第 十 九 讲

上次课：

- $R=\begin{cases}|r_S|^2 & \text{S}\\ |r_P|^2 & \text{P}\end{cases}$，$T=\begin{cases}|t_S|^2\dfrac{Z_1^{\text{eff}}(\theta)}{Z_2^{\text{eff}}(\theta'')} & \text{S}\\ |t_P|^2\dfrac{Z_2^{\text{eff}}(\theta'')}{Z_1^{\text{eff}}(\theta)} & \text{P}\end{cases}$
- Brewster angle: $\theta_B=\tan^{-1}(n_2/n_1)$
- 全反射：$\theta_c=\sin^{-1}(n_2/n_1)\quad n_2<n_1$
- PEC 边条：$\vec{n}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{n}\times\vec{E}=0$
- 波导中的场方程：$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)\begin{pmatrix}E_{0z}\\ B_{0z}\end{pmatrix}=0$
- 矩形波导：TE 模式 $\begin{cases}B_{0z}=B_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\\ k_c^2=\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)\end{cases}$

把(9.2.4) 代入(9.1.8')式得到 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 的全部分量为

$$TE\text{波}\quad\begin{cases}E_x=-i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\ E_y=i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\ E_z=0\\ B_x=-i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\ B_y=-i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\\ B_z=B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{j(k_z z-\omega t)}\end{cases}\qquad(9.2.5)$$

讨论如下

- 色散关系

（9.2.4）式说明（9.2.1）式中不是所有的 k_c^2 都可以给出符合边界条件的解，只有某些特定的分立值才被允许。根据 k_c^2 的定义，可计算波导管中传播模式

对应的**频率与波矢**之间的关系（亦即我们常说的**色散关系**），

$$k_z=\sqrt{k_0^2-k_c^2}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{ck_c}{\omega}\right)^2}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{9.2.6}$$

其中

$$\omega_c=ck_c \tag{9.2.7}$$

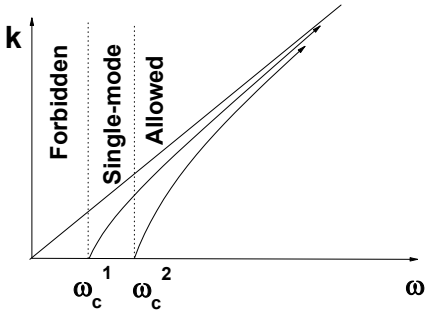
为一个具有频率量纲的定值，取值依赖于（m,n）。

- **截止频率**

（1）当$\omega<\omega_c$时，k_z为纯虚数，波导类似一个光波段下的金属，电磁波不能在其中传播，这种模式称为衰逝波，Evanescent mode；

（2）当$\omega>\omega_c$时，k_z为实数，波导类似一个常规电介质。电磁波可以传播，这种模式称为传播模式（Propagating mode）。有时可以根据电介质中电磁波传播的色散关系 $k_z=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$ 定义波导的**有效介电常数**为 $\varepsilon_r=1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$。

（3）ω_c给出了电磁波能够传播的最低频率，因此称为**截止频率（Cut-Off Frequency）**。



- **模式**

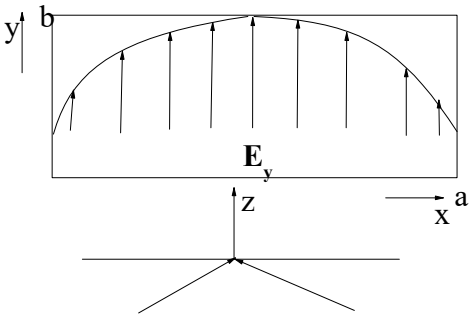
m、n取不同的数值就对应了波的不同的模式，**因为波在波导内传播时 xy 平面的电磁场图案（Pattern）保持不变**。通常人们根据ω_c的大小来标记模式的高低。对 TE 模式来说，m,n 中不能全部为 0，因此当$a<b$时，TE 模的最低阶模式为TE_{01}（又记为$\mathrm{H}_{0,1}$，称为基模）；而当$a>b$时基模为$\mathrm{H}_{1,0}$。 在基模和第一高阶模的截止频率之间，波只能以一种模式存在（如图所示）。

