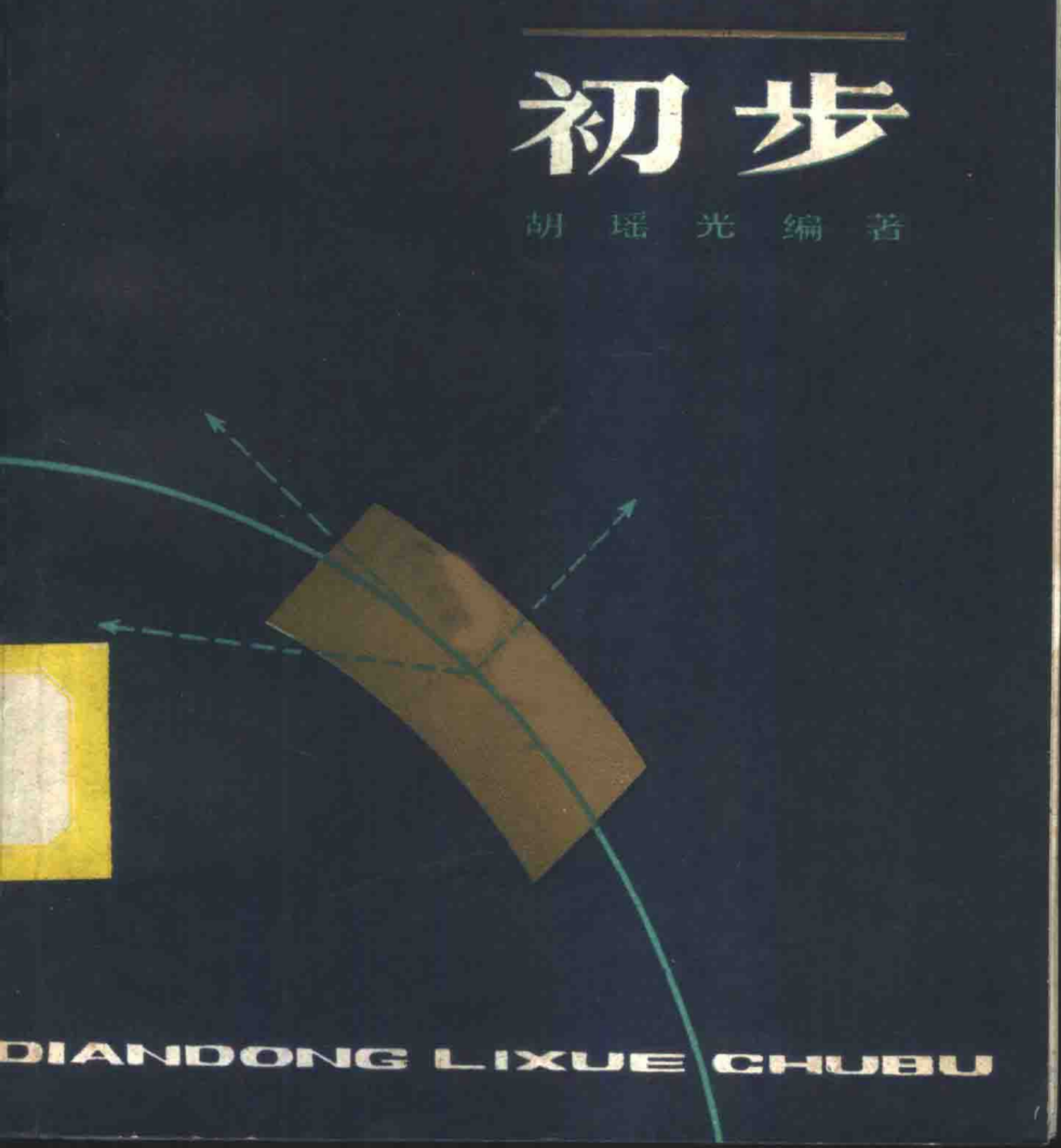
电动力学初步

胡瑶光编著



DIANDONG LIXUE CHUBU

封面设计　姜品珠

统一书号：7150·2576

定　　价：0.60 元

电动力学初步

胡瑶光　编著

上海教育出版社

电 动 力 学 初 步

胡 瑶 光 编著

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 7.375　字数 160,000
1982 年 7 月第 1 版　1982 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—13,000 本
统一书号：7150·2576　　定价：0.60 元

内 容 提 要

本书介绍了电磁运动的基本概念、麦克斯韦电磁理论、稳定电磁场以及电磁波的传播等内容。作者力求用比较浅近的语言，简易的数学工具进行论述。有关的数理方法内容，也结合物理问题，作了简要的介绍。书中的例题比较详细，每章结束附有小结，以便于没有系统地学习过数理方法、理论物理的同志自修。

本书可供中学教师、师专教师和大专学生参考。

目　录

引　言……1

第一章　电磁运动的基本规律……4

第一节　电荷和电场……4

库仑定律(4)　电场(5)　电场强度(6)　电荷的电场(7)

第二节　高斯定理　电场散度……11

立体角(11)　电通量(12)　高斯定理(13)　矢量散度(17)　高斯公式(20)　电场散度(22)　界面条件(23)

第三节　电场环流　电势梯度……24

电场环流(24)　电势(25)　电势梯度(29)

第四节　电流和磁场……33

电流密度(33)　电荷守恒定律(34)　磁感应强度(36)　洛仑兹力(37)　电流磁场(39)

第五节　磁场环流　旋度　磁荷……41

磁场环流(41)　矢量旋度(43)　斯托克斯公式(47)　磁场旋度(48)　界面条件(49)　磁荷(50)

第六节　电场和磁场……52

法拉第电磁感应定律(52)　磁激电场(54)　电场旋度(55)　位移电流(56)

第二章　麦克斯韦电磁理论……62

第一节　真空中的麦克斯韦方程组……62

洛仑兹力(62)　积分方程(63)　微分方程(64)

界面条件(66)
第二节　电磁场对物质的作用……68
欧姆定律(68)　束缚电荷(70)　电极化矢量(70)
束缚电荷密度和电极化矢量的关系(71)　极化电流
密度(73)　电极化率　(74)　分子电流(74)
磁化矢量(75)　分子电流和磁化矢量的关系(75)
磁化率(78)
第三节　介质中的麦克斯韦方程组……79
电荷和电流(80)　洛仑兹力(80)　微分方程(80)
物态方程(82)　积分方程(83)　界面条件(84)
劈形算符(84)
第四节　电荷守恒定律……86
第五节　能量、能流、能量守恒定律……88
能量守恒定律(88)　电源功率(90)　焦耳热(90)
电磁场能量(91)　能流密度(92)
第三章　稳定电、磁场 ……98
第一节　稳定电、磁场的标势和矢势 ……98
电场和磁场(98)　标势和矢势(101)　基本解(104)
第二节　镜象法…… 109
第三节　分离变量法…… 117
变量分离(119)　极角函数(121)　勒让德函数(122)
缔合勒让德函数(124)　球函数(125)　径向函数(126)
一般解(127)
第四节　级数展开法　电、磁偶极作用 …… 137
泰勒级数(137)　电荷系的电势(139)　电场对电荷系
的作用(143)　电流系的磁场(146)
第四章　电磁波的传播和辐射…… 155
第一节　电磁波…… 156

电磁波方程(156)　平面电磁波(157)　单色平面波(161)
第二节　均匀介质中的单色平面波…… 163
第三节　介质界面上的反射和折射…… 167
界面条件(167)　反射定律和折射定律(169)　菲涅耳公式(170)
第四节　导体中和导体面上的电磁波…… 176
导体中的电荷和电流(176)　微分方程(177)　复数波矢量(178)　电磁波的衰减(180)　导体表面对电磁波的反射(182)
第五节　电磁波的定向传输…… 184
传输线(184)　同轴线(185)　波导管(188)
第六节　电磁波的衍射…… 197
赫姆霍兹方程(197)　格林函数(198)　格林公式(200)　基尔霍夫公式(200)　矩形孔的方和费衍射(201)
第七节　矢势和标势…… 205
势的引入(206)　规范不变性(207)　势的微分方程(208)　推迟势(209)
第八节　电偶极矩的辐射…… 212
电偶极矩(212)　矢势和标势(214)　电场和磁场(216)　似稳场和辐射场(220)　辐射能流密度(222)　辐射功率(223)

引　言

这本书是为中学物理教师自学而写的。要写得便于自学，但篇幅又不能太大。因此，对电动力学的一些基本问题，处理问题的基本观点和方法，以及所得到的基本结论，作了比较详细的、反复的论述，但舍弃了电动力学的一些其他内容。

电动力学研究的基本内容是：电荷和电场；电流和磁场；电荷和电流；电场和磁场。这四对基本关系的主要表现形式是：电场对电荷的作用，如

$$\boldsymbol{f}=q\boldsymbol{E};$$

电荷激发电场，如

$$\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3};$$

磁场对运动电荷、电流的作用，如

$$\boldsymbol{f}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B};$$

电流激发磁场，如

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3};$$

以及电荷和电流的恒等关系

$$\mathbf{j}=\rho\boldsymbol{v};$$

电荷守恒定律

$$\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0;$$

电磁感应定律

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

还有位移电流

$$\boldsymbol{j}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

在激发磁场方面和电流的等效性等等。麦克斯韦理论是反映这些基本关系的电磁理论，它用积分方程、微分方程、界面条件等表示出来，进而论述稳定电、磁场的规律，电磁波传播和辐射的规律。

在十八世纪以前，由于生产水平的限制，人们对于电和磁的认识还很肤浅，还限于对它们的吸引、排斥性质的定性了解。随着资本主义生产的发展，科学实验展开了多方面的探索活动。1785 年确立了库仑定律，奠定了电学发展的基础。1800 年发明了伏打电池，首创了电源，开始了电解、电镀等电化技术。1820 年发现了电流的磁效应，建立了毕-沙-拉定律，把电和磁之间的联系揭示出来，促进了电报、电话通讯技术的发展。1831 年创立了法拉第电磁感应定律，进一步揭露了电和磁之间的关系，促成了发电机、变压器等的制造，使电力工业大步向前。1862 年麦克斯韦总结前人的工作，建立了统一的电磁理论，预言电磁波的存在，表明了光、电、磁的统一本质。20 年后赫兹用实验证实了麦克斯韦的预言，开创了无线电技术的新纪元。电磁学发展的这段历史充分说明：生产实践提供了科学技术发展的基础，而正确的科学理论，又反过来把生产技术大力推向前进，发生飞跃。

正确的理论，正确地反映客观规律。物理量和物理定律，描述客观物理运动的性质和规律。但是，在实际的学习、工作过程中，常常被一些抽象的概念、公式所迷糊。“物质消灭了，

剩下的只是方程式了”的思想，也还会不同程度地反映出来。因此，在本书编写过程中，注意阐明物理量、物理定律所描写的物理事实。注意了这一点，对一些抽象概念、公式的理解，也许会比较容易一些。例如，在理解了梯度、散度、旋度等所反映的物理性质，高斯定理、斯托克斯定理等所反映的物理规律以后，对电磁理论的掌握就会比较深透一些。

在电动力学中，描述物理性质的物理量是一些数学函数，描述物理运动规律的物理定律是一些数学方程式，论述、推理所用的方法是一些数学方法。因此，在学习、研究、应用电动力学的过程中，数学是不可避免的。实际上，在理论物理中，大量地使用了数学这一有力工具。数学成了理论物理不可缺少的组成部分。那种既想学理论物理，又想回避数学的思想，是不可取的。必需面对现实，闯过数学这一关，才能学好理论物理。

把数学用于物理，大致有三个方面：一是用数学描写物理事实，把物理问题转化为数学问题；二是用数学特有的逻辑，结合物理条件，进行推导、演算，探求新的结果；三是从所得的数学结果中，看出它所反映的物理规律。在这本书中，注意到了这三个方面的论述。考虑到有些读者缺乏数学方面的锻炼，有些运算过程，也作了一定的交代。对于用得较多的矢量分析和偏微分方程，作了较多的讨论。希望让一些没有系统学过这些数学内容的读者，也能看懂。

由于水平和时间的限制，书中缺点、错误是难免的，希望同志们批评、指正。

梁绍荣同志、蔡圣善同志仔细地审阅了原稿，提出了宝贵的意见。在此，作者向他们表示感谢。

第一章　电磁运动的基本规律

科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。电动力学是研究电磁运动的一门学科。在电磁运动中，具有电荷和电场、电流和磁场、电荷和电流、电场和磁场等四对基本关系。这些基本关系，确定着电磁运动的基本规律。我们按照这种观点，来论述电磁运动的基本规律。

在这一章中，我们从电磁现象的实验定律出发，综合、概括、抽象出电磁运动的基本规律。

第一节　电荷和电场

库仑定律　一切运动都存在于吸引和排斥的相互作用中。在电磁运动中，研究得最早的吸引和排斥，就是电荷之间的吸引和排斥。1785 年，库仑用实验确定了，两个相对静止的点电荷之间的相互作用力的规律，现在被称为库仑定律。它指出：两个电量分别为 q_1 和 q_2 的点电荷，相距为 r 时，它们之间的作用力的大小

$$f=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1-1}$$

作用力的方向沿着它们之间的连线。电荷同号时相互排斥，电荷异号时相互吸引。在本书中，我们采用实用单位制。长度的单位是米，质量的单位是千克(公斤)，时间的单位是秒，电量的单位是库仑，力的单位是牛顿。这时

$$\varepsilon_0 = 8.9\times 10^{-12}\ \text{库仑}^2/\text{牛顿}\cdot\text{米}^2$$

叫做真空介电系数，或真空电容率。

如果，我们用 r 表示由电荷 q_1 到电荷 q_2 的矢径。即如图 1-1 所示，用矢径 r 的大小表示电荷 q_1 和电荷 q_2 之间的距离，矢径 r 的方向由电荷 q_1 指向电荷 q_2。那末，扩展(1-1)式，用



图 1-1

$$f=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{r}{r} \qquad (1\text{-}2)$$

表示电荷 q_1 对电荷 q_2 所施的作用力的大小和方向。

电场 上面的(1-1)式和(1-2)式表示的是实验定律。人们在探究这实验定律的本质时，自然要问：这两个互不接触、相距一段距离的电荷之间的作用力是怎样发生的呢？过去，回答这个问题，有两种截然不同的观点。一种观点认为：两个电荷之间的作用，与它们之间的物质无关，而是以无限大速度在两个电荷之间直接发生的，人们称之为超距作用。另一种观点认为：不相接触的两个电荷之间的相互作用，不是直接发生的，而是通过中间的媒质以有限速度传递的，人们称之为媒递作用。经过科学实践的检验，人们逐渐地扬弃了超距作用的观点，而承袭了媒递作用的观点。人们确信：两个相对静止的电荷之间的作用力是由电场传递的。一个电荷在它周围空间激发电场，这电场又对在场中的另一电荷施以力的作用，这就是两个电荷之间相互作用的情景。这样一来，研究电荷之间的相互作用的问题，就转化为研究电荷怎样激发电场的问题，研究电场怎样对电荷施以力的作用的问题。电荷之间的吸引、排斥，只是电荷和电场之间相互作用的一种表现形式。

实际上，上述的观点，只是经典电动力学的观点。在量子电动力学中，人们认为：两个物体之间的电磁作用是由交换光子进行的。一个物体放出光子，另一个物体吸收光子，就是电磁相互作用的图象。

电场强度 人们既然引进了电场的概念，把电场看作客观存在的一种物质(还有一种观点，认为静电场只是为计算方便而引入的，并非客观存在。这种观点也能解释静电现象)。那末，就要进一步研究电场的各种性质。从电场概念的引进可知，电场的一个基本性质，就是能够对电荷施以力的作用。我们用电场强度这一物理量，来描述电场的这一性质。怎样定量地定义电场强度呢？能不能用电场对电荷所施的作用力来定义电场强度呢？我们知道：在电场中一定点上，电量不同的电荷，受到电场的作用力是不同的。例如：电荷 q_1、q_2、q_3……，分别单独在电场中 P 点时，各个电荷所受到的力 f_1、f_2、f_3…… 是不同的。这说明：电荷 q 所受到的力 f，不仅和电场有关，还和电荷有关。因此，我们不能用某一电荷所受的力，来表征电场固有的性质，来定义电场强度。进一步的研究表明：虽然，不同的电荷，分别放在电场中同一点上，它们所受到的力是不相同的。但是，各个电荷所受之力和它们的电荷之比，却是相同的。即

P　q_1, q_2, q_3 ……

f_1, f_2, f_3 ……

图 1-2

$$\frac{f_1}{q_1}=\frac{f_2}{q_2}=\frac{f_3}{q_3}=\cdots\cdots,$$

这表明：电荷所受之力 f 和它的电量 q 之比，只和电场有关，而与电荷无关。所以，我们可以用它来表征电场的固有性质，来定义电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{f}}{q} \tag{1-3}$$

当然，上面用来定义电场强度的电荷，应该体积很小、电量很弱，以至可以看作点电荷，且不引起原来电场的变化。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的单位，在实用单位制中，用牛顿/库仑表示。

前面说到，电荷和电场之间的关系，有两个方面：一是电场对电荷施以力的作用，另一是电荷激发电场。定义电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的(1-3)式，既定量地描述了电场的性质，也奠定了计算电场对电荷的作用力的基础。实际上，由(1-3)式可知：电荷 q，在电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的电场中，受到的力

$$\boldsymbol{f}=q\boldsymbol{E} \tag{1-4}$$

而多个点电荷 q_1、q_2……q_i……q_n，同时在电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、……$\boldsymbol{E}_i$……$\boldsymbol{E}_n$ 的点上，分别受到的作用力为：$\boldsymbol{f}_1=q_1\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{f}_2=q_2\boldsymbol{E}_2$、……$\boldsymbol{f}_i=q_i\boldsymbol{E}_i$、……$\boldsymbol{f}_n=q_n\boldsymbol{E}_n$。而它们受到的总力，按照力的迭加原理迭加得

$$\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n} q_i\boldsymbol{E}_i,$$

n 是点电荷的个数。

电荷的电场　对于电荷激发电场的问题，不象电场给电荷以力的作用的问题那样简单，不能用表达电场强度定义的(1-3)式直接解决。但是，我们把表示库仑定律的(1-2)式和表示电场强度定义的(1-3)式联系起来，就可以予以解决。从场的观点来看，(1-2)式表示的电荷 q_1 对电荷 q_2 的作用力，就是电荷 q_1 激发的场对电荷 q_2 的作用力。用电荷 q_2 去除(1-2)式，得

$$\frac{\boldsymbol{f}}{q_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}。$$

由定义电场强度的(1-3)式可知，它就是电荷 q_1 在电荷 q_2 处，即在距电荷 q_1 为 r 处的电场强度。这表明：一个电量为 q 的点电荷，在距它为 r 处的一点，所激发的电场的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1-5}$$

这就解决了点电荷激发电场的问题。实际上，上式不仅是计算电荷激发电场的一个基础，也是研究电荷激发的电场的性质的一个基础。

由力的迭加原理和电场强度定义的(1-3)式可知：电场强度也遵循迭加原理。即多个电荷激发的电场的电场强度，等于各个电荷单独存在时，所激发的电场的电场强度的迭加。设有 n 个点电荷，电量分别为 q_1、q_2、……q_i、……q_n，它们到所考察的 P 点(简称为场点)的矢径，分别为 r_1、r_2、……r_i、……r_n。如图 1-3 所示。那末，它们所激发的电场，在 P 点的电场强度

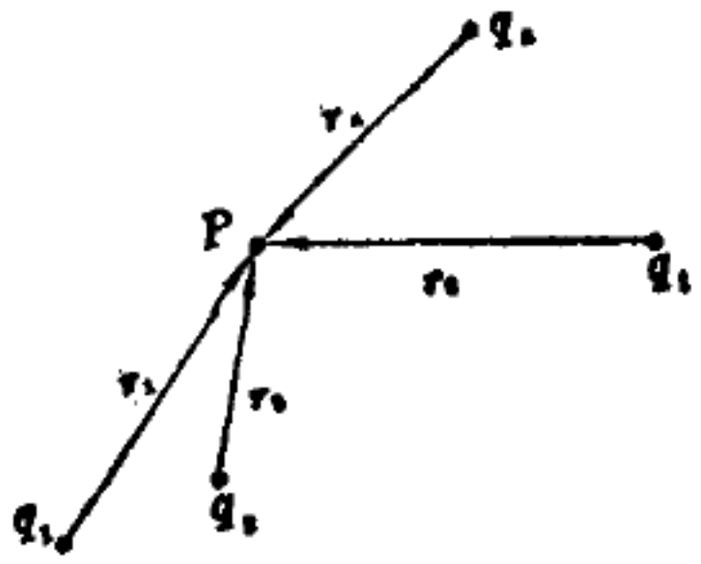


图 1-3

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\,\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i} \tag{1-6}$$

如果电荷系不是点电荷，而是以体密度 ρ 分布的电荷，$\rho(x', y', z')$ 是源点坐标 (x', y', z') 的函数。这时，就不能直接用上式计算电荷系在场点 $P(x, y, z)$ 的电场强度。但是，我们可以用微分方法，把电荷系分割为微小电荷(简称为元电荷)，如图 1-4 所示。在体积元 dV' 内的元电荷 $dq=\rho dV'$，可以看作点电荷。它在距它为 $\boldsymbol{r}=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-$

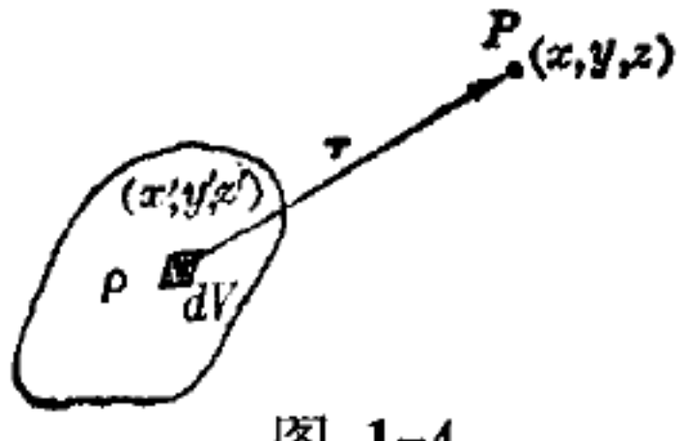


图 1-4

$y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}$ 的场点 $P(x,y,z)$ 所激发的电场的电场强度，按照(1-5)式，应该是

$$d\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{\rho(x',y',z')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}。$$

所有电荷在场点 P 所产生的电场的电场强度，按照迭加原理，就应该是上式的积分，即

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\iiint_V\frac{\rho(x',y',z')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\qquad(1\text{-}7)$$

这样一来，我们由库仑定律、电场强度定义和迭加原理推得的(1-7)式，就解决了电荷激发电场的一般问题。原则上，可以用它计算任意分布电荷激发的电场的电场强度。但是，由于数学的繁难复杂，实际上是很困难的。下面，我们举两个例子，说明计算的一般程序。

例一 如图 1-5 所示，由电量为 $-q$ 和 $+q$ 的两个电荷构成的系统，叫做电偶极子。$\boldsymbol{l}$ 是电荷 $-q$ 到电荷 $+q$ 的矢径。$\boldsymbol{P}=q\boldsymbol{l}$ 叫做电偶极子的电偶极矩。我们计算：在电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的延线上，离开它的中心为 r 的 P 点，由它所激发的电场的电场强度，假定 $r\gg l$。

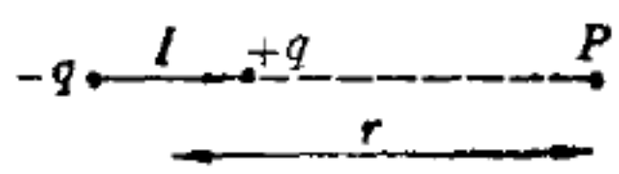


图 1-5

按照点电荷系的电场的(1-6)式，由电偶极子激发的电场，在 P 点的电场强度的大小

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0 r^4\left(1-\frac{l^2}{4r^2}\right)^2}\simeq\frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}。$$

电场强度的方向和电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的方向一致。所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{2\boldsymbol{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}。$$

这表明：电偶极子激发的电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$，和电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 成正比，和由它的中心到场点的距离 r 的三次方成反比。后一特点，和点电荷的电场不同，点电荷的电场强度 E 和距离 r 的二次方成反比。

电偶极子在其他方向上的电场强度，特别是在通过电偶极子中心，并垂直于电偶极矩的线上各点的电场强度。作为习题，供读者练习。

例二 设想电荷 q 均匀地分布在半径为 a 的圆环上。求在圆环轴线上，距环心 O 的距离为 r 的 P 点的电场强度。

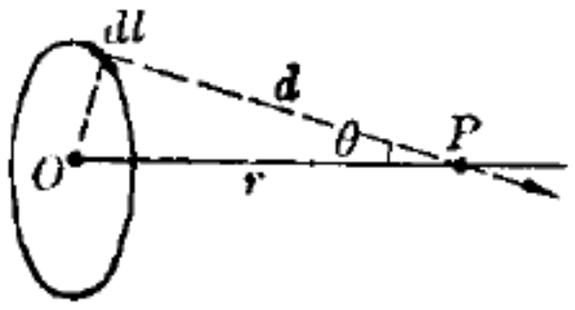


图 1-6

如图 1-6 所示，O 是环心，由于电荷 q 均匀分布在周长为 $2\pi a$ 的圆环上，电荷线密度，即单位长度上的电量为 $q/2\pi a$，圆环线元 dl 上的电荷元为

$$dq=\frac{q}{2\pi a}dl,$$

可以看作点电荷，按照(1-5)式，它激发的电场，在离它为 d 的 P 点的电场强度的大小为

$$dE=\frac{\frac{q}{2\pi a}\cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 d^2}。$$

电场强度的方向和圆环轴线成 θ 角。按照迭加原理，整个圆环激发的电场，在 P 点的电场强度，等于各线电荷元的电场强度的矢量和。由于带电圆环对于圆环轴线的对称性，圆环各线电荷元激发的电场的电场强度，垂直于轴线的分量迭加以后相互抵消，平行于轴线的分量迭加以后相互加强，形成整个圆环在 P 点激发的电场强度。这就是说，圆环电荷在 P 点的电场强度的方向平行于轴线，而大小

$$E=\oint\frac{\frac{q}{2\pi a}dl\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 d^2},$$

积分对整个环进行。由于积分时 θ、d 都是常数，故

$$E=\frac{\frac{q}{2\pi a}\cos\theta\cdot 2\pi a}{4\pi\varepsilon_0 d^2}=\frac{q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 d^2}。$$

由图 1-6 可知

$$\cos\theta = \frac{r}{d};\qquad d^2 = r^2 + a^2,$$

把它们代入上式，就得到圆环电荷在轴线上 P 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{(r^2+a^2)^{3/2}}。$$

作为习题，读者计算：均匀带电圆板，在垂直圆板、通过圆板中心的轴线上，所激发的电场的电场强度。

第二节　高斯定理　电场散度

在上一节中，我们在库仑实验定律的基础上，引进了电场的概念，定义了描述电场性质的电场强度，考虑到迭加原理，论述了电场对电荷的作用和电荷激发电场的基本公式。这些就是我们对于电荷、电场相互关系的基本知识。在这一节中，我们将进一步论述电荷激发的电场的性质。为了论述物理内容的需要，也介绍一些相应的数学知识。

立体角　大家知道，由一点 A 发出的两条射线所夹成的平面，构成平面角，如图 1-7 所示。点 A 称为角的顶点，这平面角元用 $d\theta$ 表示。它的大小，可以用单位圆上的弧长来量度，也可以用半径为 r 的圆上的弧长 dl 和半径 r 之比来量度。即



图 1-7

$$d\theta = \frac{dl}{r}。$$

这时，角的单位是弧度

立体角是由一点 A 发出的锥面所围成的空间，如图 1-8 所示。这锥面的顶点 A 叫做立体角的顶点，这立体角用 $d\Omega$ 表

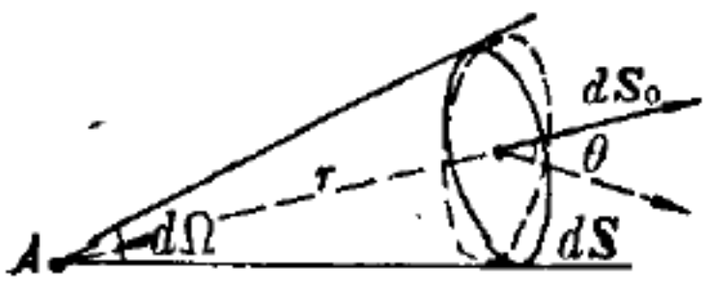


图 1-8

示。它的大小，可以用以锥的顶点 A 为球心、半径为 1 的球面，被锥面所截的面积来量度，也可以用以锥的顶点 A 为球心、半径为 r 的球面，被锥面所截的面积 dS_0，和半径 r 的平方之比来量度。即

$$d\Omega=\frac{dS_0}{r^2}。$$

这时，立体角的单位是立体弧度。如果，被锥面所截的面积 dS 与 dS_0 相交，但不相合 dS 的法线方向，即 $d\boldsymbol{S}$ 的方向，和矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向，即 $d\boldsymbol{S}_0$ 的方向，有一夹角 θ。那末，由于

$$dS_0=dS\cos\theta=\frac{d\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{r}}{r},$$

立体角也可以用

$$d\Omega=\frac{\mathbf{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3} \qquad (1\text{-}8)$$

来量度。由立体角的以上定义可知，一点对整个空间所张的立体角，等于 4π 立体弧度。

电通量 从几何学的观点来看，电场是具有特殊性质的空间，而空间又由点、线、面等的集合构成。研究电场的性质，就是研究这种特殊空间的点、线、面上的物理性质。我们用电通量这一物理量，来描述电场中曲面上的性质。首先，给电通量以定义。如图 1-9 所示，设想电场中 P 点的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，通过 P 点的面元为 $d\boldsymbol{S}$。我们把

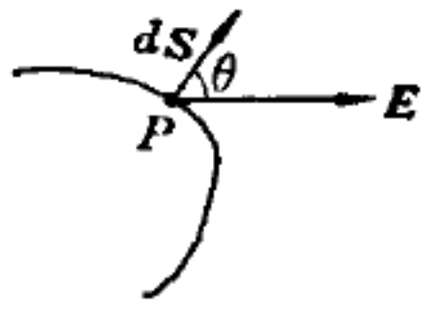


图 1-9

$$d\boldsymbol{N}=\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=EdS\cos\theta \qquad (1\text{-}9)$$

叫做通过面元 $d\boldsymbol{S}$ 的电通量。由这定义可知，电通量既和电场强度有关，又和电场强度不同。电场强度描述电场中点上

的性质，而电通量勾划电场中曲面上的特点。如果，我们用电力线来形象地描述电场，并把电力线上一点的切线方向和该点的电场强度的方向等同起来，还使电力线数的密度比例于电场强度的大小，为了方便起见，取比例系数为 1。那末，由 (1-9) 式定义的电通量，就等于通过面元 dS 的电力线的数目。

上式定义的电通量推广到有限大小的任意曲面。就是：通过电场中任一曲面 S 的电通量，等于(1-9)式的积分，

$$N=\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-10}$$

高斯定理 如上所述，电场强度描述电场中的点的性质，电通量描述电场中的曲面的性质。我们要问：描述电场曲面性质的电通量具有怎样的特点呢？高斯定理回答了这一问题。它指出：在电场中，通过任一闭合面 S 的电通量，等于这一闭合面所包围的体积中所具有的电荷的代数和 Q 的 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍。即

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1-11}$$

而且，不管闭合面 S 外有无电荷，也不管电荷如何分布，都是如此，这表明了电场对曲面的通量和电荷的相互关系。

高斯定理是在库仑实验定律的基础上，逐步抽象出来的。前面说到，由库仑定律和电场强度定义推知的(1-5)式，表示点电荷所激发的电场。它是计算电荷激发的电场的一个基础，也是进一步研究电场性质的一个基础。现在，我们用它来证明高斯定理。先计算包围点电荷 q 的任

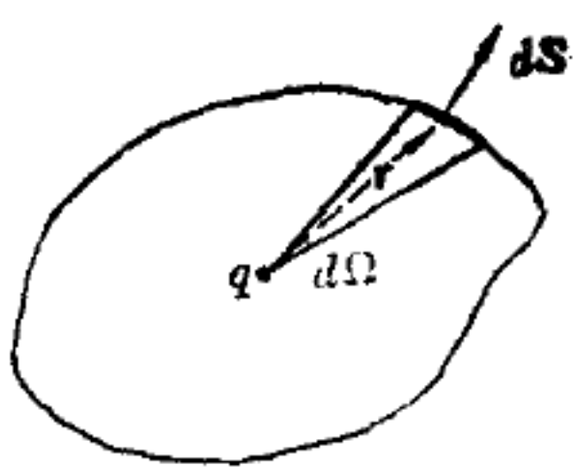


图 1-10

一闭合曲面 S 的电通量。如图 1-10 所示。点电荷 q，在面元 dS 处的电场强度，按照(1-5)式，是

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\boldsymbol{r}。$$

按照(1-9)式，通过面元 dS 的电通量是

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}。$$

按照(1-8)式，

$$d\Omega=\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}。$$

是面元 dS 对点电荷 q 所在点所张的立体角。由此可知，通过面元 dS 的电通量为

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \tag{1-12}$$

通过整个闭合面 S 的电通量，等于上式对闭合面 S 的积分

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}。$$

后一等式的成立是由于 q 点对包围它的闭合面所张的立体角等于 4π。这就证明了：对于包围点电荷 q 的闭合面，高斯定理成立。

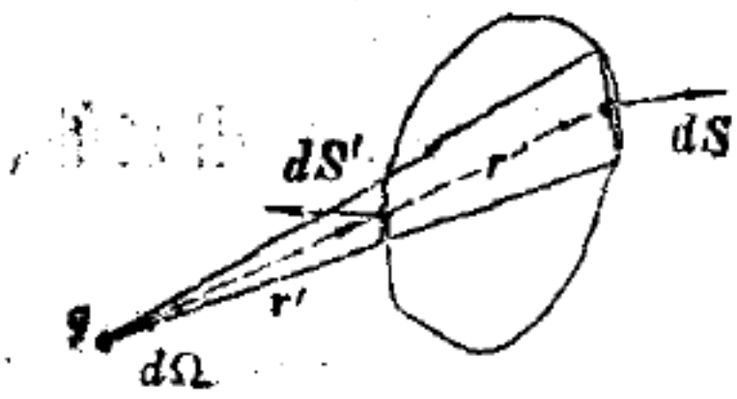


图 1-11

对于不包围点电荷 q 的闭合面，如图 1-11 所示。按照定义立体角的(1-8)式，面元 dS 对 q 点所张的立体角

$$d\Omega=\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}$$

面元 dS' 对 q 点所张的立体角

$$d\Omega' = \frac{\boldsymbol{r}' \cdot d\boldsymbol{S}'}{r'^3},$$

而且 $d\Omega = -d\Omega'$。这表明：由同一锥体围成的立体角 $d\Omega$，按照 (1-8) 式的定义，对于所截的任一面元来说大小一样。但是，对于 $d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}>0$ 的面元来说它取正值，对于 $d\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{r}'<0$ 的面元来说它取负值。由于这个道理，一个闭合面对于面外一点所张的立体角等于零。

对于不包围点电荷 q 的闭合面上的任一面元 $d\boldsymbol{S}$，通过它的电通量，仍然是

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega。$$

通过整个闭合面 S 的电通量，仍然等于上式的积分

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega d\Omega = 0。$$

由于闭合面对面内一点所张的立体角等于 4π，而闭合面对面外一点所张的立体角等于 0。所以，上式的积分不是 4π，而是 0。这正是闭合面不包围点电荷 q 时的高斯定理。

对于多个点电荷激发的电场也应该成立。任意分布的电荷，可以微分成无限多个点电荷。所以，对于任意电荷分布的电场，高斯定理仍然有效。这就是说，用(1-11)式表示的高斯定理，具有普遍的意义，对于任意电荷的电场都是正确的。实际上，以后我们还要说明，高斯定理不仅对电荷激发的电场是正确的，对非电荷引起的电场也是正确的。因此，在电磁理论中，高斯定理比库仑定律具有更加基本的意义。

高斯定理，象其他的定理、定律一样，既是客观世界规律的模写，又是认识、探索客观世界的方法，是解决具体问题的有力工具。高斯定理是用积分方程(1-11)式表述的，要用它

来计算电荷的电场，在一般情况下，是很困难的。但是，在电荷以某种对称形式分布的情况下，积分方程可以转化为代数方程，就变成方便的了。现以均匀带电球壳的电场为例加以说明。

例 设想半径为 a 的球壳，电荷 q 均匀分布在球壳上。求球壳内外的电场强度。

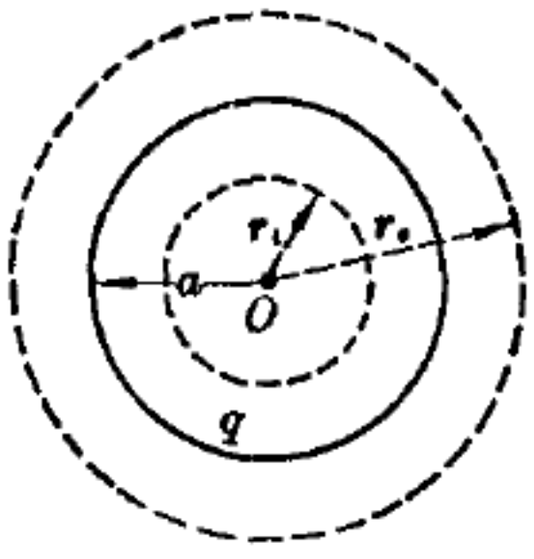


图 1-12

如图 1-12 所示。由于电荷 q 均匀分布在球壳上，具有球对称性，由它激发的电场，也应该具有球对称的性质。因此，在球壳内外，在以 O 为球心、以 r 为半径的任一球面上，各点的电场强度，大小应该一样，方向应该和该点球面面元 dS 的方向一致(设 $q>0$)。通过这球面的电通量

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint E\cdot dS=E\oint dS=E\cdot 4\pi r^2。$$

第一项等于第二项是由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $d\boldsymbol{S}$ 的方向一致。由于球面上各点的 $\boldsymbol{E}$ 相等，所以第二项等于第三项。

对于球壳外，半径为 r_e 的球面，它包围着球壳的电荷 q，把高斯定理用于这球面就有

$$E_e\cdot 4\pi r_e^2=q/\varepsilon_0。$$

由此可知，球壳外距球心为 r_e 的一点的电场强度

$$E_e=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_e}{r_e^3}。$$

这电场强度，象点电荷激发的一样。

对于球壳内，半径为 r_i 的球面，它包围的电荷为 0，把高斯定理用于这球面得

$$E_i\cdot 4\pi r_i^2=0。$$

由此可知，球壳内任一点的电场强度

$$E_i=0。$$

电荷 q 均匀分布在半径为 a 的球体内，计算由它激发的电场的电场强度，作为习题，供读者练习。

矢量散度 用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表征的电场的曲面性质，我们用电通量

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

描述。同理，用某一矢量 $\boldsymbol{a}$ 表征的场的曲面性质，也可以用该矢量的通量

$$\oiint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$$

描述。在矢量 $\boldsymbol{a}$ 有限的情况下，当闭合面 S 向一点收缩，使它包围的体积 V 趋于 0 时，它也趋于 0。但是，它和体积 V 之比，却趋于某一极限，我们用符号 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ 来表示这一极限。即定义

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V} \tag{1-13}$$

并把它叫做该点的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度。

这样一来，我们又从矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通量，获得一个描述场的点的性质的参量、矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度，它表示一点的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的变化的情况。

怎样由矢量 $\boldsymbol{a}$ 计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ 呢？和别的计算问题相似，最基本的计算方法也来自它的定义。我们由(1-13)式导出散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ 的计算公式。首先，我们计算通过如图 1-13 所示的六面体的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通量。设想六面体诸面的面积足够小，以致在同一面上各点的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向都近似一样。对于垂直于 x 轴的两个面：在 (l_x, y, z) 面上，矢量 $\boldsymbol{a}$ 为

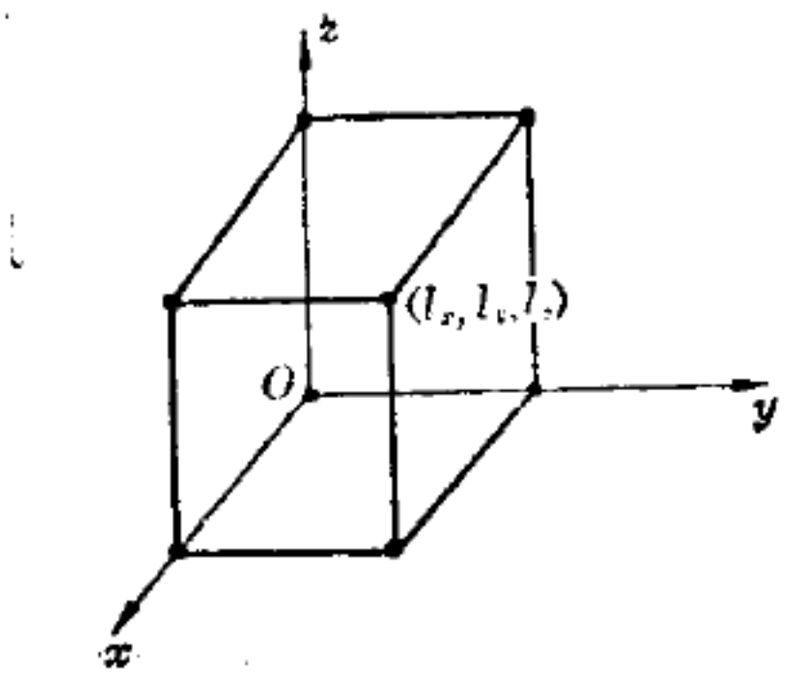


图 1-13

$a\,(l_x, y, z)$，通过面积 $l_y l_z$ 的该面的矢量 a 的通量为 $a_x(l_x, y, z)\cdot l_y l_z$；在 $(0, y, z)$ 面上，矢量 a 为 $a(0, y, z)$，通过面积为 $l_y l_z$ 的该面的矢量 a 的通量为 $-a_x(0, y, z)\cdot l_y l_z$。负号是由于面的法线方向和 x 轴的方向相反。通过这两个面的矢量 a 的通量为

$$a_x(l_x, y, z)\cdot l_y l_z - a_x(0, y, z)\cdot l_y l_z = \frac{a_x(l_x, y, z) - a_x(0, y, z)}{l_x} \cdot l_x l_y l_z。$$

同样可以算出，通过垂直于 y 轴的两个面的矢量 a 的通量为

$$a_y(x, l_y, z)\cdot l_x l_z - a_y(x, 0, z)\cdot l_x l_z = \frac{a_y(x, l_y, z) - a_y(x, 0, z)}{l_y} \cdot l_x l_y l_z。$$

通过垂直于 z 轴的两个面的矢量 a 的通量为

$$a_z(x, y, l_z)\cdot l_x l_y - a_z(x, y, 0)\cdot l_x l_y = \frac{a_z(x, y, l_z) - a_z(x, y, 0)}{l_z} \cdot l_x l_y l_z。$$

由此可知，通过整个六面体的矢量 a 的通量，就是上列三式之和，即

$$\oint a\cdot dS = \left[\frac{a_x(l_x, y, z) - a_x(0, y, z)}{l_x} + \frac{a_y(x, l_y, z) - a_y(x, 0, z)}{l_y} + \frac{a_z(x, y, l_z) - a_z(x, y, 0)}{l_z}\right]\cdot l_x l_y l_z。$$

用六面体的体积 $V=l_xl_yl_z$ 去除上式，得

$$\frac{\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}=\frac{a_x(l_x,y,z)-a_x(0,y,z)}{l_x}+\frac{a_y(x,l_y,z)-a_y(x,0,z)}{l_y}$$
$$+\frac{a_z(x,y,l_z)-a_z(x,y,0)}{l_z}。$$

当 $l_x\to 0$，$l_y\to 0$，$l_z\to 0$，$V\to 0$ 时，按照定义散度的 (1-13) 式，上式左边就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$；按照偏导数的定义，上式右边的第一项是 $\frac{\partial a_x}{\partial x}$，第二项是 $\frac{\partial a_y}{\partial y}$，第三项是 $\frac{\partial a_z}{\partial z}$。这样一来，我们就得到了计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度的公式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\qquad(1\text{-}14)$$

计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度的公式 (1-14) 式是在直角坐标系中得出的。采用别的坐标系时，计算有别的形式。例如，在球坐标系中，点的坐标用 (r,θ,α) 表示，如图 1-14 所示。在任一点上，都可以作出一个正交坐标系，它的三个坐标的方向，分别指向三个坐标 r、θ、α 增长的方向。在场中任一点 $(r、\theta、\alpha)$ 的矢量 $\boldsymbol{a}(r,\theta,\alpha)$ 都可以分解为沿这三个坐标的分量 a_r、a_θ、a_α。这时，计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度的公式，就是

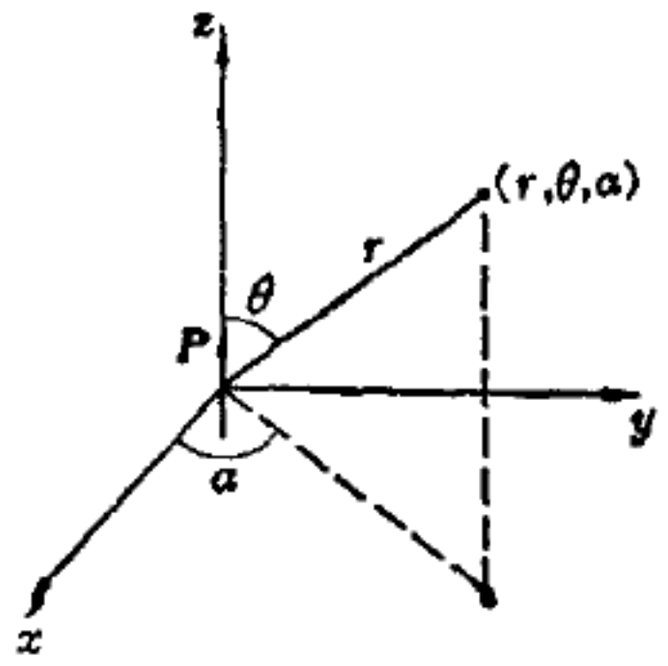


图 1-14

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot a_\theta)$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\alpha}{\partial_\alpha}。$$

有了计算散度的公式，对给定的矢量函数 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$ 的各

分量求偏导数，就可以很容易地算出它的散度。例如：已知

$$\boldsymbol{a}(x,y,z)=bx\boldsymbol{i}+cy\,\mathbf{j}+dz\,\boldsymbol{k},$$

求它的散度。b、c、d 是常数，$\boldsymbol{i}$、$\mathbf{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿 x、y、z 三轴的单位矢量。

这时，$a_x=bx$，$a_y=cy$，$a_j=dz$，它们分别对 x、y、z 的偏导数为

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial a_y}{\partial y}=c,\quad \frac{\partial a_z}{\partial z}=d。$$

因此，在空间任一点，该矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=b+c+d$$

是常数。

习题　点电荷所激发的电场的电场强度的散度，在电荷所在之点以外，处处为 0。

高斯公式　在这里，我们还要从定义散度的(1-13)式，导出一个关于体积积分和面积积分之间的关系的公式

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\cdot dV=\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}\qquad(1\text{-}15)$$

左边的体积积分是对由闭合面 S 包围的体积 V 进行的。右边的面积积分是对包围体积 V 的闭合面 S 进行的。这公式叫做高斯公式。

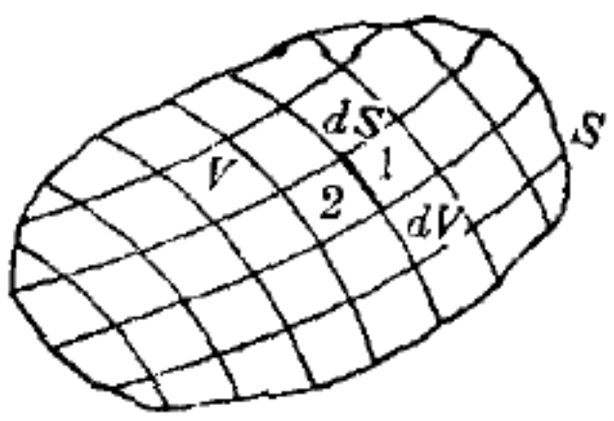


图 1-15

如图(1-15)所示，我们把体积 V 分割成无限多个体积元 dV，把(1-13)式用于这体积元 dV，有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}\cdot dV=\oiint_{\Delta S\to 0}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S},$$

左边是体积元 dV 中的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ 和体积元 dV 的乘积。右边是通过包围这体积元 dV 的闭合曲面 ΔS 的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通

量，积分号边的 $\Delta S\to 0$ 表示这一闭合曲面是无穷小量。我们把上式对所有体积元的贡献迭加起来，即对上式积分，左边就是

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,dV,$$

是体积 V 中各点的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 对整个体积 V 的积分，右边就是

$$\sum \oiint_{\Delta S\to 0} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S},$$

是通过包围诸体积元的闭合面元的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通量的积分。我们注意：内部诸体积元的任一面元 $d\boldsymbol{S}$，都同时是两个相邻体积元的表面，如图 1-15 中用黑线表示的面元 $d\boldsymbol{S}$ 就是体积元 1 和体积元 2 的交界面。因此，在计算通量的积分时，都被计算两次。一次为一体积元的表面，另一次为另一体积元的表面。而且，在作为两个体积元的表面时，其法线方向正好相反。如图 1-15 中黑线表示的面元，作为体积元 1 的表面，其法线方向向左下；作为体积元 2 的表面，其法线方向向右上。所以，一次计算的通量和另一次计算的通量，大小相等，正负号相反，合起来正好为 0。由此可知，上式通量的积分，除包围整个体积 V 的闭合面 S 只被积分一次外，内部的分割界面都被积分两次，贡献为 0。即上式不被抵消而有贡献的通量，只剩下对闭合面 S 的那部分积分，即

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

它等于对散度的体积分

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{V},$$

这就是(1-15)式表示的高斯公式。它是研究矢量场性质的有

力工具。

电场散度 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是描述电场性质的一个矢量，前面对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的论述，如矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度和高斯公式，对于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 也都合适。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的散度，也用

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

定义。它也表示电场中的点的性质。它和激发电场的电荷有紧密的联系，我们把电场的高斯定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1-11}$$

和也适用于电场强度的高斯公式

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}\cdot dV=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-15}$$

联系起来，推知

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}\cdot dV=\frac{Q}{\varepsilon_0}。$$

设想电荷 Q 是以体密度 ρ 分布在体积 V 中的，则

$$Q=\iiint_V \rho\, dV。$$

这样一来，就有

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}\cdot dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

从上式的导出来看，对于积分体积 V 的形状、大小没有限制，即对于任意体积都是成立的。这只当它的被积函数相等时，才会如此。由此可知，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-16}$$

这正是电场散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ 具有的特点。它由同一点的电荷密度 ρ 确定。

界面条件　高斯定理(1-11)式表达了电场中的闭合面上的电通量和面内电荷的关系。公式(1-16)表达了电场中一点的电场散度和点上电荷的关系。高斯定理在一般的物理条件下都是成立的。但是，电场散度(1-16)式，只在介质连续，因而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 连续、可导的那些点上，才是有意义的。在不同介质的交界面上，电场发生突变，不再能用(1-16)式描述，应该怎样描述呢？我们用仍然有效的高斯定理(1-11)式来回答这一问题。如图 1-16 所示。我们在介质 1 和介质 2 的分界面上，截出一个小面元 ΔS。设想电荷是以面密度 σ 分布在交界面上的。在截出的面元 ΔS 上，有电荷 $\sigma\cdot\Delta S$。我们再在截出面元 ΔS 的上下，取同样大小的两个面元，下表面元在介质 1 中，上表面元在介质 2 中，再加上侧面，使它们形成扁平的闭合面，把界面上被截出的面元 ΔS 包围起来。把高斯定理(1-11)式用于这一扁平闭合面。通过这闭合面上表面的电通量为 $\boldsymbol{E}_2\cdot\Delta\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{E}_{2n}\cdot\Delta S$；通过这闭合面下表面的电通量为 $\boldsymbol{E}_1\cdot\Delta\boldsymbol{S}_1=-\boldsymbol{E}_{1n}\cdot\Delta S$（负号是由于下表面法线方向和界面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 相反)；通过这闭合面侧面 $\Delta S'$ 的电通量为 $\boldsymbol{E}_\perp\cdot\Delta S'$，$\boldsymbol{E}_\perp$ 是侧面上电场强度垂直于侧面的平均值。在这闭合面内包含了界面被截面元 ΔS 上的电荷 $\sigma\Delta S$。按高斯定理(1-11)式，应该有

