与相对论矛盾)。

任何一个孤立系统，上面各点以等速运动的问题，在与之同速运动 S' 坐标上成为静力学问题。在这个系统 S' 中，一切 $g'_i=0$(见方程(7.5.15))，$t'_{ik}=t'_{ki}$，体积 $\triangle\Omega'$ 不变，h' 也不变。见式(7.5.5)及(7.5.8)。所以一切力 t'_{ik} 必须保持平衡，且亦不随时间改变。

取系统上任一横截面，贯彻全部物体，则其面上应力分量的总和必为零，例如 x 面上(图 7.23)

$$\iint t'_{ix}\triangle y'\triangle z'=0,\quad i=1,2,3 \tag{7.5.52}$$

否则右边物质将有总力作用于左方物质，该右方物质即不能保持平衡。此面上应力产生力矩的总和也必为零。否则左方也不能维持平衡。

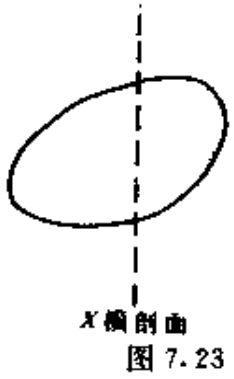


图 7.23

由式(7.5.24)的力矩方程得

$$\iint(x'_it'_{jx}-x'_jt'_{ix})\triangle y'\triangle z'=0$$

将式(7.5.52)乘以 $\triangle x'$，再依 $\triangle x'$ 对整个物体积分，所以

$$\iiint t'_{ij}\triangle\Omega'=0 \tag{7.5.53}$$

i、j 为任何 Ω' 方向的应力分量。同样从力矩方程得

$$\iiint_{\Omega'}(x'_it'_{jk}-x'_jt'_{ik})\triangle\Omega'=0, \tag{7.5.54}$$

i、j、$k=1$、2、3 中任何数字。今将式(7.5.37)依 $\mathrm{d}\Omega$ 积分，再将式(7.5.54)代入。由于当 S 系为"同时"时，

$$\triangle\Omega=\triangle\Omega'\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}$$

所以

$$\iiint_{\Omega} t_{ij}\triangle\Omega = 0$$

在 S 系上应力任何分量的整体积分亦为零。从式(7.5.35)及(7.5.29)得

$$G_i = \iiint_{\Omega} g_i \mathrm{d}\Omega = \dot{x}_i \frac{1}{C^2}\iiint_{\Omega} h\mathrm{d}\Omega = m\dot{x}_i,$$

$$mc^2 = H = \iiint h\mathrm{d}\Omega = \iiint \frac{h^0\mathrm{d}\Omega}{(1-\beta^2)} = \iiint \frac{h^0\mathrm{d}\Omega^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{H^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} G_i = m\dot{x}_i &= \frac{H^0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ H = mC^2 &= \frac{H_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{7.5.55}$$

为 S 系观察的总动量和总能量。上式和一个质点的动量、能量的变换相同，所以成一四维矢量。

但能量密度本身(7.5.29)仍含有 t_{ij} 项，与质点质量密度的变换仍旧不同，只有积分起来，t_{ij} 项对消之后，才有简单的表示。在 S' 系内由于各处 g' 均为零，其角动量当然也为零。今计算相对于 S 系中的角动量。取 V 为 x 轴，则 g，t_{ij} 的数值已在方程(7.5.38)计算过。

所以

$$M_z = \iiint (yg_x - zg_y)\mathrm{d}\Omega = \frac{V}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\iiint (Z_0 t^0_{xy} - Y_0 t^0_{xz})\mathrm{d}\Omega,$$

$$M_y = \iiint (Zg_x - xg_z)\mathrm{d}\Omega = \frac{V}{(1-\beta^2)}\iiint \frac{Z_0 h^0}{C^2}\mathrm{d}\Omega + \frac{V}{C^2(1-\beta^2)}$$
$$\iiint (x_0 t^0_{xz} - Z_0 t^0_{xx})\mathrm{d}\Omega + \frac{V^2}{C^2(1-\beta^2)}\iiint t_0 t^0_{xz}\mathrm{d}\Omega,$$

$$M_z = \iiint (xg_y - yg_x)\mathrm{d}\Omega = -\frac{V}{(1-\beta^2)}\iiint \frac{y_0 h^0}{C^2}\mathrm{d}\Omega + \frac{V}{C^2(1-\beta^2)}$$
$$\iiint (y_0 t^0_{xx} - x_0 t^0_{xy})\mathrm{d}\Omega - \frac{V^2}{C^2(1-\beta^2)}\iiint t_0 t^0_{xy}\mathrm{d}\Omega$$

以上 $\mathrm{d}\Omega$ 积分是 S 系的同时 t 值，其在各点相应的不同时间为 t_0；t^0_{xy}为该各相应时间地点 S' 系观测的应力。在 S 系的“同时”

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega_0\sqrt{1-\beta^2},$$

所以

$$M_x = \frac{V}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\iiint (Z_0 t^0_{xy} - Y_0 t^0_{xz})\mathrm{d}\Omega_0\sqrt{1-\beta^2},$$

虽然各处 t^0_{ij}是在不同 t_0 时间的数值，但由于 t^0_{ij}不依时间改变，所以各处 t^0_{ij}的数值和 t_0 的同时的数值相同。因之上式可以依 s' 的“同时”积分。从式(7.5.54)并记住 $t^0_{ij}=t^0_{ji}$得

$$M_x = 0$$

同样 M_y, M_z 式中右手第二项为零。其右手第三项则由于 t_0 是变数不容易计算。但 M_y, M_z 的积分既为 S 的同时，则

$$t_0 = t\sqrt{1-\beta^2} - \frac{Vx_0}{C^2}$$

t 为常数可取在积分符号之外

所以

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \frac{V}{C^2(1-\beta^2)}\iiint (Z_0 h^0 + X_0 t^0_{xz})\mathrm{d}\Omega \\ M_z &= -\frac{V}{C^2(1-\beta^2)}\iiint (y_0 h^0 + x_0 t^0_{xy})\mathrm{d}\Omega \end{aligned}\right\} \quad (7.5.56)$$

式中第二项可化成 $\mathrm{d}\Omega_0$，再先依 y^0, z^0 积分。由于式(7.5.52)值为零，我们改变它的符号再加进去，则由于式(7.5.29)上式可写为

$$M_y = \frac{V}{C^2}\iiint Zh\mathrm{d}\Omega = \overline{Z}G_x = mV\overline{Z},$$

$$M_z = -\overline{y}G_x = -mV\overline{y}$$

由此可见一般，如取 V 为任何方向，则

$$M = \bar{x} \wedge G = m\bar{x} \wedge V \tag{7.5.57}$$

以上 $\bar{x}$ 为 S 系定义的质能中心

$$\bar{x}\iiint h\mathrm{d}\Omega = \iiint xh\mathrm{d}\Omega$$

我们从计算里又可以得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint xh\mathrm{d}\Omega = VH,$$

亦即质能中心以恒速 V 运动。由式(7.5.57)可见

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0$$

的角动量守恒律。在前面两个例子中 M 随时间变化，式(7.5.43)及(7.5.51)是由于 F 力没有算在系统之内。换言之，不是孤立系统的原因。因为

$$\iiint xh\mathrm{d}\Omega = \iiint (x_0\sqrt{1-\beta^2} + Vt)h\mathrm{d}\Omega = \sqrt{1-\beta^2}\iiint x_0 h\mathrm{d}\Omega + VtH$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\iiint x_0(h^0 - \beta^2 t^0_{xx})\mathrm{d}\Omega_0\sqrt{1-\beta^2} + VtH$$

$$= \bar{x}_0 H_0 + VtH$$

上式的第二项在积分时可以先向 y^0, z^0 积分，则由于式(7.5.53)为零，所以

$$\bar{x} = \bar{x}_0\sqrt{1-\beta^2} + Vt$$

$$x_0 = \frac{\bar{x} - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\iiint yh\mathrm{d}\Omega = \iiint y_0 \frac{h^0 - \beta^2 t^0_{xx}}{(1-\beta^2)}\mathrm{d}\Omega^0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\bar{y}^0 H^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

所以

$$\bar{Y} = \bar{Y}^0, \quad \bar{Z} = \bar{Z}^0$$

换言之，现在 $\bar{x}$ 即是 $\bar{x}_0$ 的相应点，两个坐标定义的质能中心相合。

$$M_{\alpha\beta} = \iiint (x_\alpha T_{\beta 4} - x_\beta T_{\alpha 4})\mathrm{d}\Omega$$

的数值现在是

$$(M_{23}, M_{31}, M_{12}) = iC(M_x, M_y, M_z)$$

$$M_{i4} = \iiint (x_i T_{44} - x_4 T_{i4})\mathrm{d}\Omega$$

所以

$$M_{i4} = -\iiint x_i h\mathrm{d}\Omega + C^2 t \iiint g_i \mathrm{d}\Omega = -H\bar{x}_i + C^2 t G_i$$

在相对静止的 S' 系内

$$M^0_{i4} = -H^0\bar{x}^0_i, M^0_{ij} = 0$$

所以角动量张量在两个坐标中分别为

$$M^0_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & -H^0\bar{x}_0 \\ 0, & 0, & 0, & -H^0\bar{y}_0 \\ 0, & 0, & 0, & -H^0\bar{z}_0 \\ H^0\bar{x}_0, & H^0\bar{y}_0, & H^0\bar{z}_0, & 0 \end{Vmatrix} \qquad (7.5.58)$$

及

$$M_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0, & -iCm\,\bar{y}_0 V - iCm\,\bar{z}_0 V, & -mC^2\,\bar{x}_0 V\sqrt{1-\beta^2} \\ iCm\,\bar{y}_0 V, & 0, & 0, & -mC^2\,\bar{y}_0 \\ iCm\,\bar{z}_0 V, & 0, & 0, & -mC^2\,\bar{z}_0 \\ mC^2\,\bar{x}_0 V\sqrt{1-\beta^2}, & mC^2\,\bar{y}_0, & mC^2\,\bar{z}_0, & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(7.5.58)'$$

上面 $M_{\alpha\beta}$的张量性质可以直接从洛伦兹变换验证，内禀角动量在 S' 系内明显为零，因之在 S 系内

$$m_{\alpha\beta}=\iiint\{(x_\alpha-\bar{x}_{\alpha G})T_{\beta 4}-(x_\beta-\bar{x}_{\beta G})T_{\alpha 4}\}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{7.5.59}$$

必定为恒等于零的张量。其 $\bar{x}_{\alpha G}$为 $\bar{x}_0$ 的相应值：

$$\bar{x}_G=\frac{\bar{x}_0+Vt_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\bar{Y}_G=\bar{Y}_0,\bar{Z}_G=\bar{Z}_0,t=\frac{t_0+\frac{V}{C^2}\bar{x}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式(7.5.59)也可以用直接积分证明($m_{\alpha\beta}=0$ 解释为什么现在两个质能中心 $\bar{x}=\bar{x}_d$ 相合的原故)。

我们现在再举两个值得注意的例子。第一关于考虑不周到时发生佯谬的问题。例如将一根竹板弯成半径为 a 的圆形用弦 l 固定。板在 S' 系统中静止不动。S 系统看此图形以速度 V 向右运动，在 A 处弦对左方有拉力 T_0 每秒对左方做功 VT_0，因之有能量向左流动。在 B 处有推力 T_0 及挠矩 $2rT$ 使右方半圆保持平衡状态。设 B 处应力为 t_{xx}，则此应力对右方作功率为

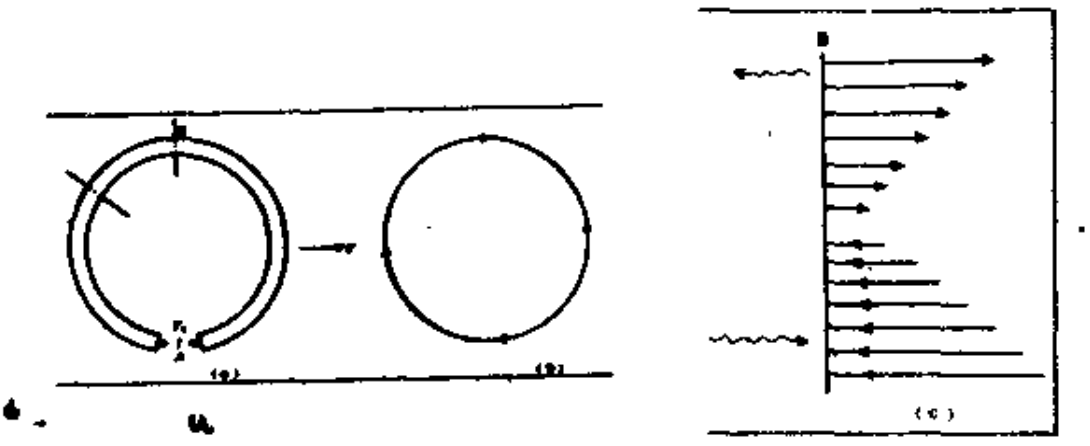


图 7.24

$$-V\iint t_{xx}\mathrm{d}s=-VT_0 \tag{7.5.60}$$

所以有动量向右方流动。这样 s 看来有能量环绕圆弧流动。如图 7.

25(b),因之也有动量环流,这样在质能中心成

$$m_{\epsilon}=\int r\frac{VT}{C^2}\mathrm{d}l\approx\frac{1}{C^2}2\pi a^2VT_0 \qquad (7.5.61)$$

的内禀角动量(我们只用 V 的一次方可以忽略圆的变形)。但在 S' 系中看来此圆各处不动,其对质能中心的角动量显然为零,$m_{ij}'=0$,且

$$m_{i4}'\equiv 0,\quad \text{所以}\quad m_{\alpha\beta}'=0$$

由于 $m_{\alpha\beta}$的张量性质则任何系统观察的 $m_{\alpha\beta}$也必须恒等于零。这样似乎和式(7.5.61)有矛盾。但是仔细的分析一下就知道在 B 处的应力,如图 7.24(C)B 处横截面,是比较复杂的分布。横截面下半部是推力,上半部却是拉力,使成挠矩 M。所以 B 处横截面的上部有能量向左流,下部有能量向右流,其净流才是式(7.5.60)。但是上半部离中心远,下半部离中心近,其在质能中心所成的角动量并不同于式(7.5.61),可以计算如下。我们现在的佯谬在 V 的一次方,所以在计算时可略去一切 β^2 的各项在板上任何 C 处取横截面 A,设其面上应力如图 7.25 的(b)。

考虑 AC 一段的平衡.F 与 F' 相差为 β^2,可以不计一撇

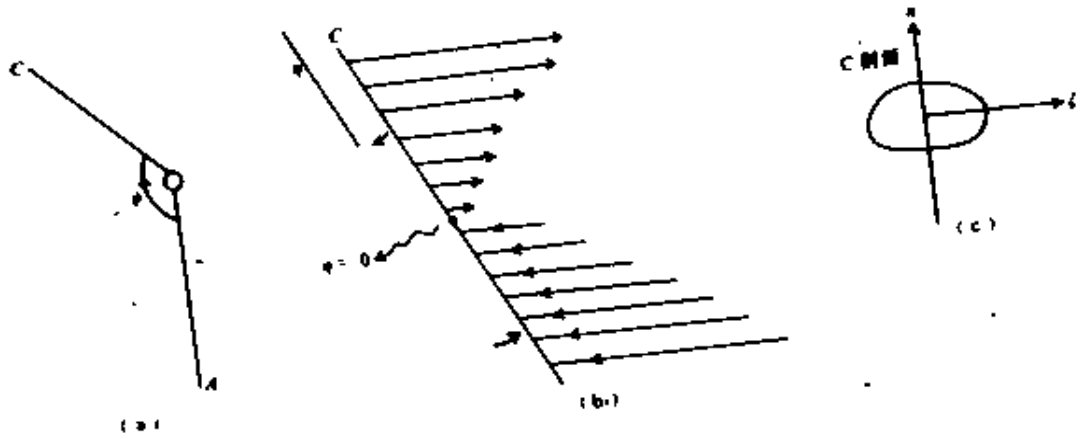


图 7.25

和没一撇的区别，

所以

$$\iint t_{xC}\mathrm{d}A \approx \iint t^0_{xC}\mathrm{d}A_0 = -T_0 \qquad (7.5.62)$$

挠矩 M 亦必为

$$M = T_0 a(1 - \mathrm{Cos}\psi)$$

与 A,C 两处产生的力矩平衡. 在横截面上，图 7.25(C)，取 ζ,η 轴，使 η 轴如图 7.25(b)，则

$$\iint t_{xC}\eta\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta = M = T_0 a(1 - \mathrm{Cos}\psi) \qquad (7.5.63)$$

横截面上各处能流为 Vt_{xC}。横截面的下部为流出 AC 弧，上部为流入 AC 弧，如图 7.24(C)。此种能流的动量密度在图中心成角动量

$$m_z = -\frac{1}{C^2}\iiint Vt_{xC}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}l \cdot (a + \eta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta \qquad (7.5.64)$$

由于式(7.5.62)及(7.5.63)，上式中

$$\iint t_{xC}(a + \eta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta = -T_0 a + T_0 a(1 - \mathrm{Cos}\psi) = -T_0 a\mathrm{Cos}\psi \qquad (7.5.65)$$

换言之，在弧下半面总角动量是顺时针方向，但上半部却是反时针方向，例如图 7.24(C)，B 处在 0 处所成角动量，上面应当大于下面，积分(7.5.64)，因，$\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\psi$，所以

$$m_z = -\frac{V}{C^2}\iiint t_{xC}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta(a + \eta)a\mathrm{d}\psi = 0 \qquad (7.5.66)$$

换言之，净动量为零，与我们期望的结果相合。所以虽然有净能量如图 7.24(b)的环流，但是由于分布的关系如图 7.24(C)，净角动量却为零而不是(7.5.61)的表示。

另一个例子牵涉到两种坐标定义的质能中心所以不同的原故。假使物体在 S' 坐标内有旋转，则 $m'_{ij} \neq 0$，例如在 S' 系有一个绕 Z 轴旋转的陀螺，如在 S' 系看来陀螺各点以匀速绕通过质能中心

的轴旋转，但在 S 系看来，陀螺下面各点的速度比上面各点的速度为大。由于质量随速度变化，所以陀螺下半部的质量比上半部大，成为不对称的情况。因之陀螺的质能中心应当向下移。这就是 S 和 S' 所定义的质能中心不同的缘故(7.2.32)。我们现在可以具体计算这种下移的距离。为简便计，也只考虑 V 的一次方，质点的密度：

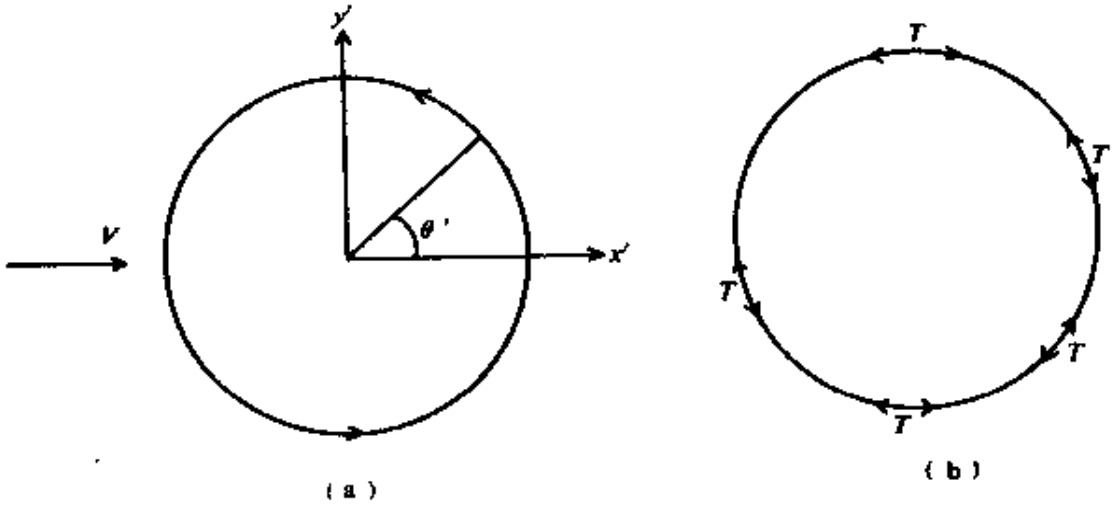


图 7.26

$$\rho = \frac{\rho_0}{1-\frac{q^2}{C^2}} = \frac{\rho_0}{1-\frac{q'^2}{C^2}} \frac{\left(1+\frac{q'\cdot V}{C^2}\right)^2}{\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)} \approx \rho'\left(1+\frac{2q'\cdot V}{C^2}\right) \tag{7.5.67}$$

以上

$$q'_x = -\omega' r' \sin\theta', \quad \rho' = \frac{\rho_0}{1-\frac{q'^2}{C^2}} \tag{7.5.68}$$

为 S' 系所观察的速度和质量密度

$$M\overline{Y} = \iiint \rho Y \mathrm{d}\Omega \approx \iiint \rho'\left(1-\frac{2V\omega' r'\sin\theta'}{C^2}\right)Y'\mathrm{d}\Omega'$$

$$= M'\overline{Y}' \frac{2\omega' V}{C^2}\iiint \rho' r'^2 \sin^2\theta' \mathrm{d}\Omega' = M'\overline{Y}' - \frac{\omega' V}{C^2}\iiint \rho' r'^2 \mathrm{d}\Omega' \tag{7.5.69}$$

其中 r' 是该点对 Z 轴的垂直距离，因 $M\approx M'$，所以

$$\overline{Y}=\overline{Y}'-\frac{\omega' V}{M'C^2}J' \tag{7.5.70}$$

以

$$\boldsymbol{A}'=J'\boldsymbol{\omega}',\quad J'=\int\rho' r'^{\,2}\mathrm{d}\Omega' \tag{7.5.71}$$

代入，则上式可以写成

$$\triangle\overline{x}\approx\frac{\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{A}'}{M'C^2} \tag{7.5.72}$$

解释质点体系在两个坐标质量中心不同的原因，不过方程(7.2.32)还包括一切非机械的体系，较上式更为广泛。

我们还可以更进一步的研究这个问题的能量流动和变化的问题。这个旋转陀螺各处有张力，如图 7.26(b)，来平衡离心力。以张力的应力为 T，并略去高次方得

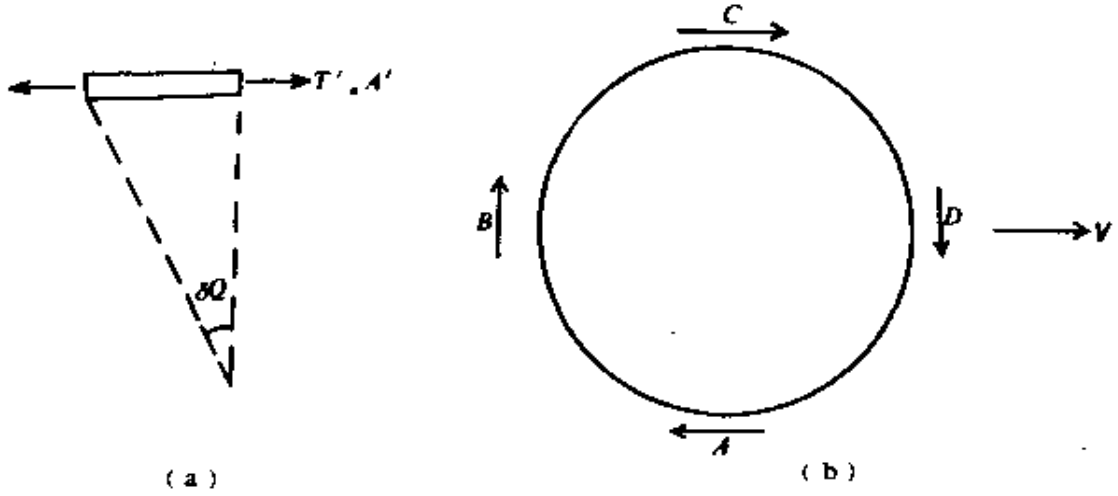


图 7.27

$$\rho'\omega'^{2}r'^{2}\delta\theta'\mathrm{d}A'=T'\mathrm{d}A'\delta\theta',$$

所以

$$T'=\rho'\omega'^{2}r'^{2},VT'=\rho'\omega'^{3}r'^{3} \tag{7.5.73}$$

由于这些应力，则 S' 系看来有能量反着陀螺旋转的方向环流。这种环流使实际的角动量减少

$$\frac{1}{C^2}\iiint \rho' \omega'^3 r'^3 \cdot r' \mathrm{d}A' \mathrm{d}l' = \frac{1}{C^2}\iiint \rho' \omega'^3 r'^4 \mathrm{d}\Omega' \quad (7.5.74)$$

但在 S 坐标看来这种环流的数值各处不一样。下部的速度大些，所以 A 处能流加强；上部速度小些，C 处能流减弱，B、D 两处仍旧。所以当质点从 D 点转到 C 点时，能量流进来的少，流出去的多，质点的能量要减少。从 C 点到 B 点，流进来的能量多流出去的少，所以质点的能量增加。C 点是质点质量最小的地方。从 B 到 A 进来的能量多出去的能量小，质点的质量还要增加。从 A 到 B，则进来的少出去的多，所以质量减少。因之 A 点是质点能量最大的地方。

我们也可以作定量的计算，仍和刚才一样忽略高次方。质点在任何处的速度沿应力方向是

$$q \sim \omega' r' - V\sin\theta'$$

经质点上每单位横截面积每秒输入的能量是

$$(qT)_1 = T'(\omega' r' - V\sin\theta'_1)$$

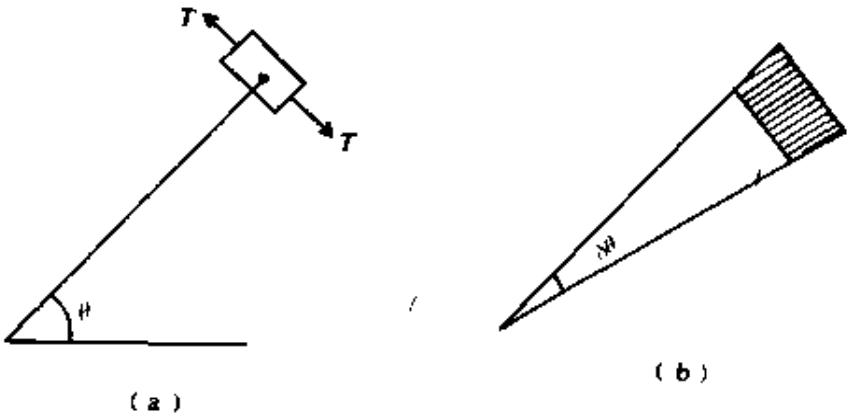


图 7.28

输出是

$$(qT')_2 = T'(\omega' r' - V\sin\theta'_2)$$

所以每秒净输入的能量是

$$-T'V\mathrm{Cos}\theta'\triangle\theta\triangle A' = -\frac{T'V\mathrm{Cos}\theta'}{r'}\cdot\triangle\Omega' \quad (7.5.75)$$

$\triangle\Omega$ 为此质点占据的体积，因之质点从 $\theta=0$ 到 θ 共吸收能量

$$-\int_0^\theta \frac{T'V\mathrm{Cos}\theta'}{r'}\triangle\Omega'\cdot \mathrm{d}t = -\int_0^\theta \frac{T'V\mathrm{Cos}\theta}{r'}\triangle\Omega\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega}$$

$$\approx -\rho\frac{\omega'^2 r'^2 V}{r'}\frac{\triangle\Omega}{\omega'}\sin\theta \approx -m'V\omega'^2 r'\sin\theta \quad (7.5.76)$$

照爱因斯坦理论，质点在 θ 处的质量是

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \approx \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}\left(1+\frac{\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}\right)$$

$$\approx \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}\left(1-\frac{V\omega' r'\sin\theta'}{C^2}\right) \quad (7.5.77)$$

所以在 $\theta=0$ 与 θ 之间质量的相差为

$$-\frac{m'V\omega' r'}{C^2}\sin\theta' \quad (7.5.78)$$

与上面的结论(7.5.76)符合。

由这些例子也可以看出“相对论”内部的融洽性和一致性。我们可以在上面基础上研究一切接触力的性质并解决物质的运动方程。现在取最简单的应力，非粘滞流体中纯压力的现象，作为例子。设原应力只有压力作用

$$t^0_{ij} = -p_0\delta_{ij}, \quad (7.5.79)$$

则式(7.5.37)证明绝热情形下

$$t_{ij} = -p_0\delta_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (7.5.80)$$

此时在任何坐标看来，应力也只有压力作用，且 $p=p_0$，压力为标量*尽管由于物体运动产生收缩的异向不同性现象，但压力仍具异向同性的性质。

由式(7.5.15)得

$$g_i=\frac{1}{C^2}(h+p)\dot{x}_i, \tag{7.5.81}$$

此时动量与速度的方向相同，如以 μ 代表

$$\mu\equiv\frac{h+p}{C^2} \tag{7.5.82}$$

则动量密度可简写成

$$g_i=\mu\dot{x}_i \tag{7.5.83}$$

由能量密度

$$h=\frac{h_0+\frac{q^2}{C^2}p_0}{1-\frac{q^2}{C^2}} \tag{7.5.84}$$

---

* 压力的标量性质在理想气体中可以用分子动力模型来了解。因压力为单位面积上平均受的力，在宏观静坐标 s' 中分子每次与 x' 墙壁或 y' 墙壁碰撞后所交换的动量为

$$\frac{2m_0x'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}},\frac{2m_0y'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}},\frac{2m_0z'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}$$

设每秒碰撞单位 x' 面积的分子数为 N'_1，或 N'_2、N'_3 则压力为

$$p'_1=\frac{2m_0x'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}N'_1,\ p'_2=\frac{2m_0y'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}N'_2,\ p'_3=\frac{2m_0z'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}N'_3$$

今设另一 S 坐标对 S' 坐标以等速 V 向负 x 方向进行。则 S 上观察者看某分子碰撞 x 墙前设的动量应为

$$\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{m_0(x'+V)}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}},\frac{m_0\dot{\bar{x}}}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}^2}{C^2}}}=\frac{m_0(\bar{x}'+V)}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}}$$

上面公式中字上加一横的为碰撞后的速度，因在宏观静坐标 S' 中

$$\bar{x}'=-x' \qquad \text{所以} \quad \bar{q}'^2=q'^2$$

所以碰撞 x 墙后此分子动量的交换为

得 μ 的变换公式

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - \frac{q^2}{C^2}} \tag{7.5.85}$$

与质点质量密度的变换相同(这个方程可能给人以 μ 就是质量密度的印象，实则上式只是一种偶合，可参考下节(7.6.83)等方程)。从

$$\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_i x_{ij}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(p\dot{x}_j) = -\dot{x}_j\frac{\partial p}{\partial x_j} - p\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h\triangle\Omega + p\frac{\mathrm{d}\triangle\Omega}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\triangle\Omega$$

得 μ 的变化率

$$\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} = \frac{m_0\bar{\dot{x}}}{\sqrt{1-\frac{\bar{q}^2}{C^2}}} = \frac{2m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}}$$

设 s 观察每秒碰撞 x 面上单位面积的分子数为 N_x，则上式乘以 N_x 后即为 S 观察 x 墙壁上的压力。因为在 $\triangle t'$ 时间内碰撞 $\triangle s'_x$ 面积的分子数目应当和在相应 S 系统观察的相应的 $\triangle t$ 时间内碰撞相应的 $\triangle s_x$ 面积的分子数目相同：

所以 $$N'_x\triangle s'_x\triangle t' = N_x\triangle s_x\triangle t$$

由于

$$\triangle s_x = \triangle s'_x\cdot\triangle t' = \triangle t\sqrt{1-\beta^2},\quad \text{所以 } N_x = N'_x\sqrt{1-\beta^2}$$

因之

$$p_x = \frac{2m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}}N_x = \frac{2m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}}N'_x\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \frac{2m_0\dot{x}'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}N'_x = P'_x$$

同样在 y、z 方向亦得出 $p_y = p_y'$，$p_z = p'_z$ 的关系。由于对称关系在静坐标中显然的

$$P_x' = p_y' = p_z' = p',\quad \text{所以 } p_x = p_y = p_z = p'$$

证明了压力的标量性质。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\triangle\Omega)=\frac{1}{C^2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\dot{x}_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)\triangle\Omega=\frac{1}{C^2}\frac{\partial p}{\partial t}\triangle\Omega \tag{7.5.86}$$

在该处的相对静止坐标中，上式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(\mu_0\triangle\Omega_0)=\frac{1}{C^2}\frac{\partial p_0}{\partial t_0}\triangle\Omega_0 \tag{7.5.87}$$

并不是零。

流体力学方程，从式(7.5.6)及(7.5.9)应用式(7.5.15)及(7.5.80)为

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu\dot{x}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\dot{x}_i\dot{x}_j=-\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{7.5.88}$$

及能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu\dot{x}_j=\frac{1}{C^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

以上方程可简写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\mu_0 q_\alpha q_\beta+\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\mu_0 q_\alpha q_\beta+p\delta_{\alpha\beta})=0 \tag{7.5.90}$$

明显的四维形式，其中 q_α 为四维速度矢量，p 为标量。

上述方程有五个未知数 μ_0 或 $\mu,p,\dot{x},\dot{y},\dot{z}$，所以还需要一个物态方程才可能解决。

今研究在微扰的情形下，方程(7.5.90)的解答，以

$$\mu=\rho+\sigma,p=P+\pi,\dot{x}_i=V_i+u_i \tag{7.5.91}$$

ρ,P,V_i 为不变的大数；σ,π,u_i 为可变的小数，其二次方略去不计。式(7.5.88)及(7.5.89)为

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+V_j\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}=\frac{1}{C^2}\frac{\partial\pi}{\partial t} \tag{7.5.92}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+V_i\frac{\partial\sigma}{\partial t}+V_iV_j\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}+\rho V_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\rho V_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial\pi}{\partial x_i} \tag{7.5.93}$$

将式(7.5.92)代入式(7.5.93)内消去 σ 得

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{V_i}{C^2}\frac{\partial \pi}{\partial t}+\rho V_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \pi}{\partial x_i} \tag{7.5.94}$$