注：你也许会辨称：（9.2.5）中B_z的表达式中可以允许$m=n=0$！可是不要忘掉，当$m=n=0$时，$k_c=0$，此时（9.2.5）式中的E_x,E_y,B_x,B_y都变成了 0/0 不定型！需重新带入原始的 Maxwell 方程求解。此时，你会发现这种解根本不可能满足边条。

- **物理图像**

作为一个例子，考察最简单的也是最常用的波型 H_{10} 波的场分布。由(9.2.5)式得

$$\begin{cases} E_y = i\dfrac{ck_0}{k_c}B_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_x = -i\dfrac{k_z}{k_c}B_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \end{cases} \qquad (9.2.8)$$



电场只有 y 方向分量，因此在 y=0,b 两个边界自动满足 PEC 边条；**为了使得在 x=0, a 出亦满足边条，Ey 的大小必须沿 a 边正弦变化，中间强两边弱，形成了一个波长为 2a 的驻波。可以想象，对于高阶模式，无非是以两个界面为节点，形成有更多节点的驻波而已。**

对于波导中的模式，其实我们有另一种很有启发性的看法：**每一个模式都可以展开成几个对称的斜入射的平面波的线性叠加**。如对 TE_{10} 模式，其波场（9.2.8）完全等价于一支波矢为 $\vec{k}=k_x\hat{x}+k_z\hat{z}$ 的平面波和另一支波矢为 $\vec{k}=-k_x\hat{x}+k_z\hat{z}$ 的平面波的叠加，即

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0^{+}e^{i(k_x x+k_z z-\omega t)}+\vec{E}_0^{-}e^{i(-k_x x+k_z z-\omega t)} \qquad (9.2.9)$$

其中

$$k_x=\pi/a \qquad (9.2.10)$$

我们前面讲过在波导管中常规的正入射的平面电磁波（横波）不能传播，因为其不满足波导管中横向约束的边界条件。然而将斜入射的电磁波进行合适的线性叠加之后的波可以满足波导管的边界条件，故可以传播。这种线性叠加后的波当然不是常规意义下的横波。

- **能流**

仔细观察（9.2.5）式，不难发现横向场分量（E_x, E_y, B_x, B_y）之间没有相位差，而它们与纵向场分量 B_z 之间有 $\pi/2$ 的相位差。根据之前我们对 3 中导电煤质中能流与电磁场相位差之间的关系，我们马上明白波导中能流的时间平均值只能沿 z 轴非 0，而沿着横向一定为 0！

（2）TM 波

下面来研究波导中的另一个偏振状态 - TM 波。首先此时要求出轴向分量 E_{0z}，其满足的方程为(9.1.9)式，对应的边界条件(9.2.2)式现在可写成

$$E_{0z}\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \quad E_{0z}\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0 \quad .$$

因此，容易求出满足上述边界的本征值问题的解为

$$\begin{aligned} E_{0z} &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ k_c^2 &= \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right), \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

把(9.2.11)式代入(9.1.8)则可得横向分量。综合起来，TM 波场为

$$TM\text{波}\begin{cases} E_x = i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y = i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z = E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_x = -i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_y = i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_z = 0 \end{cases} \tag{9.2.12}$$

我们作如下的讨论：

(1) TM 波的色散关系、截止频率都与 TE 波类似。甚至任何一个 TM 波模式也都可以分成几支平面波的叠加，只是平面波的偏振状态与 TE 有所不同而已。

(2) 不同的是对 TM 波，m,n 均不能为 0，否则 $E_{0z}\equiv 0$；因此对 TM 波，基模是 TM_{11} 模式。因此对同样一个波导，其 TM 波的截止频率一定高于 TE 波的截止频

率。

§ 9.3 谐 振 腔

低频电磁波是利用 LC 电路组成的振荡器激发的，当频率很高时(例如在微波波段)，这种振荡回路有强烈的焦耳热损耗。因此，人们想到可以利用另一种不必使用导线承载电流的振荡器 —— **谐振腔。**

谐振腔是由理想导体所围成的封闭腔体，显然腔中单色场满足如下方程：

$$\nabla\cdot\vec{E}=0,\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{9.3.1}$$

、

$$\nabla\times\vec{E}=i\omega\vec{B},\ \nabla\times\vec{B}=-i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} \tag{9.3.2}$$

