第 十 八 讲

上次课：

- **旋光介质：** $k^2\vec{E}_0 = k_0^2\tilde{\varepsilon}_r\cdot\vec{E}_0 \to k_\pm = k_0\sqrt{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2}$，eigenvector: $\hat{e}_\pm$
- **Snell' s Law:** $n_1\sin\theta = n_2\sin\theta$ ，$n = \sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\mu_r}$， 折射率；

  能量守恒、动量守恒、因果关系
- **Fresnel's Law：** $r = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$， $Z = \sqrt{\mu}/\sqrt{\varepsilon}$，阻抗

$$r_S = \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}, \qquad r_P = \frac{Z_1\cos\theta - Z_2\cos\theta''}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta''}$$

角度依赖的阻抗： $Z(\theta) = Z/\cos\theta$ (S) $\qquad Z(\theta) = Z\cdot\cos\theta$ (P)

3．反射率及透射率

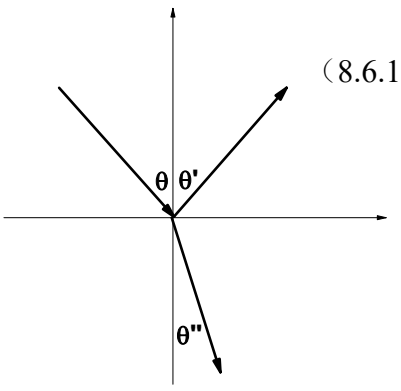
反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射率（Reflectance），其刻画了多少入射的能量被界面反射回来。直接计算可得：

$$R = \frac{\langle\vec{S}_r\rangle\cdot\hat{z}}{\langle\vec{S}_i\rangle\cdot\hat{z}} = \begin{cases} \dfrac{\left|E_0'\right|^2\cos\theta'/Z_1}{\left|E_0\right|^2\cos\theta/Z_1} = \left|\dfrac{E_0'}{E_0}\right|^2 = |r_S|^2 & \text{S} \\ \dfrac{\left|H_0'\right|^2\cos\theta'\cdot Z_1}{\left|H_0\right|^2\cos\theta\cdot Z_1} = \left|\dfrac{H_0'}{H_0}\right|^2 = |r_P|^2 & \text{P} \end{cases} \qquad (8.6.17)$$

无论对 S 波还是 P 波，反射波和入射波处于同一媒质中，阻抗值相同；同时由于反射角等于入射角，投影后的比例与投影前的比例相同。因此，反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方。将（8.6.13），（8.6.16）分别带入（8.6.17）式即得 S，P 两种偏振情况的反射率：

$$R_S = \left|\frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}\right|^2$$

$$R_P = \left|\frac{Z_2\cos\theta'' - Z_1\cos\theta}{Z_2\cos\theta'' + Z_1\cos\theta}\right|^2 \qquad (8.6.18)$$



同样道理，透射率定义为

$$T=\frac{\left\langle \vec{S}_t \right\rangle \cdot \hat{z}}{\left\langle \vec{S}_i \right\rangle \cdot \hat{z}}=\begin{cases} \dfrac{\left|E_0''\right|^2 \cos\theta'' / Z_2}{\left|E_0\right|^2 \cos\theta / Z_1}=|t_S|^2 \dfrac{Z_1 \cos\theta''}{Z_2 \cos\theta} & \text{S} \\ \dfrac{Z_2\left|H_0''\right|^2 \cos\theta''}{Z_1\left|H_0\right|^2 \cos\theta}=|t_P|^2 \dfrac{Z_2 \cos\theta''}{Z_1 \cos\theta} & \text{P} \end{cases} \qquad (8.6.19)$$

注意：定义反射/透射率的时候，我们都不是直接对入（反、透）射波的能流操作，而是将其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲，只有投影到其法向方向的能流分量才是“真正通过”这个界面的能流。

思考题：

1）R 和 T 的定义中需要用到投影到法线的 $\cos\theta$ 因子。这一点初学者经常感觉到困惑。不妨证明一下只有这样才能满足能量守恒：T+R=1，而直接对 r 或者 t 取模平方相加不能得到正确的能量守恒的结果。

