面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

电动力学

第二版

蔡圣善　朱　耘　徐建军　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

O462-43
C142

电动力学

第二版

蔡圣善　朱　耘　徐建军　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家级重点教材．本书是在原第一版（曾获国家教委优秀教材一等奖）的基础上修订而成的．全书系统地讲述了经典电动力学的基本概念、基本原理以及处理电磁体系的常用方法．第一、二章阐述电动力学的基本原理和对称性质；第三章至第五章讨论静态场，着重介绍静态场问题的各种解法；从第六章开始转入讨论动态场，第六章至第十章阐述似稳场、超导电动力学、电磁波传播、波导和等离子体电动力学；第十一章讨论狭义相对论和四维形式的电动力学；第十二、十三章讲述电磁波的辐射、散射、衍射；第十四章介绍电磁场的拉格朗日函数；最后，第十五章专门介绍关于麦克斯韦理论的讨论．为配合教学的需要，每章均附有一定数量的例题和习题．

本书可作为高等院校物理类、电子信息科学类以及电气信息类等专业的教材或参考书，也可供其他专业和社会读者阅读．

图书在版编目（CIP）数据

电动力学/蔡圣善等编著．—2版．—北京：高等教育出版社，2002．7
ISBN 7-04-010809-7

Ⅰ．电… Ⅱ．蔡… Ⅲ．电动力学-高等学校-教材 Ⅳ．0442

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第006608号

责任编辑 胡凯飞 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马静如 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 宋克学

电动力学 第二版
蔡圣善 朱 耘 徐建军 编著

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	中国科学院印刷厂		
		版 次	1984年4月第1版
开 本	787×960 1/16		2002年7月第2版
印 张	29	**印 次**	2002年7月第1次印刷
字 数	540 000	**定 价**	33.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第二版前言

本书第一版出版至今已有多年，在这期间作者陆续收到许多读者的来信，对本书的出版给予很大的支持和鼓励，1988 年，本书第一版曾获得国家教委优秀教材一等奖. 所有这些都令作者感到无比欣慰，与此同时，也有很多读者根据自己的教学实践指出了本书的不足之处. 概括起来主要表现在以下几个方面：一是本书的习题部分偏难且没有提示；二是本书的相对论部分引入了度规张量，增加了难度和复杂性；再就是本书的量大，内容偏多，很难在规定的学时内把全书的内容讲完. 这给许多读者和使用本书作为教材的同行带来不便. 针对这些情况，这次修订时我们作了较大的改进. 首先，我们调整了部分习题，把偏难和作为内容补充的习题删除，全部习题都给出了提示或解答. 其次我们重新改写了相对论部分，删去了度规张量. 作为教材，本书的内容确实偏多了一些，但作者又不愿对原书的体系作重大的改动，为此，作者除了删除个别内容外，采用了打星号的办法. 凡是打星号的章节，在课堂教学中都可以不讲，剩下的内容在 54 学时左右是可以完成的. 星号内容可以作为教师、同学的参考材料. 除此之外，其他有关部分也作了适当的改动，并尽可能把原书中的错漏之处作了修正. 尽管如此，限于作者的水平，书中难免还有不妥之处，诚恳地希望读者批评指正. 徐在新、倪光炯、贾起民、戴显熹等教授详细审阅了全部书稿并提出了许多重要的修改意见和建议，作者在此表示衷心感谢. 本书的编写和出版还得到了国家基础科学研究与教学人才培养基地的部分资助.

作　者

2001 年元月于复旦大学

第一版前言

本书是根据作者在物理系多年讲授本课程的讲义的基础上修改补充而成的.

在教学实践中我们体会到,一本好的教材不仅是一个好的"导游",把学生带进丰富多采的物理世界的某个领域,引人入胜地向学生们叙述这个领域的"名胜古迹",让他们从这里进一步领略大自然的奥妙和奇迹;而且它更是探索者的向导和挚友,因为它所面对的毕竟不是"游客",而是一批充满着学习热情、求知欲极其旺盛的青年学生,更确切地说是一批兴致勃勃的未知世界的探索者. 教学的目的不是让他们陶醉于已知世界的美景之中,而是保持并进一步激发起他们的热烈的求知欲望和理想,激励他们去钻研各种问题,勇敢地去思考、去探索、去追求、去创造.

诚然,担当这样的"导游"并不容易,而成为一个探索者的向导和挚友更加艰难,但无论如何这应当是我们的目标. 为此,我们在本书中尽可能地介绍足够的现代物理题材,让学生多接触一些新奇的、与现代物理密切相关的概念和论题,以期引起学生的注意和兴趣. 例如,在§1.9、§2.6、§2.8、§2.9等章节中,我们从电动力学的角度探讨了磁单极子及其电荷量子化;在规范变换不变性的讨论中涉及了规范场的概念,这些是现代物理中的前沿论题;与此同时对对偶场以及C、P、T守恒定律作了讨论. 再如,§2.7节叙述了阿哈朗诺夫－博姆效应,对矢势 $\boldsymbol{A}$ 的物理本质作了分析,这个效应的涵义极为深刻,曾使许多人颇受震惊. 电磁场角动量在一般教科书中常被忽略,其实这是个很值得讨论的题材,我们在全书的有关章节中都涉及了,并在§2.4节中,半经典地导出了光子的自旋. 还譬如,我们从电动力学的角度描述了超导电动力学和等离子体电动力学这两个领域的一些基本物理规律. 这两个领域在近几十年中取得了很大的进展,在应用方面前景广阔,之所以撰写这两章还出于我们希望教材能更多地联系实际的想法. 凡是与实际联系较为密切的内容我们都作适当的加强. 例如对第八章中电磁波传播的内容作了一定的充实;第九章波导问题本身是很实际的课题,其中我们专门讨论了多连通波导(§9.5),谐振腔频率的漂移和 Q 值的计算方法(§9.7),以及腔体频率微调理论(§9.8)等. 再如,对切连科夫辐射我们作了详细的分析,因为这是一个极为普遍的现象,而且有着很重要的应用. 电磁波的散射和衍射无论在应用物理(或实验物理)方面还是理论物理中都很重要,我们把

他单独列为一章. 我们在选材方面的第三个想法是适当选取能开阔学生思路、扩展学生眼界的题材,希望学生从中受到启发,给学生留下"悬念". 为此,我们尝试地写了最后一章,即第十五章,对麦克斯韦理论作了专门讨论,以便对此理论有个全面的概括了解. 在§15.6中对光子质量不为零可能引起的物理效应我们也作了讨论,以期加深学生对库仑定律的平方反比性的理解并让学生看到一种物理理论是如何与实验物理紧密相关. 总之,我们希望这些内容能活跃学生的思想.

在本书内容的叙述上,我们力图把物理模型的直观性和数学工具的简洁性结合起来,充分让学生发挥他们已掌握的数学知识和技能. 例如,复变函数、格林函数、特殊函数、数理方程、矩阵、张量分析等. 不回避必要的数学工具,既可使叙述简洁明了又能提高学生的演绎能力和抽象思维能力,后者也许更为重要,因为从某种意义上说,这是基础理论课程应当承担的义务. 为了便于学生自学和加强对概念的理解,公式的推导过程尽可能详细,每章都有一定数量的例题和习题,并且对大部分的习题给出了答案.

应当说明,我们所作的这些努力最多也只能算是一种启发性的尝试,尝试的目的在于抛砖引玉.

讲完本书的全部章节需要90个学时. 但我们考虑到各方面的需求,在章节内容的安排上有一定的独立性,因此教师可根据实际情况选择有关的章节进行讲授.

本书的许多内容曾在1982年、1983年召开的全国高等师范院校电动力学讨论会上讲授过,与会的各地同事们向我们提出了宝贵意见并表达了他们对本书修改后出版的热切期望. 如果本书对大家有所启发和裨益,也就了却了我们的心愿,并表达了我们的谢意. 我们还要感谢参加过电动力学教学小组的同志和物理系的各届学生,他们的认真讨论和质疑使我们受益匪浅.

本书的单位制原先采用高斯制,在付印前,国务院发布统一实行法定计量单位命令后,我们立即全部改为国际单位制. 由于时间仓促,加上作者水平有限,错误和不妥之处在所难免,乞望读者批评指正.

作 者

1984年4月于复旦大学

目　录

第一章　麦克斯韦方程组 …… (1)
§1.1　库仑定律　静电场的散度和旋度 …… (1)
§1.2　安培定律　静磁场的散度和旋度 …… (8)
§1.3　法拉第定律 …… (13)
§1.4　麦克斯韦方程组和洛伦兹力 …… (15)
§1.5　介质中的麦克斯韦方程组　电磁性质的本构关系 …… (18)
§1.6　交界面上麦克斯韦方程组的形式 …… (22)
§1.7　麦克斯韦方程组的完备性 …… (24)
*§1.8　对偶场 …… (26)
*§1.9　磁单极的奇异势 …… (28)
习题 …… (30)
第二章　电磁场的守恒定律和对称性 …… (33)
§2.1　电磁场的能量守恒定律 …… (33)
§2.2　电磁场的动量守恒定律 …… (36)
*§2.3　电磁场的角动量守恒定律 …… (40)
*§2.4　光子的自旋 …… (42)
§2.5　介质中的电磁能量和动量守恒定律 …… (44)
*§2.6　规范不变性和磁单极的奇异弦 …… (46)
*§2.7　阿哈朗诺夫－博姆(Aharonov－Bohm)效应 …… (52)
*§2.8　电荷的量子化 …… (54)
*§2.9　CPT 反演不变性 …… (57)
习题 …… (59)
第三章　导体和电介质静电学 …… (61)
§3.1　静电问题 …… (61)
§3.2　导体静电学 …… (63)
§3.3　导体系的能量、固有能和相互作用能 …… (64)
§3.4　静电体系的稳定性问题 …… (68)
§3.5　格林互易定理 …… (68)
§3.6　导体表面所受的静电力 …… (70)
§3.7　电介质静电学 …… (73)
*§3.8　极化率的经典微观模型 …… (75)
*§3.9　晶体电介质 …… (77)

*§3.10 介电常数增加的效应 …… (79)
*§3.11 混合物介电常数的立方根相加律 …… (80)
*§3.12 关于作用在介质上的静电力的讨论 …… (82)
习题 …… (84)
第四章 静电场边值问题的解法 …… (86)
§4.1 唯一性定理 …… (86)
§4.2 镜象法 …… (87)
§4.3 特解法 …… (94)
§4.4 格林函数法 …… (103)
§4.5 多极矩法 …… (107)
§4.6 多极矩同外场的相互作用 …… (113)
习题 …… (115)
第五章 静磁场 …… (117)
§5.1 稳定电流分布的普遍定理 …… (117)
§5.2 磁场的矢势方程和边值关系 …… (121)
§5.3 静磁场的唯一性定理 …… (122)
§5.4 二维问题 …… (123)
§5.5 旋转对称的三维问题 …… (126)
§5.6 磁偶极子 …… (128)
§5.7 磁介质中的磁场 …… (135)
*§5.8 永久磁铁在介质中激发的磁场 …… (139)
§5.9 作用在磁介质上的静磁力 …… (140)
习题 …… (140)
第六章 似稳场 …… (142)
§6.1 似稳条件 …… (142)
§6.2 似稳场方程 场的扩散 …… (143)
§6.3 线型导线中的电工学方程 …… (144)
§6.4 导体表面层内的场分布 趋肤效应 …… (146)
*§6.5 反常趋肤效应 …… (149)
*§6.6 地球磁场的起源 …… (151)
习题 …… (153)
***第七章 超导电动力学** …… (154)
§7.1 超导体的电磁性质 …… (154)
§7.2 伦敦方程 …… (156)
§7.3 超导体中的电流分布 …… (160)
§7.4 居间态 …… (160)
§7.5 磁通俘获和磁通量子化 …… (162)
§7.6 皮帕非定域理论 …… (164)

习题 …… (167)
第八章　电磁波的传播 …… (168)
§8.1　电磁波在非导电介质中的传播 …… (168)
§8.2　波的偏振和偏振矢量 …… (171)
§8.3　电磁波在导电介质中的传播 …… (173)
§8.4　电磁波在等离子体中的传播 …… (177)
§8.5　各向异性介质中单色平面波的结构 …… (180)
§8.6　电磁波在介质面上的反射和折射 …… (183)
§8.7　全反射 …… (187)
*§8.8　电磁波在金属面上的反射和折射 …… (190)
*§8.9　电磁波在非均匀介质内的传播 …… (194)
*§8.10　介电常数的色散定律 …… (197)
*§8.11　介质的色散模型 …… (200)
*§8.12　群速度 …… (202)
习题 …… (204)
第九章　波导和谐振腔 …… (206)
§9.1　波导管中的场方程和边界条件 …… (206)
§9.2　矩形波导 …… (209)
§9.3　圆柱形波导 …… (213)
*§9.4　波导中的能流和能量的损耗 …… (215)
*§9.5　多连通截面波导 …… (218)
§9.6　谐振腔 …… (221)
*§9.7　谐振腔的品质因子和本征频率漂移 …… (224)
*§9.8　谐振腔频率的微调 …… (227)
习题 …… (229)
***第十章　等离子体电动力学** …… (231)
§10.1　等离子体的基本特征 …… (231)
§10.2　基本方程和广义欧姆定律 …… (233)
§10.3　磁场的冻结和扩散效应 …… (237)
§10.4　$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移和抗磁性漂移 …… (239)
§10.5　无作用力磁场与丝状电流 …… (240)
§10.6　箍缩效应 …… (242)
§10.7　电磁流体的不稳定性 …… (243)
§10.8　等旋定律 …… (245)
§10.9　磁流体力学波和磁声波 …… (247)
§10.10　等离子体振荡和电子等离子体波 …… (250)
§10.11　等离子体的介电常数和朗道阻尼 …… (253)
习题 …… (255)

第十一章 狭义相对论和相对论电动力学 …… (256)
§11.1 爱因斯坦的基本假定 …… (256)
§11.2 闵可夫斯基空间和洛伦兹变换 …… (260)
§11.3 相对论时空性质 …… (264)
§11.4 物理规律协变性的数学形式 …… (272)
§11.5 麦克斯韦方程的协变形式 …… (275)
§11.6 对偶场张量 …… (279)
§11.7 电磁场的变换公式 …… (280)
§11.8 电磁场的不变量 …… (283)
*§11.9 电磁场的能量、动量和角动量的协变形式 …… (285)
*§11.10 介质中的麦克斯韦方程的协变形式 …… (288)
§11.11 相对论力学 …… (291)
习题 …… (297)
第十二章 电磁波的辐射 …… (300)
§12.1 推迟势 …… (300)
§12.2 多极辐射 …… (303)
§12.3 多极辐射的对偶性 …… (309)
§12.4 线型天线辐射 …… (314)
§12.5 天线阵 …… (316)
§12.6 李纳－维谢尔势 …… (320)
§12.7 运动带电粒子的电磁场 …… (322)
§12.8 非相对论运动带电粒子的辐射 …… (324)
§12.9 一般带电粒子的辐射 …… (325)
*§12.10 运动带电粒子辐射的频谱分析 …… (328)
*§12.11 切连科夫辐射 …… (332)
*§12.12 跃迁辐射 …… (337)
*§12.13 辐射阻尼和辐射角动量损失 …… (339)
§12.14 谐振子辐射谱线的自然宽度 …… (341)
习题 …… (343)
第十三章 电磁波的散射和衍射 …… (346)
§13.1 自由电子对电磁波的散射(汤姆孙散射) …… (346)
§13.2 束缚电子对电磁波的散射 偶极求和规则 …… (348)
*§13.3 多电子体系对电磁波的散射 …… (352)
*§13.4 电磁波在宏观物体上的散射 …… (354)
*§13.5 玻恩近似法 …… (356)
*§13.6 光学定理 …… (358)
*§13.7 电磁波在晶体上的衍射 …… (360)
§13.8 基尔霍夫衍射理论 …… (361)

§13.9　夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射 …… (364)
*§13.10　超声波对电磁波的衍射 …… (368)
习题 …… (371)
第十四章　电磁理论的拉氏形式 …… (372)
§14.1　作用量原理 …… (372)
§14.2　电磁场中带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数 …… (374)
*§14.3　准确到二级的带电粒子系的拉格朗日函数 …… (379)
*§14.4　电磁场的拉格朗日函数 …… (382)
*§14.5　电磁场的哈密顿函数 …… (386)
*§14.6　电磁场的量子性 …… (387)
习题 …… (389)
***第十五章　关于麦克斯韦理论的若干讨论** …… (391)
§15.1　阿伯拉罕－洛伦兹模型 …… (391)
§15.2　经典电动力学的适用界限 …… (395)
§15.3　匀速运动电荷的电磁场的能量、动量的非协变性 …… (397)
§15.4　庞加莱张力张量 …… (399)
§15.5　改进麦克斯韦理论的尝试 …… (400)
§15.6　光子的静质量 …… (404)
§15.7　电动力学和电荷守恒定律 …… (407)
附录 …… (410)
一、矢量公式 …… (410)
二、并矢公式 …… (411)
三、曲线坐标中的矢量微分公式 …… (411)
四、单位制换算表 …… (412)
五、δ函数与电荷分布 …… (415)
六、球谐函数的常用公式 …… (417)
七、贝塞尔函数的常用公式 …… (418)
八、重要的物理常数(国际单位制) …… (420)
习题答案与提示 …… (421)
参考文献 …… (450)

第一章　麦克斯韦方程组

本章将从基本的电磁实验定律出发建立真空中的麦克斯韦方程组. 并从微观角度论证存在介质时的麦克斯韦方程组的形式及其电磁性质的本构关系. 继而给出麦克斯韦方程组在边界上的形式. 最后讨论方程组的完备性和电磁场的对偶性.

§1.1　库仑定律　静电场的散度和旋度

1. 库仑定律

库仑定律是描写真空中两个静止点电荷 q_1 和 q_2 之间相互作用力的定律，其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{R}_{21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^3}, \tag{1.1}$$

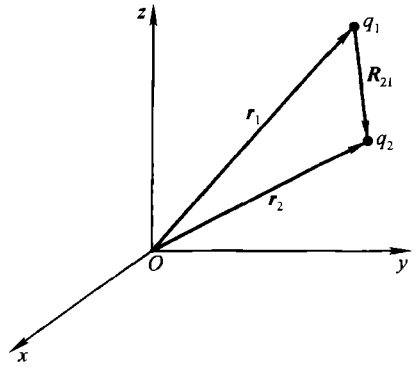


图 1.1

如图 1.1 所示，式中的符号 $\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 表示点电荷 q_1 到 q_2 的矢径；$\boldsymbol{F}_{21}$ 表示电荷 q_1 对 q_2 的作用力. 同理，q_2 对 q_1 的作用力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 是

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{1.2}$$

库仑定律的内容已为大家所熟知. 这里要着重指出的是：该定律在电磁学

发展史上占有重要的地位,库仑定律的发现使人们对电现象由定性的研究过渡到定量的研究,这是电学研究的转折点. 特别是它的平方反比律性质,不仅是高斯定理的基础,而且隐含着光子质量为零这样一个深刻的物理意义(对这个问题我们将在第十五章专门讨论). 现代实验证明*,如果库仑力正比于$\frac{1}{r^{2+\delta}}$,则 δ 的极限值为$(2.7\pm3.1)\times10^{-15}$.

2. 叠加原理

库仑定律所说明的只是空间存在的两个点电荷之间的相互作用. 实际上往往同时存在多个电荷,这时任意两个电荷之间的相互作用的规律是什么呢? 每个电荷受到多大的作用力呢? 总结了更多的实验事实后人们发现,若空间存在 n 个电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$,这时任意一个电荷,例如 q_j 受到的其余电荷对它的作用力可表示为

$$\boldsymbol{F}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_j q_i \boldsymbol{R}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad (i \neq j). \tag{1.3}$$

(1.3)式即是电动力学中的**线性叠加原理**. 这是经典电动力学中一个十分重要的原理,其重要性不仅仅在于给计算多个带电体之间的相互作用带来了方便;更重要的是,正是这一线性叠加原理,才使得真空中的麦克斯韦方程组是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的线性方程组,电磁规律才得以像现在这样简单明了. 原理是假设性的,它并不能从理论本身中产生,其可靠性需要由实践来检验. 迄今为止,在经典范围内和我们可以达到的场强下还没有找到一个反例显示出线性叠加原理失效. 在多电子原子的量子理论中,用势的线性叠加来处理原子核和电子之间、电子和电子之间的相互作用获得了巨大的成功,这表明在亚原子领域内,真空中的电场仍具有经典的线性特性.

实际上电荷分布是不连续的,因为电荷是量子化的,任何物体所带的电荷总是电子电荷的整数倍. 但在考查物体的宏观性质时,能观察到的总是大量微观粒子的平均效应,因此常用电荷连续分布的概念来代替电荷的分立性.

定义电荷体密度为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta\tau},$$

其中 ΔQ 是空间任一体积元 $\Delta\tau$ 中的电荷量. 因此一个点电荷受到一个电荷连续分布的带电体的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau, \tag{1.4}$$

---

* E. R. Williams, J. E. Faller and H. A. Hill, Phys. Rev. Lett., 26 (1971) 721.

式中 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathrm{d}\tau$ 指向 q 的位置矢量.

同理,一个电荷连续分布的带电体受到另一个电荷连续分布的带电体的作用力为

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\int_{V_2}\frac{\rho_1\rho_2\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2, \tag{1.5}$$

式中 ρ_1、ρ_2 分别表示第一个带电体和第二个带电体的电荷体密度,$\boldsymbol{R}_{12}$ 是体积元 $\mathrm{d}\tau_2$ 指向 $\mathrm{d}\tau_1$ 的相对位置矢量.

虽然电荷的真实分布是电荷体分布,但在实际情形中会碰到电荷集中分布在靠近物体表面的一个薄层内,此时我们常引入电荷面密度来描述这种电荷分布. 如图 1.2,若电荷分布在表面薄层 h 内,用 ΔS 代表表面上任一小面积元,则体积元 $h\Delta S$ 内的电荷量为

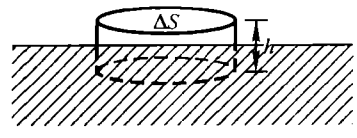


图 1.2

$$\Delta Q = \rho(h\Delta S).$$

我们把下面比值的极限值

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} = \rho h$$

定义为**电荷面密度**. 显然理想的电荷面密度是 $h\to 0$ 的极限情形,这时只有当电荷体密度 ρ 在边界上的分布是奇异时,电荷面密度 σ 才可能是不为零的有限值. 把(1.4)和(1.5)式中的 $\rho\mathrm{d}\tau$ 改成 $\sigma\mathrm{d}S$,则可得电荷以面密度形式分布时的相互作用力的表达式. 注意,我们在写出(1.4)和(1.5)式时应用了线性叠加原理.

3. 电场

从库仑定律中我们看到,在一个给定电荷分布的空间内某一点放置一个点电荷 q,此点电荷所受的力由两个因素决定:一是点电荷本身的位置及其电荷量的大小;二是给定电荷的分布和电荷量的大小. 由于放置点电荷 q 将可能会影响给定电荷的分布;或者说,原先的电荷分布将重新改变成另一种分布,因此为了使问题简单,我们在讨论电荷 q 的运动时,常把其余电荷看作保持原先的分布,即其余电荷的相对位置都是固定不变的. 于是,作用在电荷 q 上的力仅与该电荷的电荷量 q 及其位置有关,即

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是点电荷 q 所在的位置矢量,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的某一矢量函数. 把上式与库仑定律(1.3)式比较,可以看出

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}, \tag{1.6}$$

或与(1.4)式比较得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau', \tag{1.7}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是观察点 P 的位置矢量，$\boldsymbol{r}'$ 是 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 的位置矢量，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. 由(1.6)或(1.7)式可知，要讨论点电荷 q 的运动就要知道它所受到的作用力，求作用力又归结为求函数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，而它决定于除 q 以外空间其余电荷的分布. 这个函数称为**电场强度**.

引入 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 后，我们可清楚地看到，电荷之间的相互作用不再是“超距”的，它们之间是通过场 $\boldsymbol{E}$ 的传递才发生相互作用的；电场可以在空间的无源区域存在. 如果两个不同分布的源在空间某点上产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 相等，则在该点上放置的点电荷 q，就受到两个相等的力. 场的概念是极其重要的，是最有成效的物理概念之一，它渗透了物理学的各个领域.

4. 高斯定理

现在，我们来具体分析一下电荷分布产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的一般性质. 所谓电场其实是带电体周围的一个特殊空间，其特殊性表现在：当我们在这个空间放入一个点电荷时，点电荷就会受到作用力. 空间是由点、线、面构成的，空间的不同性质表现为这些空间的线积分、面积分的不同. 因此电场的性质也应由它的线积分和面积分来表征.

先讨论场量 $\boldsymbol{E}$ 的面积分，利用(1.6)式，对空间任一封闭曲面 S 作 $\boldsymbol{E}$ 的面积分，可得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\sum_i \frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i^3}q_i.$$

因为

$$q_i\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i^3} = q_i\cos\theta_i\frac{\mathrm{d}S}{R_i^2} = q_i\mathrm{d}\Omega_i,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是曲面 S 上 $\boldsymbol{r}$ 处的小面积元，$\mathrm{d}\Omega_i$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对 $\boldsymbol{r}_i$ 处的电荷 q_i 所张的立体角元，θ_i 是面元 $\mathrm{d}S$ 的外法线方向与 $\boldsymbol{R}_i$ 的夹角. 所以

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\oint_S \mathrm{d}\Omega_i.$$

注意，$\mathrm{d}\Omega_i$ 是有正有负的，这取决于 $\boldsymbol{R}_i$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 之间夹角 θ_i 是小于 $\frac{\pi}{2}$ 还是大于 $\frac{\pi}{2}$.

因此，如果电荷 q_i 在封闭曲面 S 内，则 S 对 q_i 所张的总立体角 $\oint\mathrm{d}\Omega_i = 4\pi$；如

果电荷 q_i 在封闭曲面 S 外，则 S 对 q_i 所张的总立体角 $\oint \mathrm{d}\Omega_i = 0$．于是我们得到

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q/\varepsilon_0,$$

其中 Q 仅仅是封闭曲面 S 内的总电荷．若电荷连续分布时上式可改写成

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}\tau, \tag{1.8}$$

其中 V 是封闭曲面 S 所包围的体积．方程(1.8)称为**高斯定理**，它是静电场的基本方程．利用公式 $\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau$，方程(1.8)变成

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right)\mathrm{d}\tau = 0.$$

由于曲面是任意选取的，所以被积函数为零，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{1.9}$$

(1.9)式即是高斯定理的微分形式．

注意，高斯定理不仅依赖于线性叠加原理和力的有心性质，而且是力的平方反比律的必然结果．由万有引力定律直接推知，引力场也存在高斯定理．

【例】 考察半径为 R 的一个带电导体球壳，总电荷量为 Q．如设静电力服从 n 次方反比律，试计算距离球心为 r 处的电场．

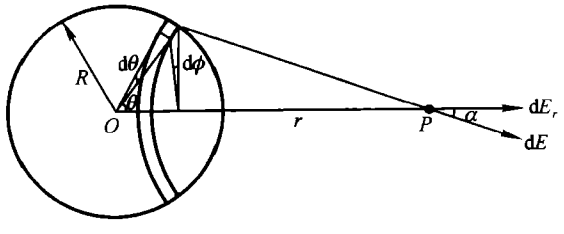


图 1.3

解 如图 1.3 所示，因为力按 n 次方反比律，所以电场是

$$\mathrm{d}E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{n/2}}\cos\alpha,$$

式中 σ 为电荷面密度．因为 $\cos\alpha = (r - R\cos\theta)/(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}$，故

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R^2 \sin\theta(r - R\cos\theta)\mathrm{d}\phi}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

作积分变量代换，令

$$u = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta, \mathrm{d}u = 2rR\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

则上述积分可写成

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{\pi\sigma R(u + r^2 - R^2)\mathrm{d}u}{2r^2 u^{(n+1)/2}},$$

于是得到

$$E_r = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\{(r+R)^{2-n}[r(2-n)-R]-$$

$$(r-R)^{2-n}[r(2-n)+R]\} \quad (r>R);$$

$$E_r = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\{(R+r)^{2-n}[r(2-n)-R]+$$

$$(R-r)^{2-n}[r(2-n)+R]\} \quad (r<R).$$

我们对上述结果作一些讨论：

(1) 如果 $n=2$，则 $r<R$ 时，$E_r=0$；$r>R$ 时，$E_r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，结果与高斯定理计算结果一致.

(2) 如果 $1<n<2$，则在带电球内部 $E_r>0$. 我们不妨设想在导体内部还有一个同心导体球，两球之间用细导线连接，则可知内导体上必存在负电荷分布.

(3) 如果 $2<n<3$，则在导体球壳内 $E_r<0$，同样可以设想内导体球上将存在正的电荷分布.

由此可见，精确测量内导体球上存在的电荷量值就可以判断平方反比律的成立精度.

5. 静电场的旋度

高斯定理只确定了电场线的发散和会聚，对电场线可能存在的其他形式却不能提供任何信息. 如闭合电场线，它在空间任何地方的散度都为零. 所以，仅仅有高斯定理还不足以决定空间的性质，还必须讨论空间的线积分性质.

由静电场的表达式(1.7)式，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\left(-\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau'.$$

由于∇是对观察点的位置微商，所以上式可写成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi,$$

而

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'. \tag{1.10}$$

这样，$\boldsymbol{E}$ 的线积分可写成，

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_C \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中 C 是任意闭合曲线. 利用斯托克斯公式 $\oint_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，上式可变为

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S(\nabla\times\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,$$

因此有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.11}$$

方程(1.11)式是静电场的又一个基本方程. 根据基本方程式(1.9)和(1.11)式,我们可知:

(1) 静电场是有源无旋场,电场线不闭合,从正电荷出发到负电荷终止,有头有尾.

(2) 静电场的场强可表示为标函数的负梯度,即 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$. 因此,它是保守场,电荷在场中沿闭合曲线运动一周电场力做功为零.

(3) 因为 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$, $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$,故有

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.12}$$

这表示静电标势 φ 满足泊松方程,(1.10)式是它的特解.

(4) 把(1.10)式中 $\rho \mathrm{d}\tau'$ 改成 $\sigma \mathrm{d}S'$,即得面电荷产生的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'}{R}. \tag{1.13}$$

6. 电偶极子和电偶层

电偶极子是大家所熟悉的,它的特性可以用电偶极矩(简称电矩)来表示,其定义为

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\substack{l\to 0 \\ q\to\infty}} l q .$$

电偶极子产生的电势可由下法求得,如图 1.4 所示,若有 $\pm q$ 相距一有限距离 l,则此体系在 P 点的电势为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \cdots$$

当 $l\to 0$, $q\to\infty$ 时 $lq = p$,电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的取向由负电荷指向正电荷. 于是,电偶极子的势

$$\lim_{\substack{l\to 0 \\ q\to\infty}} \varphi = p\,\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}. \tag{1.14}$$

由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$,不难算得沿 z 轴的电偶极子的场为

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \\ E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \\ E_\phi = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

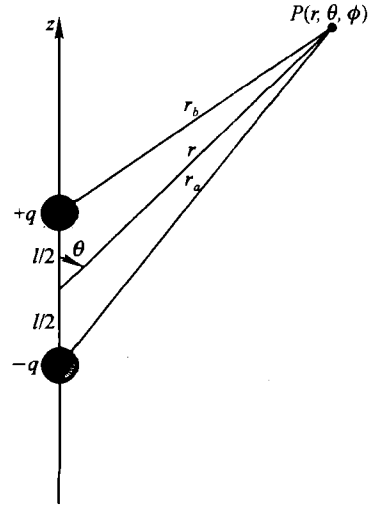


图 1.4

由电偶极子组成的面称为**电偶层**，可把它看成是由正负面电荷相距一无限小距离的极限情况．电偶层强度 $\boldsymbol{D}$ 定义为单位面积上的电偶极子，即

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\lim_{\substack{l\to 0\\ \sigma\to\infty}} l\sigma .$$

如图 1.5，电偶层在观察点 P 所产生的电势为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}S' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}S' \\ &= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int D(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega , \qquad (1.16)\end{aligned}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega$ 为面积元 $\mathrm{d}S'$ 对观察点 P 所张的立体角．注意：当观察点面对着偶极层“内”侧时 $\mathrm{d}\Omega$ 为正，反之为负．

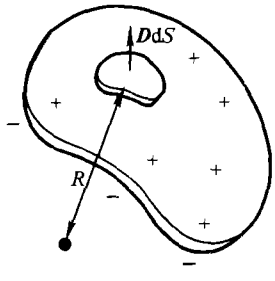


图 1.5

思考题　试证明电偶层两侧的电势有 $\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ 的跃变．

§1.2　安培定律　静磁场的散度和旋度

这里，我们对磁现象的研究将不按历史发展的顺序叙述，而直接从电流与电流之间的相互作用力出发．由于安培定律在静磁学中的地位同库仑定律在静电学中的地位相当，所以本节中的电流元相当于上一节中的点电荷．我们先来叙述和电流有关的概念，然后讲安培定律．

1．电流和电荷守恒定律

电流密度　电荷的运动产生电流，通常我们用电流密度 $\boldsymbol{j}$ 来描写，其定义是

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v} , \qquad (1.17)$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 代表电荷密度 ρ 运动的速度．

电流　单位时间内垂直穿过导线横截面的电荷量称为电流，用 I 表示．显然 I 与 $\boldsymbol{j}$ 的关系为

$$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} . \qquad (1.18)$$

电荷守恒　实验表明电荷是守恒的，即一处电荷增加了，另一处电荷必然减少，而且增加和减少的量值相等．若在空间内任取一封闭曲面 S，单位时间内穿

过 S 曲面流出去的电荷量为

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

流出去的电荷量应等于封闭曲面 S 内总电荷在单位时间内的减少量,即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}\tau,$$

V 是 S 所包围的体积,所以

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}\tau.$$

根据高斯定理,有

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot \boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau.$$

若选取的封闭曲面 S 不随时间变化,则

$$\int_V \left(\nabla\cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau = 0.$$

由于曲面 S 是任意选取的,所以被积函数恒为零,即

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.19}$$

(1.19)式是电荷守恒定律的数学表达式,也称**连续性方程**.

在稳定电流情况下,由于$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$,所以

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{1.20}$$

这表示稳定电流线是闭合的.

电流线密度 实际工作中常遇到电流集中分布在物体表面一薄层内流动的情形. 为此引入电流线密度的概念.

如图 1.6,设电流集中在导体表面厚度为 h 的薄层内流动,其横截面为 $\Delta \boldsymbol{S} = (h\Delta l)\boldsymbol{e}$,于是穿过横截面 $\Delta \boldsymbol{S}$ 的电流为

$$\Delta I = \boldsymbol{j}\cdot \Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{e}h\Delta l = (h\boldsymbol{j})\cdot \boldsymbol{e}\Delta l.$$

令 $\boldsymbol{\alpha} = h\boldsymbol{j}$,则上式可写成

$$\Delta I = \boldsymbol{\alpha}\cdot \boldsymbol{e}\Delta l.$$

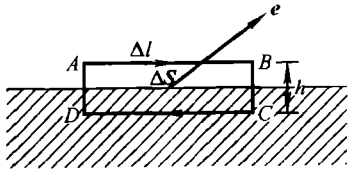


图 1.6

$\boldsymbol{\alpha}$ 称为**电流线密度**,它表示单位时间内垂直通过单位长度(即 $\Delta l = 1$)的电荷量. 理想面电流是 $h\to 0$ 的极限情形,即只有当电流密度 $\boldsymbol{j}$ 在边界面上为奇异时,电流线密度 $\boldsymbol{\alpha}$ 才有限而不为零.

2. 欧姆定律

导体中电流和电场之间存在某种关系,实验表明,在许多情况下存在下述经

验公式：

$$\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}, \tag{1.21}$$

式中 σ_c 称为电导率*，它与导体的性质有关. (1.21)称为欧姆定律的微分形式.

(1.21)式只表示电场激励电荷的运动而产生的电流. 除此之外，还存在一些非静电力，如金属接触面上出现的接触电势差、电池中的化学势等等，它们亦促使电荷运动而产生电流. 这些"外来"的作用力(非静电力)是维持导体中电流稳定流动的必要条件，我们用相应的等效电场强度 $\boldsymbol{E}'$ 来表示. 所以，一般情况下，欧姆定律的形式为

$$\boldsymbol{j}=\sigma_c(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'). \tag{1.22}$$

当然，$\boldsymbol{E}'$ 不是真正的电场强度，只在引起电流这一意义上才把 $\boldsymbol{E}'$ 看成电场.

思考题 试证明 σ_c 的正值性.

---

3. 安培定律

安培首先建立了电流与电流之间的相互作用力的关系. 若真空中有两个稳定的电流元 $\boldsymbol{j}_1\mathrm{d}\tau_1$ 和 $\boldsymbol{j}_2\mathrm{d}\tau_2$，则电流元 $\boldsymbol{j}_1\mathrm{d}\tau_1$ 受到 $\boldsymbol{j}_2\mathrm{d}\tau_2$ 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0\boldsymbol{j}_1\mathrm{d}\tau_1\times(\boldsymbol{j}_2\mathrm{d}\tau_2\times\boldsymbol{R}_{12})}{4\pi R_{12}^3}, \tag{1.23}$$

同理，$\boldsymbol{j}_2\mathrm{d}\tau_2$ 受到 $\boldsymbol{j}_1\mathrm{d}\tau_1$ 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0\boldsymbol{j}_2\mathrm{d}\tau_2\times(\boldsymbol{j}_1\mathrm{d}\tau_1\times\boldsymbol{R}_{21})}{4\pi R_{21}^3}. \tag{1.24}$$

把(1.23)和(1.24)式与库仑定律(1.1)和(1.2)式比较，我们看到：

(1) 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律.

(2) 电流元之间作用力的方向不再具有有心性质.

(3) 从(1.23)和(1.24)式看出，电流元之间的相互作用力不满足牛顿的作用力与反作用力定律，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}\neq-\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}$，这与库仑定律完全不同. 这是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能做的只能是闭合回路的情况.

为了讨论闭合回路情形，我们仍设电流元之间的相互作用与电荷间相互作用一样满足线性叠加原理. 于是，在线电流分布的条件下，只要将式中 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 改用 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，即得线电流元间的相互作用力. 这样，两闭合回路间的相互作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}. \tag{1.25}$$

---

* 习惯上，电导率和电荷面密度都用 σ 表示. 我们用 σ_c 表示前者，σ 表示后者，以示区别.

可以证明,闭合回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律,即 $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$. 因此,安培定律(1.23)式只是(1.25)式外推所得到的结果,仅仅为了使电流元和点电荷的地位相当才把定律写成(1.23)的形式的

4. 磁场

类似于§1.1节,我们也可以由安培定律引入磁场的概念. 将作用在电流元 $\boldsymbol{j}_1 \mathrm{d}\tau_1$ 上的力写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{j}_1 \mathrm{d}\tau_1 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}). \tag{1.26}$$

把上式与安培定律进行比较,即得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{j}_2 \mathrm{d}\tau_2 \times \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}.$$

由叠加原理,矢量函数 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的一般形式为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau' \times \boldsymbol{R}}{R^3}, \tag{1.27}$$

式中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}'$是$\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau'$的位置矢量,$\boldsymbol{r}$ 是观察点 P 的位置矢量. 对于线电流,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{R}}{R^3},$$

函数 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$称为**磁感应强度**(纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度).

若有一电荷 q 以速度$\boldsymbol{v}$ 运动,则它所产生的磁感应强度由(1.27)式可得(严格地说 $v \ll c$(光速),且忽略加速度时)

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\boldsymbol{v} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}, \tag{1.28}$$

式中 R 是电荷到观察点的距离.

以速度$\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的磁场中所受的力可由(1.26)式直接得出:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.29}$$

5. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的散度和旋度

类似于静电场,所谓磁场就是电流周围的特殊空间,讨论磁场的性质只要讨论这一特殊空间的面积分和线积分,即空间各点的散度和旋度.

因为,由电流激发的 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$的表达式(1.27)可写成

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \frac{1}{R}\right) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau',$$

式中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$,$\nabla$ 是对观察点坐标 $\boldsymbol{r}$ 微商,所以

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla \times \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} - \frac{1}{R} \nabla \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\right] \mathrm{d}\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau' = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{1.30}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'}{R}.$$

因此,如果对 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 求散度,则得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{1.31}$$

下面来求 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 的旋度. 由(1.30)式得

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}.$$

先看第一项: $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'}{R}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \frac{1}{R} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \frac{1}{R} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{R}\nabla' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'.$$

由于现在讨论的是稳定电流,故

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 0,$$

于是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'.$$

因为体积分是对电流所在空间的积分,故可以扩展到全空间,于是面积分即是对无穷远的边界面积分,由于电流分布在有限区域,无穷远处电流密度为零,所以上述积分为零,即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0.$$

再看第二项: $\nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla^2 \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla^2 \frac{1}{R}\mathrm{d}\tau' = -\mu_0 \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{R})\mathrm{d}\tau',$$

其中用到了 $\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})$ 的关系式,所以

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\big|_{R=0} = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}),$$

最后得到 $\boldsymbol{B}$ 的旋度为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}). \tag{1.32}$$

(1.32)式称为安培环路定理的微分形式. (1.31)和(1.32)式是静磁场的基本方程. 我们看到:

(1) 磁场是无源有旋场,磁场线是闭合的,没有起点也没有终点,无头无尾.

(2) 磁场是非保守场,电流激发的磁场是以涡旋形式出现的,与静电场截然不同.

(3) 磁感应强度可表示为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度,$\boldsymbol{A}$ 称为**矢势**,稳定电流激发的磁场的矢势满足下述方程:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0.$$

§1.3 法拉第定律

自从发现了电流的磁效应之后,人们一直在研究是否存在相反的效应,即磁场能不能导致电流. 法拉第首先从实验上定量地研究了变化的磁场和电场之间的联系. 若有 A、B 两个相邻闭合电路,它们分别通有电流. 让 A、B 两电路作下述几种运动:

(1) B 电路相对于 A 电路运动;

(2) A 电路相对于 B 电路运动;

(3) 两电路相对静止,只改变 B 电路中的电流;

(4) 用永久磁铁代替 B 电路,并相对于 A 电路运动.

对于上述几种运动,站在 A 电路附近的相对 A 电路静止的观察者只注意 A 电路的变化,他发现:只要穿过 A 电路的磁通量发生变化,则 A 电路中立即出现附加的电流,不管这种磁通量的变化是如何引起的. 这种电流称为**感应电流**,对应这种感应电流的电动势称为**感应电动势**. 实验表明,感应电动势与磁通量的变化之间的定量关系为

$$\mathscr{E}_{感} = -K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.33}$$

另一方面,导体电路中的感应电动势又可写为

$$\mathscr{E}_{感} = \oint_C \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

式中 $\boldsymbol{E}'$ 是电路 C 上线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处的电场. 因此,(1.33)式可改写成

$$\oint_C \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -K \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.34}$$

上式表示,在任意回路中激发起来的感应电动势与以回路为边界的曲面上所通过的磁通量的变化率成正比. 等式前的负号是楞次定律所要求的,它表明感应*电流的方向与磁通量增加方向组成反右手定则*(或左手定则). 对于式中的常数 K,我们将在后面证明,在 SI 中 $K = 1$.

如果导体回路相对于实验室静止不动,形状也不随时间改变,等式中的 $\boldsymbol{E}'$

和 $\boldsymbol{B}$ 即为实验室系测量的电场和磁场. 这时,我们把电场 $\boldsymbol{E}'$ 记为 $\boldsymbol{E}$,将(1.34)式右边对时间的微商与积分号交换位置,即

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -K\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.35a}$$

利用斯托克斯定理,上式的左边为

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

所以有

$$\oint_S \left(\nabla\times \boldsymbol{E} + K\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

因为积分曲面是任意的,所以得到

$$\nabla\times \boldsymbol{E} + K\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0. \tag{1.35b}$$

(1.35b)式是法拉第电磁感应定律的微分形式,式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相对于同一参考系定义的,具有普遍意义.

若电路以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着某一方向运动,如图 1.7 所示,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \oint \boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{v}).$$

等式右边的第一项是 $\boldsymbol{B}$ 随时间改变引起的磁通变化,第二项表示回路运动引起的磁通量变化. 此时,(1.34)式可写为

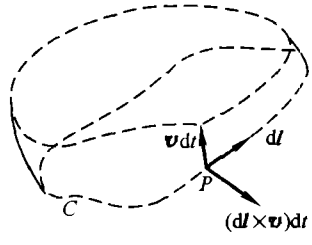


图 1.7

$$\oint_C \boldsymbol{E}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -K\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + K\oint_C (\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

式中 S 是以 C 为周界的曲面. 注意,上式中的 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是在不同参考系中观察的:$\boldsymbol{B}$ 是相对于实验室参考系的,$\boldsymbol{E}'$ 是相对于回路参考系的. 我们把上式改写成

$$\oint_C [\boldsymbol{E}' - K(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B})]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -K\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.36}$$

(1.36)式的右边正好与回路无运动时的表达式(1.35a)一致;换句话说,我们可以把(1.36)式看成是回路在某一瞬间相对于实验室静止时的法拉第定律. 因此我们令

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - K(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B}), \tag{1.37}$$

则(1.36)式可写成

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -K\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

$\boldsymbol{E}$ 为相对实验室系测量的电场强度. 把上式写成微分形式即为(1.35b)式.

(1.37)式代表两个不同参考系中电场强度的变换关系.

因为在相对于回路静止的参考系中电荷 q 受到的电场力为 $\boldsymbol{F}'=q\boldsymbol{E}'$,而在实验室系的观察者看来电荷在以 $\boldsymbol{v}$ 运动,所以所受的力为 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$(其中第二项是由(1.29)式决定的磁场力). 根据相对性原理 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$,即 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$,把它与(1.37)式比较,立即可得到 $K=1$.

综合上面的讨论,我们得出:

(1) 法拉第定律的微分形式(1.35b)中并不出现回路材料的任何参数,尽管在前面的讨论中假定了存在导体回路. 这就说明(1.35b)式所表示的是场与场之间的关系,这种关系不依赖于导体回路是否存在. 利用导体回路只不过是使感应得到的电场得以用电流形式表现出来而已.

(2) 法拉第定律揭示了一种新的电磁现象——电磁感应,即变化着的磁场可以激发电场,并且这种电场是以涡旋形式被激发出来的. 这与静电场完全不同.

(3) 一般说来,空间任意一点的电场总是由两部分组成的,即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_i$,其中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_s=\rho/\varepsilon_0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_s=0,$$

$\boldsymbol{E}_s$ 是由电荷激发的**纵场**. 所谓纵场是指散度不为零而旋度为零的场,而对于 $\boldsymbol{E}_i$,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_i=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_i=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$\boldsymbol{E}_i$ 是由变化着的磁场激发的**横场**. 所谓横场就是散度为零旋度不为零的场.

在一般情况下的场 $\boldsymbol{E}$ 由纵场和横场叠加而成,因此,$\boldsymbol{E}$ 满足的普遍方程式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

§1.4 麦克斯韦方程组和洛伦兹力

1. 麦克斯韦方程组

前面几节中,我们讲述了电磁现象的基本实验定律,现总结如下:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\rho/\varepsilon_0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=0;\end{aligned}\right\}\quad(\text{静止电荷})$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{B}&=\mu_0\boldsymbol{j};\end{aligned}\right\}\quad(\text{稳定电流})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}.\quad(\text{变化磁场})$$

它们分别都有自己的适用条件和范围. 这些都是具体的、有条件的特殊规律,而我们现在的目的则是要从特殊的规律中抽象概括出普遍性的物理规律.

$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ 是由库仑定律导出的,它的直观物理图象是单位电荷激发 $1/\varepsilon_0$ 根电场线. 在普遍情况下,库仑定律不成立,但就高斯定理所反映的电荷与电场线的定量关系这一合理内核我们可以把它保留下来;也就是说,在一般情况下如电荷随时间变化,则它所激发的电场线数目也将随之改变.

$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 显然只对纵场成立,在普遍情况下应当由法拉第定律 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 代替.

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 是在稳定情况下总结出来的,在普遍情况下是否成立呢? 不妨对法拉第定律两边取散度,

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

因为 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=0$,所以

$$\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\text{常数(与时间无关)},$$

此常数决定于初始时刻的值,为了与稳定时的 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 一致,我们可选此常数为零而仍不影响法拉第定律的成立. 所以,我们认为 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 是普遍的.

$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 也是在稳定情况下导出的,在一般情况下是否成立呢? 对此式两边同时取散度,得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{j}.$$

因为 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=0$,所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0.$$

但是,一般情况下根据电荷守恒定律(1.19)式可知

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

可见微分形式的安培环路定理与电荷守恒定律是有矛盾的,如果承认电荷守恒定律是普遍成立的,则安培环路定理必须作修改.

麦克斯韦首先看到了这个矛盾，并从理论上巧妙地将其解决. 若将第一式 $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 代入连续性方程，则得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}\rho&=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E})\\&=\nabla\cdot\left[\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\right]=0.\end{aligned}$$

由此可见，只要把安培环路定理中的 $\boldsymbol{j}$ 用 $\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$ 代替，矛盾就迎刃而解. 所以，一般情况下安培环路定理可修改为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\right),$$

即

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E},\tag{1.38}$$

式中的 $\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 称为**位移电流**. 位移电流的引入是麦克斯韦对电磁理论作出的最杰出的贡献. 如果 $\boldsymbol{j}=0$，则方程(1.38)变为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

其形式和法拉第定律极相似，除了 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 位置互换之外，等式的右边还差了一个负号，这一负号是至关重要的，没有这个符号的差别，电磁波就不复存在. 如果自然界本身并不给出这一负号的差别，世界就可能是另一个面目. 位移电流的引入从另一个侧面深刻揭示了电场和磁场之间的联系：不仅变化的磁场激发电场，变化着的电场同样激发磁场，两者都以涡旋形式激发，并且左右手对称.

根据上面的分析，我们说电磁现象的普遍规律为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{cases}\tag{1.39}$$

这就是真空中的麦克斯韦方程组.

2. 洛伦兹力

我们已经知道静止电荷受静电场的作用力密度为

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E},$$

稳定电流受静磁场的作用力密度为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}.$$

那么在一般情况下电磁力的力密度是什么形式呢？洛伦兹把上述力密度表达式推广到普遍情况，即在任何情况下只要电荷和电流同时存在，则电磁场对带电体系作用的力密度为

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}. \tag{1.40}$$

(1.40)称为**洛伦兹力公式**. 值得注意的是，洛伦兹力密度公式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是总的场，不需要从 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中减去电荷元 $\rho\mathrm{d}\tau$ 和电流元 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$ 本身产生的场. 事实上，在 $\mathrm{d}\tau$ 内部，无限小的体电荷(或体电流)产生的场总是无穷小的；而且，自身激发的场在 $\mathrm{d}\tau$ 内部总正比于体积元的线度(例如，球状带电体内部的电场 $\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{r}$，圆柱状电流体内部磁场 $|\boldsymbol{B}|=\frac{\mu_0}{2}jr$，$r$ 代表体积的线度)，$r\to 0$ 则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都趋向于零，场的贡献也为零.

§1.5　介质中的麦克斯韦方程组　电磁性质的本构关系

当空间存在介质时麦克斯韦方程组是否成立？如果成立的话形式有什么改变？这是本节要讨论的问题.

从微观上来说，无论什么介质都是带电粒子的集合，介质的存在相当于真空中存在着大量的带电粒子，因此从这个角度看介质的存在本质上没有什么特殊的地方. 宏观电动力学不是考察个别粒子产生的微观电磁场，而是考察他们的宏观平均值. 介质在宏观电磁场的作用下内部带电粒子的分布要发生变化，于是就有可能出现介质中的电荷分布不平衡，即出现宏观的附加电荷和电流. 这些附加电荷和电流也要激发电磁场，使原来的宏观电磁场有所改变. 现在需要研究的是介质中可能出现哪些附加电荷和电流？

1. 介质的极化　极化电荷和极化电流

在有电场的情况下，介质中的正负电荷分别受到方向相反的力的作用，因此正负电荷间的距离拉开了. 另外，那些正负电荷本来就有一定距离的极性分子在电场作用下按一定方向有序排列. 从宏观效果来看这两种行为都相当于产生一个电偶极矩，我们把这种现象称为介质的极化，引进极化强度 $\boldsymbol{P}$ 来描述. $\boldsymbol{P}$ 的定义是

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V},$$

其中 $\boldsymbol{p}_i$ 是第 i 个分子的电偶极矩，求和是对 ΔV 中的所有分子进行的.

极化电荷 由于极化,正负电荷间发生了相对位移,每处的正负电荷可能不完全抵消,这样就呈现宏观电荷,称为**极化电荷**. 现在我们来计算这个电荷的大小.

若极化时正负电荷拉开的位移为 $\boldsymbol{l}$,介质分子的数密度为 N,则通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面跑出去的正电荷数目为 $N\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,因此相应从 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面跑出去的电荷 $\mathrm{d}Q = eN\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 于是,通过任一封闭曲面跑出去的总电荷为

$$Q = \oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

所以封闭曲面 S 内出现和 Q 符号相反的电荷,即

$$Q_{\mathrm{p}} = -Q = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

这是因为没有极化时介质是中性的,极化时跑出去一个正电荷,面内即出现一个负电荷. 因为

$$Q_{\mathrm{p}} = \int_V \rho_{\mathrm{p}}\mathrm{d}\tau,$$

式中 V 是 S 包围的体积,所以

$$\int_V \rho_{\mathrm{p}}\mathrm{d}\tau = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau,$$

即

$$\rho_{\mathrm{p}} = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}, \tag{1.41}$$

式中 ρ_{p} 称为**极化电荷密度**.

极化电流 当电场随时间改变时,极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变,由此产生的电流称为**极化电流**. 极化电荷和极化电流也满足连续性方程:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}} + \frac{\partial\rho_{\mathrm{p}}}{\partial t} = 0,$$

即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}} = -\frac{\partial\rho_{\mathrm{p}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{P} = \nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P},$$

所以

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}. \tag{1.42}$$

$\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}$ 称为**极化电流密度**.

2. 介质的磁化 磁化电流

原子中的电子是不停地绕原子核运动着的,此外电子还有自旋. 由于电子的这些特性,从电磁学的角度,常把它们等效地看作一个小的环形电流,这种环行电流相当于一磁偶极子. 没有外磁场时,这些磁矩的取向是随机的,并不呈现任何宏观效果. 一旦有外磁场,这些磁偶极矩都将按一定的方向排列而呈现宏

观效应，这就是磁化现象，通常用磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 来描写. $\boldsymbol{M}$ 的定义是单位体积内的磁偶极子数，即

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{\Delta V}.$$

磁化引起的电流称为**磁化电流**. 现在来讨论通过面 S 的磁化电流. 如图 1.8，环形电流通过 S 面有两种情况，一种是在面 S 中间通过两次的环形电流，如图中 A，这种电流环对磁化电流没有贡献. 然而，那些通过面 S 一次的环形电流是有贡献的. 如图中 B，而这种情形只能发生在边界上. 每一个环形电流贡献 i 或 $-i$，有多少这种电流呢?

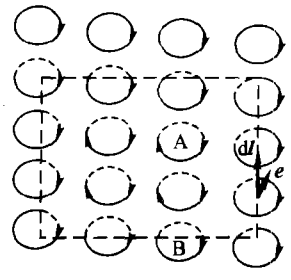


图 1.8

在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 附近沿着 S 的法线方向通过一次的环形电流数目是以环形电流面积 ΔS 为底，在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为高的柱体内的分子数，即

$$N\Delta \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = N\Delta S\boldsymbol{e}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

它们对电流强度的贡献为

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{m}} = iN\Delta S\boldsymbol{e}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = N\boldsymbol{m}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

式中 $\boldsymbol{m} = i\Delta \boldsymbol{S}$ 是环形电流的磁矩(即分子磁矩)，利用磁化强度的定义，磁化电流可写成

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

即

$$I_{\mathrm{m}} = \oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

于是

$$\int \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \nabla\times \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

因此，**磁化电流密度**

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = \nabla\times \boldsymbol{M}. \tag{1.43}$$

(1.43)式表示磁化电流和磁化强度之间的关系，也可以看作为磁化电流密度的定义. 对(1.43)式两边取散度得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = 0.$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因而不存在磁化电流的源.

3. 介质中方程组的构成

由上面的讨论我们看到，介质存在时空间电荷包括自由电荷和极化电荷，即

$$\rho_{\mathrm{t}} = \rho + \rho_{\mathrm{p}} = \rho - \nabla\cdot \boldsymbol{P},$$

式中 ρ_{t} 表示总电荷. 介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，即

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{M}.$$

在麦克斯韦方程组中,不管 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 的来源如何,只要是电荷或电流,它们都将在空间激发电场或磁场. 所以,麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应当修改成

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\rho-\nabla\cdot\boldsymbol{P}),\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{M}\right).\end{cases}\tag{1.44}$$

若令

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P},\tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M},\tag{1.46}$$

则方程组(1.44)式可改写成

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},\end{cases}\tag{1.47}$$

其中新引入的辅助矢量 $\boldsymbol{D}$ 称为**电位移矢量**,$\boldsymbol{H}$ 称为**磁场强度**,它们是导入量,目的是使方程组只出现自由电荷和自由电流,便于讨论问题.

4. 电磁性质的本构关系

宏观麦克斯韦方程(1.47)是含有 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 这四个场量分量的 8 个方程. 显然在导入量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的关系尚未确定之前是无法求出方程组的解的. 这些关系隐含在(1.45)和(1.46)式之中. 一般说来,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$,它们的函数关系视各种介质的性质而定. 我们常用经验规律来表示,这些函数称为介质的电磁性质的本构关系或电磁性质方程.

在场不是很强的情况下,大多数物质对场的反应是线性的. 尤其在各向同性的物质内,线性关系可以写成简单的比例关系:

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\end{cases}\tag{1.48}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}=\kappa\boldsymbol{H},\\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\end{cases}\tag{1.49}$$

01[illegible]3

其中 χ、ε、κ 和 μ 都是比例常数，通常分别被称为**电极化率**、**介电常数**、**磁化率**和**磁导率**. 把(1.48)和(1.49)式分别代入(1.45)和(1.46)式可得到

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \varepsilon_r = 1 + \chi; \tag{1.50}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0, \mu_r = 1 + \kappa. \tag{1.51}$$

式中 ε_r 称为相对介电常数，μ_r 称为相对磁导率.

应当指出，在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化，所以极化率和磁化率都将是场变化频率 ω 的函数，因而 $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$，$\mu = \mu(\omega)$. 其次在铁电和铁磁物质或强场情况下，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之间将不再是齐次的线性关系. 另外，对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k; \; B_i = \mu_{ik} H_k. \tag{1.52}$$

对于导电介质来说，有推广的欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \tag{1.53}$$

总之，在使用这些本构关系时要注意其适用范围.

§1.6 交界面上麦克斯韦方程组的形式

在不同介质的交界面上，介质的性质有突变，所以电磁场也会有突变. 于是在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用. 这一节，我们就从积分形式的场方程出发导出交界面上的场方程的形式.

对应 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 的积分形式是

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \rho \mathrm{d}\tau.$$

如图 1.9，在介质的分界面上作一个扁平小匣子，根据上面的积分得到

$$\Delta \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 + \Delta \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{D}_2 + 2\pi r(l_1 + l_2) D_{侧} = (\rho_1 l_1 \Delta S_1 + \rho_2 l_2 \Delta S_2),$$

式中 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 分别为面元 ΔS_1 和 ΔS_2 上电位移矢量的中值，$D_{侧}$ 为圆柱匣侧面上的中值. 当 $l_1 \to 0$、$l_2 \to 0$ 时，$\Delta \boldsymbol{S}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{S}_2$ 面重合，方向相反，取 $\Delta \boldsymbol{S}_1 = \Delta S \boldsymbol{e}_n$，则 $\Delta \boldsymbol{S}_2 = -\Delta S \boldsymbol{e}_n$，因此

$$\lim_{\substack{l_1 \to 0 \\ l_2 \to 0}} \{[\Delta \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 + \Delta \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{D}_2 + 2\pi r(l_1 + l_2) D_{侧}] - (\rho_1 l_1 \Delta S_1 + \rho_2 l_2 \Delta S_2)\} = 0,$$

$D_{侧}$ 总是有限的，故最后得到

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma, \tag{1.54}$$

σ 是交界面上的电荷面密度.

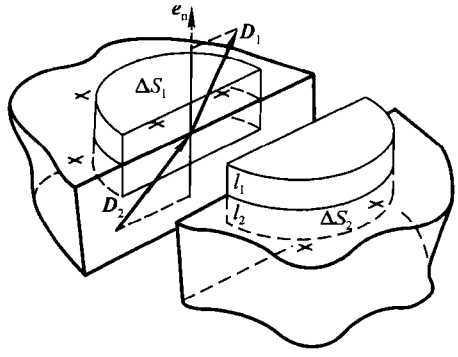


图 1.9

同理,对应方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$也有如下边值关系:

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0. \tag{1.55}$$

注意:式中的界面法线方向$\boldsymbol{e}_n$是从介质 2 指向介质 1 的. (1.54)和(1.55)式说明在交界面上,$\boldsymbol{B}$的法线方向的分量是连续的;$\boldsymbol{D}$的法线方向分量一般是不连续的,除非界面上无自由面电荷.

对应法拉第定律$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$的积分形式为

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

为得到相应的边值关系,我们把积分形式运用到如图 1.10 的长方形小回路上去,在$h_1 \to 0$和$h_2 \to 0$的极限情况下,$\Delta \boldsymbol{l}_1$和$\Delta \boldsymbol{l}_2$趋向重合,方向相反,若令$\Delta \boldsymbol{l}_1 = \Delta l \boldsymbol{e}_t$,则$\Delta \boldsymbol{l}_2 = -\Delta l \boldsymbol{e}_t$,因此等式的左边为

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Delta l \boldsymbol{e}_t \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2).$$

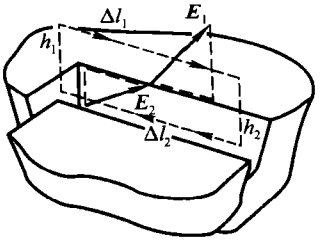


图 1.10

若在边界处$\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$是有限值,则在$h_1$、$h_2$趋向于零的极限情况下,由于回路的面积分趋向于零,因此等式右边的值为零,我们便有

$$\boldsymbol{e}_t \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0, \tag{1.56}$$

式中$\boldsymbol{e}_t$是界面的切线方向的单位矢量. 上式在分界面内任意方向都应成立. 所以可把上式改写成

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0. \tag{1.57}$$

同理,对于方程$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$,其积分形式为

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

由此出发可得其相应的边值关系为

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{\alpha}, \tag{1.58}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是界面上的电流线密度. (1.57)和(1.58)式表示电场强度的切向分量是连续的;而磁场强度的切向分量是不连续的.

仿照上面的推导方法,我们可以求得其他一些重要的边值关系:

对应连续性方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,其交界面上的形式为

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{j}_2) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0; \tag{1.59}$$

对应极化电荷密度的表达式 $\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$,得到极化电荷面密度表示式

$$\sigma_p = -\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2); \tag{1.60}$$

对应磁化电流密度的表达式 $\boldsymbol{j}_m = \nabla \times \boldsymbol{M}$,同样找到磁化电流线密度的表达式

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2). \tag{1.61}$$

这些边值关系实质上是麦克斯韦方程在交界面上的特殊形式,在讨论电磁现象时极为重要,读者必须予以足够的注意.

§1.7 麦克斯韦方程组的完备性

现在,我们来证明麦克斯韦方程组的完备性. 电磁体系的运动方程形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

我们只讨论真空中的场方程的完备性. 若在给定初始条件和边界条件下,体系的电磁运动规律完全由上述方程组唯一决定,我们说此方程组是完备的. 这里,我们用反证法来证明.

设在给定的初始条件和边界条件下,方程组存在两组不等价的解,分别记为 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{B}'$;$\boldsymbol{E}''$、$\boldsymbol{B}''$. 显然,两组解都满足同一体系的麦克斯韦方程组,即

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}' = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E}' = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}' = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B}' = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t}; \end{cases} \tag{1.62}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}'' = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E}'' = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}''}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}'' = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B}'' = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}''}{\partial t}. \end{cases} \tag{1.63}$$

因为是同一个体系，两组方程中的 ρ、$\boldsymbol{j}$ 都是相同的. 不仅如此，两组方程的解都满足同样的初始条件和边界条件，即 $t=0$ 时

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},0) = \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r},0) \quad 和 \quad \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r},0) = \boldsymbol{B}''(\boldsymbol{r},0), \tag{1.64}$$

在边界面上

$$\boldsymbol{E}'|_S = \boldsymbol{E}''|_S \quad 和 \quad \boldsymbol{B}'|_S = \boldsymbol{B}''|_S. \tag{1.65}$$

把(1.62)和(1.63)两组方程相减则得

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \quad 和 \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad 和 \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.66}$$

式中已令

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}'' \quad 和 \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}''.$$

对应新的方程组(1.66)，初始条件和边界条件可由(1.64)和(1.65)式直接得到：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},0) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},0) = 0 \quad 和 \quad \boldsymbol{E}|_S = \boldsymbol{B}|_S = 0. \tag{1.67}$$

因此，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是满足齐次方程、齐次边界条件、齐次初始条件的解；或者说，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应的电磁体系是无源、无初始扰动、边界上值恒为零的体系. 对这样一个体系，我们来计算如下一个积分：

$$I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}\tau.$$

体系的边界不随时间改变，所以利用方程组(1.66)，上述积分可写成

$$I = 2\int_V \left[\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{-2}{\mu_0}\int_V \nabla\cdot[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{2}{\mu_0}\oint_S (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

最后一步利用了高斯积分定理. 在边界上,有 $\boldsymbol{E}=0$ 和 $\boldsymbol{B}=0$,可见 $I=0$,因此

$$\int_V\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}\tau = \text{常数}.$$

再由(1.67)式,在 $t=0$ 时 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$,所以上式

$$\int_V\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)\mathrm{d}\tau = 0,$$

即

$$\int_V\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau = 0.$$

由于被积函数是恒正的,所以

$$E^2=0 \quad 和 \quad B^2=0,$$

即

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}'' \quad 和 \quad \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}'',$$

可见所设的两组解是同解. 完备性得证.

*§1.8 对 偶 场

在无源的空间区域,麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}.\end{cases}$$

如果在上述方程组中对场量作如下代换:

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\longrightarrow\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\boldsymbol{H}',\\ \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\boldsymbol{H}\longrightarrow-\boldsymbol{E}',\end{cases}\quad\begin{cases}\boldsymbol{D}\longrightarrow\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{B}',\\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{B}\longrightarrow-\boldsymbol{D}',\end{cases}\tag{1.68}$$

式中 $c^2=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1}$,于是得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B}' = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H}' = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}' = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E}' = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}. \end{cases}$$

即是说,麦克斯韦方程(无源)在(1.68)式的变换下不变,只是方程的次序有了改变. 我们称 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$ 是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**对偶场**. 这种场的对偶性如图 1.11 所示.

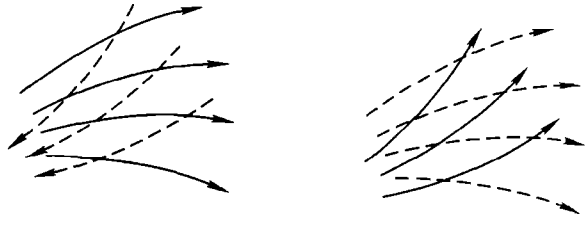


图 1.11

在有源的空间区域,电磁场方程为(1.47)式,显然,这时对偶性被破坏;或者说,在有源的区域不存在对偶场. 这种对偶性的破缺根源在于方程中源的不对称,即不存在磁荷. 所以物理学家们都希望自然界存在着磁单极,以使麦克斯韦方程组具有更高程度的对称性. 对这种对称性的追求,或者说对磁单极存在的可能性的探索,物理学家们为之奋斗了半个多世纪. 尽管迄今为止,实验上还没有确凿证据肯定磁单极的存在,但人们还相信它应当是存在的. 若果真存在磁单极,我们令 ρ_m 和 j_m 分别为磁荷密度和磁流密度,则麦克斯韦方程应写为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \mu_0 \boldsymbol{j}_m, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}_e. \end{cases} \tag{1.69}$$

注意(1.69)中第二式右边的 j_m 前面的负号不是任意的,它是磁荷守恒定律所要求的. 实际上对(1.69)式的第二式求散度,利用第三式即得

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_m = 0. \tag{1.70}$$

现在,从方程组(1.69)看到,如果此时作(1.68)式那样的对偶变换,则其中的源也应作如下相应的变换:

$$\begin{aligned} &\rho_e = \rho'_m / c \quad 和 \quad \boldsymbol{j}_e = \boldsymbol{j}'_m / c; \\ &\rho_m = -\rho'_e c \quad 和 \quad \boldsymbol{j}_m = -\boldsymbol{j}'_e c, \end{aligned} \tag{1.71}$$

则很容易证明,方程组(1.69)是不变的. 因此,我们说:对应 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 一定存在着对偶场 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{B}'$.

可见，对偶性这一对称性在引入了磁荷以后不再破缺.

从对偶变换的不变性看到，对于任何一个电磁体系，我们总可以找到其相应的对偶体系，其场分布由对偶体系确定，即 $\boldsymbol{E}' = -c\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}/c$. 例如，若有一纯电场 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$的体系，则一定可以存在一个纯磁场的体系，其 $\boldsymbol{B}'(x,y,z)$的函数形式与 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$完全相同，两者之比为一常数因子. 在第十二章讨论辐射问题时将看到，电偶极辐射场与磁偶极辐射场之间完全对偶，这是一个很好的例证.

*§1.9　磁单极的奇异势

我们从对偶性出发，在麦克斯韦方程组中引入了磁单极，那么磁单极激发的场和势是什么形式的呢？

设带有磁荷 g 的磁单极位于坐标原点，根据场的对偶性，该磁单极所产生的静磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}g. \tag{1.72}$$

显然，磁场 $\boldsymbol{B}$ 的散度不再为零，而是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \mu_0 g\delta(\boldsymbol{r}).$$

这样，我们通常从定义 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ 引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 的办法现在不再可行；也就是说，在包含磁单极的区域内 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ 不对了. 但是，我们又不能不用矢势，因为在量子力学范畴内讨论磁单极用矢势是方便的，因此我们必须想办法写出对应于(1.72)式的矢势.

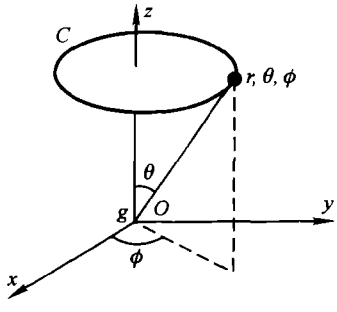


图 1.12

现在我们先来讨论一下磁单极附近的矢量势 $\boldsymbol{A}$ 有些什么特性？如图 1.12，若磁单极 g 在坐标原点，且 g 周围空间的磁感应强度可以用矢势 $\boldsymbol{A}$ 来描写，即假定有

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

现在考虑一个环路 C，作积分 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，如图 1.12. 此积分值为 $\Omega(\theta)>0$，它等于边界为 C 的半径为 r 的球面部分所通过的磁通量，即

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Omega(\theta).\end{aligned} \tag{1.73}$$

把(1.72)式代入上式，即得

$$\Omega(\theta) = \frac{1}{2}\mu_0 g(1-\cos\theta), \tag{1.74}$$

当 $\theta=0$ 时，$\Omega=0$，但当 θ 由 0 连续变到 π 时，Ω 也连续由 $\Omega(0)$变到 $\Omega(\pi)=\mu_0 g$，但当 $\theta=\pi$ 时，环路 C 收缩为一个点，若 $\boldsymbol{A}$ 无奇异性，则由等式(1.73)的左边可以判断 $\Omega(\pi)=0$. 显然，

这有矛盾，也就是说这时 $\boldsymbol{A}$ 必有奇异. 由于 r 是任意选的，改变 r 的值，可以看出在磁单极周围的矢势 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一条由原点出发将奇异点连结起来的，一直延伸至无穷远处的奇异弦. 因此，若要从 $\nabla \times \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的关系引入矢势 $\boldsymbol{A}$，则矢势必有奇异. 狄拉克最早给出了含有奇异弦的势为

$$\begin{aligned} A_r &= 0, \\ A_\theta &= 0, \\ A_\phi &= \frac{\mu_0 g(1-\cos\theta)}{4\pi r\sin\theta}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

则

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}; \tag{1.76}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}=\begin{cases} \mu_0 g\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z & (z<0,\theta=\pi); \\ 0 & (z>0,\theta=0). \end{cases}$$

可见，虽然我们引入了矢势，并且得到了磁场表达式(1.72)，但我们引入了一个附加的场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$，它在 $z<0$、$\theta=\pi$ 时不为零，即在负的 z 轴上存在着 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$，这个场称为**奇异场**. 场的奇异部分的出现主要是因矢势(1.75)式在 $\theta=\pi$ 时是奇异的. 物理上有意义的场应当不包括奇异部分，所以

$$\boldsymbol{B}=\nabla \times \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}. \tag{1.77}$$

这样，本节一开始出现的困难就解决了. 矢势 $\boldsymbol{A}$ 的奇异区域称为**奇异弦**. 狄拉克所提出的奇异势的奇性是从原点沿着负 z 轴到无穷远，故(1.75)式常称为狄拉克**单弦奇异势**，奇异弦上有一个虚拟的奇异场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$.

(1.75)式的选取并不是唯一的. 施温格提出另外一个解：

$$\begin{aligned} A'_r &= 0, \\ A'_\theta &= 0, \\ A_\phi &= -\frac{\mu_0 g\cos\theta}{4\pi r\sin\theta}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

同样有

$$\nabla \times \boldsymbol{A}'=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}}$$

和

$$\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 g\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z & (z<0,\theta=\pi); \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 g\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z & (z>0,\theta=0). \end{cases} \tag{1.79}$$

故磁单极的场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 g\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}=\nabla \times \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}}.$$

显然，因为矢势 $\boldsymbol{A}'$ 在 z 轴上处处都是奇异的，所以奇异场 $\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}}$ 位于整个 z 轴上. 这种势常被

称为**施温格双弦奇异势**. 值得注意的是,量子理论中的哈密顿函数选用哪一组 $\boldsymbol{A}$ 都可以,但当计算能量和动量时要用物理场 $\boldsymbol{B}$ 代入.

在磁单极静止时,我们也可以用类似(1.10)式的形式引入磁标势 φ_m. 对于磁单极的势,根据对偶性,其形式为

$$\varphi_m = \frac{g}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

习 题

1.1 试计算下列矢量的散度和旋度,其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为常矢量,$\boldsymbol{r}$ 为矢径,$\phi(r)$、$\boldsymbol{A}(r)$都是距离 r 的任意函数.

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$, $\phi(r)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$, $\phi(r)\boldsymbol{A}(r)$, $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}(r)$.

1.2 试计算下列各式的值,其中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量,$\boldsymbol{r}$ 为矢径.

$\nabla\frac{1}{r}$, $\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$, $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, ∇r, $\nabla^2\frac{1}{r}$, $\nabla\frac{1}{r^2}$,

$\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$, $\nabla\times\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$, $\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, $\nabla^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

1.3 证明下列积分变换公式,其中 C 为积分路径,S 为面积,V 为体积.

$\oint_C\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi$, $\oint_S\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\nabla\varphi\mathrm{d}\tau$, $\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}=\int_V\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau$, $\oint_C\varphi\mathrm{d}f=\int_S(\nabla\varphi\times\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, $\oint_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=\int_V[\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}]\mathrm{d}\tau$, $V=\frac{1}{3}\oint_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, $\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$, $\oint_S\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$.

1.4 在体积 V 中矢量 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,在边界面上 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{A}=0$. 试证明:

$$\int_V\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau=0.$$

1.5 证明张量的迹 $\mathrm{Tr}\overleftrightarrow{T}$和行列式 $\det\overleftrightarrow{T}$都是坐标转动变换下的不变量.

1.6 证明张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的所有分量的平方和是坐标转动变换下的不变量. 进一步说明 $\sum_{i,j}T_{ij}S_{ij}$ 也是坐标转动变换下的不变量.

1.7 已知 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$,其中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{k}$ 为常矢量,$\boldsymbol{r}$ 为矢径. 试计算$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$、$\nabla\times\boldsymbol{E}$和$\nabla^2\boldsymbol{E}$.

1.8 设 $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}$,其中 $\boldsymbol{r}$ 为矢径,$\boldsymbol{e}$ 为某固定方向的单位矢量. 试证:$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. (这个 $\boldsymbol{A}$ 是磁单极矢势的一种表示)

1.9 求在真空中产生汤川势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\mathrm{e}^{-r/a}$$

的电荷分布. 半径为 R 的球内总电荷是多少?

1.10 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的介质球壳上均匀分布有密度为 ρ_f 的自由电荷,球壳的介电常数为 ε. 试求空间各点的电场、极化强度和极化电荷. 并计算电场的散度和旋度.

1.11 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的无限长中空导体圆柱内沿轴向流有稳定的均匀电流,电流密度为 j_f,导体的磁导率为 μ. 试求空间各点的磁感应强度、磁化强度和磁化电流,并计算磁感应强度的散度和旋度.

1.12 证明:在均匀介质内部,极化电荷体密度 ρ_P 总是等于自由电荷体密度 ρ_f 的 $-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)$倍.

1.13 证明:在静电情况下,导体外侧的电场线总是与表面垂直. 在稳定电流的情况下,导体内侧的电场线总是平行于导体表面.

1.14 设一个气球表面有均匀的电荷分布. 问:(1) 气球内部的电场 $\boldsymbol{E}$ 是多少? (2) 当气球膨胀时内部场强变化吗? (3) 如果气球保持球形,但电荷分布不再均匀,则内部场强变化吗?

1.15 两同心导体球壳之间充以两种介质,其中左边一半介质的介电常数为 ε_1,右边一半介质的介电常数为 ε_2,内球壳带电 Q,外球壳接地. 试求电场分布和电荷分布.

1.16 在半径为 R,体内均匀带电,电荷密度为 ρ 的球内挖掉一个半径为 R_1 的球形空腔. 空腔中心 O_1 与球心 O 的距离为 $a(R_1+a<R)$,求空腔内的场强.

1.17 设真空中的电势为

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>a),\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & (r\leqslant a).\end{cases}$$

求相应的电荷分布.

1.18 两个质量为 m,电荷为 q 的带电粒子分别用长为 l 的细绳连接在同一固定点上. 证明每根绳与竖直线的夹角满足关系

$$q^2\cos\theta=16\pi\varepsilon_0 mgl^2\sin^3\theta.$$

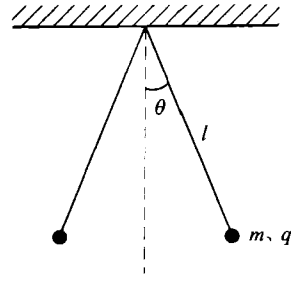


图 1.13

1.19 设某种介质的电磁性质方程为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\alpha\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{B}=\beta\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H},$$

其中 α、β、ε、μ 为常数. 证明:在无源的情况下,$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+(\alpha\beta-\mu\varepsilon)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0.$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+(\alpha-\beta)\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+(\alpha\beta-\mu\varepsilon)\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0.$$

1.20 干燥的空气在常压下所能维持的最大场强约为 10^6 V/m,一个半径为 0.1 m 的导

体球在空气中所能达到的最大电势是多少？

1.21 一点电荷 q 位于两个均匀无限的介质的分界面上，介质的介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2，求空间场的分布.

第二章　电磁场的守恒定律和对称性

本章讨论经典电磁场的守恒定律和对称性，它和第一章一起构成电动力学这门课程的基础，也是本书的纲，读者务必注意.

§2.1　电磁场的能量守恒定律

能量守恒定律是自然界一切物质运动过程的普遍法则. 作为物质的一种特殊形态——电磁场，当然也不例外，现在，我们把带电体和电磁场看作一个封闭的体系，具体地考察场的能量守恒定律的形式.

带电物体由于受到电磁场的作用，它的机械能要发生变化，由于能量的守恒性，带电体机械能的增加量应等于电磁场能量的减少量.

先考察电磁场对带电体所作的功. 由于磁场作用在运动带电体上的力总与带电体速度的方向垂直，磁场对带电体不作功，所以我们只需求电场对带电体所作的功即可. 若带电体电荷分布为 ρ，则 $\mathrm{d}\tau$ 内的电荷为 $\rho\mathrm{d}\tau$，它在 $\mathrm{d}t$ 时间内移动的距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，$\boldsymbol{v}$ 为带电体体积元 $\rho\mathrm{d}\tau$ 的运动速度，于是场对 $\rho\mathrm{d}\tau$ 所作的功为

$$\rho\mathrm{d}\tau\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\rho\mathrm{d}\tau\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t.$$

单位时间内，场对空间某区域内的电流所作的功为

$$\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau. \tag{2.1}$$

场对带电体作功增加了带电体的机械能 W_{m}，故

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau. \tag{2.2}$$

由麦克斯韦方程组(1.39)中的第四式可见

$$\boldsymbol{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

于是得到

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2; \tag{2.3}$$

再由麦克斯韦方程组(1.39)中的第二式，我们有

$$-\frac{1}{\mu_0}\left[\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2.4}$$

把(2.4)式加到(2.3)式的右端,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\\&=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right).\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \tag{2.5}$$

于是利用上述这些等式,(2.2)式可写成

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\mu_0}\int\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau-\int\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau,$$

利用高斯定理,上式可改写成

$$\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau=-\oint\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.6}$$

为了看清(2.6)式中每一项所代表的物理意义,我们设考察区域是全空间. 由于电流和电荷分布在有限区域,在无穷远边界上电磁场应为零,所以等式右边的第一项面积分为零,于是得

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int_\infty\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\infty\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.7}$$

上式表明带电体机械能 W_{m} 的增加值等于

$$W_{\mathrm{e,m}}=\int\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau$$

的减少值,所以把$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$称为**电磁能量密度**. (2.7)式又可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(W_{\mathrm{m}}+W_{\mathrm{e,m}})=0,$$

即

$$W_{\mathrm{m}}+W_{\mathrm{e,m}}=\text{常数}.$$

这就是说,体系的机械能不守恒,电磁能也不守恒,而两者的和才是一个守恒量.

当我们只考察空间某局部区域时,(2.6)式中的面积分项不为零. 由于(2.6)式左方表示体积 V 内带电体机械能的增加,而右方第二项代表体积 V 内电磁场能量的减少,因此右边的第一项也必然代表能量. 由于它是面积分,所以我们把该项解释为穿过体积 V 的表面流进体积 V 内的电磁能量,故把 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$ 称为**能流密度矢量**,或**坡印廷矢量**. (2.6)式称为**坡印廷定理**. 我们也可把(2.6)式

写成微分形式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} &= -\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}-\frac{\partial}{\partial t}w, \\ w &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 w 为电磁能密度. 必须指出，一切可能的实验表明，只有在封闭曲面积分的形式下坡印廷矢量才可由实验验证.

思考题 能流密度 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$ 的形式是否唯一确定?

【例 1】 试考察正在缓慢充电的电容器的能流.

解 设电容器由两块圆形平板构成，它们的半径均为 r，间距为 h，其中电场为 E，则电容器中的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\pi r^2 h.$$

因为在缓慢充电，所以 E 是时间的函数，电容器中的能量正在不断增加，其增加率为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\pi\varepsilon_0 r^2 hE\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

另一方面，我们来看一下能流流动的情况. 由于 E 是时间的函数，设 $\boldsymbol{E}=E(t)\boldsymbol{e}_z$，则由麦克斯韦方程组的第四式

$$\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可得电容器内磁场(选取柱坐数系 ρ,ϕ,z)为

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2\pi\rho}\mu_0\varepsilon_0\pi\rho^2\frac{\partial E}{\partial t}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\rho}\rho^2\frac{\partial E}{\partial t}\boldsymbol{e}_\phi,$$

所以能流密度矢量为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{\varepsilon_0\rho^2}{2\rho}E\frac{\partial E}{\partial t}(-\boldsymbol{e}_\rho),$$

其方向指向电容器中心轴线. 对电容器侧面积分则得流入电容器的能量为

$$\int_{\text{侧}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\varepsilon_0 r^2}{2r}E\frac{\partial E}{\partial t}2\pi rh=\pi\varepsilon_0 r^2 hE\frac{\partial E}{\partial t},$$

它正好等于电容器中能量的增加率. 这说明能量不是从导线中流过来的，而是从电容器外面的空间中通过电容器侧面流进电容器的. 显然，通常认为能量是从导线中流过来的直觉是错误的. 为了理解这一点，我们可以设想电容器两端的很远处各有一些正负电荷. 当电荷很远时，只有散开着的、微弱的，但却大量的场线包围着该电容器；当这些电荷流向电容器时，电容器附近的场渐渐增强，即场线不断密集起来. 因此，远处的场能量会不断地移向电容器，最后当正负电荷分别达到电容器的正负极板时，这部分的场能也流进了电容器.

§2.2　电磁场的动量守恒定律

场对带电体的作用力为洛伦兹力，在洛伦兹力作用下带电体的机械动量的变化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int \boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau=\int(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau. \tag{2.9}$$

利用场方程把等式右边的 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 消去，把力密度改写成

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B},$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，所以我们可以构成下述一个恒等式：

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{E}=0.$$

把上式和 $\boldsymbol{f}$ 的表达式相加，则有

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{E}. \tag{2.10}$$

另

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}-\left[\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}\right]$$

$$=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E})-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(E^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}),$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(B^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}),$$

而且

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\varepsilon_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right),$$

式中 $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$，利用这些关系式，(2.10)式可写成

$$\boldsymbol{f}=-\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}, \tag{2.11}$$

其中

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}. \tag{2.12}$$

根据(2.11)和(2.12)式,我们就可以把机械动量的变化率(2.9)式写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}} = -\oint \overrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\mathrm{d}\tau. \tag{2.13}$$

类似(2.6)式的讨论,在全空间的情况下,(2.13)式右边第一项面积分为零,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\infty} \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\mathrm{d}\tau. \tag{2.14}$$

根据动量守恒原理,带电体机械动量的增加等于电磁场动量的减少,任何动量的变化并不意味着动量被创生或消灭,而只是转化为另一种形式的动量. 因此我们称

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} = \int_{\infty} \varepsilon_0(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau$$

为**电磁动量**,而把

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \tag{2.15}$$

称为**电磁场动量密度**. 由(2.14)式可得

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} = 常数,$$

这就是说,若把带电体和电磁场看作一个封闭的力学体系,则体系的机械动量和电磁动量之和是守恒的.

同理,若讨论空间的有限区域,则

$$\int_V \boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau = -\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{T}} - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau. \tag{2.16}$$

因等式左方的项表示机械动量,右方第二项代表了电磁动量,因此右方的第一项也必然具备动量的意义;而且由于它是面积分,所以我们把它解释为穿过区域的边界面流入体内的动量,$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$则称为**动量流密度**.

为了使 $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$所代表的物理意义更直观的表示出来. 我们把(2.16)式改写成下述形式:

$$-\int_V \boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau - \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau, \tag{2.17}$$

上式左边第一项代表带电体对场的作用力,等式右边的项代表体积 V 内的电磁场动量的时间增加率. 如果认为(2.17)式是场的运动方程,那么等式左边第二项就表示作用在 V 内的场的作用力,由于是面积分,所以它只能表示体积 V 的界面外的场对体积 V 内的场的作用力. 这样,正如弹性力学中的张力一样,$-\boldsymbol{e}_n \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 代表面外的场作用在面内的场的单位面积上的应力,故又称 $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 为**麦克斯韦应力张量**或**张力张量**.

【例 2】 设空间存在着均匀电场 $\boldsymbol{E}$,试求电场的应力?

解　单位面积上的应力 $\boldsymbol{f}_n = -\boldsymbol{e}_n \cdot \overleftrightarrow{T}$，因为 $\boldsymbol{B} = 0$，所以

$$\boldsymbol{f}_n = -\boldsymbol{e}_n \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} E^2 \overleftrightarrow{I} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} \right]$$

$$= \varepsilon_0 \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_n) - \frac{1}{2} E^2 \boldsymbol{e}_n \cdot \overleftrightarrow{I} \right].$$

(1) 若取截面与电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直，如图 2.1(a)所示，即 $\boldsymbol{E} /\!/ \boldsymbol{e}_n$，

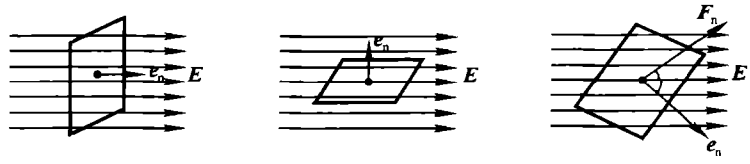


图 2.1

则

$$\boldsymbol{f}_n = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \boldsymbol{e}_n .$$

(2) 若取截面与电场平行(或者说面法线方向与 $\boldsymbol{E}$ 垂直)，即 $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{e}_n$，如图 2.1(b)所示，则

$$\boldsymbol{f}_n = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \boldsymbol{e}_n .$$

计算结果表明，如果我们考察单位正方体中的场，把 $\boldsymbol{e}_n$ 看成正方体的外法线方向，则沿着电场线方向的面上存在着纵向“拉力”，在 $\boldsymbol{e}_n$ 与电场线垂直的面上存在着横向的“压缩力”，它们的大小均等于 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. 可见，电场线好像是拉紧了的橡皮筋. 场的各部分之间存在着作用力，作用力的传递不是超距的.

(3) 当所取的截面方向任意时，单位面积上的应力的方向有下述定律：

电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向为面法线方向 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{f}_n$ 夹角的平分线方向.

证明如下：

$$\boldsymbol{f}_n = \varepsilon_0 \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_n) - \frac{1}{2} E^2 \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{e}_n \right],$$

两边点乘 $\boldsymbol{E}$，则有

$$\boldsymbol{f}_n \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{E});$$

两边叉乘 $\boldsymbol{E}$，则有

$$\boldsymbol{f}_n \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}).$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 沿 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_n$ 夹角的平分线方向，如图 2.1(c)所示.

上述结果对磁场也是正确的. 借助于这种磁应力，我们可以说明太阳表面黑子的平衡现象.

【例 3】 利用磁应力概念定性说明太阳黑子的平衡.

解 太阳表面的温度为 5 800 K,而太阳黑子的温度只有 4 500 K,若太阳内的物质近似认为是理想气体,则物态方程为

$$p = nk_{\mathrm{B}}T.$$

如果在一定高度处黑子内外有相同的压力,则由于黑子内温度较低,黑子内的密度就要比其他部分大,这样由于重力的作用黑子会很快下沉而从太阳表面消失. 相反,若认为黑子内外密度相同,则温度差别必然导致压力差别,黑子不可能稳定存在. 但事实上,黑子寿命可长达几个月之久. 如何解答黑子的平衡问题呢?

根据观察,发现黑子内部有很强的磁场,约 10^{-1} T,而太阳表面的磁场一般为 10^{-2} T. 因此,尽管黑子内部的压力较小,但却存在着一个附加的磁压 $\frac{1}{2\mu_0}B^2$,从而使黑子内外压力 $p_{内}$ 和 $p_{外}$ 满足平衡方程:

$$p_{外} = p_{内} + \frac{1}{2\mu_0}B^2,$$

于是保证了黑子相对稳定的存在. 我们不难估计力学平衡时黑子内外的温度差

$$nk_{\mathrm{B}}(T_{外} - T_{内}) = \frac{1}{2\mu_0}B^2.$$

取 $B = 10^{-1}$ T,则 $\frac{1}{2\mu_0}B^2 = 4\times10^3$ Pa,取物质数密度 $n = 3\times10^{17}$ m^{-3},k_B 为玻尔兹曼常数,则

$$\Delta T = 1\,000\ \mathrm{K},$$

与实验观察基本符合.

【例 4】 质量为 m,带电为 q 的粒子在磁场中运动,试在稳定情况下求带电粒子在磁场中的总动量.

解 电磁场的动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} &= \int_V \varepsilon_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau' \\ &= \int_V \varepsilon_0\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}\tau',\end{aligned}$$

在稳定条件下,利用 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,可得关系式

$$\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla\cdot(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA}) + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{E}),$$

把它代入上式后我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} &= \varepsilon_0\left[\int_V \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau' + \int_V \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau' - \int\nabla\cdot(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})\mathrm{d}\tau'\right] \\ &= \varepsilon_0\left[\int_V \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau' + \oint_S(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}\boldsymbol{S}' - \oint_S(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\right].\end{aligned}$$

当 $S\to\infty$ 时,上式的两个面积分趋向于零,所以

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} = \varepsilon_0\int\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau' = \varepsilon_0\int\boldsymbol{A}(\rho/\varepsilon_0)\mathrm{d}\tau' = \int\boldsymbol{A}q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'.$$

于是

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{e,m}} = q\boldsymbol{A}.$$

由此我们可以得到带电的运动粒子在外磁场中的总动量为

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}, \tag{2.18}$$

式中$\boldsymbol{v}$是带电粒子运动的速度，$\boldsymbol{p}$是对应于$\boldsymbol{v}$的正则动量表达式．(2.18)式是量子力学中极为重要的关系式．

*§2.3 电磁场的角动量守恒定律

1900年，列别捷夫从实验上测定了光压，从而使人们相信电磁场的物质性，电磁动量是客观存在的．那么表征物质普遍属性的角动量对于电磁体系是否存在呢？1936年贝特在实验上证实了存在电磁角动量*．下面我们来导出电磁角动量的表达式及角动量守恒定律．

电磁场对带电体的作用力是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau,$$

故力矩为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}\\ &= \boldsymbol{r}\times(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

设带电体的机械角动量为$\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}$，角动量的时间变化率等于作用在该体系上的合力矩，故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \int\boldsymbol{r}\times(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau. \tag{2.19}$$

利用(2.11)和(2.12)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau - \int_V \boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\mathrm{d}\tau,$$

上式还可改写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau - \int_V \nabla\cdot(-\overleftrightarrow{T}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau, \tag{2.20}$$

其中我们已利用关系式

$$-\nabla\cdot[\overleftrightarrow{T}\times\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}).$$

上述关系式证明如下：

定义$\overleftrightarrow{M} = -\overleftrightarrow{T}\times\boldsymbol{r}$，$\overleftrightarrow{M}$可用三阶张量$M_{ijk}$表示，即

$$M_{ijk} = \varphi_{ik}x_j - \varphi_{ij}x_k. \tag{2.21}$$

由于φ_{ij}是对称张量，所以M_{ijk}是关于j、k的反对称张量．因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}M_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_{ik}x_j - \varphi_{ij}x_k) = x_j\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x_i} - x_k\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_i} + \varphi_{ik}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \varphi_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}x_k\\ &= x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{ik} - x_k\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{ij} + \varphi_{ik}\delta_{ij} - \varphi_{ij}\delta_{ik}\\ &= x_j\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x_i} - x_k\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x_i},\end{aligned}$$

* Bethe, phys. Rev., 50 (1936) 115.

写成矢量形式即为

$$-\nabla\cdot[\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\times\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}).$$

利用高斯定理把(2.20)式化成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau-\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(-\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\times\boldsymbol{r}),\tag{2.22}$$

类似于前面关于能量守恒定律和动量守恒定律的讨论,我们即可知道,电磁场的角动量密度 $\boldsymbol{l}_{\mathrm{e,m}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}$,场角动量为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}=\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau,$$

角动量流密度张量为

$$\overrightarrow{\overrightarrow{M}}=-\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\times\boldsymbol{r}.$$

(2.22)式是电磁体系角动量守恒的具体表达式. 电磁角动量守恒定律在光的辐射理论和带电粒子的碰撞理论中极为重要. 即使在静场的情况下,角动量的概念也是富有成效的.

【例 5】 有一长为 l 的圆柱形电容器,外筒半径为 R_1,质量为 m_1,且接地;内圆筒半径为 R_2,质量为 m_2,且带电势为 φ_0,均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 与轴线平行,如图 2.2 所示. 试求当 $\boldsymbol{B}_0$ 除去时电容器转动的角速度.

解 在现在的情况下,$\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(-\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\times\boldsymbol{r})=0$,所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}})=0,$$

即

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}=\boldsymbol{C},$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 是常矢量. 在初始时刻($t=0$),圆筒静止,所以机械角动量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}=0$,故 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}=\boldsymbol{C}$;在 t 时刻除去 $\boldsymbol{B}_0$ 后,由于 $\boldsymbol{B}=0$,所以电磁角动量为零,故 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{C}$;这就是说,除去 $\boldsymbol{B}_0$ 以后,体系内的全部电磁角动量转化为机械角动量. 因为在柱坐标系(r,ϕ,z)中

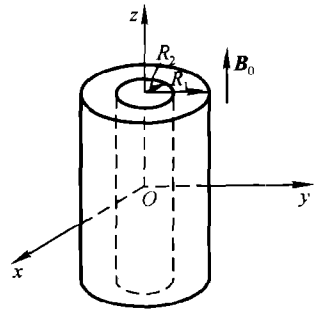


图 2.2

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}=\int_V\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}\tau=\varepsilon_0\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{R_1}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi,$$

忽略边缘效应,不难算得电容器内的场为

$$\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{E}=\left(\frac{\varphi_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\right)\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r,$$

代入上面的积分式中即得电容器中总的电磁角动量为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}=\frac{B_0 l\varphi_0(R_1^2-R_2^2)\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}(-\boldsymbol{e}_z).$$

因为电容器的机械角动量

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}} = I_1\boldsymbol{\omega} + I_2\boldsymbol{\omega} = (m_1R_1^2 + m_2R_2^2)\boldsymbol{\omega}.$$

根据角动量守恒性可以算出除去 $\boldsymbol{B}_0$ 以后，圆柱形电容器的转动角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{(m_1R_1^2 + m_2R_2^2)} = \frac{\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}}}{(m_1R_1^2 + m_2R_2^2)}$$

$$= \frac{l\varphi_0B_0(R_1^2 - R_2^2)\pi\varepsilon_0}{(m_1R_1^2 + m_2R_2^2)\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)}(-\boldsymbol{e}_z).$$

思考题 本例是否可用能量守恒定律讨论？

*§2.4 光子的自旋

下面我们来看一下电磁角动量的物理内容. 在真空中，电磁角动量为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}} = \varepsilon_0\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau.$$

利用 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$，上式可写成

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}} = \varepsilon_0\int\boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]\mathrm{d}\tau.$$

因为 $\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$，所以

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{e,m}} = \varepsilon_0\int\boldsymbol{r}\times\nabla\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau - \varepsilon_0\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau$$

$$= \varepsilon_0\int E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A_j\mathrm{d}\tau - \varepsilon_0\int E_a\boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial x_a}\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau.$$

利用关系

$$\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial x_a}\boldsymbol{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_a}A_k,$$

其中 ε_{ijk} 是三阶反对称单位张量（$\varepsilon_{123}=1$，ε_{ijk} 的任何两个下指标对调一次就改变一个负号，若有两个下标相同即为零），我们有

$$E_a\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial x_a}\boldsymbol{A}\right]_i = E_a\varepsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_a}A_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_a}(E_ax_jA_k) - \varepsilon_{ijk}x_jA_k\frac{\partial}{\partial x_a}E_a - E_a\varepsilon_{ijk}A_k\delta_{ja}.$$

如果讨论无源的空间区域，其中只有电磁波，即 $j=0$，$\rho=0$，于是 $\dfrac{\partial}{\partial x_a}E_a = \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$，那么

$$E_a\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial}{\partial x_a}\boldsymbol{A}\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_a}(E_a\varepsilon_{ijk}x_jA_k) - \varepsilon_{ijk}E_jA_k.$$

利用

$$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A})_i=\varepsilon_{ijk}E_jA_k,\ (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})_i=\varepsilon_{ijk}x_jA_k,$$

体系的总电磁角动量可写成

$$\boldsymbol{L}_{e,m}=\varepsilon_0\int_V E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A_j\mathrm{d}\tau-\varepsilon_0\int_V\nabla\cdot[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A})]\mathrm{d}\tau+\varepsilon_0\int_V\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau.$$

注意:我们所讨论的体系内的电磁波是在前不久的某一段时间间隔内产生的一列波,这列在有限时间间隔内产生的波势必只能局限在有限的空间区域内,这就是我们所考察的区域. 因此,我们可以认为在这个区域外面场为零. 于是可利用高斯定理把 $\boldsymbol{L}_{e,m}$ 中的第二项化成面积分,结果为零. 所以总电磁角动量可写成

$$\boldsymbol{L}_{e,m}=\varepsilon_0\int_V E_j(\boldsymbol{r}\times\nabla)A_j\mathrm{d}\tau+\varepsilon_0\int_V\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau,\tag{2.23}$$

显然,我们把电磁角动量分成两项. 根据经典物理和量子论之间的对应原理,由于第一项出现角动量算符 $\hat{\boldsymbol{L}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\times\nabla$,所以可看成光子的"轨道"角动量;我们把第二项看成光子的"自旋". 运用能量子概念,我们可以从第二项证明光子的自旋为 1(单位是 $h/2\pi$). 令

$$\hat{\boldsymbol{S}}=\varepsilon_0\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau.$$

因为 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$,所以对于真空中的电磁波必有(参见§8.1)

$$|E|=\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|,\quad\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}|,$$

即

$$|\boldsymbol{E}|=\omega|\boldsymbol{A}|.$$

在圆偏振的情况下,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 垂直(见§8.2),所以

$$|\hat{\boldsymbol{S}}|=\varepsilon_0\int E^2\frac{1}{\omega}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega}\int\varepsilon_0E^2\mathrm{d}\tau.$$

考虑到电磁场的总能量

$$W_{e,m}=\frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau=\varepsilon_0\int E^2\mathrm{d}\tau,$$

$\hat{\boldsymbol{S}}$ 和 $W_{e,m}$ 有如下关系

$$|\hat{\boldsymbol{S}}|=\frac{1}{\omega}|W_{e,m}|=\frac{1}{2\pi\nu}|W_{e,m}|.$$

由量子论可知,电磁波能量是量子化的,若把我们前面讨论的一列波看作是一个光子的话,则有

$$W_{e,m}=h\nu,$$

即得

$$|\hat{\boldsymbol{S}}|=\frac{h}{2\pi},$$

由此可见电磁场的光子自旋为 1. 这里,我们是从经典的电磁角动量的概念与爱因斯坦的光子概念相结合,即从半经典理论导出光子自旋的.

§2.5 介质中的电磁能量和动量守恒定律

1. 电磁能量

在真空中,场只对传导电流作功,而现在由于存在极化电流和磁化电流,因此介质中的场不仅对传导电流且对极化电流和磁化电流同时作功. 因此,场对带电体介质所作的功为

$$(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}})\cdot\boldsymbol{E}.$$

利用(1.44)式中的第四式

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}})+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

可得

$$(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}})\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E}.$$

类似于对真空中的推导,得到

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}+\left(\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}).\tag{2.24}$$

场使介质极化、磁化所作的功作为电磁能量储存起来,所以我们把这部分功归并到电磁场能量的表达式中去. 利用矢量公式,可得

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{E}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{E})+\boldsymbol{M}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\\&=\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{M}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t})\cdot\boldsymbol{E}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\\&=\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{E})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{M}),\end{aligned}$$

此处我们已用到 $\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{M}=\kappa\boldsymbol{H}$. 把上式代回(2.24)式可得

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).\tag{2.25}$$

因此,考虑了介质的极化能和磁化能之后,介质中的电磁能量密度

$$w_{\mathrm{e,m}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}),\tag{2.26}$$

能流密度为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.27}$$

显然真空中的能量密度和能流密度是(2.26)式和(2.27)式的特例. (2.25)式即为介质中电磁体系的能量守恒定律.

2. 电磁动量

介质里的电荷分布为 $\rho+\rho_{\mathrm{p}}$,电流分布为 $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}$,因此场对带电体及介质的作用力也就是对上述电荷和电流的作用,其力密度为

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}}=(\rho+\rho_{\mathrm{p}})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}})\times\boldsymbol{B}.$$

不难证明,利用麦克斯韦方程(1.44),上式可写成

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}^{*}-\frac{\partial\boldsymbol{g}^{*}}{\partial t}, \tag{2.28}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}^{*}=\left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}\right],$$

$$\boldsymbol{g}^{*}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}.$$

(2.28)式及其 $\overleftrightarrow{T}^{*}$ 和 $\boldsymbol{g}^{*}$ 的表达式虽然和真空中形式一样,但其中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是总场,即不仅含有自由电荷、电流激发的场,还包括 ρ_{p}、$\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}$、$\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}$ 的全部贡献.

若把力密度 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}}$ 分成两部分:

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}',$$

其中

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{f}'=\rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}})\times\boldsymbol{B},$$

显然 $\boldsymbol{f}$ 代表场对带电体的作用力,$\boldsymbol{f}'$ 代表场对介质的作用力. 于是我们有

$$\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}'-\frac{\partial\boldsymbol{g}'}{\partial t}, \tag{2.29}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}'=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH}\right], \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{g}'=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}. \tag{2.31}$$

(2.29)式可写成下述积分形式:

$$-\int\boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau=-\int(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau=\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overleftrightarrow{T}'+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{g}'\mathrm{d}\tau. \tag{2.32}$$

在(2.32)式中,我们把场对介质的作用力 $\boldsymbol{f}'$ 归并到 $\overleftrightarrow{T}'$ 和 $\boldsymbol{g}'$ 中去了,相当于把场和介质看成一个体系,所以这时 $\boldsymbol{g}'$ 应理解为体系内场的电磁动量密度和介质的机械动量密度(由极化和磁化引起的动量)之和,$\overleftrightarrow{T}'$ 应理解为体系外的场和介质对体系内的场和介质的电磁作用力的张力张量.

从相对论的观点看来，在有介质的情况下电磁场的动量应写成下面的形式：

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}. \tag{2.33}$$

把(2.33)式和(2.27)式比较即可看到，$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$ 之间的关系和真空中的情况完全一样，

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}.$$

上式满足相对论协变(见§11.6)，因而被物理学家们所确认. 于是，我们可以把 $\boldsymbol{g}'$ 分成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}'&=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}+(\mu\varepsilon-\mu_0\varepsilon_0)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}},\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}=(\mu\varepsilon-\mu_0\varepsilon_0)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{2.34}$$

可以看作介质的机械动量. 显然在真空中 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0$，所以 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}=0$. 电磁理论应当说非常成熟，但关于介质中的电磁能量、动量及其力的平衡问题，至今还有许多问题值得研究*.

*§2.6　规范不变性和磁单极的奇异弦

讨论静电场时，我们引入了标势 φ 以描述场的分布，电场强度 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$；在讨论恒定电流的磁场时，我们又引入了矢势 $\boldsymbol{A}$ 以描述磁场的分布，磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$. 在一般情况下，前者不再成立；而后者 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 仍有效. 实际上，在讨论角动量守恒时，我们已经把 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的定义推广应用于一般的情形. 在这一节我们一方面证明 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的普遍性，另一方面修改 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 的表示式使之具有普遍性.

1. $\boldsymbol{A}$、φ 的引入

仍从下述麦克斯韦方程出发：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j},\end{cases}$$

我们先回忆一下，在静场时引入 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 主要根据是麦克斯韦方程组中的两个齐次方程，即是

---

* de Groot S. R. and Suttorp L. G., Foundations of Electrodynamic, North-Halland, Amsterdom (1972).

从上述第二、三式引入的. 静场时这两个齐次方程表示为$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$和$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$. 在普遍情形下,我们仍然是依据这两个齐次方程,但所不同的是$\boldsymbol{E}$的旋度不再为零,这就是静场和普遍情形的主要差别之处. 实际上,无论是真空还是介质,有源还是无源,这两个齐次方程的形式永远不变,因此由它们来引入φ和$\boldsymbol{A}$应当是普遍适用的.

现从最简单的齐次方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$开始,显然$\boldsymbol{B}$的散度为零意味着$\boldsymbol{B}$是某个矢量的旋度,故我们仍有类似于静态场的形式

$$\boldsymbol{B}=\nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{2.35}$$

其次,我们来考察第二个齐次方程(法拉第定律)$\nabla \times \boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0$,把(2.35)式代入则得

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{2.36}$$

矢量$\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$的旋度为零意味着它可表示为某个标量函数的梯度,我们把它写成为

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla \varphi,$$

这里,我们仍用φ来表示这个标量函数,并且右边采用负号以使$\boldsymbol{A}$与时间无关时仍回到静电标势. 上式可改写成

$$\boldsymbol{E}=-\nabla \varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{2.37}$$

(2.35)和(2.37)式即是我们所要得到的结果. 它们表示要用四个势函数φ、A_x、A_y、A_z才能完全地描述电磁场. 因此,我们既可直接用场量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$来描写电磁场,也可以用矢势$\boldsymbol{A}$和标势φ描写电磁场,两种描述方式是等价的. 特别要着重指出:(2.35)和(2.37)式实际上是磁场的高斯定理和法拉第定律的另一种表达方式;换句话说,麦克斯韦方程中的两个齐次方程也可以用(2.35)和(2.37)式来代表.

在真空中,无源的情况下,麦克斯韦方程组中的另两个非齐次方程也退化成齐次方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=0.$$

在这一特殊情况下,我们可引入另一套标势和矢势φ_m、$\boldsymbol{A}_e$,即

$$\boldsymbol{E}=\nabla \times \boldsymbol{A}_e,$$

$$\boldsymbol{B}=-\mu_0 \nabla \varphi_m+\frac{\partial \boldsymbol{A}_e}{\partial t}. \tag{2.38}$$

实际上,(2.38)式也可以直接从场的对偶性变换(1.68)式得到. 假若磁荷存在被证实的话,它可以用来描述纯磁荷体系. 这也就从侧面说明了从麦克斯韦方程组中的齐次方程出发引出普遍的$\boldsymbol{A}$、φ的原由.

2. 规范变换

虽然$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}$、φ是描写电磁场的两种等价的方式,但由于$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}$、φ之间是微分方程的关系,所以它们之间的关系不是一一对应的. 情况的复杂性表现为要求有一个附加的自由度——规范自由度.

若对(2.35)和(2.37)式中的$\boldsymbol{A}$、φ作下述变换:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda,$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \tag{2.39}$$

式中 Λ 是任意标量函数. 于是我们得到了一组新的 $\boldsymbol{A}'$、φ'，不难证明

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

$$-\nabla \varphi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}. \tag{2.40}$$

这就是说，通过变换(2.39)式引入的一组势$(\boldsymbol{A}', \varphi')$和原来的一组势$(\boldsymbol{A}, \varphi)$描述同一个电磁场. 换句话说，对于同一个电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，其势$(\boldsymbol{A}, \varphi)$的选择并不是唯一的，通过变换式(2.39)可以找到无穷多组$(\boldsymbol{A}, \varphi)$而对应同一个场. 变换(2.39)式称为规范变换. 式中的 Λ 是一个任意的标量函数，对它可以有不同的选择，不同的选择代表不同的规范，这就是规范自由度，为了限制规范自由度，需引入**规范条件**. 不同的场合可以选择不同的规范条件. 必须强调指出，规范条件只有一个约束方程，例如我们可以选择 $\varphi = 0$ 的规范，但不可以选择 $\boldsymbol{A} = 0$ 的规范，因为 $\boldsymbol{A} = 0$ 有三个条件，除非体系的 $\boldsymbol{A}$ 本身为零.

从物理观点来看，物理上可测量的量一定是规范不变的，因此描述涉及电磁现象的物理规律，其方程形式都应当在规范变换下保持不变，这就称**规范不变性**，(2.39)式称**规范变换**.

3. $\boldsymbol{A}$、φ 所满足的方程

把(2.37)式代入$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$，并利用 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，得到

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2.41}$$

把(2.35)和(2.37)式代入方程$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$，利用 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ 及公式$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$，立即可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \boldsymbol{j}. \tag{2.42}$$

方程(2.41)和(2.42)是互相关联的，$\boldsymbol{A}$、φ 混杂在同一个方程中，而且两个方程的形式也不对称. 但是我们可以利用 $\boldsymbol{A}$、φ 的任意性来简化上述方程.

最简单的选取是对 $\boldsymbol{A}$ 附加下述条件：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{2.43}$$

于是方程(2.41)和(2.42)化成

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\mu \boldsymbol{j}, \end{cases} \tag{2.44}$$

(2.43)式称为**库仑规范**.

通常的选取是使 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{2.45}$$

上式称为**洛伦兹规范**. 这样，(2.41)和(2.42)式化成

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon},\\ \nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}.\end{cases}\tag{2.46}$$

值得注意的是：如果$(\boldsymbol{A}、\varphi)$不满足洛伦兹条件，即$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\neq 0$，可令$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\Theta$，则由(2.39)式我们可以引入$(\boldsymbol{A}',\varphi')$，令

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\Lambda,$$

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}.$$

取

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla^2\Lambda+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda=0,$$

故有

$$\nabla^2\Lambda-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\Theta.\tag{2.47}$$

由此可以看出，只要标量函数 Λ 满足(2.47)式，则$(\boldsymbol{A}',\varphi')$就满足洛伦兹条件，这就是说我们一定可以找到满足洛伦兹条件的$(\boldsymbol{A},\varphi)$. 另一方面，它也告诉我们，若$(\boldsymbol{A}、\varphi)$已满足洛伦兹条件，这时 $\Theta=0$，于是(2.47)式变为

$$\nabla^2\Lambda-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=0,$$

即$(\boldsymbol{A}'、\varphi')$和$(\boldsymbol{A}、\varphi)$都满足洛伦兹条件，二者相差一个四维调和函数组成的规范变换. 这就是说，洛伦兹条件不足以消除非物理的规范自由度. 同理，对库仑规范也可作类似的讨论.

4. 定域规范变换和规范场概念

在量子理论中，规范不变性的内容已大大充实，规范变换也不仅仅是原来意义上(2.39)式的规范变换. 例如考虑一带有电荷 q 的粒子，该带电粒子在电磁场中运动的薛定谔方程为

$$\left[\frac{1}{2m}(\mathrm{i}\nabla-q\boldsymbol{A})^2+q\varphi\right]\psi(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t),\tag{2.48}$$

该方程仅作(2.39)式的规范变换时不是不变的，这就是说，麦克斯韦方程同量子力学有矛盾. 为了解决这个矛盾，必须要求波函数 ψ 在电磁场$(\boldsymbol{A},\varphi)$作(2.39)式变换的同时作如下变换：

$$\psi'(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\Lambda}\psi(\boldsymbol{x},t),\tag{2.49}$$

方程(2.48)式才能不变. 于是，量子力学也服从麦克斯韦方程的规范不变性，两者不矛盾.

由以上讨论不难看出，在量子力学中要保证电磁规范不变性，则波函数 ψ 在电磁场作规范变换的同时需作一相位变换(2.49). 因此，从量子力学角度考虑规范变换问题时，应从波函数的相位变换开始. 在量子力学中波函数的相位变换可以分为两类.

(1) 整体规范变换

此时波函数的相位变换关系为

$$\psi\longrightarrow\psi'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi,\tag{2.50}$$

式中 α 是一个与时空无关的常数. 这表示一旦在时空某一个点上决定了 α，则它的值在任何点上都一样，这类规范变换又称为整体规范变换.

(2) 定域规范变换

此时波函数的变换关系为

$$\psi \longrightarrow \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi, \tag{2.51}$$

式中的 α 是时空的函数，即 $\alpha = \alpha(\boldsymbol{x}, t)$，这表示在不同的时空点上，波函数的相位变换是不一样的. 这类规范变换称为定域规范变换.

以上两类规范变换在性质上有很大的差异. 例如自由粒子的薛定谔方程

$$\frac{1}{2m}(\mathrm{i}\nabla)^2\psi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.52}$$

在整体规范变换下显然是不变的，但在定域规范变换下则不是不变的. 因为此时 α 是时空的函数. 假如我们要保持定域规范不变性，那么我们必须对自由粒子的薛定谔方程(2.52)式进行某些修改. 当然，修改后的方程将不再描写自由粒子. 这就是说，此时在体系内必须引进某些力场，修改后的方程将成为粒子在某些力场中的运动方程. 是什么力场呢？答案可立刻得到，因为定域变换

$$\psi \longrightarrow \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{x}, t)}\psi.$$

若令 $\alpha = q\Lambda$，则(2.51)式就是保持电磁规范不变的相位变换(2.49)式. 因而自由粒子的薛定谔方程(2.52)式将被修改为

$$\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - q\boldsymbol{A})^2\psi = \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)\psi.$$

当然，(2.48)式在作定域规范变换(2.51)的同时，$\boldsymbol{A}$、φ 应作如下的变换

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \frac{1}{q}\nabla\alpha,$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial t}\alpha.$$

显然，方程(2.48)式所描写的是一带电粒子在电磁场$(\boldsymbol{A}, \varphi)$中的运动方程. 可以看出，电磁场$(\boldsymbol{A}, \varphi)$是为了体系在定域变换下不变而引入的辅助场，因而电磁场被称为规范场. 以上讨论具有一般性，即具有某种整体对称性的物理规律，当把它推广到定域对称性变换不变时就必须引入新场——规范场.

5. 磁单极的奇异弦和规范变换

由于势的不唯一性，磁单极的奇异势的选择也有无穷多种，因此奇异弦在空间的位置也是不确定的. 下面要证明的是奇异弦在空间位置的变动等效于作规范变换.

根据狄拉克的单弦奇异势，我们把磁单极子的奇异弦设想成通往无穷远去的、截面无限小的通电螺线管，其端点代表磁单极子，如图 2.3(a)所示. 管内的磁场即是奇异场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{h}}$(因为奇异场只在奇异弦上)，设螺线管内的通量(即奇异场的通量)为 $-\mu_0 g$，则螺线管末端的通量是 $+\mu_0 g$，"+"号表示从末端向外发散，它正好代表磁单极子所产生的场的通量. 根据这样一个直观的物理图象，磁单极的奇异弦势可直接用此螺线管在空间中产生的矢势来表示.

因为螺线管的每一电流环都相当于一个磁偶极子，所以整个奇异弦即是磁偶极子连成的线. 根据对偶场原理，从电偶极子势(1.14)式直接对偶得到磁偶极子产生的标势为

$$\varphi_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\frac{1}{R},$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{m} = g\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为磁偶极矩，其磁场为

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0 \nabla\varphi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} d\boldsymbol{m} \cdot \nabla\nabla \frac{1}{R}.$$

在弦外，$\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$，故

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} d\boldsymbol{m} \nabla^2 \frac{1}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} d\boldsymbol{m} \cdot \nabla \nabla \frac{1}{R}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(-d\boldsymbol{m} \times \nabla \frac{1}{R} \right) = \nabla \times d\boldsymbol{A},$$

其中 $$d\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} d\boldsymbol{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right),$$

这是磁偶极子 $d\boldsymbol{m}$ 产生的矢势. 于是磁偶极子线所产生的矢势为

$$\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} g \int d\boldsymbol{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right).$$

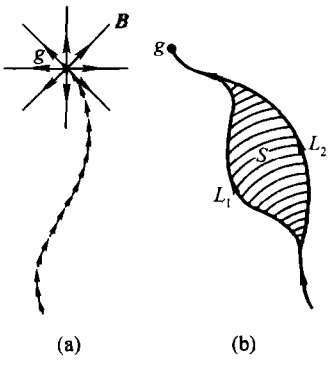


图 2.3

考虑如图 2.3(b)中的两条不同的弦 L_1 和 L_2，

$$\boldsymbol{A}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} g \int_{L_1} d\boldsymbol{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right),$$

$$\boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} g \int_{L_2} d\boldsymbol{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right),$$

因为 L_1 和 L_2 组成闭合曲线 C，所以两矢势之差即给出沿着闭合曲线积分的结果：

$$\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} g \left[\int_{L_2} - \int_{L_1} \right] d\boldsymbol{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} g \oint_C d\boldsymbol{l}' \times \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right),$$

利用积分变换公式把上式化成面积分：

$$\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} g \int_S (d\boldsymbol{S}' \times \nabla') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} g \left[\int_S \nabla \left(\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \cdot d\boldsymbol{S}' - \int \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{S}' \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} g \nabla \int_S \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \cdot d\boldsymbol{S}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} g \nabla \Omega, \tag{2.53}$$

式中 Ω 是 C 所围成的面积对观察点所张的立体角，即

$$\Omega = \int_S \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \cdot d\boldsymbol{S}',$$

所以(2.53)式可表示为

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} g \nabla \Omega. \tag{2.54}$$

把(2.54)与规范变换式

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda$$

比较，即可看出，由弦 C_1 到弦 C_2 等效于作一个规范变换，规范函数为

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{4\pi} g\Omega . \tag{2.55}$$

*§2.7 阿哈朗诺夫－博姆(Aharonov－Bohm)效应

带电粒子在外磁场中的动力学行为决定于洛伦兹力,因而只与 $\boldsymbol{B}$ 直接相关. 由于对应一个确定的磁场,可以有无穷多的矢势 $\boldsymbol{A}$,所以人们往往说,真实的物理场是 $\boldsymbol{B}$ 而不是 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 的引入是出于数学上的方便.

这种说法在经典的意义上是对的,但它并不意味着系统的量子行为也只取决于磁场 $\boldsymbol{B}$. 事实上,矢势 $\boldsymbol{A}$ 可以直接影响体系的量子行为. 为了验证这一想法,1956 年,阿哈朗诺夫和博姆提出了一个重要的实验方案*,到 60 年代这一方案得到了实现.

如图 2.4 所示,一束电子 K 瞄准栅板上的一对平行的双缝,栅板后面放置一个无限长的密绕螺线管 A. 电子穿过栅上的双缝以后被一焦距为 f 的透镜聚焦在屏幕上. 螺线管上加上一定的电势以阻止电子穿入螺线管,于是电子只能在螺线管外的区域行进. 实验步骤是螺线管先不通电,能量相同的电子离开源后经双缝分成两束. 由于两束电子有相位差,结果在屏幕上得到一幅干涉图像. 然后螺线管通电流,管内就建立起磁场,重复上述的实验又得到一幅干涉图像. 比较前后两幅图像,发现干涉条纹的极大值和极小值的位置有了移动,其数值为

$$\Delta y = \frac{e\Phi}{mv}\frac{f}{d}, \tag{2.56}$$

式中 Φ 是螺线管内的磁通量,v 为电子的速度,d 是双缝间距. 这就是所谓阿哈朗诺夫－博姆效应. 许多实验物理学家用各种方法改进实验精度**,结果都与上式一致.

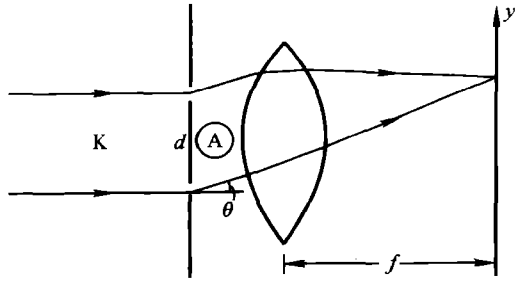


图 2.4

这个实验结果说明了什么问题呢? 比较前后两次实验的条件,唯一的区别是第一种情况

---

* Aharonov Y. and Bohm D. Phys. Rev., 115(1956)485; 123(1961)1511; 125(1962)2192; 130(1963)1625.

** Boyer T. H., Am. J. Phys., 40(1972) 56,1708.

下，管外 $\boldsymbol{B}=0$，$\boldsymbol{A}=0$；第二种情况下，管外 $\boldsymbol{B}=0$，但 $\boldsymbol{A}\neq 0$. 管内的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 对电子并不产生直接的影响，因为螺线管上的电势使电子无法经过管内区域. 由此可见，两者的差别仅仅是管外的矢势 $\boldsymbol{A}$. 所以说管外矢势 $\boldsymbol{A}$ 对电子起了作用，使两束电子产生了一个附加的相位差，从而干涉条纹的极值位置有了移动. 因此，我们很自然地得到一个结论：不能够说 $\boldsymbol{A}$ 是一个完全非物理的场，$\boldsymbol{A}$ 的物理效应是可观测的，只不过它不为人们熟悉而已.

现在，我们根据量子论的基本概念来算出干涉条纹的移动值.

当螺线管不通电时，管外 $\boldsymbol{A}=0$，电子是自由电子态，其波函数的相位是

$$\phi=\int \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{2.57}$$

式中 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\hbar\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}$ 是波矢量，$\hbar$ 是普朗克常数，由图 2.4 不难看出，通过两条狭缝的电子波函数的相位差为

$$\phi_1-\phi_2=kd\sin\theta, \tag{2.58}$$

若 $\phi_1-\phi_2=(2n+1)\pi$，即 $kd\sin\theta=(2n+1)\pi$，则两束电子波相消，于是屏上干涉条纹的暗纹位置为

$$y=f\tan\theta\approx\frac{(2n+1)\pi}{k}\frac{f}{d}, \tag{2.59}$$

这里，我们已经利用了 θ 很小时 $\sin\theta\approx\tan\theta$.

当螺线管通电流后，管外 $\boldsymbol{A}\neq 0$，此时与电子速度 $\boldsymbol{v}$ 共轭的正则动量(见 §2.2 例 4)为

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}+q\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A},$$

所以这时电子波函数的相位因子多了一项 $\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}$，即通电时波函数的相位因子是

$$\phi_1=\int_{C_1}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\hbar}-\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\phi_2=\int_{C_2}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\hbar}-\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

式中的 C_1 和 C_2 分别是穿过两条狭缝的电子到屏上某点的路径. 因此，由图 2.4 可知

$$\phi_1-\phi_2=kd\sin\theta+\int_{C_1}\frac{-e\boldsymbol{A}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{C_2}\frac{-e\boldsymbol{A}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{2.60}$$

因为

$$\int_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\Phi$$

是穿过 C_1 和 C_2 围成的闭合回路中的磁通量，也就是螺线管内的磁通量. 于是，我们得到

$$\phi_1-\phi_2=kd\sin\theta-\frac{e}{\hbar}\Phi.$$

如果 $\phi_1-\phi_2=(2n+1)\pi$，即

$$kd\sin\theta=(2n+1)\pi+\frac{e}{\hbar}\Phi,$$

则两束电子波相互干涉而消失. 因此，屏上干涉条纹的暗纹位置为

$$y'=f\tan\theta\approx\frac{\left[(2n+1)\pi+\frac{e}{\hbar}\Phi\right]f}{kd},$$

式中同样使用了 θ 很小时 $\sin\theta \approx \tan\theta$. 这样前后两幅干涉图像的暗纹位置相对移动为

$$\Delta y = y' - y = \frac{e\Phi f}{\hbar k d} = \frac{e\Phi f}{mvd}, \tag{2.61}$$

计算结果与实验数据完全一致.

阿哈朗诺夫－博姆效应向人们极其明确地显示了矢势 $\boldsymbol{A}$ 的物理实在. 它表明:在量子水平上,对磁场的描述而言,只用 $\boldsymbol{B}$ 已不够;而用 $\boldsymbol{A}$ 却又太多,有规范变换带来的任意性,用 $\boldsymbol{A}$ 的线积分可恰到好处.

思考题 若磁通量 Φ 是量子化的,是否还有上述效应?

*§2.8 电荷的量子化

迄今为止,实验上发现的一切微观粒子所带的电荷都是电子电荷的整数倍,这个整数的精度达 10^{-20}. 因此,自然界中所有的电荷都只限于取分立的值,即电荷是量子化的. 电荷为什么是量子化的?这是物理世界的一大奥秘,其中一定蕴含着极其深刻的物理本质,它吸引了许多第一流的物理学家. 狄拉克首先从理论上论证了,如果存在磁单极子,则电荷的分立性可得到圆满的解释.

下面我们从磁单极的奇异场的非物理性出发论证一下磁单极与电荷量子化之间的联系,推出电荷量子化的条件.

考察一个电子在磁单极产生的磁场中运动,所谓奇异场是非物理的,就是说它对电子的状态不产生本质性的改变和影响. 从量子论观点来看,若要使奇异场对电子的运动状态不起作用,则必须使电子波函数的相位环绕奇异弦一周的回路积分为 2π 的整数倍,否则就会产生物理效应. 类似于上节的讨论,有磁场存在的情况下,自由电子的波函数的相位上多了一项 $\frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}$,因此,环绕奇异弦一周造成的相位差是

$$\Delta\phi = \oint_l \frac{e\boldsymbol{A}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

将狄拉克的单弦奇异势代入上式积分,得

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{\mu_0 eg}{4\pi\hbar}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\mu_0 eg}{4\pi\hbar}2\pi(1-\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi} = \frac{\mu_0 eg}{\hbar},\end{aligned}$$

所以要使奇异弦对波函数(即电子的状态)不产生实质性的影响,要求 $\Delta\phi = 2n\pi$,即

$$\frac{\mu_0 eg}{\hbar} = 2n\pi,$$

可见

$$eg = \frac{2n\pi}{\mu_0}\hbar, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.62}$$

上式就是**狄拉克电荷量子化条件**.

若用施温格的双弦奇异势代入积分,则得

$$eg = \frac{4n\pi}{\mu_0}\hbar, \tag{2.63}$$

这称为**施温格电荷量子化条件**.

量子化条件不仅保证了奇异场在物理上不产生效应,而且自动地得出了重要的结论:若自然界存在磁单极,则一切电荷都只能是某一最小数值的整数倍,即 n 取 1 得到:

$$e_0 = \frac{2\pi\hbar}{\mu_0 g} \quad \text{(狄拉克量子化条件)},$$

或

$$e_0 = \frac{4\pi\hbar}{\mu_0 g} \quad \text{(施温格量子化条件)}.$$

这就解释了电荷的量子化这一基本事实. 值得一提的是吴-杨的磁单极理论* 利用 A_μ 的规范自由度性质亦可导出量子化条件,这和狄拉克的量子化条件结果一致,并且证明了奇异弦的非物理性可以消去(参见习题 2.10).

【例 6】 一个电子与静止的磁单极子碰撞,试讨论体系在碰撞前后电磁角动量的改变.

解 如图 2.5 所示. 设碰撞参数 b 很大,以至于近似地认为电子不发生碰撞偏转. 电子沿着 z 轴方向入射,在 $t = t_1$ 时电子在 $\boldsymbol{r}_1$ 处;碰撞后,$t = t_2$ 时电子在 $\boldsymbol{r}_2$ 处. 磁单极 g 的位置在 $\boldsymbol{r}_0$ 处. $\boldsymbol{R}_{10}$ 和 $\boldsymbol{R}_{20}$ 分别表示在 t_1 和 t_2 时刻电子到磁单极子的位置矢量. 这样,体系的电磁角动量为

$$\boldsymbol{L}_{e,m} = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \mathrm{d}\tau.$$

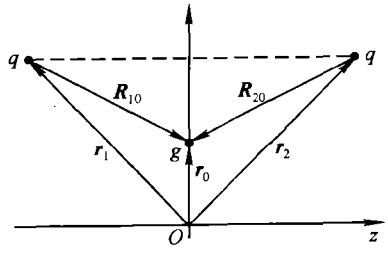


图 2.5

因为磁单极是静止的,所以我们采用磁标势 φ_m 来描写,电子的电场也用标势 φ 来描写,即 $\boldsymbol{B} = -\mu_0 \nabla\varphi_m$, $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$,则

$$\boldsymbol{L}_{e,m} = \mu_0 \varepsilon_0 \int \boldsymbol{r} \times (\nabla\varphi \times \nabla\varphi_m) \mathrm{d}\tau.$$

再令 $\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}(\varphi\nabla\varphi_m - \varphi_m\nabla\varphi)$,则 $\nabla \times \boldsymbol{h} = \nabla\varphi \times \nabla\varphi_m$,故

$$\boldsymbol{L}_{e,m} = \mu_0 \varepsilon_0 \int \boldsymbol{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) \mathrm{d}\tau.$$

利用下述矢量公式

$$\boldsymbol{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{h}, \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{r}\boldsymbol{h}) = 3\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{h},$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{h}) + (\boldsymbol{h} \cdot \nabla)\boldsymbol{r}, \quad \nabla(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{r}) = \nabla\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{h},$$

可得关系式

$$\boldsymbol{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) = \nabla(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{r}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{r}\boldsymbol{h}) + 2\nabla \cdot (\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{h}).$$

利用上式,结合高斯定理可得

---

* Wu T. T. and Yang C. N., Phys. Rev. D, 12(1975)3845

$$\boldsymbol{L}_{e,m} = -2\mu_0\varepsilon_0\int \boldsymbol{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{h})\mathrm{d}\tau,$$

这里已用到无穷远边界上场为零的条件. 因为$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e$, $\nabla^2\varphi_m = -\rho_m$, ρ_e 和 ρ_m 分别为电荷密度和磁荷密度,所以

$$-2(\nabla\cdot\boldsymbol{h}) = -(\varphi\nabla^2\varphi_m - \varphi_m\nabla^2\varphi) = (\varphi\rho_m - \varphi_m\rho_e/\varepsilon_0),$$

于是电磁角动量可写成

$$\boldsymbol{L}_{e,m} = \mu_0\varepsilon_0\int \boldsymbol{r}(\varphi\rho_m - \varphi_m\rho_e/\varepsilon_0)\mathrm{d}\tau.$$

在 $t = t_1$ 时,$\rho_m(\boldsymbol{r}) = g\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$, $\rho_e(\boldsymbol{r}) = -e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$,且 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}$, $\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \frac{g}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$,所以初始时的角动量为

$$\boldsymbol{L}'_{e,m} = -\frac{\mu_0 eg}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|} - \frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1|}\right] = -\frac{\mu_0 eg}{4\pi}\boldsymbol{e}_{10},$$

式中 $\boldsymbol{e}_{10} = \frac{\boldsymbol{R}_{10}}{R_{10}}$.

同理可得末态的电磁角动量 $\boldsymbol{L}''_{e,m}$为

$$\boldsymbol{L}''_{e,m} = -\frac{\mu_0 eg}{4\pi}\boldsymbol{e}_{20},$$

式中 $\boldsymbol{e}_{20} = \frac{\boldsymbol{R}_{20}}{R_{20}}$.

于是得碰撞前后的角动量的改变是

$$\Delta\boldsymbol{L}_{e,m} = \boldsymbol{L}''_{e,m} - \boldsymbol{L}'_{e,m} = \frac{\mu_0 eg}{2\pi}\boldsymbol{e}_z. \tag{2.64}$$

(2.64)式表示碰撞后体系的电磁动量增加了$\frac{\mu_0 eg}{2\pi}\boldsymbol{e}_z$. 因为体系的总角动量是守恒的,即电磁角动量加上机械(力学的)角动量是常数,所以碰撞以后体系的机械角动量减少了$\frac{\mu_0 eg}{2\pi}\boldsymbol{e}_z$,即

$$\Delta\boldsymbol{L}_{机械} = -\frac{\mu_0 eg}{2\pi}\boldsymbol{e}_z.$$

值得注意的是,机械角动量只有 z 轴方向上的分量有变化,而且 ΔL_z 与碰撞参数 b 和电子的速度 v 均无关,与电子和磁单极之间的距离也无关,这是电子－磁单极体系极为重要的特点. 当然,电子与磁单极碰撞时角动量会发生变化这是意料中的事情,因为电子受到的作用力不是有心力.