在边界上电磁场满足 PEC 边界条件

$$\vec{e}_n\times\vec{E}=0,\ \vec{e}_n\cdot\vec{B}=0 \tag{9.3.3}$$

从根本上来说，我们是在边界条件(9.3.3)式下求解方程(9.3.1)和(9.3.2)式。

任意形状的谐振腔中的电磁模式必须数值求解。然而对最简单的谐振腔 – 长方体谐振腔，其电磁模式可以解析求解，这对我们理解谐振腔非常有帮助。将一个尺寸为 $a\times b\times d$ 的长方体谐振腔看作一个截面为 $a\times b$ 的长度为 d 的空腔波导两端加上 PEC 端面。不加端面时，空腔中的电磁波一定为波导中的电磁本征态。取定一个模式（如 TE_{mn} 模式），则谐振腔中的电磁场的一个分量为

$$B_z=\left[B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_z z}\right]e^{-i\omega t} \tag{9.3.4}$$

其他分量可以相应导出。加上 PEC 端面后，端面对电磁波进行反射，因此波导内的场现在由两部分叠加而成：一是沿着 z 方向传播的前进波；二是沿着 $-z$ 方向的反射波。由于波导端面是均匀的 PEC，其反射不会改变波导的模式（请大家思考一下为什么？），因此，我们可以把谐振腔中的电磁波写成：

$$B_z=\left[B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_z z}+B_0'\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_z z}\right]e^{-i\omega t} \tag{9.3.5}$$

其中 B_0 B_0' 为两个待定系数，由在新加上的 2 个端面上的边界条件

$$\vec{e}_n\times\vec{E}\Big|_{z=0,d}=0,\ \vec{e}_n\cdot\vec{B}\Big|_{z=0,d}=0 \quad\Rightarrow\ B_z\big|_{z=0,d}=0 \tag{9.3.6}$$

决定（其他四个界面上的边界条件已自动满足）。在 $z=0$ 处的边条要求

$$B_0' = -B_0 \tag{9.3.7}$$

而 $z=d$ 处的边界条件给出

$$B_z\big|_{z=d} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin(k_z d)e^{-i\omega t} = 0 \tag{9.3.8}$$

故有

$$\sin k_z d = 0 \tag{9.3.9}$$

因此，k_z 为

$$k_z = \frac{p\pi}{d},\ p = 1,2,3,\cdots \tag{9.3.10}$$

注意到 $E_{0x} = \frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_y B_{0z}$，$E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_x B_{0z}$，我们发现另一个边界条件 $\vec{n}\times\vec{E}=0$ 自动在 $z=0$ 和 $z=d$ 处满足。通过电磁场的横-纵分量之间的关系，可以从纵向分量导出所有的横向分量（**注意：不能直接将（9.3.8）带入（9.1.8）式求解，因为（9.1.8）仅仅对具有+kz 的波导模式成立**）。最后得到矩形谐振腔内场的空间部分为

$$\begin{cases} B_{0x} = -2iB_0\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{p\pi}{d}\dfrac{1}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos(\dfrac{p\pi}{d}z) \\ B_{0y} = -2iB_0\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{p\pi}{d}\dfrac{1}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos(\dfrac{p\pi}{d}z) \\ B_{0z} = 2iB_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin(\dfrac{p\pi}{d}z) \\ E_{0x} = 2B_0\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin(\dfrac{p\pi}{d}z) \\ E_{0y} = -2B_0\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin(\dfrac{p\pi}{d}z) \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \tag{9.3.11}$$

我们讨论如下：

(1) 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因子 i，这表明电场和磁场在时间上存在着 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。这种形式的波与传播波（E，B 同相位），良导体中的电磁波（E，B 有 $\pi/4$ 的相位差）均不相同，与等离子体中的具有虚波矢的电磁波行为类似，因此可以预计，这里面平均没有能流。的确，电磁波在腔中形成了驻波，所有方向上都没有净的能量流动。

(2) 因为 $k_z=\frac{p\pi}{d}$，且 $k_z^2=k_0^2-k_c^2$，于是得

$$k_0^2=k_c^2+k_z^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \qquad (9.3.12)$$

