第二讲

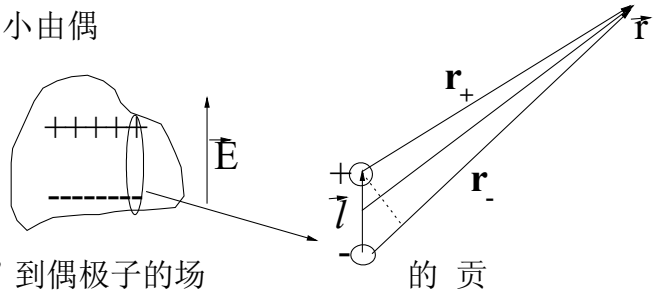
上次课：

- q --- 静电的来源及受体
- F --- 库仑定律/实验定律
- $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3}\vec{R}$ - 电场
- $\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$ - 电场的散度，高斯定理，静电场**有源**
- 常用公式：$\boxed{\nabla\cdot\dfrac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi\delta(\vec{R})}$
- $\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \\ \varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} \end{cases} \Rightarrow \nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \oint\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = 0$

  定义标量势，**无旋**，保守

6．电偶极子

作为静电学中除了点电荷之外的最简单的例子，我们研究电偶极子。什么是电偶极子？为什么要研究它？原因有两个：（1）电偶极子是中性物质对外场的最低阶响应。当施加电场于一个中性物体上时，电场将物体中的正/负电荷拉开。因此为了描述物质的这种对外场的响应，人们定义**电偶极子**为两个相距很近的带等电量的正负电荷组成的体系。偶极子的大小由偶极距描述，其定义为 $\vec{p} = q\vec{l}$，方向由负电指向正电（*思考：为什么要这样定义？*）。（2）对带任意电荷分布的一个体系，在远场看，最低阶近似下可看成以 q 为带电体总带电量的一个点电荷的贡献，再进一步就能“感受”到偶极子的场的贡献。偶极子场比点电荷的场衰减的快，所以要近一点才能看到。因此研究电偶极子具有重要意义。有了电势的概念，我们可以先计算偶极子的电势，再通过对电势求梯度得到偶极子的电场，这样比直接计算偶极子的电场容易许多。根据线性叠加原理，我们有



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (1.1.15)$$

其中推导中用到了 $r >> l$ 这个远场条件。我们注意到偶极子的电势果然比点电荷的电势更快地衰减。计算可知

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} + \vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]} \qquad (1.1.16)$$

非常容易可以计算出场的分量形式（设 $\vec{p}\parallel\hat{z}$）：$E_r=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, E_\theta=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, E_\phi\equiv 0$。

Tips： *与《电磁学》相比较，《电动力学》中更讲究数学形式的紧凑和理论形式的简洁，因此会大量使用矢量表式，而不是写成分量后的形式或是在某一些特定条件下的（比如 r||z）形式。熟练掌握常用的几个矢量运算是必要的：* $\nabla r=\vec{r}/r, \nabla(r^n)=nr^{n-1}\hat{r}, \nabla^2(1/r)=-4\pi\delta(\vec{r})$，*等。*

数值计算 Project： *推导（1.1.15）式时用到了远场条件，那多远才叫远场？编一个小程序，数值计算并用图形显示真实场和（1.1.15）式表达的场的区别，理解偶极场的基本图像以及远场条件的意义。进一步，在今后的课程中我们还会相继学到磁偶极子、电四极子等等，用同样的方法建立图像及对“远场近似”的理解。*

§1.2 静磁现象的基本理论描述

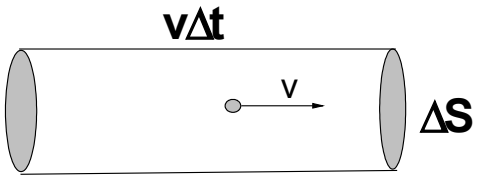
磁现象的描述要比电现象复杂。在 1820 年之前，磁现象是与磁铁（磁石）等相连，表现神秘，不易定量研究。直至丹麦物理学家 Oersted 发现电流也可以像磁铁一样产生类似的磁场，并且也可以向磁针一样感受磁场的作用力，人们才开始基于（比较容易理解的）电流定量研究磁现象。磁现象在很多方面与电现象一一对应。下面，我们基于这样电-磁的对应，总结静磁现象的基本理论描述。