如果把上述结果和量子论中角动量变化的量子化概念结合起来,立即得到电荷的量子化条件:

$$\Delta L_z = \frac{\mu_0 eg}{2\pi} = \Delta m\hbar, \quad \Delta m = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

即

$$eg = \frac{2\pi\Delta m}{\mu_0}\hbar = \frac{2\pi n}{\mu_0}\hbar.$$

显然,这与狄拉克量子化条件完全一致. 用这种半径典的方法得不到施温格量子化条件,而吴－杨的磁单极理论也只与狄拉克量子化条件一致(见习题 2.10),所以施温格的量子化条件并没有得到公认.

*§2.9 CPT 反演不变性

引入磁单极以后,电磁场方程中的电和磁就完全对称了. 然而,此时方程组的 C(电荷共轭)、P(空间反演)和 T(时间反演)的变换性质与原麦克斯韦方程组的 C、P、T 变换性质有很大的差别.

我们先证明麦克斯韦方程组在 C、P、T 变换下是不变的. 通常的场方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \tag{1.47}$$

(1) 电荷共轭变换 C 作用到方程上使其中的电荷改变符号,其定义为

$$\rho \to -\rho, \quad \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}, \quad t \to t. \tag{2.65}$$

于是,由电流的定义 $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} = \rho \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 可知,在 C 变换下

$$\boldsymbol{j} \to -\boldsymbol{j}, \tag{2.66}$$

而场量在 C 变换下作如下改变:

$$\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}. \tag{2.67}$$

(2.67)式可由静电和静磁这一特殊情况下的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的公式

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau', \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$$

直接得到验证. 另一方面,在 C 变换下微商运算按下式变换:

$$\nabla \longrightarrow \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.68}$$

把(2.65)～(2.68)式代入麦克斯韦方程组(1.47)即可看出,方程组在 C 变换下保持不变.

(2) 空间反演 P 的定义为

$$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}, \quad \rho \to \rho, \quad t \to t. \tag{2.69}$$

同(1)一样,由电流的定义及 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的静态场公式得到 P 变换下它们按下述方式变换:

$$\boldsymbol{j} \to -\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}, \tag{2.70}$$

而且

$$\nabla \to -\nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.71}$$

把(2.69)～(2.71)式代入方程组,即可看出麦克斯韦方程组具有空间反演不变性.

(3) 时间反演 T 形象地说就是把基本物理过程拍成电影,再把胶卷倒过来放映,其定义为

$$t \to -t, \quad \rho \to \rho, \quad r \to r. \tag{2.72}$$

同样可以找到 j、E、B 及∇、$\frac{\partial}{\partial t}$的变换方式

$$\begin{aligned} &j \to -j, \quad E \to E, \quad B \to -B, \\ &\nabla \to \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

把变换(2.72)和(2.73)式代入方程组,可知麦克斯韦方程组在时间反演下也是不变的.

显然,麦克斯韦方程组在 CPT 联合反演下亦不变.

值得注意的是,C、P、T 变换通常被认为是三个互相独立的变换,这可以从变换的定义(2.65)、(2.69)和(2.72)看出. 例如,具体地说,电荷密度 ρ 在 P、T 变换下是不变的. 这种定义的合理性是可以讨论的*.

现在讨论引进磁单极以后麦克斯韦方程组的 C、P、T 的变换性质. 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 j_m - \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = j_e + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \end{cases} \tag{2.74}$$

从下面的讨论中,我们将得出一个极为重要的结果:如果保留原来意义上的 C、P、T 变换[即(2.65)～(2.73)式],并认为引进磁荷后的麦克斯韦方程组(2.74)仍具有 C、P、T 变换下的不变性,那么我们必须赋予磁荷特殊的变换性质.

(1) C 变换 由(2.67)式看出,在电荷共轭变换下,$B \to -B$,而算子∇不变号. 于是,从(2.74)中的第三式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m$$

即可看出,要使它具有 C 变换下的不变性,必须成立

$$\hat{C}\rho_m = -\rho_m, \tag{2.75}$$

这就是说,在电荷共轭变换下不仅电荷密度变号,而且磁荷密度也要变号.

(2) P 变换 由(2.70)式看到,在 P 变换下 $B \to B$,磁场不变号,但算子$\nabla \to -\nabla$,于是同样从方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m$$

看出,在空间反演下,虽然电荷密度是不变号的,但磁荷密度必须变号,才能保证方程具有空间反演不变性,即

$$\hat{P}\rho_m = -\rho_m, \tag{2.76}$$

也就是说,磁单极是赝标粒子.

(3) T 变换 在时间反演下,从变换式(2.73)看出 $B \to -B$,但算子∇不变号,同理可从方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m$$

---

* 倪光炯、李洪芳,近代物理,上海科学出版社(1979).

看出，要使方程在 T 变换下不变，磁荷密度 ρ_m 必须变号，即

$$\hat{T}\rho_m = -\rho_m, \tag{2.77}$$

这就是说，把拍成“电影”的物理过程倒放的话，磁单极将以变了号的面目出现，但电荷密度在正反过程中始终如一.

由此看来，磁单极是对时间呈奇性的赝标粒子，并且在电荷共轭变换下，电荷、磁荷一起变号；而电荷是对时间呈偶性的真标量.

给磁单极赋予这样一个特殊性质以后很容易证明，磁流密度 j_m 是按下式变换的

$$\begin{aligned}\hat{C}j_m &= -j_m,\\ \hat{P}j_m &= j_m,\\ \hat{T}j_m &= j_m,\end{aligned} \tag{2.78}$$

它和电流密度的 P、T 变换的性质也正好相反. 于是，方程组中的另一个引入磁荷的方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 j_m - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

也满足原来定义的 C、P、T 变换下的不变性.

所以，我们能从经典的意义上看出：磁单极的特殊变换性质直接保证了原先定义的 C、P、T 守恒性对于引入磁荷以后的麦克斯韦方程仍有效.

规定了磁单极的这一特殊变换性质，虽然维护了电磁场方程的 C、P、T 对称性，但却仍留下了电磁意义上的不对称——电荷与磁荷在时空变换下具有完全不同的性质：前者与时空反演毫不相干，而后者却与时空反演紧密联系，这是一个很有趣的问题. 有人提议另一种方案：放弃对磁荷的特殊变换性质的规定，将其与电荷一样看待，从而保持电磁对称，同时引入磁荷共轭变换 M 与 C 变换对应*.

习　题

2.1 无限长导电圆柱体内流有稳定的均匀电流，试计算单位时间内流入单位长圆柱体内的能流，并与单位时间内电流所产生的焦耳热作比较，分析结果的物理意义（设电流密度为 j，电导率为 σ_c，柱体半径为 R）.

2.2 一点电荷 q 放于均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求以 q 为圆心的球面所受的应力，并说明意义.

2.3 将一个位于真空中的带电导体球切成两半，求它们之间的排斥力. 设球的半径为 R，球上电势为 V.

2.4 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中有线电流 I，电流方向和 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直. 若以线电流为轴线作一圆柱面，试计算单位长圆柱体外的场对柱内的场的作用力，同时与洛伦兹力作比较，并解释其比较结果.

2.5 介电常数为 ε 的均匀无限介质中有两个相同的点电荷 q，相距为 d. 求在这两个电荷连线的垂直平分面上的应力，并说明意义.

2.6 在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中有一个孤立的半径为 R 的导体球壳，用一个垂直于 $\boldsymbol{E}_0$ 的平面

---

* Ramsey N.F., Phys. Rev., 109(1958)225.

把它切成两半. 试求阻止这两个半球壳分开所需要的力,考虑(1)球壳不带电;(2)球壳带电 Q.

2.7　试证明:一定可以找到一组满足洛伦兹条件的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ. 并且即使满足洛伦兹条件,$\boldsymbol{A}$、φ 仍不是唯一的.

2.8　证明:若($\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$)是真空中的麦克斯韦方程组的一组解,则 $\left(\boldsymbol{E}' = -c\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}' = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\right)$ 也是方程的解.

2.9　如果点电荷 q 的电场强度为 $\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^{3+\delta}}, \delta > 0$,试计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}, \nabla \times \boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{E}$ 是保守场吗?高斯定理是否还成立?

2.10　为了消去磁单极附近的奇异弦,吴大峻和杨振宁提出在不同区域用不同的形式表示磁单极的矢势:

对于区域 I:　$A_\theta^{\mathrm{I}} = A_r^{\mathrm{I}} = 0$,　$A_\phi^{\mathrm{I}} = \frac{\mu_0}{4\pi} g \frac{1 - \cos\theta}{r\sin\theta}$,　$\theta < \pi$;

对于区域 II:　$A_\theta^{\mathrm{II}} = A_r^{\mathrm{II}} = 0$,　$A_\phi^{\mathrm{II}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} g \frac{1 + \cos\theta}{r\sin\theta}$,　$\theta > 0$.

(1) 试证明这两个表示都能给出磁单极场的正确表达式,即 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} g \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

(2) 区域 I 和区域 II 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 附近是重叠的,试证明在交叠区内,两组矢势的差为

$$\frac{\mu_0}{4\pi}(A_i^{\mathrm{I}} - A_i^{\mathrm{II}}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(2g\phi),$$

式中 ϕ 是方位角,$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

(3) 沿着 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的赤道作线积分,可证明

$$\oint (\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 g.$$

第三章　导体和电介质静电学

本章讨论处于静电场中的导体和电介质的一般性质和定理，以及作用在导体和电介质上的静电力.

§3.1　静 电 问 题

静电现象是电磁学问题中的一个重要的特殊现象，它满足如下两个条件：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量}) = 0 \quad \text{和} \quad j = 0,$$

即场量都不随时间改变，且电荷静止不动. 这就是所谓的静电现象.

1. 静电场方程和边界条件

把静电条件代入麦克斯韦方程中，得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

(3.1)式就是在静电条件下电磁体系所满足的运动方程. 从(3.1)式可以看出，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 分别满足两组方程，它们彼此之间没有联系，这就说明此时电场和磁场可以分别求解. 静电场满足下述方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

相应的边值关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma, \\ \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

2. 利用静电标势来表示静电能量

我们在§1.1中已证明，静电场可以用静电标势 φ 来描写，φ 满足泊松方程(1.12). 所以，对静电问题可以由(3.2)式直接求解，而更一般的方法是求解势 φ 的方程. 我们还可看到，静电场能量可以用电势 φ 来表述. 我们已知在真空中静电能量的表达式为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}\tau. \tag{3.4}$$

利用

$$\begin{aligned} E^2 &= -\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varphi \\ &= -\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{E}) + \varphi\rho/\varepsilon_0, \end{aligned}$$

上式可写成

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2}\oint\varphi\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

若我们考察的是体系的总能量,则(3.4)式的体积分是对全空间进行的,因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行,有限的电荷体系在无穷远处的场是零,从而面积分的值为零. 这时能量的表达式变为

$$W = \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau. \tag{3.5}$$

有介质存在时电磁能量的表达式应为

$$W = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau, \tag{3.6}$$

类似的讨论可以证明

$$W = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau. \tag{3.7}$$

从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式,一种是

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad W = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau,$$

这表示静电能量是以密度 $w = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$ 的形式在空间连续分布,场强的地方能量也大. 另一种表达式是

$$W = \frac{1}{2}\int\varphi\rho\mathrm{d}\tau,$$

它表示能量只与存在着电荷分布的空间有关,但它并不意味着 $\frac{1}{2}\varphi\rho$ 是电场的能量密度.

以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效,而当讨论空间某一有限范围内的电磁能量时两者不再等效,因为面积分在有限范围内的值一般不会为零,我们只能应用(3.4)式或(3.6)式.

§3.2 导体静电学

1. 导体的静电学问题

所谓导体即是能导电的介质,当它内部存在电场时就会引起传导电流. 在导体中有关系 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$,可见在静电学(即 $\boldsymbol{j}=0$)的前提下,导体内的电场强度必须为零,否则必定引起电流. 根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=0$ 的关系知$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho=0$,即导体内部不可能有电荷分布. 所以对导体来讲,电荷只能分布在表面上. 这样,导体的静电学问题便归结为求导体以外空间的电场和导体表面上的电荷分布的问题.

若导体外的空间没有其他电荷存在,则由(1.12)式可得这个区域内 φ 的方程. 由于导体内 $\boldsymbol{E}=0$,所以由(3.3)式得导体的边界条件为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}=0,\\ \boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}=\sigma.\end{cases}\tag{3.8}$$

上式表明导体表面电场的切向分量为零,电场线与表面垂直,因此导体表面是等势面. 由(3.8)式可得静电标势 φ 的边界条件为

$$\begin{cases}\varphi\big|_{\text{边界}}=\text{常数};\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\text{边界}}=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\ \text{或}\ Q=-\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S.\end{cases}\tag{3.9}$$

2. 汤姆孙定理

汤姆孙定理是讨论导体系统达到静电平衡条件的定理,它告诉我们:只有当所有导体都处于等势体的情况下,才能达到平衡. 对此我们可直接证明如下.

我们知道,任何一个体系处于平衡状态时,一般它们的能量都处于极小值. 对于静电情况,让我们考虑一个虚过程:处在平衡状态的导体上的电荷有一无穷小的虚位移(保持导体上的总电荷不变),从而导致体系的能量有一个变更,由

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int E^2\mathrm{d}\tau,$$

得到

$$\begin{aligned}\delta W&=-\varepsilon\int\nabla\varphi\cdot\delta\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau\\ &=-\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi\delta\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau+\varepsilon\int\varphi\nabla\cdot\delta\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

上式右边第一项可利用高斯定理变为面积分,其结果为零,因此

$$\begin{aligned}\delta W&=\varepsilon\int\varphi\nabla\cdot\delta\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau=\int\varphi\delta\rho\mathrm{d}\tau\\ &=\sum_i\int\varphi_i\delta\rho_i\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

又导体上的总电荷不变,即

$$\int \delta\rho_i \mathrm{d}\tau = \delta Q_i = 0.$$

因此如果导体上的电势 φ_i 是常数,则

$$\delta W = \sum_i \int \varphi_i \delta\rho_i \mathrm{d}\tau = \sum_i \varphi_i \int \delta\rho_i \mathrm{d}\tau$$

$$= \sum_i \varphi_i \delta Q_i = 0.$$

这说明导体是等势体时,能量为极小值,体系处于平衡状态. 因此,若导体系的位置固定不变,每一导体上放置一定量的电荷,则当电荷的分布使所有导体均为等势体时,体系达到静电平衡. 这就是**汤姆孙定理**.

汤姆孙定理的另一表述是:与电荷在导体上其他任何分布时所产生的电场能量相比,真实的静电场能量总是极小值.

【例 1】 试根据汤姆孙定理证明:离电荷系统很远的不带电导体会受到电荷系统的吸引.

解 为了证明这一点,只要比较一下不带电导体引入后所建立的真实电场的能量和相应于被引入的导体上不存在感生电荷时的虚电场能量即可. 由汤姆孙定理可知,前者总是小于后者. 而后者所谓不存在感生电荷就是指导体的引入不影响原来的场分布,场穿入导体内部,这种虚场即是导体未引入时的电场. 可见不带电导体的引入在能量上更有利.

按照汤姆孙定理,我们可以把导体的静电问题分成两类:一类是给定导体上的总电荷,而电荷的分布由静电平衡条件决定;另一类是给定导体上的电势,求导体上的总电荷和电荷分布.

§3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

1. 导体系的能量

前面一节我们已导出静电场总能量的两种表达式,对导体系来讲采用第二种表达式 $W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho \mathrm{d}\tau$ 最为方便. 由于每个导体都是等势体,且电荷分布在表面上,因此导体系的能量表达式为

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma_i \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint \sigma_i \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i . \tag{3.10}$$

可见导体系的能量由各个导体的总电荷及其电势决定,而与电荷分布无关.

(3.10)式中第 i 个导体上的电势 φ_i 是所有导体上的电荷(包括 Q_i)产生的. 根据线性叠加原理,φ_i 可以写成

$$\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j , \tag{3.11}$$

式中的比例系数 C_{ij}^{-1} 与导体的形状和相对位置有关,其量纲是长度量纲的负一次方. (3.11)式的逆式是

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j , \tag{3.12}$$

这里的 C_{ij} 是 C_{ij}^{-1} 的逆阵元素,显然 C_{ij} 有长度量纲. 为了看清 C_{ij} 的物理含义,设只有一个导体,则

$$Q = C\varphi .$$

显然,这里的 C 是导体的电容. 所以称 C_{ii} 为**电容系数**,C_{ij} $(i \neq j)$ 称为**感应系数**. 可以证明

$$C_{ij} = C_{ji} , \quad C_{ij}^{-1} = C_{ji}^{-1} .$$

把(3.11)、(3.12)代入(3.10)式可得导体系能量的电势或电荷的二次式:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \varphi_i \varphi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij}^{-1} Q_i Q_j . \end{aligned} \tag{3.13}$$

由于能量是恒正的且有限,所以由线性代数可知 $|C_{ij}|$ 或 $|C_{ij}^{-1}|$ 是正定的对称矩阵. 于是

$$C_{ii} > 0 , \quad C_{ij} < 0 \ (i \neq j) ,$$

即电容系数是恒正的,感应系数都是负的.

【例 2】 两个带 $\pm Q$ 电荷的导体的互电容定义为 $C = \dfrac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1}$,试用电容系数表示互电容.

解 因为 $Q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$,利用(3.10)式,有

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i = \frac{Q^2}{2C} ;$$

另一方面,由(3.13)式,有

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{ji} C_{ij}^{-1} Q_i Q_j \\ &= \frac{1}{2} [C_{11}^{-1} Q^2 - C_{12}^{-1} Q^2 - C_{21}^{-1} Q^2 + C_{22}^{-1} Q^2] \\ &= \frac{1}{2} [C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}] Q^2 , \end{aligned}$$

所以互电容

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}$$

$$= \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}.$$

这就是电容器电容和感应系数的关系.

2. 固有能和相互作用能

设有两个带电体 1 和 2,它们在空间激发的电场分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,则空间总的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2.$$

因此,体系的总能量为

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int E^2 \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int E_1^2 \mathrm{d}\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int E_2^2 \mathrm{d}\tau + \varepsilon\int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \mathrm{d}\tau.$$

由上式可以看出,系统的总能量由两部分组成:上式右方第一和第二项表示 1 或 2 带电体单独存在时的能量 W_1 和 W_2,称为**固有能**;上式右方的第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差,称为**相互作用能**,可写成

$$W_{12} = \varepsilon\int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \mathrm{d}\tau$$

$$= \varepsilon\int \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \mathrm{d}\tau.$$

【例 3】 考虑一个点电荷 q 同已给外场的相互作用能.

解 若设 φ_1 为外场,φ_2 为点电荷 q 的场,在点电荷 q 的邻域作一个足够小的球面 S,则空间分成两个部分 $V_{内}$(小球内的区域)和 $V_{外}$(小球外区域),略去球内的贡献,相互作用能为

$$W_{12} = \varepsilon_1\int_{V_{外}} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \mathrm{d}\tau.$$

对小球外空间应用格林公式,于是这时相互作用能为

$$W_{12} = \varepsilon\left[\oint_S \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\mathrm{d}S - \int_{V_{外}} \varphi_1 \nabla^2\varphi_2 \mathrm{d}\tau\right].$$

注意:这里的面积分是对小球面 S 和无穷远边界组成的曲面进行的. 由于在无穷远处场为零,所以面积分项实际上只对小球面 S 进行积分;又由于在小球面 S 外的空间内 $\nabla^2\varphi_2 = 0$,因此上式中的体积分项为零. 于是

$$W_{12} = \varepsilon\oint_S \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

由于 S 足够小,所以在积分范围内 φ_1 可以认为是常数,如图 3.1,若取 $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$,则

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n'} = E_2,$$

于是

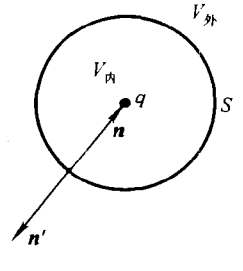


图 3.1

$$W_{12} = -\varphi_1 \oint_S \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \mathrm{d}S$$

$$= \varphi_1 \oint_S D_2 \mathrm{d}S = \varphi_1 q, \tag{3.14}$$

式中 φ_1 为外场在 q 处的电势.

3. 电荷系的相互作用能

首先考虑相距为 R 的两个点电荷 q_1 和 q_2 的相互作用能

$$W_{12} = q_1 \varphi_1,$$

其中 φ_1 是电荷 q_2 在电荷 q_1 处的势,即 $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$. 所以

$$W_{12} = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon R.$$

同理我们也可以把 W_{12} 表示为 $q_2\varphi_2$,其中 φ_2 为电荷 q_1 在电荷 q_2 处的势,所以相互作用能可以写为

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

因此,有 n 个电荷的体系,其相互作用能可以表示为

$$W_i = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} q_a \varphi_a, \tag{3.15}$$

其中 φ_a 是除电荷 q_a 之外所有其余电荷在电荷 q_a 处的势之和. 值得注意的是:表达式(3.10)与(3.15)形式相似,但它们的含义却大不相同.

【例 4】 试计算一维的,正负离子相间的链状晶体的结合能(Madelung 静电能).

解 设离子间距离为 a(晶格常数),带电为 $\pm q$,则第 α 个粒子受到的静电相互作用能为

$$W_i = \frac{1}{2} q_a V_a$$

$$= \frac{1}{8\pi} q \left[\frac{-2q}{\varepsilon a} + \frac{2q}{\varepsilon 2a} + \frac{-2q}{\varepsilon 3a} + \frac{2q}{\varepsilon 4a} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{2q^2}{\varepsilon a} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \right],$$

式中 ε 为介电常数,也就是说,我们现在所考虑的一维晶体是放在介电常数为 ε 的介质中的. 当离子数 $N \to \infty$ 时,则

$$W_i = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon a} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \right]_{x=1}$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon a} \ln(1+x) \Big|_{x=1} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon a} \ln 2^{*}.$$

可见第 i 个离子受到的相互作用能为负值,其物理意义是离子被束缚在链状晶体内. 如 $a = 0.3\ \mathrm{nm}$,q 是一个质子所带的电荷,则这种结合能为 3.3 eV. 另外,由上式也可看出,介电常

---

* 严格地说,这个级数为条件收敛,参见 Am. J. Phys., 45(1977)868.

数 ε 越大，则 W_i 越小，所以许多晶体都可以溶解于水中.

§3.4 静电体系的稳定性问题

物质是由原子构成的，而原子又是由电子和原子核构成，那么这些带电粒子所构成的荷电体系是处于稳定的静电平衡状态，还是处于连续不断地运动状态？可以证明：一个带电体系不可能处于纯静电平衡状态；或者说，由带电粒子所构成的物质结构，不可能是静电学结构，而必须是一个动力学系. 这一观点实际上是近代物理的一个基本观念，并且在一系列的物理现象中得到证实. 从经典电动力学看，这一观念就是**恩肖定理**，其内容是：仅受电力作用的带电体，不可能在一电场中静止地处于稳定平衡.

要证明这个定理，只要证明一个点电荷体系的稳定性即可. 由上节的讨论可知，电荷体系的相互作用能为

$$W_i = \frac{1}{2}\sum_\alpha q_\alpha \varphi_\alpha .$$

由力学原理可知，一个体系的稳定平衡条件是势能为极小值. 在静电系中，W_i 即是势能. W_i 具有极小值的充要条件是：W_i 对所有电荷的坐标的一阶微商必须为零，而二阶微商必须恒大于零. 然而，这是不能满足的，因为

$$\nabla^2 W_i = \frac{1}{2}\sum_\alpha q_\alpha \nabla^2 \varphi_\alpha ,$$

其中 φ_α 是除 q_α 之外所有其他电荷在第 α 个电荷处产生的势，故必有 $\nabla^2\varphi_\alpha = 0$. 所以，

$$\nabla^2 W_i = 0.$$

可见 W_i 不可能有极小值，这样各电荷间稳定的静止状态不可能形成. 因此，不存在任何稳定的静电系统. 任何静电体系的形成都必须有其他约束力参与. 如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在. 为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力. 在第十五章中我们将看到，这种约束力是麦克斯韦理论所必须的.

§3.5 格林互易定理

当 m 个导体上的电荷为 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 时，它们的电势等于 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$；

当导体上的电荷为 $q'_1, q'_2, \cdots, q'_m$ 时，它们的电势等于 $\varphi'_1, \varphi'_2, \cdots, \varphi'_m$，那么关系式

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^{m} q'_i \varphi_i \tag{3.16}$$

成立. 这个定理称为**格林互易定理**，它在求解静电问题时，通常是很有用的，现证明如下.

设在一封闭曲面 S 内部有 m 个其他封闭曲面，它们之间的体积为 V，则由高斯定理可得

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i + \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是体积 V 内任一连续可微的函数. 如果令 $\boldsymbol{A} = \Phi \nabla \Psi$，则

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \mathrm{d}S_i + \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S};$$

再令 $\boldsymbol{A} = \Psi \nabla \Phi$，又得

$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \Psi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \mathrm{d}S_i + \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

两式相减，我们就得到

$$\int \Psi \nabla^2 \Phi \mathrm{d}\tau - \int \Phi \nabla^2 \Psi \mathrm{d}\tau = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \left[\Psi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \right] \mathrm{d}S_i + \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{3.17}$$

此式即是**格林定理**. 如果我们令 $\Psi = \varphi, \Phi = \varphi'$，它们对应于导体上电荷分别为 q_i 和 q'_i 时的电势，由于电荷都分布在导体表面上，所以在体积 V 内

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi' = 0;$$

且导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i = -\varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}, \quad \sigma'_i = -\varepsilon \frac{\partial \varphi'_i}{\partial n}.$$

将它们分别代入(3.17)式，则得

$$\sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} [\varphi_i(-\sigma'_i) - \varphi'_i(-\sigma_i)] \mathrm{d}S_i = 0,$$

这里已考虑到在无穷远处(即 $S \to \infty$)，φ、$\varphi' \to 0$，(3.17)式最后一项的面积分为零. 由于导体是等势体，于是

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_i \mathrm{d}S_i - \varphi'_i \oint_{S_i} \sigma_i \mathrm{d}S_i \right] = 0,$$

而

$$\oint_{S_i} \sigma_i' \mathrm{d}S_i = q_i' ; \quad \oint_{S_i} \sigma_i \mathrm{d}S_i = q_i ,$$

最后就有

$$\sum_{j=1}^{m} q_i' \varphi_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \varphi_i' .$$

由格林互易定理,我们马上可以得到一个重要的结果,令 $q_1' = q_3' = q_4' = \cdots = q_n' = 0, q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 0$,则有

$$q_2' \varphi_2 = q_1 \varphi_1' .$$

再令 $q_1 = q_2'$,则得

$$\varphi_1' = \varphi_2 .$$

这就是说,带电 q 的导体 B 在不带电的导体 A 上产生的电势等于带电 q 的导体 A 在不带电的导体 B 上产生的电势.

【例 5】 已知点电荷 q 位于两接地平板之间,与第一、第二板分别相距 d_1 和 d_2,试求两板上的感应电荷 Q_1、Q_2.

解 由已知条件,两板上的电势 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. 设点电荷 q 所在点 P 的电势为 φ_P,现在我们假定这样一种电荷分布:第一板上均匀带电 q',第二板上带 $-q'$,P 点无电荷,则第一板相对于第二板的电势为

$$\varphi_1' = \frac{q'}{\varepsilon_0 S}(d_1 + d_2),$$

P 点电势为

$$\varphi_P' = \frac{q'}{\varepsilon_0 S} d_2 ,$$

式中 S 为板的面积. 于是根据格林互易定理,有

$$Q_1 \varphi_1' + Q_2 \cdot 0 + q\varphi_P' = q' \cdot 0 + (-q') \cdot 0 + 0 \cdot \varphi_P ,$$

即

$$Q_1 \frac{q'}{\varepsilon_0 S}(d_1 + d_2) = -q \frac{q'}{\varepsilon_0 S} d_2 ,$$

$$Q_1 = -\frac{d_2 q}{d_1 + d_2} .$$

同理

$$Q_2 = -\frac{d_1 q}{d_1 + d_2} .$$

可见,用互易定理求感应电荷是极为方便的.

§3.6 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用,这种静电力是作用在导体表面上的. 我们可以从两个不同的角度进行计算.

根据动量守恒定律(2.14)式,作用在导体表面 $d\boldsymbol{S}$ 上的力恰好等于从外面"流入"导体的动量流,即

$$d\boldsymbol{f} = -d\boldsymbol{S} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{T}},$$

所以单位面积所受的力为

$$\boldsymbol{F}_S = -\boldsymbol{e}_n \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{T}}.$$

真空中的麦克斯韦张力张量

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\right).$$

因为导体内的场 $\boldsymbol{E}_{内}=0$,导体外表面的场只有法向分量,故

$$\boldsymbol{F}_S = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\boldsymbol{e}_n. \tag{3.18}$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度,方向指向导体面外法线方向,也就是说,导体受到一种"负压力". 导体表面的场也可用面电荷表示,即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n, \tag{3.19}$$

代入(3.18)式得

$$\boldsymbol{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\boldsymbol{e}_n. \tag{3.20}$$

导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力,所以我们可以直接用洛伦兹力来计算:

$$\boldsymbol{F} = \int \rho\boldsymbol{E}\,d\tau.$$

我们知道,导体上的电荷不是完全分布于表面上的,而是分布在一薄层过渡区域内. 模型计算表明*,这个过渡区约为 10^{-10} m. 电场强度也不是不连续的,而是从导体内 $\boldsymbol{E}=0$ 平滑地上升,直到导体外表面的场强 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_c\boldsymbol{e}_n$,在过渡区内场是坐标的线性函数,图 3.2 表示过渡区域. 根据边界条件

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0,$$
$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = 0$$

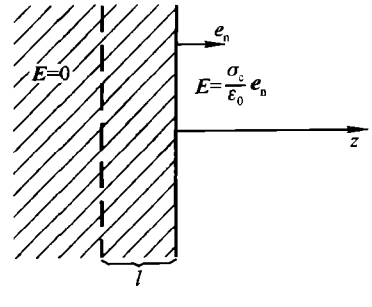


图 3.2

* Lang N.D. and Kohn W., Phys. Rev., B1 (1970)4555; B3(1971)1215.

可知,由于

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \rho/\varepsilon_0,\ E|_{z=0} = \sigma/\varepsilon_0,\ E|_{z=-l} = 0,$$

过渡区内的电场只有 z 分量,而 E 是 z 的线性函数,所以 ρ 与 z 无关,即

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(z + l),$$

其中利用了 $\sigma = \lim_{l\to 0}(\rho l)$. 现在导体表面所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}S\int_{-l}^{0}\rho\boldsymbol{E}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}S\int_{-l}^{0}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho^2(z + l)\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}z$$

$$= \int \frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S.$$

所以,导体表面单位面积受的力为

$$\boldsymbol{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\boldsymbol{e}_n. \tag{3.21}$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致. 根据§1.1中所定义的电荷面密度,在理想情况下只有当电荷体密度在边界上奇异时,电荷面密度才有限且不为零,所以电荷体密度可写成

$$\rho(z) = \sigma\delta(z).$$

导体内外的场在理想情况下是跃变的,可写为

$$\boldsymbol{E}(z) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\theta(z)\boldsymbol{e}_n,$$

$\theta(z)$为阶跃函数. 由洛伦兹力公式得

$$\boldsymbol{F} = \int\rho\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\int\sigma^2\delta(z)\theta(z)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int\sigma^2\mathrm{d}\boldsymbol{S}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\theta(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中利用了阶跃函数的傅里叶定理,于是单位面积受力为

$$\boldsymbol{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\boldsymbol{e}_n.$$

作用在导体上的总力,可由(3.18)或(3.20)式对导体的全部表面积分得到,即

$$\boldsymbol{F} = \oint_S \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.22}$$

或

$$\boldsymbol{F} = \oint_S \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2 \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{3.23}$$

§3.7 电介质静电学

我们现在转到研究另一类物质——电介质内的恒定电场. 电介质的主要特征是它的内部不可能流过恒定电流,因此与导体不同,电介质内恒定电场强度不为零. 电介质静电学归结为求解介质内部的电场.

电介质中的势方程和边值关系可直接由(3.2)和(3.3)式导出. 因为 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$,将此式代入$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 即得

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla\varphi) = -\rho. \tag{3.24}$$

(3.24)式即为电介质中静电势 φ 所满足的方程.

若介质是均匀的,则 ϵ 是常数,故(3.24)式变为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \tag{3.25}$$

这就是大家熟知的泊松方程. 由场的边值关系

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma, \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0, \tag{3.27}$$

可以得到 φ 所满足的边值关系为:

$$\epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma, \tag{3.28}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{3.29}$$

将 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 代入(3.26)式即可得到(3.28)式,下面我们来导出(3.29)式.

在空间内存在面电荷时,由 §1.1 可知静电势可以写为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\sigma}{R}\mathrm{d}S.$$

如图 3.3,若在介质交界面上分布有面电荷 σ,我们来求面两侧 φ_1 与 φ_2 值的关系.

在面 A 处,以 A 点为心取一半径为 r 的小圆面积,此小圆表面 S 上所带电荷贡献的势为 φ_a,其他部分所贡献的势为 φ_b,于是在 A 点附近的边界面两侧有

$$\varphi_1 = \varphi_a + \varphi_b, \varphi_2 = \varphi_a' + \varphi_b'.$$

显然当 1、2 两点间距 $l \to 0$ 时,$\varphi_b = \varphi_b'$,而

$$\varphi_a = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\sigma}{R}\mathrm{d}S = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon}\int \frac{\mathrm{d}S}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon}2\pi r \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

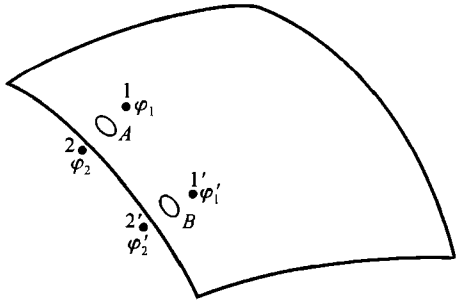


图 3.3

同理当 $r\to 0$ 时 $\varphi'_a\to 0$，因此在 A 点有

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

同样在 A 的邻近点 B 处，有 $\varphi'_1 = \varphi'_2$，所以

$$\varphi_1 - \varphi'_1 = \varphi_2 - \varphi'_2.$$

又因为

$$\varphi_1 - \varphi'_1 = -\boldsymbol{E}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{l},\ \varphi_2 - \varphi'_2 = -\boldsymbol{E}_2 \cdot \Delta\boldsymbol{l},$$

故

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

因此，边界条件(3.27)式也常用(3.29)式代替.

很显然，若界面上有电偶层分布，则 $\varphi_1 \neq \varphi_2$，边界条件(3.29)式就不再适用.

我们对上述情况作一些讨论：

(1) 在分块均匀的介质内，若体内无电荷，则每一部分都满足 $\nabla^2\varphi_i = 0$，而表征物质性质的量 ε 只是通过(3.28)式出现在问题的解内. 在界面上无面电荷时，(3.28)式可以改写为

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n},$$

这就是说，边界条件只包含互相接触的两种介质的介电常数之比. 于是，求解被介电常数为 ε_1 的介质所包围的介电常数为 ε_2 的介质的静电学问题，就归结为求真空中介电常数为 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ 的介电物体的静电学问题.

(2) 如果导体不是置于真空中，而是置于各向同性的均匀介质中，在这种情况下，电势分布仍满足同一个 $\nabla^2\varphi = 0$ 的方程，而且在导体表面上 $\varphi =$ 常数这个边界条件仍成立，唯一不同的是(3.28)式应改成

$$D_n = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sigma.$$

可见,求解真空中带电导体静电场的问题,如果作 $\varepsilon_0\varphi\to\varepsilon\varphi$, $q\to q$ 的代换,就可以变换为求解电介质中的相同问题;且当导体电荷给定时,场强和势的数值比真空中的减少 ε_r 倍,这一点可直观解释为束缚面电荷部分地屏蔽了导体上的电荷.

(3) 我们可把导体看为 $\varepsilon\to\infty$ 的电介质,其物理意义是:在静电情况下,导体对电场的影响与 $\varepsilon\to\infty$ 的电介质所产生的影响相同. 实际上,由于 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$,因 $\boldsymbol{P}$ 有限,故当 $\chi\to\infty$ 时,$\boldsymbol{E}\to 0$,这正是导体的必然结果.

* §3.8 极化率的经典微观模型

我们知道,介质的极化可以有两类:一是无极性分子的场感应电子"位移"极化;另一是有极分子的固有电矩的转向极化. 下面我们作微观模型计算.

我们先讨论施加外场后所诱导出的分子电偶极矩. 我们假定只有一种分子,且对分子采用谐振子模型,同时假定分子间没有其他作用力. 我们设 x 是加外场后分子正电中心偏离其平衡位置的距离,则正电中心的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\omega_0^2\boldsymbol{x} + e\boldsymbol{e},$$

式中我们已略去了阻尼力和磁力,第一项为弹性力,m 为有效质量,e 为作用在分子上的微观场. 若外加电场简谐变化,即

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_0 e^{-i\omega t},$$

则可设方程的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 e^{-i\omega t},$$

于是

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{e\boldsymbol{e}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

可见一个分子的诱导电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{e}, \tag{3.30}$$

由此得到

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

若外加场为静电场,即 $\omega=0$,则

$$\alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2}.$$

若单位体积内有 n 个分子,则单位体积内的偶极矩为 $n\boldsymbol{p}$,因此宏观电极化矢量为 $n\boldsymbol{p}$ 的平均值,即

$$\boldsymbol{P} = \overline{n\boldsymbol{p}} = n\bar{\boldsymbol{p}}.$$

又由于 α 为常数,故

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \overline{\alpha\boldsymbol{e}} = \alpha\bar{\boldsymbol{e}},$$

式中的 α 称为**分子极化率**. 粗略看起来,也许认为 $\bar{e}$ 即为外场 $\boldsymbol{E}$,但事实上两者是不同的,e 是粒子所受的微观场,又因为一个分子不能进入另一个分子内,所以 $\bar{e}$ 只代表对分子外空间取平均,而 $\boldsymbol{E}$ 代表体积元内包括分子内外空间场的总的平均效应. 若假定分子为一均匀极化的小球,则分子内的场为

$$\boldsymbol{e}_{内} = \boldsymbol{e} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{V},$$

式中 V 为分子体积. 这样,由平均值概念,我们直接得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (1 - nV)\bar{\boldsymbol{e}} + nV\left(\bar{\boldsymbol{e}} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\bar{\boldsymbol{p}}}{V}\right)\\ &= \bar{\boldsymbol{e}} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P},\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{P} = n\alpha\bar{\boldsymbol{e}} = n\alpha\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P}\right),$$

即

$$\boldsymbol{P} = n\alpha\boldsymbol{E}\Big/\left(1 - \frac{1}{3\varepsilon_0}n\alpha\right) = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E},$$

其中

$$\chi = n\alpha/\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{3\varepsilon_0}n\alpha\right).$$

根据 $\epsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$,得

$$\frac{1}{3}n\alpha = \varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}. \tag{3.31}$$

这样我们便得到了极化率 χ、介电常数 ϵ 与分子数密度 n、电荷 e、有效质量 m 以及固有频率的关系. 上述结果一般与实验符合得较好.

接下来我们再讨论极性分子组成的介质.

令 $\boldsymbol{p}_0$ 为分子的固有电偶极矩,它在外场 $\boldsymbol{e}$ 中的势能为

$$W = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{e}.$$

我们假定每个分子的电偶极矩的大小相同,仅取向不同. 外场随时间变化很慢以致介质在每一瞬时都可认为处于热平衡状态. 在热平衡时,单位体积内在立体角 $d\Omega$ 内偶极矩为 $\boldsymbol{p}_0$ 的分子数为

$$dn = Ce^{\frac{\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{e}}{k_B T}}d\Omega,$$

式中 k_B 为玻尔兹曼常量,T 为热力学温度.

若单位体积内的分子数为 n,则

$$\begin{aligned}n = \int dn &= C\int e^{\frac{p_0 E}{k_B T}\cos\theta}\sin\theta d\theta d\varphi\\ &= 4\pi C\frac{k_B T}{p_0 E}\sinh\frac{p_0 E}{k_B T},\end{aligned}$$

所以有

$$C = \frac{n}{4\pi}\frac{p_0 E}{k_B T}\frac{1}{\sinh\dfrac{p_0 E}{k_B T}}.$$

注意:这里我们略去了 e 与 $\boldsymbol{E}$ 的差别,这对稀薄气体是成立的.

电偶极矩 p_0 在电场方向的平均值为

$$\begin{aligned}\overline{p_0\cos\theta} &= C\int p_0\cos\theta\exp\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\cos\theta\right)\mathrm{d}\Omega\\ &= 4\pi C p_0\frac{k_B T}{p_0 E}\left[\cosh\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right)-\left(\frac{k_B T}{p_0 E}\right)\sinh\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right)\right],\end{aligned}$$

故极化矢量为

$$\begin{aligned}P &= n\,\overline{p_0\cos\theta} = np_0\left[\coth\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right)-\frac{k_B T}{p_0 E}\right]\\ &= np_0 L\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right),\end{aligned}$$

其中 $L(A)=\coth A-\dfrac{1}{A}$,称为朗之万函数.

当温度高而电场较弱时,$\dfrac{p_0 E}{k_B T}\ll 1$,

$$L\left(\frac{p_0 E}{k_B T}\right)\approx\frac{p_0 E}{3k_B T},$$

故有

$$\boldsymbol{P} = \frac{np_0^2}{3k_B T}\boldsymbol{E},$$

于是极化率为

$$\varepsilon_0\chi = \frac{np_0^2}{3k_B T}. \tag{3.32}$$

这表明固有电偶极矩产生的极化率与温度成反比. 若除了考虑固有电偶极矩对极化的贡献外还考虑诱导极化的贡献,则极化率应为两者之和,

$$\varepsilon_0\chi = n\left(\alpha+\frac{p_0^2}{3k_B T}\right). \tag{3.33}$$

* §3.9 晶体电介质

我们曾说过,在晶体情况下,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系是

$$\begin{aligned}D_x &= \varepsilon_{11}E_x+\varepsilon_{12}E_y+\varepsilon_{13}E_z,\\ D_y &= \varepsilon_{21}E_x+\varepsilon_{22}E_y+\varepsilon_{23}E_z,\\ D_z &= \varepsilon_{31}E_x+\varepsilon_{32}E_y+\varepsilon_{33}E_z.\end{aligned}$$

介电张量 $\overrightarrow{\varepsilon}$ 必定是对称张量,即 $\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk}$. 为了证明简单起见,设电导率 $\sigma_c=0$,于是由能量守恒定律可知

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w, \tag{3.34}$$

式中 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}$ 和 w 分别是能流密度和能量密度，它们分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} &= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},\\ w &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\\ &= \frac{1}{2}E_k\varepsilon_{kl}E_l+\frac{1}{2}\mu H^2.\end{aligned}\tag{3.35}$$

式中相同脚标表示求和. 利用麦克斯韦方程，先计算(3.34)式：

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} &= -\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = [\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}]\\ &= \left[E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H^2)\right]\\ &= \frac{1}{2}[E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l+E_i\varepsilon_{kl}\dot{E}_k]+\frac{1}{2}[E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l-E_i\varepsilon_{kl}\dot{E}_k]+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H^2)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_k\varepsilon_{kl}E_l)+\frac{1}{2}[E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l-E_i\varepsilon_{kl}\dot{E}_k]+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H^2).\end{aligned}$$

由(3.35)式可知，上式中的第一和第三项之和表示 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w$，所以上式可写为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}(E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l-E_i\varepsilon_{kl}\dot{E}_k).$$

根据能量守恒定律(3.34)式，必定有

$$E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l-E_i\varepsilon_{kl}\dot{E}_k=0.$$

由于相同指标表示求和，对上式第二项交换 k、l，等式不变，故

$$E_k\dot{E}_l(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{ik})=0.$$

因为场是任意的，所以必有

$$\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk}.$$

由于 ε_{ik} 是对称张量，我们有可能通过选取适当的坐标轴而使 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系化简. 乘积 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$ 是标量，它必定与坐标轴的选取无关，即

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon_{11}E_x^2+\varepsilon_{22}E_y^2+\varepsilon_{33}E_z^2+2\varepsilon_{12}E_xE_y+2\varepsilon_{23}E_yE_z+2\varepsilon_{31}E_zE_x.$$

这是 E_x、E_y、E_z 的二次式，通过坐标的转动可使交叉项为零，于是在新坐标系中二次式方程为

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon_xE_x^2+\varepsilon_yE_y^2+\varepsilon_zE_z^2,$$

此时电位移矢量的分量为

$$D_x=\varepsilon_xE_x,\ D_y=\varepsilon_yE_y,\ D_z=\varepsilon_zE_z,$$

使上式成立的坐标轴方向称为晶体的电轴. 若 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z$，则介质为各向同性；若 $\varepsilon_x=\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$，则为单轴晶体；若 $\varepsilon_x\neq\varepsilon_y\neq\varepsilon_z$，则为双轴晶体.

在热电晶体情况下，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$D_i=D_{0i}+\varepsilon_{ik}E_k,$$

其中 $\boldsymbol{D}_0$ 为恒定的常矢量，此项的存在表明电介质在没有外加电场时也会自发极化. 因为在任何对称变换下晶体的全部性质必须保持不变，因此显然有一个方向在任何对称变换下都保持不变的晶体才可能是热电晶体，而在这个方向上存在着一个恒定矢量 $\boldsymbol{D}_0$. 可见，任何中心

对称的晶体(例如立方系)都不可能是热电晶体.

* §3.10 介电常数增加的效应

如果一带电导体系产生的电场中任一点上的介电常数增大了,而导体上的电荷又保持不变的话,则该体系的能量就要减少. 对于各向同性的电介质,能量为

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{D^2}{\epsilon}\mathrm{d}\tau,$$

当 ϵ 变化时电位移矢量要改变,因此所研究体系的能量变化为

$$\delta W = \int \frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{D}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau - \int \frac{D^2}{2\epsilon^2}\delta\epsilon\mathrm{d}\tau$$

$$= \int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau - \int \frac{E^2}{2}\delta\epsilon\mathrm{d}\tau. \tag{3.36}$$

等式右边第一项是场源(导体)发生无穷小变化时所作的功. 下面我们对此作出证明.

若只有一个导体,电荷为 Q、电势为 φ,则使该导体的电荷增加一个小量 δQ 时所必须作的功是

$$\delta A = \varphi\delta Q.$$

介质中导体表面的电荷

$$Q = -\oint \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

由于导体表面上的电势 φ 不变,

$$\delta A = \varphi\delta Q = -\oint \varphi\delta\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= -\int \nabla\cdot(\varphi\delta\boldsymbol{D})\mathrm{d}\tau,$$

积分是对导体外全空间进行的. 而

$$\nabla\cdot(\varphi\delta\boldsymbol{D}) = \varphi\nabla\cdot\delta\boldsymbol{D} + \delta\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D},$$

所以

$$\delta A = \int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau.$$

在现在的情况下,场源不变,即 $\delta Q = 0$,(3.36)式的第一项为零,于是

$$\delta W = -\int \frac{E^2}{2}\delta\epsilon\mathrm{d}\tau. \tag{3.37}$$

(3.37)式告诉我们一个重要的结果:场源保持不变的情况下,即使一部分介质的介电常数增加,也会使介质中的总能量减少,特别是未带电的导体移动到介质内,静电场总能量总是减少的,原因是导体在静电学意义下可看成是 $\epsilon\to\infty$ 的物体. 由此,我们又可得到一个定理:将不带电的导体移动到真空中时,真空内的静电能量就会减少.

思考题 如果产生电场的电极的电势保持不变,而一部分介质的介电常数增加,则介质中的总能量如何变化?

---

* §3.11 混合物介电常数的立方根相加律

如果介质是由几种不同物质的颗粒均匀地混合而成的，不同成分的颗粒之间有一定的弥散. 显然，对于此种物质已无法明确地写出 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的定域关系，因为我们无法确切地说出在空间某点上的介电常数究竟是哪一种成分的介电常数；而且此时的介电常数往往是各向异性的，ε 不再是个标量. 然而，我们往往只需要研究较大线度范围的平均电场，这个线度指包含足够多的不同成分颗粒的小区域；也就是说，我们要研究对这个小区域求平均的电场. 对于这种平均电场来说，混合物是各向同性的，其介电特性可以用等效介电常数来表征，记为 $\varepsilon_{混}$，于是有

$$\langle \boldsymbol{D} \rangle = \varepsilon_{混} \langle \boldsymbol{E} \rangle . \tag{3.38}$$

注意：此时$\langle \boldsymbol{D} \rangle$和$\langle \boldsymbol{E} \rangle$的定域关系是在上述平均意义上说的.

如果混合物的颗粒是各向同性的，且它们之间的介电常数之差小于它们本身的介电常数，我们就可以算出 $\varepsilon_{混}$ 与各成分的介电常数的关系. 设介质中的电场强度

$$\boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{E} \rangle + \delta \boldsymbol{E},$$

介电常数

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \delta \varepsilon,$$

于是$\langle \boldsymbol{D} \rangle$和$\langle \boldsymbol{E} \rangle$的关系为

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{D} \rangle &= \langle (\langle \varepsilon \rangle + \delta \varepsilon)(\langle \boldsymbol{E} \rangle + \delta \boldsymbol{E}) \rangle \\ &= \langle \varepsilon \rangle \langle \boldsymbol{E} \rangle + \langle \delta \varepsilon \delta \boldsymbol{E} \rangle , \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中$\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \boldsymbol{E} \rangle = 0$. 下面我们来计算(3.39)式，即求 $\delta \varepsilon \delta \boldsymbol{E}$ 的平均值. 为此，我们从未平均的方程$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$出发，精确到一级小量，则

$$\nabla \cdot [(\langle \varepsilon \rangle + \delta \varepsilon)(\langle \boldsymbol{E} \rangle + \delta \boldsymbol{E})] = \langle \varepsilon \rangle \nabla \cdot \delta \boldsymbol{E} + \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \nabla \delta \varepsilon = 0,$$

即

$$\langle \varepsilon \rangle \nabla \cdot \delta \boldsymbol{E} = - \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \nabla \delta \varepsilon .$$

把 $\delta \boldsymbol{E} = - \nabla \delta \varphi$ 代入上式得

$$\langle \varepsilon \rangle \nabla^2 \delta \varphi = \langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \nabla \delta \varepsilon ,$$

两边求梯度，得

$$\nabla^2 \delta \boldsymbol{E} = - \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} (\langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \nabla) \nabla \delta \varepsilon . \tag{3.40}$$

我们对(3.39)式求平均实际上是分两步进行的：一是对同种成分的各微粒的体积求平均，即保持 $\delta \varepsilon$ 不变求平均；二是对混合物的各成分求平均. 我们对(3.40)式也可这样进行. 由于混合物整个来说是各向同性的，所以在对(3.40)式求第一步平均值后，它右边的算符变成

$$\frac{1}{3} \nabla^2 ,$$

于是得到

$$\nabla^2\langle\delta\boldsymbol{E}\rangle = -\frac{1}{3\langle\varepsilon\rangle}\langle\boldsymbol{E}\rangle\nabla^2\delta\varepsilon,$$

由此得出

$$\langle\delta\boldsymbol{E}\rangle = -\frac{\langle\boldsymbol{E}\rangle}{3\langle\varepsilon\rangle}\delta\varepsilon.$$

再作第二步平均,上式乘 $\delta\varepsilon$,然后对混合物的各成分求平均,得到

$$\langle\delta\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\rangle = -\frac{\langle\boldsymbol{E}\rangle}{3\langle\varepsilon\rangle}\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle.$$

把上式代入(3.39)式,得

$$\boldsymbol{D} = \left[\langle\varepsilon\rangle - \frac{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}{3\langle\varepsilon\rangle}\right]\langle\boldsymbol{E}\rangle,$$

与(3.38)式比较,则有

$$\varepsilon_{混} = \langle\varepsilon\rangle - \frac{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}{3\langle\varepsilon\rangle}. \tag{3.41}$$

又

$$\langle\varepsilon^{1/3}\rangle = \langle(\langle\varepsilon\rangle + \delta\varepsilon)^{1/3}\rangle,$$

将它展开,精确到二次项,就有

$$\langle\varepsilon^{1/3}\rangle = \langle\varepsilon\rangle^{1/3}\left[1 - \frac{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}{9\langle\varepsilon\rangle^2}\right]. \tag{3.42}$$

另一方面,由(3.41)式开三次方,得

$$\begin{aligned}\varepsilon_{混}^{1/3} &= \left[\langle\varepsilon\rangle - \frac{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}{3\langle\varepsilon\rangle}\right]^{1/3}\\ &= \langle\varepsilon\rangle^{1/3}\left[1 - \frac{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle}{9\langle\varepsilon\rangle^2}\right],\end{aligned} \tag{3.43}$$

比较(3.42)和(3.43)式得出

$$\varepsilon_{混}^{1/3} = \langle\varepsilon^{1/3}\rangle. \tag{3.44}$$

因为不同成分的颗粒是均匀掺杂的,所以对介电常数的上述意义上的平均与对整个体积求平均是一致的,即

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{V}\int\varepsilon\mathrm{d}\tau.$$

所以

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon^{1/3}\rangle &= \frac{1}{V}\int\varepsilon^{1/3}\mathrm{d}\tau\\ &= \sum_i\frac{\varepsilon_i^{1/3}\Delta V_i}{V} = \sum_i\varepsilon_i^{1/3}\frac{\Delta V_i}{V}\\ &= \sum_i c_i\varepsilon_i^{1/3},\end{aligned}$$

式中 $\frac{\Delta V_i}{V} = c_i$ 表示整个体系 V 中第 i 种成分所占体积之比,它是已知的. 这样

$$\varepsilon_{混}^{1/3} = \sum_i c_i\varepsilon_i^{1/3}. \tag{3.45}$$

由此可见,混合物的介电常数满足立方根相加律. 这个公式在实际中很有用.

* §3.12 关于作用在介质上的静电力的讨论

现在,我们来讨论静电场中介质所受的力. 下面我们将从能量的角度出发,导出电介质受电场力的一般公式.

一般说来,介电常数 ϵ 不仅是空间的函数,而且是介质的密度的函数. 设介质的密度为 ρ_m,自由电荷密度为 ρ,介电常数为 $\epsilon(\boldsymbol{r},\rho_m)$,假定介质作一个无穷小的位移 $\boldsymbol{\xi}$,则静电场能量的变化为

$$\delta W = \frac{1}{2}\delta\int \frac{D^2}{\epsilon}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int E^2\delta\epsilon\mathrm{d}\tau,$$

而 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$,$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$,所以

$$\delta W = \int[-\nabla\cdot(\varphi\delta\boldsymbol{D}) + \varphi\delta\rho]\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int E^2\delta\epsilon\mathrm{d}\tau$$

$$= \int\varphi\delta\rho\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int E^2\delta\epsilon\mathrm{d}\tau.$$

这里,我们利用了高斯定理把散度的体积分化成了无穷大的界面积分,其值为零. 对于介质的一个给定位移 $\boldsymbol{\xi}$,相应于空间的一个固定的体积来说必有

$$\int_V \delta\rho\mathrm{d}\tau = -\oint_S \rho\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\tau,$$

因此

$$\delta\rho = -\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\xi}),$$

同理,介质的密度 $\delta\rho_m$ 也有类似的关系式

$$\delta\rho_m = -\nabla\cdot(\rho_m\boldsymbol{\xi}).$$

ϵ 是密度 ρ_m 的函数

$$\delta\epsilon = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\delta\rho_m = -\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\nabla\cdot(\rho_m\boldsymbol{\xi}),$$

这样

$$\delta W = -\int\varphi\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\nabla\cdot(\rho_m\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\tau,$$

利用

$$\varphi\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\xi}) = \nabla\cdot(\varphi\rho\boldsymbol{\xi}) - \rho\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\varphi,$$

$$E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\nabla\cdot(\rho_m\boldsymbol{\xi}) = \nabla\cdot\left(E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\rho_m\boldsymbol{\xi}\right) - \rho_m\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\right),$$

最后得到

$$\delta W = -\int\boldsymbol{\xi}\cdot\left[\rho\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\rho_m\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\right)\right]\mathrm{d}\tau.$$

其中我们已把有关散度的体积分化成了无穷大界面的积分而消失了. 当介质位移为 $\boldsymbol{\xi}$ 时电场对介质作的功等于总的静电场能的减少,即

$$\int\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau = -\delta W.$$

比较上两式，即得

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \frac{\rho_m}{2}\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\right).$$

在利用$\nabla\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\nabla\rho_m$后，上式又可写成

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{2}\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\rho_m\right), \tag{3.46}$$

这就是静电场中介质受静电力的一般公式.

对(3.46)式我们作一些讨论：

(1) 第一项代表静电场作用于介质中自由电荷的力.

(2) 第二项只当ε是空间函数时才有效，它表示静电场对介质的作用力. 特别是在介质和真空的界面上，它显示了存在着垂直于界面的作用力. 为说明这一点，我们举例如下.

【例 6】 如图 3.4 所示，一平行板电容器，间距为d，板面积为A. 该电容器内部分充有介电常数为ε的介质，其面积为S. 试计算电场对介质的作用力.

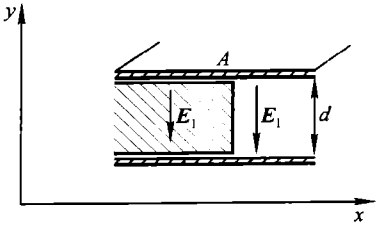


图 3.4

解 由于介质内部均匀，所以介质内力密度为零，对介质的作用力只出现在由介质到真空的过渡层中. 显然，作用在极板上、下面的作用力的大小相等，但方向相反. 在侧面上，假定由介质到真空的相对介电常数是迅速而连续地从ε_r降到1，略去边缘效应后有$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$，所以只需对侧面过渡层积分即可求得作用在介质上的总力，

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}\int E^2\nabla\varepsilon\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}E^2\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}E^2(\varepsilon - \varepsilon_0)S_{侧}\,\boldsymbol{e}_x,$$

所以介质将被拉进电容器内.

(3) 第三项也是场对介质的作用力，所不同的是只有在ε是介质密度的函数时它才存在，所以常称为**伸缩力**. 值得指出的是：它对总的体积力没有贡献，原因是体积分为零，即

$$\frac{1}{2}\int_V\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\rho_m\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\oint\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\rho_m\right)\mathrm{d}S = 0.$$

因为总可适当扩展界面而使界面上$\rho_m = 0$，所以在考虑总体积力时常略去此项.

(4) 对于不带电的液体和气体类的介质来说，在平衡时，场对介质的力密度必须与压强梯度平衡，即

$$-\nabla p + \frac{1}{2}\rho_m\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\right) = 0,$$

或

$$-\nabla p - \frac{1}{2}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{2}\nabla\left(E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\rho_m}\rho_m\right) = 0. \tag{3.47}$$

【例 7】 如图 3.5 所示，一平板电容器竖直浸在不可压缩的，介电常数为ε、密度为ρ_m的

液体中，电容器间距为 d，电势为 φ. 求电容器内液体上升的高度.

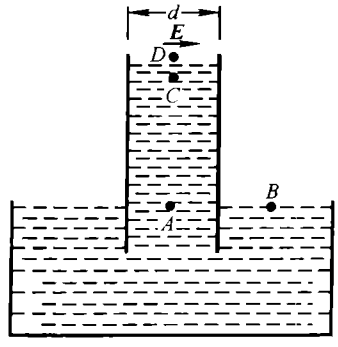


图 3.5

解　如图 3.5，B 点是电场外液面上的点；D 点是电场内液面外的点；C 点是电场内液面内的点. 由题意可知，$E=\frac{\varphi}{d}$. 设大气压为 p_0，则

$$p_D = p_0, p_B = p_0.$$

同时根据(3.47)式，作 C 点到 D 点的积分就得到 C、D 间压强的关系：

$$p_C = p_D + \frac{E^2}{2}\varepsilon\Big|_C^D - \frac{1}{2}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m\right)\Big|_C^D$$

$$= p_0 - \frac{E^2}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0) + \frac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m,$$

因此 A 点和 D 点(大气压)的压强关系为

$$p_A = p_C + \rho_m g h = p_0 + \rho_m g h - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m.$$

另一方面，A 点与 B 点在同一水平面上，由(3.47)式得 A、B 间的压强关系：

$$p_A = p_B - \frac{1}{2}\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m\right)\Big|_A^B = p_B + \frac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m$$

$$= p_0 + \frac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\rho_m.$$

比较上两式即得液面的升高值

$$h = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2g\rho_m}E^2 = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2g\rho_m}\frac{\varphi^2}{d^2}.$$

(5) 如果 ε 是 ρ_m 的线性函数，且是弱电介质，则由(3.31)得 $\rho_m\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}=\varepsilon-\varepsilon_0$. 介质中无自由电荷时，介质上所受的静电力 $\boldsymbol{f}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}\nabla E^2$. 这就是说，静电场中的电介质所受力的力密度正比于电场强度的平方的梯度；或者说，电介质被吸引到电场强度最大的区域，这就解释了带电导体会吸引纸屑的这一常见现象.

习　题

3.1　在双原子的静电模型中，每一原子由一个带电为 $+q$ 的原子核和一个带电为 $-q$ 的均匀电子壳层组成. 试求：(1) 两原子的相互作用能与两原子间距离的函数关系. (2) 分子离解所需要的能量.

3.2　在零级近似下，氦原子中两个电子的电子层具有相同的分布 $\rho(\boldsymbol{r})=-\frac{8e}{\pi a^3}e^{-4r/a}$，求两个电子间的相互作用能.

3.3　一质量为 m 的不带电球壳浮在介电常数为 ε 的液体上，但有 $\frac{1}{4}$ 的体积浸没在液体

之中，并对它进行充电．试问：电势为多少时能使它有一半的体积浸没于液体中？

3.4　在接地的空气球形电容器的极板间有一点电荷 q，它到球心的距离为 r，极板的半径分别为 R_1、R_2（$R_1 < R_2$），求在极板上的感应电荷．

3.5　有两个导体组成一个系统，导体 1 装在空心导体 2 中，试用系统的电容系数来表示系统形成的电容器的电容和孤立导体（即导体 2 的外表面）的电容．

3.6　在电势为 φ_1 的闭合导电面内含有一个电势为 φ_0 的导体，导电面间 P 点的电势为 φ_P．现在如果把导体都接地，且在 P 点放置一个电荷 q，问这时诸导体上将感生多少电荷？

3.7　氢原子中电子云的密度用函数 $\rho(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$ 来描述，式中 a_0 为玻尔半径，e 为电子电荷．在弱电场下，氢原子受到极化，如果近似地认为电子云不发生形变，试求氢原子的极化率．

3.8　一半径为 R 的带电球，对于电荷 q 均匀分布在表面和体内两种情况，分别计算它的静电能．

3.9　两个半径分别为 R_1 和 R_2（$R_1 < R_2$）的同心球壳，求它们的电容．

3.10　一平行板电容器竖直浸入不可压缩的液体中，液体的密度为 ρ_m，介电常数为 ε，电容器间距为 d，电势差为 φ，求电容器内液体上升的高度．

第四章　静电场边值问题的解法

本章首先阐述静电问题的特殊解法：镜象法和特解法，它们各有其优点和局限性．接着讨论格林函数法，这是一种求解静电问题的普遍方法．最后讨论多极矩展开的方法．学习本章时希望读者注意各种典型例题的解法及物理图象．

§4.1　唯一性定理

定理：如果静电体系内存在电荷分布和电介质分布，且关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 成立，则体系的电场由电荷和电介质分布以及边界上的 φ 或 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}$ 唯一确定．

证明：设对同一个体系存在有两个解 φ' 和 φ''，$\boldsymbol{E}'=-\nabla\varphi'$，$\boldsymbol{E}''=-\nabla\varphi''$；$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{D}''=\varepsilon\boldsymbol{E}''$．我们可以构造如下的函数：

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})=(\varphi'-\varphi'')(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'').$$

对 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})$ 求散度，并对体积积分，则

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\int_V\nabla\cdot[(\varphi'-\varphi'')(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'')]\mathrm{d}\tau$$

$$=\oint_S(\varphi'-\varphi'')(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{4.1}$$

而

$$\nabla\cdot\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})=(\varphi'-\varphi'')(\nabla\cdot\boldsymbol{D}'-\nabla\cdot\boldsymbol{D}'')+(\nabla\varphi'-\nabla\varphi'')\cdot(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}''),$$

由于讨论的是同一个体系，必有 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}'=\nabla\cdot\boldsymbol{D}''=\rho$，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})=-(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E}'')\cdot(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}''),$$

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=-\int(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E}'')\cdot(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'')\mathrm{d}\tau. \tag{4.2}$$

比较(4.1)和(4.2)式得到

$$\int_V(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{E}'')\cdot(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'')\mathrm{d}\tau=-\oint_S(\varphi'-\varphi'')(\boldsymbol{D}'-\boldsymbol{D}'')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

对同一个体系，两个解的边界条件相同，于是

$$\varphi'|_S=\varphi''|_S,$$

或

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}'|_S=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{D}''|_S.$$

这样

$$\int_V (\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}'') \cdot (\boldsymbol{D}' - \boldsymbol{D}'') \mathrm{d}\tau = 0, \tag{4.3}$$

即

$$\int_V \varepsilon (\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}'') \cdot (\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}'') \mathrm{d}\tau = 0,$$

而 $\varepsilon \geqslant 1$,所以有

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'',$$

两个解相同,静电场是唯一的. 由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 可知,电势 φ 最多差一个任意常数.

我们对此作一些讨论:

(1) 在介质静电学中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间并不一定是线性的,一般说来 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的函数. 这时,只要 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的单值单调递增函数,则由(4.3)式可看出,定理仍成立. 对铁电介质来说,上述唯一性定理不成立,因为有电滞回线存在,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 不再是单值的.

(2) 如体系内含有导体,则只要把导体表面看成边界面,由(3.9)式可以证明,上述唯一性定理仍成立.

§4.2 镜 象 法

镜象法是解静电边值问题的一种特殊解法,这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的象电荷代替. 象电荷放在边界的外部,它的存在并不改变所研究区域内电荷的分布,只要调整象电荷的位置和大小,使它产生的场和原电荷分布所产生的场满足所给的边界条件,那么我们便找到了问题的解. 这种解法的正确性可由唯一性定理保证.

下面我们通过几个例子来说明这种解法.

【例 1】 在接地无穷导体平面前有一点电荷 q,求空间的电势分布.

解 如图 4.1,设导体平面位于 $x=0$ 处,并设点电荷 q 位于 x 轴,其坐标为 $(d,0,0)$. 导体平面把空间分成两部分,令 $x>0$ 的区域为Ⅰ,$x<0$ 区域为Ⅱ,电势为 φ. 由题意得到 φ 满足的方程和边界条件是:

$$\text{区域Ⅰ}:\begin{cases}\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} q\delta(x-d,y,z),\\ \varphi|_{r\to\infty} = 0,\\ \varphi|_{x=0} = 0;\end{cases} \qquad \text{区域Ⅱ}:\begin{cases}\nabla^2\varphi = 0,\\ \varphi|_{r\to\infty} = 0,\\ \varphi|_{x=0} = 0.\end{cases}$$

显然区域Ⅱ内的解是平庸的(齐次拉普拉斯方程,其解为常数),所以我们只要讨论区域Ⅰ内的解. 区域Ⅰ内的解来自两部分:一是区域内分布的电荷产生的势,二是导体面上的感应电

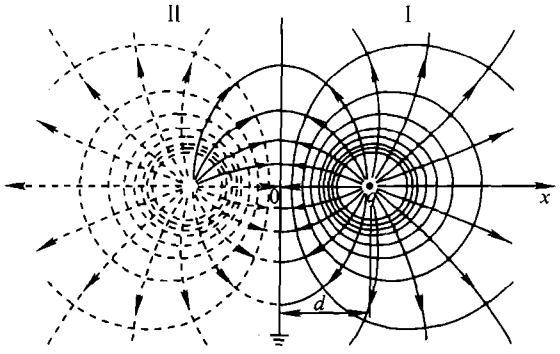


图 4.1

荷所产生的势. 因此,区域 I 内的电势可以写为

$$\varphi = \varphi_{点} + \varphi_{面},$$

$\varphi_{点}$ 可由电荷分布计算得到:

$$\varphi_{点} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}.$$

$\varphi_{面}$ 显然是不知道的,由镜象法的精神,这一项的贡献我们可以等效地用边界面外的电荷分布代替,问题是如何在边界外设置象电荷. 因为导体面上的电场线都是垂直于表面的,电场线分布具有对称性,根据场分布的对称性分析,似乎是在$(-d,0,0)$处有一电荷 $-q$. 这样我们就把感应面电荷对 $x>0$ 区域的场的贡献等效地用在面外$(-d,0,0)$处的电荷 $-q$ 所产生的场来代替. 这样我们便找到了问题的一个试解:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}. \tag{4.4}$$

这个解正确与否,判断的标准是看它是否满足一开始写出的在区域 I 内的 φ 所满足的方程和边界条件. 显然它是满足方程和边界条件的. 根据唯一性定理,它就是问题的解.

由此可见,接地导体平面好像是一面镜子,它对 $x>0$ 区域的作用,可用位于$(-d,0,0)$处的虚电荷 $-q$ 代替,这个虚电荷称为原来电荷 q 的象电荷. 因此,这个方法也称为**电象法**.

知道了电势也就可以求出导体的电荷面密度:

$$\sigma = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

$$= -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \tag{4.5}$$

导体上总感应电荷

$$q' = \int\sigma\mathrm{d}S = \int_0^{\infty}2\pi r\sigma\mathrm{d}r = -q,$$

可见像电荷的大小正是面上感应的总电荷.

要计算电荷 q 受到的作用力可以直接计算导体板面上的总力. 作用在单位面积元上的力为

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 e_n,$$

所以总力为

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 e_x \mathrm{d}S = e_x \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 \mathrm{d}S$$

$$= e_x \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{(qd)^2}{(d^2+r^2)^3} r\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2} e_x.$$

这个结果正好是源电荷和象电荷之间的库仑力. 所以,导体面和点电荷之间的作用力,可通过直接计算象电荷和源电荷之间的库仑力得到,这种力称为**镜象力**.

【例 2】 设一点电荷附近有一接地导体球面,求空间电势分布.

解 如图 4.2,取球心为坐标原点,球心到点电荷 q 的方向为 x 轴. 设 q 的坐标为(d,0,0),球半径为 R. 球内的电势为零,这是显然的,故只要讨论球外空间的电势即可.

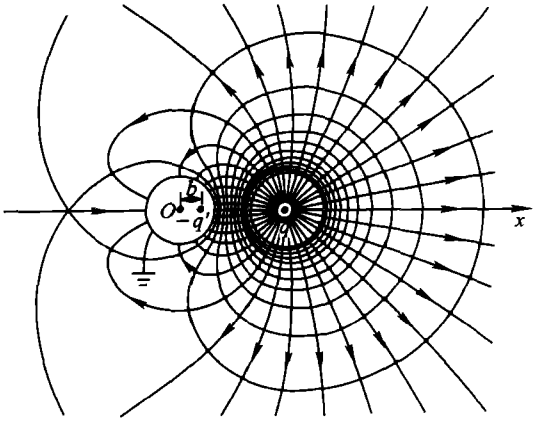


图 4.2

球外空间的电势所满足的方程和边界条件是:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} q\delta(x-d,y,z), \\ \varphi|_{r=a} = 0, \\ \varphi|_{r=\infty} = 0. \end{cases}$$

球外空间的电势由两部分组成,即点电荷 q 所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势. 根据电场线分布的对称性,可以认为感应电荷的贡献就是由边界外(即球内)在点(b,0,0)处的点电荷 $-q'$ 的贡献. 因此,我们得到球外空间的试解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q'}{r'}\right),$$

其中

$$r = \sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2},\quad r' = \sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}.$$

下面的工作是看能否确定适当的 b 和 q',使试解满足方程和边界条件.

在 $b<R$ 的情况下，不论 $-q'$ 取何值，试解都满足方程和在无穷远处的边界条件，这是显然的. 现在的问题是如何调整 b、q' 的数值使试解也能满足势在球面($r=R$)上为零的边界条件. 为此，把条件 $\varphi|_{r=R}=0$ 代入试解，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2+R^2-2Rd\cos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{b^2+R^2-2bR\cos\theta}}=0,$$

即

$$q^2(b^2+R^2-2Rb\cos\theta)=q'^2(d^2+R^2-2Rd\cos\theta).$$

因为对任意 θ 值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases}q^2(b^2+R^2)=q'^2(d^2+R^2),\\ q^2b=q'^2d.\end{cases}$$

这有两组解

$$b=d,\ q'=q;$$

$$b=\frac{R^2}{d},\ q'=\frac{R}{d}q.$$

解($b=d$，$q'=q$)显然不合理，只有解$\left(b=\frac{R^2}{d},q'=\frac{R}{d}q\right)$满足要求. 于是得到问题的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}-\dfrac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}} & (r>R);\\ 0 \quad (r<R).\end{cases}\tag{4.6}$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

$$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=R}$$

$$=-\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{d}\right)\frac{\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1+\frac{R^2}{d^2}-2\frac{R}{d}\cos\theta\right]^{3/2}};\tag{4.7}$$

总感应电荷为

$$\int\sigma\mathrm{d}S=-\frac{R}{d}q,$$

即象电荷的大小等于导体面上的感应电荷.

点电荷 q 受到的导体球的作用力，即为象电荷对点电荷 q 的作用力，其值为

$$|\boldsymbol{F}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq'/(d-b)^2$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{R^2}\left(\frac{R^3}{d^3}\right)\Big/\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2.\tag{4.8}$$

我们对以上的情况作如下讨论：

(1) 导体球不带电且不接地. 这种情况与本题的差别仅在于边界条件. 这里，$\varphi|_{r=R}=$常数(未知)；导体球不带电即要求满足电中性条件

$$-\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=0.\tag{4.9}$$

显然,解(4.6)是不满足电中性条件的,如果在球内再添置一个象电荷 $q''=+\frac{R}{d}q$,则(4.9)式的条件满足. 为了不破坏导体是等势体的条件,由对称性知,q''必须放在球心. 于是,球外电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}-\frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}}+\frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]. \tag{4.10}$$

(2) 导体球接电势 V_0. 这与本题的差别仍在边界条件. 这里,$\varphi|_{r=R}=V_0$,V_0 是已知常数(与(1)不同). 显然,其解取为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}-\frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}}+\frac{V_0R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]. \tag{4.11}$$

导体球接电势 V_0,相当于在球心放置了电荷量为(V_0R)的点电荷.

(3) 点电荷 q 在导体球壳内,距球心 d 处,则球内的电势等于源电荷 q 和象电荷 $\left(\text{在球外}\frac{R^2}{d}\text{处}\right)q'$所产生的电势,即

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}-\frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}}\right]. \tag{4.12}$$

注意:此时象电荷大于源电荷,球内的场与导体球是否接地、是否带电都无关.

(4) 若导体球带有电荷 Q,则解应为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}-\frac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{d}\right)^2+y^2+z^2}}+\frac{\frac{R}{d}q+Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]. \tag{4.13}$$

点电荷 q 所受到的作用力为

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(Q+q')}{d^2}-\frac{qq'}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2}\right]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\left[Q-\frac{qR^3(2d^2-R^2)}{d(d^2-R^2)^2}\right].\end{aligned} \tag{4.14}$$

注意:F 有可能正也有可能负,这表明点电荷 q 在带电导体球附近所受的力,可能是排斥力,也可能是吸引力(即使 q 与 Q 同号). 特别是 q 靠近导体球时吸引力变大,这表明金属导体中的电子要脱离导体一定要作功,大部分功是为了克服这一镜象力.

【例 3】 超流体^{4}He 的自由液面是最理想的表面,因为除了表面波的零点运动和热运动外,它非常平坦. 如果在此液面上放置一定密度的低能电子,^{4}He 表面极化电荷的作用会使

电子吸附在^{4}He表面上;但电子不会进入^{4}He内,这是因为存在着表面势垒. 电子之间的距离$r_0=500$ nm,而离^{4}He表面距离$l=10$ nm,$l\ll r_0$,从而形成了理想的二维电子气. 理论上已证明,在足够低的温度下,电子气形成晶格,这种晶格称为维格纳晶格. 试用镜象法计算晶格中每个电子受到的经典束缚势能.

解　如图4.3,选取液氦表面为$z=0$的平面,电子在z轴上$(0,0,z')$处. $z>0$是空气,$\varepsilon\approx\varepsilon_0$;$z<0$是液氦. 设电子在空间产生的电势为

$$\begin{cases}\varphi_1 & (z>0),\\ \varphi_2 & (z<0).\end{cases}$$

φ_1、φ_2分别满足下述方程和边界条件:

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x,y,z-z'),\\ \nabla^2\varphi_2=0;\end{cases}$$

在无穷远处边界上

$$\varphi_1=\varphi_2=0,$$

在$z=0$的界面上

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2,\\ \varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{z=0}=\varepsilon\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{z=0}.\end{cases}$$

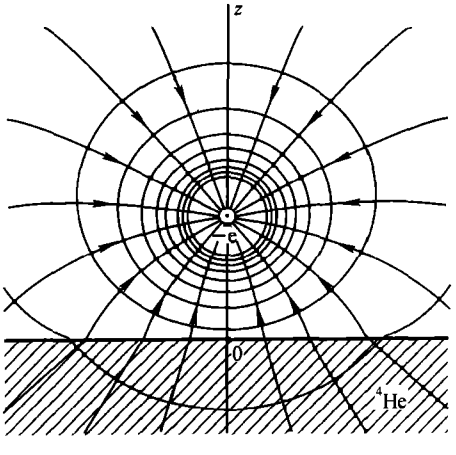


图 4.3

在$z>0$的区域,电势由该区内的点电荷q的贡献及$z=0$面上的束缚面电荷的贡献所组成,对第二部分的贡献根据镜象法的精神,我们可用放在界面外$(z<0)$的$(0,0,-z')$处的一象电荷q'来代替. 这样,我们便可写出该区的试解为

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}+\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z')^2}}\right].$$

同理，$z<0$ 的区域的解可以写为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}.$$

上面的 φ_1 和 φ_2 分别满足方程和无穷远处的边界条件，下面我们用界面($z=0$)上的关系来确定 q' 和 q''.

由 $z=0$ 处 $\varphi_1=\varphi_2$，则有

$$\varepsilon(q+q') = \varepsilon_0 q'',$$

由 $z=0$ 处 $\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{z=0} = \varepsilon \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{z=0}$，则有

$$-q+q' = -q'',$$

联立求解得

$$q' = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}q.$$

由于在 $z>0$ 区域内的点电荷是电子，即 $q=-e$，故

$$q' = +\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}e; \quad q'' = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}e.$$

因此

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} + \frac{-\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}e}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z')^2}},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2e\varepsilon}{(\varepsilon_0+\varepsilon)\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}. \tag{4.15}$$

表面电子的势能即是它与介质面上的极化电荷之间的相互作用能. 若点电荷 q 增加 $\mathrm{d}q$，则点电荷和介质平面之间的相互作用能 W_i 增大 $\mathrm{d}W_i=\varphi'\mathrm{d}q$. φ' 是介质面上的极化电荷产生的势. 由于 $\varphi'\propto q$，故有

$$W_i = \int_0^q \varphi'\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\varphi' q$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{e^2}{z'}.$$

这是作用在表面电子上的经典吸引势能. 液氦的介电常数 $\varepsilon_r=1.057$，可见这种吸引势能是在很小的区域内. 经典吸引势能和来自量子效应的势垒 u_0 组成了一个势阱，如图 4.4 所示. 电子在势阱中的束缚态可由一维的薛定谔方程求出，图中 $\psi(z)$ 是电子的基态波函数，基态能量为 0.65 meV，第一激发态能级为 0.16 meV，能级差为 0.5 meV，这已被实验证实.

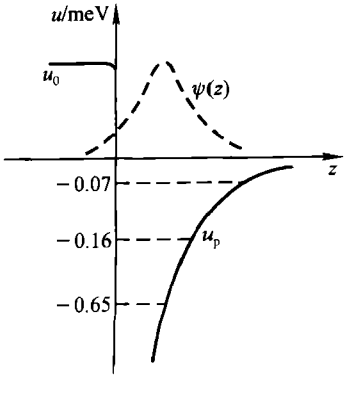


图 4.4

如果电子埋在液氦表面以下，它将形成一个半径为 1.5 nm 的电子“泡”，电子的波函数是球对称的，沿半径方向指数衰减. 这种电子泡在表面物理领域内

称为“内部电子表面态”,而前面的状态称为“外部电子表面态”. 电子泡也会受到液氦表面的作用.

设电子泡半径远小于它到表面的距离,则由镜象法得

$$q' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}e.$$

这与前面的情形不同,象电荷与电子泡同号,所以镜象力是排斥力,电子泡也就不断下沉. 如果沿 z 轴加上一个均匀电场使电子泡上浮,则电子泡有可能在某处平衡,这时电子泡的总势能为

$$u_{总}(z) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)e^2}{4(\varepsilon + \varepsilon_0)}\cdot\frac{1}{z} - eEz \quad (z < 0),$$

不难求得电子泡的平衡位置为势能的极小点,即

$$z_0 = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4(\varepsilon + \varepsilon_0)}\frac{e}{E}\right]^{1/2}$$

把势能在 z_0 点作泰勒级数展开,得

$$u_{总}(z) = u_{总}(z_0) - k_0(z - z_0)^2/2 + \cdots$$

式中 $k_0 = 2\left[\frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4(\varepsilon + \varepsilon_0)eE^3}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right]^{1/2}$. 可见,在平衡点附近存在谐振子势,这就使电子泡可以在 z_0 附近作小振荡,其频率为

$$\omega_0 = (k_0/m)^{1/2}.$$

§4.3 特 解 法

在所考察的区域内若不存在自由电荷,即自由电荷只出现在区域的边界上(以面电荷形式),则此区域内的电势所满足的方程为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{4.16}$$

而区域边界上的电荷将通过边界条件反映出来. 因此,这类静电问题归结为求解满足特定边界条件的拉普拉斯方程. 根据不同的边界形状,我们可以选取适当的坐标系,用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解.

在球坐标系中,方程(4.16)的旋转对称的通解为:

$$\varphi_v = [A_v r^v + B_v r^{-(v+1)}]\mathrm{P}_v(\cos\theta), \tag{4.17}$$

其中 $\mathrm{P}_v(\cos\theta)$为第一类勒让德函数,它在 $\cos\theta = 1$ 时是正则的.

如果讨论包括南极、北极整个区域,即 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$,则 v 必须取正整数或零,即 $v = l$ $(l = 0,1,2,\cdots)$,故通解为

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]\mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{4.18}$$

此时的 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$称为勒让德多项式.

如果讨论锥形空间，即 $0\leqslant\theta<\pi$，此时只要求 v 为零或大于零的实数，并不要求它是整数，可以(而且往往)是非整数(见例 6).

如果讨论的问题只与坐标 θ 有关，则不难证明其解为

$$\varphi = C_1\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+C_2. \tag{4.19}$$

又如在柱坐标系中，与 z 无关的拉普拉斯方程的基本解为

$$\varphi_v = \begin{cases}(A_0+B_0\ln\rho)(C_0+D_0\phi), & v=0,\\ (A_v\rho^v+B_v\rho^{-v})[C_v\cos(v\phi)+D_v\sin(v\phi)], & v\neq 0,\end{cases} \tag{4.20}$$

其中 v 是大于零的非整数或大于零的整数.

如果讨论的区域是 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$，则由物理解的单值性要求：$v$ 必须是正整数，且 $D_0=0$，故通解为

$$\varphi = A_0+B_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})\cos(n\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})\sin(n\phi). \tag{4.21}$$

如果讨论方位角限制在 $0\leqslant\phi\leqslant\phi_0$ ($\phi_0\neq 2\pi$)的边值问题(例如劈形导体外空间)，v 可以是(往往是)非整数.

从上面的讨论可以看到，通解中有无穷多的可调参数，这些待定参数需要依靠边界条件来一一确定，而这一工作往往是复杂而繁琐的. 如果我们从所讨论问题的物理图象的直观分析出发，根据特定边界条件的对称性，直接从物理角度由通解中选出几个特解作为试解，这样我们就只引入了有限的几个可调参数，从而给求解带来许多方便. 这种直接从物理分析角度挑选有限个特解作为试解的方法称为特解法. 当然，特解法的基础仍是分离变量，而掌握特解法的关键是要物理概念清楚. 下面我们举几个例子来说明特解法的基本思路.

【例 4】 一半径为 R 的导体球置于一均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求导体球置入后空间场的分布.

解 导体球在达到静电平衡时应为一个等势体，假若导体球与外界绝缘，则其总电荷应为一常数，放入场中之后，虽然电荷重新分布，但总电荷不变. 若此时我们将导体接地，则导体球与地之间有电荷交换，直到导体球的电势为零为止. 现在我们先讨论前者，即导体球绝缘地置入场中的情况. 这时我们令导体的电势为 X(未知)，总电荷为 Q(已知). 如图 4.5，取 $\boldsymbol{E}_0$ 方向为 z 轴，这是一个绕 z 轴旋转对称的问题. 球外空间没有电荷，电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi=0.$$

相应的边界条件为

$$\varphi = X(\text{未知}),\ r=R,$$

但

$$\oint\sigma dS = -\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=R}dS = Q$$

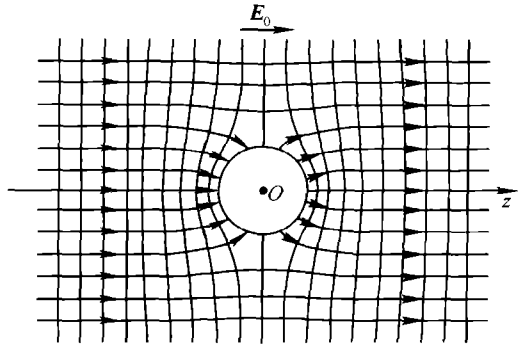


图 4.5

是已知的. 在 $r\to\infty$ 的边界上

$$\varphi \to \varphi_0 - E_0 r\cos\theta .$$

这个问题的通解即为(4.18)式:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

通解中有无穷多常数,这些常数可由问题的边界条件确定,但这比较复杂. 下面我们根据问题的对称性,从通解中选几个特解作为试解来简化求解方法.

根据叠加原理,球外的场应由三部分组成:一是外场,它产生的势为 $\varphi_0 - E_0 r\cos\theta$,这相当于选取通解中的 A_0、A_1 项;二是导体球放到均匀外场中感生的感应电荷的贡献,该贡献相当于一个电偶极子,这相当于取通解中的 B_1 项;三是导体球本身所带电荷的贡献,由于导体球是等势体,故它的贡献相当于一个点电荷的势,这相当于取通解中的 B_0 项. 根据以上分析,我们可取试解为

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1\cos\theta}{r^2}.$$

由于试解中的各项都是取自通解,所以试解满足拉普拉斯方程,此外它显然满足无穷远边界条件. 现在的问题仅是利用剩下的球面上的边界条件来确定 B_0 与 B_1. 当 $r=R$ 时,$\varphi=X$,故

$$X = \varphi_0 - ER\cos\theta + \frac{B_0}{R} + \frac{B_1\cos\theta}{R^2}.$$

比较方程两边 $\cos\theta$ 的系数得

$$B_0 = (X-\varphi_0)R,\quad B_1 = E_0 R^3,$$

故解为

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{R(X-\varphi_0)}{r} + \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta . \tag{4.22}$$

又因为 $-\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r=R}dS = Q$,把(4.22)式代入即得

$$X = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} + R\varphi_0\right)\Big/R,$$

故

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta. \tag{4.23}$$

若导体球不带电,则解为

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta. \tag{4.24}$$

若导体球接地,这时 $X=0$,代入(4.22)式,则解为

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta - \frac{R\varphi_0}{r} + \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta. \tag{4.25}$$

我们看到接地时空间场的分布,除偶极子场和均匀场之外,还有一位于球心的点电荷的场. 这个点电荷的大小表示从地流入导体球的负电荷的量,以保持导体球为零等势体,它由放入导体时 $r=0$ 点的电势来确定. 以上求得的解是真实的解,唯一性定理保证了这一点.

【例 5】 半径为 R、介电常数为 ε_2 的均匀介质球,被置于均匀外场 E_0 中,球外空间充满均匀介电常数为 ε_1 的介质. 求空间电势的分布.

解 如图 4.6,取 E_0 方向为极轴 z 方向,这个问题是绕 z 轴旋转对称,为此我们把球分成内外两个区域,分别写出它们的方程和边界条件.

令球外空间为区域Ⅰ,电势为 φ_1,则 φ_1 满足方程

$$\nabla^2\varphi_1 = 0,$$

相应的边界为

$$\begin{cases} \varphi_1 \to -E_0 r\cos\theta \quad r\to\infty, \\ \varphi_1 = \varphi_2, \quad r = R, \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{r=R} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{r=R}, \end{cases}$$

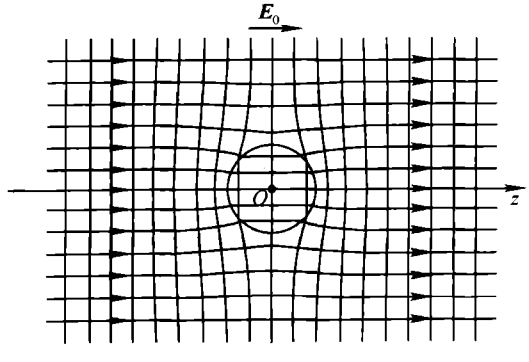


图 4.6

式中 φ_2 为球内(区域Ⅱ)的电势. 同理 φ_2 满足方程

$$\nabla^2\varphi_2 = 0,$$

相应的边界条件为:

$$\begin{cases} \varphi_2 \text{ 应为有限值} & r=0, \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n}\Big|_{r=R} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}\Big|_{r=R}. \end{cases}$$

与例 4 同样的分析，可知区域Ⅰ的电势由两部分组成：一是均匀外场，它的贡献为 $-E_0 r\cos\theta$；二是球面极化电荷的贡献，它相当于一个偶极子，即选取通解(4.18)式中的 B_1 项. 所以，区域Ⅰ的试解可取为

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\theta + \frac{A}{r^2}\cos\theta.$$

区域Ⅱ的场也由两部分组成：一是均匀外场，二是极化面电荷，由于在球内要求在 $r=0$ 时，φ_2 有限，所以 $r^{-(l+1)}$ 形式的解不可取. 可见，两部分场的形式只能取为 $Br\cos\theta$ 形式，即

$$\varphi_2 = Br\cos\theta.$$

φ_1 和 φ_2 中的常数 A 和 B 可由交界面关系来确定.

$r=R$ 时 $\varphi_1=\varphi_2$，故

$$-E_0 R + \frac{A}{R^2} = BR.$$

$r=R$ 时 $\varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}$，故

$$\varepsilon_1\left(-E_0 - 2\frac{A}{R^3}\right) = \varepsilon_2 B.$$

将上面两个方程联立求解得

$$A = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0 R^3,\quad B = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0,$$

故

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1}R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta, \\ \varphi_2 &= -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta. \end{aligned} \tag{4.26}$$

作如下的讨论：

(1) 球面上的束缚电荷对球外区域的贡献，相当于一个放在原点的偶极子，该偶极子在 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ 时为正(即与外场同向)，$\varepsilon_2<\varepsilon_1$ 时为负(即与外场反向)，其大小为

$$p = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3 E_0.$$

(2) 球内的场为一与外场平行的恒定场：

$$\boldsymbol{E}_{内} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0.$$

若 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，则 $\boldsymbol{E}_{内}<\boldsymbol{E}_0$. 极化电荷在球内所产生的场为

$$\boldsymbol{E}_{内} - \boldsymbol{E}_0 = -\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0,$$

即

$$\boldsymbol{E}_{内} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0$$

$$= \boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P},$$

式中 $\boldsymbol{P}=3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0$ 是极化强度，因子$\frac{1}{3}$称为退极化因子，常用 L 表示.

(3) 若$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\to 0$，即 $\varepsilon_2\to\infty$，则介质球内的场为 $\boldsymbol{E}_{内}\to 0$，其效果相当于一个导体球(但不能由此得出导体的介电常数为无穷大). 这一结果具有普遍意义，因为在静电平衡时介质内的 $\boldsymbol{P}$ 总是有限的，若 $\varepsilon\to\infty$，则极化率 $\chi\to\infty$，因此介质内的场为 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\chi\varepsilon_0}\boldsymbol{P}\to 0$.

【例 6】 试求避雷针尖端附近的电场.

解 避雷针尖端是一个圆锥体. 设圆锥的尖端在球坐标的原点，圆锥体的轴为坐标系的极轴，如图 4.7 所示. 我们要讨论的是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$ 的区域，并且在原点附近. 由(4.17)式可知，拉普拉斯方程在 $r\to 0$ 时的、轴对称的、有限的解的形式为

$$\varphi_v = A_v r^v \mathrm{P}_v(\cos\theta)$$

的叠加，其中 v 为任意正实数. 由于只讨论原点附近区域的场，v 越小贡献越大，故只需取 v 的最小值 v_1. 现在待定常数是 A 和 v_1，重要的是 v_1 的值. 由于 v_1 一定是非整数，所以可设 $v_1\ll 1$；又因为避雷针尖端是个细锥体，即 $\alpha\ll 1$，当 $\alpha\to 0$ 时圆锥尖端周围区域内的 φ 几乎与 θ 无关(犹如点电荷的场)，所以在 $\alpha\ll 1$ 的情况下可以设想

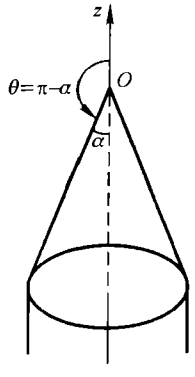


图 4.7

$$\mathrm{P}_{v_1}(\cos\theta) = 1 + f(\theta) \quad f(\theta)\ll 1,$$

代入勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}\theta}\right)+v_1(v_1+1)\mathrm{P}=0,$$

得到关于 $f(\theta)$的方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)=-v_1,$$

故

$$f(\theta) = v_1\ln 2 + v_1\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)+v_1\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)+$$
$$C_1\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)-C_1\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)+C_2. \tag{4.27}$$

在区域 $0\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$ 内 $f(\theta)$应无奇点，所以 $C_1=-v_1$；而积分常数 C_2 选择为 $C_2=-v_1\ln 2$，于是

$$f(\theta) = 2v_1\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

电势为

$$\varphi = Ar^{v_1}\left[1+2v_1\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{4.28}$$

根据边界条件，在 $\theta=\pi-\alpha$ 的圆锥面上 $\varphi=0$，即

$$1 + 2v_1 \ln\left[\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)\right] = 0,$$

故利用 $\alpha \ll 1$ 得到最小的 v_1 值为

$$v_1 = \frac{1}{2\ln\frac{2}{\alpha}}.$$

圆锥尖端附近的电场强度为

$$\begin{aligned} E_r &= -Av_1 r^{v_1-1}\left[1 + 2v_1 \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]e_r, \\ E_\theta &= +Av_1 r^{v_1-1}\tan\frac{\theta}{2}e_\theta. \end{aligned} \tag{4.29}$$

电荷分布为

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_\theta\big|_{\theta=\pi-\alpha} = -\varepsilon_0 Av_1 r^{v_1-1}\cot\frac{\alpha}{2}.$$

由此可见，在避雷针尖端附近，电场强度

$$E \propto r^{-\left(1-\frac{1}{2\ln\frac{2}{\alpha}}\right)}.$$

由于 α 很小，所以电场强度基本上按 $\frac{1}{r}$ 变化，实际的避雷针尖总有一个有限大小的直径，设直径为 d，则可以外推上述结果，由于 $r = \frac{d}{\sin\alpha} \approx \frac{d}{\alpha}$，所以

$$E \propto \left(\frac{d}{\alpha}\right)^{v_1-1} \approx \left(\frac{d}{\alpha}\right)^{-1}.$$

在雷雨时，地和云层之间的电势差很大，结果首先在避雷针尖端发生空气的电击穿，很大的闪电电流就会沿着避雷针流入大地.

【例 7】 在均匀外电场 $\boldsymbol{E} = E_0 e_x$ 中有一半径为 R、电荷线密度为 λ 的无限长导体圆柱，柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布.

解 把空间分成柱内外两个区域，柱内区域的场为零. 柱外区域的电势满足方程

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

边界条件为

$$\varphi\big|_{\rho\to\infty} = -E_0\rho\cos\phi;\ \varphi\big|_{\rho=R} = \text{常数};\ \oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\rho=R}\mathrm{d}S = -\lambda/\varepsilon_0.$$

显然此问题的通解为(4.21)式. 现在我们根据物理图象的直观分析，直接挑选出有限的几项作为试解.

导体是带电的，试解中必存在 $\ln\rho$ 项；外场在试解中应当反映出来，故应有 $-E_0\rho\cos\phi$ 项；均匀外电场的作用使导电圆柱的侧面产生感应电荷，其效果相当于一个平面偶极子，所以试解中还应包含一项 $\frac{1}{\rho}\cos\phi$. 因此，试解选为

$$\varphi = A_0 + B_0\ln\rho - E_0\rho\cos\phi + \frac{B_1}{\rho}\cos\phi. \tag{4.30}$$

根据边界条件，容易求得上述待定常数分别为

$$A_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho_0, B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}, B_1 = E_0R^2,$$

故电势为

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho} - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0R^2}{\rho}\cos\phi, \tag{4.31}$$

其中 A_0 的选取(即 φ 中的 ρ_0)与势的参考点选取有关,因为本题中我们不能选取 $\rho\to\infty$ 时,$\varphi=0$. 如果选取柱体表面上电势为参考点,则 $\rho_0 = R$.

柱外电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho} + E_0\cos\phi + \frac{R^2E_0}{\rho^2}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(-E_0\sin\phi + \frac{E_0R^2}{\rho}\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_\phi.$$

在选择试解的时候,要注意试解中待定常数的数目与问题的边界条件应一致.

【例 8】 静电储存. 在例 4 中,若有带正电的粒子流沿着均匀外场方向向导体球上喷射,假定带电粒子流的电荷密度为 ρ_0,迁移率为 μ,试讨论导体球吸附带电粒子流的情况.

解 假定带电粒子流所产生的场远比外场弱,以致可略去不计. 令 Q 表示导体球所带电荷,则由例 4 可知,这时空间电势为(4.23)式:

$$\varphi = \varphi_0 - E_0r\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta,$$

场为

$$\boldsymbol{E} = \left[E_0\cos\theta\left(1+\frac{2R^3}{r^3}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right]\boldsymbol{e}_r - E_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta, \tag{4.32}$$

如图 4.8 所示.

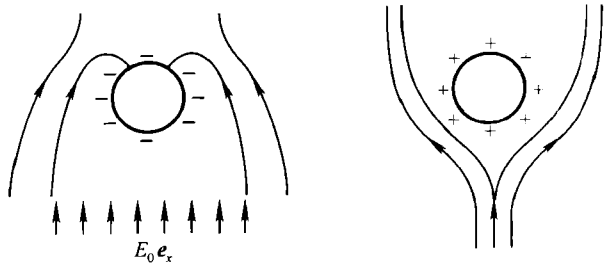


图 4.8

因为只有当导体表面上的电场 $E_r(r=R)$ 为负值时,导体球才能吸附带正电的粒子流,因此得到导体球吸附带电粒子的条件为

$$E_r(r=R) = 3E_0\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2} < 0,$$

即

$$\cos\theta \leqslant -\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0E_0R^2}. \tag{4.33}$$

(4.33)式给出了导体球吸附带电粒子的角度范围. 由于 $\cos\theta$ 的值必须小于 1,所以导体所能收集的最大电荷量为

$$Q_{max} = 12\pi\varepsilon_0 E_0 R^2 .$$

定义导体球面上径向电场为零时的 θ 值为临界值,记为 θ_c,则有

$$\cos\theta_c = -Q/Q_{max},$$

显然 θ 变化的范围只能在 $\theta_c \sim \pi$ 之间.

导体球表面的电流密度为

$$\begin{aligned} j_r &= \rho_0 \mu E_r (r = R) \\ &= 3\rho_0 \mu E_0 (\cos\theta + Q/Q_{max}) \quad \theta_c < \theta < \pi, \end{aligned}$$

故总电流为

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\int_{\theta_c}^{\pi} j_r \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\ &= -6\pi\mu\rho_0 E_0 R^2 \left[-\frac{1}{4}(1 - \cos 2\theta_c) + \frac{Q}{Q_{max}}(1 + \cos\theta_c) \right]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

导体球上的电荷量 Q 不同,θ_c 的值亦不同,下面分几种情况来讨论 θ_c 的值:

若 $Q > Q_{max}$,这除了人为的给导体球添加电荷外,导体球不会自己吸附这么多电荷. 一旦导体球的 $Q > Q_{max}$,导体球上的电荷就不会再增加. 因此,这时 $\frac{dQ}{dt} = 0$,故有 $Q_c = \pi$.

若 $Q < -Q_{max}$,这时整个导体球均可吸附带电粒子,所以这时 $\theta_c = 0$.

若 $|Q| < Q_{max}$,则 $\cos\theta_c = -Q/Q_{max}$,把这些条件代入(4.34),则有

$$\frac{d\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)}{dt} = \begin{cases} 0 & Q > Q_{max}, \\ \pi\rho_0\mu\left(1 - \frac{Q}{Q_{max}}\right)^2 & |Q| < Q_{max}, \\ -4\pi\rho_0\mu\frac{Q}{Q_{max}} & Q < -Q_{max}. \end{cases} \tag{4.35}$$

积分(4.35)式便有

$$\frac{Q}{Q_{max}} = \begin{cases} Q_0/Q_{max} & Q > Q_{max}, \\ \dfrac{Q_0/Q_{max} + \frac{t - t_0}{4\tau}(1 - Q_0/Q_{max})}{1 + \frac{t - t_0}{4\tau}(1 - Q_0/Q_{max})} & |Q| < Q_{max}, \\ \dfrac{Q_0}{Q_{max}} e^{-t/\tau} & Q < -Q_{max}, \end{cases} \tag{4.36}$$

式中 $\tau = \frac{1}{4\pi\rho_0\mu}$,$Q_0$ 是 $t = 0$ 时导体球上所带的电荷. 由解的形式我们可以看出:若在 $t = 0$ 时导体球所带的电荷量 $Q_0 < -Q_{max}$,则此时导体上的电荷量将按指数规律减小,直到导体球上的总电荷量在 $t = t_0$ 时达到 $-Q_{max}$,这时导体球的电荷量将按(4.36)式变化,由 $Q_0 = -Q_{max}$ 开始缓慢地增加,向 $Q = Q_{max}$ 逼近.

§4.4 格林函数法

本节要介绍的是一种用格林定理来求解静电边值问题的方法.

1. 格林函数

我们考虑一个位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点电荷所激发的电场. 点电荷分布的特点是在点电荷所在处的电荷密度为无穷大,而在其他地方电荷密度为零,故其电荷密度可用 δ 函数表示. 若在 $\boldsymbol{r}'$ 处有一点电荷 q,则电荷密度可写为

$$\rho = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}', \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'. \end{cases} \tag{4.37}$$

显然

$$\int \rho \mathrm{d}\tau = \int q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau = q,$$

故(4.37)式正确地描写了一个点电荷的电荷分布. 同理,处于 $\boldsymbol{r}'$ 处的单位电荷的电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),$$

它所激发的势的方程为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{4.38}$$

若包含 $\boldsymbol{r}'$ 的某空间区域为 V,在 V 的边界上,φ 有如下边界条件:

$$\varphi\Big|_S = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{S\epsilon}, \tag{4.39}$$

则我们把满足边界条件(4.39)式的方程(4.38)的解称为泊松方程在区域 V 的第一类或第二类边值问题上的格林函数.

格林函数一般用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示,$\boldsymbol{r}'$ 表示单位电荷所在的位置,$\boldsymbol{r}$ 代表观察点. 在(4.38)和(4.39)式中把 φ 换成 G,即得格林函数所满足的方程为

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\epsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{4.40}$$

相应的边界条件为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big|_S = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{S\epsilon}.$$

注意:第二类边值问题的格林函数一般不能取齐次,这一点我们将在后面说明.

2. 格林公式和泊松方程的解

现在我们用格林公式把一般泊松方程的边值问题的解同格林函数联系起

来.

若有一静电问题,在区域 V 内给定电荷分布 ρ,在边界面 S 上给定第一类边值 $\varphi|_S$ 或第二类边值 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$,求 V 内的 φ 值. 此时 φ 所满足的方程为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho. \tag{4.41}$$

边界上 $\varphi|_S$ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$ 给定. 现在,我们利用格林定理(3.17)式来建立(4.41)式的解 φ 与格林函数 G 之间的联系. 在现在的情况下(3.17)式可写成

$$\int[\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi]\mathrm{d}\tau = \oint\left[\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

令 $\Psi = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,$\Phi = \varphi$,代入上式,利用(4.40)和方程(4.41)即可得到

$$\begin{aligned}&\int[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}') - \varphi(\boldsymbol{r}')\nabla^2G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\tau'\\ =&\oint\left[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'} - \varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{4.42}$$

注意:前面我们一直用 $\boldsymbol{r}'$ 作为积分变量,而用 $\boldsymbol{r}$ 作为参变量,为了与以前一致,这里已把格林公式中的 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 互换. 又由于格林函数关于源点和观察点是对称的,即 $G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,所以(4.42)式中的 $G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$ 我们以后都写成 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$.

(1) 对于第一类静电边值问题,我们可取格林函数的边界条件为 $G|_S = 0$,则(4.47)式变成

$$\begin{aligned}&\int\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r}')\right) - \varphi(\boldsymbol{r}')\left(-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\right)\right]\mathrm{d}\tau'\\ &= \oint\left[-\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}S',\end{aligned}$$

故有

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \varepsilon\oint\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'. \tag{4.43}$$

由(4.43)式可以看出,只要求得了格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,在边界上 $\varphi|_S$ 值给定的情况下就可以算出区域内任一点 $\boldsymbol{r}$ 的电势 $\varphi(\boldsymbol{r})$,因而第一类静电边值问题的解也就得到了. 从上面的讨论可以看出,格林函数法的实质是通过格林公式把静电边值问题化到求解相应的格林函数问题. 从表面上看,格林函数所满足的方程和边界条件比静电的方程和边界条件简单些.

(2) 对第二类静电边值问题是否也可用第二类齐次边界的格林函数求解呢? 从(4.42)式来看,只要选取的格林函数满足第二类边界

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\Big|_S = 0,$$

即可方便地求得第二类静电边值问题. 但是,对格林函数,取上述边界条件是有困难的,因为我们知道格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$所代表的物理意义是在 $\boldsymbol{r}'$处的一个单位电荷在空间所激发的电势,因此 $-\frac{\partial G}{\partial n'}\Big|_S$ 即代表单位电荷在边界上所激发的电场. 由高斯定理知

$$-\oint \frac{\partial}{\partial n'}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.44}$$

若取$\frac{\partial}{\partial n'}G\Big|_S = 0$,则(4.44)式应等于零. 但(4.44)式不应为零,故$\frac{\partial}{\partial n'}G\Big|_S \neq 0$. 由(4.44)式看出:格林函数在边界上的最简单的形式是取

$$\frac{\partial}{\partial n'}G\Big|_S = -\frac{1}{S\varepsilon}. \tag{4.45}$$

把(4.45)式代入(4.42)式,有

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' + \varepsilon\oint G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S' + \langle\varphi\rangle_S, \tag{4.46}$$

式中$\langle\varphi\rangle_S$ 为φ 在边界面S 上的平均值. (4.46)式即为第二类静电边值问题的格林函数解的形式.

在实际问题中我们常会碰到这类问题:所考查的区域包含有无穷大的边界面. 例如,考查一导体外的空间电势问题,这时所考查的区域是球面和无穷大曲面间包围的区域,所以这时边界面 $S\to\infty$,故有

$$\frac{\partial G}{\partial n'}\Big|_S = -\frac{1}{S\varepsilon} = 0.$$

于是有

$$\langle\varphi\rangle_S = 0,$$

故(4.46)式变为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' + \varepsilon\oint G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S'. \tag{4.47}$$

这一类问题常称为外问题,(4.47)式即为这一类外问题的格林函数解的形式.

3. 格林函数的制作

以上的讨论,表面上看似乎把静电边值问题的解找到了,其实并非如此,因为只有把问题的格林函数找到了,我们才能对表达式(4.43)和(4.47)作出具体的计算. 实际上求格林函数本身并不是一件容易的事情,所以以上解的形式只具有形式解的意义. 当然它把唯一性定理更具体的表达出来了. 下面,我们主要介绍用镜象法求格林函数.

关于镜象法,我们已在§4.2 中作了专门的讨论,需要指出的是,我们实际上已经找到了有关空间的格林函数.

点电荷在无界空间的电势表达式即是全空间的格林函数，写成

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.48}$$

在无穷大导体平板外的点电荷产生的电势(4.4)式，实际上就是半空间的格林函数，写作

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right]. \tag{4.49}$$

在接地导体球外的点电荷产生的电势(4.6)式即是球外空间的格林函数，一般形式为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{R}{r'\left|\boldsymbol{r}-\frac{R^2}{r'^2}\boldsymbol{r}'\right|}\right]. \tag{4.50}$$

如果点电荷在导体球壳内，则上式也即是球内空间的格林函数. 当然，我们还可以用镜象法求出另外一些空间的格林函数，但它总是有局限性的.

【例 9】 在半径为 R_0 的中空接地的导体球壳内沿 z 轴放一长为 $2R_0$ 的均匀带电的细导线(两端绝缘)，总电荷为 Q，试用格林函数法求导体内的电势.

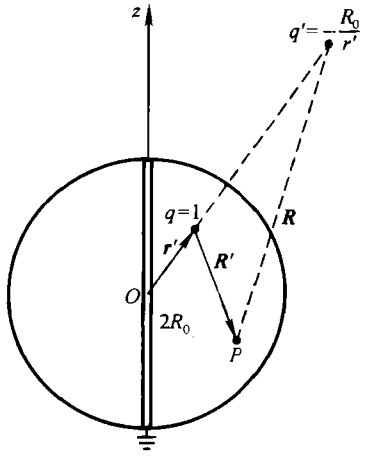


图 4.9

解　如图 4.9 所示，球内的电荷密度为

$$\rho(r,\theta,\phi) = \frac{Q}{2R_0}\frac{[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)]}{2\pi r^2\sin\theta},$$

设球内的电势为 φ，则

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = -\dfrac{Q}{2R_0\varepsilon_0}\dfrac{[\delta(\theta)+\delta(\theta-\pi)]}{2\pi r^2\sin\theta},\\ \varphi|_{r=R_0} = 0.\end{cases}$$

相应问题的格林函数方程和边界为

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad r < R_0,\\ G|_{r=R_0} = 0.\end{cases}$$

由镜象法我们已经找到了球内空间的格林函数(4.50)式：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{R_0/r'}{R'}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\Theta}} - \frac{R_0}{r'\sqrt{\left(\frac{R_0^2}{r'}\right)^2+r^2-2r\frac{R_0^2}{r'}\cos\Theta}}\right],$$

式中 Θ 为方向(θ',ϕ')与方向(θ,ϕ)间的夹角. 这样

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta)-\dfrac{1}{R_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'r}{R_0^2}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta) & r'<r\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta)-\dfrac{1}{R_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'r}{R_0^2}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta) & r'>r,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi&=\int\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r}\frac{1}{r}\sum\left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta)\frac{Q}{2R_0}\frac{[\delta(\theta')+\delta(\theta'-\pi)]}{2\pi r'^2\sin\theta'}r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'+\\&\quad\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^{R_0}\frac{1}{r'}\sum\left(\frac{r}{r'}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta)\frac{Q}{2R_0}\frac{[\delta(\theta')+\delta(\theta'-\pi)]}{2\pi r'^2\sin\theta'}r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'-\\&\quad\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}\frac{1}{R_0}\sum\left(\frac{r'r}{R_0^2}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\Theta)\frac{Q}{2R_0}\frac{[\delta(\theta')+\delta(\theta'-\pi)]}{r'^2\sin\theta'}r'^2\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'.\end{aligned}$$

因为 $\theta'=0$ 时 $\cos\Theta=\cos\theta$；$\theta'=\pi$ 时 $\cos\Theta=-\cos\theta$，代入上式积分可得

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left\{\ln\frac{R_0}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n(2n+1)}\left[1-\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2n}\right]\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\right\}.$$

§4.5 多极矩法

在实际工作中常会碰到这种情况：激发电场的电荷全部集中在一个很小的区域，而我们要求的又是远离带电体空间的电场，这时我们可采用多极矩近似法.

如图 4.10，若电荷分布在有限体积 V 内，这个体积的线度为 l，考查的是 P 点的电场，而 P 点和体积 V 内任一点 O 的距离为 $\boldsymbol{r}$. 多极矩法是讨论在 $|\boldsymbol{r}|\gg l$ 情况下的场分布.

假定 V 内都是点电荷，第 i 个点电荷的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_i'$，令 $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i'$，则 P 点电势的准确解的形式为

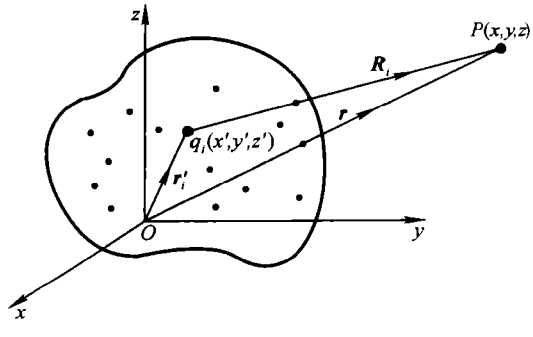


图 4.10

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q}{R_i}. \tag{4.51}$$

由于 P 点离源较远，因此作为 $\boldsymbol{r}'$ 的函数 $\frac{1}{R_i}$ 可以在 $\boldsymbol{r}'=0$ 附近展开.

在一元情况下，泰勒级数的展开形式为

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x)\Big|_{x_0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x)\Big|_{x_0} + \cdots$$

同理，对三元情况有

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}\Big|_{r'=0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla'\nabla'\frac{1}{R}\Big|_{r'=0} + \cdots$$

因为

$$\nabla'\frac{1}{R}\Big|_{r'=0} = -\nabla\frac{1}{r},$$

所以

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla\nabla\frac{1}{r} + \cdots$$

于是，电势(4.51)式展开为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R_i}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\left[\frac{1}{r} - \boldsymbol{r}_i'\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i' : \nabla\nabla\frac{1}{r} + \cdots\right]\\ &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots\end{aligned} \tag{4.52}$$

其中

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$Q = \sum_i q_i, \tag{4.53}$$

$$\varphi_1 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i'\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r},$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_i q_i\boldsymbol{r}_i', \tag{4.54}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i' : \nabla\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\frac{1}{r},$$

$$\overleftrightarrow{D} = 3\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'. \tag{4.55}$$

若 V 内的电荷连续分布，则(4.53)～(4.55)式为

$$Q = \int\rho\mathrm{d}\tau', \tag{4.56}$$

$$\boldsymbol{p} = \int \rho \boldsymbol{r}' \mathrm{d}\tau', \tag{4.57}$$

$$\overrightarrow{D} = 3\int \rho \boldsymbol{r}' \boldsymbol{r}' \mathrm{d}\tau'. \tag{4.58}$$

(4.52)式各项的物理意义如下：

第一项是一个点电荷的势，相当于 V 内电荷都集中在 Q 点时在 P 点所产生的势；第二项是偶极子的势，体系相应的偶极矩为

$$p = \int \rho \boldsymbol{r}' \mathrm{d}\tau';$$

第三项称为体系的四极矩的势，体系的四极矩为

$$\overrightarrow{D} = 3\int \rho \boldsymbol{r}' \boldsymbol{r}' \mathrm{d}\tau',$$

四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统. 由 $\overrightarrow{D}$ 的表达式(4.55)或(4.58)，我们可以看出它是一个并矢，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量，同时 $\overrightarrow{D}$ 可进行无迹化，故它实际上只有五个独立分量. 证明如下：

在 $\boldsymbol{r} \neq 0$ 处有 $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$，我们可以把此式改写成

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} &= \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} \\ &= \overrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{r} = 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

选择一个量 $-\frac{1}{6}\int \rho \boldsymbol{r}'^2 \mathrm{d}\tau'$，把此量与(4.59)式相乘有

$$-\frac{1}{6}\int \rho \boldsymbol{r}'^2 \mathrm{d}\tau' \overrightarrow{I} : \nabla\nabla \frac{1}{r} = 0. \tag{4.60}$$

把(4.60)式加到 φ_2 上去，这并不会改变 φ_2 的值，故 φ_2 可写为

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{6}\int (3\rho \boldsymbol{r}' \boldsymbol{r}' - \rho \boldsymbol{r}'^2 \overrightarrow{I}) : \nabla\nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \overrightarrow{D} : \nabla\nabla \frac{1}{r}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

其中

$$\overrightarrow{D} = \int (3\rho \boldsymbol{r}' \boldsymbol{r}' - \rho \boldsymbol{r}'^2 \overrightarrow{I}) \mathrm{d}\tau'. \tag{4.62}$$

在点电荷情况下

$$\overrightarrow{D} = \sum_a e_a (3\boldsymbol{r}'_a \boldsymbol{r}'_a - \boldsymbol{r}'^2_a \overrightarrow{I}). \tag{4.63}$$

$\overrightarrow{D}$ 称为约化四极矩，显然它是对称的无迹张量，即

$$D_{ij} = D_{ji}, D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0. \tag{4.64}$$

多极矩展开也可以按$\frac{1}{r}$的幂次和球谐函数展开. 一般电势总可以写成

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau'.$$

如讨论远处的场,可利用勒让德函数的母函数把$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$展开成

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\beta)^{1/2}}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathrm{P}_l(\cos\beta),$$

式中β是$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$之间的夹角. 利用球谐函数的加法定理,

$$\mathrm{P}_l(\cos\beta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_l^{m*}(\theta',\phi')\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi),$$

可以把电势的展开式写成

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\left[\int \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta',\phi')r'^l\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\right]\frac{\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}},$$

其中r'、θ'、ϕ'是源点的坐标,r、θ、ϕ是观察点的坐标. 令

$$q_{lm} = \int \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta',\phi')r'^l\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau', \tag{4.65}$$

则电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}}. \tag{4.66}$$

q_{lm}称为多极矩,它实质上是笛卡儿坐标系中的多极矩在球坐标中的表示. 直接从(4.65)式运算即可得q_{lm}和Q、$\boldsymbol{p}$、$\overrightarrow{D}$之间的换算公式:

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q,$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z,$$

$$q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int (x' - \mathrm{i}y')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x - \mathrm{i}p_y),$$

$$q_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int (3z'^2 - r'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}D_{33}, \tag{4.67}$$

$$q_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'(x' - \mathrm{i}y')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \times (D_{13} - \mathrm{i}D_{23});$$

$$q_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int (x' - \mathrm{i}y')^2\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \times (D_{11} - 2\mathrm{i}D_{12} - D_{22}).$$

对于 $m<0$ 的情况，有如下关系：

$$q_{l(-m)} = (-1)^m q_{lm}^{*}. \tag{4.68}$$

在实际问题的讨论中，q_{lm} 要比 Q、$\boldsymbol{P}$、$\vec{\vec{D}}$ 使用起来方便，但直角坐标系中展开的多极矩 $\boldsymbol{P}$、$\vec{\vec{D}}$ 等的物理图象较直观. 下面我们来讨论多极矩展开的一条普遍定理.

定理：任何电荷分布的最低阶非零的多极矩的值与坐标原点的选取无关，只有更高阶的多极矩才依赖于坐标原点的位置.

证明：在笛卡尔坐标系中，电势的多极矩的表达式为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R_i}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\sum_i q_i \frac{1}{r} - \sum_i q_i \frac{1}{1!}\boldsymbol{r}_i' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \sum_i q_i \frac{1}{2!}\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i' : \nabla\nabla \frac{1}{r} + \cdots + \\ &\quad \frac{(-1)^n}{n!}\sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n} \underbrace{\cdot}_{n\text{次点积}} \underbrace{\nabla\nabla\cdots\nabla}_{n}\frac{1}{r} + \cdots\Big].\end{aligned}$$

注意：$\sum_i q_i$ 是单极矩，$\sum_i q_i \boldsymbol{r}_i'$ 是偶极矩，$\sum_i q_i \boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'$ 是四极矩，依次类推，$\sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n}$ 是 2^n 极矩，记为 $Q^{(n+1)}$，即

$$Q^{(n+1)} \equiv \sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n}.$$

设坐标原点位移 $\boldsymbol{r}_0$，则第 i 个电荷的坐标变为 $\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_0$，于是

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{(n+1)}_{\boldsymbol{r}_i'\to\boldsymbol{r}_i'+\boldsymbol{r}_0} &= \sum_i q_i \underbrace{(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_0)\cdots(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_0)}_{n}\\ &= \sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n} + \sum_i q_i \sum_{j=1}^{n} C_n^j \underbrace{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0\cdots\boldsymbol{r}_0}_{j}\underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n-j}.\end{aligned}$$

进一步改写成

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{(n+1)} &= \sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n} + \sum_{j=1}^{n} C_n^j \underbrace{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0\cdots\boldsymbol{r}_0}_{j}\Big[\sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i'\boldsymbol{r}_i'\cdots\boldsymbol{r}_i'}_{n-j}\Big]\\ &= Q^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{n} C_n^j \underbrace{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0\cdots\boldsymbol{r}_0}_{j} Q^{(n+1-j)}.\end{aligned}$$

若 $Q^{(k+1)}=0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\widetilde{Q}^{(n+1)} = Q^{(n+1)},$$

即最低阶非零的多极矩的值与坐标原点的选取无关.

若
$$Q^{(k+1)}=\begin{cases}0 & (k=0,1,2,\cdots,n-1),\\ \text{非零} & (k=n),\end{cases}$$

则
$$\widetilde{Q}^{(n+1+l)}_{r_i'\to r_i'+r_0}=Q^{(n+1+l)}+\sum_{j=1}^{n+l}C^j_{n+l}\underbrace{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0\cdots\boldsymbol{r}_0}_{j}Q^{(n+1+l-j)}.$$

因为 $Q^{(n+1)}\neq 0$,所以至少 $j=l$ 的项不为零. 这样,
$$\sum_{j=1}^{n+l}C^j_{n+l}\underbrace{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0\cdots\cdots\boldsymbol{r}_0}_{j}Q^{(n+1+l-j)}\neq 0,$$

因此
$$\widetilde{Q}^{(n+1+l)}\neq Q^{(n+1+l)},$$

即更高阶的多极矩依赖于坐标原点的选取.

【例 10】 试将二维电荷分布所产生的电势展开成二维多极子的形式.

解 二维的电荷分布可用与坐标 z 无关的电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$来表示,其中 $\boldsymbol{r}'$是 Oxy 平面上电荷的位置矢量. 因为我们知道单位长的线电荷 λ 所产生的电势为
$$\varphi=-\frac{2\lambda\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{4\pi\varepsilon}.$$

电荷线密度可以表示为 $\rho(\boldsymbol{r})=\lambda\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$,所以上面的势可写成
$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S-2\rho\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}S';$$

这也就是二维电势的一般表达式,其中 $\rho(\boldsymbol{r}')$可为任意函数. 如果电荷分布在 Oxy 平面上的一个有限的小区域,而我们要讨论远处的电场,则我们可以把上述表达式展开. 因为
$$\begin{aligned}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|&=\ln r\left(1+\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right)^{1/2}\\&=\ln r+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}\cos\alpha\right),\end{aligned}$$

其中 α 是平面坐标系中观察点矢径 $\boldsymbol{r}$ 与电荷元 $\rho\mathrm{d}S'$的位置矢量 $\boldsymbol{r}'$之间的夹角. 利用数学公式*
$$\ln(1+u^2-2u\cos\alpha)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}u^n\quad |u|<1,$$

我们得到
$$\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\ln r-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^n.$$

因为 $\cos n\alpha=\cos n(\phi-\phi')=\cos n\phi\cos n\phi'+\sin n\phi\sin n\phi'$,其 ϕ 和 ϕ'分别是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$在平面极坐标中的极角,所以

---

* 四川矿业学院数学教研组编,数学手册,科学出版社(1978).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n\frac{\cos n\phi\cos n\phi'+\sin n\phi\sin n\phi'}{n}.$$

因此,二维电势可写成

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int-2\rho(r')\left\{\ln r-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n\frac{\cos n\phi\cos n\phi'+\sin n\phi\sin n\phi'}{n}\right\}\mathrm{d}S',$$

即

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-2Q\ln r+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi}{nr^n}\right],$$

其中

$$\left.\begin{aligned}Q&=\int\rho(r')\mathrm{d}S'\quad\text{区域单位长度上的总电荷,}\\A_n&=\int\rho(r')r'^n\cos n\phi'\mathrm{d}S'\\B_n&=\int\rho(r')r'^n\sin n\phi'\mathrm{d}S'\end{aligned}\right\}\text{二维 }n\text{ 级多极矩.}$$

取 $n=1$ 时,我们可以得**二维偶极子电势**

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2},$$

其中 $\boldsymbol{p}=\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S$ **是单位长度的偶极矩.**

§4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论电荷集中分布在一个小区域内的体系同外场的相互作用,可归结为研究多极矩同外场的相互作用.

在电荷连续分布的情况下,从(3.15)式得到相互作用能为

$$W_i=\frac{1}{2}\int(\rho\varphi_e+\rho_e\varphi)\mathrm{d}\tau,$$

式中 ρ_e 和 φ_e 分别表示外源分布和对应的外场势. 因为

$$\int\rho_e\varphi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\frac{\rho_e(r)\rho(r')}{R},$$

交换积分次序,有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}\tau'\int\mathrm{d}\tau\frac{\rho_e(r)\rho(r')}{R}=\int\mathrm{d}\tau'\varphi_e(r')\rho(r'),$$

所以

$$W_i=\int\rho(r)\varphi_e(r)\mathrm{d}\tau.\tag{4.69}$$

因为 V 很小,所以可将 φ_e 对参考点作泰勒级数展开:

$$\varphi_e = \varphi_{e0} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\varphi_e\Big|_0 + \frac{1}{2!}\boldsymbol{rr}:\nabla\nabla\varphi_e\Big|_0 + \cdots$$

代入(4.69)式得

$$W_i = W_i^{(0)} + W_i^{(1)} + W_i^{(2)} + \cdots$$

其中

$$W_i^{(0)} = q\varphi_{e0}, \tag{4.70}$$

$$W_i^{(1)} = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi_e|_0 = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{4.71}$$

$$W_i^{(2)} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\Big|_0. \tag{4.72}$$

因为$(\nabla^2\varphi_e)_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离 V 很远处，故在 V 区域内$\rho_e = 0$，因此得

$$\overrightarrow{\overrightarrow{I}}:\nabla\nabla\varphi_e|_0 = \nabla^2\varphi_e| = 0.$$

这样 $W_i^{(2)}$ 可以改写为

$$W_i^{(2)} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\Big|_0 = \frac{-1}{6}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}:\nabla\boldsymbol{E}_e\Big|_0. \tag{4.73}$$

$W_i^{(0)}$、$W_i^{(1)}$ 和 $W_i^{(2)}$ 分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能，只要知道了相互作用能便可求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩.

若电偶极矩相对外场有一平移或转动，而偶极矩的大小和外场保持不变，则由平移或转动引起的系统能量的变化也就等于相互作用能的变化，即

$$\Delta W = \Delta W_i.$$

若偶极矩平移 $\delta\boldsymbol{r}$，则从能量守恒得

$$\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\delta W_i = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

即

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) = (\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{p},$$

利用$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$，得

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\boldsymbol{E}. \tag{4.74}$$

同理，将偶极矩转动一个 $\delta\boldsymbol{\theta}$，力矩 $\boldsymbol{M}$ 作的功为 $\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}$，故

$$\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} = -\delta W_i = \delta(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) = \delta\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}.$$

因为 $\boldsymbol{p}$ 的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\boldsymbol{p} = \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}.$$

这样

$$\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} = (\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\cdot\delta\boldsymbol{\theta},$$

即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}. \tag{4.75}$$

习　题

4.1 试证明：在无电荷空间中任一点的静电势之值等于以该点为球心的任一球面上势的平均值.

4.2 有一不带电的、半径为 R 的金属球，外面包裹一层半径为 R'、介电常数为 ε 的均匀介质. 把这样一个球置于均匀的外场 E_0 中，试求：(1) 空间各处的电势分布；(2) 各界面上的面电荷分布(束缚面电荷、自由面电荷).

4.3 介电常数为 ε 的均匀介质球壳，内外半径分别为 R、R'，把它放在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，试求：(1) 球壳内的电场强度；(2) 表面束缚电荷组成的偶极矩.

4.4 在介电常数为 ε 的均匀介质中，挖出一半径为 R 的球形空腔，球心处放一电偶极子 $\boldsymbol{p}$. 试求：(1) 空间各处的电势分布；(2) 球壁上的电荷面密度.

4.5 一个半径为 R，体内均匀带电 Q，介电常数为 ε 的介质球放在均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求空间电势的分布. 如果在球心再置入一点电荷 q，则结果如何?

4.6 两个同心导体球壳，半径分别为 R、R'，其间充满介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos^2\theta$ 的介质. 试求：(1) 两球壳分别带电 $\pm Q$ 时的空间电场分布；(2) 该球形电容器的电容.

4.7 在半径为 R 的接地导体球壳内放一个偶极子 $\boldsymbol{p}$，方向与 z 轴夹角为 α，到球心的距离为 d，试用镜象法求空间的电势分布和 $\boldsymbol{p}$ 所受到的力.

4.8 一半径为 R，带电 Q 的导体球，球外有一点电荷 q，与球心相距 d. 试求：(1) 球内外的电势分布；(2) 电荷 q 所受到的力；(3) 若 q、Q 同号，在什么条件下导体球与电荷 q 之间的相互作用力变为吸引力?

4.9 一个均匀带电圆环，半径为 R，电荷线密度为 λ. 试求系统的电偶极矩和电四极矩以及它在远处的势.

4.10 氢原子 2p 能级中 $m = \pm 1$ 的态的电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{er^2}{64\pi a_0^5} e^{-r/a_0} \sin^2\theta .$$

(1) 对此分布作多极展开，确定所有的多极矩，写出远处的势；(2) 证明：在原点附近，电势可以写成

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120a_0^2} P_2(\cos\theta)\right].$$

4.11 设有两个偶极矩，它们的大小相等，并都指向 z 轴方向，其一位置在原点，另一位置在(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$，距原点为 R；(2) $\theta = 0$，距原点为 R. 试求：两种情况的相互作用能和相互作用力.

4.12 有两相邻平行的线电荷 λ 和 $-\lambda$，相互距离为 R，求离线电荷很远处电场的势.

4.13 设有带电的无限长直导线与半径为 R、介电常数为 ε 的圆柱体平行，并与该圆柱体的轴线相距为 $R'(R' > R)$，导线处在真空内. 试求带电导线上单位长度所受的作用力.

4.14 有八个点电荷分别放置在一个边长为 R 的立方体的顶点上(如图 4.11 所示)，试

求体系的多极矩和相应的势.

4.15　一个半轴分别为 a、b、c 的均匀带电椭球,总电荷为 Q,试求各阶多极矩和相应的势.

4.16　一个电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 位于无限大接地导体平板的上方,距平面为 d,$\boldsymbol{p}$ 与平面法线夹角为 α. 求 $\boldsymbol{p}$ 所受到的力. 如果 $\boldsymbol{p}$ 位于两种无限大介质分界面附近时,结果如何?

4.17　有一半径为 R 的绝缘金属球,位于半径为 R' 的空心金属球壳内,它们的球心相距为 d($d \ll R, d \ll R'$),内球电量为 q. 试求电势和电荷密度分布以及作用在内球上的作用力(准确到 d 的一次项).

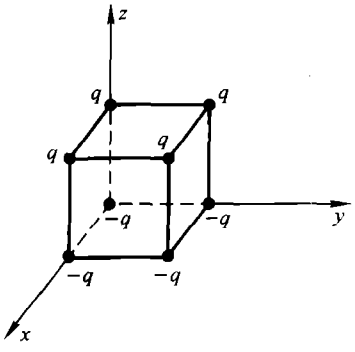


图 4.11

第五章　静　磁　场

本章阐述在给定稳定电流和磁介质分布后，如何求解空间的磁场．读者应在物理图象和解法等方面注意和静电场进行比较．

§5.1　稳定电流分布的普遍定理

1．电流稳定分布的必要条件

我们先来研究导体内电荷稳定流动的特点．此种体系最重要的特点是内部不断地产生焦耳热，即电磁能不断地损耗．能量守恒方程为

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}.$$

稳定时，上式变成

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}.$$

当存在外来电场时，$\boldsymbol{j}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{外})$，

$$\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau=\int\frac{1}{\sigma_{\mathrm{c}}}j^{2}\mathrm{d}\tau+\oint\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\tag{5.1}$$

(5.1)式表示，外来电场所作的功等于体系内焦耳热损耗和从体系的界面流出去的能量的总和．因此，体系保持电流稳定流动的必要条件是必须要有外来的电场力(外来电动势)．

可见，考察稳定电流产生的磁场问题要涉及 $\boldsymbol{E}_{外}$、静电场 $\boldsymbol{E}$ 和静磁场 $\boldsymbol{B}$．$\boldsymbol{E}_{外}$ 是非静电力的等价场，不属电动力学问题，在我们这里往往假定是已知的．我们所感兴趣的只是 $\boldsymbol{E}_{外}=0$ 的空间内 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的场分布．

2．稳定电流体系的电场

根据麦克斯韦方程组，稳定电流 $\boldsymbol{j}$ 及其电场满足如下方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0,\end{cases}\tag{5.2}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{j}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{外}),\\ \nabla\cdot\boldsymbol{j}=0.\end{cases}\tag{5.3}$$

在导体内流有电流的情况下，我们并不知道其电荷分布 ρ，所以无法从(5.2)式

求场，而应当从(5.3)式出发：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 = \nabla \cdot (\sigma_c \boldsymbol{E} + \sigma_c \boldsymbol{E}_{外}),$$

即

$$\nabla \cdot (\sigma_c \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\sigma_c \boldsymbol{E}_{外}).$$

因为$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，所以可用标势 φ，即 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$，于是上式可改写成

$$\nabla \cdot (\sigma_c \nabla\varphi) = -\nabla \cdot (\sigma_c \boldsymbol{E}_{外}). \tag{5.4}$$

可见，若 $\boldsymbol{E}_{外}$ 给定，即可由(5.4)式求出 φ. 在 $\boldsymbol{E}_{外} = 0$ 的区域，(5.4)式变成

$$\nabla \cdot (\sigma_c \nabla\varphi) = 0, \tag{5.5}$$

相应的边值关系为

$$\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{j}_2) = 0, \boldsymbol{e}_n \times \left(\frac{\boldsymbol{j}_1}{\sigma_{c1}} - \frac{\boldsymbol{j}_2}{\sigma_{c2}}\right) = 0,$$

用标势 φ 表示上述交界面上的关系则有

$$\begin{cases} \sigma_{c1} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \\ \varphi_1 = \varphi_2. \end{cases} \tag{5.6}$$

(5.5)和(5.6)就是分区均匀的稳定电流体系的电场所满足的方程和边值关系. 若整个体系的边界条件已知，我们就可以求出电流的电场. 注意：(5.6)式中的 σ_{c1} 和 σ_{c2} 是电导率. 从(5.2)式的第一式，我们就可以求得导体内的电荷分布

$$\rho = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla\varphi) = \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_c} \boldsymbol{j}\right)$$

$$= \boldsymbol{j} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_c}\right). \tag{5.7}$$

上面的最后一步我们利用了$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ 的条件. 从(5.7)式可看出，均匀的导电体系内不会出现电荷堆积，只有当导体沿着电流流动的方向不均匀时，才有可能有电荷存在. 因此，对于分块均匀的导电体，电荷只可能分布在交界面上，即

$$\sigma = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2)$$

$$= \boldsymbol{e}_n \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_{c1}} \boldsymbol{j}_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_{c2}} \boldsymbol{j}_2\right),$$

利用 $\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{j}_2) = 0$，得到电荷面密度为

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_{c1}} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_{c2}}\right) \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{j}. \tag{5.8}$$

所以，如果交界面两侧各自的介电常数与电导率之比相等，则交界面也不存在电荷.