上式共三个方程但含有四个变数 π 及 u_i，因之仍须一个方程。通常，压力变化与体积变化*

$$\frac{1}{p_0}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)_0=K_0\frac{1}{\Delta\Omega_0}\frac{\mathrm{d}(\Delta\Omega_0)}{\mathrm{d}t_0}=-K_0\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j}\right) \tag{7.5.95}$$

关系的显然的协变形式为($\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$)

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}=-K_0\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{7.5.96}$$

此方程亦为"静坐标"中方程(7.5.95)的直接变换(留予读者自证)。

以四维速度

$$q_\alpha=\left\{\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},\frac{iC}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right\}$$

代入式(7.5.96)，并忽略小数，方得

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}+V_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j}=-K_0P\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{V_i}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{V_iV_j}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{7.5.97}$$

式(7.5.97)及(7.5.94)为解决 u_i 及 π 的线性方程。以式(7.5.94)代入式(7.5.97)的右方得

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}\left(1-\beta^2-\beta^2\frac{a^2}{C^2}\right)+V_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\left(1-\beta^2-\frac{a^2}{C^2}\right)=-K_0P(1-\beta^2)\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{7.5.98}$$

---

* 如用静质量密度 ρ_0 则方程(7.5.95)可改为

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0}=K'_0\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0} \tag{7.5.95)'}$$

不过这个 K'_0 的数值与式(7.5.95)的 K_0 不同。设以 $h_0=\rho_0C^2$ 则 $K'_0=K_0h_0/(h_0+p)$

以上用

$$a^2 = \frac{K_0 P}{\rho} \tag{7.5.99}$$

将式(7.5.94)对 x_i 微分得

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i^2} + \frac{V_i}{C^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \cdot \partial t} = -\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{7.5.100}$$

由式(7.5.98)及(7.5.100)消去 $\partial u_j/\partial x_j$ 或 π 则得两个同样的方程

$$\left(1 - \beta^2 - \beta^2 \frac{a^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} + 2\left(1 - \beta^2 - \frac{a^2}{C^2}\right)V_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial t} - a^2(1 - \beta^2)\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i^2}$$

$$+ \left(1 - \beta^2 - \frac{a^2}{C^2}\right)V_i V_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{7.5.101}$$

上式可写成

$$\left(1 - \frac{\beta^2 a_0^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{a_0^2}{C^2}\right)V_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_j \partial t}$$

$$- a_0^2(1 - \beta^2)\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i^2} + \left(1 - \frac{a_0^2}{C^2}\right)V_i V_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{7.5.102}$$

如用

$$V_\alpha = \left(\frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}, \frac{iC}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}\right) \tag{7.5.103}$$

代表宏观速度则式(7.5.102)为

$$\Box\pi - \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{C^2}\right)V_\alpha V_\beta \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \tag{7.5.104}$$

的四维标量形式，其中由于式(7.5.85)

$$a_0^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{V^2}{C^2}} = \frac{K_0 P}{\rho\left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)} = \frac{K_0 P_0}{\rho_0} \tag{7.5.105}$$

上式右方数字仓对宏观静止坐标而言，在该坐标中

$$V_\alpha = (0, 0, 0, iC)$$

则式(7.5.104)为

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial x_{i0}^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial t_0^2}=0 \tag{7.5.106}$$

换言之，在宏观速度为零的坐标中，微扰以相速 a_0 进行。在其它坐标中，如以平面波

$$\pi=f(lx+my+nz-ut) \tag{7.5.107}$$

代入式(7.5.104)，则相速 u 满足方程

$$\begin{aligned}&u^2(1-\frac{a_0^2V^2}{C^4})-2u(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{V})(1-\frac{a_0^2}{C^2})\\&+(1-\frac{a_0^2}{C^2})(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{V})^2-(1-\frac{V^2}{C^2})a_0^2=0\end{aligned} \tag{7.5.108}$$

此与式(3.3.17)完全相合。实际上如式(7.5.106)为相应静止坐标中的方程，则在其它坐标中由洛伦兹转换(7.5.28)应用(7.5.106)中的

$$\frac{\partial}{\partial x_{i0}}=\frac{\partial x_a}{\partial x_{i0}}\frac{\partial}{\partial x_a}=\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{V_iV_j}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}-1\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$+\frac{V_i}{C^2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{V_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

代入式(7.5.106)后亦能得波方程(7.5.102)。所以§3.3到§3.6的结果均可以取来应用，微扰动的压力 π 以相速 u 进行。因式(7.5.104)为线型方程，π 的导分也以相速 u 传播。

由式(7.5.98)可见体积膨胀率与 π 的导分成比例

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{K_0P}\cdot\left\{(1-\frac{\beta^2a_0^2}{C^2})\frac{\partial\pi}{\partial t}+(1-\frac{a_0^2}{C^2})V_j\frac{\partial\pi}{\partial x_j}\right\} \tag{7.5.109}$$

因之也以相速 u 进行；从式(7.5.94)及(7.5.92)看出质点加速度及其能量密度的变化率也均以相速进行

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+V_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i}+\frac{V_i}{C^2}\frac{\partial \pi}{\partial t}\right) \tag{7.5.110}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial \sigma}{\partial t}+V_j\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}=\frac{1}{C^2}\frac{\partial \pi}{\partial t}-\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=-\frac{\left(1-\frac{a_0^2}{C^2}\right)}{a_0^2(1-\beta^2)}\left(\frac{\partial \pi}{\partial t}+V_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right)\\&=\frac{1}{a_0^2(1-\beta^2)}\cdot\left\{\left(1+\frac{a_0^2}{C^2}-\frac{2\beta^2a_0^2}{C^2}\right)\frac{\partial \pi}{\partial t}+\left(1-\frac{a_0^2}{C^2}\right)V_j\frac{\partial \pi}{\partial x_j}\right\}\end{aligned} \tag{7.5.111}$$

由式(7.5.110)及(7.5.107)得

$$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{u}{C^2}\boldsymbol{V}\right)\dot{\pi} \tag{7.5.112}$$

$\dot{\pi}$ 为式(7.5.107)的 π 对 $lx+my+nz-ut$ 的微分，所以

$$\boldsymbol{a}'=-\frac{1}{\rho'}\boldsymbol{l}'\dot{\pi}'$$

$\dot{\pi}'$ 为 π 对 $l'x'+m'y'+n'z'-u't'$ 的微分。因 π 为标量，如取简谐波则简谐波的相角

$$\frac{\nu}{u}(lx+my+nz-ut)=\frac{\nu'}{u'}(l'x'+m'y'+n'z'-u't') \tag{7.5.113}$$

亦为标量，所以

$$\dot{\pi}'=\frac{\nu' u}{\mu'\nu}\dot{\pi}$$

用式(7.5.112)′代入式(7.5.112)内，并以式(3.3.8)代入得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\rho'}{\rho}\left\{\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{V}\frac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a}')}{V^2}(\sqrt{1-\beta^2}-1)\right\} \tag{7.5.114}$$

这和方程(3.1.21)中忽略 $\boldsymbol{g}'\cdot\boldsymbol{a}'$ 乘方 $\boldsymbol{a}$ 的变换结果完全相同.

式(7.5.110)和式(7.5.111)两式并不表示 $\boldsymbol{u}$ 及 σ 满足波方程

(7.5.104)可以采取平面波(7.5.107)的解答，事实上

$$\sigma = F(lx + my + nz - ut) + G(x - V_x t, g - V_y t, z - V_z t) \tag{7.5.115}$$

G 为任意函数

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G}{\partial t} + V_j \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0 \tag{7.5.116}$$

F 为与式(7.5.111)相合的函数，也满足式(7.5.111)。所以 σ，u 可以分成两部分，其中一部分随波进行，另一部分随宏观速度进行。u 的随波进行部分为式(7.5.110)的

$$u = \frac{\pi}{\rho(u - l \cdot V)}(l - \frac{u}{C^2}V), \tag{7.5.117}$$

则其方向除在宏观静坐标 $V=0$ 之外并不与波的进行方向相同，一般也不与射线方向相同(§3.5)，所以在流体中声波一般不保持纵波性质。如以式(3.38)代入式(7.5.107)内则亦得与式(3.1.7)中忽略 u' 乘方的速度加法结论：

$$\begin{aligned} u+V = {} & u'\sqrt{1-\beta^2} \\ & + V\frac{(V \cdot u')}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) + V(1-\frac{V \cdot u'}{C^2}) \end{aligned} \tag{7.5.118}$$

值得注意的是流体力学方程(7.5.90)虽然和古典力学不同，但微扰情形下的式(7.5.106)与古典力学的结果却完全相同。其相速 a_0(7.5.105)也和古典力学相同。

§7.6 连续体在非绝热情况下的变化及各种场能张量

(A) 非绝热情况下的运动方程

前面讨论中忽略热的传导，这样使系统限于绝热变化，现在可加以补充，并显示热流的特别性质。

设经过 x 面每秒每单位面积向负 x 方向流入热量 Q_x(热流矢

量)，则经过六个边面流入小体积$\triangle\Omega$之内的热量每秒为

$$\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\triangle\Omega \tag{7.6.1}$$

所以体积素$\triangle\Omega$内能量的增加将是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_i t_{ij})\triangle\Omega+\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\triangle\Omega \tag{7.6.2}$$

或写成式(7.2.1)的形式

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(h\dot{x}_j-\dot{x}_i t_{ij}-Q_j)=0 \tag{7.6.3}$$

Q_j的形式与功的形式$\dot{x}_i t_{ij}$不同：当质量速度为零时，功率为零但$Q_j\neq 0$，假使热流对物质有作用力则可以包括在应力t_{ij}之内，所以g_i的变化方程仍可以采取式(7.5.4)或(7.5.6)的形式，现在总场能张量$T_{\alpha\beta}$是

$$\left.\begin{aligned}&T_{44}=-h,T_{4j}=\frac{i}{C}(h\dot{x}_j-\dot{x}_i t_{ij}-Q_j)\\&T_{j4}=iCg_j,T_{ij}=g_i\dot{x}_j-t_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{7.6.4}$$

上式对称形式亦即角动量守恒定律的要求为

$$g_j=\frac{1}{C^2}(h\dot{x}_j-\dot{x}_i t_{ij}-Q_j) \tag{7.6.5}$$

换言之，此时动量包括从热量流动所产生的动量，图 7.29(a)，由于能量的运动包含质量的运动，这个结论完全合于相对论的理论。

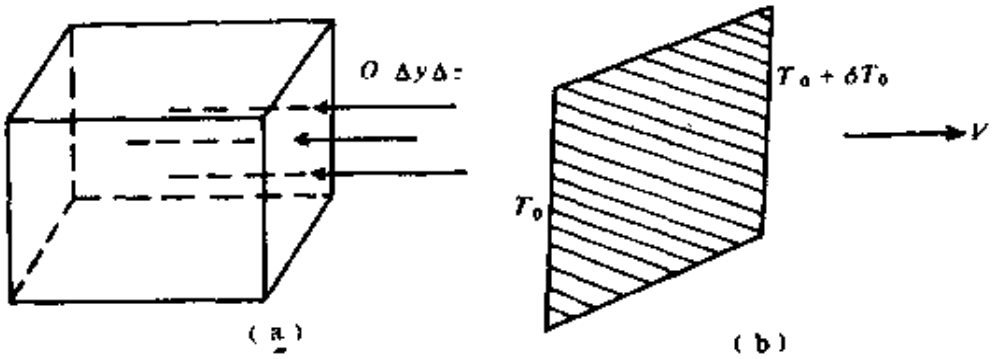


图 7.29

从式(7.6.5)得

$$t_{ji}-t_{ij}=g_j\dot{x}_i-g_i\dot{x}_j=\frac{1}{C^2}\{\dot{x}_j(\dot{x}_kt_{ki})-\dot{x}_i(\dot{x}_kt_{kj})+\dot{x}_jQ_i-\dot{x}_iQ_j\} \tag{7.6.6}$$

表示单位体积内的力矩使能流对空间一固定点的角动量起变化，见图 7.30。

在相对静止坐标中，上述场能张量蜕化为

$$\left.\begin{aligned}&T^0_{44}=-h^0,\qquad T^0_{4j}=-\frac{i}{C}Q^0_j=iCg^0_j\\&T^0_{ij}=-t^0_{ij}=T^0_{ji}\end{aligned}\right\} \tag{7.6.7}$$

所以非绝热的相对静止系统内，应力还是保持对称性质，因之该系统内体积元不受力偶作用。

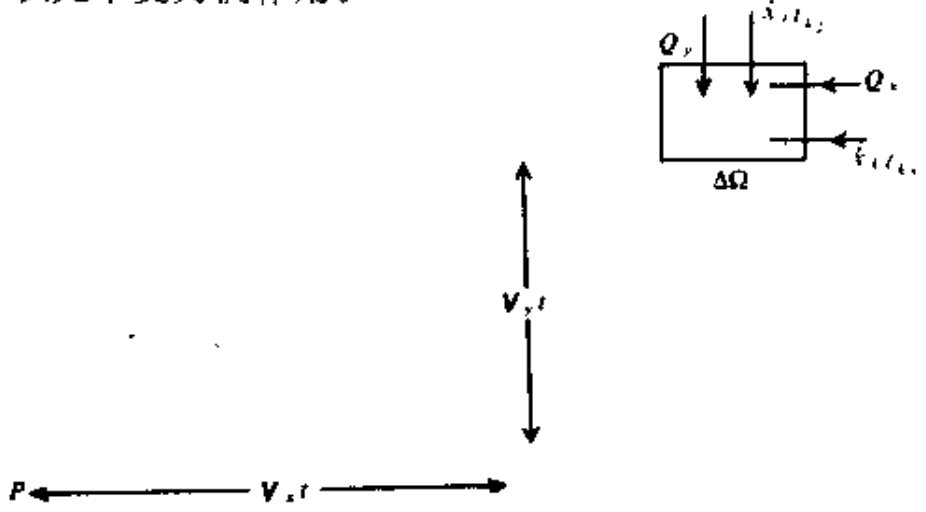


图 7.30

我们可以用洛伦兹变换连系应力和静应力的关系。因

$$T_{ii}=-h=\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\beta}T^0_{\alpha\beta},$$

$$T_{j4}=icg_j=\frac{\partial x_j}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\beta}T^0_{\alpha\beta},$$

在将式(2.5.11)代入后得

$$h = \frac{h^0 - \frac{1}{C^2}V_iV_jt_{ij}^0 - \frac{1}{C^2}2V_jQ_j^0}{(1-\beta^2)} \tag{7.6.8}$$

$$g_j = \frac{h^0V_j}{C^2(1-\beta^2)} - \frac{V_it_{ij}^0 + Q_j^0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{V_j}{C^2V^2\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)(V_kV_it_{ki}^0 + V_kQ_k^0)$$
$$- \frac{V_j}{C^4(1-\beta^2)}(V_kQ_k^0) \tag{7.6.9}$$

再从 T_{ij} 的变换得

$$t_{ij} = t_{ij}^0 + \frac{V_i}{V^2}(V_it_{ij}^0)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1) + \frac{V_j}{V^2}(V_it_{ii}^0)(\sqrt{1-\beta^2} - 1)$$
$$- \frac{V_iV_j}{V^4}V_kV_it_{ki}\sqrt{1-\beta^2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)^2 + \frac{V_iQ_j^0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{V_iV_j}{C^2V^2}$$
$$(V_kQ_k^0)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1) \tag{7.6.10}$$

由上式可见现在应力和热流混在一起了，再从上式得出

$$V_it_{ij} = \frac{V_it_{ij}^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{V_j}{V^2}(V_kV_it_{ki}^0)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)$$
$$+ \beta^2\frac{Q_j^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{V_j}{C^2}$$
$$(V_kQ_k^0)(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1) \tag{7.6.11}$$

$$V_iV_jt_{ij} = V_iV_jt_{ij}^0 + \beta^2V_jQ_j^0 \tag{7.6.12}$$

将以上各式代入式(7.6.4)的 T_4，则得出 Q_j 的变换公式

$$Q_j = \left[Q_j^0 - \frac{V_j}{V^2}(V_kQ_k^0)(1 - \sqrt{1-\beta^2})\right]\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.6.13}$$

以上各种关系可以用标量等方程如

$$q_\alpha q_\beta T_{\alpha\beta} = h^0 C^2, \quad -T_{\alpha\alpha} = h^0 + t_{ii}^0$$

$$= h(1-\beta^2) + t_{ii} + \frac{\dot{x}_i \dot{x}_j t_{ij}}{C^2} + \frac{\dot{x}_i Q_i}{C^2}$$

来交叉验证，利用式(7.6.13)(7.6.11)(7.6.12)将 t_{ij}^0 解出，得

$$\left.\begin{aligned}
&V_k Q_k = V_k Q_k^0 (1-\beta^2),\\
&V_i t_{ij}^0 = V_i t_{ij}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{V_j}{V^2}(V_k V_l t_{kl})(1-\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{V_i}{C^2}\frac{(V_k Q_k)}{(1-\beta^2)}\\
&(1-\sqrt{1-\beta^2}) - \frac{\beta^2 Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\\
&V_i V_j t_{ij}^0 = V_i V_j t_{ij} - \beta^2 \frac{V_k Q_k}{1-\beta^2},\\
&t_{ij}^0 = t_{ij} - \frac{V_i}{V^2}(V_l t_{lj})(1-\sqrt{1-\beta^2}) + \frac{V_j}{V^2}(V_l t_{li})\sqrt{1-\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\\
&+ \frac{V_i V_j}{V^4}(V_k V_l t_{kl})(1-\sqrt{1-\beta^2})^2 - \frac{V_i Q_j}{C^2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{V_j Q_i}{C^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\\
&- \frac{V_i V_j}{V^2}\frac{(V_k Q_k)}{C^2(1-\beta^2)}(1-\sqrt{1-\beta^2})^2
\end{aligned}\right\} \tag{7.6.14}$$

式(7.6.10)→(7.6.12)三个方程又可以写成

$$\left.\begin{aligned}
&t_{ij} = p_{ij} + \frac{V_i Q_j}{C^2(1-\beta^2)}, V_i t_{ij} = V_i p_{ij} + \frac{\beta^2 Q_j}{(1-\beta^2)}\\
&V_i V_j t_{ij} = V_i V_j p_{ij} + \frac{\beta^2 V_k Q_k}{(1-\beta^2)}
\end{aligned}\right\} \tag{7.6.15}$$

p_{ij} 是式(7.5.37)绝热情况下的应力变换力部分，垂直应力的和

$$t_{ii} = t_{ii}^0 + \frac{1}{C^2}(V_i Q_i^0)$$

现在不是标量，但

$$p_{ii} = t_{ii}^0 = p_{ii}^0 \tag{7.6.15}'$$

是标量，为解释上面的各种变换关系可取速度在 x 方向，则上面

公式简化为

$$\left.\begin{aligned}
&t_{xx}=t^0_{xx}+\frac{1}{C^2}VQ^0_x,t_{xy}=\frac{t^0_{xy}+\frac{V}{C^2}Q^0_y}{\sqrt{1-\beta^2}},t_{xz}=\frac{t^0_{xz}+\frac{V}{C^2}Q^0_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\\
&t_{yx}=t^0_{yx}\sqrt{1-\beta^2},t^0_{yy}=t^0_{yy},t_{yz}=t^0_{yz}\\
&t_{zx}=t^0_{zx}\sqrt{1-\beta^2},t_{zy}=t^0_{zy},t_{zz}=t^0_{zz};\\
&h=\frac{h^0-\beta^2t^0_{xx}-\frac{2}{C^2}VQ^0_x}{1-\beta^2},Q_x=Q^0_x(1-\beta^2)\\
&Q_y=Q^0_y\sqrt{1-\beta^2},Q_z=Q^0_z\sqrt{1-\beta^2};\\
&g_x=\frac{hV-t_{xx}V-Q_x}{C^2}=\frac{V(h^0-t^0_{xx})-(1+\beta^2)Q^0_x}{C^2(1-\beta^2)},\\
&g_y=-\frac{Vt_{xy}+Q_y}{C^2}=-\frac{Vt^0_{xy}+Q^0_y}{C^2\sqrt{1-\beta^2}},\\
&g_z=-\frac{Vt_{xz}+Q_z}{C^2}=-\frac{Vt^0_{xz}+Q^0_z}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\}\tag{7.6.16}$$

先看 x 面上力的变换，将 t_{xx},t_{yx},t_{zx} 乘以面积素 $\triangle y\triangle z$ 得

$$F_x=F^0_x+\frac{1}{C^2}VQ^0_x\triangle y\triangle z,F_y=F^0_y\sqrt{1-\beta^2},F_z=F^0_z\sqrt{1-\beta^2}\tag{7.6.17}$$

所以经 x 面的“热”流会变成 s 系统的应力。

将 $Q_x=Q^0_x(1-\beta^2)$ 代入上式并以

$$\frac{\delta Q}{\delta t}\equiv Q_x\triangle y\triangle z$$

代表每秒经 $\delta_y\delta_z$ 面积素向左方输入的热量则式(7.6.17)为

$$F_x=F^0_x+\frac{V}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\delta Q}{\delta t}.\tag{7.6.18}$$

我们在§4.3的研究中曾提到热量输入改变物体的静质量，因之

从式(4.3.16)得出方程。

$$\delta_Q = C^2\sqrt{1-\beta^2}\delta m_0 = Q_x\triangle y\triangle z\delta t$$

以之代入式(7.6.18)得

$$F_x = F_x^0 + \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\delta m_0}{\delta t}$$

的关系，将上式再和式(4.2.1)及(4.2.19)比较，可见现在力的变换除去与式(7.5.39)相同之外，另一部分恰好补偿左方物质因热流增加"静质量"而需要的动量改变部分，同时公式(4.3.16)在这里也得到一个新的验证。

经 x 面上小面积元$\triangle y\triangle z$ 在$\triangle t$ 时间内向左方输送的热量

$$\delta Q=Q_x\triangle y\triangle z\triangle t=Q_x^0(1-\beta^2)\triangle y_0\triangle z_0\frac{\triangle t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=\delta Q^0\sqrt{1-\beta^2}$$

也适合热量变换公式(4.3.18)。

从式(7.6.3)看出这种 Q_j 的变换公式对一切非"功"形式的能量传递均应适用，但这种变换公式和质量的变换公式恰恰相反，这里似乎有点矛盾。例如一永远静止的 m_0 不管采取何种方式向四面散热，则在静坐标看来散热 δQ_0 失去静质量 δm_0，

$$\delta Q_0 = C^2\delta m_0 \qquad (7.6.19)$$

从另一个坐标 s 看来设散热为 δQ 失去质量为 δm 而

$$\delta Q = \sqrt{1-\beta^2}\delta Q_0, \delta_m = \delta\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (7.6.19)'$$

由上面两个关系得出

$$\delta Q = (1-\beta^2)C^2\delta m \neq C^2\delta m$$

这是什么原故？我们回到式(7.6.16)就看出在散热时，s 系感觉各面上均有力(由于此质点永远静止所以静应力 t_{ij}^0为零)

$$\frac{1}{C^2}VQ_x^0\triangle y\triangle z, \frac{1}{C^2}V\frac{Q_y^0\triangle x\triangle z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{C^2}\frac{VQ_z^0\triangle x\triangle y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在 V 方向作用，将上式换成 S 系的 Q_j 则这部分力是

$$\frac{1}{C^2}V\frac{Q_x\triangle y\triangle z}{1-\beta^2},\frac{1}{C^2}V\frac{Q_y\triangle x\triangle z}{1-\beta^2},\frac{1}{C^2}V\frac{Q_z\triangle x\triangle y}{1-\beta^2}\quad(7.6.20)$$

所以由于散热引起整个面上的作用的力是

$$R_x=\frac{1}{C^2}\frac{V}{1-\beta^2}\oiint Q_n\triangle S\qquad(7.6.21)$$

上述积分内是每秒进入此面积内的热量；在散热情形下此力为

$$R_x=-\frac{1}{C^2}\frac{V}{(1-\beta^2)}\cdot\left|\frac{\delta Q}{\delta t}\right|\qquad(7.6.21)'$$

$|\delta Q/\delta t|$ 为每秒散的热量，这个力做的功是

$$VR_x\delta t=-\frac{V^2}{C^2(1-\beta^2)}|\delta Q|=-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}|\delta Q|$$

因之，S 系看物体内能的变化是由于散热和外力对它所做的功之和：

$$\delta u=-(|\delta Q|+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}|\delta Q|)=-\frac{|\delta Q|}{1-\beta^2}$$

$$=\frac{-|\delta Q_0|\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)}=\frac{-|\delta Q_0|}{\sqrt{1-\beta^2}}=-C^2\frac{|\delta m_0|}{\sqrt{1-\beta^2}}=-C^2|\delta m|$$

(7.6.22)

而不单是 $-\delta Q$，这样可见式(7.6.19)′的佯谬问题是由于散热失去质量，从动量守恒定律看来物体要发生加速而(7.6.21)′的力，用式(7.6.19)′代入，

$$R_x=\frac{1}{C^2}\frac{V}{1-\beta^2}\cdot\frac{\delta Q_0}{\delta t}\sqrt{1-\beta^2}=\delta m_0\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

就恰恰抵消由于这种散热而可能引起的速度变化，这也是必须的，否则静坐标看来不受力(假设 $t_{ij}^0=0$)作用的物质会起加速运动("速度变化"的大小在不同坐标看来虽然不同，但一个坐标看起来有加速，则另一个坐标看起来也有加速)与牛顿力学矛盾，所以这种式(7.6.20)的力可以称为"补偿力"。

另外我们可以再假设在某种情况下，边上各处的 t_{ij} 为零。换言之，假设这种"补偿力"恰和 t_{ij}^0 的部分对消，则此时内能的变化就完全等于热量的输入，那么如何解释式(7.6.19)'的矛盾呢？但此时质点可以有加速，

$$\delta u = C^2\delta\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = C^2\frac{\delta m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0\frac{\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{V}}{(1-\beta^2)^{3/2}} \tag{7.6.23}$$

由于 $t_{ij}=0$，故动量守恒

$$\delta\mathbf{G} = \delta\left(\frac{m_0\mathbf{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta m_0 + m_0\frac{\delta\mathbf{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m_0\mathbf{V}}{C^2(1-\beta^2)^{3/2}}\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{V} = 0$$

所以 $\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{G} = \frac{V^2\delta m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m_0}{C^2(1-\beta^2)^{3/2}}\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{V} = 0$

以之代入式(7.6.23)内得

$$\delta u = C^2\frac{\delta m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - V^2\frac{\delta m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = C^2\delta m_0\sqrt{1-\beta^2}$$

由于现在

$$\delta u = \delta Q = C^2\delta m_0\sqrt{1-\beta^2}\text{，所以 }\delta Q = \delta Q_0\sqrt{1-\beta^2}$$

仍和式(7.6.19)'符合，所以这两种不同的能量变换公式并不矛盾。

现在再回到方程(7.6.16)的讨论，从式(4.2.12)，($q'=0$，q 即 V)看出

$$\frac{F_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{F_x' + VF_t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad F_y = F_y'\sqrt{1-\beta^2},$$

$$F_z = F_z'\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \frac{F_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{F_t' + \frac{V}{C^2}F_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在静止坐标中

$$F_t' = \frac{1}{C^2}Q_x^0\triangle y^0\triangle z^0 = \frac{1}{C^2}\frac{\delta Q_0}{\delta t_0}$$

所以
$$F_t = F'_t + \frac{V}{C^2}F_x'$$

$$= \frac{1}{C^2}Q_x^0\triangle y^0\triangle z^0 + \frac{V}{C^2}F_x' = \frac{1}{C^2}(VF_x + Q_x\triangle y\triangle z)$$

上式又可化成

$$F_t = \frac{1}{C^2}\left\{V_xF_x + (1-\beta^2)\frac{\delta m_0}{\delta t_0}\right\} = \frac{1}{C^2}(V_xF_x + \sqrt{1-\beta^2}\frac{\delta m_0}{\delta t})$$

与式(4.2.3)完全相同的结果，所以作用力和热流合并起来成一四维力。

以上的研究并不限于 x 面，一般性的变换可用公式(7.6.13)及(3.4.5)经$\triangle r_1 \wedge \triangle r_2$ 面上输入的热量

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = Q_j(\triangle r_1 \wedge \triangle r_2)_j = Q_j^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0),(1-\beta^2)_j = \frac{\delta Q_0}{\delta t_0}(1-\beta^2)$$

所以
$$\delta Q = Q_j(\triangle r_1 \wedge \triangle r_2)_j\triangle t$$

$$= Q_j^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0)_j\triangle t_0\sqrt{1-\beta^2} = \delta Q_0\sqrt{1-\beta^2} \quad (7.6.24)$$

与式(4.3.18)相同，在$\triangle r_1 \wedge \triangle r_2$ 面积上的力为

$$t_{ij}(\triangle r_1 \wedge \triangle r_2)_j$$

$$= t_{ij}^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0)_j\sqrt{1-\beta^2} + \frac{V_i}{V^2}V_jt_{ij}^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0)_j$$

$$(1-\sqrt{1-\beta^2}) + \frac{V_i}{V^2}Q_j^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0)_j \quad (7.6.25)$$

用式(7.6.13)的关系，以

$$\left.\begin{aligned} &F_i = t_{ij}(\triangle r_1 \wedge \triangle r_2)_j, F_i^0 = t_{ij}^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0)_j \\ &Q_j(\triangle r_1 \wedge \triangle r_2)_j = \frac{\delta Q}{\delta t}, Q_j^0(\triangle r_1^0 \wedge \triangle r_2^0) = \frac{\delta Q^0}{\delta t_0} \end{aligned}\right\} \quad (7.6.26)$$

并用 q_i 代表质点的速度，则上式(7.6.25)为

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\boldsymbol{F}^0+\frac{\frac{\boldsymbol{q}}{C^2}(\frac{\delta Q_0}{\delta t_0})}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}+\frac{\boldsymbol{q}}{q^2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F}^0)(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}-1)$$

(7.6.27)

再由上式及式(7.6.23)得

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F}+\frac{\delta Q}{\delta t}=(\frac{\delta Q_0}{\delta t_0})+(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}^0)$$

与式(6.3.20)比较；(在 S^0 坐标上其速度为零且 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{V}$)得出

$$F_t^0=\frac{1}{C^2}\frac{\delta Q_0}{\delta t_0},F_t=\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F}+\frac{\delta Q}{\delta t}}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}^0+\frac{\delta Q_0}{\delta t_0}}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

(7.6.28)

将 $\delta Q_0=C^2\delta m_0,\delta t_0=\delta t\sqrt{1-\beta^2}$

代入上式，则得

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^0\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}+\frac{\boldsymbol{q}}{q^2}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{F}^0)\left(1-\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}\right)+\frac{\boldsymbol{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\frac{\delta m_0}{\delta t}$$

(7.6.29)

与式(7.5.40)比较($q'=0,\boldsymbol{q}=\boldsymbol{V}$)，可见末项确即式(4.2.19)中由于热流产生静质量的动量改变部分。

假使有两个不同坐标 S 和 S'，物体对它们的速度分别为 q 和 q'，则由于坐标的不平行，式(6.3.20)是平行坐标关系，现在如 S 与 S^0 平行，S' 与 S^0 平行，则 S 与 S' 一般不平行)须再加式(5.7.13)的旋转才能变成式(6.3.20)的形式。不过假使速度全在 x 方向，则很容易证明

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{qx^2}{C^2}}}&=\frac{F_x'+\frac{V}{C^2}\left\{(\frac{\delta Q}{\delta t})'+q_x'F_x'\right\}}{\sqrt{1-\frac{qx^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\\ \frac{\frac{\delta Q}{\delta t}+q_xF_x}{\sqrt{1-\frac{q_x^2}{C^2}}}&=\frac{\left\{(\frac{\delta Q}{\delta t})'+q_x'F_x'\right\}+VF_x'}{\sqrt{1-\frac{q_x'^2}{C^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}\end{aligned}\right\}\quad(7.6.30)$$

的关系，以上为 S' 与 S 的相对速度，q_x，q_x' 为 S 系或 S' 系观察的物体速度（一切运动均在 x 方向）所以式(7.6.4)$T_{\alpha\beta}$内的一部分

$$t_{ij}(\triangle r_1\wedge\triangle r_2)_j=t_{in}\triangle S,\qquad(7.6.31)$$

$$(\dot{x}_kt_{kj}-Q_j)(\triangle r_1\wedge\triangle r_2)_j=(\dot{x}_kt_{kn}-Q_n)\triangle S\quad(7.6.32)$$

在乘以 $1/\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}$ 之后，

$$\left(\frac{t_{in}\triangle S}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}},i\frac{\dot{x}_kt_{kn}\triangle S-\frac{\delta Q_n}{\delta t}}{C\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}\right)\qquad(7.6.33)$$

成一四维矢量，以上$\triangle S$是 s 系“同时”观察的小面积素。

方程(7.6.15)将 t_{ij}分成

$$t_{ij}=p_{ij}+\frac{\dot{x}_iQ_j}{C^2(1-\beta^2)}\qquad(7.6.34)$$

两部，p_{ij}只指和 t_{ij}^0有关部分的应力变换，其第二部分的“补偿力”(7.6.20)，物质运动方程(7.6.3)等式可以写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega)&=\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_ip_{ij})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{1-\beta^2})\right\}\triangle\Omega\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_i\triangle\Omega)&=\left\{\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\dot{x}_iQj}{C^2(1-\beta^2)}\right\}\triangle\Omega\end{aligned}\right\}$$

$$(7.6.35)$$

形式，积分得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega}h\triangle\Omega&=\oiint(\dot{x}_i p_{in}+\frac{Q_n}{1-\beta^2})\triangle S\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega}g_i\triangle\Omega&=\oiint(p_{in}+\dot{x}_i\frac{Q_n}{C^2(1-\beta^2)})\triangle S\end{aligned}\right\}\quad(7.6.36)$$

由于式(4.3.16)等式

$$Q_n\triangle S=\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\delta m_0}{\delta t}C^2\qquad(7.6.37)$$

则式(7.6.36)可写成另外容易了解的

$$\mathrm{d}\iiint_{\Omega}h\triangle\Omega=\mathrm{d}t\oiint\dot{x}_i p_{in}\triangle S+C^2\oiint\frac{\delta m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad(7.6.38)$$

$$\mathrm{d}\iiint_{\Omega}g_i\triangle\Omega=\mathrm{d}t\oiint p_{in}\triangle S+\oiint\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta m_0\qquad(7.6.39)$$

