电动力学讲课大纲

王青

2007年9月

书: ⟨电动力学⟩,郭硕鸿,高等教育出版社,第二版.

- **期中考试:** (包括从第一章到第三章大纲上的所有内容, 这些内容期中考过后,期末考试不再考.)
- **期末考试:** (内容从第四章到第六章)

数学准备

1. 矢量分析.(书P340页)
   矢量定义及运算,包括加减,点乘及叉乘;张量定义及运算
   作业:

   (a) ϵ_{ijk}满足:$\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

   (b) 用δ_{ij}和ϵ_{ijk}证明,

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})]\vec{c} - [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d}$$
$$= [\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b} - [\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}$$

2. 场论. (书P341页)
   梯度,散度,旋度;微分算符对多变量函数,复合函数的运算;梯度的线积分, 散度的体积分,旋度的面积分
   作业:书1.1, 1.3, 1.6
   思考题:$\nabla\cdot\vec{A} > 0$,$\nabla\cdot\vec{A} = 0$, $\nabla\cdot\vec{A} < 0$ 在直观图像上有什么差别? $\nabla\times\vec{A} > 0$, $\nabla\times\vec{A} = 0$, $\nabla\times\vec{A} < 0$ 呢?

3. 曲线坐标. (书P345页)
   柱坐标,球坐标

4. δ函数. (书P76页)
   定义,性质,解析表达式
   作业:书2.14
   思考题:书2.15

5. Helmholtz定理

第一章　　电磁现象的普遍规律

1. 电磁相互作用的源. (书第一章第1,2节)
   电荷,电荷密度,电流,电流密度,磁单极
   思考题:对一闭合曲面S, $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}<0$, $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$, $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}>0$ 分别代表什么物理意义?

2. 电磁相互作用的场与真空中的基本实验定律. (书第一章1,2,3节)
   电荷守恒定律,叠加原理,库仑定律,比萨定律,场,法拉第电磁感应定律
   作业: 书1.5,1.10

3. 真空中电磁相互作用的场方程. (书第一章第3节)
   麦克斯韦方程组的积分形式与微分形式
   作业:

   (a) 求证电偶极子(正负电荷相对距离$l\to 0$,电量$q\to\infty$, lq固定)产生的电势为,

   $$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}+\text{常数}$$

   (b) 求证磁偶极子(电流圈面积$S\to 0$,电流$J\to\infty$, JS固定)产生的矢量势为,

   $$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}+\text{常数}$$

   (c) 假定实验上发现库伦定律对平方反比有一微小偏离δ, $\vec{f}_{21}=k_1\frac{q_1q_2}{R^{3+\delta}}\vec{R}$

   i. 求证,关系$\vec{E}=-\nabla\phi$仍成立,并请对给定的电荷密度分布,给出ϕ的计算公式.
   ii. 问:这时高斯定理$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=Q/\epsilon_0$是否还成立?

   (d) 假定实验上发现比萨定律对平方反比有一微小偏离δ, $d^2\vec{F}_{21}=k_2J_2d\vec{l}_2\times(\frac{J_1d\vec{l}_1\times\vec{R}}{R^{3+\delta}})$

   i. 求证,关系$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$仍成立,并请对给定的电流密度分布, 给出$\vec{A}$的计算公式.
   ii. 问:这时安培环路定理$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 J$是否还成立?

   思考题:

   i. 迭加原理对麦克斯韦方程组起什么影响?
   ii. 积分形式与微分形式的麦克斯韦方程组,哪个更普遍,为什么?

4. 介质中电磁相互作用的场方程. (书第一章第4节)
   物质的电磁性质,极化电荷与磁化电流,物质中的电磁场方程与电磁性质方程
   作业:书1.7, 1.8, 1.9, 1.11
   思考题:介质中的麦克斯韦方程组中哪些方程依赖于物质的具体电磁性质,哪些不依赖, 为什么?

5. 电磁场的边值关系. (书第一章第5节)
   法向分量,切向分量
   作业: 书1.12, 1.13
   思考题：能否说明或最好证明$\epsilon\to\infty$的电介质表面为等势面.

6. 电磁相互作用能量动量的转化与守恒. (书第一章第6节,第五章第7节)
   场和电荷系统能动量转化和守恒定律的一般形式,能量密度,能流密度,动量密度, 动量流密度,电磁能量传输,张量力
   作业: 书1.14
   思考题: 试用张量力说明电力线和磁力线前后受拉力,相互之间有斥力.(这是法拉第的场模型)

研究问题:

1. 能否通过修改麦克斯韦方程组,使能流密度$\vec{S}$有沿$\vec{E}$或$\vec{B}$ 方向的分量?
2. 考虑有介质的情况,动量的转化与守恒定律(动量密度,动量流密度)应如何写?

第二章　　静电场和稳恒电流的电磁场

1. 静电势及其微分方程. (书第二章第1节)
   电势及其满足的微分方程,非极值定理
   作业:
   (a) 书2.1
   (b) 试证:极化电荷出在自由电荷处,无自由电荷也无极化电荷,极化使自由电荷处的总电荷变为原来的$\frac{1}{\epsilon_r}$倍.
   (c) 试证:对无穷大均匀电介质,有介质时的电势和电场是无介质时的$\frac{1}{\epsilon_r}$倍.
2. 唯一性定理及应用. (书第二章第2节)
   静电问题唯一性定理,有导体存在时的唯一性定理,应用
   作业:
   (a) 由一组导体组成的体系,已知第i个导体上的总电荷为q_i,且导体外可以有介质,但无自由电荷,试证空间任一点$\vec{r}$处的电势与q的关系为:

$$\phi(\vec{r}, q_1, q_2, \ldots) = \sum_i p_i(\vec{r}) q_i$$

   其中$p_i(\vec{r})$与导体上电荷无关.
   (b) 一导体空腔内有电荷Q,在导体绝缘和接地两种情况下,试用唯一性定理讨论导体内表面和外表面的电荷密度是否会变化?
3. 拉普拉斯方程,分离变量法. (书第二章第3节)
   球坐标,柱坐标
   作业:书2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.18
4. 镜像法. (书第二章第4节)
   作业:书2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12
5. 格林函数. (书第二章第5节)
   作业:书2.19
   补充提示:加法公式:

$$P_n(\cos\Theta) = \sum_{m=-n}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') e^{im(\phi-\phi')}$$

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

$$\int d\Omega' \frac{f(\theta')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \int d\Omega' f(\theta') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\Theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' f(\theta') \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') e^{im(\phi-\phi')}$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta) \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' f(\theta') P_n(\cos\theta')$$

6. 静电场的能量
   相互作用能,汤姆孙定理

7. 恒定电流的电场. (见张泽喻,赵均主编的电动力学书)
   恒定电流系统的维持及其麦克斯韦方程组
   作业:

   (a) 书2.7 2.13

   (b) 两个距离很远半径为a的金属半球埋入电导率为γ的地面,使半球平面部份与地面平齐.在此两半球电极上加电压V,求地面下极面附近电流分布,并求两半球间的电阻和每个半球的接的电阻.

   (c) 两个半径为a的金属小球放在电导率为γ的半无限大导电媒质内作为电极, 两小球球心的距离为$b(b >> a)$,球心离媒质平面的距离都为$d(d >> a)$, 求两电极之间的电阻(要求准到$a/b, a/d$的一次项).

   (d) 在一块无限大的导电平板上某点p处通入电流并向无穷远流出,在板上任意处开一圆孔,不包含p点.试证在此圆孔边缘上任意两点的电势差之值为不开圆孔时该两点的电势差之值的一倍.

8. 稳恒电流的磁场,矢势. (书第三章第1节)
   矢势,矢势及其满足的方程,稳恒电流磁场的能量
   作业:书3.1, 3.2, 3.7
   思考题: 3.8

9. 磁场问题的一般解法. (书第三章第2节)
   无传导电流无剩磁,无传导电流有剩磁,有传导电流,磁镜像法,例(无穷长直导线,环形导线)
   作业:书3.4, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13

10. 多极展开. (书第二章第6节,第三章第3节)
    电势的多极展开,电多极矩,带电体在外场中的能量,受力和力矩, 矢量势的多极展开,磁多极矩, 作业:

    (a) 书3.14, 3.15

    (b) 半轴为a, b和c的椭球体内均匀带电, 总电量为Q,求它的电偶极矩, 电四极矩以及准确到四极矩的在远处的电势.
    提示: 用广义球坐标$x = ar\sin\theta\cos\phi$, $y = br\sin\theta\sin\phi$, $z = cr\cos\theta$ 计算积分.
    答案: $\vec{p} = 0$, $D_{ij} = 0$ $(i \neq j)$,

$$D_{11} = \frac{Q}{5}(2a^2 - b^2 - c^2) \qquad D_{22} = \frac{Q}{5}(2b^2 - c^2 - a^2) \qquad D_{33} = \frac{Q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + Q\frac{a^2(3x^2 - R^2) + b^2(3y^2 - R^2) + c^2(3z^2 - R^2)}{10R^5}\right]$$

    (c) 设有两个偶极子,它们的偶极矩大小相等,并都指向z方向,其一位置在原点, 另一位置在
        i. $\theta = \frac{\pi}{2}$, 距原点为R;
        ii. $\theta = 0$,距原点为R.

求两种情况的相互作用能和相互作用力.
答案:

i. $W = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ $\vec{F} = \frac{3p^2\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^5}$ (排斥力)

ii. $W = \frac{-p^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ $\vec{F} = \frac{-3p^2\vec{R}}{2\pi\epsilon_0 R^5}$ (吸引力)

(d) 有一电矩为p的偶极子,位于距无限大导体平面为a处,求导体对偶极子的吸引力.
答案: $\vec{F} = -\frac{3p^2}{64\pi\epsilon_0 a^4}(1+\cos^2\alpha)$, α为偶极子与平面法线的夹角.

(e) 试证电流体系在外磁场中的能量的多级展开为

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \qquad W_n = \frac{1}{n}\sum_{i_1,\cdots i_n}^{3} \vec{J}_{i_1\cdots i_n}\cdot[\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}\vec{A}(\vec{r})]$$

特别地,

$$W_0 = 0 \qquad W_1 = \vec{m}\cdot\vec{B}$$

(f) 试证电流体系在外磁场中受力的多级展开为

$$\vec{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{F}_n \qquad \vec{F}_n = \frac{1}{n}\sum_{i_1,\cdots i_n}^{3} \vec{J}_{i_1\cdots i_n}\times[\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}\vec{B}(\vec{r})]$$

特别地,

$$\vec{F}_0 = 0 \qquad \vec{F}_1 = (\nabla\vec{B})\cdot\vec{m}$$

(g) 试证电流体系在外磁场中受力矩的多级展开为

$$\vec{L} = \sum_{n=0}^{\infty}\vec{L}_n \qquad \text{其中:} \qquad \vec{J}_{i_1\cdots i_n} = \sum_{i}^{3}\vec{e}_i J^i_{i_1\cdots i_n}$$

$$\vec{L}_n = \frac{1}{n}\sum_{i,i_1,\cdots i_n}^{3}\{\vec{J}_{ii_1\cdots i_n}[\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}B_i(\vec{r})] - J^i_{ii_1\cdots i_n}[\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}\vec{B}(\vec{r})]$$

特别地,

$$\vec{L}_0 = \vec{m}\times\vec{B}$$

第三章 电磁波的传播

1. 理想绝缘介质中的波动方程及平面电磁波解. (书第四章第1节)
波动方程,平面波解
作业:

   (a) 书4.4

   (b) 试证,对$\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ 的麦克斯韦方程组,四个方程中只有两个是独立的.

2. 定态波动方程及平面波解. (书第四章第1,3节)
导体,定态电磁波,平面波解(波矢,振幅,偏振,能量密度,能流密度)
作业:

(a) 书4.1, 4.5, 4.7

(b) 试证,用复数方法得到的麦克斯韦方程组平面波解(包括$\gamma \neq 0$),在取实部后仍是麦克斯韦方程组的解.

(c) 试求穿透深度的严格表达式,并从它出发证明在γ很大时$\delta \to \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$.

(d) 试讨论在什么条件下,椭圆偏振是左旋或右旋的?

思考题:什么情况下,k_I应取正号?什么情况下,应取负号?为什么?

3. 电磁波在界面上的反射和折射. (书第四章第3节)
边界条件,反射透射波的波矢,振幅,能流,光压
作业:

(a) 书4.2, 4.3, 4.6

(b) 试证,当入射波电场垂直入射面时,反射和透射波振幅满足:

$$\vec{E}_{20\perp} = \frac{2E_{10\perp}\vec{e}_y}{1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}} \qquad \vec{E}_{20\parallel} = \frac{1-\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}}{1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}} E_{10\perp}\vec{e}_y$$

进一步当$\mu_1 = \mu_2$, $\gamma_2 = 0$,它们化为

$$\vec{E}_{20\perp} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} E_{10\perp}\vec{e}_y \qquad \vec{E}_{20\parallel} = \frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)} E_{10\perp}\vec{e}_y$$

(c) 试证明

$$D_\parallel = \frac{4\mu_1 \cos\theta_1 Re(\frac{k_2 k_{2z}^*}{k_2^*})}{\mu_2 k_1 |\frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1|^2} \qquad R_\parallel = \left|\frac{\frac{k_{2z}}{k_2} - \frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1}{\frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1}\right|$$
$$D_\parallel + R_\parallel = 1$$

4. 谐振腔. (书第四章第4节)
方程及边条件,矩形谐振腔
作业:书4.9, 4.14, 4.15

5. 电磁波的定向传播. (书第四章第5节)
方程及边条件,解,矩形波导
作业:

(a) 书4.11, 4.12, 4.13

(b) 试证,电磁波定向传输中的TM波($B_z = 0$)满足,

$$(\nabla_{xy}^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2)E_z = 0 \qquad E_z\Big|_{\text{边界}} = 0$$
$$\vec{E}_t = \frac{ik_z}{\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2}\nabla_{xy}E_z \qquad \vec{B}_t = \frac{-i\mu\epsilon\omega}{\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2}\nabla_{xy}E_z$$

并求表面(管壁)上的面电荷与面电流.

6. 电磁波的几何光学极限.
波动方程的几何光学近似,光学方程,光程泛函与费马原理

第四章　　电磁波的辐射

1. 电磁场的矢势和标势. (书第五章第1节)
   用势描述电磁场,规范变换和规范不变性,达朗伯方程
   作业: 书5.1, 5.2, 5.3, 5.4

2. 推迟势. (书第五章第2节)
   非齐次(有源)波动方程的球面波解,洛伦兹规范,库伦规范
   作业:

   (a) 书5.5

   (b) 试证,库伦规范的解满足$\nabla \cdot \vec{A} = 0$

3. 辐射电磁场(书第四章第3,4节)
   一般性质,多极展开,电偶极辐射,电四极辐射,磁偶极辐射,低速运动电荷的辐射场
   作业:

   (a) 书5.6, 5.7, 5.8, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13

   (b) 两个相互垂直的电偶极振子,具有相同的振幅p_0 和相同的角频率ω, 但位相差为Φ,试求系统的平均辐射角分布.
   答案:设偶极子在原点,分别沿x和y轴方向,

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta \sin 2\phi \cos\Phi)$$

   (c) 两个方向相同相距为$\frac{\lambda}{4}$ 的电偶极子沿z轴排列(λ为电磁辐射波长),它们位相差为Φ,具有相同的振幅p_0, 频率ω, 试求系统的平均辐射角分布.
   答案:设偶极子在原点,

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c}\left[1 + \cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta + \Phi)\right]\sin^2\theta$$

   (d) 一半波天线长度为$l = \frac{\lambda}{2}$, 其上电流分布为, $J = J_0 \cos\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\omega t$ 式中$-\frac{\lambda}{4} \le z \le \frac{\lambda}{4}$,试求系统的平均辐射角分布.

   答案:
$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c\mu_0 J_0^2}{8\pi^2}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

   (e) 求加速度为$\vec{a}$的低速运动带电点粒子的平均辐射角分布和辐射功率.

   (f) 对一组运动的点电荷,请给出用它们的电荷,坐标,速度,加速度表达的电偶极,电四极和磁偶极辐射场的表达式.

4. 电磁波的衍射. (书第五章第6节)

第五章　　狭义相对论

1. 相对论的实验基础. (书第六章第1节)
   历史背景,实验基础

2. 相对论基本原理,洛伦兹变换. (书第六章第2,3节)
   基本原理,基本洛伦兹变换,任意运动方向的坐标,速度,加速度的洛伦兹变换
   作业:

   (a) 试证,四度速度U^i, U^4 与x^i, ict 具有相同变换关系.

   (b) 试计算$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 的变换.

   (c) 一列'火车'静止在站台旁时,其长度与站台一样$l = 8.64 \times 10^8$公里,现在此'火车'以$\frac{4}{5}c$ 的速度自左向右通过站台,火车头尾A'B'各有一只时钟.当火车头与站台左端A相遇时,火车头和站台左端的时钟都指在零点(12点),问:

      i. 这时火车尾B'和站台右端B的时钟是几点? (答案: 以站台为参照系时: $t_A = t_B = t_{A'} = 12$点, $t_{B'} = 12$点38.4分. 以火车为参照系时: $t_A = t_{A'} = t_{B'} = 12$点, $t_B = 12$点38.4分)

      ii. 当火车继续运行到火车头A'与站台右端B'相重时,火车头尾和站台左右端的时钟各是几点? (答案: 以站台为参照系时: $t_A = t_B = 13$点, $t_{A'} = 12$点36分, $t_{B'} = 13$点14.4分. 以火车为参照系时: $t_{A'} = t_{B'} = 12$点36分, $t_A = 12$点21.6分, $t_B = 13$点)

3. 相对论的时空理论. (书第六章第3节)
   同时的相对性,运动时钟变慢,运动尺子变短,间隔的不变性,两事件关系的分类
   作业:

   (a) 书6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7

   (b) 求证: 若两事件间的间隔是类空间隔,则

      i. 两事件之间无法建立联系.

      ii. 事件之间的时间次序不确定,存在一个参考系,在其中两事件同时发生.

      iii. 事件之间的空间次序不会颠倒,不存在一个参考系,在其中两事件在同一地点发生.

   (c) 考虑三个事件,若已知第一个事件和第二个事件之间的间隔及第二个事件和第三个事件之间的间隔类型,能否知道第一个事件和第三个事件之间的间隔类型?请证明.

4. 相对论理论的协变形式. (书第六章第4节)
   四维时空坐标变换,物理量按时空变换性质分类,张量运算
   作业:

   (a) 书6.11

   (b) 试证,n 阶张量收缩一次变成$n-2$阶张量.

5. 相对论力学. (书第六章第5,6,7节)
   最小作用量原理,点粒子力学,带电点粒子及电荷分布在外电磁场中,协变表达
   作业:

   (a) 书6.17,6.18,6.19,6.25, 6.26, 6.27

   (b) 对在外电磁场中运动的带电点粒子,试由$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -K_\mu$ 证明$K_\mu = \sum_\nu eF_{\mu\nu}U_\nu$

   (c) 试证$K_4 = \frac{i}{c}\vec{K}\cdot v$, 其中$\vec{K}$是$K_\mu$前三分量构成的矢量. 这个结论不止对电磁作用,而是一般成立的.

6. 相对论电动力学. (书第六章第6,7节)
   作用量,麦克斯韦方程组,能动量守恒
   作业:

   (a) 书6.12, 6.13, 6.15, 6.16

(b) 试证,电磁场的一般变换关系为,

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \frac{\vec{E} - \frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{B}' = \frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \frac{\vec{B} - \frac{\vec{B}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(c) 试证,匀速运动的点电荷q产生的电磁场为,

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 S^3}(1-\frac{v^2}{c^2}) \qquad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} \qquad \text{其中:} \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$S^2 = (\vec{R}\cdot\frac{\vec{v}}{v})^2 + (1-\frac{v^2}{c^2})(\vec{R} - \vec{R}\cdot\frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v})\cdot(\vec{R} - \vec{R}\cdot\frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v}) = \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{c^2} + (1-\frac{v^2}{c^2})R^2$$

思考题: 6.14, 6.23, 6.24

第六章　带电粒子和电磁场的相互作用

1. 运动带电粒子的电磁场. (书第七章第1节)
   运动带电粒子的描述,推迟效应,李纳-维谢尔势,电磁场
   作业:

   (a) 书7.7

   (b) 试由定义,$\frac{1}{J} = \int d^3x'\delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_0(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})\right)$ 证明: $J = 1 - \frac{\vec{R}^*}{R^*}\cdot\frac{\vec{v}^*}{c}$. 并讨论$J$的物理意义.若在介质中,式中$c$应换为$\frac{c}{n}$ (n 为介质的折射率),则J有可能为0,它对应什么物理?

   (c) 试证任意运动的电磁场为,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 S^{*3}}(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c})(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}\vec{R}^*\times[(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\vec{R}^*}{cR^*}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

2. 高速运动带电粒子的辐射. (书第七章第2节)
   辐射功率及角分布, $\vec{a}^* \parallel \vec{v}^*$ 情形, $\vec{a}^* \perp \vec{v}^*$ 情形
   作业: 书7.1, 7.2, 7.3, 7.4

3. 辐射频谱分析. (书第七章第3节)

4. 切伦柯夫辐射. (书第七章第4节)

5. 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用. (书第七章第5节)
   电子的经典运动方程(能量转化与守恒定律,牛顿定律, 电子的经典运动方程,电磁质量,辐射阻尼力),谱线的自然宽度
   作业: 书7.9
   思考题: 试讨论本节所用的能量转化与守恒定律与第一章第6节所用的相应定律的联系与区别?

6. 电磁波的散射与吸收,介质的色散. (书第七章第6节)
   自由电子对电磁波的散射,束缚电子对电磁波的散射,介质的色散,因果性与色散关系
   作业:书7.5, 7.6, 7.8

结束语:电动力学在现代物理学中的地位

§0.1 矢量分析

- 矢量的定义

  三维空间有三个独立方向，可用三个互相垂直的单位矢量$\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$(或$\vec{e}_x$,$\vec{e}_y$,$\vec{e}_z$; 或$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) 代表．任意一个三维空间的矢量$\vec{A}$可用三个基矢量展开为：

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\vec{e}_i$$

  这个矢量的长度叫矢量的模：$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^3} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} A_iA_i}$

  单位矢量的含义是：$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$或$|\vec{e}_i| = 1$

- 矢量之间运算的定义

  – 加减法：

$$\begin{aligned}\vec{A} \pm \vec{B} &= (A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3) \pm (B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3)\\ &= (A_1 \pm B_1)\vec{e}_1 + (A_2 \pm B_2)\vec{e}_2 + (A_3 \pm B_3)\vec{e}_3\\ &= \sum_{i=1}^{3}(A_i \pm B_i)\vec{e}_i\end{aligned}$$

  – 点乘：(点积，标积，内积)

基矢的点乘：

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

或

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3) \cdot (B_1\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2 + B_3\vec{e}_3)\\ &= A_1B_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + A_1B_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + A_1B_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3\\ &\quad + A_2B_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + A_2B_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + A_2B_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3\\ &\quad + A_3B_1\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + A_3B_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + A_3B_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3\\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i = \vec{B} \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

δ_{ij}具有如下性质：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \qquad \sum_{j=1}^{3} A_j\delta_{ij} = \sum_{j=1}^{3} A_j\delta_{ji} = A_i \qquad \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3$$

利用δ_{ij}的性质，$\vec{A}\cdot\vec{B}$的计算过程可简写为：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3}A_i\vec{e}_i\cdot\sum_{j=1}^{3}B_j\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3}A_iB_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3}A_iB_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

若进一步采用爱因斯坦约定，即表达式中若两下角标一样，则代表此角标从1 到3 求和，我们可省去表达式中的求和号.

点乘的意义：

$$\begin{cases} \text{绝对长度(模):}\ \vec{A}\cdot\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}A_iA_i=|\vec{A}|^2 & \text{单位矢量：}\ \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\ \text{模为1, 分量为方向角} \\ \text{夹角：}\ \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\equiv\cos\theta\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=0\Longleftrightarrow\vec{A}\perp\vec{B} & \text{方向角：}\ \cos\theta_i\equiv\frac{A_i}{|\vec{A}|}\ \text{分量}A_i\text{是模的投影} \end{cases}$$

– 叉乘：(叉积，矢积，外积)

基矢的叉乘：

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{e}_2\times\vec{e}_2=\vec{e}_3\times\vec{e}_3=0\\ &\vec{e}_1\times\vec{e}_2=-\vec{e}_2\times\vec{e}_1=\vec{e}_3\\ &\vec{e}_2\times\vec{e}_3=-\vec{e}_3\times\vec{e}_2=\vec{e}_1\\ &\vec{e}_3\times\vec{e}_1=-\vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{e}_2 \end{aligned}$$

或

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\vec{e}_k \qquad \epsilon_{ijk}\equiv\begin{cases} 1 & 1,2,3\text{的偶置换} \quad \text{例：}\ \epsilon_{123},\epsilon_{231},\epsilon_{312} \\ -1 & 1,2,3\text{的奇置换} \quad \text{例：}\ \epsilon_{132},\epsilon_{213},\epsilon_{321} \\ 0 & \text{其它} \quad \text{例：}\ \epsilon_{111},\epsilon_{223},\epsilon_{313} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}\times\vec{B} &= (A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)\times(B_1\vec{e}_1+B_2\vec{e}_2+B_3\vec{e}_3)\\ &= A_1B_1\vec{e}_1\times\vec{e}_1+A_1B_2\vec{e}_1\times\vec{e}_2+A_1B_3\vec{e}_1\times\vec{e}_3\\ &\quad +A_2B_1\vec{e}_2\times\vec{e}_1+A_2B_2\vec{e}_2\times\vec{e}_2+A_2B_3\vec{e}_2\times\vec{e}_3\\ &\quad +A_3B_1\vec{e}_3\times\vec{e}_1+A_3B_2\vec{e}_3\times\vec{e}_2+A_3B_3\vec{e}_3\times\vec{e}_3\\ &= (A_1B_2-A_2B_1)\vec{e}_3+(A_3B_1-A_1B_3)\vec{e}_2+(A_2B_3-A_3B_1)\vec{e}_1\\ &= -\vec{B}\times\vec{A}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k \end{aligned}$$

ϵ_{ijk}具有如下性质：

ϵ_{ijk}交换任两指标一次变号 $\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{kji}=-\epsilon_{ikj}$

$\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$ 证明见作业

推论

$$\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}=\delta_{il}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jl}=3\delta_{il}-\delta_{il}=2\delta_{il}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}=\delta_{ii}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{ji}=9-3=6$$

利用ϵ_{ijk}的性质，$\vec{A}\times\vec{B}$的计算过程可简写为：

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_{i=1}^{3}A_i\vec{e}_i\times\sum_{j=1}^{3}B_j\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3}A_iB_j\vec{e}_i\times\vec{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^{3}A_iB_j\epsilon_{ijk}$$

注意，很容易看出$\vec{A}\times\vec{A}=0$. 更进一步

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} &= (\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k)\cdot\sum_{n=1}^{3}C_n\vec{e}_n = \sum_{i,j,k,n=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_n\vec{e}_k\cdot\vec{e}_n\\ &= \sum_{i,j,k,n=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_n\delta_{kn} = \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}A_iB_jC_k\end{aligned}$$

这个结果也可用通常的用$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$的分量作成的行列式表达，它对$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$是循环对称的，因此，

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}$$

叉乘的意义：

$$\begin{cases}\text{绝对长度(模):}\ \vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\\ \text{方向：}\quad \vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{A},\vec{B}\quad \vec{A}\parallel\vec{B}\Longleftrightarrow\vec{A}\times\vec{B}=0\end{cases}$$

我们证明以上结论

$$\begin{aligned}|\vec{A}\times\vec{B}|^2 &= (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{B}) = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta)^2\\ &= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A}=0\quad(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B}=0$$

以下用一个例子说明矢量计算的应用，考虑一个角位于坐标原点的三角形，其从原点出发的两条边构成的矢量

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i \qquad \cos\theta_i = \frac{x_i}{r} \qquad r\equiv|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\\ \vec{r}' &= \sum_{i=1}^{3}x_i'\vec{e}_i \qquad \cos\theta_i' = \frac{x_i'}{r'} \qquad r'\equiv|\vec{r'}| = \sqrt{{x_1'}^2+{x_2'}^2+{x_3'}^2}\end{aligned}$$

第三条边构成的矢量

$$\vec{R} = \vec{r} = \vec{r}' = \sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')\vec{e}_i$$

$$\cos\phi_i = \frac{\vec{R}\cdot\vec{e}_i}{R} = \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-x_i'}{R} \qquad R = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')(x_i-x_i')}$$

三角形的三个内角分别记为α,β,γ, 它们分别是$\vec{r}$和$\vec{r}'$之间的夹角，$\vec{r}'$和$\vec{R}$之间的夹角补角，$\vec{r}$和$\vec{R}$之间的夹角，即：

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{r}\times\vec{r}'|}{rr'} \qquad \sin(\pi-\beta) = \frac{|\vec{R}\times\vec{r}'|}{Rr'} = \frac{|\vec{r}\times\vec{r}'|}{Rr'} \qquad \sin\gamma = \frac{|\vec{R}\times\vec{r}|}{Rr} = \frac{|\vec{r}\times\vec{r}'|}{Rr}$$

很容易看到

$$\frac{\sin\alpha}{R}=\frac{\sin\beta}{r}=\frac{\sin\gamma}{r'}=\frac{|\vec{r}\times\vec{r}'|}{rr'R}$$

我们得到了正弦定理，又

$$\begin{aligned}R^2 &= (\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')=\vec{r}\cdot\vec{r}+\vec{r}'\cdot\vec{r}'-2\vec{r}\cdot\vec{r}'=r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha\\ r^2 &= (\vec{R}+\vec{r}')\cdot(\vec{R}+\vec{r}')=\vec{R}\cdot\vec{R}+\vec{r}'\cdot\vec{r}'+2\vec{R}\cdot\vec{r}'=R^2+r'^2-2rr'\cos\beta\\ r'^2 &= (\vec{r}-\vec{R})\cdot(\vec{r}-\vec{R})=\vec{r}\cdot\vec{r}+\vec{R}\cdot\vec{R}-2\vec{r}\cdot\vec{R}=r^2+R^2-2rR\cos\gamma\end{aligned}$$

我们又得到了余弦定理.

- 张量推广

以上讨论的是矢量分析的内容．矢量的特点是，它是由一组基矢量的线性迭加构成的，即矢量对基矢量的依赖是线性的，它也叫一阶张量．进一步可以将这种线性依赖关系扩充为双线性的，这就构成了二阶张量，如三维空间中的二阶张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\equiv T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, 特点是其分量有两个下标共有9 个分量.

二阶张量的运算定义为：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{S}}\pm\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\sum_{i,j=1}^{3}S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\pm\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j=\sum_{i,j=1}^{3}(S_{ij}\pm T_{ij})\vec{e}_i\vec{e}_j$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot\vec{A}=(\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)\cdot(\sum_{k=1}^{3}A_k\vec{e}_k)=\sum_{i,j,k=1}^{3}T_{ij}A_k\vec{e}_i(\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k)=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}A_j\vec{e}_i$$

$$\vec{A}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=(\sum_{k=1}^{3}A_k\vec{e}_k)\cdot(\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)=\sum_{i,j,k=1}^{3}T_{ij}A_k(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_j=\sum_{i,j=1}^{3}A_iT_{ij}\vec{e}_j$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\times\vec{A}=(\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)\times(\sum_{k=1}^{3}A_k\vec{e}_k)=\sum_{i,j,k=1}^{3}T_{ij}A_k\vec{e}_i(\vec{e}_j\times\vec{e}_k)=\sum_{i,j,k,l=1}^{3}T_{ij}A_k\epsilon_{jkl}\vec{e}_i\vec{e}_l$$

$$\vec{A}\times\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=(\sum_{k=1}^{3}A_k\vec{e}_k)\times(\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j)=\sum_{i,j,k=1}^{3}T_{ij}A_k(\vec{e}_k\times\vec{e}_i)\vec{e}_j=\sum_{i,j,k,l=1}^{3}A_kT_{ij}\epsilon_{kil}\vec{e}_l\vec{e}_j$$

一个特殊的二阶张量是单位二阶张量，其定义和具有的性质为：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{I}}\equiv\sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\vec{e}_i\qquad\qquad\overrightarrow{\overrightarrow{I}}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{I}}=\vec{A}$$

更高阶张量特点是对基矢量依赖的幂次更高，分量有更多的下标．如一个n 阶张量可写为 $\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{3}T_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\vec{e}_{i_1}\vec{e}_{i_2}\cdots\vec{e}_{i_n}$.

§0.2 场论

三维空间有三个坐标x,y,z或x_1,x_2,x_3, 场论研究各种量对坐标的依赖关系.

- 场的定义：

标量场– 空间坐标x,y,z 的标量函数．$\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$

矢量场– 空间坐标x,y,z 的矢量函数．$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} A_i(x, y, z)\vec{e}_i$

场通常不仅依赖空间坐标，还依赖时间坐标．在图示上，经常用力线描述空间的矢量场，力线的方向与矢量场的方向相同，力线的密度正比于矢量场模的大小．

- 场的微分性质
  - 微分算符的定义

    三维空间中可以分别对三个坐标进行微商

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x} \qquad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y} \qquad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z} \qquad\qquad \partial_i \vec{e}_j = \vec{e}_j \partial_i$$

$$\nabla \equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \qquad\qquad \nabla \times \nabla = 0$$

    注意：

    * 只有对直角坐标系，微分算符才与基矢对易．
    * ∇有双重角色，即具有微分算符的性质(由分量∂_i反映), 又是一个矢量(由基矢$\vec{e}_i$反映).

    标量场ϕ的梯度：

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i \phi = \vec{e}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

    矢量场$\vec{A}$的散度：

$$\nabla \cdot \vec{A} = (\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i) \cdot (\sum_{j=1}^{3} A_j \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \partial_i A_j = \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

    矢量场$\vec{A}$的旋度：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= (\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \partial_i) \times (\sum_{j=1}^{3} A_j \vec{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \partial_i A_j = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) \vec{e}_k \\ &= \vec{e}_3 (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) + \vec{e}_2 (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + \vec{e}_1 (\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) \end{aligned}$$

  – 微分算符对两个场的作用

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \partial_i \vec{e}_i \cdot (f_j g_k \epsilon_{jkl} \vec{e}_l) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_l \epsilon_{jkl} \partial_i (f_j g_k) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \delta_{il} \epsilon_{jkl} (g_k \partial_i f_j + f_j \partial_i g_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{jki} (g_k \partial_i f_j + f_j \partial_i g_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} g_k \partial_i f_j - \epsilon_{jik} f_j \partial_i g_k = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g}) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{3}\partial_i\vec{e}_i\times(f_jg_k\epsilon_{jkl}\vec{e}_l)=\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\vec{e}_i\times\vec{e}_l\epsilon_{jkl}\partial_i(f_jg_k)=\sum_{i,j,k,l,m=1}^{3}\epsilon_{ilm}\vec{e}_m\epsilon_{jkl}(g_k\partial_if_j+f_j\partial_ig_k)\\
&= \sum_{i,j,k,m=1}^{3}\vec{e}_m(-\delta_{ij}\delta_{mk}+\delta_{ik}\delta_{mj})(g_k\partial_if_j+f_j\partial_ig_k)\\
&= \sum_{i,j,k,m=1}^{3}\vec{e}_m(-\delta_{ij}\delta_{mk}g_k\partial_if_j-\delta_{ij}\delta_{mk}f_j\partial_ig_k+\delta_{ik}\delta_{mj}g_k\partial_if_j+\delta_{ik}\delta_{mj}f_j\partial_ig_k)\\
&= -\sum_{i,k=1}^{3}(\vec{e}_kg_k\partial_if_i+f_i\partial_ig_k\vec{e}_k)+\sum_{i,j=1}^{3}(g_i\partial_if_j\vec{e}_j+\vec{e}_jf_j\partial_ig_i)\\
&= -\vec{g}\nabla\cdot\vec{f}-\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}+\vec{g}\cdot\nabla\vec{f}+\vec{f}\nabla\cdot\vec{g}
\end{aligned}$$

注意：$\vec{f}\cdot\nabla\vec{g}=(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}=\vec{f}\cdot(\nabla\vec{g})$ 其中，$(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}$是将$\vec{f}\cdot\nabla$先看成是一个标量微商算符，再作用到后面的矢量$\vec{g}$上。而$\vec{f}\cdot(\nabla\vec{g})$是先考虑并矢量$\nabla\vec{g}$,再将它与矢量$\vec{f}$进行左点乘。

– 微分算符对复合场的作用

考虑复合标量场$\phi(u)$和复合矢量场$\vec{f}(u)$, 其中$u=u(x,y,z)$, 则：

$$\begin{aligned}
\nabla\phi(u) &= \sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\partial_i\phi(u)=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\frac{\partial\phi}{\partial u}\partial_iu=\phi'(u)\nabla u\\
\nabla\cdot\vec{f}(u) &= \sum_{i=1}^{3}\partial_if_i(u)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial u}\partial_iu=\vec{f}'(u)\cdot\nabla u\\
\nabla\times\vec{f}(u) &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\vec{e}_k\partial_if_j(u)=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\vec{e}_k\frac{\partial f_j}{\partial u}\partial_iu=\nabla u\times\vec{f}'(u)
\end{aligned}$$

– 微分算符对$\vec{R}$的作用

定义

$$\begin{aligned}
&\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i \qquad \nabla=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\partial_i \qquad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&\vec{r}'=\sum_{i=1}^{3}x_i'\vec{e}_i \qquad \nabla'=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\partial_i' \qquad \partial_i'=\frac{\partial}{\partial x_i'}\\
&\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')\vec{e}_i
\end{aligned}$$

则

$$\partial_ix_j=\delta_{ij} \qquad \partial_i'x_j'=\delta_{ij} \qquad \partial_ix_j'=\partial_i'x_j=0$$

$$\nabla\cdot\vec{R}=\sum_{i=1}^{3}\partial_i(x_i-x_i')=3=-\nabla'\cdot\vec{R}$$

$$\nabla\times\vec{R}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\partial_i(x_j-x_j')\vec{e}_k=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\delta_{ij}\vec{e}_k=0=-\nabla'\times\vec{R}$$

$$\begin{aligned}
\nabla R&=\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i\partial_iR=\frac{1}{2R}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i\partial_i[(x_j-x_j')(x_j-x_j')]=\frac{1}{R}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i(x_j-x_j')\partial_i(x_j-x_j')\\
&=\frac{1}{R}\sum_{i,j=1}^{3}\vec{e}_i(x_j-x_j')\delta_{ij}=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{3}\vec{e}_i(x_i-x_i')=\frac{\vec{R}}{R}=-\nabla'R
\end{aligned}$$

- 场的积分性质
  - 梯度的线积分
    考虑两个空间点A 和B, 对梯度$\nabla\phi$作从A 点到B 点的线积分

$$\begin{aligned}\int_A^B d\vec{l}\cdot\nabla\phi &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_A^B \vec{e}_i dx_i\cdot\partial_j\phi\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3}\int_A^B dx_i\partial_j\phi\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_A^B dx_i\partial_j\phi\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\int_A^B dx_i\partial_i\phi = \int_A^B d\phi \\ &= \phi_B-\phi_A\end{aligned}$$

    $\nabla\phi$的意义：
    在上式中考虑B 点无穷靠近A 点的情形，设$\Delta\vec{l}$为由A 指向B 的矢量，则

$$\Delta\vec{l}\cdot\nabla\phi=\phi_B-\phi_A \qquad 或 \qquad |\nabla\phi|\cos\theta=\frac{\phi_B-\phi_A}{|\Delta\vec{l}|}=\frac{\Delta\phi}{|\Delta\vec{l}|}$$

    其中，θ为$\nabla\phi$与$\Delta\vec{l}$的夹角．注意，$\Delta\phi/|\Delta\vec{l}|$是$\phi$场在$A$点沿$\Delta\vec{l}$方向的方向导数。因此上式的含义为：$\nabla\phi$的大小为$\phi$沿各方向的导数中最大的导数值，方向沿具有最大导数的方向．任意方向的方向导数即是$\nabla\phi$在此方向上的投影．若将标量场的等值面画出，则$\nabla\phi$的方向就是等值面的法线方向．
  - 散度的体积分
    考虑空间中的体积τ, 对散度$\nabla\cdot\vec{f}$在此体积上作体积分

$$\int_\tau d\tau\ \nabla\cdot\vec{f}=\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{f}$$

    其中面积分是在τ的表面进行的，曲面的正方向为τ的外法线方向，$d\vec{S}=dS_1\vec{e}_1+dS_2\vec{e}_2+dS_3\vec{e}_3$.
    只选z 方向求证上面结论．将τ表面分为上下两表面S_B和S_A, 表面方程分别设为$z=z_B(x,y)$和$z=z_A(x,y)$, 则

$$\int_\tau d\tau\ \frac{\partial}{\partial z}f_3(x,y,z)=\int dxdy\int_{z_A(x,y)}^{z_B(x,y)}dz\ \frac{\partial}{\partial z}f_3(x,y,z)=\int dxdy[f_3(x,y,z_B(x,y))-f_3(x,y,z_A(x,y))]$$

$$=\int_{S_B}dS_3 f_3(x,y,z_B(x,y))-\int_{S_A}dS_3 f_3(x,y,z_A(x,y))=\oint_\tau dS_3\ f_3(x,y,z)$$

    在前面体积分与面积分互换的公式中，考虑到函数$\vec{f}$的任意性，我们发现此公式意味如下积分算符的恒等式

$$\int_\tau d\tau\nabla=\oint_\tau d\vec{S}$$

    由此，有推论

$$\int_\tau d\tau\nabla\phi=\oint_\tau d\vec{S}\phi \qquad\qquad \int_\tau d\tau\nabla\times\vec{f}=\oint_\tau d\vec{S}\times\vec{f}$$

    $\nabla\cdot\vec{f}$的意义：
    定义$\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{f}$为矢量场$\vec{f}$从$\tau$流出的通量，当$\tau$无穷小时，体积分与面积分互换的公式变为$\Delta\tau\ \nabla\cdot\vec{f}=\oint_{\Delta\tau}d\vec{S}\cdot\vec{f}$, 取$\Delta\tau$趋于零的极限，

$$\nabla\cdot\vec{f}=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\oint_{\Delta\tau}d\vec{S}\cdot\vec{f}}{\Delta\tau}=\text{单位体积从场点流出的通量}$$

    因此$\nabla\cdot\vec{f}=0$代表矢量场在此点无净通量外溢，称为$\vec{f}$在此点无源，$\nabla\cdot\vec{f}\neq0$代表矢量场在此点有净通量外溢，称为$\vec{f}$在此点有源．

– 旋度的面积分

考虑空间中的曲面S, 对旋度$\nabla \times \vec{f}$在此曲面上作面积分

$$\int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{f} = \oint_S d\vec{l} \cdot \vec{f}$$

其中线积分的是在S的边界进行的，曲线的正方向与曲面的正方向成右手关系，$d\vec{S} = dS_1\vec{e}_1 + dS_2\vec{e}_2 + dS_3\vec{e}_3$, $d\vec{l} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3$. 只选x 方向求证上面结论．设曲面方程为$z = g(x, y)$, 曲面法线矢量$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$, 其中

$$n_1 = -\frac{g'_x}{\sqrt{1 + {g'_x}^2 + {g'_y}^2}} \qquad n_2 = -\frac{g'_y}{\sqrt{1 + {g'_x}^2 + {g'_y}^2}} \qquad n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + {g'_x}^2 + {g'_y}^2}}$$

将曲面边界在xy 平面投影区域曲线边界分为两部分，曲线方程分别设为$y = y_B(x)$和$y = y_A(x)$, 利用

$$\frac{dS_2}{dS_3} = \frac{n_2 dS}{n_3 dS} = \frac{n_2}{n_3} = -g'_y$$

则

$$\int_S (dS_2\partial_3 f_1 - dS_3\partial_2 f_1) = -\int_S dS_3\ (g'_y\partial_3 f_1 + \partial_2 f_1) = -\int_S dS_3 \frac{d}{dy} f_1(x, y, g(x, y))$$

$$= -\int dx \int_{y_A(x)}^{y_B(x)} dy \frac{d}{dy} f_1(x, y, g(x, y)) = -\int dx\ [f_1(x, y_B(x), g(x, y_B(x))) - f_1(x, y_A(x), g(x, y_A(x)))]$$

$$= \oint_S dx\ f_1(x, y, g(x, y))$$

在前面面积分与线积分互换的公式中，考虑到函数$\vec{f}$的任意性，我们发现此公式意味如下积分算符的恒等式

$$\int_S d\vec{S} \times \nabla = \oint_S d\vec{l}$$

由此，有推论

$$\int_S d\vec{S} \times \nabla\phi = \oint_S d\vec{l}\,\phi \qquad \int_S (d\vec{S} \times \nabla) \times \vec{f} = \oint_S d\vec{l} \times \vec{f}$$

$\nabla \times \vec{f}$的意义：

定义$\oint_S d\vec{l} \cdot \vec{f}$为矢量场$\vec{f}$绕$S$的环量，当$S$无穷小时，面积分与线积分互换的公式变为

$$\Delta\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{f} = \oint_{\Delta S} d\vec{l} \cdot \vec{f}$$

取ΔS趋于零的极限，

$$|\nabla \times \vec{f}| \cos\theta = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} d\vec{l} \cdot \vec{f}}{\Delta S}$$

其中，θ为$\nabla \times \vec{f}$与$\Delta\vec{S}$的夹角.

