第十六讲

上次课：

- 偏振

  $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$ → 线、椭圆、圆偏振（左右旋）

- 色散介质的响应原则为时域非瞬时，$D(\vec{r},t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(\vec{r},t')dt'$

  在单频谐变电场（复场，$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}$）激励下，$\vec{D}_\omega=\varepsilon(\omega)\cdot\vec{E}_\omega$

- **金属介电函数的 Drude 模型：**

$$\varepsilon_r(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i/\tau)}\approx\begin{cases}i\dfrac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}, & \le \text{GHz}\\ 1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2, & visible\end{cases}$$

  高频下“自由电流”折返跑，成为束缚电流

  GHz 以下-极大的正虚部；光波段-负实数

- $k^2=\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_r(\omega)$

---

1. 良导体在 GHz 及以下频段

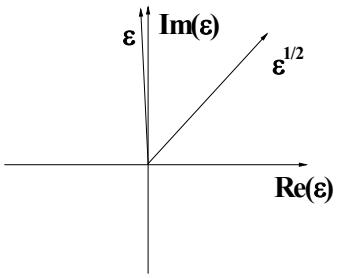
A. 复波矢

良导体，如金银铜等，在 GHz 及以下频段的有效介电常数为

$$\varepsilon_r(\omega)\approx -const.+\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\approx\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \qquad (8.4.5)$$

将（8.4.5）式代入（8.4.4）可得

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\approx\sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}\frac{\omega}{c}=(1+i)\alpha \qquad (8.4.6)$$



其中

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sigma_c\mu_0\omega}{2}} \qquad (8.4.7)$$

则

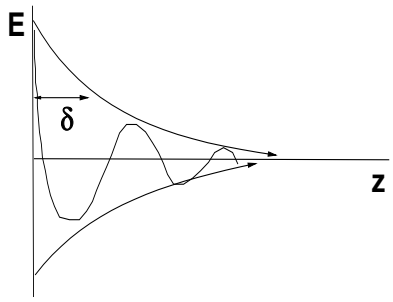
$$\vec{k}=(1+i)\alpha\cdot\vec{e} \qquad (8.4.8)$$

其中 $\vec{e}$ 任意单位矢量（传播方向）。注意很多教材上假设 $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}$，这其实并不完全正确。不同，其实 $\varepsilon_r(\omega)$ 的实部取 1 或者一个负的数（真实情形）并不影响最后复波矢解的形式 – 当 $\mathrm{Im}(\varepsilon_r)>>\mathrm{Re}(\varepsilon_r)$ 时，解就是（8.4.6）式的形式，根本与 ε_r 的实部无关！（参看右上图）。

将（8.4.8）带入（8.4.1），则电磁波在金属中的电场（假设传播方向为 z 方向）为

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-\alpha z}e^{i(\alpha z-\omega t)} \tag{8.4.9}$$

当然横波条件要求 $\vec{E}_0$ 的方向在 xy 平面。可见，此时平面波的振幅沿传播方向指数衰减，*但注意这里电场是一边衰减一边继续振荡的*。



振幅衰减到 $r=0$ 处的 $\frac{1}{e}$ 倍的距离 $\frac{1}{\alpha}$ 称为**透入深度（也叫趋肤深度）**，定义为

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\sigma_c\mu\omega}} \tag{8.4.10}$$

因此电磁波不能渗入在导电介质的内部，而是很快在表面的一个厚度为 δ 的薄层内衰减掉。与此相对应：金属上产生的交流电流一定也只是局域在表层的这个薄层内 – 这个结论我们曾在讨论准静态近似下的电流的趋肤效应时得到过。

Tips：这种衰减表示电磁波的能量有消耗。但对良导体，$\sigma_c\to\infty,\delta\to 0$，入射的电磁波无法进入金属的体内。更重要的是，因为 $\sigma_c\to\infty$ 导致金属的阻抗趋于 0，与介质的完全失配，这种情形下电磁几乎被 100%反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在 GHz），可以看作理想导体。