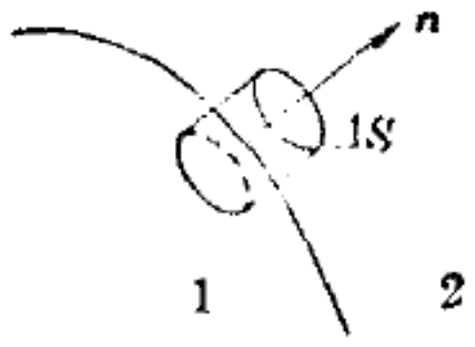


图 1-16

$$\boldsymbol{E}_{2n}\cdot\Delta S-E_{1n}\cdot\Delta S+\boldsymbol{E}_\perp\cdot\Delta S'=\frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0}。$$

当这扁平闭合面的高度趋于 0 时，侧面的面积 $\Delta S'\to 0$，上下表面都趋向界面，上式成为

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1-17}$$

它表明：界面上下电场突变和界面上电荷的相互关系，我们把它叫做界面条件。它是电荷和电场这一基本关系在界面上的反映。

第三节　电场环流　电势梯度

电场环流　高斯定理用电场强度的面积分应该满足的(1-11)式，表明了电场曲面的电通量和电荷的相互关系。现在，我们来论述电场强度的曲线性质和电荷的相互关系。我们知道：电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表示电场对单位电荷的作用力；$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ 表示电场对单位电荷作 $d\boldsymbol{l}$ 位移时所作的功；

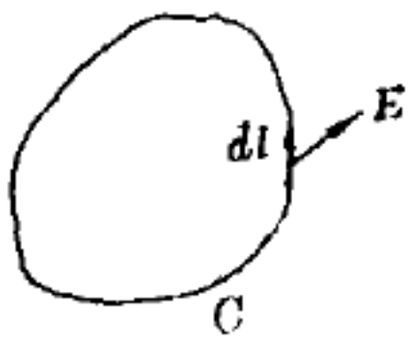


图 1-17

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

是电场中沿任一闭合曲线 C 的线积分（图1-17），表示单位正电荷绕闭合回路一周时电力对它作的功。我们把它叫做电场环流，用它描述电场中曲线的性质。

现在，我们来看看，电场环流具有怎样的特点？前面说到，点电荷激发的电场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1-5}$$

既是计算电场的重要公式，又是研究电场性质的重要基础。现在，我们要用它来论述电场环流的特点。取(1-5)式对闭合回路 C 的积分

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l}}{r^3},$$

如图 1-18 所示。

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l}=rdl\cos\theta=rdr,$$

上式右边的积分

$$\oint\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{l}}{r^3}=\oint\frac{dr}{r^2}=-\oint d\left(\frac{1}{r}\right)=0。$$

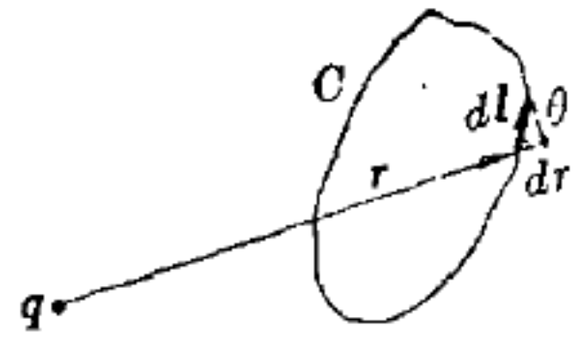


图 1-18

这表明：在点电荷 q 所激发的电场中，沿任一闭合回路的线积分

$$\oint\cdot\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \tag{1-18}$$

由于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 遵从迭加原理，而(1-18)式又是关于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的线性积分方程，也应该遵从迭加原理。由此可知，由点电荷的场导出的(1-18)式，对于多个点电荷的电场，对于任意分布电荷的电场，也应该成立。换句话说，(1-18)式对电荷的电场具有普遍的意义。(1-18)式表明：单位电荷绕闭合回路一周时，电力对它所作的功为 0。由此可知，和引力场相似，电荷的电场也是保守场。

电势 电荷的电场是保守场。电荷电场的保守性质，用(1-18)式描述。现在，我们证明：电荷电场的保守性质，还可以用一个标量函数 $\phi(x,y,z)$ 来表征。我们把这个标量函数叫做电势。图 1-19 表示一个闭合回路 $P_1CP_2C'P_1$，在这个闭合回路上，(1-18)式成立，即

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{P_1(C)}^{P_2(C)}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{P_2(C')}^{P_1(C')}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0。$$

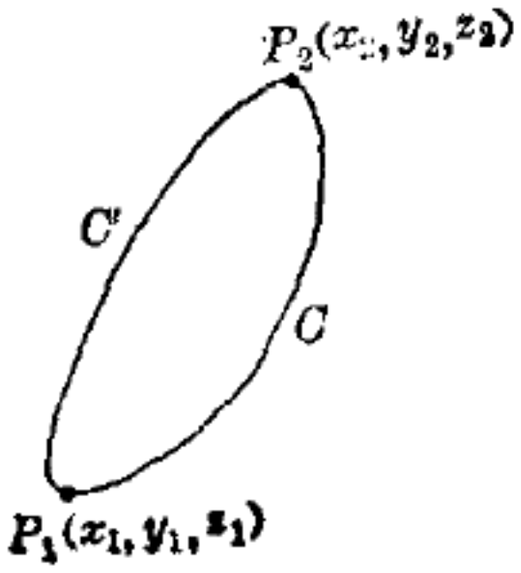


图 1-19

把中间两项的后项，移至等号右边，且改变积分次序，得

$$\int_{P_1(C)}^{P_2(C)}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{P_1(C')}^{P_2(C')}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}。$$

这表明：由 P_1 经 C 到 P_2 的线积分，

和由 P_1 经 C' 到 P_2 的线积分相等。由于 (1-18) 式对于任意闭合回路都成立。如果固定 P_1、P_2 两点，由 P_1 到 P_2 的线积分

$$\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

不管沿什么路径都是一样的。即这个线积分只是始点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和终点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的函数，而和它经由的路径无关。它的物理意义是：在电荷的电场中，电荷由一点移至另一点，电力对它所作之功，只和这两点的位置有关，而和它移动的路径无关。既然，它只是位置的函数，我们就可以用一个位置函数 $\phi(x, y, z)$ 来表示它，并令

$$\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_2, y_2, z_2) \qquad (1\text{-}19)$$

这样引进的函数 $\phi(x, y, z)$ 叫做电势。它和 (1-18) 式一样，描述电荷电场的保守性质。上式表明：单位正电荷由 P_1 点移到 P_2 点，电力对它作的功，等于 P_1 点的电势 $\phi(x_1, y_1, z_1)$ 和 P_2 点的电势 $\phi(x_2, y_2, z_2)$ 之差。从能量守恒和转换定律的观点来看，电力作功，意味着电能的减少，电能转变为其他形式的能量。这样一来

$$\phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_2, y_2, z_2)$$

就表示减少的电能(如果取负值，就表示电能的增加)。由于电场没有变化，这电能只能理解为电荷在电场中具有的能量，我们叫它电势能。因此，$\phi(x, y, z)$ 就是单位电荷在电场中具有的电势能(假定场外电势为 0)。

引进了电势 $\phi(x, y, z)$，并说明了它的意义以后，我们就来论述它的计算方法。在给定电荷分布情况下，怎样计算由它激发的电场的电势呢？(1-19)式既是定义电势的公式，又

是计算电势的基础。(1-19)式确定了电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电势 ϕ 之间的关系。由它就可以从电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的计算方法导出电势 ϕ 的计算方法。我们知道：点电荷 q，在离它为 $\boldsymbol{r}$ 的地方，由它激发的电场的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}。$$

把它代入(1-19)式

$$\phi(P_1)-\phi(P_2)=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{P_1}^{P_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}\cdot d\boldsymbol{l}}{r^3}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)。$$

如图 1-20 所示，r_1、r_2 分别是 P_1 点、P_2 点离开电荷 q 的距离。由上式可以推知

$$\phi(P_1)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}+C;$$

$$\phi(P_2)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2}+C。$$

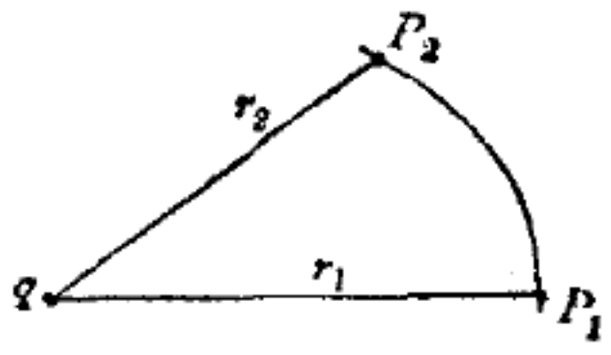


图 1-20

C 是一个与坐标无关的任意常数，通常令它为 0。由此可知：点电荷 q 激发的电场，在离它 r 处的电势

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1-20}$$

由定义电势的(1-19)式可知，电势 ϕ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间是线性关系。既然电场强度 $\boldsymbol{E}$ 遵从迭加原理，那末，电势 ϕ 也遵从迭加原理。多个点电荷的电势就由各个点电荷单独存在时的电势迭加而成。如图 1-21 所示。

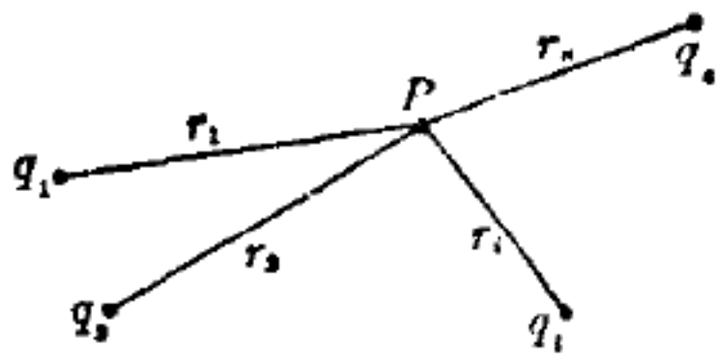


图 1-21

设想有 n 个点电荷，它们的电量分别是 q_1、q_2、$\cdots q_i$、$\cdots q_n$，它们至 $P(x,y,z)$ 点的距离分别是 r_1、r_2、$\cdots\cdots r_i$、$\cdots\cdots r_n$。当它们之中的任一个(如 q_i)单独存在时，在 P 点的电势，按照(1-20)式，就是

$$\phi_i(x,y,z)=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}。$$

当它们都同时存在时，在 P 点的电势，按照迭加原理和上式，就是

$$\phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}。$$

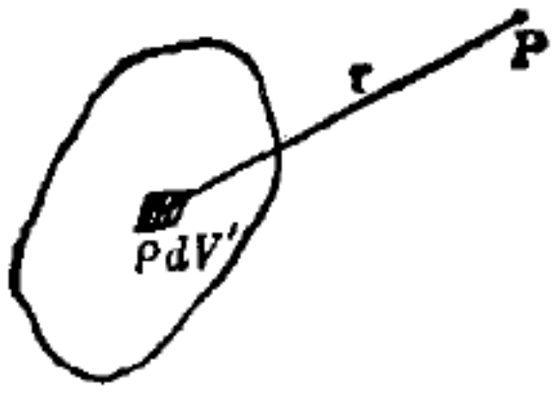


图 1-22

如果电荷系不是由点电荷组成，而是以密度 $\rho(x',y',z')$ 分布在体积 V 中。如图 1-22 所示。我们把这体积微分成无限多体积元 dV'，在这体积元中的电荷 $\rho\,dV'$ 就可以看作是点电荷，它在 P 点的电势就是

$$d\phi=\frac{\rho\,dV'}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

而整个电荷系在 P 点的电势，按照迭加原理和上式，就是

$$\phi(x,y,z)=\iiint_V\frac{\rho(x',y',z')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}。$$

在实用单位制中，电势 ϕ 的单位是伏特，电场强度 E 的单位是伏特/米。

例 作为应用上述方法的例子，我们计算电偶极子的电势。如图 1-23 所示。电偶极子由 $+q$、$-q$ 两电荷组成。它们至 P 点的距离，分别是 r_+ 和 r_-。它们之间的距离为 l，且 $l\ll r$。按照上述方法，它们激发的电场在 P 点的电势为

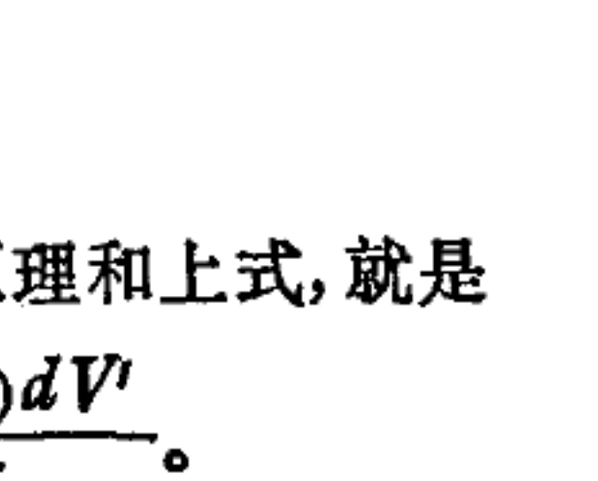


图 1-23

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_- - r_+}{r_+\cdot r_-}。$$

由于假设 $r\gg l$, $r_+\cdot r_-\approx r^2$, $r_- - r_+\approx l\cos\theta$，所以

$$\phi(x,y,z)=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

式中 $\boldsymbol{P}=q\boldsymbol{l}$ 是电偶极子的电偶极矩，P 是它的大小。

电势梯度 定义电势的(1-19)式，表达了电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电势 ϕ 的一种形式的联系。现在，我们利用(1-19)式，来推求电场强度和电势之间的另一种形式的联系。为此，我们把(1-19)式用于如图 1-24 所示的无限接近的两点 $P(x,y,z)$ 和 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$。这两点之间的矢距

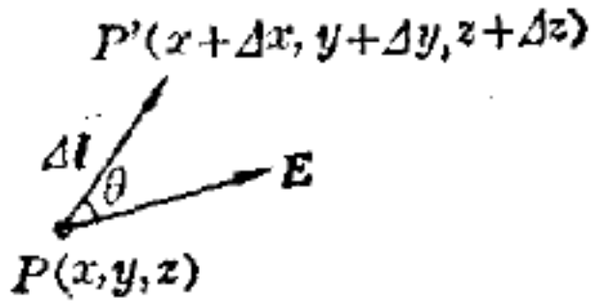


图 1-24

$$\Delta\boldsymbol{l}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}。$$

由于 Δl 很小，在其上各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 近似相等，在其上的线积分就等于

$$\int_P^{P'}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{l}=E\cdot\Delta l\cdot\cos\theta。$$

在 $P(x,y,z)$ 点的电势为 $\phi(x,y,z)$，在 $P'(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ 点的电势为 $\phi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$。这时(1-19)式成为

$$\begin{aligned}E\cdot\Delta l\cdot\cos\theta&=-\phi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)+\phi(x,y,z)\\&=-\Delta\phi,\end{aligned}$$

$$E\cos\theta=-\frac{\Delta\phi}{\Delta l}。$$

在极限情况下，$\Delta l\to 0$，上式右边就趋于电势 ϕ 沿 Δl 方向的方向导数。上式变成

$$E\cos\theta = -\frac{\partial\phi}{\partial l} \tag{1-21}$$

我们暂且把上式搁置不管，来论述一下任一标量函数 $\phi(x,y,z)$ 沿 Δl 方向的方向导数$\frac{\partial\phi}{\partial l}$。从定义来看，方向导数就是函数沿某一方向的增长率。显然，它的大小，不仅和坐标 (x,y,z) 的位置有关，还和求导所取的方向有关。如果函数 ϕ 在一点 (x,y,z) 沿所有方向的方向导数都存在的话。那末，这无穷多个方向导数的大小，一般是彼此不等的，其中必有一个最大。换句话说，在一定点(x,y,z)，必有一个方向，函数 $\phi(x,y,z)$沿这方向的导数取最大值。我们用一矢量来描述标量 ϕ 场的这一特点。而且规定：这矢量的方向表示函数 ϕ 的导数取最大值的方向；这矢量的大小表示函数 ϕ 的最大导数值。用符号 $\mathrm{grad}\,\phi$ 表示这一矢量，并把它叫做函数 ϕ 的梯度。

我们再来看看(1-21)式的意义。在一定点，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向是一定的。$\frac{\partial\phi}{\partial l}$是函数 ϕ 沿 Δl 方向的导数的大小，θ 是求导方向和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向之间的夹角。(1-21) 式表示出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向与电势 ϕ 的方向导数的大小和方向之间的相互关系。按照上面的论述，电势 ϕ 的方向导数，应该有一个最大值，从(1-21) 式来看，$\theta=\pi$，$\cos\theta=-1$ 时，电势 ϕ 的方向导数取最大值，且

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = E。$$

这就表明：电势 ϕ 的方向导数取最大值的方向，即电势梯度 $\mathrm{grad}\,\phi$ 的方向，和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向相反；电势 ϕ 的最大导

数值，即电势梯度 gard ϕ 的大小等于电场强度 E。

$$E=-\mathrm{grad}\phi \tag{1-22}$$

它表示一点电场强度 E 和该点的电势 ϕ 之间的紧密关系。

现在，我们要导出梯度的计算公式。简单起见，我们利用(1-21)式来导出这一公式。在直角坐标中

$$E=E_x i+E_y j+E_z k。$$

如果对电势 ϕ 沿 x 轴方向求导$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$，那末，电场强度 E 的方向和求导方向的夹角 θ，就是电场强度 E 和 x 轴之间的夹角，且

$$E\cos\theta=E_x。$$

这时，(1-21)式就成为

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}。$$

同理，由(1-21)式可得

$$E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y};\qquad E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}。$$

把它们代入(1-22)式，得

$$\mathrm{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\frac{\partial\phi}{\partial y}j+\frac{\partial\phi}{\partial z}k \tag{1-23}$$

这就是计算任一标量函数 ϕ 的梯度的公式，也是计算电势梯度的公式。

这公式是在直角坐标中导出的。在其他坐标系中，计算梯度的公式有别的形式。例如，在球坐标系中，计算梯度的公式是

$$\mathrm{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}e_\alpha$$

e_r、e_θ、e_α 是沿 r、θ、α 增长方向的单位矢量。

例 计算电偶极子的电场的问题，在电磁理论中，具有重大的实际意义。在第一节中，我们计算了电偶极子在其偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的延长线上的电场强度。结果指出：在离它 r 处的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{2\boldsymbol{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}。$$

在前面，我们又计算了电偶极子在任一点的电势。结果指出：在离它 r 处的电势

$$\phi=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}。$$

现在，我们计算它的电势梯度，进而按(1-22)式计算它在各点的电场强度。将上式对 x 求导

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{P_x}{r^3}-3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\frac{x}{r^5}\right]。$$

同理，对 y、对 z 求导，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{P_y}{r^3}-3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\frac{y}{r^5}\right];$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{P_z}{r^3}-3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\frac{z}{r^5}\right]。$$

由此可知电势梯度，因而电场强度

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{P}}{r^3}\right]。$$

习题 1 求标量场 $\phi=xyz$，在 $P(1,1,1)$点、沿 $\boldsymbol{l}(2,-1,3)$ 方向的方向导数和梯度。

习题 2 已知点电荷在离它 r 处的电势 $\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，求它的梯度。

第四节　电流和磁场

我们已论述了电荷和电场的基本关系，以及由这基本关系决定的电场性质。现在，开始论述电流和磁场的基本关系，以及由它决定的磁场性质。首先，我们介绍电流的描述方式，以及反映电荷和电流基本关系的电荷守恒定律。

电流密度　电荷运动的情况，一般用电流强度 I 描述。电流强度 I 的定义是

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1-24}$$

ΔQ 是在 Δt 时间内通过某一截面 S 的电量。时间 t 的单位是秒，电量 Q 的单位是库仑，电流强度 I 的单位是安培。在场论中，我们需要探讨的常常是场中逐点的性质。电流强度 I 描述的，是在一截面附近电荷流动的情况，而不是一点附近电荷流动的情况。而且，它只给出了电荷流动的数量，却没有指出电荷流动的方向。为了描述电荷在场中各点流动的情况，我们引入电流密度矢量 j。它的方向表示电荷在该点流动的方向。它的大小

$$j=\lim_{\Delta S_0\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta S_0}=\lim_{\substack{\Delta S_0\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\Delta^2 Q}{\Delta S_0\Delta t} \tag{1-25}$$

式中，ΔS_0 是垂直于电流流动方向的面积元，ΔI 是通过这一面积元 ΔS_0 的电流强度。如果面元 ΔS 不和电流流动方向垂直。如图 1-25 所示。它的法线方向 n 和 j 有一夹角 θ，且

$$\Delta S_0=\Delta S\cos\theta。$$

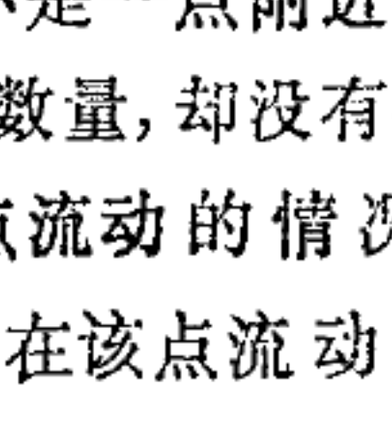


图 1-25

那末，通过面元 ΔS 和通过面元 ΔS_0 的电

流强度一样，都是 ΔI。而且，按照定义电流密度的(1-25)式，有

$$\Delta I = j \Delta S_0 = j \Delta S \cos\theta = \boldsymbol{j} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}25)'$$

的关系，这是定义电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的又一公式。

电荷守恒定律　电荷和电流是紧密相关的。通常，我们用电荷密度 ρ 表示电荷在空间分布的情况，用电流密度 $\boldsymbol{j}$ 描述电荷运动的特点。它们之间是怎样相互依存的呢？如果，空间某点的电荷运动的速度是 $\boldsymbol{u}$，以 $\boldsymbol{u}$ 为高，以垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的单位面积为底作一柱体。如图 1-26 所示。那末，某时刻，在柱体中的电荷 $\rho \boldsymbol{u}$，在 1 秒钟内，都通过柱体的单位底面；在柱体外的电荷，都不能在这 1 秒钟内通过这一单位底面。由此可知，单位时间，通过垂直电流方向的单位面积的电荷为 $\rho \boldsymbol{u}$。按照电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的定义，这就是电流密度。即

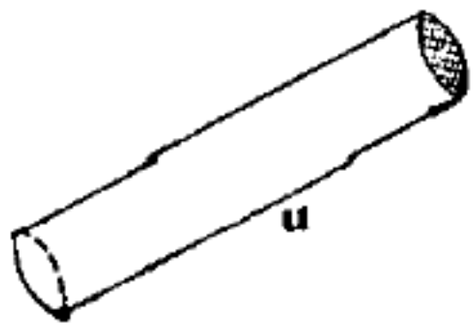


图 1-26

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{u} \qquad (1\text{-}26)$$

这表明了电荷密度和电流密度之间的基本关系。这关系，对于任何密度和相应的流密度都成立。在物理学中，它具有重要的、普遍的意义。

实验表明：电荷是守恒的，尽管，电荷可以由一个地方流动到另一个地方，可以从一个物体转移到另一个物体。但是，它们既不能产生，也不能消灭，它们的代数和是守恒不变的。电荷守恒定律，在现代物理学中，被认为是一条精确度很高的定律。用怎样的数学公式来表示这一定律呢？

为了导出表示电荷守恒定律的数学公式，我们讨论：在一闭合面 S 所包围的体积 V 中，电荷运动变化的情况。如图 1-27 所示。单位时间，通过面元 dS，由体积 V 中流出的电量，

按照(1-25)′式，等于

$$\mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

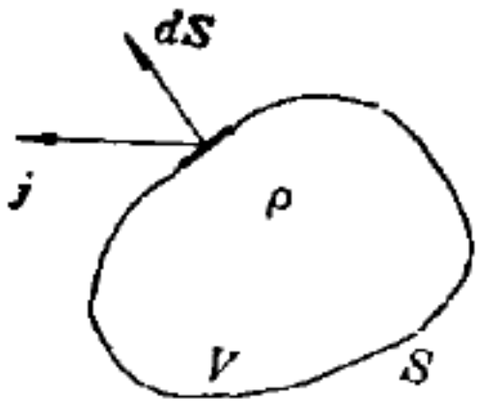


图 1--27

单位时间，通过闭合面 S，由体积 V 中流出的电量，就是上式对闭合面 S 的积分，即

$$\oiint_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

(如果为负，就是流入的电量)。设体积 V 中的电荷 Q 以密度 ρ 分布，单位时间，体积 V 中增加的电量，就是

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV。$$

(如果为负值，就是减少的电量)。按照电荷守恒定律，单位时间由体积 V 中流出的电量，应该等于同时间内体积 V 中电量的减少。即

$$\oiint_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S}=-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV \tag{1-27}$$

这就是电荷守恒定律的数学表达式，它表示在一有限空间流动变化的电荷应该遵守的规律。

利用矢量 $\boldsymbol{a}$ 的高斯公式(1-15)式

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{V}=\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$$

我们可以由 (1-27) 式导出电荷守恒定律的另一数学表达式。以电流密度 $\mathbf{j}$ 代替(1-15)式中的矢量 $\boldsymbol{a}$，就有

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV=\oiint_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{S},$$

和(1-27)式比较，得

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{j}\cdot dV=-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV。$$

对于任意的体积 V，上式都成立，这只在被积函数相等时才可能。所以

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1-28}$$

这表示：在空间一点，电荷流动变化时，应该遵守的电荷守恒定律。人们常常把(1-28)式叫做连续性方程。

磁感应强度　上面说的是电荷流动、变化的特点和规律。现在，我们来论述磁场的特点，及其描述方式。电场的基本特点，是能对电荷施以力的作用，我们用电场强度描述电场的这一性质。磁场的基本特点，是能对电流发生作用，我们用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述磁场的这一性质。

怎样定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 呢？能不能用磁场对电流的作用力来定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 呢？为了回答这些问题，我们用强度为 I、长度为 dl 的电流元 Idl，来探测磁场对电流作用的特点和规律。我们发现：把电流元 Idl 放在磁场中 P 点，磁场对它的作用力 $\boldsymbol{f}$ 的大小和方向，不仅因电流元 Idl 的大小不同而不同，也因电流元 Idl 所取的方向不同而异。这表明：磁场对电流的作用力 $\boldsymbol{f}$，不仅和磁场有关，也和电流有关。因此，不能用它来描述磁场固有的性质，不能用它来定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。进一步的研究发现：在磁场中任一点 P，总存在一个特殊方位，如图 1-28 中，OO' 线所示的方位。不管用怎样大小的电流元 Idl，只要它的方向沿着这一方位时，磁场对它的作用力就一定等于 0；当它的方向垂直这一方位时，磁场对它的作用力最大，等于 f_M；当它的方向沿别的方向时，磁场对它的作用力 f 在 0 与 f_M 之间。这方位，和

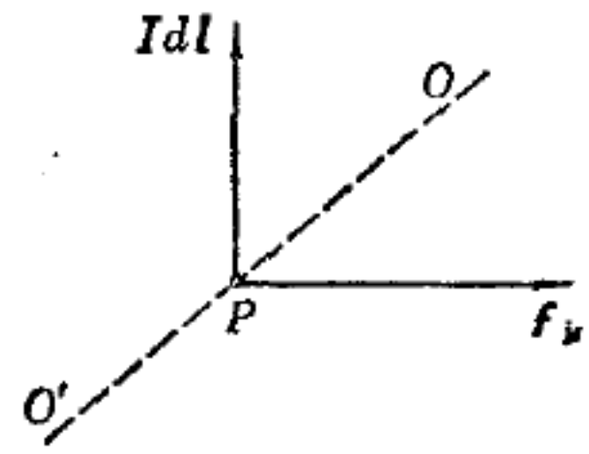


图 1-28

电流元无关，完全由磁场的固有性质确定，可以用来表示磁场的特点，可以用来定义磁感应强度 B 的方向。进一步的研究还发现：对于不同大小的电流元 Idl，它们在垂直于这一方位时，虽然受到的最大磁力 f_M 的大小不一样。但是，任一电流元 Idl 受到的最大磁力 f_M，和该电流元 Idl 之比 $\frac{f_M}{Idl}$，却是与电流元 Idl 无关的常数，完全由磁场的固有性质确定。因此，可以用来描述磁场，可以用来定义磁感应强度的大小，即令

$$B=\frac{f_M}{Idl} \tag{1-29}$$

磁场的特殊方位，如图 1-28 中的 OO' 线表示的方位，有两个方向。我们取如图 1-29 所示的方向，来定义磁感应强度 B 的方向。即令 Idl、B、f_M 构成右螺旋。

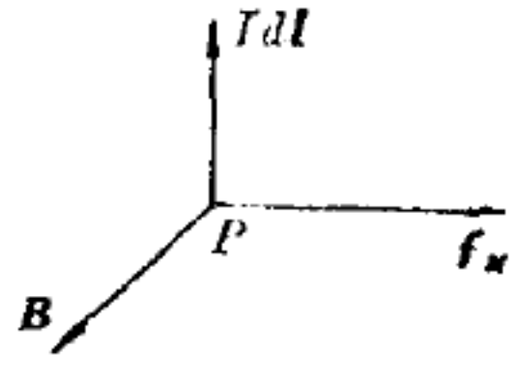


图 1-29

洛仑兹力　在研究电荷和电场的关系时，碰到两个方面的问题。一是电场对电荷的作用问题；二是电荷激发电场的问题。同样，在研究电流和磁场的关系时，也碰到两个方面的问题。一是磁场对电流的作用问题，二是电流激发磁场的问题。对于电荷和电场，由于有库仑实验定律，问题解决得比较顺利。但是，对于电流和磁场，由于问题本身的复杂性，不存在象库仑定律那样的实验定律，解决起来就困难多了。

关于磁场对电流的作用问题，在磁感应强度 B 的定义中，只部分地解决了。由磁感应强度 B 的定义可知：在给定的磁场中，当电流元 Idl 的方向和磁感应强度 B 的方向平行时，磁场对电流元 Idl 的作用力为 0；当电流元 Idl 的方向和磁感应强度 B 的方向垂直时，磁场对电流元 Idl 的作用力的大

小

$$df = B \cdot Idl,$$

而方向如图 1-29 所示。当电流元 Idl 的方向和磁感应强度 B 的方向成任意角度时，磁场对电流元 Idl 的作用力 df 的大小方向，在上述的磁感应强度 B 的定义中，没有给出明确的答案。人们在进一步的研究中发现：在磁感应强度为 B 的磁场中，电流元 Idl 受到的作用力

$$d\boldsymbol{f} = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \qquad (1\text{-}30)$$

这是表示磁场对电流作用的基本公式。上述的两种情况：$Idl \parallel B$ 时，$df=0$；$Idl \perp B$ 时，$df=IdlB$，是(1-30)式的特例，并包含在(1-30)式之中。人们常常把(1-30)式作为磁感应强度 B 的定义。在(1-30)式中，作用力 f 的单位是牛顿，长度 l 的单位是米，电流强度 I 的单位是安培，磁感应强度 B 的单位是韦伯/米^2。而且，1 韦伯/米^2 $=10^4$ 高斯。

导体中的电流是由其内部电荷的运动形成的。磁场对载流导体的作用，是由磁场对其内部运动电荷的作用而来的。按照这种观点和上述的(1-30)式，可以推知磁场对单个运动电荷的作用力。为此，我们讨论如图 1-30 所示的一段导体。它的长度为 dl，横截面为 S，电流强度为 I。按照(1-30)式，这段导体在磁感应强度为 B 的磁场中，受到磁场对它的作用力

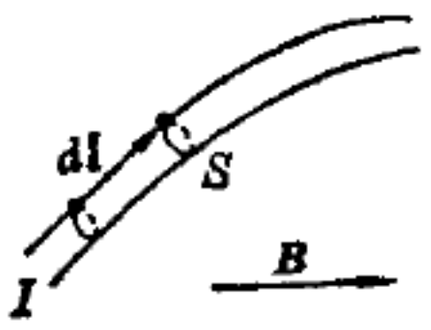


图 1-30

$$d\boldsymbol{f} = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B},$$

设想导体中带电粒子的密度为 n。那末，在这段体积为 $dV=Sdl$ 的导体中，就有 $nSdl$ 个带电粒子。如果每个粒子所带电量为 q，并以速度 v 运动。那末，导体中的电荷密度等于 qn，电流密度等于 qnv，通过垂直于它的截面 S 的电流强度，

就是

$$I=qnvS。$$

把它代入上式，得知磁场对这段导体的作用力

$$d\boldsymbol{f}=qnv\,Sd\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}。$$

按照上述的观点，这力是作用在 $nSdl$ 个带电粒子上的。用 $nSdl$ 除上式，就得到作用在单个电荷上的力

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{nSdl}=\frac{qnvSd\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}}{nSdi}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}。$$

这表明：磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的磁场，对电量为 q、以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的粒子的作用力为

$$\boldsymbol{f}=q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1-31}$$

这力叫做洛仑兹力。由(1-31)式可知，洛仑兹力 $\boldsymbol{f}$ 的方向，既垂直于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，也垂直于电荷运动的速度 $\boldsymbol{v}$。因此，洛仑兹力的作用，不对运动电荷作功，只使电荷绕以 $\boldsymbol{B}$ 方向为轴的轴线弯转。如图 1-31 所示，如果磁场 $\boldsymbol{B}$ 具有轴对称性，磁力 $\boldsymbol{f}$ 将使电荷作圆周运动。在高能加速器的设计等现代工程技术中，正是利用了洛仑兹力的这些特点。人们也利用洛仑力公式(1-31)式，作为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义。

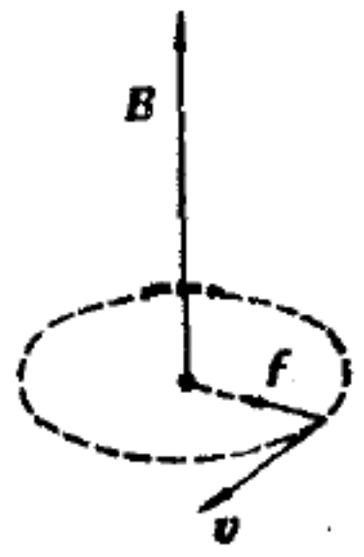


图 1-31

电流磁场　电流和磁场的关系，除了磁场对电流的作用以外，还有电流激发磁场的问题。磁场对电流作用的问题，已在上面解决。电流激发磁场的问题，怎样解决呢？实验上，直接确定，类似库仑定律那样的、电流之间的作用定律，是不可能的。因而，解决电流激发磁场的问题，就显得复杂，但是，历史总是不断前进的，科学难关一个个被攻破。这一问题，经过人们的艰苦努力，分析了多种多样的电流间的相互作用以

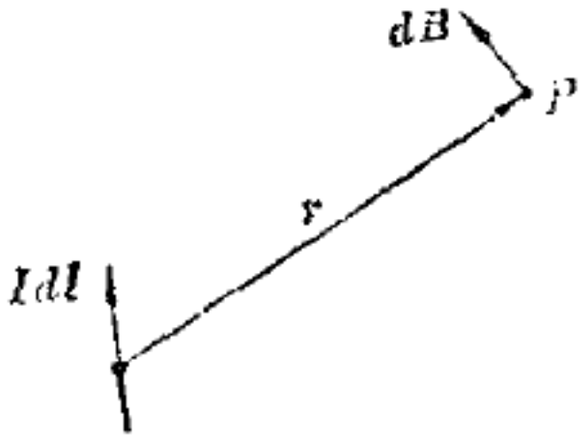


图 1-32

后，也顺利地解决了。在1820年得出了一个叫做毕奥-沙伐尔-拉普拉斯的定律，简称毕-沙-拉定律。它指出：强度为 I、长度为 dl 的电流元 Idl，在离它为 r 的 P 点，如图 1-32 所示，激发的磁场的磁感应强度，为

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\times r}{r^3} \tag{1-32}$$

式中，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 韦伯/米·安培，叫做真空导磁系数。

毕-沙-拉公式(1-32)式，是计算电流激发磁场的基础，也是分析电流磁场性质的基础。对于实际的电流分布所激发的磁场，按照迭加原理，可以看作是无限多个电流元 Idl 按(1-32)式激发的磁场的迭加，即是(1-32)式的积分

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{Idl\times r}{r^3} \tag{1-33}$$

例　应用(1-33)式计算长直电流激发的磁场。如图 1-33 所示。通有电流强度为 I 的长直导线。当计算磁场的点，离它的距离 a 远小于它的长度时，这导线可以看作是无限长的。导线上任一段电流元 Idl，在 P 点激发的磁场，按(1-32)式，方向都垂直于纸面向后，

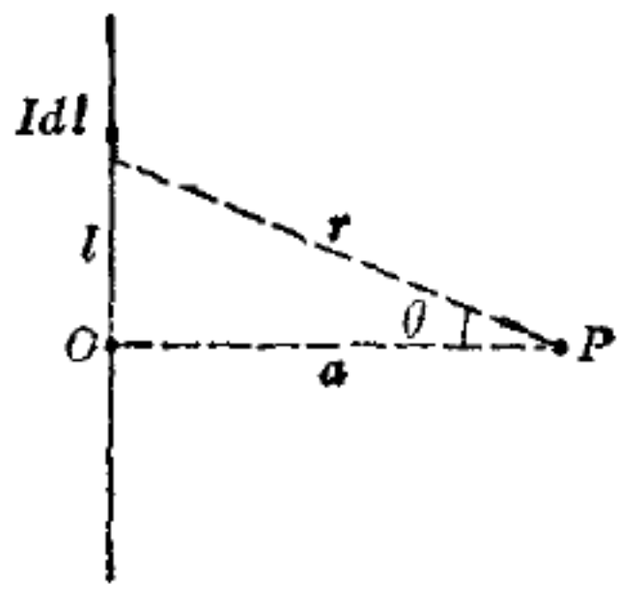


图 1-33

$$dB=\frac{\mu_0 Idl\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{4\pi r^2},$$

整个导线电流激发的磁场，按(1-33)式，方向也是垂直于纸面向后，大小就是上式的积分，即

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{r^2}。$$

由于 $l=a\tan\theta$，$dl=\frac{q}{\cos^2\theta}d\theta$，$r=\frac{a}{\cos\theta}$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，

上式可改写为

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tag{1-34}$$

这就是长直电流激发的磁场，和电流强度 I 成正比，和距离 a 成反比。

习题 计算电流强度为 I、半径为 a 的环形电流，在环心一点所激发的磁场。

第五节 磁场环流 旋度 磁荷

磁场环流 毕-沙-拉定律是我们计算电流磁场的基础，也是进一步讨论电流磁场性质的基础。从几何学的观点来看，磁场是具有特殊性质的空间，它的性质表现在场中曲面上、曲线上或者点上。因此，和电场情况相似，我们也讨论磁场中曲面上、曲线上和点上的性质。讨论磁场的性质，可以从毕-沙-拉公式出发，用比较严格的数学方法进行。这里，我们用比较简便的方法进行。首先，我们论述表示磁场曲线性质的安培周路公式

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I \tag{1-35}$$

上式左边是：在磁场中，沿着闭合曲线 l 的，对磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的线积分，叫做沿闭合曲线 l 的、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的环流。或者简称磁场环流。如图 1-34 所示。右边的 I，是通过由闭合曲线 l 包围的面积 S 的电流强度，μ_0 是真空导磁系数。这个公式，以积分方程的形式，描述了电流和磁场在一有限

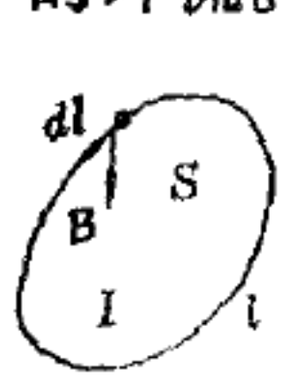


图 1-34

区域中的关系。这个区域，由磁场中的任一闭合曲线 l，和它所包围的面积 S 构成。不管这个区域以外的电流和磁场怎样，也不管电流强度 I 是怎样通过 S 面的，电流和磁场在这区域中的关系，总由(1-35)式决定。

现在，我们用 (1-34) 式来证明安培周路公式。即证明：由长直导线电流激发的磁场，具有如安培周路公式所描述的性质。如图 1-35 所示，设想长直电流 I 垂直纸面向前，用⊙表示。由(1-34)式可知，长直导线电流 I，在离它 r 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小

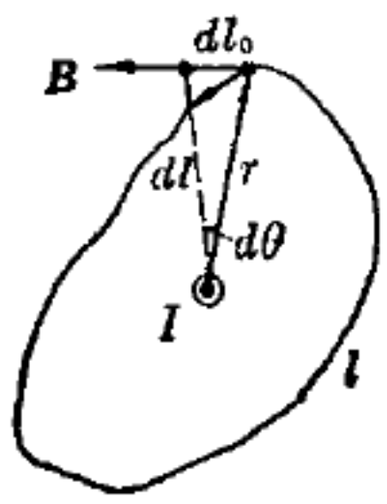


图 1-35

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

它的方向与 r 垂直。在闭合曲线 l 上的磁场的环流为

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint B dl_0=\oint \frac{\mu_0 I dl_0}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint \frac{dl_0}{r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\theta。$$

式中，dl_0 是 $d\boldsymbol{l}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 方向上的分量，且等于 $rd\theta$。在闭合曲线 l 包围的曲面 S 由长直导线通过时，如图 1-34 的情况

$$\oint d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta=2\pi;$$

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I。$$

这正是有电流强度 I 通过闭合曲线所围曲面的安培周路公式。在长直导线电流不通过闭合曲线所围曲面时，

$$\oint d\theta=\int_0^0 d\theta=0;$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=0。$$

这正是没有电流通过闭合曲线所围曲面时的安培周路公式。

这样，我们就证明了：对于长直导线电流的磁场，安培周路公式是正确的。

实际上，安培周路公式，不仅对于长直导线电流的磁场是正确的，对于任意分布的稳定电流的磁场都是正确的。它的正确性得到了理论上和实践上的证明，这种一般性的证明，这里从略。

矢量旋度　前面说到，磁场环流

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$$

可以用来描述磁场中曲线的性质。实际上，对于任一个用矢量 $\boldsymbol{a}$ 表示点的性质的场，我们都可以用该矢量 $\boldsymbol{a}$ 的环流

$$\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

来描述该矢量场中曲线的性质。当这闭合曲线 l 收缩到一点时，这闭合曲线所围面积 $\Delta S\to 0$，该矢量环流也趋于0。但是，矢量环流和面积之比却趋于有限，即

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

存在。显然，这极限的大小，不仅和极限所趋之点的位置有关，也和 ΔS 面元法线的方向 $\boldsymbol{n}$ 有关。换句话说，上列极限，既是点的坐标 (x,y,z) 的函数，又是面元 ΔS 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的函数。对于一个确定点 (x,y,z) 来说，上列极限的大小，因法线 $\boldsymbol{n}$ 的不同而异。在一定点，$\boldsymbol{n}$ 可取无穷多种方向，极限大小也有无穷多种可能。在这无穷多种的可能性中，必然存在一个法线方向，使上式极限有最大值。这个法线方向和相应的最大极限值，完全由场在该点的性质确定，可以用来描述场在该点的性质。我们用一个矢量来表示，并把它叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 的

旋度，用符号 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 记它。如果用 $\boldsymbol{n}_0$ 和 ΔS_0 表示使上列极限取最大值时的面元法线方向和面元的大小。那末，就有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta S_0\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_0}\cdot\boldsymbol{n}_0 \tag{1-36}$$

这就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度的定义。

当面元 ΔS 的法线，不是 $\boldsymbol{n}_0$，而是 $\boldsymbol{n}$ 时，上列极限小于旋度的大小，且

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\lim_{\Delta S_0\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_0}(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n} \tag{1-37}$$

这是由于 $\Delta S_0=\Delta S\cdot\cos\theta=\Delta S\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0)$ 的缘故。θ 是 ΔS 的法线 $\boldsymbol{n}$ 和 ΔS_0 的法线 $\boldsymbol{n}_0$ 之间的夹角。这表明：当面元 ΔS 的法线为 $\boldsymbol{n}$ 时，上列极限的大小，等于矢量旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在法线 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影，即分量。

怎样计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度呢？既然，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 也是一个矢量。那末，在直角坐标 $Oxyz$ 中，它就有三个分量。我们用 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_x$、$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_y$、$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z$ 表示这三个分量，则

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_x\cdot\boldsymbol{i}+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_y\cdot\boldsymbol{j}+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z\cdot\boldsymbol{k}$$

如果知道了这三个分量，就可以按上式写出旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 的分量表达式，还可以按照公式

$$|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_x^2+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_y^2+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z^2}$$

$$\boldsymbol{n}_0=\frac{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_x}{|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i}+\frac{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_y}{|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j}+\frac{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z}{|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{k}$$

算出旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 的大小 $|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|$ 和方向 $\boldsymbol{n}_0$。

从上一段的论述可知，计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\mathrm{not}\,\boldsymbol{a}$ 的问题，就转化为计算旋度分量的问题。而计算分量，如计算 z 分量

$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_n$，就是在一点如 $A(x,y,z)$ 附近取一法线方向平行于 z 轴的平面 ΔS，计算极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

的大小。线积分是沿着包围 ΔS 的闭合曲线进行的，我们取如图 1-36 所示的平面 $ABCD$。这平面的面积

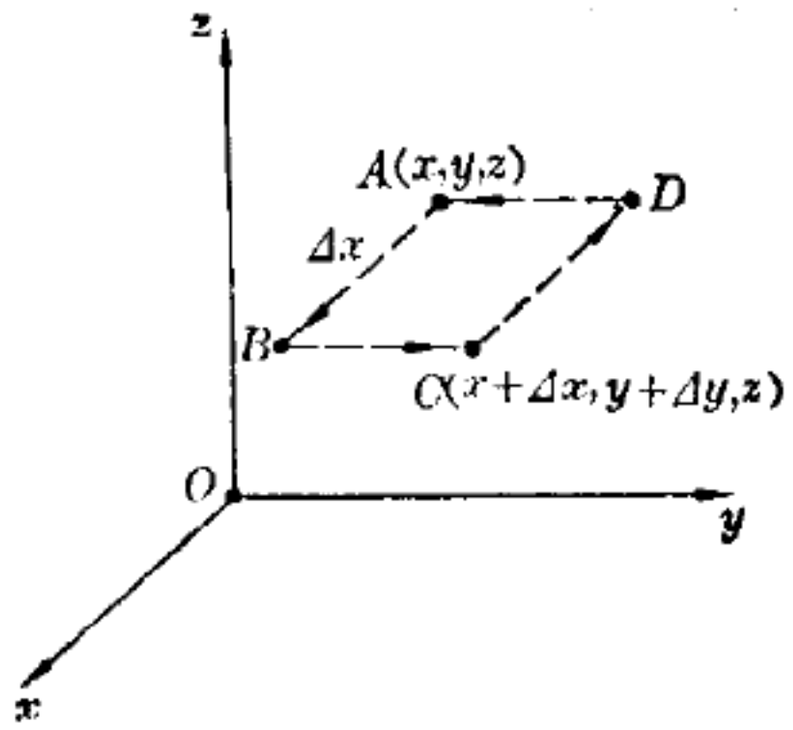


图 1-36

$$\Delta S=\Delta x\cdot\Delta y,$$

如果 Δx、Δy 取得足够小，在各直线上矢量 $\boldsymbol{a}$ 近似不变。因而，在 AB 线上的线积分

$$\int_A^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=a_x(x,y,z)\cdot\Delta x;$$

在 BC 线上的线积分

$$\int_B^C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=a_y(x+\Delta x,y,z)\cdot\Delta y;$$

在 CD 线上的线积分

$$\int_C^D \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=-a_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x;$$

在 DA 线上的线积分

$$\int_D^A \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=-a_y(x,y,z)\Delta y;$$

在整个矩形闭合线路的线积分，即矢量 $\boldsymbol{a}$ 的环流

$$\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=[a_y(x+\Delta x,y,z)-a_y(x,y,z)]\Delta y$$
$$-[a_x(x,y+\Delta y,z)-a_x(x,y,z)]\Delta x,$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 的沿 z 轴方向的分量，就是

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta x\cdot \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[\frac{a_y(x+\Delta x, y, z) - a_y(x, y, z)}{\Delta x} \right.$$

$$\left. - \frac{a_x(x, y+\Delta y, z) - a_x(x, y, z)}{\Delta y} \right]。$$

按照导数的定义，上式右边两项，分别是 a_y 对 x 的偏导数 $\frac{\partial a_y}{\partial x}$，和 a_x 对 y 的偏导数 $\frac{\partial a_x}{\partial y}$。所以

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}。$$

用同样的方法，可以算出旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 沿 x 轴的分量和沿 y 轴的分量。结果可以从上式中的 x、y、z 轮换推出：

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};\quad (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}。$$

这样一来，我们就得到计算旋度的公式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) j$$

$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) k \qquad (1\text{-}38)$$

这公式是在直角坐标系 $Oxyz$ 中给出的。在别的坐标系中，计算旋度的公式，有别的形式。例如，在球坐标系中，计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度的公式为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ (\sin\theta\cdot a_\alpha)-\frac{\partial x_\theta}{\partial x}\right]\boldsymbol{e}_r$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial x_r}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial r}(r a_\alpha)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\ (r a_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\alpha。$$

例 已知矢量场 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=y\,\boldsymbol{i}+z\,\boldsymbol{j}+x\,\boldsymbol{k}$，求它的旋度。

解: $\because\quad a_x=y,\quad a_y=z,\quad a_z=x。$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=1,\frac{\partial a_x}{\partial z}=0;\ \frac{\partial a_y}{\partial x}=0,\frac{\partial a_y}{\partial z}=1;\ \frac{\partial a_z}{\partial x}=1,\frac{\partial a_z}{\partial y}=0。$$

$$\therefore\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})。$$

这旋度的大小和方向为

$$|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$
$$\boldsymbol{n}_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}。$$

习题 点电荷 q 在离它 r 处的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\ 。$$

证明：在它所在点以外的空间，它的旋度为 0。

斯托克斯公式 在这里，我们还要利用(1-37)式，导出一个联系矢量 $\boldsymbol{a}$ 的线积分和面积分的斯托克斯公式。

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S}\qquad(1\text{-}39)$$

l 是包围曲面 S 的闭合曲线，S 是由闭合曲线 l 包围的曲面。如图 1-37 所示。为了导出这一公式，我们把曲面 S 分割成无限多个小面元 dS。把 (1-37) 式用于这些小面元，则有

图 1-87

$$\oint_{C\to 0} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S}$$

上式左边的线积分是对包围 $d\boldsymbol{S}$ 面元的闭合曲线 C 进行的。因为它是一小量，所以以 $C\to 0$ 表示。对于图 1-36 中的任一小面元，都可以写下一个如上所述的公式。然后，我们把这些公式加起来，即对上式积分。显然，上式右端的积分就是

$$\iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S}_\circ$$

对上式左端取积分时，应该注意：内部的任一分割线，都是两个相邻面元的周界，如图 1-36 中的粗线就是面元 1 和面元 2 的共同边界线。在积分时，按照周界和面元法线构成右螺旋系统的规则，同一线段作为一个面元的周界有一方向，作为另一个面元的周界就取相反方向。这样，内部的任一分割线，都被积分两次，而一次的积分值被另一次的积分值抵消。未被抵消的只剩下沿包围曲面 S 的闭合曲线 l 的积分，即

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}_\circ$$

这就证明了：斯托克斯公式

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S}$$

是正确的。

磁场旋度 斯托克斯公式对于任意的连续、可导的矢量场，都是正确的。当然，对于磁场，在没有突变的介质的地方，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也不发生突变，而是位置 (x, y, z) 的连续、可导函数，斯托克斯公式也是成立的。即有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}_\circ$$

另一方面，在电流以密度 $\boldsymbol{j}$ 连续分布的地方，安培周路公式

(1-35)式，有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I=\mu_0\iint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

比较以上两式可知

$$\iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0\iint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

此式与 S 的形状、大小无关，故被积函数必须相等，

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (1\text{-}40)$$

这表明电流磁场的特殊性质：一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$，和只和该点的电流密度 $\boldsymbol{j}$ 成正比关系。

界面条件　公式(1-40)指出在磁场连续、可导的那些点上，磁感应强度和电流密度的关系。在没有介质分界面的那些地方，磁场才是连续、可导的，才可以用(1-40)式描述磁场和电流的关系。在不同介质的分界面上，磁场发生突变，(1-40)式没有意义。应该用怎样的公式描述磁场的突变性质呢?

