第十讲

上次课：

- 介质球/柱在均匀电场中的行为：极化与“退极化”之间的平衡

（1）介质被局域场极化产生 P

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}_{in}=\varepsilon_0\chi_e(\vec{E}_0+\vec{E}_d)$$

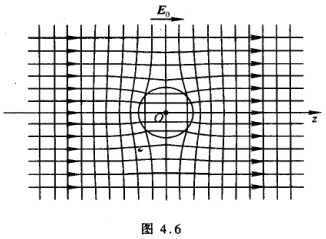


图 4.6

（2）P 产生的极化电荷在介质体内部产生退极场

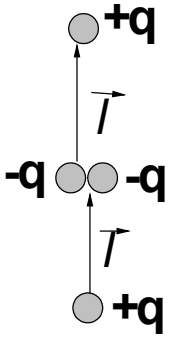
$$\vec{E}_d=-L\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$ **L** 为退极因子，只与几何有关

（金属：$\chi_e\to\infty$）

- 多级矩展开：

$$\varphi=\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 +\ldots$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r}\cdot\vec{p} + \frac{1}{6}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\nabla\frac{1}{r}:\vec{D} +\ldots$$
$$Q=\int\rho d\tau' \qquad \vec{p}=\int\vec{r}'\rho d\tau' \qquad \vec{D}=\int\vec{r}'\vec{r}'\rho d\tau'$$

第三项称为体系的四极矩的势，$\boxed{\vec{D}=3\int\rho\vec{r}'\vec{r}'d\tau'}$ 为体系的四极矩。就像偶极矩可以看做两个大小相等负号相反的电荷（单极矩）靠近组成的体系一样，四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统，最简单的情况如下图所示。此时，容易证明，$\vec{D}$ 中唯一不为 0 的分量是



$$D_{zz}=6l^2q$$

一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是（4.5.6）式。$\vec{D}$ 是一个 2 阶张量，或者说是个 3 x 3 矩阵，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量。$\vec{D}$ 中还有一个隐含的不独立分量，注意到在 $\vec{r}\neq0$ 处总有 $\nabla^2\frac{1}{r}=0$（考察空间处没有电荷分布），亦即：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij}=\vec{\vec{I}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=0 \qquad (4.5.8)$$

上式显示对任意一个常数 C，均有

$$C\vec{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\equiv 0 \tag{4.5.9}$$

若选择此常数正比于 $\vec{D}$ 矩阵的迹，

$$C\propto \mathrm{Tr}\{\vec{D}\}/3=\left(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}\right)/3 \tag{4.5.10}$$

根据（4.5.6）和(4.5.9)式，我们发现 φ_2 可改写为

$$\begin{aligned}\varphi_2&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left(\vec{D}-\frac{Tr\{\vec{D}\}}{3}\vec{I}\right):\nabla\nabla\frac{1}{r}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\tilde{\vec{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

其中

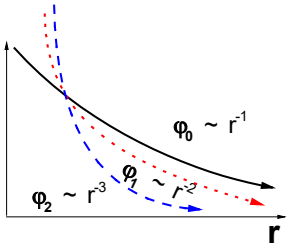
$$\boxed{\tilde{\vec{D}}=\int\left(3\vec{r}'\vec{r}'-\vec{r}'^{2}\vec{I}\right)\rho d\tau'} \tag{4.5.12}$$

$\tilde{\vec{D}}$ 称为约化四极矩，显然它是对称的无迹张量，即

$$\tilde{D}_{ij}=D_{ji},\ \tilde{D}_{11}+\tilde{D}_{22}+\tilde{D}_{33}=0 \tag{4.5.13}$$