3. 电流分布的规律

电流分布的规律完全可以由方程(5.5)和边界关系(5.6)式以及欧姆定律唯

一确定. 而从更一般的观点来看,导电介质中的电流分布服从下述普遍定理:

导电介质中的稳定电流取这样的分布,它使体系的焦耳热损耗为极小.

证明:因为电流是稳定的,所以

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{5.9}$$

能量损耗由焦耳定律决定,即

$$W = \int_V (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}) \mathrm{d}\tau = \int_V \frac{1}{\sigma_c} j^2 \mathrm{d}\tau.$$

为了对 W 求极值,利用拉格朗日不定乘子法. 我们根据约束条件(5.9),并设不定乘子为 $-\varphi$,即得

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left[\frac{1}{\sigma_c} j^2 - 2\varphi(\nabla \cdot \boldsymbol{j}) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_V \left[\frac{1}{\sigma_c} j^2 - 2\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{j}) + 2\boldsymbol{j} \cdot \nabla\varphi \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_V \left(\frac{1}{\sigma_c} j^2 + 2\boldsymbol{j} \cdot \nabla\varphi \right) \mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

最后一步利用高斯定理把全散度体积分化成面积分而为零. 现在由极值条件 $\delta W = 0$ 得

$$\boldsymbol{j} = -\sigma_c \nabla\varphi.$$

与欧姆定律比较可知,不定乘子 φ 即是电势. 上式两边取散度、旋度,分别得到

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_c \nabla\varphi) = 0, \\ \nabla \times \left(\dfrac{\boldsymbol{j}}{\sigma_c} \right) = 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

此结果即为稳定电流场的基本方程.

【例 1】 地球周围的大气层受宇宙线电离而形成一种非均匀的导电介质,电导率为 $\sigma_c = \sigma_0 + a(r-R)^2$,$\sigma_0 = 3\times10^{-14}$ S/m,$a = 0.5\times10^{-20}$ S/m^3,R 为地球半径. 天晴时地球表面的电场强度为 100 V/m. 试计算:(1) 大气层中稳定电流的电场和电流;(2) 大气层中的电荷密度和地球表面上的电荷;(3) 地球表面的电势;(4) 如果地球上的电荷得不到补充,电流把地球上的电荷中和需多少时间?

解 (1) 因为电流随时间变化很慢,所以近似地认为电流是稳定的. 由 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$,得

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 j) = 0,$$

所以

$$j = \frac{C}{r^2} = \sigma_c E.$$

在地球表面 $E|_{r=R} = E(R)$,故 $C = \sigma_c(R)E(R)R^2$,于是

$$j = \frac{\sigma_c(R)E(R)R^2}{r^2} = \frac{\sigma_0 E(R)R^2}{r^2}.$$

由 $j=\sigma_c E$ 即可得到大气层的电场强度为

$$E(r) = \sigma_0 E(R) R^2 [\sigma_0 + a(r-R)^2 r^2]^{-1},$$

流向整个地球的总电流为

$$I = \oint \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = j(R) 4\pi R^2 \approx 1\,350\ \mathrm{A},$$

(2) 若设大气层 $\epsilon = \epsilon_0$,则大气层中的电荷密度为

$$\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E)$$

$$= 2\epsilon_0 [\sigma_0 E(R) R^2 a(r-R)]/[r^2 \sigma_c^2(r)].$$

大气层中的电荷是正的,它应当与地球表面的负电荷平衡. 把地球表面看成理想导体表面,则

$$\sigma = \epsilon_0 \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = -\epsilon_0 E(R)$$

$$= -8.85 \times 10^{-19}\ \mathrm{S/m^2}.$$

(3) 大气层最外层与地球表面之间的电势差为

$$\varphi = \int_{+\infty}^{R} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{R}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \int_R^\infty E(r)\mathrm{d}r$$

$$= \sigma_0 E(R) R^2 \int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2[\sigma_0 + a(r-R)^2]}$$

$$= \frac{\sigma_0 E(R) R^2}{a\left(R^2 + \frac{\sigma_0}{a}\right)^2}\left[R\ln\left(\frac{\sigma_0}{aR^2}\right) + \frac{\left(R^2 + \frac{\sigma_0}{a}\right)}{R} + \frac{\frac{\pi}{2}\left(R^2 - \frac{\sigma_0}{a}\right)}{\sqrt{\sigma_0/a}}\right],$$

因为 $\frac{\sigma_0}{a} \ll R^2$,所以

$$\varphi \approx \frac{\sigma_0 E(R)}{aR^2}\left\{R\left[\ln\left(\frac{\sigma_0}{aR^2}\right) + 1\right] + \frac{\pi R^2}{2\sqrt{\sigma_0/a}}\right\} \approx 384\,000\ \mathrm{V}.$$

(4) 要估计地球上负电荷被电流中和的时间只要估算一下大气层中电荷密度衰减的弛豫时间即可. 把 $\boldsymbol{j} = \sigma_c \boldsymbol{E}$ 代入连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0,$$

得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_c \rho + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \sigma_c = 0.$$

作数量级估计时,可把第三项略去,就有

$$\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t=0) \mathrm{e}^{-t/\tau},$$

其中

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma_c} \approx 300\ \mathrm{s}.$$

由此可见,既然天晴时地球上总保持有一定的负电荷,那就必定存在一个等效的"电池"不断

地给地球补充负电荷，这就是地球上局部地区发生的天地之间的闪电.

§5.2 磁场的矢势方程和边值关系

稳定电流磁场的基本方程是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.31}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}. \tag{1.32}$$

相应的边值关系仍为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0, \\ \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \tag{5.11}$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式，利用 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，即可从(1.31)和(1.32)得到

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{j}, \tag{5.12}$$

利用库仑规范条件$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，上述方程变成

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}. \tag{5.13}$$

(5.13)式即为我们熟知的泊松方程. 所以矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 在静场时满足同一形式的方程. 不仅如此，场能的表达式也完全类似.

静电场能量为

$$w_e = \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \rho\varphi \mathrm{d}\tau,$$

静磁场的能量为

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_\infty [\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})] \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{5.14}$$

比较 w_e 和 w_m 的表达式，我们看到 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的地位相似，$\boldsymbol{j}$ 和 ρ 的地位相似.

在介质分区均匀时，我们还要导出关于 $\boldsymbol{A}$ 的边值关系. 对应(5.11)式我们有

$$\boldsymbol{e}_n \cdot [(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 - (\nabla \times \boldsymbol{A})_2] = 0, \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times \left[\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 - \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \boldsymbol{A})_2\right] = \boldsymbol{\alpha}, \tag{5.16}$$

(5.15)式可以用更简单的形式代替，事实上把下式

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

应用到交界面的一个闭合回路上(类似于§1.6中推导),只要 $\boldsymbol{B}$ 在交界面上是有限的,则对应(5.15)式,我们有

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2) = 0, \tag{5.17}$$

这表示 $\boldsymbol{A}$ 在边界的切线方向的分量是连续的. 如果再给出体系的边界条件,就可以从(5.13)及交界面关系(5.16)和(5.17)式唯一地解出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$.

§5.3 静磁场的唯一性定理

定理:如果静磁体系 V 内存在着电流和磁介质,且关系式 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ 成立,则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及边界上 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量唯一确定.

证明:设对同一个体系存在两组不同的解 $\boldsymbol{B}'$ 和 $\boldsymbol{B}''$,显然应当有

$$\boldsymbol{B}' = \nabla \times \boldsymbol{A}', \quad \boldsymbol{B}'' = \nabla \times \boldsymbol{A}'', \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{B}' = \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}', \quad \boldsymbol{B}'' = \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}'', \tag{5.19}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}' = \nabla \times \boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{j}. \tag{5.20}$$

根据场的线性叠加原理,我们可构造一个新的场,即令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'', \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'', \tag{5.21}$$

对应的矢势 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}''.$$

对于这样一个场,显然

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0.$$

我们来计算这个场的能量:

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{H} d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_V [\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})] d\tau. \end{aligned} \tag{5.22}$$

由高斯定理得到

$$\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} d\tau = \frac{1}{2}\oint_S (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{5.23}$$

上式可以写成

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'') \cdot (\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'') d\tau \\ &= \oint_S [\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}'')] \cdot (\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'') dS \end{aligned} \tag{5.24}$$

或

$$\int_V \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\cdot(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\mathrm{d}\tau$$

$$= -\oint_S [\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)]\cdot(\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}'')\mathrm{d}S. \tag{5.25}$$

如果我们已知这个体系边界上 $\boldsymbol{A}$ 的切线分量，即 A'_t 和 A''_t，则由于是同一个体系，边界值应一样，就有

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{A}'', \tag{5.26}$$

于是由(5.24)式得到

$$\int \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\cdot(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\mathrm{d}\tau = 0.$$

同样，如果我们已知边界上 $\boldsymbol{H}$ 的切线分量的值，则有

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H}'', \tag{5.27}$$

由(5.25)式同样得到

$$\int \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\cdot(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B}'')\mathrm{d}\tau = 0.$$

由于体系的磁导率 μ_r 恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒等于零，即

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}''$$

或

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}''.$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证.

唯一性定理告诉我们：对于解的唯一性来说，我们并不要求边界上的 $\boldsymbol{H}$(或 $\boldsymbol{A}$)的值整个都知道，而只要知道 $\boldsymbol{H}$(或 $\boldsymbol{A}$)在边界面上的切线分量就已足够了.

§5.4 二维问题

二维的稳定电流体系是常见的. 所谓二维问题，是指不仅体系的边界面是二维的，而且体系内的电流只沿着 z 轴方向流动. 根据稳定电流的条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ 可知，$\frac{\partial}{\partial z}j_z=0$，电流密度与 z 方向的空间坐标无关，即

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_z j(x,y).$$

由于矢势 $\boldsymbol{A}$ 是由电流 $\boldsymbol{j}$ 激发的，并且边界面是二维的，所以矢势 $\boldsymbol{A}$ 也只能是 x、y 的函数，并且只有 z 方向的分量，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_z A(x,y). \tag{5.28}$$

于是，$\boldsymbol{A}$ 所满足的方程变成一个标量方程：

$$\nabla^2 A = -\mu j. \tag{5.29}$$

二维问题的边值关系较简单. 显然(5.17)式即为

$$A_1 = A_2. \tag{5.30}$$

利用柱坐标系(ρ,ϕ,z)中的公式

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\phi = \left(\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial\rho}A_z\right)\boldsymbol{e}_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi,$$

我们就可以把(5.16)式写成

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial\rho} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial\rho} = -\alpha. \tag{5.31}$$

(5.29)~(5.31)式是分区均匀体系二维矢势问题的方程和边值关系,若体系场量在边界上的值给定,我们就可以唯一地求出解. 把它们与介质中的静电方程和边值关系(3.25)、(3.28)和(3.29)比较,立即发现它们的形式完全一样. 因此,二维静磁问题完全可以仿照静电问题中的各种解法来求解.

【例 2】 半径为 R 的圆柱形导电磁介质中均匀地流有电流$\boldsymbol{j}$,并且置于均匀的外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中,场的方向与柱轴垂直,介质柱体的磁导率为 μ,试求空间的场分布.

解 如图 5.1 所示,空间分成两个区域,$\rho>R$ 的区域矢势为 A_1,$\rho<R$ 的区域矢势为 A_2,它们各自满足下述方程:

$$\nabla^2 A_1 = 0,$$

$$\nabla^2 A_2 = -\mu j;$$

边值关系:

$$\rho = R,\quad \begin{cases} A_1 = A_2; \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial}{\partial n}A_1 = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial}{\partial n}A_2; \end{cases}$$

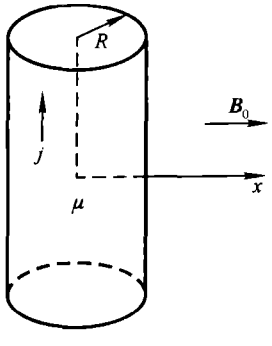


图 5.1

边界条件:

$\rho=0$,A_2 有限,

$\rho\to\infty$,A_1 包括均匀场和传导电流

$I=\pi R^2 j$ 的贡献.

下面我们根据上述条件找出各区的试解.

A_1 的解可由下面几部分组成:均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的贡献:$B_0 y = B_0\rho\sin\phi$;传导电流 $I=\pi R^2 j$ 的贡献:$\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{\rho_0}{\rho}$;磁介质在外场中磁化的贡献(根据边界条件 $\rho\to\infty$ 时,它的贡献为零):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi)\rho^{-n},$$

所以

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{\rho} + B_0\rho\sin\phi + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi)\rho^{-n}.$$

A_2 的解可以分成两部分:特解,就是柱内的电流分布的贡献:$-\frac{\mu}{4}\rho^2 j$;通解,这相应于介质磁化的贡献(根据 $\rho\to 0$ 时,其贡献为有限):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\phi + b_n\sin n\phi)\rho^n,$$

所以

$$A_2 = -\frac{\mu}{4}\rho^2 j + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\phi + b_n\sin n\phi)\rho^n.$$

现在,我们再根据边值关系决定系数 a_n、b_n、c_n、d_n. 由 $\rho=R$ 时 $A_1=A_2$,得到

$$-\frac{\mu}{4}R^2 j + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\phi + b_n\sin n\phi)R^n$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{\rho} + B_0 R\sin\phi + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi)R^{-n}, \tag{5.32}$$

又由 $\rho=R$ 时 $\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_1}{\partial\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}$,得到

$$\frac{1}{\mu}\left[-\frac{\mu R}{2}j + \sum_{n=1}^{\infty}nR^{n-1}(a_n\cos n\phi + b_n\sin n\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left\{-\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + B_0\sin\phi + \sum_{n=1}^{\infty}[-nR^{-n-1}(c_n\cos n\phi + d_n\sin n\phi)]\right\}. \tag{5.33}$$

用系数比较法联立求解(5.32)和(5.33)式可得

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln R - \frac{\mu I}{4\pi},$$

$$b_1 \quad \frac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}, d_1 = R^2 B_0\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0},$$

其余的系数均为零. 故空间矢势为

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho} - \frac{\mu I}{4\pi} + B_0\rho\sin\phi\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right),$$

$$A_2 = -\frac{\mu j}{4}\rho^2 + \frac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}\rho\sin\phi.$$

所以,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla\times\boldsymbol{A}_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\partial A_1}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho\left[B_0\cos\phi\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\right)\right] + \boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho} - B_0\sin\phi + B_0\frac{R^2}{\rho^2}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\sin\phi\right],$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \nabla\times\boldsymbol{A}_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\partial A_2}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}\cos\phi\right) + \boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\mu j}{2}\rho - \frac{2B_0\mu}{\mu+\mu_0}\sin\phi\right).$$

§5.5 旋转对称的三维问题

除了二维问题可以化成标量方程外，旋转对称的三维问题也可以化成一个标量方程. 所谓旋转对称，是指电流是环形的，并且是旋转对称分布的. 例如，在柱坐标系(ρ,ϕ,z)中

$$\boldsymbol{j}=e_{\phi}j(\rho,z),$$

由于空间的场是电流所激发的，所以我们可以认为矢势 $\boldsymbol{A}$ 只有 A_{ϕ} 分量，即

$$A_{\rho}=A_{z}=0,A_{\phi}=A(\rho,z).$$

因为矢势方程为泊松方程，即

$$\nabla^{2}\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j},$$

利用$\nabla^{2}\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$，取柱坐标系得

$$(\nabla^{2}\boldsymbol{A})_{\phi}=\nabla^{2}A_{\phi}-\frac{1}{\rho^{2}}A_{\phi}+\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial A_{\rho}}{\partial\phi},$$

$$(\nabla^{2}\boldsymbol{A})_{z}=\nabla^{2}A_{z},$$

$$(\nabla^{2}\boldsymbol{A})_{\rho}=\nabla^{2}A_{\rho}-\frac{1}{\rho^{2}}A_{\rho}-\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial\phi}.$$

这样，轴对称的三维问题的矢势方程为

$$\nabla^{2}A_{\phi}-\frac{1}{\rho^{2}}A_{\phi}=-\mu j. \tag{5.34}$$

由于 $A_{\phi}=A$ 仅是ρ 和z 的函数，所以上述方程化成

$$\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}A+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^{2}}A+\frac{\partial^{2}A}{\partial z^{2}}=-\mu j. \tag{5.35}$$

(5.35)是非齐次方程，其解是一个特解和齐次方程通解之和，而通解可用分离变量法求出. 令

$$A=R(\rho)Z(z),$$

则得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}\rho^{2}}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\left(\dfrac{1}{\rho^{2}}-k^{2}\right)R=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}^{2}Z}{\mathrm{d}z^{2}}=k^{2}Z.\end{cases} \tag{5.36}$$

这是两个我们熟知的常微分方程，其中第一个是关于 R 的一阶贝塞尔方程. 一旦体系的边界条件给出，我们就可以求解 $R(\rho)$和 $Z(z)$的常微分方程.

假如电流密度在球坐标系(r,θ,ϕ)中按下述分布：

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_\phi j(r,\theta),$$

这时的矢势 $\boldsymbol{A}$ 也只有 A_ϕ 的分量，即

$$\boldsymbol{A} = A(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi.$$

同样，利用$\nabla^2\boldsymbol{A} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$可以证明，$\nabla^2\boldsymbol{A}$ 在球坐标系中的各分量为：

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi},$$

于是我们得到球坐标系中的旋转对称的三维问题的矢势方程

$$\nabla^2 A - \frac{A}{r^2\sin^2\theta} = -\mu j(r,\theta). \tag{5.37}$$

如果体系的边界条件给定，我们就可以用分离变量法求解上述方程.

假若所考虑的体系是分区均匀的话，我们还必须求出相应的边值关系的表达式. 不难证明，在柱坐标系中，旋转对称的三维问题的边值关系为：

$$\rho = \rho_0,\quad \begin{cases} A_{1\phi} = A_{2\phi}, \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{1\phi})\right] - \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{2\phi})\right] = -\alpha, \end{cases} \tag{5.38}$$

同样可以找到球坐标系中的旋转对称三维问题的交界面关系的表达式：

$$r = r_0,\quad \begin{cases} A_{1\phi} = A_{2\phi}, \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_{1\phi}) - \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_{2\phi}) = -\alpha. \end{cases} \tag{5.39}$$

【例 3】 有一个均匀带电的球面，其电荷为 q，半径为 R. 球绕自身的某一直径以恒定角速度 ω 转动，试求球内外的磁场.

解 由于面电荷随着球面一起转动，形成线电流，选取 ω 方向为球坐标系的极轴，则电流线密度可写成

$$\alpha = \frac{q\omega}{4\pi R}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi.$$

显然这是个旋转对称的三维问题，我们把空间分成两个区域：$r>R$ 和 $r<R$，这两个区域的矢势 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 都只有 ϕ 方向分量，故满足方程(5.37)式，但电流密度为零，即

$$\nabla^2 A - \frac{A}{r^2\sin\theta} = 0, \text{且} \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0.$$

边值关系为：

$$r = R,\quad \begin{cases} A_1 = A_2, \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_1) - \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_2) = -\dfrac{q\omega}{4\pi R}\sin\theta. \end{cases}$$

边界条件：

$$r \to 0, A_2 \text{ 有限}; r \to \infty, A_1 = 0.$$

空间的磁场是由线电流产生的，而电流线密度按 $\sin\theta$ 的规律变化，因此 A 的试解形式一定可以写成

$$A(r,\theta) = R(r)\sin\theta,$$

代入体系的方程得到关于 $R(r)$ 的常微分方程

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r^2} + 2r \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} - 2R(r) = 0.$$

这是一个齐次欧拉方程，考虑到边界条件，其解分别为

$$R(r) = \frac{d_1}{r^2} \quad (r > R),$$

$$R(r) = d_2 r \quad (r < R),$$

即

$$A_1 = \frac{d_1}{r^2}\sin\theta,$$

$$A_2 = d_2 r\sin\theta.$$

可利用 $r = R$ 的边值关系可决定试解中的系数 d_1 和 d_2，由边值关系的第一式 $A_1 = A_2$，得到

$$d_1 = d_2 R^3;$$

由第二个边值关系式得（$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$）

$$\left(-\frac{d_1}{R^2} - d_2 2R\right) = -\frac{\mu_0 q\omega}{4\pi}.$$

最后得到

$$d_1 = \frac{\mu_0 q\omega R^2}{12\pi}, \quad d_2 = \frac{\mu_0 q\omega}{12\pi R}.$$

这样，体系的两个区域的矢势分别为

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{qR^2\omega}{3}\right)\frac{\sin\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_\phi,$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{qR^2\omega}{3}\right)\frac{r}{R^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi,$$

最后由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 得到

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2}{a^2}\boldsymbol{m},$$

其中 $\boldsymbol{m} = \frac{qR^2}{3}\boldsymbol{\omega} = \frac{qR^2\omega}{3}\boldsymbol{e}_z$ 是体系的磁矩.

§5.6 磁 偶 极 子

若电流分布集中在一个小区域 V 中，而我们只讨论远处的场，这时可以仿

照静电情况用多极矩展开的方法来处理. 这里,我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用.

1. 磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中,矢势 $\boldsymbol{A}$ 的解为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'.$$

类似静电问题中的多极展开,把 $\frac{1}{R}$ 在区域 V 内的某一点展开成 $\boldsymbol{r}'$ 的幂级数. 若展开点取在坐标的原点,则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}\bigg|_{r'=0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla'\nabla'\frac{1}{R}\bigg|_{r'=0} + \cdots$$

代入矢势表达式中得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}}{R}\mathrm{d}\tau' \\ &= \boldsymbol{A}^{(0)} + \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \frac{\mu}{4\pi r}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau',$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi}\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}\bigg|_{r'=0}\mathrm{d}\tau',$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \frac{\mu}{8\pi}\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla'\nabla'\frac{1}{R}\bigg|_{r'=0}\mathrm{d}\tau'.$$

现在我们来分析上面展开式中前两项的物理内容.

因为在体积 V 内,$\boldsymbol{j}$ 满足稳定条件 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}=0$,且在体系 V 的界面上,它满足 $j_n=0$,所以可以证明(习题 1.4)

$$\int \boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau' = 0.$$

(直观地说,稳定电流构成闭合回路,电流 $\boldsymbol{j}$ 是无源的,所以体积分总为零.)所以,

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = 0. \tag{5.41}$$

第二项 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 可改写成下述形式:

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{5.42}$$

其中

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{5.43}$$

证明如下:

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi}\int \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}\Big|_{r'=0}\right)\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla_i\frac{1}{r}\int \boldsymbol{j}r_i'\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla_i\frac{1}{r}\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{j}r_i' + j_i\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' - \frac{\mu}{4\pi}\nabla_i\frac{1}{r}\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{j}r_i' - j_i\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'.$$

因为

$$\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'r_i') = \boldsymbol{j}r_i' + j_i\boldsymbol{r}',$$

所以上式的第一项为

$$-\frac{\mu}{2}\nabla_i\frac{1}{r}\int\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'r_i')\mathrm{d}\tau' = -\frac{\mu}{2}\nabla_i\frac{1}{r}\oint\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'r_i') = 0.$$

于是,$\boldsymbol{A}^{(1)}$就可以写成

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = -\frac{\mu}{8\pi}\int\left(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r} - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\tau'$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau'\right)\times\nabla\frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

对此我们可作如下的讨论:

(1) $\boldsymbol{A}^{(1)}$所对应的场为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}^{(1)} = \nabla\times\left(-\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\times\nabla\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\nabla^2\frac{1}{r} + \frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\nabla\frac{1}{r},$$

讨论的是区域 V 外的场,在 $\boldsymbol{r}\neq 0$ 处,有

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0,$$

这样 $\boldsymbol{A}^{(1)}$所对应的磁感应强度可写成

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\nabla\frac{1}{r}.$$

令

$$\varphi_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\frac{1}{r}, \tag{5.44}$$

则

$$\boldsymbol{B} = -\mu\nabla\varphi_{\mathrm{m}}. \tag{5.45}$$

把(5.44)和(5.45)式与电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 所激发的场的表达式

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r},$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \text{ 或 } \boldsymbol{D} = -\varepsilon_0\nabla\varphi$$

比较,就可以看出:$\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 相对应,φ_m 与 φ 相对应,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{D}$)相对应. 因此,我们把 $\boldsymbol{m}$ 定义为**磁偶极子**,$\boldsymbol{A}$[(1)]即为磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 所产生的矢势,φ_m 称磁标势. 我们在§1.9中从场的对偶性出发引入的磁偶极子的矢势和场的表达式与这里的结果完全一致. 当然磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的构成有区别,前者由磁荷产生,后者由电流分布形成.

(2) 对于环形的闭合电流,其磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 写成:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m} &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{I}{2}\oint \boldsymbol{r}' \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \\ &= I\boldsymbol{S},\end{aligned} \tag{5.46}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 是电流回路的面积. 这就是通常所说的把一个小电流环看作大小为 $I\boldsymbol{S}$ 的磁偶极矩的原由.

(3) 对于任意形状的环形电流回路,若要考虑离环不很远处的场,这时磁偶极矩近似不精确,常采用下面的办法.

如图 5.2,设回路中的电流强度为 I,我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块,每小块的边界上都流有电流 I,电流的方向同大回路的电流方向相同,这样,这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流 I. 对于每一小块面积都相应的有一个磁矩,其大小为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,它在空间产生的磁标势为

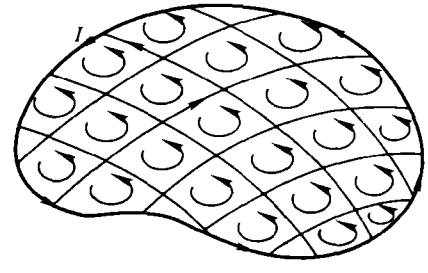


图 5.2

$$\mathrm{d}\varphi_m = -\frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\frac{1}{R},$$

式中的 R 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 至观察点的位置矢量. 于是,整个回路所产生的势为

$$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi}\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\frac{1}{R} = \frac{I}{4\pi}\Omega,$$

其磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu I}{4\pi}\nabla\Omega, \tag{5.47}$$

Ω 是回路对观察点所张的立体角. Ω 正负的规定是:按电流的右手法则决定 $\boldsymbol{e}_n$ 的面法线方向以后,若观察点在 $\boldsymbol{e}_n$ 的正方向,则 $\Omega>0$,反之 $\Omega<0$.

【例 4】 实验证明,电子具有自旋磁矩,其大小为 $9.27\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}$,电子的经典半径 $r_0=2.8\times10^{-15}\ \mathrm{m}$. 如果把电子看成匀速转动的带电小球,且电荷为均匀的体分布,试计算磁矩

的大小，并与实验值比较求出角速度 ω.

解 电子的电荷密度为

$$\rho = -\frac{e}{\frac{4\pi}{3}r_0^2} = -\frac{3e}{4\pi r_0^2},$$

电流密度为

$$\boldsymbol{j} = -\frac{3e}{4\pi r_0^3}\boldsymbol{v} = -\frac{3er'}{4\pi r_0^3}\sin\theta\omega\boldsymbol{e}_\phi = -\frac{3e\omega r'}{4\pi r_0^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi,$$

所以磁矩 $\boldsymbol{m}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m} &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{2}\frac{3e\omega}{4\pi r_0^3}\iiint (r'\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{r}')r'^2\mathrm{d}r'\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \left\{-\frac{3e\omega}{8\pi r_0^3}\int_0^{r_0} r'^4\mathrm{d}r'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right\}\boldsymbol{e}_z \\ &= -\frac{er_0^2}{5}\boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

这里，我们选取了以电子中心为原点，旋转轴为 z 轴(即 $\boldsymbol{\omega}$ 方向)的球坐标. 把 $r_0 = 2.8\times10^{-15}$ m、$m = 9.27\times10^{-24}$ A·m^2、电子电荷 $e = 1.60\times10^{-19}$ C 代入，则

$$\omega \approx 0.4\times10^{26}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

不妨估计一下电子“赤道”的线速度

$$v = r_0\omega \approx 10^{11}\ \mathrm{m/s}.$$

这就是电子赤道面上的最大线速度，它比光速还大三个数量级. 因此经典电动力学并不能描写电子的自旋磁矩，电子的磁矩纯粹是量子现象.

2. 磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩

体积 V 内的电流受外磁场的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau', \tag{5.48}$$

式中 $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')$是外磁场. 设电流分布在一个很小的区域，将 $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')$在这个小区域的内部任意一点展开，得

$$\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')|_{r'=0} + \boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\boldsymbol{B}_e|_{r'=0} + \cdots \tag{5.49}$$

把它代入(5.48)式，有

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}_{e0}\mathrm{d}\tau' + \int \boldsymbol{j}' \times (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla'\boldsymbol{B}_e|_{r'=0})\mathrm{d}\tau' + \cdots$$

式中 $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$. 上式的第一项为

$$\int \boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}_{e0}\mathrm{d}\tau' = -\boldsymbol{B}_{e0} \times \left[\int \boldsymbol{j}'\mathrm{d}\tau'\right] = 0,$$

第二项中因子$\nabla'\boldsymbol{B}_e|_{r'=0}$与积分无关，为与积分元区别起见，把它记为$\nabla\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})$. 因为$\nabla\times\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}) = 0$，所以

$$\boldsymbol{r}' \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})) = \nabla(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})) - (\boldsymbol{r}' \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}) = 0.$$

这样,力 $\boldsymbol{F}$ 可以写成

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \int \boldsymbol{j}' \times [\boldsymbol{r}' \cdot \nabla \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})] \mathrm{d}\tau' \\
&= \int \boldsymbol{j}' \times \nabla [\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})] \mathrm{d}\tau' \\
&= -\nabla \times \int \boldsymbol{j}' [\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})] \mathrm{d}\tau' \\
&= -\nabla \times \left[B_{ei} \int (\boldsymbol{j}' r_i') \mathrm{d}\tau' \right] \\
&= -\nabla \times \left[B_{ei} \int \frac{1}{2} (\boldsymbol{j}' r_i' + j_i' \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' \right] - \nabla \times \left[B_{ei} \int \frac{1}{2} (\boldsymbol{j}' r_i' - j_i' \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' \right],
\end{aligned}$$

上式第一项的积分可以写成

$$\begin{aligned}
\int (\boldsymbol{j}' r_i' + j_i' \boldsymbol{r}_i) \mathrm{d}\tau' &= \int \nabla' \cdot (\boldsymbol{j}' r_i' \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' \\
&= \oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \cdot (\boldsymbol{j}' r_i' \boldsymbol{r}') = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F} = -\nabla \times [\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})].$$

于是,磁偶极子在外场中受到的力为

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_e = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e). \tag{5.50}$$

这个结果与电偶极矩在电场中的受力公式相似.

同理,考虑一个小区域内的电流在外场中受到的力矩

$$\boldsymbol{M}_f = \int \boldsymbol{r}' \times [\boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')] \mathrm{d}\tau'.$$

同样把 $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}')$ 展开,只取级数的第一项,得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_f &= \int \boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}_{e0}) \mathrm{d}\tau' \\
&= \int [\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_{e0}) - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{j}')\boldsymbol{B}_{e0}] \mathrm{d}\tau' \\
&= \int \boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_{e0}) \mathrm{d}\tau' - \frac{\boldsymbol{B}_{e0}}{2} \int \nabla' \cdot (r'^2 \boldsymbol{j}') \mathrm{d}\tau' \\
&= \int \boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}_{e0}) \mathrm{d}\tau',
\end{aligned}$$

类似前面的推导,上式最后的结果为

$$\boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_{e0}. \tag{5.51}$$

这个结果与电偶极矩在静外电场中受到的力矩形式完全一样.

3. 磁偶极矩在外磁场中的能量

当磁偶极子平移一微小的位移或转动一微小角度时,力和力矩对外界要作机械功. 根据能量守恒,这个机械功 δW 等于体系能量的减少. 若平移 $\delta\xi$,则

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\delta W = -\boldsymbol{F}\cdot\delta\xi\\ &= -\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)\cdot\delta\xi = -\Delta(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e),\end{aligned}$$

故

$$u = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e + C, \tag{5.52}$$

其中 C 是与磁偶极子位置无关的常数.

同理,若转动一个小角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$,则

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\delta W = -\boldsymbol{M}_f\cdot\delta\boldsymbol{\theta}\\ &= -\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e\cdot\delta\boldsymbol{\theta} = -(\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{B}_e.\end{aligned}$$

略去由转动而引起的 $\boldsymbol{m}$ 大小的变化,则 $\Delta\boldsymbol{m} = \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{m}$,于是

$$\Delta u = -\Delta\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e = -\Delta(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e),$$

所以

$$u = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e + C, \tag{5.53}$$

其中 C 是与转动无关的常数.

我们通常把 $u = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e$ 称为偶极子在外场中的**有效势能**. 注意:有效势能不是相互作用能. 系统的相互作用能应按公式(5.14)式计算,即

$$u_i = \int \boldsymbol{A}_e\cdot\boldsymbol{j}\,d\tau. \tag{5.54}$$

对于环形小电流,则有

$$u_i = I\oint\boldsymbol{A}_e\cdot d\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e.$$

对于一般情况,仍有

$$u_i = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e. \tag{5.55}$$

可见,相互作用能与有效势能之间相差一个负号,这就是说,当磁偶极子对外作功时,有效势能减小了,而相互作用能却增加了. 这是否违反能量守恒定律呢? 并不违反. 原因是:在没有外电源的情况下,转动或移动磁偶极子时并不能保持磁偶极子和外场的能量不改变,事实上,可以证明若要保持 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{B}_e$ 都不改变,则必须提供外电源,并且外源的能量一定减少 $2u_i$.

§5.7 磁介质中的磁场

磁介质可分为顺磁介质、抗磁介质和铁磁介质. 一般来说,顺磁介质 $\mu_r>1$,抗磁介质 $\mu_r<1$,铁磁介质一般不存在 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 的关系,这时的磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 的关系是非齐次、非线性的,且往往呈各向异性.

1. 顺磁介质和抗磁介质中磁场的特性

对于这两种磁介质,本构关系 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 成立,所以当 μ 是常数时这种介质中的磁场满足如下方程:

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\end{cases}\tag{5.56}$$

仅就这些方程我们可看出:在这类介质中电流所激发的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与磁导率无关,但在同样电流分布下磁感应强度却为真空中的 μ_r 倍.

2. 铁磁介质中的场方程

这时,尽管 $\boldsymbol{M}$ 与场的关系是非线性的,但 $\boldsymbol{B}/\mu_0=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}$ 总是成立的. 因此,同样可以有两种形式的方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M},\end{cases}\tag{5.57}$$

或

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{j}+\nabla\times\boldsymbol{M}),\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.\end{cases}\tag{5.58}$$

这是分别关于 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程组,它们是等价的,通过关系式 $\boldsymbol{B}/\mu_0=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}$ 可由一组方程的解求出另一组方程的解. 但这两组方程的表示却有很大的差异,这差异反映了磁化介质对磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 发生影响的性质和方式不同. $\boldsymbol{M}$ 对 $\boldsymbol{H}$ 的影响是以磁荷形式出现的,即可以等效地认为 $\rho_m=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$;而 $\boldsymbol{M}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的影响是以电流形式出现,即 $\boldsymbol{j}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$ 称为分子电流. 若铁磁质的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 已经给定,则既可以由(5.57)求解 $\boldsymbol{H}$,也可以由(5.58)求解 $\boldsymbol{B}$. 但是,如果铁磁质内无传导电流(即 $\boldsymbol{j}=0$),这时(5.57)和(5.58)在解法上有很大差别. 因为这时 $\boldsymbol{B}$ 的方程是旋度不为零而散度为零,这只能引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 来求解,我们已在前面几节中详细讨论过;而 $\boldsymbol{H}$ 的方程正好相反,旋度为零而散度不为零,它和真空中的静电场方程完全一样,因此可用标势法来求解.

3. 磁标势

我们在前面的有关问题的讨论中引入过磁标势的概念,这里我们作更一般

的讨论,着重指出磁标势的适用条件.

(1) 所考察的空间区域没有传导电流

若考察传导电流为零的空间,则一定有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0,$$

于是立即可以引入标势 φ_m:

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_m. \tag{5.59}$$

(5.59)式和静电学中的

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

完全类似,所以 φ_m 称为磁标势. 因此,引入磁标势的第一个条件是空间无传导电流. 但是,只有这个条件还不够,引入磁标势尚有困难,原因是:按定义(5.59)式,φ_m 是保守场的势,即 $\boldsymbol{H}$ 是保守场,因此 $\boldsymbol{H}$ 的任一闭合曲线积分总为零;而安培环路定理告诉我们,$\boldsymbol{H}$ 沿闭合曲线积分一周是否为零取决于路径的选取,显然它与前者不协调.

若我们考察一个环形电流附近的空间(电流环除外)中的磁场,显然,这个区域不存在传导电流,故可以用 φ_m 来描述. 我们设该空间磁场的标势为 φ_m,$\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_m$. 将磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿一闭合曲线 C 积分,而此积分曲线是穿过电流环的,因而积分回路包围电流,故

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm I;$$

另一方面

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint(\nabla\varphi_m)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint \mathrm{d}\varphi_m = \varphi_{mf} - \varphi_{mi},$$

于是有

$$\varphi_{mf} = \varphi_{mi} + I.$$

因为 φ_{mf} 和 φ_{mi} 是沿闭合曲线积分的起点和终点的标势,是空间同一点的值,故应当是单值函数,而现在表明 φ_m 不是单值的,它与积分回路的选取有关. 因此,仅有"无传导电流"这一条件还不够,为了保证 φ_m 的单值性,还应当引入另一个条件.

(2) 空间应为单连通区域

为此,我们引入以电流环为边界的任意曲面,并规定积分路径不允许穿过此曲面. 直观地看,这个以电流环为边界的任意曲面对积分路径来说是个刚性的屏障,任何闭合积分路径都穿不过去,这样,φ_m 不再是多值的了. 从曲面的一侧穿过曲面到另一侧,磁标势 φ_m 是不连续的,存在着大小为 I 的跃变,所以有时称此曲面为"磁壳",不同位形分布的电流具有不同形状的磁壳. 由此可见,若电流是环形分布的,则我们只能挖去环形电流所围成的壳形,在剩下的空间使用磁

标势. 如果用磁标势求无限长载流导线周围的磁场,则必须构造以导线为边界到无穷远去的一个平面作为磁壳;从平面(二维)观点看,是以导线为起点向无穷远作一条割线,以使复连通区域成为单连通区域. 所以,我们通常把第二个条件称为单连通条件.

(3) 磁标势 φ_m 的方程

由(5.57)和(5.59)式,令 $\boldsymbol{j}=0$,我们立即得到

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_m = -\rho_m,\\ \rho_m = -\nabla\cdot\boldsymbol{M},\end{cases} \tag{5.60}$$

这与介质中的静电场方程(自由电荷为零)

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_P,\\ \rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}\end{cases}$$

类似,ρ_m 与 ρ_P 地位相当,常称**磁荷**.

从 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的边值关系可以求得 φ_m 在交界面上的关系. 由 $\boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0$ 可得

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}; \tag{5.61}$$

由 $\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$ 及 $\boldsymbol{B}/\mu_0=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}$ 可得

$$\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_2). \tag{5.62}$$

对非铁磁介质来说,$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$,故(5.62)式可改写成

$$\mu_1\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1 = \mu_2\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2. \tag{5.63}$$

可见,交界面上的关系和静电介质完全类似. 因此,引入磁荷和磁标势的好处在于我们可以借用静电学中的方法,第四章中讨论的许多方法都可运用,特别是在处理永久磁石所激发的磁场等问题时更方便.

【例 5】 求球形永久磁铁所激发的磁场.

解 把空间分成球内和球外两部分,整个空间不存在传导电流,因此球内外均可用磁标势.

球外空间,$\rho_m=0$,所以 φ_{m1} 满足的方程为

$$\nabla^2\varphi_{m1} = 0.$$

球内区域,设磁化强度

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{M}',$$

$\boldsymbol{M}_0$ 是固有磁化强度,$\boldsymbol{M}'$ 为诱导磁化强度,它与 $\boldsymbol{H}$ 的关系为

$$\boldsymbol{M}' = \kappa\boldsymbol{H}.$$

因为永久磁铁内 $\boldsymbol{B}/\mu_0=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}$ 成立,所以由上面的关系得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{M}_0}{\mu_r}.$$

令$\nabla \cdot \boldsymbol{M}_0 = 0$,则球体内的 φ_{m2} 也满足

$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0.$$

体系的边值关系:$r = R$(为球半径)时

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \\ \mu_r \dfrac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} - \dfrac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{M}_0. \end{cases}$$

边界条件:$r \to \infty$ 时 $\varphi_{m1} \to 0$;$r \to 0$ 时 φ_{m2} 为有限值.

取 $\boldsymbol{M}_0$ 的方向为球坐标系的极轴方向. 类似静电边值问题的解法,根据边界条件和边值关系,取试解为

$$\varphi_{m1} = \frac{A}{r^2}\cos\theta, \varphi_{m2} = Br\cos\theta,$$

由边值关系得

$$A = \frac{M_0 R^3}{\mu_r + 2}, \quad B = \frac{M_0}{2 + \mu_r},$$

所以

$$\varphi_{m1} = \frac{M_0 R^3}{\mu_r + 2}\frac{1}{r^2}\cos\theta, \varphi_{m2} = \frac{M_0}{2 + \mu_r} r\cos\theta.$$

可见,球外空间的磁场是偶极场,其磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi}{\mu_r + 2} R^3 \boldsymbol{M}_0.$$

球内的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_r + 2}\boldsymbol{M}_0,$$

球内磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}/\mu_0 = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \frac{2}{\mu_r + 2}\boldsymbol{M}_0,$$

球内的磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \kappa \boldsymbol{H} = \frac{3}{2 + \mu_r}\boldsymbol{M}_0.$$

由上面的讨论可以看出:球内的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 方向相反,大小比例与 μ_r 无关;另外,在 $\boldsymbol{M}_0$ 的作用下,球内的磁化强度与 $\boldsymbol{M}_0$ 一样是常矢量.

【例 6】 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中,求场分布.

解 设介质球壳的内外半径分别为 R、R',球壳的磁导率为 μ. 取 $\boldsymbol{H}_0$ 方向为极轴方向的球坐标系,把空间分成三个区域:$r > R'$,$R' > r > R$,$r < R$. 三个区域都可使用磁标势,

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \qquad r > R',$$
$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \qquad R' > r > R,$$
$$\nabla^2 \varphi_{m3} = 0 \qquad r < R.$$

边值关系:$r = R'$时

$$\varphi_{m1}=\varphi_{m2},\quad \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}=\mu_r\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r},$$

$r=R$ 时

$$\varphi_{m2}=\varphi_{m3},\quad \mu_r\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_{m3}}{\partial r}.$$

边界条件：$r\to 0$ 时 φ_{m3} 有限；$r\to\infty$ 时 $\varphi_{m1}\to -H_0 r\cos\theta$.

我们可以引入如下试解：

$$\varphi_{m1}=-H_0 r\cos\theta+\frac{d_1}{r^2}\cos\theta,$$

$$\varphi_{m2}=d_2 r\cos\theta+\frac{d_3}{r^2}\cos\theta,$$

$$\varphi_{m3}=d_4 r\cos\theta,$$

利用四个边值关系确定系数 d_1、d_2、d_3、d_4，计算结果为

$$d_1=\frac{H_0(\mu_r-1)(1+2\mu_r)(R'^3-R^3)}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r)-2(\mu_r-1)^2\left(\frac{R}{R'}\right)^3},$$

$$d_4=\frac{-9\mu_r H_0}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r)-2(\mu_r-1)^2\left(\frac{R}{R'}\right)^3}.$$

球壳外的场是均匀场和偶极子场的叠加，磁偶极矩的大小即是 $4\pi d_1$. 当 μ_r 很大时，磁偶极矩

$$m=4\pi d_1\approx 4\pi H_0 R'^3,$$

它与 R 的大小无关，这种情况类似于外电场中的导体球壳.

球壳内的场是均匀场，其大小为 d_4. 当 $\mu_r\to\infty$ 时，球壳内的磁场

$$\boldsymbol{H}=\frac{9\boldsymbol{H}_0}{2\mu_r\left[1-\left(\frac{R}{R'}\right)^3\right]}\to 0,$$

这就是所谓的磁屏蔽. 选择的材料 μ_r 越大，壳层越厚$\left(即\frac{R}{R'}\ll 1\right)$，则屏蔽效果越好.

*§5.8 永久磁铁在介质中激发的磁场

我们已经知道，如果空间充满均匀介质，其磁导率为 μ，则在同样的电流分布下介质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是真空中的 $\boldsymbol{B}_0$ 的 μ_r 倍，即 $\boldsymbol{B}=\mu_r\boldsymbol{B}_0$. 现在，如果把电流换成一块永久磁铁，我们要问：磁铁在介质中激发的磁场 $\boldsymbol{H}$ 和在真空中激发的磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 之间是否还是 $\boldsymbol{H}=\mu_r\boldsymbol{H}_0$？回答是否定的. 因为磁铁本身是磁介质，它在空间激发的磁场与永久磁铁的具体形状密切相关；换句话说，这是个边值问题，其解与边界的形状有关. 下面我们来讨论两种极端情形.

1. 针状细长磁铁

如果把针状的细长的永久磁铁放在介质中，以磁荷的观点看，两端点分布着磁荷，一端为

正另一端为负. 所以,针状永久磁铁的磁场可以认为是由两端正负磁荷产生的. 正负磁荷在介质中激发感应磁荷. 与静电情形类比,把磁荷与电荷对应,$\boldsymbol{H}$ 同 $\boldsymbol{E}$ 对应,则针状磁铁在磁介质中激发的磁场对应于两正负电荷在电介质中激发的电场. 由此可见,同一块永久磁铁在磁介质中产生的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是真空中的 $\boldsymbol{H}_0$ 的 $\frac{1}{\mu_r}$,即

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_r}\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\boldsymbol{H}_0.$$

所以,在这种情况下 $\boldsymbol{B}$ 是不变的,同真空中的 $\boldsymbol{B}_0$ 相同.

2. 扁平永久磁铁

这是另一个极端情形,这时磁铁的上下两个侧面上产生感应磁荷,因此空间的磁场是原"自由"磁荷和感应磁荷两部分之和所激发,感应磁荷的面密度是有限的,随着扁平磁铁的厚度趋于零,上下两面的正负感应磁荷对空间磁场的贡献也趋于零. 因此,这时空间磁场仅是原扁平磁铁所激发的,$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{H}_0$ 相等,即

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0,$$

故

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}_0=\mu_r\boldsymbol{B}_0,$$

$\boldsymbol{B}$ 是真空时的 μ_r 倍.

§5.9 作用在磁介质上的静磁力

我们在§3.12中讨论了作用在电介质上的静电力. 用类似的方法可以导出作用在磁介质上的静磁力的力密度:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}\nabla\left(B^2\frac{\partial\frac{1}{\mu}}{\partial\rho_m}\rho_m\right)+\frac{1}{2}B^2\nabla\frac{1}{\mu}. \tag{5.64}$$

公式(5.64)只对顺磁介质和抗磁介质成立,对铁磁介质并不成立. 在一般情况下,μ 都接近于 μ_0,所以有传导电流时,第一项的贡献是主要的,其余各项是小的修正. 当然,若 $\boldsymbol{j}=0$,则外场对磁介质的作用力由第二、三项决定. 对于非铁磁性的液体和固体来说,我们都可以近似地认为 $\mu=\mu_0$,于是力密度

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H};$$

作用在磁场中通有电流的导电磁介质上的总力由下式给出:

$$\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}\tau.$$

习 题

5.1 截面半径为 R 的圆柱形长直导线内流有稳定电流,电流密度为 j_0,电导率为 σ_{cl}.

如果导线内存在着一个电导率为 σ_2 的球形杂质小球，球半径为 $R'(R' \ll R)$，球心在轴线上．试讨论杂质小球对电流分布的影响．如果杂质小球是绝缘体，情况又怎么样？

5.2 试分别在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系中写出均匀场的矢势．

5.3 两根长直导线互相平行，其中流有大小相等方向相反的电流，求这个体系的矢势．

5.4 半径为 R 的薄柱壳上流有沿轴向的电流，其分布为 $\alpha = \alpha_0(1 + k\cos\phi)$，$\alpha_0$、$k$ 均为常数．求空间磁场分布．

5.5 一个内外半径分别为 R、R'，磁导率为 μ 的磁介质柱壳对称地包围着电流相反的一对平行长直导线．试求空间磁场分布．

5.6 一根载有电流 I 的长直导线平行放置于半径为 R，磁导率为 μ 的无限长圆柱的外面，与圆柱轴线相距 d，求导线单位长度受到的作用力．

5.7 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球内，若该球绕某一直径以恒定角速度 ω 旋转，试求磁场分布．如果 Q 均匀分布在表面，则结果有何变化？

5.8 同轴电缆的内外半径分别为 R 和 $R'(R' > R)$，介质的电导率为 σ_c，试求单位长度的电阻．

5.9 将一半径为 R，磁导率为 μ 的球置入均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，求空间磁感应强度分布和磁化的磁矩 $\boldsymbol{m}$．

5.10 一个内外半径分别为 R、R' 的磁介质球壳，将其放入均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，球壳的磁导率为 μ．求球壳内部的 $\boldsymbol{B}$．讨论在 $\mu \gg \mu_0$ 时的磁屏蔽效应．

5.11 一个半径为 R 的均匀磁化球放入磁导率为 μ 的无限介质中，设其固有磁化强度为 $\boldsymbol{M}_0$，试求磁场分布．如果再加上均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$（为简单起见，设 $\boldsymbol{H}_0$ 与 $\boldsymbol{M}_0$ 方向一致），结果有何变化？

5.12 设在 $z < 0$ 的空间内充满磁导率为 μ 的磁介质，在 $z = d$ 处放一个小磁铁，磁矩为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{m}$ 与 z 轴的夹角为 α．求空间磁标势及 $\boldsymbol{m}$ 所受的力．

第六章　似　稳　场

从现在开始，我们转入研究随时间变化的电磁场．本章研究随时间变化足够缓慢的似稳场．

§6.1　似稳条件

众所周知，因电流和电荷的改变而引起的场的扰动是以有限速度传播的，因而空间的场在某一时刻 t 的值是由比 t 早一些时候的电流、电荷决定的，而并不与 t 时刻的电流和电荷对应，也就是说，场和源不是瞬时关系．但是，如果场（或源）随时间变化得足够缓慢，我们可以近似地认为源和场之间具有瞬时关系．每一时刻，其源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系，故称**似稳场**．由此可见，似稳场要求的是：虽然电流随时间变化，但每一瞬时电流的性质仍与稳定的相似．同样，磁场虽然是时间 t 的函数，但每一瞬时磁场与电流的关系仍与稳定时相似．所以瞬时关系即是略去位移电流项．在什么情况下略去位移电流才算是合理的？这就是下面我们要讨论的似稳条件．

（1）如果考察的区域是在电介质的内部，其中除位移电流外还有传导电流：

$$\boldsymbol{j}_{位}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \boldsymbol{j}_{传}=\sigma_c\boldsymbol{E}.$$

若场是谐变的，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$，则

$$\frac{\boldsymbol{j}_{位}}{\boldsymbol{j}_{传}}=\frac{\varepsilon(-i\omega \boldsymbol{E})}{\sigma_c\boldsymbol{E}},$$

取其模得

$$|\boldsymbol{j}_{位}/\boldsymbol{j}_{传}|=\frac{\omega\varepsilon}{\sigma_c}.$$

忽略位移电流的条件是 $|\boldsymbol{j}_{位}/\boldsymbol{j}_{传}|\ll 1$，即

$$\omega\ll\frac{\sigma_c}{\varepsilon}. \tag{6.1}$$

这样，似稳场的第一个条件是频率要足够低（当然是与 σ_c 比较而言）．对于纯金属，$\sigma_c\approx 10^7\ \Omega/m$，$\varepsilon\approx\varepsilon_0$，所以 $\omega\ll 10^{17}$ s．可见，对于金属而言频率范围很大．

(2) 如果考察的区域是导电介质的外部,或者说我们考察真空中 $\boldsymbol{r}'$ 处的源激发的在 $\boldsymbol{r}$ 处的场. 设场是谐变的,即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$,因为空间的场是由过去时刻的源激发的,因此与源相距为 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)},$$

此即是推迟效应(将在第十二章中详细讨论). 瞬时关系要求略去这一推迟效应. 因为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}\left(1-\frac{i}{c}\omega R+\cdots\right),$$

所以略去推迟效应的条件为

$$\frac{\omega}{c}R\ll 1,$$

即

$$R\ll\frac{\lambda}{2\pi}. \tag{6.2}$$

这就是说,考察点到源的距离远小于场的波长时,略去位移电流是合理的,这就告诉了我们似稳场的大小. 例如,对于 50 Hz 的频率,$\lambda=6\ 000$ km;而对于 800 kHz的频率,$\lambda=375$ m. 可见在低频情况下,如考察区域的线度远小于波长,则此场可看成是似稳场.

(6.1)和(6.2)式就是似稳条件. 注意,似稳条件是相对的.

§6.2 似稳场方程 场的扩散

只要把似稳条件代入麦克斯韦方程即得似稳场方程:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},\end{cases} \tag{6.3}$$

及

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},$$

似稳场方程(6.3)式比静态场只多一个电磁感应方程. 利用

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},$$

及库仑规范$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,得到势满足的方程(设 ε、μ 是均匀的):

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon}\rho, \\ \nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{j}.\end{cases} \tag{6.4}$$

φ 和 $\boldsymbol{A}$ 的方程形式和静态场完全一样，所不同的是现在 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 都是时间的函数，并且 $\boldsymbol{E}$ 不仅由 φ 来决定，还与 $\boldsymbol{A}$ 直接有关.

如果考查导电介质的内部，则还需另加一个方程：

$$\boldsymbol{j} = \sigma_c \boldsymbol{E}.$$

由于导体内没有电荷堆积，$\rho = 0$，这时(6.3)式变成

$$\begin{cases}\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma_c \boldsymbol{E} \qquad (\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}),\end{cases} \tag{6.5}$$

由(6.5)式的第二、第四式消去 $\boldsymbol{E}$ 则得 $\boldsymbol{H}$ 的方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\boldsymbol{H}. \tag{6.6}$$

同理，由(6.5)式得到关于 $\boldsymbol{E}$ 的方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\boldsymbol{E}. \tag{6.7}$$

可见，似稳情况下 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方程是我们熟知的扩散方程，$\dfrac{1}{\mu\sigma_c}$ 是扩散系数，它说明导电介质中的场会扩散，扩散的快慢取决于电导率 σ_c 的大小，σ_c 越大扩散越慢. 对于理想导体，扩散系数为零. 我们将在后面几节中再讨论这两个方程的应用.

§6.3 线型导线中的电工学方程

似稳电磁场的一个典型问题就是电工学中的电路问题. 电工学中往往涉及的是低频电磁场，且电路的范围也不大，似稳条件一般都可以满足，根据似稳场的特点，从场方程可以导出电路方程，而电路方程则可以归结为解一个电流强度的方程.

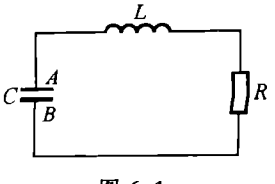


图 6.1

如图 6.1 所示的导线回路中，L 表示导线回路的电感，R 是导线回路的电阻，C 是电容. 沿导线回路对电场作线积分，就有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_B^A \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{6.8}$$

右边的第一项积分是从 A 经 L、R 到 B，所以是在导线内进行的. 在导线的横截面很小时可以不考虑电流在截面内的变化，电流密度可看作是均匀的. 利用

$$\boldsymbol{j}=\sigma_c(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{外}),$$

得右边的第一项为

$$\begin{aligned}\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_A^B \frac{1}{\sigma_c}\boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_A^B \boldsymbol{E}_{外}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= \int_A^B \frac{I}{\sigma_c S}\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\mathscr{E}_{外}\\ &= IR-\mathscr{E}_{外},\end{aligned}$$

式中 $\mathscr{E}_{外}$ 是外电动势. (6.8)式右边的第二项是在电容区积分，设 $\varphi_B-\varphi_A$ 表示电容器两端的电势差，则

$$\int_B^A \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\varphi_B-\varphi_A.$$

(6.8)式左边的回路积分可以根据法拉第感应定律写成

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

利用导线自感的定义 $L=\dfrac{\Phi}{I}$，则上式为

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

这样，(6.8)式变成

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=IR+\varphi_B-\varphi_A-\mathscr{E}_{外}.$$

因为电容器上 $\varphi_A-\varphi_B=\dfrac{Q}{C}$，所以有

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+IR+\dfrac{Q}{C}=\mathscr{E}_{外},\\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I; \end{cases} \tag{6.9}$$

或

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C}=\mathscr{E}_{外}.$$

若 $\mathscr{E}_{外}$ 给定，且回路的 L 和 C 已知，则由方程(6.9)可求出回路中电流的变化规律. (6.9)式就是大家熟知的**电工学方程**.

§6.4 导体表面层内的场分布 趋肤效应

建立了似稳场基本方程以后,我们进一步来研究它们所描写的电磁场在导体表面层内的分布特征. 变化着的磁场在导体内可以感生电场,电场又引起电流,这种电流称为**傅科电流**. 傅科电流与原来电流叠加的结果,总是增大导体边缘的电流密度,同时使导体内部的电流密度减少,这是导体内交变场分布的主要特征. 为了具体说明导体表面层内场分布的特征,我们来讨论一个最简单的情况:

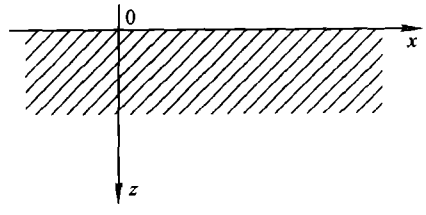


图 6.2

设导体占据 $z>0$ 的空间,如图 6.2. 电磁场以一定的频率作简谐变化,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

令 $\boldsymbol{E}$ 的方向与导体面平行,由此我们假定只有一个分量 E_x,E_x 只是 z 的函数. 于是,扩散方程(6.6)现在变成

$$(\nabla^2 + \mathrm{i}\mu\sigma_c\omega)E(\boldsymbol{r}) = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z) + \mathrm{i}\mu\sigma_c\omega E(z) = 0. \tag{6.11}$$

一般线性方程的解具有 $\mathrm{e}^{\pm pz}$ 的形式,现在,我们令

$$E(z) = E_0\mathrm{e}^{-pz},$$

将其作为试解代入(6.11)式即有

$$p^2 = -\mathrm{i}\omega\mu\sigma_c,$$

即

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c}(1-\mathrm{i}),$$

所以

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_0\mathrm{e}^{-pz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \boldsymbol{e}_x E_0\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\alpha z)},$$

取实部得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z), \tag{6.12}$$

式中 $\alpha = \left(\frac{1}{2}\mu\omega\sigma_c\right)^{1/2}$. 由解看出:场随着 z 的增加而减小,在 $z = \frac{1}{\alpha}$ 深度处,场强减少到导体表面($z=0$)处的 1/e,我们称这个深度为透入深度,记为 δ:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}}. \tag{6.13}$$

(6.13)式表明,频率越高或电导率越大,则场所集中的导体的表面层越薄. 理想导体时 $\sigma_c \to \infty$,$\delta \to 0$,场和电流全部趋向于表面.

现在我们来计算导体内的能量损耗. 以导体表面的单位面积为底取一个柱体,则柱体内的能量损耗的时间平均值为

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle &= \left\langle \int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau \right\rangle = \left\langle \int_0^\infty \sigma_c E^2 \mathrm{d}z \right\rangle \\ &= \sigma_c E_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha z}\langle \cos^2(\omega t - \alpha z)\rangle \mathrm{d}z \\ &= \frac{\sigma_c}{4\alpha} E_0^2. \end{aligned} \tag{6.14}$$

横穿导体表面上单位长度的横截线的总电流平方平均值为

$$\langle I^2\rangle = \left\langle \left| \int_0^\infty j\,\mathrm{d}z \right|^2 \right\rangle = \frac{\sigma_c^2}{4\alpha^2} E_0^2. \tag{6.15}$$

为了描述导体表面的场和电流的关系,引入表面电导率 Σ_c,其定义是

$$\Sigma_c = \frac{\langle I^2\rangle}{\langle Q\rangle}. \tag{6.16}$$

把(6.14)和(6.15)式代入上式即得

$$\Sigma_c = \sqrt{\frac{2\sigma_c}{\omega\mu}}. \tag{6.17}$$

这就是说,表面电导率与导体的电导率的平方根成正比. 对大多数金属来说 $\mu \approx \mu_0$,所以 Σ_c 与 σ_c 之间的比例系数与金属的性质无关. (6.17)式即是正常趋肤效应的基本关系式,它与常温下的实验结果一致.

由前面的讨论可以预料,当频率增加时,导体中的电流都集中到表面,这种趋肤现象在电子工程技术中经常会碰到. 作为一个例子,我们着重讨论圆柱形导线中的电流分布,这是一个最有实用价值的问题.

设导线内的电场与导线轴平行,其场满足扩散方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \sigma_c \mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0. \tag{6.7}$$

由对称性分析,电流和场都是柱对称的,因此取柱坐标系(ρ, ϕ, z). $\boldsymbol{E}$ 只有 z 方

向分量,令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z E(\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

代入方程(6.7)得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}E(\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}E(\rho)+k^2E(\rho)=0,$$

式中 $k=\frac{1}{\delta}(1+\mathrm{i})$. 这是一个零阶贝塞尔方程. 由于 $\rho\to 0$ 时 $E(\rho)$必须有限,故方程的解为

$$E(\rho)=E_0\mathrm{J}_0(k\rho).$$

导线中的电流分布为

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_z\sigma_c E_0\mathrm{J}_0(k\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

常数 E_0 可由 $I_0=\int\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 定出,I_0 是总电流. 不难算得

$$E_0=kI_0/2\pi\sigma_c R\mathrm{J}_1(kR),$$

R 为圆柱体的半径,J_1 为一阶贝塞尔函数. 所以,电流表达式为

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_z\frac{kI_0}{2\pi R\mathrm{J}_1(kR)}\mathrm{J}_0(k\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

对以上情况讨论如下:

(1) 若 $\delta\gg R$,即 $k\rho\to 0$,则 $\mathrm{J}_0(k\rho)\to 1$,$\mathrm{J}_1(kR)\to\frac{kR}{2}$,所以

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_z\frac{I_0}{\pi R^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

这表示电流是均匀分布的. $\delta\gg R$ 的条件意味着频率很低而导线很细时趋肤效应很微弱而被忽略.

(2) 若 $\delta\ll R$,贝塞尔函数的渐近式为

$$\mathrm{J}_v(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})=\mathrm{I}_v(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\frac{\pi}{2}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}},$$

式中 $\mathrm{I}_v(x)$为虚宗量贝塞尔函数,由上式可得

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_z\frac{kI_0}{2\pi R}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{R-\rho}{\delta}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{R-\rho}{\delta}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

上式表明随着$(R-\rho)$的增大(即从表面到柱轴线),电流分布以指数形式衰减,并且 ω 越大(即 δ 越小)指数衰减越快,趋肤现象越强;电导率 σ_c 越大,趋肤现象也越严重. 理想导体情况下,电流只以线电流形式出现.

*§6.5 反常趋肤效应

按照上节所研究的趋肤效应的理论，表面电导率 Σ_c 与电导率 σ_c 的平方根成正比，并且比例系数不依赖于金属的具体性质. 然而实验表明，在低温下这些结论不再成立. 图 6.3 是频率 $\omega=10^{10}$ s，10 K 以下各种不同温度时对银、金、铅所做的实验的结果. 它展示了两个明显的特点：(1) 在 $\sqrt{\sigma_c}$ 很小时，Σ_c 与 $\sqrt{\sigma_c}$ 呈线性关系，而当 $\sqrt{\sigma_c}$ 很大时，Σ_c 趋向于饱和；(2) 对于不同的金属，其饱和值不同，换句话说，它依赖于金属的性质. 这两个特点表明在低温下趋肤效应出现了反常现象，人们称之为**反常趋肤效应**.

反常趋肤效应的发现显示了我们原先的趋肤效应理论在什么地方出了毛病，它迫使我们去重新审查一下原先理论中的有关假定：第一，我们略去了位移电流；第二，我们使用了经验规律 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$.

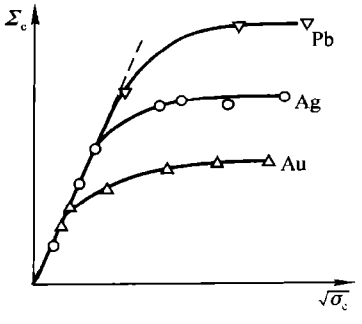


图 6.3

对于第一个假定，在上述的实验条件下仍是成立的. 因为 $\omega=10^{10}$ s 相当于波长 $\lambda\approx 20\ \text{cm}^2$，而 σ_c 一般在 10^7 S/m 数量级，所以 $\delta\approx 10^{-4}\ \text{cm}^2$. 可见，$\lambda\gg\delta$ 或 $\omega\ll\frac{\sigma_c}{\epsilon}$ 严格成立，在这种情况下即使考虑位移电流，对结果也不会产生明显的影响.

电流与电场的依赖关系欧姆定律 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$ 是一个局域关系式，其中已经暗含了这样一个重要的假定：$\boldsymbol{r}$ 点处的电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 只依赖于该点的电场，而与空间其他点处的场无关. 这种假设一般说来是不合理的. $\boldsymbol{r}$ 处的电流密度的总值 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 应当由空间所有点处电场的贡献决定，其数学表达式为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\int_V G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' , \tag{6.18}$$

式中核 $G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 决定 $\boldsymbol{r}$ 处的电流密度与 $\boldsymbol{r}'$ 处的电场之间的关联程度. 如果关联是局域的，即只在无限接近的各点处关联才密切，则可令 $G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)=\sigma_c\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，于是

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\sigma_c\int_V\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')E(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\sigma_c\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),$$

这即是通常的欧姆定律. 实际上只有当金属中的电子的平均自由程 l 远小于场发生显著变化的距离 δ 时，局域关系才是正确的. 当温度降低时，电子的平均自由程增大，以至于低温下 $l>\delta$，远程关联作用加强. 因此，讨论反常趋肤效应时应当把(6.18)式作为基本的出发点.

引入新的变量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，把电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$ 改写为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})$，并在 $\boldsymbol{r}$ 处展开，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{R}\cdot(\nabla\boldsymbol{E})\Big|_{R=0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{RR}:(\nabla\nabla\boldsymbol{E})\Big|_{R=0}+\cdots$$

将之代入(6.18)式，考虑到交叉项积分为零，便可得到

$$\int G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=\sigma_c\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\sigma_c^{(2)}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\sigma_c^{(4)}\nabla^4\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\cdots$$

式中

$$\sigma_c = \int G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\mathrm{d}\tau',$$

$$\sigma_c^{(2)} = \frac{1}{6}\int G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)^2\mathrm{d}\tau',$$

……

引入一个体系的特征长度 r_0，其定义为

$$r_0^2 = \frac{\sigma_c^{(2)}}{\sigma_c}, \tag{6.19}$$

它的量纲是长度量纲，其物理意义代表关联作用半径. 显然，局域关联时，$r_0 = 0$. 于是，(6.18)式可写成

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma_c \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \sigma_c r_0^2 \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \cdots \tag{6.20}$$

如果场在空间的变化不太快，以至于下式成立：

$$\frac{|r_0^2 \nabla^2 \boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}|} \ll 1,$$

则(6.20)中的高阶导数项都可略去，又回到局域关系. 这里我们又一次看到，在特征长度 r_0 内，场变化不显著时局域关系才适用.

为了讨论反常趋肤效应，我们只需保留展开式中的头两项，于是代替扩散方程(6.7)的新的方程是

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\omega\mu\sigma_c(1 + r_0^2 \nabla^2)\boldsymbol{E}. \tag{6.21}$$

我们仍讨论平面问题. 设导体占据 $z \geqslant 0$ 的空间，$z = 0$ 是边界面，并设方程(6.21)的解为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E(z) = \boldsymbol{e}_x E_0 \mathrm{e}^{-pz},$$

代入上面的方程立即得到

$$p^2 = -\mathrm{i}\mu\omega\sigma_c(1 + r_0^2 p^2).$$

令 $\sigma_\omega = \omega\mu\sigma_c$，则上式可改写成

$$p^2 = \frac{-\mathrm{i}\sigma_\omega}{1 + \mathrm{i}\sigma_\omega r_0^2},$$

把 p 分成实部和虚部，即 $p = \alpha + \mathrm{i}\beta$，得到下述决定 α 和 β 的两个方程：

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\dfrac{\sigma_\omega^2 r_0^2}{1 + \sigma_\omega^2 r_0^4}, \\ 2\alpha\beta = -\dfrac{\sigma_\omega}{1 + \sigma_\omega^2 r_0^4}. \end{cases} \tag{6.22}$$

当 σ_c 很小，即 $\sigma_\omega r_0^2 \ll 1$ 时，$\alpha^2 - \beta^2 \approx 0$，$2\alpha\beta \approx -\sigma_\omega$，于是

$$|\alpha| = |\beta| = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma_c}{2}} = \frac{1}{\delta}.$$

这就是正常趋肤效应的结果，其表面电导率 $\Sigma_c = \dfrac{\sigma_c}{\alpha} \propto \sqrt{\sigma_c}$.

当 $\sigma_\omega r_0^2 \gg 1$ 时，近似地有

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{r_0^2},\quad 2\alpha\beta = \frac{-1}{\sigma_\omega r_0^4},$$

因而得到 $\alpha=\frac{1}{2\sigma_\omega r_0^3}$，$\beta=-\frac{1}{r_0}$，这样透入深度为

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=2\sigma_\omega r_0^3=2\omega\mu r_0^3\sigma_c. \tag{6.23}$$

不难计算，表面电导率为

$$\Sigma_c=2\alpha\sigma_c/(\alpha^2+\beta^2)=\frac{\sigma_c}{\sigma_\omega r_0}=\frac{1}{\omega r_0\mu}. \tag{6.24}$$

(6.24)式表明，在 $\sigma_\omega r_0^3\gg1$ 时表面电导率 Σ_c 与电导率 σ_c 无关，意味着达到饱和值，并且 Σ_c 与 r_0 成反比，r_0 直接决定于各种金属的性质，因此解释了反常趋肤效应的另一个特点.

*§6.6 地球磁场的起源

似稳场理论中一个很重要也很有趣的问题是关于地球磁场的起源，我们观察到的地球磁场基本上是一个偶极场，所以人们最先认为地球是一个均匀的磁化球. 但是，遗憾的是地球表面平均来讲并没有被磁化到所要求的程度，而且在几十公里的深处，温度已大大超过磁性物质的居里点. 所以，必须寻求另一种解释.

可能性之一，地球是一个巨大的电磁体. 有人假设地球内部有自由衰减的电流，这种电流产生我们今天观察到的地球磁场. 当然，电流最初是怎么形成的？又是如何维持下来的？这是一些棘手的问题. 我们暂且假定它是由大气中大型的非周期性磁暴引起的电磁感应所产生的，再来讨论这种机制是否合理.

设地球是各向同性的，球内部没有位移电流和电荷密度，则利用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，可把扩散方程(6.6)式写成

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu\sigma_c\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{6.25}$$

(6.25)式也可以直接从似稳场方程(6.3)式利用库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 得到. 式中 μ、σ_c 是地球的磁导率和电导率. 我们感兴趣的是无径向电流的情况，所以我们总可以选取下述形式的矢势：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}\times\nabla\psi,$$

ψ 是任意标量函数. 于是，得到 ψ 的扩散方程：

$$\nabla^2\psi=\mu\sigma_c\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

在球坐标系中，$r\to0$ 时存在有限解的通解形式为

$$\psi=\sum_{l,m}C_{lm}\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{\mu\sigma_c}t},$$

其中 $\mathrm{j}_l(kr)$ 是球贝塞尔函数，$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ 为球谐函数. 如果认为 ψ 与方位角 ϕ 无关，则解的空间部分为

$$\psi_0=\sum_l C_l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

因为我们观察到的地磁场是一个偶极场，即

$$H_r = \frac{-2M\cos\theta}{r^3},\quad H_\theta = -\frac{M\sin\theta}{r^3},$$

所以除 C_1 外其余的 $C_l = 0$，故

$$\psi_0 = C_1 j_1(kr) P_1(\cos\theta).$$

于是，矢势空间部分 $\boldsymbol{A}_0$ 为：

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{r}\times\nabla\psi_0 = \boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} = -C_1 j_1(kr)\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi.$$

由 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$，在球坐标系中得到

$$B_{0r} = -\frac{2C_1}{r}j_1(kr)\cos\theta,$$

$$B_{0\theta} = \frac{C_1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rj_1(kr)]\sin\theta,$$

$$B_{0\phi} = 0.$$

由地球表面 $r = R$ 处 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的切向和法向的边值关系，得到

$$-\frac{2C_1}{R}j_1(kR) = -\frac{2M}{R^3},$$

$$\frac{C_1}{R}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rj_1(kr)]\right\}_{r=R} = -\frac{M}{R^3},$$

其中我们已令 $\mu = 1$. 由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[rj_1(kr)]\Big|_{r=R} + j_1(kR) = 0,$$

利用 $j_1(kr) = \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{\cos(kr)}{kr}$，由上式得

$$\sin(kR) = 0,$$

所以

$$kR = n\pi,$$

即

$$k = \frac{n\pi}{R}, n = 1,2,3,\cdots$$

这样，磁场随时间改变的因子是 $\exp\left[-\frac{(n\pi)^2}{\sigma_c R^2}t\right]$，因而自由电流（即地磁场）的自由衰减时间为（取 $n = 1$）

$$\tau = \frac{\sigma_c R^2}{\pi^2}. \tag{6.26}$$

若用铁的电导率，则不难计算 $\tau = 1.0\times10^5$ a，这就是说，地磁场建立十万年以后，就衰减到很小的值. *这是与观察事实相矛盾的. 可见，把地球看成电磁体的理论，困难是很大的.*

目前较为普遍接受的是“自激发电机”理论，它把地核看成一个发电机. 如果略去位移电流，并且地核物质是流动着的导电介质，则麦克斯韦方程为如下形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\epsilon}\rho, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \end{cases} \tag{6.27}$$

其中 $\boldsymbol{j} = \sigma_c[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$，$\boldsymbol{v}$ 是地核物质的流动速度. 设液体不可压缩，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$，则由上述方程组得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \mu\sigma_c \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = \mu\sigma_c \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

地磁场变化很慢，可看作是稳定的，即 $\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$，所以

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \mu\sigma_c \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = 0. \tag{6.28}$$

如果给定一个速度分布 $\boldsymbol{v}(r, \theta, \phi)$，能找到一个关于方程(6.28)的磁场 $\boldsymbol{H}$ 的解，则就找到了一种能维持 $\boldsymbol{H}$ 稳定的“自激发电机”. 如果给出的 $\boldsymbol{v}$ 恰到好处，使得到的解 $\boldsymbol{H}$ 正好满足地球磁场的边界条件，同时在球外是一个偶极型的磁场，那么我们认为这是一个很大的成功. 到目前为止，虽找到了这样的几个特解，但这样一些特解所对应的 $\boldsymbol{v}$ 的动力学原因仍是一个悬而未决的问题. 因此，虽然地磁起源问题的解释已找到了一个前进的方向，但真实可行的途径还需努力去探索.

习　题

6.1　半径为 R，磁导率为 μ，电导率为 σ_c 的无限长导体圆柱放置在均匀外磁场 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$ 中，圆柱轴线方向为 z 轴方向. 试求磁场除去后柱内磁场随时间的变化规律.

6.2　半径为 R，磁导率为 μ，电导率为 σ_c 的球放入均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，如果在 $t = 0$ 时除去磁场 $\boldsymbol{B}_0$，求 $t > 0$ 时的磁场分布.

6.3　一个半径为 R，磁导率为 μ，电导率为 σ_c 的球，如果在 $t = 0$ 时加上均匀的外磁场 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$，求 $t > 0$ 时的磁场分布.

6.4　半径为 R，磁导率为 μ，电导率为 σ_c 的导电球置于均匀的谐变磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{-i\omega t}$ 中，试求球内的傅科电流分布及球吸收的功率(设 $\dfrac{\omega R}{c} \ll 1$，精确到一级近似).

6.5　试求出均匀周期性外磁场中的各向同性导电球的磁化率.

*第七章　超导电动力学

超导是近代物理基础研究的重要课题，同时它也是极具有应用前景的课题，大部分的应用都与超导体的电磁性质有关. 超导电性的自洽理论必须是量子的，但我们仍可用经典的概念唯象地建立起关于超导体的电动力学.

§7.1　超导体的电磁性质

1. 零电阻性

1911 年，昂内斯在液氦温度下研究金属的电阻与温度的关系时，发现在 $T=4.2\ \mathrm{K}$ 附近水银样品的电阻从 $0.125\ \Omega$ 突然降至无法测量出来，据估计小于 $10^{-14}\ \Omega$. 以后不断改进实验方法，发现电阻率的上限逐步向零逼近，如图 7.1 所示. 我们把这种现象称为**零电阻性**或**超导电性**. 出现超导电现象的那个温度称为**转变温度**或**临界温度**，记为 T_c. 在 1911 年以后不久，事情变得清楚起来了，超导现象不是一个孤立的现象，事实上很多金属元素，当温度降低

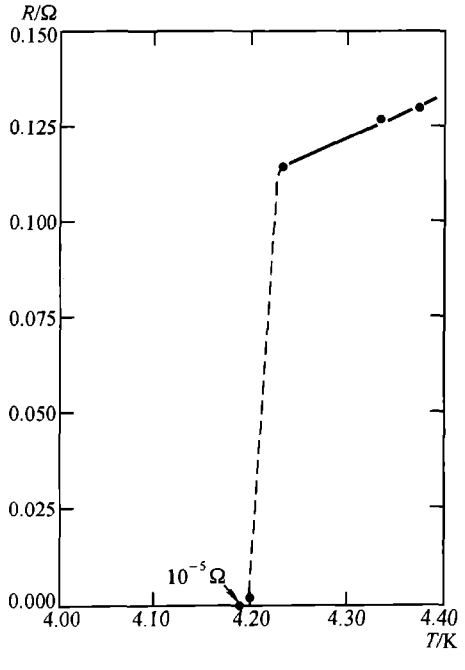


图 7.1

到一定的温度时，都呈现超导现象，临界温度 T_c 的值与物质的性质有关. 在 T_c 以上，金属为正常态；T_c 以下金属进入了一种新的状态，称为超导态，这时金属的直流电阻消失. 超导体当然是一种理想的导体.

2. 临界磁场

超导体的零电阻性发现以后，人们曾企图利用超导体制造无损耗的强磁场. 然而实验发现，当把超导体放进磁场中，并逐渐增大磁场强度到某一特定值后，超导体就又出现电阻，超导电性遭到破坏. 我们把磁场强度的这个特定值称为**临界磁场**，记为 H_c. 实验发现临界磁场 H_c 与温度有关，不同超导材料的 H_c 随温度变化的关系不一样，无量纲处理后，其间的关系可统一用经验公式表示为

$$H_c(T) = H_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]. \tag{7.1}$$

临界场 H_c 与温度 T 的函数曲线如图 7.2 所示，它把平面分成两个区域，在 $H_c - T$ 曲线下的区域，物体处于超导状态，在曲线的上面，物体处于正常状态，所以常称 $H_c - T$ 曲线为**相变曲线**.

由于超导体受到临界磁场的限制，因而如超导体内流有电流，当电流增加到某一特定的值时也会破坏超导体的零电阻性，所以同样存在一个**临界电流** I_c，这是由于超导体内的电流在表面产生的磁场引起的，所以 I_c 与温度 T 的关系与 H_c 与 T 的关系相同，即

$$I_c = I_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]. \tag{7.2}$$

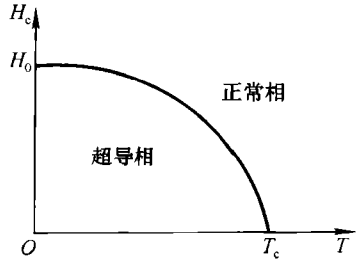


图 7.2

3. 迈斯纳效应

把超导体放入磁场中，超导体完全把磁感线排斥到体外，这一特性与超导体在何种条件下转变为超导态完全无关. 这个现象是迈斯纳在 1933 年首先发现的，故称为**迈斯纳效应**.

迈斯纳效应表明，在超导体内部 $\boldsymbol{B}=0$. 实验进一步发现磁场只能透入超导体表面一定的深度，这个深度称为**透入深度**，其数量级约为 10^{-5} cm. 迈斯纳效应不能用超导体的零电阻性解释. 因为电阻率为零，即 $\sigma_c \to \infty$，超导体内的电场 $\boldsymbol{E}=0$，根据法拉第感应定律得到 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ = 常矢量. 可见，它们是两个独立的效应. 当然，下面我们将会看到，超导体的磁性质——迈斯纳效应要比超导体的电性质——零电阻性意义更深刻.

4. 同位素效应

超导体的特别重要的特性是同位素效应. 我们注意到超导相和正常相的结晶态是相同的，但是，仔细研究了同一种超导材料的不同的同位素以后，发现临界温度 T_c 与原子量有下述关系：

$$T_c \propto M^{-1/2}. \tag{7.3}$$

倘若超导体性质是由于电子的相互作用所导致的话，由于同位素原子结构完全相同，电子状态完全一样，因而 T_c 都应相同. 同一种材料的同位素之间的主要差别在于中子数目的不同，

所以同位素效应暗示着电子与晶格之间的相互作用是极为重要的因素. 正是同位素效应的发现才促使人们产生了一幅超导电性的物理图象:由于电子同晶格的相互作用,使每两个电子之间产生间接的吸引力,从而结合成对,形成束缚态,这种电子对称为**库珀对**. 每个库珀对都有一定的结合能 Δ,其大小约为 $10^{-8}\sim10^{-4}$ eV. 低温时 $kT<\Delta$,热运动不会破坏库珀对;当 $kT>\Delta$ 时,热运动把库珀对拆散. 所以 $T_c\approx\frac{\Delta}{k}$ 是超导态的临界温度,Δ 是能隙,它与电子-晶格相互作用直接有关. 本来,在常温下,晶格对电子的散射是电阻率的直接根源;但在低温下,晶格对电子的相互作用使电子处于有序的状态——库珀配对,此时的电流是库珀对的有序流动,从而导致超导电性.

§7.2 伦敦方程

超导电动力学的主要内容,就是要对上述特性给以唯象的描述. 我们知道,电磁系统的基本规律是麦克斯韦方程组,不管体系是何种性质的介质:是各向同性的还是各向异性的,是磁介质还是电介质,是导电介质还是绝缘介质,它们的宏观电磁现象都由这个方程组描述. 唯一要注意的是,介质的不同意味着电磁性质的本构关系的差别. 例如,电介质 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$,磁介质 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$,导体 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$ 等等. 因此从麦克斯韦理论的意义上来说,超导体不过是一种具有奇特电磁性质的介质,物理学家的任务之一正是要找到这一特殊介质所特有的电磁性质的本构关系. 伦敦理论是根据超导体的零阻特性和迈斯纳效应,对超导体作了一些合理的假设,从而对超导体的电磁性质进行描述的唯象理论.

1. 二流体模型

超导体的二流体模型是把超导体看成普通的导体,所以 $\mu\approx\mu_0,\varepsilon\approx\varepsilon_0$. 超导体内存在着两种电流:一是没有配成对的正常电子流动产生的电流 $\boldsymbol{j}_n$,另一种是配成库珀对的超导电子流动产生的电流 $\boldsymbol{j}_s$,总电流密度为 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_n+\boldsymbol{j}_s$. 超导体满足的方程为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{j}_n+\boldsymbol{j}_s)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{cases}\tag{7.4}$$

连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{j}_n+\boldsymbol{j}_s)=0.\tag{7.5}$$

正常电子运动时和晶格发生碰撞而表现为正常电阻,故

$$\boldsymbol{j}_n=\sigma_c\boldsymbol{E}\ .\tag{7.6}$$

然而,超导电子是被晶格"组织"起来的集体,它们有序地运动,因而不呈现电阻性,欧姆定律不成立. 因此,我们着重要研究 $\boldsymbol{j}_s$ 与场之间的关系.

2. 伦敦第一方程

我们说,在有电阻的导体中,电场的作用是维持电流;在无电阻的超导体中,电场使超导

电子作加速运动. 所以,超导电流 j_s 与电场的关系可从超导电子的运动方程导出,即

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -e\boldsymbol{E},$$

其中 m 为电子质量,e 为电子电荷,$\boldsymbol{v}$ 为电子速度. 若单位体积内有 n_s 个超导电子,则

$$\boldsymbol{j}_s = -n_s e\boldsymbol{v},$$

由于 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$,所以我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s - \frac{1}{n_s e}\boldsymbol{j}_s\cdot\nabla\boldsymbol{j}_s = \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{E}. \tag{7.7}$$

(7.7)式称为**伦敦第一方程**,为了简单起见,通常只研究线性化的方程,即

$$\boldsymbol{E} = \frac{m}{n_s e^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s. \tag{7.8}$$

线性化的伦敦第一方程反映了超导体的零电阻性质. 很容易看出,若超导电流是恒定的,即 $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s = 0$,则 $\boldsymbol{E} = 0$,于是从(7.6)式得到 $\boldsymbol{j}_n = 0$,因此,此时的超导体内只有无损耗的超导电流,若超导电流是交变的,则 $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s = \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{E} \neq 0$,因而 $\boldsymbol{j}_n$ 也不为零,这时超导体出现了**交流损耗**.

3. 伦敦第二方程

伦敦第一方程解释了超导体的完全导电性,但能否解释超导体的迈斯纳效应呢? 下面我们来研究一下这个问题. 由伦敦第一方程(7.8)式可得总电流所满足的方程式为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{j}_s + \boldsymbol{j}_n) = \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{E} + \sigma_c\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{7.9}$$

略去位移电流,则麦克斯韦方程组(7.4)式的第四式为

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}, \tag{7.10}$$

(7.9)式变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j} = \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{E}, \tag{7.11}$$

将(7.10)式两边对 t 求导,则有

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{B}} = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}.$$

把(7.11)式代入上式,然后再对两边取旋度,得

$$\nabla\times\nabla\times\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}\nabla\times\boldsymbol{E},$$

即

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{B}} = \alpha^2\dot{\boldsymbol{B}}. \tag{7.12}$$

令 $\delta_L = \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,称为**透入深度**.

为了解 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 的性质,现在我们假定有一半无限大的金属导体,如图 7.3,$z\geqslant 0$ 的区域充满金属导体,变化磁场在 x 方向,即 $\boldsymbol{B} = B(z)\boldsymbol{e}_x$. 则(7.12)式为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\dot{B} - \alpha^2\dot{B} = 0, \tag{7.13}$$

方程(7.13)的解为

$$\dot{B}(z) = \dot{B}(0)e^{-\alpha z}. \tag{7.14}$$

$\dot{B}(0)$是磁场变化率在 $z=0$ 处的值,方程(7.14)说明深入到导体内 $z \gg \delta_L$ 处的场不变,这表示(7.12)式不能说明迈斯纳效应. 即伦敦第一方程只能解释超导体的完全导电性. 但仔细分析一下(7.12)式则可以看出,(7.12)式已接近得到完全逆磁性,只要我们把 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 换成 $\boldsymbol{B}$ 即可. 为此,我们把伦敦第一方程(7.8)式代入麦克斯韦方程组(7.4)式中的第二式,则有

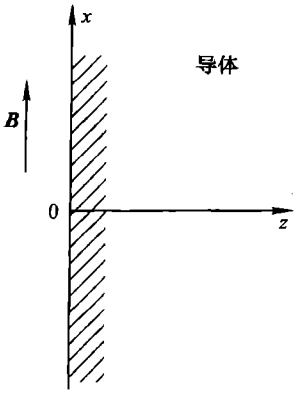


图 7.3

$$\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2}\frac{\partial}{\partial t} j_s\right) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} j_s\right) + \boldsymbol{B}\right] = 0,$$

于是有

$$\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} j_s\right) + \boldsymbol{B} = \text{常矢量(与时间无关)}.$$

假定此常矢量为零,则有

$$\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} j_s\right) + \boldsymbol{B} = 0. \tag{7.15}$$

(7.15)式称为**伦敦第二方程**,它反映了超导电流与磁场的关系. 伦敦第一、二方程建立了电流与电场、磁场之间的联系,在这一点上它们与普通导体中的欧姆定律 $j = \sigma_c E$ 相对应. 需要强调的是,普通导体中的电流由电场来维持,但超导体则完全不同. 超导电流是靠磁场来维持的,电场只是起加速超导电流的作用. 伦敦第二方程反映了迈斯纳效应,这可从下面的计算看出.

在 j_s 恒定的情况下,由(7.4)式的第四式得

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 j_s,$$

两边取旋度,利用伦敦第二方程则得

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}\boldsymbol{B} = 0.$$

令 $\alpha^2 = \dfrac{\mu_0 n_s e^2}{m}$,则

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \alpha^2 \boldsymbol{B} = 0. \tag{7.16}$$

类似于前面的讨论,如果设超导体占据 $z>0$ 的空间,$\boldsymbol{B} = B(z)e_x$,则

$$\frac{d^2}{dz^2}B - \alpha^2 B = 0,$$

其解为

$$B = B_0 e^{-\alpha z}.$$

显然,磁场随着 z 的增加而指数衰减,或者说磁场不能进入超导体内部,只能透入超导体表面薄层,其透入深度为

$$\delta_L = \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\right)^{1/2}. \tag{7.17}$$

我们对此讨论如下：

(1) 超导体表面层内的磁场为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x B_0 e^{-\alpha z}$，于是，由 $\nabla \times \boldsymbol{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{B}$ 不难算得磁场的感应电流

$$\boldsymbol{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\alpha B_0 e^{-\alpha z}(-\boldsymbol{e}_y).$$

所以，伦敦理论认为，迈斯纳效应归结为外磁场在超导体表面层内感生了超导电流，其大小和分布正好把外磁场完全屏蔽掉.

(2) 伦敦方程不能取代麦克斯韦方程组. 伦敦方程给出了方程组(7.4)中的超导电流 $\boldsymbol{j}_s$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的定量关系，它是超导体这种特殊介质的电磁性质的本构关系. 超导体的电磁现象应当受麦克斯韦方程组和伦敦方程共同制约.

(3) 伦敦理论暗含着两个重要假定：一是透入深度 δ_L 与外磁场无关，二是 δ_L 与样品的大小无关，这可从(7.17)式中看出. 前者等于说，外磁场不影响超导电子密度 n_s 的分布，其实这是不可能的，外磁场会改变电子的行为，因而会影响超导电子的有效数目，所以伦敦理论只是弱场近似；第二个假定也是有局限性的，因为超导电子运动是有序的，在距离小于某一个长度 ξ 时，超导电子的速度是互相关联的，这个长度称为**相干长度**. 超导电子密度在小于相干长度 ξ 的范围内变化很小，但空间距离大于 ξ 时，n_s 变化很明显，因此当样品很小时(例如小于大块样品的相干长度)，小样品中的 ξ 将变小，n_s 的空间变化加剧，它应当是空间的函数，而不应当是常数. 后来的皮帕理论和金兹堡－朗道理论，正是为了克服这两个假定带来的局限性而提出来的.

(4) 超导电子的正则动量：由伦敦第二方程可知

$$\nabla \times \boldsymbol{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{B},$$

因为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

若取库仑规范 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，把以上两式进行比较，可得

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{j}_s \Big/ \left(\frac{n_s e^2}{m}\right),$$

即

$$\boldsymbol{j}_s + \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{A} = 0, \tag{7.18}$$

又由于

$$\boldsymbol{j}_s = -n_s e \boldsymbol{v},$$

故有

$$m\boldsymbol{v} - e\boldsymbol{A} = 0. \tag{7.19}$$

(7.19)式表示：一旦进入超导态时，电子的正则动量就等于零，这一结论是直接由伦敦方程得到的，伦敦注意到了这一奇特的结果，但不明白其含义. 我们知道电子是费米子，满足费米统

计,它要求同一量子力学态中不能同时存在两个电子,超导电子的正则动量等于零,则预示着描写超导态的波函数,由于某种原因,其荷的携带者都具有零动量态.

§7.3 超导体中的电流分布

在静态情况下,我们可以从(7.4)的第四式和伦敦第二方程得到关于超导电流 j_s 的方程. 对(7.9)式求旋度得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{j}_s) = -\frac{n_s e^2}{m} \nabla \times \boldsymbol{B},$$

把 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_s$ 代入,则得

$$\nabla^2 \boldsymbol{j}_s - \alpha^2 \boldsymbol{j}_s = 0, \tag{7.20}$$

其中我们已用了稳定情况下,$\boldsymbol{j}_n = 0$ 及 $\nabla \cdot \boldsymbol{j}_s = 0$ 的条件. 超导电流 $\boldsymbol{j}_s$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方程形式完全一样,因而可以预见,超导电流只可能分布在超导体表面的薄层内.

§7.4 居 间 态

超导的二流体模型是把超导体看成特殊性质的导体. 我们还可以用另一个方案来描写超导体的电磁性质,即把超导体看成一种特殊的磁介质,其特殊性在于超导体的磁性质——迈斯纳效应. 由于超导体内部 $\boldsymbol{B}$ 为零,如果形式上保留 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 这两个物理量,则从关系式 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$ 得到超导的磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{H}, \tag{7.21}$$

因为 $\boldsymbol{M} = \kappa \boldsymbol{H}$,$\kappa = \mu_r - 1$,所以超导体的磁导率和磁化率为

$$\mu_r = 0, \quad \kappa = -1.$$

从磁介质的观点来看,超导体是一种**完全抗磁体**. 并且认为磁介质的电导率 $\sigma_c = 0$,所以超导体中原来意义上的传导电流并不存在,超导电流是磁化电流. 这是因为由边值关系

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = 0$$

可得超导体和真空的界面之间有

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = \mu_0 \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{M} = \mu_0 \boldsymbol{\alpha}_m,$$

利用超导体内部 $\boldsymbol{B}_2 = 0$ 即得表面磁化电流(即超导电流)

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{B}_1. \tag{7.22}$$

由另一个边值关系 $\boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0$ 可得到

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0. \tag{7.23}$$

(7.23)表示超导体表面的磁感应强度的法向分量为零,磁感线处处和表面平行.

利用这种方案讨论超导体的某些性质往往比第一种方案来得方便. 现在我们用这个方案来讨论超导体的一个极为重要的态——居间态.

当把超导体放入外磁场中时,外磁场分布会有所变化,其变化的情况与超导体的形状有关. 因此,有可能出现这种情形:在超导体表面的某些地方,磁场会大于或等于临界磁场 H_c,

而其他部分的磁场仍小于 $\boldsymbol{H}_c$，这样超导体就会出现超导相与正常相两相共存的结构，这种状态称为**居间态**.

为了具体说明问题，我们考虑一个半径为 R 的超导球，把它放在均匀外磁场 H_0 中，$H_0 < H_c$，温度 $T < T_c$. 如图 7.4 所示，这是一个标准的静磁学问题，磁标势 φ 满足的方程为

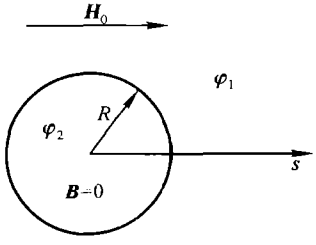


图 7.4

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad (r > R),$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0 \qquad (r < R),$$

交界面上 $r = R$ 时

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2,$$

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0,$$

边界条件：$r \to 0$ 时 φ_2 有限，$r \to \infty$ 时 φ_1 为均匀场标势.

用特解法不难求得

$$\varphi_1 = -H_0 r\cos\theta + \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3},$$

其中 $\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}R^3\boldsymbol{H}_0$. 内部标势为

$$\varphi_2 = -\frac{3}{2}H_0 r\cos\theta,$$

再由 $\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi$ 即可求得球内的磁场为

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{3}{2}\boldsymbol{H}_0 \qquad (\text{注意 } \boldsymbol{B}_2 = 0).$$

超导球的磁化强度则可由 $\boldsymbol{B}_2 = \mu_0(\boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{M}) = 0$ 求得：

$$\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{H}_2 = -\frac{3}{2}\boldsymbol{H}_0.$$

球外的磁场为

$$H_{1r} = H_0\cos\theta - \frac{H_0 R^3}{r^3}\cos\theta,$$

$$H_{1\theta} = -H_0\sin\theta - \frac{H_0 R^3}{2r^3}\sin\theta,$$

所以球面上的磁场为

$$H_{1r} = 0, \quad H_{1\theta} = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta.$$

注意：在赤道上，$\theta = \frac{\pi}{2}$，球外磁场具有最大值

$$H_{1\theta} = -\frac{3}{2}H_0,$$

而在 $\theta = 0、\pi$ 的两极处，磁场为零. 于是，发生了这样一个问题：当 $H_0 = \frac{2}{3}H_c$ 时，赤道处的磁场强度正好为

$$H_\theta = H_c,$$

超导电性首先在赤道处被破坏. 但是,整个超导球的超导性并没有完全丧失,因除赤道外,球面其他部分的磁场 $B_{1\theta}$ 仍小于临界场 H_c. 可见,球体同时存在超导相与正常相.

那么两相的分布情况如何呢? 我们可能很自然地认为磁场从赤道附近透入而使之成为正常相部分,其余部分保持超导相,如图 7.5(a)或图 7.5(b)所示的形状(斜线部分代表正常相). 但是,仔细分析会发现,这种情况是不可能的. 因为,在超导相与正常相的交界面上,磁场应当与交界面相切,其值等于 H_c,因而磁场的等势面如图 7.5(a)中的虚线所示,它与磁场线垂直,而且呈由交界面向正常相散开状. 显然,在等势面散开的方向上,H 的值逐渐减少,因此斜线区域内 $H<H_c$,这与该区域属于正常相的假定矛盾. 所以,图 7.5(a)的分布是不可能的. 如果两相分布形状如图 7.5(b),则在两相的交界面上磁场出现拐点(如 O 点),磁场既要相切于交界面,又要相切于超导球面,磁标势不连续,磁场为无限大. 所以,同样也不可能存在这种结构. 唯一可能的结构是当 $\frac{2}{3}H_c<H_0<H_c$ 时球内两相分布如图 7.5(c)所示,正常相和超导相相间共存,分隔成许多平行的正常层和超导层,这种超导态称为居间态,其相图可以严格地根据热力学的稳定性条件证明.

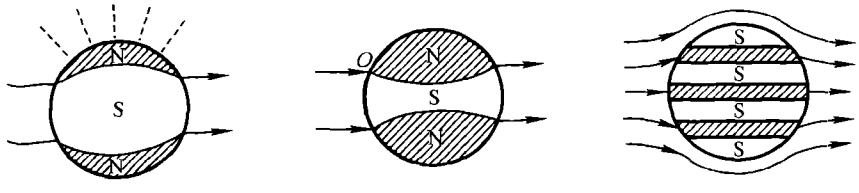


图 7.5

§7.5 磁通俘获和磁通量子化

一个超导环在 $T>T_c$ 时加上外磁场以使一定量的磁通穿过环孔. 把 T 降到 T_c 以下,环孔中的磁通量保持不变,然后把外磁场除去,但磁通量仍被保留在环内,这个现象叫**磁通俘获**. 俘获磁通有如下两个极为重要的性质.

1. 类磁通量守恒

把麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 应用于如图 7.6 的超导环中的封闭曲线 C,C 包围超导环的孔. 以曲线 C 为边界作一任意曲面 S,在 S 面上作下述面积分;

$$\int_S\left[\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,$$

再将伦敦第一方程

$$\boldsymbol{E}=\frac{m}{n_s e^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s,$$

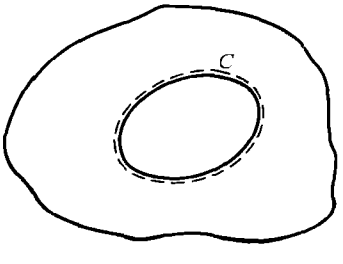


图 7.6

代入上面的积分则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left[\nabla\times\left(\frac{m}{n_s e^2}\boldsymbol{j}_s\right)+\boldsymbol{B}\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\ , \tag{7.24}$$

于是得到

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_C\frac{m}{n_s e^2}\boldsymbol{j}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\Phi'\ , \tag{7.25}$$

式中的 Φ' 是与时间无关的常数. 上式左边的第一项是曲线 C 所包围的磁通量,第二项是超导电流的环量贡献,如果回路 C 离环孔面足够远,由于超导体内超导电流全部集中于表面附近,所以电流的环量(即第二项)为零,这时 Φ' 就等于穿过回路 C 的磁通量,故称(7.25)式中的 Φ' 为**类磁通**. (7.24)式即表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi'=0\ , \tag{7.26}$$

说明类磁通是一个守恒量.

2. 磁通量子化

一个超导电子在磁场中的正则动量为

$$\boldsymbol{p}_s=m\boldsymbol{v}_s-e\boldsymbol{A}\ ,$$

$\boldsymbol{A}$ 是磁场的矢势. 如图 7.6 所示,对闭合回路 C 作线积分.

$$\oint\boldsymbol{p}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint m\boldsymbol{v}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint e\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\ ,$$

由 $\boldsymbol{j}_s=-n_s e\boldsymbol{v}_s$ 得

$$\oint_C\boldsymbol{p}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\oint_C\frac{m}{n_s e}\boldsymbol{j}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-e\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\ ,$$

即

$$\oint_C\boldsymbol{p}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-e\Phi'\ . \tag{7.27}$$

根据量子论,正则动量 p_s 与德布罗意波长的关系是 $p_s=\frac{2\pi\hbar}{\lambda}$,而且超导电子在闭合环中运动时并没有能量损耗,是一种稳定运动,它完全类似于氢原子电子的稳定的轨道运动(相当于量子力学中的定态). 所以,圆环中的超导电子的德布罗意波一定是驻波,这就是说轨道周长应是波长的整数倍,即

$$\oint\boldsymbol{p}_s\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{2\pi\hbar}{\lambda}\cdot(2\pi r)=\frac{2\pi\hbar}{\lambda}\cdot n\lambda=nh\qquad(n=0,\pm1,\pm2\cdots)\ , \tag{7.28}$$

故

$$\Phi'=n\frac{h}{e}\ .$$

可见,类磁通量 Φ' 只能是 $\frac{h}{e}$ 的整数倍. 因为类磁通的实质即是磁通,所以(7.28)式称为**磁通量子化条件**.

磁通量子化条件(7.28)比实测大了 2 倍. 实际上超导电子是配对的库珀电子对,因此超导电子对的动量应当为

$$\boldsymbol{p}_s=2m\boldsymbol{v}_s-2e\boldsymbol{A}\ ,$$

这样,(7.28)式应修改成

$$\Phi' = n\frac{h}{2e}, \tag{7.29}$$

实验证明(7.29)式是正确的. 最小磁通($n=1$)$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07\times10^{-15}$ Wb,称为**磁能量子**.

§7.6 皮帕非定域理论

1. 伦敦规范

在§7.2中,我们导出了超导体的伦敦方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_s = \dfrac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{E}, \\ \nabla\times\boldsymbol{j}_s = -\dfrac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{B}. \end{cases} \tag{7.30}$$

利用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ 把电磁场的势引入伦敦方程,则(7.30)式改写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{j}_s + \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{A}\right) = -\frac{n_s e^2}{m}\nabla\varphi, \tag{7.31}$$

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{j}_s + \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{A}\right) = 0. \tag{7.32}$$

先看(7.31)式,由于 φ 是单值函数,所以在超导体内部任取一闭合回路,对(7.31)式作线积分,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint\left(\boldsymbol{j} + \frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{A}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{n_s e^2}{m}\oint\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0. \tag{7.33}$$

不用说,(7.33)式正是类磁通守恒公式(7.26)式.

对于(7.32)式,我们总可以改写成

$$\boldsymbol{j}_s + \frac{n_s e^2\boldsymbol{A}}{m} = \frac{n_s e^2}{m}\nabla\psi, \tag{7.34}$$

式中的 ψ 仅是在超导体内部定义的任意标量函数,它并不一定是单值函数. 我们不妨仍在超导体内取闭曲线 C,对(7.34)式作绕 C 一周的线积分得

$$\oint_C\left(\frac{m}{n_s e^2}\boldsymbol{j}_s + \boldsymbol{A}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

利用斯托克斯公式,上式可写成

$$\int_S\nabla\times\left(\frac{m}{n_s e^2}\boldsymbol{j}_s + \boldsymbol{A}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{7.35}$$

若闭合曲线 C 可以在超导体内部连续收缩到一点,则 S 是该收缩过程扫过的曲面,它一定在超导体内部;同时(7.32)式在超导体内总是成立的,所以(7.35)式的被积函数恒为零,故

$$\oint_C\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$$

ψ 是单值函数.

但是,如果闭合曲线 C 不能连续地在超导体内收缩到一点,用数学的语言来说,这是一个复连通区域,形象地说,C 中有孔,由于孔区(7.32)式不存在,(7.35)式左边的被积函数也

就不恒为零,所以

$$\oint_C \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{l} = \Phi' \neq 0 .$$

于是,ψ 就是多值函数,Φ'是类磁通量,此时超导电流 $\boldsymbol{j}_s$ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 的一般关系(7.34)式并不确定.

由于单连通超导体(即 C 可连续收缩到一点的)中 ψ 是单值函数,使我们有可能在一定条件下求解 ψ. 实际上,若我们选取库仑规范,即$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$,则从(7.34)式得 ψ 的方程为

$$\nabla^2\psi = \frac{m}{n_s e^2}\nabla \cdot \boldsymbol{j}_s . \tag{7.36}$$

选取库仑规范后 $\boldsymbol{A}$ 仍不是唯一的,我们再加上一个边界条件,即令超导体表面 $\boldsymbol{A}$ 的法向分量为零:

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{A} = 0 , \tag{7.37}$$

则由(7.34)式得到在超导体表面上

$$\frac{n_s e^2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial n} = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{j}_s . \tag{7.38}$$

这样,如果已知 $\boldsymbol{j}_s$ 的散度和表面法向电流(例如与正常导体相连时),ψ 的值也就唯一地由(7.36)和(7.38)式确定了,从而公式(7.34)也就完全被确定了.

我们把矢势 $\boldsymbol{A}$ 的约束条件

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 & \text{(超导体内)}, \\ \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{A} = 0 & \text{(超导体表面)}, \end{cases} \tag{7.39}$$

称为**伦敦规范**. 选择这样一个规范条件后,$\boldsymbol{j}_s$ 和 $\boldsymbol{A}$ 之间就具有确定的关系,即(7.34)式.

我们最感兴趣的往往是无外源的单连通超导体,且处于平衡态,于是一定有

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{j}_s = 0 \quad \text{(表面上)},$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}_s = 0 \quad \text{(体内)}.$$

可见 ψ 只能是一个与空间和时间都无关的常数,这样(7.34)式变成

$$\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{n_s e^2}{m}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) , \tag{7.40}$$

这便是伦敦第二方程在**静态**时的形式.

2. 新的实验结果

方程(7.40)式表明:在伦敦理论中,空间某点的超导电流 $\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r})$ 正比于同一点的矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{j}_s$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的关系是局域的,与此相应的是透入深度公式(7.17)中的 δ_L 与 n_s 及其他常数有关,而与金属中的平均自由程 l 无关. 为了验证伦敦理论的这些预言,皮帕研究了锡-铟合金的超导性质,他发现透入深度 δ *随着平均自由程的增大而减小*,如图 7.7 中的曲线所示,显然这与伦敦理论不符. 除此之外,实验还指出,对大块超导体,透入深度比伦敦理论算出的结果要大 5 倍. 为了解决理论与实验之间的不一

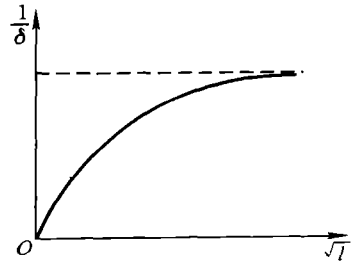


图 7.7

致,皮帕引入了相干长度的概念,对伦敦理论作了重大的改造,建立了皮帕方程.

3. 皮帕方程

从$\frac{1}{\delta}$与$\sqrt{l}$的实验曲线与反常趋肤效应中Σ_c与$\sqrt{\sigma_c}$的实验曲线之间的相似性,皮帕得到很大启发,他认为:电流j_s与矢势$\boldsymbol{A}$的关系正如普通导体中$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{E}$的关系一样,在一般情况下应当是非局域的;而(7.40)式只是一种近似,正如$\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$一样. 因此,皮帕进一步认为,$r$点处的超导电流由该点附近线度为$r_0$的范围内$\boldsymbol{A}$的空间平均值决定,这是因为在$r_0$以内超导电子的运动是互相关联的. 对于纯金属来说,r_0的大小等于BCS理论中的特征长度ξ_0(皮帕相干长度),它不是无限的,对于高度掺杂的超导合金来说,r_0与正常金属中的电子平均自由程l可比拟. 于是,皮帕作了一个特殊的选择:

$$\frac{1}{r_0}=\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{l}, \tag{7.41}$$

并设

$$\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r})=-\frac{n_s e^2}{m}\frac{3}{4\pi\xi_0}\int\frac{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')]}{R^4}e^{-R/r_0}\,d\tau', \tag{7.42}$$

式中$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. (7.42)式就是非局域的**皮帕方程**,它被以后发展起来的微观理论所证实. 皮帕方程建立了感生电流与总的矢势$\boldsymbol{A}$之间的关系. 在外磁场存在时,$\boldsymbol{A}$不仅包括感生电流$\boldsymbol{j}_s$的贡献,还包括外电流的贡献. 所以我们应当同时求解(7.42)和确定总磁场的麦克斯韦方程. 为了从(7.42)式中看清某些重要的物理特征,我们要注意两个重要的特征长度:一是对应皮帕方程的透入深度δ与温度相关,因而和伦敦透入深度δ_L不同;二是皮帕方程中积分核含有r_0这样一个特征长度,它与温度无关,并且比ξ_0和l都要小. 根据这两个特征长度,我们来讨论皮帕方程在两种极端情况下的结果.

(1) 如果$r_0\ll\delta$,即矢势$\boldsymbol{A}$在空间变化缓慢,在r_0的尺度内我们可用$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$直接代替$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')$,于是得到

$$\begin{aligned}j_{sk}&\approx-\frac{n_s e^2}{m\xi_0}A_l(\boldsymbol{r})\frac{3}{4\pi}\int\frac{1}{R^4}R_kR_l e^{-R/r_0}\,d\tau'\\&=-\frac{n_s e^2}{m\xi_0}A_l(\boldsymbol{r})\delta_{kl}\int_0^\infty e^{-R/r_0}\,dR,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r})=-\frac{n_s e^2 l}{m(l+\xi_0)}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\qquad r_0\ll\delta, \tag{7.43}$$

(7.43)式即是皮帕理论中的$\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r})$和$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的局域极限下的关系式. 它比伦敦方程(7.40)多了一个因子$\left(\frac{l}{l+\xi_0}\right)$. 不难证明(见习题7.7)相应的穿透深度为

$$\delta=\delta_L\left(\frac{l+\xi_0}{l}\right)^{1/2}\qquad r_0\ll\delta, \tag{7.44}$$

$r_0\ll\delta$称为局域条件. 对于含有杂质的合金超导体,$l\ll\xi_0$,$\delta\propto\frac{1}{\sqrt{l}}$,这就说明了本节开头提到的实验事实.

(2) 我们再来考虑更典型的非局域极限($r_0\gg\delta$)的情形. 这时一般的解是极为困难的,但采取适当模型及近似计算可以得到非局域极限下的透入深度

$$\delta = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^{1/3}(\delta_L^2\xi_0)^{1/3}, \qquad r_0 \gg \delta, \tag{7.45}$$

或

$$\frac{\delta}{\delta_L} = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}\xi_0}{2\pi\delta_L}\right)^{1/3}.$$

根据实验数据,(7.45)*式就可以正确地解释另一个实验事实——δ 比 δ_L 大.

(7.44)式和(7.45)式是皮帕理论的主要结果.

根据皮帕理论中的两个特征长度 r_0 和 δ,我们可以把超导体分成两大类:满足局域极限条件 $r_0 \ll \delta$ 的超导体称为**伦敦超导体**或**第二类超导体**;而把满足非局域极限条件 $r_0 \gg \delta$ 的超导体称为**皮帕超导体**或**第一类超导体**.

习　题

7.1 厚度为 $2d$ 的超导平板置于外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中. 设表面在 $x = \pm d$ 处,$\boldsymbol{B}_0$ 沿着 z 轴方向,电流沿着 y 轴方向. 试求:(1) 超导体内的场分布和稳态电流分布;(2) 平均磁化强度.

7.2 一无限长的圆柱形超导体放置于均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中,磁场方向与圆柱轴平行,试求柱体内的磁场分布及电流分布?

7.3 试证明:超导体如果是单连通物体,则没有外磁场时,超导体内一般不可能存在任何稳定的电流.

7.4 某个自感为 L 的导体线圈,在正常状态时把它放入外磁场中,已知穿过线圈的磁通量为 Φ_0,温度降低到 $T < T_c$ 后再把外磁场除去,则线圈中电流为多大?

7.5 有两个同轴的超导环,结构相同,两者相距很远,每个环的自感都为 L,并都按相同的方向流有电流 I. 然后,把它们移到一起重叠起来,问每一环中的最终电流 I'_1 和 I''_2 为多大? 把两环重叠起来要作多少功?

7.6 试用方程(7.20)讨论置于磁场中的超导球内的磁场分布.

7.7 类似于 δ_L 的推导,试证明在局域条件下由皮帕方程得到的透入深度为

$$\delta = \left[\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\left(\frac{l+\xi_0}{l}\right)\right]^{1/2}.$$

---

* Fetter A. L., Walecka J. D., Quamtum Theory of Many-Particle Systems(1971).

第八章　电磁波的传播

本章着重研究电磁场的波动性，也就是要研究电磁波在电介质、导体和等离子体中以及在边界面上的传播特性.

§8.1　电磁波在非导电介质中的传播

在无限大非导电的介质中，如果不存在源，则麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \end{cases} \tag{8.1}$$

其中 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，若介质均匀且不考虑色散特性，则 ε、μ 均可视为常数.

方程(8.1)式是一组齐次线性方程组，用消元法可直接得到电场和磁场所满足的方程为

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} &= 0, \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

式中

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{8.3}$$

(8.2)式是波动方程，由它的解可知电磁场具有波动性，电磁场的能量可以从一点转移到另一点. 最简单的波是平面波，下面我们主要分析(8.2)式的平面电磁波解的特性. 采用直角坐标系，方程(8.2)式可用下述标量方程代表：

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = 0, \tag{8.4}$$

式中的 Ψ 代表 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 中的任一个分量. 令

$$\Psi = A\cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi), \tag{8.5}$$

若(8.5)式是(8.4)式的解，我们把它代入(8.4)式就有

$$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{v^2}\right)\Psi=0,$$

因为 Ψ 不为零,所以 k 与 ω 应满足关系

$$k^2=\frac{\omega^2}{v^2},$$

即

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\ . \tag{8.6}$$

我们对此讨论如下:

(1) (8.5)式中的 A 代表振幅,$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi)$称为振动的相位,$\boldsymbol{k}$ 为等相位面的法线方向,且等相位面是平面,其方程为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\text{常数}, \tag{8.7}$$

所以这种波称为平面波.

(2) 沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的两个相距为$\frac{2\pi}{k}$的等相位面,其相位差为 2π,所以波长为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k},$$

即

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\ . \tag{8.8}$$

由于 $\boldsymbol{k}$ 的方向为等相位面的法线方向,而其大小与波长相关,所以 $\boldsymbol{k}$ 称为波矢量.

(3) 等相位面沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的距离与时间的关系为

$$kr-\omega t+\varphi=\text{常数},$$

故等相位面的法向速度,即相速度为

$$v_p=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\omega/k\ , \tag{8.9}$$

或

$$v_p=1/\sqrt{\varepsilon\mu}\ , \tag{8.10}$$

(8.10)式即是平面电磁波传播的速度,它与介质的性质有关,对于真空 $\varepsilon=\varepsilon_0$,$\mu=\mu_0$,故 $v_p=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=c$.

(4) 因为 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$,$v_p=\omega/k=\frac{\omega}{2\pi}\lambda$,所以有

$$\frac{\omega}{2\pi}=\nu,$$

所以 ω 称为角频率.

(5) 为运算方便计,常把平面波写成复数形式,即

$$\Psi = A e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi)}, \tag{8.11}$$

对(8.11)式应理解为取其实部. 有时把常数因子 $e^{i\varphi}$ 并入振幅 A 中,则

$$\Psi = A_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{8.12}$$

注意,这时 A_0 已是复数 $A_0 = Ae^{i\varphi}$,反之,当电磁波的振幅是复数时,它表示电磁波有相位因子. $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 中的任一分量都满足(8.12)式,可见 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 可以写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \end{aligned} \tag{8.13}$$

式中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 都可以是复矢量. 同理,可以证明下式也是方程(8.4)式的一个解:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t)}, \tag{8.14}$$

这表示电磁波沿反方向传播,相当于反射波.

(6) 因为(8.2)式是由麦克斯韦方程约化而来的,因此满足(8.2)式的解也应满足麦克斯韦方程组,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

把(8.13)式代入,即得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 &= 0, \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 &= 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

这表明,电磁场振动的方向与传播方向 $\boldsymbol{k}$ 互相垂直,电磁波是横波. 同时由方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = \omega\boldsymbol{B}_0. \tag{8.16}$$

上式说明 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 间不独立,且 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 组成右手定则.

(7) 平面波的能流

$$\boldsymbol{S}_P = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}. \tag{8.17}$$

矢积是非线性运算,故(8.17)式中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 都应取实部之后再代入. 我们往往对能流的平均值

$$\langle\boldsymbol{S}_P\rangle = \langle \mathrm{Re}\,\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\,\boldsymbol{H}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}_P\,dt \tag{8.18}$$

感兴趣,利用公式

$$\langle \mathrm{Re}\,\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\,\boldsymbol{H}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$$

(证明见习题 8.1),得到

$$\langle\boldsymbol{S}_P\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\boldsymbol{e}_n. \tag{8.19}$$

同理,能量密度的平均值为

$$\langle w\rangle = \frac{\varepsilon}{2}E_0^2. \tag{8.20}$$

把(8.20)和(8.19)式比较,则得

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\rangle = \langle w\rangle v\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}. \tag{8.21}$$

平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图 8.1 所示.

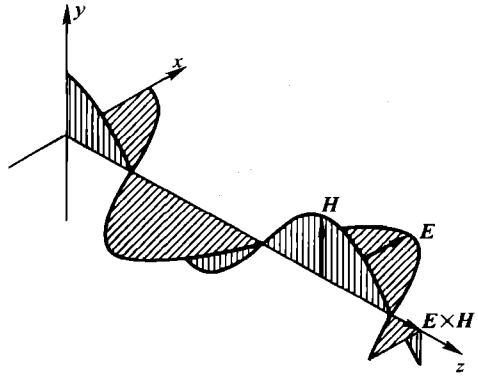


图 8.1

§8.2 波的偏振和偏振矢量

根据矢量的合成法则,我们总可以把电场 $\boldsymbol{E}$ 分解成空间两个固定方向的矢量之和,即

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 E_1 + \boldsymbol{e}_2 E_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{8.22}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是互相正交的单位矢量,如图 8.2(a)所示,$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 一般是复数. 我们令

$$\begin{aligned} E_1 &= (E_+ + E_-)/\sqrt{2}\ , \\ E_2 &= \mathrm{i}(E_+ - E_-)/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{8.23}$$

显然 E_+、E_- 仍是复数. (8.22)式这时可改写成

$$\boldsymbol{E} = \left[E_+\left(\frac{\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\right) + E_-\left(\frac{\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{8.24}$$

我们再令

$$\boldsymbol{e}_+ = (\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2},\ \boldsymbol{e}_- = (\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}\ , \tag{8.25}$$

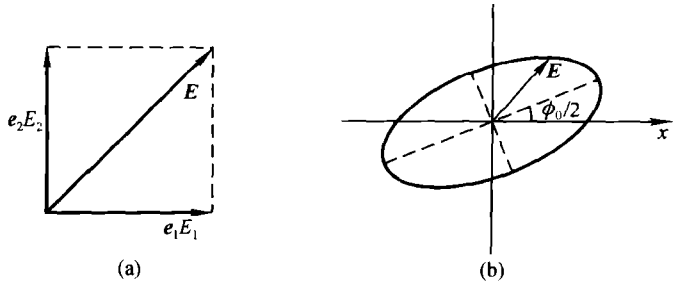


图 8.2

显然 e_+、e_- 是两个新的正交的复单位矢量，不难证明 $e_\pm^* \cdot e_\pm = 1$，$e_\mp^* \cdot e_\pm = 0$，这样(8.22)式还可写成

$$\boldsymbol{E} = (E_+ \boldsymbol{e}_+ + E_- \boldsymbol{e}_-)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{8.26}$$

e_+ 和 e_- 称为**单位偏振矢量**(或偏振基矢)．任意偏振矢量 e 都可以按 e_+、e_- 两个偏振基矢分解．注意，虽然(8.22)式和(8.26)式是等价的，但是采用复偏振基矢后的表达式(8.26)要比(8.22)式具有更明显的物理意义，复偏振基矢 e_+、e_- 使用起来更方便．现在，我们来讨论(8.26)式中 E_+ 和 E_- 代表的物理意义．

(1) 若令 $E_- = 0$，$E_+ \neq 0$(这相当于 $e_+^* \cdot \boldsymbol{E}$)，则由(8.26)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= E_+ \boldsymbol{e}_+ e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ &= E_+ \left(\frac{\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\right)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.\end{aligned}$$

如果我们取具体的坐标系，使 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$，则

$$\begin{aligned}E_x &= \mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{E}) = E_+^0 \cos(kz - \omega t + \alpha), \\ E_y &= \mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{E}) = -E_+^0 \sin(kz - \omega t + \alpha),\end{aligned} \tag{8.27}$$

式中已用 $E_+ = \sqrt{2}E_+^0 e^{i\alpha}$．在上两式中消去 $(kz - \omega t + \alpha)$，则得

$$\frac{E_x^2}{(E_+^0)^2} + \frac{E_y^2}{(E_+^0)^2} = 1,$$

这是关于 E_x、E_y 的圆方程，即 $\boldsymbol{E}$ 矢量的端点将划出一个圆．由(8.27)式知，如果迎着电磁波看，我们可以观察到电矢量 $\boldsymbol{E}$ 是逆时针旋转的，所以称为左旋圆偏振，这就是 E_+ 所代表的物理意义．

(2) 若令 $E_+ = 0$，$E_- \neq 0$(这相当于 $e_-^* \cdot \boldsymbol{E}$)，则由(8.26)式得

$$\boldsymbol{E} = E_- \boldsymbol{e}_- e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \left(\frac{\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}\right)E_- e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

同理可证

$$E_x = E_-^0 \cos(kz - \omega t + \alpha)\,,$$
$$E_y = E_-^0 \sin(kz - \omega t + \alpha)\,. \tag{8.28}$$

由(8.28)式同样可得关于 E_x 和 E_y 的方程是圆方程,而且迎着电磁波传播方向观察,可以看到电矢量 $\boldsymbol{E}$ 将是顺时针旋转,所以称为右旋圆偏振波,可见 E_- 直接代表右旋圆偏振波.

(3) 若 $E_+ \neq 0, E_- \neq 0$,且 $E_+ = \pm E_-$,则有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x(E_+^0 + E_-^0)\cos(kz - \omega t + \alpha) \qquad (E_+ = +E_-),$$

或

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y(E_+^0 - E_-^0)\sin(kz - \omega t + \alpha) \qquad (E_+ = -E_-),$$

它们分别表示沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向或沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向偏振的线偏振波. 可见,等幅同相位的左、右旋圆偏振波合成为沿着 $\boldsymbol{e}_x$ 方向的线偏振波;而等幅反相的左、右旋圆偏振波合成为沿着 $\boldsymbol{e}_y$ 方向的线偏振波.

(4) 若 $|E_+| \neq |E_-|$,则由(3)可知在 $\boldsymbol{e}_x$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 方向都有 $\boldsymbol{E}$ 的分量,即

$$E_x = \mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{E}) = (E_+^0 + E_-^0)\cos(kz - \omega t + \alpha),$$
$$E_y = \mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{E}) = (E_+^0 - E_-^0)\sin(kz - \omega t + \alpha),$$

其中我们仍保留 E_+、E_- 是同相位的条件,消去 $(kz - \omega t + \alpha)$,则

$$\frac{E_x^2}{(E_+^0 + E_-^0)^2} + \frac{E_y^2}{(E_+^0 - E_-^0)^2} = 1\,, \tag{8.29}$$

这是关于 E_x、E_y 的椭圆形方程,亦即 $\boldsymbol{E}$ 的端点描出一个半长轴为 $(E_+^0 + E_-^0)$,半短轴为 $(E_+^0 - E_-^0)$ 的椭圆,故称为椭圆偏振,

(5) 若 $E_+ \neq 0, E_- \neq 0$,且 $|E_+| \neq |E_-|$,但两者间存在一个相位差 ϕ_0,则对于(4)来讲其唯一的变化是椭圆转过了一个角度 $\phi_0/2$,如图 8.2(b)所示;相应(3)中的线性偏振也有类似的变化.

由上可见,用 E_+ 和 E_-(亦即用 $\boldsymbol{e}_+$ 和 $\boldsymbol{e}_-$ 作为偏振基矢)来描述电磁波的偏振特点是令人满意的. 事实上,我们可以用下述各种标积来描述 $\boldsymbol{e}_1$ 方向和 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的线偏振、左旋圆偏振、右旋圆偏振以及沿着任意方向 $\boldsymbol{e}$ 偏振的波振幅:

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{e}_+^* \cdot \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{e}_-^* \cdot \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{e}^* \cdot \boldsymbol{E},$$

其中的复共轭是必需的,对(8.26)式作具体的计算就可看出这一点.

§8.3 电磁波在导电介质中的传播

导电介质与非导电介质的主要区别在于前者存在着自由电子,从而只要有

电磁波在其中传播，就会引起传导电流 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$. 在通常情况下，很容易证明导电介质中的电荷密度 $\rho=0$，于是这时麦克斯韦方程变为：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\ ,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\ ,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\ ,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma_c\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\ ,\end{cases}$$

利用消元法可得

$$\begin{cases}\nabla^2\boldsymbol{E}-\sigma_c\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\ ,\\ \nabla^2\boldsymbol{B}-\sigma_c\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0\ .\end{cases}\tag{8.30}$$

与波动方程相比，(8.30)式多了一项与时间一次导数有关的项，这项的出现表示了过程的不可逆性.

同样，我们考虑(8.30)式的一个单色平面波解

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\ ,$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\ ,$$

代入即得

$$-k^2+\mathrm{i}\sigma_c\mu\omega+\varepsilon\mu\omega^2=0,\tag{8.31}$$

可见 k 为复数. 下面我们来讨论具有复波矢的单色平面波的特点.

1. 复波矢的物理意义

(8.31)式可改写为

$$k^2=\omega^2\mu\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}\right)=\omega^2\mu\varepsilon_\omega\ ,\tag{8.32}$$

式中

$$\varepsilon_\omega=\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}\ ,\tag{8.33}$$

它是复数介电常数，反映了介质的极化和传导的情况. 我们引入复数介电常数，便把导电介质中的问题与非导电介质中的问题在形式上等同起来了. 若令

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\ ,\tag{8.34}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是实矢量，则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.\tag{8.35}$$

可见，这时平面波的振幅为 $\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}}$，而 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}}$ 是衰减因子，随着 r 沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向的增加，振幅不断减少，一旦沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向增加到 $r=\dfrac{1}{\alpha}$ 时，振幅就衰减到 $r=0$ 处的 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

倍. 我们把距离$\frac{1}{\alpha}$称为**透入深度**. $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向为等幅面的法线方向. 由此可见，复波矢表示电磁波有衰减. 在导电介质中，这种衰减表示电磁波的能量有消耗.

2. α、β 的值

由 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\beta}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$ 得

$$\begin{aligned}\beta^2-\alpha^2&=\omega^2\varepsilon\mu,\\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}&=\frac{\omega}{2}\mu\sigma_c.\end{aligned}\tag{8.36}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$，则

$$\alpha\beta=\frac{\omega}{2}\mu\sigma_c,$$

由(8.36)可以得到

$$\beta=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(1+\frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\tag{8.37}$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.\tag{8.38}$$

若导电介质是良导体，这时 σ_c 足够大，则

$$\alpha=\beta\approx\sqrt{\frac{1}{2}\sigma_c\mu\omega},\tag{8.39}$$

透入深度为

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\sigma_c\mu\omega}}.\tag{8.40}$$

例如，频率为 1 000 kHz 的中频电磁波在铜导体中(导电率 $\sigma_c=5.8\times10^7$ S/m)的透入深度约为 6×10^{-2} mm.

若导电介质是非良导体，即$\frac{\sigma_c}{\varepsilon\omega}\ll1$，则

$$\begin{aligned}\beta&=\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\\ \alpha&=\frac{\sigma_c}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{8.41}$$

这时 $\beta\gg\alpha$，所以衰减是很小的.

3. 相速度

因为等相面方程为 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=$常数，故相速度为

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}.$$

对于良导体，$\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\sigma_c\mu\omega}$，就有

$$v_p=\sqrt{\frac{2\omega}{\sigma_c\mu}}\ , \tag{8.42}$$

可见在良导体中不同频率的电磁波的相速度不同，这就是**色散现象**.

对于不良导体，$\beta=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，

$$v_p=1/\sqrt{\varepsilon\mu}\ .$$

4. 电磁场强度之间的关系

由$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$可得

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{1}{\omega}k\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}_0\ , \tag{8.43}$$

式中的 $\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 的单位矢量. 由(8.34)式知

$$\begin{aligned} k&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\ ,\\ \phi&=\arctan\frac{\alpha}{\beta}\ , \end{aligned} \tag{8.44}$$

所以

$$\boldsymbol{B}_0=\sqrt{\varepsilon\mu}\left[1+\left(\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}_0\ . \tag{8.45}$$

我们对上面的阐述作一些讨论：

(1) 若电导率 σ_c 充分小，则

$$\begin{aligned} |k|&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\approx\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\ ,\\ \phi&=0\ , \end{aligned} \tag{8.46}$$

所以

$$\boldsymbol{B}_0=\sqrt{\varepsilon\mu}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}_0\ . \tag{8.47}$$

上式表示 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 同相，且二者大小之比为$\sqrt{\varepsilon\mu}$.

(2) 若电导率 σ_c 很大，

$$\alpha=\beta\approx\sqrt{\frac{1}{2}\sigma_c\mu\omega}\ ,$$

于是就有

$$\begin{aligned} |k|&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\approx\sqrt{\sigma_c\mu\omega}\ ,\\ \phi&=\frac{\pi}{4}\ , \end{aligned} \tag{8.48}$$

即

$$\boldsymbol{B}_0=(1+\mathrm{i})\sqrt{\sigma_c\mu/2\omega}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}_0\ . \tag{8.49}$$

$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 之间有$\frac{\pi}{4}$的相位差，且此时磁场的能量总是大于电场的能量.

(3) 当 $\omega=0$ 时，由(8.49)式可知，$\boldsymbol{E}$ 必然趋于零，这说明，此时电磁场能量只以磁能的形式出现. 这与静电结果一致. 导电介质中电磁波的传播特性如图 8.3 所示.

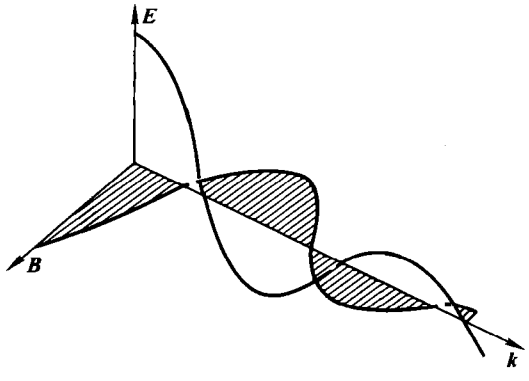


图 8.3

§8.4 电磁波在等离子体中的传播

等离子体是由离子和电子组成的，当电磁波在等离子体中传播时，其中电子和离子都要受到电磁场的作用而运动. 我们略去离子的运动和磁场的作用，电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} . \tag{8.50}$$

若仍考虑单色平面波，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

代入(8.50)式可以得出

$$\boldsymbol{v} = \frac{-e\boldsymbol{E}}{\mathrm{i}m\omega},$$

故等离子体中的传导电流为

$$\boldsymbol{j} = n_e e\boldsymbol{v} = -\frac{n_e e^2}{\mathrm{i}m\omega}\boldsymbol{E}, \tag{8.51}$$

式中 n_e 为单位体积内的电子数目. 于是，相应的电导率为

$$\sigma_c = -\frac{n_e e^2}{\mathrm{i}m\omega} . \tag{8.52}$$

我们可认为等离子体是电中性的(即 $\rho=0$),但是传导电流不等于零,平面电磁波在这种介质中传播时,它的波矢和频率之间的关系为(8.31)式:

$$-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 c^2}\omega=0,$$

其中等离子体的 ε、μ 近似为 ε_0、μ_0. 把(8.52)式代入,得

$$k^2=\frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2), \tag{8.53}$$

$$\omega_p^2=\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}, \tag{8.54}$$

ω_p 称为等离子体频率.

对此我们作如下的讨论:

(1) 当 $\omega<\omega_p$ 时,$k^2<0$,k 为一纯虚数. 此时电磁场是衰减的,入射到等离子体上的电磁波都将被反射回去. 电磁波的透入深度为

$$\delta=\sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2-\omega^2}}. \tag{8.55}$$

(2) 当 $\omega>\omega_p$ 时,则 k 为实数,这时电磁波可以在其中传播.

(3) 等效介电常数,由(8.53)式得

$$\varepsilon_\omega=\varepsilon_0+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right). \tag{8.56}$$

于是,在 $\omega>\omega_p$ 时,ε_ω 为小于 1 的实数,此时 $n=\sqrt{\varepsilon_\omega/\varepsilon_0}<1$,等离子体是比真空还稀疏的介质. 这是等离子体的一个重要特点.