在介质的分界面上，(1-40)式失去意义，安培周路公式

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I$$

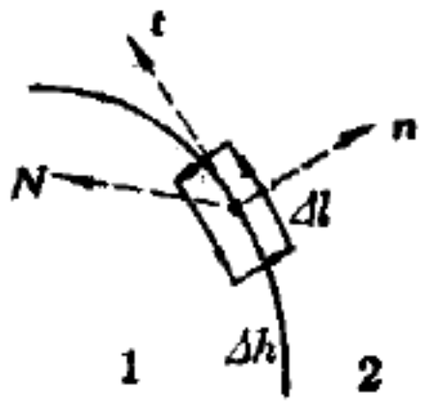


图 1-38

仍然是成立的，我们由它导出描述磁场突变性质的界面条件。如图 1-38 所示，在介质 1 和介质 2 的分界面上一点，作一正交坐标：$\boldsymbol{n}$ 表示分界面的法线，$\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{N}$ 表示分界面的两条切线。在 n、t 平面内，取一长为 Δl、高为 Δh 的矩形闭合线框。设想分界面上面电流密度（即单位时间流过垂直于它的单位线段的电量）为 i。那末，通过这线框所围面积的电流强度为

$$I=i_N\cdot\Delta l,$$

i_N 表示 i 在 N 方向的分量。N 也是线框面法线的方向。而磁感应强度 B 在这矩形周线上的线积分：在矩形顶上的长线上为 $B_{2t}\cdot\Delta l$；在底下的长线上为 $-B_{1t}\cdot\Delta l$，负号是由于积分方向和切线 t 的方向相反；在高度线上为 $2B_h\cdot\Delta h$。B_{2t}、B_{1t} 是介质 2、介质 1 中磁感应强度 B 的切向分量，B_h 是磁感应强度 B 沿 Δh 的分量平均值。按照安培周路公式，有

$$B_{2t}\cdot\Delta l-B_{1t}\cdot\Delta l+2B_h\cdot\Delta h=\mu_0 i_N\cdot\Delta l。$$

当线框高度 $\Delta h\to 0$ 时，矩形上顶和下底都趋向分界面，B_{2t} 就是邻近分界面的介质 2 中磁感应强度 B 的切向分量，B_{1t} 就是邻近分界面的介质 1 中磁感应强度 B 的切向分量，上式就成为

$$B_{2t}-B_{1t}=\mu_0 i_N \tag{1-41}$$

这就是在介质分界面上，描述磁场突变的界面条件。它反映磁场突变和面电流的紧密联系。

磁荷　在前面的论述中，我们的基本观点是：激发电场的是电荷；激发磁场的是电流。而且，电荷和电场之间，有

$$\oiint E\cdot dS=\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{div}E=\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

等关系。电流和磁场之间，有

$$\oint B\cdot dl=\mu_0 I,$$

$$\operatorname{rot}B=\mu_0 j,$$

$$B_{2t}-B_{1t}=\mu_0 i_N$$

等关系。然而，在历史上，人们曾经认为：激发电场的是电荷；激发磁场的却不是电流而是所谓磁荷。而且认为：磁荷有和电荷相似的特点，磁场有和电场类似的性质。但是，经过反复研究，科学实践，人们认识到：没有和电荷相似的磁荷；磁场不是磁荷激发的，而是电流激发的；磁场具有和电场很不相似的性质。这就是现在流行的、如上所述的基本观点。

没有磁荷这一事实，用怎样的数学公式描述呢？既然，磁荷被理解为和电荷相似的东西，磁荷的磁场被认为有和电场类似的性质。那末，我们就可以用没有电荷处的电场的公式

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,$$

$$E_{2n}-E_{1n}=0$$

的类似公式

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{1-42}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{1-43}$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0 \tag{1-44}$$

来描述没有磁荷这一事实。在电动力学中，正是如此行事的，把(1-42)式、(1-43)式、(1-44)式作为描述磁场性质的基本公式。

人们很早认为：有磁荷存在，磁场由磁荷激发，磁的本质是磁荷。现在又认为：没有磁荷存在，磁场由电流激发，磁的本质是电流。这是人们在对磁的认识上的发展和进步。但是，对磁的认识也不就此而止。实际上，磁荷是否存在，至今仍是有待研究的问题。狄拉克早就从理论上推测：存在磁荷，而且量子化的磁荷 g 和量子化的电荷 e，有

$$ge = 常数 \times \frac{n}{2} \quad (n为整数)$$

的关系。现在，人们仍然从理论和实验两个方面，对它进行研究。前些时候还有个实验室声称：发现了一个单磁极！如果真有单磁极存在，人们对磁的认识会不会回到以前的认识上去呢？不会！如果说有回复，那也是螺旋上升式的回复。电流和磁荷有着怎样的关系？电流的磁场和磁荷的磁场有着怎样的关系？诸如此类的、带根本性的问题的研究，将使电动力学发生一个大的飞跃！

第六节　电场和磁场

电荷和电场的基本关系，和由它决定的电场性质，电流和磁场的基本关系，和由它决定的磁场性质，可概括地用(1-4)式、(1-11)式、(1-18)式、(1-30)式、(1-35)式、(1-42)式等公式表示。在这些公式中，电场和磁场是各自独立、互不相关的。然而，激发电场和磁场的电荷和电流，在一般情况下，却是相互关联的。电流是电荷的流动，而且用电荷守恒定律联系着。这提醒我们：电场和磁场之间，也一定存在着依存、制约关系。在这一节里，我们论述这种关系。

法拉第电磁感应定律　1831 年，法拉第首先发现了电场和磁场之间的重要关系。指出：当通过闭合导体回路所围面积的磁感应通量 ϕ 发生变化时，闭合导体回路中，将产生电动势 ε_i，且

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} \tag{1-45}$$

它表明：导体回路中感生电动势 ε_i 的大小，等于导体回路所

围面积中磁感应通量的变化率；负号表示感生电动势的方向，使由它引起的感生电流所激发的磁场，补偿磁感应通量的变化。这规律叫做电磁感应定律。(1-45)式中，磁感应通量 ϕ 的单位是韦伯，时间的单位是秒，电动势的单位是伏特。

由(1-45)式表达的电磁感应定律，可以从磁场对电流作功的观点，从电路的欧姆定律，从能量守恒和转换定律，予以导出。如图 1-39 所示。在 $abcda$ 回路中，由电动势为 ε 的电池，引起电流 I。垂直纸面向后的磁场 B，对长为 l 的 ab 段通电导体，施以磁力 $F=IlB$ 的作用。设 ab 段导线可以无摩擦地移动。在这磁力的作用下，在 Δt 秒后，移动 $\Delta x=bb'$ 距离至 $a'b'$。磁力对它所作的功

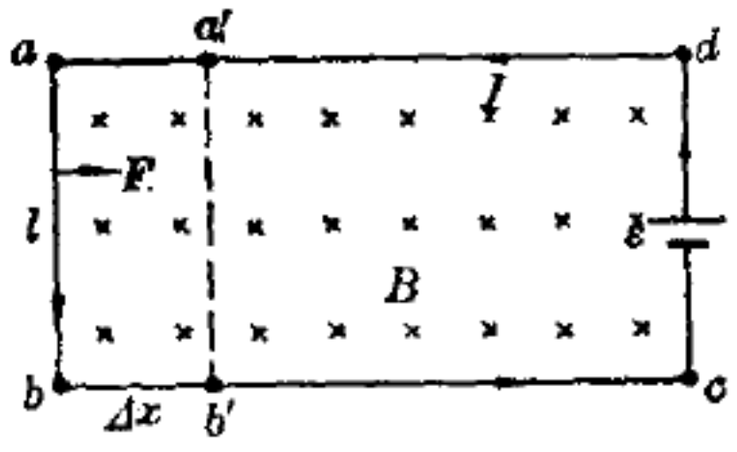


图 1-39

$$A=F\cdot\Delta x=IBl\cdot\Delta x=IB\cdot\Delta S=I\Delta\phi。$$

$\Delta S=l\cdot\Delta x$ 是移动线段扫过的面积，$\Delta\phi$ 是通过这面积的磁感应通量 $B\Delta S$。

从能量守恒和转换定律的观点来看，在 Δt 时间内，电池输出的能量 $\varepsilon I\Delta t$，一部分变成电路中的焦耳热 $I^2R\Delta t$，一部分就是上述的功 $I\Delta\phi$，即

$$\varepsilon I\Delta t=I^2R\Delta t+I\Delta\phi。$$

用 $I\Delta t$ 除上式各项，并移项，就得到

$$I=\frac{\varepsilon-\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}}{R}。$$

从欧姆定律的观点来看，$-\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 在电路中的作用，和电池电

动势的作用，处于同等的地位。因而，它就是由磁感应通量的变化引起的感应电动势。这就证明了(1-45)式的正确性。

磁激电场 现在，我们从相对论的观点和场论的观点，来进一步探讨由电磁感应定律(1-45)式所揭示的客观规律。上述的电磁感应定律，是在不变磁场中运动的导体上显示的。从相对论的观点来看，磁场不变、导体相对磁场运动，和导体不动、磁场发生变化，应该具有同样的效果。换句话说，当导体回路不动，由于磁场变化，使通过导体所围面积的磁感应通量发生变化时，象导体在不变磁场中运动一样，也会在导体回路中引起感应电动势，且

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1-46}$$

和(1-45)式不同，这里用时间偏导数代替时间导数，表示导体回路的位置是不变的。

我们再从场论的观点，来看电磁感应定律的物理意义。为此，我们先看(1-46)式左右两项的物理意义。大家知道：电动势表示电源对电荷的作用，等于电源使单位电荷绕电路一周所作的功。感应电动势表示电磁感应对电荷引起的作用，等于它使电荷绕电路一周所作的功，而电场强度等于电场对单位电荷的作用力。它对单位电荷绕电路一周所作的功为

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l},$$

和电动势等价。因此，电源对场中一点的电荷的作用，电磁感应对场中一点的电荷的作用，都可以用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 来描写。而且，描写对场中一闭合曲线上的电荷的作用的电动势 ε_i，和描写对场中一点的电荷的作用的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间，有

$$\varepsilon_i = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

的关系。这就是以场论观点来描述电动势。当然，和这电场强度 E 相应的电场，不是由电荷激发的，而是由电磁感应产生的。

按照磁感应通量的定义，通过导体回路所围面积的磁感应通量为

$$\phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}。$$

于是，导体不动时的电磁感应定律(1-46)式，就可以写成

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}47)$$

的形式。

再从场论的观点来看，场的存在，并不取决于有无导体回路。因此，上式的存在，也不取决于有无导体回路的存在。有导体回路存在时，上式成立。没有导体回路存在时，上式也应该成立。换句话说，在空间取一闭合回路 l（不管这回路是由导体构成的，还是没有导体，只是空间的数学的闭合曲线），当通过由它所围面积 S 的磁感应通量发生变化时，将产生电场。而且，沿这回路 l 对电场强度 E 的线积分，和磁感应通量的变化率之间，有(1-47)式所示的联系。回路的位置不变，磁感应通量的变化是由磁场的变化引起的。这就意味着：磁场的变化激发电场，而且按(1-47)式的规律激发电场。这就是电磁感应定律揭示的物理本质。

电场旋度　由电磁感应定律推知：有由磁场的变化引起的电场。我们叫它磁激电场。这种电场曲线积分和磁场曲面积分间的依存关系，由(1-47)式表示。我们还要由它进一步探讨，在空间点上，电场和磁场之间有着怎样的依存关系。斯托克斯公式(1-39)式

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{S},$$

把矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的线积分，和它的旋度的面积分联系起来。我们把它用于磁激电场，得

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S},$$

把此式和(1-47)式比较，得

$$\iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

不管曲面 S 的大小和形状怎样，上式都要成立。这只在被积函数相等，即在

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (1\text{-}48)$$

时才行。它表明：一点磁场的变化，和由它激发的电场，在同一点的相互关系。

位移电流 既然，变化磁场能够激发电场，变化电场也应该能够激发磁场。那末，变化电场和它激发的磁场，应该具有怎样的关系呢？会不会具有象变化磁场和由它激发的电场的那种关系呢？为了确切地回答这些问题，我们还要深入地进行分析。

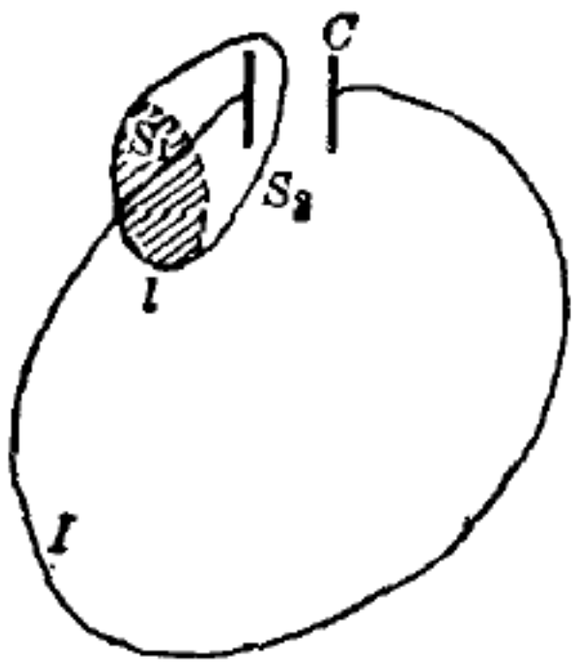


图 1-40

为了研究变化电场激发磁场的问题，我们再回头分析一下电流激发磁场的问题。我们知道：电流和由它激发的磁场之间，有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\iint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0 I$$

的关系。S 是以闭合曲线 l 为边界的

曲面。上式左边是在闭合曲线 l 上的磁场环流，上式右边是通过曲面 S 的电流强度 I。

由几何作图可知，一个确定的闭合曲线 l，它所包围的曲面 S 有无限多个。确定的闭合曲线 l 上的磁场环流，有确定的数值。通过由同一个闭合曲线 l 包围的无限多个曲面 S 的电流强度 I，是不是都一样呢？如果一样，上式就是正确的。如果不一样，上式就存在问题。

在稳定电流的情况下，电流是闭合的。通过由同一个闭合曲线 l 包围的无限多个不同的曲面 S 的电流强度 I，都是一样的。这时，上式正确地描述了电流和由它激发的磁场之间的相互关系。

在电流变化的情况下，例如在如图 1-40 所示的，含有电容 C 的交变电路中，电流是不闭合的。通过由同一个闭合曲线 l 包围的不同曲面 S 的电流强度是不一样的。例如通过曲面 S_1 的电流强度为 I，通过曲面 S_2 的电流强度为 0。这时，上式就存在问题，不能正确地描述电流和由它激发的磁场之间的相互关系。

从上面的论述来看，在稳定电流时正确的安培周路公式，在电流变化时就成为不正确的了。关键在于：电流是否闭合，是否连续。电流闭合、连续，公式就正确；电流不闭合、不连续，公式就不正确。

我们再仔细分析一下，在如图 1-39 所示的电路中，导线中的电流强度 I，在电容器板处被截断了，不连续了。但是，在电容器板上，虽然中止了电流，却仍有电荷在变化。在电容器板间，虽然没有电荷、电流，却有变化的电场。换句话说，导线中的电流、电容器板上的电荷变化、电容器板间的变化电场，有依次接续的关系。我们还可以定量地计算这种接续关

系。

设电容器板的面积为 S，板上电荷面密度为 σ。那末，板上电荷的变化率，就是 $S\frac{\partial\sigma}{\partial t}$。按照电荷守恒定律，它应该等于导线中的电流强度 I，即

$$I=S\frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

板上电荷的变化“接续了”导线中的电流。

当电容器板上的电荷面密度为 σ 时，电容器间的电场强度为 E，由高斯定理可以算出

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}。$$

把它代入上式，得

$$I=S\frac{\partial\sigma}{\partial t}=S\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}。$$

这表明：板上电荷的变化“接续了”导线中的电流，而电容器间变化的电场又“接续了”板上电荷的变化。

在前面，我们说在图 1-39 所示的电路中电流不连续，是说导线中的传导电流 I 在电容器处中断了，是说传导电流不连续。如果，我们把电流的概念推广，把

$$I_D=S\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\iint_S\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}49)$$

也叫做电流。不过不叫做传导电流，而叫做位移电流。那末，在如图 1-39 所示的电路中，传导电流 I 虽然不连续，但由传导电流 I 和位移电流 I_D 的合电流却是连续的。这就启示我们，在安培周路公式中，如果用合电流代替传导电流，即令

$$\oint_l\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}50)$$

那末，对于一个确定的闭合曲线 l，通过由它包围的不同曲面 S 的合电流 $I+I_D$ 是相同的。这样一来，在任何情况下，上式都是确定的，具有明确的意义，正确地描述了变化电场和电流，在激发磁场方面的等价性；变化电场、电流和由它们激发的磁场之间的相互关系。

由(1-49)式定义的位移电流是位移电流强度。按照电流强度 I 和电流密度 $\boldsymbol{j}$ 间的普遍关系

$$I=\iint \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

可以推知：位移电流密度

$$\boldsymbol{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1-51}$$

不管是位移电流强度 I_D，还是位移电流密度 $\boldsymbol{j}_D$，它们在激发磁场方面，和传导电流具有同样的作用。但是，它们的本质是很不相同的。传导电流由自由带电粒子的运动形成，而位移电流只是表示能够激发磁场的电场变化的术语，并不意味着什么自由带电粒子的移动。

在存在介质的情况下，一般位移电流都用电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 的变化率定义

$$\boldsymbol{j}_D=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1-51}'$$

而 $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ 表示束缚电荷的变化。所以位移电流只和电场变化、束缚电荷运动有关，而与自由电荷无关。

第一章的结束语

1．这一章既是电磁学的概括总结，又是电动力学的起步基础。就其内容来说，和电磁学基本一致。就其理论方法来说，和电磁学有所不同。它突出了在实验事实的基础上，抽象概括出理论的方法。这是学习中必需注意的。如果忽略了这一点，就会使学习水平停留在电磁学上，为以后章节的学习留下困难。

2．梯度、散度、旋度和高斯公式、斯托克斯公式，是矢量分析的基本内容，是学习电动力学的必要基础。读者应下决心学好，如不掌握本章介绍的矢量分析的基本内容，就不可能学好电动力学。

3．我们在库仑实验定律的基础上，揭露了电荷和电场的基本关系，以及它们的表现形式

$$\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{E}_i;\quad \boldsymbol{E}(x,y,z)=\iiint_v \frac{\rho(x',y',z')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}。$$

进一步分析推知：由这基本关系确定的电场性质，可以表述为

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0};\quad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0。$$

也可以表述为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\rho;\quad \boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\phi。$$

4．洛仑兹力和毕-沙-拉公式

$$\boldsymbol{f}=q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B};\quad d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

是从纷繁复杂的实验事实中抽象出来，并被实践所证实了的规律。它表明了电流和磁场的基本关系。在这基础上，我们论

述了由这一基本关系所制约的磁场性质：

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0; \qquad \oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0; \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j},$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0; \qquad B_{2t}-B_{1t}=\mu_0 i_{N_0}$$

5．电场和磁场也是相互依存的。在分析法拉第电磁感应实验定律的基础上，获知它们的依存关系的一种表现形式为

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}; \quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}。$$

在分析电流的连续性时，我们获得了位移电流的概念，从而推知这一依存关系的另一种形式为

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}; \quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}。$$

6．在学习这一章时，除抓住上述基本关系外，还要注意一些基本概念。如：

i. 电场强度、磁感应强度是怎样定义的？为什么要这样定义？可不可以有别的定义？

ii. 电荷、电荷体密度、电荷面密度和电流强度、电流密度、电流面密度等的意义如何？它们之间的相互关系怎样？

iii. 电磁运动的基本性质是用上述参量描述的，基本关系是用这些参量之间的关系来表征的。在理解上述两点的基础上，把两者联系起来，就能形成电磁运动规律的统一图象。

第二章　麦克斯韦电磁理论

在前一章中，我们论述了电磁运动的基本规律。现在我们综合、概括这些基本规律，建立统一的电磁理论，讨论一些电磁运动的基本问题。实际上，在 1862 年，麦克斯韦总结了前人的工作，引入了位移电流的概念，确定了电荷、电流、电场、磁场之间的普遍联系，就建立了这个统一的电磁理论。现在，人们称之为麦克斯韦电磁理论。在这里，我们只是论述这个理论的基本内容。

第一节　真空中的麦克斯韦方程组

洛仑兹力　电动力学是研究电荷、电流、电场、磁场之间对立统一的科学。因此，首先要明确如何描述电荷、电流、电场和磁场。如前章所述，通常，我们用电荷密度 ρ、σ 描述电荷在空间的分布，用电流密度 $\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{i}$ 描述电流在空间的分布，用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 描述电场，用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 描述磁场。而且，用作用在电荷 q 上的力

$$\boldsymbol{f}' = q\boldsymbol{E},$$

定义电场强度 $\boldsymbol{E}$，奠定了计算电场对电荷作用的基础。用作用在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 上的力

$$\boldsymbol{f}'' = q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，奠定了计算磁场对电流作用的基础。在

随时间变化的情况下，电场、磁场交织在一起，我们就把上述两种作用加起来，而用作用在以速度 v 运动的电荷 q 上的力

$$f=q(E+v\times B)$$

定义电场强度 E 和磁感应强度 B，奠定计算电磁场对电荷的作用的基础。据此，作用在单位体积中电荷、电流上的力

$$f=\rho E+j\times B \tag{2-1}$$

叫做洛仑兹力。这公式，既定义了电场强度 E 和磁感应强度 B，又奠定了计算电磁场对电荷作用的基础。在电磁理论中，它具有非常基本、非常重要的意义。

积分方程　我们知道：电荷和它激发的电场之间，有用高斯定理

$$\oint_S E'\cdot dS=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

表述的关系。电荷激发的电场，还具有用方程

$$\oint E'\cdot dl=0$$

描述的保守性质。

我们还知道：变化磁场也可以激发电场。而且，变化磁场和它激发的电场之间，有用方程

$$\oint_l E''\cdot dl=-\iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot dS$$

表示的关系。这电场不是电荷或别的什么荷激发的，应满足和电荷为 0 的电荷电场方程，即

$$\oiint E''\cdot dS=0。$$

电荷和变化磁场是激发电场的两种源泉。一般的电场，就是由它们激发的电场的迭加，即

$$E=E'+E''。$$

由前面的论述可知，这电场应该满足方程

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV \tag{2-2}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-3}$$

在上一章中，我们说到：电流和变化电场都能激发磁场。而且，它们在激发磁场方面具有同样的作用。它们和它们激发的磁场之间，有用方程

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-4}$$

表示的关系。这磁场不是磁荷产生的，具有

$$\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{2-5}$$

的性质。

在综合、概括上一章中论述的电磁运动的基本规律的基础上，我们得到了上述的四个积分方程。我们推广这些方程，把它们看作是电磁运动的普遍公式。实际上，在经典电动力学中，它们被看作麦克斯韦电磁理论的基石，是麦克斯韦方程组的积分形式。

微分方程　上述积分方程的积分是表示：在有限体积 V 中、曲面 S 上、圆路 l 上，电荷、电流、电场、磁场之间的相互依存关系。但是，在场论中，我们不仅要了解场中曲面、曲线上的性质，而且常常要了解场中逐点的性质。在电磁场论中，我们就要知道场中逐点电荷、电流、电场、磁场之间的相互依存关系，这可以从上述积分方程推导出来。

在没有分界面的地方，电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 连续、可导，满足高斯公式和斯托克斯公式

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}dV,$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S},$$

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}\,dV,$$

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}。$$

把这四个公式和上述的四个积分方程比较，消去对闭合面、闭合线的积分，就得

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,dV=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV,$$

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S},$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}\,dV=0,$$

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}。$$

物理上要求：不管积分的体积 V 和面积 S 的形状大小如何，以上诸式都应该成立。数学上指出：这只在被积函数相等时，才能如此。所以，有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2-6}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-7}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{2-8}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{2-9}$$

这就是描述没有分界面的那些点上，电荷、电流、电场、磁场之间相互依存关系的公式。它们是一组联立的微分方程。它们被看作麦克斯韦理论的基石，是麦克斯韦方程组的微分形式。

界面条件　在有分界面的地方，电场、磁场有突变。以场函数连续、可导为前提条件的高斯公式、斯托克斯公式，以及上述微分方程，都失去意义。在邻近界面的那些点上，电荷、电流、电场、磁场之间的相互关系，不能用上述微分方程描述，应该用表示界面条件的代数方程描述。我们用上述积分方程来导出界面条件。

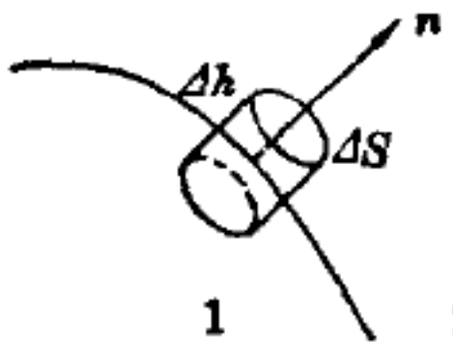


图 2-1

在如图 2-1 所示的、介质 1 和介质 2 的分界面上，作一底面积为 ΔS、高为 Δh 的扁平盒子。假定面积 ΔS 足够小，其上各点的场强都可看作相等。分界面上的电荷以面密度 σ 分布。把积分方程(2-2)式和(2-5)式，用到这扁平盒子上，就得

$$E_{2n}\cdot\Delta S-E_{1n}\cdot\Delta S+\boldsymbol{E}_n\cdot\Delta S'=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\Delta S,$$

$$B_{2n}\cdot\Delta S-B_{1n}\cdot\Delta S+\boldsymbol{B}_n\cdot\Delta S'=0。$$

$\Delta S'$ 是高度为 Δh 的侧面面积。当 $\Delta h\to 0$ 时，$\Delta S'\to 0$，上下底面都趋向界面，E_{2n}、B_{2n} 就是介质 2 中邻近界面一点的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 的法向分量和磁感应强度 $\boldsymbol{B}_2$ 的法向分量，E_{1n}、B_{1n} 就是介质 1 中邻近界面一点的电场强度 $\boldsymbol{E}_1$ 的法向分量和磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 的法向分量。而且

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2-10}$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0 \tag{2-11}$$

在如图 2-2 所示的、介质 1 和介质 2 的分界面上，以分界面法线 n、切线 t 和 N 构成一正交坐标。在 nt 平面，作一长为 Δl、高为 Δh 的扁长回路，假定 Δl 足够小，其上各点的场强都可看作相等，分界面上流着面电流密度为 i 的电流。把积分方程(2-3)式、(2-4)式用到这狭长回路上，就得

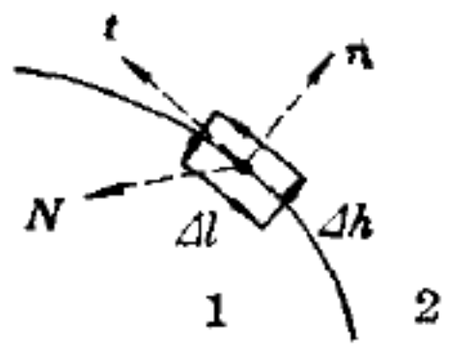


图 2-2

$$E_{2t}\cdot\Delta l-E_{1t}\cdot\Delta l+E_n\cdot 2\Delta h=-\frac{\partial B_N}{\partial t}\cdot\Delta l\cdot\Delta h,$$

$$B_{2t}\cdot\Delta l-B_{1t}\cdot\Delta l+B_n\cdot 2\Delta h=\mu_0 i_N\Delta l+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_N}{\partial t}\Delta l\cdot\Delta h。$$

当 $\Delta h\to 0$ 时，回路的上下长边都趋向界面，E_{2t}、B_{2t} 就是介质 2 中邻近界面一点的电场强度 E_2 的切向分量和磁感应强度 B_2 的切向分量，B_{1t}、E_{1t} 就是介质 1 中邻近界面一点的磁感应强度 B_1 的切向分量和电场强度 E_1 的切向分量。i_N、E_N、B_N 就是电流面密度 i、平均电场强度 E、平均磁感应强度 B，在切线 N 方向的分量。而且，

$$E_{2t}-E_{1t}=0 \tag{2-12}$$

$$B_{2t}-B_{1t}=\mu_0 i_N \tag{2-13}$$

(2-10)式、(2-11)式、(2-12)式、(2-13) 式就是在邻近分界面的点上，电荷、电流、电场、磁场应该满足的代数方程，叫做界面条件。它被看作麦克斯韦电磁理论的基石，是麦克斯韦方程组的又一形式。

不管是麦克斯韦的积分方程，还是微分方程，或者界面条件，都是描述电荷、电流、电场、磁场之间同样依存关系的方程式。差别在于：由于具体条件不同，描述方式也不相同。

第二节　电磁场对物质的作用

场和实物是物质存在的两种基本形态。实物，一般指由电子、原子、分子等构成的物质，简称物质。从电磁相互作用的观点来看，物质是电荷、电流的荷载者。电荷、电流是物质的一种属性，是表征物质和电磁场进行相互作用的能力的参量。在前面的论述中，我们讨论电荷、电流、电场、磁场之间的依存关系时，没有提到电荷、电流的荷载者，即没有提到荷载电荷、电流的物质，没有提到物质的组织成分。实质上，电荷、电流和电场、磁场的相互作用，是实物和场之间的相互作用。当我们进一步研究电磁场和物质的相互作用时，就必需考虑到物质的组织成分，考虑到物质的电磁性质。大家知道：物质由原子、分子组成，原子又由原子核和电子组成。在通常情况下，物质呈中性。从宏观角度考虑，它既没有电荷，也没有电流。实际上，从微观角度考虑，由于组成物质的原子核和电子是带电的，物质内部的电荷、电流是纷繁复杂的。只是由于统计平均的效应，整个物体对外不呈现电磁性质。现在，我们从物质由带电粒子组成这一基本观点，来看一看电磁场对物质的作用。

欧姆定律　先看电场对金属导体的作用。人们知道：金属导体中的原子、分子或离子，是规则地排列着的，它们只能在各自的平衡位置附近振动。其中，有些电子，受原子、分子或离子的束缚较松，可以自由地在导体中运动，我们把它们叫做自由电子。在没有外场作用时，导体中的原子、分子或离子，以及自由电子，在导体中作热运动，对外呈中性，显得既无电荷，又无电流。在导体两端加一电压，导体中将形成电场，使

自由电子除热运动外，附加一个逆着电场方向的定向运动，形成电流。我们知道：在如图 2-3 所示的、截面积为 S、长为 l、导电率为 λ 的导体两端，加上电压 ΔV。按照欧姆定律，在导体中就会形成强度为 I 的电流，而且

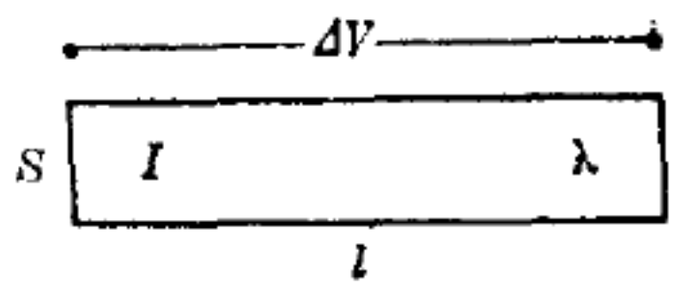


图 2-3

$$I=\frac{\Delta V}{R},$$

式中

$$R=\frac{l}{\lambda S}$$

是这段导体的电阻。从场论的观点来看，导体中电流的形成，是由于导体两端的电压 ΔV，在导体中引起电场强度为

$$E=\frac{\Delta V}{l}$$

的电场，使导体中的自由电子除参与热运动外，还参与逆着电场的定向运动。这运动，形成电流密度

$$j=\frac{I}{S}$$

的电流。把后三式的 R、ΔV、I 代入前一式，得

$$jS=\frac{El}{l/\lambda S},$$

消去 l、S，并考虑到电流密度 j 的方向和电场强度 E 的方向一致，即自由电子参与逆着电场的运动，得

$$j=\lambda E \tag{2-14}$$

它表明：在电场的作用下，导体中一点的电流密度 j，和该点的电场强度 E 的关系。它是由一段导体的欧姆定律导出的，是欧姆定律在一点的表现形式，叫做欧姆定律的微分形式。

如果，在电路中，还存在非电起源的电动势，如以化学电池、热电偶之类产生的电动势，我们用等效电场强度 $\boldsymbol{E}'$ 表示这类电源对自由电荷形成电流的作用。那末，欧姆定律就写成

$$\boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}') \qquad (2\text{-}14)'$$

束缚电荷　再看电场对介质的作用。介质和金属导体不同，其中没有自由电子。构成介质的原子、分子或分子集团，都由等量的正、负电荷组成。有些介质分子，正电荷分布中心和负电荷分布中心不重合，形成偶极子，具有固有的电偶极矩，叫做有极分子。有些介质分子，正电荷分布中心和负电荷分布中心重合，没有固有电偶极矩，叫做无极分子。在没有外电场作用情况下，无极分子介质，对外当然呈中性；有极分子介质，由于热运动的影响，分子偶极矩沿各个方向取向的机会均等，对外也呈中性。在外电场的作用下，构成分子的正、负电荷向相反方向移动，分子电偶极矩沿电场方向取向的几率增加，使介质中和界面上出现电荷分布统计平均不均匀的现象，对外呈现电性质。这时，出现的电荷仍不能在介质中自由运动，所以叫做束缚电荷。这种束缚电荷，象自由电荷一样，可以用体电荷密度 ρ'（或面电荷密度 σ'）表示它们的分布情况。

电极化矢量　从上面的分析来看，介质中的束缚电荷跟导体中的自由电荷，具有很不相同的特点。自由电荷的正、负电荷，可以各自分开运动。束缚电荷却总是正、负电荷束缚在一起，不能分开，不能自由运动。因此，束缚电荷常常以电偶极矩的形式，参与电磁相互作用。这样一来，我们就可以用电偶极矩来描述介质的电磁性质。由上面的论述可知，在没有外电场作用时，无极分子介质，电偶极矩一定为 0。有极分子介质，虽然它们每个分子的电偶极矩不为 0。但是，由于热运动，它们各个分子电偶极矩的取向，沿各个方向的几率均等，

以致大量分子的平均电偶极矩也为0。当有外加电场的作用时，分子中正、负电荷沿着电场向相反方向移动，形成附加的电偶极矩。具有电偶极矩的分子，热运动要使它们沿各个方向均匀取向，外电场却要使它们沿电场方向取向。两种作用的结果，使它们既不均匀取向，也不都沿电场方向取向，而以较大几率沿电场方向取向。这样，使大量分子电偶极矩的统计平均，在沿电场方向，有一附加的电偶极矩。这种，在电场作用下，出现大量分子电偶极矩统计平均不为0的现象，叫做介质的极化。我们用电极化矢量

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \tag{2-15}$$

来描述介质在电场作用下呈现的电极化性质。式中，$\boldsymbol{p}_i$ 是第 i 个分子的电偶极矩，$\sum_i$ 是对体积 ΔV 中的所有分子取和。按定义(2-15)式，电极化矢量 $\boldsymbol{P}$，等于单位体积中，由极化产生的电偶极矩。

束缚电荷密度和电极化矢量的关系　不管是束缚电荷密度 ρ' 或 σ'，还是电极化矢量 $\boldsymbol{P}$，都是描述在电场作用下介质被极化情况的参量。它们以不同的方式，描述同一性质，它们之间应该具有紧密的联系。现在，我们就来讨论这种联系。在介质中，取一个由闭合面 S 包围的体积 V，如图2-4所示。我们计算由于极化而出现在体积 V 中的电荷。在 S 面上，再取出一面元 dS，以它为底，以 l 为高，作一体积元 $dV=l\cdot dS$。设想电场对介质作用的结果，统计平均地看来，是使每个分子的正负电荷 q，发生一相对位移 l，附加一电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$。单位体积中有 n 个这

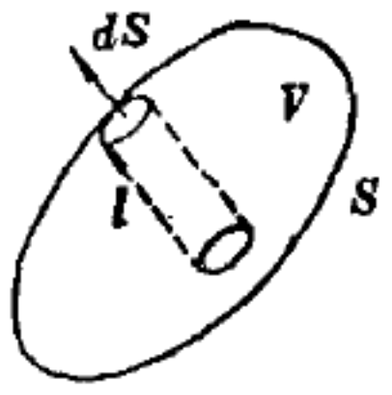


图 2-4

样的分子，因而，电极化矢量 $\boldsymbol{P}=nq\boldsymbol{l}$。在如图 2-4 所示的体积 dV 中，由于极化，每个分子的正电荷 q 伸出 dS 面外，$ndV=n\boldsymbol{l}\cdot d\boldsymbol{S}$ 个分子的正电荷 $qndV=qn\boldsymbol{l}\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$ 都伸出 dS 面外，伸出闭合面 S 之外，使体积 dV 中留下多余的负电荷，即有多余的束缚电荷

$$dQ'=-\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S},$$

而体积 V 中，正电荷伸出 S 面后，留下的束缚电荷是上式的积分，即

$$Q'=-\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

从另一方面看，束缚电荷如以密度 ρ' 分布，则在体积 V 中将有束缚电荷

$$Q'=\iiint_V \rho'\,dV。$$

这是从两种观点得出的同一事物的两种表达式，应该相等

$$Q'=\iiint_V \rho' dV=-\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (2\text{-}16)$$

这就是描述介质极化的电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 和束缚电荷之间关系的积分方程，它在任一闭合面 S 包围的体积 V 的范围内成立。上面的论述是以无极分子为例进行的，但其结果也适用于有极分子。

不管是电极化矢量 $\boldsymbol{P}$，还是束缚电荷密度 ρ' 或 σ'，它们都表示介质中一点的极化性质，我们需要了解它们在同一点上的相互关系。从(2-16)式，用以前用过的方法，我们推出这些关系。

在没有介质分界面的地方，电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 连续、可导，满足高斯公式

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{P}\,dV。$$

和(2-16)式比较，可知

$$\rho'=-\mathrm{div}\boldsymbol{P} \tag{2-17}$$

在介质分界的地方，将有面束缚电荷 σ' 出现，电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 有突变。高斯公式和 (2-17) 式都失去意义。(2-16)式仍然有效，我们把它用在如图 2-5 所示的、底面积为 ΔS、高为 Δh 的盒子上，得

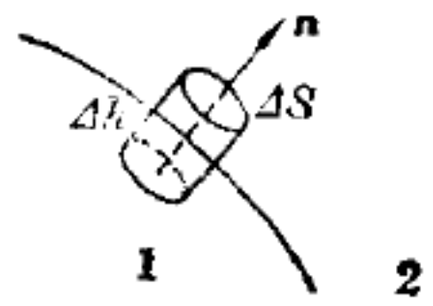


图 2-5

$$\sigma'\cdot\Delta S=-P_{2n}\cdot\Delta S+P_{1n}\cdot\Delta S+\boldsymbol{P}\cdot\Delta S'。$$

当盒子的高度 $\Delta h\to 0$ 时，盒子的侧面积 $\Delta S'\to 0$，上式成为

$$\sigma'=-P_{2n}+P_{1n} \tag{2-18}$$

如果介质 2 是真空，那末 $P_2=0$，上式成为

$$\sigma'=P_n。$$

这表明：介质面上出现的面束缚电荷密度，将由介质面内邻近界面处的极化情况决定。

极化电流密度　电流是由电荷的变化形成的。当介质的极化，由于场的变化而发生变化时，描述介质极化性质的电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 或束缚电荷密度 ρ'，也将发生变化，也会引起电流。我们把它叫做极化电流，并用 $\boldsymbol{j}'$ 表示。我们根据(2-17)式和电荷守恒定律

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j}'=-\frac{\partial\rho'}{\partial t}$$

来计算这一电流。将(2-17)式对时间求导

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}=-\mathrm{div}\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t},$$

把它和上式比较，得

$$\boldsymbol{j}' = -\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{2-19}$$

这就是由于介质的极化随时间变化而引起的极化电流。

电极化率 不管是束缚电荷密度 ρ' 或 σ'，还是电极化矢量 $\boldsymbol{P}$，都是描述介质在电场作用下极化状态的参量。它们一方面和介质的性质有关；另一方面和使它极化的电场强度有关，这两方面的关系都是很复杂的。在电动力学中，只研究一些比较简单、比较一般的情况。例如，在许多各向同性的介质中，电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比。即

$$\boldsymbol{P} = \varkappa \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2-20}$$

$\varkappa$ 由介质性质确定，是表示介质极化能力的参量，叫做电极化率。在均匀介质中，它还是一个与坐标无关的常数。

分子电流 在论述了电场对物质的作用以后，我们来讨论磁场对介质的作用。介质由分子、原子等组成，分子、原子等又由电子和原子核等带电粒子组成。虽然，分子正负电荷相等，是电中性。但是，组成分子的带电粒子，永不停息地运动着，形成电流。设想每个带电粒子的运动，都形成一个电流回路。各个带电粒子的电流回路中的电流强度 I，回路所包围面积的大小和方向 $\boldsymbol{S}$，都有各自的特点。构成分子的诸带电粒子的电流回路，合成起来，就使整个分子也象一个电流回路，形成分子电流。有些介质分子的分子电流为零，有些介质分子的分子电流不为零。当没有外磁场时，分子电流为零的分子介质，对外当然不显示磁性。分子电流不为零的分子介质，虽然各个分子都象小磁针一样具有磁性。但是，由于热运动，分子电流回路平面的取向，沿各个方向的几率是均等的。因而，大量分子电流的统计平均仍然是零，介质对外也不显示磁性。当有外磁场作用时，象转动陀螺在重力作用下绕垂直

于地面的轴线发生进动一样，分子中的各带电粒子的电流回路，都绕逆着磁场的方向发生进动，使整个分子产生一个附加的分子电流。具有分子电流的分子的电流平面，热运动要使它沿各方向均匀取向，磁场却要使它沿磁场方向取向。热运动和磁场对立统一的结果，分子电流平面，沿磁场方向取向的几率较多。这样，大量分子电流的统计平均就不再为零，介质对外显示磁性。我们就说，介质被磁化，并用分子电流体密度 $j_{分}$ 或面密度 $i_{分}$，来表示介质被磁化的情况。

磁化矢量 分子电流指分子电流回路，由包围一平面的闭合电流形成。因此，不仅可以用分子电流密度 $j_{分}$ 或 $i_{分}$ 来描述介质的磁化情况，还可以用磁化矢量 M 来描述介质的磁化情况。设想某个分子 i 的电流回路中的电流强度为 I_i，回路平面的大小和方向为 S_i，如图 2-6 所示。我们把

$$m_i = I_i S_i$$

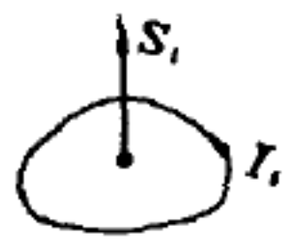


图 2-6

叫做 i 分子的分子磁矩。把

$$M = \frac{\sum_i m_i}{\Delta V} \tag{2-21}$$

叫做介质的磁化矢量。$\sum_i$ 是对体积 ΔV 中的所有分子取和。由上式看来，磁化矢量 M 等于单位体积中的磁矩。如上所述，它是用来描述介质磁化状态的。对于未被磁化的介质，它等于零。对于被磁化的介质，它由介质磁化的强弱确定。

分子电流和磁化矢量的关系 分子电流密度 $j_{分}$ 或 $i_{分}$，和磁化矢量 M，都是描述介质磁化状态的参量。它们之间必然存在着一定的数量关系。现在，我们就来导出这一关系，如图 2-7 所示。在介质中，我们取一矩形平面 $ABCD$，边长为 a 和

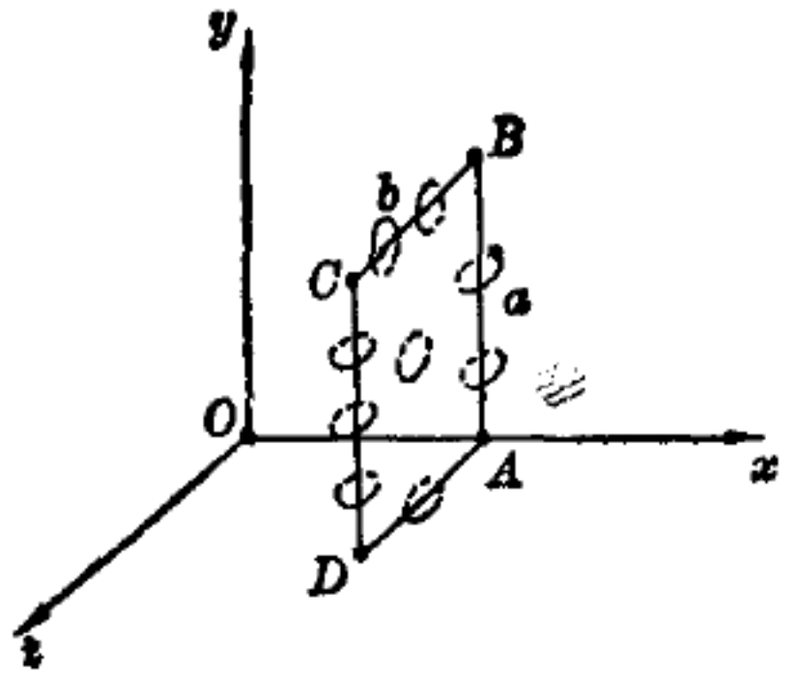


图 2-7

b, 与 x 轴垂直。我们计算通过这平面的分子电流强度 I_x。我们设想: 单位体积中的分子数为 n; 一个分子的分子电流强度为 I，电流所围面积为 S。那末，磁化矢量就是 $M=nIS$。它们的大小和方向，都是坐标 (x,y,z) 的函数。

由图 2-7 看出: 在矩形平面中部，任一分子电流通过矩形面两次，一次沿着 x 方向，一次逆着 x 方向，对通过矩形面的电流强度 I_x 没有贡献。只有在矩形四边附近的分子电流，每一个只穿过矩形面一次，才对通过矩形面的电流强度 I_x 有贡献。

在 AB 边上，在以边长 a 为高，以分子电流回路面积 S 的分量 S_y 为底的体积 $V=aS_y$ 中，有 $nV=naS_y$ 个分子。每个分子都沿着 x 轴穿过矩形面一次，贡献电流强度 I。这 naS_y 个分子共贡献电流强度

$$anIS_y(x,y,0)=aM_y(x,y,0)。$$

$(x,y,0)$ 表示边的位置。M_y 的 y 表示磁化矢量的方向沿着 y 轴。在一般性的讨论中，M_y 就是 M 在 y 方向的分量。

在 CD 边上，每个分子都逆着 x 轴穿过矩形面一次，贡献电流强度 $-I$。naS_y 个分子共贡献电流强度

$$-anIS_y(x,y,b)=-aM_y(x,y,b)。$$

(x,y,b) 表示 CD 边的位置，n、I、S、M_y 是位置 (x,y,b) 的函数。

在 AD 边上，每个分子逆着 x 轴穿过矩形面一次，贡献电流强度 $-I$。nbS_z 个分子共贡献电流强度

$$-nbS_zI(x,0,z)=-bM_z(x,0,z)。$$

b 是 AD 边长，$(x,0,z)$ 是 AD 边的位置。

在 BC 边上，每个分子沿着 x 轴穿过矩形面一次，贡献

电流强度 I。nbS_z 个分子共贡献电流强度

$$nbS_zI(x,a,z)=bM_z(x,a,z)。$$

(x,a,z) 是 BC 边的位置。

通过整个矩形面的分子电流，就是在这四个矩形边上通过矩形面的分子电流的代数和。所以

$$\begin{aligned}I_x=&aM_y(x,y,0)-aM_y(x,y,b)-bM_z(x,0,z)\\&+bM_z(x,a,z)\\\frac{I_x}{ab}=&\frac{M_z(x,a,z)-M_z(x,0,z)}{a}\\&-\frac{M_y(x,y,b)-M_y(x,y,0)}{b},\end{aligned}$$

当 $a\to0$, $b\to0$ 时，按照电流密度的定义和偏导数的定义，上式趋于

$$j_x=\frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z}=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M})_x,$$

用同样的方法，可以得到

$$j_y=\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M})_y,$$

$$j_z=\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M})_z。$$

把它们统一起来，就得

$$\boldsymbol{j}_{分}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}\qquad(2\text{-}22)$$

这就是分子电流和磁化矢量之间的关系，这关系是表示在介质中的点上的。

我们将(2-22)式对一曲面 S 积分

$$\iint_S\boldsymbol{j}_{分}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S(\mathrm{rot}\boldsymbol{M})\cdot d\boldsymbol{S}。$$

利用斯托克斯公式

$$\iint_S (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{M})\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l},$$

可以得到

$$I_{分}=\iint_S \boldsymbol{j}_{分}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (2\text{-}23)$$

它表明：通过曲面 S 的分子电流强度 $I_{分}$ 和包围这曲面 S 的闭合曲线 l 上的磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 的环流的关系。这关系在任意闭合曲线 l 包围的曲面 S 上都是正确的。

在介质分界面上，磁化矢量有突变，有分子面电流 $i_{分}$ 出现，(2-22)式失去意义。分子电流和磁化矢量之间的关系，将用界面条件描述。我们从(2-23)式导出这一界面条件。如图 2-8 所示。在介质 1 和介质 2 的分界面上，以法线 n 和切线 t、N 组成正交坐标系。在 n_1t 平面内作一闭合曲线，其长为 Δl、高为 Δh。把(2-23)式用于这一闭合曲线所围曲面，得

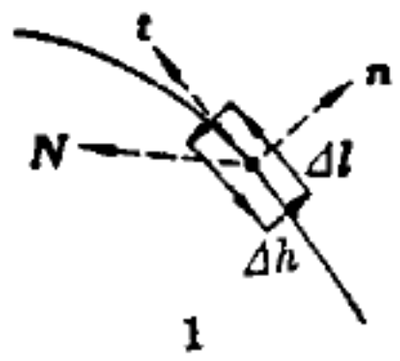


图 2-8

$$i_N\cdot\Delta l=M_{2t}\cdot\Delta l-M_{1t}\cdot\Delta l+2\boldsymbol{M}_n\cdot\Delta h。$$

当 $\Delta h\to 0$ 时，上式成为

$$i_{N分}=M_{2t}-M_{1t} \qquad (2\text{-}24)$$

这就是在介质分界面上，分子电流和磁化矢量之间的关系。

磁化率　前面说到，尽管介质的单个分子可能具有分子电流、分子磁矩。在没有磁场的作用下，由于热运动，大量分子的分子电流、分子磁矩的统计平均仍等于零。这时，磁化矢量 $\boldsymbol{M}$、分子电流密度 $\boldsymbol{j}_{分}$、$i_{分}$ 都等于零。在磁场的作用下，各分子电流有绕磁场的附加进动；又有磁场使分子电流、分子磁矩沿磁场方向的取向作用，和热运动使分子电流、分子磁矩沿诸方向均匀取向的作用。这些作用的结果，使大量分子的分子

