第 7 讲

上次课：

- 导体边条 $\begin{cases}\varphi\big|_{\text{Boundary}}=\text{Constant};\\ Q=-\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS.\end{cases}$
- Green 互易定理：$\sum_{i=1}^{m}q'_i\phi_i=\sum_{i=1}^{m}q_i\phi'_i$
- 导体系总能：$W=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iq_i$；相互作用能：$W_{\text{int}}=\int\varphi_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r})d\vec{r}=\frac{1}{2}\sum_\alpha q_\alpha\tilde{\phi}_\alpha$

  注意 ϕ_i 和 $\tilde{\phi}_\alpha$ 的物理意义的区别
- 电容系数：$q_i=\sum_j C_{ij}\phi_j$
- $\delta W[\rho(\vec{r})]=0\big|_{\delta Q_i=0}\to\varphi(\vec{r})=\lambda_i$，$\vec{r}\in$导体i

  汤姆孙定理：有约束下导体基态是电势为常数的那个状态

---

2. 恩肖定理

电荷密度的改变不仅可以由电荷在导体内部的再分布导致，也可以由导体的位置的改变而导致。在讨论这个过程时，我们做如下假设：

1） “绝热近似”- 带电体的运动速度很慢使得每个时刻其电荷分布都有足够的时间达到平衡（即成为等势体）。

2） 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能 （因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

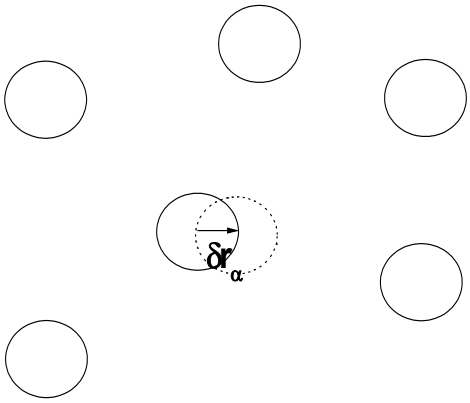
$$W_{\text{int}}=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n}q_\beta\varphi_\beta\ .\qquad\text{（3.4.8）}$$

注意此处 φ_β 是除去第 β 个带电体之后的其他带电体在第 β 个带电体所在位置 $\vec{r}_\beta$ 的电势。显然，W_{int} 是各个导体位置 $\{\vec{r}_\alpha\}$ 的函数：$W_{\text{int}}(\{\vec{r}_\alpha\})$，其具有极小值的充要条件是：$W_{\text{int}}$ **对所有带电体的坐标的一阶微商必须为零，二阶微商必须恒大于零**．下来我们考虑体系中某个导体的位置发生了如下变化：$\vec{r}_\alpha\to\vec{r}_\alpha+\delta\vec{r}_\alpha$，我们

考虑由此带来的能量变化。 注意到 W 中与 $\vec{r}_\alpha$ 相关的项有两类，一项是 $\frac{1}{2}q_\alpha\varphi_\alpha$ --- 所有其它带电体在第 α 个导体处产生的电势乘以 q_α，另一项是第 α 个导体在所有其它导体处产生的电势乘以那个导体的电荷。根据对称性，这两项其实相等。于是我们可以只考虑 W 中 $q_\alpha\varphi_\alpha$ 这一项，能量变分为 0 要求：

$$\nabla_\alpha W_{int}=0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi_\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_\alpha=0 \qquad (3.4.9)$$

这意味着：在该导体所在处，由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 0。进一步推广，平衡条件是体系中任一导体所处的位置的电场均为 0.



