第 二 十 三 讲

上次课：

- **Lorentz 变换，** $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$**；物理量：标量、矢量、张量**
- **物理规律的协变性要求：** $A_\mu = B_\mu$ **(等式两边为同阶张量)**
- **固有时：** $d\tau = dt\sqrt{1-\beta_u^2}$ **；四维速度：** $u_\mu = \dfrac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u(\vec{u}, ic)$

---

§11.3 麦克斯韦方程的协变形式

根据相对性原理要求，作为描述电磁体系物理规律的麦克斯韦方程组应当在 Lorentz 变换下协变。下面我们就将我们所关心的方程一一写成在 Lorentz 变换下协变的形式

1．电荷守恒定律 - 四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程，

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (11.3.1)$$

此方程是在某一个确定坐标系（记为 S 系）下写出的，在 S'系中 $\vec{j}, \rho$ 都应相应变化成 $\vec{j}', \rho'$。根据相对性原理，（11.3.1）的方程形式应当洛伦兹变换下不变。因为 $(\vec{\nabla}, \partial(ict))$ 构成一个四维矢量，假如

$$J_\mu = (\vec{j}, ic\rho) \qquad (11.3.2)$$

也构成一个四维矢量，则（11.3.1）式可以写成相对论不变的形式：

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \qquad (11.3.3)$$

为书写方便，式中 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 记为 ∂_μ。 *下面我们证明* $(\vec{j}, ic\rho)$ *确实构成一个四维矢量。*

实验显示，电荷是洛伦兹不变量，亦即 --- 一个带电体在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同，这一实验事实将成为我们证明的关键。

设在 S 系中有一体积元 $\Delta\Omega$ 含总电荷为 ΔQ，其中电荷以速度 u 沿 x 方向运动，则 S 系中测量的电荷密度为

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta\Omega} \tag{11.3.4A}$$

在与电荷相对静止的参考系 S_0 中，电荷速度为零，测得的体积元为 $\Delta\Omega_0$，因此在该坐标系中测得的电荷密度为

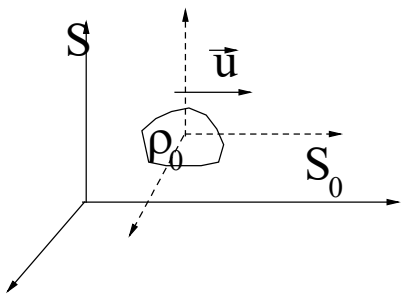
$$\rho_0 = \frac{\Delta Q_0}{\Delta\Omega_0} \tag{11.3.4B}$$

根据电荷的洛伦兹不变性，我们有 $\Delta Q = \Delta Q_0$。但（11.3.4A）与（11.3.4B）中对应的不同坐标系下侧得的体积却不相同：$\Delta\Omega_0 \neq \Delta\Omega$（因为不同坐标系下的“空间尺子”不同），这导致了测得的电荷密度也不相同。我们可以计算出 $\Delta\Omega_0$ 与 $\Delta\Omega$ 之间的关系。由于 S_0 相对于 S 系以速度 $\vec{u}$ 运动，则两个坐标系的时空微元的变换关系为

$$\Delta x_0 = (\Delta x - u\Delta t)\gamma_u,\quad \Delta y_0 = \Delta y,\quad \Delta z_0 = \Delta z,\quad \Delta t_0 = \left(\Delta t - u\Delta x / c^2\right)\gamma_u \tag{11.3.5}$$

在 S 系中测量运动物体的“长度”时必须同时进行，亦即，$\Delta t = 0$。将其带入上式，我们发现两参考系之间的体积元的关系为

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_0 &= dx_0 dy_0 dz_0 \\ &= \gamma_u dx dy dz = \gamma_u \Delta\Omega\end{aligned} \tag{11.3.6}$$



