第十三讲

上次课

- **饱和磁化的铁磁介质：**

  $\nabla^2\varphi_m=-\rho_m,\quad \rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}_0$：假想磁荷，类比介质中的极化电荷 $\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}$

- **标势法与矢势法的区别**

  $$\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}\quad\rightarrow\quad\vec{H}=-\nabla\varphi_m\quad\rightarrow\quad\vec{B}$$

  标势由 H 而来，“看到”（假想）磁荷，（对 H 而言）有“退磁场”

  $$\vec{j}_m=\nabla\times\vec{M}\ \rightarrow\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\ \rightarrow\ \vec{H}$$

  矢势由 B 而来，“看到”（真实）磁化电流，（对 B 而言）没有“退磁场”

- **磁偶极子**

  $$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3},\quad \vec{m}=\frac{1}{2}\int\left[\vec{r}'\times\vec{j}\right]d\tau'$$

- **磁偶极子在外场中的相互作用能**

  $$U_{int}=I_m\Phi_e=\frac{1}{2}(I_m\Phi_e+I_e\Phi_m)=\vec{m}\cdot\vec{B}_e$$

这个形式显示磁相互作用能是磁偶极子与磁感应场的标积，与电偶极子在电场中的行为类似。然而，令人不解的是：与电偶极子在电场中的相互作用能 $U_{e,int}=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e$ *不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题出在哪里？*

问题出在对“固有能”与“相互作用能”的定义上面！在讨论偶极子与电场的相互作用能时候，当电偶极子在电场中发生平动或是转动时，电场与偶极子的“固有能”不发生变化，**因为偶极子以及产生外电场的电荷分布并没有发生变化（这里假设外设边界条件为电荷体为孤立体系）**。正因为此，我们才可以不用管“固有能”的变化，而只关心“相互作用能”。对磁场体系，我们定义了“固有能”：$U_{固有能}=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_m\cdot\vec{j}_m+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_e\right)d\tau$，而把剩下的 $U_{\text{int}}=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\vec{A}_m\cdot\vec{j}_e+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_m\right)d\tau$ 当做相互作用能。然而，这样定义的前提是电流环中的电流不随磁偶极子与外磁场的相对构型的变化而变化。但真实的情况却远非如此：当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，线圈中会因为磁通量的改变而生感生电动势。根据 Faraday 电磁

感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为

$$\varepsilon_m = -\frac{d\Phi_e}{dt},\quad \varepsilon_e = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{5.5.23}$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此被改变，此即是“互感效应”。***假如没有外界能量输入，在这个过程中两个线圈中的电流都必须发生变化，因此“固有能”不可能保持恒定不变!!!换言之，此时我们定义的“固有能”并不是真正的“固有能”，它会随着磁偶极子与源线圈的相互构型的变化而改变！因此，考虑总能的变化不能只考虑“相互作用能”的变化！***

如何解决这个问题？有两种可能的解决方案：

1）**考虑真正的孤立体系**（如超导电流环），那我们必须同时考虑“相互作用能”及“（所谓的）固有能”两部分的变化才行，亦即：当两个线圈相互构型发生变化时导致（5.5.17）中两部分的变化量。这当然很麻烦。

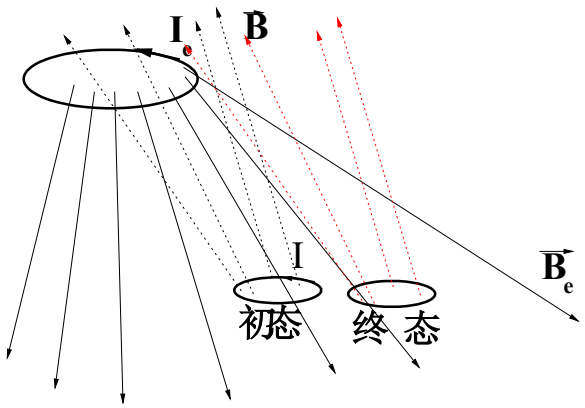
2）**构建某个条件使得“电流”恒定不变，因此（5.5.17）式的第一项变成真正的“固有能”**。这只要给每个电流加一个“恒流源”即可。但注意到这种情形下，磁性体系并非真正的孤立体系，而是“有源”开放体系，因为每个线圈都接着外加电源（电动势）。既然这个体系本身就不是孤立体系，那再考虑它的能量变化就毫无意义。因此，正确处理这类问题的方式是把外加电动势也包含进来，这样整体（加上电源之后的体系）才是一个孤立体系，在此基础上考虑这个体系（包含线圈以及外加电动势）的总能量才有意义。