这一条件很物理，但如何实现依赖于具体的导体构型。假设针对任意体系，这一个条件能够实现，我们进一步考察对应的构型是否稳定。仍然考虑第 α 个带电导体，假设其位置做微小扰动 $\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$，因为此时其已经处于平衡位置，该扰动带来的能量 W 变化的一阶项为 0，因此需考虑 2 阶项。再一次，W 变分时只需要考虑 $q_\alpha\varphi_\alpha$ 这一项，因此有：

$$\delta^2 W=\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}dr_\alpha^i dr_\alpha^j=\frac{q_\alpha}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}dr_\alpha^i dr_\alpha^j=\sum_{i,j=x,y,z}B_{i,j}dr_\alpha^i dr_\alpha^j \qquad (3.4.9)$$

其中 $B_{i,j}=\frac{q_\alpha}{2}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$ 为一个对称矩阵。要使得体系稳定，$\delta^2 W$ 应当针对任意的变动恒为正！单独从（3.4.9）式中得不出任何结论，因为不同的方向上的虚位移相互耦合在一起，非常复杂。可以将 B 矩阵对角化，得到一系列本征值 b_i，则有，

$$\delta^2 W=\sum_{i=1,2,3}b_i\left(d\tilde{r}_\alpha^i\right)^2 \qquad (3.4.9')$$

其中 $d\tilde{r}_\alpha^i$ 对应第 i 个本征值的本征向量，是 dr_α^i 的线性叠加。这个向量可以理解为这些扰动的“简正”模式。不同简正模式相互独立，不会耦合交织在一起。换言之，当体系以这种“简正模式”做扰动时，总能量的变化干干净净正比于该扰动

的振幅。一个稳定状态要求所有可能的扰动均导致能量上升，根据（3.4.9’），这意味着我们要求所有的本征值均大于 0：

$$\boxed{b_i > 0, \quad i = 1,2,3} \qquad (3.4.10)$$

下面我们从另一方面推得一个恒等式，来证明上式是永远不可能实现！ 注意到 φ_α 是除 q_α 之外所有其他电荷 $\vec{r}_\alpha$ 处的电势，φ_α 一定满足 Poisson 方程。进一步考虑：$\vec{r}_\alpha$ 处的 φ_α 恰恰是由刨除了第 α 个电荷体的其他电荷体贡献的。则有

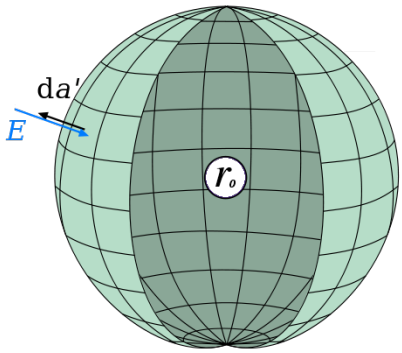
$$\nabla^2\varphi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} = 0 \qquad (3.4.11)$$

对比 $B_{i,j}$ 矩阵的定义，我们发现上式可以换成如下另一种形式

$$\boxed{0 \equiv \frac{q_\alpha}{2}\nabla^2\varphi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} = \sum_{i=1,2,3} b_i = Tr[B_{i,j}]} \qquad (3.4.12)$$

在等式的最后一步我们用了一个矩阵的 Trace 不随相似变换而改变。很显然，（3.4.12）与（3.4.10）相互矛盾！故 W_{int} 不可能有极小值，体系只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。***因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与.*** 如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在. 为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力.

其实，对这个问题还有一个比以上推导简单的数学证明。如右图所示，假设 $\vec{r}_0$ 是某个带电体（假设其带正电）的平衡位置，假设此平衡为稳定平衡，则当我们把带电体沿任意方向移开此位置时，它所受到的力（亦即电场）均应指向平衡位置。此条件要求 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} < 0$，其中高斯面为可以包围此带电体的任意无限小曲面。但注意到 $\vec{E}$ 是由“刨除”这个电荷体之后的体系中其他电荷产生的电场，根据高斯定理，这个电场的性质决定了 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} \equiv q \equiv 0$（因为此处“刨去”电荷本身，故电荷为 0），与稳定平衡条件冲突，因此，稳定平衡不可能。其实，两个推导时等价的。**但我认为这个推导虽数学上很简练，但物理上不能给出能量鞍点的概念，不如第一个推导物理上清晰直观。**