1．电流（磁的来源、与电荷对比）

电流-顾名思义为电荷的流动。为定量描述电荷流动，定义**电流**为：单位时间内垂直穿过某一特定截面的电荷量，用 I 表示：

$$I=\Delta q/\Delta t\big|_S \qquad (1.2.1)$$

I 是个描述电荷流动的积分的总效果。为了更微观地看电荷的流动情况，定义**电流密度** $\vec{j}$ 为在某一个观察点附近单位面积单位时间通过的电荷量 $j=\frac{\Delta q}{\Delta t\Delta S}$。假设该点附近电荷密度为 ρ，电荷的运动速度为 v，则可以推知 $j=\frac{\rho\Delta\Omega}{\Delta t\Delta S}=\frac{\rho\Delta S v\Delta t}{\Delta t\Delta S}=\rho v$（如下图所示）。j 和 I 的关系是 $I=\int_S j ds$



进一步考虑电流密度的矢量性，可以推广以上结果，定义矢量形式的电流密度为：

$$\vec{j}=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \qquad (1.2.2)$$

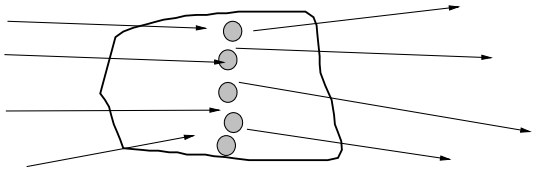
式中$\vec{v}$代表在$\vec{r}$处的电荷的（平均）运动速度，ρ为电荷密度．考虑电流密度的矢量性之后，其与电流I之间的关系为更一般的形式

$$I=\int_S \vec{j}\cdot d\vec{s} \qquad (1.2.3)$$

上式显然是合理的，因为只有投影到$d\vec{s}$方向上的电流密度才能通过这块面积，而与其平行的分量对通过此截面积的总电流I没有贡献。另外，积分下来的正负号也有明确的意义：大于 0，则意味着电流为正向（单位时间有净的正电荷通过该表面），小于 0，则意味着电流方向为负。

电荷守恒　实验表明电荷是守恒的，即电荷不能消灭及产生，而只能转移。在空间内任取一封闭曲面S，单位时间内穿流出去的电荷量为（封闭曲面的法向方向定义为垂直该曲面向外）$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}$，流出去的电荷量应等于封闭曲面$S$内总电荷在单位时间内的减少量，即$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$，$V$是$S$所包围的体积，所以

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau \quad .$$



根据高斯定理，有$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{s}=\int_V \left(\nabla\cdot\vec{j}\right)d\tau$。代入上式可得

$$\int_V \left(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)d\tau=0$$

由于曲面S是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0} \qquad (1.2.3)$$

(1.2.4)式是**电荷守恒定律**的数学表达式，也称**连续性方程。**

注：

*1）所有的“*流密度”的微观形式都是“**密度 （乘以）速度”，如粒子流密度，能流密度，物理意义均为单位时间单位面积通过的粒子数（能量、电荷等）。守恒律的普遍表达形式（粒子数守恒、能量守恒、…）为：*

$$\boxed{\text{流密度的散度+数密度的变化率 = 0}}$$

2）在稳定电流情况下，由于$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，所以有$\nabla\cdot\vec{j}=0$，电流密度的散度为 0.

这一点从几何上看意味着电流线在空间任何一点均没有源头，这表示稳恒条件下电流线是

闭合无源的。非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累，亦即$\frac{\partial \rho}{\partial t}$项，这一点你能否与电场的高斯定理做一番对比得到更深入的图像化理解？

2．安培定律 (与库仑定律对比)

既然电流是磁场的来源，类比库仑定律，我们应考虑两个这样的基本单位（电流元，定义为$\vec{j}d\tau$，与$\rho d\tau$地位相仿）之间的作用力。安培定律就是这样一个实验定律，其地位与库伦定律相仿。若真空中的两个电流元$\vec{j}_1 d\tau_1$和$\vec{j}_2 d\tau_2$，则安培定律告诉我们 2 对 1 的作用力$d\vec{F}_{12}$为

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_1 d\tau_1 \times (\vec{j}_2 d\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{\vec{R}_{12}^3} \qquad (1.2.5)$$

其中$\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$为 2 指向 1 的位置矢量。与库仑定律比较，我们可以看到：

(1) 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律
(2) 电流元之间作用力非向心力 - 磁场的散度及旋度行为与电场将截然不同！
(3) 电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律，即$d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$。（比如考虑右图的情况）