电流、分子磁矩的统计平均不为零。这时，磁化矢量 $\boldsymbol{M}$、分子电流密度 $\boldsymbol{j}_{分}$、$\boldsymbol{i}_{分}$，才有一定的大小和方向。显然，磁化矢量 $\boldsymbol{M}$、分子电流密度 $\boldsymbol{j}_{分}$、$\boldsymbol{i}_{分}$，不仅和介质的结构有关，也和介质所处磁场的磁感应强度有关。这些关系是很复杂的。研究这些关系的学科，有如物理学中的磁学等。在这里，我们只给出一般的、简单的关系。除开铁磁质，在一般的各向同性介质中，有

$$\boldsymbol{M}=\frac{x'}{1+x'}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \tag{2-25}$$

的关系。式中，x' 由介质的性质决定，叫做介质的磁化率。$x'>0$ 的介质，磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向相同，即顺着磁场方向磁化，故叫顺磁介质。$-1<x'<0$ 的介质，磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向相反，即逆着磁化方向磁化，故叫抗磁介质。铁磁介质的磁化矢量 $\boldsymbol{M}$，和使它磁化的磁场之间有着复杂的关系，一般不用(2-25)式描述。

第三节　介质中的麦克斯韦方程组

作用是相互的。既然，有电、磁场对介质的极化作用，那末，极化了的介质，又将对电、磁场发生影响。现在，我们来讨论：极化了的介质将对电磁场发生怎样的影响；描述电磁运动的规律的麦克斯韦方程组，将有怎样的形式。物质和电磁场的作用由它们的电荷、电流和电磁场的作用来实现。而电荷、电流不管它们的起源如何，在和电磁场的作用方面是等价的。在讨论真空电磁场时，我们没有涉及电荷、电流的载体，没有涉及电荷、电流的起源。在讨论介质中的电磁场时，就涉及到电荷、电流的起源，而把它们分类。讨论介质对电磁场的影响，就是讨论极化引起的电荷、电流对电磁场的影响。

电荷和电流 电荷和电流是表示物质和电磁场相互作用能力的参量。由于组成物质的带电粒子在物质中的运动状态不同，有的可以自由运动，有的不能自由运动。因此，物质中的电荷、电流就具有不同的形式。能够自由运动的电荷叫做自由电荷，用电荷密度 ρ、σ 描述。不能够自由运动的电荷叫做束缚电荷，用束缚电荷密度 ρ'、σ' 表征。由自由电荷运动形成的电流叫做传导电流，用电流密度 $\boldsymbol{j}$、i 表示。由束缚电荷运动形成的电流叫做极化电流和分子电流。用电流密度 $\boldsymbol{j}'$、i' 和 $\boldsymbol{j}_{分}$、$i_{分}$ 描写它们的分布。我们认为：尽管电荷有自由、束缚之分，电流有传导、极化、分子之别。但是，它们在激发电场、磁场方面具有同样的作用，这就是我们对介质中电磁运动的基本观点。按照这种观点，把真空中麦克斯韦方程中的电荷、电流，用自由电荷与束缚电荷之和、传导电流与极化电流以及分子电流之和来代替，就得到介质中的麦克斯韦方程组。

洛仑兹力 当然，不管有无介质存在，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，仍用洛仑兹力的公式定义。以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q，在电场强度为 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的电磁场中，所受的力，仍然是

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{2-26}$$

作用在密度为 ρ、$\boldsymbol{j}$ 的电荷、电流上的力，仍然是

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{2-26}'$$

微分方程 不管是自由电荷 ρ、传导电流 $\boldsymbol{j}$，还是束缚电荷 ρ'、极化电流 $\boldsymbol{j}'$、分子电流 $\boldsymbol{j}_{分}$，在激发电、磁场方面，具有同样的作用。从这观点看来，麦克斯韦微分方程(2-6)式、(2-7)式、(2-8)式、(2-9)式，在有介质的情况下，应该写成

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}=\frac{\rho+\rho'}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}_{分}+\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)。$$

上一节说到，介质的极化状态，不仅可以用束缚电荷密度 ρ'、极化电流密度 $\boldsymbol{j}'$、分子电流密度 $\boldsymbol{j}_{分}$ 描述，还可以用电极化矢量 $\boldsymbol{P}$、磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 描述。而且，它们之间还存在由(2-17)式、(2-19)式、(2-22)式表示的关系

$$\rho'=-\operatorname{div}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{j}'=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{j}_{分}=\operatorname{rot}\boldsymbol{M}。$$

把它们代入上列麦克斯韦微分方程，就得到

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\rho,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})。$$

如果按照定义

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{2-27}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{2-28}$$

引进电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。那末，就得到介质中的麦克斯韦微分方程

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho \tag{2-29}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2-30}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-31}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{2-32}$$

它们描述介质中的电荷、电流、电场、磁场之间的相互关系。方程中只出现自由电荷 ρ 和传导电流 $\boldsymbol{j}$。无法测量或给定的束缚电荷、极化电流、分子电流，不明显地出现在方程中，这给我们带来方便。

物态方程 在上列的麦克斯韦微分方程中，虽然不出现描述介质极化状态的束缚电荷、极化电流、分子电流，或电极化矢量、磁化矢量。但是，仍有和极化介质极化状态有关的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。因此，我们还要进一步论述：电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，以及介质电磁性质的关系。

金属导体的导电状态，用传导电流密度 $\boldsymbol{j}$ 描写。介质的极化状态，用电极化矢量 $\boldsymbol{P}$、磁化矢量 $\boldsymbol{M}$ 表示。如在上一节已论述的那样，不管是金属导体的导电状态，还是介质的极化状态，都是在电场、磁场的作用下激发的。因此，表示这些状态的电流密度 $\boldsymbol{j}$、电极化矢量 $\boldsymbol{P}$、磁化矢量 $\boldsymbol{M}$，不仅和物质的电磁性质有关，也和电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 有关。在某些条件下，这些关系有如(2-14)式、(2-20)式、(2-25)式

$$\boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'),$$

$$\boldsymbol{P}=x\varepsilon_0\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{M}=\frac{x'}{1+x'}\ \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$$

的形式。把后面两式分别代入(2-27)式和(2-28)式，得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0(1+x)\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(1+x')\boldsymbol{H}。$$

如果按定义

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+x) \tag{2-33}$$

$$\mu=\mu_0(1+x') \tag{2-34}$$

引进介电系数或电容率 ε、磁导率 μ。那末，就得到联系 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系式

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{2-35}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{2-36}$$

它们和欧姆定律的微分形式

$$\boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}') \tag{2-37}$$

一起，叫做物质的状态方程。介电系数 ε、磁导率 μ、电导率 λ，由物质的电磁性质确定。

积分方程 麦克斯韦微分方程(2-29)式、(2-30)式、(2-31)式、(2-32)式表示场中点上电磁运动的规律。我们将(2-29)式和(2-32)式对体积 V 积分，并利用高斯公式，就可以推知

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho\, dV \tag{2-38}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{2-39}$$

将(2-30)式和(2-31)式对面积 S 积分，并利用斯托克斯公式，就可以得到

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-40}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-41}$$

这就是描述介质中，体积 V 内、曲面 S 上、曲线 l 上电磁运动规律的麦克斯韦方程组的积分形式。

界面条件　在分界面处，可能有面电荷 σ、面电流 i 出现，电场、磁场有突变。电磁运动规律不能用微分方程描述，应该用表示界面条件的代数方程描述。采用以前所用的方法，把上列的积分方程用到分界面上，就可以导出界面条件。它们是

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \tag{2-42}$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0 \tag{2-43}$$

$$H_{2t}-H_{1t}=i_N \tag{2-44}$$

$$E_{2t}-E_{1t}=0 \tag{2-45}$$

具体地导出这些方程，作为习题，供读者练习。

上面得到的洛仑兹力、微分方程、物态方程、积分方程、界面条件，就是麦克斯韦电磁理论的数学表达式。它们是实验定律的综合、概括和推广。它们是处理宏观电磁现象的理论基础和有力工具。在用它们来讨论具体问题时，洛仑兹力作为电场强度 E、磁感应强度 B 的定义，是必需考虑到的。洛仑兹力公式还是计算场对物质作用的基础，物态方程反映场中物质的具体情况。它的具体形式，因场中物质的不同而异，有时，上述的物态方程，完全不能应用，而需要另外选取。至于究竟是用积分方程，还是微分方程，或者界面条件来讨论问题呢？要由具体情况而定。

劈形算符　为了以后运算的方便，我们引进一个矢量微分算符，用符号 ∇ 表示，称之为劈形算符。在直角坐标系中，它的表达式是

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿 x、y、z 轴的单位矢量。

它对标量函数 $\phi(x,y,z)$ 的作用是

$$\nabla\phi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\mathrm{grad}\phi。$$

这表明：$\nabla\phi$ 就是标量 ϕ 的梯度 $\mathrm{grad}\phi$，这关系是在直角坐标系中证明的。但是，它适用于任何坐标系。

它对矢量函数 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$ 的标积是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\mathrm{div}\boldsymbol{a}。$$

这表明：$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$，这关系是在直角坐标系中证明的。但是，它也适用于任何坐标系。

它对矢量函数 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$ 的矢积作用是

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}。$$

这表明：$\nabla\times\boldsymbol{a}$ 就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$，这关系是在直角坐标系中证明的。但是，也同样适用于任何坐标系。

在引进劈形算符 ∇，并知道它对标量函数 ϕ 和矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 的作用以后。我们就可以把麦克斯韦微分方程（2-29）式、(2-30)式、(2-31)式、(2-32)式，用算符表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \qquad (2\text{-}29)'$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (2\text{-}30)'$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-31}'$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2-32}'$$

按照算符 ∇ 在直角坐标中的表示，还可以证明：两个劈形算符的标积

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \tag{2-46}$$

这表明：$\nabla \cdot \nabla$ 就是拉普拉斯算符 ∇^2，上式是它在直角坐标系中的表示式。在球坐标中，

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \tag{2-47}$$

在以后的计算中，我们还要用到以下的一些公式

$$\nabla \times \nabla \phi = 0,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a},$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0。$$

这些公式，利用算符 ∇ 在直角坐标中的表达式，牢记它既是矢量算符，又是微分算符，就可以直接证明。作为习题，供读者练习。

还有一些其他公式，这里不一一列举，用到时再予以说明。

第四节　电荷守恒定律

在前面几节中，我们在综合、概括、推广实验定律的基础

上，建立了麦克斯韦电磁理论。麦克斯韦电磁理论是否正确，要由它的推论是否符合客观事实来决定。电荷守恒定律是一条精确成立的物理定律，如果电磁理论正确，就应该能够导出这一定律。现在，来导出这一定律。

我们知道，麦克斯韦微分方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0。$$

在上一节的最后一段要求读者证明：任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的散度 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$。对上列第二式取散度，得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=0=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{D}。$$

把麦克斯韦方程的第一式代入上式，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}。$$

这是在第一章中已知的、电荷守恒的微分形式。这表明：一点发散的电量，等于该点电荷的减少。

把上式在体积 V 中积分

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{j}dV=-\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV,$$

利用高斯公式于电流密度 $\boldsymbol{j}$

$$\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{j}dV=\oiint_S\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S},$$

就得到

$$\oiint \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial Q}{\partial t}。$$

这是电荷守恒定律的积分形式。它表明：由体积V中经包围V的闭合面S流出的电量，等于体积V中的电量减少。

我们由麦克斯韦方程，导出了电荷守恒定律。而电荷守恒是经过实践反复证实了的客观规律。这就说明：从电荷守恒来看，麦克斯韦方程组是正确的。

对麦克斯韦方程的第三式两边求散度，得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=0=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}。$$

这表明：$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 是与时间无关的常数，而麦克斯韦方程的第四式进一步指明，这常数是0。由此可知：第四式是第三式的补充；整个麦克斯韦方程组彼此是不矛盾的，是自洽的。理论本身的自洽性，是正确理论所必需的。不可想象：不自洽的、自相矛盾的理论会是正确的。麦克斯韦方程组的自洽性，也预测麦克斯韦理论可能是正确的。

第五节　能量、能流、能量守恒定律

能量守恒定律　能量守恒和转换定律，是一条精确成立的物理定律。正确的物理理论应该包含这一定律的内容。现在，我们从麦克斯韦微分方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

导出：在电磁运动中，能量守恒和转换定律的数学表达式。用$\boldsymbol{E}$标乘第一式，用$\boldsymbol{H}$标乘第二式，得

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}。$$

以上二式相减，得

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}。$$

在矢量分析中，可以证明：两个任意矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，满足恒等式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}。$$

令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{H}$，利用上式，可以得到

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}。$$

利用物态方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}、\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}、\ \boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')。$$

并设 ε、μ 与时间无关。我们就可以把上式改写成

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'=\frac{j^2}{\lambda}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\quad(2\text{-}48)$$

这就是能量守恒定律的微分形式。它表明：电磁场中一点能量守恒和转换的规律。

对上式在体积 V 中积分，得

$$\iiint_V(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}')dV=\iiint_V\frac{j^2}{\lambda}dV+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV$$

$$+\iiint_V\nabla(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})dV。$$

把高斯公式用于矢量 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，即

$$\iiint_V\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,dV=\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}。$$

把它代入上式，得

$$\iiint_V (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}')dV=\iiint_V \frac{j^2}{\lambda}dV+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV$$

$$+\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (2\text{-}49)$$

这就是能量守恒定律的积分形式。它表明：在体积V中和通过包围V的闭合曲面S，能量守恒和转换的规律。

电源功率　为了说明(2-48)式和(2-49)式确实是电磁场中能量守恒和转换定律的数学表达式，我们来看一看(2-49)式中各项的物理意义。首先，看一看左端一项的物理意义。如在第三节中所述，$\boldsymbol{E}'$表示电源对单位电荷的作用力。如果电荷的速度为$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}'$就是电源对单位电荷所作的功率。如果电荷体密度为$\rho$，$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}'$就是电源对单位体积中的电荷所作的功率。由于$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$，所以$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'$就是电源对单位体积中电荷所作的功率，即电源的功率密度。由此可知$\iiint_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'dV$就是电源在体积$V$中输出的功率。

焦耳热　为了看出(2-49)式右端第一项的物理意义。我们设想体积V是一个面积为S、长为l的柱体。而且，在柱体V中，电流密度j和电导率λ都是常数。那末

$$\iiint_V \frac{j^2}{\lambda}dV=\frac{j^2}{\lambda}\cdot S\cdot l=(jS)^2\cdot\frac{l}{\lambda S}=I^2R。$$

$I=jS$是通过柱体截面S的电流强度。$R=l/\lambda S$是柱体的电阻。I^2R是大家熟知的焦耳热功率。由此可知$\iiint_V \frac{j^2}{\lambda}dV$就是体积$V$中的焦耳热功率。而

$$\frac{j^2}{\lambda} \qquad (2\text{-}50)$$

就是单位体积中的焦耳热功率，即焦耳热功率密度。

电磁场能量 为了看清（2-49）式右端第二项的物理意义。我们把积分体积V取得很大，包括整个电磁场，并使包围体积V的闭合曲面S在电磁场外，以致曲面S上的电场强度$\boldsymbol{E}=0$、磁感应强度$\boldsymbol{B}=0$。那末，(2-49)式中最后一项，在曲面S上的积分，就等于0。这时，(2-49)式就可以写成

$$\iiint_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'dV=\iiint_V \frac{j^2}{\lambda}dV+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV \quad (2\text{-}51)$$

既然，上式左端表示整个电磁场中，电源输出的功率；右端第一项是整个电磁场中，由于电流而发生的热功率。那末，从上式中的三项的和差构成等式来看，右端第二项也应该具有功率或能量变化率的意义。由于导数具有变化率的意义，把

$$\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV$$

理解为能量就是自然的了。被积函数完全由描述电磁场的参量确定。而且，一项由描述电场的参量确定，一项由描述磁场的参量确定。那末，这能量就是电磁场能量。$\iiint_V\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}dV$就是体积$V$中的电场能量。$\iiint_V\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}dV$就是体积$V$中的磁场能量。而

$$\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2} \quad (2\text{-}52)$$

就是单位体积中的电场能量，即电场能量密度。

$$\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2} \quad (2\text{-}53)$$

就是单位体积中的磁场能量，即磁场能量密度。由此可知，(2-51)式就是包括整个电磁场的能量守恒定律的数学表达式。它表明：电源输出的功率，一部分变成焦耳热，另一部分

转变成电磁场的能量。这就是在有电源和导体的整个电磁场中，能量守恒和转换的情景。

能流密度　如果(2-49)式中的积分体积 V，不包括整个电磁场，而是电磁场的一部分。那末，(2-49)式右端最后一项，对 S 面的积分

$$\oiint (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (2\text{-}54)$$

就不等于0。把它和电通量、磁通量的表示式对比。它就是矢量

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \qquad (2\text{-}54)$$

的通量，就是通过闭合面 S 流出的东西。流出的什么东西呢？由(2-49)式其他各项都是功率或能量变化率来看，流出的应该是能量。因此，我们把由(2-54)式定义的矢量 $\boldsymbol{S}$ 叫做能流密度矢量，就是单位时间通过垂直于它的单位面积流出的能量。由此可知，(2-49)式

$$\iiint_V (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}')dV=\iiint_V \frac{j^2}{\lambda}dV+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV$$
$$+\oiint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (2\text{-}49)'$$

确实是电磁场中能量守恒定律的积分形式。它表明：在体积 V 中，电源输出的功率，一部分变成焦耳热，一部分变成电磁场能量，另一部分通过包围体积 V 的闭合面以电磁场能流的形式流出，这就是电磁场中能量守恒和转换的情况。

既然(2-49)式是能量守恒定律的积分形式。那末，和它紧密相关的(2-48)式

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'=\frac{j^2}{\lambda}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \qquad (2\text{-}48)'$$

就确实是电磁场中能量守恒的微分形式。它表明：电磁场中一点，电源输出的功率密度，一部分变成焦耳热，一部分变成电磁场能，而还有一部分以电磁场能流的形式由该点发散开去。

现在，我们来举例说明能量守恒和转换的情况。如图 2-9 所示的一段导体，是闭合电流电路中的一部分。设想导体是导电率为 λ、半径为 a 的圆柱。导体中流有电流密度为 j 的均匀电流，导体右端不包含电源，导体左端包含电源，并且用等效电场强度 E' 描述它对电荷的作用。

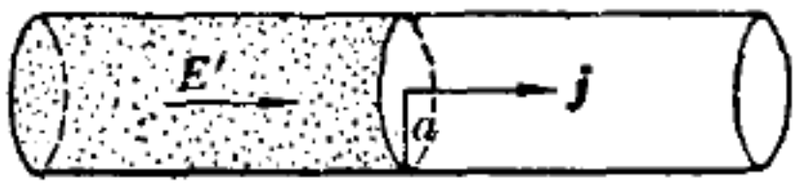


图 2-9

从能量的观点来看，在这样的导体中，有电源输出的功率密度：在左端导体中为 $j\cdot E'$，在右端导体中为零。

有焦耳热功率密度，在整个导体中都是 $\frac{j^2}{\lambda}$。

有电场能量密度，由于左端导体中的电场强度为 $E_1=\frac{j}{\lambda}-E'$，右端导体中的电场强度为 $E_2=\frac{j}{\lambda}$。

因而，左端导体中的电场能量密度为 $\frac{\varepsilon E_1^2}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{j}{\lambda}-E'\right)^2$，右端导体中的电场能量密度为 $\frac{\varepsilon E_2^2}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{j^2}{\lambda^2}$。

有磁场能量密度，按照安培电路公式，在离导体轴线为 r 的地方的磁场强度，满足

$$H\cdot 2\pi r=j\pi r^2$$

的关系。即

$$H=\frac{j}{2}r。$$

而且，磁场强度 H 的方向，和以 r 为半径的圆周相切。导体各点的磁场

能量密度为

$$\frac{\mu H^2}{2}=\frac{\mu}{8}j^2r^2。$$

对于单位长的柱体，能量的变化情况是：由于 j 不变，E' 不变，电磁场能量都不随时间变化；发生的焦耳热功率是 $\frac{j^2}{2}\pi a^2$。在右端的单位长导体中，发生的只有这个焦耳热功率，在左端的导体中，除这热功率以外，电源还输出功率 $j\cdot E'\pi a^2$。从能量守恒的观点，就必然提出问题：右端消耗的热功率$\frac{j^2}{2}\pi a^2$从何而来？左端电源输出的功率，除消耗焦耳热功率外，还有$\left(j\cdot E'\pi a^2-\frac{j^2}{\lambda}\pi a^2\right)$能量哪里去了呢？

从表达能量守恒定律的(2-49)式看来，右端单位长导体中消耗的焦耳热功率，只能从这段导体的表面流进来；左端单位长导体中多余的能量，也只能从这段导体的表面流出去。我们再从能流密度矢量(2-54)式来看一看，情况是否真的如此？

由上面关于磁场的论述可知：在导体表面，磁场强度的大小为 $H=\frac{j}{2}a$。磁场强度的方向，和绕着圆柱的圆周相切，并和电流密度 j 的方向构成右手螺旋。对于电场，在右端导体表面为$E_2=\frac{j}{\lambda}$，在左端导体表面为 $E_1=\frac{j}{\lambda}-E'$。

按照(2-54)′式，就可以算出：左端导体面的能流密度为

$$S_1=\left(\frac{j}{\lambda}-E'\right)\times H。$$

右端导体面的能流密度为

$$S_2=\frac{j}{\lambda}\times H。$$

它们的方向如图 2-10 所示，它们的大小是

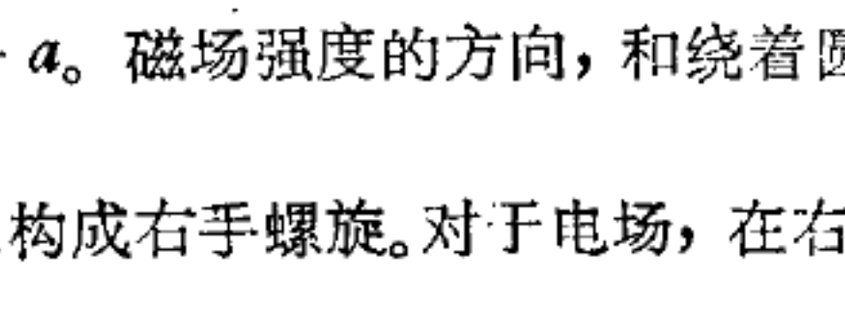


图 2-10

$$S_1=\left(E'-\frac{j}{\lambda}\right)\cdot\frac{j}{2}a=E'j\cdot\frac{a}{2}-\frac{j^2}{\lambda}\frac{a}{2},$$

$$S_2=\frac{j}{\lambda}\cdot\frac{j}{2}a=\frac{j^2}{\lambda}\cdot\frac{a}{2}。$$

由此可以算出：由左端单位长导体面流出的能量率为

$$S_1\cdot 2\pi a=\left(E'j\frac{a}{2}-\frac{j^2}{\lambda}\frac{a}{2}\right)\cdot 2\pi a=\left(Ej-\frac{j^2}{\lambda}\right)\pi a^2。$$

这恰恰是前面的论述中所提到的。由右端单位长导体面流进的能量率为

$$S_2\cdot 2\pi a=\frac{j^2}{\lambda}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2\pi a=\frac{j^2}{\lambda}\pi a^2。$$

这也恰恰是前面的问题中所提到的。这样，就说明我们关于电磁场中能量守恒和转换的观点是正确的。

粗浅看来，发电厂输给用户的电能，似乎是由导线中的自由电子传递的，其实不然。按照上述的观点，电能是沿着导线，以场的形式传递的。进一步的讨论还表明：它是以光速 c 传递的。如果电能是依靠电子象接力棒似传递的，哪能这样神速！

第二章的结束语

1．这一章把前一章论述的各对基本矛盾，以及由它们制约的各个基本规律，综合、概括、推广形成统一的电磁理论，描述普遍的电磁运动。这就是麦克斯韦电磁理论，是电动力学的基本方程。它们包括：洛仑兹力密度

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B},$$

积分方程

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho dV;\quad \oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0;$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S};\quad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}。$$

微分方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho;\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t};\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}。$$

界面条件

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma;\ B_{2n}-B_{1n}=0;\ H_{2t}-H_{1t}=i_N;\ E_{2t}-E_{1t}=0。$$

物态方程，如：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E};\qquad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H};\qquad \boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')。$$

2．电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$，在这里给出了严格的定义。读者可以把它和中学教科书中，普通物理和其他书刊中阐述的概念联系起来，加深理解。

电极化矢量和磁化矢量也有明确的定义。它们一方面和束缚电荷、分子电流等有内在的紧密联系。另一方面还和电场、磁场、物质结构相联系。这些，在学习时，也是要反复思考，深入理解的。

3．电荷守恒、能量守恒是精密度很高的守恒定律。在这一章里，我们从麦克斯韦方程出发，论述了这个守恒定律，并得到了它们的具体表现形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t};\qquad \oiint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial Q}{\partial t}。$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}'=\frac{j^2}{\lambda}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H});$$

$$\iiint_V(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}')dV=\iiint_V\frac{j^2}{\lambda}dV+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)dV$$

$$+\oiint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}。$$

在理解这些公式的意义时，要着重理解各个符号或各项所表示的物理量的物理意义。

4．这一章用到的数学工具，主要也还是矢量分析。引用的一些矢量分析公式，读者应自行证明。证明的关键，要注意算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

的矢量性质和微分性质。在这基础上，按照一般的矢量标积、矢积的运算规则和函数的微分运算规则，就可以算出正确的结果。学好电动力学的一个关口是数学，过好数学关口的要素是耐心地多算几遍。为此，请再算以下几个题目：

令：$\boldsymbol{r} = (x-x')\boldsymbol{i} + (y-y')\boldsymbol{j} + (z-z')\boldsymbol{k}$。

证：在 $r \neq 0$ 处，

i. $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

ii. $\nabla(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{b}$　　（$\boldsymbol{b}$ 是与坐标无关的常矢量）

iii. $\nabla^2\frac{1}{r} = 0$

iv. $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$

v. $\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$

第三章　稳定电、磁场

在第一章中，我们论述了电磁运动的基本规律。在第二章中，我们把它综合、概括、推广为电磁运动的一般规律，称之为麦克斯韦电磁理论。而且，还由它导出了几个守恒定律的内容和形式。在这一章里，我们用麦克斯韦电磁理论，来讨论稳定电磁过程的规律。并且，着重介绍一些处理问题的重要方法：势函数法；镜象法；分离变量法；级数展开法等。

第一节　稳定电、磁场的标势和矢势

电场和磁场　为了导出稳定情况下电、磁场的规律，我们回顾一下麦克斯韦理论的基本内容。它用洛仑兹公式

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

定义了电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，奠定了计算电场、磁场对电荷、电流作用的基础。它用积分方程

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho\, dV,$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S},$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S},$$

表明了：在一局部空间内，电荷、电流、电场、磁场之间的依存关系。它用微分方程

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}=\rho,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

表示出：在介质连续分布的那些点上，电荷、电流、电场、磁场的相互联系。它用界面条件

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma,$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0,$$

$$E_{2t}-E_{1t}=0,$$

$$H_{2t}-H_{1t}=i_N,$$

指出：在不同介质分界面两侧，电场、磁场的突变，和面上电荷、电流相关的情况。它用物态方程，例如

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{j}=\lambda(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'),$$

描述了由物质性质确定的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 等的关系。这就是麦克斯韦理论的一般形式。

在特殊情况下，按照具体条件，可以由以上的一般形式导出相应的特殊形式。在稳定情况下，电荷、电流、电场、磁场等都不随时间变化。令以上诸式中，含有时间导数的项等于0，就得到稳定电、磁场的麦克斯韦方程组。显然，除积分方程变成

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho dV,$$

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0,$$

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S},$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0,$$

微分方程变成

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},$$

以外，其他各个方程都保持形式不变。

从上述的积分方程和微分方程，都可以看出，稳定电、磁场具有这样的特点：电场和磁场是彼此分离的，不出现在同一个方程式中；电荷分布和电流分布也无紧密联系，电荷守恒具有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$

的形式；而且，电荷和电场由积分方程

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint \rho dV \tag{3-1}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \tag{3-2}$$

和微分方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{3-3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{3-4}$$

联系；电流和磁场由积分方程

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3-5}$$

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{3-6}$$

和微分方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j} \tag{3-7}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0 \tag{3-8}$$

联系。这表明：在稳定情况下，电荷和电场，电流和磁场，这两对基本关系是彼此无关的，可以分别处理。我们把由（3-1）式、(3-2)式、(3-3)式、(3-4)式描述的电场，叫做静电场。把由(3-5)式、(3-6)式、(3-7)式、(3-8)式描述的磁场，叫做稳定电流的磁场。

标势和矢势 上述方程，分别描述静电场和稳定电流磁场的一般规律。在具体情况下，加上具体的边界条件，它们就描述具体的特殊规律。原则上，求解这些方程，就能获知具体的电磁规律。但是，实际上，不管是根据(3-3)式、(3-4)式求解静电场问题，还是按照(3-7)式、(3-8)式求解稳定电流的磁场问题，即使不能说是不可能的，也可以说是很困难的。因此，我们通常不是直接求解这些方程，而是引进标势、矢势，用简单的势方程代替这些方程，来求解有关问题。这就是我们要讲的势函数方法。

在上一章介绍劈形算符 ∇ 时，我们让读者证明：一个标量的梯度 $\nabla\phi$ 是一矢量，这矢量的旋度

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0。$$

把这个恒等式和(3-4)式比较，可以看出：如果我们按照

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi \tag{3-9}$$

引进标势 ϕ，那末(3-4)式自然得到满足。这样，就提供了一

个可能，按照(3-9)式，用标势 ϕ 替换电场强度 $\boldsymbol{E}$。但是，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不仅要满足(3-4)式，还要满足(3-3)式。我们把(3-9)式代入(3-3)式，得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\nabla\cdot(-\varepsilon\nabla\phi)=\rho。$$

这就是按照 (3-9) 式替换电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的标势 ϕ 应该满足的微分方程。我们设想，在所考虑的区域内，介质是均匀的，ε 不仅与时间无关，也和坐标无关。上式变成

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3-10}$$

这就是标势 ϕ 应该满足的方程，叫做泊松方程。在 $\rho=0$ 的那些地方，上式成为

$$\nabla^2\phi=0 \tag{3-11}$$

这个方程叫做拉普拉斯方程。这样一来，我们就把求解电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的(3-3)式、(3-4)式的问题，转化为求解标势 ϕ 的泊松方程(3-10)式或拉普拉斯方程(3-11)式，再由(3-9)式计算电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的问题。在现在的情况下，标势 ϕ 的引入，不仅使求解问题大大简化，而且 ϕ 本身也具有直接的物理意义。把(3-1)式和第一章的(1-22)式比较，就可看出：标势 ϕ 就是静电势 ϕ。

我们再讨论如何变换电流磁场方程(3-7)式、(3-8)式的问题。在上一章介绍劈形算符 ∇ 时，我们还让读者证明：一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$，仍然是一个矢量，这矢量的散度

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0。$$

把这个恒等式和表示稳定电流磁场性质的(3-8)式比较，可以看出，如果我们按照

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3-12}$$

引进矢势 $\boldsymbol{A}$，那末(3-8)式自然得到满足。这样，我们就可以

按照(3-12)式，用矢势 A 替换磁感应强度 B，把(3-12)式代入磁感应强度还需满足的(3-7)式，得

$$\nabla\times\left(\nabla\times\frac{A}{\mu}\right)=j。$$

在上一章介绍劈形算符时，还让读者证明恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times a)=\nabla(\nabla\cdot a)-\nabla^2 a。$$

把这公式用于矢势 A，并设 μ 与时间、空间坐标无关，则得

$$\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A=\mu j \tag{3-13}$$

这是替换磁感应强度 B 的矢势 A 应该满足的方程。这方程还太繁，不容易求解。能不能进一步化简呢？我们回过来考虑引进矢势 A 的(3-12)式和以前用过的恒等式

$$\nabla\times(\nabla x)=0。$$

现在用 x 代替以前的 ϕ，它是任意的连续可导函数。这就启发我们：如果把矢势 A，按照

$$A'=A+\nabla x$$

变换成 A'，那末

$$\nabla\times A'=\nabla\times(A+\nabla x)=\nabla\times A=B。$$

这表明：按(3-12)式引进的矢势 A 不是唯一的。由上述变换联系着的矢势 A、A'，由于 x 任意，而有无穷多个。这无穷多个矢势，都按(3-12)式确定同一个磁感应强度 B。这种矢势间的变换叫做规范变换。这种在规范变换下不引起场强变化的性质叫做规范不变性。正是这种规范不变性，使我们可以在无穷多个可能的矢势中，选择适当的矢势，得到比较简单的微分方程。实际上，如果我们选择满足条件

$$\nabla\cdot A=0 \tag{3-14}$$

的矢势 A，那末微分方程(3-13)式就简化为

$$\nabla^2 A=-\mu j \tag{3-15}$$

这样一来，就把按照(3-7)式、(3-8)式求解磁感应强度的问题，转化为按照(3-14)式、(3-15)式求解矢势 A，再由(3-12)式确定磁感应强度 B 的问题。值得注意：(3-15)式和(3-10)式具有完全相同的形式，它是矢势 A 的泊松方程。在没有电流的地方

$$\nabla^2 A = 0 \tag{3-16}$$

这就是矢势 A 的拉普拉斯方程。矢势 A 本身没有什么直接的物理意义，它的意义只是通过(3-12)式，由它确定的 B 表现出来。

由此可知，不管是静电场，还是稳定电流的磁场，都可以用求解势的泊松方程或拉普拉斯方程，来代替求解场强的麦克斯韦微分方程。这使应用麦克斯韦理论来处理问题得到很大方便，这是势函数方法的巨大优点。

基本解　把求解场强的麦克斯韦微分方程的问题，转化为求解势的泊松方程或拉普拉斯方程的问题以后，就要讨论如何求解势的泊松方程或拉普拉斯方程。这里，我们利用物理条件，简化拉普拉斯方程，探求势方程的基本解，先求点电荷 q 的电场的标势 ϕ。

设想有一个点电荷 q，放置在坐标原点。如图 3-1 所示，在原点以外，无电荷分布，$\rho=0$，按照前面的论述，在原点以外的空间，标势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0。$$

在这种情况下，场具有球对称性，用球坐标来进行计算，比较方便。在球坐标中，点 P 的位置，用 (r, θ, α) 表示。它们和直角坐标的关

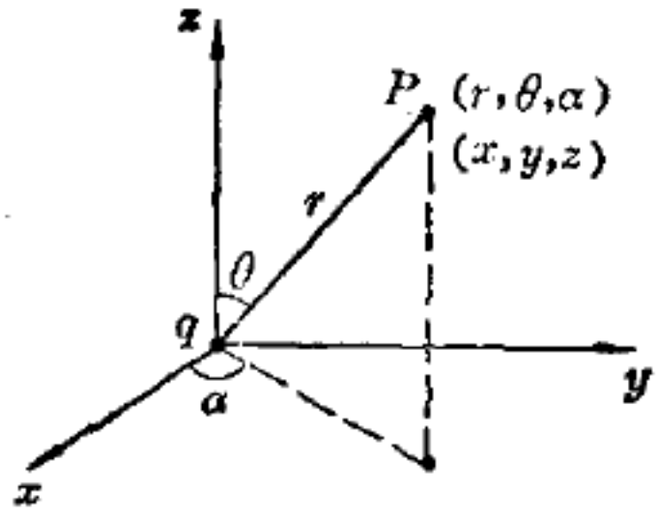


图 3-1

系为

$$x=r\sin\theta\cos\alpha,$$
$$y=r\sin\theta\sin\alpha,$$
$$z=r\cos\theta。$$

这些关系，可以从图 3-1 中直接得出。

在上一章中，介绍劈形算符 ∇ 时，我们也说到拉普拉斯算子。它在直角坐标中是

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

这从 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 和 ∇ 的表达式可以直接证明。拉普拉斯算子在球坐标中是

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}。$$

这由(r,θ,α)和(x,y,z)的关系，利用复合函数的求导方法，可以相互导出拉普拉斯算符的两种表示式。有兴趣的读者，可以自行练习。

我们再回到点电荷 q 的标势问题。由于点电荷的场具有球对称性，标势 ϕ 应该与 θ、α 无关，只是 r 的函数。因此，在球坐标中，标势 ϕ 的拉普拉斯方程就有

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)=0 \tag{3-17}$$

的形式。这是点电荷的标势，在原点以外的空间，应该满足的微分方程。原点的 ϕ 应该怎样呢？因为点电荷在原点，原点是标势 ϕ 的奇异点，要设法把它除去。如图 3-2 所示，我们用一个闭合面 S，把它包围起来。在这

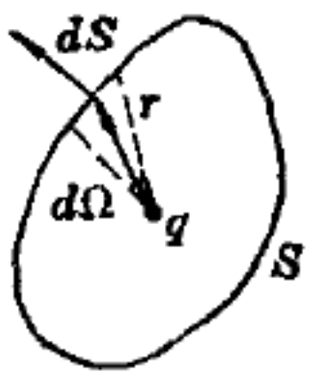


图 3-2

闭合面上，电场应该满足积分方程(3-1)式

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon}。$$

再由引进标势 ϕ 的(3-9)式，可以把上式写成

$$\oiint_S \nabla\phi\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{q}{\varepsilon} \tag{3-18}$$

这就是点电荷 q 的标势 ϕ，在包围它的闭合面 S 上，应该满足的边界条件。再者，点电荷的场，应该局限在有限空间内，在无穷远处

$$\lim_{r\to\infty}\phi=0 \tag{3-19}$$

这就是点电荷的场的无穷远边界条件。这样，我们就把求解点电荷 q 的场的物理问题，转化为求解微分方程(3-17)式的满足边界条件(3-18)式、(3-19)式的数学问题。

(3-17)式是简单的常微分方程，可以直接积分，积分一次得

$$r^2\frac{d\phi}{dr}=C_1',$$

$$\frac{d\phi}{dr}=\frac{C_1'}{r^2}。$$

再积分一次得

$$\phi(r)=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

这是微分方程(3-17)式的一般解。积分常数 C_1、C_2 要由边界条件(3-18)式、(3-19)式来确定。由(3-19)式，得

$$\lim_{r\to\infty}\phi(r)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{C_1}{r}+C_2\right)=C_2=0。$$

这表明：既满足微分方程(3-17)式，又满足边界条件(3-19)式的解是

$$\phi(r)=\frac{C_1}{r}。$$

积分常数 C_1，要由(3-18)式来定。因为

$$\nabla\phi(r)=\frac{d\phi}{dr}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-C_1\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}。$$

前一个等式，用到了在上一章中介绍的、在球坐标中标函数梯度的表示式。把上式代入(3-18)式中，得

$$\oiint_S C_1\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}=\frac{q}{\varepsilon}。$$

在第一章中，我们已经知道

$$d\Omega=\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3},$$

是面元 $d\boldsymbol{S}$ 对 q 点所张的立体角，如图 3-2 所示。因此，

$$\oiint_S C_1\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^3}=C_1\oiint_S d\Omega=C_1\cdot 4\pi=\frac{q}{\varepsilon},$$

$$C_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon}。$$

这样，我们就得到：点电荷 q，在离它为 r 处的标势

$$\phi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\qquad(3\text{-}20)$$

对于以体密度 $\rho(x',y',z')$ 分布的电荷，我们可以把它微分。在体积元 dV' 中的电荷 $\rho(x',y',z')dV'$，在离它为

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')}$$

的 (x,y,z) 点的电势 $d\phi(x,y,z)$，可以看作是点电荷的电势，即

$$d\phi(x,y,z)=\frac{\rho(x',y',z')dV'}{4\pi\varepsilon r}。$$

由于泊松方程、拉普拉斯方程都是线性微分方程，满足迭加

原理。所以，整个电荷激发的场的标势就等于上式的积分，即

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(x',y',z')dV'}{r} \qquad (3\text{-}21)$$

这就是电荷标势的基本解。

对于稳定电流的矢势 A，它满足和标势 ϕ 一样的泊松方程和拉普拉斯方程，应该具有同样的基本解。如果电流以密度 $j(x',y',z')$ 分布，那末它们在 (x,y,z) 点的矢势就是

$$A(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{j(x',y',z')dV'}{r} \qquad (3\text{-}22)$$

由于作代换：$\phi\to A$；$\rho\to j$；$\varepsilon\to\frac{1}{\mu}$，就可以由标势的泊松方程(3-10)式，得到矢势的泊松方程(3-15)式。所以，对标势的基本解(3-21)式作同样的代换，得到的(3-22)式就应该是矢势的基本解。当然，对于矢势 A，不同于标势 ϕ，还有一个附加要求，要求它满足条件(3-14)式。可以证明：(3-22)式确定的矢势 A，确实满足条件(3-14)式。

如果知道了电荷或电流在空间的分布，我们就可以按照基本解(3-21)式或(3-22)式，进行积分，算出由这电荷或电流激发的标势或矢势。在普通物理电磁学中有较多的例题和习题。这里仅以均匀带电导体球为例，说明利用基本解计算问题的方法。

如图 3-3 所示，设电量 q，以面密度

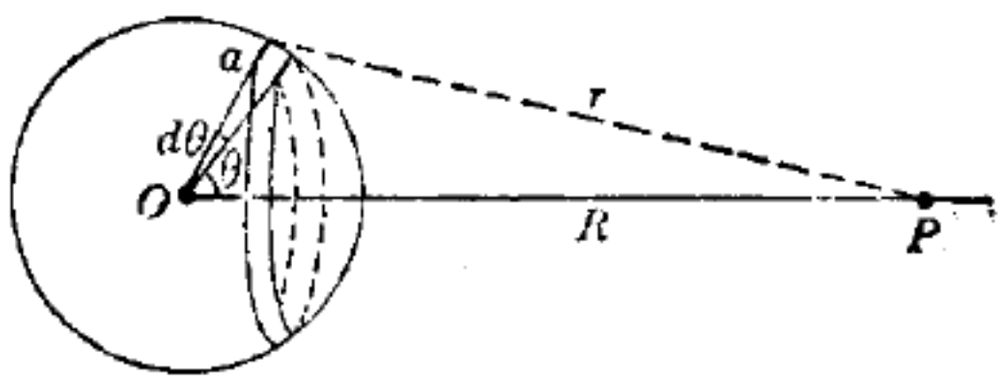


图 3-3

$$\sigma=\frac{q}{4\pi a^2}$$

均匀分布在半径为 a 的球面上，求由这导电球激发的电场，在距球心为 R 处的电势 ϕ。

在导体球上取一半径为 $a\sin\theta$，宽为 $ad\theta$ 的球带，带上各点到 P 点的距离都是 $r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}$，带上的电量为

$$dq=\sigma dS=\sigma\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot ad\theta=\frac{1}{2}q\sin\theta\cdot d\theta,$$

这电量在 P 点激发的电势，按基本解(3-21)式为

$$d\phi=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q\sin\theta\,d\theta}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}},$$

而整个导体球在 P 点所激发的电场的电势就是

$$\phi=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}。$$

第二节　镜　象　法

现在我们在一些具体情况下，探求满足具体条件的标势或矢势的泊松方程或拉普拉斯方程的解。我们的着重点在于揭示分析问题、解决问题的观点和方法。在解题之前，必需明确：找寻满足条件和方程的解，究竟是什么意思？这个问题，大家都知道，但不一定都深刻掌握。特别在用镜象法处理问题时，容易模糊、动摇。因此，有必要强调一下，所谓找寻满足条件和方程的解，就是要找寻一个函数，既满足具体的物理条件，又满足泊松方程或拉普拉斯方程或别的方程。至于用什么方法、沿什么途径找到这个函数，那是另外一个问题，不是

求解的问题，而是求解的方法问题。求解的方法，可能是多种多样的。如果在所提条件下，方程的解是唯一的。那末，不管用什么方法，找出来的解，就是仅有的一个。在这种情况下，我们就可以“不择手段地”找寻一个函数，既满足方程又符合所提条件，来完成我们的求解任务。镜象法，就是在这种情况下，求解某些问题的一种简便方法。下面，我们结合具体问题，介绍这种方法。

例：求平面导体前点电荷的电场

设想有一个电量为 q 的点电荷，放置在离平面导体为 a 的地方，导体接地，如图 3-4 所示。我们来求导体平面右面空间的电场，如果电荷 q 至平面导体的距离 a，场点至平面导体的距离 x，都远小于导体的线度 l，即 $a \ll l$、$x \ll l$。这时，导体平面可以看作是无限大的平面。

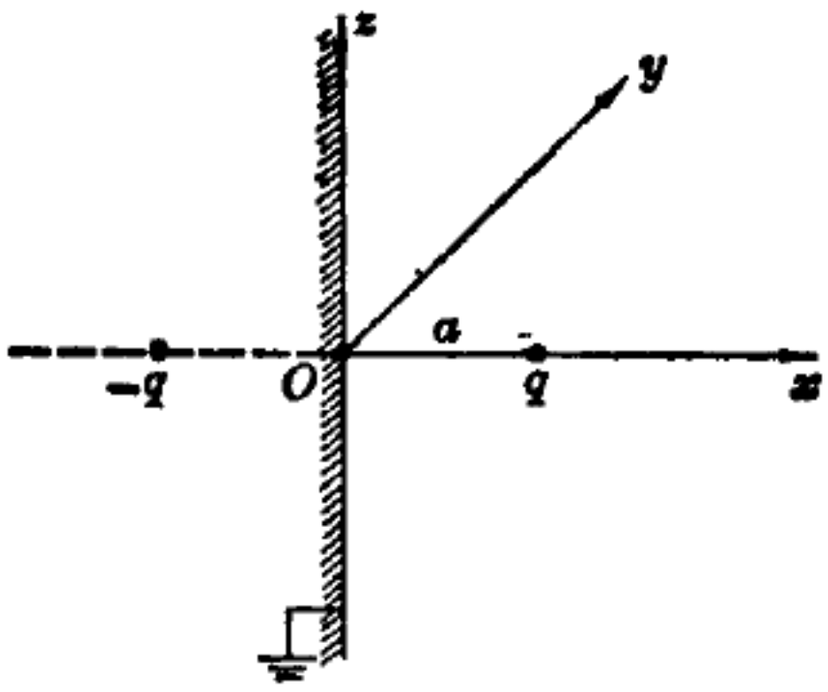


图 3-4

首先，我们把这个物理问题，用数学形式表示出来。如图 3-4 所示，取一直角坐标系，原点在导体平面上，导体平面为 oyz 平面(垂直于纸面)，x 轴垂直于导体平面且通过点电荷 q。因为，在导体平面右面空间，除 $x=a$ 点有电荷 q 外，处处无电荷。所以，在这些地方的电场标势 ϕ，满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{3-23}$$

在 $x=a$ 点，有电荷 q，标势 ϕ 是奇异的。我们用一个闭合面把它包围起来。在这闭合面上，如上一节所述，标势 ϕ 要满足边界条件

$$\oint\!\!\oint \nabla\phi\cdot ds=-\frac{q}{\varepsilon} \tag{3-24}$$

由于平面是导体，而且接地。因此，导体平面($x=0$)是一等势面，而且标势为 0，即在 $x=0$ 平面上

$$\lim_{x\to 0}\phi(x,y,z)=0 \tag{3-25}$$

这样一来，我们就把物理问题转化成了数学问题。探求平面导体前点电荷的电场的问题，就变成了找寻一个既满足方程(3-23)式，又满足条件(3-24)式、(3-25)式的势函数 ϕ 的问题。

怎样找寻这样一个势函数 ϕ 呢？这里，我们不是采用严格的数学方法求解这个函数，而是根据物理知识来推测这个函数。

首先，我们设想：如果没有导体平面，只在 $x=a$ 处有一个点电荷 q。那末，按照上节所得的基本解，在空间的标势就是

$$\phi_s(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \tag{3-26}$$

如上一节所述，这个势函数是满足方程(3-23)式、边界条件(3-24)式的。现在，有了导体平面，这个势函数，在平面右面的空间，虽然仍然满足(3-23)式和(3-24)式，但是不满足导体面上的边界条件(3-25)式。这是因为点电荷 q 对平面导体发生静电感应，使导体上产生感应电荷，这感应电荷分布在导体表面上，并在导体前激发电场，这个电场迭加在点电荷的电场(3-26)式之上，使(3-26)式表示的电场发生变化，形成满足(3-23)式、(3-24)式、(3-25)式的电场。因此，我们把感应电荷激发的电场计算出来，迭加在点电荷的电场(3-26)式之上，就可以得到我们所需要的标势 ϕ 了。可惜，我们不知道有多少感应电荷，不知道它们如何分布在平面导体上。如何计算它们激发的电场呢？

光学中的平面镜造象给我们以启示，象图 3-5 表示的那样。点光源 S 发出的光线，射到平面镜上，被平面镜反射，这反射光线好象是由象 I 发射的一样。我们把 I 叫做光源的象。现在，点电荷激发的电场，使导体平面产生感应电荷，感应电荷又在右面空间激发电场，这感应电荷激发的电场，会不会象是由一象电荷激发的一样呢？这样的类比是很自然的，特别是考虑到光波也是电磁波，这种类比就是必然的了。类比虽然自然、必然，毕竟还是一种推测，还有待证明。证明这种推测是否正确的标准是：象电荷激发的电场和点电荷 q 激发的电场，迭加起来，是否满足

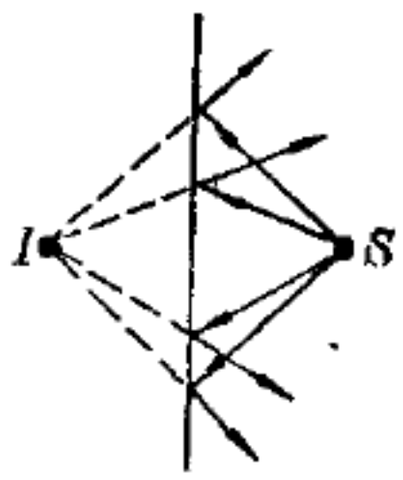


图 3-5

方程(3-23)式和边界条件(3-24)式、(3-25)式。如果满足就是正确的，如果不满足就是不正确的。而且，这问题的解的唯一性(可以证明，但这里从略)，保证用任何方法得到的解，都是相同的。

按照这样的逻辑，我们设想：在 $x=-a$ 的地方，有一个象电荷 $-q$，它在平面导体右面空间激发的电场为

$$\phi_I(x,y,z)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} \tag{3-27}$$

这个电场应该等效于感应电荷激发的电场。我们来证明这个等效性，证明它和(3-26)式一起，满足方程(3-23)式和边界条件(3-24)式、(3-25)式。因为象电荷 $-q$ 是在导体平面左边。所以，在导体平面的右面空间，处处满足

$$\nabla^2\phi_I=0。$$

在包围原电荷 q 的闭合面 S 上，满足

$$\oint_S \nabla\phi_I\cdot d\boldsymbol{S}=0。$$

由(3-26)式和(3-27)式的表示式直接看出：在导体平面上，即在 $x=0$ 平面上

$$\phi_I(0,y,z)=-\phi_S(0,y,z)。$$

由此可知：象电荷的电场和原电荷的电场，迭加起来，就是

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=\phi_S(x,y,z)+\phi_I(x,y,z)\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\\&\quad-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\end{aligned} \tag{3-28}$$

它满足方程(3-23)式和边界条件(3-24)式、(3-25)式，正是我们找寻的问题的解。

在得到了平面导体前点电荷的场的解(3-28)式以后，利用电荷和电场的关系，可以反过来计算导体表面上的感应电荷。导体和右面空间的交界面是一个突变面。在这突变面，即导体表面上，有面电荷 σ 分布；在这突变面两侧，即导体内、外表面，电场发生突变，按照麦克斯韦理

论，这突变，按照界面条件

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma,$$
$$E_{2t}-E_{1t}=0$$

发生。我们利用第一式，计算导体平面上的感应面电荷分布 σ。在静电情况下，导体内的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_2=0。$$