注意：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足 $\nabla\times\vec{E}=0$ 的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。

§3.5 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用力。因为电荷在静电平衡时只堆积在导体表面，这种静电力作用在导体的表面。我们可以从两个不同的角度进行计算。

方法 1：Maxwell 张量

在上一章，我们已经详细介绍了如何计算一个放置于电磁场中的物体受力问题。在定态（不随时间变化）或者时谐场条件下，物体的受力就是 Maxwell 张量的面积分：

$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} \qquad (3.5.1)$$

因为导体内的场 $\vec{E}_{内} = 0$，故只有导体的外表面受力。单位面积所受的力为

$$\vec{F}_s = -\vec{e}_n \cdot \overleftrightarrow{T} \qquad (3.5.2)$$

静电条件下，真空中的麦克斯韦张力张量为：

$$\overleftrightarrow{T} = \varepsilon_0 (\frac{1}{2} E^2 \overleftrightarrow{I} - \vec{E}\vec{E}) \qquad (3.5.3)$$

导体外表面的场只有法向分量，故

$$\vec{F}_S = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \vec{e}_n \qquad (3.5.4)$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度，方向指向导体外法线方向，也就是说，导体受到一种“负压力”.

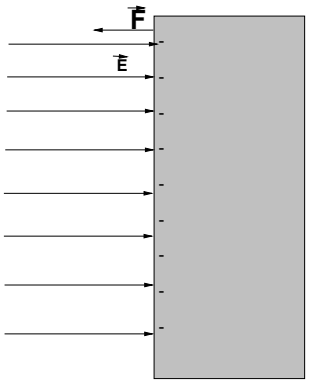
你也许会问：这是电场作用到自由电荷上的力啊！不一定就是作用到导体上的力！其实，导体中的自由电荷在静电平衡时全都集中在导体表面，由于有非静电的束缚力才使得电荷不能飞离导体。因而场对自由电荷的作用力通过非静电来源的平衡力“转嫁”到导体上。换一句话说，把导体和其中的电荷看成一个整体，则外界对电荷的力就等于对整个导体的作用力。

导体表面的场也可用面电荷表示，即

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_n \qquad (3.5.5)$$

代入（3.5.4）式可得

$$\vec{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma^2 \vec{e}_n \qquad (3.5.6)$$



方法 2：直接计算电荷受力

如前所述，导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力，所以我们可以直接用洛伦兹力来计算

$$\vec{F}=\int \rho\vec{E}d\tau \qquad (3.5.7)$$

然而直接利用上式计算有困难，因为理想的导体模型为导体的电荷分布为面电荷分布：$\rho(\vec{r})=\sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)$，然电场在导体的内外表面不连续：$\vec{E}_{+}=\sigma/\varepsilon_0,\vec{E}_{-}=0$。代入（3.5.7）时，有

$$\vec{F}=\int \sigma(\vec{r}_{\parallel})\delta(z)\vec{E}(\vec{r}_{\parallel},z)d\vec{r}_{\parallel}dz\,, \qquad (3.5.8)$$

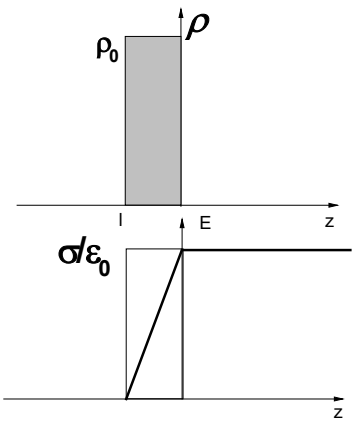
此时对 z 的积分不容易进行，因为将 z=0 代入 E 的表达式时我们不知道该取 $\vec{E}_{+}$ 还是 $\vec{E}_{-}$。

