第十五讲

上次课

- 趋肤深度：$\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma_c}}$
- 波动方程，平面电磁波 $\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi)$
- 色散关系：

  $k=n\dfrac{\omega}{c}$，　$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 为折射率（Refraction Index）
- $|E_0|=Z|H_0|$, 阻抗 $Z=\sqrt{\mu/\varepsilon}$；　E，H，k 满足右手螺旋
- 能流 & 能量

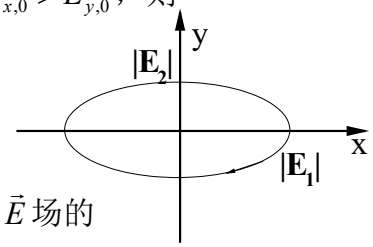
  $\langle\vec{S}_p\rangle=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\langle u\rangle\vec{v}$
- 偏振

  $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$ → $\begin{cases}E_x(z,t)=E_{x,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi_x\right)\\ E_y(z,t)=E_{y,0}\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\end{cases}$，$\phi_x=\phi_y$：线偏振

（B） **椭圆偏振**

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都是椭圆偏振。考虑一个具体的例子：$\phi_x-\phi_y=\pi/2$，$E_{x,0}>E_{y,0}$，则

$$\begin{aligned}E_x(z,t)&=-|E_{x,0}|\sin\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\\ E_y(z,t)&=|E_{y,0}|\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right)\end{aligned}\qquad(8.2.4)$$



在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化，$\vec{E}$ 场的端点描出一个半长轴为$|E_{x,0}|$，半短轴为$|E_{y,0}|$的椭圆，故这种偏振状态称为**椭圆偏振**。若 $\phi_x-\phi_y\neq\pi/2$，则椭圆的对称轴不再沿着 x,y 方向，而是沿着 z 轴做了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

（c） 圆偏振

进一步，当$|E_{x,0}|=|E_{y,0}|=A$，　$\phi_x-\phi_y=\pm\pi/2$

$$E_x(z,t) = \mp A\sin\left(kz-\omega t+\phi_y\right)$$
$$E_y(z,t) = A\cos\left(kz-\omega t+\phi_y\right) \qquad (8.2.5)$$

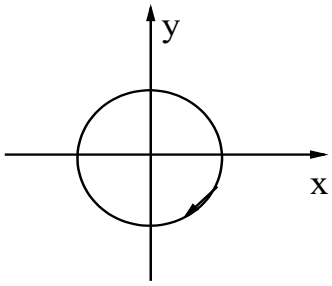
对这种波，在任一波阵面上，$\vec{E}$ 的端点随时间的演化描出一个半径为 A 的圆，故称为**圆偏振**。进一步考虑两种情况，

（C.1）**右旋圆偏振** $\phi_x-\phi_y=\pi/2$ 时，（8.2.5）式描述的是**电场矢量顺时针旋转**，称为**右旋圆偏振**。此时（8.2.5）可以重写为

$$\vec{E}_0 = \sqrt{2}Ae^{i\phi}\vec{e}_{right}$$

其中

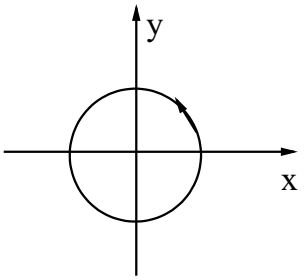
$$\boxed{\vec{e}_{right} = (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.6)$$



就是右旋偏振的单位矢量.

（C.2）**左旋圆偏振** 同理，$\phi_x-\phi_y=-\pi/2$ 时为左旋圆偏振。偏振态的单位矢量为

$$\boxed{\vec{e}_{left} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)/\sqrt{2}} \qquad (8.2.7)$$



讨论：

（1） 看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“k 的方向与 E 的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史上人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间（z）传播而来时的旋转来定义的，也可能是沿着光传播的方向看电场的转动。

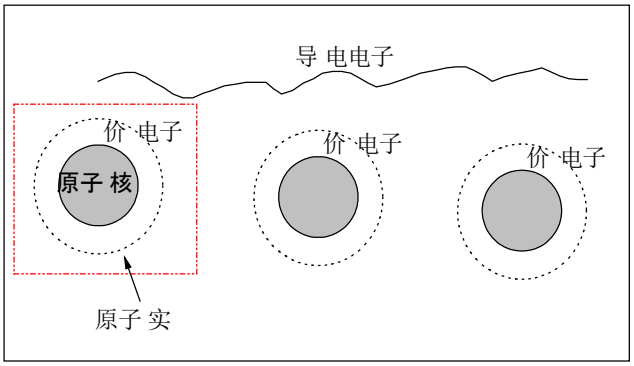
（2） 左右旋圆偏基满足如下正交性：$(\vec{e}_\sigma)^*\cdot\vec{e}_{\sigma'}=\delta_{\sigma\sigma'}$，其中 $\sigma=\pm1$ 代表左右旋。人们可以用这个正交关系将任意偏振矢量分解成左右旋的线性组合。注意，复振幅的正交性关系有取复共轭的操作。

