第三讲

上次课：

- $\varphi_p(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ --- 电偶级子的电势
- j – 磁场的来源，磁场的受体
- $\vec{B}(\vec{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\dfrac{\vec{j}d\tau'\times\vec{R}}{R^3}$ - B-S 定律，磁感应场
- $\vec{F}=\vec{j}d\tau\times\vec{B},\quad \vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ - 电流在磁场中的受力，Lorentz 力
- $\vec{B}=\nabla\times\vec{A};\quad \vec{A}(\vec{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\dfrac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau'$ --- 磁场的矢势
- $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})\equiv 0$， $\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu_0\vec{j}(\vec{r})$ --- 磁场为有旋无源场
- $\vec{A}_m(\vec{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$--- 磁偶级子的矢势
- $\nabla\times\vec{E}_K=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ --- 电磁感应定律

---

§1.4 麦克斯韦方程组

前面几节中，我们讲述了电磁现象的基本实验定律，现总结如下：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}_s&=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec{E}_s&=0\end{aligned}\right\}\text{(静止电荷)}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B}_s&=0\\ \nabla\times\vec{B}_s&=\mu_0\vec{j}\end{aligned}\right\}\text{(稳定电流)}$$

$$\nabla\times\vec{E}_K=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{（变化磁场）}$$

它们分别都有自己的适用条件和范围。在一般情况下，所有的场量及激发它们的源（$\rho,\vec{j}$）都可能随时间变化，此时描述它们行为的电磁规律是什么呢？Maxwell 仔细研究了这个问题，总结出了 Maxwell 方程组。让我们假设自己就是当年的 Maxwell，面对已经建立的实验定律思考一下：最一般情况下，电磁规律应当是怎样的？

第一条方程

$\nabla\cdot\vec{E}_s=\rho/\varepsilon_0$ 是由库仑定律导出的．它的直观物理图像是单位电荷激发$1/\varepsilon_0$

根电场线。在普遍情况下，电场可以随时间变化，可能由两种起源导致：
1） 源电荷运动；

2） 总电场中含有感应电场 $\vec{E}_K$。

对第一个可能，电荷运动是其发出的电力线将跟随它运动，因此在 t 时刻在 r 位置处做一无限小的闭合区间，可以预期此时刻电场线通过表面的总数仍然与其中的电量成正比。对第二个可能，注意到 $\vec{E}_K$ 与静磁场非常类似，是围绕着磁场变化产生的蜗旋场，而这种电场场线是连续无源的，可以预期 $\nabla\cdot\vec{E}_K=0$。综合这两个考虑，对空间的总电场来说，Maxwell 认为其仍然满足高斯定理：

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\nabla\cdot\vec{E}_s+\nabla\cdot\vec{E}_K=\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0} \qquad (1.4.1)$$

注：直接从电磁感应定律的原始形式不能推出感应电场为无源场 $\nabla\cdot\vec{E}_K=0$ 的结论的。这应当是 Maxwell 做的合理推广，正确与否被后来的无数实验所验证。有机会查查历史上 Maxwell 当时是怎样得到这个结论的。

第二条方程

在普遍情况下电场应当是总场，而静电场没有旋度，因此总场的旋度为

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}=\nabla\times\vec{E}_S+\nabla\times\vec{E}_K=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad (1.4.2)$$

第三条方程

虽然 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 是对静磁场推出的，我们注意到在推导的过程中并没有利用到电流必须稳恒的条件（即 $\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}')=0$）。从物理上讲，散度刻画的是场线是否有奇点（源）。自然界不存在磁荷，可以想象即使在物理量随时间变化时磁场线仍然无始无终始终连续。综合以上考虑，在一般情况下的一个大胆而合理的推论是磁场的高斯定理仍成立：

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)\equiv 0} \qquad (1.4.3)$$

但这个推广必须与其他定律（注意这里我们已经推广了 2 条方程！）不互相矛盾，不妨对与磁场关联的法拉第定律两边取散度，

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})=-\nabla\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

