第十二讲

上次课：

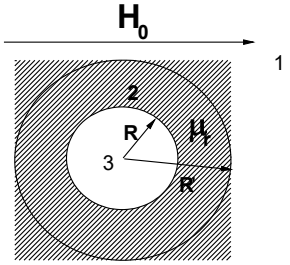
- **磁场唯一性定理：问题给定边条唯一确定解（本构关系为单值单调）**
- **矢势解：二维问题**
- **能引入磁标势的条件：1）无传导电流；2）引入磁壳使得空间为单连通**

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

- **线性磁介质：** $\nabla^2 \varphi_m = 0$，$\vec{H} \leftrightarrow \vec{E};\ \ \vec{B} \leftrightarrow \vec{D};\ \ \mu \leftrightarrow \varepsilon$

[例 2] 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 中，外面的区域是真空，求场分布。

解 设介质球壳的内外半径分别为 R 和 R'，球壳的磁导率为 μ。取 $\vec{H}_0$ 方向为极轴方向的球坐标系，把空间分成三个区域：$r > R'$，$R' > r > R$，$r < R$。三个区域都没有传



导电流，因此可使用磁标势，

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \quad r > R',$$
$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad R < r < R',$$
$$\nabla^2 \varphi_{m3} = 0 \quad r < R.$$

相应的边界条件为

$$\varphi_{m1} \to -H_0 r\cos\theta \qquad r \to \infty \text{ 时}$$

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2},\quad \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r}, \qquad r = R'$$

$$\varphi_{m2} = \varphi_{m3},\quad \mu_r \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{m3}}{\partial r}, \qquad r = R$$

$$\varphi_{m3} \text{ 有限} \qquad r \to 0 \text{ 时}$$

原则上，我们仍应将 $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \varphi_{m3}$ 展开成本征函数的叠加。因为此时激发外场为均匀场，只有 *l*=1 项非 0，且处理的是球状体，因此我们可以引入如下试解：

$$\varphi_{m1} = \left(c_1 r + \frac{d_1}{r^2}\right)\cos\theta$$
$$\varphi_{m2} = \left(c_2 r + \frac{d_2}{r^2}\right)\cos\theta \quad .$$
$$\varphi_{m3} = \left(c_3 r + \frac{d_3}{r^2}\right)\cos\theta$$

根据边条（1），（4）我们得知

$$c_1 = -H_0,\ \ d_3 = 0$$

利用边值关系（2）-（3）可以确定系数 d_1, c_2, d_2, c_3（过程从略）。我们比较关心

其中的 2 项：

$$d_1 = \frac{H_0(\mu_r - 1)(1+2\mu_r)(R'^3 - R^3)}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\frac{R}{R'})^3},$$

$$c_3 = \frac{-9\mu_r H_0}{(2+\mu_r)(1+2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\frac{R}{R'})^3},$$

因为体系对外展现出的偶极子的大小就是 $m = 4\pi d_1$，而区域 3 中的磁场正是 $\vec{H}_3 = -c_3\hat{z}$ 。下面分析一下结果。从磁标势的结果中可以看出，球壳外的场是均匀场和偶极子场的叠加。分析几个极限行为：

1）在 $R \to R'$ 或者 $\mu_r \to 1$ 时，$m = 4\pi d_1 \to 0$，诱导磁矩消失；

2）当 $R \to 0$ 时，$m \to \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R'^3 H_0$，回到上一例题（实心磁介质球）的结果；

