第八讲

上次课

- 无约束下静电体系没有平衡态 --- 恩肖定理
- 导体的受力

  $\vec{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n$，Maxwell 张量法，直接计算（注意如何避免电荷分布的奇点）
- 电介质边条：$\varphi_1 = \varphi_2$；$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f$
- 唯一性定理：对于确定的静电问题，边条唯一决定解（前提：介质中 D 与 E 之间的本构关系为单调单值）

唯一性定理的意义：

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解 Poisson 方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法-其中之一就是“有限元方法”， 现成的软件为 COMSOL。这个方法的精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同等重要，前者给我们许多灵感和 insight 但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论以及物理的嗅觉。二者应当结合起来，相得益彰。我们接下来将介绍两类静电问题的严格解法：镜像法与本征函数展开法，它们分别对应不同类型的体系。

---

§4.3 镜 像 法

镜象法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部虚设的像电荷代替，特别适合研究空间内有源电荷的情况。原则上讲，区域内的电势是由区域内的电荷和处在边界上的电荷（假设边界外的空间为导体，没有电荷）共同决定的：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\sigma_b(\vec{r}\,')ds'}{R} \qquad (4.3.1)$$

区域内的电荷分布已知，因此电势容易计算。但边界处的电荷密度$\sigma_b(\vec{r}\,')$通常是未知数 – *对设定电势的情形电荷本来就不确定*；*对孤立导体情形我们只知道总电荷，不知道电荷分布*，这给我们解决问题带来了不便。幸运的是，在某些特定情形下，这些边界上的电荷对考察区域的电势贡献等价于处于所解区域外部的一些虚拟电荷的贡献，亦即，

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_{image}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho_{image}(\vec{r}\,'')d\tau''}{R} \qquad (4.3.2)$$

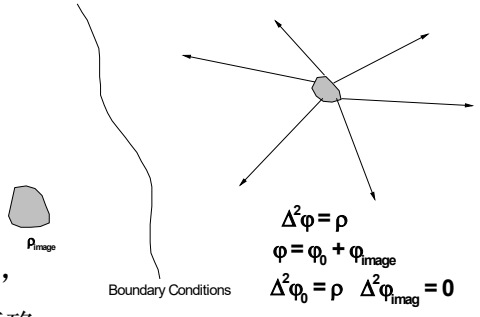
其中后一个积分区域在**考察区域外**。因像电荷放在边界的外部，故在我们讨论问题的空间内，有

$$\nabla^2\varphi_{image}\equiv 0\,, \qquad (4.3.3)$$

因此在此空间中，Poisson 方程

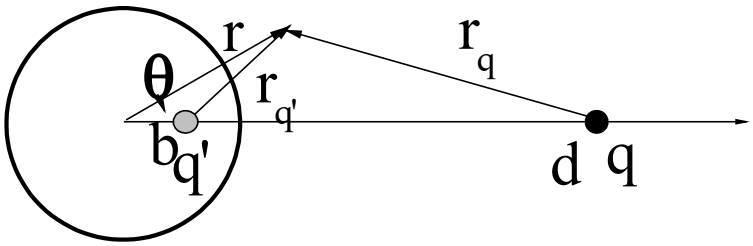
$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$$

依然成立。因此只要调整像电荷的位置和大小，使总电势 φ 满足问题所设的边界条件，那么我们便找到了问题的解。这种解法的正确性可由唯一性定理保证。下面我们将借助一个典型例题来说明这种问题的解法。



[例] 设一点电荷附近有一接地导体球，求空间的电势分布。

解： 如图所示，取球心为坐标原点，球心到点电荷 q 的方向为 z 轴。设 q 的坐标为 $(0,0,d)$,球半径为 R,球内的电势为零，这是显然的，故只要讨论球外空间的电势即可。



球外空间的电势所满足的方程和边界条件是：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x,y,z-d)\\ \varphi\big|_{r=R}=0\\ \varphi\big|_{r=\infty}=0\end{cases} \qquad (4.3.4)$$