所以，谐振腔允许存在的谐振频率与波长为一些分立值，满足

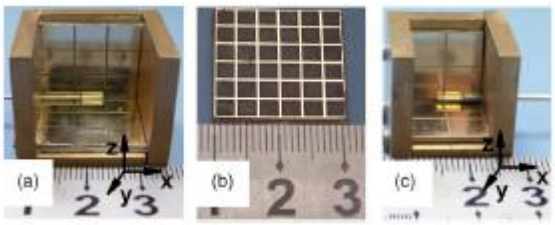
$$\begin{cases}\omega=c\pi\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}+\dfrac{p^2}{d^2}}\\ \lambda=2\Big/\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}+\dfrac{p^2}{d^2}}\end{cases} \qquad (9.3.13)$$

这些非常类似量子力学中的“束缚能级”依赖于 m,n,p 的选取。

（3） 谐振腔中的场用三个脚标 m、n、p 标记，每一组 (m,n,p) 的值决定一种振荡模式。对 E 波记为 E_{mnp}，对 H 波记为 H_{mnp}，并且 E_{mnp} 和 H_{mnp} 中的脚标 m、n、p 可取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说 E_{mnp} 和 H_{mnp} 是**简并**的。另外值得指出的是，在针对某一个方向写出的 TE 模式可能是另外一个方向的 TM 模式！由（9.3.11）式可以看出，对 TE 模式，p 不能为 0, 否则谐振腔中的电磁场全部为 0。对 TM 模式的共振腔模分析发现，p 可以为 0，但 m,n 都不能为 0。因此，综合 TE，TM 的分析结果，谐振腔中 m,n,p 三个指标中最多只能有一个为 0！故谐振腔的最低价模式为（110），（101）或者（011）。

（4） 在共振腔中加一个源，可以激发各个分立模式的波。这时在腔壁凿一小孔，或是将个别腔壁换成不是完全透射的，这时电磁波就会从这些地方耦合出去（见下图）。因为共振腔中只允许分立的模式存在，发射出去的电磁波就具有很好的选频性能，且辐射强度很高。另外电磁谐振腔也可以用到其它微波系统中，做选频，放大等功能。

（5）一个立方状的谐振腔，其能允许的最低阶的腔模式为 TE_{011}（有 3 支简并模式），对应的波长为 $\lambda=\sqrt{2}a$。这就意味着，对常规的谐振腔，要想实现某一个波长的谐振功能，其尺度必须大于某一个特定的大小。若要实现一个较长波的频率，谐振腔就要做的很大，对我们实际应用不利。应用电磁特异介质改变腔壁的反射性能，我们可以改变腔的谐振条件，从而打破这一尺度限制（参考我的研究组的两篇文章 APL 86, 101101 (2005); APL 89, 104104 (2006)。可从我的主页上下载）



习题

P. 229，9.8

补充

（1） 对截面为$a\times b$的矩形波导，试将TE_{01}模及TM_{11}模展开成平面波的叠加。

（2） 推导（9.3.11）

课后 Project（选作）

（3） 首先推导出TM_{mnp}模式的波场；然后详细讨论一个立方体谐振腔中每一个共振模式的简并度（即有多少波场不同的模式对应同样一个共振频率？）；最后证明{m,n,p}中只能有一个为 0。

（4） 解析讨论一个立方体谐振腔中的基模对应的场分布，能流分布，用动画形式展示这种模式下的能流流动情形；尝试利用数值模拟软件模拟如何激励这种模式以及观测到其中的场/能流分布。

（5） 考虑电磁势的规范变化究竟如何影响物理规律的？可以分经典物理的层面和量子物理的层面分别讨论。

（6） 这里求解谐振腔中的本征模时只是讨论了最简单的一种体系。假如腔中假如某种介质如何处理？假如腔的壁不是 PEC 而是可见光波段下的金属（$\varepsilon<0$）又该如何处理？能否将这个问题与量子力学中的束缚态联系在一起讨论？这个情况下的 Hamiltonian 是什么？能否考虑一个小的微扰对束缚态的频率扰动？

（7） 我们说波导等价于一个$\varepsilon_r=1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$的介质，这个 Mapping 只是对 TE 模式成立的，因此并不完整/严格。你能否自己探讨一下严格的 Mapping 是什么？（在我网站上发表文章中找答案！）