（3） 在目前 Metamaterial 的研究中，一个热门的课题就是如何利用 Metamaterial 来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007), Wujiong Sun, et al, Opt. Lett. 36 927 (2011)”.

§8.3 金属的等效介电常数 - Drude 模型

前面两节我们研究了电磁波在最简单的电磁介质（线性、均匀、局域、各向同性、无色散，本构关系为 $\vec{D}(\vec{r},t)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t)=\mu\vec{H}(\vec{r},t)$）中的传播行为。下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的“本构关系” – 亦即，材料究竟如何针对电磁场响应的，不然，Maxwell 方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此“色彩缤纷”，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系 – 你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

之前，我们在研究导体的静电学性质时，曾利用到体内有自由电子这一性质推出导体体内没有电荷以及电场的结论，亦即导体整体是个等势体，但导体的介电行为并我们没有讨论。后来，我们又说导体在静电学范畴可以等价成一个 $\varepsilon=\pm\infty$ 的电介质。如何将这两种看似相反的结论统一？导体的介电行为到底如何描述？本节，我们就给出一个导电媒质的介电函数的统一图像。从微观图像上看，导体是由（近似）静止不动的排成阵列的原子核，围绕原子核做圆周运动的局域“价”电子（内层电子），以及脱离单个原子核而巡游于整个导体内部的共有的“导电”外层电子等三部分组成。当外场施加到导体中来时，原子核基本不动（因为其质量很大）；“价”电子因为原子核对其有很强的束缚力而被拉离平衡位置，从而形成微弱的极化响应；只有外层的大量的自由电子，几乎不受原子核的作用力，因此可以自由流动而形成“导电”电流。因此，$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 中的 $\vec{j}_f$ 就是由“外层导电电子”贡献，而 ε_r 是由“价带”电子的极化贡献。通常后者非常微弱，作为一级近似忽略，取 $\varepsilon_r=1$。理解了金属的微观图像才能完整理解金属的电磁响应。但请注意：$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ 中的 ρ 应当是总的电荷密度 --- 即包含了导电电子以及带有等量异号电荷的**正电原子实**（注意不是原子核）背景，而价电子紧紧地束缚在原子核周围，作用体现在 ε_r 上，不能算在 ρ 中。



1．色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性**非色散**的电磁介质中的行为，这两类介质的特点是 ε_r,μ_r 均大于 0，且**不依赖于频率**。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是“**局域**”以及“**瞬时**”的

$$D(\vec{r},t)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)\quad \vec{H}(\vec{r},t)=\mu^{-1}B(\vec{r},t) \tag{8.3.1}$$

亦即，**此处、此时**的电磁扰动（由 $\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$ 决定）只会引发**此处、此时**的电磁相响应 $\vec{P}(\vec{r},t),\vec{M}(\vec{r},t)$（进一步决定此处的辅助场 $\vec{D}(\vec{r},t),\vec{H}(\vec{r},t)$）。然而一般来讲，材料中的电荷运动行为非常复杂，因此最后本构关系也非常复杂，**“局域+瞬时”**仅仅是一种理想情形，通常只是材料的真实响应在**长波和低频下**的近似。在最一般情况下，如果只考虑材料的对外场的线性响应，其形式为：

$$\begin{aligned}D(\vec{r},t)&=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{E}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'\\ \vec{H}(\vec{r},t)&=\int\mu^{-1}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{B}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'\end{aligned}. \tag{8.3.2}$$