因此：$\nabla \times \vec{f}$的大小为场点处最大的单位面积环量值，方向沿具有最大环量的曲面方向．任意方向曲面的环量即是$\nabla \times \vec{f}$在曲面方向上的投影.

$\nabla \times \vec{f} = 0$代表矢量场在此点无净环量，称为$\vec{f}$在此点无旋，$\nabla \times \vec{f} \neq 0$代表矢量场在此点有净环量，称为$\vec{f}$在此点有旋.

§0.3 δ函数

– 定义及性质

* 一维空间
定义：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ \infty & x=x_0\end{cases}\qquad \int_{\text{包括}x_0}dx\delta(x-x_0)=1$$

性质：

$$\delta(x-x_0)\geq 0\qquad \delta(x-x_0)=\delta(x_0-x)\qquad f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)\qquad x_i\text{是}f(x)=0\text{的第i 个根}$$

* 三维空间
定义：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

其中：$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$, $\vec{r}'=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3$.
性质：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')\geq 0\qquad \delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(\vec{r}'-\vec{r})$$

$$f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')=f(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\qquad \delta(a(\vec{r}-\vec{r}'))=\frac{1}{|a|}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

– 解析表达

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

§1.1 电磁相互作用的源

- 电荷,电荷密度

  电荷是电相互作用之源.物质的电相互作用强度与其携带的电荷成正比.电荷可正可负, 也可为零(即不带电).

  – 点电荷:

  它是现实世界的理想化描述.点电荷的特点是,无几何体积,带有电量,且电量是一个基本电量单位(电子所带电量)的整数倍. 基本电量单位为:$q_e = 1.6021917(70) \times 10^{-19}$库伦. 在我们所讨论的宏观物理中,电荷的分立性可忽略.

  – 电荷密度:

  现实世界的电荷总是分布在一个具有有限几何体积的空间体积中.引入电荷密度

  $$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \text{场点处单位体积的电量}$$

  它一般说是时间和空间坐标的函数. ρ也称体电荷密度. 为方便,有时还引入面电荷和线电荷密度的概念,

  $$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \text{场点处单位面积的电量} \qquad \eta = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \text{场点处单位长度的电量}$$

  – 点电荷的电荷密度:

  记位于$\vec{r}_0$处电量为q的点电荷在空间的电荷密度分布为$\rho(\vec{r}, \vec{r}_0)$,则它应满足

  $$\rho(\vec{r}, \vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \infty & \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases} \qquad \int_\tau d\tau\ \rho(\vec{r}, \vec{r}_0) = Q_{\text{内}}$$

  由δ函数的性质,知

  $$\rho(\vec{r}, \vec{r}_0) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

- 电流,电流密度

  电荷运动起来就形成电流,有方向和电量大小两个特征.引入电流密度矢量$\vec{j}$,其大小为单位时间流过垂直于电流方向单位面积的电量, 方向为电流方向. 利用$\vec{j}$可求出对任意一个不一定垂直于电流方向的面元$\Delta\vec{S}$, 单位时间通过的电量为$j\Delta S_\perp = \vec{j} \cdot \Delta\vec{S}$. 对有限大小面元,单位时间流过的电量叫电流强度

  $$J = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}$$

  对以速度$\vec{v}$运动的电荷来说,它具有电流密度为$\vec{j} = \rho\vec{v}$. 对有多种速度运动的电荷情况,$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$. 注意:总电荷密度$\rho = \sum_i \rho_i$为0,并不意味着总电流为0.例:

  $$\rho_- = -\rho_+ \to \rho = \rho_- + \rho_+ = 0 \qquad \vec{j} = \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_- = \rho_+(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$$

  电流密度用图画出即为电流线,它方向为$\vec{j}$方向,密度为$\vec{j}$大小. 在电流线图上沿$\vec{j}$方向作一小管(电流管),则:

  $$Jdl = j\Delta S d\vec{l} = \vec{j}d\tau = \sum_i \rho_i \vec{v}_i d\tau = \sum_i q_i \vec{v}_i$$

其中:J为电流管中电流强度,$d\vec{l}$为电流管的长度和方向,$\vec{j}$为电流管中的电流密度,$d\tau$为电流管体积,q_i为以$\vec{v}_i$速度在电流管中运动的电荷.
对电流分布在一个表面上的情形,引入电流密度$\vec{i}$,其方向为电流方向,大小为单位时间流过垂直于电流方向单位长度的电量. 对任一线元$\Delta\vec{l}$,单位时间通过它的电量为$\vec{i}\cdot\Delta\vec{l}$,对以速度$\vec{v}_i$运动的面电荷$\sigma_i$,$\vec{i}=\sum_i\sigma_i\vec{v}_i$. 面电流密度与体电流密度有关, $\vec{j}=\frac{\vec{i}}{\delta}$, δ为表面厚度, 且:

$$Jdl=i\Delta l d\vec{l}=\vec{i}dS=\sum_i\sigma_i\vec{v}_i dS=\sum_i q_i\vec{v}_i$$

- 磁单极

  它是磁相互作用产生的源.量子力学奠基人之一狄喇克(P.A.M.Dirac 1902-1985)在1931 年提出了磁单极理论用于解释电荷量子化现象.几十年来实验物理学家做了大量工作,但迄今为止,仍不能肯定磁单极的存在.1982.2.14,美国斯坦福大学的凯布雷拉(B.Cabrera) 曾用超导线圈观察到一个可能是磁单极的事例.
  若磁单极存在,则对应电荷Q有磁荷Q_m, 对应电荷密度ρ,电流密度$\vec{j}$,有磁荷密度ρ_m,磁流密度$\vec{j}_m$. 注意,运动的电荷会产生与磁偶极子同样的物理效果(如一块磁铁和一个通以电流的线圈),同样运动的磁荷也会产生与电偶极子同样的物理效果

§1.2 电磁相互作用的场与真空中的基本实验定律

- 电荷守恒定律

  电荷不会自动产生或湮灭,除非碰上其它电荷

$$\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{j}=-\frac{d}{dt}\int_\tau d\tau\rho$$

  它反映对一个任意体积τ,若在某一段时间内发现其电量减少,则减少的电量一定是从此体积的表面S流出去了(或流进等量的负电荷).

- 叠加原理

  电磁相互作用力具有可迭加性质

$$\vec{f}=\sum_i\vec{f}_i$$

- 库仑定律

  对静止点电荷,同号相斥,异号相吸,相互作用力方向沿电荷连线方向,大小正比于电荷的电量,反比于电荷之间的距离平方

$$\vec{f}_{21}=k_1\frac{q_1q_2}{R^3}\vec{R}\qquad k_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\qquad \epsilon_0=8.854\times10^{-12}\text{库伦}^2/\text{牛顿}\cdot\text{米}^2$$

  其中$\vec{f}_{21}$是q_2对q_1的作用力, q_1对q_2的作用力为$\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}$, $\vec{R}$是从q_2指向q_1的矢量. 对现实世界存在的两块带电体,τ_1和τ_2,τ_2对τ_1的作用力$\vec{F}_{21}$为

$$\vec{F}_{21}=\int d\vec{f}_{21}=\int_{\tau_1}\int_{\tau_2}\frac{k_1\rho_1(\vec{r}')d\tau'\rho_2(\vec{r}'')d\tau''}{R^3}\vec{R}=\int_{\tau_1}d\tau'\int_{\tau_2}d\tau''\frac{k_1\rho_1(\vec{r}')\rho_2(\vec{r}'')}{R^3}\vec{R}$$

  其中:$\vec{R}=\vec{r}'-\vec{r}''$. 它包括点电荷的情形,

$$\vec{f}_{21}=\int_{\tau_1}d\tau'\int_{\tau_2}d\tau''\frac{k_1q_1\delta(\vec{r}'-\vec{r}_1)q_2\delta(\vec{r}''-\vec{r}_2)}{|\vec{r}'-\vec{r}''|^3}(\vec{r}'-\vec{r}'')=\frac{k_1q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

- 电流元之间的相互作用力
  恒定电流元$J_2d\vec{l_2}$对$J_1d\vec{l_1}$的作用力为

$$d^2\vec{F}_{21}=k_2J_1d\vec{l_1}\times(\frac{J_2d\vec{l_2}\times\vec{R}}{R^3})=\frac{k_2J_1J_2}{R^3}[(\vec{R}\cdot d\vec{l_1})d\vec{l_2}-(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2})\vec{R}]$$

  同理,电流元$J_1d\vec{l_1}$对$J_2d\vec{l_2}$的作用力为

$$d^2\vec{F}_{12}=k_2J_2d\vec{l_2}\times(\frac{J_1d\vec{l_1}\times(-\vec{R})}{R^3})=\frac{k_2J_1J_2}{R^3}[-(\vec{R}\cdot d\vec{l_2})d\vec{l_1}+(d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2})\vec{R}]$$

  其中:

$$\vec{R}=\vec{r_1}-\vec{r_2}\qquad\qquad k_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\qquad\qquad \mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{公斤}\cdot\text{米}/\text{库伦}^2$$

  因此,两电流元之间的作用力与反作用力并不一样,$\vec{F_1}+\vec{F_2}\neq0$(例:两运动点电荷$\vec{v}_2\parallel\vec{R}\perp\vec{v}_1$的情况.)$\rightarrow\frac{d\vec{P_1}}{dt}+\frac{d\vec{P_2}}{dt}\neq0$或$\vec{P_1}+\vec{P_2}\neq0$,即动量守恒不再成立. 这个问题对闭合回路不存在, 否则,我们将观察到现象,一块钉有两个独立线圈的板通电后将飞出去.

- 场,法拉第电磁感应定律
  - 场
    对两个电流元的相互作用来说,动量守恒不成立的现象启示我们,也许两个电流元构成的体系并不是一个封闭体系,还有其它携带动量的物质实在. 这种物质实在就是我们主要要讨论的电磁场. 场的概念最早是法拉第提出的.场弥漫于整个空间.源产生场,场反作用于源.场是传递源之间相互作用的载体.
    为了研究场的性质,取一个小的试探源(小到不会改变场的分布),探测一下场的行为:
    对电场,用试探电荷q_0, 它在电场中受力$\vec{f}_{\text{电}}=q_0\int d\tau'\frac{k_1\rho(\vec{r}')}{R^3}\vec{R}$
    对磁场,用试探电流元$J_0\vec{l}_0$, 它在磁场中受力$\vec{f}_{\text{磁}}=J_0d\vec{l}_0\times(\int\frac{k_2Jd\vec{l}\times\vec{R}}{R^3})$
    由于q_0,J_0小,因此ρ,J与J_0,q_0无关,试探源受力公式中有一部分与试探源性质无关,代表场的内在性质,为此定义

$$\vec{E}(\vec{r})=k_1\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{R^3}\vec{R}\qquad\qquad\vec{B}(\vec{r})=k_2\int d\vec{l}'\times\frac{J(\vec{r}')}{R^3}\vec{R}\qquad\qquad\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$$

    其中磁感应强度的公式既是比萨定律.如此,库伦定律和安培,电流元相互作用中源受力的公式分解为上述源产生场的公式和下面源在场中受力的公式的结合,

$$\vec{F}=\int d\tau\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})+\int Jd\vec{l}\times\vec{B}(\vec{r})=\int d\tau[\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})+\vec{j}\times\vec{B}(\vec{r})]$$

    特别对以速度$\vec{v}$运动,电量为q的点电荷,$Jd\vec{l}=q\vec{v}$, $\rho d\tau=q$,则它受力为,

$$\vec{f}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\qquad\text{洛伦兹公式}$$

    引入电场和磁场后,关于电磁力之间的迭加原理即转化为场的迭加原理.
  - 法拉第电磁感应定律
    它告诉我们电场和磁场的关系(磁生电).电场由电荷产生,磁场由电流即运动的电荷产生, 因而电场与磁场的关系一定与运动即时间的变化有关.
    一根闭合导线所包围的磁通的改变,将在此闭合导线上产生感应电动势,其数值等于单位时间内磁通的变化率,由此产生的感应电动势所决定的感应电流方向阻止导线内磁通的变化.

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}\qquad\mathcal{E}=\oint d\vec{l}\cdot\vec{E}\qquad\Phi=\int d\vec{S}\cdot\vec{B}$$

    其中$\vec{S}$方向与$\vec{l}$方向成右手螺旋关系.

§1.3 真空中电磁相互作用的场方程

- 麦克斯韦方程组的积分形式

1. 电荷守恒

$$\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{j}=-\int_\tau d\tau\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

2. 库伦定律

$$\vec{E}=k_1\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{R^3}\vec{R}=-k_1\int d\tau'\rho(\vec{r}')\nabla\frac{1}{R}=-\nabla\Big[\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{R}\Big]$$

定义电势(标量势)函数:

$$\phi(\vec{r})=k_1\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{R}+\text{常数}\qquad\qquad\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\phi(\vec{r})$$

因此

$$\begin{aligned}\oint_l d\vec{l}\cdot\vec{E}&=\int d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{E})=-\int d\vec{S}\cdot[\nabla\times(\nabla\phi)]=0\\ \oint d\vec{S}\cdot\vec{E}&=\int_\tau d\tau\nabla\cdot\vec{E}=-\int d\tau\nabla\cdot(\nabla\phi)=-\int d\tau\nabla^2\int d\tau'\frac{k_1\rho(\vec{r}')}{R}=-\int d\tau\int d\tau' k_1\rho(\vec{r}')\nabla^2\frac{1}{R}\\ &=-\int d\tau\int d\tau' k_1\rho(\vec{r}')(-4\pi)\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{\epsilon_0}\int d\tau\rho(\vec{r})=\frac{1}{\epsilon_0}Q_{\text{内}}\end{aligned}$$

3. 比萨定律

$$\vec{B}=\int\frac{k_2J(\vec{r}')d\vec{l}'\times\vec{R}}{R^3}=-\int k_2J(\vec{r}')d\vec{l}'\times\nabla\frac{1}{R}=\nabla\times\int\frac{k_2J(\vec{r}')d\vec{l}'}{R}$$

定义磁势(矢量势)函数:

$$\vec{A}(\vec{r})=k_2\int d\vec{l}\frac{J(\vec{r}')}{R}+\nabla\chi=\int d\tau'\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}+\nabla\chi\qquad\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

其中,χ可以是时空坐标的任意函数.注意:$\vec{A}$中非$\nabla\chi$的部分满足$\nabla\cdot\vec{A}=0$.

$$\begin{aligned}\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{B}&=\int_\tau d\tau\nabla\cdot\vec{B}=\int_\tau d\tau\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0\\ \oint_l d\vec{l}\cdot\vec{B}&=\int d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{B})=-\int d\vec{S}\cdot\nabla\times[\int d\vec{l}'\times k_2J(\vec{r}')\nabla\frac{1}{R}]=-\int d\vec{S}\cdot\int d\tau' k_2\nabla\times[\vec{j}(\vec{r}')\times\nabla\frac{1}{R}]\\ &=k_2\int d\vec{S}\cdot\int d\tau'[\vec{j}(\vec{r}')\cdot\nabla\nabla-\vec{j}(\vec{r}')\nabla^2]\frac{1}{R}]=-k_2\int d\vec{S}\cdot\int d\tau'\vec{j}(\vec{r}')\nabla^2\frac{1}{R}\\ &=4\pi k_2\int d\vec{S}\cdot\int d\tau'\vec{j}(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')=4\pi k_2\int d\vec{S}\cdot\vec{j}(\vec{r})=\mu_0J\end{aligned}$$

其中利用了关系:

$$\begin{aligned}\int d\tau'\vec{j}(\vec{r}')\cdot\nabla f(\vec{R})&=-\int d\tau'\vec{j}(\vec{r}')\cdot\nabla' f(\vec{R})=\int d\tau'\Big[\nabla'\cdot[-\vec{j}(\vec{r}')f(\vec{R})]+[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')]f(\vec{R})\Big]\\ &=-\int d\vec{S}'_\infty\cdot\vec{j}(\vec{r}')f(\vec{R})+\int d\tau'[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')]f(\vec{R})=0\end{aligned}$$

其中进一步利用了:

(a) 在无穷处无电流.

(b) 稳恒电流条件: $0 = \oint d\vec{S} \cdot \vec{j} = \int d\tau \nabla \cdot \vec{j} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{j} = 0$

4. 法拉第电磁感应定律

$$\oint_\tau d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_\tau d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

它是库伦定律给出的$\oint_l d\vec{l} \cdot \vec{E} = 0$的推广.

- 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\oint_\tau d\vec{S} \cdot \vec{j} = -\int_\tau d\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \int_\tau d\tau (\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int d\tau \rho(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \int d\tau (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\oint_l d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int d\vec{S} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \int d\tau \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_\tau d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\int_\tau d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \int_\tau d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = \int d\tau [\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + \vec{j} \times \vec{B}(\vec{r})] \quad \rightarrow \quad \int d\tau (\vec{f} - \rho\vec{E} - \vec{j} \times \vec{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

因此,从试验定律出发通过数学演绎我们得到了一组场与源之间,场与场之间的相互作用关系式. 在上述方程式中,电荷守恒方程显然不是独立的,因为$\frac{\partial \rho}{\partial t}$和$\nabla \cdot \vec{j}$可分别由其它方程得到.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{B} = 0$$

第二个方程与电荷守恒定律方程相矛盾, 第二个方程来自于在稳恒电流情况下导出的比萨定律,当考虑非稳恒情形,为保证与电荷守恒定律一致,$\nabla \times \vec{B}$应改为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

修改项$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$叫位移电流项, 它是麦克斯韦完全从理论自洽性考虑加入的,它改变了原来方程中只有磁生电,而无电生磁的现象. 修改后的方程组为,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

或以分量形式

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i E_i = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i E_j = -\frac{\partial B_k}{\partial t} \qquad \sum_{i=1}^{3} \partial_i B_i = 0 \qquad \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i B_j = \mu_0 j_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t}$$

$$f_k = \rho E_k + \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} j_i B_j$$

其中场方程部分即是麦克斯韦方程组. 上述方程组描述了真空中电磁相互作用的所有现象. 电生磁,磁生电,变化的电磁场可以交替产生,即使无源$\rho = 0, \vec{j} = 0$,仍可有电磁场,这就是电磁波,它是作为独立于源的纯由场组成的物理实体.

麦克斯韦方程组对物质源并不对称,其原因就是磁单极没有被发现,否则,应加入磁单极密度ρ_m和磁单极流密度$\vec{j}_m$的贡献,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla \times \vec{E} = -\vec{j}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

§1.4 介质中电磁相互作用的场方程

- 物质的电磁性质

现实世界并不是真空,而是由物质构成的.宏观范围的物质都由原子组成, 而原子是一个以带正电的原子核为中心,周围绕着带负电的电子云旋转的系统, 这里起支配作用的是电磁相互作用,即原子与电子,电子与电子之间的电磁相互作用力, 它决定了整个原子的行为.每个原子都是一个小的电磁系统,众多的小电磁系统累积起来构成大的电磁系统,并产生各种各样复杂的复合电磁效应,形成绚丽多彩的现实世界.

原则上每个原子的电磁相互作用行为计算清楚了,宏观物质的电磁行为就知道了. 实际上这是不可能的,因为物体中原子的数目至少是10^{23}量级,10^{23}量级的迭加是无法实现的,并且每个原子系统的详细行为也是无法知道的.因此,物质的电磁行为不可能通过把其中的每个原子的电磁行为仔细研究清楚再讨论,而只能抓出具有共性的特点,并利用这些特点讨论.从更物理的角度看,单个原子的精细行为在宏观上通常是没有效果的,只有那些大部分原子都具有的性质才会有宏观效应.

物质中原子体系具有共性的特点是:
从电荷角度看,
每个原子系统都是一个中心为正电荷(原子实)周围为负电荷的系统.若无外界影响,负电荷的分布是对称的,从外界看,整个原子是电中性的.而物体整体也就是电中性的.若有外界影响,如存在外电场,则正电荷中心与有效负电荷中心发生偏离,形成一电偶极子. $\vec{p} = q\vec{l}$,并且物质中的小电偶极子都沿外电场排列,这个过程叫极化,它形成宏观电场.定义极化强度

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta\tau} = n_p \vec{p} \qquad n_p：\text{单位体积的电偶极距}$$

从电流角度看,
每个原子系统中绕原子核旋转的电子形成一小电流圈,构成一小磁偶极子.当无外界影响时, 这些小磁偶极子方向是杂乱的,其对外界的影响相互抵消,不产生宏观效应.当有外界影响时,如有外场,小磁偶极子顺序排列,这个过程叫磁化,它形成宏观磁场.定义磁化强度

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta\tau} = n_m \vec{m} \qquad n_m：\text{单位体积的磁偶极距}$$

极化强度和磁化强度与电场强度和磁感应强度的关系称为物质的电磁性质方程,

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}) \qquad \vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{B})$$

其中$\vec{E}, \vec{B}$是总电场和总磁场,它们是外场和物质中电荷,电流产生的场的迭加,反映的是物质对电磁场的响应. 原则上从物质的微观理论可推导出上述方程,但由于计算的困难,通常是通过实验定出来.

- 极化电荷与磁化电流(非导体情况)

  电磁作用只识别电荷,电流,对电中性的物体是透明的.电磁场对物质的作用实际上是电磁场对物质中携带在原子核,电子上的电荷及其运动形成的电流的作用.这些电荷和电流附着在原子上,对固态物质原子又被固定在晶格上,因此它们是被束缚住的.产生极化效应的电荷称为极化电荷,其电荷密度记为ρ', 产生磁化效应的电流称为磁化电流,其电流密度记为$\vec{j}'$. 对应的自由电荷的电荷密度记为ρ_f,传导电流的电流密度记为$\vec{j}_c$.

  以下计算$\vec{P},\vec{M}$与$\rho',\vec{j}'$的关系.

  由于ρ'是由于极化造成的,问题化为一堆由极化强度$\vec{P}$描述的小偶极子产生的ρ'是多少? 我们计算它们产生的标量势,一方面

$$\phi(\vec{r})=\int d\tau'\frac{k_1\rho'(\vec{r}')}{R}+\int dS'\frac{k_1\sigma'(\vec{r}')}{R}+\text{常数}\qquad\qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$$

  另一方面,利用电偶极子产生标量势的公式将所有电偶极子对标量势的贡献求和起来

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int\frac{k_1\vec{R}\cdot\vec{P}(\vec{r}')d\tau'}{R^3}+\text{常数}=\int d\tau' k_1(\nabla'\frac{1}{R})\cdot\vec{P}+\text{常数}=\int d\tau' k_1[\nabla'\cdot(\frac{\vec{P}}{R})-\frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{R}]+\text{常数}\\ &= \int d\vec{S}'\cdot\frac{k_1\vec{P}}{R}+\int d\tau'\frac{k_1(-\nabla'\cdot\vec{P})}{R}+\text{常数}=\int d\tau'\frac{k_1(-\nabla'\cdot\vec{P})}{R}+\int dS'\frac{k_1\vec{n}'\cdot\vec{P}}{R}+\text{常数}\end{aligned}$$

  对比两式,

$$\rho'(\vec{r})=-\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})\qquad\qquad \sigma'(\vec{r})=\vec{n}\cdot\vec{P}(\vec{r})$$

  它反应如下物理现象:

  1. 均匀极化时无体束缚电荷.
  2. 极化在物质表面产生束缚面电荷.

  由于$\vec{j}'$是由于磁化造成的,问题化为一堆由极化强度$\vec{P}$描述的小电偶极子和磁化强度$\vec{M}$描述的小磁偶极子产生的$\vec{j}'$是多少?

$$\vec{j}'=\vec{j}_1+\vec{j}_2$$

  其中,$\vec{j}_1$极化随时间变化而造成的电流,$\vec{j}_2$为磁偶极子顺序排列产生的电流. 对极化部分造成的电流,利用电荷守恒定律,

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}_1=0$$

  结合ρ'与$\vec{P}$的关系,

$$\vec{j}_1=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

  对磁偶极子顺序排列产生的电流,我们计算它们产生的矢量势,一方面

$$\vec{A}(\vec{r})=\int d\tau'\frac{k_2\vec{j}_2(\vec{r}')}{R}+\int dS'\frac{k_2\vec{i}'(\vec{r}')}{R}+\text{常数}\qquad\qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$$

  另一方面,利用磁偶极子产生矢量势的公式将所有磁偶极子对矢量势的贡献求和起来

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \int\frac{k_2\vec{M}(\vec{r}')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}+\text{常数}=\int d\tau' k_2\vec{M}\times\nabla'\frac{1}{R}+\text{常数}=-\int d\tau' k_2(\nabla'\frac{1}{R})\times\vec{M}+\text{常数}\\ &= -k_2\int[\nabla'\times(\frac{\vec{M}}{R})-\frac{1}{R}(\nabla'\times\vec{M})]+\text{常数}=\int d\tau'\frac{k_2(\nabla'\times\vec{M})}{R}+\int dS'\frac{k_2\vec{M}'\times\vec{n}'}{R}+\text{常数}\end{aligned}$$

对比两式,

$$\vec{j}_2(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \qquad\qquad \vec{i}'(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}$$

结合极化电流的贡献

$$\vec{j}'(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r})}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \qquad\qquad \vec{i}'(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{n}$$

它反应如下物理现象:

1. 均匀磁化并且极化不随时间变化时无体磁化电流.
2. 磁化在物质表面产生磁化面电流.

本节未讨论的另一种物质是导体,其特点是最外层的电子可以脱离原子在导体中自由运动. 在以后的章节对它详细研究.

- 物质中的电磁场方程与电磁性质方程
  - 物质中的电磁场方程
    考虑进物质,从电磁作用的角度来说,只是在原来真空系统中加入了一些极化电荷和磁化电流(物质的其它内容对电磁作用是透明的),即

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho') \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_c + \vec{j}') + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

    第一个方程进一步化为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

    第二个方程进一步化为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_c + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times (\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}) = \vec{j}_c + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P})$$

    定义

$$\text{电位移矢量:} \quad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad\qquad \text{磁场强度矢量:} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

    则物质中的电磁场方程为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

    加上物质的电磁性质方程和洛伦兹力公式,就得到了对含物质的电磁现象完整描述的方程组.
  - 物质中的电磁性质方程
    * 电介质:实验给出

$$\vec{P} = \chi_e\epsilon_0\vec{E}$$

χ_e是介质的极化率,若χ_e与$\vec{E}$无关,则叫线性介质, 其特点是介质原子正负电荷中心偏离距离正比于电场$\vec{E}$.

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

$\epsilon_r = 1 + \chi_e$ 相对介电常数 $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ 绝对介电常数

对非线性介质

$$D_i = \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}E_j + \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}E_jE_k + \sum_{j,k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijkl}E_jE_kE_l + \cdots$$

* 导体:欧姆定律

$$J = \frac{\Delta\phi}{R} \quad R = \lambda\frac{l}{S} \quad R: \text{电阻} \ \ \lambda: \ \ \text{电阻率} \ \ \gamma = \frac{1}{\lambda} \ \ \text{电导率}$$

$$j = \frac{J}{S} = \frac{\Delta\phi}{RS} = \frac{S}{\lambda}\frac{l\Delta\phi}{S} = \frac{E}{\lambda} = \gamma E$$

因此

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

* 磁介质
  - 顺磁,逆磁介质

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

χ_m是介质的磁化率

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

$\mu_r = 1 + \chi_m$ 相对磁导率 $\mu = \mu_0\mu_r$ 绝对磁导率

μ_r大于1的是顺磁介质,小于1的是逆磁介质.

- 铁磁材料
  在H小的区域,B与H是线性关系,μ_r近似为常数,但很大.当H大到一定程度, $\mu_r \sim 1$,达到饱和状态.
- 硬磁材料
  μ_r与磁化历史有关. 当H从无到有,又从有到无时,出现剩余磁矩.
- 永磁材料
  磁矩已全部达到饱和,$\chi_m = 0, \vec{M} = \vec{M}_0, \ \ \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0$

§1.5 电磁场的边值关系

由于物质的存在,会出现物质与物质,物质与真空的交界面.在这些界面上会累积面电荷和电流,它们的存在会造成电磁场的不连续,这时微分方程不成立,因此我们回到积分形式的场方程,并把它用到界面上进行讨论.

- 法向分量
  对第一个场方程,$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$其积分形式为$\oint d\vec{S}\cdot\vec{D} = \int d\tau\rho_f$, 考虑一通过界面的面积为$\Delta S$的小圆柱体$\tau$,计$\vec{n}$为从介质1指向介质2的界面法向单位矢量$\Delta\vec{S} = \vec{n}\Delta S$,则

$$\sigma_f = \frac{\int d\tau\rho_f}{\Delta S} = \frac{1}{\Delta S}\oint_\tau d\vec{S}\cdot\vec{D} = \frac{1}{\Delta S}[\vec{D}_1\cdot(-\Delta\vec{S}) + \vec{D}_2\cdot\Delta\vec{S}] = \vec{D}_1\cdot(-\vec{n}) + \vec{D}_2\cdot\vec{n} = -D_{1n} + D_{2n}$$

因此

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f$$

对第二个场方程的讨论同第一个场方程,只需作代换$\vec{D}\to\vec{B}$, $\rho_f\to 0$,$\sigma_f\to 0$,因此

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

- 切向分量

  对第三个场方程,$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_c+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$其积分形式为$\oint d\vec{l}\cdot\vec{H}=\int d\vec{S}\cdot(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$, 考虑一通过界面的小回路,回路在介质1和2两边的沿切向方向的边长都为Δl, 计$\vec{n}$为从介质1指向介质2的界面法线单位矢量, $\vec{t}$为回路包围表面的法向(界面的切向)单位矢量,则

$$\begin{aligned}\vec{t}\cdot\vec{i}_c\Delta l &= \vec{t}\cdot[\vec{i}_c\Delta l+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Delta l\delta]\Big|_{\delta\to 0}=\int d\vec{S}\cdot(\vec{j}_c+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})=\oint d\vec{l}\cdot\vec{H}=\Delta l[\vec{H}_1\cdot(-\vec{t}\times\vec{n})+\vec{H}_2\cdot(\vec{t}\times\vec{n})]\\ &= \Delta l\vec{t}\cdot[\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]\end{aligned}$$

  考虑到$\vec{t}$在界面上是任意的,而$\vec{i}_c$和$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)$无垂直界面的分量,

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_c$$

  对第四个场方程的讨论同第三个场方程,只需作代换$\vec{H}\to\vec{E}$, $\vec{D}\to\vec{B}$, $\vec{j}_c\to 0$,$\vec{i}_c\to 0$,因此

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$

  因此,$\vec{E}$在界面上切向分量连续,界面上累积的面电荷造成$\vec{D}$在界面两端有阶跃,$\vec{B}$在界面上法向分量连续,界面上累积的面电流造成$\vec{H}$在界面两端有阶跃.

§1.6 电磁相互作用能量动量的转化与守恒

- 场和电荷系统能动量转化和守恒定律的一般形式

  为描述电磁场中的能动量及其传播,先定义如下物理量:

  - 场的能量密度w:它是单位体积的场所带的能量,是时空坐标的函数$w=w(\vec{r},t)$
  - 场的动量密度$\vec{g}$:它是单位体积的场所带的动量,是时空坐标的函数$\vec{g}=\vec{g}(\vec{r},t)$
  - 场的能流密度$\vec{S}$:它描述能量的传播,它大小等于单位时间垂直流过单位横截面的能量,方向指向能量传播的方向,是时空坐标的函数$\vec{S}=\vec{S}(\vec{r},t)$
  - 场的动量流密度$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}$:它描述动量的传播, $\Delta\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}=\Delta\vec{p}$定义为单位时间通过面元$\Delta\vec{S}$流出的动量,是时空坐标的函数$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}=\overleftrightarrow{\mathcal{T}}(\vec{r},t)$

  考虑空间某区域V, 其表面S,设V内有电荷电流分布$\rho,\vec{j}$,则

  - 能量转化与守恒定律要求: 单位时间通过表面流入V的能量等于单位时间场对V内电荷所做的功(即功率)与V内单位时间电磁场能量的增加之和. 数学表达为

$$-\oint_V d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}=\int_V dV\vec{f}\cdot\vec{v}+\frac{d}{dt}\int_V dVw$$

    其中,$\vec{f}$是场对电荷作用力密度,$\vec{v}$是电荷运动速度. 利用$\oint_V d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}=\int_V dV\nabla\cdot\vec{S}$. 上述数学表达的微分形式可化为

$$-\nabla\cdot\vec{S}=\vec{f}\cdot\vec{v}+\frac{\partial w}{\partial t}$$

– 动量转化与守恒定律要求: 单位时间通过表面流入V的动量等于V内电荷所受的力与V内单位时间电磁场动量的增加之和. 数学表达为

$$-\oint_V d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}=\int_V dV\vec{f}+\frac{d}{dt}\int_V dV\vec{g}$$

利用$\oint_V d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}=\int_V dV\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}$. 上述数学表达的微分形式可化为

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}=\vec{f}+\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}$$

我们以下将电荷守恒,能量转化与守恒,动量转化与守恒定律作一对比,

物理量	密度	流密度	守恒定律	守恒荷
电荷	ρ	$\vec{j}$	$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$	$Q=\int dV\rho$
能量	w	$\vec{S}$	$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{f}\cdot\vec{v}=0$	$E_{\text{能量}}=\int dVw$
动量	$\vec{g}$	$\overleftrightarrow{\mathcal{T}}$	$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}}+\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+\vec{f}=0$	$\vec{P}_{\text{动量}}=\int dV\vec{g}$

- 能量密度与能流密度

将洛伦兹力用于一团密度为ρ_f,速度为$\vec{v}$的自由电荷,

$$\begin{aligned}\vec{f}\cdot\vec{v} &= (\rho_f\vec{E}+\rho_f\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}=\rho_f\vec{v}\cdot\vec{E}=\vec{j}_c\cdot\vec{E}=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ &= -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

对比能量转化与守恒定律的微分形式,我们发现能量转化与守恒定律确实是成立的, 只要

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\qquad\qquad\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

对第二个式子,具体讨论介质的电磁性质方程为$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$和$\vec{D}=\epsilon\vec{E}$的情况(它包括真空的情形),这时

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\epsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$$

因此

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$$

- 动量密度与动量流密度

同样将洛伦兹力用于一团密度为ρ_f,速度为$\vec{v}$的自由电荷, 为简单,我们只讨论真空的情况

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \rho_f\vec{E}+\vec{j_c}\times\vec{B}=(\nabla\cdot\epsilon_0\vec{E})\vec{E}+(\nabla\times\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\frac{\partial\epsilon_0\vec{E}}{\partial t})\times\vec{B}\\ &= \epsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\\ &= \epsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}+(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}]-\epsilon_0[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}]+\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}+(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}]-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})\\
&= \epsilon_0[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}-(\nabla\vec{E})\cdot\vec{E}]+\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}-(\nabla\vec{B})\cdot\vec{B}]-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})\\
&= \epsilon_0[\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\frac{1}{2}\nabla E^2]+\frac{1}{\mu_0}[\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B})-\frac{1}{2}\nabla B^2]-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})\\
&= \epsilon_0\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\overrightarrow{I}}E^2)+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\overrightarrow{I}}B^2)-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})
\end{aligned}
$$

对比动量转化与守恒定律的微分形式,我们发现动量转化与守恒定律确实是成立的, 只要

$$
\vec{g}=\epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\qquad\qquad \overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{J}}}=-\epsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\overrightarrow{I}}(\epsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)
$$

- 电磁能量传输

  在电磁波情形中,能量在场中传播容易理解.但在稳恒电流或低频交流电情况下,通常只需解电路方程,不必研究电磁场场量,往往造成误解,认为能量是通过电路传到负载的.

  例如:对一段流有电流的导线,导线的中轴取为z轴,两端截面分别为A和B,导线侧表面C. A,B上电场沿z轴方向与电流方向相同,因而在A,B面上能流密度方向无z方向分量,能量不能从A惑B面流入或流出导体,对侧面C来说,

$\vec{E}=E_t\vec{n}_z+E_n\vec{n}_r\quad \epsilon_0E_n=\sigma\quad E_t$为导体内的$z$方向电场　　$\vec{H}=\frac{J}{2\pi a}\vec{n}_\phi\quad \vec{n}_\phi$：侧表面垂直于$z$方向的切矢量

因此

$$
\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{J}{2\pi a}(-E_t\vec{n}_r+E_n\vec{n}_z)=\frac{J}{2\pi a}(-E_t\vec{n}_r+\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}_z)
$$

沿z方向的能流无法进出导体,但沿$\vec{n}_r$方向的能流,由于与E_t与J方向一致(JE_t大于0)总是流入导体的,因而能量总是从导线侧面流入导体内,而不是象直观想象的,沿电流方向顺导线流入的.单位时间从侧面C(半径为a,长为l)流入的能量为:

$$
|\vec{S}|2\pi al=\frac{JE_t}{2\pi a}2\pi al=JE_tl=JV_{AB}=J^2R_{AB}\quad V_{AB},R_{AB}：导线两端的电势差,电阻
$$

这个能量正好等于单位时间这段导线上所消耗的热能
如果所讨论的是电池,A,B面上同样无能量流出入,能量只能由侧面流出入.由于在电池内部E与J反向,因而$\vec{S}_r=-\frac{J}{2\pi a}E_t\vec{n}_r$横为正,即能量恒是从电池侧面流出的.

因此,对一个供电回路,能量不是沿导线内部传递给负载的,而是从电池表面流到空间, 再从空间(主要是导线表面附近)流入导线和负载上.那种认为能量是从传输导线内电子运动动能沿导线传来的观点是错误的.(否则,对交流电,电流随时改变方向,能量则一时流来,一时流去),事实上,若从$\vec{J}=ne\vec{v}$估计,取$\dot{J}$ =1安/毫米^2,$e=1.6\times10^{-19}$库伦,$n=10^{23}$/厘米^2, 得$|\vec{v}|=6\times10^{-5}$米/秒,如此小的电子平均漂移速度不可能供给负载上消耗的能量.

- 张量力

  若$\frac{d}{dt}\int dV\vec{g}=0$(稳恒情形),则$\vec{F}\equiv\int dV\vec{f}=\oint d\vec{S}\cdot(-\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{J}}})$. 它反应一闭合体积所有电荷所受的电磁力之和可以用这个体积表面的面积力来代表.$-\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{J}}}$是单位表面所受的力. 它告诉我们在任一表面附近,若有电磁场,则这个表面就要受力.

考虑一表面,法向方向单位矢量$\vec{n}$, 电场与$\vec{n}$的夹角θ_E, 电场投影所在的切向方向单位矢量$\vec{e}_E$, 磁场与$\vec{n}$的夹角θ_B, 磁场投影所在的切向方向单位矢量$\vec{e}_B$. 此表面单位表面所受的力为

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= -\vec{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{J}}} = \epsilon_0(\vec{n}\cdot\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{n}E^2)\frac{1}{\mu_0}(\vec{n}\cdot\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{n}B^2) \\
&= (E\cos\theta_E\vec{n} + E\sin\theta_E\vec{e}_E)\epsilon_0 E\cos\theta_E + (B\cos\theta_B\vec{n} + B\sin\theta_B\vec{e}_B)\frac{B}{\mu_0}\cos\theta_B \\
&= \vec{f}_E + \vec{f}_B \\
\vec{f}_E &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(\vec{n}\cos 2\theta_E + \vec{e}_E\sin 2\theta_E) \\
\vec{f}_B &= \frac{1}{2\mu_0}B^2(\vec{n}\cos 2\theta_B + \vec{e}_B\sin 2\theta_B)
\end{aligned}$$

在天体演化中,恒星在初中期内部核反应产生电磁辐射造成辐射压力与万有引力抵消, 使恒星处于平衡状态,到晚期,核能耗尽,辐射压力减小,不能维持与引力的平衡,星体将发生坍塌,收缩,形成白矮星,中子星和黑洞.

§2.1 静电势及其微分方程

静态电磁场条件: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$

麦克斯韦方程组化为: $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_c\end{cases}$

因而静电场与静磁场是互不关联的,可以分别进行讨论.

- 电势及其满足的微分方程

  $\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\vec{D}=\epsilon\vec{E}\\ \vec{f}=\rho\vec{E}\end{cases}$ 边条件:$\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f\\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\end{cases}$ $\vec{n}:1\to 2$

  - 电势

    $\oint d\vec{l}\cdot\vec{E}=\int d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{E})=0$ $\int_1^2 d\vec{l}\cdot\vec{E}$与路径无关,只是起终点的函数, 可定义电势函数

    $$\phi_2-\phi_1=-\int_1^2 d\vec{l}\cdot\vec{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{E}=-\nabla\phi$$

    如此定义的电势只能准到相差一个任意常数,实际讨论中必须作出约定,即电势的零点, 通常约定:$\phi|_\infty=0$ $\to$ $\phi_1=-\int_1^\infty d\vec{l}\cdot\vec{E}=\int_1^\infty d\vec{l}\cdot\vec{f}_{\text{单位电荷}}$

    这样约定下ϕ的意义为:把单位正电荷从场点移到无穷远(或把单位负电荷从无穷远移到场点)电场力所做的功.