球外空间的电势由两部分组成，即点电荷 q 所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势。根据镜像法的精神，可以试图找到界面外的一个像电荷来等价这部分贡献。根据问题的对称性，容易明白此像电荷（如果存在的话）应在球内 $(b,0,0)$ 处，设其电量为 $-q'$。因此，我们得到球外空间的试解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_q}-\frac{q'}{r_{q'}}\right) \tag{4.3.5}$$

其中

$$\begin{aligned} r_q&=\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta},\\ r_{q'}&=\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

下面的工作是看能否确定适当的b和q'，使试解满足边界条件（**Poisson 方程自动满足，这是镜像法的一大优点！**）。

无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面$(r=R)$上为零这一边界条件。为此，把条件$\varphi\big|_{r=R}=0$代入试解，转换成球坐标表示，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2+R^2-2Rd\cos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{b^2+R^2-2Rb\cos\theta}}=0 \tag{4.3.7}$$

即

$$q^2(b^2+R^2-2Rb\cos\theta)=q'^2(d^2+R^2-2Rd\cos\theta) \tag{4.3.8}$$

因为对任意θ值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases} q^2(b^2+R^2)=q'^2(d^2+R^2)\\ q^2b=q'^2d \end{cases} \tag{4.3.9}$$

上式有两组解：

$$\begin{aligned} &b=d,\ q'=q;\\ &b=\frac{R^2}{d},\ q'=\frac{R}{d}q \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

解（$b=d,q'=q$）不符合要求（像电荷不应在源电荷所处的空间内），只有解（$b=\frac{R^2}{d},q'=\frac{R}{d}q$）满足要求。于是得到问题的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}-\dfrac{\frac{R}{d}q}{\sqrt{r^2+\left(\frac{R^2}{d}\right)^2-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta}} & (r>R)\\ 0 \quad (r<R) \end{cases} \tag{4.3.11}$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

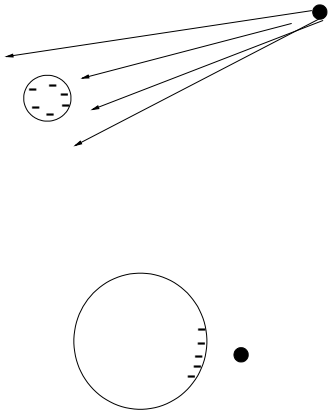
$$\begin{aligned} \sigma=\varepsilon_0E_r&=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=-\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{d}\right)\frac{\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1+\frac{R^2}{d^2}-2\frac{R}{d}\cos\theta\right]^{3/2}}\\ &=-\frac{q'}{4\pi R^2}F(\theta) \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

其中 $F(\theta)=\dfrac{\left(1-\dfrac{R^2}{d^2}\right)}{\left[1+\dfrac{R^2}{d^2}-2\dfrac{R}{d}\cos\theta\right]^{3/2}}$ 为一个角分布函数。

在两个极限条件下考虑面点荷（电场）分布：

A）$R/d\to 0$，此时，角分布为 $F(\theta)\approx 1+3\dfrac{R}{d}\cos\theta$，

这意味着导体的面电荷基本为均匀分布，但有一个因电场而产生与角度相关的调制。另一方面考虑，此时源电荷离导体球很远，其产生的电场对整个导体球来讲近似为均匀电场。而我们在后面利用另一个方法会证明，均匀场中的导体为被极化产生一个电偶级子。**这里，这个 $\cos\theta$ 相关的调制正是形成了一个偶极子！不同的方法得到了同样的物理图像。**



B）$R/d\to 1$，此时源电荷离导体球很近，其看到的导体表面基本上是一个无限大平面。的确，

$$F(\theta)=\begin{cases}\infty, & \cos\theta\to 1\\ 0, & \cos\theta\to -1\end{cases},$$

