《电动力学》讲义

Prof. Lei Zhou

September 26, 2013

目录

1 麦克斯韦方程组 **1**

1.1 静电现象的基本理论描述 1

1.1.1 库仑定律 1

1.1.2 叠加原理 2

1.1.3 电场 3

1.1.4 电场的散度性质-高斯定理 4

1.1.5 静电场的旋度 - 安培环路定理 8

1.1.6 电偶极子 9

1.2 静磁现象的基本理论描述 11

1.2.1 电流（磁的来源、与电荷对比） 11

1.2.2 安培定律（与库仑定律对比） 14

1.2.3 磁场 16

1.2.4 $\vec{B}(\vec{r})$的散度 17

1.2.5 $\vec{B}(\vec{r})$的旋度 18

1.2.6 磁偶极子 20

1.3 电磁感应定律 22

1.4 麦克斯韦方程组 26

1.4.1 第一条方程 26

1.4.2 第二条方程 27

1.4.3 第三条方程 27
1.4.4 第四条方程 28
1.5 介质中的麦克斯韦方程组 31
1.5.1 介质的极化及磁化 33
1.5.2 极（磁）化电荷（流） 35
1.5.3 介质中的Maxwell方程组 39
1.5.4 本构关系 40
1.6 麦克斯韦方程组的边界条件 42

2 电磁场的守恒定律和对称性 47
2.1 真空中电磁场的能量守恒定律 49
2.2 电磁场的动量守恒定律 53
2.3 介质中的电磁能量和动量守恒定律 61
2.3.1 电磁能量 61
2.3.2 电磁动量 64

3 静电学I – 导体静电学 69
3.1 静电问题 69
3.1.1 静电基本方程 69
3.1.2 静电条件下导体的边界条件 71
3.2 格林互易定理 72
3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能 76
3.3.1 利用静电标势来表示静电能量 76
3.3.2 电容 78
3.3.3 固有能和相互作用能 84
3.4 静电体系的稳定性问题 86
3.4.1 汤姆孙定理 87
3.4.2 恩肖定理 89

3.5 导体表面所受的静电力 91
3.5.1 方法1：Maxwell张量 92
3.5.2 方法2：直接计算电荷受力 93

4 静电学II - 电介质静电学 97

4.1 电介质边界条件 98
4.2 唯一性定理 100
4.3 镜像法 103
4.4 本征函数展开法 112
4.4.1 轴对称的球坐标系问题（与变量ϕ无关） 113
4.4.2 与z无关的柱对称问题 113
4.5 多极矩法 125
4.6 多极矩同外场的相互作用 132
4.6.1 电偶极矩在外场中受的力 134
4.6.2 电偶极矩在外场中受的力矩 135

5 静磁场 137

5.1 磁场的矢势方程和边值关系 137
5.2 静磁场的唯一性定理 140
5.3 磁场的矢势解法：二维问题 142
5.4 磁场的标量势解法 147
5.4.1 磁标势 148
5.4.2 线性磁介质中磁场问题 150
5.4.3 铁磁介质问题 156
5.5 磁多极矩展开 - 磁偶极子 160
5.5.1 磁多极展开及磁偶极子产生的势 161
5.5.2 磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩 165

6 似稳场（准静场） 171

6.1 似稳条件 172

6.2 似稳场方程 - 场的扩散 177

6.3 导体表面层内的场分布 趋肤效应 180

7 电磁波的传播 185

7.1 电磁波在非导电介质中的传播 185

7.2 波的偏振和偏振矢量 193

7.2.1 线偏振 194

7.2.2 椭圆偏振 194

7.2.3 圆偏振 195

7.3 金属的等效介电常数 - Drude模型 197

7.3.1 色散介质的本构关系 198

7.3.2 金属的有效电导率 200

7.3.3 金属有效介电函数 202

7.4 电磁波在导电介质中的传播 204

7.4.1 良导体在GHz及以下频段 206

7.4.2 良导体在光波段（等离子体中的光波） 209

7.4.3 非良导体 212

7.5 旋光介质中的电磁波 212

7.5.1 旋光介质的本构关系 213

7.5.2 旋光介质中的电磁波本征态 215

7.5.3 法拉第效应 217

7.6 电磁波在介质面上的反射和折射 219

7.6.1 电磁波边界条件 219

7.6.2 反射、折射的基本规律 - Snell's Law（斯涅尔定律） . 219

7.6.3 振幅关系 - Fresnel's Law（菲涅耳定律） 222

7.6.4 反射率及透射率 225

7.6.5 正入射条件下反射的几点讨论 227
7.6.6 Brewster 角 227
7.7 全反射 229
7.7.1 全反射临界角 230
7.7.2 折射波 231
7.7.3 折射波能流 231

8 波导和谐振腔 233
8.1 波导管中的场方程和边界条件 233
8.1.1 边界条件 234
8.1.2 场方程 235
8.2 矩形波导 237
8.2.1 TE波 237
8.2.2 TM波 242
8.3 谐振腔 243

9 电磁波的辐射 249
9.1 势、规范、及其满足的方程 250
9.1.1 势的定义 250
9.1.2 规范条件（Gauge） 251
9.1.3 势所满足的方程 251
9.2 推迟势 252
9.3 多极辐射 255
9.3.1 推迟势的多极展开 256
9.3.2 电偶极辐射 257
9.3.3 磁偶极辐射 260
9.4 线型天线辐射 262
9.5 天线阵 265

10 相对论电动力学 269

10.1 狭义相对论的时空观 269

10.1.1 绝对时空观 270

10.1.2 绝对时空观的困难 271

10.1.3 爱因斯坦的选择 272

10.1.4 洛伦兹变换 273

10.2 物理规律协变性的数学形式 275

10.2.1 物理量按时空变换性质分类 276

10.2.2 物理量的四维时空变换 277

10.2.3 物理规律的协变性 279

10.2.4 速度及四维速度矢量 280

10.3 麦克斯韦方程的协变形式 283

10.3.1 电荷守恒定律 – 四维电流矢量 283

10.3.2 电磁势方程的协变形式 285

10.3.3 电磁场张量 286

10.4 电磁场的变换公式 288

参考书目 293

第一章

麦克斯韦方程组

我们在《大学物理》的“电磁学”部分已经学习了许多电磁现象。在那里的数学语言比较简单，比如，通常只利用到积分运算，不涉及微分运算。在《电动力学》中，我们将使大量使用**矢量微分运算**等较为复杂的数学工具。本章中，我们将利用矢量运算的语言简要回顾一下Maxwell方程组，为以后章节中利用这组方程继续深入了解各种电磁现象打下基础。

1.1 静电现象的基本理论描述

1.1.1 库仑定律

人们定量研究电磁现象是从库仑开始的。1785年，库仑做了大量的实验，总结发现真空（空气）中两个点电荷（自身尺寸无限小）之间的作用力满足

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{1.1.1}$$

其中q_1, q_2为两个点电荷所带的电量（单位为C），$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot$

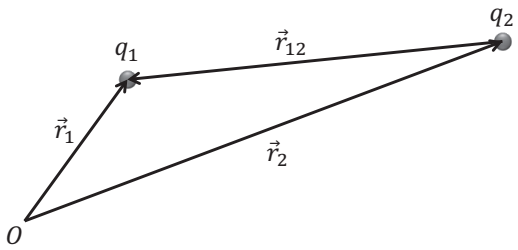


图 1.1

m^2为真空介电常数，$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$为2指向1的矢量。1.1.1式是由大量实验事实总结出来的数学表达式,物理意义包含了：

- 牛顿第三定律 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- 向心力
- 平方反比
- 同性相斥、异性相吸

1.1.2 叠加原理

库仑定律是针对一对点电荷成立的，若同时存在多个点电荷会如何呢？另外，自然界存在的带电体大多数为连续带电体，对这种情况，静电力又如何描述呢？实验发现，当同时存在多个电荷时，某一特定电荷所受的作用力为其他所有电荷独立施与其上的作用力的线性叠加:

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \tag{1.1.2}$$

这个原理的核心在于：电荷之间的相互作用为两体相互作用，与第三者的存在与否、大小、正负号都没有关系。这也是一个实验定律，被大量实验事实所证实。有了这个定律，我们可以非常容易地计算连续带电体之间的相互作用力。

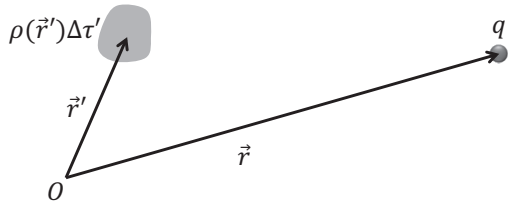


图 1.2

考虑一个连续带电体对处于$\vec{r}$带电量为q的力。将连续带电体分成许多微元，其中一个为处于$\vec{r}_2 = \vec{r}'$带电量为$q_2 = \rho(\vec{r}')\Delta\tau'$的点电荷。这里$\rho(\vec{r}') = (\Delta q/\Delta\tau')_{\Delta r'\to 0}$为电荷密度，而$\Delta\tau'$为此微元的体积。则根据库仑定律以及线性叠加原理，整个带电体对的静电力为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\rho(\vec{r}')d\tau'}{R^3}\vec{R} \tag{1.1.3}$$

其中，$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$。（注：一般情况下我们把源所出的坐标用$\vec{r}'$标记，观察点的坐标用$\vec{r}$标记，由源到观察点的矢量用$\vec{R}$来标记。）

进一步推广，当有两个连续带电体，其电量分布分别为ρ_1, ρ_2时，带电体1受到带电体2的总的静电力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')d\tau d\tau'}{R^3}\vec{R} \tag{1.1.4}$$

1.1.3 电场

由1.1.3可知，对电荷q来说，其所受的力与其本身的电量成正比。这启发我们定义一个物理量

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/q \tag{1.1.5}$$

这个新的物理量与放在这个位置的电荷没有任何关系，而只与空间其他电荷在此地产生的效果有关。这个量被称为电场。电场的引入，不仅方便我们计算静电力，更重要的是给了我们一个静电相互作用的新的图像。

原来的

$$\text{电荷}q_1 \overset{\text{超距}}{\Longleftrightarrow} \text{电荷}q_2$$

新的

$$\text{电荷}q_1 \Longleftrightarrow \text{电场} \Longleftrightarrow \text{电荷}q_2$$

这个图像与原有的超距相互作用的图像是不一样的，关键是后者引入了作为作用力中介而存在的电场。在静电范畴分辨不出这两种图像的区别，但当所有物理量随时间变化时，可以清楚地看到第二种图像是正确的，而第一种是不正确的。电场象所有其他物质一样，具有能量、动量等，是一种客观存在的物质。显然，一个连续带电体在空间产生的电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau}{R^3}\vec{R} \tag{1.1.6}$$

1.1.4 电场的散度性质-高斯定理

数学上讲，要完整了解一个矢量场的性质，我们需知道这个场的散度和旋度两方面的性质。换言之，我们需知道场对任意闭合曲面的面积分，及对任意闭合曲线的线积分。关于场的散度性质，我们需知道对于任何闭合曲面电场的面积分。在《电磁学》中我们知道$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$。证明如下：

我们先来看点电荷的情况：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r \tag{1.1.7}$$

1. 闭合曲面包含电荷

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\Delta S \tag{1.1.8}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot r^2\cdot\Delta\Omega \tag{1.1.9}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega \tag{1.1.10}$$

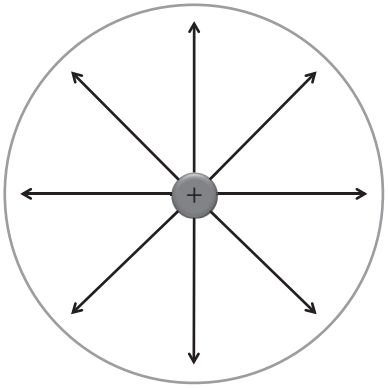


图 1.3

则

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.1.11}$$

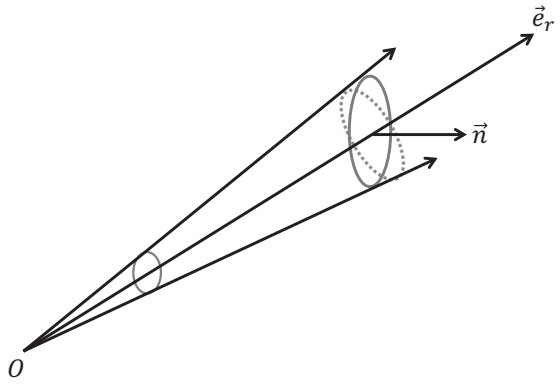


图 1.4

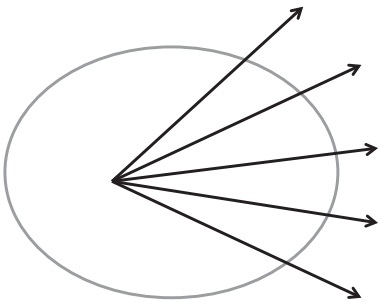


图 1.5

2. 闭合曲面内不包含电荷

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S_1} + \int \vec{E} \cdot d\vec{S_2} \tag{1.1.12}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{E}(\vec{r}_j) \cdot \Delta\vec{S}_j \tag{1.1.13}$$

$$= \sum_{i} [\Delta\Omega_i + (-\Delta\Omega_i)] \tag{1.1.14}$$

$$= 0 \tag{1.1.15}$$

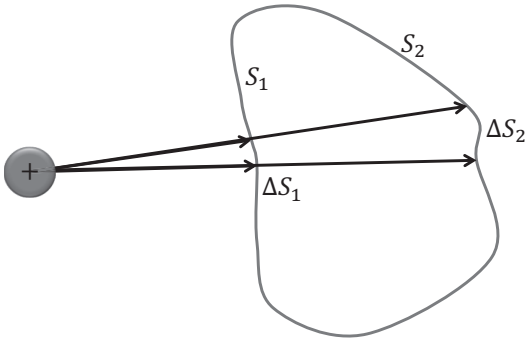


图 1.6

3. 线性叠加原理

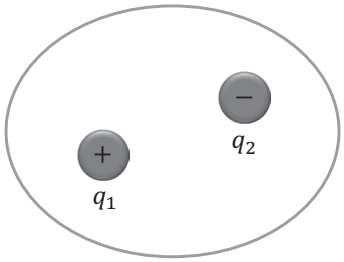


图 1.7

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \int_\tau \rho(\vec{r}) \cdot d\tau/\varepsilon_0 \tag{1.1.16}$$

此即为Gauss定理的数学表达形式。利用数学中矢量场的高斯定理，我们可以把1.1.16改写为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \left[\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r})\right] d\tau = \int \rho(\vec{r}) \cdot d\tau/\varepsilon_0 \tag{1.1.17}$$

考虑到曲面的任意性，我们得

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \tag{1.1.18}$$

上式为Gauss定理的微分表达式。从几何上理解，Gauss定理描述的是场线在空间的分布是否存在奇点，当散度为0时，场线在此处连续，而散度不为0时就表示空间出现了奇点（或导致场线汇聚、或导致发散）。直接对1.1.6式中电场求散度，得

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,')d\tau \left(\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}\right) \tag{1.1.19}$$

对比1.1.18与1.1.19，我们得到一个非常有用的公式

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 4\pi\delta(\vec{R}) \tag{1.1.20}$$

Tips：严格直接证明上述公式相当不容易，很多时候把它当作已知的公式直接使用。你能否从数学上严格证明？自己尝试一下！

1.1.5 静电场的旋度 - 安培环路定理

现在我们研究电场的旋度性质$\nabla \times \vec{E} =?$，这等价于研究静电场对任意环路的线积分：$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} =?$。在《电磁学》中，我们通常的求解方法如下：

- 将电场对任意路径的积分分解为:
  1. 电场沿径向的积分
  2. 电场沿切向的积分
- 利用静电场为向心力这一特点可知，（2）的贡献为0，只需考虑（1）的贡献。
- 对任意环路，$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$积分可以简化到一个径向的积分，因此其结果恒为0。

这里我们利用更高等的数学方法证明。首先注意一个非常有用的公式：

$$\nabla r = \vec{r}/r \to \nabla R = \vec{R}/R \tag{1.1.21}$$

由此可以得到另一个恒等式:

$$\nabla \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\nabla R}{R^2} = -\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \tag{1.1.22}$$

注：此处用到分部微分公式：$\nabla f(r) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\nabla r$, $\nabla f(R) = \dfrac{\partial f}{\partial R}\nabla R$，其实$\nabla$算符同时具有矢量性和微分性，在标量做梯度运算时只显示微分性，因此常规的分部计算法可以大胆地使用。

将上述恒等式带入场的定义：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R} \tag{1.1.23}$$

即可得

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')d\tau \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{1.1.24}$$

$$= -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}d\tau\right] \tag{1.1.25}$$

$$= -\nabla\varphi(\vec{r}) \tag{1.1.26}$$

其中

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}d\tau \tag{1.1.27}$$

为**标量势**。利用静电场的标量势表达1.1.24，我们得到静电场的环路定理的积分表达形式：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\oint \nabla\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -\oint (\partial\varphi/\partial l)\cdot dl \equiv 0 \tag{1.1.28}$$

其中$\partial\varphi/\partial l$意味着沿着环路的切线方向对$\varphi$求偏导。上式的物理意义为静电场是保守场。也可以将环路定理写成微分形式:

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\times\nabla\varphi(\vec{r}) \equiv 0 \tag{1.1.29}$$

物理意义是静电场是无旋场。“无旋”、“保守”、可定义标量势这三者是相互关联，可以相互导出的，其本质都来源于静电场是向心力。

思考：还有什么形式的场可以定义标量势？

注：到现在为止，$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$和$\nabla\times\vec{E} = 0$已经给了我们非常完整的电场的图像：有源（从正电荷出发散出来，到负电荷出汇聚），无旋（有头有尾，有始有终）。

1.1.6 电偶极子

当施加电场于一个中性的物体上时，电场将物体中的正/负电荷拉开。因此为了描述物质的这种对外场的响应，人们定义**电偶极子**为两个相聚很

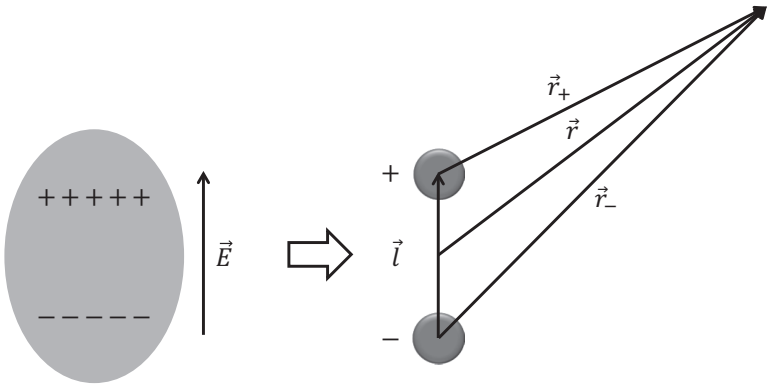


图 1.8

近的带等电量的正负电荷组成的体系，并研究其电行为。偶极子的大小由偶极距描述，其定义为$\vec{p} = q\vec{l}$，方向由负电指向正电（思考：为什么要这样定义？）。其实对任意的一个带电体，在远场看，最低价近似下可看成以q为带电体总带电量的一个点电荷的贡献，再进一步就能“感受”到偶极子的场的贡献。偶极子场比点电荷的场衰减的快，所以要近一点才能看到。因此研究电偶极子具有重要意义。具体计算偶极子的电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{1.1.30}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r^2} \tag{1.1.31}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2} \tag{1.1.32}$$

$$= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1.1.33}$$

$$= \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.1.34}$$

我们注意到偶极子的电势果然比点电荷的电势更快地衰减。计算可知

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi \tag{1.1.35}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3} + \vec{p}\cdot\vec{r}\nabla\frac{1}{r^3}\right] \tag{1.1.36}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right] \tag{1.1.37}$$

非常容易可以计算出场的分量形式（设$\hat{p}\parallel\hat{z}$）：

$$E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.1.38}$$

$$E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.1.39}$$

$$E_\phi = 0 \tag{1.1.40}$$

Tips：与《电磁学》相比较，《电动力学》中更讲究数学形式的紧凑的矢量表述方式，而不是写成分量后的形式或是在某一些特定条件下的（比如$r\parallel z$）形式。熟练掌握常用的几个矢量运算是必要的：$\nabla r = \vec{r}/r$, $\nabla(r^n) = nr^{n-1}\hat{r}$, $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$等。

1.2 静磁现象的基本理论描述

磁现象的描述要比电现象复杂。在1820 年之前，磁现象是与磁铁（磁石）等相连，表现神秘，不易定量研究。直至Oersted发现电流也可以产生与磁铁一样的现象，人们才可以定量研究磁现象。我们下面将与电现象对比，简要总结静磁现象的基本理论描述。

1.2.1 电流（磁的来源、与电荷对比）

电流——顾名思义为电荷的流动。为定量描述电荷流动，定义**电流**

为：单位时间内垂直穿过某一特定截面的电荷量，用I表示：

$$I = \Delta q/\Delta t\big|_S \tag{1.2.1}$$

I是个描述电荷流动的积分的总效果。为了更微观地看电荷的流动情况，定义**电流密度**$\vec{j}$为单位面积单位时间通过的电荷量$j = \dfrac{\Delta q}{\Delta t \Delta S}$，可以推知$j = \dfrac{\rho \Delta \Omega}{\Delta t \Delta S} = \dfrac{\rho \Delta S v \Delta t}{\Delta t \Delta S} = \rho v$。

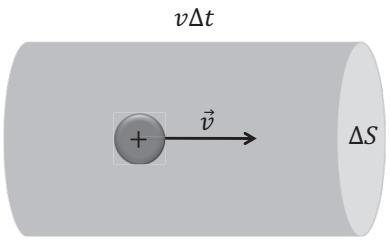


图 1.9

进一步考虑电流密度的矢量性，可以推广以上结果定义矢量形式的电流密度：

$$\vec{j} = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \tag{1.2.2}$$

式中$\vec{v}$代表在$\vec{r}$处的电荷的运动速度，ρ为电荷密度。考虑电流密度的矢量性之后，其与电流I之间的关系为更一般的形式:

$$\vec{j} = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \Longrightarrow I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{1.2.3}$$

上式显然是合理的，因为只有投影到$d\vec{S}$方向上的电流密度才能通过这块面积，而与其平行的分量对通过此截面积的总电流I没有贡献。

电荷守恒：实验表明电荷是守恒的，即电荷不能消灭及产生，而只能转移。在空间内任取一封闭曲面S，单位时间内穿流出去的电荷量为（根据电流密度的定义1.2.1）$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$，流出去的电荷量应等于封闭曲面$S$内总

电荷在单位时间内的减少量，即$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau$, V是S所包围的体积，所以

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d\tau \tag{1.2.4}$$

根据高斯定理，有

$$\vec{j}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{j} d\tau \tag{1.2.5}$$

代入1.2.4可得

$$\int_V \left(\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) d\tau = 0 \tag{1.2.6}$$

由于曲面S是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.2.7}$$

1.2.7式是电荷守恒定律的数学表达式，也称连续性方程。

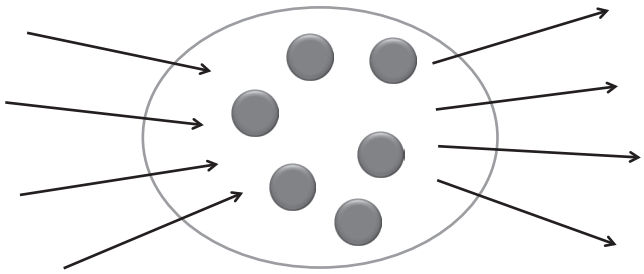


图 1.10

注：所有的“*流密度”的微观形式都是“**密度（乘以）速度”，如粒子流密度，能流密度，物理意义均为单位时间单位面积通过的粒子数（能量、电荷等）。

守恒律的普遍表达形式（粒子数守恒、能量守恒、$\cdots$）为：

流密度的散度+数密度的变化率= 0

在稳定电流情况下，由于$\partial\rho/\partial t = 0$，所以有$\nabla \cdot \vec{j} = 0$，电流密度的散度为0。这一点从几何上看意味着电流线在空间任何一点均没有源头，这表示稳恒条件下电流线是闭合无源的。非稳恒时电流线的汇聚/发散总是伴随着电荷的积累，亦即$\partial\rho/\partial t$项。