2）进一步考虑一个有限大小的 Beam 在界面上的反射和折射，基于此搞清楚为什么能量守恒要乘以一个投影到法线的 $\cos\theta$ 因子？

4．正入射条件下反射的几点讨论

（1）正入射条件下，无论 S 波还是 P 波，反射率均为

$$R=\left|\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}\right|^2$$

在光学中，我们经常利用 $R=\left|\dfrac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|^2$ 来计算反射率，其实这不完全准确，只在介质没有磁性 （$Z=1/n$）时才正确。完整的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波的振幅的核心。这两个物理量加在一起才完整描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

（2）假设 $Z_1=Z_0$，则定义**相对阻抗**为 $Z=Z_2/Z_0=\dfrac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_r}}$。对 S 波我们可以定义反射系数 $r_S=\dfrac{Z-1}{Z+1}=\dfrac{E_0'}{E_0}$，它刻画了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。我们注意到，无论对 $Z\to 0$ 的介质还是对 $Z\to\infty$ 的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。$Z\to 0$ 的介质其实就是理想电导体（因为金属 $|\varepsilon_r|\to\infty$，简称 Perfect electric conductor

(PEC))，而 $Z \to \infty$ 的介质对应的是 $|\mu_r| \to \infty$ 的理想“磁导体”(PMC))自然界不存在，可以通过 Metamaterial 的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，而这恰恰是前沿研究中超构表面对电磁波偏振和波前操控的基础。

5. Brewster 角

可见光频段常规介质的磁导率接近于 μ_0 -- 这是因为光频下磁性介质中的磁矩无法跟上电磁场的变化，因此宏观上不显现磁性（*磁性介质中磁矩跟随磁场转动时的固有特征频率一般在 GHz 频段。在可见光波段，驱动磁场的频率太高，以至于磁矩随驱动磁场的受迫运动幅度趋向于 0(参考 Landau 的书)，故磁性介质在光频下通常不展现磁性；而电介质中，无论是束缚电子的特征振动频率还是自由电子的等离激元共振频率都可以足够高，因此即使在光波段，其极化率可以非 0*）。令 $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$，则此时折射系数与阻抗满足 $Z_r = 1/\sqrt{\varepsilon_r} = 1/n$。利用折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (8.6.20)$$

针对两种偏振光，带入反射率的表达式（8.6.18），可以将反射率化成只与入射角/折射角相关的形式：

$$R_S = \frac{\sin^2(\theta - \theta\ )}{\sin^2(\theta + \theta\ )}$$
$$R_P = \frac{\tan^2(\theta - \theta\ )}{\tan^2(\theta + \theta\ )} \qquad (8.6.21)$$

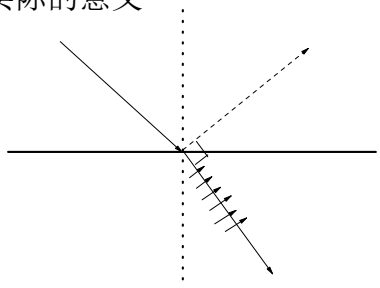
这就是光学中的 Fresnel 公式，由法国科学家 Fresnel 首先总结实验发现。但请注意：原则上这俩公式只对纯介电体系才成立！进一步，对 P 波反射率，注意到当

$$\theta + \theta\ = \pi/2 \qquad (8.6.22)$$

条件满足时，反射率为 0：

$$R_P = 0 \qquad (8.6.23)$$

亦即：当反射波与折射波相互垂直时，P 偏振的电磁波完全不被反射！满足（8.6.22）式条件的入射角称为布鲁斯特角（Brewster Angle），满足 $\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1)$。其在光学中有着重要的理论和实际的意义 – 如当一支没有启偏的自然光已以这个角度入射到介质表面时，反射波没有 P 偏振分量，只有 S



偏振分量，这样反射波就变成了完全的线偏振波。可以利用下面的 Argument 从物理上理解 Brewster Angle：

当 P 偏振电磁波入射到介质表面上时，在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如图所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。当入射角等于 Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，故，此时介质对电磁波完全透明。注意，此结论以及几何解释只在非磁性材料中适用！对磁性介质（相对介电常数=1），结论恰恰相反！