感应电荷只出现在靠近源电荷的一边，**而这一点其实与一个无限大平板对点电荷的响应一致！**

然而无论怎样，总感应电荷为

$$\int\sigma dS=\int\sigma(\theta)2\pi R^2\sin\theta d\theta=-\frac{R}{d}q=-q' \qquad (4.3.13)$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。**注意：这个结果与之前利用 Green 互易定理得到的结论一致。**

导体球所受的静电力等于电场作用到导体球上的感应电荷的作用力。导体表面单位面积受的作用力为

$$\vec{f}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

导体球受的总力可以由积分求得。根据对称性，只有 z 分量非 0。经过一个繁复的积分可得：

$$F=\oint \vec{f}\cdot\hat{z}dS=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{R^2}\left(\frac{R^3}{d^3}\right)\Big/\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2 \qquad (4.3.14)$$

简单计算可得

$$\boxed{F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq'/(d-b)^2} \qquad (4.3.14')$$

这个力正好是点电荷 q 对像电荷 q'的作用力；根据牛顿第 3 定律（***为什么此处可以用牛顿第三定律，而之前俩运动电荷之间的相互作用力不能用？***），点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力，称为“镜像力”。

Tips: 其实这里的结论（4.3.13-14’）也可以更简便的方法无需积分得到。比如，你可以证明此处的电场就是源电荷与镜像电荷产生的，然后基于此结论加上物理的 Arguments 即可以证明。

利用上面得到的结果，我们可以引申出来许多题目，并得到解答。

（1） 当 $R/d\to 1$ 时，设 $d=R+\delta,\ \delta\to 0$，有：

$b=R^2/(R+\delta)\approx R-\delta$，

$q'=qR/(R+\delta)\sim q(1-\delta/R)\sim q$，

此时物理问题等价于无限大平面的像电荷的解。

（2）**导体球接电势** V_0。此时边界条件为：$\varphi|_{r=R}=V_0$，V_0 是已知常数。为了满足此边界条件，应在原解（$\varphi|_{r=R}=0$）的基础上再加上镜像电荷（处于导体内部），其作用是**在导体表面上产生一个常数电势**。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心，电量为 $q''=4\pi\varepsilon_0 V_0 R$。 故此时的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}+\frac{q''}{r}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}\right]+\frac{V_0R}{r} \qquad (4.3.15)$$

（3）**导体球为孤立导体带电 Q** 这种情况的边界条件为 $\varphi|_{r=R}=$常数(未知)，以及

$$-\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=Q \qquad (4.3.16)$$

根据与上题相同的 Argument，必须加上一个放在球心电量为q''的像电荷。于是，球外电势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q}-\frac{q'}{r_{q'}}+\frac{q''}{r}\right] \qquad (4.3.17)$$

此时计算球面上的电荷可知

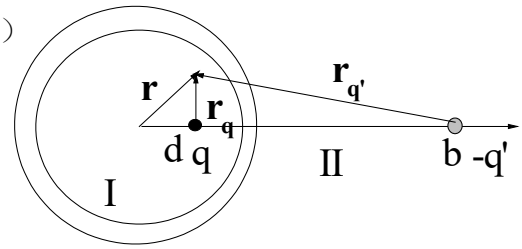
$$Q=-\varepsilon_0\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=-q'+q'' \quad \Rightarrow \quad q''=Q+q' \qquad (4.3.18)$$

问题得解。

（4）<u>点电荷q在导体球壳内，距球心d处</u>。

这类问题要复杂许多，先考虑一个简单的情形：**球壳接地**。与实体球最大的不同是：此时球内（I）外（II）区域内都可以存在电场及电势，其分别满足

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_I=-q\delta(x,y,z-d)/\varepsilon_0\\ \nabla^2\varphi_{II}=0\end{cases} \qquad (4.3.19)$$



而边界条件为

$$\begin{cases}\varphi_I=\varphi_{II}=0, & r=R, \quad (1)\\ \varphi_{II}\to 0, & r\to\infty \quad (2)\end{cases}$$

