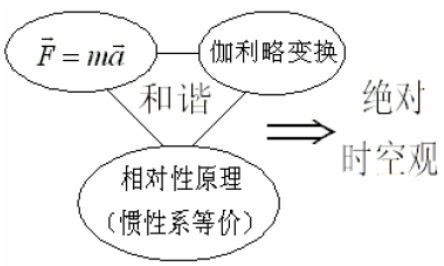
第 二 十 二 讲

上次课：

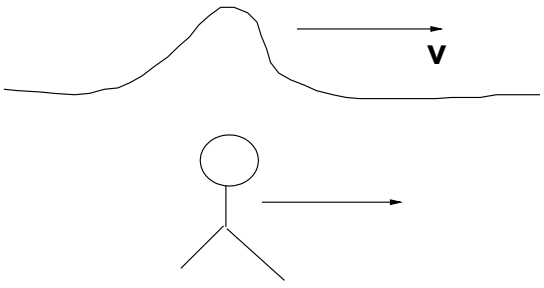
- **电偶极辐射角分布：** $f(\theta,\varphi)\propto p_0^2\sin^2\theta\cdot\omega^4$
- **磁偶极辐射：** $\vec{p}/\varepsilon_0\to\mu_0\vec{m},\quad \vec{E}\to\vec{B}$ **，电磁对称性**
- **天线、天线阵：** $f(\Omega)=f_{\text{single}}(\Omega)\cdot f_{\text{array}}(\Omega)$



- **绝对时空观：**

2．绝对时空观的困难

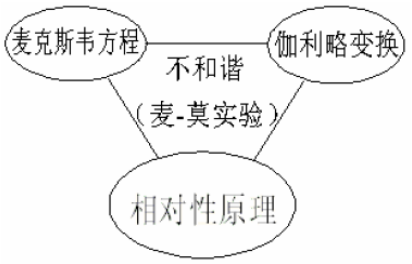
但是，当人们把绝对时空观应用到电磁理论时遇到了巨大的困难，主要表现在对光的传播规律的描述上。对于经典的力学规律描述的波，如水波，当它在一个坐标系中的速度为$\vec{u}$时，在相对于这个坐标系做匀速运动的另一个坐标系中测出的速度为$\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v}$。特别是，当$\vec{u}=\vec{v}$时，$\vec{u}'=0$，即水波不再运动。



电磁波也是一种波，有一个运动速度 c，因此人们自然要问：究竟这个光速 c 是在哪个坐标系中测得的？假设光速为 C 的这个坐标系叫做以太系，是否可以测得地球相对于以太系的运动速度？抑或地球就是那个绝对坐标系？

迈克耳孙和莫雷设计了精妙的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。然而实验测不到任何的以太漂移速度。换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数c，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。

这个结果是惊人的，揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。



3．爱因斯坦的选择

相对性原理、Maxwell 方程以及伽利略变换不和谐，则必须放弃（改造）其中一个使得这三者和谐。爱因斯坦选择保留前面 2 个，放弃伽利略变换。他提出如下两条基本假设：

(1) 相对性原理

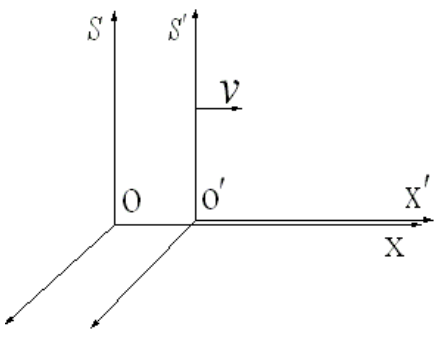
自然规律在不同惯性系中的表达式相同。

(2) 光速不变原理 （选择 Maxwell 方程在一切惯性系中形式不变）

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。这事实上并非爱因斯坦的假设，而是麦-莫实验所揭示的基本实验事实。为了满足这个基本实验事实，必须假设 Maxwell 方程组在所有惯性坐标系下的形式都保持不变（只有这样，才有可能有相同的光速）。显然伽利略变换不能完成这个任务，因此，人们必须寻找新的时空变换来替代伽利略变换。

4．洛伦兹变换

基于不同惯性系中测出的光速不变这一假设，洛伦兹提出了他的时空变换。



考虑在 $t=t'=0$ 时，S 与 S' 重合，S' 系相对于 S 系沿 x 轴以速度 v 运动。

假设此时从原点发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是 c。所以 t 时刻 S 系中光到达的位置满足

