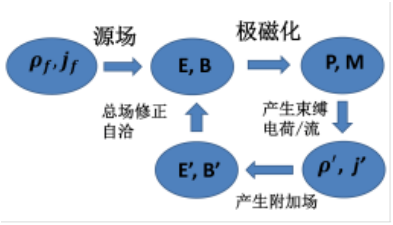
第四讲

上次课

- Maxwell 对一般情况下的电磁理论的推广：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

- $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 介质中 Maxwell 方程组



$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P},\ \vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$ --- 辅助场

4．本构关系

现在考虑示意图中最后一步：局域总场的改变是如何与极（磁）化程度自洽的。这就需要确定（1.5.8）中的极（磁）化强度等物理量如何与总电（磁）场自洽决定的。换言之，必须确定麦克斯韦方程(1.5.10)辅助矢量 $\vec{D},\vec{H}$ 与 $\vec{E},\vec{B}$ 之间的关系，才能求出方程组的解。这些关系式被称为**本构关系**，与介质的性质有关。事实上，我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为有各种具有不同本构关系的介质。

对线性介质，其实我们已经知道了其对外加电磁场的响应（1.5.2），这本质上就是本构关系。将 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E},\vec{M}=\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}/\mu_0$ 带入辅助场的定义，得

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{H}=\vec{B}/\mu,\end{cases}\qquad(1.5.11)$$

其中

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0=(1+\chi_e)\varepsilon_0\qquad\mu=\mu_r\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0\qquad(1.5.12)$$

叫做介电常数及磁导率，ε_r μ_r 称为相对介电常数及相对磁导率（无量纲量）。现在回头检查（1.5.9）中的第 2 式，发现借助（1.5.11）中的第 2 式可将其改写为 $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$。这样一来物理意义就很清晰了，历史上以为 **H** 是基本量与 **E** 的地位相同，**所以在定义磁化率的时候针对 H 场的，因此将本构关系写成 M 和 B 关系时就显得比较奇怪了！**

将本构关系带入无源空间的 Maxwell 方程组，得

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

其中 E 和 H 完美对称。**另外需要指出的是：导体本身就是一种特殊的电磁介质，它的本构关系就是欧姆定律** $\vec{j}=\sigma\vec{E}$

应当指出，这里我们给出的本构关系是最简单的一种（尽管是最常见的）- 极（磁）化对外场的响应呈现局域/即时/线性/各向同性的响应。更一般的情况下，本构关系可以非常丰富多彩：

（1） 在铁电和铁磁物质或强场情况下， $\vec{P}$ *与* $\vec{E}$ *、* $\vec{M}$ *与* $\vec{H}$ *之间将不再呈现线性关系；*

（2） 对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为 $D_i=\varepsilon_{ik}E_k;\ B_i=\mu_{ik}H_k$ *；*

（3） 在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化．这时的响应在最一般情形下可以写成 $\vec{D}(t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(t')dt'$ *。但当外场随时间以频率* ω *简谐变化时，傅立叶分析显示对单频仍然有* $\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$ *。所以极化率和磁化率都将是频率的函数．因而* $\varepsilon=\varepsilon(\omega),\ \mu=\mu(\omega)$ *。*

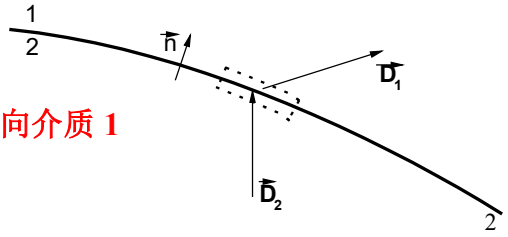
（4） 有些材料响应是非局域的： $\vec{D}(\vec{r})=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}')d\tau'$ *，也就是说，在 r'处的扰动会在 r 出产生响应。这种效应又叫作空间色散。类似时间色散情形（3），对特定的以某一个 k 为波矢在空间变化的场，经过傅立叶变换可知，* $\vec{D}(\vec{k})=\varepsilon(\vec{k})\vec{E}(\vec{k})$ *此时* ε *是 k 的函数*

§1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

Maxwell 方程组的精妙之处在于其在不同介质的交界面上“自带”边界条件，无须外设。这点是其超越其它许多方程（如流体力学方程）的地方。在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用。这一节我们就从积分形式的场方程出发导出交界面两边 Maxwell 方程的边界条件。