先考虑球内的电势，显然其应当由真实的点电荷与<u>界面上的感应电荷</u>共同贡献。根据镜像法的精神，可以把球面上的感应电荷（其大小分布未知）等效为“非物理空间”中的一些镜像电荷。<u>对应于球内空间，显然非物理空间只能是球外</u>。因此，球内的电势可写为真实电荷 q 和处于球外 b 处的“像电荷”-q’的叠加：

$$\varphi_I=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q}-\frac{q'}{r_{q'}}\right] \qquad (4.3.20)$$

根据边界条件可唯一确定q'与 b 的大小，数学上与电荷在球（壳）外面的情形类似，可以解得$q'=q\frac{R}{d}$，$b=R^2/d$。 考虑球壳外的电势，注意到此区域内没有真实电荷，$r=R$与$r\to\infty$的边界上电势均为 0，因此，满足此边界条件的解只有

$$\varphi_{II}=0 \qquad (4.3.21)$$

问题得解。

接下来考虑一个复杂一点的情形，假设球壳的电势设为V_0，因此边条（1）须改为（1’）$\varphi_I=\varphi_{II}=V_0,\ \ r=R$。我们发现原来得到的解（4.3.20）-（4.3.21）不能满足新问题下的边界条件(1’)，需再设“像电荷”才行。***然而对 I 区来说，简单的分析发现任何处于 II 区的像电荷都不能满足条件（1’），又不能在原点设像电荷（因镜像电荷不能处于物理的考察区），怎么办呢？***

解决的办法是注意到$\varphi=V_0$本身就是 Poisson 方程的解。***那为什么之前我们从来不用这个解呢？***那是因为之前我们考虑的问题中考察区域在球外，这个解不能满足无穷远处的边界条件$\varphi\to 0,\ \ r=\infty$。**但现在考察区在球内，不需要满足$\varphi\to 0,\ \ r=\infty$这个边界条件，故$\varphi=V_0$可以采用**。因此，I 区电势的最终解为

$$\varphi_I=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_q}-\frac{q'}{r_{q'}}\right]+V_0 \qquad (4.3.22)$$

其满足所有的边界条件同时满足 Poisson 方程，故唯一性定理保证其正确性。下面考虑 II 区中的电势。这个区域内无源，电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生，考虑修好后的边条（1）：$\varphi_I=\varphi_{II}=V_0,\ \ r=R$，显然“像电荷”为处于原点（I 区）的电量为$4\pi\varepsilon_0V_0R$的点电荷。因此，II 区电势：

$$\varphi_{II}=\frac{V_0R}{r} \qquad (4.3.23)$$

（4.3.22）-（4.3.23）就是问题的解，满足所有的方程以及边条。问题虽然得解，但物理图像不清楚：***比如此时导体球壳上带电荷为多少？为什么 I 区的电场与外部条件无关？为什么 II 区的电场与 I 区中的电荷放置也毫无关系？***要搞清楚这些问题，必须意识到事实上导体球壳不是无限薄的，而是一个具有有限厚度（尽管很薄）的一个金属壳层，其具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上，球壳内部的电荷密度为 0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in}=\varepsilon_0\vec{n}\cdot\vec{E}_{in}\Big|_{r=R}=\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_I}{\partial r}=\frac{-q}{4\pi R^2}\frac{1-(d/R)^2}{\left(1+(d/R)^2-2(d/R)\cos\theta\right)^{3/2}}=\frac{-q}{4\pi R^2}\tilde{F}(\theta) \qquad (4.3.22)$$

求出，其总电荷可以由上式积分求出。但更容易地，可由 Gauss 定理求出：

$$0=\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=q_{in}+q \quad\Rightarrow\quad q_{in}=-q \qquad (4.3.23)$$

其中，（4.3.23）中的积分面取在导体球壳两个界面包裹的中间区域。外表面上电荷均匀分布，总电量为

$$q_{out}=\oint\sigma_{out}\cdot dS=4\pi\varepsilon_0 RV_0 \qquad (4.3.24)$$

因此物理图像是：

（1）球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

（2）这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

（3）σ_{in} 对应于 II 区处于 b 处的“像电荷”（但与之前的镜像法例题不同，此处感应电荷总量不等于虚拟感应电荷！），而 σ_{out} 对应于贡献 $\varphi=V_0$ 的像电荷（对应于一个球对称的势的“像电荷”也应当对称分布）。因为内部金属薄层的存在，球壳的两个界面变成完全独立的，因此其外两个世界也完全隔绝！

