第 11 讲

上次课

- **多极矩同外场的相互作用**

$$Q,\qquad \vec{p},\qquad \vec{\vec{D}}$$

$$W_{\text{int}} = Q\varphi_{ext} - \vec{E}_{ext}\cdot\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{\vec{D}} : \nabla\vec{E}_{ext} + \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}_{ext}$$

- **静磁场：** $\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j}$

为了求解（5.1.3），我们还要导出关于 $\vec{A}$ 的边值关系。在两块磁介质的交界面上，定义 $\vec{e}_n$ 为界面上区域 2 指向区域 1 的法向单位矢量，则场的边值关系为

$$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0\\ \vec{e}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{\alpha}\end{cases} \qquad (5.1.4)$$

$\vec{\alpha}$ 为面自由电流密度，对应(5.1.2)式我们有

$$\vec{e}_n\cdot\left[(\nabla\times\vec{A})_1-(\nabla\times\vec{A})_2\right]=0 \qquad (5.1.5)$$

$$\vec{e}_n\times\left[\frac{1}{\mu_1}(\nabla\times\vec{A})_1-\frac{1}{\mu_2}(\nabla\times\vec{A})_2\right]=\vec{\alpha}_f \qquad (5.1.6)$$

(5.1.5) 式可进一步简化为

$$\nabla\cdot\left[\vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)\right]_{boundary}=0 \qquad (5.1.7)$$

上式显示 $\vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)_{boundary}$ 为与界面位置无关的常矢量，但其方向和大小并不能从中得到。仿照我们以前在静电学中对电势的边界条件的处理，将关系式

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

应用到交界面的一个闭合回路上，只要 $\vec{B}$ 在交界面上的值是有限的，则有

$$(\vec{A}_1-\vec{A}_2)_{\parallel}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{e}_n\times(\vec{A}_1-\vec{A}_2)=0 \qquad (5.1.8)$$

这表示 $\vec{A}$ 在边界的切线方向的分量是连续的，这与静电学中的边界条件 $\varphi_1=\varphi_2\big|_{boundary}$ （4.1.6）相对应。同样道理，事实上（5.1.6）对应于静电学中的另

外一条边界条件 $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$（4.1.3），在某一些特定的条件下，完全可以把（5.1.6）式化成与（4.1.3）类似的形式。

因此，对静磁学问题，边界条件有 2 种设置方法，（1）或者设置在边界上的 $\vec{e}_n \times \vec{A}$ 的数值（根据（5.1.8）），（2）或者设置在边界上的 $\vec{e}_n \times \vec{H}$ 的数值（对应边条（5.1.6））。设置好体系的边界条件，就可以(5.1.8)在边条下求解 Poisson 方程解出 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 。

我们一再看到了静磁场问题和静电场问题的类似性，其实这 2 个问题中场能的表达式也完全类似。静电场能量为

$$U_e = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{E}\cdot\vec{D}d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \varphi\rho d\tau$$

静磁场的能量为

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2}\int_\infty \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_\infty \left[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H}) + \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\right]d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \end{aligned}$$

形式与静电场总能非常类似。

注：

从现有的所有证据来看，你一定以为静磁场中的 $\vec{A}$ 与静电场中的 φ 的地位类似（都是势），而 $\vec{j}$ 与 ρ 的地位一致（都是源）。这是对的，但又不完全对。从满足的方程和相对论协变等许多问题来看这个论断是对的，在有些情况下结论却恰恰相反 ---$\vec{A}$ 与 ρ，$\vec{j}$ 与 φ 的地位一致（参考 Landau 或者 Jackson 的书）。严格推导需要很大的篇幅，但我们可以从一个简单的 Argument 来理解：在静电学中，当我们将电荷给定时，相当于使导体成为孤立导体，任何外界的变动都不会改变孤立导体上的电荷，这样的体系是“孤立体系”；当我们确定 φ 时，外界的变化会改变导体的电势因此必须有“外源”输出或抽出能量以保持恒定电势，因此这样的体系是个“有源体系”。现在我们看静磁学，给定电流 j 情况下，如果外界发生改变则驱动电场相应发生变化，此时也必须从“电动势”输出或抽出能量以保持恒定电流，因此这个体系不是“孤立体系”，恰恰是一个“有源体系”!。从这个意义上讲，在考虑这类问题是（孤立或者有源），$\vec{j}$ 与 φ 的地位一致！