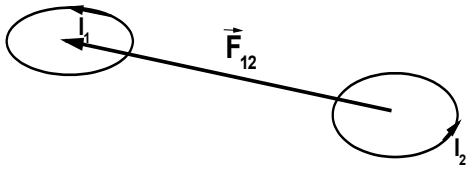


如何解决不满足牛顿第三定律这个问题？对这个问题的简单回应是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能测量的只能是闭合回路的情况，而两个闭合回路之间的磁相互作用力的确满足牛顿第三定律。

**** 选读内容 ****

考虑两闭合载流线圈，则 2 对 1 的作用力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3} \qquad (1.2.6)$$



利用矢量公式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ *（非常有用，请牢记），可得*

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\left[\frac{d\vec{l}_2(d\vec{l}_1\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^3}-\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}\right]$$
$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}d\vec{l}_2\oint_{l_1}\left[d\vec{l}_1\cdot\nabla\frac{1}{R_{12}}\right]-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3} \qquad (1.2.7)$$
$$=0+-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)}{R_{12}^3}=-\vec{F}_{21}$$

即闭合回路之间的磁相互作用力满足牛顿第三定律。

**** 选读内容 ****

然而我们对这个经典回答并不满足，深思以后，至少有这样几个问题值得研究：

1）我们可以让一个电荷做匀速运动（速度<<光速），这样就制造出空间的一个电流元 $\vec{j}=qv\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$，这样两个匀速运动的电荷之间的磁力是什么？

2）它们两个的相互作用满足不满足牛顿第三定律呢？为什么？

3）牛顿第三定律是本质的定律吗？若不是，其本质是什么？

3．磁场

类比电场的定义，可定义磁场。将作用在电流元 $\vec{j}_1 d\tau_1$ 上的力写为

$$\boxed{d\vec{F}_1=\vec{j}_1 d\tau_1\times\vec{B}(\vec{r})} \qquad (1.2.8)$$

其中 $\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_2 d\tau_2\times\frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$ 为电流元 $\vec{j}_2 d\tau_2$ 在 $\vec{r}$ 处产生的磁场。由叠加原理，对任意的电流分布 $\vec{j}(\vec{r}\,')$，其在 $\vec{r}$ 处产生的磁场为

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'\times\vec{R}}{R^3}} \qquad (1.2.9)$$

函数 $\vec{B}(\vec{r})$ 称为**磁感应强度**(纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度)。上式常称为 Biot-Sarvart 定律。

以速度 $\vec{v}$ 运动的电荷 q 产生的电流密度为 $\vec{j}=q\vec{v}\delta(\vec{r}-vt\hat{x})$（这个公式仅在 v << 光速时成立），因此其在 $\vec{B}$ 场中所受的力为

$$\vec{F}=\int_\tau q\delta(\vec{r}-vt\hat{x})d\tau\vec{v}\times\vec{B}=q\vec{v}\times\vec{B} \qquad (1.2.10)$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力为

$$\boxed{\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)} \qquad (1.2.11)$$

这就是描述带电粒子在空间既有电场又有磁场时的受力 - Lorentz 力。

4．$\vec{B}(\vec{r})$的散度

要完整理解矢量场的全部特征，须研究其散度和旋度。对比静电场，静磁场为横向场，故可以预期 **B** 场的散度及旋度性质一定与静电场相当不同。利用计算标势φ时采用的技巧，将$\frac{\vec{R}}{R^3}=-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$带入磁场表达式，得到

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}')\times(\nabla\frac{1}{R})d\tau'$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int(\nabla\frac{1}{R})\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau'$$

我们的目标是将上式中的∇拿到积分外面来，试图将 B 场写成某一个势的“全微分”。为此，注意到∇仅作用于$\vec{r}$，不作用于$\vec{r}'$，则有$\nabla\times\vec{j}(\vec{r}')\equiv 0$，换言之，$\vec{j}(\vec{r}')$对∇来说就是一个常矢量。因此，利用公式$\nabla\times\left(\vec{a}\psi(\vec{r})\right)=\nabla\psi(\vec{r})\times\vec{a}$（其中$\vec{a}$为常矢量），则磁场可以最终改写为

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\times\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)d\tau'=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'\right]=\nabla\times\vec{A}\qquad(1.2.12)$$

其中

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'}\qquad(1.2.12')$$

为矢势，地位与电场的标势相对应。因此，

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0}\qquad(1.2.13)$$

注：

（1）矢量运算公式$\boxed{\nabla\times(\vec{a}\psi)=(\nabla\times\vec{a})\psi+\nabla\psi\times\vec{a}}$可利用∇同时具有矢量性和微分性来推导。利用分步微分将∇分解：$\nabla\to\vec{\nabla}_a+\vec{\nabla}_\psi$，然后分别运算到$\vec{a}$和$\psi$上：

