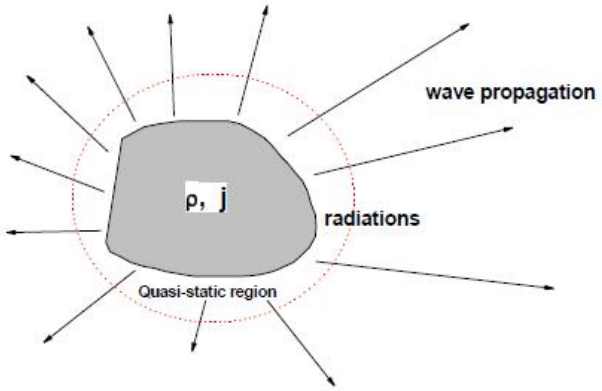
第 二 十 讲

- **波导色散关系：** $k_z=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$；$\omega_c^{\{mn\}}=c\sqrt{\left(\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(n\frac{\pi}{b}\right)^2\right)}$
- **谐振腔：三个方向全部形成驻波** $\omega_{\{mnp\}}=c\sqrt{\left(\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(n\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(p\frac{\pi}{d}\right)^2\right)}$

第十二章　电磁波的辐射

我们在前两章中已经介绍了电磁波在不同的媒质中的传输行为，然而，我们对电磁波如何产生的却依然没有讨论。这一章中，我们将详细介绍电磁波如何从源（电荷、电流分布）区产生出来的，这个过程叫做电磁辐射。



§ 12.1 势、规范、及其满足的方程

1．势的定义

原则上讲，对确定的电荷分布 $\rho(\vec{r},t)$ 和电流分布 $\vec{j}(\vec{r},t)$，我们求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}\end{cases}\qquad(12.1.1)$$

类似第八章的处理方式，可对上述 Maxwell 方程组中第二条和第四条方程中的任意一个方程两边同时做旋度运算，利用另一条旋度方程消除 $\vec{E},\vec{B}$ 场中的一个，从

而得到 $\vec{E},\vec{B}$ 独立满足的场方程，进而求解 $\vec{E},\vec{B}$。这种方法可行，但通常比较麻烦，必须利用并矢格林函数的方法（参考 JA Kong 的书）。我们这里介绍另一种方法，可以避免使用并矢格林函数。类似处理静电、静磁时的情况，我们在处理与源有关的辐射问题时，也选择解“势”对应的方程而不是场对应的方程，这样做的好处是 --- 未知量满足的方程可最终化成标量方程从而求解时方便许多。然而在一般情况下，标势、矢势的定义与静电/静磁时相比有所不同。比如，根据 Maxwell 第二条方程，电场不再是无旋场，因此，也就不能直接据此定义标势。不过 Maxwell 方程第三式显示 B 场依然是无源场（没有磁单极），因此我们可由此定义矢势 A 为

$$\boxed{\nabla\times\vec{A}=\vec{B}} \qquad (12.1.2)$$

将上式带入 Maxwell 方程第二式，可得

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0 \qquad (12.1.3)$$

我们发现虽然 E 场自身不是无旋场，$\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ 形成的新的场却是一个无旋场。可以据此定义标势，其满足

$$\boxed{\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\nabla\varphi \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\varphi} \qquad (12.1.4)$$

上式清楚地显示：在最一般情形下，$\vec{E}$ 场不仅包含保守无旋部分（$-\nabla\varphi$，根源是库伦定律），还必然包含一项有旋项（$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$，物理根源来自电磁感应定律）。

2．规范条件（Gauge）

注意到（12.1.2）与（12.1.4）是由 Maxwell 方程中两条微分方程（$\nabla\cdot\vec{B}=0$；$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0$）反推而得，我们马上意识到这样所定义势并不唯一。比如，给 A 场加上任意一个标量函数 $\Lambda(\vec{r},t)$ 的梯度：$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda$ ，新的矢势 $\vec{A}'$ 对应同样的 B 场（$\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\Lambda)\equiv\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$）。考虑到这一变化带来的对电场的影响，我们可以定义一对新的标势和矢势：

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda,\quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad (12.1.5)$$