1.2.2 安培定律（与库仑定律对比）

既然电流是磁场的来源，类比库仑定律，我们应考虑两个这样的基本单位（电流元，定义为$\vec{j}d\tau$,与$\rho d\tau$地位相仿）之间的作用力。安培定律就是这样一个实验定律，其地位与库伦定律相仿。若真空中的两个电流元$\vec{j}_1 d\tau_1$和$\vec{j}_2 d\tau_2$，则安培定律告诉我们2对1的作用力$d\vec{F}_{12}$为

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_1 d\tau_1 \times (\vec{j}_2 d\tau_2 \times \vec{R}_{12})}{\vec{R}_{12}^3} \tag{1.2.8}$$

其中$\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$为2指向1的位置矢量。与库仑定律比较，我们可以看到：

1. 电流元之间的相互作用力也服从平方反比律。
2. 电流元之间作用力非向心力——磁场的散度及旋度行为与电场将截然不同！
3. 电流元之间的相互作用力不满足牛顿的作用力与反作用力定律，即$d\vec{F}_{12} \neq d\vec{F}_{21}$（比如考虑下图的情况）。



图 1.11

对这个问题的简单回应是因为实际上不可能存在稳定的电流元，实验所能测量的只能是闭合回路的情况。

————以下为选读内容————

考虑两闭合载流线圈，则2对1的作用力为

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l_1}\times(d\vec{l_2}\times\vec{R}_{12})}{\vec{R}_{12}^3} \tag{1.2.9}$$

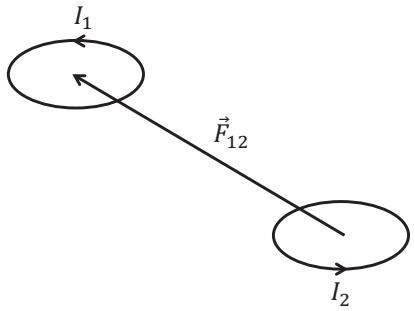


图 1.12

利用矢量公式$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$（非常有用，请牢记），可得

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\left[\frac{d\vec{l_2}(d\vec{l_1}\cdot\vec{R}_{12})}{\vec{R}_{12}^3}-\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l_2}\cdot d\vec{l_1})}{\vec{R}_{12}^3}\right] \tag{1.2.10}$$

$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}d\vec{l_2}\oint_{l_1}\left[d\vec{l_1}\cdot\nabla\frac{1}{R_{12}}\right]-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l_2}\cdot d\vec{l_1})}{\vec{R}_{12}^3} \tag{1.2.11}$$

$$=0+-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\vec{R}_{12}(d\vec{l_2}\cdot d\vec{l_1})}{\vec{R}_{12}^3} \tag{1.2.12}$$

$$=-\vec{F}_{21} \tag{1.2.13}$$

即闭合回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

————以上为选读内容————

然而我们对这个经典回答并不满足，深思以后，至少有这样几个问题值得研究：

1. 我们可以让一个电荷做匀速运动（速度≪光速），这样就制造出空间的一个电流元$\vec{j} = qv\delta(\vec{r} - vt\hat{x})$，这样两个匀速运动的电荷之间的磁力是什么？
2. 它们两个的相互作用满足不满足牛顿第三定律呢？为什么？
3. 牛顿第三定律是本质的定律吗？若不是，其本质是什么？

1.2.3 磁场

类比电场的定义，可定义磁场。将作用在电流元$\vec{j}_1 d\tau_1$上的力写为

$$d\vec{F}_1 = \vec{j}_1 d\tau_1 \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{1.2.14}$$

其中$\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}_2 d\tau_2 \times \dfrac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$为电流元$\vec{j}_2 d\tau_2$ 在$\vec{r}$处产生的磁场。由叠加原理，对任意的电流分布$\vec{j}(\vec{r}')$，其在在$\vec{r}$处产生的磁场为

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')d\tau' \times \vec{R}}{R^3} \tag{1.2.15}$$

函数$\vec{B}(\vec{r})$称为**磁感应强度**（纯粹是由于历史上的原因才不把它称为磁场强度）。上式常称为Biot-Sarvart定律。

以速度$\vec{v}$运动的电荷q产生的电流密度为$\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - vt\hat{x})$（仅在v≪光速时成立），因此其在$\vec{B}$场中所受的力为

$$\vec{F} = \int_\tau q\delta(\vec{r} - vt\hat{x})d\tau\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.2.16}$$

若空间既有磁场又有电场，则总受力为

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{1.2.17}$$

这就是描述带电粒子在空间既有电场又有磁场时的受力——Lorentz 力。

1.2.4 $\vec{B}(\vec{r})$的散度

要完整理解矢量场的全部特征，须研究其散度和旋度。对比具有平方反比+径向的静电场，磁场为横向场，故可以预期$\vec{B}$场的散度及旋度性质一定与静电场相当不同。考虑散度性质，利用计算标势φ时采用的技巧，可将磁场改写为

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{R}}{R^3} d\tau' \tag{1.2.18}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \left(\nabla \frac{1}{R}\right) d\tau' \tag{1.2.19}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left(\nabla \frac{1}{R}\right) \times \vec{j}(\vec{r}\,') d\tau' \tag{1.2.20}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} d\tau' \tag{1.2.21}$$

$$= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} d\tau'\right] \tag{1.2.22}$$

$$= \nabla \times \vec{A} \tag{1.2.23}$$

其中

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} d\tau' \tag{1.2.24}$$

定义为矢势，地位与电场的标势相对应。因此

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 \tag{1.2.25}$$

注：

1. 在1.2.21的推导中，中，我们用到了矢量运算公式

$$\nabla \times (\vec{a}\psi) = (\nabla \times \vec{a})\,\psi + \nabla\psi \times \vec{a} \tag{1.2.26}$$

以及$\vec{j}(\vec{r}')$不依赖于$\vec{r}$的性质。先利用分步微分将∇分解：$\nabla \to \vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_j$，然后分别运算到$R$和$j$：

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) = \nabla_R \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') + \left(\nabla_j \times \vec{j}(\vec{r}') \right) / R \tag{1.2.27}$$

注意到$\nabla_j \times \vec{j}(\vec{r}') \equiv 0$(因为$\vec{j}(\vec{r}')$不依赖于$r$)，故

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \tag{1.2.28}$$

2. 尽管我们本节研究的是稳恒电流，此处的推导丝毫没有假设电流不依赖于时间。换言之，若随时间变化的电流产生的磁场仍由B-S定律描述，则此时高斯定理仍成立。这条性质在随后我们推广Maxwell方程式到非稳态时有重要作用。

1.2.5 $\vec{B}(\vec{r})$的旋度

下面来求$\vec{B}(\vec{r})$的旋度。由1.2.23式得

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{1.2.29}$$

注：上面这个公式可以通过将矢量叉积公式$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$（这个公式非常有用，应当牢记）作代换$\nabla \leftrightarrow \vec{a}$, $\nabla \leftrightarrow \vec{b}$, $\vec{c} \leftrightarrow \vec{A}$得到。

先看第一项：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \tag{1.2.30}$$

利用恒等式

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(R) &= \frac{\partial f}{\partial R} \nabla R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{R} \\ \nabla' f(R) &= \frac{\partial f}{\partial R} \nabla' R = \frac{\partial f}{\partial R} \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(R) = -\nabla' f(R) \tag{1.2.31}$$

注：注意∇和∇'的不同，前者作用在变量$\vec{r}$——观察点坐标，后者作用于变量$\vec{r}'$——源所在坐标。

可将1.2.30式改写成全微分的形式

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \tag{1.2.32}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} \left(\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right) \right] d\tau' \tag{1.2.33}$$

注意到**在稳恒电流条件下**，有$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = -\dot{\rho} = 0$，故

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{S}' \Big|_{r' \to \infty} = 0 \tag{1.2.34}$$

这里考虑电流分布在有限区域，无穷远处边界处的电流密度一定为零。第二项为：

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \left(\nabla^2 \frac{1}{R} \right) d\tau' \tag{1.2.35}$$

将第一讲中的恒等式略加修改可得

$$4\pi\delta(\vec{R}) = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = -\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) = -\nabla^2 \frac{1}{R} \tag{1.2.36}$$

将其带入1.2.35得到

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{R}) d\tau' = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \tag{1.2.37}$$

整理两项贡献可得$\vec{B}$的旋度为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \tag{1.2.38}$$

1.2.38式称为安培环路定理的微分形式，对应的积分形式为

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{1.2.39}$$

Tips：

1. 从推导过程中可以看出，1.2.38式显然只在稳恒电流条件下成立，一般情况下的形式必须重新考虑！另外，旋度不为0，意味着场在打转，一圈积分下来比不为0，因此磁场是有旋场，不是保守场。

2. 有同学会害怕使用Delta函数。其实Delta函数是由物理学家Dirac引入的物理工具，目的是用来方便地描述点电荷等问题，其数学的严谨性是建立了泛函分析才被证明。在本课程中，只需知道其积分表达式$\int \delta(x-x')dx = 1$, $\int \delta(\vec{r}-\vec{r}')d\vec{r} = 1$以及性质$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}')f(\vec{r})d\vec{r} = f(\vec{r}')$, $\delta(x-x') = \delta(x'-x)$,就可以了。

1.2.6 磁偶极子

当外加电场时，物质中的正电荷受到沿电场的作用力而负电荷受到反向于电场的作用力，因此正负电荷被拉开形成电偶极子。与此相对应，对一个物质施加磁场，电子在磁场Lorentz力的作用下做回旋运动，形成一个分子环流。 因此，一个环形稳恒电流在静磁学中起到与电偶极子在静电

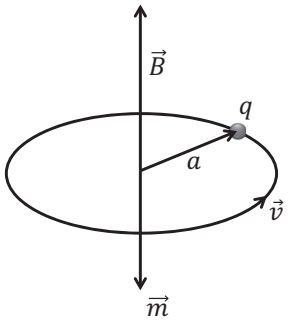


图 1.13

学中完全一样的作用，我们叫它磁偶极子，都是物质对外场的基本响应形式。下面我们就研究一个磁偶极子（电流I，线圈半径a）的磁场，与$\vec{p}$类似，我们先计算$\vec{m}$产生的势。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{R}d\vec{l} \tag{1.2.40}$$

在远场条件下$r \gg r'$，利用Taylor展开到第一阶可得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{\left(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r'} + r'^2\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r^3} \tag{1.2.41}$$

代入上式后，第一项贡献$\sim \frac{1}{r}\oint d\vec{l} \equiv 0$（闭合回路，稳恒电流，绕一圈当然为0），故

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\int (\vec{r}\cdot\vec{r}')d\vec{l} \tag{1.2.42}$$

为了便于计算，考虑一个大小为$a \times b$的矩形线圈。计算x分量可得

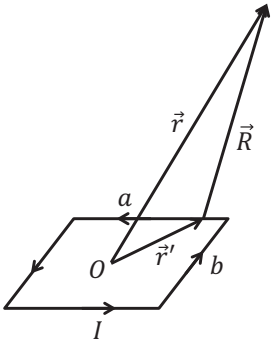


图 1.14

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\int_{-a/2}^{a/2}(xx' - yb/2)dx' + \int_{a/2}^{-a/2}(xx' + yb/2)dx'\right] \tag{1.2.43}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}yba \tag{1.2.44}$$

同理可以得到y分量的表达式

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}xba \tag{1.2.45}$$

综合可得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Iba}{4\pi r^3}\left(-y\hat{x} + x\hat{y}\right) \tag{1.2.46}$$

注意到$\vec{m} = I\vec{S} = Iab\hat{z}$，类似电偶极子的标势，我们可以将磁偶极子的矢势写成更紧凑的形式

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{1.2.47}$$

由此可进一步求出空间的磁场

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m} - 3\left(\vec{m} \cdot \hat{r}\right)\hat{r}}{r^3} \right] \tag{1.2.48}$$

推导上式时考虑了远场条件，则$r \neq 0$。我们发现磁偶极子的磁场与电偶极子的电场的形式完全一致！这并不奇怪，在远场看，p与m的场是完全一样，尽管近场结构很不一样。这事实上蕴含着很深的物理：在无源区，电场的磁场满足一样的方程。

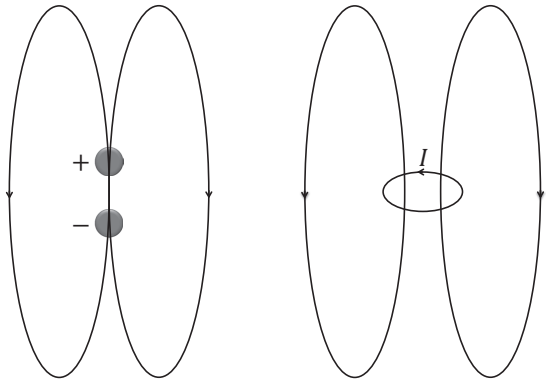


图 1.15

对比静电场与静磁场，发现它们之间有着惊人的对称性。以后我们还会发现电、磁之间更多的对称性，这在学习《电动力学》中（特别是与磁场相关的问题时特别需要注意的）。

1.3 电磁感应定律

自从奥斯特发现了电流产生磁场之后，人们一直在研究是否存在相反

表 1.1 静电场与静磁场的对称性

	电	磁
源	ρ	$\vec{j}$
场	$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}$	$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}d\tau'\times\vec{R}}{R^3}$
力	$\vec{F}=\rho d\tau\vec{E}$	$\vec{F}=\vec{j}d\tau\times\vec{B}$
散度	$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0$
旋度	$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=0$	$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu_0\vec{j}(\vec{r})$
势	$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi$ $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R}$	$\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}$ $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')d\tau'}{R}$
偶极子的势	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$	$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$
偶极子的场	$\vec{E}_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]$	$\vec{B}_m=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3}\right]$

的效应，即磁场能不能产生电流。Faraday总结大量实验建立了描述磁产生电的电磁感应定律．对一个闭合的线圈，Faraday的实验表明：

1. 仅当通过这个线圈的磁通量产生变化时，线圈之中才会产生感应电流；
2. 电流的大小与线圈材料的电导成正比（同样形状的线圈，线圈材料的导电性越好，电流越大）

这第二个性质预示着电磁感应效应中更基本的物理量应当是电动势，而不是电流。总结了大量的实验，Faraday给出了感应电动势的定量表达式

$$\varepsilon_{感} = \left| \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right| \tag{1.3.1}$$

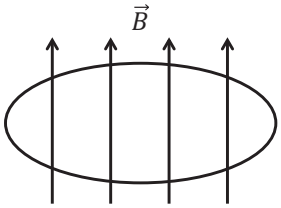


图 1.16

感生电动势（电流）的方向是由楞次给出的，用物理的语言表示，即“感生电流的产生是用来抵消磁通量的改变的”。这条规律其实正是能量守恒的必然要求！（思考一下假如感生电流的产生是增强磁通量的改变，则世界会变成什么样子？）总结法拉弟和楞次的贡献，完整的电磁感应定律是

$$\varepsilon_{感} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{1.3.2}$$

显然，磁通量的改变可以由两种机制产生：

1. 磁场本身发生变化（$\vec{B}$变，称之感生电动势）。

2. 回路相对磁场发生变化（$d\vec{S}$ 变，称之为动生）。

注意到电动势的定义为外力将单位电量的电荷在环路上驱动一周所提供的能量，即$\varepsilon = \Delta W/q = \oint \vec{F}_K \cdot d\vec{l}/q$（其中$\vec{F}_K$为电荷受到的力），则可以将电动势改写成

$$\varepsilon_{感} = \oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} \tag{1.3.3}$$

其中$\vec{E}_K = \vec{F}_K/q$与静电场同样量纲。对电荷来讲，它既能感受到静电场的静电力，也能感受到非静电起源的这个场的作用力，因此后者也称为一种电场，尽管其为“非静电来源的电场”。

对**第一种情况**，1.3.2式可改写成

$$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{1.3.4}$$

利用斯托克斯定理:$\oint_C \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}_K\right) \cdot d\vec{S}$, 得。因为线圈回路是任意的故积分曲面是任意的，所以得到

$$\nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3.5}$$

此即是电磁感应定律的微分形式, 式中的$\vec{E}_K$和$\vec{B}$是相对于同一参考系定义的。

第二种情况要复杂许多，因为此时线圈在运动，此时线圈内的电荷受到的驱动电场是在一个相对于实验室运动的坐标系中的电场，用$\vec{E}'_K$表示。$\vec{E}'_K$与$\vec{B}$的关系是两个相对运动的坐标系中场的关系。对这个问题的深入理解，我们将推迟到学习相对论时进行。

1.3.5式显示：当磁场发生变化时，

1. 空间中会激发出类似静磁场的（这里$-\dot{\vec{B}}/\mu_0$等价于电流密度）蜗旋电场；

2. 这种电场不是由电荷激发的，而是由变化的磁场产生的；

3. 它们的存在并不依赖于有没有线圈，线圈中产生电流只是一个探测手段；

4. $\vec{E}_K$和静电场一样对电荷产生驱动力$\vec{F} = q\left(\vec{E}_S + \vec{E}_K\right)$，因此对电荷来讲，它感知到的就是空间的总场$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_K$，无论来源。

1.4 麦克斯韦方程组

前面几节中，我们讲述了电磁现象的基本实验定律，现总结如下：

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_S &= \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E}_S &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{静止电荷} \tag{1.4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B}_S &= 0 \\ \nabla \times \vec{B}_S &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}\right\} \quad \text{稳定电流} \tag{1.4.2}$$

$$\nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{变化磁场} \tag{1.4.3}$$

它们分别都有自己的适用条件和范围。在一般的情况下，所有的场量及激发它们的源（$\rho, \vec{j}$）都可能随时间变化，此时描述它们行为的电磁规律是什么呢？Maxwell仔细研究了这个问题，总结出了Maxwell方程组。让我们假设自己就是当年的Maxwell，面对已经建立的实验定律思考一下一般的规律应当是怎样的。

1.4.1 第一条方程

$\nabla \cdot \vec{E}_S = \rho/\varepsilon_0$是由库仑定律导出的。它的直观物理图像是单位电荷激发$1/\varepsilon_0$根电场线。在普遍情况下，电场可以随时间变化，电场的变化有两种可能的起源：

1. 源电荷运动；

2. 总电场中含有感应电场$\vec{E}_K$。

对第一个可能，电荷运动是其发出的电力线将跟随它运动，因此在t时刻在r位置处做一无限小的闭合区间，可以预期此时刻电场线通过表面的总数仍然与其中的电量成正比。对第二个可能，注意到$\vec{E}_K$与静磁场非常类似，是围绕着磁场变化产生的蜗旋场，而这种电场场线显然是连续无源的，可以预期$\nabla \cdot \vec{E}_K = 0$。综合这两个考虑，对空间的总电场来说:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{E}_S + \nabla \cdot \vec{E}_K = \rho(\vec{r}, t)/\varepsilon_0 \tag{1.4.4}$$

注：直接从电磁感应定律的原始形式不能推出感应电场为无源场$\nabla \cdot \vec{E}_K = 0$的结论的。这应当是Maxwell做的合理推广，正确与否被后来的无数实验所验证。有机会查查历史上Maxwell当时是怎样得到这个结论的。

1.4.2 第二条方程

在普遍情况下电场应当是总场，故其旋度为

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_S + \nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.4.5}$$

1.4.3 第三条方程

虽然$\nabla \cdot \vec{B} = 0$是对静磁场推出的，我们注意到在推导的过程中并没有利用到电流必须稳恒的条件（即$\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$）。从物理上讲，散度刻画的是场线是否有奇点（源），自然界不存在磁荷，可以想象即使在物理量随时间变化时磁场线仍然连续。综合以上考虑，在一般情况下的一个大胆

而合理的推论是磁场的高斯定理仍成立：

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{1.4.6}$$

但这个推广必须与其他定律（注意这里我们已经推广了2条方程！）不互相矛盾，不妨对与磁场关联的法拉第定律两边取散度:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.4.7}$$

因为$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) \equiv 0$，所以

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.4.8}$$

即$\nabla \cdot \vec{B} =$ 常数（与时间无关），此常数决定于初始时刻的值。假设变化的电磁场是由初始静态的电磁场演化而来的，上式意味着此常数 $= 0$（因为静态磁场满足高斯定理），因此随时间变化的条件下$\nabla \cdot \vec{B} = 0$仍然正确！

1.4.4 第四条方程

与推导高斯定理不同，推导环路定理$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$时我们用到了稳恒电流的条件$\nabla \cdot \vec{j}_S = 0$。然而$\nabla \cdot \vec{j} = 0$在一般情况下不成立，根据电荷守恒定律，有

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \tag{1.4.9}$$

因此在一般情况下$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$不再成立。为了证明这一点，对$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$两边同时取散度，得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} \tag{1.4.10}$$

等式左边$\equiv 0$，但等式右边一般情况下不为0（只在静态时$= 0$）。可见静态的环路定理与电荷守恒定律是有矛盾的。两者之间我们应当做何取舍？显然电荷守恒定律定律更基本，故安培环路定理必须作相应修改。

如果在一般情况下我们仍然想将环路定理写成

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{G} \tag{1.4.11}$$

这一形式，并有如下要求:

1. 矢量$\vec{G}$在静态时回到$\vec{j}$;

2. 上式应与电荷守恒定律协调。

为了寻找$\vec{G}$的形式，我们将1.4.11式两边求散度，得到对$\vec{G}$的限制条件为

$$\nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}, t) = 0 \tag{1.4.12}$$

再考察电荷守恒定律1.4.4，注意到$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$（第一条方程)，则有

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right) = \nabla \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = 0 \tag{1.4.13}$$

因此，一个自然的选择是$\vec{G} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$（显然上述定义使得$\vec{G}$在静态时回到$\vec{j}$）。故，安培环路定理可以推广为

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \tag{1.4.14}$$

式中的$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$称为位移电流，与传导电流有着相同的量纲，但却不是实际的传导电流。可以把位移电流理解成电流线的延续。如图1.17所示，在一段有限长度的金属棒中激发电流，因电流遇到边界不能继续，必然在金属线的两端产生电荷积累，同时会导致电流的变化。电荷的产生就会在空间产生变化的电场，而其恰恰是补偿真实的传导电流的变化的。从物理上讲，电流的非稳恒性与电荷的积累$\dot{\rho}$通过流守恒定律$\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$相互关联，而后者又反映到空间电场的变化。

根据上面的分析，Maxwell 总结出真空中电磁场的所满足的普遍规律为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{1.4.15}$$

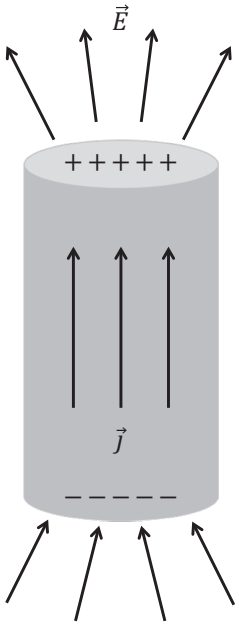


图 1.17

在没有源（$\vec{j} = 0, \rho = 0$）的空间中，则Maxwell 方程变为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{1.4.16}$$

我们看到电场/磁场具有近乎完美的对称性，除了两点：

1. 公式（2）与（4）在系数上仍有差异；

2. 有个正负号的差异。

对第1点，后面我们会发现这是个历史的误会；对第2点，这个正负号的差异是至关重要的，没有这个符号的差别，电磁波就不复存在，世界就可能是另一个面目。位移电流的引入从另一个侧面深刻揭示了电场和磁场之间的联系：不仅变化的磁场激发电场，变化着的电场同样激发磁场，两者都以祸旋形式激发，并左右手对称。

注：有人说Maxwell只干了引入位移电流这一件事，其他的3.5个方程都是别人的功劳，这非常不公平。从本节的学习中我们可以看到，Maxwell方程组的每一条公式的建立都不是显而易见的，事实上，与其他静态时的实验定律（库伦定律、安培定律）不同，Maxwell方程组的建立并没有坚实的实验基础，而是Maxwell的一些合理的推广．在这个意义上讲，Maxwell建立这组方程时的勇气是巨大的。这个方程的直接预言是电磁波，Maxwell试图自己做实验验证电磁波却没有成功。Maxwell方程组的正确性直到几十年后Hertz的实验出来后才被证实。最后，Maxwell方程的建立使得电磁现象与光学现象联系起来，从此人们对光学有了定量的认识。

1.5 介质中的麦克斯韦方程组

前面我们了解了真空中的电磁理论。然而，人们更关心介质中的电磁场行为，其实，即使空气也是一种特殊的电磁介质。在我们仔细考虑电磁介质中的电磁理论之前，有一点核心问题必须澄清——

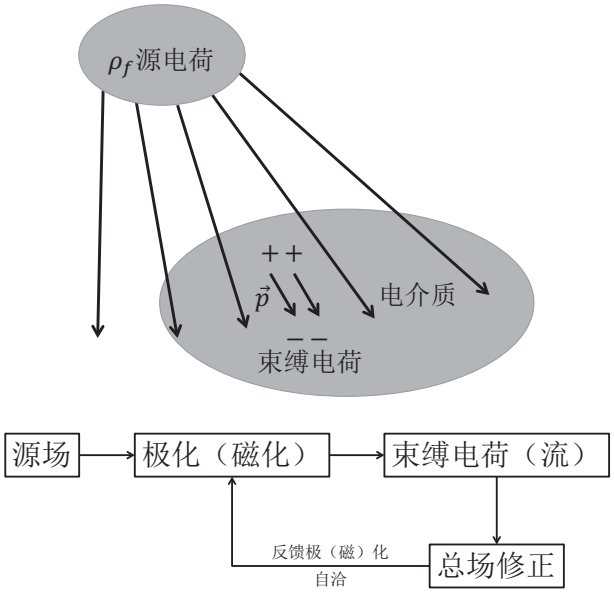


图 1.18

电磁场的最终来源是电荷及电流，只要空间某处存在某种电荷/电流（无论其起源），就有电磁场产生，而与那个地方有无物质/什么物质无关!