我们考虑电源是“恒流源” --- 无论外界条件如何变化，线圈中的电流始终不变。在这个假设下，在磁偶极子与外场的相互构型发生变化的过程中，$\vec{m}$ 与 $\vec{B}_e$ 一直保持不变（因为 I_m, I_e 不变）。在这个“恒流源”的前提条件下，“固有能”变得有意义起来，因为这部分真正成为了不变的“固有能”。然而，**恒流的代价是外接电动势必须做功抵消感生电动势的做功**。在一个变动过程中，外电源的电动势必须时时刻刻与感应电动势大小相等方向相反，因此其必须做的功为

$$\begin{aligned}\Delta W_{\varepsilon} &= \int I_m \cdot (-\varepsilon_m) dt + \int I_e \cdot (-\varepsilon_e) dt \\ &= \int I_m \frac{d\Phi_e}{dt} dt + \int I_e \frac{d\Phi_m}{dt} dt = I_m \Delta\Phi_e + I_e \Delta\Phi_m\end{aligned} \tag{5.5.24}$$

其中 $\Delta\Phi_e, \Delta\Phi_m$ 是 Φ_e, Φ_m 在过程中的变化。注意到 I_e, I_m 恒定，对比（5.5.20），我们发现

$$\Delta W_{\varepsilon}=2\Delta U_{int} \qquad (5.5.25)$$



按照之前的讨论，**必须加上“电源”使得总体系变成孤立体系**，然后再根据能量守恒推导正确的“磁相互作用能”。当目标线圈与源线圈的位形发生变化时，因为两个线圈中的电流强度一直保持不变，电源+线圈形成的孤立体系的总能量变化包括：

（1）磁场相互作用的变化：$\Delta U_B=\frac{1}{2}\left(I_m\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi_m\right)$

（2）为了保证I_e,I维持不变，目标线圈及原线圈所携带的电源必须提供$\Delta W_{\varepsilon}=I\Delta\Phi_e+I_e\Delta\Phi=2\Delta U_B$的能量。因此，电源中少了$2\Delta U_B$的能量。

因此，**线圈+电源**这个孤立系统总的能量变化为：$\Delta\tilde{U}_{\text{int}}=\Delta U_B-\Delta W_{\varepsilon}=\Delta U_B-2\Delta U_B=-\Delta U_B$。因此可以定义有效相互作用能：

$$\boxed{\tilde{U}_{\text{int}}=-\vec{m}\cdot\vec{B}_e} \qquad (5.5.31)$$

与电偶极子在电场中的势能（相互作用能）完全一样！仿照电偶极子在电场受力及受力矩的推导，我们可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为

$$\begin{aligned}\vec{F}_B&=-\nabla\tilde{U}_{int}=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{m}\cdot\nabla\right)\vec{B}\\ \vec{\tau}_B&=\vec{m}\times\vec{B}\end{aligned} \qquad (5.5.32)$$

Tips：

1） 电磁理论最难掌握的就是这一点了：许多物理量必须在注明是在什么条件下得到的。等势条件和孤立导体的条件得到的结论截然不同，同样，等电流条件和等矢势条件也不相同。

2） 从以上分析中，我们再次看到了，从边界条件看，电场中的φ与磁场中的$\vec{j}$地位等

价，而电场中的ρ与磁场中的$\vec{A}$地位等价。其实这个问题可以从更广义的“元功”角度来看，对一个电磁体系做的元功，在不同情况下是不一样的，你可以思考这些物理量是如何与热力学体系中的 P 和 V 向对应的。