导体外的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\phi。$$

在导体表面附近，电场强度 $\boldsymbol{E}_1$ 沿表面法向的分量，就是沿 x 轴向的分量，为

$$E_{1n}=+\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{q(x-a)}{4\pi\varepsilon_0[(x-a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{q(x+a)}{4\pi\varepsilon_0[(x+a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

在导体外表面上，$x=0$，

$$E_{1n}=+\frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0[a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

由此可知，导体表面上感应电荷面密度为

$$\sigma=-\varepsilon_0E_{1n}=-\frac{2aq}{4\pi[a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{3-29}$$

对上式积分，就可以得到在导体平面上感应电荷的总量，为

$$Q=\iint\sigma ds=-\frac{2aq}{4\pi}\iint\frac{dydz}{[a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

为了计算这个积分，我们将图 3-3 绕 z 轴转过 90°，成为图 3-6。导体平面为 oyz 平面，在纸平面内，x 轴垂直纸面向外。上列积分是对整个 oyz 平面进行的。我们用极坐标 (r,θ) 表示平面上点的位置，那末就有

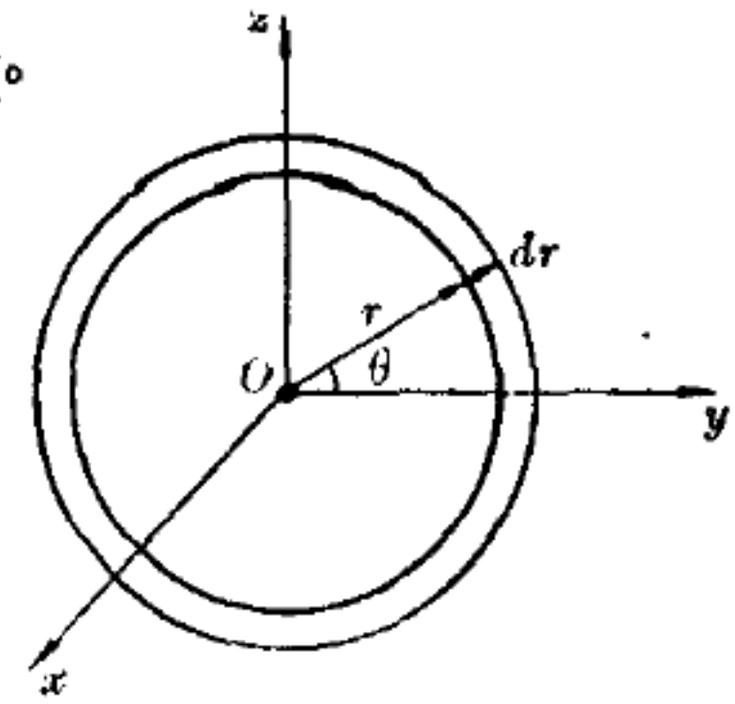


图 3-6

$$y^2+z^2=r^2,\quad dydz=rdrd\theta。$$

上列积分就成为

$$Q=-\frac{2aq}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rdrd\theta}{[a^2+r^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-aq\int_0^{\infty}\frac{rdr}{[a^2+r^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{aq}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}}\cdot[a^2+r^2]^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\infty}=-q \qquad (3\text{-}30)$$

这表明：导体面上感应电荷的电量，等于象电荷的电量。

由以上的论证可知：在接地平面导体前的点电荷 q，对导体发生感应，使导体平面上产生感应电荷 $-q$。这感应电荷 $-q$，以面密度 σ，按照(3-29)式，分布在导体平面上。这感应电荷 $-q$，在导体前激发的电场，如同象电荷 $-q$ 在导体前激发的电场一样，用(3-27)式表示。它和点电荷 q 的场迭加起来，就是用(3-28)式表示的总的电场。

在电子技术中，我们常常碰到，导体发射电子的问题。被导体发射的电子，在导体附近时，对导体发生感应，和导体仍有作用。这种作用可以用电子和它在导体中的象的作用进行估算，这是上面所得结论的一种应用。

例： 求圆球导体前点电荷的电场

设想有一个电量为 q 的点电荷，放置在半径为 a 的球外，离球心为 l 的地方。如图 3-7 所示，导体球是接地的，现在计算它们在球外激发的电场。首先，我们把这个物理问题，用数学公式表达出来。在导体球外，在点电荷以外的地方，没有电荷，电场的标势 φ 满足拉普拉斯方程，即

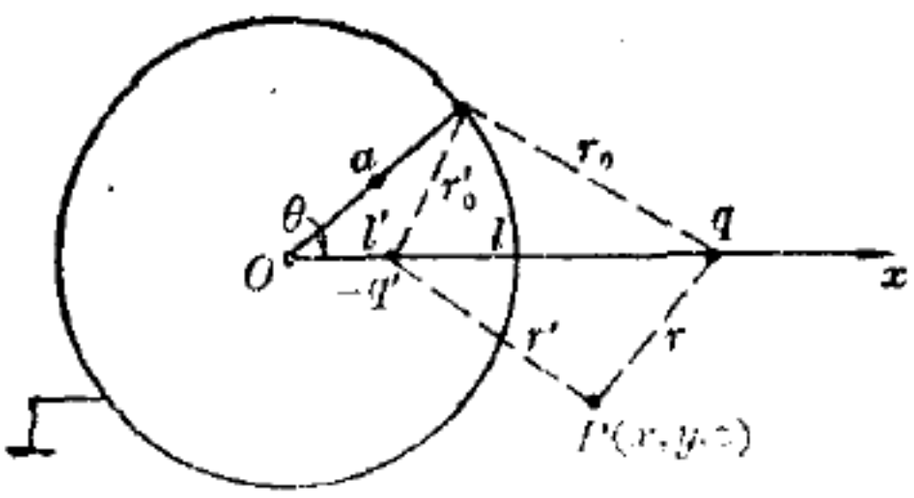


图 3-7

$$\nabla^2\phi=0 \tag{3-31}$$

在点电荷 q 所在之点$(l,0,0)$，电场奇异。我们用一闭合面 S 把它包围起来，在这闭合面 S 上，电场的标势 ϕ 满足边界条件

$$\oiint \nabla\phi\cdot ds=-\frac{q}{\varepsilon} \tag{3-32}$$

导体是等势体，由于接地，标势为 0。所以，在导体面上，电场的标势满足边界条件

$$\phi(a,\theta,\alpha)=0 \tag{3-33}$$

点电荷和导体上感生的电荷，都在有限区域内，它们激发的场也应该局限在有限区域内，在远离导体和点电荷的地方，电场的标势满足边界条件

$$\lim_{r\to\infty}\phi(r,\theta,\alpha)=0 \tag{3-34}$$

这样一来，求解圆球导体前点电荷的电场的问题，就归结为：找寻一个函数 ϕ，它同时满足方程(3-31)式和边界条件(3-32)式、(3-33)式、(3-34)式。

如在上面所做的一样，我们从物理上来推测这个函数。如果没有圆球导体，点电荷 q 所激发的电场的势为

$$\phi_S(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-l)^2+y^2+z^2}}。$$

显然，这个标势满足方程(3-31)式和边界条件(3-32)式、(3-34)式。但不满足边界条件(3-33)式。这是因为：由于圆球导体的存在，点电荷 q 对导体发生感应，使导体球上产生感应电荷。这感应电荷激发的电场和点电荷的电场迭加在一起，使电场符合(3-31)式、(3-32)式、(3-33)式、(3-34)式所描述的规律。由此看来，如果知道了感应电荷及其分布，就可以算出电场标势。在上一例中，我们就是用推测到的、与感应电荷等效的象电荷，来导出电场标势的。现在，我们也用象电荷来代替导体球上的感应电荷。但是，我们不知道这个象电荷的电量是多少，位置在哪里？不能用它直接算出电场的标势。这里，和上一例相反，我们不能用推测到的象电荷给出电场，再证明它满足方程和条件。而是用方程和条件来确定象电荷的大小和位置，同时确定电场的标势。

设想象电荷的大小为 $-q'$，位置在球心与点电荷的连线上，离球心为 l' 的地方。那末，它在球外 $P(x,y,z)$ 一点的标势为

$$\phi_I(x,y,z)=\frac{-q'}{4\pi\varepsilon r'}=\frac{-q'}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-l')^2+y^2+z^2}}。$$

它和点电荷的电场迭加起来，就是合电场，为

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=\phi_S(x,y,z)+\phi_I(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon r'}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-l)^2+y^2+z^2}}\\&\quad-\frac{q'}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-l')^2+y^2+z^2}}\end{aligned}\qquad(3\text{-}35)$$

显然，由我们多次说到的、基本解的性质可知：不管象电荷的电量 $-q'$ 多大，不管象电荷在导体球内什么地方，上列标势 ϕ 总满足方程(3-31)式和条件(3-32)式、(3-34)式。对于边界条件(3-33)式，不是任意的 q' 和 l' 所能满足的。只有某些 q'、l'，才能使标势 ϕ(3-35)式满足边界条件(3-33)式。正因为如此，我们就可以用条件(3-33)式，来确定象电荷的电量 $-q'$ 和位置 l'，也确定电场的标势。

由边界条件(3-33)式来看(3-35)式，在球面上，应有

$$\frac{q}{r_0}=\frac{q'}{r_0'}\qquad(3\text{-}36)$$

由图 3-6 可知：球面上一点至点电荷 q 的距离 r_0，至象电荷 q' 的距离 r_0'，满足方程

$$\begin{aligned}r_0^2&=a^2+l^2-2al\cos\theta\\r_0'^2&=a^2+l'^2-2al'\cos\theta\end{aligned}\qquad(3\text{-}37)$$

把(3-36)式平方，并把(3-37)式代入，得

$$\begin{aligned}&q'^2(a^2+l^2-2al\cos\theta)=q^2(a^2+l'^2-2al'\cos\theta),\\&q'^2(a^2+l^2)-q^2(a^2+l'^2)+(q'^2l-q^2l')2a\cos\theta=0。\end{aligned}$$

因为边界条件 (3-33) 式要在球面上任意一点都成立，这就要求上式在球面上任意一点也都成立，即要求不管 θ 取何值上式都成立。这只在 $\cos\theta$ 的系数为 0 时才能达到。由此可知，边界条件要求

$$q'^2 l = q^2 l'; \quad q'^2(a^2+l^2) = q^2(a^2+l'^2)。$$

这是两个未知数 q' 和 l' 的两个联立的代数方程，求解方法是大家熟知的，它们的解是

$$q' = \frac{a}{l}q; \quad l' = \frac{a^2}{l} \tag{3-38}$$

这样，我们就由边界条件(3-33)式确定了象电荷的电量 q' 和位置。把它们代入(3-35)式，得

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-l^2)+y^2+z^2}} - \frac{\frac{a}{l}q}{4\pi\varepsilon\sqrt{\left(x-\frac{a^2}{l}\right)^2+y^2+z^2}} \tag{3-39}$$

这就是点电荷 q 和接地导电球激发的电场的标势。

以上我们着重论述了：用镜象法处理问题的观点和方法。这些观点和方法，也可以用来解决一些别的问题。这里所举的事例：平面导体前点电荷的电场，圆球导体前点电荷的电场。它们只是实际问题被简化了的、近似的情况。实际问题通常比这复杂得多。要得到如上所述的、类似(3-28)式、(3-39)式的、解析的解是困难的。但是，在一些情况下，还是可以应用镜象法的观点和方法，在上述结果的基础上，推测近似的解答。

第三节　分离变量法

在一定条件下，微分方程的解可能是唯一的。但是，解题的方法却是多种多样的。在这多种多样的解题方法中，分离变量法是用得较多、效果较好的一种。在电动力学中采用它，在量子力学中采用它，在许多科学技术中也都采用它。分离变量法的内容和方法，在一般的数理方法书中，都有比较详细

的讨论。在这里，我们只介绍它的一些基本特点。并结合求解匀强电场中的导体或介质球的问题，论述用它分析问题、解决问题的基本观点和方法。有关的一些特殊函数，只简要介绍它们的基本性质。

计算一个问题，总要选取一个坐标系，坐标系有直角坐标(x,y,z)系，有球坐标(r,θ,α)系，有圆柱坐标(ρ,α,z)系，还有其他别的坐标系。在图 3-8 中，我们就用三种坐标标出了同一P点在空间的位置。在一个具体问题中，我们应该选用哪一种坐标系呢？选择坐标系的标准是什么呢？选用的标准只依解决问题是否方便而定。选用什么坐标系处理问题方便，就选用什么坐标系。通常，选用和物体或物体性质的几何形状相同或相似的坐标系比较方便。物体或物体的性质具有矩形特征时，常常选用直角坐标。物体或物体的性质具有球形特征时，常常选用球坐标。物体或物体的性质具有圆柱特征时，常常选用圆柱坐标。物体或物体的性质具有其他特殊形状时，常常需要选用特殊坐标。这是因为，和物体或物体性质相应的场，具有和物体或物体性质的几何形状相似的几何结构。

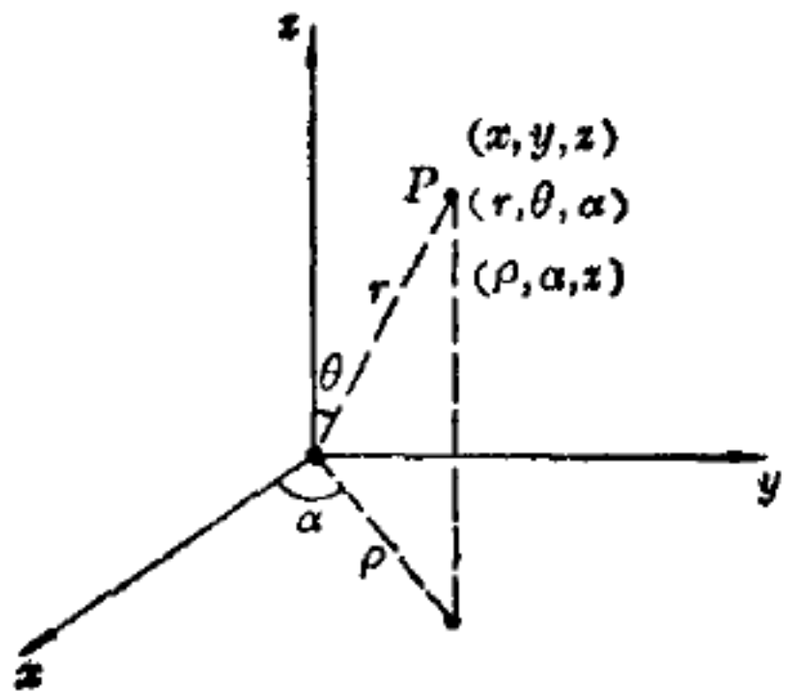


图 3-8

在讨论匀强电场中的导体或介质球的问题时，以选用球坐标为宜。在球坐标中，标势的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}=0 \tag{3-40}$$

在导体、介质球外，没有电荷的空间，其电势 ϕ 就满足这个方程。这个方程，在原子物理和具有球形对称的问题中，具有广泛的应用。这里，我们结合它的求解，论述分离变量法。

变量分离 (3-40) 式是三个变量 r、θ、α 的函数 $\phi(r、\theta、\alpha)$的偏微分方程。大家知道：多变量函数，通常比单变量函数复杂；多变量函数的偏微分方程，通常比单变量函数的常微分方程难解。而我们的常微分方程知识，通常也比偏微分方程知识多些。当我们面对诸如(3-40)式之类的偏微分方程的时候，我们问：能不能把这些比较难解的偏微分方程转化为几个比较易解的常微分方程呢？怎么把这些比较难解的偏微分方程转化为几个比较易解的常微分方程呢？分离变量法，首先回答的就是这些问题。

要把多变量函数的偏微分方程转化为单变量函数的常微分方程。首先，就要把多变量函数分解为单变量函数。例如：我们设想把三变量函数$\phi(r,\theta,\alpha)$分解为：r 的函数 $R(r)$，θ 的函数 $P(\theta)$，α 的函数 $F(\alpha)$，而且令

$$\phi(r,\theta,\alpha)=R(r)\cdot P(\theta)\cdot F(\alpha) \tag{3-41}$$

这种设想是否可取，要看能否得到我们所需要的结果而定。为此，我们把(3-41)式代入(3-40)式，得

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)\cdot P(\theta)\cdot F(\alpha)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

$$\cdot\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)\cdot R(r)\cdot F(\alpha)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}$$

$$\cdot R(r)\cdot P(\theta)=0。$$

再用(3-41)式除上式，得

$$\frac{1}{R(r)}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{F(\alpha)\sin^2\theta}\ \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}=0。$$

用 $\sin^2\theta$ 乘上式各项，并移项，得

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{P(\theta)}\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{F(\alpha)}\ \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}。$$

上式左边只包含变数 r、θ，是 r、θ 的函数，上式右边只包含变数 α，是 α 的函数。r、θ、α 是独立变数，要使上式在 r、θ、α 取任意值时都成立，这只当上式左右两边都等于同一常数时才有可能。这表明

$$\frac{1}{F(\alpha)}\ \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}=-\lambda_1 \tag{3-42}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{P(\theta)}\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)=\lambda_1。$$

用 $\sin^2\theta$ 除上式，并把第二项移至等式右边，得

$$\frac{1}{R(r)}\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)$$

$$=\frac{\lambda_1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)。$$

上式左边只包含变数 r，只是 r 的函数。上式右边只包含变数 θ，只是 θ 的函数。r、θ 都是独立变数，要使上式在 r、θ 取任意值时都成立，这只当上式左右两边都等于同一常数时，才有可能。这表明

$$\frac{\lambda_1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\ \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)=\lambda_2 \tag{3-43}$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=\lambda_2 \qquad (3\text{-}44)$$

这样一来，我们就把多变量函数 $\phi(r,\theta,\alpha)$ 分解为单变量函数 $R(r)$、$P(\theta)$、$F(\alpha)$ 的乘积(3-41)式；把偏微分方程(3-40)式转化为三个常微分方程(3-42)式、(3-43)式、(3-44)式。我们的目的初步达到。进一步的问题，就是如何求解常微分方程(3-42)式、(3-43)式、(3-44)式的问题了。

极角函数 现在，我们来求解这三个常微分方程。先求解极角方程(3-42)式

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}+\lambda_1F(\alpha)=0 \qquad (3\text{-}42)'$$

这方程的解，有

$$F(\alpha)\sim e^{\pm i\sqrt{\lambda_1}\alpha}$$

的形式。我们知道：我们所需要的解，不仅要满足方程，还要满足附加的物理条件。在不同的具体问题中，有不同的物理条件。但是，有些物理条件具有普遍性，任何过程都必需满足。例如，任何描述物理性质的函数，都必需是单值、有限的。拿这个条件来衡量上述的解，就可以看出：$\sqrt{\lambda_1}$必需是实的正负整数。这是因为：α 变化的区间是 0 到 2π，而且 $\alpha=0$ 和 $\alpha=2\pi$ 表示同样一点的位置，α 和 $\alpha+2\pi$ 也表示同样一点的位置。函数单值性，要求

$$F(\alpha)=F(\alpha+2\pi)。$$

这表明：符合物理条件的(3-42)′式的解，只能是以 2π 为周期的周期函数。这只当

$$\sqrt{\lambda_1}=m,\quad \lambda_1=m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$$

时才能实现。由此可知，我们所需要的极角方程和极角函

数是

$$\frac{d^2F_m(\alpha)}{d\alpha^2}+m^2F_m(\alpha)=0 \qquad (3\text{-}42)''$$

$$F_m(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\alpha}$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

可以证明：极角函数具有正交归一化的性质，即

$$\int_0^{2\pi}F_m(\alpha)F^*_{m'}(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(m-m')\alpha}\,d\alpha$$

$$=\frac{e^{i(m-m')2\pi}-1}{2\pi i(m-m')}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}F^*_m(\alpha)F_m(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha=1。$$

如果我们引用符号 $\delta_{m,m'}$，它表示：

$$\delta_{m,m'}=\begin{cases}1, \text{当 } m=m'。\\ 0, \text{当 } m\neq m'。\end{cases}$$

那末，极角函数的正交归一化性质，就可以表示为

$$\int_0^{2\pi}F^*_m(\alpha)F_{m'}(\alpha)d\alpha=\delta_{m,m'}。$$

勒让德函数 既然，物理上要求

$$\lambda_1=m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

那末，方程(3-43)式就具有

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda_2P(\theta)$$

$$-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P(\theta)=0 \qquad (3\text{-}43)'$$

的形式。如果，按照

$$z=\cos\theta \tag{3-45}$$

把变数 θ 换成变数 z，函数 $P(\theta)$ 换成函数 $P(z)$。那末，

$$\frac{dP(z)}{d\theta}=\frac{dP(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{d\theta}=-\sin\theta\frac{dP(z)}{dz},$$

而(3-43)′式就可以写成

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP(z)}{dz}\right]+\left[\lambda_2+\frac{m^2}{z^2-1}\right]P(z)=0 \quad (3\text{-}43)''$$

当 $m=0$ 时，上列方程就变成

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP(z)}{dz}\right]+\lambda_2P(z)=0 \tag{3-46}$$

这方程叫做勒让德方程。这方程可以用级数解法求解，级数解法比较繁难，且多是纯粹的代数运算。在这里，我们只介绍方程的解的一些基本性质。级数解中指出：上列方程不是 λ_2 取任意常数值时都有满足物理条件的有限的解。而是只当

$$\lambda_2=l(l+1),\quad l=0,1,2,\cdots\cdots$$

时，方程才有满足物理条件的有限的解。所以，具有物理意义的方程，具有

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_l(z)}{dz}\right]+l(l+1)P_l(z)=0 \tag{3-46}'$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots$$

的形式。$P_l(z)$ 表示和某个正整数 l 相应的勒让德方程 (3-46)′ 的解，叫做勒让德函数。

级数解还指出：勒让德方程 (3-46)′ 的解、勒让德函数 $P_l(z)$ 是 l 阶的多项式。$l=0,\ 1,2,3\cdots\cdots$的几个勒让德函数的具体形式是

$$
\left.\begin{aligned}
&l=0, \quad P_0(\cos\theta)=1\\
&l=1, \quad P_1(\cos\theta)=\cos\theta\\
&l=2, \quad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\\
&l=3, \quad P_3(\cos\theta)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}47)
$$

因为勒让德函数 $P_l(z)$是 l 阶的多项式。所以它又叫做勒让德多项式。

高阶的勒让德多项式项数太多，一般难以写出。人们发现: 对于任意阶的勒让德函数，可以用微分公式

$$
P_l(z)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dz^l}[z^2-1]^l \qquad (3\text{-}47)'
$$

表示出来。作为练习，读者可以由这个微分表示，算出上面列举的几个具体的多项式。这对理解勒让德函数的内容，会有所帮助。

可以证明: 勒让德函数具有正交归一化的性质，即

$$
\int_{-1}^{1}P_l(z)P_{l'}(z)=\delta_{l,l'}。
$$

缔合勒让德函数 在 $m\neq 0$ 的情况下，我们仍然需要找寻方程(3-43)″式的解。和上面所说的情况相似，可以证明: 方程(3-43)″式，只当

$$
\lambda_2=l(l+1);\quad l=0,1,2\cdots\cdots
$$

$$
m=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\cdots\pm l
$$

时，才有满足物理条件的有限的解。这时，方程成为

$$
\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_l^m(z)}{dz}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\cdot P_l^m(z)=0 \qquad (3\text{-}48)
$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots;\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\pm l$$

叫做缔合勒让德方程。$P_l^m(z)$ 是和整数 l、m 相应的方程的解，叫做缔合勒让德多项式或缔合勒让德函数。方程之所以叫做缔合勒让德方程，函数之所以叫做缔合勒让德函数，是因为它们和勒让德方程、勒让德函数有着紧密的联系。这种紧密联系在上面的论述中已见端倪。实际上，它们之间，还有

$$P_l^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_l(z)\qquad(3\text{-}49)$$

的紧密关系。由此可知：缔合勒让德函数可以由勒让德函数的导数完全计算出来。还可以证明：缔合勒让德函数也具有正交归一化的性质

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(z)P_{l'}^m(z)=\delta_{l,l'}。$$

球函数 缔合勒让德函数 $P_l^m(z)$ 和极角函数 $F_m(\alpha)$ 的乘积，叫做球函数。我们用

$$Y_{l,m}(\theta,\alpha)=P_l^m(\cos\theta)F_m(\alpha)\qquad(3\text{-}50)$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots;\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\pm l$$

表示球函数。显然，它的具体表示，可以由(3-43)、(3-47)′、(3-49)代入(3-50)确定。

由于缔合勒让德函数 $P_l^m(z)$ 和极角函数 $F_m(\alpha)$ 都满足正交归一化条件。球函数当然也满足正交归一化条件

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_{l,m}(\theta,\alpha)Y_{l',m'}(\theta,\alpha)d\cos\theta\cdot d\alpha=\delta_{l,l'}\cdot\delta_{m,m'}。$$

由于极角函数满足方程(3-42)″

$$\frac{d^2F_m(\alpha)}{d\alpha^2}+m^2F_m(\alpha)=0,$$

缔合勒让德函数 $P_l^m(\theta)$ 满足方程(3-43)′

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m(\theta)}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]$$

$$P_l^m(\theta)=0,$$

消去这两式中的 m^2，得

$$\frac{1}{P_l^m(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m(\theta)}{d\theta}\right)+l(l+1)$$

$$+\frac{1}{F_m(\alpha)\sin^2\theta}\frac{d^2F_m(\alpha)}{d\alpha^2}=0。$$

用(3-50)式乘上式各项，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{l,m}(\theta,\alpha)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)Y_{lm}(\theta,\alpha)$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y_{l,m}(\theta,\alpha)}{\partial\alpha^2}=0 \qquad (3\text{-}51)$$

这就是球函数应该满足的微分方程。

径向函数 找到了拉普拉斯方程(3-40)式的角变量 θ、α 部分的解——球函数以后，剩下的就是要求它的径向变量 r 部分的方程(3-44)式的解了。由上面的论述可知

$$\lambda_2=l(l+1);\quad l=0,1,2,\cdots\cdots$$

方程(3-44)式成为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right)=l(l+1)R_l(r) \qquad (3\text{-}44)'$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots$$

令 $R_l(r)=r^x$，

代入上式，得

$$x(x-1)+2x=l(l+1)。$$

这个代数方程有两个解

$$x=l;\quad x=-(l+1)。$$

所以，方程(3-44)′式的解是

$$R_l(r)=r^l;\qquad R'_l(r)=\frac{1}{r^{l+1}} \tag{3-52}$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots$$

一般解 到此，我们用分离变量法，得到了我们所需要的结果。现在，我们来综合、概括一下这些方法和结果。一开始，我们把三个变量的函数 $\phi(r,\theta,\alpha)$ 分解为三个单变量函数 $R(r)$、$P(\theta)$、$F(\alpha)$ 的乘积

$$\phi(r,\theta,\alpha)=R(r)P(\theta)F(\alpha) \tag{3-41}'$$

把拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2}=0 \tag{3-40}'$$

转化为三个常微分方程

$$\frac{1}{F(\alpha)}\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}=-\lambda_1 \tag{3-42}'$$

$$\frac{1}{P(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda_2-\frac{\lambda_1}{\sin^2\theta}=0 \tag{3-43}'$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{d\theta}\right)=\lambda_2 \tag{3-44}'$$

然后，求解这些常微分方程。指出：上述微分方程，不是 λ_1、λ_2 为任意常数时都有有限的解，只是当

$$\lambda_1=m^2,\quad \lambda_2=l(l+1);$$

$$l=0,1,2,\cdots\cdots,m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\pm l$$

时，才有有限的解。而且，对于一个一定的 l、m，解的形式是

$$F_m(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\alpha} \tag{3-43}'$$

$$P_l^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_l(z) \qquad (3\text{-}49)'$$

$$z=\cos\theta \qquad (3\text{-}45)'$$

$$P_l(z)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l \qquad (3\text{-}47)'$$

$$Y_{l,m}(\theta,\alpha)=P_l^m(z)F_m(\alpha) \qquad (3\text{-}50)'$$

$$R_l(r)=r^l; \qquad R'_l(r)=\frac{1}{r^{l+1}} \qquad (3\text{-}52)'$$

由此可知，拉普拉斯方程的解就是

$$\phi^{(1)}_{l,m}(r,\theta,\alpha)=r^lY_{l,m}(\theta,\alpha),$$

$$\phi^{(2)}_{l,m}(r,\theta,\alpha)=\frac{1}{r^{l+1}}Y_{l,m}(\theta,\alpha),$$

$l=0,1,2,\cdots\cdots;\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\pm l$。

这些都是拉普拉斯方程的可能解。由于拉普拉斯方程是线性的，各种可能解的迭加，仍然是它的解，所以，拉普拉斯方程的一般解，就是

$$\phi(r,\theta,\alpha)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{l,m}\cdot r^lY_{l,m}(\theta,\alpha)+B_{l,m}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{l,m}(\theta,\alpha)\right] \qquad (3\text{-}53)$$

值得注意的是：在导出上述一般解时，我们只用到函数单值、有限的条件。而描述物理性质的函数，必需单值、有限，在任何运动形态中，在任何物理过程中，一般都是不可或缺的。因此，拉普拉斯方程的这个一般解，具有普遍的意义。当然，对于不同的物理对象，描述物理性质的函数 ϕ，具有不同的物理意义。对于不同的物理过程，无穷多个常数 $A_{l,m}$、$B_{l,m}$，取不同的值。换句话说：任何按照拉普拉斯方程发生的过程，都可

以用这个一般解来描述。函数 ϕ 的意义由具体的过程的性质给定。无穷多个常数 $A_{l,m}$、$B_{l,m}$ 由具体的物理条件来定出。

在电动力学的静电问题中，函数 ϕ 表示电场的标势，即通常所说的电势。下面，我们以匀强电场中的导体球为例来说明如何用具体的物理条件，确定这无穷多个常数，求得具体问题的解。

把金属导体放在电场中，在导体上会产生感应电荷，这感应电荷又使原来的电场发生变化。这是人们所熟知的事实。但是，要定量地讨论这些问题，在一般情况下是很困难的。我们讨论如图 3-9 所示一个比较简单的情况。设想在强度为 $\boldsymbol{E}_0$ 的均匀电场，放一个接地的、半径为 a 的球形导体。试问：导体外的电场将变成怎样？首先，我们把这个问题，用数学式表述出来。我们把坐标原点取在导体球的中心，取 z 轴和原来的均匀电场的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向一致。由于导体是球形，用球坐标系比较方便。在没有导体球时，场中各点的电场强度都是 $\boldsymbol{E}_0$。根据场强和电势的关系

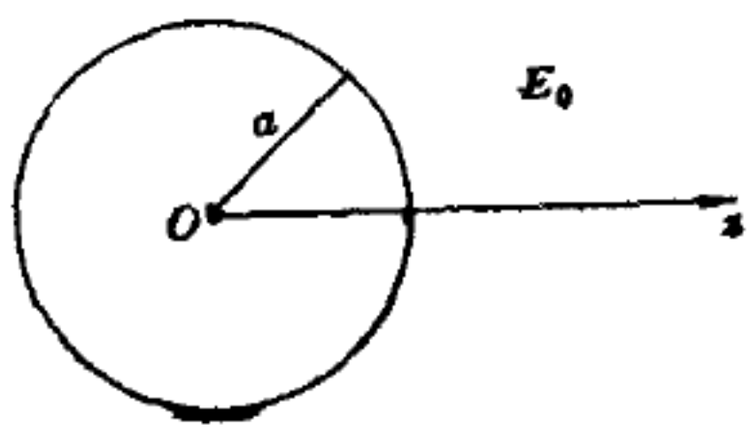


图 3-9

$$E_0 = E_z = -\frac{\partial \phi^0}{\partial z},$$

直接积分，得

$$\phi^0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \qquad (3\text{-}54)$$

这是没有导体球时，均匀场的电势。显然，它是满足拉普拉斯方程(3-40)式的，它具有与极角 α 无关的特点。

在这样的电场中，放入一个接地导体球时，由于静电感

应，将在导体上产生感应电荷。这感应电荷又激发一个电场，迭加在原来电场(3-54)式之上，使它发生变化。可惜，我们不知道这感应电荷的大小和分布。只知道导体外，仍然没有电荷，电势仍然要满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \tag{3-55}$$

感应电荷只局限在导体上，对远离导体的地方，不发生影响。那儿，电场仍取(3-54)式的形式，即

$$\lim_{r\to\infty}\phi=\phi^0=-E_0r\cos\theta \tag{3-56}$$

静电场中的导体是等势体。导体接地，就意味着电势为零。即在导体面上，电势要满足边界条件

$$\phi(a,\theta,\alpha)=0 \tag{3-57}$$

这样一来，我们的问题，就转化为找一个函数 $\phi(r,\theta,\alpha)$，既满足方程(3-55)，又满足边界条件(3-56)式、(3-57)式。

我们用分离变量法来解决这个问题。既然，在导体以外的有限空间里，电势满足拉普拉斯方程(3-55)式。那末，在这个空间里，电势就具有(3-53)式所示的形式。(3-53)式是一般情况下都成立的一般解。现在是具体的特殊情况，它应该转化为特殊的形式。现在的情况特殊在哪里呢？首先，由于原来的电场具有轴对称性，导体球具有球对称性，以致边界条件具有(3-56)式、(3-57)式的形式。那末，在球外有限空间的电场，也一定具有轴对称性，即 $\phi(r,\theta,\alpha)$ 应该与 α 无关，只是 r、θ 的函数。这就是说，(3-53)式中的常数，除开 $A_{l,0}=A_l\neq0$，$B_{l,0}=B_l\neq0$ 以外，$m\neq0$ 的 $A_{l,m}=B_{l,m}=0$。再者，由(3-43)′式、(3-49)′式、(3-50)′式可知，在 $m=0$ 时

$$Y_{l,0}(\theta,\alpha)=P_l(\cos\theta)。$$

由此可知，在轴对称的情况下，拉普拉斯方程的分离变量解

具有

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l\cdot r^l\cdot P_l(\cos\theta)+B_l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right] \quad (3\text{-}58)$$

的特殊形式。这里的未定常数 A_l、B_l，比原来的个数少了许多，但还是无限多个，这无限多个常数，还要由边界条件来确定。

把(3-58)代入(3-56)，得

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l P_l(\cos\theta)+\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right]$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta,$$

用 $P_{l'}(\cos\theta)$ 乘上式各项，并积分，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\int_{-1}^{1}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta$$

$$=-E_0 r\int_{-1}^{1}P_{l'}(\cos\theta)P_1(\cos\theta)\,d\cos\theta。$$

后一式中，我们用到了 $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ 这一事实。由于勒让德函数的正交归一化性质

$$\int_{-1}^{1}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta=\delta_{l,l'},$$

上式成为

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\,\delta_{l,l'}=A_{l'}r^{l'}=-E_0 r\,\delta_{l',1}。$$

由此可知：

$$A_l=-E_0 r^{1-l}\delta_{l,1},$$

$$A_1=-E_0,\quad l\neq 1\text{ 的 }A_l=0。$$

这表明：满足边界条件(3-56)式的解为

$$\phi(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \quad (3\text{-}59)$$

上式中还有无限多个常数 B_l，要由边界条件(3-57)式来确定。把(3-59)式代入(3-57)式中，得

$$\phi(a,\theta)=-E_0 a\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0。$$

用 $P_{l'}(\cos\theta)$ 乘上式各项，并积分，得

$$-E_0 a\int_{-1}^{1}P_{l'}(\cos\theta)P_1(\cos\theta)d\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{a^{l+1}}$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta=0。$$

由于勒让德函数的正交性，上式成为

$$E_0 a\,\delta_{l',1}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{a^{l+1}}\delta_{l,l'}=\frac{B_{l'}}{a^{l'+1}},$$

$$B_l=E_0 a^{l+2}\delta_{l,1},$$

$$B_1=E_0 a^3,\quad l\neq 1\text{ 的 }B_l=0。$$

代入(3-59)式，得

$$\phi(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta \qquad (3\text{-}60)$$

这就是我们所要找寻的问题的解。显然，第一项就是原来的匀强电场，第二项就是导体上感应电荷激发的电场。把这电场和第一章中表示由电偶极矩 P 所生的电势的表示式

$$\phi=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

比较，可以看出：导体上的感应电荷对球外电场的贡献，相当于一电偶极矩

$$P=4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3 \qquad (3\text{-}61)$$

的贡献。因此，我们说：匀强电场(3-54)式，使导体球产生一电偶极矩(3-61)式。这感应电偶极矩又激发电场，迭加在原来的匀强电场之上，使电场变成如(3-60)式所示的电场。

把介质放置在电场中，介质被电场极化，极化介质又使电场发生变化，这也是我们经常碰到的问题。但是，要定量计算这些问题，在一般情况下，也是十分困难的。因此，我们讨论在匀强电场中的介质球。如果在强度为 $\boldsymbol{E}_0$ 的均匀电场中，放置一个介电系数为 ε、半径为 a 的介质球，电场将发生怎样的变化？如图 3-10 所示。我们把原点取在介质球的中心，令 z 轴即球坐标的极轴和 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向一致。这时，象前面所述的一样，没有介质球时的电场电势为

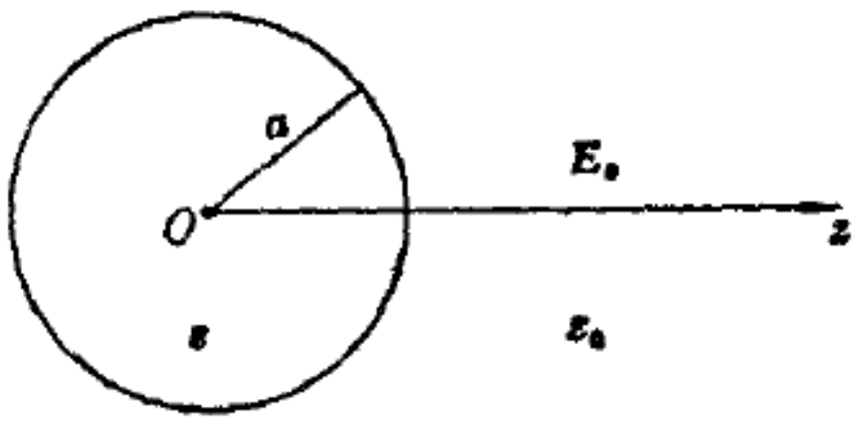


图 3-10

$$\phi^0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \tag{3-62}$$

它满足拉普拉斯方程，它具有轴对称的特点。

有介质球时，电场使它极化，它也激发电场，迭加在原电场之上，形成新的电场。和导体球的情况相似，这新的电场，也具有轴对称性，具有如(3-58)式所示的形式。但是，和导体球的情况不同，介质球不是等势体，球内的电势 ϕ^i 和球外的电势 ϕ^e 都是坐标的函数。由于球内、球外都没有自由电荷，而原来的电场(3-62)式又满足拉普拉斯方程，且具有轴对称性。因而，都具有(3-58)式所示的形式

$$\phi^i(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l^i r^l P_l(\cos\theta) + \frac{B_l^i}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right] \tag{3-63}$$

$$\phi^e(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l^e r^l P_l(\cos\theta) + \frac{B_l^e}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right] \tag{3-64}$$

A_l^i、B_l^i 和 A_l^e、B_l^e 是介质球内的场和介质球外的场的常数，由介质球内的物理条件、介质球外的物理条件和介质分界面上的边界条件来确定。

在球心，$r=0$，$\phi^i(0,\theta)$ 应该有限，B_l^i 必需等于零。因此，球内的场的电场(3-63)式，成为

$$\phi^i(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l^i r^l P_l(\cos\theta) \qquad (3\text{-}63)'$$

在远离介质球处，极化介质不发生影响，球外的电场(3-64)式趋于原来的电场(3-62)式，即当 $r\to\infty$ 时

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l^e r^l P_l(\cos\theta)+\frac{B_l^e}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right]\to$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l^e r^l P_l(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta。$$

由此可知，球外的电场的电势(3-64)式，应该是

$$\phi^e(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l^e}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \qquad (3\text{-}64)'$$

还有球内场的常数 A_l^i 和球外场的常数 B_l^e，要由介质界面上的边界条件来定。在球面上，$r=a$，边界条件是：电荷由界面一边移至另一边，位移 $\to 0$，电场虽有突变，但有限，因而力不作功，即电势连续

$$\phi^i(a,\theta)=\phi^e(a,\theta) \qquad (3\text{-}65)$$

所谓电场有突变，是说电场强度有突变。但是，在介质界面的情况，无自由电荷，电位移矢量的法向分量仍应连续，即满足边界条件

$$D_n^i(a,\theta)=D_n^e(a,\theta),$$

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\phi^i}{\partial r}\right)_{r=a}=\left(\varepsilon_0\frac{\partial\phi^e}{\partial r}\right)_{r=a} \qquad (3\text{-}66)$$

把(3-63)′式、(3-64)′式代入(3-65)式，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l^i a^l P_l(\cos\theta)=-E_0 a\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l^e}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)。$$

用 $P_{l'}(\cos\theta)$ 乘上式各项，并积分，得

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_l^i a^l \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\cos\theta$$

$$= -E_0 a \int_{-1}^{1} P_1(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\cos\theta$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l^e}{a^{l+1}} \int_{-1}^{1} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\cos\theta_{\circ}$$

由于勒让德函数的正交归一化性质，上式是

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l^i a^l \delta_{l,l'} = -E_0 a \delta_{1,l'} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l^e}{a^{l+1}} \delta_{l,l'}\bullet$$

根据 $\delta_{l,l'}$ 的定义，并把 l、l' 互换，得

$$A_l^i a^l = -E_0 a \delta_{1,l} + \frac{B_l^e}{a^{l+1}}\circ$$

当 $l=1$, $A_1^i a = -E_0 a + \frac{B_1^e}{a^2}$; $l \neq 1$, $A_l^i a^l = \frac{B_l^e}{a^{l+1}}$ (3-65)′

把(3-63)′式、(3-64)′式代入(3-66)式，得

$$\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} A_l^i l a^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$= -\varepsilon_0 E_0 \cos\theta - \varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l^e}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta)_{\circ}$$

用 $P_{l'}(\cos\theta)$ 乘上式各项，并积分；根据勒让德函数的正交归一化性质和 $\delta_{l,l'}$ 的定义。由上式推知

$$\varepsilon A_l^i l a^{l-1} = -\varepsilon_0 E_0 \delta_{1,l} - \varepsilon_0 (l+1) \frac{B_l^e}{a^{l+2}}\circ$$

当 $l=1$, $\varepsilon A_1^i = -\varepsilon_0 E_0 - 2\varepsilon_0 \frac{B_1^e}{a^3}$;

$$l \neq 1, \quad \varepsilon A_l^i l a^{l-1} = -\varepsilon_0 (l+1) \frac{B_l^e}{a^{l+2}} \qquad (3\text{-}66)'$$

(3-65)′ 式和(3-66)′ 式是一些联立的代数方程。解这些联立代数方程，就可以得到

$$A_1^i = -\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0},\quad B_1^e = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)a^3 E_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0};$$

$$l \neq 1, \qquad A_l^i = B_l^e = 0 \tag{3-67}$$

把这些常数代入(3-63)′式和(3-64)′式，得

$$\phi^i(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} r E_0 \cos\theta \tag{3-63)''}$$

$$\phi^e(r, \theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \cdot E_0 a^3 \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} \tag{3-64)''}$$

这就是介质球内、外电场的电势。它表明：被极化的介质球，使球内的电场电势增大到 $\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}$ 倍；使球外的电场电势，在原来的电势 $-E_0 r\cos\theta$ 之上，迭加一个相当于由偶极矩

$$\boldsymbol{P} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 \boldsymbol{E}_0$$

的、在球心的电偶极子所激发的电场的电势

$$\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}。$$

这也表明一些介质被极化的情况。

分离变量法是一种被广泛采用的解题方法。它不仅在球坐标系，在拉普拉斯方程中被采用。在其他坐标系，在其他方程中，也常常被采用。尽管，在各种不同情况下，采用这种方法时，会有它各自的特点。但是，一些基本要点，如：把多变量函数分解为多个单变量函数的乘积；把多变量函数的偏微分方程转化为单变量函数的常微分方程；由正交函数系的迭加构成一般解；由具体条件，利用函数系的正交性，确定迭加系数等等，却具有普遍的意义。这是我们要多加注意的！

导体、介质处在外电场中，这是经常碰到的事情。但是，导体、介质是圆球，而外场又是强度均匀的，这却是特殊的、被

理想化了的情况。实际的情况，比这复杂得多，比这难以处理得多。尽管如此，我们这里所得到的结论，还是可以作为实际问题的近似、前导或启示。这里用来处理问题的观点和方法，对于提高分析问题、解决问题的能力来说，还是会有所帮助的。

第四节　级数展开法　电、磁偶极作用

在实际问题中，我们常常碰到：电荷、电流分布的区域，可以被看成是很小的情况。大小是相对的，什么时候可以看成是很小的呢？研究电荷、电流激发的场时，如果被研究的场点，离开电荷、电流很远，以致距离 r 远大于分布区域的线度 l，即 $r\gg l$ 时，这分布区域就可以看成是很小的。研究外场对电荷、电流的作用时，如果外场在电荷、电流分布的区域内的变化不大，以致在一定程度上可以忽略这些变化，这分布区域也可以看成是很小的。这样的电荷、电流系统和电场、磁场的相互作用，便于用级数展开的方法处理。在这一节中，我们先介绍泰勒级数，然后用它来讨论：电荷系激发的电场的电势；电场对电荷系的作用；电流系激发的磁场；磁场对电流系的作用等等，并着重讨论电磁偶极作用。

泰勒级数　这里，我们只不予证明地给出泰勒级数的公式。

对于单元函数 $f(x)$，在原点 $x=0$ 邻域的泰勒级数是

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+\cdots\cdots,$$

式中 $f(0)$ 表示 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的值，$f'(0)$ 表示 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的值，……，$f^n(0)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^n(x)$ 在 $x=0$ 点的值……。

如果不是在 $x=0$ 点的邻域展开，而是在 $x=a$ 点的邻域展开，那末把上列展开式中的 0 换成 a，x 换成 $x-a$，就可以得到所需的级数展开式

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+\cdots\cdots。$$

对于多变量函数，如 $f(x,y,z)$，在原点 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 邻域的展开是

$$f(x,y,z)=f(0)+x\frac{\partial}{\partial x}f(0)+y\frac{\partial}{\partial y}f(0)+z\frac{\partial}{\partial z}f(0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[x^2\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f(0)}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 f(0)}{\partial z^2}\right.$$

$$\left.+2xy\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x\partial y}+2yz\frac{\partial^2 f(0)}{\partial y\partial z}+2zx\frac{\partial^2 f(0)}{\partial z\partial x}\right]+\cdots\cdots$$

和上式相比，实质一致，形式稍繁。式中 $f(0)$ 仍是 $f(x,y,z)$ 在原点的值，$\frac{\partial f(0)}{\partial x}$……是 $f(x,y,z)$ 的一阶偏导数在原点的值，$\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x\partial y}$……是 $f(x,y,z)$ 的二阶偏导数在原点的值……等等。如果不是在原点的邻域展开，而是在 $x=a$、$y=b$、$z=c$ 点的邻域展开，那末把上式中的 x、y、z 换成 $x-a$、$y-b$、$z-c$，把 $f(x)$、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$…… 等等在原点的值换成在 $x=a$、$y=b$、$z=c$ 点的值，就可以了。

当然，上列的展开式是否成立，上列诸式右端的级数是否收敛，还取决于函数 $f(x)$ 或 $f(x,y,z)$ 是否存在所需的诸阶导数。在一般的物理问题中，通常认为上列展开所需要的条件是满足的。

如果采用算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

和点 (x,y,z) 离原点的矢径

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

并考虑到它们的标积

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

以及它们的并矢的标积

$$\boldsymbol{rr}:\nabla\nabla = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$
$$+ 2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + 2zx\frac{\partial^2}{\partial z\partial x},$$

(:表示两次标积。先是左边靠右的 $\boldsymbol{r}$ 和右边靠左的 ∇ 取标积，再是左边靠左的 $\boldsymbol{r}$ 和右边靠右的 ∇ 取标积)多变量函数 $f(x,y,z)$ 的泰勒展开，就可以写成简单的形式

$$f(x,y,z) = f(0) + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)f(0)$$
$$+ \frac{1}{2}(\boldsymbol{rr}:\nabla\nabla)f(0) + \cdots\cdots \qquad (3\text{-}68)$$

电荷系的电势 现在，我们把上面的泰勒展开公式作为工具来研究电荷和电场的相互作用。首先，研究电荷系激发的电场的电势。设想有一个由 n 个电荷 $q_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 构成的系统。它的线度为 l，我们研究离它甚远，即 $r \gg l$ 处

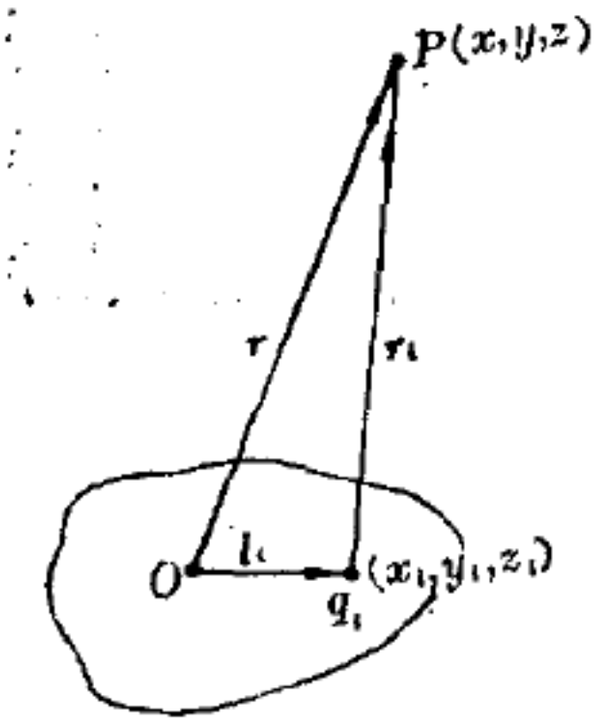


图 3-11

的、由它激发的电场的电势，如图3-11所示。坐标原点O取在系统内。要研究它的电场的点，叫做场点。它的坐标是$P(x,y,z)$，它离开原点的矢径为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}。$$

第i个电荷q_i的位置，叫做源点。它的坐标是(x_i,y_i,z_i)，它离开原点的矢径为

$$\boldsymbol{l}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k},$$

而场点(x,y,z)离开源点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_i=(x-x_i)\boldsymbol{i}+(y-y_i)\boldsymbol{j}+(z-z_i)\boldsymbol{k}。$$

由本章第一节所得的基本解(3-20)式可知：这n个电荷组成的系统，在场点$P(x,y,z)$激发的电场的电势为

$$\phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \tag{3-69}$$

式中，$r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$，既是场点$(x,y,z)$的函数，又是源点$(x_i,y_i,z_i)$的函数。它的倒数

$$\frac{1}{r_i}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \tag{3-70}$$

也是场点(x,y,z)和源点(x_i,y_i,z_i)的函数。

不管n个电荷在系统中如何分布，(3-69)式都是正确的。为了更清楚地表明电荷分布和它所激发的电场之间的关系，我们利用泰勒公式(3-68)式和条件$r\gg l$，把(3-69)式改写成更适当的形式。因此，我们固定场点(x,y,z)，而让源点变化，把(3-70)式看作只是源点(x_i,y_i,z_i)的函数，把它在原点$(0,0,0)$附近展开。

把泰勒公式(3-68)用于现在的情况时，就是要把公式

(3-68)中的函数，换成现在的函数$\frac{1}{r_i}$；把公式中的变数(x, y, z)，换成现在的变数、源点坐标(x_i, y_i, z_i)。与此相应，公式中的变数坐标矢径$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，就要换成现在的变数坐标、源点坐标矢径$\boldsymbol{l}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}$；公式中的算符

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

就要用算符

$$\nabla_i=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_i}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

来代替。在明了了这样的对应关系以后，把泰勒公式用于现在的具体情况，就得到

$$\frac{1}{r_i}=\frac{1}{r}+\left[(\boldsymbol{l}_i\cdot\nabla_i)\frac{1}{r_i}\right]_{r_i=r}+\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_i:\nabla_i\nabla_i)\frac{1}{r_i}\right]_{r_i=r}+\cdots\cdots \tag{3-71}$$