有了这点基本认识，我们研究电磁介质中的电磁场就归结为寻找当有电磁介质存在时的**总的电荷/电流**分布。在具体研究之前，首先理一理脉络。在空间施加由处于很远处的电荷（流）产生的电（磁）场，当在这个场中放入一块电（磁）介质时，电（磁）介质在外电（磁）场的作用下被极（磁）化，产生电（磁）偶极子。电（磁）偶极子的产生使得空间中不再为电（磁）中性，从而产生了束缚于电（磁）介质的极化（磁化）电荷（电流），这些束缚电荷（电流）与处于远处的自由电荷（电流）一样可以产生电磁场，因此它们一起产生了空间的总场。介质的极化（磁化）是由空间的总场决定的，因为场，无论是由源电荷产生的，还是由极（磁）化电荷（流）产生的，都会作用到介质中上。因此介质的极化（磁化）应与空间总场达到平衡。

因此，理解了所有的过程后，我们才能对介质中的电磁场有完整的理解。

1.5.1 介质的极化及磁化

当电介质放置于电场中时，正负电荷被电场拉开，产生电偶极子，这个过程叫极化。同样，一个无磁性的磁介质被放置于外磁场中时，原本杂乱无章运动的电子在外磁场的作用下产生一个个分子环流（亦即磁偶极子），这个过程被称作磁化。

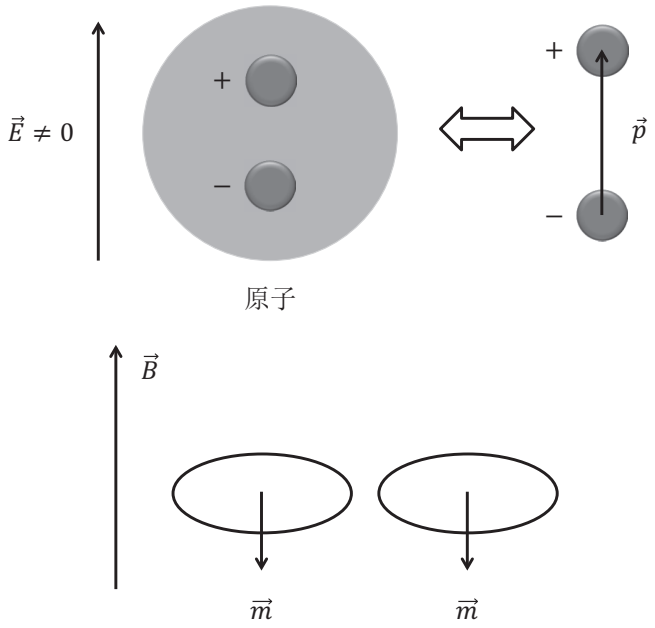


图 1.19

极化和磁化的过程还有另外的可能性。体系中的构成单元原本是带有固有电（磁）偶极距的，但在无外加电（磁）场的时候这些电（磁）极距杂乱排列，不显示出极（磁）性；当外加电（磁）场时，这些原本杂乱排列的电（磁）偶极子沿着电（磁）场排列，产生宏观电（磁）矩。 为了描

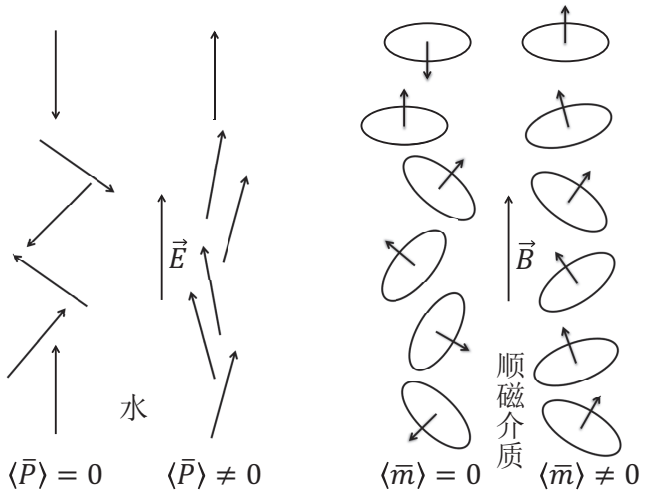


图 1.20

述极化（磁化）的大小，定义极化（磁化）强度两个**宏观量**，其定义为单位体积内的偶极子的大小（多少）

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \qquad \vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V} \tag{1.5.1}$$

显然，电（磁）场越大，极（磁）化强度也越大。对第一种情况上述结论显而易见，对第二种情况，只要考虑外场效应（趋向于使电磁矩平行排列）与温度效应（趋向于它们无规排列）之间的竞争即可以明白。在低场近似下，很多材料对电磁场程线性响应，即

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r},t) \qquad \vec{M}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}(\vec{r},t) \tag{1.5.2}$$

其中，χ_e, χ_m为极化（磁化）率。这就是介质极化（磁化）的基本像，计算χ_e, χ_m要用到微观理论，即牛顿力学或者量子力学。需要强调指出的是，这里$\vec{E}$, $\vec{B}$应当是介质分子在此处感受到的局域总场，因为只要是场，无论是源场还是极（磁）化电荷（流）产生的场，都可以对介质产生作用力。

1.5.2 极（磁）化电荷（流）

极化

极化电荷：由于极化，正负电荷间发生了相对位移，每处的正负电荷可能不完全抵消，这样就呈现出束缚在介质中的宏观电荷，称为**极化电荷**。

假设空间的极化强度分布为$\vec{P}(\vec{r})$，我们在$\vec{r}$点附近取一块**宏观小微观大**的区域τ，其边界由$\vec{S}$给定，计算这中间包含的极化总电荷Q_P。显然，完全处于区域内部或完全处于区域外部的偶极子对Q_P均没有贡献，只有那些穿过$\vec{S}$的偶极子才有贡献。

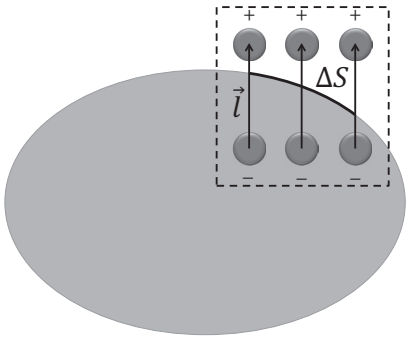


图 1.21

若极化时正负电荷拉开的位移为$\vec{l}$，取一小块边界$d\vec{S}$，则在体积$\vec{l}\cdot d\vec{S}$内的每一个偶极子都会因为穿过界面而在体积内部留下一个**负**的静电荷q（如图1.21所示）。设介质此处的偶极子数密度为n，则这些偶极子对区域内的净电荷数为$dQ_P = -qn\vec{l}\cdot d\vec{S} = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$。$\vec{P}$为此处的极化强度。考虑所有穿过界面的偶极子的贡献后，则留在τ区域内的总的束缚电荷为

$$Q_P = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} \tag{1.5.3}$$

利用Gauss定理，容易得到

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{1.5.4}$$

式中ρ_P称为极化电荷密度。

注：仔细思考后会发现1.5.4大有问题。比如对一个均匀极化的介质$P = const.$，1.5.4告知体内无极化电荷分布。然而实际上极化后每个分子都呈现为一个偶极子，因此细致到分子的尺度上，极化电荷的分布是非常不均匀的，不可能为0。从数学上讲，1.5.3是正确的，但条件是积分区域必须是宏观大的。过渡到1.5.4就不是严格成立的了，因为Gauss定理可以使用的前提是1.5.3对任意积分区域都正确。但为什么我们还可以用1.5.4呢？这是因为在分子尺度上计算极化电荷以及其它物理量的分布是困难而且是没有必的，因为我们所关心的（实验上所能测量的）是宏观小但微观大的一个区域内的物理量的平均值。因此，当我们考虑连续介质中的物理量时，一个空间的几何点是这样定义的：取这样一个区间——微观上足够大包含了许多极化后的偶极子，但宏观仍然足够小使得我们可以认为它是空间上的一个几何点，然后取这个区间内的微观量的平均值作为在这一几何点的场的数值。这事实上是电动力学处理连续介质的一个基本精髓。1.5.2及下面的所有处理、甚至是目前前沿的Meta-material的研究均基于这个基础。

极化电流：当电场随时间改变时，极化过程中正负电荷的相对位移也将随时间改变，由此产生的电流称为**极化电流**，记为$\vec{j}_P$。考虑空间$\Delta\Omega$体积内存在有一个因极化而产生的偶极子，则极化电荷密度分布为$\rho_P(\vec{r}) = \rho_+ + \rho_- = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_+) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_-)$。假设两个极化电荷的运动速度分别为$\vec{v}_+ = \dfrac{d\vec{r}_+}{dt}, \vec{v}_- = \dfrac{d\vec{r}_-}{dt}$，则运动引起的极化电流密度为

$$\vec{j}_P(\vec{r}) = \rho_+\vec{v}_+ + \rho_-\vec{v}_- = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_+\vec{r}_+ + \rho_-\vec{r}_-\right) \tag{1.5.5}$$

注意到针对一个偶极子的空间极化强度为

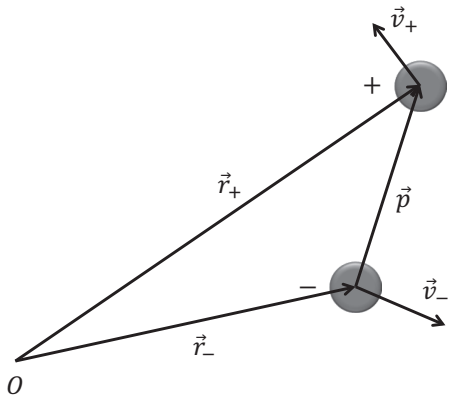


图 1.22

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta\Omega} = \frac{q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{\Delta\Omega} = \rho_+\vec{r}_+ + \rho_-\vec{r}_- \tag{1.5.6}$$

所以

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{1.5.7}$$

显然，根据叠加原理，上式在有许多偶极子存在时依然正确。同时我们注意到1.5.7与连续性方程一致。根据1.5.4和1.5.7可知

$$\nabla \cdot \vec{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{P} \equiv 0 \tag{1.5.8}$$

与连续性方程一致。

磁化

磁化电流：介质被磁化后产生束缚于磁介质上的电流称为**磁化电流**。假设已知空间的磁化情况$\vec{M}(\vec{r})$，我们来讨论磁化电流密度$\vec{j}_M$。类似电介质的讨论，在一个具有磁化强度$\vec{M}(\vec{r})$的磁介质中选取一个宏观大小的面S，其边界由$\oint d\vec{l}$描述，计算穿过S产生的总磁化电流I_M。磁化后产生大量的磁偶极子，每个磁偶极子对应一个分子环流。

1. 若这些环流完全处于S内，则对I_M的贡献因环流两次穿过S而抵消；

2. 若完全在S外，则根本没有贡献。

因此，只需计算那些与边界铰链的环流，因为它们只对S面内贡献一次电流。 考虑与一段边界$d\vec{l}$铰链的分子环流。设每个分子环流电流为i, 线

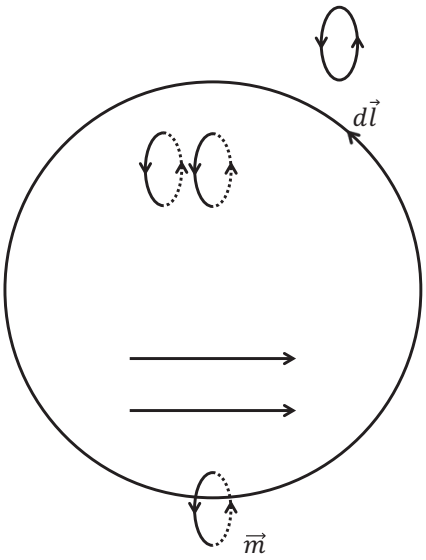


图 1.23

圈面积为$\Delta\vec{s}$，则显然在$\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l}$体积内的所有的磁偶极子都对$S$内的净电流有贡献。假设偶极子的体密度为$n$。则$d\vec{l}$边界处对$I_M$的贡献为

$$dI_M = i \times No.\text{ of } m = i \times n\Delta\vec{s}\cdot d\vec{l} = \vec{M}\cdot d\vec{l} \tag{1.5.9}$$

综合整个环路的贡献，得

$$I_m = \oint \vec{M}\cdot d\vec{l} \tag{1.5.10}$$

利用$I_M = \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$及Stokes定理$\oint \vec{M}\cdot d\vec{l} = \int \nabla\times\vec{M}\cdot d\vec{S}$，有

$$\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M} \tag{1.5.11}$$

其中$\vec{j}_m$为描述束缚于磁介质内部的磁化电流密度。对上式两边取散度得

$$\nabla\cdot\vec{j}_m = 0 \tag{1.5.12}$$

这说明磁化电流不引起电荷的积累，因此不用考虑磁化电荷。

1.5.3 介质中的Maxwell方程组

下面我们进行图1.18中第3步讨论——看看极（磁）化电流（荷）如何改变总电（磁）场。当介质存在时空间电荷包括自由电荷（源电荷）和极化电荷（束缚电荷），即

$$\rho_t = \rho_f + \rho_P = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \tag{1.5.13}$$

式中ρ_t表示**总电荷**。介质中可能出现的电流有传导电流、极化电流和磁化电流，因此**总电流**为

$$\vec{j}_t = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \tag{1.5.14}$$

在麦克斯韦方程组中，不管ρ和$\vec{j}$的来源如何，只要是电荷或电流，它们都将在空间激发电场或磁场。所以，麦克斯韦方程组在介质存在的情况下应该修改成

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}\right) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu_0\left(\vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}\right) \end{cases} \tag{1.5.15}$$

原则上1.5.15不能求解，因为多了2个物理量，$\vec{P}, \vec{M}$。利用1.5.2，我们可以将这2个物理量消除，则问题可以求解。因此，与真空中的电磁问题不同，介质中的电磁问题一定需要知道介质对外场的响应，如1.5.2，不同的介质中的电磁行为完全不同！

然而1.5.15式中（1）（4）两式看似很复杂，右边即有原本的自由电荷（流）的“源”，又有极磁化后产生的新的场，物理意义不清晰。试图将所有的宏观量都表示成自由电荷/电流的函数，则引入两个辅助矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{1.5.16}$$

代入方程组1.5.15式化简可得：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.5.17}$$

其中新引入的辅助矢量$\vec{D}$称为电位移矢量，$\vec{H}$称为磁场强度。它们的导入使方程组只出现自由电荷和自由电流，仅仅是为了便于讨论问题。而它们本身不是真实的场，它们不会对身处其中的电荷/电流产生作用力。

1.5.4 本构关系

现在考虑图1.18中最后一步：局域总场的改变是如何与极（磁）化程度自洽的。这就需要确定1.5.15中的极（磁）化强度等物理量如何与总电（磁）场自洽决定的。换言之，必须确定麦克斯韦方程1.5.17导入量$\vec{D}$, $\vec{H}$与$\vec{E}$, $\vec{B}$之间的关系，才能求出方程组的解。这些关系式被称为**本构关系**，与具体的材料有关系——我们的世界之所以如此丰富多彩就是因为我们有各种各样的具有不同本构关系的介质。

对线性介质，其实我们已经知道了其对外加电磁场得响应1.5.2，这本质上就是一种本构关系。进一步，利用1.5.2及1.5.16得

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu \end{cases} \tag{1.5.18}$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \qquad \mu = \mu_r \mu_0 = (1 + \chi_m)\mu_0 \tag{1.5.19}$$

叫做介电常数及磁导率，ε_r, μ_r称为相对介电常数及相对磁导率（无量纲量）。利用1.5.16，可将1.5.16中第2式改写为$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$，结合1.5.18可

以看出，历史上以为$\vec{H}$是基本量与$\vec{E}$的地位相同，对磁化率的定义是针对$\vec{H}$场的！将本构关系带入无源空间的Maxwell方程组，得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.5.20}$$

其中$\vec{E}$和$\vec{H}$完美对称。另外需要指出的是：导体本身就是一种特殊的电磁介质，它的本构关系就是欧姆定律$\vec{j} = \sigma \vec{E}$。

应当指出，这里我们给出的本构关系是最简单的一种（尽管是最常见的）——极（磁）化对外场的响应呈现局域/即时/线形/各向同性的响应。更一般的情况下，本构关系可以非常丰富多彩：

1. 在铁电和铁磁物质或强场情况下，$\vec{P}$与$\vec{E}$、$\vec{M}$与$\vec{H}$之间将不再呈现线性关系；

2. 对于各向异性的介质来说，介电常数和磁导率都是对称张量，场强和感应场强之间的关系推广为$D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, $B_i = \mu_{ik} H_k$；

3. 在高频情况下，由于场变化得很快，以至于极化电荷和磁化电流跟不上场的变化．这时的响应在最一般情形下可以写成$\vec{D}(t) = \int \varepsilon(t-t')\vec{E}(t')dt'$。但当外场随时间以频率$\omega$简谐变化时，傅立叶分析显示对单频仍然有$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$。所以极化率和磁化率都将是频率的函数．因而$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$。

4. 有些材料响应是非局域的：$\vec{D}(\vec{r}) = \int \varepsilon(\vec{r} - \vec{r}')\vec{E}(\vec{R}')d\tau'$，也就是说，在$\vec{r}'$处的扰动会在$\vec{r}$出产生响应。这种效应又叫作空间色散。类似时间色散情形（3），对特定的以某一个k为波矢在空间变化的场，经过傅立叶变换可知，$\vec{D}(\vec{k}) = \varepsilon(\vec{k})\vec{E}(\vec{k})$，此时$\varepsilon$是$k$的函数。

1.6 麦克斯韦方程组的边界条件

Maxwell方程组的精妙之处在于其在不同介质的交界面上“自带”边界条件，无须外设。这点是其超越其它许多方程（如流体力学方程）的地方。在界面上，微分形式的麦克斯韦方程失去意义，但积分形式仍可使用。这一节我们就从积分形式的场方程出发导出交界面两边Maxwell方程的边界条件。

对应$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$的积分形式是

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_f d\tau \tag{1.6.1}$$

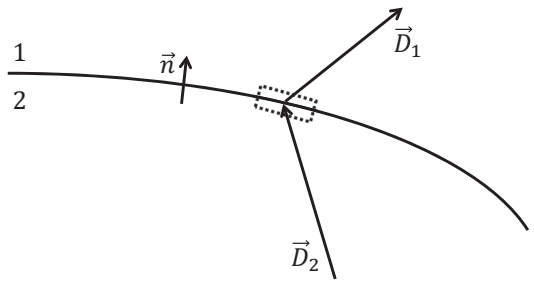


图 1.24

如图所示，定义界面的方向矢量为介质2指向介质1的单位方向矢量$\vec{n}$，横跨介质的分界面做一扁平的柱体，两个底面平行于界面，分别为$\Delta\vec{S}_1 = \Delta S\vec{n}$及$\Delta\vec{S}_2 = -\Delta S\vec{n}$，高度$h$。为了得到场在界面两边的行为，先令$h$趋向于0，此时显然$D$在侧表面的积分趋于0，因此：

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta\vec{S}_1 \cdot \vec{D}_1 + \Delta\vec{S}_2 \cdot \vec{D}_2 = \Delta S \cdot (\vec{n} \cdot \vec{D}_1 - \vec{n} \cdot \vec{D}_2) = q_f \tag{1.6.2}$$

其中q_f为柱体内的**自由电荷量**（不包括因为极化产生的束缚电荷！）。在$\Delta S \to 0$时，我们进一步得到

$$\vec{n}_1 \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \sigma_f \tag{1.6.3}$$

$\sigma_f = q_f/\Delta S$是交界面上的**自由电荷面密度**。在一般情况下$\sigma_f = 0$（没有自由电荷，或是自由电荷呈现体分布），D场的法向分量守恒。

同理，对应方程$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，容易得到B场的法向分量连续的结论：

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2} \tag{1.6.4}$$

对应第四条方程$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$的积分形式为

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{S} + \int \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \cdot d\vec{S} \tag{1.6.5}$$

假设$\vec{e}_1, \vec{e}_2$为界面上相互垂直的两个方向矢量，其与界面方向矢量$\vec{n}$呈右手螺旋：

$$\vec{n} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \vec{n} \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \tag{1.6.6}$$

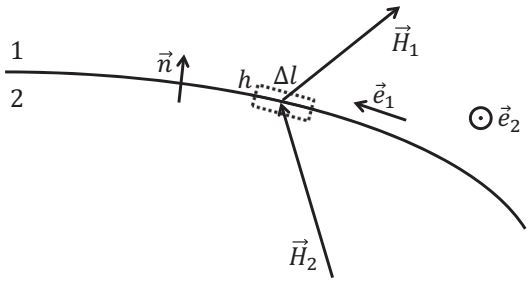


图 1.25

则如图所示在界面处画一个长为Δl（方向沿$\vec{e}_1$），宽为h的矩形。仍然先考虑$h \to 0$，则$\vec{H}$场在h上的积分趋于0。于是$\vec{H}$场在整个环路上的积分

为

$$\vec{H}_1 \cdot \Delta\vec{l_1} + \vec{H}_2 \cdot \Delta\vec{l_2} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{1.6.7}$$

$$= \int \left(\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \tag{1.6.8}$$

$$= \vec{j}_f \cdot \vec{e}_2 \, (h \cdot \Delta l) + \frac{\partial}{\partial t} (D \cdot \Delta l \cdot h) \tag{1.6.9}$$

一般情况下边界处$\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$是有限值，则在$h \to 0$时，上式右边第2项为零。右边第1项在界面存在**面电流分布时**不为0。定义$\vec{j}_f \cdot h \xrightarrow{h \to 0} \vec{\alpha}_f$为面电流分布，我们便有

$$\vec{e}_1 \cdot \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_2 \tag{1.6.10}$$

考虑面内另一个方向，可得

$$\vec{e}_2 \cdot \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = -\vec{\alpha}_f \cdot \vec{e}_1 \tag{1.6.11}$$

非常容易将上两式改写成更一般紧凑的形式

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \vec{\alpha}_f \tag{1.6.12}$$

要证明1.6.12式，可将矢量$\vec{H}_1 - \vec{H}_2$分解到$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$方向，再根据$\vec{n} \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \vec{n} \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$得出结果。