这意味着在任何时刻 t' 任何地点 $\vec{r}'$ 给体系一个扰动 **E**，体系都有可能在时刻 t 地点 $\vec{r}$ 产生一个响应 **D**（根据因果关系，只有 $t>t'$ 时 $\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')$ 不为 0；但我们可以定义当 $t<t'$ 时通过设 $\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\equiv 0$，从而使得（8.3.2）中对 t’ 的积分可以覆盖全时域）。这当然使得我们求解 Maxwell 方程变得非常复杂。注意，响应函数 ε 只依赖于距离差 $\vec{r}-\vec{r}'$ 和时间差 $t-t'$ 是体系的空间和时间平移不变性的要求。通常我们忽略“空间非局域效应”，即假设体系的响应在空间上为**局域**的。进一步，如果我们只考虑频率确定为 ω 的一支电磁波在此介质中运动，设复场 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$，代入（8.3.1）式可得

$$D(\vec{r},t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t'}dt'=\varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{8.3.3}$$

其中，

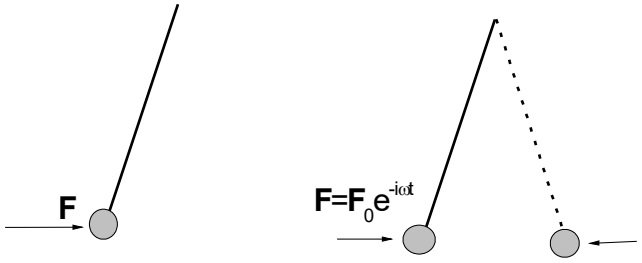
$$\boxed{\varepsilon(\omega)=\int\varepsilon(t-t')e^{-i\omega(t'-t)}dt'=\int\varepsilon(\tilde{t})e^{i\omega\tilde{t}}d\tilde{t}} \qquad (8.3.4)$$

是时域响应函数 $\varepsilon(t-t')$ 经 Fourier 变换后的频域形式。因此，我们注意到 **D** 函数也是单频的，携带 $e^{-i\omega t}$ 的时间变化因子。将其改写成 $D(\vec{r},t)=\vec{D}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$，其中 $\vec{D}_\omega(\vec{r})$ 为该频率下激励下 D 函数的空间变化部分，一般为复数，则本构关系变为

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D}_\omega(\vec{r})&=\varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{r})\\ \vec{B}_\omega(\vec{r})&=\mu(\omega)\vec{H}_\omega(\vec{r})\end{aligned}} \qquad (8.3.5)$$

上式中对磁导率的推导与介电常数的推导类似。**因此，无论再复杂的电磁介质，当被单频电磁波激励时，其本构关系变成与常规电介质一样的**（当然是在线性响应的前提下）。只不过，此**种情形下 ε，μ 的数值依赖于频率值**，这种行为我们称为“色散”，ε，μ 依赖于频率的电磁介质我们称为“色散”介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在 t 时刻给它一个推动力，它未必立即产生反应。但是，当我们对秋千施加一个随时间谐变的力，最终，这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动，无论最初多么不情愿。



金属（更广义讲是导电介质）是非常重要的一类电磁介质，其对电磁波的响应主要以自由电流的形式展现。静态时金属的本构关系就是欧姆定律 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$。当外电场随时间谐变时，即 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$，类似受迫振动，电流 $\vec{j}$ 也带有时间因子 $e^{-i\omega t}$，即 $\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{j}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$。此时，可定义频域的电导率 $\sigma(\omega)$

$$\boxed{\vec{j}_\omega(\vec{r})=\sigma(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{r})} \qquad (8.3.6)$$

原则上讲，$\sigma(\omega)$ 的严格求解应当借助于量子力学。对良导体，通常可以把体系看作电子自由地在晶格正离子组成的背景中运动 – 此即是自由电子气模型，也就是高能物理中所谓的等离子体模型。在常温下，我们可以用经典理论借助等离

子体模型来求解金属的$\sigma(\omega)$。

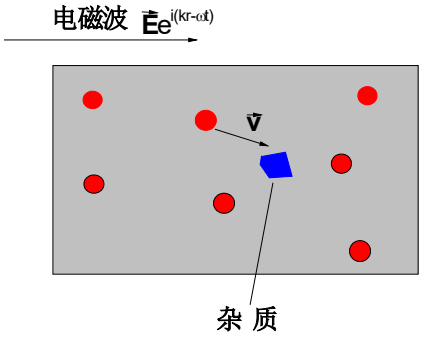
2．金属的有效电导率

当有一束单频的电磁波施加在等离子体中时，空间有电场$\vec{E}(\vec{r},t)$存在，则电子将受到电场力$e\vec{E}$。同时，电子运动时将受到其他粒子（声子，杂质等）的散射而丢失能量及动量。描述这种**散射力**的最简单的模型是“迟逾时间近似”，即**散射力**可写成

$$\vec{F}_{sca}=-\frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{8.3.7}$$