对应 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$ 的积分形式是

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int\rho_f d\tau$$



如图所示，**定义界面的方向矢量为介质 2 指向介质 1**

的单位方向矢量$\vec{n}$，横跨介质的分界面做一扁平的柱体，

两个底面平行于界面，分别为$\Delta\vec{S}_1=\Delta S\vec{n}$

及$\Delta\vec{S}_2=-\Delta S\vec{n}$，高度 h。为了得到场在界面两边的行为，先令 h 趋向于 0，此时显然 D 在侧表面的积分趋于 0，因此，

$$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\Delta\vec{S}_1\cdot\vec{D}_1+\Delta\vec{S}_2\cdot\vec{D}_2=\Delta S\cdot(\vec{n}\cdot\vec{D}_1-\vec{n}\cdot\vec{D}_2)=q_f,$$

其中q_f为柱体内的**自由电荷量（不包括因为极化产生的束缚电荷！）**。进一步令$\Delta S\to 0$，我们得到

$$\boxed{\vec{n}_1\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\sigma_f} \qquad (1.6.1)$$

$\sigma_f=q_f/\Delta S$是交界面上的**自由电荷面密度**。在一般情况下$\sigma_f=0$（没有自由电荷，或是自由电荷呈现体分布），**D 场的法向分量守恒。**

同理，对应方程$\nabla\cdot\vec{B}=0$，容易得到 **B 场的法向分量连续**的结论：

$$\boxed{\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0\Rightarrow B_{n1}=B_{n2}} \qquad (1.6.2)$$

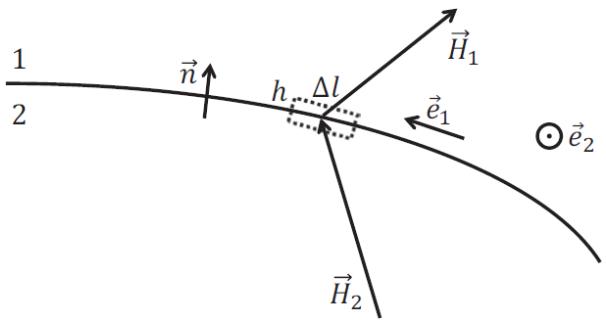
对应第 4 条公式$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$的积分形式为

$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{j}_f\cdot d\vec{S}+\int\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

假设$\vec{e}_1,\vec{e}_2$为界面上相互垂直的两个方向矢量，其与界面方向矢量$\vec{n}$呈右手螺旋：

$$\vec{n}\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,\quad \vec{n}\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1$$

则如图所示在界面处画一个长为Δl（方向沿$\vec{e}_1$），宽为 h 的矩形。仍然先考虑$h\to 0$，则 **H** 场在 h 上的积分趋于 0。于是 **H** 场在整个环路上的积分为：



$$\vec{H}_1\cdot\Delta\vec{l}_1+\vec{H}_2\cdot\Delta\vec{l}_2=\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}=\vec{j}_f\cdot\vec{e}_2\left(h\cdot\Delta l\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(D\cdot\Delta l\cdot h\right)$$

一般情况下边界处$\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$是有限值，则在$h\to 0$时，上式右边第 2 项为零。右边第 1 项在界面存在**面电流分布时**不为 0。定义$\vec{j}_f\cdot h\xrightarrow{h\to 0}\vec{\alpha}_f$为面电流密度，我们便有

$$\vec{e}_1\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{\alpha}_f\cdot\vec{e}_2\,,\qquad(1.6.3)$$

考虑面内另一个方向，可得

$$\vec{e}_2\cdot\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=-\vec{\alpha}_f\cdot\vec{e}_1\qquad(1.6.4)$$

非常容易将上（1.6.3）-（1.6.4）式改写成更一般紧凑的形式

$$\boxed{\vec{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=\vec{\alpha}_f}\qquad(1.6.5)$$

要证明(1.6.5)式，可将矢量$\vec{H}_1-\vec{H}_2$分解到$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$方向，再根据$\vec{n}\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,\vec{n}\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1$。

同理，对于方程$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$，与上面的推导比较可知，相应的边界条件为

$$\boxed{\vec{n}\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=0},\qquad(1.6.6)$$