因为 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})\equiv 0$，所以

$$\nabla\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{B}=0$$

上式意味着$\nabla\cdot\vec{B}=$常数（与时间无关），此常数决定于初始时刻的值。假设变化的电磁场是由初始静态的电磁场演化而来的，上式意味着此常数为零（因为静态磁场满足高斯定理）。因此，推广高斯定理$\nabla\cdot\vec{B}=0$到一般情形完全合理。

第四条公式

与推导高斯定理不同，推导环路定理$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$时我们用到了稳恒电流的条件$\nabla\cdot\vec{j}_s=0$。然而$\nabla\cdot\vec{j}=0$在非稳衡电流条件下不成立！根据电荷守恒定律，有

$$\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0 \qquad (1.4.4)$$

因此在一般情况下$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$不再成立。为了证明这一点，对$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$两边同时取散度，得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{j} \qquad (1.4.5)$$

等式左边≡0，但等式右边一般情况下不为0（只在静态时=0）。可见静态的环路定理与电荷守恒定律是有矛盾的。两者之间我们应当做何取舍？显然电荷守恒定律定律更基本，故安培环路定理必须作相应修改。

如果在一般情况下我们仍然想将环路定理写成

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{G} \qquad (1.4.6)$$

的形式，则有如下要求

1）矢量$\vec{G}$具有电流的量纲，在静态时回到$\vec{j}$；

2）上式应与电荷守恒定律协调。

为了寻找$\vec{G}$的形式，我们将（1.4.6）式两边求散度，得到对$\vec{G}$的限制条件为

$$\nabla\cdot\vec{G}(\vec{r},t)=0 \qquad (1.4.7)$$

再考察电荷守恒定律（1.4.1），注意到$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$（第一条方程），则有

$$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)=0$$

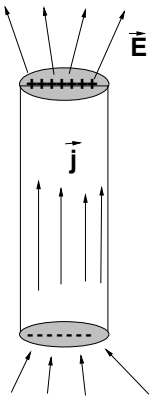
因此，一个自然的选择是$\vec{G}=\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$（显然上述定义使得$\vec{G}$在静态时回到$\vec{j}$）。故，安培环路定理可以推广为

$$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}} \qquad (1.4.8)$$

式中的$\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$称为位移电流，与传导电流有着相同的量纲，但却不是实际的传导电流。可以把位移电流理解成电流线的延续。如下图所示，在一段有限长度的金属棒中激发电流，因电流遇到边界不能继续，必然在金属线的两端产生电荷积累，同时会导致电流的变化。电荷的产生就会在空间产生变化的电场，而其恰恰是补偿真实的传导电流的变化的。从**物理上讲，电流的非稳恒性与电荷的积累$\dot{\rho}$通过流守恒定律$\nabla\cdot\vec{j}+\dot{\rho}=0$相互关联，而后者又反映到空间电场的变化。**

根据上面的分析，Maxwell 总结出真空中电磁场的所满足的普遍规律为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}\end{cases}$$



在没有源（$\vec{j}=0,\rho=0$）的空间中，则 Maxwell 方程变为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}\end{cases}$$

我们看到电场/磁场具有近乎完美的对称性，除了 2 点：

1）公式（2）与（4）在系数上仍有差异；

2）有个正负号的差异。

对第 1 点，后面我们会发现这是个历史的误会；对第 2 点，这个正负号的差异是至关重要的，没有这个符号的差别，电磁波就不复存在，世界就可能是另一个面目。位移电流的引入从另一个侧面深刻揭示了电场和磁场之间的联系：不仅变化的磁场激发电场，变化着的电场同样激发磁场，两者都以涡旋形式激发，并左右手对称。