将上式代入（12.1.2）和（12.1.4），我们发现$\{\vec{A}',\varphi'\}$给出与$\{\vec{A},\varphi\}$完全一样的$\vec{E},\vec{B}$场。在经典电动力学的范畴内，$\vec{E},\vec{B}$对应着真实的物理场，$\{\vec{A},\varphi\}$并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系，$\{\vec{A},\varphi\}$的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。通常使用的规范是库仑规范

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \qquad (12.1.6)$$

和洛仑兹规范

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad (12.1.7)$$

值得注意的是：洛仑兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

注：

1）规范条件只能有一个，因为规范自由度只有一个。因此，人们可以选择$\varphi=0$这样的条件，却不能选择$\vec{A}=0$，因为后者对应 3 个条件。

2）求解静磁问题时得到的$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'$其实已经用了规范条件$\nabla\cdot\vec{A}=0$，否则可以有别的矢势解得到同样的 B 场。

3．势所满足的方程

将（12.1.2）与（12.1.4）带入 Maxwell 方程中与“源”相关的第一和第四式，（无源的两个方程自动满足），我们得到对势的方程：

$$\begin{aligned}-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)&=\rho/\varepsilon_0\\ -\nabla^2\vec{A}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})&=\mu_0\vec{j}\end{aligned} \qquad (12.1.8)$$

这组方程是$\{\vec{A},\varphi\}$耦合在一起的，使用起来不方便。因为有规范自由度，我们可以巧妙选择合适的规范条件使得利用$\{\vec{A},\varphi\}$的场方程解耦。尝试库仑规范发现不能实现解耦的效果。尝试 Lorentz 规范条件（12.1.7），发现确实可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\rho/\varepsilon_0,$$
$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{j} \qquad (12.1.9)$$

因此，我们首先根据源的情况求解（12.1.9）得到势，然后再由势求出电磁场。

思考题：规范不变性使得$\{\vec{A},\varphi\}$本身在经典电动力学的层面上没有绝对意义。但真的是这样的吗？为什么电磁相互作用导致的附加动量与$\vec{A}$有关？

§ 12.2 推 迟 势

由于$\vec{A}$和φ满足同样的方程，因此我们只需要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t)=-\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0 \qquad (12.1.9')$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \qquad (12.2.1)$$

这个函数其实就是当t'时刻在$\vec{r}'$处做一个单位强度的扰动时，时空各处所激发的场。定义$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}',T=t-t'$，我们发现当格林函数已知后，对任意的电荷分布，其电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{R},T)\rho(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt' \quad . \qquad (12.2.2)$$

证明（12.2.2）式并不困难，只要对等式两端都作用一个$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$算符，再利用（12.2.1），则发现（12.2.2）是（12.1.9'）的正确解。

其实，这正是定义格林函数的妙处。对任意的有源方程$\hat{L}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)=S(\vec{r},t)$，我们总归可以定义 Green 函数满足$\hat{L}(\vec{r},t)G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$，求解 Green 函数后则

波函数得解：$\psi(\vec{r},t)=\int G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')S(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'$ 。而格林函数对应的物理意义就是在 r'点 t'时刻的“单位”源激发的在 r 点处 t 时刻的场，因此有限时空分布的源给出的最终场当然就是一个卷积。这其实是线性叠加原理的一个体现：r', t'时空点做单位扰动时的场已知，则任意时空分布的扰动（源）的影响就可以基于线性叠加原理得到。

下面求解格林函数。在 R，T 空间求解非常不方便，因为方程是微分运算。基于时空都具有平移不变的特性，将问题转到频域和 K 空间求解。利用 Fourier 变换可得

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega$$
$$\delta(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega \qquad (12.2.3)$$

带入（12.2.1）可以解得$(\vec{k},\omega)$空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k},\omega)=\frac{1}{k^2-k_0^2} \qquad (12.2.4)$$

其中,

$$\boxed{k_0^2=(\omega/c)^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2} \qquad (12.2.5)$$

