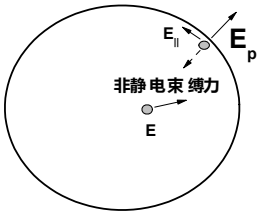
第六讲

上次课：

- $\vec{p}=m\vec{v}+q\vec{A}$， $q\vec{A}$ 为带电运动粒子与磁场的相互作用而产生的附加动量
- $\vec{S}_P=(\vec{E}\times\vec{H}),\quad u=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})$，电磁介质中的能流密度、能量密度
- $\nabla^2\varphi(\vec{r})=-\rho(\vec{r})/\varepsilon$ --- 静电方程

2．静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就一定会引起传导电流，由 $\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$ 决定。可见如果要求导体处于静电状态，则 $\vec{j}=0$ 的条件要求**导体内的电场强度必须处处为零**，否则必定引起电流。根据金属体内 $\vec{E}\equiv 0$ 知 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\equiv 0$，**即导体内部不可能有电荷分布（更严格的说法是：金属内部带负电荷的电子处处与带正电的背景抵消，宏观上没有净电荷分布）**。所以对导体来讲，**电荷只能分布在表面上**。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为 0，则表面电荷必然在电场的作用下在表面上运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，**静电条件下导体表面的电场的切向分量为 0，亦即，导体表面的标势处处相等**。导体表面电场的**法向分量可以不为 0，**这与切向电场很不相同 --- 导体电荷在表面处受到非静电来源的束缚能-即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。**根据 Gauss 定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比（$D_\perp=\sigma\Rightarrow E_\perp=\sigma/\varepsilon$）**。总结下来，与导体相关的电场行为满足



$$\begin{cases}\vec{E}_{in}=0,\rho_{in}=0\\ \vec{E}_{\parallel}^{surface}=0\\ E_{\perp}^{surface}=\sigma/\varepsilon,\ \text{both are unknowns!!!}\end{cases}\qquad(3.1.4)$$

进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases}\varphi\big|_{\text{Boundary}}=\text{Constant};\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{Boundary}}=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon},\quad Q=-\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS.\end{cases}\qquad(3.1.5)$$

其中 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 是指 φ 沿着表面法线方向的微分。所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件（3.1.5）下求解（3.1.3）。这里可能有两类问题，

（1） 等势问题 – 假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡，$\varphi = const.$ （注意：此时导体上的总电荷不能预先设定，是需要求解的）

（2） 孤立导体问题 – 假设导体孤立，则 Q 已知，但此时 φ 不能预先设定，是需要根据已知情况求解的。

某种意义上讲，Q,φ 是一对共轭量，不可能同时预先设定。

§3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理 – 格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

“给定一个有 m 个导体组成的体系，假设当导体上的电荷为$q_1,q_2,\cdots,q_m$时，它们的电势等于$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$，而对应另外一种电荷分布$q'_1,q'_2,\cdots,q'_m$，导体的电势分布为$\phi'_1,\phi'_2,\cdots,\phi'_m$，那么有关系式”

$$\sum_{i=1}^{m} q_i\phi'_i = \sum_{i=1}^{m} q'_i\phi_i \qquad (3.2.1)$$

证明：

证明 Green 互易定理之前，我们先证明一个**数学恒等式**。取任意的一个闭合曲面 S，假设 Φ,Ψ 是定义于 S 包围的体积 V 内的 2 个连续可微的函数，则由高斯定理可得

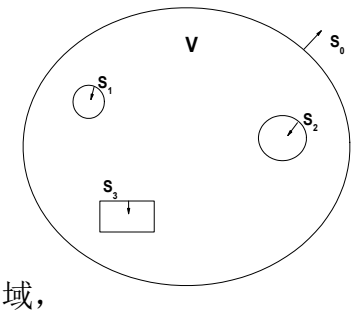
$$\int_V \nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi)d\tau = \oint_S \Phi\nabla\Psi\cdot d\vec{s}$$

将 Φ,Ψ 位置互换，有

$$\int_V \nabla\cdot(\Psi\nabla\Phi)d\tau = \oint_S \Psi\nabla\Phi\cdot d\vec{s}$$

两式相减，我们得到

$$\boxed{\int_V \left(\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi\right)d\tau = \oint_S (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi)\cdot d\vec{S}} \qquad (3.2.2)$$