我们注意到同一个带电微元，其体积在相对其运动的坐标系中测量时（$d\Omega$）比相对其静止的坐标系（随动坐标系）中测量出的结果 $d\Omega_0$ 小，这就是所谓的“*运动物体长度收缩*”的概念。把（11.3.6）式代入（11.3.4）式，则得

$$\rho = \rho_0 \gamma_u \tag{11.3.7}$$

将上式代入电流密度的表达式发现

$$\vec{j} = \rho\vec{u} = \rho_0\gamma_u\vec{u} \qquad (11.3.8)$$

因为ρ_0为四维不变量，（11.3.8）式显示

$$(\vec{j}, ic\rho) = \rho_0(\gamma_u\vec{u}, ic\gamma_u) = \rho_0 u_\mu$$

正好构成一个正比于四维速度的四维矢量，因此电流守恒定律是满足相对论协变性要求的。

Tips：其实写出正确的四维速度，又知道了电荷是个 Lorentz 不变量，（11.3.8）是非常容易预期的。

2．电磁势方程的协变形式

电磁场可以用矢势$\vec{A}$和标势φ来描写，在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0\vec{j}\\ -\rho/\varepsilon_0\end{pmatrix} \qquad (11.3.9)$$

式中$\vec{A}$和φ应满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (11.3.10)$$

若我们定义一个四维矢量：

$$A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\varphi}{c}) \qquad (11.3.11)$$

则（11.3.9）式的电磁势方程可以写为

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \qquad (11.3.12)$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (11.3.13)$$

(11.3.12)式很清楚地显示：若我们要求 Maxwell 方程在 Lorentz 变换下协变，则A_μ一定是一个四维矢量，因为等式右方的J_μ为一四维矢量，等式的左方亦应为一四维矢量，由于$\Box^2$为一标量，故A_μ为一四维矢量，称为四维势。这意味着矢势$\vec{A}$和

标势 φ 在不同的坐标下会相互耦合在一起。

Tips：这里的逻辑与之前有点不同 -- 根据 M-M 实验推断 Maxwell 方程组及所有相关的方程一定是 Lorentz 协变的。根据这些方程的协变性，我们断定 A_μ 为四维矢量。

3. 电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式，电磁场强度 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 可以用电磁势 $\vec{A}$ 和 φ 表示，即

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

电磁场强 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 不是四维矢量。注意到 $(\vec{\nabla}, \partial(ict))$ 构成四维矢量，$(\vec{A}, i\frac{\varphi}{c})$ 也构成四维矢量，显然上式右边是两个四维矢量 ∂_μ, A_ν 之间的数学运算。排除降阶的缩并运算（左边不是标量）、只能是升阶的并矢运算。再考虑到运算的反对称性，发现等式右边只能是一个反对称的二阶张量。综合上述分析，可定义

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (11.3.14)$$

$\mathrm{F}_{\mu\nu}$ 是四维二阶反对称张量，满足 $\mathrm{F}_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，称为电磁场张量。直接结算可得其具体形式为

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{bmatrix} \qquad (11.3.15)$$

利用 $F_{\mu\nu}$ 和 J_μ，我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$
$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

合并写成一个一阶的 Lorentz 协变的形式：

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\nu \tag{11.3.16}$$

容易证明：$\nu=4$ 的结果对应 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$，而 $\nu=1,2,3$ 的结果对应 $\nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$。

Tips： **这个结论可以由** $\partial_\mu F_{\mu\nu}=\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=\Box^2 A_\nu-\partial_\nu(\partial_\mu A_\mu)=-\mu_0 J_\mu$ **推出**

同理，可把两个齐次方程

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha}+\partial_\alpha F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\alpha\mu}=0,\qquad \mu\neq\nu\neq\alpha \tag{11.3.17}$$

(11.3.16）式和（11.3.17）式即是协变形式的麦克斯韦方程组。

§ 11.4 电磁场的变换公式

下面考虑电磁场（由反对称电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 表示）在不同惯性系下得变换关系。因为 $F_{\mu\nu}$ 是二阶张量，故不同参考系中的 $F_{\mu\nu}$ 间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{11.4.1}$$