B．电磁场强度之间的关系

由（8.4.2）式中的第 2 式可得

$$\vec{B}_0=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0=\frac{\alpha}{\omega}(1+i)\vec{e}\times\vec{E}_0=e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\sigma_c\mu_0}{\omega}}\vec{e}\times\vec{E}_0 \qquad (8.4.11)$$

良导体内的电磁波有如下重要特点：

（1）与介质中的电磁波 $\vec{B}$、$\vec{E}$ 之间同相位不同，此处 $\vec{B}$、$\vec{E}$ 之间有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位差，趋向导体内部时，而正是这种相位差导致场在传播时呈现*既振荡又衰减的形式*。

（2）良导体内部的电磁能量是以磁场能形式存在的：

$$\langle U_B\rangle\sim\frac{1}{4\mu_0}|B_0|^2=\frac{\sigma_c}{4\omega}|E_0|^2=\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\varepsilon_0}{4}|E_0|^2\right)>>U_E \qquad (8.4.12)$$

这种趋势随着频率的减小增大。当 $\omega=0$ 时，磁能是电能的无限大倍，因此 $\vec{E}$ 只能为 0 --- 此时电磁场能量只以磁能的形式出现。*这与静电时金属内部不存在静电场（但可以存在静磁场）的结果一致*。导电介质中电磁波的传播特性如图 8.3 所示。

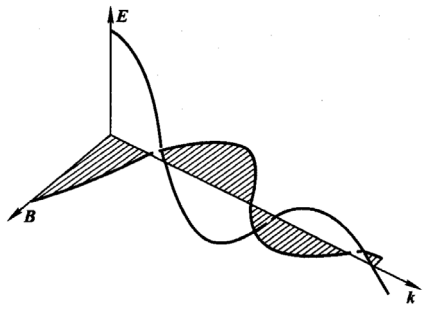


图 8.3

注意：

（1）这里 $\langle U_E\rangle\sim\frac{\varepsilon_0}{4}|E_0|^2$ *指的是纯粹的电场的能量，并没有把“传导电流”携带的能量（其机械能及与电磁场的相互作用能）算上。*

（2）对色散介质，利用 $U_E\sim\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\sim\frac{1}{2}\varepsilon(\omega)|E|^2$ *计算介质中电磁场的总能量是不对的，否则你就得到负能量这个荒谬的结论。色散介质中的能量是个复杂的问题，要得到完整的答案，请参考 Landau 的书。*

2．良导体在光波段（等离子体中的光波）

在光波段，金属的有效介电常数为$\varepsilon_r(\omega)\approx 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$，这个模型也被广泛应用于研究其他自由电荷组成的等离子体（唯一的区别是电荷密度不同导致ω_p^2不同）。将其带入色散关系可得

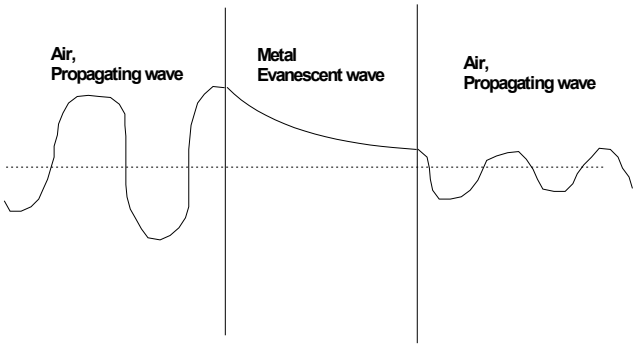
$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})=\frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2) \qquad (8.4.13)$$

对此我们作如下的讨论：

(1) 当$\omega<\omega_p$时，k为一纯虚数，

可写成$k=i/\delta$，其中

$$\delta=\sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2-\omega^2}} \qquad (8.4.14)$$