****

Tips: 其实有其它的方法求解真空中的推迟势，比如蔡胜善先生《电动力学》介绍的时域方法。但为什么我们要介绍数学形式相对复杂的$(\vec{k},\omega)$空间求解的方法呢？那是因为时域求解的方法只能应用于*非色散空间局域响应*的介质，但真实的体系许多是频率色散空间 Non-local 的，亦即：响应函数只能用$\varepsilon(\omega,\vec{k}),\mu(\omega,\vec{k})$ 描述。因此，我们只能在$(\vec{k},\omega)$空间才能 Well-defined 求出其格林函数$G(\vec{k},\omega)$，然后再反 Fourier 变换回实空间。因此，本文介绍的方法是普适的。后面会发现这个方法将材料特性、因果关系都联系起来，很物理。

****

*果然：在$(\vec{k},\omega)$空间，格林函数变成了无耦合的量 --- 借用量子力学中矩阵力学的表述就是，格林函数在在$(\vec{k},\omega)$空间被自然对角化。*因此，将（12.2.4）带回（12.2.3）可得$(\vec{R},T)$空间的格林函数为

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int G(\vec{R},\omega)e^{-i\omega T}d\omega \qquad (12.2.6)$$

其中，

$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k} \qquad (12.2.6')$$

求解（12.2.6）这个积分并不容易。先计算(12.2.6')式：

$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}k^2dk\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{1}{k^2-k_0^2}k^2dk\left[-\int_0^\pi e^{ikR\cos\theta}d(\cos\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\left(\frac{k^2}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\frac{\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)}{ikR}dk$$

$$=\frac{1}{2(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{k}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\times$$

$$\left\{\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{ikR}dk-\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{-ikR}dk\right\} \qquad (12.2.7)$$

上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设k_0具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取 + 还是取 - 呢？

选择的依据是“因果关系”！--- 在正常介质中这个虚部必须为正。

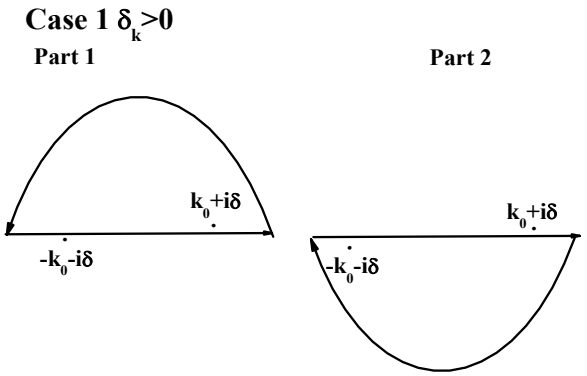
“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。而k_0是介质中向前传播的波矢，假设$k_0=\mathrm{Re}(k_0)+i\delta$，则$e^{ik_0r}e^{-i\omega t}=e^{i\mathrm{Re}(k_0)r}e^{-\delta r}e^{-i\omega t}$，因此$\delta$一定为正。

Tips：

1）这里我们考虑的是实轴上的全积分，不是主轴积分(P)，因此一定要选择合适的路径；

2）由（12.2.5）可知，当处于一定介质（如空气）中时，因为介质的ε,μ一定因为耗散而有虚部，则k_0一定带有虚部！即使是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给k_0一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

注意到 e^{ikR} 和 e^{-ikR} 分别当 $k \to \pm i\infty$ 时收敛，上面的两个积分必须分别选择如下图所示的两个闭合回路（使得加上去的半圆不贡献积分值）。我们将被积函数解析延拓到复平面，利用留数定理容易推出



$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times 2\pi i-\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times(-2\pi i)=\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R} \qquad (12.2.8)$$

在（12.2.8）式中加入时间振荡因子 $e^{-i\omega T}$，则发现这个解对应这样一个单频波，$\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}$，其物理意义为一个点源的“出射波”--- 即从源点向外发射的球面波。

显然这是符合“因果关系”的解。*若选择 k_0 的虚部为负，则结果为不符合因果关系的“会聚波”。*进而将（12.2.8）代入（12.2.6）可得最终的格林函数

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}d\omega=\frac{1}{4\pi R}\delta(R/c-T) \qquad （12.2.9）$$

