第九讲

上次课：

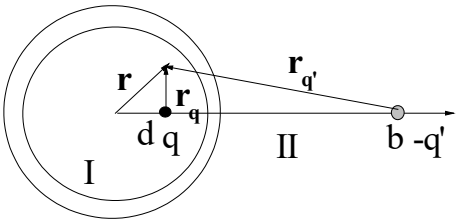
- **镜像法：**

  1）通常处理有源问题： $\nabla^2\varphi = -\rho_f(\vec{r})/\varepsilon_0$

  2）边界条件 -- 边界上有面电荷，其未知但会产生电势

  3）思路：在考量的物理空间之外的区域放置虚拟（像）电荷，调整其大小位置，使总的试解满足边条

  4）唯一性定理保证解的正确性



- **本征函数展开法：**

  （1） $\nabla^2\varphi = 0$ **有一系列正交完备的解 – 本征函数** $\{\varphi_n\}$

  （2）完备性 --- $\varphi = \sum_n c_n\varphi_n$

  （3）展开系数： $c_n = \langle\varphi_n \mid \varphi\rangle\big|_{boundary}$**，根据正交性比较不同本征函数前的系数**

下面，我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心，先考虑一个简单的情形

[例 4] 一半径为 R 的接地导体球置于一均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，求空间场的分布。

解：如图所示，取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴，这是一个绕 z 轴旋转对称的问题。球外空间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势。因此，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \\ \varphi = 0, & r = R \quad (1) \\ \varphi \to -E_0 r\cos\theta, & r \to \infty \quad (2) \end{cases} \qquad (4.4.9)$$

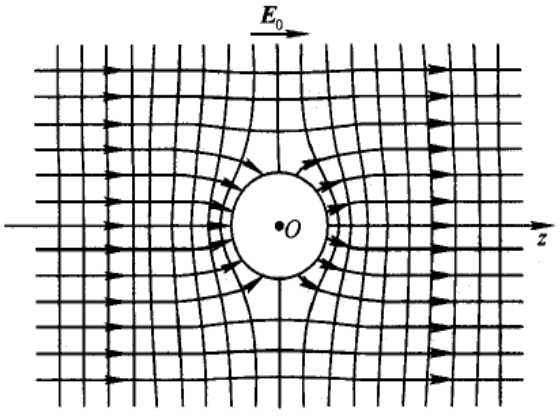


图 4.5

这个问题的通解即为：

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \qquad (4.4.10)$$

通解中有无穷多展开系数，虽然看上去很难确定这些系数，其实仔细分析之后发现它们均可由问题的边界条件确定。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)\xrightarrow{r\to\infty}-E_0 r\cos\theta \qquad (4.4.11)$$

根据 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，我们可以分别比较（4.4.11）式左右两边中不同 $P_l(\cos\theta)$ 函数的系数，使得它们相等。因此可得

$$A_1=-E_0,\quad A_l=0,\quad l=0,2,3,... \qquad (4.4.12)$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left(-E_0R+\frac{B_1}{R^2}\right)\cos\theta+\sum_{l\neq1}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0 \qquad (4.4.13)$$

再次利用 $P_l(\cos\theta)$ 函数的相互正交性，不同 $P_l(\cos\theta)$ 的参数应当分别为 0，故

$$B_1=E_0R^3,\quad B_l=0,\quad l=0,2,3,... \qquad (4.4.14)$$

将（4.4.12）与（4.4.14）代入试解，我们得到最终的结果

$$\varphi=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta \qquad (4.4.15)$$

至此，我们已完成了这个问题的求解。注意到 r^{-2} 依赖关系是**偶极子**的电势的特征，可将（4.4.15）改为

$$\varphi=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}+\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (4.4.16)$$

其中

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0\text{。} \qquad (4.4.17)$$

我们看到：球外空间中，除了外加的均匀电场的贡献外，还有一个偶极子的电场。物理图像是：由于导体球在电场的作用下正电荷推积在一侧，而负电荷推积在导体球的另一侧，因此导体球对外等效为一个偶极子。有趣的是，这个导体球其偶