此即为格林定理，它的重要性是*将任意两个标量函数的空间性质与其边界行为联系起来*。下面我们进一步利用格林定理证明格林互易定理。对包含 m 个导体的空间，取无限远处为封闭曲面 $\vec{S}_0$，然后再在其中挖掉所有导体所处的区域，因此产生 m 个封闭曲面 $\vec{S}_i$。剩余的空间，体积为 V，是一个多连通的闭合区域，其边界由 $\vec{S}_0$ 及 $\vec{S}_i$ 共同确定，记为 $\vec{S}$. 考虑两个充电状态，其中导体上分别带有电荷 $\{q_i\}$ 和 $\{q'_i\}$，对应的空间电势分布分别为 $\Psi(\vec{r}),\Phi(\vec{r})$，*这两个分布都必须满足场方程以及相应的边条*。由于静电平衡下电荷都分布在导体表面上．所以在体积

V 内有：$\nabla^2\Psi=0$，$\nabla^2\Phi=0$。代入（3.2.2）式，则（3.2.2）左边恒等于零。取 $\vec{S}_0$ 在无限远处，因（3.2.2）中右边项以 r^{-3} 在无穷远处趋向于 0，故其对 $\vec{S}_0$ 的积分为零。故有

$$0=\sum_{i=1}^{m}\oint_{S_i}(\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi)\cdot d\vec{s}_i=\sum_{i=1}^{m}\oint_{S_i}(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n})\cdot ds_i \qquad (3.2.3)$$

根据导体静电平衡时的边界条件，导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i=\varepsilon\left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_{s_i},\quad \sigma'_i=\varepsilon\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{s_i}$$

（这里取+号是因为 $\vec{S}_i$ 的方向定义为垂直表面向导体内部）。进一步，因为导体表面是等势体

$$\phi_i=\Psi|_{s_i},\quad \phi'_i=\Phi|_{s_i}$$

将上面 2 式代入（3.2.3）式，得

$$\sum_i\left[\oint_{S_i}\phi_i\sigma'_i dS_i-\oint_{S_i}\phi'_i\sigma_i dS_i\right]=0$$

积分可得格林互易定理：

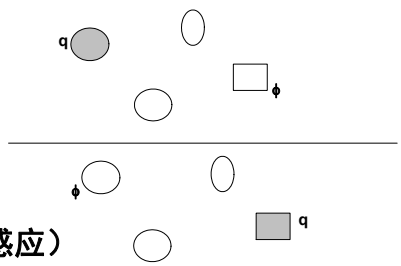
$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}q'_i\phi_i=\sum_{i=1}^{m}q_i\phi'_i}$$

由格林互易定理，我们可以马上得到一个重要的结果。考虑两个状态，其中 $q'_1=q'_3=q'_4=\cdots=q'_n=0$，$q_2=q_3=\cdots=q_n=0$，则有

$$q'_2\phi_2=q_1\phi'_1$$

再令 $q_1=q'_2$，则得

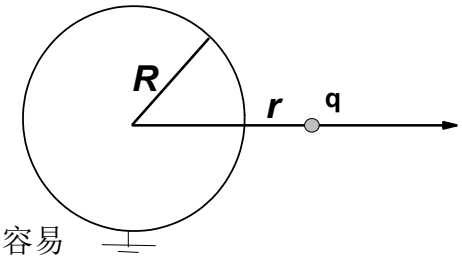
$$\phi'_1=\phi_2.$$



这就是说，带电 q 的导体 B 在不带电的导体 A 上（感应）产生的电势等于带电 q 的导体 A 在不带电的导体 B 上（感应）产生的电势．同样道理，设置导体 B 的电势为 1 时在接地导体 A 上感应出的电荷与设置导体 A 的电势为 1 时在接地导体 B 上感应出的电荷相等。

注：你可能 Argue 说这没什么啊，比如考虑两个点电荷组成的导体系。一个点电荷产生的势为 $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，其数值只与观察点与源的距离相关。若将观察点与源位置互换，显然有上述互易性质。但是，请注意格林定理显示这种互易关系在任意导体形状（未必是点电荷）下均成立。这个结论非常令人惊叹，因为场会引发导体上的电荷的再分布（即使导体总体来说不带电），但即使问题如此复杂我们却仍然有这样一个定理适用。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。格林互易定理从本质上讲述的是源-观察点之间的对称关系。