同理，对于方程$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$，与上面的推导比较可知，相应的边界条件为

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) = 0 \tag{1.6.13}$$

故电场的切向分量连续。

注：

1. 4条边界条件怎么记？可以很容易通过将Maxwell方程中的$\nabla \to \vec{n}$，再将体分布$\rho, \vec{j}$换成面分布$\sigma, \vec{\alpha}$。

2. 在绝大多数正常情况下，电磁场的边界条件都是$\vec{E}, \vec{h}$场切向分量连续，$\vec{D}, \vec{B}$场法向方向连续。只有当有自由面电荷（流）分布时，才有$\vec{D}$场与$\vec{B}$场的不连续。而所谓面分布，其实是真实的体分布的一种简化，亦即，电荷/流分布在非常薄的一层介质里。此时，若我们不关心此薄层里的场分布，则跨越这个薄层的场当然不连续。

第二章

电磁场的守恒定律和对称性

电磁场作为一种物质的存在方式，具有能量、动量以及角动量。如何得到这样一个结论呢？可以从两方面来看。

1. 假设空间存在一电磁场$\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$，由置于远处的源电荷（电流）激发。在此空间中放置一带电体，则后者会受到电场的作用力而能量增加。同时带电体运动后产生电流，而电流又会受到磁场的作用力因此带电体的动量发生改变。这些机械能及机械动量的增加不是无中生有的，只能是电磁场本身具有的能量以及动量转化而来的。你可能会Argue说：这些能量动量可以是源电荷的机械能及机械动量贡献的！然而实验发现，即使我们将源关掉，在一段时间内，空间的电磁场不会立刻消失，仍然具有对带电体做功及改变其动量的能力，这证明带电体的能量动量不是由源电荷/电流直接提供的，而是由电磁场提供的。

2. 另一方面，也可以考虑源电荷/电流在建立电磁场时的能量/动量变化。以电场为例，考虑产生最终电场的电荷是原本散落在无限远处的一系列点电荷组成的。为了建立这个电场分布$\vec{E}(\vec{r},t)$，这些电荷从

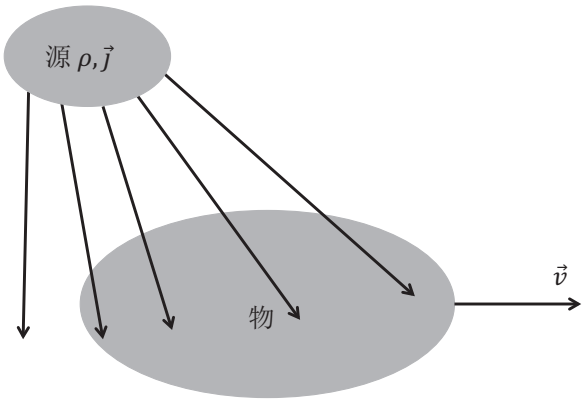


图 2.1

无限远处被准静态地一个个搬了过来。在这个“搬动”的过程中一直必须有外力来平衡电场对电荷的作用力，因此一直需要不断的外力对体系做功。最后建立完最终的电场后，外力在此过程中做的总功到哪里去了？——全部转化成电磁场的能量！动量也是完全一样的Argument。

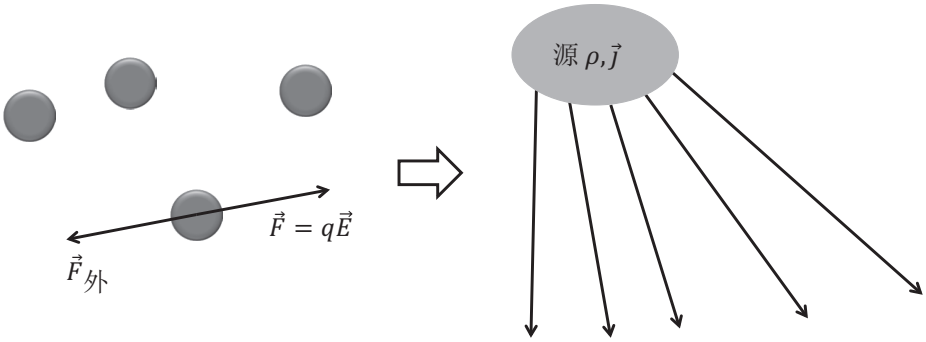


图 2.2

在《电磁学》的学习中，我们利用第2个图像计算了电容器中**静电场的总能**$U_E=\frac{1}{2}CV^2$以及电感中的**静磁场的总能**$U_B=\frac{1}{2}LI^2$。然而这样的推导不能告诉我们局域的场的能量密度——我们得到能量密度只能通过相当不

严格的类比。下面我们将利用第一种方法来系统研究电磁场的**局域能/动量密度**。

2.1 真空中电磁场的能量守恒定律

先考察电磁场对处于其中的带电体所作的功．电磁场不能直接“看到”任何物质，而只能“看到”物质中的电荷/电流，场对一块物质的作用力是通过对其中的电荷/电流作用发生的。因此我们下面研究电磁场对处于其中的电荷所作的功。由于磁场作用在运动电荷的力总与速度方向垂直，磁场对电荷不作功，所以我们只需求电场对电荷所作的功即可。 若空间电

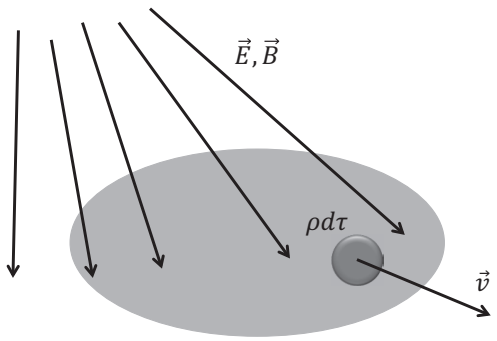


图 2.3

荷分布为ρ则$d\tau$内的电荷为$\rho d\tau$，它在dt时间内移动的距离$d\vec{l}=\vec{v}dt$，$\vec{v}$为电荷体积元$\rho d\tau$的运动速度，于是场在dt时间内对$\rho d\tau$所做的功为

$$\frac{dR}{dt}=\int \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \tag{2.1.1}$$

场对带电体做功增加了带电体的机械能W_m，故

$$\frac{dW_m}{dt}=\int \vec{E}\cdot\vec{j}d\tau \tag{2.1.2}$$

下面我们利用Maxwell方程将$\vec{j}$消除，而使得方场中仅仅留下电磁场$\vec{E}$, $\vec{B}$等。由麦克斯韦方程组中的第四式可见

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.1.3}$$

于是得到

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \tag{2.1.4}$$

因为所有的守恒律都满足类似电荷（流）守恒的一个公式，我们的任务是试图将2.1.4改写成对时间、空间的全微分形式。注意到矢量运算恒等式

$$\nabla \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) = \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) - \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) \tag{2.1.5}$$

Tips：这个公式可以通过类比矢量混合积$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$，以及注意到必须对括号内的所有量都进行微分运算来得到。

可得

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \tag{2.1.6}$$

上式第1，3项已都是全微分的形式。对第2项，根据Maxwell方程组中的第二式$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，可得

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\vec{B} \cdot \vec{B}\right) \tag{2.1.7}$$

也成为全微分的形式。将上式代入2.1.6可得

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{2.1.8}$$

令

$$\vec{S}_P(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{2.1.9}$$

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{2.1.10}$$

于是利用上述这些等式，2.1.2式可最终写成

$$\frac{dW_m}{dt} = -\int \nabla \cdot \vec{S}_P d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\int u d\tau \tag{2.1.11}$$

$$= -\oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int u d\tau \tag{2.1.12}$$

将上式进一步改写为

$$\frac{d}{dt}\left[W_m + \int u d\tau\right] = -\oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} \tag{2.1.13}$$

物理意义非常明晰——在一个闭合空间内物理量$W_m + \int u d\tau$的增加等于从边界流入闭合空间的$\vec{S}_P$的大小。对应电荷-电流守恒定律，显然前者是这个闭合空间中的总能量，而后者是能量流密度。因为W_m是空间里物质的机械能量，$u(\vec{r},t)$应当描述其他的能量形式，这里其它的能量形式只能是电磁场的能量！因此其物理意义是r点处t时刻电磁场的能量密度，$\vec{S}_P(\vec{r},t)$即为相应的**能流密度**，叫做**坡印廷矢量**。当考察区域是全空间时，由于电流和电荷分布在有限区域，在无穷远边界上电磁场应为零，故$\vec{S}_P \equiv 0$。此时有

$$\frac{dW_m}{dt} = -\frac{dW_{e,m}}{dt} \tag{2.1.14}$$

其中

$$W_{e,m} = \int_\infty u(\vec{r},t) d\tau \tag{2.1.15}$$

为空间电磁总能量。2.1.14式表明机械能与电磁场能量可以相互转化，但总和为守恒量。在无源空间内没有任何其他的能量形式，$W_m = 0$，2.1.13式变为

$$\nabla \cdot \vec{S}_P(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{r},t) = 0 \tag{2.1.16}$$

这与电荷守恒的连续性方程完全一样，又一次说明了电磁场是一种物质。

[**例1**] 试考察正在缓慢充电的电容器的能流

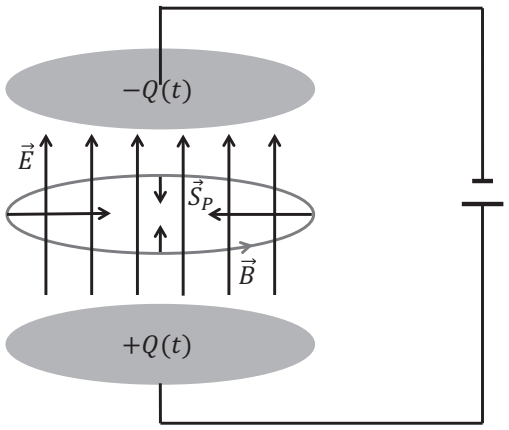


图 2.4

解：设电容器由两块圆形平板构成．它们的半径均为r，间距为h，其中电场为$E(t)=\dfrac{Q(t)}{\pi r^2\varepsilon_0}$，则电容器中的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot\Omega \tag{2.1.17}$$

其中$\Omega=\pi r^2 h$是电容器的体积。我们来看一下能流流动的情况。在充电过程中E在缓慢变化，设$\vec{E}=E(t)\vec{e}_z$，则由麦克斯韦方程组的第四式可知，变化电场会产生位移电流从而进一步产生磁场：

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \tag{2.1.18}$$

可得电容器内磁场(选取柱坐数系$\rho,\,\phi,\,z$)为

$$\vec{B}=\frac{1}{2\pi\rho}\mu_0\varepsilon_0\pi\rho^2\frac{\partial E}{\partial t}\vec{e}_\phi \tag{2.1.19}$$

所以能流密度矢量为

$$\vec{S}_P=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}\rho(-\vec{e}_\rho) \tag{2.1.20}$$

其方向指向电容器中心轴线。对电容器侧面积分则得流入电容器的能量为

$$\int\vec{S}_P\cdot d\vec{S}=\frac{\varepsilon_0}{2}E\frac{\partial E}{\partial t}r\cdot 2\pi rh=\pi r^2h\varepsilon_0E\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}W_{e,m} \tag{2.1.21}$$

它正好等于电容器中能量的增加率。这说明能量不是从导线中流过来的，而是从电容器外面的空间中通过电容器侧面流进电容器的。显然，通常认为能量是从导线中流过来的直觉是错误的。

注：考虑任何一个静电状态，都必须考虑对应的电荷分布是如何建立的，而考虑这个电荷建立的过程，就不可避免地引入电场的变化，从而因位移电流进一步产生磁场。这样一来，在整个建立场的过程中就有能流存在，最终的静电能正是通过这些能流一点点建立起来的。

2.2 电磁场的动量守恒定律

下面要利用相似的方法考虑电磁场的动量。根据力的定义，带电体的机械动量的变化为场对带电体的作用力。带电体受电磁场的Lorentz力，则其机械动量的变化率为：

$$\frac{dG_m}{dt}=\int(\rho d\tau\vec{E}+\rho d\tau\vec{v}\times\vec{B})=\int(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})d\tau=\int\vec{f}d\tau \tag{2.2.1}$$

利用场方程把等式右边的ρ和$\vec{j}$消去，力密度改写为

$$\vec{f}=\varepsilon_0\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times\vec{B} \tag{2.2.2}$$

仿照电磁能量的推导，我们希望能将上式改写成对时间、空间的全微分。先考虑时间部分，配分可得

$$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \tag{2.2.3}$$

带入2.2.2式后，考虑所有与电场$\vec{E}$有关的项：

$$\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\left[\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}\right] \tag{2.2.4}$$

$$=\nabla\cdot\left(\vec{E}\vec{E}\right)-\nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right) \tag{2.2.5}$$

$$=\nabla\cdot\left(\vec{E}\vec{E}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}\right) \tag{2.2.6}$$

注：倒数第二步用到了并矢运算公式

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{B}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} \tag{2.2.7}$$

证明如下

$$\partial_i\left(A_iB_j\right)\hat{e}_j=\left(\partial_iA_i\right)B_j\hat{e}_j+A_i\left(\partial_iB_j\right)\hat{e}_j \tag{2.2.8}$$

倒数第一步用到了恒等式

$$\nabla\varphi=\nabla\cdot\left(\varphi\overleftrightarrow{I}\right) \tag{2.2.9}$$

证明如下

$$\nabla\cdot\left(\varphi\overleftrightarrow{I}\right)=\partial_i\left(\varphi\overleftrightarrow{I}\right)_{ij}\hat{e}_j=\partial_i\left(\varphi\delta_{ij}\right)\hat{e}_j=\partial_i\left(\varphi\right)\hat{e}_i=\nabla\varphi \tag{2.2.10}$$

下面考虑2.2.2式中与磁场相关的项$\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}$。与电场类比，可以加上一项恒为0的$\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}$，故有与磁场相关的项为

$$\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B}+\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}=\nabla\cdot\left(\vec{B}\vec{B}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}\right) \tag{2.2.11}$$

利用这些关系式，2.2.2式可写成

$$\vec{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} \tag{2.2.12}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} \tag{2.2.13}$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\vec{S}_P \tag{2.2.14}$$

根据以上三式及2.2.1式，我们就得到

$$\frac{d\vec{G}_m}{dt} = -\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{d}{dt}\int \vec{g}d\tau \tag{2.2.15}$$

完全类似对电磁能量的讨论，上式显示$\vec{g}$就是电磁场的动量密度，而$\overleftrightarrow{T}$是动量流密度，是个张量（并矢），这是因为动量是个矢量，与能量不同。对每个动量分量（如x分量），2.2.15可以改写成

$$\frac{dG_m^x}{dt} = -\oint d\vec{S}\cdot\vec{T}_x - \frac{d}{dt}\int g_x d\tau \tag{2.2.16}$$

即为我们熟悉的形式。而

$$\vec{G}_{e,m} = \int_{\Delta\Omega}\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau \tag{2.2.17}$$

就是$\Delta\Omega$体积内的电磁场所携带的总动量。

注：

1. 与电磁能量不同，动量密度的存在要求必须有磁场。另外，我们注意到动量密度与能流密度相关，这里有什么物理值得我们深思呢？

2. 许多年来，人们往往被牛顿力学中的“力”、“功”、“力矩”等概念所“毒害”，其实现代科学发现早已摒弃了这些机械的概念，因为它们不本质，一般情况下难以定义。取而代之的是“动量”、“能量”，“角动量”等更本质的概念。受力可以描述为动量在改变，做功=能量发生变化；受到力矩表现为角动量发生变化。至于为什么只有这7个守恒量？那是因为我们所处的是3+1维空间，3维空间的平移不变性给出动量守恒、各向同性给出角动量守恒，至于能量守恒是因为时间轴的均匀性决定的。

利用2.2.15式可以方便地讨论电磁场对物质的作用力。考虑一个放置于电磁场中的物体，取闭合曲面恰好包围此物体，则电磁场对闭合区域内的带电体的作用总力$\vec{F}_{em}$可由下式计算：

$$\vec{F}_{em}=\frac{\partial \vec{G}_m}{\partial t}==-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}-\int_V\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}d\tau \tag{2.2.18}$$

讨论：

1. 等式右边第一项$-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}$是电磁场**单位时间内**通过界面从外面传递到曲面内部的总动量，根据力的定义，这就是外面的电磁场通过界面对闭合区域内的**物质**施加的总力。如弹性力学中的张力一样，$-\vec{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T}$代表面外的场作用在面内的场的单位面积上的应力，故又称$\overleftrightarrow{T}$为**麦克斯韦应力张量**。 可以形象地把电磁场想象成一个网，网

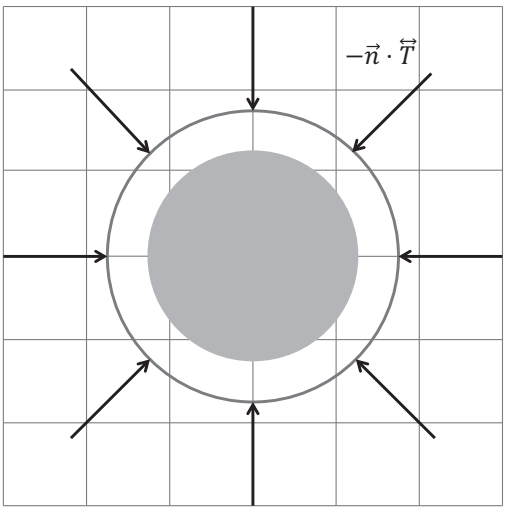


图 2.5

格之间有张力，网中间放置一钢球，即我们考虑的物质。对网施加扰动，则动量通过界面“流入”闭合区域，一部分变成了区域内部的网的动量，另一部分传递给钢球，给钢球施加了作用力。也可将电磁场想象成水，水中有一钢球。取一闭合界面，则外面的水物质一直对里面的水施加压力。

2. 然而这些“总力”不见得都作用到区域内的物质上，还作用到区域内的电磁场上，引发区域内的电磁场的动量的增加。等式第二项就是减去这部分的贡献的。

3. 在稳态或是场随时间谐变的情况下，第2项为0，或是其时间平均值为0。此时物质在电磁场中的受力完全由Maxwell张量的面积分决定。小心设计一些特定的电磁场结构，比如一束高斯型光束，处于光场之中的介质小球就会受到力的作用，其在光场中收“光力”会产生移动最终到达平衡位置。因此我们可以通过改变光束的位置来有效地移动小球，这就是“光镊“（Optical Tweezers）的基本工作原理，目前在生物、医学中应用广泛。

[**例2**] 求放置于均匀电场$\vec{E}$中的一个均匀带电板（面积为A，电荷密度为σ，忽略边缘效应）的受力。

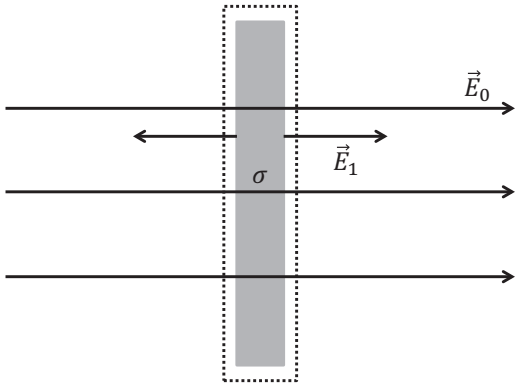


图 2.6

解：如图所示，空间的总场为

$$\vec{E}_{right} = \vec{E}_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x \qquad \vec{E}_{left} = \vec{E}_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x \tag{2.2.19}$$

则Maxwell张量为

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} \tag{2.2.20}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \left(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}\right) - \varepsilon_0 E^2 \hat{x}\hat{x} \tag{2.2.21}$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \hat{x}\hat{x} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \left(\hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}\right) \tag{2.2.22}$$

包围平板做一闭合曲面，如图中虚线所示，计算电磁场对物质的力：

$$\vec{F} = -\oint \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{T} dS \tag{2.2.23}$$

$$= -A\hat{x} \cdot \left[\overleftrightarrow{T}_{right} - \overleftrightarrow{T}_{left}\right] \tag{2.2.24}$$

$$= A\hat{x}\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[E_{right}^2 - E_{left}^2\right] \tag{2.2.25}$$

$$= A\hat{x}\frac{1}{2}\varepsilon_0 4 \cdot E_0 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.2.26}$$

$$= \hat{x}E_0 \cdot Q \tag{2.2.27}$$

正是我们预期的结果。

注：这个例子当然有些“杀鸡用牛刀”的感觉，你可以Argue说我不用Maxwell张量也可以直接写出结果来。然而当电磁场及介质形状均为一般情况时，你就必须使用“牛”刀杀“鸡”了。

[**例3**] 质量为m，带电为q的粒子在稳定磁场中运动，试求带电粒子在磁场中的总动量。

解：电荷在磁场中运动时，不仅自己带有机械动量，而且因为其本身带电产生电场，与磁场相互作用后使得空间总的电磁场会带有动量。这些动量是空间电磁场的，但与电荷存在于磁场中这个事实相关，因此通常算到电荷的总动量里。电磁场的动量为：

$$\vec{G}_{e,m} = \int_V \varepsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) d\tau' = \int_V \varepsilon_0 \vec{E} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) d\tau' \tag{2.2.28}$$

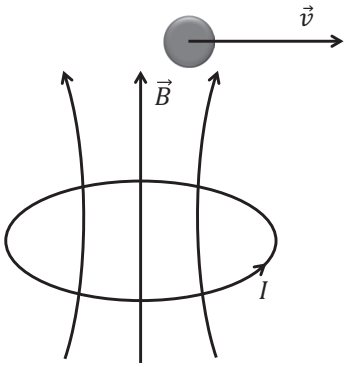


图 2.7

当运动电荷的速度远远小于光速时，可以近似认为运动的电荷只产生电场，其产生的磁场可以忽略，因此有

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 q \delta(\vec{r} - \vec{v}dt) \tag{2.2.29}$$

而空间的磁场完全由稳定的外磁场贡献，因此有

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{（稳定磁场的要求）} \tag{2.2.30}$$

利用矢量运算公式：

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right) = \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{E} + \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{A} + \vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) + \vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \tag{2.2.31}$$

以及$\nabla \times \vec{E} = 0$的事实，可以推出

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right) - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{E} - \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{A} \tag{2.2.32}$$

利用矢量运算恒等式$\nabla\cdot(\vec{a}\vec{b}) = (\nabla\cdot\vec{a})\,\vec{b} + (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b}$将2.2.32式配分成全微分

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \nabla\cdot\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)\overleftrightarrow{I}\right] - \nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{E} + \vec{E}\vec{A}\right) + \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{E} + \left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{A} \tag{2.2.33}$$

$$= \nabla\cdot\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)\overleftrightarrow{I} - \vec{A}\vec{E} - \vec{E}\vec{A}\right] + (q/\varepsilon_0)\,\delta(\vec{r} - \vec{v}t)\vec{A} \tag{2.2.34}$$

把它代入上式后，注意到第一项对空间的积分可以转化成在中括号里面的场在无穷远处表面的面积分，当电流分布在空间有限区域中时，这一项= 0。我们得到

$$\vec{G}_{e,m} = \int q\vec{A}\delta(\vec{r} - \vec{v}t)d\tau' = q\vec{A}(\vec{v}t) \tag{2.2.35}$$

由此我们可以得到带电的运动粒子在外磁场中的**总动量**为

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \tag{2.2.36}$$

式中$m\vec{v}$是带电粒子的机械动量，而$q\vec{A}$为电荷与外磁场共同拥有的“附加”电磁动量，$\vec{p}$则是总动量，又叫做正则动量。2.2.36式是量子力学中极为重要的关系式。**几点讨论：**

1. 这个附加的动量是电荷与磁场的“相互作用”引起的。没有磁场或是没有电荷都没有这一项贡献；单独只有电荷或是磁场单独存在时也没有这一动量；

2. 这个结果是在低速情况下得到的；

3. 如何理解这个相互作用引起的“附加动量”？可以考虑建立这个状态的过程，一开始电荷处于无穷远处，没有电磁场动量；当电荷靠近时，线圈与运动电荷之间有相互作用力，要达到最终的状态，必须有外力输入。因此，则在此过程中一直有外力对体系（线圈+电荷）输入动量（冲量），这部分动量被储存在体系中作为电荷的附加动量。