形式，p_{in}是“通常”的应力，δm_0是由于加进热量而增加的静质量。

设一系统某部分物质以同速进行，可将此部分的动量及能量积分起来，以

$$G_i\equiv\iiint_{\Omega}g_i\mathrm{d}\Omega,u\equiv\iiint_{\Omega}h\mathrm{d}\Omega\qquad(7.6.40)$$

则从式(7.6.38)及(7.6.34)得

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}tV_i\cdot\oiint p_{in}\mathrm{d}S+\frac{C^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}m_0=\mathrm{d}t\Big\{V_i\oiint t_{in}\mathrm{d}S+\oiint Q_n\mathrm{d}S\Big\}\qquad(7.6.41)$$

$$\mathrm{d}G_i=\mathrm{d}t\oiint p_{in}\mathrm{d}S+\frac{V_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}m=\mathrm{d}t\oiint t_{in}\mathrm{d}S\qquad(7.6.41)'$$

上面 $\mathrm{d}u$ 可以写成

$$du = V_i dG_i + C^2 dm_0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{7.6.42}$$

与式(4.2.3)完全相同的形式，不过此处 u、G_i 本身一般并不采取四维矢量的

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \frac{m_0 V_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

形式

式(7.6.41)也可以写成热力学第一定律(4.3.16)

$$\delta u = -\delta w + \delta Q \tag{7.6.43}$$

的形式，δQ 是外来热量，δw 是它对外界所做的功：

$$-\delta w = dt V_i \cdot \oiint t_{in} dS = V_i dG_i$$

即使系统各部分的速度不同，式(7.6.36)(7.6.38)的各小部分也可以按照上面的方法来理解，初看式(7.6.36)和(7.6.3)等式

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\iiint h\triangle\Omega &= \oiint \dot{x}_i t_{in} dS + \oiint Q_n dS \\ \frac{d}{dt}\iiint g_i \triangle\Omega &= \oiint t_{in} dS \end{aligned}\right\} \tag{7.6.44}$$

有点矛盾，实则 t_{ij} 中热流的补偿力已拼入

$$\frac{\dot{x}_i Q_n}{C^2(1-\beta^2)}\triangle S, \qquad \frac{Q_n}{1-\beta^2}\triangle S = \left\{Q_n + \dot{x}_i\left(\frac{\dot{x}_i Q_n}{C^2(1-\beta^2)}\right)\right\}\triangle S \tag{7.6.45}$$

之内而只剩应力 p_{ij} 的部分(7.6.36)，g_i 的表示现在是

$$g_i = \frac{1}{C^2}\left(h\dot{x}_i - \dot{x}_k p_{ki} - \frac{Q_i}{1-\beta^2}\right),$$

其末项为热流及它“补偿力”(7.6.20)对物质做功能流部分的共同组合〔可参考(7.6.22)及(7.6.36)的第一式〕。

对热流还可以作进一步的研究以显示它的四维张量性质，我们可以异向同性物体作例，在静坐标中该物质的热流矢量可用导热定律

$$Q_j^0 = K_0\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_j^0}\right)_{t_0=C} \tag{7.6.46}$$

表示，式中加括弧强调在 s^0 系统中两处同时的温度，现在看动坐标中导热定律应当如何修改，因

$$\frac{\partial}{\partial x_{j0}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial x_{j0}}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{V_j}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$+ \frac{V_j}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)V_k\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{7.6.47}$$

将式(7.6.46)代入式(7.6.13)，用上式得

$$Q_j = K_0\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_i} + \frac{V_i}{C^2}\frac{\partial T_0}{\partial t}\right) \tag{7.6.48}$$

这不是式(7.6.46)的形式，但上式右方有简单的物理意义，任何函数 ψ

$$\frac{\psi(x_i+\delta x_i, t+\delta t) - \psi(x_i,t)}{\delta x_i} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\delta t}{\delta x_i} \tag{7.6.49}$$

如取

$$\delta t = \frac{V_i\delta x_i}{C^2},$$

换言之，如取时间为"静系统"的同时，由于

$$\delta t_0 \simeq 0 = \frac{\delta t - \dfrac{V_i\delta x_i}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.6.50}$$

所以

$$\delta t = \frac{V_i\delta x_i}{C^2}$$

则

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)_{t_0=C} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{V_i}{C^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

所以式(7.6.48)表示

$$Q_j = K_0\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_i}\right)_{t_0=C} \tag{7.6.51}$$

换言之，S 系观察热传导的表示和静坐标观测的式(7.6.46)的形式不同，但温度差指的是静坐标的同时数值，图 7.29(b)，式(7.6.13)和(7.6.48)都启示 Q_j 的四维性质，因 K_0, T_0 为标量。

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{-K_0}{C^2}\left(q_\alpha \frac{\partial T_0}{\partial x_\beta} - q_\beta \frac{\partial T_0}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.6.52}$$

显然为二阶反对称张量，在静坐标，上述张量为

$$\frac{K_0}{C^2}\begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & iC\dfrac{\partial T_0}{\partial x_0} \\ 0, & 0, & 0, & iC\dfrac{\partial T_0}{\partial x_0} \\ 0, & 0, & 0, & iC\dfrac{\partial T_0}{\partial x_0} \\ -iC\dfrac{\partial T_0}{\partial x_0}, & -iC\dfrac{\partial T_0}{\partial y_0}, & -iC\dfrac{\partial T_0}{\partial z_0}, & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.6.53}$$

在 s 坐标，上述张量为

$$\frac{K_0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\begin{Vmatrix} 0, -V_x\dfrac{\partial T_0}{\partial y}+V_y\dfrac{\partial T_0}{\partial x^0}, -V_x\dfrac{\partial T_0}{\partial z}+V_z\dfrac{\partial T_0}{\partial x}, iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial x}+\dfrac{V_x}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right) \\ -V_y\dfrac{\partial T_0}{\partial x}+V_x\dfrac{\partial T_0}{\partial y}, 0, -V_y\dfrac{\partial T_0}{\partial z}+V_z\dfrac{\partial T_0}{\partial y}, iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial y}+\dfrac{V_y}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right) \\ -V_z\dfrac{\partial T_0}{\partial x}+V_x\dfrac{\partial T_0}{\partial z}-V_z\dfrac{\partial T_0}{\partial y}+V_y\dfrac{\partial T_0}{\partial z}, 0, iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial z}+\dfrac{V_z}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right) \\ -iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial x}+\dfrac{V_x}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right), -iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial y}+\dfrac{V_y}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right), -iC\left(\dfrac{\partial T_0}{\partial z}+\dfrac{V_z}{C^2}\dfrac{\partial T_0}{\partial t}\right), 0 \end{Vmatrix} \tag{7.6.54}$$

应用式(7.6.48)，上式可以写成与导热定律(7.6.46)无关的

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-\beta^2)}\begin{Vmatrix} 0 & , -\dfrac{V_x}{C}Q_y + \dfrac{V_y}{C}Q_x, & -\dfrac{V_x}{C}Q_z + \dfrac{V_z}{C}Q_x, & iQ_x \\ -\dfrac{V_y}{C}Q_x + \dfrac{V_x}{C^2}Q_y, & 0 & , -\dfrac{V_y}{C^2}Qz + \dfrac{V_z}{C}Q_y, & iQ_y \\ -\dfrac{V_z}{C}Qx + \dfrac{V_x}{C}Qz, & -\dfrac{V_z}{C}Q_y + \dfrac{V_y}{C}Q_z, & 0, & iQz \\ -iQx, & -iQ_y, & -iQz, & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.6.55}$$

形式，从式(6.3.24)，由于静坐标中 $Q_{ij}^0=0$ 可得出式(7.6.13)的变换关系，从式(7.6.13)又可验证

$$Q_{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta}=-(Q_j^0)^2=\frac{-Q_j^2+\frac{1}{C^2}(V\wedge Q)^2}{(1-\beta^2)} \tag{7.6.56}$$

的标量方程，所以我们可以认为热流是二阶反对称张量(7.6.55)的时空部分，其空间部份由图(7.28)看出是单位体积元内热流角动量对固定点的变化率。上面 $Q_{\alpha\beta}$ 可以写成

$$Q_{4j}=-\frac{iQ_j}{(1-\beta^2)},Q_{ij}=-\frac{(V_iQ_j-V_jQ_i)}{C(1-\beta^2)}, \tag{7.6.57}$$

因之，$Q_{\alpha\beta}$ 除 V_i 之外，只有三个独立分量。$Q_{\alpha\beta}$ 的张量性质，将在式(7.6.117)及(7.6.129)内微分时得到进一步的证明，显示 V_i 并不限定是洛伦兹常数。

(B) 应力的张量形式

现在我们将 $T_{\alpha\beta}$ 本身分析成几个张量来研究。先看绝热情况下的应力，式(7.5.37)的应力 t_{ij} 本身虽不具张量性质，但是从变换公式看来，应力也只在自身变换，如应力在一个坐标内是零，则在另外坐标内也是零，所以我们希望某种适当的组合可能使之成为四维张量。为避免混乱，一切绝热情况下的 t_{ij} 用 p_{ij} 代表。将公式(7.5.31)代入式(7.5.11)内得

$$\left.\begin{aligned}T_{44}&=-\frac{h^0+\frac{1}{C^2}\dot{x}_i\dot{x}_jp_{ij}}{1-\beta^2},T_{4i}=\frac{i}{C}\left\{\frac{h_0\dot{x}_i}{1-\beta^2}-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_lp_{kl}}{C(1-\beta^2)}-\dot{x}_kp_{ki}\right\}\\T_{ij}&=\frac{1}{C^2}\left\{\frac{h_0\dot{x}_i\dot{x}_j}{1-\beta^2}-\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_k\dot{x}_lp_{kl})}{C^2(1-\beta^2)}-\dot{x}_kp_{ki}\dot{x}_j\right\}-p_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{7.6.61}$$

上式可写成

$$T_{\alpha\beta}=\frac{h^0}{C^2}q_\alpha q_\beta+p_{\alpha\beta} \tag{7.6.62}$$

形式，q_α 代表质点的四维速度，既然 $T_{\alpha\beta}$ 是张量，h^0 是标量，$h^0 q_\alpha q_\beta$ 当然也是张量，这样定义出来的 $P_{\alpha\beta}$ 应当也是(对称)张量，它的十个分量是

$$\left.\begin{aligned} P_{44}&=\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j p_{ij}}{C^2(1-\beta^2)},\ P_{4j}=-\frac{i}{C}\left\{\frac{\dot{x}_k\dot{x}_l p_{kl}}{C^2(1-\beta^2)}\dot{x}_i+\dot{x}_k p_{kj}\right\}\\ P_{i4}&=P_{4i},\ P_{ij}=-p_{ij}-\frac{\dot{x}_k\dot{x}_l p_{kl}}{C^4(1-\beta^2)}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{C^2}\dot{x}_k p_{ki}\dot{x}_j \end{aligned}\right\} \tag{7.6.63}$$

在静坐标，上述张量为

$$P_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} t^0_{11} & t^0_{12} & t^0_{13} & 0\\ t^0_{21} & t^0_{22} & t^0_{23} & 0\\ t^0_{31} & t^0_{32} & t^0_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{7.6.63}'$$

先用洛伦兹变换将上式变到 S 系，则

$$P_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial x^0_\beta}p^0_{\alpha\beta}=-\frac{\partial x_i}{\partial x^0_k}\frac{\partial x_j}{\partial x^0_l}t^0_{kl}=-t^0_{ij}-\frac{V_iV_kt^0_{kj}}{V^2}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\frac{V_jV_kt^0_{ik}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\frac{V_iV_j}{V^4}(V_kV_lt^0_{kl})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)^2 \tag{7.6.64}$$

再用式(7.5.37)代入得

$$P_{ij}=-P_{ij}-\frac{1}{C^2}V_kp_{ki}V_j-\frac{1}{C^4}\frac{V_kV_lp_{kl}}{1-\beta^2}V_iV_j$$

与式(7.6.62)的第四式完全相同，同样由

$$P_{i4}=\frac{\partial x_i}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\beta}=-\frac{\partial x_i}{\partial x^0_k}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_l}t^0_{kj},\ P_{44}=-\frac{\partial x_4}{\partial x^0_i}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_j}t^0_{ij}$$

等式得

$$\left.\begin{aligned} P_{4i} &= -\frac{i}{C\sqrt{1-\beta^2}}\left\{V_j t^0_{ji} + \frac{V_i}{V^2}(V_k V_l t^0_{lk})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right\} \\ P_{i4} &= -\frac{i}{C\sqrt{1-\beta^2}}\left\{V_j t^0_{ij} + \frac{V_i}{V^2}(V_k V_l t^0_{lk})\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right\} \\ P_{44} &= \frac{V_k V_l t^0_{kl}}{C^2(1-\beta^2)} \end{aligned}\right\} \tag{7.6.65}$$

以公式(7.5.37)等式代入，则和式(7.6.62)其余公式相同，所以我们直接的证实了 $P_{\alpha\beta}$的张量变换性质，后面将要证明 V_i 并不限定是常数。

这一个张量在静坐标内就是通常的三维应力张量(7.6.63)′，在静坐标中此张量满足方程

$$q_\alpha P_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.6.66}$$

但上面方程是协变方程，因之在任何坐标中均应成立；这也可以从式(7.6.62)直接验证。所以 $P_{i4} = \frac{i}{C}\dot{x}_j P_{ji}$

$$P_{44} = -\frac{1}{iC}\frac{i}{C}\dot{x}_j P_{ji}\dot{x}_i = -\frac{1}{C^2}\dot{x}_i\dot{x}_j P_{ij}$$

张量 $P_{\alpha\beta}$可以排成下列方阵形式：

$$P_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \frac{i}{C}P_{1j}\dot{x}_j \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \frac{i}{C}P_{2j}\dot{x}_j \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \frac{i}{C}P_{3j}\dot{x}_j \\ \frac{i}{C}P_{1j}\dot{x}_j, & \frac{i}{C}P_{2j}\dot{x}_j, & \frac{i}{C}P_{3j}\dot{x}_j, & -\frac{1}{C}\dot{x}_i\dot{x}_j P_{ij} \end{Vmatrix} \tag{7.6.67}$$

由于 t^0_{ij}的对称性质，所以 $P_{\alpha\beta}$只有六个独立分量(即在对称 t^0_{ij}的情形下，$P_{\alpha\beta}$也只能有九个独立分量)从 $P_{\alpha\beta}$可以解出 p_{ij}，

$$-p_{ij}=P_{ij}-\frac{1}{C^2}\dot{x}_j\dot{x}_kP_{ki}, \tag{7.6.68}$$

所以也可以从 $P_{\alpha\beta}$ 计算应力 t_{ij}，$P_{\alpha\beta}$ 的标量迹为式(7.5.34)的

$$P_{\alpha\alpha}=-p_{ii}+\frac{1}{C^2}\dot{x}_j\dot{x}_kP_{kj}-\frac{1}{C^2}\dot{x}_i\dot{x}_jP_{ij}=-p_n \tag{7.6.69}$$

运动方程(7.5.10)可以写成下列四维矢量形式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{h_0}{C^2}q_\alpha q_\beta\right)=-\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=f_\alpha \tag{7.6.70}$$

这一个方程的左方和式(7.1.40)的左方为同一形式。

将式(7.6.63)代入上式右方得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_{i\beta}}{\partial x_\beta}&=-\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}-\frac{1}{C^2\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\dot{x}_kp_{ki}+\frac{\dot{x}_k\dot{x}_ep_{ke}\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}\right)\triangle\Omega\right\}\\ \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}&=\frac{1}{iC}\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\dot{x}_k\dot{x}_ep_{ke}}{C^2(1-\beta^2)}\triangle\Omega\right\}+\frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{x}_kp_{ki})\end{aligned}\right\} \tag{7.6.71}$$

我们再来证明，尽管 $\dot{x}_i$ 为变数，上式仍系四维矢量，从式(6.3.14)看来，我们只要证明

$$q_\alpha\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{p_{ki}\frac{\partial\dot{x}_k}{\partial x_i}+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_ep_{ke})}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}+\dot{x}_kp_{ki}\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\right\} \tag{7.6.72}$$

为标量，就可以证明式(7.6.71)为四维矢量。式(7.6.72)在静坐标的数值为

$$\left(q_\alpha\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)_0=t^0_{ki}\frac{\partial\dot{x}^0_k}{\partial x^0_i} \tag{7.6.72}'$$

从速度变换式(3.1.6)，微分后再以 $\dot{x}^0_k=0$，$V=\dot{x}$，得

$$\delta\dot{x}^0_k=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta\dot{x}_k+\frac{\dot{x}_k}{V^2}\frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})}{(1-\beta^2)}\dot{x}_e\delta\dot{x}_e \tag{7.6.73}$$

再将式(7.6.47)代入式(7.6.72)的右手，就可以证明上面两个数

值确属等值，由此可以看出，式(7.6.63)表示中的 x_i 数值可为任何变量而不受式(7.6.64)洛伦兹变换速度为常数的假设限制。事实上，在式(7.6.72)内，式(7.6.64)→(7.6.65)的 V 已完全是个变量，但仍保持它的张量性质不变。所以式(7.5.37)等关系并不限于 V_i 为常数的假设。

设应力为纯压力，则上面公式可以简化使其张量性质更为明显，因

$$t_{ij}^0 = -\,p^0\delta_{ij}$$

则由式(7.6.64)(7.6.65)得

$$p_{ij} = p^0\left(\delta_{ij} + \frac{V_iV_j}{C^2(1-\beta^2)}\right), p_{i4} = \frac{i}{C}\,\frac{p^0V_i}{(1-\beta^2)}$$

$$p_{44} = -\,\frac{p^0\beta^2}{1-\beta^2}$$

所以

$$p_{\alpha\beta} = p^0\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{C^2}q_\alpha q_\beta\right)$$

$$f_\alpha = -\,\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = -\,\frac{\partial p^0}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{C^2}\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}(p^0q_\alpha q_\beta)$$

为明显的矢量形式，式(7.6.70)也可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\,\frac{(h_0+p_0)}{C^2}q_\alpha q_\beta = -\,\frac{\partial p^0}{\partial x_\alpha},$$

与式(7.5.90)相同的形式，在一般情形下，我们可以利用标量(7.6.69)将 $p_{\alpha\beta}$分成两部，以标量 p 代表

$$p \equiv \frac{1}{3}p_{mm} = -\,\frac{1}{3}p_{ij} \qquad (7.6.74)$$

将 $p_{\alpha\beta}$分成“压力”p 及“切应力”(反号)$\sigma_{\alpha\beta}$两部分，

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta} - p\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{C^2}q_\alpha q_\beta\right) \qquad (7.6.75)$$

如 $p_{\alpha\beta}$对称，则 $\sigma_{\alpha\beta}$显然也是对称张量。$\sigma_{\alpha\beta}$的标量迹为

$$\sigma_{\alpha\alpha} = P_{\alpha\alpha} - 3p = 0, \tag{7.6.76}$$

它并满足

$$q_\alpha \sigma_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.6.77}$$

的条件，所以 $\sigma_{\alpha\beta}$满足上列五个方程，只有 10—5=5 个独立分量。

假使再有其它力的作用，例如在微观电磁场中，运动方程(7.6.70)的右方应当再加上电磁力(7.3.44)得出(7.3.50)

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{h^0}{C^2} q_\alpha q_\beta\right) = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - f_\alpha = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \tag{7.6.78}$$

这样，$P_{\alpha\beta}$和电磁场能张量没有什么区别，所以 $P_{\alpha\beta}$可称为“应力场能张量”。其场能密度是

$$-P_{44} = \frac{-\dot{x}_i \dot{x}_j p_{ij}}{C^2(1-\beta^2)} = \frac{\dot{x}_i \dot{x}_j P_{ij}}{C^2} \equiv u \tag{7.6.79}$$

其场动量密度是

$$\frac{1}{iC} P_{4i} = \frac{1}{C^2} P_{ik} \dot{x}_k = \frac{1}{C^2} \mu \dot{x}_i - \frac{1}{C^2} \dot{x}_k p_{ki} \tag{7.6.79}'$$

所以应力场动量包括两部分，第一部分好像能量密度为式(7.6.79)质点的动量，另一部分则是同于式(7.5.19)由能流产生的动量。“应力”

$$p_{ij} = \frac{u}{C^2} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{C^2} \dot{x}_k p_{ki} \dot{x}_j - p_{ij} = \left(\frac{u}{C^2} \dot{x}_i - \frac{1}{C^2} \dot{x}_k p_{ki}\right) \dot{x}_j - p_{ij}$$

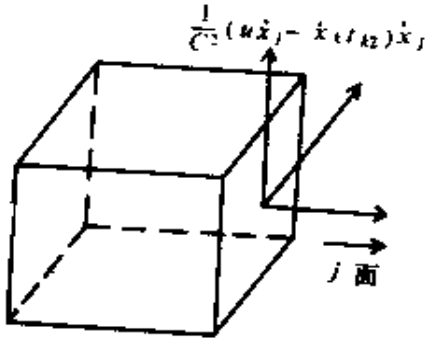


图 7.31

也分为两部前两项是经过 j 面上每单位面积每秒由质点带着流出的 i 方向场动量 g_i，也就是左方物质失去的动量，第三项 $-t_{ij}$ 是右方在 j 面上向左方施的压力. 因之 P_{ij}，包括这两种因素使左方每秒失去的 i 方向的动量，是一种广义的压力，方程(7.6.70)可以换写成另一种形式，使意义更加明了，因

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} h_\alpha q_\alpha q_\beta = q_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}(h_\alpha q_\alpha) + h_\alpha q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta}$$

上式内

$$\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta} = \frac{1}{\triangle \Omega_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(\triangle \Omega_0) \tag{7.6.80}$$

$\triangle \Omega_0$ 为静坐标中所观察的体积，$\mathrm{d}t_0$ 为原时间，其证明如下，因

$$\triangle \Omega_0 = \frac{\triangle \Omega}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta^2 \equiv \dot{x}i^2/C^2$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\triangle \Omega_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \triangle \Omega_0 &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\triangle \Omega} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\triangle \Omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&= \frac{1}{\triangle \Omega}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathrm{d} \triangle \Omega}{\mathrm{d}t} + \triangle \Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\dot{x}_j}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta}
\end{aligned}$$

再由于

$$q_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}, \tag{7.6.80}'$$

$\mathrm{d}t_0 = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$ 为质点的原时，亦即瞬时相对静止坐标所测量的短时间。

所以 $\frac{\partial}{\partial x_\beta}(h_0 q_\alpha q_\beta) = \frac{d}{dt_0} h_0 q_\alpha + \frac{h_0 q_\alpha}{\triangle \Omega_0} \frac{d \triangle \Omega_0}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\triangle \Omega_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(h_0 q_\alpha \triangle \Omega_0)$

(7.6.81)

所以式(7、6.70)可以写成

$$\frac{1}{C^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0 q_\alpha \triangle \Omega_0) = \frac{-\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \triangle \Omega = f_\alpha \triangle \Omega = f_\alpha \triangle \Omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

(7.6.82)

的形式，βC 为质点的速率，上式亦即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{C^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0 \triangle \Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \dot{x}_i\right) = \frac{-\partial p_{i\beta}}{\partial x_\beta} \triangle \Omega = f_i \triangle \Omega \sqrt{1-\beta^2}, \\ &\frac{1}{C^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0 \triangle \Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -\frac{1}{iC} \frac{\partial p_{4\beta}}{\partial x_\beta} \triangle \Omega = \frac{1}{iC} f_4 \triangle \Omega_0 \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}\right\}$$

(7.6.83)

这些方程和牛顿质点力学方程(4.2.1)几乎完全没有什么区别，所以连续体运动方程(7.5.10)相当于静质量密度为 h_0 的质点在应力场内的运动，其质点的动量及质量分别为

$$\frac{1}{C^2} \frac{h_0 \triangle \Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \dot{x}_i, \frac{1}{C^2} \frac{h_0 \triangle \Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.6.84)$$

四维矢量，假使再有电磁场作用，则式(7.6.78)可以改写成

$$\frac{1}{C^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0 \triangle \Omega_0 q_\alpha) = (f_{\alpha\text{应力场}} + f_{\alpha\text{电磁场}}) \triangle \Omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

(7.6.85)

等等方程，由于 f_α 的四维矢量性质，上述方程右方每项总按式(4.2.13)变换。

我们从这里看出，从前能量密度，例如(7.5.29)，实则包括除静能量密度 h_0 之外的其它场能，如应力场能和电磁场能。后者并不照质点密度公式(7.1.37)变换，所以产生 h 的拙劣变换形式。

由此可见，我们可以用 h_0/C^2 代表物质的静质量密度，在孤立闭合系统内守恒的是质点动量能量加上应力场电磁场等等的动量

能量，而不是某一种单独的动量能量，这些当然也就是§7.2节的$T_{\alpha 4}$等值，但质点本身的动量能量(7.6.84)确具四维矢量性质，参考式(7.1.8)及式(7.6.103)。

从式(7.6.82)可以计算静质量$h_0\triangle\Omega_0$的变化率，因

$$q_\alpha f_\alpha \triangle\Omega = q_\alpha\left(q_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0\triangle\Omega_0) + h_0\triangle\Omega_0 \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t}\right)$$

又由于

$$q_\alpha^2 = -C^2 \quad q_\alpha \mathrm{d}q_\alpha = 0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0\triangle\Omega_0) = -q_\alpha f_\alpha \triangle\Omega = q_\alpha \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\triangle\Omega \qquad (7.6.86)$$

为静质量的增加率，又因

$$-q_\alpha f_\alpha \triangle\Omega\triangle t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(C^2 f_t - \frac{1}{C^2}\dot{x}_i f_i\right)\triangle\Omega\triangle t = \frac{\delta Q}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.6.87)$$

如以δQ_0代表静能量的变化，则由上式的标量性质得

$$\delta Q_0 = \frac{\delta Q}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

与以前相同的结论，由于式(7.6.66)，式(7.6.86)又可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0\triangle\Omega_0) = -p_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\triangle\Omega \qquad (7.6.88)$$

较为简便的形式，在其它情形下，式(7.6.66)不成立的情形下，则仍用式(7.6.86)。

在非粘滞性的流体中运动方程(7.6.70)′是

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{h_0}{C^2}q_\alpha q_\beta\right) = -\frac{\partial p_0}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{p_0}{C^2}q_\alpha q_\beta\right), \qquad (7.6.89)$$

所以静质量的变化是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0\triangle\Omega_0}{C^2}\right) = \frac{-p_{\alpha\beta}}{C^2}\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}\triangle\Omega = -\frac{p_0}{C^2}\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta}\triangle\Omega = -\frac{p_0}{C^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega_0$$

所以

$$d(h_0\triangle\Omega_0) = -p_0 d(\triangle\Omega_0) \tag{7.6.90}$$

则由于体积收缩时压力对它做的功。这种功和通常的功不同，它不是增加物体的动能而只是增加物体的静质量或静内能，通常表现在物体温度的增高。

在粘滞形流体中，我们假设一切应力与速度的一次微分成线性关系，这种关系的协变形式也只能从速度一次微分的对称张量形式求出。设以含一次速度微分的。

$$\begin{aligned}\zeta_{\alpha\beta} = \lambda\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+\mu\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{\nu}{C^2}q_\alpha q_\beta\right)\\ +\frac{f}{C^2}\left(q_\alpha\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\gamma}q_\gamma+q_\beta\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\gamma}q_\gamma\right)\end{aligned} \tag{7.6.91}$$

λ,μ,ν,f,g,l 为待定数，则在异向同性粘滞性流体内一切应力张量只能是这个 $\zeta_{\alpha\beta}$ 的函数，线性关系要求切应力张量

$$\sigma_{\alpha\beta} = k\zeta_{\alpha\beta}. \tag{7.6.92}$$

以上 $\sigma_{\alpha\beta}$ 为式(7.6.75)定义的切应力张量。从式(7.6.77)及式(7.6.76)得

$$q_\alpha\zeta_{\alpha\beta} = 0 \quad \zeta_{\alpha\alpha} = 0 \tag{7.6.93}$$

因为

$$q_\alpha\delta q_\alpha = 0$$

式(7.6.93)使

所以

$$\lambda - f = 0 \quad \nu = 1, \quad 2\lambda + 3\mu = 0$$

所以

$$\zeta_{\alpha\beta} = \lambda\left\{\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{C^2}q_\alpha q_\beta\right)+\frac{1}{C^2}q_\gamma\frac{\partial(q_\alpha q_\beta)}{\partial x_\gamma}\right\} \tag{7.6.94}$$

因之，切应力(7.6.92)为

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\eta\Big\{\Big(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}\Big)-\frac{2}{3}\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\Big(\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{C^2}q_\alpha q_\beta\Big) + \frac{1}{C^2}q_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(q_\alpha q_\beta)\Big\} \tag{7.6.95}$$

η 称粘滞系数，在静坐标中上述(7.6.75)

$$\sigma_{ij}{}^0 = -t_{ij}^0+\frac{t_{kk}^0}{3}\delta_{ij}, \tag{7.6.96}$$

式(7.6.95)蜕化为

$$\sigma_{ij}{}^0 = -2\eta\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i}\Big)_0-\frac{1}{3}\Big(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k}\Big)_0\delta_{ij}\Big\} \tag{7.6.96)'}$$

通常公式，但式(7.6.95)是张量方程，所以式(7.6.95)就是式(7.6.96)的四维协变形式。静质量的变化率为式(7.6.88)

$$P_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta} = -p\Big(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}\Big)+\eta\Big\{\Big(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\Big)^2+\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\Big(\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\Big)^2 + \frac{1}{C^2}q_\gamma q_\beta\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\gamma}\Big\} \tag{7.6.97}$$

但上式右方括弧第二项可以写成

$$\frac{\eta}{2}\Big\{\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\Big(\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{C_2}q_\alpha q_\beta\Big)+\frac{1}{C^2}q_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(q_\alpha q_\beta)\Big\}^2 = \frac{\sigma_{\alpha\beta}{}^2}{2\eta} \tag{7.6.97)'}$$

简单的平方形式，因之方程(7.6.88)是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0\triangle\Omega_0) = -p\frac{\mathrm{d}\triangle\Omega_0}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\eta}\sigma_{\alpha\beta}{}^2\triangle\Omega \tag{7.6.98}$$

其中标量 $\sigma_{\alpha\beta}{}^2$ 在静坐标中是

$$\frac{1}{2\eta}\sigma_{ij}{}^{02} = \frac{1}{2\eta}\sigma_{\alpha\beta}{}^2 = 2\eta\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i}\Big)_0-\frac{1}{3}\Big(\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k}\Big)_0\delta_{ij}\Big\}^2 \tag{7.6.98)'}$$

因之，在粘滞性流体中除压力可以增加或减少流体的静质量之外，粘滞性只能使流体静质量增加而不能使之减少！这种不可逆步骤，

通常称为"摩擦生热"。在静坐标中(7.6.97)'右方摩擦生热项为与通常相同的公式，所以我们可以做出结论，式(7.6.95)以及由此产生的运动方程(7.6.83)是粘滞性流体的运动方程。不过方程右方将不可避免的出现 q_α 对 t 的二阶微分*。

我们也可以利用式(7.4.97)或其它的方法定义一个与形变相同的四维形变张量来发展相对性的弹性力学，由于应力本身不是张量，而只有 $P_{\alpha\beta}$ 才是四维张量，所以在通常弹性关系中不能直接应用(不具相对论协变性质)张力 p_{ij}，而只能利用 $P_{\alpha\beta}$ 的张量方程将它翻释过来[再参考(7.4.97)]。

方程(7.6.82)及(7.6.84)也表示"基本粒子"动量能量的四维矢量性质。设此基本粒子内部没有应力 t^0_{ij} 作用，则
因为

$$t^0_{ij} = 0, \quad \text{所以 } P_{\alpha\beta} = 0; \tag{7.6.99}$$

事实上既然是"基本粒子"，则不应有"构造"，所以也不能有"相互"作用的 t^0_{ij} 出显。方程(7.6.85)右方，只剩电磁场作用，可以积分成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \iiint f_{i(\text{电磁场力})}\mathrm{d}\Omega \tag{7.6.100}$$

的形式，以上

$$m_0 \equiv \frac{1}{C^2}\iiint h_0 \triangle\Omega \tag{7.6.101}$$

可定义为质点的静质量，只要式(7.6.100)右方可以积分则成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x}_i = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{C}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}\right) \tag{7.6.102}$$

形式，其中 m 定义为

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.6.103}$$

---

* 由于相对论中 t 与 x_i 的对称性，有对 x_i 的二次微分就必定有对 t 的二次微分

式(7.6.102)的左方

$$(m\dot{x},m\dot{y},m\dot{z},iCm) \tag{7.6.104}$$

当然是四维矢量，见(7.1.8)；其右方的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 为式(7.6.100)右方电磁场的某种平均值。

(C) 热流场能张量

在非绝热的情形下，式(7.6.4)的 $T_{\alpha\beta}$ 用式(7.6.8)及式(7.6.10)的 h_0,t_{ij}^0 代入得

$$\begin{aligned}T_{ij}=&\frac{h_0}{C^2}\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{1-\beta^2}-t_{ij}^0-\frac{\dot{x}_i\dot{x}_kt_{kj}^0}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\\&-\frac{\dot{x}_j\dot{x}_kt_{ik}^0}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{V^4}(\dot{x}_k\dot{x}_lt_{kl}^0)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)^2\\&-\frac{\dot{x}_iQ_j+\dot{x}_jQ_i}{C^2(1-\beta^2)}-\frac{2\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_kQ_k)}{C^4(1-\beta^2)^2},\end{aligned} \tag{7.6.105}$$

$$\begin{aligned}T_{i4}=&\frac{iCh_0\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}-\frac{i}{C}\left\{\frac{\dot{x}_kt_{ki}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_lt_{kl}^0)}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\\&-\frac{i}{C}\left\{\frac{Q_i}{1-\beta^2}+\frac{2\dot{x}_i(\dot{x}_kQ_k)}{C^2(1-\beta^2)^2}\right\},\end{aligned} \tag{7.6.106}$$

$$T_{44}=-\frac{h_0}{(1-\beta^2)}+\frac{\dot{x}_i\dot{x}_jt_{ij}^0}{C^2(1-\beta^2)}+\frac{2\dot{x}_kQ_k}{C^2(1-\beta^2)^2} \tag{7.6.107}$$