极矩正比于外加电场以及球的体积！

讨论：

（1） 我们可以认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场，其只具有$l=1$的项（$-E_0 r\cos\theta$），而同时体系具有良好的对称性，不会将具有 l 角动量的波散射到l'项，因此体系的响应也就只有$l=1$项，所以只产生偶极子。若外场不是均匀场，而是具有高 l 的项，则体系的响应也一定有高 l 项。这恰恰是唯一性定理的一个体现 --- **边条唯一确定解的形式。这里边条的对称性决定了解的对称性。**

（2） 我们之前研究导体球外有点电荷的问题时，曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时，其电场就是近似为均匀场！将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

【思考】

为什么这个偶极子的不多不少正好是$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0$？这里有什么物理的原因？

注：人们会问边界条件$\varphi\to -E_0 r\cos\theta,\qquad r\to\infty$ (2) 为什么不能加上一个常数电势φ_0？若加上的话，这个常数是什么意思？数学上讲，加一个常数电势φ_0后的解其实就是让球上感应出一些净电荷（参考书上的解法），那问题来了：如何确定这个φ_0？其实，无限大空间均匀电场的问题从来不是一个“well-defined” 的问题。因为我们通常取无限远处为电势 0 点，但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是 0。真正在实验上实现均匀场只能在有限空间，比如用平板电容器，此时问题是 Well-defined，但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以解析求解且给我们许多 Insight。 需要说明的是，此时我们总是假设φ_0为 0，相当于我们选择了坐标原点为电势 0 点。

进一步做一个更难一些的例子。

[例 5] 半径为 R、介电常数为 ε_2 的均匀介质球，被置于均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，球外空间充满均匀介电常数为 ε_1 的介质。求空间电势的分布。

解： 如图 4.6，取 $\vec{E}_0$ 方向为极轴 z 方向。与上一道例题不同的是，此处**介质球内可以存在电场**。 为此我们把空间分为球内球外两个区域（I、II），电势分别为 φ_1， φ_2，则它们满足的方程：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \nabla^2\varphi_2 = 0 \tag{4.4.18}$$

相应的边条为

$$\begin{cases} \varphi_1 \to -E_0 r\cos\theta, \quad r\to\infty & (1) \\ \varphi_1 = \varphi_2, \quad r = R & (2) \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} & (3) \\ \varphi_2 \text{有限}, \quad r = 0 & (4) \end{cases}$$

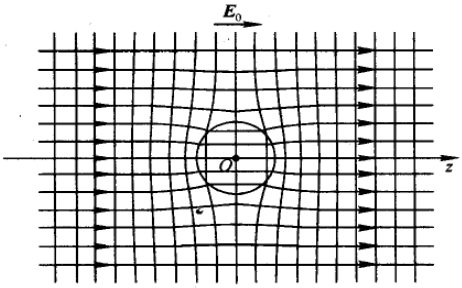


图 4.6

本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，因此可选取合适的本征函数将 φ_1, φ_2 展开。显然应当选择（4.4.5），即

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \\ \varphi_2 &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l' r^l + B_l' r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

其中 $\{A_l, A_l', B_l, B_l'\}$ 为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上一道例题经验 - 均匀电场的边界条件（1）只包含 l=1 项的贡献，***而球这种良好的几何形状保证了它不会将 l=1 的模式散射到其它 l 的模式上去***。 因此物理上思考，（4.4.19）中只有 $l=1$ 项的系数非 0！故有

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left(A_1 r + B_1 r^{-2}\right)\cos\theta \\ \varphi_2 &= \left(A_1' r + B_1' r^{-2}\right)\cos\theta \end{aligned} \tag{4.4.19’}$$

****

下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。

对 I 区来讲，边条（1）决定了除了 A_1 *外所有的* $\{A_l\}$ *均为 0。因* $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ *，易知：*

$$A_1=-E_0;\qquad A_l=0,\quad l\neq 1 \tag{4.4.20}$$

对 II 区来讲，边条（4）决定了

$$B_l'=0,\quad l=0,1,\ldots\infty \tag{4.4.21}$$

下面考虑边条（2）。代入可知，

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_lR^l+B_lR^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l'R^l+B_l'R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)\\&\varepsilon_1\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_lR^{l-1}-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta)=\varepsilon_2\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_l'R^{l-1}-(l+1)B_l'R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta)\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