这个问题的产生是因为其实导体上的电荷本来就非完全分布于表面上的，**面电荷分布**只是我们对导体的一个**理想化**的模型处理。真实情况下，电荷是分布在一个非常薄的表面层内的。模型计算表明，这个过渡区约为10^{-10} m．让我们取最简单的情况，假设电荷均匀地分布在这个厚度为 l 的过渡层中，亦即，

$$\rho(\vec{r})=\begin{cases}0, & z<-l\\ \rho_0, & -l<z<0\\ 0, & z>0\end{cases} \qquad (3.5.9)$$

利用 Gauss 定理（假设电场在体内为 0）可容易计算出电场分布，即

$$E=\begin{cases}0, & z<-l\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(z+l) & -l<z<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 l & z>0\end{cases} \qquad (3.5.10)$$



则导体表面所受的力为

$$\vec{F}=\int dS\int_{-l}^{0}\rho_0\vec{E}dz=\int dS\int_{-l}^{0}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0{}^2(z+l)\vec{e}_n dz$$

$$=\int\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n dS. \qquad (3.5.11)$$

当此过渡层非常小，而我们又不关心过渡层内部的电场时，过渡层的电荷可以等价成面电荷分布，

$$\sigma=\lim_{l\to 0}(\rho l)\,. \qquad (3.5.12)$$

所以，导体表面单位面积所受的力为

$$\vec{F}_S=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \qquad (3.5.13)$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致.

Tips: 这个世界上本来没有奇性，人们为了计算以及表述的方便引入了奇异的物理量（如面电荷分布），但未必给你强调这种方便的代价及适用范围。我们在学习的过程中一定要深入掌握原理的来龙去脉，才能对问题理解的更加透彻，在遇到新问题时不会上当或是手足无措。

第四章　静电学 II-电介质静电学

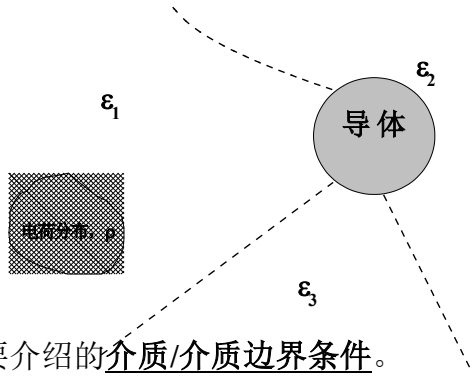
上一章中我们研究了静电学的第一部分 - 与导体相关的静电问题。在那里，我们没有真正求解电势的方程，而是根据导体具有自由电荷这一特点研究了与导体相关的一些静电基本定理 --- 汤姆逊定理、恩肖定理、格林互易定理，以及一些基本量的行为 – 如相互作用能、导体受力、电容系数等等。但要具体计算出这些物理量，我们仍需知晓空间的电势分布 $\varphi(\vec{r})$。在这一章中，我们转而研究电介质中的静电场的行为，目的就是计算 $\varphi(\vec{r})$。与导体不同，电介质中的电场不为 0，电场的标势由方程

$$\nabla\cdot[\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi]=-\rho_f(\vec{r})$$

决定，其中 ε 可以是位置的函数（针对非均匀介质的情形）。在一块均匀介质内部，ε 是常数，故上式变为

$$\nabla^2\varphi=-\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$$

为大家熟知的泊松方程。



电介质中电场问题就转化成在合适的边界条件下解上述 Poisson 方程。这些边界条件包括我们上一章讨论过的介质/导体表面边界条件，以及我们下面要介绍的介质/介质边界条件。

§4.1 电介质边界条件

由 Maxwell 方程我们已导出场在两个介质分界面的边值关系

$$\vec{e}_n\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\sigma_f \qquad (4.1.1)$$

$$E_{1t}=E_{2t} \qquad (4.1.2)$$

其中 $\vec{e}_n$ 为垂直于界面上 2 指向 1 的单位矢量，而 t 指的是界面上两个独立方向矢量。这里需要强调指出的是 σ_f 是自由电荷面密度，*它们是外加的原本不属于介质的源电荷，而且分布在介质分界面的一个薄层里所以被当作奇性的面电荷分布处理（不关心过渡层中的电场）*。根据 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=-\varepsilon\nabla\varphi$，容易由（4.1.1）导出