思考题：

1）静电边界条件的两类设置方法很容易实行 --- 确定电势（接一个大的等势体，对应φ）或者确定电荷（孤立导体，对应$\vec{n}\cdot\vec{D}$）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（$\vec{n}\times\vec{A}$, $\vec{n}\times\vec{H}$）？

§5.2 静磁场的唯一性定理

与静电场类似，静磁场也有唯一性定理 --- 对确定的体系，场的解由边界条件唯一确定。对静电问题，边界条件可以是设定边界上标势值$\varphi|_b$，或者是$\vec{D}$场在边界上垂直分量（与导体上的表面电荷有关）；与此相对应，对静磁问题，前者是边界上的矢势$\vec{A}$的切向分量（见边条（5.1.5）），后者是$\vec{H}$场的切向分量（与导体上的表面电流相关，见（5.1.2））。

定理：如果静磁体系 V 内存在着电流和磁介质，且关系式$\vec{B}=\mu\vec{H}$成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及**边界条件**（边界上$\vec{A}$或$\vec{H}$的切向分量）**唯一确定**。

证明：设对同一个体系存在两组不同的解$\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'=\mu\vec{H}'$和$\vec{B}''=\nabla\times\vec{A}''=\mu\vec{H}''$，均满足场方程及预设的边界条件，则必然有

$$\nabla\times\vec{H}'=\nabla\times\vec{H}''=\vec{j} \tag{5.2.1}$$

$$\vec{e}_n\times\vec{H}'\big|_b=\vec{e}_n\times\vec{H}''\big|_b \quad \text{or} \quad \vec{e}_n\times\vec{A}'\big|_b=\vec{e}_n\times\vec{A}''\big|_b \tag{5.2.2}$$

根据场的线性叠加原理，我们可构造一个新的场，即令

$$\vec{B}=\vec{B}'-\vec{B}'', \quad \vec{H}=\vec{H}'-\vec{H}'', \quad \vec{A}=\vec{A}'-\vec{A}'' \tag{5.2.3}$$

对于这样一个场，显然，我们有

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=0 \\ \vec{e}_n\times\vec{A}\big|_B=0, \quad or, \quad \vec{e}_n\times\vec{H}\big|_B=0 \end{cases} \tag{5.2.4}$$

我们来计算这个场的能量：

$$\begin{aligned} U_m&=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}d\tau=\frac{1}{2}\int_V(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}d\tau \\ &=\frac{1}{2}\int_V\left[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\right]d\tau \\ &=\frac{1}{2}\oint_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}\oint_S\left[(\vec{A}\times\vec{H})\cdot\vec{e}_n\right]dS \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中第二行到第三行的推导由于$\nabla\times\vec{H}=0$而得到。根据矢量混合积公式$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$，（5.2.5）中右方积分函数可改写为

$$\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{e}_n=\left(\vec{e}_n\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H}=\left(\vec{H}\times\vec{e}_n\right)\cdot\vec{A} \qquad (5.2.6)$$

根据（5.2.4），我们发现，无论我们设置的边条是对 A 还是对 H，（5.2.5）式右端恒为 0。于是，

$$\int\frac{1}{\mu}(\vec{B}'-\vec{B}'')\cdot(\vec{B}'-\vec{B}'')d\tau=0 \qquad (5.2.7)$$

由于体系的磁导率μ_r恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}'=\vec{B}'' \quad 或 \quad \vec{H}'=\vec{H}''$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证。显然，类似我们对静电问题唯一性定理的证明，静磁问题中，只要 B 和 H 的关系是单调单值的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立！

简单的讲，静磁场的唯一性定理和静电场的唯一性定理一样，都表述的是：对于一个给定的物理问题，解由边界条件唯一确定。当然，它们的适用条件也是一样的，只对 B-H 关系单调且一一对应的体系成立。对铁磁/铁电等体系，一个给定的 E，B 场对应不同的 D，H 场，则唯一性定理不成立。

§5.3 磁场的矢势解法：二维问题

原则上讲，给定边界条件以及电流分布（磁场的源），我们即可以通过解泊松方程（5.1.4）求解矢势从而进一步求解磁场。然而真正利用解析方法解矢势方程非常麻烦而且可解的问题并不太多。下面我们举最简单的一种体系---二维的稳定电流体系---来介绍求解矢势的方法。所谓二维问题，是指体系（内部材料性质及边界形状）具有沿 z 轴的平移不变性，体系若存在电流也只沿着 z 轴方向流动。根据稳定电流的条件$\nabla\cdot\vec{j}=0$可知，$\frac{\partial}{\partial z}j_z=0$，电流密度与$z$方向的空间坐标无关，即

$$\vec{j}=\vec{e}_z j(x,y) \qquad (5.3.1)$$

根据静磁场的矢势的定义$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')d\tau'}{R}$，$\vec{A}$只有$z$方向的分量；进一步根据

