21 世纪高等院校教材

理论物理学导论　第二卷

电 动 力 学

汪德新　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书着重阐述电动力学的基本概念、基本规律和基本方法.全书共分六篇十五章,分别介绍电磁现象的普遍规律、稳恒电磁场、电磁波的传播、狭义相对论与相对论物理学、电磁波的辐射、电磁场与物质的相互作用.书末还附有矢量分析及张量计算初步等9个附录. 本书力图反映电动力学近代的一些研究进展,介绍了光子扫描隧道显微镜、等离子体、光波导、穆斯堡尔效应、横向多普勒效应与引力红移、超导电性、原子的激光冷却与捕陷等近代研究内容.为了通过典型问题来印证和巩固对基本概念和原理的理解,本书提供了丰富的例题,并给出200多道习题的答案和100多道习题的提示.

本书以"深入浅出,学以致用"为宗旨,可用作物理系本科生的教材和教学参考书,也可供相关领域的读者使用.

图书在版编目(CIP)数据

理论物理学导论.第二卷,电动力学/汪德新编著.—北京:科学出版社,2005

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-014984-X

Ⅰ.理… Ⅱ.汪… Ⅲ.①理论物理学-高等学校-教材②电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.O41

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第009280号

责任编辑:冯贵层

责任印制:高 嵘/封面设计:李梦佳

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

湖北京山德新印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2005年1月第一次印刷 印张:28 3/4

印数:1~5 000 字数:565 000

定价:32.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

电动力学是研究电磁现象的经典动力学理论,它主要研究电磁场的基本性质和运动规律,以及电磁场与物质的相互作用.

近十多年来,国内出版了一些电动力学的优秀教材.但是,对于不同的院校,学生的培养目标不同,学生的基础不同,学校的图书资源也不同.我们以为,在电动力学教材的百花园中,应该有不同层次、不同结构、不同风格的作品. 基于此,我们在撰写本书时作了如下几个方面的考虑和努力:

(1) 本书的宗旨是希望能为初学者提供一本深入浅出、学以致用的教材,即以低的起点打开电动力学的大门,以严格的基本功训练迎接研究生教育并与之接轨.

(2) 本书的内容包括:电磁现象的普遍规律,稳恒电磁场,电磁波的传播,狭义相对论与相对论物理学,电磁波的辐射,电磁场与物质的相互作用等.

(3) 数学基础与物理内涵的关系. 矢量分析和数学物理方法好比电动力学的双腿,电动力学的实验、定义、公式、方法、应用是它的躯干,而物理概念、物理思想、物理图像和物理思维方式是它的灵魂.如果不熟练掌握矢量分析与数学物理方法,学习电动力学将寸步难行,更无法领会电动力学的定义、公式、方法并灵活运用;如果不认真研究电动力学的实验背景,不细心考察物理概念和物理思想形成的脉络,不仔细品尝麦克斯韦、爱因斯坦等大师们的“神来之笔”,不深入思考物理定律的物理意义,不关注物理结果的实际应用,也无法领悟电动力学的物理概念、物理思想、物理图像和物理思维方式. 总之,电动力学的双腿、躯干和灵魂是一个不可分割的统一体.

(4) 物理概念与演练习题的关系.正如众多著名物理学家所指出的那样,理论物理的正确概念只有通过大量计算才能真正学到手,学习的过程实际上是无数次“概念-计算-概念”的交互深化过程. 著名物理学家杨振宁先生和黄昆先生都曾津津乐道他们早年在习题中的受益.本书配备了丰富习题(书末附有习题答案和提示),如能正确使用它(自己先做题,之后再对照),相信对学生独立工作能力的培养和严谨科学作风的形成将会发挥积极的作用.

(5) 基础知识与前沿学科的关系.电动力学作为理论物理的基础课,本书以介绍它的基本概念、基本规律和基本方法为主. 但如果教材不能反映近代科学的发展,就肯定无法肩负起提高学生科学素质的责任. 我们把光子扫描隧道显微镜、等离子体、光波导、穆斯堡尔效应、横向多普勒效应与引力红移、超导电性、原子的激光冷却与捕陷等近代内容引入教材,这对后续课程的学习,对引导学生逐步走向现代科学技术前沿,对提高学生的求知欲望,关注自然科学的发展,都是非常有益的.

(6) 本书没有代替读者作“章节小结”的训练. 自己动手作小结对于第一次接触电动力学的读者来说,也许是非常重要的一环. 我国著名数学家华罗庚先生曾说过一段堪称经典的话:

> “应该怎样学会读书呢? ……在对书中每一个问题都经过细嚼慢咽,真正懂得以后,就需要进一步把全书各部分内容串连起来理解,加以融会贯通,从而弄清楚什么是书中的主要问题,以及各问题之间的关联. 这样我们就能抓住统帅全书的基本线索,贯串全书的精神实质. 我常常把这种读书过程,叫做‘从厚到薄’的过程……愈是懂得透彻,就愈有薄的感觉,这是每个科学家都要经历的过程.”
>
> ——华罗庚《学• 思• 锲而不舍》

(7) 使用本书的两点建议. 如果学时不足,本书标有 * 号的章节可留作自学,不会影响其后学习. 如有可能,在讲授电动力学之前,用六个小时讲授附录1“矢量分析与张量计算初步”是很有好处的. “磨刀不误砍柴工”,看起来花了时间,后来发现是省了时间:因为后来有的内容上课只需讲思路,不用讲数学推导了,可以留作课下自学.

本书是在作者担任华中师范大学物理系 96,97,98,99,00,01 级理科基地班《电动力学》讲稿的基础上修改补充而成. 它将成为作者的《理论物理学导论》(四卷本)的第二卷,其中第一卷《数学物理方法》(第二版)已于 2001 年出版,第三卷《量子力学》(第二版)已于2003 年出版.

本书的顺利出版,得到华中师范大学校领导以及教务处、物理科学与技术学院、物理系各级领导,特别是王恩科院长和胡响明副院长的关心和支持,在此表示深切的感谢. 本书初稿完成后,华中师范大学物理系01 级和02 级基地班王美娟、朱励霖、张瑜瑜、熊恒娜、倪蕾、郑华、赵军科等同学在繁忙学习之余,对全书的打印稿进行了认真细致的校正,并提出了建设性的意见,在此表示诚挚的感谢.

在本书即将出版之际,作者还要特别感谢兰州大学物理系汪志诚教授,南京大学天文系汪珍如教授和中国科学院院士、南京大学天文系曲钦岳教授多年来对我的关心和鼓励.

由于笔者水平所限,加之时间仓促,谬误在所难免,恳请读者批评指正.

汪德新

2005 年 1 月 28 日

目　　录

第一篇　电磁现象的普遍规律

第一章　经典电动力学的三个基本定律 …… 2
§ 1.1　电荷守恒定律 …… 2
§ 1.2　静电场与静磁场的基本方程 …… 5
§ 1.3　真空中的麦克斯韦方程组　洛伦兹力公式 …… 12
§ 1.4　介质中的麦克斯韦方程组　介质的电磁性质方程 …… 16
§ 1.5　电磁场的边值关系 …… 20
第二章　电磁作用下的守恒定律 …… 24
§ 2.1　电磁作用下的能量守恒定律 …… 24
§ 2.2　电磁作用下的动量守恒定律 …… 28
*§ 2.3　电磁作用下的角动量守恒定律 …… 34

第二篇　稳恒电磁场

第三章　静电场 …… 38
§ 3.1　静电势的微分方程与边值关系　静电边值问题的惟一性定理 … 38
§ 3.2　分离变量法 …… 45
§ 3.3　静电镜像法 …… 52
*§ 3.4　格林函数法 …… 58
§ 3.5　电多极矩法 …… 64
§ 3.6　静电场的能量　相互作用能,势能与广义力 …… 70
第四章　静磁场 …… 76
§ 4.1　磁场的矢势和磁标势　静磁边值问题的惟一性定理 …… 76
§ 4.2　矢势法 …… 83
§ 4.3　磁标势法 …… 90
§ 4.4　磁多极矩法 …… 93
§ 4.5　静磁场的能量　相互作用能　势能与广义力 …… 97

第三篇　电磁波的传播

第五章　无界与半无界空间中的电磁波 …… 104
§ 5.1　电磁波在绝缘介质中的传播 …… 104

§ 5.2 电磁波在介质分界面上的反射与折射 光子扫描隧道显微镜 … 111
§ 5.3 平面电磁波在导体中的传播及其在导体界面上的反射与折射 … 120
§ 5.4 波包 群速与相速 …… 127
*§ 5.5 电磁波在等离子体中的传播 …… 129
第六章 有界空间中的微波 …… 136
§ 6.1 矩形金属波导管中的微波 …… 136
§ 6.2 矩形金属谐振腔中的微波 …… 147
第七章 有界空间中的光波 …… 153
§ 7.1 平板型介质波导中的光波 …… 153
*§ 7.2 圆柱型介质波导中的光导波 …… 157

第四篇 狭义相对论与相对论物理学

第八章 狭义相对论的基本原理与相对论的时空理论 …… 165
§ 8.1 相对论的基本原理 …… 165
§ 8.2 洛伦兹变换 …… 170
§ 8.3 相对论的时空观 …… 176
§ 8.4 相对论的速度变换 …… 188
§ 8.5 闵可夫斯基空间 方程的协变性 …… 191
第九章 相对论电动力学 …… 203
§ 9.1 电动力学基本定律的协变形式 …… 203
§ 9.2 电磁场的变换公式 电磁场不变量 …… 208
*§ 9.3 电磁作用下守恒定律的协变形式 …… 213
第十章 相对论力学 …… 216
§ 10.1 相对论动力学基本方程 …… 216
§ 10.2 相对论力学的守恒定律 穆斯堡尔效应与引力红移 …… 223
§ 10.3 电磁场中带电粒子的拉格朗日量,哈密顿量及其运动方程 …… 231

第五篇 电磁波的辐射

第十一章 宏观电荷体系辐射的电磁场 …… 237
§ 11.1 电磁势及其方程 推迟势 …… 237
§ 11.2 推迟势的多极展开 单频辐射场的计算 …… 243
§ 11.3 电偶极辐射 短天线辐射 …… 246
*§ 11.4 磁偶极辐射与电四极辐射 …… 250
§ 11.5 半波天线与天线阵 …… 256
第十二章 运动带电粒子辐射的电磁场 …… 263
§ 12.1 运动带电粒子激发的电磁势和电磁场 …… 263

§ 12.2　运动带电粒子辐射的功率　韧致辐射与同步辐射 …… 267
* § 12.3　切连科夫辐射及其频谱分析 …… 274
§ 12.4　带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用　谱线的自然宽度…… 280

第六篇　电磁场与物质的相互作用

第十三章　电磁波的散射　色散与吸收 …… 287
§ 13.1　电子对电磁波的散射 …… 287
§ 13.2　介质对电磁波的色散与吸收 …… 292
第十四章　超导体电动力学 …… 296
§ 14.1　超导体的基本性质 …… 296
§ 14.2　超导的宏观唯象理论 …… 297
第十五章　原子的激光冷却与捕陷 …… 305
* § 15.1　激光冷却与捕陷原子的基本思想和方法 …… 305
* § 15.2　激光冷却与捕陷原子在科学技术上的意义 …… 309
附录 …… 311
附录 1　矢量分析与张量计算初步 …… 311
附录 2　最小作用量原理,拉格朗日方程与哈密顿方程 …… 346
附录 3　拉普拉斯展开定理 …… 349
附录 4　δ 函数的定义和性质 …… 351
附录 5　勒让德多项式,缔合勒让德函数与球函数 …… 352
附录 6　贝塞耳函数,诺埃曼函数,汉克耳函数,虚宗量贝塞尔函数与虚宗量汉克耳函数 …… 355
附录 7　傅里叶变换公式 …… 357
附录 8　国际单位制与高斯单位制之间的单位换算关系及公式对照表…… 358
附录 9　物理常数表 …… 360
习题答案 …… 361
习题提示 …… 379
主要参考书目 …… 450

第一篇　电磁现象的普遍规律

本篇介绍电磁现象的普遍规律.

第一章介绍经典电动力学的三个基本定律——电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式.建立在这三个基本定律上的经典电动力学理论成功地解释了电磁现象与光现象(对于像康普顿效应那些与微观过程有直接关系的宏观现象,将利用相对论及初等量子论讨论).

第二章介绍电磁作用下的三个守恒定律,即电磁作用下的能量守恒定律、电磁作用下的动量守恒定律,以及电磁作用下的角动量守恒定律.能量、动量、角动量的守恒定律是自然界一切物质运动都要遵守的普遍规律.

第一章　经典电动力学的三个基本定律

本章首先介绍从实验定律出发得到的电荷守恒定律,并给出定律的积分形式和微分形式.其次,由库仑定律和毕奥-萨伐尔定律出发,得到静电场和静磁场的散度和旋度方程;由时变场的法拉第电磁感应定律出发,得到在普遍情形下的电场旋度方程.英国著名物理学家麦克斯韦正是在这些实验定律的基础上提出了位移电流假设,成功地总结出电磁场的运动规律——麦克斯韦方程组.在此基础上,根据电荷在电场中受力和电流在磁场中受力的实验事实,得出洛伦兹力公式.电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式构成了经典电动力学的三个基本定律.随后,本章进一步从真空中的麦克斯韦方程组(即场方程)出发,引入介质极化和磁化形成的宏观电荷电流分布,得到介质中的场方程.最后,又由介质中场方程的积分形式出发,得出两种不同介质分界面上的场方程——电磁场的边值关系,它们在随后几章求解电磁场时起着非常重要的作用.

§ 1.1　电荷守恒定律

本节首先介绍关于电荷与电荷量子化的基本概念,随后讨论经典电动力学的第一个基本定律——电荷守恒定律.在引入电荷密度和电流密度的概念之后,给出电荷守恒定律的积分形式和微分形式.

一、电荷　电荷的量子化

我们知道,自然界的实物是由分子、原子组成的,原子是由原子核和电子组成的,原子核是由质子和中子组成的(氢原子核只有一个质子).电子电荷的精确值为

$$-e=-1.602\ 177\ 33(49)\times 10^{-19}\mathrm{C}. \tag{1}$$

质子带有等量的正电荷,中子不带电.在正常的原子中,原子核内的质子数与核外的电子数相等,原子呈电中性.通过摩擦起电或静电感应,电子会从一个物体转移到另一物体,或者从物体的一个部位转移到另一部位,使物体呈现带正电或负电的性质.由此可见,宏观物体所带的电量Q必为电子电量$-e$的整数倍,即

$$Q=\pm ne,\qquad n=1,2,\cdots \tag{2}$$

电荷这种只取分立值的性质称为电荷的量子化.

那么,电子所带的电量是不是粒子荷电的最小份额呢?在20 世纪60 年代,美国科学家盖尔-曼和茨维格提出了关于粒子结构的夸克模型.在此之后,人们认识到最基本的粒子包括六种夸克和六种轻子,它们是物质的最小构件,如表1.1 所示.

表 1.1

粒子	第 一 代	第 二 代	第 三 代
夸克	u(上夸克) d(下夸克)	c(粲夸克) s(奇异夸克)	t(顶夸克) b(底夸克)
轻子	e(电子) ν_e(e 中微子)	μ(μ 子) ν_μ(μ 中微子)	τ(τ 子) ν_τ(τ 中微子)

原子核、原子、分子均由第一代夸克和轻子组成(第二、三代基本粒子除质量外,与第一代粒子的所有性质相同).上夸克、粲夸克、顶夸克带$\frac{2}{3}$e 电量,下夸克、奇异夸克和底夸克带$-\frac{1}{3}$e 电量.质子是由两个上夸克和一个下夸克组成,故质子的电量为$2\times\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}e=e$;中子由一个上夸克和两个下夸克组成,故中子的电量为$\frac{2}{3}e-2\times\frac{1}{3}e=0$.但是,直到目前为止,还未观察到独立存在的夸克①.

当然,尽管电荷是量子化的,但电子所携带的电量对于宏观电磁测量仪器而言则是无法察觉的,电量 e 的增减不会对测量结果带来任何影响.因此,在宏观电动力学中就不必考虑电荷的量子化,并且把带电体的电量Q 看成是可以连续变化的.

二、电荷守恒定律

迄今为止的实验事实(从静电现象、化学反应、核反应,直到基本粒子的转化过程)都表明,电荷既不会产生,也不会消灭,它只能从空间的一个区域转移到另一个区域.也就是说,当电荷运动时,区域V 内电荷的改变量等于通过其边界面流入的电荷量.这个实验定律称为电荷守恒定律,人们把它视为自然界的普遍规律,称之为经典电动力学的第一个基本定律.

为了给出电荷守恒定律的数学表达式,就要引入电荷密度 ρ 和电流密度J 来

① 夸克被囚禁在强子(如质子、中子、介子等)内部而不能以自由状态存在的现象称为夸克禁闭.目前建造更高能量的加速器进行实验的一个重要目标就是寻找解除囚禁的夸克.目前按参与相互作用性质的不同,基本粒子可分为三类:光子(只参与电磁作用)、轻子(参与电磁作用和弱作用)、强子(参与弱作用、电磁作用和强作用).强子由夸克组成,强作用的强度是电磁作用的10^3 倍,是弱作用的10^{12}倍.

描述电荷和电流的分布.

三、电荷密度与电流密度

如果将带电体分成许多小体积元 ΔV,使它内部带电粒子非常多但与带电体的体积 V 相比较又非常小,这样的 ΔV 常称之为物理无穷小体积,并记之为 $\Delta V \to 0$. 电荷密度 ρ 定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \tag{3}$$

式中 ΔQ 为体积元 ΔV 内的电量. 既然 ΔV 内包含许许多多带电粒子,故电荷密度 $\rho(x,t)$ 可看成连续分布函数.

当电荷作定向运动时,就形成电流. 例如,电解液中有正、负离子存在,若电解槽没有接通电源,则正、负离子的运动是杂乱无章的,不会形成电流;但接通电源后,正、负离子分别受到方向相反的力作用,沿相反的方向运动,形成电流. 历史上规定,正电荷运动的方向为电流方向.

对于电流的强弱,通常用电流强度(简称电流) I 来描述. 电流强度定义为单位时间内通过导体任一横截面的电量,即

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

但是,电流强度 I 只反映“通过导体横截面的电流”这一整体特征,不能反映该横截面各处的电流强弱. 因此,有必要引入电流密度 J 来描述导体中的电流分布. 导体中某一点 J 的方向表示该点电流流动的方向,J 的大小等于通过该点垂直于电流方向的单位横截面的电流,即

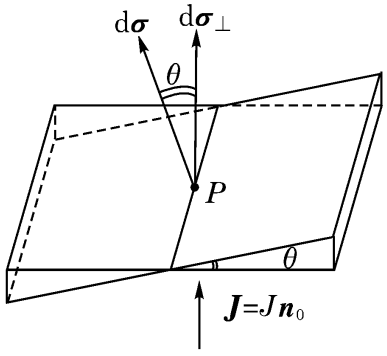


图 1.1

$$J = J n_0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\sigma_\perp} n_0, \tag{5}$$

式中 n_0 是沿该点(图 1.1 中的 P 点)电流方向的单位矢量,$\mathrm{d}\sigma_\perp$ 是通过 P 点的垂直于电流方向的横截面面元,其中 $\mathrm{d}\sigma_\perp = n_0\,\mathrm{d}\sigma_\perp$.

设 $\mathrm{d}\sigma$ 是通过 P 点的任一面元,则通过面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的电流为

$$\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}\sigma_\perp = J\,\mathrm{d}\sigma\cos\theta = J\cdot\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6}$$

式中 θ 为面积元矢量 $\mathrm{d}\sigma = n\mathrm{d}\sigma$ 与面积元矢量 $\mathrm{d}\sigma_\perp = n_0\mathrm{d}\sigma_\perp$ 的夹角.

通过导体中任意曲面 S 的电流即为

$$I = \int_S J\cdot\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

四、电荷守恒定律的积分形式与微分形式

考虑空间中某一区域V,其边界面为封闭曲面S.电荷守恒定律指出,单位时间通过界面S流入的电量$-\oint_S J\cdot \mathrm{d}\sigma$应等于单位时间内体积$V$内电荷的增加量$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V$,即得

$$-\oint_S J\cdot \mathrm{d}\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{8}$$

这就是电荷守恒定律的积分形式.应用高斯定理将面积分变为体积分,便有

$$\int_V \left(\nabla\cdot J+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=0. \tag{9}$$

由V的任意性,可见对空间的任一点x,均有

$$\nabla\cdot J(x,t)+\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}=0. \tag{10}$$

这是电荷守恒定律的微分形式.

习　题　1.1

1. 设导电介质的载流子是正、负离子,设x处的正、负离子密度分别为$\rho_+(x)$和$\rho_-(x)$,正、负离子的速度分别为$\boldsymbol{v}_+(x)$和$\boldsymbol{v}_-(x)$,求该处的电荷密度$\rho(x)$和电流密度$J(x)$.

2. 设有电流流过电解质,今沿J方向取一电流管元$I\mathrm{d}l$,其中$\mathrm{d}l$的大小为沿电流方向的电流管长,试证明在该体积元$\mathrm{d}V=\mathrm{d}S\mathrm{d}l$内,有

$$I\mathrm{d}l=J\mathrm{d}V=\sum_{\mathrm{d}V} q_i \boldsymbol{v}_i. \tag{11}$$

该式的最后一个式子为该电流元所在区域内所有粒子电量与其速度乘积之和.(11)式的三个式子分别是电流管图像、电流密度图像和微观图像对电流的描述.

§ 1.2　静电场与静磁场的基本方程

本节从真空中静电场和静磁场的基本实验定律——库仑定律和毕奥-萨伐尔定律出发,分别引入电场强度E和磁感应强度B来描述静电场和静磁场,进而得到静电场与静磁场的散度和旋度,这是进一步寻找电磁场基本规律的重要基础.

一、静电场的基本方程

1. 库仑定律与力的叠加原理

1785年,库仑通过实验发现了两个点电荷之间相互作用力的规律——库仑定律.定律指出,真空中两个静止点电荷之间的相互作用力为

$$F_2=\frac{q_1 q_2 r_{21}}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}=-F_1, \tag{1}$$

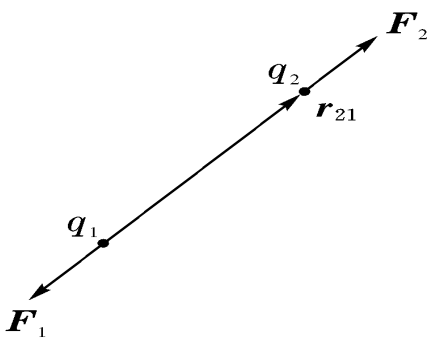


图 1.2

式中 q_1、q_2 分别为两个点电荷的电量，r_{21} 为由 q_1 指向 q_2 的矢径，如图 1.2 所示. F_1 和 F_2 分别是 q_1 和 q_2 所受的静电力，ε_0 为真空中的介电常数，其值为

$$\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12}\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}. \tag{2}$$

库仑定律中两电荷相对观察者是静止的. 实验表明，若 q_1 运动，则 q_2 对 q_1 的作用力 F_1 仍按(1)式计算，但 q_1 对 q_2 的作用力 F_2 却不再遵守库仑定律(见§ 9.2“电磁场的变换公式”).

实验还指出，当点电荷 q_0 同时受到点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 的作用时，q_0 所受到的合外力等于这些点电荷单独作用于 q_0 的库仑力的矢量和，即

$$F = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_0 q_k}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{0k}}{r_{0k}^3} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} q_k \frac{r_{0k}}{r_{0k}^3}, \tag{3}$$

式中 r_{0k} 是由电荷 q_k 指向 q_0 的矢径，这个结论称为力的叠加原理.

2. 电场强度与场强叠加原理

库仑定律给出的“两个电荷之间的相互作用力”并不是超距作用，而是通过电荷在自身周围激发的电场作用于其他电荷的. 当电荷 q_1 由静止突然运动时，q_2 所受的作用力并不是像超距作用所预言那样同时发生变化. 实验表明，运动电荷 q_1 激发的场将以有限的速度向 q_2 传播，当 q_2 所在位置的场发生变化时，q_2 所受的作用力才会发生变化(见§ 11.1“推迟势”). 无数事实证明，电场和磁场是物质的一种形式，它具有能量和动量，遵从一定的运动规律，并且可以脱离电荷和电流而单独存在.

电场的性质由电场强度 E 描述，定义为单位正电荷在电场中所受的力. 若位于 x 处的电荷 q_0 所受的力为 F，则 x 处的电场强度为

$$E(x) = \frac{F}{q_0}. \tag{4}$$

将库仑定律代入上式，即得位于 x' 的点电荷 q 在场点 x 所激发的场

$$E(x) = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \tag{5}$$

式中 $r = x - x'$ 是由源点 x' 指向场点 x 的矢径. 这表明，电场强度的大小与源电荷 q 的电量成正比，与距离 r 的平方成反比，方向与矢径 r 的方向一致($q>0$)或者相反($q<0$).

同时，由力的叠加原理易得场强的叠加原理. 实际上，将(3)式代入(4)式，即有

$$E = \frac{F}{q_0} = \sum_k \frac{q_k r_{0k}}{4\pi\varepsilon_0 r_{0k}^3} = \sum_k E_k. \tag{6}$$

上式表明,电场强度E 应满足线性偏微分方程.

当电荷连续分布时,设电荷密度为$\rho(x')$,则电荷体系激发的电场为

$$E(x)=\int \frac{\rho(x')r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'. \tag{7}$$

3. 高斯定理与电场的散度

现在计算穿过任一封闭面的电通量. 为此,将(7)式代入$\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma$,交换积分次序,便有

$$\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma=\oint_S\left[\int_{V_\infty}\frac{\rho(x')r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'\right]\cdot \mathrm{d}\sigma=\int_{V_\infty}\frac{\rho(x')}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S\frac{r\cdot \mathrm{d}\sigma}{r^3}\right]\mathrm{d}V'. \tag{8}$$

面元$\mathrm{d}\sigma$对源点x'所张的立体角为

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{\cos\theta\mathrm{d}\sigma}{r^2}=\frac{r\cdot \mathrm{d}\sigma}{r^3}. \tag{9}$$

当源点x'在封闭面S 内部时(见图1.3),S 面对x'所张的立体角为4π;当源点x'在封闭面S 外部时(见图1.4),易见$\mathrm{d}\sigma_1$ 与$\mathrm{d}\sigma_2$ 对x'所张的立体角之和为零(大小相等,一正一负),因而S 面对x'所张的立体角为零. 由此得

$$\oint_S\frac{r\cdot \mathrm{d}\sigma}{r^3}=\oint_S \mathrm{d}\Omega=\begin{cases}4\pi, & x'\text{在}V\text{ 内};\\ 0, & x'\text{在}V\text{ 外}.\end{cases} \tag{10}$$

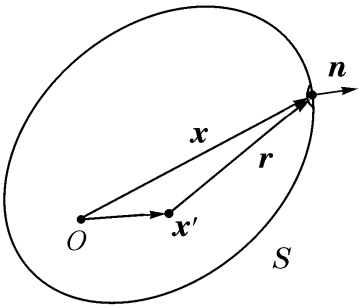


图 1.3

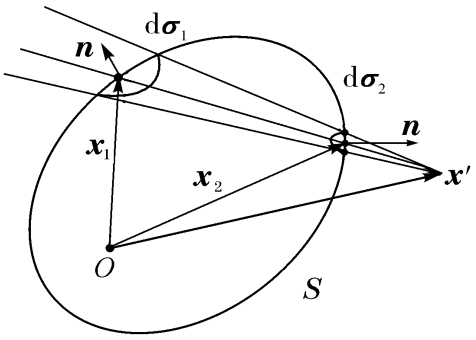


图 1.4

既然x'在V 外时面积分为零,故只要考虑x'在V 内的情形. 据此,将(10)式代入(8)式时,相应地将V_∞ 改为V,即有

$$\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma=\int_V\frac{\rho(x')}{4\pi\varepsilon_0}4\pi\mathrm{d}V'=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(x')\mathrm{d}V'. \tag{11}$$

这就是高斯定理的积分形式. 它指出,静电场通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的总电量的ε_0 分之一,与封闭面外的电荷无关.

由于定积分与积分变量无关,可将(11)式右边的积分变量x'换为x,再将(11)式左边的面积分换成体积分,即得

$$\int_V \nabla \cdot E \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(x)\mathrm{d}V . \tag{12}$$

由积分区域的任意性,便有

$$\nabla \cdot E(x) = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}. \tag{13}$$

这就是高斯定理的微分形式. 它给出场与源的局域关系:空间任一点电场的散度,只与该点的电荷密度有关,而与其他点的电荷分布无关. 在 $\rho(x)\neq 0$ 处,$\nabla \cdot E(x)\neq 0$,是电场的源头或尾闾,电力线不连续;在 $\rho(x)=0$ 处,$\nabla \cdot E(x)=0$(但 $E(x)$ 不一定为零),电力线连续.

由(10)式可见,结论 $\nabla \cdot E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 是反平方定律 $\left(E\sim\frac{1}{r^2}\right)$ 的结果. 如果 $E\sim\frac{1}{r^{2+\delta}}$,即使 δ 很小,高斯定理也不成立. 但迄今为止尚未发现对反平方定律的偏离,本节习题第 3 题给出判断反平方定律成立的精度的一个巧妙方法.

由附录1§ A1.4 中的亥姆霍兹定理可知,为了确定一个矢量场,必须知道它的散度和旋度,为此,进一步计算静电场的旋度.

4. 静电场的旋度

现在,先计算点电荷电场的环流,再计算任意电荷分布情形下电场的环流,将(5)式代入 $\oint_L E\cdot \mathrm{d}l$,即有

$$\oint_L E\cdot \mathrm{d}l = \oint_L \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \mathrm{d}l, \tag{14}$$

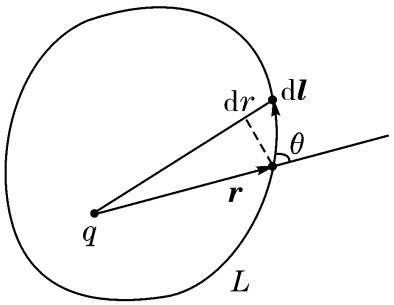


图 1.5

由图 1.5 可得

$$r\cdot \mathrm{d}l = r\cos\theta \mathrm{d}l = r\mathrm{d}r, \tag{15}$$

将上式代入(14)式,得

$$\oint_L E\cdot \mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \tag{16}$$

既然一个点电荷激发的静电场的环流为零,由场强叠加原理可得

$$\oint_L E\cdot \mathrm{d}l = \oint_L \sum_k E_k\cdot \mathrm{d}l = \sum_k \oint_L E_k\cdot \mathrm{d}l = 0, \tag{17}$$

即任意电荷分布的静电场的环流亦为零.

利用斯托克斯定理将上式左边的线积分变为面积分,即得

$$\int_S \nabla\times E(x)\cdot \mathrm{d}\sigma = 0, \tag{18}$$

由 S 的任意性,便有

$$\nabla\times E(x) = 0. \tag{19}$$

这表明,静电场内任一点电场的旋度为零,即静电场是无旋场.

静电场的散度 $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 及旋度 $\nabla \times E = 0$ 是静电场的基本方程,也是寻找电磁现象基本规律的重要基础.

二、静磁场的基本方程

1. 安培定律

1820 年安培通过实验发现了电流元相互作用的公式——安培定律.它的现代形式为

$$\mathrm{d}^2F = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathrm{d}l \times \left(I'\mathrm{d}l' \times \frac{r}{r^3} \right), \tag{20}$$

式中 d^2F 为电流元 $I'\mathrm{d}l'$ 对 $I\mathrm{d}l$ 的作用力(它是二阶无穷小量). $r = x - x'$ 为由 $I'\mathrm{d}l'$ 指向 $I\mathrm{d}l$ 的矢径(见图 1.6). μ_0 为真空磁导率,其值为

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}. \tag{21}$$

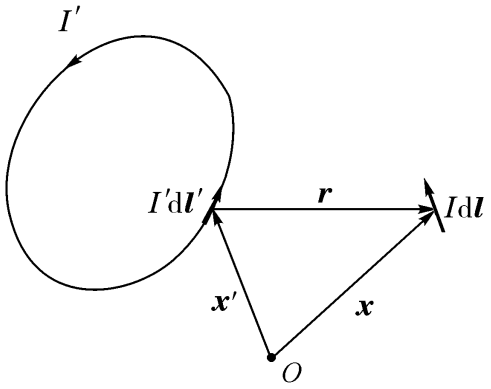


图 1.6

两电流元之间的作用力一般不满足牛顿第三定律,因为孤立的稳恒电流元根本不存在.但是,对于非稳恒的情形(例如两个运动的带电粒子组成的系统),牛顿第三定律及与之等价的动量守恒定律同样均不成立.因为此时粒子系统的机械动量与电磁场动量之和才在运动中保持守恒(见§ 2.2“电磁作用下的动量守恒定律”).

2. 磁感应强度　毕奥-萨伐尔定律

电流元之间的相互作用同样也不是超距作用,是通过磁场来传递的.

那么,电流 I' 的回路对电流元 $I\mathrm{d}l$ 的作用是怎样通过磁场来传递的呢?为了弄清楚这一点,对安培定律沿电流 I' 的回路作线积分,得

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathrm{d}l \times \oint_L I'\mathrm{d}l' \times \frac{r}{r^3}. \tag{22}$$

显然,电流 I' 的回路对电流元 $I\mathrm{d}l$ 的作用力 $\mathrm{d}F$ 与线积分

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I'\mathrm{d}l' \times \frac{r}{r^3} \tag{23}$$

有关.可见 B 反映了磁场在电流元 $I\mathrm{d}l$ 所处位置的性质.历史上将 B 称为磁感应强度,它与描述电场的电场强度地位相当.

将(23)式代入(22)式,则安培定律可表示为

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l \times B. \tag{24}$$

如果用空间的电流分布 $J(x')\mathrm{d}V'$ 代替 $I'\mathrm{d}l'$,(23)式可改写为

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(x') \times r}{r^3} \mathrm{d}V'. \tag{25}$$

这就是毕奥-萨伐尔定律,它给出空间所有电流元 $J(x')\mathrm{d}V'$ 在 x 处激发的总磁场.毕奥-萨伐尔定律是稳恒电流激发磁场的基本实验定律.

同样,将 $J\mathrm{d}V$ 代替 $I\mathrm{d}l$,(24)式可改写为

$$\mathrm{d}F = J(x)\mathrm{d}V \times B(x). \tag{26}$$

这就是电流元在磁场受到的洛伦兹力.

对于电量为 q、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子,所受洛伦兹力为

$$F = q\,\boldsymbol{v} \times B. \tag{27}$$

3. 磁场的散度　磁场的矢势

为了求得磁场的散度,首先改写毕奥-萨伐尔定律的被积函数. 利用 $\nabla \times J(x') = 0$(因为 $J(x')$ 仅是源变量 x' 的函数,而算符 ∇ 是对场变量 x 的微商运算,x' 与 x 为独立变量)及矢量分析的公式,可得

$$\nabla \times \frac{J(x')}{r} = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times J(x') + \frac{1}{r}\nabla \times J(x') = -J(x') \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{J(x') \times r}{r^3}. \tag{28}$$

将(28)式代入毕奥-萨伐尔定律,即有

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(x') \times r}{r^3}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \frac{J(x')}{r}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int_V \frac{J(x')}{r}\mathrm{d}V'. \tag{29}$$

这里利用算符 ∇ 与积分变量无关而提出积分号外. 取

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(x')}{r}\mathrm{d}V', \tag{30}$$

将上式代回(29)式,即有

$$B = \nabla \times A. \tag{31}$$

据此,由(30)式定义的 A 称为磁场的矢势,矢势的物理意义将在§ 2.2 再探讨.

矢量场的旋度必为无源场,即

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0. \tag{32}$$

这表明,磁场是无源场,磁感应线是闭合的.

由高斯定理还可得到

$$\oint_S B \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot B\mathrm{d}V = 0. \tag{33}$$

这表明,穿过任一封闭曲面的磁通量为零.

4. 磁场的旋度

由矢量分析公式可得

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A. \tag{34}$$

现在利用稳恒条件证明上式右边第一项为零. 为此,将(30)式代入,得

$$\nabla \cdot A = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \cdot \int_V \frac{J(x')}{r}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla \cdot \frac{J(x')}{r}\mathrm{d}V'. \tag{35}$$

利用

$$\nabla\frac{1}{r} = -\nabla'\frac{1}{r}, \qquad \nabla \cdot J(x') = 0. \tag{36}$$

以及稳恒电流的条件

$$\nabla' \cdot J(x') = -\frac{\partial \rho(x')}{\partial t} = 0, \tag{37}$$

得

$$\nabla \cdot \frac{J(x')}{r} = J(x') \cdot \nabla \frac{1}{r} = -J(x') \cdot \nabla' \frac{1}{r} = -\nabla' \cdot \frac{J(x')}{r}. \tag{38}$$

将上式代入(35)式,并利用高斯定理,即有

$$\nabla \cdot A = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla' \cdot \frac{J(x')}{r} \mathrm{d}V' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{J(x')}{r} \cdot \mathrm{d}\sigma' = 0, \tag{39}$$

上式之所以等于零是因为所有的电流均在体积V 内部,S 是包围V 的封闭面,在面S 上的$J(x') = 0$,故沿S 的面积分为零.

将(39)式及(30)式代入(34)式,得

$$\nabla \times B = -\nabla^2 A = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2 \int_V \frac{J(x')}{r} \mathrm{d}V'. \tag{40}$$

由于∇^2 与积分变量x'无关,可移入积分号内,再利用附录2 的(11)式

$$\delta^3(x - x') = \delta^3(r) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{r}, \tag{41}$$

可得

$$\nabla \times B = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V J(x') \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}V' = \mu_0 \int_V J(x') \delta^3(x - x') \mathrm{d}V' = \mu_0 J(x). \tag{42}$$

这表明,电流是磁场的源,磁场的旋度与$J(x)$成正比,电流激发的磁场以涡旋的形式出现.

由斯托克斯定理还可得到

$$\oint B \cdot \mathrm{d}l = \int_S \nabla \times B \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_S \mu_0 J(x) \cdot \mathrm{d}\sigma = \mu_0 I. \tag{43}$$

这就是安培环路定理.

静磁场的散度$\nabla \cdot B = 0$ 及旋度$\nabla \times B = \mu_0 J$ 是研究静磁场的基本方程,也是寻找电磁现象基本规律的重要基础.

习　题　1.2

1. 已知电荷体密度为ρ、半径为a 的均匀带电球体内部有一半径为b 的球形空腔,后者的中心与球心的距离为d(且$b + d < a$),求空腔内的电场.

2. 有一静电荷分布产生如下径向电场

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathrm{e}^{-bR} e_R,$$

式中q,b 为常数. 求空间的电荷密度ρ 及总电量Q.

3. 半径为a 的一个带电导体球壳(见图1.7),总电量为Q. 假设静电力服从n 次方反比律,试计算距离球心R 处的电场. 怎样通过本题计算结果判断反平方定律成立的精度?

4. 无限长的半圆柱壳上沿其侧面通有均匀分布的电流I,试求过圆柱壳轴线且平分半圆柱

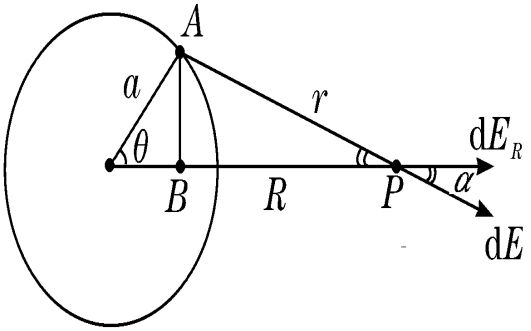


图 1.7

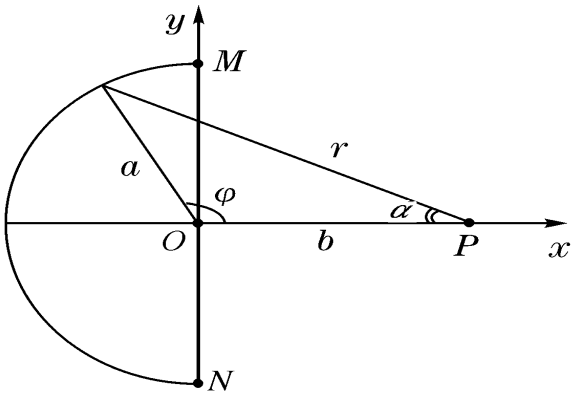


图 1.8

壳的平面上一点 P 处的 B. 已知圆柱的半径为 a,P 点到轴线的距离为 b,如图 1.8 所示.

5. 有一半径为 a、位于 $z=0$ 至 ∞ 的半无限长螺线管,单位长度匝数为 n,载流为 I. 试求螺线管末端($z=0$)、轴附近($\rho \ll a$)处的磁场的径向分量 $B_\rho(0)$ 的表达式.

6. 试证明,两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等,方向相反.

§ 1.3　真空中的麦克斯韦方程组　洛伦兹力公式

上节从实验定律出发得到了静电场与静磁场的基本方程. 在静电和静磁的情况下,电场和磁场均不随时间变化,两者没有联系. 本节将寻找在普遍情形下,电磁场的基本方程. 为此,先介绍法拉第电磁感应定律,麦克斯韦的位移电流假设,以及在此基础上建立起来的电磁场基本方程组——麦克斯韦方程组. 最后,将电力与磁力的实验定律归纳为洛伦兹力公式.

一、法拉第电磁感应定律

1831 年法拉第通过实验发现,当穿过导体回路的磁感应通量 Φ 发生变化时,回路中产生感应电动势 $\mathscr{E}$ 且

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S B \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

这个定律称为法拉第电磁感应定律,式中的负号表示感应电流激发的磁场阻碍原磁感应通量的变化.

当然,只要磁场发生变化就会激发电场,与空间是否放置导体回路无关,感应加速器就是依靠变化的磁场所激发的电场来加速电子的,见本节习题第 1 题.

我们知道,电场 E 沿闭合回路上的积分就是电动势 $\mathscr{E}$ 即

$$\mathscr{E} = \oint E \cdot \mathrm{d}l. \tag{2}$$

将(1)式与(2)式联立,便有

$$\oint E \cdot \mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S B \cdot \mathrm{d}\sigma = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

利用斯托克斯定理将上式左边化为面积分,得

$$\int_S \nabla \times E \cdot \mathrm{d}\sigma = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

由 S 的任意性,即得电磁感应定律的微分形式

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

这表明,变化的磁场能激发电场,感应电场是涡旋场而不是势场,这是与静电场本质上不同之处.

二、位移电流假设　麦克斯韦方程组

前面由实验定律出发,导出了在特定条件下的几个电磁场方程,即

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{6}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{8}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J. \tag{9}$$

式中的电荷密度 ρ 和电流密度 J 遵守电荷守恒定律

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

怎样从这些在特定条件下得到的规律提炼出普遍性的规律呢?首先,要求这些方程之间没有矛盾,即方程是自洽的. 当然,“实践是检验真理的惟一标准”,最根本的还是要看它们是否与实验事实相符合.

方程(6)来自库仑定律,尽管在普遍情形下库仑定律不成立,但直到现在的一切实验事实表明,场与源的关系这一合理内核在普遍情形下仍是正确的,可以推广为普遍规律.

方程(7)是在不稳定情形下得到的,自然可推广为普遍规律.

方程(8)是在静磁场的条件下总结出来的. 那么,在磁场变化的条件下是否成立呢? 在法拉第电磁感应定律两边取散度,考虑到矢量场的旋度是无源场,便有

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times E) = -\nabla \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot B), \tag{11}$$

上式表明,$\nabla \cdot B$ 不随时间变化. 因此,只要在某一时刻没有磁场或只有稳恒磁场(因为已知稳恒磁场的 $\nabla \cdot B = 0$),则任何时刻均有 $\nabla \cdot B = 0$. 所以,第三个方程也可以推广为普遍规律.

方程(9)的积分形式是 $\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \int_S J \cdot \mathrm{d}\sigma$,它也是在静磁场的条件下得到的. 那么,在不稳定情况下,磁场的环流 $\oint_L B \cdot \mathrm{d}l$ 是否仍等于 μ_0 乘以流过以 L 为边界的任意曲面的电流 $\int_S J \cdot \mathrm{d}\sigma$ 呢?

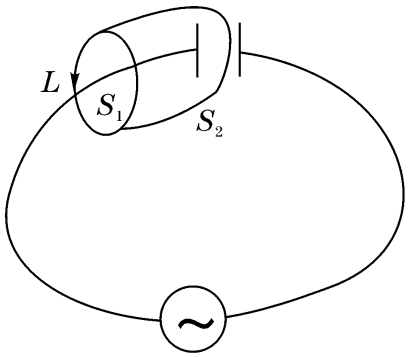


图 1.9

现在考虑平行板电容器的充、放电电路(见图 1.9).以 L 为边界作曲面 S_1 和 S_2,其中曲面 S_1 通过导线的横截面,有自由电子穿过 S_1;而曲面 S_2 通过电容器的两极板之间,没有自由电子穿过 S_2.因此

$$\int_{S_1} J\cdot \mathrm{d}\sigma\neq 0, \qquad \int_{S_2} J\cdot \mathrm{d}\sigma= 0.$$

这说明,尽管两曲面的边界 L 相同,但穿过两曲面的传导电流不同,可见方程(9)不能推广到不稳定情形.

为了解决这个矛盾,1864 年麦克斯韦提出了位移电流假设,即将方程(9)修改为

$$\nabla\times B= \mu_0(J+ J_{D_0}), \tag{12}$$

式中 J_{D_0} 的脚标"D_0"表示真空中的位移电流.对上式两边求散度,并利用

$$\nabla\cdot J= -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad \nabla\cdot E= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{13}$$

便有

$$\nabla\cdot J_{D_0}= \nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times B- J\right)= -\nabla\cdot J= \frac{\partial\rho}{\partial t}= \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\nabla\cdot E\right)= \nabla\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right). \tag{14}$$

比较上式两端,麦克斯韦把位移电流定义为

$$J_{D_0}= \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{15}$$

这表明,位移电流的本质是变化的电场,(15)式表明变化的电场可以激发磁场.进一步的计算表明,在似稳条件下,每个位移电流元都激发磁场,且其规律与传导电流元一样遵守毕-萨定律,但全部位移电流激发的合磁场为零.[①②]

引入位移电流后,全电流

$$J_T= J+ J_{D_0} \tag{16}$$

是连续的.对上式两边求散度后,将(12)式代入,可得

$$\nabla\cdot J_T= \nabla\cdot(J+ J_{D_0})= \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\nabla\times B)= 0. \tag{17}$$

这样,图 1.9 所示电路出现的矛盾得到解决:在电容器两极之间随时间变化的电场形成位移电流 J_{D_0},它把电容器极板间中断的 J 线连接起来,使全电流 J_T 线具有闭合性.

经过这样的推广和修改之后,麦克斯韦得到了在普遍情形下电磁场的基本方

① 赵凯华.2001.位移电流不激发磁场简例[J].大学物理,20(6):40.

② 高炳坤.2002.对《位移电流不激发磁场简例》一文的补充.大学物理,21(9):30.

程——麦克斯韦方程组,即

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{18}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{19}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{20}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{21}$$

这组方程有什么物理意义呢?

第一,它指出了在普遍情形下场(E,B)和源(ρ,J)的关系. 式(18)、(19)表明,由 ρ 激发的电场是无旋场;(21)式表明,由 J 激发的磁场是涡旋场.

第二,它指出变化的涡旋电场与变化的涡旋磁场可以互相激发,形成电磁波,这个预言为 1888 年的赫兹实验所证实. (19)式表明,变化的磁场激发的电场是左旋的涡旋场(负号表示左旋);(21)式表明,变化的电场激发的磁场是右旋的涡旋场(正号表示右旋).

第三,电磁场可以波的形式传播,可以独立于电荷、电流而存在,这使人们认识到场的物质性.

三、洛伦兹力公式

上节作为实验定律已给出静电场作用于电荷的力为

$$F = qE, \qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}F = \rho E \,\mathrm{d}V. \tag{22}$$

这样,电场作用于电荷的力密度(施于单位体积内电荷的力)为

$$f = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \rho E. \tag{23}$$

静磁场作用于运动电荷的力为

$$F = q\,\boldsymbol{v} \times B, \qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}F = J\,\mathrm{d}V \times B. \tag{24}$$

这样,磁场作用于电流的力密度(施于单位体积内载流体的力)为

$$f = J \times B. \tag{25}$$

洛伦兹假定这些公式在普遍情形下仍成立,即电磁场对电荷体系的力密度公式为

$$f = \rho E + J \times B. \tag{26}$$

上式称为洛伦兹力公式. 因为由无限小的体电荷和体电流所激发的场是无限小的,所以公式中的 E 和 B 均可看做总场.

对于一个电荷为 q、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子,将(26)式两边对粒子所占的体积 V 积分,考虑到 V 内 E 和 B 可看为常矢量,即得运动带电粒子所受的洛伦兹力

$$F = qE + q\,\boldsymbol{v} \times B. \tag{27}$$

电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式,称为经典电动力学的三个基

本定律.它们与牛顿第二定律一起,成为描述电荷体系与电磁场运动的基本方程.

习　题　1.3

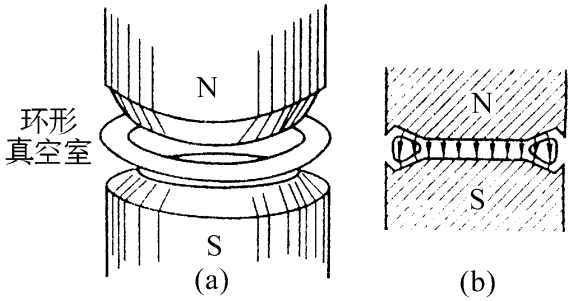


图 1.10

1. 在电子感应加速器中[其纵截面如图 1.10(b)所示],电子被磁场控制在一个环形真空室内的半径为 a 的圆周轨道上运动,电子受到变化磁场激发的感应电场的作用而加速.试证明,轨道平面上的平均磁感应强度 $\overline{B}=\frac{1}{\pi a^2}\oint B\cdot \mathrm{d}\sigma$ 应为轨道上的磁感应强度 B_a 的两倍,才能使电子的轨道半径在电子能量增加的过程中保持恒定.

2. 试由麦克斯韦方程 $\nabla\times B=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$ 出发,求一个匀速运动($v\ll c$)的电子激发的磁感应强度 B.

§ 1.4　介质中的麦克斯韦方程组　介质的电磁性质方程

本节从真空中的麦克斯韦方程组出发寻找介质中的麦克斯韦方程组,关键是把介质看成是电子和核分布在真空中的电荷体系.当没有外场存在时,由于分子的无规则热运动,介质不会出现宏观的电荷电流分布;当存在外场时,介质将发生极化和磁化,在介质内部出现宏观电荷电流分布.另一方面,这些电荷电流分布又反过来激发附加的电磁场,叠加在外场上成为总的电磁场.

本节依次讨论介质的极化、介质的磁化、介质中的麦克斯韦方程组和介质的电磁性质方程.

一、介质的极化

组成绝缘介质的分子有两类.一类称为无极分子,这类分子的正负电中心重合,分子的电偶极矩为零(如氢分子和二氧化碳分子).在外场的作用下,这类分子的正负电中心分开,所有分子都产生与电场同向的电偶极矩,使介质出现宏观电偶极矩.另一类是有极分子,这类分子的正负电中心不重合,分子具有电偶极矩(如水分子),由于没有外场时分子的无规则取向,不会出现宏观电偶极矩.但在外场作用下,使各分子的电偶极矩发生改变并使分子偶极矩倾向于电场方向,同样形成了宏观电偶极矩.

为了描述介质的极化现象,引入介质极化强度 P 这个物理量.它定义为单位体积内的分子总电偶极矩,即

$$P=\frac{1}{\Delta V}\sum_k p_k. \tag{1}$$

式中 ΔV 是物理无穷小体积，p_k 是该体积元内第 k 个分子的电偶极矩(简称电矩)，$\sum_k$ 是对 ΔV 内所有分子求和.

宏观电偶极矩的产生使介质中出现了宏观的电荷分布，由于这些电荷被束缚在分子内部而不能在介质内自由运动，故称为束缚电荷，可以证明(见本节习题第1题)：

在介质内部，束缚电荷的体密度为

$$\rho_P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q_P}{\Delta V} = -\nabla \cdot P, \tag{2}$$

在两种介质分界面上，束缚电荷的面密度为

$$\sigma_P = \lim_{\Delta \sigma \to 0} \frac{\Delta Q_P}{\Delta \sigma} = n \cdot (P_1 - P_2), \tag{3}$$

式中的 n 是分界面的法向单位矢量(由介质1指向介质2).

如果电场随时间变化，则极化过程中正负电中心的相对位移也随时间变化，束缚电荷体密度 ρ_P 也随时间变化，从而形成极化电流，极化电流密度为

$$J_P = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{4}$$

二、介质的磁化

按照经典模型，原子中的电子绕原子核作轨道运动，同时电子还有自旋. 电子运动所形成的电流称之为分子电流 i，可以等效地看成一个面积为 a 的小电流圈，即相当于一个磁偶极子. 其磁矩为 $m = ia$，面积元矢量 a 的方向与分子电流 i 的方向成右手螺旋关系. 当有外磁场存在时，这些磁偶极矩有规则取向，出现宏观磁偶极矩.

为了描述介质的磁化现象，引入介质的磁化强度 M 这个物理量. 它定义为单位体积内的总磁偶极矩，即

$$M = \frac{1}{\Delta V} \sum_k m_k. \tag{5}$$

式中 m_k 是物理无穷小体积 ΔV 内第 k 个分子的磁偶极矩(简称磁矩).

宏观磁偶极矩的出现导致介质中宏观电流的出现，称为磁化电流. 可以证明(见本节习题第1题)，磁化电流密度为

$$J_m = \nabla \times M. \tag{6}$$

对上式两边取散度，便有

$$\nabla \cdot J_m = \nabla \cdot (\nabla \times M) = 0, \tag{7}$$

这表明，磁化电流是连续的，不存在磁化电流的源.

三、介质中的麦克斯韦方程组

前面的讨论表明，当外场存在时，在介质中的电荷密度 ρ 为自由电荷密度 ρ_f 与

束缚电荷密度 $\rho_P = -\nabla \cdot P$ 之和,即

$$\rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot P. \tag{8}$$

介质中全电流密度 J_T 为传导电流密度 J_f,真空中位移电流密度 $J_{D_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$,极化电流密度 $J_P = \frac{\partial P}{\partial t}$ 和磁化电流密度 $J_m = \nabla \times M$ 之和[①],即

$$J_T = J_f + J_{D_0} + J_P + J_m = J_f + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M. \tag{9}$$

既然介质中的电子和核可以看成是真空中的一个电荷体系,因此,在有介质的情况下,若仍使用真空中的麦克斯韦方程组,则应加上由于束缚电荷与分子电流形成的宏观电荷电流分布,即

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \nabla \cdot P\right), \tag{10}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{11}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{12}$$

$$\nabla \times B = \mu_0\left(J_f + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M\right). \tag{13}$$

这就是介质中的麦克斯韦方程组.

由于 $\rho_P = -\nabla \cdot P$, $J_P = \frac{\partial P}{\partial t}$ 和 $J_m = \nabla \times M$ 都不易测量和计算,通常引入辅助量——电位移矢量 D 和磁场强度 H,它们的定义是

$$D = \varepsilon_0 E + P, \tag{14}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M. \tag{15}$$

这样,介质中的麦克斯韦方程组可简化为(见本节习题第 2 题)

$$\nabla \cdot D = \rho_f, \qquad \oint_S D \cdot \mathrm{d}\sigma = Q_f; \tag{16}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \oint_L E \cdot \mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int B \cdot \mathrm{d}\sigma; \tag{17}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \oint_S B \cdot \mathrm{d}\sigma = 0; \tag{18}$$

$$\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t}, \qquad \oint_L H \cdot \mathrm{d}l = I_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int D \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{19}$$

其中左方为微分形式,右方为相应的积分形式,后者是通过对散度方程作体积分,

---

① 利用后面的(24)式 $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon E$,则可把 J_{D_0} 和 J_P 加起来,得到

$$J_D = J_{D_0} + J_P = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}.$$

被称为介质中的位移电流,等于电位移矢量的变化率.

对旋度方程作面积分,并分别应用高斯定理和斯托克斯定理得到.

在这四个方程中,可以认为(17)式和(19)式是决定电磁运动的基本方程;而(16)式和(18)式可以看成是它们的初始条件. 实际上,对(19)式求散度,并利用电荷守恒定律,得

$$0=\nabla\cdot(\nabla\times H)=\nabla\cdot J_{\mathrm{f}}+\nabla\cdot\frac{\partial D}{\partial t}=-\frac{\partial\rho_{\mathrm{f}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot D\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot D-\rho_{\mathrm{f}}\right). \tag{20}$$

这表明,只要初始时刻 $\nabla\cdot D=\rho_{\mathrm{f}}$,则在任何时刻均有 $\nabla\cdot D=\rho_{\mathrm{f}}$,可见(16)式可看成是(19)式的初始条件. 同理可说明其余两式的关系.

那么,在麦克斯韦方程组中,只有(17)式和(19)式这两个矢量方程,怎能确定 E,B,D,H 这四个场量呢? 这就要利用隐含在(14)式和(15)式中 D,E,B,H 之间的关系了,这些关系称为介质的电磁性质方程.

四、介质的电磁性质方程

对于一般的非线性介质而言,D 与 E 以及 B 与 H 的关系比较复杂,例如 D 的 i 分量为

$$D_i=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}E_j+\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}E_jE_k+\sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijkl}E_jE_kE_l+\cdots,\qquad i=1,2,3. \tag{21}$$

即使 D 和 E 有线性关系,也就是只需保留第一项时,仍为

$$D_i=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}E_j,\qquad \text{或}\qquad D=\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot E. \tag{22}$$

式中 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 称为线性介电张量,D 与 E 的方向一般不平行. 例如,石英晶体就是这种各向异性介质.

对于铁磁性物质,B 与 H 同样不具有线性齐次关系,而且是非单值的. 通常用磁化曲线和磁滞回线表示铁磁性物质 B 与 H 之间的关系.

本书主要讨论各向同性的线性介质. 在电磁场的作用下,介质中可能发生如下三个过程:介质的极化、介质的磁化和电荷的传导. 它们具有如下的实验定律:

1. 极化强度 P 与电场强度 E 的关系

$$P=\chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0E, \tag{23}$$

式中 χ_{e} 称为极化率,ε_0 为真空介电常数.

电位移矢量 D 与电场强度 E 的关系即为

$$D=\varepsilon_0E+P=\varepsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}})E=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}E=\varepsilon E, \tag{24}$$

式中 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=1+\chi_{\mathrm{e}}$ 称为相对介电常数,ε 称为介电常数. 当然,对于交变电磁场,ε 是电场频率的函数:$\varepsilon=\varepsilon(\omega)$.

2. 磁化强度 M 与磁场强度 H 的关系

$$M=\chi_{\mathrm{m}}H, \tag{25}$$

式中 χ_m 称为磁化率.

磁感应强度 B 与磁场强度 H 的关系为

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu_0\mu_r H = \mu H , \tag{26}$$

式中 μ_0 为真空磁导率,$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$ 称为相对磁导率,μ 称为磁导率. 同样,对于交变电磁场,μ 也是磁场频率的函数:$\mu = \mu(\omega)$.

这样,利用麦克斯韦方程组及介质的电磁性质方程,即可完全确定 E、B、D、H 这四个场量.

3. 对于导电介质而言,还有一个非常重要的实验定律——欧姆定律,即

$$J_f = \sigma E , \tag{27}$$

式中 σ 称为电导率,与电阻率的关系为 $\sigma = \frac{1}{\gamma}$. 这样,导体电阻的公式也可写成

$$R = \gamma \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S} . \tag{28}$$

习　题　1.4

1. 试证明(2)、(3)、(4)、(6)式.

2. 试导出(16)、(17)、(18)、(19)式.

3. 试证明,均匀介质内部的束缚电荷体密度 ρ_P 与自由电荷体密度 ρ_f 的关系式

$$\rho_P = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f . \tag{29}$$

4. 设 $t = 0$ 时导体内部的电荷体密度为 $\rho_f(0)$,试证明电荷体密度随时间变化的规律为

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)e^{-\frac{t}{\tau}} , \tag{30}$$

式中 $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ 为电荷体密度减小到初始值 $\frac{1}{e}$ 时所经过的时间,称为弛豫时间.

已知铜的电导率 $\sigma = 5.7 \times 10^7 S/m$,$\varepsilon = 1$;石墨的电导率 $\sigma = 0.12 S/m$,$\varepsilon = 5$. 试分别计算两者的弛豫时间. 式中 S 是电导的单位西[门子],它与电阻的单位欧(姆)的关系为:$1S = 1\Omega^{-1}$.

§ 1.5　电磁场的边值关系

在两种不同介质的分界面上,由于界面两侧的介电常数和磁导率不同,场量将发生跃变,这使得麦克斯韦方程组的微分形式失去意义(因为函数不连续就不可能进行微分运算). 因此,必须利用麦克斯韦方程组的积分形式寻找介质分界面两侧场量之间的关系,称为“电磁场的边值关系”. 它们作为求解电磁场的定解条件,在解决实际问题时,是非常重要的.

一、由面积分方程出发导出法向分量的边值关系

在边界两侧作一个扁平盒,盒的上、下底平行于界面,其面积为 $\Delta\sigma$,且线度

$\sqrt{\Delta\sigma}$远大于盒高 Δh(Δh 要非常小,才能反映两侧无限靠近边界处场量之间的关系),如图 1.11 所示. 为确定起见,规定界面法线的单位矢量 n 由介质 1 指向介质 2.

现在依次求出 E,D,P 和 B 的边值关系.

1. 由 $\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q_f+Q_P)$,得

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f+\sigma_P). \tag{1}$$

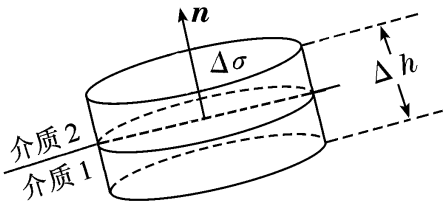


图 1.11

证　由高斯定理出发来证明.

取扁平盒的表面为高斯面,略去侧面的贡献(由于 Δh 为高级小量),可得

$$E_1\cdot(-n\Delta\sigma)+E_2\cdot(n\Delta\sigma)=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f+\sigma_P)\Delta\sigma,$$

即

$$n\cdot(E_2-E_1)=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f+\sigma_P), \tag{2}$$

由此得(1)式. 这表明,E_n 的不连续是由于介质分界面上存在面电荷.

2. 同理,由 $\oint_S D\cdot \mathrm{d}\sigma=Q_f$,可得

$$n\cdot(D_2-D_1)=\sigma_f. \tag{3}$$

3. 由 $D=\varepsilon_0E+P$,即 $P=D-\varepsilon_0E$,用 ε_0 乘(2)式再减去(3)式,即有

$$n\cdot(P_2-P_1)=-\sigma_P. \tag{4}$$

4. 由 $\oint_S B\cdot \mathrm{d}\sigma=0$,得

$$n\cdot(B_2-B_1)=0. \tag{5}$$

二、由线积分方程出发导出切向分量的边值关系

在界面上通过任一点(如 P 点)有无限多个切线方向. 设 t 为任意一个切线方向的单位矢量,现在来寻找场量沿该方向的边值关系.

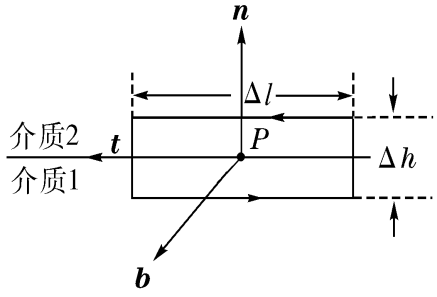


图 1.12

设 n 为过 P 点的界面法向单位矢量,见图 1.12. 引入单位矢量 b,满足

$$b=n\times t. \tag{6}$$

作一平面通过 n 与 t,在平面上取一边长分别为 Δl 与 Δh 的矩形回路(且 $\Delta l\gg\Delta h$,见图). 矩形的面积元矢量为

$$\sigma=b\Delta l\Delta h. \tag{7}$$

现在依次求出 H、E、M 和 B 的边值关系.

1. 由 $\oint_L H\cdot \mathrm{d}l=I_f+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D\cdot \mathrm{d}\sigma$,得

$$n\times(H_2-H_1)=\boldsymbol{\alpha}_f, \tag{8}$$

式中$\boldsymbol{\alpha}$为沿界面上流动的传导电流的线密度,其方向沿电流的方向,其大小是穿过垂直于电流方向的单位横截线的电流:$\alpha_f=\dfrac{\Delta I_f}{\Delta l}$.

证　首先,计算沿界面流过$\Delta\sigma=b\Delta\sigma$的电流.考虑到$\boldsymbol{\alpha}_f$与$b$共面,但不一定同向,故有

$$\Delta I_f=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot b\Delta l. \tag{9}$$

将线积分应用到矩形回路,并略去沿Δh的线积分(由于$\Delta h\ll\Delta l$,是高级小量),即有

$$H_2\cdot(t\Delta l)+H_1\cdot(-t\Delta l)=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot b\Delta l+\frac{\partial D}{\partial t}\cdot b\Delta l\Delta h.$$

易见等式右边的第二项亦为高阶小量,略去后即有

$$(H_2-H_1)\cdot t=\boldsymbol{\alpha}\cdot b. \tag{10}$$

利用矢量公式[参看附录1§ A1.1的(7)式]

$$a\cdot(b\times n)=n\cdot(a\times b)=(n\times a)\cdot b. \tag{11}$$

将$t=b\times n$(见图1.12中三者的关系)代入(10)式左边后,利用(11)式[并且利用(H_2-H_1)取代(11)式中的a],可得

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot b=(H_2-H_1)\cdot t=(H_2-H_1)\cdot(b\times n)=[n\times(H_2-H_1)]\cdot b. \tag{12}$$

比较上式两端,由b的任意性[①],便有

$$n\times(H_2-H_1)=\boldsymbol{\alpha}_f. \tag{13}$$

从证明过程中可以发现,面积分项$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D\cdot\mathrm{d}\sigma$只带来高阶小量$\dfrac{\partial D}{\partial t}\cdot b\Delta l\Delta h$,可以忽略不计.对于后面其他边值关系的推导,类似的项也不必考虑.

2. 同理,由$\oint_L E\cdot\mathrm{d}l=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S B\cdot\mathrm{d}\sigma$出发,不考虑面积分项,参看(10)式,可得

$$(E_2-E_1)\cdot t=0. \tag{14}$$

既然由(10)式可以得到(13)式,易见由(14)式可得[②]

---

① 这里的H_2和H_1分别是界面两侧要多靠近就多靠近P点处的磁场强度,过P点有无限多个切线方向t,对应无限多个b,对应无限多个不同方位的回路.这些回路相当于以n为轴旋转得到.由于$\boldsymbol{\alpha}$及$n\times(H_2-H_1)$是位于P点切面上的矢量(不妨称此切面为xoy平面),先后取b为e_x和e_y,即可证明$\boldsymbol{\alpha}_f$与$n\times(H_2-H_1)$的这两分量分别相等,故这两矢量相等.

② 也可以将(E_2-E_1)分解为切向与法向两个分矢量之和,再将$(E_2-E_1)_t=(E_2-E_1)\cdot t=0$代入,得

$$E_2-E_1=(E_2-E_1)_t t+(E_2-E_1)_n n=(E_2-E_1)_n n.$$

易见n与(E_2-E_1)的矢积为

$$n\times(E_2-E_1)=(E_2-E_1)_n n\times n=0.$$

$$n\times(E_2-E_1)=0. \tag{15}$$

3. 由 $\oint_L M\cdot \mathrm{d}l=I_m$ 出发,参看(13)式,可得

$$n\times(M_2-M_1)=\alpha_m, \tag{16}$$

式中α_m是界面上的磁化电流密度(面电流的线密度).

4. 将$B=\mu H$代入(13)式,还可得

$$n\times\left(\frac{B_2}{\mu_2}-\frac{B_1}{\mu_1}\right)=\alpha_f. \tag{17}$$

如果将麦克斯韦方程组的微分形式与相应的边值关系排列成表,细心的读者很容易发现一种记忆“电磁场边值关系”的方法(见本节习题第1题).

表 1.2

麦克斯韦方程组	相应的边值关系
$\nabla\cdot D=\rho_f$	$n\cdot(D_2-D_1)=\sigma_f$
$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$	$n\times(E_2-E_1)=0$
$\nabla\cdot B=0$	$n\cdot(B_2-B_1)=0$
$\nabla\times H=J_f+\frac{\partial D}{\partial t}$	$n\times(H_2-H_1)=\alpha_f$

习　题　1.5

1. 试由表1.2总结出“麦克斯韦方程组”与相应的“边值关系”在形式上的联系.

2. 有一内、外半径分别为R_1和R_2的空心介质球,介质的介电常数为ε,使介质内带均匀自由电荷ρ_f,求:

(1) 空间各点的电场;

(2) 极化电荷体密度ρ_P和面密度σ_P.

3. 平行板电容器内有两层介质,它们的厚度分别为l_1和l_2,介电常数为ε_1和ε_2,今在两板接上电动势为$\mathscr{E}$的电池,求:

(1) 电容器两板上的自由电荷面密度σ_{f1}和σ_{f2};

(2) 介质分界面上的自由电荷面密度σ_{f3}.

若介质是漏电的,电导率分别为σ_1和σ_2. 当电流达到恒定时,上述两问题结果如何?

4. 内外半径分别为ρ_1和ρ_2的无穷长中空导体圆柱,沿轴向流有恒定均匀传导电流J_f,导体的磁导率为μ,求磁感应强度B,磁化电流密度J_m和线密度α_m.

5. 试证明:

(1) 当两种绝缘介质的界面上不带自由面电荷时,电场线的曲率满足:$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$,其中$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$分别为两种介质的介电常数,$\theta_1$和$\theta_2$分别为界面两侧电场线与法线的夹角;

(2) 当两种导电介质内流有恒定电流时,分界面上电场线的曲率满足:$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$,

其中σ_1和σ_2分别为两种介质的电导率.

6. 试用边值关系证明,在绝缘介质与导体的分界面上,在静电情况下,导体外的电场线总是垂直于导体表面;在恒定电流情况下,导体内电场线总是平行于导体表面.

第二章　电磁作用下的守恒定律

翻开物理学的发展历史,前人首先研究并取得重大成果的是机械运动领域,并相继发现了该领域的能量守恒定律、动量守恒定律和角动量守恒定律.那么,进入电磁作用的领域后,能量、动量与角动量是否仍守恒?电磁场的能量密度$w(x,t)$,能流密度$S(x,t)$,动量密度$g(x,t)$,动量流密度$\overleftrightarrow{T}(x,t)$,角动量密度$l_{e,m}(x,t)$,角动量流密度$\overleftrightarrow{M}(x,t)$的表达式又将是怎样的?在我们的生活和生产实践中又有哪些体现?这就是本章要研究的问题.

本章仍然把这些守恒定律看成是自然界的普遍规律,进而给出在电磁作用下这些规律的数学形式,随后将麦克斯韦方程组及洛伦兹力公式代入,即可分别求得w,S,g,$\overleftrightarrow{T}$,$l_{e,m}$和$\overleftrightarrow{M}$的数学表达式.在这个基础上再应用本章引入的新概念和守恒定律处理几个很有趣的实际问题.事实证明,这些定律经受了实践的考验,并且有着越来越广泛的应用.

§ 2.1　电磁作用下的能量守恒定律

本节考察在电磁场与带电体的相互作用过程中,电磁场能量与带电体机械能的相互转化过程,得出电磁作用下能量守恒定律的数学形式.随后利用麦克斯韦方程及洛伦兹力公式,得到电磁场能量密度$w(x,t)$与电磁场能流密度$S(x,t)$的表达式.最后,作为例子,考察恒定情况下电磁能量的传输问题.

一、电磁作用下能量守恒定律的数学形式

设空间某体积为V,其界面为σ,由于电磁场对V内的带电体做功(正功或负功),使带电体的机械能发生变化.与此相应,电磁场的能量密度$w(x,t)$,即t时刻、x处电磁场单位体积的能量也发生变化;这意味着电磁场的能量发生流动,为此又引入电磁场能流密度$S(x,t)$来描述这一现象.$S(x,t)$的方向表示t时刻、x处电磁场能量流动的方向,其大小表示t时刻、x处单位时间内垂直流过单位横截面的电磁场能量.

这样,根据电磁作用下的能量守恒定律,通过界面σ流入V内的电磁场能量为$-\oint_\sigma S\cdot \mathrm{d}\sigma$应等于单位时间内电磁场对电荷所做的功$\int_V f\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}V$,加上单位时间体积$V$内电磁场能量的增量$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\,\mathrm{d}V$,即

$$-\oint_\sigma S\cdot \mathrm{d}\sigma=\int_V f\cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\,\mathrm{d}V. \tag{1}$$

这就是电磁作用下能量守恒定律的积分形式.利用高斯定理将面积分换成体积分,由V的任意性,即得微分形式

$$\nabla\cdot S+\frac{\partial w}{\partial t}=-f\cdot \boldsymbol{v}. \tag{2}$$

二、电磁场能量密度$w(x,t)$与能流密度$S(x,t)$的表达式

寻找$S(x,t)$与$w(x,t)$表达式的方法是将洛伦兹力公式及麦克斯韦方程组代入(2)式右边,并将它变换为两项:一项是一个物理量的散度,另一项为有关物理量对时间的偏导,通过与(2)式左边两项的对比即可求得S与w.

在推导过程中,要用到如下公式:

$$f=\rho_{\mathrm{f}}(E+\boldsymbol{v}\times B), \tag{3}$$

$$\nabla\times H=J_{\mathrm{f}}+\frac{\partial D}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

此外,还应注意到$\boldsymbol{v}\times B$垂直于$\boldsymbol{v}$,因而

$$(\boldsymbol{v}\times B)\cdot \boldsymbol{v}=0. \tag{6}$$

再就是矢量分析的公式[见附录§ 1.3 的(11)式]:

$$\nabla\cdot(E\times H)=H\cdot(\nabla\times E)-E\cdot(\nabla\times H). \tag{7}$$

这样,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot S+\frac{\partial w}{\partial t}&=-f\cdot \boldsymbol{v}=-(\rho_{\mathrm{f}}E+\rho_{\mathrm{f}}\boldsymbol{v}\times B)\cdot \boldsymbol{v}\\&=-E\cdot\rho_{\mathrm{f}}\boldsymbol{v}=-E\cdot J_{\mathrm{f}}\\&=-E\cdot\left(\nabla\times H-\frac{\partial D}{\partial t}\right)\\&=\left[\nabla\cdot(E\times H)-H\cdot(\nabla\times E)\right]+E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}\\&=\nabla\cdot(E\times H)+H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}+E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}.\end{aligned} \tag{8}$$

比较(8)式两边,易得能流密度S及能量密度w的表达式

$$S=E\times H, \tag{9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}+H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{10}$$

当然,上面两式是最简单的表达式,它并不是惟一的数学表达式. 例如,若令

$$S = E \times H + \nabla \times K, \tag{11}$$

也能满足(8)式,因为 $\nabla \cdot (\nabla \times K) \equiv 0$. 但无数实验事实证明,并不存在 $\nabla \times K$ 这个量.

对于各向同性的线性介质,将 $D = \varepsilon E$ 和 $H = B/\mu$ 代入(9)式和(10)式,可得

$$S = E \times H = \frac{1}{\mu} E \times B. \tag{12}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right). \tag{13}$$

对于真空,将 ε_0 代替 ε,μ_0 代替 μ,便有

$$S = E \times H = \frac{1}{\mu_0} E \times B, \tag{14}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \tag{15}$$

三、电磁场能流的实例

现在以同轴电缆为例,讨论电磁场能流密度 S 的空间分布.

【例】 同轴电缆由半径为 a 的长直导线及半径为 b 的长直导体圆筒构成,如图 2.1 所示. 两导体间充满介电常数为 ε、磁导率为 μ 的均匀介质. 电缆的一端加上电压 U,另一端接有负载.

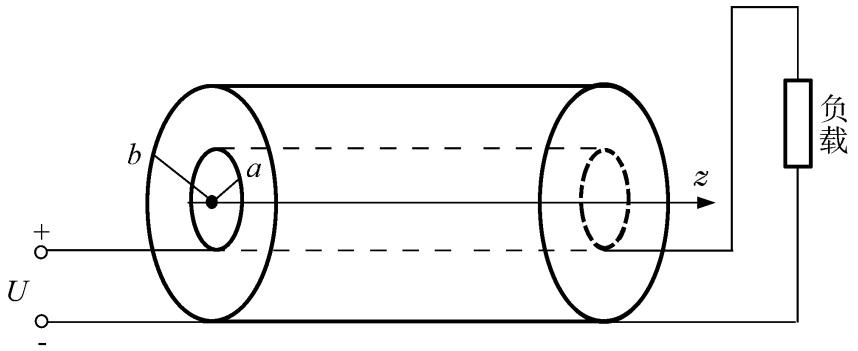


图 2.1

(1) 如果忽略电缆的电阻. 计算介质中的能流密度 S 和传输功率 P;

(2) 设内导线的电导率为 σ(有限值),计算通过内导线表面进入导线的能流密度 S 及功率 P.

解　本题采用极轴沿电缆轴的柱坐标系,如图 2.1 所示.

(1) 忽略电缆的电阻. 此时 $\sigma \to \infty$,导体内 $E_z \approx 0$. 由边值关系 $E_{1t} = E_{2t}$ 可知,介质内 $E_z \approx 0$.

设内导线电荷的线密度(即内导线单位长度的电量)为 η,由轴对称性及高斯

定理 $\oint_S D\cdot \mathrm{d}\sigma = Q_f$，可求得介质内电场的径向分量 E_ρ 满足

$$\varepsilon E_\rho 2\pi\rho\Delta z = \eta_f \Delta z. \tag{16}$$

由此得

$$E = E_\rho \mathbf{e}_\rho = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon\rho}\mathbf{e}_\rho, \qquad a < \rho < b. \tag{17}$$

还可以用已知电压表示 η 及 E. 利用

$$U = \int_a^b E\cdot \mathrm{d}l = \int_a^b E_\rho \mathrm{d}\rho = \int_a^b \frac{\eta \mathrm{d}\rho}{2\pi\varepsilon\rho} = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}, \tag{18}$$

得 $\eta = \dfrac{2\pi\varepsilon U}{\ln(b/a)}$，代入 E，即有

$$E = \frac{U}{\rho\ln(b/a)}\mathbf{e}_\rho. \tag{19}$$

类似地，利用对称性及安培回路定律 $\oint_l H\cdot \mathrm{d}l = I_f$，以及 $\mathrm{d}l = \mathbf{e}_\phi \mathrm{d}l$，便有

$$H_\phi 2\pi\rho = I_f, \tag{20}$$

即

$$H = H_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{I_f}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi. \tag{21}$$

这样，由(17)式及(21)式即可求得介质中的电磁场能流密度：

$$S = E\times H = \frac{U}{\rho\ln(b/a)}\mathbf{e}_\rho \times \frac{I_f}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi = \frac{I_f U}{2\pi\rho^2\ln(b/a)}\mathbf{e}_z. \tag{22}$$

电磁场能量在两导体间的介质中传输，其截面为圆环 σ_{ab}，故在介质中传输的功率为

$$\begin{aligned} P &= \int_{\sigma_{ab}} S\cdot \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_a^b S_z\rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_a^b \frac{I_f U}{2\pi\rho\ln(b/a)}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{I_f U}{\ln(b/a)}\int_a^b \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = I_f U. \end{aligned} \tag{23}$$

(2)考虑内导线的电阻. 因为内导线的电导率 σ 有限，由欧姆定律 $J_f = \sigma E$ 可知 $E_z \neq 0$. 根据电场的切向分量连续，可知介质中的 E_z 也不为零. 此时介质中的电磁场能流密度为

$$S = E\times H = (E_\rho \mathbf{e}_\rho + E_z \mathbf{e}_z)\times H_\phi \mathbf{e}_\phi = E_\rho H_\phi \mathbf{e}_z - E_z H_\phi \mathbf{e}_\rho. \tag{24}$$

现在计算流入内导线(长度为 l 的圆柱导体)的功率 $P = -\oint S\cdot \mathrm{d}\sigma$. 介质中的电磁场能流密度的 $S_z = E_\rho H_\phi$ 分量沿平行于 $\mathbf{e}_z$ 方向前进，没有进入导体；而 $S_\rho = -E_z H_\phi$ 分量则沿 $-\mathbf{e}_\rho$ 方向穿过圆柱侧面而进入内导线.

在 $\rho = a$ 处，由欧姆定律及安培回路定律(注意到电导率 σ 与电阻率 γ 互为倒数，以及 $J_f = I_f/\pi a^2$)，可得

$$E_z = \frac{J_f}{\sigma} = \gamma \frac{I_f}{\pi a^2}, \tag{25}$$

$$H_\phi = \frac{I_f}{2\pi a}. \tag{26}$$

这样,流入长度为 l 的内导线的功率为

$$P = -\oint S \cdot \mathrm{d}\sigma = E_z H_\phi \mathrm{e}_\rho \cdot 2\pi a l \mathrm{e}_\rho \big|_{\rho=a} = \gamma \frac{I_f}{\pi a^2} \frac{I_f}{2\pi a} 2\pi a l = I_f^2 \gamma \frac{l}{\pi a^2} = I_f^2 R, \tag{27}$$

式中 R 为该段导线的电阻,$I_f^2 R$ 为其消耗的功率.

这表明,当内导线存在电阻时,(24)式中 S 的第一项 $E_\rho H_\phi \mathrm{e}_z$ 是提供给负载的能流密度,其功率为(23)式给出的 IU;第二项 $-E_z H_\phi \mathrm{e}_\rho$ 是提供给导线的能流密度(当考虑导体的电阻时,提供给外导体圆筒的功率也可仿照上述方法求得),其功率为(27)式给出的 $I_f^2 R$.

习　题　2.1

1. 半径为 a 的圆形平板电容器,间距为 d,其间填以电导率为 σ 的均匀导电介质,两极间外加直流电压为 V,忽略边缘效应,试计算:

(1)两极间电场、磁场与能流密度矢量;

(2)电容器消耗的功率.

2. 一平行板电容器的两极上加有 $V = V_0 \cos \omega t$ 的电压,若平板为圆形,半径为 a,极间距离为 d,试计算:

(1)两极间的位移电流;

(2)电容器离轴 ρ 处的磁场强度;

(3)电容器内的能量密度 w 和能流密度 S 的平均值;

3. 有一半径为 a,电流密度为 J_f 的长直载流导线,求导线表面的能流密度 S 及传输给长度为 l 的一段导线的功率 P.

4. 内外半径分别为 a、b 的无限长圆柱形电容器,内柱电荷线密度为 η,极间填充电导率为 σ、介电常数为 ε 的非磁性物质.

(1)求 $\eta(t)$ 随时间变化的规律;

(2)证明介质中 $J_D(x) = -J_f(x)$;

(3)求距轴 ρ 处的场对电荷作功的功率密度 $J_f \cdot E$;

(4)证明长度为 l 的一段介质能量损耗功率 $P = \int_V f \cdot v \mathrm{d}V$ 等于该段介质的静电能的减少率 $\int_V \frac{\partial w}{\partial t} \mathrm{d}V$.

§ 2.2　电磁作用下的动量守恒定律

本节将遵循上节的思路,考察在电磁场与带电体的相互作用过程中,电磁场动

量与带电体机械动量的相互转化过程,得出电磁作用下动量守恒定律的数学形式.随后利用麦克斯韦方程组与洛伦兹力公式,导出电磁场动量密度$g(x,t)$与电磁场动量流密度$\overleftrightarrow{T}(x,t)$的表达式.在此基础上,以点电荷的电场与稳恒电流磁场的相互作用为例,阐明矢势A的物理意义,并求得带电粒子在磁场中的总动量.最后,引入麦克斯韦应力张量,并通过它对封闭面的积分求得点电荷间相互作用力的公式,与库仑定律的结果一致.

一、电磁作用下动量守恒定律的数学形式

设空间某体积为V,其界面为σ,由于电磁场对V内的带电体的作用,使带电体的机械动量发生变化.与此相应,电磁场的动量密度$g(x,t)$,即t时刻、x处电磁场单位体积内的动量也发生变化.这意味着电磁场的动量发生流动,为此又引入电磁场动量流密度$\overleftrightarrow{T}(x,t)$来描述这一现象.$\overleftrightarrow{T}(x,t)$是二阶张量,共有9个分量$T_{ij}(i,j=1,2,3)$,$T_{ij}$是单位时间内电磁场通过垂直于e轴的单位面积从后方流向前方动量的j分量.

根据电磁作用下的动量守恒定律,通过σ流入V内的电磁动量为$-\oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$应等于单位时间内带电体机械动量$G_m$的增量$\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t}=\int_V f\,\mathrm{d}V$(后者为电磁场对带电体的作用力),加上单位时间$V$内电磁场动量的增量$\frac{\mathrm{d}G_{e,m}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V g\,\mathrm{d}V$,由此得

$$-\oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}=\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}G_{e,m}}{\mathrm{d}t}=\int_V f\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V g\,\mathrm{d}V. \tag{1}$$

这就是电磁作用下动量守恒定律的积分形式.利用变换关系$\oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V \mathrm{d}V\,\nabla$将面积分换成体积分(见附录1§ A1.4).由$V$的任意性,即得微分形式

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial g}{\partial t}=f. \tag{2}$$

如果$V\to\infty$,则面积分项为零,(1)式简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[G_m(t)+G_{e,m}(t)]=0,$$

即

$$G(t)=G_m(t)+G_{e,m}(t)=G_m(0)+G_{e,m}(0)=G(0). \tag{3}$$

式中$G(t)$和$G(0)$分别是体系在t时刻和$t=0$时刻的总动量.

二、电磁场动量密度$g(x,t)$与动量流密度$\overleftrightarrow{T}(x,t)$的表达式

寻找$\overleftrightarrow{T}(x,t)$与$g(x,t)$表达式的方法是将洛伦兹力公式及麦克斯韦方程组代入(2)式右边,通过与(2)式左边的对比求得.

在推导过程中要用到如下公式:

$$f=\rho_f E+J_f\times B, \tag{4}$$

$$\rho_f = \varepsilon_0 \nabla \cdot E, \tag{5}$$

$$J_f = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot B) B = 0, \tag{7}$$

$$\varepsilon_0 (\nabla \times E) \times E - \varepsilon_0 E \times \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

其中前三式是洛伦兹力公式及真空中的麦克斯韦方程组,(7)式是$\frac{B}{\mu_0}$与$\nabla \cdot B = 0$的乘积,(8)式是$\varepsilon_0 E$与$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$的矢积.当然,要注意,交换两矢量的顺序时,矢积要变号.

将(4)、(5)、(6)式相继代入(2)式后,为了使公式中关于E和B的项具有对称的形式,额外加上等于零的(7)、(8)式,由此得

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial g}{\partial t} &= f = \rho_f E + J_f \times B \\ &= \varepsilon_0 (\nabla \cdot E) E + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times B \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot B) B + \varepsilon_0 (\nabla \times E) \times E - \varepsilon_0 E \times \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned} \tag{9}$$

利用附录习题1.6第3题的结果,易得

$$\varepsilon_0 (\nabla \cdot E) E + \varepsilon_0 (\nabla \times E) \times E = \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(EE - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I} E^2 \right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot B) B + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(BB - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I} B^2 \right). \tag{11}$$

将(10)式和(11)式代入(9)式,并注意到

$$\frac{\partial}{\partial t} (E \times B) = \frac{\partial E}{\partial t} \times B + E \times \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{12}$$

即有

$$-\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial g}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\varepsilon_0 EE + \frac{1}{\mu_0} BB - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E \times B). \tag{13}$$

比较等式两边,即得电磁场动量流密度$\overleftrightarrow{T}$及动量密度g的表达式:

$$\overleftrightarrow{T} = -\varepsilon_0 EE - \frac{1}{\mu_0} BB + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{I} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \tag{14}$$

$$g = \varepsilon_0 E \times B. \tag{15}$$

三、带电粒子在磁场中的电磁动量　矢势的物理意义

设磁场由线圈C的稳恒电流I_f激发,其磁感应强度由毕奥-萨伐尔定律给出:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_f(x') \times r}{r^3} \mathrm{d}V'. \tag{16}$$

质量为m、电量为q的粒子在外力作用下于$t=0$时从磁场外(无穷远处)缓慢地移动,并于t_P时刻到达P点.磁场对运动电荷的洛伦兹力为F_q,则外力为克服洛伦兹力给予电荷q的冲量为

$$-F_q\mathrm{d}t=-(q\boldsymbol{v}\times B)\mathrm{d}t=-q\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\times\int_V\frac{\mu_0 J_f\times r}{4\pi r^3}\mathrm{d}V'=-q\mathrm{d}l\times\oint_C\frac{\mu_0 I_f\mathrm{d}l'\times r}{4\pi r^3}. \tag{17}$$

上式已利用$\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\mathrm{d}l$及$J_f\mathrm{d}V'=I_f\mathrm{d}l'$,式中的$r$是$I_f\mathrm{d}l'$指向$q$的矢径,如图2.2所示.

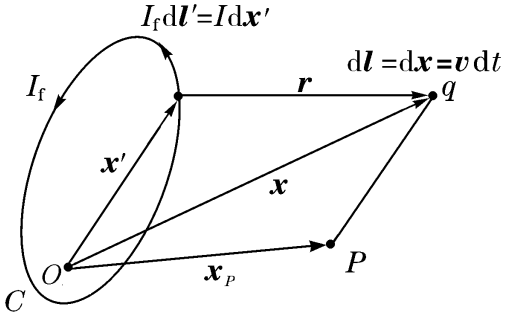


图2.2

另一方面,运动电荷q所激发的磁场B_q也会对闭合回路的电流施以洛伦兹力F_l,外力克服洛伦兹力给予通电回路的冲量为

$$\begin{aligned}-F_l\mathrm{d}t&=-\oint_C I_f\mathrm{d}l'\times B_q\mathrm{d}t\\&=-\oint_C I_f\mathrm{d}l'\times\frac{\mu_0 q\,\boldsymbol{v}\times(-r)}{4\pi r^3}\mathrm{d}t\\&=\oint_C I_f\mathrm{d}l'\times\frac{\mu_0 q\mathrm{d}l\times r}{4\pi r^3}.\end{aligned}\tag{18}$$

式中$-r$为由q指向$I_f\mathrm{d}l'$的矢径,并利用$J\mathrm{d}V=q\boldsymbol{v}=q\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$.

综合上面两式,即得外力给予体系的总冲量(沿回路C的积分变量为l',见图2.2):

$$-(F_q+F_l)\mathrm{d}t=\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\left[-\oint_C\frac{\mathrm{d}l\times(\mathrm{d}l'\times r)}{r^3}+\oint_C\frac{\mathrm{d}l'\times(\mathrm{d}l\times r)}{r^3}\right]. \tag{19}$$

可以证明(见本节习题第1题)

$$-\oint_C\frac{\mathrm{d}l\times(\mathrm{d}l'\times r)}{r^3}+\oint_C\frac{\mathrm{d}l'\times(\mathrm{d}l\times r)}{r^3}=\mathrm{d}l\cdot\oint_C\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}l'. \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式,即有

$$-(F_q+F_l)\mathrm{d}t=\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\mathrm{d}l\cdot\oint_C\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}l'. \tag{21}$$

电荷在$t=0$时位于磁场外(物理上的无穷远处),在$t=t_P$时位于x_P处.在电荷移动过程中,外力给予体系的总冲量为上式左边对t从0到t_P的积分,相应于等式右边对x从∞到x_P的积分,即

$$\int_0^{t_P}-(F_q+F_l)\mathrm{d}t=\int_\infty^{x_P}\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\mathrm{d}l\cdot\oint_C\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}l'. \tag{22}$$

交换积分次序,并利用$\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}l$,便有

$$\begin{aligned}\int_0^{t_P}-(F_q+F_l)\mathrm{d}t&=\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\oint_C\mathrm{d}l\int_\infty^{x_P}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}l\\&=\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\oint_C\mathrm{d}l\int_\infty^{x_P}\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\mu_0 I_f q}{4\pi}\oint_C\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{\infty}\right)\mathrm{d}l'\end{aligned}$$

$$= q\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I_f \mathrm{d}l'}{r_P} = q\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_f \mathrm{d}V'}{r_P} = qA(x_P), \tag{23}$$

式中 r_P 为回路 C 上各点指向 x_P 的矢径,上式再次利用了 $I_f \mathrm{d}l' = J_f \mathrm{d}V'$,以及矢势的表达式[见§ 1.2 的(30)式].

(23)式表明,稳恒磁场中 P 点的矢势 $A(x_P)$ 是将单位正电荷从无穷远处[设 $A(\infty) = 0$]移到 P 点过程中外力克服洛伦兹力给予体系的冲量,这就是矢势的物理意义.由于 $t = 0$ 到 $t = t_P$ 时外力对体系的冲量全部转化为电磁动量储存于电磁场之中,故

$$G_{e,m} = qA(x). \tag{24}$$

上式给出的电磁动量 $G_{e,m}$ 就是电荷 q 与电流 I_f 激发的磁场的相互作用动量.物体与地球的引力形成的相互作用能 mgh 称为物体的势能,电荷与静电场的相互作用能 $q\varphi(x)$ 称为电荷在静电场中的静电势能.类似地,电荷与磁场中的相互作用动量 $G_{e,m} = qA(x)$ 也称为电荷在磁场中的电磁动量,它是电磁场动量的一种等效描述.

这样,带电粒子在磁场中的总动量 P 应等于带电粒子的机械动量 $p = m\boldsymbol{v}$ 及带电粒子在磁场中的电磁动量 $G_{e,m} = qA$ 之和,即

$$P = m\boldsymbol{v} + qA. \tag{25}$$

带电粒子在磁场中的电磁动量还可以直接利用电磁场动量密度(15)式计算:

$$G_{e,m} = \int_V g\mathrm{d}V = \int_V \varepsilon_0 E \times B\mathrm{d}V = qA, \tag{26}$$

最后一个等式的证明见本节习题第 2 题.

四、麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{\Phi}$

我们从分子物理学中已经知道,气体分子运动的动量流表现为气体的内压力;同样,电磁场的动量流表现为电磁场内部的应力.

实际上,前面的(1)式

$$-\oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G_m + G_{e,m})$$

已表明,单位时间内在 V 内的带电体与电磁场的动量的增量等于通过界面 σ 流入 V 内的电磁动量.由于这动量的传递是通过界面 σ 以面积分的形式来表示的,与附录 1 的应力张量对比,得

$$-\oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T} = \oint_\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\Phi}. \tag{27}$$

由此可见,$-\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$ 可以理解为 V 外电磁场($\mathrm{d}\sigma$ 前方的电磁场)对 V 内电磁场($\mathrm{d}\sigma$ 后方的电磁场)的应力.因此

$$\overleftrightarrow{\Phi} = -\overleftrightarrow{T} = \varepsilon_0 EE + \frac{1}{\mu_0}BB - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{28}$$

是应力张量,称为麦克斯韦应力张量.

下面举例说明麦克斯韦应力张量的应用.

【例】 试求位于 $x_+ = -a\,\mathrm{e}$ 的 q 对位于 $x_- = a\,\mathrm{e}$ 的 $-q$ 的作用力.

解 首先选择一个仅包围电荷 $-q$ 的封闭面 σ. 为计算方便,选择由 $z=0$ 平面(称为 σ_0)和球心在原点、半径 $R\to\infty$ 的半球面(称为 σ_R)组成封闭面 σ.

其次,由于仅存在静电场,故 $B=0$. 这样,$-q$ 所受的电场力可通过麦克斯韦应力张量沿封闭面 σ 的积分得到:

$$F=\oint \mathrm{d}\sigma\cdot\overleftrightarrow{\Phi}=\varepsilon_0\oint \mathrm{d}\sigma\cdot\left(EE-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right). \tag{29}$$

考虑到在 $R\to\infty$ 的半球面上,$E\sim R^{-2}$,$E^2\sim R^{-4}$,$\mathrm{d}\sigma=R^2\mathrm{d}\Omega\sim R^2$,故在半球面上的积分为零. 因此,只需计算沿 $z=0$ 平面的积分.

现在采用柱坐标系进行计算,由

$$\rho^2=x^2+y^2, \tag{30}$$

易见在 $z=0$ 平面上(见图 2.3),其电场强度为

$$\begin{aligned}E&=2E_+\cos\beta\,\mathrm{e}\\&=2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+\rho^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\mathrm{e}\\&=\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0(a^2+\rho^2)^{3/2}}\mathrm{e}.\end{aligned} \tag{31}$$

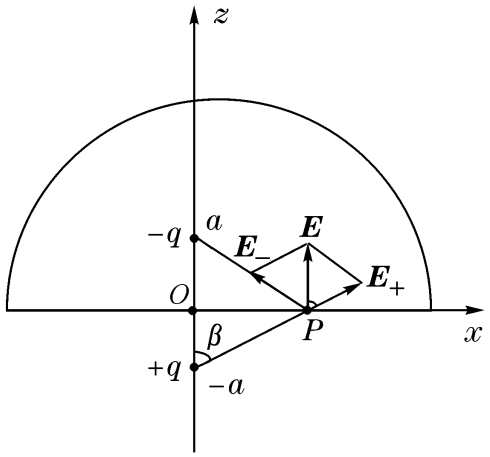


图 2.3

将上式代入(29)式,并注意到 $z=0$ 平面的外法线方向沿 $-\mathrm{e}$,即

$$\mathrm{d}\sigma=-\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{e}=-\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{e}, \tag{32}$$

即得 $-q$ 所受的作用力为

$$\begin{aligned}F&=\varepsilon_0\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\sigma\cdot\left(EE-\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right)=-\varepsilon_0\int_{\sigma_0}\mathrm{e}\cdot\frac{q^2a^2\left(\mathrm{e}\,\mathrm{e}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\right)}{4\pi^2\varepsilon_0^2(a^2+\rho^2)^3}\mathrm{d}\sigma\\&=-\frac{q^2a^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\mathrm{e}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(a^2+\rho^2)^3}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\mathrm{e}.\end{aligned} \tag{33}$$

可见与库仑定律的结果一致,它指出了静电力是怎样通过电磁场的应力来传递的,意义更为深刻.

习　题　2.2

1. 试证明(20)式.

2. 质量为 m、带电量为 q 的粒子在稳恒磁场中缓慢运动,试利用(15)式证明带电粒子在磁场中的总动量为

$$P=m\,\boldsymbol{v}+qA.$$

3. 设空间存在均匀电场 E,试求沿法线方向 n 不同的单位面积上电场的应力 $F_n=n\cdot\overleftrightarrow{\Phi}$. 设 n 分别为:

(1)$n \perp E$;　　(2)$n /\!/ E$;　　(3)n 与 E 的夹角任意.

*§ 2.3　电磁作用下的角动量守恒定律

本节遵循上两节的思路,考察在电磁场与带电体的相互作用过程中,电磁角动量与带电体的机械角动量的相互转化过程,得出电磁作用下角动量守恒定律的数学形式.随后利用上节洛伦兹力密度 f 与动量密度 g、动量流密度 $\overleftrightarrow{T}$ 的关系式,求得角动量密度 $l_{e,m}(x,t)$ 和角动量流密度 $\overleftrightarrow{M}(x,t)$ 的表达式.最后,运用电磁作用下的角动量守恒定律,解释费曼圆盘佯谬.

电磁作用下的角动量守恒定律在光的辐射理论和带电粒子的碰撞理论中具有重要的地位.

一、电磁作用下角动量守恒定律的数学形式

设空间某体积为 V,其界面为 σ,由于电磁场对 V 内带电体的作用,使带电体的机械角动量发生变化.与此相应,电磁场的角动量密度 $l_{e,m}(x,t)$ 也发生了变化.这又意味着电磁场的角动量发生流动.为此,引入电磁场角动量流密度 $\overleftrightarrow{M}(x,t)$ 来描述这一现象,$\overleftrightarrow{M}(x,t)$ 的分量 M_{ij} 是单位时间内电磁场通过垂直于 e 轴的单位面积从后方流向前方的角动量的 j 分量.

这样,根据电磁作用下的角动量守恒定律,通过界面 σ 流入 V 内的电磁角动量 $-\oint \mathrm{d}\sigma\cdot \overleftrightarrow{M}$ 应等于单位时间内带电体机械角动量的增量 $\frac{\mathrm{d}L_m}{\mathrm{d}t}=\int_V R\times f\mathrm{d}V$(等式右边为电磁场对带电体施加的力矩),加上单位时间里 V 内电磁角动量的增量 $\frac{\mathrm{d}L_{e,m}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V l_{e,m}\mathrm{d}V$,由此得

$$-\oint_\sigma \mathrm{d}\sigma\cdot \overleftrightarrow{M}=\frac{\mathrm{d}L_m}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}L_{e,m}}{\mathrm{d}t}=\int_V R\times f\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V l_{e,m}\mathrm{d}V. \tag{1}$$

这就是电磁作用下角动量守恒定律的积分形式.利用变换关系 $\oint_\sigma \mathrm{d}\sigma=\int_V \mathrm{d}V\ \nabla$ 将面积分变成体积分,由 V 的任意性,即得微分形式:

$$-\nabla\cdot \overleftrightarrow{M}-\frac{\partial\, l_{e,m}}{\partial t}=R\times f. \tag{2}$$

如果 $V\to\infty$,则(1)式的面积分项为零,(1)式变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L_m(t)+L_{e,m}(t)]=0, \tag{3}$$

即 $L_m(t)+L_{e,m}(t)$ 不随时间改变.设 $L(t)$ 为 t 时刻体系的总角动量,则

$$L(t)=L_m(t)+L_{e,m}(t)=L_m(0)+L_{e,m}(0)=L(0),$$

式中 $L(t)$ 和 $L(0)$ 分别是体系在 t 时刻和零时刻的总角动量.

二、电磁场角动量密度 $l_{e,m}(x,t)$ 与角动量流密度 $\overleftrightarrow{M}(x,t)$ 的表达式

将上节的(2)式

$$f=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial g}{\partial t},$$

代入(2)式,得

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{M}-\frac{\partial l_{e,m}}{\partial t}=R\times\left(-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial g}{\partial t}\right). \tag{4}$$

可以证明(见本节习题第1题)

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times R)=-R\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}), \tag{5}$$

代入(4)式,得

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{M}-\frac{\partial l_{e,m}}{\partial t}=\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times R)-\frac{\partial}{\partial t}(R\times g). \tag{6}$$

由此得电磁场角动量密度 $l_{e,m}$ 及电磁场角动量流密度 $\overleftrightarrow{M}$,即

$$l_{e,m}=R\times g, \tag{7}$$

$$\overleftrightarrow{M}=-\overleftrightarrow{T}\times R. \tag{8}$$

式中 g 和 $\overleftrightarrow{T}$ 分别为电磁场的动量密度与动量流密度.

三、对费曼圆盘佯谬的解释

著名物理学家费曼曾提出一个被称为“费曼圆盘佯谬”的有趣实验,其装置如图2.4所示.一个薄塑料盘可以无摩擦地自由绕轴旋转,圆盘上置有同轴的通电螺线管,螺线管经一细熔断丝与电池相接.在靠近圆盘边缘处等距固定放置 N 个带同号等量电荷的金属球.在 $t=0$ 时刻圆盘处于静止状态,若 t 时刻连接在电路中的细熔断丝突然断开,按照力学中的角动量守恒定律,圆盘应保持不动.但按照法拉第电磁感应定律,由于磁通突然消失,必产生环绕以轴为心的涡旋电场,小球在电场的作用下将获得转矩而使圆盘旋转,那么,到底圆盘是转还是不转呢?

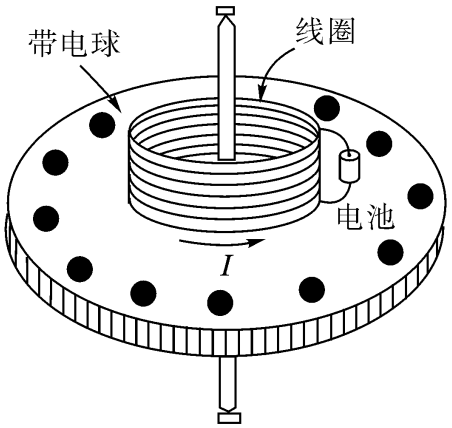


图 2.4

要回答这个问题,首先应注意到,在 $t=0$ 时,体系存在电磁角动量,实际上由(7)式可得

$$L_{e,m}(0)=\int_V l_{e,m}(x,0)\mathrm{d}V=\int_V R\times g(x,0)\mathrm{d}V=\int_V R\times(\varepsilon_0 E\times B)\mathrm{d}V\neq 0. \tag{9}$$

这样,根据前面给出的角动量守恒定律

$$L_m(t)+L_{e,m}(t)=L(t)=L(0)=L_m(0)+L_{e,m}(0), \tag{10}$$

在 $t=0$ 时刻,圆盘处于静止状态,机械角动量 $L_m(0)=0$,即

$$L_{e,m}(0)= L(0). \tag{11}$$

在 t 时刻,由于电流中断,磁场消失,电磁角动量 $L_{e,m}(t)= 0$,即

$$L_m(t)= L(t). \tag{12}$$

将(11)式和(12)式代入(10)式,便有

$$L_m(t)= L(t)= L(0)= L_{e,m}(0), \tag{13}$$

即 t 时刻圆盘的机械角动量 $L_m(t)$ 应等于 $t= 0$ 时静场的电磁角动量 $L_{e,m}(0)$,因此圆盘应转起来.

为什么静场也有角动量? 实际上,从(9)式不难看出,只要有磁场和带电体存在,就存在电磁场角动量. 当电磁场刚建立时,它就自然安置在那里了,也可以反过来说,如果上述实验做成功了,也就证明 $L_{e,m}(0)= L_m(t)$ 确实存在.

习　题　2.3

1. 试证明

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times R)= -R\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}).$$

2. 有一长为 l 的圆柱形电容器,其内、外半径分别为 ρ_1 和 ρ_2,质量分别为 m_1 和 m_2,外筒接地,内筒电势为 φ_0. 均匀外磁场 $B_0= B_0\mathrm{e}$,如图2.5所示. 试求当 B_0 除去时电容器转动的角速度,已知圆筒的转动惯量 $I_k= m_k\rho_k^2(k= 1,2)$,计算时略去电容器的边缘效应.

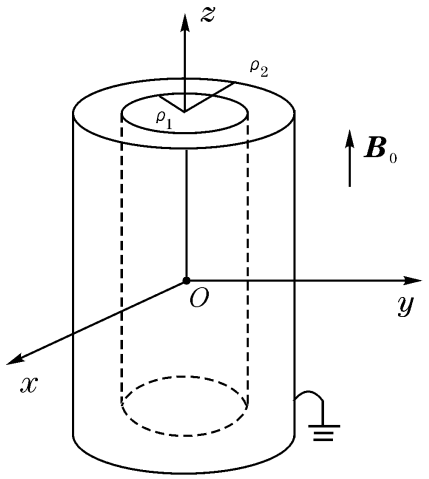


图 2.5

第二篇　稳恒电磁场

本篇将经典电动力学的三个基本定律应用到稳恒电磁场.

第三章讨论静电场问题.在引入静电势、并证明静电边值问题的惟一性定理的基础上,研究当存在绝缘介质、导电介质及不同电荷分布的情形下,如何求得静电场的空间分布、感应电荷和束缚电荷的分布、静电场的能量,以及静电场中电多极矩的受力问题.

第四章讨论静磁场问题.在引入磁场的矢势和磁标势、并证明静磁边值问题的惟一性定理的基础上,研究当存在磁介质、铁磁体、超导体及不同电流分布的情形下,如何求得静磁场的空间分布、磁化电流的分布、静磁场的能量、静磁场中磁多极矩的受力问题.

第三章　静　电　场

本章讨论电荷静止与存在稳恒电流这两种情形下的电场,人们通常把前者称为静电场,后者称为稳恒电场.但由于两者的电荷分布与电场分布均不随时间改变,我们不妨将它们都称为静电场.它们的电势都遵守泊松方程,不同的仅是边值关系中使用的物质常数不同:前者利用绝缘介质的介电常数 ε 来描述,后者还要利用导电介质的电导率 σ 来描述.

静电场的基本问题是:在给定自由电荷分布、空间的介质与导体分布的情况下,求解静电场.本章首先给出静电势的定义、静电势遵守的微分方程和边值关系,以及静电边值问题的惟一性定理.其后分别采用分离变量法、电像法、格林函数法、电多极矩法求解静电场.在此基础上,讨论静电场的能量以及电多极子与外电场的相互作用.

本章介绍的求解静电场的方法并不仅仅适用于静电场.当引入标势 φ 和矢势 A 描述普遍的(随时间变化的)电磁场时,如果采用库仑规范(见§ 11.1),其标势 φ 仍遵守泊松方程.因此,可以采用本章的方法求解泊松方程的边值问题,将 φ 的解代入另一电磁势方程,即可求得一般的电磁场.

§ 3.1　静电势的微分方程与边值关系　静电边值问题的惟一性定理

为了简化静电场的求解,本节首先引入静电势,随后由麦克斯韦方程及介质的电磁性质方程求得静电势遵守的泊松方程与边值关系.这样,泊松方程、边值关系和边界条件就构成了静电边值问题.最后,证明不同情形下静电边值问题的两个惟一性定理.

一、静电势与电势叠加原理

由介质中的麦克斯韦方程组可见,静电场遵守微分方程

$$\nabla \times E = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot D = \rho_f. \tag{2}$$

式中电位移矢量 D 与电场强度 E 的关系由介质的电磁性质方程 $D = \varepsilon E$ 确定.

由于上述方程均为矢量方程,求解不方便.人们总希望把求解矢量方程组的问题转化为求解标量方程组的问题.实际上,(1)式表明静电场是无旋场,而标量场的梯度$\nabla\varphi$必为无旋场

$$\nabla\times\nabla\varphi=0. \tag{3}$$

比较(1)式和(3)式,便可定义静电势φ为

$$E=-\nabla\varphi. \tag{4}$$

对于空间中的任一点,矢量$\nabla\varphi$指向φ增加"最快"的方向,故E指向电势φ减少"最快"的方向.

(4)式给出了φ与E关系的微分形式.为了得到相应的积分形式,只要将

$$\mathrm{d}\varphi=\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}x=-E\cdot\mathrm{d}x \tag{5}$$

两边对x从P_0点积分到P点,即有

$$\varphi(P)-\varphi(P_0)=\int_{P_0}^{P}\mathrm{d}\varphi=-\int_{P_0}^{P}E\cdot\mathrm{d}x. \tag{6}$$

通常规定P_0点为电势的零参考点,将$\varphi(P_0)=0$代入(6)式,便可得任一点的电势

$$\varphi(P)=-\int_{P_0}^{P}E\cdot\mathrm{d}x. \tag{7}$$

电势的零参考点的选择是任意的.通常,选择无限远处及大地的电势为零.当然,也有一些例外的情况,见本节习题第1题.

电势叠加原理可由电势的定义式和场强叠加原理得到.设φ_k和E_k($k=1,2,\cdots$)分别是第k个电荷分布激发的电势和场强,而所有电荷分布激发的电势和场强分别为φ和E,则

$$-\nabla\varphi=E=\sum_k E_k=-\sum_k\nabla\varphi_k=-\nabla\sum_k\varphi_k.$$

由此得

$$\varphi=\sum_k\varphi_k. \tag{8}$$

二、泊松方程 电势的边值关系

在均匀各向同性的线性介质内部,场量是连续的.将静电势的定义式$E=-\nabla\varphi$和介质的电磁性质方程$D=\varepsilon E$代入麦克斯韦方程$\nabla\cdot D=\rho_f$,便有

$$\rho_f=\nabla\cdot D=\nabla\cdot\varepsilon E=\varepsilon\nabla\cdot(-\nabla\varphi)=-\varepsilon\nabla^2\varphi \tag{9}$$

这表明,在场量连续的区域,电势遵守泊松方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}. \tag{10}$$

在两种不同介质的分界面上,利用电场的边值关系以及电势与电场强度的积分关系式即可求得电势的边值关系.

首先,电势 φ 在两种介质分界面上连续,即

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{11}$$

证　设 n 是分界面上由介质1指向介质2的法向单位矢量,P_1、P_2 为界面法线上边界两侧无限靠近的两点(见示意图3.1),它们之间的距离 $\Delta n = \overline{P_1P_2} \to 0$. 由于 E_n 是分段连续函数,电场强度沿法向的积分 $\int_{P_1}^{P_2} E_n \mathrm{d}n$ 存在,因此

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}\varphi = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{P_1}^{P_2} E_n \mathrm{d}n = -\overline{E}_n \Delta n, \tag{12}$$

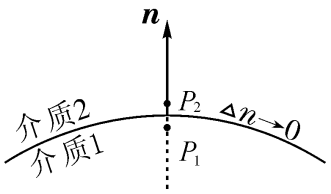


图3.1

式中 $\overline{E}_n$ 为电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在 P_1P_2 线段上法向分量的平均值. 因为 $\overline{E}_n$ 有限,$\Delta n \to 0$,故上式为零,由此得 $\varphi_1 = \varphi_2$.

电势的另一边值关系依赖于分界面两侧介质的性质. 现在分述如下:

1. 在两种绝缘介质的分界面的两侧

将 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 代入

$$n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma \quad (n \text{ 由 1 指向 2}), \tag{13}$$

利用 $n \cdot \nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$,以及绝缘介质分界面上 $\sigma_f = 0$,得

$$\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (n \text{ 由 1 指向 2}). \tag{14a}$$

上式还可写成另一形式

$$\varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = 0 \quad (n \text{ 分别为 1,2 两区的外法线}). \tag{14b}$$

由于两侧的外法线方向相反,使(14a)、(14b)两式有正、负号的不同.

2. 在导体与绝缘介质分界面的两侧(见图3.2)

由于导体内部的 $\boldsymbol{E}_1 = 0$,$\boldsymbol{D}_1 = 0$,故有

$$\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f \quad (n \text{ 由 1 指向 2}). \tag{15}$$

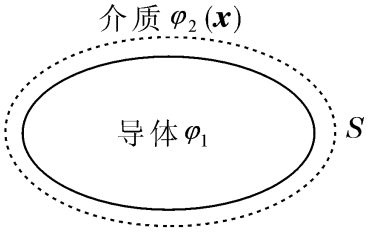


图3.2

将上式沿包围导体的封闭面 S 作面积分,得

$$\varepsilon_2 \oint_S \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = -Q_f, \tag{16}$$

式中 φ_2 为面 S 上介质的电势,Q_f 为该导体的总电量.

在分离变量法中(见§ 3.2),如果 Q_f 给定,则可将(16)式作为定解条件来确定 φ_2,然后代入(15)式来求导体表面的面电荷分布.

3. 在两种导电介质分界面两侧

利用静电场的稳恒条件 $\dfrac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$,电荷守恒定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_f + \dfrac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0$,以及欧姆定律 $\boldsymbol{J}_f = \sigma\boldsymbol{E}$,便可证明(见本节习题第2题)

$$\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \qquad (n \text{ 由 1 指向 2}), \tag{17}$$

式中 σ_1 及 σ_2 分别是导电介质 1,2 的电导率.

三、静电边值问题的惟一性定理

根据区域 V 内是否含有导体,静电边值问题的惟一性定理可归纳为两个定理.

定理一 设区域 V 内分区介质均匀,若 V 内的自由电荷分布 $\rho_f(x)$ 给定,V 的边界 S 上的 $\varphi(x)\Big|_S$ 或 $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial n}\Big|_S$ 给定,则 V 内的电势由泊松方程和电势的边值关系惟一确定.

证 设 $\varphi'(x)$ 及 $\varphi''(x)$ 满足泊松方程、边值关系和边值条件,令

$$\Phi(x) = \varphi'(x) - \varphi''(x), \tag{18}$$

易见 $\Phi(x)$ 满足如下几个方程:

1. 在各分区内部,Φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \varphi' - \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} - \left(-\frac{\rho_f}{\varepsilon}\right) = 0 \quad (\text{因 } \rho_f \text{ 给定}). \tag{19}$$

2. 在介质 i 区与 j 区的分界面 S_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots)$ 上,有

$$\Phi_i = \varphi_i' - \varphi_i'' = \varphi_j' - \varphi_j'' = \Phi_j; \tag{20}$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i'}{\partial n} - \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i''}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j'}{\partial n} - \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j''}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}; \tag{21a}$$

注意上式的界面法线 n 均由 i 指向 j,见(14a)式. 也可以写成另一形式

$$\varepsilon_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_i + \varepsilon_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_j = 0, \tag{21b}$$

这里的 n 分别是 i, j 两区的外法线,见(14b)式.

3. 在区域 V 的边界面 S 上,根据是给定 $\varphi(x)|_S$ 还是 $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial n}\Big|_S$,分别有

$$\Phi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0 \qquad (\text{若给定 } \varphi(x)|_S), \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\Big|_S - \frac{\partial \varphi''}{\partial n}\Big|_S = 0 \qquad \left(\text{若给定} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n}\Big|_S\right). \tag{23}$$

现在将格林定理[见附录 1§ A1.4 的(16)式]

$$\oint_S \Phi \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V [\Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2] \mathrm{d}V \tag{24}$$

应用到第 k 个分区,以 ε_k 乘上式两边后对 k 求和,并将 $\nabla^2 \Phi = 0$[见(19)式]代入,可得

$$\sum_k \oint_{S_k} \varepsilon_k \Phi \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\sigma = \sum_k \int_{V_k} \varepsilon_k (\nabla \Phi)^2 \mathrm{d}V = \int_V \varepsilon (\nabla \Phi)^2 \mathrm{d}V. \tag{25}$$

上式的面积分可以分为两部分:一是沿 V 的边界 S 上的面积分,由于 $\Phi|_S = 0$[见(22)式]或 $\nabla \Phi|_S \cdot \mathrm{d}\sigma = \dfrac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S \mathrm{d}\sigma = 0$[见(23)式],使这部分面积分为零;二是沿各分

区的分界面$S_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$的面积分,由于对于每一个分界面S_{ij}均有两项积分,其和

$$\int_{S_{ij}} \varepsilon\Phi_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_i \mathrm{d}\sigma+\int_{S_{ij}} \varepsilon_j\Phi_j\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_j \mathrm{d}\sigma=0,$$

这是因为$\Phi_i=\Phi_j$[见(20)式]及$\varepsilon_i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_i+\varepsilon_j\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_j=0$[见(21b)式].这样,由(25)式可得

$$\int_V \varepsilon(\nabla\Phi)^2\mathrm{d}V=0. \tag{26}$$

由于被积函数是非负的,故有

$$\nabla\Phi=0, \tag{27}$$

由此可见,$\Phi(x)=$常数.再将(18)式代入,便有

$$\varphi'(x)-\varphi''(x)=\Phi(x)=\text{常数}. \tag{28}$$

既然两组解$\varphi'(x)$与$\varphi''(x)$只能相差一个常数,而电势叠加一个常数并不影响电场分布,即两者给出同一个解.

定理二　若区域V内的导体的电势或每个导体的总电荷给定,导体外的电荷分布给定,V的边界上$\varphi(x)|_S$或$\left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\right|_S$给定,则$V$内的电势分布由泊松方程与电势的边值关系惟一确定.

证　分两种情形来证明:

(1) 区域V内的导体电势给定.

现在把所有导体的表面$S_\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$看做边界面,并将定理一应用到由$V$的边界面$S$和导体的表面$S_\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$之间的区域$V'$.由定理一可知,$V'$的电势惟一确定,故区域$V$内的电势惟一确定(因导体的电势已给定).

(2) 区域V内每个导体的总电荷给定.

类似定理一中(25)式的证明,可得

$$\int_{V'} \varepsilon(\nabla\Phi)^2\mathrm{d}V=\oint_S \varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma+\sum_\alpha\oint_{S_\alpha}\varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma, \tag{29}$$

上式的面积分遍及区域V的界面S和所有导体表面$S_\alpha(\alpha=1,2,\cdots)$.仿照定理一可证明上式右边第一项为零.沿第$\alpha$个导体表面的面积分为

$$\oint_{S_\alpha}\varepsilon\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\Phi_\alpha\oint_{S_\alpha}\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\Phi_\alpha\left[\oint_{S_\alpha}\varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\oint_{S_\alpha}\varepsilon\frac{\partial\varphi''}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right]$$

$$=\Phi_\alpha(-Q_\alpha+Q_\alpha)=0, \tag{30}$$

这里已利用了(16)式及本定理关于每个导体的总电荷给定的条件.

同理可得$\nabla\Phi=0$及$\varphi'-\varphi''=$常数,即φ'与φ''两者给出同一个解.

静电边值问题的惟一性定理指出了当具有哪些条件时静电势才能惟一确定.据此,在解决实际问题时,便可根据已知条件提出尝试解,只要它符合惟一性定理

的要求,它就是正确的解.

【例】 内外半径分别为 a,a' 的两同心导体球壳内充以两种介质,左半部介电常数为 ε_1,右半部介电常数为 ε_2,设内球壳带总电荷 Q_f,外球壳接地. 试求空间的电场分布、球壳上的自由电荷分布和介质上的束缚电荷分布.

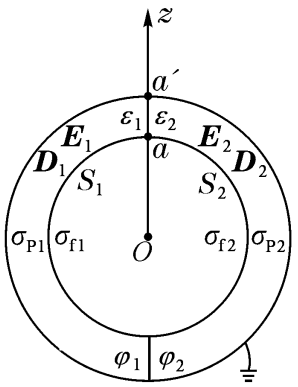


图 3.3

解 设左、右方介质的电势分别为 φ_1 及 φ_2,如图 3.3 所示.

1. 边值问题

$$① \nabla^2\varphi=0,\qquad a<R<a'; \tag{31}$$

$$② \varphi_1(a',\theta)=\varphi_2(a',\theta)=0; \tag{32}$$

$$③ \varphi_1(R,0)=\varphi_2(R,0),\qquad a<R<a';$$

$$\varphi_1(R,\pi)=\varphi_2(R,\pi),\qquad a<R<a'; \tag{33}$$

$$④\int_{S_1}\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\mathrm{d}\sigma+\int_{S_2}\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=-Q_f. \tag{34}$$

式中 S_1 及 S_2 分别是内球面的左、右两半球面.

2. 提出尝试解

内球壳带电,必导致左、右介质极化而出现面束缚电荷. 又因 ε_1 与 ε_2 不同,介质内球面的束缚电荷面密度 σ_{P1} 与 σ_{P2} 不同,导体内球壳的自由面电荷密度 σ_{f1} 与 σ_{f2} 也不同. 自然会猜想,是否 $\sigma_{P1}+\sigma_{f1}=\sigma_{P2}+\sigma_{f2}$,从而保证内、外球壳为等势面;又既然总的面电荷密度与 θ、φ 无关,介质内的电势分布也应是球对称的. 由此提出尝试解

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{C}{R}-\varphi_0, \tag{35}$$

式中 φ_0 自然与接地的外球壳半径有关.

3. 确定参数 C 和 φ_0 得电势分布

由(32)式得

$$0=\left(\frac{C}{R}-\varphi_0\right)\Big|_{R=a'}=\frac{C}{a'}-\varphi_0,$$

由此得 $\varphi_0=\dfrac{C}{a'}$,代入(35)式,便有

$$\varphi_1=\varphi_2=C\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a'}\right). \tag{36}$$

由(34)式,得

$$\int_{S_1}\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{C}{R}\right)R^2\mathrm{d}\Omega+\int_{S_2}\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{C}{R}\right)R^2\mathrm{d}\Omega=-Q_f,$$

易见

$$-C(\varepsilon_1+\varepsilon_2)2\pi=-Q_f,$$

由此得 $C=Q_f/2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$,代入(36)式,即有

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a'}\right). \tag{37}$$

不难验证,上式满足泊松方程、边值关系和边界条件.根据静电边值问题的惟一性定理,上式是正确的解.

4. 求电场、自由电荷分布和束缚电荷分布

$$E_1 = E_2 = -\nabla\varphi = -\frac{Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\nabla\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a'}\right) = \frac{Q_f R}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^3}. \tag{38}$$

自由电荷分布由$\sigma_f = n\cdot(D_2 - D_1)$确定[见§ 1.5 的(3)式],式中$D_1$、$D_2$ 脚标的意义见图 1.11;而本题D_1,D_2 脚标分别指左、右侧介质中的D,见图3.3.因此,在计算球壳的自由电荷面密度σ_f时,一项是介质中的D,另一项是导体中的$D=0$.现分别计算内、外球壳(以无撇、有撇区分)的左、右两球面(以脚标 1,2 区分)上的σ_f.

① 内球壳左侧　$\sigma_{f1} = \boldsymbol{e}_R\cdot(D_1 - 0)\Big|_{R=a} = \varepsilon_1 E_{1R}\Big|_{R=a} = \dfrac{\varepsilon_1 Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$, (39)

② 内球壳右侧　$\sigma_{f2} = \boldsymbol{e}_R\cdot(D_2 - 0)\Big|_{R=a} = \varepsilon_2 E_{2R}\Big|_{R=a} = \dfrac{\varepsilon_2 Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$. (40)

③ 外球壳左侧　$\sigma'_{f1} = \boldsymbol{e}_R\cdot(0 - D_1)\Big|_{R=a'} = -\varepsilon_1 E_{1R}\Big|_{R=a'} = \dfrac{-\varepsilon_1 Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a'^2}$, (41)

④ 外球壳右侧　$\sigma'_{f2} = \boldsymbol{e}_R\cdot(0 - D_2)\Big|_{R=a'} = -\varepsilon_2 E_{2R}\Big|_{R=a'} = \dfrac{-\varepsilon_2 Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a'^2}$, (42)

束缚电荷分布由$\sigma_P = -n\cdot(P_2 - P_1)$确定[见§ 1.5 的(4)式,像上面一样应注意$P_1$,$P_2$ 脚标的意义],利用$P = D - \varepsilon_0 E = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$ 可得:

① 介质内左球面　$\sigma_{P1} = -\boldsymbol{e}_R\cdot[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1 - 0]\big|_{R=a} = \dfrac{-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$, (43)

② 介质内右球面　$\sigma_{P2} = -\boldsymbol{e}_R\cdot[(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2 - 0]\big|_{R=a} = \dfrac{-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$, (44)

③ 介质外左球面　$\sigma'_{P1} = -\boldsymbol{e}_R\cdot[0 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1]\big|_{R=a'} = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a'^2}$, (45)

④ 介质外右球面　$\sigma'_{P2} = -\boldsymbol{e}_R\cdot[0 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2]\big|_{R=a'} = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a'^2}$, (46)

在$\theta = 0$及$\theta = \pi$两介质分界面处,因$\boldsymbol{e}_\theta$与E互相垂直($\boldsymbol{e}_\theta\cdot E = 0$),故$\sigma_P = 0$.

比较上面的计算结果,不难发现

$$\sigma_{f1} + \sigma_{P1} = \sigma_{f2} + \sigma_{P2}, \qquad \sigma'_{f1} + \sigma'_{P1} = \sigma'_{f2} + \sigma'_{P2}. \tag{47}$$

上式表明,"总电荷分布的球对称性"是与"导体球壳是等势面"相对应的,这正是导致介质电势分布具有球对称性的原因.

习　题　3.1

1. 通常电势的零参考点是怎样选择的?无穷远处的电势与大地电势是否可同时选为零?

2. 试证明,在两种导电介质的分界面上,电势的边值关系如(17)式所示.

3. 半径为R_0的导体球、带自由电荷总量为Q_f.今使导体球的一半浸在介电常数为ε的液体

中,另一半露在真空中. 求静电势、静电场、自由电荷和束缚电荷分布.

4. 设有一半径为 ρ_0、无限长圆柱形导体的线电荷密度为 η,在柱外 $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$,$\frac{2\pi}{3}<\varphi<\frac{4\pi}{3}$及 $\frac{4\pi}{3}<\varphi<2\pi$的无界空间中分别充满介电常数为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的均匀介质,求空间的电场及柱面自由电荷的面密度.

§ 3.2 分离变量法

本节介绍用分离变量法求解泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}, & (1)\\ \varphi|_S=f_1(x) \quad 或 \quad \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=f_2(x). & (2) \end{cases}$$

式中 S 为区域 V 的边界.

一、分离变量法的基本步骤

在解题之前,首先要根据导体与绝缘介质表面的形状选择坐标系. 本节均以球坐标系为例介绍分离变量法. 如果问题有对称轴,应取 z 轴为对称轴,此时通解的形式比较简单. 其次,按照上节提出的原则选择零电势参考点.

在此基础上,可按下述步骤求解:

1. 写出边值问题

这包括泛定方程(泊松方程)与定解条件(边值关系和边界条件等).

关于泛定方程,如果是非齐次方程,则要将它化为齐次方程(即拉普拉斯方程)来处理. 通常采用如下两种方法:

第一,如果仅存在带电导体,则只要把导体从求解区域中排除出去即可(见图3.4),在剩余的区域 V' 中电势满足拉普拉斯方程. 带电导体对 V' 区域电势的影响将由边值关系

$$\int_{S_k}\varepsilon\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=-Q_k,\quad k=1,2,\cdots \tag{3}$$

来反映,式中 Q_k 和 S_k 分别为第 k 个导体的电量和界面. 导体的电势将在求得导体周围介质的电势后,根据“电势连续”的边值关系求得.

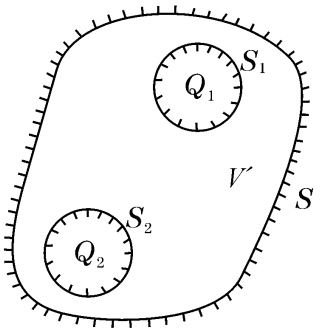


图3.4

第二,如果在真空中或介质中存在自由电荷分布,则根据电势叠加原理,令

$$\varphi=\varphi'+\varphi_f, \tag{4}$$

式中 φ' 为求解区域 V' 以外的电荷分布激发的电势,满足拉普拉斯方程,用该方程的通解表示;电势 φ_f 则取决于 V' 内的自由电荷分布,它可以是 V' 内的自由电荷及

紧挨着它的束缚电荷共同激发的电势(见本节习题第 1 题),它是泊松方程的特解.如果 φ_f 是由点电荷或偶极子激发的电势,φ_f 的表达式可容易写出;如果不是,还可以根据它满足泊松方程来求(见例 1),这个方法称为特解法.

关于边界条件,往往还要考虑 $R=0$ 及 $R\to\infty$ 时 φ 的取值.例如,对于球内问题,就要考虑 $R=0$ 及 $R=R_0$(球面半径)这两个边界;对于球外问题,就要考虑 $R=R_0$ 及 $R\to\infty$ 这两个边界.

2. 通解的形式

根据问题的对称性选择通解的形式.以球坐标为例,拉普拉斯方程的通解可分述如下:

第一,问题无对称性,解与 R,θ,φ 有关,通解为

$$\varphi(R,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}\left[\left(A_{l,m}R^l+\frac{B_{l,m}}{R^{l+1}}\right)P_l^{|m|}(\cos\theta)\cos m\varphi+\left(C_{l,m}R^l+\frac{D_{l,m}}{R^{l+1}}\right)P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin m\varphi\right];\tag{5}$$

第二,问题有轴对称性,解与 R,θ 有关(与 φ 无关),将 $m=0$ 代入(5)式,得通解

$$\varphi(R,\theta)=\sum_l\left(a_lR^l+\frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta);\tag{6}$$

第三,问题有球对称性,解只与 R 有关(与 θ,φ 无关),将 $l=0,m=0$ 代入(5)式,得通解

$$\varphi(R)=a+\frac{b}{R}.\tag{7}$$

这样,只要求出待定系数,即得解.

3. 确定待定系数,得电势

现在的任务就是利用边值关系、边界条件等定解条件来确定系数,以球坐标系中的轴对称问题为例说明几个值得注意的问题.

第一,定系数的基本手段是利用勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}.\tag{8}$$

为此,应将有关 θ 的函数均按 $P_l(\cos\theta)$ 展开.既然 $\{P_l(\cos\theta)\}$ 可以看做函数空间的基底,因此等式两端 $P_l(\cos\theta)$ 项的系数必须相等.据此即可求得待定系数或这些待定系数满足的代数方程(见例 2).

第二,如果有关于 φ 的有限性条件,先利用它便可得到一些系数为零.

对于球内问题,如果有“$\varphi|_{R\to0}$ 有限”的条件,由于 $R\to0$ 时,$\frac{b_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)\to\infty$,只有 $b_l=0(l=0,1,2,\cdots)$ 才能满足 $\varphi|_{R\to0}$ 有限的条件.因此,通解可直接写成

$$\varphi(R,\theta)=\sum_l a_lR^lP_l(\cos\theta);\tag{9}$$

对于球外问题,如果有“$\varphi|_{R\to\infty}=0$”的条件,由于 $R\to\infty$ 时,$a_lR^lP_l(\cos\theta)\to\infty$,

易得 $a_l = 0 (l = 0, 1, \cdots)$,通解可直接写成

$$\varphi(R, \theta) = \sum_l \frac{b_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta). \tag{10}$$

当然,对于两个同心球面之间的求解区域(见习题5),这两个条件都用不上.

第三,如果边界条件或边值关系比较复杂,有时还要利用勒让德多项式的母函数、递推公式、加法定理及其他公式.

4. 由电势求其他物理量

下面用分离变量法分别讨论存在绝缘介质的情形、存在导体的情形和存在电解液的情形.在这三个问题中,定解条件及解题方法都各有特点.

二、存在绝缘介质的情形

【例 1】 作为理想模型,设在均匀外场 E_0 中置入一个带有均匀自由电荷密度为 ρ_f、半径为 R_0、介电常数为 ε 的绝缘介质球,求空间各点的电势.

解 取坐标原点在球心、z 轴沿 E_0 的球坐标系.设球内电势为 φ_1,球外电势为 φ.本题有均匀外场,无穷远处电势不能取作零,否则近处的电势均为 ∞.今取介质球置入前坐标原点的电势为零.

1. 边值问题

$$① \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}, \qquad R < R_0; \tag{11}$$

$$② \nabla^2 \varphi_2 = 0, \qquad R > R_0; \tag{12}$$

$$③ \varphi_1 \big|_{R \to 0} \text{有限}; \tag{13}$$

$$④ \varphi_2 \big|_{R \to \infty} = -E_0 R\cos\theta = -E_0 R P_1(\cos\theta);^{①} \tag{14}$$

$$⑤ \varphi_1 \big|_{R = R_0} = \varphi_2 \big|_{R = R_0}; \tag{15}$$

$$⑥ \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\bigg|_{R = R_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\bigg|_{R = R_0}. \tag{16}$$

2. 通解的形式

由于 φ_1 遵守泊松方程,现采用特解法将它化为拉普拉斯方程处理.令

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_f, \tag{17}$$

式中 φ_1' 满足拉普拉斯方程,φ_f 是泊松方程的特解,即

$$\nabla^2 \varphi_1' = 0, \qquad \nabla^2 \varphi_f = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}. \tag{18}$$

根据算符 ∇^2 在球坐标系的表达式,φ_f 最简单的选择是

$$\varphi_f = CR^2. \tag{19}$$

---

① 因为无穷远处的电势与介质球是否存在无关,故可用介质球不存在时计算 $R \to \infty$ 的电势表示介质球存在时的 $\varphi_2 \big|_{R \to \infty}$.即 $\varphi_2 \big|_{R \to \infty} = \lim\limits_{R \to \infty} \int_0^R -E_0 \cdot \mathrm{d}l = -E_0 R\cos\theta$.

将(19)式代入(18)式,得

$$-\frac{\rho_f}{\varepsilon}=\nabla^2\varphi_f=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}CR^2\right)=6C,$$

即$C=-\frac{\rho_f}{6\varepsilon}$,代入(19)式和(17)式,得

$$\varphi_1=\varphi_1'+\varphi_f=\varphi_1'-\frac{\rho_f R^2}{6\varepsilon}. \tag{20}$$

考虑到本题具有轴对称性,故通解形式为

$$\varphi_1=\sum_l\left(a_lR^l+\frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)-\frac{\rho_f R^2}{6\varepsilon}, \tag{21}$$

$$\varphi_2=\sum_l\left(c_lR^l+\frac{d_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{22}$$

3. 确定待定系数,得电势

将(21)式代入(13)式,得

$$\varphi_1\big|_{R\to 0}=\sum_l\frac{b_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)\text{有限}, \tag{23}$$

易见$b_l=0$,代入(21)式,得

$$\varphi_1=\sum_l a_lR^lP_l(\cos\theta)-\frac{\rho_f R^2}{6\varepsilon}. \tag{24}$$

将(22)式代入(14)式,得

$$\varphi_2\big|_{R\to\infty}=\sum_l c_lR^lP_l(\cos\theta)=-E_0RP_1(\cos\theta), \tag{25}$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,得

$$c_1=-E_0,\qquad c_l=0(l\neq 1). \tag{26}$$

将上式代入(22)式,得

$$\varphi_2=-E_0RP_1(\cos\theta)+\sum_l\frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta). \tag{27}$$

将(24)式和(27)式代入(15)式得

$$\sum_l a_lR_0^lP_l(\cos\theta)-\frac{\rho_f R_0^2}{6\varepsilon}=-E_0R_0P_1(\cos\theta)+\sum_l\frac{d_l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\theta), \tag{28}$$

由此得

$$a_0-\frac{\rho_f R_0^2}{6\varepsilon}=\frac{d_0}{R_0}, \tag{29a}$$

$$a_1R_0=-E_0R_0+\frac{d_1}{R_0^2}, \tag{29b}$$

$$a_lR_0^l=\frac{d_l}{R_0^{l+1}}\qquad(l\neq 0,1). \tag{29c}$$

将(24)式和(27)式代入(16)式,得

$$\varepsilon\left[\sum_l la_lR_0^{l-1}P_l(\cos\theta)-\frac{\rho_f R_0}{3\varepsilon}\right]=\varepsilon_0\left[-E_0P_1(\cos\theta)-\sum_l\frac{(l+1)d_l}{R_0^{l+2}}P_l(\cos\theta)\right], \tag{30}$$

由此得

$$-\frac{\rho_f R_0}{3}=-\frac{\varepsilon_0 d_0}{R_0^2}, \tag{31a}$$

$$\varepsilon a_1=-\varepsilon_0 E_0-\frac{2\varepsilon_0 d_1}{R_0^3}, \tag{31b}$$

$$\varepsilon l a_l R_0^{l-1}=-\frac{\varepsilon_0(l+1)d_l}{R_0^{l+2}} \qquad (l\neq 0,1). \tag{31c}$$

由(29a)和(31a)可解出a_0,d_0,由(29b)和(31b)可解出a_1和d_1,即

$$a_0=\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\frac{\rho_f R_0^2}{3}, \quad d_0=\frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0}; \tag{32a}$$

$$a_1=-\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}, \quad d_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 R_0^3. \tag{32b}$$

由(29c)和(31c)可解出a_l及d_l($l\neq 0,1$).因为这两式是关于a_l和d_l的线性齐次方程组,其系数行列式不为零,故只有零解,即

$$a_l=d_l=0 \qquad (l\neq 0,1). \tag{32c}$$

将a_l,d_l代入(24)式和(27)式,即得电势

$$\varphi_1=\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\frac{\rho_f R_0^2}{3}-\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R\cos\theta-\frac{\rho_f R^2}{6\varepsilon}; \tag{33}$$

$$\varphi_2=-E_0 R\cos\theta+\frac{\rho_f R_0^3}{3\varepsilon_0 R}+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 R_0^3}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{R^2}. \tag{34}$$

三、存在导体的情形

【例2】 有一半径为R_0的接地导体球,在距球心a($a>R_0$)处有一点电荷Q_f,求空间各点的电势.

解 取原点在球心、z轴沿OQ_f方向的球坐标系,如图3.5所示.由于电荷分布在有限远处,取无限远处和接地导体的电势为零.导体是等势体,球内空间电势亦为零.本题只要求出球外空间的电势即可.

1. 边值问题

$$\textcircled{1}\ \nabla^2\varphi=-\frac{Q_f}{\varepsilon_0}\delta^3(x-ae_z), \quad R>R_0; \tag{35}$$

$$\textcircled{2}\ \varphi|_{R=R_0}=0; \tag{36}$$

$$\textcircled{3}\ \varphi|_{R\to\infty}=0; \tag{37}$$

$$\textcircled{4}\ \varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=R_0}=-\sigma_f. \tag{38}$$

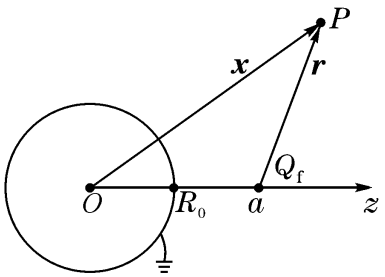


图3.5

2. 通解的形式

设φ_f为点电荷Q_f激发的电势,φ'是导体上感应电荷激发的电势.同样有

$$\varphi=\varphi'+\varphi_f=\varphi'+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{39}$$

由于问题具有轴对称性,球外区域的通解具有如下形式[这里已利用(37)式]

$$\varphi=\sum_l \frac{b_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{40}$$

3. 确定待定系数,得电势

现在应用(36)式确定b_l($l=0,1,2,\cdots$).因为该式是在$R=R_0<a$条件下的边值关系,故在$R<a$区域将上式的第二项按勒让德多项式展开即可.由勒让德多项式的母函数展开式,可得

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\theta}}=\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2-2\left(\frac{R}{a}\right)\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_l\left(\frac{R}{a}\right)^l P_l(\cos\theta),\qquad R<a. \tag{41}$$

将上式代入(40)式,便有

$$\varphi=\sum_l \frac{b_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l\frac{R^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta). \tag{42}$$

将(42)式代入$\varphi|_{R=R_0}=0$,可得

$$\sum_l \frac{b_l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\sum_l\frac{R_0^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0,$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,得

$$b_l=-\frac{Q_f R_0^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 a^{l+1}}. \tag{43}$$

将b_l代入(40)式,即得球外空间的电势

$$\varphi=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r}-\sum_l\frac{Q_f R_0^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 a^{l+1}}\frac{P_l(\cos\theta)}{R^{l+1}}. \tag{44}$$

将φ代入(38)式可求得感应电荷在导体球面上的分布,留给读者作为练习.

四、存在电解液的情形

【例3】 在充满电解液(电导率为σ_2)的大电解槽内流着电流密度为J_0的均匀电流,今将半径为R_0、电导率为σ_1的小球置于电解液中,如图3.6所示,求:

(1)电流稳定后,小球的电流密度J_1和电解液的电流密度J_2;

(2)此时小球与电解液界面上的电荷面密度σ_f;

(3)讨论$\sigma_1\gg\sigma_2$及$\sigma_2\gg\sigma_1$情况下的J_1,J_2和σ_f.

解　取坐标原点在球心、极轴沿J_0的球坐标系.电解槽很大,可认为在很大的空间范围内存在一个均匀电场$E_0=J_0/\sigma_2$(欧姆定律).小球置入后,球面上出现自由电荷分布.电流稳定后,除$R=R_0$的球面外,电势满足拉普拉斯方程.因为稳恒电场的

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0, \tag{45}$$

由此得

$$0=\nabla\cdot J=\nabla\cdot(\sigma E)=-\sigma\nabla\cdot(\nabla\varphi)=-\sigma\nabla^2\varphi. \tag{46}$$

1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi_1=0,\quad R<R_0;$ (47)

② $\nabla^2\varphi_2=0,\quad R>R_0;$ (48)

③ $\varphi_1\big|_{R\to 0}$有限; (49)

④ $\varphi_2\big|_{R\to\infty}=-E_0R\cos\theta=-E_0RP_1(\cos\theta);$ (50)

⑤ $\varphi_1\big|_{R=R_0}=\varphi_2\big|_{R=R_0};$ (51)

⑥ $\sigma_1\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right|_{R=R_0}=\sigma_2\left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right|_{R=R_0};$ (52)

⑦ $\oint_S E\cdot\mathrm{d}\sigma=\dfrac{Q_f}{\varepsilon_0}.$ (53)

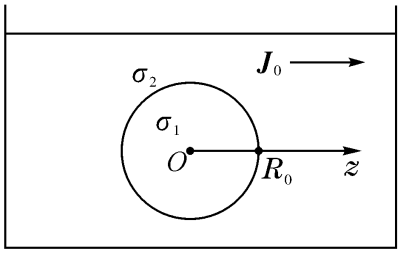


图3.6

2. 通解的形式

由于问题具有轴对称性,并考虑到$\varphi\big|_{R\to 0}$有限,故通解为

$$\varphi_1=\sum_l a_lR^lP_l(\cos\theta),\qquad R<R_0; \tag{54}$$

$$\varphi_2=\sum_l\left(c_lR^l+\frac{d_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)\qquad R>R_0. \tag{55}$$

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第8题).

习 题 3.2

1. 在介电常数为ε_1的均匀介质球的中心置一自由电偶极子p_f,球外充满介电常数为ε_2的另一种介质,求空间各点的电势和极化电荷分布.

2. 空心导体球壳的内、外半径分别为R_1和R_2,球中心置一偶极子p_f,球壳上带电Q_f,求空间各点电势和球壳内、外表面的电荷分布.

3. 一半径为R_0的球面,在球坐标$0\leqslant\theta<\pi/2$的半球面上电势为φ_0,在$\pi/2<\theta\leqslant\pi$的半球面上电势为$-\varphi_0$,求球内、外空间的电势.

4. 一球形电容器两球面的球心不重合,两球心间的距离$\overline{OO'}=d$远小于两球的半径R_0和R_0'(见图3.7).试在一级近似下(即准确到d的一次项),求电容器内的电势φ与内、外球电势φ_0,φ_0'(未知量)的函数关系,以及电容器的电容C.

5. 同心球面的内径为R_0,外径为R_0',以球心为坐标原点,已知内球面电势为$\alpha\cos\theta$,外球面电势为$\beta+\gamma\cos\theta$,式中α,β,γ为常数,求两球面间的电势分布.

6. 有一半径为ρ_0的无限长接地导体圆柱,置于均匀电场E_0中,E_0的方向与圆柱的轴线垂直,求柱外的电势分布和柱面上的面电荷密度.

7. 两个相距为l的接地无穷大平行导体平板之间有一条线电荷密度为η的无穷长均匀带电直线,该直线与导体平板平行,到一板的距离为b(见图3.8),试求两导体平板间的电势.

8. 完成例3.

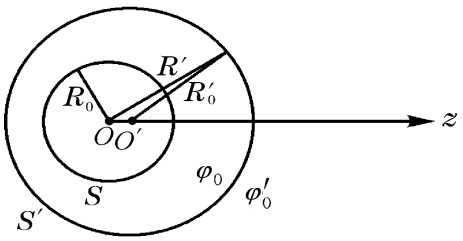


图 3.7

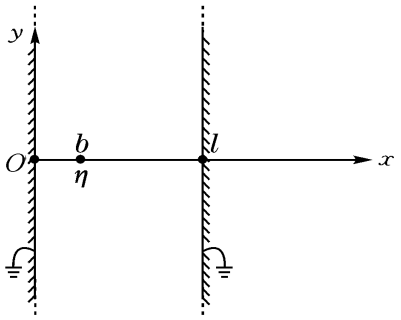


图 3.8

§ 3.3　静电镜像法

静电镜像法是求解静电边值问题的一个非常简捷的方法.

如果在研究的区域V 内仅有一个或几个点电荷、带电导体球或无穷长均匀带电直导线,并且导体或介质的表面也比较规则,例如由平面、球面或柱面组成,常常可使用静电镜像法.

本节先讨论静电镜像法的基本思想和解题方法,然后分别讨论导体的镜像问题和绝缘介质的镜像问题.

一、基本思想与解题方法

当将一个或多个点电荷置于导体附近时,其表面就会出现感应电荷,空间的电场就是这些点电荷与感应电荷各自激发的电场的叠加,但感应电荷分布及其电场不易求得.那么,能否引入一个或多个假想的点电荷(称为像电荷)来代替这些感应电荷的作用呢?实际上,如果导体的表面比较规则,这是完全可能的.类似地,也可以引入像电荷代替介质表面的束缚电荷.当然,在引入像电荷的同时,就应将求解区域外的导体拿走,将求解区域外的介质换成与求解区域内相同的介质.正因为这样,在这个模型中就不再存在感应电荷与束缚电荷,而仅存在给定的点电荷(真实的电荷)和像电荷(假想的电荷)了.用这样的模型求解静电问题的方法就称为静电镜像法.

静电镜像法的解题步骤是这样的:

(1) 写出边值问题.

(2) 引入像电荷,提出尝试解.首先,为了不违背泊松方程,像电荷必须在求解区域之外引入;其次,像电荷的电量及具体位置通常可根据对称性作出判断或采用待定参数表示.这样,根据电势叠加原理,即可写出给定的电荷与像电荷共同激发的电势,这个电势称为尝试解.

(3) 确定待定参数求得解.根据边值关系、边界条件等定解条件确定待定参数,将这些参数代入尝试解即得解.根据惟一性定理可知,它是正确的解.

(4) 由电势求其他物理量.

下面,通过几个典型例子介绍静电镜像法.

二、导体的镜像问题

【例 1】 在无限大接地导体平板上方有一点电荷Q_f,到平板的距离为a(见图 3.9),求空间的电势分布.

解 取直角坐标系如图 3.9 所示,由于电荷分布在有限区域内,可规定无穷远处及接地导体的电势为零.又由于静电屏蔽效应,导体下方的电势必为零.因此,本题只要求出导体上方的电势即可.

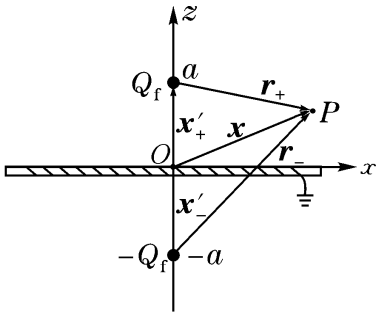


图 3.9

1. 边值问题

$$\textcircled{1}\ \nabla^2\varphi = -\frac{Q_f}{\varepsilon_0}\delta^3(x-a\boldsymbol{e}),\quad z>0; \tag{1}$$

$$\textcircled{2}\ \varphi|_{z=0}=0; \tag{2}$$

$$\textcircled{3}\ \varphi|_{R\to\infty}=0; \tag{3}$$

$$\textcircled{4}\ \varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=-\sigma_f. \tag{4}$$

2. 引入像电荷,提出尝试解

首先将无限大导体平板拿走,同时引入像电荷代替导体平板上感应电荷的作用.像电荷的引入要求:

第一,为了不违背泊松方程,像电荷只能在$z<0$区域(即求解区域之外)引入;

第二,为了保证$\varphi|_{z=0}=0$,像电荷应置于$z=-a$处,且其电量$Q'=-Q_f$(因为Q'位于Q_f的镜像位置,这正是静电镜像法名字的来由);

第三,这个简化模型满足边界条件$\varphi|_{R\to\infty}=0$.

由此,提出尝试解

$$\varphi(x)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-Q_f}{4\pi\varepsilon_0 r_-}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]. \tag{5}$$

由于尝试解满足泊松方程、边值关系和边界条件的要求,根据静电边值问题的惟一性定理,这个解是正确的.

3. 求电场强度及感应电荷分布

导体上方的电场为

$$\begin{aligned}E&=-\nabla\varphi=-\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left(\nabla\frac{1}{r_+}-\nabla\frac{1}{r_-}\right)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\nabla r_+}{r_+^2}-\frac{\nabla r_-}{r_-^2}\right)\\&=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}}{x^2+y^2+(z-a)^2}-\frac{\boldsymbol{e}}{x^2+y^2+(z+a)^2}\right],\end{aligned} \tag{6}$$

式中$\boldsymbol{e}=\nabla r_\pm=\dfrac{r_\pm}{r_\pm}$分别是由$\pm Q_f$指向场点$x$的单位矢量.

导体平板上表面的面电荷密度为

$$\sigma' = \varepsilon_0 E_z\Big|_{z=0} = \frac{Q_f}{4\pi}\left[\frac{\cos\alpha_+}{x^2+y^2+a^2} - \frac{\cos\alpha_-}{x^2+y^2+a^2}\right] = \frac{-aQ_f}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

式中 $\alpha_\pm$ 分别是 e_R 与 e_z 的夹角. 由于 α_+ 为钝角, α_- 为锐角, 故

$$\cos\alpha_+ = \frac{-a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}, \qquad \cos\alpha_- = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}. \tag{8}$$

感应电荷的总量也可以将 σ' 沿 $z=0$ 平面积分得到. 引入柱坐标系, 由柱坐标 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 得

$$Q' = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{-aQ_f}{2\pi(\rho^2+a^2)^{3/2}}\rho d\rho = -\frac{aQ_f}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(\rho^2+a^2)}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} = \frac{aQ_f}{(\rho^2+a^2)^{1/2}}\Big|_0^{\infty} = -Q_f. \tag{9}$$

这与假想电荷的电量相等. 实际上, 像电荷在上半空间激发的电场与导体平板上感应电荷激发的电场相同, 作一个包围导体平板与下半空间的高斯平面, 由高斯定理可知, 感应电荷的总量应与像电荷的电量 Q' 相等.