例 1， 在一个接地导体球（半径为 R）外距球心距离为 r 的地方放置一个带电量为 q 的点电荷，求在导体球上的感应电荷。



解：对这个由两个导体组成的导体系，对应电荷分布 $\{q,q_R\}$，电势分布为 $\{\varphi_q,0\}$，其中 q_R 为导体球上的感应电荷，φ_q 为点电荷所在地的电势，均未知。现制备另外一个电荷分布 $\{0,q_R^{'}=1\}$，则非常容易求出空间的电场为 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$，故，两个导体上的电势分别为 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{r},\frac{1}{R}\}$，因此，根据格林互易定理，可得

$$q\frac{1}{r}+q_R\frac{1}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad q_R=-\frac{R}{r}q$$

因此导体球上的感应电荷为 $-\frac{R}{r}q$。

Tips：

【1】有同学会被“导体球接地”这个条件所迷惑，当设计第二个状态时仍然把导体球接地，这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。“接地”只是把导体球的电势设为 0 而已，并不意味着我需要一直连一根导线到地。

【2】书上例题 5 的解法非常不严谨，你能否利用更严谨的做法得到正确结论？

§3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

1. 利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势 φ 来表述。假设一系列导体放置在介电常数为 ε 的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)d\tau \qquad (3.3.1)$$

利用 $\vec{E}=-\nabla\varphi$，上式可写成

$$W=-\frac{1}{2}\int(\nabla\varphi)\cdot\vec{D}d\tau=-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi\nabla\cdot\vec{D}d\tau$$
$$=-\frac{1}{2}\oint\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}+\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$$

其中用到了 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，我们考虑的空间包含了导体所在的空间。若我们考察的是体系的总能量，则(3.3.1)式的体积分是对全空间进行的，因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行. 对电荷体系分布在有限区域内的情况，$\varphi\vec{D}$ 以 r^{-3} 形式

在无穷远处趋向 0，因此面积分的值为零。另一方面，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量的表达式变为

$$W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i \qquad (3.3.2)$$

其中 ϕ_i,Q_i 为第 i 个导体的势和总电荷。

注：

（1） 上式虽然变现为只与自由电荷相关，但其实包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲，静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系，外界做的总功。因此（3.3.2）也可这样推出：假设电荷从处于无限远处一点点搬来的，将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是（3.3.2）。能否通过推导自己理解一下这个看似有点“悖论”的结论？并解释为什么会有 1/2 因子？

（2） 从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式，一种是 $W=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$，这表示静电能量是以密度 $u=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 的形式在介质空间连续分布，场强大的地方能量也大。另一种表达式是 $W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$，似乎暗示着能量只存在于有电荷分布的区域. 以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效，而当讨论空间某一有限范围内的电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着 $\frac{1}{2}\varphi\rho$ 是电场的能量密度-没有电荷就没有能量的看法是错误的！

（3） 在这个推导过程中我们用到了 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，将全空间(包括金属所在的区域)都考虑在内，因此面积分只需考虑无限远处的高斯面。另一个等同的看法是只考虑介质所处的空间，此时 $\nabla\cdot\vec{D}=0$，但面积分 $-\frac{1}{2}\oint\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}$ 就需要考虑在导体表面的积分，得到的结果仍然是 $\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i$

2. 电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为 $\{\phi_i\}$，同时每个导体上带有不同的电量 $\{q_i\}$。这个导体体系的状态即可以用 $\{\phi_i\}$ 来刻画，也可以用 $\{q_i\}$ 来刻画。那么，$\{\phi_i\}$ 与 $\{q_i\}$ 之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势 ϕ_i 是各个导体上的电量的线性函数。用数学表述为：$\{\phi_i\}$ 一定可以表示为 $\{q_i\}$ 的线性函数：

$$\phi_i = \sum_j C^{-1}{}_{ij} q_j \tag{3.3.3}$$

式中的比例系数$C^{-1}{}_{ij}$与导体的形状和相对位置有关，其**量纲是长度量纲的负一次方**。反之亦然：

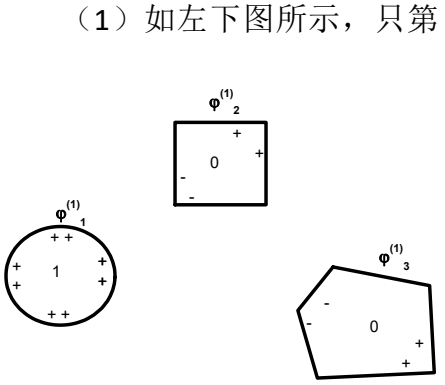
$$q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \tag{3.3.4}$$