    由梯度的意义知,电场是电势的最大空间变化率的负值,方向垂直于等势面.(电力线与等势面垂直,方向由高电势指向低电势).

    $$\phi(\vec{r})=\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}+\text{常数}$$

  - 电势满足的微分方程

    当空间的电荷分布已知时,可直接计算电势分布.但对很多问题,ρ的分布事先是不知道的,需要其它办法求ϕ

    $$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \qquad &\to \qquad \nabla(\epsilon\nabla\phi)=-\rho_f\\ \vec{D}_{2n}-\vec{D}_{1n}=\sigma_f \qquad &\to \qquad \epsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}-\epsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=-\sigma_f\\ \phi_2-\phi_1=-\int_1^2 d\vec{l}\cdot E \qquad &\to \qquad \phi_2-\phi_1=-\frac{1}{\epsilon}\vec{n}\cdot\vec{\tau}_f\end{aligned}$$

    其中,对第一个方程,应注意ϵ一般是空间坐标的函数, 因此不能拿到微分符号外面.对第二个方程,我们利用了关系$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\vec{n}\cdot\nabla\phi$. 对第三个方程,我们将从1到2路径选为正好通过界面,方向沿界面法向$\vec{n}$, $d\vec{l}=\vec{n}dl$,界面的偶极层密度$\tau_f=\sigma_f dl$, 它与界面电场大小的关系$E=\frac{\sigma_f}{\epsilon_0}=\frac{\tau_f}{\epsilon_0 dl}$, 方向与电场方向相同, $\vec{E}=\frac{\vec{\tau}_f}{\epsilon_0 dl}$, 因此$\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\vec{\tau}_f}{\epsilon_0 dl}\cdot\vec{n}dl=\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\tau}_f\cdot\vec{n}$

- 静电场能量

$$W=\frac{1}{2}\int_\infty d\tau\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\int_\infty d\tau(-\nabla\phi)\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\int_\infty d\tau[-\nabla\cdot(\phi\vec{D})+\phi\nabla\cdot\vec{D}]=-\frac{1}{2}\oint_\infty d\vec{S}\cdot\phi\vec{D}+\frac{1}{2}\int_\infty d\tau\rho_f\phi$$

对静电场$\phi\Big|_{r\to\infty}\sim\frac{1}{r}$, $D\Big|_{r\to\infty}\sim\frac{1}{r^2}$, 因此$\oint_\infty d\vec{S}\cdot\phi\vec{D}\to 0$.

$$W=\frac{1}{2}\int d\tau\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\int d\tau\rho_f\phi=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d\tau d\tau'\frac{\rho_f(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{R}$$

对真空中的电荷分布,$\rho(\vec{r})=\rho_f(\vec{r})$, 上式化为

$$W=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d\tau d\tau'\frac{\rho_f(\vec{r})\rho_f(\vec{r}')}{R}$$

若真空中有两组电荷分布组成的体系,$\rho=\rho_1+\rho_2$, 则$W=W_1+W_2+W_{相互}$

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d\tau d\tau'\frac{1}{R}[\rho_1(\vec{r})+\rho_2(\vec{r})][\rho_1(\vec{r}')+\rho_2(\vec{r})']\\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d\tau d\tau'\frac{1}{R}[\rho_1(\vec{r})\rho_1(\vec{r}')+\rho_2(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')+\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')+\rho_2(\vec{r})\rho_1(\vec{r}')]\\ W_{相互} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d\tau d\tau'\frac{1}{R}\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r})'=\int d\tau\rho_1\phi_2=\int d\tau\rho_2\phi_1\end{aligned}$$

电荷ρ在外场ϕ中的能量:

$$W_{相互}=\int d\tau\rho\phi$$

§2.2 唯一性定理及应用

唯一性定理告诉我们哪些因素可以完全确定静电场.对实际问题,往往需要根据给定的条件分析,提出尝试解.若尝试解满足唯一性定理的条件,则定理保证它是问题的唯一解.

- 静电问题唯一性定理

  考虑一个区域τ,由边界$S_0,S_1,S_2,\cdots$所包围, S_0是最外的包围面, $S_1,S_2,\cdots$是内部空洞的包围面. τ内介质是分区连续的, 即$\epsilon_i(\vec{r})$是坐标的连续函数,且$\epsilon_i>0$,τ内ρ_f,σ_f分布已知,且下列条件之一成立:

  $$(1).\quad \phi\Big|_{S_i}\text{已知}\qquad\qquad (2).\quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_i}=E_n\Big|_{S_i}\text{已知}$$

  其中,若S_0在无穷远,则无穷远处的条件改为: $\phi\Big|_{r\to\infty}\to\frac{1}{r}$或$E\Big|_{r\to\infty}\to\frac{1}{r^2}$. (它称为无穷远自然边条件)
  则,由静电场微分方程及边条件决定的τ中的电场唯一.

  为方便,我们选只有外边界S_0,无内边界$S_1,S_2,\cdots$,且介质分两个区τ_1,τ_2的情况证明上述定理. 设τ_1,τ_2的交界面S', 将S_0分为两部分$S_0=S_{01}+S_{02}$,S_{01}为τ_1的外表面, S_{02}为τ_2的外表面. 设有两组解ϕ',ϕ''同时满足上述条件及方程, 用下标1,2标记在τ_1,τ_2的解,则

  $$\begin{aligned}\nabla\cdot[\epsilon_1\nabla\phi_1'] &= -\rho_{f1} & \nabla\cdot[\epsilon_2\nabla\phi_2'] &= -\rho_{f2}\\ \nabla\cdot[\epsilon_1\nabla\phi_1''] &= -\rho_{f1} & \nabla\cdot[\epsilon_2\nabla\phi_2''] &= -\rho_{f2}\\ \phi_1'\Big|_{S'} &= \phi_2'\Big|_{S'} & (\epsilon_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}-\epsilon_2\frac{\partial\phi_2'}{\partial n})\Big|_{S'} &= \sigma_f\\ \phi_1''\Big|_{S'} &= \phi_2''\Big|_{S'} & (\epsilon_1\frac{\partial\phi_1''}{\partial n}-\epsilon_2\frac{\partial\phi_2''}{\partial n})\Big|_{S'} &= \sigma_f\end{aligned}$$

及

$$\phi_1'\Big|_{S_{01}} = \phi_1''\Big|_{S_{01}} = \text{已知} \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial}{\partial n}\phi_1'\Big|_{S_{01}} = \frac{\partial}{\partial n}\phi_1''\Big|_{S_{01}} = \text{已知}$$
$$\phi_2'\Big|_{S_{02}} = \phi_2''\Big|_{S_{02}} = \text{已知} \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial}{\partial n}\phi_2'\Big|_{S_{02}} = \frac{\partial}{\partial n}\phi_2''\Big|_{S_{02}} = \text{已知}$$

它们可化为

$$\nabla\cdot[\epsilon_1\nabla(\phi_1'-\phi_1'')] = 0 \qquad (\phi_1'-\phi_1'')\Big|_{S'} = (\phi_2'-\phi_2'')\Big|_{S'}$$
$$\nabla\cdot[\epsilon_2\nabla(\phi_2'-\phi_2'')] = 0 \qquad \epsilon_1\frac{\partial}{\partial n}(\phi_1'-\phi_1'')\Big|_{S'} = \epsilon_2\frac{\partial}{\partial n}(\phi_2'-\phi_2'')\Big|_{S'}$$
$$(\phi_1'-\phi_1'')\Big|_{S_{01}} = 0 \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial}{\partial n}(\phi_1'-\phi_1'')\Big|_{S_{01}} = 0$$
$$(\phi_2'-\phi_2'')\Big|_{S_{02}} = 0 \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial}{\partial n}(\phi_2'-\phi_2'')\Big|_{S_{02}} = 0$$

计算

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_1} d\tau\epsilon_1|\vec{E}_1'-\vec{E}_1''|^2+\int_{\tau_2} d\tau\epsilon_2|\vec{E}_2'-\vec{E}_2''|^2 = \int_{\tau_1} d\tau\epsilon_1|\nabla(\phi_1'-\phi_1'')|^2+\int_{\tau_2} d\tau\epsilon_2|\nabla(\phi_2'-\phi_2'')|^2\\
&=\int_{\tau_1} d\tau\epsilon_1\nabla(\phi_1'-\phi_1'')\cdot\nabla(\phi_1'-\phi_1'')+\int_{\tau_2} d\tau\epsilon_2\nabla(\phi_2'-\phi_2'')\cdot\nabla(\phi_2'-\phi_2'')\\
&=\int_{\tau_1} d\tau\{\nabla\cdot[\epsilon_1(\phi_1'-\phi_1'')\nabla(\phi_1'-\phi_1'')-(\phi_1'-\phi_1'')\nabla\cdot[\epsilon_1\nabla(\phi_1'-\phi_1'')]\}\\
&\quad+\int_{\tau_2} d\tau\{\nabla\cdot[\epsilon_2(\phi_2'-\phi_2'')\nabla(\phi_2'-\phi_2'')-(\phi_2'-\phi_2'')\nabla\cdot[\epsilon_2\nabla(\phi_2'-\phi_2'')]\}\\
&=\oint_{\tau_1} d\vec{S}_1\cdot[\epsilon_1(\phi_1'-\phi_1'')\nabla(\phi_1'-\phi_1'')]+\oint_{\tau_2} d\vec{S}_2\cdot[\epsilon_2(\phi_2'-\phi_2'')\nabla(\phi_2'-\phi_2'')]\\
&=\oint_{S_{01}} d\vec{S}_1\cdot[\epsilon_1(\phi_1'-\phi_1'')\nabla(\phi_1'-\phi_1'')]+\oint_{S_{02}} d\vec{S}_2\cdot[\epsilon_2(\phi_2'-\phi_2'')\nabla(\phi_2'-\phi_2'')]\\
&\quad+\oint_{S'} d\vec{S}_1\cdot[\epsilon_1(\phi_1'-\phi_1'')\nabla(\phi_1'-\phi_1'')]-\oint_{S'} d\vec{S}_2\cdot[\epsilon_2(\phi_2'-\phi_2'')\nabla(\phi_2'-\phi_2'')]=0
\end{aligned}$$

因此

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_1'' \qquad\qquad \vec{E}_2' = \vec{E}_2''$$

解唯一.
对边界和分区更复杂的情况是一样的. 因此只要边界S上的标量势或电场的法向分量已知,解就唯一.

- 有导体存在时的唯一性定理

  导体内部有很多可以自由活动的电子,将导体放入已知的外电场中,导体上电荷受电场力作用便要重新分布,直到它产生的感应电场和外电场大小一样,方向相反,使导体内总电场为零.自由电子便不再定向运动达到平衡状态,这时导体是等势体(因$\phi_1-\phi_2=\int_1^2 d\vec{l}\cdot\vec{E}$),导体表面是等势面, 且因导体内部$\vec{E}=0\to\rho_f=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\epsilon\vec{E})=0$,导体内部不带电,电荷分布在导体表面上,由$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\quad\vec{n}\cdot(\epsilon_2\vec{E}_2-\epsilon_1\vec{E}_1)=\sigma_f$知在导体外表面$\vec{E}_t=0\quad\vec{E}_n=\frac{\sigma_f}{\epsilon}\vec{n}$.

  考虑与上节同样的区域,不过$S_1,S_2,\ldots$中有一些是导体,则若τ分区连续, $\epsilon_i>0$,τ内ρ_f,σ_f已知,且对导体边界,下列条件之一成立:
  (1).导体上电势已知.

(2).导体上总电荷已知.
则,解唯一.

为方便,我们选只有一个外边界S_0和一个内边界S_1的情况,内边界包围的是导体.内外边界之间的介质介电常数ϵ.设ϕ', ϕ''满足:

$$\nabla \cdot [\epsilon \nabla \phi'] = -\rho_f \qquad \oint_{S_1} dS\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial n} = -Q \quad 或 \quad \phi'\Big|_{S_1} = 常数$$

$$\nabla \cdot [\epsilon \nabla \phi''] = -\rho_f \qquad \oint_{S_1} dS\epsilon \frac{\partial \phi''}{\partial n} = -Q \quad 或 \quad \phi''\Big|_{S_1} = 常数$$

其中S_0上的边条件同前面一样,在这里未写下.上述方程边条件可化为

$$\nabla \cdot [\epsilon \nabla (\phi' - \phi'')] = 0 \qquad \oint_{S_1} dS\epsilon \frac{\partial}{\partial n}(\phi' - \phi'') = 0 \quad 或 \quad (\phi' - \phi'')\Big|_{S_1} = 0$$

计算

$$\begin{aligned}
&\int d\tau \epsilon |\vec{E}' - \vec{E}''|^2 = \int d\tau \epsilon \nabla(\phi' - \phi'') \cdot \nabla(\phi' - \phi'') \\
&= \int d\tau \{\nabla[\epsilon(\phi' - \phi'')\nabla(\phi' - \phi'')] - (\phi' - \phi'')\nabla \cdot [\epsilon \nabla(\phi' - \phi'')]\} \\
&= \oint_{S_0} d\vec{S} \cdot \epsilon(\phi' - \phi'')\nabla(\phi' - \phi'') + \oint_{S_1} d\vec{S} \cdot \epsilon(\phi' - \phi'')\nabla(\phi' - \phi'') \\
&= \epsilon(\phi' - \phi'')\Big|_{S_1} \oint_{S_1} d\vec{S} \cdot \epsilon \nabla(\phi' - \phi'') = 0
\end{aligned}$$

S_0边界上的讨论同前

因此

$$\vec{E}' = \vec{E}''$$

解唯一. 对边界和分区更复杂的情况是一样的.

- 应用

  例1: 一个空心导体腔,导体上可以带也可以不带电荷

  若腔内无电荷:

  导体内表面上电通量之和为0,腔内$\nabla^2\phi = 0 \rightarrow$腔内$\phi$ =常数, $\vec{E} = 0$, 由$\sigma_f = \epsilon E_n$, 腔内表面无电荷,电荷只能分布在外表面(这时,若导体上所带的总电量Q或外电场$\vec{E}$改变,腔内$\vec{E}$仍维持0,内表面仍维持无电荷,但ϕ的绝对数值要改变)这个现象叫静电屏蔽.此性质在电场随时间变化的情形下也成立. 因此在一个金属腔如钢筋水泥的房屋内, 火车中·等,外界电磁场基本被屏蔽,无线电接收效果就很差.另外,高压线带电操作,需穿上金属网作成的衣服也是同样道理(高电压,无电势差).历史上,卡文迪许正是利用这个性质来验证库伦定律的正确性.因为所有上述性质的基础是库伦定律, 如果我们实验上发现静电屏蔽现象是不对的或有一点点小的破坏,反过来就意味着理论的基础库伦定律有问题.卡文迪许实验就是寻找一个空心导体腔内壁上的电荷,结果是否定的.因而库伦定律是正确的,到目前为止,人们还没有发现破坏它的迹象.

  若腔内有电荷,总电量设为Q

  导体外表面电通量之和为$\frac{1}{\epsilon}(Q + q)$, q为导体腔上的总电荷, 这两个条件不随腔内电荷分布改变而改变,因而腔外电场不随腔内电荷分布改变而改变(但腔内电场要变),特别地,当外表面是球时,腔外电场即是一个由位于球中心的电荷$q + Q$产生的电场.

例2: 证明孤立导体产生的电势分布正比于它所带的总电量.

设导体τ,其上所带总电量为Q,导体外电势分布为$\phi(\vec{r})$. 则

$$\nabla\cdot(\epsilon\nabla\phi)=0 \qquad \oint_\tau d\vec{S}\cdot\epsilon\nabla\phi=Q \qquad \text{无穷远自然边条件}$$

我们需要证,当Q换为λQ后,电势分布变为$\lambda\phi(\vec{r})$. 由于上面方程边条件满足唯一性定理的要求,因而只需证当Q换为λQ后,$\lambda\phi(\vec{r})$仍是解. 结合上面方程,

$$\nabla\cdot(\epsilon\nabla\lambda\phi)=0 \qquad \oint_\tau d\vec{S}\cdot\epsilon\lambda\nabla\phi=\lambda Q \qquad \text{无穷远自然边条件}$$

因此,$\lambda\phi$确实是解.证毕.

续例2:一个由导体组成的体系,已知第i个导体上的总电荷q_i,且导体外可以有介质, 但无自由电荷,求证空间任意一点$\vec{r}$处的电势与q_i的关系是线性齐次的. 即,

$$\phi(\vec{r},q_1,q_2,\ldots,q_n)=\sum_{i=1}^{n}p_i(\vec{r})q_i$$

其中$p_i(\vec{r})$与q_i无关. 证明见作业

设第i个导体上的电势为ϕ_i,则$\phi_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}q_j$, 反解得$q_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\phi_j$, p_{ij}叫体系的电势系数, 它等于导体j带单位电量,其它导体每个导体上总电荷为0时,第i个导体的电势值. c_{ij}叫体系的电容系数. 定义$c_j(\vec{r})=\sum_{i=1}^{n}p_i(\vec{r})c_{ij}$则,

$$\phi(\vec{r})=\sum_{i=1}^{n}p_i(\vec{r})q_i=\sum_{i,j=1}^{n}p_i(\vec{r})c_{ij}\phi_j=\sum_{j=1}^{n}c_j(\vec{r})\phi_j$$

$c_j(\vec{r})$是导体j为单位电势,其它导体为0电势时,空间的电势分布.

例3: 对均匀线性介质,电势分布满足

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho_f}{\epsilon}=-\frac{\rho_f}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

对比真空中的电势分布方程

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

我们发现

$$\rho=\rho_f+\rho'=\frac{\rho_f}{\epsilon_r} \qquad \text{即} \qquad \rho'=(\frac{1}{\epsilon_r}-1)\rho_f$$

因此,在均匀线性介质中,极化电荷出现在自由电荷处,$\rho'=(\frac{1}{\epsilon_r}-1)\rho_f$,在无自由电荷处也无极化电荷,极化使自由电荷处的总电荷量变为原来的$\frac{1}{\epsilon_r}$(屏蔽效应). 特别地,若是无穷大均匀线性介质, 符合唯一性定理的电势分布满足

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho_f}{\epsilon}=-\frac{\rho_f}{\epsilon_0\epsilon_r} \qquad \phi\Big|_{r\to\infty}\to\frac{1}{r}$$

对比真空中的电势分布方程

$$\nabla^2\phi_f=-\frac{\rho_f}{\epsilon_0} \qquad \phi_f\Big|_{r\to\infty}\to\frac{1}{r}$$

我们知道$\phi=\frac{\phi_f}{\epsilon_r}$ $\vec{E}=\frac{\vec{E}_f}{\epsilon_r}$是解.

§2.3 拉普拉斯方程,分离变量法

对均匀介质,在空间某一区域τ中,没有自由电荷时的电势分布满足拉普拉斯方程:$\nabla^2\phi=0$
有自由电荷情形下,电势分布来自两部分,一是体电荷$\rho=\rho_f/\epsilon_r$的贡献,另一部分是τ表面面电荷及τ区域外的电荷的贡献(记为ϕ').体电荷分布ρ_f/ϵ_r一般是已知的,它对电势分布的贡献为,$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\tau'_\tau\frac{\rho_f}{\epsilon_r R}$, 若将其分出,$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\tau'\frac{\rho_f}{R}+\phi'$, 则$\phi'$在$\tau$中满足拉普拉斯方程. $\nabla^2\phi'=\nabla^2[\phi-\frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\tau'\frac{\rho_f}{R}]=-\frac{\rho_f}{\epsilon}-\frac{1}{4\pi\epsilon}\int d\tau'\rho_f\nabla^2\frac{1}{R}=0.$
即面电荷对电势分布的贡献满足齐次拉普拉斯方程.
因此两种情况,问题都化为求解齐次拉普拉斯方程$\nabla^2\phi=0$. 此方程是偏微分方程,有无穷多解,其通解的一般形式为:

- 球坐标

  球坐标的三个坐标变量为r,θ,ψ, 分离变数法给出齐次拉普拉斯方程通解的一般形式为:

$$\phi(r,\theta,\psi)=\sum_{n,m}(a_{n,m}r^n+\frac{b_{n,m}}{r^n+1})P_n^m(\cos\theta)\cos m\psi+\sum_{n,m}(c_{n,m}r^n+\frac{d_{n,m}}{r^{n+1}})P_n^m(\cos\theta)\sin m\psi$$

  若所讨论的问题关于z轴对称,则ϕ与ψ无关:

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nr^n+\frac{b_n}{r^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

  其中,$P_n^m(\cos\theta),P_n(\cos\theta)$为缔合勒让德函数和勒让德函数. 系数由边条件决定.
  勒让德函数具有如下性质:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}=(r^2+r'^2-2rr'\cos)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$\int_{-1}^{1}dxP_m(x)P_n(x)=\frac{2\delta_{mn}}{2n+1}\qquad\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)P_n(x')\frac{2n+1}{2}=\delta(x-x')$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n(x^2-1)^n$$

$$P_0(x)=1\qquad P_1(x)=x\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

- 柱坐标

  柱坐标的三个坐标变量为r,θ,z, 分离变数法给出齐次拉普拉斯方程与z无关通解的一般形式为:

$$\phi(r,\theta)=A_0\ln r+B_0\theta+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})\cos(n\theta+\alpha_n)$$

  注意

$$\ln|\vec{r}-\vec{r'}|=\ln(r^2+r'^2-2rr'\cos)^{\frac{1}{2}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n\cos n\theta+\ln r_>$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\cos n\theta\cos m\theta=\pi\delta_{mn}\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta\cos n\theta'=\pi\delta(\theta-\theta')$$

例1. 一相对介电常数为ϵ_r,半径为a的介质球放在$\vec{E}_0$的均匀电场内,求电势分布.

设球内电势分布ϕ_1,球外电势分布ϕ_2,将坐标原点选在球心,z轴选在$\vec{E}_0$方向,则它们满足的方程和边条件为,

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \qquad \phi_1\Big|_{r=a} = \phi_2\Big|_{r=a} \qquad \phi_1\Big|_{r=0} \text{有限}$$
$$\nabla^2\phi_2 = 0 \qquad \epsilon_r \frac{\partial\phi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{\partial\phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} \qquad \phi_2\Big|_{r\to\infty} \to -E_0 r P_1(\cos\theta) + C$$

通解为

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) + B' P_0(\cos\theta) + B'' r P_1(\cos\theta)$$

代入边条件,得到

$$A_0 = \frac{B_0}{a} + B' \qquad \epsilon_r A_1 = -2\frac{B_1}{a^3} + B'' \qquad A_1 a = \frac{B_1}{a^2} + B'' a \qquad -\frac{B_0}{a} = 0$$
$$A_n a^n = \frac{B_n}{a^{n+1}} \qquad \epsilon_r n A_n a^{n-1} = -(n+1)\frac{B_n}{a^{n+2}} \qquad n > 1 \qquad B'' = -E \qquad B' = C$$

解出

$$B' = C \quad A_0 = C \quad A_1 = \frac{-3E_0}{\epsilon_r + 2} \quad B'' = -E_0 \quad B_0 = 0 \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \quad A_n = B_n = 0 \qquad n > 0$$

得

$$\phi_1 \;=\; C - \frac{3rE_0}{\epsilon_r + 2}\cos\theta = C - \frac{3\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{\epsilon_r + 2} \qquad \text{均匀电场的电势}$$
$$\phi_2 \;=\; C + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} a^3 \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \qquad \text{偶极子的电势和均匀电场的电势的迭加}$$

当$\epsilon_r = 1$时,$\phi_1 = \phi_2$,当$\epsilon_r \to \infty$时, 介质变成导体.

例2: 在与半径为a线电荷密度η'的无限长圆柱导线的轴相距r_0处, 放置一根线密度为η的平行细导线,求空间电势分布.

将z轴取在圆柱导线的轴上. 导线η对电势ϕ的贡献ϕ_0可由高斯定理求得,

$$\phi_0 = -2k_1\eta \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| + C = 2k_1\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)\cos n\theta + \ln r_> + C$$

将ϕ写为$\phi = \phi_0 + \phi_1$, 则

$$\nabla^2\phi_1 = 0 \qquad \to \phi_1(r,\theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n}\cos(n\theta + \alpha_n)$$

由于此体系具有对称性$\phi(r,\theta) = \phi(r,-\theta)$, 它意味$\alpha_n = 0$. 进一步,考虑边条件,

$$\phi(a,\theta) = \text{常数} \qquad -a\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{\eta'}{\epsilon_0}$$

给出约束

$$C+2k_1\eta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{a}{r_0})^n\cos n\theta+\ln r_0+A_0\ln a+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n a^{-n}\cos n\theta=\text{常数}$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta[2k_1\eta\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{r_0})^{n-1}\frac{1}{r_0}\cos n\theta+\frac{A_0}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-n)B_n a^{-n-1}\cos n\theta]=-\frac{\eta'}{a\epsilon_0}$$

得到

$$2k_1\eta(\frac{a}{r_0})^n\frac{1}{n}+B_n a^{-n}=0\qquad B_n=-2k_1\eta(\frac{a}{r_0})^n\frac{a^n}{n}\qquad 2\pi\frac{A_0}{a}=-\frac{\eta'}{a\epsilon_0}\qquad A_0=-2k_1\eta'$$

最后得到

$$\phi_1(r,\theta)=-2k_1\eta'\ln r-2k_1\eta\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^2}{r_0 r})^n\frac{1}{n}\cos n\theta=2k_1\eta\ln|\frac{a^2}{r_0^2}\vec{r}_0-\vec{r}|-2k_1(\eta'+\eta)\ln r$$

因此,圆柱导线上的电荷对柱外电势的贡献可用位于镜象点,密度$-\eta$和位于柱心, 密度$\eta'+\eta$的与柱轴平行的线电荷产生的势代替.

例3: 求均匀分布在半径为a的园环上的总电量q产生的势. (将z轴取在园环的轴上,设坐标原点距环心b.)

先计算z轴上$z\vec{e}_z$处的电势分布. 考虑园环的某一点,设原点到它的矢量$\vec{c}$,其大小为$c=\sqrt{a^2+b^2}$, 园环上此点到z轴上场点的距离$R=|z\vec{e}_z-\vec{c}|$, 注意对园环上所有的点,R值都是一样的. 且,

$$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

其中, γ是$\vec{c}$与$\vec{e}_z$的夹角,也是园环对z轴的张角, 它对园环上所有点都一样.$r_<,r_>$分别是z,c中的最大和最小值.

现在利用直接积分,计算z轴上$z\vec{e}_z$处的电势分布,

$$\phi(z,0)\ =\ \oint_{\text{环}}dl\frac{k_1\frac{q}{2\pi a}}{R}=\frac{k_1 q}{R}=k_1 q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

对一般非园环处的电势满足$\nabla^2\phi=0$,考虑到坐标原点电势的有限性和无穷远自然边条件,非园环处的电势的通解为,

$$\phi(r,\theta)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) & r>c\\ \sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta) & r<c\end{cases}$$

由z轴上电势的特殊值定出系数的取值

$$B_n=k_1 q c^n P_n(\cos\gamma)\qquad A_n=k_1 q\frac{1}{c^{n+1}}P_n(\cos\gamma)$$

因此,

$$\phi(r,\theta)=k_1 q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\gamma)P_n(\cos\theta)$$

§2.4 镜像法

我们先说明镜象法的基本思想. 考虑真空中电势所满足的方程$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, 在此电势分布上迭加一个由位于$\vec{r}_0$处电量为$q$的点电荷产生的电势,

$$\phi' = \phi + \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

ϕ'所满足的方程为

$$\nabla^2\phi' = \nabla^2\phi - \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

如果点电荷不在求解区,上式中第二项为0,ϕ'与ϕ满足相同的方程. 即在非解区加点电荷不影响场方程. 我们可以利用这个性质猜解,即通过在非求解区加电荷的方法来调节解的行为,使之不仅满足场方程,还满足边条件. 这就是镜象法的基本思想,在非解区加的电荷叫象电荷. 它一般不是实际存在的电荷,但它在求解区产生的电势与实际在边界上和非求解区存在的电荷在求解区产生的电势相同. 我们正是利用这个性质来求解齐次拉普拉斯方程.

镜象法与上节解方程的方法都是去求解由面电荷贡献的满足齐次拉普拉斯方程的电势分布,不同之处是对齐次拉普拉斯方程的通解的设置形式不同, 镜象法是利用镜象电荷的电势来构造通解,解方程的方法是利用具体坐标系中齐次拉普拉斯方程解的完备系来构造通解. 通解构造出后,都是利用边条件定出通解中的任意常数.

例1: 对已讨论过的外表面为球(内表面形状任意)的导体壳,腔内电量Q,壳上电量q,它们的分布不知,但我们知腔外的电势分布是由位于球心的电量为$q+Q$的象电荷产生的势.$\phi = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r}$,因为它在腔外求解区满足场方程及边条件.

$$\nabla^2\phi = 0, \qquad \phi\Big|_{\text{球表面}} \text{等势}, \qquad \oint_{\text{球表面}} d\vec{S}\cdot\nabla\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}(q+Q)$$

例2: 无穷大接地导体板外有一点电荷q, 导体板外的电势是点电荷q产生的电势和点电荷在导体板上感应出的面电荷产生的电势的迭加.感应面电荷的分布关于q是旋转对称的,它在板外产生的电势与位于q的镜象对称点, 电量为$-q$的象电荷的产生的电势相同.

例3: 半径为r_0的接地导体球外距球心d处有一点电荷q, 导体球外的电势是点电荷q产生的电势和点电荷在导体球上感应出的面电荷产生的电势的迭加. 感应面电荷的分布关于q是旋转对称的,它在球外产生的电势与位于q的镜象对称点,即在q与球心联线上,距球心$\frac{r_0^2}{d}$处,电量为$q' = -\frac{qr_0}{d}$的象电荷产生的电势相同. 若导体不接地,而是具有总电量Q,则只需再加上由球心上的象电荷$Q-q'$产生的电势.

例4: 两无穷大接地导体板,其间有一点电荷q, 导体板间的电势是点电荷q产生的电势ϕ_0和点电荷在导体板上感应出的面电荷及导体板相互感应出的面电荷产生的电势的迭加.感应面电荷的分布关于q是旋转对称的,它在板间产生的电势与一系列镜象电荷产生的电势的迭加相同.

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \cdots$$

其中,ϕ_1, ϕ_2是电量$-q$的象电荷产生的电势, ϕ_3, ϕ_4是电量q的象电荷产生的电势, ϕ_5, ϕ_6是电量$-q$的象电荷产生的电势, ϕ_7, ϕ_8是电量q的象电荷产生的电势,.... ϕ_0, ϕ_1关于第一块导体板镜象对称, ϕ_2, ϕ_3关于第一块导体板镜象对称, ϕ_4, ϕ_5关于第一块导体板镜象对称, ϕ_6, ϕ_7关于第一块导体板镜象对称,.... ϕ_0, ϕ_2关于第二块导体板镜象对称, ϕ_1, ϕ_4关于第二块导体板镜象对称, ϕ_3, ϕ_6关于第二块导体板镜象对称, ϕ_5, ϕ_8关于第二块导体板镜象对称,....

例5: 两无穷大均匀介质,相对介电常数分别为$\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$,介质交界面是$x=0$处的$y, z$平面. 在介质1中,$x$轴上距交界面$x_0$处有一电量为$q_0$的点电荷,求空间电势分布.

设在介质1,2区的电势分别为ϕ_1, ϕ_2, 此问题所满足的方程,边条件为,

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{q_0}{\epsilon_{r1}\epsilon_0}\delta(x-x_0)\delta(y)\delta(z) \qquad \nabla^2\phi_2 = 0$$

$$\phi_1\Big|_{x=0} = \phi_2\Big|_{x=0} \qquad \epsilon_{r1}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \epsilon_{r2}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

点电荷q经屏蔽有效电量变为q_0/ϵ_{r1}空间的电势是点电荷q_0/ϵ_{r1}产生的电势ϕ_0和它在介质交界面上感应出的面电荷产生的电势的迭加. 感应面电荷的分布关于q是旋转对称的.

$$\phi_1 = \frac{k_1 q_0}{\epsilon_{r1} r_1} + \frac{k_1 q_2}{r_2} \qquad \phi_2 = \frac{k_1 q_0}{\epsilon_{r1} r_1} + \frac{k_1 q_3}{r_3}$$

将此解带入边条件,定出

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + x_0 \vec{e}_x \qquad \vec{r}_3 = \vec{r}_1 = \vec{r} - x_0 \vec{e}_x \qquad q_2 = q_3 = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} q_0$$

更一般地,考虑一个求解区τ, τ内的电势由τ内外及表面的电荷分布分别产生的电势的线性迭加决定

$$\phi = \phi_{内} + \phi_{外} + \phi_{表面}$$

镜象法就是将τ外及表面的电荷分布产生的电势用镜象电荷产生的电势代替

$$\phi_{象} = \phi_{外} + \phi_{表面}$$

这时,τ内的电势就变成由τ内电荷分布产生的电势和象电荷产生的电势的迭加.

$$\phi = \phi_{内} + \phi_{象}$$

注意,

1. 在有介质的区域,自由电荷周围要附着极化电荷,使总电量变为原来电量的$1/\epsilon_r$倍.
2. 镜象电荷的设置需要凭经验,一个不行,就设多个,直到能满足边条件为止.

§2.5 格林函数

点电荷的边值问题在静电学中有重要意义,它的解决意味着更广一类的边值问题可以得到解决.如:
给定V内电荷分布ρ和V边界S上各点的电势ϕ_S(第一类边条件) 或电场法向分量$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_S$(第二类边条件) 或无界空间(V为无穷大)时的无穷远自然边条件, 求V内各点的电势值.即

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \\ 边条件 \end{cases}$$

引入点电荷的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ 边条件 \end{cases}$$

其中,G的边条件要视ϕ的边条件而定. 建立它与ϕ的联系

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \int_V d\tau' \phi(\vec{r}')\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = -\epsilon_0 \int_V d\tau' \phi(\vec{r}')\nabla'^2 G(\vec{r}', \vec{r}) \\
&= -\epsilon_0 \int_V d\tau' \Big\{ \nabla' \cdot [\phi(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r}', \vec{r})] - \nabla'\phi(\vec{r}') \cdot \nabla' G(\vec{r}', \vec{r}) \Big\} \\
&= \epsilon_0 \int_V d\tau' \Big\{ \nabla' \cdot \Big[-\phi(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r}', \vec{r}) + [\nabla'\phi(\vec{r}')] G(\vec{r}', \vec{r}) \Big] - \nabla'^2 \phi(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) \Big\} \\
&= \epsilon_0 \int_V d\tau' \Big\{ \nabla' \cdot \Big[-\phi(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r}', \vec{r}) + [\nabla'\phi(\vec{r}')] G(\vec{r}', \vec{r}) \Big] + \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) \Big\} \\
&= \int_V d\tau' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) + \epsilon_0 \oint_S d\vec{S}' \cdot [G(\vec{r}', \vec{r})\nabla'\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}')\nabla' G(\vec{r}', \vec{r})] \\
&= \int_V d\tau' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) + \epsilon_0 \oint_S dS' [G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'}]
\end{aligned}$$

对第一类边值问题,$\phi\Big|_{\vec{r}'\subset S}$已知, 取$G$的边条件为:$G(\vec{r}',\vec{r})\Big|_{\vec{r}'\subset S}=0$,则

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\tau'\rho(\vec{r}')G(\vec{r}',\vec{r}) - \epsilon_0\oint_S dS'\phi(\vec{r}')\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}$$

对第二类边值问题,$\frac{\partial\phi}{\partial n'}\Big|_S$已知, 形式上看应该取$\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}\Big|_{\vec{r}'\subset S}=0$, 但从$G(\vec{r}',\vec{r})$满足的方程出发

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d\tau'\delta(\vec{r}'-\vec{r}) = -\epsilon_0\int_V d\tau'\nabla'^2 G(\vec{r}',\vec{r}) = -\epsilon_0\int_V d\tau'\nabla'\cdot[\nabla' G(\vec{r}',\vec{r})] = -\epsilon_0\int_V d\vec{S}'\cdot[\nabla' G(\vec{r}',\vec{r})] \\ &= -\epsilon_0\int_V dS'\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r}',\vec{r}) \end{aligned}$$

我们所希望取的$\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}\Big|_{\vec{r}'\subset S}=0$与上式矛盾. 改进的办法是取$\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}\Big|_{\vec{r}'\subset S}=c$, c是一个常数,且上式要求此常数满足$1=-\epsilon_0 cS_V$, S_V是体积V的表面积. 这样取后,

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\tau'\rho(\vec{r}')G(\vec{r}',\vec{r}) + \epsilon_0\oint_S dS' G(\vec{r}',\vec{r})\frac{\partial\phi(\vec{r}')}{\partial n'}$$

注意,这时与$\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}\Big|_{\vec{r}'\subset S}$相关的项只贡献一个与$\vec{r}$无关的常数.

对第一,二类混和边值问题,$S=S_1+S_2, \phi\Big|_{S_1}, \frac{\partial\phi}{\partial n'}\Big|_{S_2}$已知,则取$G(\vec{r}',\vec{r})\Big|_{\vec{r}'\subset S_1}=0$, $\frac{\partial G(\vec{r}',\vec{r})}{\partial n'}\Big|_{\vec{r}'\subset S_2}=c$. 对无界空间(V为无穷大),$\phi\Big|_\infty$满足无穷远自然边条件,取$G(\vec{r}',\vec{r})\Big|_{\vec{r}'\subset\infty}$满足无穷远自然边条件,则

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\tau'\rho(\vec{r}')G(\vec{r}',\vec{r})$$

1. 无界空间的格林函数($V\to\infty$)

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad\qquad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

2. 上半空间($z>0$)第一类边值问题的格林函数

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}'|}\Big) \\ \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty d\tau'\rho(\vec{r}')\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}'|}\Big) - \frac{1}{4\pi}\int_{z=0} dS'\phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial z'}\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}'|}\Big) \end{aligned}$$

3. 球外空间($r>r_0$)第一类边值问题的格林函数

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{\frac{r_0}{r'}}{|\vec{r}-\frac{r_0^2}{r'^2}\vec{r}'|}\Big) \\ \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty d\tau'\rho(\vec{r}')\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{\frac{r_0}{r}}{|\vec{r}'-\frac{r_0^2}{r^2}\vec{r}|}\Big) - \frac{1}{4\pi}\int_{r_0} dS'\phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial r'}\Big(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{\frac{r_0}{r}}{|\vec{r}'-\frac{r_0^2}{r^2}\vec{r}|}\Big) \end{aligned}$$

§2.6 恒定电流的电场

麦克斯韦方程组

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{j_c} = \gamma \vec{E}$$

对恒定电流系统

$$\frac{\partial \vec{j_c}}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

- 恒定电流系统的维持

  恒定电流产生的电场与静止电荷产生的电场的不同之处是一个是稳态系统,一个是静态系统. 是稳态系统的原因是导体中电流会产生热损耗,即带负电的电子通过与晶格碰撞, 把自己的动能传递给晶格,形成热能.而电子的动能又是从电场能转化来的,即

  焦耳定律： $$W = \frac{Q\Delta\phi}{\Delta t \Delta \tau} = \frac{j_c \Delta t \Delta S \delta l E}{\Delta t \Delta S \Delta l} = \vec{j_c} \cdot \vec{E} = \frac{j_c^2}{\gamma} \qquad W：\text{热功率密度}$$

  从能量守恒的角度说,电路中只要有电流流动,就存在电热能之间的转换, 电场能量不断损失.为了维持体系中的电场,必须有其它形式的能量不断补充进来. 例如,一个充电的电容器,极板上联一导线,电流一下便流完了,电容器的电场能全部转变为导线上的热能.若要维持电流不变,必须在电容器内部不断把流动到负极板的正电荷搬到正极板上去.这个力必须克服电场力而作功,因而需要外界提供能量. 这种力是非静电性质的,称为非静电力,实际应用中有很多机械的,物理的,化学的办法实现这种非静电力,在我们课程中不去讨论它.我们关心的只是它产生的效果,即使电荷移动.为了描述这种效果,我们引入等效的电场$\vec{E'} = \frac{\vec{F}}{q}$, 它定义为单位电量的电荷所受的非静电力.其中$\vec{E'}$不是静电场,甚至不是电场, 它的效果只是保证极板之间的电流流动.

  有了非静电力的贡献,欧姆定律应该修改为:

  $$\vec{j_c} = \gamma(\vec{E} + \vec{E'})$$

  定义一个闭合回路的电动势为

  $$\mathcal{E} = \oint d\vec{l} \cdot \frac{\vec{F}_{非}}{q} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E'} = \oint d\vec{l} \cdot (\vec{E'} + \vec{E}) = \oint d\vec{l} \cdot \frac{\vec{j_c}}{\gamma} = \oint dl \frac{J\lambda}{S} = JR$$

  $\mathcal{E}$是非静电力把单位电量的电荷移动一圈所做的功.(这是非静电力与静电力的差别)

  在闭合电路中,维持并决定电路中电流的不是静电场,而是非静电力的电动势$\mathcal{E}$.这时虽然电场$\vec{E}$不随时间改变,电流和电荷也不随时间变化, 但这只是一个动态平衡系统,能量在这个系统中是不断转化的.从电源内的外来能量, 不断转化为电场能,最后消耗在电路的电阻上转变为热能.

- 场方程组

  在恒定电流产生的电场中,$\vec{j}$不随时间改变,$\vec{E'}$不随时间改变, 因而$\vec{E}$不随时间改变

  $$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$

  与前面不同的是在绝缘介质中电荷是不能自由移动的,开始时是什么分布,以后也是什么分布,是已知的初条件.在没有电流的纯导体中,电荷只能分布在导体外表面,体电荷密度ρ_f为0.而现在ρ_f是在电路加

上电源后,经过短暂的迅变过程达到稳恒状态时形成的.它与电路中初始的ρ分布是不同的,ρ在现在的问题中是不知道的,因而无法用它求电场.我们改用另一个方程

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j_c}=0 \qquad\qquad \vec{j_c}=\gamma(\vec{E}+\vec{E'})$$

稳态时,$\frac{\partial \rho_f}{\partial t}=0\rightarrow\nabla\cdot\vec{j_c}=0$推出

$$\nabla\cdot(\gamma\vec{E})=-\nabla\cdot(\gamma\vec{E'})$$

因此,利用电荷守恒和欧姆定律,我们得到了一个类似于$\nabla\cdot(\epsilon\vec{E})=\rho_f$的方程,其中,$\gamma$对应$\epsilon$, $-\nabla\cdot(\gamma\vec{E'})$对应于$\rho$,利用它和$\nabla\times\vec{E}=0$可以求解现在的电场.