$\nabla\times(\vec{a}\psi)=\nabla_a\times(\vec{a}\psi)+\nabla_\psi\times(\vec{a}\psi)=(\nabla_a\times\vec{a})\psi+\nabla_\psi\psi\times\vec{a}=(\nabla\times\vec{a})\psi+\nabla\psi\times\vec{a}$。

（2）尽管我们本节研究的是稳恒电流，此处的推导丝毫没有假设电流不依赖于时间。换言之，若随时间变化的电流产生的磁场仍由 B-S 定律描述，则此时高斯定理仍成立。 这条性质在随后我们推广 Maxwell 方程式到非稳态时有重要作用。

5．$\vec{B}(\vec{r})$的旋度

下面来求$\vec{B}(\vec{r})$的旋度。由(1.2.12)式得

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \qquad (1.2.14)$$

【上面这个公式可以通过将矢量叉积公式 $\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ *（这个公式非常有用，应当牢记）作代换* $\nabla\leftrightarrow\vec{a},\nabla\leftrightarrow\vec{b},\vec{c}\leftrightarrow\vec{A}$ *得到】*

先看第一项：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r}')d\tau' \qquad (1.2.15)$$

利用恒等式 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ （*注意* ∇ *和* ∇' *的不同，前者作用在变量* $\vec{r}$ *-观察点坐标，后者作用于变量* $\vec{r}'$ *-源所在坐标，另外注意梯度运算后是一个矢量，前者运算后得到* $\vec{R}=(\vec{r}-\vec{r}')$ *，后者得到* $(\vec{r}'-\vec{r})=-\vec{R}$），可将（1.2.15）式改写成全微分的形式：

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r}')d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)-\frac{1}{R}\left(\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')\right)\right]d\tau' \quad (1.2.16)$$

注意到**在稳恒电流条件下**，有 $\boxed{\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')=-\dot{\rho}=0}$，故（1.2.16）式中第 2 项为 0. 故

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\right)d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\cdot d\vec{S}'\Bigg|_{r'\to\infty}=0 \qquad (1.2.17)$$

这里考虑电流分布在有限区域，无穷远处边界处的电流密度一定为零。

注意：$\nabla\cdot\vec{A}=0$ 只对（稳衡电流产生的）静磁场适用！不能随意推广到一般情况。

第二项为：

$$\nabla^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla^2\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}')\left(\nabla^2\frac{1}{R}\right)d\tau' \qquad (1.2.18)$$

将第一讲中的恒等式略加修改可得

$$\boxed{4\pi\delta(\vec{R})=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)=-\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\right)=-\nabla^2\frac{1}{R}}$$

将其带入（1.2.18）得到

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\int\vec{j}(\vec{r}')\delta(\vec{R})d\tau'=-\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \qquad (1.2.18')$$

整理两项贡献可得 $\vec{B}$ 的旋度为

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \qquad (1.2.19)$$

（1.2.18）式称为安培环路定理的微分形式，对应的积分形式为 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$.

Tips:

（1）在推导（1.2.19）的过程中，特别是推导 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ *这个结论时，我们用到了稳恒电流条件。因此（1.2.19）只在稳横电流条件下才适用，一般情况下* $\nabla\cdot\vec{A}=0$ *不成立！另外，磁场的旋度不为 0，意味着场在打转，一圈积分下来结果必然不为 0。这表示磁场是有旋场，不是保守场。*

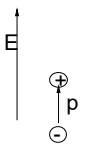
（2） 有同学会害怕使用 Delta 函数。其实 Delta 函数是由物理学家 Dirac 引入的物理工具，目的是用来方便地描述点电荷等问题，其数学的严谨性是建立了泛函分析才被证明。在本课程中，只需知道其积分表达式 $\int\delta(x-x')dx=1;\ \int\delta(\vec{r}-\vec{r}')d\vec{r}=1;$ *以及如下性质*

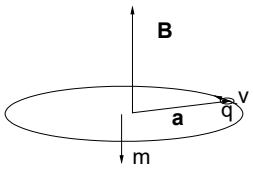
$\int\delta(\vec{r}-\vec{r}')f(\vec{r})d\vec{r}=f(\vec{r}');\ \delta(x-x')=\delta(x'-x)$ *，就可以了。*