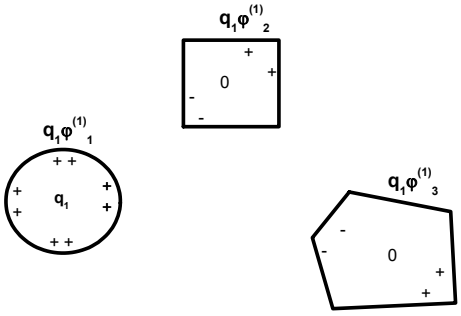
这里的C_{ij}是$C^{-1}{}_{ij}$的逆阵元素。

证明上式并不容易，因为所有的带电体均可呈现任意形状，任何一个带电体上的电荷增减都会影响到其它带电体上的电荷分布，从而影响到整个体系的电势分布！但仔细思考之后发现可以利用静电平衡及线性叠加原理证明此命题。

分 3 步考虑：

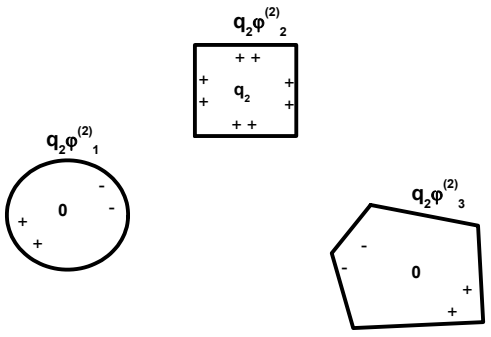
（1）如左下图所示，只第 1 个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为$\{1,0,0,0,...\}$。当此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为$\{\varphi_1^{(1)},\varphi_2^{(1)},...\varphi_j^{(1)},...\}$，同时记下所有导体上的面电荷分布$\{\sigma_1^{(1)},...,\sigma_j^{(1)},...\}$，注意此时其它导体上虽不带净电荷，电荷分布却未必为 0！

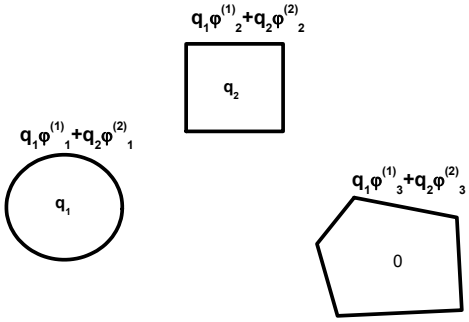




（2）当第 1 个导体上的电荷线性增加q_1倍时（如右上图），即分布为$\{q_1,0,0,0,...\}$时，达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为$\{q_1\sigma_1^{(1)},q_1\sigma_2^{(1)},...,q_1\sigma_j^{(1)},...\}$，根据线性叠加原理，对应的电势分布一定为$\{q_1\varphi_1^{(1)},q_1\varphi_2^{(1)},...,q_1\varphi_j^{(1)},...\}$。

（3）换第二个带电体，在其上充电q_2（其





它带电体上不充电），则得到电势分布$\{q_2\varphi_1^{(2)},q_2\varphi_2^{(2)},...,q_2\varphi_j^{(2)},...\}$，如左上图所示。**将这个状态与（2）中的状态线性叠加，得到的电荷分布状态一定也是静电平衡态，**其对应电荷分布为$\{q_1,q_2,...,...\}$的状态。将这样的过程循环往复，我们发现对应于$\{q_1,q_2,...,q_j,...\}$的状态，第i个带电体上的电势为$\phi_i=\sum_j q_j\varphi_i^{(j)}$，对比（3.3.3）发现问题得证，其中$C^{-1}{}_{ij}=\varphi_i^{(j)}$，物理意义为：**只在第j个带电体上充单位电量（其他导体是不充电）时在第i个带电体上诱导的电势**。

利用（3.3.3），我们可以将导体系能量纯粹用电势表示或纯粹用电荷表示：

$$W=\frac{1}{2}\sum_{ij}C_{ij}\phi_i\phi_j=\frac{1}{2}\sum_{ij}C^{-1}{}_{ij}q_iq_j \qquad (3.3.7)$$

为了看清C_{ij}的物理含义，设只有一个导体，则

$$q_1=C_{11}\phi_1$$

注意到对一个半径为R的金属球，$q=4\pi\varepsilon_0R\varphi$。 显然，这里的$C_{11}=4\pi\varepsilon_0R$是导体的电容，几何的意义就是电荷之间的“有效距离”，物理上具有长度量纲（除去不重要的常数ε_0）。这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因此电容也就越大.