这个式子的物理意义是：电子平均τ时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。因此，电子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}=e\vec{E}-\frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{8.3.8}$$



将上述公式推广至复场表示，假设入射电磁场为单频电磁波$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，则此时电子的运动速度也应该取复数形式$\vec{v}(\vec{r},t)=\vec{v}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$。通常电磁波的波长远远大于电子的运动范围，因此可以近似认为：**电子来回时感受到的电场不发生显著变化**，$\vec{E}(\vec{r},t)\approx\vec{E}_0e^{-i\omega t}$，此即为**长波近似，*相当于我们忽略了非局域响应*。**在这个近似下，电子将在单频恒定外场力的作用下做“受迫振动”，电子运动的复场试解可进一步简化为 $\vec{v}(t)\approx\vec{v}_0e^{-i\omega t}$（如果不做长波近似，电子在运动的过程中将感受到外力的变化，导致求解 8.3.8 比较麻烦）。将电场的形式和速度的试解代入（8.3.8），解之可得

$$\vec{v}_0=\frac{e/m}{-i\omega+1/\tau}\vec{E}_0 \tag{8.3.9}$$

因此，电子的运动速度为

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0e^{-i\omega t}=\frac{e/m}{-i\omega+1/\tau}\vec{E}_0e^{-i\omega t}=\frac{e/m}{-i\omega+1/\tau}\vec{E}(t) \qquad (8.3.10)$$

与之前一样，这里速度的复数形式只是为计算方便（基础是方程是线性方程！），真正有物理意义的是场量的实部。根据电流密度的定义，我们发现

$$\vec{j}(\vec{r},t)=n_e e\vec{v}(\vec{r},t)=\frac{n_e e^2/m}{-i\omega+1/\tau}\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (8.3.11)$$

式中 n_e 为单位体积内的电子数目。将（8.3.11）与（8.3.6）对比，可得电导率为

$$\boxed{\sigma(\omega)=\frac{n_e e^2/m}{-i\omega+1/\tau}} \qquad (8.3.12)$$

对此做如下讨论：

（1） 当 $\omega\to 0$ 时，上式应当回到直流情况下金属的电导率 σ_c。将（8.3.12）取 $\omega\to 0$ 的极限，有 $\sigma_c=\frac{n_e e^2}{m}\tau$。这其实就是迟逾时间近似下金属直流电导率的结果，**故，人们常用金属的直流电导率的实验值来反过来确定参数 τ。**

（2） **复数形式电导率不能只取实部！其实部、虚部都有明确的物理意义！**对场量（如 $\vec{E},\vec{j},\vec{v}$）我们才取其实部讨论，对电导率这个中间产物我们不可以这样做。比如有一交变电场，复场表示为：$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$，其中 $\vec{E}_0$ 为实数。此时体系中激发的电流的复场表示为：$\vec{j}=\sigma(\omega)\vec{E}_0e^{-i\omega t}$。**考虑真实的电流为复场的实部：** $\mathrm{Re}(\vec{j})=\mathrm{Re}(\sigma(\omega))\vec{E}_0\cos(\omega t)-\mathrm{Im}(\sigma(\omega))\vec{E}_0\sin(\omega t)$，**因此电导率的实部、虚部都有贡献！可以证明 $\sigma(\omega)$ 的实部对应着实际的欧姆能量耗散，一个周期平均下来，电场对电流的做功只有 $\mathrm{Re}(\sigma(\omega))$ 对应的项不为 0，而 $\sigma(\omega)$ 的虚部对应的瞬时做功不为 0，但平均值为 0，总体并不对应能量耗散 - 这与直流电导率有着本质的不同！**

（3） 事实上，Fourier 分析表明只有在复场表示下（即以 $e^{-i\omega t}$ 为基）才可以定义响应函数（如 $\varepsilon(\omega),\mu(\omega),\sigma(\omega)$ 等，参考（8.3.3）-（8.3.5）的推导），对实场形式（$\cos(\omega t),\sin(\omega t)$）无法得到线性正比关系，因此无法定义响应函数！换言之，纯数学语言来说：只有 $e^{-i\omega t}$ 为单频，而 $\cos(\omega t),\sin(\omega t)$ 都非单频场。

（4） 对一般良导体我们发现 $\tau \sim 10^{-14} s$，因此

（A）**在 GHz 以下的频段（微波）**，$1/\tau >> \omega$，此时 $\sigma(\omega) \approx \sigma_c$，即有效电导率就是静态时的电导率。这里的原因是电子碰到一次散射的平均时间 τ 远小于电场发生变化的时间间隔 $T \sim 1/\omega$，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并没有什么明显不同。