我们进一步算出这个表达式。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{r_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}$$

$$=\frac{x-x_i}{\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{x-x_i}{r_i^3},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r_i}\right)_{r_i=r}=\frac{x}{r^3}.$$

同样的计算可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{r_i}\right)_{r_i=r}=\frac{y}{r^3};\quad\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{1}{r_i}\right)_{r_i=r}=\frac{z}{r^3}.$$

由此可知

$$\left(\nabla_i \frac{1}{r_i}\right)_{r_i=r} = \left[\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_i} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\frac{1}{r_i}\right]_{r_i=r}$$

$$= \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}。$$

把它代入(3-71)式，得

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} + \cdots\cdots \qquad (3\text{-}71)'$$

这样，我们就把场点和源点距离的函数，用场点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和源点的矢径 $\boldsymbol{l}_i$，简单地表示出来。为解决问题提供了条件。从(3-71)′式可知，在 $r \gg l$ 的条件下，后项远小于前项。(3-71)′式中的第三项、第四项……，被我们略去。如果需要可以用类似的方法算出。

把(3-71)′式代入(3-69)式，得

$$\phi(x,y,z) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \cdots\cdots \qquad (3\text{-}69)'$$

这就是 n 个点电荷系在场点 (x,y,z) 激发的电场的电势。显然，第一项的作用相当于 n 个电荷的总电量

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (3\text{-}72)$$

在原点时在离它 r 处的电场的电势。第二项的作用相当于 n 个电荷的电偶极矩

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{l}_i \qquad (3\text{-}73)$$

放在原点时，在离它 r 处的电场的电势。第三项、第四项是电荷系的四极矩、八极矩激发的电场的电势。

在(3-73)式中，q_i 是第 i 个电荷的电量，$\boldsymbol{l}_i$ 是第 i 个电荷

离开原点的矢径。由此可知，按照(3-73)式定义的电荷系的电偶极矩 $\boldsymbol{P}$，不仅和电荷系的电量有关，还和电荷系电荷的分布有关。换句话说，电荷系(如分子、离子等)的电偶极矩 $\boldsymbol{P}$，由电荷系的电磁结构确定，是描述系统电磁结构的参量。四极矩、八极矩也是如此。因此，如果我们从实验测知电荷系的偶极矩、四极矩……，那末就可以推知电荷在系统中的分布，推知系统的电磁结构。

电场对电荷系的作用 上面讨论了电荷系激发的电场，现在讨论电场对电荷系的作用。设想有一个由 n 个点电荷 $q_i(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ 组成的系统，处在外电场中，试求外电场对它的作用，如图 3-12 所示。我们把坐标原点 O 取在电荷系的内部。电荷 q_i 的坐标是 (x_i, y_i, z_i)，离开原点的矢径是

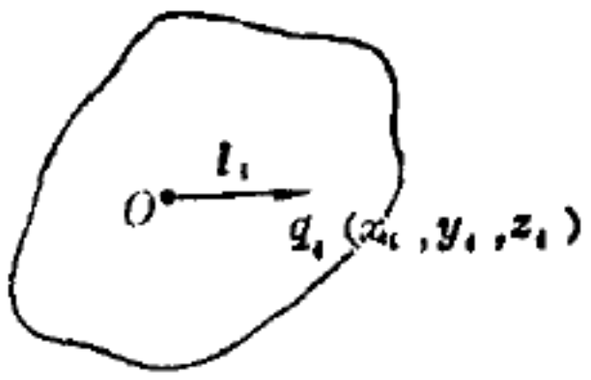


图 3-12

$$\boldsymbol{l}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}。$$

如果外电场在 q_i 所在点 (x_i, y_i, z_i) 的电势为 $\phi(x_i, y_i, z_i)$，那末由电势的物理意义可知，q_i 的电势能为 $U_i = q_i\phi(x_i, y_i, z_i)$，电荷系的电势能为

$$U = \sum_{i=1}^{n} q_i\phi(x_i, y_i, z_i) \tag{3-74}$$

为了更清楚地表明：电荷系的电势能和电荷系电荷分布的关系。我们将电势 $\phi(x_i, y_i, z_i)$ 在坐标原点的邻域展开为泰勒级数

$$\phi(x_i, y_i, z_i) = \phi(0) + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(0) + y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(0) + z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\phi(0) + \cdots\cdots = \phi(0) + (\boldsymbol{l}_i\cdot\nabla_i)\phi(0) + \cdots\cdots$$

把它代入(3-74)式中，得

$$U=\sum_{i=1}^{n}q_i\phi(0)+\left(\sum_{i=1}^{n}q_i l_i\cdot\nabla_i\right)\phi(0)+\cdots\cdots$$

如果把(3-72)式、(3-73)式代入上式，得

$$U=Q\phi(0)+(P\cdot\nabla)\phi(0)+\cdots\cdots \qquad (3-74)'$$

这就是电荷系在外电场中具有的电势能。显然，第一项相当于电荷系的电量集中在坐标原点时的电势能，第二项相当于电荷系的电偶极矩在坐标原点时的电势能。第三项、第四项……，是电荷系的四极矩、八极矩……的电势能。特别是，对于中性电荷系统，$Q=0$，电势能主要由

$$U_P=\boldsymbol{P}\cdot\nabla\phi=-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (3-75)$$

决定。

在理论力学中，我们知道：势能具有力函数的性质。如果势能 U，是某些广义坐标的函数。那末，和某一广义坐标 α 相应，就有广义力 f_α，而且

$$f_\alpha=-\frac{\partial U}{\partial\alpha} \qquad (3-76)$$

和广义坐标 $\alpha=x,y,z$ 或 θ 相应的广义力，为

$$f_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad f_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad f_z=-\frac{\partial U}{\partial z},\quad f_\theta=-\frac{\partial U}{\partial\theta}。$$

前面三个就是通常的力沿 x，y，z 的分量。后一个就是通常的力矩 L。

根据这个道理，我们就可以按照(3-75)式、(3-76)式，进一步计算电场对电荷系的偶极矩的作用。显然，作用力

$$\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}=-\nabla U=\nabla(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E})。$$

把任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的标积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的梯度 $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 的公式

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$$

用于 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$，得

$$\nabla(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E})=\boldsymbol{P}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{P})+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{P}。$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是电荷系的电偶极矩，在中性系统中，完全由系统的电磁结构确定，不是坐标的函数，对坐标的导数为 0，所以上式中的后两项为 0。由于静电场是保守场，旋度为 0，上式中的第一项也为 0。由此可知

$$\boldsymbol{f}=-\nabla U=\nabla(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}=P\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial l}\qquad(3\text{-}77)$$

后一导数是沿 $\boldsymbol{P}$ 的方向的方向导数。这表明：电场强度 $\boldsymbol{E}$，沿电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的方向没有变化时，电场对偶极矩的作用力为 0。显然，电偶极矩在均匀电场中受到的合力为 0。

均匀电场作用于电偶极矩的合力为 0，并不等于均匀电场对电偶极矩没有作用。实际上，电场对它还是有力矩的作用的。由(3-75)式和(3-76)式可知，电场对电偶极矩的作用力矩为

$$L=-\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E})=\frac{\partial}{\partial\theta}(PE\cos\theta)=-PE\sin\theta。$$

如图 3-13 所示。θ 是 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 之间的夹角。式中负号表示：力矩的作用使 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的夹角减小。力矩 $\boldsymbol{L}$ 力图使电矩 $\boldsymbol{P}$ 的方向，沿着电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向。这就意味着 $\boldsymbol{L}$ 的方向，是垂直于纸面向前。因此，力矩 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$ 的关系，可以概括地表示为

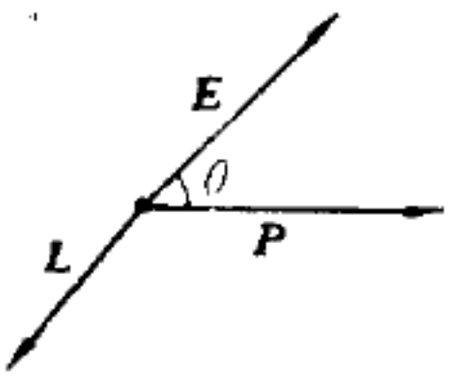


图 3-13

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E}\qquad(3\text{-}78)$$

这就是电场对电偶极矩的力矩作用。

构成物质的分子或分子集团，通常是电中性的。电场对它们的作用，通常是电偶极矩作用。所以，上述结果，对于我们理解电场对物质的作用，是很有帮助的。

电流系的磁场 分子或分子集团内的带电粒子，在分子内部是不断运动着的。所以，分子或分子集团，不仅是电荷系统，也是电流系统。上面论述了电荷系和电场的相互作用的概貌。现在，我们论述电流系和磁场的相互作用，为理解它们和磁场的相互作用奠定基础。

设想有一电流系统，线度为 l。我们研究离它很远处，即 $r \gg l$ 处，由它激发的磁场。如图 3-14 所示，我们把坐标原点 O 取在系统内，用 (x, y, z) 表示场点坐标，用

$$r = xi + yj + zk$$

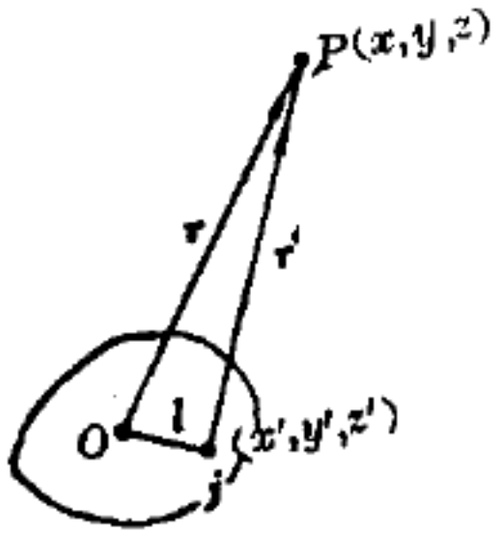


图 3-14

表示原点到场点的矢径，用 (x', y', z') 表示源点的坐标，用

$$l = x'i + y'j + z'k$$

表示原点到源点的矢径，用

$$r' = (x - x')i + (y - y')j + (z - z')k$$

表示源点到场点的矢径。在这样的坐标系中，按照本章开始时得到的基本解(3-22)式，电流系激发的磁场的矢势为

$$A(x, y, z) = \iiint_V \frac{\mu j(x', y', z')dV'}{4\pi r'} \qquad (3\text{-}79)$$

现在，我们利用泰勒级数，把它改写成能够反映系统电磁结构的形式。我们知道

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

既是场点(x, y, z)的函数，又是源点 (x', y', z') 的函数。我们把场点(x, y, z)固定，将它按源点(x', y', z')在原点$(0, 0, 0)$邻域展开，和(3-71)′式相似，有

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\cdots\cdots \qquad (3\text{-}71)''$$

将此式代入(3-70)式，得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \boldsymbol{j}(x',y',z')\left[\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\cdots\cdots\right]dV'。$$

积分是对源点进行的。方括号内，除 $\boldsymbol{l}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}$ 是源点矢径外，与源点无关。如果电流系是强度为 I 的线电流，即电流线的横截面很小，对 $dV'=dS\cdot dl$ 的积分，在取 dS 积分时，被积函数都可看作常数。这样，电流磁场的矢势的表示式，就成为

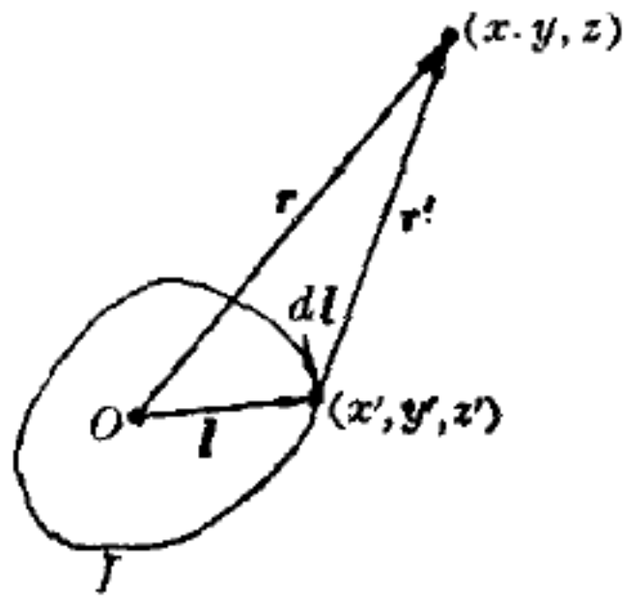


图 3-15

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi}\oint dl\left[\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\cdots\cdots\right] \qquad (3\text{-}79)'$$

这就是线电流系激发的磁场的矢势。第一项

$$\boldsymbol{A}_1(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi r}\oint dl$$

相当于电流都集中在原点邻域，在离它为 r 处的磁场矢势。显然，在电流闭合情况下，回路矢量也闭合，积分为 0，即 $\boldsymbol{A}_1=0$。第二项

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi}\oint dl\left(\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \qquad (3\text{-}80)$$

括号内是一标量函数 $\phi(x',y',z')$。矢势 $\boldsymbol{A}$ 的形式是

$$\oint dl\,\phi,$$

意义看不清楚。为了把它写成意义明显的形式，我们用一常数矢量 $\boldsymbol{a}$ 和它标乘，即取

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot(\phi\,\boldsymbol{a}),$$

按照斯托克斯定理

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot(\phi\,\boldsymbol{a})=\iint_S[\nabla\times(\phi\,\boldsymbol{a})]\cdot d\boldsymbol{S}$$

和矢量分析的恒等式

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{a})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{a}+\phi\nabla\times\boldsymbol{a},$$

再考虑到 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量时，后一项为 0，就有

$$\oint d\boldsymbol{l}\cdot(\phi\boldsymbol{a})=\iint_S[\nabla\,\phi\times\boldsymbol{a}]\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S(d\boldsymbol{S}\times\nabla\,\phi)\cdot\boldsymbol{a}。$$

式中后一等号，是根据三个任意矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的乘积的恒等式

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

而写下的。再消去两边的常矢量 $\boldsymbol{a}$，就得

$$\oint d\boldsymbol{l}\,\phi=\iint_S d\boldsymbol{S}\times\nabla\,\phi。$$

把这公式用于(3-80)式，得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi}\iint_S d\boldsymbol{S}'\times\nabla'\left(\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)。$$

积分曲面 S 是电流闭合回路包围的曲面。因为

$$\nabla'\left(\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{x'x+y'y+z'z}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

与积分变量无关。代入上式，得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu I}{4\pi}\iint_S d\boldsymbol{S}'\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}。$$

我们按照

$$\boldsymbol{M}=I\iint_S d\boldsymbol{S} \qquad (3\text{-}81)''$$

定义电流系的磁矩。上式就成为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{M}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (3\text{-}80)'$$

这就是磁矩为 $\boldsymbol{M}$ 的电流系，在离它 $\boldsymbol{r}$ 处所激发的磁场的矢势 $\boldsymbol{A}$。

矢势 $\boldsymbol{A}$ 本身，没有什么明确的物理意义，是为了解题方便而引入的。要了解电流系激发的磁场，还要由它算出磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。按照 $\boldsymbol{A}$ 的引进公式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\nabla\times\left(\boldsymbol{M}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \qquad (3\text{-}82)$$

利用两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的旋度 $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 的公式

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\nabla\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 的情况

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{M}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{M}-(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$+\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\boldsymbol{M}-(\nabla\cdot\boldsymbol{M})\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}。$$

注意：这里的微分是对场点 (x,y,z) 进行的。而电流系的磁矩 $\boldsymbol{M}$，是由电流系的电磁结构按(3-81)式确定的，与场点坐标无关。因而，上式中的首、尾两项为 0。上式第三项

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=0$$

所以，(3-82)式成为

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (3\text{-}82)'$$

再利用两个矢量 a、b 的标积 $a\cdot b$ 的梯度 $\nabla(a\cdot b)$ 的公式

$$\nabla(a\cdot b)=a\times(\nabla\times b)+b\times(\nabla\times a)+(a\cdot\nabla)b+(b\cdot\nabla)a$$

于 M 和 $\frac{r}{r^3}$,

$$\nabla\left(M\cdot\frac{r}{r^3}\right)=M\times\left(\nabla\times\frac{r}{r^3}\right)+\frac{r}{r^3}\times(\nabla\times M)$$

$$+(M\cdot\nabla)\frac{r}{r^3}+\left(\frac{r}{r^3}\cdot\nabla\right)M。$$

第一项可以直接证明为 0，第二、四项因 M 与 (x,y,z) 无关也为 0。把这代入(3-82)′式，得

$$B=-\nabla\left(\frac{\mu}{4\pi}\ \frac{M\cdot r}{r^3}\right)\qquad(3\text{-}82)''$$

把它和前面得到的电偶极矩 P 激发的电场

$$E=-\nabla\phi=-\nabla\left(\frac{P\cdot r}{4\pi\varepsilon r^3}\right)\qquad(3\text{-}69)''$$

比较。可以看出：在稳定场的情况下，电矩 P 激发的电场 E 和磁矩 M 激发的磁场 B 有非常相似的形式。

电偶极矩 P 和磁偶极矩 M，不仅在激发电场、磁场方面，有如(3-69)″式和(3-82)″式所示的相同形式。在受到电场、磁场的作用方面，也有类似的特点。实际上，磁矩 M 在磁感应强度为 B 的磁场中的力函数，有如(3-75)式的形式

$$U=-M\cdot B\qquad(3\text{-}83)$$

不过，和电矩 P 在电场 E 的力函数只是形式上的相似，实质上是有重大差别的。静电场是保守场，电矩 P 在电场 E 中的力函数，是它具有的电势能。稳定电流的磁场不是保守场，磁矩 M 在磁场 B 中的力函数，不具有势能的意义，这是应该严加区别的。

从力学的观点来看，力函数决定着系统受力的情况。力函数相同，就意味着它们受到的力和力矩等的相同。根据力和力函数关系的(3-76)式，用类似于讨论电矩时的方法，可以推知：磁场 $\boldsymbol{B}$ 对磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用力，和(3-77)式相似，是

$$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=M\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial l} \tag{3-84}$$

磁场 $\boldsymbol{B}$ 对磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用力矩，和(3-78)式相似，是

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B} \tag{3-85}$$

这表明：只在非均匀磁场中，磁矩 $\boldsymbol{M}$ 才受到不为 0 的合力。而磁场 $\boldsymbol{B}$ 对磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的力矩 $\boldsymbol{L}$ 的作用，总是力图使磁矩 $\boldsymbol{M}$ 沿着磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向取向。

泰勒级数展开方法，是近似计算的有力工具，被广泛地应用于物理和工程技术中。电矩、磁矩是描述物质电磁结构的重要参量。物质和场的相互作用，常常以偶极矩的方式进行。所以，这里所讨论的问题，讨论问题所用的观点、方法，和所得到的结论，都具有基本的、重要的意义。当然，实际问题比这复杂得多，这里所给出的，只是理解实际问题的一个导引。

第三章的结束语

1．就讨论的问题来说，这一章的稳定电、磁场，就是电磁学中的静电场和稳恒电流磁场，讨论的对象是相同的。但是，讨论问题的方法却和电磁学有所不同。电动力学是从麦克斯韦方程出发，结合“稳定”、即不随时间变化的特点，利用数理方程的求解方法，论述具体条件下的具体规律。这使讨论问题的广度和深度比在电磁学中要广一些和深一些。读者要抓

住这一特点，使学习水平在电磁学的基础上，大大地前进一步。

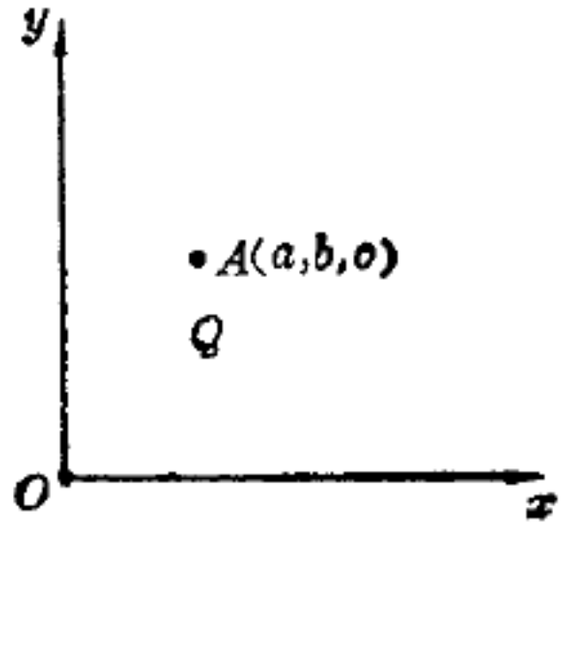
2．这里论述的稳定电、磁场理论，是用泊松方程和拉普拉斯方程表述的。而用它来求解具体问题所用的方法，又是镜象法、分离变量法、级数展开法等。这些，都具有比较普遍的意义。它们不仅适用于电磁问题中，也适用于一些其他物理问题和工程技术问题。我们学习它，不仅对理解本章内容是必要的，对学习其他课程、阅读其他参考文献都是十分重要的。要决心把它学好！

数学物理方程是数学物理方法课程的重要章节。学习过数学物理方法课的读者，学习本章内容会比较顺利。没有学习过数学物理方法课的读者，会碰到一些困难。但是，只要耐心细致地阅读，反复演算每一步骤，也是能够学好的。

数学物理方程是学好电动力学、量子力学等的一大关口。要苦斗，过好这一关口，才可能在理论物理这一科学领域取得自由。

3．为了学好这一章的内容和方法，建议读者演算如下几道习题：

i．如下图所示。两个金属半平面互相垂直，并且接地。在某点 $A(a, b, o)$ 放一电量为 Q 的点电荷，求它们使在 $x>0$、$y>0$ 的空间的电势分布。



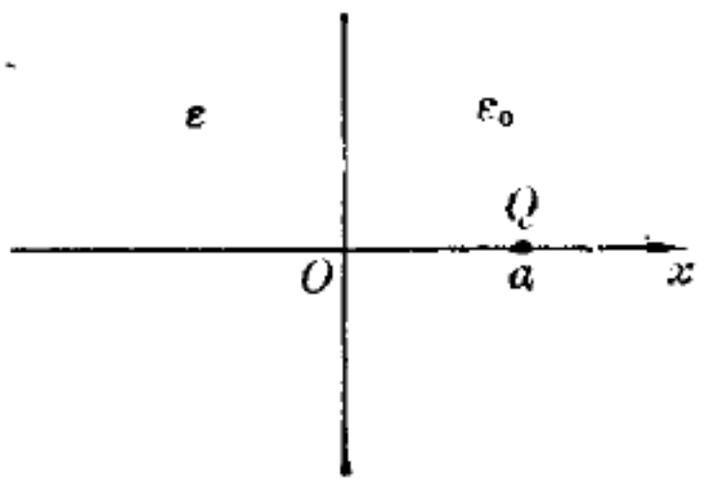
$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right.$$

$$-\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}$$

$$-\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}$$

$$\left.+\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]。$$

ii. 在 $x<0$ 的空间，充满介电常数为 ε 的均匀介质，如右图所示。在 $(a,0,0)$ 点放一电量为 Q 的点电荷。求空间的电势分布和介质表面的电荷分布。



$$x>0,$$

$$\phi_+(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]。$$

$$x<0,\ \phi_-(x,y,z)=\frac{2Q}{4\pi(\varepsilon_0+\varepsilon)\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}。$$

iii. 有一带电量为 Q，半径为 a 的金属球，置于均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求整个空间的电势分布和金属表面的面电荷密度。

$$\phi(r,\theta,a)=V_0-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}-E_0 r\cos\theta$$

$$+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta。$$

iv. 有一半径为 a 的中性金属球，外面包了一层介电常数为 ε 的均匀介质球，外半径为 b。它们放置在强度为 $\boldsymbol{E}_0$ 的均匀外电场中，求电场电势的分布。计算导体表面面电荷密度，以及介质内、外表面束缚电荷密度。

$$\phi_1(r,\theta,a)=V_0-E_0r\cos\theta$$

$$+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0b^6+(2\varepsilon+\varepsilon_0)E_0b^3a^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)b^3+2(\varepsilon-\varepsilon_0)a^3}$$

$$\cdot\frac{1}{r^2}\cos\theta;$$

$$\phi_2(r,\theta,a)=V_0-\frac{3\varepsilon_0E_0b^3}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)b^3+2(\varepsilon-\varepsilon_0)a^3}$$

$$\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta。$$

v. 在一边长为 a 的正四边形顶点，分别放置电量为 e、$2e$、$3e$、$4e$ 的四个点电荷，计算这一电荷系相对于四边形中心的电偶极矩。它们在远处($r\gg a$)所产生的电势？当它们被放置在强度为 $\boldsymbol{E}_0$ 的均匀外电场中时，受到的力和力矩是多少？

vi. 有两个半径分别为 a 和 $2a$ 的金属圆环，都通以电流强度为 I 的电流，把它们同心而正交地装置着。问：它们的磁矩是多少？它们在远处($r\gg a$)产生的磁场怎样？当它们放置在均匀外磁场(磁感应强度为 B_0)中时，它们所受的力和力矩为何？

第四章　电磁波的传播和辐射

在上一章中，我们根据麦克斯韦电磁理论，论述了稳定电、磁场的一些规律和特点，着重介绍了一些重要的数学方法。现在，我们讨论：电磁场随时间变化情况下，电磁波的传播和辐射。我们的基本观点，仍然是麦克斯韦电磁理论。在连续、可导的那些点上，电磁规律用微分方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4-4}$$

描述。在不同介质分界面上，电磁突变规律用界面条件

$$H_{2t} - H_{1t} = i_N \tag{4-5}$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{4-6}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{4-7}$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{4-8}$$

表征。而场中介质的性质，用物态方程，如

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{4-9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{4-10}$$

表示。所用的方法也有一些重要的数学方法。

第一节　电　磁　波

首先，我们从麦克斯韦微分方程，推断电磁波的存在，论述单色平面波的一般特点。单色平面波是被理想化了的、最简单、最基本的一种波动过程。由于其他实际的、较复杂的波动过程，都可以看成是它们的线性迭加。所以，在波动理论中，单色平面波具有重要的意义。

电磁波方程　现在，我们来从麦克斯韦微分方程，导出电磁波方程，推断电磁波的存在。在没有电荷、电流的均匀介质中，$\rho=0$, $\boldsymbol{j}=0$, ε、μ 既不是时间的函数，也不是坐标的函数，而是由介质性质确定的常数。这时，麦克斯韦微分方程(4-1)式、(4-2)式、(4-3)式、(4-4)式，取如下的形式

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (4\text{-}1)'$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (4\text{-}2)'$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \qquad (4\text{-}3)'$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (4\text{-}4)'$$

我们对(4-1)′式、(4-2)′式两边取旋度。并利用矢量分析中，一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$ 的公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a},$$

得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E},$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}。$$

再把(4-1)′式、(4-2)′式、(4-3)′式、(4-4)′式代入上两式，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0。$$

令

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{4-11}$$

以上两式就成为

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{4-12}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4-13}$$

这就是人所熟知的波动方程。这表明：电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 满足波动方程，具有波动性质。电磁波存在！麦克斯韦在建立了他的理论时，就导出了这一结论，廿年后，赫兹用实验证实了这一结论。今天，电磁波已是人所共知，并被广泛利用的事物了。

平面电磁波 为了进一步理解如何从麦克斯韦理论推断电磁波的存在和它的性质，我们讨论 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和坐标 y、z 无关的情况。这时，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 只是坐标 x 和时间 t 的函数 $\boldsymbol{E}(x,t)$、$\boldsymbol{B}(x,t)$。波动方程(4-12)式、(4-13)式成为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{4-12}'$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4-13}'$$

这两个矢量方程，其实是两个矢量的六个分量方程，有完全同样的形式，它们的解也应该有同样的形式。因此，我们只要求出其中的任一解，就可以直接写出其他的解。我们用 $f(x,t)$

表示 $\boldsymbol{E}(x,t)$、$\boldsymbol{B}(x,t)$ 的任一分量，它满足波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0 \tag{4-14}$$

为了求解这一方程，我们把变数 x、t，按照

$$\xi=t-\frac{x}{v},\quad \eta=t+\frac{x}{v} \tag{4-15}$$

变换成变数 ξ、η。则函数

$$f(\xi,\eta)=f[\xi(x,t),\eta(x,t)]=f(x,t),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=-\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)$$

$$=-\frac{1}{v}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]$$

$$=-\frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\right)\left(-\frac{1}{v}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)\frac{1}{v}\right]$$

$$=\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right]。$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right]\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\right]\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}。$$

把它们代入(4-14)式，得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}=0 \qquad (4\text{-}14)'$$

经过按照(4-15)式的变数变换，求解偏微分方程(4-14)式的问题，就转化为求解偏微分方程(4-14)′式的问题。后一方程可以直接积分。实际上，把它写成

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)=0$$

的形式，就可以看出：$\frac{\partial f}{\partial \eta}$与 ξ 无关，一般是 η 的函数，即

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=g(\eta)。$$

再对 η 积分，得

$$f(\xi,\eta)=f_+(\xi)+f_-(\eta)。$$

$f_+(\xi)$ 是 ξ 的任意的连续可导函数；$f_-(\eta)$ 是 η 的任意的连续可导函数。把变数 ξ、η，再按照(4-15)式，换成变数 x、t，得

$$f(x,t)=f_+\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_-\left(t+\frac{x}{v}\right) \qquad (4\text{-}15)$$

这就是波动方程 (4-14) 式的一般解。这个一般解的特点是：变数 x、t 的组合形式是一定的，一个是 $t-\frac{x}{v}$，一个是 $t+\frac{x}{v}$；函数的形式却是任意的，$f_+\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 是变数 $t-\frac{x}{v}$ 的什么函

数，$f_-\left(t+\frac{x}{v}\right)$ 是变数 $t+\frac{x}{v}$ 的什么函数，要由具体的条件来确定。

现在，我们来看看这个一般解的物理意义。先看第一个解。令

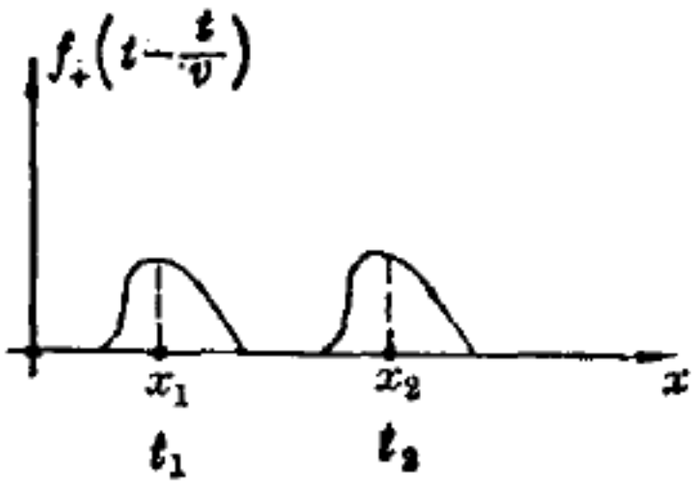


图 4-1

$$t_1-\frac{x_1}{v}=t_2-\frac{x_2}{v},$$

则

$$f_+\left(t_1-\frac{x_1}{v}\right)=f_+\left(t_2-\frac{x_2}{v}\right)。$$

t_1、t_2 是两个不同的时刻，x_1、x_2 是两个不同的空间坐标。从运动学的观点来看，由上列假定推得的

$$x_2-x_1=v(t_2-t_1)$$

是匀速直线运动方程，v 是运动速度，x_1 是时刻 t_1 的坐标，x_2 是时刻 t_2 的位置。f_+ 在这两个时刻、两个位置上的数值相等，表明：正是用函数 $f_+\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 描述的物理对象，以速度 v 沿着 x 轴方向运动，或者说以速度 v 沿 x 方向传播，如图 4-1 所示。当函数 $f_+\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 是电场强度 $\boldsymbol{E}\left(t-\frac{x}{v}\right)$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 时，它就描述以速度 v 沿 x 方向传播的电磁波。同理，函数 $f_-\left(t+\frac{x}{v}\right)$ 描述以速度 v 逆着 x 方向传播的物理过程。$\boldsymbol{E}\left(t+\frac{x}{v}\right)$、$\boldsymbol{B}\left(t+\frac{x}{v}\right)$ 描述以速度 v 逆着 x 方向传播的电磁波。由于 $\boldsymbol{E}\left(t-\frac{x}{v}\right)$、$\boldsymbol{B}\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 与坐标 y、z 无

关。在垂直于 x 轴的任一 yz 平面上各点，它们有同样的大小和方向。所以，我们把它叫做平面电磁波。这波的传播速度

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

由介质的电磁性质 ε、μ 确定。

单色平面波　由上面的论述可知，满足波动方程(4-14)式的解 $\boldsymbol{B}\left(t-\frac{x}{v}\right)$、$\boldsymbol{E}\left(t-\frac{x}{v}\right)$，可以是变量 $t-\frac{x}{v}$ 的任意函数。那末，变量 $\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 的三角函数 $\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$、$\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$，或指数函数 $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}$，当然是波动方程(4-14)式的解。换句话说，从麦克斯韦电磁理论看来，一定存在以数学形式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} \tag{4-16}$$

描述的电磁波。我们把它叫做单色平面波。如前所述，$\boldsymbol{E}\left(t-\frac{x}{v}\right)$、$\boldsymbol{B}\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 的任意函数，都表示以速度 v 沿 x 轴方向传播的平面波。(4-16)式是 $\boldsymbol{E}\left(t-\frac{x}{v}\right)$、$\boldsymbol{B}\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 的特殊形式，当然仍然表示以速度 v 沿 x 轴方向传播的平面波。我们再进一步看看它的物理特点。令 $\omega=2\pi\nu$，从

$$e^{i2\pi\nu\left(t+\frac{1}{\nu}-\frac{x}{v}\right)}=e^{i2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)}$$

可以看出，它是以 $T=\frac{1}{\nu}$ 为周期的周期函数，ν 具有频率的意义，$\omega=2\pi\nu$ 叫做圆频率，一定的 ν 或 ω 表示一定的频率。这表明：(4-16)式表示以一定频率 ν 振动，以速度 v 沿 x 轴方向传播的平面波。在光学中知道，光的频率决定着光的颜

色。一定的频率就决定着一定的颜色。所以，我们把用(4-16)式描述的电磁波，叫做单色平面波。$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 是 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 可能具有的最大值，叫做波的振幅。$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$是 x 点在 t 时刻的位相。显然，垂直于 x 轴的 yz 平面是等位相面。一般把等位相面是平面的波，叫做平面波。

令　$\lambda=\frac{v}{\nu}$，从

$$e^{i2\pi\nu\left(t-\frac{x+\lambda}{v}\right)}=e^{i2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)}$$

可以看出，相距 λ 的两点，在任意时刻 t，位相都是相同的。我们把 λ 叫做电磁波的波长。从定义 $\lambda=\frac{v}{\nu}$看，波长 λ 的意义是：每振动一次波传播的距离。从以上等式看，波长 λ 的意义是：两相邻位相相同点间的距离。当然，这两种意义是一致的，因为用以定义波长的速度是位相传播速度。如果用周期 T、波长 λ 作为参数，来描写波动过程，(4-16)式就成为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}\qquad (4\text{-}16)'$$

令　$k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$，表示在 2π 距离内波的数目，叫做波数。这时，(4-16)式又可写成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\omega t-kx)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{i(\omega t-kx)}\qquad (4\text{-}16)''$$

为了更深入地描述电磁波传播的特点，我们引进一个矢量 $\boldsymbol{K}$，它的大小等于波数，即 $|\boldsymbol{K}|=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$，它的方向表示波传播的方向，并把它叫做波矢量。那末，就可以把表示沿 x 方向传播的单色平面波(4-16)式，推广到沿任意 $\boldsymbol{K}$ 方向传播的单色平面波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-K\cdot r)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0 e^{i(\omega t-K\cdot r)} \tag{4-17}$$

$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是空间一点 (x,y,z) 离开原点的矢径。怎么知道(4-17)式描述的是单色平面波呢？因为 ω、$|\boldsymbol{K}|$ 具有和以前同样的意义，(4-17)式表示单色波是显然的。当波沿 x 轴方向传播时，$\boldsymbol{K}=K\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}=Kx$，(4-17)式就是(4-16)″式，描写的就是沿 x 方向传播的单色平面波。当 $\boldsymbol{K}$ 的方向任意时，如图 4-2 所示，在垂直于 $\boldsymbol{K}$ 的平面上，用矢径 $\boldsymbol{r}$ 标志的任一点，$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}=Kr_0$ 一定。这就是说，在垂直于波传播方向的任一平面上，各点的位相 $\omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}=\omega t-Kr_0$ 是相同的。或者说，垂直于波传播方向的平面是等位相面。由此可知，(4-17)式描述的确实是单色平面波，而且等位相面是垂直于波传播方向 $\boldsymbol{K}$ 的平面。

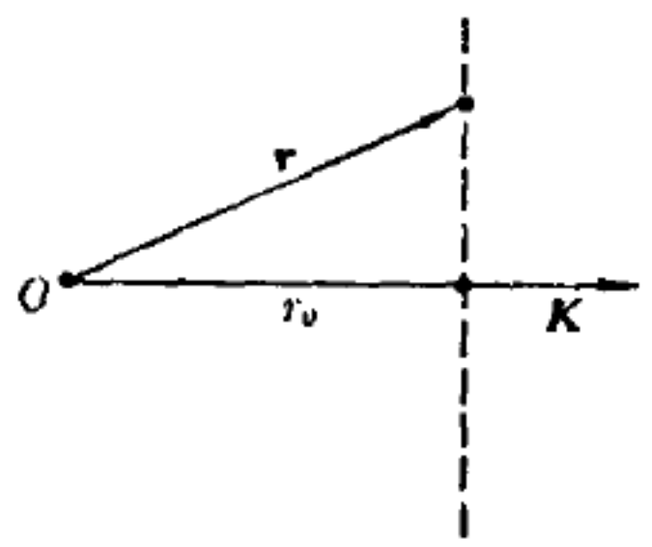


图 4-2

单色平面波和它的描述方式，在波动理论中，具有非常基本而又十分重要的意义。值得注意！

第二节　均匀介质中的单色平面波

在上一节中，我们从麦克斯韦电磁理论推知：存在单色平面电磁波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-K\cdot r)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0 e^{i(\omega t-K\cdot r)} \tag{4-17}'$$

描述电磁波的参量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、ω、$\boldsymbol{K}$ 的意义是：矢量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 的方向表明 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 振动的方向，它的大小表示振幅的大小；$\omega=2\pi\nu$ 是振动的圆频率；波矢量 $\boldsymbol{K}$ 的方向表示波传播的方向，它的大小表示 2π 距离内波的数目。然而，这些参量和场中物质的性质有什么联系呢？它们彼此之间又有怎样的关系呢？这

是需要进一步讨论、研究的。

我们研究、讨论这些问题的基础，在均匀介质情况下，仍然是麦克斯韦方程(4-1)′式、(4-2)′式、(4-3)′式、(4-4)′式

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (4\text{-}1)''$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (4\text{-}2)''$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad (4\text{-}3)''$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (4\text{-}4)''$$

所用的方法是把表示单色平面波的(4-17)′式代入上式，看看表示电磁波的参量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、ω、$\boldsymbol{K}$ 等将满足怎样的方程，将有怎样的相互关系？运算时注意：用(4-17)′式表示的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，都是时间 t、坐标 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的指数函数，它们的导数具有简单的形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = i\omega\boldsymbol{E},\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -i\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E},\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -i\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{E} \cdots\cdots$$

这表明：$\frac{\partial}{\partial t}$ 对 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的作用等效于 $i\omega$ 的作用；∇ 对 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的作用等效于 $-i\boldsymbol{K}$ 的作用。因此，在微分方程(4-1)″式、(4-2)″式、(4-3)″式、(4-4)″式中，作如下代换

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \quad \nabla \to -i\boldsymbol{K},$$

就可以得到描述电磁波的参量应该满足的代数方程

$$-i\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} = i\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{E},$$

$$-i\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{E} = -i\omega\boldsymbol{B},$$

$$-i\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E} = 0,$$

$$-i\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{B} = 0。$$

整理一下，得

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B}=-\omega\varepsilon\mu\boldsymbol{E} \tag{4-18}$$

$$\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B} \tag{4-19}$$

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{4-20}$$

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4-21}$$

这些代数方程，表示出波参量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、ω、$\boldsymbol{K}$ 等之间的关系，表示出单色平面波在均匀介质中传播的特点。实际上，(4-20)式、(4-21)式表明：电磁波传播的方向，即波矢量 $\boldsymbol{K}$ 的方向，和电磁振动的方向，即 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直。换句话说，在均匀介质中传播的电磁波是横波。(4-18)式、(4-19)式进一步指出：$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}$ 三者相互垂直，且依次组成右手螺旋，如图 4-3 所示。在明了了它们的方向关系以后，(4-18)式、(4-19)式可以写成

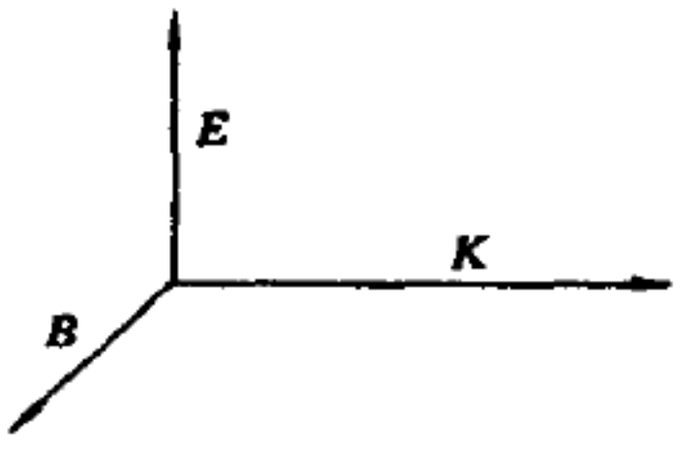


图 4-3

$$KB=\omega\varepsilon\mu E,$$

$$KE=\omega B。$$

将第二式移项后相比，消去 E、B，得

$$K=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\frac{\omega}{v} \tag{4-16}'$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{4-11}'$$

这正是人所熟知的波速 v 和介质性质 ε、μ 的关系，波数 K 和频率 ω、波速 v 的关系。如果把两式相比，消去 K、ω，得

$$E=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}B=vB \tag{4-22}$$

这表明电场强弱和磁场强弱的关系：电场强度 E 是磁感应强度 B 的 v 倍。把这个关系和洛仑兹力公式

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B})$$

比较，则得作用在电荷上的电力和磁力之比为

$$\frac{qE}{qUB}\sim\frac{v}{u}。$$

在一般情况下，电荷运动的速度 u 远小于电磁波传播的速度 v，电力远大于磁力。这正是我们在计算电磁波、光波对物质的作用时，常常略去磁力作用的缘故。

总起来说：在均匀介质中传播的电磁波是横波，波参数 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}$ 的方向之间有如图 4-3 所示的右手螺旋关系；波参数 E、B、K、ω、v 的大小之间，有如(4-11)′式、(4-16)′式、(4-22)式所示的关系，这些就是均匀介质中电磁波的基本特点。

在知道了这些基本特点以后，可以进一步探讨电磁波的能量、能流的情况。电磁波的能量密度，按照(2-52)式、(2-53)式，是

$$U=\frac{1}{2}\left[\varepsilon E^2+\frac{B^2}{\mu}\right]=\frac{1}{2}\left[\varepsilon E^2+\frac{E^2}{v^2\mu}\right]=\frac{1}{2}[\varepsilon E^2+\varepsilon E^2]$$
$$=\varepsilon E^2。$$

电磁波的能流密度，按照(2-54)′式

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

和上述的情况，它的方向沿着 $\boldsymbol{K}$，即电磁波传播的方向。它的大小是

$$S=EH=E\frac{B}{\mu}=\frac{E^2}{v\mu}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2=v\varepsilon E^2=Uv。$$

由于 $\boldsymbol{K}$ 的方向和 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致，所以，电磁波能流密度

$$\boldsymbol{S}=U\boldsymbol{v}。$$

这表明：以体密度U分布的电磁波能量，以速度v在空间传播。在这种情况下，能量的传播速度和位相的传播速度是一样的，即群速等于相速。

第三节　介质界面上的反射和折射

在均匀介质中，电磁波是横波，波参量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}$的方向之间构成右手螺旋；波参量E、B、K、ω、v的大小之间，有(4-11)′式、(4-16)′式、(4-22)式所示的关系。在介质的分界面上，电磁波将发生反射和折射。我们用麦克斯韦电磁理论来分析它们反射和折射的规律。

界面条件　在介质的分界面上，由于介质的突变，电磁场也发生突变。电磁场的性质，不能用微分方程描述，而要用界面条件

$$H_{2t}-H_{1t}=i_N,$$

$$E_{2t}-E_{1t}=0,$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma,$$

$$B_{2n}-B_{1n}=0$$

来描述。在介质的分界面上，通常没有自由电荷和传导电流，即$\sigma=0$，$i=0$。如果用ε_1、μ_1和ε_2、μ_2分别表示界面两侧介质的电磁性质。那末，上述界面条件中的前两个，就可以写成

$$E_{2t}=E_{1t},$$

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2}=\frac{B_{1t}}{\mu_1}。$$

下面要用的正是这两个界面条件。

设想有一单色平面波

$$\boldsymbol{E}^{\lambda}=\boldsymbol{E}_0^{\lambda}e^{i(\omega^{\lambda}t-K^{\lambda}\cdot r)};$$

$$\boldsymbol{B}^{\lambda}=\boldsymbol{B}_0^{\lambda}e^{i(\omega^{\lambda}t-K^{\lambda}\cdot r)} \tag{4-23}$$

经由第一介质入射到两介质的分界面上，它们将被反射和折射。按照惠更斯原理，反射波和折射波仍然是单色平面波。我们用

$$\boldsymbol{E}^{反}=\boldsymbol{E}_0^{反}e^{i(\omega^{反}t-K^{反}\cdot r)};$$

$$\boldsymbol{B}^{反}=\boldsymbol{B}_0^{反}e^{i(\omega^{反}\cdot t-K^{反}\cdot r)} \tag{4-24}$$

$$\boldsymbol{E}^{折}=\boldsymbol{E}_0^{折}e^{i(\omega^{折}\cdot t-K^{折}\cdot r)};$$

$$\boldsymbol{B}^{折}=\boldsymbol{B}_0^{折}e^{i(\omega^{折}t-K^{折}\cdot r)} \tag{4-25}$$

表示。而且，入射波和反射波是在第一均匀介质中传播的，折射波是在第二均匀介质中传播的。既然，它们都各自在均匀介质中传播。那末，它们就都应该各自遵循上一节所述的传播规律。换句话说，它们都是横波，而且满足

$$K^{入}=\frac{\omega^{入}}{v_1};\ K^{反}=\frac{\omega^{反}}{v_1};\ K^{折}=\frac{\omega^{折}}{v_2} \tag{4-26}$$

$$E^{入}=v_1B^{入};\quad E^{反}=v_1B^{反};\quad E^{折}=v_2B^{折} \tag{4-27}$$

等关系。此外，在介质的分界面上，它们还要满足界面条件

$$E_t^{入}+E_t^{反}=E_t^{折} \tag{4-28}$$

$$\frac{B_t^{入}}{\mu_1}+\frac{B_t^{反}}{\mu_1}=\frac{B_t^{折}}{\mu_2} \tag{4-29}$$

这些就是我们讨论介质界面上反射、折射规律的基础。

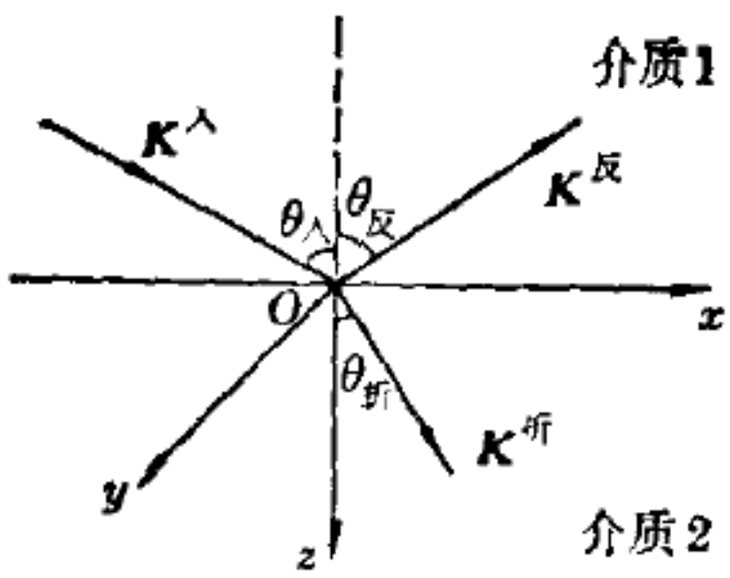


图 4-4

为了进行具体的讨论，我们取如图 4-4 所示的坐标系。Oxy 平面为介质 1 和介质 2 的分界

面。在分界面上，$z=0$。Oxz 平面为入射面，$K_y^{入}=0$，

$$\boldsymbol{K}^{入}=K_x^{入}\boldsymbol{i}+K_z^{入}\boldsymbol{k}。$$

把用(4-23)式、(4-24)式、(4-25)式表示的入射波、反射波、折射波，代入界面条件(4-28)式和(4-29)式，得

$$E_{0t}^{入}e^{i(\omega^{入}t-K_x^{入}x)}+E_{0t}^{反}e^{i(\omega^{反}t-K_x^{反}x-K_y^{反}y)}$$

$$=E_{0t}^{折}e^{i(\omega^{折}t-K_x^{折}x-K_y^{折}y)} \tag{4-30}$$

$$\frac{B_{0t}^{入}}{\mu_1}e^{i(\omega^{入}t-K_x^{入}x)}+\frac{B_{0t}^{反}}{\mu_1}e^{i(\omega^{反}t-K_x^{反}x-K_y^{反}y)}$$

$$=\frac{B_{0t}^{折}}{\mu_2}e^{i(\omega^{折}t-K_x^{折}x-K_y^{折}y)} \tag{4-31}$$

这就是入射波、反射波、折射波在介质界面上，应该遵从的规律。或者说，这就是电磁波在介质界面上的反射、折射规律。

反射定律和折射定律　我们来看一看，从这些反射、折射规律的一般表达式(4-30)式、(4-31)式中，得出怎么样的具体结论？首先，上式要在界面上任何一点、任何时刻都成立，即在变数 x、y、t 取任何值时都成立。这只当它们的系数分别相等，以致上列等式不再是 x、y、t 的函数时，才能作到。由此可知：

$$\omega_{反}=\omega_{折}=\omega_{入}=\omega,$$

$$K_y^{反}=K_y^{折}=0,$$

$$K_x^{反}=K_x^{折}=K_x^{入}。$$

第一式表明：反射波的频率 $\omega_{反}$、折射波的频率 $\omega_{折}$ 和入射波的频率 $\omega_{入}$ 是一样的，都等于 ω。换句话说，电磁波在反射、折射过程中，它的频率不变。在一般情况下，这个结论是正确的，是被实践证实了的。然而，在很高频率时，会出现量子效应，和这个结论不符，散射会使波的频率发生变化。

第二式表明：反射波矢量 $K^{反}$、折射波矢量 $K^{折}$ 和入射波矢量 $K^{入}$ 一样，都没有 y 分量，即反射线、折射线和入射线一样，都在 Oxz 平面内。由于从图 4-4、上列第一式和(4-26)式，得

$$K_x^{入}=K^{入}\sin\theta_{入}=\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_{入},$$

$$K_x^{反}=K^{反}\sin\theta_{反}=\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_{反},$$

$$K_x^{折}=K^{折}\sin\theta_{折}=\frac{\omega}{v_2}\sin\theta_{折}。$$

代入上列第三式，得

$$\frac{\sin\theta_{入}}{v_1}=\frac{\sin\theta_{反}}{v_1}=\frac{\sin\theta_{折}}{v_2}。$$