利用式(7.6.64)(7.6.65)由(7.6.63)′变换过来的张量，则上式可以写成

$$T_{\alpha\beta}=\frac{h_0}{C^2}q_\alpha q_\beta+P_{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta} \tag{7.6.108}$$

形式，其中 $P_{\alpha\beta}$ 即上面式(7.6.64)(7.6.65)的应力场能张量，亦即在式(7.6.63)中用式(7.6.15)的 p_{ij} 代替 t_{ij} 的张量。$R_{\alpha\beta}$ 为

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{1}{C^2(1-\beta^2)}\left\{\dot{x}_i Q_j + \dot{x}_j Q_i + \frac{2\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_k Q_k)}{C^2(1-\beta^2)}\right\} \\ R_{i4} = R_{4i} &= -\frac{i}{C^2(1-\beta^2)}\left\{Q_i + \frac{2\dot{x}_i(\dot{x}_k Q_k}{C^2(1-\beta^2)}\right\} \\ R_{44} &= \frac{2(\dot{x}_k Q_k)}{C^2(1-\beta^2)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7.6.109}$$

由于式(7.6.108)的 $T_{\alpha\beta}, h_0\, q_\alpha\, q_\beta, p_{\alpha\beta}$ 均系张量，$P_{\alpha\beta}$ 显然亦为张量；热流场能张量，其张量性质可以直接验证如下：

在静坐标中

$$R^0_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & -\frac{i}{C}Q^0_1 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{i}{C}Q^0_2 \\ 0, & 0, & 0, & -\frac{i}{C}Q^0_3 \\ -\frac{i}{C}Q^0_1, & -\frac{i}{C}Q^0_2, & -\frac{i}{C}Q^0_3, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7.6.110}$$

在其他坐标中

$$R_{44} = \frac{\partial x_4}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\beta}R^0_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_4}{\partial x^0_i}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_4}R^0_{i4} + \frac{\partial x_4}{\partial x^0_4}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_i}R^0_{4i}$$

$$= \frac{2i}{C}\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(-\frac{i}{C}\right)Q^0_i = \frac{2\dot{x}_i Q^0_i}{C^2(1-\beta^2)} \tag{7.6.111}$$

$$R_{i4} = \frac{\partial x_i}{\partial x^0_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_\beta}R^0_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial x^0_j}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_4}R^0_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial x^0_4}\frac{\partial x_4}{\partial x^0_j}R^0_{4j}$$

$$= -\frac{i}{C}\left\{\frac{Q^0_i}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\dot{x}_i}{V^2}\frac{(\dot{x}_k Q^0_k)}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\sqrt{1-\beta^2}) + \frac{2(\dot{x}_k Q^0_k)}{C^2(1-\beta^2)}\right\} \tag{7.6.112}$$

$$R_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha^0}\frac{\partial x_j}{\partial x_\beta^0}R_{\alpha\beta}^0=\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0}\frac{\partial x_j}{\partial x_4^0}R_{k4}^0+\frac{\partial x_i}{\partial x_4^0}\frac{\partial x_j}{\partial x_k^0}R_{4k}^0$$

$$=-\frac{\dot{x}_iQ_j^0+\dot{x}_jQ_i^0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{2\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_kQ_k^0)}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

(7.6.113)

与式(7.6.109)的 R_{44}，R_{i4}比较得

$$\left.\begin{aligned}&(\dot{x}_iQ_i)=\frac{(\dot{x}_iQ_i^0)}{(1-\beta^2)},\\&\frac{Q_i}{\sqrt{1-\beta^2}}=Q_i^0-\frac{\dot{x}_i}{V^2}(\dot{x}_kQ_k^0)(1-\sqrt{1-\beta^2})\end{aligned}\right\}$$

(7.6.114)

上两式自己一致且符合式(7.6.13)的变换公式，式(7.6.113)也和式(7.6.109)的 R_{ij}相同，所以式(7.6.109)的 $R_{\alpha\beta}$可以直接用洛伦兹变换从式(7.6.110)得出，因之，确系张量。系统的总动量和总能量为式(7.6.108)中三部分的总和。因

$$R_{\alpha\alpha}=0\qquad q_\alpha q_\beta R_{\alpha\beta}=0\tag{7.6.115}$$

在静坐标中成立，所以在一切坐标中也必成立。

由 $$q_\alpha R_{\alpha\beta}=\frac{1}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\left\{Q_j+\frac{\dot{x}_j(\dot{x}_kQ_k)}{C^2(1-\beta^2)},\frac{iC(\dot{x}_kQ_k)}{C^2(1-\beta^2)}\right\}$$

(7.6.116)

我们可以验证式(7.6.55)的 $Q_{\alpha\beta}$是

$$Q_{\alpha\beta}=q_\tau R_{\tau\alpha}q_\beta-q_\tau R_{\tau\beta}q_\alpha\tag{7.6.117}$$

同样

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{C^2}(q_\alpha Q_{\beta\tau}+q_\beta Q_{\alpha\tau})q_\tau\tag{7.6.118}$$

现在再证明 $R_{\alpha\beta}$的张量性质不受微分的影响。换言之在式(7.6.111)→(7.6.113)的变换中 V 并不限于常数，微分(7.6.109)得

$$\frac{\partial R_{i\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{C^2\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left\{\frac{Q_i}{1-\beta^2}+\frac{2\dot{x}_i(\dot{x}_jQ_j)}{C^2(1-\beta^2)^2}\right\}\triangle\Omega\right] - \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\dot{x}_iQ_j}{(1-\beta^2)}\right\} \tag{7.6.119}$$

$$\frac{\partial R_{4\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{iC}\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{2(\dot{x}_kQ_k)\triangle\Omega}{C^2(1-\beta^2)^2}\right\}+\frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{Q_j}{1-\beta^2}\right) \tag{7.6.120}$$

只要证明

$$q_\alpha\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial R_{i\beta}}{\partial x_\beta}+\frac{iC}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial R_{4\beta}}{\partial x_\beta} \tag{7.6.121}$$

不管 $\dot{x}_i$ 是否变数总是标量，则式(7.6.119)(7.6.120)的四维矢量性质部分已证明[参考方程(6.3.14)]，将式(7.6.119)(7.6.120)代入上式得

$$q_\alpha\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \sqrt{1-\beta^2}\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\dot{x}_kQ_k}{(1-\beta^2)^2}\triangle\Omega\right\}+\frac{Q_i}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{7.6.122}$$

以上 $\dot{x}_k,\beta$ 为质点的可变速度，在静坐标中上式蜕化为

$$\left(q_\alpha\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)_0 = \frac{2}{C^2}Q_k^0\ddot{x}_k^0+\frac{\partial Q_j^0}{\partial x_j^0} \tag{7.6.123}$$

现在证明式(7.6.123)与(7.6.122)的数值相等，式(7.6.123)的第一项从式(7.6.114)及式(3.1.21)中以 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{q}=\dot{\boldsymbol{x}}$ 代入，为

$$2Q_k^0\ddot{x}_k^0 = \frac{2Q_k\ddot{x}_k}{(1-\beta^2)^{3/2}}+\frac{2\dot{x}_kQ_k}{C^2(1-\beta^2)^{5/2}}\dot{x}_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{2Q_k}{(1-\beta^2)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{7.6.124}$$

式(7.6.123)第二项的计算则比较困难，因为两个邻近点有速度差，不能用公式(7.6.114)直接代入式(7.6.47)．式(7.6.114)代表

S 与 S''。

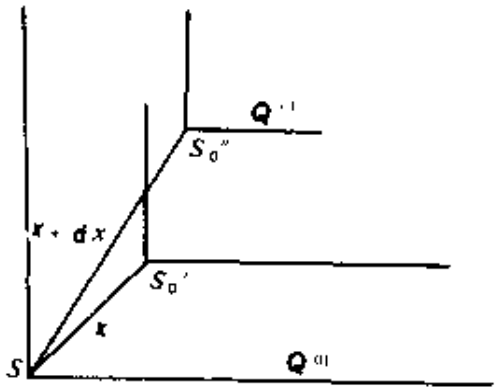


图 7.32

平行坐标 $\boldsymbol{Q}$ 的关系，或者代表 S 与 S''。平行坐标 $\boldsymbol{Q}$ 的关系；但 S' 与 S''不能平行，所以式(7.6.123)第二项上面的 $\boldsymbol{Q}^0$ 在 S' 或 S''系必须先使之平行才能相减，从式(5.7.15)或(5.4.39)看出，必须将 S' 坐标旋转小角度 S' 才能和 S''平行，当坐标旋转小角 $\boldsymbol{\Omega}$ 时，

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{\boldsymbol{V}\wedge \mathrm{d}\boldsymbol{V}}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right), \tag{7.6.125}$$

三维矢量 $\boldsymbol{Q}^0$ 的分量亦起变化 $\boldsymbol{Q}^0\wedge\boldsymbol{\Omega}$，因之式(7.6.123)第二项的 $\partial\boldsymbol{Q}_j^0$ 应当是

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{Q}_j^0&=\boldsymbol{Q}^{0\prime\prime}-(\boldsymbol{Q}^{0\prime}+\boldsymbol{Q}^{0\prime}\wedge\boldsymbol{\Omega})=\delta\boldsymbol{Q}^{0\prime}-\boldsymbol{Q}^{0\prime}\wedge\boldsymbol{\Omega}\\&=\delta\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\\&+\delta\dot{\boldsymbol{x}}\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{Q})}{C^2(1-\beta^2)^{3/2}}+\dot{\boldsymbol{x}}\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\delta\boldsymbol{Q})}{V^2(1-\beta^2)}(1-\sqrt{1-\beta^2})\\&+2\dot{\boldsymbol{x}}\frac{(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{Q})}{C^2V^2(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}(1-\sqrt{1-\beta^2})(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{x}})\end{aligned} \tag{7.6.126}$$

用式(7.6.47)代入上式得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\boldsymbol{Q}_j}{\partial x_j}\right)_0&=\frac{1}{\triangle\Omega\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}_iQ_i}{(1-\beta^2)}\triangle\Omega\right)\\&-\frac{Q_i\dot{x}_i}{(1-\beta)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial xj}\left(\frac{Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\end{aligned} \tag{7.6.127}$$

以之与式(7.6.124)合并得

$$\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\right)_0 + \frac{2}{C^2}Q_k^0\ddot{x}_k^0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}_iQ_i\triangle\Omega}{C^2(1-\beta^2)^2}\right)$$

$$+\frac{Q_j\ddot{x}_j}{C^2(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \qquad (7.6.128)$$

此式和式(7.6.122)完全相同。从这个证明可以看出式(7.6.109)$R_{\alpha\beta}$的张量性质并不限于式(7.6.111)→(7.6.113)的"恒速"变换；式(7.6.114)的关系也不限于恒速$\boldsymbol{V}$。张量(7.6.109)是一般性的，$\dot{x}$为质点的速度*。

从这个证明又可以看出，当我们找出一个张量(7.6.110)将它用洛伦兹变换成为式(7.6.109)时，该时$\dot{x}$，质点速度，可为任何变数而不受加速的影响好像洛伦兹变换本身(7.6.111)→(7.6.113)并不限于恒速运动似的一样。

从式(7.6.57)也得出标量

$$q_\alpha\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{\triangle\Omega\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}_iQ_i}{1-\beta^2}\triangle\Omega\right)$$

$$-\frac{Q_j\ddot{x}_j}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.6.129)$$

在静坐标中，其值为

$$\left(q_\alpha\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)_0 = \frac{\partial Q_j^0}{\partial x_j^0}$$

由式(7.6.127)看出上面两式确系相等，因之式(7.6.55)$Q_{\alpha\beta}$的张

---

* 设张量

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta}T_{\xi\eta}$$

则经微分后为

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma'} = \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta}\frac{\partial x_\xi}{\partial x_\gamma'}\frac{\partial T_{\xi\eta}}{\partial x_\xi} + T_{\xi\eta}\left(\frac{\partial^2 x_\alpha'}{\partial x_\sigma\partial x_\xi}\frac{\partial x_\beta'}{\partial x_\eta} + \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x_\xi}\frac{\partial^2 x_\beta'}{\partial x_\sigma\partial x_\eta}\right)\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\gamma'}$$

一般并不是张量

量性质也不限于常速 V。

(D) 宏观电磁场对连续体的作用

以 h, g_i, t_{ij} 代表机械能量，动量密度及互相作用的机械应力，则在宏观电磁场作用之下其运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_i\triangle\Omega) &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial s_{i\beta}}{\partial x_\beta}\\ \frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\triangle\Omega) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\dot{x}_k t_{kj}+\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}+iC\frac{\partial S_{4\beta}}{\partial x_\beta}\end{aligned}\right\}\quad(7.6.131)$$

以上 $S_{\alpha\beta}$ 为 Minkonski 电磁场能张量，这样运动方程可写成闭合系统的

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \qquad (7.6.132)$$

形式，由式(7.6.4)及式(7.4.37)得

$$\left.\begin{aligned}T_{ij} &= -E_iD_j-H_iB_j+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\delta_{ij}+g_i\dot{x}_j-t_{ij}\\ T_{4j} &= \frac{i}{C}(h\dot{x}_j-\dot{x}_kt_{kj}-Q_j)+i(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})_j\\ T_{j4} &= iCg_j+i(\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})_j\\ T_{44} &= -h-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}\right\}\quad(7.6.133)$$

角动量守恒律要求 $T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}$，因之*

$$g_i=\frac{1}{C^2}(h\dot{x}_i-\dot{x}_kt_{ki}-Q_i)\frac{1}{C}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M})_i-\frac{1}{C}(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})_i \qquad (7.6.134)$$

$$t_{ij}-t_{ji}=\dot{x}_i\dot{x}_kt_{kj}-\dot{x}_j\dot{x}_kt_{ki}+\dot{x}_iQ_j$$
$$-\dot{x}_jQ_i+\dot{x}_i(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})_j$$

---

* 机械动量与电磁场动量密度之和为 $g_i+\frac{1}{C}(\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{B})_i=\frac{1}{C^2}(h\dot{x}_i-\dot{x}_kt_{ki}-Q_i)+\frac{1}{C}(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H})_i$

$$-\dot{x}_j(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})i+(P_iE_j-P_jE_i)+(M_iB_j-M_jB_i)$$

(7.6.135)

即在静坐标中，

$$t^0_{ij}-t^0_{ji}=(P^0_iE^0_j-P^0_jE^0_i)+(M^0_iB^0_j-M^0_jB^0_i)$$

(7.6.136)

应力亦不保持对称，今以 $t^0_{xy}-t^0_{yx}$ 为例

图 7.33(a)表示

$$(t_{yx}-t_{xy})\triangle x\triangle y\triangle z \qquad (7.6.137)$$

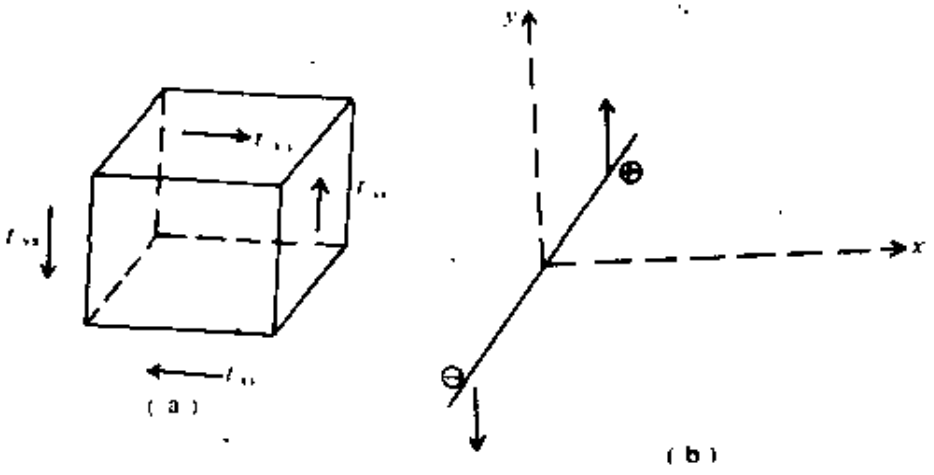


图 7.33

为应力对体积素 $\triangle x\triangle y\triangle z$ 所施，在 z 方向的力偶。电磁矩在电磁场中所受的力偶，从图 7.33(b)看来是 $\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B}$，，其 z 方向的分量为

$$(M_xB_y-M_yB_x)+(P_xE_y-P_yE_x)$$

与式(7.5.136)比较，可见机械应力偶 $(t_{ij}-t_{ji})$ 恰好与电磁力偶相反，使整个 $T_{\alpha\beta}$ 保持对称形式，因之保持角动量守恒定律。由此也可以看出，仅仅 Minkonski 电磁力本身 $(t_{ij}=0)$ 不能成为闭合系统，所以应力 $t_{ij}{}^0$ 内有一部分是由电磁场诱导发生的。

因宏观电磁场本身(7.4.36)或(7.4.38)已被证明为张量，可

将 $T_{\alpha\beta}$ 拆成两部分，经洛伦兹变换连续静坐标与动坐标的 g_i 与 t_{ij} 等量得出

$$h=\frac{h^0-\frac{1}{C^2}\dot{x}_i\dot{x}_jt^0_{ij}-\frac{2}{C^2}(\dot{x}_kQ^0_k)-\frac{1}{C}(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)-\frac{1}{C}(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)}{(1-\beta^2)} \tag{7.6.138}$$

以上

$$\left.\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)&=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot(\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0)=\boldsymbol{M}^0\cdot(\dot{\boldsymbol{x}}\wedge\boldsymbol{E}^0)\\(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)&=\dot{\boldsymbol{x}}\cdot(\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)=-\boldsymbol{P}^0\cdot(\dot{\boldsymbol{x}}\wedge\boldsymbol{B}^0)\end{aligned}\right\} \tag{7.6.139}$$

再由 T_{i4} 的变换得

$$\begin{aligned}g_i=&-\frac{\dot{x}_jt^0_{ij}}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_j\dot{x}_kt^0_{jk})}{C^2V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\frac{Q^0_i}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\\&-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_kQ^0_k)}{C^2V^2}\left\{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}+\frac{h^0\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}-\frac{\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\\&-\frac{\dot{x}_i}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\{(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)+(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)\}\end{aligned} \tag{7.6.140}$$

由 T_{4i} 的变换得

$$\begin{aligned}h\dot{x}_i-\dot{x}_kt_{ki}-Q_i=&\frac{h^0\dot{x}_i}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{Q^0_i+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_kQ^0_k)}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right\}\\&-\frac{\dot{x}_kt^0_{ki}}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_lt_{kl})}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)-\frac{\dot{x}_i}{(1-\beta^2)}\\&\{\dot{x}_kQ^0_k+(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)+(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)\}\end{aligned} \tag{7.6.141}$$

再由 T_{ij} 的变换并应用式(7.6.140)得

$$-t_{,i}=-t^0_{,i}+\frac{\dot{x}_j(\dot{x}_l t^0_{il})}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_l t^0_{jl})}{V_2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$+\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{V^4}\sqrt{1-\beta^2}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big)^2(\dot{x}_k\dot{x}_l t^0_{kl})+\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_l Q^0_l)}{C^2V^2}$$

$$\cdot(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)-\frac{\dot{x}_i Q^0_j}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.6.142)$$

与式(7.6.10)完全相同，再用式(7.6.138)及(7.6.141)得

$$Q_i=\Big\{Q^0_i-\frac{\dot{x}_i}{V^2}(\dot{x}_k Q^0_k)(1-\sqrt{1-\beta^2})\Big\}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (7.6.143)$$

与式(7.6.13)也完全相同。

应用式(7.4.14)(7.3.6)得出

$$\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{E}^0+\boldsymbol{M}^0\wedge\boldsymbol{B}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$\cdot\{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{E}^0)+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{B}^0)\}-\frac{1}{C\sqrt{1-\beta^2}}\boldsymbol{V}\wedge(\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0) \qquad (7.6.144)$$

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0_0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{1}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\boldsymbol{V}\wedge(\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{E}^0$$

$$+\boldsymbol{M}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)\{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{E}^0)+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}^0\boldsymbol{P}^0)\} \qquad (7.6.145)$$

由上式得

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{E}^0)+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{B}^0)\\(\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)+(\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)\end{aligned}\right\} \qquad (7.6.146)$$

再由 $\boldsymbol{V}\wedge(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})$等式解出得

$$\sqrt{1-\beta^2}(\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)=\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B}-$$

$$\frac{\boldsymbol{V}}{C}\wedge(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}$$

$$\cdot(1-\sqrt{1-\beta^2})\{(\boldsymbol{VEM})+(\boldsymbol{VPB})\},\quad(7.6.147)$$

$$\sqrt{1-\beta^2}(\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{E}^0+\boldsymbol{M}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)=(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})$$

$$+\frac{\boldsymbol{V}}{C}\wedge(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})-\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\{(\boldsymbol{VPE})+(\boldsymbol{VMB})\}$$

(7.6.148)

用(7.6.138)、(7.6.140)、(7.6.142)等式代入式(7.6.132)得

$$T_{ij}=S_{ij}+\frac{h_0^0\dot{x}_i\dot{x}_j}{C^2(1-\beta^2)}-t_{ij}^0-\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_lt_{lj}^0)}{V^2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$-\frac{\dot{x}_jt_{il}^0\dot{x}_l}{V^2}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)-\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_k\dot{x}_lt_{kl}^0)}{V^4}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)^2$$

$$-\frac{\dot{x}_iQ_j^0+\dot{x}_jQ_i^0}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{2\dot{x}_i\dot{x}_j(\dot{x}_kQ_k^0)}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$-\frac{(\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)_i\dot{x}_j}{C\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{\dot{x}_i\dot{x}_j}{CV^2\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)$$

$$\cdot\{(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{E}^0\boldsymbol{M}^0)+(\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}^0\boldsymbol{B}^0)\}\qquad(7.6.149)$$

$$T_{i4}=S_{i4}+\frac{iCh^0\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}-\frac{i}{C}\Big\{\frac{\dot{x}_lt_{il}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_lt_{kl}^0)}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1)+\frac{Q_i^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_kQ_k^0)}{V^2}(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})+C\frac{\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{V}}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\left.\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)[(\dot{x}E^0M^0)+(\dot{x}P^0B^0)]\right\} \tag{7.6.150}$$

$$T_{4i}=S_{4i}+\frac{iCh^0\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}-\frac{i}{C}\left\{\frac{\dot{x}_jt^0_{ij}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_k\dot{x}_jt^0_{kj})}{V^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{Q^0_i}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\dot{x}_i(\dot{x}_kQ^0_k)}{V^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)+\frac{\dot{V}}{C(1-\beta^2)}\right.$$

$$\left.[(\dot{x}E^0M^0)+(\dot{x}P^0B^0)]\right\} \tag{7.6.151}$$

$$T_{44}=S_{44}-\frac{h^0}{1-\beta^2}+\frac{\dot{x}_k\dot{x}_jt^0_{kj}+2\dot{x}_kQ^0_k}{C^2(1-\beta^2)}+\frac{(\dot{x}E^0M^0)+(\dot{x}P^0B^0)}{C(1-\beta^2)} \tag{7.6.152}$$

与式(7.6.105)→(7.6.107)比较，并用式(7.6.143)代入可见前面不明显含 E^0、M^0 诸项亦与之相同，由于 $T_{\alpha\beta}$ 为张量，所以后面明显含 E^0、M^0 诸项亦必为张量，以之为 $N_{\alpha\beta}$，则应用式(7.6.147)(7.6.146)得

$$\left.\begin{aligned}
&N_{44}=\frac{1}{C(1-\beta^2)}\{(\dot{x}EM)+(\dot{x}PB)\},\\
&N_{4i}=-\frac{i}{C^2}\frac{\dot{x}_i}{1-\beta^2}\{(\dot{x}EM)+(\dot{x}PB)\}\\
&N_{ki}=-i\frac{E\wedge M+P\wedge B}{1-\beta^2}+i\frac{V}{C}\wedge(P\wedge E+M\wedge B)\\
&N_{ij}=\frac{1}{1-\beta^2}\left[-(E\wedge M+P\wedge B)+\frac{V}{C}\wedge(P\wedge E+M\wedge B)\right]\dot{x}_j
\end{aligned}\right\} \tag{7.6.153}$$

在静坐标

$$N^0_{ij}=0,N^0_{4i}=0,N^0_{44}=0,N^0_{ki}=-i(E^0\wedge M^0+P^0\wedge B^0) \tag{7.6.153)'}$$

用洛伦兹变换可以验证 $N_{\alpha\beta}$ 的各项确系(7.6.153)'的变换公式。用式(7.6.153)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_{i\beta}}{\partial x_\beta}&=-\frac{1}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B}}{1-\beta^2}-\frac{\dot{x}}{C^2}\wedge\frac{(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})}{1-\beta^2}\right]\triangle\Omega\\ \frac{\partial N_{4\beta}}{\partial x_\beta}&=-\frac{i}{\triangle\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(\dot{x}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M})+(\dot{x}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})}{1-\beta^2}\right]\triangle\Omega\end{aligned}\right\}$$

(7.6.154)

上式的四维矢量性质可以从

$$q_\alpha\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\left[\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})}{(1-\beta^2)^{3/2}}-\frac{\dot{x}\wedge(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$$

(7.6.155)

的标量性质验证，应用式(3.1.21)及式(7.6.147)证出

$$(\boldsymbol{E}^0\wedge\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{P}^0\wedge\boldsymbol{B}^0)\cdot\dot{x}^0$$

$$=\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B})-\frac{\dot{x}}{C}\wedge(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})}{(1-\beta^2)^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$$

(7.6.156)

因之 $N_{\alpha\beta}$确系张量，其中 $\boldsymbol{V}$ 或 $\dot{x}$ 确系质点的可变速度。

方程(7.6.132)用(7.6.149)→(7.6.153)再以式(7.6.116)代入，用式(7.6.108)得

$$T_{\alpha\beta}=\frac{h^0}{C^2}q_\alpha q_\beta+P_{\alpha\beta}+R_{\alpha\beta}+N_{\alpha\beta}+S_{\alpha\beta}\quad(7.6.157)$$

用式(7.6.81)及(7.6.154)代入式(7.6.132)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{h}_0\triangle\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\dot{x}_i\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{M}+\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{B}}{1-\beta^2}-\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{C}}\wedge\frac{(\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}\wedge\boldsymbol{B})}{(1-\beta^2)}\right]\triangle\Omega=-\left(\frac{\partial P_{i\beta}}{\partial\mathrm{x}_\beta}+\frac{\partial R_{i\beta}}{\partial\mathrm{x}_\beta}+\frac{\partial S_{i\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega$$

(7.6.158)

$$iC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0\triangle\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(\dot{x}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M})+(\dot{x}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})}{1-\beta^2}\right]\triangle\Omega$$

$$= -\left(\frac{\partial P_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_{4\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega \qquad (7.6.159)$$

或写成牛顿力学方程的四维形式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0\triangle\Omega_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) &= -\left(\frac{\partial P_{i\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_{i\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_{i\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N_{i\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega \\ iC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_0\triangle\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) &= -\left(\frac{\partial P_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N_{4\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.160)$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_0\triangle\Omega_0) = q_\alpha\left(\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega \qquad (7.6.161)$$

利用式(7.6.138)得出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h\triangle\Omega\right)_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(h_0\triangle\Omega_0) - \left\{\frac{2}{C^2}\ddot{x}_k^0 Q_k^0 + \frac{1}{C}(\ddot{x}_0 E_0 M_0) + \frac{1}{C}\cdot(\ddot{x}_0 P_0 B_0)\right\}\triangle\Omega_0$$

$$= \left(q_\alpha\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + q_\alpha\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega_0 + \frac{\partial Q_j^0}{\partial x_j^0}\triangle\Omega_0 \qquad (7.6.162)$$

为相对静止，但可有加速运动，机械内能的增加率，上式可写成

$$(\delta h\triangle\Omega)_0 = \left(q_\alpha\frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + q_\alpha\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\right)\triangle\Omega_0\delta t_0 + \frac{\partial Q_j^0}{\partial x_j^0}\triangle\Omega_0\delta t_0 \qquad (7.6.163)$$

右方第一项，式(7.6.72)′为系统内部相对位变产生的能量变化；第二项(7.4.71)′为电磁场发生的热量。

§7.7 热力学及统计力学

(A) 一般叙述

热力学第一定律亦即能量守恒定律在相对论中是力学的第四个定律，上节连续运动方程中(7.6.2)的积分

$$\delta\iiint h\triangle\Omega = \delta t\oiint \dot{x}_i t_m dS + \delta t\oiint Q_n dS \qquad (7.7.1)$$

即表示

$$\delta u = -\delta w + \delta Q \tag{7.7.2}$$

u 为系统的整个能量，$-\delta\omega$ 是外力对系统所做的功，δQ 为外来的热量，我们也一再的证明任一点热量的增加 δQ 为

$$\delta Q = \delta Q^0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.3}$$

δQ^0 为相对静坐标所测量的热量，例如在连续体中，公式(7.6.24)证实热传导满足。

$$\delta Q = Q_j \delta s_j \triangle t = Q_j^0 \delta s_j^0 \triangle t^0 \sqrt{1-\beta^2} = \delta Q^0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.4}$$

的关系，因之动坐标观察某点热量的交换小于静坐标所观察相应热量的交换。这种能量的变换公式与一般能量变换公式不同，例如与质量的交换

$$C^2\delta_m = \frac{C^2\delta m^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.7.5}$$

就恰恰相反，曾引起佯谬的争论，式(7.6.19)→(7.6.22)．我们在那里说明这时热流补偿力所做的功就恰使式(7.7.3)和式(7.7.5)同时成立．即使在较复杂的应力作用系统(7.5.15)的情形下：

$$\delta u+\delta\omega=\delta u-\frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}_i t_{ij})\triangle\Omega\delta t=\delta\{(h-\dot{x}_i g_i)\triangle\Omega\}+g_i\triangle\Omega\delta t\ddot{x}_i$$

$$-p_{ij}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_j}\triangle\Omega\triangle t$$

则以式(7.5.15)及(7.5.29)代入得

$$\delta u+\delta\omega=\sqrt{1-\beta^2}\,\delta(h^0\triangle\Omega^0)-(\dot{x}_k\ddot{x}_l p_{kl}+\frac{\dot{x}_k\dot{x}_l p_{kl}}{C^2(1-\beta^2)}\dot{x}_i\ddot{x}_i$$

$$+p_{ij}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_j})\triangle\Omega\triangle t \tag{7.7.6}$$

因之在静坐标中上式为

$$\delta u^0 + \delta w^0 = \delta(h^0 \triangle \Omega^0) - t^0_{ij} \frac{\partial \dot{x}^0_i}{\partial x^0_j} \triangle \Omega_0 \triangle t_0 \qquad (7.7.7)$$

以式(7.6.72)及(7.6.72)'代入上式得

$$\delta u^0 + \delta w^0 = \delta(h^0 \triangle \Omega^0) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\dot{x}_k \ddot{x}_l P_{kl} + \frac{\dot{x}_k \dot{x}_l P_{kl}}{C^2(1-\beta^2)} \dot{x}_i \ddot{x}_i$$

$$+ P_{ij} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}) \triangle \Omega_0 \triangle t_0$$

所以在同一个四维时空范围内的

$$\delta Q = \delta u + \delta w = \sqrt{1-\beta^2}(\delta u^0 + \delta w^0) = \sqrt{1-\beta^2}\delta Q^0 \qquad (7.7.8)$$

公式(7.7.3)仍旧成立，β 是质点的可变速度，并不限于常数，值得注意的是 δu，δw 各自的变换关系，虽然复杂但 δQ 却照着上式的简单变换。

但当系统各面均受热情形下，则由于式(7.7.1)或式(7.7.2)中各项必为某坐标所取同一时间的各项，而两种不同的坐标，图7.34(a)所取的时间截面不同，其各相应点也不同，所以一般不能互相比较，式(7.7.3)的关系只能在某一时间某一点成立(相对论中的变换关系一般皆限于某一选择的时空点)。

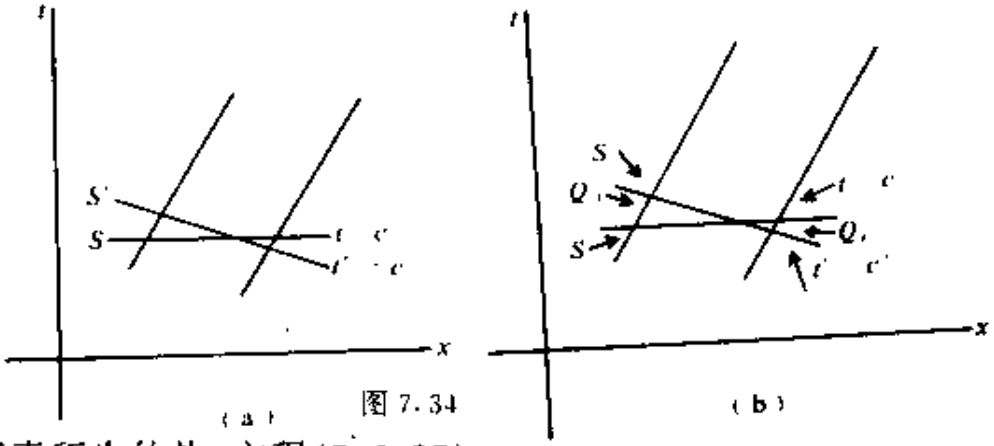


图 7.34

例如体积素所生的热，方程(7.6.87)

$$C^2 \delta Q_0 = -q_\alpha f_\alpha \triangle \Omega_0 \triangle t_0 = \frac{C^2 f_t - \dot{x}_i f_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \triangle \Omega \triangle t = C^2 \frac{\delta Q}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

符合式(7.7.3)的关系，但当各方面导热时，

$$\delta Q = \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\triangle\Omega\triangle t$$

和静坐标受热的方程(7.6.127)比较，则因 t 的横剖面上不尽是相应点，

$$(\frac{\partial Q_j}{\partial x_j})_0 = \frac{\dot{x}_j}{\triangle\Omega\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{Q_j\triangle\Omega}{1-\beta^2}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