体系沿 z 方向的平移不变性（或者根据$\nabla\cdot\vec{A}=0$），$\vec{A}$只能是x,y的函数。综上，

$$\boxed{\vec{A}=\vec{e}_z A(x,y)} \tag{5.3.2}$$

于是，$\vec{A}$所满足的方程变成一个 **2 维标量方程**：

$$\nabla^2 A(x,y)=-\mu j_f(x,y) \tag{5.3.3}$$

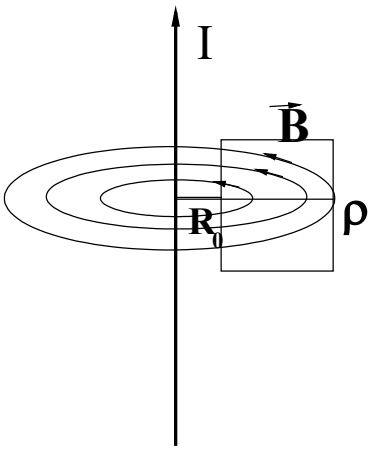
这样的问题可以利用静电学中的方法来解决。下面从不同角度举一些例题，用不同的方法计算典型的两维问题。

[例 1] 空间沿 z 方向有一无限长载流直导线（载有电流 I），求空间的矢势分布。

解：这是个典型的 2 维问题，当然可以通过求解（5.3.3）得到。但这里我们换一个思路，不妨先求空间的 B 场再求 A 场。取柱坐标系，由安培定理可得

$$\oint\vec{B}\cdot dl=\mu_0 I \quad\Rightarrow\quad \vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi$$

根据$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$，利用 Stokes 定理$\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{s}$，选择如图所示的安培环路，则有



$$\left[A(r)-A(R_0)\right]h=-h\int_{R_0}^{\rho}B(\rho')\cdot d\rho'$$

积分可得

$$A(\rho)=A(R_0)-\frac{\mu_0 I}{2\pi}ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right)$$

$$=const.-\frac{\mu_0 I}{2\pi}ln(\rho)$$

其中 const.取决于矢势原点的选取。

注：本例也可以用$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$直接求出，不妨试试。

[例 2] 求均匀场$\vec{B}=B_0\vec{e}_x$对应的矢势分布

解：乍一看，感觉这个问题未必是个 2 维问题。然而考虑到均匀磁场$\vec{B}=B_0\vec{e}_x$可以看成由放在无限远处的无限大载有 z 方向均匀面电流的金属板（平行于 xz 面）产生，这个问题就很清楚是个 2 维问题，可设$\vec{A}=A(x,y)\hat{e}_z$。根据$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$，得

$$\partial_y A\hat{e}_x-\partial_x A\hat{e}_y=B_0\hat{e}_x$$

因此有

$$A(x,y)=B_0 y=B_0\rho\sin\theta$$

注：矢势的选取并不唯一，除了可以差一个积分常数外，矢势还可以任意加上一个“规范场”

而不影响它们给出相同的磁场。在求得上面这个结果时我们假设电流沿 z 方向，A 的方向因此确定平行于 z，这其实等价于我们取定了一个规范。然而，我们不一定非得做这个假设（取这个规范），其它形式的电流也有可能产生同样的均匀磁场。比如 $\vec{A}=(1/2)\vec{B}\times\vec{r}$ 也可以对应同样的磁场，这是所谓 Landau 规范下的结果。

小课题：如何理解规范条件？可否把规范条件与边界条件联系在一起？除了 Landau 规范以及此处得到的结果，你能根据以上讨论得到更多的矢势形式，并讨论起对应的规范以及边界条件（电流分布）吗？

[例 3] 半径为 R 的圆柱形磁介质（磁导率为 μ_2），放置于均匀的外磁场 $\vec{B}_0$ 中，设柱外面为磁导率为 μ_1 的介质。场的方向与柱轴垂直，求空间的场分布。