根据本征函数的正交性，上面 2 式中每个 1 项的系数必须分别相等，即

$$\begin{aligned}&A_lR^l+B_lR^{-(l+1)}=A_l'R^l+B_l'R^{-(l+1)}\\&\varepsilon_1\left[lA_lR^{l-1}-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]=\varepsilon_2\left[lA_l'R^{l-1}-(l+1)B_l'R^{-(l+2)}\right]\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

对所有 $l\neq 1$ *的项，我们有*

$$\left.\begin{aligned}B_lR^{-(l+1)}&=A_l'R^l\\\varepsilon_1\left[-(l+1)B_lR^{-(l+2)}\right]&=\varepsilon_2\left[lA_l'R^{l-1}\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}B_l=A_l'R^{(2l+1)}\\B_l=-A_l'R^{(2l+1)}\dfrac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1}\end{cases} \tag{4.4.24}$$

（4.4.24）显示这些 $l\neq 1$ *的* B_l,A_l' *系数在时满足不同的比例关系，显然有：*

$$A_l'=B_l=0,\quad l\neq 1 \tag{4.4.25}$$

因此只有 $l=1$ *的项有非零解。究其本质是我们所设的问题中存在一个非平庸的* $l=1$ *的入射项* $-E_0r\cos\theta$ *，而没有其他* $l\neq 1$ *的入射项！*

****

代入边条（1）-（4）分别可得

$$\begin{cases}A_1=-E_0\\A_1R+B_1R^{-2}=A_1'R+B_1'R^{-2}\\\varepsilon_1\left(A_1-2B_1R^{-3}\right)=\varepsilon_2\left(A_1'-2B_1'R^{-3}\right)\\B_1'=0\end{cases} \tag{4.4.26}$$

解之可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ B_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 R^3 \\ A_1^{'} = -\dfrac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \\ B_1^{'} = 0 \end{cases}, \qquad (4.4.27)$$

故

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r\cos\theta \qquad (4.4.28)$$

为理解这些项的物理，作如下讨论：

（1） 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源，其在球外区域贡献的电势为：$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta$。回想一个偶极子（偶极矩为 p）的电势为 $\varphi_p = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，对比发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子，其大小为

$$\boxed{\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 \vec{E}_0} \qquad (4.4.29)$$

要注意： 这个结论是严格的，并非在远场成立，这一点是否让你感到很意外？

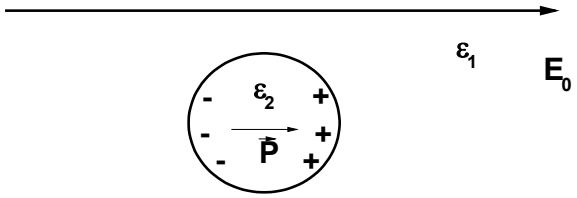
（2）球内的场为外场与束缚电荷所产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$\vec{E}_{内} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\vec{E}_0 \qquad (4.4.30)$$

理解了（4.4.28）式中的所有项的物理来源，我们对（4.4.28）做极限分析：

（A）当 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ 时，介质球与环境的介电常数一样，故其对外场的响应消失。带入发现，$\varphi_1 = \varphi_2 = -Er\cos\theta$，即空间的电场就是均匀电场！

（B）当 $\varepsilon_2 \to \pm\infty$ 时，介质球内的场为 $\vec{E}_{内} \to 0$，其效果相当于一个导体球。而此时，$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0$，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的一个推论（导体在静电时等价于 $\varepsilon_2 \to \pm\infty$ 的介质，因为两者具有完全相同的边界条件）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。



下面我们基于一个简单情况（$\varepsilon_1=\varepsilon_0$， $\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_r$）来进一步讨论物理图像。因为 $\vec{p}$ 与外场之间的关系已经非常清晰，我们下面重点讨论 $\vec{p}$ 与内场 $\vec{E}_{in}$ 之间的关系。

（1）首先根据（4.2.29）将 $\vec{p}$ 改写为:

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0\frac{\varepsilon_r-1}{2+\varepsilon_r} \qquad (4.2.29')$$

另一方面，注意到构成介质球的材料具有极化率 $\chi=\varepsilon_r-1$，而球内的局域电场为均匀场 $\vec{E}_{in}$， 因此，球内材料被极化后具有均匀的极化强度分布：