若考虑地球附近的等离子体层,这时必须考虑地磁场的影响. 在有外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 时,代替(8.50)式,电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0], \tag{8.57}$$

考虑到时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,并设 $\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z$,则得(8.57)式的解为

$$v_x=\frac{e}{m}\frac{-\mathrm{i}\omega E_x+\omega_B E_y}{\omega_B^2-\omega^2},$$

$$v_y=\frac{e}{m}\frac{-\mathrm{i}\omega E_y-\omega_B E_x}{\omega_B^2-\omega^2},$$

$$v_z=-\frac{eE_z}{\mathrm{i}m\omega},$$

其中 $\omega_B=\frac{eB_0}{m}$. 于是电子电流为

$$\boldsymbol{j}=n_e e\boldsymbol{v}=n_e e[v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y+v_z\boldsymbol{e}_z], \tag{8.58}$$

而由欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ij} E_j , \tag{8.59}$$

比较(8.58)式与(8.59)式,得等离子体的各向异性的电导率为

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2}\right)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{i\omega} & -\frac{\omega_B}{\omega^2} & 0 \\ +\frac{\omega_B}{\omega^2} & -\frac{1}{i\omega} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{i\omega}\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2}\right) \end{pmatrix} . \tag{8.60}$$

在等离子体中,麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 , \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H} , \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 , \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sum\limits_{i,j} \sigma_{ij} E_i \boldsymbol{e}_i - i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} , \end{cases}$$

把第四个方程改写为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} E_j \boldsymbol{e}_i ,$$

其中 $\varepsilon_{ij} = i\frac{1}{\omega}\sigma_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}$,为等效介电常数张量. 于是我们不难得到电场的波动方程

$$\nabla^2 E_i + \omega^2 \mu_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j = 0 , \tag{8.61}$$

由波动方程(8.61)式可以得到在各向异性的等离子体中,平面电磁波有如下两大特点:

(1) 不存在线偏振横电磁波

设波沿着 z 方向传播,波的偏振方向为 $\boldsymbol{e}_x$,也就是说,只有 E_x 分量,此时

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_x + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{11} E_x = 0 ,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_y + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{21} E_x = 0 .$$

由第二式可以看出,因为 $E_y = 0$,$\varepsilon_{21} \neq 0$,所以 $E_x = 0$.

(2) 法拉第效应

如设 $\boldsymbol{E} = [E_x \boldsymbol{e}_x - iE_y \boldsymbol{e}_y] e^{i(kz - \omega t)}$,且 $E_x = E_y = E_0$,这是右旋圆偏振平面波,代入(8.61)式,得到

$$k^2 = -\omega^2 \mu_0 [\varepsilon_{11} - i\varepsilon_{12}] = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2/\omega}{\omega_B - \omega}\right).$$

如果 $\boldsymbol{E} = [E_x \boldsymbol{e}_x + iE_y \boldsymbol{e}_y] e^{i(kz - \omega t)}$,且 $E_x = E_y = E_0$,这是左旋圆偏振平面电磁波,代入方程得

$$k^2 = -\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11} + i\varepsilon_{12}) = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2/\omega}{\omega_B + \omega}\right).$$

由此可见,右旋圆偏振波和左旋圆偏振波波速不相等. 如果一个线偏振波由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中,由于线偏振波可以分解为两个等幅的左、右旋圆偏振波,而左旋和右旋波的波速又不会相等,结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转,这就叫法拉第效应,如图 8.4 所示.

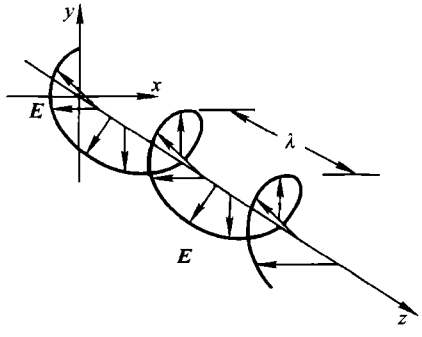


图 8.4

法拉第旋转角度的大小,取决于 ω_p 的大小和传播距离,ω_p 正比于等离子体的密度. 在宇宙空间,物质密度往往很低,但由于涉及的尺度很大,故法拉第旋转效应显得很重要,它被用来解释新星形成期间 OH 和 H_2O 分子云中的微波辐射的偏振.

§8.5 各向异性介质中单色平面波的结构

由于电磁波在各向异性介质中的传播是一个常见的而且是很重要的物理现象,所以在这一节中我们专门研究各向异性介质中单色平面波的结构.

1. 相速度和能量速度不在同一方向

在各向同性介质中,单色平面电磁波的相速度等于群速度,并且在同一方向上;相反,在各向异性介质中,相速度和群速度的方向不再一致. 若设 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都按 $\exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$ 变化,则 $\dot{\boldsymbol{E}} = -i\omega\boldsymbol{E}$,$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$. 这样,在无源区域,麦克斯韦方程变为(注意:$\boldsymbol{D}$ 不再与 $\boldsymbol{E}$ 平行):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0,\\ &\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\mu\boldsymbol{H}, \end{aligned} \tag{8.62}$$

消去 $\boldsymbol{H}$,则得

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{\omega^2\mu}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{\omega^2\mu}[k^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})]$$
$$= \frac{n^2}{\mu}\boldsymbol{E}_\perp, \tag{8.63}$$

式中 $\boldsymbol{E}_\perp$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向的投影，$n^2 = \frac{k^2}{\omega^2}$.

由(8.62)式得出，矢量 $\boldsymbol{H}$(或 $\boldsymbol{B}$)与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 以及 $\boldsymbol{k}$ 都垂直，从而可推知 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 必共面，而且 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的，所以 $\boldsymbol{k}$ 的方向与 $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{H}$ 的方向平行，而 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 不在 $\boldsymbol{k}$ 方向. 这些矢量间的关系如图 8.5 所示，其中 α 表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\frac{\boldsymbol{S}_P}{|\boldsymbol{S}_P|}$ 之间的夹角. 因此，我们看到 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 组成一组正交矢量，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\frac{\boldsymbol{S}_P}{|\boldsymbol{S}_P|}$ 组成另一组正交矢量，它们共同的矢量为 $\boldsymbol{H}$，彼此转过一个角度 α. 由此我们得到一个重要的结论：晶体中电磁波能量的传播方向不是沿波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向，群速度(能量传播速度)和相速度是两回事.

$$w = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}]$$
$$= \frac{n}{2}\left[-\boldsymbol{E}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\times\boldsymbol{H}\right) + \boldsymbol{H}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\times\boldsymbol{E}\right)\right]$$
$$= n\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = n\boldsymbol{S}_P\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},$$

得到群速度

$$v_g = \frac{|\boldsymbol{S}_P|}{|w|} = \frac{1}{n\cos\alpha},$$

而相速度 $v_p = \frac{1}{n} = \frac{c}{n_r}$，于是

$$v_p = v_g\cos\alpha.$$

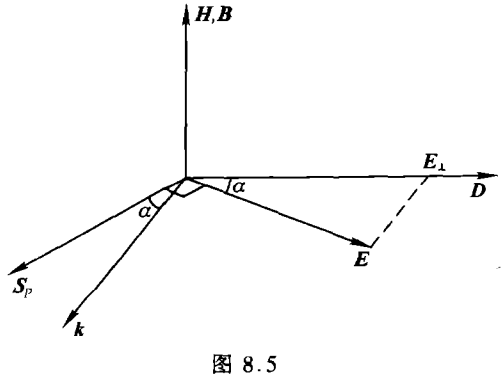


图 8.5

由上式可见,相速度是群速度在波矢方向的投影.

如果 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是已知的,则折射率 n 和波矢 $\boldsymbol{k}$ 也就确定了,原因是这样的,首先 $\boldsymbol{E}_\perp$ 是 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向的投影,即

$$\boldsymbol{E}_\perp = \left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{D}}{|\boldsymbol{D}|}\right)\frac{\boldsymbol{D}}{|\boldsymbol{D}|},$$

这样便由(8.63)式给出

$$n^2 = \frac{\mu D^2}{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}. \tag{8.64}$$

另一方面,$\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{D}$,且 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 共面,所以波矢方向可表示为

$$\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_\perp}{|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_\perp|} = \frac{\boldsymbol{E}-\dfrac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}}{D^2}}{\sqrt{E^2-\dfrac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2}{D^2}}}$$

$$= \frac{D^2\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}}{\sqrt{D^2[D^2E^2-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2]}}. \tag{8.65}$$

同理,可求得能流方向,即群速度方向为

$$-\frac{\boldsymbol{S}_P}{|\boldsymbol{S}_P|} = \frac{E^2\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}}{\sqrt{E^2[E^2D^2-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})^2]}}, \tag{8.66}$$

其中负号保证 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{S}_P$ 在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的同一侧. 如果 $\boldsymbol{E}$ 沿着晶轴方向,即 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 方向重合,这时(8.65)和(8.66)式都变成了 $\frac{0}{0}$,这是因为 $\boldsymbol{S}_P$ 和 $\boldsymbol{k}$ 除方向必须垂直于 $\boldsymbol{E}$ 外,其他并未确定.

2. 波矢方向的菲涅耳方程

上面的公式只是麦克斯韦方程的结果,还未涉及物质的具体特性,现在我们把 §3.9 中讨论的电磁性质方程与上面的公式结合起来,一并考虑.

我们取晶体的电轴方向为坐标轴方向,则由 §3.9 知

$$D_x = \varepsilon_x E_x,\ D_y = \varepsilon_y E_y,\ D_z = \varepsilon_z E_z,$$

根据(8.63)式,有

$$\begin{aligned}
\mu\varepsilon_x E_x &= n^2\left[E_x - \frac{k_x}{|\boldsymbol{k}|}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\right],\\
\mu\varepsilon_y E_y &= n^2\left[E_y - \frac{k_y}{|\boldsymbol{k}|}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\right],\\
\mu\varepsilon_z E_z &= n^2\left[E_z - \frac{k_z}{|\boldsymbol{k}|}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\right].
\end{aligned} \tag{8.67}$$

上式是关于 E_x、E_y、E_z 的齐次线性方程组,仅当系数行列式不为零时才有非平庸解,这意味着 n、ε_i、$\boldsymbol{k}$ 之间必须满足某个关系. 于是,(8.67)式可以写成

$$E_i = \frac{n^2(k_i/|\boldsymbol{k}|)\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)}{n^2-\mu\varepsilon_i} \qquad (i=x,y,z),$$

两边乘$\frac{k_i}{|\boldsymbol{k}|}$,再对 i 求和,然后除以$\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)$,则得

$$\frac{(k_x/|\boldsymbol{k}|)^2}{n^2-\mu\varepsilon_x}+\frac{(k_y/|\boldsymbol{k}|)^2}{n^2-\mu\varepsilon_y}+\frac{(k_z/|\boldsymbol{k}|)^2}{n^2-\mu\varepsilon_z}=\frac{1}{n^2}. \tag{8.68}$$

把(8.68)式两边同乘以 n^2,并减去$(k_x^2+k_y^2+k_z^2)/|\boldsymbol{k}|^2=1$,然后两边再乘以 n^2,则得

$$\frac{k_x^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_x}}+\frac{k_y^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_y}}+\frac{k_z^2}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon_z}}=0, \tag{8.69}$$

利用$\frac{1}{n}=v_p$ 及 $v_x=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon_x}}$, $v_y=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon_y}}$, $v_z=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon_z}}$,(8.69)式可写成

$$\frac{k_x^2}{v_p^2-v_x^2}+\frac{k_y^2}{v_p^2-v_y^2}+\frac{k_z^2}{v_p^2-v_z^2}=0. \tag{8.70}$$

这称为波矢量的菲涅耳方程,它是 v_p 的二次方程,对于每一个确定的 $\boldsymbol{k}$ 方向就有两个相速度 $\pm v_p$,对于其中每一个 v_p 值,利用(8.67)式求出 $E_x:E_y:E_z$ 的值,再由 $D_i=\varepsilon_{ik}E_k$ 便可得到$D_x:D_y:D_z$. 所有比值都是实数,可见 $\boldsymbol{E}$ 场和$\boldsymbol{D}$ 场都是线偏振波. 因此,各向异性介质可以容许两个单色平面波在同一个给定方向上传播,它们具有不同的线偏振和不同的速度.

§8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

电磁波在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知,这里我们从电磁现象的普遍规律出发讨论反射和折射现象. 若交界面为一平面,我们把它取为 Oxy 面,如图 8.6 所示,考虑一单色平面波入射到交界面上,由傅里叶分析可知,反射波、折射波也一定为单色平面波. 这样就有

$$\begin{aligned}&\text{入射波}\quad \boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},\\ &\text{反射波}\quad \boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{E}_0'e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)},\\ &\text{折射波}\quad \boldsymbol{E}_d=\boldsymbol{E}_0''e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)};\end{aligned} \tag{8.71}$$

同时由$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$可知,磁矢量为

$$\boldsymbol{B}_i=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

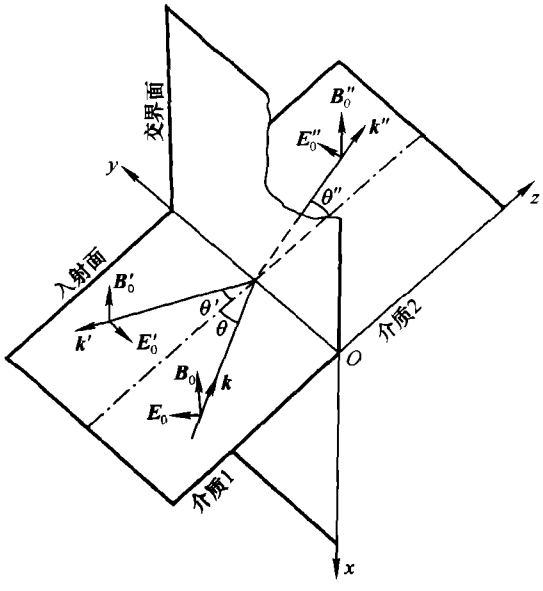


图 8.6

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\omega'}\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}_0' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)},$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\omega''}\boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}_0'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)}, \tag{8.72}$$

在边界面上 $E_{1t} = E_{2t}$，所以

$$\left[\boldsymbol{E}_{0\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} + \boldsymbol{E}_{0\mathrm{t}}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)}\right]_{z=0} = \boldsymbol{E}''_{0\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)}\Big|_{z=0}.$$

由傅里叶分析，有

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)_{z=0} = (\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)_{z=0} = (\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)_{z=0},$$

x、y、t 都是独立变量，故必然有

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' = \omega'', \\ k_x &= k_x' = k_x'', \\ k_y &= k_y' = k_y''. \end{aligned} \tag{8.73}$$

1. 反射、折射的基本规律

(1) $\omega = \omega' = \omega''$，即反射波和折射波的频率与入射波频率相等.

(2) 根据 $k_y = k_y' = k_y''$，若 $k_y = 0$，则必有 $k_y' = k_y'' = 0$，也就是说，入射线、反射线和折射线在同一平面内.

(3) 根据 $k_x = k_x'$，$|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$，就有 $k\sin\theta = k'\sin\theta'$，由此得出，$\theta = \theta'$，即入射角等于反射角.

(4) $k_x = k''_x$，必有 $k\sin\theta = k''\sin\theta''$，于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \tag{8.74}$$

这就是光学中的折射定律.

2. 反射波振幅、折射波振幅与入射波振幅之间的关系

为了讨论方便起见，我们把电矢量分解为两个矢量之和，即

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{0\perp} + \boldsymbol{E}_{0\parallel},$$

式中 $\boldsymbol{E}_{0\perp}$ 表示 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直于入射面的分量，$\boldsymbol{E}_{0\parallel}$ 表示平行于入射面的分量. 同时，我们还规定：平行方向、垂直方向和传播方向组成右手螺旋. 对于 $\boldsymbol{E}'_{0\perp}$、$\boldsymbol{E}'_{0\parallel}$ 及 $\boldsymbol{E}''_{0\perp}$、$\boldsymbol{E}_{0\parallel}$ 应作同样的理解. 由边界条件 $E_{1t} = E_{2t}$，则有

$$\boldsymbol{E}_{0t} + \boldsymbol{E}'_{0t} = \boldsymbol{E}''_{0t}, \tag{8.75}$$

由边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$，则有

$$\frac{1}{\mu_1}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}'_0]_t = \frac{1}{\mu_2}[\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}''_0]_t. \tag{8.76}$$

现在可把(8.75)和(8.76)式写成分量形式，首先由(8.75)式得

$$\begin{aligned} &x\text{ 方向} \quad E_{0\perp} + E'_{0\perp} = E''_{0\perp}, \\ &y\text{ 方向} \quad E_{0\parallel}\cos\theta - E'_{0\parallel}\cos\theta = E''_{0\parallel}\cos\theta''; \end{aligned} \tag{8.77}$$

再由(8.76)式，得

$$\begin{aligned} &x\text{ 方向} \quad \frac{1}{\mu_1}[kE_{0\parallel} + k'E'_{0\parallel}] = \frac{1}{\mu_2}k''E''_{0\parallel}, \\ &y\text{ 方向} \quad \frac{1}{\mu_1}[-kE_{0\perp} + k'E'_{0\perp}]\cos\theta = -\frac{1}{\mu_2}k''E''_{0\parallel}\cos\theta''; \end{aligned} \tag{8.78}$$

把(8.77)和(8.78)式联立求解，得

$$\begin{aligned} E'_{0\perp} &= \frac{k\mu_2\cos\theta - k''\mu_1\cos\theta''}{k\mu_2\cos\theta + k''\mu_1\cos\theta''}E_{0\perp}, \\ E''_{0\perp} &= \frac{2\mu_2 k\cos\theta}{k\mu_2\cos\theta + k''\mu_1\cos\theta''}E_{0\perp}, \\ E'_{0\parallel} &= \frac{k''\mu_1\cos\theta - k\mu_2\cos\theta''}{k''\mu_1\cos\theta + k\mu_2\cos\theta''}E_{0\parallel}, \\ E''_{0\parallel} &= \frac{2\mu_2 k\cos\theta}{k''\mu_1\cos\theta + k\mu_2\cos\theta''}E_{0\parallel}. \end{aligned} \tag{8.79}$$

一般介质的磁导率都接近于 μ_0，故可令 $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$，再利用折射定律 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = n_{12}$，就可把(8.79)式改写为

$$
\begin{aligned}
E'_{0\parallel} &= \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}E_{0\parallel},\\
E'_{0\perp} &= -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}E_{0\perp},\\
E''_{0\parallel} &= \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}E_{0\parallel},\\
E''_{0\perp} &= \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')}E_{0\perp}.
\end{aligned}
\tag{8.80}
$$

(8.80)式便是光学中的菲涅耳公式，最初菲涅耳利用光是弹性以太波的理论，并假想了弹性以太的许多特殊性质，才导出了(8.80)式. 这里我们是由边值关系自然地得到的，因此，这也有力地论证了光是电磁波.

3. 反射系数

反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射系数. 我们分两种情况讨论：

(1) 若入射波 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ 垂直于入射面，即 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{E}_{0\perp}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$，则入射波能流平均值为

$$
\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P入}}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^{*})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{0\perp}^{2}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},
$$

反射波的能流平均值为

$$
\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P反}}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E'^{2}_{0\perp}\frac{\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}|},
$$

所以反射系数为

$$
\gamma_{\perp}=\frac{\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P反}}\rangle\cdot\boldsymbol{e}}{\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P入}}\rangle\cdot\boldsymbol{e}}=\frac{|E'_{0\perp}|^{2}}{|E_{0\perp}|^{2}}=\frac{\sin^{2}(\theta-\theta'')}{\sin^{2}(\theta+\theta'')}.
\tag{8.81}
$$

(2) 若入射波 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ 平行于入射面，即 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{E}_{0\parallel}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$，则

$$
\gamma_{\parallel}=\frac{|E'_{0\parallel}|^{2}}{|E_{0\parallel}|^{2}}=\frac{\tan^{2}(\theta-\theta'')}{\tan^{2}(\theta+\theta'')}.
\tag{8.82}
$$

如入射波是非偏振的电磁波，我们通常定义平均反射系数

$$
\gamma_{\mathrm{M}}=\frac{1}{2}(\gamma_{\parallel}+\gamma_{\perp}).
\tag{8.83}
$$

反射波的偏振程度是用偏振度来描写的，即

$$
P(\theta)=\frac{\gamma_{\parallel}-\gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel}+\gamma_{\perp}}.
\tag{8.84}
$$

反射系数与入射角的关系如图 8.7 所示，可见对于任何入射角$\left(\theta=0\text{ 和 }\theta=\frac{\pi}{2}\right.$除外$\left.\right)$，有

$$\gamma_{\perp} > \gamma_{\parallel}.$$

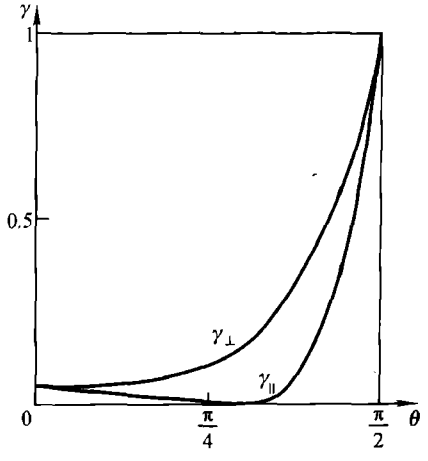


图 8.7

因此,若入射光为自然光,反射波是部分偏振的,电场的优先取向垂直于入射面.图中 $\gamma_{\parallel}=0$ 所对应的角是布儒斯特角.

§8.7 全 反 射

全反射有许多实际应用,新兴的纤维光学就是由此发展出来的.因此,在本节中,我们将对此作较为详尽的讨论.

由折射定律 $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\dfrac{n_2}{n_1}=n_{12}$,可得

$$\sin\theta''=\sin\theta/n_{12}.$$

一方面入射角的变化范围为 $0\to\dfrac{\pi}{2}$,故 $\sin\theta$ 的值是从 0 变到 1.另一方面,在 $n_1>n_2$ 的情况下,$n_{12}<1$,所以,当 $\theta=\theta_c=\arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$ 时,$\sin\theta''=1$,而当入射角 $\theta>\theta_c$ 时,显然会出现 $\sin\theta''>1$ 的情况,这时折射角将为一虚数,它已失去几何上作为角度的直观解释.我们称 $\theta_c=\arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$ 为**全反射临界角**.下面我们来讨论全反射时的物理内容.

由 $\sin\theta''=\sin\theta/n_{12}$,得

$$\cos\theta'' = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2} - 1}, \tag{8.85}$$

将其代入公式(8.79),便有

$$\begin{aligned} E'_{0\perp} &= \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta - n_{12}^2}}{\cos\theta + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta - n_{12}^2}} E_{0\perp}, \\ E'_{0\parallel} &= \frac{n_{12}^2\cos\theta - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta - n_{12}^2}}{n_{12}^2\cos\theta + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta - n_{12}^2}} E_{0\parallel}, \end{aligned} \tag{8.86}$$

为了简单起见,上式中我们已令 $\mu_1 = \mu_2$. 可见

$$|E'_{0\perp}| = |E_{0\perp}|, \quad |E'_{0\parallel}| = |E_{0\parallel}|.$$

这就是全反射情况.

1. 反射波的偏振性质

由(8.86)式看出:若 E_0 是实数,则反射波 E'_0 是复数,这表示反射波的相位相对于入射波的相位有变化. 令

$$E'_{0\parallel} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\parallel} E_{0\parallel}, \quad E'_{0\perp} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\perp} E_{0\perp},$$

$\delta_\parallel$、$\delta_\perp$ 的值由(8.86)式确定,则当入射波是线偏振时,反射波的平行分量与垂直分量间的相位差为

$$\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp.$$

若 $\delta = 0$,则表示入射波是线偏振,反射波亦是线偏振. 若 $\delta \neq 0$,则反射波的偏振与入射波的偏振不同. 光学中产生偏振光的一个重要方法,就是利用全反射.

2. 折射波

在全反射时,介质 2 中的电磁波并不为零. 因为,如果介质 2 中的电磁波完全为零,就不可能满足边值关系. 如果设 Oyz 平面为入射面,则由(8.85)式不难得到 $\boldsymbol{E}_\mathrm{d}$ 为

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{d} = \boldsymbol{E}''_0 \exp\left[-k''\left(\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} z\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k''\frac{\sin\theta}{n_{12}}y - \omega t\right)}. \tag{8.87}$$

上式表示折射波将沿 z 方向衰减,沿 y 方向传播. 因此,离界面几个波长处,场强振幅已变得很小,可以忽略不计;换句话说,电场不仅沿着界面方向传播,而且被限制在表面附近的一个区域内,所以称这种全反射的折射波为**表面波**.

思考题 介质 2 中的电磁波是否具有横波性.

---

3. 能流

既然存在折射波,那么在第二种介质中就有能流. 如果电矢量垂直于入射

面，即 $\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{e}_x E_d$，则我们可以分别求得能流 $\boldsymbol{S}_P$ 的法向分量 $\boldsymbol{S}_{Pz}$ 和切向分量 $\boldsymbol{S}_{Py}$. 由

$$\boldsymbol{B}_d = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}_d$$

得出

$$B_{dy} = -\frac{1}{\omega}k''_x E_d = -\frac{1}{\omega}k'' E_d \cos\theta''$$

$$= -\mathrm{i}\frac{1}{\omega}k''\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1}\,E_d,$$

$$B_{dz} = \frac{1}{\omega}k''\frac{\sin\theta}{n}E_d,$$

分别将 $\boldsymbol{E}_d$、$\boldsymbol{B}_d$ 的实部代入能流密度的表达式，可得

$$S_{Py} = -\frac{k''}{2\omega}\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)D_0^2\left[1+\cos 2\left(k''\frac{\sin\theta}{n}y-\omega t\right)\right],$$

$$S_{Pz} = \frac{k''}{2\omega}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1}\,D_0^2 \sin 2\left(k''\frac{\sin\theta}{n}y-\omega t\right),$$

其中 $\boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{e}_x E''_0 \exp\left[-k''\left(\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}z\right]$ $(n = n_{12})$. 由此可见：

(1) 在界面的法线方向上能流以频率 2ω 作振动，在第二种介质中，S_{Pz} 对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流入介质 2 中.

(2) 界面切线方向的能流 S_{Py} 对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在 y 方向仍有能流.

(3) 根据 S_{Pz} 和 S_{Py} 的表达式，我们可以得到第二种介质的能流矢量线，其矢量线方程为 $\frac{dy}{S_{Py}} = \frac{dz}{S_{Pz}}$，积分后可得

$$z = \frac{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1}}{k''\frac{\sin^2\theta}{n^2}}\ln\frac{\left|\cos\left(k''\frac{\sin\theta}{n}y\right)\right|}{C} \quad (z\geqslant 0),$$

其大致走向如图 8.8. 可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量.

4. 反射系数变化率的临界指数

我们来研究在临界角附近，入射角向临界角趋近时，反射系数变化的快慢程度的问题. 我们令

$$\theta = \theta_c - \delta$$

图 8.8

(δ 为一小量),代入(8.81)和(8.82)式,并把其中的 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 展开为幂级数,则得到反射系数为

$$\gamma_{\perp}=1-4\sqrt{2\delta}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1/4},$$

$$\gamma_{\parallel}=1-4\sqrt{2\delta}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1/4}.$$

注意,在现在的情况下 $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}>1$. 于是,我们不难求得 $\gamma_{\perp}$ 和 $\gamma_{\parallel}$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{\perp}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{8}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1/4}\delta^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{\parallel}}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{8}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1\right)^{-1/4}\delta^{-\frac{1}{2}}.$$

当 $\delta\to 0$ 时,反射系数的变化率都是以下述方式发散:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\theta}\propto\delta^{-\frac{1}{2}}\to\infty,$$

$-\frac{1}{2}$ 就称为反射系数变化率的**临界指数**. 在临界点,反射系数的变化率是不连续的.

*§8.8 电磁波在金属面上的反射和折射

引入复介电常数 $\varepsilon_\omega=\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}$ 以后,导电介质和非导电介质所满足的单色波方程形式上完全一样. 因此,导体面上的反射和折射公式同介质面上的反射和折射公式形式上也完全一样. 具体地说,反射定律和折射定律(8.74)式,以及菲涅耳公式(8.80)的形式保持不变,只要把其中的 k'' 用 $k''=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_\omega}$ 代入即可. 现在我们就从(8.74)和(8.79)式出发来研究金属表面的反射和折射特性.

若电磁波从真空斜入射到金属表面,并设金属中的 $\mu=\mu_0$,则由(8.74)和(8.79)式得到

$$E'_{0\perp}=\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_\omega-\varepsilon_0\sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_\omega-\varepsilon_0\sin^2\theta}}E_{0\perp},$$

$$E''_{0\perp}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_\omega-\varepsilon_0\sin^2\theta}}E_{0\perp},$$

$$E'_{0\parallel}=\frac{\sqrt{\varepsilon_\omega}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\varepsilon_0\sin^2\theta/\varepsilon_\omega}}{\sqrt{\varepsilon_\omega}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\varepsilon_0\sin^2\theta/\varepsilon_\omega}}E_{0\parallel},$$

$$E''_{0\parallel}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_\omega}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{1-\varepsilon_0\sin^2\theta/\varepsilon_\omega}}E_{0\parallel}.$$

金属的电导率约为 $10^6\sim10^7$ S/m,只要波的频率不高于可见光频率,则总有 $\xi_r=\left(\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0}\right)^{-1/2}\ll1$,$\xi_r$ 是金属的相对表面阻抗(定义在本节最后给出).

对于电矢量垂直于入射面的情况,

$$\begin{aligned}E'_{0\perp}&=\frac{\xi_r\cos\theta-\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}{\xi_r\cos\theta+\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}E_{0\perp}\\&=\frac{(\xi_r\cos\theta-\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta})^2}{\xi_r^2-1}E_{0\perp}\\&=\frac{\xi_r^2\cos^2\theta+1-\xi_r^2\sin^2\theta-2\xi_r\cos\theta\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}{\xi_r^2-1}E_{0\perp},\end{aligned}$$

$\xi_r\ll1$,略去 ξ_r 的平方项,则得

$$E'_{0\perp}=(-1+2\xi_r\cos\theta)E_{0\perp},\tag{8.88}$$

同理可得

$$E''_{0\perp}=-2\xi_r\cos\theta E_{0\perp}.\tag{8.89}$$

对于电矢量平行于入射面的情况,

$$\begin{aligned}E'_{0\parallel}&=\frac{\xi_r^{-1}\cos\theta-\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}{\xi_r^{-1}\cos\theta+\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}E_{0\parallel}\\&=\frac{\cos\theta-\xi_r\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}{\cos\theta+\xi_r\sqrt{1-\xi_r^2\sin^2\theta}}E_{0\parallel},\end{aligned}$$

注意到 $\xi_r\ll1$,略去 ξ_r 的平方项,不难得到

$$E'_{0\parallel}=\frac{\cos\theta-\xi_r}{\cos\theta+\xi_r}E_{0\parallel},\tag{8.90}$$

同理可得

$$E''_{0\parallel}=\frac{2\xi_r\cos\theta}{\cos\theta+\xi_r}E_{0\parallel}.\tag{8.91}$$

若 $\theta\to0$,即入射光基本上在垂直方向入射时,则(8.90)式和(8.91)式可简化为

$$\begin{aligned}E'_{0\parallel}&=\left(1-\frac{2\xi_r}{\cos\theta}\right)E_{0\parallel},\\E''_{0\parallel}&=2\xi_rE_{0\parallel},\\\xi_r&=\left(\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0}\right)^{-\frac{1}{2}}=(1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{2\sigma_c}}=\xi'_r+\mathrm{i}\xi''_r.\end{aligned}\tag{8.92}$$

(1) 反射系数

$$\gamma_{\perp}=\frac{|E'_{0\perp}|^2}{|E_{0\perp}|^2}=(-1+2\xi_r\cos\theta)(-1+2\xi_r^*\cos\theta)$$

$$=1-4\xi'_r\cos\theta;$$

$$\gamma_{\parallel}=\begin{cases}\left|\dfrac{\cos\theta-\xi_r}{\cos\theta+\xi_r}\right|^2, \\ 1-\dfrac{4\xi'}{\cos\theta}\quad \text{当 } \theta \text{ 不很接近}\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

(2) 把条件 $\theta=0$ 代入,即得正入射反射系数

$$\gamma=1-4\xi'_r=1-\sqrt{\frac{8\varepsilon_0\omega}{\sigma_c}}. \tag{8.93}$$

可见金属的反射系数接近于 1,因此金属总是闪闪发亮.

(3) 当 $\theta=0$ 时,$\gamma_{\perp}$ 达到极小值. 而 $\gamma_{\parallel}$ 的极小值必须从 $\dfrac{\mathrm{d}\gamma_{\parallel}}{\mathrm{d}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=0$ 求出. 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}-|\xi_r|$ 时,$\gamma_{\parallel}$ 有极小值,此时

$$\gamma_{\parallel}=\left(\frac{|\xi_r|-\xi'_r}{|\xi_r|+\xi'_r}\right)^2.$$

θ_0 称为**类布儒斯特角**. 因为当电磁波以布儒斯特角入射到介质面上时 $\gamma_{\parallel}$ 也为极小,且等于零.

(4) 反射波的偏振特性决定于垂直分量与横向分量的相位差. 为简单起见,我们只讨论在类布儒斯特角附近入射的情况,即 $\theta=\theta_0$,则

$$E'_{0\perp}=-E_{0\perp}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}E_{0\perp}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{\perp}}E_{0\perp},$$

$$E'_{0\parallel}=\left|\frac{|\xi_r|-\xi'_r}{|\xi_r|+\xi'_r}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_{\parallel}}E_{0\parallel},$$

$$\tan\delta_{\parallel}\approx\frac{2\xi'_r\xi''_r}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_0\right)^2-|\xi_r|^2}\to+\infty,$$

故有 $\delta=\delta_{\perp}-\delta_{\parallel}=\dfrac{\pi}{2}$. 可见,在一般情况下反射波都是椭圆偏振的,只有当 $|E'_{0\perp}|=|E'_{0\parallel}|$ 时才是圆偏振,当 $E_{0\parallel}=0$ 或 $E_{0\perp}=0$ 时,反射波是线偏振波.

(5) 折射波

电磁波在斜入射的情况下,导体内的波为

$$\boldsymbol{E}''_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{E}''_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r})},$$

式中 $(k'')^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_2\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sigma_c}{\varepsilon_2\omega}\right)$,取导体的 $\mu_2=\mu_0$,令

$$\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{\beta}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},$$

在良导体情况下便有

$$\alpha^2=\beta^2,\quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\frac{\sigma_c\omega\mu_0}{2}.$$

由边界条件知 $k_y=k''_y$,于是

$$\beta_y=k_y,\quad \alpha_y=0.$$

同时 Oyz 为入射面，必有 $k_x = k''_x = 0$，所以

$$\alpha_x = \beta_x = 0 ,$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_z \boldsymbol{e}_z .$$

另一方面，

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_z \beta_z = \mu_0 \sigma_c \omega / 2 ,$$

再有 $\alpha^2 = \beta^2$，得到

$$\beta_z = \sqrt{\alpha_z^2 - \beta_y^2} ,$$

略去 β_y^2，

$$\alpha_z = \beta_z = \sqrt{\mu_0 \sigma_c \omega / 2} .$$

所以，折射角由下式给出：

$$\theta'' = \arctan\left(\frac{\beta_y}{\beta_z}\right) . \tag{8.94}$$

由于 $\beta_y \ll \beta_z$，故进入导体内的折射波基本上沿着垂直于表面的法线方向传播，而与入射波的方向无关. 这样，根据(8.49)式，两边叉乘 $\boldsymbol{e}_n$，则有

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{B}_0 = (1 + \mathrm{i}) \sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0}{2\omega}} \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}_0) .$$

因为 $\boldsymbol{E}_0 \approx \boldsymbol{E}_t$，所以在金属内表面附近的场的关系为

$$\boldsymbol{E}_t = (1 - \mathrm{i}) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_c}} \boldsymbol{H}_t \times \boldsymbol{e}_n . \tag{8.95}$$

注意，这里的脚标 t 表示沿着表面的切向分量. 通常把 $|\boldsymbol{E}_t| / |\boldsymbol{H}_t|$ 定义为**金属的表面阻抗**，即在良导体时

$$\xi = (1 - \mathrm{i}) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_c}} = \xi' + \mathrm{i}\xi'' . \tag{8.96}$$

表面阻抗是一个有用的概念，它可以唯象地应用于超导体(见习题 8.10). 表面阻抗 ξ 与相对表面阻抗 ξ_r 之间的关系为 $\xi = \xi_r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. (8.95)式为**列昂维奇近似边界条件**，利用它可以确定导体外的场.

(6) 导体内的功率损耗问题

由上面的讨论我们知道，导体内的场为

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}''_0 \mathrm{e}^{-\alpha z + \mathrm{i}\beta z - \mathrm{i}\omega t} ,$$

其中已略去 β_y. 可见导体中的电流密度为

$$\boldsymbol{j} = \sigma_c \boldsymbol{E}_d ,$$

导体内单位体积内的平均功耗为

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re}(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}_d^*) = \frac{1}{2} \sigma_c E''^2_0 \mathrm{e}^{-2\alpha z} ,$$

导体表面单位面积的功耗为

$$P = \frac{1}{2}\sigma_c E_0''^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma_c E_0''^2}{4\alpha} .$$

我们定义表面电流线密度

$$\alpha_0 = \int_0^\infty j dz = \frac{\sigma_c E_0''}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} e^{i(\phi - \omega t)} ,$$

式中 $\phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$，所以

$$\alpha_{0峰} = \frac{\sigma_c E_0''}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}, \langle \alpha_0^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c^2 E_0''^2}{(\alpha^2 + \beta^2)} ,$$

故

$$P = \frac{1}{2\delta\sigma_c} |\alpha_{0峰}|^2 = \frac{1}{\delta\sigma_c} \langle \alpha_0^2 \rangle , \tag{8.97}$$

式中 $\delta = \frac{1}{\alpha}$. 利用(8.96)式，则得功耗与表面阻抗的关系为

$$P = \xi' \langle \alpha_0^2 \rangle = \frac{1}{2} \xi' |\alpha_{0峰}|^2 . \tag{8.98}$$

可以看出，ξ'起着表面电阻的作用，我们很自然地把 ξ'称为表面阻抗.

*§8.9 电磁波在非均匀介质内的传播

我们之所以要研究电磁波在非均匀介质中的传播，除了它有许多奇特的传播特性以外，还因为它是一个有实用意义的物理问题. 例如，无线电波在地球大气层或电离层中传播的一个最经典的模型是认为 $z>0$($z=0$ 为地平面)的区域内介电常数 $\varepsilon = \varepsilon(z)$. 又如，等离子体的介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{n_e e^2}{m\omega^2}$，而等离子体的浓度分布往往是坐标的函数[如 $N(z) = N_0 z$]，在这种情况下波的传播就有新的特点.

1. ε 是空间坐标的函数时的波动方程

设 $\rho = 0, j = 0$，则由方程(8.1)式消去 $\boldsymbol{H}$，得到关于 $\boldsymbol{E}$ 的方程为(令 $\mu = \mu_0$)

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = 0 . \tag{8.99}$$

如在(8.1)式中消去 $\boldsymbol{E}$，则得到关于 $\boldsymbol{H}$ 的方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon}[\nabla\varepsilon \times (\nabla \times \boldsymbol{H})] = 0 . \tag{8.100}$$

设 ε 只沿空间的一个方向变化，即 $\varepsilon = \varepsilon(z)$，并且设波是在 Oxz 平面内传播，此时单色波的解的形式一定是

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(z) e^{i(k_x x - \omega t)} .$$

如果 $k_x = 0$，则表示波垂直透射过 $\varepsilon = \varepsilon(z)$ 的物质层，如果 $k \neq 0$，则波倾斜透射. 当 $k_x \neq 0$ 时，我们必须把波分解成两种不同的偏振波来讨论，并且令 k_x 为常数.

(1) 如果 $\boldsymbol{E}$ 垂直于波的传播平面，即沿 y 方向，则方程(8.99)式就可化成

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r - k_x^2\right) E = 0 , \tag{8.101}$$

这种水平偏振的波称为 **E 波**.

(2) 如果 **H** 垂直于波的传播平面,即沿着 y 轴,则方程(8.100)式变成

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{k^2}{\varepsilon_r}\right)H=0. \tag{8.102}$$

在这种情况下,可能出现 E_z 和 E_x 方向偏振,通常称为 **H 波**,以后我们还会看到,这两种波之间有许多不同之处. 下面的讨论中我们认为

$$\varepsilon=\varepsilon_0-\frac{e^2N_0}{m\omega^2}z=\varepsilon_0\varepsilon_r.$$

2. E 波

我们利用 $\omega_p^2=\dfrac{e^2N_0}{m\varepsilon_0}$ 把 ε_r 写为

$$\varepsilon_r=\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}z\right), \tag{8.103}$$

于是 E 波方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}E+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}z\right)-k_x^2\right]E=0. \tag{8.104}$$

令

$$\begin{aligned}\zeta&=\left(\frac{\omega_p^2}{c^2}\right)^{1/3}(z_0-z),\\ z_0&=\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\left(1-\frac{c^2}{\omega^2}k_x^2\right).\end{aligned} \tag{8.105}$$

则方程(8.104)式化成为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}E+\zeta E=0. \tag{8.106}$$

我们可以利用傅里叶变换来求解上述方程,先把 $E(\zeta)$ 作傅里叶展开,即有

$$E(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta u}\mathrm{d}u,$$

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta u}\mathrm{d}\zeta,$$

把 $E(\zeta)$ 代入(8.106)式得

$$\frac{\mathrm{d}E(u)}{\mathrm{d}u}+\mathrm{i}u^2E(u)=0,$$

其解为

$$E(u)=A'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{u^3}{3}}.$$

利用反变换得到

$$\begin{aligned}E(\zeta)&=A'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)}\mathrm{d}u\\&=A'\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)\right]\mathrm{d}u\\&=A'\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= A\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)\right]\mathrm{d}u$$

$$= A\Phi(-\zeta)\,, \tag{8.107}$$

其中 $\Phi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}-\zeta u\right)\mathrm{d}u$ 称为 Airy 函数，它可以用 $\frac{1}{3}$ 阶贝塞尔函数来表示，常数 A 由边界条件决定.

为了看清 E 波解的物理图象，我们来讨论(8.107)式的渐近行为. 考虑到

$$\zeta=\left(\frac{\omega_p^2}{c^2}\right)^{1/3}(z_0-z)\,.$$

(1) 当 $z<z_0$ 时，$\zeta>0$. 如果 ζ 很大，即当 $\zeta\to\infty$ 时，利用 Airy 函数的渐近公式得

$$E(\zeta)=\frac{A}{\zeta^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)\qquad(\zeta\to\infty)\,. \tag{8.108}$$

因为在 $z<z_0$ 的区域中，$\varepsilon_r>0$，因此，(8.108)式表明在正介电常数区域内，场具有驻波形式，它是沿着 z 轴正方向入射的波与在 $z=z_0=\frac{\omega^2}{\omega_p^2}-\frac{c^2}{\omega^2}k_x^2$ 的平面上反射波的叠加.

(2) 在 $z>z_0$ 的区域，$\zeta<0$，如果 $|\zeta|$ 很大，即 $|\zeta|\to\infty$，则由 Airy 函数的渐近表示式可得

$$E(\zeta)=\frac{A}{2|\zeta|^{1/4}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}|\zeta|^{3/4}}\qquad(\zeta\to-\infty)\,. \tag{8.109}$$

它表明，在介电常数 $\varepsilon_r<0$ 的区域内，E 波的场按指数衰减，频率越高，衰减越快. 要注意的是，这种波的衰减并不是能量的损耗，而是由于波在负的介电常数的介质层上被反射掉的缘故，而且其反射系数一定是 1，其道理和全反射一样.

(3) 对于 $\varepsilon_r\approx0$ 点的场，我们可以由 Airy 函数在原点的行为来确定，由于 $\zeta=0$ 不是 $\Phi(\zeta)$ 的奇点，因而若 $\Phi(\zeta)$ 是有限的，则由(1)和(2)可推知，E 波只是以指数衰减的形式透过 $\varepsilon_r\approx0$ 的这个平面.

3. H 波

为了讨论 H 波，我们先令 $H=F\sqrt{\varepsilon_r}$，则方程(8.100)式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z}+q(z)F=0\,, \tag{8.110}$$

其中

$$q(z)=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(z)+\frac{1}{2\varepsilon_r}\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon_r}{\mathrm{d}z^2}-\frac{3}{4\varepsilon_r}\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r}{\mathrm{d}z}\right)^2-k_x^2\,.$$

如果我们讨论远离平面 $\varepsilon_r\approx0$ 的区域的波动特性(正如讨论 $|\zeta|$ 很大时，E 波的情况)，则可以把 $q(z)$ 中含导数的项都略去，这样方程(8.110)式与 E 波方程(8.101)式完全一致，因而 H 波的解与 E 波的解只差了一个因子 $\sqrt{\varepsilon_r}$. 为此，对于 H 波，我们重点讨论在 $\varepsilon_r\approx0$ 点附近场的行为.

由(8.100)式得

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}z^2}-\frac{1}{\varepsilon_r'}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}+\left(-\frac{\omega^4}{\omega_p^2c^2}\varepsilon_r'-k_x^2\right)H=0\,, \tag{8.111}$$

其中 $\varepsilon_r'=z-\frac{\omega^2}{\omega_p^2}=-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\varepsilon_r$. 显然，上述方程在 $z=z_1=\frac{\omega^2}{\omega_p^2}$ 处存在奇点，这是一阶奇点，故一

定存在正则解. 我们可以把场在 $z=z_1$ 处作级数展开来求解,对此不难求得两个线性独立的解:

$$H_1 = (z-z_1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_1)^n , \tag{8.112}$$

其中 $c_0=1, c_1=0$,其余系数的递推公式为

$$c_n = \frac{1}{(n+2)n}\left[k_p^2 c_{n-3} + k_x^2 c_{n-2}\right] ,$$

而 $k_p^2 = \frac{\omega^4}{\omega_p^2 c^2}$;另一个解

$$H_2 = \ln[k_x(z-z_1)]H_1(z) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_1)^n , \tag{8.113}$$

其中 $d_0 = \frac{2}{k_x^2}, d_1=0, d_2=1$,其余系数的递推公式为

$$n(n+2)d_{n+2} + 2(n+1)c_n - k_x^2 d_n - k_p^2 d_{n-1} = 0 .$$

一般取有限项即可,故

$$H_2 = (z-z_1)^2 + \frac{k_x^2}{8}(z-z_1)^4 + \frac{k_p^2}{15}(z-z_1)^5 + \cdots - H_1(z)\ln[k_x(z-z_1)] + \frac{2}{k_x^2} + \frac{2k_p^2}{3k_x^2}(z-z_1)^3 + \cdots \tag{8.114}$$

由此可见:

(1) 当 $z \to z_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ 时,H 波的磁场分量趋向一个常数,我们把它记为 H_0.

(2) H 波的电场分量为

$$E_x = -\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon_r k}\frac{\partial H}{\partial z} \approx -\frac{\mathrm{i}k_x^2}{k} H_0 \ln[k_x(z-z_1)] ,$$
$$E_z = \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon_r k}\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{k_x}{\varepsilon_r k} H \approx -\frac{k_x}{k} H \frac{1}{z-z_1} . \tag{8.115}$$

当 $z \to z_1$ 时,$\boldsymbol{E}$ 都变成无穷大,这表示在 $\varepsilon_r = 0$ 点附近,H 波的电场将剧烈地加强. 这是 H 波与 E 波的一个显著的区别.

*§8.10 介电常数的色散定律

前面的讨论都假定介电常数与频率无关,即不发生色散. 事实上,色散是所有介质的共同特性,介电常数的频率色散特性正是一个极为重要的问题.

显然,在迅变电磁场的情况下,物质的电极化跟不上电磁场的变化. 此时,$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 之间的瞬时关系已不成立,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间存在着时间非局域关系. $\boldsymbol{D}(t)$和前一时刻 $\boldsymbol{E}(t)$的值之间最普遍的线性关系可以写成下述积分形式:

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(t) + \int_0^{\infty} f(t')\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(t-t')\mathrm{d}t' , \tag{8.116}$$

式中 $f(t')$为时间的函数,与介质的性质有关. 与静电公式类比,我们可以把(8.116)式形式上写成为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},$$

ε 为线性积分算符. 由于任何交变场都可以展开为单色波的集合,各单色波的时间因子均是 $e^{-i\omega t}$,所以对于单色场,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 满足

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}\ .$$

显然,由傅里叶变换,可直接从(8.116)式得出:

$$\varepsilon_r(\omega)=1+\int_0^{\infty}f(t')e^{i\omega t'}dt'\ , \tag{8.117}$$

式中 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)$. 由此可见,对于迅变场,我们可以把介电常数 $\varepsilon(\omega)$作为 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的比例系数,它不但与介质有关,而且与场的频率有关. ε 对频率的依赖关系称为**色散定律**. $\varepsilon(\omega)$有下面几个重要的性质:

(1) 函数 $\varepsilon(\omega)$一般说来是复数,所以我们可以令

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)\ . \tag{8.118}$$

从(8.117)式可以直接看出

$$\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega)\ , \tag{8.119}$$

把实、虚部分开后,则有

$$\varepsilon'(-\omega)=\varepsilon'(\omega),\ \varepsilon''(-\omega)=-\varepsilon''(\omega)\ . \tag{8.120}$$

可见,介电常数的实部是频率的偶函数,虚部是频率的奇函数.

(2) $\varepsilon(\omega)$的解析性. 当 $\omega\to\infty$时,$\varepsilon_r(\omega)\to1$,这是由于电场随时间变化很快,以致介质中的极化过程根本来不及发生. 而当 ω 很小时,我们可以把 $\varepsilon(\omega)$展开成 ω 的幂级数. 根据性质(1),实部和虚部可分别展开成:

$$\varepsilon'(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\omega^{2n},\ \varepsilon''(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n\omega^{2n+1}.$$

对电介质来说,由于 $\omega\to0$ 时,$\varepsilon(\omega)\to\varepsilon_{静态}=$常数,所以不保留负次幂部分,即

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(0)+id_0\omega+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\omega^{2n}+id_n\omega^{2n+1}).$$

可见,低频时电介质 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon(0)+id_0\omega$. 对导电介质来说,由(8.33)式可看出,在 ω 很小的情况下,展开式应当从负一次幂开始,包括零次幂和正幂部分,即

$$\varepsilon(\omega)=i\frac{\sigma_c}{\omega}+\varepsilon(0)+id_0\omega+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\omega^n+id_n\omega^{2n+1}),$$

其中 $\varepsilon(0)$为静态导体的介电常数,所以,对于低频下的导体,

$$\varepsilon(\omega)=i\frac{\sigma_c}{\omega}+\varepsilon(0)\ .$$

由此可见,函数 $\varepsilon(\omega)$的又一重要特性是:如把 ω 看成复变数 $\omega=\omega'+i\omega''$,则 $\varepsilon(\omega)$在复 ω 的上半平面解析,且只在实轴的 $\omega=0$ 处存在一阶奇点. 有关 $\varepsilon(\omega)$的解析性问题的较严格的讨论请参看杰克逊的《经典电动力学》§7.10.

(3) 由性质(1)和(2),可导出 $\varepsilon(\omega)$的实部和虚部的函数关系. 为此,我们在复 ω 平面上作回路积分

$$\oint \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega ,$$

其中 ω_0 是实数，积分回路如图 8.9 所示，在 $\omega = 0$ 处，$\varepsilon(\omega)$有一阶极点. 显然. 由于 $\varepsilon(\omega)$是上半平面的解析函数，所以所述积分回路中无奇点，故有

$$\oint \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = 0 .$$

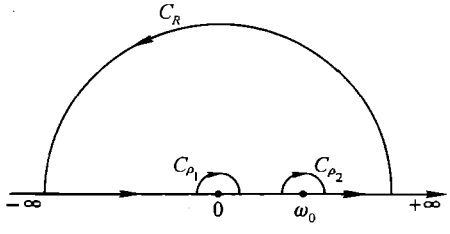


图 8.9

另一方面，回路积分又可写成

$$\oint \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = \left[\int_{C_R} + \int_{C_{\rho_1}} + \int_{C_{\rho_2}} + \int_{-\infty}^{-\rho_1} + \int_{\rho_1}^{\omega_0 - \rho_2} + \int_{\omega_0 + \rho_2}^{+\infty} \right] \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega$$

$$= \left[\int_{C_R} + \int_{C_{\rho_1}} + \int_{C_{\rho_2}} + P\int_{-\infty}^{\infty} \right] \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega .$$

由于 $\omega \to \infty$时，$\varepsilon(\omega) \to \varepsilon_0$，即 $\varepsilon - \varepsilon_0 \to 0$，这样

$$\int_{C_R} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega \xrightarrow{\omega \to \infty} 0 .$$

对于半圆 C_{ρ_1} 和 C_{ρ_2} 上的积分，当 $\rho_1 \to 0, \rho_2 \to 0$ 时分别为

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \int_{C_{\rho_1}} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = - \frac{\pi \sigma_c}{\omega_0} ,$$

$$\lim_{\rho_2 \to 0} \int_{C_{\rho_2}} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = - i\pi [\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0] .$$

于是，最后我们得到

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega = i\pi [\varepsilon(\omega_0) - \varepsilon_0] + \frac{\pi \sigma_c}{\omega_0} .$$

由 $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$，可把上述积分的实部和虚部分开，得到

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega_0) - \varepsilon_0 &= \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega , \\ \varepsilon''(\omega_0) &= - \frac{1}{\pi} \left\{ P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0}{\omega - \omega_0} d\omega - \frac{\pi \sigma_c}{\omega_0} \right\} . \end{aligned} \tag{8.121}$$

*上式即为**克拉默斯－克勒尼希色散关系**，它在物理学的许多领域内都极为有用.* 其中第二式中右边的第二项是对金属而言的，而在电介质中，因 $\sigma_c = 0$，第二项自动消失.

由性质(1)知，$\varepsilon''(\omega)$是奇函数，故我们把(8.121)式中的第一式改写为

$$\varepsilon'(\omega_0)-\varepsilon_0=\frac{1}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega-\omega_0}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega+\omega_0}\mathrm{d}\omega,$$

即

$$\varepsilon'(\omega_0)-\varepsilon_0=\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{\omega^2-\omega_0^2}\mathrm{d}\omega\ . \tag{8.122}$$

公式(8.122)特别有用,对于给定的介质,一旦我们从实验上测出了 $\varepsilon''(\omega)$ 的经验规律,就可以从它计算出函数 $\varepsilon'(\omega)$.

*§8.11 介质的色散模型

上一节我们研究了 $\varepsilon(\omega)$ 的某些一般性质,现在,我们应用经典的模型来具体地说明色散的物理内容. 设物质由同一分子组成,对分子采用谐振子模型. 略去彼此间的相互作用力,这时电子的运动方程成为

$$m[\ddot{\boldsymbol{r}}+\Gamma\dot{\boldsymbol{r}}+\omega_0^2\boldsymbol{r}]=-e\boldsymbol{E}\ ,$$

式中 Γ 是量度电子所受阻尼力的量. 显然,上述方程的解为

$$\boldsymbol{r}=-e\boldsymbol{E}/m[\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega]\ .$$

若考虑原子核外只有一个电子,则每个分子的偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=-e\boldsymbol{r}=e^2\boldsymbol{E}/m[\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega]\ . \tag{8.123}$$

如果单位体积中有 N 个分子,则极化矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=N\boldsymbol{p}=Ne^2\boldsymbol{E}/m[\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega]\\&=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

物质的折射率为

$$\begin{aligned}n^2&=\varepsilon_r=1+\chi\\&=1+Ne^2/\varepsilon_0 m[\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\Gamma\omega]\ .\end{aligned} \tag{8.124}$$

由(8.124)式,我们可以把 n 分解成实部和虚部,即

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}=n'+\mathrm{i}n'',$$

经计算可得

$$\begin{aligned}n'^2-n''^2&=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\ ,\\n'n''&=\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\ ,\end{aligned} \tag{8.125}$$

由这两式,可以解得 n' 和 n''.

在 ε_r 与 1 相差不大的情况下,我们可以给出 n' 和 n'' 的简单表达式. 由 $\varepsilon_r=n^2$ 及 $k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}=\frac{\omega}{c}(n'+\mathrm{i}n'')$,得出

$$\sqrt{\varepsilon_r}=n'+\mathrm{i}n''=\left[1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2},$$

可见

$$n'=1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2},$$
$$n''=\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}. \tag{8.126}$$

若设波前进的方向为 z 方向,则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$
$$=\boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}n''z}e^{\mathrm{i}\omega\left(\frac{n'}{c}z-t\right)}. \tag{8.127}$$

由(8.126)和(8.127)式可以看出,n'是 ω 的偶函数,它决定了电磁波的相速,所以有色散;而 n''是 ω 的奇函数,它表示介质对电磁波有吸收,所以叫做**吸收系数**.

1. 在本征频率 ω_0 附近的情况

当 $\omega\to\omega_0$ 时,$(\omega_0^2-\omega^2)=(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)\approx -2\omega_0\Delta\omega$,此时

$$n'-1=-\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{2\omega_0\Delta\omega}{4\omega_0^2\Delta\omega^2+\omega_0^2\Gamma_0^2}$$
$$=-\frac{Ne^2\Delta\omega}{4\varepsilon_0 m\omega_0\left(\Delta\omega^2+\frac{\Gamma_0^2}{4}\right)}, \tag{8.128}$$
$$n''=\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\cdot\frac{\Gamma_0}{4\omega_0\left(\Delta\omega^2+\frac{\Gamma_0^2}{4}\right)},$$

式中 Γ_0 表示 Γ 中的 ω 用 ω_0 代替(一般讲阻尼与 ω 有关). (8.128)式可以利用图 8.10 来说明*.

(1) 当 $\Delta\omega=-\frac{\Gamma_0}{2}$,即 $\omega=\omega_0-\frac{\Gamma_0}{2}$时,$n'-1$ 极大.

(2) 当 $\Delta\omega=\frac{\Gamma_0}{2}$,即 $\omega=\omega_0+\frac{\Gamma_0}{2}$时,$n'-1$ 极小.

(3) 在这两个频率之间,随着 ω 增大,n'减小. 这种情况我们称为**反常色散**,而这个区域也正是振子的吸收区域,可见反常色散的出现,意味着有吸收.

(4) 当 $\omega<\omega_0$ 时,$n'-1>0$,即 $n'>1$,此时相速度比 c 小,这是因为介质中振子的振动使散射波的相角相对于原来入射波的相角推迟. 当 $\omega=\omega_0$ 时,振子和入射波发生共振,它们之间无相角差,$n'=1$,此时大量电磁波的能量被谐振子吸收. 当 $\omega>\omega_0$ 时,散射波的相角被提前了,所以相速度大于 c.

2. 在远离 ω_0 时的情况

设$(\omega_0^2-\omega^2)^2\gg\Gamma^2\omega^2$,此时 $n''\to 0$,介质是透明的,色散关系为

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}, \tag{8.129}$$

---

* 阮树仁等,复旦学报(自然科学版),Vol.34(1995)P.292.

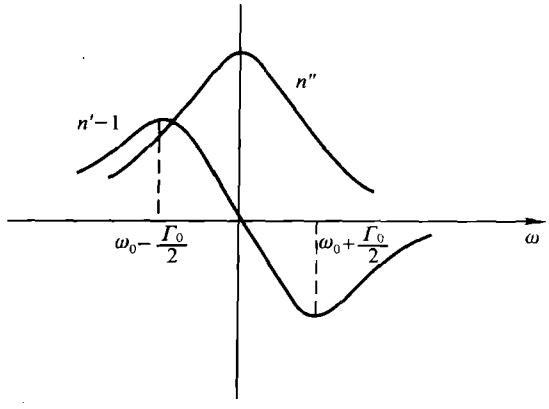


图 8.10

n 与 ω 的关系如图 8.11 所示. (8.129)式在 ω_0 附近无物理意义,只有 ω 远离 ω_0 时才有效,若 $\omega \gg \omega_0$,则

$$n^2 \approx 1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2},$$

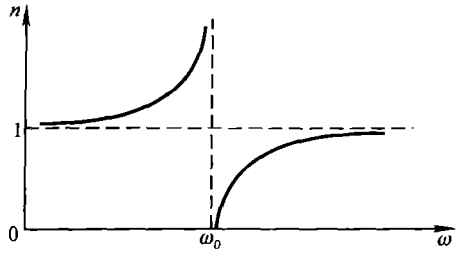


图 8.11

此时折射率随频率增大而增大,因而是**正常色散**. 反之,如果 $\omega \ll \omega_0$,则

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2},$$

即没有色散现象.

*§8.12 群 速 度

波动方程平面波解的性质我们已讨论过了,但这是一种理想情况,实际上出现的电磁波总是在某一频率 ω_0 附近有一定展宽($\pm\Delta\omega$)的非周期性的波列,即使是单色光源的情况也是如此. 由于方程是线性的,这个非周期性波列原则上可以通过不同频率的平面波的叠加得到,叠加后的波具有新的性质. 为简单起见,我们只讨论在同一方向上传播的波列,令这个方

向为 z 方向,组成波列的波为

$$C(k)e^{i(\omega t-kz)}, \tag{8.130}$$

波列的方程为

$$u(z,t)=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}C(k)e^{i(\omega t-kz)}dk . \tag{8.131}$$

下面我们来讨论波列中心的传播速度.

Δk 很小,我们可以把 ω 及 k 在 ω_0、k_0 附近展开,略去$(k-k_0)$的高次项,则有

$$\omega=\omega_0+\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0(k-k_0) .$$

于是

$$\begin{aligned}u(z,t)&=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}C(k)e^{i(\omega t-kz)}dk\\&=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}C(k)e^{i\left[\omega_0 t+\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0(k-k_0)t-k_0 z-(k-k_0)z\right]}dk .\end{aligned}$$

若 $C(k)$随 k 的变化是缓慢的,则在 $k_0\pm\Delta k$ 范围内,可把 $C(k)$用 $C(k_0)$代替,同时令 $k-k_0=b$,则 $dk=db$,

$$\begin{aligned}u(z,t)&=C(k_0)e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}\int_{-\Delta k}^{\Delta k}e^{i\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]b}db\\&=2C(k_0)e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}\frac{\sin\left\{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]\Delta k\right\}}{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]}\\&=C(z,t)e^{i(\omega_0 t-k_0 z)},\end{aligned} \tag{8.132}$$

式中

$$C(z,t)=2C(k_0)\frac{\sin\left\{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]\Delta k\right\}}{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]} .$$

令

$$\phi=\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-z\right]\Delta k ,$$

则

$$C(z,t)=2C(k_0)\frac{\sin\phi}{\phi}\Delta k . \tag{8.133}$$

可见,$C(z,t)$是单色波 $e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}$ 的振幅,而$(\omega_0 t-k_0 z)$则是相位. $C(z,t)$与 z、t 有关,由下表和对应的图 8.12 可得出:ϕ 从零不断增大的过程中,$\frac{\sin\phi}{\phi}$经过一系列的极大和极小值,且极大和极小的值随 ϕ 的增大而减小. 所以,这时波列基本上集中在空间的一定范围内,即在 $\phi=0$ 的附近,为此我们把它叫做波包.

ϕ	0	$\pm\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\pm2\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
$\frac{\sin\phi}{\phi}$	1	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$

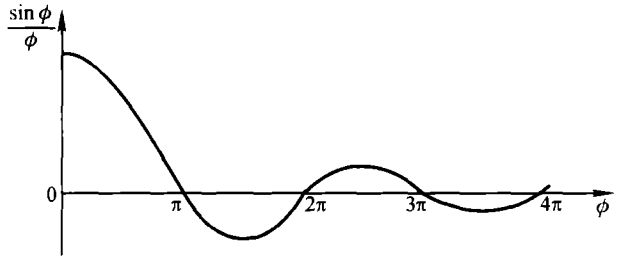


图 8.12

对于一定的 ϕ，$C(z,t)$有一定值，而 ϕ 又是 z、t 的函数，可见这个定值振幅是在空间移动的．于是，整个波包在空间移动，其移动的速度为

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 . \tag{8.134}$$

v_g 是**群速度**，反映了整个波包在空间移动的快慢，也是能量传递的速度．

相因子$(\omega_0 t - k_0 z)$反映了波包相位变化的情况．因它是空间、时间的函数，相应得到的速度称为**相速度**：

$$v_p = \frac{\omega_0}{k_0} .$$

对于我们以前谈到的平面电磁波，其振幅为常数，因此只有一种速度，即相速度．它反映波的全部传递情况，可见只有在出现两个以上的波的叠加时才有群速度与相速度之分．

在以前的讨论中，我们已知在介质中 ω 与 k 的关系为

$$k = \frac{\omega}{c} n .$$

若介质是非色散性质的，则 n 是一常数，与 ω 无关，于是

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} .$$

显然，在这类介质中，相速度与群速度没有差别．

若介质是色散性质的，则 n 与 ω 有关，故

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = \frac{c}{n} + k\frac{d}{dk}\left(\frac{c}{n}\right) , \tag{8.135}$$

可见这时相速度与群速度不相等．

若在 ω 展开式中考虑二级微商项，则可以证明，波包的形状将随时间变化，波包会扩散．

习　　题

8.1　证明对于任意一对复矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$，若它们都是随时间作简谐变化的，则它们的乘积对时间的平均值由下式决定：

$$\langle(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{F})\otimes(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{G})\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}^*\otimes\boldsymbol{G}),$$

$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{F}$ 表示取 $\boldsymbol{F}$ 的实部，$\otimes$表示标积或矢积．

8.2　验证:电磁波在不同电介质分界面上反射和折射时,能量守恒.

8.3　平面电磁波垂直入射到金属表面上,证明透入到金属内部的电磁波能量全部转变为焦耳热.

8.4　一个具有场强 $E=3\times10^{10}$ V/m 的电磁波垂直入射在一个绝缘介质平面上,介质的介电常数 $\varepsilon=1.44\varepsilon_0$,试计算电磁波在介质上所产生的压力.

8.5　单色平面电磁波由真空倾斜入射到非磁性的导体平面上,波的偏振方向与入射面成 α 角,如果入射线偏振波的强度为 I_0,试确定反射波的强度和偏振态.

8.6　一个厚为 d 的介质层,介电常数为 ε_2,它将介电常数为 ε_1 和 ε_3 的两种介质隔开(图 8.13). 试求:当 d 为多少时,反射最小?(取 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_0$).

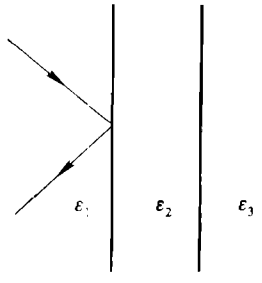


图 8.13

8.7　设频率为 ω,沿 z 方向传播的平面极化电磁波,掠入射到理想导体平面上($x=0$),入射波为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_0\cos\phi_0 e^{i(kz-\omega t)}+\boldsymbol{e}_y\sin\phi_0 e^{i(kz-\omega t)}.$$

求:(1) $x>0$ 的区域内 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的分布;(2) 如果是良导体,电导率为 σ_c,求单位面积上的功耗.

8.8　一平面极化的电磁波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_y E_0\sin(kz-\omega t+\phi_0)$ 由真空正入射到理想导体平面上. 试求空间电磁场分布、导体面上的电流分布及辐射压力.

8.9　证明:光正入射到绝缘介质面上时,反射系数和透射系数分别为

$$R=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,\quad T=\frac{4n}{(n+1)^2}\qquad(n=n_2/n_1).$$

8.10　超导体甚至在静态下也存在小的透入深度 δ. 如果把表面阻抗概念应用于超导体,试证明超导体的阻抗为

$$Z_s=-i\omega\mu_0\delta.$$

8.11　已知相速度与群速度成反比,试求色散公式.

第九章　波导和谐振腔

本章分析电磁场在波导管中的分布. 先讨论电磁波在波导内的传播,然后研究谐振腔内的电磁振荡,重点阐明波导和谐振腔的理论基础并给出最主要的理论结果.

§9.1　波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的空心管子,最典型的是中空的金属管,其截面是矩形或圆形的,分别称矩形波导或圆柱形波导. 当然,波导管截面也可以是其他形状的. 电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播,这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别.

1. 场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都是一样的直波导管的情形. 若波导管中无源,且是真空,则波导中的电磁场满足波动方程

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}&=0,\\ \left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}&=0.\end{aligned}\tag{9.1}$$

选择波导管的长度方向为 z 轴,我们感兴趣的是沿着 z 方向传播的解. 所以,我们设(9.1)式具有如下形式的解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)},\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)},\end{aligned}\tag{9.2}$$

代入方程(9.1)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_0}{\partial y^2}+k_c^2\boldsymbol{E}_0&=0,\\ \frac{\partial^2\boldsymbol{B}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_0}{\partial y^2}+k_c^2\boldsymbol{B}_0&=0,\end{aligned}\tag{9.3}$$

式中

$$k_0^2=\frac{\omega^2}{c^2},\tag{9.4}$$

$$k_c^2 = k_0^2 - k_g^2. \tag{9.5}$$

$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 除满足(9.1)式外,还应当满足麦克斯韦方程组. 所以,由$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$得

$$\frac{\partial}{\partial y}E_{0z} - \mathrm{i}k_g E_{0y} = \mathrm{i}k_0 cB_{0x},$$

$$\mathrm{i}k_g E_{0x} - \frac{\partial}{\partial x}E_{0z} = \mathrm{i}k_0 cB_{0y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_{0y} - \frac{\partial}{\partial y}E_{0x} = \mathrm{i}k_0 cB_{0z}.$$

由方程$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$得

$$\frac{\partial}{\partial y}B_{0z} - \mathrm{i}k_g B_{0y} = -\mathrm{i}\frac{k_0}{c}E_{0x},$$

$$\mathrm{i}k_g B_{0x} - \frac{\partial}{\partial x}B_{0z} = -\mathrm{i}\frac{k_0}{c}E_{0y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0y} - \frac{\partial}{\partial y}B_{0x} = -\mathrm{i}\frac{k_0}{c}E_{0z}.$$

同时由$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$和$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$得

$$\frac{\partial}{\partial x}E_{0x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + \mathrm{i}k_g E_{0z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} + \mathrm{i}k_g B_{0z} = 0.$$

把上面八个方程联立,得到场的横向分量用纵向分量来表示的表达式为

$$\begin{cases} E_{0x} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(ck_0\dfrac{\partial}{\partial y}B_{0z} + k_g\dfrac{\partial}{\partial x}E_{0z}\right), \\ E_{0y} = -\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(ck_0\dfrac{\partial}{\partial x}B_{0z} - k_g\dfrac{\partial}{\partial y}E_{0z}\right), \\ B_{0x} = -\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\dfrac{k_0}{c}\dfrac{\partial}{\partial y}E_{0z} - k_g\dfrac{\partial}{\partial x}B_{0z}\right), \\ B_{0y} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\dfrac{k_0}{c}\dfrac{\partial}{\partial x}E_{0z} + k_g\dfrac{\partial}{\partial y}B_{0z}\right). \end{cases} \tag{9.6}$$

(9.6)式告诉我们:一旦场的纵向分量 B_{0z}、E_{0z} 知道了,则整个场的分布就可以确定下来. 同时,从(9.6)式又可看出,波导管内不可能传播 TEM 波(横电磁波),因为 TEM 波要求 $B_{0z}=0$、$E_{0z}=0$,若这样,则由(9.6)式知 $E_{0x}=E_{0y}=B_{0x}=B_{0y}=0$*. 可见,波导中只允许有$B_{0z}=0$但$E_{0z}\neq 0$的横磁波(TM波)或

* 对于 $k_c^2=0$ 的情形,结论见 §9.5 的讨论.

$B_{0z}\neq 0$ 而 $E_{0z}=0$ 的横电波(TE 波). 这是波导中电磁波的最显著特点之一.

2. TE 波

TE 波的条件是

$$E_{0z}=0,\ B_{0z}\neq 0, \tag{9.7}$$

B_{0z} 满足的方程由(9.3)式得到:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)B_{0z}=0, \tag{9.8}$$

横向分量与 B_{0z} 的关系为

$$E_{0x}=\mathrm{i}\frac{ck_0}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}B_{0z},\ E_{0y}=-\mathrm{i}\frac{ck_0}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}B_{0z}, \tag{9.9}$$

$$B_{0x}=\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}B_{0z},\ B_{0y}=\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}B_{0z}. \tag{9.10}$$

将(9.9)和(9.10)式写成矢量形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_{0t}=\mathrm{i}\dfrac{k_g}{k_c^2}\nabla B_{0z},\\ \boldsymbol{E}_{0t}=-\mathrm{i}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\boldsymbol{e}_z\times\nabla B_{0z}.\end{cases} \tag{9.11}$$

欲求解方程(9.8)式,还需要相应的边界条件,为此我们假定波导管壁是理想导体,在管壁表面上有

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t+\boldsymbol{B}_z$,于是上式成为

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{B}_t+\boldsymbol{B}_z)=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{B}_t=0.$$

由(9.11)的第一式得

$$\frac{\partial}{\partial n}B_{0z}\Big|_{\text{侧面}}=0. \tag{9.12}$$

可见,由方程(9.8)式和边界条件(9.12)式,就完全确定了 TE 波的轴向分量 B_{0z} 的函数形式,从而由(9.11)式完全确定了 TE 波的场分布.

3. TM 波

对于 TM 波,轴向分量为

$$E_{0z}\neq 0,\ B_{0z}=0.$$

同样,E_{0z} 所满足的方程由(9.3)式得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)E_{0z}=0, \tag{9.13}$$

横向场分量与 E_{0z} 的关系由(9.6)得

$$\begin{cases} E_{0x} = \mathrm{i}\dfrac{k_g}{k_c^2}\dfrac{\partial}{\partial x}E_{0z},\ E_{0y} = \mathrm{i}\dfrac{k_g}{k_c^2}\dfrac{\partial}{\partial y}E_{0z}; \\ B_{0x} = -\mathrm{i}\dfrac{k_0}{ck_c^2}\dfrac{\partial}{\partial y}E_{0z},\ B_{0y} = \mathrm{i}\dfrac{k_0}{ck_c^2}\dfrac{\partial}{\partial x}E_{0z}. \end{cases} \tag{9.14}$$

把(9.14)式改写成矢量形式就有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{0t} = \mathrm{i}\dfrac{k_g}{k_c^2}\nabla E_{0z}, \\ \boldsymbol{B}_{0t} = \mathrm{i}\dfrac{k_0}{ck_c^2}\boldsymbol{e}_z \times \nabla E_{0z}. \end{cases} \tag{9.15}$$

在理想导体情况下,对应于方程(9.13)式的 E_{0z} 的边界条件为在波导管壁面上

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} = 0,$$

由于 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{E}_z$,故

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{E}_z) = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}_z = 0,$$

即

$$E_{0z}\big|_{\text{侧面上}} = 0. \tag{9.16}$$

可见,TM 波的轴向分量可由(9.13)和(9.16)式解得,然后代入(9.15)式求出横向分量,TM 波场的分布即可求得.

总之,对于 TE 波来说,主要归结为在第二类齐次边界条件下求解二维亥姆霍兹方程的本征值问题,对 TM 波来说,则归结为在第一类齐次边界条件下求解二维亥姆霍兹方程问题. 作为本节内容的具体应用,我们来讨论两种最常用的波导.

§9.2 矩形波导

矩形波导的结构如图 9.1 所示. 不妨认为波导管壁为理想导体. 我们先来讨论 TE 波.

由上节的讨论可知,要研究 TE 波首先要求出轴向分量 B_{0z}. 在现在的情况下,方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)B_{0z} = 0,$$

边界条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0z}\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}B_{0z}\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0.$$

显然,根据分离变量法不难证明,满足上述方程和边界条件的解为

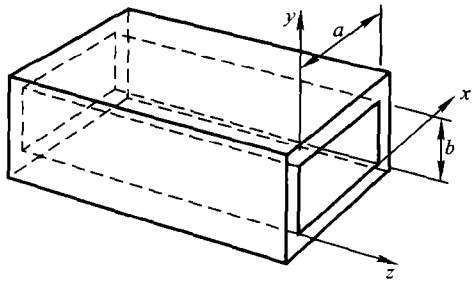


图 9.1

$$\begin{aligned} B_{0z} &= B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ k_c^2 &= \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right), \end{aligned} \tag{9.17}$$

式中 m、n 为正整数或零. 把(9.17)代入(9.11)式得到 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的全部分量为

$$\text{TE 波}\begin{cases} E_x = -\mathrm{i}\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ E_y = \mathrm{i}\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ E_z = 0, \\ B_x = -\mathrm{i}\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_g}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ B_y = -\mathrm{i}\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_g}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ B_z = B_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}. \end{cases} \tag{9.18}$$

同理,我们讨论 TM 波时首先要求出轴向分量 E_{0z},其方程为(9.13)式,对应的边界条件(9.16)式现在可写成

$$E_{0z}\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0,\quad E_{0z}\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0.$$

因此,满足上述边界的本征值问题的解为

$$\begin{aligned} E_{0z} &= E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ k_c^2 &= \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{9.19}$$

把(9.19)式代入(9.15)则可得横向分量. 综合起来,TM 波场为

$$\text{TM 波}\begin{cases} E_x = \mathrm{i}\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_g}{k_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ E_y = \mathrm{i}\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_g}{k_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ E_z = E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ B_x = -\mathrm{i}\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ B_y = \mathrm{i}\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}, \\ B_z = 0. \end{cases} \tag{9.20}$$

我们作如下的讨论：

(1) 在波导管的横截面上，场是谐变的，其分布情况取决于 m 和 n 这两个常数的值. 不同的 m 和 n 的组合对应不同的场结构，我们称之为不同的**波型**或**模式**. 一组(m，n)的值组成一个模式，TE 波记为 H_{mn}，TM 波记为 E_{mn}，所以 TE 波又称 H 波，TM 波又称 E 波. 在实际问题中，我们总是选取一个特定的模式来传送电磁波.

(2) 从(9.5)和(9.17)式我们得到

$$k_g = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}. \tag{9.21}$$

对于一定尺寸的矩形波导(即 a、b 已定)，如果我们选定了某一模式 E_{mn} 或 H_{mn} (m、n 也确定)，则从(9.21)式得出：若电磁场的振荡频率 ω 足够大，使得 $k_0^2 > k_c^2$，则 k_g 是实数，根据场的表达式中的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，我们立即看到场沿着 z 方向传播，它是行波；若电磁振荡频率足够小，以至于 $k_0^2 < k_c^2$，则 k_g 是纯虚数，显然，同样由因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$ 看到，这不再是行波，而是场随着 z 的增加而指数衰减，所以此时电磁场不能在该波导管内以 E_{mn} 或 H_{mn} (m、n 是确定的整数)的波型传播.

我们把 $k_0^2 = k_c^2$，即 $k_g = 0$ 的态称为临界状态，由(9.21)式得临界频率 ω_{mn}^c 为

$$\omega_{mn}^c = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{9.22}$$

由于 $\omega < \omega_{mn}^c$ 时电磁波不能以(m，n)模式在波导(a，b)中传播，所以 ω_{mn}^c 又称截止频率，(9.22)式即为**截止频率公式**.

(3) 从 TE 波和 TM 波的场分布(9.18)和(9.20)式还可看到：对于 TE 波，m、n 中可取一个为零；对 TM 波，m、n 都不可为零. 因此具有最低截止频率的是 H_{10}(或 H_{01})和 E_{11} 波型. 它们的截止频率为：

H_{10}或 H_{01}波型 $\omega_{10}^{c}=c\pi/a$，$\omega_{01}^{c}=c\pi/b$；

E_{11}波型 $\omega_{11}^{c}=c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$.

(4) 相速度和群速度. 由相因子$(k_g z-\omega t)$可得波导中电磁波沿 z 方向的相速度为

$$v_p=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{k_g},$$

即

$$v_p=c\Big/\sqrt{1-\frac{k_c^2}{k_0^2}}. \tag{9.23}$$

可见，波导中电磁波相速度大于光速 c. 这并不违反相对论，因为相速度是物质的视速度而并不是真正的传播速度，后者即是群速度

$$v_g=\frac{d\omega}{dk_g}=c\sqrt{1-\frac{k_c^2}{k_0^2}}, \tag{9.24}$$

它是电磁能量的传播速度，显然是小于光速 c 的.

(5) 波导中场的结构图形. 考察最简单的也是最常用的波型 H_{10}波的场分布. 由(9.18)式得

$$\begin{cases} E_x=0, \\ E_y=\dfrac{ck_0}{k_c^2}\dfrac{\pi}{a}B_0\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin(\omega t-k_g z), \\ E_z=0, \\ B_x=-B_0\dfrac{k_g}{k_c^2}\dfrac{\pi}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin(\omega t-k_g z), \\ B_y=0, \\ B_z=B_0\cos\dfrac{\pi x}{a}\cos(\omega t-k_g z). \end{cases} \tag{9.25}$$

场的各个分量的分布如图 9.2 所示，电场平行于 y 方向，其大小沿 a 边正弦变化，中间强两边弱，沿 b 边无变化；磁场沿 y 轴方向无变化，而沿着 x 轴 B_x 作正弦变化，B_z 作余弦变化. 因此，从 Oxy 截面来看，由于磁感线从 a 边的中间开始逐渐向 z 方向弯曲，到 $x=0$、a 处 $B_x=0$，而 B_z 达到最大；再从波导的纵方向来看，在某一时刻 B_x 沿 z 轴作正弦分布，而 B_z 沿 z 轴作余弦分布，B_x 和 B_z 的最大值之间相差$\frac{1}{4}$波长，即相位差为$\frac{\pi}{2}$，B_z 最大时 B_x 为零，B_x 最大时 B_z 为零. 磁场的磁感线是闭合的，它包围着位移电流. 只有磁场的纵分量在管壁处不为

零,它所感生的线电流只沿着导体截面边缘环流. 沿着波导管长度方向没有电流,因为在管壁处 $B_x=0$,而 B_y 处处为零.

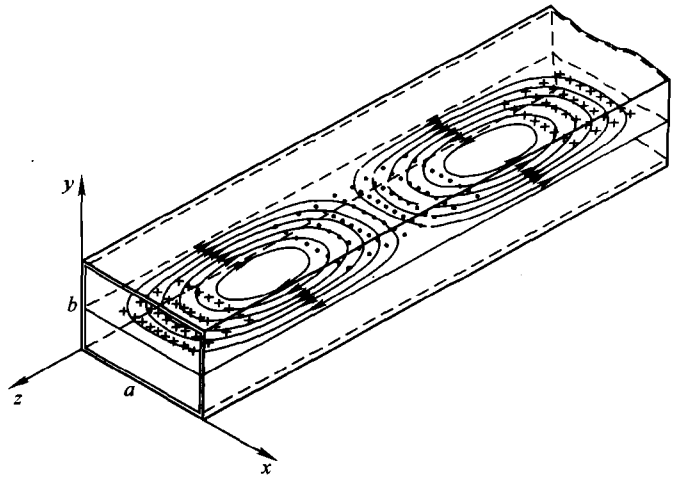


图 9.2

§9.3 圆柱形波导

对于圆柱形波导来说,关于两种波型的方程和边界条件可采用柱坐标系来表达. 无论 E_{0z} 还是 B_{0z},它们所满足的方程可由(9.3)式得出:

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi+k_c^2\psi=0. \tag{9.26}$$

对于 TM 波,ψ 代表 E_{0z},其边界条件为

$$\psi|_{\rho=a}=0;$$

对于 TE 波,ψ 代表 B_{0z},其边界条件为

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\rho=a}=0,$$

式中 a 是圆柱波导的半径. 令

$$\psi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi), \tag{9.27}$$

代入(9.26)得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+n^2\Phi=0, \tag{9.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}R+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}R-\frac{n^2}{\rho^2}R+k_c^2R=0, \tag{9.29}$$

式中 n^2 为分离变量常数. 考虑到解的周期性,(9.28)式的解为

$$\Phi = e^{in\phi},\quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

方程(9.29)是 n 阶贝塞尔方程,其解为

$$R = AJ_n(\rho k_c) + BN_n(\rho k_c),$$

其中 $J_n(\rho k_c)$为贝塞尔函数,$N_n(\rho k_c)$为诺依曼函数. 由于 $\rho \to 0$,$N_n \to \infty$,所以,$B = 0$. 因此

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \phi) &= AJ_n(\rho k_c)(e^{in\phi} + be^{-in\phi}) \\ &= D\cos(n\phi + b)J_n(\rho k_c).\end{aligned}$$

根据边界条件,我们分别得到

$$J_n(ak_c) = 0 \quad (\text{TM 波});\quad J'_n(ak_c) = 0 \quad (\text{TE 波}).$$

贝塞尔函数 $J_n(x)$具有无穷多个这样的 x 值,当取这些 x 值时,$J_n(x)$或 $J'_n(x)$等于零. 由这些根可导出频率 ω 和波数 k_g 的关系,即色散关系式.

如果令 v_{nl}是 n 阶贝塞尔函数的第 l 个根,则 TM 波的色散关系式为

$$ak_c = v_{nl} \text{ 或 } \omega^2 = c^2 k_g^2 + c^2 \frac{v_{nl}^2}{a^2}; \tag{9.30}$$

同理可得 TE 波的色散关系为

$$\omega^2 = c^2 k_g^2 + c^2 \frac{v'^2_{nl}}{a^2}, \tag{9.31}$$

式中 v'_{nl}是方程式 $J'_n(ak_c) = 0$ 的根. 整数 n 确定了与角 ϕ 有关的本征函数,所以也确定了场沿圆周的变化;整数 l 确定径向本征函数,因而它确定了场沿半径的变化.

最小的频率值与零阶贝塞尔函数的第一个根相对应,$v_{01} = 2.405$,且 $J'_n(x) = 0$ 的根总大于 $J_n(x)$的对应根,可见 E_{01}波(TM 波)具有圆柱形波导中一切可能的 E 波中的最小截止频率. $J'_n(x) = 0$ 的最小根在 $n = 1$、$l = 1$ 处,即 $v'_{11} = 1.84$,可见 H_{11}波具有一切可能的 H 波中最小的截止频率.

对于 TM 波来说,波模 E_{01}的场结构最简单. 对这种波型我们可以得到

$$E_{0z} = D\cos bJ_0(\rho k_c)e^{i(k_g z - \omega t)}, \tag{9.32}$$

再从(9.15)式得

$$\begin{cases} E_\phi = 0, \\ E_\rho = i\dfrac{k_g}{k_c} D\cos bJ'_0(\rho k_c)e^{i(k_g z - \omega t)}, \\ B_\rho = B_z = 0, \\ B_\phi = i\dfrac{k_0}{ck_c} D\cos bJ'_0(\rho k_c)e^{i(k_g z - \omega t)}. \end{cases} \tag{9.33}$$

显然,这种波型的场与 ϕ 无关,横截面内的电场线沿着半径方向,从圆心附近的横截面上发出;磁感线完全位于横截面内形成一个个圆,如图 9.3 所示.

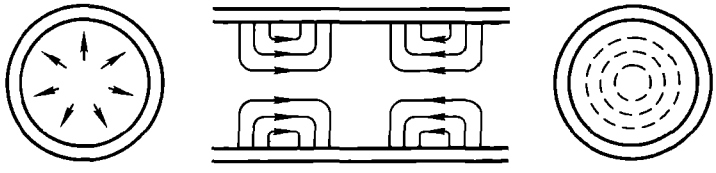


图 9.3

*§9.4 波导中的能流和能量的损耗

1. 能流

通过波导管单位截面积上的能流的时间平均值为

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}^*).$$

我们假定波导中只存在单一模式,先讨论 TM 波,TM 波场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_z E_z + \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}},$$

而且由(9.15)式

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \mathrm{i} \frac{k_g}{k_c^2} \nabla_{\mathrm{t}} E_z, \ \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} = \mathrm{i} \frac{k_0}{c k_c^2} \boldsymbol{e}_z \times \nabla_{\mathrm{t}} E_z,$$

式中 ∇_{t} 表示横向二维算子.

利用上述关系式,我们有

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}[(\boldsymbol{e}_z E_z + \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}) \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}^*] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left[\frac{k_0 k_g}{c k_c^4} |\nabla_{\mathrm{t}} E_z|^2 \boldsymbol{e}_z + \mathrm{i} \frac{k_0}{c k_c^2} E_z \nabla_{\mathrm{t}} E_z^* \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{k_0 k_g}{c k_c^4} |\nabla_{\mathrm{t}} E_z|^2 \boldsymbol{e}_z, \end{aligned} \tag{9.34}$$

所以通过波导总截面的平均能流为平均功率流,即

$$\begin{aligned} P &= \int_S \langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{k_g k_0}{c k_c^4} \int (\nabla_{\mathrm{t}} E_z) \cdot (\nabla_{\mathrm{t}} E_z^*) \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \end{aligned} \tag{9.35}$$

由二维格林公式

$$\int_S [E_z^* (\nabla_{\mathrm{t}}^2 E_z) + (\nabla_{\mathrm{t}} E_z) \cdot (\nabla_{\mathrm{t}} E_z^*)] \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} \mathrm{d}l \tag{9.36}$$

得

$$P = \frac{1}{2\mu_0}\frac{k_0 k_g}{c k_c^4}\left[\oint_C E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} \mathrm{d}l - \int_S (E_z^* \nabla_t^2 E_z)\boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]. \tag{9.37}$$

对于 TM 波，E_z 在边界上等于零，而(9.37)式的线积分是在界面(管壁)上进行的，所以(9.37)式中第一项为零. 同时，我们可以利用方程

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

化简第二项. 于是，(9.37)式可写为

$$P = \frac{1}{2\mu_0}\frac{k_0 k_g}{c k_c^2}\int_S E_z E_z^* \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{9.38}$$

这就是每一种 TM 模式沿着 z 方向传播的平均能流的计算公式.

不难证明，对于 TE 波，穿过波导管截面的平均能流公式为

$$P = \frac{c}{2\mu_0}\frac{k_0 k_g}{k_c^2}\int_S B_z B_z^* \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{9.39}$$

同理可证，波导内场的平均能量密度对 TM 波来说为

$$\begin{aligned}\langle w\rangle &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^*] \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon_0 E_z E_z^* + \left(\frac{\varepsilon_0 k_g^2}{k_c^4} + \frac{k_0^2}{\mu_0 c^2/k_c^4}\right)\nabla_t E_z \cdot \nabla_t E_z^*\right],\end{aligned}$$

故波导内单位长度的平均能量为

$$W = \frac{1}{4}\int_S \left[\varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 k_g^2 + \frac{k_0^2}{\mu_0 c^2}\right)\frac{1}{k_c^2}\right] E_z E_z^* \boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{9.40}$$

把(9.38)与(9.40)式相除再与(9.25)式比较即得

$$\frac{P}{W} = v_g. \tag{9.41}$$

可见，群速度确实是能量的传播速度. 把(9.40)式中的 E_z 改为 cB_z，即得 TE 波的单位长度波导的平均能量.

2. 波导内的能量损耗

实际的波导管总存在着有限大小的电导率，因此波导管的管壁总要吸收电磁场能量并转化为焦耳热，从而引起波导能流沿着传播方向不断衰减. 讨论这种衰减的唯象方法是：在波矢中引入一微小的虚部，即令

$$k_g = k_g^0 + \mathrm{i}\beta_g, \tag{9.42}$$

式中 k_g^0 对应于理想导体波导管中的波矢量，β_g 为衰减常数，讨论衰减问题也就是决定 β_g 的问题.

由于引入复波矢，波导中的所有场量都出现一个衰减因子 $\mathrm{e}^{-\beta_g z}$，其中沿传播方向的平均功率流为如下形式：

$$P = P_0 \mathrm{e}^{-2\beta_g z}. \tag{9.43}$$

于是，衰减系数 β_g 满足

$$\beta_g = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\Big/2P, \tag{9.44}$$

式中的 $-\frac{dP}{dz}$ 代表单位长度波导上的焦耳热损耗. 在§8.8中已求得单位面积上导体的焦耳热损耗为(8.98)式,所以单位长度波导的焦耳热损耗为

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2}\zeta'\oint_C|\boldsymbol{\alpha}|^2dl,$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是电流线密度,ζ' 为金属表面阻抗 ζ 的实部,利用关系式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}$ 即可得到功率损耗为

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2}\zeta'\oint|\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}|^2dl. \tag{9.45}$$

对 TM 波,由(9.15)式

$$\mu_0\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}_t=\frac{k_0}{k_g c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_t,$$

$$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}=\frac{k_0}{\mu_0 c k_g}[\boldsymbol{e}_z(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{E}_t)],$$

故

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{1}{2\mu_0^2c^2}\zeta'\oint_C\frac{k_0^2}{k_g^2}(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{E}_t)^2dl=\frac{1}{2\mu_0^2c^2}\zeta'\frac{k_0^2}{k_c^4}\oint\left|\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2dl, \tag{9.46}$$

上式的最后一步利用了 TM 波横场和纵场的关系式(9.15)的第一式. 对于具体的波模,只要把其轴向场(波导壁面上)的法向导数代入便可求得功率损耗. 一级近似下,我们可把 $\zeta=0$ 时的场值代入(9.46)式进行计算.

把(9.38)和(9.46)式再代回到(9.44)式即得 TM 波衰减系数公式

$$\beta_g=\frac{k_0\zeta'}{2k_c^2k_g\mu_0c}\frac{\oint\left|\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2dl}{\int|E_z|^2d\boldsymbol{S}}. \tag{9.47}$$

由类似的计算,可以得到 TE 波的衰减系数

$$\beta_g=\frac{\mu_0k_c^2\zeta'}{2k_gk_0c}\frac{\oint\left[|B_z|^2+(k_g^2/k_c^4)\left|\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|^2\right]dl}{\int|B_z|^2d\boldsymbol{S}}. \tag{9.48}$$

下面我们来讨论损耗与频率的关系. 因为

$$(\nabla_t^2+k_c^2)E_z=0,$$

$$(\nabla_t^2+k_c^2)B_z=0,$$

所以,E_z 或 B_z 的横向导数在某种平均意义下与 k_cE_z 或 k_cB_z 同数量级,即

$$\left\langle\left|\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2\right\rangle\sim k_c^2\langle|E_z|^2\rangle.$$

这样我们便可把(9.47)式或(9.48)式中的线积分和面积分联系起来

$$\frac{1}{L}\oint\left|\frac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2dl=\eta\frac{1}{S}k_c^2\int|E_z|^2dS, \tag{9.49}$$

L 为截面周长,S 为截面积,η 为一无量纲常数. 把(9.49)式代入(9.47)式,即得

$$\beta_g=\frac{1}{2}\frac{k_0\zeta'}{k_c^2k_g\mu_0c}\eta\frac{L}{S}k_c^2$$

$$= \frac{\eta}{2\mu_0 c}\frac{L}{S}\cdot\frac{\zeta'_c}{\sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}}\sqrt{1-\omega_c^2/\omega^2}}, \tag{9.50}$$

式中 $\zeta'_c=\sqrt{\frac{\omega_c\mu_0}{2\sigma_c}}$，$k_c=\frac{\omega_c}{c}$为临界波矢.

由(9.50)式看出，除一个几何因子外，β_g 随 ω 变化，而当 ω 取一定值时会出现最小损耗. 由 $\frac{d\beta_g}{d\omega}=0$，可定出最小损耗，在 TM 波情况下为

$$\omega=\sqrt{3}\omega_c. \tag{9.51}$$

*§9.5 多连通截面波导

由上面的讨论看出，无论是矩形波导还是圆柱形波导，其中传播的电磁波在频率和波型上都受到很强的限制：频率必须高于截止频率；波型必是 TM 波或是 TE 波，不可能传播 TEM 波. 实际上，这些限制只是对单连通截面的波导而言的. 对于多连通截面的波导管，结论完全不同，它不仅可以传播截止频率不为零的 TM 波或 TE 波，而且还可以传播截止频率 $\omega_c=0$ 的波，这种 $\omega_c=0$ 的波称为**多连通截面波导的主波**. 多连通截面波导的最典型的也最有实用价值的例子是由内外同轴圆柱形导体组成的同轴电缆.

我们先来证明主波一定是 TEM 波，然后再讨论多连通截面波导中主波存在的可能性.

因为 $\omega_c=0$，即 $k_c=0$，于是方程(9.13)式和边界条件(9.16)式为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_{0z}=0,\\ E_{0z}\big|_{\text{边界}}=0.\end{cases} \tag{9.52}$$

这是一个二维拉普拉斯方程的第一类齐次边界条件的边值问题，其解只可能是零，即

$$E_{0z}=0.$$

同样，$k_c=0$ 时，方程(9.8)和边界条件(9.12)式变为下述形式：

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)B_{0z}=0,\\ \left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial n}\right|_{\text{边界}}=0.\end{cases} \tag{9.53}$$

这同样是一个二维的拉普拉斯方程，所不同的是 B_{0z} 的边界是第二类的齐次边界条件，显然其解是

$$B_{0z}=\text{常数},$$

由

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0x}+\frac{\partial}{\partial y}B_{0y}+\mathrm{i}\frac{\omega}{c}B_{0z}=0,$$

对波导某横截面作面积分，得到

$$\oint B_{0n}\mathrm{d}l + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\int B_{0z}\mathrm{d}S = 0.$$

由于在截面的边界上 $B_{0n}=0$，在截面内 B_{0z} 是常数，因此

$$B_{0z}=0.$$

可见，对于主波（$k_c=0$）来说，轴向分量总是零，只存在横向分量．因为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B},\ \nabla\times\boldsymbol{B}=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E},$$

因此，必成立

$$cB_x=-E_y,\ cB_y=E_x.$$

所以，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互相垂直．由此可见，$k_c=0$ 的主波必是 TEM 波即横电磁波．

我们再来分析多连通波导中主波存在的可能性．事实上，由方程(9.3)可知，对于主波来说，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都满足二维拉普拉斯方程，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_0}{\partial y^2}&=0,\\ \frac{\partial^2\boldsymbol{B}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_0}{\partial y^2}&=0,\end{aligned}\tag{9.54}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{e}_xE_{0x}+\boldsymbol{e}_yE_{0y}$，$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_xB_{0x}+\boldsymbol{e}_yB_{0y}$．主波方程(9.54)式也可以从二维静电场方程

$$\nabla_2\cdot\boldsymbol{E}=0,\ \nabla_2\times\boldsymbol{E}=0\tag{9.55}$$

形式地得到．因此，我们说多连通截面波导的主波的电场 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{B}$）等价于二维的静电场，主波的 $\boldsymbol{E}$ 可以由二维静电场方程 $\boldsymbol{E}=-\nabla_2\varphi$ 解出来，其中 φ 的方程和边界条件为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=0,\\ \varphi\big|_{\text{边界}}=\text{常数}.\end{cases}\tag{9.56}$$

在单连通条件下，由于导体边界完全连成一体，所以(9.56)式只有平凡解 $\varphi=$常数．但对于多连通截面的波导来说，边界一般由互不相连的多个部分组成．例如，同轴电缆的内外圆柱形导体是互不相连的，边界条件需要分成两个等势体的公式．因此，只要不同部分的边界的电势不相等，方程(9.56)就一定有非平凡解．可见多连通波导截面上的电场分布相当于给定相应边界电势的平面静电场；或者说，多连通波导一定可以建立静电场，因而也一定可以传播主波 TEM 波，并且对主波来说不存在截止频率，任何频率的电磁波都可以传播．这也是同轴电缆被广泛使用的原因之一．

总之，凡是能够建立静电场并在长度方向均匀的导波装置，一定可以传播 TEM 波．例如，两个无穷大的导体表面之间不仅可以传播具有一定截止频率的 TE 波或 TM 波，也可以传播任意频率的 TEM 波（见习题 9.1）．特别是，主波的横电场在任何时刻都与多连通波导管壁所组成的电容器内的静电场对应，这个特点为求解多连通截面波导中的主波场分布提供了极大的方便．所有求解二维静电场问题发展起来的方法都可以用来分析各种多连通波导中的主波场结构．

【例 1】 同轴电缆是由两个同心的金属圆柱体组成的．设金属的电导率为 σ_c，趋肤深度为 δ，内、外半径为 R、R'，中间充满均匀的无损耗电介质(ε,μ)．试求沿电缆传输的主波的平均能流以及衰减系数．

解 同轴电缆为多连通截面波导，主波为 TEM 波，其中，电场的分布类似于柱形电容器中的电场

$$E=\frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho}e_\rho .$$

因为电磁波沿着轴向传播，即柱坐标系中的 z 方向，所以磁场一定是沿着 e_ϕ 方向，即

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi\rho}e_\phi .$$

平均功率流为

$$P=\int\langle \boldsymbol{S}_P\rangle\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\int \mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times \boldsymbol{H}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

对于介质中的 TEM 波来说，$|\boldsymbol{E}|=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\,|\boldsymbol{H}|$，所以

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\int |\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}S, \tag{9.57}$$

把场的表达式代入得

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}I^2\int_R^{R'}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\\&=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\pi R^2H_0^2\ln\left(\frac{R'}{R}\right),\end{aligned}$$

式中 $H_0=\frac{I}{2\pi R}$，是内导体表面的磁场.

主波内 $E_z=H_z=0$，$k_c=0$，故衰减系数公式(9.47)和(9.48)不适用于多连通波导的主波，所以我们仍从 β_g 的定义式(9.44)出发. 根据(9.45)和(9.57)式，我们有

$$\beta_g=-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\Big/2P=\frac{\frac{1}{2}\oint\zeta'|\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}l}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\int|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}S}=\frac{\oint\zeta'|\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}l}{2\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\int|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}S}. \tag{9.58a}$$

若对主波吸收较小，式中 $\boldsymbol{H}$ 就可用 $\zeta=0$ 时算出的磁场代入. 具体计算得出

$$\beta_g=\frac{1}{2\sigma_c\delta}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,\frac{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)}{\ln\left(\frac{R'}{R}\right)},$$

其中我们利用到公式 $\zeta'=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma_c}}$ 及 $\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_c\omega}}$，并假定金属的 $\mu=\mu_0$. (9.58a)式是计算主波衰减系数的基本公式.

主波衰减系数的基本公式(9.58a)式又可写成另外一种形式. 因为主波是 TEM 波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直，并且

$$E=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}H,$$

而 $\boldsymbol{E}$ 又可用标势 φ 来表示，即 $\boldsymbol{E}=-\nabla_2\varphi$，所以

$$|\boldsymbol{H}|=\left|-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\nabla_2\varphi\right|.$$

把它代入(9.58a)式,即得到

$$\beta_g = \frac{\zeta' \oint |\nabla_2 \varphi|^2 \mathrm{d}l}{2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}} \int |\nabla_2 \varphi|^2 \mathrm{d}S}. \tag{9.58b}$$

如果多连通波导的横向线度小于所传输的主波的波长,那么我们可以用参数 R、L 和 C(分别代表波导管单位长度的电阻、电感和电容)来描写电磁波的传播、衰减. 事实上,主波的横向电场都相当于波导管组成的电容器内的静电场,因此,在波导壁上有正负面电荷分布. 设 $\pm\sigma$ 表示单位长度的面电荷,α 表示波导壁上的电流线密度,则根据电荷守恒定律

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0,$$

对于单色场,有

$$\mathrm{i}\omega\sigma = \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

另一方面,波导管壁之间(例如同轴电缆的内外导体)的电势差为 $\varphi = \frac{\sigma}{C}$,$C$ 是单位长度电容. 在波导波有损耗时($R \neq 0$),波导管内和管壁上都还存在着纵向电场,这是维持管壁内电流 α 所必需的,所以 φ 不仅是 ρ 的函数,而且是 z 的函数,φ 在 z 方向上的负梯度等于纵向电场,我们得到

$$-\frac{\partial \frac{\sigma}{C}}{\partial z} = Z\alpha.$$

其中 Z 为单位长度上的阻抗,它等于电阻和感抗之和,即 $Z = R - \mathrm{i}\omega L$,代入上式,并利用上面的电荷守恒定律方程,我们得到

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \mathrm{i}\omega R\alpha + \omega^2 L\alpha = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} - RC\frac{\partial \alpha}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0.$$

上式就是长线理论中的**传播线方程或称电报方程**. 它同样是电工学中的基本方程,和(6.9)式不同之处在于后者适用于低频情况,而电报方程适用于高频情形,频率再高,则必须用波导场理论. 三种方法各有其适用范围,读者务必注意.

§9.6 谐 振 腔

低频电磁波是利用 LC 电路组成的振荡器激发的,当频率很高时(例如微波范围),这种振荡回路有强烈的辐射损耗和焦耳热损耗. 因此,必须用另一种振荡器——*谐振腔来激发高频电磁波*.

我们首先研究由理想导体所围成的封闭的腔体——谐振腔内的电磁场. 显然腔中单色场满足如下方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{9.59}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega \boldsymbol{B}, \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}. \tag{9.60}$$

在边界上,由于假定腔体是理想导体($\zeta = 0$),所以有

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{9.61}$$

从根本上来说,我们是在边界条件(9.61)式下求解方程(9.59)和(9.60)式的.而(9.59)和(9.60)式很容易化成标准的亥姆霍兹方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} &= 0, \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned} \tag{9.62}$$

似乎我们由方程(9.62)加上边界条件(9.61)即可确定腔内的场,其实不然,我们还必须加上另一个方程,即(9.59)式,这是因为:一方面方程(9.62)是由阶数比它低的方程(9.59)和(9.60)导出的,其解比原来增加了;换句话说,由(9.62)得到的场并不一定满足方程(9.59)和(9.60).另一方面,不难证明,方程(9.60)自动地包含在(9.62)和(9.59)式中,而(9.59)式却不能由(9.62)和(9.61)式导出.因此,除了方程(9.62)式和边界条件(9.61)式外还必须(而且也只需要)加上条件(9.59)式,才使 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不失本来面目.

原则上,由(9.62)、(9.61)和(9.59)式可以求解任何形状的谐振腔内的场分布.但是,在实际求解过程中,我们往往只要求解 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{B}$)就足够了,然后再由(9.60)式直接求出 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{E}$),而且边界条件 $\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B} = 0$(或 $\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} = 0$)自动得到满足.求得 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 以后,我们可以由下述另一组边界条件求出腔壁上电荷和电流的分布情况:

$$\begin{cases} \sigma = \varepsilon_0 \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{E} & (\varepsilon = \varepsilon_0), \\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{B} & (\mu = \mu_0). \end{cases} \tag{9.63}$$

谐振腔最简单的形状是空腔波导两端加上端面,端面与波导长度方向的轴线垂直.对于这种谐振腔,我们可不按上述的普遍方法求解,而是从波导的解出发,利用波的反射定律来讨论,这要简单得多.由于端面的存在,波导内的场现在由两部分叠加而成:一是沿着 z 方向传播的前进波;二是沿着 $-z$ 方向的反射波,这两列波如何线性叠加,取决于两端面的材料(即边界条件).若两端面同样是理想导体,则其边界条件为

$$\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}|_{z=0,d} = 0, \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B}|_{z=0,d} = 0, \tag{9.64}$$

其中 $z = 0$、d 是两端面的位置坐标.

【例 2】 求矩形波导两端加端面构成的谐振腔内的场.

解 设波导和端面都是理想导体. 对于 TE 波来说,前进波为(9.18)式,而反射波(即沿 $-z$ 方向传播的波)只要把(9.19)式中的 k_g 改成 $-k_g$,B_0 改成 B_0'(B_0' 是待定的任意常数)即可. 所以,腔中的场为

$$
\begin{cases}
B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_g z} + \right. \\
\qquad \left. B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_g z}\right] e^{-i\omega t}, \\
B_x = -\mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{k_g}{k_c^2}\left[B_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_g z} - \right. \\
\qquad \left. B_0' \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_g z}\right] e^{-i\omega t}, \\
B_y = -\mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{k_g}{k_c^2}\left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_g z} - \right. \\
\qquad \left. B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_g z}\right] e^{-i\omega t}, \\
E_x = -\mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{ck_0}{k_c^2}\left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_g z} + \right. \\
\qquad \left. B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_g z}\right] e^{-i\omega t}, \\
E_y = \mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{ck_0}{k_c^2}\left[B_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_g z} + \right. \\
\qquad \left. B_0' \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_g z}\right] e^{-i\omega t}, \\
E_z = 0.
\end{cases}
$$

我们现在用边界条件来确定常数 B_0' 和 k_g. 因为端面也是理想导体,所以在端 $z=0$ 和 $z=d$ 处都有

$$\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

即在 $z=0$ 处

$$B_z\big|_{z=0} = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right] e^{-i\omega t} = 0,$$

故

$$B_0' = -B_0.$$

同时,由 $z=d$ 处的边界条件得

$$B_z\big|_{z=d} = 2\mathrm{i}B_0 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin(k_g d)e^{-i\omega t} = 0,$$

故有

$$\sin k_g d = 0,$$

即得 k_g 为

$$k_g = \frac{p\pi}{d},\quad p = 1,2,3,\cdots$$

最后得到矩形谐振腔内场的空间部分为

$$\begin{cases} B_{0x} = -\mathrm{i}2B_0 \dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_g}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right), \\ B_{0y} = -\mathrm{i}2B_0 \dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_g}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right), \\ B_{0z} = \mathrm{i}2B_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right), \\ E_{0x} = 2B_0 \dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right), \\ E_{0y} = -2B_0 \dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right), \\ E_z = 0. \end{cases} \tag{9.65}$$

我们讨论如下：

(1) 沿 z 方向分布的电场的横分量和磁场的横分量存在$\frac{\pi}{2}$的相位差，不仅如此，沿 z 方向分布的磁场的横分量和磁场的纵分量之间也有$\frac{\pi}{2}$的相位差。

(2) 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因子 i，这表明电场和磁场在时间上存在着$\frac{\pi}{2}$的相位差. 因此，当腔中电场能量达到最大时，磁场能量为零，磁场能量最大时电场能量为零. 可以证明，谐振腔内的电场能量和磁场能量的时间平均值总是相等的(见习题 9.8).

(3) 因为 $k_g = \frac{p\pi}{a}$，且 $k_g^2 = k_0^2 - k_c^2$，于是得

$$k_0^2 = k_c^2 + k_g^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2. \tag{9.66}$$

所以，谐振腔的谐振频率和波长分别为

$$\begin{cases} \omega = c\pi\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} + \dfrac{p^2}{d^2}}, \\ \lambda = 2\Big/\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} + \dfrac{p^2}{d^2}}. \end{cases} \tag{9.67}$$

(4) 谐振腔中的场用三个脚标 m、n、p 标记，每一组(m, n, p)的值决定一种振荡模式. 对 E 波记为E_{mnp}，对 H 波记为H_{mnp}，并且 E_{mnp}和H_{mnp}中的脚标 m、n、p 可取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说 E_{mnp}和H_{mnp}是**简并**的.

应当指出，上述方法对于球形腔体以及其他形状的腔体并不一定适用，往往需要从(9.62)、(9.61)和(9.59)式出发求解. 具体可参阅这方面的有关书籍.

*§ 9.7 谐振腔的品质因子和本征频率漂移

空腔的形状和大小给定以后，方程(9.62)式在边界条件(9.61)下只对 ω 的某些确定的

值才有解，这也可从(9.67)式直接看出，这些确定值的 ω 称为谐振腔的**本征频率**.

实际谐振腔总存在着有限大的电导率，即 $\zeta\neq 0$，因此总有一部分场透入腔体的金属壁内部，从而引起焦耳热损耗，谐振腔内的场不再是非衰减的振荡. 我们现在就要研究，谐振腔壁的焦耳热损耗对本征频率带来什么后果？如何描写腔中场的衰减率？

显然，在没有损耗时，腔中的场满足

$$\nabla\times \boldsymbol{E}_0 = \mathrm{i}\omega_0 \boldsymbol{B}_0, \tag{9.68a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B}_0 = -\mathrm{i}\frac{\omega_0}{c^2}\boldsymbol{E}_0, \tag{9.68b}$$

式中 ω_0 是谐振频率(即本征频率)，它是实数. 一旦腔体存在损耗，则场的频率为复数，这时场仍满足

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}, \tag{9.69a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = -\mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}, \tag{9.69b}$$

式中 $\omega=\omega'-\mathrm{i}\omega''$. 我们的任务是计算 ω 相对于 ω_0 的偏离. 用 $\boldsymbol{B}$ 点乘(9.68a)式的复数共轭值，并减去 $\boldsymbol{E}_0^*$ 点乘(9.69b)式，结果是

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}) = -\mathrm{i}\omega_0\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0^* + \mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*. \tag{9.70a}$$

其次，我们再用 $\boldsymbol{B}_0^*$ 点乘(9.69a)式，并减去 $\boldsymbol{E}$ 点乘(9.68b)式的复数共轭，结果为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_0^*) = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0^* - \mathrm{i}\frac{\omega_0}{c^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*. \tag{9.70b}$$

把(9.70a)和(9.70b)式相加再对整个谐振腔作体积分，则得

$$\oint_S(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_0^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\int_V\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0^*+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\mathrm{d}\tau.$$

由于无损耗的理想导体情况下 $\boldsymbol{E}_0$ 在腔体边界上的切向分量为零，即 $\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_0=0$，所以上式面积分的左边第一项为零，故

$$\omega-\omega_0 = -\mathrm{i}\frac{\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}_0^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_V\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right)\mathrm{d}\tau}. \tag{9.71}$$

上式的分子是表示对整个腔体的表面作面积分，分母是对整个腔体的体积分. 在 σ_c 有限的情况下，腔体壁内表面的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系可由公式(8.49)得到：

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}\zeta(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_n).$$

于是(9.71)式可写成

$$\omega-\omega_0 = -i\zeta\frac{\oint_S[(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_n)\times\boldsymbol{B}_0]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mu_0\int_V\left(\frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right)\mathrm{d}\tau}.$$

因为实际腔体中 ζ 很小，在保留 ζ 一级项近似下，可得

$$\omega - \omega_0 = -\mathrm{i}\zeta \frac{\oint_S (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0^*) \cdot \mathrm{d}S}{\mu_0 \int_V \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0^* \right) \mathrm{d}\tau}. \tag{9.72}$$

腔体中电场的平均能量等于磁场的平均能量(证明见习题 9.8),于是(9.72)式可改写成

$$\omega - \omega_0 = -\mathrm{i} \frac{1}{2} \frac{\oint \zeta |B_0|^2 \mathrm{d}S}{\mu_0 \int |B_0|^2 \mathrm{d}\tau}, \tag{9.73}$$

这就是我们所要推导的公式. 由此看到,有损耗时谐振频率不再是 ω_0,它存在着一个漂移:

$$\Delta\omega = \omega' - \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\oint \zeta'' |B_0|^2 \mathrm{d}S}{\mu_0 \int |B_0|^2 \mathrm{d}\tau}, \tag{9.74}$$

其中 ζ''为金属表面阻抗 ζ 的虚部. 由(8.84)可知,一般金属表面阻抗的虚部 $\zeta'' < 0$,所以本征频率总是变小.

频率的虚部反映了腔中场的衰减率,从(9.73)式取虚部得

$$\omega'' = \frac{1}{2} \frac{\oint \zeta' |B_0|^2 \mathrm{d}S}{\mu_0 \int |B_0|^2 \mathrm{d}\tau}. \tag{9.75}$$

在电子技术中,通常引入一个很有用的量 Q 来反映谐振腔的频率特性,其定义为

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''}. \tag{9.76}$$

为了具体地看清 Q 值的物理意义,我们来对腔中的场能量作频谱分析. 现在场是阻尼振荡场,即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\omega'' t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\frac{\omega'}{2Q} t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t},$$

作傅里叶变换不难得到

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega')^2 + \left(\frac{\omega'}{2Q} \right)^2}. \tag{9.77}$$

根据(9.77)式,当 $\omega = \omega'$ 时,场能达到最大值,$|E(\omega)| \propto \left(\frac{2Q}{\omega'} \right)^2$;当 $\omega = \omega' + \frac{\omega'}{2Q}$ 时,$|E(\omega)| \propto \frac{1}{2} \left(\frac{2Q}{\omega'} \right)^2$,即达到最大场能的一半,此点常称为半功率点. $|E(\omega)|^2$ 与 ω 的函数关系如图 9.4 所示. 习惯上,把 $|E(\omega)|^2$ 的最大值与半功率点之间的频率间隔称为谐振腔的带宽,记为 Γ,显然

$$\Gamma = \frac{\omega'}{Q}. \tag{9.78}$$

Q 越大,Γ 越小,谐振腔的振荡频率越纯. 因此,Q 值反映了腔体的品质因素.

根据 Q 值的定义(9.76)式,利用公式(9.75)就可以得到 Q 值的计算公式

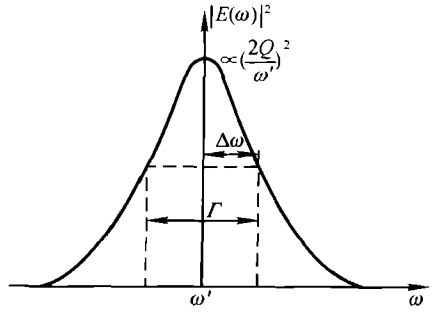


图 9.4

$$Q=\frac{\mu_0\omega'\int|B_0|^2\mathrm{d}\tau}{\oint\zeta'|B_0|^2\mathrm{d}S}\approx\frac{\omega'\mu_0}{\zeta'}\frac{|B_0|^2V}{|B_0|^2S}=\frac{\omega'\mu_0}{\zeta'}\frac{V}{S}\tag{9.79}$$

这里我们已假定腔内的 $|\boldsymbol{B}_0|^2$ 的平均值与腔壁处 $|\boldsymbol{B}_0|^2$ 的平均值大致相等. 上式中 S 为腔内表面积，V 是腔体体积. (9.79)式表明 Q 值正比于腔体的体积与面积的比值，而与金属的表面阻抗的实部成反比. 在一般情况下，Q 值为

$$Q=\frac{\mu_0\omega'}{\zeta'}\frac{V}{S}\times(\text{几何因子}),\tag{9.80}$$

几何因子具体取决于波型及其腔体的形状.

*§9.8 谐振腔频率的微调

在谐振腔的实际使用过程中，人们总希望腔体的谐振频率可以调节，常见的调节方法是在腔体的某一处安上一个可以旋进也可以旋出的小螺丝，旋动螺丝就可改变腔体频率. 同时，我们也可以把腔体内材料(介质)作很小的改变从而达到改变频率. 这些过程通常是很微弱的，对腔体的某一模式来说，相当于加上一个微扰，现在我们来具体地导出谐振腔微扰的公式. 我们先来研究空腔壁的一种内向微扰，这相当于把小螺丝端点透入腔体. 我们设未受微扰的场具有谐振频率 ω_0，且满足方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_0=\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0,\tag{9.81a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_0=-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}_0,\tag{9.81b}$$

式中 ε 和 μ 是腔体中介质的介电常数和磁导率. 由于腔壁上加上了内向微扰，谐振频率变为 ω，场仍满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H},\tag{9.82a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}.\tag{9.82b}$$

我们的任务是计算 $\omega-\omega_0$ 的值. 用 $\boldsymbol{H}$ 点乘(9.81a)的复共轭，再用 $\boldsymbol{E}_0^*$ 点乘(9.82b)，然后相减便可得到

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}_0^* \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{i}\omega_0 \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^* + \mathrm{i}\omega \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* . \tag{9.83a}$$

类似地，由(9.82a)和(9.81b)又可得

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) = \mathrm{i}\omega \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^* - \mathrm{i}\omega_0 \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* . \tag{9.83b}$$

把(9.83a)和(9.83b)相加，并对没有受到微扰的体积 $V_0 = V + \Delta V$ 作体积分，利用高斯定理得到

$$\oint_{S_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{S_0} (\boldsymbol{E}_0^* \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \mathrm{i}(\omega - \omega_0) \int_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \mathrm{d}\tau .$$

由于 $\boldsymbol{E}_0$ 在未微扰腔壁上的切向分量为零，故上式左边的第二项应为零，所以

$$\oint_{S_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{i}(\omega - \omega_0) \int_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \mathrm{d}\tau .$$

正如体积 $V_0 = V + \Delta V$ 那样，面积也可以分成两部分，用 S 表示受微扰后腔体面积，ΔS 为内向微扰体积 ΔV 的表面积. 由于 $\boldsymbol{E}$ 在受微扰的腔体壁表面切向分量为零，故上式又可改写成

$$\oint_{\Delta S} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{i}(\omega - \omega_0) \int_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \mathrm{d}\tau .$$

注意，面积分遍及内向微扰体积 ΔV 的表面，而体积分是对未微扰的体积进行. 于是，我们得到公式

$$\omega - \omega_0 = -\mathrm{i} \frac{\oint_{\Delta S} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_{V_0} (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}_0^*) \mathrm{d}\tau} . \tag{9.84}$$

若微扰很小，以致我们可以把公式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 用 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 代替，则可求得 $\omega - \omega_0$ 的近似值

$$\omega - \omega_0 \approx -\mathrm{i} \frac{\oint_{\Delta S} (\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_{V_0} [\varepsilon |E_0|^2 + \mu |H_0|^2] \mathrm{d}\tau}$$

$$= \omega_0 \frac{\int_{\Delta V} [\mu |H_0|^2 - \varepsilon |E_0|^2] \mathrm{d}\tau}{\int_{V_0} [\mu |H_0|^2 + \varepsilon |E_0|^2] \mathrm{d}\tau} . \tag{9.85}$$

上式的分母是空腔未受微扰时场的总能量，分子是腔壁内向微扰移去的磁场能量与电场能量之差. 于是，如果腔壁的内向微扰发生在磁场比电场大的部位，则谐振频率增大，如果它发生在电场比磁场大的部位，则谐振频率降低.

显然，对于腔壁的外向微扰，结果正好相反.

我们再来研究由空腔内的材料微扰引起的谐振频率的改变. 令未受微扰的介质是各向同性的，我们把各向异性包括在微扰之中. 微扰前后的麦克斯韦方程分别是

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_0 = \mathrm{i}\omega_0 \mu \boldsymbol{H}_0 , \quad \nabla \times \boldsymbol{H}_0 = -\mathrm{i}\omega_0 \varepsilon \boldsymbol{E}_0 ,$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega \mu \boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega \boldsymbol{e}_i \Delta \mu_{ij} H_j , \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega \varepsilon \boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega \boldsymbol{e}_i \Delta \varepsilon_{ij} E_j .$$

类似于前面的运算，我们得到下述两个关系式：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})=-\mathrm{i}\omega_0\mu\boldsymbol{H}_0^*\cdot\boldsymbol{H}+\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mathrm{i}\omega\Delta\varepsilon_{ij}E_jE_{0i}^*,$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^*)=\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\mathrm{i}\omega\Delta\mu_{ij}H_jH_{0i}^*-\mathrm{i}\omega_0\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*,$$

把这两个方程相加，并对空腔体积作体积分，利用空腔表面上的边界条件 $\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}_0=0$，即可得到公式

$$\omega-\omega_0=-\omega\frac{\int_V[\Delta\mu_{ij}H_jH_{0i}^*+\Delta\varepsilon_{ij}E_jE_{0i}^*]\mathrm{d}\tau}{\int_V[\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_0^*+\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0^*]\mathrm{d}\tau}. \tag{9.86}$$

若微扰很弱以至于(9.86)式中的 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$ 可以用 $\boldsymbol{H}_0$、$\boldsymbol{E}_0$ 代替，则

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=-\frac{\int_V\mathrm{d}\tau[\Delta\mu_{ij}H_{0j}H_{0i}^*+\Delta\varepsilon_{ij}E_{0j}E_{0i}^*]}{\int_V\mathrm{d}\tau[\mu|H_0|^2+\varepsilon|E_0|^2]}, \tag{9.87}$$

式中分子表示材料微扰引起的磁场和电场能量的增加．该式说明空腔内的材料的介电常数和磁导率的任何增加都将导致谐振频率的减小．

习　题

9.1　一对无限大的平行理想导体板，相距为 d，电磁波沿着平行于板面的 z 方向传播，求其中可能传播的波型的场分布及其相应的截止频率．

9.2　无限长的矩形波导，在 $z=0$ 处被一块垂直插入的理想导体板完全封闭，求在 $z=-\infty$ 到 $z=0$ 这段管内的可能波型．

9.3　矩形波导的尺寸为 1 cm×5 cm．试问：初始五个模式的截止频率为多大？如果波导在 20 GHz 频率上激励，则五个模式的波矢为多大？如果波导在 50 GHz 频率上激励，将有多少模式传播？

9.4　试画出 H_{11} 波的场分布草图，并对此模式试求：(1) 单位时间内穿过横截面的能流；(2) 单位长波导内贮存的电磁能；(3) 电流线密度分布．

9.5　设一波导管的截面尺寸为 $a\times b$，电磁波沿 z 方向传播．设 $E_x=E_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$，求其余的场分量和截止频率．

9.6　试确定只传播 TE_{01} 波的正方形波导的最大和最小尺寸．

9.7　设一充满空气的波导管尺寸为 $a=0.1$ m，$b=0.2$ m，频率为 $\omega=10^{10}$ Hz．如果空气的击穿强度为 3 000 V/m，则该波导管所能传输的 TE_{01} 波的最大平均能量是多少？

9.8　试证明：在谐振腔内，电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等．

9.9　一谐振腔的尺寸为 $a\times a\times 2a$，腔壁为理想导体，其中电场为 $E_x=E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\times\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$E_y=E_z=0$，求 $\boldsymbol{B}$ 及谐振频率 ω．

9.10 长方体谐振腔的尺寸为 $a \times b \times d(a > b > d)$，试求 TM 波的振荡模式 E_{nmp}. 最低模式是哪一个？

9.11 半径为 R，高为 h 的圆柱形谐振腔，其最低模式为 E_{010}，它与圆柱形波导 E_{01} 模式对应. 设腔壁的电导率为 σ_c，求(1) 场分布；(2) 腔内储存的平均能量和腔壁引起的功率损耗.

*第十章　等离子体电动力学

等离子体物理是近代物理学的一个重要分支. 本章主要讨论等离子体的电磁流体动力学性质和电磁流体力学波. 重点介绍符拉索夫－麦克斯韦方程组和磁流体动力学方法,这是描述等离子体性质的两种最基本的理论方案.

§10.1　等离子体的基本特征

等离子体是达到一定密度的电离气体或带电粒子的集合,它具有两个基本特征:

(1) 由于电磁相互作用而呈现协作效应(cooperative effect);

(2) 准电中性.

这两个基本特征同体系的粒子数的"一定密度"紧密相关. 我们具体地研究一下这两个特征的物理内涵.

通常,点电荷产生的电势为库仑势,但在等离子体中,如果放置一个试验电荷,则由于等离子体的屏蔽作用,电势不再是库仑势,这可从下面的分析看出. 设电子数密度为 n_e,离子数密度为 n_i,则体系的总电荷密度为 $-en_e+Zen_i$,在球对称情况下,电势方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}[Zen_i-en_e]. \tag{10.1}$$

根据平衡态统计力学,电子和离子数密度分布函数为

$$\begin{cases} n_e = n_{e0}\mathrm{e}^{e\varphi(r)/k_BT}, \\ n_i = n_{i0}\mathrm{e}^{-Ze\varphi(r)/k_BT}, \end{cases} \tag{10.2}$$

式中 n_{e0} 和 n_{i0} 是 $\varphi=0$ 处的电子、离子数密度.

我们定义一个临界距离 l_L,在这个距离上电子的热运动动能与电子－离子之间的相互作用能相等,即 $k_BT=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 l_L}$,故

$$l_L=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 k_BT}, \tag{10.3}$$

这称为**朗道长度**,它是很小的. 若 $r\gg l_L$,则有 $e\varphi\ll k_BT$ 或 $e\varphi/k_BT\ll1$,于是可以把粒子数密度分布函数按 $e\varphi/k_BT$ 展开,保留一级项,得到

$$\mathrm{e}^{e\varphi/k_BT}\approx1+\frac{e\varphi}{k_BT}.$$

设体系是电中性的,即

$$n_{e0}=Zn_{i0}=n_0, \tag{10.4}$$

n_0 为平均粒子数密度,则方程(10.1)化成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\lambda_D^2}\varphi,$$

其中

$$\lambda_D=\left[\frac{k_B T\varepsilon_0}{e^2(1+Z)n_0}\right]^{1/2}, \tag{10.5}$$

称为**德拜**(Debye)**长度**. 不难验证,电势的解为

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-r/\lambda_D). \tag{10.6}$$

我们看到,等离子体中的电荷所产生电势不再是长程库仑势,而是短程的**德拜势**(也称汤川势),其作用距离即为 λ_D,在 $r=\lambda_D$ 处,电势减少到$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\lambda_D}\mathrm{e}^{-1}$. 因此,我们可以粗略地认为等离子体中的带电粒子只与距离在德拜长度以内的那些粒子发生相互作用;或者说,带电粒子与德拜球以外的粒子不发生电磁相互作用,因此 λ_D 又称为**屏蔽长度**.

于是,我们看到,要保证等离子体中的粒子发生集体性的协作效应,其电磁相互作用的有效范围 λ_D 必须远大于粒子间的平均距离 $n_0^{-1/3}$,即必须具备下述条件:

$$\lambda_D\gg n_0^{-1/3}\ 或\frac{1}{n_0\lambda_D^3}\ll 1. \tag{10.7}$$

利用(10.3)、(10.5)式,可定义

$$\Lambda=\frac{l_L}{\lambda_D}\ll 1, \tag{10.8}$$

Λ 称为**等离子体参量**,$\Lambda\ll 1$ 是协作效应发生的必要条件.

我们再来分析一下准电中性特征. 设 δn_e、δn_i 是等离子体中的扰动引起的电子密度和离子密度的改变,这种变化导致了在平均意义上的不能抵消的电荷密度 $\delta\rho=e(Z\delta n_i-\delta n_e)$,而由这种电荷的局部集中引起的电势为 $\delta\varphi$,其满足的方程为

$$\nabla^2\delta\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}e(Z\delta n_i-\delta n_e).$$

利用量纲分析,我们来估计一下上述方程,$\nabla^2\delta\varphi\propto\delta\varphi/L^2$,$L$ 为体系的线度,这样就有

$$\left|\frac{Z\delta n_i-\delta n_e}{\delta n_e}\right|\propto\frac{\varepsilon_0}{eL^2}\left|\frac{\delta\varphi}{\delta n_e}\right|. \tag{10.9}$$

如果是弱场($e\varphi\ll k_B T$),电子密度的改变就为

$$\delta n_e\propto(e\delta\varphi n_0)/k_B T,$$

于是(10.9)式写成

$$\left|\frac{Z\delta n_i-\delta n_e}{\delta n_e}\right|\propto\frac{\lambda_D^2}{L^2}. \tag{10.10}$$

如果扰动引起的不能抵消的电荷密度 $\delta\rho$ 比起电子(或离子)电荷密度的改变要小得多,我们就说体系是准电中性的. 根据(10.10)式,要使体系保持准电中性,必须要求

$$\left|\frac{Z\delta n_i-\delta n_e}{\delta n_e}\right|\approx\frac{\lambda_D^2}{L^2}\ll 1, \tag{10.11}$$

这即为体系准电中性的必要条件. 在这样的条件和意义上才有所谓的准中性方程

$$n_e\approx Zn_i. \tag{10.12}$$

不等式(10.11)对于强扰动也是适用的. 若 $e\varphi \approx k_B T$, 则 $\delta n_e \approx n_e$, 由(10.10)仍可得到(10.11)式.

当然,扰动初始时,电子密度可以是任意的,并不需要满足(10.11)式. 但是,由此产生的强电场将驱使电子运动,从而迅速地恢复准电中性,使(10.11)式满足. 准电中性条件是等离子体物理的一个极有用的条件,它可大大简化等离子体的动力学方程.

综合两个特征的分析可知,只有同时满足(10.7)和(10.11)两个不等式的电离气体或带电粒子集合才具有等离子体的基本特征,才可以称为等离子体. 注意到 $\lambda_D \approx (k_B T/n_0)^{1/2}$ 这一事实,我们立即明白,所谓"一定密度"是相对于等离子体的温度和线度而言的. 尽管宇宙空间的 n 很小,约每立方厘米只有一个粒子,但尺度却很大;恒星内部尽管温度很高,但 n 比起前者大得多. 它们都是等离子体物理学可应用的场所. 金属中的电子气同样可以构成等离子体,至于气体放电和热核反应则更是等离子体物理学最活跃的领域.

§10.2 基本方程和广义欧姆定律

1. 符拉索夫－麦克斯韦方程组

我们来考虑 n 个电子和离子组成的等离子体体系,体系中每个粒子的运动都服从牛顿方程. 显然,由这些运动方程联立求解是不可能的,我们必须从统计力学出发.

设 $f_j(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 是第 j 类粒子的分布函数,它表示 t 时刻速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子在空间 $\boldsymbol{r}$ 处出现的概率. 注意到 f_j 不仅是空间、时间的函数,而且是粒子速度的函数,所以 f_j 对时间的全微商为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v_y}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v_z}\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t},$$

这里我们已略去脚标"j". 根据统计力学,若体系是无碰撞的等离子体,则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$;若等离子体中有碰撞,则碰撞引起 f 的变化,我们把它记为 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{碰}$,则

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f+\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla_v f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{碰},$$

其中 $\nabla_v=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial v_x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial v_y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial v_z}$, $\dot{\boldsymbol{v}}$ 是体系中粒子的加速度. 设粒子受到的作用力为 $\boldsymbol{F}$, 则 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}$,代入得

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\nabla_v f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{碰},\tag{10.13}$$

这就是统计力学中的玻耳兹曼方程. 等离子体中的带电粒子所受的力为

$$\boldsymbol{F}=q[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}],$$

于是(10.13)式可写成

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+\frac{q}{m}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\nabla_v f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{碰},\tag{10.14}$$

式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是由等离子体集体运动所产生的在小于 λ_D、大于 l_L 范围内的平均电磁场.

(10.14)式是我们的基本方程之一. 如果是无碰撞的等离子体体系,则 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{碰}=0$,此时(10.14)式称为**符拉索夫方程**. 方程中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可由麦克斯韦方程求出.

设 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v$ 表示在 $\boldsymbol{r}$ 处 t 时刻找到粒子的总概率,则等离子体中某一种粒子的数密度为

$$n(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty} n_0 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v,$$

n_0 是这种粒子的空间平均数密度. 类似地每种粒子的电流密度为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=qn_0\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v,$$

仍用"e"、"i"脚标表示电子和离子,则麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}en_0\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathrm{i}}\mathrm{d}^3v-\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathrm{e}}\mathrm{d}^3v\right),\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0en_0\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}f_{\mathrm{i}}\mathrm{d}^3v-\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}f_{\mathrm{e}}\mathrm{d}^3v\right)+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{cases}\tag{10.15}$$

方程(10.14)和(10.15)是描述等离子体动力学最有力的方法. 但是,由于这一组方程的求解仍是不方便的,因此发展了一套磁流体动力学方程(MHD 方程),其思想是把等离子体作为连续流体来处理,这种近似能足够精确地描述观察到的大多数现象.

2. 磁流体动力学方程组(MHD 方程)

MHD 方程可以从(10.14)式中导出. 在准电中性条件下,可以用一个参量来表示电子和离子的密度:

$$n(\boldsymbol{r},t)=n_0\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v\approx n_0\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v,\tag{10.16}$$

这就是准电中性方程(10.12)式的具体表达式,其中令 $Z=1$.