解 如图 5.1 所示，利用柱坐标，空间分成两个区域，$\rho>R$ 的区域矢势为 $\hat{z}A_1(\rho,\phi)$，$\rho<R$ 的区域矢势为 $\hat{z}A_2(\rho,\phi)$，它们均满足两维 Laplace 方程（因为空间没有传导电流）：

$$\nabla^2 A_1=0,\quad \nabla^2 A_2=0 \qquad (5.3.4)$$

下面考虑边值关系。在 $\rho=R$ 的边界上，显然(5.1.8)式即为

$$A_1=A_2,\qquad \rho=R \qquad (5.3.5)$$

考虑边条（5.1.6）。因为 $\vec{A}=\hat{z}A(\rho,\phi)$，利用柱坐标系 (ρ,ϕ,z) 中的公式可得

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}\vec{e}_\rho-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\vec{e}_\phi \quad\Rightarrow\quad \vec{n}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\vec{e}_z$$

我们就可以把(5.1.6)式写成

$$\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho=R}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial\rho},\quad \rho=R \qquad (5.3.6)$$

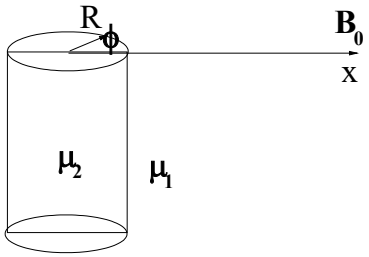
把它们与介质中的静电方程和边值关系比较，立即发现它们的形式完全一样。因此，二维静磁问题完全可以仿照静电问题中的各种解法来求解。

其他边界条件：

$\rho=0$, A_2 有限. （5.3.7）

$\rho\to\infty$, A_1 包括均匀场的贡献。 （5.3.8’）

即



$$\rho \to \infty,\ A_1 = const. + B_0 y = const. + B_0 \rho \sin\phi \qquad (5.3.8)$$

<u>下面我们根据上述条件利用本征函数展开法找出各区的解。</u>

根据问题的对称性，A_1, A_2 可以展开成相应的本征函数的线性叠加：

$$\begin{aligned} A_1 &= g_0 + h_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n\rho^n + h_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})\sin(n\phi) \\ A_2 &= g_0^{'} + h_0^{'}\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n^{'}\rho^n + h_n^{'}\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n^{'}\rho^n + d_n^{'}\rho^{-n})\sin(n\phi) \end{aligned} \qquad (5.3.9)$$

根据边条（5.3.7）-（5.3.8），易知：

$$\begin{aligned} &g_n = 0, n = 1,2,...; \quad c_n = 0, n > 1,\ c_1 = B_0; \quad h_0 = 0 \\ &h_n^{'} = 0, n = 1,2,...; \quad d_n^{'} = 0, n = 1,2,...; \qquad h_0^{'} = 0 \end{aligned} \qquad (5.3.10)$$

由边条（5.3.5）-（5.3.6），得到

$$\begin{cases} g_n R^n + h_n R^{-n} = g_n^{'} R^n + h_n^{'} R^{-n} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(n g_n R^{n-1} - n h_n R^{-n-1}\right) = \dfrac{1}{\mu_2}\left(n g_n^{'} R^{n-1} - n h_n^{'} R^{-n-1}\right) \end{cases} \qquad (5.3.11)$$

以及

$$\begin{cases} c_n R^n + d_n R^{-n} = c_n^{'} R^n + d_n^{'} R^{-n} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(n c_n R^{n-1} - n d_n R^{-n-1}\right) = \dfrac{1}{\mu_2}\left(n c_n^{'} R^{n-1} - n d_n^{'} R^{-n-1}\right) \end{cases} \qquad (5.3.12)$$

根据（5.3.10），当 $n > 1$ 时，（5.3.11）-（5.3.12）没有非平凡解，亦即所有 n>1 时的参数均为 0。当 $n = 1$ 时，由（5.3.12）可以解得

$$d_1 = R^2 B_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad c_1^{'} = \frac{2B_0\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \qquad (5.3.13)$$

除了不重要的常数 $g_0 = g_0^{'}$ 外，其余的系数均为零。故空间矢势（取常数为 0）为

$$\begin{aligned} A_1 &= B_0\rho\sin\phi + B_0 R^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\frac{\sin\phi}{\rho} \\ A_2 &= \frac{2B_0\mu_2}{\mu_2 + \mu_1}\rho\sin\phi \end{aligned} \qquad (5.3.14)$$