3）当 $\mu_r \to \infty$ 时，磁偶极矩

$$m = 4\pi d_1 \approx 4\pi H_0 R'^3,$$

它与 R 的大小无关，与一个金属球（或者是金属球壳）对外电场的响应类似；

4）当 $\mu_r \to \infty$ 时，球壳内的磁场

$$\vec{H} = \frac{9\vec{H}_0}{2\mu_r\left[1 - (\frac{R}{R'})^3\right]} \to 0$$

这就是所谓的磁屏蔽。材料的 μ_r 越大，壳层越厚（即 $\frac{R}{R'} << 1$），屏蔽效果越好。

注：

（1） 在电的世界中，我们有自由电荷，而由自由电荷组成的介质就是金属导体，其对电场完全屏蔽，相当于 $\varepsilon_r \to -\infty$ 的电介质；前面我们讲到当 $\varepsilon_r \to \infty$ 的介质在静电学的范畴内也可以等效于一个导体。在磁的世界中，由于没有磁单极子的存在，我们没有类似金属导体的“磁导体”。要实现类似一个“磁导体”一样对磁场的响应，我们可以利用 $\mu_r \to \infty$ 的磁介质 – 在静磁学的范畴内，其响应与“磁导体”一致。然而要实现高的 ε_r, μ_r 并不容易，目前的一个前沿课题就是基于“Metamaterial”的理念来实现任意的 ε_r, μ_r。

（2） 计算多层介质膜对外场的响应时，由于直接计算边值关系比较复杂，有时常采用“转移矩阵”的方法。其理念是根据 l 层和 l+1 层之间的边值关系确定 $\{c_l, d_l\}$ 与 $\{c_{l+1}, d_{l+1}\}$ 之间的关系，并写成一个矩阵的形式：

$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$，*以此类推可以推知最外层和最内层的转开系数之间的关系*

$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$，*最后根据最外层和最内层的边值条件确定相应系数。这种*

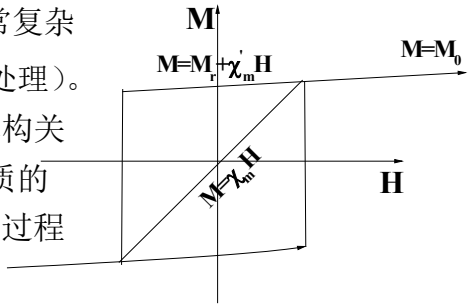
方法是非常一般且有用，可用在所有多层体系（板、柱、球）的“波”（量子、静电、静磁、电磁波。。。）的散射问题。

3．铁磁介质问题

铁磁介质为非线性介质，本构关系 $\vec{B} \neq \mu \vec{H}$ 。因此之前对线性介质推导的方法不再成立。回到 B 与 H 的最初级定义： $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$ ，因此（5.4.1）式中第一式变为

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \qquad (5.4.9)$$

若空间无传导电流且单连通，则可定义磁标势 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ 。在铁磁介质的问题中，$\vec{M}$ 是 *H* 的函数，由磁滞回路决定，换言之， $\vec{M}$ 是 φ_m 的隐函数，这使得（5.4.9）变为 $\nabla^2 \varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}(\varphi_m)$ ，这是关于 φ_m 的一个非常复杂的非线性方程，很难解析处理（当然可以数值处理）。必须明确知道 **M** 和 **H** 的关系（亦即：材料的本构关系）才可以求解。右图是个非常典型的铁磁介质的磁化曲线（本构关系），从中我们发现在不同的过程对应不同的物理。



A 初始磁化过程

铁磁介质一开始处于无磁性状态，加上磁场后磁矩出现。在这个过程中 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，与顺磁介质一样（见上图），相应的方程为（5.4.6）。

B 饱和磁化

当 $H \to \infty$ 时，铁磁介质达到饱和磁化， $\vec{M} = \vec{M}_0$ ，再增加外场的强度都不会增加磁矩的大小。因此 $\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r})$ 就变成了与等式左边 H 无关的物理量，可以等效看作一个决定磁标势的有效的“源”。定义

$$\rho_m(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r}) \qquad (5.4.10)$$

这里 ρ_m 称为假象**磁荷密度**，而磁标势满足的方程为标准的 Poisson 方程

$$\boxed{\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m} \qquad (5.4.11)$$