首先,将方程(10.14)两边同乘以 n_0,然后对速度积分,并利用准电中性条件(10.12)式,我们得到:第一项为

$$\int n_0\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}^3v=\frac{\partial}{\partial t}\int n_0 f\mathrm{d}^3v=\frac{\partial n(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}.$$

第二项由于 $\boldsymbol{v}$ 是一个独立变量,不受算子 ∇ 的作用,故有

$$n_0\int\boldsymbol{v}\cdot\nabla f\mathrm{d}^3v=\nabla\cdot\int n_0\,\boldsymbol{v}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}^3v=\nabla\cdot(n\bar{\boldsymbol{v}})=\nabla\cdot(n\boldsymbol{v}_0),$$

式中 $\boldsymbol{v}_0$ 是粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 的平均值,代表流体的速度. 第三项的积分一定为零,我们可以这样证明,设 $Q(\boldsymbol{v})$ 是任一物理量,则

$$\int n_0Q(\boldsymbol{v})F_i\frac{\partial f}{\partial v_i}\mathrm{d}^3v=\int n_0Q(\boldsymbol{v})\left(F_x\frac{\partial f}{\partial v_x}+F_y\frac{\partial f}{\partial v_y}+F_z\frac{\partial f}{\partial v_z}\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z,$$

考察右边的其中一项,有

$$\int n_0 Q(\boldsymbol{v}) F_x \frac{\partial f}{\partial v_x} \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = \int n_0 Q(\boldsymbol{v}) F_x \mathrm{d}f \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

$$= \int \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z n_0 \int Q(\boldsymbol{v}) F_x \mathrm{d}f$$

$$= \int \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z \left\{ - \int n_0 f \mathrm{d}[Q(\boldsymbol{v}) F_x(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})] + n_0 Q(\boldsymbol{v}) F_x(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) f \Big|_{-\infty}^{\infty} \right\}$$

$$= - \int n_0 \frac{\partial [Q(\boldsymbol{v}) F_x]}{\partial v_x} f \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z ,$$

而 $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$,所以

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_i} = 0$$

一定成立,于是我们得到一个公式

$$n_0 \int Q(\boldsymbol{v}) F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \mathrm{d}^3 v = - \int n_0 \left[F_i \frac{\partial}{\partial v_i} Q(\boldsymbol{v}) \right] f \mathrm{d}^3 v . \tag{10.17}$$

把(10.17)式与第三项的积分比较,令 $Q(\boldsymbol{v}) = 1$,可见第三项积分自然为零.

由于碰撞不改变粒子的总数,故方程(10.14)式右边的积分项为零. 因此,由方程(10.14)式对速度空间积分就得到连续性方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \boldsymbol{v}_{i0}) = 0 , \\ &\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{v}_{e0}) = 0 . \end{aligned} \tag{10.18}$$

其次,(10.14)式两边同乘以 $n_0 m \boldsymbol{v}$ 后再对速度空间积分,得到各项的结果为

$$\int n_0 m \boldsymbol{v} \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}^3 v = \frac{\partial}{\partial t} (n m \boldsymbol{v}_0) ,$$

$$\int n_0 m \boldsymbol{v} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}^3 v = \nabla \cdot (n m \overline{\boldsymbol{v}}\, \overline{\boldsymbol{v}}) ,$$

$$\int n_0 m \boldsymbol{v} \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} \mathrm{d}^3 v = - \int n_0 \left(F_i \frac{\partial}{\partial v_i} \boldsymbol{v} \right) f \mathrm{d}^3 v ,$$

这里,我们已利用(10.12)和(10.16)式. 最后得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m \boldsymbol{v}_0) + \nabla \cdot (n m \overline{\boldsymbol{v}}\, \overline{\boldsymbol{v}}) - n \boldsymbol{F} = \int n_0 m \boldsymbol{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{碰} \mathrm{d}^3 v . \tag{10.19}$$

我们把速度 $\boldsymbol{v}$ 分解成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w} ,$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 是流体元的速度,$\boldsymbol{w}$ 是粒子的热运动速度,并令

$$nm \overline{\boldsymbol{w}\, \boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\overrightarrow{T}} ,$$

则(10.19)式可写成

$$nm \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0 \right) + \nabla \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{T}} - n \boldsymbol{F} = \int n_0 m \boldsymbol{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{碰} \mathrm{d}^3 v , \tag{10.20}$$

这就是等离子体流体的欧拉方程,对电子和离子可分别写成

$$\begin{cases} n_i m_i \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_{i0}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{i0} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{i0} \right) = n_i e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_{i0} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \cdot \overrightarrow{T}_i + \boldsymbol{p}_{ie}, \\ n_e m_e \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_{e0}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{e0} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{e0} \right) = - n_e e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_{e0} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \cdot \overrightarrow{T}_e + \boldsymbol{p}_{ei}, \end{cases} \tag{10.21}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_{ei} = \int n_0 m_i \boldsymbol{v}_i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{碰} \mathrm{d}^3 v \text{ 和 } \boldsymbol{p}_{ei} = \int n_0 m_e \boldsymbol{v}_e \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{碰} \mathrm{d}^3 v$$

分别代表电子与离子碰撞所引起的离子流体的动量变化和电子流体的动量变化. 根据动量守恒定律,有

$$\boldsymbol{p}_{ie} = - \boldsymbol{p}_{ei}. \tag{10.22}$$

设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 &= \frac{n_i m_i \boldsymbol{v}_{i0} + n_e m_e \boldsymbol{v}_{e0}}{n_i m_i + n_e m_e} \approx \frac{m_i \boldsymbol{v}_{i0} + m_e \boldsymbol{v}_{e0}}{m_i + m_e}, \\ \rho &= n_i m_i + n_e m_e \approx n(m_e + m_i), \end{aligned} \tag{10.23}$$

$\boldsymbol{v}_0$和 ρ 分别称为等离子体的速度和密度,并且我们在这里又一次利用了准电中性条件(10.12)式. 利用(10.23),(10.18)式可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}_0) = 0. \tag{10.24}$$

同样把(10.21)式的两个方程相加,利用(10.23)和(10.22)式即得

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_0 = - \nabla \cdot (\overrightarrow{T}_i + \overrightarrow{T}_e) + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}, \tag{10.25}$$

式中 $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}_i + \overrightarrow{T}_e$ 称为压强张量. 若

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T} p = \overrightarrow{I}(p_i + p_e), \tag{10.26}$$

则$\nabla \cdot \overrightarrow{T} = \nabla p$. 可以证明,当麦克斯韦分布时(10.26)式一定成立. 方程(10.25)即是欧拉方程.

另一方面,麦克斯韦方程在低频时可略去位移电流,故有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{10.27}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{10.28}$$

而另外两个散度方程是不独立的. 显然,我们还应当求出导电流体的欧姆定律,这样才能由(10.24)、(10.25)、(10.27)、(10.28)式以及物态方程组成完备的 MHD 方程组.

3. 广义欧姆定律

为了导出广义欧姆定律,我们来分析一下(10.21)式中的 $\boldsymbol{p}_{ie}$和 $\boldsymbol{p}_{ei}$,它们是电子－离子间碰撞引起的各自流体的动量改变,由于电子－离子间是库仑碰撞,所以 $\boldsymbol{p}_{ei}$必正比于库仑力,即

$$p_{ei} \propto e^2.$$

另一方面 p_{ei}还必须正比于电子密度 n_e 和散射体离子密度 n_i,由于准电中性,$n_i \approx n_e$,所以

$$p_{ei} \propto n^2.$$

最后，p_{ei}还应正比于相对速度$(\boldsymbol{v}_{e0}-\boldsymbol{v}_{i0})$. 根据上述物理上的要求，我们可以把 $\boldsymbol{p}_{ei}$写成

$$\boldsymbol{p}_{ei} = \eta e^2 n^2(\boldsymbol{v}_{i0}-\boldsymbol{v}_{e0}), \tag{10.29}$$

式中 η 是比例系数. 由(10.22)式得

$$\boldsymbol{p}_{ie} = \eta e^2 n^2(\boldsymbol{v}_{e0}-\boldsymbol{v}_{i0}). \tag{10.30}$$

作了上述分析以后，我们把只计及电子－离子碰撞的(10.21)式的两个方程分别乘以 m_e、m_i 后再相减，并利用 ρ、$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{j}$ 的定义可得

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}-\eta\boldsymbol{j}=\frac{1}{e\rho}\left[\frac{m_e m_i n}{e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(j/n)\right]+(m_i-m_e)\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+m_e\nabla p_i-m_i\nabla p_e.$$

由于 $m_e\to 0$，$m_e+m_i\approx m_i$，于是

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{j}+\frac{1}{en}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}-\nabla p_e). \tag{10.31}$$

(10.31)是 MHD 方程组中的又一方程，称为**广义欧姆定律**，它宏观地描述了等离子体这一导电流体的电性质，其中的$\frac{1}{en}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$为霍尔电流项，此项和最后一项常略去，则(10.31)简化为

$$\eta\boldsymbol{j}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}. \tag{10.32}$$

§10.3 磁场的冻结和扩散效应

上一节我们已经建立了 MHD 方程组，这就是(10.24)、(10.25)、(10.27)、(10.28)和(10.32)式. 此外，还加上等离子体作为流体的状态方程和熵方程

$$p=p(\rho,T), \tag{10.33}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot(S\boldsymbol{v}_0)=\frac{1}{\rho T}\frac{j^2}{\sigma_c}, \tag{10.34}$$

这样才构成了完备的 MHD 方程组. 应当指出：(1) 这组方程并没有计及粘滞性、热传导等耗散结构，而只考虑了焦耳热损耗[即(10.34)式中的右边项]，其中我们已令$\frac{1}{\eta}=\sigma_c$；(2) 本书只讨论等离子体的电磁性质，除个别地方外，一般不讨论涉及熵的问题，故此我们也不讨论这个方程的导出.

现在，我们根据上述方程讨论等离子体的电磁性质. 对(10.28)式求旋度，利用(10.32)式得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\sigma_c\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}),$$

再由(10.27)式得

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})+\tau\nabla^2\boldsymbol{B}, \tag{10.35}$$

其中 $\tau=\frac{1}{\mu_0\sigma_c}$是扩散率. 我们从(10.35)式的两种极限情况来讨论它所表示的物理意义.

1. 等离子体为理想导电流体($\sigma_c\to\infty$)

对这种情况 $\tau\to 0$，(10.35)式变成

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}). \tag{10.36}$$

因为随流体一起运动的回路的磁通量的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v}_0\times d\boldsymbol{l})\cdot \boldsymbol{B}\\ &= \int\left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times \boldsymbol{B})\right]\cdot d\boldsymbol{S},\end{aligned}$$

于是根据(10.36)式,我们得

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \tag{10.37}$$

这就是说:在理想导电流体中,磁场被"冻结"在流体中,并随着流体一起运动,这就是等离子体中的**磁场"冻结"效应**.

从下面的分析中可以将磁场的冻结图象看得更加清楚. 因为$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,(10.36)式可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0). \tag{10.38}$$

由连续性方程(10.24)式得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\rho,$$

将之代入(10.38)式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\right)\frac{\boldsymbol{B}}{\rho} = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_0.$$

等式左边代表流体元运动时,量$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}$的变化率,我们可以把它写成对时间的全微商,于是上式变成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_0. \tag{10.39}$$

另一方面,我们来研究某一**流质线**,即随流体元一起移动的线的运动规律. 设流质线的长度元为δl,如果$\boldsymbol{v}_0$为线元δl一端的流体速度,则在线元的另一端处流体速度为$\boldsymbol{v}_0+(\delta l\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0$. 因此,在时间$dt$内,线元的改变为$(\delta l\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 dt$,故

$$\frac{d\delta \boldsymbol{l}}{dt} = (\delta l\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0. \tag{10.40}$$

比较(10.39)和(10.40)式,立即看到,流质线元δl和$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}$的运动规律由同一个方程描述,这就是说

$$\delta l \propto \frac{\boldsymbol{B}}{\rho}. \tag{10.41}$$

(10.41)式告诉我们,如果两个邻近的流体元初始时在同一磁感线上,则以后它们总是在这一磁感线上,$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}$与流体元之间的距离成比例地改变. 因此,当我们从无限邻近的两点过渡到彼此分开有限距离的两点时,在每一点处,值$\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}$与相应的流质线的伸长成比例地增大. 若流体是不可压缩的,则ρ=常数,于是磁感应强度本身也与磁感线的伸长成正比. 由此可见,在运

动过程中存在着如下守恒量：

$$\frac{B}{\rho\delta l}=\text{常数}, \tag{10.42}$$

所以磁感线被“冻结”在物质里，犹如橡皮筋被冻结在浮冰中.

【例 1】 星体是星际云不断收缩而形成的，如果星际云均匀而球对称地进行收缩，并且它本身存在着微弱的磁场，试问磁场如何变化？

解 对于大尺度的星际云问题，冻结场概念往往是有效的. 在星云收缩的模型中，物质密度是变化的，但是总物质是不变的. 设任意时刻星际云团的半径为 R，则密度

$$\rho\propto R^{-3},$$

把云块作为流质线元，有

$$\delta l\propto R,$$

根据(10.41)式，我们得到磁感应强度

$$B\propto R^{-2}.$$

所以，当星际云团逐步收缩时会使磁场增加，磁感应强度与星云团的半径的平方成反比，半径越小，密度越高，磁场越强，这为星体磁场提供了一种可能的解释.

2. 等离子体为非理想的导电流体($\sigma_c\to 0$)

对于这种情况，(10.35)式可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\tau\nabla^2\boldsymbol{B}. \tag{10.43}$$

(10.43)式为熟知的扩散方程，它表示在非理想的导电流体中磁场会衰减，一个具体的例子是地磁场的自由衰减，我们已在第六章中专门讨论过. (10.43)式代表磁场的**扩散效应**.

上面我们讨论了两种极端情形，在一般情况下，方程式(10.35)的右边两项同时存在. 为了估计这两项的相对重要性，我们引入**磁雷诺数** R_m 来判定.

根据量纲分析，(10.35)式右边两项的数量级为

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})\sim\frac{1}{L}v_0B,$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}\sim\frac{1}{L^2}B,$$

式中 L 为体系的线度. 我们定义磁雷诺数

$$R_m=\frac{|\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})|}{\tau|\nabla^2\boldsymbol{B}|}=\mu_0\sigma_cLv_0. \tag{10.44}$$

当 $R_m\gg 1$ 时，第一项起主要作用，冻结效应占优势；当 $R_m\ll 1$ 时，第二项起主要作用，扩散效应占优势. 磁雷诺系数是一个无量纲量，在等离子体物理中很重要.

§10.4 $E\times B$ 漂移和抗磁性漂移

*在电磁场中，导电流体在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的方向可以存在两种漂移运动：一是 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移，它*可根据在交叉电场和磁场中的电子(或离子)的回转中心的漂移来说明；二是抗磁性漂移，这是一种有流体元而没有单粒子的漂移运动.

由(10.21)式可知,每一种粒子的流体都有如下的方程:

$$mn\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0\right]=qn(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})-\nabla p, \tag{10.45}$$

这里我们不考虑粒子间的碰撞. 漂移运动是指虽然速度$\boldsymbol{v}_0$随时间、空间变化都很小但仍可能存在的运动,故把(10.45)式左边略去得

$$0=qn[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}]-\nabla p.$$

设$\boldsymbol{v}_0\perp\boldsymbol{B}$,两边矢积$\boldsymbol{B}$,则得

$$\boldsymbol{v}_0=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}-\frac{\nabla p\times\boldsymbol{B}}{qnB^2}=\boldsymbol{v}_{0E}+\boldsymbol{v}_{0D}, \tag{10.46}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_{0E}=\dfrac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} & \text{称为 } \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \text{ 漂移速度},\\ \boldsymbol{v}_{0D}=-\dfrac{\nabla p\times\boldsymbol{B}}{qnB^2} & \text{称为抗磁性漂移速度}.\end{cases} \tag{10.47}$$

我们着重来说明抗磁性漂移的机制. 如图10.1所示,磁场中离子的回转轨道的密度代表流体的密度梯度∇n. 显然,通过任何固定体积元的向下运动的离子比向上运动的离子要多,这是由于向下运动的离子来自密度较高的区域. 因此,即使离子(或电子)的回转中心是固定的,还有存在一个垂直于∇n和$\boldsymbol{B}$的流体漂移.

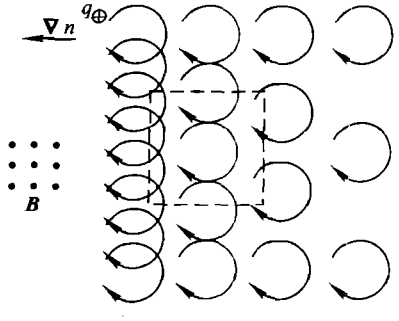


图 10.1

有趣的是,从$\boldsymbol{v}_{0D}$和$\boldsymbol{v}_{0E}$的不同表达式,我们看到,抗磁性漂移的方向与流体粒子的电荷的正负直接有关,所以离子流体和电子流体以相反的方向漂移. 这样,完全可以想象存在着一种**抗磁性电流**,其大小为

$$\boldsymbol{j}_D=ne(\boldsymbol{v}_{0Di}-\boldsymbol{v}_{0De}) \quad . \tag{10.48}$$

因此,在粒子图象中,如果回转中粒子不漂移,我们就不可能期望测量出电流;而在现在的流体图象中,只要存在着压力梯度,就有电流$\boldsymbol{j}_D$流过.

思考题 试用单粒子图象说明$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$漂移.

---

§10.5 无作用力磁场与丝状电流

当导电流体处于平衡状态时,基本方程简化为

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ -\nabla p+\rho\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_m=0.\end{cases} \tag{10.49}$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 为重力加速度. 对于这种作为导电流体的等离子体静力学平衡,我们分成两种情况讨论. 第一种是磁力被一些非磁力平衡;第二种是磁力和总的非磁力各自为零. 这种磁场称为**无作用力磁场**. 无作用力磁场有其独特的特点. 事实上,磁力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}.$$

因为$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$,磁场无作用力意味着

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=0,$$

上式成立的必要条件是

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B}, \tag{10.50}$$

式中的 α 是任意标量函数. 由于

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{B})=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha=0,$$

所以

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha=0. \tag{10.51}$$

可见,α 虽然是任意的,但必须满足(10.51)式. (10.50)式称为**无作用力磁场方程**,而(10.51)式是方程的一个约束条件.

【例 2】 试求:无限长柱对称等离子体中的无作用力磁场的分布.

解 我们可令无作用力磁场方程中的参量 α 为常数,它显然满足约束条件(10.51)式. 我们以柱坐标系(ρ,ϕ,z)写出无作用力磁场方程,此时(10.50)式成为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\phi}-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}=\alpha B_\rho,$$

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial\rho}=\alpha B_\phi,$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\phi)-\frac{\partial B_\rho}{\partial\phi}\right]=\alpha B_z.$$

等离子体位形处于无限长的柱对称情况,我们可认为 $\boldsymbol{B}$ 不是 z 的函数,也不是 ϕ 的函数,于是得

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial B_z}{\partial\rho}=\alpha B_\phi,\\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\phi)=\alpha B_z,\end{cases} \tag{10.52}$$

消去 B_ϕ 就有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial B_z}{\partial\rho}\right)+\alpha^2B_z=0,$$

这是零阶贝塞尔方程,其解为

$$B_z(\rho)=AJ_0(\alpha\rho),$$

其中 A 为任意常数. 由(10.52)式得

$$B_\phi=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}[AJ_0(\alpha\rho)]=AJ_1(\alpha\rho).$$

这种无作用力磁场的结构如图 10.2 所示,磁感线扭绞成犹如一股绳子,所以人们称这种场分布为"磁绳".

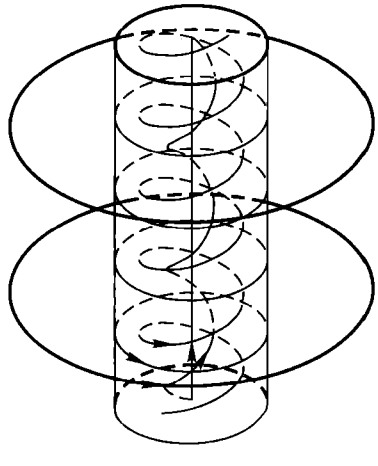


图 10.2

值得注意的是，实际上无作用力磁场中的电流密度 j 趋向于与磁场平行，所以无限长圆柱体中的电流分布趋向于图 10.2 中的磁感线结构；换句话说，等离子体流体中的电流是丝状结构分布的，所以称为丝状电流. 由于宇宙中等离子体内的压力通常可以忽略，因此磁场是无作用力磁场，这就解释了频繁地观察到的宇宙中的丝状结构，如丝状星际云、日珥、冕流等现象. 在实验室中我们也可以观察到这种现象.

§10.6 箍缩效应

等离子体受自身磁场的约束效应称为**箍缩效应**. 例如，考虑一圆柱形等离子体，它受轴向电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用产生轴向电流，如图 10.3. 电流又产生环向磁场，当电流流经流体自身产生的磁场时产生了方向向内的径向力 $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$，使等离子体受到指向轴向的压缩. 为简单起见，我们假定电流密度、磁场强度等都只是离轴线距离 ρ 的函数，略去粘滞力和引力的作用，此时能否存在一种稳定的条件，使等离子体在自身磁感应强度的作用下被约束在半径为 R 的柱体内？

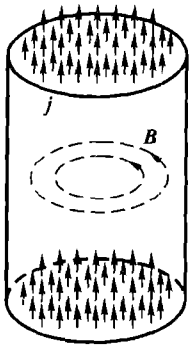


图 10.3

对稳态情况，流体运动方程为

$$-\nabla p+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=0, \tag{10.53}$$

它表示电磁力与等离子体内压力平衡. 取柱坐标系，(10.53)式可写为

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=jB. \tag{10.54}$$

再者，麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 在柱坐标系中为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho B)=\mu_0 j, \tag{10.55}$$

由(10.54)和(10.55)式联立得到

$$-\mu_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{2\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho^2B^2). \tag{10.56}$$

对(10.56)式积分，得

$$p(\rho)=p_0-\frac{1}{2\mu_0}\int_0^\rho\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho^2B^2)\mathrm{d}\rho, \tag{10.57}$$

式中 p_0 为流体内 $\rho=0$ 处的压强. 因为假定流体被约束在 $\rho\leqslant R$ 的空间内，可见在 $\rho=R$ 处压强为零，故

$$p_0=\frac{1}{2\mu_0}\int_0^R\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho^2B^2)\mathrm{d}\rho. \tag{10.58}$$

把(10.58)式代入(10.57)式则得

$$p(\rho)=\frac{1}{2\mu_0}\int_\rho^R\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho^2B^2)\mathrm{d}\rho, \tag{10.59}$$

利用(10.56)式我们就可求得圆柱体内的平均压强

$$\langle p\rangle=\frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R\rho p(\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{2}{R^2}\int_0^R p(\rho)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)$$

$$= \frac{2}{R^2}\left[\frac{1}{2}\rho^2 p(\rho)\Big|_0^R - \int_0^R \frac{1}{2}\rho^2 \mathrm{d}p\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}B^2(R). \tag{10.60}$$

可见，平均压强等于圆柱体表面的磁压强．圆柱体表面的磁感应强度

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

式中 I 是圆柱体内流动的总电流．于是

$$\langle p\rangle = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}, \tag{10.61}$$

这就是等离子体内的平均压强与总电流及受自身磁场约束的流体半径之间的关系式．

在热核聚变的研究中，等离子体温度的数量级为 10^8 K，密度为 10^{15} cm^{-3}，这些条件相当于 14 倍标准大气压的压强．为了把这样的等离子体约束在圆柱体内，需要的磁感应强度在表面处的值约为 1.9 T，相当于 $9\times10^4 R$ A 的电流（R 用 cm 作单位）．由此可见，要约束高温等离子体必须用极强的电流．

§10.7 电磁流体的不稳定性

等离子体中的不稳定性问题是一个极为重要的研究课题，这里我们主要讨论几个基本的不稳定性，它们都属于电磁流体不稳定性，这类问题其实也就是导电流体的静力学平衡对小扰动的反应问题．若体系出现一个小的扰动，由此相应地产生一个恢复力，使体系回到原来的平衡状态，则体系是稳定的；如果小扰动产生的力不是使体系恢复，而是使体系进一步远离原来的平衡状态，则体系是不稳定的．上面讨论的箍缩现象，实际上是向内的径向磁力和压力梯度的平衡问题．我们现在分三种情况来讨论半径为 R 的圆柱形等离子体的不稳定性．

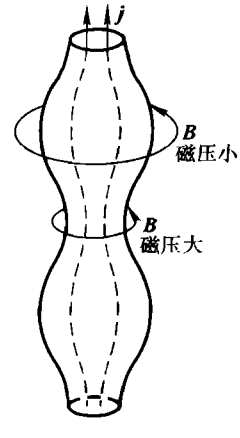


图 10.4

1．腊肠型不稳定性

若等离子体出现局部收缩，如图 10.4 所示，在颈状收缩区电流密度和环向磁场会局部增强，磁力 $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$ 在收缩处增大，方向为向内的径向方向，从而使颈状收缩区进一步收缩，把等离子体沿轴向推开，使其他部分膨胀起来．而这些膨胀起来的腹状区域的电流密度和环向磁场都减弱了，因而起箍缩作用的磁力减小，于是腹状区进一步膨胀，这就形成了腊肠型不稳定性．

2．扭曲型不稳定性

若柱形等离子体受到扭曲，形成如图 10.5 所示的形状，则凹处磁感线密度增大，指向轴线的箍缩磁力增强使凹处更凹；凸处磁感线变疏，向内箍缩磁力减弱，于是凸处越来越凸，体系处于不稳定状态．这种不稳定性称为扭曲型不稳定性．

3．扭绞型不稳定性

前两种不稳定性是由电流所产生的磁场的箍缩效应引起的. 控制这种不稳定性的办法是加轴向磁场 $\boldsymbol{B}_{0z}$,我们在后面会看到,只要轴向磁场达到一定强度,不稳定性就可以克服. 但是,如轴向磁场太强,则磁感线稍被扭绞成螺旋状,就会形成一种新的不稳定性,叫扭绞不稳定性,如图 10.6 所示.

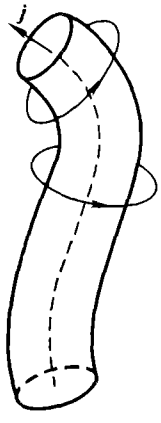


图 10.5

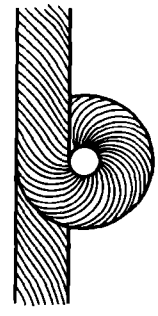


图 10.6

下面,我们来分析三种不稳定性的阈值条件.

对第一种,设 $\boldsymbol{B}_{0z}=B_{0z}\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{B}_{0\phi}=B_{0\phi}\boldsymbol{e}_\phi$,则等离子体内侧的总通量为

$$R^2B_{0z}=\text{常数}.$$

因此,由 R 变化引起的轴向场 B_{0z} 的变化为

$$\delta B_{0z}=-B_{0z}\frac{2\delta R}{R},$$

同时总电流 $I_0=$常数,所以在 $r=R$ 处(表面)环向磁场为

$$B_{0\phi}=\frac{\text{常数}}{R}.$$

这样,由于 R 变化引起的 $B_{0\phi}$ 的改变为

$$\delta B_{0\phi}=-\frac{\delta R}{R}B_{0\phi}.$$

于是,指向内部的磁压强的总变化为

$$\delta p_m=\delta\left(\frac{1}{2\mu_0}B_{0\phi}^2-\frac{1}{2\mu_0}B_{0z}^2\right),$$

式中第一项是等离子体内的平均压强,第二项是外加的轴向磁场的压强. 变分后得

$$\delta p_m=-\frac{1}{\mu_0}[B_{0\phi}^2-2B_{0z}^2]\frac{\delta R}{R}.$$

可见,若

$$B_{0\phi}^2>2B_{0z}^2, \tag{10.62}$$

则当 $\delta R<0$(即收缩扰动)时,磁压的变化是正的,即磁压增强,因此体系是不稳定的.

(10.62)式即是腊肠型不稳定性的阈值条件.

对于第二种不稳定性,同理可证,其不稳定阈值条件是

$$B_{0\phi}^2 \ln\left(\frac{L}{R}\right) > B_{0z}^2. \tag{10.63}$$

其中 L 为箍缩等离子体长度,R 为半径.

对于第三种不稳定性:阿尔文作出了一个数量级估计的判别式. 考虑长为 l、半径为 R ($R \ll l$)的圆柱形的磁通管,如果磁通管一端扭转一个角度 ϕ,则由于外加轴向磁场也随着里面的等离子体一起扭绞,场线被拉长故磁场增强,并产生了环向分量磁场,其强度为

$$B_\phi = \frac{\rho\phi}{l} B_{0z},$$

其中 B_{0z} 是轴向磁场. 磁通管中的总磁能就增加到

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{l}{2\mu_0}\int_0^R (B_\phi^2 + B_{0z}^2) 2\pi\rho \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{2\mu_0} B_{0z}^2 R^2 \left(l + \frac{R^2\phi^2}{2l}\right). \end{aligned}$$

扭绞过程中磁能不断增加,但是扭绞到一定程度后将形成图 10.6 中右边的回圈,回圈的形成意味着能量减少,即

$$\delta W_m = \frac{\pi}{2\mu_0}\delta\left[B_{0z}^2 R^2\left(l + \frac{R^2\phi^2}{2l}\right)\right] < 0.$$

因为回圈的形成,管长至少增加 $2\pi R$,即 $\delta l = 2\pi R$,这时扭绞放松,所以

$$\delta\phi = -2\pi,$$

同时由于是不可压缩流体,体积

$$\pi R^2 l = 常数,$$

因此半径一定变小,即

$$\delta R = -R\frac{\delta l}{2l} = -\pi R^2/l.$$

再则磁通量 $\pi R^2 B_{0z} = 常数$,

$$\delta B_{0z} = 2\pi B_{0z} R/l.$$

把 δl、$\delta\phi$、δR、δB_{0z} 代入 δW_m,则得

$$\phi > (\sqrt{5} - 1) l/R. \tag{10.64}$$

由此可见,扭绞越严重,回圈越多,能量上越有利,所以这是一种不稳定状态. 不等式(10.64)式是**扭绞不稳定性的数量级判据**.

这三种不稳定性在实验室和天体物理中有着很重要的意义. 目前,等离子体不稳定性的研究已成为一个专门论题,有兴趣的读者可阅读有关书籍.

§10.8 等旋定律

导电流体在有磁场或无磁场时的行为非常不同. 例如,在无磁场时,水银的粘度如水一样,搅动它时只发生小尺度的不规则运动以及微小而迅速的波动,并且几乎只发生在直接搅

动的区域;但是有强磁场时,水银的粘度变得像糖浆一样,搅动时产生大旋涡,其转轴都与磁场方向平行. 图 10.7 是实验装置的侧视图,在圆形浅铜盘中装满水银,加上垂直表面的磁场,再转动盘底部的环状装置,则可看到从表面一直到底部的水银环状带随着环状装置一起转动. 这个现象可以表述成一个普遍的定理,这就是磁场中的导电流体(把等离子体处理为流体时即是导电流体)的**等旋定律**,它是由费拉尔(Ferraro)最先发现的.

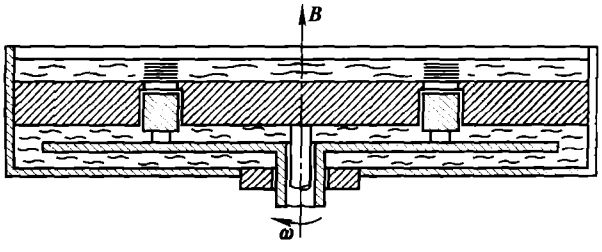


图 10.7

等旋定律的一种简单的数学推导如下:忽略电阻引起的效应,并令 $\mu=\mu_0$,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}).$$

对不可压缩流体,$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$,且$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,所以上述方程化成

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}. \tag{10.65}$$

取柱坐标系(ρ,ϕ,z),旋转轴为 z 轴,则 $\boldsymbol{B}$ 可以分解成

$$\boldsymbol{B}=B_\rho\boldsymbol{e}_\rho+B_\phi\boldsymbol{e}_\phi+B_z\boldsymbol{e}_z,$$

速度$\boldsymbol{v}$表示成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}=\rho\omega\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\rho=\omega\rho\boldsymbol{e}_\phi.$$

讨论定常运动,此时$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0$,于是,方程(10.65)式化成

$$\begin{cases}0=-\omega\dfrac{\partial B_\rho}{\partial\phi},\\[2ex] 0=-\omega\dfrac{\partial B_z}{\partial\phi},\\[2ex] 0=\rho\left(B_\rho\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho}+B_z\dfrac{\partial\omega}{\partial z}\right)-\omega\dfrac{\partial B_\phi}{\partial\phi}.\end{cases} \tag{10.66}$$

并且 $\omega=\omega(\rho,z)$,与 ϕ 无关,由此可见,B_ρ、B_z 与 ϕ 都无关. 再有$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,故

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=-\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)-\rho\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

上式的右边只可能是 ρ、z 的函数,我们设为 $f(\rho,z)$,就有

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=f(\rho,z),$$

将之积分求得 $$B_\phi=f(\rho,z)\phi+C(\rho,z).$$

由于 B_ϕ 必须是位置的单值函数, $f(\rho,z)=0$,于是得到

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}=0.$$

这样，我们看到磁场相对于旋转轴总是对称的. 根据(10.66)式的第三式，我们得到

$$B_\rho\frac{\partial \omega}{\partial \rho}+B_z\frac{\partial \omega}{\partial z}=0,$$

即
$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\omega=0. \tag{10.67}$$

可见，对于定常运动，角速度沿磁感线方向不会改变. (10.67)式称为等旋定律.

在天体物理中，等旋定律是很有用的. 例如，已经发现，对太阳来说，存在着一个和太阳共同旋转的行星际空间，太阳外的等离子体与中心天体共同旋转时，它们之间就有角动量的传递，而这种传递正是由磁场来实现的，等旋定律在这里起了作用.

§10.9 磁流体力学波和磁声波

设均匀的等离子体流体处在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，由于某一微小扰动的结果，在一定的体积内的流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 现在我们就来研究这种扰动的传播情况.

为了简单起见，我们只考虑没有粘滞性的可压缩的理想流体，并且忽略重力作用，这时体系的运动方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0,\\ \rho\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p-\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}),\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),\\ \dfrac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot(S\boldsymbol{v})=0,\\ p=p(\rho,T).\end{cases} \tag{10.68}$$

因为是微扰，可以认为各物理量与其相应的平衡值偏离很小，故我们令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1,\ p=p_0+p_1,\ \rho=\rho_0+\rho_1, \tag{10.69}$$

其中脚标"0"表示平衡时的值. 考虑的是等熵运动，有

$$p_1=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0\rho_1=c_s^2\rho_1, \tag{10.70}$$

其中 $c_s=\sqrt{\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)}$ 是普通流体的声波速度. 把(10.69)式代入(10.68)式的前三个式子，保留一级项，则得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\ \rho_0\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+c_s^2\nabla\rho_1+\dfrac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)=0,\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)=0.\end{cases} \tag{10.71}$$

把(10.71)的第二式对时间求导数，再把第一、三式代入消去 ρ_1、$\boldsymbol{B}_1$，得到 $\boldsymbol{v}$ 的方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}_A \times \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}_A)] = 0. \tag{10.72}$$

式中

$$v_A = \boldsymbol{B}_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \tag{10.73}$$

方程(10.72)很复杂,我们讨论这一方程的平面波解的特性,将 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$ 代入(10.72)式,结果得

$$-\omega^2 \boldsymbol{v}^0 + (c_s^2 + v_A^2)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}^0)\boldsymbol{k} + (\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{k})[(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}^0 - (\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}^0)\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}^0)\boldsymbol{v}_A] = 0. \tag{10.74}$$

(1) 若 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{B}_0$,即 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v} = 0$,则由(10.74)式得

$$-\omega^2 + v_A^2 k^2 \cos^2\phi = 0,$$

ϕ 是 $\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角. 这时波的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = v_A \cos\phi,$$

群速度为

$$\boldsymbol{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{v}_A.$$

可见(10.73)式中的 $\boldsymbol{v}_A$ 即是平面波的传播速度,称为**阿尔文速度**,这种波就叫阿尔文波,它是横波. 我们可由(10.71)的第三式求得这种波的磁场的波动为

$$\boldsymbol{B}_1 = -\frac{k}{\omega} B_0 \boldsymbol{v}\cos\phi.$$

于是,根据场的冻结概念,我们可以直观地想象,阿尔文波是"粘附"在流体上的磁感线跟随着流体一起作横向振荡、并沿着恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 方向传播的一种**磁流体力学波**.

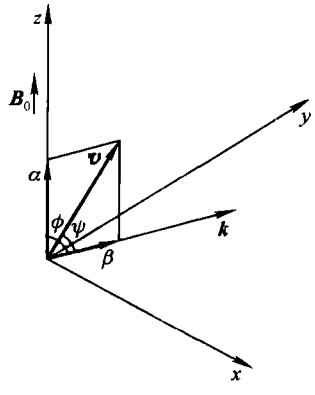


图 10.8

(2) 若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{k}$ 共面. 如图 10.8,把速度矢量分解成平行于 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的两个分量:

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_z + \beta\boldsymbol{e}_k,$$

$\boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{e}_k$ 是 z 方向和 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量. 因此,我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{k} = B_0 k\cos\phi, \\ \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{v} = \alpha B_0 + \beta B_0 \cos\phi, \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = \alpha k\cos\phi + \beta k. \end{cases} \tag{10.75}$$

我们从(10.74)式可以得到

$$\begin{cases} \alpha\omega^2 + \beta v_A^2 k^2 \cos\phi = 0, \\ \alpha c_s^2 k^2 \cos\phi + \beta[(c_s^2 + v_A^2)k^2 - \omega^2] = 0. \end{cases}$$

上述代数方程有非零解的条件为系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & v_A^2 k^2 \cos\phi \\ c_s^2 k^2 \cos\phi & (c_s^2 + v_A^2)k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + v_A^2) + c_s^2 v_A^2 k^4 \cos^2 \phi = 0, \tag{10.76}$$

这就是 v 与 $\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{k}$ 共面时波的色散关系. 利用 $v_p = \frac{\omega}{k}$,(10.76)式变成相速度方程:

$$v_p^4 - (c_s^2 + v_A^2) v_p^2 + c_s^2 v_A^2 \cos^2 \phi = 0, \tag{10.77}$$

上式有实数根的条件为

$$(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4 c_s^2 v_A^2 \cos^2 \phi \geqslant 0,$$

即

$$(v_A^2 - c_s^2)^2 + 4 c_s^2 v_A^2 \sin^2 \phi \geqslant 0.$$

所以 v_p^2 总有两个实数根,它对应两种不同的波的传播模式. 用 $v_1 = v_1(\phi)$、$v_2 = v_2(\phi)$表示这两种模式的相速度,则它们作为 ϕ 的函数的曲线如图 10.9 所示.

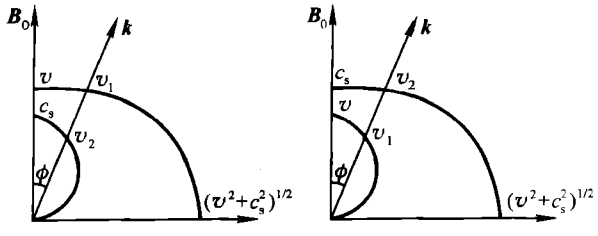


图 10.9 (图中 $v = v_A$)

由图可以看出:当 $\phi = 0$ 时,有一种模式的相速度等于阿尔文速度 v_A,故称之为修正的磁流体力学波,其相速度为 $v_1(\phi)$;另一种模式当 $\phi = 0$ 时相速度为 c_s,故称之为修正的声波,其相速度为 $v_2(\phi)$.

下面,我们来讨论 v_1 和 v_2 的两种模式的纵、横波特性. 我们来看 v 和 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角 ψ,当 ϕ 给定时,由 α/β 的值即可定 ψ:

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{v_A^2}{v_p^2} \cos \phi,$$

利用上式便可求得

$$\tan \psi = \frac{\sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi - v_p^2 / v_A^2}, \tag{10.78}$$

其中 v_p^2 由(10.77)式确定. 从(10.78)式可以看出,除去 $\phi = 0$、$\frac{\pi}{2}$ 外,ψ 值不等于 0、$\frac{\pi}{2}$,所以修正的声波和修正的磁流体波既不是纵波($\psi = 0$),也不是横波$\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

对于 $\phi = 0$ 和 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 的特殊情况,相速度和角 ψ 的值见下页表($v_A > c_s$):

由表可见:(1) $\phi = 0$ 时,修正的磁流体力学波是横波$\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$,并沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向以速度 v_A 传播,它即是阿尔文波.(2) $\phi = 0$ 时,修正的声波是纵波($\psi = 0$),并以声速 c_s 平行于 $\boldsymbol{B}$

	修正的声波		修正的磁流体力学波	
	ψ	v_p	ψ	v_p
$\phi=0$ 时	0	c_s	$\frac{\pi}{2}$	v_A
$\phi=\frac{\pi}{2}$ 时	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$(c_s^2+v_A^2)^{1/2}$

传播，它是一种普通声波. (3) $\phi=\frac{\pi}{2}$时，修正的磁流体力学波是纵波($\psi=0$)，相速度为$(v_A^2+c_s^2)^{1/2}$，传播方向垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$，这称为**磁声波**，由(10.71)式求得这种波的磁场是

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{k}{\omega}v\boldsymbol{B}_0.$$

从图 10.8 中我们看到，磁声波是磁感线疏密波，如阿尔文波一样，它的磁感线冻结在流体中随流体一起运动.

§10.10 等离子体振荡和电子等离子体波

1. 等离子体振荡

高频情况下，单流体的 MHD 方法将失效，因为此时正负电荷分离，电子、离子各自独立地运动. 当频率足够高时，由于离子惯性大，跟不上快速变化的场，于是只有电子作运动，而离子只提供一个均匀的正电荷背景. 当电子相对于离子本底有个位移时，将会建立电场，其方向是把电子拉回到原先的位置，以恢复等离子体的电中性特性，但由于电子的惯性，它将冲过平衡位置，这样，电子围绕着平衡位置作振荡，这个振荡的特征频率称为**等离子体频率**. 下面，我们在最简单的情况下讨论等离子体振荡. 首先假定无磁场，离子作为本底均匀分布于空间，且不考虑热运动. 设电子在 x 方向运动，于是电子流体的运动方程为

$$mn\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-en\boldsymbol{E},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{v})=0,$$

其中 n 为电子密度，$\boldsymbol{v}$ 为电子流体的速度. 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由于电子偏离平衡位置导致准电中性条件破坏而激发的，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}e(n_i-n_e).$$

我们只讨论振幅很小的振荡，于是可把上述方程线性化，即

$$n=n_0+n_1,\ n_i=n_{0i}=n_0,$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1,$$

脚标“0”表示平衡值. 所以，上面的方程变成

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}_1, \\ \dfrac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E}_1 = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} e n_1, \end{cases} \tag{10.79}$$

取平面波解

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x v' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ n_1 = n' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \\ \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_x E' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} -\mathrm{i}m\omega v' = -eE', \\ -\mathrm{i}\omega n' = -\mathrm{i}n_0 k v', \\ \mathrm{i}kE' = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} e n', \end{cases}$$

消去 n'、E',结果为

$$\omega^2 = n_0 e^2 / m\varepsilon_0. \tag{10.80}$$

注意,我们虽然是用平面波解代入方程求得色散关系(10.80)式的,但是,由于 ω 与 k 无关,所以群速度

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 0,$$

扰动并不能传播. 可见,实际上这是等离子体的振荡,我们不妨用力学模拟来说明这种情况:设想许多重球用相同的弹簧等距离地悬挂在一条铅垂线上,每个球都以相同的频率作简谐振荡. 如果各个球之间都以适当的初始相位起动,以至于形成波动特征,那么我们就可以看到纵波在传播,频率决定于弹簧,而波长则是可以任意选择的,ω 和 k 没有确定的关系,然而,能量并没有从一个振子传到另一个振子. 我们把

$$\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{n_0 e^2 / m\varepsilon_0} \tag{10.81}$$

叫做等离子体频率,由于 ω_{p} 只与等离子体粒子的质量、电荷以及密度有关,所以它是等离子体的特征频率.

2. 电子等离子体波

在上面的讨论中,我们曾特别指出,等离子体振荡并不能传播出去,那是因为我们在讨论中略去了热运动,因而也略去了运动方程中的压强项,一旦我们考虑到热运动,则等离子体振荡将可以传播出去而形成等离子体波. 我们仍把离子看成均匀分布的本底,则电子的流体动力学方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\boldsymbol{v}) = 0, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\dfrac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \dfrac{1}{mn}\nabla p, \end{cases} \tag{10.82}$$

麦克斯韦方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} e(n - n_0),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0 en\boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

式中 n 为电子密度，n_0 为正离子背景密度. 我们先假定电子流体静止时 $n = n_0$，且场强也为零，然后再考虑由于某种扰动而使体系与平衡态有微小偏离. 于是，上述两组方程线性化为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{e}{m}\boldsymbol{E} + \frac{1}{mn_0}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 \nabla n = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} en = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 en_0 \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

注意，若存在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$，则在第二个方程式中保留 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0$ 项. 讨论波动特性的关键是求出色散关系，为此，我们假定所有的变量都按 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ 变化，则上面的方程组化成

$$\begin{cases} n = \dfrac{n_0}{\omega}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{v} = \dfrac{e}{\mathrm{i}m\omega}\boldsymbol{E} + \dfrac{3\langle u^2 \rangle}{\omega}\dfrac{n}{n_0}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = \mathrm{i}en_0/\varepsilon_0, \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\dfrac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\mu_0 en_0 \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}_0 \end{cases} \tag{10.83}$$

其中 $\left(\dfrac{\partial p}{\partial n}\right)_0$ 的值是这样定的：由于过程是绝热的，$p = p_0(n/n_0)^\gamma$，γ 取 3，就有

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 = 3\frac{p_0}{mn_0},$$

若 $p_0 = n_0 k_B T$，则

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 = \frac{3k_B T}{m} = 3\langle u^2 \rangle,$$

式中 u 是热运动速度在一个方向上的分量. 由(10.83)式的第五式和第六式得

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\mathrm{i}e}{m\omega}\right)\frac{1}{\omega_p^2}[(\omega^2 - c^2k^2)\boldsymbol{E} + c^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}],$$

再利用第二式和第三式消去 $\boldsymbol{v}$ 和 n，则有

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\boldsymbol{E} + (c^2 - 3\langle u^2\rangle)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k} = 0. \tag{10.84}$$

我们把 $\boldsymbol{E}$ 分解为平行和垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的两个分量：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp}, \boldsymbol{E}_{\parallel} = \left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}}{k^2}\right)\boldsymbol{k},$$

便有

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)(\boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp}) + (c^2 - 3\langle u^2\rangle)k^2\boldsymbol{E}_{\parallel} = 0,$$

即

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - 3\langle u^2\rangle k^2)\boldsymbol{E}_{\parallel} = 0, \tag{10.85}$$

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2k^2)\boldsymbol{E}_{\perp} = 0. \tag{10.86}$$

由此可见，存在两类等离子体波：一是 $\boldsymbol{E}/\!/\boldsymbol{k}$ 的波，它是纵波，其色散关系为

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\langle u^2\rangle k^2; \tag{10.87}$$

另一是 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{k}$ 的横波，色散关系为

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2. \tag{10.88}$$

§10.11 等离子体的介电常数和朗道阻尼

我们可把电子等离子体的麦克斯韦方程(10.83)式写成更有用的宏观电动力学的形式. 我们用下面的关系式定义电极化矢量 $\boldsymbol{P}$：

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} = -en\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{j},\ \nabla\cdot\boldsymbol{P} = e(n - n_0) = -\rho. \tag{10.89}$$

这两个关系的相容性是由连续性方程(10.82)的第一式保证的. 利用 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$，麦克斯韦方程组变成

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,\\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0.\end{aligned} \tag{10.90}$$

在弱场时，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系是线性的，但并不是瞬时的，§8.10 中的公式(8.116)同样适用.

在等离子体物理研究中一个很重要的问题是计算它的介电常数，它需要应用输运方程. 我们这里只局限于讨论无碰撞等离子体的介电常数，并且仍假定离子的运动是不重要的. 我们的出发点是符拉索夫方程.

对于弱场，我们设电子的分布函数为

$$f = f_0 + \delta f,$$

这里 f_0 是未受场扰动的空间均匀的平衡态分布函数，δf 是由于场的扰动而引起的相对于平衡态的偏离. 忽略符拉索夫方程中的二级项，我们有

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\delta f}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{v}}.$$

在各向同性的等离子体中，分布函数仅仅与速度的大小有关，对于这种情况，矢量 $\partial f_0/\partial\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 方向相同，它与 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的标积为零. 可见在线性近似下，磁场不影响分布函数，δf

的方程为

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}. \tag{10.91}$$

假定函数 δf 正比于 $\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$，正如场 $\boldsymbol{E}$ 一样，则方程(10.91)式给出

$$\delta f=\frac{\frac{e}{m}\boldsymbol{E}}{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega)}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}. \tag{10.92}$$

在未受扰动的等离子体中电子电荷在每一点都与离子电荷平衡，电流密度同样为零. 而由场扰动引起的电荷密度和电流密度为

$$\rho=-en_0\int\delta f\mathrm{d}^3v,\quad \boldsymbol{j}=-en_0\int\boldsymbol{v}\,\delta f\mathrm{d}^3v. \tag{10.93}$$

像 δf 一样，这些量正比于 $\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$，因而按照(10.89)式，我们有

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}=-\rho,\quad -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P}=\boldsymbol{j}. \tag{10.94}$$

因为 δf 有极点

$$\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{10.95}$$

所以对(10.93)式作积分需要作专门的规定. 为使积分具有物理意义，我们必须考虑到真实物理过程的**初始条件**，实际上波动不是简谐的，它是从 $t\to-\infty$ 起无限缓慢地从无到有建立起来的；就是说，$\delta f\propto \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，其中 $\varepsilon\to0^+$，显然 $t\to-\infty$ 时 $\delta f=0$. 扰动初始条件的这种描述，相当于在它的频率上加上无限小的正的虚部，把积分中的 ω 用 $\omega+\mathrm{i}\varepsilon$ 来代替. 所以，积分路径绕过极点的规则是

$$\omega\to\omega+\mathrm{i}0^+, \tag{10.96}$$

这首先是由朗道建立的. 这样，利用(10.96)式，可把积分(10.93)式分别表示为

$$\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{P}=\frac{e^2n_0}{m}\boldsymbol{E}\cdot\int\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega-\mathrm{i}0^+)}, \tag{10.97}$$

$$\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P}=\frac{n_0e^2}{m}\int\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega-\mathrm{i}0^+)}. \tag{10.98}$$

从上述两式，我们可以分别求得等离子体的**纵介电常数** ε_l 和**横介电常数** ε_t. 我们来计算 ε_l，因为 $\boldsymbol{E}$ 平行于 $\boldsymbol{k}$，因而 $\boldsymbol{P}$ 也平行于 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_l-1)\boldsymbol{E}$. 于是，从(10.97)式我们得到

$$\varepsilon_l=1-\frac{e^2n_0}{\varepsilon_0mk^2}\int\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}^3v}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega-\mathrm{i}0^+}, \tag{10.99}$$

取 $\boldsymbol{k}$ 沿着 x 轴，上式即可写成

$$\varepsilon_l=1-\frac{\omega_p^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(v_x)}{\mathrm{d}v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{kv_x-\omega-\mathrm{i}0^+}, \tag{10.100}$$

其中

$$f(v_x)=\iint f(v_x,v_y,v_z)\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z.$$

在各向同性的等离子体中 $f(v_x)$ 是偶函数. 利用主值积分公式

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}0^+}=\mathrm{P}\frac{1}{x}+\mathrm{i}\pi\delta(x), \tag{10.101}$$

(10.100)式可写成

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_p^2}{k}\left\{ P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(v_x)}{dv_x}\frac{dv_x}{kv_x - \omega} + i\frac{\pi}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(v_x)}{dv_x}\delta(v_x - \omega/k)dv_x \right\}, \tag{10.102}$$

式中的 P 表示主值积分. 从(10.102)式,我们看到,无碰撞的等离子体的介电常数是复数,$\varepsilon_l = \varepsilon_l' + i\varepsilon_l''$. 分离(10.102)式的虚部,我们有

$$\varepsilon_l'' = -\pi\frac{\omega_p^2}{k^2}\frac{df(v_x)}{dv_x}\bigg|_{v_x=\omega/k}, \tag{10.103}$$

这即是无碰撞等离子体介电常数的虚部. 我们在第八章中已讨论过,复介电常数意味着介质中的电场能量的耗散;或者说,等离子体波的振幅将随着时间不断衰减,波受到了阻尼. 对于这种阻尼,我们着重要指出下述两个特点:

(1) 阻尼和碰撞的无关性　这和通常吸收介质中的耗散有着本质的差别,这里我们是从无碰撞的符拉索夫方程出发得到耗散结果的;而通常的耗散问题(例如电阻粘滞性、热传导等等)都和输运方程中的碰撞项直接有关. 无碰撞耗散不包含熵的增加,因而在热力学上是可逆的;而一般的耗散过程总是不可逆的. 因此,这种无碰撞阻尼称为**朗道阻尼**,是由朗道在 1946 年首先从理论上预言的.

(2) 朗道阻尼的物理机制　介电常数的虚部来自 $v = \omega/k$ 的极点的贡献,这可从(10.103)式中看出. 这里 v 是粒子的速度,ω/k 是等离子体波的相速度. 因此,朗道阻尼同体系的分布函数中速度接近于波的相速度的那些粒子有关,这些粒子叫做**共振粒子**. 共振粒子被俘获在波的势阱中,与波同相运动,从而它们与波有效地交换能量,使波的能量转化为共振粒子的动能,这样,波受到了阻尼.

习　题

10.1　试用场的冻结概念具体地解释阿尔文波及磁声波的物理图象.

10.2　请用量纲分析法求出磁场穿入等离子体的特征时间,并证明其特征时间本质上是场能耗散为焦耳热的时间.

10.3　试证明:在有限电导率引起磁场扩散的情况下,磁场始终保持无作用力性质的必要条件是 α 必须是常数.

10.4　试用场的冻结概念解释太阳虽有强大的总体磁场,但在表面上磁场却很微弱这一事实.

10.5　日冕是由密度约为 $10^{12}\ m^{-3}$ 的氢离子组成的等离子体,假定日冕中的磁场为 $B = 0.1\ T$,试计算阿尔文波的相速度.

第十一章　狭义相对论和相对论电动力学

本章首先由相对论的基本原理出发导出洛伦兹变换的一般表达式，讨论狭义相对论的时空性质．然后着重阐述相对论电动力学．

§11.1　爱因斯坦的基本假定

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与坐标系的选取无关，这就是说，在不同的坐标系中，物理规律表述的形式始终保持不变，这是一个重要的基本假定，称为相对性原理．

1．力学相对性原理

自由粒子在其中作匀速运动的坐标系称为惯性系．在经典力学中，不同的惯性系由伽利略变换联系起来．如图 11.1，两个惯性坐标系 S 和 S′间的伽利略变换为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \\ t' = t, \end{cases} \tag{11.1}$$

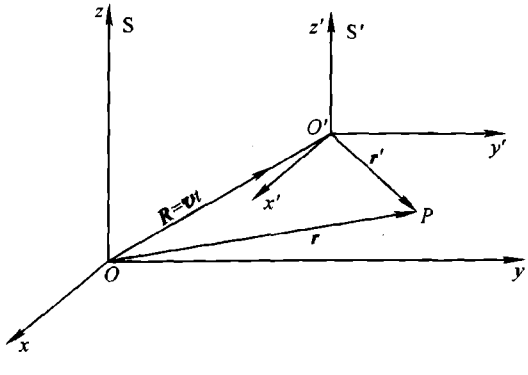


图 11.1

式中 v 为两惯性系之间的相对速度，r 和 r' 分别表示空间某一物理事件 P 在 S 和 S′坐标系中的位置矢量，t 和 t' 分别表示 S 和 S′系中观测 P 事件发生的时间．

同一物体在不同的惯性系 S、S′中，其位置矢量是不同的，但它所遵守的牛顿力学方程在不同的惯性系中的形式是一样的，也就是说，牛顿方程在(11.1)式的变换下保持不变，这在经典力学中常称为力学的相对性原理.

2. 伽利略变换的困难

但是，伽利略变换式(11.1)在一般的物理规律中是不正确的，困难主要表现在对光的传播规律的描述上. 迈克耳孙实验表明，光速与传播方向无关，与光源运动的速度无关. 这就是说，在不同的惯性系中测量得到的光速是一个常数 c. 但从变换(11.1)式不可能得出这个结论. 由于光的传播现象是由麦克斯韦方程组描述的，因此，麦克斯韦方程组在变换(11.1)下不是不变的.

相对性原理是被大家普遍接受的基本假设. 在这个前提下，人们所能够选择的道路只可能有两条：一是研究已给的理论所允许的变换；二是改造原有理论，使它满足给定的变换. 不管选择那条道路，人们总试图使所有的理论在同一套变换下不变.

3. 爱因斯坦的选择

面对上述困难，爱因斯坦选择了第一条道路，他提出如下两条基本假设：

(1) 相对性原理

自然规律在不同惯性系中的表达式相同. 这里，自然规律不只包括力学规律，还包括电磁现象等其他规律. 这就把力学相对性原理推广到了一般的情况.

(2) 光速不变原理

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同.

这两条基本假设构成了爱因斯坦的相对性原理，它不同于伽利略的相对性原理. 爱因斯坦的相对性原理使基本物理概念发生了深刻的、根本性的转变，我们从下面的一个简单的例子就可以清楚地看到这一点.

【例 1】 设 S′系相对 S 系沿着 x 和 x' 轴向右运动，如图 11.2. B 和 C 是 x' 轴上与 A 等距离的两点，一个光信号从 A 点发出. 显然，光将沿 x' 轴向两个相反方向传播，S′系的观察者看来，A、B、C 都是静止的，A 点发出的光到达 B、C 两点所需的时间相等. 试问，在 S 系的观察者看来光是否也同时到达 B、C 两点？

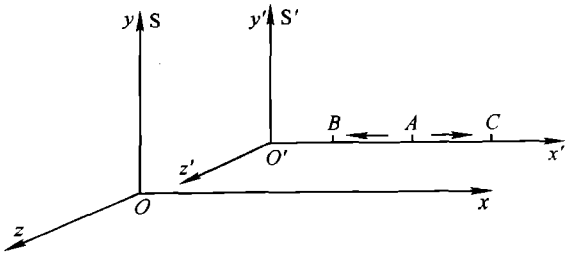


图 11.2

解　根据伽利略相对性原理，回答将是肯定的，在S系看来，A点发出的光信号也将同时到达B、C两点．但是，从爱因斯坦的相对性原理，却得出完全不同的结果．按照爱因斯坦的第二个基本假定，尽管光源A沿x轴作匀速运动，但光信号对于S系的速度总等于c，且对于S系而言，B点与由A发出的光信号相向而行，C点则是背离光信号移动，所以在S系中，光信号到达B点要比到达C点早．

考察的是同一个物理过程，但根据两种相对性原理却得出完全不同的结论．对于光信号到达B点和C点这两个事件，伽利略相对性原理认为，无论在哪个参考系看，两事件都是同时发生的，同时性是绝对的；而根据爱因斯坦的相对性原理，从光速不变的假定出发，我们看到：在某一惯性参考系内同时发生的两件事，对另一个惯性参考系来说并不是同时发生的．这就是说，同时性是相对的，时间不再是一个与空间坐标独立无关的普适变量．这是物理观念上的一个崭新的革命，它摒弃了旧的传统观念——绝对时间的概念，在当时，这超出了人们的常识．所以，在相对论创立以后的很长一段时间内，许多人为了维持原有的观念，提出了各种理论来替代爱因斯坦的相对原理，试图放弃光速不变原理，但都以失败告终．光速不变原理被日益众多的现代物理实验所支持．

现在，我们用数学形式把光速不变原理表示出来．考察电磁信号从空间某一地点在某个时间发出，经过一段时间后到达空间另一个地点的这样两个事件．

在S参考系中，第一个事件（即电磁信号发出）是在t_1时刻，在空间坐标为x_1、y_1、z_1的地点发生的，电磁信号（即电磁波）以光速c传播，它在t_2时刻到达空间另一地点，其坐标为x_2、y_2、z_2，这就是第二个事件所发生的时空点．显然，电磁信号传播的距离为$c(t_2-t_1)$，因此，电磁信号的波阵面方程为

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \quad (11.2)$$

我们也可以把(11.2)式视为在S系中可以用电磁信号联系起来的两个事件的时－空关系．

我们再在S′系中观察电磁信号的传播．S′系相对于S系作匀速运动，所以仍是惯性系．在S′系中，第一个事件发生在t_1'时刻，空间坐标为x_1'、y_1'、z_1'；第二个事件发生在t_2'时刻，空间坐标为x_2'、y_2'、z_2'．根据光速不变原理，电磁信号从$(x_1'、y_1'、z_1')$到$(x_2'、y_2'、z_2')$的传播速度仍为c，所以，我们又可以得到S′系中观察到的这两个事件之间的时－空关系（即S′系中的波阵面方程）为

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \quad (11.3)$$

定义：相对论中两事件之间的间隔为

$$s=[|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^2-c^2(t_2-t_1)^2]^{1/2}, \quad (11.4)$$

于是，*我们看到，在电磁信号传播中，信号“发出”和信号“到达”这两个事件的间*隔为零，无论在哪个参考系看都是一样的；反过来说，如果任意两个事件的间隔在某一个参考系中为零，则在任何参考系中都应为零．

对于任意两个事件，其间隔并不一定是零. 例如，在 S 系中不同地点同时发生的两个事件，其间隔一定是不为零的实数，同样，在同一地点不同时发生的两个事件，其间隔一定是不为零的虚数. 因此，我们把间隔分成三类：

$$s^2 = 0, \quad \text{称为类光间隔；}$$
$$s^2 > 0, \quad \text{称为类空间隔；}$$
$$s^2 < 0, \quad \text{称为类时间隔.}$$

我们把三种间隔用时空图形表示出来，即如图 11.3 所示. 如果两个事件之间的时空坐标无限接近，则它们之间的间隔可写成微分形式，即

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{11.5}$$

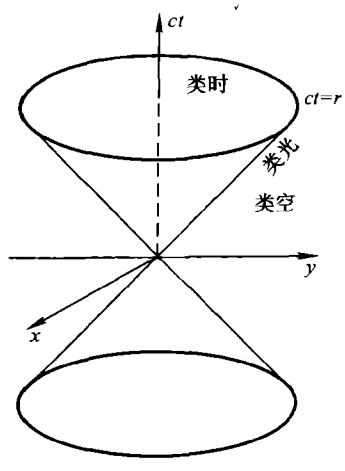


图 11.3

下面我们来研究从一个惯性系变换到另一个惯性系时，间隔 ds 是怎么变换的. 我们用 ds 表示 S 系中两事件的间隔，ds' 表示在 S′ 系中这两个事件的间隔. 因为 ds^2 和 ds'^2 都是长度平方的量纲，所以两者之间必定是线性函数，不妨设

$$ds = ads' + b.$$

前面我们已经说过，如果 $ds = 0$，则 $ds' = 0$，所以上式中常数 $b = 0$，故

$$ds = ads',$$

式中 a 为比例系数. 显然 a 不可能是空间和时间的函数，这是因为空间和时间是均匀的，如 a 是空间和时间函数，则在同一坐标系中同样两个事件之间的间隔将是不确定的，这是不能设想的. 另外，a 与两个参考系之间相对速度的方向无关，因为光的速度在空间各个方向都是一样的. 所以，a 只可能是相对速度的绝对值的函数，即 $a = a(v)$. 另一方面，ds' 也可以由 ds 来表示，类似地我们有

$$ds' = a'ds.$$

从相对运动来看，说 S′ 系相对于 S 系运动，与说 S 系相对于 S′ 系运动是等价的，所不同的只是相对速度差一负号，考虑到 ds' 与 ds 之间的比例系数与方向无关，所以，我们理所当然地认为

$$a = a',$$

即

$$ds' = ads = a^2ds'.$$

于是我们得到

$$a = \pm 1.$$

由于 a 是 v 的函数，是否有可能对于某个 v 值 a 取正值，而对另一个 v 值 a

取负值呢？显然这是不可能的，因为这意味着存在某些 v 值使 a 在 -1 到 $+1$ 之间变化，这与 a 只取 ± 1 相矛盾，可见 a 要么只取 $+1$，要么只取 -1. 最后，我们取一个特例，S′相对于 S 系静止，则应有恒等变换 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$，这样，我们最终决定了 a 只可取 $+1$. 因此从一个惯性参考系变到另外一个惯性参考系，永远成立

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s'. \tag{11.6}$$

这就是说任何两个事件的间隔，从一个惯性系变到另一个惯性系中时是不变的. (11.6)式即是光速不变原理的数学表示.

§11.2　闵可夫斯基空间和洛伦兹变换

1. 闵可夫斯基空间

现在，我们要具体地找出保持 $\mathrm{d}s$ 不变的坐标变换关系. 为了在数学上处理问题方便，我们首先令

$$x = x_1, y = x_2, z = x_3, \mathrm{i}ct = x_4. \tag{11.7}$$

于是，我们可以把两个事件的间隔写成

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{11.8}$$

其中我们已假定第一个事件是在 $t = 0$ 时刻发生在坐标原点的. 这样我们就引入了一个虚构的四维空间，其坐标轴为

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

显然在这个四维空间内，四维矢量的长度 s 为

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{11.9}$$

两个矢量 x_μ 和 y_μ 的标积为

$$x_\mu y_\mu = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4. \tag{11.10}$$

由(11.9)和(11.10)式看出，我们现在引入的四维矢量空间同一般的四维矢量的欧氏空间 R^4 不同，我们把这个空间称为闵可夫斯基空间，它是闵可夫斯基因相对论而首先引入的，它与 R^4 空间的差别主要在于：在 R^4 空间中，矢量的长度的平方为

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 0, \tag{11.11}$$

它是正定的；而由(11.9)式所定义的空间，由于该空间的第四个坐标是虚轴(即 $x_4 = \mathrm{i}ct$)，所以该空间的长度的平方是非正定的，它可以大于零，等于零，也可以小于零.

2. 洛伦兹变换

我们现在来讨论闵可夫斯基空间的坐标变换的具体形式. 因为要求在坐标

变换下不改变矢量的长度，或者说不改变矢量的标积，所以，若令变换系数为 $\alpha_{\mu\nu}$，则有

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu, \tag{11.12}$$

这里我们引入了爱因斯坦求和规则：即凡是重复的指标都表示求和，求和范围应为一切可能取值，这里的取值为 1、2、3、4. 由于四维矢量长度不变，即

$$\begin{aligned} x'_\mu x'_\mu &= \alpha_{\mu\nu}x_\nu\alpha_{\mu\beta}x_\beta \\ &= \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\beta}x_\nu x_\beta = x_\nu x_\nu, \end{aligned} \tag{11.13}$$

故有

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\beta} = \delta_{\nu\beta}, \tag{11.14}$$

这说明变换为正交变换，写成矩阵形式则为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{I}. \tag{11.15}$$

现在考虑一坐标系 S′以匀速 v 相对另一坐标系 S 运动，取 S′系和 S 系间的坐标轴相互平行且把 x'、x 轴取在运动方向. 若一物理事件 P 相对于 S′和 S 系的坐标矢量分别为 $\boldsymbol{x}'$和 $\boldsymbol{x}$，假定 $\boldsymbol{x}'$和 $\boldsymbol{x}$ 间的变换关系为 $\boldsymbol{\alpha}$，则有

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}. \tag{11.16}$$

由于 x_2 和 x_3 轴不变，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的形式为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}. \tag{11.17}$$

考虑到变换系数的一般性质(11.15)式，则在此特殊变换下系数应满足关系

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{41}^2 = 1, \\ \alpha_{14}\alpha_{11} + \alpha_{41}\alpha_{44} = 0, \\ \alpha_{14}^2 + \alpha_{44}^2 = 1, \end{cases} \tag{11.18}$$

此外由运动学知，S′系的原点在 S 系看来为 $(vt, 0, 0, ict)$，变换到 S′系为 $(0, 0, 0, ict')$，这表示

$$\alpha_{11}vt + \alpha_{14}ict = 0,$$

即

$$\alpha_{11} = -\frac{ic}{v}\alpha_{14} = -i\alpha_{14}/\beta, \tag{11.19}$$

式中 $\beta = v/c$. 方程(11.18)和(11.19)式共有四个方程式，解此方程组，可得

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{11.20}$$

式中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，把(11.20)式代入到(11.16)式，我们具体得到

$$\begin{aligned}
x_1' &= \gamma x_1 + \mathrm{i}\beta\gamma x_4,\\
x_2' &= x_2,\\
x_3' &= x_3,\\
x_4' &= -\mathrm{i}\beta\gamma x_1 + \gamma x_4,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}
x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
y' = y,\\
z' = z,\\
t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}},
\end{cases} \tag{11.21}$$

(11.21)式称为特殊洛伦兹变换公式. 这是狭义相对论中的基本公式，如果把(11.21)式中的 v 改成 $-v$，我们就可以得到反变换的公式.

显然，如果令(11.21)式中的 $\dfrac{v}{c}\to 0$，则变换式(11.21)立即回到伽利略变换公式(11.1)，所以伽利略变换是洛伦兹变换公式在低速下的近似.

3. 一般洛伦兹变换的表达式

(11.20)式是特殊洛伦兹变换，它表示两个沿 x 轴彼此作匀速运动的坐标系之间的变换. 在一般情况下，两个坐标系之间的相对运动方向不一定是沿 x 轴方向，因此一般洛伦兹变换的表达式同特殊洛伦兹变换表达式(11.20)有所不同. 显然，在一般情况下我们可以首先作一转动变换，使两坐标系的 x 轴(即运动方向的轴)重合，然后再应用(11.20)式. 一般讲，在作了这两个变换之后再作一次沿 x 轴的转动使 y、z 轴重合. 所以一般的洛伦兹变换 $\boldsymbol{L}$ 总可以分解成

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{R}_2, \tag{11.22}$$

式中 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$ 为四维转动，$\boldsymbol{\alpha}$ 即为(11.20)式.

【例 2】 试导出连接两个彼此作匀速运动的坐标系之间的变换 $\boldsymbol{L}$(运动方向为任意方向).

解　设坐标系之间的相对速度为 $\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{R}_2,$$

式中

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 是两个三维转动，$\boldsymbol{R}$ 使 x' 轴转到 $\boldsymbol{v}$ 方向；$\boldsymbol{S}$ 绕 $\boldsymbol{v}$ 方向转动使 y、z 轴与 y'、z' 轴重合，设

$A=(\gamma-1)/\beta^2$，则

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} 1+A\beta_1\beta_1 & A\beta_1\beta_2 & A\beta_1\beta_3 & \mathrm{i}\gamma\beta_1 \\ A\beta_1\beta_2 & 1+A\beta_2\beta_2 & A\beta_2\beta_3 & \mathrm{i}\gamma\beta_2 \\ A\beta_1\beta_3 & A\beta_2\beta_3 & 1+A\beta_3\beta_3 & \mathrm{i}\gamma\beta_3 \\ -\mathrm{i}\gamma\beta_1 & -\mathrm{i}\gamma\beta_2 & -\mathrm{i}\gamma\beta_3 & \gamma \end{pmatrix}.$$

4. 洛伦兹变换的几何意义

前面我们已经知道洛伦兹变换实际上是四维空间的正交变换，同时我们又可以把它表示为四维空间的转动变换，对于特殊洛伦兹变换(11.20)式，其形式实际上可表示为坐标平面 Ox_1x_4 绕 x_2、x_3 坐标轴的转动. 如图 11.4，坐标轴 x_1、x_4 绕 x_2、x_3 轴转动一个角度 ψ 后，空间任一点 P 的坐标在坐标系间的关系可以表示为

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\psi + x_4\sin\psi, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= -x_1\sin\psi + x_4\cos\psi, \end{aligned}$$

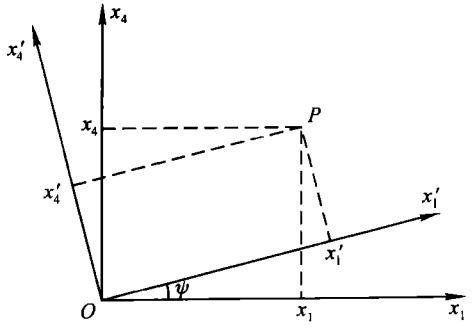


图 11.4

令 $\psi=\mathrm{i}\theta$，因 $\cos(\mathrm{i}\theta)=\cosh\theta$，$\sin(\mathrm{i}\theta)=\mathrm{i}\sinh\theta$，所以有

$$\begin{aligned} x_1' &= x\cosh\theta - ct\sinh\theta, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ ct' &= -x\sinh\theta + ct\cosh\theta, \end{aligned}$$

且 $\tanh\theta=\beta$.

§11.3　相对论时空性质

从(11.21)式我们看到,在洛伦兹变换下,空间距离和时间间隔都要发生变化,只有四维空间的四维线元,即四维间隔才是不变量. 对这种时空性质,闵可夫斯基有过这样一句名言:"从今以后,空间本身和时间本身都已成为阴影,只有两者的结合才能独立存在."这一节,我们将对相对论的时空性质作较为仔细的讨论.

1. 时空结构

在四维时空中,任何一个事件都可以用其中的一个点来表示,这个点称为世界点. 事件的发展过程,例如质点的运动,用四维时空中的轨迹线表示,称为世界线. 显然,自由粒子的世界线一定是直线. 我们在前面已说到过,四维时空的结构由三个区域组成,我们现在分析一下它们各自的特点.

(1) 类时间隔

它的特点是 $ds^2<0$,由四维间隔表达式 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$ 可以看出,不可能存在这样一个参考系,使两个类时间隔联系的事件发生在同一时刻,不然的话,$ds^2>0$. 所以,这类事件在时间上总是有先后的. 但是,我们可以通过洛伦兹变换,找到一个参考系使类时间隔联系的两个事件发生在空间同一地点,这意味着,四维线元 ds^2 中 $dx=dy=dz=0$,此时 $ds^2=-c^2dt^2$. 可见,类时间隔也就是和物体一起运动的钟所给出的时间间隔 dt 与光速的乘积. 我们把和物体一起运动的钟所给出的时间叫**固有时**或原时,记为 $d\tau$.

(2) 类空间隔

它的特点为 $ds^2>0$,同样由间隔表达式

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$$

可以看出,我们总可以找到一个参考系,使用类空间隔联系起来的两个事件在其中是同时发生的,而决不可能通过坐标变换使这两个事件发生在同一地点,不然的话会有 $ds^2<0$. 所以具有类空间隔的两事件在空间上是绝对远离的.

(3) 类光间隔

它的特点是 $ds^2=0$,具有这种间隔的两事件一定可以用光信号联系起来,光从一个世界点出发到达另一个世界点的所有世界线都发生在光锥面上.

由上面的讨论我们看到,时空结构划分为三类间隔区域是绝对的. 这是相*对论时空性质中的绝对性*.

2. 长度收缩

设在 S′系内有一根平行于 x' 轴的静止的杆,它在 S′系中的长度为 $\Delta x'=x_2'-$

x_1'，x_2'和 x_1'是杆两端在 x'轴上的坐标. 我们现在来求出这杆在 S 系中的长度. 由于在 S 系看此杆是运动的，为此，我们需要在一瞬时 t 找出杆两端在 S 系中的坐标 x_2 及 x_1. 由(11.21)式，我们得到

$$x_1' = \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x_2' = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

所以，杆在 S 系中的长度为 $\Delta x = x_2 - x_1$，考虑到在 S 系中测量杆两端坐标是同时进行的，即 $t_2 = t_1$，因此

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-\beta^2}.$$

杆的固有长度是在相对它静止的参考系内测量的长度. 以 $l_0 = \Delta x'$表示这个固有长度，以 $l = \Delta x$ 表示任意参考系 S 内的长度，于是

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}. \tag{11.23}$$

可见，杆在相对于它静止的那个参考系内最长，在相对于它以速度 v 运动的参考系中，它的长度就减少到 $l_0\sqrt{1-\beta^2}$，相对论的这个结果称为洛伦兹收缩.

相对论时空的这一特性可以用坐标转动的几何图形表示出来，前面已讲到 S 和 S′系间的坐标变换可以看成是四维空间中 Ox_1x_4 平面绕 x_2、x_3 轴的转动，如图 11.4. 现在杆的测量情况可用图 11.5 表示出来，图中两根虚线表示静止在

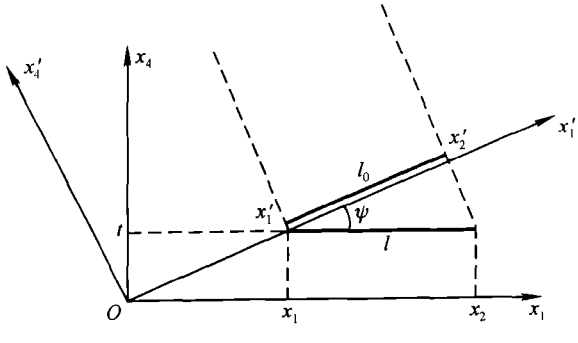


图 11.5

x'轴上的杆的两端点的世界线，在 S 系中，杆是运动的，必须同时测此杆两端点的坐标，所以 S 中测出的是 x_1、x_2，从图中看，$l\cos\psi = l_0$，由于 $\cos\psi = \gamma$，故

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

物体的洛伦兹收缩只是物体的纵向(即沿运动方向)收缩，而物体的横向尺度是不会发生洛伦兹收缩的，所以物体的体积也按相似的公式收缩. 物体的洛

伦兹收缩能否看到呢？我们取一个边长 $l=1$ 的立方体，物体沿 x 方向运动，观察者在 y 方向距物体很远的地方．如图 11.6(a)所示，当立方体静止时，观察者只能看到立方体的一面 $CDFE$，看不到 A、B 点发出的光，当立方体沿 x 轴运动时，观察者看到 CE 和 DF 边收缩至边长为 $\sqrt{1-\beta^2}$，并且观察者还能看到 A、B 点发出的光，因为当 A、B 点发出的光到达 CE 和 DF 边时，CE 和 DF 边已向前移动了一段距离．立方体的边长 $l=1$，A、B 点发出的光到达 CE、DF 所需的时间为 $\frac{1}{c}$，在这段时间内，C、D 点已向前移动了 $\frac{v}{c}$ 的距离，这样观察者看到 AC、BD 的距离就为 $\frac{v}{c}$，于是拍照所得的图形如图 11.6(b)，这样一幅图象相当于将立方体转动一个角度 θ，如图 11.6(c)所示，

$$\theta=\arcsin\left(\frac{v}{c}\right). \tag{11.24}$$

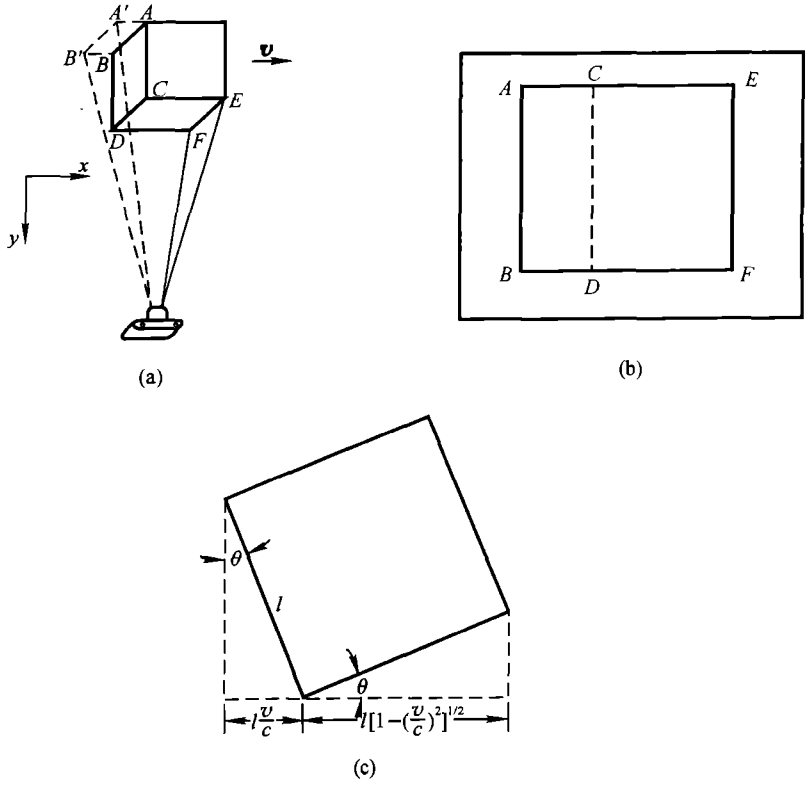


图 11.6

因此，洛伦兹收缩并不会被观察者所观察到，观察者只是观察到物体略有转动．

这里我们假定观察者是在很远的地方，立方体发出的光线基本上是平行的. 如果观察者是在有限远处，则立方体发出的光线应当是会聚到一点的，这时候看到的立方体不仅有旋转，还会有形变，详细情况就不在此讨论了.

3. 运动时钟变慢

我们仍设 S′系相对于 S 系以速度 v 沿着 x 轴正方向运动，x' 轴和 x 轴平行，若在 S′系的 x_1' 处固定一个标准时钟，它每隔 $\Delta t'$ 时间发一信号，即

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_3' - t_2' = \cdots$$

这些信号在 S 系看来则为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots$$

由特殊洛伦兹变换，我们有

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{\beta}{c}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{\beta}{c}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

由于时钟固定在 S′系的 x_1' 处，因此 $x_1' = x_2' = x_3'$，故有

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

我们把随着物体一起运动的钟所指示的时间称为该物体的固有时间，以 $\Delta\tau = t_2' - t_1'$ 表示，于是

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}. \tag{11.25}$$

(11.25)式表示运动的钟所指示的时间间隔比静止的钟所指示的时间 Δt 要小，换句话说，运动的钟比静止的钟走得慢些.

这一结果，我们也可以用坐标转动的几何图形表示出来，由图 11.7 可以看出 S′系中在 x_1' 处的钟的世界线为垂直于 x' 轴的由 x_1' 处出发的直线，由图形可以看出：

$$(t_2' - t_1')\cos\psi = t_2 - t_1,$$

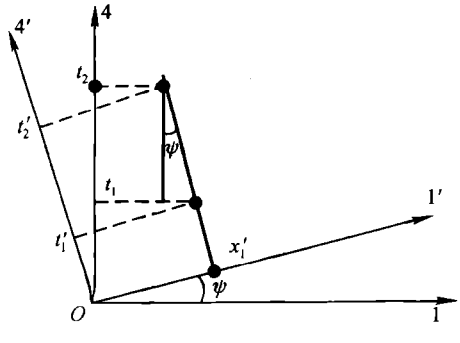


图 11.7

因为 $\cos\psi=\gamma$，故有

$$(t'_2-t'_1)=(t_2-t_1)\sqrt{1-\beta^2},$$

即

$$\Delta\tau=\Delta t\sqrt{1-\beta^2}.$$

如果钟相对于我们作任意形式的运动，则在各个不同的瞬时，我们可以认为钟是作匀速运动的，引进这种瞬时惯性坐标系后(11.25)式仍成立，只是把 Δt (和 $\Delta\tau$)改成 $\mathrm{d}t$(和 $\mathrm{d}\tau$)，当静止的钟所行走的时间为 t_2-t_1 时，运动的钟所指示的时间为

$$\Delta\tau=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{11.26}$$

这种现象称为时间延缓，它已被现代物理中的有关实验所证实. 例如：在宇宙线中有一种 μ 子，它的平均寿命为 $\tau_0=2.2\times10^{-6}$ s，若 μ 子以接近光速 c 的速度运动，则它所能通过的最大距离为 $c\tau_0=660$ m. 我们已知宇宙线只发生在离地面 6 000 m 以上的高空，如果 μ 子真的一生中只能走 660 m 的话，那么它在到达地面之前早就“死去”. 但实际上，我们在地面上用乳胶法可以找到 μ 子，这个事实可用时间延缓来解释，因为 τ_0 是相对于 μ 子静止的参考系中观察到的固有时间，而对运动参考系来说，μ 子的寿命应为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

若设 $\beta^2=0.99$，则 $\tau=2.2\times10^{-5}$ s，于是 μ 子的一生可走 6 600 m.

由于 S 系和 S′系有相对运动，因此从 S 系的观察者看，S′系的钟落后了；反过来，从 S′系的观察者看，S 系的钟落后了，这是否矛盾呢？事实上，为了确定 S′系的钟落后于 S 系的钟，我们必须按下述方法进行“对钟”. 如图 11.8，假设在某一瞬时，S′系的钟 C 从 S 系的钟 A 的旁边经过，在这一瞬间两个钟所指示的时间恰好一样. 为了比较 S′系的钟和 S 系的钟的快慢，我们必须在 S 系中沿 x 轴(C 钟运动的方向)放置另一个钟 B，并且它与前面的那一个钟 A 同步. 当 S′系的钟C从S系中的钟B旁经过时，就在这一瞬间，我们又将运动着的钟C与静

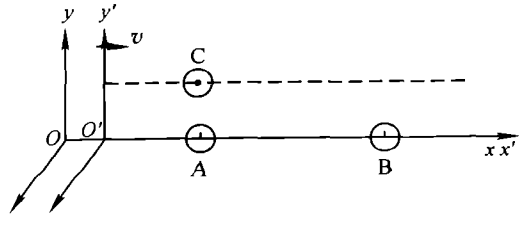


图 11.8

止的钟B对钟，于是发现S′系的钟C比S系的钟B走得慢. 由此可见，为了比较两个参考系S和S′系的钟的快慢，我们需要在一个参考系的不同地点(运动钟经过的)安置一系列(至少两个)的钟，而另一参考系只要一个钟. 这种过程对两个参考系来说并不是对称的，对S系来说是同步的一系列钟，在S′系观察者看来是不同步的，运动参考系的钟总是落后的.

4. 因果律对信号速度的限制

前面我们已经看到同时性是相对的，现在我们要问两事件的先后次序是否也是相对的？如果是相对的，因果律又如何得到保证呢？为了研究这个问题，我们定义：若两事件是可以用信号联系起来的，我们称这两事件为关联事件，由此可见，具有因果关系的事件一定是关联事件，相反，关联事件不一定是具有因果关系的事件. 我们知道，所谓因果律，就是要保证具有因果关系的事件的先后次序是绝对的.

设S系中 x 轴上的关联事件A、B分别在 t_A、t_B 时刻发生，它们之间可用信号联系起来，信号速度为

$$u = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A},$$

在S′系的观察者来看，A、B两事件之间的时间间隔为

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{\beta}{c}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)(t_B - t_A)/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{11.27}$$

因此，若要求 $(t'_B - t'_A)$ 与 $(t_B - t_A)$ 同号，则由(11.27)式可以看出必须有下述不等式成立

$$1 - \frac{vu}{c^2} > 0, \tag{11.28}$$

式中 v 是两惯性参考系之间的相对速度，它不可能超过光速 c，因为参考系总是选在具体的物质实体上，而且若 $v > c$，则洛伦兹变换式为虚数. u 是信号速度，即物质的速度，故 $u < c$. 因此(11.28)式总是成立的. 可见，相对论与因果律并不矛盾，反过来说，(11.28)式表明，因果律要求物质的最大速度不超过光速 c.

因果律要求物质的运动速度不能超过光速，可见因果事件的四维间隔一定是类时的，而具有类空间隔的两事件一定没有因果关系.

5. 速度变换公式　四维速度

根据(11.21)式，我们可以从一个事件在某个参考系中的坐标出发找出该事件在另一个参考系中的坐标. 现在，我们要找出某个粒子在一个参考系内的速

度与其在另一个参考系内的速度之间的变换关系.

我们仍假定 S′系相对 S 系以速度 v 沿着 x 轴运动. 设 $u_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 为粒子在 S 系的速度分量，$u_x'=\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ 为同一粒子在 S′系的速度分量. 对(11.21)式微分，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x' &= \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
\mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}z' &= \mathrm{d}z,\\
\mathrm{d}t' &= \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}},
\end{aligned}$$

用上面第四个方程除前三个，则得

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{\mathrm{d}y\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x},\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{\mathrm{d}z\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x},
\end{cases}$$

将上述方程组右边的分子、分母同除以 $\mathrm{d}t$，则得

$$\begin{cases}
u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},\\[2ex]
u_y' = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},\\[2ex]
u_z' = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.
\end{cases} \tag{11.29}$$

(11.29)式决定了两个参考系中速度的变换，这就是相对论中的速度合成法则. 在极限 $c\to\infty$ 的情况下，(11.29)式便成为经典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{aligned}
u_x' &= u_x - v,\\
u_y' &= u_y,\\
u_z' &= u_z.
\end{aligned}$$

根据相对论的速度合成公式(11.29)很容易证实,即使 u_x 和 v 都接近光速,其合成的速度也不会大于光速,也就是说,在相对论中不可能用运动学的办法得到大于光速的速度.

6. 相对论多普勒效应

如图 11.9,设观察者在 S 系的原点 O 处,发光物体 A 以速度 v 相对于 O 点运动,选 S′系随发光物体一齐运动,v 方向选取为 x 方向,若发光体 A 在不同时刻发出两个光信号,在 S′系看这两个光信号分别发生在(r', t_1')及(r', t_2'),在 S 系看这两个光信号分别发生在(r_1, t_1)及(r_2, t_2). 但现在 S 系的观察者在原点 O 处,而不是在发光物体的附近,故在原点 O 处 S 系的观察者所看到的两个光信号的时间分别为 $t_1 + \frac{r_1}{c}$及$t_2 + \frac{r_2}{c}$. 故 S 系原点 O 处观察者所观察到的两个光信号的时间间隔 $\mathrm{d}t_0$ 为

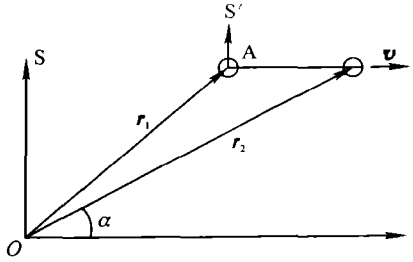


图 11.9

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t_0 &= t_2 + \frac{r_2}{c} - t_1 - \frac{r_1}{c} \\ &= \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{c}(r_2 - r_1) \\ &= \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\right),\end{aligned}$$

若物体发射光的周期为 T_0,在 S 系原点接收到的光周期为 T,则有

$$T = T_0 \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

由上式可以看出,若略去 β 的二次项,则上式变为

$$T = T_0\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\right),$$

这正是经典多普勒效应的结果,保留 β^2 项,我们将得到相对论效应. 下面我们讨论两种特殊情况.

当 $\alpha = 0$ 或 π,这相当于信号源与观察者彼此远离或互相接近,常称这时的结果为纵向多普勒效应,如 $\alpha = 0$,则有

$$T = T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

若用频率表示,则有

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \tag{11.30}$$

用波长表示,则有

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \tag{11.31}$$

定义

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

若 $Z>0$,则表示谱线红移,若 $Z<0$,则表示谱线蓝移,

$$1 + Z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \tag{11.32}$$

这就是相对论中的红移或蓝移的公式,这种红移称为多普勒红移. 因此,如果把星体的谱线红移量认为就是多普勒红移,则由(11.32)式可以计算出星体远离我们的速度. 事实上,造成星体红移的原因是多方面的,引力场的存在亦可造成谱线的红移.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$时,观察者的视线与信号源的运动方向垂直,此时称为横向多普勒效应,于是有

$$T = T_0\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

若用频率表示,则有

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

这表明在横向多普勒效应中所观察到的频率 ν 低于光信号的本征频率 ν_0,从经典物理的观点看横向多普勒效应是不存在的. 横向多普勒效应也可简单的由时间延缓来解释,所以横向多普勒效应的存在也是证实相对论时间延缓的一个例子.

§11.4　物理规律协变性的数学形式

物理规律是由物理方程式来描写的,如果在洛伦兹变换下,方程式的形式不变,我们就说这个方程是协变的. 不同的物理量具有不同的变换性质,那么表示*成何种数学形式的物理方程才具有明显的协变性*呢?

1. 正交变换

正交变换是坐标变换中的一种,在三维空间中的转动变换即是正交变换,转

动变换的特点是变换前后空间两点的距离不变,即

$$x_i' x_i' = x_j x_j .$$

若坐标变换关系为

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j ,$$

则

$$x_i' x_i' = \alpha_{ij}\alpha_{ik} x_j x_k = x_j x_j ,$$

故有

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} . \tag{11.33}$$

坐标变换系数满足(11.33)式的变换称为正交变换. 显然,由于洛伦兹变换保持四维间隔不变,故洛伦兹变换是复四维空间的正交变换,变换系数为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} .$$

2. 物理量按空间变换性质分类

在正交变换下,不同的物理量具有不同的变换关系,通常根据这种变换关系,我们把物理量区分为标量、矢量(一阶张量)、二阶张量……

(1) 标量

如果一个物理量在坐标变换时数值不变,则称此物理量为标量,显然四维间隔即为标量.

(2) 矢量

如在三维空间,有一个物理量是由三个数量表示的,而在坐标变换时,这三个数量的变换关系与坐标的变换关系相同,即令 V_1、V_2、V_3 及 V_1'、V_2'、V_3'分别表示坐标变换前后的物理量,通过坐标变换 $x_i' = \alpha_{ij} x_j$ 之后,V_i 及 V_i' 间的关系为

$$V_i' = \alpha_{ij} V_j , \tag{11.34}$$

则称此物理量 V_i 为矢量,如三维空间里的速度、加速度等物理量都是矢量. 很自然,可以类似地把定义扩大到四维空间,四维空间的矢量由四个数量构成,或一般讲有四个分量.

(3) 二阶张量

同样以三维空间为例,若有一物理量用九个数量 T_{ij} 表示,在坐标变换 $x_i' = \alpha_{ij} x_j$ 下,T_{ij} 的变换关系为

$$T_{ij}' = \alpha_{ik}\alpha_{jl} T_{kl} , \tag{11.35}$$

则称此物理量为二阶张量. 如转动惯量等物理量即为三维空间的二阶张量. 很

自然，四维空间内的二阶张量应由 16 个分量构成.

(4) n 阶张量

若在三维空间内有一个物理量是由 3^n 个分量构成，用 $T_{ij\cdots k}$ 表示，脚标 i，j，$\cdots$，k 共有 n 个，在坐标变换下，它的变换关系为

$$T'_{ij\cdots k}=\alpha_{il}\alpha_{jp}\cdots\alpha_{km}T_{lp\cdots m}, \tag{11.36}$$

则称 T 为 n 阶张量. 显然，$n=0$ 时为零阶张量，这就是标量，$n=1$ 时称为一阶张量，它就是矢量.

(5) 几个例子

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$的变换行为为一阶张量

因为

$$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu,$$

故

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{11.37}$$

(b) 两矢量的标积为不变量

若 A_μ、B_μ 分别为四维矢量，则有

$$A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}A_\nu,$$

$$B'_\mu=\alpha_{\mu\nu}B_\nu,$$

所以

$$A'_\mu B'_\mu=\alpha_{\mu\nu}A_\nu\alpha_{\mu\beta}B_\beta=\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\beta}A_\nu B_\beta=\delta_{\nu\beta}A_\nu B_\beta=A_\nu B_\nu. \tag{11.38}$$

同理，因为$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$是矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\Box^2, \tag{11.39}$$

即$\Box^2$ 算符为四维不变量. 由此推知，若 A_μ 为四维矢量，则此矢量的四维散度 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu$ 为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}A_\beta=\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\nu. \tag{11.40}$$

3. 物理规律的协变性

任何物理规律的表达式都是由一些物理量构成的等式. 相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在坐标变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变. 现在我们又看到，如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式. 例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu=B_\mu,$$

式中 A_μ、B_μ 分别代表 S 系中这一物理过程的不同物理量. 当把它变换到 S′系时,由于 A_μ、B_μ 都是一阶张量(即矢量),其变换规律分别为

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu ,$$

$$B'_\mu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu ,$$

故

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu = \alpha_{\mu\nu} B_\nu = B'_\mu .$$

由此可见,要判断物理规律是否满足相对性原理,只要看其物理方程是否是协变的即可.

§11.5 麦克斯韦方程的协变形式

根据爱因斯坦的相对性原理,作为描述电磁体系的物理规律的麦克斯韦方程组应该写成协变的形式,换句话说,我们应当把麦克斯韦方程组表示成四维张量的形式,这就是本节的内容.

1. 四维电流矢量

实验告诉我们,电荷是守恒的,电荷在洛伦兹变换下不变,它是洛伦兹不变量. 因为连续性方程即是电荷守恒方程,故方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.19}$$

应在洛伦兹变换下不变. 若引入一个四维电流矢量

$$J_\mu = (\boldsymbol{j}, \mathrm{i}c\rho), \tag{11.41}$$

则(1.19)式可以写成

$$\partial_\mu J_\mu = 0, \tag{11.42}$$

为书写方便,式中 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 记为 ∂_μ,由于 ∂_μ 是矢量,而 J_μ 是一个定义的四维矢量,所以 $\partial_\mu J_\mu$ 是洛伦兹标量. 显然(11.42)式是协变形式的连续性方程. 现在的问题是要证明 $(\boldsymbol{j}, \mathrm{i}c\rho)$ 确实构成四维矢量.

设在 S 系中有一体积元 $\mathrm{d}V$,其中电荷以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动,体积元 $\mathrm{d}V$ 中的总电荷为 $\rho \mathrm{d}V$,ρ 是 S 系中测量的电荷密度. 在与电荷相对静止的参考系 S_0 中,电荷速度为零,电荷密度为 ρ_0,相应的体积元为 $\mathrm{d}V_0$,根据电荷的洛伦兹不变性,*我们有*

$$\rho \mathrm{d}V = \rho_0 \mathrm{d}V_0 , \tag{11.43}$$

由于 S_0 相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动,所以两参考系之间的体积元的关系为

$$dV = dV_0\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}, \tag{11.44}$$

把(11.44)式代入(11.43)式,则得

$$\rho = \rho_0 \Big/ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{11.45}$$

另一方面,在S系中,电流密度为

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{u} = \frac{\rho_0 \boldsymbol{u}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{11.46}$$

再引入一个参考系S′,在其中观察到的电荷密度为 ρ',速度为 $\boldsymbol{u}'$,则电流密度为

$$\boldsymbol{j}' = \rho'\boldsymbol{u}',$$

类似地,利用电荷不变性,上式可以写成

$$\boldsymbol{j}' = \frac{\rho_0 \boldsymbol{u}'}{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{11.47}$$

现在设S′系相对于S系以速度 v 沿 x 方向运动,下面我们找出 j' 与 j 之间的关系. 根据速度变换公式,我们有

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

$$u'_y = \frac{u_y\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

$$u'_z = \frac{u_z\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

故

$$j'_1 = j'_x = \frac{\rho_0 u'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}\left[\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\right]. \tag{11.48}$$

不难证明下面的关系式:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2},$$

或

$$\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{11.49}$$

式中 $\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$，将(11.49)式代入(11.48)式，便有

$$\begin{aligned} j'_1 &= \gamma\rho_0(u_x-v)\Big/\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &= \gamma\rho(u_x-v) \\ &= \gamma(j_1-\rho v) \\ &= \gamma(j_1+\mathrm{i}\beta j_4). \end{aligned} \tag{11.50}$$

同理

$$\begin{aligned} j'_2 = j'_y &= \frac{\rho_0 u'_y}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\,\frac{u_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\,\frac{u_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\gamma\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &= \rho u_2 = j_2, \end{aligned} \tag{11.51}$$

$$j'_3 = j_3, \tag{11.52}$$

$$\begin{aligned} j'_4 &= \mathrm{i}c\rho' \\ &= \mathrm{i}c\,\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \\ &= \mathrm{i}c\rho_0\,\frac{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \mathrm{i}c\rho\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right) \\ &= (-\mathrm{i}\beta\gamma j_1+\gamma j_4), \end{aligned} \tag{11.53}$$

由(11.49)～(11.53)式,我们看到$(\boldsymbol{j},\mathrm{i}c\rho)$的变换关系正是四维矢量的变换关系,因此$J_\mu=(\boldsymbol{j},\mathrm{i}c\rho)$组成四维矢量.

2. 电磁势方程的协变形式

我们在§2.6中已经证明,电磁场可以用矢势$\boldsymbol{A}$和标势φ来描写,在洛伦兹规范条件下,电磁势方程为

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\rho/\varepsilon_0,$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.51}$$

式中$\boldsymbol{A}$和φ应满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

若我们定义一个四维矢量

$$A_\mu=\left(\boldsymbol{A},\mathrm{i}\frac{\varphi}{c}\right), \tag{11.54}$$

则(2.51)式的电磁势方程可以写为

$$\Box A_\mu=-\mu_0 J_\mu. \tag{11.55}$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu=0. \tag{11.56}$$

(11.55)式很清楚地表示出A_μ为一四维矢量,因为等式右方的J_μ为一四维矢量,等式的左方亦应为一四维矢量,由于□为一标量,故A_μ为一矢量,称为四维势. 方程(11.55)和(11.56)式是用矢势来表示的麦克斯韦方程的协变形式. 这就表明用电磁势来描写的电磁体系的麦克斯韦方程是满足相对性原理的.

3. 电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式,电磁场强度$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$可以用电磁势$\boldsymbol{A}$和φ表示,即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},$$

电磁场强$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$不是四维矢量,但是,利用四维矢势A_μ,我们可以把它们表示为一个反对称的二阶张量,即

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{11.57}$$

由(11.57)式右端不难判断$F_{\mu\nu}$是四维二阶反对称张量(即$F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$),称$F_{\mu\nu}$为电磁场张量,其具体形式为

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1/c\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2/c\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3/c\\ \mathrm{i}E_1/c & \mathrm{i}E_2/c & \mathrm{i}E_3/c & 0\end{pmatrix}. \tag{11.58}$$

利用 $F_{\mu\nu}$和J_μ,我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\mu}=\mu_0 J_\nu; \tag{11.59}$$

同样可把两个齐次方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha}+\partial_\alpha F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\alpha\mu}=0. \tag{11.60}$$

(11.59)式和(11.60)式即是协变形式的麦克斯韦方程组.

§11.6 对偶场张量

方程(11.59)式和(11.60)式的形式并不对称,这个不对称实际上是麦克斯韦场方程不对称的反映,我们可以通过引入一个全反对称的四阶单位张量$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$,把(11.60)式写成与(11.59)式一样的形式. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$的定义如下:

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$,其中任两个指标相同;

$\varepsilon_{1234}=1$;

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=1$,四个指标都不相同且能经过偶次置换后成为 1234 的次序;

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=-1$,四个指标都不相同且能经过奇次置换后成为 1234 的次序.

全反对称四阶张量具有以下性质:

(1) 在洛伦兹变换下 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$的分量变换到自己;

(2) 若 $B_{\gamma\delta}$是二阶张量,则 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta}$仍是二阶张量.

根据 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$的定义和性质,我们可以重新定义一个新的电磁场张量

$$G_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & B_1\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & B_2\\ -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & 0 & B_3\\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0\end{pmatrix}. \tag{11.61}$$

其实，若令(11.58)式中的 $\boldsymbol{E}\to \mathrm{i}c\boldsymbol{B}$，$\mathrm{i}c\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{E}$ 就可得到 $G_{\alpha\beta}$，这就是我们在第一章中讨论过的对偶变换. 所以 $G_{\alpha\beta}$ 称为对偶场张量，利用它可以把(11.60)式改写为

$$\partial_\alpha G_{\alpha\beta}=0. \tag{11.62}$$

这样，协变形式的麦克斯韦方程可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}\partial_\mu F_{\nu\mu}&=\mu_0 j_\nu,\\ \partial_\alpha G_{\alpha\beta}&=0,\end{aligned} \tag{11.63}$$

式中 $F_{\mu\nu}$ 和 $G_{\alpha\beta}$ 分别由(11.58)式和(11.61)式给出.

比较(11.63)式中的两个方程，我们发现，电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 和对偶场张量 $G_{\mu\nu}$ 所满足的方程是不对称的，前者是有源的，后者是无源的，这种不对称性起源于自然界还没有发现磁荷这一事实. 倘若磁荷确实存在，则我们应相应地引入一个四维的磁流密度矢量 J_μ^{m}. 于是(11.63)式中的第二个方程变为

$$\partial_\mu G_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\nu^{\mathrm{m}}. \tag{11.64}$$

思考题　试把方程(11.64)式分解成非协变形式，再和(11.64)式比较，具体写出 J_μ^{m} 的四个分量.

§11.7　电磁场的变换公式

因为 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故不同参考系中的 $F_{\mu\nu}$ 间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma}=\alpha_{\mu\beta}F_{\beta\gamma}\tilde{\alpha}_{\gamma\nu}, \tag{11.65}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 4×4 矩阵，其形式即为(11.20)式，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵，形式为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}. \tag{11.66}$$

把(11.65)式具体写成分量的形式,则为

$$\begin{cases}E_1'=E_1,\\ E_2'=\gamma(E_2-vB_3),\\ E_3'=\gamma(E_3+vB_2),\\ B_1'=B_1,\\ B_2'=\gamma\left(B_2+\dfrac{v}{c^2}E_3\right),\\ B_3'=\gamma\left(B_3-\dfrac{v}{c^2}E_2\right).\end{cases} \tag{11.67}$$

假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解,则(11.67)式可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}'_{/\!/}=\boldsymbol{E}_{/\!/},\\ \boldsymbol{E}'_{\perp}=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}'_{/\!/}=\boldsymbol{B}_{/\!/},\\ \boldsymbol{B}'_{\perp}=\gamma\left(\boldsymbol{B}-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_{\perp}.\end{cases} \tag{11.68}$$

【例 3】 试求匀速运动点电荷的场.

解 设S′系的原点固定在点电荷 q 上,则该点电荷相对于S′是静止的,其场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\boldsymbol{r}'}{r'^3},\quad \boldsymbol{B}'=0.$$

再设S系为实验室参考系,S′系随着点电荷 q 相对于S系沿 x 轴以速度 v 运动,则由公式(11.67)得S系中的场强

$$E_x=E_x',\quad E_y=\gamma(E_y'+vB_z'),\quad E_z=\gamma(E_z'-vB_y'),$$

$$B_x=B_x',\quad B_y=\gamma\left(B_y'-\frac{v}{c^2}E_z'\right),\quad B_z=\gamma\left(B_z'+\frac{v}{c^2}E_y'\right).$$

由于 $\boldsymbol{B}'=0$,故

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx'}{r'^3},\quad E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qy'}{r'^3},\quad E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qz'}{r'^3},$$

$$B_x=0,\quad B_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{vqz'}{c^2r'^3},\quad B_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{vqy'}{c^2r'^3}.$$

现在必须把 $\boldsymbol{r}'$ 用S系中的坐标来表示,为此,设 $t=0$ 时点电荷 q 正好与S系的原点重合,并且我们在这一时刻测量空间的场,于是,根据洛伦兹变换(11.21)式,我们有

$$x'=\gamma x,\quad y'=y,\quad z'=z.$$

所以，从 S′系的原点到观察点的距离 r' 可表示成

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \gamma\left[x^2 + \left(\frac{y}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right]^{1/2}.$$

这样，S 系中的电场强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\boldsymbol{r}}{\gamma^2\left[x^2 + \left(\frac{y}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{r}}{\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)r^2 + \frac{v^2}{c^2}x^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{r}}{\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)r^2 + \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\beta^2)\boldsymbol{r}}{r^3(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{3/2}},\end{aligned}$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角．不难算出磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}.$$

我们看到，匀速运动的点电荷的场的特点是：

(1) 场分布不再是球对称的，而是与 θ 有关．$\theta = 0$ 处场最弱，$\theta = \frac{\pi}{2}$ 处场最强，场向着垂直于速度方向的平面集中，如图 11.10 所示，集中的程度与点电荷运动速度有关，当 $v \to c$ 时，场基本上集中分布在垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的平面内．图 11.11 画出了三种不同 β 值的分布情况．

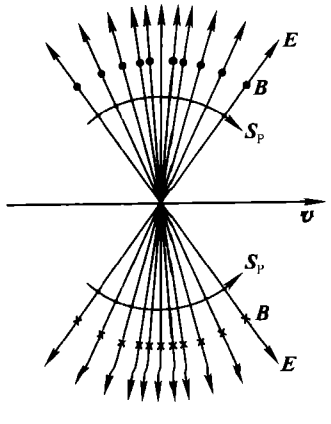


图 11.10

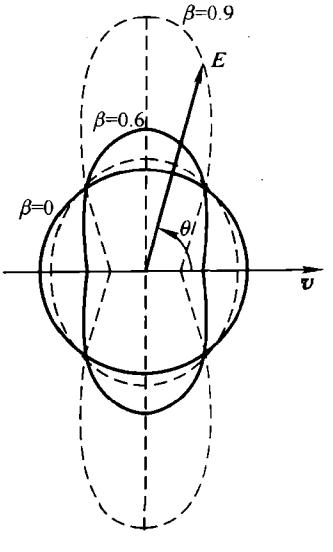


图 11.11

(2) 能流分布为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0[\boldsymbol{v}E^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v})],$$

可见

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0.$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去. 从图 11.10 我们也可直接看出,能流是在以电荷为中心的球面上流动.

(3) 虽然能量并不沿着 $\boldsymbol{r}$ 方向辐射出去,但在实验室系看,能流仍在作定向流动,只是伴随着电荷一起运动,这可以从下述极端情况看出:设 $v \to c$,则 $\boldsymbol{E}$ 基本上垂直于 $\boldsymbol{v}$,于是

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} = \varepsilon_0 E^2 \boldsymbol{v} = w\boldsymbol{v},$$

式中 w 是电磁能量,这就是说,电磁能量以速度 $\boldsymbol{v}$ 随着点电荷一起运动.

§11.8 电磁场的不变量

由上面的讨论我们看到,对同一电磁现象,在不同的惯性参考系中测量,其结果不一样. 如在一个惯性参考系中只测量到电场,但变换到另一个惯性系时既有电场又有磁场;同样在一个惯性参考系中只有磁场,变换到另一个惯性系时既有磁场又有电场. 似乎利用洛伦兹变换总可以使 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 具有任意值. 其实,这仅仅是问题的一面,在这种电场、磁场的相对性之中还包含着绝对性的一面,这就是场的不变量.

我们已经证明,四维张量的标积可以构成不变量,而现在电场和磁场已组成一个统一的整体,即电磁场张量 $F_{\mu\nu}$. 可见,我们要找电磁场的不变量只需求出电磁场张量可能的各种标积. 显然我们只能构成下面两个不变量:

$$F_{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \text{不变量}, \tag{11.69}$$

$$G_{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \text{不变量}, \tag{11.70}$$

利用(11.58)式和(11.61)式,可把(11.69)和(11.70)式写成三维形式

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{不变量}, \tag{11.71}$$

$$\frac{\mathrm{i}}{4}G_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}/c = \text{不变量}. \tag{11.72}$$

当然,我们还可以构成其他一些不变量,但都是这两个不变量的函数,所以独立的只有这两个. 并且,我们应当注意到 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ 这个不变量在空间反演下呈奇性,*因此是一个赝不变量*.

我们对上面的阐述作一些讨论:

(1) 若电场和磁场在某一个惯性参考系中是互相垂直的,即 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$,那么

在任何其他惯性参考系中，$\boldsymbol{E}$ 永远垂直于 $\boldsymbol{B}$.

(2) 若 $\boldsymbol{E}$ 和 $c\boldsymbol{B}$ 的绝对值在某一个惯性参考系中相等，即 $E^2-c^2B^2=0$，则在任何惯性系中，$|\boldsymbol{E}|$ 和 $c|\boldsymbol{B}|$ 永远相等.

(3) 若在某一个惯性系中，$E>cB$，则找不到一个惯性系使得 $E\leqslant cB$.

(4) 若在某一个惯性系中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角是钝角(或锐角)，则它们在任何惯性系中的夹角都是钝角(或锐角).

(5) 若 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$，则总可以找到一个惯性系，使其中只有电场或只有磁场，这要看 $E^2>c^2B^2$ 还是 $E^2<c^2B^2$ 而定.

(6) 总能找到一个惯性系，使其中的电场和磁场在给定的空间点上平行.

【例 4】 试说明 $\left(k,\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\right)$ 组成四维波矢量 k_μ.

解　我们以平面电磁波为例来讨论. 设 S 系中，平面电磁波场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

写成电磁场张量形式即为

$$F_{\mu\nu}=F^0_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

式中 $F^0_{\mu\nu}$ 即是由 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 组成的张量. 把波场变换到 S′系，则有

$$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}F_{\beta\gamma}\widetilde{\alpha_{\gamma\nu}}=\alpha_{\mu\beta}F^0_{\beta\gamma}\widetilde{\alpha_{\gamma\nu}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}=F^{0'}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

其中 $F^{0'}_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}F^0_{\beta\gamma}\widetilde{\alpha_{\gamma\nu}}$，它是 S′系中电磁波场强的振幅 $\boldsymbol{E}'_0$、$\boldsymbol{B}'_0$ 组成的张量. 我们还必须作坐标变换，使得 $F'_{\mu\nu}$ 用 S′系中的时空坐标表示. 为了简单起见，设 S′系相对于 S 系沿着 x 轴运动，则有

$$\begin{cases}x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ y=y',\\ z=z',\\ t=\dfrac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}},\end{cases}$$

代入 $F'_{\mu\nu}$ 中则得

$$F'_{\mu\nu}=F^{0'}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'-\omega' t')},$$

其中

$$\begin{cases}k'_x=\dfrac{k_x-\beta\dfrac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ k'_y=k_y,\\ k'_z=k_z,\\ \dfrac{\omega'}{c}=\dfrac{\dfrac{\omega}{c}-\beta k_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\end{cases}$$

若令

$$k_\mu = \left(\boldsymbol{k}, \mathrm{i}\frac{\omega}{c} = k_4\right),$$

则

$$\begin{cases} k'_x = \dfrac{k_x + \mathrm{i}\beta k_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ k'_4 = \dfrac{k_4 - \mathrm{i}\beta k_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

可见，k_μ 的变换关系与 x_μ 的变换关系相同，故 $k_\mu = \left(\boldsymbol{k}, \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)$ 组成四维矢量. x_μ 与 k_μ 的标积为不变量：

$$k_\mu x_\mu = k'_\mu x'_\mu,$$

即

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}' - \omega' t'.$$

*§11.9 电磁场的能量、动量和角动量的协变形式

我们首先根据洛伦兹力密度公式

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B},$$

建立四维形式的力密度矢量. 由于公式的右边正比于源 ρ、$\boldsymbol{j}$ 和场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$，其中 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 可构成四维矢量 j_μ，场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可用 $F_{\mu\nu}$ 表示. 另一方面等式的左边是三维空间的力密度矢量. 因此，由 j_μ 和 $F_{\mu\nu}$ 构成一个四维矢量的可能途径是 $F_{\mu\nu}$ 与 j_μ 相乘后缩并而成为一个四维矢量，即

$$f_\mu = F_{\mu\nu}j_\nu, \tag{11.73}$$

不难证明，当 $\mu=1$、2、3 时，利用(11.73)式得到的 f_1、f_2、f_3 正好是洛伦兹力密度，当 $\mu=4$ 时，则有

$$f_4 = F_{41}j_1 + F_{42}j_2 + F_{43}j_3 + F_{44}j_4 = \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}, \tag{11.74}$$

可见 f_4 与功率密度相联系. 不难证明 f_μ 是一四维矢量.

现在，我们讨论场的能量、动量的守恒方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}_\mathrm{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{2.8}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = -\boldsymbol{f} \tag{2.11}$$

的协变形式，式中

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right),$$

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{P} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H},$$

$\overleftrightarrow{T}$ = 真空中的麦克斯韦张量.

注意到(2.8)和(2.11)式的右边可以组成四维力密度 f_μ，所以我们设法把(2.8)和(2.11)式左边联合组成一个四维矢量，并且这个四维矢量应当是由∂_μ 和某一个二阶张量的缩并组成. 因为

$$f_\mu = F_{\mu\nu}j_\nu,$$

同时从麦克斯韦方程(11.59)式得到

$$j_\nu = -\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu F_{\mu\nu},$$

所以力密度可以写成

$$f_\mu = -\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}\partial_\alpha F_{\alpha\nu} = \frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}\partial_\alpha F_{\nu\alpha}, \tag{11.75}$$

若定义

$$T_{\mu\nu} \doteq \frac{1}{\mu_0}\left[F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\sigma}F_{\alpha\sigma}\right], \tag{11.76}$$

则有

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\partial_\nu\left[F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\sigma}F_{\alpha\sigma}\right] = \frac{1}{\mu_0}\left[(\partial_\nu F_{\mu\alpha})F_{\alpha\nu} + F_{\mu\alpha}\partial_\nu F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\partial_\nu(F_{\alpha\sigma}F_{\alpha\sigma})\right],$$

又因为

$$\begin{aligned}(\partial_\nu F_{\mu\alpha})F_{\alpha\nu} &= (\partial_\nu F_{\alpha\mu})F_{\nu\alpha}\\ &= (\partial_\alpha F_{\nu\mu})F_{\alpha\nu}\\ &= \frac{1}{2}[\partial_\alpha F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\alpha}]F_{\alpha\nu}\\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\alpha\nu})F_{\alpha\nu}\\ &= -\frac{1}{4}\partial_\mu(F_{\alpha\nu}F_{\alpha\nu}),\end{aligned}$$

故有

$$f_\mu = \partial_\nu T_{\mu\nu}, \tag{11.77}$$

式中 $T_{\mu\nu}$可以写成下述矩阵形式：

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & & -\mathrm{i}cg_1\\ & -\overleftrightarrow{T} & -\mathrm{i}cg_2\\ & & -\mathrm{i}cg_3\\ -\mathrm{i}cg_1 & -\mathrm{i}cg_2 -\mathrm{i}cg_3 & u\end{pmatrix}, \tag{11.78}$$

由(11.78)式我们可以很清楚地看出 $T_{\mu\nu}$的物理意义，它把电磁能量密度、电磁动量密度及麦克斯韦应力张量组合成为一个新的四维空间二阶张量 $T_{\mu\nu}$. 所以，$T_{\mu\nu}$称为电磁场的能量动量张量. 很容易证明，电磁场的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$是无迹的对称张量，即

$$\begin{aligned} T_{\mu u} &= 0, \\ T_{\mu\nu} &= T_{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{11.79}$$

关于电磁场的角动量的协变形式，我们可以直接推广三维空间的张量(2.21)式，即得

$$M_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\gamma}x_\beta - T_{\alpha\beta}x_\gamma, \tag{11.80}$$

如果电磁场局域在某个区域内，且是无源的，则对应角动量守恒定律的非协变形式(2.20)式，我们有

$$\partial_\alpha M_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{11.81}$$

(11.81)式是四维空间的协变方程，此式除包含电磁场的角动量守恒定律外还包含其他一些守恒定律，对(11.81)式作空间体积分，有

$$\int_V \partial_\alpha M_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{d}^3x = 0. \tag{11.82}$$

如果 β、γ 取空间分量(即取 1、2、3，记为 i、j)，则(11.82)式变为

$$\int_V \partial_\alpha M_{\alpha ij}\mathrm{d}^3x = 0,$$

把(11.80)式代入，则得

$$\int_V \partial_\alpha [T_{\alpha j}x_i - T_{\alpha i}x_j]\mathrm{d}^3x = 0,$$

把 α 的空间部分和时间部分分开，则有

$$\int_V \partial_k [T_{kj}x_i - T_{ki}x_j]\mathrm{d}^3x + \int_V \partial_4 [T_{4j}x_i - T_{4i}x_j]\mathrm{d}^3x = 0,$$

把 $T_{\mu\nu}$ 的具体表达式(11.78)代入，则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x + \int_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{M}\mathrm{d}^3x = 0,$$

利用高斯定理，上式第二项可以化成面积分，于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x + \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overleftrightarrow{M} = 0.$$

此式即为无源空间体积 V 中的电磁场角动量守恒定律(2.20)式.

如果 $\beta=4$，则体积分(11.82)式变成

$$\int_V \partial_\alpha M_{\alpha 4\gamma}\mathrm{d}^3x = \int_V \partial_\alpha [T_{\alpha\gamma}x_4 - T_{\alpha 4}x_\gamma]\mathrm{d}^3x = 0,$$

即

$$\int_V \partial_4 [T_{4\gamma}x_4 - T_{44}x_\gamma]\mathrm{d}^3x + \int_V \partial_k [T_{k\gamma}x_4 - T_{k4}x_\gamma]\mathrm{d}^3x = 0,$$

因为 γ 取 4 时左边为零，所以 γ 只取空间分量 i，故

$$\int_V \partial_4 [T_{4i}x_4 - T_{44}x_i]\mathrm{d}^3x + \int_V \partial_k [T_{ki}x_4 - T_{k4}x_i]\mathrm{d}^3x = 0.$$

如果把体积分扩展到整个空间，则第二项可用高斯定理化成面积分从而变为零，于是上式就可以写成

$$\int_V [(\partial_4 T_{4i})x_4 + T_{4i}]\mathrm{d}^3x - \partial_4\int T_{44}x_i\mathrm{d}^3x = 0,$$

即

$$\left[\partial_4\int_V T_{4i}\mathrm{d}^3x\right]x_4+\int_V T_{4i}\mathrm{d}^3x-\partial_4\int T_{44}x_i\mathrm{d}^3x=0.$$

把 T_{4i} 的具体形式代入，并写成矢量式，则有

$$\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x\right]x_4-\mathrm{i}c\int\boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x-\frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3x=0.$$

上式左边第一项为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3x=c^2\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}$$

因为

$$\boldsymbol{X}\int u\mathrm{d}^3x=\int u\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3x,$$

上式两边对 t 微商，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\int u\mathrm{d}^3x+\boldsymbol{X}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int u\mathrm{d}^3x=\int\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial t}u\mathrm{d}^3x+\int\boldsymbol{x}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}^3x.$$

上式左边第二项和右边第一项均为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{c^2\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}}{\int u\mathrm{d}^3x}=\frac{c^2\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}}{W_{\text{电磁}}},\tag{11.83}$$

式中

$$\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}=\int\boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x,$$

$$W_{\text{电磁}}=\int u\mathrm{d}^3x.$$

如果我们把电磁场的能量密度等价为电磁质量的话，则 $\boldsymbol{X}$ 代表电磁场的质量中心的坐标（类似力学中的质心坐标）. 因此(11.83)式代表一个守恒定律，它的物理意义是电磁场的质量中心的速度与电磁场的总动量 $\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}$ 成正比，与总能量成反比，如果电磁场的总动量为零，则电磁场质量中心静止不动.

*§11.10　介质中的麦克斯韦方程的协变形式

研究介质中的麦克斯韦方程的协变形式有两个目的，其一是要弄清楚从一个惯性系变换到另一个惯性系时矢量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 以及 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的变换规律. 因为有介质存在的情况下，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是两个重要的物理量，尤其电磁性质方程 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 等从一个惯性系变到另一个惯性系时是否成立还不得而知. 其二是我们要研究运动介质电动力学，也就是存在外电场或外磁场时运动介质内的电磁现象.

在介质中麦克斯韦方程的形式为（见 §1.5）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\rho-\nabla\cdot\boldsymbol{P}),\\[2ex]\nabla\times\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\\[2ex]\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\[2ex]\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{M}\right)+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{cases}\tag{1.44}$$

与真空中的方程相比较可以看到,(1.44)式中的两个齐次方程与真空情形一样,只是两个非齐次方程右边附加了极化电流和电荷. 因此,如果仍用 $F_{\mu\nu}$ 来表示电磁场的话,那么,我们只要修改两个非齐次方程所对应的协变形式就可以了. 为此,我们把极化电荷密度、极化和磁化电流密度在形式上组成一个四维矢量 $j_\mu^{e,m}$,即

$$j_\mu^{e,m} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{M}, -ic\nabla \cdot \boldsymbol{P}\right),$$

于是(1.44)式中两个非齐次方程的四维形式为

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 (j_\nu + j_\nu^{e,m}), \tag{11.84}$$

两个齐次方程的协变形式仍为

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \tag{11.85}$$

为了把(11.84)式中的 $j_\nu^{e,m}$ 吸收到方程的左边,使方程的右边只留有自由电荷和传导电流,我们需引入一个极化-磁化张量 $M_{\mu\nu}$,它和 $j_\nu^{e,m}$ 的关系为

$$j_\nu^{e,m} = \partial_\mu M_{\nu\mu}, \tag{11.86}$$

$M_{\mu\nu}$ 的具体形式为

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 & icP_1 \\ -M_3 & 0 & M_1 & icP_2 \\ M_2 & -M_1 & 0 & icP_3 \\ -icP_1 & -icP_2 & -icP_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.87}$$

于是(11.84)式可以写为

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 (j_\nu + j_\nu^{e,m}) = \mu_0 (j_\nu + \partial_\mu M_{\nu\mu}),$$

即

$$\partial_\mu (F_{\nu\mu} - \mu_0 M_{\nu\mu}) = \mu_0 j_\nu.$$

令

$$H_{\nu\mu} = (F_{\nu\mu} - \mu_0 M_{\nu\mu}), \tag{11.88}$$

则有

$$\partial_\mu H_{\nu\mu} = \mu_0 j_\nu, \tag{11.89}$$

其中

$$H_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 - \mu_0 M_3 & -B_2 + \mu_0 M_2 & -\frac{i}{c}E_1 - ic\mu_0 P_1 \\ -B_3 + \mu_0 M_3 & 0 & B_1 - \mu_0 M_1 & -\frac{i}{c}E_2 - ic\mu_0 P_2 \\ B_2 - \mu_0 M_2 & -B_1 + \mu_0 M_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 - ic\mu_0 P_3 \\ \frac{i}{c}E_1 + ic\mu_0 P_1 & \frac{i}{c}E_2 + ic\mu_0 P_2 & \frac{i}{c}E_3 + ic\mu_0 P_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.90}$$

利用关系

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M},$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},$$

可得

$$H_{\nu\mu}=\begin{pmatrix}0 & \mu_0 H_3 & -\mu_0 H_2 & -\mathrm{i}c\mu_0 D_1\\ -\mu_0 H_3 & 0 & \mu_0 H_1 & -\mathrm{i}c\mu_0 D_2\\ \mu_0 H_2 & -\mu_0 H_1 & 0 & -\mathrm{i}c\mu_0 D_3\\ \mathrm{i}c\mu_0 D_1 & \mathrm{i}c\mu_0 D_2 & \mathrm{i}c\mu_0 D_3 & 0\end{pmatrix}. \tag{11.91}$$

(11.85)式和(11.89)式就是我们要求的协变形式的介质中的麦克斯韦方程. 我们可以根据$H_{\mu\nu}$和$M_{\mu\nu}$的变换性质(二阶反对称张量)具体地找出$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{M}$诸量的变换规律. 我们又可以从$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{M}$的变换规律推知电偶极矩和磁偶极矩从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系的变换规律.

对于协变的介质中的麦克斯韦方程(11.85)式和(11.89)式,如果我们不附加$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$之间的方程,则是不完备的,或者说,我们必须把静态介质中的$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$推广到运动介质中去,这样由(11.85)式和(11.89)式组成的方程组才具有真实的物理内容.

显然由(11.91)式出发,我们很容易证明$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$的变换关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}'_{/\!/}&=\boldsymbol{D}_{/\!/},\\ \boldsymbol{D}'_{\perp}&=\gamma\left(\boldsymbol{D}+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{H}\right)_{\perp},\\ \boldsymbol{H}'_{/\!/}&=\boldsymbol{H}_{/\!/},\\ \boldsymbol{H}'_{\perp}&=\gamma(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D})_{\perp},\end{aligned} \tag{11.92}$$

把上式和$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$的变换公式(11.68)式结合起来,利用$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\boldsymbol{E}'$,$\boldsymbol{B}'=\mu\boldsymbol{H}'$,得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}+\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{H}&=\varepsilon(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),\\ \boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}&=\mu(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}).\end{aligned} \tag{11.93}$$

将(11.93)式写成明显的协变形式,即为

$$\begin{aligned}H_{\mu\nu}u_\nu&=\varepsilon_r F_{\mu\nu}u_\nu,\\ G_{\alpha\beta}u_\beta&=\mu_r\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}H_{\gamma\delta}u_\beta,\end{aligned} \tag{11.94}$$

式中u_ν是四维速度,形式为

$$u_\nu=(\gamma\boldsymbol{v},\mathrm{i}c\gamma),$$

解方程(11.93)式,我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\frac{\varepsilon(1-\beta^2)\boldsymbol{E}+\left(\varepsilon\mu-\frac{1}{c^2}\right)[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})-\varepsilon\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})]}{1-\varepsilon_r\mu_r\beta^2},\\ \boldsymbol{B}&=\frac{\mu(1-\beta^2)\boldsymbol{H}-\left(\varepsilon\mu-\frac{1}{c^2}\right)[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})-\mu\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})]}{1-\varepsilon_r\mu_r\beta^2},\end{aligned} \tag{11.95}$$

若只保留到$\frac{v}{c}$级项,则上式可改写为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\left(\varepsilon\mu-\frac{1}{c^2}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}, \tag{11.96}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\left(\varepsilon\mu-\frac{1}{c^2}\right)\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}, \tag{11.97}$$

(11.85)、(11.89)、(11.96)和(11.97)式构成了运动介质的电动力学方程组.

考虑到介质的运动,场的边值关系也要作相应的修正. 由于从S系变到S′系时,方程(介质中无自由电荷和传导电流)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0,$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

仍成立,所以对应的边值关系仍为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) &= 0, \\ \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) &= 0; \end{aligned} \tag{11.98}$$

同时在S′系中(其中介质是静止的)

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}'_1 - \boldsymbol{E}'_2) = 0,$$
$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}'_1 - \boldsymbol{H}'_2) = 0;$$

根据相对论变换公式(略去$\left(\frac{v}{c}\right)^2$以上的项)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}, \end{aligned} \tag{11.99}$$

变换到上面的边值关系,我们得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) &= v_n(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2), \\ \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) &= -v_n(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2), \end{aligned} \tag{11.100}$$

式中v_n是物体运动速度在垂直界面方向的投影,把(11.96)和(11.97)式代入(11.100)式,最后得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) &= v_n(\mu_1 \boldsymbol{H}_1 - \mu_2 \boldsymbol{H}_2), \\ \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) &= -v_n(\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2), \end{aligned} \tag{11.101}$$

如果物体运动时,在垂直物体表面方向上的速度为零,即$v_n = 0$,则上述边界条件回到通常情形.

§11.11 相对论力学

牛顿运动方程不满足洛伦兹变换下不变的要求,应当修改成满足相对论的协变性方程. 为此,我们首先考虑运动学的物理量,如速度、加速度等的四维形式.

1. 四维速度和四维加速度

在三维空间中,质点的位置由坐标矢量x_i来描写,其运动轨迹为三维空间中的一条曲线,而速度$v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$是通过$x_i(t)$得出的. 在四维空间中,质点的位置是由四维坐标矢量x_μ表示的,运动轨迹也由四维空间中的一条世界线来表示. 类似于三维空间,我们能否把四维速度表示成四维空间坐标x_μ对t求微商

呢？显然这是不行的，因为 $ict = x_4$，它也是四维空间坐标之一，它和其他三个空间坐标是平权的，不再仅是它们的参量，并且在不同惯性坐标系中，t 是不同的，而我们则希望需要的参量是一个不变量．我们知道四维间隔 ds^2 是不变量，即

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2$$

是不变量，在质点静止的参考系中，由于 $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$，故有

$$ds^2 = -c^2dt^2, \tag{11.102}$$

此时的 dt 为随着物体一起运动的钟所指示的时间，即该物体的固有时间，记为 $d\tau$，它是一个不变量，显然 $d\tau$ 可作为我们所要寻找的参量，它不仅简单，而且具有确定的物理意义．由(11.102)式有

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = dt^2(1-\beta^2). \tag{11.103}$$

这样，我们就可以把四维速度 u_μ 定义为

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \tag{11.104}$$

显然，由于 dx_μ 是四维矢量，$d\tau$ 为不变量，所以 u_μ 也是四维矢量，u_μ 的分量为

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx_1}{dt\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

类似地有

$$u_2 = \frac{v_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

故有

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\boldsymbol{v},$$

式中 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是三维速度．

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{icdt}{dt\sqrt{1-\beta^2}} = ic\gamma, \tag{11.105}$$

由此可得

$$u_\mu u_\mu = -c^2.$$

由以上讨论可见 u_μ 是一个四维类时矢量．

同理，我们可以定义四维加速度 a_μ 为

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau}, \tag{11.106}$$

它的分量为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(\gamma \boldsymbol{v})}{\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t},$$
$$a_4 = \frac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}c\gamma)}{\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t}. \tag{11.107}$$

思考题 试证明 u_μ 和 a_μ 是正交的，即

$$a_\mu u_\mu = 0.$$

2. 四维动量

我们先来讨论不同坐标系中质量之间的关系，考察两个全同粒子的碰撞，如图 11.12，S′系是两粒子碰撞的质心系，S 系为实验室系. 在 S′系看，一个粒子以速度 $\boldsymbol{v}'$ 运动，另一个粒子 $-\boldsymbol{v}'$ 运动，碰撞后两粒子改变方向. 在 S 系看，粒子 1 的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，粒子 2 的速度为 $\boldsymbol{v}_2$，在碰撞的瞬间，S 系看两者的速度均为 $\boldsymbol{v}$，在 S′系看则为零. 在 S′系看，两粒子的质量是一样的，而在 S 系看，两粒子的质量可能不同，我们分别设为 m_1 和 m_2，

$$m_1 + m_2 = m_{总}, \tag{11.108}$$

动量守恒定律要求

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_{总} v, \tag{11.109}$$

由洛伦兹变换可知

$$v_1 = \frac{v' + v}{1 + \dfrac{v'v}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{-v' + v}{1 - \dfrac{v'v}{c^2}}. \tag{11.110}$$

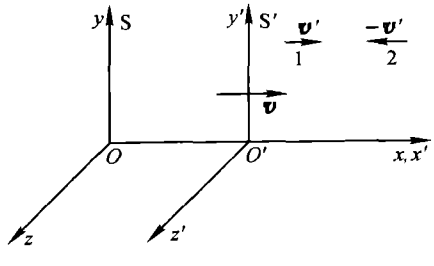


图 11.12

把(11.110)代入(11.109)式并利用(11.108)式，则有

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + v'v/c^2}{1 - v'v/c^2}, \tag{11.111}$$

利用公式(11.49)，我们得到

$$1+\frac{v'v}{c^2}=\frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}},$$

$$1-\frac{v'v}{c^2}=\frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}},$$

将它代入(11.111)式,则得

$$m_1\sqrt{1-v_1^2/c^2}=m_2\sqrt{1-v_2^2/c^2},\tag{11.112}$$

即

$$m\sqrt{1-v^2/c^2}=\text{常数},\tag{11.113}$$

式中 v 是粒子运动的速度. 这说明质量不是一个常数,它与速度有关. 式(11.113)中的常数可定为 m_0,m_0 为粒子速度为零时的质量,称为**静质量**,也就是相对粒子静止的观察者测量到的粒子质量. (11.113)式现在可写成

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\tag{11.114}$$

这就是物体的**运动质量公式**.