根据矢势可以容易地计算出磁场的形式。这里，柱外的磁场由外磁场和介质磁化后的磁化电流在柱子外产生的磁场，后者完全等价于放置在原点处的一个 2 维偶极子，柱内的场为一均匀磁场，包含了外磁场以及磁化电流对内的贡献。

Tips：从上一章到这一章的这么多例子中，我们可以清楚地明白，均匀外场下对柱、球等的影响只是激发 l=1 项（即偶极项），其他的项都是 0。这个原因也很简单，均匀场的势正比于 r 的一次方，因此它也只作用到 l=1 这个子空间。明白了这个道理，以后再做相应的题目时可直接仅仅保留 l=1 项（对均匀外场），结果的正确性由唯一性定理保证，以简化计算书写步骤。

思考：仔细比对（5.3.14）与（4.4.28），你是否觉得很奇怪？为什么在（4.4.28），$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ 时内场 $\vec{E}_{in} < \vec{E}_0$（退极场贡献），但这里当 $\mu_2 > \mu_1$ 时内场 $\vec{B}_{in} > \vec{B}_0$？难道“退磁场”不“退”掉外场啦？？？

§5.4　磁场的标量势解法

上面我们介绍了磁场的矢势解法。尽管这种方法物理图像直接，但因 $\vec{A}$ 是矢量场，运算极其繁复，实用性（特别是解析计算）不强。对比静电场，如果能引入标量势就容易多了。下面我们将仔细讨论引入磁标势的条件，并用它研究线性磁介质及（具有复杂的非线性响应）铁磁介质中的磁场。

1．磁标势

什么条件下可以引入磁标势？带着这个问题，让我们重新考察静磁场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases} \qquad (5.4.1)$$

如果所考察的空间区域没有传导电流，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \qquad (5.4.2)$$

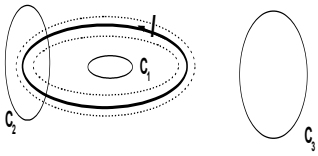
上式提醒我们似乎可以据此引入标势 φ_m（称为磁标势）

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m . \qquad (5.4.3)$$

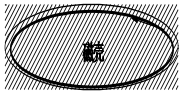
但是，仔细考虑之后发现：只有条件(5.4.2)还不够保证可以引入磁标势。原因是能引入 φ_m 的充分必要条件是 $\vec{H}$ 为保守场，亦即

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (5.4.4)$$

其中 *C* 为空间中的任意闭合回路。只有 H 场对任意环路的积分都为 0，才能对一个点唯一确定标势，亦即，φ_m 为位置的单值函数。在很多情况下，（5.4.2）已经可以导致保守场，但有些情况下，即使考虑的空间没有电流，（5.4.4）仍不成立。比如对一个载流线圈，若我们做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全



清除（如右图所示），选择 C1，C2，C3 等 3 个环路，对 C1，C3 来说，（5.4.4）均成立，对 C2 来讲不成立。$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}\Big|_{C_2} = I$，意味着是空间同一点的标势值不唯一。



因此，仅有“无传导电流”这一条件还不能保证 φ_m 的单值性。

为了解决这个问题，必须引入合适的虚拟的界面阻挡一切有可能环绕电流的回路，从而使得空间变成单连通！这样的空间中 φ_m 不再是多值的了。这样额外引入虚拟的界面叫做“磁壳”，比如针对这个问题，磁壳可取为如图所示的电流环所覆盖的面积。但这样做的代价是引入了一个界面，φ_m 在磁壳的两边不连续，必须设定合适的边界条件。考虑磁壳的某一点上下的磁标势的差，按照定义，这个差值就是磁场沿某一路线在单连通空间由“+”这一点积分到“-”这一点：

$$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = -\int_+^- \nabla\varphi_m \cdot d\vec{l} = \int_+^- \vec{H}\cdot d\vec{l} \qquad (5.4.5)$$

而另一方面，根据安培定律，这个积分的数值是：$\int_+^- \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$。所以在“磁壳”的上下表面磁标势有一个 $\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$ 的跳跃，这就是磁标势在磁壳上的边界条件。