只有 5 个独立分量。（4.5.11）-（4.5.12）告诉我们，四极矩中有一个隐含的不起任何作用的自由度，因此完全可以将其去除而不影响最后结果。

多极矩展开的物理图像



1） 多极矩级数越高，其产生的势随 r 变大时衰减的越快；换言之，距离被研究的带电体越近，越容易感受到更高阶的多极矩的影响。

2） 多极矩的“矩”的大小是有电荷分布的对称性决定的。完全可能出现如下情形：有些特定对称性的电荷分布就是不展现某个特定阶数的“矩”。因此，不能武断地说在近场，四极子一定比偶极子产生的势大！

3） 阶数越高，多极矩产生的势的角域对称性越低。

下面我们通过一个具体的例子，理解多极展开的物理图像。

[例] 利用多极距展开法计算一个长度为 L 的带电棒（线电荷密度为 λ）的电势（展开到电四极距）

解：设棒的中心在坐标原点，则

$$Q = L\lambda$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0$$

$$D_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4}$$



因此，电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{6}D_{zz}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24}\frac{(3z^2 - r^2)}{r^5}\right] + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\left(\frac{L}{r}\right) + \frac{\lambda}{24}\left(\frac{L}{r}\right)^3 (3\cos^2\theta - 1)\right] + \ldots$$

你也可以选择直接积分求出电势，然后按照(***L/r***)的幂次展开，结果应当一致。

这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开，展开的特征小量是（尺度/距离）。

Tips：

（1） 从物理上讲，电多极矩考量的是一个任意电荷分布体中是否包含“具有特定角动量”的某种电荷分布，这些不同“基”之间相互正交，因此可以独立考虑。

（2） 函数形式$(3\cos^2\theta - 1)$似曾相识，事实上它就是$P_2 = (3x^2 - 1)/2$，也可以认为就是l=2,m=0的波函数$Y_{2,0}$（这里有轴对称）。

直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R}$作 Tayler 展开。根据恒等式$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0,\infty}\sum_{m=-l,l}\frac{4\pi}{(2l+1)}\frac{r'^l}{r^{(l+1)}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$，$r > r'$，电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \qquad (4.5.14)$$

$q_{lm} = \int (r')^l Y_{lm}^*(\theta',\phi')\rho(\vec{r}')d\tau'$称为多极矩，它实质上是多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解$l = 0,1,2,\ldots$分别对应于点电荷、偶极距、电四极距、… 的贡献，而他们分别具有$2l+1$个独立分量（不同的m值），而这些矩所对应的“波函数---φ”类似原子物理中$s, p, d, f\ldots$轨道电子的波函数。其实，我们可以这样来

进一步理解多级矩。 在无源区 Laplace 的通解（假设 $r\to\infty$ 时收敛）为

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)=\sum_l\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \qquad (4.5.15)$$

其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比（4.5.14）和（4.5.14），我们理解多极距展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！



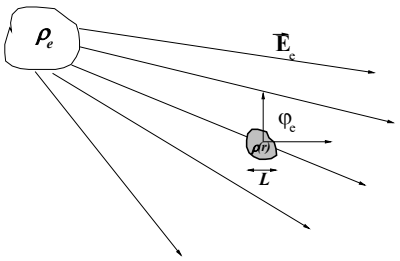
无源区，满足Laplace方程

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)=\sum_l\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

****

§ 4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块任意电荷分布的带电体系，利用多极矩展开不仅可以容易地得到其在远处产生的电场，还可以容易地计算其与外场的相互作用。尽管这两类问题看上去很不相同，我们使用的研究方法却非常类似。上一章中我们知道当一个点电荷在放置在远处的带电体（电荷密度 ρ_e）产生的电势 φ_e 中时，其与外场的相互作用能为 $q\varphi_e(\vec{r})$。



现考虑处于 φ_e 中的连续带电体（电荷密度为 ρ，处在坐标原点附近），则带电体与外场的相互作用能为

$$U_i=\int\rho(\vec{r})\varphi_e(\vec{r})d\tau \qquad (4.6.1)$$

*应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。*因为 V 很小，所以可将 φ_e 在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r})=\varphi_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\frac{1}{2!}\vec{r}\vec{r}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\cdots \qquad (4.6.2)$$