第六章　似 稳 场 （准静场）

前面几章中我们研究了**静止电荷产生的静电场**、**稳恒电流产生的静磁场**。从现在开始，我们开始研究随时间变化的电磁场。本章研究随时间变化足够缓慢的电磁场，叫做似稳场（意思是**近似稳恒**），又叫“准静场”（Quasi-Static field），这部分的研究是整个电工学的基础。事实上，对很多实际问题，尽管其中电磁场是随时间变化的，但由于问题满足“似稳”条件，我们也可以在似稳近似下求解。**在这些条件下得到的电磁场与稳恒源产生的“静”电磁场很类似，只不过加上了时间变化因子而已**。这不仅会极大简化我们的计算，而且使得我们具有非常清晰的物理图像。这一部分其实是静电磁场与动电磁场之间的一座桥梁。在引言中我提及的“**电磁流变液**”，“**光镊**”等现象其实都属于此类问题。

§6.1 似 稳 条 件

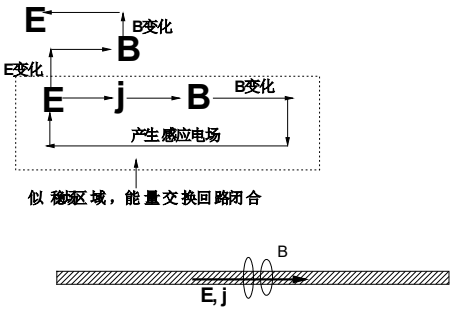
原则上电磁规律是由 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

决定的，其中$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$称为“位移电流”。位移电流的是由 Maxwell 引入的，其直接后果是导致电磁波的出现，使得电磁能量以电磁场的形式脱离源而存在。看如下示意图，由电荷（由电荷密度ρ刻画）产生的电场 ***E*** 作用于电荷上时会产生电流（由电流密度 ***j*** 刻画），而进一步会产生磁场 ***B***。 当磁场 ***B*** 发生变化时，根据 Faraday 定律会产生感应电场$\vec{E}_K$。这时电场也是随时间变化的，其有两个作用，1）进一步作用于电荷改变电流，2）产生位移电流导致新的磁场。*若不考虑*

“位移电流”的影响，则我们发现回到之前的循环。这个图像告诉我们：电场、磁场被一直束缚在电荷、电流附近，即使随时间变化，也不会脱离电荷、电流而去，其行为大致与静态的电磁场相仿。

然而考虑了“位移电流”项之后，这个图像被从根本上打破了。如右图所示，变化的电场不仅可以作用到导线中的载流子上，而且可以因为电场变化通过“**位移电流**”的效应会导致新的（涡旋）磁场，而磁场的变化导致新的电场，电磁场就这样脱离电荷/电流而去，这个过程叫做“辐射” – 将在第十二章具体展开阐述。



“电磁辐射”产生的电磁场的主要性质是：假设电荷电流均分布在原点附近，则空间 $\boldsymbol{r}$ 位置处产生的场在某一时刻 t 的值 $\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$ 是由比 t 早一些时候的电流、电荷 $\vec{j}(t'=t-r/c),\rho(\vec{r},t'=t-r/c)$ 决定的，而并不是由 t 时刻的电流和电荷决定，*这就是所谓的“推迟效应”*。 物理上，这非常容易理解，因为某一时刻的电荷、电流产生的影响要经过 r/c 时间的电磁波的传播才能到达 r 点。这样的后果是场和源**不再满足瞬时的变化关系**，给我们的研究带来了麻烦。**所以“考虑位移电流”与“辐射修正”以及“场源之间的关系不再是瞬时响应”等关联起来。**对此类问题具体计算时，必须严格求解全空间的波动方程（严格方法在第十二章中介绍）。

