第十七讲

上次课：

- **三种典型导电媒质中的电磁波**

  1）良导体（GHz）：$k=\alpha(1+i)$ ； $\vec{E},\vec{B}$ 差 $\pi/4$；电磁波一边传播一边衰减

  2）良导体（可见光）：$k=\alpha i$ ； $\vec{E},\vec{B}$ 差 $\pi/2$；电磁波只衰减不传播

  3）掺杂绝缘体：$k=\beta+\alpha i$ ； $\vec{E},\vec{B}$ 几乎同相位；电磁波传播过程中微微衰减

- **均匀体材料中电磁波传播性质的研究范式**

  本构关系（微观理论） → 色散关系 → 本征态（电场与磁场间关系，偏振…）

  旋光介质的本构关系： $\vec{D}_\omega=\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r(\omega)\cdot\vec{E}$ ， $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r(\omega)=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0\\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$

其矩阵元的形式为：

$$\varepsilon_1=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_B^2},\quad \varepsilon_2=\frac{\omega_p^2\omega_B}{\left(\omega^2-\omega_B^2\right)\omega},\quad \varepsilon_3=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (8.5.7)$$

注意：当 $B_0=0$ 时， $\varepsilon_2=0$， $\varepsilon_1=\varepsilon_3=1-\omega_p^2/\omega^2$，体系回到各向同性的等离子体。*所以磁场对等离子体的影响为：1）使得体系的有效介电函数变成各向异性，2）而且其非对角元素为纯虚数（我们之前讨论过介电常数的虚部对应能量的耗散，这里还是这样的吗？为什么？）*。具有类似（8.5.7）式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异（见下一节的分析）。与此相对应，若磁导率矩阵 $\overleftrightarrow{\mu}_r(\omega)$ 具有（8.5.7）式，则体系称为“旋磁材料”。

2．旋光介质中的电磁波本征态

下面我们研究此类材料中的电磁波特性。注意到该介质是一个**各向异性色散**介质，前面的方法不再适用。**下面介绍的方法其实是计算各向异性电磁材料中的波的行为的一个通用方法**。首先，因为介质是色散的，必须在频域下求解。其次，介质是均匀的，具有平移不变性（各向异性与均匀性是两个不同的概念），因此可取试解为平面波：$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$， $\vec{H}=\vec{H}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$（$\vec{E}_0$， $\vec{H}_0$ 为常矢量）。将其带

入原始 Maxwell 方程组（注意到此时 $\vec{\varepsilon}_r(\omega)$ 为一张量），则 Maxwell 方程变为：

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E})=\rho_f \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{k}\cdot\left(\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0\right)=0 \\ \vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\mu_0\vec{H}_0 \\ \vec{k}\cdot\vec{H}_0=0 \\ \vec{k}\times\vec{H}_0=-\omega\varepsilon_0\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0 \end{cases} \qquad (8.5.8)$$

在推导（8.5.8）时，我们已经将原始 Maxwell 方程中“自由电荷/电流”看成“束缚电荷/电流”（因为高频下它们不再自由）从而将其贡献“吸收”到有效介电函数 $\vec{\varepsilon}_r$ 中去。一般条件下求解（8.5.8）相当复杂（参考习题）。下面做些简化，考虑最简单的一种情况：A）假设 $\omega>\sqrt{(\omega_p)^2+(\omega_B)^2}$；$\omega_p>>\omega_B$，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 都是正实数，且 $\varepsilon_1>>\varepsilon_2$；B) $\vec{k}=k\hat{e}_z$。由第一式及 $\vec{\varepsilon}_r$ 的形式，可得 $E_{0z}=0$，即 $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$，**因此在此条件下电磁波仍然为横波！（*思考题：一般的各向异性介质中的电磁波还必然是横波吗？请讨论*）**由第二、四式可得

$$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)+\omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{\vec{\varepsilon}}_r\cdot\vec{E}_0=0 \qquad (8.5.9)$$

整理可得（利用 $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$）

$$\boxed{k^2\vec{E}_0=k_0^2\vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0} \qquad (8.5.10)$$