类似四维电流公式的讨论,利用速度的变换关系可得

$$\begin{cases}p'_x=m'u'_x=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{u_x-v}{1-u_xv/c^2}=\gamma\left(p_x-\dfrac{v}{c}mc\right),\\ p'_y=p_y,\\ p'_z=p_z,\\ m'c=\gamma\left(mc-\dfrac{v}{c}p_x\right),\end{cases}\tag{11.115}$$

这里,我们设 S′相对于 S 系沿着 x 轴运动,速度为 v. 从(11.115)式,可看出 $(p_x,p_y,p_z,\mathrm{i}mc)$ 的变换与 x_μ 的变换完全一样,所以它们组成一个四维矢量,称之为**四维动量**,

$$p_\mu=m_0u_\mu.$$

我们不难看出 p_μ 也是一个类时矢量,即

$$p^2=p_\mu p_\mu=\boldsymbol{p}^2-m^2c^2,\tag{11.116}$$

在粒子静止的参考系中,由于 $\boldsymbol{p}=0$,故有

$$p^2=-m_0^2c^2<0,\tag{11.117}$$

所以 p_μ 是类时矢量. (11.117)式实际上是对粒子运动的一个约束,任何粒子的动量必须满足此式. 若我们选取以 $\boldsymbol{p}$、mc 为坐标的四维动量空间,则(11.117)式在这个动量空

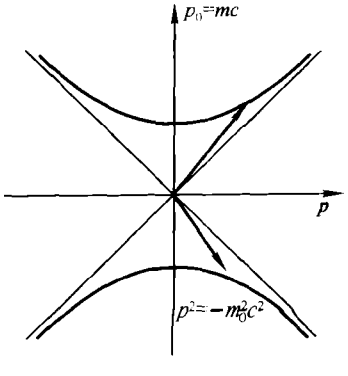


图 11.13

间中给出了一个双曲面，如图 11.13 所示，这个双曲面称为质壳，因为 $p_0 = mc > 0$，所以只取下面的一个双曲面，任何粒子的四维动量 p_μ 必须永远被约束在这个曲面上.

3. 运动方程

根据上面的讨论，我们可以把牛顿力学方程简单地推广为

$$m_0 \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = K_\mu , \tag{11.118}$$

式中 K_μ 代表四维力. 如果粒子所受力的力密度为 f_μ，则粒子所受的总力为 $\int f_\mu \mathrm{d}V$，由于 f_μ 是矢量，$\mathrm{d}V$ 不是标量，故这样定义的总力不是四维矢量，但 $\mathrm{d}V_0$ 是不变量，故有

$$\begin{aligned} K_\mu &= \int f_\mu \mathrm{d}V_0 = \int \frac{f_\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathrm{d}V \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{i}}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} \right) \mathrm{d}V \\ &= \frac{F_\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} . \end{aligned} \tag{11.119}$$

即 F_μ 的前三个分量表示总的三维力 $\boldsymbol{F}$，而 $F_4 = \frac{\mathrm{i}}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}$，推广的(11.118)式应当在极限情况下回到牛顿方程，当 μ 只取空间分量 1、2、3 时，则(11.118)式为

$$m_0 \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_0 \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \boldsymbol{F} ,$$

因为

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m ,$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} ,$$

而 $m\boldsymbol{v}$ 即为三维空间的动量 $\boldsymbol{p}$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} .$$

这就是大家熟知的牛顿方程的形式，只是其中 m 是一个变量. $\mu = 4$ 时，有

$$m_0 \frac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}\tau} = K_4,$$

即

$$m_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{\mathrm{i}}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F},$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v},$$

对上式积分,可得

$$mc^2 = \int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}t = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

若力是保守力,即 $\boldsymbol{F} = -\nabla \Phi$,$\Phi$ 是相应的保守势,则

$$mc^2 + \Phi = W = 常数,$$

式中 W 为总的相对论能量. 在极限情况,令 $\frac{v}{c} \to 0$,则

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \cdots + \Phi,$$

式中 $m_0 c^2$ 称为**静止能量**. 非相对论总能量定义为

$$W_{非相} = \lim_{\beta \to 0}(W - m_0 c^2),$$

此外,我们定义相对论动能为

$$T = W - m_0 c^2 - \Phi.$$

现在,我们可以把 W 写为动量的函数,由于

$$p_4 = \mathrm{i}mc, \quad -\mathrm{i}cp_4 = mc^2 = W - \Phi.$$

即

$$W = \Phi - \mathrm{i}cp_4,$$

因此

$$p_\mu p_\mu = \boldsymbol{p}^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2,$$

故

$$-m_0^2 c^2 = \boldsymbol{p}^2 - \frac{1}{c^2}(W - \Phi)^2, \tag{11.120}$$

若粒子是自由的,即 $\Phi = 0$(或 $\boldsymbol{F} = 0$),则上式可写成

$$m_0^2 c^2 = \left(\frac{W}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2,$$

于是我们得到相对论的能量、动量公式

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^2. \tag{11.121}$$

4. 质量亏损

前面，我们已导出了一个自由粒子的相对论质能关系

$$W = mc^2,$$

它与粒子(或其他物体)的具体结构无关. 所以，质能关系对一个粒子适用，对由许多粒子组合成的复合体，如原子核等也适用. 对于复合体，它在静止参考系中的能量为

$$W_0 = m_0 c^2.$$

由于复合体中的粒子之间具有相互作用能，所以 W_0 不等于所有粒子的静能量之和，即

$$W_0 \neq \sum_i m_{0i} c^2,$$

式中 m_{0i} 是第 i 个粒子的静质量. 两者之间的差

$$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{0i} c^2$$

称为复合体的**结合能**，相应的质量差

$$\Delta M = M_0 - \sum_i m_{0i}$$

称为**质量亏损**. 显然

$$\Delta W = (\Delta M) c^2. \tag{11.122}$$

习　题

11.1 在 S 系中有两个事件分别发生在 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2) 处，$x_2 - x_1 = 3 \times 10^8$ m，$y_1 = y_2$，$z_1 = z_2$，$t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$ s. (1) 试求某参考系 S′，在其中的观察者看到这两件事是同时发生的，并在 S′ 系中计算两事件的空间距离；(2) 具体计算证明四维间隔是不变的；(3) 能否找到一个参考系，其中这两个事件的时间间隔为 $t_2 - t_1 = -\frac{1}{2}$ s? 这与因果律是否矛盾？

11.2 设在惯性系中有一静止的光源 A，它所发出的光穿过一根沿着 AB 以匀速 v 运动的介质柱体后到达 B 点. 已知 A、B 两点间距离为 L，介质柱长 l_0 ($l_0 \ll L$)，静止时介质的折射率为 n，试求光由 A 到 B 点所需要的时间？

11.3 在惯性系 S 中观察到，甲、乙两飞船分别沿着两条互相平行且相距为 d 的直线轨道相向而行，它们的速度都为 $\frac{c}{2}$，c 是光速，试问：(1) 在 S 系中，当两飞船相距最近的瞬间，飞船甲的飞行员认为必须以多大的角度射出一颗速度为 $\frac{3}{4}c$ 的子弹才可击中飞船乙？(2) 飞船甲的飞行员观察到的子弹的速度为多大？

11.4 静止长度为 l_0 的两根尺，平行于公共的 x 轴而相向作匀速运动. 与其中一根尺

相连接的观察者发现，两根尺的左端和右端两次重合的时间间隔为 Δt，试问：(1) 两尺的相对速度是多少？(2) 由相对两尺静止的两个观察者看，尺的端点的重合的次序怎样？(3) 是否有一个参考系，其中的观察者认为两尺是以大小相同、方向相反的速度运动？若能找到的话，则尺的端点重合的次序怎样？

11.5　一个无限长的圆柱体均匀带电，单位长度的电荷量为 λ_0，沿轴向有均匀分布的电流 I_0，试找出只有电场或只有磁场的参考系，并求出场强的值.

11.6　在一个参考系中，电场和磁场是互相平行的，试求出这个参考系的速度.

11.7　一个静止质量为 m_1 速度为 $\boldsymbol{v}_1$ 的粒子与一个静止的粒子 m_2 碰撞后合二为一，求合成粒子的质量 m 和速度 $\boldsymbol{v}$.

11.8　一个质量为 m 的粒子开始时静止，后分裂为 m_1 和 m_2 两部分，求这两部分的总能量和动能.

11.9　切连科夫辐射. 设超光速运动的电子辐射的光子的动量为 $\hbar\boldsymbol{\kappa}$，能量为 $\hbar\omega$，试利用能量和动量守恒定律证明

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\hbar}{p_0}\frac{\pi}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

其中 θ 是电子运动方向与辐射光子方向的夹角，p_0 为电子的动量. 由此说明真空中自由运动的电子不可能辐射光子，以及切连科夫辐射的必要条件.

11.10　康普顿效应. 静止质量为 m_0 的电子把动量为 $\hbar\boldsymbol{\kappa}$、能量为 $\hbar\omega$ 的光子散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上，试证明光子的频率改变为

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0 c^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

11.11　穆斯堡尔效应. 被激发的原子核通过辐射 γ 射线而返回基态. 设基态核的质量为 m，激发能为 ΔW，试确定 γ 光子的频率.

11.12　电子对效应. 试证明电子－正电子对转化为两个光子的湮没反应是可能的.

11.13　介质中的多普勒效应. 一个质量为 m 的处于激发态的原子以速度 $\boldsymbol{v}$ 在折射率为 $n(\omega)$ 的介质内匀速运动，当它跃迁到正常态时，原子发射频率为 ω' 的量子. 实验室参考系内，在与粒子运动方向成 θ 角的方向上观察到这个量子. 设 $\hbar\omega' \ll mc^2$，试求实验室参考系内观察到的频率 ω；$\omega' \to 0$ 时我们得到什么结果？

11.14　π^0 介子的光生反应为 $\gamma + \mathrm{p} = \mathrm{p} + \pi^0$，试求光生反应的光子的最小能量.

11.15　一列固有长度为 l_0 的列车以速度 v 匀速运动，当它通过一个与它的固有长度相同的站台时，站台上的观察者发现，站台左端先与车尾重合，经过 Δt 时间后，站台右端与车头重合. 求速度 v.

11.16　两列固有长度都是 l_0 的列车相互对开时，站台上的观察者看它们的速度都是 v. 试求：(1) 一列列车相对于另一列列车的速度；(2) 一列列车上的观察者看另一列列车的长度.

11.17　频率为 ω_0 的单色光垂直入射到一个平面镜上，设平面镜沿入射光传播方向以速度 v 作匀速运动，求反射光的频率.

11.18　设一束光在某惯性系 S 中被限制在一个立体角 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 内，如果变到另

一个惯性系 S′中,则此立体角如何变换?

11.19 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 满足什么条件时,可以找到参考系 S′,使其中只有磁场或只有电场? 如果可以找到,试求出这个参考系和其中的场强.

11.20 证明 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 $E^2-c^2B^2$ 是洛伦兹不变量.

11.21 利用能量动量守恒,证明下列反应不可能发生:

$$e^-\to e^-+\gamma,\quad \gamma\to e^-+e^+,\quad e^++e^-\to\gamma.$$

11.22 在相对论情况下,一个静质量为 m,电荷为 q 的粒子通过电势差为 V 的电场.设初速度为零,则其末速度为多少?

11.23 设 S′系相对 S 系沿 x 轴以速度 v 运动,一光线在 S 系中的方向角为(α,β,γ),求它在 S′系中的方向角(α',β',γ').

11.24 运动的平面镜问题. 证明:当运动方向平行镜面时,反射定律成立,频率不变;当运动方向垂直镜面时,反射定律不成立,频率改变.

11.25 对于平面电磁波,计算 $F_{\mu\nu}k_\mu$,并证明一个参考系中的平面波在其他参考系看来也是平面波.

11.26 试从四维速度的洛伦兹变换出发,导出相对论的速度合成公式.

第十二章　电磁波的辐射

在这一章里，我们先讨论电荷连续分布系统的辐射，然后研究运动着的带电粒子的辐射．对于带电粒子通过介质时可能发生的两种重要辐射——切连科夫辐射和跃迁辐射也将作仔细的分析．

§12.1　推　迟　势

所谓辐射问题，就是要研究在给定电荷、电流分布的情况下，讨论因此而引起的电磁场的运动和变化（这儿略去了场对电荷、电流的反作用）．根据前面的讨论，在一般情况下麦克斯韦方程可以用势来描写．电磁势所满足的方程为

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\rho/\varepsilon_0,$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j},$$

满足以上方程的电磁势还应满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

此处我们要面对的问题是：在给定电荷、电流分布和边界条件已知的情况下，求出以上非齐次波动方程的解．由于 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足同样的方程，因此我们只要讨论一个标量方程式的解即可代表一般．我们已知，对于任意函数 φ、ψ，由格林定理有

$$\int(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}\tau=\oint(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

如 φ、ψ 还是时间 t 的函数，则上式两边可同时对 t 积分，于是有

$$\int\mathrm{d}t\int(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}\tau=\int\mathrm{d}t\oint(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\qquad(12.1)$$

我们用(12.1)式去求解 φ 所满足的非齐次波动方程．

取 φ 满足如下方程：

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

而取 ψ 满足波动方程

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0,$$

ψ 的一个简单解为

$$\psi = \frac{F\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}, \tag{12.2}$$

式中

$$R = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2},$$

$\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$ 是空间某一定点 P 的坐标，x、y、z 是积分变量，若 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$ 是 S 面内的任一定点，$\bar{t}$ 表示 P 点的时间，则以 P 点为心作一小球面 S'，若格林积分只限于 S' 与 S 之间，则 ψ 没有奇性，取

$$F = \delta\left(t + \frac{R}{c} - \bar{t}\right), \tag{12.3}$$

把以上所取的 φ、ψ 代入格林公式，则有

$$\begin{aligned}
\text{左方} &= \int dt\iiint(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)d\tau \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\frac{\delta(t_1)}{R}\rho dt d\tau + \frac{1}{c^2}\iiint\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dt d\tau \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\rho}{R}\Big|_{t_1=0}d\tau + \frac{1}{c^2}\int\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}d\tau \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\rho}{R}\Big|_{t_1=0}d\tau
\end{aligned}$$

式中 $t_1 = t + \frac{R}{c} - \bar{t}$.

$$\text{右方} = \int dt\iint_{S+S'}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS,$$

面积分是对 S 和 S' 两个面积分，先看在 S' 面上的积分，如图 12.1.

$$\begin{aligned}
\oint_{S'}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS &= \oint_{S'}\frac{\delta(t_1)}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \\
&= \frac{\delta(t_1)}{R}\oint_{S'}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS.
\end{aligned}$$

在 S' 面上 R = 常数，根据中值定理

$$\oint_{S'}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}\oint_{S'}dS = \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}4\pi R^2,$$

故有

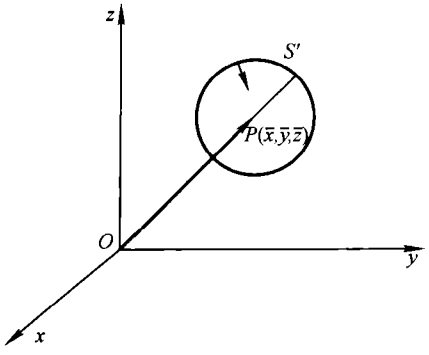


图 12.1

$$\lim_{R\to 0}\oint_{S'}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=\lim_{R\to 0}\frac{\delta(t_1)}{R}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}4\pi R^2\to 0\ .$$

其次

$$-\oint_{S'}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S=-\oint\varphi\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\delta(t_1)}{R}\right]\frac{\partial R}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$
$$=\left[-\frac{1}{R^2}\delta(t_1)+\frac{1}{cR}\delta'(t_1)\right]\overline{\varphi}\cdot 4\pi R^2,$$

故有

$$\lim_{R\to 0}-\oint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S=\lim_{R\to 0}[-4\pi\overline{\varphi}\delta(t_1)]$$
$$=-4\pi\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},t)\delta(t-\bar{t}),$$

于是

$$\text{右方}=-4\pi\int\varphi\delta(t-\bar{t})\mathrm{d}t+\int\mathrm{d}t\oint_S\left[\frac{\delta(t_1)}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\delta(t_1)}{R}\right)\right]\mathrm{d}S$$
$$=-4\pi\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})+\oint\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S-\oint[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S-$$
$$\int\mathrm{d}t\oint\varphi\delta'(t_1)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}S\ .$$

由于

$$-\int\mathrm{d}t\oint\varphi\delta'(t_1)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}S=-\oint\varphi\delta(t_1)\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\mathrm{d}S\Big|_{-\infty}^{\infty}+$$
$$\int\mathrm{d}t\oint\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta(t_1)\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\mathrm{d}S$$
$$=\oint\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

故

$$右方 = -4\pi\varphi(\bar{r},\bar{t}) + \oint\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\right\}\mathrm{d}S,$$

故

$$\varphi(\bar{r},\bar{t}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n}\right\}\mathrm{d}S.$$

注意:式中方括号代表括号中函数的 $t_1=0$,即 $t=\bar{t}-\frac{R}{c}$,若以 x、y、z、t 代替式中的 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$、$\bar{t}$,x'、y'、z'、t' 代替式中的 x、y、z、t,则有

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{1}{cR}\frac{\partial R}{\partial n'}\right\}\mathrm{d}S', \tag{12.4}$$

(12.4)式称为推迟解,若取 $\psi = F\left(t-\frac{R}{c}\right)\Big/R$,则可得到另外一个解,称为超前解,由于此解意义不明确,故不取. 由(12.4)式,我们看到空间任一点的场与体系内部源的推迟值有关,另外还与体系外的源的分布有关,体系外分布的影响是通过式中的面积分,以边界的形式出现的. 若将面积分扩展到无穷远去,电荷仅分布在有限的范围内,则面积分项为零,于是我们便得到一组特解为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}\mathrm{d}\tau',\\ \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\boldsymbol{j}]}{R}\mathrm{d}\tau',\end{aligned} \tag{12.5}$$

式中方括号[ ]表示 $t'=t-\frac{R}{c}$,这是推迟势惯用的简写.

§12.2 多极辐射

我们来讨论电流、电荷分布于空间一很小区域内的辐射问题,这时我们可以作多极展开.

1. 推迟势的多极展开

现在我们讨论的是全空间问题,所以有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}\mathrm{d}\tau',$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\boldsymbol{j}]}{R}\mathrm{d}\tau'.$$

同时我们讨论的是远离源的场,即 $r\gg l$(图 12.2),l 为源的线度. 被积函数是

$\boldsymbol{R}$ 的函数，我们可以将它在 $\boldsymbol{r}$ 处展开为级数，即

$$\frac{[\rho]}{R}=\frac{[\rho]}{R}\Big|_{R=r}+(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{R=r}+\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\right]^2\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{R=r}+\cdots$$

$$=\frac{[\rho]_0}{r}-\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':\nabla\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\cdots \tag{12.6}$$

式中 $[\rho]_0$ 表示 $\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{r}{c}\right)$，以后为简便起见，脚标 0 不再写出. 同理可得

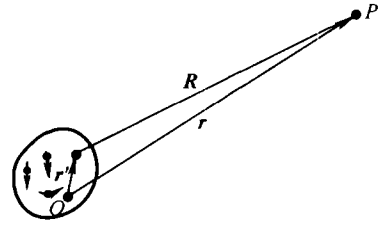


图 12.2

$$\frac{[\boldsymbol{j}]}{R}=\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}-\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':\nabla\nabla\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}+\cdots \tag{12.7}$$

故

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{[\rho]}{r}\mathrm{d}\tau'-\int\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':\nabla\nabla\frac{[\rho]}{r}\mathrm{d}\tau'+\cdots\right];$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}\mathrm{d}\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}\mathrm{d}\tau'+\frac{\mu_0}{8\pi\varepsilon_0}\int\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':\nabla\nabla\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}\mathrm{d}\tau'+\cdots$$

我们下面分别研究 $\boldsymbol{A}$、φ 展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质.

2. 电偶极辐射

φ 展开式中的第一项

$$\varphi_0=\int\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int[\rho]\mathrm{d}\tau'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

Q 是系统的总电荷量. 第二项

$$\varphi_1=-\int\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\tau'=-\nabla\cdot\frac{[\boldsymbol{p}]}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{12.8}$$

式中 $[\boldsymbol{p}]=\int\boldsymbol{r}'[\rho]\mathrm{d}\tau'$，表示系统总的电偶极矩.

$\boldsymbol{A}$ 展开式中的第一项

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int[\boldsymbol{j}]\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{p}}]. \tag{12.9}$$

所以，电偶极矩系统所产生的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 为

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{[\boldsymbol{p}]}{r},\quad \boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{p}}].$$

从联系 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的势的通常公式，我们得到电偶极场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r}, \tag{12.10}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\nabla\nabla \cdot \frac{[\boldsymbol{p}]}{r} - \frac{1}{c^2}\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{r}\right). \tag{12.11}$$

在无源区，E 满足波动方程，于是(12.11)式中的第二项可以改写成

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{[\boldsymbol{p}]}{r}\right) = \nabla^2\left(\frac{[\boldsymbol{p}]}{r}\right).$$

利用上式，(12.11)式可改写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla\nabla \cdot \frac{[\boldsymbol{p}]}{r} - \nabla^2\left(\frac{[\boldsymbol{p}]}{r}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{[\boldsymbol{p}]}{r}.\end{aligned} \tag{12.12}$$

(12.10)和(12.12)式就是电偶极子的场强，下面我们分三个区域来讨论它们的性质.

(1) 远区：不仅要求 $r \gg l$，而且 $r \gg \lambda$，λ 为辐射场的波长. 于是，公式(12.10)和(12.12)中旋度算子只要对分子运算即可，因为对分子运算得出一个 $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 的因子(假定 $\boldsymbol{p}$ 是谐变化的)，而每对分母运算一次得一个因子 $\frac{1}{r}$，两者相比，后者为一小量，可略去. 因此我们得到远区场强的公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\boldsymbol{e}_r \times [\ddot{\boldsymbol{p}}], \\ \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r \times (\boldsymbol{e}_r \times [\ddot{\boldsymbol{p}}]),\end{aligned} \tag{12.13}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$

(2) 近区：$r \ll \lambda$，但仍满足 $r \gg l$. 这时公式(12.10)和(12.12)中的旋度算子只要对分母运算即可，因为每对分母运算一次得到一个 $\frac{1}{r}$ 因子，而对分子运算得到一个 $\frac{1}{\lambda}$ 因子，显然 $\frac{1}{r}$ 比 $\frac{1}{\lambda}$ 贡献大. 于是我们得到近区的场强为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \times [\dot{\boldsymbol{p}}], \\ \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{e}_r \cdot [\boldsymbol{p}]) - [\boldsymbol{p}]).\end{aligned} \tag{12.14}$$

(3) 中间区域：虽然 $r \gg l$，但 $r \approx \lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项

和对分子运算的项. 这是因为对两者运算得到的因子$\frac{1}{r}$和$\frac{\omega}{c}=\frac{1}{\lambda}$是同数量级.

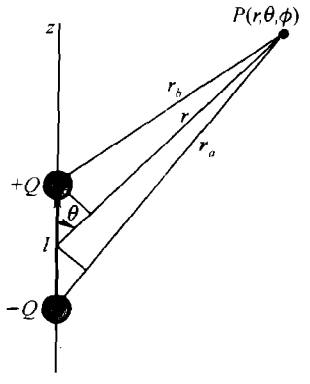


图 12.3

【例 1】 如图 12.3 所示,两个金属小球分别带电荷 Q 和 $-Q$,它们之间距离为 l,两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化,这就是所谓的赫兹振子. 试分析赫兹振子辐射场的能流特点.

解 取球坐标系,$+Q$ 和 $-Q$ 处在 z 轴上,则体系的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=lQ\boldsymbol{e}_z.$$

设 $Q=Q_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}$,就有

$$\boldsymbol{p}=lQ_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\boldsymbol{e}_z,$$

$$[\ddot{\boldsymbol{p}}]=-\omega^2 lQ_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\boldsymbol{e}_z,$$

将它们代入偶极辐射的远区公式,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=-\dfrac{\omega^2 lQ_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\\ \quad=-\dfrac{\omega^2 lQ_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\boldsymbol{e}_\theta,\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^2 lQ_0}{4\pi cr}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\\ \quad=-\dfrac{\mu_0\omega^2 lQ_0}{4\pi cr}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\boldsymbol{e}_\phi.\end{cases}\tag{12.15}$$

由(12.15)式可以看出,场正比于$\frac{1}{r}$,电场只有 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向分量,磁场只有 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向分量,且 $cB_\phi=E_\theta$,而在偶极矩方向上场为零. 辐射能流的平均值为

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}_\mathrm{P}\rangle&=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*]\\&=\frac{\omega^4 l^2 Q_0^2}{32\pi^2 c^3\varepsilon_0}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r.\end{aligned}\tag{12.16}$$

可见,辐射能流的特点是正比于$\frac{1}{r^2}$,且与频率的四次方成正比. 在讨论辐射问题时,我们常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况,其定义为

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle=\frac{\langle\boldsymbol{S}_\mathrm{P}\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\Omega},\tag{12.17}$$

这表示在 θ、ϕ 方向单位立体角内的平均辐射能流,显然,现在

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle=\frac{\omega^4 l^2 Q_0^2}{32\pi^2 c^3\varepsilon_0}\sin^2\theta.$$

辐射角分布的情况如图 12.4 所示,在 $\theta=\frac{\pi}{2}$的方向辐射最强,在 $\theta=0$、π 的方向无辐射.

【例 2】 在氢原子中,从 $m=0$ 的 2p 态到 1s 基态的辐射跃迁的电荷密度是

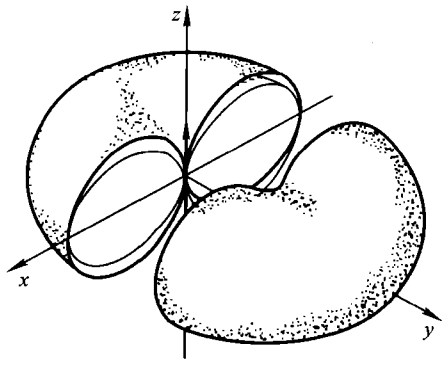


图 12.4

$$\rho(r,\theta,\phi) = \frac{Ze}{\sqrt{6}}a_0^{-4}re^{-3r/2a_0}Y_{00}Y_{10}e^{-i\omega_0 t},$$

式中 $a_0=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}$ 为玻尔半径，$\hbar\omega_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2}{8a_0}$ 为能级差. 试在偶极近似下计算总辐射功率的时间平均值.

解 这里跃迁电荷密度是用球谐函数 Y_{lm} 来表示的，所以我们相应地采用公式(4.65)来求偶极矩.

$$q_{10} = \int Y_{10}^{*}r'\rho(\boldsymbol{r}')d\tau'$$

$$= A\int Y_{10}^{*}r'^{2}e^{-3r'/2a_0}Y_{10}r'^{2}dr'd\Omega',$$

式中 $A=\frac{Ze}{\sqrt{6}}a_0^{-4}Y_{00}$，$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. 由球谐函数的正交性

$$\int Y_{lm}^{*}Y_{l'm'}d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

得到

$$q_{10} = A\int_0^{\infty}r'^{4}e^{-3r'/2a_0}dr' = A\left(\frac{3}{2a_0}\right)^{-5}\Gamma(5)$$

$$= \frac{128}{243}\sqrt{\frac{6}{\pi}}ea_0.$$

因为电荷密度与 ϕ 无关，所以 $q_{11}=0$. 由公式(4.67)得偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = p_0e^{-i\omega_0 t}\boldsymbol{e}_z,$$

其中 $p_0=\frac{128}{243}\sqrt{8}ea_0$. 这是沿着 z 轴方向的偶极子，所以仿例题 1 可得辐射的角分布为

$$\langle f(\theta,\varphi)\rangle = \frac{\omega_0^4p_0^2}{32\pi^2c^3\varepsilon_0}\sin^2\theta.$$

对立体角积分，可得平均辐射功率为

$$P = \int\langle f(\theta,\varphi)\rangle d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^4p_0^2}{3c^3}.$$

3. 电四极辐射

若体系的电偶极矩为零，这时必须讨论 $\boldsymbol{A}$、φ 展开式的下一级贡献.

φ 展开式的第三项为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla\nabla\frac{[\rho]}{r}\mathrm{d}\tau' .$$

我们感兴趣的是辐射场，于是可以略去一切比 $\frac{1}{r}$ 更高次项的贡献，凡是微分号下的 $\frac{1}{r}$ 都可作为常数提出来，因此有

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2r}\int \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' : \nabla\nabla[\rho]\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2r}\nabla\nabla : \int \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'[\rho]\mathrm{d}\tau' .\end{aligned}$$

利用

$$\overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \int\rho(3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' - \overrightarrow{\overrightarrow{I}}\, r'^2)\mathrm{d}\tau' ,$$

$$[\overrightarrow{\overrightarrow{D}}] = \int[\rho](3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' - \overrightarrow{\overrightarrow{I}}\, r'^2)\mathrm{d}\tau' ,$$

可得

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{6r}\nabla\nabla : [\overrightarrow{\overrightarrow{D}}] + \frac{1}{6r}\nabla^2\int r'^2[\rho]\mathrm{d}\tau'\right] . \tag{12.18}$$

算子 ∇ 作用到一个推迟量 $[\rho]$ 上，其结果是

$$\begin{aligned}\nabla[\rho] &= \nabla t'[\dot{\rho}] \quad \left(t' = t - \frac{r}{c}\right) \\ &= -\frac{\boldsymbol{r}}{cr}[\dot{\rho}],\end{aligned}$$

$$\nabla^2[\rho] = \nabla\cdot\nabla[\rho] = \frac{1}{c^2}[\ddot{\rho}],$$

$$\nabla\nabla : [\overrightarrow{\overrightarrow{D}}] = \frac{1}{c^2r^2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} : [\dddot{\overrightarrow{\overrightarrow{D}}}].$$

利用上述结果，略去 $\frac{1}{r}$ 的高次项，可得

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{6c^2r^3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} : [\dddot{\overrightarrow{\overrightarrow{D}}}] + \frac{1}{6c^2r}\int r'^2[\ddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'\right]. \tag{12.19}$$

下面讨论 $\boldsymbol{A}$ 展开式的第二项

$$\boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{[\boldsymbol{j}]}{r}\mathrm{d}\tau'$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0}{4\pi r}\nabla\cdot\int \boldsymbol{r}'[\boldsymbol{j}]\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{\mu_0}{2r}\nabla\cdot\left(\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}']\mathrm{d}\tau'+\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}']\mathrm{d}\tau'\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mu_0}{6r}\nabla\cdot[\dddot{\overrightarrow{D}}]-\frac{\mu_0}{6r}\nabla\cdot\int\overrightarrow{I}r'^2[\dot{\rho}]\mathrm{d}\tau'+\frac{\mu_0}{r}\nabla\times[\boldsymbol{m}]\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{6cr^2}\boldsymbol{r}\cdot[\dddot{\overrightarrow{D}}]+\frac{1}{6cr^2}\boldsymbol{r}\int r'^2[\ddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{cr^2}[\dot{\boldsymbol{m}}]\times\boldsymbol{r}\right]. \qquad (12.20)
\end{aligned}
$$

从上面的推导我们可以看到对应电四极矩的势为

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6c^2r^3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}:[\ddot{\overrightarrow{D}}], \\
\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{6cr^2}\boldsymbol{r}\cdot[\ddot{\overrightarrow{D}}],
\end{aligned} \qquad (12.21)
$$

相应电四极矩的场为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{24\pi c^2r^3}\boldsymbol{r}\times([\dddot{\overrightarrow{D}}]\cdot\boldsymbol{r}), \\
\boldsymbol{E} &= -\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad (12.22) \\
&= \frac{1}{24\pi\varepsilon_0c^3r^4}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}:[\dddot{\overrightarrow{D}}])\boldsymbol{r}-\frac{1}{24\pi\varepsilon_0c^3r^2}\boldsymbol{r}\cdot[\dddot{\overrightarrow{D}}].
\end{aligned}
$$

若记 $\dddot{\overrightarrow{D}}\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{e}_r)$，$\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{24\pi\varepsilon_0c^4r}([\dddot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{e}_r)]\times\boldsymbol{e}_r), \\
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{24\pi\varepsilon_0c^3r}([\dddot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{e}_r)]\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{e}_r.
\end{aligned} \qquad (12.23)
$$

辐射能流的平均值为

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288c^5r^2}\{\dddot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{e}_r\}^2\boldsymbol{e}_r,
\end{aligned} \qquad (12.24)
$$

辐射角分布由因子$\{[\dddot{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{e}_r)]\times\boldsymbol{e}_r\}$决定.

§12.3 多极辐射的对偶性

由(12.19)和(12.20)式，看到磁偶极子的势为

$$\varphi = 0,$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c r^2}[\dot{\boldsymbol{m}}] \times \boldsymbol{r}.$$

我们可以直接由势和场的关系求出磁偶极子的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 其实,我们还有下述更简便的方法:鉴于我们讨论的是远离源的辐射场,可以直接根据 §1.8 中场的对偶性的分析出发,利用对偶关系(1.68)式,对电偶极子辐射场(12.13)式作代换

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\boldsymbol{m}}{c}, \quad \boldsymbol{E} \to c\boldsymbol{B}, \quad c\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E},$$

立即可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\boldsymbol{e}_r \times [\ddot{\boldsymbol{m}}], \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\boldsymbol{e}_r \times (\boldsymbol{e}_r \times [\ddot{\boldsymbol{m}}]). \end{cases} \tag{12.25}$$

不难证明,它和由势出发直接算出的结果是一致的.

同理,我们也可以从电四极矩出发得到磁四极矩的辐射场公式,只要对(12.23)式作同样的变换,就得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{24\varepsilon_0 c^4 r}([\dddot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{e}_r)] \times \boldsymbol{e}_r), \\ \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{24 c^3 r}([\dddot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{e}_r)] \times \boldsymbol{e}_r) \times \boldsymbol{e}_r, \end{cases} \tag{12.26}$$

式中 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{e}_r) = \overrightarrow{D}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{e}_r$, $\overrightarrow{D}_{\mathrm{m}} = \int (3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' - r'^2 \overrightarrow{I})\nabla' \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$. 我们可依次类推,但在一般情况下,到四极矩已足够了.

至此,我们对 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 的展开式中的前几项的物理内容都作了讨论,但还剩下(12.20)式的一项

$$\frac{\mu_0}{24\pi c r^2}\boldsymbol{r}\int r'^2[\dddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'$$

和(12.19)式中的一项

$$\frac{1}{24\pi\varepsilon_0 c^2 r}\int r'^2[\dddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'.$$

可以证明,这两项通过规范变换即可消去,因此它们没有什么本质的物理意义.

【例 3】 证明(12.20)式中的 $\frac{\mu_0}{24\pi c r^2}\boldsymbol{r}\int r'^2[\dddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'$ 和(12.19)式中的 $\frac{1}{24\pi\varepsilon_0 c^2 r}\int r'^2[\dddot{\rho}]\mathrm{d}\tau'$ 两项可以通过规范变换消去.

解　我们知道(12.19)式和(12.20)式所表示的 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 应满足洛伦兹条件,$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. 但是,满足洛伦兹条件的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的形式并不能被唯一确定. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足洛伦

兹条件,则我们可取

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi,$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

若 ψ 满足波动方程

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

则不难证明 $\boldsymbol{A}'$ 和 φ' 亦满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0.$$

因此,只要我们能找到一个满足波动方程的 ψ,且它具有如下的性质:

$$\nabla\psi = -\frac{\mu_0}{24\pi cr^2}\boldsymbol{r}\int r'^2[\dddot{\rho}]\mathrm{d}\tau',$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{24\pi\varepsilon_0 c^2 r}\int r'^2[\ddot{\rho}]\mathrm{d}\tau',$$

则由此所得的 $\boldsymbol{A}'$ 和 φ' 将没有(12.20)式和(12.19)式中的附加项,不难证明,在近似到 $\frac{1}{r}$ 数量级的情况下,取

$$\psi = \frac{\mu_0}{24\pi r}\int r'^2[\dot{\rho}]\mathrm{d}\tau'$$

即可.

【例 4】 试证明:荷质比相同的不同带电粒子组成的体系不会有偶极辐射.

解 设体系有 N 个粒子,第 i 个粒子的质量为 m_i,电荷为 e_i,总质量为 m. 根据电偶极矩的公式,这个体系的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} e_i\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{m_i}m_i\boldsymbol{r}_i.$$

我们讨论的是 $v \ll c$ 的非相对论情况,可以应用非相对论的质心坐标系.设体系质心的矢径为 $\boldsymbol{R}$,则

$$\boldsymbol{R} = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \Big/ \sum_i m_i,$$

或

$$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i = \Big(\sum_i m_i\Big)\boldsymbol{R} = M\boldsymbol{R}.$$

因为 $\frac{e_i}{m_i}$ = 常数(荷质比相同),所以

$$\boldsymbol{p} = \frac{e_i}{m_i}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i = \frac{e_i}{m_i}M\boldsymbol{R},$$

故

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \frac{e_i}{m_i}M\ddot{\boldsymbol{R}}.$$

鉴于质心匀速运动,$\ddot{\boldsymbol{R}} = 0$,于是

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = 0,$$

可见这种体系没有电偶极辐射.

该体系的磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i ,$$

其中 $\boldsymbol{v}_i$ 为第 i 个粒子的运动速度. 上式还可改写成

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i} m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i} \frac{e_i}{m_i} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i ,$$

荷质比 $\frac{e_i}{m_i}$ = 常数，于是

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\frac{e_i}{m_i}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i .$$

在非相对论情况下，$m_i \boldsymbol{v}_i$ 即是第 i 个粒子的动量，而 $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{L}$ 是体系的角动量. 因此，磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{e_i}{2m_i}\boldsymbol{L} .$$

这说明荷质比相同的粒子体系的磁矩与机械角动量之比是一个常数 $\frac{e_i}{m_i}$. 由于体系的角动量是守恒的，故

$$\ddot{\boldsymbol{m}} = 0 ,$$

体系也不存在磁偶极辐射.

【例 5】 中子星是由中子组成的致密星，密度 $\rho = 10^{15}\ \mathrm{g/cm^3}$，半径仅约为 $R_0 = 10\ \mathrm{km}$，表面有极强的磁场，约 $B_0 = 10^8\ \mathrm{T}$. 中子星最重要的特征是发射出周期性脉冲，频率约为 $\omega = 10^2\ \mathrm{s^{-1}}$，故又称脉冲星. 如果认为中子星是一个自转的磁化球，其磁矩方向与自转轴方向不一致，如图 12.5. 试求中子星的辐射场.

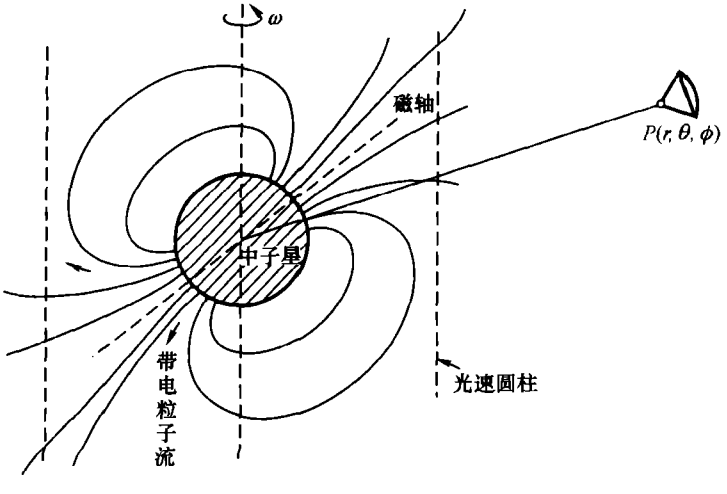


图 12.5

解 设中子星的磁矩为 $\boldsymbol{m}$，它与自转轴夹角为 α，绕自转轴的角速度为 ω，观察点为 $P(r,\theta,\phi)$. 令 ω 轴为 z 轴，则

$$\boldsymbol{m} = m_a\cos\omega t\boldsymbol{e}_x + m_a\sin\omega t\boldsymbol{e}_y + m\cos\alpha\boldsymbol{e}_z,$$

式中 $m_a = m\sin\alpha$. 利用

$$\boldsymbol{e}_x = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi,$$

$$\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi,$$

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$

就可把 $\boldsymbol{m}$ 变换到球坐标系，同时 $\boldsymbol{m}$ 在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的投影是不随时间改变的，我们只要讨论 Oxy 平面上的情况即可，

$$\boldsymbol{m}_a = m_a[\sin\theta\cos(\omega t-\phi)\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos(\omega t-\phi)\boldsymbol{e}_\theta + \sin(\omega t-\phi)\boldsymbol{e}_\phi],$$

即

$$[\boldsymbol{m}_a] = m_a[\sin\theta e^{-i(\omega t'-\phi)}\boldsymbol{e}_r + \cos\theta e^{-i(\omega t'-\phi)}\boldsymbol{e}_\theta + ie^{-i(\omega t'-\phi)}\boldsymbol{e}_\phi],$$

将它代入磁偶极辐射公式(12.25)得

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_a\omega^2}{c^3 r}\boldsymbol{e}_r\times[\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + ie_\phi)e^{-i(\omega t'-\phi)}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_a\omega^2}{c^3 r}[\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi - ie_\theta]e^{i(kr-\omega t+\phi)},$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_a\omega^2}{c^4 r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + ie_\phi)e^{i(kr-\omega t+\phi)}.$$

能流密度的平均值为

$$\langle\boldsymbol{S}_P\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*)$$

$$= \frac{m_a^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^5 r^2}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r$$

$$= \frac{m^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^5 r^2}\sin^2\alpha(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r,$$

总辐射功率为

$$P = \oint\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 m^2}{3c^5}\sin^2\alpha.$$

可见，总辐射功率正比于 ω 的四次方，与实际观察数据——正比于 $\omega^{3.5}$ 比较接近. 因此最早人们曾用这个模型解释中子星的辐射，但是最大的困难是不能解释辐射的“灯塔效应”，即周期性. 目前公认的看法是中子星辐射脉冲的机制是同步辐射，我们将在 §12.9 中再作讨论.

§12.4 线型天线辐射

作为推迟势(12.5)式的具体应用,我们来讨论线型天线的辐射问题. 线型天线是最典型也是最常见的天线结构,它具有较强的辐射能力和较好的辐射方向性.

我们考虑输入到天线中的信号随时间作简谐变化,则天线中的电流线密度一定也随时间作简谐变化,且沿天线长度的分布也是作简谐变化的. 设信号沿天线的中点输入,取此点为坐标的原点,电流对此点是对称的,在天线的两端点$\left(z=\pm\frac{l}{2}\right)$处电流应为零,故电流分布为

$$I(z',t')=I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\sin\left(\frac{kl}{2}-k\,|z'|\right). \tag{12.27}$$

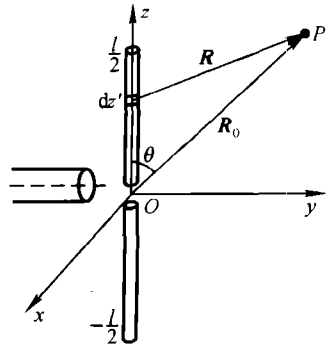


图 12.6

知道了电流分布便可计算矢势 $\boldsymbol{A}$:

$$A_z=\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\left(\frac{kl}{2}-k\,|z'|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R}\mathrm{d}z'.$$

如图 12.6 所示,$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{z}'$,即

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{z}',$$

$$R\approx R_0-z'\cos\theta,$$

可得

$$\begin{aligned}A_z&=\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\sin\left(\frac{kl}{2}-k\,|z'|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}}{R_0-z'\cos\theta}\mathrm{d}z'\\&\approx\frac{\mu_0 I_0}{4\pi R_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\sin\left(\frac{kl}{2}-k\,|z'|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z'\\&=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi kR_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\right].\end{aligned} \tag{12.28}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可求得$\boldsymbol{B}$. 我们只考虑辐射场部分,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla t'\times\dot{\boldsymbol{A}}=\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0}\times\boldsymbol{A}\\&=-\mathrm{i}kA_z\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi, \tag{12.29}$$

再由

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

得

$$\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}/c.$$

由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi B$,求得 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_\theta E$. 因此

$$c\mid\boldsymbol{B}\mid=\mid\boldsymbol{E}\mid,\quad \text{且}\ \boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{E}.$$

由 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 即可求出辐射能流

$$\langle\boldsymbol{S}_\mathrm{P}\rangle=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2\pi cR_0^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2\boldsymbol{e}_r,$$

平均角分布为

$$\langle f(\theta,\varphi)\rangle=\left\langle\frac{\boldsymbol{S}_\mathrm{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2\pi c}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2, \tag{12.30}$$

它依赖于$\frac{1}{2}kl$ 的值.

当天线长度 $l=\frac{\lambda}{2}$时,称为半波天线,此时天线的平均角分布为

$$\langle f(\theta,\varphi)\rangle=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2\pi c}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\right], \tag{12.31}$$

单位时间辐射出去的总平均能量为

$$\langle\Sigma\rangle=\int\langle f(\theta,\varphi)\rangle\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2\pi c}\int\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2c}(\ln\langle 2\pi\gamma\rangle-C_i\langle 2\pi\rangle) \tag{12.32}$$

式中 $\gamma=1.781\,1$, $C_i(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos V}{V}\mathrm{d}V$.

辐射阻抗为

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}(\ln\langle 2\pi\gamma\rangle - C_i\langle 2\pi\rangle),$$

其值为 73.1 Ω，所以半波天线的辐射能力较强．下面我们给出几种长度不同的天线辐射的角分布示意图．由图 12.7 可以看出，随着 $\frac{l}{\lambda}$ 的增大，辐射能量集中在天线方向．

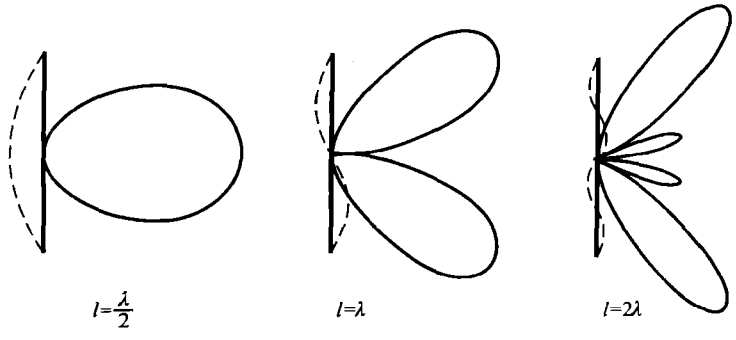


图 12.7

§12.5　天　线　阵

在实际应用中，为了获得更好的辐射方向性，我们常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得较好的方向性．最常用的是把半波天线当作基元天线列阵．惯常的排布有两种：一种是线性排列，如图 12.8，或横向排列，如图 12.9；再有是 $m \times n$ 方阵，如图 12.10．

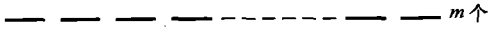


图 12.8

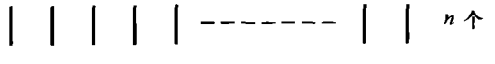


图 12.9

下面我们首先来讨论在线性排列的情况下，它的方向性同单一的半波天线的方向性有什么不同．如图 12.11，m 个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，这就使它们彼此间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性，如图 12.11 所示．每个天线与其邻近的天线之间的路程差为 $l\cos\theta$（l

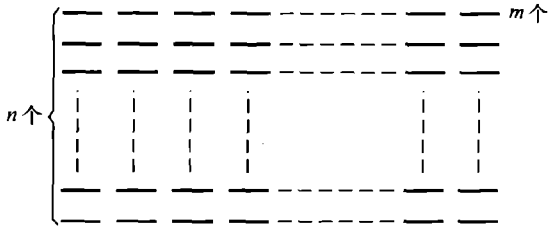


图 12.10

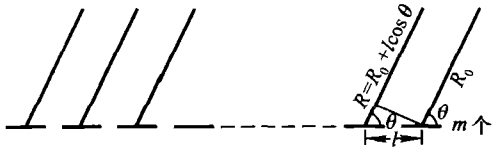


图 12.11

为两天线间的距离),若第一个天线的辐射场为

$$E'_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{i}2I_0}{c}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kR_0)}}{R_0},$$

则第二个半波天线的辐射场为

$$E''_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{i}2I_0}{c}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kR)}}{R}.$$

由于 $R\approx R_0+l\cos\theta$,故有

$$E''_\theta \approx \frac{\mathrm{i}2I_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kR_0)}}{R_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\theta}$$
$$= E'_\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\theta}.$$

同理,可得第三个半波天线的场为

$$E''_\theta \approx E'_\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kl\cos\theta}.$$

依次类推,得 m 个半波天线产生的总场为

$$E_\theta = \sum_{N=0}^{m-1} E'_\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}Nkl\cos\theta}$$
$$= E'_\theta \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mkl\cos\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\theta}}. \tag{12.33}$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子. 由

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mkl\cos\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\theta}}\right|^2=\frac{\sin^2\left(\frac{m}{2}kl\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kl\cos\theta\right)},$$

得辐射角分布的完整表达式为

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{2\pi c}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\left(m\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\tag{12.34}$$

式中 $\alpha=kl\cos\theta$. 若令

$$f(\alpha)=\frac{\sin^2(m\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)},$$

则可以看出：

当 $\alpha=0$ 时 $f(\alpha)$有极大值，其值为 $f(0)=m^2$；当 $\alpha=\frac{2\pi}{m},\frac{4\pi}{m},\cdots,\frac{(m-1)2\pi}{m}$ 时有极小值，分布情况如图 12.12 所示，主极大在 $\alpha=0$ 处，第一个极小在 $\alpha=\frac{2\pi}{m}$ 处，即 $kl\cos\theta=\frac{2\pi}{m}$处. 若令 $\psi=\frac{\pi}{2}-\theta$，则 $kl\sin\psi=\frac{2\pi}{m}$. 主极大的范围为

$$\sin\psi=\frac{2\pi}{mkl}=\frac{\lambda}{ml}.$$

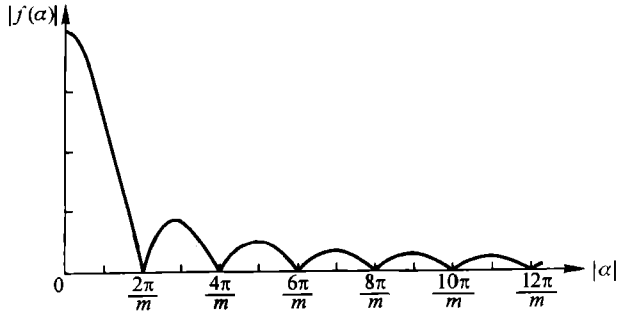


图 12.12

可见，m 大则 ψ 角度小，这表示 θ 的方向性很强.

同理，我们可以讨论横向排列的情况，这种排列与线性排列唯一的不同之处是相邻两天线间的路程差与 ϕ 有关，如图 12.13. 若相邻两天线间的距离为 l，则路程差为 $l\cos\psi=l\sin\theta\cos\phi$，所以 n 个天线的总场强为

$$E_\theta=cB_\phi=E'_\theta\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkl\cos\phi\sin\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\phi\sin\theta}}.$$

同理,此时角分布多了一个因子

$$\frac{\sin^2(n\beta/2)}{\sin^2(\beta/2)},$$

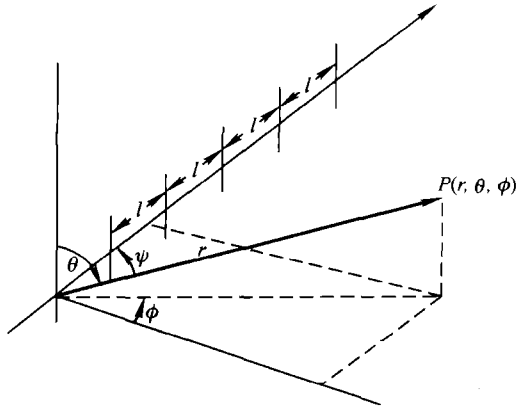


图 12.13

式中 $\beta = kl\cos\phi\sin\theta$. 若令

$$f(\beta) = \frac{\sin^2(n\beta/2)}{\sin^2(\beta/2)},$$

则得出 $\beta=0$ 时,是主极大,值为 $f(0)=n^2$. 主极大的位置在 $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$处. 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$的平面上看,辐射角分布大致情况如图 12.14 所示.

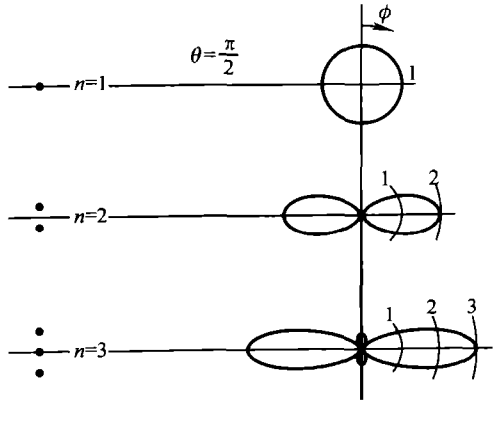


图 12.14

§12.6 李纳－维谢尔势

前面我们讨论了电荷连续分布情况下的辐射特性，本节将主要研究任意运动的带电粒子所产生的电势和场. 假定空间只有一个带电粒子，设带电粒子在空间的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_e$，由于带电粒子是点电荷，所以运动着的带电粒子体系的电荷密度和电流密度可表示为

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{r},t) = e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e(t)), \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e(t)), \end{cases} \tag{12.35}$$

式中 $\boldsymbol{r}_e(t)$是带电粒子的位置矢量，带电粒子的速度为 $\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_e(t)}{\mathrm{d}t}$，把电荷密度和电流密度的表达式(12.35)代入(12.5)式，即得运动带电粒子在空间产生的电势为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))]}{R}\mathrm{d}\tau', \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{[e\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))]}{R}\mathrm{d}\tau', \end{aligned} \tag{12.36}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. $\boldsymbol{r}$ 是观察点的位置矢量，$\boldsymbol{r}'$则是积分元 $\mathrm{d}\tau'$的位置矢量，所以 R 是积分元 $\mathrm{d}\tau'$到观察点的距离. 下面我们讨论如何求出(12.36)式的积分，因为

$$\begin{aligned} [e\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))] &= e\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))\big|_{t'=t-\frac{R}{c}} \\ &= \int_{-\infty}^{t} e\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}t' \end{aligned}$$

所以(12.36)式可以写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[e\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))]}{R}\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int_{-\infty}^{t} \frac{e\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))}{R}\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t', \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int_{-\infty}^{t} \frac{e\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))}{R}\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t'. \end{aligned}$$

注意：式中的 t 是场点，即观察点的时间. 对 t'的积分是由 $t'=-\infty$ 到 $t'=t$. 上式的积分先对 $\mathrm{d}\tau'$进行，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{e\boldsymbol{v}(t')}{R}\delta\left(t'-t+\frac{R}{c}\right)\Big|_{\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_e(t')}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{e\boldsymbol{v}(t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e(t')|}\delta\left(t'-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e(t')|}{c}\right)\mathrm{d}t', \end{aligned}$$

上式在对 dt' 积分时，由于此时 δ 函数的自变量是个函数，故不能直接代入，但因为

$$\int f(x)\delta(\varphi(x))dx = \frac{f(x)}{|\varphi'(x)|}\bigg|_{\varphi(x)=0},$$

故

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{e\boldsymbol{v}(t')}{R(t')}\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right)dt'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}(t')}{R(t')\left|\dfrac{d}{dt'}\left(t' - t + \dfrac{R(t')}{c}\right)\right|}\Bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}.$$

因为 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_e(t')$，故

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt'} = -\frac{d\boldsymbol{r}_e}{dt'} = -\boldsymbol{v}(t').$$

又

$$\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{R}}{dt'} = -\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v},$$

$$R\frac{dR}{dt'} = \frac{1}{2}\frac{dR^2}{dt'} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt'}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{R}}{dt'},$$

得

$$\dot{R} = -\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R},$$

于是有

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}(t')}{R(t')\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e\boldsymbol{v}}{R\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)}\right]. \tag{12.37}$$

同理可得

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e}{R\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)}\right]. \tag{12.38}$$

(12.37)式和(12.38)式便是一个带电粒子任意运动时产生的矢势和标势，亦称*李纳－维谢尔势*. *式中的量* $\dfrac{e}{\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)}$ *常称为有效电荷量*，$\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R}\right)$ 称为电荷量的改正因子，当带电粒子运动时，它反映了有效电荷量的改变.

§12.7 运动带电粒子的电磁场

上面我们已求得势，对势求微商即可得到场的表达式，但因微商是对观察点的坐标进行的，而势的表达式却是推迟的形式，这就给微分带来了麻烦. 下面我们先把运算中所要用到的一些量列出来：

(1) 观察点的坐标为 $x_\mu = (\boldsymbol{r}, \mathrm{i}ct)$，而方括号内的量是 $R(t') - \frac{\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{v}(t')}{c}$，其中 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$，因此在对 t 微商时，一定会碰到 $\frac{\partial t'}{\partial t}$. 为了书写方便，我们把 $R(t')$ 记为 R，它是 t' 的函数，所以

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(t - \frac{R}{c}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}$$

$$= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

故

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\right) = 1.$$

同时

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t')|$$

$$= -\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}(t')}{R},$$

故

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1 - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{cR}\right) = 1,$$

即

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{K},$$

式中

$$K = \left(R - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right),$$

于是得到公式

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{K}\frac{\partial}{\partial t'}. \tag{12.39}$$

(2)

$$\nabla t' = \nabla\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{1}{c}\nabla R$$

$$= -\frac{1}{c}\left\{(\nabla R)\Big|_{t'\text{不变}} + \frac{\partial R}{\partial t'}\nabla t'\right\}$$

$$= -\frac{\boldsymbol{R}}{cR} + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\nabla t',$$

即 $$\nabla t' = -\frac{\boldsymbol{R}}{cK},$$

故有公式

$$\nabla = \nabla\Big|_{t'\text{不变}} - \frac{\boldsymbol{R}}{cK}\frac{\partial}{\partial t'}. \tag{12.40}$$

有了以上的结果,电磁场的表达式就很容易写出来. 我们早已知道

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

$$-\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{e}{K}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 K^2}\nabla K$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{K^2}\left(\nabla\Big|_{t'\text{不变}} K - \frac{\boldsymbol{R}}{cK}\frac{\partial}{\partial t'}K\right),$$

于是

$$\nabla\Big|_{t'\text{不变}} K = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c},$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}K = -\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c} + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c},$$

这样 $$-\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{K^2}\left[\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) + \frac{\boldsymbol{R}}{cK}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R} + \frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right)\right].$$

同时 $$-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{R}{K}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{e\boldsymbol{v}}{cK}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{c^2}\frac{R}{K^2}\left[\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{\boldsymbol{v}}{K}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c} - \frac{v^2}{c}\right)\right],$$

故 $$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{e}{K^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{R\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{e}{c^2K^3}\boldsymbol{R}\times\left[\left(\boldsymbol{R} - \frac{R\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}. \tag{12.41}$$

上式中的量,尽管我们没有用方括号,但都应把它们理解为推迟量,即是 t' 的函数. 同理,我们可以求得

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{R}}{cR}\times\boldsymbol{E}. \tag{12.42}$$

由(12.41)和(12.42)两式可以看出:电场和磁场都由两部分组成,其中第一部分*场的特点是与距离的平方成反比,这部分场与电荷联系在一起,它不代表辐射的*电磁场,称为感应场;另一部分是与距离的一次方成反比,其总能流一定与 R 无关,这意味着这部分场可以脱离源而独立存在,它可以辐射出去,故称为辐射场,

由于这部分场与加速度有关，所以又称“加速度”场. 引起带电粒子加速的可能性是很多的，如带电粒子在电磁场的作用下得到加速度，从而引起辐射，这就是一般的同步辐射、回旋辐射. 又如带电粒子之间的碰撞，或在库仑力作用下使带电粒子产生加速度，一般称为韧致辐射. 由(12.42)式还可看出，辐射场的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{R}$ 满足右手螺旋法则.

§12.8 非相对论运动带电粒子的辐射

这里我们考虑的带电粒子的速度都是很小的，即 $v \ll c$，但 $\dot{\boldsymbol{v}} \neq 0$，而且我们只讨论辐射场部分.

1. 场分布的情况

由于 $\frac{v}{c} \ll 1$，这样

$$K = R - \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}}{c} \approx R,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{K}\frac{\partial}{\partial t'} \approx \frac{\partial}{\partial t'},$$

于是得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2 R^3}[\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{v}})], \\ \boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{R}}{cR} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^3 R^2}[\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{v}}]. \end{aligned} \tag{12.43}$$

若取 z 轴为 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 方向，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{e\,|\,\dot{\boldsymbol{v}}\,|}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta, \\ \boldsymbol{B} &= \frac{e\,|\,\dot{\boldsymbol{v}}\,|}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\sin\theta \boldsymbol{e}_\phi. \end{aligned} \tag{12.44}$$

所以，场分布与偶极子场的情况相类似.

2. 角分布

由 $\boldsymbol{S}_P = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2 \sin^2\theta \frac{\boldsymbol{R}}{R}$，得到

$$f(\theta,\phi) = \frac{\boldsymbol{S}_P \cdot d\boldsymbol{S}}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2 \sin^2\theta, \tag{12.45}$$

其分布参见图 12.4.

3. 辐射功率

单位时间辐射的能量为

$$P = \int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\boldsymbol{v}}|^2. \tag{12.46}$$

§12.9 一般带电粒子的辐射

1. 场分布的情况

(12.41)和(12.42)两式的第二部分是带电粒子运动时产生的辐射场,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2K^3}\left\{\boldsymbol{R}\times\left[\left(\boldsymbol{R}-\frac{R\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eR^2}{cK^3}\{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\},\end{aligned} \tag{12.47}$$

式中 $\boldsymbol{e}_R=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$, $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}$,

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{E}.$$

2. 角分布

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\\ &= \frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{E})\\ &= \frac{1}{\mu_0 c}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{e}_R = \varepsilon_0 c|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{e}_R,\end{aligned} \tag{12.48}$$

故在 Δt 时间间隔内穿过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面的能量是

$$\Delta W = \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Delta t = S_{\mathrm{P}}R^2\mathrm{d}\Omega\Delta t ,$$

我们应注意:上式中的能量是观察者在 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面附近 Δt 时间间隔内观察到的. 但是,这些能量是带电粒子在 $\Delta t'$ 时间间隔内发出的,而我们所关心的是带电粒子在单位时间内辐射出去的能量,即单位时间内带电粒子的能量损失,即

$$-\frac{\Delta W}{\Delta t'} = S_{\mathrm{P}}R^2\mathrm{d}\Omega\frac{\Delta t}{\Delta t'} = S_{\mathrm{P}}R^2\mathrm{d}\Omega\frac{K}{R}. \tag{12.49}$$

因而单位时间内沿 $\mathrm{d}\Omega$ 方向辐射出去的能量,即角分布为

$$f(\theta,\phi) = \frac{\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Delta t}{\mathrm{d}\Omega\Delta t'} = \frac{1}{\mu_0 c}E^2RK. \tag{12.50}$$

(12.50)式就是我们所要求的辐射角分布公式. 在上一节非相对论情况下讨论

角分布时，我们没有作上面的分析，那是因为在非相对论情况下有$\frac{\Delta t}{\Delta t'}=1$. 把场的具体形式(12.47)式代入(12.50)式，即得

$$f(\theta,\phi)=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{e^2R^5}{cK^5}\left|\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\right|^2, \tag{12.51}$$

(12.51)式是带电运动粒子角分布的一般表达式，式中因子

$$\frac{R^5}{K^5}=\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{cR}\right)^{-5}=(1-\beta\cos\theta)^{-5}, \tag{12.52}$$

式中的θ为$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{v}$之间的夹角. 显然由于因子(12.52)式的出现，使辐射能量向θ小的方向，即带电粒子速度的方向上倾斜. 当$\theta=0$时，辐射能量达到极大，辐射集中在以$\boldsymbol{v}$的方向为轴的狭小角锥之中. 下面我们具体分两种情况.

(1) $\boldsymbol{v}\parallel\dot{\boldsymbol{v}}$：这种情况的辐射又称为韧致辐射，例如在直线加速器中的辐射；高能电子打到金属靶上时，因运动方向减速而产生的X射线辐射；带电粒子在库仑场中的辐射等. 把$\boldsymbol{v}\parallel\dot{\boldsymbol{v}}$的条件代入(12.50)式，则有

$$\begin{aligned}f(\theta,\phi)&=\frac{e^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0}\frac{R^5}{K^5}\left[\boldsymbol{e}_R\times(\boldsymbol{e}_R\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\right]^2\\&=\frac{e^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0}\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\end{aligned} \tag{12.53}$$

可以看出，这时的辐射与带电粒子的速度有关，$\beta\to0$时，就回到偶极辐射的情况，角分布的特点为绕$\boldsymbol{v}$轴旋转对称. 分母中出现$(1-\beta\cos\theta)^5$的因子，它引起角分布向前倾. 随着$\boldsymbol{v}$的增大，向前倾的程度亦增大. 角分布的具体情况如图12.15所示.

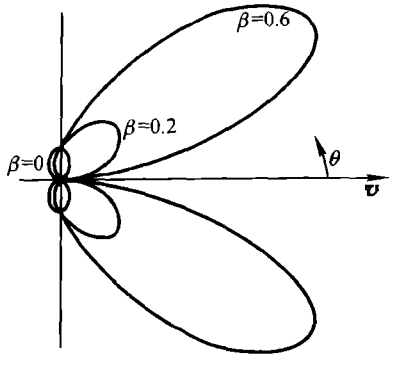


图 12.15

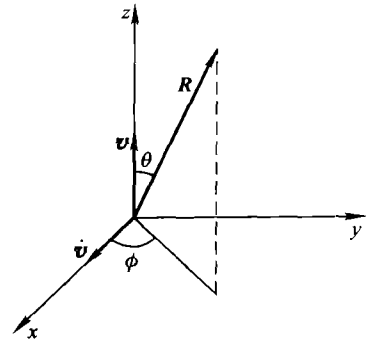


图 12.16

(2) $\boldsymbol{v}\perp\dot{\boldsymbol{v}}$：这种情况的辐射又称为同步辐射，例如带电粒子在静磁场中的运动. 如图12.16，若取z轴为瞬时速度$\boldsymbol{v}$的方向，x轴为瞬时加速度$\dot{\boldsymbol{v}}$的方向，

则有

$$\boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{e}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\sin\theta\cos\phi,$$

于是角分布此时可写为

$$f(\theta,\phi) = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{[(1-\beta\cos\theta)^2\dot{\beta}^2 - (1-\beta^2)\dot{\beta}^2\sin^2\theta\cos^2\phi]}{(1-\beta\cos\theta)^5}, \tag{12.54}$$

由此可见,此时角分布不仅与 θ 有关,还与 ϕ 有关,比较复杂. 若限定观察者在 $\phi=0$ 的平面内观察,则角分布的表达式可简化为

$$f(\theta,0) = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0}\dot{\beta}^2\left[\frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\right], \tag{12.55}$$

可以看出,在 $\theta=0$ 处,分母$(1-\beta\cos\theta)^5$ 的值最小,所以辐射最强. 在 $\cos\theta_0=\beta$ 处,$f(\theta_0,0)=0$,在此方向无辐射,辐射集中在 $2\theta_0$ 范围内,且 v 的值越大,能量分布越集中. 分布情况如图 12.17 所示.

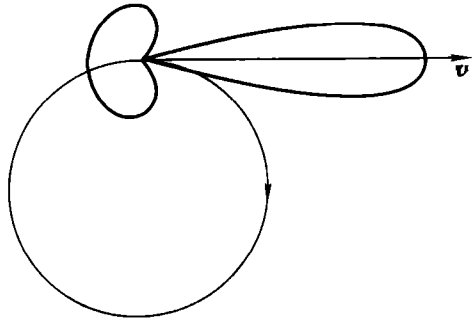


图 12.17

由以上的讨论不难发现,高速带电粒子的辐射具有显著的方向性,这种特性常称为相对论粒子辐射的集束效应.

3. 辐射功率

知道了辐射角分布 $f(\theta,\phi)$后,对其直接作如下的积分:

$$P = \int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega,$$

即可得辐射功率. 分别把(12.53)式和(12.54)式代入上式,积分后可得,

$\boldsymbol{v} \parallel \dot{\boldsymbol{v}}$ 时为

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{(1-\beta^2)^3}, \tag{12.56}$$

$\boldsymbol{v} \perp \dot{\boldsymbol{v}}$ 时为

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{(1-\beta^2)^2}, \tag{12.57}$$

一般情况时为

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]. \tag{12.58}$$

由(12.58)式可知,相对论带电粒子的辐射总功率与粒子的运动速度有关,且随着 v 的增大而增大. 当 $\beta\to 0$ 时,$\gamma\to 1$,此时回到偶极辐射情况.

现在,我们利用同步辐射的特点来说明一下中子星的辐射. 由图 12.17 可以看出,同步辐射的特点在于辐射能集中在以速度方向为中心的一个很小的立体角内,随着粒子运动方向的变化,辐射像探照灯的灯光一样扫过空间. 现在理论研究表明,中子星是个倾斜自转磁体,如图 12.5,由于冻结效应,中子星附近光速圆柱内的等离子体随它一道转动,而光速圆柱外的等离子体向外流. 由于外流的带电粒子在强磁场中的运动轨道几乎沿着磁场方向,所以它发出的同步辐射也几乎在磁场方向. 中子星不停的自转,当磁场指向地球时,我们就能观察到它发射的脉冲,如图 12.18 所示.

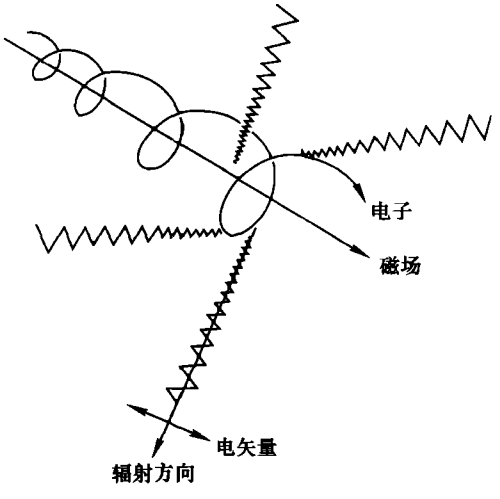


图 12.18

*§12.10 运动带电粒子辐射的频谱分析

前一节我们讨论了带电粒子运动时所辐射的能量,得到的能量表达式包含了各种辐射频率,但在实际问题中,我们常常还需要知道在某一频率范围内辐射出去的能量;也就是说,

需要把辐射能量公式进行谱分解，这正是本节所要讨论的问题，处理这一问题的数学工具是大家熟知的傅里叶变换.

1. 傅里叶变换的基本公式

若 $f(t)$和 $F(\omega)$，$g(t)$和 $G(\omega)$分别表示傅里叶变换的原函数和像函数，则由傅里叶分析知

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\ ,$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\ .$$

对上式两边取复共轭，则有

$$f^{*}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F^{*}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F^{*}(-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega)t}\mathrm{d}\omega\ ,$$

若 $f(t)=f^{*}(t)$，即 $f(t)$为实函数，则其像函数有关系

$$F^{*}(\omega)=F(-\omega), \tag{12.59}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F(-\omega)\mathrm{d}\omega\\&=4\pi\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{12.60}$$

2. 加速带电粒子辐射的能谱

在前一节中我们已经得到观察者在 t 时刻测得的单位立体角内的辐射功率为

$$\frac{\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{\mu_0 c}E^{2}R^{2}, \tag{12.61}$$

式中 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{R}$ 都是推迟时间的量. 这里我们考虑的是从观察者的角度来表示频谱，故与上一节不同，不出现$\frac{\Delta t}{\Delta t'}$的因子. 令

$$\boldsymbol{f}(t)=\sqrt{\frac{1}{\mu_0 c}}\boldsymbol{E}R,$$

则

$$\frac{\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\Omega}=|\boldsymbol{f}(t)|^{2}. \tag{12.62}$$

将(12.62)式对时间 t 积分，即得单位立体角的总辐射能

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f}(t)|^{2}\mathrm{d}t=4\pi\int_{0}^{\infty}|\boldsymbol{F}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega. \tag{12.63}$$

于是，单位立体角、单位频率间隔的辐射能为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega} = 4\pi |\boldsymbol{F}(\omega)|^2 . \tag{12.64}$$

我们知道,加速带电粒子的辐射场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2 K^3}\left\{\boldsymbol{R}\times\left[\left(\boldsymbol{R}-\frac{R}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\},$$

令 $\frac{v}{c}=\beta$, $\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{e}_R$, $\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)=\alpha$,则

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{cR\alpha^3}\{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\},$$

这样

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t) &= \sqrt{\frac{1}{\mu_0 c}}\,\boldsymbol{E}R \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e^2}{\mu_0 c^3}}\,\frac{1}{\alpha^3}\{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\},\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e^2}{\mu_0 c^3}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\alpha^{-3}\{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\}\mathrm{d}t .$$

由于被积函数是 t'的函数,我们必须把积分变量换成 t'. 由 $t'=t-\frac{R}{c}$,得到 $\mathrm{d}t=\alpha\mathrm{d}t'$,于是

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e^2}{\mu_0 c^3}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t'+\frac{R}{c}\right)}\times\left\{\frac{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\alpha^2}\right\}\mathrm{d}t' . \tag{12.65}$$

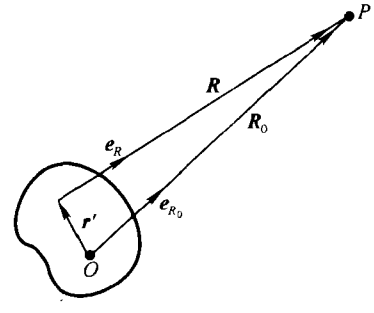


图 12.19

若观察点距粒子加速区很远,如图 12.19,我们可以把 R 看作是由加速区中的某一点到观察点的距离,$\boldsymbol{e}_R$ 可近似认为不变,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &\approx \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}'\cdot\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0} \\ &= \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{e}_{R_0}\cdot\boldsymbol{r}',\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{r}'(t')$是粒子相对原点的位置,$\boldsymbol{e}_{R_0}=\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0}\approx\boldsymbol{e}_R$,可见

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e^2}{\mu_0 c^3}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}R_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t'-\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_R}{c}\right)}\left\{\frac{\boldsymbol{e}_R\times[(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{\alpha^2}\right\}\mathrm{d}t' .$$

把上式中的 t'换为 t,代入(12.64)式即得

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{e}_R\times(\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\alpha^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_R}{c}\right)}\mathrm{d}t\right|^2 . \tag{12.66}$$

3. 非相对论运动带电粒子的能谱

在非相对论情况下,$v\ll c$, $\beta\to 0$, $\alpha=1-\frac{v}{c}\cos\theta\approx 1$,此时,(12.66)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{e}_R \times (\boldsymbol{e}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right|^2. \tag{12.67}$$

在具体过程中,粒子加速或减速只发生在很短的时间内. 例如,在电子和质子碰撞的问题中,质子可看作是不动的,电子只在碰撞一瞬间 τ 内才发生速度的变化,因而(12.67)式中的积分只需对时间间隔 τ 进行.

若 $\omega\tau \ll 1$,就有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \approx 1$,于是(12.67)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{\tau}\boldsymbol{e}_R \times (\boldsymbol{e}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}})\mathrm{d}t\right|^2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}|\boldsymbol{e}_R \times (\boldsymbol{e}_R \times \Delta\beta)|^2,$$

$\Delta\beta$ 代表粒子的末速度和初速度的差. 若 $\boldsymbol{e}_R$ 与 $\Delta\beta$ 的夹角为 Θ,则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}|\Delta\beta|^2 \sin^2\Theta \quad (\omega\tau \ll 1), \tag{12.68}$$

对立体角进行积分,则得总辐射能量的频率分布为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c}|\Delta\beta|^2, \tag{12.69}$$

可见 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\omega}$ 与频率无关.

若 $\omega\tau \gg 1$,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 为振荡函数,此时我们可认为(12.67)的积分值近似为零,所以

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\omega} = 0 \quad (\omega\tau \gg 1), \tag{12.70}$$

辐射频谱分布如图 12.20 所示. 其中 $\omega_{\max}$ 可由电子的动能决定:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega_{\max}.$$

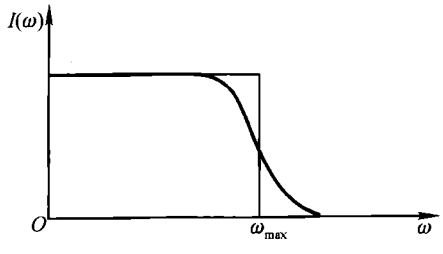


图 12.20

对于(12.69)式,我们利用普朗克假定,还可以用光子数来表示. 若 $N(\omega)$ 表示频率为 ω 的光子数,则有关系式

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega = \hbar\omega N(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

这样

$$N(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c}|\Delta\beta|^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\hbar\omega}$$

$$= \frac{1}{137}\frac{2}{3\pi}|\Delta\beta|^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}, \tag{12.71}$$

式中$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\frac{1}{137}$. (12.71)式表示低能光子数与光子能量成反比,当$\omega\to 0$时,总能量虽是有限的,但零能量的光子数却是无限的.

*§12.11 切连科夫辐射

由上所述,在真空中只有当粒子作加速运动时才有辐射,而作匀速运动的粒子是不会辐射电磁波的. 然而,在介质中运动的带电粒子,即使是匀速运动,在一定条件下也会出现一种奇异的辐射,这种辐射现象是由切连科夫发现的,故称为切连科夫辐射,并由塔姆和夫兰克作出了理论解释(1937年). 这种辐射是快速粒子通过介质时产生的一种普遍现象,我们有必要作详细的研究.

在有色散的非磁性介质中,满足洛伦兹条件的$\boldsymbol{A}$和φ满足的方程为

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\boldsymbol{j},\\ \varepsilon_r\left(\nabla^2\varphi-\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\right)&=-\rho/\varepsilon_0,\end{aligned}\tag{12.72}$$

式中ε_r是色散介质的相对介电常数算符(见§8.10),作傅里叶展开后(即对单色波),$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$等效于$\boldsymbol{D}=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}$. 现在$\rho=e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$,$\boldsymbol{j}=e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$,对$\boldsymbol{A}$、$\varphi$和$\boldsymbol{j}$、$\rho$作空间坐标的傅里叶变换:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k,\\ \varphi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k,\\ \boldsymbol{j}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{j}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k,\\ \rho=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\rho_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k,\end{cases}\tag{12.73}$$

并将它们代入$\boldsymbol{A}$、φ所满足的(12.72)式,得

$$k^2\boldsymbol{A}_k+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_k}{\partial t^2}=\mu_0 e\boldsymbol{v}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t},\tag{12.74}$$

$$\varepsilon_r\left(k^2\varphi_k+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2}\right)=\frac{e}{\varepsilon_0}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t},\tag{12.75}$$

其中利用了$\boldsymbol{A}$、φ、$\boldsymbol{j}$、ρ的反变换公式

$$f_k=\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r}.$$

从(12.74)和(12.75)式看出,φ_k和$\boldsymbol{A}_k$的时间因子是$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t}$,相当于单色波,因此我们把其中的$\varepsilon_r$改成$\varepsilon_r(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$,于是(12.74)和(12.75)式便可改写成

$$\boldsymbol{A}_k = \mu_0 e \frac{\boldsymbol{v}}{k^2 - \frac{\varepsilon_r(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{c^2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t}, \tag{12.76}$$

$$\varphi_k = \frac{e}{\varepsilon_r(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})\varepsilon_0} \frac{1}{k^2 - \frac{\varepsilon_r(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{c^2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t}, \tag{12.77}$$

这样,我们可以求出电场 $\boldsymbol{E}$ 的空间坐标的傅里叶变换

$$\boldsymbol{E}_k = i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}_k - i\boldsymbol{k}\varphi_k. \tag{12.78}$$

(12.76)、(12.77)和(12.78)式就是讨论切连科夫辐射的出发点.

1. 切连科夫辐射的必要条件

在介质中,电磁波的波矢 $\boldsymbol{k}$ 和频率 ω 的关系是

$$k = \frac{\omega}{c}n(\omega), \tag{12.79}$$

式中 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 是介质的折射率. (12.79)式是对平面电磁波普遍成立的色散关系. 现在 $\boldsymbol{A}_k$ 和 φ_k 是运动粒子在介质中激发的势,如果设粒子沿着 z 方向匀速运动,$\boldsymbol{A}_k$ 和 φ_k 的时间因子便是 $e^{-ik_z v t}$,我们认为时间因子正好表示自由传播的电磁波,也就是说,认为傅里叶变换中的 $\boldsymbol{k}$ 是电磁波的波矢,而 $k_z v$ 是电磁波的频率,即

$$\omega = k_z v, \tag{12.80}$$

则由(12.73)式得

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}_{k_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} d^3k,$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{k_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} d^3k.$$

显然,它们是无穷多平面波的线性叠加. 这样,如果 $\boldsymbol{A}$、φ 是以波动的方式在介质中传播,则(12.79)和(12.80)式应当一致;也就是说,(12.80)式中的 k_z 是(12.79)式中的 k 的 z 分量,故 $k>k_z$,于是得到

$$\frac{\omega}{c}n(\omega) > \frac{\omega}{v},$$

即

$$v > \frac{c}{n(\omega)}. \tag{12.81}$$

可见,当粒子的速度超过介质中的光速时就可以发生电磁波的辐射,再注意到 n 是 ω 的函数,于是辐射的只是那些相速度小于粒子速度的电磁波.

2. 辐射角的分布

设电磁波的传播方向,即辐射方向,与粒子运动方向的夹角为 θ,则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = k_z v = kv\cos\theta,$$

即

$$k_z = k\cos\theta,$$

而 $k_z = \frac{\omega}{v}$,$k = \frac{\omega}{c}n$,于是

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \tag{12.82}$$

这表明:给定了带电粒子的速度,电磁波辐射的方向也随即确定. 这个特殊的辐射方向,便是粒子在其运动轨迹上的各点所辐射的波的干涉加强的方向,如图 12.21 所示.

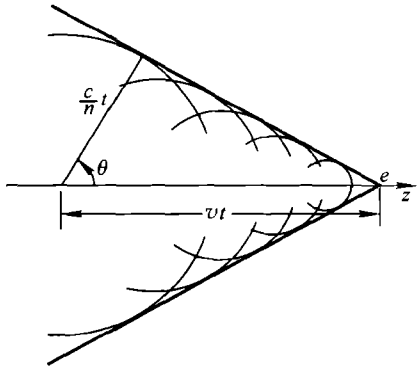


图 12.21

值得注意的是,由于介质是色散介质,n 是 ω 的函数,所以对于不同频率的电磁波,辐射角的方向也不同. 每种频率的电磁波都沿着以粒子运动方向为极轴,$\frac{\pi}{2}-\theta$ 为顶角的圆锥面的法线方向辐射. 由(12.82)式得出频率间隔 $\mathrm{d}\omega$ 内的辐射集中在 $\mathrm{d}\theta$ 内,其值为

$$\mathrm{d}\theta = \frac{c}{vn^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega. \qquad (12.83)$$

3. 切连科夫辐射强度

运动的带电粒子辐射电磁波是以粒子能量的损失为代价的,在无损耗的透明介质中,运动粒子损失的能量即是辐射电磁波的能量. 运动粒子的能量损失是粒子产生的场作用在粒子本身上的力所作的功,这个力为 $\boldsymbol{F}=e[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]$,磁场力并不作功,可见我们只需计算 $\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}$ 作的功. 把(12.78)式代入

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3k,$$

利用(12.76)和(12.77)式,我们即得

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^3\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3k\left[\frac{\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{v}-\frac{1}{\varepsilon_r(\omega)}\boldsymbol{k}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)}.$$

我们讨论的是粒子所在处的场,于是

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^3\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_z\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\left[\frac{\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{v}-\frac{1}{\varepsilon_r(\omega)}\boldsymbol{k}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)}\right].$$

由于 $k^2=k_z^2+(k_x^2+k_y^2)$,若令 $k_x^2+k_y^2=k_\perp^2$,则 $\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y=2\pi k_\perp\mathrm{d}k_\perp$. 由对称性可知,$\boldsymbol{F}$ 在 k_x 和 k_y 方向的分量一定为零,所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向即为粒子运动的方向. 这样,我们便有

$$F = \frac{\mathrm{i}e^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\frac{1}{v}\int_0^{\infty}\frac{\left[\frac{\omega}{c^2}v-\frac{1}{\varepsilon_r(\omega)}\frac{\omega}{v}\right]k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp}{k_\perp^2+\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)}$$

$$= -\frac{ie^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_0^{\infty}\mathrm{d}k_\perp\,\frac{\omega\left(\frac{1}{v^2\varepsilon_r}-\frac{1}{c^2}\right)k_\perp}{k_\perp^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}.$$

可见,在频率间隔 $\mathrm{d}\omega$ 内的能量损失是

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\sum\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2\varepsilon_r}\right)\int_0^\infty \frac{k_\perp\, dk_\perp}{k_\perp^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}. \tag{12.84}$$

注意:由于对 ω 的积分是 $-\infty\to+\infty$,所以上式中的 Σ 表示对含有 $\omega=\pm|\omega|$ 的项求和. 令 $\eta=k_\perp^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)$,则(12.84)式成为

$$dF=-d\omega\frac{ie^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\sum\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2\varepsilon_r}\right)\int\frac{d\eta}{\eta}.$$

透明介质的 $\varepsilon(\omega)$是实数,由(8.120)式可知 $\varepsilon(\omega)$是偶函数,可见我们只需求

$$\sum\omega\int\frac{d\eta}{\eta}. \tag{12.85}$$

这是一个沿实轴的积分,$\eta=0$ 是奇点. 为了给出物理上有意义的结果,我们必须考虑上述积分的物理内容. 在实际情况下,$\varepsilon(\omega)$总有虚部,即 $\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_r'+i\varepsilon_r''$,而所谓透明介质是指 $\varepsilon_r''\to0$,这样积分(12.85)式实际上是求 $\varepsilon_r''\to0$ 的极限情况时的积分,根据§8.10知,当 $\omega>0$ 时 $\varepsilon_r''>0$,又由(8.120)知,当 $\omega<0$ 时 $\varepsilon_r''<0$,可见 $\omega>0$,η 有负的虚部,此时积分(12.85)取实轴下方的线积分,于是(12.85)式可写成如下形式:

$$\int\frac{d\eta}{\eta}=\lim_{\Delta\to0^+}\int\frac{d\eta}{\eta-i\epsilon}\quad(\omega>0).$$

同样,$\omega<0$ 时 $\varepsilon_r''<0$,η 有正的虚部,此时积分取实轴上方的线积分,(12.85)式写成

$$\int\frac{d\eta}{\eta}=\lim_{\Delta\to0^+}\int\frac{d\eta}{\eta+i\epsilon}\quad(\omega<0).$$

利用主值积分公式(见附录六)

$$\frac{1}{\eta\pm i\epsilon}=P\frac{1}{\eta}\mp i\pi,$$

可把(12.85)式写成

$$\sum\omega\int\frac{d\eta}{\eta}=\omega\left[P\int\frac{d\eta}{\eta}+i\pi\right]-\omega\left[P\int\frac{d\eta}{\eta}-i\pi\right]=2\pi i\omega,$$

最后得到

$$dF=-d\omega\frac{ie^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{v^2\varepsilon_r}\right)\sum\omega\int\frac{d\eta}{\eta}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_r}\right)\omega d\omega. \tag{12.86}$$

这就是切连科夫辐射在频率间隔 $d\omega$ 内的强度的精确公式.

4. 切连科夫辐射的偏振

我们从(12.76)式看出,辐射场的矢势沿着粒子的运动方向,因此磁场的傅里叶分量 $\boldsymbol{H}_k$ 也一定是

$$\mu_0\boldsymbol{H}_k=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}_k.$$

这表示磁场强度垂直于粒子运动方向与波传播方向构成的平面,即 $\boldsymbol{H}_k\perp\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{H}_k\perp\boldsymbol{v}$.

同时,我们还可从(12.78)式看出,电场强度的方向是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 之差的方向. 显然,$\boldsymbol{E}_k$ 一定

在$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{k}$组成的平面内，由此可知，电场和磁场是互相垂直的.

5. 切连科夫辐射波的结构

由(12.73)、(12.76)和(12.77)式，可以得到φ和$\boldsymbol{A}$的分布.

$$\varphi = \frac{e}{8\pi^3\varepsilon_r\varepsilon_0}\int \frac{e^{ik_z(z-vt)}e^{ik_\perp \rho\cos\phi}}{k_\perp^2 - k_z^2\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)} k_\perp \, dk_z dk_\perp d\phi,$$

因为$\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1 > 0$，所以在$k_z = \pm k_\perp \Big/ \sqrt{\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1}$处分母为零. 如前分析，我们所研究的是无损耗的透明介质，但实际上只是讨论弱吸收的极限情况，即$\varepsilon_r'' \to 0$. 我们把上述积分拓展到整个复平面，此时不难看出，$k_z > 0$时$\varepsilon_r'' > 0$，$k_z < 0$时$\varepsilon_r'' < 0$(类似3中的分析)，可见分母中的两个零点都在复k_z平面的下半平面，这样我们可以作如图12.22所示的回路积分. 根据若尔当引理，对于$z - vt > 0$，我们可以取上半平面的回路积分，但在上半平面内无奇点，积分值应为零. 对于$z - vt < 0$，取下半平面回路积分，于是很容易得到

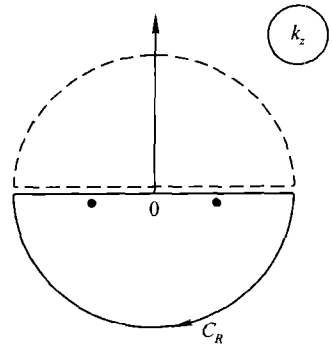


图 12.22

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_z(z-vt)}}{k_\perp^2 - k_z^2\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)} dk_z = -\frac{2\pi}{k_\perp\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}} \cdot \sin\frac{k_\perp (z - vt)}{\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}}.$$

对$d\phi$积分，利用贝塞尔函数积分表示公式，可得

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} e^{ik_\perp \rho\cos\phi} d\phi = 2\pi J_0(k_\perp \rho),$$

于是

$$\varphi = -\frac{2e}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\int J_0(k_\perp\rho)\frac{1}{\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}}\sin\frac{k_\perp(z-vt)}{\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}} dk_\perp$$

$$= -\frac{2e}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}}\int_0^\infty J_0(k_\perp\rho)\sin\left[\frac{k_\perp(z-vt)}{\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}}\right] dk_\perp$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2e}{\varepsilon_r\sqrt{(z-vt)^2 - \rho^2\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)}} & z < vt - \rho\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}, \\ 0 & \text{其余空间}. \end{cases} \tag{12.87}$$

从公式(12.76)和(12.77)不难得到

$$\boldsymbol{A} = \frac{\epsilon_r}{c^2}\boldsymbol{v}\varphi. \tag{12.88}$$

势的表达式(12.87)和(12.88)式表明:切连科夫辐射场是间断的,它只存在于圆锥体内部,锥体外的势为零. 这个圆锥体的曲面方程是

$$z - vt + \rho\sqrt{\frac{v^2}{c^2}\epsilon_r - 1} = 0.$$

因此,此形式的波也是间断波,即冲击波,可见切连科夫波实质上是**电磁冲击波**.

利用切连科夫辐射的性质可以测量快速粒子的速度,当具有一定速度的粒子通过介电常数为 ϵ 的介质时,粒子就以切连科夫角发出辐射,测量切连科夫角我们便可确定粒子的速度.

*§12.12 跃迁辐射

1946 年,金斯堡和弗兰克从理论上证明:在介质中作匀速运动的粒子不仅在一定条件下发出切连科夫辐射,而且还存在着另一种完全不同的辐射,这就是当粒子从一种介质跃迁入另一种电磁性质不同的介质时发出的辐射. 这种辐射通常称为**跃迁辐射**,它与切连科夫辐射的主要区别在于对粒子的速度没有任何限制,无论速度是大于还是小于介质中的光速,只要粒子是从一种介质进入到另一种介质,辐射便可以产生.

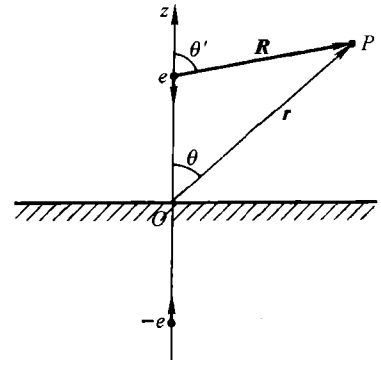


图 12.23

为了具体地弄清楚跃迁辐射的物理机制和主要特征,我们来讨论一种最简单的情形:一个点电荷从真空中沿着垂直于理想导体表面的方向穿入该导体,其速度 $v = \beta c$ 是常数(假定电荷在其镜象力作用下的加速度忽略不计),如图 12.23 所示. 显然,导体的电磁性质与真空大不相同,根据镜象法,真空中的场是由源电荷和象电荷共同激发的,并且源、象电荷的符号相反,它们以相同的速度相向作匀速运动. 此时,真空中的场由下述电荷密度和电流密度激发:

$$\rho = e\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0 + vt) - e\delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0 - vt),$$

$$\boldsymbol{j} = e\boldsymbol{v}[\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0 + vt) + \delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0 - vt)].$$

点电荷从真空穿入导体的一瞬间($z = 0$),它立即被导体中的自由电荷屏蔽,或者说,源、象电荷湮没,$\rho = 0$ 和 $j = 0$,因而此时真空中的场 $\boldsymbol{A}$、φ 都为零,场的这种突变必然引起辐射. 我们也可以从另一角度来理解跃迁辐射:当粒子从真空穿入导体时,$j = 0$,于是我们可等效地认为此时电荷不为零而粒子的速度 $\boldsymbol{v} = 0$,也就是说,粒子在 $z = 0$ 处速度突然从 v 降到零,即粒子作急剧的负加速运动,于是辐射不可避免地发生(注意,我们等效地认为粒子的速度 $v = 0$,其实粒子在两种介质中都以相同的速度作匀速运动). 如果不是导体,而是普通的电介质,上

述分析同样适用，所不同的只是源、象电荷的值不再相等.

现在，我们来具体讨论这种跃迁辐射. 我们可将电流密度写成

$$j = j_z = \begin{cases} -ev\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0 + vt) & z \geqslant 0, \\ -ev\delta(x)\delta(y)\delta(z + z_0 - vt) & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{12.89}$$

对时间展开成傅里叶积分，得

$$j = \int j_\omega e^{-i\omega t} d\omega,$$

其中

$$j_\omega = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{v}(z-z_0)}\delta(x)\delta(y) & z \geqslant 0, \\ -\frac{e}{2\pi} e^{i\frac{\omega}{v}(z+z_0)}\delta(x)\delta(y) & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{12.90}$$

上式表明，运动粒子所形成的电流密度和电荷密度在空间的分布规律相当于一组谐振子，这些振子位于电荷的运动线上.

位于 dz 线段上的振子，在 P 点所产生的磁场为

$$d\boldsymbol{H}_\omega = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{4\pi c R^2}(\boldsymbol{p}_\omega \times \boldsymbol{R})dz,$$

其中 $p_\omega = -j_\omega / i\omega$ 是 dz 段上的振子(即偶极矩)对时间的傅里叶分量. 所以，总场为

$$\boldsymbol{H}_\omega = \frac{ie\omega e^{i\frac{\omega}{v}z_0}}{8\pi^2 c}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v}z + kR\right)}}{R}\sin\theta' dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\left(\frac{\omega}{v}z - kR\right)}}{R}\sin\theta' dz\right]\boldsymbol{e}_\phi. \tag{12.91}$$

由于辐射发生在粒子从真空进入到金属的过渡瞬间，对波区的辐射场来说，主要的贡献来自 $z=0$ 附近区域的积分，因此我们可以近似地认为

$$R = r - z\cos\theta.$$

由 $\sin\theta' = \frac{r}{R}\sin\theta$，得到

$$H_{\omega\phi} = \frac{ie\omega}{8\pi^2 c} r\sin\theta e^{i\frac{\omega}{v}z_0}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i\frac{\omega}{v}(1-\beta\cos\theta)z}}{R^2}dz + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{v}(1+\beta\cos\theta)z}}{R^2}dz\right].$$

利用分部积分法，把上述积分表示成 $\frac{1}{r}$ 的幂级数，只保留 $\frac{1}{r}$ 的项，则得

$$H_{\omega\phi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{\omega\theta} = \frac{\omega}{8\pi^2 c}\left[\frac{e}{\frac{\omega}{v}(1 - \beta\cos\theta)} + \frac{e}{\frac{\omega}{v}(1 + \beta\cos\theta)}\right]\frac{\sin\theta}{r} e^{ikr} e^{i\frac{\omega}{v}z_0}. \tag{12.92}$$

注意：(12.92)式中的两项正好描述象电荷和源电荷突然停止运动时所产生的辐射场，与前面的分析是一致的.

根据以上表达式,不难求得在立体角 $d\Omega$ 内,频率为 ω 的辐射强度公式为

$$dI(\omega) = \frac{e^2\beta^2}{32\pi^4 c^3 \varepsilon_0} \frac{\sin^2\theta d\Omega}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} . \tag{12.93}$$

在非相对论近似下($\beta \ll 1$),上式成为偶极辐射

$$dI(\omega) = \frac{e^2\beta^2}{32\pi^4 c^3 \varepsilon_0}\sin^2\theta d\Omega .$$

值得注意的是,辐射强度与粒子的质量无关,这是运动粒子在介质中辐射的一个特点.

如果我们对所有的频率进行积分(即作傅里叶变换的反变换),则得到总的辐射角分布,但这明显是发散的,其主要原因是把金属看成为理想导体,实际上在光谱的红外区域,这是不正确的,所以上述公式只对频率低于红外线的辐射成立.

将(12.93)式对上半球积分,可得真空中总的辐射频谱为

$$I(\omega) = \frac{e^2\beta^2}{8\pi^3 c\varepsilon_0}\left(\frac{3}{8}\frac{\beta^2-1}{\beta^3}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{3}{4\beta^2}\right). \tag{12.94}$$

上述结果与费米用严格求解麦克斯韦方程的方法得到的结果完全一致*.

【例 6】 试求磁单极子 g 从真空进入到理想导体的跃迁辐射的角分布.

解 磁荷密度在空间反演下的变换性质正好与电荷密度相反,因此磁单极子 g 的象磁荷也为 g,即源象同号(这也可以由边界条件的讨论得出). 根据场的对偶性,结合镜象法,显然我们只要把(12.92)式作如下的代换:

$$e \to g/c,\ c\mu_0 H_\phi \to -E_\phi,\quad E_\theta \to c\mu_0 H_\theta ,$$

并且在第一项中作 $e \to -g/c$ 的代换,第二项中作 $e \to g/c$ 的代换,则得

$$-E_\phi = c\mu_0 H_\theta = \frac{\omega}{8\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{-g}{\frac{\omega}{v}(1-\beta\cos\theta)} + \frac{g}{\frac{\omega}{v}(1+\beta\cos\theta)}\right]\frac{\sin\theta}{r}e^{ikr}e^{i\frac{\omega}{c}z_0} .$$

于是,辐射角分布为

$$dI(\omega) = \frac{g^2\beta^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{32\pi^4 c^3\varepsilon_0(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}d\Omega .$$

与(12.93)式比较,磁单极的跃迁辐射的相对论效应更为显著,并且其辐射的角分布也比点电荷多一个 $\cos^2\theta$ 因子,因此用跃迁辐射来探测磁单极子是一条重要的途径.

*§ 12.13 辐射阻尼和辐射角动量损失

我们已看到一个带电粒子作加速运动时可发射辐射波,其辐射功率由公式(12.46)给出:

---

* Fermi E., Phys. Rev. 57, 485(1940); John Dooher, Phys. Rev. vol. 3, No.11(1971).

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\mid \dot{\boldsymbol{v}} \mid^2 \quad (v \ll c),$$

这表示粒子在单位时间内辐射出去的能量为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\mid \dot{\boldsymbol{v}} \mid^2,$$

可见在 $t_1 \sim t_2$ 时间内辐射出去的能量为

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\mid \dot{\boldsymbol{v}} \mid^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\Big|_{t_2}^{t_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{v}}.$$

设粒子作周期运动($t_1 \sim t_2$ 正好是一个周期),或者在 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 时 $\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} = 0$,则在 $t_1 \sim t_2$ 时间内,粒子辐射出去的能量为

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{v}\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t.$$

由于辐射,粒子损失了能量和动量,因而粒子作阻尼运动,也就是说,粒子受到了阻尼力的作用. 我们用 $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ 表示辐射阻尼力,则由能量守恒定律可知,辐射出去的能量等于辐射阻尼力作的功,即

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_\mathrm{d}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{v}\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t.$$

由此可见,辐射阻尼力为

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}. \tag{12.95}$$

辐射阻尼力也称为洛伦兹摩擦力,它是以某种近似的对时间取平均的方法得到的,因此不代表瞬时值,是一种时间平均的效应. 另外,我们还会看到,只有在粒子静止的参考系内,当辐射阻尼力比作用在粒子上的外力小得多时才可以利用辐射阻尼力概念(参见 §15.2).

由于辐射阻尼力的作用,辐射粒子体系不仅损失能量,而且也损失角动量,在非相对论情况下,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_\mathrm{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\boldsymbol{r}\times\frac{2e^2}{3c}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\sum\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{v}}.$$

我们感兴趣的是角动量损失的时间平均值,正如我们讨论辐射阻尼一样,于是

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\sum\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\sum\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left[\sum\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\right].$$

若运动是周期性的，则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}dt=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\sum\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\,dt.$$

于是，我们得到角动量损失的时间平均值为

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\sum\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{12.96}$$

如果是偶极辐射，即 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}$，则角动量损失为

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3c^3}\sum\dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}. \tag{12.97}$$

我们可以把 $-\frac{2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}$ 看成是辐射阻尼力矩.

现在我们来求辐射阻尼的相对论表达式，这可以从非相对论形式直接推广得到. 阻尼力的相对论形式必为四维形式，并且在 $v\ll c$ 时它的三个空间分量应当回到(12.95)式，很容易看出下述矢量满足这个条件：

$$F_\mu^{辐}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2u_\mu}{d\tau^2}, \tag{12.98}$$

其中 u_μ 是四维速度矢量. 由于 $u_\mu\frac{du_\mu}{d\tau}=0$，故下式应成立：

$$F_\mu^{辐}u_\mu=0.$$

显然，(12.98)式的 $F_\mu^{辐}$ 不满足上述条件，我们必须在(12.98)式中加入一个辅助矢量，而这个辅助矢量一定是由 u_μ 及其导数组成的，在 $v=0$ 时它的空间分量变为零而又不改变 $F_\mu^{辐}$ 的正确值. 满足(12.98)式的由 u_μ 及其导数组成的辅助矢量为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^5}u_\mu u_\nu\frac{d^2u_\nu}{d\tau^2}.$$

故真正的相对论辐射阻尼力为

$$F_\mu^{辐}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^2u_\mu}{d\tau^2}+\frac{u_\mu u_\nu}{c^2}\frac{d^2u_\nu}{d\tau^2}\right), \tag{12.99}$$

于是我们不难得到考虑了辐射阻尼力后的相对论性经典点电荷的运动方程为

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}=F_\mu+F_\mu^{辐}. \tag{12.100}$$

这个方程是狄拉克在 1938 年首先得到的.

§12.14 谐振子辐射谱线的自然宽度

当原子从激发态跃迁到低能级态时，将放出光子，这种过程在量子力学中称为*自发辐射*. 辐射阻尼反作用力对这种自发辐射过程将产生重大影响，这里我们将从经典电动力学的角度来讨论这个问题.

在经典物理学中，我们通常对原子应用谐振子模型. 一个谐振子，当不受到

任何阻尼力时，其辐射频率即是其振荡频率. 但是，辐射阻尼的存在，将使谐振子作阻尼谐振运动，于是它的辐射频率不再是单一的，而成为一个频谱，从而谱线就有一个宽度.

设一个电荷为 e、质量为 m 的粒子在弹性力 $m\omega_0^2\boldsymbol{r}$ 的作用下运动，考虑到辐射反作用力，其运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}}, \tag{12.101}$$

其特征方程为

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3mc^3}k^3. \tag{12.102}$$

由于辐射摩擦力比弹性力小得多，我们可以用逐次近似法求解(12.102)式. 在零级近似，可略去方程(12.102)右边的部分，这时 $k \approx k_0 = \pm i\omega_0$. 在一级近似下，用 k_0 代替(12.102)式右边的 k，并引入记号

$$\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}, \tag{12.103}$$

我们就得到 $k \approx k_1 = \pm i\omega_0 - \frac{\nu}{2}$. 一般可只考虑一个解，例如与负号对应的解为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 e^{-\frac{\nu}{2}t}e^{-i\omega_0 t} \quad (t > 0). \tag{12.104}$$

这个解在 $\nu \ll \omega_0$ 时是正确的，并且具有阻尼振动的特点.

振子的能量按其振幅的模数的平方规律减少，即

$$W = W_0 e^{-\nu t}. \tag{12.105}$$

我们常把 $\frac{1}{\nu}$ 叫做振子激发态的寿命.

辐射场的电场强度与 $\boldsymbol{r}$ 成正比，所以

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}_\omega e^{-i\omega t}d\omega = \begin{cases}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega_0 t}e^{-\frac{\nu}{2}t} & t > 0,\\ 0 & t < 0,\end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{E}_\omega = \boldsymbol{E}_0\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\nu}{2}+i\omega_0\right)t+i\omega t}dt = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\left[i(\omega-\omega_0)-\frac{\nu}{2}\right]}.$$

因此，我们不难求得其辐射强度的频谱为

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = I_0\nu\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\nu^2}{4}}, \tag{12.106}$$

其中 $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dI(\omega)$ 是总辐射强度. 频率分布(12.106)式具有共振曲线的特

点，如图 12.24 所示.

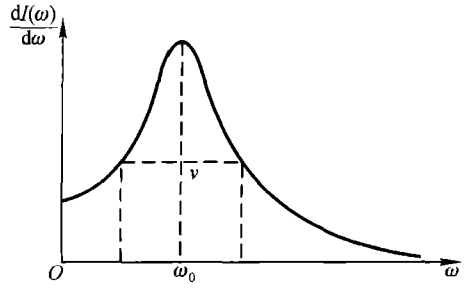


图 12.24

显然，$dI(\omega)/d\omega$ 在 $\omega=\omega_0$ 时有一个极大值，即

$$\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{4I_0}{\nu},$$

而在 $\omega=\omega_0\pm\frac{\nu}{2}$ 时，$\frac{dI(\omega)}{d\omega}$ 的值降到极大值的一半，即

$$\left.\frac{dI(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0\pm\frac{\nu}{2}}=\frac{2I_0}{\nu}.$$

所以，我们把 $\frac{\nu}{2}$ 称为谱线的半宽度，ν 称为谱线的自然宽度. 可见频率展宽的范围为

$$\Delta\omega=\nu.$$

这与量子力学中的频移或能级移动相对应.

习　题

12.1　利用电荷守恒定律，验证 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的推迟解满足洛伦兹条件.

12.2　一个电偶极子 $\boldsymbol{p}_0$ 在 Oxy 平面内以恒定角速度 ω 绕 z 轴旋转. 求辐射场分布和角分布.

12.3　如果电荷分布是球对称的，证明此体系不可能辐射电磁波.

12.4　设有一个振幅为 $\boldsymbol{p}_0$，频率为 ω 的电偶极子位于无限大理想导体平面上方 $\frac{a}{2}$ 处，$\boldsymbol{p}_0$ 平行于导体平面. 设 $a\ll\lambda$，求辐射场分布及角分布.

12.5　设有两个以相同频率 ω 振动的电偶极振子，它们之间的相位差为 $\frac{\pi}{2}$，振幅都是 $\boldsymbol{p}_0$，方向互成 α 角，其间距离远小于波长. 试求辐射场分布及角分布.

12.6　设有一个体内均匀带电的球，其表面可用方程

$$r = r(\theta) = r_0[1 + aP_2(\cos\theta)\cos\omega t]$$

描述($a \ll 1$). 设总电荷为 q,试求辐射场及角分布.

12.7 两个电子 e 以非相对论速度沿着半径为 R 的圆轨道作匀速运动,角频率为 ω,设两电子在同一直径的两端,试求:(1)辐射角分布;(2)辐射场的偏振情况;(3)若拿走一个电子则辐射强度如何变化?

12.8 在半径为 R 的圆形线圈上通有电流 $I = I_0 e^{-i\omega t}$,设 $kR \ll 1$,求辐射场分布、角分布及辐射功率.

12.9 在 z 轴上有一点电荷 q 作简谐运动,其运动规律为 $z = R\cos\omega t$, $\frac{\omega R}{c} \ll 1$,求辐射场分布、角分布及辐射功率.

12.10 一个半径为 R,通有恒定电流 I_0 的圆形线圈,现令其绕一直径(取为 z 轴)以角速度 ω 作匀速转动. 求辐射场.

12.11 一个磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 绕一轴以恒定角速度 ω 旋转,$\boldsymbol{m}$ 与旋转轴夹角 α,求辐射功率. 地球的磁矩 $m \approx 8.0 \times 10^{22}\ \mathrm{A \cdot m^2}$,与自转轴夹角 $\alpha \approx 11°$,如果转动能由于磁偶极辐射而减少并造成一天长度的变化,试估计变化率.

12.12 由位于原点的点电荷 $2q$ 和位于 $z_1 = 2a + a\cos\omega t$, $z_2 = -2a - a\cos\omega t$ 的点电荷 $-q$ 组成四极子,计算辐射场、角分布和辐射功率.

12.13 电子的速度 $\boldsymbol{v}$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 α,证明在 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的平面内,与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 β 的方向上无辐射,β 由下面的方程决定:

$$\sin\beta = \frac{v}{c}\sin\alpha.$$

12.14 一个作非相对论运动的粒子的速度从 v_0 减到 0,其速度的变化为

$$v_z = \begin{cases} v_0 & t \leqslant 0, \\ v_0 - a_0 t & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{v_0}{a_0}, \\ 0 & t \geqslant \dfrac{v_0}{a_0}. \end{cases}$$

求带电粒子辐射的电磁场的能量.

12.15 设一个各向同性的带电谐振子(无外场时只受弹性恢复力 $-m\omega_0^2 r$ 作用)处于均匀恒定的外磁场中,假定粒子速度 $v \ll c$,辐射阻尼力可以略去. 试求:(1)振子运动的通解;(2)分别讨论平行和垂直于磁场方向上辐射场的频率和偏振.

12.16 一静止质量为 m,电荷为 q 的相对论粒子,在均匀恒定的磁场 $\boldsymbol{B}$ 中作圆周运动,已知它的动量为 p,求圆的半径和它辐射的总功率.

12.17 如果速度远小于 c,则运动电荷的辐射功率为

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2e^2}{3c^3}\boldsymbol{a}^2.$$

试将其推广到相对论情形,并证明 P 是洛伦兹不变量.

12.18 设电子在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中运动,取磁场方向为 y 方向,已知 $t = 0$ 时,$x = R_0$,$y = z = 0$, $\dot{x} = \dot{z} = 0$, $\dot{y} = v_0$. 试求:(1)考虑辐射阻尼力时电子的运动轨道. (2)证明电子在单

位时间内辐射的能量等于电子在单位时间内损失的动能.

12.19 围绕质子作圆周运动的电子,在 $t=0$ 时处于第一玻尔轨道上,试导出电子运动半径 r 的微分方程,并计算经典辐射损失,在此基础上再计算:(1)电子与原子核相接触的近似时间;(2)在上述时间内所辐射的能量.

第十三章　电磁波的散射和衍射

电磁波的散射和衍射在逻辑上是不能分开的，尽管处理的方法各不相同．本章统一描述电磁波在传播过程中遇到一定形状和特定性质的障碍物（诸如电荷系、介质球、屏、孔等等）时散射和衍射对电磁波产生的影响，同时也将阐述散射和衍射两者之间的差别．

§13.1　自由电子对电磁波的散射（汤姆孙散射）

当电磁波投射到电荷系上时，电荷在电磁力的作用下以投射电磁波的频率作强迫振动，振动的电荷向各个方向辐射电磁波，就是说，电荷把入射电磁波的能量散射到其他方向上去，这种现象就称为**散射**．

我们先来考察一个自由电子对电磁波的散射．设入射电磁波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{13.1}$$

$\boldsymbol{e}_0$ 为入射波偏振矢量．假定电子运动的速度远小于光速，则可略去磁力作用，并可认为电子只是在坐标原点作振动，于是电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-e\boldsymbol{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\boldsymbol{r}}, \tag{13.2}$$

右边第二项是辐射阻尼项．令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，代入方程得

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{eE_0}{m\omega(\omega+\mathrm{i}\Gamma)}\boldsymbol{e}_0, \tag{13.3}$$

其中 $\Gamma=\frac{4\pi r_{\mathrm{e}}}{3\lambda}\omega$，$r_{\mathrm{e}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}$ 是电子的经典半径．对于一般电磁波来说，$\lambda\gg r_{\mathrm{e}}$，即 $\frac{\Gamma}{\omega}\ll 1$，故略去 Γ 后得

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{e}_0\frac{eE_0}{m\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{13.4}$$

电子激发的场（即散射场）为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^2R^3}[\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}\times\ddot{\boldsymbol{r}})]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2E_0}{mRc^2}[\boldsymbol{e}_R\times(\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{e}_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)}$$

$$= \boldsymbol{E}_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{E}_s\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)}, \tag{13.5}$$

其中 $\boldsymbol{e}_R=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$, $\boldsymbol{E}_s=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2E_0}{mRc^2}[\boldsymbol{e}_R\times(\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{e}_0)]$. 我们不难得到,在 $\boldsymbol{e}_R$ 方向上观察到的偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_s$ 的散射波的平均能流为

$$\langle\boldsymbol{S}_P\rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{E}_s|^2\boldsymbol{e}_R$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^4}{8\pi m^2c^3}\frac{E_0^2}{R^2}|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2\boldsymbol{e}_R. \tag{13.6}$$

描述散射过程的最有用的概念是**微分散射截面**,其定义为

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\langle S_{P0}\rangle}, \tag{13.7}$$

式中$\langle S_{P0}\rangle$是入射波的平均能流密度,$\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是散射波穿过面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的平均能流,对所有方向积分即得**散射截面** σ_s.

偏振方向为 $\boldsymbol{e}_0$ 的入射波的平均能流为

$$\langle S_{P0}\rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{e}_0^*\cdot\boldsymbol{E}_0|^2, \tag{13.8}$$

所以散射到 $\boldsymbol{e}_R$ 方向,单位立体角内,偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_s$ 的微分散射截面为

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{\dfrac{1}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{E}_s|^2\mathrm{d}S}{\dfrac{1}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{e}_0^*\cdot\boldsymbol{E}_0|^2} = r_c^2|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2\mathrm{d}\Omega. \tag{13.9}$$

我们看到,自由电子的散射截面与频率无关,但与入射波的偏振有关.

我们选取入射波传播方向 $\boldsymbol{k}$ 为坐标系的极轴,如图 13.1 所示,$\boldsymbol{e}_R$ 是散射波方向,它与 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为 θ,散射波的偏振矢量 $\boldsymbol{e}_s$ 必在垂直于 $\boldsymbol{e}_R$ 的平面内. 如图 13.1 所示,取偏振矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_R$ 平面内,$\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_R$ 平面垂直. 把偏振矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 用坐标轴的单位矢量来表示,则不难得到

$$\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta(\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi)-\boldsymbol{e}_z\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi.$$

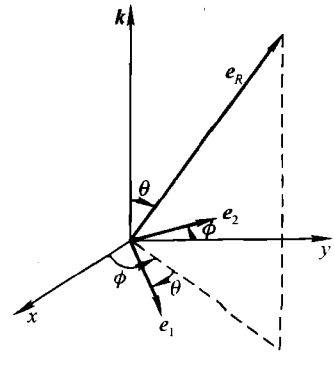


图 13.1

若入射波是非偏振的，这时散射截面必须对入射偏振求平均. 若入射波极化矢量为

$$\boldsymbol{e}_0 = \cos\phi'\boldsymbol{e}_x + \sin\phi'\boldsymbol{e}_y,$$

则偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 的散射截面分别为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_{/\!/} &= r_e^2 \left| \boldsymbol{e}_1^* \cdot \boldsymbol{e}_0 \right|^2 \mathrm{d}\Omega, \\ \mathrm{d}\sigma_{\perp} &= r_e^2 \left| \boldsymbol{e}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_0 \right|^2 \mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{13.10}$$

故把 $\boldsymbol{e}_0$ 和 $\boldsymbol{e}_1$ 或 $\boldsymbol{e}_2$ 代入上式，并对 ϕ' 积分就可得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_{/\!/} &= \frac{1}{2} r_e^2 \cos^2\theta \mathrm{d}\Omega, \\ \mathrm{d}\sigma_{\perp} &= \frac{1}{2} r_e^2 \mathrm{d}\Omega, \\ \mathrm{d}\sigma_s &= \frac{1}{2} r_e^2 (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{13.11}$$

这就是著名的汤姆孙散射公式，θ 称为散射角. 散射截面为

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{1}{2} r_e^2 \int (1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{8}{3}\pi r_e^2. \end{aligned} \tag{13.12}$$

上式表示，由于电子的散射，把相当于入射到 $\frac{8\pi}{3} r_e^2$ 的面积上的电磁波能量散射到各个方向上去了.

§13.2 束缚电子对电磁波的散射 偶极求和规则

现在来考虑处于束缚态的电子(例如原子中的电子)对电磁波散射的特性，严格地说，这应当用量子力学来研究，但我们也可以从经典的角度来讨论，以便给出一些定性的结果和极为重要的概念. 对于束缚态的电子，我们可以把它描述为一个经典的谐振电子，束缚势能也可用球对称的线性恢复力 $m\omega_0^2 \boldsymbol{r}$ 来模拟，其中 ω_0 是电子的本征频率. 此外，我们还假定谐振电子除受辐射阻尼力外还存在另一类阻尼力(如由碰撞所造成的阻尼力)，我们用 $m\Gamma'\dot{\boldsymbol{r}}$ 来表示，于是束缚电子的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = -\frac{e}{m}\boldsymbol{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \Gamma'\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\dddot{\boldsymbol{r}}, \tag{13.13}$$

这里我们仍假定电子速度远小于光速，入射波为

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

1. 散射截面

我们设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0 e^{-i\omega t}$,则由上述方程解得

$$\boldsymbol{r}=-\frac{e}{m}\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}\boldsymbol{e}_0, \tag{13.14}$$

其中 $\Gamma=\Gamma'+\frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\omega^2$.

由式(12.43)知,加速电子所激发的辐射电场(散射场)为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2}\frac{1}{R}[\boldsymbol{e}_R\times(\boldsymbol{e}_R\times\ddot{\boldsymbol{r}})]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\omega^2\frac{E_0\boldsymbol{e}_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}\frac{1}{R}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)}.\end{aligned} \tag{13.15}$$

因此,偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_s$ 的散射波的振幅为

$$\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\omega^2\frac{E_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}\frac{\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0}{R}. \tag{13.16}$$

由微分截面的定义(13.7)式,得到频率为 ω、偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_s$ 的散射波的微分散射截面为

$$\begin{aligned}d\sigma_s&=\frac{\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot d\boldsymbol{S}}{\langle S_{P0}\rangle}\\&=r_e^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\right]|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2 d\Omega.\end{aligned} \tag{13.17}$$

显然,如果令 $\omega_0=0,\Gamma=0$,就回到汤姆孙散射截面公式(13.9). 所以对于入射波非偏振的情况,类似上节可得

$$d\sigma_s=\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\right]\frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta)d\Omega, \tag{13.18}$$

散射截面为

$$\sigma_s=\frac{8\pi}{3}r_e^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\right], \tag{13.19}$$

被散射的总能量为

$$W=\sigma_s\langle S_{P0}\rangle=\frac{8\pi}{3}r_e^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\right]\langle S_{P0}\rangle.$$

我们对上面的阐述作讨论如下:

(1) 强束缚态时,即 $\omega\ll\omega_0$,则

$$\sigma_s=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{\omega_0^4}. \tag{13.20}$$

这说明当入射电磁波频率远小于束缚电子的本征频率时,总散射截面正比于电磁波频率的四次方,这就是**瑞利散射定律**. 瑞利散射定律是所有长波散射的普

遍特性，或者说，长波散射总是偶极散射，所以凡是偶极散射都遵守瑞利定律.

(2) 弱束缚态时，$\omega \gg \omega_0$，则

$$\sigma_s = \frac{8\pi}{3} r_e^2 . \tag{13.21}$$

这与自由电子散射相同，这是短波散射的特点.

(3) 当 $\omega \approx \omega_0$ 时，散射截面为

$$\sigma_s \approx \frac{2}{3}\pi r_e^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma/2)^2} . \tag{13.22}$$

这种散射截面的频谱属于共振型，称为**共振散射**. 在 $\omega = \omega_0$ 时截面达到最大值：

$$\sigma_{smax} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} = 6\pi \lambda_0^2 \left(\frac{\omega_0^2 \frac{2}{3} \frac{r_e}{c}}{\Gamma} \right)^2 . \tag{13.23}$$

因此，$\omega = \omega_0$ 时称**锐共振散射**，$\lambda_0 = \dfrac{c}{\omega_0}$ 称为共振波长. 在量子力学中，与此对应的是原子的受激辐射.

2. 总截面和吸收截面

从能量的角度来看，束缚态电子对电磁波的散射过程分两个阶段，先是从入射电磁波获得能量，然后以辐射次波的形式把其中一部分能量辐射到各个方向形成散射波，而另一部分能量则由于存在摩擦阻力而被消耗. 对散射部分，我们已引入了散射截面 σ_s 来表征，对于吸收部分，将引入另一个概念——**吸收截面** σ_a 来表征. 根据能量守恒定律，散射截面和吸收截面之和是一个常数，我们以总截面 σ_t 来表征.

我们先来计算总截面 σ_t，为此我们必须计算入射电磁波对束缚电子所做的功. 因为

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} d\tau' ,$$

束缚电子的电流密度可写成 $\boldsymbol{j} = -e\dot{\boldsymbol{r}}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}(t))$，代入上式得

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int dt \int \boldsymbol{E}[-e\dot{\boldsymbol{r}}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}(t))] d\tau' \\ &= -\int e\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt . \end{aligned}$$

我们感兴趣的是在一个周期内的平均值，故

$$\langle W \rangle = -\frac{1}{T}\int_0^T e\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}[e\boldsymbol{E}^* \cdot \dot{\boldsymbol{r}}] , \tag{13.24}$$

式中 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_0 E_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$，它是入射电磁波，在粒子附近时即为 $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{e}_0^* E_0 e^{i\omega t}$，代

入(13.24)式,利用(13.14)式得

$$\begin{aligned}\langle \Delta W\rangle &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e(\boldsymbol{e}_0^{*}E_0)\cdot\frac{\mathrm{i}e\omega E_0\boldsymbol{e}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\Gamma)}\right]\\ &=\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\\ &=\frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2\\ &=\frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\langle S_{P0}\rangle. \end{aligned}\tag{13.25}$$

于是,我们定义总截面 σ_t 为

$$\sigma_t=\frac{\langle\Delta W\rangle}{\langle S_{P0}\rangle}=\frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2},\tag{13.26}$$

吸收截面为总截面减去散射截面,即

$$\sigma_a=\sigma_t-\sigma_s=\frac{\left[\frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\omega^2\Gamma-\frac{8\pi}{3}r_e^2\omega^4\right]}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2]}.$$

为了比较,我们把 σ_t、σ_s、σ_a 改写成如下形式:

$$\begin{cases}\sigma_s=6\pi c^2\dfrac{\omega^2\left(\frac{2r_e}{3c}\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\cdot\omega^2\dfrac{2r_e}{3c},\\ \sigma_a=6\pi c^2\dfrac{\omega^2\left(\frac{2r_e}{3c}\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)+\omega^2\Gamma^2}\cdot\Gamma',\\ \sigma_t=6\pi c^2\dfrac{\omega^2\left(\frac{2r_e}{3c}\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)+\omega^2\Gamma^2}\cdot\left(\Gamma'+\dfrac{2r_e}{3c}\omega^2\right).\end{cases}\tag{13.27}$$

在量子力学共振吸收理论中也有类似的特点.

3. 偶极求和规则

在实际的散射问题中,入射电磁波并不是单色的,因此我们必须对截面作频率积分. 然而,有趣的是,我们对总截面作积分时,在一定的近似条件下可以得到一个在经典电动力学和量子电动力学中普遍成立的定则——偶极求和定则.

由(13.26)式得总截面积分为

$$\int_0^\infty\sigma_t(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\mathrm{d}\omega.\tag{13.28}$$

注意,被积函数中 $\Gamma=\Gamma'+\frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\omega^2$,由 §12.14 知 Γ 表示衰减常数,它是 ω 的函

数，是我们考虑辐射阻尼力时引入的．我们曾经指出，正确使用阻尼力的条件是外场力必须远大于辐射阻尼力；也就是说，方程(13.14)中的一般阻尼力 $|\Gamma'| \gg \left|\frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\omega^2\right|$，利用这个性质，略去辐射阻尼力之后则有

$$\int_0^\infty \sigma_t \mathrm{d}\omega = \frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\omega^2\Gamma'}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma'^2}\mathrm{d}\omega,$$

此时由于 Γ' 与 ω 无关，利用留数定理很易求得

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{\pi e^2}{2m\varepsilon_0}. \tag{13.29}$$

由(13.29)式看到，总截面 σ_t 对频率积分后得到的值与体系的本征频率 ω_0 无关，只与粒子的电荷、质量有关．由于总截面 σ_t 对频率的积分代表束缚电子从外场得到的总能量，可见它只与电子的质量、电荷有关，而与外场的具体性质及体系内部的其他性质无关．这就是所谓的**偶极求和定则**．我们之所以把它称为“偶极”，是因为这里考虑的散射场都是偶极场近似，这一点从计算场的公式中可以看出．因此，反过来也指出了这一求和法则的适用条件：它只在偶极近似下才是正确的．

【例 1】 试把偶极求和定则推广到具有 n 种互相独立的带电粒子的体系．

解　我们易知，此时的求和定则为

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i^2}{m_i}. \tag{13.30}$$

如果这些粒子的荷质比是一样的，则上式可进一步简化成

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)\mathrm{d}\omega = \alpha\frac{\pi}{2\varepsilon_0}m, \tag{13.31}$$

其中 m 为体系的总质量，α 是荷质比．

*§ 13.3　多电子体系对电磁波的散射

当电磁波由离子或者不带电的多电子原子发射时，我们会遇到多电子体系对电磁波的散射，这是一个很实际的散射问题．多电子体系对电磁波的散射，与 § 13.1 中的一个静止电荷对电磁波的散射不同，首先前者体系中的电子存在着本征运动，散射波的频率可能与入射波频率不同，散射波频率是电子本征频率与入射波频率的某种组合，这种散射常称为**组合散射**；其次，每个电子都处于束缚态，电子间有相互作用．但是，如果入射电磁波的频率远大于电子的本征频率，并且体系中电子的速度 $v \ll c$，于是在与波的周期同数量级的时间间隔内，体系中电子的运动可以看成是自由的，即可以忽略电子之间的相互作用，此时我们可以把体系作为自由电子的集合来处理，并且近似地认为散射波频率与入射波频率相等．

设体系中第 i 个电子处在 $\boldsymbol{r}_i'$ 处，则其运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'}{\mathrm{d}t}=-e\boldsymbol{e}_0E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i'-\omega t)},\tag{13.32}$$

其中 $\boldsymbol{e}_0$ 为偏振矢量，$\boldsymbol{k}$ 为入射波波矢量，$\boldsymbol{v}_i'=\dot{\boldsymbol{r}}_i'$．于是电子产生的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2R_i^3}[\boldsymbol{R}_i\times(\boldsymbol{R}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i')]\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2E_0}{mR_i}[\boldsymbol{e}_i\times(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR_i-\omega t)}.\end{aligned}\tag{13.33}$$

鉴于入射波频率远大于电子本征频率，我们可近似地认为散射波频率仍等于入射波频率，整个体系的场为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{e^2E_0}{c^2R_i}[\boldsymbol{e}_i\times(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR_i-\omega t)}.$$

我们考察的是远离散射体系的场，所以可用观察点矢径 $\boldsymbol{r}$ 来代替 $\boldsymbol{R}_i$，于是上式改写成

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2E_0}{r}[\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_0)]\sum_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR_i-\omega t)}.\tag{13.34}$$

其中 $R_i\approx r-\boldsymbol{r}_i'\cdot\boldsymbol{e}$，这样

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2E_0}{r}[\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}_0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\sum_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'},\tag{13.35}$$

其中 $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{e})$是入射波矢与散射波矢之差．所以，散射到 $\boldsymbol{e}$ 方向的、立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内的、偏振矢量为 $\boldsymbol{e}_s$ 的电磁波能流为

$$\langle S_P\rangle=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^4}{8\pi m^2c^3}E_0^2|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2\left\{\left\langle\left|\sum_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\right|^2\right\rangle\right\},\tag{13.36}$$

其中〈 〉表示对时间平均．将上式与(13.6)式比较可知，多电子体系比单电子体系多一个因子．这样，我们不难求得微分散射截面为

$$\mathrm{d}\sigma_s=r_e^2|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2\left\langle\left|\sum_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\right|^2\right\rangle.\tag{13.37}$$

对(13.37)式，我们分两种情况来讨论．

(1) 如果入射波长远大于散射体的线度，则必有

$$|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'|\ll1,$$

因此我们可以认为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'}\approx1$，从而得到

$$\mathrm{d}\sigma_s=r_e^2|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2N^2.\tag{13.38}$$

若散射体是具有 Z 个电子的原子，则

$$\mathrm{d}\sigma_s=(Zr_e)^2|\boldsymbol{e}_s^*\cdot\boldsymbol{e}_0|^2,\tag{13.39}$$

这就是说散射截面与原子序数的平方成正比．

(2) 如果入射波长远小于散射体线度，则有

$$|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'|\gg1,$$

于是(13.37)式中除每项模的平方之外，还有如下的项：

$$r_e^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_j')}\quad(i\neq j).$$

$\boldsymbol{r}_i'$ 和 $\boldsymbol{r}_j'$ 是时间的周期函数，可见 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_j')}$是一个振动很快的函数，对时间的平均值为零，所以

$$d\sigma_s = r_e^2 \left| \boldsymbol{e}_s^* \cdot \boldsymbol{e}_0 \right|^2 N.$$

若散射体是有 Z 个电子的原子,则

$$d\sigma_s = Z r_e^2 \left| \boldsymbol{e}_s^* \cdot \boldsymbol{e}_0 \right|^2, \tag{13.40}$$

此时散射截面与原子序数的一次方成正比. 注意,如果是小角度散射,则 q 很小,此时 $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i'| \gg 1$ 不成立,(13.40)式也不成立.

如果入射波频率与电子本征频率接近,则应当用束缚电子集合来描述,并且应当考虑入射波频率和散射波频率的差别.

*§13.4 电磁波在宏观物体上的散射

前面几节,我们讨论了微观带电粒子对电磁波的散射. 现在我们来讨论电磁波在任意形状的宏观物体上的散射,显然其精确解可归结为求解下列方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \boldsymbol{P}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{cases} \tag{13.41}$$

这里我们假定物体内没有自由电荷和传导电流,并且是非磁性介质,$\boldsymbol{P}$ 是极化强度.

设入射平面电磁波的电矢量为

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{13.42}$$

如果它投射到某一个介电常数为 $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ 的任意形状的宏观物体上,则空间的总电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r},t), \tag{13.43}$$

其中 $\boldsymbol{E}_s$ 是散射波,它是物体各部分发出的次波的叠加. 在发射体内部,每一点的极化强度矢量 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成正比,即

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \chi(\boldsymbol{r})\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t). \tag{13.44}$$

空间某点的散射场(即次级场)$\boldsymbol{E}_s$ 是由电偶极极化强度 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ 产生的,无论在散射体外还是在散射体内,其源都是分布在散射体内部的电偶极子(忽略表面极化电荷的贡献),密度由(13.44)式决定,所以我们首先要在散射体内外分别求出 $\boldsymbol{P}$ 在空间产生的场.

如果令(13.41)式中关于 $\boldsymbol{P}$ 的项分别为

$$\rho = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \tag{13.45}$$

则(13.41)式可等价为真空中的场方程. 现在这里的电荷、电流就是极化电荷和极化电流. 由推迟势公式知,它们在空间产生的势为

$$\varphi_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{-[\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}', t')]}{R}\mathrm{d}\tau',$$
$$\boldsymbol{A}_s = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\left[\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t'}\right]}{R}\mathrm{d}\tau'. \tag{13.46}$$

我们先求散射体外的场，由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ 得

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int \frac{[\nabla' \cdot \boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\left[\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t'}\right]}{R}\mathrm{d}\tau', \tag{13.47}$$

其中右边第一项

$$\begin{aligned}\nabla\int \frac{[\nabla' \cdot \boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau' &= \nabla\left\{\int \nabla' \cdot \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau' - \int [\boldsymbol{P}] \cdot \nabla' \frac{1}{R}\mathrm{d}\tau'\right\} \\ &= \nabla\left\{\oint_S \frac{[\boldsymbol{P}]}{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right\} - \nabla\left\{\int [\boldsymbol{P}] \cdot \nabla' \frac{1}{R}\mathrm{d}\tau'\right\} \\ &= \nabla\int [\boldsymbol{P}] \cdot \nabla \frac{1}{R}\mathrm{d}\tau' \\ &= \nabla\nabla \cdot \int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau';\end{aligned}$$

第二项

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\left[\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t'}\right]}{R}\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau',$$

所以

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\nabla \cdot \int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau'. \tag{13.48}$$

矢量 $\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau'$ 是推迟形式的，它表示场在空间是传播的，由于在散射体外，故它必满足齐次方程，即

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau' = \nabla^2\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau', \tag{13.49}$$

所以(13.48)式可进一步写为

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\nabla\times\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau'\right), \tag{13.50}$$

其中利用了矢量公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}$. 注意，(13.50)式与(12.12)式在形式上完全一样，实际上前者是后者的推广. 把(13.50)式代入(13.43)式，利用(13.44)式即得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int \frac{\chi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}}{R}\mathrm{d}\tau', \tag{13.51}$$

这就是散射体外总电场的积分方程.

对于散射体内部的场，(13.49)式不再是齐次的，因而(13.50)式应当改写成

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\nabla\times\int \frac{[\boldsymbol{P}]}{R}\mathrm{d}\tau'\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}, \tag{13.52}$$

这是因为在散射体内部应当满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{P}$. 这样散射体内的总电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}}{R}d\tau' - \chi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tag{13.53}$$

这也是积分方程.