故电场的切向分量连续。

注：

（1）4 条边界条件怎么记？可以很容易通过将 Maxwell 方程中的$\nabla\to\vec{n}$，再将体分布（$\rho,\vec{j}$）换成面分布$\sigma,\vec{\alpha}$。

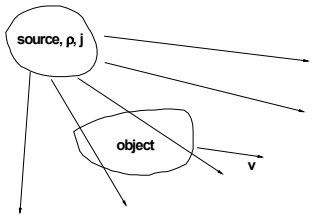
（2）在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是 E，H 场切向分量连续，D，B 法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有 H 场与 D 场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

第二章　电磁场的守恒定律和对称性

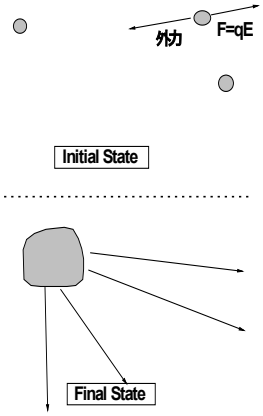
电磁场作为一种物质的存在方式，具有能量、动量以及角动量。人们如何得到这一结论的？可以从两方面来看。

（1） 假设空间存在一电磁场$\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)$，由置于远处的源电荷（电流）激发。

在其中放置一带电体，后者会受到电磁场的作用力而产生动量及能量的变化。**这些机械能及机械动量的改变不是无中生有的，只能是电磁场本身具有的能量以及动量转化而来的。**你可能会 Argue 说：这些能量动量可以是源电荷的机械能及机械动量贡献的！然而实验发现，即使我们将源关掉，在一段时间内，空间的电磁场不会立刻消失，仍然具有对带电体做功及改变其动量的能力，这证明带电体的能量动量不是由源电荷/电流直接提供的，而是由电磁场提供的。



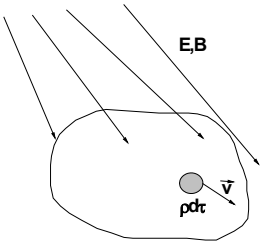
（2） 另一方面，也可以考虑源电荷/电流在建立电磁场时的能量/动量变化。以电场为例，考虑产生最终电场的电荷是原本散落在无限远处的一系列点电荷组成的。为了建立最终的电场分布 $\vec{E}(\vec{r},t)$，这些电荷从无限远处被准静地一个个搬了过来。在这个“搬动”的过程中一直必须有外力来平衡已有的电场对新搬入的电荷的作用力，**因此一直需要不断的外力对体系做功**。将终态电场建立完成后，外力在此过程中做的总功到哪里去了？- 根据能量守恒它们全部转化成电磁场的能量！动量也是完全一样的原理。



在《电磁学》的学习中，我们利用第 2 个图像计算了电容器中静电场的**总能** $U_E=\frac{1}{2}CV^2$ 以及电感中的静磁场的**总能** $U_B=\frac{1}{2}LI^2$。然而这种推导不能告诉我们**局域**的场的能量密度 – 我们得到能量密度只能通过相当不严格的类比。下面我们将利用第一种方法来系统研究电磁场的**局域能/动量密度**。

§ 2.1 真空中电磁场的能量守恒定律

先考察电磁场对处于其中的带电体所作的功。电磁场不能直接“看到”任何物质，而只能“看到”物质中的电荷/电流。场对一块物质的作用力是通过对其携带的电荷/电流作用传递的。因此我们研究电磁场对处于其中的电荷（可以是导体原本携带的，也可以是物质被极化出的）所作的功。由于磁场作用在运动电荷的力永远与速度方向垂直，**磁场对电荷不作功**，所以我们只需计算电场对电荷所作的功．若空间电荷分布为 ρ，则 $d\tau$ 内的电荷为 $\rho d\tau$，它在 dt 时间内移动的距离 $d\vec{l}=\vec{v}dt$，$\vec{v}$ 为电荷体积元 $\rho d\tau$ 的运动速度，于是场在 dt 时间内对 $\rho d\tau$ 所做的功为 $dR=\vec{F}\cdot d\vec{l}=\rho d\tau\vec{E}\cdot d\vec{l}=\rho d\tau\vec{E}\cdot\vec{v}dt=\vec{E}\cdot\vec{j}d\tau dt$



单位时间内，场对空间某区域内的电荷所作的功为

$$\frac{dR}{dt}=\int \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (2.1.1)$$