其中 $k_0=\omega/c$ 为真空中的波矢。（8.5.10）看上去与各向同性介质中的电磁波传播的色散关系极为类似，唯一的区别是此处 $\vec{\varepsilon}_r$ 为一张量。但也正因为这一特征，**容易证明 $\vec{E}_0\|\vec{e}_x$ 以及 $\vec{E}_0\|\vec{e}_y$ 的线偏振光波都不是（8.5.10）的解。那么此时电磁波的偏振态到底应当是什么？**考虑到 $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$，则一般情况的解为 $\vec{E}_0=E_{0x}\hat{x}+E_{0y}\hat{y}$，其中 E_{0x},E_{0y} 为未知的复数。代入（8.5.10），写出分别沿 x 和 y 方向的分量形式，可得 2 个方程。将这两个方程写成矩阵的形式，有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1k_0^2-k^2 & i\varepsilon_2k_0^2 \\ -i\varepsilon_2k_0^2 & \varepsilon_1k_0^2-k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}=0 \qquad (8.5.11)$$

解（8.5.11）式等价于对角化相应的矩阵。计算得到 2 个本征值，

$$k_+=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\quad k_-=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \qquad (8.5.12)$$

将本征值带入（8.5.11）可得相应的本征矢量。整理之后结果为

$$
\begin{aligned}
k_+:\quad & E_{0x} = iE_{0y} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0^{+} = E_0\left(\vec{e}_x - i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2} = E_0\vec{e}_{right} \\
k_-:\quad & E_{0x} = -iE_{0y} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0^{-} = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2} = E_0\vec{e}_{left}
\end{aligned}
\qquad (8.5.13)
$$

（8.5.12）-（8.5.13）显示在这种材料中，沿 z 轴传播的电磁波的本征态不是线偏振的，而是左右旋圆偏振！且（8.5.12）显示这两个本征态的色散关系（或者说传播的相速度）不相同。对右旋光，波的相速度为

$$v_{right} = \omega/k_+ = c/\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (8.5.14)$$

对左旋光

$$v_{left} = \omega/k_- = c/\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \qquad (8.5.15)$$

因此，在介质中沿着磁场方向传播时，左旋光比右旋光的速度快。

注：这个例子中，我们清晰地看到了研究材料中电磁波特性的范式

本构关系 —— 色散关系 —— 电磁本征态

3．法拉第效应

当一支**线偏振波**由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时，由于线偏振波可以分解为两个等幅的**左、右旋圆偏振波**，而左旋和右旋波的波速又不相等，结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。这种效应叫法拉第旋光效应，如图 8.4 所示。

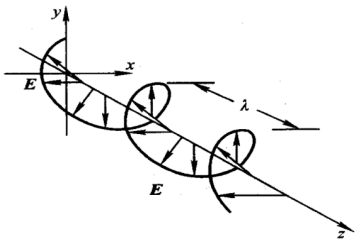


图 8.4

具体可以计算出电磁波的传播行为。设进入 Faraday 介质之前在真空中传播的线偏振电磁波为

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0\left(\vec{e}_{right} + \vec{e}_{left}\right) e^{i(k_0 z - \omega t)} \qquad (8.5.16)$$

进入 Faraday 介质时，假设旋光体系对左右旋光的透射率一样（*思考：若透射率不同会如何？*），则电磁波变成

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right}e^{ik_+z}+\vec{e}_{left}e^{ik_-z}\right)e^{-i\omega t}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right}e^{i\Delta k\cdot z/2}+\vec{e}_{left}e^{-i\Delta k\cdot z/2}\right)e^{i(\bar{k}z-\omega t)}$$
$$=\frac{E_0}{2}\left[(e^{-i\Delta k\cdot z/2}+e^{i\Delta k\cdot z/2})\vec{e}_x+i(e^{-i\Delta k\cdot z/2}-e^{i\Delta k\cdot z/2})\vec{e}_y\right]e^{i\bar{k}z}e^{-i\omega t} \qquad (8.5.17)$$
$$=E_0\left[\cos(\Delta k\cdot z/2)\vec{e}_x+\sin(\Delta k\cdot z/2)\vec{e}_y\right]e^{i\bar{k}z}e^{-i\omega t}$$

其中 $\Delta k=k_+-k_-$，$\bar{k}=(k_++k_-)/2$ 。**因此电磁波在旋光介质中的电矢量一边传播一边旋转**（如上图所示），这种效应叫做旋光！**注意：这种电磁波在某一个局部点的等相面上仍然呈现线偏振，但这个线偏振的角度随着波传播一直在改变！**

假设 Faraday 介质的厚度为 d，则从 Faraday 介质中出来时（将 $z=d$ 带入（8.5.17））重新变成线偏振，偏振方向为

$$\vec{E}\,||\cos(\Delta k\cdot d/2)\vec{e}_x+\sin(\Delta k\cdot d/2)\vec{e}_y \qquad (8.5.18)$$