就除特殊情形外，不符合式(7.7.3)的关系。见图 7.34(b)，这也就是在导出上面式(7.7.8)时不用方程(7.6.8)的原因。

热力学第二定律推出"熵"Φ 是态的函数，并认为系统在可逆绝热变化过程中，熵的数值不变，但用绝热可逆的方法可以将某一系统加速到某一个速度，因之初看起来熵应当是标量*：

$$\Phi' = \Phi, \tag{7.7.9}$$

与质点的宏观速度无关。

Boltzmam 将熵和系统形成的几率 p 连贯起来成为

$$\Phi = k\ln P \tag{7.7.10}$$

的关系，由于几率 P 为一纯粹数字，数字当然是一个标量，k，Boltzmam 常数也是标量，所以也可以论断熵是标量。

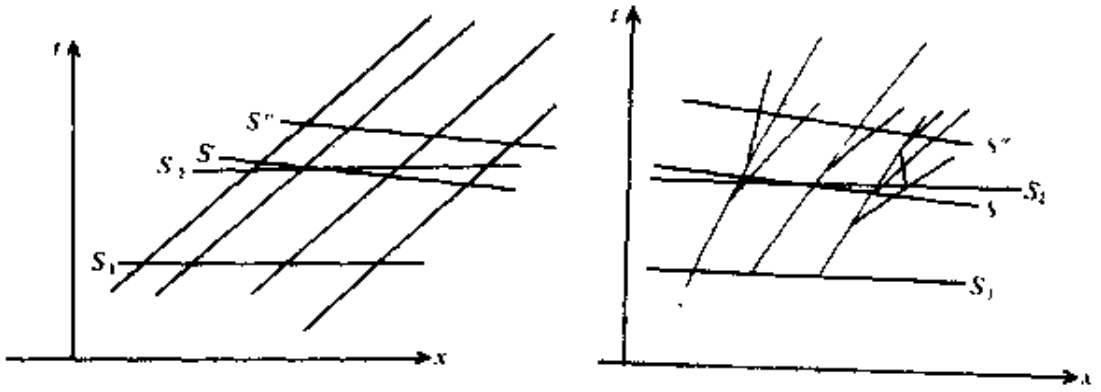


图 7.35

* PlanCk, Ann. d. physik 26.1.1908

不过由于不同坐标所取时间剖面的不同，问题不是如此简单，在进一步研究之前我们先看公式(7.7.9)的限制性，在图 7.35 上取直线的数目代表几率 p，在图 7.35(a)上直线的数目不变；在图 7.35(b)上直线的数目各处可以变化，S' 与 S''的横截面代表 S' 系统在相应于 A 点的时间 $t'=c'$ 或相应于 B 点的时间 $t'=c''$所取的横截面；S 代表 S 系所取 $t=c$ 的横截面，由于计算系统的总熵必在同一时间，所以 S 横截面上所割的直线的数目代表 S 系中在 $t=c$ 时所测的 P；而 S'，S''横截面所割的直线数目则代表 S' 系在 $t'=c'$ 或 $t'=c''$时所测的 P'、P''。当 P 不起变化的时候，图 7.35(a)表示。

$$P = P' = P'' \tag{7.7.11}$$

但如 P 起变化则一般

$$P \neq P' \neq P'' \tag{7.7.12}$$

所以式(7.7.9)的关系对整个系统而言，除熵不变的情况下，一般不能成立。这和一个系统的动量能量的情形相仿。在动量能量守恒情形之下各坐标所测的总动量和总能量可以有四维矢量的互相变换关系。但在一般情形下这种关系无法成立；究竟相应于 S' 的什么 t' 呢？不过假使变化无限的慢，具体的讲起来只要在

$$\Delta t \sim \frac{V}{C^2}\Delta x < \frac{1}{C}\Delta x \tag{7.7.13}$$

之内(Δx 为系统长度的大小)，熵的变化可以忽略不计，则相应于 S 横截面上任一点 t 的 t' 横截面上所割的各直线数目均相差无几。

设前后孤立绝热系统某点在可逆过程中加热量 δQ 时则前后熵的增加定义为

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\delta Q}{T} \tag{7.7.14}$$

在可逆变化过程中，这种加热必定是无限的慢，因之在这个过程中，熵是标量，前后熵的改变当然也是标量，所以

$$\frac{SQ}{T} = \frac{SQ'}{T'} \tag{7.7.15}$$

必为标量，以之与(7.7.3)比较，则该点视温度与静温度的关系应当是

$$T = T^0\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.16}$$

换言之，动坐标所观察的温度应较静坐标为小。

上述关系在特殊的情形下导出，我们现在作进一步的推广研究。

设一个系统的熵在任何变化过程中的增加满足方程

$$\frac{d\Phi}{dt} \geqslant \oiint \frac{Qn}{T}dS, \tag{7.7.17}$$

以上等号只在可逆变化的情况下成立，Q 为热流，由式(7.7.4)及(7.7.16)看出在上式右方任一面积素上的时空点上，

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_n \delta S dt}{T} = \frac{Q_n^0 \delta S^0 \delta t^0}{T^0}$$

似为标量；由于同时观念在各点不同，这一个式子不能积分，因之并不表示式(7.7.17)中 $\delta\Phi$ 的标量性质。但式(7.7.17)可以改写成

$$\frac{d}{dt}\iiint \varphi d\Omega - \iiint \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{T})d\Omega \geqslant 0 \tag{7.7.18}$$

形式，以上 φ 为熵的密度，当体积足够小的时候，则式(7.7.18)为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi \dot{x}_j - \frac{Q_j}{T}) \geqslant 0 \tag{7.7.19}$$

这一个独立方程的协变性质建议这是一个标量方程，因之建议

$$S_\alpha \equiv (\varphi \dot{x}_j - \frac{Q_j}{T}, iC\varphi) \tag{7.7.20}$$

成一四维矢量。这样得出什么结论？在任何两种不同的坐标 S 及 S' 中，则依洛伦兹变换由式(7.7.20)得熵密度的变化公式

$$\varphi' = \frac{\varphi(1-\frac{\dot{x}_k V_k}{C^2}) + \frac{V_k Q_k}{C^2 T}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.7.21}$$

以上 V_k，β 为 S' 对 S 的相对速度，$\dot{x}_k$ 为质点的速度，由 S_1 的变换并用方程(7.7.21)及(3.1.6)得

$$\frac{Q_j}{T}=\frac{Q_j'}{T'}-\frac{\dot{x}_j'(V_kQ'_k)}{C^2T'(1+\frac{\dot{x}_k'V_k}{C^2})}-\frac{V_j(V_kQ_k')}{V^2T'(1+\frac{\dot{x}_k'V_k}{C^2})}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \tag{7.7.22}$$

当 $\dot{x}_j=0$ 时，以上变换与式(7.7.16)及(7.6.13)相符。反之从式(7.6.55)Q_{jk}的变换，以 $Q_{\alpha\beta}$中的 V 为质点的速度 $\dot{x}$，则得

$$Q_j=\frac{Q_j'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{\dot{x}_l'V_l}{C^2}}-\frac{\dot{x}_j'(V_lQ_l)\sqrt{1-\beta^2}}{C^2\left(1+\frac{\dot{x}'_lV_l}{C^2}\right)^2}$$

$$-\frac{V_j(V_kQ_k')}{V^2(1+\frac{\dot{x}_l'V_l}{C^2})^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.23}$$

的一般关系。此式与式(7.7.22)相符。设

$$T'=\frac{T\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{\dot{x}_lV_l}{C^2}} \tag{7.7.24}$$

由式(3.1.9)得简单的温度关系，

$$T'=\frac{T\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{7.7.25}$$

因之，式(7.7.16)为一般性的关系，β 是质点的瞬时速度，由于方程(7.7.16)虽然是从特殊情形下导出，但一个联系目前温度和目前静坐标观察温度的关系不应当受导出步骤的历史影响，所以式(7.7.16)应当是一般性的联系，设将该式代入式(7.7.22)之内得出式(7.7.23)热流的变换关系。

从式(7.7.21)及(7.7.22)，我们当然可以验证式(7.7.19)的

标量性质：

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial S_\alpha'}{\partial x_\alpha'}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi \dot{x}_j-\frac{Q_j}{T}) \tag{7.7.26}$$

由矢量 S_α 式(7.7.20)可导出其他标量或张量，如

$$T'(S_\alpha q_\beta - S_\beta q_\alpha) \tag{7.7.27}$$

即式(7.6.55)的 $Q_{\alpha\beta}$ 反对称张量，

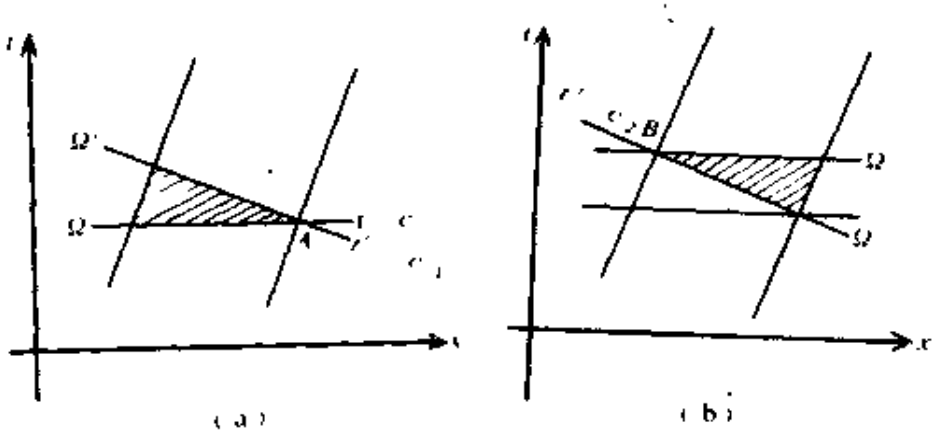
$$-\frac{1}{C^2}q_\alpha S_\alpha=\varphi\sqrt{1-\beta^2}+\frac{\dot{x}_j Q_j}{C^2 T\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.7.28}$$

是标量，将上式乘以 $\triangle\Omega_0$，则在 $Q_j\to 0$ 的情形下，$\Phi=\Phi_0$，适合式(7.7.9)的变换方程，从这些研究看出式(7.7.20)的 S_α 确系四维矢量，特别从方程(7.7.26)看出 Q_j 也不限于可逆的变化。因之方程(7.7.19)确代表热力学第二定律，这样熵本身就不是标量了(当然在特殊的 $Q_j=0$ 的情形下，熵可以是标量)。一孤立系统的边界上 Q_n 为零，式(7.7.17)表示

$$\frac{d\Phi}{dt}\geqslant 0, \tag{7.7.29}$$

换言之，在不可逆变化过程中孤立系统的熵总是随时间而增加。

设将式(7.7.19)依图 7.36 的阴影地区积分。



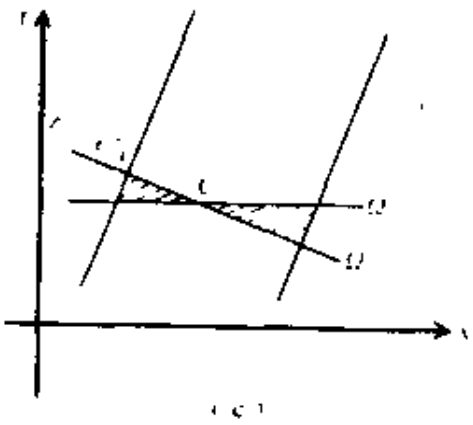


图 7.36

图 7.36(a)上 t' 横截面相应于系统某点 A 的时间，此 t' 横截面上其他各点的 t 均大于或等于 $t=c$ 因之

$$\Phi' \geqslant \Phi,$$

等号只在系统各点从 $t=c$ 到 t' 横截面上的 t 时熵保持不变的情形下成立。从式(7.7.28)的积分用格奥定理也得

$$\iiint \varphi \, d\Omega - \iiint \varphi d\Omega \geqslant 0$$

的结论，不过照图 7.36(b)积分则得

$$\Phi \geqslant \Phi',$$

若照图 7.36(c)积分，则 Φ' 可以大于小于或等于 Φ。因之方程(7.7.9)一般不能成立[从图 7.35 的两个图上也可直接看出]，过去作者们无条件的认为一个系统的熵是标量，大概是由于忽略"同时观念"的相对性或者是由于只考虑平衡态(准平衡态)情形。从这里和上面讨论看出 Tolman，MØller* 等人以为

$$(\varphi \dot{x}_j, ic\varphi) \qquad (7.7.30)$$

是四维矢量的结论也只能在绝热情况下成立。该书上

---

* MØller"The Theory of Relatirity " P. 214→215 Oxford 1955; Tolman "Relativity, Thermodynauiw and Cosmology"P 164 Oxford 1946

$$(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \dot{x}_j)\triangle\Omega\triangle t \geqslant \frac{SQ^0}{T^0} \qquad (7.7.31)$$

的公式则由于右方为标量而左方则除 $Q_j\to 0$ 例如准平衡的情形外，一般不是标量，所以不能严格成立。

公式(7.7.18)指出一个小体积内熵的变化是

$$\delta\Phi \geqslant \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{T})\triangle\Omega\delta t$$

因之设用可逆步骤变化过去，则

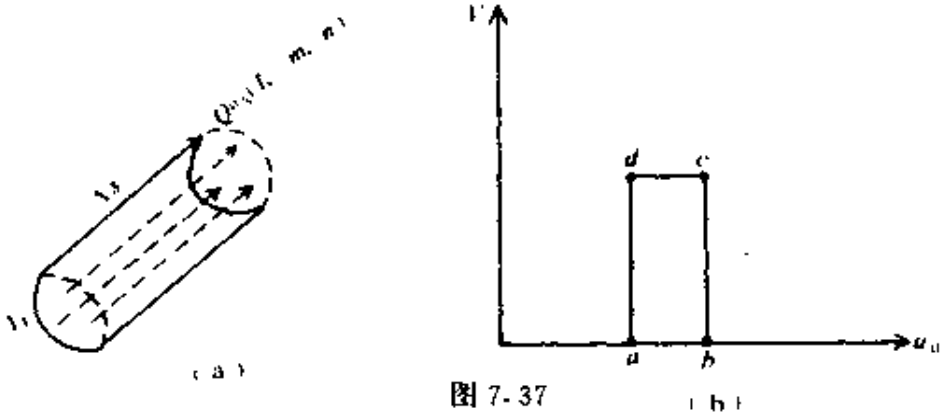
$$\delta\Phi = [\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{T})]_R\triangle\Omega\delta t, \qquad (7.7.32)$$

R 指标注明是可逆变化，由热力学第一定律(7.6.2)，上式可写成

$$\delta\Phi = \frac{1}{T}(\delta u+\delta w_R)-(\frac{Q_j}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j})_R\triangle\Omega\delta t, \qquad (7.7.33)$$

形式，δw_R 为系统可逆状态时所做的功。

在相对静止的系统中，上式比较容易计算，设热量 Q^0 从温度 $T_0+\triangle T_0$ 处流到 T_0，则其能做的可逆功 $\delta w_R^{(1)}$ 为



(a)　　(b)

图 7-37

$$Sw_R^{(1)} = Q^0\frac{\triangle T_0}{T_0} \qquad (7.7.34)$$

由于

$$\triangle T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial S}\triangle S = (l\frac{\partial T_0}{\partial x_0}+m\frac{\partial T_0}{\partial y_0}+n\frac{\partial T_0}{\partial z_0})\triangle S,$$

$$Q^0 = Q_s^0 \triangle S \delta t,$$

Q_S^0 为热流矢量的数值，$\triangle S$ 为垂直于的热流矢量方向的横截面，$\triangle s$ 为沿热流矢量方向的长度，如图 7.37(a)

所以 $$T_\delta^0 W_R^{(1)} = Q_s^0 \triangle S \delta t \left(l \frac{\partial T_0}{\partial x_0} + m \frac{\partial T_0}{\partial y_0} + n \frac{\partial T_0}{\partial z_0}\right) \triangle s$$

由于$\triangle S \triangle s$ 为此小体积$\triangle \Omega_0$ 的容积，又由于

$$lQ_s^0 = Q_x^0, mQ_s^0 = Q_y^0, nQ_s^0 = Q_z^0$$

因之上式为

$$T^0 \delta W_R^{(1)} = \left(Q_x^0 \frac{\partial T_0}{\partial x^0} + Q_y^0 \frac{\partial T_0}{\partial y^0} + Q_z^0 \frac{\partial T_0}{\partial z^0}\right) \triangle \Omega_0 \delta t_0 = Q_j^0 \frac{\partial T_0}{\partial x_j^0} \triangle \Omega \delta t_0 \tag{7.7.35}$$

另外，在流体中则由于体积的膨胀，其可逆功为

$$\delta w_R^{(2)} = p_0 \delta(\triangle \Omega_0) \tag{7.7.36}$$

流体系统在相对静止的坐标中的可逆功，大概只有上述两种。因之式(7.7.33)在静坐标中为通常的

$$(\delta \Phi)_0 = \frac{1}{T^0}\{\delta u^0 + p^0 \delta(\triangle \Omega_0)\} \tag{7.7.38}$$

形式。在小体积素 $\delta \Omega_0$ 中，内能的增加可以从式(7.6.2)

$$\delta u = \frac{\partial}{\partial x_j}(\dot{x}, t_{ij}) \triangle \Omega \delta t + \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \triangle \Omega \delta t \tag{7.7.39}$$

得出。以之代入式(7.7.38)内得静坐标中熵的变化为

$$(\delta \Phi)_0 = \frac{1}{T_0}\left\{t_{ij}^0 \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0 + \frac{\partial Q_j^0}{\partial x_j^0}\right\} \triangle \Omega_0 \delta t_0 + \frac{1}{T_0} p_0 \delta(\triangle \Omega_0) \tag{7.7.41}$$

再用式(7.6.96)t_{ij}^0的表示以及 $t_{ii}^0/3 = -p^0$，得

$$(\delta \Phi)_0 = \frac{-\sigma_{ij}^0}{T^0}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0 \triangle \Omega_0 \delta t_0 + \frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_j}\right)_0 \triangle \Omega_0 \delta t_0 \tag{7.7.42}$$

又由于

$$\delta\Phi=\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\dot{x}_j)\right\}\triangle\Omega\delta t=\left\{\frac{\partial S_a}{\partial x_a}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{Q_j}{T}\right)\right\}\triangle\Omega\delta t,\tag{7.7.43}$$

以之代入式(7.7.42)内得

$$\left(\frac{\partial s_a}{\partial x_a}\right)_0=-\frac{\sigma_{ij}^0}{T^0}\left(\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0+\frac{Q_j^0}{T_0^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)_0\tag{7.7.44}$$

设以式(7.6.96)′的流体切应力σ_{ij}^0的定律代入，因

$$-\sigma_{ij}^0\left(\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0=2\eta\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}\right)_0-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\dot{x}_k}{\partial x_k}\right)_0\delta_{ij}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2\eta}(\sigma_{ij}^0)^2\tag{7.7.45}$$

再如以异向同性物质导热定律

$$Q_j^0=K\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)_0\tag{7.7.46}$$

代入则公式(7.7.44)为

$$\left(\frac{\partial s_a}{\partial x_a}\right)_0=\frac{1}{2\eta T_0}(\sigma_{ij}^0)^2+\frac{K}{T_0^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)_0^2>o\tag{7.7.47}$$

这一个方程满足热力学第二定律(7.7.19)，上式右方第一项为粘滞性不可逆摩擦力，使系统发热以致增加系统的熵。其右方第二项是由于热的不可逆传导使可用的功(7.7.35)消耗也使系统的熵增加，在粘滞性流体中，不可逆的物理现象大约只有这两种，因之方程(7.7.47)大概是准确的方程，这样也可验证方程(7.7.38)的可靠性。

虽然δw_R(7.7.33)的数值在一般非静坐标中难于计算，但由于方程(7.7.47)的左方是标量，因之在任何坐标中

$$\frac{\partial s_a}{\partial x_a}=\frac{1}{2\eta T_0}(\sigma_{ij}^0)^2+\frac{K}{T_0^2}\left(\frac{\partial T^0}{\partial x_j^0}\right)^2>o\tag{7.7.49}$$

也必然成立，将之化成该动坐标中的相应物理量，则从式(7.6.

98)'及式(7.6.47)得出

$$\frac{\partial s_a}{\partial x_a}=\frac{1}{2\eta T_0}\sigma_{\alpha\beta}^2+\frac{K}{T_0^2}\left\{(\frac{\partial T_0}{\partial x_j})^2-\frac{1}{C^2}(\frac{\partial T_0}{\partial t})^2+\frac{1}{C^2(1-\beta^2)}(\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t})^2\right\} \tag{7.7.50}$$

以上 T^0 的数值也可以从式(7.7.16)用 T 及$\triangle\Omega$ 的宏观速度 V 或 $\beta=V/C$ 表示，不过这样做只徒然使方程复杂化并没有什么好处。

假使从式(7.7.44)出发，亦即不用粘滞性的定律及热传导定律，则由式(7.7.43)及(7.7.44)得熵的变化在任何坐标中为

$$S\Phi=\left\{-\frac{\sigma_{ij}^0}{T_0}(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j})_0+\frac{Q_j^0}{T_0^2}(\frac{\partial T}{\partial x_j})_0+\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{Q_j}{T})\right\}\triangle\Omega\delta t \tag{7.7.51}$$

上式右方亦可化为在动坐标中的相应量(按相对论原则，当一个物理量化成"动坐标"中的相应量时，亦即表示当该物理量在高速度下的情形，例如式(7.7.50)即表示高速度流体熵的变化情形)。式(7.7.51)的右方第一项由于 $\sigma_{\alpha\beta}$的张量性质明显的为

$$-\frac{\sigma_{ij}^0}{T_0}(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_j})_0=-\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{T^0}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \tag{7.7.52}$$

标量方程，以式(7.6.75)，(7.6.67)及(7.6.80)代入上式，则得

$$-\frac{\sigma_{ij}^0}{T_0}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0=-\frac{P_{ij}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}+\frac{\dot{x}_j}{C^2}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t}\right)$$

$$+\frac{p}{\triangle\Omega_0}\frac{d(\triangle\Omega_0)}{\mathrm{d}t_0} \tag{7.7.53}$$

又由(7.6.68)得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{p}_{ij}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(P_{ij}-\frac{1}{C^2}\dot{x}_j\dot{x}_kP_{ki})\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}$$

由于 $P_{\alpha\beta}$为对称张量，再用上式及式(7.6.34)的关系，则得

$$-\sigma_{ij}^0\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\right)_0=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{t_{ij}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}-\frac{\dot{x}_iQ_j}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}\right\}$$

$$-\frac{P_{ij}\dot{x}_j}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}+\frac{p}{\triangle\Omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}(\triangle\Omega_0) \qquad (7.7.54)$$

从 Q_j 的变换(7.6.13)及偏微分的变换关系(7.6.47)，得

$$Q_i^0\frac{\partial T_0}{\partial x_i^0}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{Q_j\frac{\partial T_0}{\partial x_j}+\frac{(\dot{x}\cdot Q)}{C^2(1-\beta^2)}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}\right\} \qquad (7.7.54)$$

这样式(7.7.51)内熵的变化可写成

$$S\Phi=\frac{1}{T}(\delta u-\dot{x}_i\delta G_i)-\frac{1}{T}P_{ij}\dot{x}_j\frac{d\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega\delta t$$

$$+\frac{p}{T_0}\mathrm{d}(\triangle\Omega_0)+\frac{(\dot{x}\cdot Q)}{C^2(1-\beta^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{T_0^2}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega\delta t \qquad (7.7.55)$$

再将式(7.6.75)代入，则得出

$$\delta\Phi=\frac{1}{T}\{\delta u-\dot{x}_i\delta G_i+p\delta(\triangle\Omega)\}-\frac{1}{T}\sigma_{ij}\ddot{x}_i\dot{x}_j\triangle\Omega\delta t$$

$$+\frac{(\dot{x}\cdot Q)}{C^2T^2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}\triangle\Omega\delta t \qquad (7.7.56)$$

的形式，$\ddot{x}_i$ 为质点的加速度，上式右方括弧内第三式 $p\delta(\triangle\Omega)$ 的意义至为明显无须再述，其中第二项

$$\dot{x}_i\delta G_i=\dot{x}_i f_i\triangle\Omega\delta t \qquad (7.7.57)$$

为外力(使此小体积动量改变)所做的功，其意义亦颇明显。唯其余两项的意义则不容易解释。

式(7.7.56)中的 δu 及 δGi 可以用能量密度

$$h=-T_{44}=\frac{h_0}{1-\beta^2}+\frac{1}{C^2}\dot{x}_i\dot{x}_jP_{ij}-\frac{\partial\dot{x}_kQ_k}{C^2(1-\beta^2)^2}$$

及动量密度

$$q_i=\frac{1}{iC}T_{4i}=\frac{h_0\dot{x}_i}{C^2(1-\beta^2)}+\frac{1}{C^2}P_{ij}\dot{x}_j-\frac{Q_i}{C^3(1-\beta^2)}-\frac{2\dot{x}_iQ_k\dot{x}_k}{C^5(1-\beta^2)^2}$$

消去。由上面两式得

$$\delta(u-\dot{x}_iG_i)=\delta\{(h-q_i\dot{x}_i)\triangle\Omega\}=\delta(h_0\triangle\Omega)-\delta\left\{\frac{\dot{x}_kQ_k\triangle\Omega}{C^2(1-\beta^2)}\right\} \tag{7.7.58}$$

以之代入式(7.7.56)内并用等式(7.6.75)得出以静能量密度为标准的方程。

$$\delta(\Phi+\frac{\dot{x}_kQ_k\triangle\Omega}{C^2T(1-\beta^2)}=\frac{1}{T}\delta\left(\frac{h_0\triangle\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{1}{T}\dot{x}_i\delta(\frac{h_0\triangle\Omega_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

$$+p\sqrt{1-\beta^2}\delta(\frac{\triangle\Omega'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{Q_i\triangle\Omega}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\delta(\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}) \tag{7.7.59}$$

设以

$$M\equiv\frac{h_0\triangle\Omega_0}{C_2\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.7.60}$$

则式(7.7.59)可以写成。

$$\delta\left\{\Phi+\frac{\dot{x}_kQ_k\triangle\Omega}{C^2T(1-\beta^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{T}\left\{\delta(MC^2)-\dot{x}_i\delta(M\dot{x}_i)+p\sqrt{1-\beta^2}\delta(\frac{\triangle\Omega}{\sqrt{1-\beta^2}})\right\}$$

$$-\frac{Q_i\triangle\Omega}{TC^2\sqrt{1-\beta^2}}\delta(\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}) \tag{7.7.61}$$

此式可简化成

$$\delta\left\{\Phi+\frac{\dot{x}_kQ_k\triangle\Omega}{C^2T(1-\beta^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{T_0}\left\{\delta(M_0C^2)+p\delta(\triangle\Omega_0))-\frac{Q_i\triangle\Omega_0}{C^2T_0\sqrt{1-\beta^2}}\delta(\frac{x_i}{\sqrt{1-\beta^2}})\right\} \tag{7.7.62}$$

当 $Q_k=0$ 时，上式蜕化为更简单的

$$\delta\Phi = \frac{1}{T_0}\{\delta(M_0C^2) + p\delta(\triangle\Omega_0)\} \qquad (7.7.63)$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \int_1^2 \frac{1}{T_0}\{C^2\delta M_0 + p\delta(\triangle\Omega_0)\} \qquad (7.7.63)'$$

形式。唯如热流 $Q_k \neq 0$，则情况较复杂，实则即在静坐标中内能本身的变化也不简单，由式(7.7.58)见

$$(\delta u)_0 = \{\delta(h\triangle\Omega)\}_0 = \delta(h^0\triangle\Omega^0) - \frac{2}{C^2}\ddot{x}_k^0 Q_k^0\triangle\Omega^0 \qquad (7.7.64)$$

而不单是 $C^2\delta M^0$，另含有加速的一项。

如利用式(7.6.124)并将式(7.6.64)代入式(7.7.59)，则由式(7.7.43)得

$$\delta\left\{\Phi + \frac{\dot{x}_k Q_k\triangle\Omega}{C^2T(1-\beta^2)}\right\} = \frac{1}{T_0}\{(\delta u)_0 + p\delta(\triangle\Omega_0)\} + \frac{1}{C^2}\ddot{x}_k^0 Q_k^0\triangle\Omega^0$$

$$= (\delta\Phi)_0 + \left(\delta\left\{\frac{\dot{x}_k Q_k\triangle\Omega}{C^2T(1-\beta^2)}\right\}\right) \qquad (7.7.65)$$

的标量方程，将上述方程除以 $\triangle\Omega$，则为式(7.7.28)的 $q_\alpha s_\alpha$ 明显标量。

(B) 准平衡态的热力学

以上为一般性的关系，下面只述简单的平衡态，实则准平衡态的热力学关系。流体系统在静坐标中平衡时，各处的压力温度均匀，且各点皆静止不动，所以准平衡时

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)_0 \to o, Q_j^0 \to o, \sigma_{ij}^0 \to o \qquad (7.7.66)$$

其平方可以略去不计，由式(7.7.47)得

$$\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)_0 = O \qquad (7.7.67)$$

由于式(7.7.67)是标量方程，所以在任何坐标中，亦即在任何匀速

运动情形下

$$\frac{\partial S_a}{\partial x_a} = O \qquad (7.7.67)'$$

从式(7.7.19)当然看出这种变化过程为可逆过程。粘滞性及热传导带进来的不可逆现象为高次无限小量，可以忽去不计，整个系统为“匀温”、“匀压”及“匀速”(实则是“几乎”匀温，否则不能有累积性的加热；“几乎”匀压，否则不能有累积性的速度改变；“几乎”匀速，否则不能有累积性的膨胀)的系统，标量(7.7.65)。

$$\Phi + \frac{\dot{x}_t Q_t \triangle \Omega}{C^2 T(1-\beta^2)} \to \Phi \qquad (7.7.68)$$

在任何时与系统的熵均无限的接近，因之热力学系统的“熵”在准平衡态时为标量，此时式(7.7.17)

$$\delta\Phi = \oiint \frac{Qn}{t} \mathrm{d}S\delta t = \frac{1}{T}\oiint Qn\mathrm{d}s\delta t$$

所以

$$\delta\Phi = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}(\delta u + \delta w) = \delta\Phi \qquad (7.7.69)$$

δQ 为系统在递次准平衡状态下累积吸收的热量。在流体中(不管是否粘滞性流体)准平态系统熵的变化为

$$\delta\Phi_0 = \frac{1}{T_0}(\delta\mu_0 + \delta w_0) = \frac{1}{T_0}\{\delta(h_0\Omega_0) + p_0\delta\Omega_0\}, \qquad (7.7.70)$$

以之代入式(7.7.69)的右方，并以等式(7.6.8)的

$$u = \frac{h_0\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2 p_0\Omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.7.71)$$

代入，以上 V 为系统的宏观速度，则得出系统做的功

$$\delta w = -\frac{\beta^2\delta u_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{u_0\beta\cdot\delta\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{1-2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}p_0\delta\Omega_0 - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\Omega_0\delta p_0$$
$$- p_0\Omega_0\beta\cdot\delta\beta\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{(1-\beta^2)_{3/2}}\right) \qquad (7.7.72)$$

这是一个似乎难以理解的复杂关系，但是如以式(7.6.9)，

$$G_i = \frac{h_0 + p_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\Omega_0 V_i \tag{7.7.73}$$

代入，则 δw 化成极其简单的

$$\delta w = -V_i \delta G_i + p\delta\Omega \tag{7.7.74}$$

形式，其中第一项

$$V_i \delta G_i = V_i F_i \delta t$$

为外力 F_i 对此系统所做的功，外力因可牵引此系统，使之增加动量，反之此系统也可以牵引外界而减少本身的动量，因之是可逆的机械功。第二项 $p\delta\Omega$ 则是流体膨胀时对外界所做的可逆功。这个方程显然与式(7.7.56)$\dot{x}_i \to o, Q_i \to o$ 时的情况相符，由式(7.7.72)(7.7.73)两式以及公式

$$\begin{aligned} T\delta\Phi = \delta Q = \delta u - V_i \delta G_i + p\delta\Omega = T\delta\Phi_0 \\ = \sqrt{1-\beta^2}(\delta u_0 + p_0 \delta\Omega_0) \end{aligned} \tag{7.7.75}$$

可以从系统的静态和速度的变化，推算任何准平衡流体系统(当然可以推广到任何准平衡热力学系统)在加速热力学过程中 δu、δw、$\delta\Phi$ 及 δQ 的数值。因之推广通常的准平衡热力学到高速度系统，流体系统现在除通常的两个变数之外另加宏观速度 V_i 的变数。今举一个简单的加速的循环为例，并较详细的叙述于下。

设一流体系统(可以部分为气体，部分为液体)的压力 p_0 在此循环中保持不变，设此循环为图 7.37(b)的过程，ab、cd 为等温线，bc、da 为绝热等 u_0 线，V 为系统的速度，在 $a \to b$ 过程中，$V=0$，

$$\triangle u_{a\to b} = u_{0b} - u_{0a}, \quad \triangle W_{a\to b} = p_0(\Omega_{0b} - \Omega_{0a})$$

$$\triangle Q_{a\to b} = \triangle u_0 + p_0 \triangle\Omega_0 = (u_{0b} + p_0\Omega_{0b}) - (u_{0a} + p_0\Omega_{0a})$$

在 $b \to c$ 过程中。

$\delta Q = o$，$\delta u_0 = o$，所以 $\delta\Omega_0 = O$

原体积不变，由于原 p_0 在整个过程中不变，因之其原温 T_0 亦不变，但由式(7.7.71)，见达到速度 $V = C\beta$ 后

$$\triangle u_{b\to c}=u_{0b}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)+p_0\Omega_{0b}\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta_2}}=-\triangle W_{a\to c}$$

在 $c\to d$ 的过程中

$$\triangle u_{c\to d}=\frac{u_{0d}-u_{0c}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}p_0(\Omega_{od}-\Omega_{oc}),$$

$$\triangle w_{c\to d}=-\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}(u_{0d}-u_{0c})+\frac{1-2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}p_0(\Omega_{0d}-\Omega_{0c})$$

$$\triangle Q_{c\to d}=\sqrt{1-\beta^2}\{(u_{0d}+p_0\Omega_{0d})-(u_{0c}+p_o\Omega_{oc})\}$$

$$\triangle Q_{d\to a}=O\ \triangle u_{od\to a}=o,\triangle\Omega_o=o$$

$$\triangle u_{d\to a}=u_{od}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-p_o\Omega_o\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\triangle w_{d\to a}$$