在这里，磁荷对磁标势起的作用于电荷对电标势的作用类似。

****** 以下为选读内容*

C 靠近剩余磁矩点时的行为

当体系被饱和磁化后再逐渐撤掉外磁场，在一般情况下，这个过程中 H 与 M 的关系可近似为

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \chi_m' \vec{H} \qquad (5.4.12)$$

其中$\vec{M}_r$为剩余磁矩。将（5.4.12）代入（5.4.10），并整理可得

$$(1+\chi_m')\nabla^2\varphi_m=\nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\nabla^2\varphi_m=-\rho_m/\mu_r' \\ \nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r})=-\rho_m\end{cases} \qquad (5.4.13)$$

此时的物理行为仍然是有“磁荷”作为源的 Poisson 方程，只是处于一个顺磁介质的背景中。可以说是将体系的顺磁性与饱和磁矩两样贡献分开。

******

下面求φ_m在两个磁介质交界面上的关系。

根据$\int H\cdot dl=-\Delta\varphi_m$，只要 H 在边界处不发散，边条

$$\boxed{\varphi_{1m}=\varphi_{2m}} \qquad (5.4.14)$$

始终成立。（5.4.8）中第 2 条边条由$\vec{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$加上线性本构关系推出。这里线性本构关系不再成立，并必须重新考虑。考虑微分方程（5.4.9）对应的边界条件，显然有$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=-\vec{e}_n\cdot\left(\vec{M}_1-\vec{M}_2\right)$，对情况 B 有

$$\boxed{\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2=\vec{e}_n\cdot(\vec{M}_0^1-\vec{M}_0^2)} \qquad (5.4.15)$$

********** *以下为选读内容*

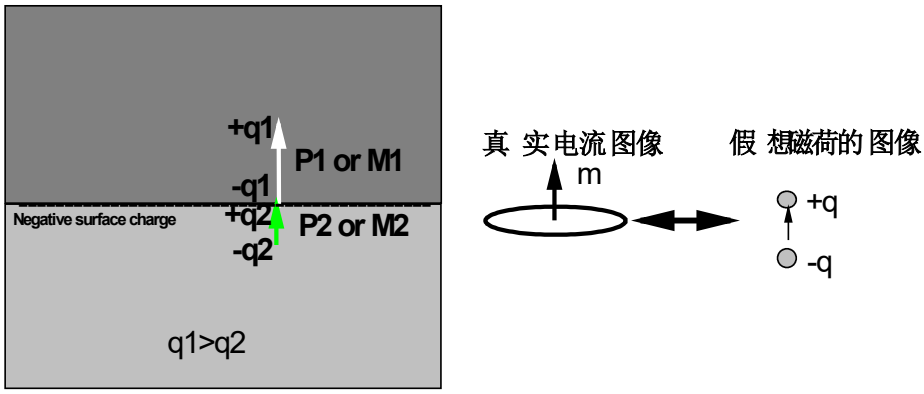
对情况 C 有：

$$\mu_{r1}'\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1-\mu_{r2}'\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2=\vec{e}_n\cdot(\vec{M}_r^1-\vec{M}_r^2) \qquad (5.4.15')$$

****

可见，交界面上的关系和静电介质完全类似，（5.4.15）式中等式右边对应的其实就是“假想”磁荷面密度！

这一点可以进一步通过与电场中极化电荷密度的分析做对比得到。我们知道极化电荷体密度的定义为$\rho_P(\vec{r})=-\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})$，将此定义应用到两个不同极化的介质表面有可以得到极化电荷面密度分布为$\sigma_P(\vec{r})=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$。因此，尽管均匀极化的电介质体内没有极化电荷体分布（因为正负电荷相互抵消），两个不同极化的均匀介质的界面上仍然可以有极化电荷面分布，原因是在界面上左右两边的正负电荷密度不同因此不能完全抵消。同理，我们在处理假想磁荷的时候完全可以将一个磁偶极子$\vec{m}$想象成两个正负假想磁荷靠的很近组成的，就像点偶极子一样。因此，与极化电荷对比，很容易理解假想磁荷的体分布就是（5.4.10），而$\vec{e}_n\cdot(\vec{M}_0^1-\vec{M}_0^2)$就是$-\sigma_M$ --- 假想磁荷面密度。