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f} \qquad (4.1.3)$$

将 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 带入（4.1.2）可得

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{||}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{||}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n_{||}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varphi_1 - \varphi_2)\big|_{surface} = const. \qquad (4.1.4)$$

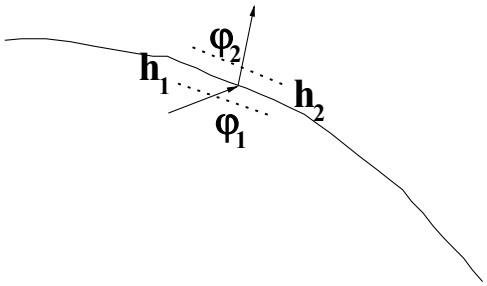
其中 $n_{||}$ 为界面上的两个独立方向，而 *const.* 是个与界面上位置无关的一个常数。(4.1.4)表面：在两个介质的界面上，左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{h \to 0} E_{2,n} h/2 + E_{1,n} h/2 = \left(\frac{E_{2,n} + E_{1,n}}{2} \right) h \qquad (4.1.5)$$

其中，h 为 1，2 两个点之间的距离，而 $E_{2,n}, E_{1,n}$ 为界面两端的垂直电场分量。在 $h \to 0$ 时，显然（4.1.5）式只有在电场存在奇性（ $E_{1,n} \to \infty, E_{2,n} \to \infty$ ）的时候才不为 0！*在所有我们考虑的情况下，电场都不会发散 - 即使有面电荷存在，两边的电场不会发散（尽管可以不连续），*

因此上面右端=0，即

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2} \qquad (4.1.6)$$



（4.1.3）及（4.1.6）就是关于势的边界条件。显然，边界条件(4.1.6)直接导致关于场的边界条件（4.1.2）

注：

1）关于电势条件（4.1.6），唯一的例外是点电荷，因为点电荷的场在原点是发散的，的确 $\varphi|_{0^+}, \varphi|_{0^-}$ 是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电为 q 的半径为 a 的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。

2）由 $-\nabla\varphi = \vec{E}$，$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ 可以看出，势、场、荷的发散（或者收敛）程度是逐次上升的。比如：面点荷分布对荷来说有一个维度是发散的，但场已经不发散了（但不连续），电势则进一步不仅不发散而且是连续的。

§4.2. 唯一性定理

有了边界条件，原则上可以解 Poisson 方程以得到所有关于场的信息。在介绍静电方程的解法之前，首先介绍一个重要的定理--- **唯一性定理**。

定理：如果静电体系内存在电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 和电介质分布 $\varepsilon(\vec{r})$，且关系式 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

成立，则体系的电场由边界条件（即边界上的φ或$\hat{e}_n\cdot\vec{D}$）唯一确定 --- 即，不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件 （参照 4.1 节上面的图）。

证明：我们利用反证法证明。设对同一个物理问题（即体系相同、边界条件相同）存在有两个解φ'和φ''，对应不同的电场及电位移矢量场：$\vec{E}'=-\nabla\varphi',\vec{E}''=-\nabla\varphi''$及$\vec{D}'=\varepsilon\vec{E}',\vec{D}''=\varepsilon\vec{E}''$，下面我们将证明它们其实是同样的：

$$\vec{D}'=\vec{D}'',\vec{E}'=\vec{E}''. \qquad (4.2.1)$$

根据定义，这两个场都要满足同样的边界条件，即在边界处有

$$\varphi'=\varphi'' \qquad \text{或者} \qquad \vec{D}'\cdot\vec{e}_n=\vec{D}''\cdot\vec{e}_n \qquad (4.2.2)$$