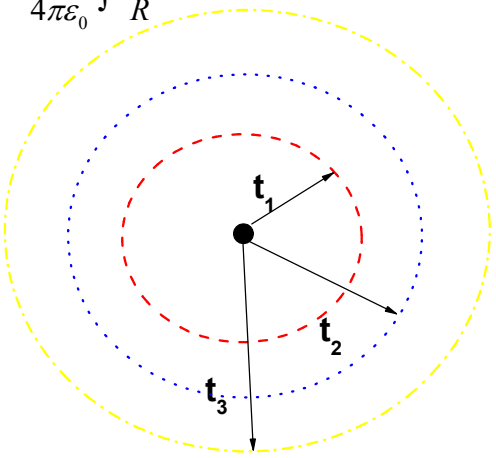
这个解的物理意义更加明晰 – 在原点处 0 时刻作一个激发，则激励的波以球面波的形式传播出去 – 波振幅以 1/r 形式衰减，且只在 r=ct 处有值。将格林函数形式（12.2.9）带入（12.2.4）得到

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{R}\delta(R/c-T)\rho(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau' \qquad （12.2.10）$$

式中方括号[　]表示 $t'=t-\frac{R}{c}$，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{R}d\tau' \qquad （12.2.11）$$

我们注意到 $\varphi,\vec{A}$ 的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时 t 时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个



推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需
的时间。这就是推迟势，其物理的根据是因果关系。

§ 12.3 多 极 辐 射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一块很小区域内，而我们则关心远场的行为。类似静电、静磁时的处理方法，此时我们可以作多极展开。

1．推迟势的多极展开

我们讨论的是远离源的场，即 $r>>l$（图 12.2），l 为源的线度。被积函数是 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ 的函数，我们可以将它在 $\vec{r}$ 处展开为级数（视 $r'<<r$ 为展开小量），即

$$\frac{[\rho]}{R}=\frac{[\rho]}{R}\bigg|_{\vec{r}'=0}+(-\vec{r}')\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{\vec{r}'=0}+\ldots=\frac{[\rho]_0}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\cdots \qquad (12.3.1)$$

与静电、静磁条件下做多级矩展开最大的不同是：此处 $[\rho]$ 中因为有推迟因子：$t-\frac{R}{c}$，也要做泰勒展开处理。式中 $[\rho]_0$ 表示 $\rho\left(\vec{r}',t-\frac{r}{c}\right)$，物理意义是使得每个源点的推迟时间一样。以后为简便起见，脚标 0 不再写出。同理可得

$$\frac{[\vec{j}]}{R}=\frac{[\vec{j}]}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}+\ldots$$

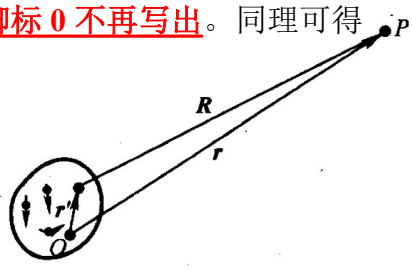


图 12.2

故

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{[\rho]}{r}d\tau'-\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}d\tau'+\ldots\right]$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\vec{j}]}{r}d\tau'+\cdots$$

我们下面分别研究 $\vec{A}$、φ 展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

2．电偶极辐射

φ展开式中的第一项

$$\varphi_0 = \int \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int [\rho] d\tau' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (12.3.2)$$

Q是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1 = -\int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = -\nabla \cdot \frac{[\vec{p}]}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (12.3.3)$$

式中$[\vec{p}] = \int \vec{r}' [\rho] d\tau' = \left[\int \vec{r}' \rho d\tau'\right]$，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$展开式中的第一项：

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int [\vec{v}\rho] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\sum_i q_i \vec{v}_i\right]$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d}{dt}\left[\sum_i q_i \vec{r}_i\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\dot{\vec{p}}\right] \qquad (12.3.4)$$

Tips:

1. []是对时间的推迟操作，可以与∇, $\int$ 等空间运算算符互换。

2. 稳恒电流（稳定磁场）情况下我们曾推出 A 中的第一项=0，但现在是变化电流，其可能引发“极化电荷”的积累，从而导致（电）偶极辐射项！

3. 之前在推导极化电流时我们得到$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$，推导过程不算严谨。现在（12.3.4）的推导过程是严谨的，不过也只是推出$\int \vec{j}_p d\tau = \int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ ---一个积分形式。这其实是非常物理的：因为原始的连续介质中的$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$也只是在“宏观小微观大”的一个“点”上成立而已，因此必须做平均化处理才能得到。