例1: 金属电极A,B($\gamma=\infty$)置于导电媒质γ_1中,γ_1外包围着另一种导电媒质γ_2,决定1,2中的电场的方程为:

$$\begin{array}{lll}\nabla\times\vec{E}_1=0 & \nabla\times\vec{E}_2=0 & \gamma_1E_{1n}=\gamma_2E_{2n}\\ \nabla\cdot(\gamma_1\vec{E}_1)=0 & \nabla\cdot(\gamma_1\vec{E}_2)=0 & E_{1t}=E_{2t}\end{array}$$

注意在非电极处,$\vec{E'}=0$,γ_1,γ_2起的作用等价于ϵ, 这组方程若用电势表达,$\vec{E}=-\nabla\phi$,则

$$\begin{array}{ll}\nabla^2\phi_1=0 & \gamma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\\ \nabla^2\phi_2=0 & \phi_1=\phi_2\end{array}$$

为保证解的唯一性,还必须加上电极A,B的性质及无穷远的自然边条件.我们认为电极为理想导体$\gamma=\infty$,由$\vec{j_c}=\gamma\vec{E}(\vec{E'}=0)$,这时虽然电极中有电流流动,但仍可认为$\vec{E}\rightarrow 0$,即电极为等势体.关于电极的边条件可以是如下两种之一,

$$\left\{\begin{array}{l}\phi_A-\phi_B=V\\ Q_A=-Q_B\end{array}\right. \qquad\qquad \left\{\begin{array}{l}\phi_B=0\\ \phi_A=V\end{array}\right.$$

加上无穷远自然边条件$\phi\Big|_{r\rightarrow\infty}\rightarrow\frac{1}{r}$, 我们就可以去求解这组方程.解是唯一的.当我们求出电场后,反过来利用$\rho_f=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\epsilon\vec{E})$, $\sigma_f=D_{2n}-D_{1n}$, $\sigma=\epsilon_0(E_{2n}-E_{1n})$, 求出电荷分布. 特别是若媒质是均匀的,$\gamma,\epsilon$都为常数,则$\rho_f=0$. 这与静电场的情形是一样的.

例2: 半径为a的半球形电极埋在电导率为γ的地下,电极的平面正好与地面平齐,从电极内流出的电流强度I, 求地下的电流分布.

将半球球心选为坐标原点,地面为$z=0$的xy平面. 地下非电极处的电势ϕ满足$\nabla^2\phi=0$,在地面电流只能沿切向流动, 因而有边条件$E_n=0$,在电极的球表面有边条件$I=\int d\vec{S}\cdot\gamma\vec{E}$. 我们选试探解$\phi=\frac{c}{r}$, 它满足在地面的边条件$E_n=0$, 且,

$$I=\int_{\text{半球}}d\vec{S}\cdot c\gamma\frac{\vec{r}}{r^3}=\int_{\text{半球}}dSc\gamma\frac{1}{a^2}=-2\pi c\gamma \quad\rightarrow\quad c=\frac{I}{2\pi\gamma} \quad\rightarrow\quad \phi=\frac{I}{2\pi\gamma r}$$

电极起一个带一定电荷的导体的作用.

§2.7 稳恒电流的磁场,矢势

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times\vec{H}=\vec{j_c}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\vec{B}=\mu\vec{H}\\ \vec{f}=\vec{j_c}\times\vec{B}\end{array}\right. \qquad \text{边条件}:\left\{\begin{array}{l}\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_c\end{array}\right.$$

- 矢势

$$\vec{A}=\int d\vec{l}'\frac{\mu_0 J}{4\pi R}+\nabla\chi=\int d\tau'\frac{\mu_0\vec{j}}{4\pi R}+\nabla\chi \qquad\qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

去掉$\nabla\chi$的$\vec{A}$的定义叫库伦规范下的矢量势定义,这时

$$\nabla\cdot\vec{A}\Big|_{\text{库伦规范}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau'\vec{j}\cdot\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau'\vec{j}\cdot\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau'\nabla'\cdot\frac{\vec{j}}{R}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\infty d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{j}}{R}=0$$

一般的定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$是不唯一的.

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\chi) \qquad\qquad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\chi \qquad \leftarrow \text{规范变换}$$

规范变换的存在使$\vec{A}$只能准确到相差一个任意梯度函数.为了使$\vec{A}$确定,必须附加一个条件,把这个规范自由度去掉,这个条件叫规范固定条件.如:

  - 库伦规范固定条件: $\nabla\cdot\vec{A}=0$
  - 对常数场$\vec{B}$,若选$\vec{A}\cdot\vec{r}=0$,则$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{2}(\nabla\cdot\vec{r})\vec{B}-\frac{1}{2}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{r}=\frac{3}{2}\vec{B}-\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{I}}=\vec{B}$$

规范固定条件很多,只要能把$\vec{A}$定死即可,物理与这种选择无关.
注意,定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$将给出$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$,它意味无磁单极. 有磁单极情况见习题3.8.

- 矢势及其满足的方程

若电流分布已知,则可直接通过计算积分求$\vec{A}$,否则需解方程(只讨论均匀介质)

$$\nabla^2\vec{A}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A})=-\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=-\nabla\times\vec{B}=-\mu\nabla\times\vec{H}=-\mu\vec{j_c}$$

特别地,对库伦规范:$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j_c}$.

- 稳恒电流磁场的能量

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}\int_\infty d\tau\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\int_\infty d\tau(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\int_\infty d\tau[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})]\\ &= \frac{1}{2}\int_\infty d\vec{S}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\frac{1}{2}\int_\infty d\tau\vec{A}\cdot\vec{j}_c\end{aligned}$$

对稳恒电流的磁场$\vec{A}\Big|_{r\to\infty}\sim\frac{1}{r}$, $\vec{H}\Big|_{r\to\infty}\sim\frac{1}{r^2}$, 因此$\int_\infty d\vec{S}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})\to 0$.

$$W=\frac{1}{2}\int d\tau\vec{B}\cdot\vec{H}==\frac{1}{2}\int d\tau\vec{A}\cdot\vec{j}_c=\frac{\mu_0}{8\pi}\int d\tau d\tau'\frac{\vec{j}_c(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}')}{R}$$

对真空中的电流分布,$\vec{j}(\vec{r})=\vec{j}_c(\vec{r})$, 上式化为

$$W=\frac{\mu_0}{8\pi}\int d\tau d\tau'\frac{\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}')}{R}$$

若有两组电流分布组成的体系,$\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2$, 则$W=W_1+W_2+W_{相互}$

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0}{8\pi}\int d\tau d\tau' \frac{1}{R}[\vec{j}_1(\vec{r})+\vec{j}_2(\vec{r})]\cdot[\vec{j}_1(\vec{r}')+\vec{j}_2(\vec{r})'] \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi}\int d\tau d\tau' \frac{1}{R}[\vec{j}_1(\vec{r})\cdot\vec{j}_1(\vec{r}')+\vec{j}_2(\vec{r})\cdot\vec{j}_2(\vec{r}')+\vec{j}_1(\vec{r})\cdot\vec{j}_2(\vec{r}')+\vec{j}_2(\vec{r})\cdot\vec{j}_1(\vec{r}')] \\ W_{相互} &= \frac{\mu_0}{8\pi}\int d\tau d\tau' \frac{1}{R}\vec{j}_1(\vec{r})\cdot\vec{j}_2(\vec{r})' = \int d\tau \vec{A}_1\cdot\vec{j}_2 = \int d\tau \vec{A}_2\cdot\vec{j}_1 \end{aligned}$$

电荷$\vec{j}$在外场$\vec{A}$中的能量:

$$W_{相互}=\int d\tau \vec{j}\cdot\vec{A}$$

§2.8 磁场问题的一般解法

- 无传导电流无剩磁

  例:一个相对磁导率μ_r的半径为a的均匀球,放在均匀磁场强度$\vec{H}_0$的外磁场中,求球内外的磁场

  设球内磁场分布$\vec{B}_1,\vec{H}_1$,球外磁场分布$\vec{B}_2,\vec{H}_2$, 将坐标原点选在球心,z轴选在$\vec{H}_0$方向,则它们满足的方程和边条件为,

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}_1=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{H}_2=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{1t}\Big|_{r=a}=H_{2t}\Big|_{r=a} \\ B_{1n}\Big|_{r=a}=B_{2n}\Big|_{r=a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2 \\ \vec{B}_1=\mu\vec{H}_1 \end{cases} \qquad \vec{H}_2\Big|_{r\to\infty}\to\vec{H}_0$$

这个问题与相同大小的电介质球放在均匀电场$\vec{E}_0$中的情形相当,这时

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}_1=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{E}_2=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{1t}\Big|_{r=a}=E_{2t}\Big|_{r=a} \\ D_{1n}\Big|_{r=a}=D_{2n}\Big|_{r=a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{D}_2=\mu_0\vec{E}_2 \\ \vec{D}_1=\mu\vec{E}_1 \end{cases} \qquad \vec{E}_2\Big|_{r\to\infty}\to\vec{E}_0$$

因此完全仿照解电场的方法,即可求解此问题,具体地,$\vec{H}_1=-\nabla\phi_{m1}$, $\vec{H}_2=-\nabla\phi_{m2}$,

$$\nabla^2\phi_{m1}=0 \qquad \phi_{m1}\Big|_{r=a}=\phi_{m2}\Big|_{r=a} \qquad \phi_{m1}\Big|_{r=0}\text{有限}$$

$$\nabla^2\phi_{m2}=0 \qquad \mu_r\frac{\partial\phi_{m1}}{\partial r}\Big|_{r=a}=\frac{\partial\phi_{m2}}{\partial r}\Big|_{r=a} \qquad \phi_{m2}\Big|_{r\to\infty}-H_0rP_1(\cos\theta)+C$$

解为

$$\phi_{m1}=-\frac{3H_0}{\mu_r+2}rP_1(\cos\theta) \qquad \phi_{m2}=-H_0rP_1(\cos\theta)+\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}a^3H_0r^2P_1(\cos\theta)$$

它给出磁场

$$\vec{H}_1=\frac{3}{\mu_r+2}\vec{H}_0 \qquad \vec{H}_2=\vec{H}_0+\frac{1}{4\pi}[-\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}]$$

$$\vec{B}_1=\frac{3\mu_r}{\mu_r+2}\vec{B}_0 \qquad \vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2 \qquad \vec{m}=4\pi a^3\frac{\mu_r-1}{\mu_r+2}\vec{H}_0$$

因此,对无传导电流问题,$\nabla \times \vec{H} = 0$, 类似于$\nabla \times \vec{E} = 0$.我们可以引入磁标势$\vec{H} = -\nabla\phi_m$, 并模仿电场标量势的求解办法进行计算. 注意,磁标势的存在要求无传导电流

$$\vec{j_c} = \nabla \times (-\nabla\phi_m) = 0$$

特别地,对上述无剩磁的情况,它与电场中无自由电荷的情形对应.

- 无传导电流有剩磁

  例:对一块剩磁材料,介质内$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_1 = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \end{cases}$, 介质外$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}_2 = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}_2 = 0 \end{cases}$,

  边界上$\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$ 电磁性质方程$\begin{cases} \vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 \\ \vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1 + \mu_0\vec{M}_0 \end{cases}$ 全部用$\vec{H}$表达后

  $$\begin{cases} \nabla \cdot (\mu\vec{H}_1) = -\nabla \cdot (\mu_0\vec{M}_0) \\ \nabla \times \vec{H}_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot (\mu\vec{H}_2) = 0 \\ \nabla \times \vec{H}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_0 H_{2n} - \mu H_{1n} = \mu_0 M_{0n} \\ \vec{H}_{2t} = \vec{H}_{1t} \end{cases}$$

  这个问题同样与相同大小的电介质材料的静电情形相当,只要考虑对应

  $$\begin{array}{lll} \mu \sim \epsilon & \mu_0 \sim \epsilon_0 & \mu_r \sim \epsilon_r \\ \vec{H} \sim \vec{E} & -\nabla \cdot (\mu_0\vec{M}_0) \sim \rho_f & \mu_0 M_{0n} \sim \sigma_f \end{array}$$

  $-\nabla \cdot (\mu_0\vec{M}_0)$和$\mu_0 M_{0n}$分别起体电荷密度和面电荷密度的角色,有时称它为假想磁荷. 可以类比静电问题解此问题

  $$\begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon\vec{E}_1) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E}_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot (\mu\vec{E}_2) = 0 \\ \nabla \times \vec{E}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \epsilon_0 E_{2n} - \epsilon E_{1n} = \sigma_f \\ \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \end{cases}$$

  特别地,对永久磁铁,$\mu = \mu_0$知它对应$\epsilon = \epsilon_0$的情况,即无介质, 因而无极化电荷,电场全部由ρ_f, σ_f产生

  $$\vec{E} = \int d\tau' \frac{\rho_f \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \int dS' \frac{\sigma_f \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{对应过来} \quad \vec{H} = -\int d\tau' \frac{\nabla' \cdot (\mu_0\vec{M}_0)\vec{R}}{4\pi\mu_0 R^3} + \int dS' \frac{\mu_0 M_{0n}\vec{R}}{4\pi\mu_0 R^3}$$

  若非永久磁铁,则应加入极化电荷(磁荷)的贡献,这时可直接解方程或利用镜象法(见后).

- 有传导电流

  $$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j_c} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i_c} \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

  设法将此问题化为无传导电流的问题. 此问题中传导电流已知,它产生的场就是已知的, 总磁场应是传导电流产生的磁场与磁化电流产生的磁场的迭加,而磁化电流产生的场, 即在总磁场中扣除传导电流产生的磁场应属于无传导电流的情形.

  我们先用毕奥-沙伐定律求出传导电流产生的磁场$\vec{B}_0$

  $$\vec{B}_0 = \int d\tau' \frac{\mu_0\vec{j_c} \times \vec{R}}{4\pi R^3} + \int dS' \frac{\mu_0\vec{i_c} \times \vec{R}}{4\pi R^3}$$

  它满足

  $$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \qquad \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0\vec{j_c} \qquad \vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0\vec{i_c} \qquad \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

将磁化电流对磁场强度的贡献$\vec{B}_0/\mu_0$分出

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0+\vec{H}' \qquad\qquad \vec{B}=\mu\vec{H}=\frac{\mu}{\mu_0}\vec{B}_0+\mu\vec{H}'$$

注:$\frac{\mu}{\mu_0}B_0$是传导电流和体磁化电流产生的磁感应强度. 则

$$\nabla\times\vec{H}'=\nabla\times(\vec{H}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0)=\vec{j}_c-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}_0=\vec{j}_c-\vec{j}_c=0$$

$$\nabla\cdot(\mu\vec{H}')=\nabla\cdot(\vec{B}-\frac{\mu}{\mu_0}\vec{B}_0)=\nabla\cdot\vec{B}-(\nabla\mu)\cdot\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0-\frac{\mu}{\mu_0}\nabla\cdot\vec{B}_0=-(\nabla\mu)\frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}\times(\vec{H}_2'-\vec{H}_1')&=\vec{n}\times\left[(-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{02}+\vec{H}_2)-(-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{01}+\vec{H}_1)\right]\\&=-\frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times(\vec{B}_{02}-\vec{B}_{01})+\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_c-\vec{i}_c=0\end{aligned}$$

$$\vec{n}\cdot(\mu_2\vec{H}_2'-\mu_1\vec{H}_1')=\vec{n}\cdot\left[(\vec{B}_2-\frac{\mu_2}{\mu_0}\vec{B}_{02})-(\vec{B}_1-\frac{\mu_1}{\mu_0}\vec{B}_{01})\right]=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_0}\vec{n}\cdot\vec{B}_0$$

因此,只要采用如下对应,

$$\vec{H}'\sim\vec{E} \qquad \mu\sim\epsilon \qquad -(\nabla\mu)\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}\sim\rho_f \qquad \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_0}\vec{n}\cdot\vec{B}_0\sim\sigma_f$$

则,问题化为静电情形. 注: 有些问题中,我们为避免直接计算面积分,不把面电流的贡献分出来.这时方程仍可化为静电同样的方程,但边条件不一样.是磁场的边界条件.我们可以把方程的通解代入磁场边界条件.求解问题.这时,面电流的贡献可通过求解边条件,而不是计算面积分得到.

总之,求解静磁问题,多数是设法将它化到能够对应的静电情形,然后,直接套用处理静电问题的方法.

由于很多静磁问题与静电问题有对应关系,相应的物理现象也有对应.

- 磁镜像法

  考虑空间中有两个无穷大磁介质,交界面为$x=0$处的yz平面,在介质1中有传导电流$\vec{j}_c$(为方便,我们只考虑一个传导电流元$\vec{j}_c d\tau$位于x轴上x_0处的情形, 一般的情形只需将$d\tau$积分即可), 介质交界上无传导电流$\vec{i}_c$,求空间磁场分布.

  用磁感应强度表达,此问题满足的方程和边条件为,

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{B}_1=\mu_1\vec{j}_c\\ \nabla\cdot\vec{B}_1=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla\times\vec{B}_2=0\\ \nabla\cdot\vec{B}_2=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1t}\Big|_{x=0}=\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2t}\Big|_{x=0}\\ B_{1n}\Big|_{x=0}=B_{2n}\Big|_{x=0}\end{cases}$$

  磁化电流一部分附着在$\vec{j}_c$上,使它变为$\mu_r\vec{j}_c$,另一部分在介质交界面上$\vec{i}'$,是未知的,其它地方由于是均匀介质,不再有磁化电流.设$\mu_r\vec{j}_c$产生的磁感应强度$\vec{B}_0$,$\vec{i}'$在1,2介质中产生的磁感应强度分别为$\vec{B}_{10},\vec{B}_{20}$,则

$$\vec{B}_1=\vec{B}_0+\vec{B}_{10} \qquad\qquad \vec{B}_2=\vec{B}_0+\vec{B}_{20}$$

  镜象法是将$\vec{i}'$产生的磁感应强度用位于非求解区的镜象电流$\vec{j}',\vec{j}''$产生的磁感应强度代表,由于$\vec{i}'$在界面两边产生的场是对称的,因此产生这个场的镜象电流的位置方向也是对称的.$\vec{j}'$与$\vec{j}_c$同位置,$\vec{j}''$位于介质2中的$\vec{j}_c$的镜象对称位置.且

$$\vec{j}_n'=-\vec{j}_n'' \qquad\qquad \vec{j}_t'=\vec{j}_t''$$

设$\vec{j}_c$到场点的矢量$\vec{R}_1$,$\vec{j}''$到场点的矢量$\vec{R}_2$, 则,

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0\mu_{1r}\vec{j}_c \times \vec{R}_1}{4\pi R_1^3}d\tau' \qquad \vec{B}_{10} = \frac{\mu_0\vec{j}' \times \vec{R}_1}{4\pi R_1^3}d\tau' \qquad \vec{B}_{20} = \frac{\mu_0\vec{j}'' \times \vec{R}_2}{4\pi R_2^3}d\tau'$$

在介质交界面上,

$$\vec{R}_1 = -x_0\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad \vec{R}_2 = x_0\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad R_1 = R_2 \equiv R$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi}d\tau'(\frac{\vec{j}'' \times \vec{R}_2}{R_2^3} + \frac{\mu_{1r}\vec{j}_c \times \vec{R}_1}{R_1^3}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}d\tau'[(\vec{j}'' - \mu_{1r}\vec{j}_c) \times (x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}'' + \mu_{1r}\vec{j}_c) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}d\tau'[(\vec{j}_t'' - \mu_{1r}\vec{j}_{ct}) \times (x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}_t'' + \vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct} + \mu_{1r}\vec{j}_{cn}) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi}d\tau'(\frac{\vec{j}' \times \vec{R}_1}{R_1^3} + \frac{\mu_{1r}\vec{j}_c \times \vec{R}_1}{R_1^3}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}d\tau'[(\vec{j}' + \mu_{1r}\vec{j}_c) \times (-x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}' + \mu_{1r}\vec{j}_c) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}d\tau'[(\vec{j}_t' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct}) \times (-x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}_t' + \vec{j}_n' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct} + \mu_{1r}\vec{j}_{cn}) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}d\tau'[(\vec{j}_t'' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct}) \times (-x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}_t'' - \vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct} + \mu_{1r}\vec{j}_{cn}) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)]
\end{aligned}$$

由边条件定出,

$$(\vec{j}_t'' + \mu_{1r}\vec{j}_t) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = (\vec{j}_t'' + \mu_{1r}\vec{j}_t) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)$$

$$\frac{1}{\mu_1}[(\vec{j}_t'' - \mu_{1r}\vec{j}_t) \times (x_0\vec{e}_1) + (\vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_n) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)] = \frac{1}{\mu_2}[(\vec{j}_t'' + \mu_{1r}\vec{j}_t) \times (-x_0\vec{e}_1) + (-\vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_n) \times (y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)]$$

两个矢量方程唯一决定两个矢量$\vec{j}_t'', \vec{j}_n''$作为$\vec{j}_t, \vec{j}_n$的函数.

$$\frac{1}{\mu_1}(\vec{j}_t'' - \mu_{1r}\vec{j}_{ct}) = -\frac{1}{\mu_2}(\vec{j}_t'' + \mu_{1r}\vec{j}_{ct}) \qquad \frac{1}{\mu_1}(\vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_{cn}) = \frac{1}{\mu_2}(-\vec{j}_n'' + \mu_{1r}\vec{j}_{cn})$$

解之得,

$$\vec{j}_t' = \vec{j}_t'' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\mu_{1r}\vec{j}_{ct} \qquad \vec{j}_n' = -\vec{j}_n'' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\mu_{1r}\vec{j}_{cn}$$

因此,

$$J' = J'' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\mu_{1r}J_c$$

§2.9 多极展开

对一团分布在某一小区域的电荷和电流在远处产生的电势和磁势, 多极展开告诉我们如何在一定的精度范围内用尽量少的参数对电势和磁势进行描述.

为了讨论多极展开,我们先引入多变量函数的泰勒展开. 考虑函数$f(\vec{r}')$在$\vec{r}' = 0$处展开

$$f(\vec{r}') = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n=1}^{3}\frac{1}{n!}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}'}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}'}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}'}f(\vec{r}')\Big]_{\vec{r}'=0}x_{i_1}'x_{i_2}'\cdots x_{i_n}'$$

特别地

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1 i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x'_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x'_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x'_{i_n}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{\vec{r}'=0}x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\\ &= \frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1 i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{\vec{r}'=0}x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\\ &= \frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1 i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{r}\right]x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\end{aligned}$$

- 电势的多极展开,电多极矩

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int d\tau'\rho(\vec{r}')+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1 i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{r}\right]\int d\tau' x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\rho(\vec{r}')\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\vec{r})\end{aligned}$$

其中,

$$\phi_0(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int d\tau'\rho(\vec{r}')$$

对n大于0情况:

$$\phi_n(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i_1 i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{r}\right]q_{i_1 i_2\ldots i_n}\qquad q_{i_1 i_2\ldots i_n}=\int d\tau' x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\rho(\vec{r}')$$

相应地对电场也做展开

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_1+\cdots\qquad\qquad \vec{E}_n=-\nabla\phi_n$$

以下逐阶讨论各项的含义

- 电荷:

$$\phi_0(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}\qquad\qquad Q=\int d\tau'\rho(\vec{r}')\qquad\qquad \vec{E}_0(\vec{r})=\frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

在0阶时, 体系被缩成一个电量为Q的点电荷, 体系线度的效应被略去了.

- 电偶极矩:

$$\phi_1(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i_1=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{1}{r}\right]q_{i_1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i_1=1}^{3}\frac{x_{i_1}}{r^3}q_{i_1}=\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{3}q_i\vec{e}_i=\int d\tau'\vec{r}'\rho(\vec{r}')\qquad\qquad \vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}[-\frac{\vec{p}}{r^3}+\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}]$$

在1阶时, 体系被缩成一个电偶极矩为$\vec{P}$的电偶极子, 这是一个由两个电量$\pm q$,相距$\vec{l}$(从负指向正),且$l\to 0, q\to\infty$, 但保持ql为有限的点电荷构成的体系. 事实上, 对这样一个体系, 总电量$Q=q-q=0$, 最低阶的就是偶极矩的贡献,

$$\vec{p}=\int d\tau'\vec{r}'\rho=q\int d\tau'\vec{r}'[\delta(\vec{r}'-\vec{r}_q)-\delta(\vec{r}'-\vec{r}_{-q})]=q(\vec{r}_q-\vec{r}_{-q})=q\vec{l}$$

而高阶项正比于$ql(\frac{l}{r})^n \to 0(n>1)$当$l \to 0$时趋于0. 因此,上面给出的$\phi_1, \vec{E}_1$是严格的电偶极子产生的电势和电场分布.

– 电四极矩

$$\phi_2(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i_1,i_2=1}^{3}\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\frac{1}{r}\Big]q_{i_1i_2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i_1,i_2=1}^{3}[\frac{3x_{i_1}x_{i_2}}{r^5} - \frac{\delta_{i_1i_2}}{r^3}]q_{i_1i_2} = \frac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}\cdot\vec{r}}{8\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{Q}} = \sum_{i,j=1}^{3}Q_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \int d\tau'[3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}}]\rho(\vec{r}') \qquad Q_{ij} = \int d\tau'[3x'_ix'_j - r'^2\delta_{ij}]\rho(\vec{r}')$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}[\frac{(\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{Q}})}{r^5} - \frac{5\vec{r}(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}\cdot\vec{r})}{r^7}]$$

在2阶时, 体系被缩成一个电四极矩为$\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}$的电四极子, 这是一个由四个放置在一个平行四边形四个顶角A B C D(边长$\vec{l}_1$A指向D, $\vec{l}_2$A指向B)上的分别为$q,-q,q,-q$, 且$l_1\to 0, l_2\to 0, q\to\infty$, 但保持$ql_1l_2$为有限的点电荷构成的体系. 事实上, 对这样一个体系, 总电量$Q = q-q+q-q = 0$,总电偶极矩$\vec{p} = q\vec{r}_A - q\vec{r}_B + q\vec{r}_C - q\vec{r}_D = q\vec{l}_2 - q\vec{l}_2 = 0$, 最低阶的就是电四极矩的贡献,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{Q}} &= q(3\vec{r}_A\vec{r}_A - r_A^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}} - 3\vec{r}_B\vec{r}_B + r_B^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}} + 3\vec{r}_C\vec{r}_C - r_C^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}} - 3\vec{r}_D\vec{r}_D + r_D^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}})\\
&= q[3\vec{r}_A\vec{r}_A - r_A^2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}} - 3(\vec{r}_A+\vec{l}_2)(\vec{r}_A+\vec{l}_2) + (\vec{r}_A+\vec{l}_2)\cdot(\vec{r}_A+\vec{l}_2)\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}}\\
&\quad + 3(\vec{r}_A+\vec{l}_1+\vec{l}_2)(\vec{r}_A+\vec{l}_1+\vec{l}_2) - (\vec{r}_A+\vec{l}_1+\vec{l}_2)\cdot(\vec{r}_A+\vec{l}_1+\vec{l}_2)\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}}\\
&\quad - 3(\vec{r}_A+\vec{l}_1)(\vec{r}_A+\vec{l}_1) + (\vec{r}_A+\vec{l}_1)\cdot(\vec{r}_A+\vec{l}_1)\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}}]\\
&= q(3\vec{l}_1\vec{l}_2 + 3\vec{l}_2\vec{l}_1 - 2\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2\ \overrightarrow{\overrightarrow{I}})
\end{aligned}$$

而高阶项正比于$ql^2(\frac{l}{r})^n \to 0(n>1)$当$l\to 0$时趋于0. 因此,上面给出的$\phi_2, \vec{E}_2$是严格的电四极子产生的电势和电场分布.

继续下去,我们还可以讨论电八极子,电十六极子等等.

因而我们可以用一系列代表体系性质的特征量电荷Q,电偶极矩$\vec{p}$,电四极矩$\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}$,...来近似描述体系的带电性质.在最低阶,将体系看成点电荷,次低阶看成是点电荷和电偶极子的迭加,再后看成是点电荷,电偶极子和电四极子的迭加,....

- 带电体在外场中的能量,受力和力矩

由于带电体可用一系列特征量$Q, q_{i_1i_2\ldots i_n}$来描述其带电性质,因此,带电体在外电场中的能量,受力和力矩也应能用这些特征量来描述.

由于电荷分布在小区域中,可将外电场$\phi(\vec{r}), \vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$在小区域内的适当点(取为坐标原点)作展开

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{1}{n!}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\phi(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\\
&= \phi(0) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_{i_1}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\\
\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\vec{E}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}
\end{aligned}$$

– 带电体在外电场中的能量

$$
\begin{aligned}
W &= \int d\tau\rho(\vec{r})\phi(\vec{r}) \\
&= \int d\tau\rho(\vec{r})\Big\{\phi(0)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_{i_1}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\Big\} \\
&= Q\phi(0)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}q_{i_1i_2\ldots i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_{i_1}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}W_n \\
W_0 &= Q\phi(0) \\
W_n &= -\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}q_{i_1i_2\ldots i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_{i_1}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0} \qquad n\neq 0
\end{aligned}
$$

特别地

$$
\begin{aligned}
W_0 &= Q\phi(0) && \text{点电荷在外电场}\phi\text{中的能量} \\
W_1 &= -\sum_{i=1}^{3}q_iE_i(0)=-\vec{p}\cdot\vec{E}(0) && \text{电偶极子在外场}\vec{E}\text{中的能量} \\
W_2 &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}E_i=-\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}(3q_{ij}-\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}q_{kk})\frac{\partial}{\partial x_j}E_i \\
&= -\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}Q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}E_i && \text{电四极子在外场}\vec{E}\text{中的能量}
\end{aligned}
$$

其中,利用了条件:在坐标原点无产生外电场的电荷. 这时有$\nabla\cdot\vec{E}\Big|_{\vec{r}=0}=0$.

– 带电体在外电场中的受力

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \int d\tau\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \\
&= \int d\tau\rho(\vec{r})\Big\{\vec{E}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\vec{E}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\Big\} \\
&= Q\vec{E}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}q_{i_1i_2\ldots i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\vec{E}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\vec{F}_n \\
\vec{F}_0 &= Q\vec{E}(0) && \text{点电荷在外电场}\vec{E}\text{中的受力}
\end{aligned}
$$

对n大于0情况:

$$
\vec{F}_n = \frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}q_{i_1i_2\ldots i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\vec{E}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}
$$

特别地

$$
\vec{F}_1 = \sum_{i=1}^{3}q_i\frac{\partial}{\partial x_i}E_i(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0}=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} \qquad \text{电偶极子在外场}\vec{E}\text{中的受力}
$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} q_{ij}[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{E}(\vec{r})]\Big|_{\vec{r}=0} = \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}(3q_{ij}-\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}q_{kk})[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\vec{E}(\vec{r})]\Big|_{\vec{r}=0}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\vec{E}(\vec{r})]\Big|_{\vec{r}=0} \qquad \text{电四极子在外场}\vec{E}\text{中的受力}\end{aligned}$$

其中,利用了条件:在坐标原点附近无产生外电场的电荷. 这时有$\nabla^2\vec{E}\Big|_{\vec{r}=0} = -\nabla^2\nabla\phi\Big|_{\vec{r}=0} = -\nabla[\nabla^2\phi]\Big|_{\vec{r}=0} = 0.$

– 带电体在外电场中受的力矩

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int d\tau\rho(\vec{r})\vec{r}\times\vec{E}(\vec{r})\\ &= \int d\tau\rho(\vec{r})\vec{r}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\vec{E}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\int d\tau\rho(\vec{r})x_i\vec{e}_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_j(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i,j,k,i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}\epsilon_{ijk}q_{i_1\ldots i_n}\vec{e}_k\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_j(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\vec{L}_n\end{aligned}$$

$$\vec{L}_n = \frac{1}{n!}\sum_{i,j,k,i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}\epsilon_{ijk}q_{i_1\ldots i_n}\vec{e}_k\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}E_j(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=0}$$

特别地

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}q_i\vec{e}_kE_j(0)\\ &= \vec{p}\times\vec{E}(0) \qquad \text{电偶极子荷在外电场}\vec{E}\text{中受的力矩}\\ \vec{L}_1 &= \sum_{i,j,k,i_1=1}^{3}\epsilon_{ijk}q_{ii_1}\vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}E_j(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{i,j,k,i_1=1}^{3}\epsilon_{ijk}[3q_{ii_1}-\delta_{ii_1}\sum_{k=1}^{3}q_{kk}]\vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}E_j(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{i,j,k,i_1=1}^{3}\epsilon_{ijk}Q_{ii_1}\vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}E_j(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} \qquad \text{电四极子在外场}\vec{E}\text{中受的力矩}\end{aligned}$$

其中,利用了

$$\sum_{ijk=1}^{3}\epsilon_{ijk}\vec{e}_k\frac{\partial}{\partial x_i}E_j = \nabla\times\vec{E} = 0$$

- 矢量势的多极展开,磁多极矩

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau'\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1i_2\ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{r}\Big]\int d\tau' x'_{i_1}x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\vec{j}(\vec{r}') = \sum_{n=0}^{\infty}\vec{A}_n(\vec{r})$$

其中,

$$\vec{A}_n(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i_1 i_2 \ldots i_n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\frac{1}{r}\Big]\vec{J}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad \vec{J}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \int d\tau' x'_{i_1} x'_{i_2}\cdots x'_{i_n}\vec{j}(\vec{r}')$$

相应地对磁场也做展开

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \cdots \qquad\qquad \vec{B}_n = \nabla \times \vec{A}_n$$

以下逐阶讨论各项的含义

- 磁荷:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}}{r} \qquad \vec{J} = \int d\tau'\vec{j}(\vec{r}') = \int d\tau'\nabla'\cdot[\vec{j}(\vec{r}')\vec{r}'] = \int_\infty d\vec{S}'\cdot[\vec{j}(\vec{r}')\vec{r}'] = 0 \qquad \text{无磁荷}$$

  因此

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = 0 \qquad\qquad \vec{B}_0(\vec{r}) = 0$$

  在0阶时, 体系线度的效应被略去了. 体系被缩成一个点磁荷, 由于无磁荷, 磁场为0.

- 磁偶极矩:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i_1=1}^{3}\Big[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{1}{r}\Big]\vec{J}_{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i_1=1}^{3}\frac{x_{i_1}}{r^3}\vec{J}_{i_1}$$

  利用

$$\vec{J}_i = \int d\tau' x'_i\vec{j}(\vec{r}') = \sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\int d\tau' x'_i j_k(\vec{r}') = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\int d\tau'[(x'_i j_k - x'_k j_i) + (x'_i j_k + x'_k j_i)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\vec{e}_k\int d\tau'(x'_i j_k - x'_k j_i)$$

  其中,利用了

$$\int d\tau'(x'_i j_k + x'_k j_i) = \sum_{l=1}^{3}\int d\tau'\frac{\partial}{\partial x'_l}(j_l x'_i x'_k) = \int d\tau'\nabla'\cdot(\vec{j}x'_i x'_k) = \int_\infty d\vec{S}'\cdot(\vec{j}x'_i x'_k) = 0$$

我们发现

$$\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{J}_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3}\int d\tau'(x_i x'_i j_k - x'_k j_i x_i)\vec{e}_k = \frac{1}{2}\int d\tau'(\vec{r}\cdot\vec{r}'\vec{j} - \vec{r}'\vec{r}\cdot\vec{j}) = \frac{1}{2}\int d\tau'(\vec{r}'\times\vec{j})\times\vec{r} = \vec{m}\times\vec{r}$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{A}_1(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad\qquad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d\tau'\vec{r}'\times\vec{j}\\ \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi}[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5}]\end{aligned}$$

在1阶时, 体系被缩成一个磁偶极矩为$\vec{m}$的磁偶极子, 这是一个由电流J均匀分布在面$\vec{S}$上,且$S\to 0, J\to\infty$, 但保持JS为有限的电流圈构成的体系. 事实上, 对这样一个体系, 最低阶的就是磁偶极矩的贡献,

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2}\int d\tau'\vec{r}'\times\vec{j} = -\frac{1}{2}\int d\tau'\vec{j}\times\vec{r}' = -\frac{1}{2}J\oint d\vec{l}'\times\vec{r}' = -\frac{1}{2}J\int(d\vec{S}'\times\nabla')\times\vec{r}'\\ &= -\frac{1}{2}J\sum_{i,j=1}^{3}\int(d\vec{S}'\times\vec{e}_i)\times\vec{e}_j\partial'_i x'_j = -\frac{1}{2}J\sum_{i=1}^{3}\int(d\vec{S}'\times\vec{e}_i)\times\vec{e}_i = -\frac{1}{2}J\sum_{i=1}^{3}\int[(d\vec{S}'\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i - d\vec{S}'(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i)]\\ &= J\int d\vec{S}' = J\vec{S}\end{aligned}$$

而高阶项正比于$Jl'^n(n>3, l'^2\sim S)\sim JS^{n/2} = JSS^{\frac{n-2}{2}}\to 0$它是由磁四极矩,磁八极矩...等等贡献的效应.

§3.1 理想绝缘介质中的波动方程及平面电磁波解

- 波动方程

  介质中的电磁性质方程为

$$\vec{B}=\mu\vec{H} \qquad\qquad \vec{D}=\epsilon\vec{E}$$

  理想绝缘介质中μ,ϵ为常数,特别地,$\mu=\mu_0$和$\epsilon=\epsilon_0$是真空. 本节考虑自由电荷和传导电流为零的情况,这时理想绝缘介质中的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B}=\mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

  计算

$$\nabla^2\vec{E} \;=\; -\nabla(\nabla\cdot\vec{E})+\nabla^2\vec{E}=-\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B}=\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

  类似地

$$\nabla^2\vec{B} \;=\; -\nabla(\nabla\cdot\vec{B})+\nabla^2\vec{B}=-\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=-\mu\epsilon\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E}=\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}$$

  定义

$$v^2=\frac{1}{\mu\epsilon} \qquad\text{特别地}\qquad c^2=\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$$

  则

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad\qquad \nabla^2\vec{B}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

- 平面波解

  上述方程有通解

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v}) \qquad\qquad \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v})$$

  其中$\vec{n}$为常矢量,$\vec{n}\cdot\vec{n}=1$作为检验,我们计算

$$\nabla\vec{E}(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v})=\nabla(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v})\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{\vec{n}}{v}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\nabla\vec{E}=-\frac{\vec{n}}{v}\cdot\nabla\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\vec{n}}{v}\cdot\nabla(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v})\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

  这个解具有以下特点:

  - 对给定时刻,等值面为与$\vec{n}$垂直的平面: $\vec{r}_\perp\cdot\vec{n}=0 \qquad \vec{n}\cdot\vec{r}=\vec{n}\cdot(\vec{r}+\vec{r}_\perp)$

$$t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v}=t-\frac{\vec{n}\cdot(\vec{r}+\vec{r}_\perp)}{v}$$

– 等值面以速度$\vec{v}$沿$\vec{n}$方向运动: 考虑两个时刻$t_1 < t_2$, 等值面由$\vec{r}_1$移到$\vec{r}_2$,则

$$t_1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_1}{v} = t_2 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}_2}{v} \qquad \rightarrow \qquad v = \vec{n}\cdot\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}\right)$$

因此,此解给出的是沿$\vec{n}$方向以速度$\vec{v}$传播的平面电磁波.

$$\nabla\times\vec{E} = \nabla(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v})\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{v}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v})\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{v}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu\nabla\times\vec{H} = \mu\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

它们化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(v\vec{B} - \vec{n}\times\vec{E}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad v\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E} + \text{时间无关项}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}\times v\vec{B} + \vec{E}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad v\vec{E} = -\vec{n}\times v\vec{B} + \text{时间无关项} = -\vec{v}\times\vec{B} + \text{时间无关项}$$

又

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v})\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{n}}{v}\cdot\vec{E}\right) \qquad \nabla\cdot\vec{B} = \nabla(t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v})\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{n}}{v}\cdot\vec{B}\right)$$

它们化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}\cdot\vec{E}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{E} = \text{时间无关?} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}\cdot\vec{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{B} = \text{时间无关项}$$

略去时间无关项(静态电磁场),则$\vec{E},\vec{B},\vec{n}$服从右手关系,且$vB = E$,

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 = W_m \\ \vec{S} &= \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu} = -(\vec{v}\times\vec{B})\times\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{v}\frac{B^2}{\mu} = \vec{v}(W_e + W_m) \end{aligned}$$

§3.2 定态波动方程及平面波解

- 导体

  前面讨论了当$\rho_f = 0, \vec{j}_c = 0$时在理想绝缘介质中传播的平面电磁波. 现在我们将讨论扩充到可以包括导体的情形. 导体与绝缘介质的差别在于对导体存在欧姆定律$\vec{j} = \gamma\vec{E}$. 我们前面讨论的$\vec{j} = 0$时的绝缘介质也可以包括在这个定律中,这时只需取$\gamma = 0$. 由于电荷守恒,

  $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{j} = -\nabla\cdot(\gamma\vec{E}) = -\frac{\gamma}{\epsilon}\nabla\cdot\vec{D} = -\frac{\gamma}{\epsilon}\rho$$

  它的解为

  $$\rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}$$

  即在导体中,电荷密度是很快衰减的(在静电时,导体内部不带电,电荷只分布在表面上). 我们只讨论如下两种情况

  $$\begin{cases} \gamma \sim 0 & \rho(0) = 0 \\ \gamma \gg \epsilon\omega & \omega: \text{电磁波的角频率} \end{cases}$$

  在这两种情况下,我们可以近似地取$\rho(t) = 0$.

- 定态电磁波

  对一般的介质,物质电磁性质方程,$\vec{D}=\epsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H},\vec{j}=\gamma\vec{E}$在迅变的电磁场下不成立.但对以一定频率$\omega$作振荡的电磁波,上述方程仍可成立,即

  $$\vec{D}(\omega)=\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)\qquad\vec{B}(\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\omega)\qquad\vec{j}(\omega)=\gamma(\omega)\vec{E}(\omega)$$

  其中,介电常数$\epsilon(\omega)$,磁导率$\mu(\omega)$,电导率$\gamma(\omega)$一般说是频率的函数.这种现象叫介质的色散. 以一定频率作振荡的电磁波叫定态电磁波(或叫单色波).

  在一般情况下,即使电磁波不是单色波,也可用傅里叶(Fourier)分析(或叫频谱分析)方法将其分解为不同频率的单色波的迭加.

  以下只讨论定态电磁波,设其角频率为ω,电磁场对时间的依赖关系为$\cos\omega t$. 为方便,我们经常用复数形式:

  $$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\qquad\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

  注意

  - ω必须取实数,否则$e^{-i\omega t}$不再是振荡因子,变成随时间的增强(非物理)或衰减因子,形不成持久的波动.
  - 物理的电磁场是$\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$的实部.
  - 不要将抽出时间因子$e^{-i\omega t}$以后的电场强度与$\vec{E}(\vec{r},t)$混淆.