根据 Lorentz 变换把(11.4.2)式具体写成分量的形式，则为

$$\begin{cases} E'_1=E_1, \\ E'_2=\gamma(E_2-\upsilon B_3), \\ E'_3=\gamma(E_3+\upsilon B_2), \\ B'_1=B_1, \\ B'_2=\gamma(B_2+\frac{\upsilon}{c^2}E_3), \\ B'_3=\gamma(B_3-\frac{\upsilon}{c^2}E_2), \end{cases} \tag{11.4.2}$$

假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则（11.4.2）式可表示为

$$\begin{cases}\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}\\ \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}\\ \vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}\\ \vec{B}'_{\perp}=\gamma(\vec{B}-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp}\end{cases}\qquad(11.4.3)$$

上述场变换方程式自动给出了 Lorentz 力以及动生电动势的物理解释。动生电动势是指一段运动导体切割磁力线产生的电动势。在实验室坐标系下观测，体系只有静磁场，当一个导线以速度 $\vec{v}$ 切割磁力线时，在导线静止的坐标系中产生了新的电场 $\vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}\approx(\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}$（后一个等式在低速下成立），因此导线中的电荷会受到这个电场的作用力－这就是动生电场（电动势）的来源．而导线中的电荷受到的力 $\vec{F}'\approx q(\vec{v}\times\vec{B})_{\perp}$，就是 Lorentz 力的来源。

[例] 试求匀速运动的点电荷的场。

解 设 S 系为实验室坐标系，其中点电荷以速度

沿 x 轴运动。在这个坐标系中既有电场，又有磁场（运动电荷产生电流进而产生磁场），不方便求解。不妨另设 S' 系，其原点固定在点电荷 q 上跟着点电荷一起运动。在 S' 系中点电荷是静止的，只有电场没有磁场，其场为

$$\vec{E}'(\vec{r}',t')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{r'^3},\quad \vec{B}'(\vec{r}',t')=0\qquad(11.4.4)$$

我们随后将 S'系中的电磁场利用变换公式变换到 S 系。因为 S 系相对 S' 系沿 x 轴以速度 $-v$ 运动，则由式(11.4.2)得 S 系中的场强

$$\begin{aligned}&E_x=E'_x,\quad E_y=\gamma(E'_y+vB'_z),\quad E_z=\gamma(E'_z-vB'_y),\\ &B_x=B'_x,\quad \vec{B}_{\perp}=\gamma(\vec{B}'_{\perp}+\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}'_{\perp})\end{aligned}\qquad(11.4.5)$$

由于 $\vec{B}'=0$，故

$$\begin{aligned}&E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx'}{r'^3},\quad E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qy'}{r'^3},\quad E_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qz'}{r'^3},\\ &B_x=0,\quad \vec{B}_{\perp}=\gamma\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}'_{\perp}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_{\perp}\end{aligned}\qquad(11.4.6)$$

现在必须把 S'系中的 $\vec{r}',t'$ 用 S 系中的 $\vec{r},t$ 来表示，因为我们要知道的是在 S 系中的某一个时空点地场强。为此，设 $t=0$ 时点电荷 q 正好与 S 系的原点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据洛伦兹变换，我们有

$$x' = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = -\gamma\beta x / c \tag{11.4.7}$$

将（11.4.7）代入（11.4.6）即可得最终结果。S' 系中 $\vec{r}'$ 可表示成

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = [(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \tag{11.4.8}$$

这样，S 系中在 $\vec{r}$ 这一点（等同于 S' 系的 $\vec{r}'$ 这一点）的电场强度为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma q\vec{r}}{[(\gamma x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{[(r\cos\theta)^2 + (1-\beta^2)(r\sin\theta)^2]^{3/2}\gamma^2} \\ &= \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \end{aligned} \tag{11.4.9}$$