所以，电偶极矩系统所产生的$\vec{A}$和φ为（12.3.3）及（12.3.4）。下面考虑单频的辐射源，$\rho(\vec{r}',t') = \rho(\vec{r}')e^{-i\omega t'}, \vec{j}(\vec{r}',t') = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$（任意情况总可以展开成单频结果的叠加，因此考虑单频足够了）。从联系$\vec{B}$与$\vec{A}$的公式，我们得到电偶极辐射

场中的磁场部分为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\left[\dot{\vec{p}}\right]}{r}=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.5}$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地通过 Maxwell 方程由磁场导出

$$\vec{E}=-\frac{c^2}{i\omega}\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.6}$$

下面仔细分析一下在（12.3.5）和（12.3.6）式中要用到的一项：

$$\nabla\times\frac{[\vec{p}]}{r}=(\nabla\times[\vec{p}])\frac{1}{r}+\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times[\vec{p}]\right) \tag{12.3.7}$$

考虑第一项，因为$[\vec{p}]=\vec{p}_0e^{-i\omega t}e^{i\frac{\omega}{c}r}$，则微分运算可以代换成

$$\boxed{\nabla\leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r=ik\vec{e}_r} \tag{12.3.8}$$

再考虑第二项，因$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$，最终，（12.3.7）变为

$$i\frac{\omega}{c}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right]-\frac{1}{r}\left[\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right] \tag{12.3.7'}$$

因此，$\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$和$\frac{1}{r}$的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

Tips：在静电情况下我们喜欢用φ求$\vec{E}$，因为$\vec{E}$只与φ相关。但在辐射情况下通常利用$\vec{A}$求$\vec{B}$，再通过 Maxwell 方程求$\vec{E}$，这样更方便！

（1）近区：　$r<<\lambda$，但仍满足　$r>>l$。**这时公式(12.3.5)和(12.3.6)中的旋度算子只要对分母运算即可**。因为每对分母运算一次得到一个$\frac{1}{r}$因子，而对分子运算得到一个$\frac{1}{\lambda}$因子，显然$\frac{1}{r}$比$\frac{1}{\lambda}$贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$\vec{B}=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r\times[\vec{p}],$$
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot[\vec{p}]\right)-[\vec{p}]\right) \tag{12.3.9}$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已 – 事实上在这个条件下，“准静态”近似适用（参考第 6 章）。

（2）远区：不仅要求 $r>>l$，而且 $r>>\lambda$，λ 为辐射场的波长，此时，公式(12.3.7)中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算∇算子作用到$[\vec{p}]$上即可，无需计算其作用到$\frac{1}{r}$上。这等价于做代换（12.3.8）。因此，远区场强的公式为

$$\vec{B}=\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times[\vec{p}]$$
$$\vec{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r\times\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\right), \tag{12.3.10}$$

(3) 中间区域：虽然 $r>>l$，但 $r\approx\lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子$\frac{1}{r}$和 $\frac{\omega}{c}=\frac{1}{\lambda}$是同数量级。

思考题：为什么（12.3.9）中电磁场之间差一个i，但（12.3.10）中却没有？

Tips: 直接记住（12.3.10）是 Hopeless 的！其实可以通过$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$得到$\vec{E}=-c(\hat{r}\times\vec{B})$，从而由$\vec{B}$推导出$\vec{E}$。

习题 P．343，12.2， 12.4， 12.5

补充

（1）仿照课件中对真空中格林函数的解（12.2.8）的推导，利用因果关系，推导出一个均匀的负折射介质（在某个频率ω具有$\varepsilon<0,\mu<0$的性质）中的频域格林函数$G(R,\omega)$的解，并解释所得的格林函数的物理意义。

课后 Project

1） 利用数值仿真软件（COMSOL 或者 CST），计算一个偶极天线在不同频率下的辐射图案，反射损耗，以及天线上的电流分布。并与解析结果（12.4.7）做比较。

2）为什么在补充题（1）只请大家做频域格林函数而不是时域下的格林函数$G(R,T)$？若一定要考虑负折射介质中的时域格林函数，应当如何正确计算？