当某些时空条件满足时，我们可以略去“位移电流”的影响，这样做的后果是使得源和场之间具有瞬时关系（当然是某种近似下的后果）。每一时刻，其源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系，因此这种场也称作“**似稳场**”。对这种场，很多我们针对静态电磁场发展的方法就可以使用，因此“似稳场”的研究具有重要的实际意义。那么，在什么情况下略去“位移电流”才算是合理的？这就是下面我们要讨论的**似稳条件**。

(1) 如果考察的区域是在**导体内部**，其中除位移电流外还有传导电流：

$$\vec{j}_D=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \vec{j}_c=\sigma_c\vec{E}$$

若场是谐变的，即 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$，则

$$j_D \sim \varepsilon(-i\omega E), j_c \sim \sigma_c E$$

忽略位移电流的条件是 $j_D << j_c$，即

$$\boxed{\omega << \omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}} \tag{6.1.1}$$

因此，似稳场成立的*第一个条件是电磁场的变化频率远小于金属的特征频率* $\omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$。对于好的金属如铜，$\sigma_c \approx 5.9\times10^7 \Omega^{-1}\cdot m^{-1}, \varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12} F/m$，其特征频率为 $\omega_\sigma \approx 6.7\times10^{18} Hz$。可见光的波长大约处于 400-700 nm 区间，对应的圆频率大约 10^{15} Hz，比特征频率小得多。*可见，对于绝大多数金属而言，在很大的频率范围内在金属内部将位移电流忽略都是合理的*。

Tips：

需要指出的是，（6.1.1）是一个比较松的条件，原因是在高频下 $\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}$，而 $\sigma(\omega)$ 与直流电导有很大的区别。更严格的考虑将在第八章讲述金属电导率的 Drude 模型时得到。比如根据（6.1.1），似乎在整个可见光频率范围内，金属中的位移电流项都可以忽略 --- 这并不正确。只有在 GHz 区域，忽略位移电流项才是正确的。

(2) 如果考察的区域是**导电介质的外部**，这时没有传导电流 j_c 可以直接做比较，必须换一个角度思考这个问题。考察真空中 $\vec{r}'$ 处的源 $\vec{j}(\vec{r}',t)$ 在 $\vec{r}$ 处激发的场，假设源是随时间谐变的，则所有物理量均带有 $e^{-i\omega t}$ 的因子。如果不考虑“位移电流”的影响，则根据前面的讨论，不存在“辐射修正”以及“推迟效应”，磁场应由源“瞬时”决定，故**准静场的解**应当为：

$$\vec{B}_{QS}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)\times\vec{R}}{R^3} d\tau'$$

其中，$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$。然而考虑“位移电流”的影响后，空间的场是由过去时刻的源[$\vec{j}(\vec{r}',t-R/c) = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega(t-R/c)}$]激发的。在离激发源不太远的地方，考虑“位移电流”导致的辐射效应，磁场可以大致表示为

$$\vec{B}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t-R/c)\times\vec{R}}{R^3} d\tau' \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)\times\vec{R}}{R^3} e^{i\omega R/c} d\tau' \quad 。$$

(具体证明将在第十二章中给出) 那什么时候准静解是合理的呢？将上式中的

$e^{i\omega R/c}$ 作泰勒展开，

$$e^{i\omega R/c} \approx 1 + i\frac{\omega}{c}R + ,$$

所以当条件

$$\frac{\omega}{c}R << 1$$

即

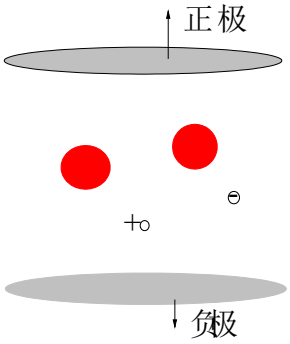
$$\boxed{R << \frac{\lambda}{2\pi}} \qquad (6.1.2)$$