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}_{in}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_0=3\varepsilon_0\vec{E}_0\frac{\varepsilon_r-1}{2+\varepsilon_r} \qquad (4.4.31)$$

（4.4.31）与（4.2.29'）相比，我们发现极化强度与偶极矩之间有如下关系：

$$\vec{p}=\vec{P}\cdot4\pi R^3/3=\int\vec{P}(\vec{r})d\tau \qquad (4.4.32)$$

这个结果非常物理，其显示：介质球被极化后对球外展现为一个偶极子，而其“有效偶极矩”的的确确就是该介质球被极化后具有的总的偶极矩！

（2）再反过来讨论 $\vec{E}_{\text{in}}$ 与极化强度 $\vec{P}$ 之间的关系。因 $\varepsilon_2>\varepsilon_0$，我们发现 $\vec{E}_{in}<\vec{E}_0$，这是因为极化电荷在球内产生的电场抵消了部分外电场的贡献。我们把这部分由**极化电荷在球内产生的电场**从内场中剥离开来，计算可得

$$\vec{E}_{p,in}=\vec{E}_{in}-\vec{E}_0=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\vec{E}_0=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (4.4.33)$$

上式显示这个纯粹由极化电荷产生的内场与局域极化强度成正比，方向相反。通常我们把它称为“退极场”，其作用是“退”掉外场的效用。整理后，我们得到总的内场为外加场（源场）与“退极场”的叠加：

$$\vec{E}_{in}=\vec{E}_0-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}. \qquad (4.4.34)$$

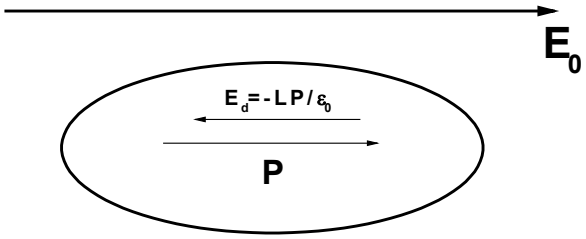
上面 2 式在很多情况下成立的。一般情况下，我们可以把退极场表示成

$$\vec{E}_d = -L \cdot \vec{P} / \varepsilon_0 \qquad (4.4.35)$$

L 称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状，与构成球体的材料没有任何关系！其越大，说明退极效应越显著。这一点与（4.4.31）中显示的内场与极化强度之间的与材料极化率呈线性比例关系完全不同！

容易证明：对平板 $L=1$；对球 $L=\frac{1}{3}$；对细针，$L=0$；对椭球，针对长短轴的不同，L 可以由 0~1 不等。总结下来，介质在外场下的静电行为是

- *被外场极化*
- *极化电荷在球外的贡献为偶极子*
- *极化电荷对球内的贡献为均匀电场*
  - *退极场 （depolarization field）*



思考题：

（1）若外部介质不是空气，而是具有介电常数ε_1的某种电介质，极化强度 P 是多少？以上讨论是否仍然成立？若不成立，为什么？

（2）能否自己推导出椭球体的“退极因子”。

******

退极场概念的重要性在于它给予我们看待一个介质体在外场下极化的新图像（以及一个新计算方法）。假设我们并不知道该物体的具体形状，但知道其退极化因子为 L，则我们立刻可以写出它的内场与极化场之间的关系

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 - L\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} \qquad (*)$$

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}_{in} \qquad (**)$$

这两个方程清晰地显示出极化（P）和局域场（不是源场！是局域总场！）之间的相互制约、最终达到平衡的关系。通过两个方程可解出：

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{1+L\cdot\chi}\vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\frac{1}{1+L\cdot\chi}\vec{E}_0$$

将 L=1/3，$\chi=\varepsilon_r$-1 带入则得到之前对球体的结论。对任意形状，即使我们不能严格解，若已知其 L，则仍然可以很物理地知道其结论。这不是很神奇吗？
******