我们能做这个泰勒展开的基础是源离得带电体距离很远，其产生的电势在带电体

所处的位置附近变化足够缓慢。代入(4.6.1)式得

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + \cdots$$

其中

$$U_i^{(0)} = Q\varphi_e(0) \tag{4.6.3}$$

$$U_i^{(1)} = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e\big|_0 = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e\left(\vec{r}=0\right) \tag{4.6.4}$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\vec{\vec{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.5}$$

因为$\left(\nabla^2\varphi_e\right)_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离$V$很远处，故在$V$区域内$\rho_e = 0$，因此有$C\bar{\bar{I}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = C\nabla^2\varphi_e\big|_0 = 0$。再一次，若我们选择常数 C 满足$C \propto \mathrm{Tr}\{\vec{\vec{D}}\}/3$，则有

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\bar{\bar{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\left[\vec{\vec{D}} - \frac{1}{3}Tr\{\vec{\vec{D}}\}\vec{\vec{I}}\right]:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\tilde{\tilde{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = -\frac{1}{6}\tilde{\tilde{D}}:\nabla\vec{E} \quad (4.6.6)$$

$U_i^{(0)}$, $U_i^{(1)}$和$U_i^{(2)}$分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。

（4.6.3-5）显示：电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应 ---- 因此，多极矩随着级数的增加，愈能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。

思考题：给定两个相同的有确定电荷分布$\rho(\vec{r}')$的带电体，其中心分别处于原点以及位置$\vec{d}$处，假设 d 远远大于带电体的大小，你能否将其二者之间的静电相互作用能表达成两个带电体的矩（$\{Q,\vec{p},\vec{\vec{D}}\}$）的函数？

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能$U_i^{(1)} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e$，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

（A）电偶极矩在外场中受的力

研究电偶极子在电场$\vec{E}_e$中受到电场的作用力$\vec{F}_e$有两种方法。

第一种：假设在 t=0 时刻将偶极子钉扎在外场中每个位置$\vec{r}$处，然后放开钉

扎，因为偶极子受到外场对其的作用力$\vec{F}_e$，会发生（无限小的）位移$\delta\vec{r}$并获取动能$T=\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}$（因为移动很小的距离，可以假设$\vec{F}_e$几乎不变）。将偶极子与外场看成一体，则其总能量守恒，故有：$T+U_i(\vec{r}+\delta\vec{r})=U_i(\vec{r})$，将$T=\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}$带入上式可得：$\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r}=-(U_i(\vec{r}+\delta\vec{r})-U_i(\vec{r}))=-\nabla U_i\cdot\delta\vec{r}$，因此有：$\vec{F}_e=-\nabla U_i$。但这个方法有局限性：1）并不能确认外场对偶极子是否还有力矩，放开钉扎也许会同时带来转动能的增加；2）一会儿将外场力看做外力，一会儿又在使用能量守恒时将其作为偶极子与外场的内力，这种处理方法容易引发误解。

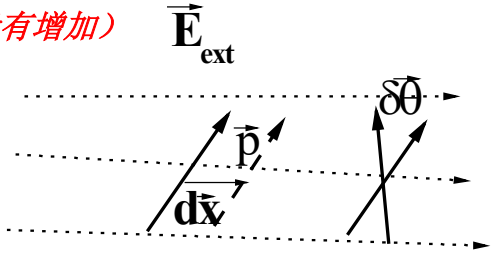
第二种：下面介绍另一种处理方法。假设施加外力$\vec{F}'=-\vec{F}_e$，则偶极子达到平衡，静止不动（如果有力矩也同样施加反向外力矩平衡）。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力$\delta\vec{F}'\to 0$，使得偶极子***无限缓慢地***平移$\delta\vec{r}$。**将偶极子与电场看成一个体系，外力是除了偶极子和电场之外的“外力”，将偶极子与外场之间的相互作用能是**$U_i^{(1)}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$。在这个过程中，外力对体系（偶极子+电场）做的功为

$$\delta W'=\left(\vec{F}'+\delta\vec{F}'\right)\cdot\delta\vec{r}\xrightarrow{\delta\vec{F}'\to 0}\vec{F}'\cdot\delta\vec{r}=-\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r} \qquad (4.6.7)$$