4. $\vec{p}$是总动量，对粒子的运动量子化后其对应的算符一定是$\vec{p} \to -i\hbar\nabla$。然而磁场不对带电粒子做功，因此带电粒子的动能仍然是$\frac{1}{2m}(m|\vec{v}|)^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2$，写成算符形式为$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A}\right)^2$。

2.3 介质中的电磁能量和动量守恒定律

2.3.1 电磁能量

在真空中，电磁场只对传导电流做功，情况相对简单。在电磁介质中，电磁场会把介质极化或者磁化，从而产生极化电流（荷）和磁化电流，场进一步又会对这些附加电流（荷）产生作用，情况变得复杂。在这种情况下，让我们忘记电磁介质的存在，而只关注因极化和磁化而产生的附加电荷/电流。前面我们已经指出，电磁场“分不清”什么是自由电荷/电流，只要是电荷/电流，电磁场就会对其施加力的作用。因此，此时，电磁场对极化电流和磁化电流同时做功。故，场对$d\tau$体积内的电荷/电流在单位时间内所作的总功为

$$\frac{dR}{dt} = \int (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m) \cdot \vec{E} d\tau \tag{2.3.1}$$

在计算之前，我们仔细分析一下这几项的物理意义。

1. $\vec{j}_f \cdot \vec{E}$对应的是电磁场对自由电荷做的功，这部分功转化成电荷运动的机械动能（电流），通常（超导除外）这些机械动能与外部环境发生交换（通过杂质的散射），变成了环境的热能。这就是为什么在稳恒电流的条件下，电场不断对电荷做功，但电荷运动的机械能却不发生改变（表现为电流稳恒不变）的原因-那些功被环境以热能的形式带走。因此这部分功是可以转化成其他的能量形式，而且通常这种转化是不可逆的。

2. $(\vec{j}_p + \vec{j}_m) \cdot \vec{E}$对应的是电磁场对电磁介质中的束缚电荷（流）所做的功，这部分功转化成介质中电荷拉开后的弹性或者化学势能，以及这些电荷跟随电场运动时的机械动能。但这部分能量被束缚在电磁介质中，不会被环境以热能的形式拿走。而当电磁场离开介质时，这些能

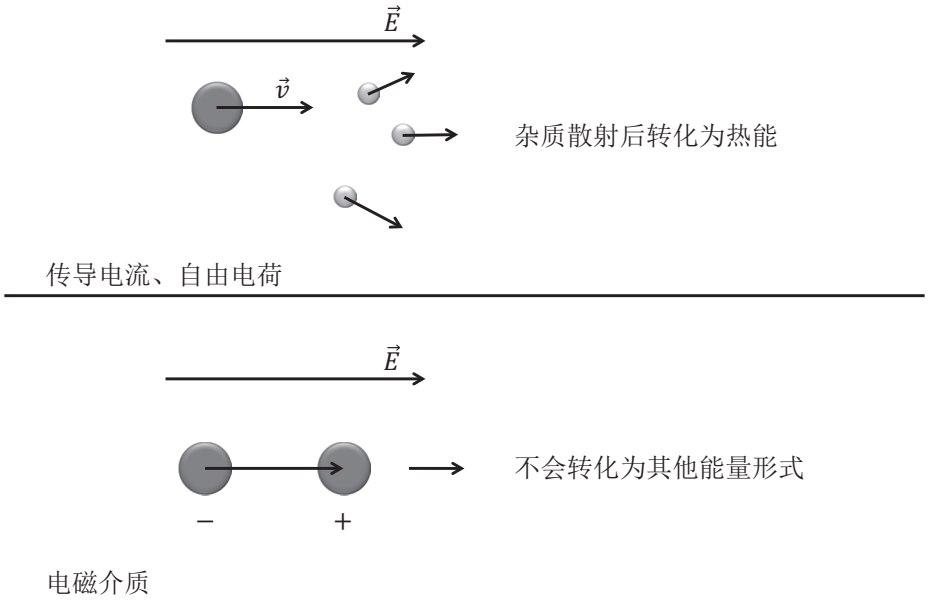


图 2.8

量又会以电磁辐射的形式重新返还给电磁场。本质上讲，这部分能量虽然不是电磁场的能量，但它们却是电磁场将介质极磁化后储存到电磁介质中的能量，它们依附于电磁场而存在。

搞清楚这两类功的不同，我们可以将第2项功对应的能量——极（磁）化能——归于电磁场在介质的能量中，而只考虑电磁场对第一项的贡献。换句话说，我们把电磁场和电磁介质看成一体，而把传导电流分出来单独考虑。具体来说，我们计算场对$d\tau$体积内的自由电荷/电流在单位时间内所作的总功：

$$\frac{dR_f}{dt} = \int \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau \tag{2.3.2}$$

利用$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$将自由电流消去，可得

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \tag{2.3.3}$$

将空间部分配分成全微分的形式，得

$$\left(\nabla \times \vec{H}\right) \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E}\right) + \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) \tag{2.3.4}$$

$$= \nabla \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E}\right) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3.5}$$

这里我们用到了Faraday定律$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$。对线性无色散介质，有本构关系：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.3.6}$$

则2.3.3式可以改写成

$$\vec{j}_f \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3.7}$$

$$= -\nabla \cdot \vec{S}_P - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.3.8}$$

其中能流密度及能量密度分别定义为

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H} \tag{2.3.9}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) \tag{2.3.10}$$

根据2.3.8式，我们写出介质中的能量转化方程：

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = \int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = -\oint \vec{S}_P \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V u d\tau \tag{2.3.11}$$

其中$\int_V u d\tau$为体积内的电磁场能量以及电磁介质中储存的能量，W'为体积内去除上述能量后的其他的能量形式（传导电荷的机械能，或者进一步与环境交换出去的热能），而$\vec{S}_P$为能流密度，物理意义是电磁场以及附属于电磁场的极磁化场单位时间内流过单位面积的能量。显然真空中的能量密度和能流密度可以认为是2.3.9与2.3.10式的特例。

思考：

1. 能流密度$\vec{S}_P$与真空中的不同，这是因为其中包含了介质极磁化后的电荷/流随电磁场的运动而贡献的能量流动，然而仔细计算后发现额

外的贡献为$\vec{S}_P - \vec{S}_0 = \vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0 = -\vec{E} \times \vec{M}$。这样处理对不对？为什么只有磁化的贡献？

2. 你也许有兴趣分清楚介质中的极磁化的能量到底为多少。不假思索的计算将给出：

$$u - u_0 = \frac{1}{2}\left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \times \vec{H}\right) - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}/\mu_0\right) \tag{2.3.12}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{P} \cdot \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{M} \cdot \vec{B} \tag{2.3.13}$$

这个结果是否合理？电磁部分不对称的原因？1/2的来源？（正确的处理请参照*Jackson P165-169, Landau P48* ）

2.3.2 电磁动量

利用同样的方法可以讨论介质中的电磁动量。介质里的总电荷分布为$\rho_f + \rho_p$，总电流分布为$\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m$，因此场对带电体及介质的作用力也就是对上述电荷和电流的作用，其力密度为

$$\vec{f}_t = (\rho_f + \rho_p)\vec{E} + (\vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m) \times \vec{B} \tag{2.3.14}$$

当电荷电流是总电荷、总电流时，Maxwell方程与真空中的一样。因此，与上节中推导一样，我们得到

$$\vec{f}_t = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}^* - \frac{\partial \vec{g}^*}{\partial t} \tag{2.3.15}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}^* = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} \tag{2.3.16}$$

$$\vec{g}^* = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \tag{2.3.17}$$

2.3.15式及其$\overleftrightarrow{T}^*$和$\vec{g}^*$的表达式虽然和真空中形式一样，但其中的$\vec{E}$和$\vec{B}$电磁介质中的总场，即不仅含有自由电荷、电流激发的“源”场，还包含了ρ_p，$\vec{j}_p$，$\vec{j}_m$的全部贡献。

若把力密度$\vec{f}$分成两部分：

$$\vec{f_t} = \vec{f} + \vec{f'} \tag{2.3.18}$$

其中

$$\vec{f} = \rho_f \vec{E} + \vec{j}_f \times \vec{B} \tag{2.3.19}$$

$$\vec{f'} = \rho_p \vec{E} + (\vec{j}_p + \vec{j}_m) \times \vec{B} \tag{2.3.20}$$

显然$\vec{f}$代表场对带自由电荷的带电体（导体）的作用力，$\vec{f'}$代表场对介质的作用力。当我们把电磁场与附着于其而存在的介质看成一体时，$\vec{f'}$属于内力，它只是帮助把一些动量存储在介质中。于是对线性无色散介质，我们有

$$\rho_f \vec{E} + \vec{j}_f \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}' - \frac{\partial \vec{g}'}{\partial t} \tag{2.3.21}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}' = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)\overleftrightarrow{I} - \vec{D}\vec{E} - \vec{B}\vec{H} \tag{2.3.22}$$

$$\vec{g}' = \vec{D} \times \vec{B} \tag{2.3.23}$$

这样的定义下，我们其实把电磁介质和电磁场看为一个整体，$\vec{g}' = \vec{D} \times \vec{B}$中不仅包含了电磁场本身的动量，而且包含了束缚于电磁介质体上的机械动量。后者尽管不是电磁场的动量，但因为它们并不能单独存在，只能束缚于电磁场存在，因此我们把它们也可以归为电磁动量里。

分别讨论一下两种表达式的适用范围:

1. 2.3.15式描述的是场对一块体积内的所有的电荷/电流的作用力，因此若计算某一个电磁介质物体在真空中的某一电磁场中，则此时，显然应用2.3.15式来计算介质物体受到的电磁场的力:

$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}^{*} + \frac{d}{dt}\int \vec{g}^{*} d\tau \tag{2.3.24}$$

静态或是电磁场随时间简谐变化时，第二项对时间的平均值为0，故，实际有效力为

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overleftrightarrow{T}^{*} \right\rangle \tag{2.3.25}$$

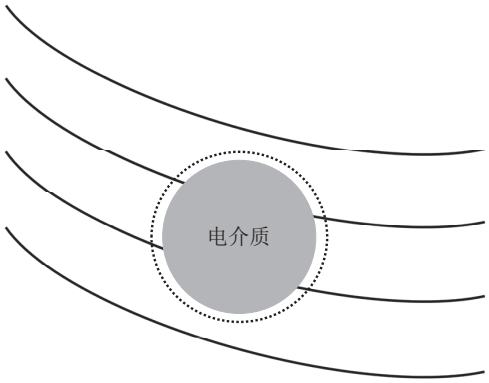


图 2.9

2. 2.3.22和2.3.23式适用于计算电磁场对处于介质环境中的金属导体物体的作用力。比如在血液中放置一个金属物体，外加电磁场来控制其运动。此时，应当利用

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overleftrightarrow{T}' \right\rangle \tag{2.3.26}$$

计算其受力。若利用2.3.25计算其受力的话，则同时计算了处于导体/介质表面处的介质上的极、磁化电荷的受力，而后者并不能传递到导体物体的上面。

Tips：

1. 这些公式形式千变万化，但搞清楚你的问题后，其实并不难分辨应当应用哪一个。

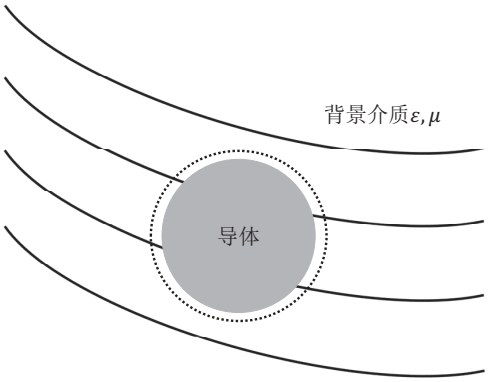


图 2.10

2. 2.3.15针对的是电磁场对电荷/电流的作用力，然而对束缚电荷的作用力会使得介质产生畸变，从而产生一种内部的应力，这却是其不能描述的。好在，这些内部应力是内力，平均下来为0。因此用2.3.25式计算总力的时候没用问题。这其实是一个目前学界尚未完全解决的前沿问题。

3. 对电磁动量的不同定义也有争论，核心问题是介质内部的力平衡要考虑形变带来的张力。

总之，连续介质中的许多问题远比真空中的电磁理论来得复杂和有趣。

第三章

静电学I – 导体静电学

第一二两章给出了电磁场的基本规律及守恒定律。从本章开始，我们将由简入深介绍这些电磁规律在不同的具体情况下的应用。第三、四两章将介绍最简单的情况——静电学。我们将分成两个部分来介绍静电学，本章主要研究与导体相关的静电学，而下一章主要关注与介质相关的静电问题。但是这种划分并不是严格的，其实两类问题满足相同的方程，只不过解决问题的方法和侧重点有所不同而已。

3.1 静电问题

3.1.1 静电基本方程

静电现象（Eletrostatics）研究的是电磁学中这样的一类问题：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量}) = 0 \qquad \text{和} \qquad \vec{j} = 0 \tag{3.1.1}$$

即所有物理量都不随时间改变（指“静”），且电荷静止不动（指“电”）。把静电条件代入麦克斯韦方程中，显然空间不会激发磁场（即

没有电流，也没有变化电场），故只有静电场，满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

根据$\nabla \times \vec{E} = 0$，可以引入标势$\vec{E} = -\nabla\varphi$，进一步带入3.1.2中第一式，有

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r})] = -\rho(\vec{r}) \tag{3.1.3}$$

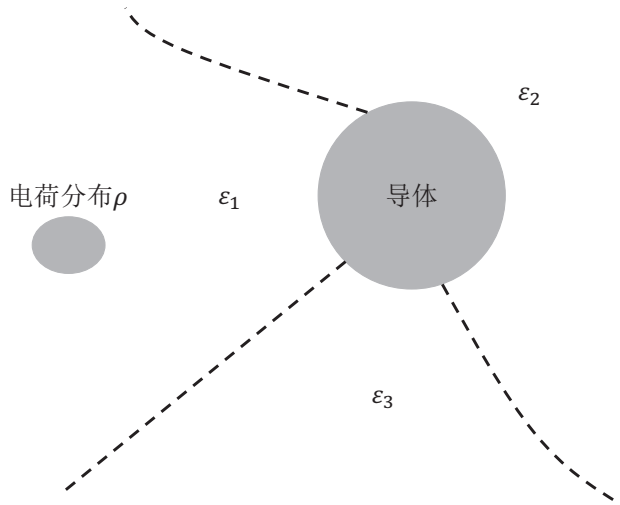


图 3.1

一个标准的静电问题如图3.1所示。在一块均匀介质的内部有$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon$，则上式转化成标准的Poisson方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{3.1.4}$$

在不同物质交界面上场及势要满足相应的边界条件。本章主要研究不用求解Poisson方程的前提下，有关导体的静电状态我们到底能知道多少。要解微分方程，必须知道边界条件。下面我们将讲述导体与介质的交界面上的边界条件。

3.1.2 静电条件下导体的边界条件

所谓导体即是能导电的介质，当它内部存在电场时就会引起传导电流。在导体中有关系式$\vec{j}=\sigma_c\vec{E}$，可见在静电学(即$\vec{j}=0$)的前提下，导体内的电场强度必须处处为零，否则必定引起电流。根据$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=0$的关系知$\nabla\cdot\vec{D}=\rho=0$，即导体内部不可能有电荷分布。所以对导体来讲，电荷只能分布在表面上。进一步分析导体表面的电荷是如何分布的：若导体表面上切向电场不为0，则表面电荷必然在电场的作用下在表面上运动，引起表面电流，这与静电条件不符。因此，静电条件下导体表面的电场的切向分量为0，亦即，导体表面的标势处处相等。导体表面电场的法向分量可以不为0，这与切向电场很不相同——导体电荷在表面处受到非静电来源的束缚能——即“功函数”，自由电荷受到垂直电场的作用不会飞出导体。根据Gauss定理，垂直电场与此处的表面电荷面密度成正比（$D_\perp=\sigma\Rightarrow E_\perp=\sigma/\varepsilon$）。总结下来，与导体相关的电场行为满足

$$\begin{cases}\vec{E}_{in}=0 \qquad \rho_{in}=0\\ \vec{E}_{\parallel}^{surface}=0\\ \vec{E}_{\perp}^{surface}=\sigma/\varepsilon\end{cases}\tag{3.1.5}$$

需要强调指出的是：导体表面上的电荷分布和表面垂直电场均是未知量！进一步将上面关于场的边界条件转化成对势的边界条件，有

$$\begin{cases}\varphi\Big|_{Boundary}=Constant\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{Boundary}=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon} \qquad Q=-\varepsilon\oint\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}dS\end{cases}\tag{3.1.6}$$

所有这些条件都是因为导体内部有自由电荷这个性质决定的！

原则上，导体相关的静电问题就是在边界条件3.1.6下求解3.1.4。这里可能有两类问题:

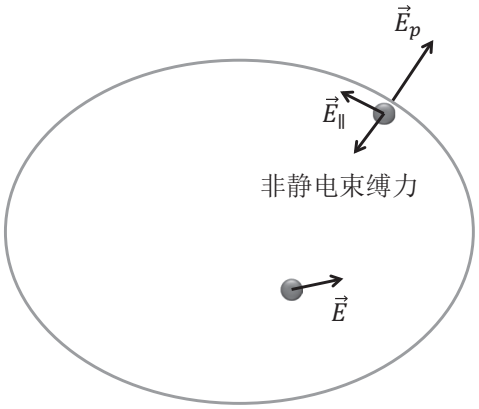


图 3.2

1. **等势问题**－－假设考虑的导体与外界大的带电导体相连并达到静电平衡，$\varphi = const.$（注意：此时导体上的总电荷不能预先设定）。

2. **孤立导体问题**－－假设导体孤立，则Q已知，但此时φ不能预先设定。某种意义上讲，Q, φ是一对共轭量，不可能同时预先设定。

3.2 格林互易定理

在讨论具体问题之前，先介绍一个一般的定理－－格林互易定理，其在导体静电学中相当有用。它的表述如下：

当m个导体上的电荷为$q_1, q_2, \cdots, q_m$时，它们的电势等于$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m$；当导体上的电荷为$q'_1, q'_2, \cdots, q'_m$时，它们的电势等于$\phi'_1, \phi'_2, \cdots, \phi'_m$，那么有关系式

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \phi'_i = \sum_{i=1}^{m} q'_i \phi_i \tag{3.2.1}$$

证明：

证明Green互易定理之前，我们先证明一个**数学恒等式**。取任意的一个闭合曲面S，假设Φ, Ψ是S包围的体积V内的2个连续可微的函数，则由高斯定理可得

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi)\, d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{S} \tag{3.2.2}$$

将Φ, Ψ位置互换，有

$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi)\, d\tau = \oint_S \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{S} \tag{3.2.3}$$

两式相减，我们就得到

$$\int_V \left(\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi\right) d\tau = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S} \tag{3.2.4}$$

此式即是格林定理，它的重要性是将任意两个标量函数的空间的性质转化为边界处的行为。下面我们进一步利用格林定理证明格林互易定理。

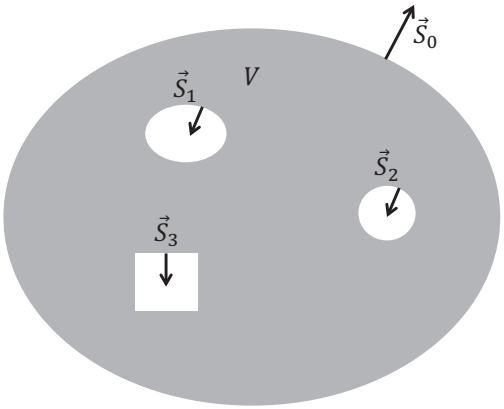


图 3.3

对包含m个导体的空间，取无限远处为封闭曲面$\vec{S}_0$，然后再在其中挖掉所有m个导体，因此产生m个封闭曲面$\vec{S}_i$。剩余的空间，体积为V，是一个多连通的闭合区域，其边界由$\vec{S}_0$及$\vec{S}_i$共同确定，记为S。考虑两个状态，其中导体上分别带有电荷$\{q_i\}$和$\{q_i'\}$，此时对应的电势分布分别为$\varphi(\vec{r})$, $\varphi'(\vec{r})$。由于电荷都分布在导体表面上．所以在体积V内$\nabla^2 \varphi = 0$,

$\nabla^2\varphi' = 0$。我们现在令$\Psi = \varphi$, $\Phi = \varphi'$，代入3.2.4式，则3.2.4左边=0。取$\vec{S}_0$在无限远处，因3.2.4中右边项以r^{-3}在无穷远处趋向于0，则易知其对$\vec{S}_0$的积分= 0。故有

$$\sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} (\varphi\nabla\varphi' - \varphi'\nabla\varphi) \cdot d\vec{S}_i = 0 = \sum_{i=1}^{m} \oint_{S_i} \left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) \cdot dS_i \quad (3.2.5)$$

对每个导体表面的积分，注意导体表面的电荷分布是

$$\sigma_i = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_i} \qquad \sigma_i' = \varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\Big|_{S_i} \quad (3.2.6)$$

（这里取+号是因为$\vec{S}_i$的方向定义为垂直表面向导体内部），以及导体表面是等势体

$$\phi_i = \varphi\big|_{S_i} \qquad \phi_i' = \varphi'\big|_{S_i} \quad (3.2.7)$$

将他们代入3.2.5式得

$$\sum_i \left(\oint_{S_i} \phi_i\sigma_i' dS_i - \oint_{S_i} \phi_i'\sigma_i dS_i\right) = 0 \quad (3.2.8)$$

积分可得格林互易定理：

$$\sum_{i=1}^{m} q_i\phi_i' = \sum_{i=1}^{m} q_i'\phi_i \quad (3.2.9)$$

由格林互易定理，我们可以马上得到一个重要的结果。令$q_1' = q_3' = q_4' = \cdots = q_n' = 0$，$q_2 = q_3 = q_4 = \cdots = q_n = 0$，则有

$$q_2'\phi_2 = q_1\phi_1' \quad (3.2.10)$$

再令$q_1 = q_2'$，则得

$$\phi_1' = \phi_2 \quad (3.2.11)$$

这就是说，带电q的导体B在不带电的导体A上（感应）产生的电势等于带电q的导体A在不带电的导体B上（感应）产生的电势。

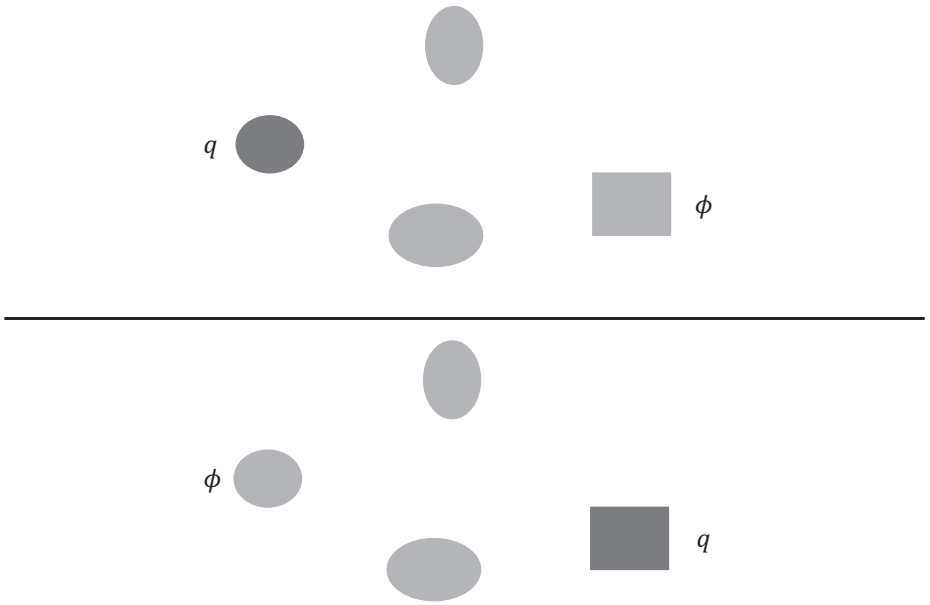


图 3.4

注：你可能Argue说这没什么啊，比如一个点电荷产生的势为$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，只与观察点与源的距离相关，显然有上述互易性质。但注意上面的定理显示这种互易关系在任意导体形状下、任意的其他导体分布情况下均成立。这并不显然，因为场会引发导体上的电荷的再分布（即使总体不带电），使得问题变得非常复杂。格林互易定理在处理导体相关问题上很有优势。格林互易定理从本质上讲述的是源——观察点之间的对称关系。