注：有人说 Maxwell 只干了引入位移电流这一件事，其他的 3.5 个方程都是别人的功劳，这非常不公平。从本节的学习中我们可以看到，Maxwell 方程组的每一条公式的建立都不是显而易见的，事实上，与其他静态时的实验定律（库伦定律、安培定律）不同，Maxwell 方程组的建立并没有坚实的实验基础，而是 Maxwell 的一些合理的推广．在这个意义上讲，Maxwell 建立这组方程时的勇气是巨大的。这个方程的直接预言是电磁波，Maxwell 试图自己做实验验证电磁波却没有成功。Maxwell 方程组的正确性直到几十年后 Hertz 的实验出来后才被证实。最后，Maxwell 方程的建立使得电磁现象与光学现象联系起来，从此人们对光学有了定量的认识。

这组方程在英国科学期刊《物理世界》在征集全世界读者的投票评选中，获评世上最伟大的十个公式之首；

Einstein 评价自己的工作时说： "I stand on Maxwell's shoulders";

Freeman Dyson 评价到"All these theories (Einstein's theory of relativity, Quantum Mechanism, Yang-Mills theory, Standard model of particle physics) are based on the concept of dynamical field introduced by Maxwell's in 1865";

Richard Feynman 评价到"From a long view of history of mankind – seen from, say, ten thousand years from now – there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of law of Electrodynamics" ...

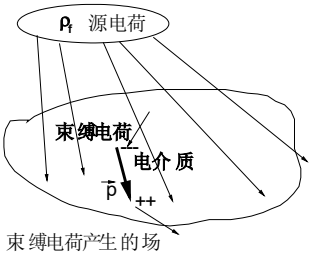
§1.5 介质中的麦克斯韦方程组

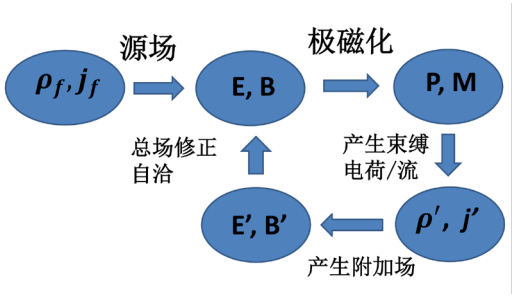
在上一节我们了解了真空中的电磁理论，重点介绍了场的概念。真空中 Maxwell 方程展示出如下图像：1）电荷/电流会产生电场/磁场；2）电磁场可以相互演化；3）处于电磁场中的电荷/电流会受到场的作用力（Lorentz 力）。本节我们将研究介质中的电磁场行为。其实，正是有不同电磁性质的介质的存在，才使得我们现在的世界如此色彩斑斓。要理解介质中的电磁场行为，最核心的问题是**电磁场如何与物质发生相互作用的**。在具体建立介质中的电磁理论之前，有一点核心问题必须澄清：

电磁场的来源及受众是电荷及电流，只要空间某处存在某种电荷/电流（无论其起源），就可以产生电磁场，而它们也必会受到电磁场的作用！

有了这点基本认识，我们研究电磁介质中的电磁场就归结为寻找当有电磁介质存在时的**总的电荷/电流**分布。首先理一理脉络，看看问题的难点在哪里。假设在空间施加由处于很远处的电荷（流）产生的电（磁）场 --- 我们把这些电荷（流）称作"源电荷（流）"。当在这个场中放入一块电（磁）介质时，电（磁）介质在外电（磁）场的作用下被极（磁）化，产生电（磁）偶极子。电（磁）偶极子的产生使得空间中不再为电（磁）中性，从而产生了束缚于电（磁）介质的极化（磁化）电荷（电流），这些束缚电荷（电流）与处于远处的自由电荷（电流）一样可以产生电磁场，这种场我们叫做**极（磁）化场**。因此，空间任一点的真实总场（**又叫局域场**）就与"源"本身产生的场不同。对介质来说，其被极化（磁化）是由其感知到的空间此处的总场（或者称局域场）决定的，因为场，无论是由源电荷产生的，还是由极（磁）化电荷（流）产生的，都会作用到介质中上。**所以这个问题就变得看似很复杂：1）介质如何被极（磁）化和 2）介质极磁化后对空间总场的修正，以上两个因素互相纠缠在一起**。然而这种耦合恰恰是