[例 5] 求半径为 *R* 的球形永久磁铁（假设被饱和磁化 $\vec{M}=M_0\hat{z}$ ）所激发的磁场。

解 把空间分成球内和球外两部分，整个空间不存在传导电流，因此球内外均可用磁标势。球外空间，没有磁矩因此磁荷 $\rho_m=0$，球内区域有磁矩，但其为常数因此仍然没有磁荷。所以 $\varphi_{m1},\varphi_{m2}$ 均满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2\varphi_{m1}=0,\quad \nabla^2\varphi_{m2}=0 \tag{5.4.16}$$

体系的边界条件

$$\begin{cases}\varphi_{m1}\to 0, & r\to\infty\\ \varphi_{m1}=\varphi_{m2} & \\ \dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}-\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}=-\vec{e}_n\cdot\vec{M}_0=-M_0\cos\theta & r=R\\ \varphi_{m2}\quad \text{finite}, & r=0\end{cases} \tag{5.4.17}$$

将 $\varphi_{m1},\varphi_{m2}$ 展开成本征函数的叠加，根据（5.4.17）中边界条件，可以预期只有 *l*=1 项非 0（因为只有 *l*=1 项带有 $\cos\theta$ 的角度依赖关系）。只保留 *l*=1 项，试解可以取为：

$$\varphi_{m1}=\left(C_1r+\frac{D_1}{r^2}\right)\cos\theta,\quad \varphi_{m2}=\left(C_2r+\frac{D_2}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{5.4.18}$$

根据（5.4.17）中两个极限下的边条，$C_1=0,D_2=0$。再根据（5.4.17）中 r=R 时的两个连接条件，我们得到

$$\begin{cases}\dfrac{D_1}{R^2}=C_2R\\ 2\dfrac{D_1}{R^3}+C_2=M_0\end{cases} \tag{5.4.19}$$

解之可得

$$D_1=\frac{M_0R^3}{3},\qquad C_2=\frac{M_0}{3} \tag{5.4.20}$$

所以 $$\varphi_{m1}=\frac{M_0R^3}{3}\frac{1}{r^2}\cos\theta,\qquad \varphi_{m2}=\frac{M_0}{3}r\cos\theta. \tag{5.4.22}$$

可见，球外空间的磁场是偶极场，其磁偶极矩为 $\vec{m}=\frac{4\pi}{3}R^3\vec{M}_0$

球内的磁场强度 $\vec{H}=-\vec{M}_0/3$

球内的磁感应强度为 $\vec{B}/\mu_0=\vec{H}+\vec{M}=\frac{2}{3}\vec{M}_0$

对这个体系，比较 B 场与 H 场的行为很有意思。如下图所示，球外的 B 场与 H 场类似，都表现出偶极子场的行为。然而球内的 B 场与 H 场的行为却截然不同，甚至连方向都相反。为什么是这样呢？这要从 B 场与 H 场分别满足的方程说起。

1）B 场是真实的物理场，满足 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_t$，在没有传导电流的区域，磁矩仍然可以贡献磁化电流，$\vec{j}_t=\mu_0\nabla\times\vec{M}$。在这个问题中，均匀磁化球的体内磁化电流互相抵消，但在界面上形成了磁化电流面电流，可以等价成一个个电流环。因此，B 场以右手螺旋法则通过这些电流环，如下图右图所示。