前一个等式表明：反射角和入射角的关系

$$\theta_{反}=\theta_{入}=\theta,$$

后一个等式表明：折射角和入射角的关系

$$\sin\theta=\sin\theta_{入}=\frac{v_1}{v_2}\sin\theta_{折}=n_{12}\sin\theta_{折}=n_{12}\sin\theta'。$$

这些就是人所熟知的反射定律和折射定律。由麦克斯韦电磁理论能够导出被实验证实了的反射定律和折射定律，又一次证明了麦克斯韦电磁理论的正确性。

菲涅耳公式　在前面，我们要求：在任意时刻 t、在界面上任意一点 $(x,y,0)$，(4-30)式、(4-31)式都成立，导致它们的系数相等，导出了反射定律和折射定律。从(4-30)式、(4-31)式的函数形式看出，t、x、y 的系数相等，意味着入射波、反射波、折射波的位相因子相同。因而，可以从(4-30)式、(4-31)式中消失，剩下描述入射波、反射波、折射波的振幅间的

相互关系。

$$E_{0}^{入}{}_{t}+E_{0}^{反}{}_{t}=E_{0}^{折}{}_{t} \qquad (4\text{-}28)'$$

$$\frac{B_{0}^{入}{}_{t}}{\mu_1}+\frac{B_{0}^{反}{}_{t}}{\mu_1}=\frac{B_{0}^{折}{}_{t}}{\mu_2} \qquad (4\text{-}29)'$$

它们和(4-28)式、(4-29)式具有完全相同的形式，但意义却是有差别的。为了简便，我们常常略去 E_{0t} 等的 0 指标，而用 E_t 表示振幅，这时(4-28)式、(4-29)式就是(4-28)′式、(4-29)′式，表示诸波振幅的关系。

从电磁场能量密度的表示式可以看出：振幅的平方确定着电磁波的能量，即确定着电磁波的强度。所以，从上面的振幅关系，可以推断电磁波的强度关系。例如，可以按照公式

$$R=\frac{|E^{反}|^2}{|E^{入}|^2}$$

计算反射系数 R。

为了进一步由(4-28)式、(4-29)式导出具体的物理结论，我们再回顾一下前面的论述：不管是入射波，还是反射波，或折射波，它们都是横波，它们各自的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向互相垂直，并且和 $\boldsymbol{K}$ 组成右手螺旋；而且，E 的大小是 B 的大小的 v 倍，即 $E=vB$。我们设想电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和 y 轴平行，即垂直于入射平面，

$$E=E_{\perp}$$

(4-28)式成为

$$E_{\perp}^{入}+E_{\perp}^{反}=E_{\perp}^{折} \qquad (4\text{-}28)''$$

这时，$\boldsymbol{B}$ 应在入射平面内，如图 4-5 所示。它们的切向分量

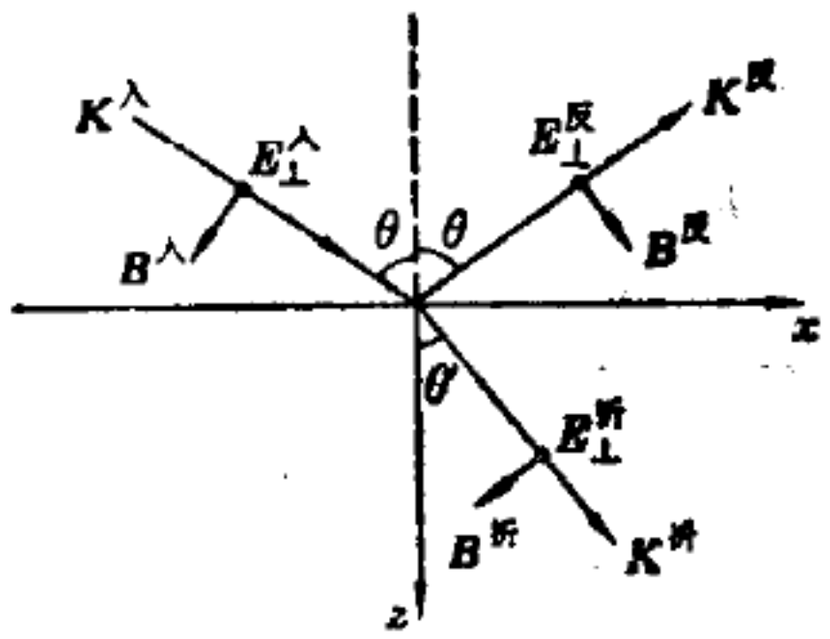


图 4-5

$$B_t^{入}=-B^{入}\cos\theta;\quad B_t^{反}=B^{反}\cos\theta;\quad B_t^{折}=-B^{折}\cos\theta'。$$

利用 $E=vB$ 的关系，把上式写成

$$B_t^{入}=-\frac{E_\perp^{入}}{v_1}\cos\theta;\qquad B_t^{反}=\frac{E_\perp^{反}}{v_1}\cos\theta;$$

$$B_t^{折}=-\frac{E_\perp^{折}}{v_2}\cos\theta'。$$

代入(4-29)式，得

$$\left(-\frac{E_\perp^{入}}{\mu_1 v_1}+\frac{E_\perp^{反}}{\mu_1 v_1}\right)\cos\theta=--\frac{E_\perp^{折}}{\mu_2 v_2}\cos\theta'。$$

在一般介质中，$\mu_1\sim\mu_2\sim\mu_0$。利用折射定律

$$\sin\theta=\frac{v_2}{v_1}\sin\theta'$$

消去上式中的 v_1、v_2，得

$$(-E_\perp^{反}+E_\perp^{入})\cos\theta\sin\theta'=E_\perp^{折}\cos\theta'\sin\theta\qquad(4\text{-}29)''$$

(4-28)″式、(4-29)″式是电场方向垂直于入射平面时，反射波、折射波和入射波振幅，在界面上应该满足的代数方程。这两个联立代数方程的解是

$$\frac{E_\perp^{反}}{E_\perp^{入}}=-\frac{\sin(\theta-\theta')}{\sin(\theta+\theta')};$$

$$\frac{E_\perp^{折}}{E_\perp^{入}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta'}{\sin(\theta+\theta')}\qquad(4\text{-}32)$$

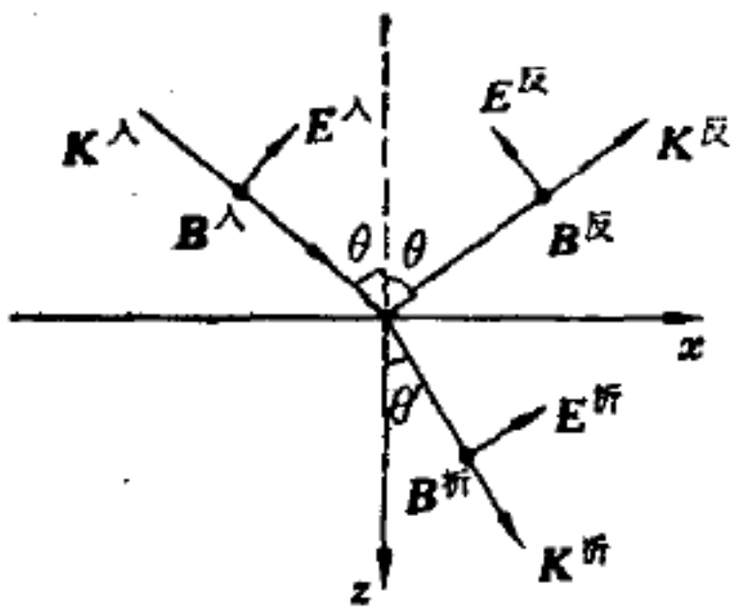


图 4-6

这就是在电场垂直于入射平面时，振幅的反射、折射规律。

如果电场强度 E 在入射平面内，即平行于入射平面，$E=E_{//}$，如图 4-6 所示。磁感应强度就平行于 y 轴，$B=B_y=B_{//}$。这时

$$E_t^{入}=E_{//}^{入}\cos\theta,\quad E_t^{反}=-E_{//}^{反}\cos\theta,\quad E_t^{折}=E_{//}^{折}\cos\theta'。$$

$$B_t^{入}=B^{入}=\frac{E_{//}^{入}}{v_1},\quad B_t^{反}=B^{反}=\frac{E_{//}^{反}}{v_1},$$

$$B_t^{折}=B^{折}=\frac{E_{//}^{折}}{v_2}。$$

把它们代入(4-28)式、(4-29)式，得

$$E_{//}^{入}\cos\theta-E_{//}^{反}\cos\theta=E_{//}^{折}\cos\theta',$$

$$\frac{E_{//}^{入}}{\mu_1 v_1}+\frac{E_{//}^{反}}{\mu_1 v_1}=\frac{E_{//}^{折}}{\mu_2 v_2}。$$

在 $\mu_1\sim\mu_2\sim\mu_0$ 的一般情况下，求解这两个代数方程，得

$$\frac{E_{//}^{反}}{E_{//}^{入}}=\frac{v_1\cos\theta-v_2\cos\theta'}{v_1\cos\theta+v_2\cos\theta'};$$

$$\frac{E_{//}^{折}}{E_{//}^{入}}=\frac{2v_2\cos\theta}{v_2\cos\theta'+v_1\cos\theta}。$$

再应用折射定律

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}$$

和三角恒等式

$$\sin\theta\cos\theta\pm\sin\theta'\cos\theta'=\sin(\theta\pm\theta')\cos(\theta\mp\theta'),$$

把它们化为

$$\frac{E_{//}^{反}}{E_{//}^{入}}=\frac{\tan(\theta-\theta')}{\tan(\theta+\theta')};$$

$$\frac{E_{//}^{折}}{E_{//}^{入}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta'}{\sin(\theta+\theta')\cos(\theta-\theta')}\qquad(4\text{-}33)$$

这就是电场平行于入射平面时，电磁波振幅的反射、折射规律。

如果电场强度矢量的方向是任意的。我们就把它们分解为垂直于入射平面的分量 $E_{\perp}$ 和平行于入射平面的分量 $E_{//}$。

显然，这些振幅的分量 $E_{\perp}$、$E_{/\!/}$，仍然分别遵从 (4-32)式、(4-33)式表示的反射、折射规律。换句话说，(4-32)式、(4-33)式是描述振幅、因而能量的反射、折射规律的基本方程式。我们把它叫做菲涅耳公式，由它可以推出许多可用实验直接测定的结论。

首先，从(4-32)式、(4-33)式看出，当 $\theta+\theta'=\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan(\theta+\theta')=\tan\frac{\pi}{2}\to\infty$，$E_{/\!/}^{反}\to 0$，但有 $E_{\perp}^{反}$ 分量。这表明：当入射角 θ 和折射角 θ' 之和为 $\frac{\pi}{2}$ 时，反射波中没有平行于入射面的分量 $E_{/\!/}^{反}$，只有垂直于入射面的分量 $E_{\perp}^{反}$，即反射波是垂直偏振的。在什么条件下，会使 $\theta+\theta'=\frac{\pi}{2}$，会发生反射波的偏振现象呢？设想现象发生在入射角为 θ_0 时，按照折射定律

$$n=\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta'}=\frac{\sin\theta_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)}=\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}=\tan\theta_0 \qquad (4\text{-}34)$$

这告诉我们：当电磁波入射到折射率为 n 的介质界面上时，如果入射角等于由上式确定的 θ_0，那末反射波就是垂直偏振的。这一规律完全由光学实验所证实，叫做布儒斯特定律。对于折射率为 n 的介质，按照上式确定的角 θ_0，叫做布儒斯特角。这一规律，在气体激光技术中，被用来设计闭腔式气体激光器的布儒斯特窗。

当光从光疏介质入射到光密介质，即相对折射率 $n>1$ 时，从折射定律

$$\sin\theta=n\sin\theta'$$

可知，$\theta' < \theta$，光线向法线方向偏折。这时，从(4-32)式、(4-33)式看出

$$\frac{E_{\perp}^{反}}{E_{\perp}^{入}} < 0; \qquad \frac{E_{\parallel}^{反}}{E_{\parallel}^{入}} > 0。$$

这表明：反射波的垂直分量的指向和我们规定的指向相反，平行分量的指向和我们规定的指向相同。从图 4-5 可知，反**射波垂直分量的指向，**被规定为和入射波垂直分量的指向相同。从图 4-6 可知，反射波平行分量(x 分量)的指向，被规定为和入射波平行分量 (x 方向)的指向相反。由此可知，实际的反射波，不管是垂直分量，还是平行分量，都和入射波的相应分量反向，即反射波和入射波反向，位相相差 180°，好象差了半个波长的波程，这种现象叫做半波损失。当光由光密介质入射到光疏介质，即相对折射率 $n<1$ 时，光线偏离法线方向，$\theta' > \theta$。这时

$$\frac{E_{\perp}^{反}}{E_{\perp}^{入}} > 0, \qquad \frac{E_{\parallel}^{反}}{E_{\perp}^{入}} < 0,$$

入射波和反射波同位相，没有半波损失。这些规律，也被实验所证实。

如果按照

$$R_{\perp} = \frac{|E_{\perp}^{反}|^2}{|E_{\perp}^{入}|^2}, \qquad R_{\parallel} = \frac{|E_{\parallel}^{反}|^2}{|E_{\parallel}^{入}|^2}$$

定义垂直分量的反射系数 $R_{\perp}$，和平行分量的反射系数 $R_{\parallel}$，把(4-32)式、(4-33)式代入，得

$$R_{\perp}(\theta, \theta') = \frac{\sin^2(\theta - \theta')}{\sin^2(\theta + \theta')}$$

$$R_{\parallel}(\theta, \theta') = \frac{\tan^2(\theta - \theta')}{\tan^2(\theta + \theta')} \qquad (4\text{-}35)$$

这是反射系数和入射角 θ、反射角 θ' 的函数关系。在实际问题中，介质的折射率 n 是已知的。折射角 θ'，按照

$$\sin\theta = n\sin\theta',$$

由 n 和 θ 确定。把它代入上列反射系数中，就可以得到由入射角 θ 和折射率 n 确定的反射系数

$$R_{\perp}(\theta, n); \quad R_{/\!/}(\theta, n)。$$

这个函数形式，在一般情况下，是比较复杂的。这里，不予写出。

第四节　导体中和导体面上的电磁波

在以上两节中，我们论述了：在介质中和在介质界面上，电磁波的传播规律。现在，我们再来看看，在导体中和导体面上的电磁波将有什么特点？

导体中的电荷和电流　先看看导体中的电荷和电流。导体的电磁性质，用介电系数 ε、导磁系数 μ、导电率 λ 描述。在均匀导体的情况，它们不随时间、位置变化，是常数。在电场的作用下，按照欧姆定律

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E} \tag{4-36}$$

将有电流发生。对它取散度，并考虑到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho,$$

就得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\rho。$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ 是一点发散出去的电量。它和该点的电荷密度 ρ 成正比，表示电量越多发散越快。这将导致电量减少，导体中不发生电荷堆积。把上式和电荷守恒定律

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

比较，得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}\rho_0$$

解得

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}。$$

这表明：导体中任一点的自由电荷密度，总是随着时间 t 而指数衰减的，这使得导体中不可能有自由电荷，即不可能有不和导体晶格电荷正负抵消的、过剩的自由电荷。这情况和静电的一样。但是，和静电不同导体中存在电场和晶格电荷正负相消的一些自由电荷，在电场作用下形成电流，而且按照(4-36)式发生。和均匀介质的电性质相比，ε、μ 也是常数，$\rho=0$ 也一样，基本的、主要的差别也在于：由(4-36)式决定的电流。

微分方程 正是上述的电磁性质，决定着导体中麦克斯韦微分方程的基本形式。这时，(4-1)式、(4-2)式、(4-3)式、(4-4)式成为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\lambda \boldsymbol{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4-37}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-38}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4-39}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4-40}$$

对(4-37)式、(4-38)式取旋度，并利用矢量分析恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a},$$

得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$$

$$=\mu\lambda\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E},$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}。$$

把前面四式代入以上两式，得

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{B}-\mu\lambda\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\lambda\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\end{aligned}\qquad(4\text{-}41)$$

这是导体中的电磁波方程。和均匀介质中的电磁波方程（4-12)式、(4-13)式不同，它多了对时间的一次导数项。这一项是由于 $\lambda\neq0$，使导体中有如(4-36)式发生的电流引起的。它的作用是使电磁波在导体中发生衰减。

复数波矢量 均匀介质中的电磁波有单色平面波解，而且描述波的参量之间有如前所述的意义和关系。均匀导体中的电磁波方程(4-41)，是不是也有单色平面波解呢？描述波性质的参量具有怎样的意义、关系呢？我们设想波方程（4-41)式，也有形式为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\omega t-K'\cdot r)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{i(\omega t-K'\cdot r)}\qquad(4\text{-}42)$$

的解。式中出现的波参数：ω 仍是波的频率；$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{K}'$ 是不是仍是振幅、波矢量呢？我们还不清楚。它们的意义，还要由它们在过程中的表现来确定。

把(4-42)式代入(4-41)式，得

$$K'^2=\varepsilon\mu\omega^2-i\mu\lambda\omega\qquad(4\text{-}43)$$

这和介质情况下，类似的方程 $K^2=\varepsilon\mu\omega^2$ 不同，多了 $\lambda\neq0$ 的

一项虚数项。由此可知：矢量 K' 和介质时的波矢量 K 不同，不是实矢量，而是复矢量。我们把它叫做复数波矢量。当然，这里的复数波矢量 K'，和介质中的波矢量 K，物理意义也有差别。

K' 既然是复数矢量，就可以写成

$$K'=K-iS \tag{4-44}$$

的形式。为了计算简单起见，设想 K、S、K' 的方向是一致的，就有

$$K'=K-iS。$$

把它代入(4-43)式，得

$$K^2-2iKS-S^2=\varepsilon\mu\omega^2-i\mu\lambda\omega。$$

实部、虚部分别相等，即

$$K^2-S^2=\varepsilon\mu\omega^2,$$

$$2KS=\mu\lambda\omega。$$

联立求解这两个代数方程，得

$$K=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4-45}$$

$$S=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4-46}$$

这就是复数波矢量实部和虚部的大小。显然，当 $\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\ll 1$ 时，

$$K=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega,\qquad S=0。$$

就和介质时一样，复数波矢量就退化为实数波矢量。当 $\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\gg 1$ 时，

$$K=S=\sqrt{\frac{\mu\lambda\omega}{2}}。$$

这和介质时相差甚远。

再把(4-42)式代入微分方程(4-37)式、(4-38)式、(4-39)式、(4-40)式，得

$$\boldsymbol{K}'\times\boldsymbol{B}=(-\varepsilon\mu\omega+i\mu\lambda)\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{K}'\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{K}'\cdot\boldsymbol{E}=0,$$

$$\boldsymbol{K}'\cdot\boldsymbol{B}=0。$$

这表明：复数波矢量 $\boldsymbol{K}'$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的相互关系，与介质情况时相比，有完全类似的形式：$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}'$ 的方向依次组成右手螺旋；而且

$$E=\frac{\omega}{K'}B \tag{4-47}$$

由此可知：用复数波矢量 $\boldsymbol{K}'$ 来描述的导体中的电磁波，和用实数波矢量 $\boldsymbol{K}$ 描述的介质中的电磁波，有形式上一样的规律。在数学上，把介质时的实数波矢量 $\boldsymbol{K}$，换成复数波矢量 $\boldsymbol{K}'$，就可以由介质中的电磁波性质，推知导体中的电磁波的特点。而它们的质的差异，也由这复数和实数的差异表示出来。

电磁波的衰减　我们用(4-42)式引进了复数波矢量 $\boldsymbol{K}'$，把它代入微分方程，导出了它和其他波参量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、ω，以及导体性质 ε、μ、λ 的关系(4-45)式、(4-46)式、(4-47)式等等。然而，它描述怎样的物理特点呢？

既然它是复数，就可以把它分成实部、虚部，用(4-44)式表示。代入(4-42)式，得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-S\cdot r}\cdot e^{i(\omega t-K\cdot r)};\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0e^{-S\cdot r}\cdot e^{i(\omega t-K\cdot r)} \tag{4-42)'}$$

其中的 K、S，用(4-45)式、(4-46)式表示。由此可知，电磁波在导体中，按$\sim e^{-Sr}$的规律衰减。衰减的快慢，由复数波矢量的虚部S的大小确定，而复数波矢量的实数部分，具有如介质中波矢量的同样意义。

复数波矢量的虚数部分 S，描述电磁波的衰减；复数波矢量的实数部分 K，描述电磁波的传播。然而，它们的大小，要由波的频率 ω、导体的电磁性质 ε、μ、λ 来决定。所以，从根本上决定着导体中电磁波动过程的，仍然是电磁波和导体的固有性质。从(4-45)式、(4-46)式看来，量 $\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}$ 在决定 K、S 的大小时，具有重大的作用。由

$$\boldsymbol{j}=\lambda\boldsymbol{E},\quad \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=i\,\omega\varepsilon\,\boldsymbol{E}$$

可知

$$\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\sim\frac{j}{\partial D}。$$
$$\partial t$$

标志着传导电流和位移电流的比例。这表明：决定着物质中电磁波的衰减和传播的，是传导电流和位移电流的相对比值。在位移电流占居主导地位的物质中

$$\frac{\lambda}{\omega\varepsilon}\sim\frac{j}{\dfrac{\partial D}{\partial t}}\ll 1;\qquad K=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega,\ S=0。$$

电磁波的衰减可以略去不计，电磁波象在介质中那样传播。在传导电流占居主导地位的物质中

$$\frac{\lambda}{\varepsilon\omega}\sim\frac{j}{\dfrac{\partial D}{\partial t}}\gg 1;\qquad K=S=\sqrt{\frac{\mu\lambda\omega}{2}}。$$

电磁波的衰减十分严重。当电磁波进入物质内

$$d=\frac{1}{S}=\sqrt{\frac{2}{\mu\lambda\omega}}$$

处，由(4-42)′式知，电磁波的振幅将衰减到原来的$\frac{1}{e}$倍。我们把d叫做电磁波能透入物质的透入深度或衰减长度。对一般金属导体$\lambda\sim10^7$/欧姆·米，$\mu\sim\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$韦伯/米·安培，对于$\omega\sim10^6$赫兹的电磁波，$d\sim10^{-2}$毫米。这表明：电磁波只能进入金属导体极短距离，即终止于导体表面邻近。这种现象，叫做趋肤效应。实际上，高频电磁波进入不了导体深处，金属导体内没有电磁波！

导体表面对电磁波的反射　既然，导体对电磁波有趋肤效应，电磁波不能进入导体深处，那末，电磁波必被金属导体表面大量反射，我们根据界面条件

$$E_t^{入}+E_t^{反}=E_t^{折},$$

$$\frac{B_t^{入}}{\mu_1}+\frac{B_t^{反}}{\mu_1}=\frac{B_t^{折}}{\mu_2}$$

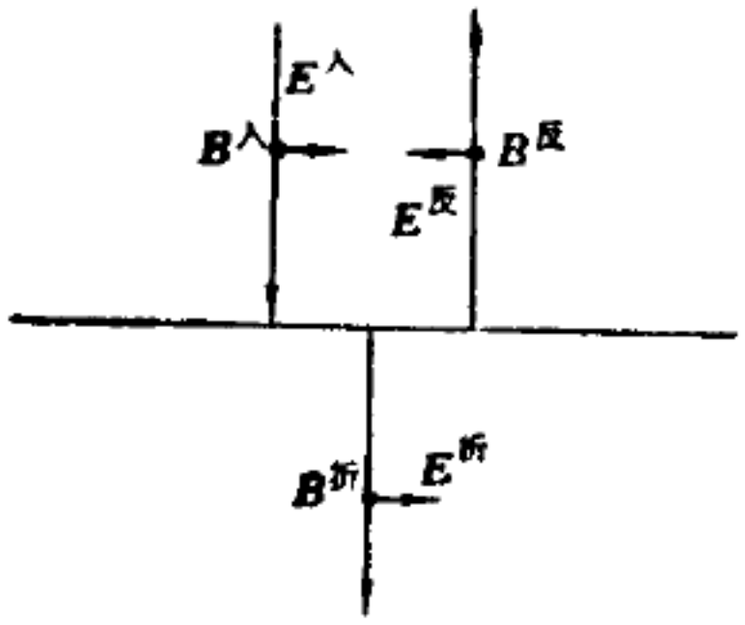


图 4-7

来讨论导体表面对电磁波的反射。设想电磁波由介质垂直入射到导体表面，而且磁场垂直于纸面向外，如图4-7所示。按照前面所述：电磁波在介质中是横波，而且

$$B=\frac{K_1}{\omega}E。$$

入射波、反射波的电场强度E和波矢量K_1的方向，将取如图4-7所示的方向。电磁波在导体中，如用复数波矢量取代波矢量，则有完全类似的性质，即方向也如图4-8所示，大小却有

$$B=\frac{K'_2}{\omega}E$$

的关系。因此，上述界面条件可以写成

$$E^{入}-E^{反}=E^{折},$$

$$\frac{K_1}{\mu_1\omega}(E^{入}+E^{反})=\frac{K'_2}{\mu_2\omega}E^{折}。$$

求解这两个联立代数方程，计及 $\mu_1\sim\mu_2\sim\mu_0$，得

$$\frac{E^{反}}{E^{入}}=\frac{K'_2-K_1}{K'_2+K_1};\qquad\frac{E^{折}}{E^{入}}=\frac{2K_1}{K'_2+K_1}。$$

由此推知，导体对垂直入射电磁波的反射系数

$$R=\left|\frac{E^{反}}{E^{入}}\right|^2=\left|\frac{K'_2-K_1}{K'_2+K_1}\right|^2=\frac{(K_2-K_1)^2+S_2^2}{(K_2+K_1)^2+S_2^2}。$$

在频率 ω 较高时，

$$K_2=S_2=\sqrt{\frac{\mu\lambda\omega}{2}},$$

$$K_1=\sqrt{\mu\varepsilon_1}\,\omega,$$

$$\frac{K_1}{K_2}=\sqrt{\frac{2\varepsilon_1\omega}{\lambda}}\ll1,$$

$$R=\frac{\left(1-\frac{K_1}{K_2}\right)^2+1}{\left(1+\frac{K_1}{K_2}\right)^2+1}\simeq1-2\frac{K_1}{K_2}=1-2\sqrt{\frac{2\varepsilon_1\omega}{\lambda}}\sim1。$$

对于金属，如铜 $\lambda\sim10^7$/欧姆·米，在 $\omega\sim10^2$/秒时，$R\sim1$这表明：导体的反射率 R 确实是很高的。用金属制造的飞机避逃雷达的“法眼”，道理也在这里。

第五节　电磁波的定向传输

广播电台发射的电磁波是向四面八方传播的。它发射、传播的波是球面波。在远离广播电台的小范围内，电磁波面的曲率半径远大于波面的线度，电磁波可以看作是平面波，近似有如上所述的一些规律。在实际问题中，常常需要使电磁波沿一定方向传播。用定向天线(如雷达天线)可以收到一定的效果。然而，在不太远的区域内，使电磁波作定向传输，常常采用金属导线或导管。因为，在电磁场的作用下，导体表面会形成电荷、电流；而电荷、电流和电磁场是紧密联系着的，又会把电磁场“约束”在自己的周围。所以，导线或导管就起着使电磁波作定向传输的“轨道”作用。

传输线　在电工学中，分析传输线中的电流时，常常用

$$I=I_0e^{i\omega t}$$

表述电流随时间变化的规律。电流幅值 I_0 由所加电压、传输线的电阻、电容、电感等决定。这一规律，只当频率很低，以致电磁波的波长 λ 远大于传输线的线度 l，即 $\lambda\gg l$ 时，才是正确的。如果频率较高，使 λ 和 l 可以比拟，甚至很小时，这一规律就不再成立了。因为，不管是电场、磁场，还是电荷、电流，都是以波的形式传播的。它们的位相因子，不只是 $e^{i\omega t}$ 而应该是

$$e^{i(\omega t-Kx)}=e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}。$$

在 $l\ll\lambda$ 时，各点的值近似相等，且退化为前者。对于它们的振幅 I_0，在一般情况下，也未必是常数，而可能也是坐标的函数。在 $l\ll\lambda$ 的情况下，I_0 也各处一样，是一常数。由此可

知，电工学中研究的规律，是在 $l \ll \lambda$ 条件下的特殊规律。通常，我们把条件 $l \ll \lambda$ 叫做似稳条件。在这条件下的电流叫做似稳电流。在这条件下，应用稳定电流的欧姆定律、克希霍夫定律，就可以论述线路中的电流规律。

在似稳条件下，把 $e^{i(\omega t - Kx)}$ 看成 $e^{i\omega t}$，就忽略了波的特点，就难于理解电源的能量在传输线中究竟是怎样传输的？是依靠电子的运动传输的吗？有人曾作过计算，当电流密度为 100 安培/厘米^2 时，铜中电子平均迁移速度只 10^{-2} 厘米/秒，而电源供给的电能能够极快地传输给用户。这说明：电能不可能是依靠电子的运动传输的。如果牢记：电荷、电流总是和电场、磁场紧密相关的，而电磁能量是以波的形式，以光速传播的。那末就好理解：电能能够极快地传输给用户。

在低频情况下，不仅可以忽略波的特点，而且可以不考虑电磁场究竟是怎样的？这是因为：在似稳条件下，用电路的欧姆定律、克希霍夫定律，就可以得到所需要的结果，用不着顾及电磁场的规律。而且，由于传输线的几何形状比较复杂，缺少简单的对称性，要按照麦克斯韦理论计算电磁场，即使不是不可能，也是很繁难的。

在高频情况下，用传输线传输电磁能量，除焦耳热损耗外，还有较大的辐射损耗。因此，需要利用能够把电磁场屏蔽起来的传输机构。常用的这种传输机构，有同轴线和波导管。

同轴线 由一根半径为 r_1 的内导线，和一根半径为 r_2 的外导管，其间填充绝缘介质，按照轴线重合的要求，组成的传输机构，叫做同轴线或同轴电缆。图 4-8 表示的是一同轴线的横截面。我们用圆柱坐标 (r, θ, z) 表示空间点的位置。原点取在同轴线的轴线上，z 轴沿着同轴线的长度。电磁波沿 z 轴

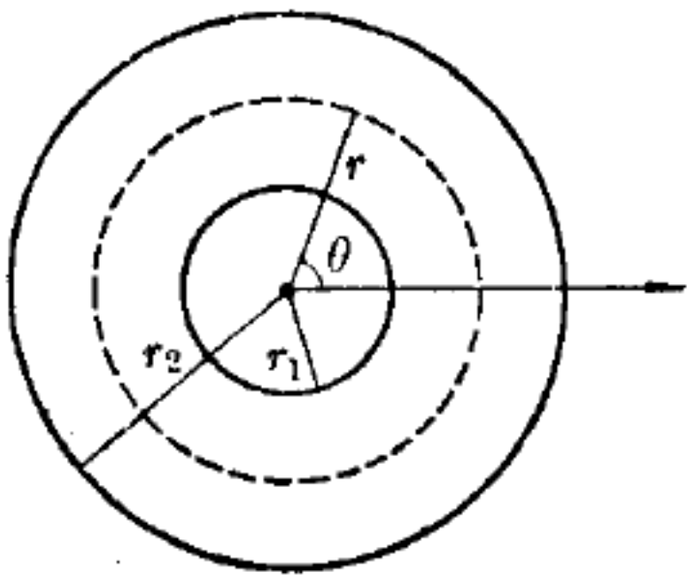


图 4-8

方向传播。

在内、外导体的外、内表面上，有电荷密度 σ 和电流密度 i。由于内、外导体的半径不一样，它们的取值也不一样。但是，它们都应该是沿着 z 方向以波的形式传播。设想在内导体的外表面上，电流密度方向沿 z 轴，大小为

$$i=i_0e^{i(\omega t-Kz)} \tag{4-48}$$

面电荷密度，也有类似的形式

$$\sigma=\sigma_0e^{i(\omega t-Kz)} \tag{4-49}$$

而且，根据电荷守恒定律

$$\nabla\cdot i=\frac{\partial i}{\partial z}=-iKi=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-i\omega\sigma,$$

$$i=\frac{\omega}{K}\sigma \tag{4-50}$$

由于轴对称性，i_0、σ_0 应该与角 θ 无关。

既然，在同轴线的表面上，有如(4-48)式、(4-49)式、(4-50)式所示的电荷和电流。那末，在同轴线间，就一定有与之相应的电场和磁场。它们将按怎样的规律运动呢？我们用麦克斯韦积分方程

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=Q,$$

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=J+\iint\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

来讨论这一问题。在同轴线间，取一半径为 r、高度为 1（设想同轴线很长，任一段的性质都是相同的，都可以作为整体的代表，进行研究）的闭合圆柱面，圆柱面的轴线和同轴线的轴

线相合。这闭合圆柱面的横截面，如图 4-8 的虚线所示。把上列第一式用于这个闭合圆柱面上，由于对称性，在柱面上，$\boldsymbol{E}$ 的方向和 $\boldsymbol{r}$ 的方向、$d\boldsymbol{S}$ 的方向是一致的，大小等于常数

$$\iint_{\text{柱面}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\varepsilon E\cdot 2\pi r\cdot 1。$$

在柱顶和柱底，$\boldsymbol{E}$ 的方向和 $d\boldsymbol{S}$ 的方向垂直，$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0$，

$$\iint_{\text{顶、底}} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=0。$$

因而

$$\oiint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\varepsilon E 2\pi r。$$

在闭合圆柱面内的电量

$$Q=\sigma\cdot 2\pi r_1\cdot 1=\sigma 2\pi r_1,$$

所以，同轴线间的电场强度

$$\boldsymbol{E}=E_r=\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{r_1}{r}=\frac{\sigma_0 r_1}{\varepsilon}\cdot\frac{e^{i(\omega t-Kx)}}{r} \tag{4-51}$$

为了计算同轴线间的磁场。在同轴线的横截面上，取一半径为 r、圆心在轴线上的圆，如图 4-8 的虚线所示。把上列积分方程的第二式用在这圆上，由于对称性，磁场沿着这圆的切线方向，且大小一定，因而

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint H dl=H 2\pi r=\frac{B}{\mu}2\pi r。$$

在这圆周所包围的平面上，由于 $\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=0$，而

$$\iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}=0。$$

通过这圆平面的电流强度

$$J=i\,2\pi r_1。$$

所以，同轴线间的磁场

$$B=B_0=\frac{\mu r_1 i}{r}=\mu r_1 i_0\frac{e^{i(\omega t-Kz)}}{r} \qquad (4\text{-}52)$$

由此可知：在同轴线中，电荷、电流、电场、磁场确实是紧密联系着的。而且都以频率 ω 振动，以速度

$$v=\frac{\omega}{K}$$

沿 z 轴方向传播。

波导管 由中空的金属导体管构成的传输机构，叫做波导管。横截面为圆形的叫做圆形波导管，横截面为矩形的叫做矩形波导管。图 4-9 表示的是一个边长为 a、b 的矩形波导管。我们把坐标系的原点 O 取在管的一角，取 x 轴、y 轴沿着矩形边的方向，取 z 轴沿着管的轴向。我们用麦克斯韦电磁理论，来分析波导管中电磁运动的规律。设想在波导管中充满均匀介质，如空气。管中就没有自由电荷和传导电流，$\rho=0$，$j=0$。而且，介电常数 ε 和导磁系数 μ，既不随时间变化，也与坐标无关。这时，波导管中的电磁场满足波动方程

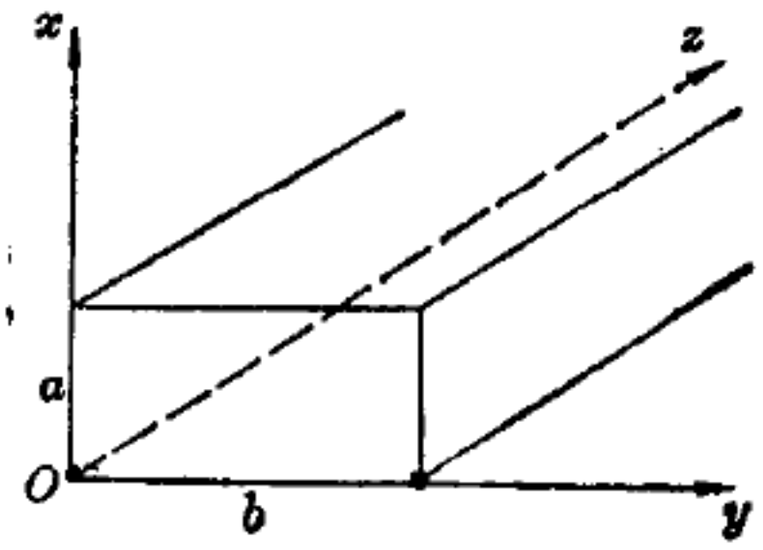


图 4-9

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (4\text{-}53)$$

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也满足同样的方程。式中

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (4\text{-}54)$$

是电磁波在自由空间传播的速度。

波导管的内表面是我们所研究的场的边界。在这些边界

上，电磁场满足界面条件。设想导体是理想导体，电磁波的透入深度为 0，导体内的电场强度 $\boldsymbol{E}=0$。按照

$$E_{2t}=E_{1t}$$

的界面条件，在波导管内邻近导体表面处

$$E_t=0。$$

在如图 4-9 所示的系统中，这个边界条件就是

$$\begin{aligned} &\text{在 } y=0 \text{ 和 } y=b \text{ 面上，} E_x=0,\ E_z=0 \\ &\text{在 } x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 面上，} E_y=0,\ E_z=0 \end{aligned} \tag{4-55}$$

(4-53)式、(4-55)式就是波导管中电磁场应该满足的微分方程和边界条件。对它们求解，就可以得到波导管中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的变化规律。

在波导管中，电磁波是沿管的轴向，即沿 z 轴方向传播的。因而，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 将有

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{E}_0(x,y)e^{i(\omega t-K_z z)}$$

的形式，ω 是波的振动频率，K_z 是波数。把它代入波动方程(4-53)式，得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_0}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{v^2}-K_z^2\right)\boldsymbol{E}_0=0。$$

这就是波幅 $\boldsymbol{E}_0$ 应该满足的微分方程。$\boldsymbol{E}_0$ 是矢量，有三个分量。每个分量都满足上述微分方程。

我们用 $F(x,y)$ 表示 $\boldsymbol{E}_0$ 的任一分量，它满足微分方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{v^2}-K_z^2\right)F=0。$$

我们用分离变量法解这个微分方程。令

$$F(x,y)=X(x)Y(y),$$

把它代入方程，得

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=\left(K_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)X(x)Y(y)。$$

用 $F(x,y)$除上式各项，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=K_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}。$$

式中，左边第一项只是 x 的函数，第二项只是 y 的函数，右边是与 x、y 无关的常数。然而，x、y 是独立变数，要使上式对任意的 x、y 都成立，就要求上式左边的每一项都等于常数，即要求

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-K_x^2,$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-K_y^2。$$

而且，常数 K_x、K_y 要满足条件

$$K_x^2+K_y^2+K_z^2=\frac{\omega^2}{v^2} \qquad (4\text{-}56)$$

这样，我们就把多元函数变成了单元函数的乘积，把偏微分方程变成了常微分方程。再者，这两个常微分方程，是人所熟知的振动方程。它的一般解是

$$X(x)=A\sin K_x x+B\cos K_x x,$$

$$Y(y)=C\sin K_y y+D\cos K_y y。$$

A、B、C、D 和 K_x、K_y 都是待定常数。

由此可知，满足波动方程(4-53)式，沿 z 轴方向传播的单色波的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的三个分量是

$$E_x=(A\sin K_x x+B\cos K_x x)$$
$$\cdot(C\sin K_y y+D\cos K_y y)e^{i(\omega t-K_z z)},$$

$$E_y=(A'\sin K_x x+B'\cos K_x x)$$
$$\cdot(C'\sin K_y y+D'\cos K_y y)e^{i(\omega t-K_z z)},$$
$$E_z=(A''\sin K_x x+B''\cos K_x x)$$
$$\cdot(C''\sin K_y y+D''\cos K_y y)e^{i(\omega t-K_z z)}。$$

式中，14 个待定常数，要由边界条件和其它物理条件来确定。

我们用边界条件(4-55)式，来确定上列的一些常数。先考虑E_x。在 $y=0$ 面上，要求 $E_x=0$，即要求

$$E_x=(A\sin K_x x+B\cos K_x x)\cdot D\cdot e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在 $D=0$ 时就行，所以

$$E_x=(A\sin K_x x+C\cos K_x x)\sin K_y y e^{i(\omega t-K_z z)} \qquad (4\text{-}57)$$

(这里的 A、C等于前面 E_x 式的 AC、BC。都是待定常数)在 $y=b$ 面上，也要求 $E_x=0$，即要求

$$E_x=(A\sin K_x x+C\cos K_x x)\sin K_y b e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在

$$K_y=\frac{m\pi}{b},\ m=0,1,2\cdots\cdots \qquad (4\text{-}58)$$

就行。这样，我们就得到了 E_x 的一般表达式(4-57)式。

再考虑 E_y。在 $x=0$ 面上，要求 $E_y=0$，即要求

$$E_y=B'(C'\sin K_y y+D'\cos K_y y)e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在 $B'=0$ 时就行。所以，得

$$E_y=(A'\sin K_y y+C'\cos K_y y)\sin K_x x e^{i(\omega t-K_z z)} \qquad (4\text{-}59)$$

在 $x=a$ 面上，要求 $E_y=0$，即要求

$$E_y=(A'\sin K_y y+C'\cos K_y y)\sin K_x a e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在

$$K_x=\frac{n\pi}{a};\quad n=0,1,2,\cdots\cdots \qquad (4\text{-}60)$$

时就行。这样，我们又得到了 E_y 的一般表示式(4-59)式。

然后考虑 E_z。在 $x=0$ 面上，要求 $E_z=0$，即要求

$$E_z=B''(C''\sin K_y y+D''\cos K_y y)e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在 $B''=0$ 时即可。所以，得

$$E_z=(A''\sin K_y y+C''\cos K_y y)\sin K_x x e^{i(\omega t-K_z z)}。$$

在 $y=0$ 面上，要求 $E_z=0$，即要求

$$E_z=C''\sin K_x x e^{i(\omega t-K_z z)}=0。$$

这在 $C''=0$ 时即可。因此，得

$$E_z=A''\sin K_x x\sin K_y y e^{i(\omega t-K_z z)} \tag{4-61}$$

在 $x=a$ 面上和 $y=b$ 面上，要求 $E_z=0$，导致(4-59)式、(4-60) 式表示的结果。这样，我们也得到了 E_z 的一般表达式(4-61)式。

我们用边界条件(4-55)式，确定了 14 个常数中的九个，还有五个(A、C、A'、C'、A'') 待定。如果考虑到波导管中无电荷，应该有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0。$$

把(4-57)式、(4-59)式、(4-61)式代入上式，得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\\&=(AK_x\cos K_x x-CK_x\sin K_x x)\sin K_y y e^{i(\omega t-K_z z)}\\&\quad+(A'K_y\cos K_y y-C'K_y\sin K_y y)\sin K_x x e^{i(\omega t-K_z z)}\\&\quad+(-iK_z A'')\sin K_x x\sin K_y y e^{i(\omega t-K_z z)}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&AK_x\cos K_x x\sin K_y y+A'K_y\cos K_y y\sin K_x x\\&-(CK_x+C'K_y+iA''K_z)\sin K_x x\sin K_y y=0。\end{aligned}$$

由于 x、y 是独立变数，而 $\sin K_x x$、$\sin K_y y$、$\cos K_x x$、$\cos K_y y$ 又是正交函数，上式成立的充要条件是它们的系数分别为 0。

$$A=0,\quad A'=0,\quad CK_z+C'K_y+iA''K_z=0。$$

这样一来，我们得到：波导管中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的三个分量

$$E_x = C \cdot \cos K_x x \cdot \sin K_y y \cdot e^{i(\omega t - K_z z)}$$

$$E_y = C' \cdot \sin K_x x \cdot \cos K_y y \cdot e^{i(\omega t - K_z z)} \tag{4-62}$$

$$E_z = -\frac{CK_x + C'K_y}{iK_z} \cdot \sin K_x x \cdot \sin K_y y \cdot e^{i(\omega t - K_z z)}$$

波导管中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，也应该是沿 z 轴传播的，也应该有

$$\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = \boldsymbol{B}_0(x, y) e^{i(\omega t - K_z z)}$$

的形式。对于 $\boldsymbol{B}_0(x, y)$ 的具体形式，可以根据麦克斯韦微分方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{B},$$

把(4-62)式表示的 $\boldsymbol{E}$ 代入，而算出

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{i}{\omega}\left[-\frac{CK_x + C'K_y}{iK_z} K_y \sin K_x x \cos K_y y \right.$$

$$\left. + iK_x C' \sin K_x x \cos K_y y\right] e^{i(\omega t - K_z z)}$$

$$B_x = \frac{-1}{\omega K_z}[CK_x K_y + C'(K_y^2 + K_z^2)]$$

$$\cdot \sin K_x x \cos K_y y e^{i(\omega t - K_z z)}$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{i}{\omega}\left[-iK_z C \cos K_x x \sin K_y y \right.$$

$$\left. + \frac{K_x}{iK_z}(CK_x + C'K_y) \cos K_x x \sin K_y y\right] e^{i(\omega t - K_z z)} \tag{4-63}$$

$$B_y=\frac{1}{\omega K_z}[C(K_z^2+K_x^2)+C'K_xK_y]$$
$$\cdot\cos K_x x\sin K_y y e^{i(\omega t-K_z z)}$$

$$B_z=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{i}{\omega}[C'K_x\cos K_x x\cos K_y y-CK_y\cos K_x x\cos K_y y]$$
$$\cdot e^{i(\omega t-K_z z)}$$

$$B_z=\frac{i}{\omega}(C'K_x-CK_y)\cos K_x x\cos K_y y e^{i(\omega t-K_z z)}$$

(4-62) 式和 (4-63) 式就是矩形波导管中电磁波的一般表达式。它告诉我们：波导管中的电磁波，是沿管轴传播的行波，是在管的横截面内的驻波。行波的特点用频率 ω、波数 K_z 描述。驻波的特点用波数 K_x、K_y 描述，且

$$K_x=\frac{n\pi}{a},\quad K_y=\frac{m\pi}{b};\quad n,m=0,1,2,\cdots\cdots$$

而且，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的六个分量，除两个任意常数 C、C' 外，具有完全确定的形式。这两个常数，和 ω、n、m 一起，由把电磁波输入波导管的具体物理条件确定。按照这两个常数的取值的不同，可以把电磁波分成两个不同的类型。一种取值使 $E_z=0$，即使电场没有纵的分量，而磁场有纵的分量。我们把它叫做横电型波，用 $TE_{n,m}$ 表示；或者叫做磁波，用 $H_{n,m}$ 表示。另一种取值使 $B_z=0$，即使磁场没有纵的分量，而电场有纵的分量。我们把它叫做横磁型波，用 $TH_{n,m}$ 表示；或者叫做电波，用 $E_{n,m}$ 表示。角码 n，m 标志驻波波数的情况。

波导管中的电磁波，是沿管轴传播的行波，是管的横截面

内的驻波。描述行波性质的频率 ω、波数 K_z，和描述驻波特点的波数 K_x、K_y，不是彼此无关的，而是由(4-56)式、(4-58)式、(4-60)式联系着的。

$$K_z^2=\frac{\omega^2}{v^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{4-64}$$

v 是电磁波在自由空间传播的速度，按照(4-54)式由介质的性质确定。正是(4-64)式表示的波参数间的关系式，决定着波导管中电磁波的许多独特性质。首先，由于 K_z 表示行波波数，必需是实数，因而

$$\frac{\omega^2}{v^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\geqslant 0。$$

令

$$\omega_{n,m}=v\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \tag{4-65}$$

则

$$\omega\geqslant\omega_{n,m}。$$

这表明：在一定尺寸(a、b)的波导管中，以 n、m 标志的型式的电磁波，只当波的频率

$$\omega\geqslant\omega_{n,m}$$

时，才能在此波导管中传输。频率

$$\omega<\omega_{n,m}$$

的电磁波，不能以 n、m 标志的驻波型式，在尺寸为 a、b 的波导管中传输。$\omega_{n,m}$，按照(4-65)式由驻波型式 n、m 和管的尺寸 a、b 确定；它又决定着在这样的波导管中能够传输 n、m 型波的频率极限，叫做截止频率。由此，按照

$$\lambda_{n,m}=\frac{v}{\nu_{n,m}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2}} \tag{4-66}$$

定义的，是能够在管中传输的 n、m 型波的最长波长，叫做截止波长。例如，在 $a=7$ 厘米，$b=3$ 厘米的波导管中，几个最简波型的截止波长(以厘米为单位)为

$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,0}$	$\lambda_{3,0}$	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{3,1}$	$\lambda_{2,2}$
14.0	7.0	4.7	6.0	3.0	5.5	4.6	3.7	2.8

由此可见，对于上述尺寸的波导管，波长大于 14 厘米(即长边的两倍)的电磁波，完全不能在管中传播，在波导入口处即被反射回去。

我们一再说明，上列诸式中出现的 v，是电磁波在自由空间传播的速度，不是在波导管中传播的速度。当然，按照(4-66)式，由它定义的截止波长，也是在自由空间传播时的波长，不是在管中传播时的波长。那末，电磁波在波导管中传播的速度多大呢？我们按照相速 u、群速 u_g 的定义

$$u=\frac{\omega}{K_z}、\quad u_g=\frac{d\omega}{dK_z}$$

和(4-64)式来计算。把(4-64)式代入上式，得

$$u=\frac{\omega}{K_z}=\frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}}\geqslant v,$$

$$u_g=\frac{d\omega}{dK_z}=\frac{K_z}{\omega}v^2=\frac{v^2}{u}\leqslant v。$$

这表明：波导管中电磁波的位相速度 u 和群速 u_g，都由波导尺寸(a、b)、波型(n、m)、波的频率 ω、管中介质 v 等按照上式决定。而且，位相传播速度 u 大于或等于电磁波在自由空

间传播的速度 v，因而可能大于光速 c；能量传播速度 u_g 小于或等于 v，因而不可能大于光速 c。这和相对论的要求一致，而且是由实验事实所证实了的。

第六节　电磁波的衍射

电磁波在传播过程中，会绕过障碍物，发生衍射。波长越长的电磁波，衍射现象越显著，无线电波的波长是千米的数量级。无论是室内、室外，还是楼上、地下，都能接收到无线电波。这是无线电波衍射现象显著的表现，是人所尽知的事实。光波的波长很短，是千埃的数量级。通常认为光是沿直线传播的，并把它叫做光线，就是衍射现象不显著的结果。然而，光波也是电磁波，也会发生衍射，只是衍射现象不显著，不容易觉察罢了。但是，在一些特殊装置下，也会明显地、规律地显示出来。也正因为如此，光波的衍射，可以用作精密测量，可以用于特殊的工艺技术。现在，我们从麦克斯韦电磁理论，来论述电磁波衍射的基本规律。

赫姆霍兹方程　在前面几节中，我们说到，在无源空间，即在 $\rho=0$, $\boldsymbol{j}=0$ 的地方，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，都满足波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0。$$