思考题：

【1】 书中证明$C_{ii}>0,C_{ij}<0$方法很难让人理解，你能否给出正确的证明？

【2】 C_{ij}^{-1}的符号又将如何？

【3】 为什么两个静电平衡的状态线性叠加后还是静电平衡态？

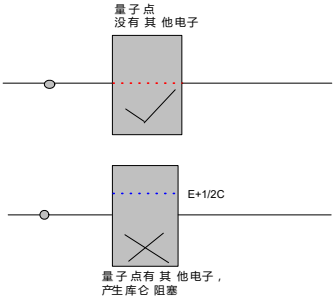
****

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究

1）此时电容如何定义？如何计算？

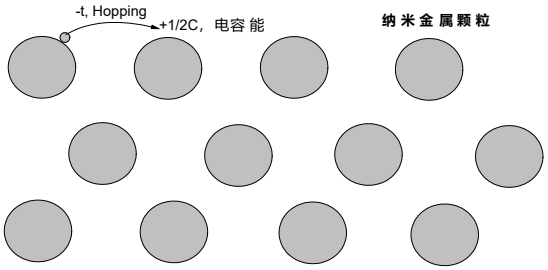
2）电容能的本质是“库仑相互作用”，对一个量子点，其静电能可写成$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$。设量子点内部只有一个电子填充时的能级为$E_n$；当量子点中已有一个电子填充的时候，此时在向里面填充一个电子就要付出$\frac{1}{2C}$的能量，因此此时电子的能级为$E_n+\frac{1}{2C}$。

考虑如图所示的隧穿机制，设外部环境中的电子能级与E_n匹配的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然



而当量子点中已有一个电子存在的
时候，能级发生了改变，电子不能
进行共振隧穿。这种现象叫做
“库仑阻塞”--- 由于库仑力阻塞了电子的运动

3） *“ Mott 相变”等问题的研究* *根据量子的能带理论，当能带没有被填满时，固体中的电子可以自由流动从而固体表现为金属。然而在 50-60 年代，英国物理学家 Mott 指出对半填充的固体存在一种新的绝缘体-金属相变机制。固体中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低 t（hopping 常数）。然而当能带半满时，每个原子上已经存在一个电子，此时当电子从一个原子跳到另一个原子上时，会和那上面的电子有静电相互作用，使得能量上升。这两个因素（t 以及静电相互作用能 U）互相制约。当原子之间远离时，t 很小因此电子不喜欢跳跃，此时体系表现为绝缘体。当给晶格施加压力使得原子之间的间距变短提高 t 的时候，有可能使得 t 大到可以克服 U 将绝缘体变成一个导体。然而自然的 Mott 相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究 Mott 相变。此时作为最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容能 $U=Q^2/2C$ 。定量描述这个问题就需要知道体系的电容系数。*



[例 2] 《电磁学》中，两个带 $\pm Q$ 电荷的导体的互电容定义为 $C=\dfrac{Q}{\varphi_2-\varphi_1}$。 在《电动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解 ：这个两导体的体系当电荷分布为 $\{Q_1=-Q,Q_2=+Q\}$ 时，电势分布为 $\{\varphi_1,\varphi_2\}$。根据电容系数的定义，

$$\varphi_1=C^{-1}{}_{11}Q_1+C^{-1}{}_{12}Q_2=C^{-1}{}_{11}(-Q)+C^{-1}{}_{12}(+Q)$$
$$\varphi_2=C^{-1}{}_{22}Q_2+C^{-1}{}_{21}Q_1=C^{-1}{}_{22}(+Q)+C^{-1}{}_{21}(-Q)$$