7．磁偶极子

当外加电场时，物质中的正负电荷受到电场的作用力被拉开形成电偶极子。因此，电偶极子是中性物质对外电场的最低级响应。*一个很自然的问题是：无磁性物质对外加磁场的最低级响应是什么？*考虑一个无磁性物质，其中电子做杂乱无章的运动，不显示宏观电流。加磁场后，电子在磁场 Lorentz 力的作用下做回旋运动，形成一个个分子环流。因此，**一个环形稳恒电流**在静磁学中起到与电偶极子在静电学中完全一样的作用，我们叫它磁偶极子。

下面我们就研究一个磁偶极子（一个载有稳衡电流 I 的小线圈）的磁场，与 $\boldsymbol{p}$ 类似，我们先计算 $\boldsymbol{m}$ 产生的势：



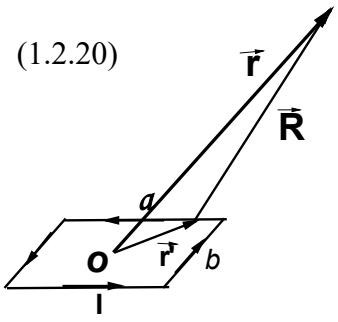


$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{1}{R}d\vec{l} \qquad (1.2.19)$$

在远场条件下 $r>>r'$，利用 Taylor 展开到第一阶可得 $\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\left(r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'+r'^2\right)^{1/2}}\approx\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}$。代入上式后，第一项贡献~$\frac{1}{r}\oint d\vec{l}\equiv 0$（闭合回路全微分的积分为 0），故

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\int(\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{l} \qquad (1.2.20)$$

在远场近似下，线圈产生的磁矢势与线圈形状无关（严格证明在后面章节中）。为了便于计算，这里我们考虑一个大小为 $a\times b$ 的矩形线圈。计算矢势的 x 分量可得



$$A_x(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\left[\int_{-a/2}^{a/2}(xx'-yb/2)dx'+\int_{a/2}^{-a/2}(xx'+yb/2)dx'\right]=-\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}yba \qquad (1.2.21)$$

同理可以得到 y 分量的表达式：$A_y(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}xba$。综合两项贡献可得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0 Iba}{4\pi r^3}\left(-y\hat{x}+x\hat{y}\right) \qquad (1.2.22)$$

注意到 $\vec{m}=I\vec{S}=Iab\hat{z}$，类似电偶极子的标势，我们可以将磁偶极子的矢势写成更紧凑的形式：

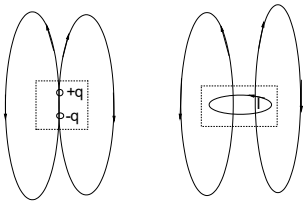
$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (1.2.23)$$

由此可进一步求出空间的磁场

$$\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right] \qquad (1.2.24)$$

（推导上式时考虑了远场条件，即 $r\neq 0$）。我们发现磁偶极子的磁场与电偶极子的电场的形式完全一致！这并不奇怪，在远场看，p 与 m 产生的场是完全一样，尽管近场结构很不一样. 这事实上蕴含着很深的物理：

在无源区，电场和磁场满足一样的方程。



对比静电场与静磁场，发现它们之间有着惊人的对称性

	电	磁
源	ρ	$\vec{j}$
场	$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$	$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}d\tau'\times\vec{R}}{R^3}$
力	$\vec{F}=\rho d\tau\vec{E}$	$\vec{F}=\vec{j}d\tau\times\vec{B}$
散度	$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0$
旋度	$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}(\vec{r})$
势	$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi,\ \ \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R}$	$\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A},\ \ \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}d\tau'}{R}$
偶极子的势	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$	$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$

偶极子的场	$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]$	$\vec{B}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]$

以后我们还会发现电、磁之间更多的对称性，这在学习电动力学中（特别是与磁场相关的问题时特别需要注意的）

§1.3 电磁感应定律

自从奥斯特发现了电流可以产生磁场之后，人们一直在探寻是否存在相反的效应，即磁场能不能产生电流．Faraday 总结大量实验后建立了描述磁产生电的电磁感应定律．对一个闭合的线圈，Faraday 的实验表明：

（1） 仅当通过这个线圈的磁通量产生变化时，线圈之中才会产生感应电流；

（2） 电流的大小与线圈材料的电导率成正比（同样形状的线圈，线圈材料的导电性越好，电流越大）。

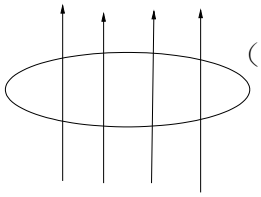
这第二个性质预示着电磁感应效应中更基本的物理量应当是电动势，而不是电流。总结了大量的实验，Faraday 给出了感应电动势的定量表达式

$$\varepsilon_{感} = \left|\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right| \qquad (1.3.1)$$