【例 2】 有一半径为 R_0 的接地导体球, 距球心 $a > R_0$ 处有一点电荷 Q_f, 求空间各点电势.

解 上节曾用分离变量法求解过这个题目. 按镜像法求解的好处是: 如果题目的条件发生某些改变(见本节习题第 3, 4, 5 题), 只要适当增加像电荷便可迎刃而解; 但对于分离变量法, 将会遇到较大的困难.

坐标系及电势零参考点的选择与上节例 2 相同.

1. 边值问题

$$① \nabla^2\varphi = -\frac{Q_f}{\varepsilon_0}\delta^3(x - a e_z), \qquad R > R_0; \tag{10}$$

$$② \varphi|_{R=R_0} = 0; \tag{11}$$

$$③ \varphi|_{R\to\infty} = 0; \tag{12}$$

$$④ \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial R}\Big|_{R=R_0} = -\sigma'. \tag{13}$$

上式已利用球面上的 $n = -e_R$, 因而 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim\limits_{\Delta n\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta n} = \lim\limits_{\Delta R\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta R} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial R}$.

2. 引入像电荷, 提出尝试解

首先将导体球拿走, 同时引入像电荷 Q' 代替导体球表面的感应电荷的作用. 像电荷的引入要求:

第一, 为了不违背泊松方程, 像电荷只能在 $R < R_0$ 区域(求解区域之外)引入;

第二, 由对称性的考虑, 像电荷只能置于 z 轴(对称轴)上, 如图 3.10(a)所示;

第三, 这个简化模型满足 $\varphi|_{R\to\infty} = 0$ 也是显然的.

由此, 提出尝试解(Q' 和 b 为待定系数)

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{a^2+R^2-2az}} + \frac{Q'}{\sqrt{b^2+R^2-2bz}}\right]. \tag{14}$$

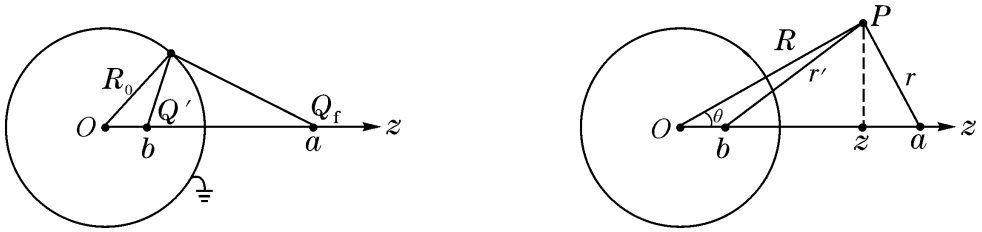


图 3.10

上式在计算源点到场点的距离时应用了余弦定理,同时还应用了球坐标与直角坐标的关系式$R\cos\theta = z$,如图 3.10(b)所示.

3. 确定待定参数求得解

为了由$\varphi|_{R=R_0}=0$确定参数Q'和b,将$x=R_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$代入(14)式,并对两项的分母中分别提出$\sqrt{2a}$和$\sqrt{2b}$,即有

$$\varphi\Big|_{R=R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{2a\left(\dfrac{a^2+R_0^2}{2a}-z\right)}}+\frac{Q'}{\sqrt{2b\left(\dfrac{b^2+R_0^2}{2b}-z\right)}}\right]=0. \tag{15}$$

要上式成立,即要求

$$\frac{Q_f}{\sqrt{a}}=\frac{-Q'}{\sqrt{b}},\qquad \frac{a^2+R_0^2}{2a}=\frac{b^2+R_0^2}{2b}. \tag{16}$$

由第二式可以得到关于b的二次方程

$$ab^2-(a^2+R_0^2)b+aR_0^2=0, \tag{17}$$

弃去$b>R_0$的解,可得

$$b=\frac{(a^2+R_0^2)-\sqrt{(a^2+R_0^2)^2-4a^2R_0^2}}{2a}=\frac{R_0^2}{a}. \tag{18}$$

将(18)式代入(16)式的第一式,即有

$$Q'=-\sqrt{\frac{b}{a}}Q_f=-\frac{R_0}{a}Q_f. \tag{19}$$

将$b=\dfrac{R_0^2}{a}$及$Q'=-\dfrac{R_0}{a}Q_f$代入(14)式,即得球外空间的电势

$$\varphi(x)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{R_0/a}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\dfrac{R_0^2}{a}\right)^2}}\right], \tag{20}$$

根据惟一性定理,这是正确的解.

4. 讨论

第一,导体球所带的总电量?

将$\sigma=-\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial R}\Big|_{R=R_0}$沿球面积分可求得导体球所带的总电量. 但是,既然$Q'$激

发的场等效于球上感应电荷激发的场,则感应电荷的总量为$Q'=-\frac{R_0}{a}Q_f$.

第二,若导体球不接地,边值关系有何变化?

此时$\varphi|_{R=R_0}=0$及$\oint_S \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial R}\mathrm{d}\sigma=-Q'$分别变为

$$\varphi|_{R=R_0}=\text{常数};\tag{21}$$

$$\oint_S \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial R}\mathrm{d}\sigma=0.\tag{22}$$

要求导体球所带的净电荷为零,就必须引进另一个像电荷$Q''=-Q'=\frac{R_0}{a}Q_f$才能满足(22)式.要求球面仍为等势面,则Q''应置于球心处.据此得球面电势为

$$\varphi|_{R=R_0}=\frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 R_0}=\frac{\frac{R_0}{a}Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_0}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 a}.\tag{23}$$

这里已考虑到由Q_f及Q'在球面上共同激发的电势为零,见(15)式.

第三,若导体球带电量为Q_0,球外空间的电势φ应如何求?

这时应于球心处引入新的像电荷Q'',使电势满足边值关系

$$-\oint_S \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial R}\mathrm{d}\sigma=Q'+Q''=Q_0,\tag{24}$$

即

$$Q''=Q_0-Q'=Q_0+\frac{R_0}{a}Q_f.\tag{25}$$

球外空间电势为Q_f、Q'(位于be)及Q''(位于球心)共同激发的.

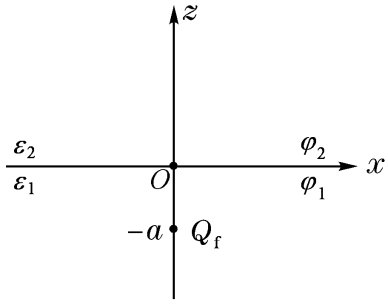


图3.11

三、绝缘介质的镜像问题

【例3】 设在$z=0$平面的上、下方分别充满介电常数为ε_2和ε_1的介质,在$z=-a$e处有一点电荷Q_f(见图3.11).试求:

(1) 空间各点的电势;(2) 界面上的极化电荷面密度;(3) Q_f所受的库仑力.

解　设$z<0$区域的电势为$\varphi_1(x)$,$z>0$区域的电势为$\varphi_2(x)$.

1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi_1=-\frac{Q_f}{\varepsilon_1}\delta^3(x+a\mathrm{e})$,　　$z<0$;　　(26)

② $\nabla^2\varphi_2=0$,　　$z>0$;　　(27)

③ $\varphi_1|_{R\to\infty}=0$,　　$z<0$;　　(28)

④ $\varphi_2|_{R\to\infty}=0$,　　$z>0$;　　(29)

⑤ $\varphi_1\big|_{z=0}=\varphi_2\big|_{z=0}$; (30)

⑥ $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$; (31)

⑦ $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{z=0}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{z=0}$. (32)

最后的式子来自$(E_{2t}-E_{1t})\cdot t=0$(取$t=$ 电),见§ 1.5 的(14)式.

2. 引入像电荷,提出尝试解

为了求解下半空间的电势$\varphi_1(x)$,设想把上半空间(求解区域以外)的介质ε_2 拿走,换成介质ε_1;与此同时,在$x=a$ 电处引入像电荷Q'来代替原先的极化电荷对下半空间的作用(既然设想全空间的介电常数均为ε_1,故Q'置于$x=a$ 电处是理所当然的). 由此得$z\leqslant 0$ 区域的电势为

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}+\frac{Q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right]. \tag{33}$$

为了求解上半空间的电势$\varphi_2(x)$,同样设想把下半空间(求解区域以外)的介质ε_1 拿走换成介质ε;与此同时,在$x=-b$ 电处引入像电荷Q''来代替原先的极化电荷及Q_f 对上半空间的作用[注意,在求解区域外增减电荷均不会违背泊松方程,见(27)式]. 这样,$z\geqslant 0$ 区域的电势为

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q''}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}}. \tag{34}$$

上面两式所含参数Q',Q''及b 可由定解条件得出.

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第 8 题).

以上介绍的几个例题是静电镜像法最典型的例子,所采用的方法容易推广到更为复杂的题目(见习题),还可以用来计算一些近代物理学的问题. 例如,电子可以被吸附在超流体氦 II(其特征为超流动性,即其黏度为零)的表面形成晶格,称为维格纳晶格,利用静电镜像法可以算出晶格中每个电子受到的经典束缚势能.[①]

习 题 3.3

1. 试计算例 2 中导体带电量为Q_0 时,导体对Q_f 的作用力.

2. 接地空心导体球的内、外半径分别为R_0 和R_0',在球内离球心$a(a<R_0)$处放置一点电荷Q_f,试求空间的电势和导体球上的感应电荷密度、感应电荷分布在内表面还是外表面?

3. 两块互相垂直的接地无穷大金属平板,与球心在坐标原点、半径为R_0 的金属球面把空间分成两个区域(见图3.12). 若点电荷Q_f 置于$(a,a,0)$点,求空间的电势.

4. 有一无穷大接地导体平板置于$x=a$ 处,且有一半径为R_0、球心位于坐标原点的导体球的电势为φ_0(见图3.13),求空间的电势. 已知$a\gg R_0$,要求精确到R_0/a 的二阶小量.

5. 两块互相平行的无穷大接地金属平板分别置于$x=0$ 及$x=l$ 处,在两板间的$x=c$ 处有一

① 蔡圣善编著. 2002. 经典电动力学. 上海:复旦大学出版社. 92~ 94.

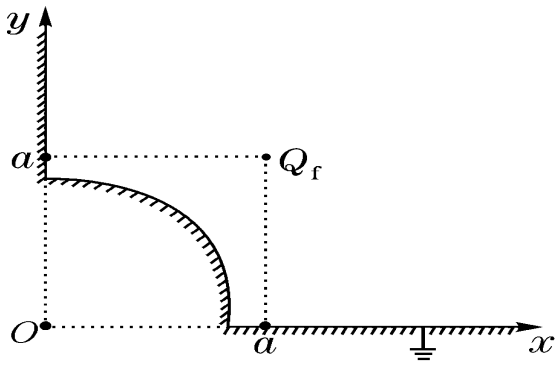


图 3.12

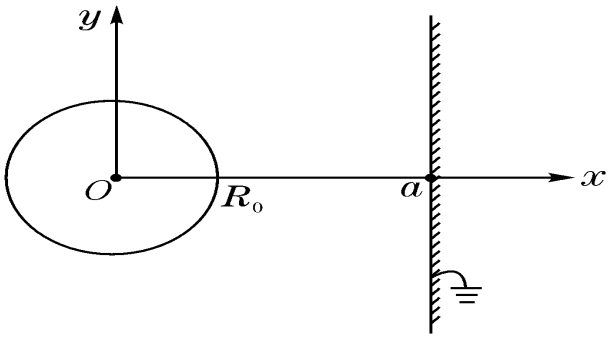


图 3.13

点电荷Q_f,求空间的电势.

6. 两个半径为R_0 的导体球构成双球电容器. 球1 的球心位于坐标原点,带电$Q_1 = Q_0$;球2 的球心与原点相距 $2d$(且$d \gg R_0$),带电$Q_2 = -Q_0$. 试求两球的电势及该电容器的电容,要求准确到$\frac{R_0}{2d}$的一阶小量.

7. 假设由 xz 半平面与yz 半平面围成直角无穷容器,容器的内部充满电导率为σ 的液体,在(x_0, y_0, z_0)及$(x_0, y_0, -z_0)$两点分别置正负电极并通过电流 I_f,求导电液体中的电势.

8. 完成例 3.

*§ 3.4　格林函数法

静电镜像法成功地解决了一个点电荷在不同空间(半无界空间,球内、外空间,柱内、外空间等)激发的电势. 那么,能否由该电势出发得到任意分布的电荷体系在同样空间激发的电势呢? 根据电势叠加原理,可以预料这是可能的,这种方法称为格林函数法.

本节首先介绍什么叫做格林函数,以及常用的泊松方程第一、二类边值问题的格林函数;接着由格林定理出发,导出格林函数法计算电势的公式,总结出应用格林函数法的基本步骤;最后,作为例子,分别求解泊松方程第一、二类边值问题.

一、泊松方程的格林函数

格林函数$G(x, x')$是位于x'处的单位正电荷在齐次边界条件下,在x 处激发的电势. 当然,对不同方程、不同类型的边界条件和不同形状的边界就有不同的格林函数. 现在分别介绍应用较多的泊松方程第一、二类边值问题的格林函数.

1. 泊松方程第一类边值问题的格林函数

它的边值问题是

$$\begin{cases} \nabla^2 G_1(x, x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x - x'), & (1) \\ G_1(x, x')\big|_S = 0. & (2) \end{cases}$$

① 对于无界空间,边界条件(2)式可具体写成

$$G_1(x,x')\big|_{R\to\infty}=0. \tag{3}$$

电磁学已给出(1)式和(3)式构成的边值问题的解,称为无界空间的格林函数:

$$G_1(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|x-x'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{4}$$

② 对于上半空间,边界条件(2)式可具体写成

$$G_1(x,x')\big|_{z=0}=0,\qquad G_1(x,x')\big|_{R\to\infty}=0. \tag{5}$$

由(1)式和(5)式构成的边值问题在§ 3.3 例1 已解出. 只是点电荷$Q_f=1$,它的位置不限制在$x'=a_e$,可位于任意位置$x'=(x',y',z')$处;像电荷是$Q'=-1$,位于$x''=(x',y',-z')$处. 它的解称为上半空间的格林函数:

$$\begin{aligned}G_1(x,x')&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 r_-}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right].\end{aligned} \tag{6}$$

③ 对于球外空间,边界条件(2)式可具体写成

$$G_1(x,x')\big|_{R=R_0}=0,\qquad G_1(x,x')\big|_{R\to\infty}=0. \tag{7}$$

由(1)式和(7)式构成的边值问题在§ 3.3 的例2 已解出,只是点电荷$Q_f=1$,它的位置不局限在$x'=ae_z$,而可以位于球外的任意位置$x'=(R',\theta',\phi')$;像电荷的电量为$Q'=-\frac{R_0}{R'}Q_f=-\frac{R_0}{R'}$,位于$x''=\left(\frac{R_0^2}{R'},\theta',\phi'\right)$,如图3.14 所示. 此外,$x$ 与x'的夹角也不是θ(因为Q_f 不在z 轴上),而是$\alpha=\theta-\theta'$,将原来的解作了上述改动之后,即为球外空间的格林函数:

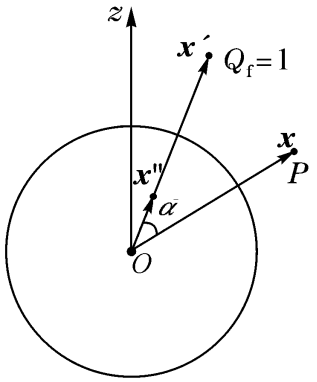


图 3.14

$$\begin{aligned}G_1(x,x')&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|x-x'|}+\frac{-R_0/R'}{4\pi\varepsilon_0|x-x''|}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}+\frac{-R_0/R'}{\sqrt{R^2+\left(\frac{R_0^2}{R'}\right)^2-2R\left(\frac{R_0^2}{R'}\right)\cos\alpha}}\right]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RR'}{R_0}\right)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right].\end{aligned} \tag{8}$$

式中x 与x'之间的夹角可以表示为(见附录1 习题A1.5 第2 题)

$$\cos\alpha=\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi'-\phi)+\cos\theta\cos\theta'. \tag{9}$$

2. 泊松方程第二类边值问题的格林函数

如果我们讨论的区域V 是有限的(称为内域问题),则它的边值问题不能写成

$$\begin{cases} \nabla^2 G_2(x,x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x'), & (10) \\ \left.\dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n'}\right|_S = 0. & (11) \end{cases}$$

实际上,在(10)式两边对区域V作体积分,可得

$$\int_V \nabla \cdot \nabla G_2(x,x')\mathrm{d}^3x' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \delta^3(x-x')\mathrm{d}^3x',$$

利用高斯定理及δ函数的性质,即有

$$\oint_S \nabla G_2(x,x')\cdot \mathrm{d}\sigma' = -\frac{1}{\varepsilon_0},$$

由于$\mathrm{d}\sigma' = n'\mathrm{d}\sigma'$,以及$n'\cdot \nabla G_2 = \dfrac{\partial G_2}{\partial n'}$,可得

$$\oint_S \frac{\partial G_2(x,x')}{\partial n'}\mathrm{d}\sigma' = -\frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (12)$$

但(11)式指出,在边界S上$\dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n'}$处处为零,可见(11)式与(12)式矛盾.

为了解决(10)式与(11)式不相容的问题,可以对泊松方程或边界条件进行修改,并把满足新的边值问题的格林函数称为广义格林函数.

第一种修改方法:保持齐次边界条件不变而改变电荷分布,即将边值问题改为

$$\begin{cases} \nabla^2 G_2(x,x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x') + \dfrac{1}{\varepsilon_0 V}, & (13) \\ \left.\dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n'}\right|_S = 0. & (14) \end{cases}$$

这样,在(13)式两边对区域V作体积分,并将(14)式代入后,左右两边均为零.

第二种修改方法:保持泊松方程不变而将边界条件改为非齐次,即将边值问题改为

$$\begin{cases} \nabla^2 G_2(x,x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x'), & (15) \\ \left.\dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n'}\right|_S = -\dfrac{1}{\varepsilon_0 S}. & (16) \end{cases}$$

这样,在(15)式两边对区域V作体积分并将(16)式代入时,左右两边均得$-1/\varepsilon_0$.

当然,如果讨论的区域V是无穷的(称为外域问题),此时V的界面S也是无穷大,由于$\dfrac{1}{\varepsilon_0 V}$及$-\dfrac{1}{\varepsilon_0 S}$均趋于零,故外域问题的格林函数仍满足(10)式与(11)式.

第二类边值问题的格林函数也可以利用镜像法来求,例如,由xOz半平面、yOz半平面及无穷远处界面所围成的1/4无界空间的格林函数满足(外域问题)

$$\begin{cases} \nabla^2 G_2(x,x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x'), & (17) \\ \dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n}\Big|_{y=0} = \dfrac{\partial G_2(x,x')}{\partial n}\Big|_{R\to\infty} = 0. \text{①} & (18) \end{cases}$$

这个边值问题与习题3.3第7题非常相似,即得1/4无界空间的格林函数:

$$G_2(x,x') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}}\right]. \quad (19)$$

它与第一类边值问题格林函数的差异是:像电荷与原电荷同号,因为它要保证 $\dfrac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0$(边界上电场法向分量为零),而不是 $G|_S = 0$(边界上电势为零).

二、用格林函数法计算静电势的公式

设边值问题为

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_f(x), & (20) \\ \left[\alpha\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial n} + \beta\varphi(x)\right]\Big|_S = f(x). & (21) \end{cases}$$

当 $\alpha=0,\beta=1$ 就是第一类边值问题;当 $\alpha=1,\beta=0$ 就是第二类边值问题.

将自变量记作 x' 的格林定理为[参看附录1§ A1.4的(15)式]

$$\oint_S [\varphi(x')\nabla'\psi(x') - \psi(x')\nabla'\varphi(x')]\cdot d\sigma' = \int_V [\varphi(x')\nabla'^2\psi(x') - \psi(x')\nabla'^2\varphi(x')]dV'. \quad (22)$$

令 $\psi(x') = G(x',x)$,$\varphi(x')$ 为 V 内的电势,将它们各自遵守的泊松方程代入(22)式,即有

$$\oint_S \left[\varphi(x')\frac{\partial G(x',x)}{\partial n'} - G(x',x)\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'}\right]d\sigma' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V [\varphi(x')\delta^3(x-x') - G(x',x)\rho_f(x')]dV'. \quad (23)$$

利用δ函数的性质

$$\int_V \varphi(x')\delta^3(x-x')dV' = \varphi(x), \quad (24)$$

以及格林函数的对称性(见习题2)

---

① 电荷分布在有限区域内,无穷远处的电势 $G_2|_{R\to\infty} = 0$,故电场法向分量 $-\dfrac{\partial G_2}{\partial n}\Big|_{R\to\infty}$ 亦为零.

$$G(x',x)=G(x,x'), \tag{25}$$

可得

$$\varphi(x)=\int_V G(x,x')\rho_f(x')\mathrm{d}V'+\varepsilon_0\oint_S\left[G(x,x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'}-\varphi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}\sigma'. \tag{26}$$

(1) 对于第一类边值问题,将(2)式代入,得

$$\varphi(x)=\int_V G(x,x')\rho_f(x')\mathrm{d}V'-\varepsilon_0\oint_S\varphi(x')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\mathrm{d}\sigma'. \tag{27}$$

现在,讨论上式两项的物理意义,因为$G(x,x')$是位于x'的单位正电荷在x处激发的电势,易见$G(x,x')\rho_f(x')\mathrm{d}V'$是位于$x'$的电荷$\rho_f(x')\mathrm{d}V'$在$x$处激发的电势,故(27)式的第一项反映$V$内电荷分布在$x$处激发的电势;第二项依赖于边界$S$上的$\varphi(x')$值,它反映$V$外电荷分布在$x$处激发的电势. 这里的$V$可以理解为开区域(不包括边界面$S$).

(2) 对于第二类边值问题,将(16)式代入(26)式,并将$\varphi(x)$在界面S上的平均值记作

$$\overline{\varphi(x)}\big|_S=\frac{1}{S}\oint_S\varphi(x)\mathrm{d}\sigma, \tag{28}$$

则有

$$\varphi(x)=\int_V G(x,x')\rho_f(x')\mathrm{d}V'+\varepsilon_0\oint_S G(x,x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'}\mathrm{d}\sigma'+\overline{\varphi(x)}\big|_S. \tag{29}$$

当然,对于外域问题,由于$S\to\infty$,必有$\overline{\varphi(x)}\big|_S=0$.

三、格林函数法的基本步骤

(1) 写出边值问题.

(2) 求出与$\varphi(x)$具有相同空间、同类边值问题的格林函数. 如果要求球外空间的电势$\varphi(x)$,它有第一类边界条件,那就要求出球外空间第一类边值问题的格林函数(见例1);如果要求1/4无界空间的电势$\varphi(x)$,它有第二类边界条件,那就要求出1/4无界空间第二类边值问题的格林函数(见例2).

(3) 对于第一类边值问题,将$\rho_f(x)$,$G(x,x')$和$\varphi(x)\big|_S$代入(27)式后积分得解;对于第二类边值问题,将$\rho_f(x)$,$G(x,x')$和$\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\bigg|_S$代入(29)式后积分得解.

四、用格林函数法求解泊松方程的第一类边值问题

【例1】 半径为R_0的导体球面,被一个很窄的绝缘环分隔成两个半球面,上半球电势为φ_0,下半球电势为$-\varphi_0$,如图3.15所示. 试求球外空间的电势.

解　1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi = 0, \quad R > R_0;$ (30)

② $\varphi|_{R=R_0} = \begin{cases} \varphi_0, & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\varphi_0, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi; \end{cases}$ (31)

③ $\varphi|_{R\to\infty} = 0.$ (32)

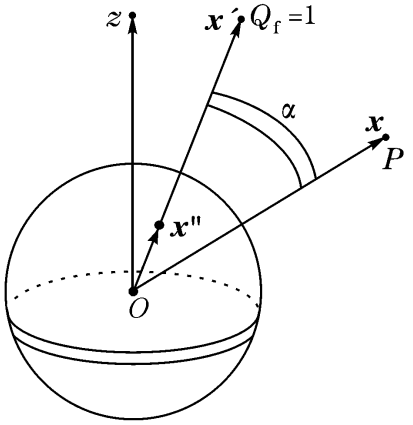


图 3.15

2. 求与 $\varphi(x)$ 具有相同空间,同类边值问题的格林函数

其边值问题为

① $\nabla^2 G(x,x') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x');$ (33)

② $G(x,x')|_{R=R_0} = 0;$ (34)

③ $G(x,x')|_{R\to\infty} = 0.$ (35)

这个边值问题就是(1)式和(2)式,它的解已由(8)式给出.

3. 将 $\rho_f(x), \varphi(x)|_S$ 及 $G(x,x')$ 代入第一类边值问题的静电势公式进行计算. 由于 $\rho_f(x') = 0$,故

$$\varphi(x) = -\varepsilon_0 \oint_{R'=R_0} \varphi(x') \frac{\partial G(x,x')}{\partial n'} \mathrm{d}\sigma'. \tag{36}$$

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第 5 题).

五、用格林函数法求解泊松方程的第二类边值问题

【例 2】 设 xOz 半平面与 yOz 半平面围成直角无穷容器,其内充满电导率为 σ 的液体,在 (x_0, y_0, z_0) 及 $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I_f,求导电液中的电势.

解 本题已用静电镜像法求解(见习题 3.3 第 7 题),现在用格林函数法求解.

1. 边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\left[Q_+\delta^3(x-x_0, y-y_0, z-z_0) + Q_-\delta^3(x-x_0, y-y_0, z+z_0)\right], & (37) \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{R\to\infty} = 0. & (38) \end{cases}$$

式中 $Q_+ = \dfrac{\varepsilon_0 I_f}{\sigma} = -Q_-$.

2. 求与 $\varphi(x)$ 具有相同空间、同类边值问题的格林函数.

$\varphi(x)$ 是 1/4 无界空间中泊松方程第二类边值问题的解,相应的格林函数已由(19)式表出.

3. 将 $\rho_f(x), \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0, \overline{\varphi(x)}|_S = 0$(外域问题)及 $G(x,x')$ 代入第二类边值问题的静电势公式进行计算. 易得

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_V G(x,x')\rho_f(x')\mathrm{d}V' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2+(z-z')^2}}\right] \\
&\quad +\left[Q_+\delta^3(x'-x_0,y'-y_0,z'-z_0)+Q_-\delta^3(x'-x_0,y'-y_0,z'+z_0)\right]\mathrm{d}V' \\
&= \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right] \\
&\quad +\frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

习　题　3.4

1. 试证明格林函数的对称性

$$G(x,x')=G(x',x),$$

并说明其物理意义.

2. 已知在 $z=0$ 平面上的电势分布为 $f(x,y)$,求上半空间的电势分布.

3. 已知半径为 R_0 的球面上的电势为 $f(\theta,\phi)$,求球内、外的电势分布.

4. 在半径为 R_0 的中空接地的导体球壳内沿 z 轴放一长 $2R_0$ 的均匀荷电细导线(两端绝缘),总电荷为 Q_f,求壳内电势.

5. 完成例 1.

§ 3.5　电多极矩法

本节讨论用电多极矩法计算电荷体系在远处激发的电势. 首先介绍电多极矩法的物理思想,随后给出严格的数学证明,最后运用电多极矩法计算两根正交带电的直导线激发的电势.

一、电多极矩法的物理思想

在电磁学中已计算过点电荷、电偶极子和电四极子激发的电势,它们的电荷分布如图 3.16 所示.

点电荷 q(电 2^0 极子)激发的电势为

$$\varphi^{(0)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\propto\frac{1}{r}. \qquad (1)$$

一对有微小位移 l 的等量异号电荷 $\pm q$ 构成电偶极子也称(电 2^1 极子),见图

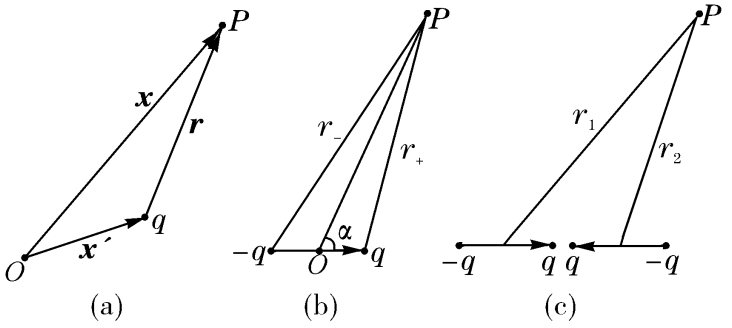


图 3.16

3.16(b),图中$r_{\pm}$和r分别是$\pm q$和偶极子中心到场点的距离.由于l很小,利用近似式$r\approx\sqrt{r_+ r_-}$,便有

$$\varphi^{(1)}=\varphi_+^{(0)}+\varphi_-^{(0)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}\approx\frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\approx\frac{ql\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cdot r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\propto\frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

式中$p=ql$称为电偶极矩.原先$\varphi_+^{(0)}$及$\varphi^{(0)}$均正比于$\frac{1}{r}$,两者之和正比于$\frac{1}{r^2}$,即r的负幂次高了一级.

一对有微小位移的等量反向的偶极子$\pm p$构成电四极子(电2^2极子),见图3.16(c),图中r_1,r_2分别是两电偶极子中心到场点的距离.严格计算电四极子激发的电势比较复杂,但容易判断

$$\varphi^{(2)}=\varphi^{(1)}+\varphi^{(1)}=\frac{p\cdot r_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}+\frac{p\cdot r_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\propto\frac{1}{r^3}. \quad (3)$$

仿上,两电势叠加后,r的负幂次也高了一级.

综合上述,点电荷,电偶极子,电四极子,…所激发的电势分别与$\frac{1}{r}$,$\frac{1}{r^2}$,$\frac{1}{r^3}$,…成正比.因此,各种电2^n极子的电荷体系在远处激发的电势,其重要性将随n的增加而减小.那么,一个电荷体系,能否看成由一系列电多极子组成的呢?

由图3.17,读者不难发现:

在x'处的点电荷q[在坐标原点加$\pm q$,见图3.17(b)]

= 在原点的$q+$中心在$\frac{x'}{2}$的电偶极子p(再在$\mp\frac{x'}{2}$分别加$\pm q$,见图3.17(c)]

= 在原点的$q+$中心在原点的$p+$中心在$\frac{x'}{4}$的电四极子$\overrightarrow{\overrightarrow{d}}$. (4)

既然一个复杂的电荷体系可以看成由大量点电荷组成,如果每一个点电荷都按上面的方法看成由中心在原点的电多极子所组成,然后再分别将中心在原点的同级电多极矩加起来,就可以得到这个电荷体系的总电荷Q_f,总电偶极矩P,总电四极矩$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$….根据电势叠加原理,整个电荷体系在远处激发的电势,就是上述Q_f,P,$\overrightarrow{\overrightarrow{D}}$,…激发的电势的叠加,这个方法就叫做电多极矩法.

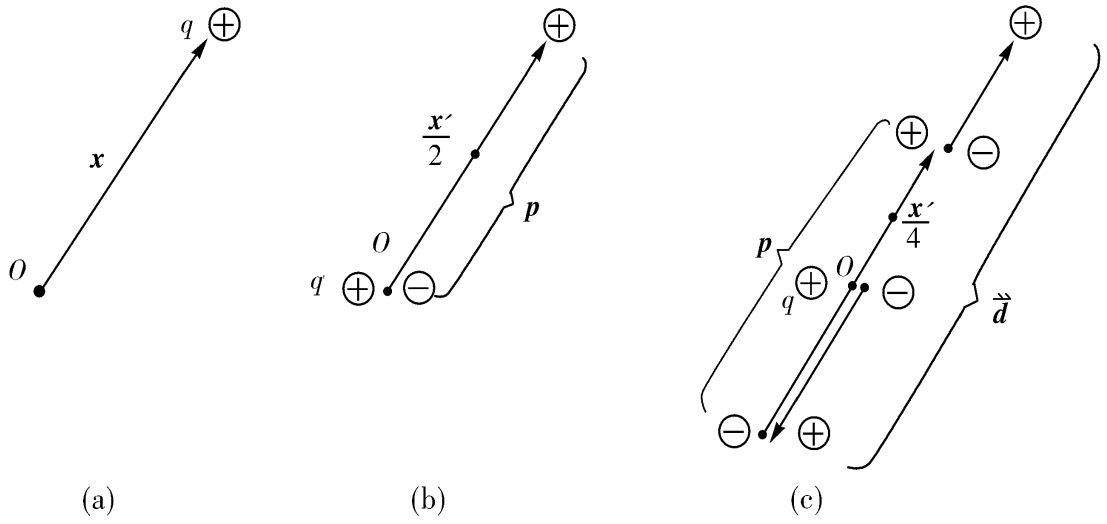


图 3.17

下面,将给出严格的数学证明.

二、电势的泰勒展开

任意电荷体系在无界空间激发的电势为

$$\varphi(x)=\int_V \frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'. \tag{5}$$

将$\frac{1}{r}=\frac{1}{|x-x'|}$作多元函数的泰勒展开(见附录习题1.6的第5题):

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-(x'\cdot\nabla)\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}(x'\cdot\nabla)^2\frac{1}{R}+\cdots \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式,注意到$(x'\cdot\nabla)^2=x'x':\nabla\nabla$,即得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho_f(x')\left[\frac{1}{R}-(x'\cdot\nabla)\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}(x'\cdot\nabla)^2\frac{1}{R}+\cdots\right]\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\int_V\rho_f(x')\mathrm{d}V'-\left[\int_V\rho_f(x')x'\mathrm{d}V'\right]\cdot\nabla\frac{1}{R}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{6}\left[\int_V 3\rho_f(x')x'x'\mathrm{d}V'\right]:\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

引入电荷体系的电荷Q_f,体系的电偶极矩P,体系的电四极矩$\overleftrightarrow{D}$:

$$Q_f=\int_V\rho_f(x')\mathrm{d}V', \tag{8}$$

$$P=\int_V\rho_f(x')x'\mathrm{d}V', \tag{9}$$

$$\overleftrightarrow{D}=\int_V 3\rho_f(x')x'x'\mathrm{d}V'. \tag{10}$$

则电荷体系激发的电势可表示为

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\cdots=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}P\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\overleftrightarrow{D}:\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots. \tag{11}$$

不难看出,中心位于坐标原点的Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$激发的电势分别正比于$\frac{1}{R}$,$\frac{1}{R^2}$,$\frac{1}{R^3}$,与(1)、(2)、(3)式的结论一致. 这里用R替代r是由于电多极子的中心在坐标原点.

这样便一举解决了两个问题:一是电荷体系的电多极矩Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$,…如何计算;二是电荷体系的Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$,…激发的电势如何计算. 根据问题所要求的精度,便可求得电荷体系在远处激发的电势(在一般的情况下,计算到$\varphi^{(2)}$即可):

$$\varphi=\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(k)}. \tag{12}$$

三、电荷分布的对称性与电多极矩的性质

我们的讨论只局限在应用较广的电偶极矩和电四极矩的范围内.

1. 电偶极矩的性质

如果电荷分布关于原点对称,即

$$\rho_f(x)=\rho_f(-x), \tag{13}$$

则电荷体系的电偶极矩$P=0$.

证 在(9)式中用$-x'$代替x',再将(13)式代入,即有

$$P=\int_V\rho_f(x')x'\mathrm{d}V'=\int_V\rho_f(-x')(-x')\mathrm{d}V'=-\int\rho_f(x')x'\mathrm{d}V'=-P. \tag{14}$$

移项后易见$P=0$.

【例 1】 求电荷分布$\rho_f(x')=-P\cdot\nabla'\delta^3(x')$在无界空间激发的电势,式中$P$为常矢量.

解 将$\rho_f(x')$代入无界空间电势公式,得

$$\varphi(x)=\int_{V_\infty}\frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'=-\int_{V_\infty}\frac{P\cdot\nabla'\delta^3(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V'=-\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{V_\infty}\frac{\nabla'\delta^3(x')}{r}\mathrm{d}V'. \tag{15}$$

上式已将常矢提出积分号外. 利用矢量分析中$\nabla(\varphi\phi)$的计算公式及矢量积分的变换定理$\int_{V_\infty}\mathrm{d}V\ \nabla\varphi=\oint_{S_\infty}\mathrm{d}\sigma\varphi$,即有

$$\begin{aligned}\int_{V_\infty}\frac{\nabla'\delta^3(x')}{r}\mathrm{d}V'&=\int_{V_\infty}\left\{\nabla'\left[\frac{\delta^3(x')}{r}\right]-\delta^3(x')\nabla'\frac{1}{r}\right\}\mathrm{d}V'\\&=\oint_{S_\infty}\mathrm{d}\sigma'\frac{\delta^3(x')}{r}-\int_{V_\infty}\delta^3(x')\nabla'\frac{1}{r}\mathrm{d}V'.\end{aligned} \tag{16}$$

由于在V_∞的表面S_∞上$x'\neq0$,故$\delta^3(x')\big|_\infty=0$,第一项为零;第二项利用$\delta$函数的性质$\int_{V_\infty}\delta^3(x')f(x')\mathrm{d}V'=f(x')\Big|_{x'=0}$,以及$\nabla'f(r)=-\nabla f(r)$,可得

$$\int_{V_\infty}\frac{\nabla'\delta^3(x')}{r}\mathrm{d}V'=-\nabla'\frac{1}{r}\Big|_{x'=0}=\nabla\frac{1}{r}\Big|_{x'=0}=\nabla\frac{1}{|x-x'|}\Big|_{x'=0}=\nabla\frac{1}{R}. \tag{17}$$

将上式代入(15)式,便有

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P \cdot \nabla \frac{1}{R}. \tag{18}$$

与(11)式相比较,可知$\rho_f(x') = -P \cdot \nabla' \delta(x')$表示中心位于坐标原点的、电偶极矩为$P$的电偶极子的电荷密度.

2. 电四极矩的性质

第一,如果电荷分布具有球对称性,即

$$\rho_f(x) = \rho_f(R), \tag{19}$$

则电荷体系的电四极矩$\overleftrightarrow{D} = 0$.

证　作一个球面包围整个电荷体系,由(19)式可知,球面上E的大小相等,由高斯定理易证

$$E = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R^2} e_R. \tag{20}$$

规定$\varphi(\infty) = 0$,由§ 3.1 的(7)式可得

$$\varphi = -\int_{\infty}^{R} E \cdot \mathrm{d}l = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathrm{d}R = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{21}$$

与(11)式相比较,即有$P = 0, \overleftrightarrow{D} = 0$.

第二,电四极矩$\overleftrightarrow{D}$是一个对称张量.

证　$\overleftrightarrow{D} = \int_V 3\rho_f(x')x'x'\mathrm{d}V'$的分量为

$$D_{ij} = e_i \cdot \overleftrightarrow{D} \cdot e_j = \int_V 3\rho_f(x') x_i' x_j' \mathrm{d}V' = \int_V 3\rho_f(x') x_j' x_i' \mathrm{d}V' = D_{ji}. \tag{22}$$

因此,电四极矩最多只有6个独立分量,即3个对角元D_{11}, D_{22}, D_{33}及3个非对角元$D_{12} = D_{21}, D_{23} = D_{32}, D_{31} = D_{13}$.

第三,通过对电四极矩张量的无迹化,可以证明,它只有5个独立分量.

证　引入约化电四极矩张量

$$\overleftrightarrow{\mathbb{D}} = \int_V [3x'x' - R'^2 \overleftrightarrow{I}] \rho_f(x') \mathrm{d}V' = \overleftrightarrow{D} - \overleftrightarrow{I} \int_V R'^2 \rho_f(x') \mathrm{d}V'. \tag{23}$$

显然,$\overleftrightarrow{\mathbb{D}} \neq \overleftrightarrow{D}$,但两者激发的电势相同,由于坐标原点取在电荷体系内部,而场点x又远离电荷体系,故$|x| = R \neq 0$,利用

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{3} e_i e_i : \nabla\nabla \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{3} \nabla_i^2 \frac{1}{R} = \nabla^2 \frac{1}{R} = 0,$$

当$R \neq 0$,用$\nabla\nabla \frac{1}{R}$两次点乘(23)式两边,由上式可见,$\nabla\nabla \frac{1}{R}$与等号右边的第二项的两次点积为零,故有

$$\frac{1}{24\pi\varepsilon_0} \overleftrightarrow{\mathbb{D}} : \nabla\nabla \frac{1}{R} = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0} \overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla \frac{1}{R}, \tag{24}$$

即计算电四极子激发的电势时可用$\overleftrightarrow{\mathbb{D}}$代替$\overleftrightarrow{D}$.

现在只要证明$\sum_{i=1}^{3} D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$即可,为此,将$j = i$代入(23)式,

并注意到 $\hat{e}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{e}=1$,则

$$D_{ii}=\int_V(3x_i'^2-R'^2)\rho_f(x')\mathrm{d}V'$$

利用 $R'^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,便有

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}=\int_V\left[(3x_1'^2-R'^2)+(3x_2'^2-R'^2)+(3x_3'^2-R'^2)\right]\rho_f(x')\mathrm{d}V'=0. \tag{25}$$

这表明,$\overleftrightarrow{D}$的3个对角元只有2个是独立的,故$\overleftrightarrow{D}$只有5个独立分量.

第四,对于由 N 个点电荷组成的电荷体系,其电四极矩 $\overleftrightarrow{D}$ 及约化电四极矩 $\overleftrightarrow{D}$ 可表示为(见习题1)

$$\overleftrightarrow{D}=\sum_{n=1}^{N}3q_nx_n'x_n',\quad \overleftrightarrow{D}=\sum_{n=1}^{N}q_n(3x_n'x_n'-R_n'^2\overleftrightarrow{I}). \tag{26}$$

四、用电多极矩法计算电荷体系在远处激发的电势

计算的步骤为:

(1) 根据问题对精度的要求计算电荷体系相应的电多极矩Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$(或$\overleftrightarrow{D}$),……

(2) 将求得的电多极矩代入电势的泰勒展开式计算电势.

【例2】 两根长度为$2a$的均匀带电直线在坐标原点互相绝缘地相交,其中线密度为η的置于x轴的$[-a,a]$区间;线密度为$-\eta$的置于y轴的$[-a,a]$区间,求$R\gg a$处的电势,要求精确到R^{-3}项.

解 本题按上述的两个步骤进行计算.

1. 求电荷体系的电多极矩

根据本题精度的要求,只要计算电荷体系的Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$即可.

① 体系的电荷密度为

$$\rho_f(x')=\begin{cases}\eta\delta(y')\delta(z'), & -a\leqslant x'\leqslant a;\\ -\eta\delta(x')\delta(z'), & -a\leqslant y'\leqslant a;\\ 0, & x',y'<-a,\quad x',y'>a.\end{cases} \tag{27}$$

② 由于两根带电直线的电量相等,符号相反,故电荷体系的总电量$Q_f=0$.

③ 由电荷分布关于原点对称,故电荷体系的电偶极矩$P=0$.

④ 在计算体系的电四极矩时要用到δ函数的性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(z')\mathrm{d}z'=\int_{-\infty}^{\infty}f(x',y',z')\delta(z'-0)\mathrm{d}z'=f(x',y',0). \tag{28}$$

因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}x'x'\delta(z')\mathrm{d}z'=x'x'\big|_{z'=0}=(x'\hat{e}+y'\hat{e})(x'\hat{e}+y'\hat{e}). \tag{29}$$

由此得体系的电四极矩为

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{D} &= \int_V 3\rho_f(x')x'x'\mathrm{d}V' \\ &= 3\int_{-a}^{a}\eta\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y')\mathrm{d}y'\int_{-\infty}^{\infty}x'x'\delta(z')\mathrm{d}z' \\ &\quad -3\int_{-a}^{a}\eta\mathrm{d}y'\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x')\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}x'x'\delta(z')\mathrm{d}z' \\ &= 3\mathrm{e}_x\mathrm{e}_x\int_{-a}^{a}\eta x'^2\mathrm{d}x' - 3\mathrm{e}_y\mathrm{e}_y\int_{-a}^{a}\eta y'^2\mathrm{d}y' \\ &= 2\eta a^3(\mathrm{e}_x\mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y\mathrm{e}_y). \end{aligned} \tag{30}$$

2. 求电荷体系激发的电势

$$\varphi(x) = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\overleftrightarrow{D}:\ \nabla\nabla\frac{1}{R} = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0}2\eta a^3(\mathrm{e}_x\mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y\mathrm{e}_y):\ \nabla\nabla\frac{1}{R}. \tag{31}$$

利用

$$\nabla\nabla\frac{1}{R} = \nabla\left(-\frac{R}{R^3}\right) = -R\,\nabla\frac{1}{R^3} - \frac{\nabla R}{R^3} = \frac{3RR - R^2\overleftrightarrow{I}}{R^5}, \tag{32}$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\eta a^3}{12\pi\varepsilon_0}\frac{(\mathrm{e}_x\mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y\mathrm{e}_y):(3RR - R^2\overleftrightarrow{I})}{R^5} = \frac{\eta a^3}{12\pi\varepsilon_0}\frac{3(x^2 - y^2) - R^2(1-1)}{R^5} \\ &= \frac{\eta a^3\sin^2\theta\cos 2\phi}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \end{aligned} \tag{33}$$

习　题　3.5

1. 试证明(26)式.

2. 设点电荷 q 位于$(0,0,l)$处,电荷$-q$ 位于坐标原点,求这个电荷体系的Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$ 及其在远处激发的电势.

3. 设点电荷 q 位于$(0,l,0)$处,电荷$-2q$ 位于坐标原点,电荷 q 位于$(0,-l,0)$,求这个电荷体系的Q_f,P,$\overleftrightarrow{D}$ 及其在远处激发的电势.

4. 半轴为 a,b,c 的椭球体内均匀带电,总电量为Q_f,求远处的电势,要求精确到电四极子项.

§ 3.6　静电场的能量　相互作用能,势能与广义力

上一章已得出各向同性线性介质中电磁场的能量密度公式. 本节首先由此公式出发导出电场能量的普遍公式,进而得出静电场能量公式、介质均匀充满的静电场能量公式、点电荷系的静电场能量公式和导体系的静电场能量公式. 接着,由静电场能量公式出发,导出电多极子与外电场的相互作用能(即电多极子在外电场中的势能),并由此求得外电场作用于电多极子的广义力(力及力矩).

一、静电场的能量

计算静电场能量有好几个公式,它们的适用范围也不完全相同.

1. 电场能量的普遍公式(各向同性线性介质)

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} E \cdot D \, \mathrm{d}V . \tag{1}$$

证　在§ 2.1 已给出各向同性线性介质中电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B). \tag{2}$$

全空间电场的能量等于电场能量密度的体积分,即

$$W = \int_{V_\infty} w \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} E \cdot D \, \mathrm{d}V .$$

2. 静电场能量公式

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V . \tag{3}$$

证　利用静电势的定义 $E = -\nabla\varphi$,将麦克斯韦方程 $\nabla \cdot D = \rho_{\mathrm{f}}$ 代入矢量分析公式,可得

$$\nabla \cdot (\varphi D) = (\nabla\varphi) \cdot D + \varphi \nabla \cdot D = -E \cdot D + \varphi\rho_{\mathrm{f}} . \tag{4}$$

将上式移项后代入(1)式,便有

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{V_\infty} E \cdot D \, \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int_{V_\infty} \nabla \cdot (\varphi D) \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\oint_{S_\infty} \varphi D \cdot \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V . \end{aligned}$$

面积分项之所以为零是由于 $\varphi \sim \frac{1}{R}$, $D \sim \frac{1}{R^2}$, $\mathrm{d}\sigma \sim R^2$,当 $R \to \infty$ 时,沿 S_∞ 的面积分为零,(3)式得证.

电场的能量密度 $w = \frac{1}{2}E \cdot D$ 是定义在有电场的空间中的,如果因为有

$$\int_{V_\infty} w \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V ,$$

就认为 $w = \frac{1}{2}\varphi\rho_{\mathrm{f}}$,这是不对的.因为只有当积分区域任意时,才能由两积分相等得出两被积函数相等的结论.容易举出空间某区域的电荷密度 $\rho_{\mathrm{f}}(x) = 0$,但该区域的电场强度 $E(x) \neq 0$,因而该区域的电场能量密度 $w(x) \neq 0$ 的例子.

3. 介质均匀充满时静电场能量公式

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\int_{V_\infty} \mathrm{d}V \int_{V_\infty} \mathrm{d}V' \frac{\rho_{\mathrm{f}}(x)\rho_{\mathrm{f}}(x')}{r}. \tag{5}$$

证　如果在 $E \neq 0$ 的区域均匀充满介电常数为 ε 的介质，就可以将 $\varphi(x)=\int_{V_\infty}\frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V'$ 代入 $W=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\varphi(x)\rho_f(x)\mathrm{d}V$，便有

$$W=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\varphi(x)\rho_f(x)\mathrm{d}V=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int_{V_\infty}\mathrm{d}V\int_{V_\infty}\mathrm{d}V'\frac{\rho_f(x)\rho_f(x')}{r}.$$

4. 点电荷系的静电场能量公式

$$W=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n\varphi(x_n). \tag{6}$$

证　设点电荷 $q_n(n=1,2,\cdots,N)$ 位于 x_n 处，则点电荷系的电荷密度为

$$\rho_f(x)=\sum_{n=1}^{N}q_n\delta^3(x-x_n). \tag{7}$$

代入(3)式，并利用 δ 函数的性质，即有

$$W=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\varphi(x)\rho_f(x)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n\int_{V_\infty}\varphi(x)\delta^3(x-x_n)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n\varphi(x_n).$$

对于点电荷系而言，$\varphi(x_n)$ 是除 q_n 以外其他点电荷在 x_n 处激发的电势，若计及点电荷 q_n 的场对其自身的作用(这部分能量称为自能)，则会出现自能发散的问题(因为 $r\to0$，自能 $\to\infty$)，这是电荷的点模型带来的必然困难.

当然，点电荷仅是一个近似模型，自然界最小的带电粒子也必然占有一定的体积，这与“基本粒子”的结构有关，它是自然科学的一个基本问题.

5. 导体系的静电场能量公式

$$W=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n\varphi_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}C_n\varphi_n^2. \tag{8}$$

式中 $q_n(n=1,2,\cdots,N)$ 为第 n 个导体上的电荷，φ_n 为第 n 个导体的电势(它是包括第 n 个导体在内的所有带电导体所激发的电势)，C_n 为第 n 个导体的电容

$$C_n=\frac{q_n}{\varphi_n}. \tag{9}$$

证　由 $W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho_f\mathrm{d}V$ 出发，考虑到每个导体为等势体，便有

$$W=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\varphi\rho_f\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\varphi_n\int_{V_n}\rho_f\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n\varphi_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}C_n\varphi_n^2.$$

最后的等式已将(9)式代入.

二、电多极子与外电场的相互作用能(电多极子在外电场中的势能)

设电荷体系分布在小区域 V 内(坐标原点取在 V 内)，其电荷分布为 $\rho_f(x)$，它激发的电势为

$$\varphi(x)=\int_V\frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V', \tag{10}$$

它单独存在时的电场能量为

$$W_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\varphi(x)\mathrm{d}V. \tag{11}$$

若外电场由电荷分布$\rho_{\mathrm{e}}(x)$激发,它激发的电势为

$$\varphi_{\mathrm{e}}(x)=\int_{V_\infty}\frac{\rho_{\mathrm{e}}(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V', \tag{12}$$

它单独存在时的电场能量为

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\rho_{\mathrm{e}}(x)\varphi_{\mathrm{e}}(x)\mathrm{d}V. \tag{13}$$

显然,电荷分布$\rho_{\mathrm{f}}(x)$与$\rho_{\mathrm{e}}(x)$共同激发的电场能量为

$$W=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}(\rho_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{e}})(\varphi+\varphi_{\mathrm{e}})\mathrm{d}V. \tag{14}$$

电荷体系与外电场的相互作用能即为

$$W_{\mathrm{i}}=W-W_{\mathrm{e}}-W_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\left[(\rho_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{e}})(\varphi+\varphi_{\mathrm{e}})-\rho_{\mathrm{f}}\varphi-\rho_{\mathrm{e}}\varphi_{\mathrm{e}}\right]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}(\rho_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{e}}+\rho_{\mathrm{e}}\varphi)\mathrm{d}V.$$

容易证明,上述两项积分值相等(见本节习题第1题),由此得

$$W_{\mathrm{i}}=\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\varphi_{\mathrm{e}}(x)\mathrm{d}V. \tag{15}$$

这就是电荷分布$\rho_{\mathrm{f}}(x)$与电势为$\varphi_{\mathrm{e}}(x)$的外场的相互作用能.

为了求得电多极子与外场的相互作用能,可将外场在小区域内激发的电势$\varphi_{\mathrm{e}}(x)$在坐标原点展开,得

$$\varphi_{\mathrm{e}}(x)=\varphi_{\mathrm{e}}(0)+x\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\frac{1}{2}(x\cdot\nabla)^2\varphi(0)+\cdots \tag{16}$$

应注意,在§ 3.5的(6)式中,$f(x-x')$是对小量$-x'$展开的,故各项正、负相间;现在的$\varphi_{\mathrm{e}}(x)$是对小量x展开的,故各项均为正号.其次,式中$\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)$的含意是$\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(x)\big|_{x=0}$,其意义与$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}$相仿.

将$\varphi_{\mathrm{e}}(x)$代入W_{i},便有

$$W_{\mathrm{i}}=\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\varphi_{\mathrm{e}}(x)\mathrm{d}V$$

$$=\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\left[\varphi_{\mathrm{e}}(0)+x\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\frac{1}{2}xx:\nabla\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\cdots\right]\mathrm{d}V$$

$$=W_{\mathrm{i}}^{(0)}+W_{\mathrm{i}}^{(1)}+W_{\mathrm{i}}^{(2)}+\cdots \tag{17}$$

上式给出了电荷、电偶极子和电四极子与外电场的相互作用能,它们分别为:

①位于坐标原点的电荷与外电场的相互作用能

$$W_{\mathrm{i}}^{(0)}=\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\varphi_{\mathrm{e}}(0)\mathrm{d}V=\varphi_{\mathrm{e}}(0)\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)\mathrm{d}V=Q_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{e}}(0), \tag{18}$$

等于电磁学计算过的位于坐标原点的电荷在外电场中的势能$V^{(0)}=Q_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{e}}(0)$.

②中心在坐标原点的电偶极子与外电场的相互作用能

$$W_{\mathrm{i}}^{(1)}=\int_{\mathrm{f}}\rho_{\mathrm{f}}(x)x\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)\mathrm{d}V=\left[\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)x\mathrm{d}V\right]\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)=P\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)$$

$$=-P\cdot E(0),\tag{19}$$

等于中心位于坐标原点的电偶极子在外电场中的势能$V^{(1)}=-P\cdot E(0)$,见本节习题第2题.

③中心在坐标原点的电四极子与外电场的相互作用能

$$W_{\mathrm{i}}^{(2)}=\frac{1}{2}\int_{V}\rho_{\mathrm{f}}(x)xx\vdots\nabla\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)\mathrm{d}V=\frac{1}{6}\left[\int_{V}(3\rho_{\mathrm{f}}(x)xx-R^{2}\overleftrightarrow{I})\mathrm{d}V\right]\vdots\nabla\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)$$

$$=-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D}\vdots\nabla E(0).\tag{20}$$

上式已利用了坐标原点处有外场,但没有激发外场的电荷分布,因而

$$\overleftrightarrow{I}\vdots\nabla\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)=\nabla^{2}\varphi_{\mathrm{e}}(0)=-\nabla\cdot E_{\mathrm{e}}(0)=-\frac{\rho_{\mathrm{e}}(0)}{\varepsilon_{0}}=0.\tag{21}$$

上面的讨论一举解决了两个问题:一是求得电多极子与外电场的相互作用能的计算公式;二是证明电荷体系与外电场的相互作用能,等于组成这个电荷体系的各级电多极子与外电场相互作用能之和.

三、电多极子在外电场中所受的广义力(力和力矩)

利用势能计算广义力的公式(见分析力学),电多极子所受的力和力矩分别为

$$F=-\nabla U,\tag{22}$$

$$N_{\theta}=-\frac{\partial U}{\partial\theta},\tag{23}$$

位于坐标原点的电荷所受的力与力矩分别为

$$F^{(0)}=-\nabla U^{(0)}=-\nabla[Q_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{e}}(0)]=Q_{\mathrm{f}}E_{\mathrm{e}}(0),\tag{24}$$

$$L_{\theta}^{(0)}=-\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}[Q_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{e}}(0)]=0.\tag{25}$$

中心位于坐标原点的电偶极子所受的力与力矩分别为

$$F^{(1)}=-\nabla U^{(1)}=-\nabla[-P\cdot E_{\mathrm{e}}(0)]=P\cdot\nabla E_{\mathrm{e}}(0).\text{①}\tag{26}$$

即只有在不均匀电场中,电偶极子受到电场力的合力才不为零.

$$N_{\theta}^{(1)}=-\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}[P\cdot E_{\mathrm{e}}(0)]=\frac{\partial[PE_{\mathrm{e}}(0)\cos\theta]}{\partial\theta}=-PE_{\mathrm{e}}(0)\sin\theta.\tag{27}$$

式中的负号表示力矩使P与E的夹角θ减小.相应的矢量形式为

$$N^{(1)}=P\times E.\tag{28}$$

在图3.18的情形下,$N^{(1)}$的方向垂直于纸面向里.

---

① 按照矢量分析的公式,$\nabla[P\cdot E_{\mathrm{e}}(0)]$为

$$\nabla[P\cdot E_{\mathrm{e}}(0)]=P\times[\nabla\times E_{\mathrm{e}}(0)]+P\cdot\nabla E_{\mathrm{e}}(0)+E_{\mathrm{e}}(0)\times(\nabla\times P)+E_{\mathrm{e}}(0)\cdot\nabla P.$$

由于体系的P为常矢,以及静电场为无旋场($\nabla\times E=0$),故四项中仅第二项不为零.

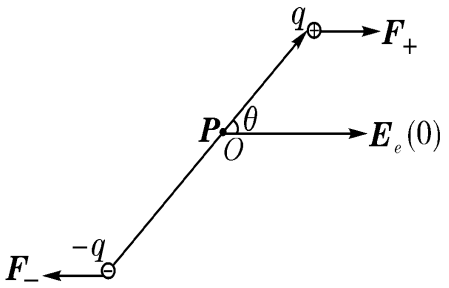


图 3.18

习　题　3.6

1. 试证明

$$\int_V \rho_f(x)\varphi_e(x)\mathrm{d}V = \int_{V_\infty} \rho_e(x)\varphi(x)\mathrm{d}V .$$

2. 设电偶极子 $p_0 = p_e$ 位于坐标原点,若

(1)偶极子 $p_1 = p_e$ 位于 $R_1 = R_e$,求 p_0 与 p_1 的相互作用能 W_{01} 及 p_0 对 p_1 的作用力 F_1;

(2)偶极子 $p_2 = p_e$ 位于 $R_2 = R_e$,求 p_0 与 p_2 的相互作用能 W_{02} 及 p_0 对 p_2 的作用力 F_2.

3. 有一电偶极矩为 p_f 的偶极子,位于距无限大导体平面 a 处,求导体平面对偶极子的吸引力及力矩.

4. 设基态氢原子中电子电荷的密度分布为

$$\rho(R) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2R}{a_0}},$$

式中 a_0 是氢原子的第一玻尔半径,$-e$ 是电子的电量,R 是电子到氢核(坐标原点)的距离,求:

(1) 电子电荷分布 $\rho(R)$ 自身具有的静电场能量 W_e;

(2) 电子电荷分布在氢核电场中的电势能 U.

第四章　静　磁　场

本章讨论稳恒电流和永久铁磁体激发的磁场.由于二者的电流分布(传导电流和磁化电流)与磁场分布均不随时间改变,因此它们都被称为静磁场.

静磁场的基本问题是:在给定传导电流分布和空间介质分布的情况下,求解静磁场.本章分别采用矢势和磁标势描述磁场.首先分别给出矢势和磁标势遵守的微分方程和边值关系,以及静磁边值问题的惟一性定理.其后分别采用矢势法(包括类比法、直接积分法、分离变量法、静磁镜像法等),磁标势法(包括类比法、直接积分法、等效法和分离变量法等),以及磁多极矩法求解静磁场.接着讨论静磁场的能量以及磁多极子(特别是磁偶极子)与外磁场的相互作用.

§ 4.1　磁场的矢势和磁标势　静磁边值问题的惟一性定理

为了简化磁场的求解,通常采用磁场的矢势和磁标势来描述磁场.本节先导出矢势A和磁标势φ_m遵守的泊松方程和边值关系.这样,泊松方程、边界条件和边值关系就构成了静磁边值问题.最后,介绍静磁边值问题的惟一性定理及其应用.

一、矢势　库仑规范条件

由介质中的麦克斯韦方程组可见,静磁场遵守微分方程

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times H = J_f. \tag{2}$$

磁感应强度B与磁场强度H的关系由介质的电磁性质方程$B=\mu_0(H+M)$确定.对于各向同性的线性介质,上式可简化为$B=\mu H$.

在第一章,我们已根据(1)式引入磁场的矢势

$$B = \nabla \times A. \tag{3}$$

附录1§ A1.4的(31)式已指出,连续、可微且在无限远处为零的任何矢量场$A(x)$均可分解为横场$A_l(x)=\nabla\times f(x)$的叠加

$$A(x) = A_l(x) + A_t(x) = \nabla \times f(x) + \nabla\psi(x), \tag{4}$$

既然纵场的旋度 $\nabla \times A_t(x) = \nabla \times (\nabla\psi) = 0$,故

$$B(x) = \nabla \times A(x) = \nabla \times A_l(x). \tag{5}$$

这表明,磁感应强度 B 只取决于矢势的横场分量 $A_l(x)$,而矢势的纵场分量 $A_t(x)$ 可以任意取. 换句话说,对于给定的 B,可以对应无限多个矢势.

在静磁问题中,通常规定矢势纵场分量的散度为零,即

$$\nabla \cdot A_t(x) = \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2\psi = 0.$$

由于矢势的横场分量的散度恒为零,即

$$\nabla \cdot A_l(x) = \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0,$$

因而这相当于规定矢势的散度为零,这个条件称为库仑规范条件

$$\nabla \cdot A = 0. \tag{6}$$

但应注意,即使引入了库仑规范条件,磁场的矢势仍具有不确定性. 对于给定的磁场,仍对应于无限多个矢势

$$A(x) = A_l(x) + \nabla\psi(x), \tag{7}$$

只要 $\psi(x)$ 满足拉普拉斯方程即可[将(7)式代入(6)式得 $\nabla^2\psi(x) = 0$]. (7)式称为矢势的规范变换,磁感应强度在规范变换下保持不变①.

二、矢势遵守的方程及边值关系

在均匀、各向同性的线性介质内部,将 $B = \mu H$, $B = \nabla \times A$ 以及库仑规范条件 $\nabla \cdot A = 0$ 代入麦克斯韦方程 $\nabla \times H = J_f$,便有

$$J_f = \nabla \times H = \nabla \times \frac{B}{\mu} = \frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times A) = \frac{1}{\mu}[\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A]$$

$$= -\frac{1}{\mu}\nabla^2 A.$$

由此即得矢势遵守的微分方程(泊松方程)

$$\nabla^2 A = -\mu J_f. \tag{8}$$

在直角坐标系中,用基矢 $e_i(i = x, y, z)$ 点乘上式,由于 e_i 是常矢量,可以移到拉普拉斯算符 ∇^2 后面,即得

$$-\mu J_{fi} = e_i \cdot (-\mu J_f) = e_i \cdot (\nabla^2 A) = \nabla^2(e_i \cdot A) = \nabla^2 A_i,$$

上式已用 J_{fi} 表示 J_f 的 i 分量. 上式表明,在直角坐标系中,A 的各分量仍遵守泊松方程

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_{fi}, \qquad i = x, y, z. \tag{9}$$

但是,在正交曲线坐标系中,球坐标系的基矢 e_r, e_θ, e_φ 和柱坐标系的基矢 e_ρ, e_φ

① 规范就是规则、限制的意思. 规范变换就是让变换服从某个规则,受到某种限制.

是 x 的函数,它们不能移到算符 ∇^2 的后面,即

$$\mathrm{e}_\alpha \cdot \nabla^2 A \neq \nabla^2 (\mathrm{e}_\alpha \cdot A) = \nabla^2 A_\alpha, \quad \alpha = R, \theta, \phi, \rho. \tag{10}$$

故 A 在球坐标的各分量 A_R, A_θ, A_ϕ 和在柱坐标的分量 A_ρ, A_ϕ 不遵守泊松方程.

现在,进一步导出矢势在两种各向同性线性介质分界面上的边值关系. 与静磁场的麦克斯韦方程 $\nabla \cdot B = 0$, $\nabla \times H = J_f$ 相应的边值关系为

$$n \cdot (B_2 - B_1) = 0, \tag{11}$$

$$n \times (H_2 - H_1) = \alpha_f. \tag{12}$$

① 将 $B = \nabla \times A$ 代入 $n \cdot (B_2 - B_1) = 0$,可得

$$n \cdot (\nabla \times A_2 - \nabla \times A_1) = 0. \tag{13}$$

② 将 $H = \dfrac{B}{\mu} = \dfrac{\nabla \times A}{\mu}$ 代入 $n \times (H_2 - H_1) = \alpha_f$,可得

$$n \times \left(\frac{\nabla \times A_2}{\mu_2} - \frac{\nabla \times A_1}{\mu_1} \right) = \alpha_f. \tag{14}$$

③ 可以证明,可以用(15)式代替(13)式[见(18)式]:

$$A_{1t} = A_{2t}, \quad \text{或} \quad n \times (A_2 - A_1) = 0. \tag{15}$$

④ 甚至,在采用库仑规范时,还可用(16)式代替(13)式:

$$A_1 = A_2. \tag{16}$$

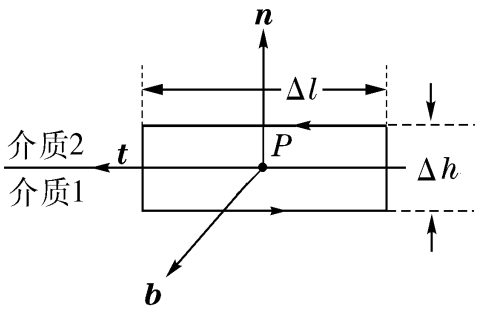


图 4.1

证　由斯托克斯定理,矢势 A 的环流为

$$\oint_l A \cdot \mathrm{d}l = \int_S \nabla \times A \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_S B \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{17}$$

采用图 4.1 的矩形回路,由于 $\Delta l \gg \Delta h$,略去公式中的高阶小量,可得

$$A_{1t} = A_{2t}.$$

令 $A = A_n n + A_t t$,利用 $n \times n = 0$, $n \times t = b$,可得 $n \times A = A_t b$,代入上式,即有

$$n \times (A_2 - A_1) = 0. \tag{18}$$

如果库仑规范条件 $\nabla \cdot A = 0$ 不仅在区域1,2 的内部成立,而且在区域1,2 的分界面上也得到满足,则自然有①

$$A_1 = A_2.$$

在计算一些实际问题时(如本节习题第2 题),可以求出在区域1,2 内部均满足

---

① 分界面上 $\nabla \cdot A = 0$ 就隐含着 A 连续,即 $A_1 = A_2$(否则,A 不连续,在分界面上就不存在 $\nabla \cdot A$). 实际上,由 $\oint_S A \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot A \, \mathrm{d}V = 0$,采用扁平盒为高斯面可证明法向分量 $A_{1n} = A_{2n}$,再与切向分量 $A_{1t} = A_{2t}$ 联立也得 $A_1 = A_2$.

库仑规范条件的矢势,但在分界面上 $A_1 \neq A_2$. 但总可以找到适当的 $\psi(x)$,通过令

$$A'_1 = A_1 + \nabla\psi(x), \qquad A'_2 = A_2. \tag{19}$$

使在区域 1. 2 的分界面上有(见本节习题第 3 题)

$$A'_1 = A'_2. \tag{20}$$

这样,磁场矢势的方程、边值关系与边界条件便构成了静磁边值问题. 通过求解即可求得磁场的分布及其他相关问题,其解法留在§ 4. 2 讨论. 但是,由于这些公式都具有矢量形式,计算比较复杂,人们还是希望引入磁标势以简化计算.

三、磁标势的定义　引入磁标势的条件

矢量场 $H(x)$ 具有标势的条件是积分 $\int_{P_0}^{P} H \cdot \mathrm{d}l$ 与路径无关,即矢量场的环流

$$\oint_l H \cdot \mathrm{d}l = 0. \tag{21}$$

如果满足这个条件,便可以引入一个单值的标量函数 $\varphi_m(x)$ 描述空间的磁场:

$$H(x) = -\nabla\varphi_m(x), \tag{22}$$

式中的 $\varphi_m(x)$ 称为磁标势. 将上式从 P_0 到 P 积分,若规定 P_0 为磁标势的零参考点,则有

$$\varphi_m(P) = -\int_{P_0}^{P} H \cdot \mathrm{d}l. \tag{23}$$

但是,安培回路定理指出,磁场的环流不为零:

$$\oint_l H \cdot \mathrm{d}l = I_f, \tag{24}$$

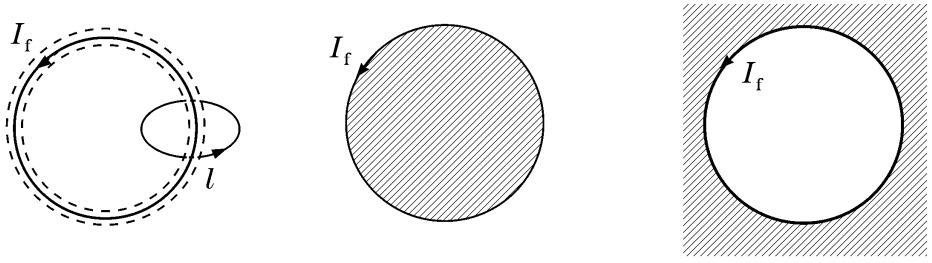


图 4. 2

这就违背了(21)式. 我们自然会考虑,如果把 I_f 占有的空间从求解的区域中挖去,在余下的区域 V 中便没有传导电流了. 这样能否保证磁场的环流为零呢?试看图4. 2(a)的例子,磁场由电流圈激发. 如果仅仅把电流圈从求解区域中挖去(见图中的虚线环),当回路 l 与电流圈相链环时,H 的线积分仍与路径有关(每多转一圈,$\oint_l H \cdot \mathrm{d}l$ 增加一个 I_f),不能引入一个单值函数 $\varphi_m(x)$ 来描述 $H(x)$. 那么,怎样才能

实现 $\oint_l H \cdot \mathrm{d}l = 0$ 呢？这就要求任何闭合回路在求解区域 V 内都不与电流 I_f 链环. 例如，可以引入以电流圈为边界的“磁屏障面”，规定积分路径不允许穿过这个磁屏障面. 如果我们关心的是远离电流圈处的磁场，磁屏障面可以取以线圈为边界的圆内平面，如图 4.2(b)所示；如果我们关心的是电流圈轴线附近的磁场，磁屏障面可以取以线圈为边界的圆外无界平面，如图4.2(c)所示. 不难看出，在这两种情况下，求解区域内都不存在与 I_f 相链环的闭合回路，都可以引入磁标势.

总之，引入磁标势的条件是：求解区域是一个没有传导电流的单通区域(这里所说的“单通区域”是指，其内任一闭合回路可以在三维空间中连续变形缩至一点).

四、磁标势遵守的方程及边值关系

将 $B = \mu_0(H + M)$ 求散度后代入麦克斯韦方程 $\nabla \cdot B = 0$，便有

$$0 = \nabla \cdot B = \mu_0(\nabla \cdot H + \nabla \cdot M) = 0, \tag{25}$$

移项，得

$$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M. \tag{26}$$

与静电场中介质的束缚电荷密度

$$\rho_P = -\nabla \cdot P \tag{27}$$

相应，引入束缚磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M, \tag{28}$$

这里“束缚磁荷”是把分子电流看成由一对磁荷构成的磁偶极子. (28)式出现 μ_0 是由于公式 $D = \varepsilon_0 E + P$ 与公式 $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ 不对称引起的(P 与 $\mu_0 M$ 相应). 由于至今尚未发现磁单极，所以没有与自由电荷密度 ρ_f 相应的自由磁荷密度.

再将 $H = -\nabla \varphi_m$，$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M$ 与 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M$ 联立，即得磁标势 φ_m 遵守的泊松方程

$$\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \nabla \varphi_m = -\nabla \cdot H = \nabla \cdot M = -\frac{\rho_m}{\mu_0}. \tag{29}$$

在均匀介质内部，束缚磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M = \mu_0 \nabla \cdot H = \mu_0 \nabla \cdot \frac{B}{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \cdot B = 0, \tag{30}$$

可见 φ_m 遵守拉普拉斯方程，这与没有自由磁荷的情况相对应.

磁标势的边值关系为：

① 界面上没有传导电流时，磁标势连续：

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}; \tag{31}$$

② 界面上有面传导电流 α_f，磁标势遵守

$$\alpha_f = n \times (H_2 - H_1) = n \times (\nabla \varphi_{m1} - \nabla \varphi_{m2}); \tag{32}$$

③ 各向同性线性介质：

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}; \tag{33}$$

④ 任意介质(包括线性介质与非线性介质)：

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = n \cdot (M_2 - M_1) = -\frac{\sigma_m}{\mu_0}, \tag{34}$$

式中 $\sigma_m = \mu_0 n \cdot (M_1 - M_2)$ 称为束缚磁荷面密度，它是与静电场中介质的束缚电荷面密度 $\sigma_P = n \cdot (P_1 - P_2)$ 类比而得名.

证　首先，取 P_1 与 P_2 为界面法线上边界两侧无限靠近的两点，如图 4.3 所示，它们之间的距离 $\Delta n = \overline{P_1P_2} \to 0$. 因而

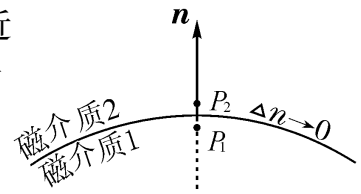


图 4.3

$$\varphi_m(P_2) - \varphi_m(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}\varphi_m = \int_{P_1}^{P_2} \nabla \varphi_m \cdot \mathrm{d}x$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} H \cdot \mathrm{d}x = -\int_{P_1}^{P_2} H_n \mathrm{d}n = -\overline{H}_n \Delta n,$$

式中 $\overline{H}_n$ 是 P_1P_2 线段上磁场强度 H 法向分量的平均值. 因为 $\overline{H}_n$ 有限，$\Delta n \to 0$，故上式为零，由此得 $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$.

在使用这个边值关系时应特别注意，如果介质的分界面存在传导电流而被挖掉(见§ 4.3 例 3)，则 φ_{m1} 和 φ_{m2} 是分别独立定义的，不能应用边值关系 $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$.

第二，将磁标势的定义式代入 $n \times (H_2 - H_1) = \alpha_f$ 即得(32)式.

第三，对于各向同性线性介质，有 $B = \mu H$，将它代入磁场边值关系 $B_{1n} = B_{2n}$，并利用

$$B_n = \mu H_n = \mu n \cdot H = \mu n \cdot (-\nabla \varphi_m) = -\mu \frac{\partial \varphi_m}{\partial n}, \tag{35}$$

即可证明(33)式.

第四，将 $B = \mu_0 (H + M)$ 代入(11)式，移项后便可证明(34)式. 此式对铁磁介质(非线性介质)也适用，应用范围较(33)式为广.

同样，磁标势的方程、边值关系与边界条件也构成了静磁边值问题，其解法留在§ 4.3 讨论.

五、静磁边值问题的惟一性定理及其应用

定理　设区域 V 内的电流分布 $J_f(x)$ 及磁介质分布给定，且 $B = \mu H$ 成立，在 V 的边界面 S 上 A 或 H 的切向分量给定，则 V 内的磁场惟一确定.

定理的证明与静电边值问题的惟一性定理的证明方法类似，见本节习题.

【例1】　设 $x < 0$ 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$x > 0$ 半空间为真空，今有线电流 I_f 沿 z 轴流动，求磁感应强度与磁化电流分布(见图 4.4).

解　本题按 B 遵守的方程、边界条件与边值关系进行讨论，并同时采用直角坐标 x, y, z 及柱坐标 ρ, ϕ, z 表示空间位置.

1. 边值问题

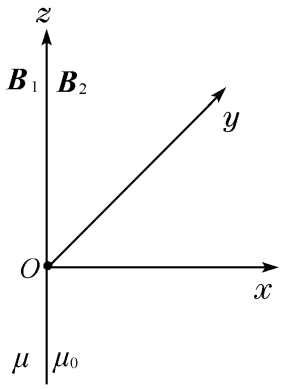


图 4.4

$$① \oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_f; \tag{36}$$

$$② \oint_s \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0; \tag{37}$$

$$③ \lim_{\rho\to\infty} B = 0; \tag{38}$$

④ 由 $n\times(H_2 - H_1)\big|_{x=0} = \alpha_f$，得

$$\boldsymbol{e}_x \times \left(\frac{B_2}{\mu_0} - \frac{B_1}{\mu}\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \qquad \rho \neq 0; \tag{39}$$

⑤由 $n\cdot(B_2 - B_1)\big|_{x=0} = 0$ 得

$$\boldsymbol{e}_x \cdot (B_2 - B_1)\big|_{x=0} = 0. \tag{40}$$

2. 提出尝试解

由于电流 I_f 沿 z 轴，可判断 $B = B_\phi \boldsymbol{e}_\phi$；磁场的边值关系 $B_{1x}\big|_{x=0} = B_{2x}\big|_{x=0}$ 恰好是 $B_{1\phi}\big|_{x=0} = B_{2\phi}\big|_{x=0}$. 可以期望在 ρ 相同处，真空及介质中 B 的大小相等. 将此条件代入安培回路定律，可得

$$\left(\frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu}\right)\pi\rho = I_f,$$

即

$$B = \frac{\mu_0\mu I_f}{\pi(\mu_0 + \mu)\rho}. \tag{41}$$

考虑到 B 沿 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向，故可提出尝试解

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0\mu I_f}{\pi(\mu_0 + \mu)\rho}\boldsymbol{e}_\phi. \tag{42}$$

3. 验证

不难验证，(42)式符合定解问题的所有要求，根据静磁边值问题的惟一性定理，上式是惟一正确的解.

4. 求磁化电流分布

在磁介质内部的磁化电流密度 $J_m = \nabla\times M$，将

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)B \tag{43}$$

代入，并利用麦克斯方程 $\nabla\times B = \mu J_f$，即有

$$J_m = \nabla\times M = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\nabla\times B = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)J_f. \tag{44}$$

在磁介质表面的磁化电流线密度 α_m 可由边值关系求得. 注意到在 $x = 0$ 面上，$\boldsymbol{e}_x$ 与 B 共线(夹角为 0 或 π)，$\boldsymbol{e}_x\times B = 0$，故

$$\alpha_m = n\times(M_2 - M_1)\Big|_{x=0} = \boldsymbol{e}_x\times\left[0 - \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)B\right]\Bigg|_{x=0} = 0. \tag{45}$$

习 题 4.1

1. 若原先选择的 A 不满足库仑规范条件,其散度 $\nabla\cdot A=u(x)\neq 0$. 应选择怎样的 A',才能让它同时满足 $\nabla\times A'=B$ 及 $\nabla\cdot A'=0$.

2. 试证明静磁边值问题的惟一性定理.

3. 设有无限长的线电流 I_f 沿 z 轴流动,在 $z<0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质,$z>0$ 的区域为真空,试根据惟一性定理求磁感应强度 B 及磁化电流分布.

4. 试验证:

(1) $A_1=-\mathrm{e}_\phi\dfrac{\mu I_f}{2\pi}\ln\rho$ 及 $A_2=-\mathrm{e}_\phi\dfrac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho$(式中 ρ 为柱坐标)是不是上题的矢势解?

(2) 在区域 1,2 是否满足库仑规范条件?

(3) 在区域 1,2 的边界上是否满足 $A_1=A_2$? 是否满足库仑规范条件?

(4) 能否找到 $\psi(x)$,使 $A'_1=A_1+\nabla\psi$ 及 $A'_2=A_2$ 在区域 1,2 的分界面上满足 $A'_1=A'_2$? 并且,A'_1 是否仍满足 $\nabla\cdot A'_1=0$?

§ 4.2 矢 势 法

采用矢势描述静磁场时,仍可用多种方法求解静磁场的边值问题. 本节主要介绍直接积分法、类比法(见习题)、分离变量法和磁像法这四种方法.

一、直接积分法

§ 1.2 的(28)式已给出无界空间中的矢势

$$A(x)=\int_V\frac{\mu_0 J_f(x')}{4\pi r}\mathrm{d}V'. \tag{1}$$

这表明,只要知道真空中的电流分布 $J_f(x)$,直接积分(1)式即可求得任一点的矢势.

通电圆线圈激发的磁场是一个在理论上和实用上都很有价值的实例,一些物理实体(如分子电流)常以它作为简化模型.

【例 1】 半径为 R_0 的圆线圈通有电流 I_f,求矢势与磁感应强度.

解 取原点在通电圆线圈中心的球坐标系. 场点的球坐标为 (R,θ,ϕ),源点的球坐标为 (R_0,θ',ϕ').

1. 由对称性判断 P 点处矢势 $A(x)$ 的方向

将 $J_f\mathrm{d}V'=J_f\mathrm{d}S'\mathrm{d}l'=I_f\mathrm{d}l'$ 代入(1)式,得

$$A(x)=\frac{\mu_0 I_f}{4\pi}\oint_l\frac{\mathrm{d}l'}{r}=A_\phi\mathrm{e}_\phi. \tag{2}$$

式中 e_ϕ 是场点 P 处的球坐标基矢,见图 4.5. 为什么积分给出的矢量和必定沿 e_ϕ 方向呢?

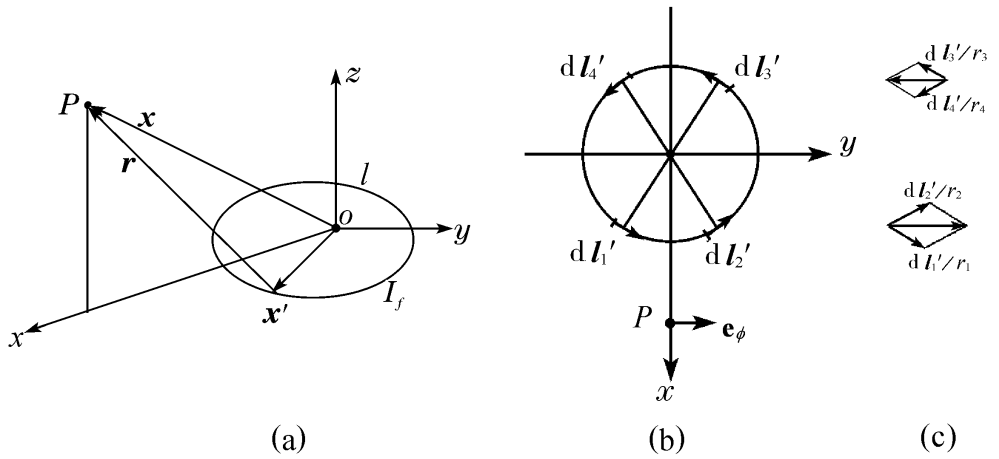


图 4.5

空间中P 点矢势的方向决定于积分$\oint_l \frac{dl'}{r}$. 为计算方便,适当选取x 轴,使P 点在xoz 平面上. 积分$\oint_l \frac{dl'}{r}$相当于无限多个矢量$\frac{dl'}{r}$的矢量和. 现计算图4.5(b)中4个对称位置的电流元对$\oint_l \frac{dl'}{r}$的贡献(该图是俯视图,P 点位于x 轴上方,e_ϕ是P 处的球坐标基矢). $x>0$ 两段贡献之和$\frac{dl_1'}{r_1}+\frac{dl_2'}{r_2}$沿$P$ 点的 e_ϕ 方向,因$r_1=r_2$ 较小,故合矢量较大(见图4.5(c)下图);$x<0$ 两段贡献之和$\frac{dl_3'}{r_3}+\frac{dl_4'}{r_4}$沿$P$ 点的$-e_\phi$ 方向,而$r_3=r_4$ 较大,故合矢量较小[见图4.5(c)上图]. 因此,这四段的合矢量将沿P 点的 e_ϕ 方向. 整个积分回路由许多这样的"对称的四电流元"组成,它们贡献的合矢量均沿P 点的 e_ϕ 方向. 一般来说,任一场点P 的矢势$A(x)$均沿该点的 e_ϕ 方向.

2. 计算P 点的$A(x)$

选择P 点位于xOz 平面,则P 点的 e_ϕ 即 e_y(这样选择是为了便于计算,由于问题的轴对称性,其他位置的矢势就不必重新计算了). 既然对P 点而言,

$$A(x)=A_\phi e_\phi=A_y e_y, \tag{3}$$

用 e_y 点乘(2)式,由于 e_y 是常矢量,可移入积分号内. 再利用圆线圈在xOy 平面上,$\theta'=\frac{\pi}{2}$, $y'=R_0\sin\phi'$, $dy'=R_0\cos\phi' d\phi'$,因而

$$A_y=e_y\cdot A=\frac{\mu_0 I_f}{4\pi}\oint_l \frac{e_y\cdot dl'}{r}=\frac{\mu_0 I_f}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_0\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{x^2+x'^2-2x\cdot x'}}. \tag{4}$$

又因x 在xOz 平面,$\phi=0$;x'在xOy 平面,$\theta'=\frac{\pi}{2}$. 故

$$x\cdot x'=(R\sin\theta e_x+R\cos\theta e_z)\cdot(R_0\cos\phi' e_x+R_0\sin\phi' e_y)=RR_0\sin\theta\cos\phi'. \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式,便有

$$A(x)=A_\phi e_\phi=e_\phi\frac{\mu_0 I_f}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_0\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\sin\theta\cos\phi'}}. \tag{6}$$

由于本题具有轴对称性,A 的大小只与场点的 R,θ 有关.因为(6)式的积分是椭圆积分,不能得出解析表达式.

3. 在 $R \gg R_0$ 处的矢势

利用 $(1-\varepsilon)^{-1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon$(式中 ε 为小量)将被积函数展开为 R_0/R 的幂级数

$$\begin{aligned}\frac{R_0\cos\phi'}{\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\sin\theta\cos\phi'}} &= \frac{R_0\cos\phi'}{R}\left(1-\frac{2R_0\sin\theta\cos\phi'}{R}+\frac{R_0^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{R_0\cos\phi'}{R}\left(1+\frac{R_0\sin\theta\cos\phi'}{R}-\frac{R_0^2}{2R^2}\right) \\ &= \frac{R_0}{R}\cos\phi'+\frac{R_0^2}{R^2}\sin\theta\cos^2\phi'-\frac{1}{2}\frac{R_0^3}{R^3}\cos\phi'. \end{aligned} \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式后,第一、三项由于 $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\mathrm{d}\phi'=0$ 而没有贡献.故

$$A(x)=\oint\frac{\mu_0 I_f R_0^2\sin\theta}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi'\mathrm{d}\phi'=\oint\frac{\mu_0 I_f\pi R_0^2\sin\theta}{4\pi R^2}=\oint\frac{\mu_0 I_f S\sin\theta}{4\pi R^2}. \tag{8}$$

式中 $S=\pi R_0^2$ 是通电圆线圈的面积.

4. 用通电圆线圈的磁矩表示矢势

在电磁学中,已引入物理量

$$m = I_f S \tag{9}$$

表示通电圆线圈的磁矩(在§ 4.4 的例1 将从磁矩的普遍定义导出此式),式中 I_f 为通电圆线圈的电流,$S=Sn$ 为通电圆线圈的面积矢量,n 为由电流按右手螺旋法则确定的该面的法向单位矢量.在本例中,$S=S\,\boldsymbol{e}$.由此得

$$m = I_f S = I_f S\,\boldsymbol{e}. \tag{10}$$

将(9)式和(10)式代入(8)式,并利用

$$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_R=\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi, \tag{11}$$

即有

$$A = \frac{\mu_0 I_f S\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_f S\,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 m\times\boldsymbol{e}_R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(m\times\frac{R}{R^3}\right). \tag{12}$$

5. 通电圆线圈激发的磁场

由附录习题 1.3 第 5 题证明的公式可得

$$B = \nabla\times A = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(m\times\frac{R}{R^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m\cdot\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R-m}{R^3}. \tag{13}$$

二、分离变量法

【例2】 真空中有一个电量为 Q_f、半径为 R_0 的导体球壳,绕自身某直径以角速度 $\omega=\omega\boldsymbol{e}$ 旋转,求球内、外的磁场.

解 按题意,球壳静止时,面电荷密度为

$$\sigma_f = \frac{Q_f}{4\pi R_0^2}, \tag{14}$$

当球壳旋转时,形成沿 e_ϕ 方向的面电流,其线密度(单位时间垂直通过单位横截线的电量)为①

$$\alpha_f = \frac{dQ_f}{dl_0 dt} e_\phi = \frac{dQ_f}{dl_0 dl_\phi} \frac{dl_\phi}{dt} e_\phi = \sigma_f \boldsymbol{v} = \sigma_f \boldsymbol{\omega} \times R_0 = \sigma_f \omega R_0 \sin\theta e_\phi = \frac{Q_f \omega \sin\theta}{4\pi R_0} e_\phi. \tag{15}$$

式中各量可参看后面的图 4.9.

1. 方程

因壳内、外无电流分布,由 $\nabla^2 A = -\mu_0 J_f$,得

$$\nabla^2 A_1 = 0, \qquad R < R_0; \tag{16}$$

$$\nabla^2 A_2 = 0, \qquad R > R_0. \tag{17}$$

2. 对称性与通解形式

首先,球壳上的电流可以看做无数多个圆心在 z 轴的通电圆线圈组成. 例 1 已证明通电圆线圈激发的矢势沿场点的 e_ϕ 方向,并且与 $\sin\theta$ 成正比;自然猜想球壳上的电流激发的矢势也沿场点的 e_ϕ 方向,并且也与 $\sin\theta$ 成正比②.

其次,本题具有轴对称性,A_ϕ 应与 ϕ 无关而仅为 R,θ 的函数.

由此,提出尝试解

$$A = F(R)\sin\theta e_\phi. \tag{18}$$

将 A 代入 $\nabla^2 A = 0$,即可求出 $F(R)$ 应遵守的方程. 显然,这里要使用球坐标系的拉普拉斯算符[见附录 1§ A1.6 的(35)式]. 由此得

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^2 A &= \nabla^2 [F(R)\sin\theta e_\phi] \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left\{ R^2 \frac{\partial [F(R)\sin\theta e_\phi]}{\partial R} \right\} + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ \sin\theta \frac{\partial [F(R)\sin\theta e_\phi]}{\partial \theta} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [F(R)\sin\theta e_\phi]. \end{aligned} \tag{19}$$

注意到 e_ϕ, e_R, e_θ 均与 ϕ 有关(见附录习题 1.5 第 1 题)

$$\frac{\partial e_\phi}{\partial R} = \frac{\partial e_\phi}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} = -(\sin\theta e_R + \cos\theta e_\theta),$$

$$\frac{\partial e_R}{\partial \phi} = \sin\theta e_\phi, \qquad \frac{\partial e_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta e_\phi. \tag{20}$$

---

① 也可以直接由定义出发计算,利用 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$,可得[式中 $dl_0 = R_0 d\theta$ 是球坐标系的微分线元,见附录 1§ A1.5 的(16)式]

$$\alpha_f = \frac{dQ_f}{dl_0 dt} e_\phi = \frac{\sigma_f dS}{R_0 d\theta dt} e_\phi = \frac{\sigma_f R_0^2 \sin\theta d\theta d\phi}{R_0 d\theta dt} e_\phi = \sigma_f R_0 \omega \sin\theta e_\phi.$$

② 这不是严格的证明. 因为这些通电圆线圈的圆心不是在坐标原点上,但又对称分布在坐标原点的上、下方,故有上述猜想. 至于猜想是否正确,则由尝试解能否满足边值问题而定.

故

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi^2} = -\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\theta \mathbf{e}_R + \cos\theta \mathbf{e}_\theta) = -(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_\phi. \tag{21}$$

将以上结果代入(19)式,便有

$$0 = \nabla^2 A = \mathbf{e}_\phi\left[\frac{\sin\theta}{R^2}(2RF' + R^2F'') + \frac{F}{R^2\sin\theta}(1 - 2\sin^2\theta) - \frac{F}{R^2\sin\theta}\right]$$

$$= \mathbf{e}_\phi\frac{\sin\theta}{R^2}(2RF' + R^2F'' - 2F). \tag{22}$$

可见$F(R)$遵守的方程是

$$R^2F''(R) + 2RF'(R) - 2F(R) = 0. \tag{23}$$

这是欧勒型方程.用幂级数法求解.将

$$F(R) = \sum_k C_k R^k \tag{24}$$

代入,由同次幂项系数和为零,得

$$C_k[k(k-1) + 2k - 2] = 0. \tag{25}$$

可见除$k = 1$及$k = -2$外,C_k均为零.将此结果代入(24)后,再将$F(R)$代入(18)式,可见球壳内、外的矢势具有如下形式

$$A_1 = \left(aR + \frac{b}{R^2}\right)\sin\theta \mathbf{e}_\phi, \qquad R < R_0; \tag{26}$$

$$A_2 = \left(cR + \frac{d}{R^2}\right)\sin\theta \mathbf{e}_\phi, \qquad R > R_0. \tag{27}$$

3. 边界条件与边值关系

① $\lim\limits_{R\to 0} A_1$ 有限; (28)

② $\lim\limits_{R\to\infty} A_2 = 0$; (29)

③ $A_1|_{R=R_0} = A_2|_{R=R_0}$; (30)

④ $\mathbf{e}_R \times (\nabla \times A_2 - \nabla \times A_1)|_{R=R_0} = \mu_0\alpha_f$. (31)

4. 定系数,得矢势

由(28)、(29)式得$b = c = 0$,即

$$A_1 = aR\sin\theta \mathbf{e}_\phi, \qquad R < R_0; \tag{32}$$

$$A_2 = \frac{d}{R^2}\sin\theta \mathbf{e}_\phi, \qquad R > R_0. \tag{33}$$

由(30)式得$aR_0\sin\theta = \frac{d}{R_0^2}\sin\theta$,即

$$d = aR_0^3. \tag{34}$$

因为A仅有A_ϕ分量,故[见附录1§ A1.6的(41)式]

$$\nabla \times A = \left[\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)\right]\mathbf{e}_R - \left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta. \tag{35}$$

将(35)式代入(31)式,注意到 $\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_R = 0$ 及 $\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi$,因此只要考虑(35)式的第二项,由此得

$$\left[-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{d}{R^2}\sin\theta \right)\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RaR\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\phi \right]\Bigg|_{R=R_0} = \frac{\mu_0 Q_f \omega \sin\theta}{4\pi R_0}\boldsymbol{e}_\phi. \tag{36}$$

将(34)式与(36)式联立,即可求得

$$a = \frac{\mu_0 Q_f \omega}{12\pi R_0}, \qquad d = aR_0^3 = \frac{\mu_0 Q_f \omega R_0^2}{12\pi}. \tag{37}$$

将 a, d 代入(32)式及(33)式,便有

$$A_1 = \frac{\mu_0 Q_f \omega}{12\pi R_0} R\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0 Q_f}{12\pi R_0}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}, \qquad R < R_0; \tag{38}$$

$$A_2 = \frac{\mu_0 Q_f \omega R_0^2}{12\pi R^2}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0 Q_f R_0^2}{12\pi R^3}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3}, \qquad R > R_0. \tag{39}$$

式中 $\boldsymbol{m} = \frac{1}{3}Q_f R_0^2 \boldsymbol{\omega}$ 为该旋转球壳的磁矩,见§ 4.4 的(21)式.

5. 由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 得磁场

利用附录§ 1.3 第5题证明的公式,便有

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla\times\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 Q_f}{12\pi R_0}\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0 Q_f}{6\pi R_0}\boldsymbol{\omega}, \qquad R < R_0; \tag{40}$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \nabla\times\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R - \boldsymbol{m}}{R^3}, \qquad R > R_0. \tag{41}$$

这表明,壳内磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 是一个均匀磁场,壳外磁场是一个磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子的磁场(参看§ 4.3).

这种方法在一般教材中较少见,特供读者参考,不一定是最简单的方法.

三、磁像法

磁像法的基本思想与电像法相似,通过在求解区域外引入像电流替代介质分界面上磁化电流(有时还包括求解区域外的传导电流)对磁场的贡献. 据此提出尝试解,如果尝试解满足矢势的方程、边值关系和边界条件的要求,根据惟一性定理,它就是正确的解.

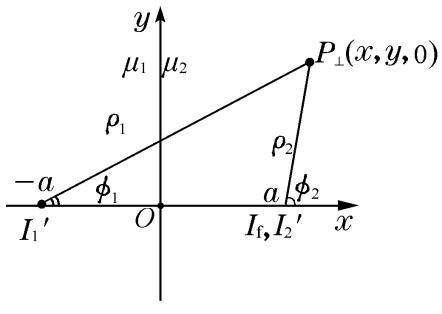


图 4.6

【例 3】 磁导率为 μ_1, μ_2 的两种磁介质的分界面为 $x = 0$ 的无限大平面,如图4.6所示. 在 $x = a$ 处有平行分界面的无限长直电流 I_f,求空间的矢势和磁感应强度.

解　设场点 $P(x, y, z)$ 在 xOy 平面的垂足为 $P_\perp(x, y, 0)$,P 点及其垂足 $P_\perp$ 到无限长直电流 I_f 的距离均为

$$\rho_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}. \tag{42}$$

1. 边值问题

① $\nabla^2 A_1 = 0, \quad x < 0;$ (43)

② $\nabla^2 A_2 = -\mu_2 J_f, \quad x > 0;$ (44)

③ $A_1 \big|_{x=0} = A_2 \big|_{x=0};$ (45)

④ $e_z \times \left(\frac{\nabla \times A_2}{\mu_2} - \frac{\nabla \times A_1}{\mu_1} \right) \Big|_{x=0} = \alpha_f = 0, \quad \rho \neq 0.$ (46)

2. 提出尝试解

无限长直电流在无界空间激发的矢势为(见本节习题第2题)

$$A = -\frac{\mu I_f}{2\pi} \ln \rho \, e_z. \tag{47}$$

式中 ρ 为场点到无限长直导线的距离.

对于 $x > 0$ 空间,设想全空间充满 μ_2 介质并且在 $x = -a$ 处引入方向与 I_f 一致的无限长像电流 I_1' 替代界面上磁化电流的作用. 这样,I_f 与 I_1' 在 $x > 0$ 空间激发的矢势为[①]

$$A_2 = \left(-\frac{\mu_2 I_f}{2\pi} \ln \rho_2 - \frac{\mu_2 I_1'}{2\pi} \ln \rho_1 \right) e_z, \tag{48}$$

式中 ρ_1 为场点到像电流 I_1' 的距离

$$\rho_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}. \tag{49}$$

对于 $x < 0$ 空间,设想全空间充满 μ_1 介质,并且在 $x = a$ 处引入方向与 I_f 一致的无限长电流 I_2' 替代 I_f 及界面上磁化电流的作用. 这样,I_2' 在 $x < 0$ 空间激发的矢势为

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I_2'}{2\pi} \ln \rho_2 \, e_z. \tag{50}$$

式中 ρ_2 为场点到像电流 I_2' 的距离

$$\rho_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}. \tag{51}$$

余下部分留给读者留作为练习(见本节习题第6题).

习 题 4.2

1. 设全空间充满磁导率为 μ 的均匀介质,且 $J_f(x)$ 给定,试用与静电场的类比法求矢势 A.

2. 求长度为 $2l$、电流为 I_f 的通电直导线激发的矢势 A,并计算当 $l \to \infty$ 时空间的矢势 A 及磁感应强度 B.

---

① 此时已假设全空间充满磁导率相同的介质,故可使用无界空间的公式(47);但(48)和(50)式只分别适用于 $x > 0$ 和 $x < 0$ 半空间,因为我们已改变了求解区域外的电流分布和介质分布.

* 3. 试用直接积分法求解例2.

4. 稳恒电流 I_f 在半径为 a 的无限长圆柱导体中沿轴向流动. 设导体的磁导率为 μ_1,其外充满磁导率为 μ_2 的均匀介质. 试用分离变量法求柱内、外的磁感应强度.

5. 半径为 a 的圆柱形导电磁介质均匀地流有电流 J_f,置于与柱轴垂直的均匀外磁场 B_0 中,已知柱体的磁导率为 μ,求空间的磁场.

6. 完成例 3.

§ 4.3 磁 标 势 法

采用磁标势描述磁场时,也可以采用多种方法求解静磁边值问题,如直接积分法、类比法、等效法和分离变量法,等等.

直接积分法是通过与静电场的对比,采用磁荷的观念计算磁标势. 如果存在磁荷密度 ρ_m 和磁荷面密度 σ_m,则磁标势为

$$\varphi_m = \int_V \frac{\rho_m \mathrm{d}V}{4\pi\mu_0 r} + \oint_S \frac{\sigma_m \mathrm{d}\sigma}{4\pi\mu_0 r},$$

式中

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot M, \qquad \sigma_m = \mu_0 n \cdot (M_1 - M_2).$$

类比法是根据在某些特定条件下,磁标势与静电势遵守的方程、边值关系和边界条件在数学形式上完全相同,利用静电势的解通过电学量与磁学量的替换得到磁标势的解,见例 1 最后的“讨论”.

等效法是根据传导电流和磁化电流两者激发磁场的等效性,从而将两者互相替代的方法. 通过替代把问题简化后,有时可以直接利用熟知的结果,也可以采用分离变量法或直接积分法计算,见本节习题第 4,5 题.

以上这些方法在上节已介绍过,不再专门讨论,可参看本节习题的提示.

应用最广泛的是分离变量法. 本节将采用这个方法求解存在磁介质、存在理想铁磁体和存在传导电流这三种情况下的静磁边值问题. 由于这几个问题的数学方法与静电场相似,具体计算见本节习题 7,8,9 的提示.

一、存在磁介质的情形

【例 1】 磁导率为 μ、半径为 R_0 的均匀介质球置于均匀恒磁场 $B_0 = B_0 \mathrm{e}$ 中,试求:

(1)空间的磁标势 φ_m 与磁感应强度 B;

(2)介质球的磁矩 m;

(3)球内的磁化电流密度 J_m 与球面上的磁化电流面密度 α_m.

解 全空间没有传导电流,可引入磁标势求解. 取原点于球心,极轴沿 B_0 的球坐标系. 球内、外介质均匀,磁荷密度 $\rho_m = 0$.

1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi_{m1}=0$, $R\leqslant R_0$; (1)

② $\nabla^2\varphi_{m2}=0$, $R>R_0$; (2)

③ $\lim\limits_{R\to 0}\varphi_{m1}$有限; (3)

④ 有均匀恒电场$E=E_0\mathrm{e}$时,根据$E=-\nabla\varphi$可得$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi_2=-E_0R\cos\theta$[见§ 3.2的(14)式].类似地,有均匀恒磁场$B=B_0\mathrm{e}$时,根据$H=-\nabla\varphi_m$,可得

$$\lim_{R\to\infty}\varphi_{m2}=-H_0R\cos\theta; \tag{4}$$

⑤ $\varphi_{m1}\big|_{R=R_0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$; (5)

⑥ $\mu\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}=\mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}$. (6)

2. 通解的形式

由于问题具有轴对称性,考虑到(3)式,通解具有形式

$$\varphi_{m1}=\sum_{l=0}^{\infty}a_lR^lP_l(\cos\theta),\qquad R\leqslant R_0; \tag{7}$$

$$\varphi_{m2}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(c_lR^l+\frac{d_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta),\qquad R>R_0. \tag{8}$$

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第7题).

二、存在理想铁磁体的情形

理想铁磁体的磁化规律为

$$B=\mu H+\mu_0M_0. \tag{9}$$

式中M_0是与H无关的恒矢量.

【例2】 真空中有一半径为R_0,磁导率为μ,固有磁化强度为M_0的球形理想铁磁体,浸在磁导率为μ'的无限介质中,求磁感应强度与磁化电流分布.

解 全空间没有传导电流,可引入磁标势求解.取原点于球心,极轴沿M_0的球坐标系.球内、外介质均匀,因而磁荷密度$\rho_m=0$.

1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi_{m1}=0$, $R\leqslant R_0$; (10)

② $\nabla^2\varphi_{m2}=0$, $R>R_0$; (11)

③ $\lim\limits_{R\to 0}\varphi_{m1}$有限; (12)

④ 场源在有限远处,可令$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi_{m2}=0$; (13)

⑤ $\varphi_{m1}\big|_{R=R_0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$; (14)

⑥ 由 $\mathrm{e}_R\cdot(B_2-B_1)\big|_{R=R_0}=0$,球内 $B=\mu H_1+\mu_0M_0=-\mu\nabla\varphi_{m1}+\mu_0M_0\mathrm{e}$及球外$B_2=-\mu'\nabla\varphi_{m2}$,得

$$-\mu\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}+\mu_0M_0\cos\theta=-\mu'\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}. \tag{15}$$

2. 通解形式

本题有轴对称,利用(12)及(13)式可知通解为

$$\varphi_{m1} = \sum_l a_l R^l P_l(\cos\theta), \tag{16}$$

$$\varphi_{m2} = \sum_l \frac{d_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta). \tag{17}$$

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第 8 题).

三、存在传导电流的情形

【例 3】 真空中有一个电量为Q_f,半径为R_0 的导体球壳,绕自身某直径以角速度 $\omega = \omega e$ 旋转,求球内、外的磁场.

解 采用矢势法求解这个题目时,已求得传导电流的面密度为

$$\alpha_f = \frac{Q_f \omega \sin\theta}{4\pi R_0} e_\varphi. \tag{18}$$

既然球面上有传导电流,为了引入磁标势,就要把球面挖掉,并分别在球内外引入磁标势φ_{m1}和φ_{m2}.注意,此时φ_{m1}与φ_{m2}在边界上不连续.取原点在球心,极轴沿 ω 的球坐标系.由于球内、外 $\rho_m = 0$,两者均满足拉普拉斯方程.

1. 边值问题

① $\nabla^2 \varphi_{m1} = 0$,　　$R < R_0$; (19)

② $\nabla^2 \varphi_{m2} = 0$,　　$R > R_0$; (20)

③ $\lim\limits_{R\to 0} \varphi_{m1}$有限; (21)

④ $\lim\limits_{R\to\infty} \varphi_{m2} = 0$; (22)

⑤ 由 $n\cdot(B_2 - B_1)\big|_{R=R_0} = 0$,得

$$\left.\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial R}\right|_{R=R_0} = \left.\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial R}\right|_{R=R_0}; \tag{23}$$

⑥ 由 $n\times(H_2 - H_1)\big|_{R=R_0} = \alpha_f$,得

$$e_\varphi \times (\nabla \varphi_{m1} - \nabla \varphi_{m2})\big|_{R=R_0} = \frac{Q_f \omega \sin\theta}{4\pi R_0} e_\varphi. \tag{24}$$

2. 通解形式

本题有轴对称性,由(21)式及(22)式可得

$$\varphi_{m1} = \sum_l a_l R^l P_l(\cos\theta), \qquad R < R_0; \tag{25}$$

$$\varphi_{m2} = \sum_l \frac{d_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta), \qquad R > R_0. \tag{26}$$

余下部分留给读者作为练习(见本节习题第 9 题).

习　题　4.3

1. 真空中有一半径为R_0,磁化强度为M_0 的均匀磁化球,求空间的磁标势和磁感应强度.

2. 真空中有一半径为 ρ_0,磁化强度为 M_0 的无限长介质圆柱被均匀磁化,已知 M_0 与圆柱的轴线垂直,求空间的磁标势与磁场强度.

3. 真空中有一半径为 ρ_0,磁导率为 μ,固有磁化强度为 M_0 的无穷长圆柱理想铁磁体,已知 M_0 与圆柱的轴线垂直,求空间的磁标势与磁场强度.

4. 试用等效法重解例3.

5. 真空中有一半径为 ρ_0,磁化强度为 M_0 的无限长介质圆柱被均匀磁化,已知 M_0 与圆柱的轴线平行,试用等效法和直接积分法求空间的磁感应强度.

6. 作为用标势表示静电场,磁标势表示静磁场的小结,试列表比较:在无源($\rho_f = 0, J_f = 0$)区域中,均匀绝缘介质中的静电场,均匀导电介质中的静电场与均匀磁介质中的静磁场的基本方程,标势的定义和方程,以及边值关系.

7. 完成例 1.

8. 完成例 2.

9. 完成例 3.

§ 4.4 磁多极矩法

与电多极矩法相似,小区域 V 内稳恒电流体系在远处所激发的磁场可以看成中心在坐标原点的各级磁多极子激发的磁场的叠加.

本节首先介绍矢势的多极展开,随后介绍各级磁多极子对矢势的贡献,并着重讨论应用最广的磁偶极子在远处激发的磁场. 最后,计算两个常见电流分布的磁偶极矩.

一、矢势的多极展开

与静电势的多极展开相似,坐标原点取在电荷分布的小区域 V 内,如图 4.7 所示.

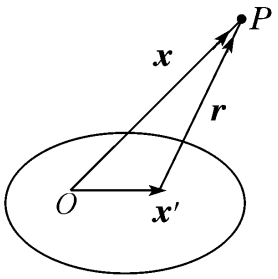


图 4.7

将 r^{-1} 的泰勒展开式

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - x' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!}(x' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{R} + \cdots \qquad (1)$$

代入矢势 A,得到

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_f(x')\mathrm{d}V'}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V J_f(x')\mathrm{d}V' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V J_f(x')x' \cdot \nabla \frac{1}{R}\mathrm{d}V' \\ &\quad + \frac{\mu_0}{8\pi}\int_V J_f(x')(x' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{R}\mathrm{d}V' + \cdots \end{aligned} \qquad (2)$$

现在分别讨论各级磁多极子对矢势的贡献. 由于数量级的考虑,通常磁四极子的贡献可忽略.

二、磁单极项无贡献

$$A^{(0)}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V J_f(x')\mathrm{d}V'=0. \tag{3}$$

证　对于稳恒电流而言,由于

$$\nabla'\cdot J_f(x')=-\frac{\partial\rho(x')}{\partial t}=0, \tag{4}$$

可见$J_f(x')$线形成闭合曲线. 通常将一束$J_f(x')$线在空间所占据的区域称为流管. 区域V 内的电流分布可看成由许许多多流管组成. 设第n 个($n=1,2,\cdots$)流管占据区域V_n,则

$$\int_V J_f(x')\mathrm{d}V'=\sum_n\int_{V_n} J_f(x')\mathrm{d}V'=\sum_n\oint_{l_n} I_f^{(n)}\mathrm{d}l'=\sum_n I_f^{(n)}\oint_{l_n}\mathrm{d}l'=0, \tag{5}$$

式中$I_f^{(n)}$ 为第n 个流管的电流. 由于构成闭合曲线的矢量和为零:$\oint_{l_n}\mathrm{d}l'=0$,式中的$n=1,2,\cdots$. 故

$$A^{(0)}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V J_f(x')\mathrm{d}V'=0. \tag{6}$$

这表明,磁单极势恒为零.

“磁单极子的存在”是德国著名物理学家狄拉克在1931 年首先提出来的. 70 多年来一直有人企图在实验上发现磁单极子. 历史上仅发生过两次声称“发现磁单极子”的报道:第一次是1975 年普赖斯小组报告在宇宙射线中发现,但后来该小组撤回了报告;第二次是1982 年斯坦福大学卡布拉勒小组应用超导量子干涉仪监视超导线圈中的电流达200 天,仅发现了一个可能的事件. 但随后的20 多年来尚未有再次发现的报道,显然这个事例也不足以证明磁单极子的存在. ①

三、磁偶极项对矢势的贡献

$$A^{(1)}(x)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V J_f(x')x'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0 m\times R}{4\pi R^3}, \tag{7}$$

式中m 定义为电流体系的磁偶极矩(简称磁矩)

$$m=\frac{1}{2}\int_V x'\times J_f(x')\mathrm{d}V'. \tag{8}$$

证　由于$x'\cdot\nabla\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{3}x'_i\nabla_i\frac{1}{R}$,并且$\nabla_i\frac{1}{R}$与积分变量无关可提出积分号外,随后在被积函数中分别加、减$\frac{1}{2}J_i x'$(J_i为J_f 的 e 分量),可得

---

① 陈文升编译. 1984. 通过计算磁通量寻找狄拉克磁单极. 高能物理,1:P20~ 21.

$$A^{(1)}(x)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V J_f(x')\sum_{i=1}^{3}x'_i\nabla_i\frac{1}{R}\mathrm{d}V'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{1}{R}\int_V J_f(x')x'_i\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{1}{R}\int_V[(J_f x'_i+J_i x')+(J_f x'_i-J_i x')]\mathrm{d}V'. \tag{9}$$

第一项利用矢量分析公式(见附录习题1.6第2题)

$$\nabla'\cdot[J_f(x')x'x'_i]=J_f(x')x'_i+J_i(x')x' \tag{10}$$

以及高斯定理,可得

$$\int_V(J_f x'_i+J_i x')\mathrm{d}V'=\int_V\nabla'\cdot[J_f(x')x'x'_i]\mathrm{d}V=\oint_S\mathrm{d}\sigma'\cdot J_f(x')x'x'_i=0 \tag{11}$$

上式之所以为零,是因为$J_f(x')$是在包围V 的曲面S 上取值,而电流均在V 内,故曲面S 上$J_f(x')=0$.

现在将$\sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{1}{R}$移入积分号内求和,则(9)式不为零的第二项可改写为

$$A^{(1)}(x)=-\frac{\mu_0}{8\pi}\int_V\left\{J_f(x')\left[x'\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]-x'\left[J_f(x')\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]\right\}\mathrm{d}V'. \tag{12}$$

利用矢量公式

$$(a\times b)\times c=b(a\cdot c)-a(b\cdot c), \tag{13}$$

可得

$$[x'\times J_f(x')]\times\nabla\frac{1}{R}=J_f(x')\left[x'\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]-x'\left[J_f(x')\cdot\nabla\frac{1}{R}\right], \tag{14}$$

将上式代入(12)式,再把$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{R}{R^3}$移出积分号外,利用磁矩$m$ 的定义式(8),便有

$$A^{(1)}(x)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\int_V x'\times J_f(x)\mathrm{d}V'\right]\times\nabla\frac{1}{R}=\frac{\mu_0 m\times R}{4\pi R^3}. \tag{15}$$

通常磁多极矩法只要计算到磁偶极矩项,下面给出它相应的磁场.

四、磁偶极子激发的磁场

将(15)式代入矢势的定义式并利用$\nabla\times\left(m\times\frac{R}{R^3}\right)$的计算公式(附录习题1.3第5题),可得

$$B^{(1)}=\nabla\times A^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(m\times\frac{R}{R^3}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m\cdot\hat{R}\hat{R}-m}{R^3}. \tag{16}$$

这表明,在准确到磁偶极矩项的精度下,只要求出电流体系的磁矩m,由(16)式即可求得电流体系在远处激发的磁场.

五、常见电流体系的磁矩

现在由磁矩的定义式出发,计算通电圆线圈及旋转带电球壳的磁矩.

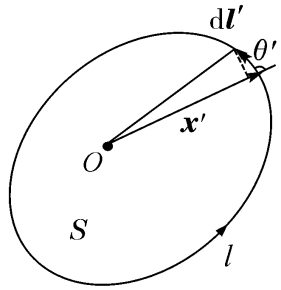


图4.8

【例1】 试证明,电流为I_f、面积为S的平面通电圆线圈的磁矩为

$$m = I_f S, \tag{17}$$

磁矩m取由电流按右手螺旋法则确定的S面的法线方向.

证 电流体系磁矩的定义为

$$m = \frac{1}{2}\int_V x' \times J_f(x')\mathrm{d}V' = \frac{1}{2} I_f \oint_l x' \times \mathrm{d}l', \tag{18}$$

式中l为通电圆线圈所在回路,见图4.8.

将线圈分成无限多个顶点在原点的面积无限小的三角形,每个三角形的面积为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} x' \mathrm{d}l' \sin\theta' = \frac{1}{2} |x' \times \mathrm{d}l'|, \tag{19}$$

线圈的面积元矢量$\mathrm{d}\sigma$为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} x' \times \mathrm{d}l'. \tag{20}$$

将上式代入(18)式,即有

$$m = I\int_S \mathrm{d}\sigma = I_f S.$$

【例2】 试证明,以角速度旋转的均匀带电球壳的磁矩为

$$m = \frac{1}{3} Q_f R_0^2 \omega. \tag{21}$$

证 由电流体系磁矩的定义出发,得

$$m = \frac{1}{2}\int_V x' \times J_f(x')\mathrm{d}V'. \tag{22}$$

当电流可看做面电流时,$J_f(x')$与$\alpha_f(x')$有关系[如图4.9所示,图中箭头方向是$\mathrm{d}l'$的方向,亦即$J_f(x')$的方向]①

$$J_f(x')\mathrm{d}V' = \alpha_f(x')\mathrm{d}\sigma'. \tag{23}$$

将上式代入(22)式,并利用$\alpha_f = \dfrac{Q_f \omega \sin\theta'}{4\pi R_0}e_\phi$[见§ 4.2的(15)式],则有

---

① $J_f(x')$的定义是,单位时间内,x'处垂直通过单位横截面的电量,其方向为电流方向;$\alpha_f(x')$的定义是,单位时间内,x处垂直通过单位横截线的电量,方向亦为电流方向.因而

$$J_f(x')\mathrm{d}V' = e_\phi \frac{\mathrm{d}Q_f}{\mathrm{d}h'\mathrm{d}l'_\theta \mathrm{d}t} \mathrm{d}l'_\phi \mathrm{d}h' \mathrm{d}l'_\theta = e_\phi \frac{\mathrm{d}Q_f}{\mathrm{d}l'_\theta \mathrm{d}t} \mathrm{d}l'_\phi \mathrm{d}l'_\theta = \alpha_f(x')\mathrm{d}\sigma',$$

式中$\mathrm{d}\sigma' = \mathrm{d}l'_\phi \mathrm{d}l'_\theta = R'^2_0 \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\phi'$.

$$m=\frac{1}{2}\oint_S x'\times\alpha_f(x')\mathrm{d}\sigma'=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}R_0\,\mathbf{e}_R\times\frac{Q_f\omega\sin\theta'}{4\pi R_0}\,\mathbf{e}_\phi R_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'. \tag{24}$$

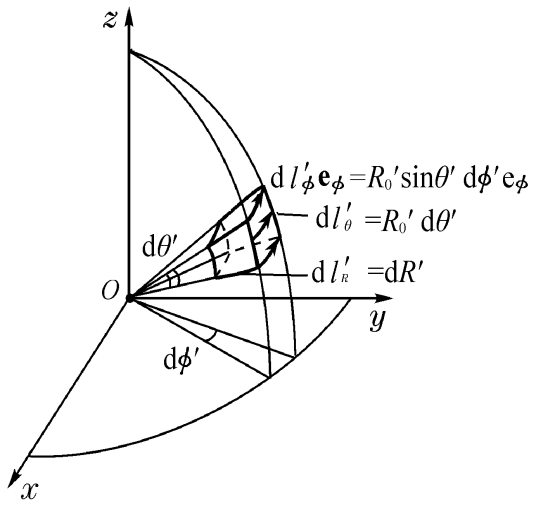


图 4.9

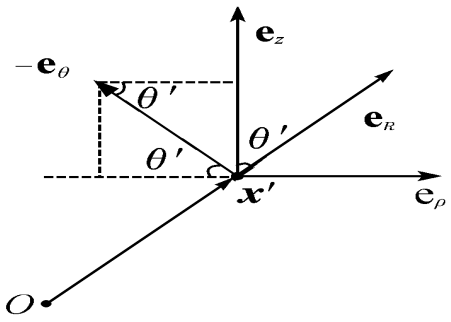


图 4.10

由图 4.10 易见

$$\mathbf{e}_R\times\mathbf{e}_\phi=-\mathbf{e}_\theta=\sin\theta'\mathbf{e}-\cos\theta'\mathbf{e}_\zeta. \tag{25}$$

由此得

$$m=\frac{Q_f\omega R_0^2}{8\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta'\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}(\sin\theta'\mathbf{e}-\cos\theta'\mathbf{e}_\zeta)\mathrm{d}\phi'. \tag{26}$$

由于 $\mathbf{e}_\zeta$ 随源点的位置 x' 而变,且当 ϕ' 由 0 值变化到 π 值的过程中,所有 ϕ' 与 $\phi'+\pi$ 处的 $\mathbf{e}_\zeta$ 互相抵消,故

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{e}_\zeta\mathrm{d}\phi'=0. \tag{27}$$

由此可见,m 的第二项积分为零,故仅保留第一项,即

$$m=\frac{Q_f\omega R_0^2}{4}\oint_0^{\pi}\sin^3\theta'\mathrm{d}\theta'=\frac{Q_f\omega R_0^2}{3}\mathbf{e}=\frac{Q_f R_0^2\omega}{3}. \tag{28}$$

习 题 4.4

1. 半径为 R_0 的球壳上表面电流为 $\alpha_f=\omega\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$,求其磁矩及在远处激发的磁场.

2. 有一半径为 R_0 均匀带电的介质球,电量为 Q_f,今绕自身直径以角速度 ω 旋转,求带电球的磁矩.

3. 求管长为 L,横截面半径为 R_0,单位长度匝数 n,导线中电流为 I_f 的螺线管的磁矩,以及 $R\gg L$ 处的磁感应强度.

§ 4.5 静磁场的能量 相互作用能 势能与广义力

本节首先由各向同性线性介质中磁场能量密度的公式出发,导出时变场中磁场的能量公式,进而得到静磁场的能量公式. 在此基础上,导出电流体系(特别是磁

偶极子)与外磁场的相互作用能$W_i^{(1)}$.随后从洛伦兹力密度公式出发,求得外磁场对电流体系(特别是磁偶极子)的作用力.根据广义力与势能的关系,便可求得磁偶极子在外磁场的势能$U^{(1)}$,以及外磁场作用于磁偶极子的力矩.最后,讨论磁偶极子的$U^{(1)} \neq W_i^{(1)}$的原因.

一、静磁场的能量

在各向同性线性介质中,电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B). \tag{1}$$

可见在一般情况下磁场的能量为

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} B \cdot H \, \mathrm{d}V. \tag{2}$$

对于静磁场,利用$\frac{\partial D}{\partial t} = 0$,将麦克斯韦方程$\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t} = J_f$及矢势的定义式$B = \nabla \times A$代入矢量分析公式,得

$$\nabla \cdot (A \times H) = (\nabla \times A) \cdot H - (\nabla \times H) \cdot A = B \cdot H - J_f \cdot A. \tag{3}$$

移项后将(3)式代入(2)式,并利用高斯定理,即得静磁场的能量公式

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{V_\infty} [\nabla \cdot (A \times H) + J_f \cdot A] \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\oint_{S_\infty} (A \times H) \cdot \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int_{V_\infty} J_f \cdot A \, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{V_\infty} J_f \cdot A \, \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{4}$$

面积分项为何为零?就磁多极子激发的矢势和磁场来说,磁偶极子激发的A和H随R增大引起的衰减是最缓慢的.尽管如此,§ 4.4的(15)式和(16)式给出磁偶极子激发的$A \propto \frac{1}{R^2}$, $H \propto \frac{1}{R^3}$, $\mathrm{d}\sigma \propto R^2$.当$R \to \infty$时,沿$S_\infty$的面积分为零.

二、电流体系与外磁场的相互作用能W_i

设电流体系分布在小区域V内(坐标原点取在V内),其电流密度为$J_f(x')$,它激发的矢势为

$$A_f(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_f(x')}{r}\mathrm{d}V'. \tag{5}$$

(4)式表明,它单独存在时磁场的能量为

$$W_f = \frac{1}{2}\int_V J_f(x) \cdot A_f(x) \mathrm{d}V. \tag{6}$$

设外磁场由$J_e(x)$激发,其激发的矢势为

$$A(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_e(x')}{r}\mathrm{d}V'. \tag{7}$$

(4)式表明,外磁场单独存在时磁场的能量为

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V J_e(x)\cdot A(x)\mathrm{d}V. \tag{8}$$

电流体系与外磁场的相互作用能等于两者同时存在时的磁场能量减去两者单独存在时各自的磁场能量,即

$$\begin{aligned}W_i&=W-(W_f+W_e)\\&=\frac{1}{2}\int_V[J_f(x)+J_e(x)]\cdot[A_f(x)+A(x)]\mathrm{d}V\\&\quad-\frac{1}{2}\int_V J_f(x)\cdot A_f(x)\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_V J_e(x)\cdot A(x)\mathrm{d}V.\\&=\frac{1}{2}\int_V[J_f(x)\cdot A(x)+J_e(x)\cdot A_f(x)]\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{9}$$

仿照§ 3.6 容易证明(留为练习),$\int_V J_e(x)\cdot A_f(x)\mathrm{d}V=\int_V J_f(x)\cdot A(x)\mathrm{d}V$,由此得

$$W_i=\int_V J_f(x)\cdot A(x)\mathrm{d}V. \tag{10}$$

这就是电荷体系与外磁场的相互作用能.

三、磁偶极子与外磁场的相互作用能$W_i^{(1)}$

现在考虑由通电圆线圈f 激发的、磁矩为$m=I_fS$ 的磁偶极子与外场$B_e(x)$的相互作用能.

由(10)式出发,利用$J_f\mathrm{d}V=I_f\mathrm{d}l$ 将体积分改写为沿线圈回路f 的线积分,再利用斯托克斯定理将线积分变为面积分,即得

$$\begin{aligned}W_i^{(1)}&=\int_V J_f(x)\cdot A_e(x)\mathrm{d}V=I_f\oint_l A_e(x)\cdot\mathrm{d}l\\&=I_f\int_S\nabla\times A_e(x)\cdot\mathrm{d}\sigma=I_f\int_S B_e(x)\cdot\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{11}$$

考虑到圆线圈的面积很小(参看图 4.8),线圈平面上的$B_e(x)$可近似用线圈平面上某一点(如坐标原点)的$B_e(0)$替代

$$B_e(x)\approx B_e(0),\qquad x\in S. \tag{12}$$

并提出积分号外,即有

$$W_i^{(1)}=I_f\int_S B_e(0)\cdot\mathrm{d}\sigma=I_fB_e(0)\cdot\int_S\mathrm{d}\sigma=I_fB_e(0)\cdot S=m\cdot B_e(0). \tag{13}$$

这就是磁偶极子与外磁场的相互作用能公式.

四、外磁场对电流体系的作用力

由洛伦兹力密度公式出发,易得外磁场对电流体系作用力

$$F = \int_V f \mathrm{d}V' = \int_V \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x') \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(x') \mathrm{d}V'. \tag{14}$$

将外磁场$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(x')$在坐标原点按三维泰勒级数展开

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(x') = \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0) + x' \cdot \nabla \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0) + \cdots \tag{15}$$

代入(14)式,可得

$$F = \int_V \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x') \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0) \mathrm{d}V' + \int_V \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x') \times [x' \cdot \nabla \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)] \mathrm{d}V' + \cdots \tag{16}$$

第一项是外磁场对磁单极子的作用力,将常矢量$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)$提出积分号外,由于稳恒电流的$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x')$形成闭合曲线,其矢量和为零,故

$$F^{(0)} = \left[\int_V \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x') \mathrm{d}V'\right] \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0) = 0. \tag{17}$$

第二项是外场对磁偶极子的作用力,可以证明它有几个等价的表达式(见本节习题第1题):

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \int_V \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}(x') \times [x' \cdot \nabla \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)] \mathrm{d}V' = -\nabla \times [\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)] \\ &= \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0) = \nabla [\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)]. \end{aligned} \tag{18}$$

这表明,尽管磁场不是保守场,但磁场对磁偶极子的作用力却是保守力.

五、磁偶极子在外磁场中的势能$U^{(1)}$及所受的力矩

由于力等于势能的负梯度

$$F^{(1)} = -\nabla U^{(1)}, \tag{19}$$

比较(18)式和(19)式,可得磁偶极子在外磁场中的势能为

$$U^{(1)} = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0). \tag{20}$$

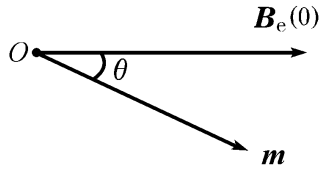


图4.11

磁场作用于磁偶极子的力矩为

$$\begin{aligned} N_{\theta}^{(1)} &= -\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}[\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}[m B_{\mathrm{e}}(0) \cos\theta] = -m B_{\mathrm{e}}(0) \sin\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

式中负号表示力矩使$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0)$的夹角减小. 相应的矢量表达式为

$$N^{(1)} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(0). \tag{22}$$

六、磁偶极子在外磁场中的势能$U^{(1)}$与相互作用能$W_i^{(1)}$的关系

我们知道,电荷体系与静电场的相互作用能就是电荷体系在静电场的势能. 但从(13)式和(20)式可见,磁偶极子在外磁场中的势能$U^{(1)}$与相互作用能$W_i^{(1)}$却不相等,这是什么原因呢?

为简单起见,假设外场$B_e(x)$是由电流为I_e的圆线圈e激发的(m同前),如图4.12所示.

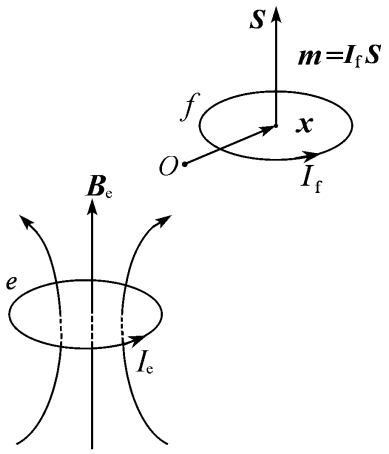


图4.12

(1)保持I_f(从而保持磁矩m)不变要做功.

当磁偶极子m从无穷远移至场点x时,穿过线圈f的磁通量将从0增加到$\Phi_f(x)$.在这个过程中,将在线圈f中引起感生电动势$\mathscr{E}=-\mathrm{d}\Phi_f(x)/\mathrm{d}t$.为了保持$I_f$不变,就要在通电线圈$f$中再接一个附加的电源$\mathscr{E}(t)$.这个电源的电动势可以随时间变化而始终与线圈$f$的感应电动势$\mathscr{E}$相抵消,即

$$\mathscr{E}=-\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}\Phi_f}{\mathrm{d}t}. \tag{23}$$

在磁偶极子从无穷远移动到x点的整个过程中,附加电源所做的功为

$$W_f=\int_{\infty}^{x}\mathscr{E}I_f\mathrm{d}t=\int_{\infty}^{x}I_f\mathrm{d}\Phi_f=I_f\Phi_f(x)=I_f[B_e(x)\cdot S]=m\cdot B_e(x). \tag{24}$$

这里已利用了附加电源$\mathscr{E}$提供的功率为$\mathscr{E}I_f$,在磁场x处穿过圆线圈f的磁通为$\Phi_f(x)=B_e(x)\cdot S$,以及通电线圈的磁矩为$m=I_fS$.

(2)保持I_e(从而保持外磁场B_e)不变要做功.

当磁偶极子从无穷远移至场点x时,穿过线圈e的磁通也发生变化,为了保持I_e不变,也要在通电线圈e中再接一个附加电源$\mathscr{E}(t)$,它始终抵消在e线圈中的感生电动势.

设线圈f与线圈e的互感为M.为保证I_f和I_e不变,两附加电源的电动势应分别为

$$\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}\Phi_f}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MI_e)=I_e\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \tag{25}$$

$$\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MI_f)=I_f\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

两附加电源的功率分别为

$$\frac{\mathrm{d}W_f}{\mathrm{d}t}=I_f\mathscr{E}=I_fI_e\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}, \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}=I_e\mathscr{E}=I_eI_f\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}. \tag{28}$$

联立,易见

$$W_e=W_f=m\cdot B_e. \tag{29}$$

综上所述,当m从磁场外移到x点的过程中,根据能量守恒定律,磁偶极子m与外磁场B_e的相互作用能$W_i^{(1)}$应等于外力克服磁场所作的功$U^{(1)}=-m\cdot B_e(x)$及两个外接附加电源所作的功(W_e+W_f)之和,即

$$W_i^{(1)}=U^{(1)}+(W_e+W_f)=-m\cdot B_e+2m\cdot B_e=m\cdot B_e. \tag{30}$$

这就是$W_i^{(1)} \neq U^{(1)}$的物理原因.

习　题　4.5

1. 试证明(18)式.

2. 经典电磁理论认为,当原子置于均匀磁场B中时,原子中的所有电子构成一个具有相同荷质比$-e/m_e$并环绕共同力心(原子核)运动的电荷体系.试证明,这个电荷体系的角动量矢量$L=\int (x\times \rho v)\mathrm{d}V$[式中$\rho$为电荷体系的质量密度,因而$\rho_f=-\rho e/m_e$为电荷体系的电荷密度]将以角速度

$$\omega_L = eB/2m_e$$

绕磁场B转动.这个现象与陀螺转动轴的进动现象相似,称为拉莫尔进动,进动的角频率ω_L称为拉莫尔频率.

3. 把一个磁矩为m的磁偶极子置于一个磁透镜中,磁透镜的场分量为

$$B_x = \alpha(x^2 - y^2),\quad B_y = -2\alpha x y,\quad B_z = 0,$$

式中z是透镜的轴向,α为常数.试求作用在磁偶极子上的力$F^{(1)}$(即$F_x^{(1)}$,$F_y^{(1)}$和$F_z^{(1)}$)为若干?

第三篇　电磁波的传播

本篇将经典电动力学的三个基本定律应用到随时间变化的电磁场.由于变化的电流会激发变化的电磁场,形成电磁波,电磁波又可脱离波源而独立运动.所以我们将在第五篇“电磁波的辐射”中研究波源与波的关系,而在本篇“电磁波的传播”中研究电磁波自身的运动规律.

第五章讨论无界及半无界空间中的电磁波,其中包括电磁波在非磁性绝缘介质、导电介质及等离子体中的传播规律.

第六章讨论有界空间中的微波,主要研究微波在金属波导管和谐振腔中的行为.

第七章讨论有界空间中的光波,主要研究光波在平板型介质波导和圆柱型介质波导中的行为.

第六、七章介绍的金属波导管、金属谐振腔、薄膜波导和光纤,它们在微波技术、集成光学技术、光纤通信等当代高新技术中扮演着重要的角色.

第五章　无界及半无界空间中的电磁波

本章讨论电磁波在无界及半无界空间中的传播,其中包括电磁波在绝缘介质中的传播,在两种非磁性绝缘介质分界面的反射与折射,在导体中的传播,在绝缘介质与导体分界面的反射,以及电磁波在等离子体中传播的基本规律. 这些规律在现代科学技术中得到广泛的应用.

本章还将介绍波包以及波包的相速和群速的概念,这些概念在本章和以后几章中都会用到.

§ 5.1　电磁波在绝缘介质中的传播

本节首先由麦克斯韦方程组出发,导出无源空间($\rho_f = 0, J_f = 0$)中电场与磁场遵守的波动方程. 由于介质的介电常数 ε、磁导率 μ 都是电磁波角频率 ω 的函数(见 § 1.4). 当入射波不是单色波时,就要将入射波分解为一系列单色波(称为傅里叶分解)进行讨论. 因此,熟识单色平面电磁波在绝缘介质中传播的一些基本概念,就成为研究电磁波在介质中传播规律的基础. 在此基础上,利用单色电磁波的复数表示法导出单色电磁波遵守的亥姆霍兹方程,并给出在均匀绝缘介质中单色平面电磁波的基本性质. 最后,讨论单色平面电磁波的偏振性质.

一、无源空间电磁场的波动方程

设绝缘介质充满整个空间,无源空间中的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times B = \mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{4}$$

对于均匀介质,介电常数 ε 和磁导率 μ 均与空间坐标 x 无关.

在(2)式两边取旋度后,交换对时空求导数的次序,将(4)式代入,即有

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \tag{5}$$

利用矢量分析的二阶导数公式,并将(1)式代入,上式的左边可简化为

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2E=-\nabla^2E. \tag{6}$$

将上两式联立,即得电场E的波动方程

$$\nabla^2E-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0, \tag{7}$$

式中

$$v=(\mu\varepsilon)^{-1/2}. \tag{8}$$

类似地,可得磁场B的波动方程

$$\nabla^2B-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2B}{\partial t^2}=0. \tag{9}$$

这里自然会出现一个问题,方程(7)是由麦克斯韦方程组(1),(2),(4)导出的,方程(7)的解是不是一定满足麦克斯韦方程组呢?答案是不一定.因为在推导波动方程的过程中对麦克斯韦方程进行了微分运算(对$\nabla\times E$取旋度),使微分方程由一阶变为二阶,将会导致增根.①

为了得到遵守麦克斯韦方程组的解,还应让解满足(1)式.也就是说,要将(7)式与(1)式联立

$$\begin{cases}\nabla^2E-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2E}{\partial t^2}=0, & (10)\\ \nabla\cdot E=0, & (11)\end{cases}$$

然后根据边界条件进行求解,对磁场也可作出类似的讨论.

电磁场波动方程最简单的解是单色平面电磁波.如果入射的电磁波是非单色波,则首先应将入射波进行傅里叶分解,在求得每一单色波的电磁场之后进行叠加,即可得到总电磁场.

现在先讨论单色平面电磁波在绝缘介质中传播的情形.

二、单色平面电磁波在绝缘介质中的传播

波动方程的单色平面电磁波解为(见本节习题第1题)

$$E(x,t)=E_0\cos(k\cdot x-\omega t), \tag{12}$$

$$B(x,t)=B_0\cos(k\cdot x-\omega t), \tag{13}$$

式中$k=kn$称为波矢,k为波数,n为k方向的单位矢量.将(12)式代入(10)式,得

$$k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{14}$$

---

① 读者熟悉的代数方程组也有类似的情况,如将$\begin{cases}x+y=0,\\ x-y=1\end{cases}$中的第二个方程平方,得到一个新的方程组$\begin{cases}x+y=0,\\ (x-y)^2=1\end{cases}$.后者的解$\left\{x=\pm\frac{1}{2},y=\mp\frac{1}{2}\right\}$比前者的解$\left\{x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}\right\}$增多了,产生增根.这是一次代数方程进行平方运算变为二次代数方程的结果.此处是一阶微分方程进行微分运算变为二阶微分方程的结果.

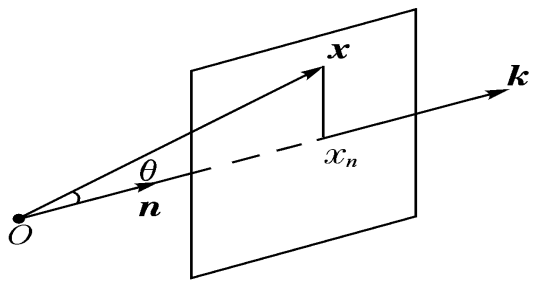


图 5.1

现在讨论(12),(13),(14)式中各量的物理意义,它们给出了单色平面电磁波最基本的概念:

1. 相位与等相面方程

单色平面波的相位是$k\cdot x-\omega t$,等相面方程是

$$k\cdot x-\omega t=\text{常数}. \tag{15}$$

因为在同一时刻,在垂直于k的平面(见图 5.1)上任一点,平面波的相位均相等

$$k\cdot x-\omega t=kx\cos\theta-\omega t=kx_n-\omega t, \tag{16}$$

式中x_n是平面上任一点x在n方向的投影,即

$$x_n=x\cdot n=x\cos\theta. \tag{17}$$

因此,垂直于k的平面是等相面,k是等相面的法线方向,即k是等相面的传播方向.

2. 空间的周期性,波长λ与波数k

在同一时刻,相位差为2π的两个等相面的距离λ称为波长. 由

$$[k(x_n+\lambda)-\omega t]-(kx_n-\omega t)=2\pi,$$

得

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}\quad\text{或}\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{18}$$

这表明,波数k是2π距离上波的数目(以λ为单位,量度2π时得到的).

3. 时间的周期性,周期T与角频率ω

在同一地点,相位差为2π的两个时刻之间的间隔T称为周期. 由

$$(k\cdot x-\omega t)-[k\cdot x-\omega(t+T)]=2\pi,$$

得

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\quad\text{或}\quad\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu. \tag{19}$$

这表明,角频率ω是2π时间间隔内振动的次数(以T为单位,量度2π时得到的). 由于ω与ν只相差一个常数因子2π,通常都不加区别地称之为频率.

4. 相速度$\boldsymbol{v}_p$(在不会发生混淆时,脚标 p 可略去)

等相面运动的速度$\boldsymbol{v}_p$称为相速度. 将等相面方程

$$kx_n-\omega t=\text{常数}$$

两边对t求导,即有

$$k\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}-\omega=0, \tag{20}$$

利用(14)式,可得单色平面电磁波在介质中的相速的几个表达式

$$\boldsymbol{v}_p=\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}n=\frac{\omega}{k}n=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}n=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}n=\frac{c}{n}n. \tag{21}$$

式中n为电磁波传播方向上的单位矢量，$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$为真空中光速，$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$为介质的折射率.

对于真空，将$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$代入上式，易见电磁波在真空中的相速度就是真空中的光速

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c. \tag{22}$$

三、单色电磁波的复数表示　亥姆霍兹方程

单色电磁波作为傅里叶分解的一个基元，对它的研究具有重要意义. 而且，它自身的应用也很广泛，小至激光器发出的激光，大到无线电广播和通信的载波.

单色电磁波(不一定是平面波)的电磁场可以表示为

$$E(x,t)=\mathrm{Re}[E(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}],$$
$$B(x,t)=\mathrm{Re}[B(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}].$$

通常略去上两式取实数的符号“Re”，这种表示法称为复数表示法. 使用时应注意：

(1) 可以用指数形式进行加、减、微分和积分运算，最后取实部.

(2) 乘积或商的运算要取实部相乘、除，不能用指数形式相乘、除后取实部.

(3) 二次式的平均值公式为(见本节习题第2题)

$$\overline{fg}=\frac{1}{T}\int_0^T fg\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f^*g), \tag{23}$$

式中f^*表示f的复共轭. 为证明上式，可以假设$f=f_0\cos(kx-\omega t+\alpha_f)$，$g=g_0\cos(kx-\omega t+\alpha_g)$.

现在，将$E(x,t)$和$B(x,t)$的复数表示代入无源空间的麦克斯韦方程组，易得

$$\nabla\cdot E=0, \tag{24}$$

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}=\mathrm{i}\omega B, \tag{25}$$

$$\nabla\cdot B=0. \tag{26}$$

$$\nabla\times B=\mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=-\mathrm{i}\mu\varepsilon\omega E, \tag{27}$$

在(25)式两边取旋度，仿照(5)、(6)式的运算可得E遵守的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2E+k^2E=0. \tag{28}$$

在(27)式两边取旋度，同理可得B遵守的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2B+k^2B=0. \tag{29}$$

在利用E的边界条件先求E后求B，或者利用B的边界条件先求B后求E，应分别采用如下两组方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 E + k^2 E = 0, \\ \nabla \cdot E = 0, \\ B = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times E; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \nabla^2 B + k^2 B = 0, \\ \nabla \cdot B = 0, \\ E = \dfrac{\mathrm{i}}{\mu\varepsilon\omega}\nabla \times B. \end{cases} \tag{30}$$

四、单色平面电磁波的基本性质

采用复数表示法之后,单色平面电磁波的电场可表示为(已略去 Re)

$$E(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)}. \tag{31}$$

1. 平面电磁波是横波,并且E,B,k有右手螺旋关系

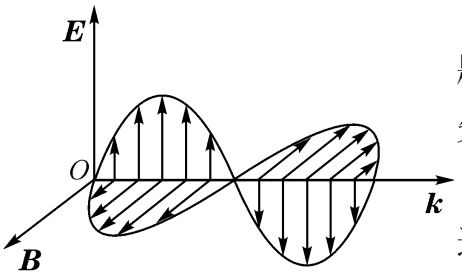


图 5.2

证　首先,将(31)式代入$\nabla \cdot E = 0$,由附录 1 习题 A1.2 的第 1 题可知,算符∇与$E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)}$的点积或矢积分别等效于$\mathrm{i}k$与$E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)}$的点积或矢积.故

$$0 = \nabla \cdot E = \mathrm{i}k \cdot E. \tag{32}$$

这表明,$E \perp k$,即电波为横波.

其次,将(31)式代入$B = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times E$可得

$$B = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times E = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{i}k \times E = \frac{1}{\omega}k \times E. \tag{33a}$$

这表明,$B \perp k$, $B \perp E$,并且E,B,k三者组成右手螺旋关系,如图 5.2 所示.

2. 平面电磁波的E和B同相位,振幅比为v_p(真空中为c)

证　将$E(x,t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)}$代入(33)式,可得

$$B = \frac{1}{\omega}k \times E = \frac{k}{\omega} \times E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)} = \frac{1}{v_\mathrm{p}} n \times E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x - \omega t)}. \tag{33b}$$

式中

$$\frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega}n = \frac{T}{\lambda}n = \frac{1}{v_\mathrm{p}}n = \sqrt{\varepsilon\mu}\,n. \tag{34}$$

(33b)式表明,E和B的相位均为$k\cdot x - \omega t$,且振幅比为

$$\frac{E}{B} = \frac{|E|}{|B|} = \frac{|E_0|}{|n \times E_0| / v_\mathrm{p}} = v_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{35}$$

3. 平面电磁波的能量密度[利用(35)式可写成几种等价的形式]

$$w = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right) = \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}. \tag{36}$$

这表明,对于在绝缘介质中传播的平面电磁波,电波与磁波有相同的能量密度.

4. 平面电磁波的能流密度

$$S = E \times H = \frac{1}{\mu}E \times B = \frac{EB}{\mu}n = v_\mathrm{p}\frac{B^2}{\mu}n = \boldsymbol{v}_\mathrm{p} w. \tag{37}$$

平面电磁波能量的传递速度u定义为能流密度与能量密度之比

$$u = \frac{S}{w}. \tag{38}$$

将(37)式代入上式,即得

$$u = \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}. \tag{39}$$

这表明,在无界空间中,单色平面电磁波能量的传递速度u等于单色平面电磁波的相速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$,其方向也就是单色平面电磁波传播的方向.

实际上,还可以更形象地理解单色平面电磁波能量的传递速度u. 单位时间内穿过单位面积的能量为

$$W = S\times 1\times 1 = w\, v_{\mathrm{p}}\times 1\times 1 = w\, v_{\mathrm{p}}.$$

式中$S = |\boldsymbol{S}|$为能流密度的大小. 由图5.3可见,在单位时间内,正好是体积$V = v_{\mathrm{p}}\times 1\times 1$内的能量穿过单位面积往前传递,可见能量传递的速度正好是相速$\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$.

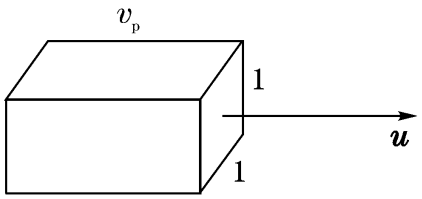


图5.3

5. 平面电磁波的动量密度

$$g = \varepsilon E\times B = \varepsilon E\times \mu H = \frac{S}{v_{\mathrm{p}}^2}. \tag{40}$$

6. 平面电磁波的动量流密度张量

$$\overleftrightarrow{T} = -\varepsilon EE - \frac{1}{\mu}BB + \overleftrightarrow{I}\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right). \tag{41}$$

设

$$E = E\, e_x, \qquad B = B\, e_y, \qquad k = k\, e_z. \tag{42}$$

利用$w = \varepsilon E^2 = B^2/\mu$,上式可简化为

$$\overleftrightarrow{T} = w\left[-e_x e_x - e_y e_y + (e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z)\right] = w\, e_z e_z. \tag{43}$$

7. 平面电磁波的麦克斯韦应力张量

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} = -\overleftrightarrow{T} = \varepsilon EE + \frac{1}{\mu}BB - \overleftrightarrow{I}\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right). \tag{44}$$

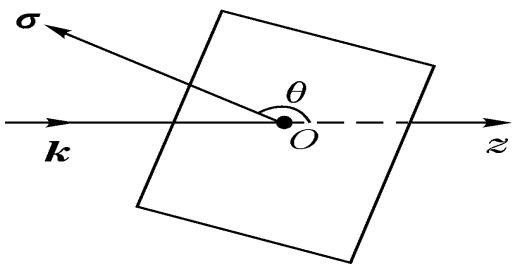


图5.4

当电磁波如(42)式所示,投射到面积元σ上时(见图5.4),对面元σ所施压力为

$$\begin{aligned} F &= \sigma\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} = -\sigma\cdot\overleftrightarrow{T} = -\sigma\cdot w\, e_z e_z \\ &= -w\,\sigma\cos\theta\, e_z. \end{aligned} \tag{45}$$

由于$\theta > \frac{\pi}{2}$,$\cos\theta < 0$,故平面电磁波对面元的压力沿波矢$k = k\, e_z$的方向,其大小与平面电磁波的能量密度w、面元的面积σ、以及k与σ夹角的余弦$\cos\theta$成正比.

电磁波投射到物体表面上时,对物体所施加的压力称为辐射压力. 太阳或其他恒星经过星云时,之所以不会把星云的小尘粒吸引过来,就是由于辐射压力的缘故.

自从1975年汉斯和肖洛提出“激光冷却原子”的思想以来,光的辐射压力的研

究重新得到物理学家的重视,见§ 15.1.

五、单色平面电磁波的偏振性质

仍取 z 轴沿波矢 k 的方向,则(33)式可简写为

$$B=\frac{1}{\omega}k\times E=\frac{1}{v_p}e_z\times E=\frac{1}{v_p}e_z\times E_0 e^{i(kz-\omega t)}, \tag{46}$$

即 B 完全可以由 E 来确定,因而只需讨论电矢量的偏振性质.

由于平面电磁波是横波,故 E 的实部可分解为

$$E=e_x E_{0x}\cos(kz-\omega t+\alpha_x)+e_y E_{0y}\cos(kz-\omega t+\alpha_y), \tag{47}$$

式中 E_{0x} 和 E_{0y} 分别是 E_x 和 E_y 的振幅,α_x 和 α_y 分别是 E_x 和 E_y 的初相位. 在一般情况下,α_x 与 α_y 不相等. 容易证明,在空间的任一点:

(1) 当相位差 $\delta=\alpha_y-\alpha_x=n\pi(n=0,1,2,\cdots)$ 时,在时间变化的过程中,电矢量(在平行于 xoy 平面上)端点的轨迹是直线,称为线偏振波.

(2) 当 $E_{0x}=E_{0y}$,且相位差 $\delta=\alpha_y-\alpha_x=\mp\frac{\pi}{2}$ 时,在时间变化的过程中,从迎着电磁波传播的方向看,电矢量端点的轨迹分别是逆时针或顺时针转的圆. 这样,电矢量的旋转方向与波矢 k 方向分别成左手或右手螺旋关系,分别称为左旋圆偏振波(涡度为正)或右旋圆偏振波(涡度为负).

(3) 一般情况下,在时间变化的过程中,电矢量端点的轨迹是椭圆,称为椭圆偏振波.

合成波电矢量端点的轨迹方程见本节习题第4题,相应的图解可参阅光学教材[①].

电磁波偏振性质的应用非常广泛. 电视信号的发射天线与地面平行放置(称为水平偏振方式),它发射的电磁波的电矢量(指“远区场”,见§ 11.3)也是平行于地面的线偏振波,因此电视接收天线应调节到与地面平行才能获得最佳接收效果;而调幅电台发射的电磁波的电矢量(指“远区场”)是与地面垂直的(称为垂直偏振方式),因此收音机的天线应调整到与地面垂直才能获得最佳的收听效果. 但是火箭、卫星等飞行系统的位置和状态时刻在变化,如果采用水平或垂直偏振的方式来遥控卫星,则当信号的偏振状态与卫星的接收天线正交时就会因为卫星接收不到信号而失控. 由于线偏振波可分解为两个振幅相等而旋转方向相反的圆偏振波,因而不同取向的线偏振波均可由圆极化天线收到. 目前卫星上的天线和地面站的天线都采用圆偏振方式,以避免失控现象的发生.

综上所述,决定单色平面波行为的物理参量共有6个是独立的,即电磁波的波矢 k 和角频率 ω(由于受 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\mu\varepsilon\omega^2$ 的制约,只有3个是独立的)、电矢量

① 王楚,汤俊雄编. 2001. 光学. 北京:北京大学出版社. 24.

两个分量的振幅E_{0x}和E_{0y}、以及电矢量两个分量的相位差$\delta=\alpha_y-\alpha_x$.

习 题 5.1

1. 试验证:(12)式和(13)式分别是波动方程(7)式和(9)式的解,并且k与ω满足(14)式.