在求解电磁波被 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$ 的物体散射的问题时,这两个积分方程是很有用的. 此时 $\chi=\varepsilon_r-1$很小,(13.51)和(13.53)式中的积分因子也较小,因而可以应用逐次迭代法,求出它的近似解. 对于一般情况,我们总可以求助于计算机来求其数值解.

*§13.5　玻恩近似法

仿照量子力学中散射问题的玻恩近似法,我们把积分方程(13.51)和(13.53)式展开成 χ 的幂级数,如果 $\chi\ll1$,级数将很快收敛,我们往往求一级近似就足够精确了,原则上我们还可以求更高级的近似.

下面我们来求散射体内外场的级数解,设

$$\boldsymbol{E}_{外} = \boldsymbol{E}_2^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_2^{(1)} + \cdots$$

$$\boldsymbol{E}_{内} = \boldsymbol{E}_1^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_1^{(1)} + \cdots$$

将它们分别代入积分方程(13.51)和(13.53)式,得

$$\boldsymbol{E}_2^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_2^{(1)} + \cdots = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi[\boldsymbol{E}_2^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_2^{(1)} + \cdots]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}}{R}d\tau',$$

$$\boldsymbol{E}_1^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_1^{(1)} + \cdots = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\chi[\boldsymbol{E}_1^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_1^{(1)} + \cdots]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}}{R}d\tau' - \chi[\boldsymbol{E}_1^{(0)} + \chi\boldsymbol{E}_1^{(1)} + \cdots],$$

比较上两式中的左右两边的 χ 的幂次,则可分别得各级近似解如下:

零级近似　$\boldsymbol{E}_1^{(0)} = \boldsymbol{E}_2^{(0)} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, (13.54)

一级近似

$$\boldsymbol{E}_1^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'+kR)}}{R}d\tau' - \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{13.55}$$

$$\boldsymbol{E}_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'+kR)}}{R}d\tau', \tag{13.56}$$

依此类推,即可求得其他级近似. 注意,零级近似正是代表入射波.

为了保证级数的收敛性,修正项应当比主项小得多,即

$$|\chi E^{(1)}|\ll E_0, \tag{13.57}$$

这个不等式应当对所有的观察点 $\boldsymbol{r}$ 成立. 我们可以从(13.57)式来估计(13.56)式中的积分,从而得到 ω、ε 和散射体线度应当满足的条件,此处不作赘述.

有时我们只需计算离散射体足够远的场，于是我们可以把积分号中分母的 R 用 r 来代替，指数中的 R 可用 $r-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'$ 来代替，其中 $\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，结果得到

$$\boldsymbol{E}^{(1)}=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r}}{r}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k\boldsymbol{e}_r)\cdot r'}\mathrm{d}\tau',\tag{13.58}$$

这是一个很有用的公式.

【例 2】 在一级近似下求电磁波被电介质球散射的微分散射截面.（设球的半径为 R）

解 为了求散射截面，我们只需求离球很远处的场. 令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{e}_r$，并以 $\boldsymbol{q}$ 为极轴，取球坐标系，则公式(13.58)式中的积分可写成

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot r'}\mathrm{d}\tau'&=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr'}r'^2\mathrm{d}r'\cdot\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'\\&=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr'\cos\theta'}r'^2\mathrm{d}r'\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'\\&=4\pi\frac{\sin qR-qR\cos qR}{q^2}\\&=\frac{4\pi R^3}{3}\left[\frac{3(\sin qR-qR\cos qR)}{(qR)^3}\right]\\&=4\pi R^3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}\mathrm{J}_{3/2}(qR).\end{aligned}$$

计算(13.58)式的双重旋度时，只需保留与 r 成正比的项，即

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}=k^2[\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{e}_r)]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}.$$

于是，我们得到一级近似下的散射场为

$$\boldsymbol{E}_s=\frac{\omega^2R^3(\varepsilon_r-1)}{3c^2}3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}\mathrm{J}_{3/2}(qR)[\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{e}_r)]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},$$

式中 $\boldsymbol{q}=|\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{e}_r|=2k\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{e}_r$（入射波矢与出射波矢量）的夹角，即散射角.

我们不难得到微分散射截面

$$\mathrm{d}\sigma_s=\frac{\omega^4R^6(\varepsilon_r-1)^2}{9c^4}\left[3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}\mathrm{J}_{3/2}(qR)\right]^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi\cos^2\theta),$$

其中的 θ 和 ϕ 如图 13.1 所示. 如果入射波是非偏振的，则对于 $\boldsymbol{E}$ 的所有方向求平均值就等于对方位角 ϕ 求平均，我们有

$$\mathrm{d}\sigma_s=\frac{\omega^4R^6(\varepsilon_r-1)^2}{18c^4}\left[3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}\mathrm{J}_{3/2}(qR)\right]^2(1+\cos^2\theta).\tag{13.59}$$

对上述结果，我们讨论如下：

(1) 若波长远大于球半径，即 $kR\ll1$（因而 $qR\ll1$），利用贝塞尔函数的渐近式

$$\mathrm{J}_{3/2}(qR)\approx\sqrt{\frac{(qR)^3}{9\pi}},$$

得微分散射截面为

$$\mathrm{d}\sigma_s=\frac{\omega^4R^6(\varepsilon_r-1)^2}{18c^4}(1+\cos^2\theta),$$

总散射截面为

$$\sigma_s = \frac{8\pi\omega^4 R^6(\varepsilon_r - 1)^2}{27c^4}. \tag{13.60}$$

(2) 若波长小于球半径，即 $kR \gg 1$，此时只有在 $\theta \ll \frac{1}{kR}$ 的狭小区间内 $\left[3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}J_{3/2}(qR)\right]^2$ 才明显地不等于零，前向散射占优势，所以我们可近似地认为 $(1+\cos^2\theta)\approx 2$，于是

$$\sigma_s = \frac{2\pi\omega^4 R^6(\varepsilon_r - 1)^2}{9c^4}\int_0^\pi \left[3\sqrt{\frac{\pi}{(qR)^3}}J_{3/2}(qR)\right]^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

作变量代换 $y = qR = 2kR\sin\frac{\theta}{2}$，并利用 $kR \gg 1$ 的条件，最后得到

$$\sigma_s = \frac{\pi\omega^2 R^4(\varepsilon_r - 1)^2}{18c^2}. \tag{13.61}$$

比较(13.60)和(13.61)式，我们发现在长波和短波的情况下，截面和频率的关系是不同的，而且与球的大小的关系也不同，这种差别是很重要的.

*§13.6 光学定理

在散射问题中，入射波的能量损失即是被散射的能量和被吸收的能量的总和，用截面来表示即为

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a. \tag{13.62}$$

确定被散射体散射和吸收的总能量(即总截面 σ_t)具有很大的实际意义，原则上讲，如果求出 σ_s 和 σ_a，则 σ_t 也就知道了，但这往往是不大方便的. 实际上，入射波总能量的损失与前向散射波的振幅之间有密切的关系，这种关系即是所谓的光学定理. 根据光学定理和上节导出的散射波公式，很容易确定被散射体散射和吸收而失去的总能量，即总截面，同时把散射体对电磁波的散射和吸收之间的不同特性也联系起来了.

设有一平面单色波被宏观物体所散射，则远离散射体的电场是

$$\boldsymbol{E} = E_0\left[\boldsymbol{e}e^{ikz} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_r)\frac{e^{ikr}}{r}\right], \tag{13.63}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$\boldsymbol{e}$ 是入射波的偏振矢量，E_0 是入射波振幅，$E_0\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_r)$ 是沿 $\boldsymbol{e}_r$ 方向的散射波振幅，可由公式(13.51)算出，它表征散射体的性质，且与频率有关. 我们不难得到 $\boldsymbol{H}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\left\{(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e})e^{ikz} + [\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_r)]\frac{e^{ikr}}{r}\right\}, \tag{13.64}$$

式中略去了高级项，$\boldsymbol{e}_z$ 是入射波的传播方向. 我们先从下列关系出发求吸收截面：

$$\sigma_a = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2}\mathrm{Re}\int(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{e}_r r^2 \mathrm{d}\Omega, \tag{13.65}$$

积分遍及一个包围散射体而且半径很大的球面. 公式(13.65)的依据是吸收截面正比于通过球面流向球心方向的能流这个事实. 把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表达式代入(13.65)式,并利用散射波的横波条件 $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_r)=0$,即得

$$\begin{aligned}\sigma_a=&-\int(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)r^2\mathrm{d}\Omega-\int|\boldsymbol{F}|^2\mathrm{d}\Omega-\\&\frac{1}{2}\int[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})-\\&(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F})]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}}{r}r^2\mathrm{d}\Omega-\\&\frac{1}{2}\int[(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)+(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)-\\&(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}^*)]\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}}{r}r^2\mathrm{d}\Omega,\end{aligned}\tag{13.66}$$

上式计算中利用了公式:$\mathrm{Re}(a+\mathrm{i}b)=\frac{1}{2}[(a+\mathrm{i}b)+(a+\mathrm{i}b)^*]$. 显然第一项积分

$$\int(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)r^2\mathrm{d}\Omega=0,$$

第二项积分中 $\boldsymbol{F}$ 是散射波振幅与入射波振幅之比,所以

$$\int|\boldsymbol{F}|^2\mathrm{d}\Omega=\sigma_s.$$

对于其他几项,我们用分部积分法,例如

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}r^2\mathrm{d}\Omega\\=&\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left\{[(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr(1-\cos\theta)}]\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}-\right.\\&\left.\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr(1-\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\cos\theta}(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{d}\cos\theta\right\},\end{aligned}\tag{13.67}$$

重复分部积分时,后一积分给出与$\frac{1}{r}$成正比的项,我们可以略去. 此外,含有振动因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kr}$ 的项对总能流的贡献为零,故可略去,原因是任何实际的所谓"单色"波都是由许多谐波叠加而成的,这些谐波频率分布在一个狭窄的频率范围 $\Delta\omega$ 内,当 r 很大时,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kr}$ 对这样一个频率间隔求平均必为零. 于是

$$\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}r^2\mathrm{d}\Omega=\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)],$$

用类似的方法可以算出其余项的积分:

$$\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}r^2\mathrm{d}\Omega=\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)],$$

$$\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}r^2\mathrm{d}\Omega=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)],$$

$$\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}r^2\mathrm{d}\Omega=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)].$$

利用入射波的横波性$(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e})=0$,另外两项为零. 最后,(13.66)式成为

$$\sigma_a+\sigma_s=\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)]+\frac{-2\pi\mathrm{i}}{k}[\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)].\tag{13.68}$$

由于 $\sigma_a + \sigma_s = \sigma_t$ 是实数，所以取右边中括号的虚部，得

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}[e \cdot F(e_z)]. \tag{13.69}$$

这即是**光学定理**的表示式，它明确表示了总截面与散射波的前向散射的振幅直接有关. 因此，由(13.51)式算出 E_s 以后，我们不仅可以得出 σ_s，而且从光学定理可直接算出总截面. 光学定理在光学中称为**消光截面**，其物理解释是入射波与偏振相同的、在相同方向上传播的部分散射波发生干涉，使原来的入射波发生衰减. 光学定理在量子力学的散射问题中也有对应的定理，有兴趣的读者可参看有关书籍.

*§ 13.7 电磁波在晶体上的衍射

现在，我们运用积分方程(13.51)来讨论具有三维周期性结构的物体对电磁波的散射问题，它被广泛地用于晶体结构的研究，在物理学中占有特别的位置，是电动力学中的一个基本课题.

所有表征晶体性质的物理量都具有与晶格本身同样的周期性，例如，构成晶格的原子中的电子所产生的电荷密度，由这些电荷在晶格中产生的电磁场等等. 晶体的介电常数和极化率 $\chi(r)$ 当然也不例外. $\chi(r)$ 必须具有与晶格本身的周期相同的周期性，也就是说必须成立

$$\chi(r + n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3) = \chi(r),$$

式中 n_1、n_2、n_3 是任意整数，a_1、a_2、a_3 是晶格基矢. 我们可以把周期函数 $\chi(r)$ 展开成三维傅里叶级数，即

$$\chi(r) = \sum_b \chi_b e^{i2\pi b\cdot r}, \tag{13.70}$$

式中求和遍及 b 的一切可能值，b 是晶格的倒格矢，它由晶格基矢决定：

$$b_1 = \frac{1}{V}[a_2 \times a_3],\ b_2 = \frac{1}{V}[a_3 \times a_1],\ b_3 = \frac{1}{V}[a_1 \times a_2],$$

式中 $V = a_1 \cdot [a_2 \times a_3]$，是元胞体积.

我们求的是在散射晶体外很远处的解，所以根据积分方程(13.51)式，晶体外的散射波的场为

$$E = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \left[\nabla \times \int \frac{\chi(r')E(r')}{R} e^{ikR}\, d\tau'\right]. \tag{13.71}$$

我们设晶体的极化率小于 1，则(13.71)式的右边就可用零级近似的解 $E_0 e^{i(k\cdot r)}$ 代入，得

$$E = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \left[\nabla \times \int \frac{\chi(r')E_0}{R} e^{i(kR + k\cdot r')}\, d\tau'\right].$$

对于远离晶体的场，分母 R 可用 r 来代替，指数中的 $R = r - e_r \cdot r'$，只保留到 r^{-1} 项，则上式可简化成

$$E = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r} k \times (k \times E_0)\int \chi(r) e^{i(k - ke_r)\cdot r'}\, d\tau'.$$

令 $q = ke_r - k$ 表示散射波矢和入射波矢之差，并把(13.70)式代入，则得

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)]\sum_b \chi_b \int e^{i(2\pi\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}'}\,d\tau'. \tag{13.72}$$

注意,积分是对整个散射晶体的积分,只有当 $\boldsymbol{q}$ 接近于某个 $2\pi\boldsymbol{b}$ 时,我们才有显著不为零的结果. 在这些值的中间,散射强度实际上等于零. 为此,我们可以分别研究每一个散射的极大值,即取 $\boldsymbol{b}$ 为确定的某个值. 不难证明,在入射波是非偏振的情况下,散射截面为

$$d\sigma_s = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\,|\chi_b|^2\frac{\omega^4}{c^4}\left|\int e^{i(2\pi\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}'}\,d\tau'\right|^2 d\Omega. \tag{13.73}$$

显然,最大的散射截面发生在下列方向上:

$$k\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{k} = 2\pi\boldsymbol{b}. \tag{13.74}$$

上式称为**劳厄方程**. 这些极大值称为主极大,当 $\boldsymbol{b}$ 给定时,主极大不可能出现在任意方向和任意频率上. 把(13.74)式写成 $k\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{k} + 2\pi\boldsymbol{b}$,两边平方则得

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}) = -\pi b^2, \tag{13.75}$$

这个方程决定了 $\boldsymbol{b}$ 为给定值时出现主极大的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的值. 因为 $|k\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{k}| = 2k\sin\frac{\theta}{2}$,$\theta$ 为散射角,于是从(13.74)式可得出

$$k\sin\frac{\theta}{2} = \pi b. \tag{13.76}$$

这个等式称为**布拉格方程**. 由于晶体散射场是衍射图象,所以(13.76)式又称为**布拉格衍射定律**,它决定主极大的衍射角.

将(13.73)式对 $k\boldsymbol{e}_r$ 方向附近的立体角积分. 我们就得到某一极大值附近的衍射"斑"的总强度,对此我们在这里不再讨论.

通过本节的讨论,我们从散射公式导出了晶体的衍射结果,具体地看到了电磁波散射和衍射的一致性.

被各单个粒子散射出来的电磁波线性叠加后,由于这些散射波之间有确定的相位关系,从而出现整体上的方向性,即衍射效应. 由此可见,衍射就是**相干的散射**.

如果粒子排列混乱,或者热运动太剧烈,各散射波的相位关系被破坏,则我们只能得到平方后的强度叠加,这就表现为没有显著方向性的**不相干散射**.

§13.8 基尔霍夫衍射理论

惠更斯原理的基本观念是:观察点 P 的波动是由此点和波源之间的某个面上所发出的各个次波叠加而成的. 基尔霍夫给这个观念奠定了比较完善的数学基础,他指出惠更斯原理可以看作一个积分定理的近似形式.

1. 基尔霍夫积分定理

衍射问题的研究,实际上是在一定的边界条件下求解 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的齐次波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = 0$$

在空间各点的值.

基尔霍夫首先证明:满足齐次方程的场在空间 P 点的解,可以用 P 点周围某一闭合面上所有各点的解及其一次微商表示出来,其数学表达式为

$$\psi(P) = \frac{-1}{4\pi}\oint_S \left\{\psi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) - \frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial \psi}{\partial n'}\right\} dS', \tag{13.77}$$

其中 ψ 表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的一个分量,$\boldsymbol{n}'$ 代表包围体积为 V 的曲面 S 的外法线方向,其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_{n'}$,$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. (13.77)式就是**基尔霍夫积分定理**,证明如下:

设 V 是封闭曲面 S 所包围的体积,P 是 S 内的一点,$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$,则体系内的齐次波动方程变成为亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{13.78}$$

与此相应的格林函数的定义为

$$(\nabla^2 + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{13.79}$$

在格林定理(3.17)中,令 $\phi = G$,$\psi = \psi$,则利用(13.78)和(13.79)式得

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{-1}{4\pi}\oint_S [\psi(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{n'} \cdot \nabla' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{n'} \cdot \nabla' \psi(\boldsymbol{r}')] dS'. \tag{13.80}$$

容易证明,对于出射波来说,其基本解(即无限空间的格林函数)是

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \tag{13.81}$$

这可直接代入方程(13.79)式验证. 把(13.81)代入(13.80)式即得 P 点的场为

$$\psi(P) = \frac{-1}{4\pi}\oint\left[\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) - \frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial}{\partial n'}\psi(\boldsymbol{r}')\right] dS'.$$

定理得证.

2. 基尔霍夫边界条件

现在,我们具体地把积分定理运用到衍射问题上. 考虑从点源 P_0 发出的一个单色波,它在传播过程中通过一个小孔,假定小孔的线度比波长大,但比观察点 P 与波源之间的距离要小得多.

为求得 P 点的波动,我们围绕 P 点作一个闭合面 S,对它取基尔霍夫积分. 闭合面 S 由三部分构成,如图 13.2 所示:开孔 S_0,不透明的屏的背面 S_1,和以 P 点为圆心、R 为半径的大球面 S_2. 于是,基尔霍夫定理给出

$$\psi(P) = \frac{-1}{4\pi}\left[\int_{S_0} + \int_{S_1} + \int_{S_2}\right]\left\{\psi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) - \left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\frac{\partial \psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right\} dS', \tag{13.82}$$

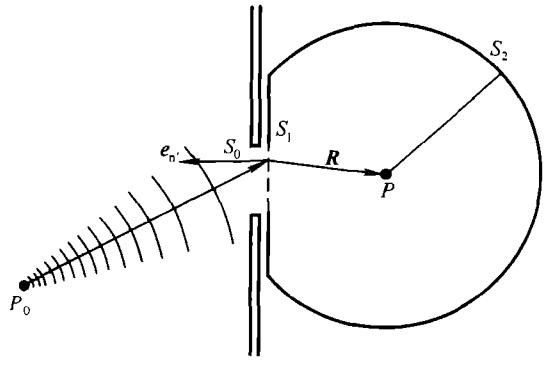


图 13.2

式中 R 是面元 dS' 到 P 点的距离，$\frac{\partial}{\partial n'}$ 表示对外法线方向求微商. 注意，要求出 $\psi(P)$，必须确切知道 S_0、S_1、S_2 上的 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n'}$，而这是不可能的，因此，这里碰到了一个困难，即如何确定边界条件. 若 $\psi^{(i)}$ 表示入射波，基尔霍夫假定

$$\begin{aligned} &\text{在 } S_0 \text{ 上，} \quad \psi = \psi^{(i)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n'} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial n'}, \\ &\text{在 } S_1 \text{ 上，} \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n'} = 0. \end{aligned} \tag{13.83}$$

设 $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_0$ 是波源坐标，则

$$\begin{cases} \psi^{(i)} = \dfrac{A}{R'} e^{ikR'}, \\ \dfrac{\partial \psi^{(i)}}{\partial n'} = \dfrac{A}{R'} e^{ikR'} \left[ik - \dfrac{1}{R'} \right] \cos \theta_{n'R'}. \end{cases} \tag{13.84}$$

式中 $\theta_{n'R'}$ 为 $\boldsymbol{e}_{n'}$ 与 $\boldsymbol{R}'$ 的夹角，(13.83)式称为**基尔霍夫边界条件**，它是基尔霍夫衍射理论的基础.

至于球面 S_2 部分的贡献，从物理上看，显然可以假定为零. 因为辐射场总是在某特定时刻 $t = t_0$ 开始从某一波源发射的，于是在 $t > t_0$ 的任何时刻，场所充满的空间区域的边界不超过 $c(t - t_0)$. 因此，如果 R 足够大，则对 S_2 上的积分将为零.

将上面这些边界条件代入(13.82)式，并略去比波长小得多的对 $\frac{1}{R}$ 和 $\frac{1}{R'}$ 法线的微商项，于是得到

$$\psi(P) = \frac{iA}{2\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(R'+R)}}{R'R} [\cos \theta_{n'R'} + \cos \theta_{n'R}] dS', \tag{13.85}$$

这就是**基尔霍夫衍射公式**. 其中中括号内的因子是**倾斜因子**,它描写子波振幅随方向的变化. 在原始的惠更斯原理中,由子波源发出的波有两种,一是前进波,二是后退波,但实际上并没有观察到后退波,这由惠更斯原理是无法解释的. 现在,倾斜因子的存在自然解决了这个困难,这一点我们不难从(13.85)式和图13.3中看出来.

3. 可逆性和互补性

基尔霍夫衍射公式有一个重要的对称性质,即源和观察点是对称的;这就是说,位于 P_0 点的源在 P 点产生的效果,与 P 点的具有同等强度的源在 P_0 点产生的效果相同. 这个结果有时称为**可逆定理**.

衍射的互补性也是一个重要的性质. 设有两个屏,其中第一个屏的开孔部分正好对应第二个屏的不透明部分,或者相反,它们之间构成"互补屏". 设 $\psi_1(P)$和 $\psi_2(P)$分别代表第一个屏和第二个屏单独放在光源和观察点之间时 P 点的场,另设 $\psi(P)$是没有任何屏时 P 点场的值. 注意,$\psi_1(P)$和 $\psi_2(P)$都是用对开孔部分的积分来表示的,而这两个屏上的开孔部分相加正好构成整个平面,因而 $\psi_1(P)+\psi_2(P)$表示对屏处的整个平面积分,即等于没有屏时的场. 这样

$$\psi_1(P)+\psi_2(P)=\psi(P), \tag{13.86}$$

这一"互补原理"称为**巴比涅原理**.

由"互补性"原理,我们可以得到两个推论:

(1) 如果 $\psi_1(P)=0$,则 $\psi_2(P)=\psi(P)$,可见放上其中一个屏时场强为零的那些点,在换上另一个屏时场强跟没有屏时一样.

(2) 如果 $\psi(P)=0$,则 $\psi_1(P)=-\psi_2(P)$,就是说,在无屏时场强为零的那些点上,放第一个屏和第二个屏得到的场强大小相等,相位相反.

§13.9　夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射

现在我们仔细地分析一下衍射公式(13.85)式,考察如图13.3所示的平面屏上开孔的衍射,设源点 P_0 和观察点 P 离屏的距离比孔的线度大得多,并假定直线 P_0O、OP 与 P_0P 的夹角都不太大,其中 O 点是开孔上的任意一点,于是有

$$\cos\theta_{n'R'}+\cos\theta_{n'R}\approx-2\cos\delta, \tag{13.87}$$

其中 δ 是直线 P_0P 与屏法线的夹角. 根据上面的假定,我们也可以近似地认为 $R\approx r$, $R'\approx r'$,于是(13.85)式变成

$$\psi(P)\approx-\frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\frac{\cos\delta}{rr_0}\int_{S_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+R')}\,\mathrm{d}S'. \tag{13.88}$$

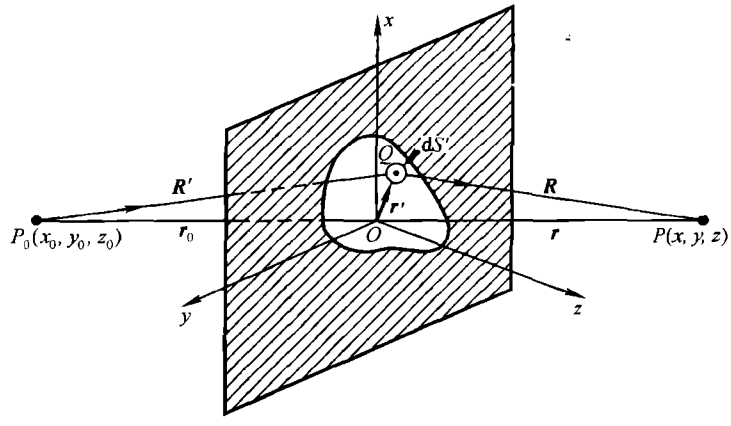


图 13.3

取如图 13.3 所示的直角坐标系，令原点在开孔上，x 轴和 y 轴在孔平面上，并选取正 z 轴方向指向观察点 P 所在的半空间. 设(x_0, y_0, z_0)和(x, y, z)分别是 P_0 和 P 点的坐标，$r'(x', y', z')$是开孔上某点 Q 的坐标，则

$$R'^2 = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + z_0^2,$$

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2,$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

因此

$$\begin{cases} R'^2 = r_0^2 - 2(x_0x' + y_0y') + x'^2 + y'^2, \\ R^2 = r^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2. \end{cases} \tag{13.89}$$

由于我们已经假定孔的线度远小于 r_0、r，因而可将 R'和R 展开成 $\frac{x'}{r_0}$、$\frac{y'}{r_0}$，$\frac{x'}{r}$、$\frac{y'}{r}$的幂级数，于是得到

$$\begin{aligned} R' &\approx r_0 - \frac{x_0x' + y_0y'}{r_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r_0} - \frac{(x_0x' + y_0y')^2}{2r_0^3} + \cdots \\ R &\approx r - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r} - \frac{(xx' + yy')^2}{2r^3} + \cdots \end{aligned} \tag{13.90}$$

将(13.90)式代入到(13.88)式，得

$$\psi(P) = -\frac{i\cos\delta}{\lambda}\frac{Ae^{ik(r_0+r)}}{rr_0}\int_{S_0} e^{ikf(x',y')}\,dx'dy', \tag{13.91}$$

式中

$$f(x',y') = -\frac{x_0x' + y_0y'}{r_0} - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r} - \frac{(x_0x' + y_0y')^2}{2r_0^3} - \frac{(xx' + yy')^2}{2r^3}\cdots \tag{13.92}$$

令(l_0, m_0)和(l, m)代表 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的两个方向余弦：

$$l_0 = -\frac{x_0}{r_0}, \quad m_0 = -\frac{y_0}{r_0}, \qquad l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \tag{13.93}$$

则(13.92)式可写成

$$f(x',y') = (l_0 - l)x' + (m_0 - m)y' + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right)(x'^2 + y'^2) - \frac{(l_0x' + m_0y')^2}{r_0} - \frac{(lx' + my')^2}{r}\right\} + \cdots \tag{13.94}$$

这样，我们把求 P 点的场转化成利用(13.94)式求(13.91)式的积分. 如果我们把(13.94)式中的 x'、y'的二次方以上的项都略去，即

$$f(x',y') = (l_0 - l)x' + (m_0 - m)y',$$

则

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}\cos\delta}{\lambda}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0 + r)}}{rr_0}\int_{S_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[(l_0 - l)x' + (m_0 - m)y']}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \tag{13.95}$$

这称为**夫琅禾费衍射**. 利用(13.93)式中的方向余弦可把公式(13.95)式写成更简单的形式，即

$$\psi(P) = \frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S', \tag{13.96}$$

其中 $u_0 = \frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\cos\delta}{r_0}$是开孔处场的振幅，$\boldsymbol{k}_0$ 是入射波波矢，$\boldsymbol{k}$ 是衍射波波矢.

如果(13.94)式中的二次项不能忽略，则称为**菲涅耳衍射**. 显然，当源点 P_0 或观察点 P 离屏较近时，二次项必须保留，此时的衍射将是菲涅耳衍射. 可见，菲涅耳衍射要比夫琅禾费衍射复杂，幸好在大多数问题中后者要比前者重要得多.

【例 3】 求圆孔的夫琅和费衍射. 设圆孔的半径为 R，电磁波垂直入射到孔的平面.

解 选取柱坐标系，原点选在圆孔的中心，z 轴垂直于圆孔平面，因为入射波矢量沿着 z

轴,所以有

$$\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}' = 0,$$

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}' = kr'\sin\theta\cos\phi' \approx k\theta r'\cos\phi',$$

式中 θ 是衍射波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角(即衍射角),由于夫琅禾费衍射角很小,故 $\sin\theta \approx \theta$. 由公式(13.96)得

$$\psi(P) = \frac{u_0 e^{ikr}}{i\lambda r}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta r'\cos\phi'} r'\,dr'\,d\phi',$$

式中 u_0 是入射波振幅. 利用零阶贝塞尔函数的积分表示:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\phi}\,d\phi,$$

得

$$\psi(P) = \frac{2\pi u_0 e^{ikr}}{i\lambda r}\int_0^R J_0(k\theta r')\,r'\,dr',$$

利用熟知的递推关系式

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1}J_{n+1}(x)\} = x^{n+1}J_n(x),$$

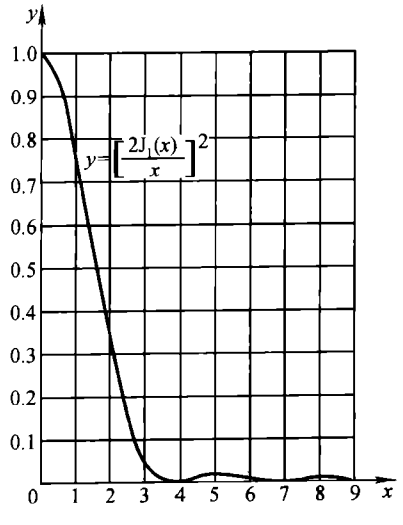
积分后得到

$$\psi(P) = \frac{2\pi u_0 e^{ikr}}{i\lambda r}\,\frac{k\theta R J_1(k\theta R)}{k^2\theta^2} = \frac{2\pi e^{ikr}}{i\lambda r}\,\frac{RJ_1(k\theta R)}{k\theta}u_0,$$

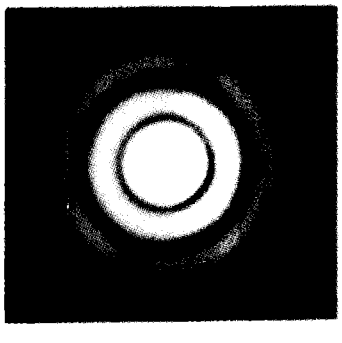
故

$$|\psi(P)|^2 = \frac{J_1^2(k\theta R)}{r^2\theta^2}R^2u_0^2.$$

入射波的总强度为



(a)



(b)

图 13.4

$$I_0 = \pi R^2 u_0^2,$$

于是最后得到衍射到 θ 方向、立体角 $d\Omega$ 内的强度为 $dI = |\psi(P)|^2 r^2 d\Omega$，即

$$dI = I(P) r^2 d\Omega = I_0 \frac{J_1^2(Rk\theta)}{\pi\theta^2} d\Omega.$$

衍射的强度分布由函数 $y = [2J_1(x)/x]^2$ 来表示，其曲线如图 13.4(a)所示，对应的衍射图样是明暗相间的圆环，如图 13.4(b)所示.

*§ 13.10　超声波对电磁波的衍射

超声波是一种频率高于正常人能听到的频率的声波，它是纵波. 1921 年，布里渊首先预言，电磁波投射到有短波长压缩波横向通过的液体时会产生衍射现象. 十年以后，德拜和其他一些物理学家都分别独立地观察到了光被超声波衍射的现象，从而证实了布里渊的预言.

我们来考察位于两无限大平面 $y=0$ 和 $y=d$ 之间的液体，其中波长为 λ_a 的平面压缩波(超声波)沿 x 轴正方向传播，如图 13.5 所示. 此时液体的分子数密度沿着 x 轴周期性地变化，我们不妨写成如下形式：

$$n(x,t) = n_0[1 + \Delta\cos(k_a x - \omega_a t)], \tag{13.97}$$

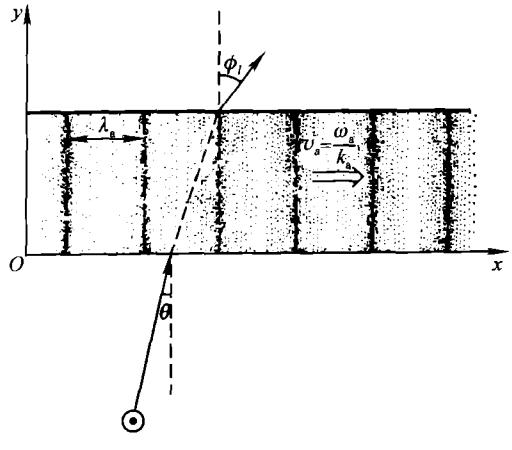


图 13.5

式中 $\Delta \ll 1$，n_0 是平均分子数密度，$n_0\Delta$ 是超声波振幅，k_a、ω_a 分别是超声波的波矢和频率. 显然，两个相邻密度最大的平面之间的距离即是声波波长，在每一瞬时来看其密度结构类似于光栅. 我们知道，介电常数与介质的密度直接相关，可见 ε_r 也是空间和时间的函数. 我们仍可设

$$\varepsilon_r(x,t) = 1 + \varepsilon_1\cos(k_a x - \omega_a t) \quad (\varepsilon_1 \ll 1). \tag{13.98}$$

如果液体是不导电的非磁性介质，则麦克斯韦方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \end{cases} \tag{13.99}$$

其中 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$. 注意,$\varepsilon_r$ 是空间时间的函数,利用消元法,由(13.99)式可以得到关于 $\boldsymbol{E}$ 的方程为

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_r \boldsymbol{E}) = \nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla[\boldsymbol{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_r]. \tag{13.100}$$

设电磁波的波矢为 $\boldsymbol{k}$,因为在通常情况下 ε_1 和 $\frac{\lambda}{\lambda_a}$ 远小于 1,所以从量纲分析我们看到

$$\frac{|\nabla^2 \boldsymbol{E}|}{|\nabla(\boldsymbol{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_r)|} \approx \frac{k^2}{\varepsilon_1 k_a k} = \frac{k}{\varepsilon_1 k_a} \gg 1.$$

于是,我们可以略去方程(13.100)右边的第二项,得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_r \boldsymbol{E}) = \nabla^2 \boldsymbol{E}. \tag{13.101}$$

如图 13.5 所示,设入射单色平面电磁波是线偏振的,其电矢量垂直于入射面,即沿着 z 轴方向,入射角为 θ,这样由上面的近似看出,在介质内 E_x 和 E_y 都是数量级为 $\frac{\varepsilon_1 k_a}{k}$ 的量和 E_z 的乘积,因此都可略去. 考虑到问题的对称性,即 E_z 与坐标 z 无关,方程(13.101)式还可进一步简化成

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(e^{i(k_a x - \omega_a t)} + e^{-i(k_a x - \omega_a t)}\right)\right]E_z\right\} = 0. \tag{13.102}$$

现在我们来求解上式. 设 E_z 的形式为

$$E_z = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l(y) e^{i[(k_x + lk_a)x - (\omega + l\omega_a)t]},$$

因为 $k_x = k\sin\theta$,所以上式可写成

$$E_z = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l(y) e^{i[(k\sin\theta + lk_a)x - (\omega + l\omega_a)t]}. \tag{13.103}$$

把(13.103)式代入方程(13.102)中,对每一个 l,各指数的系数应相等,则可得到下述递推关系:

$$E_l''(y) + \{\varepsilon_1 c^{-2}(\omega + l\omega_a)^2 - (k\sin\theta + lk_a)^2\}E_l(y) = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 c^{-2}(\omega + l\omega_a)^2\{E_{l-1}(y) + E_{l+1}(y)\}$$

$$(l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{13.104}$$

式中 $E_l(y)$ 上的撇表示对 y 的微商. 为了求解上述关于 E_l 的方程,我们必须考虑到边界条件,为此我们设入射波为 $\boldsymbol{e}_z E_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$,在 $y = 0$ 的平面上,假定反射波振幅很小,可略去,只存在入射波

$$\boldsymbol{e}_z E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\big|_{y=0} = \boldsymbol{e}_z E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\sin\theta-\omega t)}. \tag{13.105}$$

把(13.103)式与(13.105)式比较,则得边界条件为

$$\begin{cases} E_0(0) = E_0, \\ E_l(0) = 0 \quad (l \neq 0). \end{cases} \tag{13.106}$$

1. 衍射角

在解方程(13.104)式之前,我们注意到(13.103)式代表所有频率为 $\omega_l = \omega + l\omega_s$ 的波的叠加,对应 ω_l 的波矢 $\boldsymbol{k}_l$ 在 x 轴方向的投影为 $k\sin\theta + lk_s$. 因此,频率为 ω_l 的衍射波离开液体时 $\boldsymbol{k}_l$ 与 y 轴的夹角 ϕ_l 由下式给出:

$$k_l \sin\phi_l = (k\sin\theta + lk_s),$$

即

$$\sin\phi_l = \frac{c(k\sin\theta + lk_s)}{(\omega + l\omega_s)} \approx \sin\theta + l\frac{\lambda}{\lambda_s}. \tag{13.107}$$

如果电磁波垂直入射液体,则 $\theta = 0$,于是

$$\sin\phi_l \approx l\frac{\lambda}{\lambda_s}. \tag{13.108}$$

(13.108)式表明,对于给定的 λ(入射电磁波的波长),衍射角随着超声波波长 λ_s 的增大而减小. 由于普通声波波长较长,所以往往观察不到频率在可见光范围内的电磁波的衍射现象,只有对短波长的超声波才可以观察到光学上的衍射图样. 这类似于光栅宽度越大,衍射现象越弱.

2. 衍射强度的布里渊近似求法

现在我们解方程(13.104)式,求 l 级的衍射强度 $|E_l(d)|^2$. 设

$$|E_0| \gg |E_1| \gg |E_2| \gg \cdots$$

我们就可以逐级求解. 注意,我们只需考虑沿 y 轴正方向传播的衍射波.

零级近似:可令除 E_0 外其余的 E_l 都为零,则根据边界条件(13.106)式得

$$E_0^{(0)}(y) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varepsilon_1 - \sin^2\theta)^{1/2} ky}. \tag{13.109}$$

一级近似:可令除 E_0 和 $E_{\pm1}$ 之外其余各级 E_l 都为零,作适当计算则得

$$E_{\pm1} = \frac{1}{4}\gamma\delta\frac{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta\left(\xi\pm\frac{1}{2}\right)y}}{\xi \pm \frac{1}{2}} E_0^{(0)}(y), \tag{13.110}$$

其中 $\gamma = \frac{\varepsilon_1}{\Delta}$, $\delta = \frac{\Delta\lambda_s^2}{\lambda^2}$, $\xi = \frac{\lambda_s}{\lambda}\sin\theta$, $\beta = \frac{\pi\lambda}{n\lambda_s^2}$.

把 $E_{\pm1}$ 的表达式(13.110)代入(13.104)式,则可得 $E_{\pm2}$,我们可以证明此项正比于 δ^2. 依此类推,我们可得到任意 l 级的衍射强度,而且一定具有 δ 的升幂形式. 这样,如果 $\delta \ll 1$ 的条件满足,此级数将很快收敛,这种逐次逼近法完全有效,我们只需取前几级近似已足够. 这种方法是布里渊首先导出的,故称布里渊近似.

思考题 试证明 $E_0^{(0)}(y)$ 的校正项正比于 δ^2.

习　题

13.1　一椭圆偏振的平面电磁波被一个自由电子散射，试求其有效散射截面.

13.2　有一线偏振的平面电磁波被一个电介质球散射，介质球的介电常数为 ε，半径为 R，且 $R \ll \lambda$，试求微分散射截面.

13.3　有一线偏振平面电磁波垂直投射到边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形小孔上，试求小孔衍射的场分布及其衍射强度.

13.4　在无限大的不透明的屏上有一个半径分别为 R 和 R' 的环形小孔，光束垂直投射到该小孔上，试求衍射强度.

第十四章　电磁理论的拉氏形式

为了便于将经典理论过渡到量子理论，也为了使电磁理论体系更趋完美，我们在本章将讨论电磁理论的拉格朗日函数和哈密顿函数，并由此导出相应的运动方程，同时我们将以介绍场的量子性结束本章.

§14.1　作用量原理

在分析力学中已介绍过作用量原理，这里我们将给出作用量原理的协变形式.

我们首先讨论单粒子体系. 根据相对论力学，粒子的四维坐标可看成原时 τ 的函数，于是协变形式的作用量原理表述如下：存在一个四维的标量函数 $L(\dot{x}_\mu(\tau), x_\mu(\tau), \tau)$，粒子运动的真正轨迹 $x_\mu(\tau)$ 是使作用量积分

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\dot{x}_\mu(\tau), x_\mu(\tau), \tau)\mathrm{d}\tau \tag{14.1}$$

取极值. (14.1)式显然是协变的，它取极值的条件是

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\dot{x}_\mu(\tau), x_\mu(\tau), \tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{14.2}$$

在(14.2)式中，端点 $x_\mu(\tau_1)$ 和 $x_\mu(\tau_2)$ 取固定值，这些点上的变分为零. 对于(14.2)式，我们并不能马上写出其相应的欧拉方程，原因是对于(14.2)式还存在一个约束条件，即

$$\dot{x}_\mu\dot{x}_\mu = -c^2, \tag{14.3}$$

这就给变分带来了限制条件. 为此，我们应用拉格朗日不定乘子法来求(14.2)的变分问题. 根据标准方法，我们引入一个辅助函数

$$L' = L + \frac{\lambda(\tau)}{2}(\dot{x}_\mu\dot{x}_\mu + c^2), \tag{14.4}$$

式中的 $\lambda(\tau)$ 是一个待定函数，我们称之为乘子. 引入这样一个待定函数以后，具有约束条件的(14.2)式的极值问题就化为求以 L' 为被积函数的泛函

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L'\mathrm{d}\tau$$

的极值问题，即

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L'\mathrm{d}\tau = 0,$$

在边界不变的情况下，我们立即得到欧拉－拉格朗日方程

$$\frac{\partial L'}{\partial x_\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_\mu}\right) = 0,$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\lambda\dot{x}_\mu) = 0. \tag{14.5}$$

引入的乘子 λ 也是一个变分参量，对 λ 的变分可以得到原先以乘子形式附加到 L 中去的约束条件

$$\dot{x}_\mu\dot{x}_\mu = -c^2. \tag{14.6}$$

我们看到，现在有五个方程和五个未知数 $x_\mu(\tau)$ 及 $\lambda(\tau)$，对(14.5)式乘以 $\dot{x}_\mu$，则有

$$u_\mu\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}\right) - u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\lambda u_\mu) = 0, \tag{14.7}$$

式中 $u_\mu = \dot{x}_\mu$. 考虑到

$$u_\mu u_\mu = -c^2 \text{ 及 } u_\mu\dot{u}_\mu = 0,$$

方程(14.7)变为

$$c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\lambda = u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\right) - u_\mu\frac{\partial L}{\partial x_\mu},$$

故

$$\begin{aligned}\lambda c^2 &= \int\dot{\lambda}c^2\mathrm{d}\tau \\ &= \int u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\right)\mathrm{d}\tau - \int\frac{\partial L}{\partial x_\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= -\int\mathrm{d}L + \int\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\dot{u}_\mu\mathrm{d}\tau + \int u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= u_\mu\frac{\partial L}{\partial u_\mu} - L. \end{aligned} \tag{14.8}$$

把(14.8)式代入(14.5)式则得

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\partial L}{\partial u_\mu} - \frac{u_\mu}{c^2}\left(L - u_\nu\frac{\partial L}{\partial u_\nu}\right)\right] = 0. \tag{14.9}$$

由(14.9)式可看出，现在的广义动量应定义为

$$p'_\mu = \frac{\partial L'}{\partial u_\mu}$$

$$=\frac{\partial L}{\partial u_\mu}-\frac{u_\mu}{c^2}\left(L-u_\nu\frac{\partial L}{\partial u_\nu}\right), \tag{14.10}$$

因此,运动方程可以写为

$$\dot{p}'_\mu=\frac{\partial L}{\partial x_\mu}. \tag{14.11}$$

根据以上的讨论,我们可以很容易地找到一些简单体系的拉格朗日函数.

对自由粒子有

$$L=-m_0c^2. \tag{14.12}$$

将(14.12)式代入(14.10)和(14.11)式,我们有

$$p'_\mu=m_0u_\mu,$$

而运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0u_\mu)=0. \tag{14.13}$$

(14.12)式中的负号保证 $\gamma^{-1}L$ 在非相对论近似下得到经典表达式 $\frac{1}{2}m_0v^2$. 由于 $\int L\mathrm{d}\tau=\int L\gamma^{-1}\mathrm{d}t=\int\gamma^{-1}L\mathrm{d}t$,故与经典拉氏量对应的表达式是 $\gamma^{-1}L$,而不是 L.

§14.2 电磁场中带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数

1. 拉格朗日函数

上一节我们已写出了自由粒子的拉格朗日函数,若讨论的是带电粒子在电磁场中的运动,则粒子与场之间将发生相互作用. 因此,我们必须在(14.12)式上加上一补充项,以描述这个相互作用. 这一补充项必须包含描述粒子特征的量,以及描述场特征的量. 因为带电粒子的主要特征是电荷,并且它具有速度,而场则是由四维势 A_μ 来描述的,所以这项应包括 u_μ、e 和 A_μ,并且它还应当是不变量. 显然,其形式应当是

$$eA_\mu u_\mu.$$

于是,粒子在外电磁场中的拉格朗日函数现在为

$$L=L_0+L_1=-m_0c^2+eA_\mu u_\mu, \tag{14.14}$$

将它代入(14.10)和(14.11)式,则有

$$p'_\mu=\frac{\partial L}{\partial u_\mu}-\frac{u_\mu}{c^2}\left(L-u_\nu\frac{\partial L}{\partial u_\nu}\right)$$

$$= eA_\mu + m_0 u_\mu \tag{14.15}$$

由 $$\frac{\mathrm{d}p'_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial L}{\partial x_\mu},$$

得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(eA_\mu + m_0 u_\mu) = e\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}u_\nu,$$

即 $$e\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}u_\nu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u_\mu) = e\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}u_\nu,$$

整理后得到带电粒子在电磁场中的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u_\mu) = eF_{\mu\nu}u_\nu, \tag{14.16}$$

式中 $$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

是电磁场张量.

【例 1】 试证明:对带电粒子的拉格朗日函数(14.14)中的势作规范变换 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ 所得到的拉格朗日函数与(14.14)式是等效的.

解 带电粒子在外场中的拉格朗日函数为

$$L = -m_0 c^2 + eA_\mu u_\mu,$$

作用量为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-m_0 c^2 + eA_\mu u_\mu)\mathrm{d}\tau.$$

现在令

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda,$$

则拉格朗日函数变成

$$\begin{aligned} L' &= -m_0 c^2 + e(A_\mu + \partial_\mu \Lambda)u_\mu \\ &= -m_0 c^2 + eA_\mu u_\mu + (\partial_\mu \Lambda)u_\mu, \end{aligned}$$

而 $$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

可见 $$L' = -m_0 c^2 + eA_\mu u_\mu + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau},$$

于是作用量为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-m_0 c^2 + eA_\mu u_\mu)\mathrm{d}\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}\Lambda = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\mathrm{d}\tau + \Lambda(\tau_2) - \Lambda(\tau_1).$$

在边界点上,变分为零,这样

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\mathrm{d}\tau = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} L'\mathrm{d}\tau,$$

显然 L' 与 L 是等效的.

2. 哈密顿函数

知道了体系的拉格朗日函数,我们就可以用分析力学中的标准方法导出体

系的哈密顿函数. 我们已经知道,四维动量为

$$p'_\mu = m_0 u_\mu + eA_\mu ,$$

单个带电粒子在外场中的哈密顿函数为

$$H = u_\mu p'_\mu - L , \tag{14.17}$$

把(14.15)和(14.14)式代入(14.17)式,我们就得到

$$H = 0. \tag{14.18}$$

由于 H 恒为零,所以哈密顿函数已经失去分析力学中所具有的能量的意义,并且不能从这个哈密顿函数导出正则运动方程,为了克服这个困难,我们应当首先研究(14.17)式恒为零的含义是什么. 哈密顿函数 H 一般应为正则坐标 x_μ 和正则动量 p_μ 的函数,即

$$H = H(x_\mu , p_\mu).$$

$H(x_\mu , p_\mu)=0$ 相当于在变量 x_μ 和 p_μ 之间加上一个约束条件,(14.18)式就相当于一个约束方程,体系的独立变量相应地应减少一个,因此我们可以令

$$p_4 = p_4(x_4 , \boldsymbol{x} , \boldsymbol{p}) , \tag{14.19}$$

这样,我们就可用这一特点导出体系的哈密顿函数的三维形式.

若 $\mathscr{H}$ 表示三维哈密顿函数,则运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_i} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_i , \\ \dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i} = \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} , \end{cases} \quad i = 1,2,3. \tag{14.20}$$

在四维空间,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} , \ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} , \\ &\frac{\partial H}{\partial x_4} = -\frac{\mathrm{d}p_4}{\mathrm{d}\tau} , \ \frac{\partial H}{\partial p_4} = \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau} , \end{aligned} \tag{14.21}$$

因此得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_4} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \Big/ \dfrac{\partial H}{\partial p_4} , \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x_4} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial H}{\partial p_4} . \end{cases} \tag{14.22}$$

考虑到(14.19)式,就有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H}{\partial p_4} \dfrac{\partial p_4}{\partial x_i} = 0 , \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} + \dfrac{\partial H}{\partial p_4} \dfrac{\partial p_4}{\partial p_i} = 0 , \end{cases} \tag{14.23}$$

把它代入(14.22)式则得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_4} = -\dfrac{\partial p_4}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x_4} = \dfrac{\partial p_4}{\partial x_i}. \end{cases} \tag{14.24}$$

把(14.24)式与三维正则方程(14.20)式比较,立即可看出,若令 $\mathscr{H} = -\mathrm{i}cp_4$,则得三维正则方程. 所以

$$\mathscr{H} = -\mathrm{i}cp_4 = e\varphi + c\sqrt{m_0^2c^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}. \tag{14.25}$$

这就是一个带电粒子在外电磁场中的哈密顿函数,尽管它的形式是非协变的,但它是相对论性的. 应当指出,考查一个体系是否是相对论性的,协变形式仅是一个充分条件,而不是一个必要条件.

如果粒子的运动速度远小于光速,即$\frac{v}{c} \ll 1$,则可把(14.25)展开得到

$$\mathscr{H} = m_0c^2 + e\varphi + \frac{1}{2m_0}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2, \tag{14.26}$$

这才是非相对论的哈密顿函数.

***3. 含有经典自旋的带电粒子在外场中的拉氏量和运动方程**

假若粒子具有内禀磁矩 $\boldsymbol{m}$(不是轨道磁矩),那么它在外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的能量就有一附加项 $-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$;同样,如果粒子具有内禀电偶极矩 $\boldsymbol{p}$,则在外电场中粒子具有一附加能量 $-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$. 根据这些事实,我们可以唯象地写出附加能量的四维协变形式,即

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{14.27}$$

式中 $\sigma_{\mu\nu}$称为反对称的偶极矩张量,它的具体形式为

$$\sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & m_3 & -m_2 & icp_1 \\ -m_3 & 0 & m_1 & icp_2 \\ m_2 & -m_1 & 0 & icp_3 \\ -icp_1 & -icp_2 & -icp_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14.28}$$

可见,$\sigma_{\mu\nu}$是一个反对称的二阶张量.

在粒子静止的坐标系中,偶极矩不是一个标量,而是矢量,它的方向将依赖于运动. 存在偶极矩时,体系的拉格朗日函数必须包含附加项(14.27)式,即

$$L = -m_0c^2 + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + eA_\mu u_\mu, \tag{14.29}$$

把这个拉格朗日函数代入欧拉方程就有

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right) + e\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)u_\nu,$$

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u_\mu} = eA_\mu + m_0u_\mu - \frac{1}{2}\cdot\frac{u_\mu}{c^2}\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

所以从欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\right)=0,$$

我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\alpha\beta}\right)+e\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu\right)u_\nu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(eA_\mu+m_0u_\mu-\frac{u_\mu}{\partial c^2}\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0u_\mu)=eF_{\mu\nu}u_\nu+\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\alpha\beta}+\frac{1}{2c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}u_\mu). \tag{14.30}$$

(14.30)式中的最后一项可以写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}u_\mu)&=\frac{1}{2c^2}\sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial\tau}u_\mu+F_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\\&=\frac{1}{2c^2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}u_\mu u_\nu+\frac{1}{2m_0c^2}\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0u_\mu),\end{aligned}$$

把上式代入(14.30)式,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0u_\mu)=\frac{1}{1-\Delta m}\left(eF_{\mu\nu}u_\nu+\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\alpha\beta}+\frac{1}{2c^2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}u_\mu u_\nu\right), \tag{14.31}$$

式中

$$\Delta m=\frac{1}{2m_0c^2}\sigma_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{14.32}$$

从(14.31)式看出,由于偶极矩的存在,粒子的有效质量或有效电荷发生了变化,这体现在因子 $1/(1-\Delta m)$上. 此外,(14.31)式的右边还表示在洛伦兹力上附加了正比于外场梯度的作用力项. 如果外场是均匀的,则有

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\alpha\beta}=0,$$

这时方程(14.31)式退化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0u_\mu)=\frac{1}{1-\Delta m}eF_{\mu\nu}u_\nu. \tag{14.33}$$

上式右边的形式类似于洛伦兹力,只是多了一个因子 $1/(1-\Delta m)$. (14.33)式是均匀场中具有自旋的带电粒子的运动方程,因子 Δm 是来自偶极矩(即自旋)的贡献. 如果偶极矩的能量 $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 与粒子的静止能量相比很小($\Delta m\ll1$),(14.33)式就回到通常的带电粒子在外场中的运动方程.

在实际应用中,我们可以引入一个四维矢量 s_μ,其定义为

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha s_\beta, \tag{14.34}$$

式中 p_α 是四维动量矢量,$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$是四阶完全反对称单位张量(其定义见§11.6). (14.34)式也可以写成

$$s_\mu=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\nu\sigma_{\alpha\beta}. \tag{14.35}$$

由(14.34)和(14.35)式可得

$$p_\mu s_\mu=0,\quad p_\mu\sigma_{\mu\nu}=0=s_\mu\sigma_{\mu\nu}.$$

可见,自旋可以用一个与动量 p_μ 正交的四维矢量 s_μ 来描写. 我们把 s_μ 称为**自旋矢量**. 在粒

子相对静止的坐标系中，粒子的动量为 $p_\mu=(0,im_0c)$，由(14.35)式可以得到

$$s_\mu=(s,0), \tag{14.36}$$

所以自旋矢量是一个三维的类空矢量.

上面我们仅仅讨论了粒子的自旋对粒子本身运动的影响，但粒子在运动过程中，自旋 s_μ 或 $\sigma_{\mu\nu}$ 也是变化的，可见我们还应当讨论偶极矩的变化规律，关于这个问题可以参见有关书籍*.

*§14.3 准确到二级的带电粒子系的拉格朗日函数

这一节，我们主要讨论由许多带电粒子组成的体系的拉格朗日函数. 从经典力学角度来看，若不考虑相对论修正，这种体系的拉格朗日函数为

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{e_ie_j}{4\pi\epsilon_0R_{ij}}, \tag{14.37}$$

式中 R_{ij} 是 e_i 和 e_j 之间的距离. 我们现在的目的是要计算相对论性的修正，显然必须对(14.37)式进行修改.

从相对论的观点看，带电粒子间的相互作用不是(14.37)式所表示的那种超距作用，而是通过电磁场进行相互作用的；也就是说，第 i 个粒子在自己周围的空间激发了电磁场，这种电磁场与其他带电粒子，譬如第 j 个粒子发生作用，就表现为 j 粒子和 i 粒子间的相互作用. 因此，严格说来，这个体系的拉格朗日函数中的相互作用部分应当用粒子和场之间的相互作用来表示. 但是，由于场是以有限速度传播的，可见用同一时刻的粒子的坐标和速度来描写拉格朗日函数是困难的. 幸好，多粒子体系中粒子的速度往往都比光速小得多，这时我们可以得到一个忽略推迟效应，准确到 $\frac{v^2}{c^2}$ 级的但体现相对论效应的拉格朗日函数.

我们将按下述方式来寻找这一拉格朗日函数. 在外场中带电粒子的拉格朗日函数是[见(14.14)]

$$L=-m_0c^2+eA_\mu(x)u_\mu.$$

在多粒子体系中选定一个带电粒子，并求出其余带电粒子在该粒子所在处产生的场的势 $\boldsymbol{A}$ 和 φ，把 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 作适当近似后表示成非推迟的形式，然后把势 $\boldsymbol{A}$、φ 代入上面的拉格朗日函数，从而求得这个粒子的拉格朗日函数，于是我们不难求得整个体系的拉格朗日函数.

由于明显协变的拉格朗日函数(14.14)使用起来不方便，下面我们找出相应的非明显协变形式但仍是相对论的拉格朗日函数. 带电粒子在电磁场中的作用量为

$$\begin{aligned}\int_{\tau_1}^{\tau_2}L\mathrm{d}\tau&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-m_0c^2-eA_\mu(x)u_\mu)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{\tau_1}^{\tau_2}[-m_0c^2\mathrm{d}\tau-eA_\mu(x)\mathrm{d}x_\mu],\end{aligned}$$

* Barut A. O., Electrodynamics and classical theory of fields & particles, New York (1980).

把 A_μ 和 x_μ 写成三维形式则为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-m_0c^2\mathrm{d}\tau + e\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} - e\varphi\mathrm{d}t),$$

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$ 是粒子的速度,所以作用量可写成

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\varphi\right)\mathrm{d}t,$$

上式右边的被积函数正是带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数的非明显协变的形式,即

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\varphi, \tag{14.38}$$

其中第一项是自由粒子的拉格朗日函数,最后两项是描写粒子与场的相互作用的项.

我们只考虑由两个带电粒子组成的体系,其中一个粒子在空间产生的场的势为[见(12.5)式]

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \frac{[\rho']}{R}\mathrm{d}^3x', \\ \boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{[\boldsymbol{j}']}{R}\mathrm{d}^3x', \end{cases}$$

式中 $t' = t - \frac{R}{c}$,且

$$[\rho'] = e\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}(t')),\ [\boldsymbol{j}'] = e\boldsymbol{v}\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}(t')).$$

由于粒子的速度远小于光速,故我们可把$[\rho']$和$[\boldsymbol{j}']$等推迟量用同时量展开. 把

$$\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(t')) = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(t)) + (t'-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(t'))\Big|_{t'=t} + \cdots$$

代入上面的 φ、$\boldsymbol{A}$ 的表达式,并作积分,保留到$\frac{v^2}{c^2}$级,则有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{R_0} + \frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_0\right),$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\boldsymbol{v}}{R_0},$$

其中 $R_0 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)|$,为了方便,略去 R_0 的下标. 对 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 作一规范变换

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda,$$

并取 $\Lambda = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{2c^2}\frac{\partial R}{\partial t}$,则得

$$\begin{cases} \varphi' = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e}{R}, \\ \boldsymbol{A}' = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{e\boldsymbol{v}}{R} + \dfrac{e}{2}\nabla\dfrac{\partial R}{\partial t}\right], \end{cases}$$

即

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R},$$

$$\boldsymbol{A}' = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{e}{R}\left[\boldsymbol{v} + \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^2}\right]. \tag{14.39}$$

我们用下标 1 表示第一个粒子的物理量,下标 2 表示第二个粒子的物理量,则第二个粒子在第一个粒子所在处激发的场为

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_2}{R_{12}},$$

$$\boldsymbol{A}' = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{e_2}{R_{12}}\left[\boldsymbol{v}_2 + \frac{(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{R}_{12})\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^2}\right].$$

因此,这两个粒子之间的相互作用可写成

$$\begin{aligned} u_{12} &= e_1\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{v}_1 - e_1\varphi' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_1e_2}{R_{12}}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + \frac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{R}_{12})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{14.40}$$

上式称为**布乃特公式**. 布乃特公式曾被成功地应用于原子的量子理论,例如,讨论电子的散射、双电子氦的相对论修正和某些元素光谱的超精细结构等各种问题. 现在,我们不难写出双粒子体系的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}m_{01}v_1^2 + \frac{1}{2}m_{02}v_2^2 + \frac{1}{8c^2}m_{01}v_1^4 + \frac{1}{8c^2}m_{02}v_2^4 - \\ &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{e_1e_2}{R_{12}} - \frac{e_1e_2}{2c^2R_{12}}\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + \frac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{R}_{12})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{14.41}$$

对于 n 个带电粒子的体系,其准确到二级的拉格朗日函数为(略去表示静止质量的 m 的下标)

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2 + \frac{1}{8c^2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^4 - \\ &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\frac{e_ie_j}{R_{ij}} - \frac{1}{4c^2}\sum_{j,i}\frac{e_ie_j}{R_{ij}}\left[\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j + \right.\right. \\ &\left.\left.\frac{(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{R}_{ij})(\boldsymbol{v}_j\cdot\boldsymbol{R}_{ij})}{R_{ij}^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{14.42}$$

这个拉格朗日函数最先是达尔文(1920)求得的,所以称为达尔文拉格朗日函数.

【例 2】 求对应于达尔文拉格朗日函数的哈密顿函数.

解 设 q、$\dot{q}$ 为广义坐标和广义速度,λ 是 L 中的另一个参变量,则

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

广义动量 p 应为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

而哈密顿函数 $H = p\dot{q} - L$,这样

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q + \dot{q}\mathrm{d}p - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

因此

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda}.$$

可见参量 λ 的变化引起的哈密顿函数变化，等于 λ 变化引起的拉格朗日函数变化的负值.

现在，我们把(14.42)式中的第二项和第四项看成对原先的拉格朗日函数(14.37)式的一个小的修正，而对应于(14.37)式的哈密顿函数大家熟知为

$$H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{e_i e_j}{R_{ij}},$$

这样，修正后的哈密顿函数应当为

$$H = H_0 + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda = H_0 - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

于是

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{e_i e_j}{R_{ij}} - \sum_i \frac{p_i^4}{8c^3 m_j^3} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{e_i e_j}{2c^2 m_i m_j R_{ij}}\left[\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j + \frac{(\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{R}_{ij})(\boldsymbol{p}_j \cdot \boldsymbol{R}_{ij})}{R_{ij}^2}\right].$$

如果是两个粒子，并且参考系取为质心坐标系，即 $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$，则我们可以得到质心坐标系中两个粒子体系的哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p^2 - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right)p^4 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{e_1 e_2}{R} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[p^2 + \left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)^2\right]\right\},$$

式中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 是两个粒子的相对位置矢量.

*§ 14.4　电磁场的拉格朗日函数

场作为一个物理体系是由一组函数 $\phi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$来描写的，$\alpha = 1,2,\cdots,N$，$\alpha$ 的取值范围由场的内部性质决定. 函数 $\phi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$满足一组偏微分方程组，称为场方程. 作为电磁场，它是用四维矢势 A_μ 来描写的，所以此时 α 只取 1,2,3,4，$A_\alpha \Rightarrow \phi_\alpha$. 为了从最小作用量原理出发导出场方程，我们可以建立与质点力学相类比的对应关系

$$\phi_\alpha \Rightarrow q_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_\alpha \Rightarrow \dot{q}_\alpha, \quad x_\mu \to t,$$

因此场的拉格朗日函数密度取为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi_\alpha(x_\mu), \partial_\mu\phi_\alpha(x_\nu), x_\mu), \tag{14.43}$$

式中 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$. 体系的作用量为 $\mathscr{L}$ 的四维体积分，即

$$\int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4 x,$$

其中 $\mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$ 为四维体积元. 最小作用量原理要求

$$\delta\int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4 x = 0.$$

若边界是固定的，则变分原理要求

$$\delta\int_R \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x = \int_R \delta\mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x = 0, \tag{14.44}$$

因为

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta(\partial_\mu\phi_a)\\ &= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\delta\phi_a + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right],\end{aligned} \tag{14.45}$$

把(14.45)式代入(14.44)式,我们有

$$\int_R \delta\mathscr{L}\mathrm{d}^4x = \int_R \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\delta\phi_a\,\mathrm{d}^4x + \int\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right]\mathrm{d}^4x.$$

上式右边第二项可以通过四维高斯定理变为面积分,由于边界上的 $\delta\phi_a = 0$,故此项积分为零. 于是,我们得到方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} = 0. \tag{14.46}$$

(14.46)称为场方程,一旦体系的 $\mathscr{L}$ 确定,便可由此式求得场方程的具体形式,从而场的动力学性质也就清楚了. 变分原理并没有告诉我们如何去选择拉格朗日函数密度,拉格朗日函数的选取是一个理论问题,即使对于同一个物理体系,拉格朗日函数的选取也不是唯一的. 例如,若 $\mathscr{L}$ 是场的拉格朗日密度,则在 $\mathscr{L}$ 上再附加一项 $\partial_\mu\Gamma_\mu(\phi_a, x_a)$,则由最小作用量原理,我们得到

$$\delta\int_R [\mathscr{L} + \partial_\mu\Gamma_\mu(\phi_a, x_a)]\mathrm{d}^4x = \delta\int_R \mathscr{L}\mathrm{d}^4x + \delta\oint\Gamma_\mu\,\mathrm{d}S_\mu,$$

其中 $\mathrm{d}S_\mu$ 是四维面积元. 显然,只要边界上的 ϕ_a 的值是确定的,则第二项总为零,因此

$$\delta\int_R (\mathscr{L} + \partial_\mu\Gamma_\mu)\mathrm{d}^4x = \delta\int_R \mathscr{L}\mathrm{d}^4x. \tag{14.47}$$

所以,$\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}+\partial_\mu\Gamma_\mu$ 是等效的,它们描述同一个物理体系. 下面我们来讨论关于场的几个重要的拉格朗日密度.

1. 自由电磁场的拉氏函数

自由电磁场的场方程是我们熟知的,若用势来表示,则 A_μ 的方程是

$$\Box A_\mu = 0. \tag{14.48}$$

现在的问题是寻找一个适当的 $\mathscr{L}$,代入(14.46)式而导出(14.48)这个方程. 若取

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\ &= -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu),\end{aligned} \tag{14.49}$$

显然有

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}[(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\lambda\beta})(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) +$$

$$(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})]$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}[\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)]$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}F_{\alpha\beta},$$

可见由

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0,$$

我们得到

$$\partial_\alpha \left\{ -\frac{1}{\mu_0}[\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \right\} = 0,$$

即

$$-\frac{1}{\mu_0}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}(\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{\mu_0}[\partial_\mu\partial_\mu A_\beta - \partial_\mu\partial_\beta A_\mu] = 0.$$

由于 A_μ 满足洛伦兹条件

$$\partial_\mu A_\mu = 0,$$

将它代入上式,得到

$$\partial_\mu\partial_\mu A_\beta = 0.$$

可见,(14.49)式表示的拉格朗日密度正确地给出了场方程,所以我们说它是自由电磁场的拉格朗日密度.

若我们取另一个拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\partial_\alpha A_\nu \partial_\mu A_\beta, \tag{14.50}$$

则不难证明,从 $\mathscr{L}_1$ 仍可得到正确的场方程. 因为

$$\frac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial A_\sigma} = 0,$$

而

$$\frac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = -\frac{1}{2\mu_0}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}(\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\nu\sigma}\partial_\mu A_\beta + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\beta\sigma}\partial_\alpha A_\nu)$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}[\delta_{\mu\lambda}\delta_{\sigma\beta}\partial_\mu A_\beta + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\nu\sigma}\partial_\alpha A_\nu]$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}[\partial_\lambda A_\sigma + \partial_\lambda A_\sigma] = -\frac{1}{\mu_0}\partial_\lambda A_\sigma,$$

所以

$$\frac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial A_\sigma} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathscr{L}_1}{(\partial_\lambda A_\sigma)} = \partial_\lambda\partial_\lambda A_\sigma = 0.$$

根据前面的讨论可知,$\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{L}_1$ 之间只能相差一个四维散度. 证明如下:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}[\partial_\lambda A_\sigma \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda A_\sigma \partial_\nu A_\mu -$$

$$\partial_\sigma A_\lambda \partial_\mu A_\nu + \partial_\sigma A_\lambda \partial_\nu A_\mu]$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\partial_\lambda A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\partial_\lambda A_\sigma \partial_\nu A_\mu$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\sigma \partial_\mu A_\sigma + \frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\sigma \partial_\sigma A_\mu$$

$$= \mathscr{L}_1 + \frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\sigma \partial_\sigma A_\mu,$$

即
$$\mathscr{L} - \mathscr{L}_1 = \frac{1}{2\mu_0}\partial_\mu A_\sigma \partial_\sigma A_\mu.$$

而
$$\partial_\mu(A_\sigma \partial_\sigma A_\mu) = \partial_\mu A_\sigma \partial_\sigma A_\mu + A_\sigma \partial_\mu \partial_\sigma A_\mu = \partial_\mu A_\sigma \partial_\sigma A_\mu,$$

其中我们已运用了洛伦兹条件$\partial_\mu A_\mu = 0$. 因此,我们看到 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{L}_1$ 之间确实只相差一个四维散度.

2. 有源的电磁场的拉氏函数

若体系除电磁场外还存在源,这时的电磁场方程也是我们大家所熟知的

$$\Box A_\mu = \mu_0 j_\mu.$$

为此,在自由场的拉氏密度中加一项源与电磁场相互作用的项 $A_\mu j_\mu$,即

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + A_\alpha j_\alpha,$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + A_\alpha j_\alpha. \tag{14.51}$$

显然,我们立即可以看出,这个拉氏密度可正确地给出上面那个非齐次电磁势方程.

【例 3】 如果电磁场的拉格朗日密度写成下述形式:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2\mu_0}\partial_\alpha A_\beta \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha j_\alpha,$$

试问它是否能正确地给出麦克斯韦方程组?

解 因为

$$\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial_\alpha A_\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\beta A_\alpha \partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= \partial_\alpha A_\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial_\alpha A_\beta \partial_\beta A_\alpha,$$

上式的第二项又可改写成

$$\partial_\alpha A_\beta \partial_\beta A_\alpha = \partial_\alpha(A_\beta \partial_\beta A_\alpha) - A_\beta \partial_\alpha \partial_\beta A_\alpha$$

$$= \partial_\alpha(A_\beta \partial_\beta A_\alpha) - A_\beta \partial_\beta(\partial_\alpha A_\alpha),$$

于是上面的拉格朗日密度可写成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + A_\alpha j_\alpha - \frac{1}{2\mu_0}[\partial_\alpha(A_\beta \partial_\beta A_\alpha) - A_\beta \partial_\beta(\partial_\alpha A_\alpha)].$$

和通常标准的有源电磁场的拉氏函数(14.51)式比较,我们看到多出了两项(即方括号中的项). 方括号中的第一项是四维全散度项,它不影响运动方程,这是因为作用量中它的四维体积分

$$\int \mathrm{d}^4 x \partial_\alpha (A_\beta \partial_\beta A_\alpha) = \oint (A_\beta \partial_\beta A_\alpha) \mathrm{d}S_\alpha = 0,$$

故对体系的作用量没有贡献. 这样,如果我们选取规范条件$\partial_\alpha A_\alpha = 0$,则上述的拉格朗日方程可正确地给出麦克斯韦方程组.

3. 具有质量的矢量场的拉格朗日密度

若用 A_μ 表示矢量场的矢势,m 为质量,则矢量场的每一个分量都应满足 K－G 方程,即

$$\Box A_\mu + m^2 A_\mu = 0. \tag{14.52}$$

方程(14.52)实际上代表光子质量不为零时的自由电磁场方程. 鉴于光子的自旋为 1,非零质量的粒子有三个独立的自旋态,而 A_μ 有四个分量,故我们可以对 A_μ 加上一个附加条件

$$\partial_\mu A_\mu = 0.$$

如果有源,方程(14.52)式的右边应加上相应的项,为此我们可把方程修改为

$$\Box A_\mu + m^2 A_\mu = \mu_0 j_\mu, \tag{14.53}$$

对应它的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2\mu_0} A_\alpha A_\alpha + j_\alpha A_\alpha. \tag{14.54}$$

光子质量不为零会带来什么后果? 我们将在下一章中讨论这一问题.

*§14.5 电磁场的哈密顿函数

1. 自由电磁场的哈密顿函数

知道了拉格朗日密度,我们便可以由标准方法求出相应的哈密顿函数. 根据分析力学,定义一个与 A_μ 相对应的广义动量

$$\begin{aligned}\Pi_\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\mu_0 c} F_{4\mu},\end{aligned}$$

上式已把自由场的拉格朗日密度(14.49)代入其中,故

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\mu_0 c} F_{4\mu} \dot{A}_\mu + \frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F_{4\mu} (F_{4\mu} + \partial_\mu A_4) + \frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) + \frac{1}{c\mu_0} \boldsymbol{E} \cdot \nabla A_0,\end{aligned}$$

可见自由场的哈密顿函数

$$H=\int\frac{1}{2\mu_0}\left(B^2+\frac{E^2}{c^2}\right)\mathrm{d}^3x+\int\frac{1}{c\mu_0}(\boldsymbol{E}\cdot\nabla A_0)\mathrm{d}^3x$$
$$=\int\frac{1}{2\mu_0}\left(B^2+\frac{E^2}{c^2}\right)\mathrm{d}^3x+\frac{1}{c\mu_0}\int[\nabla\cdot(\boldsymbol{E}A_0)-(\nabla\cdot\boldsymbol{E})A_0]\mathrm{d}^3x$$
$$=\int\frac{1}{2\mu_0}\left(B^2+\frac{E^2}{c^2}\right)\mathrm{d}^3x+\frac{1}{c\mu_0}\oint(\boldsymbol{E}A_0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中我们利用了$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$. 由于在无穷远处$\boldsymbol{E}=0,A_0=0$,所以自由电磁场的哈密顿函数的最终形式是

$$H=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mu_0}B^2+\varepsilon_0E^2\right)\mathrm{d}^3x, \tag{14.55}$$

它正好代表电磁场的总能量.

2. 有源电磁场的哈密顿函数

电磁场存在源时,电磁体系的拉格朗日密度已为我们所知,即(14.51)式:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}+j_\alpha A_\alpha,$$

这时对应于A_μ的广义动量为

$$\Pi_\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=\frac{\mathrm{i}}{\mu_0c}F_{4\mu},$$

于是体系的哈密顿密度为

$$\mathscr{H}=\Pi_\mu\dot{A}_\mu-\mathscr{L}$$
$$=-\frac{1}{\mu_0}F_{4\mu}(F_{4\mu}+\partial_\mu A_4)+\frac{1}{2\mu_0}\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)-j_\alpha A_\alpha$$
$$=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2}+B^2\right)+\frac{1}{c\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot\nabla A_0-j_\alpha A_\alpha$$
$$=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2}+B^2\right)-\rho\varphi+\frac{1}{c\mu_0}\nabla\cdot(A_0\boldsymbol{E})-(j_4A_4+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A})$$
$$=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2}+B^2\right)-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A},$$

这样,包含源的电磁场的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}^3x-\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}^3x. \tag{14.56}$$

(14.56)式中的第一项是自由场的哈密顿函数,第二项是电流和场的相互作用.

*§14.6 电磁场的量子性

我们来考察局限在空间某区域的电磁场,其中$\rho=0,j=0$. 在洛伦兹规范条件下,$\boldsymbol{A}$和φ的方程已为大家所熟知,它们都是齐次的达朗贝尔方程. 由于空间场是无源的自由场,所以我们总可以选取下述规范条件:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\\ \varphi=0.\end{cases} \tag{14.57}$$

于是,自由场只需用下述方程来描述:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}=0, \tag{14.58}$$

这又称**横场条件**. (14.58)式是一个标准的波动方程,它充分地表述了场的波动性,为了从(14.58)式进一步看出场的量子性,我们把场方程及其规范条件变换到波矢空间(又称动量空间)中去,这时我们可把矢势 $\boldsymbol{A}$ 用复数傅里叶级数展开,即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\mu_0}\sum_k[\boldsymbol{a}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{a}_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}], \tag{14.59}$$

其中 $\boldsymbol{a}_k^*$ 是 $\boldsymbol{a}_k$ 的复共轭. 把 $\boldsymbol{A}$ 展开成这种形式是因为必须保证 $\boldsymbol{A}$ 是实数. 把(14.59)式代入方程(14.58),我们得到关于 $\boldsymbol{a}_k$(或 $\boldsymbol{a}_k^*$)的方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{a}_k(t)+c^2k^2\boldsymbol{a}_k(t)=0. \tag{14.60}$$

(14.60)式是一个关于 $\boldsymbol{a}_k(t)$的谐振子方程,对应一个 k 值就有一个谐振子. 可见,体系有无穷多个谐振子,所以我们说电磁场对应于一个具有无穷多自由度的力学体系. 由(14.60)式不难看出 $\boldsymbol{a}_k$ 的形式为

$$\boldsymbol{a}_k\propto e^{-i\omega_k t}, \tag{14.61}$$

式中 ω_k 是对应于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的频率. 这样,(14.59)式的每一个 $\boldsymbol{k}$ 值就代表了一个沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的波,其频率为

$$\omega_k^2=c^2k^2.$$

设体系的体积为 V,则体系的能量也可以用 $\boldsymbol{a}_k$(和 $\boldsymbol{a}_k^*$)来表示. 体系的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)d^3x, \tag{14.62}$$

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\dot{\boldsymbol{A}}\\&=-\sqrt{\mu_0}\sum_k(\dot{\boldsymbol{a}}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{a}}_k^* e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\\&=i\sqrt{\mu_0}\sum_k\omega_k(\boldsymbol{a}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{a}_k^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}),\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$,得

$$\boldsymbol{B}=i\sqrt{\mu_0}\sum_k\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{a}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{a}_k^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}),$$

注意到函数的正交归一性,由(14.62)式得到

$$W=V\sum_k[k^2\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_k^*+(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}_k)\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}_k^*)].$$

根据横场条件(14.57)式,我们有

$$\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

最后得到

$$W=2\sum_k k^2V\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_k^*, \tag{14.63}$$

令

$$n_k=\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_k^*,$$

得

$$W=V\sum_k 2k^2n_k.$$

如果考察的体系的边长分别为 l_1、l_2、l_3，并且设边界外 $A=0$，则根据傅里叶展开式(14.59)，我们得到 k 的具体数值为

$$k_x=\frac{2\pi r m_x}{l_1},\quad k_y=\frac{2\pi r m_y}{l_2},\quad k_z=\frac{2\pi r m_z}{l_3},$$

其中 m_x、m_y、m_z 分别取任意整数. 可见，对于有限的体系来说，k 总是分立的. 现在看到，电磁场的能量不是连续的，而是分立为以 k 为标志的能量子，这就是场的粒子性. 所以，电磁场不再被认为只有纯粹的波动特征，它同样具有粒子性，波粒二象性是微观世界的普遍特征.

为使方程(14.60)式写成正则形式，我们作如下变换：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}_k=\alpha(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_k^*),\\ \boldsymbol{P}_k=-\mathrm{i}\omega_k\alpha(\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_k^*),\end{cases}\tag{14.64}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_k$、$\boldsymbol{P}_k$ 为正则变量，α 为任意常数. 由(14.64)式不难得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_k=\dfrac{\mathrm{i}}{2\omega_k\alpha}(\boldsymbol{P}_k-\mathrm{i}\omega_k\boldsymbol{Q}_k),\\ \boldsymbol{a}_k^*=-\dfrac{\mathrm{i}}{2\omega_k\alpha}(\boldsymbol{P}_k+\mathrm{i}\omega_k\boldsymbol{Q}_k),\end{cases}\tag{14.65}$$

于是体系的哈密顿函数

$$H=\sum_k\frac{V}{2c^2\alpha^2}(P_k^2+\omega_k^2Q_k^2).\tag{14.66}$$

取常数 $\alpha=\sqrt{V}/c^2$，就有

$$H=\sum_k\frac{1}{2}(P_k^2+\omega_k^2Q_k^2),\tag{14.67}$$

于是正则形式的运动方程为

$$\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{Q}_k}=-\dot{\boldsymbol{P}}_k,\quad\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{P}_k}=\dot{\boldsymbol{Q}}_k.\tag{14.68}$$

根据正则变换后的 $\mathscr{H}$ 的表示式(14.67)，如果把 $\boldsymbol{P}_k$ 改成动量算符，$\boldsymbol{Q}_k$ 改成坐标算符，则由(14.68)立即可得谐振子的薛定谔方程

$$\left(-\frac{\hbar}{2}\nabla_Q^2+\omega_k^2Q_k^2\right)\psi_k(\boldsymbol{Q}_k)=E_n^k\psi_k(\boldsymbol{Q}_k).\tag{14.69}$$

由横场条件 $\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{k}=0$ 可知，$\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 亦垂直，所以谐振子只在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面内运动，显然应当有两个自由度，若令 Q_1、Q_2 分别代表这两个分量，则(14.68)可分解成两个一维谐振子：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Q_s^2}+\omega_k^2Q_s\right]\psi_k(Q_s)=E_n^{ks}\psi_{ks}(Q_s).$$

上述方程给出的解所对应的本征值为

$$E_n^{ks}=\left(n_{ks}+\frac{1}{2}\right)\hbar\nu_k.\tag{14.70}$$

(14.70)式给出了电磁场的能量子 $\hbar\nu_k$.

习　题

14.1　试证明：在时间反演下，带电粒子在电磁场中的运动方程不变，并说明其含义.

14.2 根据有源情况下电磁场的拉格朗日密度(14.51)式,证明拉氏函数的规范不变性与电荷守恒定律相对应.

14.3 如果电磁场的源是带电的且有电矩和磁矩,并且假定光子质量不为零,试写出相应的拉格朗日密度,并求相应的场方程.

14.4 点电荷产生的静电场形式上也可以按平面波展开,试求电势 φ 的展开式,并讨论这种波的特点.

14.5 试用谐振子形式写出电磁场的总动量的表示式,然后与能量表示式(14.66)比较,说明两者的关系.

14.6 Q_k 和 P_k 常称为谐振子的广义坐标和广义动量,请用这两个量作为变量把电磁场的势 $\boldsymbol{A}$、场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示出来.

*第十五章　关于麦克斯韦理论的若干讨论

如果把学习经典电动力学这门课程比作登山的话，我们现在已经登上了“麦克斯韦山”的顶峰．毫无疑问，麦克斯韦理论是自然科学中的一座巍峨壮丽的高山．似乎可以说，它是理论物理学的和谐性、完美性和统一性的典范．

但是，当我们眼睛向下仔细地审视这座高山的根基时，我们发现，经典电磁理论的成功远远不是完美的，它也遇到了严重的困难，这倒不仅仅是因为它与量子效应不符合，众所周知，整个经典物理学对于量子现象都是无能为力的；而是麦克斯韦电动力学本身还存在着内在矛盾．人们曾经期望经典电动力学过渡到量子理论时内在矛盾也会自动消失，然而量子论的发展表明，麦克斯韦电动力学的内在矛盾在量子理论中同样存在，而且进一步加深．因此，重新考察和分析一下经典电动力学一些基本困难以及人们为了克服这些困难而作出的种种努力是极为有益的．其目的是为了开阔学生的思路，扩展学生的眼界，希望学生能从中受到启发．

§15.1　阿伯拉罕－洛伦兹模型

从场论的基本要求来说，作为经典场论的麦克斯韦理论应当对电子给出如下几个方面的描述：

(1) 电子产生的场能量是有限值，并且这一有限值恰好等于电子的有限能量 mc^2．

(2) 电子产生的场的能量和动量，不仅是有限值而且构成四维矢量．

(3) 导出电子的运动方程．

当然，完全要做到上述三点是属于量子场论的内容，但是在经典场论的范围内如能给出某种程度的描述也是我们所追求的．

阿伯拉罕和洛伦兹最先建立了电子模型，并推导出了电子的运动方程．我们认为电子不仅受到外场的作用，而且还受到一个电子自己产生的场的作用力．因此，电子的运动方程应是

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{外} + \boldsymbol{F}_{电磁场}, \tag{15.1}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{电磁场}$ 代表电子所受的自作用力项，主要的问题是如何求出该项的值．

在计算自作用力时，阿伯拉罕和洛伦兹把粒子看作是一个有限大小的刚性球，而把自作用力看作是球内某一小体积元 $d\tau$ 中的电荷 $\rho d\tau$ 产生的场，对球内另一小体积元 $d\tau'$ 上的电荷 $\rho' d\tau'$ 的作用力的总和．若令 $\rho d\tau$ 所激发的场为 $d\boldsymbol{E}$、$d\boldsymbol{B}$，则 $\rho' d\tau'$ 所受到的力为

$$d\boldsymbol{F}_{电磁场} = \rho' d\tau' (d\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{B}),$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为 $\rho' d\tau'$ 的速度．对 $\rho d\tau$ 积分后得球内各处电荷激发的场对 $\rho' d\tau'$ 的作用，再对 $\rho' d\tau'$

积分即得自作用力

$$\boldsymbol{F}_{\text{电磁场}}=\iint\rho'\mathrm{d}\tau'(\mathrm{d}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}),\tag{15.2}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 是 $\rho\mathrm{d}\tau$ 产生的场，它可用(12.41)和(12.42)式表示，由于表达式是推迟形式，把它代入到(15.2)式进行积分是困难的. 但是，在 $\frac{v}{c}\ll1$ 的情况下，我们可以用级数展开的办法把场表达为同时表达式.

1. 运动电荷电磁场的同时表达式

我们仍以推迟势的表达式作为出发点，我们已知

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))}{R}\mathrm{d}\tau',$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))}{R}\mathrm{d}\tau',$$

式中 $t'=t-\frac{R}{c}$，$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. 在 $\frac{v}{c}\ll1$ 的情况下，如图 15.1 所示，$\frac{R}{c}\boldsymbol{v}$ 是个小量，我们可以把电磁场用瞬时距离 $\boldsymbol{R}_0$ 来表示，这就是说，把 t' 时的量用 t 时的量来展开. 将函数 $\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))$ 对 t' 展开，我们有

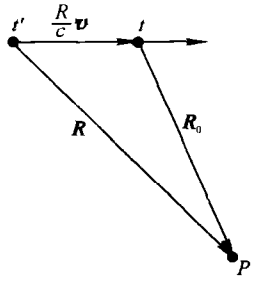


图 15.1

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))=&\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))+\\&(t'-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))\Big|_{t'=t}+\\&\frac{1}{2}(t'-t)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))\Big|_{t'=t}+\cdots\\=&\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))-\frac{R}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))+\\&\frac{R^2}{2c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))+\cdots+\\&\left(-\frac{R}{c}\right)^n\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))+\cdots\end{aligned}\tag{15.3}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t'))=&\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))-\\&\frac{R}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))]+\\&\frac{R^2}{2c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))]+\cdots+\\&\left(-\frac{R}{c}\right)^n\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))]+\cdots\end{aligned}\tag{15.4}$$

把(15.3)和(15.4)式代入推迟势表达式中进行积分，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left\{\dfrac{e\boldsymbol{v}(t)}{R_0}-\dfrac{e\boldsymbol{v}(t)}{c}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{e}{c^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[\boldsymbol{v}(t)R_0^{n-1}]+\cdots\right\},\\[2ex]\varphi=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\dfrac{e}{R_0}+\dfrac{e}{2c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}R_0+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{e}{c^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(R_0^{n-1})+\cdots\right\},\end{cases}\tag{15.5}$$

式中 $R_0 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)|$ 为电子到观察点的距离. 由于假定粒子在所考察的时间范围内速度都很小,这就要求在这段时间范围内粒子的各级加速度都很小,这样(15.5)式实际上是按照 $\frac{v}{c}$ 展开,保留到 $\left(\frac{v}{c}\right)^3$ 级,我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left\{\dfrac{e\boldsymbol{v}}{R_0} - \dfrac{e}{c}\dot{\boldsymbol{v}} + \dfrac{e}{2c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{v}R_0)\right\}, \\ \varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\dfrac{e}{R_0} + \dfrac{e}{2c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}R_0 - \dfrac{e}{6c^3}\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}R_0^2\right\}. \end{cases} \tag{15.6}$$

由(15.6)式,我们得到 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的瞬时表达式(为方便起见略去 R_0 的下脚标)为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{e\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{e}{2c^2R^5}[v^2R^2\boldsymbol{R} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2\boldsymbol{R}] - \right. \\ &\quad \left. \frac{e}{2c^2R^3}[\dot{\boldsymbol{v}}R^2 + (\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}] + \frac{2e}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right\}, \end{aligned} \tag{15.7}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \nabla\times\boldsymbol{A} \\ &= \frac{\mu_0 c}{4\pi}\left\{\frac{e\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{e}{2c^3}\boldsymbol{v}\times\left[\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R} + 3\boldsymbol{R}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}{R^5} - \boldsymbol{R}\frac{v^2}{R^3} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \boldsymbol{R}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}\right] - \frac{e}{c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{e}{2c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right\}. \end{aligned} \tag{15.8}$$

2. 自作用力

根据上面的讨论,我们可以把小体积元 $\mathrm{d}\tau$ 中的电荷 $\rho\mathrm{d}\tau$ 所激发的场写出来,把(15.7)和(15.8)式中的 e 用 $\rho\mathrm{d}\tau$ 代替即得 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho\mathrm{d}\tau\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{\boldsymbol{R}}{2c^2R^5}[v^2R^2 - 3(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2c^2R^3}[\dot{\boldsymbol{v}}R^2 + (\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}] + \frac{2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right\}, \end{aligned} \tag{15.9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 c}{4\pi}\rho\mathrm{d}\tau\left\{\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{1}{2c^3}\boldsymbol{v}\times\left[\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{R} + 3\boldsymbol{R}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}{R^5} - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \boldsymbol{R}\frac{v^2}{R^3} + \boldsymbol{R}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}\right] - \frac{1}{c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right\}. \end{aligned} \tag{15.10}$$

把(15.9)式和(15.10)式代入

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{电磁场}} = \rho'\mathrm{d}\tau'(\mathrm{d}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}),$$

略去 $\left(\frac{v}{c}\right)^3$ 以上的项,得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\text{电磁场}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho'\rho\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}\tau\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{\boldsymbol{R}}{2c^2R^5}[v^2R^2 - 3(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2c^2R^3}[\dot{\boldsymbol{v}}R^2 + (\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}] + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)\Bigg\}, \tag{15.11}$$

式中的 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 表示 $\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}\tau'$ 间的距离.

若电荷分布球对称或球面对称,则积分

$$\int\rho\rho'\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{\boldsymbol{R}}{2c^2R^5}[v^2R^2-3(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2]\right\}=0,$$

因为 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 对换时上述积分变号. 同理

$$\int\rho\rho'\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\left[\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\left(\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R}}{cR^5}\right)\right]=0.$$

又积分

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{2c^2R^3}\dot{\boldsymbol{v}}R^2\rho\rho'\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{2c^2}\int\frac{\rho\rho'}{R}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$$

$$=-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2}W_0,$$

式中 $W_0=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\rho'}{R}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'$. 由

$$-\frac{1}{2c^2}\int\rho\rho'\frac{(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'=-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{3c^2}W_0,$$

$$\frac{2\ddot{\boldsymbol{v}}}{3c^3}\int\rho\rho'\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}},$$

得出

$$\boldsymbol{F}_{\text{电磁场}}=\iint\rho'\mathrm{d}\tau'(\mathrm{d}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B})$$

$$=\left(-\frac{4W_0}{3c^2}\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right). \tag{15.12}$$

3. 运动方程

现在我们可以写出一个电子在外场和自作用力下的运动方程:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{F}_{\text{外}}+\boldsymbol{F}_{\text{电磁场}}$$

$$=\boldsymbol{F}_{\text{外}}+\left\{-\frac{4W_0}{3c^2}\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right\},$$

即

$$\left(m+\frac{4W_0}{3c^2}\right)\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{F}_{\text{外}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}, \tag{15.13}$$

这就是阿伯拉罕-洛伦兹模型的电子运动方程. 这个模型有下述两点是值得赞美的:

(1) 方程右边的与 $\ddot{\boldsymbol{v}}$ 成正比的力恰好与辐射阻尼力的公式(12.95)一致,而这一项是必需的,它表示辐射体系能量的守恒性.

(2) (15.13)式左边 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 的系数为两项相加,这就告诉我们电子的质量包括两部分,其中的 $\frac{4W_0}{3c^2}$ 项来源于电磁作用,可见它是非相对论情况下的**电磁质量**的表达式,实验表明电磁质量是存在的,另一部分称为**机械质量**.

但是,这个模型也存在着根本性的困难:(1) 方程中的因子 $\frac{4}{3}$ 不满足相对论协变;(2) 点

电子模型的电磁质量是发散的;(3) 电子将会发生"自我加速"运动. 我们在下面将逐一论述.

§15.2 经典电动力学的适用界限

1. 电子的经典半径

在§3.3中,我们讨论了一个带电体的固有能量,其表达式为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}\tau. \tag{15.14}$$

现在我们不妨计算一下在麦克斯韦理论中作为点电荷处理的电子的固有能量.

我们设电荷均匀分布在半径为 R 的球面上,总电荷为 e,则其电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

因此,由(15.14)式求得它的固有能量为

$$W = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\int \frac{e^2}{r^4}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{e^2}{r^2}\mathrm{d}r,$$

即

$$W \propto \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{R}. \tag{15.15}$$

可见,对点电荷来说,$R\to 0$,$W\to\infty$,这就是说,在一个点电荷周围存在着无穷大的能量,即电子的固有能为无穷大. 如果无穷大的固有能在物理上没有什么可观测效应,那倒也不可怕. 可是,爱因斯坦的质能关系指出,能量除以 c^2 即是质量,这是相对论的必然结果. 现在,电子具有无穷大的固有能,这就意味着电子的质量为无穷大,而质量是物理上的可观察量,目前已精确地测定电子的静止质量 $m_0 = 9.11\times 10^{-28}$ g,可见电子具有无穷大的固有能量是个荒谬的物理结果.

注意,这个荒谬结论是从麦克斯韦基本原理导出的. 一方面,电子是麦克斯韦电磁理论中的一个基本粒子,麦克斯韦电动力学的相对论协变性本身要求基本粒子不可能具有有限尺寸,而应当是一个几何点;而另一方面,点粒子模型又导致无穷大的固有能. 因此,我们很自然地得出一个结论:将麦克斯韦理论应用于充分小的尺度时出现了自相矛盾的结果. 显然,这个矛盾是电动力学的内在矛盾.

现在的问题是,这个"充分小的尺度"数量级为多大? 实验上已经测定了电子的静质量 m_0,这样,电子的固有能应当与 m_0c^2 同数量级,$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\approx m_0c^2$,即

$$R \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_0c^2} = r_e, \tag{15.16}$$

r_e 称为**电子的经典半径**,它决定了麦克斯韦电动力学的适用范围. 到此,我们从基本原理得出了麦克斯韦理论适用的界限

$$r \gg \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_0c^2}, \tag{15.17}$$

m_0 为实测的电子静质量.

2. 电子自我加速

在讨论电子在外场中的运动时,电动力学这一内在矛盾就更充分地表现出来. 电子在外场力的作用下,一方面作加速运动而辐射电磁波;另一方面我们从能量守恒性知道,电子将受到辐射阻尼力的反作用,其运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{外} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} ,$$

式中的 m 为实测的电子质量. 如果电子运动到某一位置时不再受外场力的作用,这时的运动规律是

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} .$$

这个方程除了平庸解 $\boldsymbol{v}$ = 常数外,还有另一个"奔离"解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 e^{4\pi\varepsilon_0\frac{3mc^3}{2e^2}t} ,$$

它表示粒子的加速度无限制地增加. 这就意味着:一旦除去外场,电子将无限制地"自我加速";或者说,自由电子的能量会永无止境地增加. 这一荒谬结论的根源,同样是电子的无限大的固有能量. 因为当我们写出电子运动方程时,已经用了电子的实测有限质量,这样做实质上已经形式上赋予电子以负无限大的非电磁的固有质量,负无限大同正无穷大相加才得到这个有限的质量 m. 至于 $\infty - \infty = m$,这并不是正确的数学运算,因而导致了一系列的困难. 但由此出发,我们却可以得到电动力学适用性的另外两个界限.

在洛伦兹力作用下,非相对论性的电子的运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} . \tag{15.18}$$

根据前面的分析,这个方程只能应用于阻尼力比外场的作用力小得多的情况,为了具体地弄清这个条件的物理意义,弄清楚这个内在矛盾给场强和频率带来什么新的限制,我们对上述条件作进一步的讨论.

既然阻尼力相对来说很小,我们就可以把它略去,于是速度对时间的二阶导数为

$$\ddot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{e}{m}\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{B} .$$

同样,在略去 $\frac{v}{c}$ 项的情况下 $\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}$,代入上式得

$$\ddot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{e^2}{m^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} . \tag{15.19}$$

如果 $\dot{\boldsymbol{E}}\approx\omega\boldsymbol{E}$,则由(15.19)式可得辐射阻尼力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2e^3\omega}{3mc^3}\boldsymbol{E} + \frac{2e^4}{3m^2c^3}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right\} .$$

现在把阻尼力中的两项分别与外场力 $e\boldsymbol{E}$ 作比较,因为我们要求

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^3\omega}{3mc^3}\boldsymbol{E} \ll e\boldsymbol{E} ,$$

所以有

$$\lambda \gg \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} . \tag{15.20}$$

由此我们看到，只有当辐射电磁波的波长远大于电子的经典半径 r_e 时，辐射阻尼公式才适用. 我们又一次看到，经典电子半径的尺度是经典电动力学的界限.

同时辐射阻尼力的第二项也应当满足如下的条件：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^4}{3m^2c^3}EB \ll eE,$$

可见场强应受到一定的限制，即

$$B \ll 4\pi\varepsilon_0 \frac{m^2c^3}{e^3}. \tag{15.21}$$

因此，与 $4\pi\varepsilon_0 \frac{m^2c^3}{e^3}$ 同数量级的场强是麦克斯韦理论的又一限制，超过这个场强，经典电动力学不适用，正是这一点，启发了人们去发展非线性电动力学，对此我们将在§15.5中叙述.

综上所述，由于麦克斯韦理论中存在着内在矛盾，所以在尺度、波长和场强这三个方面都存在着一个界限，这些界限以不等式(15.17)、(15.20)和(15.21)来表示，越过三条界限，电动力学怎么办？这是一个难题. 经典电动力学的全部困难的根源，也许是由于电子根本不会对自身起作用，果真如此，则电磁质量项不再出现，发散问题也不复存在，但是抛弃自作用力，也就抛弃了正比于 $\ddot{\boldsymbol{v}}$ 的辐射阻尼力，这又会与能量守恒定律发生矛盾，可见经典电动力学处在进退维谷的境地.

§15.3 匀速运动电荷的电磁场的能量、动量的非协变性

现在，我们再来研究一下匀速运动的电荷产生的电磁场的能量、动量的变换规律. 电磁场的能量 W 和动量 $\boldsymbol{G}$ 可以用能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 来表示，因此我们可以通过 $T_{\mu\nu}$ 的变换来研究 W 和 $\boldsymbol{G}$ 的变换.

设 S′是相对电荷静止的参考系，在此参考系中电磁场的能量动量张量设为 $T'_{\mu\nu}$. 由于在 S′系中磁场 $\boldsymbol{B}'=0$，所以代表电磁能流密度和电磁动量密度的 $T_{\mu\nu}$ 的空时分量为零，即

$$\begin{aligned} T'_{41} &= T'_{42} = T'_{43} = 0, \\ T'_{14} &= T'_{24} = T'_{34} = 0. \end{aligned} \tag{15.22}$$

但 T'_{11} 和 T'_{44} 一定不为零，这可以由 $T'_{\mu\nu}$ 的一般表达式看出. 实际上，它们分别代表力密度和能量密度.

又设 S 系相对于 S′系沿着 x 轴以速度 v 运动. 在 S 系中电荷是运动的，设在此参考系中电磁场能量动量张量为 $T'_{\mu\nu}$. 根据 $T'_{\mu\nu}$ 和 $T_{\mu\nu}$ 间的变换规律，并利用(15.22)式，则得

$$T_{14} = \frac{i\beta(T'_{44} - T'_{11})}{1-\beta^2}, \quad T_{44} = \frac{T'_{44} - \beta^2 T'_{11}}{1-\beta^2},$$

$$T_{24} = T_{34} = T_{42} = T_{43} = 0.$$

根据一般公式，S 系中的电磁场的总动量、总能量分别为

$$G_i = \frac{i}{c}\int T_{i4}\,\mathrm{d}^3x,$$

$$W = \int T_{44} \mathrm{d}^3 x .$$

因为 $\mathrm{d}^3 x$ 是 S 系中的体积元，变换到 S′ 系中为 $\mathrm{d}^3 x' = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}^3 x$，于是在静止参考系 S′ 中作积分，可得

$$\begin{cases} G_x = \dfrac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \int (T'_{44} - T'_{11}) \mathrm{d}^3 x' , \\ G_y = G_z = 0 , \end{cases} \tag{15.23}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int (T'_{44} - \beta^2 T'_{11}) \mathrm{d}^3 x' . \tag{15.24}$$

由

$$\int T'_{44} \mathrm{d}^3 x' = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E'^2 \mathrm{d}^3 x' = W_0 ,$$

$$\int T'_{11} \mathrm{d}^3 x' = -\varepsilon_0 \int \left[(E'_x)^2 - \frac{1}{2}(E')^2 \right] \mathrm{d}^3 x' = \frac{1}{3} W_0 ,$$

式中 W_0 是电子在静止参考系中的总的场能量，我们得到匀速运动电子产生的电磁动量和能量的表达式为

$$\boldsymbol{G} = \frac{4W_0}{3c^2} \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} , \tag{15.25}$$

$$W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2 \right) . \tag{15.26}$$

把电磁动量能量与粒子本身的四维动量

$$p_\mu = \left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} , \frac{\mathrm{i} m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

比较，我们发现，电子的电磁动量和能量并不能构成一个四维矢量，这个重要的结论表示：不能把电子的力学性质完全归结为电磁场的力学性质.

再者，从场的观点来看，我们可以由下述三种方法来决定电子的电磁质量：第一，从电磁动量 $\boldsymbol{G}$ 出发，把电磁质量定义为场的动量与粒子的速度之比，即

$$m_e = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{v}} = \frac{4}{3} \frac{W_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \tag{15.27}$$

第二，把(15.26)看成匀速运动的电子的固有能量，按相对论质能关系，有

$$m_e = \frac{W}{c^2} = \frac{W_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2 \right) ; \tag{15.28}$$

第三，把静止电子的固有能量 W_0 除以 c^2 定义为静止电磁质量，再利用相对论质量变换公式，得到匀速运动的电子的质量为

$$m_e = \frac{W_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{15.29}$$

用这三种方法得到了三种完全不同的电子质量，这不能不令人烦恼. 显然这只能说明，在经典的麦克斯韦电动力学范围内讨论场的理论时，已经不可能彼此协调地引入电子质量和动量；而且 $\frac{4}{3}$ 和 $\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)$ 这两个因子，与实验充分证明的能量相对论公式 $W = \dfrac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 也

不符合,这就表明我们已经不能仅仅用麦克斯韦场来理解和研究电子的动力学惯性结构.

从物理学的理论角度来说,我们应当对动力学的惯性结构——质量的起源给出解释. 在麦克斯韦理论以前的所有物理定律中都应用了"质量"这个概念,但是从来没有回答过"质量从何而来"的问题. 麦克斯韦电动力学的创立使我们意外地获得了希望,我们有可能理解过去没有能理解的东西——质量,它是电磁作用的结果,电子的惯性是电子场的惯性. 然而,我们现在已经看到,它只是给了我们"希望",但没有给我们"现实". 通常说电子质量有机械质量和电磁质量,而现在的电磁理论即使是对电磁质量部分的起源也没有给出一个正确的结果.

§15.4 庞加莱张力张量

根据上面的讨论我们看到,以麦克斯韦理论为基础得到的点电荷或电子的固有能量和固有动量的分量不能构成四维矢量,其根源何在呢? 为了帮助分析,我们首先来介绍**劳厄定理**.

定理: 只有当能量动量张量的分量除 T_{00} 外,在相对于电子静止的坐标系中都满足关系

$$\int T_{\mu\nu}\mathrm{d}^3x = 0, \tag{15.30}$$

并且 T_{00} 的积分恒等于粒子所产生的场的总能量时,电磁场的动量和能量才构成四维矢量.

定理的证明是很容易的. 实际上,我们从(15.23)和(15.24)就可以看出,如果劳厄定理得到满足,则其中的 T'_{11} 的积分都为零,于是(15.27)和(15.28)式中的 $\frac{4}{3}$ 及 $\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)$ 因子都变成 1,这样 $\boldsymbol{G}$ 和 W 即可构成四维矢量,因而它们具有正常的协变性质.

根据劳厄定理,我们马上想到,纯粹从麦克斯韦的电磁能量动量张量出发已不可能解决这个矛盾,这就是说,我们在构造电子模型的时候肯定犯了错误. 回忆第三章中的关于电荷体系稳定性问题的恩肯定理,我们马上发现:洛伦兹电子模型只假定电子具有纯电磁作用,这种电子一定是不稳定的,要保持电子中电荷分布的稳定性,我们必须假定存在非电磁力;这就是说,在麦克斯韦理论中,必须放弃物质的纯粹电磁相互作用的模型,引入非电力相互作用. 这种非电磁力叫**庞加莱张力张量**,它是由庞加莱首先提出的,其作用是像橡胶带一样把电荷束缚在电子之中. 我们用张力张量 $P_{\mu\nu}$ 来表示这种非电磁力,其性质应当与 $T_{\mu\nu}$ 一样,是对称的,且在相对电子静止的坐标系中 $P'_{\nu 0}$ 和 $P'_{0\nu}(\nu\neq 0)$ 都为零. 静止电子在 $T'_{\mu\nu}$ 和 $P'_{\mu\nu}$ 的共同作用下保持稳定平衡,所以其力密度为零,即

$$f'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(T'_{\nu\mu} + P'_{\nu\mu}) = 0 \qquad (\nu = 1,2,3).$$

由上式,可得如下的重要关系式:

$$\int (T'_{\nu\mu} + P'_{\nu\mu})\mathrm{d}^3x' = 0 \qquad (\nu = 1,2,3),$$

此时粒子的四维动量定义为

$$G_i = \frac{i}{c}\int (T_{i4} + P_{i4})\mathrm{d}^3x,$$

$$W = \int (T_{44} + P_{44})\mathrm{d}^3x.$$

于是,代替(15.23)和(15.24)式,有

$$G_x = \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\int(T'_{44}+P'_{44})\mathrm{d}^3x' = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$W = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int(T'_{44}+P'_{44})\mathrm{d}^3x' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15.31}$$

其中

$$m_0 c^2 = \int(T'_{44}+P'_{44})\mathrm{d}^3x', \tag{15.32}$$

它与爱因斯坦质能关系一致.

电子模型中引入庞加莱张力张量的优越性是:既保证了电子电荷分布的稳定性,又使电子具有正常协变的动量、能量;并且从表达式(15.32)中可以看到,电子的质量包括电磁质量和来源于庞加莱力的机械质量两部分. 因此,在这些意义上讲,庞加莱理论是有其合理性的. 然而,庞加莱张量毕竟是一个未知量,它并未从实验上得到证实,这正是这一理论的致命伤.

§15.5 改进麦克斯韦理论的尝试

为了克服麦克斯韦理论的内在矛盾导致的一系列困难,物理学家们作了不懈的努力,庞加莱张量的引入是改进麦克斯韦理论的第一个尝试. 自庞加莱以来的大半个世纪内,出现了各种各样的改进方案,其中最有影响的是玻恩-英菲尔德的非线性电动力学,他们从下述拉格朗日密度出发建立了整个非线性电动力学:

$$\mathscr{L} = \varepsilon_0 b^2\left[1-\sqrt{1-\frac{E^2-c^2B^2}{b^2}-\frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}c)^2}{b^4}}\right], \tag{15.33}$$

其中 b 是常数,称为最大场强. 由于 $\boldsymbol{E}^2-c^2\boldsymbol{B}^2$ 和 $c\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 都是四维不变量,故这个拉格朗日密度是洛伦兹协变的. 当讨论的场强远比最大场强弱,即 $\frac{E}{b}\ll 1$,$\frac{cB}{b}\ll 1$ 时,拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2-c^2B^2) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{15.34}$$

这是通常的线性电动力学中自由电磁场的拉格朗日密度. 所以,玻恩和英菲尔德认为麦克斯韦理论只是非线性电动力学在弱场下的近似. 其实,玻恩和英菲尔德当时作这样的选择是受到了相对论力学的启发,两者在物理思想上有很大的相似之处. 我们不妨考察一个自由粒子的拉格朗日密度来说明这一点. 在相对论情况下,对于一个自由粒子,

$$\mathscr{L} = mc^2\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right),$$

其中 c 是最大速度,即光速. 如果粒子的速度比光速小得多,即 $\frac{v}{c}\ll 1$,则

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}mv^2,$$

这就是通常低速运动的自由粒子的拉格朗日密度. 由此可见,玻恩-英菲尔德非线性电动力学和相对论力学在物理思想上是非常相似的.

现在,让我们考察一下在强场时的情况,为了简单起见,我们令 $\boldsymbol{B}=0$,则

$$\mathscr{L} = \varepsilon_0 b^2 [1 - \sqrt{1 + c^2 (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})/2b^2}]. \tag{15.35}$$

由欧拉－拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial A_\mu / \partial x_\nu)} = 0,$$

我们得到场的运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{F_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + c^2 F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/2b^2}} \right) = 0.$$

若令

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} &= \varepsilon_0 c F_{\mu\nu} / \sqrt{1 + c^2 F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/2b^2} \\ &= -\frac{2}{c} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F_{\mu\nu}}, \end{aligned}$$

方程就变为

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} D_{\mu\nu} = 0, \tag{15.36}$$

写成三维形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \tag{15.37}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} / \sqrt{1 - E^2/b^2}. \tag{15.38}$$

设 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系仍为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

于是我们得到

$$\varepsilon = \varepsilon_0 / \sqrt{1 - E^2/b^2},$$

ε 是真空介电常数. 在弱场下仍有 $\varepsilon = \varepsilon_0$，可见玻恩－英菲尔德理论中的真空介电常数不再恒等于 ε_0，它与场强 $\boldsymbol{E}$ 的关系是非线性的，换句话说，在极强的电场下，真空介电常数与 $\boldsymbol{E}$ 有关，真空也会极化.

若我们考察的体系内有电子存在，考虑到场与电子的相互作用，体系的 $\mathscr{L}$ 成为

$$\mathscr{L} = \varepsilon_0 b^2 [1 - \sqrt{1 + c^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}/2b^2}] - e\varphi\delta(\boldsymbol{r}),$$

由此可得场方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = e\delta(\boldsymbol{r}). \tag{15.39}$$

方程(15.39)的球对称解为

$$\boldsymbol{D} = \frac{e\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} = \frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}, \tag{15.40}$$

所以电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e\boldsymbol{r}}{r\sqrt{r^4 + r_0^4}}, \tag{15.41}$$

其中 $r_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{c}{b}$.

我们对上面的阐述作如下讨论：

(1) 电场强度,如 $r \gg r_0$,则有

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3},$$

它与熟知的点电荷场的表达式一致. 因此,麦克斯韦理论中的点电荷场公式适用于距离远大于 r_0 的情况.

对于 $r=0$,则

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r_0^2} = b, \tag{15.42}$$

电场强度不再发散,它等于最大场强 b.

(2) 电势,对静态场来说,它满足方程$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$,可见 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$,由此可得静电势

$$\varphi = \int_r^\infty E_r \mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r_0}\int_{r/r_0}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

当 $r \gg r_0$ 时,容易看出,此时势归结为库仑势,即

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}.$$

当 $r=0$ 时,电势仍是有限值,由积分表可查得

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} = 1.854\ 1,$$

所以电势

$$\varphi = 1.854\ 1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r_0}. \tag{15.43}$$

(3) 点电荷的固有能量

静电场的能量仍可简单地写成

$$W = \int \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau,$$

把(15.40)和(15.41)式代入,则得

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}\tau}{r^2\sqrt{r^4+r_0^4}} \\ &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{r^4+r_0^4}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r_0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} \\ &= 1.854\ 1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r_0}. \end{aligned} \tag{15.44}$$

根据 $W=mc^2$,可以对最大场强 b 的值作如下的估计:

$$1.854\ 1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r_0} = mc^2,$$

即

$$r_0 = 1.854\ 1\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2},$$

r_0 近似等于经典电子半径. 如果 m 用实测电子质量代入,则

$$b = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \approx 10^{20}\ \mathrm{V/m}, \tag{15.45}$$

它表示了电子中心场的最大值.

综上所述,我们看到玻恩理论保持了麦克斯韦方程的基本形式,又使点电子模型具有正常协变的有限的能量和动量,克服了原来理论的内在矛盾. 然而,它同样遇到了其他的重大困难,例如当把这些概念运用到量子理论以及引入电子的自旋时都没有成功.

此外,我们还得提及另一个修改方案,这是由狄拉克、费曼、惠勒等著名物理学家所提出的.

狄拉克认为,麦克斯韦理论本身既可以有推迟解,也可以有超前解,当我们只取麦克斯韦方程的推迟解时,实际上是作了一种特殊的假设——电子只受推迟势的作用. 然而,更一般的假设,则应认为推迟势和超前势同时对电子起作用,在这一基本前提下,狄拉克作了一个大胆而聪明的假设:电子的自作用力是由它所产生的推迟势和超前势之差的一半起作用的.

注意:超前势和推迟势的差别实质上是在于时间 t 的符号不同,把推迟势中的 t 统统改成 $-t$,就得到超前势. 于是仿照§15.3的推导. 我们就可以得到在自身产生的超前势的作用下的自作用力为

$$\boldsymbol{F}_{\text{超前}} = -\frac{4W_0}{3c^2}\dot{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\ .$$

根据狄拉克的假设,作用在电子上的自作用力为

$$\boldsymbol{F}_{\text{自}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{F}_{\text{推迟}} - \boldsymbol{F}_{\text{超前}}] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\ . \tag{15.46}$$

于是,对应阿伯拉罕-洛伦兹方程,我们得到了狄拉克的电子运动方程

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}_{\text{外}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\ . \tag{15.47}$$

可见,方程中的电磁质量已自动消失,点电荷的无穷大的电磁质量不复存在,由于$\frac{4}{3}$因子的出现而使电子方程无法协变的困难也解决了,似乎经典理论跳出了苦海.

然而,仔细一想,狄拉克其实也作了一个特殊的选择,为什么一定是推迟势和超前势两者之差,而不是两者之和呢? 为什么不可以有其他的线性组合呢? 对此,费曼(Feynman)和惠勒(Wheeler)作了进一步的修改,他们认为:点电荷不存在自作用,只存在电荷之间的彼此相互作用,如一点电荷在 t' 时刻被加速,则在 $t = t' + \frac{R}{c}$ 时刻,它所产生的场对相距为 R 处的电荷发生作用,这个受推迟势作用的另一个点电荷也以它的推迟势形式对第一个点电荷作用,而对第一个点电荷来说,这是超前波(或者说"反射波")作用,这样就可以计算得出辐射阻尼力项. 显然,费曼和惠勒的这种假设在物理的直观性上要比狄拉克前进了一步. 但是,它也有严重困难,而且与玻恩理论一样,它也不能推广到量子理论.

其实,玻恩理论与狄拉克、费曼、惠勒理论之间存在着一个完全不同的出发点,前者承认电子有电磁质量,而后者使电磁质量不再具有物理意义. 究竟有没有电磁质量呢? 下面的粒子质量表*是耐人寻味的.

---

* Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., The Feynman Lectures on Physics, vol 2(1964), Addison-Wesley Publishing Company.

粒子质量表

粒子	电荷/e	质量/MeV	Δm/MeV
n	0	939.5	−1.3
p	+1	938.2	
π	0	135.0	4.6
	±1	139.6	
K	0	407.8	−3.9
	±1	403.9	
Σ	0	1 191.5	
	+1	1 189.5	−2.1
	−1	1 196.0	4.5
e	−1		$m_\mu \gg m_e$
μ	−1		

表中每组粒子,除了它们的电荷之外,其他各方面的表现都完全一样. 因此,我们可以认为,它们之间的质量差来源于电磁性质的不同,这似乎暗示了电磁质量应当存在,至于 Δm 的正负号可能源于粒子内部的电磁结构.

表中的最后一栏是 μ 子和电子,除了质量之外两者几乎是全同的,这就提出了一个问题,它们之间这么大的质量差别来源于什么?

总而言之,电磁质量无疑存在,但质量差的正负号以及 μ 子和电子的质量差又似乎对此打上了一个问号.

修改麦克斯韦理论的方案不止上述两种,我们的目的仅仅是给读者一个启发性的讨论,其他的就不再一一阐述了.

§15.6 光子的静质量

现代量子场论已经证明,电磁场是量子化的场,它的量子就是自旋为 1 的光子. 光子是一个特殊的粒子,它的静止质量等于零. 事实上,我们从电磁场的拉格朗日函数(14.51)式即可看出

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu .$$

光子的质量并没有出现在上述拉格朗日函数内,由此导出的麦克斯韦方程当然包含光子静质量为零的假定,既然是假定,我们当然也可以放弃它. 若光子静质量不为零,电磁场方程是什么形式? 它会带来什么可观测效应? 这正是本节要讨论的内容.

普罗卡最先讨论了这个问题,其出发点是在电磁场的拉格朗日密度中加入一项质量项,而且保证拉格朗日密度满足相对论协变. 显然,增加的质量项不能是 $F_{\mu\nu}$ 的标积,因为这是平庸的;也不能是 j_μ 和其他四维矢量的标积,因为在无源时光子仍然存在. 因此,增加项只可

能是正比于 $A_\mu A_\mu$ 的项，从量子场论的观点来看，$A_\mu A_\mu$ 与光子数有直接的关系，可见这样的选取最合理. 于是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu - \frac{\lambda^2}{2\mu_0}A_\mu A_\mu, \tag{15.48}$$

上式中的参数 λ 具有长度倒数的量纲，光子质量 $m_\gamma = \frac{\lambda\hbar}{c}$. 把上述拉格朗日函数代入拉格朗日方程，则得

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F_{\nu\mu} + \lambda^2 A_\nu = \mu_0 j_\nu, \\ &\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \tag{15.49}$$

写成三维空间形式，即为

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho - \lambda^2\varphi, \\ &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ &\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} - \lambda^2 \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{15.50}$$

此时电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

仍成立. 根据上述连续性方程，自动得到洛伦兹规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

注意，现在洛伦兹条件已不是任意选取而得到的，它是保证电荷连续性所必须的，可见，势 $\boldsymbol{A}$、φ 现在已经获得了实在的物理意义，是可观察量，电荷场的规范不变性通过引入质量项而受到破坏.

从上面修正的麦克斯韦方程及其洛伦兹规范，不难得到关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程为

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = m_\gamma^2 \boldsymbol{E}, \\ &\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = m_\gamma^2 \boldsymbol{B}. \end{aligned} \tag{15.51}$$

设(15.51)式的平面波解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)], \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)], \end{aligned}$$

将它们代入(15.51)式，不难得到波矢和频率的关系为

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = m_\gamma^2. \tag{15.52}$$

这个关系与 $m_\gamma = 0$ 时的平面波的关系 $\frac{\omega}{c} = k$ 有很大的差别. 在 $m_\gamma = 0$ 时，平面波的群速度即是相速度，都是 c，它与频率无关；而 $m_\gamma \neq 0$ 时的群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c(\omega^2 - m_\gamma^2 c^2)^{1/2}/\omega. \tag{15.53}$$

上式是光速和频率的色散关系,它表示电磁波在真空中传播也发生色散现象. 这是有限光子质量的第一个,也是最直接的一个结果.

对于静止场的情况,此时 $\omega = 0$,即

$$k = \mathrm{i}m_\gamma.$$

于是,电场和磁场都将按指数 $\mathrm{e}^{-m_\gamma r}$ 衰减. 这个性质完全类似于交换 π 介子的核相互作用的汤川(Yukawa)势模型. 不难证明,其电势表达式,即为汤川势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-m_\gamma r}. \tag{15.54}$$

指数衰减因子的存在,使势偏离库仑定律,这是有限光子质量的第二个结果. 这样,用实验验证库仑定律的精度便成为测量光子质量的最灵敏的手段之一.

有限光子质量的第三个直接结果是存在纵向虚光子,或者说,除了横电磁波以外,还存在纵电波. 设

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{B} = 0, \text{且 } \boldsymbol{k} /\!/ \boldsymbol{E},$$

则由(15.50)式,在无源空间区域可得

$$E = \mathrm{i}\frac{m_\gamma^2}{k}\varphi, \quad \boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{i}m_\gamma^2 c^2}{\omega}\boldsymbol{A}. \tag{15.55}$$

所以这种纵电波的特点是 $\boldsymbol{E} /\!/ \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{A} /\!/ \boldsymbol{E}$.

纵虚光子的存在,在实验上观察是有困难的,原因是它们的效应很小,即使在 10^{-10} m 的尺度上,也不明显.

除上面所述三点之外,有限光子质量在波导、谐振腔的波场分布等方面也会产生相应的效果,我们不再赘述.

根据上面的讨论,我们可以看到,测量光子的质量有许多方法,下面介绍一种精度最高,也是最直接的测量方法.

在定域稳定电流分布的情况下,普罗卡方程为

$$(\nabla^2 - m_\gamma^2)\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j},$$

在无界空间,其解为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\boldsymbol{j}'\mathrm{e}^{-m_\gamma R}\mathrm{d}\tau',$$

取其偶极矢势,有

$$\boldsymbol{A}_{偶} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{m}}{r}\mathrm{e}^{-m_\gamma r}\right),$$

其中 $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}'\mathrm{d}\tau'$. 于是,我们不难得到地球的偶极磁场为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{[3\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m}]\left(1 + m_\gamma r + \frac{m_\gamma^2 r^2}{3}\right)\frac{\mathrm{e}^{-m_\gamma r}}{r^3} - \frac{2}{3}m_\gamma^2\boldsymbol{m}\frac{\mathrm{e}^{-m_\gamma r}}{r}\right\}. \tag{15.56}$$

我们测量的是地球表面的磁场,可令 $r = R_0$,R_0 是地球的半径,这样

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{[3\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{m}]\left(1+m_\gamma R_0+\frac{m_\gamma^2R_0^2}{3}\right)\frac{e^{-m_\gamma R_0}}{R_0^3}-\right.$$

$$\left.\frac{2}{3}m_\gamma^2\boldsymbol{m}\frac{e^{-m_\gamma R_0}}{R_0}\right\},\tag{15.57}$$

若令

$$\left(1+m_\gamma R_0+\frac{m_\gamma^2R_0^2}{3}\right)e^{-m_\gamma R_0}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0,$$

$$\boldsymbol{B}_{ext}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{2}{3}m_\gamma^2\boldsymbol{m}\frac{e^{-m_\gamma R_0}}{R_0}\right],$$

则

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[3\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{m}_0)-\boldsymbol{m}_0]}{R_0^3}+\boldsymbol{B}_{ext}.$$

可见,有限光子质量的效应使地球磁场在偶极子场上叠加了一个外磁场 $\boldsymbol{B}_{ext}$,外磁场方向与 $\boldsymbol{m}$ 反向. 于是,我们得到外场 B_{ext} 与地球赤道 $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ 处的偶极场强 B_{de} 之比为

$$\frac{B_{ext}}{B_{de}}=\frac{\frac{2}{3}(m_\gamma R_0)^2}{\left[1+m_\gamma R_0+\frac{1}{3}(m_\gamma R_0)^2\right]},$$

利用人造卫星测得其值为

$$\frac{B_{ext}}{B_{de}}\ll 4\times10^{-3}.$$

根据简单的数值计算,得到光子质量的极限为

$$m_\gamma\ll10^{-10}\ \text{cm}^{-1},\text{即光子质量}\leqslant4\times10^{-52}\ \text{kg},\tag{15.58}$$

这是到目前为止我们测得光子质量上限的最小值. 由此推知,平方反比的库仑定律在极高的精度上成立.

顺便指出,光子的有限质量与磁单极问题也有密切的联系. 事实上,光子的有限质量已使规范不变性破坏,因而狄拉克推导电荷的量子化条件不再成立,在狄拉克的推导中汤川势是不允许引用的. 然而,有趣的是,光子有限质量却不破坏超导环中的磁通量子化条件,因为这个条件是从矢势绕环积分等于穿过这个环的磁通量导出的. 不过,超导环中电流的量子化条件却要加以修正. 有兴趣的读者可以查阅有关文献*.

§15.7 电动力学和电荷守恒定律

协变形式的标准的麦克斯韦方程为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 j_\nu,$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0.$$

由第一式,我们可以得到

$$\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu}=-\mu_0\partial_\nu j_\nu,\tag{15.59}$$

* Goldhaber A. S. and Nieto M. M., Phys. Rev. Letters, 21(1968)567.

$F_{\mu\nu}$是反对称的，即 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，代入(15.59)式并交换指标，则得

$$\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu} = -\partial_\mu\partial_\nu F_{\nu\mu} = -\partial_\nu\partial_\mu F_{\nu\mu}.$$

于是，我们得到

$$\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0.$$

这样由(15.59)式得到

$$\partial_\nu j_\nu = 0,$$

这就是四维形式的电流连续性方程. 我们看到，麦克斯韦方程自动地保证了电荷守恒定律的成立. 其实，麦克斯韦已是先假定连续性方程成立，然后再引入位移电流项，从而得到上述形式的方程. 现在的问题是，如果存在着电流连续性方程不再成立的可能性，则我们可以用

$$\partial_\nu j_\nu = q \neq 0 \tag{15.60}$$

代替通常的连续性方程，其中 q 是四维标量(这是为了保证相对论协变性)；这就是说，电荷守恒定律在某种情况下受到破坏. 当然，这种情况在日常生活中并不会发生，同样在我们非常熟悉的尺度上也不会发生. 但这并不排斥它可以在我们还不熟悉的物理环境下发生，譬如，它也许在大尺度的宇宙现象中发生，这时候的麦克斯韦方程应如何修改呢？从理论上来探讨一下也是一件有意义的事.

修改麦克斯韦方程的原则，第一是保证方程的相对论协变；其次是在讨论非宇宙现象时能回到标准的麦克斯韦方程形式；最后为了避免问题的复杂性，在电磁体系内，我们不希望引入新的未知的物理量.

在方程(15.60)中，q 表示单位体积内电荷的产生率. 由相对论可知，q 是洛伦兹标量，如果我们用一个四维矢量 A'_μ 的散度来表示它，则有

$$q = \partial_\mu A'_\mu, \tag{15.61}$$

于是(15.60)式可写为

$$\partial_\mu(j_\mu + A'_\mu) = 0. \tag{15.62}$$

这样，它又回到连续性方程的形式，不过，此地的 A'_μ 不能由原来的四维电流密度矢量乘上一个比例系数来代替，因为这会导致平庸的结果. 在电磁体系内，还有另一个四维矢量 A_μ $\left(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\frac{\varphi}{c}\right)$，为不再引入新的物理矢量，只有令

$$A'_\mu = \frac{1}{\mu_0}\alpha' A_\mu, \tag{15.63}$$

其中 α' 是比例系数. 于是(15.62)式应写成

$$\partial_\mu\left[j_\mu + \frac{1}{\mu_0}\alpha' A_\mu\right] = 0. \tag{15.64}$$

要使麦克斯韦方程自动满足(15.64)式，并且不改变 $F_{\mu\nu}$ 的原来的定义，显然只要把原麦克斯韦方程中 j_μ 用 $j_\mu + \alpha' A_\mu$ 来代替，这样修改后的方程为

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 j_\nu + \alpha' A_\nu,$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

写成三维形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho + \alpha'\varphi, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \alpha' \boldsymbol{A}, \end{cases} \tag{15.65}$$

其中 $\boldsymbol{A}$、φ 与场的关系仍为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

现在,(15.61)式可以改写成

$$-\alpha'\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu_0 q.$$

上式表示,原先理论中的洛伦兹规范条件已被电荷产生的物理条件所代替. 规范不变性已失效,矢势和标势具有直接的物理意义,它的分量实际上已经进入了决定 j 和 ρ 的方程,或者说 $\boldsymbol{A}$、φ 的地位与可测量量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 j、ρ 的地位相当. 我们记得在第二章中,量子论中的 $\boldsymbol{A}$、φ 在某种程度上同样具有可测量量的物理意义,可见,在最大的宏观尺度和最小的微观尺度上得到了相同的结果,耐人寻味.

至于比例系数 α',它的量纲是长度平方的倒数,这是很显然的. 类似于 1917 年爱因斯坦在广义相对论方程中引入的宇宙常数一样,如果我们假定 $\alpha'^{\frac{1}{2}}$ 是宇宙半径的倒数,那么可使麦克斯韦方程在小尺度时回到标准的麦克斯韦方程组的形式.

应当指出,这组修正的麦克斯韦方程并不是成功的理论,但这种讨论问题的方式仍是有启发性的.

附　　录

一、矢量公式

1. 矢量的微分运算

$$\nabla\times(\nabla\psi)=0,$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0,$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a},$$

$$\nabla\cdot(\psi\boldsymbol{a})=\nabla\psi\cdot\boldsymbol{a}+\psi\nabla\cdot\boldsymbol{a},$$

$$\nabla\times(\psi\boldsymbol{a})=\nabla\psi\times\boldsymbol{a}+\psi\nabla\times\boldsymbol{a},$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}),$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}),$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}.$$

2. 矢量的积分变换定理

设 φ、ψ 和 $\boldsymbol{A}$ 是连续可微的函数，S 是体积 V 的边界的闭合曲面，则有

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A},$$

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\psi=\oint_S \psi\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\times\boldsymbol{A}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A},$$

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}\tau=\oint_S\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\nabla\psi,$$

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}\tau=\oint_S(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

若设 S 是一个任意的开曲面，C 是 S 的周界，其线元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，线积分路径的方向与面法线方向成右手法则，则有下述重要公式：

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A},$$

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\psi=\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\psi.$$

3. 四维空间积分定理

在一个闭合的超曲面上的积分，我们可以把它变换为该面包围的四维体积分. 例如，对于矢量 A_μ 的积分，我们有

$$\oint A_\mu \mathrm{d}S_\mu=\int \mathrm{d}^4x\partial_\mu A_\mu,$$

这个定理是高斯定理的推广.

将一个四维空间内的一条闭合曲线上的积分,变换成一个被此闭合曲线所包围的曲面上的积分,可以通过下述代换来实现:

$$\mathrm{d}x_\mu \longrightarrow \mathrm{d}f_{\mu\nu}\partial_\nu .$$

例如,对于矢量 A_μ 的积分

$$\oint A_\mu \mathrm{d}x_\mu = \int \mathrm{d}f_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu ,$$

其中 $\mathrm{d}x_\mu$ 是积分线元,$\mathrm{d}f_{\mu\nu}$ 是四维空间内二维面上的面积分元. 显然,这个定理是斯托克斯定理的推广.

二、并矢公式

定义

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{i,j} A_i B_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \quad (i,j = 1,2,3),$$

$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 称为并矢 $\boldsymbol{AB}$ 的基. 单位并矢的定义为

$$\overrightarrow{I} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 .$$

并矢的运算公式如下:

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \sum_{i,j} A_i B_j C_j \boldsymbol{e}_i ,$$

$$\overrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\overrightarrow{I} = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}),$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j ,$$

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{A}),$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{AB}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{AB}) = (\nabla\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\times\nabla)\boldsymbol{B}.$$

并矢的积分变换公式:令 $\boldsymbol{AB} = \overrightarrow{T}$,则

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\cdot\overrightarrow{T} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\overrightarrow{T},$$

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\times\overrightarrow{T} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\overrightarrow{T},$$

$$\int_V \mathrm{d}\tau\nabla\boldsymbol{A} = \oint_S \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

三、曲线坐标中的矢量微分公式

1. 柱坐标(ρ,ϕ,z)

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right),$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\rho=\nabla^2A_\rho-\frac{1}{\rho^2}A_\rho-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi=\nabla^2A_\phi-\frac{1}{\rho^2}A_\phi+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_z=\nabla^2A_z.$$

2. 球坐标(r,θ,ϕ)

$$\nabla\psi=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\boldsymbol{e}_\theta\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{r\partial r}(rA_\phi)\right]+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right],$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_r=\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}\left[A_r+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right],$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta=\nabla^2A_\theta+\frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{2\sin^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right],$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi=\nabla^2A_\phi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\phi}+\cot\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}-\frac{A_\phi}{2\sin\theta}\right].$$

四、单位制换算表

把采用高斯制的任何方程变换成国际单位制的相应方程只要把方程两边的符号作表 1 所示的代换.

表 1

物 理 量	高 斯 制	国际单位制
电场强度	$\boldsymbol{E}$	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\boldsymbol{E}$
电势	φ	$(4\pi\varepsilon_0)^{1/2}\varphi$
电位移矢量	$\boldsymbol{D}$	$\left(\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\boldsymbol{D}$
电荷	q	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}q$
电荷密度	ρ	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}\rho$
电流	I	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}I$

续表

物　理　量	高　斯　制	国际单位制
电流密度	j	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}j$
极化强度	$\boldsymbol{P}$	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}\boldsymbol{P}$
磁感应强度	$\boldsymbol{B}$	$\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right)^{1/2}\boldsymbol{B}$
磁矢势	$\boldsymbol{A}$	$\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right)^{1/2}\boldsymbol{A}$
磁场强度	$\boldsymbol{H}$	$(4\pi\mu_0)^{1/2}\boldsymbol{H}$
磁化强度	$\boldsymbol{M}$	$\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{1/2}\boldsymbol{M}$
电导率	σ_c	$\frac{\sigma_c}{4\pi\varepsilon_0}$
介电常数	ε	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$
磁导率	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
电感	L	$4\pi\varepsilon_0 L$
电容	C	$\frac{C}{4\pi\varepsilon_0}$

把某一物理量的具体数值从高斯制直接换算到国际单位制可按表 2 进行.