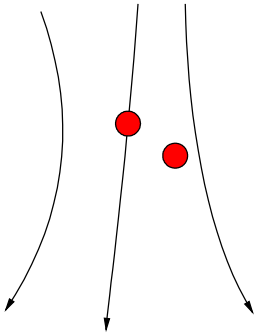
满足时，可以略去推迟项 $e^{i\omega R/c}$ 的影响（将其设为 1），此时有 $\vec{B}(\vec{r},t) \approx \vec{B}_{QS}(\vec{r},t)$，即准静近似成立。这个过程相当于我们忽略***“位移电流”导致的推迟效应，或者说是辐射修正。换句话说，当考察点到源的距离远小于场的波长时，略去位移电流是合理的，这就是似稳场成立的空间条件。*** 例如，对于 50 Hz 的频率，$\lambda = 6000km$；而对于 800 kHz 的频率，$\lambda = 375m$。***在低频情况下，如考察区域的线度远小于波长，则此场可看成是似稳场***。

(6.1.1)和(6.1.2)式就是**似稳条件**。Quasi-Static Field 的概念被人们广泛应用。

********** 拓展选读内容 **********

（1）比如前面提过的“电流变液”体系，即将一些介电球体放置在一个盛有溶液的器皿里，施加电场可以在很短的时间里将体系由悬浮液状态转变成为固态。然而因为溶液里不可避免地有少量自由电荷，如果施加直流电场将使得这些电荷在电场中运动从而附着在电极上，最后的结果是使得电场被屏蔽，效率降低。为了避免这种情形，人们常用的方法是施加低频交流电，使得自由电荷不会朝一个方向运动直到极板上将电极屏蔽，而是来回运动。一般施加的交流电频率在 1000 周以内，对应的电磁波长为 30 公里，远远大于考虑的体系大小~1 米。此时，所有的物理量都仍然可以用静电场计算，尽管此时其实电场为交变电场！

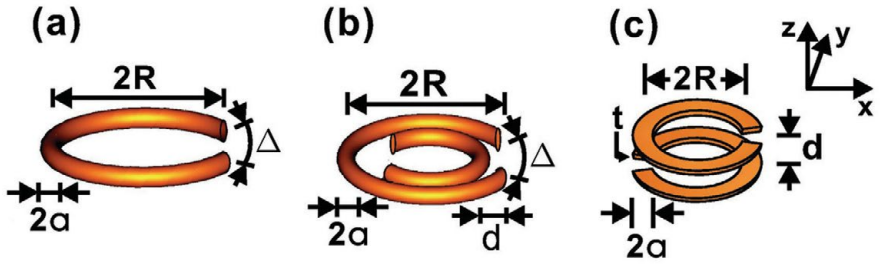




（2）“光镊”是另外一个例子。利用激光形成一个空间上的非均匀电磁场分布，原则上这个电磁场当然是随时间剧烈震荡的。然而当**纳米尺度**的介电颗粒进入此区域时，因为光波波长为 400-700 纳米，对此颗粒来说电磁场可以认为是“似稳场”。**因此纳米颗粒**

受到的电磁波的作用力可以假设电磁场是为静电场来计算，这样就极大了简化了计算，甚至使得解析计算（尽管是近似的）变成可能。

（3）亚波长金属结构的共振是另一个“似稳场”的杰作！考虑一个复杂的金属结构（如金属开口环，或者金属小球）在电磁波下的响应，严格的计算将非常复杂。然而***当金属结构的尺寸远小于电磁波的波长时***，问题可以在“似稳”近似下求解。忽略位移电流项之后，此时结构的许多问题，如共振模式的本征频率及电磁响应等，都可以严格求解。 2006 年，我和美国 Delaware 大学的 S. T. Chui 教授合作，严格解出了金属环状结构的所有本征模式 – 求解的关键是“准静近似”。



思考题：在求解亚波长介质球（即求得尺寸比波长小很多）在电磁波场中的散射问题时，我们通常不考虑 Faraday 效应，直接假设$\nabla\times\vec{E}=0$，场为匀强场；然而在考虑金属体（虽然也具有比波长小得多的尺度），我们不能忽略 Faraday 效应，比如上面的问题（参考 PRB 74 035419 （2006）），这是为什么？