解决问题的关键：我们必须使得上述两个过程达到**自洽平衡**。只有达到这种自洽平衡的电磁场才是空间真实存在的场。用图形可以表示为

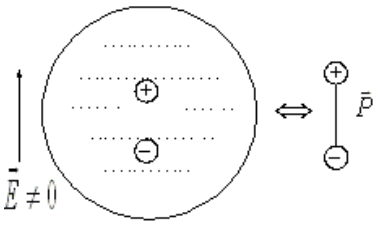




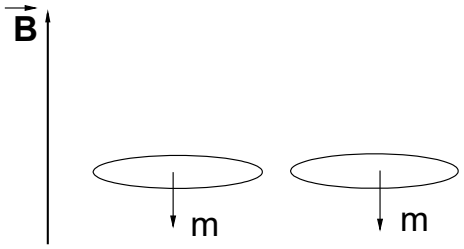
因此，理解了上图中所有的过程后，我们才能对介质中的电磁场有完整的理解。

1．介质的极化及磁化

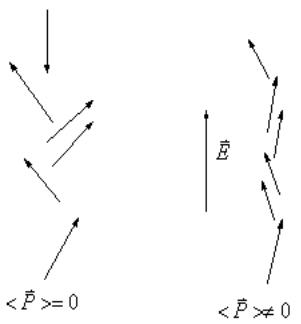
当电介质放置于电场中时，正负电荷被电场拉开，产生电偶极子，这是极化过程。同样，将一个无磁性的介质放置于磁场中，原本杂乱无章运动的电子在外磁场的作用下产生一个个分子环流（即磁偶极子）并有序排列，这个过程即为磁化。



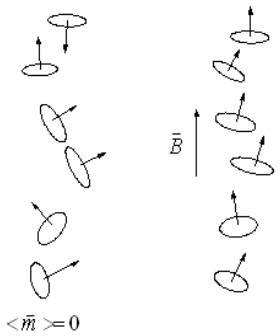
原子



极磁化还有另外的可能性。有些介质体系中的构成单元原本是带有固有电（磁）偶极距的，但整个介质并不显示宏观极（磁）性，因为当没有外加电（磁）场时，这些电（磁）极子呈现杂乱排列。然而，一旦我们对它们施加电（磁）场时，



水



顺磁介质

这些原本杂乱排列的电（磁）偶极子沿着电（磁）场排列，产生宏观电（磁）矩。为了定量描述极化（磁化）的大小，定义极化（磁化）强度两个宏观量。其定义为：取一个宏观小微观大的区域，计算单位体积内的偶极矩的总和（矢量和），

$$\vec{P}=\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \qquad \vec{M}=\frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \tag{1.5.1}$$

显然，局域电（磁）场强度越大，极（磁）化强度也越大。对第一种极磁化过程上述结论显而易见，对第二种过程，只要考虑外场效应（趋向于使电磁矩平行排列）与温度效应（趋向于它们无规排列）之间的竞争即可以明白。在低场近似下，很多材料对电磁场程线性响应，因此可以写成

$$\vec{P}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r},t), \qquad \vec{M}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}(\vec{r},t) \tag{1.5.2}$$

其中，χ_e,χ_m 为极化（磁化）率。这就是介质极化（磁化）的基本图像，**计算 χ_e,χ_m 要用到微观理论（牛顿力学或者量子力学），与所考量物质的性质有关，不能由电磁场理论本身预设给出**。