表 2

物理量及符号	高斯单位制表示	国际单位制表示
长度 l	1 cm	10^{-2} m
时间 t	1 s	1 s
质量 m	1 g	10^{-3} kg
力 F	1 dyn	10^{-5} N
能量 W	1 erg	10^{-7} J
功率 P	1 erg·s^{-1}	10^{-7} W
电荷 q	1 CGSE	$3.335\,64\times10^{-10}$ C
电荷密度 ρ	1 CGSE	$3.335\,64\times10^{-4}$ C·m^{-3}
电流 I	1 CGSE	$3.335\,64\times10^{-10}$ A
电流密度 j	1 CGSE	$3.335\,64\times10^{-6}$ A·m^{-2}
电场强度 E	1 CGSE	$2.997\,924\,58\times10^{4}$ V·m^{-1}
电位移 D	1 CGSE	$2.654\,42\times10^{-7}$ C·m^{-2}
电势 φ	1 CGSE	$2.997\,924\,58\times10^{2}$ V
电矩 p	1 CGSE	$3.335\,64\times10^{-12}$ C·m
电阻率 σ_c	1 S^{-1}	$1.112\,65\times10^{-10}$ Ω·m^{-1}
电阻 R	1 S·cm^{-1}	$8.987\,55\times10^{11}$ Ω

续表

物理量及符号	高斯单位制表示	国际单位制表示
电容 C	1 cm	$1.112\,65\times10^{-12}$ F
磁通量 Φ	1 Mx	10^{-8} Wb
磁感应强度 B	1 G	10^{-4} T
磁场强度 H	1 Oe	$79.577\,5$ A·m^{-1}
磁化强度 M	1 CGSM	10^{3} A·m^{-1}
电感 L	1 CGSM	$1.112\,65\times10^{9}$ H

三种单位制下电磁公式对照见表 3(真空中).

表 3

国际单位制	高 斯 制	自然单位制 ($c=\hbar=1$)
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$
$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$	$\boldsymbol{E}=\int\frac{\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$
$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$ $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$	$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ $\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$	$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ $\boldsymbol{B}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$
$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$	$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$
$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$
$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{pmatrix}$ $\partial_\nu F_{\mu\nu}=\mu_0 j_\mu$	$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3\\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0\end{pmatrix}$ $\partial_\nu F_{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j_\mu$	$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\mathrm{i}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\mathrm{i}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3\\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0\end{pmatrix}$ $\partial_\nu F_{\mu\nu}=j_\mu$

五、δ函数与电荷分布

1. δ函数的基本性质

(1) $\delta(x)=\begin{cases}\infty & x=0,\\ 0 & x\neq 0;\end{cases}$

(2) $\int_{-\Delta}^{+\Delta}\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1;$

(3) $\delta(-x)=\delta(x);$

(4) $\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x);$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0);$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a);$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\delta(x-b)\mathrm{d}x=\delta(a-b);$

(8) $x\delta(x)=0;$

(9) $\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x)|}$，　$x_i(i=1,2,3,\cdots)$是$f(x)=0$的单根，并且只有单根；

(10) $\delta[(x-a)(x-b)]=\frac{1}{|a-b|}[\delta(x-a)+\delta(x-b)]$　$(a\neq b)$；

(11) $\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]=\frac{1}{2|x|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$；

(12) $\delta'(-x)=-\delta'(x)$，$\delta^{(n)}(-x)=(-1)^n\delta^{(n)}(x)$.

2. δ函数以正交归一完备函数系展开

(1) 傅里叶级数展开

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}(x-x')}\quad(-l\leqslant x\leqslant l);$$

(2) 贝塞尔函数展开

$$\delta(x-x')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(xx')^{1/2}}{a^2}\frac{\mathrm{J}_m\left(\mu_n\frac{x'}{a}\right)\mathrm{J}_m\left(\mu_n\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{J}_m'^2(\mu_n)}\quad(0\leqslant x\leqslant a),$$

式中μ_n是$\mathrm{J}_m(\mu_n)=0$的根，$m>-1$；

(3) 勒让德多项式展开

$$\delta(x-x')=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x')\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

3. 用δ函数表示的电荷分布

(1) 二维δ函数　$\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')=\delta(x-x')\delta(y-y')$；

三维δ函数　$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$.

它们分别具有如下性质：

$$\int_{\Delta S}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}S=1\quad(\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'\text{ 的点在 }\Delta S\text{ 中});$$

$$\int_{\Delta V}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=1\quad(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\text{ 的点在 }\Delta V\text{ 中}).$$

(2) 球坐标系中的 δ 函数为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta').$$

(3) 柱坐标系中的 δ 函数为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z').$$

(4) 几例用 δ 函数表示的电荷分布

(i) 点电荷系的电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{n}q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i).$$

(ii) 电荷 Q 均匀分布于半径为 R 的球壳上的电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r'-R).$$

(iii) 半径为 R，总电荷为 Q 的带电圆环的电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2\pi R^2}\delta(r'-R)\delta(\cos\theta')\quad(\text{球坐标})$$

或

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho'-R)\delta(z')\quad(\text{柱坐标}).$$

(iv) 长为 b，总电荷为 Q 的线电荷分布密度为

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r'^2}[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)],$$

这里已把线电荷取在球坐标的极轴方向，原点在 $\frac{b}{2}$ 处.

(v) 均匀分布于半径为 R 的圆柱面上的电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2\pi R}\delta(\rho'-R),$$

式中 Q 为单位长度圆柱上的电荷.

(vi) 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的薄平面圆盘上，则

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{r'^2}\delta(\cos\theta')\quad(\text{球坐标});$$

$$\rho(\boldsymbol{r}')=\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\rho'}\delta(z')\quad(\text{柱坐标}).$$

(vii) 置于坐标原点的电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}')=-\boldsymbol{p}\cdot\nabla'\delta(\boldsymbol{r}').$$

六、球谐函数的常用公式

1. 球谐函数的定义

$$Y_l^m(\theta,\phi)=\delta_m\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}\quad(l\geqslant 0,-l\leqslant m\leqslant l),$$

其中

$$\delta_m=\begin{cases}(-1)^m & \text{当 } m\geqslant 0,\\ 1 & \text{当 } m<0,\end{cases}$$

$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\dfrac{d^{|m|}P_l(x)}{dx^{|m|}}$，称为连带勒让德多项式.

2. 勒让德多项式的性质

$$P_l^0(x)=P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}.$$

对称性　$P_l(-x)=(-1)^lP(x)$;

正交归一性　$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx=\dfrac{2}{2l+1}\delta_{lk}$;

递推关系
$$(l+1)P_{l+1}(x)=(2l+1)xP_l(x)-lP_{l-1}(x),$$
$$P'_{l+1}(x)=xP'_l(x)+(l+1)P_l(x),$$
$$P'_{l-1}(x)=xP'_l(x)-lP_l(x);$$

特殊值
$$P_l(1)=1,P_l(0)=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} & l=2n,\\ 0 & l=2n+1.\end{cases}$$

3. 球谐函数的正交归一性

$$\int Y_l^{m*}(\theta,\phi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

利用 $Y_l^m(\theta,\phi)$函数集的完备性，我们总可以把平方可积的任意函数展开成下列级数：

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l,m}C_{lm}Y_l^m(\theta,\phi),$$

其中系数 C_{lm}由下式确定：

$$C_{lm}=\int Y_l^{m*}(\theta,\phi)f(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi.$$

4. $l=0,1,2$ 的球函数表示式

$$Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_1^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi},\quad Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{3\cos^2\theta-1}{2},$$

$$Y_2^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi},\quad Y_2^{\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}.$$

5. 勒让德多项式的母函数

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2r'r\cos\gamma}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\gamma),$$

式中 γ 是 r 与 r' 之间的夹角.

6. 球谐函数加法定理

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\phi)Y_l^{m*}(\theta',\phi'),$$

(θ,ϕ)确定 r 的方向,(θ',ϕ')确定 r'的方向. 利用加法定理可以把$\frac{1}{R}$展开成

$$\frac{1}{R} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{1}{2l+1}\right)\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)Y_l^{m*}(\theta,\phi).$$

七、贝塞尔函数的常用公式

1. 第一类贝塞尔函数 $J_\nu(x)$

表达式 $$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\quad |\arg x| < \pi.$$

对称性 $$\begin{cases} J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \\ J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \end{cases} \quad n = 0,1,2\cdots$$

渐近行为 $x \to 0$ 时 $$\begin{cases} J_0(0) = 1, \\ J_n(0) = 0 \quad (n \geqslant 1), \end{cases}$$

$$x \to \infty \text{ 时} \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) + o(x^{-3/2}).$$

生成函数 $$e^{ikr\cos\phi} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr)\cos n\phi.$$

积分表达式 $$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}d\theta \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots$$

递推公式 $$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

加法公式: $$J_0(R) = J_0(\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)J_m(r')e^{im\gamma}$$

$$= J_0(r)J_0(r') + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(r)J_m(r')\cos m\gamma.$$

2. 第二类贝塞尔函数 $N_\nu(x)$

表达式 $$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

对称性 $$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x).$$

渐近行为 $x \to 0$ 时 $$N_0(x) \to \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},$$

$$N_n(x) \to -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad (n \geqslant 1);$$

$$x \to \infty \text{ 时} \quad N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-3/2}).$$

递推公式　同 $J_\nu(x)$.

3. 虚宗量贝塞尔函数 $I_\nu(x), K_\nu(x)$

表达式

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(xe^{-i\pi/2}) \left(-\pi < \arg x \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I_\nu(x) = e^{i3\nu\pi/2}J_\nu(xe^{-i3\pi/2}) \left(\frac{\pi}{2} < \arg x \leqslant \pi\right);$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)].$$

对称性　$I_n(x) = I_{-n}(x)$.

渐近行为

$x \to 0$ 时　$I_0(0) = 1, I_n(0) = 0 \quad (n \geqslant 1)$;

$$K_0(x) \to -\ln\frac{x}{2},$$

$$K_n(x) \to \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \quad (n \geqslant 1);$$

$x \to \infty$ 时　$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}(1 + o(x^{-1}))$,

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}(1 + o(x^{-1})).$$

递推公式　同 $J_\nu(x)$.

4. 半奇数阶贝塞尔函数 $J_{n+\frac{1}{2}}(x), N_{n+\frac{1}{2}}(x)$

表达式

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left\{\frac{\sin x}{x}\right\};$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^n\left\{\frac{\cos x}{x}\right\};$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x; \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

生成函数 $e^{ikr\cos\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l \cdot J_{l+\frac{1}{2}}(kr)P_l(\cos\theta)$.

5. 爱里函数 $\Phi(x)$ 与贝塞尔函数的关系

$$\Phi(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\pi x}\left\{I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right\} \quad (x > 0);$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\pi|x|}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right] \quad (x < 0).$$

利用 $I_\nu(x)$ 和 $J_\nu(x)$ 的渐近行为，我们可以得到 $\Phi(x)$ 的渐近表达式：当 $x > 0$ 并且很大时

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2}x^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}};$$

当 $x < 0$ 且 $|x|$ 很大时

$$\Phi(x) \approx |x|^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right).$$

八、重要的物理常数(国际单位制)

光速	c	3.00×10^{8} m
真空介电常数	ε_0	8.85×10^{-12} F/m
真空导磁率	μ_0	1.26×10^{-6} H/m
玻耳兹曼常数	k_B	1.38×10^{-23} J/(mol·k)
普朗克常数	h	6.63×10^{-34} J·s
电子电荷	e	1.60×10^{-19} C
电子静质量	m_e	9.11×10^{-31} kg
电子荷质比	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg
电子的磁矩	μ_e	9.27×10^{-24} J/T
质子静质量	m_p	1.67×10^{-27} kg
玻尔磁子	μ_B	9.27×10^{-24} J/T
质子磁矩	μ_p	1.41×10^{-26} J/T
精细结构常数	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$	$\frac{1}{137.039}$
经典电子半径	$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	$2.817\,76 \times 10^{-15}$ m
玻尔半径	$\frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2}$	$5.291\,66 \times 10^{-11}$ m

习题答案与提示

1.1 $\nabla\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\nabla\times[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；$\nabla\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$，$\nabla\times[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$；$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$，$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$；$\nabla\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$，$\nabla\times[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]=3\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$；$\nabla\cdot[\varphi(r)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]=0$，$\nabla\times[\varphi(r)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\left[r\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\boldsymbol{r}\right]+2\boldsymbol{a}\varphi(r)$；$\nabla\cdot[\varphi(r)\boldsymbol{A}(r)]=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{A}(r)+\varphi(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}$，$\nabla\times[\varphi(r)\boldsymbol{A}(r)]=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{A}(r)+\varphi(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}$；$\nabla\cdot[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}(r)]=0$，$\nabla\times[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}(r)]=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}\right)-r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}-2\boldsymbol{A}$.

1.2 $\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}=0$，$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}$，$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{2}{r}$，$\nabla\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\boldsymbol{I}}$，$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$，$\nabla\frac{1}{r^2}=-\frac{2\boldsymbol{r}}{r^4}$，$\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{\boldsymbol{a}}{r^3}-\frac{3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$，$\nabla\times\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\frac{\boldsymbol{a}}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$，$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$，$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{\boldsymbol{a}}{r^3}-\frac{3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$，$\nabla^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\cdot\nabla\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$.

1.3 提示：对要证明的公式两边同时点乘一个任意常矢量 $\boldsymbol{c}$，可将公式化为标准形式，如对第一式，可得

$$\text{左}=\boldsymbol{c}\cdot\oint_C\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C\varphi\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times(\varphi\boldsymbol{c})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S(\nabla\varphi\times\boldsymbol{c})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\int_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\varphi=\text{右}.$$

1.4 提示：利用公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r})=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$，$\int_V\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau=\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{r})=\oint_S\mathrm{d}S(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{r}=0$.

1.5 提示：张量 $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 的变换可以写成 $T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$，其中 a_{ij} 为变换矩阵，满足 $\det\overrightarrow{\boldsymbol{a}}=1$，或 $a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$，因此有 $\mathrm{Tr}\,\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'=\sum_i T'_{ii}=a_{ik}a_{il}T_{kl}=\delta_{kl}T_{kl}=T_{kk}=\mathrm{Tr}\,\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$. 若将变换写成矩阵形式：$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'=\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{T}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}$，则 $\det\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'=\det\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\cdot\det\overrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\det\overrightarrow{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}=\det\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$.

1.6 提示：与上题类似，$\sum_{ij}T'^2_{ij}=T'_{ij}T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}a_{im}a_{jn}T_{mn}=\delta_{km}\delta_{ln}T_{kl}T_{mn}=T_{kl}T_{kl}=\sum_{kl}T^2_{kl}$.

1.7 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$，$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$，$\nabla^2\boldsymbol{E}=-k^2\boldsymbol{E}$.

1.8
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\left[\nabla\frac{1}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e})+\frac{1}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}\nabla\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e})\right]$$
$$=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^2(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})^2}\nabla(r^2-r\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e})-\frac{2\boldsymbol{e}}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}\right]$$
$$=\frac{\mu_0 g}{4\pi}\left[-\frac{1}{r^2(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})^2}\left(2\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}-r\boldsymbol{e}\right)\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e})-\frac{2\boldsymbol{e}}{r(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}\right]$$
$$=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^2(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})}\left[2r\boldsymbol{e}+\frac{\boldsymbol{r}}{r}(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e})-2r\boldsymbol{e}\right]=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}.$$

1.9
$$\rho=-\varepsilon_0\nabla^2\phi=-\frac{q}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r/a}\right)=-\frac{q}{4\pi}\left[\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-r/a}+\frac{1}{r}\nabla^2\mathrm{e}^{-r/a}+2\nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla\mathrm{e}^{-r/a}\right]$$
$$=q\left[\delta(\boldsymbol{r})-\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{r}\right].$$

$Q_R=\int_{V_R}\rho\mathrm{d}\tau=q\left(1+\frac{R}{a}\right)\mathrm{e}^{-R/a}$，当 $R\to\infty$ 时，$Q_R\to 0$.

1.10 提示：利用高斯定理. $r<R_1$：$\boldsymbol{E}=0$；$R_1<r<R_2$：$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f}{3\varepsilon}\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right)\boldsymbol{r}$；$r>R_2$：$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f}{3\varepsilon_0}(R_2^3-R_1^3)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$；$\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right)\boldsymbol{r}$，$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f$，$\sigma_{P1}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}|_{r=R_1}=0$，$\sigma_{P2}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}|_{r=R_2}=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{3\varepsilon}\rho_f R_2(1-R_1^3/R_2^3)$.

1.11 提示：利用安培环路定理. $r<R_1$：$\boldsymbol{B}=0$；$R_1<r<R_2$：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{2r^2}(r^2-R_1^2)\boldsymbol{j}_f\times\boldsymbol{r}$；$r>R_2$：$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2r^2}(R_2^2-R_1^2)\boldsymbol{j}_f\times\boldsymbol{r}$. $\boldsymbol{M}=\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0 r^2}(r^2-R_1^2)\boldsymbol{j}_f\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{j}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}=-\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)\boldsymbol{j}_f$，$\alpha_{m1}=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{M}|_{r=R_1}=0$，$\alpha_{m2}=-\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{M}|_{r=R_2}=-\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0 R_2}(R_2^2-R_1^2)\boldsymbol{j}_f$.

1.12 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\boldsymbol{D}$，$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{D}=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f$.

1.13 提示：静电情况下导体内没有电流，故电场为零，在表面有边界条件 $\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}=0$. 在稳定电流的情况下，在导体内部有欧姆定律 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}$. 由于电流不能流到导体外面，故在导体表面有 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{j}=0$，即 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{E}=0$.

1.14 如果是球对称分布，则始终有 $\boldsymbol{E}=0$（当 $r<R$）.

1.15 提示：由边界条件可知，$\boldsymbol{E}$ 应当是球对称的. 可令 $\boldsymbol{E}=A\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，其中 A 为待定常数. 由高斯定理可以求得 $\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，$\sigma_1=D_{1n}=\frac{Q\varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R_1^2}$，$\sigma_2=D_{2n}=\frac{Q\varepsilon_2}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R_1^2}$，$R_1$ 为内球半径.

1.16 提示：利用叠加原理，先求没有空腔时的电场，再求空腔处电荷密度为 $-\rho$，其余电荷

为零时的电场，叠加后即得空腔处的电场. $\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$.

1.17 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=\begin{cases}\dfrac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & r>a,\\ 0 & r<a.\end{cases}$ $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$， $\sigma=D_n=\varepsilon_0 E_r=\dfrac{Q}{4\pi a^2}$.

1.18 提示：达到平衡时，绳子的张力、重力与库仑力的合力为零. 即 $F_T\cos\theta=mg$，$F_T\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2}$，消去 F_T 即可得证.

1.19 利用麦克斯韦方程组及所给方程，消去一组变量就可得到只含 $\boldsymbol{E}$ 或只含 $\boldsymbol{H}$ 的方程.

1.20 带电导体球的表面电势为 $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，场强为 $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$，故 $\varphi=ER=10^6\times0.1\ \mathrm{V}=10^5\ \mathrm{V}$.

1.21 与 1.15 题类似，$\boldsymbol{E}$ 为球对称. $\boldsymbol{E}=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

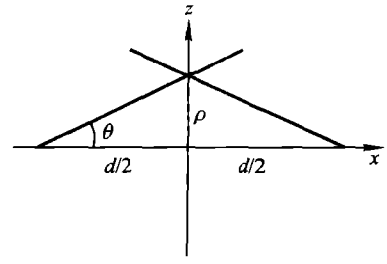
2.1 由安培定理和欧姆定律可以求得表面的场为 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0 jR\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{E}=\frac{j}{\sigma_c}\boldsymbol{e}_z$. 能流为 $\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{2\sigma_c}j^2R(-\boldsymbol{e}_\rho)$，单位时间流入单位长圆柱体内的能量为 $P=S\cdot2\pi R=\frac{\pi R^2}{\sigma_c}j^2=\frac{(\pi R^2 j)^2}{\pi R^2\sigma_c}=\frac{I^2}{\pi R^2\sigma_c}=I^2R=$焦耳热.

2.2 总场为 $\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\boldsymbol{E}_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r+E_0\boldsymbol{e}_z$，麦克斯韦张力张量为 $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\varepsilon_0\boldsymbol{EE}$，单位面积受力为 $\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{e}_n+\varepsilon_0\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{EE}=\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}+E_0\cos\theta\right)\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r+E_0\boldsymbol{e}_z\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r+E_0\boldsymbol{e}_z\right)^2\boldsymbol{e}_r=\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2-E_0^2\right]\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{qE_0}{4\pi r^2}+\varepsilon_0E_0^2\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_z$，利用 $\int\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}\Omega=\int\cos\theta\mathrm{d}\Omega=0$ 即可得总力 $\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{f}\mathrm{d}S=\int\boldsymbol{f}r^2\mathrm{d}\Omega=\frac{qE_0}{4\pi}\boldsymbol{e}_z\int\mathrm{d}\Omega=qE_0\boldsymbol{e}_z$. 这正是 q 在外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中所受的力.

2.3 带电导体球表面场强为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{V}{R}\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\frac{\varepsilon_0V^2}{2R^2}\boldsymbol{e}_r$. 其中一个半球受到的力为 $\boldsymbol{F}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\boldsymbol{f}=\frac{\varepsilon_0V^2}{2R^2}\int_0^{\pi/2}\boldsymbol{e}_r2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi\varepsilon_0}{2}V^2\boldsymbol{e}_z$.

2.4 与题 2.2 类似，取 $\boldsymbol{B}_0$ 为 x 方向，I 为 z 方向. 则总场为 $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0I}{2\pi\rho^2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{\rho}+B_0\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=-\boldsymbol{e}_\rho\cdot\left[\frac{1}{2\mu_0}B^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{BB}\right]=-\frac{1}{2\mu_0}B^2\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{BB}=\frac{1}{2\mu_0}\left[B_0^2-\left(\frac{\mu_0I}{2\pi\rho}\right)^2\right]\cos\phi\times\boldsymbol{e}_x+\left[\frac{IB_0}{2\pi\rho}-\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0^2I^2}{4\pi^2\rho^2}+B_0^2\right)\sin\phi\right]\boldsymbol{e}_y$，总力 $\boldsymbol{F}=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{f}\rho\mathrm{d}\phi=\frac{IB_0}{2\pi}\boldsymbol{e}_y\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=IB_0\boldsymbol{e}_y$.

2.5 面上的场强为 $\boldsymbol{E}=\dfrac{2q\boldsymbol{e}_\rho\sin\theta}{4\pi\varepsilon(\rho^2+d^2/4)}=\dfrac{q\boldsymbol{\rho}}{2\pi\varepsilon(\rho^2+d^2/4)^{3/2}}$，$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T}=-\dfrac{1}{2}\times\varepsilon E^2\boldsymbol{e}_n+\varepsilon\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{EE}=-\dfrac{q^2}{8\pi^2\varepsilon}\cdot\dfrac{\rho^2\boldsymbol{e}_x}{(\rho^2+d^2/4)^3}$，$\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{f}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\boldsymbol{f}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon}\boldsymbol{e}_x\times\int_0^\infty\dfrac{\rho^3\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+d^2/4)^3}=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon d^2}\boldsymbol{e}_x$.



2.6 带电 Q 的导体球壳在外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中的场分布为(见 §4.3 例 4)$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r+\dfrac{3R^3}{r^5}(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\dfrac{R^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0$，$r=R$ 时有 $\boldsymbol{E}\Big|_{r=R}=\left(\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}+3E_0\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T}=-\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{e}_n+\varepsilon_0\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{EE}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{e}_r=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2R^4}+9E_0^2\cos^2\theta+\dfrac{3QE_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0R^2}\right)\boldsymbol{e}_r$，总力为 $\boldsymbol{F}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\boldsymbol{f}R^2\mathrm{d}\Omega=\pi\varepsilon_0\int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2R^2}+9E_0^2R^2\cos^2\theta+\dfrac{3QE_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\right)\cos\theta\boldsymbol{e}_z\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left(\dfrac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0R^2}+\dfrac{9}{4}\pi\varepsilon_0R^2E_0^2+\dfrac{1}{2}QE_0\right)\boldsymbol{e}_z$.

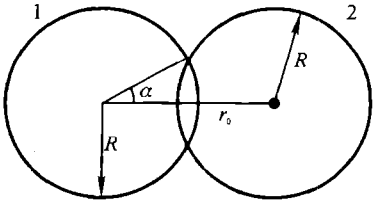
2.7 如果 $\boldsymbol{A}$、φ 不满足洛伦兹条件，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=f\neq0$，则可作变换 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\chi$，$\varphi\to\varphi'=\varphi-\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$，选取 χ，使其满足方程 $\nabla^2\chi-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=-f$，则有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi'}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-f=f-f=0$，显然，即使 $f=0$，χ 仍可有无穷多解.

2.8 直接代入麦克斯韦方程组即可证明.

2.9 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^{3+\delta}}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r})-\dfrac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0r^{3+\delta}}$，$\nabla\times\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^{3+\delta}}=0$. 因为 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，故仍可引入标势 φ，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，$\boldsymbol{E}$ 仍是保守场，但高斯定理不再成立，$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau\neq\dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

2.10 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)\boldsymbol{e}_r-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\boldsymbol{e}_\theta$，将 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$ 代入后即得 $\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}=\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\mu_0g}{4\pi}\dfrac{1-\cos\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\mu_0g}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\mu_0g}{4\pi}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$. 在交叠区内，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}=\dfrac{\mu_0g}{4\pi}\cdot\dfrac{2}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\phi$. 利用 $\phi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 得 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}=-\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0$. 故 $A_x^{\mathrm{I}}-A_x^{\mathrm{II}}=(A_\phi^{\mathrm{I}}-A_\phi^{\mathrm{II}})(-\sin\phi)=\dfrac{\mu_0g}{4\pi}\cdot\dfrac{-2\sin\phi}{r\sin\theta}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}(2g\phi)$，同理可得 $A_y^{\mathrm{I}}-A_y^{\mathrm{II}}=(A_\phi^{\mathrm{I}}-A_\phi^{\mathrm{II}})\cos\phi=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2g\cos\phi}{r\sin\theta}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}(2g\phi)$，$A_z^{\mathrm{I}}-A_z^{\mathrm{II}}=0=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}(2g\phi)$，$\oint(\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^{2\pi}(A_\phi^{\mathrm{I}}-A_\phi^{\mathrm{II}})r\mathrm{d}\phi=\dfrac{\mu_0g}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=\mu_0g$.

3.1 设两原核相距 r_0，$-q$ 均匀分布在半径为 R 的球面上，对每一个原子，壳层内的场为 $\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，在外部则为 $\boldsymbol{E}=0$，故势为 $\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)(r<R)$，$\varphi(r)=0,(r>R)$. 相互作用能可以分为两部分：$W=W_{核}+W_{电子}$，其中 $W_{核}=q\varphi(r_0)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{R}\right)(r_0<R)$，$W_{核}=0(r_0>R)$，$W_{电子}=\int\sigma\varphi(r)\mathrm{d}S=-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{r_0}{2R}-1\right)+\frac{1}{r_0R}(R-|r_0-R|)\right](r_0<2R)$，$W_{电子}=0(r_0>2R)$. 合并后得 $W=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{R}-\frac{r_0}{4R^2}\right)(r_0<R)$，$W=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_0}-\frac{r_0}{4R^2}\right)(R<r_0<2R)$，$W=0(r_0>2R)$. 当 $\frac{\partial W}{\partial r_C}>0$ 时分子将不稳定，当 $r_0=R$ 时 W 最小，$W=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$. 故分子离解所需要的能量为 $W_{离}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$.



3.2 先求出一个电子云产生的势. $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r\rho(r')\mathrm{d}\tau'=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1-\left(1+\frac{4r}{a}+\frac{8r^2}{a^3}\right)\mathrm{e}^{-4r/a}\right]$，$\varphi(r)=\int_r^\infty\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1-\left(1+\frac{2r}{a}\right)\mathrm{e}^{-4r/a}\right]$，$W=\int\rho(r)\varphi(r)\mathrm{d}\tau=\frac{5e^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$.

3.3 设液体的密度为 ρ，则依题意有 $mg=\frac{V}{4}\rho g$. 设充电后球壳受到静电力为 F，则 $mg+F=\frac{V}{2}\rho g=2mg$，即 $F=mg$. 设充电后球壳电势为 φ_0，则 $E=\frac{\varphi_0}{R}$，$f=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\boldsymbol{e}_n=\frac{\varepsilon\varphi_0^2}{2R^2}\boldsymbol{e}_n$. 球壳受力为 $F=-\int_0^{\pi/2}\frac{\varepsilon_0\varphi_0^2}{2R^2}\cos\theta 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\varepsilon\varphi_0^2}{2R^2}\cos\theta 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\varphi_0^2$，解得 $\varphi_0=\sqrt{\frac{2mg}{\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}}$.

3.4 $Q_1=-\frac{R_1(R_2-r)}{r(R_2-R_1)}q$，$Q_2=-\frac{R_2(r-R_1)}{r(R_2-R_1)}q$.

3.5 设导体 1 的电荷为 q，导体 2 外表面的电荷为 q'，则导体 2 内表面电荷为 $-q$，导体 2 总电荷为 $q'-q$. 由定义得 $q=C_{11}V_1+C_{21}V_2$，$q'-q=C_{12}V_1+C_{22}V_2$，故 $C=\frac{q}{V_1-V_2}=C_{11}$，$C'=\frac{q'}{V_2}=C_{12}+C_{22}$.

3.6 $Q_0=\frac{\varphi_1-\varphi_P}{\varphi_0-\varphi_1}q$，$Q_1=\frac{\varphi_P-\varphi_0}{\varphi_0-\varphi_1}q$.

3.7 加入外场后，电子云中心与质子有一位移 $\boldsymbol{r}_0$，这将产生电偶极矩 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}_0$. 先计算出原子核和电子云中心相距 $\boldsymbol{r}_0$ 时的相互作用力 $F=eE_0(r_0)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\times$

$\left[1-\left(1+\frac{2r_0^2}{a_0^2}+\frac{2r_0}{a_0}\right)e^{-2r_0/a_0}\right]$. 因为是弱场，$r_0$ 很小，展开得 $F\approx-\frac{e^2 r_0}{3\pi\varepsilon_0 a_0^3}$. 电子云在外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中受到的力为 $F'=\int\rho E_0\mathrm{d}\tau=-eE_0$. 平衡时二力相等，$F=F'$. 由此得 $r_0=\frac{3\pi\varepsilon_0 a_0^3}{e}E_0$，$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}_0=3\pi\varepsilon_0 a_0^3\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{P}=n\boldsymbol{p}=3\pi\varepsilon_0 a_0^3 n\boldsymbol{E}_0=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$，$\chi=3\pi a_0^3 n$，其中 n 为氢原子数密度.

3.8 若电荷均匀分布在表面：$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(r\geqslant R)$. $W=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int\sigma\varphi\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\frac{q}{4\pi R^2}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot 4\pi R^2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$. 若均匀分布在体内：$\varphi=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$，$W=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\cdot\frac{3q}{4\pi R^3}\cdot\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\cdot 4\pi\int_0^R\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\mathrm{d}r=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

3.9 给两个球壳分别加上正负电荷 Q、$-Q$，则有场分布 $\boldsymbol{E}=0$，当 $r<R_1$ 和 $r>R_2$ 时；$\boldsymbol{E}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，当 $R_1<r<R_2$. $\varphi_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. 电容 $C=\frac{Q}{\varphi_{12}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$.

3.10 在电容器内部，电场 $\boldsymbol{E}$ 是均匀的，$E=\frac{\varphi}{d}$，但 D 不是均匀的，$D_1=\frac{\varepsilon_0\varphi}{d}$，$D_2=\frac{\varepsilon\varphi}{d}$，$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_n$. 在液面附近的力差为 $F=\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\varphi^2}{d^2}=\rho_m gh$，故 $h=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\varphi^2}{2\rho_m g d^2}$.

4.1 利用格林函数，取 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$，则 $\varphi(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\oint_S\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{1}{R}\nabla'\varphi-\varphi\nabla'\frac{1}{R}\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$. 取 $\boldsymbol{S}$ 为以 $\boldsymbol{r}$ 为球心，R 为半径的球面，则 $\oint_S\frac{1}{R}\nabla'\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\frac{1}{R}\oint\nabla'\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\frac{1}{R}\int_V\nabla'^2\varphi\mathrm{d}\tau'=-\frac{1}{\varepsilon_0 R}\int_V\rho\mathrm{d}\tau'=0$，所以 $\varphi(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\varphi\nabla'\frac{1}{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\frac{1}{4\pi}\oint_S\varphi\frac{\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{R^3}=\frac{1}{4\pi}\oint_S\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\Omega'=\langle\varphi(\boldsymbol{r})\rangle$.

4.2 考虑到导体球为等势体，可取如下试解：$r\leqslant R$，$\varphi=\varphi_0=$常数；$R<r<R'$，$\varphi_1=Ar\cos\theta+\frac{B}{r^2}\cos\theta+\varphi_0'=Ar\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta+\varphi_0$；$r>R'$，$\varphi_2=\varphi_0'-E_0 r\cos\theta+\frac{C}{r^2}\cos\theta$. 边界条件 $r=R'$，$\varphi_1=\varphi_2$，$\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$. 由此可解出系数 $A=-\frac{3\varepsilon_0 E_0 R'^3}{2\varepsilon_0(R'^3-R^3)+\varepsilon(R'^3+2R^3)}$，$C=\frac{R'^3(\varepsilon-\varepsilon_0)+R^3(2\varepsilon+\varepsilon_0)}{2\varepsilon_0(R'^3-R^3)+\varepsilon(R'^3+2R^3)}E_0 R'^3$，$\varphi_0'=\varphi_0$. 电荷分布 $\sigma_{fR}=-\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{r=R}=\frac{9\varepsilon\varepsilon_0 E_0 R'^3\cos\theta}{2\varepsilon_0(R'^3-R^3)+\varepsilon(R'^3+2R^3)}$，$\sigma_{fR'}=0$，$\sigma_{pR}=$

$-\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=R}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_{r=R}=-\dfrac{9\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)R'^3E_0\cos\theta}{2\varepsilon_0(R'^3-R^3)+\varepsilon(R'^3+2R^3)}$，$\sigma_{PR'}=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{P}\big|_{r=R}=\dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0(R'^3+2R^3)\cos\theta}{2\varepsilon_0(R'^3-R^3)+\varepsilon(R'^3+2R^3)}$.

4.3 $\boldsymbol{E}_1=\dfrac{9\varepsilon\varepsilon_0R'^3}{9\varepsilon\varepsilon_0R'^3+2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2(R'^3-R^3)}\boldsymbol{E}_0\ (r<R)$，$\boldsymbol{E}_2=\dfrac{3\varepsilon_0R'^3}{9\varepsilon\varepsilon_0R'^3+2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2(R'^3-R^3)}\cdot\left[(2\varepsilon+\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_0+\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{r^5}R^3(r^2\boldsymbol{E}_0-3\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\right]\ (R<r<R')$，$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_0+\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)(2\varepsilon+\varepsilon_0)(R'^3-R^3)R'^3}{9\varepsilon\varepsilon_0R'^3+2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2(R'^3-R^3)}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\dfrac{\boldsymbol{E}_0}{r^3}\right](r>R')$.

4.4 空间电势除 p 的贡献外，还有极化电荷的贡献. 取如下特解：$r<R$，$\varphi_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+Ar\cos\theta$；$r>R$，$\varphi_2=\dfrac{B\cos\theta}{r^2}$. 由边界条件可以解得 $\varphi_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+2\varepsilon}\cdot\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_0R^3}$，$\varphi_2=\dfrac{3}{4\pi(\varepsilon_0+2\varepsilon)}\cdot\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$，$\sigma_P=-\dfrac{3(\varepsilon-\varepsilon_0)p\cos\theta}{2\pi(\varepsilon_0+2\varepsilon)R^3}$.

4.5 先不考虑点电荷，则方程为 $\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{1}{\varepsilon}\rho(r<R)$，$\nabla^2\varphi_2=0(r>R)$. 非齐次方程的特解为 $-\dfrac{1}{6\varepsilon}\rho r^2=-\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon R^3}$，故可写出试解为 $\varphi_1=-\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon R^3}+A_0+A_1r\cos\theta$，$\varphi_2=-E_0r\cos\theta+\dfrac{B_0}{r}+\dfrac{B_1\cos\theta}{r^2}$. 由边界条件可以解得 $\varphi_1=\dfrac{(\varepsilon_0+2\varepsilon)Q}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0R}-\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon R^3}-\dfrac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$，$\varphi_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}+\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3\dfrac{\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$. 若球心再放点电荷 q，则 $\varphi'_1=\varphi_1+\dfrac{q}{4\pi R}\times\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$，$\varphi'_2=\varphi_2+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$.

4.6 可设电场仍为球对称，令 $\boldsymbol{E}=A\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，由高斯定理 $\oint\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$ 可定出常数 $A=\dfrac{Q}{4\pi(\varepsilon_0+\varepsilon'/3)}$. 两球电势差 $V=\int_R^{R'}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$C=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{4\pi RR'(\varepsilon_0+\varepsilon'/3)}{R'-R}$.

4.7 设 $\boldsymbol{p}$ 在 Oxz 平面内，与 z 轴夹角为 α，则 $\boldsymbol{p}=p(\boldsymbol{e}_x\sin\alpha+\boldsymbol{e}_z\cos\alpha)$. 根据镜象法，我们在 $z=\dfrac{R^2}{d}$ 处放一个象电荷 q' 和象偶极子 $\boldsymbol{p}'=p'(-\boldsymbol{e}_x\sin\alpha+\boldsymbol{e}_z\cos\alpha)$，则电势表达式可以写成 $\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}+\dfrac{\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{R}'}{R'^3}+\dfrac{q'}{R'}\right]$. 由边界条件 $\varphi\big|_{r=R}=0$ 可以定出 $p'=p\left(\dfrac{R}{d}\right)^3$，$q'=\dfrac{R}{d^2}p\cos\alpha$. $\boldsymbol{p}$ 受到的力即为 $\boldsymbol{p}'$ 和 q' 产生的场对它的作用力. $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{l}'=\boldsymbol{r}-\dfrac{R^2}{d}\boldsymbol{e}_z$. 故 $\varphi'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{l}'}{l'^3}+\dfrac{q'}{l'}\right]$，$\boldsymbol{E}'=-\nabla\varphi'$，$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}')$.

4.8 取 q 与球心的连线为 z 轴，球外电势满足 $\nabla^2\varphi=-\dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{e}_z)$，$\varphi\big|_{r=R}=\varphi_0$，$-\oint\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=Q$. 利用镜象法，在 q 的对称点 $d'=\dfrac{R^2}{d}$ 放象电荷 $q'=-\dfrac{R}{d}q$. 因为导

体球上总电荷为 Q,故还应放上象电荷 $Q-q'=Q+\frac{R}{d}q$. 为不破坏等势条件,必须将其放在球心. 最后得 $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{e}_z|}+\frac{Q+(R/d)q}{r}-\frac{(R/d)q}{|\boldsymbol{r}-(R^2/d)\boldsymbol{e}_z|}\right](r>R)$. 电荷 q 受到的力即为 q' 和 $Q-q'$ 对 q 的力:$F=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\times\left[Q-\frac{R^3q}{d}\cdot\frac{(2d^2-R^2)}{(d^2-R^2)^2}\right]$. 由此可见,只要 $d\approx R$,即使 q、Q 同号,也可使 F 变负.

4.9 取圆环位于 Oxy 平面,则 $\boldsymbol{p}=\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau=\int\lambda\boldsymbol{r}\mathrm{d}l=\lambda R\int_0^{2\pi}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\theta=0,\varphi_p=0$. $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}=\int(3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}})\lambda\mathrm{d}l=\lambda R\int_0^{2\pi}(3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}})\mathrm{d}\theta,D_{xx}=\lambda R\int_0^{2\pi}(3x^2-r^2)\mathrm{d}\theta=\lambda R^3\int_0^{2\pi}(3\cos^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\lambda\pi R^3,D_{yy}=\lambda R\int_0^{2\pi}(3y^2-r^2)\mathrm{d}\theta=\lambda\pi R^3,D_{zz}=-(D_{xx}+D_{yy})=-2\lambda\pi R^3$, $D_{ij}=0$(当 $i\neq j$). $\varphi_D=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}:\frac{3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}}{r^5}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}[D_{xx}x^2+D_{yy}y^2+D_{zz}z^2]=\frac{\lambda\pi R^3}{8\pi\varepsilon_0 r^5}(x^2+y^2-2z^2)=\frac{\lambda R^3}{8\varepsilon_0 r^3}(1-3\cos^2\theta)$,总的电势为 $\varphi=\frac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda\pi R^3}{8\pi\varepsilon_0 r^3}(1-3\cos^2\theta)+\cdots$

4.10 由球坐标中的多极矩公式,得 $q_{lm}=\int Y_l^{m*}(\theta,\phi)r^l\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau=\frac{e}{64\pi R_0^5}\times\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\int P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-im\phi}r^l r^2\mathrm{e}^{-r/R_0}\sin^2\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r=\frac{e}{\sqrt{4\pi}}\delta_{l0}\delta_{m0}-3\sqrt{\frac{5}{\pi}}eR_0^2\delta_{l2}\delta_{m0}$. 即 $q_{00}=\frac{e}{\sqrt{4\pi}},q_{20}=-3\sqrt{\frac{5}{\pi}}eR_0^2$,其余全部为零. 代入势的表达式,得 $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot4\pi\frac{Y_0^0}{r}-3\sqrt{\frac{5}{\pi}}eR_0^2\cdot\frac{4\pi}{5}\frac{Y_2^0}{r^3}\right]=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1-\frac{6R_0^2}{r^2}P_2(\cos\theta)\right]$. 为求原点附近的势,我们直接写出一般表达式,然后再对 $r\to0$ 展开. $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)\times\rho(\boldsymbol{r}')r'^2\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega'$($r_<$ 和 $r_>$ 分别代表 r 和 r' 中较小的一个和较大的一个). 利用 $\sin^2\theta=\frac{2}{3}[1-P_2(\cos\theta)],P_l(\cos\gamma)=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)\times P_l^m(\cos\theta')\cos[m(\phi-\phi')]$. 第二项对积分没有贡献,对 r' 的积分可分为 $0\to r$ 和 $r\to\infty$ 两个区间积分,则 $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\int_0^r\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\gamma)\rho(\boldsymbol{r}')r'^2\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega'+\int_r^{\infty}\frac{r^l}{r'^{l+1}}P_l(\cos\gamma)\rho(\boldsymbol{r}')r'^2\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega'\right]$. 将积分算出并对 r 展开到 r^2 项就得到 $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left[\frac{1}{4}-\frac{r^2}{120R_0^2}P_2(\cos\theta)+\cdots\right]$.

4.11 两偶极子的相互作用能为 $W=\dfrac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2-3(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{p}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}$. 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{p}_1/\!/\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_1\perp\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{p}_2\perp\boldsymbol{R}$，故 $W=\dfrac{p^2}{4\pi\varepsilon_0R^3}$，$\boldsymbol{F}=-\dfrac{\partial W}{\partial R}\boldsymbol{e}_R=\dfrac{3p^2}{4\pi\varepsilon_0R^5}\boldsymbol{R}$；当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{p}_1/\!/\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_1/\!/\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{p}_2/\!/\boldsymbol{R}$，故 $W=\dfrac{p^2-3p^2}{4\pi\varepsilon_0R^3}=-\dfrac{p^2}{2\pi\varepsilon_0R^3}$，$\boldsymbol{F}=-\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0R^5}\boldsymbol{R}$.

4.12 令线电荷与 z 轴平行，位于 $x=\pm\dfrac{R}{2}$处，则 $\varphi=\dfrac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2}+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\times\ln\sqrt{\left(x+\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2}=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{(x+R/2)^2+y^2}{(x-R/2)^2+y^2}=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\rho^2+R^2/4+Rx}{\rho^2+R^2/4-Rx}\approx\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\times\ln\dfrac{1+Rx/\rho^2}{1-Rx/\rho^2}\approx\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2Rx}{\rho^2}=\dfrac{\lambda R}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{x}{\rho^2}$，令 $\boldsymbol{p}=\lambda R\boldsymbol{e}_x$ 为二维偶极矩，则 $\varphi\approx\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}$.

4.13 这是一个二维问题，可以用镜象法. $\rho>R$，在 $x=\dfrac{R^2}{R'}$和 $x=0$ 处分别放置线电荷 λ'及 $-\lambda'$，$\varphi_1=-\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{\rho^2+R'^2-2\rho R'\cos\varphi}-\dfrac{-\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{\rho^2+\left(\dfrac{R^2}{R'}\right)^2-2\rho\dfrac{R^2}{R'}\cos\varphi}+\dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho$. $\rho<R$，在 $x=R'$处放置象电荷 λ''，$\varphi_2=-\dfrac{\lambda''}{2\pi\varepsilon}\ln\sqrt{\rho^2+R'^2-2\rho R'\cos\varphi}+c$. 利用边界条件 $\varphi_1=\varphi_2|_{\rho=R}$，$\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}=\varepsilon\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}$ 可以定出 $\lambda'=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\lambda$，$\lambda''=\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\lambda$，$c=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\ln R'$. λ 所受的力就是 $x=\dfrac{R^2}{R'}$处的 λ'和 $x=0$ 处的 $-\lambda'$对它的作用力：$\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\lambda\lambda'}{R'-R^2/R'}-\dfrac{\lambda\lambda'}{R'}\right]\boldsymbol{e}_x=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\cdot\dfrac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{R^2}{R'(R'^2-R^2)}\boldsymbol{e}_x$.

4.14 $Q=\sum_{i=1}^{8}q_i=0$，$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{8}\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{r}_i=4q\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_z$，$\overleftrightarrow{D}=\sum_{i=1}^{8}(3\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i-r_i^2\overleftrightarrow{I})q_i=4qa^2\left[3\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z+\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_y)-\overleftrightarrow{I}\right]$，$\overleftrightarrow{D}$ 与坐标选取有关. 相应的势为 $\varphi_p=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}=\dfrac{4qR}{4\pi\varepsilon_0r^2}\cos\theta$，$\varphi_D=\dfrac{1}{24\pi\varepsilon_0}\overleftrightarrow{D}:\dfrac{3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overleftrightarrow{I}}{r^5}=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0r^5}\overleftrightarrow{D}:\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}=\dfrac{qR^2}{8\pi\varepsilon_0r^5}[12z^2+6(2xz+2yz)-4r^2]=\dfrac{qR^2}{2\pi\varepsilon_0r^5}[3z^2+3xz+3yz-r^2]$.

4.15 坐标原点取在椭球中心，则体系具有反演对称，故有 $\boldsymbol{p}=\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau=\rho\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau=-\rho\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau=0$，$\overleftrightarrow{D}=\rho\int(3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overleftrightarrow{I})\mathrm{d}\tau$. 由对称性可得 $D_{xy}=\rho\int3xy\mathrm{d}\tau=0$，同理，$D_{yz}=D_{zx}=D_{xz}=D_{yz}=D_{zy}=0$. $D_{xx}=\rho\int(3x^2-r^2)\mathrm{d}\tau=\rho\int(2x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}\tau$. 为了计算$\int x^2\mathrm{d}\tau$、$\int y^2\mathrm{d}\tau$、$\int z^2\mathrm{d}\tau$，取广义球坐标 $x=Rr\sin\theta\cos\phi$，$y=R'r\sin\theta\sin\phi$，$z=cr\cos\theta$，椭球方程变为 $r=1$，雅可比行列式为 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right|=RR'cr^2\sin\theta$.

$\int x^2 d\tau = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} R^2 r^2 \sin^2\theta\cos^2\phi \cdot RR'cr^2\sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{1}{5}R^3R'c\,\frac{4}{3}\pi = \frac{R^2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi RR'c = \frac{R^2}{5}V$，$V$ 为椭球体积，同理，$\int y^2 d\tau = \frac{R'^2}{5}V$，$\int z^2 d\tau = \frac{c^2}{5}V$，故 $D_{xx} = \rho\int(2x^2 - y^2 - z^2)d\tau = \frac{1}{5}\rho V(2R^2 - R'^2 - c^2) = \frac{Q}{5}(2R^2 - R'^2 - c^2)$，$D_{yy} = \frac{Q}{5}(2R'^2 - R^2 - c^2)$，$D_{zz} = \frac{Q}{5}(2c^2 - R^2 - R'^2)$．$\varphi_D = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}[D_{xx}x^2 + D_{yy}y^2 + D_{zz}z^2] = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^5}[3R^2x^2 + 3R'^2y^2 + 3c^2z^2 - (R^2 + R'^2 + c^2)r^2]$．

4.16 可用镜象法来解．$\boldsymbol{p} = p(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z + \sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$，在 $z = -d$ 处放一个象偶极子 $\boldsymbol{p}' = p'\cdot(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z - \sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$，$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{e}_z)}{|\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{e}_z|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{p}'\cdot(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{e}_z)}{|\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{e}_z|^3}$．由边界条件 $\varphi|_{z=0} = 0$ 可以得到 $p' = p$．$\boldsymbol{p}$ 受力就是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 之间的力．故 $W = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' - 3(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{p}')}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$，$F = -\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{3p^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0 d^4}$．如果是介质，则需对 $z>0$ 和 $z<0$ 的区域分别求解．$z>0$ 时在 $z = -d$ 处放象偶极子 $\boldsymbol{p}' = p'(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z - \sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$，$z<0$ 时在 $z = d$ 放象偶极子 $\boldsymbol{p}''$．$\boldsymbol{p}''$方向同 $\boldsymbol{p}$．由 $z = 0$ 的边界条件 $\varphi_1 = \varphi_2$，$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$可得 $p' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}p$，$p'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0}p$，$\boldsymbol{p}$ 受力为 $F = \frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0 d^4}\cdot\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}(1 + \cos^2\alpha)$．

4.17 取内球球心为坐标原点，两球心连线为 z 轴．取试解为 $\varphi = A_0 + A_1 r\cos\theta + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1\cos\theta}{r^2}$，因内球为等势体，且带电 Q，有 $\varphi|_{r=R} = \varphi_0$，$-\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial r}dS = Q$；外球也是等势体，即当 $r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta = R'^2$ 时 φ 为常数，当 d 很小时上式可化为 $r \approx R' + d\cos\theta$，即 $\varphi|_{r = R' + d\cos\theta} = \varphi'_0$，忽略 d^2 以上的项后可以解出所有系数．最后得 $\varphi = \varphi'_0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0(R'^3 - R^3)}\left[\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta,\quad \sigma_1 = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left[1 - \frac{3dR^2}{R'^3 - R^3}\cos\theta\right]$，$\boldsymbol{F} = \oint\frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0}d\boldsymbol{S} = \frac{Q^2\boldsymbol{e}_z}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^\pi\left(1 - \frac{3R^2d}{R'^3 - R^3}\cos\theta\right)^2\cos\theta\sin\theta d\theta \approx -\frac{Q^2d}{4\pi\varepsilon_0(R'^3 - R^3)}\boldsymbol{e}_z$．

5.1 对稳定电流，有 $\boldsymbol{j} = \sigma_c\boldsymbol{E} = -\sigma_c\nabla\varphi$，由 $\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$ 得 $\nabla^2\varphi = 0$．边界条件为 $\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{j}_1 - \boldsymbol{j}_2) = 0$，即 $\sigma_{c1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$．与静电情况类似，可以解得 $r<R'$：$\boldsymbol{j}_1 = \frac{3\sigma_{c2}}{2\sigma_{c1} + \sigma_{c2}}\boldsymbol{j}_0$；$R'<r<R$：$\boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{j}_0 + \frac{(\sigma_{c2} - \sigma_{c1})R'^3}{\sigma_{c2} + 2\sigma_{c1}}\left[\frac{3(\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{j}_0}{r^3}\right]$．如果杂质球是绝缘的，即 $\sigma_{c2}\to 0$，则 $\boldsymbol{j}_1\to 0$，$\boldsymbol{j}_2\to\boldsymbol{j}_0 - \frac{1}{2}R'^3\left[\frac{3(\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{j}_0}{r^3}\right]$．

5.2 利用 $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$，可以取 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}$. 在直角坐标下，取 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$，则 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}B(x\boldsymbol{e}_y-y\boldsymbol{e}_x)$. 也可取 $\boldsymbol{A}=Bx\boldsymbol{e}_y$ 或 $\boldsymbol{A}=-By\,\boldsymbol{e}_x$，这些 $\boldsymbol{A}$ 彼此相差一规范变换. 对球坐标，有 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}Br\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. 在柱坐标下，$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times(\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z)=\frac{1}{2}B\rho\boldsymbol{e}_\phi$.

5.3 设两根导线相距 $2d$. $\boldsymbol{j}=j\boldsymbol{e}_z=I\delta(y')[\delta(x'-d)-\delta(x'+d)]$. $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\delta(y')[\delta(x'-d)-\delta(x'+d)]}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z'^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z'^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z'^2}}\right]\mathrm{d}z'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\lim_{L\to\infty}\ln\frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2+L^2}-L}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+L^2}-L}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{(x+d)^2+y^2}{(x-d)^2+y^2}$.

5.4 取柱坐标. 取试解 $\rho<R$：$A_1=a_0+a_1\rho\cos\phi$；$\rho>R$：$A_2=b_0+b_1\ln\rho+\frac{b_2\cos\phi}{\rho}$. 边界条件 $\rho=R$：$A_1=A_2$，$\frac{\partial A_1}{\partial\rho}-\frac{\partial A_2}{\partial\rho}=\mu_0 a$. 由此可以解出 $\boldsymbol{A}_1=(a_0+\frac{1}{2}\mu_0 a_0 k\rho\cos\phi)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}_1=\nabla\times\boldsymbol{A}_1=-\frac{1}{2}\mu_0 a_0 k(\sin\phi\,\boldsymbol{e}_\rho+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\phi)$；$\boldsymbol{A}_2=\left(a_0-R\mu_0 a_0\ln\frac{\rho}{R}+\frac{1}{2}R^2\mu_0 a_0 k\frac{\cos\phi}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}_2=-\frac{1}{2}R^2\mu_0 a_0 k\frac{\sin\phi}{\rho^2}\boldsymbol{e}_\rho+\left(\frac{R\mu_0 a_0}{\rho}+\frac{1}{2}R^2\mu_0 a_0 k\frac{\cos\phi}{\rho^2}\right)\boldsymbol{e}_\phi$.

5.5 设线电流距轴线 ρ_0，取柱坐标，$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_z$. 由题 5.3 知一对平行电流产生的矢势为 $A=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0\cos\phi}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\phi}$. 故可设试解为 $\rho<R$：$A_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0\cos\phi}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\phi}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho^n\cos n\phi$；$R<\rho<R'$：$A_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n\rho^n\cos n\phi+\frac{c_n}{\rho^n}\cos n\phi\right)$；$\rho>R'$：$A_3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{\rho^n}\cos n\phi$. 边界条件为 $\rho=R$：$A_1=A_2$，$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}$；$\rho=R'$：$A_2=A_3$，$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_3}{\partial\rho}$；当 $\rho=R>\rho_0$ 时，可将 A_1 的第一项展开为 $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{\rho^2+\rho_0^2+2\rho\rho_0\cos\phi}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\phi}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\ln\left(1+\frac{\rho_0^2}{\rho^2}+2\frac{\rho_0}{\rho}\cos\phi\right)-\ln\left(1+\frac{\rho_0^2}{\rho^2}-2\frac{\rho_0}{\rho}\cos\phi\right)\right]=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi}{n}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n[1-(-1)^n]$. 由此可解出全部系数：$A_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_2/\rho_1+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\rho^{2n+1}\cos(2n+1)\phi$ $(\rho_1=\sqrt{(x-\rho_0)^2+y^2},\rho_2=\sqrt{(x+\rho_0)^2+y^2})$，$A_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_{2n+1}\rho^{2n+1}\cos(2n+1)\phi+\frac{c_{2n+1}}{\rho^{2n+1}}\cos(2n+1)\phi\right]$，$A_3=\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n+1}\frac{1}{\rho^{2n+1}}\cos(2n+$

1)ϕ. 其中 $a_{2n+1}=\frac{\mu_0(\mu_0^2-\mu^2)I\rho_0^{2n+1}}{(2n+1)\pi R^{2(2n+1)}}\left[\left(\frac{R^2}{R'^2}\right)^{2n+1}-1\right]\left[(\mu+\mu_0)^2-(\mu-\mu_0)^2\left(\frac{R^2}{R'^2}\right)^{2n+1}\right]^{-1}$, $b_{2n+1}=\frac{2\mu\mu_0(\mu_0-\mu)I\rho_0^{2n+1}}{(2n+1)\pi R'^{2(2n+1)}}\left[(\mu+\mu_0)^2-(\mu-\mu_0)^2\left(\frac{R^2}{R'^2}\right)^{2n+1}\right]^{-1}$, $c_{2n+1}=\frac{2\mu\mu_0(\mu+\mu_0)I\rho_0^{2n+1}}{(2n+1)\pi}\left[(\mu+\mu_0)^2-(\mu-\mu_0)^2\left(\frac{R^2}{R'^2}\right)^{2n+1}\right]^{-1}$, $d_{2n+1}=\frac{4\mu\mu_0^2I\rho_0^{2n+1}}{(2n+1)\pi}\left[(\mu+\mu_0)^2-(\mu-\mu_0)^2\left(\frac{R^2}{R'^2}\right)^{2n+1}\right]^{-1}$. 由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 可以求得各区域的磁场分布.

5.6 与二维静电问题类似,本题也可用镜象法求解. 当 $\rho>R$ 时,在 $x=\frac{R^2}{d}$ 处放象电流 I',在原点放 $-I'$;$\rho<R$ 时,在 $x=d$ 处放象电流 I''. 可取试解为 $A_1=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\times\ln\sqrt{\rho^2+d^2-2\rho d\cos\phi}-\frac{\mu_0 I'}{2\pi}\ln\sqrt{\rho^2+\left(\frac{R^2}{d}\right)^2-2\frac{R^2}{d}\cos\phi}+\frac{\mu_0 I'}{2\pi}\ln\rho$, $A_2=-\frac{\mu_0 I''}{2\pi}\times\ln\sqrt{\rho^2+d^2-2\rho d\cos\phi}$. 由边界条件 $\rho=R$, $A_1=A_2$, $\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}$,可得 $I'=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I$, $I''=\frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}I$. I 受的力即为 I 与象电流 I'和 $-I'$之间的作用力:$f=IB=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\times\left[\frac{I'}{d-R^2/d}-\frac{I'}{d}\right]=\frac{\mu_0(\mu-\mu_0)I^2R^2}{2\pi d(\mu+\mu_0)(d^2-R^2)}$.

5.7 由于球带电,当球旋转时出现电流,$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\frac{3Q\omega}{4\pi R^3}r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. 这是具有旋转对称的三维问题,$\boldsymbol{j}=j\boldsymbol{e}_\phi$,令 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_\phi$,则有 $r<R$: $\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)A_1=-\mu_0 j=-\frac{3\mu_0 Q\omega}{4\pi R^3}r\sin\theta$; $r>R$: $\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)A_2=0$. 非齐次方程有特解 $A_0=-\frac{3\mu_0 Q\omega}{40\pi R^3}r^3\sin\theta$. 取试解为 $A_1=-\frac{3\mu_0 Q\omega}{40\pi R^3}r^3\sin\theta+a_1 r\sin\theta$, $A_2=\frac{b_1}{r^2}\sin\theta$. 由边界条件 $r=R$, $A_1=A_2$, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)=\mu_0 J=0$,可以得 $a_1=\frac{5\mu_0 Q\omega}{40\pi R}$, $b_1=\frac{\mu_0 Q\omega R^2}{20\pi}$. 令 $\boldsymbol{m}=\frac{1}{5}Q\omega R^2\boldsymbol{e}_z$ 为带电球的磁矩,则 $\boldsymbol{A}_1=-\frac{3\mu_0}{8\pi R^5}r^2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}+\frac{5\mu_0}{8\pi R^3}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$.

如果电荷均匀分布在表面,则旋转时形成线电流,$\boldsymbol{\alpha}=\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}=\frac{Q\omega}{4\pi R}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. 此时 A_1、A_2 都满足齐次方程 $\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)A=0$,边界条件变为 $\frac{\partial}{\partial r}(rA_1)-\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)\big|_{r=R}=\mu_0 R\alpha=\frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi}\sin\theta$. 取试解 $A_1=a_1 r\sin\theta$, $A_2=b_1\frac{\sin\theta}{r^2}$,可以解得 $a_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Q\omega R^2}{3R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}m$, $b_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Q\omega R^2}{3}=\frac{\mu_0}{4\pi}m$,其中 $m=\frac{1}{3}Q\omega R^2$ 为面分布时的磁矩. 最后得 $\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{R^3}$, $\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$.

5.8 设电缆内芯单位长度带电荷 λ，则电场强度为 $\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{e}_\rho$，电势差为 $V=\int_R^{R'}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\rho=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R'}{R}$，对应 $\boldsymbol{E}$ 的电流为 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}=\frac{\sigma_c\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{e}_\rho$. 总电流为 $I=\int\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\sigma_c}{2\pi\epsilon\rho}\rho\mathrm{d}\phi=\frac{\lambda\sigma_c}{\epsilon}$，由定义得 $R=V/I=\frac{1}{2\pi\sigma_c}\ln R'/R$.

5.9 用磁标势求解. 取如下试解：$r<R:\varphi_1=A_0+A_1r\cos\theta$；$r>R:\varphi_2=\varphi_0-H_0r\cos\theta+\frac{B_0}{r}+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$. 由边界条件 $r=R$ 时，$\varphi_1=\varphi_2$，$\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\mu_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$ 可求出所有系数. 最后得

$$\varphi_1=\varphi_0-\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r},\quad \varphi_2=\varphi_0-\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}+\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}R^3\frac{\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^3},\quad \boldsymbol{B}_1=\mu\boldsymbol{H}_1=-\mu\nabla\varphi_1$$

$$=\frac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H}_0,\quad \boldsymbol{B}_2=-\mu_0\nabla\varphi_2=\mu_0\boldsymbol{H}_0+\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0R^3\left[\frac{3(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{H}_0}{r^3}\right].$$

5.10 与上题类似，仍用磁标势. $r<R:\varphi_1=A_1r\cos\theta$；$R<r<R':\varphi_2=A_2r\cos\theta+\frac{A_3\cos\theta}{r^2}$；$r>R':\varphi_3=-H_0r\cos\theta+\frac{A_4\cos\theta}{r^2}$. 边界条件为 $r=R:\varphi_1=\varphi_2$，$\mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$；$r=R':\varphi_2=\varphi_3$，$\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\mu_0\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}$. 由此可以求出 $A_1=-\lambda H_0$，$\lambda=\frac{9\mu_0\mu}{(2\mu+\mu_0)(\mu+2\mu_0)-2(\mu-\mu_0)^2R^3/R'^3}$，故 $\varphi_1=-\lambda H_0r\cos\theta=-\lambda\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}$. 球壳内的场为 $\boldsymbol{B}_1=-\mu_0\nabla\varphi_1=\mu_0\lambda\boldsymbol{H}_0=\frac{9\mu_0^2\mu}{(2\mu+\mu_0)(\mu+2\mu_0)-2(\mu-\mu_0)^2R^3/R'^3}\boldsymbol{H}_0$. 当 $\mu\gg\mu_0$ 时，$\boldsymbol{B}_1\approx\frac{9\mu_0^2}{2\mu}\left(\frac{R}{R'}\right)^3\boldsymbol{H}_0\to0$.

5.11 用磁标势解. $r<R:\varphi_1=A_0+A_1r\cos\theta$；$r>R:\varphi_2=A'_0+\frac{A'_1}{r}+\frac{A'_2\cos\theta}{r^2}$. 边界条件为 $r=R:\varphi_1=\varphi_2$，由 $\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0$ 得 $\mu_0(H_{1n}+M_{0n})=\mu H_{2n}$，即 $\mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\mu_0\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{e}_n$，取 $\boldsymbol{M}_0$ 的方向为 z 轴，可以解得 $A'_1=0$，$A_1=\frac{\mu_0M_0}{2\mu+\mu_0}$，$A'_2=\frac{\mu_0M_0R^3}{2\mu+\mu_0}$. 最后得 $\boldsymbol{B}_1=\mu_0(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{M}_0)=\mu_0(-\nabla\varphi_1+\boldsymbol{M}_0)=\frac{2\mu\mu_0}{2\mu+\mu_0}\boldsymbol{M}_0$，$\boldsymbol{B}_2=\mu\boldsymbol{H}_2=-\mu\nabla\varphi_2=\frac{\mu\mu_0R^3}{2\mu+\mu_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{M}_0}{r^3}\right]$. 如果有均匀外场 $\boldsymbol{H}_0$，则 φ_2 要增加一项 $-H_0r\cos\theta$，其余不变. 代入边界条件后可以解出所有系数. 结果为 $\varphi_1=\varphi_0+\frac{1}{2\mu+\mu_0}\times[\mu_0\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{r}-3\mu\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}]$，$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu\mu_0}{2\mu+\mu_0}[3\boldsymbol{H}_0+2\boldsymbol{M}_0]$；$\varphi_2=\varphi_0-\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}+\frac{R^3}{2\mu+\mu_0}\left[\mu_0\frac{\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}-(\mu-\mu_0)\frac{\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right]$，$\boldsymbol{B}_2=\mu\boldsymbol{H}_0+\frac{\mu R^3}{2\mu+\mu_0}\left[\mu_0\frac{3(\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{M}_0}{r^5}-(\mu-\mu_0)\frac{3(\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{H}_0}{r^5}\right]$.

5.12 与题4.16类似，用镜象法求解. $z>0:\varphi_1=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}+\dfrac{\boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{R}'}{4\pi R'^3}$；$z<0:\varphi_2=\dfrac{\boldsymbol{m}''\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$，其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{m}=m(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z+\sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$，$\boldsymbol{m}'=m'(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z-\sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$，$\boldsymbol{m}''=m''(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z+\sin\alpha\boldsymbol{e}_x)$. 由边界条件 $z=0:\varphi_1=\varphi_2$，$\mu_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}$，可得 $m'=\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}m$，$m''=\dfrac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}m$. $\boldsymbol{m}$ 受力即为 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{m}'$ 之间的作用力，$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})=-\dfrac{3\mu_0 m^2}{64\pi d^2}\cdot\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}(1+\cos^2\alpha)\boldsymbol{e}_z$.

6.1 将均匀场的势取为 $\boldsymbol{A}_0=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{r}=\dfrac{1}{2}B_0\rho\boldsymbol{e}_\phi$，先求稳定时的分布. $\rho>R:A_1=\dfrac{\mu-\mu_0}{2\mu_0}\cdot\dfrac{B_0R^2}{\rho}+\dfrac{1}{2}B_0\rho$；$\rho<R:A_2=\dfrac{\mu_0}{2\mu_0}B_0\rho$. 现在考虑 $t>0$ 时的情况，$\rho>R:\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0$；$\rho<R:\nabla^2\boldsymbol{A}_2=\mu\sigma_c\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_2}{\partial t}$. 令 $\boldsymbol{A}=A(\rho)e^{-q_st}\boldsymbol{e}_\phi$，则有 $\dfrac{1}{\rho}A_2'+A_2''-\dfrac{1}{\rho^2}A_2+\mu\sigma_cq_sA_2=0$，$\dfrac{1}{\rho}A_1'+A_1''-\dfrac{1}{\rho^2}A_1=0$. 解为 $A_1=\sum_s b_s\rho^{-1}e^{-q_st}$，$A_2=\sum_s a_sJ_1(k_s\rho)e^{-q_st}$，$k_s^2=\mu\sigma_cq_s$. 边界条件为 $\rho=R:A_1=A_2$，$\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1)=\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2)$. 由此解得 $b_s=a_sRJ_1(k_sR)$，$J_0(k_sR)=0$，$k_s=\dfrac{x_s^{(0)}}{R}(s=1,2,\cdots)$，$x_s^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的第 s 个零点. 由初条件 $t=0$ 时 $A_2=\dfrac{\mu}{2\mu_0}B_0\rho=\sum_s a_sJ_1(k_s\rho)$，得 $a_s=\dfrac{2}{R^2J_2^2(k_sR)}\cdot\dfrac{\mu B_0}{\mu_0}\int_0^R J_1(k_s\rho)\rho^2d\rho=\dfrac{\mu B_0}{k_s\mu_0J_2(k_sR)}$. 最后得 $\boldsymbol{A}_1=\sum_{s=1}^{\infty}a_sJ_1(k_sR)\cdot\dfrac{R}{\rho}e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_2=\sum_{s=1}^{\infty}a_sJ_1(k_s\rho)e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{B}_1=\nabla\times\boldsymbol{A}_1=0$，$\boldsymbol{B}_2=\nabla\times\boldsymbol{A}_2=\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2)\boldsymbol{e}_z=\sum_s a_sk_sJ_0(k_s\rho)e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_z$. 电流分布 $\boldsymbol{j}=\sigma_c\boldsymbol{E}=-\sigma_c\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_2}{\partial t}=\dfrac{1}{\mu}\cdot\sum_s a_sk_s^2J_1(k_s\rho)e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_\phi$.

6.2 先求出 $t\leqslant0$ 时的稳定分布：$\boldsymbol{A}_{10}=\dfrac{3\mu B_0}{2(\mu+2\mu_0)}\cdot\dfrac{R^3}{r^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_{20}=\dfrac{3\mu B_0}{2(\mu+2\mu_0)}r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. 当 $t>0$ 时，方程为 $\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0$ $(r>R)$ 和 $\nabla^2\boldsymbol{A}_1=\mu\sigma_c\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_2}{\partial t}$ $(r<R)$. 令 $A_1=\sum_s b_sr^{-2}\sin\theta e^{-q_st}$，$A_2=\sum_s a_sj_1(k_sr)\sin\theta e^{-q_st}$，$k_s^2=\mu\sigma_cq_s$. 边界条件为 $r=R:A_1=A_2$，$\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_2)=\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_1)$. 类似上题的做法，$\boldsymbol{A}_1=\sum_s a_sj_1(k_sR)\left(\dfrac{R}{r}\right)^2\sin\theta e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_2=\sum_s a_sj_1(k_sr)\sin\theta e^{-k_s^2t/\mu\sigma_c}\boldsymbol{e}_\phi$，其中 $j_1(k_sr)$ 为一阶球贝塞尔函数，k_s 由下述方程决定：

$$(\mu_0+\mu)j_1(k_sR)+\mu_0k_sRj_1'(k_sR)=0,$$

$$a_s = \frac{3\mu_0\mu B_0 R}{[k_s^2R^2\mu_0^2 + (\mu-\mu_0)(\mu+2\mu_0)]\mathrm{j}_1(k_sR)}.$$

6.3 这是和上题相反的问题，当 $t\to\infty$ 时达到平衡，为恒定外场中的导电球所具有的场分布，即 $\boldsymbol{A}_1 \to \left[\frac{1}{2}B_0 r\sin\theta + \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R^3B_0}{r^2}\sin\theta\right]\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_2 \to \frac{3\mu B_0}{2(\mu+2\mu_0)} r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. $t\leqslant 0$ 时没有场的分布，即 $\boldsymbol{A}_1|_{t=0} = \boldsymbol{A}_2|_{t=0} = 0$. 类似上题做法，可得 $\boldsymbol{A}_1 = \left[\frac{1}{2}B_0 r + \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R^3B_0}{r^2} - \sum_s a_s\mathrm{j}_1(k_sR)\left(\frac{R}{r}\right)^2 \mathrm{e}^{-k_s^2 t/\mu\sigma_c}\right]\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_2 = \left[\frac{3\mu_0 B_0 r}{2(\mu+2\mu_0)} - \sum_s a_s\mathrm{j}_1(k_sr)\mathrm{e}^{-k_s^2 t/\mu\sigma_c}\right]\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$，$a_s$、$k_s$ 与上题相同.

6.4 取 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z$，势取 $\boldsymbol{A}_0 = \frac{1}{2}B_0 r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$. 方程为 $r<R$：$\nabla^2\boldsymbol{A}_1 = \mu\sigma_c\frac{\partial\boldsymbol{A}_1}{\partial t}$；$r>R$：$\nabla^2\boldsymbol{A}_2 = 0$. 由于外场是谐变的，取试解为 $\boldsymbol{A}_1 = c_1\mathrm{j}_1(kr)\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{A}_2 = \frac{1}{2}B_0\left(r + \frac{c_2}{r^2}\right)\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_\phi$，边界条件为 $r=R$：$A_1 = A_2$，$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)$. 由此解得：$c_1 = \frac{3\mu RB_0}{2[(\mu+\mu_0)\mathrm{j}_1(kR) + \mu_0 kR\mathrm{j}_1'(kR)]}$，$c_2 = \frac{(2\mu-\mu_0)\mathrm{j}_1(kR) - \mu_0 kR\mathrm{j}_1'(kR)}{(\mu+\mu_0)\mathrm{j}_1(kR) + \mu_0 kR\mathrm{j}_1'(kR)}R^3$，$k^2 = \mathrm{i}\mu\omega\sigma_c$，由此可得 $\boldsymbol{B}_1 = \nabla\times\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{B}_2 = \nabla\times\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{j} = \sigma_c\boldsymbol{E} = -\sigma_c\frac{\partial\boldsymbol{A}_1}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\sigma_c\boldsymbol{A}_1$. 考虑到 $\omega\to 0$，即 $k\to 0$，展开后得 $\mathrm{j}_1(kR)\to\frac{1}{3}kR$，$\mathrm{j}_1'(kR)\to\frac{1}{3}$. $\boldsymbol{j} = \mathrm{i}\omega\sigma_c\boldsymbol{A}_1 = \frac{3\mathrm{i}\omega\sigma_c\mu B_0 r\sin\theta}{2(\mu+2\mu_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_\phi$，球吸收功率 $P = \int\langle\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\rangle\mathrm{d}\tau = \frac{3\pi\mu^2\omega^2B_0^2\sigma_cR^5}{5(\mu+2\mu_0)^2}$.

6.5 上题已经求出球内电流分布. $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int rj(-\boldsymbol{e}_\theta)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int rj[\sin\theta\boldsymbol{e}_z - \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x - \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y]r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int r^3 j\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_z = \frac{2\omega\sigma_c\mu\pi B_0R^5}{5(\mu+2\mu_0)}\boldsymbol{e}_z$，磁化矢量 $\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{m}}{V} = \frac{3\boldsymbol{m}}{4\pi R^3} = \frac{3\mu\omega\sigma_cB_0R^2}{10(\mu+2\mu_0)}\boldsymbol{e}_z = \frac{3\mu\omega\sigma_cR^2}{10(\mu+2\mu_0)}\boldsymbol{B}_0 = \kappa\boldsymbol{H}_0 = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu}\kappa$，故磁化率 $\kappa = \frac{3\mu^2\omega\sigma_cR^2}{10(\mu+2\mu_0)}$.

7.1 从方程 $\nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{1}{\delta_L^2}\boldsymbol{B} = 0$ 出发，令 $\boldsymbol{B} = B(x)\boldsymbol{e}_z$，代入方程得 $\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta_L^2}B = 0$. 由边界条件 $B|_{x=\pm d} = B_0$，得 $\boldsymbol{B} = B_0\frac{\cosh(x/\delta_L)}{\cosh(d/\delta_L)}\boldsymbol{e}_z$. 由 $\boldsymbol{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x}\boldsymbol{e}_y$ 可得 $\boldsymbol{j}_s = j_y\boldsymbol{e}_y = -\frac{B_0}{\mu_0\delta_L}\frac{\sinh(x/\delta_L)}{\cosh(d/\delta_L)}$，磁矩 $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau$. 由于 y、z 方向是无限的，得平均磁化强度为 $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2d}\cdot\frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\mathrm{d}x = -\frac{\boldsymbol{e}_z}{4d\mu_0}\int_{-d}^{d}x\frac{\partial B}{\partial x}\mathrm{d}x$.

7.2 令 $\boldsymbol{B} = B(\rho)\boldsymbol{e}_z$，得 $B''(\rho) + \frac{1}{\rho}B'(\rho) - \frac{1}{\delta_L^2}B(\rho) = 0$，边界条件为 $B|_{\rho=R} = B_0$. 这是

0 阶虚宗量贝塞尔方程，解为 $B = B_0 \dfrac{I_0(\rho/\delta_L)}{I_0(R/\delta_L)}$. $\boldsymbol{j} = \dfrac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_\phi \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial \rho}B_z =$

$-\dfrac{1}{\mu_0}B'\boldsymbol{e}_\phi = -\dfrac{B_0}{\mu_0 \delta_L}\cdot\dfrac{I_0'(\rho/\delta_L)}{I_0(R/\delta_L)} = \dfrac{B_0}{\mu_0\delta_L}\cdot\dfrac{I_1(\rho/\delta_L)}{I_0(R/\delta_L)}$.

7.3 稳定情况下超导体内的超导电流由磁场维持，没有外磁场时，一般超导体内不可能有稳定的电流，又因超导体是单连通物体，它也不可能俘获磁场而产生稳定的面电流.

7.4 由于磁通量守恒，磁场除去前后的磁通量相等. 即 $\Phi_0 = IL$. 故 $I = \Phi_0/L$.

7.5 由对称性考虑，显然有 $I_1' = I_2'$. 合并前磁通量为 $2IL$，合并后为 $2(I_1'L + I_2'L) = 4I'L$，由磁通守恒即可得 $I' = \dfrac{1}{2}I$. 合并前的总能量为 $W_1 = \dfrac{1}{2}LI^2 + \dfrac{1}{2}LI^2 = LI^2$，合并后的能量为 $W_2 = \dfrac{1}{2}(LI'^2 + LI'^2 + 2MI'^2) = \dfrac{1}{2}I^2L$，即将两环重叠起来作功 $\dfrac{1}{2}LI^2$.

7.6 超导球在外场中时，磁场分布为 $H_r = \left(H_0 + \dfrac{2m}{r^3}\right)\cos\theta$，$H_\theta = \left(-H_0 + \dfrac{m}{r^3}\right)\sin\theta$，$m$ 为磁矩. 超导体内电流可设为 $j_\phi = f(r)\sin\theta$，$j_r = j_\theta = 0$. j_ϕ 满足 $\nabla^2 j_\phi - \dfrac{1}{r^2}\sin^2\theta j_\phi = 0$. 由此解得 $j_\phi(r,\theta) = \dfrac{A}{r^2}\left(\sinh\dfrac{r}{\delta_L} - \dfrac{r}{\delta_L}\cosh\dfrac{r}{\delta_L}\right)\sin\theta$，$A$ 为常数. 球内磁场可以通过 $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{a^2}\nabla \times \boldsymbol{j}$ 得到，$H_r = \dfrac{2\delta_L^2 A}{r^3}\left(\sinh\dfrac{r}{\delta_L} - \dfrac{r}{\delta_L}\cosh\dfrac{r}{\delta_L}\right)\cos\theta$，$H_\theta = \dfrac{\delta_L^2 A}{r^3} \times \left[\left(1 + \dfrac{r^2}{\delta_L^2}\right)\sinh\dfrac{r}{\delta_L} - \dfrac{r}{\delta_L}\cosh\dfrac{r}{\delta_L}\right]\sin\theta$. 常数 m 和 A 可由 $r = R$ 处的边界条件 $H_1 = H_2$ 得到，$A = -\dfrac{3}{2}\dfrac{H_0 R}{\sinh R/\delta_L}$，$m = -\dfrac{1}{2}H_0 R^3\left[1 - \dfrac{3\delta_L}{R}\coth\dfrac{R}{\delta_L} + \dfrac{3\delta_L^2}{R^2}\right]$. 当 $\delta_L \ll R$ 时得 $m = -\dfrac{1}{2}H_0 R^3$，$A = 0$；当 $\delta_L \gg R$ 时得 $m = -\dfrac{H_0 R^5}{30\delta_L^2}$.

7.7 作完全类似的推导，现在 $\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{n_s e^2 l}{m(l+\xi_0)}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$\nabla \times \boldsymbol{j}_s = -\dfrac{n_s e^2 l}{m(l+\xi_0)}\nabla \times \boldsymbol{A} = -\dfrac{n_s e^2 l}{m(l+\xi_0)}\boldsymbol{B} \equiv -\dfrac{a^2}{\mu_0}\boldsymbol{B}$. 由 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_s$ 即可得到 $\nabla^2 \boldsymbol{B} - a^2\boldsymbol{B} = 0$. 这是一个扩散方程，透入深度 $\delta = \dfrac{1}{a} = \left[\dfrac{m}{\mu_0 n_s e^2}\left(\dfrac{l+\xi_0}{l}\right)\right]^{1/2}$.

8.1 令 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 e^{-i\omega t}$，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_0 e^{-i\omega t}$，则 $\langle(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{F})\otimes(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{G})\rangle = \boldsymbol{F}_0 \otimes \boldsymbol{G}_0\langle\cos^2\omega t\rangle = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{F}_0 \otimes \boldsymbol{G}_0 = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G}^*) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}^*\otimes\boldsymbol{G})$. 这里假定 $\boldsymbol{F}_0$、$\boldsymbol{G}_0$ 是实的，如果是复数也可同样证明.

8.2 从菲涅耳公式出发，可以证明反射系数与透射系数之和为 1，即 $R + T = 1$.

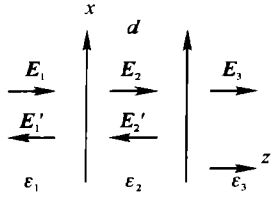
8.3 透射波可以写成 $\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\beta z} e^{i\alpha\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t}$. 对于金属，$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$，$k \approx (1+i)\beta$. 平均能流 $\langle \boldsymbol{S}_P \cdot \boldsymbol{e}_n\rangle = \langle(\boldsymbol{E}'' \times \boldsymbol{H}'')\cdot\boldsymbol{e}_n\rangle = \dfrac{\sigma E_0^2}{4\beta}e^{-2\beta z}$. 金属内的平均功率损耗为

$w=\langle \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}''\rangle=\sigma\langle \boldsymbol{E}''\cdot\boldsymbol{E}''\rangle$. 单位面积消耗的总能量为 $P=\int_0^\infty w\mathrm{d}z=\dfrac{\sigma E_0^2}{4\beta}=\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\rangle\big|_{z=0}$.

8.4 对于垂直入射. 反射系数 $R=\left(\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon_0}}\right)^2=\dfrac{1}{121}$.

8.5 $E_{/\!/}=E\cos\alpha$, $E_\perp=E\sin\alpha$, 设反射系数分别为 $r_{/\!/}$ 和 $r_\perp$, 即 $E'_{/\!/}=r_{/\!/}E_{/\!/}$, $E'_\perp=r_\perp E_\perp$. 反射波强度 $I=E'^2_{/\!/}+E'^2_\perp=E^2(|r_{/\!/}|^2\cos^2\alpha+|r_\perp|^2\sin^2\alpha)=I_0(|r_{/\!/}|^2\cdot\cos^2\alpha+|r_\perp|^2\sin^2\alpha)$. 一般为椭圆偏振.

8.6 假定入射波是线偏振的,且为正入射. 则有 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_xE_{10}\times e^{\mathrm{i}(k_1z-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}'_1=\boldsymbol{e}_xE'_{10}\,e^{\mathrm{i}(-k_1z-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_xE_{20}\times e^{\mathrm{i}(k_2z-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}'_2=\boldsymbol{e}_xE'_{20}\,e^{\mathrm{i}(-k_2z-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_xE_{30}\times e^{\mathrm{i}(k_3z-\omega t)}$, $\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$. 利用在 $z=0$ 和 $z=d$ 的边界条件,可将所有振幅用 E_{10} 表示. 反射系数 $R=|E'_{10}/E_{10}|^2=\left|\dfrac{a_{12}+a_{23}e^{2\mathrm{i}k_2d}}{1+a_{12}a_{23}e^{2\mathrm{i}k_2d}}\right|^2$, $a_{12}=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$, $a_{23}=\dfrac{n_2-n_3}{n_2+n_3}$. 对 R 求极小值,当 $d=\dfrac{2m+1}{4}\lambda_2$ 时 R 有极小,当 $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$ 时 $R=0$.



8.7 $\boldsymbol{E}_{入}=[\boldsymbol{e}_xE_0\cos\phi_0+\boldsymbol{e}_yE_0\sin\phi_0]e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$, $\boldsymbol{H}_{入}=\dfrac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_{入}=\dfrac{kE_0}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{e}_y\cos\phi_0-\boldsymbol{e}_x\sin\phi_0)\times e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$, 令 $\boldsymbol{E}_{反}=\boldsymbol{e}_xE_1e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}+\boldsymbol{e}_yE'_1e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$, $\boldsymbol{H}_{反}=\dfrac{1}{\omega\mu_0}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_{反}=\dfrac{k}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{e}_yE_1-\boldsymbol{e}_xE'_1)\times e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$. 在 $x=0$ 有边界条件 $\boldsymbol{E}_t=0$,可以得到 $E_1=E_0\cos\phi_0$, $E'_1=-E_0\sin\phi$. 总场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{入}+\boldsymbol{E}_{反}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{入}+\boldsymbol{H}_{反}$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial E_0}{c\mu_0}\cos\phi_0e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$. 单位面积功耗为 $P=\dfrac{1}{2\delta\sigma_c}\left(\dfrac{\partial E_0}{c\mu_0}\cos\phi_0\right)^2=\dfrac{1}{2}R\alpha^2$, $R=\dfrac{1}{\delta\sigma_c}$为表面电阻.

8.8 $\boldsymbol{E}_{入}=\boldsymbol{e}_yE_0\sin(kz-\omega t+\phi_0)$, $\boldsymbol{B}_{入}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{E}_{入}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{e}_xE_0\sin(kz-\omega t+\phi_0)$, $\boldsymbol{E}_{反}=\boldsymbol{e}_yE_1\sin(kz+\omega t+\phi'_0)$, $\boldsymbol{B}_{反}=-\dfrac{1}{c}\boldsymbol{e}_xE_1\sin(kz+\omega t+\phi'_0)$, 理想导体内无场,故 $\boldsymbol{E}_{折}=\boldsymbol{B}_{折}=0$. 由边界条件:$z=d$ 时 $\boldsymbol{E}_t=0$,可得 $E_1=E_0$, $\phi'_0=-2kd-\phi_0$. $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\times\dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_{入}+\boldsymbol{B}_{反})\big|_{z=d}=\dfrac{2E_0}{\mu_0c}\sin(kd-\omega t+\phi_0)\boldsymbol{e}_y$. $\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\overleftrightarrow{T}=-\dfrac{B^2}{2\mu_0}\boldsymbol{e}_z=-\dfrac{2E_0^2}{\mu_0c^2}\times\sin^2(kd-\omega t+\phi_0)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{p}=\langle\boldsymbol{f}\rangle=-\dfrac{2E_0^2}{\mu_0c^2}\langle\sin^2(kd-\omega t+\phi_0)\rangle\boldsymbol{e}_z=-\varepsilon_0E_0^2\boldsymbol{e}_z$.

8.9 对于正入射,$\theta=0$, $\theta''=0$. 故由菲涅耳公式立即得到 $R=|E'/E|^2=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$, $T=\left|\dfrac{\langle\boldsymbol{S}''_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\rangle}{\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\rangle}\right|^2=\dfrac{4n}{(n+1)^2}$.

8.10 设超导体占满空间 $z>0$. 设 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_xe^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\boldsymbol{E}=E(z)\boldsymbol{e}_y$. 由麦克斯韦方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=$

$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 得 $\frac{\partial E}{\partial z}=-\mathrm{i}\omega B$，积分后得 $\int_0^\infty \frac{\partial E}{\partial z}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega\int_0^\infty B\mathrm{d}z$，假定 $E(\infty)=0$，则得 $E(0)=\mathrm{i}\omega\int_0^\infty B\mathrm{d}z$. 在超导体内，有 $B=B(0)\mathrm{e}^{-\alpha z}$. 积分后得 $E(0)=\frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}B(0)=\mathrm{i}\omega\delta B(0)$. 由定义即得表面阻抗 $z_s=-\mathrm{i}\omega\mu_0\delta$.

8.11 设 $v_p=a/v_g$. 因为 $v_p=\frac{\omega}{k}$，$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$，故 $v_p\cdot v_g=\frac{\omega}{k}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=a$，即 $\omega\mathrm{d}\omega=ak\mathrm{d}k$，积分得 $\omega^2+b^2=ak^2=a\frac{n^2}{c^2}\omega^2$. 由此得 $n^2=\frac{c^2}{a}\left(1+\frac{b^2}{\omega^2}\right)$.

9.1 设电磁波在 y 方向均匀. 令 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$.

对 TE 波：$B_x=-\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{d}B_0\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_y=0$，$B_z=B_0\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，

$E_x=0$，$E_y=\mathrm{i}\frac{\omega}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{d}B_0\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_z=0$，$\omega_c=\frac{n\pi c}{d}$，

TM 波：$E_x=\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{d}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_y=0$，$E_z=E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，

$B_x=0$，$B_y=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c^2k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{d}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_z=0$，$\omega_c=\frac{n\pi c}{d}$.

TEM 波：$E_x=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_y=0$，$E_z=0$，$B_x=0$，$B_y=\frac{k_g}{\omega}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_z=0$.

9.2 现在多了一个在 $z=0$ 处的边界条件 $B_z|_{z=0}=0$ 或 $\left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_{z=0}=0$，这样对 TE 波有 $B_z=B_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin k_g z$，$B_x=-\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{a}B_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos k_g z$，$B_y=-\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{m\pi}{b}B_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos k_g z$，$E_x=-\mathrm{i}\frac{ck_0}{k_c^2}\cdot\frac{m\pi}{b}B_0\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin k_g z$，$E_z=0$. $E_y=\mathrm{i}\frac{ck_0}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{a}B_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin k_g z$；

TM 波：$E_x=-\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{n\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin k_g z$，$E_y=-\frac{k_g}{k_c^2}\cdot\frac{m\pi}{b}E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin k_g z$，$B_x=-\mathrm{i}\frac{k_0}{ck_c^2}\cdot\frac{m\pi}{b}E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos k_g z$，$B_y=\mathrm{i}\frac{k_0}{ck_c^2}\cdot\frac{n\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos k_g z$，$B_z=0$，$E_z=E_0\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos k_g z$，截止频率 $\omega_{cmn}=\pi c\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$.

9.3 由公式 $\omega_{mn}=\pi c\sqrt{\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{a^2}}$，得 $\omega_{10}=\frac{\pi c}{b}=1.88\times10^{10}$ Hz. $\omega_{20}=3.76\times10^{10}$ Hz，$\omega_{30}=5.64\times10^{10}$ Hz，$\omega_{40}=7.52\times10^{10}$ Hz，$\omega_{50}=\omega_{01}=9.40\times10^{10}$ Hz. 由 $k_g=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}$ 得，$k_{g10}=22.7\ \mathrm{m}^{-1}$，$k_{g20}=106.1\mathrm{i}\ \mathrm{m}^{-1}$，$k_{g30}=175.8\mathrm{i}\ \mathrm{m}^{-1}$，$k_{g40}=241.6\mathrm{i}\ \mathrm{m}^{-1}$，$k_{g50}=$

$306.2\mathrm{i}\ \mathrm{m}^{-1}$. 若 $\omega=50\ \mathrm{GHz}=5\times10^{10}\ \mathrm{Hz}$. 只有 ω_{10}、ω_{20} 小于 ω，故只能传播 TE_{10}、TE_{20}.

9.4 对于 H_{11} 波，$B_z=B_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_x=-\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}B_0\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_y=-\mathrm{i}\frac{k_g}{k_c^2}B_0\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_x=-\frac{\mathrm{i}\omega}{k_c^2}B_0\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_y=\frac{\mathrm{i}\omega}{k_c^2}B_0\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$. $P=\int_0^a\int_0^b\left\langle\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right\rangle\cdot\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\omega k_g B_0^2 ab}{8\mu_0 k_c^2}$，$w=\int\frac{1}{2}\left\langle\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{abB_0^2}{16\mu_0}\left[1+\frac{1}{k_c^2}(k_c^2+k_g^2)\right]$，$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{B}$.

9.5 由于 E_x 只与 y、z 有关，其余分量也只能与 y、z 有关. 由边界条件可以写出如下试解：$E_y=A_1\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$E_z=A_2\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_x=A_3\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_y=A_4\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_z=A_5\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$. 将这试解代入麦克斯韦方程组，即可定出所有系数：$A_1=A_2=A_3=0$，$A_4=\frac{k_g}{\omega}E_0$，$A_5=\mathrm{i}\frac{\pi}{b}\frac{E_0}{\omega}=B_0$，则 $B_z=B_0\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_x=E_y=0$，$E_x=-\mathrm{i}\frac{b}{\pi}\omega B_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_g z-\omega t)}$，$B_y=-\mathrm{i}\frac{b}{\pi}k_g B_0\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$，截止频率 $\omega_c=\frac{\pi c}{b}$. 显然，这是 TE_{01} 波.

9.6 当电磁波频率 ω 一定时，$\omega>\omega_c=\pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$ 时可传播 TE_{mn} 波. 如果只能传播 TE_{01}，则要求 $\omega>\omega_{01}=\frac{\pi c}{b}$，即 $b>\frac{\pi c}{\omega}$；不能传播其他波型，则要求 $\omega<\omega_{11}$、ω_{02}，给出 $b<\frac{\sqrt{2}\pi c}{\omega}$.

9.7 对 TE_{01} 波，$P=\int\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{c}{2\mu_0}\frac{k_0\,k_g}{k_c^2}\int B_z^* B_z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{c}{4\mu_0}\cdot\frac{\omega\sqrt{\omega^2-(\pi c/b)^2}}{c\cdot c\,(\pi/b)^2}abB_0^2$

$=\frac{ab^3\omega\sqrt{\omega^2-(\pi c/b)^2}}{4\mu_0 c^3}(cB_0)^2=4.68\times10^6\ \mathrm{J/s}$.

9.8 $W_e=\int\langle w_e\rangle\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{Re}\int\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$，利用麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$，$\nabla\times\boldsymbol{B}=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}[(\nabla\times\boldsymbol{E}^*)\cdot\boldsymbol{B}-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})]=c^2\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}-\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})$，而 $\int\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau=\oint\boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}S=\oint(\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}^*)\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}S=0$，所以 $W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{Re}\int\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{Re}\left[c^2\int\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau-\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\int\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\tau\right]=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\int\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\mu_0}\int\langle\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\rangle\mathrm{d}\tau=W_m$.

9.9 利用麦克斯韦方程 $\boldsymbol{B}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}$，可得 $B_x=0, B_y=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\mathrm{i}E_0}{\omega}\times\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, B_z=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}E_0\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \omega=\frac{\sqrt{2}c\pi}{a}$.

9.10 TM 波：$E_x=-\frac{k_g}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$E_y=-\frac{k_g}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\times\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$E_z=E_0\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$B_x=-\mathrm{i}\frac{c^2\omega}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，$B_y=-\mathrm{i}\frac{c^2\omega}{k_c^2}\times\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, B_z=0, \omega=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{d^2}}, k_g^2=k_0^2-k_c^2=\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2, k_0=\frac{\omega}{c}$. 最低模式为 E_{110}.

9.11 对 E_{010} 模式，$E_z=E_0\mathrm{J}_0(k_c\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, E_\phi=0, E_\rho=0, B_\rho=B_z=0, B_\phi=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\frac{\partial}{\partial\rho}E_z=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}k_cE_0\mathrm{J}_0'(k_c\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=-\mathrm{i}\frac{E_0}{c}\mathrm{J}_0'(k_c\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, k_c=\frac{x_0^{(m)}}{a}(m=1,2,\cdots)$ $W=\frac{1}{2}\int\left[\langle\varepsilon_0E^2\rangle+\langle\frac{1}{\mu_0}B^2\rangle\right]\mathrm{d}\tau=\varepsilon_0\int\langle E^2\rangle\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{Re}\int\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2\int_0^a\mathrm{J}_0^2(k_c\rho)\times 2\pi d\rho\mathrm{d}\rho=\pi\varepsilon_0E_0^2d\int_0^a\rho\mathrm{J}_0^2(k_c\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\pi\varepsilon_0E_0^2d\mathrm{J}_1^2(k_ca)$.

10.1 磁场作用于导电流体时沿磁感线方向将受到张力$\frac{B^2}{2\mu_0}$，而垂直于磁感线的方向将受到压力$\frac{B^2}{2\mu_0}$. 由于磁感线的冻结效应，磁感线与流体要一起运动，这时磁感线就相当于一根有质量的弹性弦，阿尔文波就是磁场“拨动”这根弹性弦引起的振动沿着弦方向传播的波. 而磁声波则是由于磁感线的冻结效应产生的，磁流体随着磁感线疏密的变化而产生松弛与压缩，因而产生垂直于磁感线方向传播的磁声波.

10.2 衰减时间的数量级为 $L^2\tau^{-1}=L^2\mu\sigma_c$，其中 L 是体系的特征长度. 由量纲分析可知，$\left(\frac{j^2}{\sigma_c}\right)(L^2\mu\sigma_c)=\sigma_c^{-1}\left(\frac{B}{L\mu}\right)^2L^2\mu\sigma_c=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$，所以，$(L^2\mu\sigma_c)$ 本质上是场能量耗散成焦耳热的时间.

10.3 磁场无作用力的必要条件是 $\boldsymbol{B}\cdot\nabla\alpha=0$. 在讨论扩散问题时，$\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，由无作用力方程 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B}$，两边用 ∇ 矢乘：$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=-\nabla^2\boldsymbol{B}=\nabla\times(\alpha\boldsymbol{B})=\alpha\nabla\times\boldsymbol{B}+\nabla\alpha\times\boldsymbol{B}=\alpha^2\boldsymbol{B}+\nabla\alpha\times\boldsymbol{B}$，与扩散方程比较，必须 $\nabla\alpha=0$，即 α 为常数.

10.4 参看本章例 1.

10.5 $v=B/\sqrt{\mu_0\rho}=8.92\times10^{-5}\ \mathrm{m/s}$.

11.1 由洛伦兹变换得 $\Delta t'=\frac{\Delta t-v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=0$，得 $v=c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{1}{2}c$. 再由 $x'=\gamma(x-vt)$

得，$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\times 10^8\ \mathrm{m}$，$\Delta y' = \Delta z' = 0$，$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \frac{3}{4}c^2 s^2 = \Delta s'^2$. 若令 $\Delta t' = -\frac{1}{2}$ s，则 $v = \frac{4}{5}c$. 因为是类空事件，故它们没有因果关系，先后次序是相对的.

11.2 在静止系中，A 点的坐标为(0,0)，光线进入介质时坐标为(t_1, x_1)，穿出介质时为(t_2, x_2)，到达 B 点时为(t_3, x_3)；相应在S′系中的坐标为(0,0)，(t'_1, x'_1)，(t'_2, x'_2)，(t'_3, x'_3). 由洛伦兹变换，$x_i = \gamma(x'_i + vt'_i)$，$t_i = \gamma\left(t'_i + \frac{v}{c^2}x'_i\right)$，$x_2 - x_1 = \gamma[x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)] = \gamma\left(l_0 + nl_0\frac{v}{c}\right)$. $t_2 - t_1 = \gamma\left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right] = \frac{\gamma l_0}{c}\left(n + \frac{v}{c}\right)$. 从S系看，$x_2 - x_1$ 是光在介质中走过的距离，而总长度是 L，故总的时间为 $t_0 = t_{01} + t_{02} = \frac{L - (x_2 - x_1)}{c} + t_2 - t_1 = \frac{L}{c} + \frac{l_0}{\gamma}\cdot\frac{(n-1)}{c+v}$.

11.3 飞船乙相对于飞船甲的速度为 $u'_x = \frac{2\times c/2}{1 + 1/4} = \frac{4}{5}c$. 在S系看，子弹要击中飞船乙，必须 $u_x = \frac{c}{2}$，$u_y = \sqrt{u^2 - u_x^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}c$，变换到飞船甲的坐标系，$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u_x v/c^2} = \frac{\sqrt{15}}{10}c$，$\tan\alpha = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{\sqrt{15}}{8}$，$v' = \sqrt{u'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{\frac{79}{100}}c$.

11.4 设尺 CD 静止，尺 AB 以速度 v 向右运动. CD 上的观察者看来，AB 的长度为 $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$，故先 A、C 重合，然后 B、D 重合，$v\Delta t = l_0 - l = l_0(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})$，解出 $v = \frac{\partial l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}$. AB 上的观察者看来，B、D 先重合，A、C 再重合. 设存在参考系 S，其中 AB 以速度 u 向右运动，CD 以速度 u 向左运动，则有 $v = \frac{\partial u}{1 + u^2/c^2}$ 故 $u = \frac{c^2}{v}(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) < c$，即 S 系是存在的，因为 AB、CD 的长度均为 $l' = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}$，故 A、C 与 B、D 同时重合.

11.5 $\boldsymbol{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$. 变到直角坐标，$E_x = 0$，$E_y = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{y}{y^2 + z^2}$，$E_z = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{z}{y^2 + z^2}$，$B_x = 0$，$B_y = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{z}{y^2 + z^2}$，$B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{y}{y^2 + z^2}$. 由洛伦兹变换，$E'_x = E_x = 0$，$E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$，$E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$，$B'_x = B_x = 0$，$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$，$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$. 将 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 代入，则当 $\lambda_0 < \frac{I_0}{c}$ 时，可选择 $v = \frac{c^2\lambda_0}{I_0} < c$，使 $E'_y = E'_z = 0$，此时 $B'_y = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left(\frac{c^2\lambda_0^2}{I_0^2} - 1\right)\left(1 - \frac{c^2\lambda_0^2}{I_0^2}\right)^{-1/2}\frac{z'}{y'^2 + z'^2}$，$B'_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left(1 - \frac{c^2\lambda_0^2}{I_0^2}\right)\left(1 - \frac{c^2\lambda_0^2}{I_0^2}\right)^{-1/2}\frac{y'}{y'^2 + z'^2}$. 当 $\lambda_0 > \frac{I_0}{c}$ 时，可选择 $v = \frac{I_0}{\lambda_0} <$

c，使 $B'_y = B'_z = 0$，此时 $E'_y = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{I_0^2}{c^2\lambda_0^2}\right)\cdot\left(1-\frac{I_0^2}{c^2\lambda_0^2}\right)^{-1/2}\frac{y'}{y'^2+z'^2}$，$E'_z = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{I_0^2}{c^2\lambda_0^2}-1\right)\left(1-\frac{I_0^2}{c^2\lambda_0^2}\right)^{-1/2}\frac{z'}{y'^2+z'^2}$.

11.6 由洛伦兹变换，$E'_x = E_x$，$E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$，$E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$，$B'_x = B_x$，$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$，$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$，取 $\boldsymbol{v} \propto \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$，因为 $\boldsymbol{E}' /\!/ \boldsymbol{B}'$，故对应分量成比例，$E'_y/B'_y = E'_z/B'_z$，即 $E'_yB'_z - E'_zB'_y = 0$. 代入后得 $\frac{v}{(1+v^2/c^2)} = \frac{(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_x}{\boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{E}^2/c^2}$. 由此解得 $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{2(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^2}\left[c^2\boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{E}^2 - \sqrt{(c^2\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2)^2 + 4c^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2}\right]$.

11.7 由动量守恒，$\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$；能量守恒，$\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_2c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，得 $v = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2\sqrt{1-v^2/c^2}}$，$m = \left[m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^{1/2}$.

11.8 设 m_1 的速度为 v_1，m_2 的速度为 v_2，则由能量动量守恒得 $\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} = 0$，$mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}$. 由此可得 $W_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} = \frac{c^2}{2m}(m^2 + m_1^2 - m_2^2)$，$W_2 = \frac{c^2}{2m}(m^2 - m_1^2 + m_2^2)$，动能 $T_1 = W_1 - m_1c^2$，$T_2 = W_2 - m_2c^2$.

11.9 由能量动量守恒，$p_0 = p + \hbar k$，$\sqrt{p_0^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + \hbar\omega$，平方后得，$(p_0 - \hbar k)^2 = p^2 = p_0^2 + \hbar^2k^2 - 2\hbar p_0 k\cos\theta$. 在介质中有 $\omega = \frac{c}{n}k$，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$，可解得 $\cos\theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\hbar}{p_0}\frac{\pi}{\lambda}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. 在真空中 $n=1$，$\cos\theta = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{v} > 1$，故不可能辐射光子，在介质中 $n>1$，只要 $\frac{1}{n\beta} < 1$，即 $v > \frac{c}{n}$ 就有可能辐射光子.

11.10 与上题类似，由 $\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$，$\hbar\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k}'$，及 $k = \frac{\omega}{c}$，$k' = \frac{\omega'}{c}$ 即可得到 $\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0c^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}$.

11.11 设原子核辐射光子后的反冲动量为 $\boldsymbol{p}$，则由能量动量守恒，$p = \hbar k$，$mc^2 + \Delta W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} + \hbar\omega$，可得 $\omega = \frac{\Delta W}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta W}{2mc^2 + 2\Delta W}\right)$.

11.12 只需证明反应前后的能量动量守恒成立.

11.13 设原子初末态的四维动量为 p_μ、p'_μ，光子动量为 $\hbar k_\mu$，则有 $p_\mu = p'_\mu + \hbar k_\mu$. 两边平方，得 $(p_\mu - \hbar k_\mu)^2 = p'^2_\mu = -m'^2c^2$. 整理后得 $(m^2 - m'^2)c^2 = \frac{2\hbar\omega}{c^2}\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(1 - n\frac{v}{c}\cos\theta)$，因为 $mc^2 = m'c^2 + \hbar\omega'$，故 $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - n\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

11.14 设初态质子静止，四维动量分别为 $\hbar k_\mu$、p_μ、p'_μ、$p_{\pi\mu}$，则有 $\hbar k_\mu + p_\mu = p'_\mu + p_{\pi\mu}$. 两边平方得，$-m_p^2c^2 + 2\hbar k_\mu p_\mu = -m_p^2c^2 - m_\pi^2c^2 + 2p'_\mu p_{\pi\mu}$，整理后得，$\hbar\omega = \frac{1}{2m_p}\cdot\left[m_\pi^2c^2 + \frac{2W_pW_\pi}{c^2} - 2p_\pi p\cos\theta\right]$. 当 $p_\pi = p = 0$ 时得到光子的最小能量为 $\hbar\omega = \frac{1}{2m_p}(m_\pi^2c^2 + 2m_pm_\pi c^2)$.

11.15 $\Delta tv = l_0 - l = l_0(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2})$，解出 v，得 $v = \frac{2\Delta tl_0c^2}{l_0^2 + (\Delta t)^2c^2}$.

11.16 由速度合成公式得，$u = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$，$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = l_0\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$.

11.17 由 k_μ 的洛伦兹变换，$\omega' = \gamma(\omega - vk_x) = \gamma\omega(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)$，$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta)}$. 垂直入射，$\theta = 0$，$\omega_1 = \frac{\omega'_1}{\gamma(1-v/c)}$；而对反射光，$\theta = \pi$，故 $\omega_2 = \frac{\omega'_2}{\gamma(1+v/c)}$. 在 S′系中频率不变，$\omega'_1 = \omega'_2$，故 $\omega_2 = \omega_1\frac{1-v/c}{1+v/c}$.

11.18 由洛伦兹变换可以求得关系 $\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}$，$\phi' = \phi$. 由此得 $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\phi' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta d\phi = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}d\Omega$.

11.19 因为 $E^2 - c^2B^2$ 和 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 是不变量，故当 $E > cB$，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 时可找到参考系，其中 $\boldsymbol{B}' = 0$；而当 $E < cB$，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 时可以找到参考系，其中 $\boldsymbol{E}' = 0$.

11.20 利用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$，有 $c^2B^2 - E^2 = \frac{c^2}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{i}{8}c\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}$. 即 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 $E^2 - c^2B^2$ 都可以写成张量的缩并，因而是洛伦兹不变量.

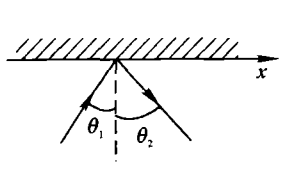
11.21 可以证明能量守恒和动量守恒不可能同时成立，故反应不可能发生.

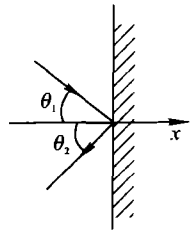
11.22 由能量守恒 $m_0c^2 + qV = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，得 $v = \sqrt{\frac{2qV}{m_0}}\frac{\sqrt{1+qV/2m_0c^2}}{1+qV/m_0c^2}$.

11.23 在 S 系中有 $r\cos\alpha = x$，$r\cos\beta = y$，$r\cos\gamma = z$，$r = ct$；在 S′系中有 $r'\cos\alpha' = x'$，$r'\cos\beta' = y'$，$r'\cos\gamma' = z'$，$r' = ct'$. 利用洛伦兹变换即可得到 $\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - v/c}{1-(v/c)\cos\alpha}$，$\cos\beta' = \frac{\cos\beta\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\alpha}$，$\cos\gamma' = \frac{\cos\gamma\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\alpha}$.

11.24 如图所示，如果运动方向与镜面平行，则 $\alpha'_1 = \frac{\pi}{2} - \theta'_1$，$\alpha'_2 = \frac{\pi}{2} - \theta'_2$，$\beta'_1 = \beta'_2 = \frac{\pi}{2}$，$\gamma'_1 = \pi - \theta'_1$，$\gamma'_2 = \theta'_2$. 在 S′系中反射定律成立，$\theta'_1 = \theta'_2$. 由 11.23 题可知，$\theta_1 = \theta_2$. 由 k_μ 的变换得 $\omega_1 = \frac{\omega'_1}{\gamma(1-v/c\cos\alpha_1)}$，$\omega_2 = \frac{\omega'_2}{\gamma(1-v/c\cos\alpha_2)}$. 因为 $\omega'_1 = \omega'_2$，$\alpha_1 = \alpha_2$，故反射定律成立，频率不变. 如果运动方向与镜面垂直，则 $\alpha'_1 = \theta'_1$，$\alpha'_2 = \pi$

$-\theta'_2,\beta'_1=\beta'_2=\frac{\pi}{2},\gamma'_1=\frac{\pi}{2}-\theta'_1,\gamma'_2=\frac{\pi}{2}-\theta'_2$. 在 S′系中有 $\theta'_1=\theta'_2,\omega'_1=\omega'_2$,但不能得到 $\theta_1=\theta_2$($\theta_1=\theta_2=0$ 的情况除外),故反射定律不再成立,由 ω 的变换可知,$\omega_1\neq\omega_2$,即频率改变.





11.25 $F_{\mu\nu}k_\mu=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{k}-\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E},-\mathrm{i}\frac{1}{c}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}),k_\mu\widetilde{F}_{\mu\nu}=(-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}+\omega\boldsymbol{B},\mathrm{i}c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B})$,对于平面波,我们有 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c^2}\boldsymbol{E},\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B}$,即 $k_\mu F_{\mu\nu}=0,k_\mu\widetilde{F}_{\mu\nu}=0$. 由于这些是张量方程,经洛伦兹变换后仍有 $k'_\mu F'_{\mu\nu}=0,k'_\mu\boldsymbol{F}'_{\mu\nu}=0$. 故仍是平面波.

11.26 四维速度 u_μ 的变换为 $u'_\mu=a_{\mu\nu}u_\nu$,即 $\gamma_{v'}v'_x=\gamma_u(\gamma_v v_x-u\gamma_v),\gamma_{v'}v'_y=\gamma_v v_y,\gamma_{v'}v'_z=\gamma_v u_z,\gamma_{v'}=\gamma_u(\gamma_v-\frac{u}{c^2}\gamma_v v_x)$,其中 $\gamma_v=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\gamma_u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\gamma_{v'}=\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}$. 最后一个变换式给出 $\frac{\gamma_u\gamma_v}{\gamma_{v'}}=\frac{1}{1-uv_x/c^2}$,代回前三个式子即得 $v'_x=\frac{\gamma_u\gamma_v}{\gamma_{v'}}(v_x-u)=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}$. 此即相对论的速度合成公式.

12.1 利用电荷守恒定律 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}=0$ 即可证明.

12.2 $\boldsymbol{p}=p_0(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)=p_0[\cos(\omega t-\phi)\boldsymbol{e}_p+\sin(\omega t-\phi)\boldsymbol{e}_\phi]$, $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{p}}]$, $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0}{4\pi cr}[\ddot{\boldsymbol{p}}]\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0\omega^2p_0}{4\pi cr}\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi-\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\boldsymbol{e}_\theta\right\}$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r}\boldsymbol{p}_0\left\{\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\boldsymbol{e}_\phi\right\}$. $\boldsymbol{S}_P=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{16\pi^2r^2c}\left\{\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\cos^2\theta+\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]\right\}\boldsymbol{e}_r$, $\langle\boldsymbol{S}_P\rangle=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{32\pi^2r^2c}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r$. 角分布 $f(\theta,\phi)=\frac{\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{32\pi^2c}(1+\cos^2\theta)$.

12.3 如果是球对称分布,则各阶多极矩均为零.

12.4 由镜象法可知,导体平面的影响可用一象偶极子来代替. 可以计算出 $\vec{p}=0,\vec{D}=$

$3ap_0(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x)e^{-i\omega t}$. $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_r\cdot\overrightarrow{D}=3ap_0(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_z+\cos\theta\boldsymbol{e}_x)e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{24\pi cr}[\ddot{\boldsymbol{D}}]$, $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu_0}{24\pi c^2 r}[\dddot{\boldsymbol{D}}]\times\boldsymbol{e}_r=-\frac{ap_0\mu_0\omega^3}{8\pi c^2 r}(\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta+\cos2\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi)e^{i(kr-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$, $f(\theta,\phi)=\frac{\langle\boldsymbol{S}_P\rangle\cdot d\boldsymbol{S}}{d\Omega}=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{e}_r r^2=\frac{\mu_0 a^2 p_0^2\omega^6}{128\pi^2 c^3}(\cos^2\theta\sin^2\phi+\cos^2 2\theta\cos^2\phi)$.

12.5 体系总偶极矩为 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=p_0[(1+i\cos\alpha)\boldsymbol{e}_x+i\sin\alpha\boldsymbol{e}_y]$. $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{p}}]$, $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr}p_0\{[\sin\phi+i\sin(\phi-\alpha)]\boldsymbol{e}_\theta+[\cos\phi+i\cos(\phi-\alpha)]\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi\}e^{i(kr-\omega t)}$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$, $f(\theta,\phi)=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{e}_r r^2=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2 r^2=\frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\{2-\sin^2\theta[\cos^2\phi+\cos^2(\phi-\alpha)]\}$.

12.6 利用 $q_{lm}=\int\rho(\boldsymbol{r}')r'^l Y_l^{m*}(\theta',\phi')d\tau'$ 可以求得 $q_{20}=\sqrt{\frac{4\pi}{5}}a\rho r_0^5\cos\omega t$，其余 $q_{lm}=0$. 其中 $\rho=\frac{q}{V}=\frac{3q}{4\pi r_0^3}$. 由 q_{lm} 和多极矩之间的关系 $q_{20}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}D_{33}$ 可得：$D_{11}=D_{22}=-\frac{4\pi}{5}a\rho r_0^5\cos\omega t$, $D_{33}=\frac{8\pi}{5}a\rho r_0^5\cos\omega t$. 由此得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_r\cdot\overrightarrow{D}=\frac{4\pi}{5}a\rho r_0^5\cos\omega t[2\cos\theta\boldsymbol{e}_z-\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x-\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y]$, $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{A}}=-\frac{3\mu_0 qar_0^2\omega^3}{40\pi c^2 r}\sin\theta\cos\theta\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]\boldsymbol{e}_\phi$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$, $f(\theta,\phi)=\frac{1}{\mu_0}\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle\cdot\boldsymbol{e}_r r^2=\frac{9\mu_0 a^2 q^2 r_0^4\omega^6}{3\,200\pi^2 c^3}\sin^2\theta\cos^2\theta$.

12.7 两个电子的坐标为 $\boldsymbol{r}_1=R(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)$, $\boldsymbol{r}_2=-R(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)$. 故 $\boldsymbol{p}=0$, $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}=2e\omega\pi R^2\boldsymbol{e}_z$，但 $\dot{\boldsymbol{m}}=0$. $\overrightarrow{D}=R^2 e[(1+3\cos2\omega t)\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+(1-3\cos2\omega t)\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z+3\sin2\omega t(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x)]$, $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{e}\times\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu_0}{24\pi c^2 r}[\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{e}]=-\frac{\mu_0 R^2 e\omega^3}{\pi c^2 r}\sin\theta\cdot\{\cos\theta\cos[2\omega(t-\frac{r}{c})-2\phi]\boldsymbol{e}_\phi+\sin[2\omega(t-\frac{r}{c})-2\phi]\boldsymbol{e}_\theta\}$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}$, $f(\theta,\phi)=\frac{1}{\mu_0}\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle\cdot\boldsymbol{e}r^2=\frac{\mu_0 R^4 e^2\omega^6}{2\pi^2 c^3}\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)$. 辐射功率 $P=\int f(\theta,\phi)d\Omega=\frac{\mu_0 R^4 e^2\omega^6}{2\pi^2 c^3}\cdot\frac{16\pi}{5}=\frac{8\mu_0 e^2 R^4\omega^6}{5\pi c^3}$. 由场的表达式可以看出，当 $\theta\to0$、π 时为圆偏振，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时为线偏振，一般情况为椭圆偏振. 若只有一个电子，则为偶极辐射，$\boldsymbol{p}=\mathrm{Re}(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)$, $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi cr}[\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}]=\frac{\mu_0 Re\omega^2}{4\pi cr}\{\cos\theta\cos[\omega(t-\frac{r}{c})-\phi]\boldsymbol{e}_\phi-\sin[\omega(t-\frac{r}{c})-\phi]\boldsymbol{e}_\theta\}$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}$, $f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0 R^2 e^2\omega^4}{32\pi^2 c}(1+\cos^2\theta)$, $P=\frac{\mu_0 R^2 e^2\omega^4}{6\pi c}$.

12.8 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}=\pi R^2 I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times[\ddot{\boldsymbol{m}}])=-\dfrac{\mu_0 m_0\omega^2}{4\pi c^2 r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\frac{r}{c})}\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，$f(\theta,\phi)=\dfrac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{32\pi^2 c^3}\sin^2\theta$，$P=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{m_0^2\omega^4}{3c^3}$，$m_0=\pi R^2 I_0$.

12.9 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{r}=qz\boldsymbol{e}_z=qR\cos\omega t\boldsymbol{e}_z=qR\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=-\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi cr}p_0\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$.

$f(\theta,\phi)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c}\sin^2\theta$，$P=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$，其中 $p_0=qR$.

12.10 $m_0=\pi R^2 I_0$，$\boldsymbol{m}=m_0(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times[\ddot{\boldsymbol{m}}])=-\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2 r}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times[\boldsymbol{m}])=-\dfrac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c^2 r}\left\{\cos\theta\cos[\omega(t-\dfrac{r}{c})-\phi]\boldsymbol{e}_\theta+\sin[\omega(t-\dfrac{r}{c})-\phi]\boldsymbol{e}_\phi\right\}$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}$，$f(\theta,\phi)=\dfrac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{32\pi^2 c^3}(1+\cos^2\theta)$，$P=\dfrac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{6\pi c^3}$.

12.11 将 $\boldsymbol{m}$ 沿转轴分解，$\boldsymbol{m}=m\cos\alpha\boldsymbol{e}_z+m\sin\alpha(\cos\omega t\boldsymbol{e}_x+\sin\omega t\boldsymbol{e}_y)$. 根据上题结果，$P=\dfrac{\mu_0 m^2\sin^2\alpha\omega^4}{6\pi c^3}$. 地球转动惯量 $I=8.1\times10^{37}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，转动能 $W=\dfrac{1}{2}I\omega^2=\dfrac{1}{2}I\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$，$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-I\dfrac{4\pi^2}{T^3}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-P$，$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\dfrac{T^3P}{4\pi^2 I}=2.8\times10^{-25}\ \mathrm{s/d}$，也就是说，由于磁偶极辐射使转动能减少，所造成的一天长度变化是非常小的.

12.12 $\boldsymbol{p}=\sum q_i\boldsymbol{r}_i=0$，$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}=\sum(3q_i\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i-q_i r_i^2\overrightarrow{\boldsymbol{I}})=2qa^2(1+\cos\omega t)^2[\overrightarrow{\boldsymbol{I}}-3\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z]$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{D}}=2qa^2(1+\cos\omega t)^2[\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}-3\cos\theta\boldsymbol{e}_z]$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{-\mu_0}{24\pi c^2 r}[\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{e}]=\dfrac{\mu_0 qa^2\omega^3}{6\pi c^2 r}[\sin\omega t+2\sin2\omega t]\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，$f(\theta,\phi)=\dfrac{5\mu_0 q^2 a^4\omega^6}{144\pi^2 c^3}\cos^2\theta\sin^2\theta$，$P=\dfrac{\mu_0 q^2 a^4\omega^6}{54\pi c^3}$.

12.13 由李纳－维谢尔势得到场 $\boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\dfrac{\boldsymbol{e}\times[(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{a}]}{(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}/c)^3}$，$\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{E}$，当 $\left(\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\boldsymbol{a}=0$ 时，$\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{B}=0$. 取 $\boldsymbol{v}$ 方向为 z 轴，$\boldsymbol{a}$ 位于 Oxz 平面内，则 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}=a\sin\beta\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}=va\sin\alpha\boldsymbol{e}_y$. $\left(\boldsymbol{e}-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\boldsymbol{a}=0$ 给出 $\sin\beta=\dfrac{v}{c}\sin\alpha$.

12.14 非相对论粒子可按偶极辐射处理. $P=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2a_0^2}{3c^3}$，辐射的总能量为 $W=\int P\mathrm{d}t=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2a_0^2}{3c^3}\cdot\dfrac{v_0}{a_0}=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2v_0a_0}{3c^3}$.

12.15 运动方程为 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}+e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}$. 取 $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{e}_z$，得 $\ddot{x}=-\omega_0^2 x+\dfrac{eB}{m}\dot{y}$，$\ddot{y}=-\omega_0^2 y-\dfrac{eB}{m}\dot{x}$，$\ddot{z}=-\omega_0^2 z$. 令 $\eta=x+\mathrm{i}y$，则 $\ddot{\eta}+\mathrm{i}\dfrac{eB}{m}\dot{\eta}+\omega_0^2\eta=0$，特征方程 $\alpha^2+\mathrm{i}\dfrac{eB}{m}\alpha+\omega_0^2=0$ 的解为 $\alpha=-\mathrm{i}\left(\dfrac{eB}{2m}\pm\sqrt{\omega_0^2+\left(\dfrac{eB}{2m}\right)^2}\right)$，通解为 $\eta=A\mathrm{e}^{\alpha t}=$

$Ae^{-i(eB/2m+\sqrt{\omega_0^2+(eB/2m)^2})t}+Be^{-i(eB/2m-\sqrt{\omega_0^2+(eB/2m)^2})t}$，$z=z_0e^{-i\omega_0 t}$. 若设$\frac{eB}{2m}\ll\omega_0$. 则 $\boldsymbol{r}\approx[Ae^{-i(\omega_0+eB/2m)t}+Be^{-i(eB/2m-\omega_0)t}]\boldsymbol{e}_x-i[Ae^{-i(eB/2m+\omega_0)t}+Be^{-i(eB/2m-\omega_0)t}]\boldsymbol{e}_y+z_0e^{-i\omega_0 t}\boldsymbol{e}_z$. 由此可求出场 $\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\ddot{\boldsymbol{r}})$. 平行磁场的方向为圆偏振，垂直磁场的方向为线偏振.

12.16 $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$. 对于圆周运动$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}$，即 $qvB=\omega p=\frac{v}{R}P$，$R=\frac{p}{qB}$. 由 12.7 题可得辐射总功率 $P=\frac{R^2q^2\omega^4}{6\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c_3}\left(\frac{p}{qB}\right)^2\left(\frac{qB}{m}\right)^4=\frac{p^2q^4B^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m^4}$.

12.17 $P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}a^2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e^2}{3m_0^2c^3}m_0^2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3m_0^2c^3}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$变为四维矢量，得 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3m_0^2c^3}\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}$. p_μ 是矢量，$\frac{dp_\mu}{d\tau}$也是矢量，故$\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp_\mu}{d\tau}$是洛伦兹不变量.

12.18 运动方程 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dddot{\boldsymbol{r}}$，即 $\ddot{x}=\frac{eB}{m}\dot{y}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dddot{x}$，$\ddot{y}=-\frac{eB}{m}\dot{x}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dddot{y}$，$\ddot{z}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dddot{z}$. 令 $\eta=x+iy$，先略去阻尼力，可得解 $\eta=A_0+B_0e^{-i\omega_0 t}$，$\omega_0=\frac{eB}{m}$，再将阻尼力考虑进去，可得 $\eta=A+Be^{-\gamma t}e^{-i\omega_0 t}$，$\gamma=\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0mc^3}$，将初条件代入后得 $x=\left(R_0+\frac{v_0}{\omega_0}\right)-\frac{v_0}{\omega_0}e^{-\gamma t}\cos\omega_0 t$，$y=\frac{v_0}{\omega_0}e^{-\gamma t}\sin\omega_0 t$，$z\approx0$. 辐射场 $\boldsymbol{E}\approx\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\ddot{\boldsymbol{r}})$，$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E}$. $P=\frac{e^2v_0^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}e^{-2\gamma t}$ $(\gamma\ll1)$，动能 $T=\frac{1}{2}mv^2\approx\frac{1}{2}mv_0^2e^{-2\gamma t}$，$-\frac{dT}{dt}=mv_0^2\gamma e^{-2\gamma t}=\frac{e^2v_0^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}e^{-2\gamma t}=P$.

12.19 由 $m\frac{v^2}{R}=F=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R^2}$得 $mv^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R}$，$E=T+V=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0R}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R}$. $\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dR}\frac{dR}{dt}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R^2}\frac{dR}{dt}=-P=-\frac{e^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=-\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3\cdot\frac{2}{3m^2R^4c^3}$，所以，$\frac{dR}{dt}=-\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4}{3m^2R^2c^3}$，$T=\int dt=-\frac{3m^2c^3}{4}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2\int_{a_0}^{0}R^2dR=\frac{m^2a_0^3c^3}{4}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2=\frac{m^2c^3}{4}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\right)^3\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2\approx3.2\times10^{-13}$ s. 辐射的总能量为$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0a_0}$.

13.1 椭圆偏振波可以写成 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_1\cos(\omega t+\alpha)+\boldsymbol{e}_yE_2\sin(\omega t+\alpha)$；略去阻尼力，电子运动方程为 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=-e[\boldsymbol{e}_xE_1\cos(\omega t+\alpha)+\boldsymbol{e}_yE_2\sin(\omega t+\alpha)]$，其解为 $\boldsymbol{r}=\frac{e}{m\omega^2}[\boldsymbol{e}_xE_1\cos(\omega t+\alpha)+\boldsymbol{e}_yE_2\sin(\omega t+\alpha)]$，由此可求出散射场 $\boldsymbol{E}_s=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{c^2R}[\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\ddot{\boldsymbol{r}})]$，$\boldsymbol{B}_s=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E}_s$，$\langle S_P\rangle=\frac{1}{\mu_0}\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle=\frac{1}{\mu_0c}\langle\boldsymbol{E}^2\rangle$. $d\sigma_s=\langle\boldsymbol{S}_P\cdot d\boldsymbol{S}\rangle/\langle S_{P0}\rangle=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mc^2}\right)^2$

$$\frac{E_1^2(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_r)^2+E_2^2(\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_r)^2}{E_1^2+E_2^2}\mathrm{d}\Omega.$$

13.2 介质球在外场中产生的偶极矩为 $\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}4\pi\varepsilon_0R^3\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，取线偏振波的入射方向为 z 方向，$\boldsymbol{E}_0$ 为 x 方向，则 $\boldsymbol{B}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3r}\boldsymbol{e}_r\times[\ddot{\boldsymbol{p}}]$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，$\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})=\frac{\omega^4}{2\mu_0c^3r^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3E_0\right)^2(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi)\boldsymbol{e}_r$，$\langle S_{\mathrm{P0}}\rangle=\frac{E_0^2}{2\mu_0c}$，$\mathrm{d}\sigma_s=\frac{\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{P}}\cdot\boldsymbol{e}_r\rangle}{\langle S_{\mathrm{P0}}\rangle}\mathrm{d}s=\frac{\omega^4}{c^2}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3\right)^2(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi)\mathrm{d}\Omega.$

13.3 选取 x 轴和 y 轴平行于长方形孔的边，垂直入射，$\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}'=0$，$\psi(p)=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\cdot\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S'=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_yy'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\left(\frac{4}{k_xk_y}\right)(\sin k_xa)\cdot(\sin k_yb)=\frac{4u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda rk_xk_y}\sin k_xa\sin k_yb$. 衍射强度 $\mathrm{d}I=|\psi(p)|^2r^2\mathrm{d}\Omega=\left|\frac{4u_0}{\lambda k_xk_y}\right|^2\sin^2k_xa\sin^2k_yb=I_0\frac{\sin^2k_xa\sin^2k_yb}{(k_xa)^2(k_yb)^2}$，其中 $k_x=k\sin\theta\cos\phi$，$k_y=k\sin\theta\sin\phi$.

13.4 取柱坐标，原点取在圆环的中心，z 轴垂直于屏. 因为垂直入射，故 $\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}'=0$，$\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}'\approx k\theta r'\cos\phi'$，$\theta$ 为衍射角，$\psi(p)=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}S'=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\int_R^{R'}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta r'\cos\phi'}r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$，利用 $\mathrm{J}_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\phi}\mathrm{d}\phi$，得 $\psi(p)=\frac{2\pi u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}\lambda r}\int_R^{R'}\mathrm{J}_0(k\theta r')r'\mathrm{d}r'=\frac{u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\mathrm{i}r\theta}[R'\mathrm{J}_1(k\theta R')-R\mathrm{J}_1(k\theta R)]$. 衍射强度 $\mathrm{d}I=|\psi(p)|^2r^2\mathrm{d}\Omega=\frac{u_0^2}{\theta^2}[R'\mathrm{J}_1(R'k\theta)-R\mathrm{J}_1(Rk\theta)]^2\mathrm{d}\Omega=I_0\frac{[R'\mathrm{J}_1(k\theta R')-R\mathrm{J}_1(k\theta R)]^2}{\theta^2}\mathrm{d}\Omega.$

14.1 带电粒子的运动方程可以写成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$. 时间反演时，$t\to-t$，$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{v}\to-\boldsymbol{v}$，方程形式不变，这表明，若带电粒子在电磁场中的某种运动是可能的，则相反的运动在具有反向 $\boldsymbol{B}$ 的场中也是可能的.

14.2 $L=-\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)+A_\mu j_\mu$. 作规范变换 $A_\mu\to A_\mu'=A_\mu+\partial_\mu\Lambda$，$L\to L'=L+\partial_\mu\Lambda j_\mu=L+\partial_\mu(\Lambda j_\mu)-\Lambda\partial_\mu j_\mu$. 上式第二项是全微分，对理论没有影响，可略去，故 $L'=L-\Lambda\partial_\mu j_\mu$. 要求规范不变，则有 $\frac{\delta L'}{\delta\Lambda}=0$，即 $\partial_\mu j_\mu=0$，这正是电荷守恒定律.

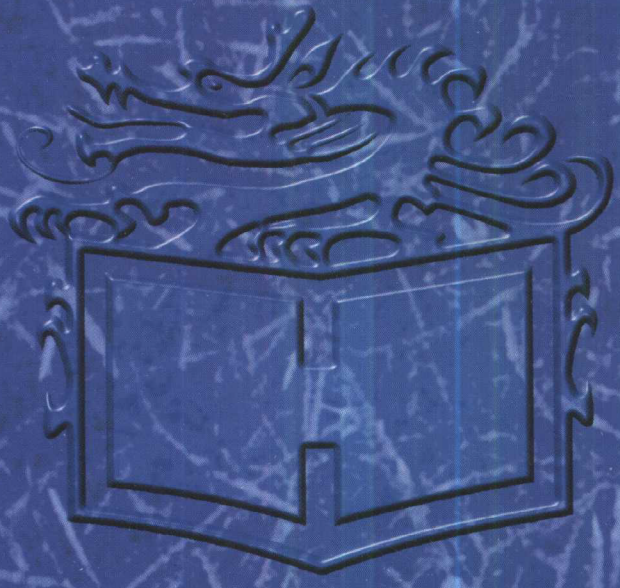
14.3 $L=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2\mu_0}m_\gamma^2A_\mu A_\mu+L_s$，$L_s$ 为源项. 如果引入极化磁化张量 $M_{\mu\nu}$，则 $L_s=\frac{c}{2}M_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+A_\mu j_\mu$. 由 $\frac{\partial L}{\partial A_\nu}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=0$ 可得 $\partial_\mu(F_{\mu\nu}-\mu_0cM_{\mu\nu})-m_\gamma^2A_\mu=-\mu_0j_\mu$. 令 $H_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}-\mu_0cM_{\mu\nu}$，则得 $\partial_\mu H_{\mu\nu}-m_\gamma^2A_\nu=-\mu_0j_\nu$.

14.4 设 $\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\varphi_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$，则 $\varphi_{\boldsymbol{k}}=\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta}2\pi r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ $=\frac{e}{\varepsilon_0 k}\int_0^\infty\sin kr\mathrm{d}r$. 为计算上述积分，引入收敛因子 $\mathrm{e}^{-\varepsilon r},\varepsilon\to0^+$. 则 $\varphi_{\boldsymbol{k}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{e}{\varepsilon_0 k}\int_0^\infty\sin kr\,\mathrm{e}^{-\varepsilon r}\mathrm{d}r=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{e}{\varepsilon_0 k}\frac{k}{k^2+\varepsilon^2}=\frac{e}{\varepsilon_0 k^2}$. $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，展开后得 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\varphi_{\boldsymbol{k}}=-\frac{\mathrm{i}e}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}$，$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}$ 的方向为 $\boldsymbol{k}$ 的方向，故为纵波.

14.5 $\boldsymbol{G}=\int\boldsymbol{g}\mathrm{d}^3x=\int\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}^3x$，将场用谐振子表示：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\mu_0}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}[\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]$，$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)=\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}$，$\omega_{\boldsymbol{k}}=ck$，$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\mathrm{i}\sqrt{\mu_0}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathrm{i}\sqrt{\mu_0}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$，$\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=-\varepsilon_0\mu_0\sum\limits_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\omega_{\boldsymbol{k}}[\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}'}^*)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}'}^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}]$. 利用积分 $\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3x=V\delta_{\boldsymbol{k},0}$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*=0$，可得 $\boldsymbol{G}=\frac{2V}{c^2}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}=\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{k}}{ck}w_{\boldsymbol{k}}$，$w_{\boldsymbol{k}}=2V\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{c^2}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}=2Vk^2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}$. 体系总能量为 $W=\sum\limits_{\boldsymbol{k}}w_{\boldsymbol{k}}$.

14.6 由变换 $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}=\alpha(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*)$，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}=-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}\alpha(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*)$，可得 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}=\frac{1}{2\alpha}\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*=\frac{1}{2\alpha}\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}-\frac{\mathrm{i}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\right)$. 代入 $\boldsymbol{A}$ 的展开式，可得 $\boldsymbol{A}=\sqrt{\mu_0}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\alpha}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\left[\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}+\frac{\mathrm{i}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}-\frac{\mathrm{i}}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]=\frac{\sqrt{\mu_0}}{\alpha}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}[\omega_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$，$\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{A}}=-\frac{\sqrt{\mu_0}}{\alpha}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}[\omega_{\boldsymbol{k}}\dot{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{k}}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=-\frac{\sqrt{\mu_0}}{\alpha}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}[\omega_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\omega_{\boldsymbol{k}}^2\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{\sqrt{\mu_0}}{\alpha}\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})+\frac{1}{\omega_{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]$. 其中用到了 $\dot{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}$，$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{k}}=-\omega_{\boldsymbol{k}}^2\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}$.

Electrodynamics



ISBN 7-04-010809-7

9 787040 108095 >

定价：33.00 元