§ 6.2 似稳场方程 --- 场的扩散

在似稳条件满足时，可以将位移电流项扔掉。此时电磁场由似稳场方程：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}\end{cases}\tag{6.2.1}$$

及本构关系

$$\vec{B}=\mu\vec{H},\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

决定。似稳场方程(6.2.1)式比静态电磁场只多一个电磁感应方程。若考查导体内部的场，则还需另加一个本构方程：

$$\vec{j}=\sigma_c\vec{E}.$$

一般情形下导体中电荷积累不一定为 0。当我们考虑在无限长的截面不变的导电体系（如导线）中传导交变电流时，因为电流只能沿着导线方向传导，而根据体系的平移对称性，必有 $\nabla\cdot\vec{j}_f=0$。进而，因为导体内部有如下关系 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$，则知：$\nabla\cdot\vec{E}=0$，因此由（6.2.1）第一式得知金属内没有电荷堆积，$\rho=0$。将(6.2.1)式改写成 E，H 的方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\sigma_c\vec{E}\end{cases}\tag{6.2.2}$$

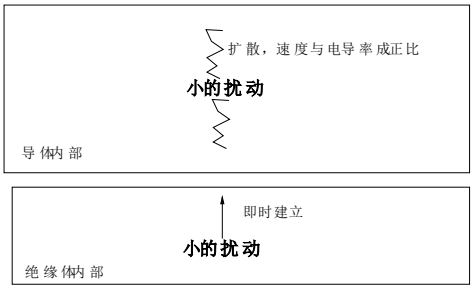
由(6.2.2)式的第二、第四式消去 $\vec{E}$ 则得到关于 $\vec{H}$ 的方程：

$$\boxed{\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\vec{H}}\tag{6.2.3}$$

同理，由(6.2.2)式亦可得到关于 $\vec{E}$ 的方程：

$$\boxed{\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\sigma_c}\nabla^2\vec{E}}\tag{6.2.4}$$

这显示似稳条件下 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的方程是我们熟知的扩散方程，$D=1/\mu\sigma_c$ 是扩散系数。这说明导电介质中的电磁场会扩散，扩散的快慢取决于电导率 σ_c 的大小，σ_c 越大则扩散越慢。**对于理想导体，扩散系数为零，而在绝缘体中，场的扩散系数为无限大。**比如，在某一时刻在原点进行一下电磁扰动（如将一个电荷搬到此处），在绝缘体中，电磁场瞬间被建立起来（或者说从原点瞬间扩散出去）；在导体中，这个电场却非常慢才能建立起来（扩散出去），在理想导体中，电场永远也不能被建立起来。



Tip --- 电导率越大扩散越小似乎与我们的直觉相违背：因为电导率大则电子对电场的响应大，似乎更容易来传播电磁信号才对？其实恰恰相反。可以通过如下一个简单的 Argument 来理解这件事情。在导体中做一个小的扰动，因为导体中有自由电荷，这些自由电荷会重新分布从而屏蔽这种扰动建立的电场，导体的导电性能愈好，这种阻碍效果就愈强。这就是为什么导体的电导率越大，场扩散的速度就越慢。绝缘体中没有任何自由电荷，因此电场在其中建立时没有阻碍 – 扩散速度无限大。当然，这一切都是在似稳场近似下成立。大尺度下不舍弃位移电流项，你会发现这种信号的传播是以电磁波的形式传播的，速度是介质中的光速。

§6.3 导体表面层内的场分布　趋肤效应

建立了似稳场基本方程以后，我们进一步来研究它们所描写的电磁场在**导体**内的分布特征。在准静近似下，导体内部的电场与电流满足 $\vec{j}(\vec{r},t)=\sigma_c\vec{E}(\vec{r},t)$，因此，研究导体内部的电场等价于研究导体内部的电流分布。在直流情形（电磁场均不随时间变化），电流可以在整个导线中（近似）均匀流动，与之相关的是电场可以分布在导体内部（注意与静电场的区别）。然而这个图像在交流（电磁场随时间变化）情形下发生了巨大的变化，无论是 j 还是驱动电场 E 甚至是与之相关的磁场 B，都不能在任意分布在导体的体内，而只能分布在导体表面的一个薄层，这就是趋肤效应。我们来讨论一个最简单的情况：