******* 镜像法的拓展 *******

由以上讨论可以得知，镜像法特别适用于存在“边界面电荷”以及这些面点荷呈现一定对称分布的情况 —— 因为如若不然，则非常难以使用有限数目的镜像电荷来替代真实电荷。除了金属表面，其实均匀电介质表面也具有上述特征。在均匀介质内部，极化电荷只存在于自由源电荷 $\rho_f(\vec{r})$ 不为 0 的地方，在没有自由源电荷的地方是没有极化电荷的。证明如下：

极化电荷密度由 $\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$ 给出。在均匀介质体内，$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$，因此，$\rho_P=-\varepsilon_0\chi\nabla\cdot\vec{E}$。而另一方面，我们有 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$，同时，在均匀介质体内有 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，故有 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho_f/\varepsilon$。因此，最终我们得到

$$\rho_P=\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\varepsilon_0\chi}{\varepsilon}\rho_f$$

因此，在均匀介质体内，无论其形状，无论 $\rho_f(\vec{r})$ 如何分布，ρ_P 紧紧依附着 $\rho_f(\vec{r})$ 的存在而存在，没有 $\rho_f(\vec{r})$ 的地方就没有 ρ_P！但这个结论在介质非均匀的时候不再成立，因此，在两个均匀介质的分界面上，将会有面电荷形式存在的极化电荷！

因此，镜像法的精神完全可以拓展到边界为两个均匀介质表面的问题。此时，极化电荷呈现面分布，与金属中的表面电荷类似。这类问题与金属相关的问题有如下区别：

1）介质分界面上的边条是两个，而不像在金属界面上的情形一样（此时只有一个边条）

2）介质中的电势分布不为 0，因此，边界两边的电势都是未知量。

多了个条件，但也多了个未知量，因此问题仍然可以通过镜像法求解！

思考题：书上有关介质镜像法的例题中，假设了镜像电荷的位置，这有什么道理吗？
****

§ 4.4 本征函数展开法

之前介绍的镜像法虽然看上去很精致，但镜像电荷的设置非常依赖于物理直觉和经验，因此该方法并不是一个一般普适的方法。本节将介绍一种求解静电问题电势分布的普适方法，这种方法可以推广到求解其他许多类似的问题（如电磁波的散射）。很多情况下，我们求解的空间中无源，但体系处在某一种外场的作用下，这种外场通常通过边界条件反映出来。此时求解空间中电势满足无源的拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi = 0\,, \tag{4.4.1}$$

而电势在边界处（比如无限远处）满足特定的边界条件：

$$\varphi\big|_{boundary} = \varphi_0(\xi) \tag{4.4.2}$$

其中ξ是界面上的位置变量。

针对由（4.4.1）-（4.4.2）定义的物理问题，我们可以根据问题的边界形状及空间的对称性选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程（4.4.1）式的通解。假设我们得到了这组解$\{\varphi_n, n=1,2,...\}$，它们通常是<u>正交完备</u>的：$\langle\varphi_n\varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$，其中内积$\langle\varphi_n\varphi_m\rangle$如何定义需根据问题本身确定。根据<u>完备性</u>，我们一定可以将我们试图求解的φ展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n\varphi_n\,. \tag{4.4.3}$$

（4.4.2）一定是（4.4.1）的解，但不一定满足边界条件（4.4.2）。<u>必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数C_n</u>：

$$C_n = \langle\varphi_n|\varphi_0\rangle = \int\varphi_n(\xi)\varphi_0(\xi)d\xi \tag{4.4.4}$$

这样当我们将$\{C_n\}$全部唯一定下来之后，整个问题得解。*很多情况下，我们并不需要真正利用到（4.4.4）式求$\{C_n\}$，而是通过比对$\varphi_0(\xi)$中包含的相关本征波函数$\varphi_n(\xi)$的*