  将上面表达式代入麦克斯韦方程组,约去共同因子$e^{-i\omega t}$,得

  $$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j_c}-i\omega\vec{D}\\ \nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}\quad\text{代入物质电磁方程}\rightarrow\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu(\gamma-i\omega\epsilon)\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

  因此

  $$\nabla^2\vec{E}=\nabla^2\vec{E}-\nabla(\nabla\cdot\vec{E})=-\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-i\omega\nabla\times\vec{B}=i\omega\mu(\gamma-i\omega\epsilon)\vec{E}$$
  $$\nabla^2\vec{B}=\nabla^2\vec{B}-\nabla(\nabla\cdot\vec{B})=-\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\mu(\gamma-i\omega\epsilon)\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu(\gamma-i\omega\epsilon)\vec{B}$$

  我们得到

  $$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}\end{cases}\quad\begin{matrix}\vec{E},\vec{B}\text{相互不独立}\\ \longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-

$\vec{k}$叫波矢, 将其实虚部明显写出$\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$.
$\vec{E}_0, \vec{B}_0$叫复振幅,将其模和幅角明显写出$E_{0n} = \|E_{0n}\|e^{i\delta_{En}}$, $B_{0n} = \|B_{0n}\|e^{i\delta_{Bn}}$. 其中,$\|E_{0n}\|$代表对$E_{0n}$求复数模. 结合起来,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{3}\vec{e}_n\|E_{0n}\|e^{-\vec{k}_I\cdot\vec{r}}e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{En})}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{3}\vec{e}_n\|B_{0n}\|e^{-\vec{k}_I\cdot\vec{r}}e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{Bn})}$$

其中:
$\|E_{0n}\|e^{-\vec{k}_I\cdot\vec{r}}$, $\|B_{0n}\|e^{-\vec{k}_I\cdot\vec{r}}$分别是电场强度和磁感应强度在$n$方向分量的振幅.
$\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{En}$, $\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{Bn}$分别是电场强度和磁感应强度在$n$方向分量的位相.
这样的解具有如下性质

- 在给定时刻t,等相面是与$\vec{k}_R$垂直的平面. $\vec{k}_R\cdot\vec{r} = \vec{k}_R\cdot(\vec{r}+\vec{r}_\perp) \quad \vec{r}_\perp\cdot\vec{k}_R = 0.$
- 等相面以速率$v_\phi = \omega/k_R$沿$\vec{k}_R$方向运动.

$$-\omega t_1 + \vec{k}_R\cdot\vec{r}_1 = -\omega t_2 + \vec{k}_R\cdot\vec{r}_2 \qquad \rightarrow \qquad 1 = \frac{\vec{k}_R}{\omega}\cdot\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{t_2-t_1}\frac{\vec{k}_R}{\omega}\cdot\vec{v}_\phi$$

- 当$\vec{k}_I = 0$时,等相面就是等值面.
- 当$\vec{k}_I \neq 0$时,等值区域由$\vec{k}_R\cdot\vec{r}$=常数和$\vec{k}_I\cdot\vec{r}$=常数联合求解决定,它一般是一条线.振幅最大处位于$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = 0$处. 偏离最大振幅处为衰减的振幅.
- 波矢
  $\vec{k}_R$的方向反映的是位相的传播方向. $\vec{k}_I$的方向反映的是振幅的最大衰减方向. $k^2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\gamma = \vec{k}\cdot\vec{k} = k_R^2 - k_I^2 + 2i\vec{k}_R\cdot\vec{k}_I$给出

$$k_R^2 - k_I^2 = \mu\epsilon\omega^2 \qquad k_R k_I\cos\theta = \frac{1}{2}\omega\mu\gamma$$

  其中$\cos\theta \equiv \frac{\vec{k}_R}{k_R}\cdot\frac{\vec{k}_I}{k_I}$, 若$\omega\mu\gamma > 0$,则$0 < \theta < \pi/2$.
  k_I代表了电磁波振幅的衰减.从另一个角度,它反映了物质对电磁波的吸收. k_I大,吸收强,k_I小,吸收弱. 注意对绝缘介质,$\gamma = 0, k_I = 0$, 因此对绝缘介质,电磁波无吸收,电磁能量不耗散.通常将波幅降至原值$1/e$的传播距离称为穿透深度$\delta = \frac{1}{k_I\cos\theta}$.
  k_I在实际应用中有重要意义.对一种确定物质, k_I一般与ω有关, 对某些ω值较大,对另外的ω值较小,它反映这种物质对某些频率的电磁波吸收较强,而对其它频率的电磁波吸收较弱.如,人之所以只能看到可见光范围的电磁波,就是因为视网膜的k_I在可见光范围内较大,而对其它频率很小.另外,大气对很大一部分频率的电磁波吸收很强,除可见光外,只对一小部分频段的电磁波吸收较弱,称为大气的窗户.大气层的这个性质好处是保护地球上的动植物免受来自宇宙太空的电磁射线的损害,坏处是限制了人类获取来自宇宙太空的信息,在地球上,只能接收几个窗口频段的电磁波.
- 振幅
  复振幅$\vec{E}_0, \vec{B}_0$满足

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \qquad \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}_0$$

  若$k_I = 0$(绝缘介质就是这种情形), 上式意味$\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$成右手关系,且$B_0 = \frac{k}{\omega}E_0$, $\vec{B}$与$\vec{E}$同位相.
  若$k_i \neq 0$, 右手关系一般不成立,$\vec{B}$与$\vec{E}$一般也不同位相. 若将$\vec{E}_0, \vec{B}_0$的实虚部明显写出来,

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0R} + i\vec{E}_{0I} \qquad \vec{B}_0 = \vec{B}_{0R} + i\vec{B}_{0I}$$

则对实虚部的约束关系可写为

$$\vec{k}_R \cdot \vec{E}_{0R} - \vec{k}_I \cdot \vec{E}_{0I} = 0 \qquad \vec{k}_R \cdot \vec{E}_{0I} + \vec{k}_I \cdot \vec{E}_{0R} = 0$$
$$\vec{B}_{0R} = \frac{\vec{k}_R}{\omega} \times \vec{E}_{0R} - \frac{\vec{k}_I}{\omega} \times \vec{E}_{0I} \qquad \vec{B}_{0I} = \frac{\vec{k}_R}{\omega} \times \vec{E}_{0I} + \frac{\vec{k}_I}{\omega} \times \vec{E}_{0R}$$

对比前面引入的$\vec{E}_0, \vec{B}_0$的复数模和相角关系,

$$\vec{E}_{0R} = \sum_{n=1}^{3} \|E_{0n}\| \vec{e}_n \cos\delta_{En} \qquad \vec{E}_{0I} = \sum_{n=1}^{3} \|E_{0n}\| \vec{e}_n \sin\delta_{En}$$
$$\vec{B}_{0R} = \sum_{n=1}^{3} \|B_{0n}\| \vec{e}_n \cos\delta_{Bn} \qquad \vec{B}_{0I} = \sum_{n=1}^{3} \|B_{0n}\| \vec{e}_n \sin\delta_{Bn}$$

– 偏振

在$\vec{k}$为实的情况下,取z轴为$\vec{k}$方向(即电磁波沿z轴正方向传播),则

$$E_{0z} = 0 \qquad \vec{E}(\vec{r}, t) = \|E_{0x}\| e^{i(kz - \omega t + \delta_{Ex})} \vec{e}_1 + \|E_{0y}\| e^{i(kz - \omega t + \delta_{Ey})} \vec{e}_2$$

在某一z取定的xy平面上,电场强度矢量随时间不断变化,可以有如下行为

$$\begin{cases} \delta_{Ex} - \delta_{Ey} = 0, \pi & \text{线偏振} \\ \|E_{0x}\| = \|E_{0y}\| & \begin{cases} \delta_{Ex} - \delta_{Ey} = \frac{\pi}{2} & \text{左旋} \\ \delta_{Ex} - \delta_{Ey} = \frac{3\pi}{2} & \text{右旋} \\ \delta_{Ex} - \delta_{Ey}\text{不固定} & \text{自然光} \end{cases} \\ \text{一般: 椭圆} \end{cases}$$

在实际应用中,有些晶体对某一特定方向上的电磁振动有强烈的吸收,一个椭圆偏振或自然光通过它会变成线偏振光. 立体电影即是利用这种性质使双眼看到不同的影象, 产生立体效果.

– 能量密度, 能流密度

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon \vec{E}_R \cdot \vec{E}_R \qquad W_m = \frac{1}{2\mu} \vec{B}_R \cdot \vec{B}_R \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E}_R \times \vec{B}_R$$

注意

$$\vec{E}_R \cdot \vec{E}_R = \sum_{n=1}^{3} E_{Rn} E_{Rn} = \sum_{n=1}^{3} \|E_{0n}\|^2 e^{-2\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \cos^2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{En})$$
$$\vec{B}_R \cdot \vec{B}_R = \sum_{n=1}^{3} B_{Rn} B_{Rn} = \sum_{n=1}^{3} \|B_{0n}\|^2 e^{-2\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \cos^2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{Bn})$$
$$\vec{E}_R \times \vec{B}_R = \sum_{n,m,p=1}^{3} \epsilon_{nmp} E_{Rn} B_{Rm} \vec{e}_p = \sum_{n,m,p=1}^{3} \|E_{0n}\| \|B_{0m}\| e^{-2\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \vec{e}_p \cos(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{En}) \cos(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{Bn})$$

并且

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{En})} &= \frac{1}{2}\overline{[1 + \cos 2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{En})]} = \frac{1}{2} \\ \overline{\cos^2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{Bn})} &= \frac{1}{2}\overline{[1 + \cos 2(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{Bn})]} = \frac{1}{2} \\ \overline{\cos(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{En}) \cos(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{Bn})} &= \frac{1}{2}\overline{[\cos(2\vec{k}_R \cdot \vec{r} - 2\omega t + \delta_{En} + \delta_{Bn}) + \cos(\delta_{En} - \delta_{Bn})]} \\ &= \frac{1}{2}\cos(\delta_{En} - \delta_{Bn}) \end{aligned}$$

因此

$$\overline{\vec{E}_R\cdot\vec{E}_R}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\|E_{0n}^2\|e^{-2\vec{k}_I\cdot\vec{r}}=\frac{1}{2}Re(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)\qquad\overline{\vec{B}_R\cdot\vec{B}_R}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\|B_{0n}^2\|e^{-2\vec{k}_I\cdot\vec{r}}=\frac{1}{2}Re(\vec{B}\cdot\vec{B}^*)$$

$$\overline{\vec{E}_R\times\vec{B}_R}=\frac{1}{2}\sum_{n,m,p=1}^{3}\epsilon_{nmp}\|E_{0n}\|\|B_{0m}\|\vec{e}_p e^{-2\vec{k}_I\cdot\vec{r}}\cos(\delta_{En}-\delta_{Bn})=\frac{1}{2}Re(\vec{E}\times\vec{B}^*)$$

最后

$$\overline{W_e}=\frac{1}{2}\epsilon\overline{\vec{E}_R\cdot\vec{E}_R}=\frac{1}{4}\epsilon Re(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)$$

$$\overline{W_m}=\frac{1}{2\mu}\overline{\vec{B}_R\cdot\vec{B}_R}=\frac{1}{4\mu}Re(\vec{B}\cdot\vec{B}^*)=\frac{1}{4\mu}Re\Big[(\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E})\cdot(\frac{\vec{k}^*}{\omega}\times\vec{E}^*)\Big]$$

$$=\frac{1}{4\mu\omega^2}Re\Big[(\vec{k}\cdot\vec{k}^*)(\vec{E}\cdot\vec{E}^*)-(\vec{k}\cdot\vec{E}^*)(\vec{k}^*\cdot\vec{E})\Big]$$

对绝缘体,$\vec{k}=\vec{k}^*,\vec{k}\cdot\vec{E}=0\rightarrow$, $W_e=W_m$,但导体则$W_e\neq W_m$,即电能和磁能是等量分布在绝缘体的电磁波中,但不等量在导体中.

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}}&=\frac{\overline{\vec{E}_R\times\vec{B}_R}}{\mu}=\frac{1}{2\mu}Re(\vec{E}\times\vec{B}^*)=\frac{1}{2\mu}Re(\vec{E}^*\times\vec{B})=\frac{1}{2\mu}Re[\vec{E}^*\times(\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E})]\\&=\frac{1}{2\mu\omega}Re[\vec{k}(\vec{E}\cdot\vec{E}^*-\vec{E}(\vec{k}\cdot\vec{E}^*)]\end{aligned}$$

对绝缘体,能量沿波传播方向流动,对导体则还有其它方向的流动.

§3.3 电磁波在界面上的反射和折射

由于电磁波在金属中衰减的很历害,我们只讨论电磁波从一绝缘介质入射到另一绝缘或导电介质中,电磁波的行为. 取ϵ,μ,γ都为实数.

- 边界条件

  设界面位于$z=0$的xy平面.入射电磁波方向位于xz平面,与z轴夹角θ.入射波为频率ω的平面电磁波.

$$\vec{A}_1=\vec{A}_{10}e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)}\quad\leftarrow\text{入射波};\ \vec{A}_2=\vec{A}_{20}e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega_2 t)}\quad\leftarrow\text{透射波};\ \vec{A}_3=\vec{A}_{30}e^{i(\vec{k}_3\cdot\vec{r}-\omega_3 t)}\quad\leftarrow\text{反射波}$$

$$\vec{A}\subset(\vec{E},\vec{H})$$

$$\vec{k}_1=k_1(\sin\theta_1\vec{e}_1+\cos\theta_1\vec{e}_3)\qquad\vec{k}_3=k_{3x}\vec{e}_1+k_{3y}\vec{e}_2+k_{3z}\vec{e}_3\qquad\vec{k}_2=\vec{k}_{2R}+i\vec{k}_{2I}$$

$$k_1=\frac{\omega}{v}=\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega\qquad k_3=\frac{\omega_3}{v}=\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega_3\qquad\begin{cases}k_R^2-k_I^2=\mu_2\epsilon_2\omega_2^2\\k_{2R}k_{2I}\cos\theta=\frac{1}{2}\omega_2\mu_2\gamma_2\end{cases}$$

已知:$\vec{k}_1,\omega,\vec{A}_{10},\mu_1,\epsilon_1,\gamma_1,\mu_2,\epsilon_2,\gamma_2,\theta_1$, 我们需要求:$\vec{k}_2,\vec{k}_3,\omega_2,\omega_3,\vec{A}_{20},\vec{A}_{30}$. 出发点是边条件$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0,\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_c,\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f,\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$.上述边条件只有两个是独立的. 我们讨论$\vec{i}_c=0,\sigma_f=0$的情况. 选$\vec{H},\vec{E}$的边条件,即$\vec{n}\times(\vec{A}_1+\vec{A}_3)\Big|_{z=0}=\vec{n}\times\vec{A}_2\Big|_{z=0}$或

$$\vec{n}\times[\vec{A}_{10}e^{i(k_{1x}x+k_{1y}y-\omega t)}+\vec{A}_{30}e^{i(k_{3x}x+k_{3y}y-\omega_3 t)}]=\vec{n}\times\vec{A}_{20}e^{i(k_{2x}x+k_{2y}y-\omega_2 t)}$$

这个方程的解为

$$\begin{cases} \omega = \omega_2 = \omega_3 \\ k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} = k_1 \sin\theta_1 = \sqrt{\mu_1\epsilon_1}\sin\theta_1 \\ k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{A}_{10} + \vec{A}_{30}) = \vec{n} \times \vec{A}_{20} \end{cases}$$

- 反射透射波的波矢
  - 反射波

$$\begin{array}{ccccc} \omega_3 = \omega, & & k_3 = k_1, & & \vec{k}_3 = k_3\sin\theta_3\vec{e}_1 - k_3\cos\theta_3\vec{e}_3 \\ k_{3x} = k_{1x} & \rightarrow & k_3\sin\theta_3 = k_1\sin\theta_1 & \rightarrow & \theta_3 = \theta_1 \quad \text{反射定律} \end{array}$$

    所以,反射波也是频率为ω的平面单色波,位于入射波,且入射角等于反射角.
  - 透射波

$$\omega_2 = \omega, \qquad k_{2Rx} = \sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega\sin\theta_1, \qquad k_{2Ix} = 0, \qquad k_{2Ry} = k_{2Iy} = 0$$

$$k_R^2 - k_I^2 = \mu_2\epsilon_2\omega_2^2, \qquad k_{2R}k_{2I}\cos\theta = \frac{1}{2}\omega_2\mu_2\gamma_2$$

    结合起来

$$k_{2Rz}^2 - k_{2Iz}^2 = k_{2R}^2 - k_{2Rx}^2 - k_{2Ry}^2 - k_{2I}^2 + k_{2Ix}^2 + k_{2Iy}^2 = \mu_2\epsilon_2\omega^2 - \mu_1\epsilon_1\omega^2\sin^2\theta_1$$

$$k_{2Rz}k_{2Iz} = \vec{k}_{2R}\cdot\vec{k}_{2Iz} - k_{2Rx}k_{2Ix} - k_{2Ry}k_{2Iy} = \frac{1}{2}\omega\mu_2\gamma_2$$

最后解出

$$\begin{aligned} k_{2Rx} &= \sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega\sin\theta_1 \\ k_{2Ry} &= 0 \\ k_{2Rz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1)\omega^2 + \sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1)^2\omega^4 + \mu_2\gamma_2\omega^2}} \\ k_{2Ix} &= 0 \\ k_{2Iy} &= 0 \\ k_{2Iz} &= \frac{\omega\mu_2\gamma_2}{\sqrt{2}\sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1)\omega^2 + \sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1)^2\omega^4 + \mu_2\gamma_2\omega^2}}} \end{aligned}$$

透射波也是频率为ω的单色波,位于入射面,衰减方向垂直于界面(z方向).
讨论

1. 绝缘透射介质: $\gamma_2 = 0,$ 折射率$n \equiv \sqrt{\mu_r\epsilon_r} = c\sqrt{\mu\epsilon}$

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{\mu_2\epsilon_2}\omega = \frac{n_2}{c}\omega \qquad \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1} \\ k_{2Rz} &= \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1) + \|\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1\|} \\ k_{2Iz} &= \frac{\omega\mu_2\gamma_2}{\sqrt{2}\sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1) + \|\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1\|}} \end{aligned}$$

(a) $\mu_2\epsilon_2 \geq \mu_1\epsilon_1 \qquad \rightarrow \qquad n_2 \geq n_1$,即光疏→光密

$$k_{2Rz} = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1 \sin^2\theta_1} \qquad k_{2Iz} = 0 \qquad \text{无衰减}$$
$$\vec{k}_2 = k_2 \sin\theta_2 \vec{e}_1 + k_2 \cos\theta_2 \vec{e}_3 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}(\sin\theta_2\vec{e}_1 + \cos\theta_2\vec{e}_3)$$
$$\rightarrow \quad \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sin\theta_2 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\sin\theta_1 \quad \rightarrow \quad n_2\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1 \qquad \text{折射定律}$$

注意,这时$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \leq 1$

(b) $\mu_2\epsilon_2 < \mu_1\epsilon_1 \qquad \sin\theta_1 \leq \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$, 即光密→光疏.

公式同前,$\vec{k}_2$仍为实, $n_2\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1$注意,这时仍有$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \leq 1$

(c) $\mu_2\epsilon_2 < \mu_1\epsilon_1 \qquad \sin\theta_1 > \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$, 即光密→光疏.

$$k_{2Rz} = 0$$
$$k_{2Iz} = \frac{\omega\mu_2\gamma_2}{\sqrt{2}\sqrt{(\mu_2\epsilon_2 - \mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1)\omega^2 + (\mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1 - \mu_2\epsilon_2)\omega^2[1 + \frac{\mu_2\gamma_2^2\omega^2}{2(\mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1 - \mu_2\epsilon_2)^2\omega^4}]}}\Bigg|_{\gamma_2\to 0}$$
$$= \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1 - \mu_2\epsilon_2}$$

这时

$$\vec{k}_{2R} = \sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega\sin\theta_1\vec{e}_1 \qquad v_{2\phi} = v_{2\phi,x} = \frac{\omega}{k_R} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\sin\theta_1} = \frac{v_1}{\sin\theta_1}$$
$$\vec{k}_{2I} = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1\sin^2\theta_1 - \mu_2\epsilon_2}\vec{e}_3$$

波沿x方向贴界面传播,衰减方向为z方向.这种情况叫全反射.(透射波不向介质内传播)

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_{20}e^{-\omega z\sqrt{\mu_1\epsilon_1\sin\theta_1 - \mu_2\epsilon_2}}e^{i(\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega\sin\theta_1 x - \omega t)}$$

2. 导电透射介质: $\gamma \neq 0$

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_{20}e^{-k_{2Iz}z}e^{i(k_{2Rx}x + k_{2Rz}z - \omega t)}$$

* 透射波等相面沿$\vec{k}_{2R} = k_{2Rx}\vec{e}_1 + k_{2Rz}\vec{e}_3$方向传播, 频率$\omega$,速率$v = \frac{\omega}{k_{2R}} = \frac{\omega}{\sqrt{k_{2Rx}^2 + k_{2RZ}^2}}$.
* 透射波有衰减,方向在z方向.

- 反射透射波的振幅

由前面的讨论知麦克斯韦方程组将给出对振幅的约束

$$\begin{cases} \vec{k}_3\cdot\vec{E}_{30} = 0 \\ \vec{k}_2\cdot\vec{E}_{20} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_{3x}E_{30x} + k_{3z}E_{30z} = 0 \\ k_{2x}E_{20x} + k_{2z}E_{20z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_{30z} = -\frac{k_{3x}}{k_{3z}}E_{30x} \\ E_{20z} = -\frac{k_{2x}}{k_{2z}}E_{20x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}_{30} = \frac{\vec{k}_3}{\omega}\times\vec{E}_{30} \\ \vec{B}_{20} = \frac{\vec{k}_2}{\omega}\times\vec{E}_{20} \end{cases}$$

为方便,分两种情况讨论:一种入射波电场位于入射面,磁场垂直入射面.另一种入射波电场垂直入射面,磁场位于入射面.一般情况总可以化为这两种情况的迭加.

1. 入射波电场位于入射面

入射波振幅

$$\vec{E}_{10} = E_{10}(\vec{e}_1\cos\theta_1 - \vec{e}_3\sin\theta_1) \qquad \vec{B}_{10} = \frac{\vec{k}_1}{\omega}\times\vec{E}_{10} = \frac{k_1}{\omega}E_{10}\vec{e}_y$$

由边条件

$$\vec{E}_{10t}+\vec{E}_{30t}=\vec{E}_{20t} \qquad\qquad \vec{H}_{10t}+\vec{H}_{30t}=\vec{H}_{20t}$$

它具体化为

$$\begin{cases} E_{30y}=E_{20y} & \clubsuit \\ \frac{1}{\mu_1}B_{30x}=\frac{1}{\mu_2}B_{20x} & \diamondsuit \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} E_{10}\cos\theta_1+E_{30x}=E_{20x} & \spadesuit \\ \frac{1}{\mu_1}\frac{k_1}{\omega}E_{10}+\frac{1}{\mu_1}B_{30y}=\frac{1}{\mu_2}B_{20y} & \heartsuit \end{cases}$$

结合起来

$$\diamondsuit\rightarrow \frac{1}{\mu_1}(\frac{\vec{k}_1}{\omega}\times\vec{E}_{30})_x=\frac{1}{\mu_2}(\frac{\vec{k}_2}{\omega}\times\vec{E}_{20})_x\rightarrow \frac{1}{\mu_1}(k_{3y}E_{30z}-k_{3z}E_{30y})=\frac{1}{\mu_2}(k_{2y}E_{20z}-k_{2z}E_{20y})$$
$$\rightarrow \frac{1}{\mu_1}k_{3z}E_{30y}=\frac{1}{\mu_2}k_{2z}E_{20y}\overset{\clubsuit}{\rightarrow}E_{30y}=E_{20y}=0\overset{\diamondsuit}{\rightarrow}B_{30x}=B_{20x}=0$$

反射波和透射波电场仍位于入射面,磁场垂直于入射面. 定义

$$\vec{e}_{2\parallel}=\frac{k_{2z}}{k_2}\vec{e}_1-\frac{k_{2x}}{k_2}\vec{e}_3 \qquad\qquad \vec{e}_{3\parallel}=\frac{k_{3z}}{k_3}\vec{e}_1-\frac{k_{3x}}{k_3}\vec{e}_3=-\cos\theta_1\vec{e}_1-\sin\theta_1\vec{e}_3$$

则

$$\vec{E}_{20}=E_{20x}\vec{e}_1+E_{20z}\vec{e}_3=E_{20x}\vec{e}_1-\frac{k_{2x}}{k_{2z}}\vec{e}_3E_{20x}=\vec{e}_{2\parallel}\frac{k_2}{k_{2z}}E_{20x}$$
$$\vec{E}_{30}=E_{30x}\vec{e}_1+E_{30z}\vec{e}_3=E_{30x}\vec{e}_1-\frac{k_{3x}}{k_{3z}}\vec{e}_3E_{30x}=\vec{e}_{3\parallel}\frac{k_3}{k_{3z}}E_{30x}=-\vec{e}_{3\parallel}\frac{1}{\cos\theta_1}E_{30x}$$

因此

$$\heartsuit\rightarrow \frac{1}{\mu_2}(\frac{\vec{k}_2}{\omega}\times\vec{E}_{20})_y-\frac{1}{\mu_1}(\frac{\vec{k}_3}{\omega}\times\vec{E}_{30})_y=\frac{1}{\mu_1}\frac{k_1}{\omega}E_{10}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\mu_2}(k_{2z}E_{20x}-k_{2x}E_{20z})-\frac{1}{\mu_1}(k_{3z}E_{30x}-k_{3x}E_{30z})=\frac{k_1}{\mu_1}E_{10}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\mu_2}(k_{2z}+\frac{k_{2x}^2}{k_{2z}})E_{20x}-\frac{1}{\mu_1}(k_{3z}+\frac{k_{3x}^2}{k_{3z}})E_{30x}=\frac{1}{\mu_1}k_1E_{10}$$
$$\rightarrow \frac{1}{\mu_2}\frac{k_2^2}{k_{2z}}E_{20x}-\frac{1}{\mu_1}\frac{k_3^2}{k_{3z}}E_{30x}=\frac{1}{\mu_1}k_1E_{10}$$
$$+\spadesuit\rightarrow \qquad \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{k_2^2}{k_1k_{2z}}E_{20x}+\frac{1}{\cos\theta_1}E_{30x}=E_{10} \qquad\qquad E_{20x}-E_{30x}=E_{10}\cos\theta_1$$
$$\rightarrow E_{20x}=\frac{2\cos\theta_1}{1+\frac{\mu_1k_2^2\cos\theta_1}{\mu_2k_1k_{2z}}}E_{10} \qquad\qquad E_{30x}=\frac{1-\frac{\mu_1k_2^2\cos\theta_1}{\mu_2k_1k_{2z}}}{1+\frac{\mu_1k_2^2\cos\theta_1}{\mu_2k_1k_{2z}}}\cos\theta_1E_{10}$$

最后得到

$$\vec{E}_{20\parallel}=\frac{2\cos\theta_1}{\frac{k_{2z}}{k_2}+\frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{2\parallel} \qquad\qquad \vec{E}_{30\parallel}=\frac{-\frac{k_{2z}}{k_2}+\frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1}{\frac{k_{2z}}{k_2}+\frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}\cos\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{3\parallel}$$

特别地,若$\gamma_2=0,\mu_2=\mu_1$,则:$k_{2z}=k_2\cos\theta_2 k_{2x}=k_2\sin\theta_2\rightarrow\vec{e}_{2\parallel}=\cos\theta_2\vec{e}_1-\sin\theta_2\vec{e}_3$, 且$k_2/k_1=n_2/n_1=\sin\theta_1/\sin\theta_2$,因此

$$\vec{E}_{20\parallel}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_2+\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{2\parallel}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\frac{1}{2}\sin2\theta_2+\frac{1}{2}\sin2\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{2\parallel}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}E_{10\parallel}\vec{e}_{2\parallel}$$
$$\vec{E}_{30\parallel}=\frac{-\sin\theta_2\cos\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sin\theta_2\cos\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{3\parallel}=\frac{-\sin2\theta_2+\sin2\theta_1}{\sin2\theta_2+\sin2\theta_1}E_{10\parallel}\vec{e}_{3\parallel}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}E_{10\parallel}\vec{e}_{3\parallel}$$

2. 入射波电场垂直入射面

入射波振幅

$$\vec{E}_{10} = E_{10}\vec{e}_2 \qquad \vec{B}_{10} = \frac{\vec{k}_1}{\omega} \times \vec{E}_{10} = \frac{k_1}{\omega} E_{10}(-\vec{e}_1 \cos\theta_1 + \vec{e}_3 \sin\theta_1)$$

由边条件

$$\vec{E}_{10t} + \vec{E}_{30t} = \vec{E}_{20t} \qquad \vec{H}_{10t} + \vec{H}_{30t} = \vec{H}_{20t}$$

它具体化为

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_{30x} = E_{20x} & \clubsuit \\ \frac{1}{\mu_1} B_{30y} = \frac{1}{\mu_2} B_{20y} & \diamondsuit \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ll} E_{10y} + E_{30y} = E_{20y} & \spadesuit \\ \frac{1}{\mu_1}(B_{10x} + B_{30x}) = \frac{1}{\mu_2} B_{20x} & \heartsuit \end{array} \right.$$

计算过程见作业. 最后得到

$$\vec{E}_{20\perp} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}} E_{10\perp}\vec{e}_2 \qquad \vec{E}_{30\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}}{1 + \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}} E_{10\perp}\vec{e}_2$$

特别地,若$\gamma_2 = 0, \mu_2 = \mu_1$,则:$k_{2z} = k_2 \cos\theta_2 = k_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2 / \sin\theta_2$因此

$$\vec{E}_{20\perp} = \frac{2}{1 + \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_2 \cos\theta_1}} E_{10\perp}\vec{e}_2 = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} E_{10\perp}\vec{e}_2$$

$$\vec{E}_{30\perp} = \frac{1 - \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_2 \cos\theta_1}}{1 + \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin\theta_2 \cos\theta_1}} E_{10\perp}\vec{e}_2 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} E_{10\perp}\vec{e}_2$$

3. 一般情况

$$\vec{E}_{10} = \vec{E}_{10\parallel} + \vec{E}_{10\perp} = E_{10\parallel}(\vec{e}_1 \cos\theta_1 - \vec{e}_3 \sin\theta_1) + E_{10\perp}\vec{e}_2$$

$$\vec{E}_{20} = \vec{E}_{20\parallel} + \vec{E}_{20\perp} = E_{10\parallel}(\vec{e}_1 \frac{k_{2z}}{k_2} - \vec{e}_3 \frac{k_{2x}}{k_2}) \frac{\cos\theta_1}{\frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}\cos\theta_1} + E_{10\perp}\vec{e}_2 \frac{2}{1 + \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}}$$

$$\vec{E}_{30} = \vec{E}_{30\parallel} + \vec{E}_{30\perp} = E_{10\parallel}(\vec{e}_1 \cos\theta_1 + \vec{e}_3 \sin\theta_1) \frac{-\frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}\cos\theta_1}{\frac{k_{2z}}{k_2} + \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}\cos\theta_1} + E_{10\perp}\vec{e}_2 \frac{1 - \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}}{1 + \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1 \cos\theta_1}}$$

当透射介质是绝缘介质,对非全反射情形,$\vec{k}_2$为实,反透射波与入射波振幅之比为实,因此,反透射波与入射波同位相. 当透射介质是绝缘介质的非全反射情形或是导电介质的情形,$\vec{k}_2$有虚部, 反透射波与入射波振幅之比为复数,即,反透射波与入射波还相差位相,并且这个位相在反射波与透射波,$\parallel$波与$\perp$波之间是不同的,它将造成反射波,透射波,入射波偏振状态的差异.

- 反射透射波的能流

  我们讨论能量流过界面的情况,利用

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu\omega} Re[\vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{E}^*)]$$

  – 对入射波

$$\overline{\vec{S}}_1 = \frac{1}{2\mu_1\omega} Re[\vec{k}_1(\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}^*_{10})] = \frac{1}{2\mu_1\omega}\vec{k}_1(\vec{E}_{10\parallel} \cdot \vec{E}^*_{10\parallel} + \vec{E}_{10\perp} \cdot \vec{E}^*_{10\perp}) = \overline{\vec{S}}_{1\parallel} + \overline{\vec{S}}_{1\perp}$$

$$\overline{\vec{S}}_{1\parallel} = \frac{\vec{k}_1}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{10\parallel} \cdot \vec{E}^*_{10\parallel}) = \frac{\vec{k}_1}{2\mu_1\omega} E_{10\parallel} E^*_{10\parallel}$$

$$\overline{\vec{S}}_{1\perp} = \frac{\vec{k}_1}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{10\perp} \cdot \vec{E}^*_{10\perp}) = \frac{\vec{k}_1}{2\mu_1\omega} E_{10\perp} E^*_{10\perp}$$

  其中利用了$\vec{k}_1 = \vec{k}^*_1, \vec{k}_1 \cdot \vec{E}_{10} = 0.$

– 对反射波

$$\overline{\vec{S}}_3 = \frac{1}{2\mu_1\omega} Re[\vec{k}_3(\vec{E}_{30}\cdot\vec{E}^*_{30})] = \frac{1}{2\mu_1\omega}\vec{k}_3(\vec{E}_{30\parallel}\cdot\vec{E}^*_{30\parallel} + \vec{E}_{30\perp}\cdot\vec{E}^*_{30\perp}) = \overline{\vec{S}}_{3\parallel} + \overline{\vec{S}}_{3\perp}$$

$$\overline{\vec{S}}_{3\parallel} = \frac{\vec{k}_3}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{30\parallel}\cdot\vec{E}^*_{30\parallel}) = \frac{\vec{k}_3}{2\mu_1\omega}E_{30\parallel}E^*_{30\parallel}$$

$$\overline{\vec{S}}_{3\perp} = \frac{\vec{k}_3}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{30\perp}\cdot\vec{E}^*_{30\perp}) = \frac{\vec{k}_3}{2\mu_1\omega}E_{30\perp}E^*_{30\perp}$$

其中利用了$\vec{k}_3 = \vec{k}^*_3, \vec{k}_3\cdot\vec{E}_{30} = 0.$

– 对透射波

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{S}}_2 &= \frac{1}{2\mu_2\omega} Re[\vec{k}_2(\vec{E}_2\cdot\vec{E}^*_2) - \vec{E}_2(\vec{k}_2\cdot\vec{E}^*_2)] \\
&= \frac{1}{2\mu_2\omega} Re[\vec{k}_2(\vec{E}_{2\parallel}\cdot\vec{E}^*_{2\parallel} + \vec{E}_{2\perp}\cdot\vec{E}^*_{2\perp}) - (\vec{E}_{2\parallel}+\vec{E}_{2\perp})(\vec{k}_2\cdot\vec{E}^*_{2\parallel})] = \overline{\vec{S}}_{2\parallel} + \overline{\vec{S}}_{2\perp} \\
\overline{\vec{S}}_{2\parallel} &= \frac{1}{2\mu_2\omega}\{\vec{k}_{2R}(\vec{E}_{2\parallel}\cdot\vec{E}^*_{2\parallel}) - Re(\vec{E}_{2\parallel}+\vec{E}_{2\perp})(\vec{k}_2\cdot\vec{E}_{2\parallel}\} \\
\overline{\vec{S}}_{2\perp} &= \frac{\vec{k}_{2R}}{2\mu_2\omega}(\vec{E}_{2\perp}\cdot\vec{E}^*_{2\perp})
\end{aligned}$$

注意,在$\overline{\vec{S}}_2$的公式中,无下标0.

取界面$(z=0)$上一个小面元$\Delta\vec{S} = \Delta S\vec{e}_3$.

– 对⊥波定义透射系数

$$\begin{aligned}
D_\perp &\equiv \left.\frac{\overline{\vec{S}}_{2\perp}\cdot\Delta\vec{S}}{\overline{\vec{S}}_{1\perp}\cdot\Delta\vec{S}}\right|_{z=0} = \left.\frac{\overline{S}_{2\perp z}}{\overline{S}_{1\perp z}}\right|_{z=0} = \frac{\frac{k_{2zR}}{2\mu_2\omega}(\vec{E}_{2\perp}\cdot\vec{E}^*_{2\perp})}{\frac{k_{1z}}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{10\perp}\cdot\vec{E}^*_{10\perp})} = \frac{\mu_1 k_{2zR}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}\frac{\vec{E}_{20\perp}\cdot\vec{E}^*_{20\perp}}{E_{10\perp}E^*_{10\perp}}e^{-2\vec{k}_{2I}\cdot\vec{r}}\Big|_{z=0} \\
&= \frac{\mu_1 k_{2zR}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}\left\|\frac{2}{1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}}\right\|^2
\end{aligned}$$

– 对⊥波定义反射系数

$$R_\perp \equiv \left.\frac{-\overline{\vec{S}}_{3\perp}\cdot\Delta\vec{S}}{\overline{\vec{S}}_{1\perp}\cdot\Delta\vec{S}}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\overline{S}_{3\perp z}}{\overline{S}_{1\perp z}}\right|_{z=0} = -\frac{\frac{k_{3z}}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{30\perp}\cdot\vec{E}^*_{30\perp})}{\frac{k_{1z}}{2\mu_1\omega}(\vec{E}_{10\perp}\cdot\vec{E}^*_{10\perp})} = \frac{\vec{E}_{30\perp}\cdot\vec{E}^*_{30\perp}}{E_{10\perp}E^*_{10\perp}} = \left\|\frac{1-\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}}{1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}}\right\|^2$$

能量守恒在界面上的体现为

$$\begin{aligned}
R_\perp + D_\perp &= \frac{\frac{4\mu_1 k_{2zR}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1} + (1-\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1})(1-\frac{\mu_1 k^*_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1})}{\|1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}\|^2} \\
&= \frac{\frac{2\mu_1}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}(k_{2z}+k^*_{2z}) + 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}(k_{2z}+k^*_{2z}) + \frac{\mu_1^2 k_{2z}k^*_{2z}}{\mu_2^2 k_1^2\cos^2\theta_1}}{\|1+\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_1\cos\theta_1}\|^2} = 1
\end{aligned}$$

即

$$(\overline{\vec{S}}_{2\perp} - \overline{\vec{S}}_{3\perp})\cdot\Delta\vec{S} = (D_\perp + R_\perp)\overline{\vec{S}}_{1\perp}\cdot\Delta\vec{S} = \overline{\vec{S}}_{1\perp}\cdot\Delta\vec{S}$$

从入射波流入ΔS的⊥电磁能量等于从ΔS流出的⊥的反射波和透射波电磁能量的迭加.

– 对∥波讨论见作业.

例: $\gamma_2 = 0,\ \mu_1 = \mu_2,\ k_2 = k_1 \sin\theta_1 / \sin\theta_2,\ k_{2z} = k_2 \cos\theta_2 = k_1 \sin\theta_1 \coth\theta_2,$

$$R_{\omega\parallel} = \left\| \frac{-\cos\theta_2 + \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_1}{\cos\theta_2 + \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)} \right\|^2 = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$R_{\omega\perp} = \left\| \frac{-\sin\theta_1 \coth\theta_2 + \cos\theta_1}{\sin\theta_1 \coth\theta_2 + \cos\theta_1} \right\|^2 = \left[\frac{-\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2} \right]^2 = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}$$

$D_\parallel = 1 - R_\parallel$

$D_\perp = 1 - R_\perp$

注意

– R, D对$\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$是对称的, 因而无论电磁波从哪边入射,$R, D$都是一样的.

– $R_{\omega\parallel}\Big|_{\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}} = 0$, 这样的解叫布儒斯特角.在气体激光管两端要放上两块倾斜的玻片,使激光的入射角为布儒斯特角. 这样对于电矢量垂直于入射面的偏振光将被衰减,而对电矢量位于入射面的偏振光可以来回无阻.用这样的方法可得到偏振激光.

- 光压

电磁波从真空射到物质表面的另一性质是使表面受力.单位表面受的力为

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{T}} = \vec{f}_E + \vec{f}_B \\ \vec{f}_E &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(\vec{n}\cos 2\theta_E + \vec{e}_E \sin 2\theta_E) \\ \vec{f}_B &= \frac{1}{2\mu_0}B^2(\vec{n}\cos 2\theta_B + \vec{e}_B \sin 2\theta_B) \end{aligned}$$

有时侯入射波的方向是不确定的,平均说它在所有方向上都等几率出现,因而平均贡献为

$$\overline{\cos 2\theta} = \frac{\int d\Omega \cos 2\theta}{\int d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos 2\theta}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta} = -\frac{1}{3}$$

$$\overline{\sin 2\theta} = \frac{\int d\Omega \sin 2\theta}{\int d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \sin 2\theta}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta} = 0$$

因此

$$\overline{\vec{f}} = -\frac{\vec{n}}{3}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) = -\frac{\vec{n}}{3}W$$

§3.4 谐振腔

- 方程及边条件

前面几节讨论的是电磁波在自由空间中传播的性质和它碰到界面的反透射性质.当电磁波在一定物质界面包围的空间中传播时,界面制约着其内部电磁场的存在形式,产生具有各种特殊性质的电磁波.本节和下节讨论以良导体构成的一定(至少半封闭)边界的电磁波. 我们的出发点是定态电磁波满足的波动方程,

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}$$

其中,$k^2=\omega^2\mu\epsilon$, 因为在边界内为绝缘介质. 在边界上,由于对良导体(γ很大),电磁波只能穿进导体很浅,在离表面几个穿透深度处,实际上已没有电磁场,因此,可近似认为导体内无电磁场,边条件写为,

$$\vec{n}\times\vec{E}=0 \qquad \vec{n}\times\vec{H}=\vec{i}_c \qquad \vec{n}\cdot\vec{D}=\sigma_f \qquad \vec{n}\cdot\vec{B}=0$$

它反应在导体表面上电场强度垂直于表面,磁感应强度与表面相切.

- 矩形谐振腔

  将坐标原点选在矩形谐振腔的一个角,以相邻的三个边为坐标轴. 设$u(x,y,z)$为E_x,E_y,E_z中的任意一个,则,$\nabla^2u+k^2u=0$,由分离变量法, $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$,

$$\nabla^2u+k^2u=YZ\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+XZ\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}+XY\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}+(k_x^2+k_y^2+k_z^2)XYZ=0$$

  其中$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$,要求

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$
$$\rightarrow u(x,y,z)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz)$$

  由$x=0,y=0,z=0$处边界条件得

$$E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz$$
$$E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz$$
$$E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz$$

  再由$x=L_1,y=L_2,z=L_3(L_1,L_2,L_3$为矩形谐振腔的边长)处的边条件得

$$k_x=\frac{m\pi}{L_1} \qquad k_y=\frac{n\pi}{L_2} \qquad k_z=\frac{p\pi}{L_3} \qquad m,n,p=0,1,2,\cdots$$
$$\omega^2\mu\epsilon=k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\pi^2[(\frac{m}{L_1})^2+(\frac{n}{L_2})^2+(\frac{p}{L_3})^2]$$

  方程$\nabla\cdot\vec{E}=0$给出约束:$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0$

  一组给定的(m,n,p)称为一种本征振荡,它有两个独立偏振波形(因A_1,A_2,A_3中有两个独立参数),它们的谐振频率为

$$\omega_{nmp}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(\frac{n}{L_2})^2+(\frac{m}{L_2})^2+(\frac{p}{L_3})^2}$$

  波长为

$$\lambda_{nmp}=\frac{2\pi}{\omega_{mnp}\sqrt{\mu\epsilon}}=\frac{2}{\sqrt{(\frac{n}{L_2})^2+(\frac{m}{L_2})^2+(\frac{p}{L_3})^2}}$$

  它的特点是电磁场位于腔内,最低频(最大波长)的非0电磁波为(110)或(101)或(011),其波长与谐振腔线度同一量级.

  应用

  - 微波范围: 采用具有金属壁面的谐振腔产生高频振荡.
  - 光学范围: 反射镜组成光学谐振腔产生近单色的激光束.