由于

$$u_{oa}=u_{od},\Omega_{oa}=\Omega_{od},u_{ob}=u_{oc},\Omega oc=\Omega_{ob}$$

因之整个步骤的

$$\Sigma\triangle u=O,\Sigma\triangle Q=\Sigma\triangle W$$

$$\Sigma\triangle W=\{(u_o+p_0\Omega_0)-(u_{0a}+p_0\Omega_{0a})\}(1-\sqrt{1-\beta^2})$$
$$=\triangle Q_{a\to b}(1-\sqrt{1-\beta^2})\qquad(7.7.76)$$

又由于

$$\Sigma\triangle\Omega=o,\qquad\text{所以}\quad\Sigma p_o\triangle\Omega=o$$

膨胀的功恰好对消，所以整个循环中只剩

$$\Sigma\triangle W=-\Sigma V_i\delta G_i+\Sigma p\delta\Omega=-\Sigma V_i\delta Gi\qquad(7.7.77)$$

直线运动部分所做的功，亦即使系统增加动量和减少动量部分所

做的功。

这个循环不独是等压力循环，而且也是等原温循环，cd 的温度为

$$T = T_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.78}$$

因之

$$\Sigma\frac{\delta Q}{T} = \frac{\triangle Q\, a\to b}{T_0} + \frac{\triangle Q\, c\to d}{T_0\sqrt{1-\beta^2}} = O \tag{7.7.79}$$

验证熵的全微分性质：

$$\oint\triangle\Phi = \Sigma\frac{Q}{T} = O \tag{7.7.80}$$

反之从式(7.7.80)也可以证明式(7.7.78)的关系。

在 ab 与 cd 的两个过程中，这个系统必须与外界的热库接触，设热库的速度与系统的速度相同，则在相对静止的坐标中此种导热步骤与通常的导热步骤相同，亦即

$$T_0^{(1)} = T_0^{(2)} \quad \text{所以 } T^{(1)} = T^{(2)}.$$

但是假使热库的速度与系统的速度不同，则情况就难断定，通常热力学书中不研究这种不同宏观速度物体的热接触问题，即一般相对论著作上对此点也很少谈到，V. Laue 在他书上(p. 177)认为不同速度物体的热平衡条件为两者的“原温”相等，但是他的“论据”似不可靠，假使在上面的循环中系统在 cd 线上与一静止的热库接触，则照 V. Laue 的看法，这个热库的温度必为 T_0 与 ab 线上热库的温度相同(可以将两个热库取成同一的热库)。那么在这个循环内，系统可以从统一温度的静止热库内取出热量作功，川流不息的运用这种循环就可以造出第二种永动机，与热力学的基本定律矛盾。

仔细的研究表示这种不同宏观速度热平衡的问题是一个比较复杂的问题。

设在图 7.38 上，一速度 q_1 的物体与另一速度 q_2 的物体作热

的接触，在通常的古典物理内，我们可以假设两者中间只有热的交流而没有切应力的作用，但是在相对论物理内，这种假设不具相对

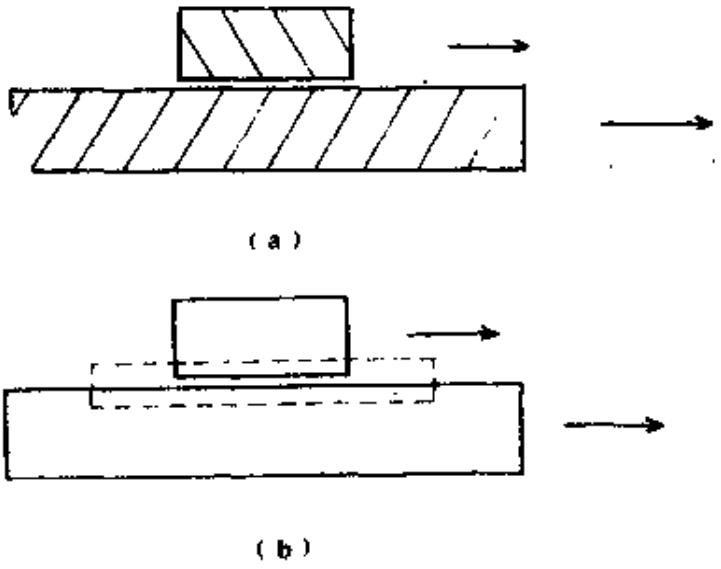


图 7.38

论的协变性，因即使在一个坐标看来这种假设可以成立，但由于热的交流只是互相作用四维力的第四个分量，则在另一个坐标看来这种切应力将不可避免的存在。例如在方程(4.2.14)力的变换公式内，设在 S' 系 $F'=0$，但因

$$\delta Q' = C^2 F_t' \delta t' \neq 0$$

为系统能量的增加，所以在 S 坐标中

$$F\delta t = \frac{V}{C^2}\frac{\delta Q'}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0, \quad F_t\delta t = \frac{1}{C^2}\frac{\delta Q'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.7.81}$$

这样切应力就不可避免的存在。

在研究接触边界时，可依通常导出边界条件的方法将物理方程沿图 7.38(b)边界上一个小扁平盒积分，方程(7.6.2)在此区域内的积分为

$$\mathrm{d}\left(\iiint h\mathrm{d}\Omega\right) = \oiint \dot{x}_i t_{i_n}\mathrm{d}S\delta t + \oiint Q n\mathrm{d}S\delta t \qquad (7.7.82)$$

其左方的体积分由于 h 不是无限大，$\triangle\Omega = s\triangle n$ 因之当 $\triangle n \to o$ 时可以忽去不计，右方为两个面上的积分(其沿 $\triangle n$ 所成面上的积分又可以忽去不计)，因 $\dot{x}_i$ 为匀速而

$$\oiint t_{i_n}\mathrm{d}S\delta t = F_i\delta t, \oiint Q n\mathrm{d}S\delta t = \delta Q \qquad (7.7.82')$$

分别为相互作用力 F_i 及热的交流 δQ，所以式(7.7.82)在边界上成为"边界条件"

$$q_1F_1\delta t + q_2F_2\delta t + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \qquad (7.7.83)$$

再将式(7.5.4)在同区域内积分得

$$\boldsymbol{F}_1\delta t + \boldsymbol{F}_2\delta t = 0 \qquad (7.7.84)$$

以上的两个条件亦即第 4.3 节内的(4.3.19)，设将热力学方程(7.7.18)再在此同区域内积分，则从同样的理由得出

$$\frac{\delta Q1}{T_1} + \frac{SQ_2}{T_2} \geqslant 0 \qquad (7.7.85)$$

的"边境条件"。这三个条件式(7.7.83)→(7.7.85)应当解决两物接触时的热平衡条件。设 $q_1 = q_2$ 则由式(7.7.84)及式(7.7.83)得

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$$

以之代入式(7.7.85)内得 $T_1 = T_2$ 的热平衡条件。通常热力学中 $q_1 = q_2 = 0$ 只是上面的一个特殊情形。

设 $q_1 = q_2$，则热平衡的条件比较复杂。以

$$R_a = (\boldsymbol{F}\delta t, F_i\delta t = \delta Q + q\cdot\boldsymbol{F}\delta t), \qquad (7.7.86)$$

R_a 为动量交换及能量交换的四维矢量，这个矢量可以为时间性也可以为空间性，但在"热接触"时，能量交换应当处于主要地位，因之我们可以定义两物体间热接触的作用是时间性的矢量作用.

R_a 既然是时间性的矢量，则可以选适当的坐标 S' 使其空间分量部分 $\boldsymbol{F}' = o$，在这个坐标中 S' 中式(7.7.83)

$$\delta Q'_1 + \delta Q'_2 = o, \qquad (7.7.86)'$$

两物体只有纯粹的热量交流，再由式(7.7.85)得

$$T'_1 = T'_2 \qquad (7.7.86)''$$

为两物体的热平衡条件，这个坐标的速度 V 须满足

$$\left\{F - \frac{VF_t}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{V}{V^2}(V \cdot F)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)\right\}\delta t = o \qquad (7.7.87)$$

的条件，由此得出 $V \cdot F = V^2 F_t$，再以之代入上式得出

$$V = \frac{F}{F_t} \qquad (7.7.88)$$

的条件，由于 R_∞ 为时间性的作用所以 $|V| < C$，从式(7.7.83)及(7.7.84)看出在这个坐标内

$$F_1' = 0 \quad F_2' = 0 \qquad (7.7.89)$$

在这个坐标内式(7.7.85)为

$$\delta Q_1'(\frac{1}{T_1'} - \frac{1}{T_2'}) \geqslant 0 \qquad (7.7.90)$$

因之设

$$T_1' > T_2', \delta Q_1' < O, \ \delta Q'_2 = -\delta Q_1' > O \qquad (7.7.91)$$

热量在这个坐标中从高的 T'_1 流入低的 T'_2，但“原温”$T_1^0 = T'_1/\sqrt{1-q_1'^2/C^2}$ 并不一定大于“原温”$T_2^0 = T'_2/\sqrt{1-q_2'^2/C^2}$，所以热量有可能从低的“原温”流入高的“原温”，与 V. Laue 的结论不同。热量也可以从低的“视温”T_1 流入高的“视温”T_2，这一切要看 $T'_1 > T_2'$ 来决定。

从式(7.7.88)得出

$$F_t\delta t = \delta Q + q \cdot F\delta t = \delta Q + \frac{q \cdot V}{C^2}F_t\delta t$$

所以

$$\delta Q = (1 - \frac{q \cdot V}{C^2})F_t\delta t \qquad (7.7.91)$$

再从 $F_i\delta t$ 的变换公式，由于 $F'=0, F_i'\delta_i'=\delta Q'$

$$\text{所以}\quad \delta Q=\left(1-\frac{q\cdot V}{C^2}\right)\frac{\delta Q'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\delta Q'\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{c^2}}} \tag{7.7.92}$$

亦即

$$\frac{\delta Q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=\frac{\delta Q'}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{C^2}}}=\delta Q^0 \tag{7.7.93}$$

的已知公式(7.7.3)，所以方程(7.7.83)中 $\delta Q_1+\delta Q_2\neq O$ 的原因只是由于坐标选择的关系，从上式当然看出热量的符号不变：吸热的仍吸热，失热的仍失热；只是数量的大小依坐标的选择而不相同。

由式(7.7.90)及(7.7.92)也可以导出式(7.7.85)的不变式。热传导的定律在任何坐标 S 中为

$$T_1\frac{\sqrt{1-\frac{q_1'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_1^2}{C^2}}}\geqslant T_2\frac{\sqrt{1-\frac{q_2'^2}{C^2}}}{\sqrt{1-\frac{q_2^2}{C^2}}} \tag{7.7.94}$$

其中 q_1'、q_2' 的数量可以从式(7.7.88)用速率变化公式(3.1.10)求出。因之我们结论：

“只要两物体的接触作用是时间性的矢量，亦即能量的交换超过动量的交换，则在适当的坐标 S'(7.7.89)中，两者中间的切应力作用为零而只有纯热量的交换。在这个坐标中，热量从高温流入低温；但在其它坐标中热量也可以从低温流入高温，由方程(7.7.94)决定”。

这一个结论可称为相对论热力学的基本定律(或称热力学的"零次"定律)。

在准平衡系统中,我们可以定义若干热力学函数例如从方程(7.7.18)得

$$\mathrm{d}\Phi \geqslant \frac{1}{T}\iint Q_n \mathrm{d}S\delta t = \frac{1}{T}(\delta u + \delta w) \tag{7.7.95}$$

设以

$$F \equiv u - T\Phi$$

为系统的"自由能",则

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}u - T\mathrm{d}\Phi - \Phi\mathrm{d}T \quad \text{所以 } \delta w \leqslant -\mathrm{d}F - \Phi\mathrm{d}T \tag{7.7.96}$$

因之在恒温过程中

$$\delta w \leqslant -\mathrm{d}F \tag{7.7.97}$$

一如通常的热力学结论,不过这种 F 不是标量,设以

$$\Psi \equiv \Phi - \frac{(u - V_i G_i)}{T} \tag{7.7.98}$$

则

$$\delta\Psi = \delta\Phi - \frac{\delta u - V_i\delta G_i - G_i\delta V_i}{T} + \frac{u - V_i G_i}{T^2}\delta T$$

以式(7.7.75)流体中的 $\delta\Phi$ 代入,则得

$$\delta\Psi = \frac{G_i\delta V i + p\delta\Omega}{T} + \frac{u - V_i G_i}{T^2}\delta T \tag{7.7.99}$$

因之

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Omega}\right)_{T,V_i} &= \frac{p}{T},\left(\frac{\partial\Psi}{\partial V_i}\right)_{T,\Omega} = \frac{G_i}{T} \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_{\Omega,V_i} &= \frac{u - V_i G_i}{T^2} = \frac{\Phi - \Psi}{T} \end{aligned}\right\} \tag{7.7.100}$$

所以 $\Phi = \Psi + T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_{\Omega,V_i}, \frac{u}{T} = V_i\left(\frac{\partial\Psi}{\partial V_i}\right)_{\Omega,T} + T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_{V_i,\Omega}$

(7.7.101)

从准平衡条件以及方程(7.7.58)的导出得

$$u - V_i G_i = u_0\sqrt{1-\beta^2}, \Psi_0 = \Phi - \frac{u_0}{T_0} \quad (7.7.102)$$

所以

$$\Psi = \Phi - \frac{u_0\sqrt{1-\beta^2}}{T_0\sqrt{1-\beta^2}} = \Phi_0 - \frac{u_0}{T_0} = \Psi_0 \quad (7.7.102)'$$

所以 Ψ 是标量。

在流体系统中我们还可以再定义一标量函数。

$$\Psi_1 = \Phi - \frac{1}{T}(u - V_i G_i + p\Omega) = \Phi_0 - \frac{u_0 + P\Omega_0}{T_0} \quad (7.7.103)$$

如以 T, p, V_i 作为 Ψ_1 的独立变数，则由式(7.7.103)得出

$$\left.\begin{aligned} &G_i = T\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial V_i}\right)_{T,p}, \quad \Omega = -T\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial p}\right)_{T,V_i} \\ &\Phi = \Psi_1 + T\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial T}\right)_{p,V_i}, \frac{u}{T} = p\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial p}\right) + V_i\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial V_i}\right) + T\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial T}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7.7.104)$$

由 Ψ 及 Ψ_1 的定义又可得出

$$\Psi = \Psi_1 - p\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial p}\right)_{T,V_i}, \quad \Psi_1 = \Psi - \Omega\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega}\right)_{T,V_i} \quad (7.7.105)$$

若干关系，这些关系也可以推广(注意到这些函数的标量性质也只在准平衡状态下才能成立)到混合体以定平衡的条件，此不赘叙。

理想气体的状态方程在静坐标中是

$$p_0\Omega_0 = NRT_0, \quad (7.7.106)$$

N 是克分子数，由于 p 是标量，Ω 与 T 的变换式相同，因之在任何坐标中

$$p\Omega = NRT \quad (7.7.107)$$

同样的成立。换言之，准平衡态的理想气体状态方程为协变方程，不因坐标的改变而改变，理想气体的内能

$$u_0 = f(T_0) \tag{7.7.108}$$

因之在任何坐标中亦即在任何小于 C 的匀速运动中，内能 u 及动量 G_i 为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{p\Omega\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{u_0 + NRT_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ G_i &= \frac{(u+p\Omega)}{C^2}V_i = \frac{u_0 + NRT_0}{\sqrt{1-\beta^2}}V_i, \end{aligned}\right\} \tag{7.7.108}'$$

只是 T_0 及 V_i 的函数，且 $u+NRT$ 与 G_i 合成四维矢量。

(C) 简单统计力学

设系统含永久性的微态集，其能量、动量分别为 ϵ_i 及 g_i，设 n_i 为分子在该微态 i 的数目，并设无简拼现象，则经典的热力学几率 P_c 为

$$P_c = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots\cdots} \tag{7.7.109}$$

其中 $N=\Sigma_i n_i$ 为分子的总数，此系统的熵由 Boltzmann 理论定为

$$\Phi_c = k\ln P_c = kN\ln N - \Sigma_i k n_i \ln n_i \tag{7.7.110}$$

设以 U，G 代表分子的总能量及总动量，则

$$u = \Sigma n_i\epsilon_i, G = \Sigma n_i q_i, N = \Sigma_i n_i \tag{7.7.111}$$

在分子的总能量总动量和总数目不变的情形下，则最大的分配几率(平衡态)适合

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Phi = -k\Sigma_i \ln n_i \delta n_i = 0, \delta u = \Sigma_{\epsilon_i}\delta n_i = 0 \\ &\delta G = \Sigma g_i \delta n_i = 0, \delta N = \Sigma_i \delta n_i = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.7.112}$$

的条件，因之分配率为

$$n_i = Ae^{-\lambda(\epsilon_i + a\cdot g_i)} \equiv Ae^{-\lambda f_i}; \tag{7.7.113}$$

其中五个待定参数 A，λ，a，可以从

$$\left.\begin{aligned} N &= A\Sigma_i e^{-\lambda\varepsilon_i}, u = A\Sigma_{i_i} e^{-\lambda\varepsilon_i} \\ G &= A\Sigma_i g_i e^{-\lambda\varepsilon_i} \end{aligned}\right\} \quad (7.7.114)$$

五个宏观量决定，因之熵的数值在平衡态中为只含参数的

$$\Phi = kN\ln N - kN\ln A + k\lambda(u + aG) \quad (7.7.115)$$

这其中几个待定参数也可以从本节第二段热力学中推出，同 N 但微不同 u 及 G 的系统，在平衡时熵的微差由式(7.7.115)得出为

$$\delta\Phi = -kN\delta\ln A + k\delta\lambda(u + a \cdot G) + k\lambda(\delta u + G \cdot \delta a + a \cdot \delta G) \quad (7.7.116)$$

从式(7.7.114)的 $\delta N=0$ 得出

$$\delta\ln A=\frac{1}{N}\delta\lambda(u+a \cdot G)+\frac{\lambda}{N}G \cdot \delta a+\text{由态集改变而改变的项} \quad (7.7.117)$$

上式末项在理想气体中只是由于体积改变而增加的微态数目，设体积不变，则这一项可以略去不计，将式(7.7.117)代入式(7.7.116)中得

$$\delta\Phi=k\lambda(\delta u+a \cdot \delta G) \quad (7.7.118)$$

的简单关系，以之与式(7.7.75)比较可见四个参数

$$k\lambda=\frac{1}{T}, \quad a=-V \quad (7.7.119)$$

其中 V 为系统的宏观速度，因之在 i 态的分子数由式(7.7.113)得出为

$$n_i=Ae^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_i-V \cdot g_i)} \quad (7.7.120)$$

只剩一个待定参数

$$A=\frac{N}{\sum_i e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon_i-V \cdot g_i)}} \quad (7.7.120)'$$

熵的数值 Φ 为

$$\left.\begin{aligned}\Phi_i &= kN\ln\left\{\sum_i e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_i - V\cdot g_i)}\right\}+\frac{u-V\cdot G}{T}\\ \psi_e &= kN\ln\left\{\sum_i e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_i - V\cdot g_i)}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(7.7.121)$$

设两不同系统有热的交换但没有动量的变换，则在平衡时

$$\left.\begin{aligned}&\delta\Phi^{(1)}+\delta\Phi^{(2)}=-k\sum_i \ln n_i^{(1)}\delta n_i^{(1)}-k\sum_j \ln n_j^{(2)}\delta n_j^{(2)}=0\\ &\delta u^{(1)}+\delta u^{(2)}=\sum_i \epsilon_i^{(1)}\delta n_i^{(1)}+\sum_j \epsilon_j^{(2)}\delta n_j^{(2)}=0\\ &\delta G^{(1)}=\sum g_i^{(1)}\delta n_i=0,\ \delta G^{(2)}=\sum g_j^{(2)}\delta n_j^{(2)}=0\\ &\delta N^{(1)}=\sum \delta n_i^{(1)}=0,\ \delta N^{(2)}=\sum \delta n_j^{(2)}=0\end{aligned}\right\}$$

(7.7.122)

因之

$$n_i^{(1)}=A^{(1)}e^{-\lambda(\epsilon_i^{(1)}+a\cdot g_i^{(1)})},\ n_j^{(2)}=A_e^{(2)-\lambda(\epsilon_j^{(2)}+b\cdot g_j^{(2)})}\quad(7.7.123)$$

两者的 λ 相同，但从式(7.7.86)″看来这两个系统的视温必须相同，所以 λ 必为 T 的函数，反之，单从统计力学本身也可以证明式(7.7.119)的可靠，因处于某 i 态分子的数目 n_i 在平衡状态下必为标量(在非平衡状态下，n_i 是变数，则由于不同坐标所取时间剖面的不同，n_i 就不一定是标量了)，这样就要求式(7.7.113)中的 A 和 $\lambda f_i=\lambda(\epsilon_i+a\cdot g_i)$ 都是标量。由于 Φ 又是标量 N、A 又是标量所以方程(7.7.115)要求

$$\lambda(u+a\cdot G)=\lambda_0 u_0$$

为标量，从 u 及 G 的表示式(7.7.102)得

$$\lambda(u+a\cdot G)=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(u-V\cdot G)$$

这个方程的成立并不限定于 u，G，V 的数值，因之

$$a=-V,\quad \lambda=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

而 λ 必为 T 的函数，因之 λ 除常数因子之外与 $1/T$ 的变换相同，这样也可以得出式(7.7.119)

在单原子理想气体的情形下，如以

$$\epsilon_i=\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}},\ g_i=\frac{m_0g_i}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}} \tag{7.7.124}$$

为 i 态中分子的能量及动量，则

$$f_i=\epsilon_i-\boldsymbol{V}\cdot g_i=\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}}\left(1-\frac{q_i\cdot\boldsymbol{V}}{C^2}\right)=\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^{02}}{C^2}}}\sqrt{1-\beta^2} \tag{7.7.125}$$

以上 βC 为相对静坐标的速度，q_i^0 为该静坐标中所测量的分子速率

所以

$$\lambda f_i=\frac{1}{kT}(\epsilon_i-\boldsymbol{V}\cdot g_i)=\frac{1}{kT^0}\frac{m_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^{02}}{C^2}}}=\frac{\epsilon_i^0}{kT^0}=\lambda f_i^0 \tag{7.7.125}'$$

验证分配率(7.7.120)的不变形式。由式(3.1.9)得分子的总动量为

$$\boldsymbol{G}=\sum n_i\frac{m_0q_i}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}}=\sum n_im_0\cdot\frac{q_i^0\sqrt{1-\beta^2}+\boldsymbol{V}\frac{(q_i^0\cdot\boldsymbol{V})}{V^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)+\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}\sqrt{1-\beta^2}}$$

由于 n_i 是 q_i^0 的偶函数，上式中含奇数 q_i^0 的各项在累加时对消，只剩

$$G=\sum\frac{m_0V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{n_i}{\sqrt{1-\frac{q_i^{02}}{C^2}}}$$

$$=\frac{V}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}\sum\frac{n_im_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^{02}}{C^2}}}=\frac{u_0}{C^2}\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad(7.7.126)$$

部分，以上 u_0 为在静坐标中所观察的分子总能量。再由

$$u=\sum\frac{n_im_0C^2}{\sqrt{1-\frac{q_i^2}{C^2}}}$$

$$=\sum\frac{n_im_0C^2}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\frac{q_i^{02}}{C^2}}}\cdot(1+\frac{q_i^0\cdot V}{C^2})=\frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(7.7.127)

得出分子的总动量及总能量成一四维矢量。

$$(\frac{u_0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}V,\frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^2}})。\quad(7.7.128)$$

除去这些动量能量之外，另外有由于压力场的动量和能量，这些虽然复杂但在 $u-V\cdot G$ 内此项

$$\frac{p\Omega\beta^2}{1-\beta^2}-\frac{p\Omega}{C^2(1-\beta^2)}V^2=0\quad(7.7.129)$$

恰好对消，而且由于(7.7.125)′的标量性质此项似不应在 $\epsilon_i-V\cdot g_i^1$ 内出现，因之不应影响分配系数，式(7.7.125)′和(7.7.121)的 Φ 及 ψ，只是在计算系统总动量和总能量时则应再加上压力场的动量和能量

$$G=\frac{u_0}{C^2\sqrt{1-\beta^2}}V+\frac{p\Omega}{C^2}V,u=\frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{p\Omega\beta^2}{1-\beta^2}$$

(7.7.130)

以上的统计方法可以推广到 Bose—Einstein 及 Fermi—Dirac

统计力学，Bose—Einstein 的热力学几率是

$$P_{BE}=\Pi_i \frac{(w_i+n_i)!}{w_i!\ w_2!\ \cdots n_1!\ n_2!\ \cdots} \tag{7.7.131}$$

w_i 为 i 微态的“权重”由 Boltzmann 理论得系统的熵

$$\Phi_{BE}=k\sum_i w_i\ln(1+\frac{n_i}{w_i})+k\sum_i n_i\ln(1+\frac{w_i}{n_i}) \tag{7.7.132}$$

熵的微变是

$$\delta\Phi_{BE}=k\sum_i \delta\, n_i(1+\frac{w_i}{n_i})+k\sum_i \delta w_i\ln(1+\frac{n_i}{w_i}) \tag{7.7.133}$$

设 w_i 不变则在平衡状态下

$$\delta\varphi_{BE}=k\sum_i \delta n_i(1+\frac{w_i}{n_i})=0$$

设总能量及总动量保持不变，则

$$\delta u=\sum \varepsilon_i\delta n_i=0,\ \delta G=\sum g_i\delta n_i=0 \tag{7.7.134}$$

如 $N=\sum n_i$ 的数目亦不变，则

$$\delta N=\sum \delta n_i=0 \tag{7.7.135}$$

由以上方程得出平衡态中粒子的分配率为

$$n_i=\frac{w_i}{Be^{\lambda(\varepsilon_i+a\cdot g_i)}-1} \tag{7.7.136}$$

在“光子”的情形下 N 的数目不守恒条件(7.7.135)就不成立，这样

$$\mathrm{n_i}=\frac{w_i}{e^{\lambda(\varepsilon_i+a\cdot g_i)}-1} \tag{7.7.137}$$

亦即式(7.7.136)中 $B=1$ 的特殊情况，与通常的结果相同. 由式(7.7.132)得出系统的熵为

$$\Phi_{BE}=kN\ln B+k\lambda(u+a\cdot G)-k\sum_i w_i\ln(1-\frac{1}{B}e^{-\lambda(\varepsilon_i+a\cdot g_i)})$$

不同平衡态，但同 w_i, q_i, g_i 的熵微差由上式得出为

$$\delta\Phi_{BE}=k\lambda(\delta u+\boldsymbol{a}\cdot\delta G)$$

因之 $\lambda,\boldsymbol{a}$ 的参数数值为

$$\lambda=\frac{1}{kT},\quad \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{V} \tag{7.7.138}$$

与以前相同，这样，

$$\Phi_{BE}=kN\ln B-k\sum w_i\ln\left(1-\frac{1}{B}e^{-\frac{\epsilon_i-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{g}_i}{kT}}\right)+\frac{u-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{G}}{T} \tag{7.7.139}$$

取黑体辐射中光子的分配为例，以光子的

$$\epsilon_i=h\upsilon_i,\quad \boldsymbol{g}_i=\frac{h\upsilon_i}{C}\boldsymbol{l} \tag{7.7.140}$$

$\boldsymbol{l}$ 为光子 $h\upsilon_i$ 的进行方向，以式(3.3.6)的波速度为 C，则

$$\epsilon_i-\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{g}_i=h\upsilon_i\left(1-\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{l}}{C}\right)=h\upsilon_i^0\sqrt{1-\beta^2}$$

υ_i^0 系宏观静坐标中所测的频率。因之

$$\frac{1}{kT}(\epsilon_i-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{g}_i)=\frac{1}{kT^0}h\upsilon_i^0 \tag{7.7.141}$$

为标量，在频率 υ_i 与 $\upsilon_i+\mathrm{d}\upsilon_i$ 之间，光波在立体角 $\mathrm{d}\omega$ 之内的权重是

$$w_i=\frac{\upsilon_i^2\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}\omega}{c^3}\triangle\Omega \tag{7.7.142}$$

$\triangle\Omega$ 为光波所占的体积(因为光的速度对任何坐标都是一样，也没有什么特殊坐标)，从式(3.6.13)得 $\triangle\Omega$，

$$\triangle\Omega=\triangle\Omega_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{\beta}} \tag{7.7.143}$$

今以 $\boldsymbol{V}$ 的方向为球坐标的极轴方向，则

$$\mathrm{d}\omega=\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi \tag{7.7.144}$$

α 为光线与 $\boldsymbol{V}$ 轴所成的角度，由式(3.3.4)及(3.3.5)

$$\upsilon=\upsilon^{0}\frac{(1+l^{0}\beta)}{\sqrt{1-\beta^{2}}},\cos\alpha=\frac{\cos\alpha^{0}+\beta}{H\beta\cos\alpha^{0}},\varphi=\varphi^{0},\quad(7.7.145)$$

其中 $\cos\alpha=l$。再由

$$\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}l\mathrm{d}\varphi=\begin{Vmatrix}\frac{\partial\upsilon}{\partial\upsilon_0} & \frac{\partial\upsilon}{\partial l_0} & \frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi_0}\\ \frac{\partial l}{\partial\upsilon_0} & \frac{\partial l}{\partial l_0} & \frac{\partial l}{\partial\varphi_0}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon_0} & \frac{\partial\varphi}{\partial l_0} & \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}\end{Vmatrix}\mathrm{d}\gamma^{0}\mathrm{d}l^{0}\mathrm{d}\varphi^{0}\quad(7.7.146)$$

并以式(7.7.144)代入，得

$$\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}\omega=\frac{\sqrt{1-\beta^{2}}}{1+\beta l^{0}}\mathrm{d}\upsilon^{0}\mathrm{d}\omega^{0}\quad(7.7.147)$$

因之权重

$$\frac{1}{C^{3}}\upsilon^{2}\mathrm{d}\upsilon\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{C^{3}}\upsilon_{0}^{2}\mathrm{d}\upsilon_{0}\mathrm{d}\omega_{0}\mathrm{d}\Omega_{0}\quad(7.7.148)$$

为标量，由于 ω_i 为纯数字，这也是必然的结果。

光子的总能量

$$u=\sum n_i\varepsilon_i=\sum n_i h\upsilon_i=\sum n_i h\upsilon_i^{0}\frac{1+l^{0}\beta}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\quad(7.7.149)$$

将式(7.7.137)代入得(α_0 从零到 π)

$$u=\sum\frac{h\upsilon_0^{3}\mathrm{d}\upsilon_0\mathrm{d}\Omega_0}{e^{\frac{h\upsilon_0}{kT^{0}}}-1}\frac{(1+\beta\cos\alpha_0)}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\sin\alpha_0\mathrm{d}\alpha_0\mathrm{d}\varphi_0=\frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\quad(7.7.150)$$

u_0 是静坐标中测量的光子总能量，光子的动量

$$G=\sum\frac{h\upsilon_0(\beta+l_0)}{C\sqrt{1-\beta^{2}}}\frac{\upsilon_0^{2}\mathrm{d}\upsilon_0\mathrm{d}\omega_0\mathrm{d}\Omega_0}{e^{\frac{h\upsilon_0}{kT_0}}-1}=\frac{u_0V}{C^{2}\sqrt{1-\beta^{2}}}\quad(7.7.151)$$

由此可见黑体辐射中光子本身的总动量及总能量

$$\left(\frac{u_0V}{C^{2}\sqrt{1-\beta^{2}}},\frac{u_0}{\sqrt{1-\beta^{2}}}\right)\quad(7.7.152)$$

成一四维矢量(除此之外，当然还须加上压力场的动量及能量)。

这样可以计算式(7.7.139)的 $\Phi(B=1)$ 等等数值，这些结果可以先从静坐标中的各通常数量推化出来，此处也不必细赘。

Fermi—Dirac 的热力学几率为

$$P_{FD}=\Pi_i \frac{w_i!}{n_1 n_2!\ \cdots (w_1-n_1)!\ (w_2-n_2)!\ \cdots} \tag{7.7.153}$$

同样的步骤可以推出平衡态时粒子的分配率为

$$n_i=\frac{w_i}{De^{\frac{\epsilon_i-v\cdot g_i}{kT}}+1} \tag{7.7.154}$$

D 为一待定常数，并算出系统的熵为

$$\Phi_{FD}=kN\ln D+k\sum_i w_i\ln\left(1+\frac{1}{D}e^{-\frac{\epsilon_i-v\cdot g_i}{kT}}\right)+\frac{u-V_iG_i}{T} \tag{7.7.155}$$

以及其他关系，此处也不赘叙。

§7.8 场论的变分法

设以

$$Q_\mu=Q_\mu(x,y,z,iCt)\quad \mu=1,\cdots n \tag{7.8.1}$$

等数量表示宇宙间各点的“场”，为空间时间各点的函数，Q_μ 可为矢量，张量，旋量或其组合，例如 Q_1 为标量，Q_2,Q_3,Q_4,Q_5 为一四维矢量等等〔参看式(6.2.26)〕，再设一标量或权 n 的膺标量 L，

$$L=L\left(Q_\mu,\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha},x_\beta\right)(\alpha,\beta=1,2,3,4) \tag{7.8.2}$$

满足变分方程

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_\Omega\left(L\left(Q_\mu,\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha},x_\beta\right)dxdydz=0\right. \tag{7.8.3}$$

Ω 为三维空间的体积，或

$$\delta\iiint_{\Sigma} L(Q_\mu, \frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}, x_\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0 \tag{7.8.4}$$

Σ为四维时空超体积。今设在以上积分Σ边界上

$$(\delta Q_\mu)_{\text{边上}} = 0, \tag{7.8.5}$$

则由式(7.8.4)可得出 Euler 方程。

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha})} = 0 \tag{7.8.6}$$

$$\alpha = 1,2,3,4;\ \mu = 1,2\cdots n$$

此方程组为协变方程组，叙述Q_μ在时间及空间的变化性质。今先将式(7.8.6)的协变性证明于下。

设在洛伦兹变换下场量Q_μ为线形变换

$$Q'_\mu = b_{\mu\gamma}Q_\gamma, \tag{7.8.7}$$

其中$b_{\mu\gamma}$只是洛伦兹变换系数的函数，而不是x,y,z,t，及Q_μ的函数，例如Q_μ含一个标量及一个矢量则$b_{\mu\gamma}$为

$$b_{\mu\gamma} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ 0 & l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{Vmatrix}$$