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=c^2t^2} \qquad (11.1.3)$$

存在两事件： 1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 (x,y,z,t)

在 S' 看来，同样的事件应该用如下时空点描述

1 发射 $(0,0,0,0)$

2 接收 (x',y',z',t')

根据光速不变原理，变换后的 (x',y',z',t') 必须满足

$$\boxed{x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2} \qquad (11.1.4)$$

基于变换后满足（11.1.3-4）这个基本约束，数学家洛伦兹提出如下（线性）时空变换：

$$\boxed{\begin{cases} x'=(x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases}} \qquad (11.1.5)$$

容易证明，若两个时空点原本满足（11.1.3），则洛仑兹变换后的是空间一定满足（11.1.4）- **也就是说，在 S' 系中观测事件传播的速度仍为 c，而且是各向同性的—尽管 S' 相对 S 沿 x 轴运动，在 S' 系中看到的速度沿 x 轴与其它轴没有任何的不同！这个结果相当惊人，因为实施洛伦兹变换时貌似选择打破空间的对称性（选择了 v 为 x 方向），然而因为同时也对时间尺度做了相应的修正，最后这种空间的扭曲对测量光速没有任何影响！**

引入一个虚构的由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间（闵可夫斯基空间），一个时空点在这个空间中的表示为

$$x_\mu=(x,y,z,ict) \qquad (11.1.6)$$

则 Lorentz 变换可以写成

$$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu \qquad (11.1.7)$$

变换矩阵为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix} \qquad (11.1.8)$$

其中 $\beta=v/c$，$\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ 。容易证明 α 是个正交矩阵，即

$$\alpha\cdot\alpha^T=I\rightarrow\boxed{\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\delta\nu}=\delta_{\mu\delta}},\quad \alpha^{-1}=\alpha^T \qquad (11.1.9)$$

一个直接的结果就是

$$x_\mu=\alpha_{\nu\mu}x'_\nu \qquad (11.1.7')$$

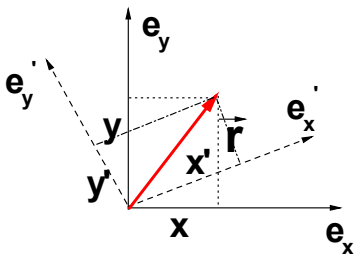
注：　在 ct 前面引入一个 i 有两点动机：1）使得 x_μ 的模值变成有意义的标量（$\sqrt{x_\mu x_\mu}=\sqrt{|\vec{r}|^2-(ct)^2}$ ）；2）使得变换矩阵为正交阵。

§　11. 2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，***这就要求描述物理规律的物理方程式的形式一定要在 Lorentz 变换下保持不变***。我们下面首先研究不同物理量在 Lorentz 变换是如何变换的。

1．物理量按时空变换性质分类

我们首先将所遇到的各种物理量根据它们如何随着洛伦兹变换而变化作一番分类。为此，我们先考虑在一个大家熟知的三维空间中的一个纯坐标转动变换下不同物理量如何变化的，据此来理解如何分类物理量。将坐标系以 z 轴为转轴转动 θ 角度（如图所示），相应的坐标轴变换关系为



$$\begin{cases} \hat{e}_x^{'} = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y \\ \hat{e}_y^{'} = -\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y \\ \hat{e}_z^{'} = \hat{e}_z \end{cases} \qquad (11.2.1)$$

在这个变换下我们看不同的物理量具有怎样的变换关系。比如

(1) 任意一点到原点的空间距离 $r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ 在变换下保持不变，这就是一个标量。

(2) 将位置矢量 $\vec{r}$ 投影到相应的坐标轴上得到三个数组成的向量 $x_i = \{x_1, x_2, x_3\}$，经过坐标旋转变换后这三个数变成 $x_i^{'} = \{x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\}$，$\{x_1, x_2, x_3\}$ 与 $\{x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\}$ 两组数之间的变换关系为

$$x_i^{'} = T_{ij}x_i$$

其中，转动矩阵的形式为

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11.2.2)$$

显然，所有三维空间的矢量（$\vec{E}, \vec{H}, \vec{F}$ 等）的三个分量都满足上面的变换关系，因为它们都是将常量向位置矢量投影一样投影到相应的坐标轴上。我们把满足（11.2.1）式变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