2. 试证明(23)式.

3. 已知太阳的半径为7×10^8m,太阳和地球的平均距离为1.5×10^{11}m,地面上测得太阳光能流密度周期平均值的大小为$\overline{S}=1300\text{W/m}^2$. 为简单起见,把太阳光看做电矢量为$E=E_0\cos(k\cdot x-\omega t)$的单色平面线偏振光.

(1) 试估算地面上太阳光中电场和磁场的振幅E_{20},B_{20};

(2) 计算太阳的平均辐射功率;

(3) 试估算太阳表面上太阳光中电场和磁场的振幅E_{10},B_{10}.

4. 试给出在真空中沿z轴传播、相位差为δ、偏振方向互相垂直的两个相互独立的单色平面波在空间某点的合成波电矢量端点的轨迹方程. 特别是当$\delta=0,\pm\frac{\pi}{2}$时,方程的简化形式.

§ 5.2 电磁波在介质分界面上的反射与折射 光子扫描隧道显微镜

本节讨论平面电磁波投射到两种非磁性绝缘介质分界面时的反射和折射现象. 首先由电磁场的边值关系导出反射、折射定律和菲涅耳公式. 前两者给出反射波与折射波的传播方向;后者给出反射波与折射波的振幅和偏振性质,并且分别以反射系数和偏振度来描述. 在此基础上,讨论电磁波从密介质投射到疏介质时出现全反射现象的条件、规律,以及它在激光器、光子扫描隧道显微镜和光通信中的应用.

一、电磁场在非磁性绝缘介质分界面上的边值关系

取$z=0$平面为两种介质的分界面. 对于非磁性介质,其磁导率均可视为μ_0;对于绝缘介质,其上的自由电荷面密度$\sigma=0$,传导电流面密度$\alpha=0$. 因此,电磁场在非磁性绝缘介质分界面的边值关系为(参看§ 1.5 的表 1.2):

$$e_z\cdot(D_2-D_1)=0,\quad \text{即}\quad \varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n};\tag{1}$$

$$e_z\times(E_2-E_1)=0,\quad \text{即}\quad E_{1t}=E_{2t};\tag{2}$$

$$e_z\cdot(B_2-B_1)=0,\quad \text{即}\quad B_{1n}=B_{2n};\tag{3}$$

$$e_z\times(H_2-H_1)=0,\quad \text{即}\quad H_{1t}=H_{2t}.\tag{4}$$

可以证明,这四个边值关系相互之间并不是独立的:由$E_{1t}=E_{2t}$可以导出$B_{1n}=B_{2n}$,由$H_{1t}=H_{2t}$可以导出$\varepsilon E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$(见本节习题第 1 题).

现在利用电磁场的边值关系研究反射和折射现象. 设$z=0$平面上、下方分别充满介电常数为ε_2、ε_1,磁导率分别为μ_2、μ_1(均视为μ_0)的均匀介质,如图 5.5 所示.

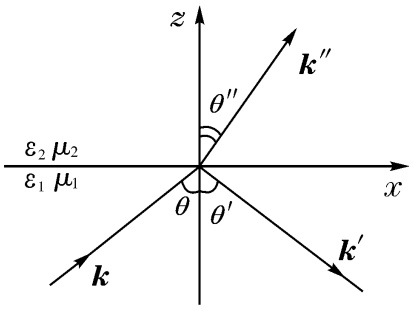


图 5.5

若入射波为平面波,不妨假设反射波和折射波均为平面波. 至于假设是否正确,则由它能否满足电磁场的边值关系而定. 现在假设

$$\text{入射波}\qquad E=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-\omega t)},\tag{5}$$

$$\text{反射波}\qquad E'=E'_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'\cdot x-\omega' t)},\tag{6}$$

$$\text{折射波}\qquad E''=E''_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''\cdot x-\omega'' t)}.\tag{7}$$

我们只需要讨论电磁波中电矢量应遵守的规律,与之相应的磁矢量可由下面任一等式求得[见§ 5.1 的(33)式,并且已略去相速度 v_p 的脚标]

$$B=\frac{1}{\omega}k\times E=\sqrt{\varepsilon\mu}n\times E=\frac{1}{v}n\times E.\tag{8}$$

式中$k=kn$, $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

考虑到入射波与反射波位于介质1,折射波位于介质2,由 $z=0$ 平面上的边值关系 $E_{1t}\big|_{z=0}=E_{2t}\big|_{z=0}$(脚标 t 表示切向分量),可得

$$E_{0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y-\omega t)}+E'_{0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x x+k'_y y-\omega' t)}=E''_{0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x+k''_y y-\omega'' t)}.\tag{9}$$

因为在 $z=0$ 平面上,当 x, y, t 取任意值时上式均成立,可以证明(见本节习题第2题)

$$\omega=\omega'=\omega'',\tag{10}$$

$$k_x=k'_x=k''_x,\tag{11}$$

$$k_y=k'_y=k''_y,\tag{12}$$

$$E_{0t}+E'_{0t}=E''_{0t}.\tag{13}$$

由(4)式同理可证明

$$H_{0t}+H'_{0t}=H''_{0t}.\tag{14}$$

现在利用(11)式导出反射与折射定律,由(13)式和(14)式导出菲涅尔公式.

二、反射定律与折射定律

因为 k_x, k'_x, k''_x 分别是入射波、反射波和折射波的波矢在 x 轴上的投影,由§ 5.1 的(34)式可得

$$k_x=k\sin\theta=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta,\tag{15}$$

$$k'_x=k'\sin\theta'=\omega'\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta',\tag{16}$$

$$k''_x=k''\sin\theta''=\omega''\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\theta''.\tag{17}$$

将(15)式和(16)式代入 $k_x=k'_x$,并注意到 $\omega'=\omega$,可得

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta',$$

即得反射定律

$$\theta = \theta'. \tag{18}$$

将(15)式和(17)式代入 $k_x = k''_x$,并注意到 $\omega'' = \omega$,可得

$$\sqrt{\varepsilon\mu_1}\sin\theta = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\theta'',$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu_2}{\varepsilon\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1},$$

即得折射定律

$$n_1\sin\theta = n_2\sin\theta''. \tag{19}$$

三、菲涅耳公式

为方便起见,适当选择坐标系,使

$$k_y = k'_y = k''_y = 0, \tag{20}$$

即取入射面为 xoz 平面.

现在分别计算反射波和折射波电矢量平行于入射面(简称P 波)的分振幅 E'_{0p} 和 E''_{0p},垂直于入射面(简称S 波)的分振幅 E'_{0s} 和 E''_{0s},与入射波相应的分振幅 E_{0p} 和 E_{0s} 的模之比,参看图5.6 和图5.7[①]. 图中⊙表示该矢量由纸面垂直向外.

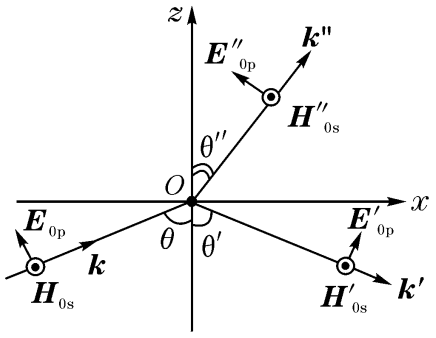


图 5.6

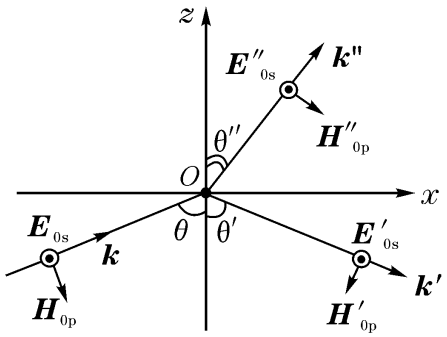


图 5.7

1. 由 $E_{0t} + E'_{0t} = E''_{0t}$ [见(13)式]可得 E_{0p},E'_{0p} 与 E''_{0p} 遵守的方程(参看图5.6)

$$-E_{0p}\cos\theta + E'_{0p}\cos\theta = -E''_{0p}\cos\theta'', \tag{21}$$

以及 E_{0s},E'_{0s} 与 E''_{0s} 遵守的方程

$$E_{0s} + E'_{0s} = E''_{0s}. \tag{22}$$

2. 由 $H_{0t} + H'_{0t} = H''_{0t}$ [见(14)式]可得 H_{0s},H'_{0s} 与 H''_{0s} 遵守的方程

$$H_{0s} + H'_{0s} = H''_{0s}, \tag{23}$$

---

① 这两个图是根据 E,H,k 的右手螺旋关系给出电场与磁场的正方向(并且均应画在 O 点处,为了便于观看,都外移他处).若算出反射波(或折射波)与入射波的分振幅之比为正,则表示其方向沿正方向;若比值为负,则表示其方向与正方向相反.

以及H_{0p},H'_{0p}与H''_{0p}遵守的方程(参看图 5.7)

$$H_{0p}\cos\theta - H'_{0p}\cos\theta = H''_{0p}\cos\theta''. \tag{24}$$

利用$B=\mu H$,非磁性介质的$\mu_1=\mu_2=\mu_0$,以及$B=\frac{1}{\omega}kE$,由(23)式可得E_{0p},E'_{0p}及E''_{0p}遵守的方程

$$kE_{0p}+k'E'_{0p}=k''E''_{0p}, \tag{25}$$

由(24)式得E_{0s},E'_{0s}及E''_{0s}遵守的方程

$$-kE_{0s}\cos\theta+k'E'_{0s}\cos\theta=-k''E''_{0s}\cos\theta''. \tag{26}$$

P 波的振幅比定义为

$$\text{反射波：}\quad r_p=\frac{E'_{0p}}{E_{0p}},\qquad \text{折射波：}\quad t_p=\frac{E''_{0p}}{E_{0p}}. \tag{27}$$

将(21)式与(25)式联立,得(见本节习题第 3 题)

$$\frac{1+r_p}{1-r_p}=\frac{k''\cos\theta}{k\cos\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta''}, \tag{28}$$

利用分、合比定理可求得r_p,类似地可求得t_p. 这就是关于P 波的菲涅耳公式:

$$r_p=\frac{E'_{0p}}{E_{0p}}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')},\qquad t_p=\frac{E''_{0p}}{E_{0p}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}; \tag{29}$$

S 波的振幅比定义为

$$\text{反射波：}\quad r_s=\frac{E'_{0s}}{E_{0s}},\qquad \text{折射波：}\quad t_s=\frac{E''_{0s}}{E_{0s}}. \tag{30}$$

将(22)式与(26)式联立,得

$$\frac{1+r_s}{1-r_s}=\frac{k\cos\theta}{k''\cos\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta''}, \tag{31}$$

同理,可得关于S 波的菲涅耳公式:

$$r_s=\frac{E'_{0s}}{E_{0s}}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')},\qquad t_s=\frac{E''_{0s}}{E_{0s}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}. \tag{32}$$

这四个公式是菲涅耳在 1823 年利用光的以太理论导出的.后来利用麦克斯韦的电磁理论导出这四个公式,这成为当时论证光波是电磁波的一个重要证据.

三、反射系数与透射系数　偏振度

反射系数定义为在介质分界面的面积元A 上入射能流的平均值与反射能流的平均值之比.

对于P 波来说,其反射系数为

$$R_{/\!/}=\frac{\overline{S}'\cdot A}{\overline{S}\cdot A}=\frac{|\overline{S}'|A\cos\theta'}{|\overline{S}|A\cos(\pi-\theta)}=\frac{|\overline{S}'|}{|\overline{S}|}. \tag{33}$$

设入射波平行入射面的电矢量为$E_p=E_{0p}e^{i(k\cdot r-\omega t)}$,相应的磁矢量为垂直于入

射面的$H_s = H_{0s}e^{i(k\cdot r-\omega t)}$,其能流的平均值为

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_p \times H_s^*) = \frac{1}{2\mu_1}\mathrm{Re}(E_p \times B_s^*) = \frac{1}{2\mu_1}\mathrm{Re}\left[E_p \times \left(\frac{k}{\omega} \times E_p^*\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\mathrm{Re}[E_p \times (n \times E_p^*)] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{0p}^2 n. \tag{34}$$

上式已利用$n = k/k$垂直于E_p,E_p^*的性质.

同理,反射能流的平均值为

$$\overline{S'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E'^2_{0p}n'. \tag{35}$$

将上两式代入(33)式,再利用(29)式,即有

$$R_p = \frac{|\overline{S'}|}{|\overline{S}|} = \left(\frac{E'_{0p}}{E_{0p}}\right)^2 = \frac{\tan^2(\theta-\theta'')}{\tan^2(\theta+\theta'')}. \tag{36}$$

同理可得

$$R_s = \left(\frac{E'_{0s}}{E_{0s}}\right)^2 = \frac{\sin^2(\theta-\theta'')}{\sin^2(\theta+\theta'')}. \tag{37}$$

反射波的偏振度定义为

$$P(\theta) = \frac{R_p - R_s}{R_p + R_s}, \tag{38}$$

它反映反射波的偏振程度.

折射系数与折射波的偏振度也可类似定义,不再赘述.

反射系数$R_p(\theta)$与$R_s(\theta)$的函数曲线如图5.8所示,不难看出有如下规律:

(1) 自然光入射时,反射光为部分偏振光,并且电场垂直于入射面的分量占优势[仅当$\theta = 0$时,有$R_p(0) = R_s(0)$,仍为自然光].

(2) 布儒斯特定律. 当入射角$\theta = \theta_B$(布儒斯特角θ_B满足$\theta_B + \theta'' = \pi/2$)时,反射光为电矢量垂直于入射面的线偏振光. 将$\theta = \theta_B$代入(29)式中,得$\tan(\theta_B + \theta'') = \infty$,导致

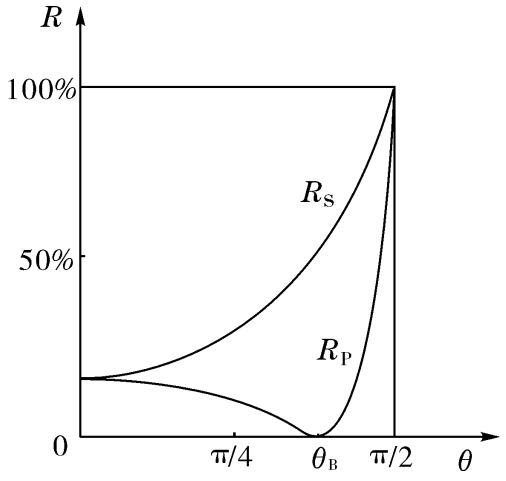


图 5.8

$$\frac{E'_{0p}}{E_{0p}} = \frac{\tan(\theta_B-\theta'')}{\tan(\theta_B+\theta'')} = \frac{\tan(\theta_B-\theta'')}{\tan(\pi/2)} = 0. \tag{39}$$

布儒斯特角可由折射定律求得. 将$\theta_B + \theta'' = \frac{\pi}{2}$代入折射定律,可得

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_B}{\sin\theta''} = \frac{\sin\theta_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_B\right)} = \frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B} = \tan\theta_B. \tag{40}$$

布儒斯特定律有着广泛的应用,因为以布儒斯特角入射的自然光,反射后没有电矢量平行于入射面的光,故可利用它制成产生线偏振光的起偏器. 又因为电矢量

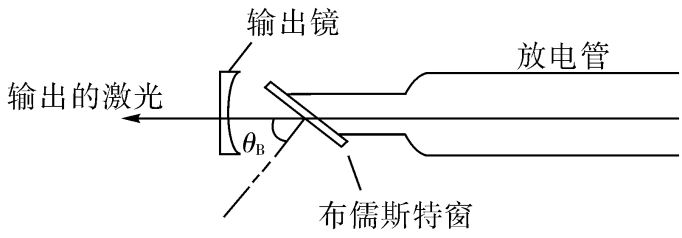


图5.9

平行于入射面的光能百分之百透射，因此在外腔式激光器中通常会安置倾斜的玻片(如图5.9所示)，使激光以布儒斯特角入射，这样便使电矢量垂直于入射面的光被衰减掉. 这种窗口称为布儒斯特窗. 如果不安置这种窗口，输出激光的偏振态往往不稳定.

(3) 半波损失. 若$n_2 > n_1$，可以证明(见本节习题第4题)：对于电矢量垂直于入射面的波(S波)，反射后产生位相π的跃变；对于电矢量平行于入射面的波(P波)，严格说来，在正入射($\theta = 0$)和掠入射($\theta = \pi/2$)的情形下，反射后产生相位π的跃变. 因为P波在其他角度入射时，反射波与入射波不平行，它们的电矢量也不平行，比较它们就没有绝对的意义. 但是，有时为了叙述方便，就不考虑由于k'，k''与k方向不同带来的结果，只要$E'_{0P}/E_{0P} < 0$，在相对意义上，就说它们有位相π的跃变.

当然，在薄膜干涉(薄膜两侧介质的折射率相同)的情形下，来自薄膜上、下表面的反射光回到入射介质时，这两束光又平行了，两束光的电矢量又平行了，即使在严格的意义上，两者总有附加的相位差π，即半波损失.

三、全反射现象　光子扫描隧道显微镜

1. 全反射现象

当电磁波由折射率为n_1的密介质入射到与折射率为n_2的疏介质的分界面，并且折射角$\theta'' = \pi/2$时，相应的入射角θ_c满足折射定律

$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin\frac{\pi}{2} = n_2,$$

这时的入射角θ称为临界角，记作θ_c. 易见

$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \sin^{-1} n_{21}. \tag{41}$$

当入射波以$\theta \geqslant \theta_c$的角度入射时，入射波将全部被反射，这个现象称为全反射现象.

2. 透入疏介质的电场，隐失波

仍将入射面选作xoz平面，将(20)式和(11)式以及§ 5.1的(14)式

$$k''_y = k_y = 0, \tag{42}$$

$$k''_x = k_x = k\sin\theta, \tag{43}$$

$$\frac{k''}{k} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \tag{44}$$

代入$k''^2 = k''^2_x + k''^2_y + k''^2_z$，可得

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k''^2_x} = \sqrt{k^2 n_{21}^2 - k^2 \sin^2\theta} = \mathrm{i}k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2} = \mathrm{i}\alpha, \tag{45}$$

这里已考虑到当 $\theta > \theta_c$ 时,$n_{21} = \sin\theta_c < \sin\theta$. 易见(45)式中的

$$\alpha = k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2} \tag{46}$$

为实数.

电磁波透入疏介质的电矢量为

$$E'' = E_0'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''\cdot x - \omega t)} = E_0'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x + k''_z z - \omega t)} = E_0'' \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x - \omega t)}. \tag{47}$$

这个公式的物理意义是:

(1) 电磁波的振幅 $E_0'' \mathrm{e}^{-\alpha z}$ 将随进入疏介质的深度 z 的增加按指数衰减,其穿透深度(定义为振幅衰减到原来 $1/\mathrm{e}$ 时的距离)

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}. \tag{48}$$

即具有波长的数量级(k 为在入射介质中的波数,λ 为在入射介质中的波长).

(2) 电磁波的相位为 $k''_x x - \omega t$,其相速仿照§ 5.1 的(21)可求得

$$v_p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k''_x} = \frac{\omega}{k\sin\theta} = \frac{c}{n_1\sin\theta} < c. \tag{49}$$

这里已利用 $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{c}{n_1}$,以及 $n_1\sin\theta > n_1\sin\theta_c = n_2 \geqslant 1$(当 $\theta > \theta_c$).

这表明,即使疏介质的 $n_2 = 1$,电磁波仍以低于真空中的光速 c 的相速沿两介质分界面的 x 方向传播,故透入疏介质的波是沿分界面传播的表面波. 又因沿 z 方向在很短的距离便衰减为零,故称之为隐失波.

人们考虑到隐失波的相速低于真空中的光速 c,可以与实物粒子同步;另一方面,激光器的诞生又能在隐失波的传播方向上产生强大的电场(激光器的输出功率为 $10\mathrm{kW/cm^2}$ 时,该电场可达 $10^3\mathrm{MV/m}$). 目前国际上有的科学家正在研究如何用隐失波来加速带电粒子,并称它为“激光加速器”. 当然,目前尚有许多关键问题有待解决.

3. 隐失波的能流

为简单起见,设入射波的电矢量垂直于入射面,即令 $E = E\ e_y$,因而 $E'' = E''e_y$.

现将

$$B'' = \frac{k''}{\omega} \times E'' = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{k''} k'' \times E''e_y \tag{50}$$

代入 $H'' = B''/\mu_2$,并利用(45)和(47)式,可得

$$H'' = \frac{B''}{\mu_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E'' \frac{k''_x e_x + k''_z e_z}{k''} \times e_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k''_x e_z - \mathrm{i}\alpha e_x}{k''} E_0'' \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x - \omega t)}. \tag{51}$$

因为 $E'' = E''e_y$,利用矢量矢积公式 $e_y \times (a e_z - b e_x) = a e_x + b e_z$,易见

$$S'' = (Re\,E'') \times (Re\,H'') = S''_x e_x + S''_z e_z. \tag{52}$$

并且(见本节习题第 8 题)

$$S''_x = \frac{k}{2\mu_2\omega}E''^2_0 e^{-2\alpha z}\{1+\cos[2(kx\sin\theta-\omega t)]\}\sin\theta, \tag{53}$$

$$S''_z = -\frac{\alpha}{2\mu_2\omega}E''^2_0 e^{-2\alpha z}\sin[2(kx\sin\theta-\omega t)]. \tag{54}$$

(53)式表明,沿两介质分界面切向(x 方向)的能流不为零,且其振幅随透入深度 z 的增加按 $e^{-2\alpha z}$ 衰减. 这个能量是从哪里来的? 我们从一开始就假设两介质分界面就是无穷大平面,当电磁波刚到达分界面时,就有一部分能流透入疏介质建立电磁场. 当达到定态后,这个能流便从 $x=-\infty$ 处沿界面切向流向 $x=\infty$ 处.

那么,电磁波是不是将能流源源不断地沿 e_z 方向送到疏介质呢? (54)式表明,能流 S''_z 的角频率是 2ω,即半个周期能量由密介质进入疏介质,另半个周期由疏介质返回密介质. 也就是说,在开始的瞬间建立定态电磁场时有能量进入疏介质;在此之后,进入疏介质的平均能流为零,入射波的全部能量将全部返回密介质,这就是"全反射"的含义.

全反射现象有许多重要应用,特别是光纤通信(见第七章)及光子扫描隧道显微镜.

4. 光子扫描隧道显微镜(PSTM)

传统的光学显微镜不能分辨距离小于 $\lambda/2$ 的两个物体. 瑞利曾根据衍射理论提出一个公式

$$d = \frac{0.61\lambda}{n\sin\theta}, \tag{55}$$

称为瑞利判据. 这个判据指出,当光的波长为 λ,用折射率为 n、光圈的半张角为 θ 的镜头观察相距为 d 的两点时,仅当满足上式的情况下才能分辨它们. 对于高数值孔径镜头而言,其数值孔径 $n\sin\theta = 1.3\sim 1.5$,其分辨率的上限约为波长的一半.

随着科学技术向低维与介观尺度发展[①],为研究微观尺度的物理现象对显微术提出了更高的要求. 例如对纳米尺度发光,激光、量子线、量子点的结构与能谱特性,超高密度信息存储中的磁光性质,以及其他纳米尺度的结构与光谱性能的研究,都要求新一代的光学显微术具有更高的分辨率.

光子扫描隧道显微镜(PSTM)的分辨率远小于入射光的半波长,突破了光学显微镜的光学衍射极限. 光子扫描隧道显微镜的原理图如图 5.10 所示.[②]

我们知道,当光以大于临界角的入射角射到光密介质与光疏介质的分界面时,在光疏介质的一侧形成一个隐失波,其振幅随进入光疏介质的深度按指数率衰减. PSTM 用压电陶瓷扫描器控制的光学探针调节到样品表面隐失波穿透深度范围

① 某些特殊材料的晶体结构含有异向性的一维的线性链或二维的平面,这种材料称为低维度材料,许多低维度材料(如高温超导材料)具有非常奇特的性质.

介观是介于宏观与微观的意思,其研究对象在 1 nm~100 nm 的尺度范围.

② 白春礼编著. 1992. 扫描隧道显微术及其应用. 上海:上海科学技术出版社. 128.

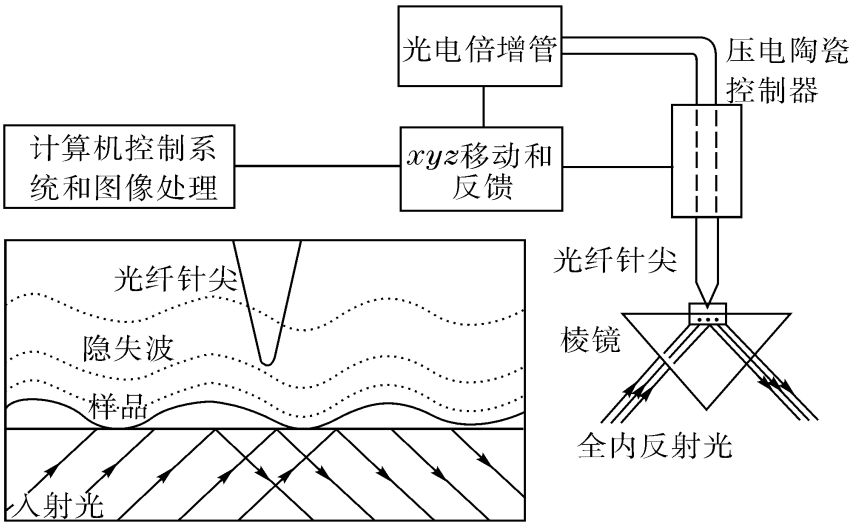


图 5.10

之内(见图5.10),入射光的一些光子就会穿过样品界面与光学探针之间的势垒,产生光子隧道效应[①].穿过势垒的光子经过光导纤维传送到光电倍增管并转换为电信号,当PSTM 用一管状压电陶瓷扫描器控制光学探针的针尖在样品表面扫描时,通过分析得到电信号,就可以获得样品表面的光显微图像和形貌像,目前它在切线方向的分辨率已小于0.1个波长.

习 题 5.2

1. 试由 $E_{1t}=E_{2t}$ 导出 $H_{1n}=H_{2n}$,由 $B_{1t}=B_{2t}$ 导出 $\varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n}$. 这里已利用 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$.

2. 试由(9)式证明(10)、(11)、(12)、(13)式.

3. 试由(21)式和(25)式导出(28)式,由(22)式和(26)式导出(31)式.

4. 试分别讨论S 波和P 波由疏介质入射到与密介质的分界面时,反射波相对入射波的位相跃变.

5. 设平面电磁波以入射角 $\theta=30°$ 从真空入射到与玻璃的平面分界面,已知玻璃的折射率为 $n=1.6$. 试回答:

(1) 反射波的波矢 k' 和折射波的波矢 k''?

(2) 在真空—玻璃的分界面上的任一点(如 o 点)上,反射波、折射波和入射波的位相是否相同?

(3) 若入射波为圆偏振波,问反射波与折射波是线偏振波、圆偏振波还是椭圆偏振波?

6. 已知 $\lambda=6.18\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$ 的光波以入射角 $\theta=60°$ 由水入射到空气-水的分界面上,求透射波的相速度 v_p 和穿透深度 δ.

7. 一平面电磁波以 $\theta=45°$ 从真空入射到 $n=\sqrt{2}$ 的介质,该电磁波为电矢量垂直于入射面的S 波,求反射系数 R_s 和透射系数 T_s.

8. 试证明在全反射现象中,隐失波的能流由(52)、(53)、(54)式表示.

---

① 粒子能穿透比它能量高的势垒的现象,称为隧道效应,参看:汪德新. 2003. 量子力学. 理论物理导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社. 151.

§ 5.3　平面电磁波在导体中的传播及其在导体界面上的反射与折射

导体与绝缘介质的差异在于导体有自由电子,当电磁波进入导体后必将引起传导电流,电场对传导电流做功使得电磁波的能量转化为焦耳热. 可以预料,在导体中传播的电磁波是一个衰减波.

本节首先根据导体中电荷、电流分布的特点得到导体中麦克斯韦方程组的特殊形式,进而导出单色电磁波在导体中的亥姆霍兹方程. 随后引入复介电常数 ε',复波数 K 和复波矢 $\boldsymbol{K}$,利用与绝缘介质中亥姆霍兹方程数学上的相似性,得到导体中亥姆霍兹方程的解. 在此基础上,引入导体中电磁波复波矢的实部 β 和虚部 α,并以单色平面电磁波从真空以 θ 角入射导体为例,给出电磁波在导体中传播的特征,进而解释了趋肤效应,并说明比值 $\sigma/\varepsilon\omega$ 是衡量该导体是不是良导体的判据. 最后,利用数学上的相似性,导出绝缘介质与导体分界面的菲涅耳公式,得到反射波、折射波与入射波的振幅比.

一、导体中的麦克斯韦方程组

为了从普遍的麦克斯韦方程组得到它在导体中的特殊形式,就要利用导体中的电荷、电流的两个分布规律:

(1) 自由电荷体密度[见§ 1.4 的(30)式]

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = \rho_f(0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}, \tag{1}$$

即导体中的电荷体密度将随时间按指数衰减. 导体的驰豫时间(即电荷体密度减少到 $\rho_f(0)$ 的 $1/e$ 所经历的时间)$\tau = \varepsilon/\sigma$ 分别为:

石墨　　$\tau = 3.69 \times 10^{-10}$ 秒,

铜　　$\tau = 1.55 \times 10^{-19}$ 秒.

这表明,良导体的内部不能堆积电荷,电荷只能分布在良导体的表面上. 本篇我们着重讨论良导体. 因此,在麦克斯韦方程组中,可取 $\rho_f(x,t) = 0$.

(2) 传导电流遵守欧姆定律

$$J_f = \sigma E. \tag{2}$$

现在,将(1)式,(2)式及 $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$ 代入普遍的麦克斯韦方程组,便可得到导体中的麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot H = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{6}$$

在§ 5.1 已指出,介质中的ε,μ与电磁波的频率有关.同样,在导体中也应先考虑单色电磁波的传播规律,再将不同频率的电磁场进行叠加即得总电磁场.

二、导体中单色电磁波的亥姆霍兹方程

单色电磁波的电磁场可表示为

$$E(x,t) = E(x)e^{-i\omega t}, \tag{7}$$

$$H(x,t) = H(x)e^{-i\omega t}. \tag{8}$$

将(7)式和(8)式代入麦克斯韦方程组,可得

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = i\omega\mu H, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot H = 0, \tag{11}$$

$$\nabla \times H = \sigma E - i\omega\varepsilon E = -i\omega\varepsilon' E. \tag{12}$$

式中

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \tag{13}$$

称为复介电常数.

同时,与绝缘介质中的波数$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$相应,引入复波数

$$K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)}, \tag{14}$$

这里引入复介电常数和复波数的目的,是为了让导体中的亥姆霍兹方程与绝缘介质中的亥姆霍兹方程具有相同的形式,从而可以用相同的方法来求解.

分别对(10)式和(12)式取旋度,利用矢量分析中的二阶导数公式和麦克韦方程$\nabla \cdot E = 0, \nabla \cdot H = 0$,即得导体中的亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + K^2)E = 0, \tag{15}$$

$$(\nabla^2 + K^2)H = 0. \tag{16}$$

三、亥姆霍兹方程的解及其物理意义

既然(15)式和(16)式与§ 5.1 的(28)式和(29)式具有相同的形式,可见只要用K代替§ 5.1 的(30)式中的k,即得(15)式和(16)式的解.

如果先求E后求H,可得

$$E(x,t) = E_0 e^{i(K\cdot x - \omega t)}, \tag{17}$$

$$H(x,t) = \frac{1}{\mu\omega}K \times E; \tag{18}$$

如果先求H后求E,则为

$$H(x,t) = H_0 e^{i(K\cdot x-\omega t)}, \tag{19}$$

$$E(x,t) = -\frac{1}{\varepsilon'\omega}K\times H. \tag{20}$$

与§ 5.1 不同的是,这里出现的复波数K 是复数,复波矢K 是复矢量.设

$$K = \beta + i\alpha, \tag{21}$$

复波矢K 的实部β 和虚部α的物理意义见后面的讨论.

将(21)式代入(17)式,可得

$$E(x,t) = E_0 e^{-\alpha\cdot x} e^{i(\beta\cdot x-\omega t)}, \tag{22}$$

这就是导体中亥姆霍兹方程的解,它的物理意义是明显的:

(1) 在导体中,电磁波的振幅为$E_0 e^{-\alpha\cdot x}$.这意味着,等幅面(在该平面上每一点电场的振幅相等)由$e^{-\alpha\cdot x} = C_1$(常数)确定,亦即由

$$\alpha\cdot x = C_2(\text{常数}) \tag{23}$$

确定.因为在与α垂直的平面上的任一点x(见图 5.11),均有

$$\alpha\cdot x = \alpha x\cos\theta = \alpha x_\alpha = C_2,$$

式中x_α是x 在α方向的投影:

$$x_\alpha = x\cos\theta.$$

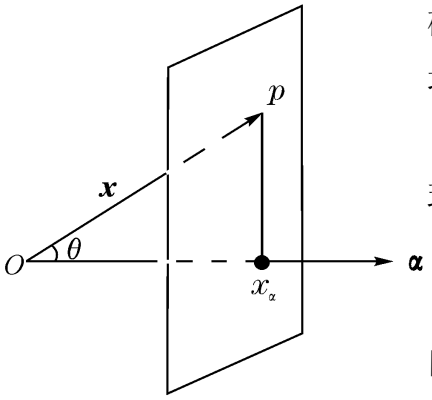


图5.11

这表明,α的方向就是单色平面波等幅面的法线方向.α的模反映电磁波进入导体随空间深度而衰减的物理量,$|\alpha| = \alpha$称为衰减常数.

(2) 在导体中,电磁波的相位为$\beta\cdot x-\omega t$.等相面由

$$\beta\cdot x-\omega t = C_3(\text{常数}) \tag{24}$$

确定,对于给定时刻,等相面由

$$\beta\cdot x = C_4(\text{常数})$$

确定.这表明,β 的方向就是单色平面电磁波等相面的法线方向,亦即波的传播方向.因此,导体中的复波矢K 的实部β 相当于介质中的波矢量k,$|\beta| = \beta$称为相位常数.

设β 的单位矢量为n,并记$n\cdot x = x_n$.现将等相面方程

$$\beta\cdot x-\omega t = \beta x_n-\omega t = \text{常数}$$

对t求导可得

$$\beta\frac{dx_n}{dt}-\omega = 0,$$

由此得单色平面电磁波在导体中的相速为

$$v_p = v_p n = \frac{dx_n}{dt}n = \frac{\omega}{\beta}n. \tag{25}$$

与§ 5.1 的(21)式$v_p=\frac{\omega}{k}n$相比较,可见导体中的相位常数β相当于绝缘介质中的波数k.

【例 1】 频率为ω的平面电磁波从真空以θ角入射到电导率为σ,磁导率为μ,介电常数为ε的导体,如图 5.12所示.求:

(1) 求复波矢$K=\beta+\mathrm{i}\alpha$;

(2) 求穿透深度(波幅降至1/e的传播距离)δ及相速v_p.

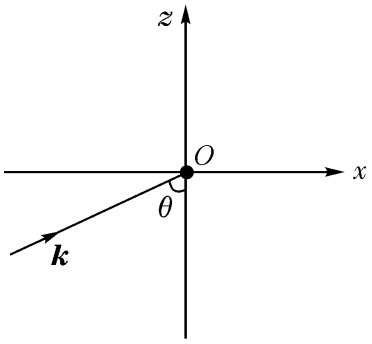


图 5.12

解 设真空与导体的分界面为$z=0$平面,真空中的波矢k位于xOz平面上.由于与§ 5.2 相应问题的数学形式相同,只要用导体中的复波数K和复波矢K代替§ 5.2 折射介质中的波数k''和波矢k''即可,由§ 5.1 的(11)和(12)式易见

$$K_x=k_x, \tag{26}$$

$$K_y=k_y=0. \tag{27}$$

将复波矢K及复波数K的定义式$K=\beta+\mathrm{i}\alpha$及$K=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}=\omega\sqrt{\mu(\varepsilon+\mathrm{i}\sigma'/\omega)}$联立,注意到$K\cdot K=K^2$,即有

$$(\beta+\mathrm{i}\alpha)\cdot(\beta+\mathrm{i}\alpha)=\omega^2\mu\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right),$$

$$\beta^2-\alpha^2+2\mathrm{i}\beta\cdot\alpha=\omega^2\mu\varepsilon+\mathrm{i}\omega\mu\sigma. \tag{28}$$

比较上式两边的实部与虚部,可得

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon, \tag{29}$$

$$\beta\cdot\alpha=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma. \tag{30}$$

由(21)式和(26)式得

$$\beta_x+\mathrm{i}\alpha_x=K_x=k_x=k\sin\theta=\frac{\omega}{c}\sin\theta,$$

即

$$\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta,\qquad \alpha_x=0. \tag{31}$$

由(21)式和(27)式得

$$\beta_y+\mathrm{i}\alpha_y=K_y=k_y=0,$$

即

$$\beta_y=0,\qquad \alpha_y=0. \tag{32}$$

将(31)式和(32)式代入(29)式和(30)式,得

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta+\beta_z^2\right)-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon, \tag{33}$$

$$\beta_z\alpha_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma. \tag{34}$$

这两个式子是关于β_z和α_z的代数方程组,将后式$\alpha_z=\omega\mu\sigma/2\beta_z$代入前式可得关于$\beta_z^2$的二次方程,解之得

$$\beta_z^2=\frac{1}{2}\left(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2}. \tag{35}$$

注意$\boldsymbol{\beta}=\beta\boldsymbol{e}_z$为实矢量,$\beta$为实数,已舍弃根式前的负号.将(35)式代入(33)式,得

$$\alpha_z^2=-\frac{1}{2}\left(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2}. \tag{36}$$

由此可见,复波矢K的实部$\boldsymbol{\beta}$与虚部$\boldsymbol{\alpha}$一般不同向:

$$\boldsymbol{\beta}=\beta_x\boldsymbol{e}_x+\beta_y\boldsymbol{e}_y+\beta_z\boldsymbol{e}_z=\frac{\omega}{c}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x+\beta_z\boldsymbol{e}_z, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha_x\boldsymbol{e}_x+\alpha_y\boldsymbol{e}_y+\alpha_z\boldsymbol{e}_z=\alpha_z\boldsymbol{e}_z, \tag{38}$$

(22)式已给出导体中平面电磁波的振幅为

$$E_0\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot x}=E_0\mathrm{e}^{-\alpha_z z}, \tag{39}$$

可见其穿透深度为

$$\delta=\frac{1}{\alpha_z}=\frac{1}{\alpha}. \tag{40}$$

导体中电磁波的相速度

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\omega}{\sqrt{\beta_x^2+\beta_z^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta+\beta_z^2}}, \tag{41}$$

式中β_z由(35)式求得.

讨论　在正入射($\theta=0$)时,$\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}$均沿$\boldsymbol{e}_z$方向,略去β_z和α_z的脚标,由(35)式和(36)式可得

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2}}, \tag{42}$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2}}, \tag{43}$$

由$\delta=\frac{1}{\alpha}$和(43)式可见,比值$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$的大小决定了电磁波在该导体中的穿透深度.对于交变电磁场,通常就以这个比值来衡量该导体是不是良导体.

对于不良导体$\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll1\right)$,利用$\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}$($x$为小量),(43)式可简化为

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[-1+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right]^{1/2}}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{44}$$

由于σ很小,故穿透深度$\delta=\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$很大.

对于良导体$\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1\right)$,易见(42)式和(43)式均可简化为

$$\alpha = \beta \approx \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \tag{45}$$

其穿透深度为

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \tag{46}$$

上式说明两个重要事实:

(1)在高频的情况下,电磁场及其在导体激发的高频电流只能集中在导体表面的一个薄层内,这种现象称为趋肤效应.

(2)在直流和低频时作为良导体的物质,在极高频的电磁场中,它就有可能不是良导体了.例如铜,对于短X 射线($\nu = 10^{22}$Hz)来说,$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\sim 10^{-2}\ll 1$,在这种情况下铜就不是良导体了,$X$ 射线在铜板上不仅不存在趋肤效应,而且还能穿透铜板了.

不难发现:

(1) $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$正好是复介电常数$\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}$的虚部与实部之比;

(2) $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$也是导体中传导电流$J_{\mathrm{f}} = \sigma E$ 与位移电流$J_{\mathrm{D}} = \frac{\partial D}{\partial t}$两者数值大小之比(见麦克斯韦方程$\nabla \times H = J_{\mathrm{f}} + \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma E - \mathrm{i}\omega\varepsilon E$);

(3) $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$也是良导体中单色电磁波磁场能量与电场能量之比.实际上将(45)式代入复波矢K,可得

$$K = \beta + \mathrm{i}\alpha = e_z(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = e_z\sqrt{\omega\mu\sigma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \tag{47}$$

由(18)式可得

$$H = \frac{1}{\omega\mu}K \times E = \frac{K}{\omega\mu}e_z \times E = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e_z \times E. \tag{48}$$

这表明,磁场与电场之间有$\pi/4$的相位差.此外,在良导体中,单色平面电磁波的磁场能量与电场能量之比为

$$\frac{W_{\mathrm{m}}}{W_{\mathrm{e}}} = \frac{\mu H^2}{\varepsilon E^2} = \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\left|\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e_z \times E\right|^2}{E^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1. \tag{49}$$

这是因为电场对传导电流作功(功率密度为$E\cdot J_{\mathrm{f}} = \sigma E^2$)使电场能量转化为焦耳热,并导致良导体中电磁波的能量,其中主要是磁场能量.

四、反射波、折射波与入射波的振幅比 反射系数与透射系数

菲涅耳公式给出了单色平面电磁波在两种绝缘介质分界面上反射波、折射波

与入射波振幅的比值.那么,在绝缘介质与导体分界面上怎样计算这个比值呢? 由于两者的数学形式完全相同,只要在菲涅耳公式和折射定律中用复波数K 和复介电常数ε'代替原先的波数k 和介电常数ε即可. 据此,§ 5.2 的(28)及(31)式便变换为

$$\frac{1+r_p}{1-r_p}=\frac{K''\cos\theta}{k\cos\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta''}, \tag{50}$$

$$\frac{1+r_s}{1-r_s}=\frac{k\cos\theta}{K''\cos\theta''}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta''}. \tag{51}$$

利用分、合比定理,可得振幅比

$$r_p=\frac{E'_{0p}}{E_{0p}}=\frac{\sqrt{\varepsilon'_2}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon'_2}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}=|r_p|e^{-i\delta_p}, \tag{52}$$

$$r_s=\frac{E'_{0s}}{E_{0s}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon'_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon'_2}\cos\theta''}=|r_s|e^{-i\delta_s}. \tag{53}$$

式中的θ''由折射定律

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta=\sqrt{\varepsilon'_2}\sin\theta'' \tag{54}$$

确定,由于$\sqrt{\varepsilon'_2}$为复数,故θ''也是复数,不是折射角. 折射角可由(37)式根据β 的方向来确定.

电磁波在金属表面反射后,其P 波与S 波将分别发生相位跃变δ_p 及δ_s,两者一般不相等. 因此,与入射面成某一夹角的线偏振波入射到金属表面上时,其反射波一般为椭圆偏振波.

P 波与S 波的反射系数,透射系数分别为

$$R_p=|r_p|^2,\qquad D_p=1-R_p=1-|r_p|^2, \tag{55}$$

$$R_s=|r_s|^2,\qquad D_s=1-R_s=1-|r_s|^2. \tag{56}$$

习　题　5.3

1. 试由麦克斯韦方程组导出H 与复波矢K,E 之间的关系,并以频率ω、介电常数ε、磁导率μ、电导率σ 表示折射率n.

2. 已知潜艇的天线在海面以下 700 m 处,海水的电导率为$\sigma=1(\Omega\cdot m)^{-1}$,问能否用 2MHz 的电磁波与之通信?

3. 设频率为 4MHz 的电磁波由空气正入射到铜板($\theta=0$),求该电磁波在铜中的穿透深度δ 和相速v.

4. 平面电磁波正入射到金属表面上,试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热.

§ 5.4　波包　群速与相速

前面三节讨论的是单色平面电磁波的传播,这是最基本也是最重要的特殊情形.实际上,我们遇到的电磁波都是不同频率的单色波叠加的结果,称为波包.即使平常所说的单色光源发出的光,也是由中心频率为 ω_0、频移为 $\pm\ \Delta\omega$ 的许多单色光叠加而成的,它们构成所谓的准单色波包.

本节先计算准单色波包的低频包络与高频相位因子,然后计算波包的群速度与相速度.

一、准单色波包的低频包络与高频相位因子

设 $u(x,t)$ 是电磁场的某一直角分量,由傅里叶分析可知,它等于一切单色波的叠加,即

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathrm{d}k, \tag{1}$$

式中

$$C(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

当 $\Delta\omega$ 很小(因而 Δk 很小)时,(1)式可改写为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2}C(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathrm{d}k. \tag{3}$$

因为 ω 是 k 的函数,可以在 ω_0 附近展开,令

$$k'=k-k_0, \tag{4}$$

并仅保留一阶小量,则有

$$\omega(k)\approx\omega_0+\left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}(k-k_0)=\omega_0+\omega'(k_0)k', \tag{5}$$

式中

$$\omega'(k_0)=\left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}. \tag{6}$$

将(4)式和(5)式代入(3)式,并注意到 $\mathrm{d}k=\mathrm{d}k'$,便有

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2}C(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0x+k'x-\omega_0t-\omega'(k_0)k't]}\mathrm{d}k'. \tag{7}$$

设 $C(k,t)$ 随 k 变化比较缓慢,可将 $C(k,t)$ 提出积分号外,并以 $C(k_0,t)$ 表示,得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2\pi}C(k_0,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k'x-\omega'(k_0)k't]}\mathrm{d}k'\\&=C(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega_0t)},\end{aligned} \tag{8}$$

式中

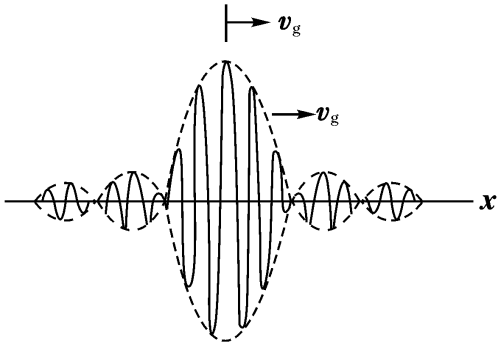


图 5.13

$$C(x,t)=\frac{1}{2\pi}C(k_0,t)\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2}e^{ik'[x-\omega'(k_0)t]}dk' \tag{9}$$

称为准单色波包的低频包络,$(k_0x-\omega_0t)$称为高频相位因子.

波包的瞬时图像如图 5.13 所示.

二、波包的群速度和相速度

等幅面的传播速度称为波包的群速度,可以通过计算包络振幅最大处(即波包中心处)的传播速度得到. 由于电磁波携带的能量是与振幅的平方成正比的,低频包络振幅最大处就是波包能量最集中的地方. 由此可见,波包的群速度代表了波包能量传递的速度. 通常利用光信号进行光速测量的实验测得的光信号速度就是光波能量传递的速度,即群速度.

为了计算波包的群速度,就要找到振幅包络因子取最大值的位置,即波包中心的位置 x_c. 令

$$\phi=\frac{1}{2}[x-\omega'(k_0)t]\Delta k, \tag{10}$$

由(9)式可见,准单色波的低频包络为

$$\begin{aligned}C(x,t)&=\frac{1}{2\pi}C(k_0,t)\int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2}e^{ik'[x-\omega'(k_0)t]}dk'\\&=\frac{1}{\pi}C(k_0,t)\frac{\sin[x-\omega'(k_0)t]\Delta k/2}{[x-\omega'(k_0)t]}\\&=\frac{1}{2\pi}C(k_0,t)\frac{\sin\phi}{\phi}\Delta k.\end{aligned} \tag{11}$$

代入(8)式,即得准单色波包

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}C(k_0,t)\frac{\sin\phi}{\phi}e^{i(k_0x-\omega_0t)}\Delta k. \tag{12}$$

由于 $\phi=0$ 时 $\sin\phi/\phi$ 取极大值,易见振幅包络的极大值(位于波包中心)满足条件

$$\phi=\frac{1}{2}[x-\omega'(k_0)t]\Delta k=0, \tag{13}$$

故波包中心 x_c 满足

$$x_c-\omega'(k_0)t=0. \tag{14}$$

既然波包中心移动的速度就是群速度,由上式对 t 求导可得

$$v_g=\frac{dx_c}{dt}=\omega'(k_0)=\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}. \tag{15}$$

对非色散介质,$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{\omega}{c}n$ 的折射率 n 与 ω 无关,群速度与相速度相等

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = \frac{d}{dk}\left(\frac{kc}{n}\right) = \frac{c}{n} = v_p. \tag{16}$$

对于色散介质,$k=\frac{\omega}{c}n$ 的 n 与 ω 有关,群速度不等于相速度

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} = \frac{d}{dk}\left(\frac{kc}{n}\right) = \frac{c}{n} + k\frac{d}{dk}\left(\frac{c}{n}\right)\Big|_{k=k_0}. \tag{17}$$

如果在 $\omega(k)$ 的展开式中计及二阶小量,则波包的形状将随时间而扩散.

习 题 5.4

1. 试证明群速与相速的几个等价的表达式.

	已知	表达式
(1)	$v_p = v_p(k)$	$v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$
(2)	$v_p = v_p(\lambda)$	$v_g = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$
(3)	$n = n(\lambda)$	$v_g = \frac{c}{n} + \frac{c\lambda}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$

2. 设波包由下述平面波叠加得到:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{i(kx-\omega t)}dk,$$

设 $t=0$,波包中心位于 $x_c=0$.

(1) 对真空中的电磁波,求相速 v_p 和群速 v_g;

(2) 对色散介质中的电磁波,求 t 时刻波包的中心位置 x_c 及波包的群速度 v_g.

*§ 5.5 电磁波在等离子体中的传播

等离子体是由大量自由电子、正离子和未被电离的中性粒子组成,并在宏观上保持电中性的电离气体. 它在固体、液体、气体之后被称为物质的第四态. 在宇宙中,99% 的物质是等离子体,等离子体分高温等离子体和低温等离子体两种:高温等离子体是电离度高,离子密度高的等离子体,如太阳这样的恒星就是高温等离子体,核爆炸的中心都充满高温等离子体;低温等离子体是密度稀薄的等离子体,稀薄的星云和星际物质由于辐射电离形成冷等离子体,地球大气中的电离层,日光灯和霓虹灯中稀薄的电离气体也是冷等离子体. 由于在天体物理与受控核聚变等领域内的广泛应用,等离子体物理成为近代物理学的一个重要分支.

本节首先介绍等离子体的基本特征,接着计算等离子体的振荡频率,最后讨论

电磁波在稀薄等离子体中的传播及其应用.

一、等离子体的基本特征——电荷屏蔽效应

设在热平衡条件下,将一个静止的点电荷Q_f置于等离子体内.取该点为坐标原点,其电荷密度为

$$\rho_f(x) = Q_f\delta^3(x). \tag{1}$$

在电荷Q_f的作用下,等离子体内的异号电荷便在它的周围形成电荷云,削弱了Q_f对远处其他电荷的作用,这个现象称为电荷屏蔽效应.

现在从泊松方程出发,计算电荷Q_f引入后等离子体的电势分布.

1. 边值问题

设正离子带电荷Ze,其密度作均匀分布$n_i(x) = n_{i0}$(常数);电子带电荷$-e$,其密度分布为$n_e(x)$,故泊松方程为

$$\nabla^2\varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}[Zen_i(x) - en_e(x) + Q_f\delta^3(x)]. \tag{2}$$

当电势$\varphi(x) = 0$时,由于等离子体宏观上的电中性,电子的密度亦作均匀分布$n_e(x) = n_{e0}$(常数);但是,引入点电荷Q_f后,在电势$\varphi(x)$的作用下,热平衡时电子的密度分布服从玻尔兹曼分布,即

$$n_e(x) = n_{e0}e^{e\varphi(x)/k_BT_e}, \tag{3}$$

式中k_B为玻尔兹曼常数,T_e为电子气体的温度.考虑到等离子体中电子温度较高$[e\varphi(x) \ll k_BT_e]$,在指数因子的泰勒展开式中仅保留一阶小量,则(3)式可简化为

$$n_e(x) = n_{e0}\left[1 + \frac{e\varphi(x)}{k_BT_e}\right]. \tag{4}$$

利用等离子体的电中性,可得

$$Zn_{i0} = n_{e0}. \tag{5}$$

将(4)式和(5)式代入(2)式,便有

$$\nabla^2\varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[-en_{e0}\frac{e\varphi(x)}{k_BT_e} + Q_f\delta^3(x)\right]. \tag{6}$$

取

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0k_BT_e}{n_{e0}e^2}}, \tag{7}$$

可得电势$\varphi(x)$遵守的方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_D^2}\right)\varphi(x) = -\frac{Q_f}{\varepsilon_0}\delta^3(x). \tag{8}$$

由于问题具有球对称性,采用球坐标系.这样,$\varphi(x)$可改写为$\varphi(R)$,因而∇^2只含对R的偏导.此外,我们感兴趣的是除坐标原点外空间的电势分布,利用$x \neq 0$时$\delta^3(x) = 0$可知,(8)式可改写为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\varphi(R)\right] - \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi(R) = 0, \qquad x \neq 0. \tag{9}$$

以 R^2 乘上式,再对方括号内的函数求导,得

$$R^2\varphi''(R)+2R\varphi'(R)-\frac{R^2}{\lambda_D^2}\varphi(R)=0. \tag{10}$$

边界条件为

$$\varphi(R)\Big|_{R\to 0}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{11}$$

$$\varphi(R)\Big|_{R\to\infty}=0. \tag{12}$$

这样,(10)式、(11)式和(12)式便构成一个边值问题.

2. 边值问题的解

以尝试解

$$\varphi(R)=\frac{1}{R}e^{CR} \tag{13}$$

代入方程(10),易得 $C^2=1/\lambda_D^2$,即

$$C=\pm\frac{1}{\lambda_D}, \tag{14}$$

由此得通解

$$\varphi(R)=\frac{A}{R}e^{R/\lambda_D}+\frac{B}{R}e^{-R/\lambda_D}. \tag{15}$$

将(15)式代入(12)式,得 $A=0$,即

$$\varphi(R)=\frac{B}{R}e^{-R/\lambda_D}. \tag{16}$$

将(16)式代入(11)式,得 $B=Q_f/4\pi\varepsilon_0$,故

$$\varphi(R)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}e^{-R/\lambda_D}. \tag{17}$$

上式给出了由异号电荷云包围的电荷 Q_f 所激发的电势,称为屏蔽库仑势,也称德拜势.它表明,与电荷 Q_f 距离 λ_D 处,德拜势衰减到相应的库仑势的 $1/e$,参数 λ_D 称为德拜长度,以 λ_D 为半径的球称为德拜球.在等离子体中,若两个带电粒子之间的距离小于 λ_D 时才需要考虑它们之间的相互作用.换句话说,带电粒子对德拜球外带电粒子的电磁相互作用可以忽略不计,因此德拜长度 λ_D 又称为屏蔽长度.

二、等离子体的振荡频率

在热平衡状态下,等离子体在宏观上是电中性的,在高频的情况下,惯性大的正离子跟不上高速变化的场,可以认为正离子保持静止状态.当电子受到扰动离开原来的平衡位置时,就会出现把电子拉回原来位置的电场 E_i.但电子运动的惯性又势必使电子越过平衡位置而来回运动,从而形成等离子体振荡.

电子的质量为 m,电子流体的速度为 $\boldsymbol{v}(x,t)$,其运动遵守如下几个方程:

首先,电子流体的 $\rho_e(x,t)=-en_e(x,t)$, $J_e(x,t)=-en_e(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)$,它们遵守电荷守恒定律.由

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot J_e = 0, \tag{18}$$

得

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{v}) = 0. \tag{19}$$

第二,电子流体在电场作用下的运动方程为牛顿方程

$$m n_e \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e} n_e E_i, \tag{20}$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial \boldsymbol{v}(x,t)}{\partial x_k} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k (\nabla \boldsymbol{v})_k = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \tag{21}$$

可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{e}}{m} E_i. \tag{22}$$

第三,由于电场E_i是由于电子偏离平衡位置所引起的,由麦克斯韦方程可知电场的散度为

$$\nabla \cdot E_i = \frac{1}{\varepsilon_0}(Z\mathrm{e}n_i - \mathrm{e}n_e). \tag{23}$$

设$n_e(x,t)$相对n_{e0}的偏离值为$n_1(x,t)$,则

$$n_e(x,t) = n_{e0} + n_1(x,t). \tag{24}$$

将宏观电中性的条件$Z\mathrm{e}n_{i0} = \mathrm{e}n_{e0}$及上式代入(23)式,可得

$$\nabla \cdot E_i = -\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_0} n_1. \tag{25}$$

对于小振幅的振荡来说,$n_1(\boldsymbol{x},t)$,$\boldsymbol{v}(x,t)$,$E_i(x,t)$都是小量.考虑到n_{e0}为常数,并在(22)式中略去二阶小量,则(19)式和(22)式可分别简化为

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{e}}{m} E_i. \tag{27}$$

将(27)式求散度后与(25)式联立,得

$$\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{e}}{m} \nabla \cdot E_i = \frac{\mathrm{e}^2}{\varepsilon_0 m} n_1. \tag{28}$$

将(26)式对t求偏导后与(28)式联立,得

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{n_{e0}\mathrm{e}^2}{\varepsilon_0 m} n_1 = 0. \tag{29}$$

令

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_{e0}\mathrm{e}^2}{\varepsilon_0 m}}, \tag{30}$$

方程可简写为

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_1 = 0. \tag{31}$$

其解为

$$n_1(t) = n_1(0)e^{-i\omega_p t}, \tag{32}$$

式中的 $\omega_p = \sqrt{n_{e0}e^2/\varepsilon_0 m}$ 就是 $n_1(t)$ 的振荡频率，由(25)式及(27)式易见，E_i 和 $\boldsymbol{v}$ 也将以频率 ω_p 振荡，故称 ω_p 为等离子体的振荡频率.

如果考虑热压强作用，电子等离子体振荡将在空间中传播而形成等离子体波[①].

三、电磁波在稀薄等离子体中的传播

我们知道，在地球上空 100 千米到 500 千米处，由于太阳辐射和其他宇宙射线的影响，使大气层成为稀薄的等离子体，称为电离层. 地面上远距离的短波通信，就是依靠电离层对无线电波的反射作用来实现的.

1. 等离子体的等效电导率 σ_e

为简单起见，将等离子体看做稀薄的各向同性的均匀介质，且采用近似 $\mu \approx \mu_0$，$\varepsilon \approx \varepsilon_0$.

设入射的电磁波是频率为 ω 的单色波

$$E_e(x,t) = E_e(x)e^{-i\omega t}. \tag{33}$$

由于电子运动的速度远小于真空中的光速，而平面电磁波中电场振幅为磁场振幅的 c 倍，故电场对电子作用力 $|-eE|$ 远大于磁场对电子的作用力 $|-e\boldsymbol{v}\times B|$. 略去磁场对电子的作用，电子的牛顿方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -eE, \tag{34}$$

式中的 E 包括由于电子偏离平衡位置引起的 E_i 和电磁波的电场 E_e.

电子流体运动形成的电流密度为

$$J_f = -n_{e0}e\boldsymbol{v}. \tag{35}$$

在频率为 ω 的电磁波作用下，电流也必然以频率 ω 变化

$$J_f = J_{f0}e^{-i\omega t}. \tag{36}$$

对时间 t 求导，得

$$\dot{J}_f = -i\omega J_{f0}e^{-i\omega t} = -i\omega J_f. \tag{37}$$

将(35)式代入上式后与(34)式联立，即有

$$J_f = \frac{i}{\omega}\dot{J}_f = -\frac{in_{e0}e}{\omega}\dot{\boldsymbol{v}} = i\frac{n_{e0}e^2}{m\omega}E. \tag{38}$$

令

$$\sigma_e = i\frac{n_{e0}e^2}{m\omega} = \frac{n_{e0}e^2}{m\omega}e^{i\frac{\pi}{2}}, \tag{39}$$

---

① 蔡圣善，朱耘，徐建军编著. 2002. 电动力学. 第二版. 北京：高等教育出版社. 251~ 253.

则有

$$J_f = \sigma_c E. \tag{40}$$

将上式与欧姆定律比较,可知等离子体的等效电导率 σ_c 为纯虚数. 由(39)式可见,电流与电场的相位差为 $\pi/2$,故无焦耳热损耗($E \cdot J_f = 0$).

2. 等离子体内电磁波的波数 k

仿照§ 5.3,在等离子体中引入等效介电常数

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}, \tag{41}$$

类似地,可求得等离子体内电磁波的波数

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0\left(\varepsilon_0 + \mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}\right)} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\left(1 - \frac{n_{e0}e^2}{m\varepsilon_0\omega^2}\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \tag{42}$$

3. 电磁波在等离子体中的相速和群速

利用 $\omega = \omega(k)$ 可以证明,电磁波在等离子体内的相速与群速分别为(见本节习题第 1 题)

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}, \tag{43}$$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2}{v_p}. \tag{44}$$

4. 截止频率与短波通信

将电磁波在等离子体中的波数

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{45}$$

代入电磁波的电场公式易见:

(1)当 ω(入射电磁波的频率)$> \omega_p$(等离子体的振荡频率)时,由于 k 为实数,电磁波可以在等离体中传播;

(2)当 $\omega < \omega_p$ 时,k 为纯虚数,令 $k = \mathrm{i}\alpha$,则电磁波将随透入深度的增加而衰减,因 而不能在等离子体中传播. 人们把等离子体频率 ω_p 称为入射电磁波的截止频率,低于截止频率的电磁波将被反射.

电离层中等离子体的频率约为 $\nu_p \approx 10$ MHz. 如果按上述讨论,地面短波通信的 ν 应小于 10 MHz 才能反射回地面. 但是,实际上电离层中电子的浓度是沿高度而变,若将其浓度分布看做是分层均匀的,并且认为该波段的无线电波的传播遵守几何光学定律,则射入电离层的无线电波将不是沿直线传播,它将连续折射而近似沿一光滑曲线传播. 特别是,在相同电子浓度分布的条件下,入射的角度越大,越容易被电离层反射,即允许通过电离层反射传递的电磁波频率也越高. 此外,电磁波反射的能力还与入射点的电子浓度有关,浓度越大,被反射的电磁波频率也可以越高. 考虑到这些因素,地面通信可用的最高频率约为 30 MHz 左右. 反之,地球与卫

星之间的无线电通信,其频率则要高于30 MHz 才能穿透电离层达到卫星.

电视的频率属于超短波,其$\omega > \omega_p$,因此它不是利用电离层的反射来传递的. 由于地球的表面可以近似看做球面,在地面上按直线传播只能将电视传递到几十千米的范围,为了增大电视覆盖的范围,除了建设尽可能高的电视塔外,最好的方法就是利用同步通信卫星转播.

习 题 5.5

1. 试导出电磁波在等离子体中的相速v_p、群速v_g及等离子体的折射率n,其相速、群速与真空中光速c有何关系?

第六章　有界空间中的微波

本章讨论微波(高频电磁波)在以理想导体为边界的有界空间中的行为.随着电磁波频率的增高,电磁能的传输线及谐振器的结构都发生了质的变化.本章着重介绍微波在波导管和谐振腔中的传播和驻留.

本章通过用分离变量法求解亥姆霍兹方程的定解问题,分别研究矩形金属波导管中的电磁导波和矩形金属谐振腔中的电磁驻波.它们在雷达与微波通信等近代技术中扮演着重要角色.

§ 6.1　矩形金属波导管中的微波

电磁能量的定向传输具有多种方式,最常见的是平行双线传输.频率为50Hz的生产和生活用电大都采用这种方式.但是,如果要传输频率较高的电流时,由于辐射损耗严重(辐射功率正比于频率的四次方,见§ 11.3),人们改用同轴线传输,同轴线是由圆形的金属网套和绝缘介质包裹着位于轴心的导线构成.金属网套的屏蔽作用既防止了辐射损失,又克服了外界信号对传输信号的干扰.同轴线通常在分米波段使用,但到了厘米波段(即微波频率$\nu = 10^{9} \sim 10^{11}\mathrm{Hz}$),同轴线也不合适了.由于趋肤效应随着频率的增大越来越显著,电流通过导线的有效截面减少,电阻增大,导致焦耳热损耗增加;此外,支持轴心导线的介质极化损耗也随频率的增大而加剧.于是人们采用波导管取代同轴线.波导管是一根空心(或填以绝缘介质)的金属管,最常见的是矩形波导管和圆柱形波导管.如果按照电路的理论,导线应该一来一去,似乎一根空心金属管不能传输电磁能量.此时我们必须采用“场”的观点来理解.试想,电磁波既能在真空中传播,当然也能在波导管中传播,只不过现在将电磁波限制在管中而已.实际上,“场”的理论是更本质的,“路”的理论只是一种简化和近似.

目前波导管已广泛应用在远距离通信的微波中继站和雷达系统中,它已成为微波通信的重要器件.

本节首先提出波导管内电磁场的定解问题,进而求出满足亥姆霍兹方程、麦克

斯韦方程组及边界条件的电磁场,随后在证明波导管内横电波(TE 波)和横磁波(TM 波)能传播而横电磁波(TEM 波)不能传播的基础上,给出两者的电磁场结构.最后讨论截止频率、群速、相速以及导波的激励方式等问题.

一、波导管中电磁导波的定解问题

矩形波导管如图 6.1 所示.设波导管的管壁为理想导体,其电导率 $\sigma\to\infty$,管内为绝缘介质(或真空)[①].为方便起见,以 n 表示由管壁指向管内的法向单位矢量,理想导体中场量的脚标为 1,管内绝缘介质(或真空)中场量的脚标为 2.

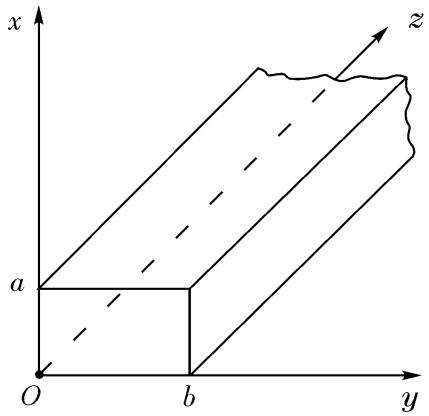


图 6.1

对于理想导体,电磁波的穿透深度[见§ 5.3 的(46)式]为

$$\delta=\lim_{\sigma\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=0. \tag{1}$$

这表明,在理想导体中电磁场场量

$$E_1=0,\quad D_1=0,\quad B_1=0,\quad H_1=0. \tag{2}$$

因而,在不致引起误会的地方,可将绝缘介质中电磁场场量的脚标 2 略去.

为了确定波导管内的电磁场,先给出电磁场的定解问题.

1. 泛定方程

若先求电场后求磁场,介质中电磁场满足亥姆霍兹方程及麦克斯韦方程组

$$\nabla^2E+k^2E=0, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot E=0, \tag{4}$$

$$B=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times E. \tag{5}$$

2. 边界条件

由普遍的电磁场边值关系(见下面四式的左边),利用(2)式,可得管内电磁场的边界条件(见下面四式的右边)

$$n\times(E_2-E_1)=0\longrightarrow n\times E=0, \tag{6}$$

$$n\cdot(B_2-B_1)=0\longrightarrow n\cdot B=0, \tag{7}$$

$$n\times(H_2-H_1)=\alpha\longrightarrow n\times H=\alpha, \tag{8}$$

$$n\cdot(D_2-D_1)=\sigma_f\longrightarrow n\cdot D=\sigma_f. \tag{9}$$

在上面四式中,(8)式和(9)式的作用是在求得电磁场后,用来计算波导管管壁上的

① 理论分析通常都将金属管壁作为理想导体处理,对于实际问题再做有限电导率的修正,请参看:[美]劳兰 P,考森 DR 著,陈成钧译.1980.电磁场与电磁波.北京:人民教育出版社.404~407.

电流和电荷分布. 而在求解管内电场时,起作用的是(6)式,以及管内电场必须遵守的(4)式. 将这两个公式应用到波导管的边界上,得到两个更实用的边界条件,即

①在边界上,电场的切向分量为零:

$$E_t = 0; \tag{10}$$

②在边界上,电场的法向分量沿法向无变化:

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0. \tag{11}$$

证　将边界上介质一侧的电场E 分解为法向分量与切向分量之和,即

$$E = E_n n + E_t t, \tag{12}$$

将上式代入(6)式,并令 $b = n \times t$,则有

$$0 = n \times (E_n n + E_t t) = E_t b.$$

由此得$E_t = 0$,即(10)式.

既然,边界上介质一侧电场的切向分量均为零,就意味着边界上的E_t 沿边界的切向也没有变化

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = 0. \tag{13}$$

将(12)式代入(4)式,注意到n 和 t 为边界上的单位矢量(散度为零),再利用(13)式可得

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot E &= \nabla \cdot (E_n n) + \nabla \cdot (E_t t) = n \cdot \nabla E_n + t \cdot \nabla E_t \\ &= \frac{\partial E_n}{\partial n} + \frac{\partial E_t}{\partial t} = \frac{\partial E_n}{\partial n}, \end{aligned}$$

这就是(11)式.

二、电磁导波的电磁场结构

1. 通解的形式

我们研究的是沿波导管管轴 z 方向传播的电磁波,其电场应具有如下形式

$$E(x,t) = E(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \tag{14}$$

其振幅应与z 无关,只不过在z 不同的地方,$E(x,t)$的相位不同而已. 将上式代入亥姆霍兹方程,可得

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^2 E + k^2 E &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \right] E(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \end{aligned} \tag{15}$$

由于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$不恒为零,因而

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_x^2 + k_y^2) \right] E(x,y) = 0, \tag{16}$$

这里已令

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{17}$$

这样,(16)式与(10)式、(11)式就构成三维亥姆霍兹方程的本征值问题,$E(x,y)$是本征值k_x和k_y的本征函数.

利用分离变量法可求得(见本节习题第1题)

$$E_i(x,y) = (C_1\cos k_x x + D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y + D_2\sin k_y y), \quad i = x,y,z. \tag{18}$$

当然,当i分别取x,y,z时,C_1,D_1,C_2,D_2的取值也不同. 为书写简单,不再给这些常数加附标i.

2. 由边界条件定系数得本征值和本征函数

现在以$E_x(x,y)$为例子确定系数,随后找出规律,即得$E_y(x,y)$及$E_z(x,y)$.

①在$x=0$平面,E_x为法向分量,故

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{19}$$

将(18)式代入上式,可证$D_1=0$,由此得

$$E_x(x,y) = C_1\cos k_x x(C_2\cos k_y y + D_2\sin k_y y). \tag{20}$$

②在$y=0$平面,E_x为切向分量,故

$$\left.E_x\right|_{y=0} = 0, \tag{21}$$

将(20)式代入上式,可证$C_2=0$,并记$C_1D_2=A_1$,便有

$$E_x(x,y) = A_1\cos k_x x\sin k_y y. \tag{22}$$

由上述推导过程,可得$E_i(x,y)$表达式的规律(表6.1).

表6.1

E_i	在$x=0$平面	在$y=0$平面
E_x	是法向分量,含$\cos k_x x$因子	是切向分量,含$\sin k_y y$因子
E_y	是切向分量,含$\sin k_x x$因子	是法向分量,含$\cos k_y y$因子
E_z	是切向分量,含$\sin k_x x$因子	是切向分量,含$\sin k_y y$因子

由此得

$$E_y(x,y) = A_2\sin k_x x\cos k_y y, \tag{23}$$

$$E_z(x,y) = A_3\sin k_x x\sin k_y y. \tag{24}$$

现在,利用另外两个边界条件确定本征值k_x和k_y.

③在$x=a$平面,E_x是法向分量,由

$$0 = \left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=a} = -A_1k_x\sin k_x a\sin k_y y$$

及$\sin k_y y$不恒为零可得$\sin k_x a=0$,即

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0,1,2,\cdots. \tag{25}$$

④在 $y = b$ 平面，E_x 是切向分量，由

$$0 = E_x\Big|_{y=b} = A_1 \cos k_x x \sin k_y b$$

及 $\cos k_x x$ 不恒为零可得 $\sin k_y b = 0$，即

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 0,1,2,\cdots. \tag{26}$$

(25)式及(26)式表明，只有当 k_x 与 k_y 取这些特定值(本征值)时，(22)~ (24)式才是方程的解. 将(22)~ (24)式代入(14)式，即得

$$E_x(x,t) = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}, \tag{27}$$

$$E_y(x,t) = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}, \tag{28}$$

$$E_z(x,t) = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{29}$$

这表明，场沿 z 方向是行波(沿 z 方向传播)，沿 x，y 方向是驻波.

3. 对于每一组本征值 (k_x, k_y)，即对于每一组 (m, n)，仅有两个独立的模式(也称波型或波模)

证　管内的电场满足 $\nabla \cdot E = 0$，故

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot E &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= (-A_1 k_x - A_2 k_y + iA_3 k_z) \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}, \end{aligned}$$

由于 $\sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$ 不恒为零，故

$$A_1 k_x + A_2 k_y - iA_3 k_z = 0, \tag{30}$$

这表明，A_1，A_2，A_3 仅有两个是独立的. 由(27)~ (29)式可见，当 k_x，k_y，k_z，ω 给定时，E 就由 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 确定. 如果有两个独立的模式 E' 和 E''，它们分别决定于 $\{A'_1, A'_2, A'_3\}$ 和 $\{A''_1, A''_2, A''_3\}$. 容易证明，对于能在波导管中传输的任意模式 E，均为 E' 与 E'' 的线性叠加.

4. 不存在横电磁波(TEM 波)

在无界空间传播的电磁波是横波，它的 E 和 H 与传播方向 k 垂直. 由于 E 和 B 的纵向分量为零，故称为横电磁波.

但是，在波导管中，不存在横电磁波. 换句话说：电场与磁场的纵向分量不能同时为零. 证明的思路是这样的：设沿 z 轴方向传播的电磁波为

$$E(x,t) = E(x,y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \tag{31}$$

$$H(x,t) = H(x,y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \tag{32}$$

将上两式代入麦克斯韦方程组(注意波导管内 $\rho_f = 0$，$J_f = 0$)，可得

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = i\omega\mu H, \tag{33}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} = -i\omega\varepsilon E. \tag{34}$$

写出它的六个分量式,用E_z及H_z表示E_x,E_y,H_x,H_y为(见本节习题第2题)

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{i}(k^2 - k_z^2)}\left(-\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \tag{35}$$

$$H_y = \frac{1}{\mathrm{i}(k^2 - k_z^2)}\left(-k_z\frac{\partial H_z}{\partial y} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \tag{36}$$

$$E_y = \frac{1}{\mathrm{i}(k^2 - k_z^2)}\left(\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x} - k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \tag{37}$$

$$H_x = \frac{1}{\mathrm{i}(k^2 - k_z^2)}\left(-k_z\frac{\partial H_z}{\partial x} + \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right). \tag{38}$$

这表明,若电磁场没有纵向分量(即$E_z = 0, H_z = 0$),则这样的电磁场不存在(即$E = 0, H = 0$).

5. 横磁波(TM 波)的电磁场结构

横磁波的条件为

$$H_z = 0, \tag{39}$$

电场的纵向分量[见(14)式及(24)式]为

$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{40}$$

将H_z,E_z以及$k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$代入(35)~(38)式,可得

$$E_x = \frac{\mathrm{i}A_3 k_z k_x}{k_x^2 + k_y^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{41}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}A_3 k_z k_y}{k_x^2 + k_y^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{42}$$

$$H_x = -\frac{\mathrm{i}A_3 \omega\varepsilon k_y}{k_x^2 + k_y^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{43}$$

$$H_y = \frac{\mathrm{i}A_3 \omega\varepsilon k_x}{k_x^2 + k_y^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \tag{44}$$

这组公式给出了可以在矩形波导管内存在的横磁波,与$k_x = m\pi/a$及$k_y = n\pi/b$相应的横磁波记作TM_{mn}.从这组公式中不难看出,TM 波中只要m与n有一个为零,则电磁场均为零.换句话说,TM_{m0}和TM_{0n}模式是不存在的,横磁波的最低模式是TM_{11}.

6. 横电波(TE 波)的电磁场结构

横电波的条件是

$$E_z = 0, \tag{45}$$

为了求得H_z,可以将(27)式和(28)式代入

$$H_z = \frac{B_z}{\mu} = -\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}(\nabla \times E)_z = -\frac{\mathrm{i}}{\mu\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right), \tag{46}$$

再用A表示有关常数,则有

$$H_z = A\cos k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \tag{47}$$

将(45)式和(47)式代入(35)~ (38)式,可得

$$E_x = -\frac{\mathrm{i}A\mu\omega k_y}{k_x^2 + k_y^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{48}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}A\mu\omega k_x}{k_x^2 + k_y^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{49}$$

$$H_x = -\frac{\mathrm{i}A k_z k_x}{k_x^2 + k_y^2}\sin k_x x \cos k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{50}$$

$$H_y = -\frac{\mathrm{i}A k_z k_y}{k_x^2 + k_y^2}\cos k_x x \sin k_y y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \tag{51}$$

这组公式给出了可以在矩形波导管内存在的横电波. 对于(m, n)模式,用TE_{mn}表示. 不难看出TE_{m0}或TE_{0n}模式的电磁波可以在矩形波导管中存在.

【例 1】 试求TE_{10}波的电磁场与管壁电流.

解 由TE_{10}波的$m = 1, n = 0$,得

$$k_x = \frac{m\pi}{a} = \frac{\pi}{a}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b} = 0, \qquad k_x^2 + k_y^2 = \frac{\pi^2}{a^2}. \tag{52}$$

将上式代入(47)~ (51)式,得

$$H_z = A\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{53}$$

$$H_x = -\frac{\mathrm{i}A k_z a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{54}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}A\mu\omega a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{55}$$

$$H_y = 0, \qquad E_x = 0, \qquad E_z = 0(\text{横电波}). \tag{56}$$

由$k_x = \frac{\pi}{a}$,波导管沿x方向的长度为$\Delta x = a$,故H_z, H_x, E_y中的正余弦函数的宗量$\frac{\pi x}{a}$在$x = 0$到a的范围内共改变了$\frac{\pi}{a}\Delta x = \pi$. 换句话说,电磁场沿$x$方向的驻波在此范围内有半个周期的变化. 如果略去$H_z, H_x, E_y$振幅中的常数因子,它们与$x$的函数曲线分别如图 6. 2(a),(b),(c)所示.

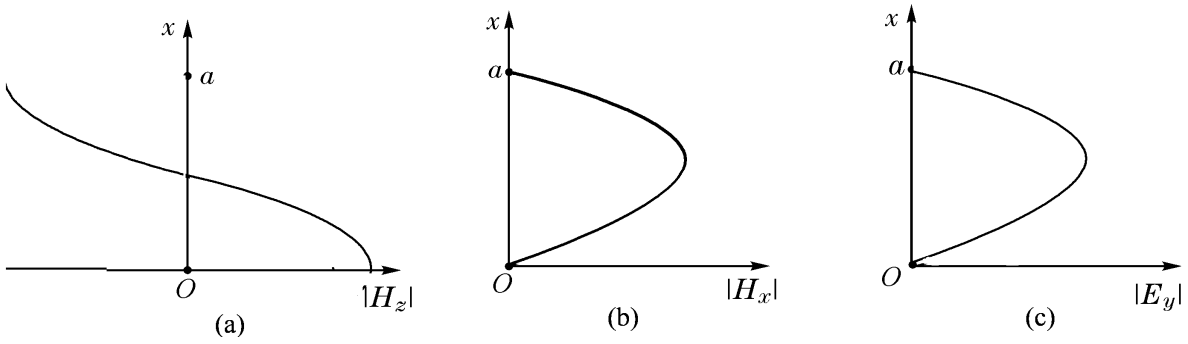


图 6. 2

由 $k_y = \frac{n\pi}{b} = 0$,可见波导管中电磁场沿 y 方向没有变化.

TE_{10}波电磁场的电力线,磁力线和管壁电流的示意图分别如图 6.3(a),(b)所示.

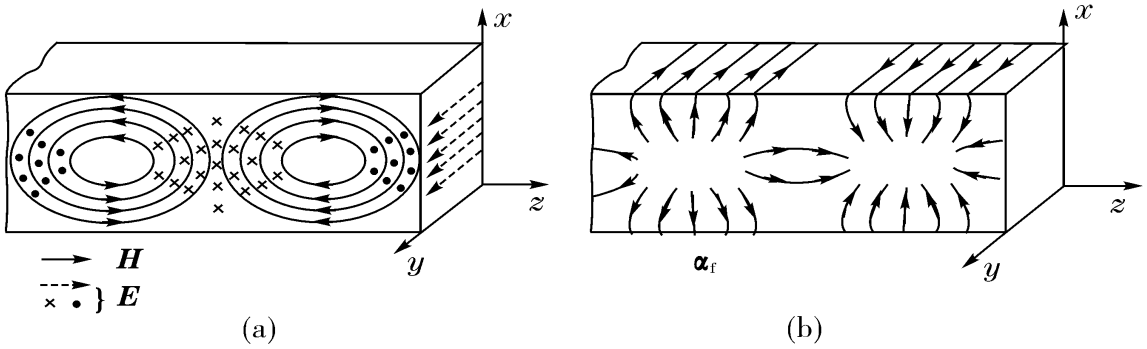


图 6.3

面电流[见图 6.3(b)]由(8)式给出:$\boldsymbol{\alpha} = n \times H$.注意到界面法线单位矢量 n 的正向是由界面指向波导管内,读者不难根据 $n \times H$ 定出管壁上任一点面电流密度$\boldsymbol{\alpha}_f$的分布.

三、截止频率 ω_c 和截止波长 λ_c 导波波长 λ_g

将(25),(26)式代入(17)式,可得波源的波数 k 与本征值 $k_x = \frac{m\pi}{a}$,$k_y = \frac{n\pi}{b}$的关系:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2. \tag{57}$$

式中波源的波数 k 取决于波源的频率 ω 及波导管内介质的性质 $\mu\varepsilon$,即

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega. \tag{58}$$

由于波导管中电磁波的相位为 $k_z z - \omega t$,由(57)式可得波矢沿 z 方向的分量为

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \tag{59}$$

式中

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{60}$$

对于给定的(m, n)型波,存在如下两种可能性:

(1)若 $k < k_c$,即$\sqrt{\mu\varepsilon}\omega < \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$,由(59)式易见

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = i\alpha \tag{61}$$

为纯虚数,$e^{i(k_z z - \omega t)} = e^{-\alpha z} e^{-i\omega t}$.波幅将沿 z 轴按指数衰减而不能沿波导管传播,即使激发出来也很快消失掉,故称为消失波.

与 $k = k_c$(即 $k_z = 0$)相应的频率和波长分别为

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \tag{62}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \tag{63}$$

它们分别称为截止频率和截止波长.

(2) 若 $k > k_c$,则 k_z 为实数. 这时电磁波将沿波导管的轴向传播,称为导行电磁波,简称导波. 导波的波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \tag{64}$$

它依赖于波源的波长 λ 和截止波长 λ_c.

【例 2】 试求 TE_{10} 波的截止频率 $\omega_{c,10}$ 和截止波长 $\lambda_{c,10}$.

解 将 $m = 1, n = 0$ 代入(62)及(63)式,并利用相速 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$,可得

$$\omega_{c,10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{65}$$

$$\lambda_{c,10} = \frac{v}{\nu_{c,10}} = \frac{2\pi v}{\omega_{c,10}} = 2a, \tag{66}$$

即截止波长与波导管尺寸同数量级.

实际应用上,对于给定的波源频率 ω,适当选择波导的尺寸 a 和 b,使波导只能通过 TE_{10} 波,而不让其他波型通过. 这样,波导管还起着滤波器的作用. 其方法是仅让一种波型的 $k_z^2 > 0$,其他波型的 $k_z^2 < 0$ 即可.

【例3】 已知波导管的 $2b > a > b$,问如何选择波源的频率 ω,才能使波导管仅让 TE_{10} 波通过.

解 由(59)式易见:

(1)让 TE_{10} 波通过的条件为

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 > 0, \qquad \text{即 } \omega > \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}; \tag{67}$$

(2)让 TE_{01} 波不能通过的条件为

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 < 0, \qquad \text{即 } \omega < \frac{\pi}{b\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{68}$$

选择波源频率满足

$$\frac{\pi}{b\sqrt{\mu\varepsilon}} > \omega > \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{69}$$

则可仅让 TE_{10} 波通过. 读者容易验证,由于 $a < 2b$,故 TE_{20} 波的 k_z^2 也小于零. 其他如 TE_{11} 波,TE_{02} 波也将得到相同的结果.

四、导波的群速度 v_g 和相速度 v_p

由于波源激发的波不是严格的单色波,因而导波也是由含有微小频差的单色波叠加成的波包.现在计算波包在波导管中传播时的群速和相速.

§ 5.4 的(15)式已给出群速的计算公式

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{70}$$

因为波导管中的电磁波是沿 z 轴传播的,故上式中的波数 k 应换为 k_z,即

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z}. \tag{71}$$

为了求得波导管中 ω 与 k_z 的函数关系,只要将 $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$(注意,这里的 k 和 v 是电磁波在无界介质中的波数和相速)与 $k=\sqrt{k_c^2+k_z^2}$(式中 $k_c=\omega/v$)联立,即得

$$\omega = kv = v\sqrt{k_c^2+k_z^2} = \sqrt{\omega_c^2+v^2k_z^2}, \tag{72}$$

代入(71)式便可求得导波的群速

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d}{dk_z}\sqrt{\omega_c^2+v^2k_z^2} = \frac{v^2k_z}{\omega}. \tag{73}$$

这表明,导波的群速不仅与介质的性质有关(由 v 反映),还取决于波导管的边界条件(由 $k_z=\sqrt{k^2-k_c^2}$,$k_c=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ 反映),它与电磁波在无界透明介质中传播时的色散现象是本质上不同的物理过程.

将相速 $v_p=\omega/k_z$ 代入上式,即得

$$v_g v_p = v^2. \tag{74}$$

若波导管内为真空,群速和相速可改写为

$$v_g = \frac{k_z c^2}{\omega} = \frac{k_z}{k}c < c, \qquad v_p = \frac{c^2}{v_g} > c. \tag{75}$$

导波的相速大于真空中的光速 c 并没有违反狭义相对论的基本原理(参看§ 8.1),因为它反映的并不是物质(实物与场)的运动速度,而只是相位传播的速度.为了得到更形象的认识,今以(53)式为例,将 H_z 分解为两列平面波的叠加,利用欧拉公式 $\cos\frac{\pi x}{a}=\frac{1}{2}(e^{i\pi x/a}+e^{-i\pi x/a})$,可得

$$H_z = A\cos\frac{\pi x}{a}e^{i(k_z z-\omega t)} = \frac{A}{2}\left[e^{i(k_z z+\frac{\pi}{a}x-\omega t)}+e^{i(k_z z-\frac{\pi}{a}x-\omega t)}\right]. \tag{76}$$

第一列波的波矢 k' 与第二列波的波矢 k'' 分别为

$$k' = \frac{\pi}{a}e_x + k_z e_z, \qquad k'' = -\frac{\pi}{a}e_x + k_z e_z. \tag{77}$$

它们与 x 轴的夹角分别为 ϕ 与 $\pi-\phi$(如图 6.4)所示,且

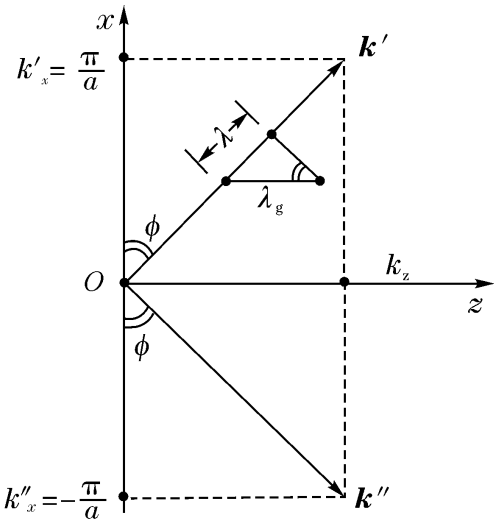


图 6.4

$$\sin\phi=\frac{k_z}{k}=\frac{k_z}{\sqrt{(\pi/a)^2+k_z^2}},\tag{78}$$

式中它们的模 $k'=k''$(记作 k)可由(77)式求得.

沿波导管轴向传播的电磁波可看成这两列在波导壁上不断反射的电磁波的叠加. 设管内为真空,则这两列波的速度为 c. 图 6.5 给出导波的群速 $\boldsymbol{v}_g$(以 $\overline{MN''}/\Delta t$ 表示)及导波的相速 $\boldsymbol{v}_p$(以 $\overline{MN'}/\Delta t$ 表示)与真空中光速 c(以 $\overline{MN}/\Delta t$ 表示)的关系图.

当第一列波以光速 c 由 M 点传到 N 点时,其等相面由 MM' 传到 NN',则等相面沿波导管轴向移动的距离为 MN',第二列波类推. 由此可见,导波的相速 v_p 与第一、二列波光速 c 的关系可由 $\Delta MNN'$ 得到

$$v_p=\frac{c}{\cos\theta}=\frac{c}{\sin\phi}=\frac{ck}{k_z}>c.\tag{79}$$

上式已利用了 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$,并将(78)式代入. 这表明,导波的相速大于 c[①].

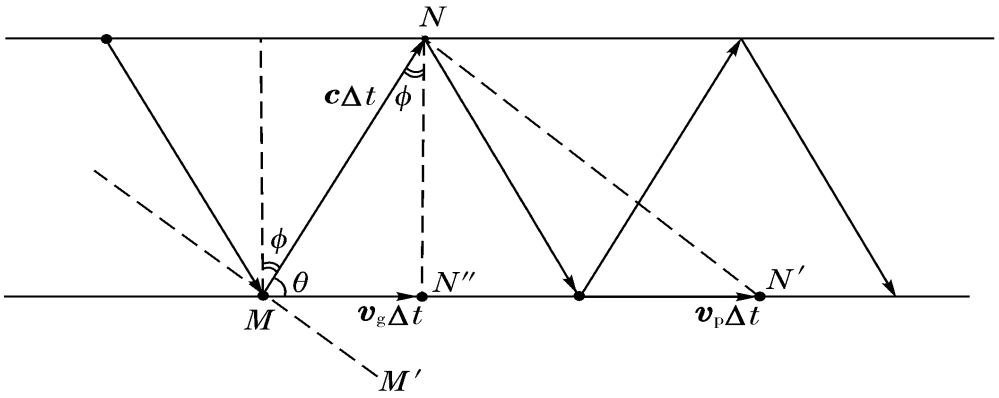


图 6.5

在相同的时间内,电磁波能量沿波导管从 M 点传到 N'' 点. 由 $\Delta MNN''$ 可见,电磁波的群速为

$$v_g=c\cos\theta=c\sin\phi=\frac{ck_z}{k}<c.\tag{80}$$

五、导波的激励方式

通常采用电耦合、磁耦合和电流耦合等方式在波导管内激发所需要的模式.

① 相速大于光速 c 并非不可思议的事情:设想在失重的宇宙飞船中,让处于水平位置的柔软绳子的一端作简谐振动,则振动将以一定的相速沿绳子向前传播;如果在同样的条件下让一根刚性的铁棒作简谐振动,则棒上各点均以相同的位相发生简谐振动,此时的相速就是无限大.

(1) 电耦合.将连续振荡的同轴线与探针连接,伸入波导管内作为激励装置,放在波导管内电场最强的地方,使它激发的电力线与所需模式的电力线方向一致.

当然,探针激发的电磁波不会是单一模式,而是非常复杂的场结构,这就要通过对波导尺寸的合理设计和探针的调整,使其他高次型波成为消失波并仅存在所需要的模式.

(2) 磁耦合.利用耦合环(高频电流环)作为激励装置,放在波导管中磁场最强的地方,使之在波导管中激发的磁力线与所需模式的磁力线方向一致.

(3) 电流耦合.在波导管壁上开一个小孔或缝隙,并在波导管壁上激发高频电流,使其电流方向与所需模式的管壁电流一致.

至于更详尽的技术和工艺问题,可参阅工程电磁场的有关专著.

习　题　6.1

1.试用分离变量法求方程(16)的通解形式.

2.试证明(35)~ (38)式.

3.写出截面为$a\times b$的矩形波导管内磁场H满足的方程及边界条件.

4.一对无限大的平行理想导体板,相距为b,电磁波沿平行于板面z方向传播,设波在x方向是均匀的,求可能传播的模式.

5.无限长的矩形波导管,在$z=0$处被一块垂直插入的理想导体平板完全封闭,求在$z=\infty$到$z=0$这段管内可能存在的模式.

6.已知截面为$a\times b$的矩形波导管内传播的TE_{10}波如(53)~ (56)式所示.求TE_{10}波的传输功率P、管壁上的面电荷密度σ_f及面电流密度$\boldsymbol{\alpha}$.

7.频率为30×10^9Hz的微波,在0.7cm×0.4cm及0.7cm×0.6cm的矩形波导管中各能以什么模式传播?

8.在截面为$a\times b$的矩形波导管内无介质,试求TE_{11}波的E、B分布,相速度v_p及群速度v_g.

9.一个三角形波导管的横截面是直角边长为a,斜边长为$\sqrt{2}\,a$的直角等腰三角形(如图6.6所示),管壁为良导体,管内无介质.试确定可以在波导管中传播的TE、TM和TEM波的模式.对于允许存在的模式,求$E(x,y,z,t)$,$B(x,y,z,t)$及截止频率.

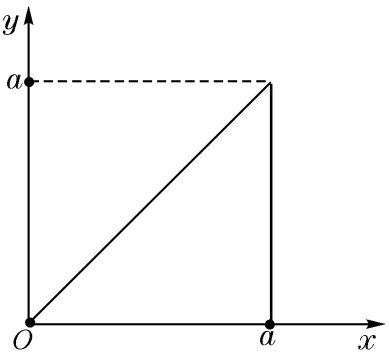


图6.6

§6.2　矩形金属谐振腔中的微波

谐振器是储存某一特定频率的电磁能量的器件,常用于选择并发射某一频率的电磁波.

低频电磁波是利用如图6.7所示的LC谐振回路激发的,首先用外电源给电容器充电至U,合上开关k之后,储藏在电容器内的电场能与电感中的磁场能在不

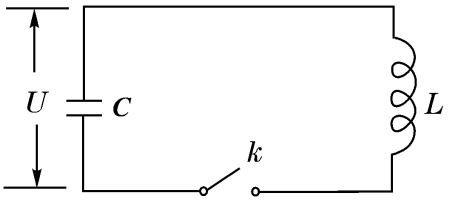


图 6.7

停地互相转换,形成电磁振荡. LC 回路的振荡频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1}$$

为了激发高频电磁波(微波),就要减小谐振回路的L 和C. 为了减小C,就要增加电容器极板间的距离d,见图6.8(a). 为了减小L,就要减小电感线圈的匝数,直到使用一根直导线代替,见图 6.8(b);甚至用多根直导线并联,见图6.8(c);在极限情况下,用无数根直导线并联的结果就使LC 回路过渡为一个封闭的金属矩形谐振腔,如图6.8(d)所示. 谐振腔沿x,y,z 轴的边长分别为L_1,L_2,L_3.

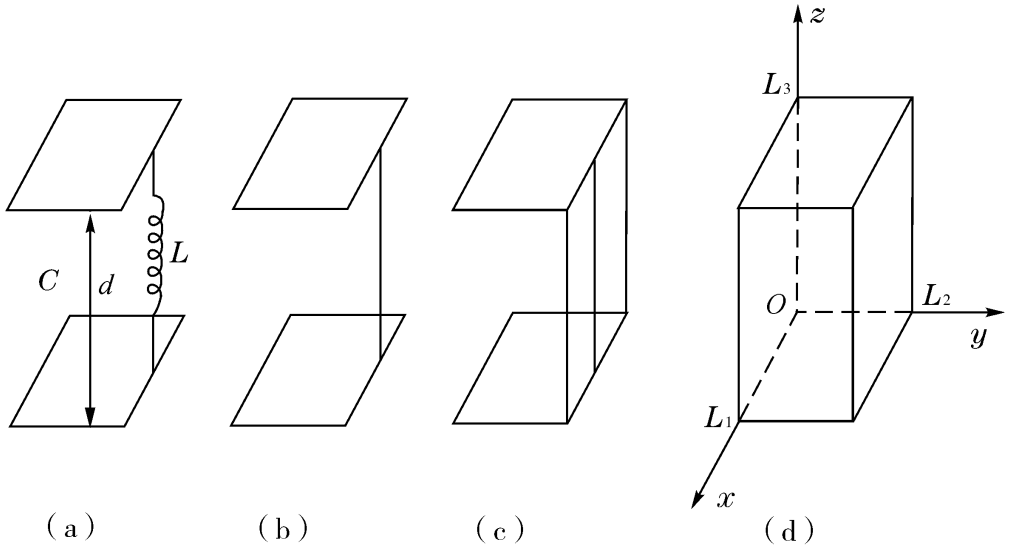


图 6.8

采用金属谐振腔有如下显著的优点:

(1) 电磁场全部封闭在金属腔内,没有辐射损耗;

(2) 金属腔内不需要电容器内部的支撑介质,没有介质损耗;

(3) 作为高频电流通路的金属内壁的表面积扩大了,金属损耗很小;

(4) 结构坚固,加工方便.

本节首先提出谐振腔中电磁波的定解问题,进而求出电磁驻波的电磁场结构,接着给出谐振腔的本征频率和品质因数,最后讨论谐振腔的模式数和模密度,后者在量子力学及激光物理中都有重要应用.

一、谐振腔中的电磁驻波的定解问题

设谐振腔壁为理想导体,腔内为真空. 令

$$E(x,t) = E(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{2}$$

由§ 5.1 知$E(x)$遵守亥姆霍兹方程与麦克斯韦方程,同时电场在理想导体壁遵守§ 6.1 中(10)式和(11)式给出的边界条件,即

①亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2; \tag{3}$$

②关于电场散度的麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot E = 0; \tag{4}$$

③关于电场旋度的麦克斯韦方程

$$B = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times E; \tag{5}$$

④电场在理想导体壁的切向分量为零

$$E_y\Big|_{x=0,L_1} = E_z\Big|_{x=0,L_1} = 0, \qquad E_z\Big|_{y=0,L_2} = E_x\Big|_{y=0,L_2} = 0,$$

$$E_x\Big|_{z=0,L_3} = E_y\Big|_{z=0,L_3} = 0; \tag{6}$$

⑤在电场理想导体壁的法向分量沿法向的偏导为零

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{x=0,L_1} = 0, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y}\Big|_{y=0,L_2} = 0, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_{z=0,L_3} = 0; \tag{7}$$

⑥理想导体壁上的电荷电流分布

$$\sigma_f = \varepsilon_0 n \cdot E; \tag{8}$$

$$\alpha_f = \frac{1}{\mu_0} n \times B. \tag{9}$$

式中的E和B分别为真空中(无限靠近导体壁处)的电场强度和磁感应强度,见上节中(8)式和(9)式的推导.

这样,(3)~(7)式就构成亥姆霍兹方程的本征值问题,k_x, k_y, k_z为本征值,$E(x)$为本征函数.$E(x)$求出后,利用(8)式、(5)式和(9)式可以求出σ_f及α_f.

二、电磁驻波的电磁场结构

利用分离变量法(见本节习题第1题)可以求得

$$E_x(x) = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \tag{10}$$

$$E_y(x) = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \tag{11}$$

$$E_z(x) = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z. \tag{12}$$

式中

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{L_2}, \qquad k_z = \frac{p\pi}{L_3}, \qquad m, n, p = 0, 1, 2, \cdots \tag{13}$$

这表明,谐振腔内不是任意的k都可以存在的,只有满足(13)式的

$$k = k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z$$

才可以存在.

对于给定的本征值(k_x, k_y, k_z),亦即给定的(m, n, p),系数A_1, A_2, A_3只有两个是独立的.将(10)~(12)代入$\nabla \cdot E = 0$,可得

$$0 = \nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z)\sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z,$$

由 $\sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$ 不恒为零,即有

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0. \tag{14}$$

与上节相似,对于给定的(m,n,p)而言,如果E'和E''是满足定解问题的两个线性无关的解,则满足定解问题的任意解E 均可表示为E'和E''的线性叠加. 换句话说,对于谐振腔允许存在的k 而言,只有两个模式独立.

三、谐振腔的本征频率与品质因数

在低频谐振回路中,其基本参数是电感L、电容C 和电阻R,利用这些参数便可求 得谐振回路的谐振频率 ω 和品质因数Q. 但对于谐振腔而言,L,C,R 已失去意义. 通常采用谐振腔的本征频率和品质因数作为它的基本参数.

1. 谐振腔的本征频率 ω_{mnp}

当(m,n,p)给定后,谐振腔的本征频率为

$$\omega_{mnp} = \frac{k}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}. \tag{15}$$

若$L_1 \geqslant L_2 \geqslant L_3$,则谐振腔的最低频率为

$$\omega_{110} = \pi c \sqrt{\left(\frac{1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_2}\right)^2}. \tag{16}$$

当m,n,p 有两个为零时情况怎样? 见本节习题第 2 题.

实际应用上,在腔体上还装有可以旋进或旋出的小螺丝,旋动螺丝即可对谐振频率进行微调.

2. 谐振腔的品质因数Q

谐振腔的品质因数是反映谐振腔的损耗大小,频率选择性的强弱和工作稳定度的重要参数.

品质因数的定义为

$$Q = 2\pi \frac{\text{谐振腔内的储能}}{\text{谐振腔一个周期内的耗能}} = 2\pi \frac{W}{P_1 T} = \omega \frac{W}{P_1}, \tag{17}$$

式中P_1 为谐振腔的损耗功率.

谐振腔的损耗包含两个部分:一部分是谐振腔内部(由于腔壁不是理想导体)自身的损耗,另一部分是谐振腔外部负载(它必定有与外电路联系的耦合装置)的损耗. 可以证明谐振腔的Q 值为[①]

① 蔡圣善,朱耘,徐建军编著. 2002. 电动力学(第二版). 北京:高等教育出版社. 224~227.

$$Q = \frac{\mu_0 \omega'}{\xi'} \frac{V}{S} \times (\text{几何因子}), \tag{18}$$

式中 ω' 为有损耗时的谐振频率(相对无损耗的谐振频率有一个漂移),ξ' 为金属表面阻抗的实部,V 为谐振腔体的体积,S 为谐振腔内表面的面积,几何因子由腔体的形状与模式确定.

最后,我们介绍在理论物理学中经常遇到的一个概念[①].

四、谐振腔内的模式数 模密度

前面已经指出,一组本征值(k_x, k_y, k_z)或相应的(m, n, p)对应着一个可能在谐振腔内存在的波矢 $k = k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z$,对应着两个可能存在于谐振腔内的模式,对应着电磁场两种不同的结构.

那么,在谐振腔内可能存在多少种模式呢?

首先,要研究在谐振腔的体积 $V = L_1 L_2 L_3$ 中,在 $k_x \to k_x + \Delta k_x$, $k_y \to k_y + \Delta k_y$, $k_z \to k_z + \Delta k_z$ 范围内,电磁波有多少种可能的模式. 为此,就要求在 Δk_x 范围内,k_x 的可能取值. 由(13)式

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{19}$$

可见,m 每改变 1,k_x 就由一个 k_x 值变为另一个 k_x 值,在上式两边取改变量,得 $\Delta k_x = \pi \Delta m / L_1$. 易见在 Δk_x 的范围内,k_x 可能取值的数目为

$$\Delta m = \frac{L_1}{\pi} \Delta k_x. \tag{20}$$

同理,在 Δk_y 和 Δk_z 范围内,k_y 和 k_z 可能取值的数目分别为

$$\Delta n = \frac{L_2}{\pi} \Delta k_y, \qquad \Delta p = \frac{L_3}{\pi} \Delta k_z. \tag{21}$$

因此,在上述给定的波矢范围内,k 可能取值的数目为

$$\Delta N = \Delta m \, \Delta n \Delta p = \frac{L_1 L_2 L_3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z}{\pi^3} = \frac{V}{\pi^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \tag{22}$$

其次,在以 k_x, k_y, k_z 为轴的波矢空间中引入球坐标系,如图6.9 所示,其体积元为

$$k^2 \Delta k \Delta \Omega = \Delta k_x \, \Delta k_y \, \Delta k_z, \tag{23}$$

式中 $\Delta\Omega$ 为波矢空间的立体角元. 将上式代入(22)式,可得

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^3} k^2 \Delta k \Delta \Omega. \tag{24}$$

因为 m, n, p 均取正整数,故 k 在波矢空间所分布的立体角范围是一个卦限,即

---

① 汪德新. 2002. 量子力学. 理论物理学导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社. 2~3.

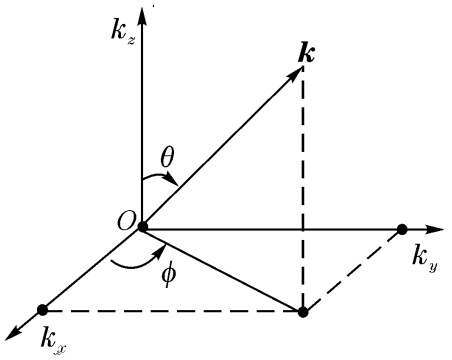


图 6.9

$$\Delta\Omega = \frac{4}{8}\pi = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

将上式代入(24)式即得

$$\Delta N = \frac{1}{2\pi^2} V k^2 \Delta k, \tag{26}$$

这就是在给定的V 和$k \to k + \Delta k$ 的条件下,谐振腔内电磁场可能取的波矢数.

因为每一个波矢对应两个独立的模式,对于体积为V 的谐振腔,在$k \to k + \Delta k$ 的波矢范围内共有$V k^2 \Delta k / \pi^2$ 个模式.

谐振腔单位体积内的模式数称为模密度.故谐振腔在$k \to k + \Delta k$ 范围内的模密度为$k^2 \Delta k / \pi^2$.若用频率表示,由$k = 2\pi\nu / c$ 可得$\Delta k = 2\pi\Delta\nu / c$,则谐振腔在$\nu \to \nu + \Delta\nu$范围内的模密度为$8\pi\nu^2 \Delta\nu / c^3$.

习　题　6.2

1. 试用分离变量法导出(10)~(13)式.

2. 试问:在谐振腔里,当m,n,p 有两个为零时电磁波是否存在?

3. 已知矩形空铜腔的尺寸为$L_1 = 2\text{cm}$,$L_2 = 3\text{cm}$,$L_3 = 1\text{cm}$,问

(1) 在$4/\sqrt{5}\ \text{cm} \leqslant \lambda \leqslant 8/\sqrt{13}\,\text{cm}$ 波段中有多少个电磁波模式?

(2) 求出这些模式相应的波长.

(3) 求出这些模式的电场.

(4) 在$0.01\text{cm} \leqslant \lambda \leqslant 0.011\text{cm}$ 波段中大约有多少电磁波模式?

第七章　有界空间中的光波

本章讨论光波在以介质为边界的有界空间中的行为. 当电磁波的频率进一步提高,从微波过渡到光波时,金属便从导体变为高损耗介质,因而不能用金属波导管来传送光波. 然而,利用光从光密介质到光疏介质的全反射现象,可以制成理想的光波导. 本章分别介绍光波在平板型介质波导(简称薄膜波导)和圆柱型介质波导(简称光纤)中的传播.

本章利用电磁场理论讨论这两种光波导的原理、光波的电磁场结构及传输特性. 它们在集成光学、光纤通信以及电信网络全光化等当代高新技术中扮演着重要的角色.

§ 7.1　平板型介质波导中的光波

最常见的平板型介质波导的导光层是一层沉积在某种衬底材料上的光学薄膜,其厚度为1~ 10μm,薄膜的材料为砷化镓(GaAs,n= 3.6)、铌酸锂($LiBO_3$,n= 2.215)等,上层是覆盖层(参看图7.1). 三者折射率的关系为

$$n_1(\text{导光层}) > n_2(\text{衬底}) \geqslant n_3(\text{覆盖层}). \tag{1}$$

薄膜波导主要用来制作集成光学器件,即仿照集成电路原理,将独立的光学器件,如发光器件、光放大器件、光传输器件、光耦合器件和接收器件等,以薄膜的形式集成在同一衬底上,形成一个具有独立功能的微型光学系统. 它具有体积小、效率高、性能稳定等优点. 而集成光学器件中最为基本的问题,就是薄膜波导中光的传输问题.

本节将根据电磁场理论进行讨论,首先给出光波的定解问题,接着导出TE波中S波的电磁场结构和薄膜波导TE模的特征方程,最后给出截止条件和截止波长.

一、薄膜波导中光波的定解问题

为简单起见,设薄膜沿x方向的厚度为a,沿y,z方向无限延伸,光波沿z方向

传播,如图 7.1 所示. 为确定起见,我们仅讨论TE 波中的S 波(即横电波中电矢量

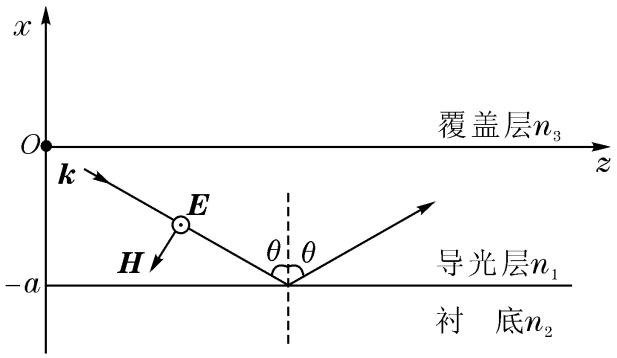


图 7.1

垂直于入射面xoz 的电磁波). 此时电场只有y 分量,由$B=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times E$ 易见磁场有x 和z 分量. 由于y 方向没有受到限制,易见电磁波的振幅与y 无关,即

$$E(x,t)=E_y(x,t)e_y=E_y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}e_y, \tag{2}$$

$$H(x,t)=H_x(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}e_x+H_z(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}e_z, \tag{3}$$

式中的$E_y(x)$,$H_x(x)$及$H_z(x)$可为复数(含初相位).

1. 泛定方程

为书写简单起见,以$E^{(j)}$及$k^{(j)}$($j=1,2,3$)分别表示导光层(薄膜)、衬底和覆盖层中的电场及波数,其中波数$k^{(j)}$与相速$v^{(j)}$、折射率n_j有如下关系

$$k^{(j)}=\frac{\omega}{v^{(j)}}=n_j\frac{\omega}{c},\qquad j=1,2,3. \tag{4}$$

若先求电场,后求磁场,则介质中的电磁场满足如下的亥姆霍兹方程和麦克斯韦方程

$$\nabla^2E^{(j)}+n_j^2\frac{\omega^2}{c^2}E^{(j)}=0,\qquad j=1,2,3; \tag{5}$$

$$\nabla\cdot E^{(j)}=0,\qquad j=1,2,3; \tag{6}$$

$$B^{(j)}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times E^{(j)},\qquad j=1,2,3. \tag{7}$$

将(2)式代入(5)式(在不致引起混淆的地方略去$E^{(j)}$和$k^{(j)}$的上脚标),并注意到

$$\frac{\partial^2E_y(x,t)}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\frac{\mathrm{d}^2E_y(x)}{\mathrm{d}x^2},\qquad \frac{\partial^2E_y(x,t)}{\partial z^2}=-k_z^2E_y(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}, \tag{8}$$

即得$E_y(x)$遵守的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y(x)}{\mathrm{d}x^2}+(k^2-k_z^2)E_y(x)=0, \tag{9}$$

式中$k^2=n^2\omega^2/c^2$.

2. 连续性条件及有限性条件

既然假设薄膜沿 y 方向无限延伸,电场仅含切向分量 $E_y(x)$,故只要考虑两个边值关系

$$n \times (E_2 - E_1) = 0, \tag{10}$$

$$n \times (H_2 - H_1) = \alpha = 0. \tag{11}$$

上式令面传导电流密度 α 为零是因为薄膜,衬底和覆盖层都不是导体. 由此得

①E_y 的连续性条件. 将(2)式代入(10)式,得

$$E_y^{(1)}\Big|_{x=-a} = E_y^{(2)}\Big|_{x=-a}, \qquad E_y^{(1)}\Big|_{x=0} = E_y^{(3)}\Big|_{x=0}. \tag{12}$$

②$\dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}$的连续性条件. 将(7)式和(2)式代入(11)式,并利用 $H_z^{(j)} = \dfrac{B_z^{(j)}}{\mu_j} \approx \dfrac{B_z^{(j)}}{\mu_0}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}E_y^{(1)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=-a} = \frac{\mathrm{d}E_y^{(2)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}E_y^{(1)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}E_y^{(3)}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}. \tag{13}$$

③E_y 的有限性条件为

$$\lim_{x\to-\infty} E_y^{(2)} \text{ 有限}, \qquad \lim_{x\to\infty} E_y^{(3)} \text{ 有限}. \tag{14}$$

二、光导波的电磁场结构

1. 解的形式

由(9)式 $E''_y(x) + (k^2 - k_z^2)E_y(x) = 0$ 及常微分方程 $\psi'' \pm h^2\psi = 0$ 解的形式[①]可知,在 $k^{(3)} \leqslant k^{(2)} < k_z < k^{(1)}$ 的条件下,即在

$$n_3 \frac{\omega}{c} \leqslant n_2 \frac{\omega}{c} < k_z < n_1 \frac{\omega}{c} \tag{15}$$

的条件下,导光层的 $(k^2 - k_z^2) > 0$,即导光层有振荡型的解. 由解的有限性条件可知,在衬底和覆盖层将以指数形式衰减,光波导中这样的电磁场结构称为导模. (15)式就是光波导中形成导模的条件,称为传播条件. 在此条件下,有

$$E_y^{(1)}(x) = A\cos(h_1 x) + B\sin(h_1 x), \qquad -a \leqslant x \leqslant 0; \tag{16}$$

$$E_y^{(2)}(x) = C\mathrm{e}^{h_2(x+a)}, \qquad -\infty < x \leqslant -a; \tag{17}$$

$$E_y^{(3)}(x) = D\mathrm{e}^{-h_3 x}, \qquad 0 \leqslant x < \infty. \tag{18}$$

式中

$$h_1^2 = n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2, \tag{19}$$

$$h_2^2 = k_z^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{20}$$

---

① 方程 $\psi'' + h^2\psi = 0$ 的通解为(h 为实数)

$$\psi(x) = A\cos hx + B\sin hx,$$

方程 $\psi'' - h^2\psi = 0$ 的通解为(h 为实数)

$$\psi(x) = C\mathrm{e}^{hx} + D\mathrm{e}^{-hx}.$$

$$h_3^2 = k_z^2 - n_3^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{21}$$

由(15)式可知,式中 h_1, h_2, h_3 均为正实数. 在 x 的取值范围内,(17)式和(18)式的指数均取负值.

2. 由边界条件定系数

为确定 $E_y^{(j)}(x)$,在(16)~(21)式中共有8个未知数:A, B, C, D 及 h_1, h_2, h_3, k_z. 而边界条件共有四个方程,故除了用 A 表示 B, C, D 之外,还可得到 h_1, h_2, h_3 之间的方程,称为特征方程. 定系数的计算见本节习题第1题.

3. 电磁场结构

将上面求得的系数 B, C, D 代入(16),(17),(18)式,即得

$$E_y^{(1)}(x) = \frac{A}{h_1}[h_1\cos(h_1 x) - h_3\sin(h_1 x)], \qquad -a \leqslant x \leqslant 0; \tag{22}$$

$$E_y^{(2)}(x) = \frac{A}{h_1}[h_1\cos(h_1 a) + h_3\sin(h_1 a)]\mathrm{e}^{h_2(x+a)}, \quad -\infty < x \leqslant -a; \tag{23}$$

$$E_y^{(3)}(x) = A\mathrm{e}^{-h_3 x}, \qquad 0 \leqslant x < \infty. \tag{24}$$

常数 A 取决于入射光的功率.

将(22)~(24)式代入

$$B^{(j)} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times E^{(j)}, \qquad j = 1,2,3, \tag{25}$$

即可求得在导光层、衬底和覆盖层的磁场. 求出 h_1, h_2, h_3 和 k_z 后,上面四个公式将给出平板型波导内TE模的电磁场结构.

三、薄膜波导TE模的特征方程

利用边界条件得到 h_1, h_2, h_3 之间的方程为(见本节习题第1题)

$$\tan(h_1 a) = \frac{h_2 + h_3}{h_1(1 - h_2 h_3/h_1^2)}, \tag{26}$$

称为薄膜波导TE模的特征方程. 由上式及(19)~(21)式可以求得 h_1, h_2, h_3 及 k_z 的值.

因为 k_z 满足(15)式,场主要束缚在导光层中,由(17)式和(18)式可见,在衬底和覆盖层中光波的贯穿深度分别为 $\frac{1}{h_2}$ 和 $\frac{1}{h_3}$.

四、截止条件和截止波长

若 k_z 违背了(15)式,即当

$$k_z = n_2 \frac{\omega}{c} \tag{27}$$

时,由(20)式可见 $h_2 = 0$. 将 $h_2 = 0$ 代入(23)式,可见 $E_y^{(2)}(x)$ 实际上与 x 无关:

$$E_y^{(2)}(x) = \frac{A}{h_1}\left[h_1\cos(h_1 a) + h_3\sin(h_1 a)\right]. \tag{28}$$

这表明,在衬底中电场的振幅不再沿 x 轴衰减.将上式代入(2)式,得

$$E^{(2)}(x,t) = E^{(2)}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)} = \frac{A}{h_1}\left[h_1\cos(h_1 a) + h_3\sin(h_1 a)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)} e_y. \tag{29}$$

这表明,在衬底中的光波是沿 z 轴传播的平面波.总之,当

$$k_z \leqslant n_2 \frac{\omega}{c}, \tag{30}$$

在衬底中就有振荡型的解,光波在衬底中传播,成为一种辐射模,即光波不再限制在导光层中.光波能量在导光层传输的同时不断地向衬底泄漏,使得光波在导光层中不断衰减而截止.

类似地,在覆盖层出现辐射模的条件是

$$k_z \leqslant n_3 \frac{\omega}{c}, \tag{31}$$

这都是违背形成导模的条件(15)式所导致的结果.应注意,只要出现(30)式的情形,光波将不再限制在导光层中,是否会出现(31)式的情形已经不重要了.由此得TE 模的截止条件是

$$k_z = n_2 \frac{\omega}{c}. \tag{32}$$

满足上式的 ω 记作 ω_c,与此相对应的TE 模的截止波长为(见本节习题第 2 题)

$$\lambda_c = \frac{2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi}, \tag{33}$$

这可以将 $h_2 = 0$ 代入(19),(20),(21),(25)式求得.

习　题　7.1

1. 试证明(22),(23),(24),(26)式.
2. 试证明(33)式.

*§ 7.2　圆柱形介质波导中的光导波

圆柱形介质波导(即光导纤维,简称光纤)也是根据全反射现象的原理制成的,光导纤维由折射率分别为 n_1 和 n_2 的内、外两层玻璃丝组成,内层的 n_1 大于外层的 n_2,见图 7.2(a).入射光束从介质 n_0 以入射角 θ_0 射到纤维端面的 P 点,经折射后以临界角 θ_{1c} 射到介质 1、2 的分界面上发生全反射.显然,当在端面的入射角 $\theta < \theta_0$ 时,相应的折射角 $\theta' < \theta'_0$,射到介质1、2 分界面上的入射角 $\theta_1 > \theta_{1c}$[因为 $\theta' + \theta_1 = \theta'_0 + \theta_{1c} = 90°$].由此可见,在以 P 点为顶点、以 $2\theta_0$ 为顶角的锥体内的光线,均可在光导纤

维中发生全反射现象,可以无损失地(略去吸收和散射的损失)从光导纤维的一端传到另一端,如图 7. 2(b)所示. 这样,用大量规则排列的光导纤维便可制成光导纤维束,它可以把图像从一端清晰地传到另一端.

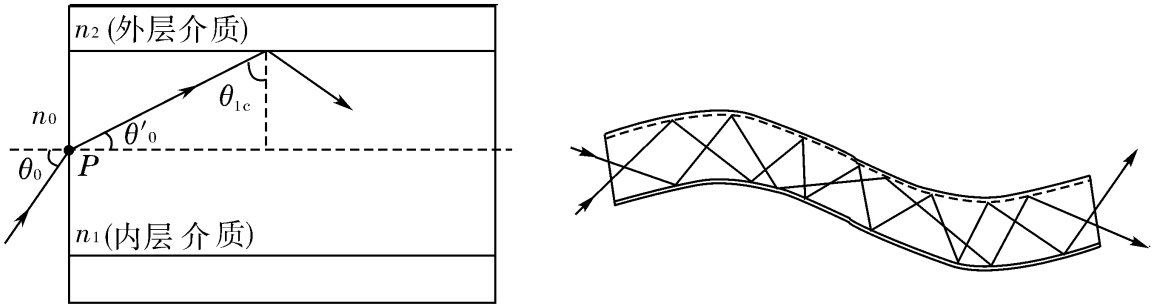


图 7. 2

由于光导纤维非常细小和柔软,可以进入人体内脏或精密仪器内部照明和观察,在医疗及精密工业中有广泛的应用. 光导纤维最重要的应用是光纤通信,光纤通信技术是 1966 年首先由年轻的英籍华人工程师高锟提出来并在实验室获得成功,1970 年美国良宁公司首先生产出低损耗光导纤维,揭开了光纤通信的序幕. 目前光纤通信已成为所有通信系统的最佳选择,世界上所有新建的干线通信系统均采用光纤,洲与洲之间的通信已广泛使用海底光缆,并且由于光导技术的飞跃发展,一根光纤上的传输容量每9 至12 个月就要翻一番. 随着通信和计算机技术的飞跃发展,导致对高速传输设备的要求越来越高. 目前,只有光纤线路的容量才能满足迅猛增长的需要. 可以预料,实现光交换和电信网络的全光化是必然的发展趋势.

本节将根据电磁场理论进行讨论,首先给出光纤中光波的定解问题,接着介绍如何用标量法求出它的电磁场结构和LP 模的特征方程,最后给出截止条件和截止波长.

一、光纤中光波的定解问题

设纤芯的半径为a,包层足够厚,对于大多数用于光纤通信的实际光纤,纤芯的折射率n_1 只稍大于包层的折射率n_2,即

$$\Delta n = n_1 - n_2 \ll 1. \tag{1}$$

由于这类光纤对光的约束与传导作用比 Δn 大的光纤要弱,故把满足这个条件的光纤称为弱导光纤,并把 $n_1 \approx n_2$ 这个条件称为弱导近似.

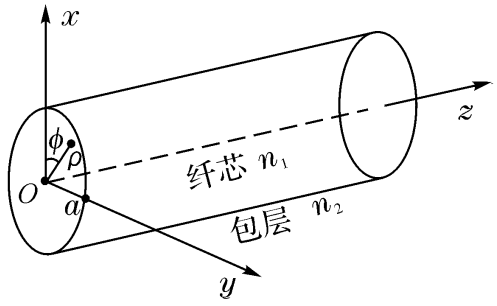


图 7. 3

坐标系的选择如图 7. 3 所示. 沿光纤轴向传播的电磁波可表示为

$$E(x,t) = E(\rho,\phi)e^{i(k_z z-\omega t)}, \qquad \rho \leqslant a; \tag{2}$$

$$H(x,t) = H(\rho,\phi)e^{i(k_z z-\omega t)}, \qquad \rho \leqslant a. \tag{3}$$

1. 泛定方程

以$E^{(j)}$,$H^{(j)}$,n_j($j=1,2$)分别表示纤芯和包层相应的物理量,两者的磁导率μ_1与μ_2均可视作μ_0.介质中的电场满足亥姆霍兹方程与麦克斯韦方程

$$\nabla^2 E + n^2\frac{\omega^2}{c^2}E = 0, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{5}$$

$$H = \frac{1}{i\mu_0\omega}\nabla \times E. \tag{6}$$

2. 连续性条件、有限性条件和周期性条件

我们先求电场,后求磁场,故只列出关于E的部分条件(后面需要的条件).

(1) 连续性条件

在两种介质的分界面处,电场的切向分量是连续的[$E_{2t}-E_{1t}=0$,见§ 1.5 的(14)式],法向分量一般不连续[$E_{2n}-E_{1n}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_f+\sigma_p)$,见§ 1.5 的(1)式].但在弱导近似条件下($n_1\approx n_2$,即$\varepsilon\approx\varepsilon_2$,因而$\sigma_f+\sigma_p$为零),电场的法向分量连续.由此得

$$E_z^{(1)}\Big|_{\rho=a} = E_z^{(2)}\Big|_{\rho=a}, \qquad E_y^{(1)}\Big|_{\rho=a} = E_y^{(2)}\Big|_{\rho=a}; \tag{7}$$

(2) 有限性条件

$$\lim_{\rho\to 0}E_y^{(1)} \text{ 有限}, \qquad \lim_{\rho\to\infty}E_y^{(2)} \text{ 有限}; \tag{8}$$

(3) 周期性条件

$$E(\rho,\phi+2\pi) = E(\rho,\phi). \tag{9}$$

这样,(4)~(9)式便构成了电场E_y的定解问题.

二、用标量法求解电磁场的定解问题

首先,任一传输模式$\{E;H\}$均可分解为两个相互正交模式的线性叠加.今将后两者按直角坐标系分解,各分量就有确定的线偏振方向,称为线偏振模①.例如,可取

$$\{E;H\} = C_1\{0,E_{1y},E_{1z};H_{1x},H_{1y},H_{1z}\} + C_2\{E_{2x},0,E_{2z};H_{2x},H_{2y},H_{2z}\}. \tag{10}$$

显然,等式右方的电场和磁场也具有(2)式和(3)式的形式.现在将等式右方电磁场的各分量用$\psi(x,t)=\psi(\rho,\phi)e^{i(k_z z-\omega t)}$表示,$\psi$对$z$的偏导为

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\psi(\rho,\phi)e^{i(k_z z-\omega t)}] = ik_z\psi((x,t). \tag{11}$$

① 通常简称为LP模,是Linearly Polarized的缩写.

其次,当给定电场的一个分量为零时,利用麦克斯韦方程[见(5),(6)式],就可以用电场的一个分量表示电磁场其余的分量. 例如,对于第一组,已给定$E_x=0$,则可用E_y表示E_z,H_x,H_y,H_z.

实际上,令(11)式中的ψ为E_z,由$\nabla\cdot E=0$及$E_x=0$,可得

$$E_z=\frac{1}{\mathrm{i}k_z}\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{i}k_z}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)=\frac{\mathrm{i}}{k_z}\frac{\partial E_y}{\partial y};\tag{12}$$

由$E_x=0$及$H=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\nabla\times E$可得

$$H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x};\tag{13}$$

$$H_y=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\mu_0\omega k_z}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}.\tag{14}$$

这里已应用了$E_x=0$及(12)式. 同理

$$H_x=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mu_0\omega k_z}\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}-\frac{k_z}{\mu_0\omega}E_y,\tag{15}$$

上式还可改写为另一种形式. 考虑到电场的直角坐标分量E_y也遵守亥姆霍兹方程,由(4)及(11)式可得

$$0=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+n^2\frac{\omega^2}{c^2}\right)E_y=\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+(\mathrm{i}k_z)^2E_y+\mu_0\varepsilon\omega^2E_y,$$

移项后代入(15)式,便有

$$\begin{aligned}H_x&=\frac{1}{\mu_0\omega k_z}\left(-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+k_z^2E_y-\mu_0\varepsilon\omega^2E_y\right)-\frac{k_z}{\mu_0\omega}E_y\\&=-\frac{1}{\mu_0\omega k_z}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\frac{\varepsilon\omega}{k_z}E_y.\end{aligned}\tag{16}$$

考虑到纤芯与包层的折射率近似相等,上述表达式中E_y的二阶变化率均可忽略不计. 于是,(12)~(16)式可简化为

$$E_z=\frac{\mathrm{i}}{k_z}\frac{\partial E_y}{\partial y},\quad H_x\approx-\frac{\varepsilon\omega}{k_z}E_y,\quad H_y\approx0,\quad H_z=\frac{1}{\mathrm{i}\mu_0\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x}.\tag{17}$$

这样,求解矢量$E(\rho,\phi)$的亥姆霍兹方程的定解问题就简化为求解标量$E_y(\rho,\phi)$的亥姆霍兹方程的定解问题了. 因此,这种方法称为标量法;还有一种方法称为矢量法,可参看有关专著①.

三、光导波的电磁场结构

对于沿z方向传播的电磁波,由(2)式可知,其E_y分量具有形式

$$E_y(x,t)=E_y(\rho,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_zz-\omega t)},\tag{18}$$

遵守亥姆霍兹方程

① 虞福春,郑春开编著. 2003. 电动力学. 修订版. 北京:北京大学出版社. 128~137.

$$\nabla^2 E_y(x,t) + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} E_y(x,t) = 0. \tag{19}$$

在柱坐标系中,亥姆霍兹方程为[见附录1§ A1.5的(36)式]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_y(\rho,\phi) e^{i(k_z z - \omega t)} = 0. \tag{20}$$

用分离变量法求解.令

$$E_y(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi), \tag{21}$$

代入(20)式,并注意到(11)式,便可分离出两个常微分方程

$$\Phi''(\phi) + m^2 \Phi(\phi) = 0, \tag{22}$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left[\left(n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \rho^2 - m^2 \right] R(\rho) = 0. \tag{23}$$

方程(22)满足周期性条件的解为

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{24}$$

方程(23)称为贝塞耳方程.为了在纤芯有振荡形式的解,在包层有沿径向迅速衰减的解,n_1 和 n_2 应满足传播条件

$$n_2 \frac{\omega}{c} < k_z < n_1 \frac{\omega}{c}. \tag{25}$$

据此求解贝塞耳方程,即可求得光导波的电磁场结构.

1.电场的横向分量

(1) 纤芯区的 $E_y^{(1)}$.令

$$h_1^2 = n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2, \tag{26}$$

由(25)式可知 h_1 为实数,贝塞耳方程可改写为

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (h_1^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) = 0. \tag{27}$$

它的通解是贝塞耳函数 $J_m(h_1\rho)$ 和诺埃曼函数 $N_m(h_1\rho)$ 的线性叠加①.考虑到诺埃曼函数在 $\rho = 0$ 处无界,由有限性条件[见(8)式]应舍去后者.由此得

$$R_1(\rho) = J_m(h_1\rho), \qquad \rho \leqslant a. \tag{28}$$

将(24)式及(28)式代入(21)式,即得纤芯内电场 y 分量的解

$$E_y^{(1)}(\rho,\phi) = A J_m(h_1\rho) e^{im\phi}, \qquad \rho \leqslant a. \tag{29}$$

(2) 包层区的 $E_y^{(2)}$.令

$$h_2^2 = k_z^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{30}$$

由(25)式可知 h_2 为实数.贝塞耳方程可改写为虚宗量贝塞耳方程

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - (h_2^2 \rho^2 + m^2) R(\rho) = 0. \tag{31}$$

---

① 汪德新.2001.数学物理方法.理论物理学导论第一卷.第二版.武汉:华中科技大学出版社.113~117.也可参看附录6的(9)式.

它的通解是第一类虚宗量贝塞耳函数$I_m(h_2\rho)$和第二类虚宗量贝塞耳函数$K_m(h_2\rho)$的线性叠加.考虑到第一类虚宗量贝塞耳函数$I_m(h_2\rho)$当$\rho\to\infty$时无界,由有限性条件[见(8)式]应舍去前者.由此得

$$R_2(\rho)=BK_m(h_2\rho). \tag{32}$$

将(24)式及(32)式代入(21)式,得包层区电场y分量为

$$E_y^{(2)}(\rho,\phi)=BK_m(h_2\rho)e^{im\phi},\qquad \rho>a. \tag{33}$$

2.电场的纵向分量

利用(17)式及复合函数的导数公式便可导出计算电场纵向分量的公式

$$E_z=\frac{i}{k_z}\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{i}{k_z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\frac{i}{k_z}\left(\sin\phi\frac{\partial E_y}{\partial\rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial E_y}{\partial\phi}\right). \tag{34}$$

(1) 纤芯区的$E_z^{(1)}$

$$E_z^{(1)}(\rho,\phi)=\frac{iA}{k_z}\left[h_1\sin\phi J'_m(h_1\rho)+\frac{im\cos\phi}{\rho}J_m(h_1\rho)\right]e^{im\phi},\quad \rho\leqslant a; \tag{35}$$

(2) 包层区的$E_z^{(2)}$

$$E_z^{(2)}(\rho,\phi)=\frac{iB}{k_z}\left[h_2\sin\phi K'_m(h_2\rho)+\frac{im\cos\phi}{\rho}K_m(h_2\rho)\right]e^{im\phi},\quad \rho>a. \tag{36}$$

类似地,还可以求出磁场的纵向分量和横向分量,可参看本节习题第1题.

四、光纤的LP模的特征方程

将$E_y^{(1)}$及$E_y^{(2)}$代入边值关系$E_y^{(1)}\Big|_{\rho=a}=E_y^{(2)}\Big|_{\rho=a}$,可得

$$AJ_m(h_1a)-BK_m(h_2a)=0. \tag{37}$$

将$E_z^{(1)}$及$E_z^{(2)}$代入边值关系$E_z^{(1)}\Big|_{\rho=a}=E_z^{(2)}\Big|_{\rho=a}$,可得

$$A\left[h_1a\sin\phi J'_m(h_1a)+im\cos\phi J_m(h_1a)\right]-B\left[h_2a\sin\phi K'_m(h_2a)+im\cos\phi K_m(h_2a)\right]=0. \tag{38}$$

上两式是关于A,B的线性齐次方程组,要A,B有不全为零的解的条件是系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} J_m(h_1a) & K_m(h_2a) \\ h_1a\sin\phi J'_m(h_1a)+im\cos\phi J_m(h_1a) & h_2a\sin\phi K'_m(h_2a)+im\cos\phi K_m(h_2a)\end{vmatrix}=0. \tag{39}$$

整理后可简化为

$$\frac{h_1J'_m(h_1a)}{J_m(h_1a)}=\frac{h_2K'_m(h_2a)}{K_m(h_2a)}. \tag{40}$$

利用柱函数的递推公式还可简化为(见本节习题第2题)

$$\frac{h_1J_{m-1}(h_1a)}{J_m(h_1a)}+\frac{h_2K_{m-1}(h_2a)}{K_m(h_2a)}=0. \tag{41}$$

这就是光纤的LP模式的特征方程.

由(26)式、(30)式及(41)式便可求得h_1,h_2及k_z的值.这样,光纤内的电场分布便由(29)式、(33)式、(35)式和(36)式确定.

磁场分布也可类似确定.

四、截止条件和截止波长

与§ 7.1相似,当$k_z \leqslant n_2 \dfrac{\omega}{c}$时,在包层中就有振荡型的解,光波的能量在纤芯中传输的同时不断向包层泄漏,光波在纤芯不断衰减而截止.由此得截止条件为

$$h_2 = \sqrt{k_z^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}} = 0. \tag{42}$$

将$h_2 = 0$代入(41)式,可得截止条件[①]

$$J_{m-1}(h_1 a) = 0, \qquad m = 0,1,2,\cdots \tag{43}$$

方程(43)的根就是贝塞耳函数的零点,也就是图7.4中$J_m(x)$曲线与x轴交点的横坐标.由此即可求得截止频率与截止波长.

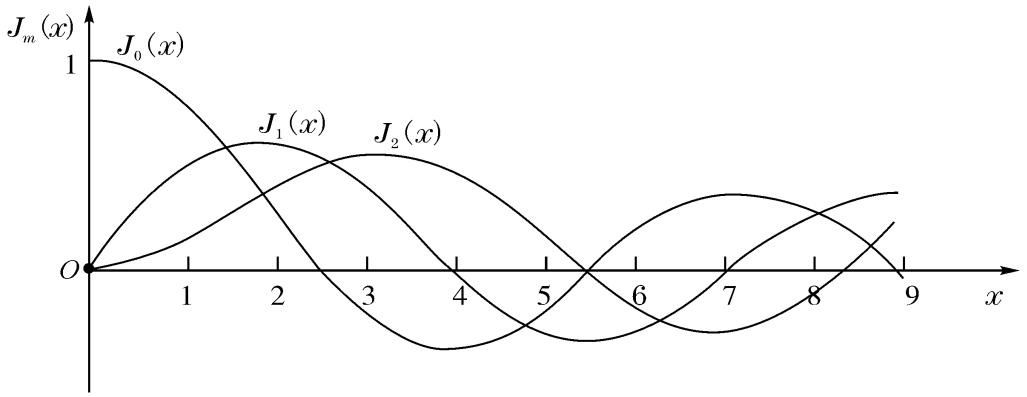


图7.4

介质波导比金属波导的损耗要大得多,同时还存在介质的色散问题.因此,克服色散和损耗是光纤通信技术的一个重要问题.

习　题　7.2

1. 已知$E_x = 0$,试求纤芯区与包层区磁场的纵向分量$H_z^{(1)}$及$H_z^{(2)}$.

2. 试由(40)式导出(41)式.

---

① 当$m = 0$时,利用贝塞耳函数的公式

$$j_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x),$$

可知$J_{-1}(h_1 a) = 0$,即$J_1(h_1 a) = 0$.

第四篇　狭义相对论与相对论物理学

本篇介绍狭义相对论,以及建立在它的基础上的相对论电动力学和相对论力学.

第八章介绍相对论的基本原理、时空坐标的洛伦兹变换和相对论的时空观,并在此基础上引入闵可夫斯基空间和四维协变量的运算规则.最后,通过方程协变性的讨论,为相对论电动力学和相对论力学的建立奠定了基础.

第九章讨论相对论电动力学.将电磁学量组成四维协变量之后,就可以把电动力学的基本定律及电磁作用下的守恒定律写成四维张量方程.同时,通过电磁场张量的变换得到电磁场在不同惯性系的变换规律,为求解相对论电动力学问题提供了一种简捷的方法.

第十章讨论相对论力学.将牛顿力学的动力学量组成四维协变量之后,就可以把牛顿第二定律改写成为在洛伦兹变换下协变的相对论动力学基本方程.随后导出质能关系式,它与动量守恒定律和质能守恒定律一起,构成处理原子物理与高能物理碰撞问题的联立方程组.最后讨论电磁场中带电粒子的拉格朗日量 L、哈密顿量 H 及其运动方程,它们在电动力学及量子力学中均有广泛的应用.

第八章　狭义相对论的基本原理与相对论的时空理论

本章首先介绍爱因斯坦提出的狭义相对论的基本原理——相对性原理与光速不变原理,并由此出发证明间隔不变性,进而得到洛伦兹变换,它给出同一事件在不同惯性系中时空坐标的变换关系.在此基础上,一方面阐明相对论的时空观;另一方面导出相对论的速度变换,它给出任一物体的速度在不同惯性系之间的变换关系.最后,引入了闵可夫斯基空间(四维空间),证明了不同惯性系之间的变换相应于四维空间的转动,并将物理量按四维空间转动下的变换性质分解成各阶张量,证明物理规律要符合相对论的要求就应具有四维张量方程的形式.这为相对论力学和相对论电动力学的建立奠定了数学基础.

§ 8.1　相对论的基本原理

伽利略变换和相对性原理早在19世纪之前就得到力学实验的证实.1864年麦克斯韦建立的电磁理论,成功地解释了真空和静止介质中的电磁现象和光现象,预言了电磁波的存在,并为20多年后的实验所证实.

但是,人们随后发现:伽利略变换、相对性原理和麦克斯韦方程这三者之间存在着不可调和的矛盾,并迫使人们对它们进行取舍.为此,科学家进行了以迈克尔逊-莫雷实验为代表的一系列实验.面对这些实验结果应该怎样认识?著名物理学家爱因斯坦经过长达10多年的思考,终于在1905年提出了“狭义相对论”,成为20世纪自然科学最伟大的发现之一.

本节首先讨论伽利略变换、相对性原理与麦克斯韦方程的矛盾.接着,介绍为解决这个矛盾所进行的一系列实验,特别是迈克尔逊-莫雷实验.最后,介绍爱因斯坦对迈克尔逊-莫雷实验零结果的思考和据此提出的“相对论的基本原理”.

一、伽利略变换、相对性原理与麦克斯韦方程的矛盾

经典力学告诉我们,牛顿第一定律成立的参考系称为惯性系.设惯性系K′以匀速$V = V e_x$ 相对另一惯性系K 运动,并且假设当两惯性系的坐标原点重合(即$x = x' = 0$)的瞬间,位于坐标原点的两个时钟开始计时(即 $t = t' = 0$),则两惯性系的时

空坐标变换为

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1}$$

(1)式称为伽利略变换. 移项即得逆变换

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{2}$$

在经典力学中还证明了,在伽利略变换下,所有惯性系中的力学规律保持形式不变,这就是力学中介绍过的相对性原理,并为当时的实验所证实.

但是人们发现,在伽利略变换下,不同惯性系的麦克斯韦方程却有不同的形式. 例如,在惯性系 K′,关于电场旋度的麦克斯韦方程为

$$\nabla' \times E(x',t') = -\frac{\partial B(x',t')}{\partial t'}. \tag{3}$$

这个方程在 K 系将具有什么形式呢?

首先,由伽利略变换及复变函数的导数公式,可得

$$\nabla' = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_{i=1}^{3} e_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{3} e_i \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla, \tag{4}$$

其次,注意到 $\frac{\partial x_1}{\partial t'} = V$, $\frac{\partial x_2}{\partial t'} = \frac{\partial x_3}{\partial t'} = 0$,以及 $V\cdot\nabla = Ve_1\cdot\nabla = V\frac{\partial}{\partial x_1}$,可得

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} + V\cdot\nabla. \tag{5}$$

这样,在惯性系 K 关于电场旋度的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times E(x,t) = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} - (V\cdot\nabla)B(x,t). \tag{6}$$

关于磁场旋度的麦克斯韦方程,以及由麦克斯韦方程导出的波动方程[见§ 5.1 的(7)式和(9)式],在不同惯性系也有不同的形式,见本节习题第 2 题.

那么,到底是伽利略变换有问题,还是相对性原理对电磁现象不适用了,抑或是麦克斯韦方程要修改呢? 这个矛盾在 19 世纪末引起科学界的关注,人们对三者的取舍必须作出选择. 显然,存在三种可能,如表 8.1 所示.

表　8.1

三种选择	伽利略变换	相对性原理	麦克斯韦方程
(I)	保　留	保　留	扬　弃
(II)	保　留	扬　弃	保　留
(III)	扬　弃	保　留	保　留

由于麦克斯韦理论在 19 世纪取得的巨大成功,人们并不怀疑它的正确性. 当时大多数物理学家选择了(II),认为相对性原理对电磁现象不适用. 他们认为,麦克斯韦方程只在一个特殊的参考系才成立. 正像水波、声波是机械振动在介质中传

播一样,电磁波应该是电磁振动在特殊介质以太中的传播现象. 所谓“以太”,则被设想为宇宙中无所不在的一种透明、没有重量、仅能在其自身所在位置作微小振动的特殊介质. 他们认为,麦克斯韦方程组成立的惯性系就是特殊的以太参考系;只有在以太参考系中,真空中沿各个方向的光速才是 c. 这样,人们就可以通过实验来测定地球相对以太的速度,从而找到以太参考系. 迈克尔逊-莫雷实验(1887 年)就是最具代表性的一个实验.

二、迈克尔逊-莫雷实验

既然光相对以太参考系的速度为 c,如果地球相对以太的速度为 V,则地球上观察到的光速为 $c-V$,即与 c 和 V 之间的夹角有关. 这样,只要测出两个方向上光速的差异,即可求得地球相对以太参考系的光速 V.

迈克尔逊-莫雷实验装置的示意图如 8.1 所示. 从光源 S 发出的一束平行光,经半透明镜 M 分成两束:光束1 透过 M 后被 M_1 反射回 M,经 M 反射后到达望远镜 T;光束2 被 M 反射后经 M_2 反射回 M,再透过 M 到达望远镜 T. 这两束光在望远镜的像平面上产生干涉形成干涉条纹.

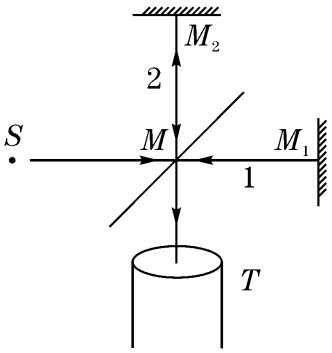


图 8.1

设地球相对以太参考系的速度 V 沿 MM_1 方向,且 $MM_1=l_1$, $MM_2=l_2$, 则可求得这两束光的相位差.

由于光沿 MM_1 方向及沿 M_1M 方向相对地球的速率分别为 $c-V$ 和 $c+V$,故光束从 M 到 M_1,再从 M_1 到 M 所需时间为

$$t_1=\frac{l_1}{c-V}+\frac{l_1}{c+V}=\frac{2l_1c}{c^2-V^2}=\frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}, \tag{7}$$

式中

$$\beta=\frac{V}{c}. \tag{8}$$

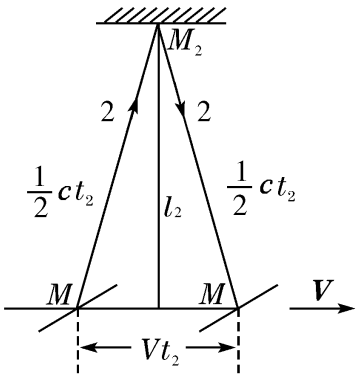


图 8.2

设光束 2 从 M 到 M_2,再从 M_2 到 M 所需时间为 t_2,则在以太参考系中,光束 2 经过的路程如图 8.2 所示. 既然光在以太参考系的速度为 c,故

$$\sqrt{l_2^2+\left(\frac{Vt_2}{2}\right)^2}=\frac{ct_2}{2}, \tag{9}$$

将上式两边平方,可解出

$$t_2=\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}=\frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{10}$$

由此得两束光的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{1-\beta^2}\right). \tag{11}$$

现在将整个仪器旋转90°,即得两束光的相位差为

$$\Delta\varphi' = 2\pi\frac{t'_2 - t'_1}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{12}$$

这样,两束光的相位差的改变为

$$\Delta\varphi' - \Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(l_1 + l_2)\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{2\pi(l_1 + l_2)}{\lambda}\beta^2, \tag{13}$$

上式已利用$\frac{1}{1-\beta^2}\approx 1+\beta^2$, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\beta^2$(当$\beta\ll 1$).

干涉条纹移动的数目为

$$\Delta N = \frac{\Delta\varphi' - \Delta\varphi}{2\pi} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2. \tag{14}$$

在当时的实验水平下,干涉条纹的移动能否被观察到呢? 首先,要估计地球相对以太参考系的速率V 的数量级.迈克尔逊干涉仪是固定在地球上的,地球沿椭圆轨道围绕太阳运动,其速率$V\approx 30\text{km/s}$.既然不同季节地球运动方向不同,实验又是在不同季节的白天和黑夜在不同城市进行的,可以预料,必然存在地球相对以太参考系的速率V 不低于30km/s这一数量级的实验.据此,设$\beta = V/c = 10^{-4}$.其次,迈克尔逊-莫雷实验中的$l_1 + l_2 = 22\text{m}$,如取$\lambda = 5.5\times 10^{-7}\text{m}$,代入(14)式,可得$\Delta N = 0.4$. 根据当时的实验水平,干涉条纹移动0.4个条纹是可以观察到的.但是,所有的实验均没有发现条纹的移动.

为了解释迈克尔逊-莫雷实验的零结果并保留以太参考系的概念,人们提出了种种假设.其中的“以太牵引说”认为以太会粘附在各种有质量的物体上,这样地球周围的以太便为地球所牵引而随地球而运动.这意味着地球相对地面上以太的速度为零,从而实验结果得到解释.但“以太牵引说”又与菲索流水实验和光行差现象矛盾.1892年,洛伦兹和斐兹杰惹各自提出了“收缩假说”,认为所有物体在相对于以太运动方向上的长度会发生收缩.据此,亦可解释干涉条纹不会移动.但是,如果这个假说正确,则相对以太运动的透明物质将会出现双折射现象.而其后的瑞利实验(1902年)和布拉斯实验(1904年)都没有出现双折射.总之,后来提出的种种假说,都因为只能解释一些实验而不能解释另一些实验而宣告失败.

爱因斯坦在回忆创立狭义相对论的过程中说:“如果承认迈克尔逊的零结果是事实,那么地球相对以太运动的想法就是错的,这是引导我走向狭义相对论的第一步.”

到了1895年,荷兰物理学家洛伦兹发表的“运动物体中的电和光现象的理论研究”一文,提出了长度收缩的精确公式

$$l_{/\!/} = l\sqrt{1-\beta^2}. \tag{15}$$

只要用 $l_1\sqrt{1-\beta^2}$ 代替(11)式中的 l_1,用 $l_2\sqrt{1-\beta^2}$ 代替(12)式中的 l_2,便可以精确地证明 $\Delta N = 0$.

爱因斯坦依靠他敏锐的直觉,相信麦克斯韦方程与洛伦兹的公式是正确的.但进一步推算,发现要保持这些公式在运动参考系中仍成立,必然导致在不同惯性系真空中光速不变的概念,但光速不变性又与力学的速度合成法则相矛盾.经过十多年的思考,终于在1905年5月的一天,他找到了解决问题的关键.他说:

"为什么这两个观念相互矛盾呢?我感到这一难题相当不好解决.我花了整整一年的时间,试图修改洛伦兹的思想,来解决这个问题,但是却徒劳无功.

是我在伯尔尼的朋友贝索偶然间帮我解脱了困境.那是一个晴朗的日子,我带着这个问题访问了他,我们讨论了这个问题的每一个细节,忽然我悟到了这个问题的症结所在.这个问题来自对时间概念的分析,不可能绝对地确定时间,在时间和信号速度之间有着不可分割的联系.利用这一新概念,我第一次彻底地解决了这个难题."

1905年6月,爱因斯坦完成了"论运动物体的电动力学"这篇历史性论文,并于同年9月发表在德国《物理学年鉴》上.爱因斯坦以其大无畏的创新精神,作出了第(III)个选择,彻底抛弃了以太参考系,提出了两个看起来似乎矛盾的"相对性原理"和"光速不变原理",成功地解释了迈克尔逊-莫雷实验和其他所有实验.

爱因斯坦提出的这两个原理合称为"相对论的基本原理".

三、相对论的基本原理

相对论的基本原理包含:

(1) 相对性原理.物理规律在所有惯性系中具有相同的形式,不存在特殊的惯性系.

(2) 光速不变原理.在所有惯性系内,真空中的光速沿任何方向均为 c,并与光源的运动无关.

由相对论的两条基本原理出发可以建立整个狭义相对论.这个理论不仅成功地解释了已知的全部实验事实,而且预言了新的效应,这些效应已为其后的实验所证实.例如,1964年柯尔法等人在实验中让 π^0 介子以 $V = 0.9975c$ 的速度运动,在运动中衰变为两个光子.实验测定沿 π^0 介子运动方向放出的光子速度为 $(2.9977 \pm 0.0004)\times 10^8\,\mathrm{m/s}$,与静止光源测得的光速一致.1972年,西欧原子核研究中心的贝利和皮加索等人通过测量沿圆形轨道飞行的 μ 子的寿命,证实了运动时钟变慢效应(见§ 8.3).1975年斯耐德等人测定的横向多普勒效应也与理论一致.近一个世纪以来,关于光速不变原理的实验,运动时钟变慢的实验,以及相对论力学关于质量对速度依赖关系的实验,质能关系的实验,无不与相对论的预言相符合.这一切显示了,建立在爱因斯坦相对性原理与光速不变原理上的狭义相对论的巨大成功.

下一节,我们将从相对论的基本原理出发,导出两个作相对运动的惯性系之间的时空坐标变换,以取代伽利略变换.

习　题　8.1

1. 试证明,在伽利略变换下,在不同惯性系中牛顿定律$F=m\ddot{x}$具有相同的形式.

2. 试证明,在伽利略变换下,在不同惯性系中关于磁场旋度的麦克斯韦方程与波动方程(真空中)具有不同的形式.已知在惯性系K′中两方程具有形式

$$\nabla'\times H(x',t')=J_f(x',t')+\frac{\partial D(x',t')}{\partial t'}.\qquad \nabla'^2E(x',t')+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E(x',t')}{\partial t'^2}=0.$$

问在K 系中方程具有什么形式?

§ 8.2　洛伦兹变换

本节从惯性系的时空均匀性与各向同性出发,利用光速不变原理和相对性原理导出间隔不变性.据此,便可导出洛伦兹变换.为了正确运用洛伦兹变换,应特别注意相对论中的关于“观察者”及“测量”的含义.

如果没有特别声明,本书提到的参考系均为惯性系.