形式，由式(7.8.7)可以解出Q_γ得

$$Q_\gamma = C_{\gamma\lambda}Q'_\lambda \tag{7.8.8}$$

将式(7.8.7)代入上式则得

$$b_{\mu\gamma}C_{\gamma\lambda} = \delta_{\mu\lambda}(\mu,\gamma,\lambda = 1,2,\cdots n) \tag{7.8.9}$$

的关系，微分式(7.8.8)或式(7.8.7)得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\alpha}&=C_{\gamma\lambda}\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x_\alpha}=C_{\gamma\lambda}\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\alpha}\\ \frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta}&=b_{\mu\gamma}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x'_\beta}=b_{\mu\gamma}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial x_\epsilon}{\partial x'_\beta}\end{aligned}\right\}\tag{7.8.10}$$

的关系，因 L 为权 n 的膺标量

所以 $$L'=J^nL(Q_\mu'\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta},x'_\alpha)=J^nL(b_{\mu\gamma}Q_\gamma,b_{\mu\gamma}\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial x_\epsilon}{\partial x'_\beta},x'_\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\epsilon})}=\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta})}\cdot b_{\mu\gamma}\frac{\partial x_\epsilon}{\partial x'_\beta}\tag{7.8.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\epsilon})}=b_{\mu\gamma}\frac{\partial x_\epsilon}{\partial x'_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta})}=b_{\mu\gamma}\frac{\partial}{\partial x'_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta})},\tag{7.8.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\gamma}=\frac{\partial L}{\partial Q'_\mu}b_{\mu\gamma},\tag{7.8.13}$$

因 $$L=J^{-n}L'$$

所以 $$\frac{\partial L}{\partial Q_\gamma}-\frac{\partial}{\partial x_\epsilon}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial x_\epsilon})}=J^{-n}b_{\mu\gamma}(\frac{\partial L'}{\partial Q'_\mu}-\frac{\partial}{\partial x'_\beta}\frac{\partial L'}{\partial(\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\beta})})\tag{7.8.14}$$

右式等于零，即证明左手亦等于零。因之式(7.8.6)为协变方程，上式并表示(7.8.6)的变换与 Q_μ 为同型。

从式(7.8.4)导出式(7.8.6)的步骤如下，因

$$\delta\int L\mathrm{d}\sum=\int\left\{\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}\delta Q_\mu+\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha})}\delta(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha})\right\}\mathrm{d}T=0\tag{7.8.15}$$

以上 $d\sum$ 为四维小体积素 $dx\,dy\,dz\,dt$。由于*

$$\delta\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta Q_\mu, \tag{7.8.16}$$

式(7.8.15)的右手第二项可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\delta Q_\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\right\}-\delta Q_\mu\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\right),$$

其第一项可积分到边界上，由于式(7.8.5)为零，再由于 δQ_μ 为任意数值，因之式(7.8.6)必须成立才能使式(7.8.15)在任何 δQ_μ 时为零。

我们可以注意到，在式(7.8.4)的 L 内如加任何散度

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}F_\alpha\left(Q_\mu,\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta}\right) \tag{7.8.17}$$

则在积分后此项即积分成 $\sum$ 边界上的数值，但边界上的 $\delta Q_\mu=0$，因之在式(7.8.4)中其变化值亦自动为零，而不影响 Enler 方程(7.8.6)，所以相应于 Enler 方程(7.8.6)的 L 可以加上式(7.8.17)而不是唯一的形式，当 L 内含有 Q_μ 的二次微分出现时，则由式(7.8.15)导出的 Enler 方程应改为

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\right\}+\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)}\right\}=0 \tag{7.8.18}$$

形式，这个方程组也可以证明具有协变性。

我们现在证明方程组(7.8.6)中含有一散度为零的二阶四维张量或膺张量。

---

* 设 $\delta Q_\mu=Q_{\mu(2)}-Q_{\mu(1)}$，$\delta\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{\partial Q_{\mu(2)}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial Q_{\mu(1)}}{\partial x_\alpha}$，$Q_{\mu(2)}$，$Q_{\mu(1)}$ 为两种不同函数

所以 $$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta Q_\mu=\delta\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}$$

即式(7.8.16)

$$\Theta_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}L-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})} \tag{7.8.19}$$

因

$$\frac{\partial\Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}$$

$$=\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha})-\frac{\partial^2 Q_\mu}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}$$

$$-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}$$

$\partial L/\partial x_\alpha$为 L 对其中含显示 x_α 的微分，上式右手第一项由于方程(7.8.6)与第五项消去，第二项与第四项消去，因之

$$\frac{\partial\Theta_{\alpha\beta}}{\partial_{\alpha\beta}}=(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}) \tag{7.8.20}$$

设 L 内不显示的含 x_α 而仅在 Q_μ 内隐含 x_α 则此项为零。要证明式(7.8.19)的右方确系张量，我们可以从(7.8.10)及(7.8.11)得

$$\Theta_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}L-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}=\delta_{\alpha\beta}J^{-n}L-C_{\mu\lambda}\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x'_\epsilon}\frac{\partial x'_\epsilon}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}$$

$$=\delta_{\alpha\beta}J^{-n}L-C_{\mu\lambda}\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q'_\upsilon}{\partial x'_\epsilon})}b_{\upsilon\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\epsilon}$$

$$=\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\epsilon}J^{-n}\left\{\delta_{\gamma\epsilon}L'-\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial L'}{\partial(\frac{\partial Q'_\lambda}{\partial x'_\epsilon})}\right\} \tag{7.8.21}$$

因之 $\Theta_{\alpha\beta}$确系 n 的膺张量。

换言之，如 L 不显示的含 x_α，则方程组(7.8.6)表示 Q_μ 场内有守恒定律

$$\frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial_{x\beta}}=0$$

唯照式(7.8.19)找出来的 $\Theta_{\alpha\beta}$一般不对称，与角动量守恒定律抵触；所以必须另找对称的 $T_{\alpha\beta}$。一般讲起来，我们可以从方程(7.8.6)本身看出如何改变 $\Theta_{\alpha\beta}$成 $T_{\alpha\beta}$，使即满足(7.8.22)而又为对称的张量。

但 Belinfante 于 1939 年找出一个规则来补充这方面的缺点。在经坐标微变

$$x'_{\alpha}-x_{\alpha}=\delta x_{\alpha}=\omega_{\alpha\nu}x_{\nu} \tag{7.8.23}$$

之后，δ 现在表示微变换，则场量微变为

$$Q'_{\mu}-Q_{\mu}=\delta Q_{\mu}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}Q_{\nu}. \tag{7.8.24}$$

其中

$$\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}=-\Lambda^{\beta\alpha}_{\mu\nu} \tag{7.8.25}$$

为不含 ω 的变换系数，因为 $\omega_{\alpha\beta}$即然是小数，Λ 内当然不再含 ω，又由于 $Q'\mu$ 与 Q_{ν} 为线形关系，因之式(7.8.24)右方也只能有 Q_{ν} 的一次方出现；再由于 $\omega_{\alpha\beta}$为 α,β 反对称，$\Lambda^{\alpha\beta}$内对称的项自动消除，也不能存在，因之 Q_{μ}的微变必为式(7.8.24)的形式，如 Q 为标量，则 $\delta Q=0$。

所以

$$\Lambda=0, \tag{7.8.26}$$

设 Q_{μ} 为矢量，则

$$\delta Q_{\mu}=w_{\mu\nu}Q_{\nu}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}w_{\alpha\beta}Q_{\nu} \tag{7.8.27}$$

中的 Λ 为

$$\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \tag{7.8.28}$$

以及其他等等，因

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\gamma}}-\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\gamma}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}=(\delta_{\alpha\gamma}-\omega_{\alpha\gamma})\frac{\partial}{\theta x_{\alpha}} \tag{7.8.29}$$

所以

$$\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'_{\gamma}}\right)=w_{\gamma\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

所以
$$\delta\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}\right)=\frac{\partial Q'_\mu}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}w_{\alpha\beta}\frac{\partial Q_\nu}{\partial x_\gamma}+w_{\gamma\beta}\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{7.8.30}$$

我们现在假设 L 为标量，且除 Q_μ，$\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}$ 之外不再含其他与坐标变换有关的量，则

$$\delta L=0=\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}\delta Q_\mu+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\delta\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right) \tag{7.8.31}$$

将式(7.8.27)及(7.8.30)代入上式并取出 $\omega_{\alpha\beta}$，得

$$0=\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}Q_\nu+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}\right)}\frac{\partial Q_\nu}{\partial x_\gamma}\right)\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta}\right\}w_{\alpha\beta} \tag{7.8.32}$$

用方程组(7.8.6)代入上式第一项再用式(7.8.19)定义的 $\Theta_{\alpha\beta}$ 代入上式的末项，则得

$$\left[\frac{\alpha}{\alpha\chi_\gamma}\left\{Q_\nu\frac{\alpha L}{\alpha\left(\frac{\alpha\theta_\mu}{\alpha\chi_\gamma}\right)}\right\}\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}+\delta_{\beta\alpha}L-\Theta_{\alpha\beta}\right]\omega_{\alpha\beta}=0 \tag{7.8.33}$$

由于 $\omega_{\alpha\beta}$ 为任意反对称形式，上面方括弧内必为对称式*，故

$$\Gamma_{\alpha\beta}=\Theta_{\alpha\beta}+\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{Q_\nu\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}\right)}\right\} \tag{7.8.34}$$

必为 α,β 对称的数量，我们令上式中

$$\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{Q_\nu\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}\right)}\right\}\equiv\frac{\partial}{\partial x_\gamma}H_{\alpha\beta\gamma} \tag{7.8.35}$$

---

* 如令方程内为 $R^{\alpha\beta}$，则式(7.8.33)为
$\omega_{12}(R^{12}-R^{21})+\omega_{13}(R^{13}-R^{31})+\cdots=0$
所以 $R^{12}=R^{21}$　　$R^{13}=R^{31}\cdots$
因之 $R_{\alpha\beta}$ 必为对称

因 Λ 为常数所以可以放在微分符号之内，H 为 $\alpha\beta$ 反对称，

$$H_{\alpha\beta\gamma}=-H_{\beta\alpha\gamma} \tag{7.8.36}$$

在式(7.8.34)内再加入任何 α、β 对称的量，则 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 仍然为 α、β 对称，如在式(7.8.34)中加入 α、β 对称的量

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(F_{\alpha\beta\gamma}+F_{\beta\alpha\gamma}),$$

使

$$H_{\alpha\beta\gamma}+F_{\alpha\beta\gamma}+F_{\beta\alpha\gamma}$$

为 β、γ 反对称，则结果的 $T_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{\partial\Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}(H_{\alpha\beta\gamma}+F_{\alpha\beta\gamma}+F_{\beta\alpha\gamma})=\frac{\partial\Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.8.37}$$

即是散度为零，且 α、β 对称的张量，因 $H_{\alpha\beta\gamma}-H_{\alpha\gamma\beta}$ 显然为 β、γ 反对称，但由于式(7.8.36)，$-H_{\alpha\gamma\beta}=H_{\gamma\alpha\beta}$，因之如将 $\alpha\beta$ 对称量 $H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha}$ 加入 $H_{\alpha\beta\gamma}$ 后，则

$$H_{\alpha\beta\gamma}+(H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha})=(H_{\alpha\beta\gamma}-H_{\alpha\gamma\beta})+H_{\gamma\beta\alpha}$$

为 β、γ。反对称的数，因之

$$T_{\alpha\beta}=\Theta_{\alpha\beta}+\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(H_{\alpha\beta\gamma}+H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha}) \tag{7.8.38}$$

即是 α、β 对称而又是散度为零的张量，合于(7.2.1)的要求，将上式对任一空间体积 Ω 积分后，得

$$\iiint_\Omega T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega=\iiint_\Omega\Theta_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega+\frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega(H_{\alpha 44}+H_{4\alpha 4}+H_{44\alpha})\mathrm{d}\Omega$$

及 Ω 边界上的面积分，上式中右手第二项，由于

$$H_{\alpha\beta\gamma}=-H_{\beta\alpha\gamma},$$

等于零，因之在孤立系统。

$$\iiint_\Omega T_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega=\iiint_\Omega\Theta_{\alpha 4}\mathrm{d}\Omega \tag{7.8.39}$$

换言之，$T_{\alpha 4}$，$\Theta_{\alpha 4}$ 在孤立系统中积分后的数值相同，$T_{\alpha\beta}$ 的对称形式

保证孤立系统中角动量的守恒定律，所以式(7.8.38)是我们要求的场能张量。

例如无电荷的电磁场 L 可取为

$$L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2=\frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)^2 \tag{7.8.40}$$

由此得出的 Enler 方程为式(7.8.4)的

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha^2}-\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\alpha}=0=\frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\alpha} \tag{7.8.41}$$

从(7.8.19)得出的

$$\Theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}F_{\mu\beta}$$

显然不对称。

因 A_α 为矢量，A 为式(7.8.28)的数值，则式(7.8.35)的 H 为

$$\begin{aligned}H_{\alpha\beta\gamma}&=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})A_\nu\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\mu}\right)\\&=\frac{1}{2}A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{1}{2}A_\alpha\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(H_{\alpha\beta\gamma}+H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha}&=\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left\{A_\alpha\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}\right)\right\}\\&=-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}F_{\beta\gamma}+A_\alpha\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\end{aligned} \tag{7.8.42}$$

从式(7.8.38)得出

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\delta_{\alpha\beta}-F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta} \tag{7.8.43}$$

为 α、β 对称张量，其散度

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}F_{\mu\beta}-F_{\mu\alpha}\frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x_\beta}\\&=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\nu}-\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu x_\alpha}-2\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right.\end{aligned}$$

$$+2\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\nu \partial x_\mu}=0 \tag{7.8.44}$$

(由于 $F_{\mu\nu}$的 μ、ν 反对称，括弧内 $\mu\nu$ 为对称，所以等于 0)但如场内有电荷存在，则电磁场的方程为式(7.3.13)，

$$\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}\right)=-\frac{1}{C}\sigma_\mu \tag{7.8.45}$$

上式也可以从 Euler 方程得出，设 L 改写为

$$L=\frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}\left(\frac{\alpha A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}\right)^2-\frac{1}{C}\sigma_\mu A_\mu, \tag{7.8.46}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}=\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial A_\mu}=-\frac{1}{C}\sigma_\mu$$

不过在这种情况下，

$$L=L\left(A_\mu,\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},\sigma_\mu\right) \tag{7.8.47}$$

σ_μ 也是(x,y,z,t)的函数，但我们不能从式(7.8.46)L 得出 σ_μ 变化的方程，所以式(7.8.46)不全。因之也不能成为闭合系统，我们从式(7.8.46)也得不出散度为零的张量 $\Theta_{\alpha\beta}$或 $T_{\alpha\beta}$。

再例如理想流体在微扰下的运动方程(7.5.103)可以从标量

$$L=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha_0^2}-\frac{1}{C^2}\right)V_\alpha V_\beta\frac{\partial\pi}{\partial\pi_\alpha}\frac{\partial\pi}{\partial x_\beta}\right\} \tag{7.8.48}$$

得出 Euler 协变方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}\right)}=\frac{\partial^2\pi}{\partial x_\alpha^2}-\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{C^2}V_\alpha V_\beta\frac{\partial^2\pi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)=0 \tag{7.8.49}$$

$$\Theta_{\alpha\beta}=L\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}\left\{\frac{\partial\pi}{\partial\pi_\beta}-\left(\frac{1}{\alpha_0^2}-\frac{1}{C^2}\right)V_\beta V_\nu\frac{\partial\pi}{\partial x_\nu}\right\}, \tag{7.8.50}$$

此时

$$\frac{\partial\Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \tag{7.8.51}$$

但 $\Theta_\alpha\beta$ 不对称且由于 V_α 的出现，Belinlfant 的方法不能用，我们或

许可以补充他的方法，如方程(7.8.31)可改为

$$0=\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}\delta Q_\mu+\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha})}\delta(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha})+\frac{\partial L}{\partial V_\alpha}\delta V_\alpha, \qquad (7.8.52)$$

式(7.8.33)也可作相应的改变；由于 V_α 是四维矢量故

$$\Gamma_{\alpha\beta}=\Theta_{\alpha\beta}+\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\left\{Q_\upsilon\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\upsilon})}\right\}+\lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}\frac{\partial L}{\partial V_\mu}V_\upsilon \qquad (7.8.53)$$

必为 α、β 对称张量，以上

$$\lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\upsilon\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\upsilon\alpha}) \qquad (7.8.54)$$

为宏观四维速度 V_α 因坐标改变的系数。由于 π 为标量，其 $\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}$ 系数为零，式(7.8.26)，(7.8.53)写出为对称张量。

$$T_{\alpha\beta}=L\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\pi}{\partial x_\beta}+\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha_0^2}-\frac{1}{C^2})(V_\alpha\frac{\partial\pi}{\partial\pi_\beta}+V_\beta\frac{\partial\pi}{\partial x_\alpha})V_\upsilon\frac{\partial\pi}{\partial x_\upsilon} \qquad (7.8.55)$$

但此张量的散度不为零

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\neq 0, \qquad (7.8.56)$$

所以式(7.2.1)的方程不能成立，不能从式(7.8.49)找出散度为零的二阶对称张量，事实上，式(7.5.90)是场能张量，其波动值应从该式相应的求出。

从上面的例子可以看出，必须 L 内不含 Q_μ 以外的变量又不含其它虽然不变但可随坐标改换的如 V_α 等量，则由式(7.8.38)出来的 $T_{\alpha\beta}$ 才是散度为零的对称张量。否则，在一般情形下，能量动量和角动量守恒定律不能同时成立，这些是"非闭合系统"的相互作用情形；由于能量动量角动量均相互影响，当然不能单独守恒。

场论中哈密顿(Hamilton)函数的能常定义为(字母上加一点的系对 t 的偏微分)

$$H=Q_\mu\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}-L, \tag{7.8.57}$$

这个数值和式(7.8.19)的 Θ_{44}

$$\Theta_{44}=L-\frac{\partial Qu}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Qu}{\partial t})} \tag{7.8.58}$$

相同，但一般与场能张量 $T_{\alpha\beta}$ 的能量密度一 T_{44} 不同。因之照 §7.2 的末段讨论看来，哈密顿 H 一般并不是场能密度，但是它的空间积分确是整个场能量式(7.8.39)。设 L 内不明显的含 x_a，则 H 的微变为

$$\delta H=\frac{\partial L}{\partial Q_u}\delta Q_u+Q_u\delta(\frac{\partial L}{\partial Q_u})-\frac{\partial L}{\partial Q_u}\delta Q_\mu-\frac{\partial L}{\partial Q_u}\delta Q_u$$
$$-\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_u}{\partial x_i})}\delta(\frac{\partial Q_u}{\partial x_i}), \tag{7.8.59}$$

$$\mu=1,2,\cdots n,i=1,2,3$$

上式右方第一项与第四项对消，如以 Π_μ

$$\Pi_\mu=\frac{\partial L}{\partial Q_\mu} \tag{7.8.60}$$

作为新参数代替 H 中的 Q_μ，亦即以 H 为 Q_μ、Π_μ 及 $\partial Q_\mu/\partial x_i$ 的函数，则由式(7.8.59)得

$$\frac{\partial H}{\partial\Pi_\mu}=\frac{\partial Q_\mu}{\partial t},\frac{\partial H}{\partial Q_\mu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_\mu},\frac{\partial H}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_i})}=\frac{-\partial L}{\partial(\frac{\partial\theta_\mu}{\partial x_i})} \tag{7.8.61}$$

由于方程(7.8.6)，上式可写成表示 Q_μ、Π_μ 时间变化率的哈密顿形式：

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial\pi_\mu},\frac{\Pi_\mu}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial Q_\mu}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial H}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_i})}\right\} \tag{7.8.62}$$

设当 $t=0$ 时，Q_μ、Π_μ 在场中各点为已知，因之该时各点的 $\partial Q_\mu/\partial x_i$ 亦为已知，则由式(7.8.62)可以解出以后的 Q_μ 及 Π_μ 数值。

但由于式(7.8.57)的 H 只是 $\Theta_{\alpha\beta}$的一个分量，这些方程不明显的具相对性的协变形式*；今加以适当的改变于下。

在相对论中，时间不能具特殊的地位，因之我们定义新的 $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}=\sum_\alpha \frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}-L,(\alpha=1.2.3.4) \tag{7.8.63}$$

函数，由式(7.8.19)看出

$$\mathscr{H}=-\Theta_{44}+L \tag{7.8.64}$$

为显然的标量(或膺标量)，其微变经对消后为

$$\delta\mathscr{H}=\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\delta\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)}\right)-\frac{\partial L}{\partial Q_\mu}\delta Q_\mu \tag{7.8.65}$$

其中定义 $4n$ 个参变量 $P_{\mu\alpha}$为

$$P_{\mu\alpha}\equiv\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\right)},(\mu=1,2\cdots n,\alpha=1.2.3.4) \tag{7.8.66}$$

设以此 $4n$ 个 $P_{\mu\alpha}$代替 $\mathscr{H}$ 中的 $4n$ 个 $\partial Q_\mu/\partial x_\alpha$，则 $\mathscr{H}$ 为 Q_μ、$P_{\mu\alpha}$的函数，再由于式(7.8.6)上式可写成

$$\delta\mathscr{H}=\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\delta P_{\mu\alpha}-\frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\delta Q_\mu \tag{7.8.67}$$

设此 $4n$ 个 $P_{\mu\alpha}$可以作为独立参变量，则上式为

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial P_{\mu\alpha}},\frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial Q_\mu} \tag{7.8.68}$$

这些方程的协变性至为明显，可以仿式(7.8.11)及(7.8.13)

---

* 由于(7.8.14)的协变性，这些方程在加上式(7.8.61)之后，当然仍具协变性质，而只是不能从式(7.8.62)及式(7.8.57)直接看出

等式予以证明，设以 $P_{\mu 4}$ 用 icH_μ 特别标出

$$H_\mu \equiv \frac{1}{ic} \quad P_{\mu 4} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\mu}, \tag{7.8.69}$$

则式(7.8.68)亦可写成 Q_μ 及 H_μ 的 时间变化率方程

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial H_\mu}, \frac{\partial H_\mu}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_\mu} - \frac{\partial P_{\mu i}}{\partial x_i} \tag{7.8.70}$$

$$(\mu = 1,2\cdots \quad i = 1,2,3)$$

以及 $3n$ 个决定 P_μ 及 $\partial Q_\mu/\partial x_i$ 关系的代数方程

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_{\mu i}} \tag{7.8.71}$$

此哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 本身虽不具守恒性质，但利用式(7.8.68)则可以证明

$$\Theta_{\alpha\beta} \doteq \frac{-\partial \mathscr{H}}{\partial P_{\mu\alpha}} P_{\mu\beta} + \delta_{\alpha\beta}\left(P_{\mu\gamma}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_{\mu\gamma}} - \mathscr{H}\right) \tag{7.8.72}$$

具有散度为零

$$\frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \tag{7.8.73}$$

的性质。

在以前举的例子内，式(7.8.48)中 $Q=H$，$(\mu=1)$，

$$P_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} - \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{c^2}\right)V_\alpha V_\beta \frac{\partial H}{\partial x_\beta} \tag{7.8.74}$$

所以

$$\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{a_0^2}{c^2}\right)V_\alpha V_\beta P_\beta \tag{7.8.75}$$

所以

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left\{P_\alpha^2 + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{a_0^2}{c^2}\right)V_\alpha V_\beta P_\alpha P_\beta\right\} = L \tag{7.8.76}$$

由式(7.8.68)得出

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial H} = 0, \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_\alpha} = P_\alpha + \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{a_0^2}{c^2}\right)V_\alpha V_\beta P_\beta \tag{7.8.77}$$

与式(7.8.75)及式(7.8.49)相同的结果。

但在式(7.8.40)中如以 $Q_\mu = A_\mu, \mu = 1,2,3,4$，则 16 个方程

$$P_{\mu\alpha} = \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha})} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}, \mathscr{H} = \frac{1}{4}P_{\mu\alpha}{}^2 = L, \tag{7.8.78}$$

中的 $P_{\mu\alpha}$ 本身具反对称性质

$$P_{\mu\alpha} = -P_{\alpha\mu}, P_{11} = P_{22} = P_{33} = P_{44} = 0 \tag{7.8.79}$$

因之式(7.8.67)中的 $P_{\mu\alpha}$ 只有六个独立参数，式(7.8.68)不能成立，但

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{H} &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\delta P_{\mu\alpha} - \frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\delta Q_\mu \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu})\delta P_{\mu\alpha} - \frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\delta Q_\mu \end{aligned} \tag{7.8.80}$$

此时即将 $P_{\mu\alpha}$ 反对称的性质表出。式(7.8.68)应改为

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}) = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial P_{\mu\alpha}}, \frac{\partial P_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial Q_\mu} = 0 \tag{7.8.81}$$

与式(7.8.41)及(7.8.78)相同。

§7.9 Dirac 质点的波动方程

一个质点的动量能量

$$P_i = \frac{m_0\dot{x}_i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}, \quad P_4 = \frac{iE}{C} = \frac{im_0C}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}} \tag{7.9.1}$$

满足标量方程

$$P_\alpha{}^2 = -m_0{}^2C^2 \tag{7.9.2}$$

Schrödinger 量子化方法是使通常方程中的

$$P_\alpha \to \frac{h}{2\Pi i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{7.9.3}$$

再运算到某种场量 Q_μ 上去. 式(7.9.3)协变方程，不受坐标选择的影响，经过式(7.9.3)之后，式(7.9.2)为相对性的“波”方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{4\Pi^2 m^2 C^2}{h^2})Q_\mu = 0 \qquad (7.9.4)$$

此亦称 Klein-Gordan 方程，为任何自由质点必须满足的波方程式，显然亦为协变方程。假使不是自由质点，则也可以作适当的修改，式(4.7.19)。

在球对称且 Q_μ 不是时间函数的情形下，式(7.9.4)允许

$$Q_\mu = \frac{A}{r}e^{-\frac{r}{\lambda}} \qquad (7.9.5)$$

的解答。代入式(7.9.4)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial Q_\mu}{\partial r}) - \frac{4\Pi^2 m_0^2 C^2}{h^2}Q_\mu = 0$$

内得

$$\lambda = \frac{2\Pi m_0 C}{h} \qquad (7.9.6)$$

此 λ 数值亦称 m_0 的 compton 波长(名词的来源见式(4.8.29))，式(7.9.5)表示场 Q_μ 数值在距离 r 大於 m_0 的 comptom 波长后即急剧下降。

$$\lambda_{(电子)} = 3.86 \times 10^{-11}\text{cm} \quad \lambda_{质子} = 2.1 \times 10^{-14}\text{cm}$$

质量愈大，它的“场”也下降得愈快。

能量 E 在量子力学中为哈密顿算符 H，通常量子力学只含对 t 一次的微分。Dirac 将式(7.9.2)开方成

$$E = H = \sqrt{P_i^2 + m_0^2 C^4} = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_3 + \alpha_4\rho_4 \qquad (7.9.7)$$

形式，其中 α 为 Clifford 的“超复数”满足

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (7.9.8)$$

的条件，再将式(7.9.3)代入式(7.9.7)得线型波方程式，但这个步

骤并不是必需的。

任何高阶微分方程总可以拆成几个一阶的微分方程组。例如在式(7.9.4)中以

$$\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha} \equiv Q_{\mu\alpha} \tag{7.9.9}$$

作为另一套变数，则与式(7.9.4)的

$$\frac{\partial Q_{\mu,\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{4\Pi^2 m_0{}^2 C^2}{h^2} Q_\mu$$

可拼成为一组一阶微分方程。将 $Q_1, Q_2 \cdots Q_{1.1} \cdots Q_{\mu_2,\alpha}$ 排成一行作为 n 个变数，以 ψ 代表之，则上述方程组可以写成

$$\left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + b\right)\psi = 0 \tag{7.9.10}$$

形式，a_α, b 为 $n \times n$ 的适当方阵，质点的量子力学可从方程组(7.9.10)开始讨论。

由於式(7.9.10)的各个 ψ 必须满足 Klein-Gordan 方程(7.9.4)。这样就可以得出 a_α, b 方阵的性质，可用另一算符 D 乘式(7.9.10)的左方以完成 Klein-Gordan 方程(7.9.4)的形式。

设以*

$$D = C_0 + C_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{7.9.11}$$

C_0, C_α 均为适当的方阵，将 D 在式(7.9.10)的左边运算得

---

* 如取 D 为

$$D = C_0 + C_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + C_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \cdots$$

形式，则得出不同的 a_α 关系。我们这里用式(7.9.11)得出 Dirac 的方程，自旋为 1/2 的质点波方程，可参考量子场论方面的文献

$$\left\{C_0 b + (C_0 a_\alpha + C_\alpha b)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + C_\alpha a_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right\}\psi = 0 \tag{7.9.12}$$

与式(7.9.4)比较得

$$C_0 b = -\frac{4\Pi^2 m_0^2 C^2}{h^2} = -K^2 \tag{7.9.13}$$

$$C_0 a_\alpha + C_\alpha b = O \tag{7.9.14}$$

$$C_\alpha a_\beta + C_\beta a_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \tag{7.9.15}$$

由式(7.9.13)见$|b| \neq 0$。因之在式(7.9.10)左方程乘以 b 的倒阵 kb^{-1}得

$$(Kb^{-1}a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + K)\psi = 0$$

用 γ_α 代表 $Kb^{-1}a_\alpha$，上式成为

$$(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + K)\psi = 0 \tag{7.9.16}$$

现在从这个方程开始。用式(7.9.11)在左方运算得

$$C_0 K = -K^2 \quad C_0 = -K$$

$$-K\gamma_\alpha + C_\alpha K = 0 \quad C_\alpha = \gamma_\alpha$$

因之从式(7.9.15)得出系数方阵 γ_α 必须满足的条件，

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \tag{7.9.17}$$

此时 D 为

$$D = \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - K \tag{7.9.18}$$

现在可再从式(7.9.16)及(7.9.17)研究方程的协变情况，我们要求在不同的 S' 系中式(7.9.16)变成同样形式的(且为同样 γ_α 的)。但不一定同 ψ 的

$$(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} + K)\psi = 0 \qquad (7.9.19)$$

设因洛伦兹变换 $x'_\alpha = l_{\alpha\beta}x_\beta$ 致使 ψ 变换为

$$\psi' = S\psi \qquad (7.9.20)$$

S 为一适当的 $n\times n$ 方阵，则(7.9.16)为

$$(l_{\beta\alpha}r_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\beta} + K)S^{-1}\psi' = 0 \qquad (7.9.21)$$

如以

$$r'_\alpha \equiv l_{\alpha\beta}r_\beta, \qquad (7.9.22)$$

则

$$r_\alpha' r_\beta' + r_\beta' r_\alpha' = l_{\alpha\zeta}l_{\beta\eta}(r_\zeta r_\eta + r_\eta r_\zeta) = 2\delta_{\alpha\beta}, \qquad (7.9.23)$$

满足与式(7.9.18)相同的条件，再在式(7.9.21)的左方乘以 S 得

$$(Sr_\beta' S^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\beta'} + K)\psi' = 0 \qquad (7.9.23)$$

与式(7.9.19)比较，则方程(7.9.16)协变的条件为

$$Sr_\beta' S^{-1} = r_\beta \text{ 或 } S^{-1}r_\alpha S = l_{\alpha\beta}r_\beta = r_\alpha' \qquad (7.9.24)$$

由方程(7.9.24)见条件(7.9.23)

$$r_\alpha' r_\beta' + r_\beta' r_\alpha' = (S^{-1}r_\alpha S)(S^{-1}r_\beta S) + (S^{-1}r_\beta S)(S^{-1}r_\alpha S)$$
$$= S^{-1}(r_\alpha r_\beta + r_\beta r_\alpha)S = 2\partial_{\alpha\beta}$$

自然成立，事实上也可以从方程(7.9.24)或

$$\gamma_\alpha S = l_{\alpha\beta}S\gamma_\beta \qquad (7.9.25)$$

求出 S，今分几种情况叙述。

1. 反射

(1)如 $l_{11}=l_{22}=l_{33}=1 \qquad l_{44}=-1$

其余 l 为零，则

$$x_4 = -x_4 \qquad x_i' = x_i \qquad (7.9.26)$$

式(7.9.24)的条件为

$$S^{-1}\gamma_1 S = \gamma_1, S^{-1}\gamma_2 S = \gamma_2, S^{-1}\gamma_3 S = \gamma_3, S^{-1}\gamma_4 S = -\gamma_4$$

因之可以取

$$S=\gamma_1\gamma_2\gamma_3, S^{-1}=\gamma_3\gamma_2\gamma_1=-S=S^* \tag{7.9.27}$$

为时间反射。

(Ⅱ)如 $l_{11}=l_{22}=l_{33}=-1 \quad l_{44}=1$ 其余为零则

$$x'_i=-x_i, \quad x'_4=x_4 \tag{7.9.28}$$

式(7.9.24)为

$$S^{-1}\gamma_i S=-\gamma_i \quad S^{-1}\gamma_4 S=\gamma_4$$

因之可以取

$$S=\gamma_4 \quad S^{-1}=\gamma_4=S=S^* \tag{7.9.29}$$

为空间反射。

(Ⅲ)如 $l_{11}=l_{22}=l_{33}=l_{44}=1$ 其余为零，则

$$x'_\alpha=-x_\alpha \tag{7.9.30}$$

式(7.9.25)为

$$\gamma_\alpha S=-S\gamma_\alpha$$

因之可以取

$$S=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\equiv\gamma_5 \quad S^{-1}=\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1=S=S^* \tag{7.9.31}$$

为时空坐标反射。此 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 与每个 γ_α 反交换亦简写成 γ_5。

2. 旋转

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{I})\,x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\&y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{7.9.32}$$

$$\gamma_1'=S^{-1}\gamma_1 S=\gamma_1\cos\theta+\gamma_2\sin\theta$$

$$\gamma_2'=S^{-1}\gamma_2 S=-\gamma_1\sin\theta+\gamma_2\cos\theta$$

$$S=\cos\frac{\theta}{2}+\gamma_1\gamma_2\sin\frac{\theta}{2}, S^{-1}=\cos\frac{\theta}{2}-\gamma_1\gamma_2\sin\frac{\theta}{2} \tag{7.9.33}$$

$$(\text{I})\ x_1' = x_1\cos\theta + x_4\sin\theta \quad x_4 = iCt;\tan\theta = i\frac{V}{C}$$
$$x'_4 = -x_1\sin\theta + x_4\cos\theta \tag{7.9.34}$$