注：

其实还有另外一个很物理的方式来理解 Brewster 效应。对 S 波来说，斜入射下体系的“有效阻抗”可以写成 $Z_{eff}=\dfrac{E_{\parallel}}{H_{\parallel}}=\dfrac{E_0}{H_0\cos\theta}=Z/\cos\theta$ *，而对 P 波来说，斜入射下的“有效阻抗”为* $Z_{eff}=\dfrac{E_{\parallel}}{H_{\parallel}}=\dfrac{E_0\cos\theta}{H_0}=Z\cos\theta$ *。因此，无论 S 还是 P 波，反射率都是* $R=\left|\dfrac{Z_{eff,2}-Z_{eff,1}}{Z_{eff,2}+Z_{eff,1}}\right|^2$ *，当两种介质的有效阻抗匹配时，反射为零。自信观察不同偏振下的有效阻抗的角度依赖关系，你会发现只有对 P 波（针对纯电体系），才能通过调整入射角（和折射角）使得* $Z_{eff,2}=Z_{eff,1}$ *。你能否从这个观点推导一下？*

§8.7 全 反 射

在实际应用中，人们希望能有效控制电磁波的传播方向，因此，一个好的反射镜就变得必不可少。电磁波在金属表面被近乎全反射，因而金属镜子在光学上被广泛应用。然而这种反射仍有**少量的能量耗散**（特别是在光波段）。另外，当频率到达**紫外**时（频率高于**等离子共振频率** ω_p），金属都变成透明材料，无法有效反射电磁波。因此急需寻找无耗散的全反射机制。人们发现当电磁波以特定角度从光密介质入射到光疏介质中时（$n_1>n_2$），在界面上会发生**无损耗的全反射**。这种现象有许多实际应用，光纤光子学就是由此发展出来的。当然，基于全介质的光子晶体是另外一个解决方案。这里我们就不再展开了，只介绍介质的全反射现象。

1. 全反射临界角

考虑电磁波从光密介质（折射率为n_1）入射到光疏介质中（折射率为$n_2 < n_1$），由折射定律 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{n_2}{n_1}$ 可得

$$\sin\theta \quad = \sin\theta \frac{n_1}{n_2} > \sin\theta \tag{8.7.1}$$

当入射角从$0 \to \frac{\pi}{2}$，$\sin\theta$从 0 变到 1。因为$\frac{n_1}{n_2} > 1$，$\sin\theta''$从 0 变到一个比 1 大的数。因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin(\frac{n_2}{n_1}) \tag{8.7.2}$$

时，$\sin\theta \ = 1$。而当入射角$\theta > \theta_c$时，显然会出现 $\sin\theta \ > 1$的情况，这时折射角将为一虚数，它已失去几何上作为角度的直观解释，不能直接将其带入 Fresnel 公式求解。此时，我们必须借助 Fresenel 公式的原始关系式，而不能再利用后面推导出来的与角度相关的公式。利用（8.6.12）得

$$\cos\theta'' \to \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin\theta)^2}}{k_0 n_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^2} \tag{8.7.3}$$

当$\theta > \theta_c$时，上式为纯虚数，记为$i\alpha$，其中

$$\alpha = \sqrt{\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right|^2 - 1} \tag{8.7.4}$$

将其代入公式(8.6.13)和（8.3.16），便有

$$\begin{aligned} E'_{0S} &= \frac{Z_2\cos\theta - i\alpha Z_1}{Z_2\cos\theta + i\alpha Z_1} E_{0S} \\ H'_{0P} &= \frac{Z_1\cos\theta - i\alpha Z_2}{Z_1\cos\theta + i\alpha Z_2} H_{0P} \end{aligned} \tag{8.7.5}$$

可见，$R_S = R_P = 1$（参考（8.6.17）），亦即电磁波发生全反射，因此我们将θ_c称为**全反射临界角**。显然，S，P 两种偏振的反射波的相位未必相同。因此当一支沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时，其偏振图案原则上是椭圆偏振。

Tips：

- **全反射现象的本质是 Snell 定律要求平行波矢守恒，因此，当一支电磁波由光密介质入**

射到光疏介质中时，光疏介质中不能提供足够的总波矢，为匹配平行波矢，则纵向波矢必须为虚数。

2．折射波

在发生全反射时，介质 2 中的电磁波并不为零，其振幅仍然可以由 Fresnel 公式（8.6.13）或（8.6.16）给出。其实，如果介质 2 中的电磁波完全为零，我们就不可能使边值关系满足。那此时介质 2 种的电磁波有什么特性？我们考虑 S 波，因 $k_z'' = in_2 k_0 \alpha = i\beta, k_x'' = k_x$，故折射波电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y} E_0 \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \tag{8.7.6}$$

其中，振幅 E_0 由（8.6.13）给出。上式表示折射波将沿 z 方向指数衰减，沿 x 方向传播。因此，离界面几个波长处，场强振幅已变得很小，可以忽略不计；换句话说，电场仅仅沿着界面方向传播，其场强被限制在表面附近的一个区域内，所以称这种全反射的折射波为**表面波**。