一、事件　间隔与间隔不变性

任何一个物理事件都是在某一时刻在某一地点发生的,因此可以用时空坐标(x,y,z,t)来标记事件.

现在引入一个虚构的四维空间,并取x,y,z,t为四个互相正交的轴.为直观起见,图8.3给出的是以x和t为轴的二维空间.每一事件可用一个点表示,称为事件点.

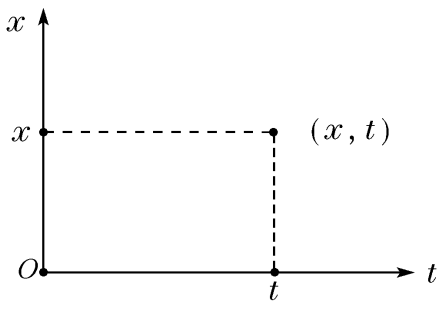


图 8.3

设事件1是激光器发出一束激光,K 系和K′系测得其时空坐标分别为(x_1,y_1,z_1,t_1)及(x_1',y_1',z_1',t_1');事件2是这束激光射中一幢房子,K 系和K′系测得的时空坐标分别为(x_2,y_2,z_2,t_2)及(x_2',y_2',z_2',t_2').

根据光速不变原理(把空气的折射率看做1),在K 系的观察者应测得[①]

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=c^2\Delta t^2,\tag{1}$$

移项后,记作[②]

① 为书写方便,Δx^2表示$(\Delta x)^2$,而非$\Delta(x^2)$,其余类推.

② 也有的作者定义$\Delta s^2=c^2\Delta t^2-(\Delta x^2+y^2+\Delta z^2)$.

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = 0, \tag{2}$$

并称 Δs 为上述两事件的间隔. 显然,由光信号联系的两事件的间隔为零.

同理K′系观察者应测得

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = c^2\Delta t'^2, \tag{3}$$

K′系测得这两事件的间隔 $\Delta s'$ 也应满足

$$\Delta s'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2 = 0. \tag{4}$$

比较(2)式和(4)式可见,对于光讯号联系的两事件而言,不同惯性系测得的间隔是相同的,即

$$\Delta s' = \Delta s = 0. \tag{5}$$

如果两事件不是由光讯号联系,两事件的间隔在不同惯性系是否还相等呢?

现在,进一步讨论 $\Delta s'$ 与 Δs 的普遍关系.

首先,由经典力学已得知,惯性系的时间和空间均匀性(即物理定律不因时空坐标原点的选择而改变)使得从 (x, y, z, t) 到 (x', y', z', t') 的变换是线性变换. 因而 Δs 与 $\Delta s'$ 必有线性关系(见本节习题第1题),即

$$\Delta s' = a\Delta s + b. \tag{6}$$

既然讨论 $\Delta s'$ 与 Δs 的普遍关系,由光速联系的两事件的间隔应为其中一特例. 将(5)式代入上式可得 $b = 0$,由此得

$$\Delta s' = a\Delta s. \tag{7}$$

其次,考虑到时间、空间的均匀性和各向同性(后者指物理规律不因坐标轴取向的选择而改变),比例系数 a 不应依赖于时空坐标及两惯性系相对速度 V 的方向,最多只依赖于 $|V| = V$ 的大小,即

$$\Delta s' = a(V)\Delta s. \tag{8}$$

第三,根据相对性原理,一切惯性系在物理上等价,没有一个惯性系是特殊的. 因此,(8)式反过来也应成立,即

$$\Delta s = a(V)\Delta s'. \tag{9}$$

(8)式和(9)式联立,便有

$$a = \pm 1. \tag{10}$$

最后,我们考察 $a = -1$ 是否可能?假设有惯性系K,K′和K″,如果 $a = -1$,则有 $\Delta s = -\Delta s'$, $\Delta s' = -\Delta s''$, $\Delta s'' = -\Delta s$,由此得

$$\Delta s = -\Delta s' = \Delta s'' = -\Delta s. \tag{11}$$

这就导致 Δs 恒为零的结论. 但是,对于不是由光讯号联系的两事件,其

$$\Delta s = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 \neq 0. \tag{12}$$

可见 a 只能等于1. 这就证明了,在普遍情形下,两事件的间隔不随参考系而变化

$$\Delta s' = \Delta s. \tag{13}$$

这个性质称为间隔不变性.

二、洛伦兹变换

1. 规定

首先,如果没有特别声明,均把惯性系K′与K 的x 轴取在它们相对运动的方向上,且K′系相对K 系的速度为

$$V = V e_x ; \tag{14}$$

其次,让K′系与K 系的y'轴与y 轴互相平行,z'轴与z 轴互相平行;

第三,在两系的坐标原点相遇的时刻,位于坐标原点o及o'的时钟刚好指向零

$$t_o = t'_{o'} = 0. \tag{15}$$

2. 时空均匀性

由惯性系的时空均匀性可知K′系与K 系的时空坐标变换是线性变换. 在上述条件下,y 与z 保持不变,变换具有如下形式

$$x' = a_{11}x + a_{14}ct, \tag{16}$$

$$y' = y, \tag{17}$$

$$z' = z, \tag{18}$$

$$ct' = a_{41}x + a_{44}ct. \tag{19}$$

3. 间隔不变性

设两事件分别为表8. 2 所示:

表 8. 2

	K 系	K′系
事件1	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
事件2	(x,y,z,t)	(x',y',z',t')

由间隔不变性可得$\Delta s'^2 = \Delta s^2$,由上表易见

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

将(16)~ (19)式代入,便有

$$(a_{11}x + a_{14}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{41}x + a_{44}ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{20}$$

比较两边的同类项系数,可得

$$a_{11}^2 - a_{41}^2 = 1, \tag{21}$$

$$a_{11}a_{14} - a_{41}a_{44} = 0, \tag{22}$$

$$a_{14}^2 - a_{44}^2 = -1. \tag{23}$$

将(21)式和(23)式移项,分别改写为

$$a_{11}^2 = 1 + a_{41}^2, \qquad a_{44}^2 = 1 + a_{14}^2. \tag{24}$$

将(22)式移项后平方,得$a_{11}^2a_{14}^2 = a_{41}^2a_{44}^2$,再将(24)式代入,易见$a_{14} = \pm a_{41}$. 但考虑到$x$ 轴与x'轴正向相同,故$a_{11} > 0$;t与t'的正向相同,故$a_{44} > 0$. 由(22)式可见,a_{14}与a_{41}应同号,故

$$a_{14} = a_{41}. \tag{25}$$

4. 考察K′系原点o'的运动

设事件2是K′系原点o'在t时刻运动到$(x,0,0)$处. 在K′系测量,运动过程中恒有$x'=0$. 由(16)式可得

$$V = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c\frac{a_{14}}{a_{11}},$$

即

$$a_{14} = -\frac{V}{c}a_{11} = -\beta a_{11}, \tag{26}$$

式中$\beta=\frac{V}{c}$. 由(24)式,(25)式和(26)式,得

$$a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, \qquad a_{14} = a_{41} = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\beta\gamma. \tag{27}$$

将(27)式代入(16)~(19)式,即得

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \tag{28}$$

这就是两个惯性系时空坐标的变换公式,称为洛伦兹变换. 它告诉我们,如果某一事件在K 系发生于(x,y,z,t),则该事件在K′系将发生于(x',y',z',t'). 换句话说,洛伦兹变换是同一事件在两个惯性系测得的时空坐标之间的关系.

由(28)式可以求得用(x',y',z',t')表示(x,y,z,t)的关系式

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \tag{29}$$

这就是(28)式的逆变换式,两式统称为洛伦兹变换. 实际上,如果将(28)式中有撇的量与没有撇的量互换,并将V 换成$-V$,即得(29)式. 这是因为K′系相对K 系以V运动,相当于K 系相对K′系以$-V$ 运动.

当两惯性系的相对速率远小于光速c时,将$V/c\approx 0$代入上两式,则洛伦兹变换将过渡到伽利略变换. 这表明,对于低速运动,伽利略变换依然有效. 由此可见,在低速运动中,不可能觉察到光速不变原理与经典力学定律两者之间的差异.

历史上,洛伦兹变换是在狭义相对论发表之前由荷兰物理学家洛伦兹首先得到的. 他指出,如果惯性系之间的时空坐标变换具有(28)式的形式,则麦克斯韦方程组在不同惯性系具有相同的形式. 并且,他利用这个结果解释了迈克尔逊-莫雷实验. 可惜他仍相信绝对的以太参考系,他对坐标变换的意义并不清楚,他没有把变换到新坐标系里的(x',t')看做是运动参考系的时空坐标,而仅把他们看做假想的辅助概念,这使他未能最后获得成功. 但是,他的工作为爱因斯坦狭义相对论的建立发挥了积极的作用.

三、相对论中的观察者

在应用洛伦兹变换时,应特别注意:每一事件的时空坐标,都是两惯性系的观

察者在事件发生处进行测量的.

相对论中的“观察者”不局限于某一个人,可以这样理解:每一个惯性系的每一“点”都有一个该惯性系的“观察者”,当事件在那一“点”发生时,站在那一“点”的“观察者”就记录下事件发生的时空坐标.对K 系如此,对K′系也如此.事件发生时K 系测得的(x,y,z,t)与K′系测得的(x',y',z',t')都是在事件发生处的两位观察者测量的.

例如,事件1是飞越黄河的赛车在$t_1=t_1'=0$时在$x_1=x_1'=0$处起跑,事件2是赛车在对岸落地.那么,事件2发生时,K 系与K′系的“观察者”就是在赛车落地处记录下事件发生的时空坐标(x_2,t_2)及(x_2',t_2'). 由于两系作相对运动,这两组读数就不会相同(参看本节习题第2题):

$$x_2'=\gamma(x_2-Vt_2)\neq x_2, \tag{30}$$

$$t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{V}{c^2}x_2\right)\neq t_2. \tag{31}$$

两系站在同一点的两位观察者对这两组数值的差异表示理解:K 系观察者说,我的读数是(x_2,t_2),你的读数是(x_2',t_2'),数值之所以不同是因为我们两参考系作相对运动的缘故.对于同地的这两组测量值,他们是公认的:这两组数值就是洛伦兹变换式中的时空坐标.

【例1】 设宇宙飞船(K′系)以$V=0.6c$e$_x$相对地球(K 系)运动.它每隔$\Delta t'=1s$发出一个脉冲讯号.当$t_1'=t_1=0$时,它飞越地球上空并发出第一个脉冲.求

(1) 发出第二个脉冲的时刻t_2'和t_2;

(2) 发出第二个脉冲时飞船到地球的距离l'和l;

(3) 地球收到第二个脉冲的时刻t_3和t_3';

(4) 地球收到第二个脉冲时的位置x_3和x_3'.

解　取K 系坐标原点于地球,K′系坐标原点于飞船. 对于比较复杂的题目,可先把事件理出来:

表 8.3

事　　件	K　　系	K′　　系
事件1(飞船与地球相遇)	$(x_1,t_1)=(0,0)$	$(x_1',t_1')=(0,0)$
事件2(飞船发出第二个脉冲)	$(x_2,t_2)=(?,?)$	$(x_2',t_2')=(0,1)$
事件3(地球收到第二个脉冲)	$(x_3,t_3)=(0,?)$	$(x_3',t_3')=(?,?)$

(1) 题设飞船每隔$\Delta t'=1$s 发出一个脉冲,故$t_2'=1$s.

t_2可由洛伦兹变换算出.由于飞船位于K′系坐标原点,脉冲由飞船发出,事件2的空间坐标$x_2'=0$.由(29)式的第四式可得

$$t_2=\frac{t_2'+\frac{V}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=1.25(\mathrm{s}). \tag{32}$$

同一件事,K′系测得 $t_2'=1\text{s}$,K 系测得 $t_2=1.25\text{s}$,可见时间不是绝对的.

在低速情况下,人们的经验不是这样的:如果把上面的飞船换成火车,设火车的速率为 $V=30\text{m/s}$,将 $(V/c)^2=(30/3\times10^8)^2=10^{-14}$ 代替(32)式中的 $(V/c)^2=(0.6)^2$,其 t_2 仍可看做1s. 可见在低速运动中,绝对时间的观念带来的偏差是完全觉察不出来的.

(2) 两脉冲的时间间隔乘以飞船相对地球的速率,就是飞船与地球的距离.

K 系测得飞船与地球的距离为:

$$l=V\Delta t=0.6c\times1.25\text{s}=0.75c(\text{m});$$

K′系测得飞船与地球的距离为:

$$l'=V\Delta t'=0.6c\times1\text{s}=0.6c(\text{m}).$$

两系测得飞船与地球的距离居然不相等,这有一个规律在后面(见下节). 能否用洛伦兹变换算出 x_2 及 x_2',见本节习题第3题.

(3) t_3 应等于发出第二个脉冲的 t_2+ 脉冲传至地球的时间,即

$$t_3=t_2+\frac{l}{c}=1.25+\frac{0.75c}{c}=2(\text{s}),$$

$$t_3'=\frac{t_3-\frac{V}{c^2}x_3}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{2-0}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=2.5(\text{s}).$$

(4) K 系测量:地球位于K 系坐标原点,地球收到脉冲的位置就在 $x_3=0$ 处.

K′系测量:

$$x_3'=\frac{x_3-Vt_3}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{0-0.6c\times2}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=-1.5c(\text{m}).$$

这个题目的结果与我们日常生活的经验有许多不同. 例如,容易发现

$$t_2-t_1>t_2'-t_1',\quad \text{但}\ t_3-t_2<t_3'-t_2'.$$

这又是为什么呢? 这也有一个规律在后面(见下节).

杨振宁先生曾这样评价费米的讲学:“费米所讲的总是从实际现象开始,用最简单的方法描述出来,你仔细琢磨就会发现,有时候有非常重要的大规律在里面…”读者不妨多想想.

习 题 8.2

1. 试根据惯性系中时间和空间的均匀性,证明从 (x,y,z,t) 到 (x',y',z',t') 的变换是线性变换,Δs 与 $\Delta s'$ 必有线性关系

$$\Delta s=a\Delta s'+b.$$

2. 已知K′系以 $V=Ve_x$ 相对K 系运动. 两系坐标原点相遇时,位于坐标原点的两时钟均指向零. 问当K 系原点 o' 离开 o 后,K 系 x 处的时钟与K′系何处的时钟相遇时,指示的时刻相同($t=$

t')？读数为多少？

3. 在例 1 中，能否用洛伦兹变换计算 l 及 l'？

4. 列车以匀速 $V = V e_x$ 沿笔直的公路(K 系)行驶，当列车经过一高大建筑物时，其避雷针上跳起一脉冲火花，分别照亮沿线后方的铁搭 A 和前方的铁塔 B. 求列车参考系(K′系)测得两铁塔被电光照亮的时间差 $\Delta t' = t'_A - t'_B$. 已知建筑物到两铁塔的距离均为 l_0.

§ 8.3　相对论的时空观

牛顿的时空观认为，时间是与参考系无关的，是绝对的. 它集中地由伽利略变换来反映：

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{1}$$

爱因斯坦的时空观认为，时间是与参考系有关的，不是绝对的. 它集中地由洛伦兹变换来反映：

$$x' = \gamma(x - Vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \tag{2}$$

在应用洛伦兹变换时应特别注意：

(1) 时空坐标 (x, y, z, t) 与 (x', y', z', t') 分别是 K 系与 K′系的观察者在事件发生处用本系的尺和钟测量的.

(2) 两参考系使用的尺和钟都是用相同的原理、相同的材料制造的一模一样的标准尺和标准钟.

(3) 同一参考系的钟在进行测量之前都要校准到同步，即同时指向同一读数.[①]

将同一参考系的钟校准到同步可采用如下的方法：以位于坐标原点的钟在 $t = 0$ 时发出一个无线电信号，其他的钟带有接收器，并假设接收到信号时马上可以启动. 这样，便可事先将位于 x_1 的钟拨到 $t = x_1/c$ 处，将位于 x_2 的钟拨到 $t = x_2/c$ 处，将位于 x_3 的钟拨到 $t = x_3/c$ 处，如图 8.4(a)所示.

这样当位于 $x = 0$ 的钟在 $t = 0$ 开始启动并发出信号时，位于不同距离的钟将陆续接到信号而先后起动，易见已启动的钟将保持读数一致，见图 8.4(b).

本节首先由洛伦兹变换出发讨论相对论的时空观，即同时的相对性，运动时钟(动钟)变慢，动尺长度缩短；接着讨论洛伦兹变换隐含着对信号速度的限制，类空间隔、类时间隔、零间隔的划分，以及两事件的时序能否颠倒等问题.

一、同时的相对性

为了获得更加感性的认识，先应用光速不变原理通过实例来论证，然后用洛伦

① 但是，两参考系校准后的钟不可能指同一读数，这是因为“同时”是相对的. 在异地发生的两事件，K 系认为“同时”，K′系必认为“不同时”，反之亦然. 详见后面的讨论.

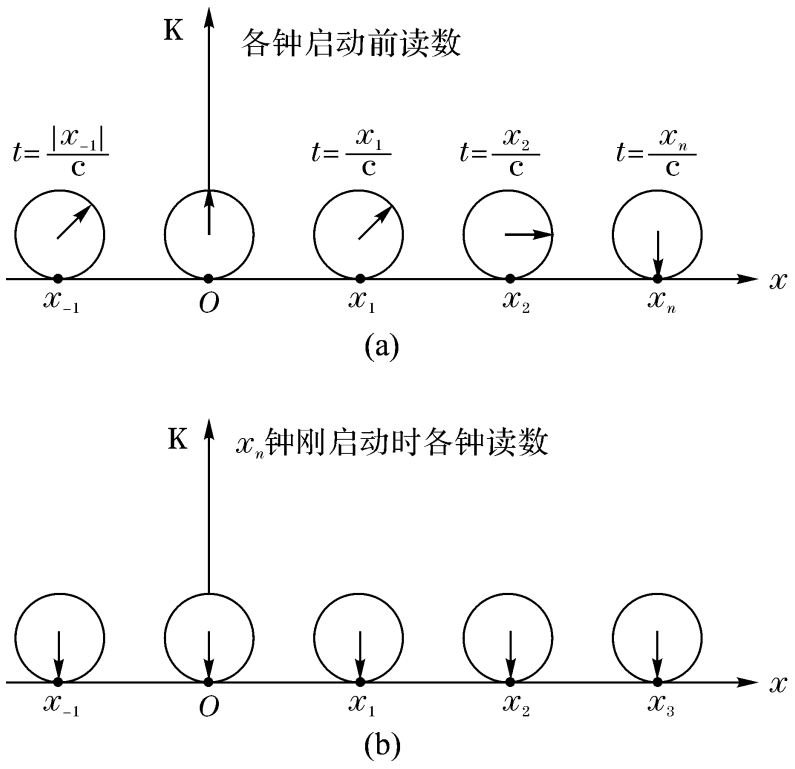


图 8.4

兹变换给出普遍的证明.

1. 根据光速不变原理论证同时的相对性

【例 1】　有一列车(K′系)以 $V=V\boldsymbol{e}_x$ 相对地面(K 系)匀速行驶. 当列车的中点 O' 途经一大树 O 的时候,一个雷打在列车中点 O' 上($BO'=O'A$,见图 8.5). 问

(1)K′系测得,闪光传到车头 A(事件 1)及传到车尾 B(事件 2)是否同时?

(2)K 系测得,上述两事件是否同时?

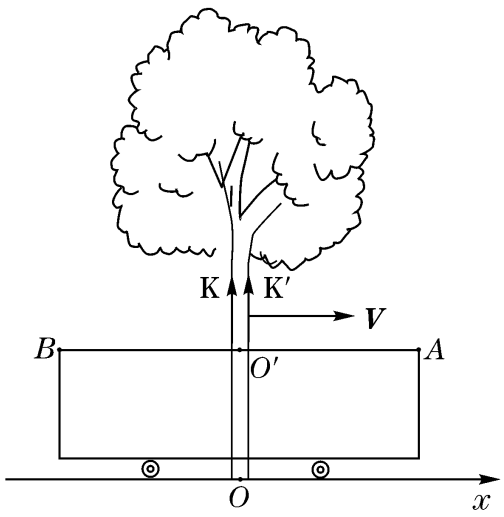


图 8.5

解　(1)K′系的观测. 因为光在空气($n=1$)中沿不同方向的速度均为 c,由 $BO'=O'A$ 可知,K′系测得闪光传到 A 点及 B 点这两事件是同时的.

(2)K 系的观测. K 系测得雷打在大树跟前($x=0$ 处). 根据光速不变原理,闪光在空气中沿不同方向的速度仍为 c. 由于 A 远离大树运动,距大树越来越远;B 向着大树运动,距大树越来越近. 因此,闪光应先传到 B(事件 2),后传到 A(事件 1),即两事件不同时.

K′系测得两事件同时,K 系测得两事件不同时,这就是同时的相对性. 上述讨论还说明,同时的相对性是光速不变原理的直接结论.

如果按照牛顿的时空观,K′系与 K 系认为这两事件是否同时? 见本节习题第

1 题.

2. 根据洛伦兹变换论证同时的相对性

现在讨论普遍的情形. 设K′系测得事件1(x_1', t_1')与事件2(x_2', t_2')是同时的: $t_1' = t_2'$. 问K 系测得事件1(x_1, t_1)与事件2(x_2, t_2)是否同时?

由洛伦兹变换

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{V}{c^2} x_1' \right), \tag{3}$$

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{V}{c^2} x_2' \right), \tag{4}$$

两式相减,便有

$$t_2 - t_1 = \gamma\left[(t_2' - t_1') + \frac{V}{c^2}(x_2' - x_1') \right], \tag{5}$$

利用$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$,上式可简写为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \frac{V}{c^2}\left(x_2' - x_1' \right) = \gamma \frac{V}{c^2}\Delta x'. \tag{6}$$

这表明:

(1) 在K′系同时同地发生的两件事($t_1' = t_2'$, $x_1' = x_2'$),在K 系同时($t_1 = t_2$);

(2) 在K′系同时异地发生的两件事($t_1' = t_2'$, $x_1' \neq x_2'$),在K 系不同时($t_1 \neq t_2$).

【例2】 设列车(K′系)以$V = V e_x$ 相对平坦的铁路桥(K 系)行驶. 当两系OO'相遇时(见8.6 图),K 系测得桥头的灯O 和桥尾的灯P 在$t = 0$ 时同时打开. 问K′系测得灯O 和灯P 何时打开?

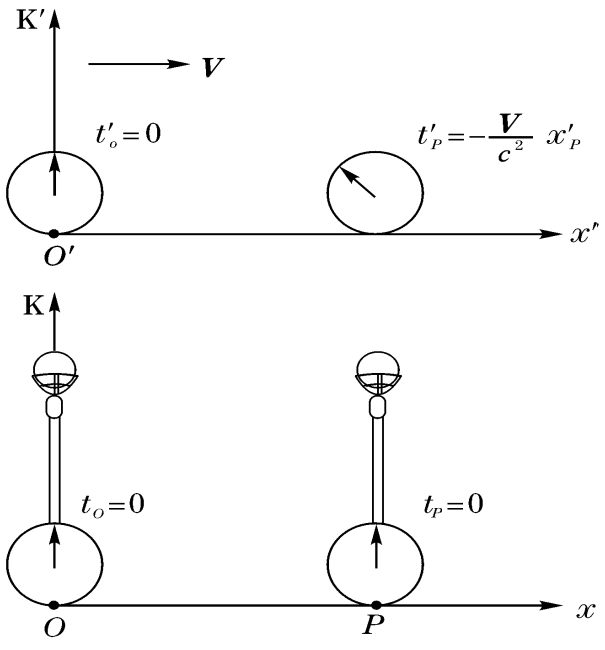


图8.6

解　由题设可知,两事件的时空坐标为

(1) 事件O:

K 系(0,0),K'系(0,0);

(2) 事件P:

K 系(x_P,0),K′系(x_P', t_P').

由

$$t_P = 0 \tag{7}$$

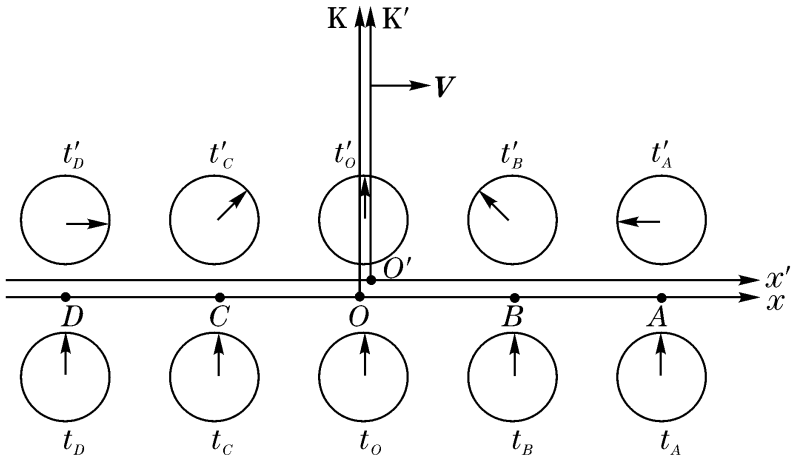
及洛伦兹变换得

$$t_P' = \gamma\left(t_P - \frac{V}{c^2} x_P \right) = -\gamma \frac{V}{c^2} x_P < 0. \tag{8}$$

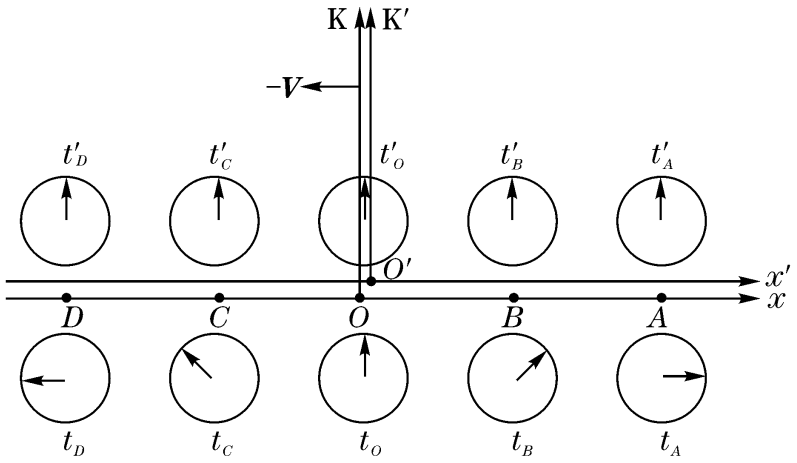
这表明,尽管K 系测得两灯同时打开,

但K′系测得灯O晚开($t'_O = 0$),灯P早开($t'_P < 0$). 这就是同时的相对性.

推论　从图8.6中四个钟的读数还说明一个重要事实:首先,把P点看做沿x轴移动的一个动点,不妨设想地面上(K系)有五盏等距离的路灯A,B,O,C,D,当K系在路灯跟前的五个钟读数相同($t_A = t_B = t_O = t_C = t_D = 0$)时,K′系与之相遇的钟的读数($t'_A$,$t'_B$,$t'_O$,$t'_C$,$t'_D$)各不相同. 由(8)式$t'_P = -Vx'_P/c^2$可推断(把$P$点依次取$A$,$B$,$C$,$D$):K′系不同位置的钟,沿$x$轴正向,一个比一个落后;沿$x$轴负向,一个比一个超前,如图8.7(a)所示.



(a)



(b)

图8.7

反之,当K′系在路灯跟前的五个钟读数相同($t'_A = t'_B = t'_O = t'_C = t'_D = 0$)时,K系与之相遇的钟的读数($t_A$,$t_B$,$t_O$,$t_C$,$t_D$)各不相同:沿$x$轴正向,一个比一个超前;沿$x$轴负向,一个比一个落后,如图8.7(b)所示.

因此,两参考系要互相“对钟”时,应特别注意:

(1) 由于同时的相对性,企图将不同参考系异地的两个时钟进行“对钟”,是没有意义的. 例如在O与O'相遇时,不能拿K系在路灯O跟前的时钟与K′系在路灯A跟前的时钟进行“对钟”. 这是因为

① 按K 系的同时观，$t_0 = 0$ 必有 $t_A = 0$，由洛伦兹变换$0 = t_A = \gamma\left(t'_A + \frac{V}{c^2}x'_A\right)$ 必有 $t'_A = -\frac{V}{c^2}x'_A$；

② 按K′系的同时观，$t'_0 = 0$，必有 $t'_A = 0$.

依赖于各自的同时观，不同参考系认为 t'_A 应有不同读数，因而没有意义.

(2) 不同参考系在事件发生处(即同地)的两个时钟才可以“对钟”. 尽管 t_A 与 t'_A 一般不相等，但两系是公认的，它们的读数由洛伦兹变换相联系.

① 当 $t_A = 0$，两系均认为K′系在路灯A 跟前的钟的读数为 $t'_A = -\frac{V}{c^2}x'_A$；

② 当 $t_A = \frac{V}{c}x_A$ 时，两系均认为K′系在路灯A 跟前的钟的读数为 $t'_A = 0$.

当然，上述在路灯A 跟前的、读数为 t'_A 的钟不是K′系的同一个钟. 因为K′系相对K 系运动，K′系这两个钟是在不同时刻运动到路灯A 跟前的.

二、运动时钟变慢

1. 效应：相对惯性系静止的时钟走得快，运动的时钟走得慢

现在考察不同惯性系测量同一物理过程所经历的时间间隔 Δt 与 $\Delta t'$的关系.

设物体(K′系)以 $V = V e_x$ 相对地面(K 系)作匀速直线运动，如图 8.8 所示.

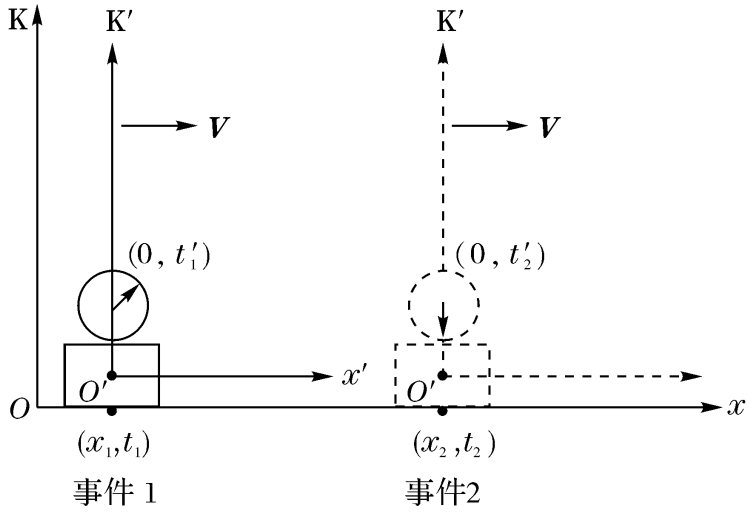


图 8.8

设 t_1 时物体位于 x_1 处(事件 1)，t_2 时物体位于 x_2 处(事件 2). K 系测得这两事件的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1$.

取K′系与这个物体固联，问K′系测得这两事件的时间间隔 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = ?$

与这个作匀速直线运动的物体相对静止的惯性系称为这个物体的固有参考系. 由它测出的时间间隔称为固有时间间隔，简称固有时，用 $\Delta\tau$ 来表示 $\Delta t'$. 由上图易见，固有时是在物体的固有参考系K′同一地点发生的两个事件的时间间隔，也

就是由同一只时钟测量出来的时间间隔.

用洛伦兹变换求 Δt 与 $\Delta t'$ 的关系. 在

$$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x' \right)$$

两边取改变量,得

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x' \right). \tag{9}$$

因为两事件发生于 K′ 系同一点,即 $\Delta x' = 0$,得

$$\Delta t = \gamma\Delta t' = \gamma\Delta\tau, \tag{10}$$

可见固有时

$$\Delta\tau = \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\Delta t < \Delta t, \tag{11}$$

即 K 系认为 K′ 系的时钟变慢了. K′ 系的时钟相对 K 系是运动的,这个效应称为运动时钟变慢,亦即固有时变短.

如果时钟 A 相对地面(K 系)作曲线运动,在 K 系看来,时钟 A 是否仍变慢呢?

在这种情况下,就应将时钟 A 的轨道分成无限多个、长度为无限小的线段. 在每一小段中,时钟 A 的运动可以看做匀速直线运动. 然后在每一瞬间引入与时钟瞬时静止的惯性系 K′, K″, …. 在时钟的整个运动过程中,就要引入无限多个瞬时静止的惯性系,它们依次与时钟 A 保持相对静止的一瞬,之后就离开时钟而远去. 在每一小段中,时钟 A 显示的固有时间间隔仍满足

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{12}$$

若 K 系的时钟显示的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1$,则运动的时钟 A 显示的时间间隔为

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{13}$$

上面是通过时钟显示的时间间隔来说明运动时钟变慢效应的. 这一效应的本质是,运动分子的振动周期、运动基本粒子的衰变寿命、运动心脏跳动的脉搏、运动植物的生长……也都有变慢的效应.

2. 实验证实

1972 年,欧洲核子研究中心观测沿圆形轨道飞行的 μ 子束,对其平均寿命进行测量,发现:

(1) 当 μ 子速度 $v = 0$ 时,其平均寿命为 $\Delta\tau = 2.197 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$;

(2) 当 μ 子速度 $v = 0.9966c$ 时,其平均寿命为 $\Delta t = 26.37 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$.

现在根据运动时钟变慢的公式,利用静止 μ 子的平均寿命 $\Delta\tau$ 计算速度为 $v = 0.9966c$ 时 μ 子的平均寿命 Δt,可得

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{2.197\times 10^{-6}}{\sqrt{1-(0.9966)^2}} = 26.69\times 10^{-6}\text{s}, \tag{14}$$

和实验结果在1.01%精度内符合.

3. 运动时钟变慢效应是相对的

本来将K 系与K′系对调就可证明这个效应的相对性. 但有一个“时钟佯谬”需要解开. 为此,用两个有联系的对钟过程来说明.

(1)K 系认为K′系的时钟变慢:$\Delta t' < \Delta t$.

K 系先后用两个钟C_1和C_2与K′的一个钟C'_1(动钟)进行对钟.

事件1是C_1钟与C'_1钟相遇,事件2是C_2钟与C'_1相遇,如图8.9所示.

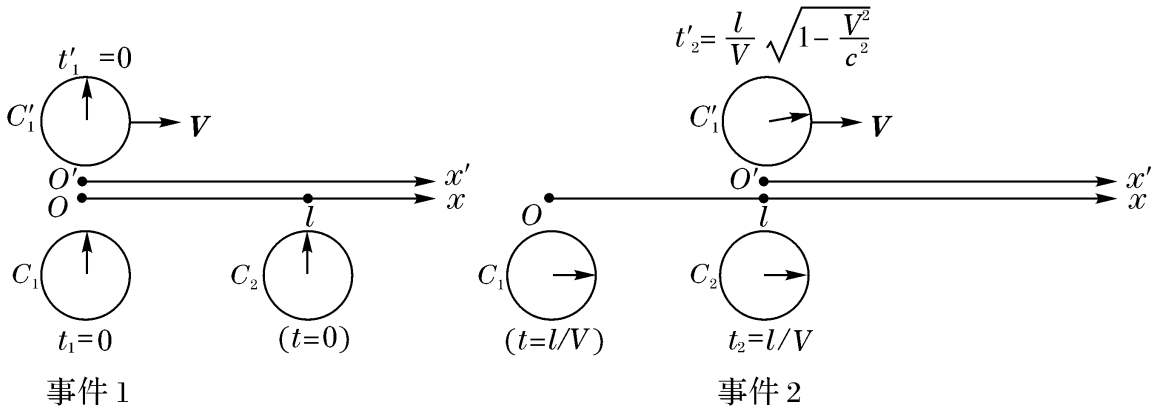


图 8.9

由洛伦兹变换可得两事件的时间间隔Δt与$\Delta t'$的关系为

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right). \tag{15}$$

由于两事件均发生于K′系同一点:$x'_1 = x'_2 = 0$,将$\Delta x' = 0$代入上式,即有

$$\Delta t = \gamma\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > \Delta t' = \Delta\tau. \tag{16}$$

这表明,K 系认为K′系的时钟(动钟)变慢.

(2) K′系认为K 系的时钟变慢:$\Delta t' > \Delta t$.

K′系先后用两个钟C'_2和C'_1与K 系的一个钟C_2(动钟)进行对钟.

事件1是C'_2钟与C_2相遇,事件2是C'_1钟与C_2相遇,如图8.10所示,事件1与原先的事件1不同,事件2与原先的事件2相同(t_2与t'_2可用原来数据).

粗看起来,似乎不好理解:开头两坐标原点相遇时,两参考系位于原点的钟不是都指向零吗? 最后事件2不是$t'_2 < t_2$吗? 这怎么可能有$\Delta t' > \Delta t$呢?

问题出在事件1是C'_2与C_2相遇,事件1发生时钟C_1指向零,但钟C_2不指向零!

K′系认为本系的钟是同步的,故两事件的时间间隔是

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{l}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - 0 = \frac{l}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{17}$$

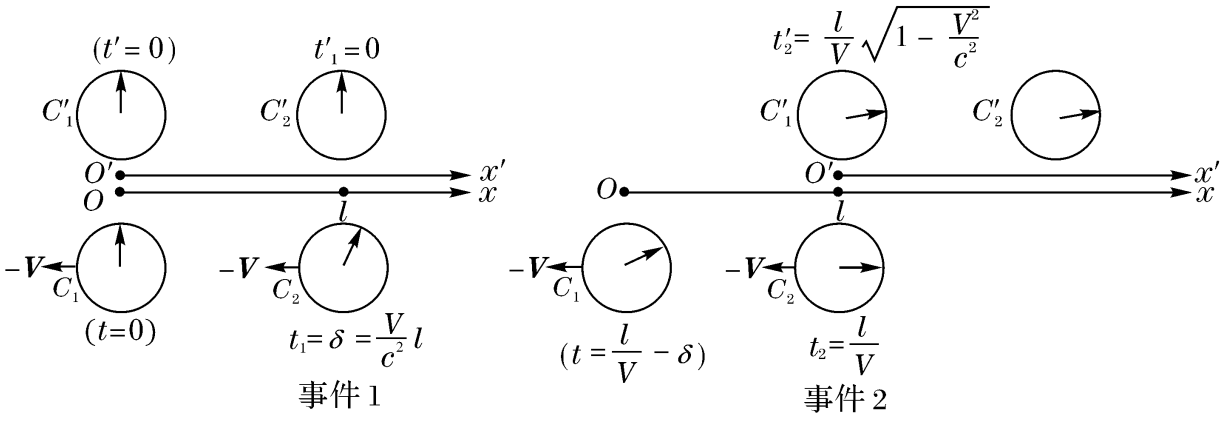


图 8.10

但 K′系认为 K 系的钟是不同步的(同时相对性),当事件 1 发生时,尽管钟 C_1 指向零,但事件发生处的钟 C_2 应指向[参看图 8.7(b)]

$$t_1 = \frac{V}{c^2}x_1 = \frac{V}{c^2}l. \tag{18}$$

而事件 2 发生时与原先一样:

$$t_2 = \frac{l}{V}. \tag{19}$$

在 K′系看来,K 系的钟 C_2 只走过

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l}{V} - \frac{V}{c^2}l = \frac{l}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) < \frac{l}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \Delta t'. \tag{20}$$

这表明,K′系认为 K 系的钟(动钟)变慢. 上式可改写为

$$\Delta t' > \Delta t = \Delta\tau. \tag{21}$$

后式是根据两事件均发生于 K 系的同一点(钟 C_2 处),故 Δt 是固有时.

三、动尺长度缩短

1. 效应:相对惯性系静止的标准尺比较长,运动的标准尺比较短

现在考察,不同惯性系测量同一标准尺的长度 Δx 与 $\Delta x'$ 的关系.

设标准尺(K′系)以 $V = V e_x$ 相对实验室(K 系)作匀速直线运动,如图 8.11 所示.

首先,标准尺 $P_1'P_2'$ 与 K′系相对静止,由 K′系(固有参考系)测得的长度 l' 称为固有长度,用 l_0 表示,即

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = l' = l_0. \tag{22}$$

其次,标准尺 $P_1'P_2'$ 与 K 系作相对运动,设尺的两端与 x 轴相遇的两事件分别为 (x_1, t_1) 及 (x_2, t_2),则

$$\Delta x = x_2 - x_1 = l, \qquad t_1 = t_2, \tag{23}$$

称为尺的运动长度. 因为尺在动,K 系只有在 $t_1 = t_2$ 的条件下测出的 $\Delta x = x_2 - x_1$ 才是运动长度.

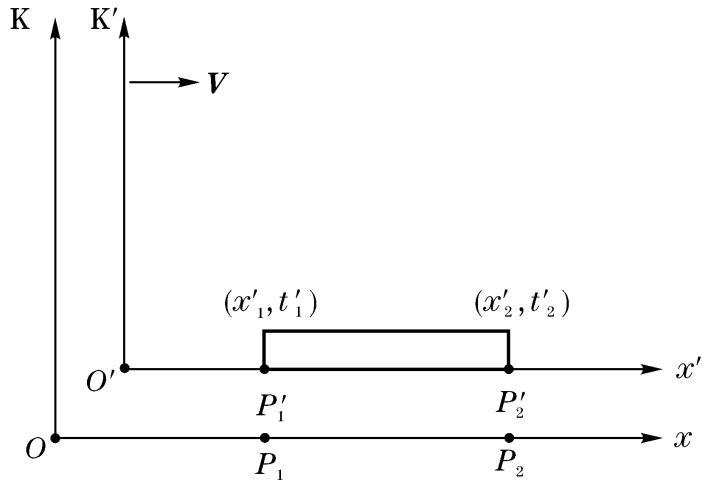


图8.11

由洛伦兹变换

$$x'=\gamma(x-Vt), \tag{24}$$

两边取改变量,并将 $\Delta t=t_2-t_1=0$ 代入,即有

$$\Delta x'=\gamma\Delta x, \tag{25}$$

即

$$l_0=\gamma l>l. \tag{26}$$

这表明,K 系测得尺的运动长度 l 小于K′系测得尺的固有长度 $l'=l_0$. 这个效应就是“动尺长度缩短”.

2. 动尺长度缩短效应是相对的

实际上,将K 系与K′系对调即可证明.

如果标准尺在K 系静止(见图 8.12),则在K 系测得的长度

$$l=x_2-x_1=l_0$$

是固有长度.K′系测得的长度

$$l'=x'_2-x'_1$$

是运动长度.同样,尺的两端的坐标 x'_1 和 x'_2 应是同时($t'_1=t'_2$)进行测量的.

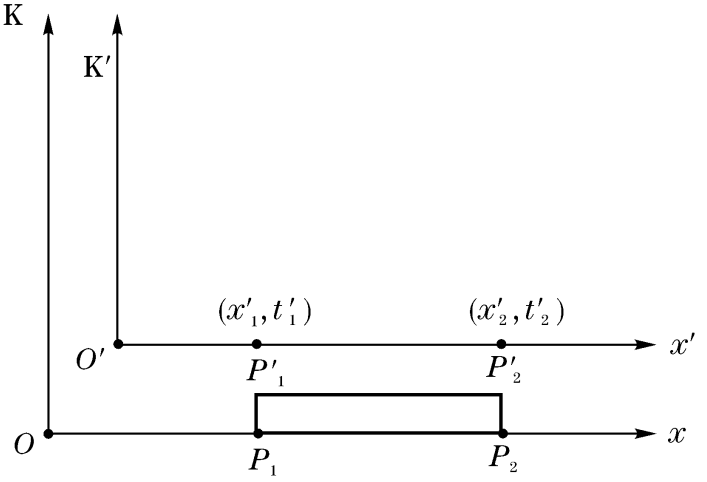


图8.12

对洛伦兹变换 $x=\gamma(x'+Vt')$ 两边取改变量,并将 $\Delta t'=0$ 代入,即有

$$\Delta x=\gamma(\Delta x'+V\Delta t')=\gamma\Delta x', \tag{27}$$

即

$$l_0=\gamma l'>l'. \tag{28}$$

这表明,K′系测得尺的运动长度 l' 小于K 系测得尺的固有长度 $l=l_0$.

【例3】 加速器(K 系)产生了 N 个速度为 v 的 π^+ 介子,其粒子数变化规律为

$$N=N_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{29}$$

式中 N_0 为 $t=0$ 时的粒子数,τ 为粒子的寿命.取K′系为 π^+ 介子的固有参考系,K′系测得其寿命为 $\tau'=\tau_0$.求这 N 个 π^+ 介子经过长度为 $\Delta x=l$ 的管道后,粒子的数目 N.

解　分别在K 系及K′系讨论:

(1) 在加速器参考系(K 系)观察.由运动时钟变慢效应,K 系测得 π^+ 介子的寿命应为

$$\tau=\gamma\tau'=\gamma\tau_0. \tag{30}$$

它飞越 $\Delta x = l$ 的管道需时

$$t = l/v. \tag{31}$$

由(29)式可得飞越管道后,尚存粒子的数目为

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{l}{\gamma v \tau_0}}. \tag{32}$$

(2)在 π^+ 介子的固有参考系(K′系)观察. 由动尺长度缩短效应,K′系测得加速器的管道长为

$$l' = l/\gamma. \tag{33}$$

它飞越管道需时

$$t' = \frac{l'}{v} = \frac{l}{\gamma}\frac{1}{v} = \frac{t}{\gamma}. \tag{34}$$

在K′系,粒子数变化规律应改写为

$$N' = N_0 e^{-\frac{t'}{\tau'}}. \tag{35}$$

将 $t' = t/\gamma$ 及 $\tau' = \tau/\gamma$ 代入上式,易见

$$N' = N_0 e^{-\frac{t'}{\tau'}} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N. \tag{36}$$

这表明,在两参考系观察到经过管道后尚存的粒子数是相同的. 这是一个客观事实. 不同的是,在加速器参考系(K 系)相对论效应表现为 π^+ 介子寿命的延长;在 π^+ 介子的固有参考系(K′系),相对论效应表现为管道长度的缩短. 这两个因素保证了两个参考系观测结果的一致.

四、洛伦兹变换隐含着对信号速度的限制

如果在惯性系之间的时空坐标变换式中含有虚数,将是没有物理意义的. 由(2)式可见,洛伦兹变换中的 $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 必须为实数. 这就要求惯性系之间的相对速度 $V < c$,即要求物质运动的速度以光速 c 为极限.

近年来,国际上不少研究者从宇宙射线及粒子物理实验中寻找超光速的粒子,但至今尚未发现. 如果将来果真发现超光速粒子的话,狭义相对论及建立在它上面的物理理论将要发生重大变革.

五、类空间隔、类时间隔与零间隔 因果律与时序颠倒的关系

若 K 系测得事件 $1(x_1, t_1)$ 发生在事件 $2(x_2, t_2)$ 之前,即 $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$,那么,其他参考系会不会测得这两事件的时序颠倒呢?

对洛伦兹变换 $t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$ 两边取改变量,考察是否可能出现

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) < 0,$$

即

$$c^2\Delta t < V\Delta x. \tag{37}$$

这相当于要求K′系相对K系的速率(注意,V是V的模:$V = |V| > 0$)

$$V > \frac{c\Delta t}{|\Delta x|}\cdot c. \tag{38}$$

上式是$\Delta t' < 0$的必要条件,但不是充分条件.因为,不但要考虑V的方向是否正确,而且要考虑V会不会超过c(若超过就不能实现).

1.V的方向

由(37)式易见:

(1)如果$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,K′系相对K系沿x轴正向运动才有可能使$\Delta t' < 0$;

(2)如果$\Delta x = x_2 - x_1 < 0$,K′系相对K系沿x轴负向运动才有可能使$\Delta t' < 0$.

在后一情形下,应以$-V$代替洛伦兹变换中的V.

2.V的大小

现在要考虑如下三种情形:

(1)若两事件的空间距离

$$\Delta x > c\Delta t, \tag{39}$$

由(38)式可见,V只要满足

$$c > V > \frac{c\Delta t}{|\Delta x|}\cdot c, \tag{40}$$

便可使$\Delta t' < 0$,即在K′系测得这两事件的时序与K系颠倒.

因为物质运动的极限速度为c,现在两事件的空间距离$\Delta x > c\Delta t$,可见这两事件不可能存在因果关系.这样,不同惯性系看到两事件时序不同并不违反因果律.

对于$\Delta x > c\Delta t$的两事件,其间隔平方

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 > 0, \tag{41}$$

称为类空间隔.具有类空间隔的两事件不可能存在因果关系,它们的时序与参考系有关,可以颠倒.

(2)若两事件的空间距离

$$\Delta x < c\Delta t, \tag{42}$$

由(38)可见,K′系相对K系的速率要大于c才有可能让时序颠倒,这是不可能实现的.

从因果律来看,若两事件的空间距离Δx小于$c\Delta t$,这就意味着这两事件有可能存在因果关系.例如,事件1是“发射导弹”,事件2是“击中目标”.前者是因,后者是果.在其他参考系均不可能测得“击中目标”在先,而“发射导弹”在后.

对于$\Delta x < c\Delta t$的两事件,其间隔平方为

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 < 0, \tag{43}$$

称为类时间隔.具有类时间隔的两事件可能存在(当然,不一定存在)因果关系,两事件的时序不可颠倒.

(3)若两事件的空间距离

$$\Delta x = c\Delta t, \tag{44}$$

由(38)式可见,此时要求

$$V > \frac{c\Delta t}{|\Delta x|} \cdot c = c, \tag{45}$$

才使 $\Delta t' < 0$. 既然要求 K′系相对 K 系的速度大于极限速度 c,这是不可能实现的.

从因果律来看,这两事件也有可能存在因果关系(凡由光信号联系的两事件均有 $\Delta x = c\Delta t$,当然这两事件不一定有光信号联系). 因此,这两事件的时序也不可能颠倒.

对于 $\Delta x = c\Delta t$ 的两事件,其间隔平方为

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = 0, \tag{46}$$

称为零间隔.

总之,属于类空间隔的两事件,其时序可随参考系而改变;属于类时间隔和零间隔的两事件,其时序是确定的,不随参考系而改变.

习 题 8.3

1. 按照牛顿的时空观,K′系和 K 系对例 1 中闪光传到 A 和闪光传到 B 是否同时有何判断?

2. 在例 2 中,若 K′系测得两灯同时在 $t' = 0$ 打开,问 K 系测得灯 O 与灯 P 何时打开?由此可得出图 8.7(b)的推论吗?

3. 固有长度为 l_0 的两根直尺 AB(位于右方)与 CD(位于左方)平行于公共的 x 轴,两者相向作匀速直线运动. 与其中一根尺相对静止的观察者发现,A 与 C 相遇和 B 与 D 相遇的时间间隔为 T_0,问两尺的相对速度 V 为多少?

4. 飞船以 $V = 0.6c$ 的速率平行于地面运动. 在与该飞船飞行的同一直线上,有一彗星相对地面以 $u = 0.8c$ 的速率向飞船迎面飞来,地面观察者预计 5s 后两者相撞. 试求飞船上宇航员预计还有多少时间来校正航向,以避免碰撞发生?

5. 设在 6000m 高层大气中产生了一个寿命为 $\tau_0 = 0 = 2\times 10^{-6}$s 的 μ 子. 设该 μ 子在朝地球方向具有 $V = 0.998c$ 的速度,问它能否飞越大气层?试分别按地球参考系 K 及 μ 子的固有参考系 K′进行讨论.

6. 列车 $O'D$(K′系)沿铁路以匀速 V 相对地面(K 系)运动. K 系观察者测得列车 $O'D$ 与隧道 OB 等长,当列车头 O' 到达隧道出口 O(即 OO' 相遇)时,

(1) 若 K 系测得两雷同时打在隧道出口 O 和入口 B 处,问 K′系观察到两雷于何时打在列车何处?

(2) 若 K′系测得两雷同时打在隧道出口 O 和入口 B 处,问 K 系和 K′系分别观察到两雷于何时打在列车何处?

7. 固有长度为 l_0 的列车(K′系),以匀速 V 驶过固有长度为 l_0 的站台(K 系). 当车头的时钟 b 与站台起点的时钟 A 相遇时,两系观察者测得读数均为 t_0. 试分别给出,当下述两事件发生时,K 系与 K′系观察者测得 K 系位于 A,B 及 K′系位于 a,b 处四个时钟的读数.

(1) 事件 1:时钟 b,A 相遇(见图 8.13);

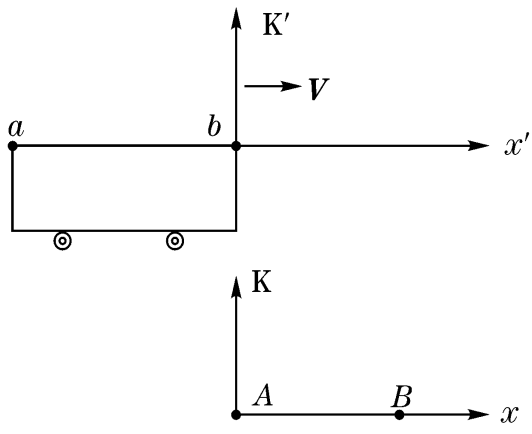


图 8.13

(2) 事件 2:时钟 a,A 相遇.

8. 一把直尺相对K 系静止,直尺与 x 轴交角为 θ,设 K′系以 V 相对K 系沿 x 轴运动,求K′系测得直尺与 x 轴的交角 θ'有何变化?

§ 8.4　相对论的速度变换

洛伦兹变换给出同一事件的时空坐标在不同参考系之间的变换关系,相对论的速度变换给出任一物体的速度在不同参考系之间的变换关系.

本节首先由洛伦兹变换出发导出相对论的速度变换公式,随后讨论公式的物理意义.

一、相对论的速度变换公式

设K′系以匀速 $V = V e_x$ 相对K 系运动,$\boldsymbol{v}$ 是任一物体相对K 系的速度,$\boldsymbol{v}'$是该物体相对K′系的速度.

速度变换公式的导出要从坐标变换公式出发.当然,导出牛顿力学与相对论的速度变换公式的出发点是不同的.

1. 牛顿力学的速度变换基于伽利略变换

伽利略变换为

$$x' = x - V t, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{1}$$

由速度的定义 $\boldsymbol{v}' = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ 及 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 出发,将(1)式的前三式对 t'求导,利用 $t' = t$,即得

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} - V e_x = \boldsymbol{v} - V. \tag{2}$$

这就是牛顿力学的速度变换公式,即牛顿力学的速度合成公式.

这个基于时间绝对性的牛顿力学速度变换公式必定与光速不变原理相矛盾.

2. 相对论的速度变换基于洛伦兹变换

洛伦兹变换为

$$x' = \gamma(x - V t), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \tag{3}$$

由反函数的导数公式及(3)式的第四式易得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \dfrac{V}{c^2}v_x\right)}. \tag{4}$$

利用复合函数的导数公式及(3),(4)式可得

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\gamma(x - Vt)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \tag{5}$$

$$v_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \tag{6}$$

$$v'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)} = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}. \tag{7}$$

这三个公式就是相对论的速度变换公式,即相对论的速度合成公式.

二、速度变换公式的讨论

1. 反变换式

将$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{v}'$互换的同时用$-V$取代V,即得

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}, \qquad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}, \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}. \tag{8}$$

2. 低速极限

当$v \ll c$及$V \ll c$时,将$\frac{V^2}{c^2} \approx 0$及$\frac{V}{c^2}v_x \approx 0$代入(5),(6),(7)式,即得牛顿力学的速度变换公式(2).

3. 高速极限

若粒子以光速c运动,如$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x = c\boldsymbol{e}_x$,代入相对论的速度变换公式,可得

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c, \qquad v_y' = 0, \qquad v'_z = 0. \tag{9}$$

这表明,在K′系粒子仍以光速c运动,因为洛伦兹变换来自光速不变原理,而相对论的速度变换来自洛伦兹变换.这个结果是意料之中的事.

4. 在狭义相对论的理论框架内,不存在超光速的运动

如果K′系以接近光速的$V = 0.99c\ \boldsymbol{e}_x$相对K系运动,粒子又以接近光速的$\boldsymbol{v}' = 0.99c\boldsymbol{e}_x$相对K′系运动,那么,粒子相对K系的速度会不会超过光速c呢?

由相对论的速度变换公式,可得

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'} = \frac{0.99c + 0.99c}{1 + \frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 0.99995c. \tag{10}$$

容易推断,粒子相对任何参考系的速度均不会超过光速c(参看本节习题第1题).

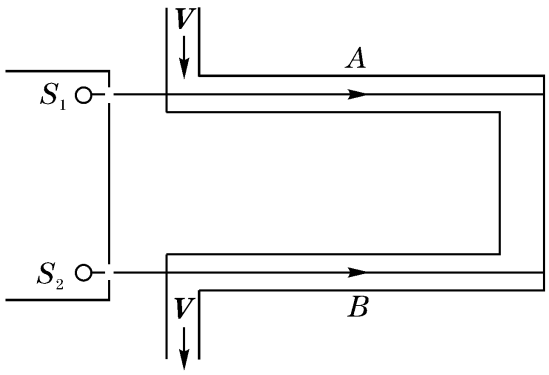


图 8.14

【例1】 已知玻璃弯管中水流速度为V(见图8.14),折射率为n,静止水中的光速为c/n.单色光源S_1和S_2发出的光进入水中时,求实验测得光在A、B段水中的速率v_A和v_B.当$V \ll c$时,其近似值为多少?

解 设实验室参考系为K,流水参考系为K′(A段)及K″(B段),由相对论的速度变换,即可求得光在A、B段的光速.

(1)在A段.K′系相对K系的速度为$V = V e_x$,光在K′系中的速度为$v'_A = c/n$,由速度变换可得

$$v_A = \frac{v'_A + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_A} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{nc}},$$

当$V \ll c$时,利用近似式$\frac{1}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \mp \varepsilon$(式中$\varepsilon$为小量),略去二阶小量$V^2/c^2$,便有

$$v_A \approx \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{nc}\right) = c\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{V}{c}\right] \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)V.$$

(2)在B段.K″系中的速度为$V = -V e_x$,光在K″系中的速度为$v''_A = c/n$.由速度变换可得

$$v_B = \frac{v''_B + (-V)}{1 + \frac{(-V)}{c^2} v''_B} = \frac{\frac{c}{n} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} - V}{1 - \frac{V}{nc}},$$

当$V \ll c$时,同理可得

$$v_B \approx \left(\frac{c}{n} - V\right)\left(1 + \frac{V}{nc}\right) = c\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{V}{c}\right] \approx \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)V.$$

这表明,在介质中,在不同参考系中的光速一般是不同的:在A段$v_A > c/n$;在B段$v_B < c/n$.

习　题　8.4

1.若粒子在K系的速度$v < c$,试由间隔不变性证明:对任一参考系K′,均有$v' < c$.

2.设有两根互相平行、固有长度均为l_0的尺,尺$O''A$(K″系)以$V = V e_x$相对实验室(K′系)运动,尺OB(K系)以$V = -V e_x$相对实验室运动.求K系测得尺$O''A$的长度.

3.固有长度为l_0的车厢(K′系)以$V = V e_x$相对地面(K系)运行,小球以匀速$v' = u_0$从车厢后壁运动到前壁,求K系测得整个过程所需的时间.

4.实验室(K系)中的光源S与接收器R的距离为l_0,浸在静止折射率为n的无限液体介质中.试计算S发出信号到R收到信号所需的时间Δt,设有以下三种情形:

(1)液体相对S-R装置静止;

(2) 液体以$V = V e_x$流动,与S-R连线方向(e_x)平行;

(3) 液体以$V = V e_x$流动,与S-R连线方向(e_y)垂直.

5. 三个宇宙飞船A,B,C在地球上飞行,相对地面(K 系)来说,$v_A = 0.5c\ e_x$,$v_B = -0.5c\ e_x$,$v_C = -0.8c\ e_x$.试问:

(1) 飞船B(K′系)测得A和C相对B的速度分别是多少?

(2) 飞船C(K″系)测得A,B相对C的速度是多少?

6. 地面参考系(K 系)测得,飞船A(K′系)与飞船B分别以$V_A = -0.5c\ e_x$及$V_B = 0.5c\ e_x$在距离为$\Delta y = d$的平行轨道上飞行,如图 8.15 所示.当两飞船在$t = 0$分别到达$(x_A, y_A) = (0,0)$及$(x_B, y_B) = (0, d)$时,K 系测得,飞船A以$v = 0.75c$发射一小包,之后刚好能被飞船B接到.问K′系测得,该小包的发射角$\theta' = \tan^{-1}\frac{v_x'}{v_y'}$及小包的速率$v'$为多少?

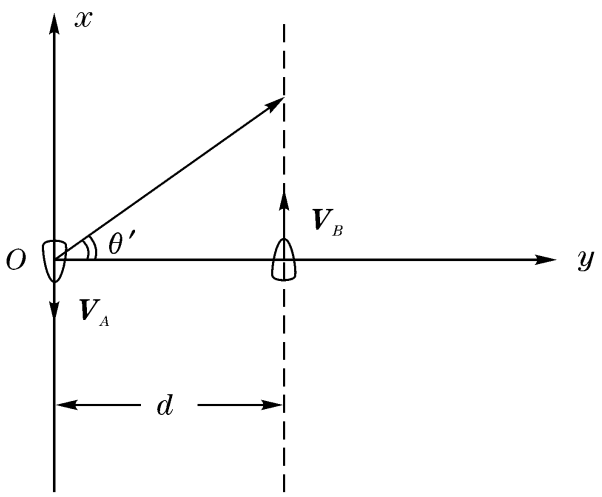


图 8.15

7. 宇宙飞船A(K′系)与B(K″系)分别以$v_A = v_A e_x$及$v_B = v_B e_x$相对地面(K 系)运动.已知B在前,A在后,并且$v_A > v_B$.飞船A发出一个光脉冲经B反射回A.K′系测得所经历的时间为τ_A.问:

(1) K 系与K″系测得这两事件的时间间隔Δt_1和$\Delta t''_1$为多少?

(2) 当A收到反射回的光脉冲后,K′系测得A需要多长时间才能追上B?

8. 在实验室参考系(K 系)测得,两物体(K″系)均以$\boldsymbol{v} = v\ e_x$运动,距离为l.问以$V = V e_x$相对K 系运动的K′系测得两物体的距离l'为多少?

§ 8.5　闵可夫斯基空间　方程的协变性

相对性原理指出,物理规律在所有惯性系具有相同的形式.换句话说,在洛伦兹变换下,表达物理规律的方程保持形式不变,这个性质称为方程的协变性.

但是,怎样才能一目了然地显示物理规律的协变性呢?1907 年,俄国著名科学家闵可夫斯基从“时间不是绝对的,时间与空间是一个不可分割的整体”的观念出发,引入四维复欧氏空间来描述这个统一的四维时空,人们称之为闵可夫斯基空间,简称为四维空间.

本节在引入四维空间之后,首先证明惯性系之间的变换对应着四维空间的转动,并求得描述四维空间转动的变换矩阵.随后介绍物理量怎样根据四维空间转动下的变换性质分解成各阶四维张量,以及四维张量的运算规则.在此基础上,引入四维速度u_μ和四维波矢量K_μ,并用后者解释了相对论多普勒效应和光行差现象.最后,作为建立相对论物理学的准备,讨论了方程协变性的问题.

一、四维空间

1. 定义

如果取

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \mathrm{i}ct \tag{1}$$

作为四维笛卡儿坐标系,由此建立的四维复欧氏空间简称为四维空间.

这样,坐标分别取$(x,y,z,\mathrm{i}ct)$和$(x',y',z',\mathrm{i}ct')$的四维空间就各自对应着惯性系K 和惯性系K′.

2. 惯性系之间的变换对应着四维空间的转动

为什么闵可夫斯基要选定这四个笛卡儿坐标来构造四维空间呢? 他的基本出发点是时空的不可分割性,特别是考虑到间隔不变性将使惯性系之间的变换与四维空间的转动相对应.

间隔不变是指

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2, \tag{2}$$

这意味着,四维空间中任一点到原点的距离

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2} \tag{3}$$

在惯性系的变换中保持不变.

这样,K 系与K′系时空坐标之间的变换就是保持四维空间中距离不变的线性变换,这种变换称为正交变换.空间转动属于正交变换①.由此可见,物理上互相作匀速运动的两惯性系之间的变换与数学上四维空间的转动相对应.

为了给出洛伦兹变换的四维形式,就要引入四维位矢以及描述四维空间转动的变换矩阵.

二、洛伦兹变换的四维形式　变换矩阵的性质

1. 四维位矢的定义

四维位矢定义为

$$x_\mu = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (x,\mathrm{i}ct), \tag{4}$$

通常称x为x_μ的空间分量,$\mathrm{i}ct$为x_μ的时间分量.

今后常用列矩阵表示四维位矢,即

---

① 正交变换包括四维空间转动和四维空间平移这两种形式.四维空间转动正好描述两惯性系相对作匀速运动的情形.本节习题第1 题将证明,$x'o't'$平面相对xot平面的转角与两惯性系的相对速度V 的关系为$\tan\theta = \mathrm{i}V/c$.四维空间平移(即$x$ 轴与x'轴的夹角$\theta = 0$)仅表示惯性系时空坐标计算起点的改变,这意味着两惯性系仍保持相对静止状态($V = 0$),所以不作考虑.

$$(x_\mu)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\ict\end{pmatrix},\qquad (x'_\mu)=\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\ict'\end{pmatrix}. \tag{5}$$

2. 描述四维空间转动的变换矩阵 $\alpha=(\alpha_{\mu\nu})$

利用§ 8.2 导出的洛伦兹变换,可以直接求得变换矩阵,不必重头做起(见本节习题第 1 题).

首先,将洛伦兹变换改写为

$$x'_1=\gamma x_1+i\gamma\beta x_4,\qquad x'_2=x_2,\qquad x'_3=x_3,\qquad x'_4=-i\beta\gamma x_1+\gamma x_4. \tag{6}$$

其次,利用矩阵方程

$$(x'_\mu)=(\alpha_{\mu\nu})(x_\nu) \tag{7}$$

求变换矩阵 α 的矩阵元 $\alpha_{\mu\nu}$. 将(6)式代入(7)式,可得

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma x_1+i\beta\gamma x_4\\x_2\\x_3\\-i\beta\gamma x_1+\gamma x_4\end{pmatrix}. \tag{8}$$

根据矩阵的乘法规则易见不为零的矩阵元为

$$\alpha_{11}=\gamma,\quad \alpha_{14}=i\beta\gamma,\quad \alpha_{22}=1,\quad \alpha_{33}=1,\quad \alpha_{41}=-i\beta\gamma,\quad \alpha_{44}=\gamma. \tag{9}$$

这样,描述四维空间转动的变换矩阵可以写成

$$\alpha=(\alpha_\mu)=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix} \tag{10}$$

3. 洛伦兹变换的四维形式

今后,我们将采用爱因斯坦惯例:

(1) 取值 1,2,3,4 的下标用希腊字母表示,取值 1,2,3 的下标用英文字母表示;

(2) 一项中同一下标出现两次,表示对该下标的所有取值求和.

洛伦兹变换的四维形式为

$$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu,\qquad \mu=1,2,3,4. \tag{11}$$

按照爱因斯坦惯例,上式要对 ν 从 1 到 4 求和. 例如在上式中取 $\mu=1$,随后对 ν 求和,则有

$$x'_1=\alpha_{1\nu}x_\nu=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4=\gamma x_1+i\beta\gamma x_4.$$

4. 变换矩阵 $\alpha=(\alpha_{\mu\nu})$的性质

由间隔不变性(即 $x'_\mu x'_\mu = x_\rho x_\rho$)及四维位矢的变换公式,可以证明(见本节习题第 2 题)

$$\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\mu\tau} = \tilde{\alpha}_{\rho\mu}\alpha_{\mu\tau} = \delta_{\rho\tau}, \qquad \alpha_{\mu\tau}\alpha_{\nu\tau} = \alpha_{\mu\tau}\tilde{\alpha}_{\tau\nu} = \delta_{\mu\nu}; \tag{12}$$

式中 $\tilde{\alpha}_{\rho\mu}$ 为 α 的转置矩阵 $\tilde{\alpha}$ 的矩阵元,可以将上式改写为矩阵形式,即

$$\alpha\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\alpha = I. \tag{13}$$

(12)式和(13)式均称为正交条件,正交变换的变换矩阵满足正交条件.

二、四维 n 阶张量

现在,按照四维空间转动下的变换性质将物理量分解成四维各阶张量.

1. 四维标量(不变量,四维零阶张量)

如果一个物理量只要用 $4^0 = 1$ 个数来描述,它在四维空间转动时数值保持不变,则称这个物理量为四维标量、不变量(指不随参考系而变)、或四维零阶张量.

最基本的四维标量是间隔

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2}, \tag{14}$$

前面已证明 $\Delta s' = \Delta s$,是与参考系无关的不变量.

另一个重要的不变量是固有时 $\Delta\tau$. 如果两事件发生在某参考系 K′的同一点(即 $\Delta r' = 0$),则 K′系测得的时间间隔 $\Delta t'$就是固有时 $\Delta\tau$. 由间隔不变性

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta r'^2 - c^2\Delta t'^2 = -c^2\Delta\tau^2 < 0, \tag{15}$$

可得固有时

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s'^2} = \cdots. \tag{16}$$

间隔是不变量,因此,固有时也是不变量. 例如,μ 子在它相对静止的参考系中的平均寿命是 $\Delta\tau = 2.19\times 10^{-6}$ s,则无论它相对哪个参考系静止,均可测得它的平均寿命 $\Delta\tau = 2.19\times 10^{-6}$ s.

今后遇到的单色平面波相位 $\phi = k\cdot x - \omega t$、电荷的电量 Q、粒子的静质量 m_0 等等均为不变量(四维标量,四维零阶张量).

2. 四维矢量(四维一阶张量)

如果一个物理量 B_μ 要用 $4^1 = 4$ 个数来描述,它在四维空间转动时遵守如下的变换关系

$$B'_\mu = \alpha_{\mu\nu}B_\nu, \tag{17}$$

则称 B_μ 为四维矢量.

例如,四维位矢 x_μ 就是四维矢量. 今后遇到的四维速度 u_μ、四维波矢量 k_μ、四维电流密度矢量 J_μ、四维势矢量 A_μ、四维动量 p_μ、四维力 K_μ、四维加速度 w_μ 等等都是四维矢量.

3. 四维二阶张量

如果一个物理量 $A_{\mu\nu}$ 要用 $4^2 = 16$ 个数来描述,在四维空间转动时遵守如下的变

换关系

$$A'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\tau}A_{\rho\tau}, \tag{18}$$

则称 $A_{\mu\nu}$ 为四维二阶张量.

今后遇到的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$(见§ 9.1)就是四维二阶张量.

四维 n 阶张量也可类似定义. 例如,四维三阶张量 $T_{\lambda\mu\nu}$ 要用 $4^3 = 64$ 个数来描述,在四维空间转动时遵守如下的变换关系

$$T'_{\lambda\mu\nu} = \alpha_{\lambda\sigma}\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\tau}T_{\sigma\rho\tau}. \tag{19}$$

由于这些物理量在四维空间转动下具有确定的变换性质,故又称为四维协变量.

当然,上面谈到的"四维空间转动"仅是作为互相作匀速运动的两惯性系变换的一个数学抽象. 作为物理实体的惯性系,它的三个空间轴 x, y, z 并没有转动.

三、四维张量的运算

1. 外积

两个四维矢量的外积 $B_\mu D_\nu$ 共有 16 个分量(试写出它的矩阵表示),其变换关系为

$$B'_\mu D'_\nu = (\alpha_{\mu\rho}B_\rho)(\alpha_{\nu\tau}D_\tau) = \alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\tau}B_\rho D_\tau. \tag{20}$$

既然它符合(18)式的定义,可见两矢量的外积是二阶张量. 同理,$B_\mu G_{\nu\lambda}$ 是三阶张量.

2. 内积

两个四维矢量的内积 $B_\mu D_\mu$ 的变换关系为

$$B'_\mu D'_\mu = \alpha_{\mu\rho}B_\rho\alpha_{\mu\tau}D_\tau = \delta_{\rho\tau}B_\rho D_\tau = B_\rho D_\rho. \tag{21}$$

这里已利用了(12)式及对 τ 的求和 $\delta_{\rho\tau}D_\tau = D_\rho$. (21)式表明两个四维矢量的内积是四维标量.

比较(20)式和(21)式还可以得出一个规律:一个式子会有多少个自由指标(不重复的指标),就是多少阶的张量. $B_\mu D_\nu$ 有两个自由指标,是二阶张量;$B_\mu D_\mu$ 没有自由指标,是零阶张量;$T_{\lambda\mu\nu}G_{\nu\rho}$ 有三个自由指标 λ, μ, ρ,是三阶张量;….

重复的指标称为哑指标,哑指标的符号是可以随意更改的. 例如(21)式的 $B_\rho D_\rho$ 可以改写为 $B_\mu D_\mu$,因为两者均表示对指标从 1 到 4 求和:

$$B_\mu D_\mu = B_\rho D_\rho = B_1 D_1 + B_2 D_2 + B_3 D_3 + B_4 D_4.$$

3. 四维 del 算符

四维 del 算符 $\Box$ 是三维 del 算符 ∇ 的推广

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right). \tag{22}$$

4. 四维梯度

$\square=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$对标量$\Phi$的作用称为四维梯度,其变换关系为①

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}, \tag{23}$$

可见四维梯度是四维矢量.

5. 四维散度

四维 del 算符$\square$对四维矢量A_μ的作用称为四维散度,其变换关系为

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial(\alpha_{\mu\rho}A_\rho)}{\partial x_\nu}=\delta_{\nu\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}, \tag{24}$$

可见四维散度是四维标量.

6. 达朗贝尔算符(四维拉普拉斯算符)

达朗贝尔算符$\square^2$的定义为②

$$\square^2=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}=\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right). \tag{25}$$

$\square^2$算符是标量算符.$\square^2$对四维标量的作用仍为四维标量,对四维矢量的作用仍为四维矢量.

7. 四维旋度

四维旋度是三维旋度$B_i=(\nabla\times A)_i=\frac{\partial A_k}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_k}$的自然推广

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{26}$$

其变换关系为(见本节习题第3题)

$$T'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\tau}T_{\rho\tau}, \tag{27}$$

即四维旋度是二阶张量,并且是反对称张量

$$T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu}. \tag{28}$$

四、四维速度u_μ

1. 定义

怎样定义四维速度呢?应该从速度的物理意义及四维矢量的变换性质两个方

---

① 利用$\alpha_{\mu\nu}$乘$x'_\mu=\alpha_{\mu\rho}x_\rho$两边后对$\mu$求和,得

$$\alpha_{\mu\nu}x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}x_\rho=\delta_{\nu\rho}x_\rho=x_\nu,$$

两边对x'_μ求导,便有$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}$.

② 有的作者将四维拉普拉斯算符$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$用$\square$表示,但为了与三维 del 算符$\nabla$及三维拉普拉斯算符$\nabla^2$保持对应关系,我们用$\square$表示四维 del 算符,用$\square^2$表示四维拉普拉斯算符.

面来考虑:它应该是单位时间内四维位移$\frac{\Delta x_\mu}{\Delta\tau}$在$\Delta\tau\to 0$的极限,即

$$u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{29}$$

为什么用$\mathrm{d}\tau$而不用$\mathrm{d}t$? 因为$\mathrm{d}x_\mu$是四维矢量,$\mathrm{d}\tau$是四维标量,形式上(29)式可以看做两者的"商",从而构成四维矢量.[①]而$\mathrm{d}t$一般不是四维标量(除非该物体作匀速直线运动,且K系恰好是该物体的固有参考系,才有$\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau$).

2. 四维速度u_μ与三维速度$\boldsymbol{v}$的关系

利用三维速度的定义

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}, \tag{30}$$

以及时间间隔与固有时的关系

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma_v\mathrm{d}\tau, \quad \text{式中 } \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{31}$$

易得

$$u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma_v\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},\mathrm{ic}\right) = \gamma_v(\boldsymbol{v},\mathrm{ic}). \tag{32}$$

前三个分量$\gamma_v\boldsymbol{v}$称为u_μ的空间分量,第四个分量$\gamma_v\mathrm{ic}$称为u_μ的时间分量.

对于K′系,它的四维速度u'_μ为

$$u'_\mu = \gamma_{v'}(\boldsymbol{v}',\mathrm{ic}), \qquad \text{式中 } \gamma_{v'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}. \tag{33}$$

3. 四维速度的变换

所有四维矢量均有相同的变换关系

$$u'_\mu = \alpha_{\mu\nu}u_\nu. \tag{34}$$

由四维速度变换可推出三维速度的变换公式.实际上在(34)式中令$\mu=1$,即有

$$u'_1 = \alpha_{1\nu}u_\nu = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4. \tag{35}$$

将四维速度各分量的取值和变换矩阵元$\alpha_{\mu\nu}$的取值代入,便有

$$\gamma_{v'}v'_x = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{14}u_4 = \gamma\gamma_v v_x + \mathrm{i}\beta\gamma\gamma_v\mathrm{ic}, \tag{36}$$

---

① 严格来说,一元函数导数的定义是$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$的整体作为导数的记号.上面把(29)式$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$看做$\mathrm{d}x_\mu$与$\mathrm{d}\tau$的"商"这种形式上的看法并不是严格的,而仅是一种很形象和很实用的处理.

同理可得

$$\gamma_{v'}v_y' = \alpha_{22}u_2 = \gamma_v v_y, \tag{37}$$

$$\gamma_{v'}v_z' = \alpha_{33}u_3 = \gamma_v v_z, \tag{38}$$

$$\gamma_{v'}\mathrm{i}c = \alpha_{41}u_1 + \alpha_{44}u_4 = -\mathrm{i}\beta\gamma\gamma_v v_x + \gamma\gamma_v \mathrm{i}c. \tag{39}$$

在(39)式两边除 ic,可得 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$, $\gamma_v=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 与 $\gamma_{v'}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}$ 三者的关系:

$$\gamma_{v'} = \gamma\gamma_v\left(1-\frac{V}{c^2}v_x\right). \tag{40}$$

这个公式应用很广.将它代入(36),(37),(38)式,即得三维速度变换公式,见本节习题第4题.

五、四维波矢量 k_μ

四维矢量往往是通过不变量来引入的.

四维位矢 $x_\mu=(x,\mathrm{i}ct)$是通过间隔是不变量,并受

$$\Delta s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x_i^2 + (\mathrm{i}ct)^2 \tag{41}$$

的启发,令 $x_4=\mathrm{i}ct$ 而定义了四维位矢 $x_\mu=(x_1,x_2,x_3,\mathrm{i}ct)$.

四维速度 u_μ 是通过固有时 $\mathrm{d}\tau$ 是不变量,形式上用四维矢量 $\mathrm{d}x_\mu$ 与不变量 $\mathrm{d}\tau$ 的"商"来定义的.

四维波矢量 k_μ 则是通过单色平面电磁波的相位

$$\phi = k\cdot x - \omega t \tag{42}$$

是不变量来引入的.实际上,平面电磁波的电场为

$$E = E_0\cos(k\cdot x - \omega t). \tag{43}$$

例如,当E 取极大值时(取极小值或中间值亦同理),无论K 系或K′系均确认其相位为 $\phi'=\phi=2n\pi$(式中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$),区别仅在于两系测得电场出现第 n 个极大值时的时空坐标不同.因此,相位是不变量.

1. 定义

一方面相位 $\phi=k\cdot x=k_ix_i-\omega t$ 是不变量;另一方面,四维矢量的内积 $k_\mu x_\mu$ 是不变量.联立,即有

$$k_\mu x_\mu = k_i x_i + k_4 x_4 = k_i x_i + k_4\mathrm{i}ct = k_i x_i - \omega t, \tag{44}$$

易见

$$k_4 = \frac{\mathrm{i}}{c}\omega, \tag{45}$$

由此得四维波矢 k_μ 的定义

$$k_\mu = (k_1,k_2,k_3,k_4) = \left(k,\frac{\mathrm{i}}{c}\omega\right). \tag{46}$$

2. 四维波矢的变换

作为四维矢量,四维波矢的变换关系为

$$k'_\mu = \alpha_{\mu\nu} k_\nu, \qquad k_\mu = \tilde{\alpha}_{\mu\nu} k'_\nu = \alpha_{\nu\mu} k'_\nu. \tag{47}$$

后式的证明见本节习题第6题. 将前式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}\omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(k_1 - \frac{V}{c^2}\omega\right) \\ k_2 \\ k_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}\gamma(\omega - V k_1) \end{pmatrix}, \tag{48}$$

若写成三维形式,即为

$$k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{V}{c^2}\omega\right), \qquad k'_y = k_y, \qquad k'_z = k_z, \qquad \omega' = \gamma(\omega - V k_x). \tag{49}$$

逆变换为

$$k_x = \gamma\left(k'_x + \frac{V}{c^2}\omega'\right), \quad k_y = k'_y, \qquad k_z = k'_z, \qquad \omega = \gamma(\omega' + V k'_x), \tag{50}$$

式中的 k,ω 及 k',ω'分别是K 系与K′系测得的波矢与频率.

3. 相对论多普勒效应

已知光源S(K′系)以匀速 $V = V e_x$ 相对实验室(K 系)运动,光源的固有频率为 ω_0. 求实验室参考系测得的 ω 与 $\omega' = \omega_0$ 的关系.

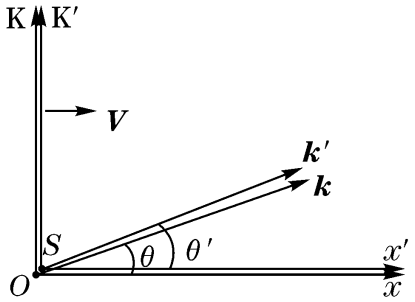


图 8.16

将 $\omega' = \omega_0$ 及 $k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ 代入

$$\omega' = \gamma(\omega - V k_x),$$

即有

$$\omega_0 = \gamma\left(\omega - V\frac{\omega}{c}\cos\theta\right) = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta). \tag{51}$$

这表明,K 系测得光源的频率为

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} = \frac{\omega_0\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta\cos\theta}. \tag{52}$$

在 k 与 V 的夹角 $\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ 的情形下,K 系测得的频率 ω 与固有频率 ω_0 的关系如表8.5所示:

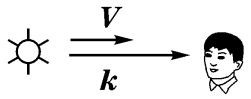
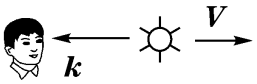
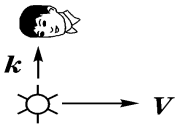
4. 光行差现象

恒星在一年不同季节里,其“表观位置”发生周期性变化的现象,称为光行差现象.

恒星是相对太阳系保持相对静止的星体. 由远处恒星射来的平行光,相对太阳的方向由波矢 k 描述,称为“真实方向”;这束平行光相对地球的方向由波矢 k'描

述,称为“表观方向”.

表 8.5

	θ	图示	观察方向	$\omega=\frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$
纵向多普勒效应	0		迎着光源运动方向观察(ω 增加)	$\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}>\omega_0$
	π		逆着光源运动方向观察(ω 减小)	$\omega=\omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}<\omega_0$
横向多普勒效应	$\frac{\pi}{2}$		垂直光源运动方向观察(ω 减小)	$\omega=\omega_0\sqrt{1-\beta^2}<\omega_0$

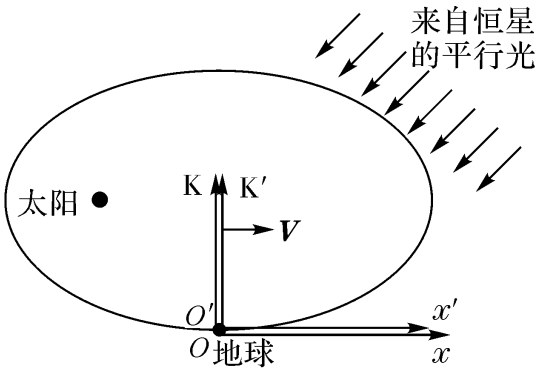


图 8.17

为什么恒星的“表观位置”会周期性地变化呢?显然是由于地球相对太阳公转引起的.好比人在雨中跑,当人向东跑或向西跑时,发现雨的“表观方向”也在变化.

首先,选择参考系和坐标系.取与太阳相对静止的惯性系为 K 系,与地球瞬时静止的惯性系有无限多个,我们只须任选某一时刻的K′系进行讨论.这样,便定义了K 系和K′系的运动状态.但在这两个惯性系中,坐标原点的位置及坐标轴的方向还有无限多种选择.在每一瞬间,均把K 系与K′系的原点选在地球上,并且取K′系相对K 系运动的方向为 x 轴,取星光所在的平面为 yox 平面(即由星光 c 与地球 V 所确定的平面).

其次,设θ为星光与K 系 x 轴的夹角,反映恒星的“真实方向”;θ′为星光与K′系 x' 轴的夹角,反映恒星的“表观方向”.

由于θ′与θ差别很小,“表观方向”与“真实方向”的偏离可近似用下式表示.

$$\Delta\theta=\theta'-\theta\approx\sin(\theta'-\theta)=\sin\theta'\cos\theta-\cos\theta'\sin\theta. \tag{53}$$

将 $k_x'=k'\cos\theta'=\frac{\omega'}{c}\cos\theta'$ 代入四维波矢变换,可得

$$k_x=\gamma\left(k_x'+\frac{V}{c^2}\omega'\right)=\gamma\left(\frac{\omega'}{c}\cos\theta'+\frac{V}{c^2}\omega'\right), \tag{54}$$

$$\omega=\gamma(\omega'+Vk_x')=\gamma\left(\omega'+V\frac{\omega'}{c}\cos\theta'\right). \tag{55}$$

利用 $k_x=k\cos\theta=\frac{\omega}{c}\cos\theta$ 便可用 θ′表示 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 为

$$\cos\theta = c\frac{k_x}{\omega} = c\frac{\frac{\omega'}{c}\cos\theta' + \frac{V}{c^2}\omega'}{\omega' + V\frac{\omega'}{c}\cos\theta'} = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}, \tag{56}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \approx \frac{\sin\theta'}{1 + \beta\cos\theta'}. \tag{57}$$

由于$V \ll c$,上式已略去β的二阶小量$\beta^2 = (V/c)^2$.

将上两式代入(53)式,即可求得

$$\Delta\theta = \beta\sin\theta'(1 - \beta\cos\theta'). \tag{58}$$

因为θ'是星光与x'轴的夹角,而x'轴的方向是地球作公转运动的方向,它是周期性变化的,所以$\Delta\theta$也是周期性变化的. 这样,利用四维波矢变换便成功解释了光行差现象.

六、方程的协变性

相对性原理指出,所有惯性系在物理上是等价的,表达物理规律的方程在所有惯性系应具有相同的形式,即方程应具有协变性.

前面已将物理量按照四维空间转动下的变换性质分解成四维各阶张量. 如果方程中的每一项都是同阶四维张量,那么该物理规律便可表述为张量方程的形式. 这样,在四维空间转动时,方程的形式将保持不变,方程将满足相对论的要求. 例如在K系,某规律能表示为张量方程

$$A_\mu = B_{\mu\nu}C_\nu + D_\mu, \tag{59}$$

由于方程的每一项均为四维矢量,在K'系必有相同的形式

$$A'_\mu = B'_{\mu\nu}C'_\nu + D'_\mu, \tag{60}$$

即方程在洛伦兹变换下是协变的,它符合相对论的要求.

电荷守恒定律、麦克斯韦方程和洛伦兹力公式在洛伦兹变换下保持形式不变,在第九章我们将把它们写成张量方程,成为相对论电动力学的基本方程;牛顿定律在洛伦兹变换下不是协变的,在第十章我们将它改造成为张量方程,成为相对论动力学的基本方程.

习　题　8.5

1. 试通过四维空间的转动,导出洛伦兹变换.
2. 试由间隔不变性证明(12)式和(13)式.
3. 试证明四维矢量的旋度是二阶张量.
4. 试由(36)~(40)式导出三维速度变换公式.
5. 试证明四维体积元是四维标量

$$\mathrm{d}x'_1\,\mathrm{d}x'_2\,\mathrm{d}x'_3\,\mathrm{d}x'_4 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4.$$

6. 试证明$k_\mu = \widetilde{\alpha}_{\mu\nu}k'_\nu = \alpha_{\nu\mu}k'_\nu$.

7. 一平面镜(K′系)以速度$V = V e_x$相对实验室(K 系)运动,K 系测得,一束频率为ω_0、与水平成θ_0夹角的平面光波自右向左入射到镜面上,求反射光波的频率ω及反射角θ. 设有如下两种情形:

(1) 平面镜水平放置;

(2) 平面镜垂直于运动方向放置.

8. 在洛伦兹变换中,若定义快度y为$\mathrm{th}y = \beta$,

(1) 试证明: $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$;

(2) 洛伦兹变换矩阵为

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}y & 0 & 0 & \mathrm{ish}y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{ish}y & 0 & 0 & \mathrm{ch}y \end{pmatrix};$$

(3) 设K′系相对K 系以速度$V = c\,\mathrm{th}y$运动,K″系相对K′系以$v'' = c\mathrm{th}y''$运动,试证明K″相对K 系的快度为$y' = y + y''$.

第九章　相对论电动力学

本章在把电磁学量组成四维协变量的基础上,得到这些电磁学量在不同惯性系的变换关系,以及电动力学基本定律和电磁作用下能量、动量守恒定律的协变形式.这就证明了,这些定律符合相对论的要求.

作为上述理论的应用,本章通过电磁场的变换公式求得作匀速直线运动的点电荷激发的电磁场,并运用电磁场不变量对其他惯性系的电磁场作出判断.

§ 9.1　电动力学基本定律的协变形式

为了让方程满足相对论的要求,即方程在不同惯性系具有相同的形式,就要将方程写成四维张量方程的形式.为此,应该先将物理量组成四维协变量.

本节首先把电磁场的源量组成四维电流密度矢量J_μ,进而得到电荷守恒定律的协变形式.其次,引入电磁场的矢势A和标势φ[①],利用它们组成四维势矢量A_μ,进而将电场强度E和磁感强度B组成电磁场张量$F_{\mu\nu}$;在此基础上,得到麦克斯韦方程组的协变形式.最后,引入四维电磁力密度矢量f_μ,得到洛伦兹力密度公式的协变形式.

一、四维电流密度矢量J_μ　电荷守恒定律的协变形式

1.四维电流密度矢量J_μ的定义

为了确定J_μ的各个分量,先要找出与它有关的不变量.实验表明,带电粒子的电量不因其速度而变,故电量Q是不变量.

设某一时刻,电荷Q以$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_x$相对实验室参考系K运动.此时与$Q$瞬时静止的惯性系K′就是电荷$Q$的固有参考系(前面已经指出,如果$Q$作变速运动,不同时刻有不同的K′系).若在固有参考系测得其电荷密度为ρ_0,则有

$$\mathrm{d}Q=\rho'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'=\rho_0\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0, \tag{1}$$

式中ρ_0称为固有电荷密度,$\mathrm{d}V_0=\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0$是电荷$Q$的固有体积.

---

① 关于电磁势遵守的方程将留在第五篇“电磁波的辐射”中讨论.这组方程与麦克斯韦方程组完全等价,在研究运动带电粒子辐射的电磁场时特别重要.

设实验室参考系(K 系)测得电荷密度为 ρ,则

$$\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{2}$$

由于电荷的电量是不变量,故

$$\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho_0 \mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0, \tag{3}$$

再由动尺长度缩短效应,易见

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}x_0}{\gamma_v}, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y_0, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z_0. \tag{4}$$

将(3)式与(4)式联立,即有

$$\rho = \gamma_v\rho_0 > \rho_0. \tag{5}$$

这表明,K 系测得的电荷密度 ρ 与电荷相对 K 系的速度有关. 电荷的速度越大,则电荷的体积越小,电荷密度越大.

由三维电流密度矢量 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$,故有

$$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v} = \gamma_v\rho_0\,\boldsymbol{v}. \tag{6}$$

因为电荷相对任何参考系静止时,其固有电荷密度 ρ_0 都有确定的数值,故 ρ_0 也是一个不变量. 据此,可定义四维电流密度矢量为

$$J_\mu = \rho_0 u_\mu = \gamma_v\rho_0(\boldsymbol{v},\mathrm{i}c) = \rho(\boldsymbol{v},\mathrm{i}c) = (\boldsymbol{J},\mathrm{i}c\rho). \tag{7}$$

这样定义 J_μ 基于两方面考虑:从物理意义上来说,因为电流密度矢量是电荷密度与电荷元速度之积,四维量 $J_\mu=\rho_0u_\mu$ 是三维量 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$ 的自然推广;从四维空间转动下的变换性质来说,四维标量 ρ_0 与四维速度 u_μ 之积必为四维矢量. 上式还表明,电流密度 $\boldsymbol{J}$ 和电荷密度 ρ 已结合成统一的物理量 J_μ. 在参考系变换时,它们可以互相转化. 相对电荷静止的惯性系只观察到电荷密度 ρ_0 的存在,而相对电荷运动的参考系则观察到电荷密度 $\rho=\gamma_v\rho_0$ 以及电流密度 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}=\gamma_v\rho_0\,\boldsymbol{v}$ 的存在. 正像原来互相分割的时空坐标 x,t 组成一个统一的物理量 $x_\mu=(x,\mathrm{i}ct)$ 一样,原来互相分割的电荷密度与电流密度 $\rho,\boldsymbol{J}$ 也组成一个统一的物理量 $J_\mu=(\boldsymbol{J},\mathrm{i}c\rho)$. 这一切,都显示着人们对物理量认识的深化.

2. J_μ 的变换关系

作为四维矢量,其变换关系为

$$J'_\mu = \alpha_{\mu\nu}J_\nu. \tag{8}$$

由于 $J_\mu=(\boldsymbol{J},\mathrm{i}c\rho)$ 各分量的形式恰好与 $x_\mu=(x,\mathrm{i}ct)$ 的形式一样,它的变换式其实不必通过

$$\begin{pmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \\ \mathrm{i}c\rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \mathrm{i}c\rho \end{pmatrix} \tag{9}$$

及矩阵乘法来求,而只要在洛伦兹变换中用 J_i 代替 x_i,用 ρ 代替 t,便可得到

$$J'_x = \gamma(J_x - V\rho), \quad J'_y = J_y, \quad J'_z = J_z, \quad \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}J_x\right); \tag{10}$$

$$J_x = \gamma(J'_x + V\rho'), \quad J_y = J'_y, \quad J_z = J'_z, \quad \rho = \gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2}J'_x\right). \tag{11}$$

3. 电荷守恒定律的协变形式

为书写简单起见,采用如下简写符号

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{12}$$

则电荷守恒定律的协变形式为

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \tag{13}$$

证 容易由四维形式导出三维形式,实际上

$$0 = \partial_\mu J_\mu = \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \frac{\partial J_4}{\partial x_4} = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{14}$$

【例 1】 有一载流金属导体在K 系静止,导体中体电荷密度 $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$,且 ρ_+ 为已知. 设某段导线自由电子的定向速度 $\boldsymbol{v}_- = -v\boldsymbol{e}_x$,若K′系以 $V = V\boldsymbol{e}_x$ 相对K 系运动,求K′系测得的 ρ' 和 J'.

解 方法一:将原子实与自由电子的电荷电流作为一个整体考虑. K 系测得(注意原子实的 $\boldsymbol{v}_+ = 0$ 及自由电子的 $v_- = -v$)

$$J_x = \rho_+ v_+ + \rho_- v_- = -\rho_- v = \rho_+ v, \tag{15}$$

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0. \tag{16}$$

由(10)式得

$$J'_x = \gamma(J_x - V\rho) = \gamma J_x = \gamma\rho_+ v, \quad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}; \tag{17}$$

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}J_x\right) = -\gamma\frac{V}{c^2}J_x = -\gamma\frac{Vv}{c^2}\rho_+ . \tag{18}$$

方法二:分别求出正、负电荷的 ρ'_+、ρ'_- 和 $J'_+ = \rho'_+ v'_+$、$J'_- = \rho'_- v'_-$,再利用 $\rho' = \rho'_+ + \rho'_-$ 及 $J' = J'_+ + J'_-$ 求得最后结果,见本节习题第 1 题.

这个方法比较复杂,但它是检验我们是否正确理解物理概念的一个好方法.

二、电磁势(A,φ)、四维势 A_μ 与电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 麦克斯韦方程组的协变形式

1. 电磁势 A 与 φ 的引入

麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot D = \rho_f, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t}. \tag{19}$$

由于麦克斯韦方程 $\nabla \cdot B = 0$ 及矢量场的旋度是无源场[$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$],在第四章引入的矢势 A,其定义为

$$B = \nabla \times A, \tag{20}$$

在时变场中仍然成立.

由于静电场的性质 $\nabla \times E = 0$ 及标量场的梯度是无旋场[$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$],曾在第三章引入的静电势 φ(定义为 $E = -\nabla \varphi$),在时变场中则不再成立.

但是,将 $B = \nabla \times A$ 代入麦克斯韦方程 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$,可得

$$0 = \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right), \tag{21}$$

可见 $\left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right)$ 是无旋场,故可引入标势

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \varphi, \tag{22}$$

即

$$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{23}$$

(20)式和(22)式所定义的 A 与 φ 一起,合称为电磁势.

2. 四维势 A_μ 及用四维势表示电磁场

现在用 φ 和 A 的三个直角分量表示电磁场,并采用记号 $\partial_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial}{\partial t}$,它将启发我们去定义四维势 A_μ.

由 $B = \nabla \times A$,得

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \quad B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \tag{24}$$

由 $E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{i}c\partial_4$,可得

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\partial_i \varphi - \mathrm{i}c\partial_4 A_i = \mathrm{i}c\left[\partial_i \left(\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi \right) - \partial_4 A_i \right]. \tag{25}$$

因此,如果在形式上将四维势定义为

$$A_\mu = (A, A_4) = \left(A, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi \right), \tag{26}$$

则电场的各分量也可写成很对称的形式

$$-\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 = \partial_1 A_4 - \partial_4 A_1, \quad -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 = \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2, \quad -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 = \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3. \tag{27}$$

当然,(26)式对四维势的假定是否正确,要通过建立在这个假定之上的理论与实验是否符合来判断.迄今为止,所有实验事实都证实了这一假定.

3. 用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 表示电磁场

从(24)式及(27)式易见,可以通过四维势 A_μ 用反对称的四维二阶张量 $F_{\mu\nu}$ 表示电磁场,$F_{\mu\nu}$ 的定义为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \tag{28}$$

因为 $F_{\mu\nu}$ 有两个自由指标,是二阶张量;交换 μ, ν 时有 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$,是反对称张量.

反对称张量的对角元为零,由(24)式、(27)式及(28)式可知不为零的矩阵元为

$$F_{23}=-F_{32}=B_1,\qquad F_{31}=-F_{13}=B_2,\qquad F_{12}=-F_{21}=B_3, \tag{29}$$

$$F_{41}=-F_{14}=\frac{\mathrm{i}}{c}E_1,\qquad F_{42}=-F_{24}=\frac{\mathrm{i}}{c}E_2,\qquad F_{43}=-F_{34}=\frac{\mathrm{i}}{c}E_3. \tag{30}$$

电磁场张量的矩阵形式为

$$(F_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

电场强度E与磁感应强度B组成四维二阶张量表明:电磁场是一个整体,电场和磁场是这个统一体的不同表现,两者可以互相转化(见§ 9.2).

4. 麦克斯韦方程组的协变形式

现在已将电磁场的源量用四维电流密度矢量$J_\mu=(J,\mathrm{i}c\rho)$表示,将电磁场的场量用四维电磁场张量$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$表示.通过这两者便可将麦克斯韦方程组写成四维张量方程的形式

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=\mu_0 J_\mu, \tag{32}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0. \tag{33}$$

实际上,在(32)式中令$\mu=4$,可得$\partial_\nu F_{4\nu}=\mu_0 J_4$,按照爱因斯坦惯例,对$\nu$由1到4求和,再把$F_{4\nu}$及$J_4$代入,注意到$c^2=1/\mu_0\varepsilon_0$,可得

$$\nabla\cdot E=\rho_f/\varepsilon_0. \tag{34}$$

在(32)式中令$\mu=1,2,3$可得B的旋度的三个直角分量式,合起来就是

$$\nabla\times B=\mu_0 J_f+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{35}$$

在(33)式中令μ,ν,λ等于1,2,3时可得

$$\nabla\cdot B=0. \tag{36}$$

在(33)式中令其中一个指标为4,另两个指标为不同值时,可得E的旋度的三个直角分量式,合起来就是

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{37}$$

在(33)式中有两个指标相同时,可得恒等式.

三、四维电磁力密度矢量f_μ 洛伦兹力密度公式的协变形式

在介质的体积元$\mathrm{d}V$内,电荷密度为ρ_f,电流密度为J_f,则电荷元和电流元所受

的作用力为 $f\mathrm{d}V$，其中 f 为洛伦兹力密度

$$f = \rho_f E + J_f \times B. \tag{38}$$

前面已将 ρ_f，J_f 用 J_μ 描述，将 E，B 用 $F_{\mu\nu}$ 来描述.(38)式指出，三维力密度为源量与场量之积(第一项是标量与矢量之积，第二项是矢积).

自然设想，四维电磁力密度 f_μ 应为 $F_{\mu\nu}$ 与 J_ν 的内积

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu, \qquad \mu = 1,2,3,4. \tag{39}$$

四维电磁力密度 f_μ 的前三个分量正好是(38)式(见本节习题第 3 题)

$$f_i = F_{i\nu}J_\nu = (\rho_f E + J_f \times B)_i, \qquad i = 1,2,3. \tag{40}$$

四维电磁力密度 f_μ 的第四个分量为

$$f_4 = F_{4\nu}J_\nu = F_{41}J_1 + F_{42}J_2 + F_{43}J_3 + F_{44}J_4 = \frac{\mathrm{i}}{c}E \cdot J_f = \frac{\mathrm{i}}{c}f \cdot \boldsymbol{v}. \tag{41}$$

式中 $E \cdot J_f = f \cdot \boldsymbol{v}$ 为电磁力的功率密度.

综合上两式，四维电磁力密度矢量可表示为

$$f_\mu = \left(f, \quad \frac{\mathrm{i}}{c}f \cdot \boldsymbol{v}\right). \tag{42}$$

习　题　9.1

1. 试求解例 1 中方法二的情形.
2. 试证明(34)~ (37)式.
3. 试证明(40)式.

§ 9.2　电磁场的变换公式　电磁场不变量

本节首先由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的变换性质出发得到电磁场的变换公式.在此基础上，计算作匀速直线运动的带电粒子所激发的电磁场，并对 $v \ll c$ 及 $v \sim c$ 两种情况下的电磁场分布与能流密度展开讨论.随后证明 $E^2 - c^2B^2$ 及 $E \cdot B$ 是电磁场的两个独立的不变量.最后，利用不变量考察电磁场：如果知道 K 系中电磁场的部分信息，那么能对其他惯性系中的电磁场作出哪些判断？

一、电磁场的变换

由四维二阶张量的变换性质得

$$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}, \tag{1}$$

由此可求得电磁场的变换公式.例如，为了求 E'_2 与 E、B 的关系，可遵循

$$E'_2 \to F'_{42} \to F_{\lambda\nu} \to E, B$$

这个思路去求，不妨先对 λ 叠加，后对 τ 叠加，仅保留不为零的项，即

$$\frac{\mathrm{i}}{c}E'_2 = F'_{42} = \alpha_{4\lambda}\alpha_{2\tau}F_{\lambda\tau} = \alpha_{41}\alpha_{2\tau}F_{1\tau} + \alpha_{44}\alpha_{2\tau}F_{4\tau} = \alpha_{41}\alpha_{22}F_{12} + \alpha_{44}\alpha_{22}F_{42}$$

$$= -\mathrm{i}\beta\gamma B_3 + \gamma\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 = \frac{\mathrm{i}}{c}\gamma(E_2 - VB_3),$$

即

$$E_2' = \gamma(E_2 - VB_3). \tag{2}$$

同理可得其他分量,由此得电磁场的变换公式为

$$E_1' = E_1, \quad E_2' = \gamma(E_2 - VB_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + VB_2); \tag{3}$$

$$B_1' = B_1, \quad B_2'D = \gamma\left(B_2 + \frac{V}{c^2}E_3\right), \quad B_3' = \gamma\left(B_3 - \frac{V}{c^2}E_2\right). \tag{4}$$

如果利用$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\tau}F_{\lambda\tau} = \alpha_{\mu\lambda}F_{\lambda\tau}\alpha_{\tau\nu}$,则可将(1)式表示为矩阵形式

$$F' = \alpha F\tilde{\alpha}, \tag{5}$$

式中$\tilde{\alpha}$为α的转置矩阵. 由(5)式出发,利用矩阵乘法也可得到(3)式和(4)式.

至于电磁场的逆变换公式,只要在有撇与无撇场量互换的同时,用$-V$代替V即可.

用$/\!/$及$\perp$分别表示相对V平行和垂直的分量,电磁场变换可用矢量式表示为

$$E'_{/\!/} = E_{/\!/}, \quad E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + V \times B); \tag{6}$$

$$B'_{/\!/} = B_{/\!/}, \quad B'_{\perp} = \gamma\left(B_{\perp} - \frac{1}{c^2}V \times E\right). \tag{7}$$

这表明,电磁场在不同惯性系之间进行变换时,电场与磁场不是各自独立地进行变换,而是电磁场本身作为一个统一体进行变换. 如果在K′系有一个静止的电荷,则在K′系只存在静电场;但在K 系看来,则存在电荷和电流,存在电场和磁场.

【例1】 已知带电粒子q(K′系)以匀速$\boldsymbol{v} = ve_x$相对实验室(K 系)运动,求K 系测得的电磁场.

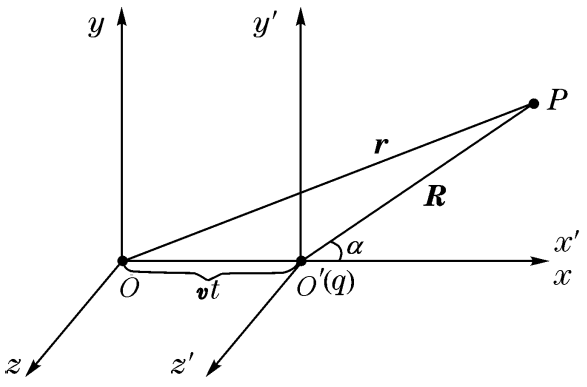


图 9.1

解 将K′系原点取在q上. q相对K′系静止,可先求K′系中的电磁场,再通过电磁场变换求在K 系的电磁场.

1. K′系中的电磁场

由于q相对K′系静止,故仅存在静电场

$$E' = \frac{qr'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad B' = 0. \tag{8}$$

2. K 系中的电磁场

$$E_{/\!/} = E'_{/\!/} = \frac{qr'_{/\!/}}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \quad E_{\perp} = \gamma(E'_{\perp} - \boldsymbol{v} \times B) = \gamma E'_{\perp} = \frac{\gamma q r'_{\perp}}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}; \tag{9}$$

$$B_{/\!/} = B'_{/\!/} = 0, \quad B_{\perp} = \gamma\left(B'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times E'\right) = \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v} \times E'_{\perp} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times E_{\perp} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times E. \tag{10}$$

上式已利用同向矢量的矢积为零:$\boldsymbol{v} \times E_{/\!/} = 0$,故$\boldsymbol{v} \times E' = \boldsymbol{v} \times E'_{\perp}$, $\boldsymbol{v} \times E_{\perp} = \boldsymbol{v} \times E$;

此外,还利用了(9)式的 $\gamma E'_{\perp}=E_{\perp}$.

2. 用K 系的 r 表示 r'及 E,B

由洛伦兹变换可得

$$x'=\gamma(x-vt),\qquad y'=y,\qquad z'=z. \tag{11}$$

由此得 r'与 r 的关系

$$r'_{/\!/}=x'e_x=\gamma(x-vt)e_x=\gamma(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t),\qquad r'_{\perp}=r_{\perp}. \tag{12}$$

将上式代入(9)式,得

$$E_{/\!/}=\frac{\gamma q(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t)}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t)^2+r_{\perp}^2\right]^{3/2}},\quad E_{\perp}=\frac{\gamma q r_{\perp}}{4\pi\varepsilon_0\left[\gamma^2(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t)^2+r_{\perp}^2\right]^{3/2}}. \tag{13}$$

令

$$R=r-\boldsymbol{v}t, \tag{14}$$

注意到 R 是K 系在 t 时刻测得源点 q 与场点 P 的距离,r'是K′系在该时刻测得源点 q 与场点 P 的距离(参看图9.1).由于动尺长度缩短效应 $R\neq r'$,由图9.1得

$$r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t+r_{\perp}=r-\boldsymbol{v}t=R. \tag{15}$$

将(15)式代入(13)式,并利用 $r_{\perp}=R_{\perp}=R\sin\theta$,可得

$$\begin{aligned}\gamma^2(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t)^2+r_{\perp}^2&=\gamma^2\left[(r_{/\!/}-\boldsymbol{v}t)^2+r_{\perp}^2-\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)r_{\perp}^2\right]\\&=\gamma^2\left[R^2-\beta^2(R\sin\theta)^2\right]=\gamma^2R^2(1-\beta^2\sin^2\theta).\end{aligned} \tag{16}$$

将(15)式、(16)式代入(13)式,可得

$$E=E_{/\!/}+E_{\perp}=\frac{q(1-\beta^2)R}{4\pi\varepsilon_0R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}},\qquad B=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times E. \tag{17}$$

3. 当 $v\ll c$ 时的电磁场分布

略去 v/c 的二阶小量,可得

$$E=\frac{qR}{4\pi\varepsilon_0R^3},\qquad B=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times E=\frac{\mu_0q\boldsymbol{v}\times R}{4\pi R^3}. \tag{18}$$

(18)式的第一式就是库仑定律.此例说明,在讨论两个电荷的相互作用时:

(1) 若施力电荷运动,一般来说,库仑定律不成立,见(17)式的第一式;只有在低速时才能近似应用库仑定律,即(18)式的第一式.

(2)若施力电荷静止,因为施力电荷激发的是静电场,无论受力电荷静止或运动,均由库仑定律给出.

(18)式的第二式就是毕奥—萨伐尔定律.将 $J_f(x')=\rho_f(x')\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{v}\delta^3(x'-0)$代入§ 1.2 的(25)式,并利用 $r'=x-x'=R-x'$,即得到与(18)式相同的结果:

$$\begin{aligned}B(x)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_f(x')\times r}{r^3}\mathrm{d}V'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{q\boldsymbol{v}\times r}{r^3}\delta^3(x'-0)\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times r}{r^3}\bigg|_{x'=0}=\frac{\mu_0q\boldsymbol{v}\times R}{4\pi R^3}.\end{aligned} \tag{19}$$

4. 当 $v\sim c$ 时的电磁场分布

由(17)式可见,E 与B 依赖于θ,场分布不是球对称的. 因为(17)式的第二式可以由E 求B,故只讨论E 即可.

(1)在$\theta\approx 0$ 的方向,电磁场远小于静场.

$$E \approx \frac{q(1-\beta^2)R}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \ll \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_{静}. \tag{20}$$

(2)在$\theta\approx\frac{\pi}{2}$的方向,电磁场远大于静场.

$$E \approx \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 R^3(1-\beta^2)^{1/2}} \gg \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = E_{静}. \tag{21}$$

这表明,高(匀)速运动带电粒子激发的电磁场集中在与$\boldsymbol{v}$ 垂直的平面附近,并且$\boldsymbol{v}$ 越大,“集中”的现象越显著,如图 9.2 所示.

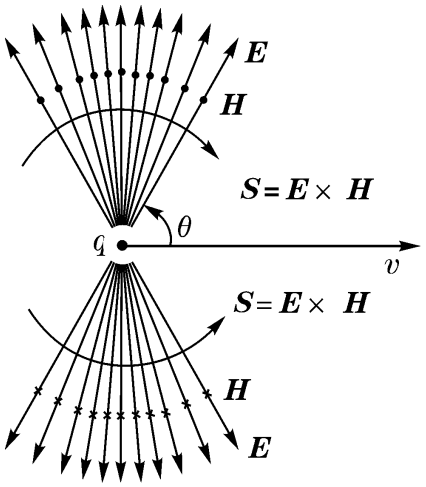


图 9.2

5. 电磁场的能流密度 $S=E\times H$

由于E 沿径向,H 按右螺定则可知垂直于纸面,$S=E\times H$ 由粒子后方沿球面流向粒子前方,见图9.2 中的S. 这意味着,作匀速运动的带电粒子没有辐射场. 这个结论也可定量证明如下:

$$S_R = e_R \cdot S = e_R \cdot (E\times H) = (e_R \times E)\cdot H = 0. \tag{22}$$

由于 e_R 与E 同向其矢积为零,故 S 沿 e_R 方向的分量为零.

二、电磁场的不变量$E^2-c^2B^2$ 和$E\cdot B$

1. 电磁场有两个独立的不变量

首先,证明行列式 $|F-\lambda I|$是不变量,式中λ为任意常数. 将(5)式$F'=\alpha F\tilde{\alpha}$及$\alpha\tilde{\alpha}=I$[见§ 8.5 的(13)式]代入K′系的行列式

$$|F'-\lambda I| = |\alpha F\tilde{\alpha}-\lambda I| = |\alpha(F-\lambda I)\tilde{\alpha}| = |\alpha||F-\lambda I||\tilde{\alpha}| = |F-\lambda I|, \tag{23}$$

这里利用了矩阵乘积的行列式等于相应矩阵行列式之积,以及 $|\alpha|=|\tilde{\alpha}|=1$.

现在,将(23)式改写为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & B'_3 & -B'_2 & -\frac{i}{c}E'_1 \\ -B'_3 & -\lambda & B'_1 & -\frac{i}{c}E'_2 \\ B'_2 & -B_1 & -\lambda & -\frac{i}{c}E'_3 \\ \frac{i}{c}E'_1 & \frac{i}{c}E'_2 & \frac{i}{c}E'_3 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & -\lambda & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & -\lambda & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & -\lambda \end{vmatrix}, \tag{24}$$

展开即有[①]

① 见附录 8.

$$\left(B'^2-\frac{E'^2}{c^2}\right)\lambda^2-\left(\frac{1}{c}E'\cdot B'\right)^2=\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)\lambda^2-\left(\frac{1}{c}E\cdot B\right)^2,\qquad(25)$$

由λ的任意性,可知λ的同次幂项系数相等,即

$$E'^2-c^2B'^2=E^2-c^2B^2,\qquad E'\cdot B'=E\cdot B.\qquad(26)$$

这就是由$F_{\mu\nu}$构成的两个独立的不变量.本节习题第2题和3题给出另一证明.

2. 利用不变量考察电磁场

如果知道在K系电磁场的一些信息,利用不变量可以对K′系电磁场作出一些判断.通常可作出如下两种判断:

(1) 判断E'和B'的夹角θ′.

由(26)式可得

$$EB\cos\theta=E'B'\cos\theta'.\qquad(27)$$

这里$E=|E|$,$B=|B|$,$E'=|E'|$,$B'=|B'|$均为模,取正值.据此,能作出表9.1的判断:

表　9.1

若在某一参考系中	由$E\cdot B$是不变量,则有	在其他参考系,必有
$\theta<\pi/2$	$E'B'\cos\theta'=EB\cos\theta>0$	$\theta'<\pi/2$
$\theta=\pi/2$	$E'B'\cos\theta'=EB\cos\theta=0$	$\theta'=\pi/2$,或$E'=0$,或$B'=0$
$\theta>\pi/2$	$E'B'\cos\theta'=EB\cos\theta<0$	$\theta'>\pi/2$

(2)在给定条件下寻找特殊的参考系.

若$E\cdot B=0$,则总可找到一个参考系K′,其$E'=0$,或者$B'=0$;若$E\cdot B\neq0$,则总可找到一个参考系K′,其$E'/\!/B'$.如表9.2所示:

表　9.2

若在某一参考系中	由$E^2-c^2B^2$是不变量,则有	总可找到一个参考系
$E\cdot B=0$,　$E<cB$	$E'^2-c^2B'^2=E^2-c^2B^2<0$	$E'=0$(本节习题第6题)
$E\cdot B=0$,　$E>cB$	$E'^2-c^2B'^2=E^2-c^2B^2>0$	$B'=0$(本节习题第7题)
$E\cdot B\neq0$	取E和B所在平面为yoz平面,以适当的$V=Ve_x$相对K′系运动	$E'/\!/B'$(本节习题第8题)

习　题　9.2

1. 试证明(3)式和(4)式.

2. 因为$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$没有自由指标,试证明

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right),\qquad(28)$$

从而证明 $E^2-c^2B^2$ 是不变量.

3. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是四阶完全反对称张量,其定义是三阶完全反对称张量 ε_{jk} 的简单推广:① 任意交换两指标,$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 反号;② $\varepsilon_{1234}=1$. 试证明

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}=-\frac{8\mathrm{i}}{c}E\cdot B, \tag{29}$$

从而证明 $E\cdot B$ 是不变量.

4. 位于 K′系坐标原点的点电荷 q_1 以匀速 $V=Ve_x$ 相对实验室参考系(K 系)运动,点电荷 q_2 位于 $(0,y_0,0)$ 且相对 K 系静止,试求 q_1 与 q_2 各自所受之力.

5. 设实验室参考系(K 系)有一无限长,半径为 ρ_0,有均匀圆截面,速度为 $\boldsymbol{v}$ 的离子束(K′系),试求作用于半径 ρ 处(且 $\rho<\rho_0$)电量为 q 的离子束元所受的作用力.

6. 内外半径分别为 a,b 的空气圆柱形电容器,两极板电压为 U,内极板电流为 I_f,内极板电阻可忽略(见图 9.3). 问 K′系相对实验室参考系(K 系)的速度 $V=Ve_x$ 取何值以及 U 与 I_f 满足什么条件时才能使电容器中的 $E'=0$,此时 B' 为多少?假设电容器很长,不考虑边缘效应.

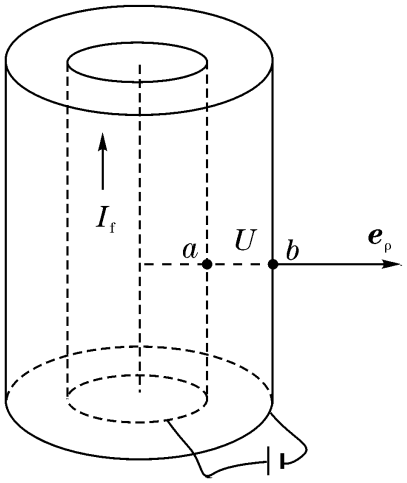


图 9.3

7. 设在 K 系中有 $E=Ee_x$,$B=Be_y$,且 $E>cB$,问 K′系应以怎样的 V 相对 K 系运动才能让 $B'=0$,此时 E'?

8. 设参考系 K 中有一均匀恒定且不互相垂直的电场 E 和磁场 B.

(1) 问对于怎样的参考系 K′,其中的电场 E' 与磁场 B' 互相平行?

(2) 满足上述要求的参考系是否惟一?为什么?

*§ 9.3　电磁作用下守恒定律的协变形式

本节首先从麦克斯韦方程组及洛伦兹力公式出发,引入电磁场能量-动量张量,进而给出电磁作用下能量守恒定律和动量守恒定律的协变形式.

一、电磁场能量-动量张量的引入

将四维洛伦兹力密度方程

$$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu \tag{1}$$

与四维麦克斯韦方程

$$\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}=\mu_0 J_\nu \tag{2}$$

联立,可得

$$f_\mu=\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda}=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda})-F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right]. \tag{3}$$

现在将(3)式右边的第二项变形,将求和指标 ν 与 λ 对调,并利用 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性,可得

$$F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=F_{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}=F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}. \tag{4}$$

再将另一个四维麦克斯韦方程

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0, \tag{5}$$

移项后代入(4)式,可得

$$F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=F_{\nu\lambda}\left(-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}\right). \tag{6}$$

将右边第一项移到等式左边,合并后得

$$F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=-\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}=-\frac{1}{4}\frac{\partial (F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda})}{\partial x_\mu}. \tag{7}$$

将上式右边的求和指标λ用σ表示,并利用$\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\delta_{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$,(7)式还可改写为

$$F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=-\frac{1}{4}\frac{\partial (F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma})}{\partial x_\mu}=-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right). \tag{8}$$

将(8)式代入(3)式,可得

$$f_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right). \tag{9}$$

令[①]

$$T_{\mu\lambda}=-\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}-\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}, \tag{10}$$

不难验证(见本节习题第1题)

$$(T_{\mu\lambda})=\left(\begin{array}{c|c}\overleftrightarrow{T} & \frac{\mathrm{i}}{c}S\\ \hline \mathrm{i}cg & -w\end{array}\right), \tag{11}$$

式中S为电磁能流密度矢量[见§ 2.1的(14)式]

$$S=E\times H, \tag{12}$$

w为电磁能量密度[见§ 2.1的(15)式]

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right), \tag{13}$$

$\overleftrightarrow{T}$为电磁动量流密度张量[见§ 2.2的(14)式]

$$\overleftrightarrow{T}=-\varepsilon_0EE-\frac{1}{\mu_0}BB+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right), \tag{14}$$

g是电磁动量密度[见§ 2.2的(15)式]

$$g=\varepsilon_0E\times B. \tag{15}$$

---

① 有的作者对$T_{\mu\lambda}$的定义和(10)式差一个负号,因而守恒定律的协变形式也和(17)式差一个负号,不方便的地方是T_{ij}就与电磁动量流密度差一负号了.

因为$T_{\mu\lambda}$将电磁能流密度、电磁能量密度、电磁动量流密度和电磁动量密度组合成一个四维二阶张量,故称$T_{\mu\lambda}$为电磁场能量-动量张量.

容易证明,电磁场能量-动量张量是无迹的对称张量,即

$$T_{\mu\mu} = 0, \qquad T_{\mu\lambda} = T_{\lambda\mu}. \tag{16}$$

二、电磁作用下能量守恒定律和动量守恒守律的协变形式

将(10)式代入(9)式,得

$$f_\mu = -\partial_\lambda T_{\lambda\mu}, \tag{17}$$

这就是电磁作用下能量守恒定律和动量守恒定律的形式.

令 $\mu = 1,2,3$,得电磁作用下的动量守恒定律[§ 2.2 的(2)式]

$$-\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial g}{\partial t} = f, \tag{18}$$

令 $\mu = 4$ 得电磁作用下的能量守恒定律[§ 2.1 的(2)式]

$$-\nabla \cdot S - \frac{\partial w}{\partial t} = f \cdot \boldsymbol{v}. \tag{19}$$

至此,我们在把电磁学量组成四维协变量的基础上,得到了电动力学基本定律和电磁作用下能量、动量守恒定律的协变形式.这表明,这些定律在所有惯性系中都成立.

习　题　9.3

1. 试按(10)式验证$T_{\mu\lambda}$与S,w,$\overleftrightarrow{T}$,g的关系.
2. 试证明电磁场能量-动量张量是无迹的对称张量.
3. 试验证(17)式与(18)式和(19)式等价.

第十章　相对论力学

本章首先把动量、能量、力和功率等物理量组成四维协变量，进而把牛顿第二定律改造成为在洛伦兹变换下协变的相对论动力学基本方程，并利用四维动量内积的不变性导出著名的质能关系式.

其次，讨论相对论力学中的动量守恒定律和质能守恒定律，并采用动量中心系讨论原子物理与高能物理的一些典型问题，特别是穆斯堡尔效应及其对爱因斯坦关于“引力红移”预言的验证.

最后，讨论电磁场中带电粒子的拉格朗日量 L、哈密顿量 H 及其运动方程，它们不仅可以用来处理电动力学问题，而且在量子力学中也有着广泛的应用.

§ 10.1　相对论动力学的基本方程

在经典力学中，牛顿第二定律是它的基本定律. 但是，在洛伦兹变换下，牛顿第二定律不是协变的. 因此，必须对它进行改造.

本节首先引入四维动量 p_μ 和四维力 K_μ，进而得到相对论动力学的基本方程. 它在洛伦兹变换下是协变的，并且在 $v \ll c$ 的情形下过渡到牛顿定律. 在引入四维加速度 w_μ 之后，还可将相对论动力学的基本方程写成另一形式. 接着介绍能量、动量的变换，力的变换，以及加速度的变换. 最后，由不变量 $p_\mu p_\mu$ 导出著名的质能关系式，它给出了静质量 m_0、动量 p 与能量 W 的关系. 质能关系式是狭义相对论最重要的结论之一，在处理核物理和粒子物理的问题上起着重要的作用.

一、四维力学量 p_μ, K_μ, w_μ　相对论动力学的基本方程

1. 四维动量 p_μ 的定义

在经典力学中，动量= 质量× 速度. 前面已引入四维速度

$$u_\mu = \gamma_v(\boldsymbol{v}, \mathrm{i}c) = \left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{1}$$

那么，用什么量与四维速度相乘会得到四维动量呢？显然，应该用具有质量量纲的不变量. 它就是在物体固有参考系测得的质量 m_0. 由于 m_0 是在相对物体静止

的惯性系测得的,故称为静质量. 由此得四维动量 p_μ 的定义式

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \gamma_v (\boldsymbol{v}, \mathrm{i}c) = \left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathrm{i}}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{2}$$

引入

$$m = \gamma_v m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

$$p = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{4}$$

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

则四维动量可改写为

$$p_\mu = \left(m\boldsymbol{v}, \frac{\mathrm{i}}{c} mc^2 \right) = \left(p, \frac{\mathrm{i}}{c} W \right), \tag{6}$$

式中各量的物理意义留在后面进行讨论.

2. 四维力 K_μ 的定义

在§ 9.1 引入了四维力密度

$$f_\mu = \left(f, \frac{\mathrm{i}}{c} f \cdot \boldsymbol{v} \right). \tag{7}$$

四维力 K_μ 与四维力密度 f_μ 的关系应为

$$K_\mu = \int_V f_\mu \mathrm{d}V_0, \tag{8}$$

式中受力物体的固有体积元(即在物体的固有参考系测得的体积元)$\mathrm{d}V_0$ 是不变量,从而保证(8)式两边均为四维矢量.

由于动尺长度缩短效应,物体的体积元在运动的方向上发生收缩,由此得

$$\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0 \mathrm{d}z_0 = \gamma_v \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \gamma_v \mathrm{d}V. \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式,即得

$$K_\mu = \int \gamma_v f_\mu \mathrm{d}V. \tag{10}$$

当受力物体是速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子时,将 $f_\mu = \left(f, \frac{\mathrm{i}}{c} f \cdot \boldsymbol{v} \right)$ 代入上式,便有

$$K_\mu = \int \gamma_v \left(f, \frac{\mathrm{i}}{c} f \cdot \boldsymbol{v} \right) \mathrm{d}V. \tag{11}$$

由于粒子内各体积元速度均为 $\boldsymbol{v}$,可提出积分号外,利用 $F = \int_V f \mathrm{d}V$,即有

$$K_\mu = \gamma_v\left(F, \frac{\mathrm{i}}{c}F\cdot\boldsymbol{v}\right). \tag{12}$$

3. 相对论动力学的基本方程

牛顿定律是经典力学的基本方程,它指出,作用于物体的合外力等于单位时间内物体动量的增量

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

将三维力学量组成四维力K_μ和四维动量p_μ之后,可以预料,相对论动力学的基本方程为

$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{14}$$

由于固有时$\mathrm{d}\tau$是不变量,保证了上式两边同为四维矢量,在四维空间转动下是协变的;同时,我们还期望,当$v\ll c$时,(14)式的空间分量能过渡到经典力学的牛顿定律.

将$K_\mu=\gamma_v\left(F,\frac{\mathrm{i}}{c}F\cdot\boldsymbol{v}\right)$及$p_\mu=\left(p,\frac{\mathrm{i}}{c}W\right)$代入相对论动力学的基本方程,并注意到$\mathrm{d}t=\gamma_v\mathrm{d}\tau$,即得该方程的三维形式

$$F = \frac{1}{\gamma_v}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \qquad \mu = 1,2,3; \tag{15}$$

$$F\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{\gamma_v}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \qquad \mu = 4. \tag{16}$$

4. 物理意义

首先,讨论$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$的物理意义. 由(15)式的$F=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$可见,其形式与牛顿第二定律相同. 这表明,在相对论中,是用m来描述粒子的惯性. 由于m与粒子对参考系的速度v有关,故称为动质量,简称质量. 当$v\ll c$时动质量m将过渡到静质量m_0,即

$$m\Big|_{\frac{v}{c}\ll 1} = \left.\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{\frac{v}{c}\ll 1} \approx m_0. \tag{17}$$

而当v无限接近光速时,粒子的质量将趋于无穷大. 这意味着,让物体加速到超光速是不可能的,见本节习题第5题.

其次,四维动量p_μ的空间分量是

$$p = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{18}$$

称为粒子的动量.

当 $v \ll c$ 时,相对论中粒子的动量 p 将过渡到经典力学中的动量 $m_0 \boldsymbol{v}$.特别是,在 $v \ll c$ 的情况下,作为相对论动力学基本方程空间分量的(15)式为

$$F = \frac{\mathrm{d}(m_0 \boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}. \tag{19}$$

这表明,相对论动力学的基本方程(14)在洛伦兹变换下是协变的,而且在低速情况下过渡到经典力学的牛顿定律.

第三,四维动量 p_μ 的时间分量是

$$p_4 = \frac{\mathrm{i}}{c}W = \frac{\mathrm{i}}{c}mc^2 = \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{式中} \quad W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

W 的物理意义可由(16)式获得,因为在

$$F \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

中的 $F \cdot \boldsymbol{v}$ 是外力施于粒子的功率,它等于粒子的总能随时间的增加率.因此,

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{22}$$

是粒子的总能.

当 $v = 0$ 时,粒子的动能为零,此时粒子的总能

$$W_0 = W\Big|_{v=0} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Bigg|_{v=0} = m_0 c^2, \tag{23}$$

称为静能.

静能是物体内部的能量.任何物体都有内部结构,物体内部各部分之间存在相互作用能,而且各部分自身还存在静能.对于线度非常小的原子,其内部存在着核与电子之间以及电子与电子之间的相互作用能,在原子核内部还存在质子与中子这些基本粒子之间的相互作用能,以及组成原子的所有基本粒子自身的静能.

总能与静能之差就是动能,即

$$T = W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \tag{24}$$

当 $v \ll c$ 时,对于小量 β^2,可将 $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ 展开为

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots,$$

将上式代入(24),即有

$$T = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)-m_0c^2=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+\cdots. \tag{25}$$

如果仅保留到二阶小量$(v/c)^2$,则得经典力学的动能:

$$T=\frac{1}{2}m_0v^2. \tag{26}$$

第四,由$p=m\boldsymbol{v}$及$W=mc^2$可得物体的动量p与物体的总能W以及物体速度$\boldsymbol{v}$的关系

$$p=\frac{W}{c^2}\boldsymbol{v}. \tag{27}$$

这个公式在计算光子动量时很有用,见本节习题第3题.

5. 四维加速度w_μ(相对论动力学基本方程的另一形式)

引入四维加速度　　$$w_\mu=\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{28}$$

当静质量m_0是守恒量时,相对论动力学基本方程可以写成另一形式

$$K_\mu=\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}(m_0u_\mu)}{\mathrm{d}\tau}=m_0\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}=m_0w_\mu. \tag{29}$$

由$w_\mu=\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\gamma_v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_v\boldsymbol{v},\gamma_v\mathrm{i}c)$易见,$w_\mu$的空间分量并不是三维加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{30}$$

二、能量和动量的变换　力和加速度的变换

1. 能量和动量的变换

将$p_\mu=\left(p,\frac{\mathrm{i}}{c}W\right)$代入$p'_\mu=\alpha_{\mu\nu}p_\nu$,其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}p'_1\\p'_2\\p'_3\\\frac{\mathrm{i}}{c}W'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\mathrm{i}\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\mathrm{i}\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\\frac{\mathrm{i}}{c}W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\left(p_1-\frac{V}{c^2}W\right)\\p_2\\p_3\\\frac{\mathrm{i}}{c}\gamma(W-Vp_1)\end{pmatrix}, \tag{31}$$

三维形式为

$$p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{V}{c^2}W\right),\quad p'_y=p_y,\quad p'_z=p_z,\quad W'=\gamma(W-Vp_x). \tag{32}$$

上式与波矢k和频率ω的变换的形式完全相同.这是因为四维动量p_μ与四维波矢k_μ均为四维矢量,并且它们的分量分别为$p_\mu=\left(p,\frac{\mathrm{i}}{c}\omega\right)$与$k_\mu=\left(k,\frac{\mathrm{i}}{c}W\right)$,形式上完全相同.这不是偶然的,在量子理论中,微观粒子的动量为$p=\hbar k$,能量为$W=\hbar\omega$(式中$\hbar=1.054\times10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$是普朗克常数).因此,$p$与$k$的变换规律以及$W$与$\omega$的

变换规律必然相同.

其次,由相对论的能量变换可以得出一个重要结论:在经典力学里,能量可以任意附加一个常数(势能的零点可随意规定),能量只有其变化部分才有物理意义.相对论则不然.相对论的能量变换$W'=\gamma(W-Vp_x)$表明,若在总能(W'及W)中同时附加一个常数C,必然不满足(32)式,违背四维矢量$p'_\mu=\alpha_{\mu\nu}p_\nu$的变换规律,即违背相对论协变性的要求.高能物理与核物理的实验证明了:粒子的静能m_0c^2和动能T都可以转化为其他形式的能,并且在转化中遵守能量守恒定律(§ 10.2).

2. 力的变换

同理,通过四维力$K_\mu=\gamma_v\left(F,\frac{\mathrm{i}}{c}F\cdot\boldsymbol{v}\right)$的变换可以得到三维力$F$与功率$F\cdot\boldsymbol{v}$的变换(见本节习题第4题)

$$F'_x=\frac{F_x-\frac{V}{c^2}F\cdot\boldsymbol{v}}{1-\frac{V}{c^2}v_x},\quad F'_y=\frac{F_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x},\quad F'_z=\frac{F_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}v_x};\tag{33}$$

$$F'\cdot\boldsymbol{v}'=\frac{F\cdot\boldsymbol{v}-F_xV}{1-\frac{V}{c^2}v_x}.\tag{34}$$

3. 加速度的变换

关于加速度变换,见本节习题第5题.

【例1】 两个电量相等、距离为y_0的正电荷(K′系)以$\boldsymbol{v}=ve_x$相对实验室参考系(K系)运动.求位于$(x,0,0)$的q_1对位于$(x,y_0,0)$的q_2的作用力F_{21},并判断它是斥力还是引力?

解　(1)方法一(按电磁场的变换计算).

电荷q_1在K′系激发的在q_2处的电磁场为

$$E'=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0y_0^2}e_y,\qquad B'=0.\tag{35}$$

电荷q_1在K系激发的在q_2处的电磁场为

$$E_y=\gamma(E'_y+VB'_z)=\gamma E'_y=\frac{\gamma q_1}{4\pi\varepsilon_0y_0^2},\tag{36}$$

$$B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y\right)=\gamma\frac{v}{c^2}E'_y,\tag{37}$$

上式已利用$V=v$.由洛伦兹力公式得电荷q_1对q_2的作用力为

$$F_{21}=q_2(E_ye_y+\boldsymbol{v}\times B_ze_z)=\frac{\gamma q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0y_0^2}\left(e_y+ve_x\times\frac{v}{c^2}e_z\right)$$

$$=\frac{\gamma q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0y_0^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)e_y=\frac{q^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{4\pi\varepsilon_0y_0^2}e_y.\tag{38}$$

q_1 激发的电场对 q_2 的作用力是斥力，q_1 激发的磁场对 q_2 的作用力是引力. 电场力起主导作用，两者的合力是斥力. 随着 v 的增大，电场力随 γ 而增大，磁场力随 γv^2 增大，结果导致合力减小，并且当 $v\to c$ 时趋于零.

(2)方法二(按力的变换计算).

施力电荷 q_1 在 K′系激发的是静电场，故 q_2 所受的力为

$$F'_{21}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}e_y=F'_y e_y. \tag{39}$$

利用(33)式的逆变换将 F'_y 变换到 K 系. 因为受力电荷在 K′系的速度 $\boldsymbol{v}'=0$，以及 $V=v$ 即有

$$F_y=\frac{F'_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{V}{c^2}v'_x}=F'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{q^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}, \tag{40}$$

利用 $F_{21}=F_y e_y$，即可得到与(38)式相同的结果. 显然，采用力的变换比电磁场的变换更为简捷.

三、质能关系式

设在实验室参考系 K 中，物体的四维动量为

$$p_\mu=\left(p,\frac{\mathrm{i}}{c}W\right), \tag{41}$$

在物体的固有参考系 K′中，物体相对 K′系静止，其四维动量为

$$p'_\mu=\left(0,\frac{\mathrm{i}}{c}W_0\right). \tag{42}$$

由四维矢量的内积 $p_\mu p_\mu$ 是不变量，可得

$$p_\mu p_\mu=p'_\mu p'_\mu. \tag{43}$$

将(41)式和(42)式代入上式，便有

$$p^2-\frac{W^2}{c^2}=-\frac{W_0^2}{c^2}=-m_0^2c^2. \tag{44}$$

整理后得质能关系式

$$W=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}. \tag{45}$$

质能关系式给出了粒子的能量 W、动量 p 与静质量 m_0 的关系，在原子物理和高能物理中起着重要作用. 在§ 10.2 及其习题中，我们将把质能关系式、动量守恒定律与质能守恒定律结合在一起，讨论粒子的弹性碰撞、非弹性碰撞、产生内激发的碰撞和不稳定粒子衰变等问题.

习　题　10.1

1. 根据经典物理，要把一个电子加速到光速应使用多大的电势差？应用这个电势差，根据相

对论电子获得的速度将为多少？在这个速度下它的质量和动能将为多少？

2. 为什么说速度为 c 的粒子，其静质量必为零；反之静质量为零的粒子，在真空中其速度必为 c.

3. 1905 年，爱因斯坦为了解释光电效应，提出了光量子(光子)的概念，认为辐射场本身就是由光子组成，每个光子均以光速 c 运动. 对于频率为 ν 的光波，光子的能量为

$$W = h\nu = \bar{h}\omega,$$

式中 $h = 6.62559\times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot S}$，$\bar{h} = h/2\pi$. 求：

(1) 光子的动量 p；

(2) 光子的质量 m.

4. 试证明(33)式和(34)式.

5. 设 K′系以 $V = V e_x$ 相对 K 系运动，试证明三维加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 与 $a' = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}$ 的变换为

$$a_x = \frac{a_x'}{\gamma^3\left(1+\dfrac{V}{c^2}v_x'\right)^3}, \tag{46}$$

$$a_y = \frac{a_y'}{\gamma^2\left(1+\dfrac{V}{c^2}v_x'\right)^2} - \frac{a_x'}{\gamma^2\left(1+\dfrac{V}{c^2}v_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}v_y', \tag{47}$$

$$a_z = \frac{a_z'}{\gamma^2\left(1+\dfrac{V}{c^2}v_x'\right)^2} - \frac{a_x'}{\gamma^2\left(1+\dfrac{V}{c^2}v_x'\right)^3}\frac{V}{c^2}v_z'. \tag{48}$$

6. 在实验室参考系 K 中有一个粒子在 $t = 0$ 时从坐标原点出发沿 x 轴作初速度为零的变速直线运动. 在粒子的瞬时静止惯性系 K′(在不同时刻，K′系不同)中测得粒子的三维加速度 $a' = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'} = a_0 e_x$ 为恒定值. 求：

(1) 实验室参考系 K 测得粒子的 $v(t)$ 和 $x(t)$；

(2) $t\to\infty$ 时，K 系测得粒子的 v.

7. 火箭由静止状态沿直线(取作 x 轴)加速到 $v = \sqrt{0.9999}c$，设与火箭瞬时静止的惯性系 K′中测得 $a_0 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，问按地面参考系(K 系)及火箭的固有参考系测得加速火箭各需多少时间？

§ 10.2 相对论力学的守恒定律 穆斯堡尔效应与引力红移

本节重点讨论相对论力学中的动量守恒定律和质能守恒定律，以及在碰撞问题中广泛使用的动量中心系(简称动心系). 在此基础上介绍核反应的 Q 方程和阈能的概念，以及在高能物理实验中降低阈能的方法. 最后，介绍以能谱高精度测量而轰动整个科学界的穆斯堡尔效应，以及该效应对广义相对论关于“引力红移”预言的证实.

一、动量守恒定律与质能守恒定律

为简单起见,设封闭体系有粒子A和B发生碰撞[①],碰撞后可能结合成一个粒子C($N=C$),也可能生成另外两个粒子C,D($N=C$,D)或更多粒子C,D($N=C$,D,…). 如果整个系统的场动量和场能量没有改变,则粒子的动量守恒且质能守恒.

1. 动量守恒定律

对于封闭体系,粒子的动量守恒,即

$$p_A + p_B = \sum_N p_N , \tag{1}$$

亦即

$$m_A \boldsymbol{v}_A + m_B \boldsymbol{v}_B = \sum_N m_N \boldsymbol{v}_N . \tag{2}$$

式中$m_A = \gamma_{v_A} m_{A0}$,　$m_B = \gamma_{v_B} m_{B0}$,　$m_N = \gamma_{v_N} m_{N0}$,$N=C$,$D$,….

2. 质能守恒定律

对于封闭体系,粒子的质量与能量守恒,即

$$W_A + W_B = \sum_N W_N , \tag{3}$$

亦即

$$m_A c^2 + m_B c^2 = \sum_N m_N c^2 . \tag{4}$$

消去上式两边的c^2,可得质量守恒定律

$$m_A + m_B = \sum_N m_N , \tag{5}$$

亦即

$$\gamma_{v_A} m_{A0} + \gamma_{v_B} m_{B0} = \sum_N \gamma_{v_N} m_{N0} . \tag{6}$$

(3)式与(5)式合称质能守恒定律.

对于完全弹性碰撞,碰撞后两粒子静质量不变,因此碰撞前后静质量守恒.

对于非弹性碰撞、完全非弹性碰撞以及产生内激发的碰撞,由于v_A、v_B和v_N不相等,因而γ_{v_A}、γ_{v_B}和γ_{v_N}不相等,必有

$$m_{A0} + m_{B0} \neq \sum_N m_{N0} , \tag{7}$$

即静质量不守恒.

【例 1】　一个封闭的开水瓶盛有 1 千克开水,当水从 100°冷却到 20°时,求水的质量的变化.

解　水由于热量的散失引起的总能损失为

---

① 两体碰撞分为完全弹性碰撞、完全非弹性碰撞、非完全弹性碰撞以及产生内激发的碰撞这四类,见本节习题第 1 题.

$$\Delta W = Cm\Delta T \times 4.18 = 1 \times 10^3 \times 80 \times 4.18 = 3.34 \times 10^5 (\mathrm{J}).$$

水的质量减小为

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{3.34 \times 10^5}{9 \times 10^{16}} = 3.71 \times 10^{-12} (\mathrm{Kg}).$$

由于减少的质量是原来的3.71×10^{-12}倍,所以平常无法觉察.

从这个例子,也可看到相对论与经典力学的一个本质分歧:

(1)经典力学认为质量守恒与能量守恒是两个独立的定律.并且还会认为:水分子没有逸出,因而质量是守恒的;热量散失了,因而能量是不守恒的.这与相对论是不相符的.

(2)相对论认为质量与能量存在$W = mc^2$的关系.质量与能量的变化是同步的.水的能量减少了,水的质量也减少了,是同步地减少.如果只看到水的质量减少了,外界的能量增加了,从而认为水的质量转化为外界的能量,认为"物质可以转化为能量",这显然是错误的.

电子和正电子在一定条件下可以转化为一对高能光子,同样不能认为是电子的质量转为光能,而应当认为电子对的能量和质量同时转变为光子对的能量和质量(指动质量).

总之,一个封闭体系遵守统一的质量-能量守恒定律.

二、动心系 核反应的Q方程与阈能

现在运用动量守恒定律与能量守恒定律讨论粒子的碰撞.正如在经典力学中采用质心系比较方便一样,在相对论力学中常采用动心系.

1.动心系的定义

粒子系总动量为零的参考系称为动心系(K′系).现以两体碰撞为例,设粒子A和B碰撞后生成粒子C和D,则在动心系中,粒子系的总动量为

$$p' = p_A' + p_B' = p_C' + p_D' = 0, \tag{8}$$

即

$$m_A' \boldsymbol{v}_A' + m_B' \boldsymbol{v}_B' = m_C' \boldsymbol{v}_A' + m_D' \boldsymbol{v}_B' = 0. \tag{9}$$

由于$m' = \gamma_{v'} m_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$,当$v' \ll c$时$\gamma_{v'} = 1$,其定义与经典力学质心系的定义完全相同.但在相对论中,由于粒子的质量$m = \gamma_v m_0$与粒子的速率有关,"质心"这个概念在相对论中已没多大意义(见本节习题第2题).只是由于习惯,也有人仍把动心系称为质心系.

2.核反应的Q方程反应能

上述核反应可以表示为

$$A + B \longrightarrow C + D, \tag{10}$$

式中A表示入射粒子,B表示靶核,C表示出射粒子,D表示剩余核.

根据能量守恒定律,便有

$$(m_{A0}c^2 + T_A) + (m_{B0}c^2 + T_B) = (m_{C0}c^2 + T_C) + (m_{D0}c^2 + T_D). \tag{11}$$

定义反应能Q为

$$Q = (m_{A0}c^2 + m_{B0}c^2) - (m_{C0}c^2 + m_{D0}c^2). \tag{12}$$

因为实验室中靶核通常处于静止状态,即$T_B = 0$,利用(11)式,反应能Q还可表示为

$$Q = T_C + T_D - T_A. \tag{13}$$

若$Q > 0$,即生成物的总动能$T_C + T_D$大于入射粒子的动能T_A,称为放能反应;若$Q < 0$,称为吸能反应.

3. 反应有效能、阈能与阈动能

从能量的观点来看,人们最关心的是:怎样让入射粒子以最小的动能轰击靶核并使反应发生.为此,先介绍反应有效能的概念.

动心系的总能称为反应有效能.因为当反应生成物的动量

$$p_C = -p_D = 0 \tag{14}$$

时,动心系的总能将全部转化为反应生成物的静能.此时入射粒子的总能称为阈能W_{th},入射粒子的动能

$$T_{th} = W_{th} - W_{A0} \tag{15}$$

称为阈动能.阈动能就是在核反应能够发生的情形下入射粒子的最小动能.

【例2】 设在实验室参考系(K系)中,静质量为m_{A0}的粒子以动量$p_A = p_A e_x$射向静质量为m_{B0}的静止靶核.求:

(1) 反应有效能;

(2) 阈动能T_{th}.

解 (1) 在动心系中,粒子A、B的动量、能量分别为

$$p_A' = \gamma\left(p_A - \frac{V}{c^2}W_A\right), \quad W_A' = \gamma(W_A - Vp_A); \tag{16}$$

$$p_B' = \gamma\left(p_B - \frac{V}{c^2}W_B\right) = -\gamma\frac{V}{c^2}W_{B0}, \quad W_B' = \gamma(W_B - Vp_B) = \gamma W_B = \gamma W_{B0}. \tag{17}$$

利用不变量$p_\mu' p_\mu' = p_\mu p_\mu$,并注意在动心系K′中,粒子系总动量为零,得

$$-\frac{W'^2}{c^2} = p_A^2 - \left(\frac{W_A}{c} + \frac{W_{B0}}{c}\right)^2.$$

将$W_A^2 = p_A^2c^2 + m_{A0}^2c^4$与上式联立消去$p_A$,得

$$W'^2 = 2W_A m_{B0}c^2 + (m_{A0}^2 + m_{B0}^2)c^4. \tag{18a}$$

由此得动心系的总能,即反应有效能

$$W' = \sqrt{2W_A m_{B0}c^2 + (m_{A0}^2 + m_{B0}^2)c^4}. \tag{18b}$$

由于在高能物理实验中,入射高能粒子的能量$W_A \gg (m_{A0} + m_{B0})c^2$,故(18b)式

根号内的第一项远大于第二项,略去后者便有

$$W' \approx \sqrt{2W_A m_{B0} c^2} \propto \sqrt{W_A}. \tag{18c}$$

这表明,要将反应有效能W'增加10倍,就要将入射高能粒子的能量增加100倍,可见单撞机的能量利用率不高.

(2) 由于动心系的总能等于反应生成物的静能时,入射粒子的总能就是阈能.将$W' = (m_{C0} + m_{D0})c^2$及$W_A = W_{th}$代入(18a)式便有

$$2W_{th} m_{B0} c^2 + (m_{A0}^2 + m_{B0}^2)c^4 = (m_{C0} + m_{D0})^2 c^4. \tag{19}$$

由此可求得阈能W_{th},从而得到阈动能

$$T_{th} = W_{th} - W_{A0} = W_{th} - m_{A0}c^2 = \frac{(m_{C0} + m_{D0})^2 - (m_{A0} + m_{B0})^2}{2m_{B0}} c^2.$$

用ΔM表示粒子体系末态与初态静质量之差,即

$$\Delta M = (m_{C0} + m_{D0}) - (m_{A0} + m_{B0}), \tag{20}$$

利用熟知的公式$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$后将ΔM代入T_{th},得

$$T_{th} = \frac{(m_{C0} + m_{D0} + m_{A0} + m_{B0})\Delta M}{2m_{B0}} c^2 = \left(1 + \frac{m_{A0}}{m_{B0}} + \frac{\Delta M}{2m_{B0}}\right) c^2 \Delta M. \tag{21}$$

由于在单撞机中以高能粒子轰击静止靶核的能量利用率不高,目前使用的对撞机就是用两束质量相同,能量相等的粒子束对碰.这时实验室系就是动心系,加速的能量就是反应有效能W',从而大大提高能量的利用率(见本节习题第10题).

* 三、穆斯堡尔效应与引力红移

原子核从激发态跃迁到基态发出的γ射线被同类原子核吸收并使之跃迁到激发态,称为共振吸收;如果后者再发出同样能量的γ射线,称为共振散射.这种无反冲的γ共振吸收和共振散射称为穆斯堡尔效应.

1. 为什么原子核的γ共振吸收比原子难得多

设原子(或核)处于静止状态,根据动量守恒定律,原子(或核)发出γ光子后,原子(或核)的动量的大小应等于γ光子的动量,即

$$p = \bar{h}k = \frac{\bar{h}\omega}{c}. \tag{22}$$

原子(或核)的反冲能即为

$$W_R = \frac{1}{2}m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\bar{h}^2\omega^2}{2mc^2}. \tag{23}$$

在发射过程中,原子(或核)上、下两能级差$W_0 = \bar{h}\omega_0$应等于发射光子的能量$W_{\gamma e}$与反冲能W_R之和,即发射光子的能量为

$$W_{\gamma e} = W_0 - W_R. \tag{24}$$

在吸收过程中,所吸收的能量$W_{\gamma a}$应为原子(或核)上、下两能级差$W_0 = \bar{h}\omega_0$与反冲能W_R之和,即

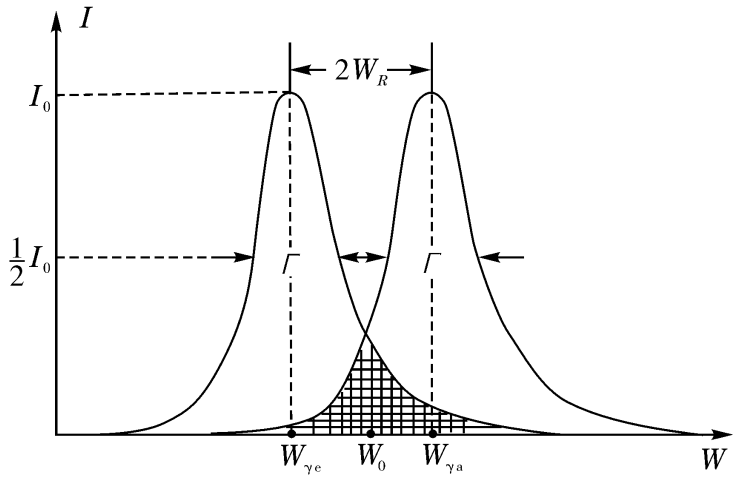


图 10.1

$$W_{\gamma a} = W_0 + W_R. \qquad (25)$$

因此,发射的γ射线与要求吸收的γ射线之间能量相差$2W_R$,如图 10.1 所示.

图中的Γ为谱线宽度.因为激发态的能级的寿命与能级的宽度Γ遵守能量-时间不确定关系①

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}, \qquad (26)$$

它导致谱线有一定宽度Γ(参看§ 12.4).如果发射谱与吸收谱互相重叠(如图中阴影部分),在这区域内谱线的增宽抵消了反冲能的影响,使共振吸收能发生.这就要求谱线宽度Γ大于反冲能W_R.反之,如果反冲能远大于谱线宽度,发射谱与吸收谱基本上不重叠(即重叠部分的谱线强度I趋于零),就很难发生共振吸收.

具体说来,对于钠原子发出的 5893Å 谱线,钠原子的反冲能量$W_R = 10^{-10}$eV,谱线宽度为$\Gamma = 4\times 10^{-8}$eV,即谱线宽度Γ远大于反冲能W_R,发射谱与吸收谱绝大部分重叠,因此共振吸收很容易发生.但对于^{57}Fe 发出的γ光子的能量是14.4keV,原子核的反冲能量$W_R = 2\times 10^{-3}$eV,谱线宽度$\Gamma = 4.7\times 10^{-9}$eV,即谱线宽度Γ远小于反冲能量$W_R$,发射谱与吸收谱不重叠,很难发生共振吸收.