式中 θ 是 $\vec{r}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角。由（11.4.6）不难算出磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} \tag{11.4.10}$$

我们看到，匀速运动的点电荷的场的特点是：

(1) 电场方向仍然是沿着径向，但强度分布不再是球对称的，而是受制于一个与 θ 及运动速度 v 有关的角度分布函数 $F_\beta(\theta) = \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$。$\theta = 0$ 处场最弱，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 处场最强，场向着垂直于速度方向的平面集中，如图 11.10 所示，集中的程度与点电荷运动速度有关，当 $v \longrightarrow c$ 时，场基本上集中分布在垂直于 $\vec{v}$ 的平面内。图 11.11 画出了三种不同 β 值的分布情况。

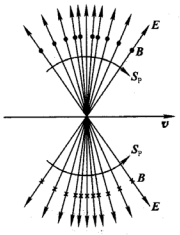


图 11.10

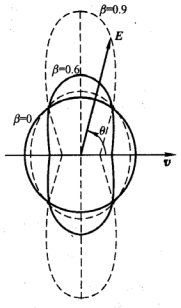


图 11.11

（2）能流分布为

$$\vec{S}_P = \vec{E}\times\vec{H} = \varepsilon_0[\vec{v}E^2 - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{v})] \tag{11.4.11}$$

注意到 $\vec{E} \parallel \hat{r}$，容易计算得知

$$\vec{S}_p \cdot \hat{r} \propto \left[E^2(\vec{v}\cdot\hat{r}) - E^2(\vec{v}\cdot\hat{r}) \right] = 0 \qquad (11.4.12)$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去。从图 11.10 我们也可直接看出，能流是在以电荷为中心的球面上流动。

(3) 虽然能量并不沿着 $\vec{r}$ 方向辐射出去，但在实验室系看，能流仍在做定向流，只伴随着电荷一起运动。要理解这个问题，只需要将时间加上即可。

Tips：

（1） 在利用相对论电磁场变换公式时，不用忘了需要做两次 Lorentz 变换，一次是将场变换，另一次是将坐标点进行变换。

（2） 为什么运动电荷的电场会发生有趣的畸变？根本的原因是“运动”尺子收缩，因此，将原本均匀分布的场向中间压缩。

（3） 这个问题的求解，可以解释我们之前课堂上讲到的一个悬案：为什么两个孤立电流源之间的相互作用力不满足牛顿第三定律。你试试？

§ 12.11 切连科夫辐射

我们在之前这个例子中已经很清楚地看到：真空中一个带电粒子做匀速直线运动时时不辐射电磁波的。仔细考察真空中带电粒子的辐射问题，发现只有当其做加速运动时才有可能辐射电磁波。然而实验发现，在介质中运动的带电粒子，即使是其做匀速直线运动，在某些情况下也会产生电磁辐射。这个现象有前苏联科学家切连科夫最早实验发现，顾被命名为切连科夫辐射，后来塔姆和弗兰克做出了理论解释，他们也因此分享了 1958 年的诺贝尔物理学奖。切连科夫辐射效应具有深远的影响，不仅在等离子体物理中被广泛研究，近期人们纳米光学中好多现象都有该现象有重要关联：比如，负折射介质中支持倒逆的切连科夫效应、梯度超构表面支持异常反射以及完美的传输波-表面波耦合，等等。在这一节中，我们将简要介绍这个现象背后的物理。

1. 介质中运动电荷的辐射场

考虑在均匀的相对介电常数为 ε_r 的无色散介质中，有一个电子以速度 $\vec{v}$ 做匀速直线运动，在空间必然产生了一个“源”，其电荷/电流分布为

$$\rho(\vec{r},t)=e\delta(\vec{r}-\vec{v}t);\quad \vec{j}(\vec{r},t)=e\vec{v}\delta(\vec{r}-\vec{v}t) \tag{12.11.1}$$