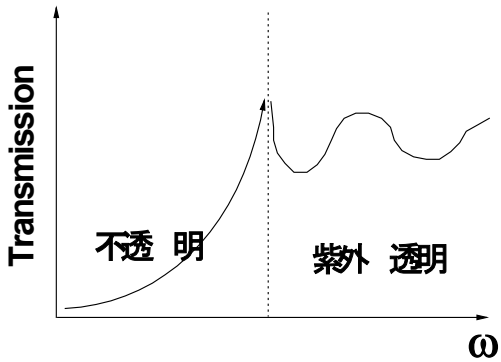


此时金属中的***电磁场是纯粹的指数衰减***的，$E\sim E_0e^{ikr}=E_0e^{-r/\delta}$，与（8.4.9）式表示的一边衰减一边振荡（传播）不同。这种波称为衰逝波，或者叫消逝波，倏逝波等 （Evanescent wave）。当电磁波由空气入射到金属上时，进入金属后电磁波后的透入深度为δ。若金属为半无限大，则电磁波完全不能通过金属，因此将被反射回去；若金属板为有限厚度，则会有衰逝波隧穿过去。δ越大，则隧穿过去的电磁波就越多（如右图所示）。**这种效应非常类似量子力学中的隧穿效应**，而在这里金属（$\varepsilon_r<0$）就类比于量子力学中的势垒，电介质（$\varepsilon_r>0$）类比于势阱。

(2) 磁场为

$$\vec{B}(z,t)=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times E_0\vec{e}_xe^{-z/\delta}e^{-i\omega t}=\frac{i}{\omega\delta}E_0\vec{e}_ye^{-z/\delta}e^{-i\omega t} \qquad (8.4.15)$$

这里磁场与电场有$\pi/2$的相差，与介质、良导体在 GHz 等情形均不相同！这个相位的不同，造成了能流形式在各种介质中的不同！（参考作业题）



（3）当$\omega=\omega_p$时，$\delta\to\infty$，此时隧穿效应达到极值。

(4) 当$\omega > \omega_p$，$0 < \varepsilon_r < 1$，$n = \sqrt{\varepsilon_r} < 1$，此时金属（或是等离子体）是比真空还要光疏的介质，光波可以在其中传播。但因为折射率与空气毕竟不同，所以此时一个有限厚度的金属板对电磁波仍然有反射，造成透射率的降低。因此，$\omega = \omega_p$就定义了一个由不透明到透明的等离子共振带边，实验上常利用这个现象来探测金属的等离子体共振频率。

（5）金属在 GHz 和在光波段均可以很好的反射电磁波，但机理及表现形式完全不同。前者是靠金属的介电常数的虚部，而后者靠的是负的介电常数。

Tips：$\omega = \omega_p$时。$\varepsilon_r \to 0, n \to 0$，我们发现体系具有许多奇异的特性。比如，根据（8.4.15），$\vec{B} \to 0$，也就是此时体系内部只存在电场。另外，这种隧穿透明现象与体系的厚度无关，这一点又与光学中法布里-帕罗效应很不相同。尽管现在研究的金属只能在紫外（ω_p）具有这个性质，基于 Metamaterials，其实我们可以在任意频段实现这种奇异材料。这种材料叫 epsilon-near-zero (ENZ)或者 zero-index-material (ZIM), 是目前非常热的前沿研究课题。

3．非良导体

我们下面研究另一类典型介质 --- 导电性能不好的导电媒质。比如一些电介质，其介电行为主要是由价带电子贡献的，表现为具有正的实数介电常数ε_r。然而通过掺杂导电电荷，其又有可能具有很小的电导率σ_c。通常这些导电电荷的平均自由程很小，因此在一般考虑的频率下总有：$\omega << 1/\tau$，此时σ_c主要表现为实数形式---即直流电导，而σ_c的虚部（由掺杂的导电电子气的等离激元共振决定）非常小可以忽略。将价带电子和掺杂电子两种贡献叠加，我们可以把这种物质的复介电函数写成

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r + i\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} \qquad (8.4.16)$$

因为电导率很小，$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0 \omega} << 1$，（8.4.16）意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。将（8.4.16）带入色散关系（8.4.4）中可得