与入射光比较偏振方向旋转了如下的角度

$$\Delta\phi=\Delta k\cdot d/2\approx k_0 d\varepsilon_2/(2\sqrt{\varepsilon_1}) \qquad (8.5.19)$$

此即是著名的 Faraday 旋光效应，后面一项在考虑 $\varepsilon_2<<\varepsilon_1$ 后得到。因为 $\varepsilon_2\propto\omega_B$，显然这个**偏振转角正比于外磁场 B 及旋光介质的厚度 d**。

讨论：

1. **在各向同性的介质里，沿 x、y 方向偏振的光波的 k 矢量相同（或者说状态简并），因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。我们既可以用线偏振的光波作为基把任意偏振的波展开，等价地，我们也可以用左右旋光作为基来做同样的事情。但各向异性介质中不存在这种简并，我们必须求出色散关系对应的电磁本征态作为基，此时不能随意选取线偏振或者圆偏振波作为基。**
2. **事实上，对任意的各向异性介质，我们都不能不假思索地认为电磁波可以取任意一个偏振方向，而必须通过求解本征值矩阵方程得到色散关系以及模式对应的偏振。**

§ 8.6 电磁波在介质面上的反射和折射

至今为止，我们只学习了电磁波在一个**无限大均匀的块体材料（尽管该介质可以是色散的，是各向异向的）**中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会如何？此即是本节我们要学习的内容。

0. 电磁波边界条件

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知，但对光本质的了解却是经历了一番曲折。早年牛顿基于光粒子的概念用了许多（不合理的）假设推出光的反射和折射定律。直到后来人们利用 Maxwell 方程以及边界条件，不加任何其他假设，成功推导出光的折射和反射定律时，人们才完全接受光的波动性。这里我们从 Maxwell 方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

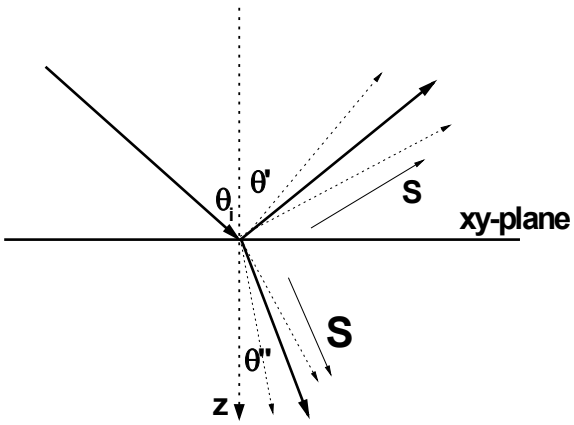
$$\vec{n}\times(\vec{E}_1(\vec{r},t)-\vec{E}_2(\vec{r},t))\Big|_b=0,\quad \vec{n}\times(\vec{H}_1(\vec{r},t)-\vec{H}_2(\vec{r},t))\Big|_b=0 \qquad (8.6.1)$$

由上述边界条件，我们可以推导出决定电磁波的界面上行为的 2 大定律。

1．反射、折射的基本规律 – Snell's Law

首先注意到边界两边的电场、磁场的切向分量在交界面内**（1）时时 （2）处处相等**（*我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理，因此金属也可以作为电介质来处理，无须考虑界面上的面自由电流！*）若交界面为一平面，我们把它取为OXY面。如图 8.6 所示，考虑一单色平面波入射到交界面上，其电场为

$$\vec{E}_i=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (8.6.2)$$



则电场切向分量在交界面上**时时相等**要求反射波、折射波也一定携带相同的时间因子$e^{-i\omega t}$ - *这个可以做如下理解：介质分子在外电磁波的作用下以频率ω做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源，故反射、折射波一定也是以此频率振动，这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现！*假设介质 1 和 2

都是**均匀各向同性**的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为ω的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$\begin{aligned} &\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_0'(\vec{k}') e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ &\text{折射波} \qquad \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}_0''(\vec{k}'') e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{aligned} \qquad (8.6.3)$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k' = (\omega/c)\cdot n_1 \ , \ k'' = (\omega/c)\cdot n_2 \qquad (8.6.4)$$