[**例1**] 在一个接地导体球（半径为R）外距球心距离为r的地方放置一个带电量为q的点电荷，求在导体球上的感应电荷。

解：对这个由两个导体组成的导体系，对应电荷分布$\{q, q_R\}$，电势分布为$\{\varphi_q, 0\}$，其中q_R为导体球上的感应电荷，φ_q为点电荷所在地的电势，均未知。现制备另外一个电荷分布$\{0, q'_R\}$，则非常容易求出空间的电场为$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$，故，两个导体上的电势分别为$\frac{q'_R}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{r}, \frac{1}{R}\}$，因此，根据

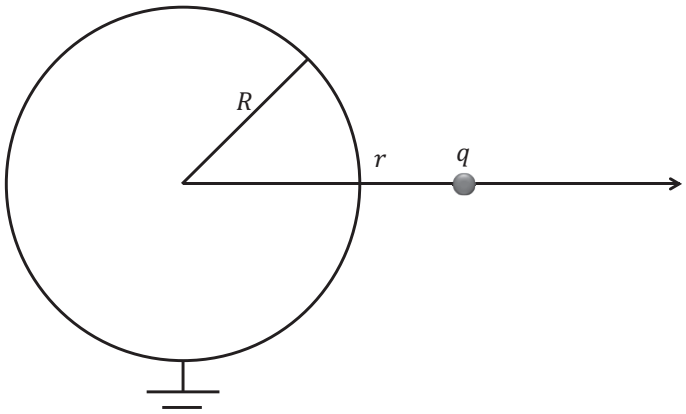


图 3.5

格林互易定理，可得

$$q\frac{1}{r}+q_R\frac{1}{R}=0\Rightarrow q_R=-\frac{R}{r}q \tag{3.2.12}$$

因此导体球上的感应电荷为$-\dfrac{R}{r}q$

Tips：有同学会被“导体球接地”这个条件所迷惑，当设计第二个状态时仍然把导体球接地，这样就无法改变球的电势状态从而达到利用格林定理的目的。“接地”只是把导体球的电势设为0而已，并不意味着我需要一直连一根导线到地。

3.3 导体系的能量、固有能和相互作用能

3.3.1 利用静电标势来表示静电能量

静电场能量可以用电势φ来表述。假设一系列导体放置在介电常数为ε的线性电介质背景中，则体系的静电总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)d\tau \tag{3.3.1}$$

利用$\vec{E}=-\nabla\varphi$，上式可写成

$$W=-\frac{1}{2}\int(\nabla\varphi)\cdot\vec{D}d\tau \tag{3.3.2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\left(\varphi\vec{D}\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi\nabla\cdot\vec{D}d\tau \tag{3.3.3}$$

$$=-\frac{1}{2}\oint\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}+\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau \tag{3.3.4}$$

其中用到了$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$。若我们考察的是体系的总能量，则3.3.1式的体积分是对全空间进行的，因此上述等式右边的面积分是对无穷大的面进行．对电荷体系分布在有限区域内的情况，$\varphi\vec{D}$以r^{-3}形式在无穷远处趋向0，因此面积分的值为零。另一方面，导体上的电荷分布全部集中在导体的表面，而导体表面上的势为常数。因此，能量的表达式变为

$$W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau=\frac{1}{2}\sum_i\phi_iQ_i \tag{3.3.5}$$

其中ϕ_i, Q_i为第i个导体的势和总电荷。

注：

1. 上式虽然只与自由电荷相关，却是包含了极化能的电磁总能量。从物理上讲，静电总能可以被理解成建立这样一个导体体系，外界做的总功。因此3.3.5也可这样推出：假设电荷从处于无限远处一点点搬来的，将这些电荷一点点搬来做的功的总和即是3.3.5。试着推导一下，并解释为什么有1/2 因子？

2. 从上面的分析我们看到静电能量有两种表达式，一种是$W=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau$，这表示静电能量是以密度$u=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$的形式在介质空间连续分布，场强的地方能量也大。另一种表达式是$W=\frac{1}{2}\int\varphi\rho d\tau$，它表示能量只与存在着电荷分布的空间有关．以上两种表达式只有在求静电场的总能量时才等效，而当讨论空间某一有限范围内的电磁能量时两者不再等效，因为面积分在有限范围内的值一般不会为零，我们只能

应用第一种表达式。第二种表达式并不意味着$\frac{1}{2}\varphi\rho$是电场的能量密度——没有电荷就没有能量的看法是错误的！

3.3.2 电容

一个有多个导体组成的体系，每个导体都是等势体，其电势为$\{\phi_i\}$，同时每个导体上带有不同的电量$\{Q_i\}$。这个导体体系的状态既可以用$\{\phi_i\}$来刻画，也可以用$\{Q_i\}$来刻画。那么，$\{\phi_i\}$与$\{Q_i\}$之间是什么关系呢？

利用线性叠加原理可以证明：任意一个导体上的电势ϕ_i是各个导体上的电量的线性函数。用数学表述为：$\{\phi_i\}$一定可以表示为$\{Q_i\}$的线性函数

$$\phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j \tag{3.3.6}$$

式中的比例系数C_{ij}^{-1}与导体的形状和相对位置有关，其量纲是长度量纲的负一次方。反之亦然：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j \tag{3.3.7}$$

这里的C_{ij}是C_{ij}^{-1}的逆阵元素。

证明上式并不容易，因为所有的带电体均可呈现任意形状，任何一个带电体上的电荷增减都会影响到其它带电体上的电荷分布，从而影响到整个体系的电势分布！但仔细考虑静电平衡和线性叠加原理发现问题可以得到证明。

分三步考虑：

1. 如图3.6所示，只在第1个导体上放置单位电量的电荷，其它所有导体上不放置电荷，即电荷分布为$\{1, \cdots, 0, \cdots\}$。当此体系达到静电平衡时，对应的电势分布为$\{\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \cdots, \varphi_j^{(1)}, \cdots\}$，同时记下所有导

体上的面电荷分布$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_j,\cdots\}$，注意此时其它导体上虽不带净电荷，电荷分布却未必为0！

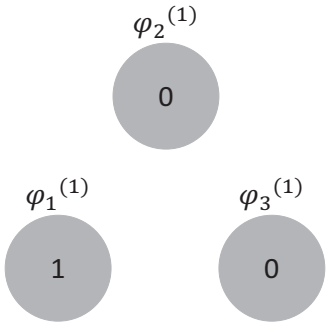


图 3.6

2. 当第1个导体上的电荷线性增加q_1倍时，如图3.7所示，即分布为$\{q_1,0,\cdots,\cdots\}$时，达到静电平衡时的导体面电荷分布一定为$\{q_1\sigma_1,\cdots,q_1\sigma_j,\cdots\}$，根据线性叠加原理，对应的电势分布一定为$\{q_1\varphi_1^{(1)},q_1\varphi_2^{(1)},\cdots,q_1\varphi_j^{(1)},\cdots\}$。

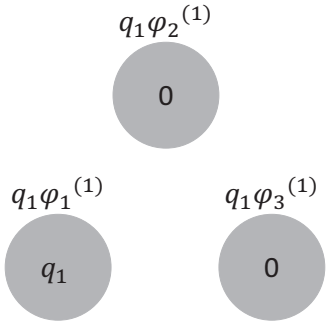


图 3.7

3. 换第二个带电体，在其上充电q_2（其它带电体上不充电），则得到电势分布$\{q_2\varphi_1^{(2)},q_2\varphi_2^{(2)},\cdots,q_2\varphi_j^{(2)},\cdots\}$，如图3.8所示。将这个状态与（2）中的状态线性叠加，得到的电荷分布状态状态一定也是静电平衡态，其对应电荷分布为$\{q_1,q_2,\cdots,\cdots\}$的状态。将这样的过程循环往复，我们发现对应于$\{q_1,q_2,\cdots,q_j,\cdots\}$的状态，第$i$个带电体上的

电势为$\phi_i = \sum_j q_i\varphi_i^{(j)}$，对比3.3.6发现问题得证，而$C_{ij}^{-1} = \varphi_i^{(j)}$，物理意义为：只在第$j$个带电体上充单位电量时在第$i$个带电体上诱导的电势。

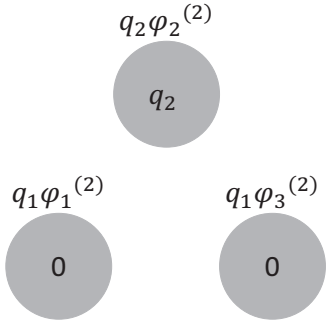


图 3.8

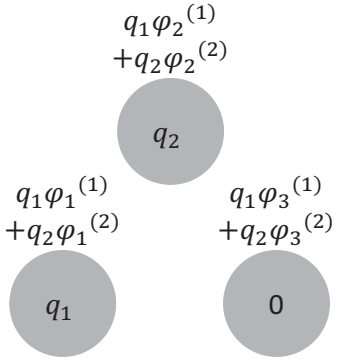


图 3.9

将导体系能量的用电势或电荷表示：

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}\varphi_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}^{-1}Q_iQ_j \tag{3.3.8}$$

为了看清C_{ij}的物理含义，设只有一个导体，则

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 \tag{3.3.9}$$

注意到对一个半径为R的金属球，$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi$。显然，这里的$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R$是导体的电容，几何的意义就是电荷之间的“有效距离”，物理上具有长度量纲（除去不重要的常数ε_0）。这个距离越大，当然体系就可以“装下”更多的电荷，因此电容也就越大。

————以下为选读内容————

这里电容完全是个经典的概念。在量子力学世界中，电荷不再是经典的粒子，而是由一个几率函数描述的物质波。这里有许多有趣的新问题值得研究：

1. 此时电容如何定义？如何计算？（加拿大MaGill大学的郭鸿教授做了许多这方面的研究）；

2. 电容能的本质是“库仑相互作用”，对一个量子点，其静电能可写成$U = Q^2/2C$。设量子点内部只有一个电子填充时的能级为E_n；当量子点中已有一个电子填充的时候，此时再向里面填充一个电子就要付出$1/2C$的能量，因此此时电子的能级为$E_n + 1/2C$。考虑如图3.10所示的隧穿机制，设外部环境中的电子能级与E_n匹配的时候，电子可以通过跃迁到量子点中的此能级而穿过量子点；然而当量子点中已有一个电子存在的时候，能级发生了改变，电子不能进行共振隧穿。这种现象叫做“库仑阻塞”——由于库仑力阻塞了电子的运动。

3. “Mott相变”等问题的研究根据量子的能带理论，当能带没有被填满时，固体中的电子可以自由流动从而固体表现为金属。然而在50-60年代，英国物理学家Mott指出对半填充的固体存在一种新的绝缘体——金属相变机制。固体中的电子在两个原子之间跃迁时，能量上可以降低t（Hopping 常数）。然而当能带半满时，每个原子上

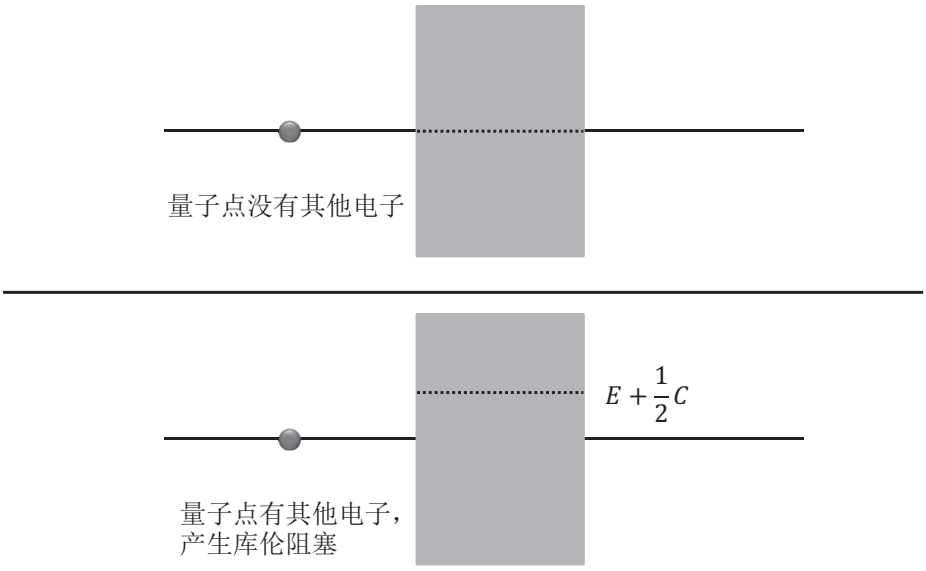

量子点没有其他电子
$E+\frac{1}{2}C$
量子点有其他电子，
产生库伦阻塞

图 3.10

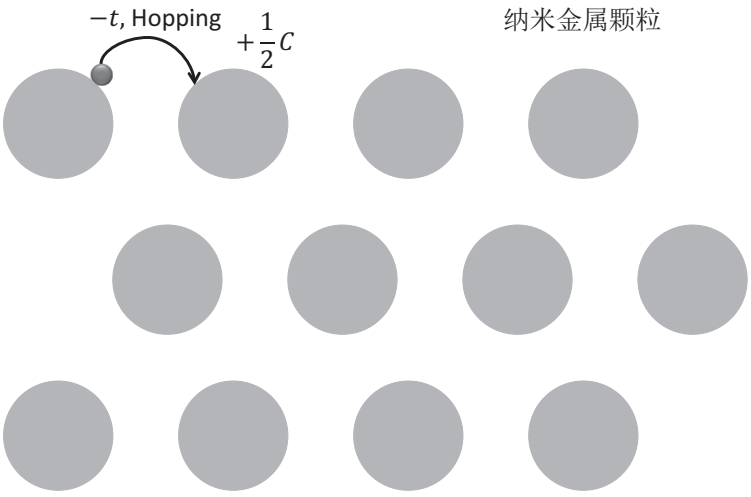

$-t$, Hopping
$+\frac{1}{2}C$
纳米金属颗粒

图 3.11

已经存在一个电子，此时当电子从一个原子跳到另一个原子上时，会和那上面的电子有静电相互作用，使得能量上升。这两个因素（t以及静电相互作用能U）互相制约，如图3.11所示。当原子之间远离时，t很小，因此电子不喜欢跳跃，此时体系表现为绝缘体。当给晶格施加压力使得原子之间的间距变短提高t的时候，有可能使得t大到可以克服U将绝缘体变成一个导体。然而自然的Mott相变得例子极少。随着科技的发展，人们可以人工合成一些由纳米金属颗粒排成的人工晶格，利用这种体系来研究Mott相变。此时作为最低级近似，对体系的静电能部分的描述就是经典的电容能$U = Q^2/2C$。定量描述这个问题就需要知道体系的电容系数。

————以上为选读内容————

[**例2**] 《电磁学》中，两个带$\pm Q$电荷的导体的互电容定义为$C = Q/(\varphi_2 - \varphi_1)$。在《电动力学》中，我们更多地会使用电容系数，试用电容系数表示互电容。

解：这个两导体的体系当电荷分布为$\{Q_1 = -Q, Q_2 = +Q\}$时，电势分布为$\{\varphi_1, \varphi_2\}$。根据电容系数的定义:

$$\varphi_1 = C_{11}^{-1}Q_1 + C_{12}^{-1}Q_2 = C_{11}^{-1}(-Q) + C_{12}^{-1}(+Q) \tag{3.3.10}$$

$$\varphi_2 = C_{22}^{-1}Q_2 + C_{21}^{-1}Q_1 = C_{22}^{-1}(+Q) + C_{21}^{-1}(-Q) \tag{3.3.11}$$

因此

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Q\left(C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1}\right) \tag{3.3.12}$$

与互电容的定义$\varphi_2 - \varphi_1 = C^{-1}Q$比较可知

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} \tag{3.3.13}$$

3.3.3 固有能和相互作用能

设有两个带电体l和2，他们各自独立存在时在空间激发的电场分别为$\vec{E}_1$ 和$\vec{E}_2$。将它们放在一起，当如下条件之一存在时:

1. 两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时；

2. 一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸。

两个带电体上的电荷分布不因两个它们之间的相对构型的改变而产生显著变化。则空间总的电场可近似写为$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$。因此，体系的总能量

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int \vec{E}^2 d\tau = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int E_1^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int E_2^2 d\tau}_{W_1+W_2} + \underbrace{\varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau}_{W_{int}} \tag{3.3.14}$$

由上式可以看出，系统的总能量由两部分组成。在这个条件下，上式右方

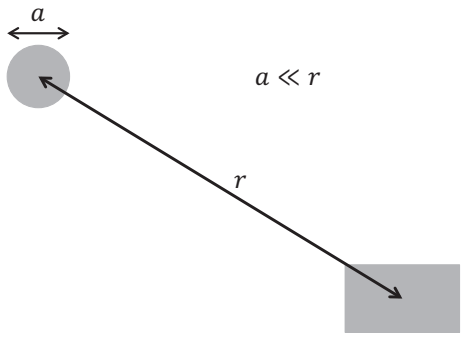


图 3.12

第一和第二项表示l或2带电体单独存在时的能量W_1和W_2，称为**固有能**；上式右方的第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差，称为**相互作用能**，可写成

$$W_{int} = \varepsilon\int \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 d\tau = \varepsilon\int \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 d\tau \tag{3.3.15}$$

其中φ_1, φ_2为两个带电体**单独存在时**的空间的电势分布，分别满足

$$\nabla^2\varphi_1 = -\rho_1/\varepsilon \qquad \nabla^2\varphi_2 = -\rho_2/\varepsilon \tag{3.3.16}$$

其中ρ_1, ρ_2为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$W_{int} = \varepsilon \int \nabla \cdot (\varphi_1 \nabla\varphi_2)\, d\tau - \varepsilon \int \varphi_1 \nabla^2\varphi_2 d\tau \tag{3.3.17}$$

$$= \int \varphi_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}) d\tau \tag{3.3.18}$$

在许多情况下带电体的自身的尺寸远小于它们之间的间距，φ_1在带电体2的所处的区间内近似为一常数，则

$$W_{12} \approx \varphi_1 \int_V \rho_2 d\tau = \varphi_1 q_2 \tag{3.3.19}$$

此即是相互作用能的表达式。显然3.3.19可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件（2））, 以及点电荷之间的相互作用能（满足条件（1））。

点电荷在外电场中

对一个点电荷q放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为$\varphi_{ext}(\vec{r})$，则这个体系的相互作用能为

$$W_{int} = q\varphi_{ext}(\vec{r}) \tag{3.3.20}$$

注：这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量$\Delta\vec{P} = q\vec{A}_{ext}(\vec{r})$相比较，均为带电体与外场共有的“相互作用能（动）量”。

电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为R的两个点电荷q_1和q_2的相互作用能

$$W_{int,12} = q_1\varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{3.3.21}$$

其中φ_2是电荷q_2在电荷q_1处的势。同理我们也可以把$W_{int,12}$表示为$q_2\varphi_1$，其中φ_2为电荷q_1在电荷q_2处产生的势，所以相互作用能可以写为

$$W_{int,12} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right) \tag{3.3.22}$$

因此，将上式推广到n个电荷组成的体系，相互作用能可表示为

$$W_{int} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{n} q_\alpha \phi_\alpha \tag{3.3.23}$$

其中ϕ_α为除电荷q_α之外所有其余电荷在电荷q_α处的势之和。

注:此处3.3.23的形式虽然与W的形式很类似，但ϕ_α的含义与总能中φ_α的含义不同——前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量严格为正。

3.4 静电体系的稳定性问题

我们前面研究了当导体位置确定时的静电问题。然而有几个问题并没有得到回答:

1. 静电体系处在给定的构型下是否稳定？

2. 稳定时体系中电荷分布及导体的构型应满足什么条件？

要回答这些问题，我们需要研究体系的能量，因为体系的稳定状态对应于能量取极小值时的状态。一个荷电导体系的总静电能为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\tau \tag{3.4.1}$$

一个体系的状态可以由电荷分布$\rho(\vec{r})$描述，也可以由电势分布$\varphi(\vec{r})$唯一描述，这两个量一一对应。对应于不同的电荷分布$\rho(\vec{r})$（假设可以给定，无论其稳定与否），体系具有不同的能量。因此能量W是$\rho(\vec{r})$或$\varphi(\vec{r})$的泛函：$W = W\left[\rho(\vec{r})\right]$。现在的问题是：

对应怎样的电荷分布（或电势分布），体系的能量为极小值？

问题进一步转化成：对给定的$\rho(\vec{r})$做一个虚变动$\rho(\vec{r}) \to \rho(\vec{r}) + \delta\rho(\vec{r})$，则要求

$$\frac{\delta W}{\delta \rho} = 0 \tag{3.4.2}$$

下面就根据3.4.2的要求讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动$\delta\rho(\vec{r})$有两类：一种是导体位置不动，电荷在导体上的再分布；另一种是由导电体的位置变动引起的（当然严格来说这个情况下会同时引起单个导体上的电荷再分布）。我们下面分别研究这两种情况，这两个问题的解答分部给出两个重要定理。

3.4.1 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况：假设每个导体都是不动的，但电荷在导体上可以自由再分布。显然，这种扰动必须满足如下约束条件：

$$\int \delta\rho_i d\tau = \delta Q_i = 0 \tag{3.4.3}$$

让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化

$$\delta W = W(\rho + \delta\rho) - W(\rho) = \varepsilon\int \vec{E}\cdot\delta\vec{E}d\tau = -\varepsilon\int \nabla\varphi\cdot\delta\vec{E}d\tau \tag{3.4.4}$$

其中$\delta\vec{E}$为$\delta\rho$所产生的电场，满足

$$\nabla \cdot \delta\vec{E} = \delta\rho/\varepsilon \tag{3.4.5}$$

对3.4.4进行分步积分可得

$$\delta W = -\varepsilon \int \nabla \cdot \left(\varphi \delta\vec{E}\right) d\tau + \varepsilon \int \varphi \nabla \cdot \delta\vec{E} d\tau \tag{3.4.6}$$

$$= \int \varphi \delta\rho d\tau = \sum_i \int \varphi \delta\rho_i d\tau \tag{3.4.7}$$

上式第一项可利用高斯定理变为面积分，其结果为零。由于约束3.4.3的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子λ_i，可得

$$0 = \delta W - \sum_i \lambda_i \delta Q_i \tag{3.4.8}$$

$$= \sum_i \int \varphi(\vec{r}_i)\delta\rho_i d\tau_i - \sum_i \lambda_i \int \delta\rho_i d\tau_i \tag{3.4.9}$$

$$= \sum_i \int \left[\varphi(\vec{r}_i) - \lambda_i\right] \delta\rho_i(\vec{r}) d\tau_i \tag{3.4.10}$$

因为$\delta\rho_i(\vec{r})$相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i) = \lambda_i \tag{3.4.11}$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，能量到达极小值，体系处于平衡状态。（思考：严格来说还需证明$\delta^2 W/\delta\rho^2 > 0$，你能否证明？）这就是汤姆孙定理。我们在前面讨论讲导体静电平衡条件时曾通过物理的Argument得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极小这一平衡判据对这个结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个条件：

1. 导体上的电荷不会离开导体；

2. 每个导体的位置保持不变。

对条件1我们已经知道有非静电来源的表面束缚能（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件2放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。

下面的问题是：

什么样的构型是体系的稳定状态呢？

3.4.2 恩肖定理

在讨论由于导体构型的变化而产生的能量改变时，我们做如下假设:

1. “绝热近似”——即带电体的运动速度很慢使得每个时刻上面的电荷分布都有足够的时间达到平衡（即称为等势体）。
2. 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能（因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

$$W_{int} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \phi_\alpha \tag{3.4.12}$$