我们要问的问题是：这样一个“源”是否会向外辐射电磁波？为了回答这个问题，我们首先写出介质中的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\rho/(\varepsilon_0\varepsilon_r) \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{12.11.2}$$

根据上述 Maxwell 方程组的第 2 及第 3 条公式，我们可以引入标势和矢势

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{12.11.3}$$

将其带入 Maxwell 方程组第 1 及第 4 条，再利用介质中的洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{v_{\text{light}}^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{12.11.4}$$

我们得到势满足如下方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v_{\text{light}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mu_0\vec{j}\\ \rho/\varepsilon\end{pmatrix} \tag{12.11.5}$$

其中 $v_{\text{light}}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ 为介质中的光速。原则上，我们需要讲（12.11.1）带入上式，求解 $\left\{\vec{A},\varphi\right\}$，进而带入（12.11.3），可以求出电磁场。为求解（12.11.5），我们将所有相关物理量均从 $\left\{\vec{r},t\right\}$ 空间做傅里叶变换到 $\left\{\vec{k},\omega\right\}$ 空间，

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^4}\int\vec{A}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega \\ \vec{j}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^4}\int\vec{j}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega \\ \varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^4}\int\varphi(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega \\ \rho(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^4}\int\rho(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega \end{cases} \tag{12.11.6}$$

而另一方面，我们可以由（12.11.1）得到

$$\begin{cases}\rho(\vec{k},\omega)=\int e\delta(\vec{r}-\vec{v}t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{r}dt=2\pi\cdot e\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})\\ \vec{j}(\vec{k},\omega)=2\pi\cdot e\vec{v}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})\end{cases}\qquad(12.11.7)$$

将上式带入（12.11.5），我们可以解得

$$\begin{cases}\vec{A}(\vec{k},\omega)=\dfrac{2\pi\mu_0 e\vec{v}}{k^2-\left(\omega/v_{\text{light}}\right)^2}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})\\ \varphi(\vec{k},\omega)=\dfrac{2\pi e/\varepsilon}{k^2-\left(\omega/v_{\text{light}}\right)^2}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})\end{cases}\qquad(12.11.8)$$

我们将（12.11.8）带回（12.11.6）中的第一式，可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mu_0 e\vec{v}}{k^2-\left(\omega/v_{\text{light}}\right)^2}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega\qquad(12.11.9)$$

我们可以进一步求出磁场为

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mu_0 ei\vec{k}\times\vec{v}}{k^2-\left(\omega/v_{\text{light}}\right)^2}\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t}d\vec{k}d\omega\qquad(12.11.10)$$

原则上，我们应该将（12.11.9-10）积分，即可得到场的形式。这里，我们选择不做烦琐的积分，而只从被积函数的性质出发分析其特性。

2. 切连科夫辐射条件

注意到$\vec{A}(\vec{k},\omega)$其实就代表一支频率为ω波矢为$\vec{k}$的平面电磁波的分量。然而，给定ω，并非所有的$\vec{k}$都被允许。从（12.11.8-9）中我们发现，$\dfrac{1}{k^2-\left(\omega/v_{\text{light}}\right)^2}$中的“奇点”限制了只有总波矢模量满足

$$k=\frac{\omega}{v_{\text{light}}}=\frac{\omega}{c}\cdot\sqrt{\varepsilon_r}\qquad(12.11.11)$$

关系（即电磁波在介质传播时的色散关系）的才能传播，而剩下的一个 delta 函数则进一步限制了沿着粒子运动方向的波矢（标记为$k_{||}$）必须满足

$$k_{||}=\frac{\omega}{v}\qquad(12.11.12)$$

根据波矢的三维特性，则垂直粒子运动方向的波矢为

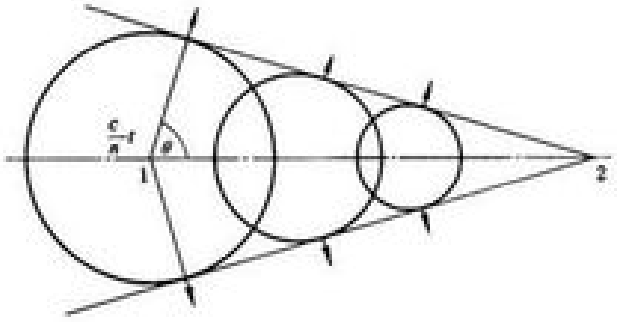
$$k_{\perp}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{v_{\text{light}}}\right)^2-\left(\frac{\omega}{v}\right)^2} \qquad (12.11.13)$$