（3）同样道理，2 阶张量（如电四极矩 $\vec{D}$）中的 9 个元素在坐标变换下满足

$$D_{ij}^{'} = T_{il}T_{jk}D_{lk} \qquad (11.2.3)$$

换言之，若能找到 9 个元素，它们组成的 3x3 矩阵在不同坐标下的形式满足上述变换方式，则我们就把它称为 2 阶张量。

将上面对 3 维坐标变换的定义推广到 4 维时空变换

(1) 标量

一个 Lorentz 变换下保持不变的物理量叫做标量。正交性质（11.1.9）显示：四维时空矢量的标积是个变换不变量，

$$x_i'x_i' = \alpha_{ij}\alpha_{ik}x_jx_k = x_jx_j \qquad (11.2.4)$$

因此这是个“四维标量”。（11.2.4）是光速不变（11.1.3-11.1.4）的另外一种表述方式。通常将两个时空点之间的四维距离

$$\Delta s=\sqrt{-\Delta x_\mu \Delta x_\mu}=\sqrt{(c\Delta t)^2-|\Delta \vec{r}|^2} \qquad (11.2.5)$$

叫做间隔，它描述的是两个事件之间的**时空间隔**, 是个不依赖于惯性系选择而变化的“标量”。在相对论时空观中，时间空间耦合在一起，单独讨论两个事件的时间和空间间隔都没有意义（依赖于具体的参照系），但“间隔”却是一个有意义的物理量。

(2) 矢量（一阶张量）

定义一个由四个量组成的集合$\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$，若这些量在 Lorentz 变换下满足与四维坐标一样的变换关系

$$V'_\mu=\alpha_{\mu\nu}V_\nu \qquad (11.2.4)$$

则这样的集合称为一个四维矢量（或是一阶张量）

(3) 二阶张量

进一步，若有一物理量用4×4矩阵$T_{\mu\nu}$表示，在坐标变换$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu$下，其变换关系为

$$T'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu k}\alpha_{\nu l}T_{kl} \qquad (11.2.5)$$

则称此物理量为二阶张量。

（4）几个例子

(a) $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}$的变换行为为一阶张量

因为 $$x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x_\nu \quad\Rightarrow\quad x_\nu=\left(\alpha^{-1}\right)_{\nu\mu}x'_\mu=\left(\alpha^{T}\right)_{\nu\mu}x'_\mu=\alpha_{\mu\nu}x'_\mu \qquad (11.2.6)$$

故 $$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (11.2.7)$$

上式显示$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}=\left\{\nabla,-i\dfrac{\partial_t}{c}\right\}$就是一个四维矢量。

(b) 任意两个四维矢量的标积为四维标量

比如四维间隔就是两个（四维时空位置）矢量的标积。同理，因为$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$是一个矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Box^2 \tag{11.2.8}$$

即$\Box^2$算符为四维不变量。由此推知，若A_μ为四维矢量，则此矢量的四维散度$\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu$为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}A_\beta=\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\nu \tag{11.2.9}$$

2．物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在 Lorentz 变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。***如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。***例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu=B_\mu \tag{11.2.10}$$

式中A_μ, B_μ分别代表S系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到S'系时，由于A_μ, B_μ都是一阶张量(即矢量)，其变换规律分别为

$$\begin{aligned}A'_\mu&=\alpha_{\mu\nu}A_\nu\\B'_\mu&=\alpha_{\mu\nu}B_\nu\end{aligned} \tag{11.2.11}$$

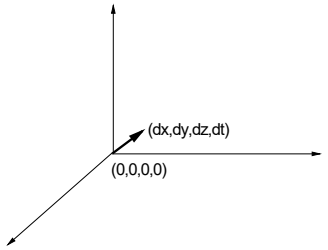
故

$$A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}A_\nu=\alpha_{\mu\nu}B_\nu=B'_\mu \tag{11.2.12}$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为 Lorentz 协变。反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足 Lorentz 协变。

3．速度及四维速度矢量

假定在 S 系中考察一个物体的运动，其三维空间速度的定义是$\vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}$。现在假定$S'$系相对$S$



系以速度v沿着x轴运动，则在S'系中同一粒子的速度定义为$\vec{u}'=\frac{d\vec{r}'}{dt'}$。S 系中测量粒子的运动速度可以想象成测量两个事件：1）粒子在四维空间原点（0,0,0,0）出发，在四维空间点（$(dx,dy,dz,icdt)$被测到。因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由 Lorentz 公式得

$$\begin{aligned} dx' &= (dx - vdt)\gamma_v \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{aligned} \qquad (11.2.11)$$

用上面第四个方程除前三个，则得

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{(dx - vdt)\gamma_v}{\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \qquad (11.2.12)$$