2. 穆斯堡尔实现了原子核的无反冲γ共振吸收

1958 年,德国青年物理学家穆斯堡尔将放射源和吸收体都做成晶体,将原子嵌入固体晶格中,使束缚在晶体内的原子核在发射或吸收γ射线时,遭受反冲的不是单个原子核,而是整块晶体.由于整块晶体的质量比一个原子核大得多,由(23)式可见,W_R将趋于零.这样,γ射线的发射与吸收可看做无反冲过程,从而使发射谱与吸收谱完全重叠,满足了共振条件,实现了γ射线的无反冲共振吸收,这就是穆斯堡尔效应.

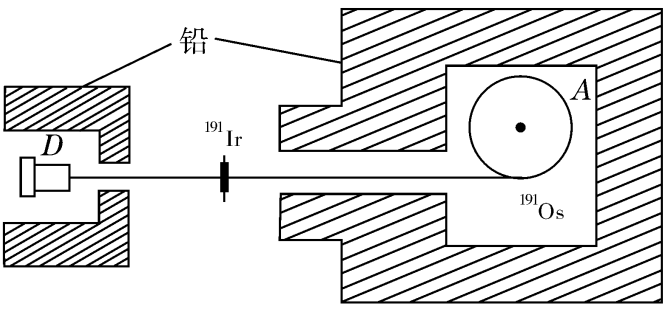


图 10.2

穆斯堡尔的无反冲共振吸收实验装置如图 10.2 所示.放射源为^{191}Os(锇)晶体,吸收体为^{191}Ir(铱)晶体.放射源放在转盘A的边缘上,可以相对吸收体以速度V作前后运动,以纵向多普勒效应来调节γ射线的能量.实验室参考系(K′系)观察到的γ光子能量W'_γ由能量的洛伦兹变换给出

① 汪德新. 2003. 量子力学. 理论物理导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社. 312

$$W'_\gamma = \gamma(W_\gamma - V p_\gamma) = \gamma\left(W_\gamma - V\frac{W_\gamma}{c}\right)$$

$$= \gamma W_\gamma(1-\beta) \approx W_\gamma\left(1-\frac{V}{c}\right). \quad (26)$$

上式已利用γ光子动量与能量的关系 $p_\gamma = \frac{W_\gamma}{c}$ [见§ 10.1 的(27)式,光子的速度 $v = c$]. 当放射源^{191}Os 衰变到^{191}Ir 的激发态后,后者再放射出能量为129keV 的γ射线,透过吸收体^{191}Ir 的片状晶体后被计数器D 计数. 图 10.3 给出^{191}Ir 的129keV 的γ射线共振吸收曲线,横坐标为放射源的线速度V(单位为m/s),纵坐标为γ射线通过吸收体时的吸收率η.

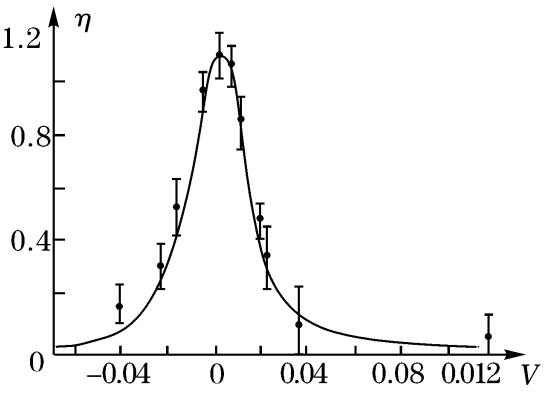


图 10.3

图 10.3 表明,当放射源的速度$V = 0$时,吸收最强,出现图中曲线的最大值;当放射源的速度$V = 0.01$m/s 时,由(26)式得光子能量的相对变化为

$$\frac{\Delta W_\gamma}{W_\gamma} = \frac{|W'_\gamma - W_\gamma|}{W_\gamma} \approx \frac{V}{c} = \frac{0.011}{3\times 10^8} \approx 3.6\times 10^{-11}, \quad (27)$$

其吸收率η已减半. 这表明穆斯堡尔效应具有极高的能量分辨率,可以检测出微小的能量变化.

能量分辨率可以用穆斯堡尔谱宽度Γ与γ光子能量W_γ的比值来衡量,如表 10.1 所示.

表 10.1

原子核	穆斯堡尔谱宽Γ	γ光子能量W_γ	能量分辨率Γ/W_γ
^{191}Ir	4.6×10^{-6}eV	129keV	3.6×10^{-11}
^{57}Fe	9.3×10^{-9}eV	14.4keV	6.5×10^{-13}
^{67}Zn	4.9×10^{-11}eV	93.3keV	5.3×10^{-16}

表10.1 给出^{57}Fe 的能量分辨率为10^{-13}的数量级,这个测量精度就仿佛测量地球到月球的距离可以精确到0.01mm!

穆斯堡尔效应的发现,为物理、化学、冶金、生物、医学等领域各种微小能差的测量带来重大的突破. 1961 年,穆斯堡尔获得诺贝尔奖.

3. "引力红移"预言的验证

穆斯堡尔效应最突出的成就,当属对广义相对论关于"引力红移"预言的验证.

爱因斯坦在20 世纪初就预言,在重力场作用下,光子的频率会发生改变,称为引力红移. 例如,从发光星球发出能量为$\hbar\omega$的光子,在远离星球的地方接受到光子,光子克服引力要损失一部分能量,光子能量减小导致波长增大(即向红光方向移动),故称引力红移.

粒子在地球表面附近,高度差为 l 的两点间引力势能的变化为

$$\Delta W = mgl. \tag{28}$$

光子的质量可以由质能关系 $W = mc^2$ 与光子的能量 $W = \bar{h}\omega$ 联立求得

$$mc^2 = \bar{h}\omega, \qquad \text{即} m = \frac{\bar{h}\omega}{c^2}. \tag{29}$$

将 m 代入(28)式,即得光子在高度差为 l 两点间的能量差

$$\Delta W = \frac{\bar{h}\omega gl}{c^2}, \tag{30}$$

由此得光子在高度差为 l 的两点间的相对频差

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta W}{W} = \frac{gl}{c^2} = \frac{9.807}{(2.998\times 10^8)^2} l = 1.091\times 10^{-16} l. \tag{31}$$

1960 年邦迪和莱克卡利用穆斯堡尔效应测量地球引力场引起的光谱红移.

邦迪取 $l = 22.6\text{m}$,理论预言值为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 1.091\times 10^{-16}\times 22.6 = 2.46\times 10^{-15}, \tag{32}$$

实验观测值为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = 2.57\times 10^{-15}. \tag{33}$$

精度约为 4.3%.

1964 年,邦德和斯尼德耳再次利用穆斯堡尔效应测量引力红移,并以 1% 的精度验证了广义相对论的预言.

1981 年,Katila T 和 Riski K J 首次利用 ^{67}Zn 的穆斯堡尔效应测量了引力和红移与引力方向和光子运动方向夹角的关系.

习　题　10.2

1. 两体碰撞可分为哪四种类型?

2. 在牛顿力学中,质心的定义是什么? 为何在相对论中没有意义?

3. 试证明真空中的自由电子既不能辐射光子,也不能吸收光子.

4. 一个静质量为 m_0 的物体,在静止时自动分裂为静质量为 m_{A0} 和 m_{B0} 的两部分,求这两部分的能量 W_A 和 W_B,以及速度 v_A 和 v_B.

5. $p = \bar{h}k$,$W = \bar{h}\omega$ 的光子撞在静止的电子上,散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上,证明康普顿效应中散射光子频率的变化量为

$$\omega - \omega' = \frac{2\bar{h}}{m_0 c^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{34}$$

散射光的波长为

$$\lambda' = \lambda - \frac{4\pi\bar{h}}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{35}$$

λ 是散射前光子的波长,m_0 是电子的静质量.

6. 静质量 m_0 的激发态原子在 K 系静止,它跃迁到基态时发射一个 $p = \bar{h}k$,$W = \bar{h}\omega$ 的光子并

受到光子的反冲,试证明光子的频率

$$\omega = \frac{\Delta W_0}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta W_0}{2m_0c^2}\right), \tag{36}$$

式中ΔW_0是原子处于激发态与基态的能量之差.

7.不稳定的粒子在运动中衰变成运动方向夹角为θ,静质量分别为m_{A0}和m_{B0},动量分别为p_A和p_B的两个粒子.求衰变前母体粒子的运动速度v及其静质量m_0.

8.频率为ω的光子被匀速运动的自由电子散射,试求散射光子的频率ω'与其运动方向的关系.设散射前自由电子的动量为p_e,它与入射光子运动方向的夹角为θ,散射后光子的运动方向与其入射方向的夹角(散射角)为θ'.

9.用γ射线去轰击一个静止的质子,生成一个质子和π介子,已知$m_{p0}c^2 = 938\text{MeV}$,$m_{\pi 0}c^2 = 135\text{MeV}$,试求反应阈能$W_{th}$.

10.(1)使用单撞机.以质子A高速轰击静止的质子B,生成质子C、D和另一生成物X,求反应阈动能T_{th}.

(2)使用对撞机.让速率相等、方向相反的质子A和B对撞,产生上述反应,求反应阈动能T_{th}.设质子与生成物X的静质量分别为m_0与M_0.

11.K′系以$V = ve_x$相对K系运动.

(1)设p及p'分别是K系与K′系测得粒子的动量,θ及θ'分别是p及p'与e_x的夹角,试证

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{\beta W}{cp}\right)}; \tag{37}$$

(2)一束平行光在K系和K′系与x轴的夹角分别为θ及θ',试证

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}; \tag{38}$$

(3)K系中立体角为$d\Omega = d\cos\theta d\phi$的光束在K′系的立体角为

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)^2}. \tag{39}$$

*§ 10.3 电磁场中带电粒子的拉格朗日量,哈密顿量及其运动方程

本节分别讨论自由粒子及电磁场中带电粒子的拉格朗日量L、哈密顿量H及其运动方程.

讨论的思路是从最小作用量原理出发,首先构造出一个符合要求的作用量S,通过与$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$比较得到体系的$L$.在此基础上,利用分析力学(见附录2)求出体系的广义动量P和哈密顿量H.其次,将L代入拉格朗日方程得到体系的运动方程.最后,利用$v \ll c$的近似得到低速情形下的拉格朗日量L和哈密顿量H,它们在非相对论量子力学中得到广泛的应用.

一、自由粒子的拉格朗日量、哈密顿量及其运动方程

1.相对论性自由粒子的作用量S

最小作用量原理指出,对于每一个力学体系,有作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t \tag{1}$$

存在.对于真实的运动,S 有最小值.

怎样的运动对自由粒子来说才是真实的?这个结论显然与参考系无关.由此可见,作用量 S 应为不变量.

对自由粒子而言,能构造出来的最简单的不变量就是 $A\,\mathrm{d}\tau$(常数 A 乘固有时).不妨假设

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2}A\,\mathrm{d}\tau=\int_{t_1}^{t_2}A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

2. 相对论性自由粒子的拉格朗日量

比较(1)式和(2)式,即得自由粒子的拉格朗日量

$$L=A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3}$$

为了确定常数 A,令 $v\ll c$,应得到低速情形下自由粒子拉格朗日量的经典表达式(附录2)

$$L_{低速}=\frac{1}{2}m_0v^2. \tag{4}$$

将展开式 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ 代入(3)式,得

$$L_{低速}=A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=A-\frac{1}{2}A\frac{v^2}{c^2}, \tag{5}$$

由于拉格朗日量相差一个常数,其运动方程不变,故可略去第一项,得

$$L_{低速}=-\frac{1}{2}A\frac{v^2}{c^2}. \tag{6}$$

比较(4)式与(6)式,可知 $A=-m_0c^2$.将 A 代入(3)式即得相对论性自由粒子的拉格朗日量

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{7}$$

3. 相对论性自由粒子的广义动量 P

取广义坐标 q_i 为直角坐标 x_i,则有

$$q_i=x_i,\qquad \dot{q}_i=\dot{x}_i=v_i. \tag{8}$$

将(8)式代入广义动量的定义式 $P_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$(见附录2),可得

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=p_i. \tag{9}$$

这表明,自由粒子的广义动量P_i就是它的机械动量p_i.

4. 相对论性自由粒子的哈密顿量 H

哈密顿量的定义为[见附录2的(20)式]

$$\mathrm{H}(q,P)=\sum_i P_i\dot{p}_i-\mathrm{L}. \tag{10}$$

将(7)式、(8)式和(9)式代入上式,即有

$$\mathrm{H}=\sum_i P_i v_i-\mathrm{L}=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{11}$$

5. 自由粒子的运动方程

将拉格朗日量 L代入拉格朗日方程,利用(9)式,即有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial v_i}-\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\dot{p}_i.$$

其矢量形式即为

$$\dot{p}=0. \tag{12}$$

这就是自由粒子的运动方程.

二、电磁场中带电粒子的拉格朗日量、哈密顿量及其运动方程

1. 电磁场中带电粒子的作用量S

前面已求出自由粒子的作用量为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{L}\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t. \tag{13}$$

电磁场中带电粒子的作用量应加上描述场与粒子相互作用的项,该项应具有如下的性质:

(1) 为不变量;

(2) 反映场与带电粒子的相互作用,既要有描述带电粒子特征的量q,也要有描述场特征的量A_μ;

(3)具有作用量的量纲,由(13)式可知其量纲为ML^2T^{-1},即具有角动量的量纲.

综合上述考虑,最简单的表达式为

$$S=-\int_{t_1}^{t_2}m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t+\int_A^B qA_\mu\mathrm{d}x_\mu. \tag{14}$$

将$A_\mu=\left(A,\mathrm{i}\dfrac{\varphi}{c}\right)$及$\mathrm{d}x_\mu=(\mathrm{d}x,\mathrm{i}c\mathrm{d}t)=(\boldsymbol{v},\mathrm{i}c)\mathrm{d}t$代入上式第二项,即得电磁场中带电粒子的作用量

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi\right)\mathrm{d}t. \tag{15}$$

2. 电磁场中带电粒子的拉格朗日量 L

将上式与 $S=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{L}\mathrm{d}t$ 比较,易见电磁场中带电粒子的拉格朗日量为

$$\mathrm{L}=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi. \tag{16}$$

3. 电磁场中带电粒子的广义动量 P

取 q_i 为直角坐标 x_i,由广义动量的定义可得

$$\begin{aligned}P_i&=\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial v_i}=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi\right)\\&=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+qA_i=p_i+qA_i,\end{aligned} \tag{17}$$

式中 p_i 是相对论中机械动量 $p=\dfrac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 的 i 分量. 由此得到广义动量 P 与机械动量 p 的关系:

$$P=p+qA. \tag{18}$$

因为自由粒子不处于外场中,$A=0$,可见(9)式是上式的特例.

4. 电磁场中带电粒子的哈密顿量 H

由哈密顿量的定义可得

$$\begin{aligned}\mathrm{H}&=\sum_i P_iv_i-\mathrm{L}=P\cdot\boldsymbol{v}-\mathrm{L}\\&=(p+qA)\cdot\boldsymbol{v}-\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi\right)\\&=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\varphi=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\varphi.\end{aligned} \tag{19}$$

5. 四维正则动量 P_μ

将三维正则动量 $P=p+qA$ 自然推广,可得四维正则动量

$$P_\mu=p_\mu+qA_\mu. \tag{21}$$

P_μ 的第四分量为

$$P_4=p_4+qA_4=\frac{\mathrm{i}}{c}W+q\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi=\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\varphi\right)=\frac{\mathrm{i}}{c}\mathrm{H}. \tag{22}$$

P_μ 的各分量即为

$$P_\mu = \left(P, \frac{\mathrm{i}}{c}\mathrm{H} \right). \tag{23}$$

6. 电磁场中带电粒子的运动方程

将(16)式代入拉格朗日方程,可得电磁场中带电粒子的运动方程(见本节习题第1题)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q(E + \boldsymbol{v} \times B). \tag{24}$$

三、低速情形下电磁场中带电粒子的拉格朗日量 L 与哈密顿量 H

在非相对论量子力学中,经常遇到带电粒子在电磁场中的运动. 因此,有必要寻找低速情形下的 L 和 H.

将低速情形下的近似式

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \tag{25}$$

代入(16)式,并略去 L 的常数项 $-m_0c^2$,便有

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m_0v^2 + qA \cdot \boldsymbol{v} - q\varphi \tag{26}$$

同理,将(25)式以及近似式 $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$(式中 ε 为小量)代入(19)式,略去常数项 m_0c^2,并用广义动量表示粒子速度,即得

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}m_0v^2 + q\varphi = \frac{1}{2m_0}p^2 + q\varphi = \frac{1}{2m_0}(P - qA)^2 + q\varphi. \tag{27}$$

实际上,在讨论塞曼效应、朗道能级、量子霍尔效应和阿哈罗诺夫-玻姆效应(AB 效应)时,均要用到低速情形下的 H.[①]

习 题 10.3

1. 试将拉格朗日量代入拉格朗日方程,导出电磁场中带电粒子的运动方程.

2. 试证明(26)式及(27)式满足 $\mathrm{H} = P \cdot \boldsymbol{v} - \mathrm{L}$

3. 电荷为 q、静质量为 m_0 的粒子在均匀电场 E 内运动,初速为零. 求粒子的速度及坐标随时间变化的规律,并考察 $t \to \infty$ 的结果.

(1)按相对论力学计算;

(2)按牛顿力学计算.

4. 求电荷为 q、静质量为 m_0、初速为零的粒子在均匀电磁场 $E = E\boldsymbol{e}_x$、$B = B\boldsymbol{e}_y$(且 $E > cB$)内的运动规律.

---

① 汪德新. 2003. 量子力学. 理论物理学导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社. 172~185.

第五篇　电磁波的辐射

我们在第三篇讨论了电磁波在自由空间(包括真空,绝缘介质,导体和等离子体)中的传播,以及在不同介质分界面上的反射和折射.本篇将要讨论“电磁波的辐射”.电磁波是怎样产生呢?理论和实践都证明,随时间变化的电荷电流是电磁波的源,电磁波被激发后,它的能量可以脱离波源向外传播,电磁能量向外传播不再返回波源的现象称为电磁波的辐射.从逻辑上看,似乎叙述的顺序应该是:电磁波的辐射,电磁波的传播,电磁波在介质分界面上的反射与折射,电磁波与物质的相互作用,….但从教学和学生接受的观点来看,我们叙述的顺序也许更为恰当.这不仅是因为电磁波的辐射比电磁波的传播复杂得多,而且叙述“运动带电粒子辐射的电磁场”时,还要用到相对论的结论.

第十一章讨论宏观电荷体系辐射的电磁场.主要讨论小区域内电荷电流分布辐射的电磁场,以及无线电体系中最常见的半波天线与天线阵的辐射.

第十二章讨论运动带电粒子辐射的电磁场.主要讨论在高能物理和天体物理中具有重要应用的韧致辐射,同步辐射和切连科夫辐射,以及带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用.

第十一章　宏观电荷体系辐射的电磁场

本章研究宏观电荷体系辐射的电磁场. 首先导出电磁势的方程组,并求出方程组的解——推迟势. 其次,讨论小区域内(线度 $l \ll \lambda$)电荷电流在远处($R \gg \lambda \gg l$)辐射的电磁场. 为此,将推迟势作多极展开,进而得到电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射各自的电磁场以及平均能流密度和辐射功率的公式. 最后,讨论宏观无线电体系的辐射,并以最基本也是最重要的半波天线和天线阵的辐射为重点. 天线的研究是无线电通讯、导航、雷达、遥测、射电天文等学科的重要组成部分.

§ 11.1　电磁势及其方程　推迟势

我们在§ 9.1 引入电磁势时已应用了麦克斯韦方程组的两个方程:

(1) 利用 $\nabla \cdot B = 0$ 引入电磁场的矢势 A,即

$$B = \nabla \times A. \tag{1}$$

(2) 利用 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 引入了时变电磁场的标势 φ,即

$$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2}$$

并且,还将电磁势(φ, A)组合成四维势

$$A_\mu = \left(A, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi \right). \tag{3}$$

本节首先从麦克斯韦方程组的另外两个方程出发,导出电磁势遵守的方程. 随后,利用电磁势的规范不变性,引入库仑规范和洛伦兹规范,使电磁势方程得到简化. 最后,求解洛伦兹规范下电磁势方程(达朗贝尔方程),这个解称为推迟势.

推迟势贯穿了第五篇的始终,在研究电磁波辐射的问题中具有非常重要的作用.

一、电磁势 φ 和 A 遵守的方程

现在,利用真空中麦克斯韦方程组的另外两个方程

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon_0}, \tag{4}$$

和

$$\nabla \times B = \mu_0 J_f + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \tag{5}$$

导出 φ 和 A 遵守的方程. 将(2)式代入(4)式,可得

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}, \tag{6}$$

将(1)式和(2)式代入(5)式,并利用 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$,可得

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu_0 J_f + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}\right),$$

整理后,将 $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ 代入上式可简化为

$$\nabla^2 A - \nabla\left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J_f. \tag{7}$$

上面的(6)式和(7)式称为电磁势方程.

因为电磁势方程是含有 $\varphi(x,t)$ 和 $A(x,t)$ 的联立方程,求解比较复杂. 人们总希望分离出 φ 与 A 的独立方程. 下面,我们进一步探讨这个可能性.

二、规范变换与规范不变性

如果对电磁势作变换

$$\varphi'(x,t) = \varphi(x,t) - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}, \tag{8}$$

$$A'(x,t) = A(x,t) + \nabla \psi(x,t), \tag{9}$$

式中 $\psi(x,t)$ 为任意可微函数. 容易证明,(φ, A) 与 (φ', A') 对应着同一电磁场:

$$B' = \nabla \times A' = \nabla \times A + \nabla \times (\nabla \varphi) = \nabla \times A = B, \tag{10}$$

$$E' = -\nabla \varphi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(A + \nabla \psi) = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = E. \tag{11}$$

这表明,对于同一电磁场 (E, B),电磁势的选择不是唯一的. 由于选择 $\psi(x,t)$ 的任意性,实际上有无限多组 (φ, A) 对应着同一电磁场 (E, B).

变换式(8)和(9)称为规范变换①. 当电磁场作规范变换时,电磁场保持不变的性质称为规范不变性.

之所以有这种选择势的自由是由于确定一个矢量场必须同时给定它的旋度和散度(见附录1§ A1.4 中的亥姆霍兹定理). 目前对矢量场 A 只规定了它的旋度(要求它等于给定的磁场:$\nabla \times A = B$),而没有规定它的散度. 因此,可以在满足规范变换的范围内选择 $\nabla \cdot A$ 的值.

现在,分别采用两种不同的规范,将电磁势方程组中的 φ 与 A 分离为两个独立

① 规范是规则、限制的意思,规范变换就是让变换服从某个规则,受到某种限制的意思.

的方程(在洛伦兹规范下),或者使方程组尽可能简化(在库仑规范下).

三、洛伦兹规范下与库仑规范下的电磁势方程组

1. 洛伦兹规范下的电磁势方程组(达朗贝尔方程)

若规定 A 的散度为 $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$,即

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

这称为洛伦兹规范(或称洛仑兹条件).

将上式代入(7)式,得到 A 遵守的方程

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J_f. \tag{13}$$

将 $\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 代入(6)式,得到 φ 遵守的方程

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}. \tag{14}$$

方程(13)及(14)式称为达朗贝尔方程.它有两个显著的特点:

(1)达朗贝尔方程是非齐次波动方程,即有源波动方程.电荷 ρ_f 产生标势 φ 的波动,电流 J_f 产生矢势 A 的波动.利用这两个方程讨论辐射问题非常方便(见本节后面的"推迟势").

(2)达朗贝尔方程的形式对称,可以写成协变的形式.容易证明,利用四维势 $A_\mu = \left(A, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$,四维电流密度 $J_\mu = (J_f, \mathrm{i}c\rho_f)$,四维 del 算符 $\Box = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 和达朗贝尔算符 $\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} = \left(\nabla^2, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$,可以将洛伦兹条件和达朗贝尔方程分别表示为

$$\Box \cdot A = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0; \tag{15}$$

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 J_\mu. \tag{16}$$

2. 库仑规范下的电磁势方程组

若规定 A 的散度为零,即

$$\nabla \cdot A = 0. \tag{17}$$

这称为库仑规范.

将上式分别代入(6)式和(7)式,可得

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}, \tag{18}$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\nabla \varphi)}{\partial t} = -\mu_0 J_f. \tag{19}$$

这组方程的特点是:

(1) 标势 φ 满足泊松方程,即与静电场方程相同(这正是库仑规范这个名称的来源). 这样,便可采用静电场中的方法求解(18)式,然后将 φ 代入(19)式求解 A. 这是库仑规范的优点.

(2) 标势与矢势的方程不对称,不能利用四维势 A_μ 将两者写成协变形式.

三、推迟势(达朗贝尔方程的解)

可以用类比法求解,比较方程(13)与(14)式,可见两者有对应关系:

$$\varphi \longrightarrow A_i, \qquad \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \longrightarrow \mu_0 J_{fi}. \tag{20}$$

注意,J_{fi} 是矢量 J_f 的第 i 个分量:英文正体"f"表示传导电流,英文斜体"i"表示分量.

由于数学形式相同,只要求出 φ,便可通过上式的替代求出 A_i,从而求得 A.

为了求得 $\varphi(x,t)$. 可以先求位于坐标原点的电荷 $Q_f(t)$ 激发的势,再求任意电荷分布 $\rho_f(x,t)$ 激发的势. 这可以通过如下九个步骤,把问题逐步简化.

1. 位于坐标原点的 $Q_f(t)$ 激发的势

由于电荷密度为

$$\rho_f(x,t) = Q_f(t)\delta^3(x), \tag{21}$$

代入(14)式,得标势的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2\varphi(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q_f(t)\delta^3(x). \tag{22}$$

我们关心的是 $x\neq 0$ 处的势,方程可改写为

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad x \neq 0. \tag{23}$$

2. 引入球坐标系

由于点电荷位于坐标原点,问题具有球对称性,$\varphi(x,t)$ 只与 R、t 有关,与 θ、ϕ 无关. 标势方程可改写为[见附录§ 1.5 的(35)式]

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad x \neq 0. \tag{24}$$

3. 作变换

为了使求解的方程进一步简化,令

$$\varphi(x,t) = \frac{u(x,t)}{R}, \tag{25}$$

得

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{u}{R}\right)\right] - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad R \neq 0.$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad R \neq 0. \tag{26}$$

4. 波动方程的通解

由行波法,得

$$u(R,t)=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right), \tag{27}$$

代入(25)式,得

$$\varphi(x,t)=\frac{f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}+\frac{f_2\left(t+\frac{R}{c}\right)}{R},\quad x\neq 0. \tag{28}$$

由于振幅与R成反比,可知$\varphi(x,t)$是球面波.由函数的宗量$t\pm\frac{R}{c}$可知第一项是由原点向外发射的球面波,第二项是向原点会聚的球面波.

这两项之和是方程(23)的通解,如果仅讨论辐射问题,则只要考虑第一项,即

$$\varphi(x,t)=\frac{f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{29}$$

5. 由包含$R=0$处的方程确定f_1的函数形式

将(29)式代入(22)式,并在以坐标原点为球心,半径为$\varepsilon\to 0$的球体V_ε内积分,得

$$\int_{V_\varepsilon}\left[\nabla^2\frac{f_1}{R}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{f_1}{R}\right]\mathrm{d}V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_\varepsilon}Q_f(t)\delta^3(x)\mathrm{d}V, \tag{30}$$

利用δ函数的性质[见附录4的(2)式],∇算符的运算公式

$$\nabla^2\left(\frac{f_1}{R}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\nabla f_1}{R}+f_1\nabla\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{R}\nabla^2 f_1+2\nabla f_1\cdot\nabla\frac{1}{R}+f_1\nabla^2\frac{1}{R}, \tag{31}$$

以及$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta^3(x)$,则(30)式可改写为

$$\int_{V_\varepsilon}\left[\frac{1}{R}\nabla^2 f_1+2\nabla f_1\cdot\nabla\frac{1}{R}-4\pi f_1\delta^3(x)-\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}V=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q_f(t). \tag{32}$$

由于V_ε正比于ε^3,积分中第一、四项$\left(\text{有系数}\frac{1}{R}\right)$正比于$\varepsilon^2$,第二项$\left(\text{因}\nabla\frac{1}{R}\propto\frac{1}{R^2}\right)$正比于$\varepsilon$;当$\varepsilon\to 0$时这三项均为零.将第三项积出,即得

$$f_1(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_f(t). \tag{33}$$

将(33)式代入(29)式,便有

$$\varphi(x,t)=\frac{Q_f\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q_f\left(0,t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{34}$$

上式采用记号$Q_f\left(0,t-\frac{R}{c}\right)$是表示电荷$Q_f$位于坐标原点($R=0$). 它表示场点$x$在$t$时刻的势$\varphi(x,t)$是位于坐标原点的电荷$Q_f$在$t-\frac{R}{c}$时刻激发的,见图11.1(a).

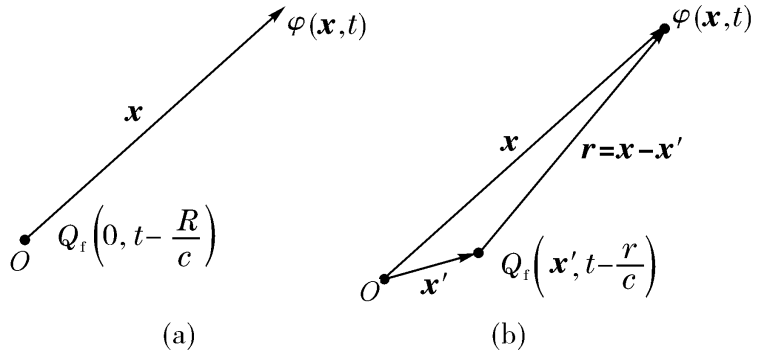


图11.1

6. 位于x'的点电荷Q_f激发的势

上面的源点与场点的距离为

$$|r|=|x-0|=|x-0|=|x|=R. \tag{35}$$

现在源点与场点的距离为

$$|r|=|x-x'|=r. \tag{36}$$

将解(34)式推广到任意的源点时[见图11.1(b)],只要将$x'=0$改写为x'的同时将R改写为r即可. 由此得

$$\varphi(x,t)=\frac{Q_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{37}$$

7. 任意电荷分布$\rho(x,t)$激发的势

由势叠加原理,整个电荷分布激发的电势等于所有电荷元$\rho_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)\mathrm{d}V$激发电势的叠加,由此得

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V'. \tag{38}$$

8. 由与标势的类比关系,可得A_i及A

作替换$\varphi\to A_i$和$\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}\to\mu_0 J_{fi}$,可得

$$A(x,t)=\sum_{i=1}^{3}e_i A_i=\sum_{i=1}^{3}e_i\int_V\frac{\mu_0 J_{fi}\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\mathrm{d}V'=\int\frac{\mu_0 J_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\mathrm{d}V'. \tag{39}$$

9. 物理意义

第一,$\varphi(x,t)$及$A(x,t)$的解表明,t时刻x处的电磁场是由较早时刻$t'=t-\frac{r}{c}$处

的电荷和电流分布决定的,即 x' 处电荷电流激发的场要经过

$$t-t'=\frac{r}{c}=\frac{|x-x'|}{c} \tag{40}$$

的时间后才传播到 x 处,因此,上两式的解称为推迟势.

第二,推迟的时间 $t-t'$ 等于用光速 c 除源点到场点的距离 $r=|x-x'|$,可见电磁作用是以光速传递的.

第三,由于 $r=|x-x'|$ 不同,$t-t'$ 不同,可见 t 时刻 x 点的场,对于不同源点(见图 11.2)是在不同时刻 t' 激发的.

最后,可以证明 $\varphi(x,t)$ 与 $A(x,t)$ 满足洛伦兹规范条件,因此它是关于辐射问题正确的解. 证明见本节习题第 1 题.

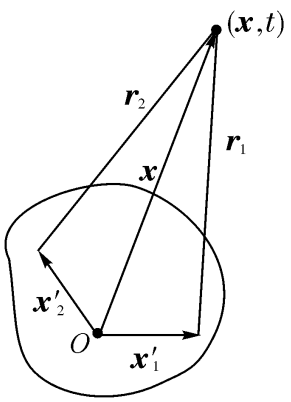


图 11.2

习　题　11.1

1. 试利用电荷守恒定律证明推迟势满足洛伦兹条件.

2. 将麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为纵场(用 L 标记)和横场(用 T 标记)两部分,试写出 E_L、E_T、B_L 和 B_T 在真空中所遵守的方程,并证明电场的纵场部分对应库仑场.

3. 试分别求出采用洛伦兹规范和库仑规范时单色平面电磁波的矢势和标势,并指出这时 A 与 φ 是否惟一,为什么?

§ 11.2　推迟势的多极展开　单频辐射场的计算

本节讨论宏观电荷体系的辐射问题. 假设电荷体系分布在一个小区域,其线度 $l\ll\lambda$. 对于辐射问题,人们关心的是远区($R\gg\lambda$,$R\gg l$)的辐射场.

本节首先利用三元泰勒级数展开推迟势,其后对随时间变化的电荷电流体系进行傅里叶分析,将其辐射场看做单频辐射场的叠加,给出计算单频多极辐射场的方法. 本节为讨论电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射奠定了基础.

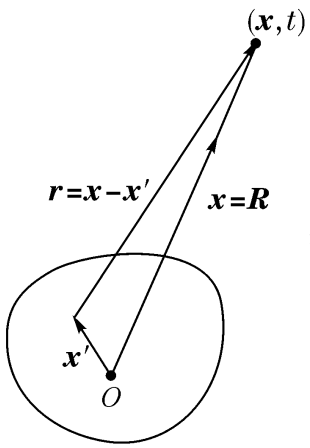


图 11.3

一、推迟势的多极展开

对于小区域电荷电流体系 $|x'|\ll\lambda$ 辐射到远处($\lambda\ll R$)的电磁场,我们可以利用 $|x'|\ll\lambda\ll R$ 的条件,在 $x'=0$(即 $r=R$)处展开推迟势

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V', \tag{1}$$

$$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V', \tag{2}$$

式中 $r=|r|=|x-x'|$,如图 11.3 所示.

三元泰勒级数为[见附录1§ A1.6 的(37)式]

$$f(r)=f(R)-x'\cdot\nabla f(R)+\frac{1}{2!}x'x':\nabla\nabla f(R)+\cdots, \tag{3}$$

取$f(r)$为$\dfrac{\rho_f\left(x',t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}$,则有

$$\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}=\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}-x'\cdot\nabla\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}+\frac{1}{2!}x'x':\nabla\nabla\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}+\cdots, \tag{4}$$

同理可得

$$\frac{J_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}=\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}-x'\cdot\nabla\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}+\frac{1}{2!}x'x':\nabla\nabla\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}+\cdots \tag{5}$$

分别将(4)式和(5)式代入(1)式和(2)式,即得

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V x'\cdot\nabla\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2!}\int_V x'x':\nabla\nabla\frac{\rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'+\cdots, \tag{6}$$

$$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V x'\cdot\nabla\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2!}\int_V x'x':\nabla\nabla\frac{J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V'+\cdots. \tag{7}$$

这样,根据精确性的要求,选取若干项计算电磁场.通常只要考虑到第二项(即磁偶极辐射和电四极辐射)即可.

在讨论推迟势各项对辐射场的贡献之前,先讨论求解单频多极辐射场的方法.

二、单频多极辐射场的计算方法

对于随时间变化的电荷、电流体系,可以利用傅里叶分析将其看做一系列按不同频率变化的电荷电流的叠加.它们各自辐射单一频率的电磁场,这些场的叠加即为该电荷电流体系辐射的场.因此,最基本和最重要的问题还是单频辐射场.鉴于高频电磁场在无线电通讯和电视中的实用价值,人们特别关心高频电磁波的辐射.

频率为 ω 的单频电荷密度与电流密度可以表示为

$$\rho_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)=\rho_f(x')e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}=\rho_f(x')e^{i(k\cdot x-\omega t)}, \tag{8}$$

$$J_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)=J_f(x')e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}=J_f(x')e^{i(k\cdot x-\omega t)}. \tag{9}$$

上两式最后一个等式的根据是:对于小区域电荷电流体系,作多极展开时,电多极子与磁多极子均位于坐标原点,故 k 与 x 同向(均沿 e_R 方向),因而

$$k=ke_R=\frac{\omega}{c}e_R,\qquad R=Re_R,\qquad k\cdot x=kR=\frac{\omega}{c}R. \tag{10}$$

现在,将 $\rho_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)$ 及 $J_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)$ 代入推迟势公式,易见单频的源必定辐射同频的场[见(1)式和(2)式],并且可表示为

$$E(x,t)=E(x)e^{i(k\cdot x-\omega t)},\qquad B(x,t)=B(x)e^{i(k\cdot x-\omega t)}. \tag{11}$$

当使用算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 及 ∇ 作用于 $e^{i(k\cdot x-\omega t)}$ 时,容易得到替代关系[参看附录题 1.2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\longrightarrow -i\omega,\qquad \nabla\longrightarrow ik. \tag{12}$$

对于电荷电流分布区域以外的场,辐射场 E 和 B 的关系可由无源麦克斯韦方程给出.由

$$\nabla\times B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{i\omega}{c^2}E=-\frac{ik}{c}E, \tag{13}$$

可得

$$E=\frac{ic}{k}\nabla\times B=\frac{ic}{k}ik\times B=cB\times e_R. \tag{14}$$

这样,计算单频辐射场 E,B 及其能流密度时,便可按如下路线进行:

$$A^{(n)}\longrightarrow B^{(n)}=\nabla\times A^{(n)}\longrightarrow E^{(n)}=cB^{(n)}\times e_R\longrightarrow S^{(n)}=E^{(n)}\times H^{(n)}, \tag{15}$$

而不必计算 $\varphi^{(n)}$.上述各量的肩标 (n) 表示它们与推迟势 A 展开式的第 n 项相对应.

随后两节将按上述思路计算多极辐射场.

习　题　11.2

1. 设体系的 $p(t)=p_0e^{-i\omega t}$,试证明:

$$\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-i\omega p\left(t-\frac{R}{c}\right),\qquad \ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-i\omega\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\omega^2 p\left(t-\frac{R}{c}\right). \tag{16}$$

2. $\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$ 可以看做 p 通过中间变量 $t'=t-\frac{R}{c}$ 作为 R 的函数,记 $\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)=\dot{p}[t'(R)]$.试利用复变函数的旋度公式证明

$$\nabla\times\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times R}{cR}. \tag{17}$$

§ 11.3　电偶极辐射　短天线辐射

本节首先建立$A^{(1)}(x,t)$与体系电偶极矩$p\left(t-\frac{R}{c}\right)$的关系,随后计算电偶极辐射的电磁场、平均能流密度和辐射功率.最后,作为应用讨论短天线辐射.

一、电偶极辐射

1.推迟势$A^{(1)}(x,t)$与体系电偶极矩$p\left(t-\frac{R}{c}\right)$的关系

利用附录§ 1.6的(36)式

$$\dot{p}(t)=\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=\int_V J_f(x',t)\mathrm{d}V', \tag{1}$$

代入推迟势展开式的第一项

$$A^{(1)}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V J_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V', \tag{2}$$

可得

$$A^{(1)}(x,t)=\frac{\mu_0\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}=A_{e2}(x,t), \tag{3}$$

式中$\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$是$p$对$t'=t-\frac{R}{c}$的导数.由于矢势$A^{(1)}(x,t)$仅依赖于体系电偶极矩随时间的变化率,故称之为电偶极辐射.今后将采用记号$A_{e2}(x,t)$表示$A^{(1)}(x,t)$.

2.磁感应强度$B_{e2}(x,t)$与电场强度$E_{e2}(x,t)$

由∇的运算公式可得

$$\begin{aligned}B_{e2}(x,t)&=\nabla\times A_{e2}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\times\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{1}{R}\nabla\times\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

利用§ 11.2的(17)式,可得

$$B_{e2}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times R}{R^3}+\frac{\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times R}{cR^2}\right]. \tag{5}$$

对于空间的不同区域,这两项的重要性是不同的.利用§ 11.2的(16)式,两项的模之比为

$$\frac{\left|\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times R/cR^2\right|}{\left|\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times R/R^3\right|}=\frac{\omega/c}{1/R}=\frac{2\pi R}{\lambda}. \tag{6}$$

这表明:

(1) 对于近区($R \ll \lambda$),$B_{e2}(x,t)$的第一项重要;

(2) 对于远区($R \gg \lambda$),$B_{e2}(x,t)$的第二项重要.

当研究远区的电磁场时,可略去第一项,并利用 $e_z \times e_R = \sin\theta e_\phi$得

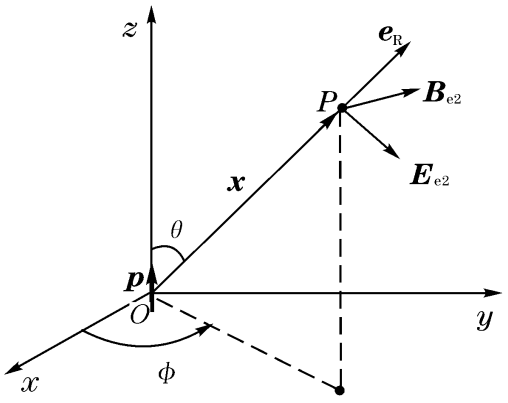


图 11.4

$$B_{e2}(x,t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) \times R}{4\pi c R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi c R}\ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)\sin\theta e_\phi. \tag{7}$$

相应的电场为[见§ 11.2 的(15)式]

$$E_{e2}(x,t) = cB_{e2}(x,t) \times e_R = \frac{\mu_0}{4\pi R}\ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)\sin\theta e_\phi \times e_R = \frac{\mu_0}{4\pi R}\ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)\sin\theta e_\theta. \tag{8}$$

3. 平均能流密度$\bar{S}_{e2}$

将E_{e2}及B_{e2}代入$\bar{S}_{e2}$,利用$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$及$e_R \cdot B_{e2} = e_R \cdot e_\phi B_{e2} = 0$,可得

$$\begin{aligned}\bar{S}_{e2} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[E^*_{e2} \times H_{e2}] = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[c(B^*_{e2} \times e_R) \times B_{e2}] \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[c|B_{e2}|^2 e_R - c(e_R \cdot B_{e2})B^*_{e2}] \\ &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[c|B_{e2}|^2 e_R] = \frac{c}{2\mu_0}|B_{e2}|^2 e_R \\ &= \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} e_R = \frac{|\ddot{p}|^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} e_R.\end{aligned} \tag{9}$$

4. 辐射总功率P_{e2}与辐射角分布$\frac{dP_{e2}}{d\Omega}$

以坐标原点为球心作一个半径很大的球面,单位时间流过该球面的能量称为辐射的总功率

$$P_{e2} = \oint \bar{S}_{e2} \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{|\ddot{p}|^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} R^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{p}|^2}{3c^3}. \tag{10}$$

这表明,单位时间穿过某一球面的能量$\oint \bar{S}_{e2} \cdot d\sigma$与球面半径无关,即电磁波携带的能量可以传递到无穷远处.这是与R成反比的场[见(5)式的第二项及相应的电场]才有的性质,故称为辐射场.对于与R^2成反比的场[见(5)式的第一项及相应的电场],其能量只能在辐射源附近流动,故称为自有场.本章只讨论前者,后者见第

12 章.

电偶极辐射并不是各向同性的,在(θ,ϕ)方向上单位立体角内的辐射功率$\frac{dP_{e2}}{d\Omega}$称为电偶极辐射的角分布.为了计算它,可将(10)式改写为

$$P_{e2}=\oint \bar{S}_{e2}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\oint \bar{S}_{e2}\cdot e_R R^2 d\Omega, \tag{11}$$

与$P_{e2}=\oint \frac{dP_{e2}}{d\Omega}d\Omega$比较,并将(9)式代入,即有

$$\frac{dP_{e2}}{d\Omega}=\bar{S}_{e2}\cdot e_R R^2=\frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta. \tag{12}$$

电偶极辐射有两个显著的特点:

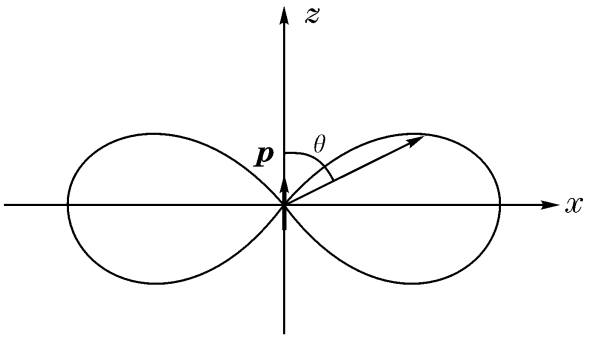


图 11.5

第一,电偶极辐射的平均总功率与频率的四次方成正比:

$$P_{e2}=\int \frac{dP_{e2}}{d\Omega}d\Omega=\frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{|\ddot{p}|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\propto\omega^4. \tag{13}$$

微波之所以要用波导管传输而不能用双线传输就是因为辐射损耗随频率的增大而急剧增加.

第二,电偶极辐射的角分布不对称:

$$\frac{dP_{e2}}{d\Omega}\propto\sin^2\theta. \tag{14}$$

在$\theta=0$及π的锥形区域几乎没有辐射,在$\theta=\frac{\pi}{2}$的方向辐射最强,见图 11.5.

二、短天线辐射

短天线辐射是指天线的长度 l 远小于辐射波长λ.用波数表示,就是

$$kl\ll 2\pi. \tag{15}$$

短天线是由长度为 l 的细金属棒(中间断开)构成.信号由振荡器发生后送中间馈入.电流在短天线上形成驻波,在天线的两端降为零.如图 11.6 所示,由于$l\ll\lambda$,可认为电流沿 z 方向近似为线性分布.为保证天线两端$\left(|z'|=\frac{l}{2}\text{处}\right)I_f=0$,则

$$I_f(z',t)=I_0\left(1-\frac{2}{l}|z'|\right)e^{-i\omega t}. \tag{16}$$

现在计算天线上的电流在远处激发的辐射场.

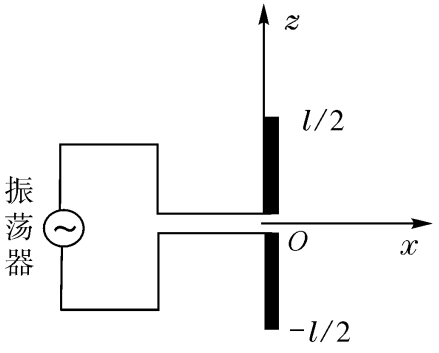


图 11.6

短天线($l\ll\lambda$)在远区($l\ll R$ 和 $\lambda\ll R$)的辐射满足小区域电流体系辐射的条件,其最低级的辐射(也就是多极辐射中最重要的一项)就是电偶极辐射.因此,可以直接利用上面的结果进行计算.

1. 电偶极矩对时间的二阶导数 $\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$

将熟知的公式 $\int J_f \mathrm{d}V' = \int I_f \mathrm{d}l$ 代入(2)式,并注意到 $\left(1-\frac{2}{l}|z'|\right)$ 是偶函数,可得

$$\begin{aligned}\dot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right) &= \int_V J_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V' = \int_{-l/2}^{l/2} I_f\left(z', t-\frac{R}{c}\right)e_z \mathrm{d}z' \\ &= I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)} e_z \int_{-l/2}^{l/2}\left(1-\frac{2}{l}|z'|\right)\mathrm{d}z' \\ &= 2I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)} e_z \int_0^{l/2}\left(1-\frac{2}{l}z'\right)\mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{2}I_0 l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)} e_z . \end{aligned} \tag{17}$$

因而

$$\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega I_0 l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)} e_z . \tag{18}$$

2. 辐射场

将上式中 $\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$ 的大小 $\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega I_0 l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}$ 代入(7)式和(8)式,得

$$B_{e2}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi cR}\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\sin\theta e_\phi = -\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega I_0 l}{8\pi cR}\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)} e_\phi , \tag{19}$$

$$E_{e2}(x,t) = -\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega I_0 l}{8\pi R}\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)} e_\theta . \tag{20}$$

3. 辐射总功率

将(18)式代入(10)式,可得

$$P_{e2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left|\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right|^2}{3c^3} = \frac{\omega^2 I_0^2 l^2}{48\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 . \tag{21}$$

4. 辐射电阻

如果将辐射出去的电磁能量看做是天线的功率损耗,便可引进天线的辐射电阻的概念(它不是天线的电阻,切不可混淆).

定义辐射电阻 R_r 与电流有效值平方 $\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$ 之积等于辐射电阻消耗的功率

$$P = \frac{1}{2}I_0^2 R_r . \tag{22}$$

比较(21)式和(22)式,即得

$$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 197\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2(\Omega). \tag{23}$$

由辐射电阻的定义可知,R_r 越大相应的辐射功率越大,它是反映天线辐射能力的一个物理量.上式表明,增加 l/λ,能提高天线的辐射电阻(见§ 11.5).

习　题　11.3

1. 试计算一个电量为 q 的粒子以加速度 a 运动时的辐射总功率.

2. 带电粒子 q 以频率 ω 作半径为 R_0 的非相对论性圆周运动.试求远处的辐射电磁场和平均能流.

3. 设有线偏振平面电磁波 $E = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上,引起介质球极化,极化矢量 P 是随时间变化的,因而产生辐射.设平面波的波长 λ 远大于球的半径 R_0,求介质球所产生的辐射场和能流.

4. 设有振幅为 p_0、频率为 ω 的电偶极子位于距离理想导体平面 $\frac{a}{2}$ 处,p 平行于导体平面.已知 $a \ll \lambda$,试求 $R \gg \lambda$ 处的辐射电磁场及平均能流.

*11.4　磁偶极辐射与电四极辐射

本节首先利用张量可以写成对称张量和反对称张量之和的性质,将 $A^{(2)}(x,t)$ 分解为 $A_{m2}(x,t)$ 和 $A_{e4}(x,t)$ 两项之和.前项与体系的磁偶极矩 $m\left(t-\frac{R}{c}\right)$ 有关,后项与体系的电四极矩 $\overleftrightarrow{D}\left(t-\frac{R}{c}\right)$ 有关.随后分别由 $A_{m2}(x,t)$ 和 $A_{e4}(x,t)$ 出发计算磁偶极辐射和电四极辐射的电磁场、平均能流密度和辐射功率.

磁偶极辐射与电四极辐射的强度属于相同数量级,必须同时考虑.磁四极辐射和电八极辐射很弱,通常不必考虑.

多极辐射在原子核的研究中具有重要意义.利用原子核辐射几率和角分布可以推断辐射的电磁多极性质,从而获得原子核关于自旋和宇称等方面的性质①.

一、推迟势 $A^{(2)}(x,t)$ 与体系磁偶极矩 $m\left(t-\frac{R}{c}\right)$ 和电四极矩 $\overleftrightarrow{D}$ 的关系

推迟势展开式的第二项为

$$A^{(2)}(x,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V x' \cdot \nabla \frac{J_f\left(x', t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \tag{1}$$

① 自旋和宇称在“量子力学”中介绍,它是没有经典对应的力学量.例如参看本书的第三卷:汪德新. 2003. 量子力学.理论物理学导论第三卷.第二版.武汉:湖北科学技术出版社. 89~92, 224~234.

利用∇算符的运算公式及$\nabla f(R)=\mathrm{i}kf(R)$,则

$$\nabla\frac{J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)}{R}=\left(\nabla\frac{1}{R}\right)J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)+\frac{1}{R}\nabla J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)$$

$$=-\frac{1}{R^2}e_R J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)+\frac{1}{R}\mathrm{i}kJ_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right). \tag{2}$$

由于远区的$R\gg\lambda$,略去第一项代入(1)式,由$k=ke_R$及$x'\cdot k=ke_R\cdot x'$,得

$$A^{(2)}(x,t)=-\frac{\mathrm{i}\mu_0 kf}{4\pi R}\int_V e_R\cdot x'J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V'. \tag{3}$$

为书写简单起见,暂采用记号

$$J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\equiv J_{\mathrm{f}}[x',t']\equiv J'_{\mathrm{f}},\qquad \rho_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\equiv\rho_{\mathrm{f}}(x',t')\equiv\rho'_{\mathrm{f}}. \tag{4}$$

现在将$x'J'_{\mathrm{f}}$写成对称张量与反对称张量之和,即

$$x'J'_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}(x'J'_{\mathrm{f}}+J'_{\mathrm{f}}x')+\frac{1}{2}(x'J'_{\mathrm{f}}-J'_{\mathrm{f}}x'). \tag{5}$$

代入(3)式,可得

$$A^{(2)}(x,t)=-\frac{\mathrm{i}\mu_0 kf}{4\pi R}\int_V e_R\cdot\left[\frac{1}{2}(x'J'_{\mathrm{f}}+J'_{\mathrm{f}}x')+\frac{1}{2}(x'J'_{\mathrm{f}}-J'_{\mathrm{f}}x')\right]\mathrm{d}V'. \tag{6}$$

首先,将(6)式积分中的第二项化为

$$\frac{1}{2}\int_V e_R\cdot(x'J'_{\mathrm{f}}-J'_{\mathrm{f}}x')\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\int_V[(e_R\cdot x')J'_{\mathrm{f}}-(e_R\cdot J'_{\mathrm{f}})x']\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{1}{2}e_R\times\int_V(x'\times J'_{\mathrm{f}})\mathrm{d}V'$$

$$=-e_R\times m\left(t-\frac{R}{c}\right). \tag{7}$$

式中

$$m\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{2}\int_V x'\times J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V' \tag{8}$$

是体系在$t-\frac{R}{c}$时刻的磁偶极矩[参看§ 4.4的(8)式].

其次,利用$J_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)=\rho_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\boldsymbol{v}=\rho_{\mathrm{f}}\left(x',t-\frac{R}{c}\right)\dot{x}'$,(6)式积分中的第一项可化为

$$\frac{1}{2}\int_V e_R\cdot(x'J'_{\mathrm{f}}+J'_{\mathrm{f}}x')\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\int_V e_R\cdot\rho'_{\mathrm{f}}(x'\dot{x}'+\dot{x}'x')\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{2}e_R\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho'_{\mathrm{f}}x'x'\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{6}e_R\cdot\dot{\overleftrightarrow{D}}\left(t-\frac{R}{c}\right), \tag{9}$$

式中

$$\dddot{D}\left(t-\frac{R}{c}\right)=\oint_V \rho_f\left(x',t-\frac{R}{c}\right)x'x'\mathrm{d}V' \tag{10}$$

是体系在 $t-\frac{R}{c}$ 时刻的电四极矩[参看§ 3.5 的(10)式].

将(7)式和(9)式代入(6)式,并利用

$$\dot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\mathrm{i}\omega m\left(t-\frac{R}{c}\right),\qquad \ddot{\dot{D}}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\mathrm{i}\omega\dddot{D}\left(t-\frac{R}{c}\right),$$

可得

$$\begin{aligned}A^{(2)}(x,t)&=-\frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi R}\left[-e_R\times m\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{1}{6}e_R\cdot\dddot{D}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\\&=\frac{\mu_0}{4\pi cR}\left[\dot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R+\frac{1}{6}e_R\cdot\ddot{\dot{D}}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\\&=A_{m2}(x,t)+A_{e4}(x,t).\end{aligned}\tag{11}$$

$A^{(2)}(x,t)$的第一项决定于体系磁偶极矩随时间的变化率,故用 $A_{m2}(x,t)$表示磁偶极辐射的矢势;$A^{(2)}(x,t)$的第二项决定于体系电四极矩对时间的二阶导数,故用 $A_{e4}(x,t)$表示电四极辐射的矢势.

二、磁偶极辐射

现在由 $A_{m2}(x,t)$出发计算电磁场、平均能流密度和辐射功率.

考虑到辐射场的场强应与 R 成反比,凡与 R^2 成反比的项均应略去.因此,在计算辐射场时,∇ 对电磁势的作用不必作用在 $\frac{1}{R}$ 因子,而只考虑对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}$ 因子的作用,并采用如下替换关系:

$$\nabla\to\mathrm{i}k=\mathrm{i}ke_R,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\to-\mathrm{i}\omega.\tag{12}$$

1. 推迟势 $A_{m2}(x,t)$

$$A_{m2}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi cR}\dot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R.\tag{13}$$

2. 磁感应强度 $B_{m2}(x,t)$和电场强度 $E_{m2}(x,t)$

$$B_{m2}(x,t)=\nabla\times A_{m2}(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi c^2R}\left[\ddot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R\right]\times e_R.\tag{14}$$

利用三矢量的矢积公式,并注意到$(a\times e_R)$与 e_R 垂直,其点积为零,即有

$$[(a\times e_R)\times e_R]\times e_R=[(a\times e_R)\cdot e_R]e_R-(e_R\cdot e_R)(a\times e_R)=-(a\times e_R).$$

若令 $a=\ddot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)$,则有

$$\begin{aligned}E_{m2}(x,t)&=cB_{m2}(x,t)\times e_R=\frac{\mu_0}{4\pi cR}\left\{\left[\ddot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R\right]\times e_R\right\}\times e_R\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3R}\ddot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R.\end{aligned}\tag{15}$$

3. 平均能流密度$\bar{S}_{m2}$

$$\bar{S}_{m2}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E^{*}_{m2}(x,t)\times H_{m2}(x,t)\right]=\frac{c}{2\mu_0}|B_{m2}(x,t)|^2 e_R$$

$$=\frac{\mu_0\left|\ddot{m}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta e_R=\frac{\mu_0|\ddot{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta e_R. \tag{16}$$

4. 辐射总功率P_{m2}和辐射功率角分布$\frac{\mathrm{d}P_{m2}}{\mathrm{d}\Omega}$

$$P_{m2}=\oint \bar{S}_{m2}\cdot \mathrm{d}\sigma=\frac{\mu_0|m|^2\omega^4}{12\pi c^3}. \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_{m2}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mu_0|m|^2\omega^4}{32\pi^2c^3}\sin^2\theta. \tag{18}$$

【例1】 半径为R_0、磁化强度为M_0(沿水平方向)的均匀磁化球以恒定的角速度ω绕通过球心的竖直轴旋转.已知$R_0\omega\ll c$,求辐射场和能流.

解 本题的$p=0,\overleftrightarrow{D}=0$,属于磁偶极辐射问题.

1. 体系的磁偶极矩

若磁化球沿顺时针方向转动,则其磁偶极矩可表示为

$$m=m(e_x+\mathrm{i}e_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{4\pi}{3}R_0^3M_0(e_x+\mathrm{i}e_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{19}$$

因为计算辐射场时会遇到电磁势A_{m2}与e_R的矢积,为计算方便,用球坐标系的基矢表示e_x和e_y,则有

$$\begin{aligned}e_x+\mathrm{i}e_y=&(\sin\theta\cos\phi e_R+\cos\theta\cos\phi e_\theta-\sin\phi e_\phi)\\&+\mathrm{i}(\sin\theta\sin\phi e_R+\cos\theta\sin\phi e_\theta+\cos\phi e_\phi)\\=&(\sin\theta e_R+\cos\theta e_\theta+\mathrm{i}e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}.\end{aligned} \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式,即有

$$m=\frac{4\pi}{3}R_0^3M_0(\sin\theta e_R+\cos\theta e_\theta+\mathrm{i}e_\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\phi)}. \tag{21}$$

2. 推迟势$A_{m2}(x,t)$

将(21)式代入(11)式的第一项,得

$$\begin{aligned}A_{m2}(x,t)=&\frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi R}e_R\times m\left(t-\frac{R}{c}\right)\\=&\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega R_0^3M_0}{3cR}e_R\times(\sin\theta e_R+\cos\theta e_\theta+\mathrm{i}e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}\\=&\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega R_0^3M_0}{3cR}(-\mathrm{i}e_\theta+\cos\theta e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}.\end{aligned} \tag{22}$$

3. 磁感应强度$B_{m2}(x,t)$和电场强度$E_{m2}(x,t)$

$$B_{m2}(x,t)=\nabla\times A_{m2}(x,t)=\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega R_0^3M_0}{3c}\nabla\times\left[\frac{1}{R}(-\mathrm{i}e_\theta+\cos\theta e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}\right]. \tag{23}$$

∇ 作用于$\frac{1}{R}$及$(-\mathrm{i}e_\theta+\cos\theta e_\phi)$均得到反比于$R^2$的结果①,应略去. 只考虑 ∇ 对$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}$的作用,利用$\nabla f(R)=\mathrm{i}kf(R)=\mathrm{i}\frac{\omega}{c}e_R f(R)$可得

$$B_{m2}(x,t)=\frac{\mu_0\omega^2R_0^3M_0}{3c^2R}(\cos\theta e_\theta+\mathrm{i}e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}. \tag{24}$$

因此

$$E_{m2}(x,t)=cB_{m2}(x,t)\times e_R=\frac{\omega^2R_0^3M_0}{3\varepsilon_0c^3R}(\mathrm{i}e_\theta-\cos\theta e_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t+\phi)}. \tag{25}$$

4. 平均能流密度$\overline{S}_{m2}$

$$\overline{S}_{m2}=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[E^*_{m2}(x,t)\times B_{m2}(x,t)]=\frac{\omega^4R_0^6M_0^2}{18\varepsilon_0c^5R}(1+\cos^2\theta)e_R. \tag{26}$$

三、电四极辐射

现在由$E_{e4}(x,t)$出发计算电磁场、平均能流密度和辐射功率.

1. 推迟势$A_{e4}(x,t)$

为书写简单起见,引入矢量D_R表示用e_R从左边点乘张量$\ddot{\overleftrightarrow{D}}$之积

$$D_R=e_R\cdot\ddot{\overleftrightarrow{D}}. \tag{27}$$

同时注意到$\ddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)$,则

$$A_{e4}=\frac{\mu_0}{24\pi cR}e_R\cdot\dddot{\overleftrightarrow{D}}=\frac{\mu_0}{24\pi cR}\frac{\mathrm{i}}{\omega}\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right). \tag{28}$$

2. 磁感应强度$B_{e4}(x,t)$和电场强度$E^{e4}(x,t)$)

$$B_{e4}(x,t)=\nabla\times A_{e4}(x,t)=\mathrm{i}\frac{\omega}{c}e_R\times A_{e4}(x,t)=\frac{\mu_0}{24\pi c^2R}\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}E_{e4}(x,t)&=cB_{e4}(x,t)\times e_R=\frac{\mu_0}{24\pi cR}\left[\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R\right]\times e_R\\&=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0c^3R}\left[\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_R\right]\times e_R.\end{aligned} \tag{30}$$

3. 平均能流密度$\overline{S}_{e4}$

利用$\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)=(-\mathrm{i}\omega)^3D_R\left(t-\frac{R}{c}\right)$可得

$$\overline{S}_{e4}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E^*_{e4}(x,t)\times H_{e4}(x,t)]=\frac{c}{2\mu_0}|B_{e4}(x,t)|^2e_R$$

---

① 后者的计算应利用附录1§ A1.5 的(41)式. 设$a=-\mathrm{i}e_\theta+\cos\theta e_\phi$,将$a_\theta=-\mathrm{i}$及$a_\phi=\cos\phi$代入$\nabla\times a$即得.

$$= \frac{\omega^6}{1152\pi^2\varepsilon_0 c^5 R^2}\left|D_R \times e_R\right|^2 e_R . \tag{31}$$

4. 辐射总功率P_{e4}和辐射功率角分布$\frac{dP_{e4}}{d\Omega}$

$$P_{e4} = \oint \overline{S}_{e4}\cdot d\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{360\pi c^5}\sum_{ij}\left|D_{ij}\right|^2, \tag{32}$$

$$\frac{dP_{e4}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{288c^5}\left|D_R \times e_R\right|^2, \tag{33}$$

式中D_{ij}为电四极矩$\overleftrightarrow{D}$的分量.P_{e4}的计算比较繁杂,在此不作讨论.

【例2】 电量为q的两个点电荷分别位于水平面上长度为$2R_0$的线段的两端,该线段以恒定的角速度$\frac{\omega}{2}$绕与线段垂直且通过线段中点的z轴旋转.求:

(1) 体系的电偶极矩p、磁偶极矩m和电四极矩$\overleftrightarrow{D}$;

(2) 该体系的辐射是什么类型,频率为多少?

(3) 在$R \gg \lambda$,且$\theta = 0$、$\pi/2$的方向上观察辐射,其偏振状态如何?

解 两点电荷的位置R_1及R_2分别为

$$R_1 = -R_2 = R_0\cos\frac{\omega t}{2}e_x + R_0\sin\frac{\omega t}{2}e_y .$$

(1) 电多极矩的计算

$$p = qR_1 + qR_2 = 0; \tag{34}$$

$$m = I_f a = \frac{2q}{T}\pi R_0^2 e_z = q\omega R_0^2 e_z; \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{D} &= 3q(R_1R_1 + R_2R_2) = 6qR_1R_1\\ &= 6qR_0^2\left[\cos^2\frac{\omega t}{2}e_xe_x + \cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2}(e_xe_y + e_ye_x) + \sin^2\frac{\omega t}{2}e_ye_y\right]\\ &= 3qR_0^2\left[(1+\cos\omega t)e_xe_x + \sin\omega t(e_xe_y + e_ye_x) + (1-\cos\omega t)e_ye_y\right].\end{aligned} \tag{36}$$

(2) 辐射类型为电四极辐射.因为$p = 0$,m为常矢,不存在电偶极辐射和磁偶极辐射.

(3) 在远离体系的$x(R,\theta,\phi)$处,其电磁场为

$$B_{e4}(x,t) = \frac{\mu_0}{24\pi c^2 R}\dddot{D}_R\left(t - \frac{R}{c}\right)\times e_R, \tag{37}$$

$$E_{e4}(x,t) = cB_{e4}\times e_R . \tag{38}$$

①当$\theta = 0$,$e_R = e_z$,$D_R = e_R\cdot\overleftrightarrow{D} = 0$,故$B_{e4}(x,t) = 0$,在$\theta = 0$方向没有辐射.

②当$\theta = \frac{\pi}{2}$,$e_R = e_\rho = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y$,故

$$\begin{aligned}D_R &= e_R\cdot\overleftrightarrow{D}\\ &= 3qR_0^2\left[(1+\cos\omega t)\cos\phi e_x + \sin\omega t\cos\phi e_y + \sin\omega t\sin\phi e_x + (1-\cos\omega t)\sin\phi e_y\right]\\ &= 3qR_0^2\left[e_R + \cos(\omega t-\phi)e_x + \sin(\omega t-\phi)e_y\right].\end{aligned} \tag{39}$$

由此得(注意在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 方向 $e_R=e_\rho$)

$$\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)=3qR_0^2\omega^3[\sin(\omega t-\phi)e_x-\cos(\omega t-\phi)e_y], \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\dddot{D}_R\left(t-\frac{R}{c}\right)\times e_\rho&=3qR_0^2\omega^3[\sin(\omega t-\phi)\sin\phi e_z+\cos(\omega t-\phi)\cos\phi e_z]\\&=3qR_0^2\omega^3\cos(\omega t-2\phi)e_z.\end{aligned} \tag{41}$$

将上两式分别代入(37)式和(38)式,得

$$B_{e4}(x,t)=\frac{\mu_0 qR_0^2\omega^3}{8\pi c^2R}\cos(\omega t-2\phi)e_z, \tag{42}$$

即磁场在 $\theta=\pi/2$ 方向观察是沿 e_z 方向的线偏振波;而

$$\begin{aligned}E_{e4}(x,t)&=cB_{e4}(x,t)\times e_\rho\\&=\frac{\mu_0 qR_0^2\omega^3}{8\pi cR}\cos(\omega t-2\phi)e_z\times(\cos\phi e_x+\sin\phi e_y)\\&=E_0(-\sin\phi e_x+\cos\phi e_y)\cos(\omega t-2\phi),\end{aligned} \tag{43}$$

式中 $E_0=\frac{\mu_0 qR_0^2\omega^3}{8\pi cR}$,即电场在 $\theta=\pi/2$ 方向观察,其振幅端点轨迹满足圆方程

$$E_{0x}^2+E_{0y}^2=E_0^2,$$

即电场为圆偏振波.

习　题　11.4

1. 两个质量和电荷均相同的粒子相向而行发生碰撞,问电偶极辐射与磁偶极辐射能否发生?

2. 一个半径为 R_0 的飞轮以角速度 ω 旋转,飞轮边缘均匀分布着总电量为 Q_f 的电荷,求辐射场.

3. 半径为 R_0 的圆环通有电流 $I_f=Ie^{-i\omega t}$,且 $R_0\ll\lambda$,求远处的辐射场和辐射总功率.

4. 两个电量均为 q 的点电荷分别位于 $x_1=(0,0,z_0\sin\omega t)$ 和 $x_2=(0,0,-z_0\sin\omega t)$,且 $z_0\ll\lambda$. 求远处的辐射场及辐射总功率,并与磁偶极辐射的总功率作比较.

5. 两个电量均为 $q=q_0e^{-i\omega t}$ 的点电荷分别位于 $x_1=(0,0,z_0)$ 和 $x_1=(0,0,-z_0)$,且 $z_0\ll\lambda$. 求远处的辐射场及辐射总功率.

6. 试证明(20)式.

§ 11.5　半波天线与天线阵

前面两节讨论了小区域内高频电流的辐射,发现当辐射体系的线度 $l\ll\lambda$ 时(如短天线的辐射),其辐射功率 $P_{e2}\propto\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$,辐射功率非常小. 为了提高辐射能力,就至少要将天线长度增加到波长的数量级,最常使用的是半波天线 $\left(l=\frac{\lambda}{2}\right)$. 为了提

高辐射的方向性,又常将多个半波天线排列成天线阵.

怎样根据天线的结构求出它辐射的电磁场呢？这个问题牵涉到天线上电流激发的电磁场与天线上电流的相互作用.严格的处理是利用天线表面的边值关系求解电磁势方程组的边值问题.但是,这种理论分析方法比较复杂,实际上大多采用近似方法,即根据天线的形状给出天线上近似的电流分布,再由此求得电磁场.

本节先介绍半波天线结构,据此给出天线上的电流分布,进而计算它激发的推迟势、辐射场、平均能流密度、辐射总功率、辐射角分布、辐射电阻和辐射的方向性.随后,介绍天线阵的结构、天线阵辐射的电磁场、平均能流密度及辐射的角分布.

一、半波天线

中心馈电的半波天线如图11.7所示,中间断开的天线总长为$\frac{\lambda}{2}$.天线上的电流近似为驻波的形式,两端为波节.

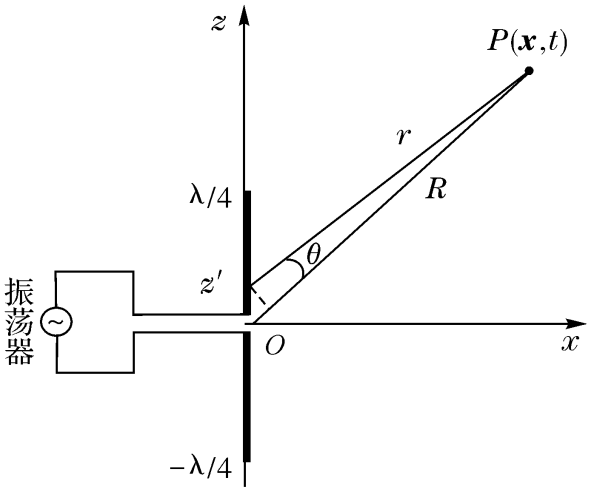


图 11.7

天线上的电流分布为

$$I_f(z',t') = I_0\cos kz'e^{-i\omega t'},\quad |z|\leqslant\frac{\lambda}{4}. \tag{1}$$

1. 推迟势$A(x,t)$

由于半波天线的长度$l=\frac{\lambda}{2}$不远小于波长,不符合多极展开的条件(电荷电流体系的线度$l\ll\lambda$).因此,应采用§ 11.1的(39)式进行计算.

$$A(x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_f\left(x',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\frac{I_f\left(z',t-\frac{r}{c}\right)}{r}e_z dz'$$

$$=\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}e_z\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\frac{\cos kz'e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}dz'. \tag{2}$$

对于远场,r与R近似平行,可采用近似(见图11.7)

$$r = R - z'\cos\theta. \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式的指数函数,分母则可用R代替r,这是因为辐射场只考虑与R成反比的项[①],由此得

---

① 实际上,利用$\frac{1}{1-\varepsilon}\approx 1+\varepsilon$(式中$\varepsilon$为小量),可得

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R-z'\cos\theta}=\frac{1}{R\left(1-\frac{z'}{R}\cos\theta\right)}=\frac{1}{R}\left(1+\frac{z'}{R}\cos\theta\right).$$

分母用R代替r,相当于略去与R^2成反比的第二项.

$$A(x,t)=\frac{\mu_0 I_0 e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi R}e_z\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos kz'e^{-ikz'\cos\theta}dz'. \tag{4}$$

计算积分,利用本节习题第1题的结果,便有

$$A(x,t)=\frac{\mu_0 I_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi kR\sin^2\theta}e^{i(kR-\omega t)}e_z. \tag{5}$$

2. 辐射场

利用 $e_R\times e_z=-\sin\theta e_\phi$ 及 $e_\phi\times e_R=e_\theta$,得

$$B(x,t)=\nabla\times A=ike_R\times A=-\frac{i\mu_0 I_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi R\sin\theta}e^{i(kR-\omega t)}e_\phi. \tag{6}$$

$$E(x,t)=cB\times e_R=-\frac{i\mu_0 cI_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi R\sin\theta}e^{i(kR-\omega t)}e_\theta. \tag{7}$$

3. 平均能流密度

$$\bar{S}=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(E^*\times B)=\frac{\mu_0 cI_0^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{8\pi^2R^2\sin^2\theta}e_R=\frac{I_0^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{8\pi^2\varepsilon_0 cR^2\sin^2\theta}e_R. \tag{8}$$

4. 辐射总功率与辐射角分布

辐射角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\bar{S}\cdot e_R R^2=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}. \tag{9}$$

总功率为

$$P=\oint\bar{S}\cdot d\sigma=\frac{I_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0 c}\int_0^\pi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{R^2\sin^2\theta}2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{I_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_0^\pi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta\approx\frac{1.2188I_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\approx 36.56I_0^2, \tag{10}$$

上式已利用本节习题第2题的计算结果.

5. 辐射电阻

由辐射电阻的定义式[见§ 11.3 的(22)式]可得

$$R_r=\frac{2P}{I_0^2}=73.13\Omega. \tag{11}$$

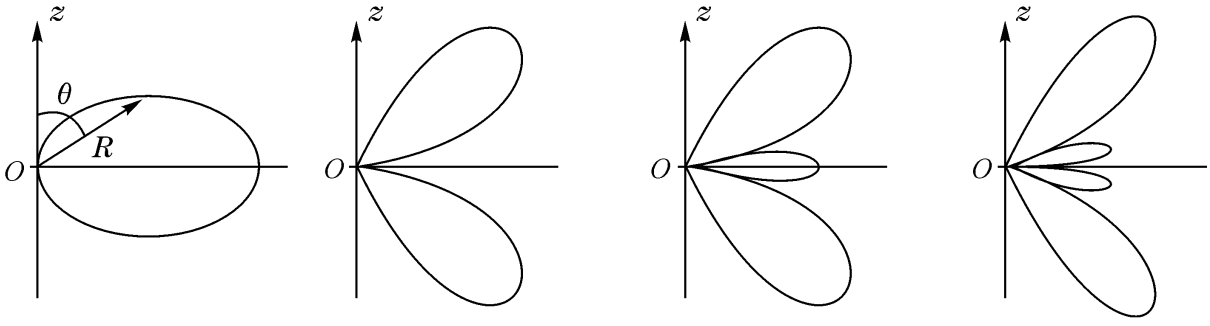
显然,它远大于短天线的辐射电阻. 如果在短天线辐射的情形下,取 $l=\frac{\lambda}{10}$,其辐射电阻为[见§ 11.3 的(23)式]

$$R_r=197\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2=1.97\Omega\ll 73.13\Omega$$

这表明,天线长度增加五倍后($\overline{P}$ 与 l 的关系不同),其辐射电阻与辐射总功率就增加数十倍.

6. 辐射的方向性

半波天线的辐射功率与方位角 ϕ 无关,即 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ 的函数曲面以 z 轴为对称轴.但对极角 θ 有一定的方向性,并且 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ 的主极大值随 $\frac{l}{\lambda}$ 的增大而倾向天线方向,如图11.8所示.



(a) $l=\lambda/2$　(b) $l=\lambda$　(c) $l=3\lambda/2$　(d) $l=2\lambda$

图 11.8

为了获得方向性更好的辐射,人们常使用天线阵.

二、天线阵

由 N 个基元天线(如半波天线)按一定规律排列起来所构成的辐射体系称为天线阵.通过各个基元天线辐射场的干涉效应,可以增强辐射的方向性.

天线阵最常见的方式有线性排列(纵向排列)和横向排列两种.常用的基元天线是半波天线,设每个半波天线均沿 z 轴方向.线性排列是将半波天线一个接一个沿 z 轴等距离排开.两相邻半波天线中点距离 L 略大于基元天线的长度 l,如图 11.9 所示(图中半波天线中间的断口没有画出).横向排列是将半波天线沿 x 轴等距离地平行排开.

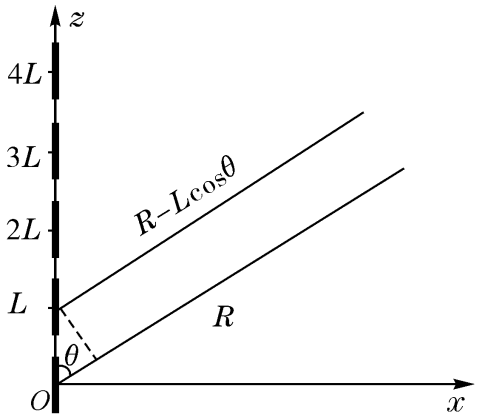


图 11.9

现在以线性排列为例,计算天线阵的辐射场、辐射总功率和角分布.

1. 辐射场

对于远区($R\gg\lambda$ 和 $R\gg NL$),两相邻半波天线中点到远区某一场点的路程差为 $\Delta=L\cos\theta$,相应的相位差 $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta=kL\cos\theta$.

总辐射场是 N 个半波天线辐射场的叠加.设中心位于坐标原点的半波天线在远区某场点激发的电场为[见(7)式]

$$E_0(x,t) = -\frac{\mathrm{i}\mu_0 cI_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi R\sin\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}e_\theta. \tag{12}$$

N 个半波天线组成的天线阵于该点激发的电场为

$$E(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkL\cos\theta}. \tag{13}$$

由于公比为 $q=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL\cos\theta}$ 的等比级数之和为 $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$，因此天线阵激发的电场为

$$E(x,t) = E_0\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}NkL\cos\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL\cos\theta}} = E_0\frac{\sin\left(\frac{1}{2}NkL\cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kL\cos\theta\right)}. \tag{14}$$

上式已利用本节习题第 3 题的计算结果.

相应的磁场为

$$B(x,t) = \frac{1}{c}e_R\times E. \tag{15}$$

2. 平均能流密度

当算符作用于函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}$ 时，仍将算符替换关系 $\nabla\to\mathrm{i}k=\mathrm{i}\frac{\omega}{c}e_R$ 及 $\frac{\partial}{\partial t}\to-\mathrm{i}\omega$ 代入无源麦克斯韦方程 $\nabla\times E=\frac{\partial B}{\partial t}$ 可得

$$H = \frac{1}{\mu_0 c}e_R\times E. \tag{16}$$

利用上式计算平均能流密度，可得

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[E^*\times H] = \frac{1}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}[E^*\times(e_R\times E)]\\ &= \frac{1}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}[|E|^2e_R-(E^*\cdot e_R)E] = \frac{|E|^2}{2\mu_0 c}e_R,\end{aligned} \tag{17}$$

式中已利用 $E^*\cdot e_R = E^*e_\theta\cdot e_R = 0$.

3. 辐射的角分布

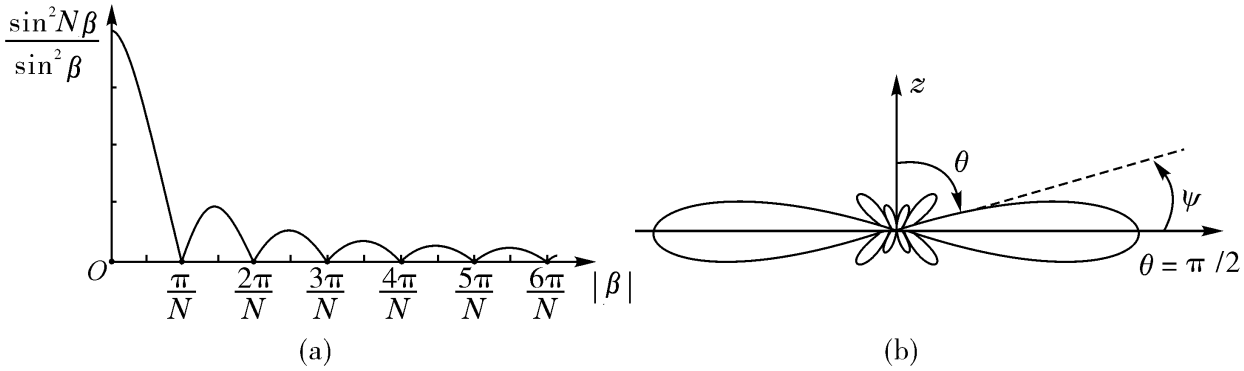
仿照§ 11.3 中(12)式的推导方法可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \bar{S}\cdot e_R R^2 = \frac{R^2}{2\mu_0 c}|E|^2. \tag{18}$$

将(14)式及(12)式代入上式，即得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2|E_0|^2}{2\mu_0 c}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}NkL\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kL\cos\theta\right)} = \frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}NkL\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kL\cos\theta\right)}. \tag{19}$$

式中$\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$是反映半波天线辐射功率的角分布因子,而$\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{2}N\ kL\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\dfrac{1}{2}kL\cos\theta\right)}$是反映$N$ 个半波天线辐射场之间干涉效应的角分布阵因子. 若令$\beta=\dfrac{1}{2}kL\cos\theta$,则角分布阵因子可以简写为$\dfrac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}$,它与 $|\beta|$的函数关系如图 11.10(a)所示.



(a)　　(b)

图 11.10

不难发现,其极大值位于

$$\beta=\frac{1}{2}kL\cos\theta=0,\qquad \text{即 } \theta=\frac{\pi}{2} \tag{20}$$

方向.

第一个极小值位于

$$\beta=\frac{1}{2}kL\cos\theta=\frac{\pi}{N} \tag{21}$$

处,若令$\psi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$[见图 11.10(b)],由上式可得

$$\sin\psi=\cos\theta=\frac{2\pi}{kLN}=\frac{\lambda}{NL}. \tag{22}$$

这表明,天线阵中半波天线的数目N 越大,主极大的范围2ψ越狭窄,方向性越好.

习　题　11.5

1. 试证明

$$\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos kz'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z'=\frac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}.$$

2. 试证明

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta\approx 1.2188.$$

3. 试证明

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}NkL\cos\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL\cos\theta}}\right|=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}NkL\cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kL\cos\theta\right)}.$$

4. 从中央馈送的细直天线,其长度 $l=\lambda$. 若天线两段的电流是反相的,即

$$I_{\mathrm{f}}(z',t')=I_0\sin kz'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'},\qquad |z'|\leqslant\frac{\lambda}{2}.$$

求天线辐射功率角分布.

第十二章　运动带电粒子辐射的电磁场

本章研究运动带电粒子辐射的电磁场. 首先由推迟势出发导出运动带电粒子激发的李纳-维谢尔势,进而求得辐射场和辐射功率的普遍公式. 在此基础上,分别讨论低速运动带电粒子的辐射(以质子俘获 μ^- 子为例)和高速带电粒子的辐射(以韧致辐射和同步辐射为例),给出它们的辐射功率和辐射角分布. 随后,讨论在介质中高速运动带电粒子的切连科夫辐射的机理,并运用频谱分析法讨论切连科夫辐射的特征及其在测量技术上的应用. 最后,讨论带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用——电子的电磁质量和辐射阻尼力,并运用辐射阻尼力计算谱线的自然宽度.

§ 12.1　运动带电粒子激发的电磁势和电磁场

本节首先从推迟势出发,利用电磁场变换求得运动带电粒子激发的电磁势,即李纳-维谢尔势. 随后由电磁势的定义式出发,求得运动带电粒子激发的电磁场,证明电磁场包括自有场($E \propto R^{-2}$)及辐射场($E \propto R$)这两个部分,证明在真空中只有作加速运动的带电粒子才能辐射能量.

一、运动带电粒子激发的势(李纳-维谢尔势)

设带电粒子 e 作任意运动,粒子的运动状态[位置 $x(t)$和速度$\boldsymbol{v}(t)$]已知,求它激发的电磁势.

运动电荷激发的场在真空中是以光速 c 传播的,因此,t 时刻场点 x 处的电磁势是粒子在 $t' = t - \frac{r}{c}$ 时位于 $x_e(t')$处激发的. 通常把 $t' = t - \frac{r}{c}$ 称为“辐射时刻”,把 $x_e(t')$称为“辐射位置”[①],把 t 时刻粒子所在位置称为“现在位置”,如图 12.1 所示.

由辐射位置指向场点的矢径为

$$r = x - x_e(t'). \tag{1}$$

---

① 当然,辐射时刻 t'和辐射位置$x_e(t')$是相对电磁势$A(x,t)$和$\varphi(x,t)$的时空坐标而言的. 对于不同时刻 t 和不同位置 x 的电磁势,相应的辐射时刻 $t' = t - \frac{|x - x_e(t')|}{c}$ 和辐射位置 $x_e(t')$也就不同了.

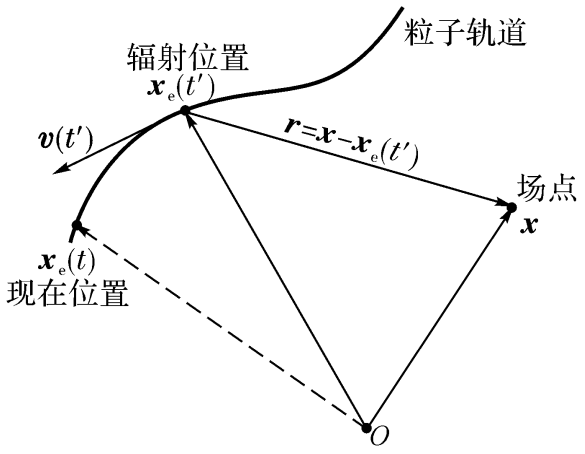


图 12.1

推迟条件为

$$r = |x - x_e(t')| = c(t - t'). \tag{2}$$

1. 参考系的选择

在§ 9.2 曾计算过作匀速直线运动的带电粒子的电磁场. 方法是先求与粒子相对静止的参考系的电磁场,随后利用电磁场变换求得在实验室参考系观察到的电磁场.

现在粒子可以作变速运动,就要在不同时刻分别引入与带电粒子瞬时静止的惯性系$\widetilde{\mathrm{K}}$. 在每一瞬时,粒子对该瞬时引入的$\widetilde{\mathrm{K}}$ 系的速度为零,但加速度不为零. 那么,作变速运动的带电粒子在$\widetilde{\mathrm{K}}$ 系激发的势与静电势是否相同呢?

推迟势公式给出

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_f\left(x', t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V', \tag{3}$$

$$A(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_f\left(x', t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V'. \tag{4}$$

由于带电粒子的$J_f(x',t') = \rho_f(x',t')\boldsymbol{v}(t')$及距离 r 均与粒子的加速度无关. 可见电磁势$\varphi(x,t)$和$A(x,t)$与带电粒子的加速度无关,故粒子在$\widetilde{\mathrm{K}}$ 系激发的标势就是静电势,而矢势为零(因为粒子相对$\widetilde{\mathrm{K}}$ 的速度为零).

2. 带电粒子在$\widetilde{\mathrm{K}}$ 系激发的电磁势

$$\widetilde{\varphi}(x,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\widetilde{r}}, \tag{5}$$

$$\widetilde{A}(x,t) = 0, \tag{6}$$

式中$\widetilde{r} = c(\widetilde{t} - \widetilde{t}')$.

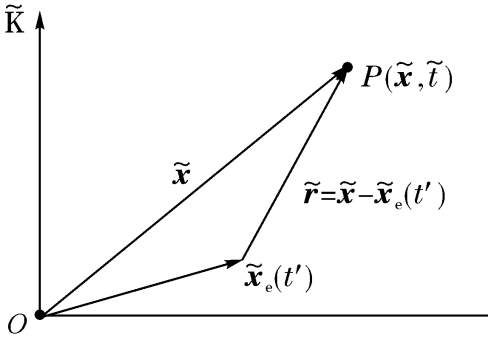


图 12.2

3. 由电磁势变换求 φ 和 A

设 t 时刻带电粒子以$\boldsymbol{v}$ 相对实验室(K 系)运动,即$\widetilde{\mathrm{K}}$ 系也以$\boldsymbol{v}$ 相对 K 系运动. 取 x 轴沿$\boldsymbol{v}$ 的方向(参考系取定后,在不同瞬时可取不同坐标系:在实验室参考系中,不同瞬时其 x 轴取向可不同——均沿$\boldsymbol{x}$ 的方向),则

$$A_x = \gamma\left(\widetilde{A}_x + \frac{v}{c^2}\widetilde{\varphi}\right) = \frac{\gamma v\widetilde{\varphi}}{c^2}, \tag{7}$$

$$A_y = \widetilde{A}_y = 0, \tag{8}$$

$$A_z = \widetilde{A}_z = 0, \tag{9}$$

$$\varphi = \gamma(\widetilde{\varphi} + v\widetilde{A}_x) = \gamma\widetilde{\varphi} \tag{10}$$

将(5)式和(6)式代入,可得

$$A = A_x e_x = \frac{\gamma v \tilde{\varphi}}{c^2} e_x = \frac{\gamma e \boldsymbol{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \tilde{r}}. \tag{11}$$

$$\varphi = \tilde{\gamma\varphi} = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}}. \tag{12}$$

4. 用实验室系的量表示 $\tilde{r}$

现在考虑两个事件:

事件1 粒子在(x_e', t')激发电磁势$A(x,t)$和$\varphi(x,t)$. $\tilde{t}'$的洛伦兹变换为

$$\tilde{t}' = \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2} x_e'\right). \tag{13}$$

事件2 t时刻在场点x测量电磁势$A(x,t)$和$\varphi(x,t)$. $\tilde{t}$的洛伦兹变换为

$$\tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right). \tag{14}$$

两式相减,即得时间差 $\tilde{t} - \tilde{t}'$的洛伦兹变换,进而得到

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= c(\tilde{t} - \tilde{t}') = c\gamma\left[(t - t') - \frac{v}{c^2}(x - x_e')\right] = \gamma\left(r - \frac{v}{c} e_x \cdot r\right) \\ &= \gamma\left(r - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot r\right) = \gamma r\left(1 - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot n\right),\end{aligned} \tag{15}$$

式中$n = \frac{r}{r}$是由辐射位置指向场点的单位矢量,n 的方向也就是t'时刻辐射的方向.

5. 将 $\tilde{r}$ 代入A 和φ得李纳-维谢尔势

$$A(x,t) = \frac{\gamma e \boldsymbol{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \tilde{r}} = \frac{e\boldsymbol{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r\left(1 - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot n\right)}, \tag{16}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\gamma e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1 - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot n\right)}, \tag{17}$$

上两式称为李纳-维谢尔势.

为书写方便,通常还引入两个量来表示李纳-维谢尔势,即

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \qquad s = r - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\cdot r) = r(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot n). \tag{18}$$

这样(16)式和(17)式可简写为

$$A(x,t) = \frac{e\boldsymbol{\beta}}{4\pi\varepsilon_0 cs}, \qquad \varphi(x,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 s}. \tag{19}$$

二、运动带电粒子激发的电磁场

在考虑推迟效应以后,A 与 φ 依赖于粒子辐射位置到场点的距离 $r = |x - x_e(t')|$,粒子在辐射时刻的速度$\boldsymbol{v}(t')$以及$s = r(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot n)$,这些量都是$t'$的函数. 因此,$A$ 与φ既直接依赖于x,又通过中间变量$t' = t - \frac{|x - x_e(t')|}{c}$依赖于$x$ 和t.

它们的函数形式可以改写为

$$A = A[x, t'(x,t)], \qquad \varphi = \varphi[x, t'(x,t)]. \tag{20}$$

将 A 和 φ 代入

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad B = \nabla \times A, \tag{21}$$

即可求得运动带电粒子激发的电磁场.

当然,在计算过程中,要应用到

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \nabla_j A_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\bigg|_{t'\text{不变}} + \frac{\partial A_k}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \nabla_j A_k \Big|_{t'\text{不变}} + \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i (\nabla t')_j \left(\frac{\partial A}{\partial t'} \right)_k \\ &= \nabla \times A\Big|_{t'\text{不变}} + (\nabla t') \times \frac{\partial A}{\partial t'}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\nabla\varphi = \nabla\varphi\Big|_{t'\text{不变}} + (\nabla t')\frac{\partial\varphi}{\partial t'}. \tag{23}$$

容易证明(见本节习题第 1 题)

$$\dot{r}(t') = \frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -n \cdot \boldsymbol{v}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{s}, \tag{25}$$

$$\nabla t' = -\frac{r}{cs}, \tag{26}$$

$$\dot{r}(t') = \frac{\partial r(t')}{\partial t'} = -\boldsymbol{v}, \tag{27}$$

$$\frac{\dot{s}}{c} = \frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t'} = -n \cdot \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot r + \beta^2, \tag{28}$$

$$\nabla\frac{1}{s}\Big|_{t'\text{不变}} = -\frac{1}{s^2}\nabla s\Big|_{t'\text{不变}} = -\frac{1}{s^2}(n - \boldsymbol{\beta}). \tag{29}$$

据此,可得

$$\begin{aligned} E(x,t) &= -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\varphi\Big|_{t'\text{不变}} - (\nabla t')\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial t'} \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\nabla\frac{1}{s}\Big|_{t'\text{不变}} + \frac{r}{cs}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{cs}\right)\right] \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{n - \boldsymbol{\beta}}{s^2} - \frac{r\dot{s}}{cs^3} - \frac{r\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cs^2} + \frac{r\dot{s}\boldsymbol{\beta}}{cs^3}\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

由于 $s = r(1 - n\cdot\boldsymbol{\beta})$,在上式第一项和第三项的分子乘以 $r(1 - n\cdot\boldsymbol{\beta})$,分母乘以 s,并在全式提出公因子 r/s^3 后,将 $\dot{s}/c$ 代入上式第二项和第四项,可得

$$E(x,t) = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 s^3}\left[(n - \boldsymbol{\beta})(1 - n\cdot\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{c}(r - r\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right.$$

$$-(n-\boldsymbol{\beta})\left(-n\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}-\frac{1}{c}r\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}+\beta^2\right)\Big]. \tag{31}$$

因为 $n=\frac{r}{r}$,将 $r=r\cdot n$ 代入$(r-r\cdot\boldsymbol{\beta})$,整理后得

$$E(x,t)=\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 s^3}\left[(n-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)+\frac{1}{c}(r\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(n-\boldsymbol{\beta})-\frac{1}{c}(r\cdot n-r\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]. \tag{32}$$

方括号中的后两项利用三矢量的矢积公式,可得

$$E(x,t)=\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 s^3}\left\{(n-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)+\frac{1}{c}r\times[(n-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\right\}. \tag{33}$$

同理可以求得

$$B=\frac{1}{c}n\times E. \tag{34}$$

讨论

首先,与前面由推迟势导出的公式一样,带电粒子的状态(位置与速度)取辐射时刻 t'时的值,t'与 t 遵守推迟条件[见(2)式].为书写方便起见,在公式中没有标出.

其次,运动带电粒子激发的场分为两项:

第一项只与粒子的速度有关(即与$\boldsymbol{\beta}$有关),其振幅与r^2 成反比(因为 $s\propto r$),不辐射能量,称为自有场.其电场与辐射方向 n 不垂直,即有纵向电场和横向电场两个分量.由(34)式可见,磁场仅有横向部分.

第二项与粒子的加速度有关(即与$\dot{\boldsymbol{\beta}}$有关),其振幅与r 成反比,可辐射能量,称为辐射场.其电场与磁场均与辐射方向 n 垂直,且 E、B 和 n 具有右手螺旋关系.

最后,可以由这两个公式导出作匀速运动带电粒子激发的电磁场

$$E=\frac{e(1-\beta^2)R}{4\pi\varepsilon_0 R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}},\qquad B=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times E, \tag{35}$$

式中 R 为 t 时刻粒子(取作坐标原点)到场点的距离,与§ 9.2 的(17)式完全一致.

习 题 12.1

1. 试证明(24)~ (29)式.
2. 试由(33)式和(34)式出发导出(35)式.

§ 12.2 运动带电粒子辐射的功率 韧致辐射与同步辐射

上节讨论了“运动带电粒子激发的电磁场”,本节首先在此基础上计算运动带电粒子辐射的功率.随后分别讨论低速与高速运动带电粒子的辐射.着重讨论韧致辐射($v\sim c$,$\dot{\boldsymbol{v}}\parallel\boldsymbol{v}$)和同步辐射($v\sim c$,$\dot{\boldsymbol{v}}\perp\boldsymbol{v}$)的性质,即瞬时辐射功率的角分布、总辐射功率、辐射最强的方向,以及辐射的张角等.最后还将介绍它们在科学技术中

的重要应用.

一、运动带电粒子辐射的功率

运动带电粒子激发的辐射场为

$$E = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 cs^3} r \times [(n - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}], \qquad B = \frac{1}{c} n \times E, \tag{1}$$

式中 $n = r(t')/r(t')$ 和 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}(t')/c$ 均按辐射时刻 t' 取值.

运动带电粒子辐射的能流密度为

$$S(x,t) = E \times H = \frac{1}{\mu_0 c} E \times (n \times E) = \varepsilon_0 c E^2 n$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|n \times [(n - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - n \cdot \boldsymbol{\beta})^6 r^2} n. \tag{2}$$

这是带电粒子在 t' 时刻激发的场在 t 时刻经过场点 x 的辐射能流密度.

在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内辐射到面元 $\mathrm{d}\sigma = n\mathrm{d}\sigma$ 的电磁能量为

$$\mathrm{d}W = S \cdot \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t = S \cdot n \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t = S \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}t. \tag{3}$$

在 t 时刻粒子辐射到 $\mathrm{d}\sigma$ 的功率为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = S \mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

在 t' 时刻粒子辐射到 $\mathrm{d}\sigma$ 的功率为

$$p(t') = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = S(1 - n \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

在 t' 时刻辐射到 (θ, ϕ) 方向单位立体角的功率为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = S(1 - n \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = S(1 - n \cdot \boldsymbol{\beta}) r^2$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \frac{|n \times [(n - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - n \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \tag{6}$$

上式给出瞬时辐射功率的角分布,n 与 $\boldsymbol{\beta}$ 仍取辐射时刻 t' 的值.

二、低速运动带电粒子的辐射

当带电粒子的速度 $v \ll c$ 时,将 $\boldsymbol{\beta} \approx 0$ 代入(6)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} |n(t') \times [n(t') \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')]|^2. \tag{7}$$

由于低速运动带电粒子的瞬时辐射功率的角分布与速度 $\boldsymbol{v}(t')$ 无关,只与加速度 $a(t') = c\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ 有关,通常取 t' 时 $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ 的方向为 z 轴来讨论. 此时辐射方向 $n(t')$ 与 $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ 的夹角为 θ,即得瞬时辐射功率的角分布

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(t')}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \sin^2\theta = \frac{e^2 \dot{\boldsymbol{v}}^2(t')}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2\theta. \tag{8}$$

瞬时辐射功率为上式对一切方向的积分

$$P(t')=\int\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2(t')}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2(t')}{6\pi\varepsilon_0c^3}.\tag{9}$$

这个公式称为拉莫尔公式.它表明,瞬时辐射功率与粒子在辐射时刻的加速度的平方成正比.

因为运动电荷的电偶极矩为$p(t')=ex_e(t')$,因而$\ddot{p}(t')=e\ddot{x}_e(t')=e\dot{v}(t')$.(9)式还可改写为

$$P(t')=\frac{\ddot{p}^2(t')}{6\pi\varepsilon_0c^3}.\tag{10}$$

这表明,低速运动带电粒子的辐射可看做偶极辐射.与§ 11.3 偶极辐射的辐射功率

$$P=\frac{|\ddot{p}|^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}\tag{11}$$

相符合.两式中$\ddot{p}^2(t')$与$|\ddot{p}|^2$的差别以及$\frac{1}{2}$因子的差异是因为(10)式是瞬时辐射功率,而(11)式是平均辐射功率.

【例 1】　质量为$m_\mu\approx210m_e$的μ^-子被一质子俘获,使之在环绕质子的圆轨道上运动.若其初始半径$R(0)=a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\bar{h}^2}{m_ee^2}=\frac{\varepsilon_0h^2}{\pi m_ee^2}$(电子环绕质子运动的玻尔半径,且$\bar{h}=h/2\pi$),试用非相对论的经典电动力学理论计算,需经多长时间Δt才使μ^-子到达它的基态?已知μ^-处于基态时的半径R_B为

$$R_B=\frac{m_e}{m_\mu}a_0=\frac{1}{210}a_0.\tag{12}$$

解　根据经典理论及非相对论近似($v\ll c$)进行讨论.

1. μ^-子总能与轨道半径R的关系

由牛顿定律$F=m_\mu a$,加速度公式$a=\frac{v^2}{R}$以及库仑定律$F=|F|=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R^2}$得$\mu^-$子动能

$$T=\frac{1}{2}m_\mu v^2=\frac{1}{2}m_\mu aR=\frac{R}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R}.\tag{13}$$

μ^-子的总能

$$W=T+U=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R}.\tag{14}$$

2. μ^-子辐射的功率与轨道半径的关系

当$v\ll c$时,$\frac{\partial t}{\partial t'}=1-n\cdot\boldsymbol{\beta}\approx1$.由(9)式得

$$P=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{e^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}.\tag{15}$$

将(13)式的 v^2 代入加速度公式可得

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mu R^2}. \tag{16}$$

μ^- 子辐射的功率可改写为

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mu R^2}\right)^2 = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m_\mu^2 R^4}. \tag{17}$$

3. 由能量守恒定律出发,计算 μ^- 子由初始半径 $R(0)$ 减少到基态半径 R_B 所需时间 Δt

由能量守恒得,μ^- 子辐射的功率等于它单位时间内减少的能量,即

$$P = -\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\right) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{dR}{dt}. \tag{18}$$

将(17)式与(18)式联立,可得

$$\frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m_\mu^2 R^4} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{dR}{dt}, \tag{19}$$

即

$$dt = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m_\mu^2}{e^4} R^2 dR, \tag{20}$$

对 R 从 $R(0)$ 到 R_B 积分,得

$$\Delta t = \int_0^{\Delta t} dt = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m_\mu^2}{e^4}\int_{R(0)}^{R_B} R^2 dR = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m_\mu^2}{e^4}[R^3(0) - R_B^3]. \tag{21}$$

将 $R(0) = a_0$, $R_B = \frac{1}{210}a_0$ 及有关数据代入,便有

$$\Delta t = 6.9 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}. \tag{22}$$

三、高速运动带电粒子的辐射

高速运动带电粒子的辐射常出现在加速器和天体现象中,最常见的是韧致辐射和同步辐射.

1. 韧致辐射($v \sim c$, $\dot{\boldsymbol{v}} /\!/ \boldsymbol{v}$)

带电粒子在直线加速器中被加速时的辐射,以及高速电子轰击金属靶因减速而发生的辐射(X 射线)都是韧致辐射. 在宇宙空间里,等离子体中带电粒子发生碰撞时,带电粒子(主要是电子)作加速运动产生的辐射也是韧致辐射.

在高速运动的情形下,带电粒子的辐射与粒子的速度 $\boldsymbol{v}(t')$ 和加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}(t')$ 都有关,通常取 $\boldsymbol{v}(t')$ 为 z 轴方向. 考虑到韧致辐射的 $\dot{\boldsymbol{v}} /\!/ \boldsymbol{v}$,因而 $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$,代入(6)式可得韧致辐射的角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\frac{|\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\dot{v}^2\sin^2\theta}{(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}, \tag{23}$$

式中运动带电粒子的状态仍取辐射时刻 t' 的值,θ 表示辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴(即粒子运

动方向)的夹角.

总辐射功率为

$$P(t')=\int \frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega=\frac{e^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\dot{v}^2}{(1-\beta^2)^3}=\frac{\gamma^6 e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3},\tag{24}$$

式中对θ的积分可以通过变量代换(令$x=\cos\theta$),并通过多次分部积分便可积出.

上面两式表明,当粒子的速度v增大时,辐射的总功率随γ^6增长;辐射的角分布正比于$(1-\beta\cos\theta)^{-5}$,辐射最强的方向由$\beta\approx 0$时的$\pi/2$方向往粒子运动的方向倾斜,如图12.3所示.图12.3(a)是低速情形下($\beta\approx 0$)的角分布,图12.3(c)是高速情形下($\beta=0.6$)的角分布.

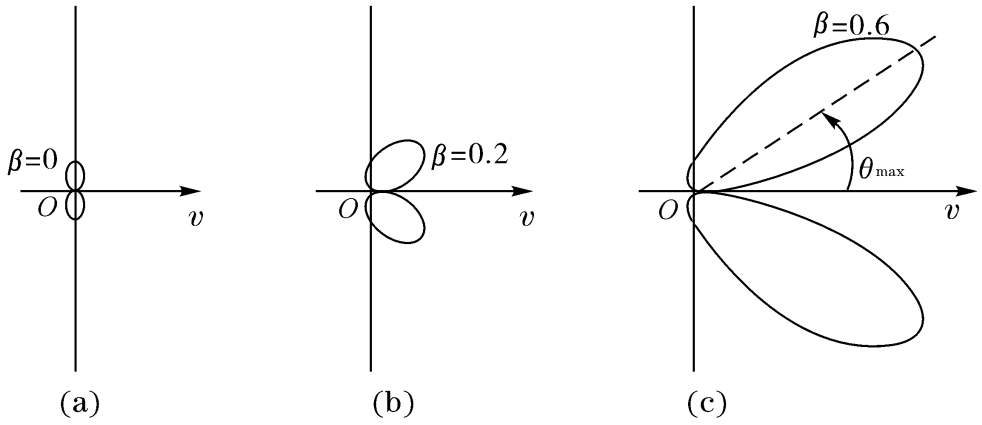


图12.3

求(23)式的极值,由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}=0$得$3\beta\cos^2\theta+2\cos\theta-5\beta=0$.其解给出辐射最强的方向为

$$\theta_{max}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}.\tag{25}$$

当$v(t')$很大时,可引入小参量$\varepsilon=1-\beta^2$进行估算.将$\beta=\sqrt{1-\varepsilon}\approx 1-\frac{1}{2}\varepsilon$代入上式,略去$\varepsilon$的二阶小量,得

$$\cos\theta_{max}=\frac{\sqrt{1+15(1-\varepsilon)}-1}{3\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}\approx\frac{1}{3}\left(4\sqrt{1-\frac{15}{16}\varepsilon}-1\right)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

$$\approx\frac{1}{3}\left(3-\frac{15}{8}\varepsilon\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\approx 1-\frac{\varepsilon}{8}.\tag{26}$$

当θ_{max}很小时,展开$\cos\theta_{max}$并仅保留二阶小量,并将上式与$\cos\theta_{max}\approx 1-\frac{1}{2}\theta_{max}^2$比较,可得

$$\theta_{max} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{27}$$

这表明,当 $v \approx c$ 时,$\theta_{max} \approx 0$.

2. 同步辐射($v \sim c$, $\dot{\boldsymbol{v}} \perp \boldsymbol{v}$)

高速电子在同步加速器中作匀速圆周运动,因为有向心加速度而发生的辐射称为同步辐射. 在宇宙空间中,受天体磁场导向的高速电子也会发生同步辐射,它是蟹状星云的背景光的主要成因. 由于磁场在其中所起的作用,同步辐射又称磁致辐射.

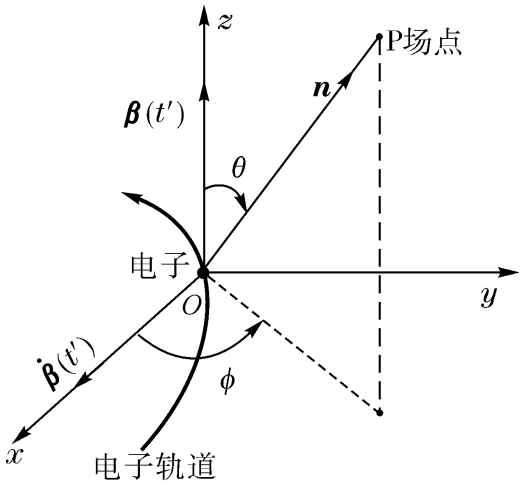


图 12.4

在实验室参考系中取 t' 时电子所在位置为坐标原点,取该时刻电子的运动方向为 z 轴方向,电子的轨道平面为 xoz 平面,如图 12.4 所示①. 利用

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0, \tag{28}$$

$$n\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta, \tag{29}$$

$$n\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = |\dot{\boldsymbol{\beta}}|\sin\theta\cos\phi, \tag{30}$$

以及三矢量的矢积公式,(6)式的分子

$$\begin{aligned}|n\times[(n-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2 &= |(n\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(n-\boldsymbol{\beta})-(1-n\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2\\ &= |[|\dot{\boldsymbol{\beta}}|\sin\theta\cos\phi(n-\boldsymbol{\beta})-(1-\beta\cos\theta)\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2\\ &= \dot{\boldsymbol{\beta}}^2[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi],\end{aligned} \tag{31}$$

代入(6)式,即得同步辐射的角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}. \tag{32}$$

同步辐射的 $\frac{dP(t')}{d\Omega}$ 依赖于 ϕ,不是轴对称的. 对一切方向积分,得总辐射功率

$$\begin{aligned}P(t') &= \int\frac{dP(t')}{d\Omega}d\Omega = \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}\sin\theta d\theta\\ &= \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3(1-\beta^2)^2} = \frac{\gamma^4 e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.\end{aligned} \tag{33}$$

现在讨论在电子轨道平面(xoz 平面)的辐射角分布. 将 $\phi = 0$ 或 π 代入(32)式可得

---

① 实验室参考系不随 t' 而变,但在实验室参考系中的坐标系则随 t' 而变. 据此导出的 $\frac{dP(t')}{d\Omega}$ 公式,对任一时刻均适用.

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{(\cos\theta-\beta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}. \tag{34}$$

在 $\theta=0$ 的方向上,辐射最强:

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{(1-\beta)^3}. \tag{35}$$

在 $\theta=\pm\cos^{-1}\beta$ 的方向上,辐射为零:

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=0. \tag{36}$$

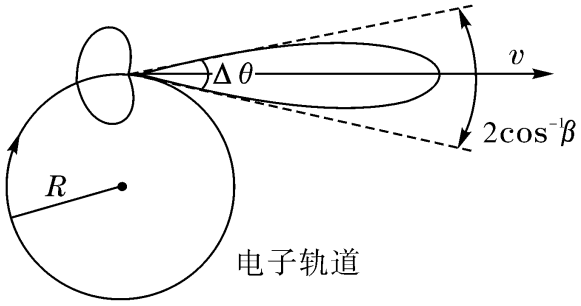


图 12.5

同步辐射在电子轨道平面的角分布如图 12.5 所示. 图中虚线所示的方向即为 $\theta=\pm\cos^{-1}\beta$ 的方向.

现在进一步计算辐射的张角 $\Delta\theta$.

当电子作高速运动时,$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$很大,$\frac{1}{\gamma}$是小量. 利用$\sqrt{1-\varepsilon}\approx 1-\frac{\varepsilon}{2}$($\varepsilon$为小量),可得

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\approx 1-\frac{1}{2\gamma^2}, \tag{37}$$

与 $\beta=\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$比较可得

$$\Delta\theta=2\theta\approx\frac{2}{\gamma}=\frac{2m_0}{m}=\frac{2m_0c^2}{W}. \tag{38}$$

这表明,在电子的轨道平面内,辐射主要集中在电子运动的方向上,且其张角 $\Delta\theta$ 与电子总能成反比. 电子的能量 W 越高,其辐射越强[$P(t')\propto\gamma^4$,见(33)式],张角 $\Delta\theta$ 也越小. 当电子的能量达到 2.5Gev 时,张角只有 2×10^{-4} 弧度. 可见同步辐射是准直性极好的光源. 又由于电子作高速圆周运动,辐射的方向以很高的速度周期性地变化,静止的接受器接收到的是脉冲的信号.

自从1947年人们在70Mev同步加速器首次偶然地观察到同步辐射以后,半个多世纪以来,同步辐射由于具有从远红外到 X 光范围内的连续光谱,高强度、高准直、高极化、脉冲短以及特性可精确控制等优良性能,已经成为许多前沿科学技术研究中的重要脉冲光源. 目前全球供实验用的同步辐射加速器已超过70座,它们在物理学、化学、生物学、医学(尤其是艾滋病研究)、材料科学以及超大规模集成电路的光刻等方面发挥着重大作用.

习 题 12.2

1. 设电子受恒定电场 E 直线加速,求运动电子辐射的功率.

2. 根据经典模型,并假设电子绕氢核作圆周运动,试计算电子由于辐射损失能量而从半径为 a_0(玻尔半径)的轨道减小到零所需要的时间 t. 已知电子的运动速度 $v\ll c$.

3. 总能为$W = 2.5\times 10^9\,\mathrm{eV}$ 的相对论性电子($v\sim c$)在垂直于均匀磁场的平面内运动,已知该电子沿轨道运行一周辐射的能量 ΔW 远小于它的总能,则其轨道可看做是半径$R = 30\mathrm{m}$ 的圆周. 试求磁感应强度B 及比值 $\Delta W/W$.

*§ 12.3　切连科夫辐射及其频谱分析

前面讨论了真空中作加速运动的带电粒子所产生的辐射,并且证明了当粒子加速度$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$时,则它只能激发自有场,不能激发辐射场. 1934 年,苏联物理学家切连科夫发现,在介质中作匀速直线运动的带电粒子,当它的运动速度超过光在该介质中的传播速度时,也能产生电磁辐射,称为切连科夫辐射. 1937 年,苏联物理学家夫兰克和塔姆对此给出理论解释. 为此,这三位科学家获得 1958 年诺贝尔物理学奖.

本节首先给出切连科夫辐射的定性解释,由此得到切连科夫辐射的方向 . 其次,运用频谱分析法给出定量计算 . 鉴于不同频率的电磁波在介质中的相速不同,为此要计算电子激发的推迟势的傅里叶分量A_ω,进而求得辐射场的傅里叶分量E_ω和B_ω. 在此基础上求得辐射场的电磁能流密度、能量角分布以及带电粒子通过单位路程单位频率间隔辐射的光子数. 最后,介绍切连科夫辐射的应用.

一、切连科夫辐射及其理论解释

1934 年切连科夫宣布,把放射性元素镭发出的γ射线穿透高折射率介质时将产生高速运动的电子,当这些电子通过液体时能发生切连科夫辐射. 其实这种现象早在20 世纪初已为X 射线专家观察到,因为用X 射线和γ射线照射荧光物质,会发生强烈的荧光,在一定条件下,就应伴随有切连科夫辐射. 但是,当时人们都认为这只是荧光和磷光,而没有注意到现象的本质.

切连科夫对此表示怀疑,因为辐射与液体的成分基本无关,这与荧光的特性不符. 他随后多次用蒸馏水做实验,彻底排除了杂质引起荧光的可能性. 之后,他还将镭辐射的γ射线挡住,只让γ射线在液体中产生的高速电子穿过液体,结果辐射依然 存在. 这就证明了,切连科夫辐射不是由 γ射线引起的荧光或磷光,而是由这些高速电子引起的.

1937 年,苏联科学家夫兰克和塔姆对切连科夫效应提出了理论解释,他们认为,切连科夫辐射本质上是运动带电粒子与介质内部束缚电荷和极化电流所产生的一种集体效应.

当带电粒子通过介质时,介质内将出现束缚电荷和极化电流,在带电粒子经过的每一点都依次激发相速度为$v_{\mathrm{P}} = \dfrac{c}{n}$的球面次波向外辐射. 若带电粒子的速度$v < v_{\mathrm{P}}$,这些球面次波就不可能相遇,因此就不可能发生相长干涉而加强,它们将成为

一个个孤立的球面波而衰减掉,不能形成辐射,如图12.6(a)所示.若带电粒子的速度 $v > v_P$,则带电粒子沿途经过各点发出的次波将由于干涉而加强,形成一个以粒子为顶点,以粒子运动方向为轴的锥形波阵面,如图12.6(b)所示.锥形波阵面的法线方向就是切连科夫辐射的方向.

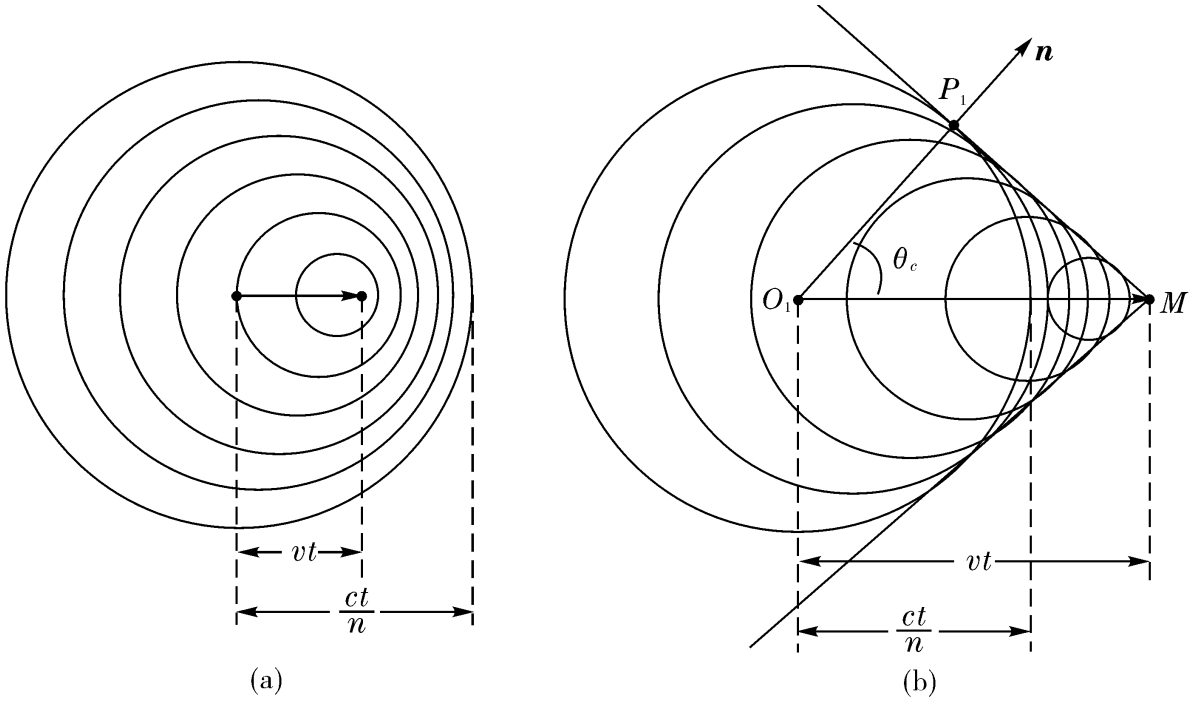


图 12.6

辐射方向与粒子运动方向的夹角 θ_c 为

$$\cos\theta_c = \frac{\overline{O_1P_1}}{\overline{O_1M}} = \frac{ct/n}{vt} = \frac{c}{nv}. \tag{1}$$

二、用频谱分析法计算傅里叶分量 A_ω

设带电粒子e以 $\boldsymbol{v} = ve_x$ 在液体中作匀速直线运动,其位矢为 $x_e(t) = \boldsymbol{v}t$,电荷密度与电流密度分别为

$$\rho_f(x,t) = e\delta^3[x - x_e(t)], \tag{2}$$

$$J_f(x,t) = e\boldsymbol{v}\delta^3[x - x_e(t)]. \tag{3}$$

对于作匀速直线运动的带电粒子,它的电流密度 $J_f(x,t)$ 可以分解为不同频率的傅里叶分量 $J_\omega(x)$,根据推迟势公式,它们将激发不同频率、不同相速的电磁波.由于非铁磁介质的磁导率 $\mu = \mu_r\mu_0 \approx \mu_0$,介质的折射率 $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon}$ 与频率有关,导致相速 $v_P = \frac{c}{n}$ 也与频率有关.因此首先必须将 $J_f(x',t')$ 作傅里叶展开

$$J_f(x',t') = \int_{-\infty}^{\infty} J_\omega(x')e^{-i\omega t'}d\omega, \tag{4}$$

式中 $J_\omega(x')$ 是 $J_f(x',t')$ 的频率为 ω 的傅里叶分量.由上式的逆变换得

$$J_\omega(x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}J_f(x',t')e^{i\omega t'}dt'. \tag{5}$$

将(4)式代入推迟势公式[将§ 11.1 的(39)式推广到介质时，$t'=t-\frac{r}{v_P}=t-\frac{nr}{c}$]，得

$$\begin{aligned}A(x,t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_f(x',t')}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{dV'}{r}\int_{-\infty}^{\infty}J_\omega(x')e^{-i\omega t'}d\omega\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{dV'}{r}\int_{-\infty}^{\infty}J_\omega(x')e^{-i\omega\left(t-\frac{nr}{c}\right)}d\omega,\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $r=|x-x'|$为源点 x'到场点 x 的距离.

将上式与 $A(x,t)$的傅里叶积分

$$A(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A_\omega(x)e^{-i\omega t}d\omega \tag{7}$$

相比较，即得运动带电粒子辐射的电磁势的 ω 分量

$$A_\omega(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J_\omega(x')e^{i\omega\frac{nr}{c}}}{r}dV'. \tag{8}$$

现在，将(5)式及(3)式代入(8)式，可得

$$\begin{aligned}A_\omega(x)&=\frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\frac{J_f(x',t')e^{i\omega\left(t'+\frac{nr}{c}\right)}}{r}dV'\\&=\frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\frac{e\boldsymbol{v}\delta^3[x'-x_e(t')]}{r}e^{i\omega\left(t'+\frac{nr}{c}\right)}dV'.\end{aligned} \tag{9}$$

积分的计算要利用 δ 函数的性质[参看附录 4 的(3)式]

$$\int_V f(x')\delta^3[x'-x_e(t')]dV'=f[x_e(t')]. \tag{10}$$

这里 $\delta^3[x-x_e(t')]$起着一个“挑选”的作用，使 $f(x')$的宗量由 x'变成 $x_e(t')$. 这样(9)式简化为

$$A_\omega(x)=\frac{\mu_0 e}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\left(t'+\frac{nr}{c}\right)}}{r}\boldsymbol{v}dt'. \tag{11}$$

式中 $r=|x-x_e(t')|$.[①]

三、切连科夫辐射场的傅里叶分量 B_ω 和 E_ω

现在计算高速运动带电粒子在远处的切连科夫辐射场.

取粒子运动方向为 z 轴，场点位矢 x 与粒子位矢 $x_e(t')$的夹角就是极角 θ，如图 12.7 所示. 且有

---

① 在(9)式及之前的$r=|x-x'|$，经δ 函数“挑选”之后，在(11)式及之后的$r=|x-x_e(t')|$. r 由区域 V 内的源点 x'到场点 x 的距离变为由辐射时刻带电粒子位置 $x_e(t')$到场点 x 的距离. 由于两者均为源点到场点的距离，习惯上没有采用不同符号表示，只给出文字说明.

$$x_e(t') = z_e(t')e_z = vt'e_z, \qquad t' = \frac{z_e}{v}. \tag{12}$$

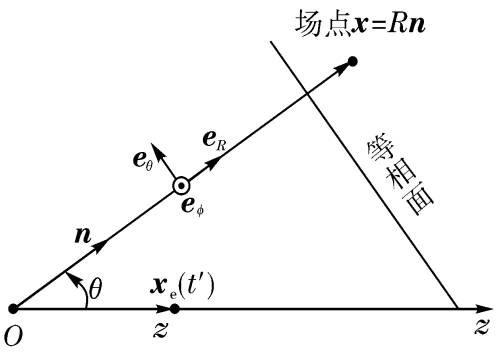


图 12.7

根据 $|x_e(t')| \ll |x|$(即 $z_e \ll R$),类似§ 11.5,对(11)式指数函数和分母中的 r 采用不同的近似:

(1)对指数函数中的 r,利用余弦定理及小量 ε 的近似式 $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1-\frac{\varepsilon}{2}$,得

$$r = |x - x_e(t')| = R\sqrt{1 - \frac{2x \cdot x_e(t')}{R^2} + \frac{|x_e(t')|^2}{R^2}}$$
$$\approx R - z_e\cos\theta; \tag{13}$$

(2)对分母中的 r,利用小量 ε 的近似式 $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$,略去与 R^2 成反比的项,得

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R - z_e\cos\theta} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{z_e}{R}\cos\theta\right) \approx \frac{1}{R}. \tag{14}$$

将(12)式、(13)式和(14)式代入(11)式,得

$$A_\omega(x) = \frac{\mu_0 e}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{i\omega\left[\frac{z_e}{v} + \frac{n}{c}(R - z_e\cos\theta)\right]} e_z dz_e. \tag{15}$$

利用介质中的波数 $k = \frac{\omega}{v_P} = \frac{n\omega}{c}$,则有

$$A_\omega(x) = e_z\frac{\mu_0 e}{8\pi^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e} dz_e. \tag{16}$$

根据 δ 函数的积分表达式[参看附录4的(8)式]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta z_e} dz_e = \delta(\zeta), \tag{17}$$

可见(16)式的积分可改用 δ 函数表示,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{1}{v} - \frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e} dz_e = 2\pi\delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{n\omega}{c}\cos\theta\right). \tag{18}$$

由此得

$$A_\omega(x) = e_z\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{n\omega}{c}\cos\theta\right). \tag{19}$$

利用电磁势的定义,以及 $n \times e_z = -\sin\theta e_\phi$(参看图12.7,注意 e_ϕ 的正向由纸面向上),得

$$B_\omega(x) = \nabla \times A_\omega(x) = ik \times A_\omega(x) = \frac{in\omega}{c} n \times A_\omega(x)$$
$$= \frac{in\omega}{c} n \times e_z\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)$$
$$= -\frac{in\omega e\mu_0}{4\pi c}\frac{e^{ikR}}{R}\sin\theta\delta\left(\frac{\omega}{v} - \frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)e_\phi, \tag{20}$$

$$E_\omega = \frac{c}{n}B_\omega \times n = -\frac{\mathrm{i}\omega e\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\sin\theta\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)e_\theta. \tag{21}$$

不难看出,δ 函数的宗量为零将给出辐射场出现的方向(E_ω 在此方向为物理上的无穷大,其他方向上为零),把满足此条件的 θ 记作 θ_c,得

$$\cos\theta_c = \frac{c}{nv}, \qquad v > \frac{c}{n}, \tag{22}$$

与实验结果完全符合.

当 $v=\frac{c}{n}$ 时,此时 $\cos\theta_c = 1, \theta_c = \frac{\pi}{2}$. 由图 12.6 可见,此时等相面永远与 z 轴重合,切连科夫辐射不能发生.

四、切连科夫辐射的电磁能流密度、能量角分布与辐射光子数的计算

介质中的电磁能流密度为

$$S = E \times H = \left(\frac{c}{n}B \times n\right)\times\frac{B}{n\mu_0} = \frac{c}{\mu_0}B^2 n, \tag{23}$$

式中已利用三矢量的矢积公式及 $B = B e_\phi$ 与 n 垂直的性质(参看图 12.7).

$\mathrm{d}t$ 时间内通过面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的能量为

$$\mathrm{d}^2W = S\cdot\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t = \frac{c}{n\mu_0}B^2(x,t)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t, \tag{24}$$

两边除以 $\mathrm{d}\Omega$,并对 t 积分,即得单位立体角内的辐射能量

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \int\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{n\mu_0}B^2(x,t)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}t = \frac{cR^2}{n\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}B^2(x,t)\mathrm{d}t. \tag{25}$$

由傅里叶变换的定义式可以证明(见本节习题第 1 题)

$$\int_{-\infty}^{\infty}B^2(x,t)\mathrm{d}t = 4\pi\int_0^{\infty}|B_\omega(x)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{26}$$

代入(25)式,即有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4\pi cR^2}{n\mu_0}\int_0^{\infty}|B_\omega(x)|^2\mathrm{d}\omega. \tag{27}$$

将上式与

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2W_\omega}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega \tag{28}$$

比较,再将(20)式代入,即得单位立体角内单位频率间隔的辐射能量

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{4\pi cR^2}{n\mu_0}|B_\omega(x)|^2 = \frac{ne^2\mu_0\omega^2\sin^2\theta}{4\pi c}\left[\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\right]^2. \tag{29}$$

δ 函数是一个广义函数,是在理想化的条件下引入的. 为了结合物理实际,现在对上式 δ 函数的平方值进行估算.

首先用(18)式替代两个相乘的 δ 函数之一,得

$$\left[\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\right]^2=\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e}dz_e. \tag{30}$$

由于积分号前的δ函数的存在,被积函数的指数只能取零.

其次,(30)式表示粒子从z_e的$-\infty$到∞的运动是一种理想化的假设. 在物理实验中,带电粒子走过的路程可以表示为从$-\Delta L/2$到$\Delta L/2$. 只要$\Delta L\gg\lambda$,物理上可视为∞. 因此,(30)式可改写为

$$\left[\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\right]^2=\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\Delta L}{2}}^{\frac{\Delta L}{2}}dz_e=\frac{\Delta L}{2\pi}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right). \tag{31}$$

将(31)式代入(29)式,并除以走过的路程ΔL,即得粒子走过单位路程时的单位频率间隔的能量角分布

$$\frac{d^3W}{d\Omega d\omega dL}=\frac{ne^2\mu_0\omega^2}{8\pi^2c}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right), \tag{32}$$

这里已将(22)式代入,从而有$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{c^2}{n^2v^2}$.

粒子走过单位路程时在单位频率间隔辐射的能量为

$$\frac{d^2W}{d\omega dL}=\frac{ne^2\mu_0\omega^2}{8\pi^2c}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)\oint\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)d\Omega. \tag{33}$$

作变换$\zeta=\frac{n\omega}{c}\cos\theta$,由于变量$\zeta$的变化范围在$\pm\frac{n\omega}{c}$之间,而$\frac{\omega}{v}<\frac{\omega}{v_P}=\frac{n\omega}{c}$在区间$\left[-\frac{n\omega}{c},\frac{n\omega}{c}\right]$内[①],故

$$\begin{aligned}I&=\oint\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)d\Omega=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta\\&=\frac{2\pi c}{n\omega}\int_{-n\omega/c}^{n\omega/c}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\zeta\right)d\zeta=\frac{2\pi c}{n\omega}.\end{aligned} \tag{34}$$

将积分值代入(33)式,便有

$$\frac{d^2W}{d\omega dL}=\frac{e^2\mu_0\omega}{4\pi}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right),\qquad v>\frac{c}{n}. \tag{35}$$

频率为ω的光子能量为$\hbar\omega$,故运动电子走过单位路程时在单位频率间隔辐射的光子数为

$$\frac{d^2N}{d\omega dL}=\frac{1}{\hbar\omega}\frac{d^2W}{d\omega dL}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^2}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)=\frac{\alpha}{c}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right),\quad v>\frac{c}{n}, \tag{36}$$

式中

---

① 由δ函数的定义可知,若$a<x<b$,则

$$\int_a^b\delta(x-\zeta)d\zeta=1.$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.059845} \tag{37}$$

称为精细结构常数,是光谱学与量子理论的基本常数之一.

五、切连科夫辐射的应用

如果带电粒子以速度$v > c/n$通过介质,便会向θ_c方向发射光子,测出θ_c便能确定粒子的速度.根据这个原理便可做成切连科夫辐射计数器.这种计数器非常灵敏,分辨时间短,且能避免低速粒子的干扰.1955 年西格雷等人就是运用切连科夫计数器发现反质子的.

习　题　12.3

1. 试由傅里叶变换的定义

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\omega(x) e^{-i\omega t} d\omega, \qquad B_\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(x,t) e^{i\omega t} dt$$

出发,证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} B^2(x,t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |B_\omega(x)|^2 d\omega.$$

2.(1)在 20℃,一个大气压时,氢气的折射率$n = 1 + 1.35 \times 10^{-4}$,为了使一个电子在上述氢气介质中穿过时发生切连科夫辐射,此电子应具有的最小动能为多少?

(2)用一根长的管道充以上述气体加上光学系统制成一台切连科夫辐射探测器,探测到发射角为θ的辐射光,角度精度为$\Delta\theta = 10^{-3}$弧度.一束动量为$100\mathrm{Gev}/c$的带电粒子流通过计数器,由于粒子的动量是已知的,故实际上切连科夫角度的测量就是对粒子静质量m_0的一种度量.对于m_0接近$1\mathrm{Gev}/c^2$的粒子,相对误差$\Delta m_0/m_0$是多少?

§ 12.4　带电粒子的电磁场对粒子自身的反作用　谱线的自然宽度

在本章的开始已导出运动带电粒子激发的电磁场[见§ 12.1 的(33)、(34)式]

$$E(x,t) = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 s^3}\left\{(n-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2) + \frac{1}{c} r \times [(n-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\right\}, \tag{1}$$

$$B(x,t) = \frac{1}{c} n \times E(x,t). \tag{2}$$

并且指出与R^2成反比的第一项表示与加速度无关的自有场,与R成反比的第二项表示与加速度有关的辐射场.

本节将分别讨论自有场与辐射场对带电粒子自身的反作用:前者表现为带电粒子具有电磁质量,后者表现为对带电粒子的辐射阻尼力.最后,作为例子,以谐振子作为原子的辐射模型,应用辐射阻尼力讨论谱线的自然宽度.

一、电子的电磁质量

带电粒子的自有场由(1)式的第一项及其相应的磁场表示

$$E = \frac{er}{4\pi\varepsilon_0 s^3}(n - \beta)(1 - \beta^2), \qquad B = \frac{1}{c}n \times E. \tag{3}$$

当带电粒子静止时,自有场就是库仑场,将 $\beta = 0$ 代入便可验证. § 9.2 曾讨论过,当带电粒子作匀速直线运动时,它激发的电磁场是依附着带电粒子并随粒子的运动而移动的.

由相对论的质能关系 $W = mc^2$ 可见,带电粒子自有场的能量 W_{em} 必与它的质量 $m_{em} = W_{em}/c^2$ 相对应,并称为带电粒子的电磁质量. 实际上,在实验上测得的带电粒子的惯性质量 m 必为非电磁起源的质量 m_n 和粒子的电磁质量 m_{em} 之和,即

$$m = m_n + m_{em}. \tag{4}$$

那么,电磁质量应如何表达呢? 现在以电子为例进行讨论. 由于目前对电子的结构还不清楚,对电子的电磁质量只能作一个粗略的估算. 假设电子的电荷分布在半径为 r_e 的球面上,则电子的库仑能为

$$W_{em} = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r_e}^{\infty}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 4\pi R^2 \mathrm{d}R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}. \tag{5}$$

电子的电磁质量为

$$m_{em} = \frac{W_{em}}{c^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e c^2}. \tag{6}$$

但是,电子的半径 r_e 也不知道,所以 m_{em} 就无法计算.

如果进一步假设电子非电磁起源的质量与电子的电磁质量同数量级,则

$$m = m_n + m_{em} \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e c^2}. \tag{7}$$

由此可估算出电子的经典半径

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}, \tag{8}$$

式中的 m 是电子质量的实验值. 将 $m = 9.1095 \times 10^{-28}\,\mathrm{g}$ 代入,可得

$$r_e \approx 2.818 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}. \tag{9}$$

这是根据经典电动力学估算出来的结果,并不是电子的真实半径,电子的经典半径 r_e 通常作为原子物理中的长度单位来使用. 目前的实验表明,在直到 $10^{-18}\,\mathrm{m}$ 的范围内,电子仍然像一个点粒子. 关于电子结构的探索还有待于将来实验技术的进一步提高.

二、辐射阻尼力

电子作加速运动时将辐射出电磁场并导致电子能量的减少,可以认为这是辐射场对电子施以阻尼力的结果,因此称之为辐射阻尼力. 由于它是电子激发的辐射

场对电子自身的作用力,所以辐射阻尼力是一种自作用力.

现在,通过一个特殊例子寻找辐射阻尼力的表达式.

设电子作匀速圆周运动,并且电子运动一周回到它原来位置时,可以忽略电子速度和电子周围自有场的改变(严格说来,由于辐射损失,电子的速度与自有场均有微小改变). 这样辐射阻尼力单位时间所作的负功应等于辐射功率,即

$$\boldsymbol{F}_S(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)=-P(t)=-\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2(t)}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{10}$$

将上式对一个周期积分,得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\boldsymbol{F}_S(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t&=-\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}(t)}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\mathrm{d}t=-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_0}^{t_0+T}\dot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)\\&=-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_0+T}-\int_{t_0}^{t_0+T}\boldsymbol{v}(t)\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{v}}(t)\right]\\&=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_0}^{t_0+T}\ddot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{11}$$

这里已利用了上面的假设条件,即分部积分的第一项$\dot{\boldsymbol{v}}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_0+T}\approx 0$.

比较(11)式两端,自然猜想

$$\boldsymbol{F}_S(t)=\frac{e^2\ddot{\boldsymbol{v}}(t)}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{12}$$

我们知道,当两个积分相等,并且积分区域为任意时,两个被积函数必相等. 但是,(11)式的两积分仅在特定的积分区间$[t_0,t_0+T]$相等,可见被积函数不一定相等,即(12)式仅在一个周期平均的意义上成立.

然而,人们又希望能把$\boldsymbol{F}_S$作为瞬时力引入运动方程

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{F}_{外}+\boldsymbol{F}_S. \tag{13}$$

大量的实例表明,$\boldsymbol{F}_S$作为瞬时力使用的条件是

$$\boldsymbol{F}_S\ll\boldsymbol{F}_{外}. \tag{14}$$

如果不满足上述条件,则会导致错误的结论. 例如取$\boldsymbol{F}_{外}=0$,则将(12)式代入(13)式,便有

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{e^2\ddot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \tag{15}$$

方程的解为(另一解为$\dot{\boldsymbol{v}}=0$,就不存在辐射阻尼力了)

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(0)e^{\frac{6\pi\varepsilon_0 mc^3}{e^2}t}, \tag{16}$$

这意味着电子的加速度无限制地增大. 电子无限制地“自我加速”这一荒谬结论表明,把辐射阻尼力作为瞬时力代入运动方程是有条件的,否则将导致不正确的结果.

在研究原子的自发辐射过程和电磁波的散射现象时,由于 F_s 可以看做微扰,都可取得与实验相符合的结果.

三、谱线的自然宽度

原子自发地由高能态过渡到低能态的同时辐射电磁波,在原子物理学中称为原子的自发辐射.

从经典电动力学的角度来看,可以用辐射阻尼力解释原子的自发辐射过程,并说明为什么原子自发辐射所形成的谱线有一定的宽度.

1. 原子的谐振子模型及运动方程的解.

现在以经典—维谐振子作为原子的辐射模型.设振子在 x 轴上运动,弹性恢复力为 $-kx$,将辐射阻尼力代入振子运动方程(本节习题第 1 题验证 F_s 符合作为瞬时力的条件)

$$m\ddot{x} = -kx + F_s. \tag{17}$$

令

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \tag{18}$$

则运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_s}{m}. \tag{19}$$

当辐射阻尼力 F_s 比弹性恢复力小很多时(F_s 可以当作微扰处理),往往采用迭代法求解运动方程.

首先,略去微扰项,方程 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 的零级近似解为

$$x = x_0 e^{-i\omega_0 t}. \tag{20}$$

其次,用零级近似解表示辐射阻尼力,得

$$\frac{F_s}{m} = \frac{e^2 \ddot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 m c^3} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3}\frac{d^3}{dt^3}\left(x_0 e^{-i\omega_0 t}\right) = \frac{ie^2\omega_0^3 x}{6\pi\varepsilon_0 m c^3} = i\Gamma\omega_0 x, \tag{21}$$

式中 Γ 称为辐射阻尼系数

$$\Gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3}. \tag{22}$$

将(21)式代入(19)式,运动方程可简化为

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2 - i\Gamma\omega_0)x = -\omega^2 x, \tag{23}$$

式中

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - i\frac{\Gamma}{\omega_0}} \approx \omega_0\left(1 - i\frac{\Gamma}{2\omega_0}\right) = \omega_0 - i\frac{\Gamma}{2}. \tag{24}$$

运动方程 $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_s}{m}$ 的解为

$$x = x_0 e^{-i\omega t} = x_0 e^{-\frac{\Gamma t}{2}} e^{-i\omega_0 t}. \tag{25}$$

这表明,原子是一个振幅不断衰减的振子. 当能量衰减到初始值的$\frac{1}{e}$所经历的时间,称为振子的寿命. 因为振子的能量正比于振子的振幅的平方,故振子的寿命为

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \tag{26}$$

2. 辐射频谱的傅里叶分析

设 $t = 0$ 时,辐射开始到达观察点,则观察点的辐射场强为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \begin{cases} E_0 e^{-\frac{\Gamma t}{2}} e^{-i\omega_0 t}, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{27}$$

$E(t)$的傅里叶分量为

$$E_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} E_0 e^{-\frac{\Gamma t}{2}} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2\pi}\frac{E_0}{i(\omega-\omega_0)-\Gamma/2}. \tag{28}$$

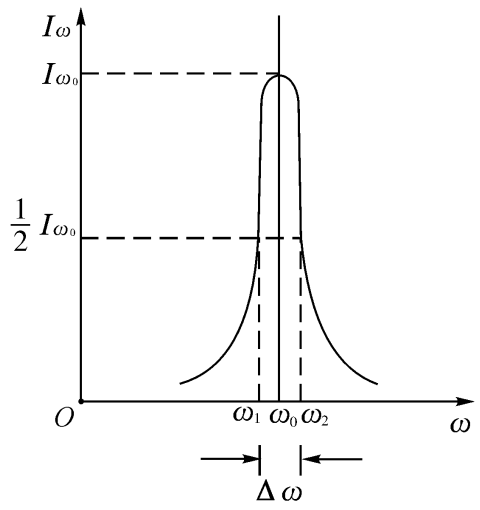


图 12.8

辐射强度[①]$I_\omega \propto |E_\omega|^2$,辐射强度的频谱为

$$I_\omega \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \tag{29}$$

上式反映了谱线强度随频率的分布,称为辐射频谱,如图 12.8 所示. 由(29)式可以证明,在 $\omega_{2,1} = \omega_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$处,辐射强度降低到峰值的一半. 通常把

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \left(\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right) - \left(\omega_0 - \frac{\Gamma}{2}\right) = \Gamma \tag{30}$$

称为谱线的宽度. 由于这是原子自发辐射所形成的谱线宽度,故称为谱线的自然宽度.

谱线宽度也可以用波长 λ 来表示,即

$$\Delta\lambda = \left|\Delta\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)\right| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Gamma = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 m c^2} \approx 1.2 \times 10^{-4}\text{Å}, \tag{31}$$

这是采用经典一维振子作原子辐射模型得到的经典谱线宽度,它是一个普适常数.

讨论　第一,实验证明,对于不同原子,原子的谱线宽度是不同的. 这说明,原子辐射机制不能完全用经典振子来解释. 但是,辐射的反作用,以及振子的寿命与线宽的关系仍具有普遍的意义.

第二,谱线具有一定宽度的原因是多方面的,原子自发辐射仅是其中的一个原因. 例如,气体原子分子高速运动产生的多普勒展宽,原子间由于碰撞引起的碰撞

① 振子在给定方向上的辐射强度 I 是指在单位时间内辐射到该方向附近单位立体角内的辐射能量,故 $I \propto |S| \propto |E|^2$.

加宽,固体光源由于晶格热振动引起的加宽,以及由于晶体缺陷(如位错,空位等晶体不均匀性)引起的加宽,都能导致谱线宽度增大.

实际上,谱线的宽度远远超过谱线的自然宽度. 例如,在氦氖激光器中,对于 $\lambda = 6328\text{Å}$ 谱线,它们的典型数据如下:

(1) 谱线的自然线宽 $\Delta\nu \approx 10^7\text{Hz}$;

(2) 谱线的碰撞线宽 $\Delta\nu \approx 2\times 10^8\text{Hz}$;

(3) 谱线的多普勒线宽 $\Delta\nu \approx 1.5\times 10^9\text{Hz}$.

在红宝石激光器中,对于 $\lambda = 6943\text{Å}$ 谱线,其谱线宽度为 $\Delta\nu = 2.4\times 10^{11}\text{Hz}$. 一般说来,固体物质的谱线宽度比气体大很多.

第三,只有采用量子理论才能解释原子基态的稳定性,以及从理论上计算气体原子谱线的谱线宽度.

实际上,如果按照经典电动力学,电子在核场中运动,有加速度就有电磁场的辐射,而电子的能量损失就必然导致电子掉到原子核内,不可能存在稳定的基态.

至于特定原子,特定谱线的谱线宽度计算,也是经典理论无法解决的. 对于固体物质的谱线,由于它的辐射机制比较复杂,目前即使运用量子理论也很难从理论上求得谱线 $I(\omega)$ 的函数形式,一般都是从实验求得它的谱线宽度.

习 题 12.4

1. 试验证,在经典一维谐振子的原子模型中,可以将 F_s 看作微扰.

2. 有一带电粒子沿 z 轴作简谐振动:$z = z_0 e^{-i\omega t}$. 设 $z_0\omega \ll c$,求

(1) 它的辐射场和平均能流密度;

(2) 它的自有场,并比较两者的不同.

3. 电量为 e 的粒子在 xoy 平面以 $\omega = \omega e_z$ 作半经为 R_0 的匀速圆周运动. 已知 $\omega R_0 \ll c$,试求辐射场的频率和平均能流密度,并讨论 $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 及 π 处电磁场的偏振.

4. 设有一各向同性谐振子(无外场时粒子受弹性恢复力 $-m\omega_0^2 r$ 的作用),处于均匀外磁场 $B = Be_z$ 中,假设粒子速度 $v \ll c$ 及辐射阻尼力可忽略,求

(1) 振子运动的通解;

(2) 沿 z 方向及水平方向上观察辐射场,问场的频率和偏振是否相同?

5. 一个质量为 m,电荷为 e,初动能力 T_0 的粒子在回旋加速器的均匀磁场中作低速圆周运动. 问

(1) 粒子动能对时间的依赖关系.

(2) 若粒子是质子,$T_0 = 100\text{Mev}$,从 $R = 10\text{m}$ 的轨道出发,求它辐射掉 10% 的能量所需的时间.

6. 初速为 v_0 的正电子从无穷远处出发与电量为 Ze 的原子核正碰,正电子先被减速至静止,接着被反向加速至速度 v,设 $v_0 \ll c$,且辐射损失很小,试求

(1) 末速 v 与初速 v_0,原子核的序数 Z 的关系;

(2) 辐射分布与偏振.

第六篇　电磁场与物质的相互作用

本篇讨论外来电磁场与电子、原子、介质的相互作用. 这个论题可供选择的题材极其丰富,但本篇仅选择其中三个很有代表性的专题.

第十三章讨论电磁波的散射、色散和吸收. 这个专题介绍洛伦兹的经典电子论处理问题的基本观点和方法.

第十四章讨论超导体电动力学. 这个专题在电动力学的框架内讨论超导体的基本电磁性质和处理超导问题的基本方法.

第十五章讨论原子的激光冷却与捕陷. 这个专题在电动力学和初等量子论的范围内讨论用激光冷却与捕陷原子的基本思想和方法,以及它在科学技术上的意义.

第十三章　电磁波的散射　色散与吸收

本章用经典力学描述电子的运动,研究电磁场与物质的相互作用. 主要介绍洛伦兹的经典电子论的若干成果:电子对电磁波的散射(§ 13.1)及介质对电磁波的色散和吸收(§ 13.2).

§ 13.1　电子对电磁波的散射

经典电子论认为,当频率为ω的电磁波投射到电子上,电子在电磁场的作用下将以相同的频率作受迫振动,并向一切方向辐射出相同频率的次波,称为电子对电磁波的散射.

如果电子的速度 $v \ll c$,则可作出如下近似:

(1) 电子运动的范围 $l \sim vT \ll cT = \lambda$(式中λ是入射电磁波的波长),因而不必考虑电子在不同位置会感受到电磁波相位的差异,即认为作用于电子的电磁场与电子的位置无关.

(2) 由真空中平面电磁波的性质 $\frac{|B|}{|E|} = \frac{1}{c}$ 可知,电磁波的磁场与电场作用于电子的力之比为

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{|e\boldsymbol{v} \times B|}{|eE|} = v\frac{|B|}{|E|} \sim \frac{v}{c} \ll 1. \tag{1}$$

因此,只需要考虑电场对电子的作用,而略去磁场对电子的作用.

本节在这两个近似条件下,将电子看做经典谐振子,采用经典力学和经典电动力学讨论自由电子对电磁波的散射(称为汤姆孙散射)和束缚电子对电磁波的散射(称为瑞利散射). 两者讨论的方法是相同的:首先求解电子的运动方程得到电子的位矢 x,由此得到电子的电偶极矩 $p = ex$;其次,由电偶极辐射的角分布 $\frac{dP}{d\Omega}$ 求得θ方向散射波的平均强度 $\overline{\frac{dP}{d\Omega}}$ 以及散射波的总功率 P;第三,求反映电子散射能力大小的"散射截面" $\sigma = \frac{P}{\overline{S}_{入}}$,式中 $\overline{S}_{入}$ 是入射波平均能流密度. 最后,将说明采用光子与电子碰撞的观点处理电子对高频电磁波散射(康普顿效应)的基本方法.

一、自由电子对电磁波的散射(汤姆孙散射)

1. 自由电子的运动方程及方程的解

设入射电磁波的电场为$E=E_0e^{-i\omega t}$,自由电子受辐射阻尼力及入射电磁波的作用,其运动方程为

$$m\ddot{x}=-m\Gamma\dot{x}+eE_0e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

式中Γ为辐射阻尼系数

$$\Gamma=\frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0mc^3}=\frac{4\pi r_e}{3\lambda}\omega. \tag{3}$$

方程(2)的稳态解为

$$x(t)=x_0e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

将(4)式代入(2)式,得

$$x(t)=x_0e^{-i\omega t}=-\frac{eE_0}{m(\omega^2+i\omega\Gamma)}e^{-i\omega t}. \tag{5}$$

若入射波的波长λ比电子的经典半径r_e大得多,由(3)式易见$\omega\gg\Gamma$,则(5)式可简化为

$$x(t)=-\frac{eE_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}, \tag{6}$$

这就是自由电子运动方程的解.

现在研究电子的受迫振动所激发的散射波.

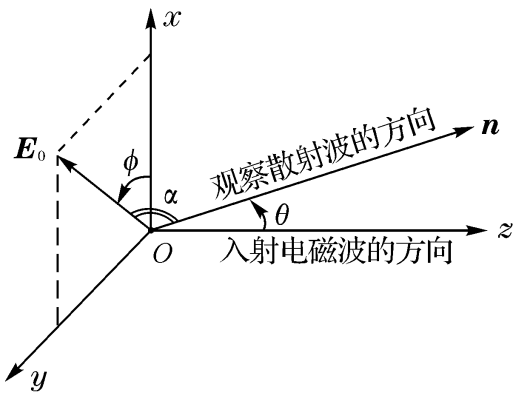


图 13.1

2. 自由电子的电偶极矩及散射波在θ方向的强度

在入射电磁波的作用下,自由电子可以看做一个振荡的电偶极子,其电偶极矩为

$$p=ex=-\frac{e^2E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}. \tag{7}$$

由电偶极辐射公式[见§ 11.3 的(12)式],可得电偶极辐射的角分布

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\sin^2\alpha=\frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0m^2c^3}\sin^2\alpha. \tag{8}$$

在§ 11.3 的图11.5 中,p沿z轴方向,p与n的夹角记作θ.在(8)式中已改将θ改写为α,因为在讨论电磁波的散射时,通常取入射电磁波沿z轴方向,电磁波是横波,E(电子电偶极矩p与E同向)就在xOy平面上,p与散射波方向n的夹角就以α来表示.这些方向的关系如图13.1 所示.利用

$$E_0\cos\alpha=E_0\cdot n=E_0(\cos\phi e_x+\sin\phi e_y)\cdot(\sin\theta e_x+\cos\theta e_z)=E_0\sin\theta\cos\phi \tag{9}$$

可得 $\cos\alpha = \sin\theta\cos\phi$,于是(8)式的 $\sin^2\alpha$ 可改写为

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi. \tag{10}$$

当入射波是非偏振波时,应把 $\sin\alpha$ 对一切 ϕ 求平均,易见

$$\overline{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - \sin^2\theta\cos^2\phi)\mathrm{d}\phi = 1 - \frac{1}{4\pi}\sin^2\theta\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2\phi)\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta). \tag{11}$$

将(8)式两边对 ϕ 求平均,即有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 m^2c^3}\overline{\sin^2\alpha} = \frac{e^4E_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0 m^2c^3}(1 + \cos^2\theta), \tag{12}$$

这就是在 θ 方向观察到的散射波的强度(即单位时间内散射到 θ 方向附近单位立体角内的辐射能量).上式表明,散射波在最强的方向($\theta = 0, \pi$)与最弱的方向($\theta = \pi/2$)仅相差一倍.但是,(12)式得到前后散射对称($\theta = 0$ 与 π 的强度相同)的结论,与实验结果不符,说明经典电动力学的局限性.