其中$n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}\cdot\mu_{ri}}$为第 i 个体系的折射率。下面考虑（8.6.1）的第 2 个要求：电磁场在交界面上处处相等。这意味着反射波、折射波一定在 xy 平面内具有与入射波相同的**空间波动行为**，亦即带有与入射波相同的相位因子$e^{i\vec{k}_{\|}\cdot\vec{r}_{\|}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$。**这个结论身深层次的物理其实是体系在界面上的平移不变性！考虑界面上的任意 2 点在外场激励下的振动，其唯一的不同就是外场的相位不同，因此这两点的振动差一个相位$e^{ik_{\|}\Delta r}$，因此两点的反射/折射波也仅仅差这个相位。**这意味着（8.6.3）式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$\vec{k}_{\|}' = \vec{k}_{\|}'' = \vec{k}_{\|} \qquad (8.6.5)$$

由（8.6.4）及（8.6.5）可得 z 方向上的 k 矢量：

$$k_z' = \pm\sqrt{k'^2 - k_{\|}^2} \ , \ k_z'' = \pm\sqrt{k''^2 - k_{\|}^2} \qquad (8.6.6)$$

（8.6.6）式表面垂直波矢有正负两个根，如何确定应取正号还是负号？这里应当用到因果关系（Causality）！根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即波印廷矢量 S）同方向$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \,\|\, \hat{k}$。故（8.6.6）中$k_z'$应取负根，而$k_z''$应取正根。

故反射、折射光如上图所示。由三方面的讨论：**时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系**，我们可总结出反射、折射的基本规律：

(1) 反射波、折射波的频率与入射波频率相等： $\omega' = \omega'' = \omega$

(2) 根据$\vec{k}_{\|}' = \vec{k}_{\|}'' = \vec{k}_{\|}$，若$k_y = 0$，则必有$k_y' = k_y'' = 0$。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内 - *这个由入射波 k 矢量与交界面垂直方向构成*

的平面定义为入射面。

(3) $k_z^{'}$, $k_z^{''}$ 的正负号由因果关系确定！**在正常介质中** $k_z^{'}$ **应取负根，而** $k_z^{''}$ **应取正根**

(4) 根据 $k_x = k_x'$,，有 $k\sin\theta = k'\sin\theta'$，同时因为 $k = k'$（入射波与反射波在同一种介质中），由此得出，$\theta = \theta'$，即入射角等于反射角，即“镜面反射”。

(5) 根据 $k_x = k_x''$，必有 $k\sin\theta = k''\sin\theta''$，再根据（8.6.4），于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (8.6.7)$$

这就是光学中的折射定律（**Snell's Law**）。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是 $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = \sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$，这正是 ***n*** *被*称为介质的折射率的原因。

注：Snell 定律博大精深，每一步推导都有精妙的物理 Argument 在支持，最重要的是 3 个：时间平移不变性；空间平移不变性，因果关系。这中间的任何一个条件发生变化，都会使最终结果不同。最近十年里人们对 Snell 定律有了全新的认识：“负折射”和“拓展的 Snell 定律”就是其中杰出的代表。你是否有兴趣弄清楚为什么？（看习题）

2．振幅关系 – Fresnel's Law （菲涅耳定律）

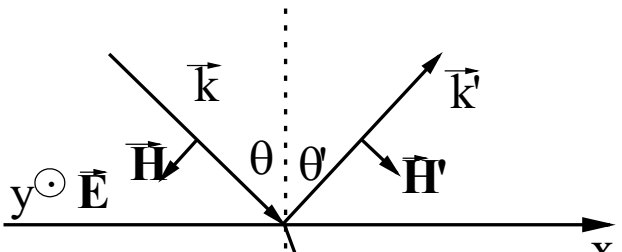
上面我们仅仅考虑了边值条件(8.6.1)中的时空依赖关系(相因子中展示的波动行为)，就推导出电磁波的传播方向所满足的要求。进一步，我们根据（8.6.1）来中的 E 和 H 的振幅来讨论反射波和透射波与入射波的振幅之间的关系，这给出另一个伟大定律：Fresnel's Law。对沿 k 方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，**我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加**。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

A．S 波/TE（横电）波

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图所示。

假设入射、反射、及折射波均为平面波，其中电场为：

$$\begin{aligned} &\text{入射波} \quad \vec{E}_i = \hat{y}E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\ &\text{反射波} \quad \vec{E}_r = \hat{y}E_0' e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\ &\text{折射波} \quad \vec{E}_t = \hat{y}E_0'' e^{i(k_x x + k_z'' z - \omega t)} \end{aligned} \qquad (8.6.8)$$