这就是说，它们的每一个分量都满足波动方程。我们用一个标量函数 $\psi(x,y,z,t)$ 代表它们的任一个分量，就有

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0。$$

如果，我们就用标量函数 $\psi(x,y,z,t)$，近似地描述电磁场，不顾电磁场强的方向，就叫做标量近似。

电磁波具有各种频率。如果我们只讨论具有某一频率 ω 的电磁波，即只讨论单色电磁波，就有

$$\psi(x,y,z,t)=\phi(x,y,z)e^{-i\omega t}。$$

按照福里哀分析，非单色电磁波是由多种单色电磁波迭加而成的。单色电磁波是构成实际电磁波的基本成分。因此，对单色波的研究，具有普遍意义。在单色波情况下，把上式代入波动方程，得

$$\nabla^2\phi+K^2\phi=0 \tag{4-67}$$

$$K=\frac{\omega}{v}$$

$\phi(x,y,z)$ 是波的振幅，上列方程（4-67）式叫做赫姆霍兹方程。它是电磁理论中的一个重要方程，是讨论衍射问题的一个重要方程。

格林函数 在讨论赫姆霍兹方程(4-67)式的解时，常常用到一个函数

$$G(x,y,z;x_1,y_1,z_1)=\frac{e^{iKr}}{4\pi r} \tag{4-68}$$

叫做和赫姆霍兹方程相应的格林函数。如图 4-10 所示，r 是由点(x_1,y_1,z_1)到点(x,y,z)的距离，即

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}。$$

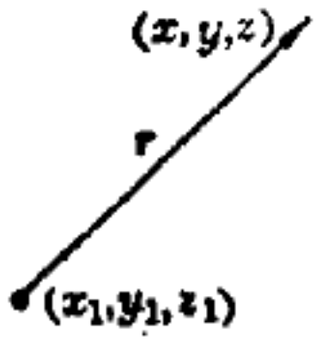


图 4-10

K 是由频率 ω 和速度 v，按照(4-67)式定义的常数，具有波数的意义。由于

$$\nabla^2 G = \nabla^2 \frac{e^{iKr}}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi r}\nabla^2 e^{iKr} + 2\left(\nabla \frac{1}{4\pi r}\right) \cdot (\nabla e^{iKr}) + e^{iKr}\nabla^2 \frac{1}{r},$$

而

$$\frac{\nabla^2 e^{iKr}}{4\pi r} + 2\left(\nabla \frac{1}{4\pi r}\right)\cdot(\nabla e^{iKr})$$

$$= \frac{1}{4\pi r^3}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} e^{iKr}\right) - 2\left(\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}\right)\cdot\left(iKe^{iKr}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$= -K^2 \frac{e^{iKr}}{4\pi r} = -KG,$$

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\cdot\frac{1}{4\pi r}\right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \neq 0, \\ \infty, & \text{当 } r = 0, \end{cases}$$

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{4\pi r} dV = \iiint_V \nabla\cdot\nabla \frac{1}{4\pi r} dV = \oiint_S \nabla \frac{1}{4\pi r} d\boldsymbol{S}$$

$$= -\oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\boldsymbol{S}}{4\pi r^3} = -\frac{1}{4\pi}\oiint d\Omega = -1。$$

后两式表明

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = -\delta(x-x_1, y-y_1, z-z_1)。$$

所以，格林函数(4-68)式，满足方程

$$\nabla^2 G + K^2 G = -\delta(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \qquad (4\text{-}69)$$

这方程和方程(4-67)式不同，是非齐次的，而且非齐次项是一个 $\delta-$ 函数。实际上，赫姆霍兹方程(4-67)式是无源空间的波幅方程，而(4-69)式表示单位源集中在点 (x_1, y_1, z_1) 的波幅方程。相同的是它们都是波幅方程。不同的是，一是无源方程，一是点源方程。

格林公式　对于任意的两个连续、可导函数$f(x,y,z)$和$g(x,y,z)$，根据求导规则，可以证明：

$$\nabla\cdot(f\nabla g-g\nabla f)=\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g-\nabla g\cdot\nabla f-g\nabla^2 f$$
$$=f\nabla^2 g-g\nabla^2 f。$$

对上式作体积积分，得

$$\iiint_V\nabla\cdot(f\nabla g-g\nabla f)dV=\iiint_V(f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)dV。$$

利用高斯公式

$$\iiint_V\nabla\cdot(f\nabla g-g\nabla f)dV=\oiint_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\boldsymbol{S},$$

得

$$\iiint_V(f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)dV=\oiint_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\boldsymbol{S}\quad(4\text{-}70)$$

这就是对于两个任意连续、可导函数f、g的格林公式。它在场论中被广泛地应用。

基尔霍夫公式　现在，我们就用这个格林公式，来讨论衍射问题。把格林公式(4-70)式中的函数f，看作是我们要找寻的、描述电磁场的、满足方程(4-67)式的标量函数$\phi(x,y,z)$；把函数g看作是已知的、满足方程(4-69)式的格林函数G。对(4-68)式的G求梯度，得

$$\nabla G=\nabla\frac{e^{iKr}}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi r}\nabla e^{iKr}+e^{iKr}\nabla\frac{1}{4\pi r}$$
$$=iK\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{e^{iKr}}{4\pi r}-\frac{e^{iKr}}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=iKG\frac{\mathbf{r}}{r}-G\frac{\mathbf{r}}{r^2}。$$

把它们代入(4-70)式，得

$$\iiint_V \{\phi[-K^2G-\delta(x-x_1, y-y_1, z-z_1)]-G(-K^2\phi)\}dV$$

$$=\oiint_S\left[\phi G\left(iK-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}-G\nabla\phi\right]\cdot d\boldsymbol{S}_\circ$$

积分、整理上式，得

$$\phi(x_1, y_1, z_1)=\oiint_S\frac{e^{iKr}}{4\pi r}\left[\nabla\phi-iK\frac{\mathbf{r}}{r}\phi+\frac{\mathbf{r}}{r^2}\phi\right]\cdot d\boldsymbol{S} \quad (4\text{-}71)$$

这就是基尔霍夫公式。它表明：空间任一点 (x_1, y_1, z_1) 的场 $\phi(x_1, y_1, z_1)$，可以用包围这点的任一闭合面上的场 ϕ，及其梯度 $\nabla\phi$，按照(4-71)式的面积分，来确定。如果两边再乘上因子 $e^{-i\omega t_1}$，那末

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1)=\phi(x_1, y_1, z_1)e^{-i\omega t_1}{}_\circ$$

就是 (x_1, y_1, z_1) 点上在时刻 t_1 的场的值，而

$$\psi(x, y, z, t)=\phi(x, y, z)e^{iKr-i\omega t_1}=\phi(x, y, z)e^{-i\omega t},$$

就是 (x, y, z) 点上在时刻 $t=t_1-\frac{r}{v}$ 的场的值。(4-71)式表明：闭合面 S 上 (x, y, z) 点、t 时刻的场，和面内 (x_1, y_1, z_1) 点、t_1 时刻的场之间的关系。这之间，有一个推迟时间

$$t_1-t=\frac{r}{v}{}_\circ$$

由此可知，面上的场是以速度 v，经过时间 $\frac{r}{v}$，由点 (x, y, z) 传到面内 (x_1, y_1, z_1) 点的。r 是两点间的距离，这就是基尔霍夫公式的物理意义。它正确地表达了电磁波的传播规律。它是惠更斯-费涅耳原理的数学表达式，是讨论波的干涉、衍射的重要基础。

矩形孔的方和费衍射　作为应用基尔霍夫公式的一个例子，我们来讨论矩形孔的方和费衍射。如图 4-11 所示，一个

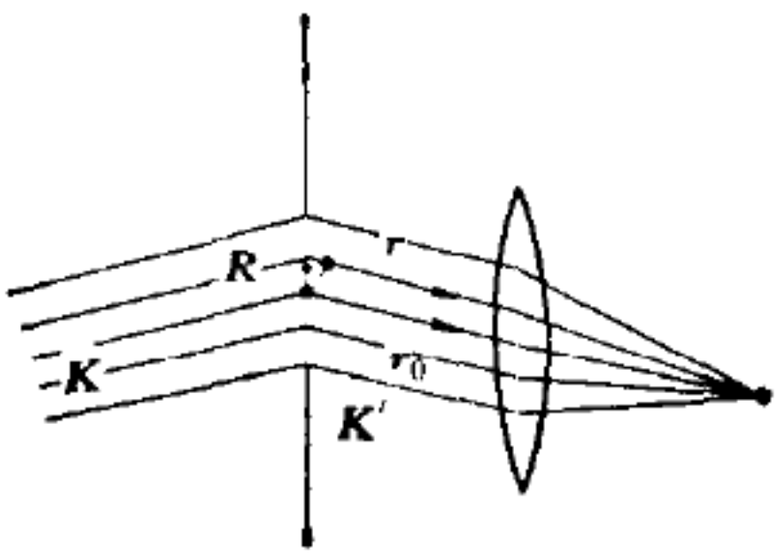


图 4-11

垂直于纸面的平板，其间有一个边长为 $2a$、$2b$ 的矩形孔。除矩形孔外，其他部分不透光。方和费衍射指的是：一平行光线入射到矩形孔上，发生衍射。我们用凸透镜将这衍射光聚焦在它的焦平面上。焦平面上一点的光，是由矩形孔向某一方向衍射的平行光，被透镜聚焦形成。我们用波矢量 $\boldsymbol{K}$ 表示入射平行光的传播方向和波数，用波矢量 $\boldsymbol{K}'$ 表示衍射平行光的传播方向和波数。显然，$\boldsymbol{K}'$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的方向一般不同，由于衍射不改变波的频率和波长，它们的大小却应该一样。这样，如果用 α、β、γ 表示 $\boldsymbol{K}'$ 的方向角，即 $\boldsymbol{K}'$ 和 x、y、z 轴间的夹角，那末就有

$$K'_x = K\cos\alpha,\quad K'_y = K\cos\beta,\quad K'_z = K\cos\gamma。$$

这里，我们用 (α,β,γ) 表示衍射平行光的方向。它由矩形孔射出，经透镜后，将聚焦在观察点 (x_1,y_1,z_1)。$\frac{\boldsymbol{K}'}{K}$ 是由孔面指向观察点的，而(4-71)式中的 $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 是由观察点指向积分面的，故有

$$\frac{\boldsymbol{K}'}{K} = -\frac{\mathbf{r}}{r}。$$

由此可知：向(α,β,γ)方向衍射的光，按照(4-71)式，应该是

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma) = \iint_{孔} \frac{e^{iKr}}{4\pi r}\left[\nabla\phi + i\,\mathbf{K}'\phi - \frac{1}{r}\,\frac{\boldsymbol{K}'}{K}\,\phi\right]\cdot d\boldsymbol{S}$$

(4-71)′

在上式中，我们考虑了：除矩形孔以外，其他部分不透光，对衍射不发生影响。对闭合面的积分，只剩下对矩形孔面的积分。

为了进行计算，我们把坐标原点取在矩形孔的中心，z 轴和孔面垂直，x 轴、y 轴平行于矩形孔的边。这时，入射到孔面上，距原点为 R 处的光为

$$\phi = \phi_0 e^{iK\cdot R},$$

K 是入射光的波矢量，ϕ_0 是常数。而

$$\nabla\phi = iK\phi_0 e^{iK\cdot R}。$$

(4-71)′ 式中的积分面元 dS 的方向平行于 z 轴，大小 $dS = dxdy$。(4-71)′ 式就可以写成

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma) = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy \left[iK_z + iK'_z - \frac{K'_z}{rK} \right] \cdot \phi_0 \frac{e^{iKr+iK\cdot R}}{4\pi r}。$$

由于光波波长 λ 远小于距离 r，即 $\lambda \ll r$，$Kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$，上式第三项很小于第一、二项，可以略去不计。由于孔面很小，r 和 r_0 相差甚小。由图 4-11 可知

$$r - r_0 = -\frac{K'}{K}\cdot R,\ Kr = Kr_0 - K'\cdot R。$$

所以，上式又可以写成

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{i\phi_0 e^{iKr_0}}{4\pi r_0}(K_z + K'_z) \cdot \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy e^{i(K-K')\cdot R}。$$

由于

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy e^{i(K-K')\cdot R}$$

$$= \int_{-a}^{a} dx e^{i(K_x - K'_x)x} \cdot \int_{-b}^{b} dy e^{i(K_y - K'_y)y}$$

$$= 4 \frac{\sin(K_x - K'_x)a}{K_x - K'_x} \cdot \frac{\sin(K_y - K'_y)b}{K_y - K'_y},$$

而且，光的强度 I 是和振动的模的平方成正比的，即

$$I \sim |\phi|^2,$$

因此可知：向 (α, β, γ) 方向衍射的光的强度是

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = I_0 (K_z + K'_z)^2 \cdot \left[\frac{\sin(K_x - K'_x)a}{K_x - K'_x} \cdot \frac{\sin(K_y - K'_y)b}{K_y - K'_y} \right]^2 \quad (4\text{-}72)$$

这就是矩形孔方和费衍射的强度公式。I_0 是和入射光强度等有关的常数。这公式表明：衍射光强度 I 既和矩形孔尺寸 $(a、b)$有关，也和入射波的波长、方向 $(K_x、K_y、K_z)$有关，还因衍射角(α, β, γ)、(K'_x, K'_y, K'_z)不同而异。

当光垂直入射到矩形面时，$K_x = K_y = 0, K_z = K$，有

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = I_0 (1 + \cos\gamma)^2 \cdot \left[\frac{\sin(aK\cos\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(bK\cos\beta)}{\cos\beta} \right]^2 \quad (4\text{-}72)'$$

这表明：光强 $I=0$ 的位置，即暗条纹的位置，在由

$$aK\cos\alpha = n\pi; \quad bK\cos\beta = m\pi; \quad n, m = 1, 2, \cdots\cdots$$

确定的方向(α, β)上。换句话说，在方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{n\pi}{aK} = \frac{n\pi}{a} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{n}{a} \frac{\lambda}{2}; \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$\cos\beta = \frac{m\pi}{bK} = \frac{m\pi}{b} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{m}{b} \frac{\lambda}{2}; \quad m = 1, 2\cdots\cdots$$

的方向(α, β)上，衍射光的强度为0，出现暗条纹。

在矩形孔的一边很长，如在$b \gg \lambda$的情况下，第一条暗纹的方向角$\beta \to \frac{\pi}{2}$，沿y轴的方向不出现衍射花样。这时，

$$I(\alpha, \gamma) = I_0(1+\cos\gamma)^2\left[\frac{\sin(aK\cos\alpha)}{\cos\alpha}\right]^2$$

就是人们所熟知的单缝衍射的情况。

第七节　矢势和标势

在前面几节中，我们论述了电磁波的传播特性。但是，电磁波是怎样产生的，电磁波和电荷、电流之间是怎样相互作用的？却没有论及。相反，我们把电磁波和电荷、电流隔离开来，只讨论电磁波由于内部的矛盾，由于电场和磁场之间的对立统一，而独自传播的规律。现在，我们把它们联系起来，讨论电磁波和激发它的电荷、电流之间的关系，讨论电磁辐射的规律。

决定电磁辐射的，是电荷、电流的运动。论述电磁辐射的理论基础，是有源的麦克斯韦微分方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-73}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4-74}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{4-75}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4-76}$$

按照已知的电荷ρ、电流j的分布，求解这组方程，就可望得到电磁辐射的规律。

势的引入 但是，要直接求解上述方程，是十分困难的，甚至是不可能的。因此，我们仿照稳定电、磁场的求解方法，引进矢势和标势，化简上述方程。换句话说，我们要用比较简单的势的方程，来代替上述的场强的方程，使求解成为可能，使求解方法简便。

在矢量分析中，我们知道，任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$，仍然是一矢量。这一矢量的散度

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0,$$

把它和表示磁场特点的(4-76)式比较，可知：可以按照

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4-77}$$

用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 定义矢势 $\boldsymbol{A}$，引进矢势 $\boldsymbol{A}$，使(4-76)式自然得到满足。

把(4-77)式代入(4-73)式，得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0。$$

另一方面，我们知道：任一标量 f 的梯度 ∇f 是一矢量。这矢量的旋度

$$\nabla\times(\nabla f)=0,$$

把这两式比较，可知：可以按照

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi \tag{4-78}$$

用电场强度 $\boldsymbol{E}$、矢势 $\boldsymbol{A}$ 定义标势 ϕ，引进标势 ϕ。使(4-73)式自然得到满足。

这样，我们按照(4-77)式、(4-78)式，把电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，变换成矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，是要满足麦克斯韦微分方程的，矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 应该满足怎样的方程呢？我们用(4-76)式、(4-73)式引进了

矢势和标势。我们再用(4-74)式、(4-75)式确定矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 应该满足的微分方程。为此，把(4-77)式、(4-78)式代入(4-74)式、(4-75)式，在

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},$$

且 ε、μ 为常数的情况下，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}&=\frac{1}{\mu}[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}]\\&=\boldsymbol{j}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\phi\right),\end{aligned}$$

$$\varepsilon\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\phi\right)=\rho。$$

整理后，得

$$\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{j}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\\&\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\tag{4-79}$$

这就是矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 的微分方程。

规范不变性　这组微分方程，还是联立的、复杂的微分方程，也是难以直接求解的。为此，还需要进一步化简。能不能化简？如何化简？从势的引入来看，对于一定的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，按照(4-77)式、(4-78)式引入的矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ，不是唯一的。实际上，如果作变换

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla x\\&\phi\to\phi'=\phi-\frac{\partial x}{\partial t}\end{aligned}\tag{4-80}$$

那末，变换以后的 $\boldsymbol{A}'$、ϕ'，和变换以前的 $\boldsymbol{A}$、ϕ 一样，也能够按照(4-77)式、(4-78)式确定同一个 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，即

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla x) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} + \nabla \phi' = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla x) + \nabla\left(\phi - \frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi = \boldsymbol{E}。$$

按照(4-80)式进行的变换，叫做规范变换。在这变换下，由它们按照(4-77)式、(4-78)式确定的场强不变，即不改变客观的物理性质。我们把这种不变性叫做规范不变性。正是这种规范不变性，提供了化简方程(4-79)式的可能性。

势的微分方程　实际上，如果在无穷多种可能的矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 中，我们选择满足条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (4\text{-}81)$$

的一种。那末，势的联立方程(4-79)式，就简化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{j} \qquad (4\text{-}82)$$

$$\nabla^2 \phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4\text{-}83)$$

这样一来，就把矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 混在一起的联立方程(4-79)式，简化成矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 分开的、各自独立的微分方程(4-82)式、(4-83)式。而且，它们具有完全相同的形式。这种形式的微分方程，叫做达朗伯尔方程。在 $\rho=0$、$\boldsymbol{j}=0$ 的地方，它们就转化为波动方程。

虽然，矢势 $\boldsymbol{A}$、标势 ϕ 分别满足达朗伯尔方程。但是，它们并不完全独立，而由条件(4-81)式联系着。这种联系条件叫做洛仑兹条件。

经过这样的努力，我们把求解场强的麦克斯韦微分方程

的问题，就简化成为求解势的达朗伯尔方程、并满足洛仑兹条件的问题。这在微分方程的理论和实践中，是大大地前进了一步。

推迟势 把求解场强的麦克斯韦微分方程，简化成了求解满足洛仑兹条件的势的达朗伯尔方程以后，就要具体来解这个微分方程。在这里，我们不拟系统地论述达朗伯尔方程的解和求解方法，只简单地介绍如何用格林公式求出达朗伯尔方程的推迟解，并阐明推迟势的物理意义。

不管是矢势 $\boldsymbol{A}$ 还是标势 ϕ，都满足同样的达朗伯尔方程。因此，可以用同样的解法，获得同样形式的解。这里，我们以标势 ϕ 为例，论述达朗伯尔方程的求解方法和解的意义。标势 ϕ 的方程是

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4-83}'$$

这里，$v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，$\varepsilon$ 是介质的介电常数，μ 是导磁系数，$\rho(x,y,z,t)$ 是电荷密度分布函数。假设给定的 ρ，因而求解的 ϕ，是以某一频率 ω 周期变化的函数，即令

$$\begin{aligned}\rho(x,y,z,t)&=\rho_0(x,y,z)e^{-i\omega t}\\ \phi(x,y,z,t)&=\phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{4-84}$$

这种假设，并不使问题的解只具有狭窄的意义。因为，傅里叶分析告诉我们，实际的解总可以看作是单频率解的迭加。所以，单频率的解具有基本的、普遍的意义。

把(4-84)式代入(4-83)'式，得

$$\nabla^2\phi_0+K^2\phi_0=-\frac{\rho_0}{\varepsilon} \tag{4-85}$$

$$K=\frac{\omega}{v}。$$

在上一节中，我们介绍了格林函数

$$G(x,y,z;x_1,y_1,z_1)=\frac{e^{iKr}}{4\pi r},$$

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

和它满足的微分方程

$$\nabla^2G+K^2G=-\delta(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$

还介绍了格林公式

$$\iiint_V(f\nabla^2g-g\nabla^2f)\,dV=\oiint_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\boldsymbol{S}。$$

现在，我们把所需找寻的 ϕ_0 看作 f，把格林函数 G 看作 g，代入格林公式，得

$$\iiint_V(\phi_0\nabla^2G-G\nabla^2\phi_0)dV$$

$$=\oiint_S(\phi_0\nabla G-G\nabla\phi_0)\cdot d\boldsymbol{S}\qquad(4\text{-}86)$$

把(4-85)式和格林函数 G 的表达式及其方程，代入上式左边，得

$$\iiint_V\left\{\phi_0[-K^2G-\delta(x-x_1,\ y-y_1,z-z_1)]\right.$$

$$\left.-G\left(-K^2\phi_0-\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)\right\}dV$$

$$=-\phi_0(x_1,\ y_1,\ z_1)+\iiint_V\frac{e^{iKr}\rho_0(x,y,z)}{4\pi\varepsilon r}dV。$$

如果我们的积分遍及整个电磁场，在包围体积 V 的闭合面 S 上没有电磁场，ϕ_0 及其导数为 0。那末，(4-86)式右端的面积分为 0。所以

$$\phi_0(x_1,\ y_1,\ z_1)=\iiint_V\frac{e^{ikr}\rho_0(x,y,z)}{4\pi\varepsilon r}dV。$$

在上式两边乘以 $e^{-i\omega t_1}$，得

$$\phi_0(x_1,y_1,z_1)e^{-i\omega t_1}=\iiint_V\frac{e^{-i\omega\left(t_1-\frac{r}{v}\right)}\rho_0(x,y,z)}{4\pi\varepsilon r}dV。$$

令 $t=t_1-\frac{r}{v}$，考虑到(4-84)式，上式成为

$$\phi(x_1,y_1,z_1,t_1)=\iiint_V\frac{\rho\left(x,y,z,t_1-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}dV,$$

如果我们不用 $(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$ 表示场点的坐标和时间，而用 (x,y,z,t) 表示场点的坐标和时间；不用(x,y,z)表示源点的坐标，而用 (x',y',z') 表示源点的坐标。那末，上式就成为

$$\phi(x,y,z,t)=\iiint_V\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}dV \quad (4\text{-}87)$$

式中 $$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

这就是我们所需要的推迟势。对于矢势 A，有同样的推迟势

$$A(x,y,z,t)=\iiint_V\frac{\mu j\left(x',\ y',\ z',\ t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi r}dV \quad (4\text{-}88)$$

把(4-87)式、(4-88)式代入(4-81)式，可以直接验证：它们满足洛仑兹条件。由此可知，它们确实是我们所需要的解。这解之所以叫做推迟势，是因为：在(x',y',z')点，在时刻 $t'=t-\frac{r}{v}$ 的电荷或电流，要在推迟时间 $t-t'=\frac{r}{v}$ 以后，在时刻t，对

离它为 r 的 (x, y, z) 点的场发生作用。这表明：电荷、电流激发的场，是以速度 v，经过时间 $\frac{r}{v}$，传播到离它 r 远的地方的。换句话说，电荷、电流辐射电磁波，而电磁波以速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 离开电荷、电流向外传播。这就是推迟势所描写的电荷、电流辐射电磁波的基本过程。要进一步了解电荷、电流辐射电磁波的具体情景，还要给定电荷、电流的具体分布，按(4-87)式、(4-88)式算出矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ，再进而按(4-77)式、(4-78)式算出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

第八节　电偶极矩的辐射

推迟势描述电荷、电流辐射电磁波的基本过程，是研究电磁辐射的理论基础。在电磁辐射中，电偶极矩的辐射具有基本的、重要的意义。许多复杂的辐射过程，是由一些偶极辐射组合而成的。在这里，我们用推迟势，来论述偶极辐射的规律。

电偶极矩　首先，讨论电偶极矩，讨论它和电荷、电流分布的关系。设想电荷以体密度 $\rho\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)$ 分布在一小体积 V' 内。如图 4-12 所示，我们把坐标原点 O 取在体积 V' 内，用 $\boldsymbol{r}'(x', y', z')$ 表示源点的位置，用 $\boldsymbol{r}_0(x, y, z)$ 表示场点的位置，用 $\rho\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)$ 表示时刻

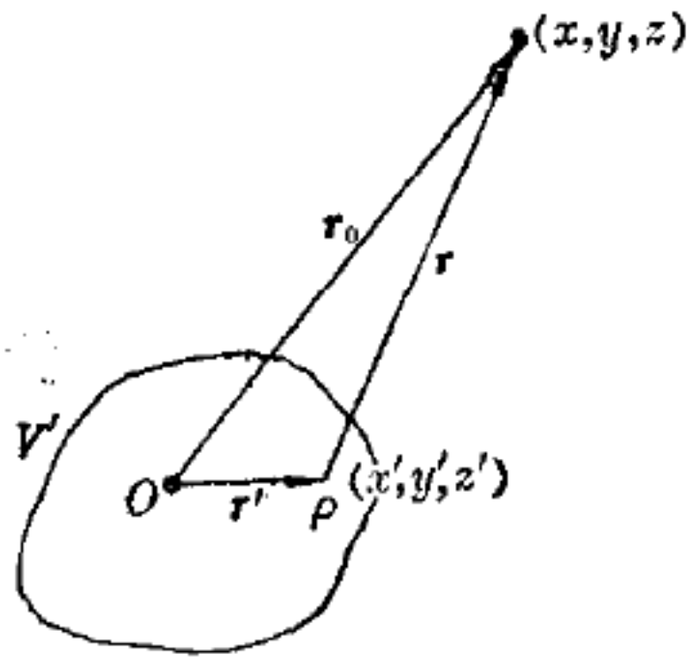


图 4-12

$t'=t-\frac{r}{v}$在(x',y',z')点的电荷密度。那末，在体积元dV'内的电量为

$$\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)dV',$$

它对原点O的电偶极矩定义为

$$\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)\boldsymbol{r}'dV',$$

整个电荷系对原点的电偶极矩，就是

$$\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r_0}{v}\right)=\iiint_V\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)\boldsymbol{r}'dV' \quad (4\text{-}89)$$

当电荷系是中性时，由上式定义的电偶极矩与原点O的位置无关，只是时间$t'=t-\frac{r}{v}$的函数。这时，我们就不提"对原点"三字，只说电荷系的偶极矩就可以了。由正负点电荷构成的电偶极子，是上式电偶极矩的简单例子。

电偶极矩按(4-89)式由电荷分布定义，它也和电流分布$\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)$有关，我们导出这一关系。将(4-89)式对时间$t$求导，得

$$\dot{\boldsymbol{P}}\left(t-\frac{r}{v}\right)=\iiint_{V'}\dot{\rho}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)\boldsymbol{r}'dV'。$$

根据电荷守恒定律

$$\dot{\rho}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)=-\nabla'\cdot\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right),$$

$$\nabla'=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'},$$

上式成为

$$\dot{\boldsymbol{P}}\left(t-\frac{r}{v}\right)=-\iiint_{V'}\nabla'\cdot\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)\mathbf{r}'dV'。$$

按照并矢式 $\boldsymbol{j}\mathbf{r}'$ 的散度公式

$$\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}\mathbf{r}')=(\nabla'\cdot\boldsymbol{j})\mathbf{r}'+(\boldsymbol{j}\cdot\nabla')\mathbf{r}'=(\nabla'\cdot\boldsymbol{j})\mathbf{r}'+\boldsymbol{j},$$

上式又可写成

$$\dot{\boldsymbol{P}}\left(t-\frac{r}{v}\right)=\iiint_{V'}\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)dV'-\iiint_{V'}\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}\mathbf{r}')dV'。$$

按照体积分和面积分的高斯公式，右端第二项

$$\iiint_{V'}\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}\mathbf{r}')dV'=\oiint_{S}(\boldsymbol{j}\mathbf{r}')\cdot d\boldsymbol{S}'。$$

如果把体积 V' 推到比电荷系所占体积稍大，则在包围 V' 的闭合面 S' 上无电荷、电流，上式右端面积分为 0。所以，电荷系的电偶极矩和电荷系的电流分布的关系

$$\dot{\boldsymbol{P}}\left(t-\frac{r}{v}\right)=\iiint_{V'}\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)dV' \tag{4-90}$$

矢势和标势　知道了电偶极矩和电荷、电流分布的关系(4-89)式、(4-90)式以后，就可以计算由电偶极矩决定的矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ。上一节得到的推迟势

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dV'$$

表明电流分布和由它激发的电磁场的矢势之间的关系。式中，$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ 是场点 (x,y,z) 与源点 (x',y',z') 间的距离。如果电荷系的线度 l，很小于电荷系任一点至场点的距离，即 $l\ll r$。那末，上式分母中的 r，就可以看作常数，可以移到积分号外，上式就成为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu}{4\pi r}\iiint_{V'}\boldsymbol{j}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)dV'。$$

把(4-90)式代入上式，得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} \tag{4-91}$$

这就是由电偶极矩确定的矢势。它表明：$t'=t-\frac{r}{v}$时刻的电偶极矩 $\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)$，和离它 r 的(x, y, z)点、在时刻 t 的矢势 $\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$ 的关系。

导出标势 ϕ 和电偶极矩的关系的方法是很多的。这里，我们根据洛仑兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

和(4-91)式导出标势。把(4-91)式代入上式，得

$$\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}+\varepsilon\mu\phi\right]=0。$$

这表明：

$$\frac{\mu}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}+\varepsilon\mu\phi$$

是与时间无关的函数。我们令它为0，得

$$\phi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} \tag{4-92}$$

这就是由电偶极矩确定的标势。

由(4-91)式、(4-92)式看来，量

$$h\left(t-\frac{r}{v}\right)=\frac{\boldsymbol{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} \tag{4-93}$$

在确定电磁场的矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 中，因而将在确定电磁场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 中，具有重要的作用。我们把它叫做赫兹矢量。可以证明，它是满足波动方程的，即

$$\nabla^2 h-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial h}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{\boldsymbol{P}}{r^2}-\frac{1}{rv}\dot{\boldsymbol{P}}\right)\right]-\frac{1}{rv^2}\ddot{\boldsymbol{P}}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{v}\dot{\boldsymbol{P}}+\frac{r}{v^2}\ddot{\boldsymbol{P}}-\frac{1}{v}\dot{\boldsymbol{P}}\right]-\frac{1}{rv^2}\ddot{\boldsymbol{P}}=0。$$

把(4-93)式代入(4-91)式、(4-92)式，得

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}h\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{4-91}'$$

$$\phi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\cdot h\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{4-92}'$$

这就是用赫兹矢量表示的矢势和标势。

电场和磁场　从上面的论述中，可以看到：矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ，是为了简化计算而引进的。它本身没有什么直接的物理意义。有明确的物理意义的是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，它们由洛仑兹力的公式所定义。在得到了矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 的表示式(4-91)′式、(4-92)′式以后，我们还需要按照(4-77)式和(4-78)式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4-77}'$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad (4\text{-}78)'$$

计算磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$。把(4-91)′式、(4-92)′式代入以上两式，得

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{h} \qquad (4\text{-}94)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h})-\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{h}。$$

利用矢量分析恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a},$$

上式变成

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h})+\nabla^2\boldsymbol{h}]-\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{h}。$$

由于赫兹矢量 $\boldsymbol{h}$ 是满足波动方程的，上式右端后两项之和为0。所以

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h}) \qquad (4\text{-}95)$$

(4-94)式、(4-95)式就是用电荷系的赫兹矢量 $\boldsymbol{h}$，确定的电磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$。从这些表示式看来，要具体算出 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，关键在于计算赫兹矢量 $\boldsymbol{h}$ 的旋度。

为了计算 $\boldsymbol{h}$ 的旋度，我们进一步把问题具体化。设想电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的方位，因而赫兹矢量 $\boldsymbol{h}$ 的方位不变，即始终沿着一条直线。我们把坐标系的原点取在电荷系内，即取在电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 所在的点上；并把 z 轴取在 $\boldsymbol{P}$（因

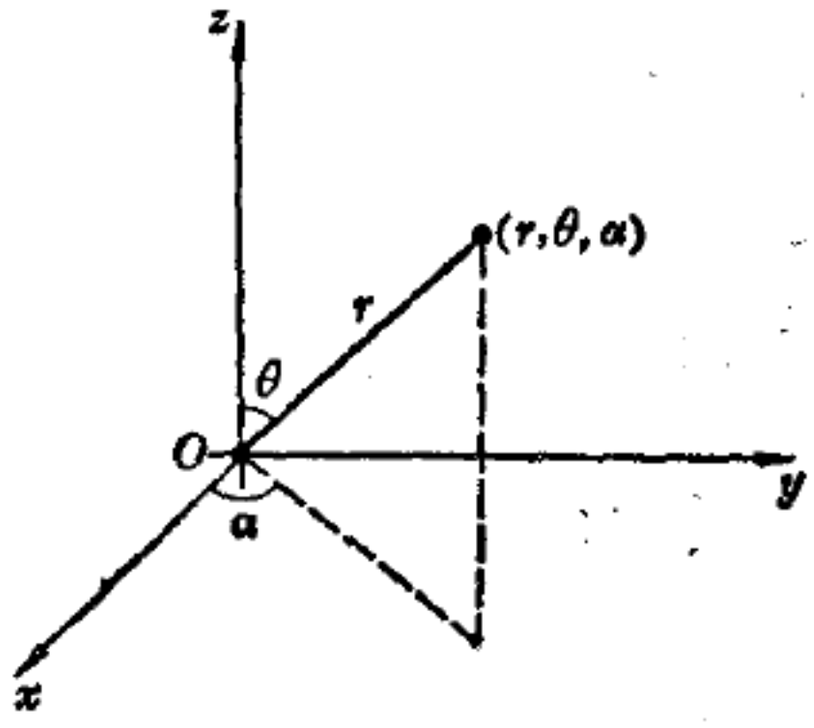


图 4-13

而 h) 的方位上，如图 4-13 所示。由于 P 的对称性，它所激发的场应该具有对于 z 轴的轴对称性。在这种情况下，用球坐标来描述场是方便的。在球坐标中，用(r,θ,α)表示点的位置，用 a_r、a_θ、a_α 表示矢量 a 沿 r、θ、α 增长方向上的三个分量。矢量 a 的旋度 $\nabla\times a$ 的三个分量的计算公式是

$$(\nabla\times a)_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot a_\alpha)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\alpha}\right]$$

$$(\nabla\times a)_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial a_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\cdot a_\alpha)\right] \quad (4\text{-}96)$$

$$(\nabla\times a)_\alpha=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]$$

我们根据这些公式，来计算赫兹矢量 h 的旋度。在现在所取的，如图 4-13 所示的球坐标系中，由于 P 沿着极轴，它的三个分量是

$$P_r=P\cos\theta;\quad P_\theta=-P\sin\theta;\quad P_\alpha=0。$$

与此相应，赫兹矢量 h 的三个分量是

$$h_r=\frac{P\cos\theta}{r};\quad h_\theta=-\frac{P\sin\theta}{r};\quad h_\alpha=0 \qquad (4\text{-}97)$$

式中$P=P\left(t-\frac{r}{v}\right)$是电荷系的电偶极矩的大小，是 $t'=t-\frac{r}{v}$ 的函数，r 是电荷系至场点的距离。把 (4-97) 式作为矢量 a 的三个分量，代入(4-96)式，得

$$(\nabla\times h)_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot 0)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{P\sin\theta}{r}\right)\right]=0,$$

$$(\nabla\times h)_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{P\cos\theta}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\cdot 0)\right]=0,$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{h})_\alpha=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-P\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{P\cos\theta}{r}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left[-\sin\theta\frac{\partial P}{\partial t}\cdot\frac{\partial\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\partial r}-\frac{P}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\right]$$

$$=\frac{\dot{P}\sin\theta}{rv}+\frac{P\sin\theta}{r^2}。$$

这表明：赫兹矢量的旋度只有 α 分量。由(4-94)式可知，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 也只有 α 分量，即

$$B=B_\alpha=\frac{\mu\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\ddot{P}}{v^2}+\frac{\dot{P}}{vr}\right)\frac{\sin\theta}{r}\qquad(4\text{-}98)$$

为了计算电场强度 $\boldsymbol{E}$，我们还要计算赫兹矢量旋度 $\nabla\times\boldsymbol{h}$ 的旋度 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h})$。把上面得到的赫兹矢量旋度的三个分量，再作为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量，代入(4-96)式，得

$$(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{h})_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\dot{P}\sin^2\theta}{rv}+\frac{P\sin^2\theta}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}0\right]$$

$$=\left[\frac{\dot{P}}{vr}+\frac{P}{r^2}\right]\frac{2\cos\theta}{r},$$

$$(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{h})_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}0-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{P}\sin^2\theta}{v}+\frac{P\sin^2\theta}{r}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{\ddot{P}}{v^2}+\frac{\dot{P}}{rv}+\frac{P}{r^2}\right]\frac{\sin\theta}{r},$$

$$(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{h})_\alpha=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot 0)-\frac{\partial}{\partial\theta}0\right]=0。$$

这表明：赫兹矢量旋度的旋度，和赫兹矢量的旋度相反，只有 r、θ 分量，没有 α 分量。由(4-95)式可知，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 也只

有 r、θ 分量，没有 α 分量。而且

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\dot{P}}{vr}+\frac{P}{r^2}\right]\frac{2\cos\theta}{r}$$

$$E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\ddot{P}}{v^2}+\frac{\dot{P}}{vr}+\frac{P}{r^2}\right]\frac{\sin\theta}{r} \qquad (4\text{-}99)$$

$$E_\alpha=0$$

似稳场和辐射场 经过以上颇为繁难的计算，得到了表示由电荷系的电偶极矩激发的电磁场的场强公式(4-98)式和(4-99)式。现在，我们来看一看，它们具有怎样的物理特点？设想电荷系的电偶极矩 P 是周期变化的，周期是 T。这种设想，在分子、原子系统中，在天线发射过程中，都是近似正确的。这时，估计有

$$\dot{P}\sim\frac{P}{T};\qquad \ddot{P}\sim\frac{P}{T^2}。$$

在表示磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的(4-98)式、(4-99)式中，出现的电偶极矩 P 和它们的导数 $\dot{P}$、$\ddot{P}$ 的三项之比，是

$$\frac{\ddot{P}}{v^2}:\frac{\dot{P}}{rv}:\frac{P}{r^2}\sim\frac{1}{v^2T^2}:\frac{1}{rvT}:\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\lambda^2}:\frac{1}{\lambda r}:\frac{1}{r^2} \qquad (4\text{-}100)$$

式中，$v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 是电磁波传播的速度，$\lambda=vT$ 是电磁波的波长。这表明：三项大小的顺序，取决于波长 λ 和场点离开电偶极矩的距离 r 之间的相对关系。

当 $r\ll\lambda$ 时，(4-100)式中三项的大小是由左向右递增的，左边的项相对于右边的项很小，可以忽略不计。这时，表示磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的(4-98)式、(4-99)式成为

$$B=B_a=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{P}\sin\theta}{r^2}$$

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2P\cos\theta}{r^3} \qquad (4\text{-}101)$$

$$E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{P\sin\theta}{r^3}$$

$$E_a=0$$

而且，$\frac{r}{v}=\frac{r}{\lambda}T\ll T$，$P\left(t-\frac{r}{v}\right)\sim P(t)$，即可以略去推迟效应。换句话说，在 $r\ll\lambda$ 范围内，一定点的场强，可以看作是由同时刻的电偶极矩 $\dot{P}$、P，按照(4-101)式确定的。我们把它叫做似稳场。实际上，它们和稳定电偶极子激发的电场、稳定电流激发的磁场是完全相似的。(4-101)式和第一、三章中讨论过的静止偶极子激发的电场是一样的。如果电荷系是一段长为 l、截面积为 ΔS 的导体，其中有强度为 I 的电流。那末，由(4-90)式知

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\iiint_V \boldsymbol{j}dV=\boldsymbol{j}\cdot\Delta S\cdot l=Il,$$

而(4-101)式中的第一式就是

$$B=B_a=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Il\sin\theta}{r^2},$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Il\times\boldsymbol{r}}{r^3}。$$

这正是电流元 Il 在距它 r 处，由它激发的磁场的毕-沙-拉公式。

当 $r\gg\lambda$ 时，(4-100)式中三项的大小，是由左向右递减的。右边的项相对于左边的项很小，可以忽略不计。这时，(4-98)式、(4-99)式成为

$$B=B_\alpha=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{P}\sin\theta}{vr}$$
$$E=E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\dot{P}\sin\theta}{v^2r} \qquad (4\text{-}102)$$

且$\frac{r}{v}=\frac{r}{\lambda}T\gg T$，推迟效应显著，我们把它叫做辐射场。(4-102)式表明：辐射场的电场强度 E 和磁感应强度 B，方向互相垂直，大小是 $E=vB$。

辐射能流密度　按照能流密度

$$S=E\times H$$

和(4-102)式，可以看出：由于电场强度 E 只有沿 θ 方向的分量，磁场强度 $H=\frac{B}{\mu}$只有沿 α 方向的分量，能流密度 S 的方向沿着坐标矢径 r，和 E、H 构成右手螺旋。这表明：电偶极矩辐射的电磁波是横波。而能流密度的大小

$$S=E\cdot H=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\dot{P}\sin\theta}{v^2r}\cdot\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{P}\sin\theta}{vr}$$
$$=\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon v^3}\left(\frac{\dot{P}\sin\theta}{r}\right)^2 \qquad (4\text{-}103)$$

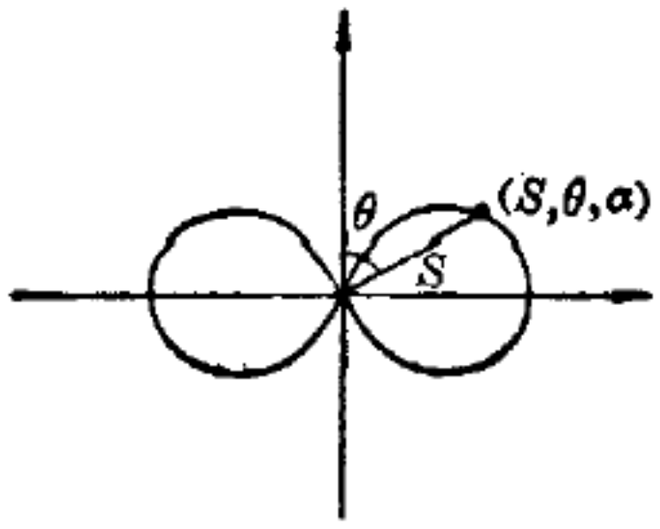


图 4-14

与 r^2 成反比，离电荷系越远，能流密度越小。与 $\sin^2\theta$ 成正比，决定着辐射能流的角分布。图 4-14 表示了这一角分布。图上一点的坐标 (S,θ,α)，表示辐射能流密度的大小 S 和方向角 θ、α 的位置，曲线上的点就表示 S 和 θ 的关系。可以看出：沿着电荷系的电偶极矩 P 的方向的辐射为 0，垂直于 P 的方向的辐射最大。

辐射功率 以电偶极矩P所在点为中心，以r为半径，作一球面。我们在这球面上取能流密度矢量$\boldsymbol{S}$(4-103)式的积分，计算通过这球面的能流

$$W=\oiint \boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon v^3}\left(\frac{\dot{P}\sin\theta}{r}\right)^2 r^2\sin\theta\,d\theta\,d\alpha$$

$$=\frac{\dot{P}^2}{8\pi\varepsilon v^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{\dot{P}^2}{12\pi\varepsilon v^3} \qquad (4\text{-}104)$$

它与球的半径r，没有明显的依赖关系。由于$\dot{P}\left(t-\frac{r}{v}\right)$是$t_0=t-\frac{r}{v}$的函数。所以，上式表明：时刻$t$、通过半径为$r$的球面的能流$W$，是电偶极矩在时刻$t_0=t-\frac{r}{v}$辐射的。如果，令

$$t_0=t-\frac{r}{v}=t'-\frac{r'}{v},$$

$$t'-t=\frac{1}{v}(r'-r),$$

那末，这一能流会在时刻t'通过半径为r'的球面。这意味着：能流W，从电荷系发出，沿着以电荷系为球心的球的矢径方向，以速度v向外传播。换句话说，(4-104)式表示的W，是电偶极子的辐射功率。这功率，以球面波的形式，以速度v向外传播。正是这一特点，我们才把由(4-102)式、(4-103)式、(4-104)式表示的电磁场，叫做辐射场。

在辐射场的诸特点中，最引人注目的特点是：

$$E、B\sim\dot{P};\quad S、W\sim\dot{P}^2。$$

首先，它表明：辐射场只和电荷系的加速运动有关。没有加速运动的电荷系，虽然能够激发电磁场，但不能够辐射电磁波。

而有加速运动的电荷系，就一定按照(4-102)式、(4-103)式、(4-104) 式的规律辐射电磁波。正是这个被实验证实了的论断，使原子结构的行星模型破产。如果原子中的电子绕原子核作行星式的运动，电子有加速度，就会按上述规律辐射电磁波，使原子不能呈现稳定状态。因此，说原子中的电子绕原子核作行星式的运动是不正确的。

设想电荷系 P 作周期运动，频率是 ν。那末，

$$\dot{P}\sim\nu,\quad \ddot{P}\sim\nu^2;\quad S、W\sim\nu^4。$$

这表明：电偶极矩辐射的能量是和频率的四次方成正比的，这种和频率的依赖关系是很强的。频率加大十倍，辐射功率将增大万倍。向远处广播都采用短波，原因就在这里。原子、分子吸收光的过程，和辐射光的过程，因而散射光的过程，都有类似的频率依赖关系。而且，大气原子、分子的固有频率，与蓝色光、紫色光的频率相近。因此，大气对蓝色光、紫色光的散射，远大于对其他颜色光的散色，以致太阳光直射到地面的多红、橙色成分，而散射到地面的大都是蓝、紫色成分。这正是天空形成蓝色，而早、晚霞多呈红、橙色的原因。实际上，我们看到的天空的光，是由大气分子对太阳光散射而来的光。早上、晚上，太阳光斜射，通过的大气层较厚，被散射掉的蓝、紫色光较多，因而直接被我们看到的彩霞，多呈红、橙颜色。

第四章的结束语

1．如果说，稳定电、磁场的规律，没有麦克斯韦电磁理论，也能论述的话。那末，电磁波辐射和传播的规律，没有麦克斯韦电磁理论，就难以描述。实际上，1862 年麦克斯韦建

立了他的电磁理论，就预言了电磁波的存在并说光也是电磁波。20 年后赫兹用实验证实了存在电磁波。现在，电磁波在生产和生活中发挥着巨大的作用。这是麦克斯韦电磁理论的伟大功绩。在这一章中，我们根据麦克斯韦电磁理论，论述了电磁波、光波传播和辐射的基本规律，是进一步学习、研究电磁波、光波的基础。

2. 单色平面波，是最简单的、理想化了的电磁波。由于实际的电磁波是它们的线性迭加。因此，对它们的学习、理解就具有基本的意义。它们的数学表达式是

$$\phi(x,y,z,t)=\phi_0 e^{i(\omega t-K\cdot r)};\quad \phi=\phi_0\cos(\omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r});$$

$$\phi=\phi_0\sin(\omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})。$$

ϕ 代表电磁矢量的任一分量。要理解它们的意义，就必需理解 ϕ_0、ω、$\boldsymbol{K}$ 的意义，以及它们在各种具体条件下的具体表现形式。这不仅加深对中学物理、普通物理波动概念的理解是有益的。而且，为进一步学习电磁理论和波动过程，也是必需的。

实数波矢量 $\boldsymbol{K}$ 和复数波矢量 $\boldsymbol{K}'$，标志着介质中的电磁波和金属中的电磁波的差别和联系。抓住了这一要点，在理解介质中的电磁波的基础上，就比较容易地理解金属导体中的电磁波。

3. 反射、折射、干涉、衍射现象是人所熟知的光学现象。它们的一些规律，也早就从经验事实中抽象出来了。然而，阐明这些规律的理论基础，却是由麦克斯韦电磁理论奠定形成的。在这一章里，我们从麦克斯韦电磁理论，不仅导出了表明反射、折射方向的定律

$$\theta_{反}=\theta_{入};\quad n_2\sin\theta_{折}=n_1\sin\theta_{入}。$$

还导出了表明它们振幅关系的菲涅耳公式

$$\frac{E_{//}^{反}}{E_{//}^{入}}=\frac{\tan(\theta-\theta')}{\tan(\theta+\theta')};\quad \frac{E_{//}^{折}}{E_{//}^{入}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta'}{\sin(\theta+\theta')\cos(\theta-\theta')};$$

$$\frac{E_{\perp}^{反}}{E_{\perp}^{入}}=-\frac{\sin(\theta-\theta')}{\sin(\theta+\theta')};\quad \frac{E_{\perp}^{折}}{E_{\perp}^{入}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta'}{\sin(\theta+\theta')}。$$

它们是论述反射、折射强度的规律的基础。

惠更斯原理是以原理的形式提出来的。当时认为不能对它作出理论解释。在这一章里，我们看到，麦克斯韦电磁理论，不仅给出了它的定性说明，还给出了它的定量计算公式，即基尔霍夫公式

$$\phi(x,y,z)=\iint_S\frac{e^{iKr}}{4\pi r}\left[\nabla\phi(x',y',z')-iK\frac{\boldsymbol{r}}{r}\phi(x',y',z')\right.$$

$$\left.+\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\phi(x',y',z)\right]\cdot d\boldsymbol{S}'。$$

它是讨论、研究干涉、衍射现象的理论基础。

4．电磁波在金属表面的行为，使金属导线、导管成为定向传输电磁波的有力工具。在这一章里，我们只对传输线、同轴线、矩形波导管作了肤浅的讨论。深入讨论是电工学、微波技术等的专门课题。要求读者对这些内容，有一个初步的了解。对一些重要结论，如波导管中的电磁波波型，传播速度、频率限制等，有一个基本的概念。

$$\omega_{n,m}=v\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2},$$

$$u_{相}=\frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}},$$

$$u_{相}\cdot u_{群}=v^2。$$

5．在这一章里，求解电磁波辐射的方法，就是前一章所用的势函数方法。引进势函数，把求解麦克斯韦方程的问题，

化简为求解达朗伯尔方程、波动方程的问题。它们的一类基本解是推迟势，如

$$\phi(x,y,z,t)=\iiint_V \frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}dV'。$$

由于达朗伯尔方程、波动方程，也描述着其他波动过程的规律，这种推迟解具有颇为普遍的意义。

把这种推迟解用于电偶极子辐射的情况，就得到它的辐射规律

$$E=E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\ddot{P}\sin\theta}{v^2r},\quad B=B_\alpha=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\ddot{P}\sin\theta}{vr},$$

$$S=S_r=\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon v^3}\left(\frac{\ddot{P}\sin\theta}{r}\right)^2。$$

它是我们理解电磁辐射的基础。

6．为了加深对所学内容的理解，读者可思考或演算下列习题：

i. 如何推知：在均匀介质中的电磁波是横波？$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{K}$组成右螺旋系统？$E=vB$？

ii. 如何推知：在反射过程中的半波损失和布尔斯特定律？

iii. 试证：在不同介质分界面上，电磁波反射、折射时，能量是守恒的。

iv. 试证：当电磁波垂直入射到介质的分界面时，反射系数

$$R=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2},$$

n 是第二介质对于第一介质的相对折射率。

v. 试证：在良好导体内传播的电磁波，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的位相，落后于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的位相 45°。

vi. 在边长为 10 mm 和 20 mm 的矩形波导管中，传输 TE_{11} 型波的截止频率是多少？设波导管中是空气。如果以两倍于截止频率的频率传输 TE_{11} 型波，传输相速和群速各是多少？

vii. 有一长为 1 毫米、宽为 10 微米的矩形孔。当一波长 $\lambda=6$ 微米的单色平面波，垂直入射到这矩形孔时，第一条衍射暗纹的衍射角有多大？

viii. 一个电量为 q 的点电荷，绕一个半径为 a 的圆周转动，转动的角速度是 ω。求在圆周平面上离圆心为 $r(r>>a)$ 处的辐射场强度和能流密度。在垂直于圆周平面、通过圆心的直线上，离圆心为 $r(r>>a)$ 处的辐射场强和能流密度等于多少？