思考及延伸阅读：

*1）需要强调指出的是，这里 $\vec{E},\vec{B}$ 应当是介质分子在此处感受到的**局域总场**，因为只要是场，无论是源场还是极（磁）化电荷（流）产生的场，都可以对介质产生作用力。*

2）当空间只有一个分子（或结构单元）时，其感受到的外场就是由“源”产生的外场。这时候可定义 $\vec{p}=\varepsilon_0\alpha_e\vec{E}_0$，其中 $\vec{p}$ 是偶极矩（因为此时定义极化强度无意义），α_e 称作 Polarisibility。但当一大批分子组成一个凝聚体（如固体）时，体系中每个分子都会被极化，而每个偶极矩又都会产生新的场，因此，在某个局域点，$\vec{E}(\vec{r},t)\neq\vec{E}_0$。因此我们由（1.5.2）的定义可知 $\chi_e\neq n\cdot\alpha_e$（其中 n 为分子密度）。那 χ_e,α_e 之间有什么关系呢？

3）此处对磁导率的定义看上去有点奇怪，这是因为历史上的误会。

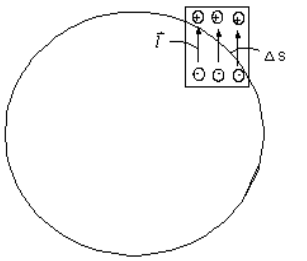
2．极（磁）化电荷（流）

（A）极化

极化电荷　由于极化，介质中的正负电荷发生了相对位移，导致每一个局域点的正负电荷不能完全抵消，这样就呈现出束缚在介质中的宏观电荷。这种电荷称为**极化电荷**。接下来我们来研究如何定量计算这个束缚电荷密度。

假设空间的极化强度分布为 $\vec{P}(\vec{r})$，我们取一块区域 τ，其边界由 $\vec{S}$ 给定，计算其中包含的极化总电荷 Q_P。显然，完全处于区域内部或完全处于区域外部的偶极子对 Q_P 均没有贡献，而只有那些穿过 $\vec{S}$ 的偶极子才有贡献。因此，首先考

虑偶极子穿过一块微元边界 $d\vec{S}$ 对 Q_P 的贡献。*假设 $d\vec{S}$ 宏观上足够小使得此区域内的偶极子近似朝一个方向指向，而微观上足够大使得其中包含很多偶极子。*考虑每个偶极子的正负电荷拉开的位移为 $\vec{l}$，则在体积 $\vec{l}\cdot d\vec{S}$ 内的每一个偶极子都会因为穿过界面而在体积内部留下一个负的静电荷 ***q***（如右图所示）。设介质此处的偶极子数密度为 n，则这些偶极子对区域内的净电荷数为



$dQ_P = -qn\vec{l}\cdot d\vec{S} = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$（**注意，因为考虑了 P 和 dS 的点乘，这个公式对偶极子以任意方向穿过一块任意指向的面积元都正确**）。$\vec{P} = nq\vec{l} = n\vec{p}$ 为极化强度。考虑所有穿过界面的偶极子的贡献后，容易发现留在 τ 区域内的总的束缚电荷为

$$Q_P = -\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S} \qquad (1.5.3)$$

利用 Gauss 定理，可以进一步得到

$$\boxed{\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}} \qquad (1.5.4)$$

式中 ρ_P 称为**极化电荷密度**.