系数来确定C_n。这样做的逻辑基础是不同本征波函数之间正交，它们之间相互独立。

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。 在解决实际问题时，我们应当根据其对称性选择合适的通解形式进行求解。

(1) 轴对称的球坐标系问题 （与变量ϕ无关）

对此类问题，Laplace 方程的本征解为$r^l P_l(\cos\theta)$， $r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$。因此通解可以一般写成：

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.5)$$

经向波函数r^l在 r=0 处收敛， $r^{-(l+1)}$在$r\to\infty$时收敛。$P_l(x)$为 Legendre 多项式，低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1) \\ \cdots \end{cases} \qquad (4.4.6)$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \qquad (4.4.7)$$

Tips: 如何求解球坐标下 Laplace 方程的通解？注意到 Laplace 方程在球坐标下可以写成

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\varphi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varphi=0$$

利用分离变量法，将势函数写成$\varphi(r,\theta,\phi)=U(r)V(\theta)W(\phi)$带入方程分别求解，可得，$W\sim e^{im\phi},V\sim P_l^m(\cos\theta),U\sim(r^l,r^{-(l+1)})$。考虑体系具有旋转对称性，因此$m=0$，进一步$P_l^m\to P_l$。

（2）与 z 无关的柱对称问题

对此类问题，Laplace 方程的本征解为 $\rho^{\pm n}(\sin(n\phi),\cos(n\phi))$，$\ln(\rho)$，1。因此其通解为

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})\sin(n\phi) \quad (4.4.8)$$

本征函数之间的正交性为

$$\int \cos(n\phi)\sin(n\phi)d\phi = 0$$
$$\int \cos(n\phi)\cos(n'\phi)d\phi = \int \sin(n\phi)\sin(n'\phi)d\phi = 0, \quad n \neq n' \qquad (4.4.8)$$

Tips: 如何求解柱坐标下 Laplace 方程的通解？注意到 Laplace 方程在柱坐标下可以写成

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi = 0$$

利用分离变量法，将势函数写成 $\varphi(\rho,\phi,z) = U(\rho)V(\phi)W(z)$ 带入方程分别求解可得。一般情形下 $V(\phi)$ 的通解形式为 $e^{\pm in\phi}$，因为电势一定为实数，故改写成 $\cos(n\phi),\sin(n\phi)$ 的形式。

习题： 利用直接积分推导 （4.3.13）和（4.3.14）

补充题：

（1） 一个孤立的带电 Q 的导体球壳（半径为 R）内距离球心 d 处放置一个带电为 q 的点电荷，求空间的电势分布及电荷分布。

（2） 设一个孤立的带电量为 Q 的导体球放置在外电场中，计算空间的电势分布。仿照课件给出所有的推导步骤。

（3） 翻阅《数学物理方法》，分别在旋转对称的球坐标系及与 z 轴无关的柱坐标系中求解 Laplace 方程，求出所有的本征函数（亦即，（4.4.5），（4.4.8））。

小课题（选作）

1） 不用牛顿第三定律，你能否利用 Maxwell 张量或者其他方法直接计算点电荷受到导体上像电荷的作用力（即镜像力）？

2） 对于金属椭球体，我们是否还有镜像法？能否利用 COMSOL 计算一个接地金属椭球体附近放置一个点电荷后，空间的电场分布？任意形状的金属体又如何？

3） 自己编写一个小程序，（在多个激发电荷存在，及它们处于不同构型下）计算并 Visualize 金属球上的感应电荷的面分布。思考假如空间有两个金属球，或者有多个激发电荷，这个问题是否还可以利用镜像法求解？

4） 在 $R/d \to 0$ 条件下根据镜像电荷的分布计算有效偶极子（可利用公式 $\vec{p} = \int \vec{r}\rho d\tau$），然后将所得的结论与 Lect-10 中的均匀场下的金属球的 Case 做一番类比。