上式决定了两个参考系中三维速度的变换关系，这就是相对论中的速度合成法则。在低速极限（$v<<c$，$|\vec{u}|<<c$）下，可将公式展开成泰勒级数，取最低阶项，上式变成经典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v, \\ u'_y = u_y, \\ u'_z = u_z, \end{cases} \qquad (11.2.13)$$

注意到（11.2.12）的分母中包含$u_x v/c^2$项，这表明，**无论u,v中哪一项接近光速，都会有“超越常识”（牛顿+伽利略时空观）的奇异现象发生**。

根据这些结果可以回答之前几个 Puzzle：

1）为什么水波和电磁波都是波，换一个坐标系观测水波，其速度变化甚至可以变为 0（像那位英国科学家一样骑着马追泰晤士河上的一个水孤波），但电磁波的速度却从来不变（M-M 实验）？ 原因是水波的运动$u<<c$，而电磁波的速度$u=c$。将$\vec{u}=c\hat{x}$带入（11. 2. 12），

发现 $\vec{u}'=u_x'\hat{x},\ u_x'=\dfrac{c-v}{1-vc/c^2}\equiv c$。这是一个多么惊人的结果？！当且仅当我们考察的“物质”的运动速度为光速时，无论如何换坐标系都不能改变其运动速度的观测值！

2）可否改变坐标系运动速度 v，使得原本低速运动的粒子在另一个坐标系的运动速度“超”光速？答案是“否”。即使我们以光速反向运动，根据（11.2.12）我们发现 $u_x'=\dfrac{u_x+c}{1+cu_x/c^2}=c$，而当坐标系速度小于光速时，粒子速度也必然小于光速。也就是说，我们最多能使得粒子的相对运动速度达到光速，而不能超过光速！

注意到速度的变换公式很复杂，不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维空间速度的定义 $\vec{u}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 本身不是相对论协变的。式中分子 $d\vec{r}$ 是三维矢量，很容易推广到四维协变形式 $x_\mu=\{\vec{r},ict\}$。问题出在分母上：dt 不是一个四维标量！其在不同惯性系中测量值不同！为了解决这个问题，我们知道 2 个事件之间的四维时空间隔

$$(ds)^2=-dx_\mu dx_\mu=(cdt)^2-d\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad (11.2.14)$$

是一个标量，其在不同惯性系中的测量值不变。可以据此定义一个具有时间量纲的标量

$$d\tau=ds/c=dt\sqrt{1-\vec{u}\cdot\vec{u}/c^2}=dt\sqrt{1-\beta_u^2} \qquad (11.2.15)$$

用来替代 dt。考察 $d\tau$ 的物理意义：注意到其与坐标系无关，因此我们可以选取与粒子一起运动的坐标系来测量它，此时我们有 $\beta_u^2=0$，因此得到 $d\tau=dt\big|_{u=0}$。故 $d\tau$ 的物理意义为：在粒子静止的坐标系中测量的两个事件之间的时间差。通常我们也把 $d\tau$ 称作“固有时”- **Proper Time**。在任意的坐标系下，粒子可能会相对于该坐标系运动，在这个坐标系下测得的两事件的时间间隔 dt 可表达为在“随着粒子运动的坐标系”下测得的时间间隔 $d\tau$（固有时）的函数：

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2}}=\gamma_u d\tau \qquad (11.2.16)$$

因此，对同样两个客观存在的事件，在相对于粒子运动的坐标系下测得的时间间隔比“固有时”增大了 $\gamma_u=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$ 倍 – 这就是所谓“时间膨胀”效应，这个效

应被高能实验所验证。既然“固有时”是个与坐标变换无关的具有时间量纲的标量，我们可据此定义一个四维矢量（四维速度）：

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u \{\vec{u}, ic\} \qquad (11.2.17)$$

它显然是在 Lorentz 变换下协变的，因为分子是个四维矢量而分母是个四维不变量。这个四维矢量中三维空间部分与三维速度矢量相关（但不是一回事！因为相对于物体运动的时钟测得的时间不是固有时，需做修正 --- 此即为 γ_u 的来源！）。

Tips：对理论物理学家来说，最重要的就是对任何一个三维矢量如何正确的找到它的四维伴侣！你试试其他的三维矢量，能否自己找到它们的伴侣？

P. 297， 11.1， 11.2， 11.5

补充题：

1) 写出四维速度在 Lorentz 变换下的变换方式，验证其与三维速度的变换公式（11.2.12）的一致性。（提示，参考书上 P. 276 最下面的一个公式）