场对带电体做功增加了带电体的机械能W_m，故

$$\frac{dW_m}{dt}=\int \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \qquad (2.1.2)$$

下面我们利用 Maxwell 方程将$\vec{j}$消除，使得方场中仅仅留下电磁场 **E**，**B** 等。由麦克斯韦方程组中的第四式可见

$$\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

于是得到

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{E}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E} \qquad (2.1.3)$$

因为所有的守恒律都满足类似电荷（流）守恒的一个公式（1.2.3），我们下面的任务是将（2.1.3）改写成对时间、空间的全微分形式。对时间的全微分很容易实现：$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E}=-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$。对空间部分，注意到矢量运算恒等式

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)}$$

Tips：注意 $\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\nabla_B\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)+\nabla_E\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)$***，再参照矢量混合积***

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ ***公式可得：***

$\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\nabla_B\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)+\nabla_E\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)$。

（思考题：你有没有简便的方法证明矢量混合积公式？）

可得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \qquad (2.1.4)$$

上式第 1，3 项都已是全微分的形式。对第 2 项，根据 Maxwell 方程组中的第二式$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，可得

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

也成为全微分的形式。将上式代入（2.1.4）可得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

定义

$$\boxed{\vec{S}_P(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}} \qquad (2.1.5)$$

$$\boxed{u(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)} \qquad (2.1.6)$$

我们发现(2.1.2)式可最终写成

$$\begin{aligned}\frac{dW_m}{dt}&=-\int\nabla\cdot\vec{S}_p d\tau-\frac{\partial}{\partial t}\int u d\tau\\&=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S}-\frac{\partial}{\partial t}\int u d\tau\end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

将上式进一步改写为

$$\frac{d}{dt}\left[W_m+\int u d\tau\right]=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S} \qquad (2.1.8)$$

其物理意义非常明晰 – 在一个闭合空间内物理量$W_m+\int u d\tau$的增加等于从边界流入闭合空间的$\vec{S}_p$的大小。对应电荷-电流守恒定律，显然前者是这个闭合空间中的总能量，而后者是能量流密度。因为W_m是空间里物质的机械能量，$u(\vec{r},t)$应当描述其他的能量形式，这里其它的能量形式只能是电磁场的能量！因此$u(\vec{r},t)$的物理意义是 r 点处 t 时刻电磁场的能量密度，$\vec{S}_P(\vec{r},t)$即为相应的**能流密度**，叫做**坡印廷矢量**。当考察区域是全空间时，由于电流和电荷分布在有限区域，在无穷远边界上电磁场应为零，故$\vec{S}_p\equiv0$。此时有

$$\frac{dW_m}{dt}=-\frac{dW_{e,m}}{dt} \qquad (2.1.9)$$

其中

$$W_{e,m}=\int_\infty u(\vec{r},t)d\tau$$

为空间电磁总能量。（2.1.9）式表明机械能与电磁场能量可以相互转化，但总和为守恒量。在无源空间内没有任何其他的能量形式，$W_m=0$，(2.1.8)式变为

$$\nabla\cdot\vec{S}_p(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r},t)=0 \qquad (2.1.10)$$

这与电荷守恒的连续性方程完全一样，又一次说明了电磁场是一种物质。

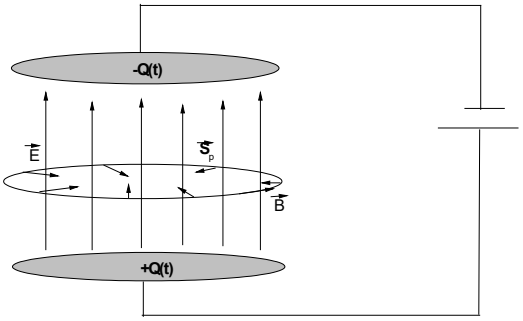
[例 1] 试考察正在缓慢充电的电容器的能流。

解：设电容器由两块圆形平板构成．它们的半径均为 R，间距为 h，其中电场为 $E(t)=\dfrac{Q(t)}{\pi R^2\varepsilon_0}$，则电容器中的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot\Omega$$

其中 $\Omega=\pi R^2 h$ 是电容器的体积。我们来看一下能流流动的情况。在充电过程中 E 在缓慢变化，设 $\vec{E}=E(t)\vec{e}_z$，则由麦克斯韦方程组的第四式可知，变化电场会产生位移电流从而进一步产生磁场。由