要利用边界条件，还需知道磁场的形式。根据 Maxwell 方程，平面波中的磁场可根据如下公式

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_i}\left(\hat{k}_i \times \vec{E}_i\right) \tag{8.6.9}$$

由相应的电场矢量导出，其中 $Z_i = \sqrt{\mu_i} / \sqrt{\varepsilon_i}$ 是第 i 个介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的磁场为

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i &= \frac{E_0}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_r &= \frac{E_0^{'}}{Z_1}\frac{\left(k_x\hat{z} + k_z\hat{x}\right)}{k} e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \\
\vec{H}_t &= \frac{E_0^{''}}{Z_2}\frac{\left(k_x\hat{z} - k_z^{''}\hat{x}\right)}{k^{''}} e^{i(k_x x + k_z^{''} z - \omega t)}
\end{aligned} \tag{8.6.10}$$

需注意：反射波的磁场的表达式中 k_z 有一个负号，因为反射波是离开界面的。在交界面上（设 z=0），E，H 的切向值相等，则有

$$\begin{aligned}
&E_0 + E_0^{'} = E_0^{''} \\
&\frac{k_z}{Z_1 k}E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k}E_0^{'} = \frac{k_z^{''}}{Z_2 k^{''}}E_0^{''}
\end{aligned} \tag{8.6.11}$$

注意到

$$k_z = k\cos\theta,\ k_z^{''} = k^{''}\cos\theta^{''} \tag{8.6.12}$$

解联立方程可得

$$\begin{aligned}
E_0^{'} &= \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta^{''}}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}}E_0 = r_S \cdot E_0 \\
E_0^{''} &= \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta^{''}}E_0 = t_S \cdot E_0
\end{aligned} \tag{8.6.13}$$

其中 r_S, t_S 通常叫做 S 波的反射系数、透射系数。反射、折射波与入射波中的磁场

振幅关系可由（8.6.10）求出。

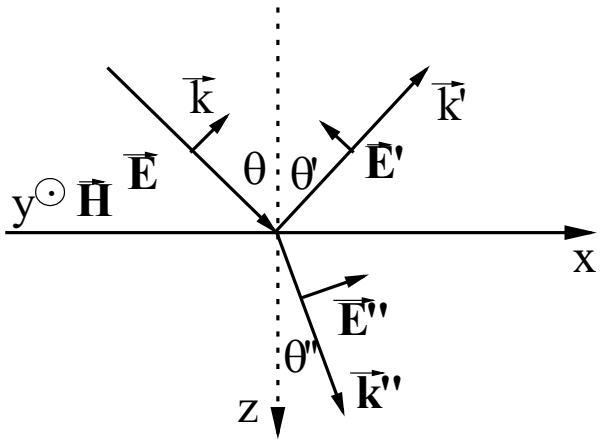
注：一个非常有启发性的看法是把$\frac{k_z}{Z_1 k}$定义成 TE 波斜入射下体系的“有效阻抗”的倒数：$\frac{1}{Z_{\text{eff}}}$。这个有效阻抗与角度相关，可以理解成电场与磁场的平行分量的比：$Z_{\text{eff}}=\frac{E_{\parallel}}{H_{\parallel}}=\frac{E_0}{H_0\cos\theta}=Z/\cos\theta$。基于这个定义我们可以把（8.6.13）改写成

$$E_0'=\frac{Z_{\text{eff},2}-Z_{\text{eff},1}}{Z_{\text{eff},2}+Z_{\text{eff},1}}E_0$$
$$E_0''=\frac{2Z_{\text{eff},2}}{Z_{\text{eff},2}+Z_{\text{eff},1}}E_0 \qquad (8.6.13')$$

这个公式深刻地刻画了反射的本源：两边介质的阻抗不匹配导致波的反射。其实上式甚至适用于量子物质波的反射与透射。

B．P 波/TM 波

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便。如下图所示



入射波 $\vec{H}_i=\hat{y}H_0e^{i(k_x x+k_z z-\omega t)}$

反射波 $\vec{H}_r=\hat{y}H_0'e^{i(k_x x-k_z z-\omega t)}$ （8.6.14）

折射波 $\vec{H}_t=\hat{y}H_0''e^{i(k_x x+k_z'' z-\omega t)}$

根据 Maxwell 方程，相应各支平面波中的电场可由

$$\vec{E}_i = -Z_i\left(\hat{k}_i \times \vec{H}_i\right) \qquad (8.6.15)$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据（8.6.14-15）式写出电场 $\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t$ 的形式，再根据边界条件(8.6.1)得到（可与 S 波对比）

$$\begin{aligned} H_0^{'} &= \frac{Z_1\cos\theta - Z_2\cos\theta^{''}}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta^{''}} H_0 = r_P \cdot H_0 \\ H_0^{''} &= \frac{2Z_1\cos\theta}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta^{''}} H_0 = t_P \cdot H_0 \end{aligned} \qquad (8.6.16)$$