整个体系（电偶极子+电场）的能量增加为

$$\delta U=-\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}+\delta\vec{r})+\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})=-\delta\vec{r}\cdot\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \qquad (4.6.8)$$

（注：因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加）



根据能量守恒上面 2 式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e=\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}+\vec{p}\times(\nabla\times\vec{E})$$

利用静电场$\nabla\times\vec{E}=0$，得

$$\boxed{\vec{F}_e=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}} \qquad (4.6.9)$$

一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有沿偶极子方向电场非均匀时，偶极子才受到电场的作用力！偶极子受力后朝电场增大的方向运动。

（B）电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为$\vec{M}_e$，则施加外力矩$\vec{M}'=-\vec{M}_e$与之平衡，在此基础上将偶极矩**准静态地**转动一个$\delta\vec{\theta}$，外力矩作的功为$\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta}=-\vec{M}\cdot\delta\vec{\theta}$，体系（偶极子+外场）的能量增加只有相互作用能（准静态转动不增加动能），为$\delta\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$，故根据能量守恒有

$$\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta}=-\vec{M}_e\cdot\delta\theta=-\delta\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)=-\delta\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (4.6.10)$$

因为$\vec{p}$的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p}=\delta\vec{\theta}\times\vec{p} \qquad (4.6.11)$$

这样

$$\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta}=\left(\delta\vec{\theta}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E}=\left(\vec{p}\times\vec{E}\right)\cdot\delta\vec{\theta} \qquad (4.6.12)$$

即

$$\boxed{\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}} \qquad (4.6.13)$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

思考题：《电磁学》中经常利用如下技巧来展示电力线分布：将细针型碎屑或者头发屑撒入电场中，震动一下，最后形成的 Pattern 就可以显示出电力线分布。请思考一下这个做法的物理原理，并设计模型通过模拟计算展示一下你的理论。

第五章　静 磁 场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由**稳恒电流**产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），**静电场产生的电流一定不是稳恒电流！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！**因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们已得到某种一定分布的稳恒电流$\vec{j}$，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

§5.1 磁场的矢势方程和边值关系

静磁场是由稳恒电流产生的磁场，其满足的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，得 $\vec{H}=\mu^{-1}\vec{B}=\mu^{-1}(\nabla\times\vec{A})$，带入(5.1.1)中第二式得 $\nabla\times(\mu^{-1}\nabla\times\vec{A})=\vec{j}$。在分块均匀的磁介质内部，$\mu$ 为不依赖于位置的常数，因此有：

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{j} \tag{5.1.2}$$

静磁场满足 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ [此结论可由 Biot-Sarvert 定律推出（见第 1 章）]，上式变成

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j} \tag{5.1.3}$$

(5.1.4)式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量场方程 – 亦即每一个 A 的分量场都满足泊松方程。所以矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 在静场时满足同一形式的方程。

思考题：

1）静电边界条件的两类设置方法很容易实行 —— 确定电势（接一个大的等势体，对应φ）或者确定电荷（孤立导体，对应$\vec{n}\cdot\vec{D}$）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（$\vec{n}\times\vec{A}$, $\vec{n}\times\vec{H}$）？

习题：P. 115, 4.9, 4. 11, 4.14

补充题：证明（4.6.6）式（补齐课件中省略的所有数学运算步骤）

思考题:

1）比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同 l 子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以 l=1 为例）。

2）对课件中的例题，利用直接积分法求出电势，然后按照(L/r)的幂次展开，将最后结果与多级矩展开法比较。

3）你是否能根据《原子物理》和《量子力学》中关于原子外层电子云分布的知识，设计几个典型原子（或者离子）体系求出其静电场（静电势）分布？