下面研究一个 2 维柱坐标问题。

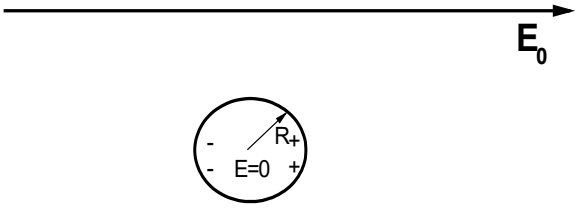
［例 7］ 在均匀外电场 $\vec{E}=E_0\hat{e}_x$ 中有一半径为 R、电荷线密度为 λ 的无限长导体圆柱，柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布。

解： 柱内区域的场为零，只需考虑柱外区域的电势，其满足方程

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (4.4.36)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\rho\to\infty}=E_0\hat{x}; & (1)\\ \varphi\big|_{\rho=R}=\text{常数}; & (2)\\ \oint\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}Rd\phi=-\lambda/\varepsilon_0 & (3) \end{cases} \qquad (4.4.37)$$



第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均处在局域区域内，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于 0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成 $\varphi\big|_{r\to\infty}=-\vec{E}\cdot\vec{r}$ 。然而处理 2 维问题（如无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处（因为柱子会延伸到无限远处），它们对电势的贡献不趋向于 0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献 $\sim 1/\rho$，故对电场的贡献仍趋于 0。处理无限大平面问题时这个问题更严重 － 感应（极化）电荷沿着 2 个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于 0！ 不过通常 1 维问题根本无须这样求解。

此问题为与 z 无关的柱对称问题，故可以利用（4.4.8）展开

$$\varphi=A_0+B_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})\cos(n\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})\sin(n\phi)$$

注意到 $\vec{E}=-\nabla\varphi=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$ 1）变成中

$-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\to E_0\cos\phi,\quad \rho\to\infty$。根据这一边条，势函数中所有比$\rho^1$发散快的项都不可以保留，故

$$A_n=C_n=0,\quad n>1 \tag{4.4.38}$$

进一步，

$$-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right|_{\rho\to\infty}=-A_1\cos\phi-C_1\sin\phi=E_0\cos\phi \tag{4.4.39}$$

因为$\sin\phi$与$\cos\phi$正交，通过比对系数可得

$$A_1=-E_0,\qquad C_1=0 \tag{4.4.40}$$

考虑边条（2），因$\varphi|_{\rho=R}$应与ϕ无关，故有

$$\left.\begin{aligned}A_nR^n+B_nR^{-n}=0\\ C_nR^n+D_nR^{-n}=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}B_n=0,n>1;\quad B_1=E_0R^2\\ D_n=0\end{cases} \tag{4.4.41}$$

现考虑边条（3）：对角度积分过程中所有$n\geq1$的项都没有贡献（因为$\sin(n\phi),\cos(n\phi)$对角度积分一圈恒为0），只有A_0,B_0两项留下来。最后结果为：

$$B_0\frac{1}{R}2\pi R=-\lambda\quad\Rightarrow\quad B_0=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \tag{4.4.42}$$

A_0为一常数，不能唯一确定。总结下来，最终的电势为

$$\varphi=A_0-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho-E_0\rho\cos\phi+\frac{E_0R^2}{\rho}\cos\phi \tag{4.4.43}$$

分析（4.4.43），我们发现空间电势由三部分贡献叠加而成：外场，无限长带电导体棒，以及一个2维偶极子（$\vec{p}=2\pi\varepsilon_0E_0R^2$，参考补充题）的场：$\varphi_p^{(2)}=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\hat{\rho}}{\rho}$。柱外电场强度为

$$\vec{E}=\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}+E_0\cos\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\cos\phi\right)\hat{e}_\rho+\left(-E_0\sin\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\sin\phi\right)\hat{e}_\phi \tag{4.4.44}$$

注：由这个问题的求解我们又一次发现一个规律，即均匀外电场下无限长柱子的静电问题我们只需要考虑 1=1 项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含 1=1 项，而同时柱子的良

好几何特征保证了不会将不同 1 的项耦合，因此最终的散射场不会激发其他 1 项的贡献。

§4.5 多 极 矩 法

之前对静电边值问题我们已经介绍了两种严格的求解方法---镜像法及本证函数展开法。然而这些方法只能处理一些具有良好对称性的问题。在实际问题中，激发电场的电荷分布不见得具有良好的对称性，此时应如何处理？一般来讲这类问题我们只能数值处理。不过对某一类特定问题，电荷分布全部集中在一个很小的区域内，而我们想要求的又是远离带电体空间的电场，这时我们可采用一种近似的方法 -- **多极矩展开法**。