3. 散射波的总功率及汤姆孙散射截面

现在比较一下入射波的能流与散射波的能流.我们在§ 11.5 的(17)式给出,入射波的平均能流密度为

$$\overline{S}_{\text{入}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^* \times H) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}e_{\text{R}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2 e_{\text{R}}. \tag{13}$$

另一方面,一个自由电子产生的散射波的总功率为(12)式对一切方向的积分

$$P = \int \overline{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}\mathrm{d}\Omega = \frac{e^4E_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0 m^2c^3}2\pi\int_0^{\pi}(1 + \cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2c^3}. \tag{14}$$

物理学通常用散射截面来描述粒子对入射波散射能力的大小.散射截面的定义是:散射波的总功率 P 与单位时间通过单位面积的入射波能量 $\overline{S}_{\text{入}}$ 之比(它之所以称为散射截面,是因为它具有面积的量纲).

汤姆孙散射截面为

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{P}{\overline{S}_{\text{入}}} = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 m^2c^4}, \tag{15}$$

将电子的经典半径 $r_e = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$ 代入,可得

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \approx 6.65 \times 10^{-25}(\text{cm})^2. \tag{16}$$

这表明,自由电子可看做一个横截面为 $\dfrac{8}{3}\pi r_e^2$ 的完全不透明的球体,它等效于把投射到该截面上的电磁波能量按照(12)式的角分布散射到各个方向去了.这意味着,若入射波能流密度给定,散射截面 σ_{T} 越大,散射波的总功率 $P = \overline{S}_{\text{入}}\sigma_{\text{T}}$ 越大,自由电子的散射能力越强.由经典电动力学得到的(16)式与实验结果相符.

二、束缚电子对电磁波的散射(瑞利散射)

1. 束缚电子的运动方程及方程的解

设束缚电子受到球对称的恢复力$-m\omega_0^2 x$,辐射阻尼力和入射电磁波的共同作用,其运动方程为

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\Gamma\dot{x} + eE_0 e^{-i\omega t}. \tag{17}$$

方程的稳态解为

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)} e^{-i\omega t} = \frac{eE_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}} e^{-i(\omega t - \delta)}, \tag{18}$$

式中

$$\delta = \tan^{-1}\frac{\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{19}$$

2. 束缚电子的电偶极矩及散射波在θ方向的强度.

在入射电磁波的作用下,束缚电子可以看做一个振荡的偶极子,其电偶极矩为

$$p = ex = \frac{e^2 E_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}} e^{-i(\omega t - \delta)}. \tag{20}$$

散射波的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\dot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\alpha = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}\sin^2\alpha. \tag{21}$$

当入射波是非偏振波时,对φ求平均后得到在θ方向观察到的散射波的强度

$$\overline{\frac{dP}{d\Omega}} = \frac{e^4 E_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}(1 + \cos^2\theta). \tag{22}$$

3. 散射波的总功率及瑞利散射截面

散射波的总功率为

$$P = \int \overline{\frac{dP}{d\Omega}} d\Omega = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \tag{23}$$

瑞利散射截面为

$$\sigma = \frac{\overline{P}}{S_{入}} = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} = \sigma_T\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \tag{24}$$

当入射波频率ω远小于束缚电子的固有频率ω_0时,其散射截面

$$\sigma \approx \sigma_T\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \tag{25}$$

这表明,对低频电磁波的散射能力与入射波频率ω的四次方成正比.上式称为瑞利散射公式.瑞利据此解释了天空的蓝色,以及早晨、傍晚的太阳为什么特别红.前者是因为太阳光中频率比较高的蓝光散射比较强烈,蓝光在大气层中经多次散射而使天空呈现蔚蓝色.后者是因为早晨和傍晚时,直射的太阳光穿透的大气层比较

厚,由于蓝光更多的被散射而使透射光更红. 可以想像,如果地球没有大气层,人们将看到一轮更加明亮的白色太阳悬挂在漆黑的背景中,这正是宇航员在星际航行中所观察到的景象.

当入射电磁波的频率 $\omega \approx \omega_0$ 时,散射截面

$$\sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \approx \sigma_T \left(\frac{\omega}{\Gamma}\right)^2 \gg \sigma_T . \tag{26}$$

这表明,$\sigma = \sigma(\omega)$ 曲线有一个很尖锐的峰. 当 ω 稍作变化时,散射截面将迅速减小. $\omega \approx \omega_0$ 条件下的散射称为共振散射.

当然,经典电动力学对于原子的共振吸收和再发射的问题不能给出圆满的答案,有关讨论需要运用量子理论.

三、电子对高频电磁波的散射(康普顿效应)

当入射电磁波的频率增加到

$$\omega \approx \frac{m_{e0}c^2}{\hbar} \tag{27}$$

时,实验发现,散射光的频率 ω' 与入射光的频率 ω 将不相同. 这时经典电子论无法解释,因为光的粒子性已明显地表现出来,此时应将电磁波看做光子流.

1923 年,康普顿用 X 射线射入碳、石墨等原子质量很轻的靶上. 由于 X 射线的光子能量 $\hbar\omega$ 大大超过原子的电离能,在 X 射线的作用下,束缚电子将变成自由电子. 因此,电子对高频电磁波的散射应看做是光子与自由电子的碰撞. 利用能量守恒与动量守恒定律,可以得到与实验一致的结论(见本节习题第 2 题),即

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar\omega\omega'}{m_{e0}c^2}(1 - \cos\phi), \tag{28}$$

或

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \dfrac{\hbar\omega}{m_{e0}c^2}(1 - \cos\phi)} . \tag{29}$$

这表明,只有当光子的能量 $\hbar\omega$ 远小于电子的能量 $m_{e0}c^2$ 时,才有散射光频率 ω' 与入射光的频率 ω 相等的结论.

实际上,X 射线光子的能量可达 0.1MeV 的数量级,电子的静能为 $m_{e0}c^2 = 0.51\text{MeV}$,已不符合 $\hbar\omega \ll m_{e0}c^2$ 的条件.

习 题 13.1

1. 设一个原子在频率为 ω 的平面偏振波的作用下,产生电偶极矩 $p = \alpha E_0 e^{-i\omega t}$,试根据经典电动力学计算散射截面.

2. 能量为 1.00MeV 的 γ 射线光子被静止的电子散射. 试求:

(1)散射光子的频率 ω'.

(2)散射过程中电子获得能量的最小值W_{min}和最大值W_{max}.

§ 13.2　介质对电磁波的色散与吸收

当电磁波入射到介质中时,引起电子的受迫振动,由于电子作加速运动而辐射出次波,次波的叠加形成在介质中传播的电磁波.不同频率的电磁波在介质中有不同的介电常数,因而有不同的折射率和相速.这既可使不同颜色的光沿不同方向折射,又可使由不同颜色的光组成的波包发生弥散,这是两种常见的色散现象.

第五章一直假定绝缘介质的介电常数是实数,这就只能反映介质对电磁波的色散.本节利用洛伦兹电子论证明,介质的介电常数也是复数.在§ 5.3 曾引入导体的复介电常数$\varepsilon'=\varepsilon+\mathrm{i}\dfrac{\sigma}{\omega}$,它的虚部反映电磁波对传导电流作功并将部分电磁波的能量转化为焦耳热.而介质中复介电常数的虚部则反映入射电磁波让电子作受迫振动,并将部分电磁波的能量转化为散射能.尽管两者的机制不同,但都导致电磁波的能量损耗,即对电磁波的吸收.

本节首先给出介质的色散模型,随后由振子运动方程的解求得介质的复极化强度P、介质的复极化率χ_e和介质的复介电常数ε.介质的复介电常数与电磁波频率的 关系称为介质的色散关系.在此基础上即可求得介质的复折射率$n+\mathrm{i}\eta$,并证明实部n描述介质对电磁波的色散,虚部η描述介质对电磁波的吸收.最后,由色散关系求出n与η,得到共振区与远离共振区中介质对电磁波色散与吸收的规律.

一、介质的色散关系

本节以稀薄气体为例讨论介质对电磁波的色散与吸收.设介质由大量振子组成,且振子只有一个固有频率ω_0,单位体积内振子的数目为N.

1. 振子的运动方程及方程的解

设入射电磁波的电场为$E=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,振子在弹性恢复力、辐射阻尼力和入射电磁波的作用下,其运动方程为

$$\ddot{x}=-\omega_0^2x-\Gamma\dot{x}+\frac{\mathrm{e}}{m}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{1}$$

方程的稳态解为

$$x=\frac{\mathrm{e}E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{2}$$

2. 介质的复极化强度与复介电常数

介质的复极化强度

$$P=Np=N\mathrm{e}x=\frac{N\mathrm{e}^2E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{N\mathrm{e}^2E}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega)}. \tag{3}$$

与$P=\chi_e\varepsilon_0E$比较,可得介质的复极化率

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \tag{4}$$

由 $\varepsilon E = D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0(1+\chi_e)E$ 得复介电常数

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1+\chi_e) = \varepsilon_0\left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}\right]$$

$$= \varepsilon_0\left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}\right]. \tag{5}$$

上式给出稀薄气体中复介电常数与电磁波频率的关系,称为色散关系.

二、介质对电磁波的色散与吸收

1. 介质的复折射率及其物理意义

现在将折射率与相对介电常数的关系推广到两者均为复数情形. 由于非铁磁介质的 $\mu_r \approx 1$,故稀薄气体的复折射率为

$$n + i\eta = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}}. \tag{6}$$

对于沿 z 方向传播的平面电磁波,用复折射率 $n+i\eta$ 代替第五章中的 n,便有

$$E = E_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0 e^{i\left[\frac{\omega}{c}(n+i\eta)z-\omega t\right]} = E_0 e^{-\frac{\omega}{c}\eta z} e^{i\omega\left(\frac{n}{c}z-t\right)}. \tag{7}$$

这表明,复折射率的实部 n(也就是实验测定的折射率)决定电磁波的相速 $v_p = \frac{c}{n}$,表现为介质对电磁波的色散;而复折率的虚部 η 决定电磁波振幅 $E_0 e^{-\frac{\omega}{c}\eta z}$ 的衰减,表现为介质对电磁波的吸收.

2. 由色散关系求复折射率的实部与虚部

将色散关系代入(6)式,得

$$n + i\eta = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}}.$$

由于稀薄气体的 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$,它的相对介电常数

$$\varepsilon_r \approx 1,$$

因此,可将(8)式的根式近似展开为

$$n + i\eta = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \tag{10}$$

令等式两边的实部与虚部分别相等,即有

$$n - 1 = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}, \tag{11}$$

$$\eta \approx \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}. \tag{12}$$

图 13.2 给出 $(n-1)$、η 与 ω 的函数关系图. 现在分别讨论当 ω 在远离 ω_0 的区域与 ω 在 ω_0 附近的区域时,介质对电磁波色散与吸收的规律.

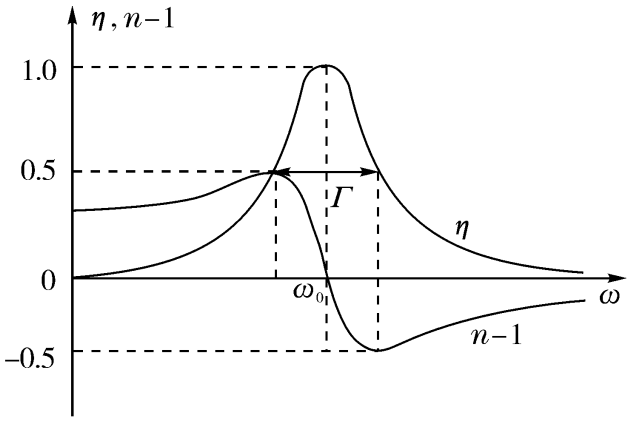


图 13.2

3. 远离共振区[$(\omega_0^2-\omega^2)^2\gg\Gamma^2\omega^2$]——正常色散与弱吸收

将$(\omega_0^2-\omega^2)^2\gg\Gamma^2\omega^2$代入(11)式和(12)式,得

$$n-1=\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}, \tag{13}$$

$$\eta\approx\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}. \tag{14}$$

公式及图解表明:

(1)折射率n随ω的增加而增加,称为正常色散;

(2)η很小,吸收很弱.

4. 在共振区附近($\omega\approx\omega_0$)——反常色散与强吸收

将$\omega\approx\omega_0$代入(11)式和(12)式,并采用近似$\omega_0+\omega\approx2\omega_0$,即有

$$n-1\approx\frac{Ne^2}{4\varepsilon_0 m\omega_0}\frac{\omega_0-\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}, \tag{15}$$

$$\eta\approx\frac{Ne^2}{8\varepsilon_0 m\omega_0}\frac{\Gamma}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}. \tag{16}$$

公式及图解表明:

(1)折射率n随ω的增加而减小,称为反常色散;

(2)η很大,吸收很强.

上述两区遵守的色散与吸收规律是所有物质都呈现的普遍现象.

当介质含有多种固有频率ω_j($j=1,2,\cdots$)的振子时,设单位体积中各种振子的数目分别为Nf_j($j=1,2,\cdots$),阻尼系数分别为Γ_j($j=1,2,\cdots$),则其色散关系为

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0\left[1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{(\omega_j^2-\omega^2)-i\Gamma_j\omega}\right], \tag{17}$$

因此,介质有多个吸收带及相应的反常色散区.

利用量子理论可以导出相似的公式,但f_j的意义完全不同,它与电子从基态跃迁到j态的几率有关.这表明,经典电动力学的振子模型可以得到一些定性的结果,只有运用量子理论才能从本质上正确反映原子内部电子的运动,并且获得与实

验一致的定量关系.

习　题　13.2

1. 试按照导出介质折射率的方法,导出等离子体的折射率公式(公式见习题5.5第1题)

$$n(\omega)=\sqrt{1-\frac{n_{e0}e^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}},$$

式中n_{e0}为等离子体中电子的密度.

2. 设介质每单位体积由N个电荷为e、质量为m、固有频率为ω_0的谐振束缚粒子组成. 若在电磁波的传播方向上,加上静磁场$B=Be_z$. 试证明,左旋与右旋的圆偏振电磁波具有不同的介电常数,且其差为

$$\varepsilon_L-\varepsilon_R=\frac{Ne^2}{m}\frac{2eB\omega/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-(eB\omega/m)^2}.$$

第十四章　超导体电动力学

自从20世纪初发现超导体在低温下具有零电阻性和完全抗磁性等奇特性质以来,它的应用就一直引起人们的关注.特别是1986年高温超导体发现后超导技术的迅猛发展,它已成为21世纪的一项极具潜力的高新科学技术,备受世人瞩目.

本章的§ 14.1介绍超导体最基本的电磁性质.§ 14.2介绍基于零电阻性和完全抗磁性而形成的两种处理超导问题的观点.至于巴丁、库柏和施列弗在1957年提出的BCS理论及磁通量子化等现象将留在本书的第三卷讨论.

§ 14.1　超导体的基本性质

本节介绍超导体最基本的几个性质,即零电阻性、临界磁场与迈斯纳效应.

一、零电阻性

1911年,荷兰物理学家昂纳斯在研究纯汞在低温下电阻率的变化时,发现纯汞的电阻在4.2K时突然消失了,这种电阻为零的性质称为超导电性.具有超导电性的物体称为超导体,刚出现超导电性的温度称为超导临界温度T_c.在临界温度以上,超导体处于正常态;在临界温度以下,超导体处于超导态.对于不同的超导材料,其临界温度不同.例如,锡的$T_c = 3.8\mathrm{K}$,铅的$T_c = 7.2\mathrm{K}$.当然,目前的测量精度无法确认超导态下的电阻率是否为零.近年来测定超导铅的电阻率为$3.6\times 10^{-25}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$(作为对比,纯铜在低温下的电阻率约为$10^{-11}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$).

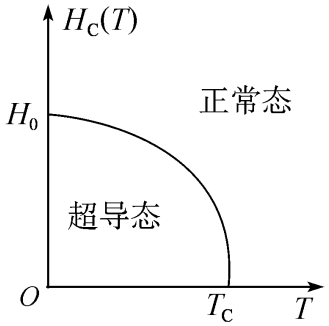


图14.1

二、临界磁场

1914年,昂纳斯进一步发现,当磁场增大到某一临界值$H_c(T)$时,置于磁场的超导体将会从超导态转变为正常态.实验表明,临界磁场H_c与温度有关,可用经验公式表示为

$$H_c(T) = H_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right], \tag{1}$$

$H_c(T)$曲线如图14.1所示.在$H_c(T)$曲线左下方的区域称为超导态,$H_c(T)$曲线右上方的区域为正常态.超导态与正

常态是两种不同的相,它们之间的转变是二级相变[①].

类似地,当超导体内部的电流大于I_c,导致该电流激发的磁场$H > H_c(T)$时,超导材料的超导性也将被破坏. 可以证明,$I_c(T)$也有与$H_c(T)$类似的函数关系

$$I_c(T) = I_c(0)\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]. \tag{2}$$

三、完全抗磁性——迈斯纳效应.

1933 年迈斯纳发现,只要$H < H_c(T)$,在超导体内的磁感应强度$B = 0$,与超导体所经历的过程无关:原先处于超导态的材料,当外加磁场$H < H_c(T)$时,B 不能进入超导体;原先处于正常态的材料置于磁场内,当温度下降使材料转变为超导态时,B 将完全被超导体排出体外;这个现象称为迈斯纳效应.处于超导态的材料内部的$B = 0$的现象称为完全抗磁性[②].

完全抗磁性是独立于零电阻性的另一个基本特性.实际上,不可能由电磁场运动的普遍规律——麦克斯韦方程

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

出发,从零电阻性导出完全抗磁性,也不可能从完全抗磁性导出零电阻性.

首先,零电阻性意味着处于超导态的、通有稳恒电流的超导材料内部$E = 0$,由麦克斯韦方程可得$\frac{\partial B}{\partial t} = 0$,但这只能说明$B$ 是与时间无关的恒量,不能得出$B = 0$(完全抗磁性)的结论.

其次,完全抗磁性意味着处于超导态的材料内部$B = 0$. 由麦克斯韦方程可得$\nabla \times E = 0$,但这只能说明E 不是涡旋场,不能得出$E = 0$(零电阻性)的结论.

§ 14.2 超导的宏观唯象理论

本节介绍处理超导问题的两种观点(当然,在这两种观点下,反映超导体电磁性质的参数是截然不同的):

第一种观点是从超导体的零电阻性出发,把超导体看做具有特殊性质的导体(即认为超导体的$\varepsilon_s = \varepsilon_0$, $\mu_s = \mu_0$),把超导电流看做传导电流的一个组成部分,由二流体模型导出伦敦方程,随后运用麦克斯韦方程和伦敦方程讨论超导问题.

---

① 若在相变点两相的化学势与化学势的一级偏导连续,而化学势的二级偏导有突变,称为二级相变. 请参阅:汪志诚. 2003. 热力学· 统计物理. 第三版. 北京:高等教育出版社. 129~ 132.

② 当然,在超导体表面小于10^3Å 的薄层内会有一个按指数衰减的磁场,但处理实际问题时,通常将这个厚度近似取作零,见例 1.

第二种观点是从超导体的完全抗磁性出发,把超导体看做一种特殊的磁介质(由于它的完全抗磁性,其磁化率 $\chi_S = -1$,磁导率 $\mu_S = 0$),把超导电流看做磁化电流(即认为作为磁介质的超导体的电导率 $\sigma = 0$,传导电流 $J_f = 0$,并略去通常很小的分子磁化电流),超导电流使超导体带有磁矩 M_S,随后运用磁标势法讨论处于均匀磁场中超导球的场分布,得到超导体中二相共存的居间态.

在本节的最后,介绍超导应用的美好前景.

一、伦敦方程

1933 年戈尔特和卡西林提出超导的宏观唯象理论——二流体模型. 该理论认为导体中存在两种电子:一种是平常导体中的自由电子,称为正常电子. 另一种是当物体处于超导态时出现的电子,称为超导电子. 并且随着温度的降低,将有越来越多的自由电子成为超导电子.

正常电子与超导电子有着不同的性质:

正常电子会与晶格碰撞和散射,产生电阻,正常电子的定向运动产生的电流称为正常电流 J_n,遵守欧姆定律

$$J_n = \sigma E. \tag{1}$$

超导电子不会被晶格散射,运动不受阻尼,超导电子的运动产生的电流称为超导电流 J_S.

超导体内的电流密度 J_f 是正常电流密度 J_n 与超导电流密度 J_S 之和

$$J_f = J_n + J_S. \tag{2}$$

1935 年,伦敦兄弟(F. London 和 H. London)根据二流体模型提出了超导体的电磁性能方程,从宏观上给出了超导体的主要电磁性质.

设电子的电量为 e,质量为 m,超导电子的密度为 n_S,速度为 $\boldsymbol{v}_S$. 若超导体中某瞬间产生电场 E,由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_S}{\mathrm{d}t} = -eE \tag{3}$$

超导电流密度为

$$J_S = \rho_S \boldsymbol{v}_S = -n_S e \boldsymbol{v}_S. \tag{4}$$

采用近似[①]

---

① 由多元函数的微分法可知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_S(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + \sum_{n=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + \sum_{n=1}^{3}(\nabla \boldsymbol{v}_S)_n(\boldsymbol{v}_S)_n = \frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + \boldsymbol{v}_S\nabla \boldsymbol{v}_S,$$

上式两边乘以 $-n_S e$,并利用(4)式,便有

$$\frac{\mathrm{d}J_S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial J_S}{\partial t} - \frac{1}{n_S e}J_S \cdot \nabla J_S \approx \frac{\partial J_S}{\partial t}.$$

这里已略去较小的非线性项,这就是(5)式.

$$\frac{\mathrm{d}J_s}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial J_s}{\partial t}, \tag{5}$$

将(4)式两边对 t 求导后代入(3)式,可得

$$\frac{\partial J_s}{\partial t} \approx \frac{\mathrm{d}J_s}{\mathrm{d}t} = -n_s e \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{n_s e^2}{m}E. \tag{6}$$

令 $\alpha = \frac{n_s e^2}{m}$,则上式可简化为

$$\frac{\partial J_s}{\partial t} = \alpha E. \tag{7}$$

这就是伦敦第一方程.它的物理意义可讨论如下:

首先,伦敦第一方程给出了超导电流与电场的关系,即超导电流的时间变化率 $\partial J_s/\partial t$ 正比于电场强度 E,表明电场起着加速电流的作用.

第二,当超导电流达到稳定(即 $\partial J_s/\partial t = 0$)时,伦敦第一方程给出 $E = 0$. 这时超导体内电场为零而超导电流不为零显示了超导体的零电阻性. 并且,由 $J_n = \sigma E$ 可见,此时没有正常电流,只有超导电流.

第三,当超导电流交变时,如 $J_s(t) = J_s(0)e^{i\omega t}$,伦敦第一方程给出 $E = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial J_s}{\partial t} \neq 0$. 因而,这时必然存在有损耗的正常电流 $J_n = \sigma E$. 这表明,当超导电流是交变电流的情况下,超导体是有电阻损耗的. 其交流损耗的百分比与频率 ω 成正比

$$\frac{J_n}{J_s} \propto \frac{\sigma}{\alpha/\omega} = \frac{m\sigma}{n_s e^2}\omega \propto \omega. \tag{8}$$

第四,超导电流 J_s 与 E 的关系不同于正常电流的根源在于超导电子不受阻力. 对于正常电子,应在牛顿方程中加上与电子速度成正比的阻力项 $\gamma\boldsymbol{v}_n$,则方程变为

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_n = -eE + \gamma\boldsymbol{v}_n, \tag{9}$$

当电子的定向运动达到稳定时($\dot{\boldsymbol{v}}_n = 0$),由上式可见 $E \propto \boldsymbol{v}_n$. 又因 $J_n = \rho_n \boldsymbol{v}_n$(式中 ρ_n 为正常自由电子的电荷密度),故 $E \propto J_n$. 可见正常电流 J_n 遵守欧姆定律.

现在,对伦敦第一方程 $\frac{\partial J_s}{\partial t} = \alpha E$ 的两边求旋度后代入麦克斯韦方程

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{10}$$

可得

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times E = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times J_s), \tag{11}$$

移项后即有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times J_s + \alpha B) = 0. \tag{12}$$

伦敦将与时间无关的积分常矢量取作零(与实验事实相符),并将 $\alpha = n_s e^2/m$ 代入,即得

$$\nabla \times J_s = -\frac{n_s e^2}{m} B. \tag{13}$$

这就是伦敦第二方程.它的物理意义可讨论如下:

首先,伦敦第二方程指出了超导电流与磁场的关系,即超导电流的旋度$\nabla \times J_s$正比于磁感应强度B.这表明,超导电流是靠磁场来维持的.

第二,在超导材料处于超导态的情形下(为简单起见,设$J_f \approx J_s$),则麦克斯韦方程可表示为

$$\nabla \times B = \mu_0 J_s. \tag{14}$$

取旋度后代入伦敦第二方程,即有

$$-\frac{n_s e^2}{m} B = \nabla \times J_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times B) = \frac{1}{\mu_0} [\nabla (\nabla \cdot B) - \nabla^2 B].$$

由麦克斯韦方程$\nabla \cdot B = 0$,即得

$$\nabla^2 B = \mu_0 \frac{n_s e^2}{m} B = \frac{1}{\lambda_L^2} B, \tag{15}$$

式中

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \alpha}}. \tag{16}$$

(15)式表明,不存在均匀磁场的解[对于均匀磁场,$\nabla^2 B = 0$,代入(15)式得$B = 0$].可以证明(见例1),超导体只在外表面存在按指数衰减的磁场.

【例1】　设超导体占据$z > 0$的空间,且$B(x) = B(z)$,求:

(1) 磁场在该空间的分布;

(2) 超导电流的分布.

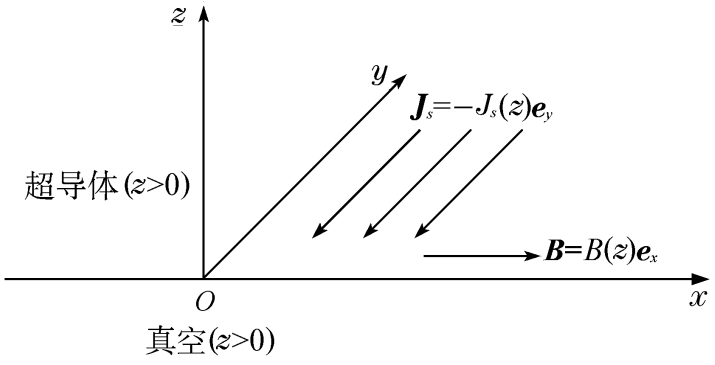


图 14.2

解　(1) 由于B仅依赖于z,故方程(15)可简化为

$$B''(z) = \frac{1}{\lambda_L^2} B(z). \tag{17}$$

易见解具有

$$B(z) = C e^{kz} \tag{18}$$

的形式.将上式代入(17)式,得$k=\pm\frac{1}{\lambda_L}$(因为取正号时不能保证$z\to\infty$时B有限,应略去),由此得

$$B(z)=C\mathrm{e}^{-\frac{z}{\lambda_L}}$$

令$z=0$得$C=B(0)$,代回原式,即有

$$B(x)=B(0)\mathrm{e}^{-\frac{z}{\lambda_L}}\boldsymbol{e}_y. \tag{19}$$

这表明,磁场随z的增加而指数地衰减.通常定义$B(z)=B(0)\mathrm{e}^{-1}$的距离z为穿透深度,由(19)式可得磁场能进入超导体的厚度为

$$\lambda_L=\sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_S \mathrm{e}^2}} \tag{20}$$

的薄层中,称为伦敦穿透深度.对于一般超导体而言,λ_L约为$10^2\sim10^3$Å.这就证明了超导体内无磁场,利用伦敦方程解释了迈斯纳效应.

(2)将(19)式代入超导体的麦克斯韦方程(14),由于磁场只有x分量且仅依赖于z,故仅保留一项,即

$$J_S=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times B=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_y=-\frac{B(0)}{\mu_0\lambda_L}\mathrm{e}^{-\frac{z}{\lambda_L}}\boldsymbol{e}_y. \tag{21}$$

这表明,超导电流也只存在于超导体表面数量级为λ_L的薄层中.超导电流所产生的磁场在超导体内部沿$-\boldsymbol{e}_y$方向(见图14.2),与外场反向,结果将外磁场屏蔽掉,导致超导体内部(除表面薄层外)$B=0$.

三、存在超导体的静磁边值问题 居间态

现在按第二种观点处理超导问题,把超导体看做一种特殊的磁介质,把超导电流看作磁化电流.这样,原先介质磁化的公式也可进行相应的替换.设介质1为超导体,介质2为空气,则

$$\nabla\times M=J_m\longrightarrow\nabla\times M_S=J_S, \tag{22}$$

$$\alpha_m=n\times(M_2-M_1)=-n\times M_1\longrightarrow\alpha_S=-n\times M_S, \tag{23}$$

由于超导体内部$B=0$,因而

$$0=B=\begin{cases}\mu_0(H+M_S)=\mu_0(1+\chi_S)H,\\ \mu_S H.\end{cases}$$

易见

$$M_S=-H,\quad \chi_S=-1(\text{超导体的磁化率}),\quad \mu_S=0(\text{超导体的磁导率}). \tag{24}$$

即超导体为完全抗磁体.

应注意,在两种不同观点下,超导体的电导率σ,磁导率μ_S的取值全然不同,切不可混淆.

【例2】 半径为R_0,处于超导态的超导球置于均匀外磁场H_0中,求磁场及超导面电流分布.

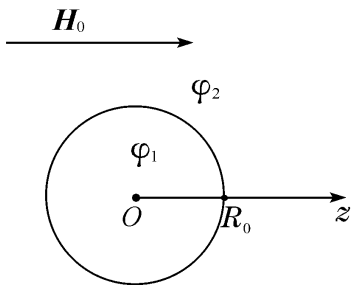


图 14.3

解　采用第二种观点求解,由于没有传导电流,故可采用磁标势法.取坐标原点在球心,极轴沿 H_0 的球坐标系.

1. 边值问题

① $\nabla^2\varphi_1=0$,　　$R<R_0$;　　(25)

② $\nabla^2\varphi_2=0$,　　$R>R_0$;　　(26)

③ $\varphi_1|_{R\to 0}$有限,　　(27)

④ $\varphi_2|_{R\to\infty}=-H_0R\cos\theta$;　　(28)

⑤ $\varphi_1|_{R=R_0}=\varphi_2|_{R=R_0}$;　　(29)

⑥ 由 $B_{1n}=B_{2n}$及$B_1=0$,得

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}=0. \tag{30}$$

2. 对称性及通解的形式

由轴对称性及(27)和(28)式易见球内、外的磁标势具有形式

$$\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}a_lR^lP_l(\cos\theta), \tag{31}$$

$$\varphi_2=-H_0R\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta). \tag{32}$$

3. 定系数得磁标势

将上两式代入(29)及(30)式,得

$$\sum_{l=0}^{\infty}a_lR_0^lP_l(\cos\theta)=-H_0R_0P_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d_l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\theta), \tag{33}$$

$$-H_0P_1(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}d_l\frac{l+1}{R_0^{l+2}}P_l(\cos\theta). \tag{34}$$

解之易得

$$a_1=-\frac{3}{2}H_0,\qquad d_1=-\frac{1}{2}H_0R_0^3,\qquad a_l=d_l=0(l\neq 1). \tag{35}$$

代回(31)和(32)式,得

$$\varphi_1=-\frac{3}{2}H_0R\cos\theta, \tag{36}$$

$$\varphi_2=-H_0R\cos\theta-\frac{H_0R_0^3}{2R^2}\cos\theta. \tag{37}$$

4. 由磁标势得磁场分布

利用矢量分析的公式(见附录习题1.5第6题)

$$\nabla(R\cos\theta)=\nabla z=\mathrm{e}=\cos\theta\,\mathrm{e}_R-\sin\theta\,\mathrm{e}_\theta, \tag{38}$$

$$\nabla\frac{\cos\theta}{R^2}=\nabla\frac{z}{R^3}=\frac{\mathrm{e}-3\cos\theta\,\mathrm{e}_R}{R^3}=-\frac{2\cos\theta\,\mathrm{e}_R+\sin\theta\,\mathrm{e}_\theta}{R^3}. \tag{39}$$

球内磁场为

$$H_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3}{2}H_0\nabla(R\cos\theta) = \frac{3}{2}H_0\boldsymbol{e}_z = \frac{3}{2}H_0. \tag{40}$$

球外磁场为

$$H_2 = -\nabla\varphi_2 = H_0\nabla(R\cos\theta) + \frac{H_0R_0^3}{2}\nabla\frac{\cos\theta}{R^2}$$

$$= H_0(\cos\theta\boldsymbol{e}_R - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) - \frac{H_0R_0^3}{2}\frac{2\cos\theta\boldsymbol{e}_R + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta}{R^3}. \tag{41}$$

其分量为

$$H_{2R} = H_0\cos\theta - \frac{H_0R_0^3}{R^3}\cos\theta, \tag{42}$$

$$H_{2\theta} = -H_0\sin\theta - \frac{H_0R_0^3}{2R^3}\sin\theta. \tag{43}$$

特别是,球面上的磁场为:

$$H_{2R} = 0, \qquad H_{2\theta} = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta. \tag{44}$$

5. 居间态

由(44)式可见,若均匀外场H_0与临界磁场满足

$$\frac{2}{3}H_C < H_0 < H_C, \tag{45}$$

则球面上有的地方(如赤道上,$\theta = \pi/2$),其磁场大于临界磁场,超导球的超导性将受到破坏并导致超导球内部的一些区域处于正常态;而有些地方其外磁场仍小于临界磁场(如两极,$\theta = 0, \pi$处$H_2 = 0$),故使超导体内部也有一区域仍处于超导态.这种超导态与正常态共存的状态就称为居间态.

四、超导体应用的前景

超导的应用包括强电应用(即强磁场和大电流传输方面的应用)和弱电应用(即微电子学和精密测量方面的应用)两个方面.

1. 强电应用

(1) 超导磁体. 历史上磁体的制作有三代:第一代是用铁、钴、镍合金或铁氧体制成的永久磁铁,其两极最高磁场可达数千高斯;第二代是用铜线或铝线环绕铁芯制成的电磁铁. 但是,能产生5×10^4高斯的中型磁体的重量约为20T,消耗电能也在兆瓦以上;第三代是超导磁体,以强电流通过超导线圈产生强磁场:重量几公斤、耗能几千瓦的超导磁体可产生近10^6高斯的磁场.

目前日内瓦原子核研究中心的氢气泡室使用的就是超导磁体,美国费米实验室在20世纪80年代用超导磁体建成的1000Gev质子同步加速器是当时世界上能量最高的,苏联已经利用超导磁体建成约束高温等离子体实现可控热核反应.

(2) 超导悬浮. 它利用两个竖直放置的、同极性磁极互相靠近时产生排斥力以克服重力的原理制成. 1979 年日本制成的超导悬浮列车达每小时504 千米的高速,如果让列车在真空管道中运行以减小阻力,估计时速可达每小时 1600 千米. 2003 年 3 月我国上海市区——浦东的磁悬浮列车是世界上第一部投入商业试运行的磁悬浮列车,运行时速达430 千米. 超导磁悬浮还可用于超导无摩擦轴承、陀螺仪、重力仪、风洞实验,等等.

目前,高T_c超导已在超导磁储能、发电机、直流电动机、变压器等方面取得了进展. 最近,还进行了利用高温超导实现磁悬浮的有趣表演,将体重 142 公斤的日本相扑运动员土佐野海悬在空中,成为一段佳话.

2. 弱电方面

(1) 超导量子干涉仪(简称 SQUID). 其特点是对磁通非常敏感,能分辨出10^{-11}高斯的磁场变化. 用SQUID 作为传感器与其他辅助配套技术相配合,可做成具有极高灵敏度的弱磁、弱电测量仪,可用于地质、地球物理、生物医学、微电子技术及军事科学. 目前,美国超导公司已开始出售高T_c铜氧化物超导体 SQUID. 著名的超导量子干涉仪专家克拉克认为,高T_cSQUID 的精度能胜任心磁研究的要求,并接近脑磁研究的要求.

(2) 超导微波器件. 当超导体处于超导态时,微波表面电阻远小于一般良导体的电阻值,由它制成的微波器件的损耗低,信号畸变小,Q 值高,可广泛用于现代通信、雷达、宽频信号处理等方面. 1996 年美国海军实验室的带有高T_c滤波器、天线及信号处理系统的高温超导体空间实验项目II(简称为HTSSE-II)已进行卫星搭载实验.

(3) 超导计算机. 超导体的正常态和超导态是两个稳定状态,可以分别代表逻辑代数中的“0”和“1”. 超导体状态改变的速度极快,可以做成快动开关元件,从而作为计算机的逻辑元件. 但是,目前使计算机实现完全超导化还存在困难. 例如,记忆单元的磁力线对相邻单元有影响,使得记忆单元之间不能过分紧密. 人们目前正研究采用超导体与半导体相结合的混合系统.

总之,超导(尤其是高温超导)的应用前景是十分诱人的,它对整个社会和我们的生活将会产生深远的影响. 1987 年,贝德诺兹和缪勒由于发现高T_c氧化物超导材料而获得 1987 年诺贝尔物理学奖.

第十五章　原子的激光冷却与捕陷

1959 年,诺贝尔奖金获得者费曼曾说:“如果有一天能按人的意志安排一个个原子和分子,那将会产生什么样的奇迹呵!”近十多年来,原子激光冷却与捕陷实验技术的飞跃发展,实现费曼四十多年前的愿望已为期不远了.

本章介绍激光冷却与捕陷原子的基本思想和方法(§ 15.1)及其在科学技术上的意义(§ 15.2).

*§ 15.1　激光冷却与捕陷原子的基本思想和方法

激光冷却原子的物理思想是建立在激光与原子动量交换的基础上的. 爱因斯坦早在1917 年就指出,原子在光的吸收和发射的过程中,存在着动量的转换. 1933 年,弗里斯曾经观察到共振光($\omega \approx \omega_0$)使钠原子束偏转. 激光出现之后,1975 年汉斯和肖洛提出了用共振激光来冷却原子的思想. 1979 年,Balykin 等人首次在钠原子束上实现了激光减速效应. 随后,在 1980 年到1981 年间原子冷却到1.5K,1982 年冷却到 100mK. 1985 年朱棣文等人使用“光学黏胶”,温度更下降至 240μK. 为此,朱棣文、科恩-塔诺季和莫利普斯获1997 年度诺贝尔物理学奖. 2003 年,一个由德国、美国、奥地利等国科学家组成的国际科研小组利用“磁光阱加原子喷泉”技术,再次改写了人类创造的最低温纪录,使温度达到0.5nK(0.5×10^{-9}K).

本节介绍激光冷却与捕陷原子的几种方法.

一、激光冷却原子

1. 多普勒冷却

激光冷却钠原子的装置如图15.1 所示. 钠原子从源射出后经准直孔形成准直原子束,其横向速度约为1m/s,纵向速度约10^3m/s. 钠原子(其共振频率为ω_0)在迎面激光束的照射下(由于多普勒效应,激光的ω略低于ω_0),在吸收光子跃迁到高能态的同时,获得沿光束方向的动量$\bar{h}K$. 因为原子吸收成千上万个光子所获得的动量都沿激光束的方向,原子因此而减速. 当然,原子每吸收一个光子,经过极短暂的时间τ(原子激发态的寿命)之后,原子将通过自发辐射发出光子并引起原子的反冲. 由于自发辐射是随机的,原子发射光子的方向是各向同性的,原子经过成千上

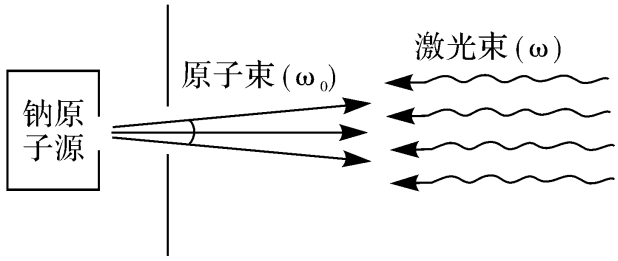


图 15.1

万次自发辐射之后,由于反冲得到的总动量为零. 粗略估算,速度为 10^3 m/s 的原子,如果受到 3 万个光子的迎头撞击,其热运动便可停止下来.

为了实现原子不间断地吸收光子,除了要通过光抽运让钠原子等效于二能级原子与激光相互作用之外,激光冷却原子要解决的关键问题就是多普勒频移的问题.

随着光子对原子的撞击,原子的速度逐渐减小,由于多普勒效应,原子"感受"到的激光频率ω′也会随之减小. 当ω′一旦离开原子的共振频率(有一定线宽),则原子与激光的相互作用便终止. 考虑到钠原子速度每下降 3m/s,共振频率移动 5MHz,而原子的吸收线宽也是5MHz. 因此,原子速度速度减慢 3m/s,就不能与光束继续相互作用了. 1982 年,菲利普斯等人提出了塞曼频移法,利用原子能级在磁场中的塞曼分裂[①]来补偿. 他用塔形线圈产生随空间距离变化的磁场,在线圈入口处磁场最强,并随距离的增大而减弱. 这样,原子随着运动距离的增大,同时出现两种现象:一是随着吸收光子的不断增加,原子速度减小,产生的多普勒频移也逐渐减小;二是随着磁场逐渐减弱,塞曼频移也逐渐减小. 这使得原子的共振频率随位置的变化始终与多普勒频移保持同步,原子便一直保持与激光共振而减速. 由于实现这种减速必须考虑光子对原子运动的多普勒效应,因而把这种冷却原子的方法称为多普勒冷却.

多普勒冷却的极限速度与原子的质量m、原子的谱线宽度Γ 有关. 如果用波长 589nm 的激光冷却钠原子,多普勒冷却的极限温度为 240μK;如果用波长为 852nm 的红外线冷却铯原子,多普勒冷却的极限温度为 124μK.

进一步降低原子气体温度的方法称为光学黏胶.

2. 光学黏胶

1985 年,朱棣文、科恩-塔诺季和菲利普斯在贝尔实验室用两两相对、沿三个正交方向的六束激光使原子减速. 他们让真空中的一束钠原子先被迎面而来的激光束阻止下来,随后将钠原子引到六束激光的交汇处. 这六束激光的频率都比静止钠原子的吸收频率略低(称为激光频率"红移"),结果使钠原子无论向什么方向运动,都会吸收这些光子,并被推回到六束激光交汇的区域. 在该区域的原子好像在黏稠的液体内运动一样. 他们把这块区域称为光学黏胶(也叫光学糖浆).

1994 年,用二维光学黏胶冷却氦原子,温度达到 0.25μK,后来采用三维光学黏胶,温度达到 0.18μK,这时氦原子的速度为 2cm/s.

---

① 汪德新 .2003. 量子力学. 理论物理导论第三卷. 第二版 . 武汉:湖北科学技术出版社. 172.

但是,用这种方法只能把原子冷却,并设有捕陷原子. 因为不到1 秒钟,在重力作用下,原子便从光学黏胶中掉下来,为了捕陷原子,就要用原子阱.

二、原子阱

原子阱是要让原子感受到一个势场区域,在此区域内某一点,原子的势能有极小值. 这样,原子离开势能极小点时,就会受到迫使它返回的恢复力.

常用的原子阱有磁阱、光阱和磁-光阱三种.

1. 磁阱

磁阱是一个非均匀磁场. 通常使用的是四极磁阱,如图15.2 所示. 它实际上是两个分开一定距离的反向电流线圈,在中心点磁场为零. 沿各个方向离开中心点磁场都逐渐增大. 磁矩为 μ 的原子在这样的非均匀磁场中受力

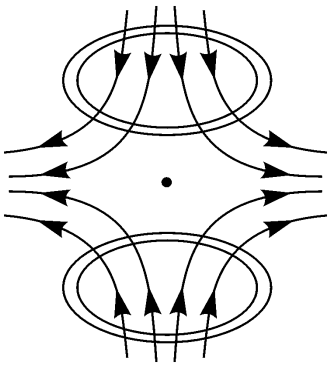


图 15.2

$$F = -\nabla(\mu \cdot B) = -\mu \nabla |B| \cos(\mu, B), \qquad (1)$$

上式假设事先已将原子的速度降至很低,在这个磁场中运动时可以认为 μ 与 B 的夹角保持不变. 于是,F 取决于 $|B|$ 的梯度. 可以证明

$$|B| = C\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}, \qquad (2)$$

式中 x,y 为径向坐标,z 为轴向坐标,F 是指向中心的恢复力.

磁阱及其辅助装置如图15.3 所示.

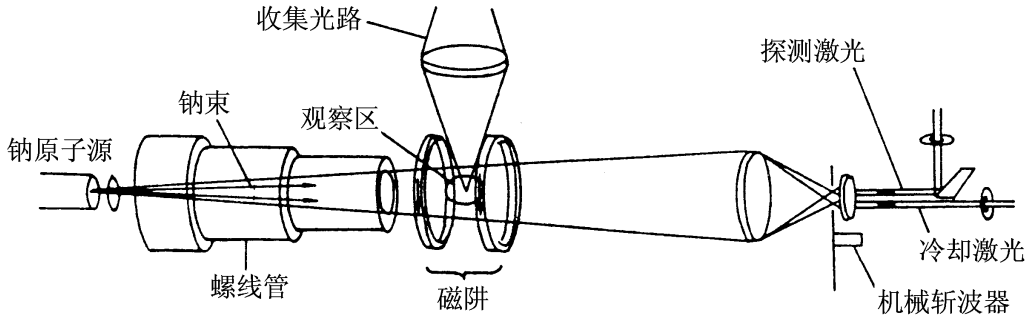


图 15.3

使用磁阱捕陷原子,捕陷的原子数为 10^4,每立方厘米捕陷的原子数为 10^3 个,捕陷时间为0. 8s.

2. 光阱

为了应用光阱,首先要使原子产生感应电偶极矩,这样在光场作用下,原子才能感受到势阱的存在.

1968 年,Letokhov 首先提出用激光驻波场在一维空间捕陷原子的想法,当驻波的频率相对原子跃迁频率红移时,原子将被驱赶到波腹处,但这种阱的深度很浅,阱的范围只有半个波长的数量级,没有实用价值. 随后提出了多种方案,直到

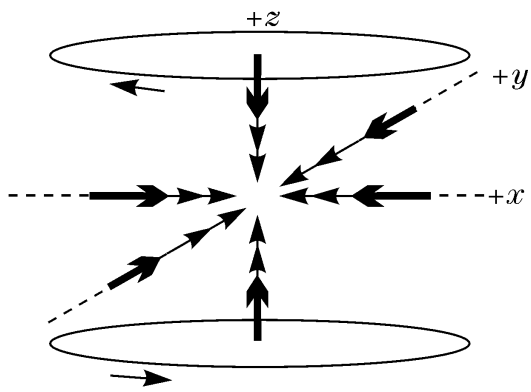


图 15.4

1986 年朱棣文等人在贝尔实验室首先实现了激光原子阱,他们用一束频率红移的强聚焦的高斯激光束[①]构成原子阱. 光束的焦点区就是阱区,并用三维光学黏胶包住.

使用这样的光阱捕陷原子,捕陷的原子数为10^3 个,每立方厘米捕陷的原子数为10^{12}个(即原子密度比磁阱高得多),捕陷时间为 2 秒.

3. 磁-光阱

同时使用磁场和光场建立的原子阱称为磁-光阱. 它的非均匀磁场由两个平行反向的电流线圈产生,三双两两相对的激光束沿三个坐标轴交会在磁场中心,如图 15.4 所示.

1987 年,磁-光阱首次实验成功. 磁-光阱捕陷的原子数为 10^7 个,每立方厘米捕陷的原子数为10^{11}个,捕陷时间为120 秒. 捕陷原子的时间比前两者长得多,充分体现了磁-光阱的优越性.

*§ 15.2　激光冷却与捕陷原子在科学技术上的意义

本节仅从“原子参量的精确测量”、“为重要物理实验提供条件”、“光镊在生命科学中的应用”这三个方面介绍激光冷却与捕陷原子在科学技术上的意义.

一、对原子参量的精确测量　原子喷泉

大多数原子参量都是通过原子与电磁波的共振相互作用(如光谱)取得的,而精确测量原子参量的一个重大障碍就是原子无规则的热运动,在室温下原子的平均速度约为 500m/s. 假设所有的原子都处于静止状态,则它们都吸收和发射同频率的电磁波,其频宽就是谱线的自然宽度. 但原子的运动必然导致谱线的展宽. 利用激光冷却和捕陷原子后,不仅原子的温度接近零度(0K),而且能长时间局限在一个小区域中,这极大地提高了测量的精确度. 特别是朱棣文小组根据扎查利亚斯和汉斯的建议,把高度冷却并捕陷的原子非常平缓地向上喷出,在重力场中作抛体运动,当到达顶点时原子正好处在微波腔内,在重力作用下刚开始下落时原子几乎是静止的,这时用微波脉冲使原子从一个量子态跃迁到另一量子态. 朱棣文小组用这种被称为“原子喷泉”的方法测量了原子两个量子态之间的能量差,其实验精确

---

① 在激光谐振腔中,只有波面与反射镜曲面曲率一致的模式才能在腔内形成稳定的振荡,在激光器中不同位置光束的曲率半径不同. 高斯光束的分布形式为:

$$\varphi(x,y,z) = A(z)e^{-B(z)(x^2+y^2)}e^{ikz}.$$

度达到一千亿分之一. 计算表明,采用冷却原子和原子喷泉相结合的方法,可以使原子钟的精度提高三个量级.精确的计时不仅对验证相对论、量子理论等当代理论有非常重要的意义;而且对民用军用飞机、宇宙飞船导航,乃至全球定位系统也都有重要意义.

二、超冷原子气体囚禁于空间,为重要物理实验提供了条件

1. 玻色-爱因斯坦气体凝聚的验证

玻色-爱因斯坦凝聚现象是指,对于无内部相互作用的原子气体,当温度低于某一定值时,原子气体突然在最低能级的量子态凝聚.一团混乱的气态物质在顷刻之间便转换为高度有序的物质状态. 处于这种状态的大量原子的行为就像单个粒子的行为一样.目前已实现了锂、钠、铷等原子的玻色-爱因斯坦凝聚.玻色-爱因斯坦凝聚态所具有的奇特性质不仅对基础研究具有重要意义,而且在芯片技术和纳米技术等领域都有广阔的应用前景.

2. 开辟了原子光学的新分支

利用光场可以使中性原子束聚集、准直、反射、分束、偏转;特别是冷原子对应的德布罗意波长($\lambda_0 = h/p = h/mv$)比较长,可以用来研究原子干涉和原子衍射等的物质波现象. 从电子光学已取得的成果可以预见原子光学这个新分支在科学上的意义.

3. 超冷原子碰撞过程的研究

超冷原子的速度很小,碰撞的时间很长,在碰撞过程中激发态原子能衰变,甚至在碰撞时间内形成分子. 由于原子相互作用时间极长,一般的统计力学已不适用,超冷原子的碰撞过程已完全有别于常温下原子的经典碰撞.

三、光镊在生命科学中的应用

光镊就是用光形成的镊子,光镊技术是激光冷却和捕陷原子技术在应用方面的进一步发展.

1970 年,美国贝尔实验室的阿什金教授采用一束高斯激光,成功地在垂直于光的传播方向上束缚了悬浮在水中的聚苯乙烯微粒,这一实验将辐射压的应用从原子量级扩展到微米范围,奠定了光镊的研究基础. 之后他又设计了双光束光阱,初步实现了光镊的雏形. 1986 年他把单束激光引入高数值孔径物镜,形成三维光学势阱,它可以无损伤地操纵活体物质,人们称之为光镊.由于光镊对粒子无损伤,具有非接触性、作用力均匀、微米量级的精确定位、可选择特定个体、并可在生命状态下进行操作等特点,特别适用于对细胞和亚细胞层次上活体的研究,如对细胞的捕获、分选与操纵,弯曲细胞骨架,克服布朗运动所引起的细菌旋转等. 因此,它可以在单分子和单个细胞层次上对生命科学中的许多基本问题进行研究. 光镊技术对于进一步了解生命过程的基本规律,研究生命过程的现象,建立基因数据库,改

良物种,研究人类疑难病(如癌症和艾滋病等)的形成机理及治疗方法,都有非常重要的意义. 随着激光冷却和捕陷原子技术的不断发展,光镊技术将会在化学、生物学和医学领域成为科学家非常有用的工具,给细胞和亚细胞研究和应用开辟新的领域.

总之,激光冷却和捕陷技术有着极其广泛的应用前景,有待人们进一步去开拓.

附　　录

附录1　矢量分析与张量计算初步

数学是表达物理规律的一种语言.在理论物理学中,如果不熟练地掌握相应学科的数学语言,也就不可能进入该学科的领域.对于电动力学来说,最重要的是数学物理方法和矢量分析了.

附录1首先归纳矢量代数的基本公式,接着介绍克隆尼克δ符号(简称δ符号)和列维-斯维塔符号(简称ε符号),梯度、散度和旋度的定义,∇算符及场量的二阶导数和场量乘积的导数,以及矢量积分变换定理.在此基础上导出正交曲线坐标系中的矢量微分公式.最后,介绍张量概念,以及张量代数和张量分析的基本公式.

§A1.1　矢量代数　δ符号与ε符号

本节给出矢量的标积、矢积、三矢量的混合乘积与三矢量的矢积公式,δ符号与ε符号的定义及其常用公式.

一、矢量代数的基本公式

直角坐标系的基矢用e_x, e_y, e_z或e_1, e_2, e_3表示,位置矢量x可表示为

$$x = xe_x + ye_y + ze_z = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k. \tag{1}$$

仿上,矢量a和b可表示为

$$a = \sum_k a_k e_k, \quad b = \sum_k b_k e_k.$$

1. 矢量a和矢量b的标积

$$a \cdot b = b \cdot a = \sum_k a_k b_k, \tag{2}$$

$$a \cdot b = b \cdot a = ab\cos\alpha. \tag{3}$$

式中α为a与b的夹角.

2. 矢量a和矢量b的矢积

$$a \times b = -b \times a = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$a \times b = ab\sin\alpha n. \tag{5}$$

式中 α 为 a 与 b 的夹角,n 为垂直于 a 和 b 的单位矢量.

3. 三矢量的混合乘积

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a) \\ &= -a \cdot (c \times b) = -c \cdot (b \times a) = -b \cdot (a \times c). \end{aligned} \tag{6}$$

特别是,由第一个等式可得

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c. \tag{7}$$

这表明,只要保持 a,b,c 的次序不变,可以交换标乘“·”与矢乘“×”符号的位置,但必须先矢乘后标乘.这个公式在证明 ε 符号与 δ 符号的关系及矢量的积分变换定理时要用到.

4. 三矢量的矢积

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c, \tag{8}$$

$$(c \times b) \times a = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c. \tag{9}$$

这两个公式的共同点是什么?一句话,用 a 点乘远处的矢量 c 后乘 b 减去 a 点乘近处的矢量 b 后乘 c.

二、δ 符号

克隆尼克 δ 符号的定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{10}$$

式中 i,j 为所有整数.

由定义可见,δ_{ij} 对脚标 i,j 是对称的,即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{11}$$

这个公式在计算场量的二阶导数与函数乘积的导数时要用到.常用的公式还有:

1. 和式

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \delta_{ij} = b_i. \tag{12}$$

证　由定义出发,逐项计算可得

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \delta_{ij} = b_0\delta_{i0} + b_1\delta_{i1} + \cdots + b_i\delta_{ii} + \cdots = b_i.$$

2. 基矢的标积

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}. \tag{13}$$

证　由 $e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$,及 $e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = \cdots = 0$

可证.

【例】　试用(13)式导出(2)式.

解　注意两和式相乘时,不能用相同的求和指标,由此得

$$a \cdot b = \sum_i a_i e_i \cdot \sum_j b_j \cdot e_j = \sum_i a_i \sum_j b_j \delta_{ij} = \sum_i a_i b_i.$$

3. 偏导数

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \tag{14}$$

证　在位置矢量 $x = \sum_i x_i e_i$ 中,各分量是独立变量,因此有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

4. 正交归一关系式

在三角函数和特殊函数(见第六章)的正交归一关系式中均出现 δ 符号. 如

$$\int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{l}{2}\delta_{kn}, \tag{15}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}. \tag{16}$$

三、ε 符号

ε 符号是列维 - 斯维塔符号 ε_{ijk} 的简称,它是三阶完全反对称张量,其定义为

(1) 完全反对称性:任意交换两脚标时,ε_{ijk} 反号,即

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132}. \tag{17}$$

(2) 分量值:

$$\varepsilon_{123} = 1. \tag{18}$$

ε_{jk} 共有几个分量呢?由于 ε_{ijk} 的脚标 i,j,k 均可取 1,2,3 的数值,故共有 $3^3 = 27$ 个分量. ε_{jk} 共有几个不为零的分量呢?由于 ε_{ijk} 的反对称性,凡有两个脚标相同的分量均为零,如 $\varepsilon_{113} = -\varepsilon_{113}$,必有 $\varepsilon_{113} = 0$. 为保证 ε_{ijk} 的三个脚标不相同,ε_{jk} 的脚标 i 有三个取值的可能,i 取定后 j 有两个取值的可能,i,j 取定后 k 只有一个取值的可能,故 ε_{jk} 不为零的分量数为 $3\times 2\times 1 = 6$ 个,它们的数值由(17)、(18)式确定.

常用的公式还有:

1. 三阶行列式的展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \tag{19}$$

证　只要将 6 个不为零的 ε_{ijk} 值代入上式即得证.

2. 两矢量的矢积公式

(1) 矢量式. 由(4)式及(19)式可证

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i a_j b_k . \tag{20}$$

(2) 分量式. 将 $a \times b = \sum_i e_i (a \times b)_i$ 与(20)式比较,即得

$$(a \times b)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k . \tag{21}$$

3. ε符号与 δ 符号的关系

$$\sum_k \varepsilon_{jk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{22}$$

证　采用两种方法计算$(a \times b)^2$,比较两者结果即得证.

一是利用(2)、(19)和(5)式计算,并注意到 $\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}$,即有

$$(a \times b)^2 = \sum_k (a \times b)_k (a \times b)_k = \sum_{kijlm} \varepsilon_{kij} a_i b_j \varepsilon_{klm} a_l b_m$$

$$= \sum_{ijlm} a_i a_l b_j b_m \left(\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \right). \tag{23}$$

二是利用(7)、(9)和(2)式计算,即

$$(a \times b)^2 = (a \times b) \cdot (a \times b) = [(a \times b) \times a] \cdot b$$

$$= [a^2 b - (a \cdot b)a] \cdot b = a^2 b^2 - (a \cdot b)(a \cdot b)$$

$$= \sum_{ij} a_i a_i b_j b_j - \sum_{ij} a_i b_i a_j b_j = \sum_{ijlm} a_i a_l b_j b_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}). \tag{24}$$

比较(23)式和(24)式,即得证.

ε符号在电动力学中可用来推导场量的高阶导数公式和场量乘积导数公式(见 § A1.3);在量子力学中可用来导出力学量算符的对易关系①.

习题 A1.1

1. 试用 ε符号证明(7)式.
2. 试由(22)式证明(8)式.

§ A1.2　∇ 算符　梯度、散度和旋度的算符表示

从本节开始研究关于场的数学方法. 所谓"场",就是描写空间区域V 中每一点上某个物理量的函数.

若空间的区域V 中定义了标量函数$\varphi(x)$,则 $\varphi(x)$ 称为标量场. 例如,位于坐标原点的电荷 Q_f 在空间激发的电势为[若规定 $\varphi(\infty) = 0$]

$$\varphi(x) = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{1}$$

① 汪德新. 2003. 量子力学. 理论物理学导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社. 48 ~ 49.

式中 $R = |x|$. 这个标量函数 $\varphi(x)$ 就是标量场. 电势场 $\varphi(x)$、温度场 $T(x)$、密度场 $\rho(x)$ 都是标量场.

若空间的区域 V 中定义了矢量函数 $E(x)$,则 $E(x)$ 称为矢量场. 在上面的例子中,Q_f 在空间每一点激发的电场为

$$E(x) = \frac{Q_f R}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \tag{2}$$

式中 $R = x$. 这个矢量函数 $E(x)$ 就是矢量场. 电场 $E(x)$、磁场 $B(x)$、速度场 $\boldsymbol{v}(x)$ 都是矢量场.

因为空间 V 中有无限多个点,所以标量场或矢量场是分别和无限多个标量或无限多个矢量相对应的.

本节讨论标量场和矢量场的微分运算,首先从现象出发引入梯度、散度和旋度的概念;随后导出它们在直角坐标系中的表达式,由此得出标量场的全微分公式,矢量场的高斯定理和斯托克斯定理以及三个复合函数的微分公式,它们在实际计算中非常有用.

一、∇ 算符的定义

在直角坐标系中,∇ 算符定义为

$$\nabla = \sum_k e_k \frac{\partial}{\partial x_k} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

∇ 算符是微分算符,它作用于其后的函数.

二、标量场的梯度

谈到梯度,自然会想到地图上的等高线:两等高线距离较接近处比较陡,即梯度大;两等高线距离较远处比较平坦,即梯度小. 这是日常生活中建立起来的“梯度”概念. 那么,数学上怎样严格定义它呢?

设给定标量场 $\varphi(x)$,研究 P 点处标量场的梯度,见图 A1.1. 当从不同方向离开 P 点时,一般 $\varphi(x)$ 都要变,但沿不同方向变化的“快慢”一般不相同. 那么,沿哪个方向 $\varphi(x)$ 变化得最“快”呢?显然是等值面的法线方向,该方向的单位矢量记作 n_0. 现在把沿 n_0 方向离开 P 点的距离记作 Δn,在 P 点处标量场 $\varphi(x)$ 的梯度定义为

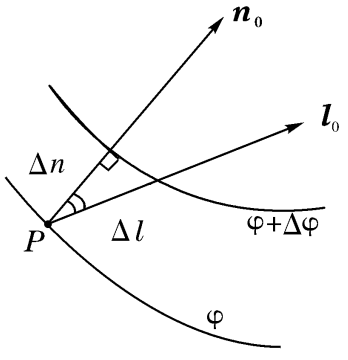


图 A1.1

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} n_0. \tag{4}$$

式中 grad 是英文 gradient(梯度)一词的缩写.

这表明,梯度是矢量,其方向是 $\varphi(x)$ 增加最“快”的方向,即 $\varphi(x)$ 的等值面的法线方向;其大小是 $\varphi(x)$ 沿该方向单位长度的增量,即

$\varphi(x)$ 沿此方向的方向导数. 这样,空间中的每一点 x,对应着一个标量 $\varphi(x)$,对应着一个矢量 $\mathrm{grad}\varphi$,可见 $\mathrm{grad}\varphi$ 是一个矢量场.

在电动力学中的常用公式:

1. $\mathrm{grad}\varphi$ 沿 l 方向的投影

可以证明

$$(\mathrm{grad}\varphi)_l = \frac{\partial \varphi}{\partial l}. \tag{5}$$

证　设 l_0 是沿 l 方向的单位矢量. l_0 与 n_0 的夹角为 α,见图 A1.1. 由梯度的定义式及三角学公式可得

$$(\mathrm{grad}\varphi)_l = l_0 \cdot \mathrm{grad}\varphi = l_0 \cdot n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\cos\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta n}{\Delta l} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}.$$

2. $\mathrm{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式

可以证明

$$\mathrm{grad}\varphi = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \nabla \varphi \tag{6}$$

证　取 l_0 分别为直角坐标系的单位矢量 e_x, e_y, e_z,由(5)式及 ∇ 算符的定义式可得

$$\mathrm{grad}\varphi = \sum_{k=1}^{3} e_k (\mathrm{grad}\varphi)_k = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \nabla \varphi.$$

据此,今后就用 $\nabla\varphi$ 表示标量场 $\varphi(x)$ 的梯度.

3. $\varphi(x)$ 的全微分

$$\mathrm{d}\varphi = \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}x. \tag{7}$$

证　由多元函数的全微分公式出发,利用矢量的标积公式,即有

$$\mathrm{d}\varphi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{3} (\mathrm{grad}\varphi)_k \mathrm{d}x_k = \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}x.$$

上式给出相距 $\mathrm{d}x$ 的两点间 $\varphi(x)$ 的差.

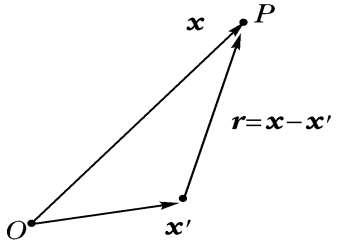


图 A1.2

4. 复合函数的梯度

$$\nabla \psi(u) = \psi'(u) \nabla u. \tag{8}$$

式中 $u = u(r)$,r 是由源点 x' 指向场点 x 的矢量:

$$r = x - x',$$

如图 A1.2 所示.

证　由 ∇ 算符的定义式及复合函数的导数公式,得

$$\nabla \psi(u) = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial \psi(u)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\mathrm{d}\psi(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\psi(u)}{\mathrm{d}u}\sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \psi'(u) \nabla u.$$

【例 1】　已知 $r = |r| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$，求 ∇r 及 $\nabla' r$. 式中 $\nabla' = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial}{\partial x_k'}$.

解　为计算 $\nabla r = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial r}{\partial x_k}$，先求 $\frac{\partial r}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= \frac{1}{2}[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}} 2(x - x') \\ &= \frac{x - x'}{r}.\end{aligned}$$

由此可找出偏导的规律性，易见

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y'}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z'}{r}.$$

代入 ∇r，即有

$$\nabla r = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{x_k - x_k'}{r} = \frac{r}{r}. \tag{9}$$

同理可得

$$\nabla' r = \sum_{k=1}^{3} e_k \frac{\partial r}{\partial x_k'} = -\sum_{k=1}^{3} e_k \frac{x_k - x_k'}{r} = -\frac{r}{r} = -\nabla r. \tag{10}$$

【例 2】　已知 k 为常矢，求 $\nabla(k \cdot r)$.

解　由 ∇ 算符的定义出发，可得

$$\nabla(k \cdot r) = \sum_{n=1}^{3} e_n \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{m=1}^{3} k_m (x_m - x_m') = \sum_{m,n=1}^{3} e_n k_m \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{3} e_n k_n = k.$$

【例 3】　已知 k 为常矢，求 $\nabla e^{ik \cdot r}$.

解　设 $u = k \cdot r$，则 $\psi(u) = e^{iu}$，由复合函数的梯度公式及例 2，即有

$$\nabla e^{ik \cdot r} = \nabla e^{iu} = \frac{\mathrm{d}e^{iu}}{\mathrm{d}u} \nabla u = ie^{iu} \nabla(k \cdot r) = ike^{ik \cdot r} \tag{11}$$

这表明，∇ 算符作用于 $e^{ik \cdot r}$，相当于以 ik 乘以 $e^{ik \cdot r}$，这个公式在讨论电磁波的辐射时常常用到，见第十一章.

三、矢量场的散度

为了形象地描述矢量场，通常引入力线来表示它. 例如，引入电力线来形象地描述静电场. 正电荷 Q_f 发出电力线，称为源头；负电荷会聚电力线，称为尾闾. 显然，当电量 Q_f 越大，则穿出包围 Q_f 的封闭面的电通量越大，Q_f 所在处电场的散度越大. 可见散度是用来反映矢量场的源强度的. 当然，通过计算矢量场的通量以获得矢量场在 P 点的源强度时，应注意：

第一，封闭面 S 必须包围 P 点；

第二,封闭面所围体积元的体积 ΔV 要趋于零,才能反映矢量场 P 点的性质;

第三,矢量场穿过 S 的通量 $\oint_S E \cdot d\sigma$ 与 ΔV 之比在 $\Delta V \to 0$ 的极限便定义为矢量场在 P 点的散度,即

$$\mathrm{div}E = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S E \cdot d\sigma}{\Delta V}, \tag{12}$$

式中 div 是英文 divergence(散度) 的缩写.

由散度的定义可见,空间的每一点 x,对应一个标量 $\mathrm{div}E$,故 $\mathrm{div}E$ 是一个标量场.

在电动力学中的常用公式:

1. $\mathrm{div}E$ 在直角坐标系的表达式

可以证明

$$\mathrm{div}E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot E. \tag{13}$$

证　以 P 点为中心作一个长方体,它的六个面平行于坐标面,它的长宽高分别为 dx, dy, dz,长方体的体积为 $dV = dx\,dy\,dz$.

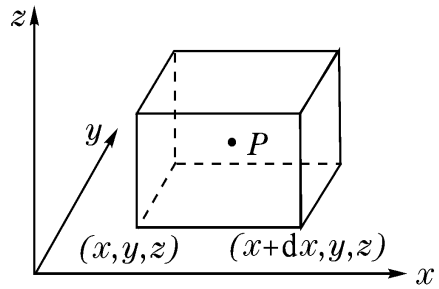


图 A1.3

取长方体的表面为封闭面 S,算出矢量场穿出封闭面的总通量再除以它所包围的无穷小体积 dV,即得矢量场在长方体中心处的散度.

为此,先计算矢量场穿出左、右两面元的通量,位于 x 和 $x + dx$ 处的面积元矢量分别为 $-e_x dy dz$ 和 $e_x dy dz$. 两面元上的场强分别取面元中心处的 E 值,分别记作 $E(x, \bar{y}, \bar{z})$ 和 $E(x + dx, \bar{y}, \bar{z})$,$\bar{y}$ 与 $\bar{z}$ 分别表示对 y 和 z 取平均.

穿出左右两面元的通量为

$$\begin{aligned} & E(x, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (-e_x dy dz) + E(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) \cdot e_x dy dz \\ &= [E_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) - E_x(x, \bar{y}, \bar{z})] dy dz \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$

同理,穿出前后两面元的通量为 $\frac{\partial E_y}{\partial y} dV$,穿出上、下两面元的通量为 $\frac{\partial E_z}{\partial z} dV$.

由此得穿出长方体表面的总通量为

$$\oint_S E \cdot d\sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV.$$

将上式代入散度的定义式,即得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x \boldsymbol{e}_x + E_y \boldsymbol{e}_y + E_z \boldsymbol{e}_z) \\ &= \nabla \cdot \boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

据此,今后就用 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 的散度.

矢量场的散度描述了场的“局部”性质,即空间中任一点的邻域内场的性质.但是,利用它可以导出矢量场有关“全局”性质的定理 —— 高斯定理.

2. 高斯定理

设 $\boldsymbol{E}$ 的各分量及其偏导是连续函数,S 为 V 的表面,则有

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{14}$$

证　将体积 V 分成无限多个无限小的体积元 ΔV_k,其表面为 S_k,由散度定义可得

$$\lim_{\Delta V_k \to 0} \mathrm{div}\boldsymbol{E} \Delta V_k = \oint_{S_k} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

对 V 内所有体积元求和,得

$$\lim_{\max \Delta V \to 0} \sum_k \nabla \cdot \boldsymbol{E} \Delta V_k = \sum_k \oint_{S_k} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

由体积分的定义,上式左边就是 $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V$,上式右边是无限多个面积分之和.应注意体积元 ΔV_k 的表面 S_k 可分为两类:有的体积元的部分表面就是 V 的表面 S 的一部分,沿它们的积分之和就是 $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$;而体积元的其余表面则是相邻两体积元之间的内部分界面,这些分界面为两体积元所共有,不同的仅是它们的外法线方向相反,即面积元矢量的大小相等而符号相反,因而沿内部分界面的积分将一正一负而互相抵消,高斯定理得证.

类似的证明方法在“斯托克斯定理”和“静电问题的惟一性定理”中将会再次用到.

3. 复合函数的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}, \tag{15}$$

式中 $u = u(r)$,见图 A 1. 2.

证　由 ∇ 算符定义式及复合函数导数公式可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_k(u)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}A_k(u)}{\mathrm{d}u} \frac{\partial u}{\partial x_k},$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \right)_k,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = (\nabla u)_k,$$

代入原式,则有

$$\nabla \cdot A(u) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} \right)_k (\nabla u)_k = \nabla u \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}.$$

【例 4】 已知 $R = x e_x + y e_y + z e_z$,求 $\nabla \cdot R$.

解 由散度在直角坐标系的表达式出发,得

$$\nabla \cdot R = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

【例 5】 已知 E_0 和 k 为常矢量,求 $\nabla \cdot [E_0 \cos(k \cdot r)]$.

解 设 $u = k \cdot r$,由复合函数的散度公式得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [E_0 \cos(k \cdot r)] &= \nabla \cdot (E_0 \cos u) = (\nabla u) \cdot \frac{\mathrm{d}E_0 \cos u}{\mathrm{d}u} \\ &= [\nabla (k \cdot r)] \cdot (-E_0 \sin u) \\ &= -k \cdot E_0 \sin(k \cdot r). \end{aligned}$$

四、矢量场的旋度

矢量场的散度反映矢量场的源强度,它可以通过对矢量场的通量的研究求得;矢量场的旋度反映矢量场的涡旋性质,它可以通过对矢量场的环流的研究求得.

在电磁学中已得知,矢量场的环流就是矢量沿某一闭合曲线的线积分.

对于静电场,有

$$\oint_l E \cdot \mathrm{d}l = 0, \tag{16}$$

这表明,静电场的电力线不构成闭合曲线,故静电场的环流为零,静电场是势场.

对于静磁场,有

$$\oint_l B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I_\mathrm{f}, \tag{17}$$

这 表明,静磁场的磁力线构成闭合曲线,故静磁场的环流可以不为零,式中 I_f 是穿过回路 l 的电流.

由此可见,矢量场力线的涡旋性质与矢量场的环流有直接的关系. 当然,通过计算矢量场的环流以获得矢量场在 P 点的涡旋性质时,应注意:

第一,回路必须环绕 P 点;

第二,回路所围面元的面积 $\Delta\sigma$ 要趋于零,才能反映矢量场在 P 点的性质;

第三,规定回路的绕行方向与所围面元的法线方向(即 $\Delta\sigma = n\Delta\sigma$ 的方向)成右螺关系;

第 四,当 $\Delta\sigma = n\Delta\sigma$ 取不同方向时,一般会得到不同的环流值. 该环流值与 $\Delta\sigma$ 之比在 $\Delta\sigma \to 0$ 的极限便定义为矢量场旋度在 n 方向的分量,即

$$\mathrm{rot}_n B = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\oint_l B \cdot \mathrm{d}l}{\Delta\sigma}. \tag{18}$$

式中 rot 是英文 rotation(旋度)一词的缩写,$\mathrm{rot}_n B$ 的脚标 n 与面积元矢量 $\Delta\boldsymbol{\sigma} = n\Delta\sigma$ 的方向相对应.

总之,$\mathrm{rot}B$ 的大小,就是当 n 取一切可能方向时 $\lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \dfrac{\oint_l B \cdot \mathrm{d}l}{\Delta\sigma}$ 的最大值;$\mathrm{rot}B$ 的方向,就是该极限值取最大值时 $\Delta\boldsymbol{\sigma} = n\Delta\sigma$ 的方向. 如果将这个方向记作 n_0,并将相应的面积元矢量记作 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_0 = n_0\Delta\sigma_0$,则(18)式可写成矢量形式

$$\mathrm{rot}B = \lim_{\Delta\sigma_0 \to 0} \frac{\oint_l B \cdot \mathrm{d}l}{\Delta\sigma_0} n_0. \tag{19}$$

由此可见,空间的每一点 x,对应一个矢量 $\mathrm{rot}B$,故 $\mathrm{rot}B$ 是一个矢量场.

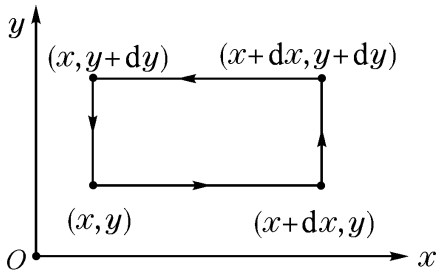


图 A1.4

在电动力学中常用的公式有:

1. $\mathrm{rot}B$ 在直角坐标系的表达式

可以证明

$$\mathrm{rot}B = \sum_{k=1}^{3} e_k \mathrm{rot}_k B = \nabla \times B. \tag{20}$$

证　只要计算 $\mathrm{rot}B$ 的三个直角坐标分量 $\mathrm{rot}_k B$ 代入上式即可. 现以计算 $\mathrm{rot}_z B$ 为例,取法线沿 e_z 的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = e_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,见图 A1.4. 沿面元边界线的线积分可分四段计算,即

$$\begin{aligned}
\oint_l B \cdot \mathrm{d}l = {} & B(x, \bar{y}) \cdot (-e_y \mathrm{d}y) + B(x + \mathrm{d}x, \bar{y}) \cdot (e_y \mathrm{d}y) \\
& + B(\bar{x}, y) \cdot (e_x \mathrm{d}x) + B(\bar{x}, y + \mathrm{d}y) \cdot (-e_x \mathrm{d}x) \\
= {} & [B_y(x + \mathrm{d}x, \bar{y}) - B_y(x, \bar{y})]\mathrm{d}y - [B_x(\bar{x}, y + \mathrm{d}y) - B_x(\bar{x}, y)]\mathrm{d}x \\
= {} & \left[\frac{\partial B_y}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \left[\frac{\partial B_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
= {} & \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

将上式代入 $\mathrm{rot}_z B$,注意到 $\lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \Delta\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则有

$$\mathrm{rot}_z B = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\oint_l B \cdot \mathrm{d}l}{\Delta\sigma} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}, \tag{21}$$

用 $k = 1,2,3$ 表示 x,y,z,用 ∇_k 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$,上式可写成

$$\mathrm{rot}_3 B = \nabla_1 B_2 - \nabla_2 B_1, \tag{22}$$

同理可得

$$\mathrm{rot}_1 B = \nabla_2 B_3 - \nabla_3 B_2, \tag{23}$$

$$\mathrm{rot}_2 B = \nabla_3 B_1 - \nabla_1 B_3, \tag{24}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{rot} B &= \sum_{k=1}^{3} e_k \mathrm{rot}_k B \\ &= e_1(\nabla_2 B_3 - \nabla_3 B_2) + e_2(\nabla_3 B_1 - \nabla_1 B_3) + e_3(\nabla_1 B_2 - \nabla_2 B_1) \\ &= \nabla \times B.\end{aligned}$$

据此,今后我们就用 $\nabla \times B$ 表示 B 的旋度.

类似地,矢量场的旋度描述了场的“局部”性质,利用它也可以导出矢量场有关“全局”性质的定理 —— 斯托克斯定理.

2. 斯托克斯定理

设 B 的各分量及其偏导数是连续函数,l 是 S 的边界线,则

$$\int_S (\nabla \times B) \cdot \mathrm{d}\sigma = \oint_l B \cdot \mathrm{d}l. \tag{25}$$

证　证明方法与高斯定理的证明相似,首先将 S 分成无限多个无限小的面元,设 P_k 是第 k 个面元 $\Delta\sigma_k$ 上的一点,面元 $\Delta\sigma_k$ 的法线为 n_k. 由旋度的定义式即可求得矢量场 B 在 P_k 点的旋度在 n_k 方向上的投影为

$$(\nabla \times B)_{n_k} = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \frac{\oint_{l_k} B \cdot \mathrm{d}l}{\Delta\sigma_k}. \tag{26}$$

式中 l_k 为面元 $\Delta\sigma_k$ 的边线,利用

$$(\nabla \times B)_{n_k} \Delta\sigma_k = (\nabla \times B) \cdot n_k \Delta\sigma_k = (\nabla \times B) \cdot \Delta\sigma_k,$$

可将(26) 式改写为

$$\lim_{\Delta\sigma_k \to 0} (\nabla \times B) \cdot \Delta\sigma_k = \oint_{l_k} B \cdot \mathrm{d}l.$$

对 S 上所有的面积元求和,得

$$\lim_{\max \Delta\sigma \to 0} \sum_k (\nabla \times B) \cdot \Delta\sigma_k = \sum_k \oint_{l_k} B \cdot \mathrm{d}l,$$

由面积分的定义,上式的左边就是 $\int_S (\nabla \times B) \cdot \mathrm{d}\sigma$,上式的右边是无限多个线积分之和. 应注意面积元 $\Delta\sigma_k$ 的边线 l_k 可分为两类:有的面积元的部分边线就是 S 的边线 l 的一段,这部分线积分之和就是 $\oint_k B \cdot \mathrm{d}l$;而面积元的其余边线则是相邻两面积元之间的内部分界线,这些分界线为两面积元所共有,不同的仅是线积分绕行的方向相反,因而沿内部分界线的积分将一正一负而互相抵消,斯托克斯定理得证.

3. 复合函数的旋度

$$\nabla \times B(u) = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}B(u)}{\mathrm{d}u}, \tag{27}$$

式中 $u = u(r)$,见图 A1.2.

证　由 ∇ 算符的定义式,复合函数的导数公式,以及 ε 符号的有关公式,可得

$$\nabla \times B = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \nabla_j B_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \frac{\partial B_k(u)}{\partial x_j} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}B_k(u)}{\mathrm{d}u}$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i (\nabla u)_j \left[\frac{\mathrm{d}B(u)}{\mathrm{d}u}\right]_k = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}B(u)}{\mathrm{d}u}.$$

【例 6】　已知 $R = x e_x + y e_y + z e_z$,求 $\nabla \times R$.

解　用 ε 符号表示 $\nabla \times R$,利用 $\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$,对 k 叠加后注意到 ε_{jk} 有两个脚标相同的分量为零,则有

$$\nabla \times R = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \nabla_j x_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i \delta_{jk} = \sum_{ij} \varepsilon_{ijj} e_i = 0. \tag{28}$$

【例 7】　已知 E_0 和 k 是常矢量,求 $\nabla \times [E_0 \sin(k \cdot r)]$.

解　设 $u = k \cdot r$,由(27)式及例 2 可得

$$\nabla \times [E_0 \sin(k \cdot r)] = \nabla \times (E_0 \sin u) = (\nabla u) \times \frac{\mathrm{d}E_0 \sin u}{\mathrm{d}u}$$

$$= [\nabla (k \cdot r)] \times (E_0 \cos u) = k \times E_0 \cos(k \cdot r).$$

通过本节的叙述,读者不难发现:梯度、散度、旋度可用于描述哪一类(而不是哪一个)现象?它们的定义是什么?为什么要这样定义?以及有关它们的重要定理和公式.这一切,都是学好矢量分析的重要基础.

习题 A1.2

1. 已知 $r = \sum_n (x_n - x_n') e_n$, $\nabla = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $\nabla' = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n'}$,且 a, k, ω 为常量,求

(1) $\nabla \frac{1}{r}$;　(2) $\nabla' \frac{1}{r}$;　(3) $\nabla \cdot \frac{r}{r^3} (r \neq 0)$;　(4) $\nabla \times \frac{r}{r^3}$;　(5) $(a \cdot \nabla) r$;

(6) $\nabla \cdot [A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k \cdot r - \omega t)}]$;　(7) $\nabla \times [A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k \cdot r - \omega t)}]$.

∇ 算符对 $A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k \cdot r - \omega t)}$ 的作用等效于哪一个矢量与它的乘积?若 $\nabla \cdot A = 0$ 或 $\nabla \times A = 0$, k 与 A 有何关系?

2. 若 $A(x,t)$ 和 $\varphi(x,t)$ 可分别表示为 $A[x, t'(x,t)]$ 及 $\varphi[x, t'(x,t)]$,试证明

$$\nabla \times A = \nabla \times A \Big|_{t' \text{不变}} + (\nabla t') \times \frac{\partial A}{\partial t'}, \tag{29}$$

$$\nabla \varphi = \nabla \varphi \Big|_{t' \text{不变}} + (\nabla t') \frac{\partial \varphi}{\partial t'}. \tag{30}$$

§ A1.3　二阶导数与函数乘积的导数

本节将要导出两组公式:一组是二阶导数公式,即两个 ∇ 算符连续作用于标量函数或矢量函数的公式;另一组是函数乘积的导数公式,即 ∇ 算符作用于两个函数乘积的公式.

在导出这些公式之前,先说明求和的一些规则:

第一,求和的脚标(也称哑标)可随意改变符号.例如

$$\sum_k \varepsilon_{jk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$

式中 k 是求和脚标,可以随意改变,如将 k 改为 n,上式不发生任何变化.当然,不能把求和脚标改为自由脚标 i,j,l,m.

第二,若 $A_{ij} = A_{ji}$(对脚标 i,j 对称),$B_{ij} = -B_{ji}$(对脚标 i,j 反对称),则

$$\sum_{i,j} A_{ij}B_{ij} = 0. \tag{1}$$

证　先按第一条规则改变脚标 i 为 j,改变脚标 j 为 i,再利用 A_{ij} 和 B_{ij} 脚标的对称或反对称性质,则有

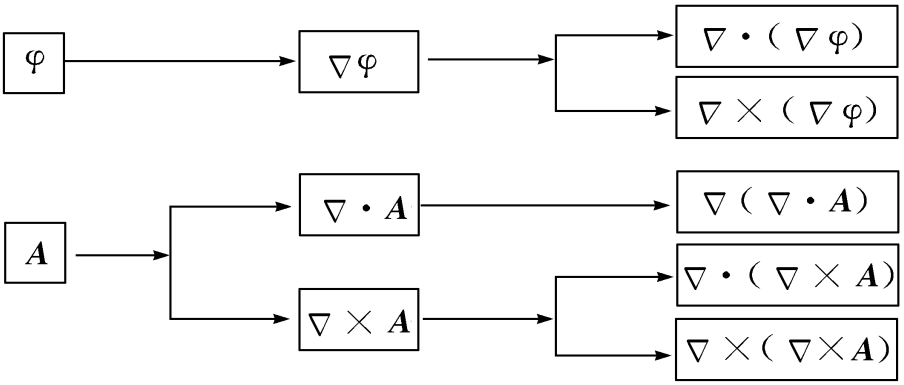
$$\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = \sum_{ij} A_{ji}B_{ji} = \sum_{ij} A_{ij}(-B_{ij}),$$

移项后合并,即有

$$\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = 0.$$

一、二阶导数公式

标量场 $\varphi(x)$ 只能进行梯度运算,矢量场 $A(x)$ 可以进行散度运算和旋度运算[①].由此可见,关于 φ 有两个公式,关于 A 有三个公式:



1. $\nabla\varphi$ 的散度

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{2}$$

可见 $\nabla\varphi$ 的散度就是 φ 的拉普拉斯 $\nabla^2\varphi$.

2. $\nabla\varphi$ 的旋度

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = 0. \tag{3}$$

证　先用 ε 符号表示 $\nabla\times(\nabla\varphi)$,即得

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = \sum_{ijk}\varepsilon_{jk}e_i\nabla_j(\nabla\varphi)_k = \sum_{ijk}\varepsilon_{jk}e_i\nabla_j\nabla_k\varphi,$$

① 矢量场的梯度 $\nabla A(x)$ 是张量,见 § A1.6.

由于 ε_{ijk} 对 j,k 反对称($\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{kj}$),而 $\nabla_j\nabla_k$ 对 j,k 对称($\nabla_j\nabla_k=\nabla_k\nabla_j$),由(1)式可知,上式为零.

$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$ 表明,标量场的梯度 $\nabla\varphi$ 必为无旋场(纵场).

【例 1】　试证明 $\nabla\times\frac{r}{r^3}=0$.

证　因 $-\nabla\frac{1}{r}=\frac{r}{r^3}$,由(3)式可知

$$\nabla\times\frac{r}{r^3}=\nabla\times\left(-\nabla\frac{1}{r}\right)=0.$$

3. $\nabla\cdot A$ 的梯度

$$\nabla(\nabla\cdot A)=\sum_i e_i\nabla_i\sum_j\nabla_j A_j=\sum_{ij}e_i\nabla_i\nabla_j A_j. \tag{4}$$

是一个矢量,给出 A 之后当可按上式计算.

4. $\nabla\times A$ 的散度

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=0. \tag{5}$$

证　用 ε 符号表示 $\nabla\times A$,即有

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=\sum_i\nabla_i(\nabla\times A)_i=\sum_{ijk}\nabla_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k,$$

由于 ε_{ijk} 对 i,j 反对称,$\nabla_i\nabla_j$ 对 i,j 对称,由(1)式可知,上式为零.

$\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$ 表明,矢量场的旋度 $\nabla\times A$ 必为无源场(横场).

5. $\nabla\times A$ 的旋度

$$\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A. \tag{6}$$

证　两次应用 ε 符号后再应用 ε 符号与 δ 符号的关系式便有

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times A)&=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\nabla_j(\nabla\times A)_k=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\nabla_j\sum_{lm}\varepsilon_{klm}\nabla_l A_m\\&=\sum_{ijlm}e_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_l A_m\\&=\sum_{ij}e_i(\nabla_j\nabla_i A_j-\nabla_j\nabla_j A_i)\\&=(\sum_i e_i\nabla_i)(\sum_j\nabla_j A_j)-(\sum_j\nabla_j^2)(\sum_i e_i A_i)\\&=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A.\end{aligned}$$

二、函数乘积的导数

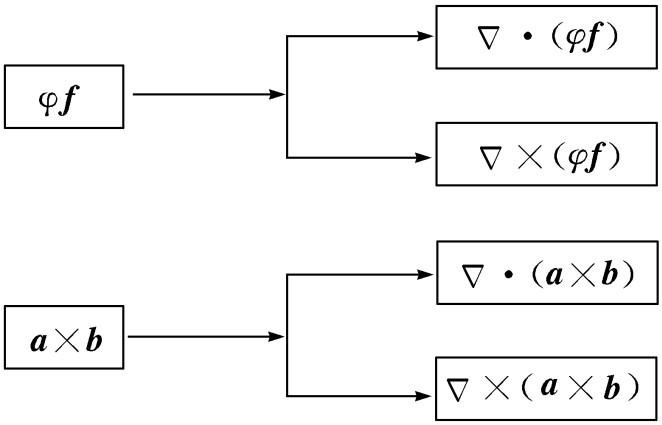
有两种方式可以得到标量场,对标量场只有梯度运算:

$$\varphi\ \psi\longrightarrow\nabla(\varphi\ \psi),$$

$$a\cdot b\longrightarrow\nabla(a\cdot b).$$

有两种方式可以得到矢量场,对矢量场可以进行散度和旋度运算:

这些公式为:



$$\nabla(\varphi\ \psi)=\ \varphi\nabla\psi+\ \psi\nabla\varphi, \tag{7}$$

$$\nabla\cdot(\varphi f)=\ \varphi\nabla\cdot f+\ (\nabla\varphi)\cdot f, \tag{8}$$

$$\nabla\times\ (\varphi f)=\ \varphi\nabla\times\ f+\ (\nabla\varphi)\times\ f, \tag{9}$$

$$\nabla(a\cdot b)=\ (b\cdot\nabla)a+\ b\times\ (\nabla\times\ a)+\ (a\cdot\nabla)b+\ a\times\ (\nabla\times\ b), \tag{10}$$

$$\nabla\cdot(a\times\ b)=\ b\cdot(\nabla\times\ a)-\ a\cdot(\nabla\times\ b), \tag{11}$$

$$\nabla\times\ (a\times\ b)=\ (b\cdot\nabla)a-\ b(\nabla\cdot a)-\ (a\cdot\nabla)b+\ a(\nabla\cdot b). \tag{12}$$

证　导出这些公式有两种方法：

[第一种方法]　利用 ∇ 算符的微分性质对标量函数的乘积进行微分运算. 凡遇矢量的标积按 $a\cdot b=\ \sum_i a_ib_i$ 化为标量函数的乘积；凡遇矢量的矢积用 ε 符号按 $a\times\ b=\ \sum_{ijk}\varepsilon_{jk}e_ia_jb_k$ 化为标量函数的乘积.

1. $\nabla(\varphi\ \psi)=\ \sum_i e_i\nabla_i\ (\varphi\ \psi)=\ \sum_i e_i(\varphi\nabla_i\ \psi+\ \psi\nabla_i\ \varphi)=\ \varphi\nabla\psi+\ \psi\nabla\varphi.$

2. $$\nabla\cdot(\varphi f)=\ \sum_i\nabla_i\ (\varphi f_i)=\ \sum_i(\varphi\nabla_i\ f_i+\ f_i\nabla_i\ \varphi)$$
$$=\ \varphi\nabla\cdot f+\ f\cdot\nabla\varphi=\ \varphi\nabla\cdot f+\ (\nabla\varphi)\cdot f.$$

3. $$\nabla\times\ (\varphi f)=\ \sum_{ijk}\varepsilon_{jk}e_i\nabla_j\ (\varphi f_k)=\ \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i[\varphi\nabla_j\ f_k+\ (\nabla_j\ \varphi)f_k]$$
$$=\ \varphi\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\nabla_j\ f_k+\ \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i(\nabla\varphi)_jf_k$$
$$=\ \varphi\nabla\times\ f+\ (\nabla\varphi)\times\ f.$$

注意，∇ 为矢量算符，$\nabla\varphi$ 为矢量函数. 对于 $(\nabla\varphi)$ 与 f 的标积，两者次序可互换，即 $f\cdot\nabla\varphi=\ (\nabla\varphi)\cdot f$；对于 $(\nabla\varphi)$ 与 f 的矢积，则因为矢量算符 ∇ 在前，矢量函数 f 在后，应得 $(\nabla\varphi)\times\ f$，正如上面的证明那样. 如果改变次序，则出现一负号：

$$(\nabla\varphi)\times\ f=-\ f\times\ (\nabla\varphi).$$

4. $\nabla(a\cdot b)=\ \sum_i e_i\nabla_i\ \sum_j a_jb_j=\ \sum_{ij}e_i(b_j\nabla_i\ a_j+\ a_j\nabla_i\ b_j).$

上式的第一项先将 $\nabla_i=\ \sum_m\delta_{im}\nabla_m$ 及 $a_j=\ \sum_l\delta_{jl}a_l$ 代入，然后利用 δ 符号由

简变繁,再利用 ε 符号的定义由繁变简,即得

$$\begin{aligned}\sum_{ij} e_i b_j \nabla_i a_j &= \sum_{ijlm} e_i b_j \delta_{im}\delta_{jl} \nabla_m a_l \\ &= \sum_{ijlm} e_i b_j (\delta_{il}\delta_{jm} - \sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}) \nabla_m a_l \\ &= \sum_{ij} e_i b_j \nabla_j a_i + \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_i b_j \sum_{lm} \varepsilon_{kml} \nabla_m a_l \quad (\text{注意:}\varepsilon_{klm} = -\varepsilon_{kml}) \\ &= \sum_j b_j \nabla_j \sum_i e_i a_i + \sum_{ijk} \varepsilon_{jki} e_i b_j (\nabla \times a)_k \\ &= (b\cdot\nabla)a + b\times(\nabla\times a).\end{aligned}$$

第二项同理可得,只要将 a 与 b 的位置互换即可,(10) 式得证.

通过前面四个公式的证明,已将这种方法及有关技巧展示出来了. 读者不妨先自行总结这个方法的要点,并作为练习,给出(11)、(12) 式的证明.

[第二种方法]　根据 ∇ 算符的矢量和微分性质将公式写出来,主要的根据是:

第一,两矢量的矢积公式: $a\times b = -b\times a$;

第二,三矢量的矢积公式: $a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c$;

第三,三矢量的混合乘积公式: $a\cdot(b\times c) = c\cdot(a\times b) = b\cdot(c\times a)$;

第四,保证等式两边同为标量、矢量或同阶张量;

第五,∇ 算符要分别作用于其后函数.

现在逐一证明如下:

1. $\nabla(\psi\varphi)$ 的公式

∇ 要分别作用于 ψ 和 φ,并保证两边为矢量,只能写出如下的公式

$$\nabla(\psi\varphi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi.$$

2. $\nabla\cdot(\varphi f)$ 的公式

∇ 要分别作用于 φ 和 f,并保证两边为标量,也只能写出如下的公式

$$\nabla\cdot(\varphi f) = \varphi\nabla\cdot f + (\nabla\varphi)\cdot f.$$

3. $\nabla\times(\varphi f)$ 的公式

∇ 要分别作用于 φ 和 f,并保证两边为矢量,因为 ∇ 与 f 分别是矢量算符和矢量,原先 ∇ 在 f 之前,故 $\nabla\varphi$ 应在 f 之前

$$\nabla\times(\varphi f) = \varphi\nabla\times f + (\nabla\varphi)\times f.$$

4. $\nabla(a\cdot b)$ 的公式

∇ 要分别作用于 a 和 b,并保证两边为矢量. 采用记号 a_c 或 b_c 分别表示 ∇ 不作用于它们,由此得

$$\nabla(a\cdot b) = \nabla(a\cdot b_c) + \nabla(a_c\cdot b).$$

现在考虑在什么公式中会出现 $\nabla(a\cdot b_c)$ 和 $\nabla(a_c\cdot b)$ 呢?由于 ∇ 算符只作用于其后函数,不作用于其前函数,受三矢量的矢积公式启发,便有

$$b\times(\nabla\times a)=\nabla(b_c\cdot a)-(b\cdot\nabla)a,$$
$$a\times(\nabla\times b)=\nabla(a_c\cdot b)-(a\cdot\nabla)b.$$

注意,上两式右边第一项的 ∇ 算符必须置于两矢量标积之前,否则是没有意义的.将上两式移项后代入前式,即有

$$\nabla(a\cdot b)=(b\cdot\nabla)a+b\times(\nabla\times a)+(a\cdot\nabla)b+a\times(\nabla\times b).$$

5. $\nabla\cdot(a\times b)$ 的公式

∇ 要分别作用于 a,b,并保证两边为标量,采用 a_c,b_c 记号及三矢量混合乘积公式,可得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(a\times b)&=\nabla\cdot(a\times b_c)-\nabla\cdot(b\times a_c)\\&=b\cdot(\nabla\times a)-a\cdot(\nabla\times b).\end{aligned}$$

6. $\nabla\times(a\times b)$ 的公式

仿上,可得

$$\nabla\times(a\times b)=\nabla\times(a\times b_c)+\nabla\times(a_c\times b).$$

第一项按三矢量的矢积公式,原始形式为

$$\nabla\times(a\times b_c)=(\nabla\cdot b_c)a-(\nabla\cdot a)b_c,$$

但 b_c 既然不受 ∇ 的作用,应置于 ∇ 的前面,同时可略去脚标 c,即

$$\nabla\times(a\times b_c)=(b\cdot\nabla)a-b(\nabla\cdot a).$$

第二项 $\nabla\times(a_c\times b)=-\nabla\times(b\times a_c)$,只要将第一项的 a,b 互换,即得

$$-\nabla\times(b\times a_c)=-(a\cdot\nabla)b+a(\nabla\cdot b),$$

将上两式代入前式,即有

$$\nabla\times(a\times b)=(b\cdot\nabla)a-b(\nabla\cdot a)-(a\cdot\nabla)b+a(\nabla\cdot b).$$

【例 2】 试按 $\nabla\times(\varphi f)$ 的公式计算 $\nabla\times\dfrac{r}{r^3}$.

解 取 $\varphi=r^{-3}$,$f=r$,由(9)式得

$$\nabla\times\frac{r}{r^3}=\frac{1}{r^3}\nabla\times r+\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\times r=0+\frac{-3}{r^4}\frac{r}{r}\times r=0.$$

【例 3】 试证明 $A\times(\nabla\times A)=\dfrac{1}{2}\nabla A^2-(A\cdot\nabla)A$.

解 在(10)式中令 $a=b=A$,可得

$$\nabla A^2=2[(A\cdot\nabla)A+A\times(\nabla\times A)].$$

两边除 2 之后移项,即有

$$A\times(\nabla\times A)=\frac{1}{2}\nabla A^2-(A\cdot\nabla)A.\tag{13}$$

习题 A1.3

1. 试用 ε 符号(即第一种方法)证明(11)、(12)式.
2. 试利用 ∇ 算符的矢量性质和微分性质(即第二种方法)证明(6)式.

3. 试按 $\nabla\cdot(\varphi f)$ 的公式重新计算 $\nabla\cdot\left(\frac{r}{r^3}\right)$，已知 $r\neq 0$.

4. 已知 a 为常矢量，B 为 r 的函数，求

(1) $\nabla\cdot\frac{r}{r^5}$；　(2) $\nabla\cdot\frac{a}{r}$；　(3) $\nabla\times\frac{a}{r}$；　(4) $\nabla\times(a\times r)$；

(5) $\nabla\cdot[(a\cdot r)r]$；　(6) $\nabla\times[(a\cdot r)r]$；　(7) $\nabla\cdot(xB)$；　(8) $\nabla\times(xB)$.

5. 试证明：

(1) $\nabla\times(\omega\times R)=2\omega$，式中 ω 为常矢；

(2) $\nabla\times\left(m\times\frac{R}{R^3}\right)=\frac{3m\cdot e_R e_R-m}{R^3}$，式中 m 为常矢，且 $R\neq 0$.

6. 若 M 为常矢量，试证明当 $R\neq 0$ 时，有

$$\nabla\times\frac{\mu_0 M\times R}{4\pi R^3}=-\mu_0\nabla\frac{M\cdot R}{4\pi R^3}. \tag{14}$$

§ A1.4　矢量的积分变换定理 格林定理和亥姆霍兹定理

本节首先由高斯定理出发导出一组体积分与面积分之间的变换定理，由斯托克斯定理出发导出一组面积分与线积分之间的变换定理. 随后，还是由高斯定理出发，导出以标量场梯度形式出现的积分变换定理 —— 格林第一、第二、第三定理. 在此基础上，由格林定理导出亥姆霍兹定理，定理指出惟一确定一个矢量场的条件. 最后，在习题中利用亥姆霍兹定理证明，对于连续、可微且在无限远处为零的任何矢量场均可分解为纵场和横场之和，并且分解是惟一的.

一、矢量的积分变换定理

矢量的积分变换定理包含两组公式：体积分与面积分之间的变换以及面积分与线积分之间的变换.

1. 体积分与面积分的变换

在附录 § A1.2 已导出高斯定理，它指出：矢量场散度 $\nabla\cdot A$ 的体积分等于矢量场 A 沿该体积表面的面积分

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\cdot A=\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot A, \tag{1}$$

由高斯定理出发，可以证明，矢量场旋度 $\nabla\times f$ 的体积分为

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\times f=\oint_S \mathrm{d}\sigma\times f, \tag{2}$$

标量场梯度 $\nabla\varphi$ 的体积分为

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\varphi=\oint_S \mathrm{d}\sigma\varphi. \tag{3}$$

这三个公式可以归结为替换法则

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla \leftrightarrow \oint_S \mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

它既可点乘矢量函数 A 得(1)式,也可叉乘矢量函数 f 得(2)式,还可以直接作用于标量函数 φ 得(3)式.

证　为了由(1)式导出(2)式,即为了得到 $\nabla \times f$ 的体积分,令

$$A = f \times c, \tag{5}$$

式中 c 为任意的常矢量,代入(1)式,得

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla \cdot (f \times c) = \oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot (f \times c),$$

为了将常矢量 c 提出积分号外,利用附录§ 1.3的(11)式和附录§ 1.1的(6)式,便有

$$\nabla \cdot (f \times c) = c \cdot (\nabla \times f) - f \cdot (\nabla \times c) = c \cdot (\nabla \times f),$$

$$\mathrm{d}\sigma \cdot (f \times c) = c \cdot (\mathrm{d}\sigma \times f).$$

将上两式代入前式,即有

$$\int_V \mathrm{d}V\, c \cdot (\nabla \times f) = \oint_S c \cdot (\mathrm{d}\sigma \times f).$$

由于 c 为常矢量,可提出积分号外

$$c \cdot \int_V \mathrm{d}V\ \nabla \times f = c \cdot \oint_S \mathrm{d}\sigma \times f,$$

由于 c 的任意性,即有[①]

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla \times f = \oint_S \mathrm{d}\sigma \times f.$$

为了由(1)式导出(3)式,令

$$A = c\varphi, \tag{6}$$

用类似的方法可以证明,留给读者作为练习.

2. 面积分与线积分的变换

在§ A1.2已导出斯托克斯定理,它指出矢量场的旋度 $\nabla \times A$ 的面积分等于 A 沿该面积边线的线积分

$$\int_S \mathrm{d}\sigma \cdot \nabla \times A = \oint_l \mathrm{d}l \cdot A, \tag{7}$$

利用§ A1.1的(7)式,得

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c, \tag{8}$$

可得

---

① 实际上,分别令 $c = e_x, e_y, e_z$,便可证明矢量 $\int_V \mathrm{d}V\ \nabla \times f$ 的三个直角分量分别与矢量 $\oint_S \mathrm{d}\sigma \times f$ 的三个直角分量相等,即两矢量相等.

$$\mathrm{d}\sigma\cdot(\nabla\times A)=(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\cdot A. \tag{9}$$

代入(7)式,可得斯托克斯定理的另一形式

$$\int_S(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\cdot A=\oint_l \mathrm{d}l\cdot A. \tag{10}$$

由(10)式出发,易证(见习题1)

$$\int_S(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\times f=\oint_l \mathrm{d}l\times f, \tag{11}$$

$$\int_S(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\varphi=\oint_l \mathrm{d}l\varphi. \tag{12}$$

仿上,(10)、(11)、(12)这三个公式也可归结为替换法则

$$\int_S(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\leftrightarrow\oint_l \mathrm{d}l. \tag{13}$$

它同样可以点乘矢量函数 A 得(10)式,叉乘矢量函数 f 得(11)式,直接作用于标量函数 φ 得(12)式.

这些公式将在第二章“电磁作用下的守恒定律”中用到.

二、格林定理

由高斯定理出发,可以证明三个格林定理,分别称为格林第一、第二、第三定理.

$$\oint_S\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V[\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\mathrm{d}V, \tag{14}$$

$$\oint_S[\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi]\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V[\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi]\mathrm{d}V, \tag{15}$$

$$\oint_S\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V[\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)^2]\mathrm{d}V. \tag{16}$$

证　高斯定理为

$$\oint_S A\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V\nabla\cdot A\mathrm{d}V,$$

与(14)式比较,自然会想到,将

$$A=\varphi\nabla\psi$$

代入,会有什么结果.于是

$$\oint_S\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi)\mathrm{d}V=\int_V[\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\mathrm{d}V,$$

(14)式得证.

在(14)式中交换 φ 与 ψ,得

$$\oint_S\psi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V[\psi\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi]\mathrm{d}V,$$

两式相减,即得(15)式.

在(14)中令 $\psi=\varphi$,得

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V [\varphi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi] \mathrm{d}V ,$$

由 $\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = (\nabla \varphi)^2$,即得(16) 式.

格林定理在电动力学中有着广泛的应用,它是求解静电场的“格林函数法” 的基础.本节的亥姆霍兹定理也可以通过格林定理来证明.

三、亥姆霍兹定理

定理　若给定矢量场 $A(x)$ 在区域 V 内的散度和旋度,以及它在边界面 S 上的法向分量 $A_n(x)|_S$ 或切向分量 $A_t(x)|_S$,则 $A(x)$ 惟一确定.

证　设 $A_1(x)$ 及 $A_2(x)$ 同时满足定理的条件,令

$$a(x) = A_1(x) - A_2(x), \tag{17}$$

既然 V 内的 $\nabla \cdot A$ 与 $\nabla \times A$ 已给定,即 $A_1(x)$ 与 $A_2(x)$ 有相同的散度和旋度值,即

$$\nabla \cdot a(x) = \nabla \cdot A_1(x) - \nabla \cdot A_2(x) = 0, \tag{18}$$

$$\nabla \times a(x) = \nabla \times A_1(x) - \nabla \times A_2(x) = 0. \tag{19}$$

同理,既然 $A_1(x)$ 与 $A_2(x)$ 在边界面上有相同的 $A_n(x)|_S$ 或 $A_t(x)|_S$ 值,故

$$a_n(x)|_S = A_{1n}(x)|_S - A_{2n}(x)|_S = 0, \tag{20}$$

或

$$a_t(x)|_S = A_{1t}(x)|_S - A_{2t}(x)|_S = 0. \tag{21}$$

因为标量场的梯度必为无旋场[见附录 § 1.3 的(3) 式],由 $\nabla \times a = 0$,可令

$$a(x) = \nabla \varphi, \tag{22}$$

为计算 $\nabla^2 \varphi$,对上式两边取散度,即得

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot a = 0, \tag{23}$$

将上式代入格林第三定理

$$\oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V [\varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2] \mathrm{d}V ,$$

即得

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 \mathrm{d}V = \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\sigma. \tag{24}$$

现在证明,在定理给定的两种边界条件下,上式的面积分为零:

(1) 如果给定边界面 S 上的 $A_n(x)|_S$,利用(22) 及(20) 式可得

$$\varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\sigma|_S = \varphi\, a(x) \cdot n \mathrm{d}\sigma|_S = \varphi\, a_n(x)|_S \mathrm{d}\sigma = 0,$$

故

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 \mathrm{d}V = \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{25}$$

2. 如果给定边界面 S 上的 $A_t(x)|_S$,设 t 为边界面 S 上 x 点处任一切向单位矢量(即 t 可沿 x 点处任意切线方向).利用(21) 式及附录 § 1.2 的(5) 式,即有

$$\left.\frac{\partial \varphi(x)}{\partial t}\right|_S = t \cdot \nabla \varphi(x)\Big|_S = t \cdot a(x)\Big|_S = a_t(x)\Big|_S = 0. \tag{26}$$

这表明,$\varphi(x)$ 沿边界面的任意切线方向均无变化,即 S 面是 $\varphi(x)$ 的等值面.这样,

(24) 式右边面积分的 φ 便可以作为常数提出积分号外,即

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 \mathrm{d}V = \varphi\oint_S \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\sigma = \varphi\oint_S a\cdot \mathrm{d}\sigma = \oint_V \nabla\cdot a\mathrm{d}V = 0. \tag{27}$$

这里利用了高斯定理和(18) 式.

综合上述,在定理给定的两种边界条件下,均导致

$$\int_V (\nabla\varphi)^2 \mathrm{d}V = \oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\sigma = 0.$$

由于 $(\nabla\varphi)^2 \geqslant 0$,故有

$$\nabla\varphi = 0. \tag{28}$$

将上式代入(17) 式和(22) 式,便有

$$A_1(x) - A_2(x) = a(x) = \nabla\varphi = 0, \tag{29}$$

故

$$A_1(x) = A_2(x). \tag{30}$$

定理得证.

四、横场和纵场

满足 $\nabla\cdot A(x) = 0$ 的场称为横场,满足 $\nabla\times A = 0$ 的场是纵场,可以证明(见本节习题第 2 题):

(1) 对于连续、可微且在无限远处为零的任何矢量场 $A(x)$ 可分解为横场 $A_L(x)$ 和纵场 $A_T(x)$ 之和:

$$A(x) = A_L(x) + A_T(x). \tag{31}$$

(2) 上述分解是惟一的.

习题 A1.4

1. 试证明(3)、(11)、(12) 式.
2. 试证明(31) 式及其分解是惟一的 .

§ A1.5　正交曲线坐标系中的矢量微分公式

本节给出球坐标系和柱坐标系中梯度、散度、拉普拉斯和旋度的计算公式.

一、基本概念

在直角坐标系中,空间中一个点的位置由三个坐标 (x_1,x_2,x_3) 即 (x,y,z) 来表示.

在正交曲线坐标系中,空间中一个点的位置由三个坐标 (q_1,q_2,q_3) 来表示:对于球坐标,用 (R,θ,ϕ) 表示;对于柱坐标,用 (ρ,ϕ,z) 表示.

1. 直角坐标 $x_i(i = 1,2,3)$ 与正交曲线坐标 $q_\alpha(\alpha = 1,2,3)$ 的关系

可由图 A1.5 求得.

(1) 球坐标与直角坐标的关系

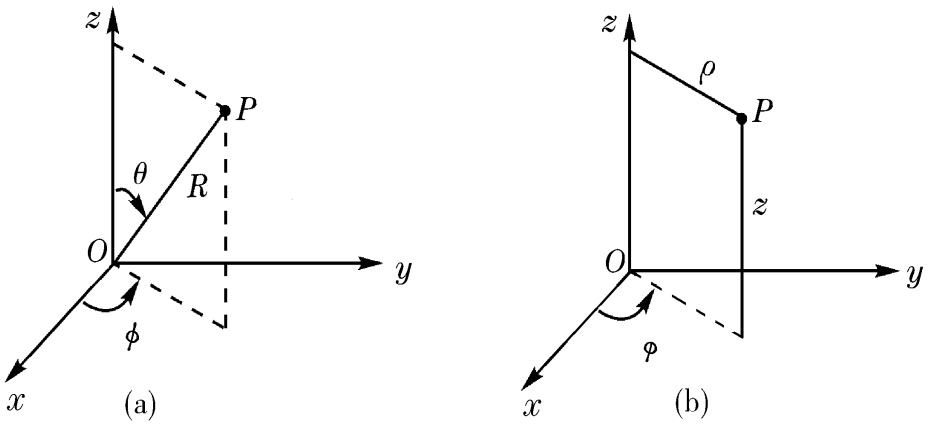


图 A1.5

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi, \\ y = R\sin\theta\sin\phi, \\ z = R\cos\theta. \end{cases} \tag{1}$$

也可写成

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{2}$$

(2) 柱坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi, \\ z = z. \end{cases} \tag{3}$$

也可写成

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \tag{4}$$

2. 坐标线

让动点 x 的某一个坐标 q_α 变化,而另外两个坐标 $q_\beta(\beta \neq \alpha)$ 保持不变,x 终点的轨迹称为 q_α 坐标线,球坐标与柱坐标的坐标线如图 A1.6(a)、(b) 所示.

显然,坐标线的方位与观察点 P 的位置有关.

3. 基矢 e_α

在空间任一点 P,作与坐标线相切的切线,长度为 1,方向指向 q_α 增加的方向,即为 P 点的基矢 e_α.

应注意,在正交曲线坐标系中,基矢的方位一般与 P 点的位置有关. 球坐标系的基矢 e_R, e_θ, e_ϕ 及柱坐标系的 e_ρ, e_ϕ 都是坐标的函数,这是与直角坐标系的重要区

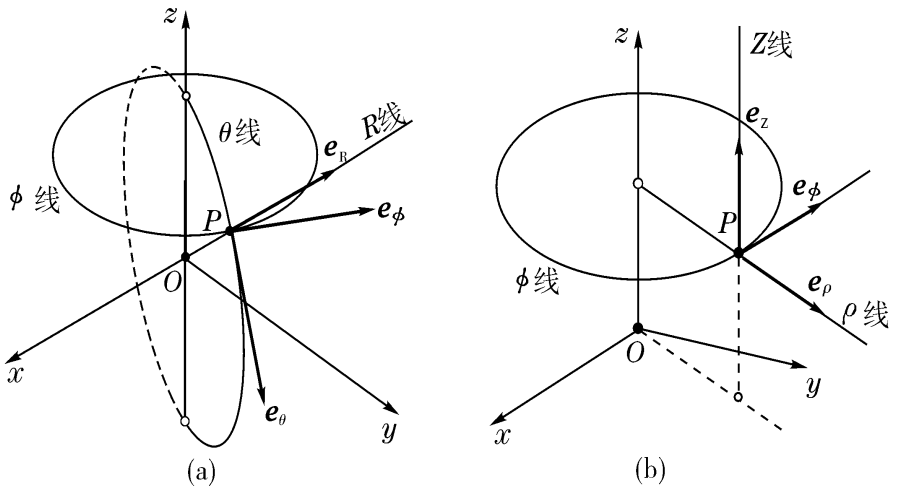


图 A1.6

别之一.

当然,对于正交曲线坐标系而言,它们的三个基矢仍互相正交(图 A1.6)

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

4. 微分线元和体积元

在直角坐标系中,沿 x,y,z 坐标线的微分线元分别为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$;而在正交曲线坐标系中,沿 q_1,q_2,q_3 坐标线的微分线元一般就不是 $\mathrm{d}q_1,\mathrm{d}q_2,\mathrm{d}q_3$ 了.

实际上,沿 q_1 坐标线的微分线元 $\mathrm{d}l_1$ 可以通过直角坐标系的微分线元 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 来计算,即

$$\mathrm{d}l_1 = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}. \tag{6}$$

当动点 x 沿 q_1 坐标线移动时,只有 q_1 变化,q_2 与 q_3 保持不变($\mathrm{d}q_2 = \mathrm{d}q_3 = 0$),以此代入 $x = x(q_1,q_2,q_3)$ 的全微分公式中,得

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1, \tag{7}$$

同理

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1, \qquad \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1. \tag{8}$$

将(7)、(8)式代入(6)式,即有

$$\mathrm{d}l_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,\mathrm{d}q_1. \tag{9}$$

同理可得沿 q_2,q_3 坐标线的微分线元 $\mathrm{d}l_2,\mathrm{d}l_3$. 这样,正交曲线坐标系的微分线元可记作

$$\mathrm{d}l_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}q_\alpha = H_\alpha \mathrm{d}q_\alpha. \tag{10}$$

式中 H_α 称为拉梅系数

$$H_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2}. \tag{11}$$

球坐标系的拉梅系数分别为：

$$H_R=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta}=1, \tag{12}$$

$$H_\theta=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$
$$=\sqrt{R^2\cos^2\theta\cos^2\phi+R^2\cos^2\theta\sin^2\phi+R^2\sin^2\theta}=R, \tag{13}$$

$$H_\phi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$
$$=\sqrt{R^2\sin^2\theta\sin^2\phi+R^2\sin^2\theta\cos^2\phi}=R\sin\theta. \tag{14}$$

球坐标系的微分线元分为

$$dl_1=dl_R=H_R dR=dR, \tag{15}$$
$$dl_2=dl_\theta=H_\theta d\theta=R d\theta, \tag{16}$$
$$dl_3=dl_\phi=H_\phi d\phi=R\sin\theta d\phi. \tag{17}$$

球坐标系的体积元为[参看图 A1.7(a)]

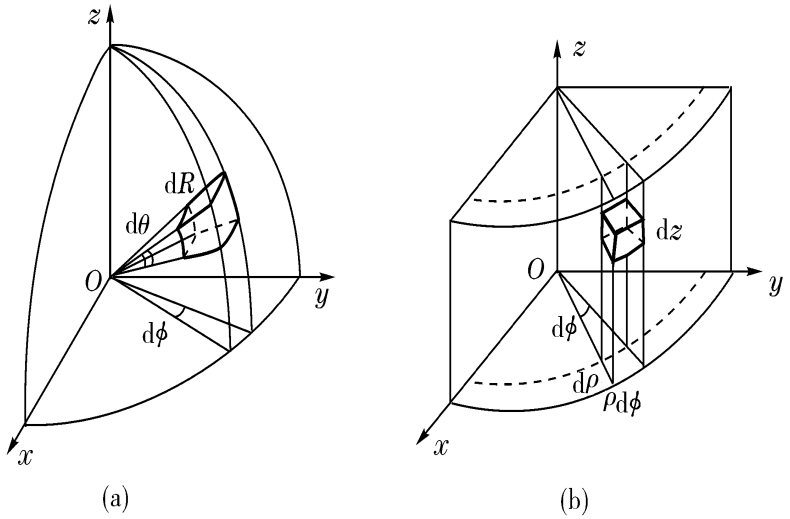


图 A1.7

$$dV=H_R dR H_\theta d\theta H_\phi d\phi=R^2\sin\theta dR\, d\theta d\phi. \tag{18}$$

柱坐标系的微分线元与体积元同理可得[见习题 A1.1]：

$$dl_1=dl_\rho=H_\rho d\rho=d\rho, \tag{19}$$
$$dl_2=dl_\phi=H_\phi d\phi=\rho d\phi, \tag{20}$$
$$dl_3=dl_z=H_z dz=dz, \tag{21}$$
$$dV=\rho d\rho d\phi dz. \tag{22}$$

二、梯度

首先将 ∇ 算符按三个互相正交的基矢方向分解，得

$$\nabla = \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{\partial}{\partial l_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha}. \tag{23}$$

随后将球坐标系与柱坐标系的拉梅系数代入即得梯度.

对于球坐标,有

$$\nabla \varphi = e_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + e_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + e_\phi \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}, \tag{24}$$

对于柱坐标,有

$$\nabla \varphi = e_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + e_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + e_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{25}$$

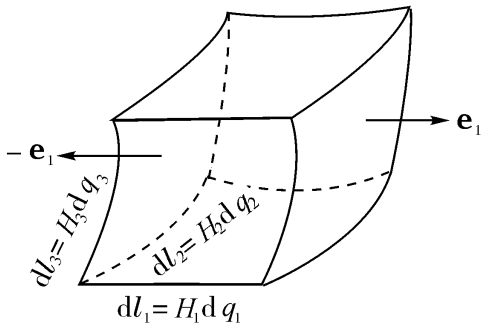


图 A1.8

三、散度

与直角坐标系中采用的方法一样,从散度的定义式

$$\nabla \cdot E = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S E \cdot d\sigma}{\Delta V} \tag{26}$$

出发,计算矢量场穿过图 A1.8 中六个面元的通量.

首先,矢量场穿出左、右两个面元的通量为:

$$\begin{aligned}
[E \cdot d\sigma]_{左} + [E \cdot d\sigma]_{右} &= [E \cdot (-e_1) H_2 H_3 dq_2 dq_3]_{左} + [E \cdot e_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3]_{右} \\
&= [(E_1 H_2 H_3)_{右} - (E_1 H_2 H_3)_{左}] dq_2 dq_3 \\
&= \frac{\partial (E_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_1} E_1 \right) dq_1 dq_2 dq_3.
\end{aligned} \tag{27}$$

注意,上式不仅 E_1,而且 $E_1 H_2 H_3$ 一般在左、右两面元上所取的值不相同,因为 H_2 与 H_3 一般为坐标的函数,写成(27)式最后那种形式是为了便于找出规律性.

于是,穿出前后两个面元的通量为

$$[E \cdot d\sigma]_{前} + [E \cdot d\sigma]_{后} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_2} E_2 \right) dq_1 dq_2 dq_3, \tag{28}$$

穿出上、下两个面元的通量为

$$[E\cdot \mathrm{d}\sigma]_{上}+[E\cdot \mathrm{d}\sigma]_{下}=\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3}E_3\right)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3. \tag{29}$$

综合上述,矢量场穿出图 A1.8 中体积元左、右、前、后、上、下六个面的总通量为

$$\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_\alpha}E_\alpha\right)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3. \tag{30}$$

将上式及体积元的体积 $\mathrm{d}V=H_1H_2H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$ 代入(26)式,即有

$$\nabla\cdot E=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S E\cdot \mathrm{d}\sigma}{\Delta V}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_\alpha}E_\alpha\right). \tag{31}$$

对于球坐标系,将 $H_1=1$,$H_2=R$,$H_3=R\sin\theta$ 代入,得

$$\nabla\cdot E=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2E_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}. \tag{32}$$

对于柱坐标系,将 $H_1=1$,$H_2=\rho$,$H_3=1$ 代入,得

$$\nabla\cdot E=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{33}$$

【例 1】 试在球坐标系计算 $\nabla\cdot\frac{R}{R^3}$,设 $R\neq 0$.

解 因 $\frac{R}{R^3}=\frac{Re_R}{R^3}=\frac{1}{R^2}e_R$,只有一个分量,故仅存(32)的第一项,代入即有

$$\nabla\cdot\frac{R}{R^3}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{1}{R^2}\right)=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}1=0.$$

【例 2】 试在球坐标计算 $\nabla\cdot R$.

解 将 $R=Re_R$ 代入(32)式,得

$$\nabla\cdot R=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2R)=\frac{1}{R^2}3R^2=3.$$

四、拉普拉斯

令 $A=\nabla\varphi$,则 $\nabla^2\varphi=\nabla\cdot A$,为此先写出 A 的 α 分量,由(23)式

$$\nabla\varphi=\sum_{\alpha=1}^{3}e_\alpha\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha},$$

得

$$A_\alpha=(\nabla\varphi)_\alpha=\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}, \tag{34}$$

代入(31)式

$$\nabla\cdot A=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_\alpha}A_\alpha\right),$$

得

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot A = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right].$$

对于球坐标系,将 $H_1=1, H_2=R, H_3=R\sin\theta$ 代入,得

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}. \tag{35}$$

对于柱坐标系,将 $H_1=1, H_2=\rho, H_3=1$ 代入,得

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{36}$$

五、旋度

类似地,由旋度的定义式

$$(\nabla\times A)_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\oint_l A\cdot\mathrm{d}l}{\Delta\sigma} \tag{37}$$

出发导出 $\nabla\times A$ 在正交曲线坐标系的表达式.

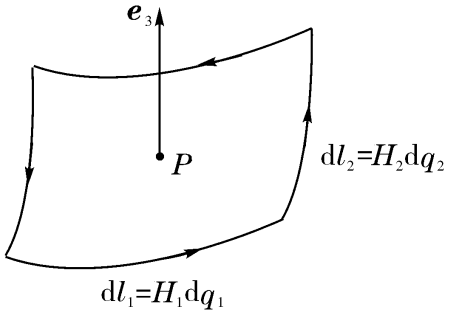


图 A1.9

先导出 $\nabla\times A_3$ 的表达式,矢量场沿 $\mathrm{d}\sigma = H_1H_2\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2e_3$ 的边线的环流为

$$\oint_l A\cdot\mathrm{d}l = [A\cdot e_2H_2\mathrm{d}q_2]_{右}+[A\cdot(-e_2H_2\mathrm{d}q_2)]_{左}$$

$$+[A\cdot(-e_1H_1\mathrm{d}q_1)]_{后}+[A\cdot e_1H_1\mathrm{d}q_1]_{前}$$

$$= [(A_2H_2)_{右}-(A_2H_2)_{左}]\mathrm{d}q_2-[(A_1H_1)_{后}-(A_1H_1)_{前}]\mathrm{d}q_1$$

$$= \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2-\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_1. \tag{38}$$

将上式及 $\mathrm{d}\sigma$ 代入定义式,即有

$$(\nabla\times A)_3e_3 = \frac{H_3e_3}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(A_1H_2)}{\partial q_2}\right]. \tag{39}$$

同理可得 $(\nabla\times A)_1e_1$ 及 $(\nabla\times A)_2e_2$,三者之矢量和即为

$$\nabla\times A = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1e_1 & H_2e_2 & H_3e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H_\alpha e_\alpha\frac{\partial(H_\gamma A_\gamma)}{\partial q_\beta}. \tag{40}$$

对于球坐标系,易得

$$\nabla\times A = \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]e_R+\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi)\right]e_\theta$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]e_\phi. \tag{41}$$

对于柱坐标系,则为

$$\nabla \times A=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]e_\rho+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]e_\phi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]e_z. \tag{42}$$

对于这些公式,重要的是知道它是怎样得来的,以及怎样运用.

【例 3】 试计算 $\nabla \times \dfrac{R}{R^3}$.

解 $A=\dfrac{R}{R^3}=\dfrac{1}{R^2}e_R$ 只存在 A_R,将 $A_R=\dfrac{1}{R^2}$,$A_\theta=0$,$A_\phi=0$ 代入(41)式,得

$$\nabla \times A=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{R^2}\right)e_\theta-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R^2}\right)e_\phi=0.$$

习题 A1.5

1. 试利用几何关系写出

(1) 球坐标系 e_R,e_θ,e_ϕ 与 e_x,e_y,e_z 的关系,以及 e_R,e_θ,e_ϕ 分别对 R,θ,ϕ 的偏导数;

(2) 柱坐标系 e_ρ,e_ϕ,e_z 与 e_x,e_y,e_z 的关系,以及 e_ρ,e_ϕ,e_z 分别对 ρ,ϕ,z 的偏导数.

2. 试证明矢量 $R_1=\{R_1,\theta_1,\phi\}$ 与 $R_2=\{R_2,\theta_2,\varphi\}$ 的夹角 Θ 满足

$$\cos\Theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi-\varphi_2).$$

3. 试求柱坐标系的拉梅系数 H_ρ,H_ϕ,H_z 及柱坐标系的微分线元与体积元.

4. 试将拉梅系数代入(40)式,证明(41)及(42)式.

5. 试问 c 为何值时,$\varphi=cR^2$ 满足 $\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}$.

6. 试证明:

(1) $\nabla R\cos\theta=e_z=\cos\theta e_R-\sin\theta e_\theta$;

(2) $\nabla\dfrac{\cos\theta}{R^2}=\dfrac{e_z-3(e_z\cdot e_R)e_R}{R^3}=-\dfrac{2\cos\theta e_R+\sin\theta e_\theta}{R^3}$.

§ A1.6　张量与张量计算初步

本节通过弹性体应力的描述介绍张量概念,随后介绍电动力学中常用的张量代数与张量分析的公式.

本节的讨论局限在三维二阶张量[①].

一、张量概念

一本书放在桌面上,书对桌面有压力,这个压力是垂直于桌面的.但对于一块橡胶,如果同时施以扭力和拉力,在橡胶内部的 P 点附近,其内部的相互作用力(称为应力)是怎样分布的呢?

---

① 物理量按它在空间转动下的变换性质分为标量、矢量、张量,本书将在第九章进行讨论.

如果通过橡胶内部的 P 点作一个面元 $\mathrm{d}\sigma_z = e_z \mathrm{d}\sigma_z$（见附录图 1.10），这时面元的前方介质对后方介质的作用力会不会垂直该面元呢？那就不一定. 同样，如果通过 P 点作另一面元 $\mathrm{d}\sigma_x = e_x \mathrm{d}\sigma_x$，其前方介质对后方介质的作用力不一定垂直于 $\mathrm{d}\sigma_x$. 实际上，通过 P 点可作出无限多个不同方向的面元，这些面元的前方介质对后方介质的作用力的大小和方向也不会相同.

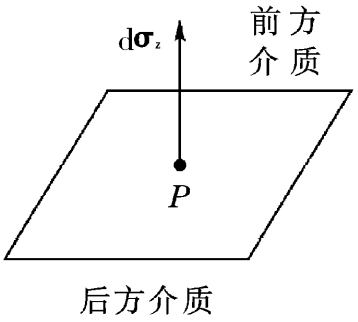


图 A1.10

怎样才能描述清楚通过 P 点的任一面元的前方介质对后方介质的作用力呢？这就要引入应力张量.

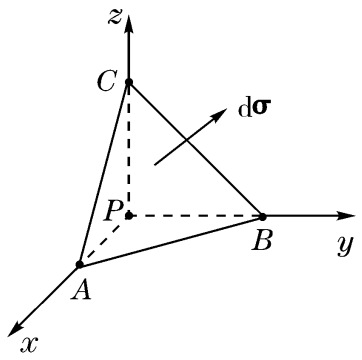


图 A1.11

首先，将任意面元 $\mathrm{d}\sigma$ 前方介质对后方介质的作用力 $\mathrm{d}F$ 进行分解.

取 P 为坐标原点，当面元 $\mathrm{d}\sigma = n\mathrm{d}\sigma = n\sigma_{ABC} \to 0$（式中 σ_{ABC} 为 $\triangle ABC$ 的面积）时，这个面元就无限地接近 P 点. $\mathrm{d}\sigma$ 面元与三个坐标轴分别交于 A，B，C 三点，由此构成三个面元 $\mathrm{d}\sigma_x$，$\mathrm{d}\sigma_y$，$\mathrm{d}\sigma_z$，即

$$\mathrm{d}\sigma_x = e_x \mathrm{d}\sigma_x = e_x \sigma_{PBC} \quad (\sigma_{PBC} \text{ 为 } \triangle PBC \text{ 面积}), \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\sigma_y = e_y \mathrm{d}\sigma_y = e_y \sigma_{PCA} \quad (\sigma_{PCA} \text{ 为 } \triangle PCA \text{ 面积}), \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\sigma_z = e_z \mathrm{d}\sigma_z = e_z \sigma_{PAB} \quad (\sigma_{PAB} \text{ 为 } \triangle PAB \text{ 面积}). \tag{3}$$

由上述定义可见，$\mathrm{d}\sigma$ 沿四面体 $PABC$ 的外法线方向，而 $\mathrm{d}\sigma_x$，$\mathrm{d}\sigma_y$，$\mathrm{d}\sigma_z$ 则沿四面体 $PABC$ 的内法线方向. 现称 $\mathrm{d}\sigma_x$，$\mathrm{d}\sigma_y$，$\mathrm{d}\sigma_z$ 的前方介质（在四面体内）对后方介质（在四面体外）的作用力分别为 $\mathrm{d}F_x$，$\mathrm{d}F_y$，$\mathrm{d}F_z$.

当四面体 $PABC$ 处于平衡状态时，它所受的合外力为零，便有

$$\mathrm{d}F + (-\mathrm{d}F_x) + (-\mathrm{d}F_y) + (-\mathrm{d}F_z) = 0, \tag{4}$$

即

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F_x + \mathrm{d}F_y + \mathrm{d}F_z. \tag{5}$$

如果刚才把 $\mathrm{d}\sigma_x$，$\mathrm{d}\sigma_y$，$\mathrm{d}\sigma_z$ 的方向定义为沿四面体的外法线方向，则上式右边均为负号，书写不便.

正如前述，$\mathrm{d}F_x$ 一般不在 e_x 方向，因此可以分解为

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_{xx}e_x + \mathrm{d}F_{xy}e_y + \mathrm{d}F_{xz}e_z, \tag{6}$$

其中 $\mathrm{d}F_{xy}$ 是 $\mathrm{d}\sigma_x$ 的前方介质对后方介质作用力的 y 分量，如果用 1，2，3 表示 x，y，z，则有

$$\mathrm{d}F_1 = \sum_j \mathrm{d}F_{1j}e_j. \tag{7}$$

同理

$$\mathrm{d}F_2 = \sum_j \mathrm{d}F_{2j}e_j, \tag{8}$$

$$\mathrm{d}F_3 = \sum_j dF_{3j}e_j. \tag{9}$$

将(7)、(8)、(9)式代入(5)式,可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\sum_{i}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{i}=\sum_{ij}\mathrm{d}F_{ij}\boldsymbol{e}_{j}. \tag{10}$$

由此可见,必须用9个量$\mathrm{d}F_{ij}(i,j=1,2,3)$来表示通过$P$点的任意面元$\mathrm{d}\sigma$的前方介质对后方介质的作用力.

现在,引入张量表示$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.令

$$\Phi_{ij}=\frac{\mathrm{d}F_{ij}}{\mathrm{d}\sigma_{i}}, \tag{11}$$

显然,Φ_{ij}是$\mathrm{d}\sigma_{i}$单位面积上前方介质对后方介质作用力的j分量,这样

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\sum_{ij}\mathrm{d}F_{ij}\boldsymbol{e}_{j}=\sum_{ij}\Phi_{ij}\mathrm{d}\sigma_{i}\boldsymbol{e}_{j}=\sum_{ij}\Phi_{ij}\mathrm{d}\sigma\cdot\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}=\mathrm{d}\sigma\cdot\sum_{ij}\Phi_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}=\mathrm{d}\sigma\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\Phi}}. \tag{12}$$

式中$\overrightarrow{\overrightarrow{\Phi}}=\sum_{ij}\Phi_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}$,称为应力张量,它由9个分量表示.

引入应力张量后,任意给出$\mathrm{d}\sigma$,马上可由$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\sigma\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\Phi}}$求出$\mathrm{d}\sigma$的前方介质对后方介质的作用力,这就是要引入应力张量的原因.否则,通过P点有无限多个方向不同的面元,就要利用无限多个力来表示P点的应力分布.这好比,当我们有了矢量的概念和矢量的运算公式,只要利用一个矢量就可以将河中某点的水流速度描述清楚了.如果问该点水流沿任意方向n(n为单位矢量)的速率是多少,由$v_{n}=n\cdot\boldsymbol{v}$即可求得.但是,如果我们只有标量而没有矢量的概念,上述问题就仿佛当我们只有矢量而没有张量概念时,要描述清楚弹性体内应力分布所遇到的问题一样.

二、张量代数

在讨论运算规则之前先介绍几个常用的张量(仍局限在三维二阶张量范围内).

并矢是两个并列的矢量AB,它们之间既没有点乘,也没有叉乘:

$$AB=\sum_{i}A_{i}\boldsymbol{e}_{i}\sum_{j}B_{j}\boldsymbol{e}_{j}=\sum_{ij}A_{i}B_{j}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}. \tag{13}$$

并矢就是(二阶)张量,如令$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=AB$,易见$T_{ij}=A_{i}B_{j}$.

单位张量$\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$为

$$\overrightarrow{\overrightarrow{I}}=\boldsymbol{e}_{x}\boldsymbol{e}_{x}+\boldsymbol{e}_{y}\boldsymbol{e}_{y}+\boldsymbol{e}_{z}\boldsymbol{e}_{z}=\sum_{i}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{i}=\sum_{ij}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\boldsymbol{e}_{j}, \tag{14}$$

它的各分量为δ符号.

满足$T_{ij}=T_{ji}$的张量称为对称张量;满足$T_{ij}=-T_{ji}$的张量称为反对称张量;满足$\sum_{i}T_{ii}=T_{11}+T_{22}+T_{33}=0$的张量称为零迹张量.

张量代数的常用公式为:

1. 张量与张量相加为两张量的相应的分量相加.

$$\overleftrightarrow{T} + \overleftrightarrow{U} = \sum_{ij} (T_{ij} + U_{ij}) e_i e_j. \tag{15}$$

2. 标量 φ 与张量 $\overleftrightarrow{T}$ 相乘为 φ 乘张量的每一分量.

$$\varphi \overleftrightarrow{T} = \sum_{ij} (\varphi T_{ij}) e_i e_j. \tag{16}$$

3. 矢量 C 与并矢 AB 点乘分为左点乘与右点乘,点乘规则是用矢量 C 点乘并矢中靠近 C 的矢量. 两者的数学表式分别为

$$C \cdot (AB) = (C \cdot A) B, \tag{17}$$

$$(AB) \cdot C = A (B \cdot C). \tag{18}$$

显然,矢量与并矢的左点乘与右点乘不一定相等. 例如,令 $AB = e_x e_y$, $C = e_x$,则

$$e_x \cdot (e_x e_y) \neq (e_x e_y) \cdot e_x.$$

4. 矢量与张量的点乘. 并矢是张量,矢量与张量的点乘规则与上相同. 例如:

$$f \cdot \overleftrightarrow{T} = \left(\sum_k f_k e_k\right) \cdot \left(\sum_{ij} T_{ij} e_i e_j\right) = \sum_{ijk} f_k T_{ij} \delta_{ki} e_j = \sum_{ij} f_i T_{ij} e_j, \tag{19}$$

$$\overleftrightarrow{T} \cdot f = \left(\sum_{ij} T_{ij} e_i e_j\right) \cdot \left(\sum_k f_k e_k\right) = \sum_{ijk} T_{ij} f_k e_i \delta_{jk} = \sum_{ij} e_i T_{ij} f_j. \tag{20}$$

一般说来, $\overleftrightarrow{T} \cdot f \neq f \cdot \overleftrightarrow{T}$,只有当 T 为对称张量时,两者才相等(见本节习题 1).

【例 1】　试证明单位张量 $\overleftrightarrow{I}$ 与矢量 A 的标积为

$$A \cdot \overleftrightarrow{I} = \overleftrightarrow{I} \cdot A = A. \tag{21}$$

证　$A \cdot \overleftrightarrow{I} = \sum_i e_i A_i \cdot \sum_j e_j e_j = \sum_{ij} A_i \delta_{ij} e_j = \sum_i A_i e_i = A$,

同理可证　　$\overleftrightarrow{I} \cdot A = A.$

5. 两并矢的二次点乘(即双点乘)规则为

$$(AB) : (CD) = (B \cdot C)(A \cdot D). \tag{22}$$

即先将靠近的两矢量点乘,再将外侧的两矢量点乘.

6. 任意两张量的二次点乘. 同理可得

$$\overleftrightarrow{T} : \overleftrightarrow{U} = \left(\sum_{ij} T_{ij} e_i e_j\right) : \left(\sum_{kl} U_{kl} e_k e_l\right) = \sum_{ijkl} T_{ij} U_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = \sum_{ij} T_{ij} U_{ji}. \tag{23}$$

这表明,两个二阶张量的二次点乘是标量.

【例 2】　试用矢量与并矢的点乘表示 $a \times (b \times c)$.

解　由 § A1.1 的三矢量的矢积公式,得

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c = a \cdot (cb - bc). \tag{24}$$

三、张量分析的几个公式

本书将用到关于二阶张量的如下五个公式.

1. 矢量的梯度是张量

$$\nabla A = \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j e_j A_j = \sum_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} e_i e_j. \tag{25}$$

【例 3】　试计算 ∇R.

解　由 $R=\sum_j e_j x_j$,代入(25)式,即有

$$\nabla R=\sum_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}e_i e_j=\sum_{ij}\delta_{ij}e_i e_j=\sum_i e_i e_i=\overleftrightarrow{I}. \tag{26}$$

这表明,R 的梯度是单位张量.

2. 张量的散度是矢量

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\left(\sum_i e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\sum_{jk}T_{jk}e_j e_k\right)=\sum_{ijk}\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\delta_{ij}e_k=\sum_{jk}\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j}e_k. \tag{27}$$

当然,也可写成另一形式

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\left(\sum_i e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot\overleftrightarrow{T}=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i\cdot\overleftrightarrow{T}). \tag{28}$$

【例 4】　试计算 $\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})$.

解　利用 ∇ 算符的矢量与微分的双重性质,可得

$$\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\varphi(\nabla\cdot\overleftrightarrow{I})+\nabla\varphi\cdot\overleftrightarrow{I}=0+\nabla\varphi=\nabla\varphi$$

或

$$\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I})=\left(\sum_i e_i\nabla_i\right)\cdot\left(\sum_j\varphi e_j e_j\right)=\sum_{ij}\nabla_i\varphi\delta_{ij}e_j=\sum_i e_i\nabla_i\varphi=\nabla\varphi.$$

3. 并矢的散度公式

$$\nabla\cdot(fg)=(f\cdot\nabla)g+(\nabla\cdot f)g. \tag{29}$$

证　可以由 ∇ 算符的定义式出发证明.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(fg)&=\left(\sum_i e_i\nabla_i\right)\cdot\left(\sum_{jk}f_j g_k e_j e_k\right)=\sum_{ijk}\nabla_i(f_j g_k)\delta_{ij}e_k\\&=\sum_{jk}\nabla_j(f_j g_k)e_k=\sum_{jk}(\nabla_j f_j)g_k e_k+\sum_{jk}f_j\nabla_j g_k e_k\\&=(\nabla\cdot f)g+(f\cdot\nabla)g.\end{aligned}$$

上式也可利用 ∇ 算符的矢量和微分的双重性质得到

$$\nabla\cdot(fg)=\nabla\cdot(fg_c)+\nabla\cdot(f_c g)=(\nabla\cdot f)g+(f\cdot\nabla)g.$$

即 ∇ 算符要分别作用于 f 和 g,但 ∇ 算符仅与近者(即 f)点乘.

4. 并矢的旋度公式

$$\nabla\times(fg)=(\nabla\times f)g-f\times\nabla g. \tag{30}$$

证　仿上可得

$$\nabla\times(fg)=\nabla\times(fg_c)+\nabla\times(f_c g)=(\nabla\times f)g-f\times\nabla g.$$

因为第二项 ∇ 不作用于 f_c,故应将 f_c 移到 ∇ 前面(注意 $a\times b=-b\times a$).

5. 张量的积分变换

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}=\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot\overleftrightarrow{T}. \tag{31}$$

证　由矢量场的高斯定理出发

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot A=\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot A$$

令 $A = \overleftrightarrow{T} \cdot c$ 代入(式中 c 为常矢),即有

$$\int_V \mathrm{d}V \ \nabla \cdot (\overleftrightarrow{T} \cdot c) = \oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot (\overleftrightarrow{T} \cdot c),$$

故

$$\oint_V \mathrm{d}V \ \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}) \cdot c = (\oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot \overleftrightarrow{T}) \cdot c,$$

由 c 的任意性,即得(31) 式.

习题 A1.6

1. 试证明:

(1) 任一张量均可分解为对称张量与反对称张量之和;

(2) 反对称张量必为零迹张量;

(3) 若 $\overleftrightarrow{T}$ 为对称张量,则 $f \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T} \cdot f$.

2. 已知 $\nabla' \cdot J_{\mathrm{f}}(x') = 0$,试证明(为书写方便,暂将 J_{f} 的 i 分量记作 $J_{\mathrm{f}i}$)

$$\nabla' \cdot [J_{\mathrm{f}}(x')x'x_i'] = J_{\mathrm{f}}(x')x_i' + J_{\mathrm{f}i}(x')x'. \tag{32}$$

3. 试证明

$$(\nabla \cdot E)E + (\nabla \times E) \times E = \nabla \cdot (EE - \frac{1}{2}E^2 \overleftrightarrow{I}), \tag{33}$$

式中 $\overleftrightarrow{I} = e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z$ 是单位张量.

4. 试证明,若采用库仑规范 $\nabla \cdot A = 0$,则

$$E \times (\nabla \times A) = \nabla(\mathrm{A} \cdot E) - \nabla \cdot (AE + EA) + (\nabla \cdot E)A. \tag{34}$$

5. 已知一个电荷体系的偶极矩定义为(见附录 § 4.5)

$$P(t) = \int_V \rho_{\mathrm{f}}(x', t)x'\mathrm{d}V', \tag{35}$$

试利用电荷守恒定律 $\nabla \cdot J_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} = 0$ 证明

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \int_V J_{\mathrm{f}}(x', t)\mathrm{d}V'. \tag{36}$$

6. 设 x' 为源点坐标,在小区域 V 内变动,坐标原点在 V 内,而 x 为场点坐标,试证明:

$$(1) f(x - x') = f(x) - (x' \cdot \nabla)f(x) + \frac{1}{2!}(x' \cdot \nabla)^2 f(x) + \cdots \tag{37}$$

$$(2) \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - (x' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}(x' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{R} + \cdots \tag{38}$$

7. 试证明,当 $R \neq 0$ 时,有

$$\nabla^2 \frac{p\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}, \tag{39}$$

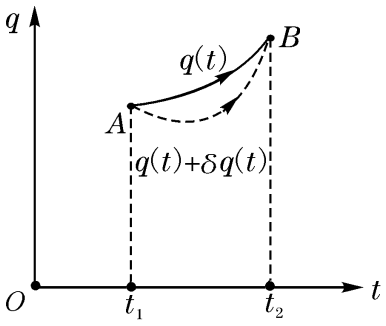
式中 $\ddot{p}$ 是 p 对 $\left(t - \frac{R}{c}\right)$ 的二阶导数.

附录2　最小作用量原理,拉格朗日方程与哈密顿方程

一、拉格朗日量 L 与最小作用量原理

一个自由度为n 的完整力学体系①,它的运动规律完全由体系的拉格朗日量 L 所确定. 对于保守系,L 的形式为

$$L(q,\dot{q}) = L(q_1,q_2,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n). \tag{1}$$



图A2.1

体系的运动方程可由最小作用量原理导出. 最小作用量原理可叙述如下:设体系在时刻 t_1 从 A 点出发,经过某轨道 $q(t)$在时刻 t_2 到达B 点,在 A ,B 之间可以有各种各样的可能轨道(参看图A2.1). 对于每一条轨道$q(t)$,可定义作用量

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\mathrm{d}t, \tag{2}$$

体系的真实运动将使作用量 S 取极小值,即作用量的变分为零

$$\delta S = \oint_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

据此,可导出拉格朗日方程(简称 L 方程).

二、L 方程　体系的 L 量与体系的运动方程

1. L 方程的导出

对(3)式进行变分运算,可得

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}_i\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]\mathrm{d}t \\ &= \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4}$$

由于在 t_1 和 t_2 时刻,体系有确定的位置,故

---

① 凡受有完整约束的力学体系称为完整力学体系. 所谓完整约束(又称几何约束)是指约束方程能表为坐标、时间的简单方程

$$f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) = 0, \qquad k = 1,2,\cdots,d.$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0, \tag{5}$$

可见(4)式第一项为零,由此得

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t = 0. \tag{6}$$

由 δq_i 的任意性,可知被积函数应为零,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

这就是拉格朗日方程.

2. 体系的 L 量与体系的运动方程

如果知道体系的 L 量,将它代入 L 方程,可求得体系的运动方程;反之,如果知道体系的运动方程,也可由 L 方程求得 L 量.

现在讨论,如何由体系运动方程求 L 量. 为简单起见,取 q_i 为直角坐标. 对于自由度为 n 的保守体系,其运动方程为

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

上式中的 $U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为保守势. 两边乘以 δx_i 并对 i 求和,便有

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = -\sum_i \frac{\partial U(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i} \delta x_i, \tag{9}$$

上式右边的和式为 $U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的变分 $\delta U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 代入上式,可得

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = -\delta U(x_i,x_2,\cdots,x_n). \tag{10}$$

将上式移项后在 $[t_1,t_2]$ 区间积分,便有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \delta U(x) \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \dot{x}_i \delta x_i) - \sum_i m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \delta U(x) \right] \mathrm{d}t \\ &= \sum_i m_i \dot{x}_i \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \oint_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x) \right] \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{11}$$

由于在 t_1 和 t_2 时体系有确定的坐标,x_i 的变分为零:$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$. 故有

$$\oint_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x) \right] \mathrm{d}t = 0. \tag{12}$$

与(3)式比较,即得体系的 L 量

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1,x_2,\cdots,x_n) = T - U. \tag{13}$$

对于自由粒子($U = 0$),它的 L 量为

$$L = T = \frac{1}{2} m v^2. \tag{14}$$

三、哈密顿量与哈密顿正则方程

在拉格朗日力学中,力学体系的运动状态由广义坐标 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i$ 来描述;在哈密顿力学中,力学体系的运动状态则由广义坐标 q_i 和广义动量 P_i 来描述.

广义动量的定义为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{15}$$

现在寻找描述体系状态的运动方程,取 $L(q,\dot{q})$ 的全微分

$$\mathrm{d}L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i \right), \tag{16}$$

利用 L 方程及广义动量的定义,可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\mathrm{d}q_i = \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_i = \dot{P}_i\mathrm{d}q_i, \tag{17}$$

由此得

$$\mathrm{d}L = \sum_i (\dot{P}_i\mathrm{d}q_i + P_i\mathrm{d}\dot{q}_i) = \sum_i \left[\dot{P}_i\mathrm{d}q_i - \dot{q}_i\mathrm{d}P_i \right] + \mathrm{d}\sum_i (P_i\dot{q}_i). \tag{18}$$

整理后可得

$$\mathrm{d}\left(\sum_i P_i\dot{q}_i - L \right) = \sum_i (\dot{q}_i\mathrm{d}P_i - \dot{P}_i\mathrm{d}q_i). \tag{19}$$

定义体系的哈密顿量(简称 H 量)

$$H(q,P) = \sum_i P_i\dot{q}_i - L, \tag{20}$$

代入(19)式,即有

$$\mathrm{d}H(q,P) = \sum_i (\dot{q}_i\mathrm{d}P_i - \dot{P}_i\mathrm{d}q_i), \tag{21}$$

另一方面,H 的全微分为

$$\mathrm{d}H(q,P) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial P_i}\mathrm{d}P_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i \right). \tag{22}$$

比较(21)式与(22)式,便有

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{23}$$

这就是哈密顿正则方程.

所谓“正则”是指“标准”和“简单”的意思. 既然以 H 量表示的方程(23)称为正则方程,因此出现在 H 量中的广义坐标 q_i 与广义动量 P_i 就称为正则共轭变量,广义动量 P_i 也称为正则动量.

附　录

一、基本概念

设 n 阶行列式为

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

1. r 阶子行列式

从 n 阶行列式中保留 r 行 r 列元素，删去其余 $(n-r)$ 行和 $(n-r)$ 列元素后，将剩下的 r^2 个元素按原来的排列顺序组成的 r 阶行列式 B 称为行列式 A 的 r 阶子行列式.

2. 余子式

位于被删去的行和列交点处全部元素构成一个 $n-r$ 阶子行列式 C，它与 B 互为余子式.

3. 代数余子式

如果被删去的 $n-r$ 行是 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-r}$ 行，被删去的 $n-r$ 列是 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-r}$ 列，则

$$D = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_{n-r}+j_1+j_2+\cdots j_{n-r}} C = (-1)^m C \tag{2}$$

称为 B 在 A 中的代数余子式，式中

$$m = i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-r} + j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-r} \tag{3}$$

是行列式 C 所有元素的行标与列标之和.