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \beta + i\alpha \approx \frac{\omega}{c}\left(\sqrt{\varepsilon_r} + i\frac{\sigma_c/\varepsilon_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\omega}\right) \qquad (8.4.17)$$

在这个介质中传播的平面电磁波的解为：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{e}_x E_0 e^{-\alpha x}e^{i(\beta z-\omega t)} \tag{8.4.18}$$

显然，电磁波在这种介质中的传播性质又与良导体的两种情况均不同。其与真空中电磁波的性质相仿，只是波在传播的过程中有少量能量耗散，**表现在振幅随传播缓慢衰减**。注意到$\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}$即是体系的有效折射率，**而上面的分析显示折射率的虚部对应着电磁波在体系中的耗散 --- 这一点与电导率的实部恰好对应**（注意$\tilde{\varepsilon}$和σ的关系（8.3.15））。

Tips：研究电磁媒质中电磁波的特性的范式：

本构关系（微观理论） → 色散关系 → 本征态（电场、磁场关系，偏振…）

§8.5 旋光介质中的电磁波

之前我们研究了**普通电介质**和**导电介质**中电磁波的传播特性。这两种媒介的区别是前者通常为**非色散介质**，后者是**色散介质**；共同特性*是它们都是各向同性介质*。下面我们将研究一种*各向异性色散介质 – 旋光介质*，并且考察其中电磁波的传播特性。当对等离子介质施加静磁场时，这类介质就叫做旋光介质。比如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者处于恒定磁场中的金属，都属于此类介质。要了解电磁波在这种介质中的传播行为，根据我们梳理出的研究范式，我们须首先研究材料的**本构关系**，然后基于 Maxwell 方程求解电磁在其中传播的**色散关系**，进而求解该传播模式的**振幅特性**。

1．旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场$\vec{B}_0$中的自由电子气。忽略杂质的散射项，在外加电场 **E** 的驱动下，电子的运动方程为

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=e\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}_0\right] \tag{8.5.1}$$

其中，设静磁场$\vec{B}_0=B_0\vec{e}_z$的强度远远大于电磁场中的磁场（**因此不考虑电磁波中的磁场分量对电子的洛伦兹力，见思考题**），外电场随时间谐变（$\vec{E}(t)=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$，

在长波近似下忽略电场的空间变化）。显然，在外场的驱动下，电子的运动速度也具有 $e^{-i\omega t}$ 因子。设 $\vec{v}(t)=\vec{v}_0 e^{-i\omega t}$，其中 $\vec{v}_0$ 是复振幅，则(8.5.1)式的 3 个分量方程可写为

$$\begin{aligned} -i\omega v_{0x} &= \frac{e}{m}E_{0x} + \frac{e}{m}v_{0y}B_0 \\ -i\omega v_{0y} &= \frac{e}{m}E_{0y} - \frac{e}{m}v_{0x}B_0 \\ -i\omega v_{0z} &= \frac{e}{m}E_{0z} \end{aligned} \qquad (8.5.2)$$

定义 $\omega_B = \frac{|e|B_0}{m} = -\frac{eB_0}{m} > 0$ （此处我们的定义是 $e<0$），物理意义是电子在垂直与磁场的 xy 平面内做圆周运动的圆频率，代入（8.5.2）并解之可得

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0y} &= \frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0y} - \omega_B E_{0x}}{\omega^2 - \omega_B^2} \\ v_{0z} &= -\frac{eE_{0z}}{im\omega} \end{aligned} \qquad (8.5.3)$$

将（8.5.3）代入电流密度公式 $\vec{j} = n_e e\vec{v}$，可得电流密度的形式：

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{n_e e^2}{m}\frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2}e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}\left(i\omega E_x + \omega_B E_y\right) \\ j_y &= \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}\left(i\omega E_x - \omega_B E_y\right) \\ j_z &= -\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega}E_z \end{aligned} \qquad (8.5.4)$$

我们发现电流和电场之间的关系满足一个广义的欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ij}E_j, \quad or, \quad \vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{E} \qquad (8.5.5)$$