W_{int}是各个导体位置$\{\vec{r}_\alpha\}$的函数：$W_{int}(\{\vec{r}_\alpha\})$，其具有极小值的充要条件是：$W_{int}$对所有电荷的坐标的一阶微商必须为零，而二阶微商必须恒大于零。简单起见，这里我们只考虑其中一个导体的位置发生了变化$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}_\alpha$，则变分后第一个条件要求

$$\nabla_\alpha W_{int} = 0 \Rightarrow \nabla\phi_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{E}_\alpha = 0 \tag{3.4.13}$$

亦即，在每个导体所在处，由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为0。

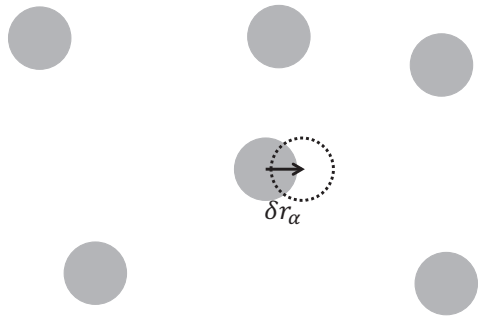


图 3.13

这一条件依赖于具体的导体构型。假设这一个条件能够实现，我们进一步考察这种状态的稳定性问题。让我们检查W在某一个“平衡位置”附近对其中一个导体位置做相应扰动$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$，保留到2阶，有

$$\delta^2 W = \frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \tag{3.4.14}$$

$$= \frac{q_\alpha}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \tag{3.4.15}$$

$$= \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j \tag{3.4.16}$$

其中$B_{ij} = \dfrac{q_\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$为一个对称矩阵。（这里少一个1/2，原因是我们计算$\vec{r}_\alpha$的变化时，不仅考虑其它导体对第α个导体的电势变化，还要考虑第α个导体在其它带电体处的电势变化，根据对称性，这两项贡献相等）。要使得体系稳定，$\delta^2 W$应当针对任意的变动恒为正！单独从3.4.16式中得不出任何结论，因为不同的方向上的虚位移耦合在一起。可以将B矩阵对角化，得到一系列本征值b_i，则有

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,2,3} b_i \left(d\tilde{r}_\alpha^i\right)^2 \tag{3.4.17}$$

其中$d\tilde{r}_\alpha^i$对应这一本征值的本征矢量，可以理解为这些扰动的“简正”模式。要得到稳定状态，则要求所有可能的扰动均导致能量上升，

从3.4.17中可以看出我们要所有的本征值均大于0：

$$b_i > 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.4.18}$$

另一方面，考虑ϕ_α是除q_α之外所有其他电荷在第α个电荷处产生的势，故根据Poission方程（因为$\vec{r}_\alpha$处没有电荷）

$$\nabla_\alpha^2 \phi_\alpha = \sum_i \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^i} \tag{3.4.19}$$

所以，根据$B_{i,j}$矩阵的定义，我们有

$$2 \sum_{i=1,2,3} b_i = 2Tr\left(B_{i,j}\right) = q_\alpha \nabla_\alpha^2 \phi_\alpha = 0 \tag{3.4.20}$$

很显然，3.4.18与3.4.20相互矛盾！故W_{int}不可能有极小值，只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与。如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在。为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力。

注：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足$\nabla \times \vec{E} = 0$的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。

3.5 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用力，这种静电力作用在导体的表面，因为电荷在静电平衡时只堆积在导体表面。我们可以从两个不同的角度进行计算。

3.5.1 方法1：Maxwell张量

在上一章，我们已经详细介绍了如何计算一个放置于电磁场中的物体受力问题。在定态（不随时间变化）或者时谐场条件下，物体的受力就是Maxwell张量的面积分：

$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T} \tag{3.5.1}$$

因为导体内的场$\vec{E}_{内} = 0$，故只有导体的外表面受力。单位面积所受的力为

$$\vec{F}_S = -\vec{e}_n \cdot \overleftrightarrow{T} \tag{3.5.2}$$

静电条件下，真空中的麦克斯韦张力张量为

$$\overleftrightarrow{T} = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} E^2 \overleftrightarrow{I} - \vec{E}\vec{E} \right) \tag{3.5.3}$$

导体外表面的场只有法向分量，故

$$\vec{F}_S = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \vec{e}_n \tag{3.5.4}$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度，方向指向导体外法线方向，也就是说，导体受到一种“负压力”。

注：你也许会问：这是电场作用到自由电荷上的力啊！不一定就是作用到导体上的力！其实，导体中的自由电荷在静电平衡时全都集中在导体表面，由于有非静电的束缚力才使得电荷不能飞离导体。因而场对自由电荷的作用力通过非静电来源的平衡力转嫁到导体上。换一句话说，把导体和其中的电荷看成一个整体，则外界对电荷的力就等于对整个导体的作用力。

导体表面的场也可用面电荷表示，即

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_n \tag{3.5.5}$$

代入3.5.4式可得

$$\vec{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \tag{3.5.6}$$

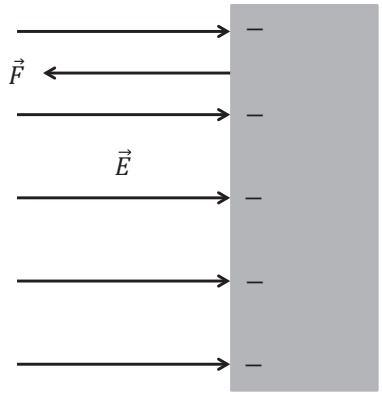


图 3.14

3.5.2 方法2：直接计算电荷受力

如前所述，导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力，所以我们可以直接用洛伦兹力来计算

$$\vec{F} = \int \rho\vec{E}d\tau \tag{3.5.7}$$

然而直接利用上式计算有困难，因为理想的导体模型为导体的电荷分布为面电荷分布：$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}_\parallel)\delta(z)$，然而电场在导体的内外表面不连续：$\vec{E}_+ = \sigma/\varepsilon_0, \vec{E}_- = 0$。代入3.5.7时，有

$$\vec{F} = \int \sigma(\vec{r}_\parallel)\delta(z)\vec{E}(\vec{r}_\parallel, z)d\vec{r}_\parallel dz \tag{3.5.8}$$

此时对z的积分不容易进行，因为将$z = 0$代入E的表达式时我们不知道该取$\vec{E}_+$还是$\vec{E}_-$。

这个问题的产生是因为其实导体上的电荷本来就非完全分布于表面上的，面电荷分布只是我们对导体的一个理想化的模型处理。真实情况下，电荷是分布在一个非常薄的表面层内的。模型计算表明，这个过渡区约为$10^{-10}m$。让我们取最简单的情况，假设电荷均匀地分布在这个厚度为l的过渡层中，亦即

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & z < -l \\ \rho_0 & -l < z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases} \tag{3.5.9}$$

利用Gauss定理可容易计算出电场分布，即

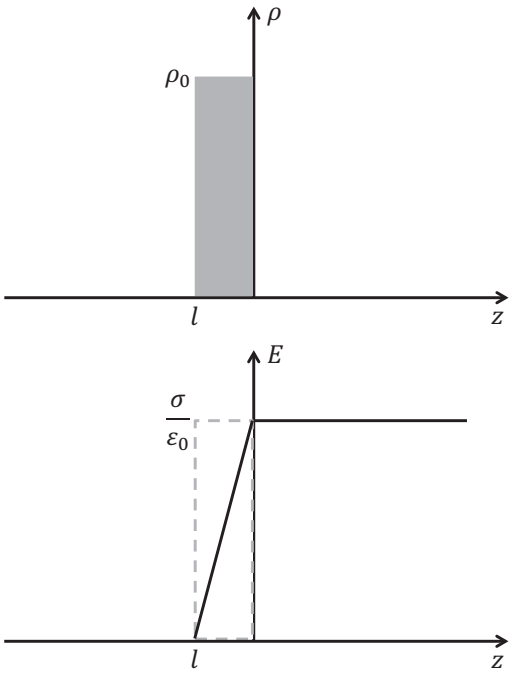


图 3.15

$$E=\begin{cases}0 & z<-l\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(z+l) & -l<z<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 l & z>0\end{cases} \tag{3.5.10}$$

则导体表面所受的力为

$$\vec{F}=\int dS\int_{-l}^{0}\rho_0\vec{E}dz \tag{3.5.11}$$

$$=\int dS\int_{-l}^{0}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0^2(z+l)\vec{e}_n dz \tag{3.5.12}$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n dS \tag{3.5.13}$$

当此过渡层非常小，而我们又不关心过渡层内部的电场时，过渡层的电荷可以等价成面电荷分布:

$$\sigma=\lim_{l\to 0}(\rho l) \tag{3.5.14}$$

所以，导体表面单位面积所受的力为

$$\vec{F}_S=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \tag{3.5.15}$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致。

Tips：这个世界上本来没有奇性，人们为了计算以及表述的方便引入了奇异的物理量（如面电荷分布），但未必给你强调这种方便的代价及适用范围。我们在学习的过程中一定要深入掌握原理的来龙去脉，才能对问题理解的更加透彻，在遇到新问题时不会上当或是手足无措。另外，05级物理系的一位同学曾经证明，上述结论在电荷分布是任意幂次（未必是线性）的情况下都成立。

第四章

静电学II - 电介质静电学

上一章中我们研究了静电学的第一部分——与导体相关的静电问题。在那里，我们没有真正求解电势的方程，而是根据导体具有自由电荷这一特点研究了与导体相关的一些静电基本定理——汤姆逊定理、恩肖定理、格林互易定理，以及一些基本量的行为——如相互作用能、导体受力、电容系数等等。但要具体计算出这些物理量，我们仍需知晓空间的电势分布$\varphi(\vec{r})$。在这一章中，我们转而研究电介质中的静电场的行为，目的就是计算$\varphi(\vec{r})$。与导体不同，电介质中的电场不为0，电场的标势由方程

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\vec{r})\nabla\varphi] = -\rho_f(\vec{r}) \tag{4.0.1}$$

决定，其中ε可以是位置的函数（针对非均匀介质的情形）。在一块均匀介质内部，ε是常数，故上式变为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_f \tag{4.0.2}$$

为大家熟知的泊松方程。

电介质中电场问题就转化成在合适的边界条件下解上述Poisson方程。这些边界条件包括我们上一章讨论过的**介质/导体表面边界条件**，以及我

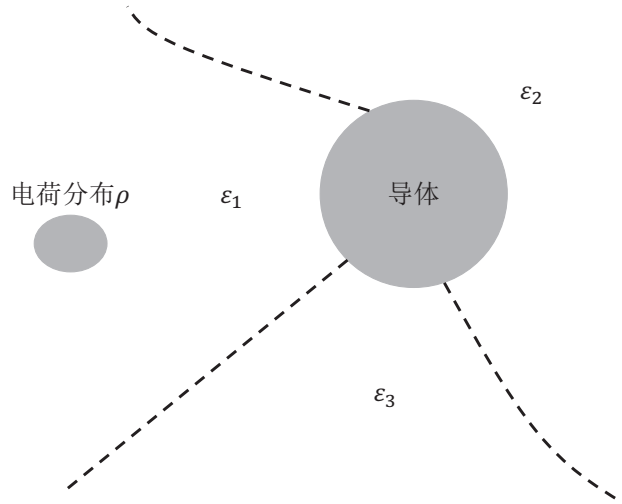


图 4.1

们下面要介绍的**介质/介质边界条件**。

4.1 电介质边界条件

由Maxwell方程我们已导出场在两个介质分界面的边值关系

$$\vec{e}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \sigma_f \tag{4.1.1}$$

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \tag{4.1.2}$$

其中$\vec{e}_n$为垂直于界面上2指向1的单位矢量，而t指的是界面上两个独立方向矢量。这里需要强调指出的是σ_f是自由电荷面密度，它们是外加的原本不属于介质的源电荷，而且分布在介质分界面的一个薄层里所以被当作奇性的面电荷分布处理（不关心过渡层中的电场）。根据$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\varphi$，容易由4.1.1导出

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\sigma_f \tag{4.1.3}$$

再将$\vec{E}=-\nabla\varphi$带入4.1.2可得

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_\parallel}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_\parallel}\Rightarrow\frac{\partial\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}{\partial n_\parallel}=0 \tag{4.1.4}$$

$$\Rightarrow\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\Big|_{surface}=const. \tag{4.1.5}$$

其中$n_\parallel$为界面上的两个独立方向，而$const.$是个与界面上位置无关的一个常数。亦即：在两个介质的界面上，左右两边的标势值最多只差一个对此界面通用的常数值。下面来考虑这个常数。根据势的定义：

$$\varphi_2-\varphi_1=\int_2^1\vec{E}\cdot d\vec{l}\xrightarrow{h\to0}E_{2,n}h/2+E_{1,n}h/2=\left(\frac{E_{2,n}+E_{1,n}}{2}\right)h \tag{4.1.6}$$

其中，h为1，2两个点之间的距离，而$E_{2,n}$, $E_{1,n}$为界面两端的垂直电场分量。在$h\to0$时，显然4.1.6式只有在电场存在奇性（$E_{1,n}\to\infty$, $E_{2,n}\to\infty$）的时候才不为0！在所有我们考虑的情况下，电场都不会发散——即使有面电荷存在，两边的电场不会发散（尽管可以不连续），因此上面右端$=0$，即

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{4.1.7}$$

4.1.3及4.1.7就是关于势的边界条件。显然，边界条件4.1.7直接导致关于场的边界条件4.1.2。

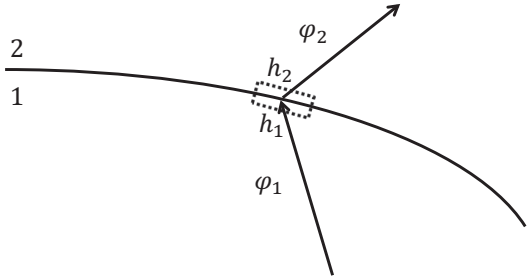


图 4.2

注：关于电势条件4.1.7，唯一的例外是点电荷，因为点电荷的场在原点是发散的，的确$\varphi|_{0^+}$, $\varphi|_{0^-}$是不连续的。只要将点电荷描述成一个带电

为q的半径为a的小球，则一切问题均解决了。这再一次显示了点电荷只是一个数学模型而已。

4.2 唯一性定理

有了边界条件，原则上可以解Poisson方程以得到所有关于场的信息。在介绍静电方程的解的具体方法之前，首先介绍一个重要的定理——**唯一性定理**。

定理：如果静电体系内存在电荷分布$\rho(\vec{r})$和电介质分布$\varepsilon(\vec{r})$，且关系式$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$成立，则体系的电场由边界条件（即边界上的$\varphi$或$\vec{e}_n\cdot\vec{D}$）唯一确定——即，不可能存在两组不同的电场解，都满足同样的边界条件（参照4.1节上面的图）。

证明：我们利用反证法证明。设对同一个体系存在有两个解φ'和φ'', $\vec{E}'=-\nabla\varphi'$, $\vec{E}''=-\nabla\varphi''$；$\vec{D}'=\varepsilon\vec{E}'$, $\vec{D}''=\varepsilon\vec{E}''$，下面我们将证明它们其实是同样的：

$$\vec{D}'=\vec{D}'' \qquad \vec{E}'=\vec{E}'' \tag{4.2.1}$$

根据定义，这两个场都要满足同样的边界条件，即在边界处有

$$\varphi'=\varphi'' \quad \text{或者} \quad \vec{D}'\cdot\vec{e}_n=\vec{D}''\cdot\vec{e}_n \tag{4.2.2}$$

因此定义一个函数，$\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')\left(\vec{D}'-\vec{D}''\right)$，其在边界上的积分一定为0：

$$0=\oint_S(\varphi'-\varphi'')\left(\vec{D}'-\vec{D}''\right)\cdot d\vec{S} \tag{4.2.3}$$

$$=\oint\vec{Z}(\vec{r})\cdot d\vec{S} \tag{4.2.4}$$

$$=\int_V\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})d\tau \tag{4.2.5}$$

检查对$\vec{Z}(\vec{r})$的散度，发现

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=(\varphi'-\varphi'')\left(\nabla\cdot\vec{D}'-\nabla\cdot\vec{D}''\right)+(\nabla\varphi'-\nabla\varphi'')\cdot\left(\vec{D}'-\vec{D}''\right) \quad (4.2.6)$$

由于讨论的是同一个体系，必有$\nabla\cdot\vec{D}'=\nabla\cdot\vec{D}''=\rho$，故

$$\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})=-\left(\vec{E}'-\vec{E}''\right)\cdot\left(\vec{D}'-\vec{D}''\right) \quad (4.2.7)$$

将上式带入4.2.5可得

$$\int_V\left(\vec{E}'-\vec{E}''\right)\cdot\left(\vec{D}'-\vec{D}''\right)d\tau=-\int_V\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r})d\tau=0 \quad (4.2.8)$$

根据已知条件

$$\vec{D}'=\varepsilon\vec{E}' \qquad \vec{D}''=\varepsilon\vec{E}'' \quad (4.2.9)$$

带入上式可得

$$\int_V\varepsilon(\vec{r})\left|\vec{E}'-\vec{E}''\right|^2d\tau=0 \quad (4.2.10)$$

而由于$\varepsilon\geq1$，所以有

$$\vec{E}'=\vec{E}'' \quad (4.2.11)$$

两个解相同，静电场是唯一的。由$\vec{E}=-\nabla\varphi$可知，电势φ'与φ''之间最多差一个任意常数。**我们对此作一些讨论：**

1. 在某一些介质中$\vec{D}$和$\vec{E}$之间并不一定是线性的，一般说来$\vec{D}$是$\vec{E}$的函数。这时，只要$\vec{D}$是$\vec{E}$的单值单调递增函数，则由4.2.8式可看出，定理仍成立。对铁电介质来说，上述唯一性定理不成立，因为有电滞回线存在，$\vec{D}$和$\vec{E}$不再是单值的。的确，此时对应同样的边界条件可以不同的解。物理上，这是因为铁电介质中的状态不仅与边界条件有关，还与历史有关。

2. 唯一性定理对静电学的重要性在于：只要我们得到了一个解，其满足Poisson方程以及相应的边界条件，它一定就是问题的严格解。因此，有些时候，我们根据物理直觉可以猜出一些问题的解，其正确性有唯一性定理保证。

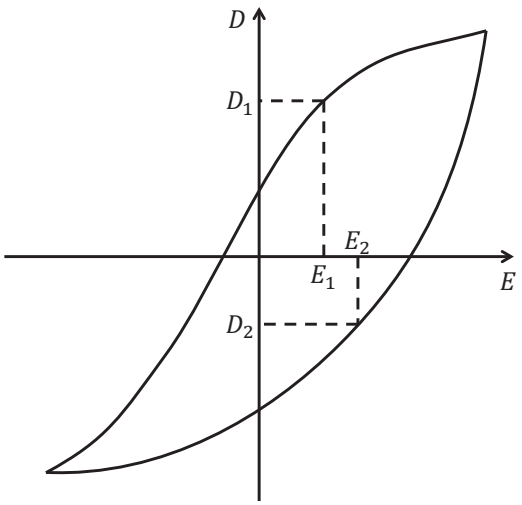


图 4.3

————以下为选读内容————

静电问题原则上就是在一定的边界条件下解Poisson方程，这变成了一个纯粹的数学问题。下面我们将介绍两种解决方法，它们仅仅适用于一些特殊的具有高对称性的问题。在一般情况下，电荷分布、边界形状都是任意的，此时解决问题必须要用到计算机及合适的数值计算方法。目前有许多成功的计算方法-其中之一就是“有限元方法”，现成的软件为COMSOL。这个方法的精髓就是将任意空间分成一个个的小区间，分而治之。还有一些其他的方法，如“边界元”方法等。原则上讲，解析方法和数值方法对我们都同要重要，前者给我们许多灵感和insight但可解的东西有限；后者可以解决很多问题，而且可以给我们许多直观的图像，但如果太依赖于它，又有可能失去许多严格的结论以及物理的嗅觉。二者应当结合起来，相得益彰。

————以上为选读内容————

4.3 镜像法

镜象法是解静电边值问题的一种特殊解法，这种解法的基本精神是将静电问题中边界对场的影响用边界外部**虚设的像电荷**代替，特别适合研究空间内有源电荷的情况。原则上讲，区域内的电势是由区域内的电荷和处在边界处的电荷（假设边界外的空间为导体，没有电荷）共同决定的：

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\sigma_b(\vec{r}')ds'}{R} \tag{4.3.1}$$

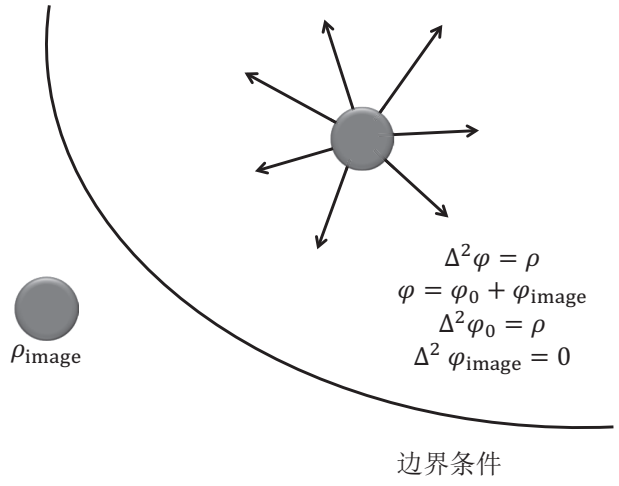


图 4.4

区域内的电荷分布已知，因此电势容易计算。但边界处的电荷密度$\sigma_b(\vec{r}')$通常是未知数——对设定电势的情形电荷本来就不确定；对孤立导体情形我们只知道总电荷，不知道电荷分布，这给我们解决问题带来了不便。幸运的是，在某些特定情形下，后一部分的影响可以等价于处于区域外部的一些虚拟电荷对区域内的影响，亦即

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{image} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho_{image}(\vec{r}'')d\tau''}{R} \tag{4.3.2}$$

其中后一个积分区域在考虑的区域外。因像电荷放在边界的外部，故有

$$\nabla^2\varphi_{image} \equiv 0 \tag{4.3.3}$$

因此我们仍有Poisson方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon \tag{4.3.4}$$

因此只要调整像电荷的位置和大小，使它总电势φ满足所给的边界条件，那么我们便找到了问题的解。这种解法的正确性可由唯一性定理保证。下面我们将借助一个典型例题来说明这种问题的解法。

[**例1**] 设一点电荷附近有一接地导体球面，求空间电势分布。

解： 如图所示，取球心为坐标原点，球心到点电荷q的方向为x轴。设q的坐标为$(d,0,0)$，球半径为R，球内的电势为零，这是显然的，故只要讨论球外空间的电势即可。

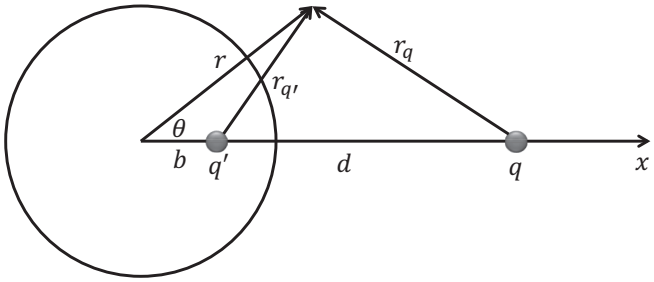


图 4.5

球外空间的电势所满足的方程和边界条件是

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x-d,y,z) \\ \varphi\big|_{r=a} = 0 \\ \varphi\big|_{r=\infty} = 0 \end{cases} \tag{4.3.5}$$

球外空间的电势由两部分组成，即点电荷q所产生的电势和球面感应电荷所产生的电势。根据镜像法的精神，可以试图找到界面外的一个像电荷来等价这部分贡献。根据问题对称性，容易明白此像电荷（如果存在的话）应在球内$(b,0,0)$处，设其电量为$-q'$。因此，我们得到球外空间的试解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}}\right) \tag{4.3.6}$$

其中

$$r_q = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta} \tag{4.3.7}$$

$$r'_q = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta} \tag{4.3.8}$$

下面的工作是看能否确定适当的b和q'，使试解满足边界条件（Poisson方程自动满足，这是镜像法的一大优点！）。

无穷远处的边界条件自动满足，只需考虑势在球面$(r = R)$上为零的边界条件。为此，把条件$\varphi\big|_{r=R} = 0$代人试解，转换成球坐标表示，则有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta}} = 0 \tag{4.3.9}$$