§3.5 电磁波的定向传播

本节讨论在一维方向(z方向)可以自由传播的电磁波,在另外两维方向(x,y方向),系统由良导体构成闭合边界.
具体讨论中不空和中空两种情况.

- 方程及边条件

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B} \\ \nabla\times\vec{B}=-i\mu\epsilon\omega\vec{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases} \qquad \vec{n}\times\vec{E}\Big|_{\text{边界}}=0$$

用下标z,t表示z方向和xy平面内的方向

$$\vec{E}=[\vec{E}_z(x,y)+\vec{E}_t(x,y)]e^{ik_z z} \qquad \nabla=\nabla_{xy}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$\vec{B}=[\vec{B}_z(x,y)+\vec{B}_t(x,y)]e^{ik_z z} \qquad \nabla_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y$$

则场方程化为

$$\begin{cases} -i\mu\epsilon\omega\vec{E}_z=\nabla_{xy}\times\vec{B}_t \\ i\omega\vec{B}_z=\nabla_{xy}\times\vec{E}_t \end{cases} \quad \begin{cases} -i\mu\epsilon\omega\vec{E}_t=\nabla_{xy}\times\vec{B}_z+ik_z\vec{e}_z\times\vec{B}_t \\ i\omega\vec{B}_t=\nabla_{xy}\times\vec{E}_z+ik_z\vec{e}\times\vec{E}_t \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_{xy}\cdot\vec{E}_t+ik_zE_z=0 \\ \nabla_{xy}\cdot\vec{B}_t+ik_zB_z=0 \end{cases}$$

  - 边界(管壁)上的电流

$$\vec{i_c}=\vec{n}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{n}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu}\vec{n}\times(\vec{B}_t+\vec{B}_z)e^{i(k_z z-\omega t)}$$

    注意边界上电流与磁力线正交
  - 边界(管壁)上的电荷

$$\sigma_f=\vec{n}\cdot\vec{D}=\epsilon\vec{n}\cdot\vec{E}=\epsilon\vec{n}\cdot\vec{e}_t e^{i(k_z z-\omega t)}$$

- 解

  以上方程组的任何一组解都可化为下列三种解的线性迭加

  1. $E_z=B_z=0$
  2. $E_z=0$
  3. $B_z=0$

  我们以下分别讨论它们

  1. $E_z=B_z=0$ TEM波

$$\begin{cases} \nabla_{xy}\cdot\vec{E}_t=0 \\ \nabla_{xy}\times\vec{E}_t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_{xy}\cdot\vec{B}_t=0 \\ \nabla_{xy}\times\vec{B}_t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_t=-\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\vec{e}_z\times\vec{B}_t \\ \frac{\omega}{k_z}\vec{B}_t=\vec{e}_z\times\vec{E}_t \end{cases} \quad \vec{n}\times\vec{E}_t\Big|_{\text{边界}}=0$$

     它进一步化为

$$\vec{E}_t=-\nabla_{xy}\phi_t \qquad \nabla^2_{xy}\phi_t=0 \qquad \phi_t\Big|_{\text{边界}}=\text{常数}$$

     求解
     - 若中空: 由唯一性定理ϕ_t =常数恒是解,即:$\vec{E}_t=\vec{B}_t=0$.

– 若中不空
  * 若内外边界电势相同,则ϕ_t =常数仍恒是解.
  * 若内外边界电势不同,则问题化为一个二维静电问题:在z一定的横截面内,$\vec{E}$是一个两维势场,ϕ_t在边界上等势

$$\vec{i}_c = \frac{1}{\mu}\vec{n}\times(\vec{B}_t+\vec{B}_z)e^{i(k_z z-\omega t)} = \frac{1}{\mu}\vec{n}\times(\frac{k_z}{\omega}\vec{e}_z\times\vec{E}_t)e^{i(k_z z-\omega t)} = \frac{k_z}{\mu\epsilon}\vec{e}_z\vec{n}\cdot\vec{E}_t e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$= -\frac{k_z}{\mu\omega}\vec{e}_z\frac{\partial\phi_t}{\partial n}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$\sigma_f = \epsilon\vec{n}\cdot\vec{E}_t e^{i(k_z z-\omega t)} = \epsilon\frac{\partial\phi_t}{\partial n}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$\vec{i}_c = -\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\sigma_f\vec{e}_z$$

2. $E_z = 0$　　TE波

$$\begin{cases}\nabla_{xy}\cdot\vec{E}_t = 0\\ \nabla_{xy}\times\vec{E}_t = i\omega\vec{B}_z\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla_{xy}\cdot\vec{B}_t = -ik_z B_z\\ \nabla_{xy}\times\vec{B}_t = 0\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{\omega}{k_z}\vec{B}_t = \vec{e}_z\times\vec{E}_t\\ \vec{E}_t = -\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\vec{e}_z\times\vec{B}_t+\frac{i}{\mu\epsilon\omega}\nabla_{xy}\times\vec{B}_z\end{cases}\quad \vec{n}\times\vec{E}_t\Big|_{\text{边界}} = 0$$

它进一步化为

$$\frac{\omega}{k_z}\vec{B}_t = \vec{e}_t\times(-\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\vec{e}_z\times\vec{B}_t+\frac{i}{\mu\epsilon\omega}\nabla_{xy}\times\vec{B}_z) = \frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\vec{B}_t+\frac{i}{\mu\epsilon\omega}\nabla_{xy}B_z$$
$$\vec{B}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega}\frac{1}{\frac{\omega}{k_z}-\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}}\nabla_{xy}B_z = \frac{ik_z}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\nabla_{xy}B_z$$
$$\vec{E}_t = -\frac{k_z}{\mu\epsilon\omega}\frac{ik_z}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\vec{e}_z\times\nabla_{xy}B_z+\frac{i}{\mu\epsilon\omega}\nabla_{xy}\times\vec{B}_z = \frac{-i}{\mu\epsilon\omega}(\frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}+1)\vec{e}_z\times\nabla_{xy}B_z$$
$$= \frac{-i\omega}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\vec{e}_z\times\nabla_{xy}B_z$$
$$\frac{ik_z}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\nabla_{xy}^2B_z = -ik_zB_z \quad\rightarrow\quad (\nabla_{xy}^2+\mu\epsilon\omega^2-k_z^2)B_z = 0$$
$$\vec{n}\times\vec{E}_t\Big|_{\text{边界}} = \frac{-i\omega}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\vec{n}\cdot\nabla_{xy}B_z\Big|_{\text{边界}} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_{\text{边界}} = 0$$

注意,k_z必须为实才对应沿z方向的传播解. 这要求

$$k_z = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2-k_x^2-k_y^2}\geq 0 \quad\rightarrow\quad \omega\geq\frac{k_x^2+k_y^2}{\mu\epsilon}$$　　截止频率

最后

$$\vec{i}_c = \frac{1}{\mu}\vec{n}\times(\vec{B}_t+\vec{B}_z)e^{i(k_z z-\omega t)} = \frac{1}{\mu}(\frac{ik_z}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}\vec{n}\times\nabla_{xy}+\vec{e}_z)E_z e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$\sigma_f = \epsilon\vec{n}\cdot\vec{E}_t e^{i(k_z z-\omega t)} = \frac{-i\omega\epsilon}{\mu\epsilon\omega^2-k_z^2}(\vec{n}\times\vec{e}_z)\cdot\nabla_{xy}B_z e^{i(k_z z-\omega t)}$$

3. $B_z = 0$　　TM波(见作业).

- 矩形波导

  设矩形两边长分别为a, b, 将坐标原点取在矩形的一个角,两相邻的边分别为xy轴,

  1. 因为中空,无TEM波
  2. 对TE波,

$$(\nabla_{xy}^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2)B_z = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = (a_1 \sin k_x x + b_1 \cos k_x x)(a_2 \sin k_y y + b_2 \cos k_y y)$$
$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_{\text{边界}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial B_z}{\partial x}\right|_{x=0,x=a} = \left.\frac{\partial B_z}{\partial y}\right|_{y-0,y=b} = 0$$

  解

$$B_z = A\cos k_x x \cos k_y y \qquad k_x a = m\pi \quad k_y b = n\pi \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots \quad (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_z^2$$

  一组(m, n)叫一个模式,非零对应(m, n)最小的模式叫最低模式. 现在(1,0), (0,1)是最低模式.对给定k_z,ω随模式增高而变大.对一定的模式存在一个最低的频率

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}$$

  是临界频率,即对这个模式的任何频率$\omega \geq \omega_c$或$\lambda \leq \lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}\omega_c}$.

  3. 对TM波

$$(\nabla_{xy}^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2)E_z = 0 \quad \rightarrow \quad E_z = (a_1 \sin k_x x + b_1 \cos k_x x)(a_2 \sin k_y y + b_2 \cos k_y y)$$
$$E_z\Big|_{\text{边界}} = 0 \quad \rightarrow \quad E_z\Big|_{x=0,x=a} = E_z\Big|_{y-0,y=b} = 0$$

  解

$$E_z = A\sin k_x x \sin k_y y \quad k_x a = m\pi \quad k_y b = n\pi \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots \quad (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_z^2$$

  现在(1,1)是最低模式.对给定k_z,ω随模式增高而变大.对一定的模式存在一个最低的频率

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}$$

  是临界频率.

讨论

- 同轴电缆中出现的是静态场
- 波导管中出现的是驻波场. 有两种波形TE,TM波.

§4.1 电磁场的矢势和标势

- 用势描述电磁场

  从真空中的有源的麦克斯韦方程组出发

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad\nabla\cdot\vec{B}=0\qquad\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

  在静电和静磁情形下,为简化方程引入了标量势ϕ和矢量势$\vec{A}$,其中ϕ是建立在$\vec{E}$为保守场(无旋)的前提下的,即$\nabla\times\vec{E}=0$.现在这个条件一般不再满足,因此,原来的ϕ的定义$\vec{E}=\nabla\phi$不再一般适用. $\vec{A}$是建立在无磁单极的前提下,即$\nabla\cdot\vec{B}=0$.现在这个条件仍成立,因此,我们可以保持原来的$\vec{A}$的定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. 它给出的物理意义是: 在任一时刻,$\vec{A}$沿任一闭合回路的线积分(环量)等于该时刻通过该回路内的磁通量. $\oint d\vec{l}\cdot\vec{A}=\int d\vec{S}\cdot\vec{B}$. 结合$\vec{A}$的定义和麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A}=-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\qquad\rightarrow\qquad\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$$

  在一般情况下,电场不仅受电荷激发,而且受变化磁场的激发,后者对电场的贡献是有旋的, 整个电场必须扣掉这部分才是无旋的,即$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$为无旋场,对它可引入标量势$\phi$

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\phi\qquad\rightarrow\qquad\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

- 规范变换和规范不变性

$$\begin{cases}\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}\qquad\vec{A},\phi\text{不唯一}\qquad\begin{cases}\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\chi\\ \phi\rightarrow\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{cases}$$

  每一组$(\vec{A},\phi)$叫一种规范,不同规范对应同一组$\vec{E},\vec{B}$, $\vec{E},\vec{B}$是物理观察量.

  所有物理量和物理规律与特殊的规范选择无关—-规范不变性! 在数学上一种不变性就对应一种对称性,与上面规范不变性对应的对称性叫U(1)规范对称性. 因此, **电磁相互作用具有U(1)规范对称性.**

  在实际计算中,为了能有确定的$\vec{A},\phi$,总是选择一定的条件来把$\vec{A},\phi$所具有的不确定的规范自由度限制住,这种条件叫规范固定条件,选择一种规范固定条件叫选一种规范.常用的规范有,

  库伦规范: $\nabla\cdot\vec{A}=0$

  洛伦兹规范: $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

- 达朗伯(d'Alembert)方程

  $\vec{A},\phi$的引入等价于已经求解了四个麦克斯韦方程中的两个, 剩下的两个方程给出,

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\rightarrow\qquad\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0[-\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}]$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad\rightarrow\qquad-\nabla^2\phi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(1).库伦规范: $\nabla\cdot\vec{A}=0$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi=-\mu_0\vec{j}^* \qquad \nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(2).洛伦兹规范: $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j} \qquad \nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

注意,当$c\to\infty$时,回到静电磁情形.

§4.2 推迟势

- 非齐次(有源)波动方程的球面波解

  我们的目的是求解下面有源波动方程

$$\nabla^2\phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t)=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0}$$

电荷分布$\rho(\vec{r},t)$可以看成是无穷多点源的迭加, $\rho(\vec{r},t)=\int d\tau'\delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}',t)$. 设点源$\delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}',t)$产生的电势分布为$U(\vec{r},\vec{r}',t)$, 即

$$\nabla^2_{\vec{r}}U(\vec{r},\vec{r}',t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\vec{r},\vec{r}',t)=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}',t)$$

则容易验证(迭加原理)

$$\phi(\vec{r},t)=\int d\tau'\ U(\vec{r},\vec{r}',t)$$

$U(\vec{r},\vec{r}',t)$实际上是$\phi(\vec{r},t)$对应的格林函数. 从物理直观上看,位于$\vec{r}'$点的点源在场点$\vec{r}$产生的电势,应该关于$\vec{r}'$是球对称的,即

$$U(\vec{r},\vec{r}',t)=U(R,\vec{r}',t) \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=\sum_{i=1}^{3}X_i\vec{e}_i$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\vec{r}}U(R,\vec{r}',t) &= \sum_{i=1}^{3}\partial_i\partial_iU(R,\vec{r}',t)=\sum_{i=1}^{3}\partial_i[\frac{\partial U}{\partial R}\partial_iR]=\sum_{i=1}^{3}\partial_i[\frac{\partial U}{\partial R}\frac{X_i}{R}]\\ &= \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{X_i}{R}\frac{\partial^2U}{\partial R^2}\partial_iR+\frac{3}{R}\frac{\partial U}{\partial R}+\frac{\partial U}{\partial R}X_i\partial_i\partial_i\frac{1}{R}\Big)=\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{X_iX_i}{R^2}\frac{\partial^2U}{\partial R^2}+\frac{3}{R}\frac{\partial U}{\partial R}-\frac{X_iX_i}{R^3}\frac{\partial U}{\partial R}\Big)\\ &= \frac{\partial^2U}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{1}{R}[\frac{\partial^2U}{\partial R^2}R+2\frac{\partial U}{\partial R}]=\frac{1}{R}\frac{\partial^2(RU)}{\partial R^2}\end{aligned}$$

结合原来的波动方程,在$R\neq0$(即$\vec{r}\neq\vec{r}'$)处,方程化为:

$$\frac{\partial^2(UR)}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(UR)}{\partial t^2}=0$$

这是标准的一维波动方程,它有两个独立解,即

$$RU(R,\vec{r}',t)=f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')+g(t+\frac{R}{c},\vec{r}')$$

其中,$f(x,\vec{r}'),g(x,\vec{r}')$是两个任意函数.

$$U_1(R,\vec{r}',t)\equiv\frac{1}{R}f(t-\frac{R}{c},\vec{r}') \qquad \text{叫推迟解}$$
$$U_2(R,\vec{r}',t)\equiv\frac{1}{R}g(t+\frac{R}{c},\vec{r}') \qquad \text{叫超前解}$$

以上解是在$R\neq 0$处解出的,在$R=0$处有奇异. 而原始方程在$R=0$处也有奇异,要求它们奇异性相同,可定出f和g的形式.

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{R})\rho(\vec{r}',t)=(\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})[\frac{1}{R}f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')]\\
&=(\nabla^2_{\vec{r}}\frac{1}{R})f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')+2\nabla_{\vec{r}}\frac{1}{R}\cdot\nabla_{\vec{r}}f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')+\frac{1}{R}(\nabla^2_{\vec{r}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')\\
&=-4\pi\delta(\vec{R})f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')+\frac{2}{c}\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot\frac{\vec{R}}{R}\frac{\partial}{\partial t}f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')+\frac{1}{R}(\frac{\partial^2}{\partial R^2}+2\frac{\partial}{\partial R}-\frac{1}{c^2}\partial^2\partial t^2)f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')\\
&=-4\pi\delta(\vec{R})f(t-\frac{R}{c},\vec{r}')=-4\pi\delta(\vec{R})f(t)
\end{aligned}$$

我们得到

$$f(t,\vec{r}')=\frac{\rho(\vec{r}',t)}{4\pi\epsilon_0}$$

所以

$$U_1(R,\vec{r}',t)=\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad U_2(R,\vec{r}',t)=\frac{\rho(\vec{r}',t+\frac{R}{c})}{4\pi\epsilon_0 R}$$

这组解的特点是:
(1).对给定时刻t,等值面为以$\vec{r}'$为球心的球面,$t-\frac{R}{c}$=常数$\rightarrow R=|\vec{r}-\vec{r}'|$=常数.
(2).等值面以速率c运动,等值面的值的大小按$\frac{1}{R}$变化, 对推迟解,等值面扩张,等值面的值缩小,对超前解,等值面收缩,等值面的值增大.

考虑$t_2>t_1$, 等值面由$\vec{r}_1$移到$\vec{r}_2$,

$$\text{推迟解}:R_2=|\vec{r}_2-\vec{r}'|>R_1=|\vec{r}_1-\vec{r}'| \qquad t_1-\frac{R_1}{c}=t_2-\frac{R_2}{c} \qquad \frac{R_2-R_1}{t_2-t_1}=c$$
$$\text{超前解}:R_2=|\vec{r}_2-\vec{r}'|<R_1=|\vec{r}_1-\vec{r}'| \qquad t_1+\frac{R_1}{c}=t_2+\frac{R_2}{c} \qquad \frac{R_2-R_1}{t_2-t_1}=-c$$

推迟解告诉我们源点产生的电磁场是以光速c呈球面向外扩散的.
超前解告诉我们源点产生的电磁场是以光速c呈球面向内会聚的.
加入初始条件:源在某时刻t_0出现,t_0之前无电磁场,则可把超前解去掉.

- 洛伦兹规范

  洛伦兹规范下

$$\phi(\vec{r},t)=\int d\tau'\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\int d\tau'\frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{4\pi R}$$

对比静电磁情形,结果中多了一个R/c项,它代表推迟效应. 这种效应在一些情况下是不重要的, 如静态源$\rho, \vec{j}$与t无关,或似稳源, 源随时间变化周期$T \gg R/c$,这时源对t的依赖很小,可将c看成是∞, 理论可按静电磁场处理.

另一个与静电磁场不同之处是,推迟效应造成$\phi, \vec{A}$在无穷远处不全按$1/r$衰减.

以下验证上面的解确实满足洛伦兹规范的规范固定条件.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \cdot \int d\tau' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t^*)}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \, \nabla \cdot \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}', t^*)}{R}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \left[(\nabla \frac{1}{R}) \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*) + \frac{1}{R}\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \left[- (\nabla' \frac{1}{R}) \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*) + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t^*} \cdot \nabla t^*\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \left[- \nabla' \cdot [\frac{\vec{j}(\vec{r}', t^*)}{R}] + \frac{1}{R}\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*) + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t^*} \cdot \nabla t^*\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \left[\frac{1}{R}\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*)\Big|_{t^*} + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t^*} \cdot (\nabla t^* + \nabla' t^*)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \, (-\frac{1}{R})\frac{\partial}{\partial t^*}\rho(\vec{r}', t^*) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \, (-\frac{1}{R})\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}', t^*) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d\tau' \, \frac{\rho(\vec{r}', t^*)}{R} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

- 库伦规范

  库伦规范下

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \vec{A}(\vec{r}, t) = \int d\tau' \frac{\mu_0 \vec{j}^*(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{4\pi R} \qquad \vec{j}^*(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) - \epsilon_0 \nabla \frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r}, t)$$

  对一个纯电流场,$\rho(\vec{r}, t) = 0 \to \phi(\vec{r}, t) = 0$这时结果与洛伦兹规范相同.

§4.3 辐射电磁场

- 一般性质

  讨论源位于一有限区域,在很远处产生的场的行为:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau' \frac{\rho(\vec{r}', t^*)}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad \vec{A}(\vec{r}, t) = \int d\tau' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{4\pi R}$$

  其中$t^* = t - \frac{R}{c}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

  若不考虑$\rho, \vec{j}$中对时间t依赖中推迟效应对$\phi, \vec{A}$的贡献,则在无穷远处$\phi \sim \frac{1}{r}, \vec{A} \sim \frac{1}{r} \to \vec{E} \sim \frac{1}{r}, \vec{B} \sim \frac{1}{r}$, 这时,

$$\oint_\infty d\vec{S} \cdot \vec{P} = \oint_\infty d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = 0$$

即:在无穷远表面上流出的电磁能量为0.电磁能量是不能流到无穷远的. 若要保证电磁能量能够流到无穷远, 至少$\vec{E}$和$\vec{B}$都按$\frac{1}{r}$在无穷远处衰减. 我们把具有这种性质的场叫辐射场.本节主要研究这种场的性

质.由于一般来说辐射场与非辐射场是混在一起的,为讨论方便,我们在以下讨论中只保留辐射场, 即只保留$r \to \infty$时场强正比$\frac{1}{r}$项的贡献.例:

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r}}{r} + O(\frac{1}{r}) \qquad \frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 \qquad \nabla t^* = -\nabla \frac{R}{c} = -\frac{\vec{n}}{c}$$
$$\nabla \psi(t^*) = \nabla t^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{f}(t^*) = \nabla t^* \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{f}(t^*) = \nabla t^* \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$

辐射场为

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{辐}} &= (\nabla \times \vec{A})\Big|_{\frac{1}{r}} = \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi R} \nabla \times \vec{j}(\vec{r}', t^*) = \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi c R} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \times \vec{n} \\
\vec{E}_{\text{辐}} &= (-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})\Big|_{\frac{1}{r}} = \int d\tau' \Big[-\frac{1}{4\pi R \epsilon_0} \nabla \rho(\vec{r}', t^*) - \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \Big] \\
&= \int d\tau' \Big[-\frac{1}{4\pi \epsilon_0 c R} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \vec{n} - \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \Big] \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\vec{n}}{c} - \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} = -c\vec{n} \nabla \cdot \vec{A} - \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \\
&= \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi R} \Big[-c\vec{n} \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}', t^*) - \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \Big] = \int d\tau' \frac{\mu_0}{4\pi R} \Big[\vec{n} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \cdot \vec{n} - \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t^*)}{\partial t} \Big]
\end{aligned}$$

它满足

$$\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B} \qquad c\vec{B} \times \vec{n} = \vec{E}$$

因此,对辐射场$\vec{n}, \vec{E}, \vec{B}$互相垂直,成右手关系,辐射场的传播是横波, $\vec{E}, \vec{B}$同位相

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad W_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = W_e$$
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = c\frac{B^2}{\mu_0}\vec{n} = 2W_m c\vec{n} = (W_e + W_m)c\vec{n}$$

对比$\vec{j} = \rho\vec{v}$,电磁能量以c沿$\vec{n}$方向离开源传播.在每一不同时刻,$\vec{E}, \vec{B}$可能各不相同,但$\vec{E} \times \vec{B}$总保持$\vec{n}$方向.

辐射功率

$$I = \int_{\text{球}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{S} = \int_{\text{球}} d\sigma \; S\vec{n} \cdot \vec{n} = \int_{\text{球}} d\sigma \; S = \int d\Omega \; Sr^2 = \int d\Omega \; \frac{dI}{d\Omega} \qquad \frac{dI}{d\Omega} = Sr^2$$

- 多极展开

  由于我们只讨论远处的辐射场,在计算中只保留到$\frac{1}{r}$项.利用

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{\frac{1}{2}} = r(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{r}'}{r} + \cdots) = r - \vec{n} \cdot \vec{r}' + \cdots$$

矢量势的辐射场部分为

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t)\Big|_{\text{辐}} &= \int d\tau'\ \frac{\mu_0}{4\pi R}\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{R}{c}) = \int d\tau'\ \frac{\mu_0}{4\pi R}\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r'}}{c}-\cdots)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d\tau'\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c})}{\partial t^k}(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r'}}{c}-\cdots)^k\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d\tau'\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c})}{\partial t^k}(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r'}}{c})^k\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int d\tau'\ \vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c})x'_{i_1}\cdots x'_{i_k}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t-\frac{r}{c})
\end{aligned}$$

其中

$$\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t) = \int d\tau'\vec{j}(\vec{r'},t)x'_{i_1}\cdots x'_{i_k}$$

所以

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r},t)\Big|_{\text{辐}} &= (\nabla\times\vec{A})\Big|_{\frac{1}{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^k}\nabla\times\frac{\partial^k}{\partial t^k}\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t-\frac{r}{c})\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^k}(-\frac{\vec{n}}{c}\times\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^k}{\partial t^k}\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t-\frac{r}{c})\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^{k+1}}\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\vec{B}_k
\end{aligned}$$

其中

$$\vec{B}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{3}\frac{n_{i_1}\cdots n_{i_k}}{c^{k+1}}\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}\vec{J}_{i_1\cdots i_k}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n}$$

注意$\vec{B}_{k+1}$比$\vec{B}_k$多$\frac{1}{c}x'\frac{\partial}{\partial t}\sim\frac{l'\omega}{c}\sim\frac{l'}{\lambda}$, 要展开好必须$l'\ll\lambda$. 特别地,

$$\begin{aligned}
\vec{B}_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau'\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_{ijk}\int d\tau'\ j_i(\vec{r'},t-\frac{r}{c})n_j\vec{e}_k\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau'\left[\partial'_l[j_l(\vec{r'},t-\frac{r}{c})x'_i]-x'_i\partial'_l j_l(\vec{r'},t-\frac{r}{c})\right]n_j\vec{e}_k\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau'\ x'_i\frac{\partial\rho(\vec{r'},t-\frac{r}{c})}{\partial t}n_j\vec{e}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_i(t-\frac{r}{c})n_j\vec{e}_k = \frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\vec{P}}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n}
\end{aligned}$$

其中

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^{3}q_i(t)\vec{e}_i \qquad\qquad q_i(t) = \int d\tau'\ x'_i\rho(\vec{r'},t)$$

这是电偶极辐射. 而

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\sum_{i=1}^{3}n_i\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{J}_i(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d\tau'\ x'_i\vec{j}(\vec{r'},t-\frac{r}{c})\times\vec{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon_{jkl}\int d\tau'\ x'_i j_j(\vec{r}', t-\frac{r}{c}) n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon_{jkl}\int d\tau'\ [x'_i j_j + x'_j j_i + x'_i j_j - x'_j j_i] n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon_{jkl}\int d\tau'\ \left[\sum_{m=1}^{3}[\partial'_m(j_m x'_i x'_j) - x'_i x'_j(\partial'_m j_m)] + \sum_{m,n,p=1}^{3}\epsilon_{ijp}\epsilon_{nmp}x'_n j_m\right] n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d\tau'\ \left[\epsilon_{jkl}x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}', t-\frac{r}{c}) + \sum_{m,n,p=1}^{3}\epsilon_{jkl}\epsilon_{ijp}\epsilon_{nmp}x'_n j_m(\vec{r}', t-\frac{r}{c})\right] n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}\epsilon_{jkl}q_{ij}(t-\frac{r}{c}) + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{p=1}^{3}\epsilon_{jkl}\epsilon_{ijp}m_p(t-\frac{r}{c})\right] n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi c^2 r}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} n_i \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}\epsilon_{jkl}\frac{1}{3}Q_{ij}(t-\frac{r}{c}) + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{p=1}^{3}\epsilon_{jkl}\epsilon_{ijp}m_p(t-\frac{r}{c})\right] n_k \vec{e}_l \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\left[\frac{1}{6}\vec{n}\cdot \dddot{\overrightarrow{Q}} \times \vec{n} + (\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}\right]
\end{aligned}
$$

其中

$$
\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}(t-\frac{r}{c}) = \int d\tau'\ (3\vec{r}'\vec{r}' - \overrightarrow{\overrightarrow{I}}\, r'^2)\rho\vec{r}', t-\frac{r}{c}) \qquad \vec{m}(t-\frac{r}{c}) = \frac{1}{2}\int d\tau'\ \vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}', t-\frac{r}{c})
$$

这是电四极辐射和磁偶极辐射的迭加.注意电四极辐射和磁偶极辐射属于同一阶.

- 电偶极辐射

设一短天线由A,B两个小球组成,($\vec{l}$很短,由B指向A),A,B上各带相反电荷, 充电后在A B间的导线上产生高频电流

$$
J = \frac{dQ_A}{dt} = J_0\cos\omega t \qquad\qquad Q_A = \frac{J_0}{\omega}\sin\omega t
$$

这个体系在$l\to 0, \frac{J_0}{\omega}\to 0$, 但$l\frac{J_0}{\omega}$固定的情况下成为一个严格的电偶极子,这个偶极子的的偶极矩$\vec{P} = Q_A\vec{l} = \frac{J_0}{\omega}\vec{l}\sin\omega t$是随时间变化的.

$$
\begin{aligned}
&\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr}\ddot{\vec{P}}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = -\frac{\mu_0 J_0\omega}{4\pi cr}\vec{l}\sin\omega(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} = \frac{\mu_0\vec{l}}{4\pi cr}\dot{J}(t-\frac{r}{c})\times\vec{n} \\
&\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{\mu_0}B^2\vec{n} = \frac{\mu_0 l^2}{(4\pi)^2 cr^2}\dot{J}^2(t-\frac{r}{c})\sin^2\theta\vec{n} \\
&\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\mu_0 l^2}{(4\pi)^2 c}\dot{J}^2(t-\frac{r}{c})\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

总辐射功率为

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int d\Omega\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\frac{dI}{d\Omega} = 2\pi\int_0^{\pi}d\theta\ \frac{\mu_0 l^2}{(4\pi)^2 c}\dot{J}^2(t-\frac{r}{c})\sin^3\theta = \frac{\mu_0 l^2}{6\pi c}\dot{J}^2(t-\frac{r}{c}) \\
&= \frac{\mu_0 l^2\omega^2 J_0^2}{6\pi c}\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})
\end{aligned}
$$

平均总辐射功率为

$$
\begin{aligned}
\overline{I} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\ I(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\ \frac{\mu_0 l^2\omega^2 J_0^2}{6\pi c}\frac{1}{2}[1-\cos 2\omega(t-\frac{r}{c})] \\
&= \frac{\mu_0 l^2\omega^2 J_0^2}{12\pi c}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega(t-\frac{r}{c})]\Big|_0^T = \frac{\mu_0 l^2\omega^2 J_0^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 l^2\omega^2}{6\pi cR}(\frac{1}{2}J_0^2 R) = \frac{R_{\text{辐}}}{R}\ (\frac{1}{2}J_0^2 R)
\end{aligned}
$$

其中

$$R_{辐}=\frac{\mu_0 l^2\omega^2}{6\pi c}\qquad \frac{1}{2}J_0^2R:\quad 热功率\qquad R:\quad 天线电阻$$

注意,$I\nearrow$,则须$R_{辐}\nearrow$,即$\omega\nearrow$,因而只有高频电磁波才能辐射较大的能量,才能辐射的远.远距离无线通讯必须靠短波.

- 电四极辐射

电量为$q,q,-2q$的三个小球分别位于长为$2l$的短天线的两端和中间,$\vec{l}$为从天线中点指向一端的矢量,且$q=q_0\cos\omega t,\ q_0\to 0, l\to 0$但$q_0l^2$固定.

$$J=\dot{q}=-q_0\omega\sin\omega t=J_0\sin\omega t$$
$$\vec{P}=\int d\tau'\vec{r}'\rho=q\vec{l}+q(-\vec{l})=0$$
$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int d\tau'\vec{r}'\times\vec{j}=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times Jd\vec{l}'=0$$
$$\overrightarrow{\overrightarrow{Q}}=\int d\tau' 3\vec{r}'\vec{r}'\rho=3\vec{l}\vec{l}q+3(-\vec{l})(-\vec{l})q=6q\vec{l}\vec{l}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{6c^2r4\pi}(\vec{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\dddot{Q}}}\times\vec{n}=\frac{\mu_0}{6c^2r4\pi}6\ddot{q}\ \vec{n}\cdot\vec{l}\vec{l}\times\vec{n}=\frac{l^2\mu_0q_0\omega^3}{4\pi c^2r}\sin\omega(t-\frac{r}{c})\cos\theta\sin\theta$$
$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{c}{\mu_0}B^2\vec{n}=\frac{\mu_0l^4q_0^2\omega^6}{c^3r^2(4\pi)^2}\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})\sin^2\theta\cos^2\theta\vec{n}$$
$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{\mu_0l^4q_0^2\omega^6}{c^3(4\pi)^2}\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})$$
$$I=\frac{\mu_0l^4q_0^2\omega^6}{c^3(4\pi)^2}\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})2\pi\int_0^\pi d\theta\ \sin^3\theta\cos^2\theta=\frac{\mu_0l^4q_0^2\omega^6}{30c^3\pi}\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})$$
$$\overline{I}=\frac{\mu_0l^4q_0^2\omega^6}{60c^3\pi}\sin^2\omega(t-\frac{r}{c})=\frac{\mu_0l^4J_0^2\omega^2}{60c^3\pi}=\frac{R_{辐}}{R}\ (\frac{1}{2}J_0^2R)$$

其中

$$R_{辐}=\frac{\mu_0l^4\omega^4}{30\pi c}$$

- 磁偶极辐射

电流圈半径为a,$I=I_0\cos\omega t,\vec{m}=I\pi a^2\vec{e}_z$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi c^2r}\ddot{\vec{m}}\times\vec{n}=\frac{\omega^2\mu_0\pi a^2}{4\pi c^2r}I_0\cos\omega t^*\vec{e}_z\times\vec{n}$$
$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{c}{\mu_0}B^2\vec{n}=\frac{\omega^4\mu_0a^4I_0^2}{16c^3r^2}\cos^2\omega t^*(\vec{e}_z\times\vec{n})\cdot(\vec{e}_z\times\vec{n})\vec{n}=\frac{\omega^4\mu_0a^4I_0^2}{16c^3r^2}\cos^2\omega t^*\sin^2\theta\vec{n}$$
$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{\omega^4\mu_0a^4I_0^2}{16c^3}\cos^2\omega t^*\sin^2\theta$$
$$I(t)=\frac{\pi^3\omega^4\mu_0a^4I_0^2}{6c^3}\cos^2\omega t^*$$
$$\overline{I}=\frac{\pi^3\omega^4\mu_0a^4I_0^2}{12c^3}=\frac{R_{辐}}{R}\ (\frac{1}{2}J_0^2R)$$

其中

$$R_{辐}=\frac{\mu_0a^4\omega^4\pi^3}{6c^3}$$

§4.4 电磁波的衍射

电磁波作为电磁场的波动满足波的一切基本性质. 波动的一个基本性质是惠更斯原理, 它的陈述是:在波传播的波阵面上的每一点都可以看作是次级波源,每一个这样的小波源发出小的球面子波,这些球面子波的包面形成新的波阵面. 这是对波的传播的定性描述, 定量的就是基尔霍夫公式.它建立了波在任意闭合面上和闭合面内任一点的定量联系.

设u代表一种波动,它可以是$E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$,满足方程,

$$\nabla^2 u(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\vec{r},t) = 0$$

取$\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$,并考虑$\vec{r} \subset \tau$,则,

$$\begin{aligned}
u(\vec{r},t) &= \int d\tau'\ \delta(\vec{r}'-\vec{r})u(\vec{r}',t-\frac{R}{c}) = \int d\tau'(-\frac{1}{4\pi})(\nabla'^2\frac{1}{R})u(\vec{r},t-\frac{R}{c}) \\
&= \int d\tau'(-\frac{1}{4\pi})\Big\{\nabla'[(\nabla'\frac{1}{R})u(\vec{r},t-\frac{R}{c})] - (\nabla'\frac{1}{R})\nabla' u(\vec{r},t-\frac{R}{c})\Big\} \\
&= \int d\tau'(-\frac{1}{4\pi})\Big\{\nabla'[(\nabla'\frac{1}{R})u(\vec{r},t-\frac{R}{c}) - \frac{1}{R}\nabla' u(\vec{r},t-\frac{R}{c})] + \frac{1}{R}\nabla'^2 u(\vec{r},t-\frac{R}{c})\Big\}
\end{aligned}$$

利用

$$\nabla' t^* = -\frac{1}{c}\nabla' R = -\frac{\vec{R}}{cR}$$

注意

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R}\nabla'^2 u(\vec{r}',t-\frac{R}{c}) &= \frac{1}{R}\nabla'[\nabla' u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - \frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\frac{\vec{R}}{cR}] \\
&= \frac{1}{R}\nabla'[\nabla' u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*}] - \frac{\vec{R}}{cR^2}\nabla'\frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*} - \frac{1}{cR}\frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\nabla'\frac{\vec{R}}{R} \\
&= \frac{1}{R}\nabla'^2 u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - \frac{\vec{R}}{cR^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t^*}\nabla' u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - \frac{\vec{R}}{cR^2}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} \\
&\quad + \frac{1}{c^2 R}\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}u(\vec{r}',t) - \frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\frac{1}{cR}[\frac{3}{R} - \frac{1}{R}] \\
&= \frac{1}{R}[\nabla'^2 u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}u(\vec{r}',t^*)] - \frac{2\vec{R}}{cR^2}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - \frac{2}{cR^2}\frac{\partial u(\vec{r}',t)}{\partial t^*} \\
&= \frac{2}{Rc^2}\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}u(\vec{r}',t^*) - \frac{2\vec{R}}{cR^2}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - \frac{2}{cR^2}\frac{\partial u(\vec{r}',t)}{\partial t^*} \\
&= \frac{2}{c}\Big\{\frac{\vec{R}}{cR}\cdot\frac{\vec{R}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}u(\vec{r}',t^*) - \frac{\vec{R}}{R^2}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*} - (\nabla'\cdot\frac{\vec{R}}{R^2})\frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\Big\} \\
&= -\frac{2}{c}\Big\{\frac{\vec{R}}{R^2}\cdot[-\frac{\vec{R}}{cR}\frac{\partial}{\partial t^*} + \nabla'\Big|_{t^*}]\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*) + (\nabla'\cdot\frac{\vec{R}}{R^2})\frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\Big\} \\
&= -\frac{2}{c}\Big\{\frac{\vec{R}}{R^2}\cdot\nabla'\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*) + (\nabla'\cdot\frac{\vec{R}}{R^2})\frac{\partial u(\vec{r}',t^*)}{\partial t^*}\Big\} \\
&= -\frac{2}{c}\nabla'\cdot\Big\{\frac{\vec{R}}{R^2}\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big\}
\end{aligned}$$

因此

$$u(\vec{r},t) = (-\frac{1}{4\pi})\int_\tau d\tau'\ \nabla'\cdot\Big\{(\nabla'\frac{1}{R})u(\vec{r}',t-\frac{R}{c}) - \frac{1}{R}\nabla' u(\vec{r}',t-\frac{R}{c}) - \frac{2}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\frac{1}{4\pi})\int_\tau d\tau'\ \nabla'\cdot\Big\{-\frac{\vec{R}}{R^3}u(\vec{r}',t-\frac{R}{c})-\frac{1}{R}\nabla' u(\vec{r}',t^*)\Big|_{t^*}-\frac{\vec{R}}{cR^2}\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big\}\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_\tau d\vec{S}'\ \cdot\Big\{\frac{1}{R}\nabla' u(\vec{r}',t^*)+\frac{\vec{R}}{R^3}u(\vec{r}',t^*)+\frac{\vec{R}}{cR^2}\frac{\partial}{\partial t^*}u(\vec{r}',t^*)\Big\}\Big|_{t^*=t-\frac{R}{c}}
\end{aligned}
$$

将上述基尔霍夫公式用于讨论衍射问题.考虑平面波$u(\vec{r},t)$ 射向开有小孔的无穷大平面S上.作如下基尔霍夫假设:

- 除孔内外,$u,\nabla u$在S面上处处为0.
- 孔内的$u,\nabla u$的值等于没有任何屏或障碍物时,入射波的值.

即,入射波为,

$$
u(\vec{r},t)=\begin{cases}0 & \text{孔外}\\ Ae^{i(\omega t-\frac{\omega z}{c})} & \text{孔内}\end{cases}
$$

用基尔霍夫公式,场点的波为

$$
\begin{aligned}
u(\vec{r},t) &= \frac{A}{4\pi}\int_{\text{孔}} d\vec{S}'\cdot\Big\{\frac{1}{R}e^{i\omega t^*}(-\frac{i\omega}{c}\vec{e}_z)+\frac{\vec{R}}{R^3}e^{i\omega t^*}+\frac{\vec{R}}{cR^2}i\omega e^{i\omega t^*}\Big\} \qquad d\vec{S}'=-dS'\vec{e}_z\\
&= -\frac{A}{4\pi}e^{i\omega t}\int_{\text{孔}} dS'\Big\{\frac{-i\omega}{cR}+\frac{-\cos\theta}{R^2}-\frac{i\omega}{cR}\cos\theta\Big\}e^{-i\frac{\omega R}{c}}\\
&= \frac{A}{4\pi}e^{i\omega t}\int_{\text{孔}} dS'\Big\{\frac{i\omega}{cR}(1+\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{R^2}\Big\}e^{-i\frac{\omega R}{c}}
\end{aligned}
$$

当场点离屏较远时,积分中主要是第一项的贡献,这种衍射叫夫琅和费衍射.
当场点离屏较近时,积分中主要是第二项的贡献,这种衍射叫菲涅尔衍射.

对一个长宽分别为a,b的矩形小孔,

$$
\begin{aligned}
&-\vec{R}=\vec{r}-\vec{\rho} \qquad \vec{\rho}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y \qquad \rho^2=x^2+y^2\\
&\vec{r}\cdot\vec{e}_x=r\cos\theta_1 \qquad \vec{r}\cdot\vec{e}_y=r\cos\theta_2 \qquad \vec{r}\cdot\vec{e}_z=r\cos\theta_3\\
&R=(r^2+\rho^2-2\vec{r}\cdot\vec{\rho})^{\frac{1}{2}}=[r^2+\rho^2-2r(x\cos\theta_1+y\cos\theta_2)]^{\frac{1}{2}}\\
&\cos\theta=\frac{-\vec{R}\cdot\vec{e}_z}{R}=\frac{r\cos\theta_3}{R}=\frac{r\cos\theta_3}{[r^2+\rho^2-2r(x\cos\theta_1+y\cos\theta_2)]^{\frac{1}{2}}}\\
&\rho\ll r\\
&R=r[1+\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2}{r}(x\cos\theta_1+y\cos\theta_2)]^{\frac{1}{2}}=r-x\cos\theta_1-y\cos\theta_2+\cdots\\
&\cos\theta=\cos\theta_3[1+\frac{x}{r}\cos\theta_1+\frac{y}{r}\cos\theta_2+\cdots]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(\vec{r},t) &= \frac{A}{4\pi}e^{i\omega t}\int_{\text{孔}} dS'\frac{i\omega}{cr}(1+\cos\theta_3)e^{-i\frac{\omega}{c}[r-x\cos\theta_1-y\cos\theta_2]}\\
&= \frac{A}{4\pi}e^{i\omega t}\frac{i\omega}{cr}(1+\cos\theta_3)\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}dy e^{i\frac{\omega}{c}\cos\theta_1 x+i\frac{\omega}{c}\cos\theta_2 y}e^{-i\frac{\omega}{c}r}\\
&= \frac{A}{4\pi}e^{i\omega t-i\frac{\omega}{c}r}\frac{i\omega}{cr}(1+\cos\theta_3)\frac{2i\sin(\frac{\omega a}{c}\cos\theta_1)}{\cos\theta_1}\frac{2i\sin(\frac{\omega b}{c}\cos\theta_2)}{\cos\theta_2}\\
&= \frac{A}{4\pi}e^{i(\omega t-\frac{\omega}{c}r)}\frac{4ic}{\omega r}(1+\cos\theta_3)\frac{\sin(\frac{\omega}{c}a\cos\theta_1)}{\cos\theta_1}\frac{\sin(\frac{\omega}{c}b\cos\theta_2)}{\cos\theta_2}
\end{aligned}
$$

可以看出,衍射波为球面波,振幅在$\frac{\omega}{c}a\cos\theta_1=m\pi,\frac{\omega}{c}b\cos\theta_2=n\pi,(m,n,1,2,3)$处为0(暗点).