2）H 场则不然，它并非真实的物理场，是一个辅助场。在线性磁介质内勉强还有原始“源场”的物理意义，但在铁磁介质内部，其并没有明确的物理意义。然而，其在无源区内在数学意义上等价于电场 E，其方程满足 $\nabla\cdot\vec{H}=\rho_M$，其中 $\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}$ 为“假想磁荷”。基于这个概念，均匀磁化的永磁体内没有“磁荷”分布，而在界面产生了磁荷面分布，因此产生了类似“退极场”一样的“退磁场”（如下左图所示）。

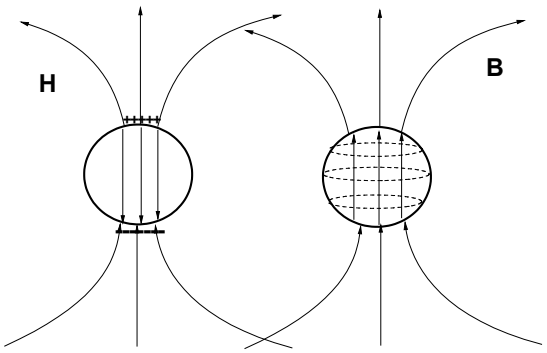
3）这个问题也可以从边界条件看出。B 场线的法向在界面上是连续的（因为方程 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 导致 $\vec{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$），但其在球的表面切向分量却不连续（因为 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}\Rightarrow\vec{n}\times(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=\mu_0\vec{\alpha}$），而这个问题中其实是有磁化电流面密度（这是真实的电流）。然而，H 场与 B 恰恰相反，其实它恰恰与电场 E 的行为类似：

其法向分量不连续，因为有方程 $\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}$，但其切向却连续，因为 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f=0$。

4）总之：这里面的物理是：***B 场是真实的场，看到的是磁化“电流”，看不到“磁荷”；而 H 场是辅助场，并非真实场，它的行为在数学上类似电场（注意：并非物理上的真实存在），因此类似电场由电荷产生一样，此处辅助的 H 场被假想成由“磁荷”产生，因此它也就有类似“退极场”一样的“退磁场”。***

$\vec{H}\to\varphi_m\to\rho_m$

$\vec{B}\to\vec{A}\to\vec{j}$



§5.5 磁多极矩展开 - 磁偶极子

若源电流分布集中在一个小区域 V 中，而我们只讨论其在远处的产生的磁场，这时可以仿照静电情况用多极矩展开的方法来处理。这里，我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用。

1．磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中，矢势 $\vec{A}$ 的解为

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'. \qquad (5.5.1)$$

类似静电问题中的多极展开，把 $\frac{1}{R}$ 在区域 V 内的某一点展开成 $\vec{r}'$ 的幂级数。若

展开点取在座标的原点，则

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots \qquad (5.5.2)$$

只保留前两项，代人矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{j}}{R}d\tau'=\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\cdots \qquad (5.5.3)$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{A}^{(0)}&=\frac{\mu}{4\pi r}\int\vec{j}(\vec{r}')d\tau',\\ \vec{A}^{(1)}&=\frac{\mu}{4\pi r^3}\int(\vec{r}'\cdot\vec{r})\vec{j}(\vec{r}')d\tau',\end{aligned} \qquad (5.5.4)$$

这里我们将不直接处理电流密度 $\vec{j}(\vec{r}')$，而利用一个没有证明其严格性但却非常有启发性的思路 - 将体积 V 内的电流分成许多独立的电流管道的叠加。因为是稳恒电流，每个流管为闭合回路且电流为一常数 I_i。根据这一思路，可以在积分中做如下代换：$\vec{j}(\vec{r}')d\tau'=\sum_i I_i d\vec{l}_i$。 考虑第一项

$$\vec{A}^{(0)}\propto\int\vec{j}d\tau'=\sum_i I_i\oint d\vec{l}_i\equiv 0 \qquad (5.5.5)$$

（5.5.5）式背后的物理原因是电流为稳定电流。与电场的多级极矩展开不同，磁多极矩的第一项恒为 0，***事实上，这正是自然界没有磁单极的显现***。下面考虑第二项 $\vec{A}^{(1)}$：