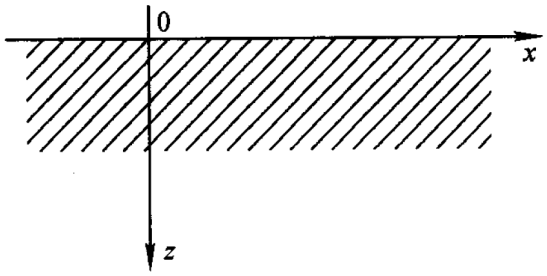


图 6.2

设导体占据 $z>0$ 的空间，如图 6.2。考虑电流沿着 x 方向流动，则 $\vec{E}$ 只有一个 E_x 项非 0，且只是 z 的函数。于是，扩散方程(6.2.4)现在变成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\mu\sigma_c\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x(z,t)=0 \qquad (6.3.1)$$

假设驱动电源的频率为 ω，则电磁场均作简谐变化。（6.3.1）是线性齐次方程，求解这种方程的常用方法是假设如下复指数形式

$$\vec{E} = \hat{x}A\exp[pz - i\omega t]\,, \qquad (6.3.2)$$

求解之后再取实部即可（因为物理的场必须是实数；能这样做的原因是（6.3.1）是线性齐次方程）。将其作为试解代入(6.3.2)式即有

$$p^2 = -i\omega\mu\sigma_c$$

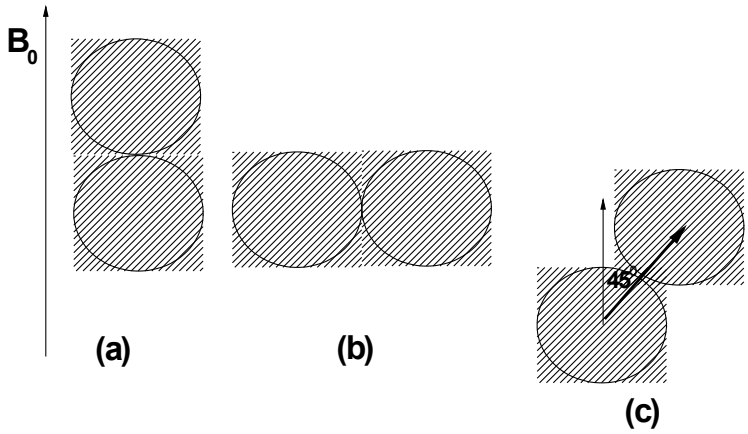
解之可得，

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c}\,(1-i) = \pm\alpha(1-i)\,,$$

式中 $\alpha = \left(\frac{1}{2}\mu\omega\sigma_c\right)^{1/2}$。

习题：

1） 将一个半径为 R 的磁导率为 μ_2 的磁介质球放入磁导率为 μ_1 的溶液中，当外加一均匀磁场 $\vec{B}_0$ 时，求磁介质球携带的有效磁偶极矩（做了好多遍了，可以无需推导直接写出来）。若体系中有两个相同的磁介质球体，问体系将最终选择如图所示的那一种构型？为什么？



注：这个题目的背景就是“磁流变液”，我曾在第 8 届亚洲中学生奥林匹克竞赛中出过一道类似的题目。

思考题

（1）基于磁偶极子与外磁场相互作用的有效势的推导方法，你能否计算出当外电场是由等势条件下的导体产生的体系下，极化能的正确表达式？

（2）课件中推导出一个载流线圈在外磁场下的有效相互作用势能为$U_{eff} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$，你能否受此启发推导出一个顺磁介质体系（磁导率为$\mu$）在外磁场下的有效相互作用能？这里顺磁介质中的磁偶极子都是没有外源的，如何理解得到的结果？试展开讨论一番。