例如，在四阶行列式 A 中，删去第2，3行和第2，4列，则可得 A 的一个二阶子行列式

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

位于被删去的行、列交点处的元素构成 B 的余子式为

$$C = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

B 的代数余子式为

$$D = (-1)^{2+3+2+4} C = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

二、拉普拉斯展开定理

在n阶行列式A中任取k行k列出来(其中$1\leqslant k\leqslant n-1$),设这$k$行$k$列的一切$k$阶子式为$B_1,B_2,\cdots,B_s$(其中$s=C_n^k$),它们的代数余子式依次为$D_1,D_2,\cdots,D_s$,则

$$A=\sum_{l=1}^{s}B_lD_l=B_1D_1+B_2D_2+\cdots+B_sD_s. \tag{7}$$

【例】 对于四阶行列式,任取二行二列构成二阶子行列式,则$s=C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$,故可展开为6项之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+4+2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34}\\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+4+2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14}\\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+4+3+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24}\\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+4+2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24}\\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+4+2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14}\\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

按一行(或一列)展开的拉普拉斯展开定理为:

行列式A等于它的任一行(或列)的所有元素与其对应代数余子式乘积之和.当取第i行或第j列时,分别得

$$A=\sum_{j}a_{ij}D_{ij}. \tag{9}$$

$$A=\sum_{i}a_{ij}D_{ij}. \tag{10}$$

附录4　δ函数的定义和性质

一、δ函数的定义

$$\delta^3(r-r')=\begin{cases}0, & r\neq r';\\ \infty, & r=r'.\end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^3(r-r')\mathrm{d}^3r=1. \tag{2}$$

二、δ函数的性质(以一维为例)

1. 若$f(x)$是定义在区间$(-\infty,\infty)$的任一连续函数,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0). \tag{3}$$

2. 由δ函数定义出发,比较$x=x_0$及$x\neq x_0$时下式两边的值,可得

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0). \tag{4}$$

3. 若$\varphi(x)$为连续函数,$\varphi(x)=0$只有单根$x_k(k=1,2,\cdots,N)$,则

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}. \tag{5}$$

由此得　　$\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$,　特别是$\delta(-x)=\delta(x)$. (6)

4. 利用分部积分公式可证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x=(-1)^nf^{(n)}(x_0). \tag{7}$$

三、δ函数的常用表达式

1. δ函数的傅里叶积分

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k, \tag{8}$$

$$\delta^3(r-r')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(r-r')}\mathrm{d}^3k. \tag{9}$$

2. δ函数的极限表达式

$$\delta(x)=\lim_{u\to\infty}\frac{\sin^2(xu)}{\pi x^2u}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\pi(1+nx^2)}. \tag{10}$$

3. 用拉普拉斯算符表示δ函数

$$\delta^3(r)=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}. \tag{11}$$

4. 用任一正交归一完备系$\{\psi_n(x)\}$表示δ函数

$$\delta(x-x')=\sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(x'). \tag{12}$$

附录5　勒让德多项式,缔合勒让德函数与球函数

在球坐标系中,拉普拉斯方程$\nabla^2 u=0$可表示为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{1}$$

若采用分离变量法求解,令

$$u(R,\theta,\varphi)=R(R)Y(\theta,\varphi), \tag{2}$$

代入(1)式可分离为两个方程,其中的角向方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \tag{3}$$

称为球函数方程,式中$l(l+1)$为常数.进一步分离变量,令

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \tag{4}$$

代入(3)式可分离为两个常微分方程

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+l(l+1)\Theta=0. \tag{6}$$

方程(5)与周期性条件$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$构成一个本征值问题,其本征值与本征函数分别为

$$m^2,\qquad m=0,1,2,\cdots, \tag{7}$$

$$\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi. \tag{8}$$

方式(6)称为缔合勒让德方程,通过变换$x=\cos\theta$,$y(x)=\Theta(\cos\theta)$,方程可简化为

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0. \tag{9}$$

方程的解称为缔合勒让德函数

$$P_l^{|m|}(x)=\frac{(1-x^2)^{|m|/2}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+|m|}}{\mathrm{d}x^{l+|m|}}(x^2-1)^l,$$

$$l=0,1,\cdots;\qquad m=0,\pm1,\cdots,\pm l. \tag{10}$$

若讨论的物理问题具有轴对称性,则u与φ无关.由(8)式可见$m=0$,代入缔合勒让德方程(9),得到勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0. \tag{11}$$

方程的解称为勒让德多项式(它的微分表达式称为罗巨格公式)

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l. \tag{12}$$

下面,将介绍勒让德多项式,缔合勒让德函数和球函数的常用公式.

一、勒让德多项式

1. 前面五个勒让德多项式

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3). \tag{13}$$

2. 勒让德多项式的特殊值

$$P_l(1)=1,\quad P_l(-1)=(-1)^l,$$

$$P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{14}$$

3. 母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,\quad |t|<1. \tag{15}$$

4. 拉普拉斯积分

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi)^l\mathrm{d}\varphi. \tag{16}$$

5. 正交归一关系式

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}. \tag{17}$$

6. 递推公式

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0, \tag{18}$$

$$lP_l(x)=xP'_l(x)-P'_{l-1}(x), \tag{19}$$

$$(l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-xP'_l(x), \tag{20}$$

$$(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x), \tag{21}$$

$$(x^2-1)P'_l(x)=lxP_l(x)-lP_{l-1}(x). \tag{22}$$

7. 常用展开式

$$\frac{1}{|R_2-R_1|}=\begin{cases}\dfrac{1}{R_1}\displaystyle\sum_l\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^l P_l(\cos\theta), & \text{当 } R_1>R_2;\\[2ex] \dfrac{1}{R_2}\displaystyle\sum_l\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^l P_l(\cos\theta), & \text{当 } R_1<R_2.\end{cases} \tag{23}$$

8. 加法公式

$$P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta)P_l^{|m|}(\cos\theta')\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}, \tag{24a}$$

式中单位矢量 n,n' 与 z 轴的夹角分别为 θ 和 θ',n' 与 n 的夹角为 Θ.

当研究轴问题时,$m=0$,(24a)式可简化为

$$P_l\cos\Theta)=P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta),\quad \text{当 } m=0. \tag{24b}$$

二、缔合勒让德函数

1. 正交归一关系式

$$\int_{-1}^{1} P_l^{|m|}(x)P_k^{|m|}(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{lk}. \tag{25}$$

2. 递推公式

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2}P_l^{|m|}(x) = P_{l+1}^{|m+1|}(x) - P_{l-1}^{|m+1|}(x). \tag{26}$$

三、球函数

1. 定义

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!(2l+1)}{(l+|m|)!4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$
$$l = 0,1,\cdots, \qquad m = 0,\pm 1,\cdots,\pm l. \tag{27}$$

2. 前面的九个球函数

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$
$$Y_{1\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}, \qquad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1),$$
$$Y_{2\pm 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}, \qquad Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\varphi}. \tag{28}$$

3. 正交归一关系式

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l'm'}^{*}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{29}$$

4. 递推公式

$$\cos\theta Y_{lm} = \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}}Y_{l-1,m} + \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m}. \tag{30}$$

$$\sin\theta\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}Y_{lm} = \pm\sqrt{\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}Y_{l-1,m\pm 1}$$
$$\mp\sqrt{\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m\pm 1}. \tag{31}$$

习题 A 5

1. 试证明球函数的加法公式(24a)及勒让德多项式的加法公式(24b).

附录6　贝塞耳函数,诺埃曼函数,汉克耳函数,虚宗量贝塞尔函数与虚宗量汉克耳函数

在柱坐标系中,拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$ 可表示为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

若采用分离变量法,令

$$u(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{2}$$

代入(1)式,可分离出关于 ρ 的常微分方程为

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\pm\lambda^2\rho^2-\nu^2)R(\rho)=0, \tag{3}$$

式中 λ 与 ν 为实常数.

作变量代换 $x=\lambda\rho$ 及函数代换 $y(x)=R(\rho)$,则(3)式可简化为

$$x^2y''+xy'+(\pm x^2-\nu^2)y=0, \tag{4}$$

相应于± 号分别称为贝塞耳方程和虚宗量贝塞耳方程.

一、柱函数

1. 贝塞耳函数(第一类柱函数)

若 $\nu\neq n$(整数和零),贝塞耳方程的通解为

$$y(x)=A_1J_\nu(x)+A_2J_{-\nu}(x). \tag{5}$$

正、负阶贝塞耳函数分别为

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{6}$$

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{7}$$

2. 诺埃曼函数(第二类柱函数)

若 $\nu=n$(整数或零),$J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 是线性相关的,即

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x), \tag{8}$$

此时贝塞尔方程的通解不能表示为 $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 之和,而应表示为

$$y(x)=D_1J_n(x)+D_2N_n(x), \tag{9}$$

式中 $N_n(x)$ 为诺埃曼函数.

诺埃曼函数的定义是

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},\quad \nu=0,1,\cdots. \tag{10}$$

可以证明,它是贝塞耳方程的解,且与 $J_\nu(x)$ 线性无关.

3. 汉克耳函数(第三类柱函数)

汉克耳函数的定义是

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + \mathrm{i}N_\nu(x), \tag{11}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - \mathrm{i}N_\nu(x). \tag{12}$$

贝塞耳方程的通解也可写为

$$y(x) = C_1H_\nu^{(1)}(x) + C_2H_\nu^{(2)}(x). \tag{13}$$

4. 虚宗量贝塞耳函数(第一类虚宗量柱函数)

当$\nu\neq n$(整数)时,虚宗量贝塞耳方程的通解为

$$y(x) = A_1I_\nu(x) + A_2I_{-\nu}(x), \tag{14}$$

式中正、负阶虚宗量贝塞耳函数分别为

$$I_\nu(x) = \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x), \tag{15}$$

$$I_{-\nu}(x) = \mathrm{i}^{\nu}J_{-\nu}(\mathrm{i}x). \tag{16}$$

5. 虚宗量汉克耳函数(第二类虚宗量柱函数)

当$\nu= n$(整数)时,$I_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性相关,虚宗量贝塞耳方程的解为

$$y(x) = B_1I_\nu(x) + B_2K_\nu(x). \tag{17}$$

二、柱函数的递推公式

贝塞耳函数、诺埃曼函数和汉克耳函数均遵守相同形式的递推公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu J_\nu) = z^\nu J_{\nu-1}, \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-\nu}J_\nu) = -z^{-\nu}J_{\nu+1}, \tag{19}$$

$$\nu J_\nu + zJ'_\nu = zJ_{\nu-1}, \tag{20}$$

$$-\nu J_\nu + zJ'_\nu = -zJ_{\nu+1}, \tag{21}$$

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{z}J_\nu, \tag{22}$$

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu, \tag{23}$$

三、柱函数的渐近行为

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}J_\nu(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu$, $\lim\limits_{x\to 0^+}J_0(x) = 1-\dfrac{x^2}{4}$. (24)

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}N_\nu(x) = \dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu$, $\lim\limits_{x\to 0^+}N_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+0.5772\cdots\right]$. (25)

3. $\lim\limits_{x\to\infty}J_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\dfrac{\nu\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}N_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\dfrac{\nu\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$. (26)

4. $\lim\limits_{x\to\infty}H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$，　$\lim\limits_{x\to\infty}H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.　　(27)

附录7　傅里叶变换公式

一维傅里叶变换与逆变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k,\tag{1}$$

$$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.\tag{2}$$

作变量替换

$$p=\hbar k,\tag{3}$$

则(1)与(2)式即变为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}p,\tag{4}$$

$$\tilde{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}x.\tag{5}$$

为将傅里叶变换写成对称的形式,令

$$\psi(x)=\sqrt{2\pi\hbar}f(x),\tag{6}$$

$$c(p)=\tilde{f}\ (p/\hbar).\tag{7}$$

代入(4)及(5)式,便有

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}p,\tag{8}$$

$$c(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}x.\tag{9}$$

相应的三维形式为

$$\psi(r)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot r}\mathrm{d}^3p,\tag{10}$$

$$c(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(r)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot r}\mathrm{d}^3r.\tag{11}$$

附录8　国际单位制与高斯单位制之间的单位换算关系及公式对照表

一、国际单位制与高斯单位制之间的单位换算关系

物理量	国际单位制	高斯单位制
电量 q	1 C(库仑)	3×10^{9} CGSE
电流强度 I	1 A(安培)	3×10^{9} CGSM
电势 φ	1 V(伏特)	$\frac{1}{300}$ CGSE
电场强度 E	1 V·m^{-1}(伏特/米)	$\frac{1}{3}\times 10^{-4}$ CGSE
电阻 R	1 Ω(欧姆)	$\frac{1}{9}\times 10^{-11}$ CGSE
电容 C	1 F(法拉)	9×10^{11} CGSE
磁感应通量 Φ	1 Wb(韦伯)	10^{8} 麦克斯韦
磁感应强度 B	1 T(特斯拉)	10^{4} G(高斯)
磁场强度 H	1 A·m^{-1}(安培/米)	$4\pi\times 10^{-3}$Oe(奥斯特)

二、国际单位制与高斯单位制公式对照表

物理量	国际单位制	高斯单位制
真空中点电荷的电场 E	$\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$	$\frac{qr}{r^3}$
真空中线电流的磁场 B	$\int \frac{\mu_0 J_f(x')\times r}{4\pi r^3}\mathrm{d}V'$	$\int \frac{J_f(x')\times r}{cr^3}\mathrm{d}V'$
洛伦兹力 F	$q(E+\boldsymbol{v}\times B)$	$q\left[E+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times B\right]$
麦克斯韦方程组	$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla\times H=\frac{\partial D}{\partial t}+J_f$ $\nabla\cdot D=\rho_f$ $\nabla\cdot B=0$	$\nabla\times E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla\times H=\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}J_f$ $\nabla\cdot D=4\pi\rho_f$ $\nabla\cdot B=0$
介质的电磁性质	$D=\varepsilon_0 E+P$ $B=\mu_0(H+M)$	$D=E+4\pi P$ $B=H+4\pi M$
电磁能量密度 w	$\frac{1}{2}(E\cdot D+H\cdot B)$	$\frac{1}{8\pi}(E\cdot D+H\cdot B)$

续　表

物理量	国际单位制	高斯单位制
电磁能流密度 S	$E\times H$	$\frac{c}{4\pi}E\times H$
电磁动量密度 g	$\varepsilon_0 E\times B$	$\frac{1}{4\pi c}E\times B$
四维电流密度 J_μ	$(J_f, ic\rho_f)$	$(J_f, ic\rho_f)$
场强和标势 矢势的关系	$E=-\nabla\varphi-\frac{\partial A}{\partial t}$ $B=\nabla\times A$	$E=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ $B=\nabla\times A$
四维势矢量 A_μ	$(A, i\varphi/c)$	$(A, i\varphi)$
电磁场张量 $F_{\mu\nu}$	$\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{bmatrix}$
达朗贝尔方程	$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\mu_0 J_f$ $\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}J_f$ $\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho_f$
洛伦兹条件	$\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot A+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
推迟势 A	$\int\frac{\mu_0 J_f(x', t-r/c)}{4\pi r}dV'$	$\int\frac{J_f(x', t-r/c)}{cr}dV'$
推迟势 φ	$\int\frac{\rho_f(x', t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$	$\int\frac{\rho_f(x', t-r/c)}{r}dV'$
精细结构常数 α	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	$\frac{e^2}{\hbar c}$
电子经典半径 r_e	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}$	$\frac{e^2}{m c^2}$
辐射阻尼力 F_s	$\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$	$\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$

附录9　物理常数表

真空中光速	$c = 2.99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
真空介电常量	$\varepsilon_0 = 8.85418 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
真空磁导率	$\mu_0 = 1.256637 \times 10^{-6}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$
电子电荷	$e = 1.602176462 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
普朗克常量	$h = 6.62606876 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot S}$,
	$\bar{h} = h/2\pi = 1.054571596 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot S}$
精细结构常量	$\alpha = \mu_0 c e^2/2h = 7.297352533 \times 10^{-3}$,
	$\alpha^{-1} = 137.03599976$
玻尔兹曼常量	$k_B = 1.3806503 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
电子静止质量	$m_e = 9.10938188 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 0.510998902\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$
质子静止质量	$m_p = 1.67262158 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
玻尔半径	$a_0 = 5.291772083 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$
经典电子半径	$r_e = 2.817940285 \times 10^{-13}\ \mathrm{m}$
电子伏	$1\mathrm{eV} = 1.602176462 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$
原子质量单位	$1\mathrm{u} = 1.66053873 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 931.494013\ \mathrm{MeV \cdot c^{-2}}$

习 题 答 案

第 一 章

习 题 1.1

1. $\rho(x)=\rho_+(x)+\rho_-(x)$, $J(x)=\rho_+(x)\boldsymbol{v}_+(x)+\rho_-(x)\boldsymbol{v}_-(x)$.

习 题 1.2

1. $E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}d$.

2. $\rho=-\dfrac{qb}{4\pi R^2}e^{-bR}+q\delta^3(R)$, $Q=0$.

3. $E=\dfrac{2\pi\sigma a}{4\pi\varepsilon_0 R^2(3-n)(1-n)}\left[\dfrac{R(2-n)-a}{(R+a)^{n-2}}-\dfrac{R(2-n)+a}{(R-a)^{n-2}}\right]$, $R>a$;

$E=\dfrac{2\pi\sigma a}{4\pi\varepsilon_0 R^2(3-n)(1-n)}\left[\dfrac{R(2-n)-a}{(R+a)^{n-2}}+\dfrac{R(2-n)+a}{(a-R)^{n-2}}\right]$, $R<a$.

式中σ为电荷面密度。

4. $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi^2 b}\left[\pi+4\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)\right]e_\varphi$.

5. $B_\rho(0)=\dfrac{\mu_0 nI\rho}{4a}$,式中的$\rho$为柱坐标.

习 题 1.3

1. $\overline{B}=\dfrac{2mv}{ea}=2B_a$.

2. $B=\dfrac{-\mu_0 e\,\boldsymbol{v}\times r}{4\pi r^3}$(电子电荷$q=-e$).

习 题 1.4

4. 对于铜,$\tau=1.55\times10^{-19}s$;对于石墨$\tau=3.69\times10^{-10}s$.

习　题　1.5

1. 采用如下步骤,可由麦克斯韦方程组得到相应的电磁场边值关系:

(1)将算符"$\nabla\cdot$"及"$\nabla\times$"分别换成"$n\cdot$"及"$n\times$";

(2)将场量(例如D)换成界面两侧场量之差(例如D_2-D_1);

(3)将电荷体密度ρ_f换成电荷面密度σ_f,将电流密度J_f换成电流线密度α_f(降一维);

(4)$\frac{\partial B}{\partial t}$与$\frac{\partial D}{\partial t}$对应的项为高级小量,已略去。

2. $$E=\begin{cases}\dfrac{(R_2^3-R_1^3)\rho_f}{3\varepsilon_0 R^3}R, & R>R_2>R_1;\\ \dfrac{(R^3-R_1^3)\rho_f}{3\varepsilon R^3}R. & R_2>R>R_1;\\ 0, & R_2>R_1>R.\end{cases}$$

$$\rho_P=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f, \qquad R_2>R>R_1.$$

$$\sigma_P=\begin{cases}\dfrac{R_2^3-R_1^3}{3R_2^2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f, & R=R_2;\\ 0, & R=R_1.\end{cases}$$

3. 介质绝缘时,$\sigma_{f1}=-\sigma_{f2}=\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 l_1+\varepsilon_1 l_2}E$, $\sigma_{f3}=0$;

介质漏电时,$\sigma_{f1}=\dfrac{\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}E$, $\sigma_{f2}=\dfrac{-\varepsilon_2\sigma_1}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}E$, $\sigma_{f3}=\dfrac{\varepsilon_2\sigma_1-\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}E$且$\sigma_{f1}+\sigma_{f2}+\sigma_{f3}=0$.

4. $$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0(\rho_2^2-\rho_1^2)}{2\rho^2}J_f\times\rho,\text{式中}\rho=\rho\hat{\varphi}, & \rho>\rho_2>\rho_1;\\ \dfrac{\mu(\rho^2-\rho_1^2)}{2\rho^2}J_f\times\rho,\text{式中}\rho=\rho\hat{\varphi}, & \rho_2>\rho>\rho_1;\\ 0, & \rho_2>\rho_1>\rho.\end{cases}$$

$$J_m=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)J_f, \qquad \rho_2>\rho>\rho_1;$$

$$\alpha_m=\begin{cases}-\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}-1\right)\dfrac{\rho_2^2-\rho_1^2}{2\rho_2}J_f, & \rho=\rho_2;\\ 0, & \rho=\rho_1.\end{cases}$$

第　二　章

习　题　2.1

1. (1)$E=\dfrac{V}{d}\hat{e}$, $H=\dfrac{\sigma V\rho}{2d}\hat{\varphi}$, $S=-\dfrac{\sigma V^2\rho}{2d^2}\hat{\rho}$; (2)$P=\dfrac{V^2}{R}$($R$为该段导电介质的电阻).

2. (1)$I_D=-\dfrac{\varepsilon_0 V_0\omega\pi a^2}{d}\sin\omega t$; (2)$H=-\dfrac{\varepsilon_0 V_0\omega\rho}{2d}\sin\omega t\,\hat{\varphi}$;

(3)$w=\dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\left(\cos^2\omega t+\dfrac{k^2\rho^2}{4}\sin^2\omega t\right)$, $\overline{S}=0$.

3. $S=-\dfrac{J_f^2 a}{2\sigma}\phi$, $P=I_f^2 R$.

4. $\eta=\eta_0 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}$, $J_f\cdot E=\sigma\left(\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon\rho}\right)^2$, $P=\dfrac{l\sigma\eta^2}{2\pi\varepsilon^2}\ln\dfrac{b}{a}$.

习 题 2.2

3. (1)$F_n=-\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 n$; (2)$F_n=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 n$; (3)$F_n\times E=-\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(n\times E)$,在此情形下,$F_n$ 与 E 的夹角等于 n 与 E 的夹角,,即 E 在 n 与 F_n 夹角的平分线方向。

习 题 2.3

2. $\omega=\dfrac{\pi\varepsilon_0 l\varphi_0 B_0(\rho_2^2-\rho_1^2)}{(m_1\rho_1^2+m_2\rho_2^2)\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)}(-\ e)$.

第 三 章

习 题 3.1

3. 液体的电势 φ,电场 E_1 及空气的电势 φ_2,电场 E_2 分别为

$$\varphi=\varphi_2=\frac{Q_f}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R},\quad E_1=E_2=\frac{Q_f R}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R^3}.$$

导体球的电势 φ_0 及电场 E_0 分别为

$$\varphi_0=\frac{Q_f}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R_0},\quad E_0=0.$$

自由电荷分布及束缚电荷分布:

①下半球面 $\sigma_f=\dfrac{\varepsilon Q_f}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R_0^2}$, $\sigma_P=\dfrac{(\varepsilon_0-\varepsilon)Q_f}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R_0^2}$;

②上半球面 $\sigma_f=\dfrac{\varepsilon_0 Q_f}{2\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)R_0^2}$, $\sigma_P=0$;

③液体表面 $\sigma_f=0$, $\sigma_P=0$.

4. $E=\dfrac{3\eta_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\rho}\phi$, $\sigma_{fi}=\dfrac{3\varepsilon_i\eta_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\rho_0}$, $i=1,2,3$,式中的 ρ 为柱坐标.

习 题 3.2

1. $\varphi_1=\dfrac{p_f\cdot R}{4\pi\varepsilon_1 R^3}+\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p_f\cdot R}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}$, $R<R_0$; $\varphi_2=\dfrac{3p_f\cdot R}{4\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R^3}$, $R>R_0$.

球心有极化偶极子 $p_P=\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)p_f$,球面上极化电荷面密度 $\sigma_P=\dfrac{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0 p_f\cos\theta}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)R_0^3}$.

2. $\varphi_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{p_f\cdot R}{R^3}+\dfrac{Q_f}{R_2}-\dfrac{p_f\cdot R}{R_1^3}\right]$, $R<R_1$; $\varphi_0=\dfrac{\theta_f}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$, $R_1\leqslant R\leqslant R_2$;

$\varphi_2=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $R>R_2$. $\sigma_f(R_1,\theta)=-\dfrac{3p_f\cos\theta}{4\pi R_1^3}$; $\sigma_f(R_2)=\dfrac{Q_f}{4\pi R_2^2}$.

3. $\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\left(\frac{R}{R_0}\right)^l P_l(\cos\theta)$，　$R<R_0$；　　$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}P_l(\cos\theta)$，　$R>R_0$.

式中 $a_l=\begin{cases}0, & l\text{为偶数};\\ (-1)^{\frac{l-1}{2}}\dfrac{(l-2)!!}{(l+1)!!}(2l+1)\varphi_0, & l\text{为奇数}.\end{cases}$

4. $\varphi=\dfrac{1}{R_0'-R_0}\left\{(\varphi_0'R_0'-\varphi_0R_0)+\dfrac{R_0R_0'(\varphi_0-\varphi_0')}{R}+\dfrac{R_0R_0'd(\varphi_0-\varphi_0')}{R_0'^3-R_0^3}\left(R-\dfrac{R_0^3}{R^2}\right)\cos\theta\right\}$，

$C=\dfrac{Q_f}{\varphi_0-\varphi_0'}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0R_0R_0'}{R_0'-R_0}$.

5. $\varphi(R,\theta)=\dfrac{R_0'}{R_0-R_0'}\left(\beta+\dfrac{\gamma}{3}\right)\left(-1+\dfrac{R_0}{R}\right)+\dfrac{R_0^2\alpha}{R_0^3-R_0'^3}\left(R-\dfrac{R_0'^3}{R^2}\right)P_1(\cos\theta)$

$+\dfrac{2R_0'^3\gamma}{3(R_0^5-R_0'^5)}\left(-R^2+\dfrac{R_0^5}{R^3}\right)P_2(\cos\theta)$.

6. $\varphi=-E_0\rho\cos\phi+\dfrac{E_0\rho_0^2\cos\phi}{\rho}$，　$\rho>\rho_0$；　　$\sigma_f=-\varepsilon_0\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=2\varepsilon_0E_0\cos\phi$.

7. $\varphi=\dfrac{\eta_f}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{n\pi b}{l}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)e^{-\frac{n\pi}{l}|y|}$，　$x\neq b$ 处.

习　题　3.3

1. $F=\dfrac{Q_fQ_0}{4\pi\varepsilon_0a^2}-\dfrac{Q_f^2(2a^2-R_0^2)R_0^3}{4\pi\varepsilon_0a^3(a^2-R_0^2)^3}$.

2. $\varphi=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q_f}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}+\dfrac{-\frac{R_0}{a}Q_f}{\sqrt{R^2+\left(\frac{R_0^2}{a}\right)^2-2R\frac{R_0^2}{a}\cos\theta}}\right], & R<R_0;\\ 0, & R>R_0.\end{cases}$

$\sigma_f=\begin{cases}\dfrac{(a^2-R_0^2)Q_f}{4\pi R_0(R_0^2+a^2-2R_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}, & R=R_0;\\ 0, & R=R_0'.\end{cases}$

3. $\varphi=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|x-a\mathbf{e}_x-a\mathbf{e}_y|}-\dfrac{1}{|x-a\mathbf{e}_x+a\mathbf{e}_y|}+\dfrac{1}{|x+a\mathbf{e}_x+a\mathbf{e}_y|}-\dfrac{1}{|x+a\mathbf{e}_x-a\mathbf{e}_y|}\right]$

$+\dfrac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|x-b\mathbf{e}_x-b\mathbf{e}_y|}-\dfrac{1}{|x-b\mathbf{e}_x+b\mathbf{e}_y|}+\dfrac{1}{|x+b\mathbf{e}_x+b\mathbf{e}_y|}-\dfrac{1}{|x+b\mathbf{e}_x-b\mathbf{e}_y|}\right]$，

式中 $Q'=-\dfrac{R_0}{\sqrt{2}a}Q_f$，　$b=\dfrac{R_0^2}{2a}$.

4. $\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{4}\dfrac{Q_n}{|x-b_n\mathbf{e}_x|}$，式中 Q_n 及 b_n 如下表所示

n	0	1	2	3	4
Q_n	Q_0	$-Q_0$	$-\dfrac{R_0}{2a}Q_1$	$-Q_2$	$-\dfrac{R_0Q_3}{2a-\frac{R_0^2}{2a}}$
b_n	0	$2a$	$\dfrac{R_0^2}{2a}$	$2a-\dfrac{R_0^2}{2a}$	$\dfrac{R_0^2}{2a-\frac{R_0^2}{2a}}$

5. $\varphi=\dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{|x-(2ln+c)\mathbf{e}_x|}-\dfrac{1}{|x-(2ln-c)\mathbf{e}_x|}\right]$.

6. $\varphi_1 = -\varphi_2 = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0\left(1+\dfrac{R_0}{2d}\right)}$, $C = \dfrac{Q_0}{\varphi_1-\varphi_2} = 2\pi\varepsilon_0 R_0\left(1+\dfrac{R_0}{2d}\right)$.

7. 设$Q_+ = -Q_- = \dfrac{\varepsilon_0 I_f}{\sigma}$为正,负电极所带电量,则电解液中的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_+}{r_+} - \frac{Q_+}{r_-} + \sum_{n=1}^{6}\frac{Q_n}{r_n}\right).$$

式中r_+,r_-及r_n分别为正,负电极及6个像电荷到场点的距离,像电荷的电量及位置分别为

n	1	2	3	4	5	6
Q_n	Q_+	Q_+	Q_+	Q_-	Q_-	Q_-
x_n	$(-x_0, y_0, z_0)$	$(-x_0, -y_0, z_0)$	$(x_0, -y_0, z_0)$	$(-x_0, y_0, -z_0)$	$(-x_0, -y_0, -z_0)$	$(x_0, -y_0, -z_0)$

习 题 3.4

2. $\varphi(x) = \dfrac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{f(x', y')dx'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$, $z > 0$.

3. $\varphi(x) = \dfrac{R_0^2 - R^2}{4\pi} R_0 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} \dfrac{f(\theta', \phi')\sin\theta' d\theta'}{[R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\alpha]^{3/2}}$, $R < R_0$;

$\varphi(x) = \dfrac{R^2 - R_0^2}{4\pi} R_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \dfrac{f(\theta', \phi')\sin\theta' d\theta'}{[R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\alpha]^{3/2}}$, $R > R_0$.

注意,对球外空间,其球面法线方向$n = -e_R$,$\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial R}$;对球内空间,其球面法线方向$n = e_R$,$\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial R}$.

4. $\varphi(x) = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left\{\ln\dfrac{R_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+1}{2n(2n+1)}\left[1-\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\theta)\right\}$.

习 题 3.5

2. $Q_f = 0$, $P = ql e_z$, $\overleftrightarrow{D} = 3ql^2 e_z e_z$, $\varphi(x) \approx \dfrac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \dfrac{ql^2(3\cos^2\theta - 1)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$.

3. $Q_f = 0$, $P = 0$, $\overleftrightarrow{D} = 6ql^2 e_y e_y$. $\varphi(x) \approx \dfrac{ql^2(3\sin^2\theta\sin^2\phi - 1)}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$.

4. $\varphi(x) = \dfrac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R} + \dfrac{Q_f}{40\pi\varepsilon_0}[a^2(3x^2 - R^2) + b^2(3y^2 - R^2) + c^2(3z^2 - R^2)]$.

习 题 3.6

2. (1)$W_{01} = \dfrac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$, $F_1 = \dfrac{3p^2 R_1}{4\pi\varepsilon_0 R^5}$(斥力); (2)$W_{02} = -\dfrac{p^2}{2\pi\varepsilon_0 R^3}$, $F_2 = -\dfrac{3p^2 R_2}{2\pi\varepsilon_0 R^5}$(引力).

3. $F = -\dfrac{3p_f^2(1+\cos^2\theta)}{64\pi\varepsilon_0 a^4} e_z$, $N = \dfrac{(p_f \cdot e_z)p_f \times e_z}{32\pi\varepsilon_0 a^3}$.

4. $W_e = \dfrac{5e^2}{64\pi\varepsilon_0 a_0}$, $U = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$.

第　四　章

习　题　4.1

1. 取$A'(x)=A(x)+\nabla\psi(x)$且$\psi(x)$满足$\nabla^2\psi(x)=-u(x)$.

3. 磁感应强度：$B_1=\dfrac{\mu I_f}{2\pi\rho}e_\phi$,　　$z<0$;　　$B_2=\dfrac{\mu_0 I_f}{2\pi\rho}e_\phi$,　　$z>0$.

在磁介质内部($z<0$),其磁化电流密度为

$$J_m=\nabla\times M=\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)\mu J_f,\qquad z<0.$$

在磁介质表面($z=0$),其磁化电流线密度为

$$\alpha_m=n\times(M_2-M_1)\big|_{z=0}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{I_f}{2\pi\rho}e_\varphi.$$

4. (1)是；(2)是；(3)否；(4)能,$\psi_1=\dfrac{(\mu-\mu_0)I_f}{2\pi}z\ln\rho$,且$\nabla\cdot A'_1=0$.

习　题　4.2

1. $A=\dfrac{\mu}{4\pi}\int\dfrac{J_f(x')}{r}\mathrm{d}V'$.

2. $A=\dfrac{\mu_0 I_f}{4\pi}\ln\dfrac{(l-z)+\sqrt{\rho^2+(l-z)^2}}{-(l+z)+\sqrt{\rho^2+(-l-z)^2}}e_z$. 当$l\to\infty$时,略去$A$中无关紧要的常矢项,得

$$A=-\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho\,e_z,\quad B=\frac{\mu_0 I_f}{2\pi\rho}e_\phi,$$

式中ρ为场点到长直导线的距离.

3. 见例2.

4. $B_1=\dfrac{\mu_1 I_f\rho}{2\pi a^2}e_\phi$,　$\rho<a$;　　$B_2=\dfrac{\mu_2 I_f}{2\pi\rho}e_\phi$,　$\rho>a$.

5. $B_1=\left(\dfrac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}\cos\phi\right)e_\rho+\left(\dfrac{\mu J_f}{2}\rho-\dfrac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}\sin\phi\right)e_\phi$,　　$\rho<a$;

$B_2=\left[B_0\left(1+\dfrac{a^2}{\rho^2}\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right)\cos\phi\right]e_\rho+\left[\dfrac{\mu_0 I_f}{2\pi\rho}-B_0\sin\phi+B_0\dfrac{a^2}{\rho^2}\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\sin\phi\right]e_\phi$,　　$\rho>a$.

习　题　4.3

1. $\varphi_{m1}=\dfrac{1}{3}M_0R\cos\theta$,　$B_1=\dfrac{2}{3}\mu_0M_0$,　　$R\leqslant R_0$;

$\varphi_{m2}=\dfrac{1}{3}M_0\dfrac{R_0^3}{R^2}\cos\theta$,　$B_2=\dfrac{\mu_0}{3}\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^3[3(M_0\cdot e_R)e_R-M_0]$,　　$R>R_0$.

2. $\varphi_{m1}=\dfrac{1}{2}M_0\rho\cos\phi$,　$H_1=-\dfrac{1}{2}M_0$,　　$\rho\leqslant\rho_0$;

$\varphi_{m2}=\dfrac{\rho_0^2}{2\rho}M_0\cos\phi$,　$H_2=\dfrac{M_0}{2}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^2(\cos\phi e_\rho+\sin\phi e_\phi)$,　　$\rho>\rho_0$.

3. $\varphi_{m1}=\dfrac{\mu_0M_0}{\mu_0+\mu}\rho\cos\phi=\dfrac{\mu_0M_0x}{\mu_0+\mu}$,　$H_1=-\dfrac{\mu_0M_0}{\mu_0+\mu}$,　　$\rho\leqslant\rho_0$;

$\varphi_{m2}=\dfrac{\mu_0 M_0\rho_0^2\cos\phi}{\mu_0+\mu\ \rho}=\dfrac{\mu_0 M_0}{\mu_0+\mu}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^2 x$，$H_2=\dfrac{\mu_0}{\mu_0+\mu}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^2[2(M_0\cdot\ \ )\ -M_0]$，$\rho>\rho_0$。

4. 见例 3.

5. $B_1=\mu_0 M_0$，$\rho<\rho_0$；$B_2=0$，$\rho>\rho_0$.

6. 无源区域的静电场与静磁场的比较.

(1)方程与边值关系.

	导电介质中的静电场	绝缘介质中的静电场	磁介质中的静磁场
1. 基本方程	$\begin{cases}\nabla\times E=0\\ \nabla\cdot J_f=0\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla\times E=0\\ \nabla\cdot D=0\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla\times H=0\\ \nabla\cdot B=0\end{cases}$
2. 介质性质	$J_f=\sigma E$	$D=\varepsilon_0 E+P=\varepsilon E$	$B=\mu_0(H+M)=\mu H$
3. 势的定义	$E=-\nabla\varphi$	$E=-\nabla\varphi$	$H=-\nabla\varphi_m$
4. 势的方程	$\nabla^2\varphi=0$	$\nabla^2\varphi=0$	$\nabla^2\varphi_m=0$
5. 边值关系	$\begin{cases}J_{1n}=J_{2n}\\ E_{1t}=E_{2t}\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \sigma_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}$	$\begin{cases}D_{1n}=D_{2n}\\ E_{1t}=E_{2t}\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\end{cases}$	$\begin{cases}B_{1n}=B_{2n}\\ H_{1t}=H_{2t}\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\\ \mu_1\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\end{cases}$

(2)对应关系(无源区域).

	旋度为零	散度为零	极化与磁化	介质电磁性质	引入标势的条件
导电介质	E	J_f		σ	静电场
绝缘介质	E	D	P	ε	静电场
磁介质	H	B	$\mu_0 M$	μ	没有传导电流的单通区域

因为标势的方程与边值关系在数学形式上相同,故可利用上述对应关系,将静电场边值问题的解改写为导电介质中静电场边值问题的解或磁介质中静磁场边值问题的解。这是运用类比法的根据,见习题 4.2 第 1 题及§ 4.3 例 1 的讨论。

习 题 4.4

1. $m=\dfrac{4\pi R_0^3}{3}\alpha_0\ e_z$，$B=\dfrac{\mu_0\alpha_0 R_0^3}{3R^3}(2\cos\theta\ e_r+\sin\theta\ e_\theta)$.

2. $m=\dfrac{1}{5}R_0^2 Q_f\omega\ e_z$.

3. $m=n\pi I_f R_0^2 L\ e_z$，$B=\dfrac{\mu_0 n I_f R_0^2 L}{4R^3}(2\cos\theta\ e_r+\sin\theta\ e_\theta)$。

习 题 4.5

3. $F_x^{(1)}=2\alpha m\cdot(x\ e_x-y\ e_y)$，$F_y^{(1)}=-2\alpha m\cdot(y\ e_x-x\ e_y)$，$F_z^{(1)}=0$.

第　五　章

习　题　5.1

3. (1)$E_{20}= 10^{3}\mathrm{V/m}$，　$B_{20}= 3.3\times 10^{-6}\mathrm{T}$；

(2)$\overline{P}= 3.68\times 10^{26}\mathrm{W}$；

(3)$E_{10}= 2.1\times 10^{6}\mathrm{V/m}$，　$B_{10}= 7\times 10^{-3}\mathrm{T}$.

4. 设$E= E_x+ E_y= E_{x0}\cos(kz- \omega t)e_x+ E_{y0}\cos(kz- \omega t+ \delta)e_y$，合成波电矢量端点的轨迹方程为椭圆方程

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2- 2\frac{E_xE_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos\delta= \sin^2\delta.$$

(1)当$\delta= 0$时为直线方程：

$$E_x/E_{x0}= E_y/E_{y0};$$

(2)当$\delta= \pm\frac{\pi}{2}$时为正椭圆方程

$$(E_x/E_{x0})^2+(E_y/E_{y0})^2= 1.$$

习　题　5.2

5. (1)$k'= k\left(\frac{1}{2}e_x- \frac{\sqrt{3}}{2}e_z\right)$，　$k''= k(0.5\,e_x+ 1.52\,e_z)$；

(2)$\frac{E'_{0s}}{E_{0s}}< 0$，　$\frac{E''_{0s}}{E_{0s}}> 0$，　$\frac{E'_{0p}}{E_{0p}}> 0$，　$\frac{E''_{0p}}{E_{0p}}> 0$. 在相对意义上，仅$E'_{0s}$有相位$\pi$的跃变.

(3)E'_{0s}与E'_{0p}大小不等，有$-\frac{\pi}{2}$的相位差，为椭圆偏振波；E''_{0s}与E''_{0p}大小接近，有$\frac{\pi}{2}$的位相差，接近圆偏振波.

6. $v_p= 0.868c$，　$\delta= 1.73\times 10^{-5}\mathrm{cm}$.

7. 反射系数为$R_s= \frac{4- 2\sqrt{3}}{4+ 2\sqrt{3}}$，　由能量守恒得透射系数$T_s= 1- R_s= \frac{4\sqrt{3}}{4+ 2\sqrt{3}}$.

习　题　5.3

1. $H= \frac{1}{\mu\omega}K\times E$，$n= \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_0}}\left(\varepsilon+ \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2}= \sqrt{\frac{\mu_r\varepsilon_r}{2}}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2}+ 1}+ i\sqrt{\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2}- 1}\right]$

2. $\delta\approx 0.5$，不能.

3. $\delta= 3.3\times 10^{-5}\mathrm{m}$，　$v= 8.3\times 10^{2}\mathrm{m/s}$.

习　题　5.4

2. (1)$v_p= c$，　$v_g= c$；　(2)$x_c= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}t$，　$v_g= \frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}t}= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.

习 题 5.5

1. 等离子体的折射率为

$$n = \frac{c}{v_p} = c\frac{k}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1;$$

相速与群速分别为

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c, \qquad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2}{v_p} < c.$$

第 六 章

习 题 6.1

3. 满足方程： ① $\nabla^2 H + k^2 H = 0$；② $\nabla \cdot H = 0$.

满足边界条件：

① $H_x\Big|_{x=0,a} = 0$, $\dfrac{\partial H_y}{\partial x}\Big|_{x=0,a} = 0$, $\dfrac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=0,a} = 0$;

② $\dfrac{\partial H_x}{\partial y}\Big|_{y=0,b} = 0$, $H_y\Big|_{y=0,b} = 0$, $\dfrac{\partial H_z}{\partial y}\Big|_{y=0,b} = 0$.

4. $E_x = A_1 \sin\dfrac{n\pi y}{b} e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$, $E_y = A_2 \cos\dfrac{n\pi y}{b} e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$, $E_z = A_3 \sin\dfrac{n\pi y}{b} e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$,

式中 $k_z^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$, $A_2 = i\dfrac{k_z b}{n\pi} A_3$（即仅有三个独立系数）, $\omega_c = \dfrac{n\pi c}{b}$.

5. $E_x = A_1 \cos\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b} \sin k_z z$, $E_y = A_2 \sin\dfrac{m\pi x}{a} \cos\dfrac{n\pi y}{b} \sin k_z z$,

$E_z = A_3 \sin\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b} \cos k_z z$, $k_z = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}$,

$A_1 \dfrac{m\pi}{a} + A_2 \dfrac{n\pi}{b} + k_z A_3 = 0.$

6. $P = \dfrac{a^3 b\omega\mu k_z A^2}{4\pi^2}$;

$\sigma_f\Big|_{x=0} = \sigma_f\Big|_{x=a} = 0$, $\sigma_f\Big|_{y=0} = \dfrac{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu a}{\pi} A \sin\dfrac{\pi x}{a} e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$; $\sigma_f\Big|_{y=a} = -\dfrac{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu a}{\pi} A \sin\dfrac{\pi x}{a} e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$;

$\boldsymbol{\alpha}\Big|_{x=0} = -A e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} e_y$, $\boldsymbol{\alpha}\Big|_{x=a} = A e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} e_y$,

$\boldsymbol{\alpha}\Big|_{y=0} = \left(\dfrac{\mathrm{i}k_z a A}{\pi} \sin\dfrac{\pi x}{a} e_z + A \cos\dfrac{\pi x}{a} e_x\right) e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$,

$\boldsymbol{\alpha}\Big|_{y=a} = -\left(\dfrac{\mathrm{i}k_z a A}{\pi} \sin\dfrac{\pi x}{a} e_z + A \cos\dfrac{\pi x}{a} e_x\right) e^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$.

7. 对于0.7cm× 0.4cm 的矩形波导管，只有TE_{10}型波模能传播；对于0.7cm× 0.6cm 的矩形波导管，只有TE_{10}型及TE_{01}型的模式能传播.

8. 引入常数 $B_0 = \dfrac{\mathrm{i}k_c^2}{\omega k_y} A_1$ 表示 A_1, A_2，则解为：

$$E_x(x,t)=-\frac{\mathrm{i}\omega k_y}{k_c^2}B_0\cos k_x x\sin k_y y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$E_y(x,t)=\frac{\mathrm{i}\omega k_x}{k_c^2}B_0\sin k_x x\cos k_y y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$E_z(x,t)=0;$$

$$B_x(x,t)=-\frac{\mathrm{i}k_z k_x}{k_c^2}B_0\sin k_x x\cos k_y y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$B_y(x,t)=-\frac{\mathrm{i}k_z k_y}{k_c^2}B_0\cos k_x x\sin k_y y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$B_z(x,t)=B_0\cos k_x x\cos k_y y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)};$$

$$v_\mathrm{p}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\omega^2}\left[\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2\right]}},\quad v_\mathrm{g}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z}=\frac{c^2}{v_\mathrm{p}}=c\sqrt{1-\frac{c^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]}.$$

9. 存在的模式为 $\mathrm{TE}_{n,-n}$ 型或 $\mathrm{TE}_{n,n}$ 型，TM 型波及 TEM 型波不存在. 其电磁场分布为

$$E_x(x,t)=-A\cos k_x x\sin k_x y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$E_y(x,t)=A\sin k_x x\cos k_x y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$E_z(x,t)=0;$$

$$B_x(x,t)=-\frac{k_z}{\omega}A\sin k_x x\cos k_x y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$B_y(x,t)=-\frac{k_z}{\omega}A\cos k_x x\sin k_x y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},$$

$$B_z(x,t)=\frac{k_x}{\omega}A\sin[k_x(x+y)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)};$$

式中 $k_x=\dfrac{n\pi}{a}$，$k_z=\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2}-2\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}$. 截止频率为 $\omega_{c,n,n}=\sqrt{2}\dfrac{cn\pi}{a}$.

习 题 6.2

2. 不存在.

3. 有四个模式，与 (m,n,p) 相应的波长及电场如下表所示。

(1)模式	(2)波长	(3)电场
(1,3,0)	$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$	$e_z A_3\sin\dfrac{\pi x}{2}\sin\pi y$
(2,1,0)	$\dfrac{6}{\sqrt{10}}$	$e_z A_3\sin\pi x\sin\dfrac{\pi y}{3}$
(1,0,1)	$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$	$e_y A_2\sin\dfrac{\pi x}{2}\sin\pi z$
(0,1,1)	$\dfrac{6}{\sqrt{10}}$	$e_x A_1\sin\dfrac{\pi y}{3}\sin\pi z$

(4)在 $0.01\mathrm{cm}\leqslant\lambda\leqslant 0.011\mathrm{cm}$ 波段中大约有 5×10^7 个模式。

第 七 章

习 题 7.2

1. (a)纤芯区的$H_z^{(1)}$.

$$H_z^{(1)}(\rho,\phi)=-\frac{iA}{\mu_0\omega}\left[h_1\cos\phi J'_m(h_1\rho)-\frac{im\sin\phi}{\rho}J_m(h_1\rho)\right]e^{im\phi},\qquad \rho\leqslant a;$$

(b)包层区的$H_z^{(2)}$.

$$H_z^{(2)}(\rho,\phi)=-\frac{iB}{\mu_0\omega}\left[h_2\cos\phi K'_m(h_2\rho)-\frac{im\sin\phi}{\rho}K_m(h_2\rho)\right]e^{im\phi},\qquad \rho>a;$$

第 八 章

习 题 8.1

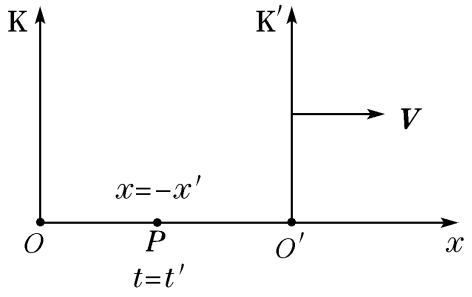
2. $\nabla\times H(x,t)=J_f(x,t)+\dfrac{\partial D(x,t)}{\partial t}+(V\cdot\nabla)D(x,t)$,

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2}{c^2}V\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c^2}(V\cdot\nabla)(V\cdot\nabla)\right]E(x,t)=0.$$

习 题 8.2

2. $x=-x'$, $t'=t=\dfrac{x}{V}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)$. 这表明,在$t_0'=t_0=0$时,即当两坐标原点相遇时,位于原点的两钟读数相同;此后,两参考系仅有一点($x=-x'$),相遇的两钟读数相同,该点的运动方程为

$$x=\frac{Vt}{1+\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$



习题8.2答案图1

4. $\Delta t'=2\gamma V l_0/c^2$

习 题 8.3

1. 同时.

2. 在$t_P=\dfrac{V}{c^2}x_P$中,将P依次取A,B,C,D的位置,可得图8.7(b)的结论.

3. $V=\dfrac{2l_0T_0}{T_0^2+\dfrac{l_0^2}{c^2}}$.

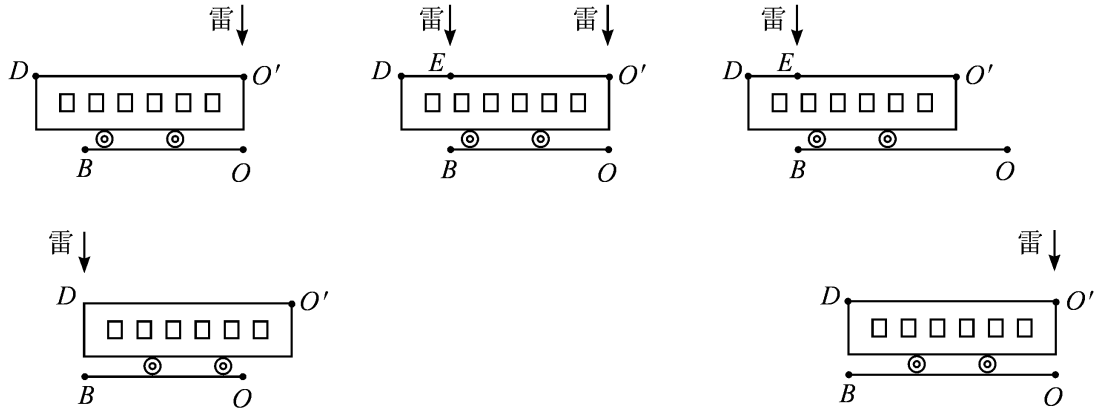
4. $\Delta t' = 4\text{s}$.

5. 能越过大气层.

6. (1) K′系在 $t_1' = 0$ 观察到一雷击中OO',在稍后的 $t_2' = \frac{V}{c^2}L_0$ 时观察到另一雷击中BD,见图1(a).

(2) K′系测得列车比隧道长,K 系测得两雷同时打在OO'及BE(其中E 位于列车$O'D$ 之间,$x_2' = -l_0\sqrt{1-\beta^2}$),见图1(b).

K 系测得列车与隧道等长,但两雷不是同时的. 其中一雷于 $t_1 = 0$ 时击中OO',另一雷在稍早的 $t_2 = -\frac{V}{c^2}l_0$ 击中BE,见图1(c).



习题8.3 答案图1

7. t_A, t_B 为K 系钟A,B 读数;t_a', t_b' 为K′系钟读数. 为计算方便,常引入一些虚构的钟:如 t_a, t_b 是K 系与K′系钟 a,b 相遇的钟的读数,因为K 系认为本系的钟是同步的,故 $t_a = t_b = t_A = t_B$;又如t_A', t_B' 是K′系与K 系钟A,B 相遇的钟的读数,因为K′系认为本系的钟是同步的,故$t_A' = t_B' = t_a' = t_b'$.

K 系测得(K 系的钟同步,K′系钟不同步,K′系长度缩短)

(1) 事件1(bA 相遇时)

$$t_{A1} = t_{B1} = t_{a1} = t_{b1} = t_0, \quad t_{b1}' = t_0, \quad t_{a1}' = t_0 + \frac{V}{c^2}l_0; \tag{①}$$

(2) 事件2(aA 相遇时)

$$t_{A2} = t_{B2} = t_{a2} = t_{b2} = t_0 + \frac{l_0}{V}\sqrt{1-\beta^2}, \quad t_{a2}' = t_0 + \frac{l_0}{V},$$

$$t_{b2}' = t_0 + \frac{l_0}{V}(1-\beta^2). \tag{②}$$

K′系测得(K′系钟同步,K 系钟不同步,K 系的长度缩短)

(1) 事件1(bA 相遇时)

$$t_{a1}' = t_{b1}' = t_{A1}' = t_{B1}' = t_0, \quad t_{A1} = t_0, \quad t_{B1} = t_0 + \frac{V}{c^2}l. \tag{③}$$

(2) 事件2(aA 相遇时)

$$t_{a2}' = t_{b2}' = t_{A2}' = t_{B2}' = t_0, \quad t_{A2} = t_0 + \frac{l_0}{V}\sqrt{1-\beta^2},$$

$$t_{B2} = t_0 + \frac{l_0}{V}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{V}{c^2}l_0. \qquad ④$$

8. $\tan\theta' = \gamma\tan\theta$.

习 题 8.4

2. $l = \dfrac{l_0}{\gamma^2\left(1+\dfrac{V^2}{c^2}\right)}$.

3. $\Delta t = \gamma\dfrac{l_0}{u_0}\left(1+\dfrac{V}{c^2}u_0\right)$.

4. (1)$\Delta t_1 = \dfrac{nl_0}{c}$; (2)$\Delta t_2 = \dfrac{l_0\left(1+\dfrac{V}{nc}\right)}{\dfrac{c}{n}+V}$; (3)$\Delta t_3 = \dfrac{l_0}{\gamma\sqrt{\dfrac{c^2}{n^2}-V^2}}$.

5. (1) A 相对 B 的速率为 $v'_A = 0.8c$,C 相对 B 的速率为 $v'_B = -0.5c$;

(2) A 相对 C 的速率为 $v''_A \approx 0.93c$,B 相对 C 的速率为 $v''_B = 0.5c$.

7. (1)$\Delta t_1 = \dfrac{\tau_A}{\sqrt{1-\dfrac{v_A^2}{c^2}}}$, $\Delta t''_1 = \dfrac{\tau_A}{\sqrt{1-\dfrac{c^2(v_B-v_A)^2}{(c^2-v_Av_B)^2}}}$; (2)$\Delta t'_2 = \dfrac{(c-v_A)(c+v_B)}{2c(v_A-v_B)}\tau_A$.

8. $l' = \dfrac{l\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{Vv}{c^2}}$.

习 题 8.5

7. (1) $k_{rx} = k\cos\theta_0$, $k_{ry} = k\sin\theta_0$, $k_{rz} = 0$, $\omega_r = \omega_0$. K 系测得,入射角 $\theta_i = \dfrac{\pi}{2} - \theta_0 =$ 反射角 θ_r, $\omega_i = \omega_r = \omega_0$.

(2)$k_{rx} = \gamma\left[\gamma\left(k\cos\theta_0+\dfrac{V}{c^2}\omega_0\right)+\dfrac{V}{c^2}\gamma(\omega_0+Vk\cos\theta_0)\right]$, $k_{ry} = -k\sin\theta_0$, $k_{rz} = 0$,

$\omega_r = \gamma\left[\gamma(\omega_0+Vk\cos\theta_0)+V\gamma\left(k\cos\theta_0+\dfrac{V}{c^2}\omega_0\right)\right]$.

K 系测得,反射角 θ_r 满足:

$$\tan\theta_r = \left|\frac{k_{ry}}{k_{rx}}\right| = \frac{\sin\theta_0}{\gamma^2[(\beta+\cos\theta_0)+\beta(1+\beta\cos\theta_0)]},$$

反射光频率

$$\omega = \gamma^2\omega_0[(1+\beta\cos\theta_0)+\beta(\beta+\cos\theta_0)].$$

第 九 章

习 题 9.2

4. q_2 对 q_1 作用力 $F_{12} = \dfrac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}e_y$, q_1 对 q_2 作用力 $F_{21} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2\sqrt{1-(V/c)^2}}e_y$.

5. $F=\frac{q\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}e_\rho$.

6. $V=\frac{2\pi U}{\mu_0 I_f\ln(b/a)}$,沿电容器轴线方向;　$B'=\frac{\mu_0 I_f}{2\pi\rho}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}e_\phi$.

7. $V=\frac{c^2}{E^2}(E\times B)$,　$E'=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}E$.

8. (1)$V=\frac{c^2(E_yB_z-E_zB_y)}{E_y^2+E_z^2+c^2(B_y^2+B_z^2)}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)e_x$,其中$e_x$沿$E\times B$的方向,上式是关于$V$的二次方程. 当$E$与$B$给定后,$V$可能解出.

(2)不是惟一的. 所有以任意速度沿E'(即B')的方向相对K′系运动的参考系均满足要求.

第　十　章

习　题　10.1

1. $\Delta U=2.56\times10^5\mathrm{MeV}$,　$v=0.745c$,　$m=1.365\times10^{-30}\mathrm{Kg}$,　$T=4.09\times10^{-14}\mathrm{J}$.

3. (1)$p=\bar{h}k$;(2)$m=\bar{h}\omega/c^2$.

6. $v(t)=\frac{a_0t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}}$,　$x(t)=\frac{c^2}{a_0}\left[\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}-1\right]$,　$\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=c$.

7. $T=47.5$年,$t'=2.52$年.

习　题　10.2

1. 在普通物理中已介绍过,两体碰撞分为四种类型,即

(1)完全弹性碰撞. 其特点是,碰撞后粒子在动心系的速率保持不变.

(2)完全非弹性碰撞. 其特点是,碰撞后粒子在动心系的速率为零. 例如,两物体碰撞后粘在一起,以及电子与正离子复合为中性原子等等.

(3)非完全弹性碰撞. 其特点是,碰撞后两物体在动心系的速度减小但不为零. 宏观物体的碰撞大多属于这种情形,物体的动能转化为热能或使物体形变.

(4)产生内激发的碰撞. 其特点是,碰撞后两粒子在动心系的速度增大或减少,例如,一个处于激发态的原子与另一个原子碰撞,碰撞后前者回到基态,其激发能转化为两原子的动能;反之,两个处于基态的原子碰撞,碰撞后原子由基态跃迁至激发态,两原子的动能就会减少.

2. 在牛顿力学中,粒子体系的质心由下式确定

$$r_c=\frac{\sum_n m_n r_n}{\sum_n m_n}=\frac{1}{m}\sum_n m_n r_n,\qquad m=\sum_n m_n. \tag{①}$$

但是,如果将“质心”的概念用于相对论力学,则出现含混不清的问题.

(1)如果将质量理解为动质量,则质心的位置为

$$r_c=\frac{\sum_n \gamma_n m_{n0} r_n}{\sum_n \gamma_n m_n},\qquad \gamma_n=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_n^2}{c^2}}}. \tag{②}$$

这样，r_c 将依赖于各粒子的运动速率 v_n，在不同惯性系中，质心将有不同的相对位置.

(2)如果将质量理解为静质量

$$r_c = \frac{\sum_n m_{n0} r_n}{\sum_n m_{n0}} = \frac{1}{m_0}\sum_n m_{n0} r_n, \qquad m_0 = \sum_n m_{n0}. \tag{③}$$

这样，在不同惯性系中，质心在粒子系中的相对位置是相同的.

但是，对③式求导，可得

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{1}{m_0}\sum_n m_{n0}\,\boldsymbol{v}_n. \tag{④}$$

这样，又出现一个问题：即使在质心系中，粒子体系的总动量为零 $\sum_n p_n = \sum_n \gamma_n m_{n0}\,\boldsymbol{v}_n = 0$，但是质心的速度 $\boldsymbol{v}_c = \frac{1}{m_0}\sum_n m_{n0}\,\boldsymbol{v}_n$ 却不为零. 因为一般来说，n 个粒子的 $\boldsymbol{v}_n$ 不同，γ_n 不同，当 $\sum_n \gamma_n m_{n0}\,\boldsymbol{v}_n = 0$ 必有 $\sum_n m_{n0}\,\boldsymbol{v}_n \neq 0$.

因此，在相对论力学中，采用动量中心系取代质量中心系.

4. $W_A = \dfrac{m_0^2 + m_{A0}^2 - m_{B0}^2}{2m_0}c^2, \qquad W_B = \dfrac{m_0^2 - m_{A0}^2 + m_{B0}^2}{2m_0}c^2;$

$$v_A = c\sqrt{1-\left(\frac{m_{A0}c^2}{W_A}\right)^2}, \qquad v_B = c\sqrt{1-\left(\frac{m_{B0}c^2}{W_B}\right)^2},$$

式中 W_A 及 W_B 见前面两式.

8. $\omega' = \dfrac{\omega\left(p_e\cos\theta - \dfrac{W_e}{c}\right)}{\dfrac{\hbar\omega}{c}(\cos\theta' - 1) + p_e\cos(\theta + \theta') - \dfrac{W_e}{c}}.$

9. $W_{th} = \left(1 + \dfrac{m_{\pi 0}}{2m_{p0}}\right)m_{\pi 0}c^2 = 144.7\,\mathrm{MeV}.$

10. (1)$T_{th} = T_A = \left(2M_0 + \dfrac{M_0^2}{2m_0}\right)c^2$；　(2)每个质子所需最低动能，即阈动能为 $T_{th} = \dfrac{M_0}{2}c^2$.

习　题　10.3

3. (1) $v(t) = \dfrac{qEct}{\sqrt{m_0^2c^2 + q^2E^2t^2}}, \quad x(t) = \dfrac{m_0c^2}{qE}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{qEt}{m_0c}\right)^2} - 1\right);$

(2) $v(t) = \dfrac{qE}{m_0}t, \quad x(t) = \dfrac{qE}{2m_0}t^2.$

4. $x = \dfrac{m_0c^2}{qE}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{qEt}{\gamma m_0c}\right)^2} - 1\right], \quad y = 0, \quad z = Vt,$ 式中 $V = c^2\dfrac{B}{E}, \quad \gamma = \left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

第 十 一 章

习　题　11.1

2. $\nabla \times E_T = -\dfrac{\partial B_T}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot E_L = \dfrac{\rho_f}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times B_T = \mu_0 J_{fT} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_T}{\partial t}, \qquad B_L = 0.$

3.(1)采用洛伦兹规范时,$A=A_0e^{i(k\cdot x-\omega t)}$,$\varphi=\varphi^{i(k\cdot x-\omega t)}$. 电磁场只决定于 A 的横向分量 A_T,其纵向分量 A_L 可任取,故电磁势不是惟一的.

(2)采用库仑规范时,可取 $\varphi=0$,因而 $A=A_0e^{i(k\cdot x-\omega t)}$,库仑条件要求 $k\cdot A=0$,A 不能有纵向分量,在 φ 给定后,电磁势是惟一的.

习　题　11.3

1. $P_{e2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2a^2}{3c^3}$.

2. $B_{e2}(x,t)=\dfrac{\mu_0qR_0\omega^2}{4\pi cR}(\cos\theta e_\phi-ie_\theta)e^{i(kR-\omega t)}$,　　$E_{e2}(x,t)=\dfrac{\mu_0qR_0\omega^2}{4\pi R}(\cos\theta e_\theta+ie_\phi)e^{i(kR-\omega t)}$,

$\overline{S}_{e2}=\dfrac{\mu_0q^2R_0^2\omega^4}{32\pi^2cR^2}(1+\cos^2\theta)e_R$.

3. $B_{e2}(x,t)=-\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)R_0^3\omega^2E_0}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^3R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}e_\phi$,　　$E_{e2}(x,t)=-\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)R_0^3\omega^2E_0}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^2R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}e_\theta$,

$\overline{S}_{e2}=\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2\varepsilon_0R_0^6\omega^4E_0^2}{2(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2c^3R^2}\sin^2\theta e_R$.

4. $B_{e2}(x,t)=-\dfrac{i\mu_0p_0\omega^3a}{4\pi c^2R}(\cos\theta\sin\phi e_\theta+\cos^2\theta\cos\phi e_\phi)e^{i(kR-\omega t)}$,

$E_{e2}(x,t)=\dfrac{i\mu_0p_0\omega^3a}{4\pi cR}(-\cos^2\theta\cos\phi e_\theta+\cos\theta\sin\phi e_\phi)e^{i(kR-\omega t)}$,

$\overline{S}_{e2}=\dfrac{\mu_0\omega^6p_0^2a^2}{32\pi^2c^3R^2}(\cos^4\theta\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi)e_R$.

习　题　11.4

1. 不能发生.

2. 辐射场为 0.

3. $B_{m2}(x,t)=-\dfrac{\mu_0\omega^2m_0}{4\pi c^2R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}e_\theta$,　　$E_{m2}(x,t)=\dfrac{\mu_0\omega^2m_0}{4\pi cR}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}e_\phi$,

$P_{m2}=\dfrac{\mu_0\omega^4m_0^2}{12\pi c^3}=\dfrac{4\pi^5}{3}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\dfrac{R_0}{\lambda}\right)^4I_0^2$.

4. $B_{e4}(x,t)=-\dfrac{\mu_0\omega^3qz_0^2\sin2\theta}{8\pi c^2R}e^{ikR}\sin2\omega te_\phi$,　　$E_{e4}(x,t)=-\dfrac{\mu_0\omega^3qz_0^2\sin2\theta}{8\pi cR}e^{ikR}\sin2\omega te_\theta$,

$P_{e4}=-\dfrac{\mu_0\omega^6q^2z_0^4}{60\pi c^3}$.

5. $B_{e4}(x,t)=\dfrac{\mu_0\omega^3q_0z_0^2\sin2\theta}{8\pi c^2R}e^{i\left(kR-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}e_\phi$,　　$E_{e4}(x,t)=\dfrac{\mu_0\omega^3q_0z_0^2\sin2\theta}{8\pi c^2R}e^{i\left(kR-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}e_\theta$,

$P_{e4}=\dfrac{\mu_0\omega^6q_0^2z_0^4}{60\pi c^3}$.

习　题　11.5

4. $\dfrac{dP}{d\Omega}=\dfrac{\mu_0cI_0^2}{8\pi^2}\dfrac{\sin^2(\pi\cos\theta)}{\sin^2\theta}$.

第 十 二 章

习 题 12.2

1. $P(t')=\dfrac{e^4E^2}{6\pi\varepsilon_0 m_0^2c^3}$.

2. $t=1.6\times10^{-11}$s.

3. $B=0.28$T, $\dfrac{\Delta W}{W}=4.6\times10^{-5}$.

习 题 12.3

2. (1)$T\approx29.93$Mev;(2)$\Delta m_0/m_0=0.13$.

习 题 12.4

2. (1)$E=-\dfrac{\mu_0\omega^2ez_0\sin\theta}{4\pi R}e^{i\left(\frac{\omega}{c}R-\omega t\right)}e_\theta$, $B=-\dfrac{\mu_0\omega^2ez_0\sin\theta}{4\pi cR}e^{i\left(\frac{\omega}{c}R-\omega t\right)}e_\phi$, $\bar{S}=\dfrac{\mu_0^2\omega^4e^2z_0^2}{32\pi^2cR^2}\sin^2\theta e_R$;

(2)$E=\dfrac{eR}{4\pi\varepsilon_0R^3}$, $B=\dfrac{\mu_0e\boldsymbol{v}\times R}{4\pi R^3}$.

3. $E=\dfrac{eR_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0c^2R}(\cos\theta e_\theta+ie_\phi)e^{i\left(\frac{\omega}{c}R-\omega t+\phi\right)}$, $B=\dfrac{eR_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0c^3R}(-ie_\theta+\cos\theta e_\phi)e^{i\left(\frac{\omega}{c}R-\omega t+\phi\right)}$,

$\bar{S}=\dfrac{e^2R_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^2}(1+\cos^2\theta)e_R$. $\theta=0,\pi$为圆偏振,$\theta=\dfrac{\pi}{4}$为椭圆偏振,$\theta=\dfrac{\pi}{2}$为线偏振.

4. (1)$r(t)=A(e_x-ie_y)e^{-i(\omega_0+\omega_L)t}+B(e_x-ie_y)e^{-i(\omega_0-\omega_L)t}+Ce_ze^{-i\omega_0t}$,式中$\omega_L=\dfrac{eB}{2m}$(设$\dfrac{eB}{2m}\ll\omega_0$).

(2)沿z方向观察到频率为$\omega_0\pm\omega_L$的两个旋转方向相反的圆偏振波,在水平方向观察到频率分别为ω_0,$\omega_0\pm\omega_L$的三个线偏振波.

5. (1)$T(t)=T_0e^{-\frac{e^4B^2}{3\pi\varepsilon_0m^3c^3}t}$; (2)$\Delta t=8.07\times10^{10}$s.

6. (1)$v=v_0\left(1-\dfrac{8v_0^3}{45Zc^3}\right)$;

(2)由$v\ll c$,属偶极辐射,辐射角分布$\dfrac{dp}{d\Omega}\propto\sin^2\theta$,式中$\theta$为辐射方向与速度的夹角.

以正电子为坐标原点,电场$E=E(R,\theta)e_\theta$,是平面偏振波.

附 录

习题 A1.2

1. (1)$-\dfrac{r}{r^3}$; (2)$\dfrac{r}{r^3}$; (3)0; (4)0; (5)a; (6)$ik\cdot A_0e^{i(k\cdot r-\omega t)}$; (7)$ik\times A_0e^{i(k\cdot r-\omega t)}$.

∇ 算符与A的标积(或矢积)等效于ik与A的标识(或矢积).若$\nabla\cdot A=0$,意味着$k\perp A$,A为横场;若$\nabla\times A=0$,意味着$k\parallel A$,A为纵场.

习题 A1.3

4.(1) $-\frac{2}{r^5}$;　(2) $-\frac{r\cdot a}{r^3}$;　(3) $-\frac{r\times a}{r^3}$;　(4)$2a$;　(5) $4a\cdot r$;　(6)$a\times r$;
(7)$B_x + x\nabla\cdot B$;　(8)$e_x\times B + x\nabla\times B$

习题 A1.5

1.(1) 分别将 e_R, e_θ, e_ϕ 按 e_x, e_y, e_z 分解,得

$$\begin{cases} e_R = \sin\theta\cos\phi e_x + \sin\theta\sin\phi e_y + \cos\theta e_z, \\ e_\theta = \cos\theta\cos\phi e_x + \cos\theta\sin\phi e_y - \sin\theta e_z, \\ e_\phi = -\sin\phi e_x + \cos\phi e_y. \end{cases}$$

它们对 R,θ,ϕ 的偏导为

$$\begin{cases} \frac{\partial e_R}{\partial R} = 0, & \frac{\partial e_R}{\partial\theta} = e_\theta, & \frac{\partial e_R}{\partial\phi} = \sin\theta e_\phi, \\ \frac{\partial e_\theta}{\partial R} = 0, & \frac{\partial e_\theta}{\partial\theta} = -e_R, & \frac{\partial e_\theta}{\partial\phi} = \cos\theta e_\phi, \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial R} = 0, & \frac{\partial e_\phi}{\partial\theta} = 0, & \frac{\partial e_\phi}{\partial\phi} = -(\sin\theta e_R + \cos\theta e_\theta). \end{cases}$$

(2) 分别将 e_ρ, e_ϕ, e_z 按 e_x, e_y, e_z 分解,得

$$\begin{cases} e_\rho = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y, \\ e_\phi = -\sin\phi e_x + \cos\phi e_y, \\ e_z = e_z. \end{cases}$$

它们对 ρ,ϕ,z 的偏导为

$$\begin{cases} \frac{\partial e_\rho}{\partial\rho} = 0, & \frac{\partial e_\rho}{\partial\phi} = e_\phi, & \frac{\partial e_\rho}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial\rho} = 0, & \frac{\partial e_\phi}{\partial\phi} = -e_\rho, & \frac{\partial e_\phi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial e_z}{\partial\rho} = 0, & \frac{\partial e_z}{\partial\phi} = 0, & \frac{\partial e_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

3. $H_\rho = 1$,　$H_\phi = \rho$,　$H_z = 1$;　$dl_1 = d\rho$,　$dl_2 = \rho d\phi$,　$dl_3 = dz$;　$dV = \rho d\rho d\phi dz$.

5. $c = -\rho_V/6\varepsilon$.

习题 A1.6

1.(1)$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$.

习 题 提 示

第 一 章

习 题 1.2

1. 本题可看做电荷体密度为ρ、半径为a的均匀球体激发的电场E_1与电荷体密度为$-\rho$,半径为b的均匀球体激发的电场E_2的叠加,即$E=E_1+E_2$.

2. 由$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot E$计算$\rho$.可用两种方法求$Q$:(1)按高斯定理,高斯面是半径$R\to\infty$的球面;(2)按$Q=\int_{V_\infty}\rho dV$计算.

3. 由于$n\neq 2$时高斯定理不成立,故应通过直接积分计算. 由球对称性可知,带电球壳激发的电场必沿径向,故任一电荷元$dQ=\sigma dS$所激发的场只有其$\hat{e}_R$分量才对总场强有贡献,由此得

$$dE_R=\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^n}\cos\alpha=\frac{\sigma a^2\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{n/2}}\cos\alpha.$$

$\cos\alpha$可由$\triangle ABP$邻边与斜边之比求得,将上式对θ、ϕ积分即得整个球壳在P点激发的场强,积分过程中要作变量代换

$$u=R^2+a^2-2Ra\cos\theta,\qquad du=2Ra\sin\theta d\theta.$$

积分可化为$\int[Au^{-(n-1)/2}+Bu^{-(n+1)/2}]du$的形式.当$R>a$时,积分上、下限分别为$(R\pm a)^2$;当$R<a$时,积分上、下限分别为$(a\pm R)^2$.

若$n=2$,与高斯定理结果一致,球壳内电场为零;若$n\neq 2$,则球壳内电场存在,设想在球壳内置一同心导体球,并用细导线连接两球,则内球必带电. 这样,精确测量内导体球的电量即可判断平方反比定律的精确度.

4. 将半圆柱壳沿半圆周分成无限多个窄条$a d\phi$,每一窄条相当电流为$\frac{I}{\pi}d\phi$的无限长载流直导线. 由对称性可知,总磁场沿$\hat{e}_y$方向,故只要对每一窄条激发的磁场的y分量进行积分即可.计算积分可采用变量替换:$u=\cot\frac{\phi}{2}$.

5. 首先,由圆电流轴线上的磁场$B=\hat{e}\frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$出发,通过积分求得半无限长螺线管轴线上任一点的磁场$B(z')=\hat{e}\frac{\mu_0 nI}{2}\left(1+\frac{z'}{\sqrt{a^2+z'^2}}\right)$;其次,在$z'$处取一轴线沿$z$轴高度为$dz'$,半

径为ρ的小圆柱为高斯面,利用 $\oint_S B\cdot \mathrm{d}\sigma = 0$ 求得 $B_\rho(z') = \dfrac{\mu_0 nI\rho a^2}{4(a^2+z'^2)^{3/2}}$,令 $z'=0$ 即为所求.

6. 电流圈 C_1 对 C_2 的作用力为

$$F_{21} = \oint_{c2} I_2 \mathrm{d}l_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c1}\frac{I_1 \mathrm{d}l_1 \times r_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{c1}\mathrm{d}l_1\oint_{c2}\frac{r_{12}\cdot \mathrm{d}l_2}{r_{12}^3} - \oint_{c1}\oint_{c2}\frac{\mathrm{d}l_1\cdot \mathrm{d}l_2}{r_{12}^3}r_{12}\right]$$

其中第一项可以证明为零:

$$\oint_{c2}\frac{r_{12}\cdot \mathrm{d}l_2}{r_{12}^3} = \oint_{c2}\frac{r_{12}\cos(\hat{r}_{12},\mathrm{d}l_2)\mathrm{d}l_2}{r_{12}^3} = \oint_{c2}\frac{\mathrm{d}r_{12}}{r_{12}^2} = -\oint \mathrm{d}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = 0.$$

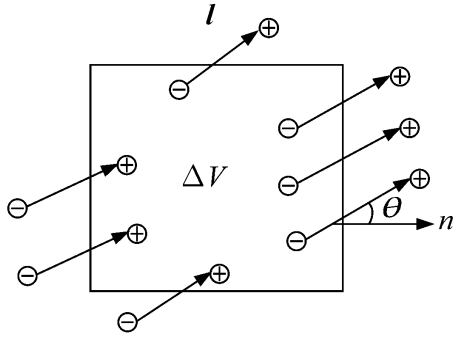
式中 $(\hat{r}_{12},\mathrm{d}l_2)$ 表示 r_{12} 与 $\mathrm{d}l_2$ 的夹角. 同理算出 F_{12},利用 $r_{12} = -r_{21}$, $r_{12} = |r_{12}| = |r_{21}| = r_{21}$ 可证.

习　题　1.3

1. 由电子作圆周运动的向心力等于磁场的洛伦兹力得 $B_a = \dfrac{mv}{ea}$,由(3)式得电子轨道上的电场 $E = -\dfrac{a}{2}\dfrac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$,由牛顿第二定律 $\dfrac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F = -eE$ 得 $\overline{B} = \dfrac{2mv}{ea}$.

2. 计算电子沿 e 轴运动到 $x'=0$ 时场点 x 处的 B,利用电子作低速运动时库仑定律近似成立,易得 x 处的电场 E. 由电子运动方向知电流方向得 $B_z = 0$,利用 $\nabla\times B = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E}{\partial t}$ 的 x 分量及 y 分量分别求出 B_y 与 B_x 后得 B.

习　题　1.4



习题 1.4 图 1

1. 为证明(2)、(3)、(4)式,先考虑存在外电场时为什么宏观的小体积 ΔV 内会出现静电荷(见习题 1.4 图 1)? 这是因为极化使分子的正负电中心分开:有的分子的正电荷位于 ΔV 的边界外(见图的右边),有的分子的负电荷位于 ΔV 的边界内(见图的左边). 这样,ΔV 体积内的束缚电荷 Q_P 等于伸出 ΔV 外的电量的负值.

设分子的 $p = ql$,而 ΔV 界面的法线单位矢量为 n,l 与 n 的夹角为 θ. 那么,到底多厚的边界层的分子有一个正的或负的电荷在边界外呢? 易见厚度为 $l\cos\theta = l\cdot n$(在 θ 不同的地方,厚度不同). 在 $\mathrm{d}\sigma$ 面元上,有电荷在外的分子所占体积为

$$\mathrm{d}V = l\cdot n\mathrm{d}\sigma = l\cdot \mathrm{d}\sigma. \qquad ①$$

设单位体积分子数为 n,则穿出 $\mathrm{d}\sigma$ 面元的电量为

$$qn\mathrm{d}V = qnl\cdot \mathrm{d}\sigma = np\cdot \mathrm{d}\sigma, \qquad ②$$

穿出小体积 ΔV 的界面 S 的总电量为上式对界面 S 的积分. 由此可见,ΔV 内的束缚电荷

$$Q_P = -\oint P\cdot \mathrm{d}\sigma = -\int_{\Delta V}\nabla\cdot P\mathrm{d}V, \qquad ③$$

这里已应用了高斯定理.

设束缚电荷体密度为 ρ_P,则

$$Q_P = \int_{\Delta V}\rho_P \mathrm{d}V. \qquad ④$$

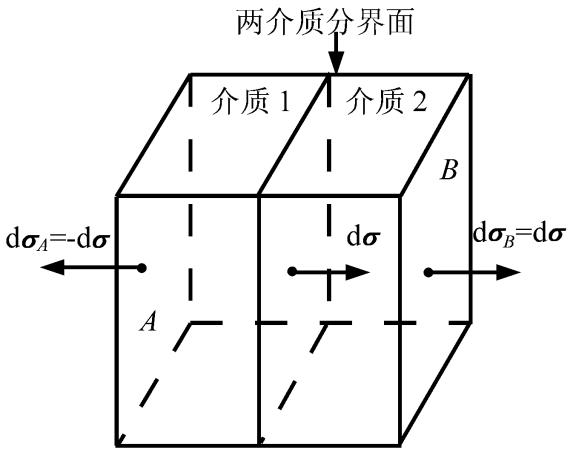
将上面两式联立,由 ΔV 的任意性,即得(2)式:

$$\rho_P = -\nabla \cdot P. \tag{5}$$

设 $d\sigma$ 是介质 1 与介质 2 分界面的一个面积元矢量.在界面的两侧分别作厚度为 $l\cdot n$ 的薄层,得 A ,B 面.现计算 A ,B 面间薄层中的束缚电荷.仿照②式,可得

$$\begin{aligned} dQ_P &= -\ (\text{伸出 } A \text{ ,} B \text{ 面外的电荷}) \\ &= -\ (P_1 \cdot d\sigma_A + P_2 \cdot d\sigma_B) \\ &= -\ (P_2 - P_1) \cdot d\sigma. \end{aligned} \tag{6}$$

这里的 $d\sigma = d\sigma_B = -d\sigma_A$ 为由介质1指向介质2 的面积元矢量 $n d\sigma$.



习题1.4 图2

束缚电荷的面密度为

$$\sigma_P = \frac{dQ_P}{d\sigma} = \frac{-(P_2 - P_1)\cdot d\sigma}{d\sigma} = -n\cdot(P_2 - P_1). \tag{7}$$

这就是(3)式.今后可利用§ 1.5 的表1.2,直接由⑤式得到它.

由②式可见,穿出面元 $\Delta\sigma$(而不是留在 ΔV)的束缚电荷为

$$Q_P = \int_{\Delta\sigma} P \cdot d\sigma. \tag{8}$$

若电场随时间变化,P 将随时间变化,穿过 $\Delta\sigma$ 面的束缚电荷 Q_P 也随时间变化,即有电电流过 $\Delta\sigma$ 面,称为极化电流

$$I_P = \frac{dQ_P}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Delta\sigma} P\cdot d\sigma = \int_{\Delta\sigma}\frac{\partial P}{\partial t}\cdot d\sigma = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot\int_{\Delta\sigma} d\sigma = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot\Delta\sigma. \tag{9}$$

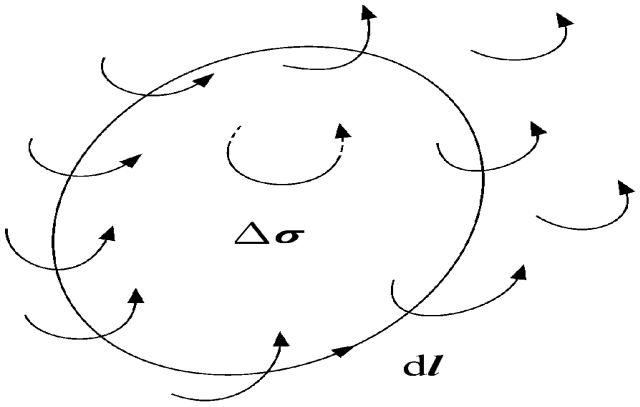
由于穿过介质内任一小面元 $\Delta\sigma$ 的极化电流可用极化电流密度 J_P 表示为

$$I_P = J_P \cdot \Delta\sigma. \tag{10}$$

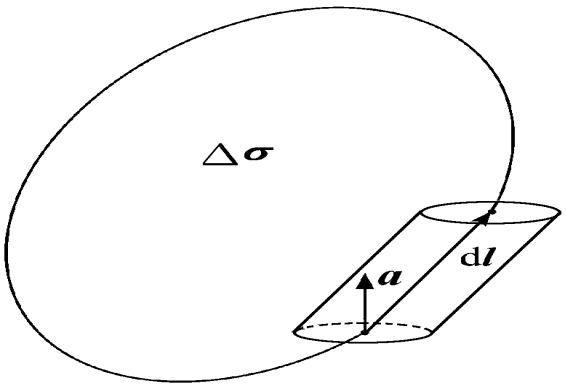
两式联立,即得极化电流密度

$$J_P = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{11}$$

为了证明(6)式,先计算流过介质内部某一面元 $\Delta\sigma$ 的磁化电流 I_m.



习题 1.4 图 3



习题 1.4 图 4

设面元 $\Delta\sigma$ 由曲线 l 环绕.不难发现,没有流过曲面或两次流过曲面 $\Delta\sigma$ 的分子电流对 I_m 没有贡献,但一次流过曲面 $\Delta\sigma$ 的分子电流对 I_m 才有贡献.

设分子密度为 n,只要算出有多少分子电流一次流过 $\Delta\sigma$ 面,即可求得流过 $\Delta\sigma$ 的磁化电流.

一般来说,$\Delta\sigma$ 边界线的 $\mathrm{d}l$ 与 a 不同向,则分子中心在以 a 为底,$\mathrm{d}l$ 为轴的斜柱内的子,其电流流过 $\Delta\sigma$ 一次,对 I_m 有贡献.

斜柱体积: $\mathrm{d}V = a\cdot \mathrm{d}l$, ⑫

斜柱内分子总数: $n\mathrm{d}V = na\cdot \mathrm{d}l$, ⑬

斜柱内分子对 I_M 的贡献

$$in\mathrm{d}V = nia\cdot \mathrm{d}l = M\cdot \mathrm{d}l. \quad ⑭$$

$\Delta\sigma$ 整个边界线 l 附近的分子对 I_m 的总贡献为

$$I_m = \oint_l M\cdot \mathrm{d}l = \int_{\Delta\sigma} \nabla\times M\cdot \mathrm{d}\sigma. \quad ⑮$$

这里已应用了斯托克斯定理.仿上,与 $I_m = \int_{\Delta\sigma} J_m\cdot \mathrm{d}\sigma$ 对比,即有

$$J_m = \nabla\times M. \quad ⑯$$

习 题 1.5

2. 用麦克斯韦方程的积分形式(真空及介质中的高斯定理)求电场,用电磁场边值关系求电荷密度.

3. 由高斯定理可求得 $E_1 = \frac{\sigma_{f1}}{\varepsilon}$, $E_2 = -\frac{\sigma_{f2}}{\varepsilon_2}$;由边值关系可求得 σ_{f3}. 当介质不导电时,由电势差公式 $E = \int E\cdot \mathrm{d}l$ 可求得 σ_f;当介质漏电时,由欧姆定律 $J = \sigma E$ 求 σ_f.

4. 由麦克斯韦方程的积分形式(安培定理)求 B;由磁场强度的定义 $B = \mu_0(H + M)$ 求出 M 后,由 $J_m = \nabla\times M$ 求 J_m,由边值关系求 α_m.

5. (1)由 $n\times(E_2 - E_1) = 0$ 及 $n\cdot(D_2 - D_1) = 0$ 证明;

(2)由 $n\times(E_2 - E_1) = 0$ 及 $n\cdot(J_2 - J_1) = 0$ 证明.

6. 静电情况由 $n\times(E_2 - E_1) = 0$ 证明,此时导体内 $E_1 = 0$;稳恒电流情况由 $n\cdot(J_2 - J_1) = 0$ 证明,此时绝缘介质内 $J_2 = 0$.

第 二 章

习 题 2.1

4. 利用 $\eta_f\Delta l = \rho_f\Delta V$,便可由 $\rho_f(t)$ 得 $\eta_f(t)$.

习 题 2.2

1. 为了计算(19)式中两项积分之和,利用矢积公式

$$-\mathrm{d}l\times(\mathrm{d}l'\times r) + \mathrm{d}l'\times(\mathrm{d}l\times r) = -(\mathrm{d}l\cdot r)\mathrm{d}l' + (\mathrm{d}l\cdot \mathrm{d}l')r + (\mathrm{d}l'\cdot r)\mathrm{d}l - (\mathrm{d}l'\cdot \mathrm{d}l)r$$

$$= -(r\cdot \mathrm{d}l)\mathrm{d}l' + (r\cdot \mathrm{d}l')\mathrm{d}l.$$

由此得

$$-\oint_c \frac{\mathrm{d}l\times(\mathrm{d}l'\times r)}{r^3} + \oint_c \frac{\mathrm{d}l'\times(\mathrm{d}l\times r)}{r^3} = -\oint_c \frac{r\cdot \mathrm{d}l}{r^3}\mathrm{d}l' + \oint_c \frac{r\cdot \mathrm{d}l'}{r^3}\mathrm{d}l.$$

由于$\mathrm{d}l$与积分变量$\mathrm{d}l'$无关,可提出积分号外;利用$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{r}{r^3}$及$\nabla'\frac{1}{r}=\frac{r}{r^3}$,上式可简化为

$$-\oint_c\frac{\mathrm{d}l\times(\mathrm{d}l'\times r)}{r^3}+\oint_c\frac{dl'\times(dl\times r)}{r^3}=\mathrm{d}l\cdot\oint_c\left[\nabla\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}l'+\mathrm{d}l\oint_c\left[\nabla'\frac{1}{r})\right]\cdot\mathrm{d}l'. \tag{*}$$

由公式$\mathrm{d}\varphi=\nabla'\varphi\cdot\mathrm{d}l'$可得$\left[\nabla'\frac{1}{r}\right]\cdot\mathrm{d}l'=\mathrm{d}\frac{1}{r}$,易见第二项积分为零.

$$\oint_c\left[\nabla'\frac{1}{r}\right]\cdot\mathrm{d}l'=\oint_c\mathrm{d}\left[\frac{1}{r}\right]=0.$$

这样,将上式代入(*)式即得(20)式.

2. 为了计算$E\times(\nabla\times A)$,要展开$\nabla(A\cdot E)$及$\nabla\cdot(AE+EA)$,将两式联立,并利用稳定场的条件$\nabla\times E=0$及库仑规范$\nabla\cdot A=0$,可得

$$E\times(\nabla\times A)=\nabla(A\cdot E)-\nabla\cdot(AE+EA)+(\nabla\cdot E)A.$$

代入积分式后,还要利用体积分与面积分的变换公式$\int_V\mathrm{d}V\,\nabla=\oint_S\mathrm{d}\sigma$,以及在无穷远面上的两项面积分均为零.

习 题 2.3

1.
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times R)&=\sum_i\nabla_i\boldsymbol{e}_i\cdot\left[\sum_{jk}T_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\times\sum_l x_l\boldsymbol{e}_l\right]\\&=\sum_{ijkl}\nabla_i\delta_{ij}T_{jk}x_l(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_l)=\sum_{jkl}\nabla_j(T_{jk}x_l)\sum_{mns}\varepsilon_{mns}\boldsymbol{e}_m\delta_{nk}\delta_{sl}\\&=\sum_{jklm}(x_l\nabla_jT_{jk}+T_{jk}\nabla_jx_l)\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{e}_m=\sum_{jklm}\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{e}_m\left[x_l(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_k+T_{jk}\delta_{jl}\right]\\&=-\sum_{klm}\varepsilon_{mlk}\boldsymbol{e}_mx_l(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_k+\sum_{klm}\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{e}_mT_{lk}\\&=-R\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}).\end{aligned}$$

这里再次利用了x_l是$R=\sum_l x_l\boldsymbol{e}_l$的第$l$个分量. 第二项由于$\varepsilon_{mkl}$对指标$kl$反对称,$T_{lk}$对$lk$对称(电磁场动量流密度$T$是对称张量),故$\sum_{klm}\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{e}_mT_{lk}=0$.

2. 由于没有电磁角动量流入该体系,故其总角动量守恒:

$$L_{\mathrm{m}}(t)+L_{\mathrm{e,m}}(t)=L(t)=L(0)=L_{\mathrm{m}}(0)+L_{\mathrm{e,m}}(0). \tag{*}$$

$t=0$时电容器静止,机械角动量$L_{\mathrm{m}}(0)=0$;而在t时刻,由于磁场被除去,故电磁角动量$L_{\mathrm{e,m}}(t)=0$. 将这两个结果代入(*)式,并注意到$R=\rho\boldsymbol{e}_\rho$,即有

$$L_{\mathrm{m}}(t)=L_{\mathrm{e,m}}(0)=\int_VR\times g(0)\mathrm{d}\tau=\varepsilon_0\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\boldsymbol{e}_\rho\times[E(0)\times B(0)]\rho\mathrm{d}\rho.$$

将忽略边缘效应时电容器内的电磁场

$$E(0)=\frac{\varphi_0\boldsymbol{e}_\rho}{\rho\ln(\rho_2/\rho_1)},\qquad B(0)=B(0)\boldsymbol{e}_z.$$

代入$L_{\mathrm{m}}(t)$,注意到$\boldsymbol{e}_\rho\times(\boldsymbol{e}_\rho\times\boldsymbol{e}_z)=-\boldsymbol{e}_z$即得.

第 三 章

习 题 3.1

1. 第一种情形:如果电荷分布在有限区域内,通常取无穷远处电势为零;第二种情形:如果电荷分布在无穷大区域(如均匀场、无穷大带电平极、无限长均匀带电直导线等等),则通常不能规定无穷远处电势为零,否则在近处电势均为无穷大. 当然也有个别例外,如两根位于 $x=\pm a$ 的带有等量异号电荷的无限长直导线,则仍可规定无穷远处电势为零.

如果导体接地(即用一根细导线与无限远处的大地连接起来),这时,能否把无穷远电势与大地电势同时选作零呢? 实际上,这就要求 $\varphi_{地}-\varphi(\infty)=\int_{地}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$. 显然,当电荷分布在有限区域时,它在无穷远处激发的电场 $\boldsymbol{E}=0$. 因此,总可选取从大地到任一方向的无穷远处的积分路线 $\boldsymbol{E}$ 恒为零,使上述要求得到满足;反之,在第二种情形下,电荷分布在无穷大区域,通常都不取无穷远处电势为零,就不存在这个问题了.

4. 在三个介质分界面上,$\boldsymbol{E}$ 的切向分量 E_ρ 及 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量 D_ϕ 连续,可以预料柱外的 $\boldsymbol{E}$ 具有柱对称性,从而提出尝试解 $\boldsymbol{E}=C\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\phi$,待定系数 C 由高斯定理确定.

习 题 3.2

请按教材介绍的步骤解题,下面仅提示难点.

1. 根据电势叠加原理,可令

$$\varphi=\varphi'+\varphi=\sum_l a_l R^l P_l(\cos\theta)+\frac{p_f\cdot R}{4\pi\varepsilon_1 R^3},\quad R<R_0;$$

$$\varphi_2=\varphi_2'+\varphi=\sum_l \frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\frac{p_f\cdot R}{4\pi\varepsilon_1 R^3},\quad R>R_0.$$

其中 φ_1 已考虑到 $\varphi_1|_{R\to 0}$ 有限,φ_2 已考虑到 $\varphi_2|_{R\to\infty}=0$. 此外,由于球内有自由电荷分布,$\varphi$ 满足泊松方程,取 $\varphi=\varphi'+\varphi$ 后,φ' 满足拉普拉斯方程. 本来球外没有自由电荷分布,φ_2 满足拉普拉斯方程,这里加上 φ_f 仅是为了定系数时方便;如果 φ_2 不加 φ_f,则算出的 d_1 有所不同,但 φ_2 仍是相同的. 因为 $l=1$,该项为 $\dfrac{d_1\cos\theta}{R^2}$,它跟 R,θ 的函数关系与 $\varphi_2=\dfrac{p_f\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 R^2}$ 相同.

3. 利用勒让德多项式的递推公式

$$P_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)\right]$$

计算积分 $\int_0^1 P_l(x)\mathrm{d}x$,并注意到

$$P_l(1)=1,\quad P_{2l+1}(0)=0,\quad P_{2l}(0)=\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}.$$

4. 本题的边界是内球面 S 及外球面 S',边界条件是 $\varphi|_S=\varphi_0$ 及 $\varphi|_{S'}=\varphi_0'$. 在 S 面上 $R=R_0$ 易求,难的是 S' 面上的 $R|_{S'}=R'$ 是 θ 的函数,由余弦定理(略去 d^2 项)可得

$$R_0'=\sqrt{R'^2+d^2-2R'd\cos\theta}\approx R'\sqrt{1-\frac{2d\cos\theta}{R'}}\approx R'\left(1-\frac{d\cos\theta}{R'}\right)=R'-d\cos\theta,$$

即 $$R\mid_{S'}=R'=R_0'+d\cos\theta.$$

式中第二项表示由于两球不同心造成的与球对称的偏差,当$d\to0$时偏差也趋于零.

由于本题具有轴对称性,在一级近似下,拉普拉斯方程的通解仅保留$l=0,1$这两项,即

$$\varphi=\sum_{l=0}^{1}\left(a_lR^l+\frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{①}$$

将φ代入$\varphi\mid_S=\varphi_0'$,得

$$\varphi_0=\varphi\mid_S=\left(a_0+\frac{b_0}{R_0}\right)+\left(a_1R_0+\frac{b_1}{R_0^2}\right)\cos\theta. \tag{②}$$

将φ代入$\varphi\mid_{S'}=\varphi_0'$,得

$$\varphi_0'=\varphi\mid_{S'}=\sum_{l=0}^{1}\left(a_lR^l+\frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)\Bigg|_{R=R'=R_0'+d\cos\theta}$$

$$=\left(a_0+\frac{b_0}{R_0'+d\cos\theta}\right)+\left[a_1(R_0'+d\cos\theta)+\frac{b_1}{(R_0'+d\cos\theta)^2}\right]P_1(\cos\theta).$$

利用

$$\frac{1}{R_0'+d\cos\theta}=\frac{1}{R_0'\left(1+\frac{d}{R_0'}\cos\theta\right)}\approx\frac{1}{R_0'}\left(1-\frac{d}{R_0'}\cos\theta\right),$$

$$\frac{1}{(R_0'+d\cos\theta)^2}\approx\frac{1}{R_0'^2\left(1+\frac{2d}{R_0'}\cos\theta\right)}\approx\frac{1}{R_0'^2}\left(1-\frac{2d}{R_0'}\cos\theta\right),$$

得

$$\varphi_0'=a_0+\frac{b_0}{R_0'}+\left(a_1R_0'+\frac{b_1}{R_0'^2}-\frac{b_0d}{R_0'^2}\right)\cos\theta. \tag{③}$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性[注意$P_0(\cos\theta)=1,P_1(\cos\theta)=\cos\theta$]及②,③式即可用$R_0,R'_0,d,\varphi_0,\varphi_0'$表示$a_0,b_0,a_1,b_1$.代入①式即可求得$\varphi$与$\varphi_0,\varphi_0'$的函数关系.

由此求得$E=-\nabla\varphi$,内球面的电荷面密度$\sigma=\varepsilon_0n\cdot E\mid_{R=R_0}$,内球面的电量$Q_f=\oint_S\sigma\mathrm{d}\sigma$,以及电容器的电容$C=\dfrac{Q_f}{\varphi_0-\varphi_0'}$.

5. 用分离变量法求解泊松方程的边组问题,便可将$\alpha\cos\theta$及$\beta+\gamma\cos^2\theta$用$P_0(\cos\theta)$,$P_1(\cos\theta)$及$P_2(\cos\theta)$表示,利用$P_l(\cos\theta)$的正交性定系数.

6. 取z轴沿圆柱轴、x轴沿E_0方向的柱坐标系. 由于圆柱无限长,电势与z无关,在柱坐标系中,电势仅为ρ与ϕ的函数,取圆柱置入前坐标原点的电势为零.应注意,如果z轴不沿圆柱轴,柱面上的边界条件就没有$\varphi\mid_{\rho=\rho_0}=0$这样简单的形式;如果$x$轴不沿$E_0$的方向,无穷远处的电势也不能写成$\varphi\mid_{\rho\to\infty}=-E_0\rho\cos\phi$的形式.

二维拉普拉斯方程$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0$的通解为

$$\varphi=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)\left(C_n\rho^n+\frac{D_n}{\rho^n}\right).$$

考虑到$\varphi(\phi)=\varphi(-\phi)$,易见$B_n=0$.

7. 本题电势与z无关,可在直角坐标系化为二维问题来讨论. 由于在$y=0$平面上($x=b$处)有自由电荷分布,可取$y=0$平面为两区的分界面,在$y<0$及$y>0$两区内电势满足二维拉普拉斯方程.

本题可用本征函数展开法求解. 考虑到在 x 方向的两个边界条件都是第一类齐次边界条件,故本征函数集为 $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$;在 y 方向有 $\varphi|_{y\to\pm\infty}$ 有限,故通解具有形式

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{\frac{n\pi y}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad y<0;$$

$$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n\pi y}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad y>0.$$

利用电势在 $y=0$ 平面的两个边值关系

$$\varphi_1|_{y=0}=\varphi_2|_{y=0},\qquad x\neq b 时;$$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}=\sigma=\eta\delta(x-b).$$

便可确定待定系数而得解.

8. (1)确定待定系数,得电势. 将(55)式代入(50)式,得

$$\sum_l c_l R^l P_l(\cos\theta)=-E_0 R P_1(\cos\theta),$$

由 $P_l(\cos\theta)$ 的正交性,得

$$c_1=-E_0,\qquad c_l=0\ (l\neq1).\tag{①}$$

代入 φ_2,得

$$\varphi_2=-E_0 R P_1(\cos\theta)+\sum_l\frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta).\tag{②}$$

将(54)式及②式先后代入(51)式和(52)式,即得 a_l 与 d_l 的联立方程,解之可得

$$a_1=\frac{-3\sigma_2E_0}{\sigma_1+2\sigma_2}=\frac{-3J_0}{\sigma_1+2\sigma_2},\tag{③}$$

$$d_1=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)E_0R_0^3}{\sigma_1+2\sigma_2}=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)J_0R_0^3}{(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2},\tag{④}$$

$$a_l=d_l=0\ (l\neq1).$$

将 a_l 及 d_l 代入(54)式及②式,即有

$$\varphi_1=-\frac{3J_0}{\sigma_1+2\sigma_2}R\cos\theta,\tag{⑤}$$

$$\varphi_2=-\frac{J_0}{\sigma_2}R\cos\theta+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)J_0R_0^3}{(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2}\frac{\cos\theta}{R^2}.\tag{⑥}$$

(2)求 J_1 及 J_2. 利用附录习题 1.5 第 6 题证明的公式

$$\nabla R\cos\theta=\nabla z=\boldsymbol{e}_z,\tag{⑦}$$

$$\nabla\frac{\cos\theta}{R^2}=\nabla\frac{z}{R^3}=\frac{\boldsymbol{e}_z-3(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_R}{R^3}.\tag{⑧}$$

可得

$$J_1=\sigma_1E_1=-\sigma_1\nabla\varphi_1=\frac{3\sigma_1J_0}{\sigma_1+2\sigma_2}\nabla z=\frac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}J_0,\quad R<R_0;\tag{⑨}$$

$$\begin{aligned}J_2&=\sigma_2E_2=-\sigma_2\nabla\varphi_2=J_0\nabla z-\frac{(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{\sigma_1+2\sigma_2}J_0\nabla\frac{z}{R^3}\\&=J_0-\frac{(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{\sigma_1+2\sigma_2}\left[\frac{J_0-3(J_0\cdot\boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_R}{R^3}\right],\qquad R>R_0.\end{aligned}\tag{⑩}$$

(3)求界面上的电荷面密度 σ_f. 取界面上的扁平盒(参看图 1.11)为高斯面 S,由 $\oint_S E\cdot\mathrm{d}\sigma=$

Q_f/ε_0,得

$$\sigma_f = \varepsilon_0 n \cdot (E_2 - E_1)\Big|_{R=R_0} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial R} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right)\Big|_{R=R_0}$$

$$= \varepsilon_0\left(-\frac{3J_0\cos\theta}{\sigma_1+2\sigma_2} + \frac{J_0\cos\theta}{\sigma_2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}\frac{2J_0R_0^3}{\sigma_2 R_0^3}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{3\varepsilon_0(\sigma_1-\sigma_2)J_0}{(\sigma_1+2\sigma_2)\sigma_2}\cos\theta. \tag{11}$$

(4) 电导率的比值在极限情形下,电流密度 J_1, J_2 与电荷面密度 σ_f 的分布.

第一,当小球的电导率 σ_1 远大于电解液的电导率 σ_2 时,有

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx 1, \quad \frac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}\approx 3.$$

将上式代入⑨~⑪式,得

$$J_1 \approx 3J_0, \tag{12}$$

$$J_2 \approx J_0\left[1+\frac{R_0^3}{R^3}(3\cos\theta e_R - e_z)\right], \tag{13}$$

$$\sigma_f \approx \frac{3\varepsilon_0}{\sigma_2}J_0\cos\theta. \tag{14}$$

这时电流线往球内迁移,几乎为原来球内区域电流线的三倍;在 $R \gg R_0$ 的区域,电流强度几乎不变;电解液的电导率越小,球面上的面电荷密度越大;并且右半球面为正电荷,左半球面为负电荷.

第二,当小球的电导率 σ_1 远小于电解液的电导率 σ_2 时,有

$$J_1 \approx 0 \tag{15}$$

$$J_2 \approx J_0\left[1-\frac{R_0^3}{2R^3}(3\cos\theta e_R - e_z)\right], \tag{16}$$

$$\sigma_f = -\frac{3\varepsilon_0}{2\sigma_2}J_0\cos\theta. \tag{17}$$

这时电流线往球外迁移,电流几乎不通过球内区域;电解液的电导率越大,球面上的面电荷密度越小;并且右半球面为负电荷,左半球面为正电荷.

习 题 3.3

1. 电荷 Q_0 与导体上感应电荷激发的场等效于 Q' 与 Q'' 共同激发的场,故 Q_0 与感应电荷对 Q_f 的作用力等效于 Q' 与 Q'' 对它的作用力.

2. 为了求空腔内($R < R_0$)的电势时,像电荷应置于内球面之外($R > R_0$,在求解区域之外),同时设想已拿走球壳.

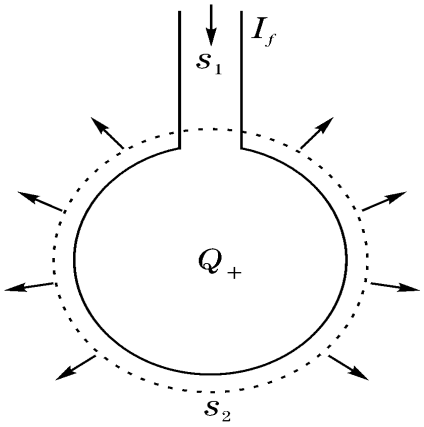
3. 要引入 7 个像电荷才能满足所有边界条件.

4. 作为零级近似,可以认为导体平板不存在,用位于球心的点电荷 Q_0 在球外激发的电势代替带电球激发的电势,即有

$$\varphi_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0}, \text{即} Q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0\varphi_0.$$

显然这个模型不满足 $\varphi|_{x=a}=0$ 的边界条件,则应在 $b_1 = 2a e_z$ 处引入像电荷 $Q_1 = -Q_0$ 才行;但这样,又破坏了 $\varphi|_{R=R_0}=\varphi_0$ 的条件,为此又应于球内引入像电荷 Q_2;但这样又破坏了 $\varphi|_{x=a}=0$ 的边界条件,…,这样反复引入像电荷,直至达到题目要求的精度为止.

6. 为了研究两个导体球的球外区域的电势,作为零级近似,设想将两个导体球拿走,在球1和球2的球心分别引入像电荷$Q_1=Q$和$Q_2=-Q$(待定). 若取Q为Q_0,则其后于球内引入其他像电荷时,还要在球心同时引入异号电荷以保证球内总电量为Q_0(本题已给定). 为了保证两球面为等势面(分别为电势φ_1和φ_2),作为一级近似,还应在球2内b_3处引入像电荷$Q_3=-\frac{R_0}{2d}Q$,在球1内b_4处引入像电荷$Q_4=\frac{R_0}{2d}Q$. 随后利用边值关系求出Q,Q',b_3和b_4,略去$\frac{R_0}{2d}$的高级小量,即可求得两球的电势差$\varphi-\varphi$及电容C.



习题3.3图1

7. 本题首先要利用高斯定理及欧姆定律计算正、负电极所带的电量Q_+和$Q_-=-Q_+$. 作一高斯面包围正极(如右图所示),现将高斯面上电极引线和导电液有关的物理量列表于下:

高斯面上的	横截面	电场强度	电流密度	电导率
导线	S_1	E_1	J_1	σ_1
导电液	S_2	E_2	J_2	$\sigma_2=\sigma$

由高斯定理以及导体的电导率σ_1远大于导电液的电导率σ_2,可得

$$\begin{aligned}Q_+&=\oint_{S_1+S_2}\varepsilon_0 E\cdot \mathrm{d}\sigma=\varepsilon_0\int_{S_1}E_1\cdot \mathrm{d}\sigma+\varepsilon_0\int_{S_2}E_2\cdot \mathrm{d}\sigma\\&=\frac{\varepsilon_0}{\sigma_1}\int_{S_1}J_1\cdot \mathrm{d}\sigma+\frac{\varepsilon_0}{\sigma_2}\int_{S_2}J_2\cdot \mathrm{d}\sigma\\&=\varepsilon_0 I_f\left(-\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)\approx\frac{\varepsilon_0 I_f}{\sigma_2}=\frac{\varepsilon_0 I_f}{\sigma}.\end{aligned}$$

其次,由容器壁($x=0$,$y=0$)处电流密度的法向分量为零,得

$$0=J_f\cdot n=\sigma E\cdot n=-\sigma\nabla\varphi\cdot n=-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

可见在$x=0$及$y=0$平面具有第二类齐次边界条件. 应注意,在引入镜像电荷时与第一类齐次边界条件时是否仍相同? 这通过绘制电力线图可以看出来.

8. (1)确定待定系数得电势. 将(33)及(34)式代入(30)式,并令$x=y=z=0$(因为在$z=0$平面上任一点该式均成立),得

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{Q_f}{a}+\frac{Q'}{a}\right)=\frac{Q''}{\varepsilon_2 b}. \qquad ①$$

将(33)及(34)式代入(31)式,同样令$x=y=z=0$,可得

$$-\frac{Q_f}{a^2}+\frac{Q'}{a^2}=-\frac{Q''}{b^2}. \qquad ②$$

再将(33)式及(34)式代入(32)式,约去分子的$-x$后,再令$x=y=z=0$,得

$$\frac{Q_f}{\varepsilon_1 a^3}+\frac{Q'}{\varepsilon_1 a^3}=\frac{Q''}{\varepsilon_2 b^3}. \qquad ③$$

由以上三式可解出三个待定参数,即

$$b=a,\qquad Q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q_f,\qquad Q''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q_f. \qquad ④$$

将它们代入(33)及(34)式,即得

$$\varphi(x)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\right],\quad z\leqslant 0; \tag{5}$$

$$\varphi(x)=\frac{Q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+(z+a)^2}},\quad z\geqslant 0. \tag{6}$$

由于⑤及⑥)式满足边值问题的要求,根据惟一性定理,它们是正确的解.

(2)界面上的极化电荷分布.由§ 1.5 的(14)式及$P=D-\varepsilon_0E=(\varepsilon-\varepsilon_0)E=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\nabla\varphi$,得

$$\sigma_P=-n\cdot(P_2-P_1)\big|_{z=0}=e\cdot\left[(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\nabla\varphi-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\nabla\varphi\right]\big|_{z=0}$$

$$=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0aQ_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

(3) Q_f 所受的库仑力. 由于电荷 Q_f 与界面上的极化电荷在下半空间激发的场等效于 Q_f 与 Q' 共同激发的场. 故 Q_f 受到界面上的极化电荷的作用力等效于 Q' 对 Q_f 的作用力,即

$$F=\frac{Q'Q_f(-e_z)}{4\pi\varepsilon_1(2a)^2}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)Q_f^2}{16\pi\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)a^2}e_z. \tag{8}$$

习 题 3.4

1. 设 x' 为源点,x 为场点,则 $G(x,x')$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2G(x,x')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x'), & ①\\[2ex] \left[\alpha\dfrac{\partial G(x,x')}{\partial n}+\beta G(x,x')\right]\Big|_S=0. & ②\end{cases}$$

设 x'' 为源点,x 为场点,则 $G(x,x'')$ 满足

$$\begin{cases}\nabla^2G(x,x'')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(x-x''), & ③\\[2ex] \left[\alpha\dfrac{\partial G(x,x'')}{\partial n}+\beta G(x,x'')\right]\Big|_S=0. & ④\end{cases}$$

当 $\alpha=0$,G 为第一类边值问题的格林函数;当 $\beta=0$,G 为第二类边值问题(外域问题)的格林函数.

用 $G(x,x'')$ 乘①式后减去 $G(x,x')$ 乘③式后对 V 积分,并利用 δ 函数的性质,可得

$$\int_V[G(x,x'')\nabla^2G(x,x')-G(x,x')\nabla^2G(x,x'')]\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V[G(x,x'')\delta^3(x-x')-G(x,x')\delta^3(x-x'')]\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}[G(x',x'')-G(x'',x')]. \tag{5}$$

若能证明⑤式的第一式为零,则⑤式的第三式亦为零,则格林函数的对称性得证.

为此,利用格林定理(见附录§ 1.4)

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)\mathrm{d}V=\oint_S(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\sigma \tag{6}$$

以及 $\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\sigma=\nabla\psi\cdot n\mathrm{d}\sigma=\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$,可得

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\oint_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

令 $\varphi=G(x,x'')$，$\psi=G(x,x')$，代入⑦式得

$$\int_V [G(x,x'')\nabla^2 G(x,x')-G(x,x')\nabla^2 G(x,x'')]\mathrm{d}V$$

$$=\oint_S \left[G(x,x'')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n}-G(x,x')\frac{\partial G(x,x'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}\sigma. \qquad ⑧$$

将⑤式与⑧式联立，即有

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}[G(x',x'')-G(x'',x')]=\oint_S \left[G(x,x'')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n}-G(x,x')\frac{\partial G(x,x'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}\sigma. \qquad ⑨$$

另一方面，用$G(x,x'')$乘(2)式减去$G(x,x')$乘(4)式，可得

$$\left[G(x,x'')\frac{\partial G(x,x')}{\partial n}-G(x,x')\frac{\partial G(x,x'')}{\partial n}\right]\Bigg|_S=0. \qquad ⑩$$

将⑩式代入⑨式，即得$G(x',x'')=G(x'',x')$，将变量x''换为x即为(25)式.

格林函数的对称性表明，在相同的齐次边界条件下，位于x'的点源在x点激发的势等于位于x的点源在x'点激发的势.

3. 球外空间的格林函数就是单位点源于x'，边界条件为$G(x,x')\big|_{R=R_0}=0$的电势

$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RR'}{R_0}\right)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right].$$

同理可得球内空间的格林函数.

4. 边值问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\dfrac{[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)]}{R^2\sin\theta},\\ \varphi\big|_{R=R_0}=0,\end{cases}$$

式中电荷密度ρ_f是根据电荷所在位置及

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R_0}\rho_f(R,\theta,\phi)R^2\mathrm{d}R=Q_0$$

凑出来的，实际上可通过令$\rho_f=\dfrac{C[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)]}{R^2\sin\theta}$代入上式确定常数$C$求得.

本题的格林函数为

$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RR'}{R_0}\right)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right].$$

为代入电势公式

$$\varphi(x)=\int_V \rho_f(x')G(x,x')\mathrm{d}V'$$

进行计算，就必须将被积函数中的$\cos\alpha$用积分变量θ'表示出来. 仿照本节例2，先用勒让德多项式的母函数关系式

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,\qquad |t|<1$$

展开，但本题场点的$R<R_0$，而积分变量R'由0变到R_0. 为保证$|t|<1$，故第一个式子要分别按$R'<R$及$R'>R$两种情况展开. 为此，先改写为

$$G(x,x')=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R\sqrt{1+\left(\dfrac{R'}{R}\right)^2-2\left(\dfrac{R'}{R}\right)\cos\alpha}}-\dfrac{1}{R_0\sqrt{\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)^2+1-2\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)\cos\alpha}}\right]\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R'\sqrt{\left(\dfrac{R}{R'}\right)^2+1-2\left(\dfrac{R}{R'}\right)\cos\alpha}}-\dfrac{1}{R_0\sqrt{\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)^2+1-2\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)\cos\alpha}}\right]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{R'}{R}\right)^l P_l(\cos\alpha)-\dfrac{1}{R_0}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)^l P_l(\cos\alpha)\right], & R'<R;\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R'}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{R}{R'}\right)^l P_l(\cos\alpha)-\dfrac{1}{R_0}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)^l P_l(\cos\alpha)\right], & R'>R.\end{cases}$$

上式与下式的第二项,由于$\left(\dfrac{RR'}{R_0^2}\right)$总小于1(因为$R$,$R'$均小于$R_0$),故在$R'>R$及$R'<R$时其展开式相同. 这样,第一项对$R'$的积分要分两段积分$\int_0^{R_0}=\int_0^{R}+\int_R^{R_0}$,第一个积分取上式第一项,第二个积分取下式第一项;而第二项对R'的积分则不必.

5. 为了便于积分,要将被积函数改写为球坐标R,θ,ϕ的函数. 首先利用勒让德多项式的母函数公式

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l,\qquad |t|<1. \tag{①}$$

将$G(x,x')$按$P_l(\cos\alpha)$展开为级数,这样,(8)式可写为

$$G(x,x')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{RR'}{R_0}\right)^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R\sqrt{1+\left(\dfrac{R'}{R}\right)^2-2\left(\dfrac{R'}{R}\right)\cos\alpha}}-\frac{1}{\dfrac{RR'}{R_0}\sqrt{1+\left(\dfrac{R_0^2}{RR'}\right)^2-2\left(\dfrac{R_0^2}{RR'}\right)\cos\alpha}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R'}{R}\right)^l-\frac{R_0}{RR'}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R_0^2}{RR'}\right)^l\right]. \tag{②}$$

其次,n'为球外区域的外法线,即n'指向球心,与e_R反向,故$\dfrac{\partial}{\partial n'}=-\dfrac{\partial}{\partial R'}$,由此得

$$\left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\right|_{R'=R_0}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial R'}\left[\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R'}{R}\right)^l-\frac{R_0}{RR'}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R_0^2}{RR'}\right)^l\right]\Bigg|_{R'=R_0}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^2}\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(\cos\alpha)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l-1}+\frac{1}{RR_0}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R_0}{R}\right)^l\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R_0^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\alpha)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}. \tag{③}$$

最后,利用球函数加法公式(见附录5)

$$P_l(\cos\alpha)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta')P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im(\varphi-\varphi')}$$

当研究轴对称问题时,将$m=0$代入上式,可简化为

$$P_l(\cos\alpha)=P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta). \tag{④}$$

即有

$$\left.\frac{\partial G(x,x')}{\partial n'}\right|_{R'=R_0}=-\frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}. \tag{5}$$

将上式代入(36)式,并将 $\mathrm{d}\sigma'=R_0^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ 代入,可得

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_0^{\pi/2}\varphi_0\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\\&+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{\pi/2}^{\pi}(-\varphi_0)\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\\=&\frac{\varphi_0}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{l+1}\left[-\int_1^0P_l(x')\,\mathrm{d}x'+\int_0^{-1}P_l(x')\mathrm{d}x'\right]\\=&\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta).\end{aligned} \tag{6}$$

式中

$$\begin{aligned}d_l=&\frac{2l+1}{2}\varphi_0R_0^{l+1}\left[\int_0^1P_l(x')\mathrm{d}x'+\int_0^{-1}P_l(x')\mathrm{d}x'\right]\\=&\begin{cases}0, & l\text{ 为偶数};\\(-1)^{\frac{l-1}{2}}(2l+1)\dfrac{(l-2)!!}{(l+1)!!}\varphi_0R_0^{l+1}, & l\text{ 为奇数}.\end{cases}\end{aligned} \tag{7}$$

与习题3.2第3题的计算结果相同,其中将 $(-1)!!$ 定义为1.

习　题　3.5

1. 用δ函数表示点电荷的电荷密度代入(10)式与(23)式.

4. 计算 $\iiint_D$ 时要作体积分,但椭球面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,积分限较复杂. 为此作变换 $X=\frac{x}{a}$,$Y=\frac{y}{b}$,$Z=\frac{z}{c}$,椭球面方程简化为 $X^2+Y^2+Z^2=1$. 在新坐标系中采用球坐标系,得

$$\begin{cases}x=aX=aR\sin\theta\cos\phi,\\y=bY=bR\sin\theta\cos\phi,\\z=cZ=cR\cos\theta.\end{cases}$$

体积元的变换可由雅可比行列式算出

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial R}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial R}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial R}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix}\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=abcR^2\sin\theta\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}.$$

由 $D_j=\rho_f\int_V(3x_ix_j-R^2\delta_{ij})\mathrm{d}V$ 易见,当 $i\neq j$ 时,$D_j=3\rho_f\int_V x_ix_j\mathrm{d}V=0$,因为在8个卦限中,被积函数 x_ix_j 各有四个大于零及小于零;而 $i=j$ 时的值 D_1,D_2 及 D_3 容易求得.

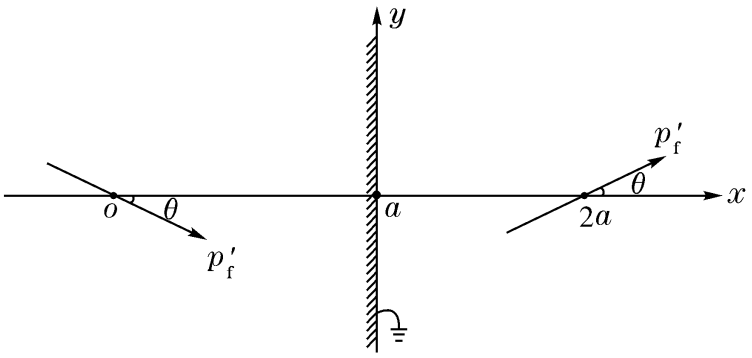
习　题　3.6

1. 将(10)式代入等式右边,然后再交换定积分变量 x 与 x' 的符号,再交换积分次序,便有

$$\int_{V_\infty}\rho_e(x)\varphi(x)\mathrm{d}V=\int_{V_\infty}\mathrm{d}V\,\rho_e(x)\int_V\mathrm{d}V'\frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{V_\infty}\mathrm{d}V'\rho_e(x')\int_V\mathrm{d}V\,\frac{\rho_f(x)}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$=\int_V\mathrm{d}V\,\rho_f(x)\int_{V_\infty}\mathrm{d}V'\frac{\rho_e(x')}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_V\rho_f(x)\varphi_e(x)\mathrm{d}V\,.$$

3. 导体上感应电荷的场可用一个镜像偶极子 p_f' 激发的场来替代,如下图所示.



习题3.6 图1

$$E'=-\nabla\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_f'\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(p_f'\cdot R)R}{R^5}-\frac{p_f'}{R^3}\right].$$

由于导体左方实际上没有场存在,故 p_f 与 E' 的相互作用能是两个真实电偶极子相互作用能之半. 将 $R=x\,\mathbf{e}_x$ 代入,可得

$$W_i=\frac{1}{2}p_f'\cdot E=-\frac{p_f^2(1+\cos^2\theta)}{8\pi\varepsilon_0 x^3}$$

当 p_f 相对导体移动 $\Delta\xi$ 时,p_f 相对镜像偶极子移动 $\Delta x=2\Delta\xi$,故相互作用力

$$F=-\frac{\partial W_i}{\partial\xi}\mathbf{e}_x\Big|_{x=2a}=-2\frac{\partial W_i}{\partial x}\mathbf{e}_x\Big|_{x=2a}=-\frac{3p_f^2(1+\cos^2\theta)}{64\pi\varepsilon_0 a^4}\mathbf{e}_x$$

p_f 所受的力矩为

$$N_\theta=-\frac{\partial W_i}{\partial\theta}=-\frac{p_f^2\sin2\theta}{64\pi\varepsilon_0 a^3}.$$

$$N=-\frac{p_f^2\sin2\theta}{64\pi\varepsilon_0 a^3}\mathbf{e}_z=\frac{(p_f\cdot\mathbf{e}_x)p_f\times\mathbf{e}_x}{32\pi\varepsilon_0 a^3}.$$

4. (1)由于电荷具有球对称分布,由高斯定理可求出电场强度 $E(R)$ 及电势 $\varphi(R)$,由(11)式即可求得 W_e;

(2)氢核激发外场,电子与外电场的相互作用能[见(15)式]就是电子电荷分布在氢核电场中的电势能.

第 四 章

习 题 4.1

2. 设解 B' 和 B'' 均满足惟一性定理的条件,

$$B'=\nabla\times A',\quad B''=\nabla\times A'';\quad B'=\mu H',\quad B''=\mu H''.$$

$$\nabla\times H'=\nabla\times H''=J_f.$$

令　　$b=B'-B'',\quad h=H'-H'',\quad a=A'-A''.$

则　　$\nabla\times h=\nabla\times(H'-H'')=J_f-J_f=0;$

$$b\cdot h=(\nabla\times a)\cdot h=\nabla\cdot(a\times h)-a\cdot(\nabla\times h)=\nabla\cdot(a\times h).$$

这里已利用 $\nabla\times h=0$. 将上式两边对 V 进行体积分,由高斯定理,得

$$\int_V b\cdot h\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot(a\times h)\mathrm{d}V=\oint_S(a\times h)\cdot\mathrm{d}\sigma$$

$$=\begin{cases}\oint_S(\mathrm{d}\sigma\times a)\cdot h=\oint_S\mathrm{d}\sigma(n\times a)\cdot h;\\ -\oint_S(\mathrm{d}\sigma\times h)\cdot a=-\oint_S\mathrm{d}\sigma(n\times h)\cdot a.\end{cases}$$

将 b,h,a 的定义式代入上式,可得

$$\int_V\frac{1}{\mu}(B'-B'')^2\mathrm{d}V=\begin{cases}\oint_S[n\times(A'-A'')]\cdot(H'-H'')\mathrm{d}\sigma;\\ -\oint_S[n\times(H'-H'')]\cdot(A'-A'')\mathrm{d}\sigma.\end{cases}$$

若给定 A 在边界 S 上的切向分量,则 $n\times A'=n\times A''$,右上式为零;若给定 H 在边界 S 上的切向分量,则 $n\times H'=n\times H''$,右下式为零. 故无论给定边界 S 上 A 或 H 的切向分量,左边积分均为零,因为 $\mu>0,(B'-B'')^2\geqslant 0$,故 $B'=B''$.

4. (4) $$A'_1=A_1+\nabla\psi_1=-e_\varphi\frac{\mu I_f}{2\pi}\ln\rho+\nabla\frac{(\mu-\mu_0)I_f}{2\pi}z\ln\rho$$

$$=-e_\varphi\frac{\mu I_f}{2\pi}\ln\rho+\left(e_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{(\mu-\mu_0)I_f}{2\pi}z\ln\rho$$

$$=-e_\varphi\frac{\mu I_f}{2\pi}\ln\rho+\frac{(\mu-\mu_0)I_f}{2\pi}\left(e_\rho\frac{z}{\rho}+e_z\ln\rho\right)$$

$$=-e_\varphi\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho+e_\rho\frac{(\mu-\mu_0)I_f z}{2\pi\rho},$$

由柱坐标系的散度公式 $\nabla\cdot A=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$,得

$$\nabla\cdot A'_1=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{(\mu-\mu_0)I_f z}{2\pi\rho}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho\right]=0,$$

$$A'_1\big|_{z=0}=\left[-e_\varphi\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho+e_\rho\frac{(\mu-\mu_0)I_f z}{2\pi\rho}\right]\Bigg|_{z=0}=A'_2\Big|_{z=0}.$$

习　题　4.2

1. 全空间充满介电常数为 ε 的均匀介质,电荷分布为 ρ_f 的边值问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon},\\ \lim\limits_{R\to\infty}\varphi=0\end{cases}$$

其解为　　$$\varphi(x)=\int_V\frac{\rho_f(x')}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{d}V'.$$

本题 A 及其直角分量 A_i 的边值问题分别为

$$\begin{cases}\nabla^2A=-\mu J,\\ \lim\limits_{R\to\infty}A=0;\end{cases}\quad\text{及}\quad\begin{cases}\nabla^2A_i=-\mu J_i,\quad i=x,y,z;\\ \lim\limits_{R\to\infty}A_i=0.\end{cases}$$

比较两个边值问题,可见 A_i 与 φ 遵守的方程与边界条件相似,只要作替换

$$\varphi \to A_i, \quad \frac{\rho_f}{\varepsilon} \to \mu J_i,$$

即可把φ的解换为A的解. 故

$$A = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i A_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \int \frac{\mu J_i \mathrm{d}V'}{4\pi r} = \int \frac{\mu J(x')}{4\pi r} \mathrm{d}V'.$$

2. 利用积分公式$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$及泰勒展开式$\sqrt{1+u} \approx 1+\frac{1}{2}u$(式中$u \ll 1$)进行计算,可得$A = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I_f}{2\pi} \ln \frac{2l}{\rho}$(当通电直导线的长度$2l \to \infty$). 但上式在$l \to \infty$时发散,这是由于规定$\infty$点为矢势零点之故. 当电流分布在$\infty$时,不能取$\infty$点为零矢势参考点. 今取有限远点$(\rho_0,0,0)$为矢势零点,则有

$$A = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\frac{2l}{\rho} - \frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\frac{2l}{\rho_0}\right)\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{\rho}\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho\,\mathbf{e}_z\left(\text{略去常矢项}\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\rho_0\,\mathbf{e}_z\right).$$

3. 场点x的位置是任意的,为计算方便取由球心至场点的连线为z轴. 适当选取x轴,使ω位于xoz平面上,设ω与z轴的夹角为α,则

$$A(x) = \int_V \frac{\mu_0 J_f(x')}{4\pi r}\mathrm{d}V' = \oint \frac{\mu_0 \alpha_f}{4\pi r}\mathrm{d}S' = \oint \frac{\mu_0 \sigma_f \boldsymbol{v}}{4\pi r}\mathrm{d}S',$$

式中$r = |x - x'| = \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R\cos\theta'}$为源点到场点的距离. 将

$$\boldsymbol{v} = \omega \times R' = \omega(\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + \cos\alpha\,\mathbf{e}_z) \times R_0(\sin\theta'\cos\phi'\,\mathbf{e}_x + \sin\theta'\sin\phi'\,\mathbf{e}_y + \cos\theta'\,\mathbf{e}_z)$$

代入积分,考虑到$\int_0^{2\pi}\sin\phi'\mathrm{d}\phi' = \int_0^{2\pi}\cos\phi'\mathrm{d}\phi' = 0$,故

$$A(x) = -\mathbf{e}_y \frac{\mu_0 R_0^3 \omega\sigma_f \sin\alpha}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\sin\theta'\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{R_0^2+R^2-2R_0R\cos\theta'}}.$$

先后作变量替换$\xi = \cos\theta'$及$\eta = \sqrt{R_0^2+R^2-2R_0R\xi}$,$\eta$的上、下积分限分别为$|R_0 - R|$及$R_0 + R$,并分别计算$R < R_0$(球内),$R > R_0$(球外)的$A$与$B$即可.

4. 取z轴沿圆柱轴的柱坐标系. 由电流及介质分布的轴对称性,B仅有$\mathbf{e}_\phi$分量,即

$$B = \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\phi.$$

由轴对称知A与ϕ无关,由圆柱为无限长知A与z无关,故B仅有第二项,即

$$B = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{e}_\phi, \quad A = A_z(\rho)\mathbf{e}_z.$$

边值问题为:

① $\nabla^2 A_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\rho}\right) = -\mu_1 J_f, \quad \rho < a$;

② $\nabla^2 A_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\rho}\right) = 0, \quad \rho > a$;

③ 在$\rho = 0$处,A_1有限($\rho \to \infty$处,$A_2 \to \infty$,但B_2有限);

④ $A_1|_{\rho=a} = A_2|_{\rho=a}$;

⑤ 由$n \times \left(\frac{B_2}{\mu_2} - \frac{B_1}{\mu_1}\right)\Big|_{\rho=a} = \alpha_f$及$n = \mathbf{e}_\rho$, $B = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{e}_\phi$,可得

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\rho}\Big|_{\rho=a}.$$

两次积分①、②式,定出系数得A,由$B = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{e}_\phi$得$B$.

5. 取 z 轴沿圆柱轴线，x 轴沿 B_0 方向. 由对称性分析可知 $A=A_z(\rho,\phi)\,\mathbf{e}_z$，简记为 $A=A\,\mathbf{e}_z$，矢量方程可简化为标量方程.

(1)边值问题为：

① $\nabla^2 A_1=-\mu J_f$，　$\rho<a$；　　② $\nabla^2 A_2=0$，　　$\rho>a$；

③ $\lim\limits_{\rho\to 0}A_1$ 有限；　　④ $\lim\limits_{\rho\to\infty}A_2=B_0\rho\sin\phi+\dfrac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\dfrac{\rho_0}{\rho}$.

若仅存在外场 $B_0=B_0\mathbf{e}_x$ 时，由

$$B_0\mathbf{e}_x=(\nabla\times A)_x\mathbf{e}_x=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathbf{e}_x,$$

将上式两边积分即得 $A=B_0 y=B_0\rho\sin\phi$，这是④式的第一项；④式的第二项见第 2 题，ρ_0 为矢势零参考点的坐标.

⑤ $A_1\big|_{\rho=a}=A_2\big|_{\rho=a}$；

⑥ 由 $n\times\left(\dfrac{\nabla\times A_2}{\mu_2}-\dfrac{\nabla\times A_1}{\mu_1}\right)\Big|_{\rho=a}=\alpha_f=0$，$n=\mathbf{e}_\rho$，$\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{e}_\rho=0$，$\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{e}_\phi=\mathbf{e}_z$，得

$$\mathbf{e}_\rho\times(\nabla\times A)=\mathbf{e}_\rho\times\left\{\mathbf{e}_\rho\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\mathbf{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]\right\}=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\phi,$$

因而

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}.$$

(2)通解形式. A_1 遵守泊松方程，其通解为泊松方程的特解加上拉普拉斯方程的通解.

泊松方程的特解为 $-\dfrac{1}{4}\mu\rho^2 J_f$，因为

$$\nabla^2\left(-\frac{\mu}{4}\rho^2 J_f\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\left(-\frac{1}{4}\mu\rho^2 J_f\right)=-\mu J_f.$$

柱坐标系中拉普拉斯方程的通解为[①]

$$A(\rho,\phi)=(C_0+D_0\ln\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}),$$

由此得(已考虑到边界条件③和④式)

$$A_1(\rho,\phi)=-\frac{\mu}{4}\rho^2 J_f+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)\rho^n,\qquad \rho<a;$$

$$A_2(\rho,\phi)=\frac{\mu_0 I_f}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{\rho}+B_0\rho\sin\phi+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\phi+D_n\sin n\phi)\rho^{-n},\qquad \rho>a.$$

(3)利用边值关系定系数 ρ_0，A_n，B_n，C_n，D_n 即得矢势.

(4)利用 $B=\nabla\times A=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A}{\partial\phi}\mathbf{e}_\rho-\dfrac{\partial A}{\partial\rho}\mathbf{e}_\phi$ 得 B. 应注意：此公式并不是普遍的，仅当 $A=A(\rho,\phi)\,\mathbf{e}_z$ 时才成立.

6. (1)由边值关系确定 I'_1，I'_2. 因为像电流均于求解区域外引入，所以必然满足泊松方程.

将(50)、(48)、(42)和(49)式代入(45)式，得

$$-\frac{\mu_1 I'_2}{2\pi}\ln(\sqrt{a^2+y^2})\,\mathbf{e}_z=-\left(\frac{\mu_2 I_f}{2\pi}+\frac{\mu_2 I'_1}{2\pi}\right)\ln(\sqrt{a^2+y^2})\,\mathbf{e}_z,$$

即

$$\mu_1 I'_2=\mu_2(I_f+I'_1).\qquad ①$$

---

① 汪德新. 2001. 数学物理方法. 理论物理学导论第一卷. 第二版. 武汉：华中科技大学出版社. 174~176.

由于 A 仅有 $\mathbf{e}_z$ 分量,故

$$\nabla \times A = \mathbf{e}_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{②}$$

考虑到 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0$, $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$,将②式代入(46)式时,仅考虑②式右方的第二项,得

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{1z}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{2z}}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \tag{③}$$

将(50)、(48)、(42)和(49)式代入上式,即有

$$-\frac{I_2'}{2\pi} \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\bigg|_{x=0} = -\left[\frac{I_f}{2\pi} \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + \frac{I_1'}{2\pi} \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right]\bigg|_{x=0}$$

即

$$I_2' = I_f - I_1' \tag{④}$$

将①式及④式联立,可得

$$I_1' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I_f, \qquad I_2' = \frac{2\mu_2 I_f}{\mu_1 + \mu_2}. \tag{⑤}$$

代入(48)式和(50)式即得空间的矢势.

(2)由 $B = \nabla \times A$ 得磁感应强度.

$$\begin{aligned} B_1 &= \nabla \times A_1 = \mathbf{e}_x \frac{\partial A_{1z}}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial A_{1z}}{\partial x} \\ &= -\frac{\mu_1 I_2'}{2\pi\rho_2}\left[\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\mathbf{e}_x - \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\mathbf{e}_y\right] \\ &= \frac{\mu_1 \mu_2 I_f}{\pi(\mu_1+\mu_2)\rho_2}\left[-\sin\phi_2 \mathbf{e}_x + \cos\phi_2 \mathbf{e}_y\right]. \end{aligned} \tag{⑥}$$

式中 ϕ_2 见图 4.6.

$$\begin{aligned} B_2 &= \nabla \times A_2 = \mathbf{e}_x \frac{\partial A_{2z}}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \\ &= -\frac{\mu_2 I_f}{2\pi\rho_2}\left[\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\mathbf{e}_x - \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\mathbf{e}_y\right] \\ &\quad -\frac{\mu_2 I_1'}{2\pi\rho_1}\left[\frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\mathbf{e}_x - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\mathbf{e}_y\right] \\ &= \frac{\mu_2 I_f}{2\pi\rho_2}(-\sin\phi_2 \mathbf{e}_x + \cos\phi_2 \mathbf{e}_y) + \frac{\mu_2(\mu_1-\mu_2)I_f}{2\pi(\mu_1+\mu_2)\rho_1}(-\sin\phi_1 \mathbf{e}_x + \cos\phi_1 \mathbf{e}_y). \end{aligned} \tag{⑦}$$

习 题 4.3

1. 边值问题为:

① $\nabla^2 \varphi_{m1} = 0$, $R < R_0$; ② $\nabla^2 \varphi_{m2} = 0$, $R > R_0$;

③ $\varphi_{m1}\big|_{R\to 0}$有限; ④ $\varphi_{m2}\big|_{R\to\infty} = 0$;

⑤ $\varphi_{m1}\big|_{R=R_0} = \varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$; ⑥ 由 $B_{1n} = B_{2n}$得 $-\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial R}\Big|_{R=R_0} + M_0\cos\theta = -\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial R}\Big|_{R=R_0}$.

求出 φ_m 后由 $B = \mu_0(H + M_0)$得 B_1, B_2.

2. 取 z 轴沿圆柱轴线,取 x 轴沿 M_0 方向,本题不具有轴对称性. 边值问题为:

① $\nabla^2 \varphi_{m1} = 0$, $\rho < \rho_0$; ② $\nabla^2 \varphi_{m2} = 0$, $\rho > \rho_0$;

③ $\varphi_{m1}\big|_{\rho\to 0}$有限; ④ $\varphi_{m2}\big|_{\rho\to\infty} = 0$;

⑤ $\varphi_{m1}\big|_{\rho=\rho_0}=\varphi_{m2}\big|_{\rho=\rho_0}$;

⑥ 由$B_{1n}=B_{2n}$得$-\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}+M_0\cos\phi=-\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}$.

由于本题不具有轴对称性,故通解具有形式(见习题4.2 第5 题注①)

$$\varphi_m=(C_0+D_0\ln\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi)\left(C_n\rho^n+\frac{D_n}{\rho^n}\right).$$

确定系数后由$H=-\nabla\varphi_m$ 得解.

3. 本题与上题的差别是:圆柱体为理想铁磁体. 在边值问题中仅第⑥条不同,因为理想铁磁体的磁化规律为$B=\mu H+\mu_0 M_0$. 由边值关系$B_{1n}=B_{2n}$可得

$$-\mu\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}+\mu_0 M_0\cos\phi=-\mu_0\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}.$$

4. 就激发磁场而言,磁化电流与传导电流是等效的,可把球面上的传导电流α_f 当作磁化电流α_m 来处理,即把球内空间当作固有的磁矩为$M_1=M_0$ 的均匀磁化球. 现将

$$\alpha_f=\frac{Q_f\omega}{4\pi R_0}\times\mathbf{e}_R$$

当作

$$\alpha_m=\mathbf{e}_R\times(M_2-M_1)=M_1\times\mathbf{e}_R=M_0\times\mathbf{e}_R,$$

比较上面两式的右端,便有

$$M_1=M_0=\frac{Q_f\omega}{4\pi R_0}=\frac{Q_f\omega}{4\pi R_0}\mathbf{e}_z.$$

本题的边值问题的前四式与例3 相同,但后两式得到简化:

⑤ 由于没有传导电流,故$\varphi_{m1}\big|_{R=R_0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$.

⑥ 由$B_1=\mu_0(H_1+M_1)$,$B_2=\mu_0 H_2$ 及$n\cdot(B_2-B_1)\big|_{R=R_0}=0$,得

$$\mathbf{e}_R\cdot\mu_0(-\nabla\varphi_{m1}+M_0)\big|_{R=R_0}=\mathbf{e}_R\cdot\mu_0(-\nabla\varphi_{m2}),$$

将$M_0=\dfrac{Q_f\omega}{4\pi R_0}\mathbf{e}_z$ 代入,并利用$\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{e}_z=\cos\theta=P_1(\cos\theta)$,得

$$-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}+\frac{Q_f\omega}{4\pi R_0}P_1(\cos\theta)=-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}.$$

这个边值问题比例3 简单,直接利用本节习题第1 题的结果可得

$$\varphi_{m1}=\frac{1}{3}M_0 R\cos\theta=\frac{Q_f\omega}{12\pi}\left(\frac{R}{R_0}\right)\cos\theta,\qquad R<R_0;$$

$$\varphi_{m2}=\frac{1}{3}M_0\frac{R_0^3}{R^2}\cos\theta=\frac{Q_f\omega}{12\pi}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\cos\theta,\qquad R>R_0.$$

易见$\varphi_{m1}\big|_{R=R_0}=\varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$. 由于本题的$B_1=\mu_0(-\nabla\varphi_{m1}+M_0)$,例3 的$B_1=\mu_0(-\nabla\varphi_{m1})$,公式不同,从而保证$B_1$ 是相同的.

当然,本题还可按直接积分法来算,即由

$$\sigma_m=-\mu_0 n\cdot(M_2-M_1)=\mu_0\mathbf{e}_R\cdot M_0,\qquad \varphi_m=\oint_{S_{R_0}}\frac{\sigma_m\mathrm{d}\sigma}{4\pi\mu_0 r}$$

计算,r 由余弦定理给出. 但此法计算较繁.

5. 无穷长介质圆柱均匀磁化后,柱内磁化电流密度$J_m=\nabla\times M_1=0$,圆柱侧面的磁化电流线密度为$\alpha_m=-\mathbf{e}_\rho\times M_1=-\mathbf{e}_\rho\times M_0\mathbf{e}_z=M_0\mathbf{e}_\phi$ 其大小$\alpha_m=M_0$.

(1) 根据α_f 与α_m 激发磁场的等效性,无穷长均匀磁化圆柱激发的磁场与无穷长载流螺线管

激发的磁场应相等. 便有

$$B_1 = \mu_0 nI\,\mathrm{e}_z = \mu_0\alpha_m\,\mathrm{e}_z = \mu_0 M_0\,\mathrm{e}_z = \mu_0 M_0, \qquad \rho < \rho_0;$$

$$B_2 = 0, \qquad \rho > \rho_0.$$

前式已利用垂直通过圆柱单位长度母线的电流为$nI = \alpha_m$.

(2)按直接积分法计算. 按照磁荷的观念,均匀磁化圆柱的磁荷密度$\rho_m = 0$,圆柱侧面的磁荷面密度

$$\sigma_m\big|_{\rho=\rho_0} = -\mu_0 n\cdot(M_2 - M_1)\big|_{\rho=\rho_0} = -\mu_0\mathrm{e}_\rho\cdot(M_2 - M_1)\big|_{\rho=\rho_0}$$

$$= \mu_0\mathrm{e}_\rho\cdot M_0\mathrm{e}_z = \mu_0 M_0\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

圆柱上、下底的磁荷面密度为

$$\sigma_m\big|_{z\to\pm\infty} = -\mu_0 n\cdot(M_2 - M_1)\big|_{z\to\pm\infty} = -\mu_0(\pm\mathrm{e}_z)\cdot(M_2 - M_1)\big|_{z\to\pm\infty}$$

$$= \pm\mu_0\mathrm{e}_z\cdot M_0\mathrm{e}_z = \pm\mu_0 M_0\text{(有限值)}.$$

圆柱上、下底有限的磁荷位于$z = \pm\infty$处,由$\varphi_m = \int\frac{\sigma_m\mathrm{d}\sigma}{4\pi\mu_0 r}$可知,它们在圆柱内、外($z$有限处)激发的磁场强度$H_1$,$H_2$均为零,由此得

$$B_1 = \mu_0(H_1 + M_1) = \mu_0 M_0, \qquad \rho < \rho_0;$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = 0, \qquad \rho > \rho_0.$$

7. (1)确定待定系数,得磁标势. 由(4)式得

$$-H_0 RP_1(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R^l P_l(\cos\theta)$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,可得

$$c_1 = -H_0, \qquad c_l = 0 \quad (l \neq 1). \tag{①}$$

代入(8)式,得

$$\varphi_{m2} = -H_0 R\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{d_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta), \qquad R > R_0. \tag{②}$$

将(7)式和②式代入(5)式,便有

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l R_0^l P_l(\cos\theta) = -H_0 R_0 P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{d_l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\theta). \tag{③}$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,可得

$$a_1 R_0 = -H_0 R_0 + \frac{d_1}{R_0^2}, \tag{④}$$

$$a_l R_0^l = \frac{d_l}{R_0^{l+1}} \quad (l \neq 1). \tag{⑤}$$

将(7)式和②式代入(6)式,得

$$\mu\sum_{l=0}^{\infty} a_l l R_0^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\mu_0 H_0 P_1(\cos\theta) - \mu_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)d_l}{R_0^{l+2}}P_l(\cos\theta), \tag{⑥}$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,得

$$\mu a_1 = -\mu_0\left(H_0 + \frac{2d_1}{R_0^3}\right), \tag{⑦}$$

$$\mu a_l l R_0^{l-1} = -\frac{\mu_0(l+1)d_l}{R_0^{l+2}} \quad (l \neq 1). \tag{⑧}$$

将④式与⑦式联立,便有

$$a_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0, \qquad d_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0 R_0^3. \tag{9}$$

因为⑤式与⑧式是关于$a_l, d_l (l \neq 1)$的线性齐次联立方程组,而系数行列式不为零,故a_l与d_l只有零解:

$$a_l = d_l = 0 \quad (l \neq 1). \tag{10}$$

由此得

$$\varphi_{m1} = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0 R\cos\theta, \qquad R \leqslant R_0; \tag{11}$$

$$\varphi_{m2} = -H_0 R\cos\theta + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}R_0^3 H_0 \frac{\cos\theta}{R^2}, \qquad R > R_0. \tag{12}$$

(2)由磁标势求磁感应强度. 利用附录习题 1.5 第 6 题证明的公式

$$\nabla R\cos\theta = \nabla z = \mathbf{e}_z, \tag{13}$$

$$\nabla \frac{\cos\theta}{R^2} = \nabla \frac{z}{R^3} = \frac{\mathbf{e}_z - 3(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R}{R^3}, \tag{14}$$

以及$B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 H_0 \mathbf{e}_z$,即有

$$B_1 = \mu H_1 = -\mu \nabla \varphi_{m1} = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0}H_0 \nabla (R\cos\theta) = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0}B_0, \quad R \leqslant R_0; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \mu_0 H_2 = -\mu_0 \nabla \varphi_{m2} = \mu_0 H_0 \nabla (R\cos\theta) - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}R_0^3 \mu_0 H_0 \nabla \frac{\cos\theta}{R^2} \\ &= B_0 - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 [B_0 - 3(B_0 \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R], \end{aligned} \qquad R > R_0. \tag{16}$$

(3)介质球的磁矩 m. 介质的磁化强度 M 可由磁场强度的定义式 $B = \mu_0(H + M) = \mu_0\left(\frac{B}{\mu} + M\right)$ 求得

$$M = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)B.$$

介质球内的B_1已由⑮式给出,故其磁化强度为

$$M_1 = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)B_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu}B_1 = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)}B_0. \tag{17}$$

在均匀磁场中,均匀介质球的磁化是均匀的,故介质球的磁矩应为磁化强度M_1(单位体积内的磁矩)与球体V 的乘积. 即

$$m = M_1 V = \frac{4\pi}{3}R_0^3 M_1 = \frac{4\pi(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)}R_0^3 B_0. \tag{18}$$

(4)求磁化电流分布. 球内的磁化电流密度为[见§ 1.4 的(6)式]

$$J_m = \nabla \times M_1 = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)} \nabla \times B_0 = 0. \tag{19}$$

球面上的磁化电流面密度为[见§ 1.5 的(16)式]

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \mathbf{e}_R \times (M_2 - M_1)\big|_{R=R_0} = -\mathbf{e}_R \times M_1\big|_{R=R_0} \\ &= -\mathbf{e}_R \times \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)}B_0\Big|_{R=R_0} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)}B_0 \sin\theta\, \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \tag{20}$$

式中已利用球外的$M_2 = 0$,外场沿 z 轴,以及 $\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_z = -\sin\theta\, \mathbf{e}_\phi$.

(5)讨论. 如果在§ 3.2 的例 1 中令 $\rho_f = 0$,则只要作如下替换

$$E_0 \to H_0, \qquad \varepsilon_0 \to \mu_0, \qquad \varepsilon \to \mu.$$

则由 φ_1 可得 φ_{m1},由 φ_2 可得 φ_{m2}. 因为当 $\rho_f=0$ 时,φ_{m1},φ_{m2} 与 φ_1,φ_2 遵守的微分方程、边界条件与边值关系的数学形式完全相同,因而解的形式也应完全相同. 由此可见,如果 $\rho_f=0$,则可由静电场的结论通过类比法得到静磁场相应问题的结论,这是物理学中常用的方法.

8. (1)定系数得磁标势. 将(16)、(17)式代入(14)、(15)式容易求得

$$a_1=\frac{\mu_0 M_0}{\mu+2\mu'},\quad d_1=\frac{\mu_0 M_0 R_0^3}{\mu+2\mu'},\qquad a_l=d_l=0\quad (l\neq 1). \tag{①}$$

由此得

$$\varphi_{m1}=\frac{\mu_0 M_0 R\cos\theta}{\mu+2\mu'}, \tag{②}$$

$$\varphi_{m2}=\frac{\mu_0 M_0 R_0^3\cos\theta}{(\mu+2\mu')R^2}. \tag{③}$$

(2)由磁标势求磁感应强度. 利用附录习题 1.5 第 6 题可得

$$B_1=\mu H_1+\mu_0 M_0=-\mu\nabla\varphi_{m1}+\mu_0 M_0=\frac{2\mu'\mu_0 M_0}{\mu+2\mu'}, \tag{④}$$

$$B_2=\mu' H_2=-\mu'\nabla\varphi_{m2}=\frac{\mu'\mu_0}{\mu+2\mu'}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3[3(M_0\cdot e_R)e_R-M_0]. \tag{⑤}$$

(3)求球内、外介质的磁化强度. 由 $B_1=\mu_0(H_1+M_1)$ 及理想铁磁体的磁化规律 $B_1=\mu H_1+\mu_0 M_0$,可得球内介质磁化强度 M_1 的表达式,再将④式代入,即有

$$M_1=\frac{B_1}{\mu_0}-H_1=\frac{B_1}{\mu_0}-\frac{B_1-\mu_0 M_0}{\mu}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}B_1+\frac{\mu_0}{\mu}M_0=\frac{\mu_0+2\mu'}{\mu+2\mu'}M_0,\qquad R\leqslant R_0; \tag{⑥}$$

球外介质的磁化强度为

$$M_2=\frac{B_2}{\mu_0}-H_2=\frac{B_2}{\mu_0}-\frac{B_2}{\mu'}=\frac{\mu'-\mu_0}{\mu'\mu_0}B_2=\frac{\mu'-\mu_0}{\mu+2\mu'}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3[3(M_0\cdot e_R)e_R-M_0],\quad R>R_0. \tag{⑦}$$

(4)求磁化电流. 球内,外的磁化电流密度分别为

$$J_{m1}=\nabla\times M_1=\frac{\mu_0+2\mu'}{\mu+2\mu'}\nabla\times M_0=0, \tag{⑧}$$

$$J_{m2}=\nabla\times M_2=\nabla\times\frac{\mu'-\mu_0}{\mu'\mu_0}B_2=\frac{\mu'-\mu_0}{\mu_0}\nabla\times H_2=\frac{\mu'-\mu_0}{\mu_0}J_{f2}=0. \tag{⑨}$$

式中应用了⑦式,静磁场中的麦克斯韦方程 $\nabla\times H=J_f$,以及本题不存在传导电流的条件.