因此定义一个函数，$\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')(\vec{D}'-\vec{D}'')$，其在边界上的积分一定为 0：

$$0=\oint_S(\varphi'-\varphi'')(\vec{D}'-\vec{D}'')\cdot d\vec{S}=\oint Z(\vec{r})\cdot d\vec{S}=\int_V\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})d\tau \qquad (4.2.3)$$

检查对$\vec{Z}(\vec{r})$的散度，发现

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')(\nabla\cdot\vec{D}'-\nabla\cdot\vec{D}'')+(\nabla\varphi'-\nabla\varphi'')\cdot(\vec{D}'-\vec{D}'') \qquad (4.2.4)$$

由于讨论的是同一个体系，必有$\nabla\cdot\vec{D}'=\nabla\cdot\vec{D}''=\rho$，故

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=-(\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot(\vec{D}'-\vec{D}'') \qquad (4.2.5)$$

将上式带入（4.2.3）可得，

$$0=\int_V\nabla\cdot Zd\tau=-\int_V(\vec{E}'-\vec{E}'')\cdot(\vec{D}'-\vec{D}'')d\tau \qquad (4.2.6)$$

根据已知条件

$$\vec{D}'=\varepsilon\vec{E}',\vec{D}''=\varepsilon\vec{E}''$$

带入上式可得

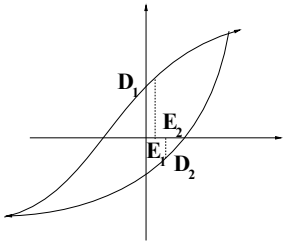
$$\int_V\varepsilon(\vec{r})\left|\vec{E}'(\vec{r})-\vec{E}''(\vec{r})\right|^2d\tau=0 \qquad (4.2.7)$$

静电情形下的介电常数满足$\varepsilon(\vec{r})\geq1$，所以上式要成立必然在体系内部处处满足

$$\vec{E}'(\vec{r})=\vec{E}''(\vec{r})$$

亦即，两个解相同，该问题的解唯一。由$\vec{E}=-\nabla\varphi$可知，电势φ'与φ"之间最多差一个任意常数。我们对此作一些讨论：

（1） 在某一些介质中$\vec{D}$和$\vec{E}$之间并不一定是线性的，一般说来$\vec{D}$是$\vec{E}$的函数。这时，只要$\vec{D}$是$\vec{E}$的单值单调递增函数，则由(4.2.6)式可看出，定理仍成立。对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞回线存在，$\vec{D}$和$\vec{E}$不再是单值的。的确，此时对应同样的边界条件可以不同的解。物理上，



这是因为铁电介质中的状态不仅与边界条件有关，
还与其形成的历史有关。

（2） 唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足 Poisson 方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

Comments added:

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解 Poisson 方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法-其中之一就是“有限元方法”， 现成的软件为 COMSOL。这个方法的精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同要重要，前者给我们许多灵感和 insight 但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论以及物理的嗅觉。二者应当结合起来，相得益彰。

习题：

P85， 3.8，3.9，3.10

小课题：

1） 计算几个典型的静电体系（比如两个点电荷，两个偶极子等）的能量随位置的变化关系，用图形画出它们的依赖关系，体会“静电体系没有约束就没有平衡态”这一结论。

2） 阅读文献“**Wen WJ, *et. al*, Phys. Rev. Lett. 85 5464（2000）**”, 思考他们的体系是否违反了恩肖定理？谈谈你对这个问题的理解？

3） 寻找并阅读 **Lang** 的文章（应当是书上 **P71** 所引的文章），弄明白表面束缚能的来源，理解它是否是静电来源。

4） 导体表面过渡层中电荷密度分布未必呈现线性变化的，查阅相关文献找出这种变化形式。你能否证明在任意形式的过渡层电荷分布下，**Maxwell** 张量和直接计算法计算出的导体表面受力都一致？