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$



可得磁场分布(选取柱坐数系 ρ,ϕ,z)为

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\rho}\mu_0\varepsilon_0\pi\rho^2\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi=\dfrac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\rho\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi & \rho<R\\ \dfrac{1}{2\pi\rho}\mu_0\varepsilon_0\pi R^2\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi=\dfrac{\mu_0\varepsilon_0}{2\rho}R^2\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi & \rho\geq R\end{cases}$$

所以能流密度矢量可以计算出来。在体系内部

$$\vec{S}_P=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}\rho(-\vec{e}_\rho)\qquad\rho<r$$

其方向指向电容器中心轴线。可以取 $\rho=R$，在电容器侧面上对能流密度积分，则得流入电容器的能量增加率为

$$-\int\vec{S}_P\cdot d\vec{S}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}R\cdot 2\pi Rh=\pi R^2h\varepsilon_0E\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}W_{e,m}$$

它正好等于电容器中能量的增加率。这说明能量不是从导线中流过来的，而是从电容器外面的空间中通过电容器侧面流进电容器的。显然，通常认为能量是从导线中流过来的直觉是错误的。

思考题：

1）任何一个静电状态必然对应某种电荷分布。当我们考虑如何建立这个电荷分布的过程时，不可避免一定要引入电场的变化，而电场的变化会产生位移电流，进一步产生磁场。这样一来，在建立经典体系的过程中就必须既有电场又有磁场，从而必然存在能流，而静电能正是通过这些能流一点点流入体系从而累积起来的。你能否设计其他的体系（特别是电流体系），考虑其如何建立的过程，并研究其中的能量建立及能流输运问题？若不能解析计算，可使用 COMSOL 等数值软件。

2）为什么此处要假设“缓慢充电”？若快速充电，会有那些不同的物理？我们之前的推导又有哪些地方需要改进？若不能解析计算，能否利用 COMSOL 数值计算？

§2.2 电磁场的动量守恒定律

下面要利用相似的方法考虑电磁场的动量。根据力的定义，带电体的**机械动量**的变化率等于场对带电体的作用力。带电体受电磁场的 Lorentz 力，其机械动量的变化率为：

$$\frac{d\vec{G}_m}{dt}=\int(\rho d\tau\vec{E}+\rho d\tau\vec{v}\times\vec{B})=\int(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})d\tau=\int\vec{f}d\tau \qquad (2.2.1)$$

其中 $\vec{f}$ 为电磁场的力密度。利用场方程把等式右边的 ρ 和 $\vec{j}$ 消去，力密度改写为

$$\vec{f}=\varepsilon_0\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times\vec{B} \qquad (2.2.2)$$

仿照电磁能量的推导，我们希望能将上式改写成对时间、空间的全微分。先考虑时间部分，配分可得

$$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \qquad (2.2.3)$$

带入（2.2.2）式后，考虑所有与电场 **E** 有关的项：

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\left[\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}\right]\\&=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right)=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\cdot(\frac{1}{2}E^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}})\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

注：倒数第二步用到了并矢运算公式 $\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{B}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}$*，证明如下* $\partial_i(A_iB_j)\hat{e}_j=\left(\partial_iA_i\right)B_j\hat{e}_j+A_i\left(\partial_iB_j\right)\hat{e}_j$*。倒数第一步用到了恒等式* $\nabla\varphi=\nabla\cdot(\varphi\overrightarrow{\overrightarrow{I}})$*，证明如下*

$$\nabla\cdot(\varphi\overrightarrow{\overrightarrow{I}})=\partial_i(\varphi\overrightarrow{\overrightarrow{I}})_{ij}\hat{e}_j=\partial_i(\varphi\delta_{ij})\hat{e}_j=\partial_i(\varphi)\hat{e}_i=\nabla\varphi$$

下面考虑（2.2.2）式中与磁场相关的项 $\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}$　　$\nabla\cdot\vec{B}\equiv0$，

可以加上一项恒为 0 的 $\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}$ 项使得与磁场相关的项为

$\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}$。与电场类比，这些项可以同样处理，最终得到

$$\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}=\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B})-\nabla\cdot(\frac{1}{2}B^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}) \qquad (2.2.4')$$