如图 4.10，若电荷分布在有限体积 V 内，电荷密度为 $\rho(\vec{r}\,')$，这个体积的线度为 l，考查的是 P 点的电场，而 P 点和体积 V 内一点 O（设为原点）的距离为 $\vec{r}$。多极矩法是讨论在 $|\vec{r}| >> l$ 情况下的场分布。P 点电势的准确解的形式为

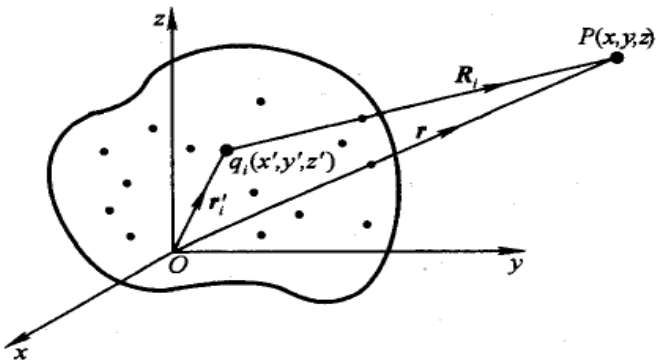


图 4.10

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \tag{4.5.1}$$

这里，$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$。由于 P 点离源较远，有 $r' << r$，因此作为 $\vec{r}'$ 的函数 $\frac{1}{R}$ 可以在 $\vec{r}' = 0$ 附近作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + \sum_{i=x,y,z}(-r_i')\cdot\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{R}\right)\Bigg|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=x,y,z} r_i' r_j' \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\left(\frac{1}{R}\right)_{\vec{r}'=0} + \cdots \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{i=x,y,z} r_i' \cdot \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z} r_i' r_j' \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量（并矢）的形式：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots \qquad (4.5.2')$$

因此，将（4.5.2’）式带入（4.5.1），我们发现电势可以展开为：

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots$$

其中，

$$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0},\qquad \mathrm{Q}=\int\rho(\vec{r}')d\tau' \qquad (4.5.4)$$

$$\varphi_1=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r},\qquad \vec{p}=\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'d\tau' \qquad (4.5.5)$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau':\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\vec{\vec{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}, \qquad (4.5.6)$$

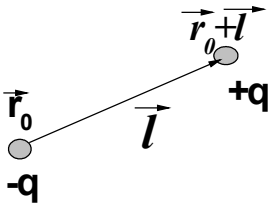
$$\vec{\vec{D}}=3\int\rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau'$$

各项的物理意义如下：

第一项是一个点电荷的势，相当于V内电荷都集中在坐标原点时在P点所产生的势；第二项是偶极子的势，$\varphi_1=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，体系相应的偶极矩为$\vec{p}=\int\rho\vec{r}'d\tau'$。

为进一步理解这一项，考虑由一正一负两个点电荷组成体系，电荷位置分别处于$\vec{r}_0$及$\vec{r}_0+\vec{l}$处，经过简单计算可得

$$Q=0,\quad \vec{p}=q\vec{l} \qquad (4.5.7)$$



此即我们熟悉的电偶极距。（4.5.5）是电偶极矩在一般情况下的定义，相当于（4.5.7）式的推广。

习题：

P．115， 4.2， 4.5，4.6，4.7

补充题：

（1） 根据（4.4.16）求出金属球上的表面电荷分布，计算这些表面电荷在金属球心处产生的电场。

（2） 考虑两个距离为 d 的线电荷密度为$\pm\lambda$的无限长带电棒组成的体系，计算其在远场的电势表达式。

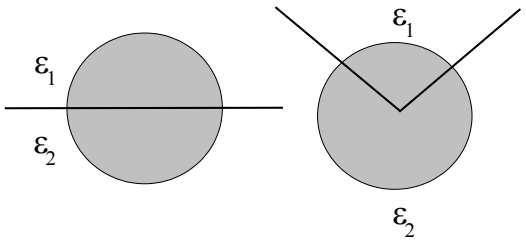
（3） 计算一个极化强度为$\vec{P}=P\hat{z}$的均匀极化介质球上的极化电荷分布。