所以
$$S = \cos\frac{\theta}{2} + \gamma_1\gamma_4\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\gamma_1\gamma_4\sinh\frac{\varphi}{2}$$
$$S^{-1} = \cosh\frac{\varphi}{2} - i\gamma_1\gamma_4\sinh\frac{\varphi}{2} \tag{7.9.35}$$

其中
$$\theta = i\varphi \quad \tan i\theta = i\tanh\varphi = i\frac{V}{C}$$

3. 微变
$$x'_\alpha = x_\alpha + \omega_{\alpha\beta}x_\beta \tag{7.9.36}$$
所以
$$S^{-1}\gamma_\alpha S = \gamma_\alpha + \omega_{\alpha\beta}\gamma_\beta \tag{7.9.37}$$
今以 E 为 n 维的单位方阵，设
$$S = E + \Lambda_{\zeta\eta}\omega_{\zeta\eta}$$
$\Lambda_{\zeta\eta}$ 为 ζ,η 反对称方阵，代 λ 上式得
$$\gamma_\alpha S = S\gamma_\alpha + \omega_{\alpha\beta}S\gamma_\beta$$
忽略 ω 的二次方，得
$$(\gamma_\alpha\Lambda_{\zeta\eta} - \Lambda_{\zeta\eta}\gamma_\alpha)\omega_{\zeta\eta} = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\zeta}\gamma_\eta - \delta_{\alpha\eta}\gamma_\zeta)\omega_{\zeta\eta}$$
由于括号内 ζ、η 反对称且 $\omega_{12}\cdots$ 为任一常数，
所以
$$\gamma_\alpha\Lambda_{\zeta\eta} - \Lambda_{\zeta\eta}\gamma_\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\zeta}\gamma_\eta - \delta_{\alpha\eta} - \gamma_\zeta) \tag{7.9.38}$$
其解答为
$$\Lambda_{\zeta\eta} = \frac{1}{8}(\gamma_\zeta\gamma_\eta - \gamma_\eta\gamma_\zeta) \tag{7.9.39}$$
所以
$$S = E + \frac{1}{8}(\gamma_\zeta\gamma_\eta - \gamma_\eta\gamma_\zeta)\omega_{\zeta\eta}$$
$$S^{-1} = E - \frac{1}{8}(\gamma_\zeta\gamma_\eta - \gamma_\eta\gamma_\zeta)\omega_{\zeta\eta} \tag{7.9.40}$$

为微变方阵S的解答。上式可以代入式(7.9.37)内验证，此留给读者自证。以上几种变换已代表全部可能的洛伦兹变换。

由式(7.9.25)见λS同样满足式(7.9.25)，我们可以限制S使其行列式

$$|S| = 1 \tag{7.9.41}$$

以撤除一部分的不定性，即使如此，当S为偶行列方阵时，负S也同样满足式(7.9.41)，这种不定性还不能完全取消。

现在导入一个与ψ反步变换的$\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}S^{-1} \tag{7.9.42}$$

$\bar{\varphi}$系写成一列$\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3 \cdots)$的$n$个数值，因之

$$\bar{\varphi}\psi' = \bar{\varphi}S^{-1}S\psi = \bar{\varphi}\psi \tag{7.9.43}$$

为标量，且

$$\bar{\varphi}\gamma_\alpha\psi' = \bar{\varphi}S^{-1}\gamma_\alpha S\psi = l_{\alpha\beta}\bar{\varphi}\gamma_\beta\psi \tag{7.9.44}$$

为四维矢量

$$\bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi' = \bar{\varphi}S^{-1}\gamma_\alpha SS^{-1}\gamma_\beta S\psi = l_{\alpha\mu}l_{\beta\nu}\bar{\varphi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi \tag{7.9.45}$$

为二阶张量，特别

$$\bar{\varphi}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\psi \tag{7.9.46}$$

为二阶反对称张量即六矢。这样推下去

$$\bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\psi \tag{7.9.47}$$

为三阶张量

$$\in^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\bar{\varphi}\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\psi \tag{7.9.48}$$

为膺矢量，但是式(7.9.47)内α,β,γ三字中如有任两个相同则蜕化为式(7.9.44)矢量的一个分量，而不相同的分量则蜕化成(7.9.48)的膺矢量。所以式(7.9.47)实系两种矢量的拼合，没有新的分量。

现在将γ_α的一切可能乘积列成下面：

$$\gamma_A\begin{Bmatrix}1;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4;i\gamma_2\gamma_3,i\gamma_3\gamma_1,i\gamma_1\gamma_2,\\ i\gamma_1\gamma_4,i\gamma_2\gamma_4,i\gamma_3\gamma_4;i\gamma_1\gamma_2\gamma_3,i\gamma_2\gamma_4\gamma_1,\\ i\gamma_3\gamma_1\gamma_4,i\gamma_4\gamma_2\gamma_3;\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\equiv\gamma_5\end{Bmatrix} \tag{7.9.49}$$

十六个方阵，在前面加 i 的缘故除使每项的平方为 $+1$ 之外，例如

$$(i\gamma_1\gamma_2)^2=(i\gamma_1\gamma_2)(i\gamma_1\gamma_2)=-\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2=1$$

在当 γ 取为厄密方阵(此要以 $*$ 表示共轭调位方阵)，

$$\gamma_\alpha{}^*=\gamma_\alpha \tag{7.9.50}$$

时，以上每个 γ_A 亦为厄密方阵，例如

$$(i\gamma_1\gamma_2)^*=-i\gamma_2{}^*\gamma_1{}^*=-i\gamma_2\gamma_1=i\gamma_1\gamma_2$$

不独如此，当 γ_α 为厄密方阵时，由于

$$\gamma_1{}^2=\gamma_1\gamma_1{}^*=1,\quad \gamma_2{}^2=\gamma_2\gamma_2{}^*=1$$

等关系，γ_α 亦为么正方阵. 所以上面任一个 γ_A 亦为么正方阵. 换言之，设 γ_α 为厄密方阵，则式(7.9.49)定义的各个 γ_A 均为厄密及么正方阵。这十六 γ_A 为闭合群，所以 γ_A 可用 4×4 的方阵表示。

从 γ_μ 导出的张量只有下面六种：

$$\left.\begin{aligned}&\text{标量 }\bar\varphi\psi\\ &\text{矢量 }\bar\varphi\gamma_\alpha\psi\\ &\text{六矢 }i\bar\varphi\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi\\ &\text{膺矢量 }\frac{i}{3!}\in^{\alpha,\beta,\gamma\delta}\bar\varphi\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\psi=(i\bar\varphi\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi,i\bar\varphi\gamma_4\gamma_3\gamma_1\psi,\\ &i\bar\varphi\gamma_4\gamma_1\gamma_2\psi,i\bar\varphi\gamma_4\gamma_2\gamma_3\psi)=i\bar\varphi\gamma_\alpha\gamma_5\psi\\ &\text{膺标量 }\bar\varphi\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\psi\equiv\bar\varphi\gamma_5\psi\\ &\text{膺张量 }\frac{1}{2}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}\bar\varphi\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi=-\bar\varphi\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5\psi\end{aligned}\right\} \tag{7.9.51}$$

六种。末项的膺标量性质可以证明如下，因

$$\gamma_5\equiv\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=\frac{1}{4!}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta \tag{7.9.52}$$

所以 $S^{-1}\gamma_5 S=\frac{1}{4!}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}(S^{-1}\gamma_\alpha SS^{-1}\gamma_\beta SS^{-1}\gamma_\gamma SS^{-1}\gamma_\delta S)$

$$=\frac{1}{4!}\in^{\alpha\beta\gamma\delta}l_{\alpha\xi}l_{\beta\eta}l_{\gamma\zeta}l_{\delta\lambda}\gamma_\xi\gamma_\eta\gamma_\zeta\gamma_\lambda$$

$$=\frac{1}{4!}J\in^{\xi\eta\zeta\lambda}\gamma_\xi\gamma_\eta\gamma_\zeta\gamma_\lambda=J\gamma_5$$

所以
$$\bar{\varphi}\gamma_5\psi'=\bar{\varphi}S^{-1}\gamma_5 S\psi=J\bar{\varphi}\gamma_5\psi \tag{7.9.53}$$

J 为变换 Jacobian，且

$$\gamma_5\gamma_\alpha+\gamma_\alpha\gamma_5=0 \tag{7.9.54}$$

因 γ 的乘积张量已经完全写在上面，但我们可以用导分法得出更多的张量。例如 $\mathrm{d}\psi$ 代表两个邻近 ψ_2 与 ψ_1 的差，则

$$\mathrm{d}\psi'=\psi_2'-\psi_1'=S\psi_2-S\psi_1=S\mathrm{d}\psi \tag{7.9.55}$$

同样

$$\mathrm{d}\bar{\varphi}'=\mathrm{d}\bar{\varphi}S^{-1}$$

设 $\psi,\bar{\varphi}$ 皆为 x_α 的函数 (7.9.55)'

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\mathrm{d}x_\beta,\quad \mathrm{d}\bar{\varphi}=\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_\beta}\mathrm{d}x_\beta \tag{7.9.56}$$

则

$$\bar{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha$$

为标量，由于式(6.3.14)

$$\bar{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}$$

为矢量，同样

$$\bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\mathrm{d}x_\beta$$

为矢量，

所以
$$\bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}$$

为二阶张量，我们可以写出下列几个含有一次导分的张量

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{标量}\quad \bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\psi,\\
&\text{矢量}\quad \bar{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\psi,\mathrm{i}\bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta},\\
&\qquad \mathrm{i}\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi.\\
&\text{张量}\quad \bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\beta}\gamma_\alpha\psi.\\
&\text{膺标量}\quad \bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\gamma_5\psi.\\
&\text{膺矢量}\quad \bar{\varphi}\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_5\psi,\mathrm{i}\bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta},\\
&\qquad \mathrm{i}\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5\psi\\
&\text{膺张量}\quad \bar{\varphi}\gamma_\alpha\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta},\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\beta}\gamma_\alpha\gamma_5\psi
\end{aligned}\right\}\qquad(7.9.57)
$$

等等，高次微分以及含有两种导分的张量也可依例推出，兹不再述。

方程(7.9.16)也可以从标量拉格朗日

$$\mathrm{L}=\bar{\varphi}(\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\mathrm{K})\psi\qquad(7.9.58)$$

导出，$\bar{\varphi}$ 为一尚未决定的但与 ψ 成反步变换的函数，由

$$\delta\int L\mathrm{d}T=\int\left\{\delta\bar{\varphi}(\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+K)\psi+\bar{\varphi}(\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+K)\delta\psi\right\}\mathrm{d}T=0$$

得出*

---

* 由于 $\bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\varphi}\gamma_\alpha\delta\psi)-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\delta\psi$

右手第一项积分到边界为零，γ_α 为常数.

再者，式(7.9.42)的 $\bar{\varphi}$ 可为任何满足该变换方程的量，但此地由式(7.9.58)导出的 $\bar{\varphi}$ 须满足方程(7.9.60)成为一种特殊的 $\bar{\varphi}$。

$$(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + K)\psi = 0 \qquad (7.9.59)$$

及新的另一组决定 $\bar{\varphi}$ 的方程

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha - K\bar{\varphi} = 0 \qquad (7.9.60)$$

式(7.9.59)即(7.9.16)，但添出 $\bar{\varphi}$ 必须满足的方程(7.9.60)。由导出的方法可见式(7.9.60)亦为协变方程，事实上因

$$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}S^{-1} \qquad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}'S$$

上式为

$$l_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial x'_\beta}\bar{\varphi}'S\gamma_\alpha - K\bar{\varphi}'S = 0.$$

右方乘以 S^{-1} 用(7.9.24)。

$$\gamma_\beta = l_{\beta\alpha}S\gamma_\alpha S^{-1}$$

则上式即蜕化为

$$\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial x'_\beta}\gamma_\beta - K\bar{\varphi}' = 0$$

从式(7.9.59)及式(7.9.60)可以证明 $\bar{\varphi}\gamma_\alpha\psi$ 矢量的散度为零。因

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\bar{\varphi}\gamma_\alpha\psi = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\psi + \bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = K\bar{\varphi}\psi - K\bar{\varphi}\psi = 0 \qquad (7.9.61)$$

又可以证明下列二级张量

$$T_{\alpha\beta} = \bar{\varphi}\gamma_\alpha\frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\beta}\gamma_\alpha\psi + \bar{\varphi}\gamma_\beta\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\beta\psi \qquad (7.9.62)$$

是散度为零的对称张量，因从式(7.9.59)及(7.9.60)得

$$\gamma_\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} + K\frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} = 0, \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\gamma_\alpha - K\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\beta} = 0$$

再在式(7.9.59)的左边乘以 $\gamma_\beta\partial/\partial x_\beta$，得

$$\gamma_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + K)\psi = 0$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}\psi + K\gamma_\beta \frac{\partial \psi}{\partial x_\beta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\beta^2} - K^2\psi = 0$$

在式(7.9.60)的左边运用$\frac{\partial}{\partial x_\beta}$,右边运用 γ_β 得

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha - K\bar{\varphi}\right)\gamma_\beta = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_\beta^2} - K^2\bar{\varphi} = 0$$

将以上诸式代入式(7.9.62)的散度方程,得

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \qquad (7.9.63)$$

唯方程(7.9.50)及(7.9.62)添出不必需的 $\bar{\varphi}$,由式(7.9.59)见 ψ 的共轭调位 ψ^* 满足方程

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha^*}\gamma_\alpha^* + K\psi^* = 0,$$

或

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}\gamma_i^* + \frac{-1}{iC}\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\gamma_4^* + K\psi^* = 0 \quad i = 1、2、3 \qquad (7.9.64)$$

设 γ_α 为厄密方阵,则上式可简化成

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}\gamma_i - \frac{1}{iC}\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\gamma_4 + K\psi^* = 0$$

在其右方乘以 γ_4,则

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi^*\gamma_4)\gamma_i - \frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\gamma_4)\gamma_4 + K(\psi^*\gamma_4) = 0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\psi^*\gamma_4)\gamma_\alpha - K(\psi^*\gamma_4) = 0 \qquad (7.9.65)$$

因之 $\psi^*\gamma_4$ 满足与 $\bar{\varphi}$ 满足的同样方程，试以

$$\bar{\varphi} = \lambda\psi^*\gamma_4, \tag{7.9.66}$$

λ 为一常数，看上式两边的变换形式。

初看 $\bar{\varphi}$ 和 $\psi^*\gamma_4$ 可以再差一个常数方阵，但设右边乘以一方阵 R 使式(7.9.65)变成

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\psi^*\gamma_4)\gamma_\alpha R - K\psi^*\gamma_4 R = 0$$

形式.则要使上列方程与式(7.9.60)相合，

$$\bar{\varphi} = \lambda\psi^*\gamma_4 R,$$

R 必须与每个 γ_α 交换

$$R\gamma_\alpha = \gamma_\alpha R$$

但是我们可以证明此 R 必为一普通数〔假设和四个 γ_α 交换，则必和式(7.9.49)的十六个 γ_A 全交换，这样只有普通数字可以满足〕。因

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}S^{-1}, \psi^*\gamma_4 = \psi^* S^*\gamma_4 = (\psi^*\gamma_4)\gamma_4 S^*\gamma_4$$

设式(7.9.66)可以成立，则 S 必须满足。

$$S^{-1} = \gamma_4 S^*\gamma_4 \tag{7.9.67}$$

的条件，用式(7.9.26)→(7.9.40)几种 S 代进去逐个的试验，则看出除包含时间反射的变换之外，上述关系确实成立。换言之，除时间反射之外，$\psi^*\gamma_4$ 的变换确是与 ψ 反步的变换，因之*，我们可以取式(7.9.60)中的

$$\bar{\varphi} = \psi^*\gamma_4 \tag{7.9.68}$$

这样，式(7.9.60)就不是另外一套微分方程式。式(7.9.58)的拉格朗日〔因之方程(7.9.59)也作适当的变换〕，

$$L = \psi^*\gamma_4(\gamma_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4} + K)\psi$$

---

* 反正我们对时间反射不感兴趣，可参考§5.1

$$= \psi^*(\alpha_j \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_4 K)\psi$$

其中 α 为 Dirac 原文上的方阵：

$$\alpha_j \equiv i\gamma_4\gamma_j, \quad i=1,2,3; \quad \alpha_4 \equiv \gamma_4$$

$$\alpha_\mu\alpha_\gamma + \alpha_\gamma\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad \mu,\gamma = 1,2,3,4 \tag{7.9.69}$$

现在验证式(7.9.67)，在微变时(7.9.40)因 ω_{i4} 为幻数，ω_{ij} 为实数

所以 $$S^* = E - \frac{1}{8}(\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i)\omega_{ij} + \frac{1}{8}(\gamma_i\gamma_4 - \gamma_4\gamma_i)\omega_{4i} + \frac{1}{8}(\gamma_4\gamma_i - \gamma_i\gamma_4)\omega_{4i}$$

所以 $$\gamma_4 S^{-1}\gamma_4 = S^*, \tag{7.9.70}$$

方程(7.9.67)确实成立。在空间反射时(7.9.29)

$$\gamma_4 S^*_{\cdot}\gamma^4 = \gamma_4 = S^{-1}$$

该方程也成立，唯在含时间反射的式(7.9.27)及式(7.9.31)S 中，上式不能成立。所以用方程(7.9.68)联系的 $\bar{\varphi}$ 在一切不含时间反射的变换之下均成立，不需添出新的 $\bar{\varphi}$。方程(7.9.61)及(7.9.62)中的 $\bar{\varphi}$ 也以此值代入得 ψ 场的散度为零的矢量及场能张量，以后这种 $\bar{\varphi}$ 用 $\bar{\psi}$ 代替，$\bar{\psi}=\psi^*\gamma_4$，设在式(7.9.58)的拉格朗日中增添电磁场作用使

$$L = \bar{\psi}\left\{\gamma_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \mu A_\alpha) + K\right\}\psi \tag{7.9.71}$$

只要 μ 为标量，A_α 为矢量，则此 L 仍为标量，其 Enler 方程*

$$\left.\begin{aligned}\{\gamma_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \mu A_\alpha) + K\}\psi = 0\\ (\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\alpha} - \mu A_\alpha)\bar{\psi})\gamma_\alpha - \overline{K\psi} = 0\end{aligned}\right\} \tag{7.9.72}$$

---

* 这可以从式(4.7.19)及式(7.9.3)直接导出

显然仍为协变方程，且

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi)=0 \tag{7.9.73}$$

仍旧成立，我们可以补充式(7.9.71)成包括电磁场闭全系统的拉格朗日

$$L=\frac{1}{4}(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\mu})^2+\lambda\bar{\psi}(\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}+\gamma_\alpha\mu A_\alpha\psi+K_\psi) \tag{7.9.74}$$

λ,μ 均为标量参数，变分 ψ 及 $\bar{\psi}$ 得式(7.9.72)，变为 A_μ 得

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}\right)=\overline{\lambda\mu\psi}\gamma_\mu\psi \tag{7.9.75}$$

电磁方程从 L 可得出散度为零的张量

$$\Theta_{\alpha\beta}=L\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\beta})}$$

$$=L\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\mu})-\lambda\bar{\psi}\gamma_\beta\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha};$$

因 L 内含方阵 γ_α 的各项是

$$\bar{\psi}\gamma_{\alpha,\mu\omega}\frac{\partial\psi_\gamma}{\partial x_\alpha}$$

等形式，$\gamma_\alpha,\mu\gamma$ 为方阵 γ_α 的 γ_α 的 $\mu\gamma$ 素，$\bar{\psi}_\mu,\psi_\gamma$ 为场面 $\bar{\psi},\psi$ 的分量，

所以 $$\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_\upsilon}{\partial x_\alpha})}=\bar{\psi}_\mu\gamma_{\alpha,\mu\omega},\quad\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\bar{\psi}_\gamma}{\partial x_\alpha})}=0,$$

所以从式(7.8.19)得出 $\Theta_{\alpha\beta}$ 形式，不过这个 $\Theta_{\alpha\beta}$ 不对称。

现在要找对称的 $T_{\alpha\beta}$，式(7.9.74)的第二部分，式(7.8.35) $H_{\alpha\beta\gamma}$ 各项可以从下式求出，暂时不写入因子

$$H_{\alpha\beta\gamma}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}Q_\upsilon\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\gamma}\right)}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\upsilon}\psi_\upsilon\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_\gamma}\right)}$$

因由式(7.9.40)得

$$\partial\psi_\mu=\frac{1}{8}(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha)_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}\psi_\nu=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}\psi_\nu$$

所以 $$H_{\alpha\beta\gamma}=\Lambda^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\psi_\nu\bar{\psi}_\lambda\gamma_{\gamma,\lambda\mu}=\frac{1}{8}\bar{\psi}\gamma_\gamma(\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha)\psi$$

用方程(7.9.17)

所以
$$H_{\alpha\beta\gamma}+H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha}=\frac{1}{8}\bar{\psi}\{\gamma_\gamma\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\gamma\gamma_\beta\gamma_\alpha+\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\alpha\}$$
$$-\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\gamma+\gamma_\alpha\gamma_\gamma\gamma_\beta-\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\}\psi$$
$$=\frac{1}{4}\bar{\psi}(\sigma_{\beta\gamma}\gamma_\alpha+\sigma_{\alpha\gamma}\gamma_\beta-\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\gamma-\gamma_\gamma\gamma_\beta\gamma_\alpha)\psi$$

用方程(7.9.72)得

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(H_{\alpha\beta\gamma}+H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha})$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\alpha\psi+\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_\beta}\gamma_\alpha\psi+3\bar{\psi}\gamma_\beta\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}-\bar{\psi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\right\}$$
$$+\frac{\mu}{2}\{\bar{\psi}A_\alpha\gamma_\beta\psi-\bar{\psi}A_\beta\gamma_\alpha\psi\}$$

其第一部分的 H 已计算在式(7.8.42),唯现在由于式(7.9.75),

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}(H_{\alpha\beta\gamma}+H_{\gamma\alpha\beta}+H_{\gamma\beta\alpha})=-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}F_{\beta\gamma}-A_\alpha\lambda\mu\,\bar{\psi}\gamma_\beta\psi$$

将以上各式相加,并代入式(7.8.38)的 $T_{\alpha\beta}$,得对称场能张量。

$$T_{\alpha\beta}=L\delta_{\alpha\beta}-F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta}+\frac{\lambda}{4}\{\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial x_\alpha}\gamma_\beta\psi+\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial\chi_\beta}\gamma_\alpha\psi-\overline{\psi\psi}\gamma_\beta\frac{\partial\psi}{\partial\chi_\alpha}$$
$$-\bar{\psi}\gamma_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\}-\frac{\lambda\mu}{2}\bar{\psi}(A_\alpha\gamma_\beta+A_\beta A_\alpha)\psi \qquad (7.9.76)$$

从式(7.9.72)可以验证此场能张量满足,

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0 \qquad (7.9.76)'$$

由式(4.7.19)见在电磁场中

$$\frac{m_0\dot{\chi}_i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{C^2}}}=p_i-\frac{e}{C}A_i, \qquad (7.9.76)''$$

所以 $$\mu=\frac{-2\Pi e}{hC}i$$

通常解释，〔由式(7.9.75)及式(7.9.73)可以看出〕

$$ie\,\overline{\psi'}\gamma_\mu\psi=ie(\psi^*\gamma_4\gamma_i\psi,\psi^*\psi)$$

为电流密度矢量，由式(7.9.75)得

$$\lambda\mu=-ie \quad \text{所以 } \lambda=\frac{hC}{2\pi} \tag{7.9.76}'''$$

从式(7.9.76)得标量

$$T_{ae}=\lambda K\,\bar{\psi}\psi=m_0C^2\bar{\psi}\psi=m_0C^2\psi^*\gamma_4\psi,$$

前面常数可以从 L 的前面加常数调整；一般取 T_{44} 为负能量密度，故 L 前加负号则上式亦为负号。

为甚么方程(7.9.16)是自旋 1/2 的质点方程，可以从角动量的变化看出，量子力学中某物理量 F 的变化用方程

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{dF}{dt}=HF-FH \tag{7.9.77}$$

表示，H 为能量算符，从式(7.9.3)及方程(7.9.16)得出算符 H 为

$$H=E=-iC\gamma_4\gamma_i p_i+\gamma_4 m_0C$$

x_i, p_i 与 γ 之间具交换性，以

$$-i\gamma_4\gamma_i=\alpha_i \qquad \alpha_i\alpha_j=\gamma_i\gamma_j$$

所以 $$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=2\delta_{ij} \qquad \alpha_i^2=1$$

$$\alpha_i\gamma_4+\gamma_4\alpha_i=0$$

因之这些

$$\alpha_a=(-i\gamma_4\gamma_1,-i\gamma_4\gamma_2,-i\gamma_4\gamma_3,\gamma_4)$$

有 γ_a 的一切代数性质且亦均为厄密么正方阵，以

$$H=C\alpha_i p_i+\gamma_4 m_0C^2 \tag{7.9.78}$$

则由子

$$p_ix_j-x_jp_i=\frac{h}{2\pi i}\delta_{ij} \tag{7.9.79}$$

从式(7.9.77)得

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\alpha_i C,\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7.9.80}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_ip_j-x_jp_i)=\frac{2\pi iC}{h}\{\alpha_kp_k+\gamma_4m_0C)(x_ip_j-x_jp_i)$$

$$-(x_ip_j-x_jp_i)(\alpha_kp_k+\gamma_4m_0C)\}=C(\alpha_ip_j-\alpha_jp_i)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_i\alpha_j=\frac{2\pi iC}{h}\{(\alpha_kp_k+\gamma_4m_0C)\alpha_i\alpha_j-\alpha_i\alpha_j(\alpha_kp_k+\gamma_4m_0C)\}$$

$$=\frac{4\pi iC}{h}\{\alpha_jp_i-\alpha_ip_j\}$$

等式,因之

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(x_ip_j-x_jp_i)+\frac{h}{4\pi i}\alpha_i\alpha_j\}=0$$

又因

$$\alpha_i\alpha_j=\gamma_i\gamma_j,$$

上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(x_ip_j-x_jp_i)+\frac{h}{4\pi i}\gamma_i\gamma_j\}=0 \tag{7.9.81}$$

所以括弧内各项相加才具守恒性。上式末项的平方为

$$(\frac{h}{4\pi i}\gamma_i\gamma_j)^2=(\frac{h}{4\pi})^2 \tag{7.9.82}$$

因之

$$\frac{h}{4\pi i}\gamma_i\gamma_j$$

的本征值为$\pm h/4\pi$。由于量子力学中角动量的单位为$h/2\pi$,所以方程(7.9.16)当γ_α满足(7.9.17)的条件时,称1/2自旋质点的波方程。

定义自旋σ为

$$\sigma=\frac{h}{4\pi i}(\gamma_a\gamma_3,\gamma_3\gamma_1,\gamma_1\gamma_2) \qquad (7.9.83)$$

则

$$(\sigma\cdot p)=\frac{h}{4\pi i}(\gamma_2\gamma_3p_1+\gamma_3\gamma_1p_2+\gamma_1\gamma_2p_3)$$

可以作为自旋在 p 方向的分量，由此得

$$\frac{h}{4\pi i}\cdot\frac{d}{dt}(\sigma\cdot p)=H(\sigma\cdot p)-(\sigma\cdot p)H=0 \qquad (7.9.84)$$

换言之，在 p 方向自旋量的分量亦具守恒性，式(7.9.83)又表示

$$\sigma\Lambda\times-\times\Lambda\sigma=0 \qquad (7.9.84)'$$

由于角动量

$$x_ip_j-x_jp_i$$

在 p 方向的分量为

$$(x_2p_3-x_3p_2)p_1+(x_3p_1-x_1p_3)p_2+(x_1p_2-x_2p_1)p_3=0$$

上式实即(7.9.81)总角动量在 p 方向的分量守恒的表示。由于

$$(\sigma\cdot p)^2=(\frac{h}{4\pi})^2p^2,$$

因之$(\sigma\cdot p)/p$ 的本征值亦为$\pm h/4\pi$。

式(7.9.59)或式(7.9.60)允许平面波

$$\psi\sim e^{ami\kappa\sigma^r\sigma} \qquad (7.9.85)$$

形式的解答：

$$(2\pi i\gamma_\sigma k_\sigma+K)\psi=0$$

上式可以再在左边乘以 D 以消去 γ_σ。其实直接用式(7.9.4)即得

$$-4\pi^2k_\sigma^2-\frac{4\pi^2m_0^2c^2}{h^2}=0 \qquad (7.9.86)$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\frac{iE}{C}&=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_4}=hk_4\\ p_i&=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_i}=hk_i\end{aligned}\right\} \qquad (7.9.87)$$

上式可写成

$$E^2=C^2(p_i^2+m_0^2C^2)$$

所以

$$E=\pm\sqrt{(m_0^2+\frac{p_i^2}{C^2})C^2} \qquad (7.9.88)$$

换言之，H 的本征值具有正负双重性，能级中间有不连续的跳跃 $2m_0C^2$。在古典力学中，一切变化均具连续性，原来正能级的态不会跳到负能级的态；但量子力学允许质点从正能级"跳"到负能级而发出能量$\geqslant 2m_0C^2$。（这样发生的能量超过我们假设的质点本身能量 m_0C^2）。这种跳跃的几率在一般情形下可以计算出并不小，所以 Dirac 认为这些负能级早已全部被质点填满；以后的质点则由于 Pauli 的不相容原理不能再跳进去。他认为宇宙中到处充着这些被填满的负能级但它们的引力场电场却互相抵消，以致看不出来。当我们用能量将负能级中一个质点击出使留下一个未填满的"洞"时，则将发现这个"洞"，缺少引力场和电场的抵消，本身似乎具有一个"反质点"的性质。这样，在用能量将负能级的质子击出之后则好象"造"成一个质点及一个反质点。但实际上"质点"并不是"造成"的。

对 γ_a 可以再作进一步的研究，用 4×4 方阵代表 γ_a，例如*

以$\gamma_1=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix}$，$\gamma_2=\begin{Vmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{Vmatrix}$，

$\gamma_3=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{Vmatrix}$，$\gamma_4=\begin{Vmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\+i&0&0&0\\0&+i&0&0\end{Vmatrix}$

* 选这种特殊表示 γ_a，目的是与公式(5.6.38)比较，如须满足式(7.9.89)，则 γ 至少是 4×4 的方阵

满足

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=2\delta_{\alpha\beta},\quad \gamma_\alpha^*=\gamma_\alpha$$

在微变时，式(7.9.40)则为

$$S=E+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}-i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{Vmatrix}\omega_{12}+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&-i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&-i&0\end{Vmatrix}\cdot\omega_{23}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{Vmatrix}\omega_{31}+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&+i&0&0\\+i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&-i&0\end{Vmatrix}\cdot\omega_{14}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&-1&0&0\\+1&0&0&0\\0&0&0&+1\\0&0&-1&0\end{Vmatrix}\omega_{24}+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}+i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&+i\end{Vmatrix}\cdot\omega_{34}$$

$$=\begin{Vmatrix}1+\frac{i}{2}(-\omega_{12}+\omega_{34}), & \frac{1}{2}(\omega_{31}-\omega_{24})+\frac{i}{2}(-\omega_{23}+\omega_{14}), & 0 & 0\\ \frac{1}{2}(-\omega_{31}+\omega_{24})+\frac{i}{2}(-\omega_{23}+\omega_{14}), & 1+\frac{i}{2}(\omega_{12}-\omega_{34}), & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1+\frac{i}{2}(\omega_{12}-\omega_{34}), & \frac{1}{2}(\omega_{31}+\omega_{24})+\frac{i}{2}(-\omega_{23}-\omega_{14})\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\omega_{31}-\omega_{24})+\frac{i}{2}(-\omega_{23}-\omega_{14}), & 1+\frac{i}{2}(\omega_{12}+\omega_{34})\end{Vmatrix}$$

由于 $\omega_{14},\omega_{24},\omega_{34}$ 全系幻数，将上式与式(5.6.38)比较，在微变时

$$S=\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & \in\overline{A}\in^{-1}\end{Vmatrix}\qquad(7.0.91)$$

$\in\overline{A}\in^{-1}$ 的定义，见式(6.4.10)。换言之，在式(7.9.89)的表示之下，则当微变时 ψ 分为两个互不混杂的旋量，一个是抗变旋量，另一个是协变共轭旋量，事实上在一切 $|L|=+1$ 不包括时间反射的变换的 S 都是如此，例如变换(7.9.33)为

$$S=\begin{Vmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{Vmatrix} \tag{7.9.92}$$

此亦与式(5.6.20),(6.4.14)相合。变换(7.9.35)为

$$S=\begin{Vmatrix} \cosh\frac{\psi}{2}, & -\sinh\frac{\psi}{2}, & 0 & 0 \\ -\sinh\frac{\psi}{2}, & \cosh\frac{\psi}{2}, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & \cosh\frac{\psi}{2}, & \sinh\frac{\psi}{2} \\ 0, & 0, & \sinh\frac{\psi}{2}, & \cosh\frac{\psi}{2} \end{Vmatrix} \tag{7.9.93}$$

$$S=\begin{Vmatrix} \cosh\frac{\psi}{2}, & -\sinh\frac{\psi}{2}, & 0, & 0 \\ -\sinh\frac{\psi}{2}, & \cosh\frac{\psi}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cosh\frac{\psi}{2}, & \sinh\frac{\psi}{2} \\ 0, & 0, & \sinh\frac{\psi}{2}, & \cosh\frac{\psi}{2} \end{Vmatrix} \tag{7.9.93}$$

与式(5.6.32)及(6.4.14)亦相合,且均与式(7.9.91)相符,但经式(7.9.29)的空间反射,S 为

$$S=\gamma_4=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{7.9.94}$$

就不是式(7.9.91)的形式,空间反射再加$|L|=+1$的变换为

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & EAE^{-1} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & -iA \\ i\in A\in^{-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

形式，以上

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

代表单位小方阵。