（B）**在可见光频段**，$1/\tau << \omega \sim 10^{15} s^{-1}$，此时 $\sigma(\omega) \approx i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}$，亦即，复数电导率的实部（对应耗散部分）远小于虚部（非能量耗散部分）。这里的物理图像是，电子在高频电场的作用下来回运动，还没有碰到散射（需要费时~τ）就已经折返。因此，此时电子的行为与静态时极不相同，其主要行为是与电场相互交换能量（表现为电导率呈现虚部，电场不对电流做功），而不是与杂质碰撞耗散能量。

3．金属有效介电函数

有了金属的有效电导率，我们可以进一步导出其**有效介电函数**。根据 Maxwell 方程组的第 4 条方程，在单频条件下，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \left[\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_v\right]\vec{E} \qquad (8.3.13)$$

我们在本节开始时明确讨论了以上各项的来源：1）金属中原子的外层电子（导电电子）在外场的作用下形成的“自由电流” $\vec{j}_f$；2）金属中原子内层电子（价电子），由于它们被紧紧地束缚在原子核周围，在外场的作用下只会（与原子时一起）为体系贡献微弱的介电响应（我们用 ε_v 来表示价带电子的介电）。

在静电静磁甚至是准静的条件下，自由电子和束缚电子的贡献截然不同，需要明确分开考虑。然而在交变条件下，电流和电场一样随着时间协变。而且所谓自由电子也不再自由，必须在交变场的作用下做“折返跑”。从这个意义上讲，传导电流也变成了束缚在金属中的响应电流。而频率越高，这种折返跑导致“自由电流”越来越成为“束缚电流”。因此，此时可以将金属也看成一种有效电介质，把传导电流作为金属的束缚电流来考虑。对一个电介质，（8.3.13）应当写成

$$\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \qquad (8.3.14)$$

两式比较可得金属的有效介电常数为

$$\boxed{\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_0\varepsilon_v+i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_v+i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}} \qquad (8.3.15)$$

将（8.3.11）代入上式，即得金属的有效介电常数

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega)=\varepsilon_v-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i/\tau)}} \qquad (8.3.16)$$

其中，

$$\omega_p=\sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}} \qquad (8.3.17)$$

是个只与金属性质有关的常量，叫做等离子共振频率。很多时候我们会忽略价带电子的极化响应，即，ε_v=1，因为导电电子的贡献要比它重要的多。（8.3.16）即是著名的 Drude 模型，它非常好地描述了良导体从直流（$\omega=0$）到紫外（$\omega>10^{16}Hz$）的整个频谱的介电行为。ω_p描述的是自由电子气在外场下的一个集体震荡共振行为 – 显然密度越大，质量越小，这个集体振动的频率就越大。良导体的ω_p大都在紫外频区。

我们讨论两种典型情况下的金属的介电行为：

（A） GHz 及以下 -

$$\varepsilon_r(\omega)\approx -const.+\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \qquad (8.3.18)$$

此时金属的ε_r具有一个极大的正的虚部，以及一个负的实部（不随频率变化）。（**注意：此时不能直接把（8.3.16）中分母中的ω 设为 0，而需要将整个公式展开成实部、虚部，然后再取$\omega\to 0$。**）

（B） 光波段：

$$\varepsilon_r(\omega)\approx 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \text{（对金、银等良导体），} \qquad (8.3.19)$$

（C） 从光波段到 GHz，$\varepsilon_r(\omega)$有一个由负实部主导到正的虚部主导的一个转变。

§8.4 电磁波在导电介质中的传播

上节中我们系统介绍了金属的有效介电函数$\varepsilon_r(\omega)$，下面我们研究电磁波在导电介质中的传播。原则上，我们需要在金属中求解如下时域下 Maxwell 方程（此处，忽略价带电子的贡献，将导电电子单独考虑）

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E})=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{8.1.1}$$

而针对一个特定频率ω，所有的场量均以$e^{-i\omega t}$形式随时间谐变，

$$\left(\vec{E}(\vec{r},t),\vec{H}(\vec{r},t),\rho(\vec{r},t),\vec{\mathrm{j}}(\vec{r},t)\right)=\left(\vec{E}(\vec{r}),\vec{H}(\vec{r}),\rho(\vec{r}),\vec{\mathrm{j}}(\vec{r})\right)e^{-i\omega t} \tag{8.4.1}$$