注：仔细思考后会发现（1.5.4）大有问题。比如对一个均匀极化的介质 $P = const.$，公式（1.5.4）告知体内无极化电荷分布。然而实际上极化后每个分子都呈现为一个偶极子，因此细致到分子的尺度上，极化电荷的分布是非常不均匀的，不可能为 0。这两者之间的矛盾如何解决？其实，从数学上讲，（1.5.3）正确性只有当积分区域足够大才行，积分区域小到看见单个偶极子的行为时是不成立的！ 因此，其过渡到（1.5.4）就不是严格成立的了，因为 Gauss 定理可以使用的前提是（1.5.3）对任意积分区域都正确。但为什么我们还可以用（1.5.4）呢？这是因为在分子尺度上计算极化电荷以及其它物理量的分布是困难而且是没有必要的，我们所关心的（实验上所能测量的）是宏观小但微观大的一个区域内的物理量的平均值。因此，当我们考虑连续介质中的物理量时，一个空间的几何点是这样定义的：取这样一个区间 - 微观上足够大包含了许多偶极子，但宏观仍然足够小使得我们可以认为它是空间上的一个几何点。我们取这个区间内的微观量的平均值作为在这一几何点的场的数值。这事实上是电动力学处理连续介质的一个基本精髓。（1.5.2）及下面的所有处理、甚至是目前前沿的 Meta-material 的研究均基于这个基础。

极化电流 当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为**极化电流**，记为 $\vec{j}_P$。考虑电荷守恒定律：

$$\nabla\cdot\vec{j}_P + \frac{\partial\rho_P}{\partial t} \equiv 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{j}_P - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{P} = 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\left[\vec{j}_P - \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}\right] = 0 \qquad (1.5.5)$$

一个合理的结果是

$$\boxed{\vec{j}_P = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}} \qquad (1.5.5')$$

Tips:

1) 你也许会 Argue 说（1.5.5'）不是（1.5.5）的唯一解，因为可以加上一项 $\nabla\times\vec{C}(\vec{r},t)$ 仍然

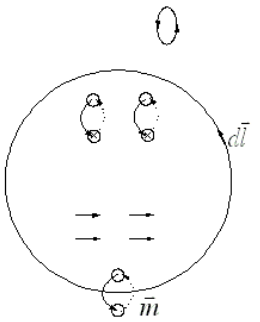
满足（1.5.5）。类似$\nabla\times\vec{C}(\vec{r},t)$的这种项的确存在，但是物理根源却与极化电荷无关。若只考虑极化运动产生的效应，你会发现（1.5.5'）是正确的。以上这个推导并不严格，稍微严格一些的证明在第十二章中会涉及。

（B）磁化

磁化电流

介质被磁化后产生束缚于磁介质上的磁化电流。假设已知空间的磁化情况$\vec{M}(\vec{r})$，我们来讨论磁化电流密度$\vec{j}_M$。类似电介质的讨论，在一个具有磁化强度$\vec{M}(\vec{r})$的磁介质中选取一个宏观大小的面积 **S**，其边界由$\oint d\vec{l}$描述，计算穿过 S 产生的总**磁化电流**I_M。磁化后产生大量的磁偶极子，每个磁偶极子对应一个分子环流。

（1）若这些环流完全处于 S 内，则对I_M的贡献因环流 2 次穿过 S 而抵消；（2）若完全在 S 外，则根本没有贡献。*因此，只需计算那些与边界铰链的环流，因为它们只对 S 面内贡献一次电流。*考虑与一段边界$d\vec{l}$（*这个长度同样是宏观小微观大*）铰链的分子环流。设每个分子环流电流为 *i*，环流线圈面积为$\Delta\vec{s}$，则显然在$\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l}$体积内的所有的磁偶极子都对 S 内的净电流有贡献。



假设偶极子的体密度为 *n*．则$d\vec{l}$边界处对I_M的贡献为

$$dI_M = i\times\text{no. of m} = i\times n\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l} = \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

综合整个环路的贡献，得

$$I_m = \oint \vec{M}\cdot d\vec{l} \qquad (1.5.6)$$

利用$I_M = \int \vec{j}_m\cdot d\vec{S}$及 Stokes 定理$\oint \vec{M}\cdot d\vec{l} = \int \nabla\times\vec{M}\cdot d\vec{S}$，有

$$\boxed{\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M}} \qquad (1.5.7)$$

其中$\vec{j}_m$为描述束缚于磁介质内部的**磁化电流密度**。对上式两边取散度得

$$\nabla\cdot\vec{j}_m = 0$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因此不用考虑**磁化电荷**。