利用这些关系式，(2.2.2)式可最终写成

$$\vec{f}=-\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} \qquad (2.2.5)$$

其中

$$\boxed{\overrightarrow{\overrightarrow{T}}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}} \qquad (2.2.6)$$

$$\boxed{\vec{g}=\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\frac{1}{c^2}\vec{S}_P} \qquad (2.2.7)$$

根据（2.2.5-7）及（2.2.1）式，我们就得到

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_m}{dt}=-\oint d\vec{S}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}-\frac{d}{dt}\int\vec{g}d\tau} \qquad (2.2.8)$$

完全类似对电磁能量的讨论，上式显示 $\vec{g}$ 就是电磁场的**动量密度**，而 $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ 是**动量流密度**，是个张量（并矢）。这是因为动量与能量不同，其本身就是个矢量，因此其所对应的“流”必须是个张量。其实对每个动量分量（如 x 分量），(2.2.8)可以改写成 $\frac{dG_m^x}{dt}=-\oint d\vec{S}\cdot\vec{T}_x-\frac{d}{dt}\int g_x d\tau$，这个形式就与（作为标量的）能量守恒或者电荷守恒定律的形式一致。而

$$\vec{G}_{e,m}=\int_{\Delta\Omega}\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau \qquad (2.2.9)$$

就是 $\Delta\Omega$ 体积内的电磁场所携带的总动量。

注：

（1）与电磁能量不同，动量密度的存在要求必须有磁场。另外，我们注意到动量密度与能流密度相关，这里有什么物理值得我们深思呢？

（2）许多年来，人们往往被牛顿力学中的“力”、“功”、“力矩”等概念所“毒害”，其实现代科学发现早已摒弃了这些机械的概念，因为它们不本质，一般情况下难以定义。取而代之的是“动量”、“能量”，“角动量”等更本质的概念。受力可以描述为动量在改变，做供=能量发生变化；受到力矩表现为角动量发生变化。至于为什么只有这 7 个守恒量？那是因为我们所处的是 3+1 维空间，3 维空间的平移不变性给出动量守恒、各向同性给出角动量守恒，至于能量守恒是因为时间轴的均匀性决定的。

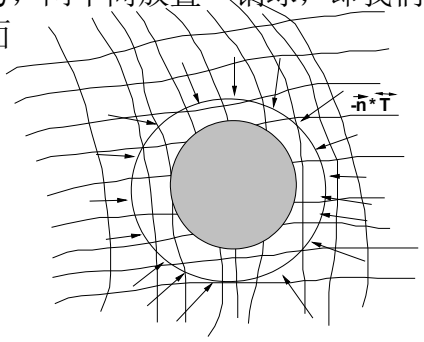
（3）并非所有的二阶张量都可以写成并矢的形式，虽然并矢一定是二阶张量。

利用（2.2.8）式可以方便地讨论电磁场对物质的作用力。考虑一个放置于电磁场中的物体，取闭合曲面恰好包围此物体，则电磁场对闭合区域内的带电体的作用总力 $\vec{F}_{em}$ 可由下式计算：

$$\vec{F}_{em}=\frac{\partial \vec{G}_m}{\partial t}=-\oint_S d\vec{S}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}-\int_V\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}d\tau \qquad (2.2.10)$$

讨论：

(1) 等式右边第一项$-\oint_S d\vec{S}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$是电磁场单位时间内通过界面从外面传递到曲面内部的总动量，根据力的定义，这就是外面的电磁场通过界面对闭合区域内的物质施加的总力。如弹性力学中的张力一样，$-\vec{e}_n\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$代表面外的场作用在面内的场的单位面积上的应力，故又称$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$为**麦克斯韦应力张量**。可以形象地把电磁场想象成一个网，网格之间有张力，网中间放置一钢球，即我们考虑的物质。对网施加扰动，则动量通过界面“流入”闭合区域，一部分变成了区域内部的网的动量，另一部分传递给钢球，给钢球施加了作用力。也可将电磁场想象成水，水中有一钢球。取一闭合界面，则外面的水物质一直对里面的水施加压力。