感生电动势（电流）的方向是由楞次给出的，用物理的语言表示，即“感生电流的产生是用来抵消磁通量的改变的”。这条规律其实正是能量守恒的必然要求（***思考一下假如感生电流的产生是增强磁通量的改变，则世界会变成什么样子？***）！

总结法拉弟和楞次的贡献，完整的电磁感应定律是

$$\boxed{\varepsilon_{感} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}} \qquad (1.3.2)$$



显然，磁通量的改变可以由两种机制产生：

（1）磁场本身发生变化（B 变，称之感生电动势）；

（2）回路相对磁场发生变化（ds 变，称之为动生）。

注意到电动势的定义为**外力将单位电量的电荷在环路上驱动一周所提供的能量**（很多情况下电动势只存在于局域空间：如电池内部，因此《电磁学》中也会定义电动势为将单位电量的电荷由负极移动到正极时外力做的功，其实更一般的定义是环路一周），则

$\varepsilon = \frac{\Delta W}{q} = \oint \vec{F}_K\cdot d\vec{l}\,/\,q$ （其中 $\vec{F}_K$ 为电荷受到的力）。 因此，我们可以将电动势改写成

$$\varepsilon_{感} = \oint_C \vec{E}_K\cdot d\vec{l} \qquad (1.3.3)$$

其中 $\vec{E}_K = \vec{F}_K / q$ 与静电场同样量纲。对电荷来讲，它既能感受到静电场的静电力，也能感受到非静电起源的这个场的作用力，其根本分不清楚这种力是来自什么源。因此后者也完全可以被称为一种电场，尽管其为“非静电来源的电场”.

对第一种情况，(1.3.2)式可改写成

$$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad (1.3.4)$$

利用斯托克斯定理: $\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}_K) \cdot d\vec{S}$，得 $\int_S (\nabla \times \vec{E}_K + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$。因为线圈回路是任意的故积分曲面是任意的，最终我们得到

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad (1.3.5)$$

此即是电磁感应定律的微分形式, 式中的 $\vec{E}_K$ 和 $\vec{B}$ 是相对于同一参考系定义的。

第二种情况要复杂许多，因为此时线圈在运动，线圈内的电荷受到的驱动电场是在一个相对于实验室运动的坐标系中的电场，用 $\vec{E}'_K$ 表示。$\vec{E}'_K$ 与 $\vec{B}$ 的关系是两个相对运动的坐标系中场的关系。对这个问题的深入理解，我们将推迟到学习相对论时进行。

（1.3.5）式包含了远比原始的 Faraday 感应定律（1.3.1）更丰富的物理内涵。其显示：当磁场发生变化时，

1）空间中会激发出类似静磁场的（这里 $-\dot{\vec{B}}/\mu_0$ 等价于电流密度）蜗旋电场；

2）这种电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场产生的；

3）**它们的存在并不依赖于有没有线圈**，线圈中产生电流只是一个探测手段；即使空间没有线圈，这种涡旋电场仍然存在！

4）$\vec{E}_K$ 和静电场一样对电荷产生驱动力 $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{E}_K)$，因此对电荷来讲，它感知到的就是空间的总场 $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_K$，无论来源。

习题

1.7，1.8，1.9，1.14

补充题： 1)推导课件中（1.1.6）及（1.2.24）式。

2)计算 $\nabla R, \nabla' R$，并证明 $\nabla R = -\nabla' R$

3）利用直接计算法验证：$\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \nabla r$， $\nabla \times (\vec{a} f) = (\nabla \times \vec{a}) f + \nabla f \times \vec{a}$

思考题

1） 证明放置于原点的一个半径为 a 的载流为 I 的圆形线圈在远处产生的矢势仍然为（1.2.23）。

2） 编写一段小程序（Fortran 或 C++），计算电（磁）偶极子的标（矢）势及电（磁）场在任意一点的值，选取合适的高对称平面，用图形处理程序（Origin，等）将这些量的分布表示出来。比较真实计算结果和利用电（磁）偶极子的公式计算出来的结果的不同，并从数值结果分析在什么条件下我们可以用电（磁）偶极子的公式代表这些真实结构的电（磁）场。