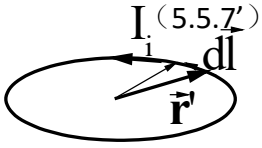
$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_i I_i\oint(\vec{r}'\cdot\vec{r})d\vec{l}_i \qquad (5.5.6)$$

对方环或是圆环，上式都可以严格积分出来（详见第二讲）。对任意形状，注意到 $d\vec{r}'=d\vec{l}_i$，我们可以首先将上式中的积分进行配分，

$$\oint(\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{l}_i=\oint(\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{r}'=\oint\left[d\left((\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{r}'\right)-\vec{r}'(\vec{r}\cdot d\vec{r}')\right] \qquad (5.5.7)$$

在闭合环路条件下上式第一项为 0，因此得到一个恒等式

$$\boxed{\oint(\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{l}_i=-\oint\vec{r}'(\vec{r}\cdot d\vec{r}')=-\oint\vec{r}'(\vec{r}\cdot d\vec{l}_i)} \qquad (5.5.7')$$



现将（5.5.6）中的积分分成 2 项，

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\left[\oint(\vec{r}'\cdot\vec{r})d\vec{l}_i+\oint(\vec{r}'\cdot\vec{r})d\vec{l}_i\right] \quad (5.5.6')$$

将上式中的一项用（5.5.7′）来替代，则有

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\left[\oint(\vec{r}'\cdot\vec{r})d\vec{l}_i-\oint\vec{r}\,'(\vec{r}\cdot d\vec{l}_i)\right] \quad (5.5.8)$$

利用矢量叉乘的恒等式$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$，（5.5.8）可以被进一步改写

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\oint(\vec{r}\,'\times d\vec{l}_i)\times\vec{r}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \quad (5.5.9)$$

其中

$$\boxed{\vec{m}=\frac{1}{2}\sum_i I_i\oint\vec{r}'\times d\vec{l}_i=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau'.} \quad (5.5.10)$$

被定义为**磁偶极矩**。上式是对磁偶极矩的最一般定义，针对任意电流分布均可以由此计算。对磁偶极子，我们已在不同场合介绍过其性质，现再总结如下：

（1）对于一个小的载流闭合线圈，其磁偶极矩$\vec{m}$可以由（5.5.10）计算为：

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\int\vec{r}'\times\vec{j}d\tau'=\frac{I}{2}\oint\vec{r}'\times d\vec{l}'=I\vec{S} \quad (5.5.11)$$

式中$\vec{S}$是电流回路的面积，方向取右手螺旋。这是我们熟知的结果，只不过此处给出的磁偶极矩的定义（5.5.10）更一般。

(2) 磁偶极子产生的场在第二讲中已经导出来过

$$\boxed{\vec{B}_m=\nabla\times\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{m}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3}} \quad (1.2.24)$$

其与电偶极子$\vec{p}$产生的电场$\vec{E}_p$形式一致。根据第十四讲，对一个磁偶极子产生的场，在没有电流的地方（$r\neq0$处）可以引入磁标势$\vec{H}=\vec{B}/\mu_0=-\nabla\varphi_m$。磁偶极子的磁标势为：

$$\boxed{\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}} \quad (5.5.12)$$

与电偶极子的电标势一一对应。因此对于磁偶极子产生的场，我们既可以用矢势（5.5.9）计算，也可以利用磁标势（5.5.12）计算。**在无源区，这两个表示方式是一致的**。

（3）任意形状的环形电流回路的磁场

下面利用磁标势法计算任意形状的电流回路的磁场。若要考虑离环不太远处的场，这时磁偶极矩近似不精确。设回路中的电流强度为 I，我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块的边界上都流有电流 I，电流的方向同大回路的电流方向相同，这样，这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流 I。对于每一小块面积都相应的有一个磁矩，其大小为 $I\Delta\vec{S}$，它在空间产生的磁标势为