其中电导率是一个<u>各向异性的张量</u>，其具体形式为

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_p^2\varepsilon_0}{\left(\omega^2 - \omega_B^2\right)}\begin{bmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\left(\omega^2 - \omega_B^2\right)}{i\omega} \end{bmatrix}. \qquad (8.5.6)$$

有了电导率张量，我们可以进一步求出介质的有效介电常数。此时，Maxwell 第

四条方程（在单频谐变场下）为

$$\nabla\times\vec{H}=(\vec{\sigma}(\omega)-i\omega\varepsilon_0)\vec{E}=(\vec{\sigma}(\omega)-i\omega\varepsilon_0\vec{I})\cdot\vec{E}=-i\omega\varepsilon_0(\vec{I}+i\frac{\vec{\sigma}(\omega)}{\omega\varepsilon_0})\cdot\vec{E}$$

在交变电场的驱动下“传导电流”不再“自由”，可以看成金属的束缚电流。因此，可以将体系看作一块电介质，相应的方程应改写为$\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r(\omega)\cdot\vec{E}$，其中$\vec{\varepsilon}_r(\omega)$为该体系的有效（复）介电函数。两式对比可得

$$\vec{\vec{\varepsilon}}_r(\omega)=I+i\frac{1}{\varepsilon_0\omega}\vec{\vec{\sigma}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0\\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$$

显然，这种介质是**各向异性的色散介质**，其等效介电函数张量的矩阵元满足：

$$\varepsilon_1=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_B^2},\quad \varepsilon_2=\frac{\omega_p^2\omega_B}{(\omega^2-\omega_B^2)\omega},\quad \varepsilon_3=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\qquad(8.5.7)$$

注意：当$B_0=0$时，$\varepsilon_2=0,\ \varepsilon_1=\varepsilon_3=1-\omega_p^2/\omega^2$，体系回到各向同性的等离子体。*所以磁场对等离子体的影响为：1）使得体系的有效介电函数变成各向异性，2）而且其非对角元素为纯虚数（我们之前讨论过介电常数的虚部对应能量的耗散，这里还是这样的吗？为什么？）*。具有类似（8.5.7）式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异（见下一节的分析）。与此相对应，若磁导率矩阵$\vec{\vec{\mu}}_r(\omega)$具有（8.5.7）式，则体系称为“旋磁材料”。

Tips: 公式（8.5.5-6）展示该体系具有非对角的欧姆响应，在直流下这正是霍尔效应的显现。

补充题：

1） 在弛豫时间近似考虑杂质散射的影响，重新推导有磁场存在时等离子体的本构关系（$\vec{\vec{\sigma}}(\omega),\vec{\vec{\varepsilon}}_r(\omega)$）。

****
思考题（供有余力同学选作）
****

1） 在弛豫时间近似下得到有磁场存在时等离子体的本构关系（$\vec{\vec{\sigma}}(\omega),\vec{\vec{\varepsilon}}_r(\omega)$）后，讨论

当直流（$\omega \to 0$）条件下的$\ddot{\sigma}$的形式及其所对应的物理。

2）查阅资料（Landau《连续介质电动力学》270 页以及《统计物理 II》第 4 章），搞清楚一个铁磁介质的有效磁导率的形式。

3）上网翻阅资料，查找有关 ENZ 和 ZIM 的研究结果，结合课上内容，总结成 Note。

4）根据（8.5.8）式，磁场下金属的有效介电常数的 xy 分量$\varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}$与 z 分量$\varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$有很大的不同，前者对应 Lorentz 模型，后者对应 Drude 模型。Lorentz 模型是研究绝缘体的电磁响应的一个好的模型，它的核心是将束缚电子与原子核之间的相互作用力想象成一个弹簧。而而 Drude 模型是研究自由电子气的。问题是，为什么加了磁场之后横向运动变成了绝缘体行为了？这里有什么物理？你能否用动画展示电子在外场驱动下的运动行为，从而看到点端倪？