3．折射波能流

既然存在折射波，那么在第二种介质中就有能流。考虑 S 波，则我们可以根据（8.7.6）式求出介质中的磁场

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega}(k_x \hat{z} - i\beta \hat{x}) \exp[-\beta z] e^{i(k_x x - \omega t)} \tag{8.7.7}$$

假设 E_0'' 为实数，可分别求得能流 $\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H}$ 的法向分量 S_{Pz} 和切向分量 S_{Px}：

$$S_x = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t)$$

$$S_z = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t)$$

由此可见：

(1) 在界面的法线方向上能流以频率 2ω 作振动，在第二种介质中，S_{Pz} 对时间的平均值为零，即平均来说没有能量沿法线流入介质 2 中。

(2) 界面切线方向的能流 S_{Px} 对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在 x 方向仍有能流。

(3) 根据 S_{Px} 和 S_{Pz} 的表达式知道能流的大致走向如图 8.8。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。

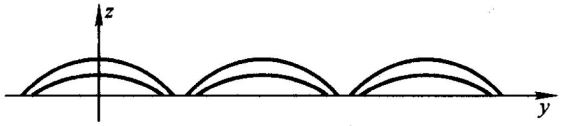


图 8.8

第九章　波导和谐振腔

上一章中我们研究了电磁波在体材料内以及在不同材料界面上的反射/折射行为，其中电磁波全都是以**平面波**的形式存在的。然而要将电磁波的信号传递到远方，用平面波的方法并不经济 --- 因为平面波有着无限大的波前。实际生活中我们利用波导管来有效传递电磁波，将波导管的两端密封，便进一步得到谐振腔。本章我们将研究波导管中的电磁波的传播行为，以及谐振腔内的电磁振荡。

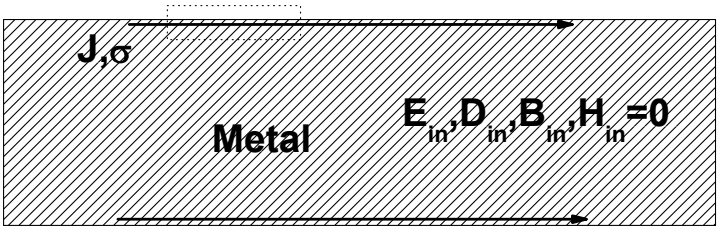
§ 9.1　波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状，但通常波导管在传播方向是均匀的。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播，这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别。

1．边界条件

因为电磁波完全封闭在波导管内，我们首先应当解决的问题是电磁波在波导管壁（亦即导体）上满足的边界条件。金属波导管通常在微波通信波段（GHz 波段）使用。上两章中我们已经学到在这个频段，金属对电磁波有很好的屏蔽作用 ---- 电磁波、感应电流、感应电荷不能进入金属的体内，都局域在金属表面的一个厚度为“趋肤深度 $\delta=\sqrt{2/\mu\omega\sigma_c}$ ”的一个薄层内，**金属体内没有波、电流、电荷**。因为良导体的 σ_c 非常大，趋肤深度非常小。我们可因此将真实导体（在微波段）简化为一个“理想导体” – **即金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷 σ 、面电流分布 $\vec{J}$ ， 换言之，将趋肤深度趋向于 0，将趋肤深度层内**

的电荷、电流简化成面电荷、面电流。将 Maxwell 方程的积分形式应用到理想金属的表面，我们得到理想金属的边界条件



$$\vec{n}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{n}\times\vec{E}=0 \qquad (9.1.1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{D}=\sigma,\quad \vec{n}\times\vec{H}=\vec{J} \qquad (9.1.2)$$

其中 $\vec{E},\vec{H},\vec{D},\vec{B}$ 等场量是在金属表面上（介质一侧）测到的。这里已经用了金属内部所有场量为 0 的条件。事实上 σ 和 $\vec{J}$ 均是未知量，要根据求得的场利用（9.1.2）式来决定。故“理想导体”表面的场的边界条件就是（9.1.1）。

2．场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都保持一样形状的直波导管。若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix}=0 \qquad (9.1.3)$$