因此

$$\varphi_2-\varphi_1=Q\left[C^{-1}{}_{11}-2C^{-1}{}_{12}+C^{-1}{}_{22}\right]$$

与互电容的定义 $\varphi_2-\varphi_1=C^{-1}Q$ 比较可知

$$\frac{1}{C}=C^{-1}{}_{11}-2C^{-1}{}_{12}+C^{-1}{}_{22}$$

3. 固有能和相互作用能

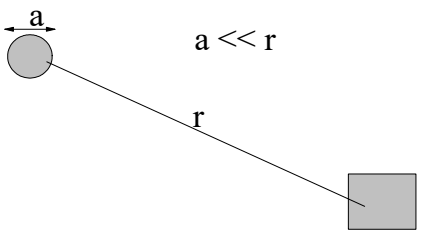
设有两个带电体 I 和 2，他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为$\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$。将它们放在一起，当如下条件之一存在时

（1）两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时，
（2）一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸，

两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。则空间总的电场可近似写为$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$。 因此，体系的总能量

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int \vec{E}^2 d\tau=\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int E_1^2 d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int E_2^2 d\tau}_{W_1+W_2}+\underbrace{\varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau}_{W_{int}} \qquad (3.3.9)$$

由上式可以看出，系统的总能量由两部分组成。
在这个条件下，上式右方第一和第二项表示 I 或 2 带电体单独存在时的能量W_1和W_2，称为**固有能**；上式右方的第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差，称为**相互作用能**，可写成



$$W_{int}=\varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau=\varepsilon\int \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 d\tau$$

其中φ_1,φ_2为两个带电体单独存在时的空间的电势分布，分别满足

$$\nabla^2\varphi_1=-\rho_1/\varepsilon,\quad \nabla^2\varphi_2=-\rho_2/\varepsilon$$

其中ρ_1,ρ_2为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$W_{int}=\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)d\tau-\varepsilon\int\varphi_1\nabla^2\varphi_2 d\tau=\int\varphi_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r})d\tau$$

在许多情况下带电体的自身的尺寸远小于它们之间的间距，φ_1在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$W_{12}\approx\varphi_1\int_v\rho_2 d\tau=\varphi_1 q_2 \qquad (3.3.10)$$

此即是相互作用能的表达式。显然（3.3.10）可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件（2））, 以及点电荷之间的相互作用能（满足条件（1））。

点电荷在外电场中

对一个点电荷 q 放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为

$\varphi_{ext}(\vec{r})$，则这个体系的相互作用能为

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int}} = q\varphi_{ext}(\vec{r}) \qquad (3.3.11)$$

注意：这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量 $\Delta\vec{\mathrm{P}} = q\vec{A}_{ext}(\vec{r})$ *相比较，均为带电体与外场共有的“相互作用能（动）量。*

电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为 R 的两个点电荷 q_1和q_2 的相互作用能，显然:

$$W_{\mathrm{int}}^{1,2} = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1\right)$$

其中 φ_2 是电荷 q_2 在电荷 q_1 处的势，其中 φ_2 为电荷 q_1 在电荷 q_2 处产生的势。将上式推广到 n 个电荷组成的体系，相互作用能可表示为

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} q_\alpha \tilde{\phi}_\alpha \qquad (3.3.11)$$

其中 $\tilde{\phi}_\alpha$ 为*除电荷* q_α *之外*所有其余电荷在电荷 q_α 处的势之和。

注意此处（3.3.11）的形式虽然与 W 的形式很类似，但 $\tilde{\phi}_\alpha$ *的含义与总能中* φ_α *的含义不同 – 前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量严格为正。*

§3.4 静电体系的稳定性问题

在许多研究中，人们经常假设某一种电荷分布，通常也不会关注这种电荷分布是否是合理，体系是否稳定？另外，通常我们会假设带电导体处于某一位置，然后研究相应的静电问题。然而我们假设的导体的构型是否稳定？针对这些问题，我们下面来系统研究静电体系的稳定性问题，这包括两个问题：*1）静电体系处在某个假定的构型下是否一定稳定？2）稳定时导体体系中电荷分布及导体的构型应满足什么条件？*要回答这些问题，我们需要研究整个静电体系的能量，因为体系能量取极小值时的状态对应的才是稳定状态。一个荷电导体系的总静电能为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\vec{r})d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\tau\,. \qquad (3.4.1)$$

一个体系的状态可由电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 描述，也可以由电势 $\varphi(\vec{r})$ 唯一描述，这两个函数有着一一对应的关系。这里我们假设导体处于真空中，但相应的处理方法可