球面上的磁化电流面密度为(由于 $e_R\times e_R=0$,故只考虑⑦式中 M_2 的第二项)

$$\alpha_m=e_R\times(M_2-M_1)\Big|_{R=R_0}=e_R\times\left[-\frac{\mu'-\mu_0}{\mu+2\mu'}M_0-\frac{\mu_0+2\mu'}{\mu+2\mu'}M_0\right]$$

$$=-\frac{3\mu'}{\mu+2\mu'}M_0 e_R\times e_z=\frac{3\mu'}{\mu+2\mu'}M_0\sin\theta e_\phi. \tag{⑩}$$

9. (1)定系数得磁标势. 将(25)式和(26)式代入(23)式,得

$$\sum_l l a_l R_0^{l-1}P_l(\cos\theta)=-\sum_l(l+1)\frac{d_l}{R_0^{l+2}}P_l(\cos\theta),$$

由 $P_l(\cos\theta)$ 的正交性,得

$$l a_l R_0^{l-1}=-(l+1)\frac{d_l}{R_0^{l+2}}. \tag{①}$$

为了将(24)式变为标量公式,用 e_ϕ 点乘后利用下面两个公式(第二式已考虑到 θ 线的线元为 $Rd\theta$,并运用了复合函数的求导公式)

$$a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta\cdot\nabla\varphi=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta}, \tag{3}$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{Q_f\omega\sin\theta}{4\pi R_0}&=\boldsymbol{e}_\phi\cdot[\boldsymbol{e}_R\times(\nabla\varphi_{m1}-\nabla\varphi_{m2})]\big|_{R=R_0}\\&=(\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_R)\cdot(\nabla\varphi_{m1}-\nabla\varphi_{m2})\big|_{R=R_0}\\&=\boldsymbol{e}_\theta\cdot(\nabla\varphi_{m1}-\nabla\varphi_{m2})\big|_{R=R_0}\\&=-\frac{\sin\theta}{R_0}\sum_l\left(a_lR_0^l-\frac{d_l}{R_0^{l+1}}\right)P_l'(\cos\theta).\end{aligned} \tag{4}$$

式中$P_l'(\cos\theta)=\dfrac{\mathrm{d}P_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\cos\theta}=\dfrac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}$. 约去④式两端的公因子$\dfrac{\sin\theta}{R_0}$,即有

$$\sum_l\left(a_lR_0^l-\frac{d_l}{R_0^{l+1}}\right)P_l'(\cos\theta)=-\frac{Q_f\omega}{4\pi}. \tag{5}$$

取上式对$x=\cos\theta$的不定积分,利用$\cos\theta=P_1(\cos\theta)$,得

$$\sum_l\left(a_lR_0^l-\frac{d_l}{R_0^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=-\frac{Q_f\omega}{4\pi}P_1(\cos\theta). \tag{6}$$

由$P_l(\cos\theta)$的正交性,得

$$a_1R_0-\frac{d_1}{R_0^2}=-\frac{Q_f\omega}{4\pi}, \tag{7}$$

$$a_lR_0^l-\frac{d_l}{R_0^{l+2}}=0\quad(l\neq1). \tag{8}$$

将①式和⑦、⑧式联立,可得

$$a_1=-\frac{Q_f\omega}{6\pi R_0},\qquad d_1=\frac{Q_f\omega R_0^2}{12\pi},\qquad a_l=d_l=0\qquad(l\neq1). \tag{9}$$

代入φ_{m1}及φ_{m2},即有

$$\varphi_{m1}=a_1R\cos\theta=-\frac{Q_f\omega R\cos\theta}{6\pi R_0},\qquad R<R_0; \tag{10}$$

$$\varphi_{m2}=\frac{d_1}{R^2}\cos\theta=\frac{Q_f\omega R_0^2\cos\theta}{12\pi R^2},\qquad R>R_0. \tag{11}$$

易见$\varphi_{m1}\big|_{R=R_0}\neq\varphi_{m2}\big|_{R=R_0}$,这是因为球面有传导电流已被挖去,$\varphi_{m1}$和$\varphi_{m2}$是分别在球内、外定义的.

(2)由磁标势求磁场. 利用(21)及(22)式易得

$$B_1=\mu_0H_1=-\mu_0\nabla\varphi_{m1}=\frac{\mu_0Q_f\omega}{6\pi R_0}\boldsymbol{e}_z,\qquad R<R_0; \tag{12}$$

$$B_2=\mu_0H_2=-\mu_0\nabla\varphi_{m2}=\frac{\mu_0Q_f\omega R_0^2}{12\pi}\left[\frac{3\cos\theta\,\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{e}_z}{R^3}\right],\qquad R>R_0. \tag{13}$$

将$m=\dfrac{1}{3}Q_fR_0^2\omega\boldsymbol{e}_z$及$\cos\theta=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_R$代入,便与§ 4.2用矢势法求得的结果完全一致.

习　题　4.4

1. 首先求体系的电流密度$J_f(x')$. 由于电流仅存在于$R'=R_0$的球面上,易见$J_f(x')$应含有$\delta(R'-R_0)$的因子;又(23)式要求

$$\alpha_f\mathrm{d}\sigma'=J_f(x')\mathrm{d}V'=J_f(x')\mathrm{d}R'\mathrm{d}\sigma',$$

即要求

$$\alpha_f = J_f(x')\mathrm{d}R' = \lim_{\Delta R'\to 0}\int_{R_0-\Delta R'}^{R_0} J_f(x')\mathrm{d}R'. \qquad ①$$

显然,令

$$J_f(x') = \alpha_f\delta(R' - R_0) \qquad ②$$

必能满足①式.

将$J_f(x')$代入电流体系磁矩的定义式(8)即为所求.

3. 取z轴沿管轴,且其正向与电流成右手螺旋关系,在$R \gg L$处,通电螺线管可看作磁矩为$m = nI_fL\pi R_0^2\,\mathbf{e}$的磁偶极子. 它激发的磁场由(16)式表示,注意$\mathbf{e} = \cos\theta\,\mathbf{e}_R - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$.

习 题 4.5

1. 将坐标原点取在电流体系所在的区域V内. 外场源在V外,故[①]

$$\nabla \times B_e(0) = \mu_0 J_e(0) = 0. \qquad ①$$

又由x与x'为独立变量,

$$\nabla x' = 0, \qquad \nabla \times x' = 0. \qquad ②$$

利用函数乘积的导数公式[见附录1§ A1.3的(10)式,并略去等式右边第一项和第三项的圆括号],并将上二式代入,便有

$$\begin{aligned}\nabla[x'\cdot B_e(0)] &= B_e(0)\cdot\nabla x' + x'\times[\nabla\times B_e(0)] + x'\cdot\nabla B_e(0) + B_e(0)\times[\nabla\times x'] \\ &= x'\cdot\nabla B_e(0). \qquad ③\end{aligned}$$

将此式代入(16)式的第二项,即有

$$\begin{aligned}F^{(1)} &= \int_V J_f(x')\times[x'\cdot\nabla B_e(0)]\mathrm{d}V' \\ &= \int_V J_f(x')\times\nabla[x'\cdot B_e(0)]\mathrm{d}V' \\ &= -\int_V \nabla[x'\cdot B_e(0)]\times J_f(x')\mathrm{d}V'. \qquad ④\end{aligned}$$

再次利用x与x'为独立变量,$\nabla\times J_f(x') = 0$,因而

$$-[x'\cdot B_e(0)]\,\nabla\times J_f(x') = 0.$$

将等于零的上式与④式的被积函数相加,并利用函数乘积的导数公式[见附录1§ A1.3的(9)式],即得

$$\begin{aligned}F^{(1)} &= -\int\{\nabla[x'\cdot B_e(0)]\times J_f(x') + [x'\cdot B_e(0)]\,\nabla\times J_f(x')\}\mathrm{d}V' \\ &= -\int\nabla\times\{J_f(x')[x'\cdot B_e(0)]\}\mathrm{d}V'. \qquad ⑤\end{aligned}$$

用分量式表示$x'\cdot B_e(0)$,并将与积分变量x'无关的∇和$B_i(0) = B_e(0)\cdot\mathbf{e}$移到积分号外,便有

$$F^{(1)} = -\nabla\times\left[\sum_{i=1}^{3} B_i(0)\int_V J_f(x')x'_i\mathrm{d}V'\right]. \qquad ⑥$$

---

① 正像微积分中常使用$f'(0)$表示$f'(x)\big|_{x=0}$,在矢量分析中也习惯采用$\nabla\times B_e(0)$表示$[\nabla\times B_e(x)]\big|_{x=0}$,用$\nabla B_e(0)$表示$[\nabla B_e(x)]\big|_{x=0}$,余类推.

采用记号 $J_i(x')=J_f(x')\cdot e$,并利用[参看§ 4.4 的(9)式和(11)式]

$$\int_V J_f(x')x'_i\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\int_V[J_f(x')x'_i-J_i(x')x']\mathrm{d}V', \qquad ⑦$$

将上式代入⑥式后,先用矢量的点积表示分量式,接着用三矢量矢积的公式化简,最后利用磁矩 m 的定义式,可得

$$\begin{aligned}F^{(1)}&=-\nabla\times\left[\sum_{i=1}^{3}B_i(0)\int_V\frac{1}{2}[J_f(x')x'_i-J_i(x')x']\mathrm{d}V'\right.\\&=-\nabla\times\int_V\frac{1}{2}\{J_f(x')[x'\cdot B_e(0)]-x'[J_f(x')\cdot B_e(0)]\}\mathrm{d}V'\\&=-\nabla\times\left[\frac{1}{2}\int_V x'\times J_f(x')\mathrm{d}V'\right]\times B_e(0)\\&=-\nabla\times[m\times B_e(0)]. \qquad ⑧\end{aligned}$$

现在,利用m 为常矢量(其梯度和旋度均为零)、麦克斯韦方程 $\nabla\cdot B_e=0$、以及①式,便可得到如下两式[见附录§ 1.3 的(10)式和(12)式]

$$\nabla\times[m\times B_e(0)]=m[\nabla\cdot B_e(0)]-(m\cdot\nabla)B_e(0)=-m\cdot\nabla B_e(0), \qquad ⑨$$

$$\nabla[m\cdot B_e(0)]=m\times[\nabla\times B_e(0)]+(m\cdot\nabla)B_e(0)=m\cdot\nabla B_e(0). \qquad ⑩$$

将⑨式和⑩式代入⑧式,可得外磁场对磁偶极子作用力的三个表达式

$$F^{(1)}=-\nabla\times[m\times B_e(0)]=m\cdot\nabla B_e(0)=\nabla[m\cdot B_e(0)]. \qquad (11)$$

2. 电荷体系的磁矩与电荷体系的角动量 L 有如下关系(注意m 为磁矩,m_e 为电子的质量,ρ 为电子质量密度,ρ_f 为电子电荷密度)

$$\begin{aligned}m&=\frac{1}{2}\int_V x'\times J_f(x')\mathrm{d}V'=\frac{1}{2}\int_V x'\times\rho_f\boldsymbol{v}\mathrm{d}V'=\frac{q}{2m_e}\int_V x'\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V'=\frac{q}{2m_e}\int_V x'\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}m_e\\&=\frac{q}{2m_e}L. \qquad ①\end{aligned}$$

将(22)式及上式代入角动量定理(N 为力矩)

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=N=m\times B=\frac{q}{2m_e}L\times B=\left(-\frac{q}{2m_e}B\right)\times L=\omega_L\times L. \qquad ②$$

式中

$$\omega_L=-\frac{q}{2m_e}B.$$

公式②的形式与刚体绕固定点转动公式

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}=\omega\times R \qquad ③$$

相似. 与刚体中R 的端点绕 ω 轴作圆周运动相似,角动量L 与磁矩$m=-\frac{e}{2m_e}L$ 也像R 一样,其端点环绕 ω_L 轴旋转(当然,由于 $q=-e<0$,L 与m 反向).

3. $F^{(1)}$的 k 分量($k=x,y,z$)为

$$F_k^{(1)}=F^{(1)}\cdot e_k=(m\cdot\nabla B)\cdot e_k=m\cdot\nabla B_k,$$

将题设的B_k 代入上式求梯度后与m 点乘即得.

第 五 章

习 题 5.1

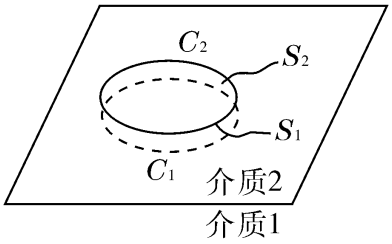
4. 通过三角公式,利用E_x,E_{x0},E_y,E_{y0}及δ表示$\cos(kz-\omega t)$和$\sin(kz-\omega t)$,将两者平方后相加便可消去$(kz-\omega t)$,得到关于E_x和E_y的方程.

习 题 5.2

1. 在介质1和介质2中的麦克斯韦方程分别为

$$\nabla\times E_1=-\frac{\partial B_1}{\partial t},\qquad \nabla\times E_2=-\frac{\partial B_2}{\partial t}.$$

在两种介质的分界面($z=0$平面)两侧,取两条任意靠近$z=0$平面的互相平行的闭合曲线C_1和C_2,它们分别环绕着两个圆S_1和S_2(见图).将上两式分别取沿S_1和S_2的面积分,并利用斯托克斯定理,可得



习题5.2图1

$$-\oint_{S_1}\frac{\partial B_1}{\partial t}\cdot d\sigma=\oint_{c_1}E_1\cdot dl,$$

$$-\oint_{S_2}\frac{\partial B_2}{\partial t}\cdot d\sigma=\oint_{c_2}E_2\cdot dl.$$

易见

$$-\frac{d}{dt}\oint_{S_1}B_{1n}d\sigma=\oint_{c_1}E_{1t}dl,\qquad -\frac{d}{dt}\oint_{S_2}B_{2n}d\sigma=\oint_{c_2}E_{2t}dl.$$

将上两式联立,代入$E_{1t}=E_{2t}$后对时间积分,便有

$$\oint_{S_1}B_{1n}d\sigma=\oint_{S_2}B_{2n}d\sigma.$$

由S_1及与之对应的S_2的任意性(可大可小),可得$B_{1n}=B_{2n}$.

同理,利用$\frac{1}{\mu}\nabla\times B=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$以及$\mu_1=\mu_2=\mu_0$可证明$\varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n}$.

2. 令$x=0$,$y=0$代入(9)式,可得

$$E_{0t}e^{-i\omega t}+E'_{0t}e^{-i\omega' t}=E''_{0t}e^{-i\omega'' t},$$

两边乘以$e^{i\Omega t}$后对t从$-\infty$到∞积分,得

$$E_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\Omega-\omega)t}dt+E'_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\Omega-\omega')t}dt=E''_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\Omega-\omega'')t}dt,$$

利用δ函数的傅里叶积分(见附录5)

$$\delta(\Omega-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\Omega-\omega)t}dt,$$

可得

$$E_{0t}\delta(\Omega-\omega)+E'_{0t}\delta(\Omega-\omega')=E''_{0t}\delta(\Omega-\omega''),$$

上式仅当

$$\omega=\omega'=\omega''\qquad 及\qquad E_{0t}=E'_{0t}=E''_{0t}$$

时成立,这就是(10)式和(13)式.这个结论在物理上是显然的,角频率为ω的电磁波入射后,引起介质束缚电子的振动而辐射,其辐射角频率与其振动角频率ω相等,而反射波与折射波分别是这些角频率为ω的辐射波的叠加,故其角频率也应等于ω.利用ω= ω′= ω″,分别令 $y=0$ 或 $x=0$,利用用相同的数学方法可以证明(11)式和(12)式.

3.以 $-k''$ 乘(21)式得

$$k''(E_{0p}-E'_{0p})\cos\theta=k''E''_{0p}\cos\theta'',$$

以 $\cos\theta''$ 乘(25)式得

$$k(E_{0p}+E'_{0p})\cos\theta''=k''E''_{0p}\cos\theta''.$$

两式联立,便有

$$k''(E_{0p}-E'_{0p})\cos\theta=k(E_{0p}+E'_{0p})\cos\theta''.$$

用 E_{0p} 除上式两边,并记 $r_P=E'_{0p}/E_{0p}$,利用 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ 及 $\frac{k''}{k}=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}$ 则有

$$\frac{1+r_P}{1-r_P}=\frac{k''\cos\theta}{k\cos\theta''}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta''\cos\theta''},$$

再由分、合比定理,可得

$$r_P=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta''\cos\theta''}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta''\cos\theta''},$$

利用三角公式

$$\begin{aligned}\sin(\theta\mp\theta'')\cos(\theta\pm\theta'')&=(\sin\theta\cos\theta''\mp\sin\theta''\cos\theta)(\cos\theta\cos\theta''\mp\sin\theta\sin\theta'')\\&=\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta''+\sin^2\theta'')\mp\sin\theta''\cos\theta''(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=\sin\theta\cos\theta\mp\sin\theta''\cos\theta'',\end{aligned}$$

代入 r_P,即得

$$r_P=\frac{\sin(\theta-\theta'')\cos(\theta+\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}=\frac{\mathrm{tg}(\theta-\theta'')}{\mathrm{tg}(\theta+\theta'')}.$$

同理可得 $t_P=E''_{0p}/E_{0p}$.

4.(1)对于S波,由于入射波电矢量的正方向及反射波电矢量的正方向相同(图5.7 E_{0s} 及 E'_{0s} 均由纸面指向外),又因 $n_2>n_1$,$\theta>\theta''$,由(32)式可见 $E'_{0s}/E_{0s}<0$,故反射波电矢量的实际方向与 E'_{0s} 相反,即与 E_{0s} 相反,反射后产生位相π的跃变.

(2)对于P波,入射波电矢量的正方向与反射波电矢量的正方向不平行(见图5.6的 E_{0p} 及 E'_{0p}).一般来说,比较两者的相位就没有绝对的意义.仅当正入射($\theta=0$,$E'_{0p}/E_{0p}<0$)及掠入射($\theta\approx\pi/2$,$\theta+\theta''>\pi/2$,$E'_{0p}/E_{0p}<0$)时,E_{0p} 与 E'_{0p} 的正方向平行(正入射是反向,且 $E'_{0p}/E_{0p}<0$;掠入射是同向,但 $E'_{0p}/E_{0p}<0$),致使反射光电矢量的实际方向均与入射光电矢量的正方向相反,因而反射后均有位相π的跃变.

8.为书写简单起见,记

$$\Theta=k''_x x-\omega t=k_x x-\omega t=kx\sin\theta-\omega t.$$

由(42)式及(51)式得隐失波的 $\mathrm{Re}E''$ 及 $\mathrm{Re}H''$ 如下:

$$\mathrm{Re}E''=\mathrm{Re}\{E''_0 e^{-\alpha z}e^{i(k''_x x-\omega t)}\}=E''_0 e^{-\alpha z}\cos\Theta\, e_y,$$

$$\mathrm{Re}H''=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{k''_x e_z-i\alpha e_x}{k''}E''_0 e^{-\alpha z}e^{i(k''_x x-\omega t)}\right\}=\frac{E''_0}{\omega\mu_0}e^{-\alpha z}(k_x\cos\Theta\, e_z+\alpha\sin\Theta\, e_x).$$

上式已将 $k''=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 代入.

将上两式代入S'',可得(52)式

$$S''=(\mathrm{Re}\,E'')\times(\mathrm{Re}\,H'')=\frac{E''^2_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\cos\Theta\,e_y\times(k_x\cos\Theta\,e_z+\alpha\sin\Theta\,e_x)$$

$$=\frac{E''^2_0}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-2\alpha z}(k_x\cos^2\Theta\,e_x-\alpha\cos\Theta\sin\Theta\,e_z)=S''_x\,e_x+S''_z\,e_z.$$

式中

$$S''_x=\frac{k_x}{2\omega\mu_0}E''^2_0\mathrm{e}^{-2\alpha z}(1+\cos2\Theta)\sin\theta,$$

$$S''_z=-\frac{\alpha}{2\omega\mu_0}E''^2_0\mathrm{e}^{-2\alpha z}\sin2\Theta,$$

将Θ代入上两式,即得(53)和(54)式.

习 题 5.3

1. 导出波动方程可得v^2,其中利用单色波有$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$.为了求出$\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2}$的实部和虚部,先将$\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)$用指数形式表示,开方后用三角形式表示,利用三角函数关系可得.

4. 设$z>0$的半无界空间中充满金属导体,垂直入射到金属表面的电磁波为

$$E=E_0\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta z-\omega t)},$$

$$H=\sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e_z\times E.$$

(1)在$z=0$平面上,电磁波透入金属内部的平均能流密度就是单位时间内通过该平面单位面积透入金属的电磁能,即

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^*\times H)\big|_{z=0};$$

(2)导体中由单位表面积所构成的无限长方柱体的平均消耗功率即该柱体单位时间所产生的焦耳热

$$P_{\mathrm{L}}=\int_v\overline{J_{\mathrm{f}}\cdot E}\,\mathrm{d}v=\int_0^\infty\frac{1}{2}\mathrm{Re}(J_{\mathrm{f}}\cdot E)\,\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y.$$

可以证明,两者相等.

习 题 5.5

1. 由(42)式可得

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}},\qquad\omega=\sqrt{c^2k^2+\omega_{\mathrm{p}}^2}.$$

由此得

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}}},\qquad v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\sqrt{c^2k^2+\omega_{\mathrm{p}}^2}=\frac{c^2}{v_{\mathrm{p}}}.$$

等离子体的折射率为

$$n=\frac{c}{v}=\frac{ck}{\omega}=\sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}}.$$

由于等离子体内 $n=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}<1$，比真空中的折射率 $n=1$ 要小. 故电磁波的相速 $v_p>c$，而群速 $v_g=nc<c$.

第 六 章

习 题 6.1

1. 令 $E_i(x,y)=X(x)Y(y)$，式中 $i=x,y,z$. 代入方程(16)，化为两个常微分方程，解之可得.

2. 注意到 $\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial z}=E_x(x,y)\frac{\partial e^{i(k_z z-\omega t)}}{\partial z}=ik_z E_x(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$.

3. 将定态电磁波的表达式 $E(x,t)=E(x)e^{-i\omega t}$，$H(x,t)=H(x)e^{-i\omega t}$ 代入麦克斯韦方程组，联立后即可得待求方程.

将理想导体的边值关系 $H_n=0$ 及 $\frac{\partial H_n}{\partial t}=0$ 应用于 $x=0,a$ 及 $y=0,b$ 平面可得待求边界条件.

4. 由题设波在 x 方向均匀，通解形式为 $E(x,t)=E(y)e^{i(k_z z-\omega t)}$，再由分离变量法得通解

$$E_i(x,t)=(C_i\cos k_y y+D_i\sin k_y y)e^{i(k_z z-\omega t)},\qquad i=x,y,z.$$

利用理想导体的边值关系 $E_t=0$，$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$ 于 $y=0,b$ 平面得边界条件，据此定系数得解.

5. 利用分离变量法得通解

$$E_i(x)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)(C_3\cos k_z z+D_3\sin k_z z),\qquad i=x,y,z.$$

利用边界条件定系数即得解.

6. 由 $\bar{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^*\times H)$ 及 $P=\int_0^a\int_0^b \bar{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 得传输功率，由 $\sigma_f=n\cdot D=\varepsilon E_n$ 及 $\alpha_t=n\times H$ 得管壁的电荷密度及面电流密度.

7. TE_{mn} 型模式的截止频率为

$$f_{c,mn}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

当 $f>f_{c,mn}$ 时，该模式才能在波导管中传播.

8. 参看例1 可求 E_1,E_2,E_3. 再利用 $B=-\frac{i}{\omega}\nabla\times E$ 可求 B. 对 TE_{11} 波，$k_x=\frac{\pi}{a}$，$k_y=\frac{\pi}{b}$，易求 k_z 及 v_p,v_g.

9. 先考虑截面为 $a\times a$ 的方形波导管，沿 z 轴方向传播、满足边界条件

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial E_y}{\partial y}\right|_{y=a}=0;\qquad \left.E_x\right|_{y=0}=\left.E_z\right|_{y=0}=0,\qquad \left.E_y\right|_{x=a}=\left.E_z\right|_{x=a}=0$$

的电磁波的电矢量为

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{i(k_z z-\omega t)},$$
$$E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y e^{i(k_z z-\omega t)},$$
$$E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y e^{i(k_z z-\omega t)},$$

式中

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\qquad k_y=\frac{n\pi}{a},\qquad k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2},\qquad k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0.$$

再根据上述模式满足 $y=x$ 平面上的边界条件确定其他系数.

(1)在 $x=y$ 面上,由于 E 仅有法向分量,与 x 轴(正、负向)及 y 轴(负、正向)的夹角的大小相等,故 $E_x=-E_y$. 由此有两种可能:$A_1=A_2$,$k_x=-k_y$ 或 $A_1=-A_2$,$k_x=k_y$;

(2)在 $y=x$ 面上,E_z 为切向分量,故 $E_z=0$,因而 $A_3=0$.

将以上两个结果代入 E_x,E_y,E_z,即得电矢量,再利用 $B=\frac{1}{\omega}k\times E$ 可得磁矢量.

习 题 6.2

1. 令 $E_i(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$,式中 $i=x,y,z$. 代入亥姆霍兹方程,可分离为三个常微分方程,解之并代入 $E_i(x,y,z)$,得

$$E_i(x,y,z)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_2\sin k_zz),\quad i=x,y,z.$$

利用边界条件(6)、(7)式定系数及本征值 k_x,k_y,k_z,即为所求.

2. 令 $m=1$,$n=p=0$(因而 $k_y=k_z=0$),将(10)~(12)式代入 $E=E_xe_x+E_ye_y+E_ze_z$ 可见.

3. 驻波的波长(以 cm 为单位)

$$\lambda_{mnp}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2+\left(\frac{n}{L_2}\right)^2+\left(\frac{p}{L_3}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{3}\right)^2+p^2}}$$

在题设条件 $\frac{4}{\sqrt{5}}\leqslant\lambda\leqslant\frac{8}{\sqrt{13}}$ 中取各项的倒数平方后乘 4,可得(注意不等号已换向)

$$\frac{13}{16}\leqslant\frac{m^2}{2^2}+\frac{n^2}{3^2}+\frac{p^2}{1^2}\leqslant\frac{5}{4},$$

易见满足上式的 (m,n,p) 如表示所示(见习题答案 6.2),将 m,n,p 值代入 λ_{mnp} 得波长,将 k_x,k_y,k_z 代入

$$E=E_xe_x+E_ye_y+E_ze_z$$

得电场.

(4)若 $0.01\leqslant\lambda\leqslant0.11$,则得

$$(181.8)^2\leqslant\frac{m^2}{2^2}+\frac{n^2}{3^2}+\frac{p^2}{1^2}\leqslant(200)^2,$$

上式是以 m,n,p 为轴的直角坐标系中的一个椭球壳:它由半轴为 $a_1=2\times181.8$,$b_1=3\times181.8$,$c_1=181.8$ 的椭球面与半轴为 $a_2=2\times200$,$b_2=3\times200$,$c_2=200$,的椭球面所包围. 根据椭球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi abc$ 可知椭球壳的体积为

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi\times2\times3\times1[(200)^3-(181.8)^3]\approx5\times10^7.$$

因为每一个模式占有 $\Delta m\,\Delta n\Delta p=1$ 个单位,故在给定的波长范围内约有 5×10^7 个模式.

第 七 章

习 题 7.1

1. 将(16)、(17)、(18)式代入(12)式,得

$$A\cos(h_1a) - B\sin(h_1a) = C, \tag{①}$$

$$A = D. \tag{②}$$

将(16)、(17)、(18)式代入(13)式,得

$$Ah_1\sin(h_1a) + Bh_1\cos(h_1a) = Ch_2, \tag{③}$$

$$Bh_1 = -Dh_3. \tag{④}$$

将②与④式联立,得

$$B = -Ah_3/h_1. \tag{⑤}$$

将⑤式分别代入①式和③式,得

$$A[h_1\cos(h_1a) + h_3\sin(h_1a)] = Ch_1, \tag{⑥}$$

$$A[h_1\sin(h_1a) - h_3\cos(h_1a)] = Ch_2. \tag{⑦}$$

将⑥、⑦式联立,得

$$h_2[h_1\cos(h_1a) + h_3\sin(h_1a)] = h_1[h_1\sin(h_1a) - h_3\cos(h_1a)]. \tag{⑧}$$

用$\cos(h_1a)$除两边后,可得

$$h_1h_2 + h_2h_3\tan(h_1a) = h_1^2\tan(h_1a) - h_1h_3. \tag{⑨}$$

提出公因子$\tan(h_1a)$,整理后即得(26)式. 将②、⑤、⑥式分别代入(16)、(17)、(18)式即得(22)、(23)、(24)式.

2. 将$h_2 = 0$代入(26)式,得

$$\tan(h_1a) = \frac{h_3}{h_1}, \tag{①}$$

将$h_2 = 0$代入(20)得$k_z^2 = n_2^2\frac{\omega^2}{c^2}$,并将相应的$\omega$视作$\omega_c$,代入(19)式和(21)式后得

$$h_1 = \frac{\omega_c}{c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \qquad h_3 = \frac{\omega_c}{c}\sqrt{n_2^2 - n_3^2}. \tag{②}$$

将②式代入①式,得

$$\tan\left(\frac{\omega_c a}{c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}, \tag{③}$$

利用$\omega_c = 2\pi c/\lambda_c$,即有

$$\frac{2\pi a}{\lambda_c}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi, \qquad m = 0,1,\cdots. \tag{④}$$

由此得(33)式.

习 题 7.2

1. 利用(17)式及复合函数的导数公式可导出计算磁场纵向分量的公式

$$H_z = \frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{i\mu_0\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = -\frac{i}{\mu_0\omega}\left(\cos\phi\frac{\partial E_y}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial E_y}{\partial \phi}\right).$$

并注意到：

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\phi;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin\phi}{\rho}.$$

2. 利用柱函数的递推公式可证. 递推公式为

$$J'_m(x) = -\frac{m}{x}J_m(x) - J_{m-1}(x),$$

$$K'_m(x) = -\frac{m}{x}K_m(x) - K_{m-1}(x).$$

第 八 章

习 题 8.2

1. 用反证法来证明. 如果从(x, y, z, t)到(x', y', z', t')的变换不是线性的,则与上述均匀性的要求矛盾. 例如,若$x' = Ax^2$(A 为常数),现在对一根 1m 长的尺进行两次测量：

(1)第一次,尺的两端分别置于$x_1 = 0, x_2 = 1$,由$x' = Ax^2$,则K′系测得尺长为

$$x'_2 - x'_1 = A(x_2^2 - x_1^2) = A(1 - 0) = A;$$

(2)第二次,尺的两端分别置于$x_1 = 1, x_2 = 2$. 由$x' = Ax^2$,则K′系测得尺长为

$$x'_2 - x'_1 = A(x_2^2 - x_1^2) = A(4 - 1) = 3A.$$

这表明,K′系测量这根直尺的长度,与尺的空间位置有关,这就违反了空间的均匀性. 同理可讨论时间均匀性的问题.

为了讨论Δs和$\Delta s'$之间的关系,设事件 1 和事件2 的时空坐标如表 8.2 所示,则

$$\Delta s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

$$\Delta s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2.$$

前面已证明,(x', y', z', t')与(x, y, z, t)有线性关系,因此$\Delta s'^2$也可以变换为x, y, z, t的二次式. 如果

$$\Delta s = (\Delta s')^n, \qquad n = 2, 3, \cdots,$$

则Δs及$\Delta s'$都不可能同时是x, y, z, t及x', y', z', t'的二次式. 因此,$\Delta s'$与Δs只能有线性关系

$$\Delta s' = a\Delta s + b.$$

进一步的讨论可以证明$b = 0, a = 1$[见§ 8.2 中(13)式].

2. 将$t' = t$代入$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$求出$x$,再与$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$比较,可证$x' = -x$. 再将$x' = -x$代入洛伦兹变换可得$t'$.

3. x_2是K 系测得第二事件(发生在飞船)的空间坐标,即飞船的坐标,K 系的坐标原点在地球,故x_2给出的正好是地球到飞船的距离

$$x_2 = \frac{x_2' + V t_2'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0 + 0.6c \times 1}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 0.75c(\mathrm{m}).$$

与 $l = V\Delta t = 0.6c \times 1.25\mathrm{s} = 0.75c(\mathrm{m})$一致.

x_2' 是K′系测得第二事件(发生在飞船)的空间坐标,即飞船的坐标. K′系的坐标原点在飞船,故 $x_2' = 0$,不是 l'.

4. 设K 系与K′系坐标原点分别取在建筑物与列车,取

事件 A(电光照亮铁塔 A):K 系$(-l_0, t_A)$,K′系(x_A', t_A');

事件 B(电光照亮铁塔 B):K 系(l_0, t_B),K′系(x_B', t_B').

将 $\Delta t = t_A - t_B = 0$, $\Delta x = x_A - x_B = -2l_0$ 代入 $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right)$ 即得.

注意,所有测量都是两参考系位于事件发生处的观察者测量的,K′系的观察者遍布整个无限大空间,并非局限在列车上.

习　题　8.3

1. 按照伽利略变换,K 系测得光源的速度为 V,闪光向前传播的速度为 $c+V$,闪光向后传播的速度为 $c-V$. 考虑到闪光到达车头与车尾时,O 点与车头、车尾距离是不同的. 由此可证明两事件同时.

2. 灯 O 在 $t_0 = 0$ 打开,灯 P 在 $t_P = \frac{V}{c^2}x_P$ 打开.

3. 取 AB 尺为K 系,坐标原点为 A;CD 尺为K′系,坐标原点为 C.

方法一:K 系测得 CD 的长度为 $l_0\sqrt{1-\beta^2}$,故K 系观察到 AC 先相遇,BD 后相遇. 由 AC 相遇到 BD 相遇的时间间隔为

$$T_0 = \frac{l_0 - l_0\sqrt{1-\beta^2}}{V},$$

求出 $\beta = V/c$ 代入,解之得 V.

方法二:

(1)事件1(AC 相遇)的时空坐标为:K 系(0,0),K′系(0,0);

(2)事件2(BD 相遇)的时空坐标为:K 系(l_0, T_0),K′系(l_0, T'_0).

将事件2 的时空坐标代入 $x' = \gamma(x - Vt)$即得 $l_0 = \gamma(l_0 - VT_0)$,解之可得 V.

4. 取地面为K 系,飞船为K′系,V 沿 x 轴的正向.

(1)事件1(地面刚发现飞船位置):K 系(x_1, t_1),K′系(x_1', t_1');

(2)事件2(若不校正航向,飞船与彗星碰撞):K 系(x_2, t_2),K′系(x_2', t_2').

方法一:由于事件1 和事件2 均发生于飞船上,K′系测得 $x_1' = x_2'$. 故 $\Delta t' = t_2' - t_1'$ 为固有时,即

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\gamma} = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 5 \times 0.8\mathrm{s} = 4\mathrm{s}.$$

方法二:对洛伦兹变换 $t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$ 取改变量,得

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right),$$

地面刚发现飞船到飞船彗星“相碰”的时间$\Delta t=5\text{s}$,两事件的距离为$\Delta x=V\Delta t=0.6c\times 5\text{s}$,故

$$\Delta t'=\frac{1}{0.8}\left(5\text{s}-\frac{0.6c}{c^2}0.6c\times 5\text{s}\right)=4\text{s}.$$

5. 在K 系,μ子的寿命受运动时钟变慢效应的影响;在K′系,大气层厚度受动尺长度缩短效应的影响.

6. 设列车固有长度为L_0,隧道固有长度为 l_0.K 系测得两者等长,可见

$$l_0=L_0\sqrt{1-\beta^2}<L_0.$$

(1)K 系测得OO'相遇时,两雷同时打在OB 处. 可定义两事件为

事件 1(雷击OO'):K 系(0,0),K′系(0,0);

事件 2(雷击B):K 系$(-l_0,0)$,K′系(x'_2,t'_2).

由洛伦兹变换可求出x'_2,t'_2.

(2)K′系测得OO'相遇时,两雷同时打在OB 处,可定义两事件为

事件 1(雷击OO'):K 系(0,0),K′系(0,0);

事件 2(雷击B):K 系$(-l_0,t_2)$,K′系$(x'_2,0)$.

由$x_2=\gamma(x'_2+Vt'_2)$可求x'_2,由$t'_2=\gamma\left(t_2-\frac{V}{c^2}x_2\right)$可求$t_2$.

7. 取站台为K 系,坐标原点取在A;取列车K′系,坐标原点取在 b.由于坐标原点(A,b)相遇时,两坐标原点的钟均指 t_0,故洛伦兹变换应写成

$$x'=\gamma[x-V(t-t_0)],\quad t'=t_0+\gamma\left[(t-t_0)-\frac{V}{c^2}x\right].$$

这相当于将钟面的刻度 t_0 改为 0,将钟面刻度 t 改为$(t-t_0)$,钟面刻度 t'改为$(t'-t_0)$.

以K 系的观察为例(图中时钟的读数不准确,仅示意)

(1)bA 相遇. 由题设可知,$t_{A1}=t_{B1}=t'_{b1}=t_0$.

想象K 系在a 点有一个虚构的时钟在$t_{a1}=t_0$ 时与K′系钟的钟a 相遇. 由动尺长度缩短效应可知该钟位于$x_{a1}=-l_0\sqrt{1-\beta^2}$处. 洛伦兹变换为

$$t'_{a1}-t_0=\gamma\left[(t_{a1}-t_0)-\frac{V}{c^2}x_{a1}\right],$$

将t_{a1}及x_{a1}代入上式,即得t'_{a1},见图1(a).

(2)aA 相遇,a 点以匀速V 通过$l_0\sqrt{1-\beta^2}$的距离与A 相遇,K 系所有时钟读数(t 不带撇)均为

$$t_{A2}=t_{a2}=t_{B2}=t_{b2}=t_0+\frac{l_0}{V}\sqrt{1-\beta^2},$$

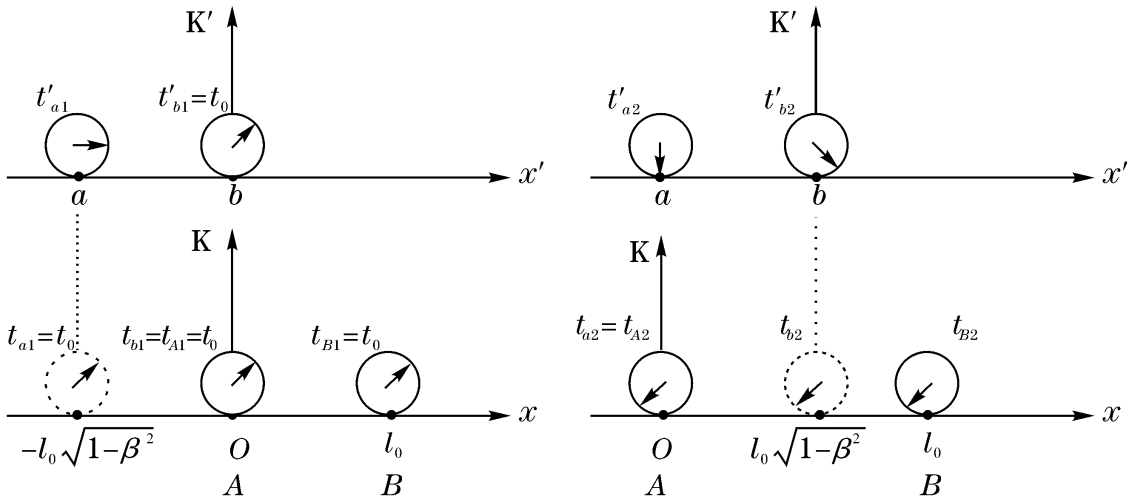
想像K 系在b 点有一个虚构的时钟在此时(见上式)与K′系的钟b 相遇. 由动尺长度缩短效应可知该钟位于$x_{b2}=l_0\sqrt{1-\beta^2}$处. 由洛伦兹变换

$$t'_{b2}-t_0=\gamma\left[(t_{b2}-t_0)-\frac{V}{c^2}x_{b2}\right]$$

可得t'_{b2}.同理,由K 系的A 钟与K′系的a 钟相遇,洛伦兹变换为

$$t'_{a2}-t_0=\gamma\left[(t_{a2}-t_0)-\frac{V}{c^2}x_{a2}\right],$$

将$t_{a2}=t_{A2}=t_0+\frac{l_0}{V}\sqrt{1-\beta^2}$(当$aA$ 相遇时,a 点即A 点),$x_{a2}=x_{A2}=0$代入得t'_a.



习题8.3 图1

K′系的观察结果同法可求得.

习　题　8.4

1. 由间隔不变性

$$(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)-c^2\mathrm{d}t^2=(\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2)-c^2\mathrm{d}t'^2,$$

及 $v^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$, $v'^2=\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right)^2$,可得

$$(v^2-c^2)\mathrm{d}t^2=(v'^2-c^2)\mathrm{d}t'^2,$$

利用$\mathrm{d}t^2>0$,$\mathrm{d}t'^2>0$,便有$v'^2-c^2=v^2-c^2<0$,得$v'<c$.

2. 方法一(按速度变换计算). 用速度变换求K″系相对K 系的速度,得$v_x=\frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$;由动尺长度缩短效应得$l=l_0\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}$,将$v_x$代入即为所求.

方法二(用二次洛伦兹变换计算). K 系为了测得$O''A$的运动长度l,则要测定$O''A$尺两端同时($t_1=t_2$)与K 系相遇的两坐标x_1和x_2,则运动长度$l=x_2-x_1$. 设两事件及它们在K 系,K′系,K″系的时空坐标分别为

事　　件	K 系	K′系	K″系
事件1　(O''于t_1与x_1相遇)	(x_1,t_1)	(x'_1,t'_1)	(x''_1,t''_1)
事件2　(A于t_2与x_2相遇)	(x_2,t_2)	(x'_2,t'_2)	(x''_2,t''_2)

由K″系以$V=V\,e_x$相对K′系运动,得

$$x''_2-x''_1=\gamma[(x'_2-x_1)-V(t'_2-t'_1)],$$

由K′系以$V=V\,e_x$相对K 系运动,并注意到$t_2=t_1$及$x_2-x_1=l$,即有

$$x'_2-x'_1=\gamma[(x_2-x_1)-V(t_2-t_1)]=\gamma l,$$

$$t'_2-t'_1=\gamma\left[(t_2-t_1)-\frac{V}{c^2}(x_2-x_1)\right]=-\gamma l\frac{V}{c^2}.$$

将后两式代入前式,并利用固有长度 $l_0 = x_2'' - x_1''$,即可求得运动长度 l(注意,$x_2' - x_1'$ 不是在 K′系的运动长度,因这两事件满足 $t_1 = t_2$,不满足 $t_1' = t_2'$).

3. 方法一(按照 K 系的测量值计算).

K 系测得车厢的长度为 $l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$;

K 系测得小球相对地面速度 $v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'} = \frac{u_0 + V}{1 + \frac{V}{c^2}u_0}$;

K 系测得小球相对车厢速度 $v_x - V$;

K 系测得小球从后壁到前壁运动时间 $\Delta t = \frac{l}{v_x - V}$.

方法二(按洛伦兹变换计算).

K′系测得车厢长度为固有长度 $\Delta x' = l_0$,

K′系测得小球相对车厢速度 $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v_x' = u_0$;

由洛伦兹变换得改变量

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\left(\frac{\Delta x'}{u_0} + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\frac{l_0}{u_0}\left(1 + \frac{V}{c^2}u_0\right).$$

4. (3) 设K′系相对介质静止,K′系测得光在介质中速度为 $v' = c/n$. 接收器在K 系接收到的信号沿 e_y 方向,即 $\boldsymbol{v} = v_y e_y$. 由 $v_x = 0$ 及速度变换得

$$0 = v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v_x'}, \qquad \text{即 } v_x' = -V.$$

K′系测得光在介质速度的 y 分量为

$$v_y' = \sqrt{v'^2 - v_x'^2} = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - V^2}.$$

再次利用速度变换求得 v_y,代入 $\Delta t_3 = l_0/v_y$ 即为所求.

6. K′系以 $V = -V e_x = -0.5c e_x$ 相对K 系运动,在洛伦兹变换及速度变换的公式中均以 $-V$ 代替 V,并且 $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

方法一(用速度变换).

(1)为了让飞船 B 接到小包,K 系测得小包速度的分量应为

$$v_x = 0.5c(\text{与飞船 } B \text{ 的速率 } v_B \text{ 相同}),$$

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \sqrt{(0.75c)^2 - (0.5c)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}c;$$

(2)K′系测得小包速度的分量为

$$v_x' = \frac{v_x - (-V)}{1 - \frac{(-V)}{c^2}v_x} = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + 0.5c \times 0.5} = 0.8c,$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left[1 - \frac{(-V)}{c^2}v_x\right]} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}c}{\frac{2}{\sqrt{3}}(1 + 0.5 \times 0.5)} = \sqrt{\frac{3}{20}}c;$$

(3)$\tan\theta'=\frac{v_x'}{v_y'}=\frac{8}{\sqrt{15}}$;

(4)$v'=\sqrt{v_x'^2+v_y'^2}=\frac{\sqrt{79}}{10}c$.

方法二(用洛伦兹变换). 设下述事件的时空坐标依次为 x,y,t.

事件 1(发射小包):K 系(0,0,0),K′系(0,0,0);

事件 2(收到小包):K 系(x,d,t),K′系(x',d,t').

(1)K 系测得,

$$t=\frac{y}{v_y}=\frac{d}{\sqrt{v^2-v_x^2}}=\frac{d}{\sqrt{(0.75c)^2-(0.5c)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{d}{c},$$

$$x=v_x t=0.5c\times\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{d}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}}d;$$

(2)K′系测得

$$x'=\gamma[x-(-V)t]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{\sqrt{5}}d+0.5c\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{d}{c}\right]=\frac{8}{\sqrt{15}}d,$$

$$t'=\gamma\left[t-\frac{(-V)}{c^2}x\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{d}{c}+\frac{0.5c}{c^2}\frac{2}{\sqrt{5}}d\right]=\frac{10}{\sqrt{15}}\frac{d}{c};$$

(3)$\tan\theta'=\frac{x'}{y'}=\frac{x'}{d}=\frac{8}{\sqrt{15}}$.

(4)$v'=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{t'}=\frac{\sqrt{x'^2+d^2}}{t'}=\frac{\sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{15}}d\right)^2+d^2}}{\frac{10}{\sqrt{15}}\frac{d}{c}}=\frac{\sqrt{79}}{10}c$.

7.(1)A 发出光脉冲及光脉冲反射回 A,两件事均发生于 A. 故 $\Delta t_1'=\tau_A$ 是固有时.

$$\Delta t_1=\frac{\Delta t_1'}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}=\frac{\tau_A}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}},\qquad \Delta t_1''=\frac{\Delta t_1'}{\sqrt{1-\frac{v_B'^2}{c^2}}},$$

式中 v_B' 是 K′系测得飞船 B 的速度.

由速度变换

$$v_x'=\frac{v_x-V}{1-\frac{V}{c^2}v_x}\qquad 得\qquad v_B'=\frac{v_B-v_A}{1-\frac{v_A}{c^2}v_B},$$

这里已利用 K′相对 K 的速度 $V=v_A$.

(2)K′系测得,光脉冲被飞船 B 反射时,A 与 B 的距离为 $\frac{1}{2}c\Delta t_1'=\frac{1}{2}c\tau_A$;$A$ 收到光脉冲时 A 与 B 的距离为 $\frac{1}{2}c\tau_A-\frac{1}{2}|v_B'|\tau_A$($v_B'$ 加绝对值符号是因为 $v_A>v_B$,因而K′系测得飞船 B 沿 $-e_x$ 方向运动).

K′系测得,A 收到光脉冲后追上 B 需时

$$\Delta t_2'=\frac{\frac{1}{2}c\tau_A-\frac{1}{2}|v_B'|\tau_A}{|v_B'|}=\frac{1}{2}\tau_A\left(\frac{c}{|v_B'|}-1\right),$$

将 $|v_B'|$ 代入即得.

8.(1)以 K 系测得的 l 表示“固有距离”l_0.因两物体相对 K″系静止,故 K″系测得的距离可称为固有距离.两物体(K″系)相对 K 系以 $\boldsymbol{V}=v\boldsymbol{e}_x$ 运动,故

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\qquad \text{即 } l_0=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\gamma_v l. \tag{①}$$

(2)求 K′系测得两物体的距离 l'.K″系相对 K 系的速度为 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_x$,K′系相对 K 系的速度为 $V=V\boldsymbol{e}_x$,故 K″系相对 K′系的速度为

$$v'=v'_x=\frac{v_x-V}{1-\dfrac{V}{c^2}v_x}=\frac{v-V}{1-\dfrac{Vv}{c^2}}. \tag{②}$$

K′系测得两物体的距离为

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}=\frac{l_0}{\gamma_{v'}}. \tag{③}$$

将 l_0 及 v'代入上式,经过复杂的计算可得解.

若利用§ 8.5 的(40)式

$$\gamma_{v'}=\gamma\gamma_v\left(1-\frac{Vv}{c^2}\right),\qquad \text{式中 } \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{④}$$

上述计算可大为简化

$$l'=\frac{l_0}{\gamma_{v'}}=\frac{\gamma_v l}{\gamma\gamma_v\left(1-\dfrac{Vv}{c^2}\right)}=\frac{l\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{Vv}{c^2}}. \tag{⑤}$$

习 题 8.5

1. 设 $x_1'Ox_4'$ 平面相对 x_1Ox_4 平面转过 θ 角. 由几何关系得

$$x_1'=OA+AB=x_1\cos\theta+x_4\sin\theta, \tag{①}$$

$$x_2'=x_2, \tag{②}$$

$$x_3'=x_3, \tag{③}$$

$$x_4'=-CD+OD=-x_1\sin\theta+x_4\cos\theta. \tag{④}$$

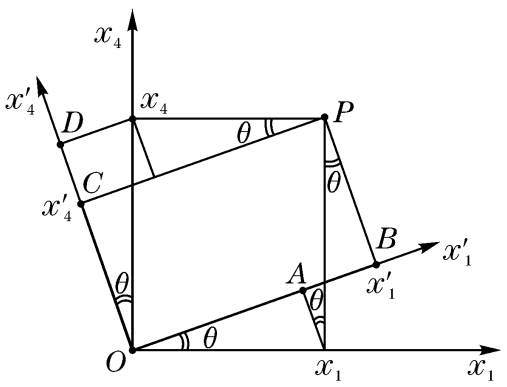
将 K′系原点 O'的坐标($x_1'=0$,$x_1=Vt$)及 $x_4=\mathrm{i}ct$ 代入①式得

$$0=Vt\cos\theta+\mathrm{i}ct\sin\theta,$$

由此得 $\tan\theta=\mathrm{i}V/c=\mathrm{i}\beta$,利用三角公式求得

$$\sin\theta=\mathrm{i}\beta\gamma,\qquad \cos\theta=\gamma,$$

代入①~④式即得洛伦兹变换.



习题8.5 图1

2. 由 $x_\mu'x_\mu'=x_\rho x_\rho$ 及四维位矢的变换公式,得

$$\alpha_{\mu\rho}x_\rho\alpha_{\mu\tau}x_\tau=x_\rho x_\tau\delta_{\rho\tau}.$$

比较两边即得 $\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\mu\tau}=\delta_{\rho\tau}$,利用 $\alpha_{\mu\rho}=\widetilde{\alpha}_{\rho\mu}$代入得证.

3. $T_{\mu\nu}'=\dfrac{\partial A_\nu'}{\partial x_\mu'}-\dfrac{\partial A_\mu'}{\partial x_\nu'}=\dfrac{\partial(\alpha_{\nu\sigma}A_\sigma)}{\partial x_\rho}\dfrac{\partial x_\rho}{\partial x_\mu'}-\dfrac{\partial(\alpha_{\mu\rho}A_\rho)}{\partial x_\sigma}\dfrac{\partial x_\sigma}{\partial x_\nu'}=\alpha_{\nu\sigma}\alpha_{\mu\rho}\left(\dfrac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho}-\dfrac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}\right)=\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\sigma}T_{\rho\sigma}.$

5. 利用雅柯比行列式来证明：

$$\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'\mathrm{d}x_4'=\frac{\partial(x_1',x_2',x_3',x_4')}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4=|\alpha_{\mu\nu}|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4.$$

6. 在 $k_\nu'=\alpha_{\nu\rho}k_\rho$ 两边乘 $\alpha_{\mu\nu}$ 得

$$\alpha_{\mu\nu}k_\nu'=\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\nu\rho}k_\rho=\delta_{\mu\rho}k_\rho=k_\mu.$$

7. 取入射面为 xoy 平面，现在以第 1 种情形(平面镜水平放置)为例说明解题方法：

(1)K 系入射光线的波矢 k_i 与频率 ω_i 为

$$k_{ix}=k\cos\theta_0,\quad k_{iy}=k\sin\theta_0,\quad k_{iz}=0,\quad \omega_i=\omega_0;$$

(2)由四维波矢变换得 K′系入射光线的波矢 k'_i 和频率 ω'_i 为

$$k'_{ix}=\gamma\left(k\cos\theta_0-\frac{V}{c^2}\omega_0\right),\quad k'_{iy}=k\sin\theta_0,\quad k'_{iz}=0,\quad \omega'_i=\gamma(\omega_0-Vk\cos\theta_0);$$

(3)由反射定律得 K′系的反射光线，波矢 k'_r 与频率 ω'_r 为

$$k'_{rx}=k'_{ix},\quad k'_{ry}=-k'_{iy},\quad k'_{rz}=0,\quad \omega'_r=\omega'_i;$$

(4)由四维波矢逆变换得 K 系反射光线的波矢 k_r 及频率 ω_r 为

$$k_{rx}=\gamma\left(k'_{rx}+\frac{V}{c^2}\omega'_r\right)=\gamma\left[\gamma\left(k\cos\theta_0-\frac{V}{c}\omega_0\right)+\frac{V}{c^2}\gamma(\omega_0-Vk\cos\theta_0)\right]=k\cos\theta_0,$$

$$k_{ry}=k'_{ry}=k\sin\theta_0,\quad k_{rz}=0,$$

$$\omega_r=\gamma(\omega'_r+Vk'_{rx})=\gamma\left[\gamma(\omega_0-Vk\cos\theta_0)+V\gamma\left(k\cos\theta_0-\frac{V}{c^2}\omega_0\right)\right]=\omega_0.$$

8.(1)由双曲正切的定义 $\beta=\mathrm{th}y=\dfrac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}$ 可证.

(2)由 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{th}y)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left[\dfrac{\mathrm{sh}y}{\mathrm{ch}y}\right]^2}}=\dfrac{\mathrm{ch}y}{\sqrt{(\mathrm{ch}y)^2-(\mathrm{sh}y)^2}}=\mathrm{ch}y$

[其中 $(\mathrm{ch}y)^2-(\mathrm{sh}y)^2=1$]，及 $\beta\gamma=\mathrm{th}y\cdot\mathrm{ch}y=\mathrm{sh}y$，得

$$\alpha=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}y & 0 & 0 & \mathrm{i}\mathrm{sh}y\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\mathrm{sh}y & 0 & 0 & \mathrm{ch}y\end{pmatrix}$$

(3)由速度变换 $v_x=\dfrac{v_x'+V}{1+\dfrac{V}{c^2}v_x'}$ 换成目前的记号是 $v'=\dfrac{v''+V}{1+\dfrac{V}{c^2}v''}$，即得

$$\beta'=\frac{v'}{c}=\frac{\dfrac{v''}{c}+\dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}\dfrac{v''}{c}}=\frac{\beta''+\beta}{1+\beta''\beta}.$$

将“快度”的定义 $\beta=\mathrm{th}y$ 代入，并利用双曲正切函数与正切函数的关系 $\mathrm{th}y=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\tan(\mathrm{i}y)$，以及三角函数公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，即有

$$\mathrm{th}y'=\frac{\mathrm{th}y''+\mathrm{th}y}{1+\mathrm{th}y''\cdot\mathrm{th}y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\tan(\mathrm{i}y'')+\tan(\mathrm{i}y)}{1-\tan(\mathrm{i}y'')\cdot\tan(\mathrm{i}y)}=\frac{1}{\mathrm{i}}\tan(\mathrm{i}y''+\mathrm{i}y)=\mathrm{th}(y''+y),$$

故 $$y' = y'' + y .$$

第 九 章

习 题 9.1

1. 由于原子实相对K 系静止,故原子实的固有参考系就是K 系,即$\rho_+ = \rho_{+0}$;设电子的固有参考系为K_e 系,显然$\rho_- \neq \rho_{-0}$.

(1)求$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-$. K′系测得原子实的电荷密度为

$$\rho'_+ = \gamma\rho_{+0} = \gamma\rho_+ , \qquad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \tag{①}$$

电子相对K 系以$\boldsymbol{v}_- = -ve_x$ 运动,故K 系测得电子的电荷密度为

$$\rho_- = \gamma_{-v}\rho_{-0} , \qquad \gamma_{-v} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \tag{②}$$

电子相对K′系以$\boldsymbol{v}'_-$ 运动,故K′系测得电子的电荷密度为

$$\rho'_- = \gamma_{v'_-}\rho_{-0} , \qquad \gamma_{v'_-} = \left(1 - \frac{v'^2_-}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \tag{③}$$

将②式与③式联立,便可用ρ_- 表示ρ'_- 利用§ 8.5 的(40)式(采用本题特定的电子速度记号)

$$\gamma_{v'_-} = \gamma\gamma_{v_-}\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right) , \tag{④}$$

及电子相对K 系速度的x 分量$v_x = -v$,即有

$$\rho'_- = \frac{\gamma_{v'_-}}{\gamma_{v_-}}\rho_- = \left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)\gamma\rho_- = -\left(1 + \frac{V}{c^2}v\right)\gamma\rho_+ . \tag{⑤}$$

再将①式与⑤式相加,即得

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \gamma\rho_+ - \left(1 + \frac{V}{c^2}v\right)\gamma\rho_+ = -\gamma\frac{Vv}{c^2}\rho_+ . \tag{⑥}$$

(2)求$J' = J'_+ + J'_- = \rho'_+ v'_+ + \rho'_- v'_-$. 原子实与电子相对K 系的速度分别为

$$v'_+ = -V , \tag{⑦}$$

$$v'_- = \frac{v_- - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_-} = \frac{-(v + V)}{1 + \frac{Vv}{c^2}} . \tag{⑧}$$

利用①、⑤、⑦、⑧式可得J'.

习 题 9.2

2. $$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F_{11}^2 + F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + \cdots + F_{44}^2$$
$$= 2\left[B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \left(\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\right)^2\right]$$
$$= 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right) .$$

由$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$没有自由指标,是不变量,故$E^2 - c^2B^2$ 是不变量.

3. 由$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$的完全反对称性,可知它不为零的分量共有$4\times 3\times 2\times 1 = 24$ 个,即12 个为1,12 个

为 - 1. 因此,$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$共有 24 项,即

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} &= \varepsilon_{1234}F_{12}F_{34} + \varepsilon_{1243}F_{12}F_{43} + \varepsilon_{1324}F_{13}F_{24} + \varepsilon_{1342}F_{13}F_{42}\\ &\quad + \varepsilon_{1423}F_{14}F_{23} + \varepsilon_{1432}F_{14}F_{32} + \cdots\\ &= B_3\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\right) - B_3\left(\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\right) - (-B_2)\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\right) + (-B_2)\left(\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\right)\\ &\quad + \left(-\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\right)B_1 - \left(-\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\right)(-B_1) + \cdots\\ &= -\frac{8\mathrm{i}}{c}E\cdot B.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$ 没有自由指标,是不变量,故 $E\cdot B$ 是不变量.

4. (1)q_2 对 q_1 的作用力. 在 K 系中,q_2 激发静电场. 当施力电荷静止,受力电荷无论静止或运动,均由库仑定律给出.

(2)q_1 对 q_2 的作用力. 在 K′系中,q_1 激发静电场 $E' = E'_y e_y = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}e_y$,在 K 系测得的电场为

$$E = E_y e_y = \gamma(E'_y + VB'_z)e_y = \gamma E'_y e_y = \frac{\gamma q_1}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}e_y,$$

q_1 对 q_2 的作用力为 $F_{21} = q_2 E$.

5. 取 z 轴沿 v 的柱坐标系.

在 K′系中,离子束的电荷线密度为 η,电磁场为

$$E' = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}e_\rho, \qquad B' = 0.$$

在 K 系中,电磁场为

$$E = E_\perp = \gamma(E'_\perp - V\times B') = \frac{\gamma\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}e_\rho,$$

$$B = B_\perp = \gamma\left(B'_\perp + \frac{1}{c^2}V\times E'\right) = \frac{\gamma\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\frac{v}{c^2}e_\phi.$$

在 K 系中,离轴心 $\rho < \rho_0$ 处,电量为 q 的离子束元所受之力为

$$F = q(E + \boldsymbol{v}\times B) = \frac{\gamma q\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\left(e_\rho + \frac{v^2}{c^2}e_z\times e_\phi\right) = \frac{\gamma q\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)e_\rho = \frac{q\eta}{2\pi\varepsilon_0\rho}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,e_\rho.$$

上面先后利用了 $e_z\times e_\rho = e_\phi$ 及 $e_z\times e_\phi = -e_\rho$.

6. (1)K 系测得的电磁场. 由高斯定理得 $E = \dfrac{U}{\rho\ln(b/a)}e_\rho$;　由安培回路定律得 $B = \dfrac{\mu_0 I_f}{2\pi\rho}e_\phi$. 因为 $e_\rho \perp e_\phi$,故 $E\perp B = 0$,即 $E\cdot B = 0$.

(2)由表 9.2 可见,若 $E\cdot B = 0$,$E < cB$,则可找到 K′系,使 $E' = 0$. 而要求 $E < cB$,相当要求

$$\frac{E}{B} = \frac{2\pi U}{\mu_0 I_f\ln(b/a)} < c,$$

只要 a,b,I_f,U 能满足上述要求,K′便可找到.

(3)K′系相对 K 系的 V. 由电场的变换

$$E'_x = E_x, \qquad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \qquad E'_z = \gamma(E_z + VB_y)$$

可知,若在 $V = V e_x$ 方向的 $E_x \neq 0$,则 $E'_x = E_x \neq 0$. 现 E 沿水平方向,故 V 应沿电容器轴线方向.

重新选择坐标系,取电容器轴线为 x 轴. 由 $E'_y = \gamma(E_y - VB_z) = 0$ 可得

$$V = \frac{E_y}{B_z} = \frac{E}{B} = \frac{2\pi U}{\mu_0 I_f\ln(b/a)}.$$

前面曾要求$\frac{E}{B}<c$,实际上是要求$V<c$,否则这样的K′系不存在.

(4)求K′系测得的B'.由$E^2-c^2B^2=E'^2-c^2B'^2$可得

$$B'=\sqrt{B^2-\frac{E^2}{c^2}}=B\sqrt{1-\frac{E^2}{c^2B^2}}=B\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

7. 考虑到$E'_{/\!/}=E_{/\!/}$,$B'_{/\!/}=B_{/\!/}$,故应选取V沿

$$E\times B=EBe_x\times e_y=EBe_z \tag{①}$$

的方向. 此时的电磁场变换公式为(将$E_x=E$,$E_y=E_z=0$;$B_y=B$,$B_x=B_z=0$代入)

$$E'_z=E_z=0,E'=E'_x=\gamma(E_x-VB_y)=\gamma(E-VB),E'_y=\gamma(E_y+VB_x)=0; \tag{②}$$

$$B'_z=B_z=0,B'_x=\gamma\left(B_x+\frac{V}{c^2}E_y\right)=0,B'=B'_y=\gamma\left(B_y-\frac{V}{c^2}E_x\right)=\gamma\left(B-\frac{V}{c^2}E\right). \tag{③}$$

要$B'=0$,由③式要求$B-\frac{V}{c^2}E=0$,即

$$V=c^2\frac{B}{E}. \tag{④}$$

综合①式和④式可知

$$V=\frac{c^2}{E^2}E\times B. \tag{⑤}$$

将④式代入②式的第二式,得

$$E'_x=\gamma(E-VB)=\gamma E\left(1-c^2\frac{B^2}{E^2}\right)=E\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{⑥}$$

式中已利用

$$\gamma=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-c^2\frac{B^2}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

⑥式的矢量形式为

$$E'=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}E. \tag{⑦}$$

8. (1)V选择什么方向?因为$E'_x=E_x$,$B'_x=B_x$与K′系相对K系的速度无关,不能用改变V来调整它. 而E'_y,E'_z,B'_y,B'_z却跟V有关,可以通过改变V来调整它们,从而调整E'和B'的方向并使之平行. 因此,应令$E'_x=E_x=0$,$B'_x=B_x=0$,即选择e_x沿$E\times B=0$的方向.

V的大小为若干?既然要求$E'/\!/B'$,只要令$E'\times B'=0$即可,据此可求出V.

(2)若选择E'及B'的方向为新坐标系的e'_x的方向,此时$E'_x\neq0$,$B'_x\neq0$,但$E'_y=E'_z=0$,$B'_y=E'_z=0$. 若K″系以任意速度沿新坐标系的e'_x方向相对K′系运动,由电磁场的逆变换公式可知必有$E''_y=E''_z=0$,$B''_y=B''_z=0$,这时K″系测得电场E''与磁场B''平行,且仍沿新坐标系的e'_x方向.

习 题 9.3

1. 以T_{11}为例,在$T_{\mu\lambda}=-\frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$中令$\mu=\lambda=1$,便有

$$T_{11}=-\frac{1}{\mu_0}\left(F_{1\nu}F_{\nu1}+\frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left(B_3^2+B_2^2-\frac{E_1^2}{c^2}\right)-\frac{1}{2\mu_0}\left(B_1^2+B_2^2+B_3^2-\frac{E_1^2+E_2^2+E_3^2}{c^2}\right)$$

$$= -\varepsilon_0 E_1^2 - \frac{1}{\mu_0}B_1^2 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

$$= \left[-\varepsilon_0 E\,E - \frac{1}{\mu_0}B\,B + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\right]_{11}.$$

2. 先利用 $F_{\nu\lambda} = -F_{\lambda\nu}$ 将 $T_{\mu\lambda}$ 改写为 $T_{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$.

(1) $\mu_0 T_{\mu\mu} = \mu_0(T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44})$

$$= \left(F_{1\nu}F_{1\nu} - \frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right) + \left(F_{2\nu}F_{2\nu} - \frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$$

$$+ \left(F_{3\nu}F_{3\nu} - \frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right) + \left(F_{4\nu}F_{4\nu} - \frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$$

$$= F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} = 0.$$

(2) $T_{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\lambda\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta_{\lambda\mu}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right) = T_{\lambda\mu}$.

第 十 章

习 题 10.1

2. 若粒子的速度 $v = c$，若其静质量 $m_0 \neq 0$，则其能量

$$W = \lim_{v\to c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \infty,$$

这是不可能的.

反之，若粒子的 $m_0 = 0$，在真空中其速度必为 c，否则

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

这也是不可能的，因为不存在没有能量的物质.

3. (1)利用 $p = \frac{W}{c^2}\boldsymbol{v}$ 计算；　(2)用 $W = \bar{h}\omega$ 与 $W = mc^2$ 联立.

4. 由 $k'_\mu = \alpha_{\mu\nu}k_\nu$ 及 $k_\mu = \gamma_v\left(F, \frac{\mathrm{i}}{c}F\cdot\boldsymbol{v}\right)$ 可得

$$\begin{pmatrix} \gamma_{v'}F'_1 \\ \gamma_{v'}F'_2 \\ \gamma_{v'}F'_3 \\ \gamma_{v'}\frac{\mathrm{i}}{c}F'\cdot\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_v F_1 \\ \gamma_v F_2 \\ \gamma_v F_3 \\ \gamma_v\frac{\mathrm{i}}{c}F\cdot\boldsymbol{v} \end{pmatrix},$$

利用 $\gamma_{v'} = \gamma\gamma_v\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)$ [见§ 8.5 的(40)式]，可得(33)式.

5. 以 a_x 为例来证明：

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_x'}\frac{\mathrm{d}v_x'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=a_x'\frac{\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_x'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}}=a_x'\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_x'}\left(\frac{v_x'+V}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}=a_x'\frac{\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1+\frac{V}{c^2}v_x'\right)^2}}{\frac{1+\frac{V}{c^2}v_x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$

$$=a_x'\frac{\left(1-\frac{V}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{V}{c^2}v_x'\right)^3}=\frac{a_x'}{\gamma^3\left(1+\frac{V}{c^2}v_x'\right)^3}.$$

计算 a_y 时应由下式出发

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}\right)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t},$$

并且注意等式右边第一个导数中的 v_y' 及 v_x' 均为 t'的函数,均要对 t'求导. 计算 a_z 时亦类似.

6. 只要讨论某一时刻与粒子相对静止的惯性系K′测得的 a'与K 系测得的 a 之间的关系即可. 由于K′系相对K 系的速度 V 就是粒子的速度 $\boldsymbol{v}$,将 $v_x'=v_y'=v_z'=0$,$a_x'=a_0$,$a_y'=a_z'=0$ 代入(46)、(47)和(48)式,便有

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{a_x'}{\gamma^3\left(1+\frac{V}{c^2}v_x'\right)^3}=\frac{a_0}{\gamma^3},\quad a_y=0,\quad a_z=0. \tag{①}$$

又因 $v_y=v_z=0$,将 $v_x=v$ 及 $V=v$ 代入上式,得

$$a_0=\gamma^3a_x=\gamma^3\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \tag{②}$$

积分,得

$$v=a_0t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{③}$$

两边平方,解之得

$$v(t)=\frac{a_0t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}}, \tag{④}$$

再积分一次,得到

$$x(t)=\int v\mathrm{d}t=\int\frac{a_0t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}}\mathrm{d}t=\frac{c^2}{a_0}\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}+A,\quad A\text{ 为积分常数}. \tag{⑤}$$

由 $t=0$ 时 $x=0$ 得到积分常数 $A=-c^2/a_0$,故

$$x(t)=\frac{c^2}{a_0}\left[\sqrt{1+\left(\frac{a_0t}{c}\right)^2}-1\right]. \tag{⑥}$$

当 $t\to\infty$ 时,用 t 除④式右边的分子分母,得

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a_0}{\sqrt{\left[\frac{1}{t}\right]^2 + \left[\frac{a_0}{c}\right]^2}} = c. \qquad ⑦$$

7. 由上题②式得

$$\int_0^{\sqrt{0.9999}c} \mathrm{d}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \int_0^t a_0 \mathrm{d}t,$$

积分后便有

$$t = \left.\frac{v}{a_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_0^{\sqrt{0.9999}c} = \frac{100\sqrt{0.9999}c}{a_0} = 47.5(\text{年}).$$

将 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 及上题的③、④式代入并令 $\xi = \frac{a_0 t}{c}$ 进行积分,得

$$t' = \int_0^{t'} \mathrm{d}t' = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\left[\frac{a_0 t}{c}\right]^2}} = \frac{c}{a_0}\int_0^{\frac{a_0}{c}t} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$= \frac{c}{a_0}\ln\left[\frac{a_0 t}{c}\sqrt{1+\left[\frac{a_0 t}{c}\right]^2}\right] = \frac{c}{a_0}\ln[99.99 + \sqrt{1+(99.99)^2}]$$

$$\approx \frac{c}{a_0}\ln[199.99] \approx 794\ 774\ 010(\text{s}) = 2.52(\text{年}).$$

习　题　10.2

3. 取与辐射前(或吸收前)电子相对静止的惯性系为 K 系. 分别假设电子能辐射和吸收光子,在 K 系写出动量守恒与能量守恒定律,可证明光子的频率 $\omega = 0$.

4. 动量守恒定律及能量守恒定律分别为

$$0 = p_A + p_B, \qquad |p_A| = |p_B| = p; \qquad ①$$

$$m_0 c^2 = W_A + W_B. \qquad ②$$

质能关系为

$$W_A^2 = p^2c^2 + m_{A0}^2 c^4, \qquad W_A = \frac{m_{A0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}}; \qquad ③$$

$$W_B^2 = p^2c^2 + m_{B0}^2 c^4, \qquad W_B = \frac{m_{B0}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}; \qquad ④$$

由③、④消去 p,得

$$W_A^2 - W_B^2 = (m_{A0}^2 - m_{B0}^2)c^4, \qquad ⑤$$

由②、⑤得

$$W_A - W_B = \frac{W_A^2 - W_B^2}{W_A + W_B} = \frac{m_{A0}^2 - m_{B0}^2}{m_0}c^2. \qquad ⑥$$

由②+ ⑥得 W_A,由②- ⑥得 W_B,分别将 W_A 和 W_B 代入③、④得 v_A 和 v_B.

5. 已知条件为

	电 子		光 子	
	动量	能量	动量	能量
碰撞前	$p_A=0$	$W_A=m_0c^2$	$p_B=\bar{h}k$	$W_B=\bar{h}\omega$
碰撞后	p'_A 未知	$W_A=\sqrt{p'^2_Ac^2+m_0^2c^4}$	$p'_B=\bar{h}k'$	$W'_B=\bar{h}\omega'$

设 k 与 k' 的夹角为 θ. 写出动量守恒与能量守恒定律,分别将两式平方后联立即得. 但应注意动量守恒定律移项后为

$$p'_1=\bar{h}k-\bar{h}k',$$

平方时,注意矢量的标积为:$k\cdot k'=kk'\cos\theta$.

7. 衰变后两粒子的能量分别为

$$W_A=\sqrt{p_A^2c^2+m_{A0}^2c^4}, \tag{①}$$

$$W_B=\sqrt{p_B^2c^2+m_{B0}^2c^4}. \tag{②}$$

动量守恒与能量守恒定律分别为

$$\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=p_A+p_B, \tag{③}$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=W_A+W_B. \tag{④}$$

由④式的平方除③式的平方得

$$v^2=\frac{(p_A^2+p_B^2+2p_Ap_B\cos\theta)c^4}{(W_A+W_B)^2}. \tag{⑤}$$

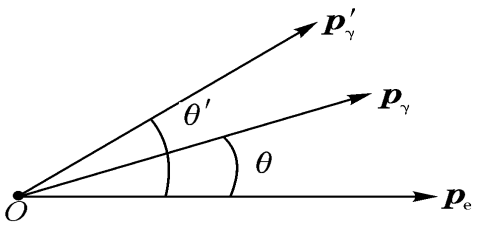
将①式与②式平方,以及 v^2 代入④式的平方,得

$$m_0^2=\frac{(W_A+W_B)^2}{c^4}-\frac{p_A^2+p_B^2+2p_Ap_B\cos\theta}{c^2}=m_{A0}^2+m_{B0}^2+\frac{2W_AW_B}{c^4}-\frac{2p_Ap_B\cos\theta}{c^2}. \tag{⑥}$$

将①、②式代入⑤、⑥式,即得 v 与 m_0.

8. 已知条件

	电子	光子
散射前	p_e,W_e	$p_\gamma,\bar{h}\omega$
散射后	p'_e,W'_e	$p'_\gamma,\bar{h}\omega'$



习题10.2 图1

(1) 方法一(三维形式). 动量守恒定律与能量守恒定律分别为:

$$p_e+p_\gamma=p'_e+p'_\gamma,\quad \text{即}\ p'_e=p_e+p_\gamma-p'_\gamma; \tag{①}$$

$$W_e+\bar{h}\omega=W'_e+\bar{h}\omega',\quad \text{即}\ W'_e=W_e+\bar{h}(\omega-\omega'). \tag{②}$$

将①式平方及 $p_\gamma=\bar{h}\omega/c$,$p'_\gamma=\bar{h}\omega'/c$ 代入②式的平方,即可求出 ω'.

(2)方法二(四维形式). 由 $p_\mu=\left(p,\dfrac{\mathrm{i}}{c}W\right)$ 可知,动量守恒与能量守恒定律的四维形式为(注意,γ 与 e 是光子与电子的记号,并不是四维张量的指标,下同)

$$p_{\gamma\mu}+p_{e\mu}=p'_{\gamma\mu}+p'_{e\mu}, \tag{③}$$

移项后求四维矢量的内积

$$p_{e\mu}'^2 = (p_{\gamma\mu} + p_{e\mu} - p_{\gamma\mu}')^2 = p_{\gamma\mu}^2 + p_{e\mu}^2 + p_{\gamma\mu}'^2 + 2p_{\gamma\mu}p_{e\mu} - 2p_{\gamma\mu}p_{\gamma\mu}' - 2p_{e\mu}p_{\gamma\mu}'. \quad ④$$

利用质能关系式得电子散射前后四维动量标积

$$p_{e\mu}^2 = p_e^2 - \frac{W_e^2}{c^2} = -m_0^2c^2, \qquad p_{e\mu}'^2 = p_e'^2 - \frac{W_e'^2}{c^2} = -m_0^2c^2. \quad ⑤$$

由于光子的静质量为零,故

$$p_{\gamma\mu}^2 = p_{\gamma\mu}'^2 = 0. \quad ⑥$$

将⑤、⑥式代入④式,得

$$p_{\gamma\mu}p_{e\mu} = p_{\gamma\mu}p_{\gamma\mu}' + p_{e\mu}p_{\gamma\mu}', \quad ⑦$$

利用 $p_{e\mu}=\left(p_e, \frac{\mathrm{i}}{c}W_e\right)$, $p_{\gamma\mu}=\left(p_\gamma, \frac{\mathrm{i}}{c}\bar{h}\omega\right)$, $p_{\gamma\mu}'=\left(p_\gamma', \frac{\mathrm{i}}{c}\bar{h}\omega'\right)$,代入⑦式,即得 ω'.

9. 反应阈能就是反应能发生时入射粒子的最小能量. 在动心系观察,反应阈能相应于反应生成的质子与π介子的动量为零,即在实验室参考系中,反应生成的质子与π介子均以动心系相对实验室系的速度运动.

设动心系 K′以 $V = V e_x$ 相对实验室系运动,则在实验室系中,动量守恒与能量守恒定律为

$$\frac{\bar{h}\omega}{c} = \gamma(m_{p0} + m_{\pi 0})V, \quad ①$$

$$\bar{h}\omega + m_{p0}c^2 = \gamma(m_{p0} + m_{\pi 0})c^2, \quad ②$$

联立两式消去 $\bar{h}\omega$,令 $\alpha = m_{\pi 0}/m_{p0}$,可得

$$\gamma = \frac{1}{(1+\alpha)(1-\beta)}. \quad ③$$

将上式两边平方,得 $1-\beta^2=(1+\alpha)^2(1-\beta)^2$,解之得

$$\beta = \frac{\alpha(2+\alpha)}{\alpha^2+2\alpha+2}, \qquad \gamma = \frac{\alpha^2+2\alpha+2}{2(1+\alpha)}. \quad ④$$

将④式的 γ 代入②式,即得 $W_{th} = \bar{h}\omega = 144.7\mathrm{MeV}$.

本题也可用四维形式求解.

10. (1)单撞机的情形. 能量-动量守恒定律的四维形式是(式中 A, B, C, D, X 为粒子记号,不是四维协变量的指标,下同)

$$p_{A\mu} + p_{B\mu} = p_{C\mu} + p_{D\mu} + p_{X\mu}. \quad ①$$

两边平方,得

$$p_{A\mu}^2 + p_{B\mu}^2 + 2p_{A\mu}p_{B\mu} = p_{C\mu}^2 + p_{D\mu}^2 + p_{X\mu}^2 + 2p_{C\mu}p_{D\mu} + 2p_{C\mu}p_{X\mu} + 2p_{D\mu}p_{X\mu}. \quad ②$$

由于四维矢量的内积为不变量,上述九项均为不变量,无论在哪个参考系计算都是相等的. 因此,可选在容易计算的参考系计算.

在各粒子的固有系计算,得

$$p_{A\mu}^2 = p_{B\mu}^2 = p_{C\mu}^2 = p_{D\mu}^2 = -m_0c^2, \qquad p_{X\mu}^2 = -M_0c^2. \quad ③$$

题目要求实验室系中入射粒子 A 的能量 W_A,故 $2p_{A\mu}p_{B\mu}$ 应在实验室系计算. 注意在实验室系 $p_B = 0$, $W_B = W_{B0} = m_0c^2$,故

$$2p_{A\mu}p_{B\mu} = 2\left(p_A \cdot p_B + \frac{\mathrm{i}}{c}W_A\frac{\mathrm{i}}{c}W_{B0}\right) = -2m_0W_A. \quad ④$$

因为阈能对应着入射粒子的最小能量. 在动心系中,这与反应生成物没有动能相应,即

$$p_C' = p_D' = p_X' = 0, \quad ⑤$$

并由此得 $$p_{C\mu}p_{D\mu}=\frac{\mathrm{i}}{c}W'_{C0}\frac{\mathrm{i}}{c}W'_{D0}=-m_0^2c^2, \tag{6}$$

$$p_{C\mu}p_{X\mu}=p_{D\mu}p_{X\mu}=\frac{\mathrm{i}}{c}W'_{D0}\frac{\mathrm{i}}{c}W'_{X0}=-m_0M_0c^2. \tag{7}$$

将③、④、⑥和⑦式代入②式,即得

$$W_{\mathrm{th}}=W_A=\left(m_0+2M_0+\frac{M_0^2}{2m_0}\right)c^2, \tag{8}$$

$$T_{\mathrm{th}}=W_A-m_0c^2=\left(2M_0+\frac{M_0^2}{2m_0}\right)c^2. \tag{9}$$

(2)对撞机的情况. 此时动心系就是实验室参考系(题设 $p_A+p_B=0$). 因为阈能对应着反应生成物没有动能的情形,故取 $p_C=p_D=p_X=0$.

显然,在对撞机情形下不必利用能量-动量守恒定律的四维形式,直接应用能量守恒定律即可. 由此得

$$W_A+W_B=W_C+W_D+W_X, \tag{10}$$

即 $$2W_A=2m_0c^2+M_0c^2. \tag{11}$$

阈动能即为 $$T_{\mathrm{th}}=W_A-m_0c^2=\frac{1}{2}M_0c^2. \tag{12}$$

综合(1)、(2)可见使用对撞机时的阈动能远小于单撞机的阈动能.

11. (1)由 $p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{V}{c^2}W\right)$, $p'_y=p_y$, $p'_z=p_z$ 可得

$$\tan\theta'=\frac{\sqrt{p_y'^2+p_z'^2}}{p'_x}=\frac{\sqrt{p_y^2+p_z^2}}{\gamma\left(p_x-\frac{V}{c^2}W\right)}=\frac{p\sin\theta}{\gamma\left(p\cos\theta-\frac{V}{c^2}W\right)}=\frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta-\frac{\beta W}{cp}\right)}.$$

(2)由 $k'_x=\gamma\left(k_x-\frac{V}{c^2}\omega\right)$, $k'_y=k_y$, $k'_z=k_z$, $\omega'=\gamma(\omega-Vk_x)$,得

$$\cos\theta'=\frac{k'_x}{k'}=c\frac{k'_x}{\omega'}=c\frac{k_x-\frac{V}{c^2}\omega}{\omega-Vk_x}=c\frac{\frac{\omega}{c}\cos\theta-\frac{V}{c^2}\omega}{\omega-V\frac{\omega}{c}\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta},$$

$$\sin\theta'=\sqrt{1-\cos^2\theta'}=\frac{\sqrt{(1-\beta\cos\theta)^2-(\cos\theta-\beta)^2}}{1-\beta\cos\theta}=\frac{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\cos^2\theta)}}{1-\beta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}.$$

(3)由 $\sin\phi'=\frac{y'}{\sqrt{y'^2+z'^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=\sin\phi$,得 $\mathrm{d}\phi'=\mathrm{d}\phi$,以及

$$\mathrm{d}\cos\theta'=\mathrm{d}\left(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\right)=\frac{(1-\beta\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta+(\cos\theta-\beta)\beta\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}=\frac{(1-\beta^2)\mathrm{d}\cos\theta}{(1-\beta\cos)^2}=\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2},$$

由此得

$$\mathrm{d}\Omega'=\mathrm{d}\cos\theta'\mathrm{d}\phi'=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}.$$

习 题 10.3

1. 将 $L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi$ 代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}. \tag{1}$$

现在采用矢量形式进行运算[①],它比标量形式更为简单. 以 e_i 乘①式两边,再对 i 叠加,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\frac{\partial L}{\partial v_i}e_i=\sum_i\frac{\partial L}{\partial x_i}e_i,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\nabla L,$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\nabla L \tag{2}$$

现分别计算②式两边:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p+qA)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+q\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+q\frac{\partial A}{\partial t}+q\sum_i(\nabla A)_i v_i$$

$$=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+q\frac{\partial A}{\partial t}+q\boldsymbol{v}\cdot\nabla A. \tag{3}$$

$$\nabla L=\nabla\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi\right)=0+q\nabla(A\cdot\boldsymbol{v})-q\nabla\varphi \tag{4}$$

上面已利用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$, $\nabla\boldsymbol{v}=0$,再利用矢量分析公式

$$\nabla(A\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\times(\nabla\times A)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)A, \tag{5}$$

得

$$\nabla L=q\boldsymbol{v}\times(\nabla\times A)+q\boldsymbol{v}\cdot\nabla A-q\nabla\varphi. \tag{6}$$

将③式和⑥式代入②式,约去 $q\boldsymbol{v}\cdot\nabla A$,便有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+q\frac{\partial A}{\partial t}=q\boldsymbol{v}\times(\nabla\times A)-q\nabla\varphi, \tag{7}$$

移项后将 $E=-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\varphi$ 及 $B=\nabla\times A$ 代入,即有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=qE+q\boldsymbol{v}\times B. \tag{8}$$

2. 现在将 $P=p+qA$ 及低速情况下的 $L=\frac{1}{2}m_0v^2+qA\cdot\boldsymbol{v}-q\varphi$ 代入哈密顿量的定义式,证明与(26)式一致.

$$H=P\cdot\boldsymbol{v}-L=(p+qA)\cdot\boldsymbol{v}-\frac{1}{2}m_0v^2-qA\cdot\boldsymbol{v}+q\varphi$$

$$=m_0v^2+qA\cdot\boldsymbol{v}-\frac{1}{2}m_0v^2-qA\cdot\boldsymbol{v}+q\varphi=\frac{1}{2m_0}p^2+q\varphi=\frac{1}{2m_0}(P-qA)^2+q\varphi.$$

3. 取 $t=0$ 时粒子所在位置为坐标原点,取 x 轴沿电场 E 的方向. 则初值问题为

---

① 矢量形式是采用如下记号:

$$\frac{\partial}{\partial r}=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}e_i=\nabla,\quad\text{因而}\quad\frac{\partial L}{\partial r}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial x_i}e_i=\nabla L;$$

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_i\frac{\partial}{\partial v_i}e_i,\quad\text{因而}\quad\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial v_i}e_i=\sum_iP_ie_i=P.$$

式中 $P_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}$ 是广义动量的定义.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = qE, \quad \text{即} \quad \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = qE; & ① \\ x(0) = 0, \quad v(0) = 0. & ② \end{cases}$$

(1)按相对论力学计算.将 $p = \gamma m_0 v$ 代入①式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = qE, \tag{③}$$

积分后得

$$m_0 v = qEt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

两边平方后,解出

$$v(t) = \frac{qEct}{\sqrt{m_0^2c^2 + q^2E^2t^2}}, \tag{⑤}$$

积分(积分限用 t 表示,积分变量用 T 表示)得

$$x(t) = \int_0^t v(T)\mathrm{d}T = \int_0^t \frac{qEcT}{\sqrt{m_0^2c^2 + q^2E^2T^2}}\mathrm{d}T, \tag{⑥}$$

作变量代换,令 $\xi = m_0^2c^2 + q^2E^2T^2$,得

$$x(t) = \int_{m_0^2c^2}^{m_0^2c^2+q^2E^2t^2} \frac{c}{2qE}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{m_0c^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m_0^2c^2}} - 1\right). \tag{⑦}$$

当 $t\to\infty$ 时,v 以 c 为极限,$x\to\infty$.

(2)按牛顿力学计算. 牛顿力学认为粒子的质量与速度无关,由①式易得

$$m_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qE, \quad \text{即} \quad v(t) = \frac{qE}{m_0}t, \tag{⑧}$$

$$x(t) = \frac{qE}{2m_0}t^2. \tag{⑨}$$

当 $t\to\infty$ 时,$v\to\infty$,$x\to\infty$.牛顿力学的结论是粒子的速度超过真空中的光速,显然与相对论矛盾,也与迄今为止的实验不符.

4. 第3题已求得带电粒子在沿 e_x 方向的均匀电场中的运动规律. 由于题设 $E\cdot B = 0$,并且 $E > cB$,由表9.2可知,必可找到一个参考系K′,在其中 $B' = 0$.

习题9.2的第7题已告诉我们,当K′系以

$$V = \frac{c^2}{E^2}E\times B = c^2\frac{B}{E}e_z \tag{①}$$

相对K系运动时,在K′系的 $B' = 0$.

由第3题可知,带电粒子在K′的运动规律为

$$x' = \frac{m_0c^2}{qE}\left[\sqrt{1+\left(\frac{qEt'}{m_0c}\right)} - 1\right], \quad y' = 0, \quad z' = 0. \tag{②}$$

本题只要按此运动规律变换到K系即可. 将②式代入 V 沿 z 轴方向的洛伦兹变换可得

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}z'\right) = \gamma t', \tag{③}$$

$$z = \gamma(z' + Vt') = \gamma Vt' = Vt, \tag{④}$$

$$x = x' = \frac{m_0c^2}{qE}\left[\sqrt{1+\left(\frac{qEt}{\gamma m_0c}\right)^2} - 1\right], \tag{⑤}$$

$$y = y' = 0, \tag{6}$$

式中$V = c^2 \frac{B}{E}$，　$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

第 十 一 章

习　题　11.1

1. 为书写方便,记

$$t' = t - \frac{r}{c} = t - \frac{|x - x'|}{c}. \tag{1}$$

在t'时刻x'处的电荷守恒定律为

$$\nabla' \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数} + \frac{\partial \rho_f(x', t')}{\partial t'} = 0. \tag{2}$$

本题要证明A与φ满足$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$,将$A$代入上式就要计算$\nabla \cdot \frac{J_f(x', t')}{r}$,为此先求$\nabla' \cdot J_f(x', t')$以及$\nabla \cdot \frac{J_f(x', t')}{r}$与$\nabla' \cdot \frac{J_f(x', t')}{r}$的关系.

利用多元复合函数的微分公式,并注意$t' = t - \frac{|x - x'|}{c}$是$x_i'$的函数,便有

$$\nabla' \cdot J_f(x', t') = \sum_i^3 \frac{\partial J_{fi}(x', t')}{\partial x'_i} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial J_{fi}(x', t')}{\partial x'_i}\Big|_{t' = 常数} + \frac{\partial J_{fi}(x', t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x'_i}\right]$$

$$= \nabla' \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数} + \frac{\partial J_f(x', t')}{\partial t'} \cdot \nabla' t', \tag{3}$$

式中J_{fi}是矢量J_f的i分量.

利用③式的结果,便有

$$\nabla \cdot \frac{J_f(x', t')}{r} = \frac{1}{r}\nabla \cdot J_f(x', t') + J_f(x', t') \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r}\nabla \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数} + \frac{1}{r}\frac{\partial J_f(x', t')}{\partial t'} \cdot \nabla t' + J_f(x', t') \cdot \nabla \frac{1}{r}. \tag{4}$$

注意:当$t' =$ 常数时,$J_f(x', t')$仅与x'有关而与x无关,而∇是对x的微分算符,故上式右边第一项为零. 而

$$\nabla' \cdot \frac{J_f(x', t')}{r} = \frac{1}{r}\nabla' \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数} + \frac{1}{r}\frac{\partial J_f(x', t')}{\partial t'} \cdot \nabla' t' + J_f(x', t') \cdot \nabla' \frac{1}{r}. \tag{5}$$

利用$\nabla' f(r) = -\nabla f(r)$将⑤式的$\nabla' t'$及$\nabla' \frac{1}{r}$分别换为$-\nabla t'$及$-\nabla \frac{1}{r}$,移项后得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial J_f(x', t')}{\partial t'} \cdot \nabla t' + J_f(x', t') \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \cdot \frac{J_f(x', t')}{r} + \frac{1}{r}\nabla' \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数} \tag{6}$$

既然④式右边的第一项为零,第二、三项的⑥式与左边相等,将④式与⑥式联立,即有

$$\nabla \cdot \frac{J_f(x', t')}{r} = -\nabla' \cdot \frac{J_f(x', t')}{r} + \frac{1}{r}\nabla' \cdot J_f(x', t')\Big|_{t' = 常数}. \tag{7}$$

利用⑥式的结果,便有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}&=\nabla\cdot\int_V\frac{\mu_0 J_f(x',t')}{4\pi r}dV'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{\rho_f(x',t')}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V\nabla\cdot\frac{J_f(x',t')}{r}dV'+\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho_f(x',t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}dV'\right]\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int_V\frac{1}{r}\left[\nabla'\cdot J_f(x',t')\Big|_{t'=\text{常数}}+\frac{\partial\rho_f(x',t')}{\partial t'}\right]dV'\right.\\&\quad\left.-\int_V\nabla'\cdot\frac{J_f(x',t')}{r}dV'\right\}\end{aligned}\tag{⑧}$$

上式右边的第一、二项之和由②式可见被积函数为零,第三项利用高斯定理变成在包围整个电流体系的曲面 S 上的面积分. 由于在 S 上 $J_f(x',t')=0$,故⑧式的第三项

$$\int_V\nabla'\cdot\frac{J_f(x',t')}{r}dV'=\oint_S\frac{J_f(x',t')}{r}\cdot d\boldsymbol{\sigma}'=0.\tag{⑨}$$

由于⑧式右边为零,本题得证.

2. 采取如下记号,枞横场的基本性质如下表所示[参看附录1§ A1.4(31)式]

矢量	纵场	横场	
$E=E_L+E_T$	$\nabla\times E_L=0$	$\nabla\cdot E_T=0$	①
$B=B_L+B_T=B_T$	$B_L=0(\because\nabla\cdot B=0)$	$\nabla\cdot B_T=0$	②
$J_f=J_{fL}+J_{fT}$	$\nabla\times J_{fL}=0$	$\nabla\cdot J_{fT}=0$	③

(1)由 $\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$ 及①、②式得

$$\nabla\times E_T=-\frac{\partial B_T}{\partial t};\tag{④}$$

(2)由 $\nabla\cdot E=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$ 及①式得

$$\nabla\cdot E_L=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0};\tag{⑤}$$

(3)由 $\nabla\times B=\mu_0 J_f+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$ 及①、②、③式得

$$\nabla\times B_T=\left(\mu_0 J_{fT}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_T}{\partial t}\right)+\left(\mu_0 J_{fL}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_L}{\partial t}\right),$$

等式两边散度为零者与旋度为零者应各自相等,由此得

$$\nabla\times B_T=\mu_0 J_{fT}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_T}{\partial t},\tag{⑥}$$

$$B_L=0,\qquad 0=\mu_0 J_{fL}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_L}{\partial t}.\tag{⑦}$$

以上四式即为 E_T,E_L,B_T,B_L 遵守的方程.

(4)电场的纵场部分遵守 $\nabla\cdot E_L=\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$. 引入 $E_L=-\nabla\varphi$,则 φ 遵守泊松方程 $\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$. 它的解就是静止电荷在真空中激发的静电势,即 E_L 与静止电荷激发的库仑场相对应.

3. 采用洛伦兹规范:$\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$.

单色平面电磁波是在自由空间传播的,电磁势方程为

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{①}$$

其解为

$$A = A_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)}, \qquad \varphi = \varphi_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)}. \tag{②}$$

将上式代入洛伦兹条件,得

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} k \cdot A. \tag{③}$$

磁场可用矢势表示为

$$B = \nabla \times A = ik \times A = ik \times A_T. \tag{④}$$

电场利用③式及$\frac{c^2}{\omega^2}(k\cdot k)=1$,可得

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = -ik\varphi + i\omega A = -ik\frac{c^2}{\omega}(k\cdot A) + i\omega\frac{c^2}{\omega^2}(k\cdot k)A$$

$$= -i\frac{c^2}{\omega}[k(k\cdot A) - (k\cdot k)A] = -i\frac{c^2}{\omega}k\times(k\times A) = -i\frac{c^2}{\omega}k\times(k\times A_T). \tag{⑤}$$

可见电磁场只依于A 的横向分量A_T,而与A 的纵向分量A_L 无关. 因此,可以作变换(α为任意常数)

$$A'_0 = A_0 + \alpha k, \qquad \varphi'_0 = \varphi_0 + \alpha\omega, \tag{⑥}$$

则A_T 没有改变(αk 只改变A 的纵向分量),因而E,B 保持不变. 并且φ'与A'仍满足③式,即满足洛伦兹条件. 可见A 与φ不是惟一的.

(2)采用库仑规范:$\nabla\cdot A = 0$. 电磁势方程为

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(\nabla\varphi) = 0, \qquad \nabla^2\varphi = 0. \tag{⑦}$$

则$\varphi = 0$,A 的解为

$$A = A_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)}. \tag{⑧}$$

库仑条件$\nabla\cdot A = 0$ 使得$k\cdot A = 0$,即A 只有横向分量. 如果给A 附加纵向分量,则违背库仑条件. 因此,在φ给定后,电磁势是惟一的.

习　题　11.2

1. 注意$p\left(t - \frac{R}{c}\right) = p_0 e^{i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}$.

2. 见附录§ 1.2 的(27)式.

习　题　11.3

1. 粒子的电偶极矩为p,将$\ddot{p} = e\dot{v} \overset{⑥}{=} ea$ 代入P_{e2}即得.

2. 取坐标原点于圆心,z 轴沿ω方向的球坐标系. 为方便起见,还引入柱坐标系的基矢e_ρ.

电荷体系的电偶极矩的大小为$|p| = qR_0$,其方向以角速度ω转动. 今将p 按观察点的e_ρ 和e_ϕ两个方向分解为

$$p_1 = qR_0 e^{-i\omega t} e_\rho, \qquad p_2 = qR_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} e_\phi = iqR_0 e^{-i\omega t} e_\phi.$$

两者之和为

$$p = p_1 + p_2 = qR_0 e^{-i\omega t}(e_\rho + ie_\phi).$$

由此得

$$\ddot{p} = -\ qR_0\omega^2 e^{-i\omega t}(e_\rho + ie_\phi).$$

将 $\ddot{p}$ 代入(7)、(8)、(9)式即为所求.

3. 取坐标原点在球心,z 轴沿 E_0 方向的球坐标系.

在均匀外电场 E_0 中介质球的极化强度为

$$P = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}E_0.$$

本题给出的是线偏振平面波 $E = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$,且 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} \gg R_0$,即在介质球范围内

$$kx < kR_0 \ll 1,$$

故可认为 $e^{ikx} \approx 1$,即在每一时刻,介质球处于均匀场 $E \approx E_0 e^{-i\omega t}$ 中,故介质球的极化强度为

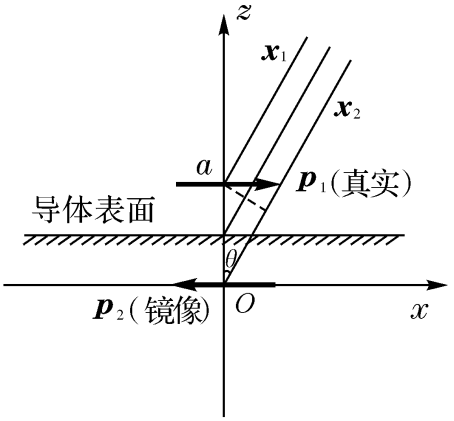
$$P = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}E_0 e^{-i\omega t}.$$

整个介质球的电偶极矩为

$$p = VP = \frac{4}{3}\pi R_0^3 P = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_0 e^{-i\omega t},$$

由此可求得 $\ddot{p}$,代入(7)、(8)、(9)式即为所求.

4. 取直角坐标系如下图 1 所示. 导体平面位于 $z = a/2$ 处,电偶极子的中心位于 $(0,0,a)$ 处.



习题 11.2 图 1

题目给定的电偶极子 p_1 及其镜像 p_2 分别为

$$p_1(t) = e_x p_0 e^{-i\omega t}, \qquad ①$$

$$p_2(t) = -\ e_x p_0 e^{-i\omega t}. \qquad ②$$

在场点 $x(R \gg \lambda)$ 处,p_1 与 p_2 到场点的距离分别为

$$R_1 = R - a\cos\theta, \qquad R_2 = R. \qquad ③$$

将①、②、③式代入(7)式,并利用 $\ddot{p} = -\omega^2 p$,得 p_1 与 p_2 激发的辐射场

$$B_{e2}(x,t) = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi cR}\left[1 - e^{ika\cos\theta}\right]e^{i(kR-\omega t)}e_x \times e_R. \qquad ④$$

利用 $a \ll \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$,展开 $e^{-ika\cos\theta}$ 时仅保留 $ka\cos\theta$ 的一级小量,则有

$$1 - e^{-ika\cos\theta} = ika\cos\theta. \qquad ⑤$$

同时,还将基矢的矢积

$$\begin{aligned} e_x \times e_R &= (\sin\theta\cos\phi e_R + \cos\theta\cos\phi e_\theta - \sin\phi e_\phi) \times e_R \\ &= -\cos\theta\cos\phi e_\phi - \sin\phi e_\theta \end{aligned} \qquad ⑥$$

代入④式即可求得 $B_{e2}(x,t)$,再由(8)式及(9)式即得解.

习 题 11.4

1. 体系的电偶极矩为 $p = q(x_1 + x_2)$,因而 $\ddot{p} = q(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)$. 由题设知 $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$,故 $\ddot{p} = 0$. 代入 E_{e2} 及 B_{e2},可知为零.

体系的 $m = 0$,故 B_{m2} 及 E_{m2} 亦为零.

2. 体系的 $p = 0$,$m = \dfrac{1}{2}Q_f\omega R_0^2 e_z$,因而 $\ddot{p} = 0$,$\ddot{m} = 0$,故辐射场为零.

3. 小电流环可看做磁偶极子,其磁偶极矩为

$$m = I_f a = I_0 \pi R_0^2 e^{-i\omega t} e_z,$$

因而

$$\ddot{m}(t) = -\omega^2 I_0 \pi R_0^2 e^{-i\omega t} e_z.$$

将$\ddot{m}(t)$代入(14)、(15)和(17)式可得.

4. 体系的电偶极矩

$$p = q(z_1 + z_2)e_z = 0,$$

故体系无电偶极辐射.

体系的电四极矩为

$$\overleftrightarrow{D} = 3q(z_1^2 + z_2^2)e_z e_z = 6qz_0^2 \sin^2\omega t e_z e_z,$$

用e_R左乘$\overleftrightarrow{D}$得

$$D_R = e_R \cdot \overleftrightarrow{D} = 6qz_0^2 \cos\theta \sin^2\omega t e_z.$$

将D_R对t求三阶导数后代入(29)式和(30)式,可得

$$B_{e4}(x,t) = \frac{\mu_0}{24\pi c^2 R}\dddot{D}_R\left(t - \frac{R}{c}\right) \times e_R, \qquad E_{e4}(x,t) = cB_{e4}(x,t) \times e_R.$$

即得答案所示的$B_{e4}(x,t)$及$E_{e4}(x,t)$. 由此得

$$\bar{S}_{e4} = \frac{\mu_0 \omega^6 q^2 z_0^4 \sin^2 2\theta}{8\pi^2 c^2 R^2} e_R.$$

总辐射功率为

$$P_{e4} = \oint \bar{S}_{e4} \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \omega^6 q^2 z_0^4}{8\pi^2 c^2} \sin^2 2\theta \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 \omega^6 q^2 z_0^4}{60\pi c^2} = \frac{4\pi^3 \mu_0 \omega^2 c^2 q^2}{15}\left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^4.$$

电四极辐射功率与$\left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^4$成正比,与磁偶极辐射有相同的数量级(见第3题).

6. 可以由习题A1.5的第1(1)题的答案解出e_x及e_y.

习　题　11.5

1. 利用

$$e^{-ikz'\cos\theta} = \cos(kz'\cos\theta) - i\sin(kz'\cos\theta),$$

$$\cos kz' \cos(kz'\cos\theta) = \frac{1}{2}\{\cos[kz'(1+\cos\theta)] + \cos[kz'(1-\cos\theta)]\}$$

以及奇函数在对称区间的积分为零,可得

$$\begin{aligned}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos kz' e^{ikz'\cos\theta} dz' &= \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos kz' \cos(kz'\cos\theta) dz' - i\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos kz' \sin(kz'\cos\theta) dz' \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \{\cos[kz'(1+\cos\theta)] + \cos[kz'(1-\cos\theta)]dz' + 0\} dz' \\ &= \left\{\frac{\sin[kz'(1+\cos\theta)]}{k(1+\cos\theta)} + \frac{\sin[kz'(1-\cos\theta)]}{k(1-\cos\theta)}\right\}\Bigg|_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k(1+\cos\theta)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k(1-\cos\theta)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

2. 利用变量代换,可以将积分化为级数,

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{2(2n-1)}}{2(2n-1)\{[2(2n-1)]!\}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^{4n}}{4n[(4n)!]},$$

由于级数收敛很快,取前 16 项之和作为近似,即有 $I\approx 1.2188$.

3. 分子分母分别提出因子 $e^{-i\frac{1}{2}NkL\cos\theta}$ 及 $e^{-i\frac{1}{2}kL\cos\theta}$,并利用 $\sin x=\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})$ 及 $|e^{-ix}|=1$,可得

$$\left|\frac{e^{-i\frac{1}{2}NkL\cos\theta}\left(e^{i\frac{1}{2}NkL\cos\theta}-e^{-i\frac{1}{2}NkL\cos\theta}\right)}{e^{-i\frac{1}{2}kL\cos\theta}\left(e^{i\frac{1}{2}kL\cos\theta}-e^{-i\frac{1}{2}kL\cos\theta}\right)}\right|=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}NkL\cos\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kL\cos\theta\right)}.$$

4. 参看“半波天线”的推导.

第 十 二 章

习 题 12.1

1. (1) $r\overset{6}{(}t')=\frac{\partial r(t')}{\partial t'}$ 的计算. 在 $r^2(t')=[x-x_e(t')]^2$ 两边对 t' 求导,得

$$2r\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=2[x-x_e(t')]\cdot\left[0-\frac{\mathrm{d}x_e(t')}{\mathrm{d}t'}\right]=-2r\cdot\boldsymbol{v}(t'), \qquad ①$$

式中 $\boldsymbol{v}(t')=\frac{\mathrm{d}x_e(t')}{\mathrm{d}t'}$ 是带电粒子在 t' 时刻的速度. 令

$$n=\frac{r}{r} \qquad ②$$

表示由粒子辐射位置 $x_e(t')$ 指向场点 x 的单位矢量. 用 $2r$ 除①式两边,便有

$$r\overset{6}{=}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=-n\cdot\boldsymbol{v}(t'). \qquad ③$$

(2) $\frac{\partial t'}{\partial t}$ 的计算.

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(t-\frac{r}{c}\right)=1-\frac{1}{c}\frac{\partial r(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad ④$$

将③式代入④式,整理后得到几个等价的表达式

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{1}{c}n\cdot\boldsymbol{v}}=\frac{1}{1-n\cdot\boldsymbol{\beta}}=\frac{r}{s}. \qquad ⑤$$

(3) $\nabla t'$ 的计算. 由于 $r=|x-x_e(t')|$ 也具有 $f[x,t'(x,t)]$ 的形式,利用复合函数的偏导数公式,便有

$$\begin{aligned}\nabla t'&=\nabla\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{1}{c}\nabla r=-\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}e_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\\&=-\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}e_i\left(\left.\frac{\partial r}{\partial x_i}\right|_{t'\text{不变}}+\frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right)=-\frac{1}{c}\left[\nabla r\Big|_{t'\text{不变}}+\frac{\partial r}{\partial t'}(\nabla t')\right]\\&=-\frac{1}{c}n+\frac{1}{c}n\cdot\boldsymbol{v}(t')\nabla t', \qquad ⑥\end{aligned}$$

整理后,便可得到几个等价的表达式

$$\nabla t'=-\frac{n}{c-n\cdot\boldsymbol{v}}=-\frac{n}{c(1-n\cdot\beta)}=-\frac{r}{cs}. \qquad ⑦$$

(4)$\overset{6}{r}$的计算

$$\overset{6}{r}=\frac{\partial r(t')}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t'}[x-x_e(t')]=-\frac{\mathrm{d}x_e(t')}{\mathrm{d}t'}=-\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

(5)$\overset{6}{\frac{s}{c}}$的计算.

$$\overset{6}{\frac{s}{c}}=\frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t'}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}(r-\boldsymbol{\beta}\cdot r)=\frac{1}{c}(\overset{6}{r}\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot r-\boldsymbol{\beta}\cdot\overset{6}{r})=-n\cdot\boldsymbol{\beta}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot r+\beta^2. \tag{9}$$

(6)$\nabla\frac{1}{s}\Big|_{t'\text{不变}}$的计算.

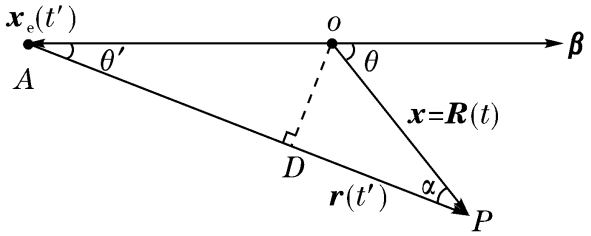
当t'不变时,$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c}$与$x$无关,因而

$$\nabla(\boldsymbol{\beta}\cdot r)\Big|_{t'\text{不变}}=\sum_{i=1}^{3}\nabla(\beta_i r_i)\Big|_{t'\text{不变}}=\sum_{i=1}^{3}\beta_i\nabla r_i=\sum_{i=1}^{3}\beta_i e_i=\boldsymbol{\beta}, \tag{10}$$

据此得

$$\nabla\frac{1}{s}\Big|_{t'\text{不变}}=-\frac{1}{s^2}\nabla s\Big|_{t'\text{不变}}=-\frac{1}{s^2}\nabla(r-\boldsymbol{\beta}\cdot r)\Big|_{t'\text{不变}}=-\frac{1}{s^2}(n-\boldsymbol{\beta}). \tag{11}$$

2. 设粒子沿$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}$方向运动,$t'$时位于$A$点,$t$时位于$o$点(相当于把测量时间$t$时粒子所在



习题 12.1 图 1

位置选作坐标原点),场点为P,因此

$$\overrightarrow{oP}=x=R(t),\qquad \overrightarrow{oA}=x_e(t'),$$

$$\overrightarrow{AP}=r(t')=x-x_e(t'). \tag{1}$$

(1)电场. 当粒子作匀速直线运动时,$E(x,t)$由(33)式第一项表示,即

$$E(x,t)=\frac{e r}{4\pi\varepsilon_0 s^3}(n-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)=\frac{e r(n-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0(r-r\cdot\boldsymbol{\beta})^3}. \tag{2}$$

式中所有量均取粒子在辐射时间t'时的值.

因为每一瞬时选择实验室参考系中粒子的位置为坐标系原点. 目前要用现在时间场点的位置$R(t)$来表示电场. 利用粒子以匀速$\boldsymbol{v}$从A运动到o需时$(t-t')$,故

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=-x_e(t')=\boldsymbol{v}(t-t')=\boldsymbol{\beta}c(t-t')=\boldsymbol{\beta}r(t'). \tag{3}$$

分子的$r(t')(n-\boldsymbol{\beta})$可简化为

$$r(t')(n-\boldsymbol{\beta})=r(t')-r(t')\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OP}=R(t). \tag{4}$$

因为$n=\frac{r(t')}{r(t')}$是$\overrightarrow{AP}$方向的单位矢量,n与$\boldsymbol{\beta}$的夹角为θ',由③式得

$$s=r(t')(1-n\cdot\boldsymbol{\beta})=r(t')-r(t')\beta\cos\theta'=\overline{AP}-\overline{AO}\cos\theta'=\overline{AP}-\overline{AD}$$

$$= \overline{DP} = R(t)\cos\alpha = R(t)\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{5}$$

在△AOP 中,由正弦定理

$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{AP} = \frac{\sin\alpha}{AO}, \tag{6}$$

即

$$\sin\alpha = \frac{AO}{AP}\sin(\pi-\theta) = \frac{\beta r(t')}{r(t')}\sin\theta = \beta\sin\theta. \tag{7}$$

将⑦式代入⑤式,可得

$$s = R(t)\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}. \tag{8}$$

将④式及⑧式代入②式,便有

$$E(x,t) = \frac{e(1-\beta^2)R}{4\pi\varepsilon_0 R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{9}$$

式中R 为测量时间粒子到场点的位矢$\overrightarrow{OP}$.

(2)磁场. 由图 1 易见

$$r = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \beta r + x = \frac{\boldsymbol{v}}{c}r + R.$$

由⑨式易见E 与R 同向,故$R\times E = 0$. 由(34)式得

$$B = \frac{1}{c}n\times E = \frac{1}{c}\frac{r}{r}\times E = \frac{1}{cr}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}r + R\right)\times E = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times E,$$

这就是(35)式的第二式.

习 题 12.2

1. 由相对论动力学基本方程[见§ 10.1 的(15)式]可得

$$eE = F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{m_0\boldsymbol{v}^{\cdot}}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

将$\boldsymbol{v}^{\cdot} = \frac{eE(1-\beta^2)^{3/2}}{m_0}$代入(24)式,即有

$$P(t') = \frac{e^4E^2}{6\pi\varepsilon_0 m_0^2c^3}.$$

2. 由牛顿定律$ma = F$ 得

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R^2}. \tag{1}$$

电子的能量为

$$W = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R}. \tag{2}$$

原子内电子速度v 的数量级为10^6 m/s,远小于光速. 将$|\boldsymbol{v}^{\cdot}| = \frac{v^2}{R}$及①式代入(9)式,得

$$P = \frac{e^2\boldsymbol{v}^{\cdot 2}}{6\pi\varepsilon_0c^3} = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3c^3m^2R^4}. \tag{3}$$

由能量守恒定律,辐射功率等于单位时间内电子减少的能量. 考虑到②式,即有

$$P = -\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R^2}\frac{dR}{dt}. \tag{4}$$

将③式与④式联立,得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{e}^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2 R^2}.$$

对R从a_0到零积分,便有

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2}{\mathrm{e}^4}\int_{a_0}^0 R^2\mathrm{d}R = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2 a_0^3}{\mathrm{e}^4} = 1.6\times 10^{-11}\mathrm{s}.$$

3.(1)相对论动力学基本方程的空间分量为

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

由题设$\beta = v/c$近似可看做常量. 上式仅要对v求导,其模为

$$\frac{m_0|\dot{v}|}{\sqrt{1-\beta^2}} = |\mathrm{e}v\times B| = evB.$$

将向心速度$|\dot{v}| = \frac{v^2}{R}$,$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$及$p = \frac{v}{c^2}W \approx \frac{W}{c}$(设$v\sim c$)代入上式,整理后得

$$B = \frac{m_0}{ev}\frac{|\dot{v}|}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 v}{eR\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p}{eR} \approx \frac{W}{ceR} = 0.28\mathrm{T}.$$

(2)当$\dot{v}\perp v$时,辐射功率由(33)式给出

$$P = \frac{\gamma^4 e^2 \dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

电子沿轨道运行一周的时间为$\Delta t = \frac{2\pi R}{v}$,故电子运行一周辐射的能量为

$$\Delta W = P\Delta t = \frac{\gamma^4 \mathrm{e}^2 \dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{2\pi R}{v} = \frac{\gamma^4 \mathrm{e}^2 R\dot{v}^2}{3\varepsilon_0 v c^3}.$$

将$\gamma = \frac{m}{m_0} = \frac{W}{m_0 c^2}$,$v\sim c$,以及$|\dot{v}| = \frac{v^2}{R}$代入,即有

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{W}\left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^4 \frac{\mathrm{e}^2 R}{3\varepsilon_0 v c^3}\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \approx \frac{\mathrm{e}^2}{3\varepsilon_0 m_0 c^2 R}\left(\frac{W}{m_0 c^2}\right)^3 = 4.6\times 10^{-5}.$$

习　题　12.3

1. 将$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\omega(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$替代被积函数中的一个因子,随后交换积分次序,得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} B^2(x,t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} B(x,t)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} B_\omega(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega B_\omega(x)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} B(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega B_\omega(x)\cdot[2\pi B_\omega^*(x)] = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|B_\omega(x)|^2\mathrm{d}\omega\\ &= 4\pi\int_0^{\infty}|B_\omega(x)|^2\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

2.(1)由发生切连科夫辐射的条件得β的极限值满足

$$\frac{1}{n\beta} = \frac{c}{nv} = \cos\theta \to 1. \qquad ①$$

由此得γ的极限值(即$\theta\to 0$时极限值)

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad ②$$

电子的最低动能为

$$T = W - W_0 = (\gamma - 1)m_0c^2 \approx 29.93\text{Mev}. \tag{3}$$

(2)题设电子的 $pc \approx 100m_0c^2$,故电子的总能

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc, \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{W}{W_0} \approx \frac{pc}{m_0c^2} = \frac{p}{m_0c}, \qquad \text{即 } \gamma \approx 10^2. \tag{5}$$

在 $p = 100\text{Gev}/c$ 已给定的条件下,m_0 是 γ 的函数. 由上式得

$$\mathrm{d}m_0 = \mathrm{d}\left(\frac{p}{c\gamma}\right) = -\frac{p}{c}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma^2} = -\frac{m_0}{\gamma}\mathrm{d}\gamma. \tag{6}$$

由 $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$,得

$$\mathrm{d}\gamma = \beta\gamma^3\mathrm{d}\beta. \tag{7}$$

由 $\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$,得

$$-\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{n\beta^2}\mathrm{d}\beta, \qquad \mathrm{d}\beta = n\beta^2\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

综合⑤~ ⑧式,得

$$\mathrm{d}m_0 = -\frac{m_0}{\gamma}\mathrm{d}\gamma = -\beta m_0\gamma^2\mathrm{d}\beta = -n\beta^3m_0\gamma^2\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

故

$$\left|\frac{\Delta m_0}{m_0}\right| = n\beta^3\gamma^2\sin\theta\Delta\theta. \tag{10}$$

由 $\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1-\frac{1}{2\gamma^2}$,可得 $\cos\theta = \frac{1}{\beta n} \approx 0.9999$,即 $\theta \approx 0.013$. 代入⑩式便有

$$\left|\frac{\Delta m_0}{m_0}\right| = (1 + 1.35\times10^{-4})\left(1-\frac{1}{2\times10^4}\right)^3 \times 10^4 \times 0.013 \times 10^{-3} \approx 0.13.$$

习 题 12.4

1. 辐射阻尼力 F_S 与弹性恢复力 $-kx$ 大小之比为

$$\left|\frac{F_S}{-kx}\right| = \left|\frac{-i\Gamma m\omega_0 x}{m\omega_0^2 x}\right| = \frac{\Gamma}{\omega_0} = \frac{e^2\omega_0}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} = \frac{2r_e\omega_0}{3c} = \frac{2r_e}{3}\frac{2\pi}{\lambda} \sim \frac{10^{-13}}{10^{-5}} \ll 1.$$

2. 取谐振子的平衡位置为坐标原点,远处的 $r = R$. 谐振子速度的幅值为

$$|\dot{z}| = |-i\omega z_0 e^{-i\omega t}| = \omega z_0,$$

由题设 $\omega z_0 \ll c$,可知 $\beta = \frac{|\dot{z}|}{c} = \frac{\omega z_0}{c} \ll 1$.

将 $r = R$ 及 $\beta \approx 0$,代入(1)式可得低速情形下的电磁场

$$E(x,t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0R^2}\left[\frac{R}{R} + \frac{1}{c}R\times(n\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\right], \qquad B = \frac{1}{c}n\times E.$$

第一项为自有场,第二项为辐射场,式中粒子的状态取 $t' = t - \frac{R}{c}$ 的值.

将 $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{v}}(t') = \frac{1}{c}\ddot{z}(t')e_z$ 代入第二项即为辐射场,由 $\bar{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E^*\times H)$ 得能流平均值.

3. 设 $t = 0$ 时电荷位于 $R = R_0$,$\theta = \frac{\pi}{2}$,$\phi = 0$ 处,则 t' 时刻电荷的位置和加速度分别为

$$x_e(t') = R_0(\cos\omega t' e_x + \sin\omega t' e_y) = R_0(e_x + ie_y)e^{-i\omega t'}$$

$$\boldsymbol{v}(t') = \ddot{x}_e(t') = -R_0\omega^2(e_x + ie_y)e^{-i\omega t'}$$

$$= -R_0\omega^2[(\sin\theta\cos\phi e_R + \cos\theta\cos\phi e_\theta - \sin\phi e_\phi)$$

$$+ i(\sin\theta\sin\phi e_R + \cos\theta\sin\phi e_\theta + \cos\phi e_\phi)]e^{-i\omega t'}$$

$$= -R_0\omega^2(\sin\theta e_R + \cos\theta e_\theta + ie_\phi)e^{-i(\omega t' - \phi)}$$

将$\boldsymbol{v}(t')$代入

$$E(x,t) = \frac{ee_R \times (e_R \times \boldsymbol{v})}{4\pi\varepsilon_0 cR}, \qquad B = \frac{1}{c}e_R \times E,$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(E^* \times B),$$

即得辐射场与平均能流密度$\overline{S}$,见答案.

为了讨论电场的偏振性质,可以将E 分解为 e_θ 和 e_ϕ 两个方向的分矢量,其分振辐分别为

$$E_{0\theta} = \frac{eR_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 cR}\cos\theta, \qquad E_{0\phi} = \frac{eR_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 cR}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

将 θ 值代入,①若其中一振辐为零,即为线偏振;②若两振幅相等,两者相位差为$\frac{\pi}{2}$,即为圆偏振;③若两振幅不相等,两者相位差为$\frac{\pi}{2}$,即为椭圆偏振(本题除①的$E_{0\theta}=0$ 外,不存在相位差取其他数值的情形).

4. 振子运动方程$m\ddot{r} = -m\omega_0^2 r + e\dot{r}\times B$ 在 x、y、z 轴的投影分别为

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{eB}{m}\dot{y}, \qquad ①$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - \frac{eB}{m}\dot{x}, \qquad ②$$

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z. \qquad ③$$

以 i 乘②式后与①式相加,得

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \omega_0^2(x + iy) - \frac{eB}{m}(\dot{y} - i\dot{x}) = 0. \qquad ④$$

令 $\zeta = x + iy$ 代入上式,得

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2\zeta + i\frac{eB}{m}\dot{\zeta} = 0. \qquad ⑤$$

设方程的解具有形式 $\zeta = \zeta_0 e^{-i\omega t}$,代入上式得

$$\omega^2 - \frac{eB}{m}\omega - \omega_0^2 = 0. \qquad ⑥$$

其解为

$$\omega_{1,2} = \frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eB}{2m}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad ⑦$$

令 $\omega_L = \frac{eB}{2m}$,当 $\omega_0 \gg \omega_L$ 时,略去$\frac{\omega_L}{\omega_0}$的二次项,便有

$$\omega_{1,2} = \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} \approx \omega_L \pm \omega_0. \qquad ⑧$$

方程⑤的通解为

$$\zeta = Ae^{-i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_2 t} = Ae^{-i(\omega_L + \omega_0)t} + Be^{-i(\omega_L - \omega_0)t}. \qquad ⑨$$

与 $\zeta = x + iy$ 相比较,即有

$$x = A\cos(\omega_L + \omega_0)t + B\cos(\omega_L - \omega_0)t, \qquad ⑩$$

$$y = -A\sin(\omega_L + \omega_0)t - B\sin(\omega_L - \omega_0)t. \tag{11}$$

采用复数表示法,可得

$$x = Ae^{-i(\omega_L+\omega_0)t} + Be^{-i(\omega_L-\omega_0)t}, \tag{12}$$

$$y = -i[Ae^{-i(\omega_L+\omega_0)t} + Be^{-i(\omega_L-\omega_0)t}], \tag{13}$$

同理,由③式可得

$$z = z_0 e^{-i\omega_0 t} = Ce^{-i\omega_0 t}. \tag{14}$$

将⑫、⑬、⑭式分别乘 e_x, e_y, e_z 后相加,即得振子运动方程式的通解(见答案).

由于在无界空间中(真空),辐射场是横电磁波,将 $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{c}\ddot{\boldsymbol{r}}$ 代入 E 可知,沿不同方向观察将会看到怎样的电磁波.

5.(1)由于粒子作低速圆周运动,运动一周的辐射损失远小于它的动能,可设粒子仍作半径为 R 的圆周运动.

粒子辐射的功率由拉莫尔公式给出

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2 \tag{1}$$

由运动方程得

$$m|\dot{\boldsymbol{v}}| = m\frac{v^2}{R} = evB. \tag{2}$$

将②式与 $T = \frac{1}{2}mv^2$ 联立,得

$$T = \frac{1}{2}m\frac{e^2R^2B^2}{m^2} = \frac{e^2R^2B^2}{2m}. \tag{3}$$

将②式的 $|\dot{v}| = \frac{evB}{m}$ 及 $v^2 = \frac{2T}{m}$ 代入①式,得

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^2v^2B^2}{m^2} = \frac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2c^3}\frac{2T}{m} = \frac{e^4B^2T}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}. \tag{4}$$

磁场对粒子不作功,P 即为单位时间内粒子动能的减少,即

$$P = -\frac{dT}{dt}. \tag{5}$$

将④式与⑤式联立,得

$$\frac{dT}{T} = -\frac{e^4B^2}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}dt, \tag{6}$$

积分,便有

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{e^4B^2}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}t}. \tag{7}$$

(2)题设 Δt 时间内,粒子辐射掉 $0.1T_0$. 将 $T = 0.9T_0$ 代入⑦式得

$$0.9T_0 = T_0 e^{-\frac{e^4B^2}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}\Delta t} \tag{8}$$

约去 T_0 后取对数,得

$$\Delta t = -\frac{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}{e^4B^2}\ln(0.9) \approx 8.07\times 10^{10}\text{s},$$

式中 $B^2 = \frac{2mT_0}{e^2R^2}$ 来自③式.

6.题设电子的辐射损失很小. 作为零级近似,不考虑辐射损失时的能量守恒定律为

$$T + U = T_0. \tag{1}$$

设正电子距核为 R,速度为 v 时,上式可写成

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{②}$$

设正电子 $v=0$ 时与核的距离为 R_0,则

$$0+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}=\frac{1}{2}mv_0^2, \tag{③}$$

得

$$U=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\frac{R_0}{R}=\frac{1}{2}mv_0^2\frac{R_0}{R}. \tag{④}$$

将 ④ 式代入 ② 式,得

$$v^2=v_0^2\left(1-\frac{R_0}{R}\right). \tag{⑤}$$

将上式对 t 求导,得

$$2vv\overset{6}{=}\frac{v_0^2R_0}{R^2}v,\qquad 即\qquad v\overset{6}{=}\frac{v_0^2R_0}{2R^2} \tag{⑥}$$

将上式代入低速电荷辐射的总功率,得

$$P=\frac{e^2v^{2\cdot 6}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}=\frac{e^2v_0^4R_0^2}{24\pi\varepsilon_0 c^3R^4}. \tag{⑦}$$

将⑤式代入总功率的定义式,得

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R}=v_0\sqrt{1-\frac{R_0}{R}}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R}. \tag{⑧}$$

将⑦式与⑧式联立,得

$$\mathrm{d}W=\frac{e^2v_0^3}{24\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{R_0^2}{R^4\sqrt{1-\frac{R_0}{R}}}\mathrm{d}R. \tag{⑨}$$

粒子在减速和加速两个过程中总的辐射损失为

$$\Delta W=2\int_{R_0}^{\infty}\mathrm{d}W=\frac{e^2v_0^3R_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{R_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}R}{R^4\sqrt{1-\frac{R_0}{R}}}. \tag{⑩}$$

作变量代换,令 $R=R_0\sec^2\alpha$ 可求得

$$\Delta W=-\frac{8v_0^3}{45Zc^3}m. \tag{⑪}$$

将上式与 $\Delta W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$ 联立,可得

$$v^2=v_0^2\left(1-\frac{16v_0^3}{45Zc^3}\right).$$

由于辐射损失很小,利用小量的近似式 $\sqrt{1-\varepsilon}\approx 1-\frac{1}{2}\varepsilon$,便有

$$v=v_0\sqrt{1-\frac{16v_0^3}{45Zc^3}}\approx v_0\left(1-\frac{8v_0^3}{45Zc^3}\right). \tag{⑫}$$

第 十 三 章

习　题　13.1

1. 将 $p=\alpha E_0 e^{-i\omega t}$ 及(9)式代入电偶极辐射公式,得

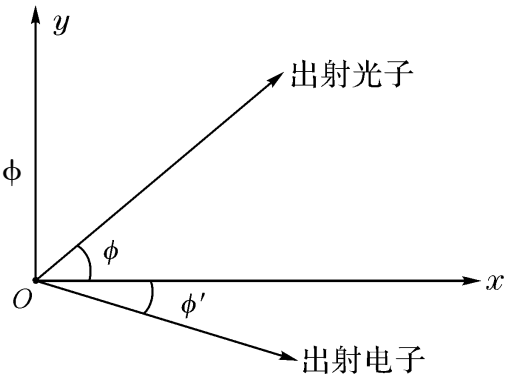
$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\alpha=\frac{\alpha^2E_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}(1-\sin^2\theta\cos^2\phi).$$

散射截面为

$$P=\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=\frac{\alpha^2E_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta\cos+2\phi))d\phi$$

$$=\frac{\alpha^2E_0^2\omega^4}{32\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta=\frac{\alpha^2E_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

将P 及$\overline{S}_{入}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2$ 代入 $\sigma=\frac{P}{\overline{S}_{入}}$即得.



习题 13.1 图 1

2.(1)取入射光子沿 x 轴方向入射,磁撞后光子沿 ϕ方向射出;电子的速度为$\boldsymbol{v}$,由 ϕ'方向射出,如图 1 所示.

由能量守恒定律,

$$\overline{h}\omega+m_{e0}c^2=\overline{h}\omega'+\frac{m_{e0}c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad ①$$

动量守恒定律沿 x 方向和 y 方向的投影分别为

$$\frac{\overline{h}\omega}{c}+0=\frac{\overline{h}\omega'}{c}\cos\phi+\frac{m_{e0}v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cos\phi', \qquad ②$$

$$0=\frac{\overline{h}\omega'}{c}\sin\phi-\frac{m_{e0}v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\sin\phi'. \qquad ③$$

由这三个方程消去 v 及 ϕ',即可得 ω',如(29)式所示.

(2)将$\phi=\pi$代入(29)式,得出射光子能量的最小值

$$\overline{h}\omega'_{min}=\frac{\overline{h}\omega}{1+\frac{2\overline{h}\omega}{m_{e0}c^2}}=0.204\text{MeV}; \qquad ④$$

散射过程中电子获得能量的最大值为

$$W_{max}=1-\overline{h}\omega'_{min}=0.796\text{MeV}. \qquad ⑤$$

将$\phi=0$代入(29)式,得出射光子能量的最大值

$$\overline{h}\omega'_{max}=\overline{h}\omega=1.00\text{MeV}, \qquad ⑥$$

散射过程中电子获得能量的最小值为零,

$$W_{min}=1.00-\overline{h}\omega'_{max}=0, \qquad ⑦$$

这相当于光子以碰撞前的能量和动量继续沿 x 轴方向运动.

习 题 13.2

1. 电子的运动方程及方程的解分别为

$$m\ddot{x}=eE_0e^{-i\omega t},\qquad x=-\frac{eE_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}. \qquad ①$$

等离子体的极化强度

$$P=n_{e0}p=n_{e0}ex=-\frac{n_{e0}e^2}{m\omega^2}E_0e^{-i\omega t}. \qquad ②$$

电位移矢量为

$$D=\varepsilon_0E+P=\left(\varepsilon_0-\frac{n_{e0}e^2}{m\omega^2}\right)E_0e^{-i\omega t}. \qquad ③$$

与$D=\varepsilon E$比较得介电常数

$$\varepsilon=\varepsilon_0\left(1-\frac{n_{e0}e^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2}\right)=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right),\tag{④}$$

式中$\omega_P=\sqrt{\frac{n_{e0}e}{\varepsilon_0 m}}$为等离子体的振荡频率,见§ 5.5 的(30)式.

等离子体的折射率为

$$n(\omega)=\sqrt{\varepsilon_r}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}=\sqrt{1-\frac{n_{e0}e^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}}=\sqrt{1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2}}.\tag{⑤}$$

2. 谐振粒子的运动方程为

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+eE+ex\overset{6}{\times}B.\tag{①}$$

题设B只有z分量,对于沿z方向传播的平面电磁波,E仅有x,y分量,故①式可写成分量式

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+eE_x+ey\overset{6}{B},\tag{②}$$

$$m\ddot{y}=-m\omega_0^2y+eE_y-ex\overset{6}{B},\tag{③}$$

$$m\ddot{z}=-m\omega_0^2z.\tag{④}$$

由④式可见,粒子沿z方向仍作简谐振动,不受外场影响,对介质的极化无影响.

(1)左旋圆偏振波的电矢量为

$$E_L=E_0\cos\omega t e_x+E_0\sin\omega t e_y,\tag{⑤}$$

代入②、③式得

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x+eE_0\cos\omega t+eB\overset{6}{y},\tag{⑥}$$

$$m\ddot{y}=-m\omega_0^2y+eE_0\sin\omega t-eB\overset{6}{x},\tag{⑦}$$

引入新变量

$$u=x+iy,\tag{⑧}$$

用i乘⑦式后与⑥式相加,得

$$\ddot{u}+i\frac{eB}{m}\overset{6}{u}+\omega_0^2u=\frac{eE_0}{m}(\cos\omega t+i\sin\omega t).\tag{⑨}$$

方程的解为

$$u=\frac{eE_0(\cos\omega t+i\sin\omega t)}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}.\tag{⑩}$$

比较⑧式与⑩式的实部与虚部,得

$$x=\frac{eE_0\cos\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)},\qquad y=\frac{eE_0\sin\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}.\tag{⑪}$$

电磁波与静磁场B引起粒子的位移为

$$x=xe_x+ye_y=\frac{eE_0(\cos\omega te_x+\sin\omega te_y)}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}=\frac{eE_L}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}.\tag{⑫}$$

左旋圆偏振波引起的极化强度为

$$P_L=Nex=\frac{Ne^2E_L}{m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}.\tag{⑬}$$

由$\varepsilon_L E=D_L=\varepsilon_0E_L+P_L$得相应的介电常数为

$$\varepsilon_L=\varepsilon_0\left[1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-eB\omega/m)}\right].\tag{⑭}$$

(2)右旋圆偏振波的电矢量为

$$E_R = E_0\cos\omega t e_x - E_0\sin\omega t e_y, \tag{15}$$

引入新变量

$$v = x - \mathrm{i}y, \tag{16}$$

类似地可得

$$\varepsilon_R = \varepsilon_0\left[1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + eB\omega/m)}\right]. \tag{17}$$

两者之差即为

$$\varepsilon_L - \varepsilon_R = \frac{N e^2}{m}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - eB\omega/m} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + eB\omega/m}\right] = \frac{N e^2}{m}\frac{2eB\omega/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (eB\omega/m)^2}. \tag{18}$$

附　录

习题 A1.2

$$\begin{aligned}2.\ \nabla\times A &= \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\,\nabla_j A_k = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\left[\left.\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right|_{t'\text{不变}} + \frac{\partial A_k}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_j}\right]\\ &= \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\left.\nabla_j A_k\right|_{t'\text{不变}} + \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i(\nabla t')_j\left[\frac{\partial A}{\partial t'}\right]_k\\ &= \left.\nabla\times A\right|_{t'\text{不变}} + (\nabla t')\times\frac{\partial A}{\partial t'}.\end{aligned}$$

习题 A1.3

1. $\nabla\cdot(a\times b) = \sum_i \nabla_i (a\times b)_i = \sum_i \nabla_i \sum_{ik}\varepsilon_{jk}a_j b_k = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\nabla_i (a_j b_k)$，利用 ∇_i 的微分性质展开 $\nabla_i (a_j b_k)$ 后，分为两项，注意到 $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kij}$，$\varepsilon_{jk} = -\varepsilon_{jik}$，按 ε 符号的定义可证明(11)式. 又由

$$\nabla\times(a\times b) = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\nabla_j(a\times b)_k = \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}e_i\nabla_j\sum_{lm}\varepsilon_{klm}a_l b_m = \sum_{ijlm}e_i\Big(\sum_k\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\Big)\nabla_j(a_l b_m),$$

利用 ε 符号及 δ 符号的关系求出对 k 的求和式，展开 $\nabla_j (a_l b_m)$，对 i,j,l,m 求和后可证明(12)式.

5.(1) $$\begin{aligned}\nabla\times(\omega\times R) &= (\nabla\cdot R)\omega - \omega\cdot\nabla R\\ &= 3\omega - \omega\cdot(e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z)\\ &= 3\omega - \omega = 2\omega.\end{aligned}$$

式中 $e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z = \overleftrightarrow{I}$ 称为单位张量，见附录 1§ A1.6.

(2) $\nabla\times\left[m\times\frac{R}{R^3}\right] = m\left[\nabla\cdot\frac{R}{R^3}\right] = m\cdot\nabla\frac{R}{R^3}$，利用

$$\nabla\cdot\frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^3}\nabla\cdot R + R\cdot\nabla\frac{1}{R^3} = \frac{3}{R^3} + R\cdot\left[-\frac{3R}{R^5}\right] = 0,$$

$$\nabla\frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^3}\nabla R + \nabla\left[\frac{1}{R^3}\right] = \frac{\overleftrightarrow{I}}{R^3} - \frac{3RR}{R^5} = \frac{\overleftrightarrow{I} - 3e_R e_R}{R^3},$$

将后两式代入前式，并利用 $m\cdot\overleftrightarrow{I} = m\cdot(e_x e_x + e_y e_y + e_z e_z) = m$，即有

$$\nabla\times\left[m\times\frac{R}{R^3}\right] = -m\cdot\frac{\overleftrightarrow{I} - 3e_R e_R}{R^3} = \frac{3m\cdot e_R e_R - m}{R^3}.$$

习题 A1.4

1. 为证明(11)、(12)式可分别令 $A = f \times c$ 和 $A = c\varphi$.

2. (1) 设 $\psi(x)$ 和 $f(x)$ 均连续、可微且在无限远处为零,令

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot A \tag{①}$$

$$\nabla^2 f = -\nabla \times A \tag{②}$$

式中 A 由题设可知

$$\lim_{R\to\infty} A = 0, \quad \text{必有} \lim_{R\to\infty} A_n = 0. \tag{③}$$

令

$$K = \nabla \times f + \nabla\psi, \tag{④}$$

由 $\lim_{R\to\infty}\psi = 0, \lim_{R\to\infty} f = 0$,由 ④ 可知

$$\lim_{R\to\infty} K = 0, \quad \text{必有} \lim_{R\to\infty} K_n = 0. \tag{⑤}$$

在习题 A1.2 第 1 题已证明,由 $\nabla\cdot(\nabla\times f) = 0$ 知 $\nabla\times f$ 是横场;由 $\nabla\times(\nabla\psi) = 0$ 知 $\nabla\psi$ 为纵场. 若能证明 $A = K$,则 A 可分解为横场 $\nabla\times f$ 与纵场 $\nabla\psi$ 之和. 根据亥姆霍兹定理,就要比较 $\nabla\cdot A$ 与 $\nabla\cdot K$,$\nabla\times A$ 与 $\nabla\times K$,$\lim_{R\to\infty} A_n$ 与 $\lim_{R\to\infty} K_n$ 是否遵守相同的方程.

首先,比较 ③ 式与 ⑤ 式,两者方程相同.

其次,求 ④ 式两边的散度,得

$$\nabla\cdot K = \nabla\cdot(\nabla\times f) + \nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla^2\psi = \nabla\cdot A, \tag{⑥}$$

最后的等式利用了 ① 式.

再次,求 ④ 式两边的旋度,得

$$\nabla\times K = \nabla\times(\nabla\times f) + \nabla\times(\nabla\psi) = \nabla\times(\nabla\times f) = \nabla(\nabla\cdot f) - \nabla^2 f. \tag{⑦}$$

与 ② 式比较,若能证明右边的 $\nabla(\nabla\cdot f) = 0$,则有

$$\nabla\times K = -\nabla^2 f = \nabla\times A \tag{⑧}$$

最后的等式利用了 ② 式. 这样 A 与 K 满足完全相同的三个方程,两者相等.

现在来证明 $g = \nabla(\nabla\cdot f) = 0$. 为了确定矢场 g,仍要求出 $\nabla\cdot g$,$\nabla\times g$ 及 $\lim_{R\to\infty} g_n$ 的值. 由

$$\nabla\times(\nabla\times f) = \nabla(\nabla\cdot f) - \nabla^2 f,$$

将 ② 式代入,即得

$$g = \nabla(\nabla\cdot f) = \nabla\times(\nabla\times f) + \nabla^2 f = \nabla\times(\nabla\times f) - \nabla\times A.$$

取上式两边的散度,并注意到矢量场的旋度是无源场,即有

$$\nabla\cdot g = \nabla\cdot[\nabla\times(\nabla\times f)] - \nabla\cdot(\nabla\times A) = 0. \tag{⑨}$$

利用标量场的梯度是无旋场,即有

$$\nabla\times g = \nabla\times[\nabla(\nabla\cdot f)] = 0. \tag{⑩}$$

再考虑到,$\lim_{R\to\infty} f = 0$,故有

$$\lim_{R\to\infty} g = \lim_{R\to\infty} \nabla(\nabla\cdot f) = 0, \quad \text{必有} \lim_{R\to\infty} g_n = 0. \tag{⑪}$$

由⑨、⑩、⑪式及亥姆霍兹定理可知$g = \nabla(\nabla \cdot f) = 0$是惟一解,故⑧式得证.本题得证.

(2) 现证明$A = \nabla \times f + \nabla \psi$的分解是惟一的.设有两种分解方式:

$$A = A_{1T} + A_{1L}, \quad A = A_{2T} + A_{2L}, \tag{12}$$

只要证明$A_{1T} = A_{2T}$,$A_{1L} = A_{2L}$即可.为此,将⑫式的两式相减,得

$$A_{2T} - A_{1T} = A_{1L} - A_{2L}. \tag{13}$$

取⑬式的旋度,利用纵场的$\nabla \times A_{iT} = 0(i = 1,2)$,即有

$$\nabla \times (A_{1L} - A_{2L}) = \nabla \times (A_{2T} - A_{1T}) = 0. \tag{14}$$

取⑬式的散度,利用横场的$\nabla \cdot A_{iL} = 0(i = 1,2)$,即有

$$\nabla \cdot (A_{2T} - A_{1T}) = \nabla \cdot (A_{1L} - A_{2L}) = 0, \tag{15}$$

再根据$\lim\limits_{R\to\infty} A = 0$,得

$$\lim_{R\to\infty} (A_{2T} - A_{1T})_n = \lim_{R\to\infty} (A_{1L} - A_{2L})_n = 0. \tag{16}$$

由亥姆霍兹定理可知,$A_{2T} - A_{1T} = 0$,$A_{1L} - A_{2L} = 0$是⑭、⑮、⑯式的惟一解,得证.

习题 A1.5

2. 利用$R_1 \cdot R_2 = \begin{cases} R_1R_2\cos\theta, \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \end{cases}$并用球坐标表示下式.

6. 利用$R\cos\theta = z$, $\dfrac{\cos\theta}{R^2} = \dfrac{z}{R^3}$以及$\nabla z = e_Z$.

习题 A1.6

2. 利用张量的散度公式,并令$f = J_f(x')$ $g = x'x'_i$.

3. 利用$\nabla \cdot (EE)$及$\nabla(E \cdot E)$的公式,并注意到单位张量$\overleftrightarrow{I}$与x无关.

4. 计算$\nabla(A \cdot E)$及$\nabla \cdot (AE + EA)$,将两式相减并利用库仑规范条件$\nabla \cdot A = 0$及稳定场条件$\nabla \times E = 0$.

5. 可以用两种方法证明.方法一,把空间分成无限多个固定不动的体积元$\mathrm{d}V'$,这样$\int_V \rho_f(x',t)x'\mathrm{d}V'$的变化是由于各个$\mathrm{d}V'$内的$\rho_f(x,t)$发生变化而引起的.在计算过程中要利用并矢的散度公式$\nabla' \cdot (J_f x')$和高斯定理,并注意到高斯面上的$J_f = 0$.方法二,把电荷系统分成无限多个电荷元$\rho_f(x',t)\mathrm{d}V'$,这些电荷元是运动的,因此它的位置x'将随时间变化,但它的电量$\rho_f(x',t)\mathrm{d}V'$保持不变.因此$\int_V \rho_f(x',t)x'\mathrm{d}V'$的变化仅由电荷元$\rho_f(x',t)\mathrm{d}V'$所在位置$x'$发生变化而引起.计算时要注意$\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$及$J_f(x',t) = \rho_f(x',t)\boldsymbol{v}$.

6. 令$F(t) = f(x - x't) = f(x - x't, y - y't, z - z't)$,其中$t \leqslant 1$.然后将$F(t)$展成麦克劳林级数,并令$t = 1$代入,求出$F(1)$,$F(0)$,$F'(0)$,$F''(0)$,… 即得(30)式.

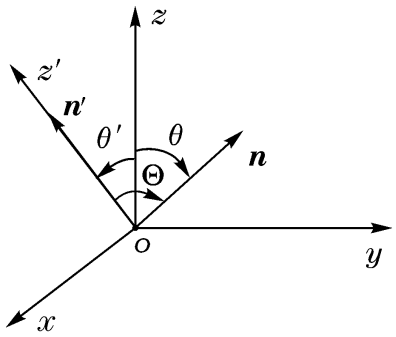
7. 分别证明如下几个公式

$$\nabla^2 \frac{p\left(t - \dfrac{R}{c}\right)}{R} = -\frac{2R}{R^3} \cdot \nabla p + \frac{1}{R}\nabla^2 p, \tag{1}$$

$$\nabla p\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{R}{cR}\dot{p}, \quad \nabla \dot{p}\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{R}{cR}\ddot{p}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{R}\nabla^2 p = -\frac{1}{cR^2}\dot{p} + \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{③}$$

将②、③式代入①式即得证.



习题A5图

习题 A5

1. 新、旧坐标系极轴的夹角为θ',如下图所示,单位矢量n,n'在新旧坐标系的球坐标分别记作

旧坐标系　　$n=(1,\theta,\phi)$,　$n'=(1,\theta',\phi')$;　　①

新坐标系　$n=(1,\Theta,\Phi)$,　$n'=(1,\Theta',\Phi')$.　　②

由于n'与z'轴重合,因此

$$\Theta'=0,\qquad \Phi'\text{ 不确定}. \tag{③}$$

(1)将

$$f(\theta,\phi)=\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi') \tag{④}$$

按球函数$\{Y_{lm}(\theta,\phi)\}$展开为广义傅里叶级数

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{⑤}$$

式中

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(l-|m|)!(2l+1)}{(l+|m|)!\ 4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{⑥}$$

由球函数的正交性,得展开系数

$$A_{lm}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\phi)Y_{lm}^{*}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')Y_{lm}^{*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=Y_{lm}^{*}(\theta',\phi'). \tag{⑦}$$

上式的积分已利用了δ函数的性质[见附录4的(3)式].将④式和⑦式代入⑤式,得

$$\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{⑧}$$

(2)设在新坐标系中,函数$f(\theta,\phi)=\delta(\cos\theta-\cos\theta')$具有如下形式

$$f[\theta(\Theta,\Phi),\phi(\Theta,\Phi)]=C\delta(\cos\Theta-\cos\Theta')=C\delta(\cos\Theta-1), \tag{⑨}$$

式中C为待定系数,上式已将$\Theta'=0$代入.

现在根据$f(\theta,\phi)$在新、旧坐标系对一切方向的积分值相等来确定常数C:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}C\delta(\cos\Theta-1)\sin\Theta\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\Phi, \tag{⑩}$$

令

$$x=\cos\theta,\quad x'=\cos\theta',\quad X=\cos\Theta, \tag{⑪}$$

则⑩式可简化为

$$\int_{-1}^{1}\delta(x-x')\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\delta(\phi-\phi')\mathrm{d}\phi=C\int_{-1}^{1}\delta(X-1)\mathrm{d}X\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Phi, \tag{⑫}$$

注意到δ函数在自变量全部变化范围(即定义域)内的积分值为1,便有

$$C=\frac{1}{2\pi}. \tag{⑬}$$

将⑬式代入⑨式后与④式联立,便有

$$\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1). \tag{14}$$

为书写方便,将上式的右边的函数记作$g(\cos\Theta)$.

(3)现在进一步将

$$g(\cos\Theta) = \frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1) \tag{15}$$

按勒让德函数$P_l(\cos\Theta)$展开为广义傅里叶级数

$$g(X) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(X), \qquad X = \cos\Theta. \tag{16}$$

由勒让德多项式的正交性,得展开系数

$$C_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} g(X)P_l(X)\mathrm{d}X = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2\pi}\delta(X-1)P_l(X)\mathrm{d}X$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi}P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}. \tag{17}$$

将⑰式代入⑯式,便有

$$g(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta). \tag{18}$$

由⑮式与⑱式联立,可得

$$\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta). \tag{19}$$

(4)将⑧式和⑲式代入⑭式,可得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta). \tag{20}$$

由$\{P_l(\cos\Theta)\}$的正交性,可见

$$P_l(\cos\Theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$= \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{(l-|m|)!(2l+1)}{(l+|m|)!4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi'}$$

$$\sqrt{\frac{(l-|m|)!(2l+1)}{(l+|m|)!4\pi}}P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

$$= \sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}P_l^{|m|}(\cos\theta')P_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{21}$$

(5)当研究轴对称问题时,$m = 0$,上式可简化为

$$P_l(\cos\Theta) = P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta). \tag{22}$$

注意,上式并非恒等式,只有用于轴对称问题时才成立.

主要参考书目

1 曹昌祺. 电动力学. 第二版. 北京:人民教育出版社,1962

2 郭硕鸿. 电动力学. 第二版. 北京:高等教育出版社,1997

3 蔡圣善,朱耘,徐建军编著. 电动力学. 第二版. 北京:高等教育出版社,2002

4 虞福春,郑春开编著. 电动力学. 修订版. 北京:北京大学出版社,2003

5 俞允强编著. 电动力学. 北京:北京大学出版社,1999

6 张泽瑜,赵钧. 电动力学. 北京:清华大学出版社,1987

7 刘连寿主编. 理论物理基础教程. 北京:高等教育出版社,2003

8 刘觉平编著. 电动力学. 南京:武汉:武汉大学出版社,1997

9 尹真编著. 电动力学. 南京:南京大学出版社,1999

10 汪映海著. 电动力学. 兰州:兰州大学出版社,1995

11 Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Field, 4th Rev. Eng. Cd., Tr. from the Russian by M. Hamermesh, Oxford, Pergamon, 1975

12 Jackson J D. Classical Electrodynamics. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1975

13 Landau L M, Lifshiz E M. Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition revised and enlarged. Pergamon Press, 1984

14 林璇英、张之翔编著. 电动力学题解. 北京:科学出版社,1999

15 王雪君编著. 电动力学解题指导. 北京:北京师范大学出版社,1998

15 中国科学技术大学物理辅导班主编,赵淑平,尤峻汉,朱俊杰审校. 美国物理试题与解答 2:电磁学. 合肥:中国科学技术大学出版社,1988

16 巴蒂金 B B,托普蒂金 И H 著,汪镇藩,郑锡琏译. 电动力学习题集. 北京:人民教育出版社,1964

17 维克斯坦 E Г 著,汪镇藩,郑锡琏译. 电动力学习题汇编. 北京:人民教育出版社,1981

18 白春礼编著. 扫描隧道显微术及其应用. 上海:上海科学技术出版社,1992 年

19 佘守宪编著. 导波光学物理基础. 北京:北京交通大学出版社,2002

20 吴重庆编著. 光波导理论. 北京:清华大学出版社,2000

21 张礼主编. 近代物理学进展. 北京:清华大学出版社,1997

22 杨纯斌,蔡旭编著. 夸克与轻子物理——原理导引. 武汉:华中师范大学出版社,2000

23 Snyder A W, Love J D. Optical waveguide theory. New York: Chapman and Hall, 1983

24 汪志诚. 热力学· 统计物理. 第三版. 北京:高等教育出版社,2003

25 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论. 北京:科学出版社,1984

26 梁昆淼编. 数学物理方法. 北京:人民教育出版社,1978

27 汪德新. 数学物理方法. 理论物理学导论第一卷. 第二版. 武汉:华中科技大学出版社,2001

28 杨福家著. 原子物理学. 第三版. 北京:高等教育出版社,2000

29 曾谨言. 量子力学导论. 第二版. 北京:北京大学出版社,1998

30 汪德新. 量子力学. 理论物理学导论第三卷. 第二版. 武汉:湖北科学技术出版社,2003