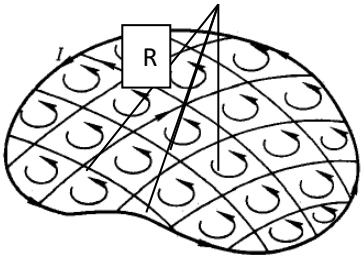


图 5.2

$$\Delta\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\Delta\Omega \qquad (5.5.13)$$

式中的 R 是 $\Delta\vec{S}$ 至观察点的位置矢量，$\Delta\Omega$ 为这一小块电流回路对观察点张开的立体角。当每个小块电流回路的尺度足够小时，其所产生的场由磁偶极子描述（5.5.13）变成精确的（对大块电流源远场近似不成立，对足够小的电流回路远场近似变成精确的）。于是，整个回路所产生的磁标势严格为

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\Omega, \qquad (5.5.14)$$

Ω 是回路对观察点所张的立体角，是观察点 r 的函数。其磁感应强度为

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = -\mu_0\nabla\varphi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega(\vec{r}), \qquad (5.5.15)$$

Ω 正负的规定是：按电流的右手法则决定 $\vec{e}_n$ 的面法线方向以后，若观察点在 $\vec{e}_n$ 的正方向，则 $\Omega>0$，反之 $\Omega<0$。注意当观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。当观察点在载流面上时，$\Omega^+ = 2\pi$，而当其在面积下时，$\Omega^+ = -2\pi$，故，$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$。其实，这个表面正是我们上次课讲的“磁壳”，必须挖掉其才使得磁标势的定义有意义，尽管其上面并无电流。

Tips：这个技巧其实就是所谓的“分立偶极矩近似”(Discrete dipole approximation (DDA)，核心是:当一个体系不满足远场条件因此不能用偶极近似时，可以将体系细分成一个个分立的

Dipole，将每个 Dipole 的贡献加起来。当细分足够够细时，DDA 是严格的，可以给出多级矩展开的结果。

2．磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

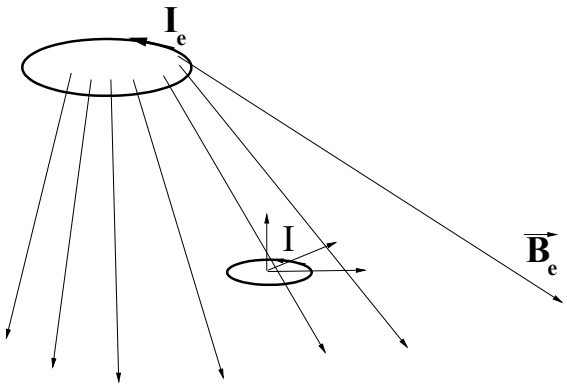
与电偶极子在电场中类似，下面我们考虑磁偶极子在外磁场中受到的作用力（矩）。在此之前，我们首先推导磁偶极子与外场的相互作用能。首先，前面已经推导出任意电流分布情况下的体系的总磁能为

$$U_m=\frac{1}{2}\int_\infty \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty \vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (5.5.16)$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子（磁偶极矩为$\vec{m}=I_m\vec{S}$）处在由远处电流【简单起见，假设为另外一个载流线圈（电流为I_e）】产生的静磁场$\vec{B}_e$中，则体系的总磁能为

$$\begin{aligned}U_m&=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_m+\vec{A}_e\right)\cdot\left(\vec{j}_m+\vec{j}_e\right)d\tau\\&=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_m\cdot\vec{j}_m+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_e\right)d\tau+\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}_m+\vec{A}_m\cdot\vec{j}_e\right)d\tau\end{aligned} \qquad (5.5.17)$$

其中$\vec{A}_m,\vec{A}_e$分别对应电流I_m,I_e产生的矢势。



类似电场的情形，似乎我们可以将前一项定义为体系的固有能，后一项定义为体系的相互作用能，

$$U_{\text{int}}=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}_m+\vec{A}_m\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \quad 。$$