以很容易地推广至导体处于分块均匀的介质中。对应于不同的电荷分布 $\rho(\vec{r})$（假设可以给定，无论其稳定与否），体系具有不同的能量。因此能量 W 是 $\rho(\vec{r})$ 或 $\varphi(\vec{r})$ 的泛函：$W=W[\rho(\vec{r})]$。现在，体系的稳定性问题可以表达成：

对应怎样的电荷分布（或电势分布），体系的能量为极小值？

问题进一步转化成：对给定的 $\rho(\vec{r})$ 做一个虚变动 $\rho(\vec{r})\to\rho(\vec{r})+\delta\rho(\vec{r})$，要求

$$\frac{\delta W}{\delta\rho}=0. \qquad (3.4.2)$$

下面我们根据（3.4.2）讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动 $\delta\rho(\vec{r})$ 有 2 类 ---- 一种是导体位置不动，电荷在导体上的再分布；另一种是由导体的位置变动引起的（当然严格来说这种情况也会同时引起单个导体上的电荷再分布）。我们下面分别研究这两种情况，这两个问题的解答将给出两个重要定理。

1. 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况：假设每个导体都是静止不动的（通过外力定扎），但电荷在单个导体上可以自由再分布。显然，这种扰动必须满足如下约束条件：

$$\int\delta\rho_i d\tau=\delta Q_i=0 \qquad (3.4.3)$$

其中 Q_i 为第 i 个导体上的总电荷，为守恒量。让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化。根据线性叠加原理，假设电荷分布 ρ 和 $\delta\rho$ 对应的电场分布为 $\vec{E}$ 和 $\delta\vec{E}$，扰动后的电荷分布 $\rho+\delta\rho$ 对应的电场分布为 $\vec{E}+\delta\vec{E}$。则电荷分布的扰动引起的能量变化为

$$\delta W=W[\rho+\delta\rho]-W[\rho]=\varepsilon_0\int\vec{E}\cdot\delta\vec{E}d\tau=-\varepsilon_0\int\nabla\varphi\cdot\delta\vec{E}d\tau \qquad (3.4.4)$$

其中 $\delta\vec{E}$ 和 $\delta\rho$ 满足

$$\nabla\cdot\delta\vec{E}=\delta\rho/\varepsilon_0.$$

对（3.4.4）进行分步积分可得

$$\delta\mathrm{W}=-\varepsilon_0\int\nabla\cdot(\varphi\delta\vec{E})d\tau+\varepsilon_0\int\varphi\nabla\cdot\delta\vec{E}d\tau=\int\varphi\delta\rho d\tau=\sum_i\int\varphi\delta\rho_i d\tau \qquad (3.4.5)$$

上式第一项可利用高斯定理变为无穷远处的面积分，其结果为零。由于约束（3.4.3）的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子 λ_i，可得

$$\begin{aligned}0&=\delta W-\sum_i\lambda_i\delta Q_i=\sum_i\int\varphi(\vec{r}_i)\delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i-\sum_i\lambda_i\int\delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i\\&=\sum_i\int[\varphi(\vec{r}_i)-\lambda_i]\delta\rho(\vec{r}_i)d\tau_i\end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

加了拉格朗日不定乘子后可认为 $\delta\rho(\vec{r}_i)$ 相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i)=\lambda_i \qquad (3.4.7)$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，体系能量到达极值，处于平衡状态。*（思考：严格来说还需证明*$\frac{\delta^2 W}{\delta\rho^2}>0$*，你能否证明？）*。这就是**汤姆孙定理**。我们在前面讨论导体静电平衡条件时曾通过物理的讨论得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极值这一平衡判据对该结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个前提条件：

1）导体上的电荷不会离开导体；

2）每个导体的位置保持不变。

对条件 1）我们已经知道有非静电来源的表面束缚能（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件 2）放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。

问题是：如果导体没有被外力钉扎，那什么样的构型是体系的稳定状态呢？

习题

P. 84, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

数值计算 Project

1）假设半径为 R 的金属球排成一个晶格常数为 *a* 的 2 维三角晶格，计算中心一个金属球对其它金属球的电容系数。你可以利用 COMSOL 计算不同的 $\{Q_i\}$ 对应的的 $\{\phi_i\}$，或者相反，这样就可以得到电容系数。

2）利用 COMSOL 计算一个电容器（可以自行设计），通过改变电容器的几何尺寸计算电容系数以及互电容的变化，由此讨论电容系数的物理意义，特别是讨论电容系数的对角元与非对角元与尺寸的关系以及相应的物理意义。