选择波导管的长度方向为 z 轴，我们感兴趣的是沿着 z 方向传播的解。注意：尽管波导管内为真空，沿 z 方向传播的平面波却一定不是这个体系的解，因为常矢量 $\vec{E}_0$ 不可能满足理想导体边界条件（9.1.1）。重新考查（9.1.3）的解。注意到波导管沿 z 轴均匀，故场量对 z 的依赖关系一定为 $e^{ik_z z}$，同时，时间轴的均匀性保证时间依赖关系总是 $e^{-i\omega t}$。故设解为：

$$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{E}_0(x,y)\\ \vec{B}_0(x,y)\end{pmatrix}e^{i(k_z z-\omega t)} \qquad (9.1.4)$$

代入方程(9.1.3)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}=0 \qquad (9.1.5)$$

式中

$$k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 \tag{9.1.6}$$

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{9.1.7}$$

(9.1.5)式显示电磁场的 6 个分量全部满足 Hemholtz 方程，不过分别计算电场、磁场的 6 个分量将非常复杂。***那这些分量之间有没有什么关系呢？若有的话，是否我们可以只计算其中一些就可以推导出其他的分量？*** 注意到（9.1.5）是从 Maxwell 方程推出的 2 次方程，不是原始的 Maxwell 方程。当我们重新检查原始 Maxwell 方程组时，我们发现不同的场分量之间并不独立（就像平面波中电场与磁场的值并不独立，比值是阻抗一样）。由 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 的 x,y 两个方向上分量公式可得

$$\partial_y E_{0z} - ik_z E_{0y} = ik_0 cB_{0x}$$
$$ik_z E_{0x} - \partial_x E_{0z} = ik_0 cB_{0y}$$

由方程 $\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 在 x,y 两个方向上的投影可得

$$\partial_y B_{0z} - ik_z B_{0y} = -i\frac{k_0}{c}E_{0x}$$
$$ik_z B_{0x} - \partial_x B_{0z} = -i\frac{k_0}{c}E_{0y}$$

利用上面四个方程，可以将场的横向分量用纵向分量来表示如下：

$$\begin{cases} E_{0x} = \dfrac{i}{k_c^2}\left(k_0\partial_y\left(cB_{0z}\right)+k_z\partial_x E_{0z}\right) \\ E_{0y} = -\dfrac{i}{k_c^2}\left(k_0\partial_x\left(cB_{0z}\right)-k_z\partial_y E_{0z}\right) \\ cB_{0x} = -\dfrac{i}{k_c^2}\left(k_0\partial_y E_{0z}-k_z\partial_x\left(cB_{0z}\right)\right) \\ cB_{0y} = \dfrac{i}{k_c^2}\left(k_0\partial_x E_{0z}+k_z\partial_y\left(cB_{0z}\right)\right) \end{cases} \tag{9.1.8}$$

(9.1.8)式告诉我们：6 个场分量中只有 2 个是独立变量，一旦场的纵向分量 B_{0z}、E_{0z} 知道了，则其他分量可以通过（9.1.8）式得到。另外，**值得注意的是 E_{0y} 和 B_{0x} 有很好的对称性，而 E_{0x} 和 B_{0y} 也有很好的对称性**。这样我们只需要在边界条件（9.1.1）下计算 B_{0z}、E_{0z} 所满足的方程，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)\begin{pmatrix}E_{0z}(x,y)\\B_{0z}(x,y)\end{pmatrix}=0 \qquad (9.1.9)$$

然后利用（9.1.8）式推出所有的场量形式。

波的模式（偏振） 从(9.1.9)式我们可以看出，当 $B_{0z}=0$、$E_{0z}=0$ 时，我们有 $E_{0x}=E_{0y}=B_{0x}=B_{0y}=0$，因此非平庸解不存在。这意味着波导管内不可能传播横电磁波(TEM 波，即类似真空中的平面波)。可见，波导中波的解 B_{0z} 和 E_{0z} 不能同时为 0。接下来我们考虑两个独立的情形，

（1）$\boxed{B_{0z}\neq 0}$ 而 $E_{0z}=0$；横电波（TE 波）

（2）$B_{0z}=0$ 但 $\boxed{E_{0z}\neq 0}$；横磁波（TM 波）

存在两种偏振模式是波导中电磁波的最显著特点之一。下面我们将以矩形波导为例说明波导中电磁波的行为。

注意：我们常说电磁波是横波，其实，这句话成立是有条件的 --- 对无限大均匀介质中的平面波解才正确。在波导管内，电磁波横向受到波导壁的限制，完全的横波不可能存在。但后面我们介绍一种新的看法，大家可以明白其实波导管内没有横波和电磁波是横波这 2 者不矛盾。