将**金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中（参考（8.3.14）式）**，**并利用连续性方程**$\nabla\cdot\vec{j}+\partial\rho/\partial t=0$，**可以证明** Maxwell 方程针对时谐场的形式为：

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varepsilon(\omega)\vec{E})=0 \\ \nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \end{cases} \tag{8.4.2}$$

对（8.4.2）中第 2 式同时作用$\nabla\times$，并利用$\nabla\cdot\vec{H}=0$，可得

$$-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{H} \tag{8.4.3}$$

我们立刻发现这个针对单频的“时谐”Maxwell 方程和无色散介质中磁场满足的方程（8.1.5）完全一样！只不过这时“介电常数”依赖于频率，只针对目前的所设的频率正确。（8.4.3）的解是平面波，$\vec{H}(\vec{r})=\vec{H}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$（此时只需考虑空间变化部分，时间部分总是$e^{-i\omega t}$），代入可解得电磁波传播的色散关系

$$\boxed{k^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_r(\omega)} \tag{8.4.4}$$

这与一般介质中的色散关系全一样，除了此处ε_r是频率的函数，因此只要知道了$\varepsilon_r(\omega)$就可以求解（8.4.4）得到电磁波传播的行为。注意，上面的讨论是一般成立的，对任何***线性各向同性介质***，只要体系在频域的本构关系$\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{\mathrm{E}}(\omega)$已知，我们就可以利用（8.4.4）式电磁波传播的色散关系。下面考虑几个特殊情形。

习题

习题 **P．205， 8.3 （这里的金属指在 GHz 以下的良导体）**

补充题：

1. 将线偏振的光波 $\vec{E}(\vec{r},t)=E_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$ 分解成左旋光和右旋光的叠加。
2. 针对课件中讨论的导电介质的 3 种情形，分别写出当一支初始振幅为 $E_0\vec{e}_x$ 的平面电磁波在 3 种介质中沿 z 方向传播时，能流密度的时间平均值（$\left\langle \vec{S}(z,t)\right\rangle$），以及在 z 点附近单位体积内单位时间产生的焦耳热的时间平均值 $\left\langle \frac{d}{dt}Q(z,t)\right\rangle$。
3. 利用连续性方程 $\nabla\cdot\vec{j}+\partial\rho/\partial t=0$，证明时谐条件下电磁场满足（8.4.2）及（8.5.8）。
4. Ag 的电子密度为 $n_e=5.88\times10^{28}m^{-3}$，静态电导率为 $\sigma_c=6.17\times10^7(\Omega\cdot m)^{-1}$，计算迟逾时间 τ 和等离子共振频率 ω_p；分别在 $f=1GHz$，$\lambda=1.5\mu m$，$\lambda=550\mu m$ 三个条件下计算其相对介电常数。
5. 在交变条件下，计算电场对金属中的电流的做功（参考课件中 Eq.(2.1.2)）的瞬时值及时间平均值，证明复电导率 σ_c 的虚部不对应体系的能量耗散，而只有 σ_c 的实部才对应能量耗散。（思考）进一步讨论：电导率的虚部不对应耗散，那对应什么样的物理过程？

思考、阅读文献，并整理成 Note

1）课件上推导的是金属的“局域”的介电函数的行为。然而实际情况下，一束电磁波照过来，电磁场应当是 $\vec{E}_0e^{i(kr-\omega t)}$，电场并非均匀场。为什么我们可以设电场为均匀场来计算 ε？这样做有什么后果？另外，我们并没有考虑磁场带来的 Lorentz 力？你预期考虑了 Lorentz 力之后结论会有何不同？

2）仔细讨论复电导率的实部和虚部的物理涵义。若 $\sigma(\omega)$ 的虚部不对应能量的耗散，那么它的作用到底是什么？能否具体地讨论电磁场与电子气之间的能量交换。

3）查阅参考书，计算在可见光照射下，金属中电子的典型“活动范围”。由此理解为什么高频下“自由电子”其实不再自由，而我们通常把自由电子作为金属的束缚电子来处理。

4）利用网络查看一些原始文献及书籍，弄清楚实验上如何测量各种金属的电导率（介电函数）以及确定 Drude 模型中的各个参数的。

5）之前我们推导出准静近似成立的频率条件是 $\omega<<\omega_c=\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0}$（Lect-16，(6.1.1)），并指出

这个条件是个过于松的条件。在 Drude 模型的框架下探讨ω_c的物理意义，并讨论为什么（6.1.1）式不严格，严格的条件又是什么？