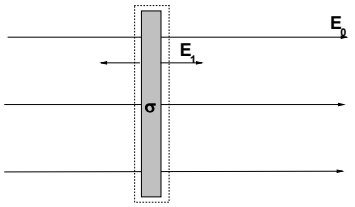


(2) 然而这些“总力”不见得都作用到区域内的物质上，还作用到区域内的电磁场上，引发区域内的电磁场的动量的增加。等式第二项就是减去这部分的贡献的。

(3) 在稳态或是场随时间谐变的情况下，第 2 项为 0，或是其时间平均值为 0。此时物质在电磁场中的受力完全由 Maxwell 张量的面积分决定。小心设计一些特定的电磁场结构，比如一束高斯型光束，处于光场之中的介质小球就会受到力的作用，其在光场中收“光力”会产生移动最终到达平衡位置。因此我们可以通过改变光束的位置来有效地移动小球，这就是“光镊 “（Optical Tweezers）的基本工作原理，目前在生物、医学中应用广泛。

[例 2]　求放置于均匀电场$\vec{E}$中的一个均匀带电板（面积为 A，电荷密度为σ，忽略边缘效应）的受力。

解：如右图所示，空间的总场为



$$\vec{E}_{right}=\vec{E}_0+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x,\quad \vec{E}_{left}=\vec{E}_0-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x$$

则 Maxwell 张量为

$$\vec{T}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\left(\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}\right)-\varepsilon_0E^2\hat{x}\hat{x}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\hat{x}\hat{x}+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\left(\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}\right)$$

包围平板做一闭合曲面，如图中虚线所示，计算电磁场对物质的力：

$$\vec{F} = -\oint \vec{n} \cdot \vec{T} dS = -A\hat{x} \cdot \left[\vec{T}_{right} - \vec{T}_{left} \right] = A\hat{x} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[E_{right}^2 - E_{left}^2 \right]$$

$$= A\hat{x} \frac{1}{2} \varepsilon_0 4 \cdot E_0 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \hat{x} E_0 \cdot Q$$

正是我们预期的结果。

注：

【1】这个例子当然有“杀鸡用牛刀”的感觉，你可以说我不用 Maxwell 张量也可以直接写出结果来。然而当电磁场及介质形状均为一般情况时，你就必须使用“牛”刀杀“鸡”了。

【2】 在推导电磁能量和动量的时候，我们使用的电场都是此时此地真实的物理总场，其中包含了远处的“源”产生的“外场”和放置于电磁中的物体产生的“附加场”。换言之，在真正的计算中，当我们把一个物体（带电或者不带电）放置于“外电场”中时，必须首先计算静电平衡后的真实的“局域总场”，然后才能用本节推导的公式计算所有的物理量。直接用“外场”计算是错误的。

习题

P． 59， 2.1,

补充题：1）仿照课件，推导出 M 场在边界的连接条件

2） 仿照课件，推导出极化强度 $\vec{P}$ 在界面上的边界条件

3）根据（1.6.3）+（1.6.4）推导出（1.6.5）；4）证明（2.2.4’）。

课题 Projects（选作）

1） 就目前来讲，大家对边界条件的认识一定是模糊的，不妨做如下课题来加深理解。考虑一个半径为 R 介质球（相对介电常数为 ε_r），由于某种外力的原因将一些自由电荷均匀分布在球内的厚度为 δ 的一个壳层内，求此时空间的 D，E 场分布，并研究边界两边的场是否满足边界条件。当 $\delta \to 0$ 时，重复以上的讨论。问问自己：以上模型能否在实际中实现？最后，为深入理解 H，B 场的边界条件，仿照上面的讨论自己定义一个体系进行深入讨论。

2） 考虑一个均匀极化（$\vec{P}(\vec{r}) = P_0\hat{x}$）的体系及一个非均匀极化（比如，$\vec{P}(\vec{r}) = P_0\hat{x} + \xi\vec{x}$）的体系，在微观层面考虑其电偶极子究竟如何分布的？在合适的微观模型基础下，比较微观描述下的极化电荷分布和“宏观小微观大”意义下的极化电荷分布。如何得到 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ 的？怎么理解？两种描述下的电场分布有什么不同和联系？

3） 课件中考虑了一个理想形状的电容器，你能否用 COMSOL 讨论一个非理想情况下的充电过程中的能流流动；如何将边界效应考虑进去？如何将充电随时间的变化考虑进去？

4) 能否讨论一个载流线圈如何建立最终的磁场状态的？能量如何输入？可否利用 COMSOL 具体设计一个体系展现能量的建立过程？