进一步，根据矢量势的定义

$$\vec{A}_m(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_m(\vec{r}')d\tau'}{R},\quad \vec{A}_e(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r}')d\tau'}{R} \qquad (5.5.18)$$

容易证明

$$\int_\infty\left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}_m\right)d\tau=\int_\infty\left(\vec{A}_m\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \qquad (5.5.19)$$

因此有

$$U_{\text{int}} = \int_{\infty}\left(\vec{A}_e \cdot \vec{j}_m\right) d\tau = I_m \oint \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I_m \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$$
$$= I_m \Phi_e = \frac{1}{2}\left(I_m \Phi_e + I_e \Phi_m\right) \qquad (5.5.20)$$

其中 $\Phi_e = \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$, $\Phi_m = \int_{S_e} \vec{B}_m \cdot d\vec{S}$ 分别为**偶极子线圈中通过的外磁场的磁通量**以及**源线圈中通过的磁偶极子磁场的磁通量**。（5.5.20）式中最后一个等式可以由（5.5.19）式推出。当源距离目标线圈足够远时，可以将其磁场在线圈所处的空间在原点附近做 Tayler 展开：

$$\vec{B}_e(\vec{r}) \approx \vec{B}_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})_{\vec{r}=0} + \ldots \qquad (5.5.21)$$

带入上式并只保留第一项，

$$U_{B,\text{int}} = I_m \vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e \quad . \qquad (5.5.22)$$

我们惊讶地发现：这个形式与电偶极子在电场中的相互作用能 $U_{e,int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$ ***不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题出在哪里？***

习题：

5.11

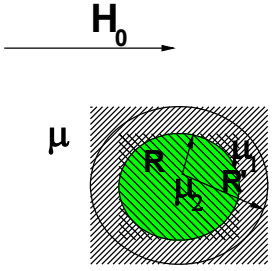
补充题：

1) **考虑一个半径为 R 的均匀带电 Q 的绝缘体球壳，沿对称轴（设为 z 轴）以角速度 ω 匀角速度转动，求空间的磁场分布。[提示：分下面 3 步走 （1）求出电流分布；（2）证明球体对应于一个均匀磁化球，并求出磁化强度 $\vec{M}$；（3）利用磁标势的方法求解。]**

整理下面的问题写成 Note（供学有余力的同学选作）：

（1） 根据上课的提示，建立多重球壳结构的磁标势解法的转移矩阵方法，并将其推广到量子力学体系（多层介质对电子的散射）及其它可能的几何结构（如：柱状）。

（2） 求解下图所示的问题-半径为 R 的磁介质球（磁导率为 μ_2）外面包一层另外的磁介质（磁导率为 μ_1），总的双层球的半径为 R'，将这样一个体系放置于第三种磁介质（磁导率为 μ）中，施加均匀磁场，问体系的有效偶极子大小等于多少？调整 μ 的大小，问什么条件下体系的有效偶极矩消失？



（3） 根据磁偶极子的矢势和标势，分别推出磁偶极子的 B 场的形式，讨论 2 个表达式在什么条件下是一样的？

（4） 能否从 Maxwell 张量出发计算一个磁偶极子（载流线圈）在外磁场中受到的力和力矩？若可以，将一个自旋看成一个磁偶极子，根据其在磁场中受到的力和力矩写出自旋在磁场中的有效相互作用能。

（5） 编一段小程序，根据（5.5.14）-（5.5.15）计算一个任意形状的载流线圈的磁标势分布及磁场，通过与磁偶极子的远场标势的比较确定什么时候可以看成远场？

（6） 基于 DDA 考虑一个任意分布的电荷体在近场的电势，将 DDA 的计算结果与多级矩展开的计算结果相比较，理解为什么只考虑了偶极子的 DDA 可以严格给出多级矩的贡献。同样的问题可以针对任意分布的电流体系。