Projects（有兴趣的同学选作）

（1）自己编一段小程序，根据（4.4.16）及（4.4.28），画出在两种情形下空间的电势分布（可以画等势线），进一步计算出空间电场分布、金属表面电荷分布及介质球表面的极化电荷分布，画在一起，讨论整个问题的图像。

（2）等电量的正负电荷相距较远时，两电荷连线中点附件的场近似为均匀电场。你能否根据这点特征，利用镜像法计算放置于这个电场中的金属球的静电行为，并将结果与本征函数法解得的结果比较？

（3）利用本征模式展开法考虑下面两种情形（半径为 R 的金属球放置于非均匀介质中）下电势的分布。可以分几种情形（如导体接地、孤立带 Q 电荷，分界线穿过球心或不穿过球心等）分别计算，证明第三章习题 3.3 答案所提示的解的唯一正确性。可以配合 COMSOL 讨论一般情况下的电场及电势分布。



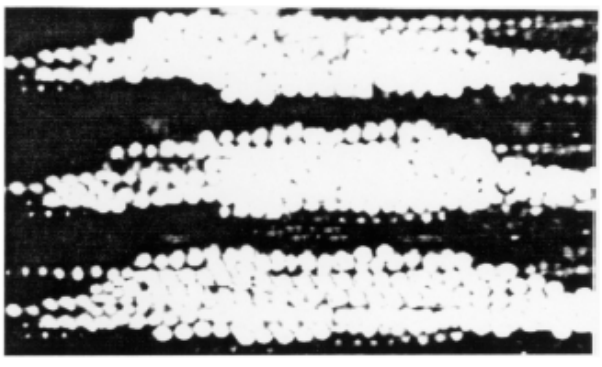
（4） 重复课件中关于“高对称体系下均匀场只会引发 $l=1$ 项贡献（即：偶极子）”这个结论的理论证明（4.4.20）-（4.4.25）。进一步打破这两个前提条件（即高对称体系，均匀场）下看看结论是否依然成立？n 能否借助量子力学中的散射理论来证明这个结论？结合 COMSOL 计算一下验证你的结论。总结一下，谈谈你对这个问题的物理理解。

（5） 我们可以根据（4.4.16）计算出金属球表面的电荷分布（作业），发现其呈现一个偶极分布；进一步根据（4.4.17）可以计算出整个金属球的极化强度密度 $\vec{P}=\vec{p}/\Omega$（Ω 为金属球的体积），从而根据边界条件 $\sigma=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$ 得到表面电荷分布，你会发现两者一致。从中你进一步可以得到什么？讨论你的结果及图像。

（6） 介质球极化后产生的有效偶极子并没有放置在原点，可是其对球外电势的贡献却是严格的偶极子电势。为什么不需要远场近似？

（7） 从介质球极化后产生的偶极子表达式（4.3.29）可以看出，偶极子的大小以及方向非常依赖于 $\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 的相对取值，这里有什么物理？假设取 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$，将 $\varepsilon_2=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 的大小由 $-\infty$ 变化到 ∞，你会看到什么效应？ $\varepsilon_r=-2$ 会发现什么惊人的现象？这里又有什么物理？能否在真实体系中实现？参考文献 Nano Letters 3 1057 (2003); Science 293, 1455 (2001); PRB 82 155301 (2010); PRL 96 157402 (2006); Nature 418, 159 (2002)等。

（8） 3） 将电（磁）介质小球放置于液体中，施加电场或者磁场，小球被极化后产生偶极子，偶极子之间



会有力的相互作用最后小球会团聚 --- 这个现象叫做电（磁）流变液。在 PRL 81, 1509 (1998)中，我们发现磁流变液团聚后形成的团簇一定是个椭球。为什么一定是椭球？

（9） 将本课件中的第二个例题中的金属柱换成介质柱（不加电荷），仿照例题 1 讨论介质柱子在均匀外场下的极化问题，可否定义退极化因子？可否因此计算椭圆形截面的介质柱的退极化因子？若电场平行于柱子方向可否求解？对比 2 者会得到什么不同的结论？物理是什么？所有一切都可以与 COMSOL 数值计算做比较以加深理解。