§ 9.2 矩 形 波 导

矩形波导是指横截面为矩形的波导，结构如图 9.1 所示。设波导管壁为理想导体，分别考虑 TE 和 TM 两种偏振方式的波的传输行为。

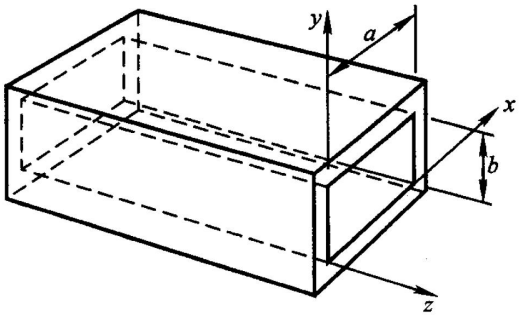


图 9.1

（1） TE 波

由上节的讨论可知，该偏振下 $E_{0z}=0$，因此只需考虑 B_{0z}，其满足的方程为 ：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)B_{0z}=0 \qquad (9.2.1)$$

考虑理想导体边界条件（9.1.1），可得

$$B_{0x}\big|_{x=0,a}=B_{0y}\big|_{y=0,b}=E_{0x}\big|_{y=0,b}=E_{0y}\big|_{x=0,a}=0 \qquad (9.2.2)$$

但这些条件都不是对 B_{0z} 的！根据（9.1.8），在 TE 波的条件下（ $E_{0z}=0$ ）有

$$E_{0x}=\frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_y B_{0z},\ E_{0y}=-\frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_x B_{0z},\ B_{0x}=\frac{i}{k_c^2}k_z\partial_x B_{0z},\ B_{0y}=\frac{i}{k_c^2}k_z\partial_y B_{0z} \qquad (9.1.8')$$

因此（9.2.2）式可转化成对 B_{0z} 的如下边界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0z}\Big|_{\substack{x=0\\x=a}}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}B_{0z}\Big|_{\substack{y=0\\y=b}}=0 \qquad (9.2.3)$$

根据分离变量法，（9.2.1）的通解为 $B_{0z}=B_0\left(\sin k_x x,\ \cos k_x x\right)\cdot\left(\sin k_y y,\ \cos k_y x\right)$，其中 $k_x^2+k_y^2=k_c^2$ 。再根据边条（9.2.3），不难证明，满足上述方程和边界条件的解为：

$$\begin{aligned}&B_{0z}=B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\&k_c^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right),\end{aligned} \qquad (9.2.4)$$

式中 m 、 n 为正整数或零。把(9.2.4) 代入(9.1.8')式得到 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的全部分量为

$$TE\text{波}\quad\begin{cases}E_x=-i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\E_y=i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\E_z=0\\B_x=-i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\B_y=-i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)}\\B_z=B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\end{cases} \qquad (9.2.5)$$

习题

P. 205， 8.9

P. 229，9.1，9.3，9.4

补充题：

（1） 当电磁波从空气中入射到一个磁性介质（相对磁导率为 $\mu_r = 4$，相对介电常数为 1）表面上时，对 S、P 两种偏振情况下计算入射角为 θ 条件下的反射率的表达式。试问，S、P 哪一种偏振波有 Brewster 角效应？对应的 Brewster 角是多少？发生 Brewster 效应时对应的物理解释是什么？

（2） 对 P 波入射，在发生全发射情况下推导出折射波的能流表达式。

课外小课题

1） 学习如下文献，搞清楚如何利用超薄体系的阻抗以及导致的反射特性调控入射波的偏振？

"Manipulating Electromagnetic wave polarizations by anisotropic metamaterials", Jiaming Hao, Yu Yuan, Lixin Ran, Tao Jiang, J. A. Kong, C. T. Chan, and L. Zhou, Phys. Rev. Lett. 99, 063908 (2007).

2） 仔细讨论发生全反射时对应的偏振问题，用数值计算+图形的方法讨论一个线偏振的光经全反射后偏振图案如何变化。

3） 考虑微波波段电磁波正入射到金属良导体的表面，计算在金属对电磁波的吸收，由此理解为什么良导体对电磁波几乎不吸收？进一步，利用 Drude 模型描述金属，考虑电磁波在不同波段下入射到半无限大的金属界上后被金属的吸收，讨论什么波段下的吸收最有效。