3．介质中的 Maxwell 方程组

下面我们进行示意图中**第 3 步讨论** – 看看极（磁）化电流（荷）如何改变总电（磁）场。当介质存在时空间电荷包括自由电荷（源电荷）和极化电荷（束缚电荷），即

$$\rho_t = \rho_f + \rho_P = \rho - \nabla\cdot\vec{P},$$

式中 ρ_t 表示**总电荷**。介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，因此**总电流**为

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \nabla\times\vec{M}$$

在麦克斯韦方程组中，不管 ρ 和 j 的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在空间激发电场或磁场。所以，麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应该修改成

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \nabla\cdot\vec{P}\right) \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0\left(\vec{j}_f + \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \nabla\times\vec{M}\right) \end{cases} \qquad (1.5.8)$$

需要注意：（1.5.8）中的电磁场 $\vec{E},\vec{B}$ 与之前真空中 Maxwell 方程中的有本质不同。此处的 **E 和 B 是局域总场**（包含了由束缚电流/电荷引发的修正项），不是由“源”产生的电磁场。原则上（1.5.8）不能求解，因为多了 2 个未知的物理量 -- $\vec{P},\vec{M}$ 。利用（1.5.2），我们可以将这 2 个未知变量消除，则问题可以求解。**因此，与真空中的电磁问题不同，要想求解介质中的电磁问题，我们一定需要首先知道介质如何对外场的响应的（如（1.5.2））。不同的介质中的电磁行为完全不同！**

注意到（1.5.8）式中（1），（4）两式很复杂，右边既有自由电荷（流）“源”，又有极磁化后产生的新的电荷电流。试图换一个角度看这个问题。注意到尽管介质中的电磁场直接的来源是总电荷、总电流，然而究其本质他们**最终**是由“源”产生的。基于这个观点，我们试图将所有的宏观量都表示成**自由电荷/电流**的函数。为此，我们引入两个辅助矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (1.5.9)$$

代入方程组（1.5.8）式并做化简可得：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad (1.5.10)$$

其中新引入的辅助矢量 $\vec{D}$ 称为**电位移矢量**，$\vec{H}$ 称为**磁场强度**。*它们的导入使方程组的右边只出现自由电荷和自由电流（或者更准确的说，叫做源电荷/电流），不出现束缚电荷/电流。当然，这仅仅是为了便于讨论问题，它们本身并非真实的场，不会对身处其中的电荷/电流产生作用力。*

4．本构关系

现在考虑示意图中最后一步：局域总场的改变是如何与极（磁）化程度自洽的。这就需要确定（1.5.8）中的极（磁）化强度等物理量如何与总电（磁）场自洽决定的。换言之，必须确定麦克斯韦方程(1.5.10)辅助矢量 $\vec{D},\vec{H}$ 与 $\vec{E},\vec{B}$ 之间的关系，才能求出方程组的解。这些关系式被称为**本构关系**，与介质的性质有关。事实上，我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为有各种具有不同本构关系的介质。

对线性介质，其实我们已经知道了其对外加电磁场的响应（1.5.2），这本质上就是本构关系。进一步，利用（1.5.2）及（1.5.9）得

$$\begin{cases} \vec{D}=\varepsilon\vec{E} \\ \vec{H}=\vec{B}/\mu, \end{cases} \qquad (1.5.11)$$

其中

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0=(1+\chi_e)\varepsilon_0 \qquad \mu=\mu_r\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0 \qquad (1.5.12)$$

叫做介电常数及磁导率，ε_r μ_r 称为相对介电常数及相对磁导率（无量纲量）。

习题

P．31， 1.10， 1.11，1.19

思考题

1） 如果你是与 Faraday、Maxwell 同时代的科学家，能否自己设计实验证实（与导线无关）涡旋电场效应以及位移电流效应？