§5.1 相对论的实验基础

- 历史背景

  物理规律要在一定参考系中表述.经典力学告诉我们力学的基本运动定律对所有惯性系都成立,而惯性系之间通过伽利略变换联系

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

  我们研究的是电磁现象,电磁现象的基本规律适用于什么参考系?由于如下原因这个问题变得更加突出.麦克斯韦方程组导出波动方程,在真空中电磁波以光速c传播.按伽利略的时空观念,若物质运动速度相对某一参考系为c,变换到另一参考系时,其速度就不可能沿各个方向都是c.因此电磁波只能对一个特定的参考系为光速c,而麦克斯韦方程组也就只能对该参考系成立.经典力学中一切惯性系等价的相对性原理在电磁现象中不再成立,电磁现象确定了一个特殊参考系.我们可以把相对于该特殊参考系的运动称为绝对运动,在这个意义上,运动不再是相对的了.

  这个特殊参考系的确定和决定地球相对于这个特殊参考系的运动成为上世纪末物理学的一个重要课题.但是各种各样的努力都失败了.

- 实验基础

  目的是找到不同参考系中光速的差异

(1).麦克尔孙-莫雷实验:

设仪器相对绝对静止系以水平速度v运动

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2cl_1}{c^2-v^2} \qquad T_2 = \frac{2\sqrt{l_2^2 + (v\frac{T_2}{2})^2}}{c} \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

因此

$$\Delta T^{(1)} = T_1 - T_2 = \frac{2cl_1}{c^2-l^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-l^2}}$$

一般不为0,仪器上将会产生干涉条纹.而将仪器转90°,则:

$$\Delta T^{(2)} = \frac{2cl_2}{c^2-l^2} - \frac{2l_1}{\sqrt{c^2-l^2}} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} v = 0 \iff \Delta T^{(1)} = \Delta T^{(2)} \\ v \neq 0 \iff \Delta T^{(1)} \neq \Delta T^{(2)} \end{array}$$

因而,若$v \neq 0$,干涉条纹在转动过程中一定要发生变化.到目前为止,实验的结论是$v = 0$,即没测出地球上光速在不同方向上的差异.

(2).其它: 双星实验否定了光源与光速有关.

所有实验都指出一条结论,光速不依赖于观察者所在的参考系,且与光源运动速度无关. 这个结论与伽利略的时空观念发生了矛盾, 这个矛盾是人们在研究高速运动(电磁波传播) 时被揭露的,在此之前,人们所研究的力学现象都属于低速范围, 伽利略的时空观念正是通过这些低速现象抽象出来的,它与牛顿力学一起构成了一套自洽的理论体系.

§5.2 相对论基本原理,洛伦兹变换

- 基本原理

爱因斯坦提出两条:
(1).相对性原理: 所有惯性参考系都是等价的
(2).光速不变原理: 真空中的光速相对任何惯性系沿任一方向恒为c,与光源无关.

(1)告诉我们,不存在绝对参考系,或无论通过力学,电磁或其它现象都无法测出绝对运动. (2)告诉我们,信号的最大传递速度是c.因若这个最大信号传递速度为有限值,则相对性原理要求它必须与参考系无关.

- 基本洛伦兹变换

考虑两个相对运动速度为$\vec{V}$的惯性系S和S',将建在两系的坐标系的坐标轴的方向取在相同方向,其中x轴取在$\vec{V}$方向,并设在$t=0,t'=0$时两坐标系重合. 一个事件在S和S'系中的时空坐标分别为(t,x,y,z)和(t',x',y',z'),由时空的均匀与各向同性知(t,x,y,z)和(t',x',y',z')之间的关系应是线性的.因为非线性关系导致不均匀时空.

$$x'=\alpha x+\beta t \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\gamma t+\delta t$$

现考虑在$t=0,t'=0$两坐标系重合时在原点发出一个球面电磁波, 则在t时刻电磁波达到以原点O为中心的某个球波阵面上,相应的在t'时刻电磁波达到以原点O'为中心的某个球波阵面上,

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\alpha x+\beta t)^2+y^2+z^2=c^2(\gamma x+\delta t)^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha^2-c^2\gamma^2=1 \\ \alpha\beta-c^2\gamma\delta=0 \\ c^2\delta^2-\beta^2=c^2 \end{array}\right.$$

又,S'相对S以V运动

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x_{O'}}{t_{O'}}=V \\ 0=\alpha x_{O'}+\beta t_{O'} \end{array}\right. \rightarrow \qquad V=-\frac{\beta}{\alpha}$$

联立两组方程求解

$$\alpha=\delta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \beta=-\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \gamma=-\frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

因此,S与S'之间的变换关系为

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

这个变换叫洛伦兹变换,当$c\rightarrow\infty$时,它回到伽利略变换. 因此伽利略变换对应超距作用(信号传递速率为无穷大), 洛伦兹变换对应近距作用(信号传递速率为有限).从上述变换可反解S'到S的变换

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad y=y' \qquad z=z' \qquad t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

它与S到S'的变换的差别只在于将其中的V换为-V,也就是从S'看,S是以-V运动.

- 任意运动方向的坐标,速度,加速度的洛伦兹变换

– 坐标变换将坐标投影到平行和垂直运动方向上

$$\begin{cases} \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V} = \frac{\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V}-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \vec{r}' - \frac{\vec{r}'\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}\vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} \\ t' = \frac{t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} + \frac{\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{V}-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\vec{V}}{V} \\ t' = \frac{t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

– 速度变换

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{u}' \equiv \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{\frac{d\vec{r}'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} + \frac{\frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V}-V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\vec{V}}{V}}{\frac{1-\frac{\vec{V}\cdot\vec{u}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$

因此

$$\vec{u}' = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}) + (\frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V^2} - 1)\vec{V}}{1-\frac{\vec{V}\cdot\vec{u}}{c^2}}$$

引入四维速度,

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{dx^\alpha}{dt} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} U^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ U^4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

其中,$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ict$

– 加速度变换

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \vec{a}' \equiv \frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \frac{\frac{d\vec{u}'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}$$

$$\vec{a}' = \frac{1}{(1-\frac{\vec{V}\cdot\vec{u}}{c^2})^2}\left\{(1-\frac{V^2}{c^2})(\vec{A} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}) + \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V} + \vec{a}\cdot\vec{V}\frac{(1-\frac{V^2}{c^2})(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V^2}\vec{V}) + (\frac{\vec{u}\cdot\vec{V}}{V^2} - 1)\vec{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{(1-\frac{\vec{V}\cdot\vec{u}}{c^2})c^2}\right\}$$

反变换只需做置换$V \rightarrow -V$.

§5.3 相对论的时空理论

考虑两个事件P_1和P_2在两参考系中各有坐标$(x_1, t_1), (x_1', t_1')$和$(x_2, t_2), (x_2', t_2')$,

- 同时的相对性

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

在S系中不同地点同时发生的事件,在S'系中不同时发生.($\Delta t = 0, \Delta x \neq 0$, 则$\Delta t' \neq 0$).

- 运动时钟变慢

  观察运动系的一个固定时钟,$\Delta x' = 0$

  $$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

  S看S'钟便慢,同样S'看S钟也便慢.

- 运动尺子变短

  同时观察运动系的一把尺子,$\Delta t = 0$

  $$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

  S看S'尺便短,同样S'看S尺也便短.

- 间隔的不变性

  在$c \to \infty$时,运动的时钟和尺子与静止的时钟和尺子是以样的.这时我们有一个衡量事件时空关系的绝对标准(时间用钟去测量,空间用尺去测量),这个绝对标准是与参考系的选择无关的.现在c有限,钟和尺子测量的结果与参考系的选择有关,它们不能再作为绝对标准来衡量事件之间的时空关系,需要寻找新的与参考系选择无关的量,即在洛伦兹变换下不变的量来作为绝对标准.

  在欧氏空间中,尺的长度在旋转下不变,洛伦兹变换是四维时空中的某种"旋转", 什么不变呢?

  对一个参考系中的两个事件$(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$,定义它们之间的间隔为:

  $$\Delta s^2 \equiv c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

  则在另一坐标系中,

  $$\begin{aligned}
  \Delta s'^2 &\equiv c^2(t_1'-t_2')^2 - (x_1'-x_2')^2 - (y_1'-y_2')^2 - (z_1'-z_2')^2 \\
  &= c^2[\frac{t_1-t_2-\frac{V}{c^2}(x_1-x_2)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}]^2 - [\frac{x_1-x_2-V(t_1-t_2)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}]^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 \\
  &= (t_1-t_2)^2[\frac{V^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}] + (x_1-x_2)^2[\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}] + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 \\
  &= \Delta s^2
  \end{aligned}$$

  因而,如此定义的事件间的间隔是与参考系选择无关的,它可以用来作为衡量事件之间时空关系的量.事实上一般的洛伦兹变换在数学上就定义为是保持间隔不变的(x, y, z, t)的齐次线性变换.

  对无穷小间隔,

  $$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}\cdot d\vec{r} = c^2dt^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = c^2d\tau^2 = dl_0^2 \qquad\qquad \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

  其中,对$ds^2 > 0, d\tau \equiv \frac{1}{c}\sqrt{ds^2}$是钟的固有时(原时), 它是由间隔引出的具有时间量纲的不变量, ,对$ds^2 < 0, dl_0 \equiv \sqrt{ds^2}$是尺的固有长度, 它是由间隔引出的具有长度量纲的不变量.

- 两事件关系的分类

  1. $\Delta s^2 > 0$

     这类事件叫类时事件,相应的间隔叫类时间隔.

(a) 信号速度

$\bar{v}=\sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}+\frac{\Delta y^2}{\Delta t^2}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t^2}}$是两事件之间信号传递的平均速度.

$$0<\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=\Delta t^2(c^2-\bar{v}^2) \quad \rightarrow \quad \bar{v}<c$$

因此,原则上,两事件之间是可以建立联系的(因而可以发生相互作用), 因为建立联系所需的信号速度小于c.

(b) 时间次序

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}[1-\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}]$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\leq\bar{v}<c\\ v<c\end{array}\right\}\frac{v\Delta x}{\Delta t}<c^2\rightarrow\frac{v\Delta x}{c^2\Delta t}<1\rightarrow 1-\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}>0$$

因此推论,$\Delta t'$与Δt同号. 特别地,

$$0<\Delta s^2=-\Delta x^2+c^2\Delta t^2=-\Delta x'^2-\Delta y'^2-\Delta z'^2+c^2\Delta t'^2 \quad \rightarrow \quad \Delta t'^2\neq 0$$

即,在任何参考系看,两事件之间的时间次序不会颠倒,并且不存在这样一个参考系, 在其中两事件同时发生. 因此,因果性是保持的.

(c) 空间次序

取两事件空间联线方向为x轴,则$\Delta y=\Delta z=0$,

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-V\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Delta x\frac{1-\frac{V}{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

由于$V>\bar{V}$和$V<\bar{V}$的情况都可能发生,因此Δx与$\Delta x'$ 不一定同号. 特别地,选$V=\bar{V}=||\frac{\Delta x}{\Delta t}||$,则,

$$\Delta x'=0 \quad \Delta y'=0 \quad \Delta z'=0 \quad \Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t-\frac{\Delta x^2}{c^2\Delta t^2}}{\sqrt{1-\frac{\Delta x^2}{c^2\Delta t^2}}}$$

因此,两事件之间的空间次序是不确定的,它随参考系选择而变,且存在这样一个参考系, 两事件在空间同一地点发生.

2. $\Delta s^2=0$

这类事件叫类光事件,相应的间隔叫类光间隔.

(a) 信号速度

$$0=\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=\Delta t^2(c^2-\bar{v}^2) \quad \rightarrow \quad \bar{v}=c$$

因此,原则上,两事件之间是可以建立联系的(因而可以发生相互作用), 因为建立联系所需的信号速度等于c.

(b) 时间次序

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}[1-\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}]$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\leq\bar{v}=c\\ v<c\end{array}\right\}\frac{v\Delta x}{\Delta t}<c^2\rightarrow\frac{v\Delta x}{c^2\Delta t}<1\rightarrow 1-\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}>0$$

因此推论,$\Delta t'$与Δt同号. 特别地, 若选$\Delta y=0,\Delta z=0,\to \Delta x=c\Delta t$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Delta t\frac{1-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Delta t\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\overset{v\to c}{---}\to 0$$

即,在任何参考系看,两事件之间的时间次序仍不会颠倒,但存在这样一个参考系, 在其中两事件同时发生,这个参考系以光速相对原参考系运动. 因果性仍然是保持的.

(c) 空间次序

仍取两事件空间联线方向为x轴,则$\Delta y=\Delta z=0$, 则$\Delta x=c\Delta t$

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-V\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Delta x\frac{1-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\Delta x\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\overset{v\to c}{---}\to 0$$

即,在任何参考系看,两事件之间的空间次序不会颠倒,但存在这样一个参考系, 在其中两事件在同一地点发生,这个参考系以光速相对原参考系运动.

经典力学相当于取$c\to\infty$,这时只有类时事件.

以(x,y,z,t)为坐标具有Δs^2不变性的空间称为Minkowski空间. 在不考虑引力的情况下,我们现实的物理时空是Minkowski空间.

将三维空间与一维时间构成的四维空间在三维子空间(一维时间,两维空间)的投影区中, 将现在$(t=0,x=y=z=0)$取为一事件,则这时间隔分类以'光锥'为界,光锥方程为$c^2t^2=x^2+y^2$, 光锥内为类时间隔,光锥上为类光间隔,光锥外为类空间隔, 类时区被现在$(t=0,x=y=z=0)$分为绝对过去和绝对未来.

§5.4 相对论理论的协变形式

- 四维时空坐标变换

我们已经一般的时空坐标的洛伦兹变换的矢量表达形式,其中有三个独立自由度$\vec{V}$, 若用坐标表达,由于一般说S'与S系的坐标轴并不一定平行,可以相差一个三维转动自由度, 需用三个参数(比如欧拉角)描述. 因此一般的时空坐标的洛伦兹变换的坐标表达形式应有六个独立自由度,三个是相对运动自由度,三个是坐标轴相对转动自由度.

由于间隔不变性意味着:

$$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)$$

定义: $x_1=x,x_2=y,x_3=z,x_4=ict$,则上述间隔不变性化为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2\quad 或\quad \sum_{\mu=1}^{4}x_\mu x_\mu=\sum_{\mu=1}^{4}x'_\mu x'_\mu$$

满足$x_\mu=0$与$x'_\mu=0$对应的一般线性变换为:

$$x'_\mu=\sum_{\mu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu$$

其中,$a_{\mu\nu}$共有16个独立系数,注意为保证x,y,z,t,x',y',z',t'为实数, $a_{4\mu}$和$a_{\mu 4}$是纯虚的,其它系数为实数.为满足间隔不变性,

$$\sum_{\mu=1}^{4}x'_\mu x'_\mu=\sum_{\mu,\nu,\lambda=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu a_{\mu\lambda}x_\lambda=\sum_{\mu,\nu,\lambda=1}^{4}a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}x_\mu x_\lambda=\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu x_\mu$$

它要求

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda}$$

给出10个约束方程,16个$a_{\mu\nu}$受到10个约束后,还剩6个独立系数,它正好与一般洛伦兹变换的要求一致.
利用上述约束条件,反变换为

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \delta_{\mu\nu}x_\nu = \sum_{\nu,\lambda=1}^{4} a_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu}x_\nu = \sum_{\lambda=1}^{4} a_{\lambda\mu}x'_\lambda$$

它与间隔不变性结合起来给出10个约束的另一种表达形式

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda}$$

有时,人们喜欢将x_μ排成一个列矩阵X, $a_{\mu\nu}$排成一个方矩阵A

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

则,洛伦兹正反变换及约束的的两种表达形式用矩阵表达为

$$X' = AX \qquad X = A^T X' \qquad A^T A = I \qquad AA^T = I$$

其中,I是单位矩阵. 对S'系与S系坐标轴重合,相对沿x轴方向以速度V运动的情形,我们已明显给出了变换关系, 它相应的变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

设第一次变换为$X' = AX$,第二次变换为$X" = BX'$,这两次变换可用一次变换$X" = (BA)X$ 实现.
对约束条件两端同时求行列式,

$$1 = \det I = \det(A^T A) = (\det A^T)(\det A) = (\det A)^2 \quad \rightarrow \quad (\det A) = \pm 1$$

其中,$\det A = 1$是由纯转动构成的,$\det A = -1$是由纯转动迭加上空间反射或时间反演构成的.

- 物理量按时空变换性质分类

  由相对性原理,物理理论应与惯性系的选择无关,因而在惯性系之间的变换(洛伦兹)变换下应有不变的形式.要构造这种不变形式,必须先讨论清楚在洛伦兹变换下,由哪些量可以构造这种不变形式.
  利用时空坐标变换,可以定义在洛伦兹变换下的各种张量.

  – 0阶张量:(标量,洛伦兹不变量) $\phi' = \phi$

- 1阶张量:(矢量) $A'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} A_\nu$
- 2阶张量: $B'_{\mu\nu} = \sum_{\mu',\nu'=1}^{4} a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} B_{\mu'\nu'}$
- $\cdots$
- n阶张量: $T'_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_n\nu_n} T_{\nu_1\cdots\nu_n}$

n阶张量的特点是有4^n个分量,在洛伦兹变换下,按n个坐标乘积的变换方式变换.

之所以要引入各种张量的原因是:若在一个坐标系中描述物理规律的方程可以写成

$$T_{\mu_1\cdots\mu_n} = F_{\mu_1\cdots\mu_n}$$

则在任一坐标系中

$$\sum_{\nu_1,\cdot,\nu_n=1}^{4} a_{\nu_1\mu_1}\cdots a_{\nu_n\mu_n} T_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdot,\nu_n=1}^{4} a_{\nu_1\mu_1}\cdots a_{\nu_n\mu_n} F_{\mu_1\cdots\mu_n} \quad \rightarrow \quad T_{\mu_1\cdots\mu_n} = F_{\mu_1\cdots\mu_n}$$

在新坐标系中的方程式形式上与旧坐标系中的方程式一样,这正是相对性原理.因此,利用张量,我们可以将描述物理规律的方程写成满足相对性原理的形式—-物理规律的协变表达.

从实用的角度,它告诉我们新旧坐标系物理量之间的联系.

我们希望将所有物理规律都用张量表达.要达到这一点,需知道如下几点:
(1).张量之间的运算法则.
(2).完备的张量集有多少种张量.
(3).具体的物理规律如何用张量表达.

- 张量运算及张量的例子
  - 张量运算

    (1).加减法: 同阶张量加减后仍是这阶张量
    证:

$$F'_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_n\nu_n} F_{\nu_1\cdots\nu_n} \qquad G'_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_n\nu_n} G_{\nu_1\cdots\nu_n}$$

$$F'_{\mu_1\cdots\mu_n} \pm G'_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_n\nu_n} [F_{\nu_1\cdots\nu_n} \pm G_{\mu_1\cdots\mu_n}]$$

    (2).乘法: m阶张量与n阶张量的乘积为$m+n$阶张量
    证:

$$A'_{\mu_1\cdots\mu_m} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_m=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_m\nu_m} A_{\nu_1\cdots\nu_m} \qquad B'_{\mu_1\cdots\mu_n} = \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_n=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_n\nu_n} B_{\nu_1\cdots\nu_n}$$

$$T'_{\mu_1\cdots\mu_{m+n}} = A_{\mu_1\cdots\mu_m} B_{\mu_{m+1}\cdots\mu_{m+n}}$$

$$T'_{\mu_1\cdots\mu_{m+n}} = A'_{\mu_1\cdots\mu_m} B'_{\mu_{m+1}\cdots\mu_{m+n}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_m=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_m\nu_m} A_{\nu_1\cdots\nu_m} \sum_{\nu_{m+1},\cdots,\nu_{m+n}=1}^{4} a_{\mu_{m+1}\nu_{m+1}}\cdots a_{\mu_{m+n}\nu_{m+n}} B_{\nu_{m+1}\cdots\nu_{m+n}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_{m+n}=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_{m+n}\nu_{m+n}} A_{\nu_1\cdots\nu_m} B_{\nu_{m+1}\cdots\nu_{m+n}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\cdots,\nu_{m+n}=1}^{4} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_{m+n}\nu_{m+n}} T_{\nu_1\cdots\nu_{m+n}}$$

(3).缩并: n阶张量收缩一次变成n-2阶张量

其中,缩并的定义为: $\sum_{\mu_i,\mu_j=1}^{4} \delta_{\mu_i\mu_j} T_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_n}$称为$T_{\mu_1\cdot\mu_n}$对指标$\mu_i,\mu_j$的缩并.

– 张量的例子

有很多物理量按其意义就应该是标量(不变量),例如: c,h,电荷,静止质量,$\cdots$.

(1).四维体积元$d^4x \equiv dx_1dx_2dx_3dx_4 = icdVdt$. 它的变换关系为: $d^4x' = ||\det A||d^4x = d^4x$ 因此,四维体积元为洛伦兹标量. $dV'dt' = dVdt$

(2).四维速度$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$为四矢量(一阶张量).因为$dx_\mu$ 与x_μ变换方式相同,$d\tau$是不变量.

(3).协变微商$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$. 它的变换关系为:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

它是一阶张量. 按照乘积和收缩的性质,两个协变微商的乘积为二阶张量,再收缩一次为标量. 因此

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

为洛伦兹不变算符.

(4).$\delta_{\mu\nu}$的变换关系为

$$\delta'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{4} a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{4} a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda'}\delta_{\lambda\lambda'}$$

因此,它是二阶单位张量.

§5.5 相对论力学

在这一节和下一节中,我们先忘掉前面章节所用的麦克斯韦方程组,洛伦兹力公式等从实验定律导出的各种方程. 我们从理论的角度,从一些基本原理导出这些方程.

- 最小作用量原理

  对于每一个力学体系,有一个叫作用量的积分S存在,这个积分对于实际运动有最小值.

  对一个自由度的体系,

$$S = \int_\alpha^\beta dt\ L(q.\dot{q})$$

其中,L为体系的拉格朗日量,它只含坐标和其对时间的一阶导数. 在最小值附近变分应是稳定的,即

$$0 = \delta S = \int_\alpha^\beta [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q] = \int_\alpha^\beta [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q] = \int_\alpha^\beta dt\ [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q) + (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q]$$

它要求

$$-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

这是一个自由度体系运动所满足的拉格朗日方程.

如果进一步引入广义动量和哈密顿量

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad\qquad H=p\dot{q}-L$$

则拉格朗日方程意味着

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q} \qquad \frac{dH}{dt}=\frac{dp}{dt}\dot{q}+p\frac{d\dot{q}}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{dt}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{dt}=0$$

- 点粒子力学

由相对性原理,对自由运动的点粒子的作用量应是洛伦兹标量,

$$S=-m_0c\int_a^b ds$$

其中,m_0c^2起量纲因子的作用,$-$号是使实际轨道的S为最小. 因此最小作用量原理对自由运动的点粒子实际上是要求它的实际运行轨道为连接初始和结尾点并具有最小间隔的轨道.利用

$$ds=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$$

作用量又可以写成

$$S=-m_0c^2\int_a^b\ dt\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

因此,自由运动的点粒子的拉格朗日量为,

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \overset{c\to\infty}{---\to} \quad -m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

而拉格朗日方程要求

$$-\frac{\partial L}{\partial x_i}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}=0 \quad \to \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}=0$$

广义动量为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m\vec{v} \qquad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dp_i}{dt}=0 \qquad\qquad \frac{d\vec{p}}{dt}=0$$

哈密顿量为

$$H=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2 \qquad \frac{dH}{dt}=0$$

也可把所有的公式都表为协变形式

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt} = (\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$$

$$p^\mu = m_0 u^\mu = (\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{im_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}) = (\vec{p}, \frac{iH}{c})$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

我们进一步有关系

$$\sum_\mu p^\mu p^\mu = \frac{m_0^2 v^2 - m_0^2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -m_0^2 c^2 \quad \rightarrow \quad \frac{H^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

- 带电点粒子及电荷分布在外电磁场中

  外电磁场的描述: 由于物理量可以按其在四维时空中的张量变换性质分类, 不同的张量代表不同的物理, 电磁场应该属于某一张量,取为四矢量(如何取正确最后将要以所推出的理论与实验比较是否相符来验证)$A_\mu = (\vec{A}, \frac{i}{c}\phi)$,这样取法隐含着规定了$(\vec{A}, \phi)$在不同坐标系的变换关系,如若x'相对x以速率v运动时,

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad A'_y = A_y \qquad A'_z = A_z \qquad \phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

  - 带电点粒子在外电磁场中

    为描述带电点粒子在外电磁场的行为,必须在自由点粒子作用量加上一个反应电磁场与带电粒子发生相互作用的项,这一项至少应包含有点粒子的性质和电磁场的性质. 为确定这一项,我们加上如下规范原理:

    观察到的物理应在规范变换$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$下是不变的.

    满足上述规范原理的洛伦兹标量为

$$S = -m_0 c \int_a^b ds + e\sum_{\mu=1}^4 \int_a^b dx_\mu \, A_\mu$$

    其中,规范变换在被积函数中产生一个全微商项,它只影响边界(现在边界是固定的), 对轨道无影响,因而不影响物理. e是一个偶合常数,它衡量A_μ和dx_μ 的相互作用强度.这个作用量可进一步化为

$$S = \int_a^b (-m_0 c ds + e\vec{A}\cdot d\vec{r} - e\phi dt) = \int_a^b dt \, (-m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\vec{A}\cdot\vec{v} - e\phi)$$

    因此,在外电磁场中的点粒子的拉格朗日量为,

$$L = -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\vec{A}\cdot\vec{v} - e\phi$$

    其中, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\phi = \phi(\vec{r}, t)$.

    广义动量(正则动量)和哈密顿量为

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\vec{A} \qquad \text{正则动量} \neq \text{机械动量} \qquad H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\phi$$

利用矢量运算公式

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\nabla\vec{b}+\vec{b}\cdot\nabla\vec{a}+\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})+\vec{a}\times(\nabla\times\vec{b})$$

则

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial x_i}\vec{e}_i=\nabla L=e\nabla(\vec{A}\cdot\vec{v})-e\nabla\phi=e\vec{v}\cdot\nabla\vec{A}+e\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})-e\nabla\phi$$

拉格朗日方程给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{d\vec{p}}{dt}-e\frac{d\vec{A}}{dt}=\nabla L-e\frac{d\vec{A}}{dt}=e\vec{v}\cdot\nabla\vec{A}+e\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})-e\nabla\phi-e(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\cdot\nabla\vec{A})\\ &= e(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi)+e\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\end{aligned}$$

因为$\vec{A}$和ϕ是以某种组合出现在上面方程中,我们引入两个新的量来描述这种组合,定义

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi\qquad\qquad\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

注意在上面定义中,$\vec{A},\phi$只能准到相差一个规范变换. 用$\vec{E}$和$\vec{B}$,前面方程可写成

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\equiv\vec{F}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}$$

这正是洛伦兹力公式. 因此,我们从第一原理推出了洛伦兹力公式.在这个公式中出现的是$\vec{E}$和$\vec{B}$,而不是$\vec{A}$和ϕ. $\vec{E}$和$\vec{B}$是可测量的物理量,$\vec{A}$和ϕ与它们的联系可以相差一个规范变换.
由于$\vec{A},\phi$在不同惯性系的变换关系已知, 保持$\vec{E},\vec{B}$与$\vec{A},\phi$的关系在所有惯性系都一样,我们就得到$\vec{E},\vec{B}$ 在不同惯性系的变换关系.特别地,若x'相对x以速率v运动时,

$$E'_x=E_x\qquad E'_y=\frac{E_y-vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad E'_z=\frac{E_z+vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B'_x=B_x\qquad B'_y=\frac{B_y+\frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad B'_z=\frac{B_z-\frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

– 电荷分布在外电磁场中
点电荷及其流动是连续电荷分布及其流动的特例,

$$\rho(\vec{r},\vec{r}')=e\delta(\vec{r}-\vec{r}')\qquad\qquad\vec{j}(\vec{r},\vec{r}')=\rho(\vec{r},\vec{r}')\vec{v}$$

考虑

$$edx_\mu=e\delta(\vec{r}-\vec{r}')d\tau dx_\mu=\rho d\tau dx_\mu=\rho\frac{dx_\mu}{dt}dtd\tau$$

比较等式两边,我们发现四度电流密度

$$j_\mu\equiv\rho\frac{dx_\mu}{dt}=(\vec{j},ic\rho)$$

为四矢量.它确定了电流密度在不同惯性系的变换关系. 特别地,若x'相对x以速率v运动时,

$$j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad j'_y = j_y \qquad j'_z = j_z \qquad \rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

利用$edx_\mu = j_\mu dtd\tau$,我们可将作用量中带电点粒子与电磁场的相互作用项写为

$$\sum_{\mu=1}^{4}\int_a^b dx_\mu\, eA_\mu = \sum_{\mu=1}^{4}\int dtd\tau A_\mu j_\mu = \int dtd\tau(\vec{A}\cdot\vec{j} - \phi\rho)$$

这时,规范不变性要求

$$0 = \sum_{\mu=1}^{4}\int dtd\tau j_\mu \partial_\mu \chi = -\sum_{\mu=1}^{4}\int dtd\tau(\partial_\mu j_\mu)\chi$$

即

$$\sum_{\mu=1}^{4}\partial_\mu j_\mu = 0 \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

我们推出了电荷守恒定律. 因此,电荷守恒作为一个实验上观察到的基本实验定律, 其背后的支配对称性为规范对称性.

– 协变表达

四动量,

$$P_\mu = p_\mu + eA_\mu \qquad\qquad p_\mu = (\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$$

场强,

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}B_k \\ F_{4i} = -F_{i4} = \frac{i}{c}E_i \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} B_i = \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \\ E_i = -icF_{4i} \end{cases}$$

在不同惯性系的变换关系为,

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\lambda'=1}^{4} a_{\mu\lambda}F_{\lambda\lambda'}a_{\nu\lambda'} \qquad \text{或} \qquad F' = AFA^T$$

电荷密度,

$$j_\mu = e\delta(\vec{r}-\vec{r}')\frac{dx_\mu}{dt} = \int dt\; e\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')\frac{dx_\mu}{dt} = \int d\tau e\delta^{(4)}(x-x')\frac{dx_\mu}{d\tau}$$

运动方程,

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = K_\mu \quad \rightarrow \quad K_\mu = (\vec{K}, \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}) = \sum_{\nu=1}^{4}eF_{\mu\nu}u_\nu = \Big(\frac{e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}), \frac{\frac{ie}{c}\vec{E}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big)$$

或 : $\vec{F} = \vec{K}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dH}{dt}$

其中,前三个方程正是洛伦兹力公式.因此洛伦兹力公式在不同参考系中都是一样的.

§5.6 相对论电动力学

本节的目的是建立有物质源情况下的电磁理论的相对论协变描述. 物质源现在被看成是外源. 我们已经知道作用量中物质源与电磁场的相互作用项为$\sum_{\mu=1}^{4}\int dtd\tau A_\mu j_\mu$, 现为描述电磁场的运动,还应在作用量中加一项纯反应电磁场的项,满足规范不变原理由电磁场构造的洛伦兹不变量有很多项,但对场强依赖为幂次最低的只有两种,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{c^2}E^2-B^2 \qquad \sum_{\mu,\nu,\sigma,\rho=1}^{4}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}=\frac{i}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}=\sum_{\mu,\nu,\sigma,\rho=1}^{4}4\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial_\mu(A_\nu\partial_\sigma A_\rho)$$

第二项因为是全微商,对作用量无贡献. 因此,最简单的满足规范不变原理的选择只有一种

$$S=\int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{4\mu_0})\sum_{\mu,nu=1}^{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu A_\mu\Big]$$

最小作用量原理要求

$$\begin{aligned}
0=\delta S &= \int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{4\mu_0})\sum_{\mu,nu=1}^{4}\delta(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu\delta A_\mu\Big]=\int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{2\mu_0})\sum_{\mu,\nu=1}^{4}F_{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu\delta A_\mu\Big]\\
&= \int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{\mu_0})\sum_{\mu,\nu=1}^{4}F_{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu)+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu\delta A_\mu\Big]=\int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{\mu_0})\sum_{\mu,\nu=1}^{4}F_{\mu\nu}(\partial_\mu\delta A_\nu)+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu\delta A_\mu\Big]\\
&= \int dtd\tau\Big[(-\frac{1}{\mu_0})\sum_{\mu,\nu=1}^{4}[\partial_\mu(F_{\mu\nu}\delta A_\nu)-(\partial_\mu F_{\mu\nu})\delta A_\nu]+\sum_{\mu=1}^{4}j_\mu\delta A_\mu\Big]
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{\mu=1}^{4}\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 j_\nu$$

另外,由$F_{\mu\nu}$定义,它满足

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0$$

这两组方程组是协变方程组,其形式是不随惯性参考系选择而变的. 我们证明它们正是麦克斯韦方程组,

$$\sum_{j=1}^{3}\partial_j F_{ji}=-\mu_0 j_i-\partial_4 F_{4i} \quad\to\quad \sum_{j,k=1}^{3}\partial_j\epsilon_{jik}B_k=-\mu_0 j_i-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} \quad\to\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\partial_i F_{i4}=-\mu_0 j_4 \quad\to\quad \sum_{i=1}^{3}\partial_i E_i(-\frac{i}{c})=-\mu_0 ic\rho \quad\to\quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12}=0 \quad\to\quad \sum_{i,j,k=1}^{3}\partial_i\epsilon_{jki}F_{jk}=0 \quad\to\quad \sum_{i=1}^{3}\partial_i B_i=0 \quad\to\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\partial_j F_{k4}+\partial_k F_{4j}+\partial_4 F_{jk}=0 \quad\to\quad \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\partial_j(icF_{k4})=-ic\partial_4(\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{jki}F_{jk}) \quad\to\quad \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\partial_j E_k=-\frac{\partial}{\partial t}B_i$$

$$\to\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

因此,麦克斯韦方程组在不同参考系都是一样的.

§6.1 运动带电粒子的电磁场

- 运动带电粒子的描述,推迟效应

  考虑一个点电荷

$$\rho(\vec{r},t)=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \vec{j}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\vec{v}_0(t)=q\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

  它产生的推迟势为

$$\phi(\vec{r},t)=\int d^3x'\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{4\pi\epsilon_0 R}=\int d^3x'\frac{q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int d^3x'\frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{4\pi R}=\int d^3x'\frac{\mu_0 q\vec{v}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

  由于δ函数只在$\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}=0$处不为0,设这个方程的解为$\vec{r}^*$,即

$$\begin{cases}\vec{r}^*-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}^*|}{c}=0\\ t^*\equiv t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}^*|}{c}\end{cases}\rightarrow\quad\begin{cases}\vec{r}^*=\vec{r}_0(t^*) \qquad \vec{v}^*\equiv\vec{v}_0(t^*)\\ |\vec{r}-\vec{r}^*|=c(t-t^*)\end{cases}$$

  则

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}^*|}\int d^3x'\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 q\vec{v}^*}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}^*|}\int d^3x'\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})$$

- 李纳-维谢尔势(Liénard-Wiechert)

$$\int d^3x'\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})=\int d^3x^{*\prime}\frac{1}{J(\vec{r},\vec{r}')}\delta(\vec{r}^*)=\frac{1}{J(\vec{r},\vec{r}^*)}$$

  其中,$\vec{r}^{*\prime}=\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})$

$$J=||\frac{\partial x_i^{*\prime}}{\partial x_j'}||\Big|_{\vec{r}'=\vec{r}^*}=||\frac{\partial}{\partial x_j'}[x_i'-x_{0i}(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})]||\Big|_{\vec{r}'=\vec{r}^*}=1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}^*)\cdot\vec{v}^*}{|\vec{r}-\vec{r}^*|c}$$

  因此,我们得到点粒子的推迟势为

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}^*|}\quad\frac{1}{1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}^*)\cdot\vec{v}^*}{|\vec{r}-\vec{r}^*|c}} \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 q\vec{v}^*}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}^*|}\quad\frac{1}{1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}^*)\cdot\vec{v}^*}{|\vec{r}-\vec{r}^*|c}}$$

- 电磁场

$$\begin{cases}\vec{e}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{cases}\qquad\begin{cases}\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^*}\quad\frac{1}{1-\frac{\vec{R}^*)\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\\ \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 q\vec{v}^*}{4\pi R^*}\quad\frac{1}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{R}^*=\vec{r}-\vec{r}^*\\ \vec{r}^*=\vec{r}^*(\vec{r},t)=\vec{r}_0(t^*)\end{cases}$$

为计算$\vec{E},\vec{B}$,必须知道$\phi,\vec{A}$对$\vec{r},t$的微商, 但$\phi,\vec{A}$对$\vec{r},t$的依赖通过$\vec{R}^*,\vec{v}^*$实现,而利用$\vec{v}^*=\vec{v}_0(t^*)$,$\vec{v}^*$对$\vec{r},t$的依赖通过t^*对$\vec{r},t$的依赖实现,因此,必须求出$\vec{R}^*,t^*$对$\vec{r},t$的微商.

从$\vec{R}^*=\vec{r}-\vec{r}^*$和$\vec{r}^*=\vec{r}_0(t^*)$,

$$\frac{\partial R^*}{\partial t}=\frac{1}{2R^*}\frac{\partial R^{*2}}{\partial t}=\frac{1}{2R^*}\frac{\partial \vec{R}^*\cdot\vec{R}^*}{\partial t}=\frac{\vec{R}^*}{R^*}\cdot(-\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial t^*})\frac{\partial t^*}{\partial t}=-\vec{v}^*\cdot\frac{\vec{R}^*}{R^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}$$

$$\nabla R^*=\frac{1}{2R^*}\nabla R^{*2}=\frac{1}{2R^*}\nabla(\vec{R}^*\cdot\vec{R}^*)=\frac{1}{R^*}(\nabla\vec{R}^*)\cdot\vec{R}^*=\frac{1}{R^*}(\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\nabla t^*\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial t^*})\cdot\vec{R}^*=\frac{1}{R^*}(\vec{R}^*-\nabla t^*\vec{v}^*\cdot\vec{R}^*)$$

从$R^*=x(t-t^*)$,

$$\frac{\partial R^*}{\partial t}=c-\frac{\partial t^*}{\partial t}$$
$$\nabla R^*=-c\nabla t^*$$

联合求解

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\qquad\frac{\partial R^*}{\partial t}=\frac{-\frac{\vec{R}^*}{R^*}\cdot\vec{v}^*}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\qquad\nabla t^*=\frac{-\frac{\vec{R}^*}{cR^*}}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\qquad\nabla R^*=\frac{\frac{\vec{R}^*}{R^*}}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}$$

可进一步推论

$$\frac{\partial\vec{R}^*}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{-\vec{v}^*}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}\qquad\nabla\vec{R}^*=\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\nabla t^*\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial t^*}=\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\frac{\frac{\vec{R}^*\vec{v}^*}{R^*c}}{1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c}}$$

带入$\vec{E}$和$\vec{B}$的公式,即可化出

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 S^{*3}}(\vec{R}^*-\frac{R^*\vec{v}^*}{c})(1-\frac{v^{*2}}{c^2})+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}\left[\vec{R}^*\times[(\vec{R}^*-\frac{R^*\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]\right]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\vec{R}^*}{cR^*}\times\vec{E}(\vec{R},t)$$

其中

$$\vec{R}^*=\vec{r}-\vec{r}^*\qquad\vec{a}^*\equiv\frac{d^2\vec{r}_0(t^*)}{dt^{*2}}\qquad S^*\equiv R^*(1-\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{R^*c})$$

讨论:
(1).电磁场分两部分

$$\vec{E}=\vec{E}_{非辐}+\vec{E}_{辐}\qquad\vec{B}=\vec{B}_{非辐}+\vec{B}_{辐}$$
$$\vec{E}_{非辐}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 S^{*3}}(\vec{R}^*-\frac{R^*\vec{v}^*}{c})(1-\frac{v^{*2}}{c^2})\qquad\vec{E}_{辐}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}\left[\vec{R}^*\times[(\vec{R}^*-\frac{R^*\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]\right]$$
$$\vec{B}_{非辐}=\frac{\vec{R}^*}{cR^*}\times\vec{E}_{非辐}\qquad\vec{B}_{辐}=\frac{\vec{R}^*}{cR^*}\times\vec{E}_{辐}$$

(2).对非辐射场,若定义$\vec{R}=\vec{R}^*-\frac{R^*\vec{v}^*}{c}$,则

$$\vec{R}\cdot\vec{v}^*=\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*-R^*\frac{v^{*2}}{c}$$

$$
\begin{aligned}
R^2 &= R^{*2}(1+\frac{v^{*2}}{c^2}) - 2R^*\frac{\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{c} = R^2(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) - R^*\frac{2\vec{R}\cdot\vec{v}^*}{c} \quad\rightarrow\quad R^{*2}(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) = R^2 + R^*\frac{2\vec{R}\cdot\vec{v}^*}{c} \\
S^* &= R^* - \vec{R}^*\cdot\frac{\vec{v}^*}{c} = R^* - \frac{1}{c}(\vec{R}\cdot\vec{v}^* + \vec{R}^*\frac{v^{*2}}{c}) = R^*(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) - \frac{1}{c}\vec{R}\cdot\vec{v}^* \\
S^{*2} &= R^{*2}(1-\frac{v^{*2}}{c^2})^2 - (1-\frac{v^{*2}}{c^2})R^*\frac{2\vec{R}^*\cdot\vec{v}^*}{c} + \frac{1}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v}^*)^2 \\
&= (1-\frac{v^{*2}}{c^2})[R^2 + R^*\frac{2\vec{R}\cdot\vec{v}^*}{c}] - (1-\frac{v^{*2}}{c^2})R^*\frac{2\vec{R}\cdot\vec{v}^*}{c} + \frac{1}{c^2}(\vec{R}\cdot\vec{v}^*)^2 \\
&= (1-\frac{v^{*2}}{c^2})R^2 + \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v}^*)^2}{c^2} \equiv S^2
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{cases} \vec{E}_{\text{非辐}} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 S^3}(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) \\ \vec{B}_{\text{非辐}} = \frac{\vec{v}^*}{c^2}\times\vec{E}_{\text{非辐}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}^* - R^*\frac{\vec{v}^*}{c} \\ S^2 = (1-\frac{v^{*2}}{c^2})R^2 + \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v}^*)^2}{c^2} \end{cases}
$$

这个形式具有特殊意义,因为当匀速运动,即$\vec{r}_0(t) = \vec{V}t$时,

$$
\begin{cases} \vec{v}^* = \vec{V} \\ \vec{r}^* = \vec{V}t^* \\ c(t-t^*) = R^* = |\vec{r} - \vec{r}^*| \end{cases} \quad\rightarrow\quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}^* - (t-t^*)\vec{v}^* = \vec{r} - \vec{V}t
$$

这时$\vec{R}$已明显解为$\vec{r}, t$的函数,这个结果可直接通过坐标变换得到!

$$
\text{对}\vec{R}//\vec{v}^* \quad \begin{cases} \vec{E}_{\text{非辐}//} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}(1-\frac{v^{*2}}{c^2}) \\ \vec{B}_{\text{非辐}//} = 0 \end{cases} \qquad \text{对}\vec{R}\perp\vec{v}^* \begin{cases} \vec{E}_{\text{非辐}\perp} = \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 R^3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{*2}}{c^2}}} \\ \vec{B}_{\text{非辐}\perp} = \frac{\mu_0 q\vec{v}^*\times\vec{R}}{4\pi R^3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^{*2}}{c^2}}} \end{cases}
$$

因此, 当$v^* \ll c$时,$E_{\text{非辐}}$各方向同数值, 当$v^* \to c$时,$E_{\text{非辐}//} \to 0$, $E_{\text{非辐}\perp} \to \infty$.