其中 r_P, t_P 通常叫做 P 波的反射系数、透射系数，是基于磁场的振幅比写的。(8.6.13)-(8.6.16) 式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁波。

注：此处一个非常有启发性的看法是定义 TM 波斜入射下体系的“有效阻抗”为电场与磁场的平行分量的比： $Z_{\text{eff}} = \dfrac{E_{\parallel}}{H_{\parallel}} = \dfrac{E_0\cos\theta}{H_0} = Z\bullet\cos\theta$ **。 注意 TM 条件下与 TE 条件下的不同。此时（8.6.16）可改写为**

$$\begin{aligned} H_0^{'} &= \frac{Z_{\text{eff},1} - Z_{\text{eff},2}}{Z_{\text{eff},1} + Z_{\text{eff},2}} H_0 \\ H_0^{''} &= \frac{2Z_{\text{eff},1}}{Z_{\text{eff},1} + Z_{\text{eff},2}} H_0 \end{aligned} \qquad (8.6.16')$$

上式与（8.6.13’）很相似，但略有不同。这是因为一个是对 E 场写的，一个是对 H 场写的。但二者的本质是一样的。

讨论：

(1)当 ε, μ *其中之一为负数甚至为虚数时，* $\theta^{''}$ *失去几何意义，此时不应当做* $\cos\theta^{''} = k_z^{''} / k''$ *的替代，而应当直接写成* $k_z^{''} / k''$，k_z / k *的形式；但 Z 的形式不必改，因为* $\vec{E} = Z\left(\hat{k} \times \vec{H}\right)$ *仍然成立，尽管此处 Z 为复数。*

(2)（8.6.16)可以通过对（8.6.13）进行代换 $Z \to 1/Z, E \to H$ *得到！这反映了电磁场得对称性。电磁理论中有许多这种对称值得好好揣摩。*

习题：

P． 205，8.2，8.4

（*注： 8.4 该题目的定义有些模糊，明确如下：介质为半无限大，假设介质的介电常数有一个很小的虚部，因此无穷远处没有波被反射回来。*）

补充题：

1） 利用连续性方程 $\nabla\cdot\vec{j}_f+\partial\rho_f/\partial t=0$，证明在旋光介质中的平面电磁波满足(8.5.8)。特别是（8.5.8）中的第一条方程，需要给出具体的推导过程。

2） 若 $\vec{B}=-B_0\vec{e}_z$，当一束沿 y 方向偏振的电磁波沿 z 方向（$\vec{k}\,||\,\vec{e}_z$）穿过厚度为 d 的 Faraday 介质后偏振状态变成什么？

3） 从 Fresnel 公式出发，证明在正入射的条件下，P 波和 S 波的基于电场矢量的振幅比定义的反射系数相等。

4） 设有一种介质，其 $\varepsilon_r<0,\mu_r<0$，证明

（i）在此介质中存在传播模式的电磁波（即 k 为实数）

（ii）这种传播波的能流方向与波传播的方向相反，即 $\vec{S}\,||\,(-\hat{k})$

（iii）根据这个结论，重新讨论当电磁波由空气入射到这种介质上时所满足的 Snell 定律，画出折射光的方向，并重新推导折射角与入射角之间的关系。*（提示：此处要用到因果律 – 即反射波和折射波的能流一定要离开界面！）*

5） 推导 P 波的菲涅耳公式（8.6.16）式。

****
思考题（供有余力同学选作）
****

1）你是否可以在一般情况下，即不满足 $\omega>\omega_p>>\omega_B$，也不预设 $\vec{k}\,||\,\hat{z}$，讨论旋光体系中的电磁本征态？

2）翻阅资料，结合课上学到的内容，弄清楚磁光 Kerr 效应的物理。

3) 根据大课上教授内容，学习如下文献，弄清楚如何拓展 Snell 定律？

"*Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves*",
Shulin Sun, Qiong He, Shiyi Xiao, Qin Xu, Xin Li & Lei Zhou,
Nature Materials 11, 426-431 (2012).