我们发现，只有当粒子的运动速度大于介质中光速时，即

$$v > v_{\text{light}} \qquad (12.11.14)$$

时，$k_{\perp}$ 才是实数，因此这个电磁波分量才是传播模式。反之，当 $v < v_{\text{light}}$ 时，该电磁波分量具有纯虚数的 $k_{\perp}$，不能辐射出去。其实后者正对应我们之前研究的真空中运动电荷的情形！

3. 物理图像



运动带电粒子所激发的电磁场

切连科夫辐射的本质是子波干涉。如上图所示，运动粒子在某一个特定时刻等价于在空间产生了一个偶极子，其向空间辐射出球面波。不同时刻辐射出的子波如何可以相互干涉形成一个波阵面，则该辐射波可以传播并离开电荷。若干涉后能形成可传播的波阵面，则要求 t 时刻运动到 vt 位置的电荷不能处于 0 时刻电荷运动辐射出的波前中，亦即

$$v \cdot t > v_{\text{light}} \cdot t \rightarrow v > v_{\text{light}} \qquad (12.11.15)$$

或者说不能大圆套小圆。根据等相位原理，我们发现辐射角满足

$$\cos\theta = v_{\text{light}} / v \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{v}\right) \qquad (12.11.16)$$

如果 $v < v_{\text{light}}$，则辐射子波大圆套小圆，永远不能干涉出波阵面，其实最终形成的是束缚在粒子运动附近的衰逝波（Evanescent wave）。

几点讨论

（1） 该图像可以基于天线阵来理解。将运动到 $x = vt$ 处的电荷看成一个辐射源，则其与在 $x = 0$ 处的辐射源相比相差了一个和 x 成正比的相位。这些“天线”的干涉形成了最后的辐射，而相位的梯度其实有效给出一个平行波矢。我们在 Nature Materials 11, 426-431 (2012)文章中利用了这个观点做了类比。

（2） 当介质为色散时，推导都必须一开始就在频域做，最后的结果除了将 ε_r 替换成该频率下的 $\varepsilon_r(\omega)$ 外，其他形式保持不变。不过，这也带来一个有趣的结论，在色散介质中的运动电荷，可能 $v > v_{light} = c / \sqrt{\varepsilon_r(w)}$ 只在特定频率区间满足，因此只能辐射出某一段频率的电磁波。

（3） Veselago 最早发现，在负折射介质中，切连科夫辐射角可以是负数！这个奇异的现象最近在前沿被实验证实。不过，大家一定要记住，负折射介质必须是色散的，因此，该现象只能在某一段频率被证实。时空间看到的效果与频域看到的很不同。

（4） 本质上，这个效应在其他形式的波中也能呈现，比如快艇在水面告诉飞驰的时候，船的后方形成的冲击波。

补充题：

1) 考虑一个以 ω 振动的偶极振子 $\vec{p} = p\hat{z}e^{-i\omega t}$，一个接收器以速度为 $\vec{v}$ 沿 x 轴离开原点，计算在接收器上测得的电场、磁场，并由此计算接收器测得的波的频率。



思考题：

1） 借助计算推迟势时的技巧，尝试将（12.11.9-10）积出来，在粒子运动速度大于和小于光速的两种情形下讨论你得到的结果。

2） 阅读 Nature Materials 11, 426-431 (2012)文章，理解梯度超构表面调控光时用的概念与切连科夫辐射的关联。