(3).对辐射场

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{辐}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}[\vec{R}^*\cdot\vec{a}^*(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c}) - R^*(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c})\vec{a}^*] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}[\vec{R}^*\cdot\vec{a}^*(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c}) - R^*S^*\vec{a}^*] \\
\vec{B}_{\text{辐}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 S^{*3}}[\vec{R}^*\cdot\vec{a}^*(\vec{R}^*\times\frac{\vec{v}^*}{c}) - S^*\vec{R}^*\times\frac{\vec{a}^*}{c}] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 S^{*3}}[\vec{R}^*\cdot\vec{a}^*(\vec{R}^*\times\vec{v}^*) - S^*(\vec{R}^*\times\vec{a}^*)]
\end{aligned}
$$

§6.2 高速运动带电粒子的辐射

- 辐射功率及角分布

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{\text{辐}}\times\vec{B}_{\text{辐}} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}_{\text{辐}}\times(\vec{n}^*\times\vec{E}_{\text{辐}} = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}_{\text{辐}}^2\vec{n}^* - (\vec{n}^*\cdot\vec{E}_{\text{辐}})\vec{E}_{\text{辐}}] \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^5\mu_0 S^{*6}}|\vec{R}^*\times[(\vec{R}^* - \frac{R^*\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]|^2 = \frac{q^2\vec{n}^*}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^3 R^{*2}}\frac{|\vec{n}^*\times[(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]|^2}{1-\frac{\vec{v}^*\cdot\vec{n}^*}{c})^6}
\end{aligned}
$$

其中, $\vec{n}^* = \frac{\vec{R}^*}{R^*}$, $\vec{n}^*\cdot\vec{E}_{\text{辐}} = 0$, 且

$$
|\vec{n}^*\times[(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]|^2 = \frac{2(\vec{n}^*\cdot\vec{a}^*)(\vec{v}^*\cdot\vec{a}^*)}{c}(1-\frac{\vec{n}^*\cdot\vec{v}^*}{c}) + a^{*2}(1-\frac{\vec{n}^*\cdot\vec{v}^*}{c})^2 - (1-\frac{v^{*2}}{c^2})(\vec{n}^*\cdot\vec{a}^*)^2
$$

因此,

$$\begin{aligned} I^* &\equiv \int_{S^*} d\Omega^* \, (\frac{dI^*}{d\Omega^*} = \int_{S^*} d\sigma^* \cdot (\vec{S}\frac{dt}{dt^*}) = \int_{S^*} d\Omega^* \; R^{*2}\vec{n}^* \cdot (\vec{S}\frac{dt}{dt^*}) \\ \frac{dI^*}{d\Omega^*} &= R^{*2}\vec{n}^* \cdot (\vec{S}\frac{dt}{dt^*}) = \frac{q^2\vec{n}^*}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^3 R^{*2}} \cdot \vec{n}^* R^{*2} \frac{|\vec{n}^* \times [(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c}) \times \vec{a}^*]|^2}{1 - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{n}^*}{c})^6} (1 - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{n}^*}{c}) \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\vec{n}^* \times [(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c}) \times \vec{a}^*]|^2}{1 - \frac{\vec{v}^* \cdot \vec{n}^*}{c})^5} \end{aligned}$$

对立体角积分

$$I^* = \int d\Omega^* \, (\frac{dI^*}{d\Omega^*}) \xRightarrow{\text{以}\vec{v}^*\text{为}z\text{轴}} \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{[a^{*2} - \frac{(\vec{a}^* \times \vec{v}^*)^2}{c^2}]}{(1 - \frac{v^{*2}}{c^2})^3}$$

- $\vec{a}^* \parallel \vec{v}^*$情形

  取$\vec{v}^*$与$\vec{n}^*$的夹角为θ^*

$$\begin{aligned} &|\vec{n}^* \times [(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c}) \times \vec{a}^*]|^2 \\ &= \frac{2}{c} a^{*2} v^* \cos\theta^* (1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*) + a^{*2}(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^2 - (1 - \frac{v^{*2}}{c^2}) a^{*2}\cos^2\theta^* \\ &= a^{*2}(1 - \cos^2\theta^*) = a^{*2}\sin^2\theta^* \end{aligned}$$

  这时

$$\frac{dI^*}{d\Omega^*} = \frac{q^2 a^{*2}\sin^2\theta^*}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 (1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^5} \qquad I^* = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^{*2}}{(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^3}$$

- $\vec{a}^* \perp \vec{v}^*$情形

  以$\vec{v}^*$为z轴,$\vec{a}^*$为x轴, $\vec{n}^* \cdot \vec{v}^* = v^*\cos\theta^*$, $\vec{n}^* \cdot \vec{a}^* = a^*\sin\theta^*\cos\phi^*$,

$$|\vec{n}^* \times [(\vec{n}^* - \frac{\vec{v}^*}{c}) \times \vec{a}^*]|^2 = a^{*2}[(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^2 - (1 - \frac{v^{*2}}{c^2})\sin^2\theta^*\cos^2\theta\phi^*]$$

  这时

$$\frac{dI^*}{d\Omega^*} = \frac{q^2 a^{*2}}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^2 - (1 - \frac{v^{*2}}{c^2})\sin^2\theta^*\cos^2\theta\phi^*(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^5 \qquad I^* = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3(1 - \frac{v^{*2}}{c^2})^2}$$

  特别地,对xz平面,

$$\phi^* = 0 \qquad \frac{dI^*}{d\Omega^*} = \frac{q^2 a^{*2}}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{(\frac{v^*}{c} - \cos\theta^*)^2}{(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta^*)^5}$$

§6.3 辐射频谱分析

对辐射场做傅里叶分解

$$\vec{E}_{\text{辐}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \qquad \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \; \vec{E}_{\text{辐}}(\vec{r}, t) e^{i\omega t}$$

则

$$\begin{aligned}
\vec{E}_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^*}\frac{\vec{n}^*\times[(\vec{n}^*-\frac{\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]}{(1-\vec{n}^*\cdot\frac{\vec{v}^*}{c})^3} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt^*\ \frac{dt}{dt^*}e^{i\omega(t^*+\frac{R^*}{c})}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^*}\frac{\vec{n}^*\times[(\vec{n}^*-\frac{\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]}{(1-\vec{n}^*\cdot\frac{\vec{v}^*}{c})^3} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt^*\ e^{i\omega t^*}\frac{qe^{i\omega\frac{R^*}{c}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^*}\frac{\vec{n}^*\times[(\vec{n}^*-\frac{\vec{v}^*}{c})\times\vec{a}^*]}{(1-\vec{n}^*\cdot\frac{\vec{v}^*}{c})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\overset{\omega\to\infty}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ 0 \\
\overset{\omega\to 0, v^*\ll c, R^*, \vec{n}^*\text{与}t^*\text{无关}}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ \frac{qe^{i\omega\frac{R^*}{c}}}{8\pi\epsilon_0 c^2 R^*}\vec{n}^*\times(\vec{n}^*\times\Delta\vec{v}^*)
\end{cases}$$

角分布为

$$\begin{aligned}
(\frac{dW}{d\Omega})^* &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt^*\ (\frac{dI^*}{d\Omega^*}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt^*\ \epsilon_0 c\vec{E}_{\text{辐}}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}_{\text{辐}}(\vec{r},t)R^{*2}(\frac{dt}{dt^*}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \epsilon_0 cR^{*2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' e^{-i\omega t}e^{-i\omega' t}\vec{E}_\omega(\vec{r})\cdot\vec{E}_{\omega'}(\vec{r}) \\
&= 2\pi\epsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty} d\omega R^{*2}\vec{E}_\omega(\vec{r})\cdot\vec{E}_{-\omega}(\vec{r}) \\
&= 4\pi\epsilon_0 c\int_0^{\infty} d\omega R^{*2}\vec{E}_\omega(\vec{r})\cdot\vec{E}_{-\omega}(\vec{r}) \equiv \int_0^{\infty} d\omega\ (\frac{dW_\omega^*}{d\Omega})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_\omega^*}{d\Omega}) &= 4\pi\epsilon_0 cR^{*2}\vec{E}_\omega(\vec{r})\cdot\vec{E}_{-\omega}(\vec{r})
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\overset{\omega\to\infty}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ 0 \\
\overset{\omega\to 0, v^*\ll c, R^*, \vec{n}^*\text{与}t^*\text{无关}}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}[(\vec{n}^*\cdot\Delta\vec{v}^*)\vec{n}^*-\Delta\vec{v}^*]^2 = \frac{q^2\Delta v^{*2}\sin^2\Theta}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}
\end{cases}$$

其中,$\Delta\vec{v}^*\cdot\vec{n}^* \equiv \Delta v^*\cos\Theta$.

$$W_\omega^* = \int d\Omega\ 4\pi\epsilon_0 cR^{*2}\vec{E}_\omega(\vec{r})\cdot\vec{E}_{-\omega}(\vec{r})$$

$$\begin{cases}
\overset{\omega\to\infty}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ 0 \\
\overset{\omega\to 0, v^*\ll c, R^*, \vec{n}^*\text{与}t^*\text{无关}}{-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!\to}\ \frac{q^2\Delta v^{*2}}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}
\end{cases}$$

§6.4 切伦柯夫(Cerenkov)辐射

考虑无穷大均匀介质(μ,ϵ)中的辐射场

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \vec{j}_\omega(\vec{r})d^{-i\omega t} \qquad \vec{j}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \vec{j}(\vec{r},t)d^{i\omega t}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \vec{A}_\omega(\vec{r})d^{-i\omega t} \qquad \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \vec{A}(\vec{r},t)d^{i\omega t}$$

因为

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d\tau'\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{nR}{c})}{r} == \frac{\mu}{4\pi r}\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\vec{j}_\omega(\vec{r}')e^{-i\omega(t-\frac{nR}{c})}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi r}\int d\tau' \vec{j}_\omega(\vec{r}')e^{i\omega\frac{nR}{c}} = \frac{\mu}{8\pi^2 r}\int d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{j}(\vec{r}',t)e^{i\omega(t+\frac{nR}{c})} \\
&= \frac{\mu}{8\pi^2 r}\int d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dt e\vec{V}_0(t)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t))e^{i\omega(t+\frac{nR}{c})} \\
&= \frac{e\mu}{8\pi^2 r}e^{i\frac{\omega rn}{c}}\int d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{V}_0(t)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t))e^{i\omega(t-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}')} \\
&= \frac{e\mu}{8\pi^2 r}e^{i\frac{\omega rn}{c}}\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{V}_0(t)e^{i\omega(t-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}_0(t))}
\end{aligned}$$

以下只讨论匀速运动的情形, $\vec{V}_0(t)=\vec{V}_0$, $\vec{r}_0(t)=\vec{r}_0+\vec{V}_0 t$, $\frac{n}{c}=\frac{1}{v}$,

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{e\mu\vec{V}_0}{8\pi^2 r}e^{i\frac{\omega}{v}(r-\vec{n}\cdot\vec{r}_0)}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{-i\omega t(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})} = \frac{e\mu\vec{V}_0}{4\pi r}e^{i\frac{\omega}{v}(r-\vec{n}\cdot\vec{r}_0)}\delta[\omega(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})]$$

对真空: $v=c,,V_0<c$, 因此$\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v}<1$, δ函数恒为0.

对介质: $v<c,,V_0<c$, 有可能存在$\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{V}<1$ 的情形,这时辐射场不为0. 这时的辐射场叫Cerenkov辐射,它是由于带电粒子的速度超过介质中的光速时,介质内产生诱导电流激发的次波与原来粒子的电磁场相互干涉形成的.

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \vec{B}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} \\
\vec{B}_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \vec{B}(\vec{r},t)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\ \nabla\times e^{-i\omega' t}\vec{A}_\omega(\vec{r})e^{i\omega t} \\
&= \nabla\times\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \nabla\times\left[\frac{e\mu\vec{V}_0}{4\pi r}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\omega]e^{i\frac{\omega}{v}(\vec{r}-\vec{n}\cdot\vec{r}_0)}\right] = \frac{ie\mu\omega\vec{n}\times\vec{V}_0}{4\pi v r}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\omega]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_\omega}{d\Omega} &= \frac{4\pi v}{\mu}r^2\vec{B}_\omega\cdot\vec{B}_{-\omega} = \frac{(\vec{n}\times\vec{V}_0)\cdot(\vec{n}\times\vec{V}_0)\omega^2e^2\mu}{4\pi}\delta^2[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\omega] \\
&= \frac{V_0^2\sin^2\theta\omega^2e^2\mu}{8\pi^2}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\omega]\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})t} \\
&= \frac{V_0\sin^2\theta\omega^2e^2\mu}{8\pi^2}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\omega]\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{i\frac{\omega}{V_0}(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})x} \\
&= \frac{\sin^2\theta\omega^2e^2\mu}{8\pi^2}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\frac{\omega}{V_0}]\int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{L\sin^2\theta\omega^2e^2\mu}{8\pi^2}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\frac{\omega}{V_0}]
\end{aligned}$$

其中,$\vec{n}\cdot\vec{V}_0\equiv V_0\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\frac{dW_\omega}{dL\ d\Omega} &= \frac{\sin^2\theta\omega^2e^2\mu}{8\pi^2}\delta[(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{V}_0}{v})\frac{\omega}{V_0}] \\
\frac{dW_\omega}{dL} &= \frac{\theta\omega^2e^2\mu}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta\ \sin^2\theta\delta[\frac{\omega}{v}(\frac{v}{V_0}-\cos\theta)] = \frac{\omega e^2\mu v}{4\pi}[1-\frac{v^2}{V_0^2}]
\end{aligned}$$

其中,$v=v(\omega)$, W_ω只在$v(\omega)<V_0$所给出的频段有非0贡献.

由于$\cos\theta=\frac{v(\omega)}{V_0}$,不同频率电磁波的辐射角亦不相同, 用滤波器选择一定的频带,可以得到确定的θ值,因而测定θ就可以定出粒子的速度.

现在切伦柯夫辐射广泛应用于粒子计数器中,它的优点是只记录大于一定速度的粒子, 因而避免了低速粒子的干扰,而且可以准确地测出粒子的运动速度.

§6.5 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

电荷和电磁场是相互作用的,一方面电荷激发电磁场,另一方面,电磁场又对电荷有反作用. 我们在前面的讨论中都假设电荷运动的情况是已知的,然后计算场的分布. 本节讨论受电磁场反作用后的电荷运动. 这需要联合求解电磁场的行为及电荷的运动这一完整的动力学体系,即电磁场与电荷的相互作用必须同时考虑,才能解出电磁场和粒子的运动.

- 电子的经典运动方程
  - 能量转化与守恒定律
    能量转化与守恒定律告诉我们,假定有一外力(不包括由于电子产生电磁场而受的反冲力) 作用于电子,使其在dt时间内运动距离$d\vec{l}$,则外力所做的功应等于体系的机械能与电磁能的增加,即,

$$\vec{F}\cdot d\vec{l}=dW_{\text{机械}}+dW_{\text{电磁}}$$

    我们只讨论低速运动情况,其中

$$dW_{\text{机械}}=d(\frac{1}{2}mv^2)\qquad dW_{\text{电磁}}=dW_{\text{自}}+dW_{\text{辐}}$$
$$dW_{\text{自}}=\int_\infty d\tau\ \frac{1}{2}(\epsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)\qquad dW_{\text{辐}}=\oint_\infty d\sigma\cdot\vec{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\ I$$

    其中, $dW_{\text{电磁}}$完全是由于电子带电荷,其运动产生一个与之相应的电磁场而造成的能量变化. 若我们讨论的是不带电的粒子,则$dW_{\text{电磁}}=0$. 能量转化与守恒定律可进一步写成

$$\vec{F}\cdot d\vec{v}=\frac{dW_{\text{机械}}}{dt}+\frac{dW_{\text{电磁}}}{dt}$$

  - 牛顿定律
    对不带电粒子,

$$dW_{\text{电磁}}=0\quad\rightarrow\quad\frac{dW_{\text{机械}}}{dt}=m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{v}\cdot\vec{a}\quad\rightarrow\quad(\vec{F}-m\vec{a})\cdot\vec{v}=0\quad\rightarrow\quad\vec{F}=m\vec{a}$$

  - 电子的经典运动方程
    电子的自能涉及电子内部的电荷分布,即电子的内部结构.取一简单模型, 认为电荷均匀分布在半径为r_0的球中,r_0称为电子的电磁半径,则电荷密度$\rho=\frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$,由高斯定理

$$4\pi r^2E=\begin{cases}\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 & r\le r_0\\ \frac{e}{\epsilon_0} & r>r_0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\vec{E}=\begin{cases}\frac{er}{4\pi\epsilon_0r_0^3}\vec{e}_r & r\le r_0\\ \frac{e}{4\pi\epsilon_0r^2}\vec{e}_r & r>r_0\end{cases}$$

$$\vec{B}=\int d\tau'\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}\times\vec{R}}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}e\vec{v}\times\int d\tau'\frac{\vec{R}}{R^3}=\mu_0\epsilon_0\vec{v}\times\int d\tau'\frac{e\vec{R}}{4\pi\epsilon_0R^3}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}$$

    因此,

$$\begin{aligned}W_{\text{自}}&=W_e+W_m\\ W_e&=\int d\tau\ \frac{\epsilon_0}{2}E^2=\frac{\epsilon_0}{2}4\pi[\int_0^{r_0}dr\ r^2(\frac{er}{4\pi\epsilon_0r_0^3})^2+\int_{r_0}^{\infty}dr\ r^2(\frac{e}{4\pi\epsilon_0r^2})^2]\\ &=\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}[\int_0^{r_0}dr\ \frac{r^4}{r_0^6}+\int_{r_0}^{\infty}dr\ \frac{1}{r^2}]=\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}(\frac{1}{5r_0}+\frac{1}{r_0})=\frac{3}{20\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_m &= \int d\tau' \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \int d\tau \frac{1}{2\mu_0 c^4} (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) = \int d\tau \ \frac{1}{2\mu_0 c^4} [v^2 E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{E})^2] \\
&= \int d\tau \ E^2 \frac{v^2}{2\mu_0 c^4} (1 - \frac{1}{3}) = \frac{v^2}{3\mu_0 \epsilon_0 c^4} W_e = \frac{2v^2}{3c^2} W_e \\
W_{自} &= W_e + W_m = W_e (1 + \frac{2v^2}{3c^2}) \qquad\qquad dW_{自} = \frac{4}{3c^2} W_e \vec{v} \cdot \vec{a} dt
\end{aligned}
$$

其中,利用了如下关系

$$
\int d\tau \ E_i E_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \int d\tau \ E^2 \qquad\qquad \int d\tau \ (\vec{v} \cdot \vec{E})^2 = \sum_{i,j=1}^{3} v_i v_j \int d\tau \ E_i E_j = \frac{1}{3} v^2 \int d\tau \ E^2
$$

而

$$
W_{辐} = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 a^2 == \int_{t_1}^{t_2} \ \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 \vec{a} \cdot d\vec{v} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} [\vec{a} \cdot \vec{v} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \ \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}}]
$$

我们只讨论$\vec{v} \cdot \vec{a} \Big|_{t_1} = \vec{v} \cdot \vec{a} \Big|_{t_2}$的情形,这时

$$
W_{辐} = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} dt \ \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}} \qquad\qquad dW_{辐} = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}} dt
$$

结合所有计算结果到一起,能量转化与守恒定律现在可写成

$$
\vec{F} \cdot \vec{v} dt = m\vec{v} \cdot \vec{a} dt + \frac{4}{3c^2} W_e \vec{v} \cdot \vec{a} dt - \frac{\mu + 0e^2}{6\pi c} \vec{v} \cdot \dot{\vec{a}} dt \quad \rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} + \frac{4}{3c^2} W_e \vec{a} - \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}}
$$

或写成

$$
\vec{F} + \vec{F}_s = (m + \frac{4}{3c^2} W_e) \vec{a} \qquad\qquad \vec{F}_s = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}}
$$

– 电磁质量

在运动方程中,起作用的有效质量是$m_e = m + \frac{4}{3c^2} W_e$,其中$\frac{4}{3c^2} W_e$来自电磁相互作用对质量的贡献,叫电子的电磁质量,它是由那部分无法与电子分开的电磁场形成的,这部分能量是无法从电子的运动能量中分离出去的.

实际上根据相对论的质能关系,一定的能量必然与一定的惯性质量相联系,对电子$W_e = m_{电磁} c^2$,因此$m_{电磁} = \frac{W_e}{c^2}$. 关于因子$\frac{4}{3}$有各种解释,如考虑束缚电子的电荷必须有其它力,它将对$m_{电磁}$产生贡献,或考虑高速运动的协变处理等等. 确定$m_{电磁}$需知电子的内部结构,在这个尺度上,经典电磁理论实际上已远不适用.

考虑到实验上观察到的电子质量应有相当部分是电磁质量,即

$$
m_e \sim \frac{W_e}{c^2} = \frac{3\mu_0}{20\pi} \frac{e^2}{r_0}
$$

由此反推电子的电磁半径应为

$$
r_e \sim \frac{\mu_0 e^2}{\pi m_e} \sim 10^{-15} 米
$$

对比起核子的尺度为10^{-13}米,原子的Bohr半径为0.5×10^{-10}米,电子是非常小的粒子. 在如此小的尺度下,至少应用量子理论来进行计算,但目前所有的基本量子理论仍无法计算出电子的质量. 关于电子质量的来源至今仍是个谜. 关于质量起源的研究是当前基本粒子物理最前沿,最热门的研究方向.

– 辐射阻尼力

电子辐射电磁场,自身应受到反冲,反冲力从运动方程中可读出为$\vec{F}_s$. 这个力的存在也导致一些不自洽性, 如,若外力为0, 运动方程变为

$$\frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = m_e\vec{a}$$

它的解为,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c m_e}\vec{a}(0)e^{\frac{6\pi c m_e}{\mu_0 e^2}t}$$

电子将无限加速运动.

- 谱线的自然宽度

前面讨论了运动电子的自有电磁场和辐射电磁场对电子运动性质的影响,结果是质量中应增加一个有效的电磁部分,辐射要发生反冲.本节研究这些性质反过来对电子辐射造成的影响.

讨论一个半经典的原子发光模型,电子均匀分布于原子内,原子核处于电子云中心位置,当原子受外界作用激发后,原子核偏离电子云中心位置$\vec{r}_0(t)$,原子核与电子云中心之间会产生一弹性恢复力

$$\vec{f} = -e\vec{E} = -\frac{e\rho\vec{r}_0(t)}{3\epsilon_0} \equiv -m_e\omega_0^2\vec{r}_0(t) \qquad\qquad \omega_0^2 = \frac{e\rho}{3\epsilon_0 m_e} = \frac{e^2}{4\epsilon_0\pi m_e r_0^2}$$

使电子作加速运动(谐振动)而辐射发光. 实验上看到的发光不是单频率,而是有一定的频率分布宽度,在光谱中表现为原子发光的谱线有一定自然宽度,我们讨论产生这种宽度的原因.

考虑两种情形,一种不考虑辐射过程中的反冲,一种考虑辐射过程中的反冲. 电子运动方程为

$$-m_e\omega_0^2\vec{r}_0(t) + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\dddot{\vec{r}}_0(t) = m_e\ddot{\vec{r}}_0(t)$$

取试探解$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0)e^{-i\omega t}$,则

$$-m_e\omega_0^2 + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}(-i)^3\omega^3 = -m_e\omega^2$$

这个方程虽可严格求解,但考虑到辐射反冲效应很小,近似解更为简单,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{i\mu_0 e^2}{6\pi c m_e}\omega^3 \qquad\qquad \omega = \begin{cases} \omega_0 & \text{不考虑到辐射反冲} \\ \omega_0 - \frac{i\Gamma}{2} & \text{考虑到辐射反冲} \end{cases}$$

其中,$\Gamma \equiv \frac{\mu_0 e^2\omega_0^2}{6\pi c m_e}$是辐射反冲的效应.

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} \qquad \vec{a}(t) = \vec{a}(0)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{-i\omega_0 t} \qquad \vec{a}(0) = -\omega^2\vec{r}_0(0)$$

辐射的电磁场为

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{e\mu_0}{4\pi c r}\vec{a}(t^*)\times\vec{n} \\ \vec{E}(\vec{r},t) &= c\vec{B}(\vec{r},t)\times\vec{n} = \frac{e\mu_0}{4\pi r}[\vec{a}(t^*)\times\vec{n}]\times\vec{n} = \frac{e\mu_0}{4\pi r}[\vec{a}(t^*)\cdot\vec{n}\vec{n} - \vec{a}(t^*)] \\ &= \frac{e\mu_0}{4\pi r}[\vec{a}(0)\cdot\vec{n}\vec{n} - \vec{a}(0)]e^{i\frac{\omega r}{c}}e^{-i\omega t} = \vec{E}(\vec{r},0)e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

其中,

$$\vec{E}(\vec{r},0) \equiv \frac{e\mu_0}{4\pi r}[\vec{a}(0)\cdot\vec{n}\vec{n}-\vec{a}(0)]e^{i\frac{\omega r}{c}} = \frac{e\mu_0\omega^2}{4\pi r}[-\vec{r}_0(0)\cdot\vec{n}\vec{n}+\vec{r}_0(0)]$$

设原子是在$t=0$被激发的,辐射场为

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \begin{cases} 0 & t<0 \\ \vec{E}(\vec{r},0)E^{-i\omega t} & t\geq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\ \vec{E}_{\omega'}e^{-i\omega' t} \\ \vec{E}_{\omega'} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \vec{E}(\vec{r},t)e^{i\omega' t} = \frac{1}{2\pi}\vec{E}(\vec{r},0)\int_0^{\infty} dt\ e^{i(\omega'-\omega)t} = \frac{i\vec{E}(\vec{r},0)}{2\pi(\omega'-\omega)}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{一个原子发出的流过单位截面的光能量} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \overline{S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}^*(\vec{r},t) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\int_{-\infty}^{\infty} d\omega''\ \vec{E}_{\omega'}e^{-i\omega' t}\cdot(\vec{E}_{\omega''}e^{-i\omega'' t})^* \\ &= \pi\epsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\int_{-\infty}^{\infty} d\omega''\ \delta(\omega'-\omega'')\vec{E}_{\omega'}\cdot\vec{E}^*_{\omega''} = \pi\epsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\ \vec{E}_{\omega'}\cdot\vec{E}^*_{\omega'}\end{aligned}$$

利用

$$\text{光强} = \text{单位时间单位截面上流过的光能量} = n_0\int_{-\infty}^{\infty} dt\ S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\ I_{\omega'}$$

其中,n_0为单位时间发光的原子数. 我们得到

$$I_{\omega'} = \pi n_0 c\epsilon_0\vec{E}_{\omega'}\cdot\vec{E}^*_{\omega'} = \frac{n_0 c\epsilon_0\vec{E}(\vec{r},0)\cdot\vec{E}(\vec{r},0)^*}{4\pi(\omega'-\omega)(\omega'-\omega^*)} = \frac{n_0 c\epsilon_0\vec{E}(\vec{r},0)\cdot\vec{E}(\vec{r},0)^*}{4\pi[(\omega'-\omega_0)^2+\frac{\Gamma}{2}]}$$

若不考虑反冲,$\Gamma=0$,频谱是一个尖锐的脉冲.
若考虑反冲,$\Gamma\neq 0$,频谱的半宽度为Γ. I是谱线轮廓的面积,I一定, Γ大,谱线轮廓低而宽,Γ小,谱线轮廓高而窄.

谱线宽度用波长λ表为,

$$\Delta\lambda = ||\Delta(\frac{2\pi c}{\omega'})|| = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Delta\omega' = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Gamma = \frac{\mu_0 e^2}{3m_e} \sim 10^{-4}\mathring{A}$$

这时谱线宽度为一个常数,称为经典宽度.

§6.6 电磁波的散射与吸收,介质的色散

本节讨论外电磁场与带电粒子的相互作用.

当一定频率的外来电磁波投射到电子上时,电磁波的振荡电磁场作用到电子上, 使电子以相同频率做强迫振动.振动的电子向外辐射出电磁波,把原来入射波的部分能量辐射出去,这种现象叫电磁波的散射.

我们讨论电子在外来电磁波作用下以$v \ll c$运动的情形. 这时电子运动的线度$\sim$ 振幅$\sim vT \ll cT = \lambda$,其中T为入射波周期(也是电子的强迫振动周期), λ为入射波的波长. 我们可近似将外电场看成与$\vec{r}$无关,电子受的磁力$\sim evB \sim ev\frac{E}{c}$相对电力也可忽略.

- 自由电子对电磁波的散射

  运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}_0(t) = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\dddot{\vec{r}}_0(t) + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

  取试探解$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0)e^{-i\omega t}$, 代入运动方程,

$$-m\omega^2\vec{r}_0(0) = \frac{\mu_0 e i\omega^3}{6\pi c}\vec{r}_0(0) + e\vec{E}_0$$

  解出得

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0(0) &= \frac{-e\vec{E}_0}{m\omega^2 - \frac{i\mu_0 e^2\omega^3}{6\pi c})} = \frac{-e\vec{E}_0}{m\omega^2(1 - \frac{2ir_e e^2\omega}{3\pi c})} \xrightarrow{r_e < vT \ll \lambda \to \frac{\omega r_e}{c} \ll 2\pi} -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} \\
\vec{a}(t) &= \vec{a}(0)e^{-i\omega t} \qquad\qquad \vec{a}(0) = -\omega^2\vec{r}_0(0) = \frac{e\vec{E}_0}{m}
\end{aligned}$$

  由上节结果,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},0)e^{-i\omega t} \qquad\qquad \vec{E}(\vec{r},0) = \frac{e\mu_0\omega^2}{4\pi r}e^{i\frac{\omega}{c}r}[\vec{r}_0(0) - \vec{r}_0(0)\cdot\vec{n}\vec{n}]$$

  因此,

$$\overline{\vec{S}}(\vec{r},t) = \frac{\epsilon_0 c}{2}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}^*(\vec{r},t)\vec{n} = \frac{\mu_0 e^2\omega^4}{32\pi^2 r^2 c}[r_0^2(0) - (\vec{n}\cdot\vec{r}_0(0))^2] = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{32\pi^2 m_e^2 r^2 c}(1-\cos^2\alpha) = I_0\frac{r_0^2}{r^2}\sin^2\alpha$$

  其中,

$$\vec{n}\cdot\vec{E}_0 = E_0\cos\alpha \qquad\qquad I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \qquad\qquad r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e}$$

  散射角分布为

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = I_0 r_e^2\sin^2\alpha \\
&\overline{I} = \oint d\vec{\sigma}\cdot\overline{\vec{S}} = \int d\Omega\, r^2\overline{\vec{S}}\cdot\vec{n} = 2\pi I_0 r_e^2\int_0^\pi d\alpha\sin^2\alpha = \frac{8}{3}\pi r_e^2 I_0 = \sigma I_0
\end{aligned}$$

  其中,$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2$是Thomson散射截面,它反映被散射的能量相当于入射到面积为σ的截面上的能量.

  若入射波振幅是随机分布的,则可以对其取平均,设入射方向为z方向,$\vec{r}$位于xz平面$\vec{E}_0$与x轴夹角ϕ,$\vec{r}$与z方向的夹角θ,则:

$$\begin{aligned}
&n_{Ex} = \cos\phi \qquad n_{Ez} = 0 \qquad n_{rx} = \sin\theta \qquad n_{ry} = 0 \\
&\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\vec{n}_E\cdot\vec{n}_r)^2 = 1 - (n_{Ex}n_{rx})^2 = 1 - \cos^2\phi\sin^2\theta \\
&\overline{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,[1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta(1+\cos 2\phi)] = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

  平均后的角分布

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{1}{2}I_0 r_e^2(1+\cos^2\theta) \qquad \overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \overline{\frac{d(I/I_0)}{d\Omega}} = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)$$

  这是Thomson微分截面.

- 束缚电子对电磁波的散射

  辐射阻尼力现在仍可忽略,运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}_0(t) = -m\gamma\dot{\vec{r}}_0(t) - \omega_0^2 m\vec{r}_0(t) + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

  其中, $-m\gamma\dot{\vec{r}}_0(t)$代表粘滞力项. 现在的情况实际上是上节的发光模型加上粘滞力和外电场项的贡献. 设试探解$\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0(0)e^{-i\omega t}$, 则

$$-m\omega^2\vec{r}_0(0) = i\omega m\gamma\vec{r}_0(0) - \omega_0^2 m\vec{r}_0(0) + e\vec{E}_0$$

  解之得

$$\vec{r}_0(0) = \frac{e\vec{E}_0}{(\omega_0^2-\omega^2)m - i\omega m\gamma} = \frac{e\vec{E}_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}e^{i\delta} = \vec{r}_0 e^{i\delta}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(0)e^{-i\omega t} \qquad \vec{a}(0) = -\omega^2\vec{r}_0(0)$$

  其中,

$$\vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}} \qquad \tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}$$

  由上节结果,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},0)e^{-i\omega t} \qquad \vec{E}(\vec{r},0) = \frac{e\mu_0\omega^2}{4\pi r}e^{i\frac{\omega}{c}r}[\vec{r}_0(0) - \vec{r}_0(0)\cdot\vec{n}\vec{n}]$$

  因此,

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}}(\vec{r},t) &= \frac{\epsilon_0 c}{2}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}^*(\vec{r},t)\vec{n} = \frac{\mu_0 e^2\omega^4}{32\pi^2 r^2 c}[r_0^2 - (\vec{n}\cdot\vec{r}_0)^2] = \frac{\mu_0 e^2\omega^4}{32\pi^2 r^2 c}(\frac{e}{m})^2\frac{E_0^2\sin^2\alpha}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \\ &= \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{32\pi^2 m^2 r^2 c}\frac{\omega^4\sin^2\alpha}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = I_0\frac{r_e^2}{r^2}\sin^2\alpha\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\end{aligned}$$

  其中

$$I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \qquad r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m}$$

  平均后的散射截面

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \qquad \overline{I} = \sigma I_0 \qquad \sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

  对上述结果作一讨论

  - 当$\omega \ll \omega_0$, 结果化为

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)(\frac{\omega}{\omega_0})^4 \qquad \sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2(\frac{\omega}{\omega_0})^4$$

    这种散射叫Rayleigh散射,它的ω^4的依赖关系意味着在可见光谱中,红光散射最少, 紫光散射最多.偏离入射束方向接收的光,其高频(蓝)部分占的比重大于入射束光谱分布中的高频成分,而在透射束光谱成分中低频(红)部分的比重增加了,同时透射束总强度减少了. 天空呈蓝色. 日出或夕阳呈红色.夏天正午容易晒黑.冬天光线不足都是由它引起的.

– 当$\omega \gg \omega_0$, 结果化为

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta) \qquad\qquad \sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2$$

这时回到前面讨论的自由电子散射.

– 当$\omega = \omega_0$, 结果化为

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)(\frac{\omega_0}{\gamma})^2 \qquad\qquad \sigma = \frac{8}{3}\pi r_e^2(\frac{\omega_0}{\gamma})^2$$

这时$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}}$和$\sigma$是尖锐的极大值,称为共振现象. 这时入射波能量被强烈的吸收再释放. 设入射波单位频率间隔入射到单位面积的能量为$I_0(\omega)$,则单位时间束缚电子辐射的总能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{8}{3}\pi r_e^2\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}I_0(\omega) \approx \frac{8}{3}\pi r_e^2 I_0(\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2+\omega_0^2\gamma^2} \\ &= \frac{2}{3}\pi r_e^2\omega_0^2 I_0(\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,\frac{\omega_0^4}{(\omega_0-\omega)^2+(\frac{\gamma}{2})^2} = \frac{4\pi}{3\gamma}r_e^2\omega_0^2 I_0(\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}du\,\frac{1}{u^2+1} = \frac{4\pi^2}{3\gamma}r_e^2\omega_0^2 I_0(\omega_0) \end{aligned}$$

由于能量守恒, 它也是电子单位时间从入射波吸收的总能量.

- 介质的色散

设介质中单位体积电子数为N.每个电子以固有频率ω_0振动,介质中的电场为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \qquad\qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = Ne\vec{r}_0(t) = Ne\frac{e\vec{E}_0e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2-\omega^2)m - i\omega m\gamma}$$

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0[\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma]} \quad\rightarrow\quad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m[\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma]}$$

将ϵ_r分为实虚部,

$$\epsilon_r = \epsilon_r' + \epsilon"_r \qquad \epsilon_r' = 1+\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \qquad \epsilon"_r = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

结合$k^2 - k_R^2 - k_I^2 + 2i\vec{k}_R\cdot\vec{k}_I = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\gamma$, 设$\mu,\gamma,\omega$为实,则,

$$k_R^2 - k_I^2 = \omega^2\mu\epsilon_0\epsilon_r' \qquad\qquad 2\vec{k}_R\cdot\vec{k}_I = \omega^2\mu\epsilon_0\epsilon"_r + \omega\mu\gamma = \omega\mu(\gamma+\omega\epsilon_0\epsilon"_r) \equiv \omega\mu\gamma'$$

因此,ϵ实部起原来ϵ的作用, ϵ的虚部起的作用是将原来的γ变为γ', 造成电磁波的吸收.

若$\gamma' = 0$,则ϵ实部与ω有关意味着折射率与ω有关,即不同频率的电磁波的折射角度是不同的.这个性质叫介质的色散. 如入射光是白光,色散造成出射光为多色光.

结束语　　电动力学在现代物理学中的地位

电动力学是普通物理电磁学课程的进一步深入,它既可以从已知的实验定律(如库伦定律, 法垃第电磁感应定律等),也可以从抽象的基本原理(如相对性原理,规范不变原理等)出发通过逻辑,数学的推导,给出物理现象背后的本质(麦克斯韦方程组), 然后以此为基础,系统地研究各种电磁现象.

自然界是一个大社会,控制这个社会秩序的'法律'是物质的各种运动规律,这个社会的'成员'是各种物质及其它们之间的相互作用. '成员'在'法律'的严格约束下'运作',导致千变万化的自然现象.

物质运动规律之一是力学规律,理论物理的第一门课–理论力学(或经典力学),告诉我们如何从一个已知的力(或拉格朗日量,或哈密顿量)出发,计算宏观自然体系的运动规律. 理论物理的另一门课–量子力学,又告诉我们如何从一个已知的力(或拉格朗日量,或哈密顿量) 出发,计算微观自然体系的运动规律. 当所研究的对象数目巨大时,除力学规律外,统计规律开始起重要作用.在宏观领域讨论统计规律的是理论物理的–统计力学课,在微观领域讨论统计规律的是理论物理的研究生课–量子统计.

物质相互作用是多种多样的,但基本相互作用到目前为止,只发现四种:引力相互作用,电磁相互作用,强相互作用,弱相互作用.其它相互作用都是基本相互作用的复合体.在宏观领域引力相互作用,电磁相互作用分别由广义相对论和经典电动力学描述,强相互作用,弱相互作用是短程相互作用,在宏观领域没有效应.在微观领域电磁相互作用,强相互作用,弱相互作用和引力相互作用分别由量子电动力学,量子色动力学,量子味动力学和量子引力描述. 经典电动力学,即本课程,是理论物理课之一,量子电动力学,量子色动力学,量子味动力学是理论物理专业粒子物理研究方向研究生的专业课,量子引力到目前为止还没有成熟的理论.

物质的种类更是多种多样的,但其基本的组份到目前为止,只发现六种夸克和三种轻子.对它们的研究目前仍在基本粒子最前沿研究领域进行.

相互作用	经典(统计)	量子(统计)
引力	广义相对论	量子引力(有限温度)
电磁 电	电动力学	电动力学(有限温度)
电磁 磁		
弱	×	味动力学(有限温度)
强	×	色动力学(有限温度)

电现象和磁现象最早是被独立的进行研究的.但最重要的进展是在人们认识到电和磁的内在联系后才开驶的.从1820年,奥斯特发现电流的磁效应,1821年法拉第发现电磁感应定律, 到1864年麦克斯韦把电磁规律总结成麦克斯韦方程组,电和磁被一组方程组统一到一种基本的电磁相和作用中.至此,电现象和磁现象不是孤力的,而是作为可以相互转化的矛盾的统一整体开始为人们所认识.既然电相互作用和磁相互作用可以统一起来,也许, 进一步,其它相互作用也可以统一进来,更进一步,也许所有相互作用都可以统一到一起, 这个想法背后的哲学思想是世界是统一的.爱因斯坦是最早致力于这方面研究的人,他后半生一直试图将引力和电磁相互作用统一起来,可惜一直未能如愿.到目前为止,人们已将电磁相互作用和弱相互作用统一起来,称电弱相互作用统一理论.电弱统一理论+强相互作用理论(量子色动力学)叫标准模型,受到现在实验很好的支持.进一步将强相互作用和电弱相互作用统一起来的理论叫大统一理论,还有一种能更进一步将引力也统一进来的理论叫超弦理论,它们都还是试探性理论,还未有直接的实验验证.

- … 超弦
  - 大统一
    - 电弱统一
      - 电磁相互作用
        - 电相互作用
        - 磁相互作用
      - 弱相互作用
    - 强作用
  - 引力作用
  - ⋮

电动力学是现代关于物质基本相互作用统一理论的起点.

既然相互作用是统一的,它们的描述应是一样的,这种描述的数学是场论,电相互作用是电场,磁相互作用是磁场,强相互作用是色场,弱相互作用是味场,引力相互作用是引力场. 进一步,量子力学告诉我们物质具有

波动性,它可用几率场描述,因此,物质及其相互作用在数学上都可用场论描述.电动力学是大学本科阶段唯一系统用场论研究问题的课程.

电动力学的另一经典贡献是它给出与经典力学不同的时空观,这最终导致爱因斯坦提出了狭义相对论.

由于在与人相当的尺度上,引力,强和弱相互作用都小的可以忽略,唯一只剩下电磁相互作用,因此,人类日常接触和面临的基本全是电磁相互作用.而电动力学是电磁相互作用的最基本理论.