注：某种意义上讲，多联通空间中磁标势的“多值性”就像是几何上多个黎曼面的问题，引入“磁壳”就是选定其中一个“黎曼面”来工作。

2．线性磁介质中磁场问题

对于顺磁、抗磁两种线性磁介质，本构关系 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 成立。因此在定义了合适的磁壳之后的区域内，有 $\vec{B} = -\mu\nabla\varphi_m$。将其带入（5.4.1）式可得 $\nabla\cdot\left(\mu\nabla\varphi_m\right) = 0$。在分块均匀的每一块磁介质内部，$\mu$ 是常数，因此有

$$\nabla^2\varphi_m = 0 \qquad (5.4.6)$$

我们发现此时磁标势 φ_m 满足和电标势 φ 完全一样的 Laplace 方程。事实上，在无源区下，电和磁有着完美的对称

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{D}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{B}=0\\
\nabla\times\vec{E}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla\times\vec{H}=0\\
\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{B}=\mu\vec{H}\\
\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\\
\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_m\\
\vec{E}=-\nabla\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{H}=-\nabla\varphi_m
\end{aligned}
\qquad (5.4.7)
$$

因此，无须推导我们就可以根据电标势的结论直接给出两块磁介质界面上的磁标势的边界条件：

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{m1}=\varphi_{m2};\\
&\mu_1\left(\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}\right)=\mu_2\left(\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\right)
\end{aligned}
\qquad (5.4.8)
$$

所以，对无源的线性磁介质中磁场问题，需在边条（5.4.8）下求解方程（5.4.6）。解法技巧可借鉴电场的标势问题 --- **唯一应当注意的是此时 E 与 H 对应**，尽管这里只是数学上的对应，物理上讲 H 不是真实的磁场！

[例 1] 真空中将一个半径为 R 的磁介质球（磁导率为 μ）放置于均匀磁场（$\vec{B}=B_0\hat{e}_z$）中，求空间的 B 场分布。

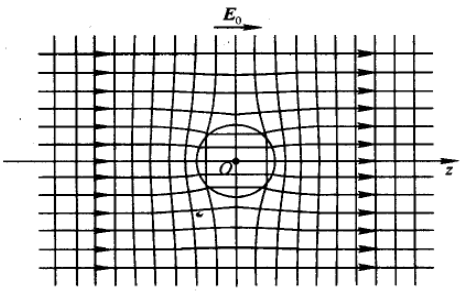


图 4.6

解：这个问题的解法可借鉴第十一讲中的例 5。只要把那里得到的解做代换：$E_0\to H_0$，$\varepsilon\to\mu$ 即可求出这个问题的空间磁标势分布：

$$
\varphi_{m1}=-H_0r\cos\theta+\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}R^3H_0\frac{1}{r^2}\cos\theta
$$

$$
\varphi_{m2}=-\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0r\cos\theta
$$

定义 $\boxed{\vec{m}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}4\pi R^3H_0\hat{z}}$（**为什么这样定义？请看后面的运算**）并带入上式可得：$\varphi_{m1}=-H_0r\cos\theta+\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}$。利用矢量微分运算，空间的 H 场可因此求出：

$$
\vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=\vec{H}_0-\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}
$$

$$
\vec{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0
$$

H 场不对应物理场，为了看清楚物理，进一步可以求出 **B** 场，

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = B_0 \hat{z} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 == \frac{3\mu}{2\mu_0 + \mu} \vec{B}_0$$

注意到 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}$ 正是真空中放置于原点的一个磁矩为 $\vec{m}$ 的磁偶极子产生的磁感应场（参考第 3 讲（1.2.24）式），因此磁介质球被磁化后对外界表现为一个磁偶极子（这也正是我们如上定义磁偶极矩的原因！）。磁偶极子的磁标势和电偶极子的电标势之间有着很好的对称性：

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

与静电场问题类似，磁介质球内部的 H 场也是均匀磁场，强度小于外 H 场（因为有**退磁场**的原因）。

思考：仔细比对这里的结果与（5. 3. 14）及（4. 4. 28），你是否又一次觉得很奇怪？在这里当 $\mu_2 > \mu_1$ 时内场 $\vec{B}_{in} > \vec{B}_0$ ？但是 $\vec{H}_{in} < \vec{H}_0$ 。有什么思考？“退磁场”究竟是什么东东？

习题

P．141，5.3，5.4

补充题

利用磁标势方法重新求解 **§ 5. 3** 中的例题 3，体会标势与矢势法的异同。

选做题：在 § 5. 3 例 3 中，求束缚在磁介质界面上的磁化电流分布。进一步定义一个 2 维磁偶极子，求出其矢势，然后对比例题 3 的解写出磁介质柱被磁化后的等效（2 维）磁偶极矩。