即

$$q^2\left(b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta\right) = q'^2\left(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta\right) \tag{4.3.10}$$

因为对任意θ值，上式都应成立，故有

$$\begin{cases} q^2\left(b^2 + R^2\right) = q'^2\left(d^2 + R^2\right) \\ q^2 b = q'^2 d \end{cases} \tag{4.3.11}$$

这有两组解

$$\begin{cases} b = d \\ q' = q \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{R^2}{d} \\ q' = \dfrac{R}{d}q \end{cases} \tag{4.3.12}$$

解（$b=d,\ q'=q$）不符合要求（像电荷不应在源电荷的空间内），只有解（$b=\dfrac{R^2}{d},\ q'=\dfrac{R}{d}q$）满足要求。于是得到问题的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}-\dfrac{\dfrac{R}{d}q}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{R^2}{d}\right)^2-2r\dfrac{R^2}{d}\cos\theta}} & r>R\\ 0 & r<R\end{cases}\tag{4.3.13}$$

知道了电势的分布便可求出球面上的电荷面密度

$$\sigma=\varepsilon_0E_r=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R}\tag{4.3.14}$$

$$=-\frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{R}{d}\right)\frac{1-\dfrac{R^2}{d^2}}{\left(1+\dfrac{R^2}{d^2}-2\dfrac{R}{d}\cos\theta\right)^{3/2}}\tag{4.3.15}$$

$$=-\frac{q'}{4\pi R^2}F(\theta)\tag{4.3.16}$$

其中

$$F(\theta)=\frac{1-\dfrac{R^2}{d^2}}{\left(1+\dfrac{R^2}{d^2}-2\dfrac{R}{d}\cos\theta\right)^{3/2}}\tag{4.3.17}$$

为一个角分布函数。

在两个极限条件下考虑面点荷（电场）分布：

1. $R/d\to0$，此时源电荷离导体球很远，对整个导体球来讲近似为均匀电场。此时，角分布为$F(\theta)=1+3\dfrac{R}{d}\cos\theta$。这意味着导体的面电荷基本为均匀分布，但有一个因电场而产生与角度相关的调制（其实这点调制正是形成了一个偶极子，后面会讲到）；

2. $R/d\to1$，此时源电荷离导体球很近，其看到的导体表面基本上是一

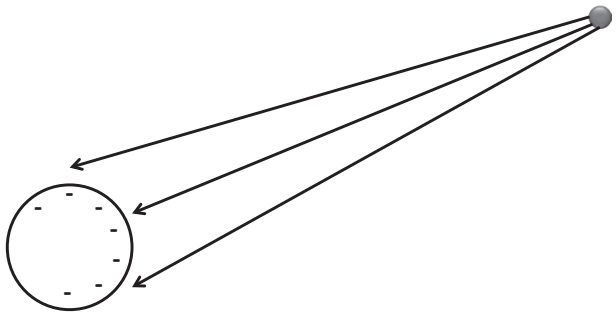


图 4.6

个无限大平面。的确

$$F(\theta) = \begin{cases} \infty & \cos\theta \to 1 \\ 0 & \cos\theta \to -1 \end{cases} \tag{4.3.18}$$

感应电荷只出现在靠近源电荷的一边。

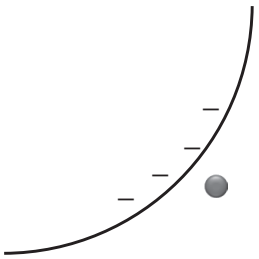


图 4.7

然而无论怎样，总感应电荷为

$$\int \sigma dS = \int \sigma(\theta) 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{R}{d} q = -q' \tag{4.3.19}$$

即像电荷的大小等于导体面上的感应电荷。注意：这个结果与之前利用Green互易定理得到的结论一致。

导体球所受的静电力等于电场作用到导体球上的感应电荷的作用力。导体表面单位面积受的作用力为

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{r} \tag{4.3.20}$$

导体球受的总力可以由积分求得。根据对称性，只有x分量非0。经过一个繁复的积分可得

$$F = \oint \vec{f}\cdot\hat{x}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{R^2}\left(\frac{R^3}{d^3}\right)\Big/\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2 \tag{4.3.21}$$

简单计算可得

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq'/(d-b)^2 \tag{4.3.22}$$

这个力正好是点电荷q对像电荷q'的作用力；根据牛顿第3定律，点电荷受到导体上像电荷等量反向的作用力，称为“镜像力”。

利用上面得到的结果，我们可以引申出来许多题目，并得到解答。

1. 当$R/d \to 1$时，设$d = R+\delta,\ \delta \to 0$，有

$$b = R^2/(R+\delta) \approx R-\delta \tag{4.3.23}$$

$$q' = qR/(R+d) \approx q(1-d/R) \approx q \tag{4.3.24}$$

2. **导体球接电势V_0**

   此时边界条件为：$\varphi\big|_{r=R} = V_0$是已知常数。为了满足此边界条件，应在原解（$\varphi\big|_{r=R} = 0$）的基础上再加上镜像电荷（处于导体内部），其作用是在导体表面上产生一个常数电势。简单的分析发现此像电荷应处于导体球中心，电量为$q'' = 4\pi\varepsilon_0 V_0 R$。故此时的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}+\frac{q''}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_d}-\frac{q'}{r_b}\right)+\frac{V_0R}{r} \tag{4.3.25}$$

3. **导体球为孤立导体带电Q**

这种情况的边界条件为$\varphi\big|_{r=R}$ =常数(未知)，以及

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \tag{4.3.26}$$

根据与上题相同的Argument，必须加上一个放在球心电量为q''的像电荷。于是，球外电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}} + \frac{q''}{r}\right) \tag{4.3.27}$$

此时计算球面上的电荷可知

$$Q = -\varepsilon_0 \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -q' + q'' \Rightarrow q'' = Q + q' \tag{4.3.28}$$

问题得解。

4. **点电荷q在导体球壳内，距球心d处**

这类问题要复杂许多，先考虑一个简单的情形：**球壳接地**。

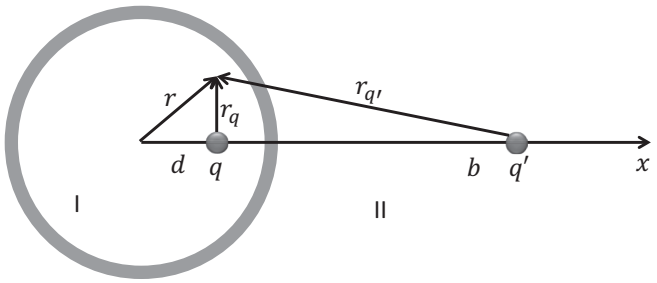


图 4.8

此时球内（I）外（II）区域内都可以存在电场及电势，其分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = -q\delta(x-d,y,z)/\varepsilon_0 \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0 \end{cases} \tag{4.3.29}$$

而边界条件为

$$\begin{cases} \varphi_I = \varphi_{II} = 0 & r = R \\ \varphi_{II} \to 0 & r \to \infty \end{cases} \tag{4.3.30}$$

先考虑球内的电势。根据镜像法的精神，球内的电势应当是由真实电荷q和球外的“像电荷”$-q'$的叠加：

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}}\right) \tag{4.3.31}$$

与电荷在球（壳）外面的情形类似，可以解得$q' = q\dfrac{R}{d}, b = \dfrac{R^2}{d}$。考虑球壳外的电势，注意到此区域没有真实电荷，$r = R$与$r \to \infty$的边界上电势均为0，因此，满足此边界条件的解只有

$$\varphi_{II} = 0 \tag{4.3.32}$$

接下来考虑一个复杂一点的情形，假设球壳的电势设为V_0，因此边条（1）改为$\varphi_I = \varphi_{II} = V_0, r = R$。此时原来得到的解不能满足边界条件（1），需再设“像电荷”才行。简单的分析发现任何处于II区的像电荷都不能满足条件（1），又不能在原点设像电荷（因处于考察区），怎么办呢？

解决的办法是注意到$\varphi = V_0$本身就是Poisson方程的解。在以前电荷放置于球外的问题中我们不用这个解，因为那时考察区域在球外，这个解不能满足边界条件$\varphi \to 0, r \to \infty$。但现在考察区在球内，不需要满足$\varphi \to 0, r \to \infty$这个边界条件，故$\varphi = V_0$可以采用。因此，I区电势的最终解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_q} - \frac{q'}{r_{q'}}\right) + V_0 \tag{4.3.33}$$

其满足所有的边界条件同时满足Poisson方程，故唯一性定理保证其正确性。下面考虑II区中的电势。这个区域内无源，电势应当是某些处于其它区域的像电荷产生，考虑修好后的边条（1）：$\varphi_I = \varphi_{II} =$

V_0, $r = R$，显然“像电荷”为处于原点（I区）的电量为$4\pi\varepsilon_0 V_0 R$的点电荷。因此，II区电势：

$$\varphi_{II} = \frac{V_0 R}{r} \tag{4.3.34}$$

4.3.33与4.3.34就是问题的解，满足所有的方程以及边条。问题虽然得解，但物理图像不清楚：比如此时导体球壳上带电荷为多少？为什么I区的电场与外部条件无关？要搞清楚这些问题，必须意识到事实上导体球壳不是无限薄的，而是一个具有有限厚度（尽管很薄）的一个金属壳层，其具有内外两个界面。静电平衡时电荷分布在两个界面上，球壳内部的电荷密度为0。内表面上的电荷密度可以容易由

$$\sigma_{in} = -\varepsilon_0 E_{in} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \tag{4.3.35}$$

$$= -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{1 - (d/R)^2}{\left[1 + (d/R)^2 - 2\,(d/R)\cos\theta\right]^{3/2}} \tag{4.3.36}$$

$$= -\frac{q}{4\pi R^2} \tilde{F}(\theta) \tag{4.3.37}$$

求出，其总电荷可以由上式积分求出，但更容易地，可由Gauss定理求出：

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{in} + q \Rightarrow q_{in} = -q \tag{4.3.38}$$

而外表面上电荷均匀分布，总电量为

$$q_{out} = \oint \sigma_{out} \cdot dS = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 \tag{4.3.39}$$

因此物理图像是：

(a) 球内的电荷在球壳内表面感应出等量异号的电荷即达到平衡，再外加任何电荷都不会跑到内表面而只会呆在外表面。

(b) 这些均匀分布在外表面的电荷起的作用不过是改变整个球壳的电势，但对内电场没有丝毫影响。

(c) σ_{in}对应于II区处于b处的“像电荷”，而σ_{out}对应于贡献$\varphi = V_0$的像电荷（对应于一个球对称的势的“像电荷”也应当对称分布）。

4.4 本征函数展开法

本节介绍的是静电学的一个相当普适的方法，大家学习时应仔细体会。这种方法其实可以推广到求解其他许多类似的问题（如电磁波的散射）。以静电问题为例，在很多问题中，我们求解的空间中无源，但其处在某一种外场中，这种外场通常可以以边界条件的形式反映出来。此时空间中电势满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{4.4.1}$$

根据不同的边界形状（空间的对称性），我们可以选取适当的坐标系，用分离变量法求解拉普拉斯方程的通解。假设我们得到了这组解$\{\varphi_n, n = 1, 2, \cdots\}$，它们通常是**正交完备**的：$\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{n,m}$。根据**完备性**，我们一定可以将$\varphi$展开成这组本征态的线性叠加：

$$\varphi = \sum C_n\varphi_n \tag{4.4.2}$$

4.4.2一定是4.4.1的解，但不一定满足所要求的边界条件。必须根据边界条件及本征函数的正交性来确定展开系数C_n。比如通常的边界条件是

$$\varphi\big|_{boundary} = \varphi_0(\xi) \tag{4.4.3}$$

其中ξ是界面上的位置变量。根据本征函数的正交性，我们很容易得到展开系数的表达式：

$$C_n = \langle\varphi_n|\varphi_0\rangle = \int \varphi_n(\xi)\varphi_0(\xi)d\xi \tag{4.4.4}$$

下面总结一下不同坐标系下的本征函数及它们的正交性。我们应当根据所面临的问题的对称性选择合适的通解形式进行求解。

4.4.1 轴对称的球坐标系问题（与变量ϕ无关）

对此类问题，Laplace方程的本征解为$r^l P_l(\cos\theta)$, $r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$。因此通解可以一般写成：

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \tag{4.4.5}$$

径向波函数r^l在$r=0$处收敛，$r^{-(l+1)}$在$r\to\infty$时收敛。$P_l(x)$为Legendre多项式，低阶的几项为

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2-1) \\ \cdots \end{cases} \tag{4.4.6}$$

本征函数之间满足如下正交关系

$$\int P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)d\cos\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \tag{4.4.7}$$

4.4.2 与z无关的柱对称问题

对此类问题，Laplace方程的本征解为$\rho^{\pm n}e^{\pm in\phi}$, $ln\rho$, 1。因此其通解为

$$\varphi = A_0 + B_0\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}\right)\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\sin(n\phi) \tag{4.4.8}$$

本征函数之间的正交性为

$$\int \cos(n\phi)\sin(n\phi)d\phi = 0 \tag{4.4.9}$$

$$\int \cos(n\phi)\cos(n'\phi)d\phi = \int \cos(n\phi)\sin(n'\phi)d\phi = 0 \qquad n\neq n' \tag{4.4.10}$$

下面，我们通过几个实例来介绍这种方法。为增强信心，先考虑一个简单的情形。

[**例2**] 一半径为R的接地导体球置于一均匀外场$\vec{E}_0$中，求空间场的分布。

解：如图所示，取$\vec{E}_0$方向为z轴，这是一个绕z轴旋转对称的问题。球外空间没有电荷，电势在无穷远处趋向于均匀电场的电势，总的来说，电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \\ \varphi = 0 & r = R \\ \varphi \to -E_0 r\cos\theta & r \to \infty \end{cases} \tag{4.4.11}$$

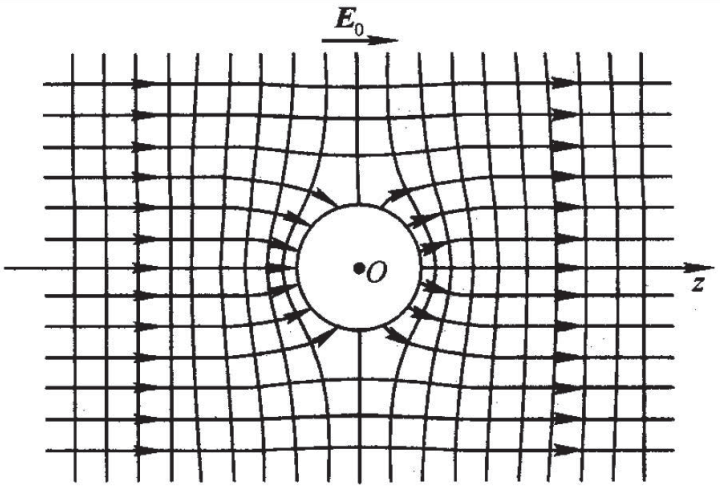


图 4.9

这个问题的通解即为

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \tag{4.4.12}$$

通解中有无穷多常数，虽然看上去很难确定这些常数，其实仔细分析之后发现这些常数均可由问题的边界条件确定。将试解带入边条（2），发现

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \xrightarrow{r\to\infty} -E_0 r\cos\theta \tag{4.4.13}$$

根据$P_l(\cos\theta)$函数的**相互正交性**，我们可以分别比较4.4.13式左右两边中不同$P_l(\cos\theta)$函数的系数，使得它们相等。因此可得

$$A_1 = -E_0 \qquad A_l = 0 \qquad l = 0, 2, 3, \cdots \tag{4.4.14}$$

再将试解带入边条（1），得到

$$\left(-E_0 R + \frac{B_1}{R^2}\right)\cos\theta + \sum_{l\neq 1}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = 0 \tag{4.4.15}$$

再次利用$P_l(\cos\theta)$函数的**相互正交性**，不同$P_l(\cos\theta)$的参数应当分别为0，故

$$B_1 = E_0 R^3 \qquad B_l = 0 \qquad l = 0, 2, 3, \cdots \tag{4.4.16}$$

将4.4.14与4.4.16代入试解，我们得到最终的结果

$$\varphi = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta \tag{4.4.17}$$

至此，我们已完成了这个问题的求解。注意到r^{-2}依赖关系是偶极子势的特征，可将4.4.17改为

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{4.4.18}$$

其中

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \tag{4.4.19}$$

我们看到此时除了外加的均匀电场的贡献外，还有一个偶极子的电场. 这是由于导体球在电场的作用下正电荷推积在一侧，而负电荷推积在电场的另一侧，因此对外面的作用等效为一个偶极子，其偶极炬正比于外加电场以及球的体积！

讨论：

1. 我们可以认为偶极子的场就是这个体系对外场的散射场。外场是均匀电场，其只具有$l=1$的项（$-E_0 r\cos\theta$ ），因此体系的响应也就只有$l=1$项，所以只产生偶极子。若外场不是均匀场，而是具有高l的项，则体系的响应也一定有高l项。这恰恰是唯一性定理的一个体现——边条唯一确定解的形式，这里边条的对称性决定了解的对称性。

2. 我们之前研究导体球外有点电荷的问题时，曾经考虑过当点电荷离导体球非常远的情形。那时我们的结论是导体球在外场下的电荷分布是形成了一个偶极子。其实当电荷离目标很远时，其电场就是近似为均匀场！将其与现在我们考虑的情况建立一个联系将是非常有意思的事情。

注：人们会问边界条件$\varphi\to -E_0 r\cos\theta,\ r\to\infty$为什么不能加上一个常数电势$\varphi_0$？若加上的话，这个常数是什么意思？其实无限大空间均匀电场的问题从来不是一个“well-defined”的问题。因为我们通常取无限远处为电势零点，但无限区域中的均匀电场要求无限远处有电荷以及电势不是0。真正的实验上实现均匀场只能在有限空间，比如用平板电容器，此时问题是Well-defined，但求解这样一个问题就比现在我们考虑的复杂许多，因为极板会引入无穷多镜像电荷…。因此我们现在考虑的是真实情况的一种理想化，是实验上不能实现的。在我们今后的学习中，我们还要考虑这种理想情形，因为这类问题可以解析求解且给我们许多insight。需要说明的是，此时我们总是假设φ_0为0，相当于我们选择了坐标原点为电势零点。

[**例3**] 半径为R、介电常数为ε_2的均匀介质球，被置于均匀外场$\vec{E}_0$中，球外空间充满均匀介电常数为ε_1的介质。求空间电势的分布。

解： 如图所示，取$\vec{E}_0$方向为极轴z方向。与上一道例题不同的是，此处介质球内可以存在电场。为此我们把空间分为球内球外两个区域

（I、II），电势分别为φ_1, φ_2，则它们满足的方程

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \qquad \nabla^2\varphi_2 = 0 \tag{4.4.20}$$

相应的边条为

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \to -E_0 r\cos\theta & r \to \infty \\ \varphi_1 = \varphi_2 & r = R \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} & \\ \varphi_2\text{有限} & r = 0 \end{cases} \tag{4.4.21}$$

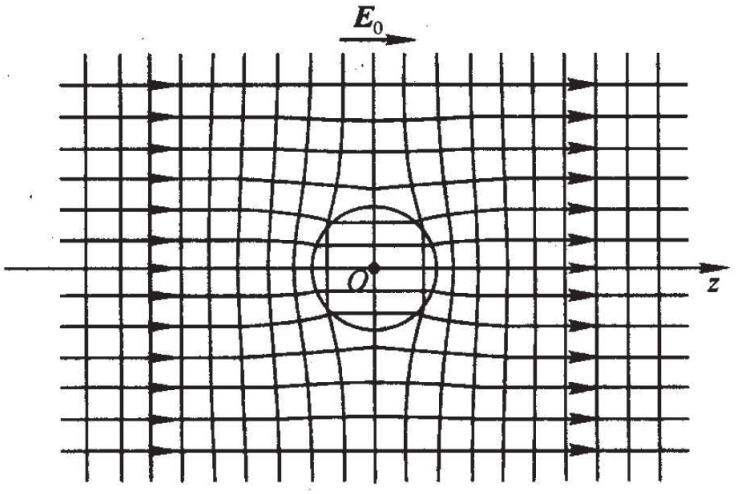


图 4.10

本问题为三维轴对称球坐标系下的问题，因此可选取合适的本征函数将φ_1, φ_2展开。显然应当选择4.4.5，即

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \tag{4.4.22}$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta) \tag{4.4.23}$$

其中$\{A_l, A'_l, B_l, B'_l\}$为一系列展开系数，需要由边界条件确定。根据我们上次课对均匀电场中的金属球的问题的求解，我们已有了经验——均匀电场的边界条件（1）只包含$l=1$项的贡献，而球这种良好的几何形状保证了它不会将$l=1$的模式散射到其它l的模式上去。因此4.4.22与4.4.23中只有$l=1$项的系数非0。故有

$$\varphi_1 = \left(A_1 r + B_1 r^{-2}\right)\cos\theta \tag{4.4.24}$$

$$\varphi_2 = \left(A'_1 r + B'_1 r^{-2}\right)\cos\theta \tag{4.4.25}$$

————以下为选读内容————

下面我们利用本征函数的正交性对上述论断做严格证明。

对I区来讲，边条（1）决定了除了A_1外所有的$\{A_l\}$均为0。因$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，易知：

$$A_1 = -E_0 \qquad A_l = 0 \qquad l \neq 1 \tag{4.4.26}$$

对II区来讲，边条（4）决定了

$$B'_l = 0 \qquad l = 0, 1, \cdots \infty \tag{4.4.27}$$

下面考虑边条（2）。代入可知

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A'_l R^l + B'_l R^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta) \tag{4.4.28}$$

$$\varepsilon_1\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA_l R^{l-1} - (l+1)B_l R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta) = \varepsilon_2\sum_{l=0}^{\infty}\left[lA'_l R^{l-1} - (l+1)B'_l R^{-(l+2)}\right]P_l(\cos\theta) \tag{4.4.29}$$

根据本征函数的正交性，上面两式中每个l项的系数必须分别相等，即

$$A_l R^l + B_l R^{-(l+1)} = A'_l R^l + B'_l R^{-(l+1)} \tag{4.4.30}$$

$$\varepsilon_1\left[lA_l R^{l-1} - (l+1)B_l R^{-(l+2)}\right] = \varepsilon_2\left[lA'_l R^{l-1} - (l+1)B'_l R^{-(l+2)}\right] \tag{4.4.31}$$

对所有$l \neq 1$的项，我们有

$$\begin{cases} B_l R^{-(l+1)} = A'_l R^l \\ \varepsilon_1 \left[-(l+1) B_l R^{-(l+2)}\right] = \varepsilon_2 \left[l A'_l R^{l-1}\right] \end{cases} \tag{4.4.32}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_l = A'_l R^{(2l+1)} \\ B_l = -A'_l R^{(2l+1)} \dfrac{l\varepsilon_2}{(l+1)\varepsilon_1} \end{cases} \tag{4.4.33}$$

显然有

$$A'_l = B_l = 0 \qquad l \neq 1 \tag{4.4.34}$$

因此只有$l = 1$的项有非零解。

————以上为选读内容————

代入边条（1）-（4）分别可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ A_1 R + B_1 R^{-2} = A'_1 R + B'_1 R^{-2} \\ \varepsilon_1 \left(A_1 - 2B_1 R^{-3}\right) = \varepsilon_2 \left(A'_1 - 2B'_1 R^{-3}\right) \\ B'_1 = 0 \end{cases} \tag{4.4.35}$$

解之可得

$$\begin{cases} A_1 = -E_0 \\ B_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 R^3 \\ A'_1 = -\dfrac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \\ B'_1 = 0 \end{cases} \tag{4.4.36}$$

故

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos\theta \tag{4.4.37}$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r \cos\theta \tag{4.4.38}$$

作如下的讨论：

1. 先做极限分析：当$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$时，介质球与环境的介电常数一样，故其对外场的响应消失。带入发现，$\varphi_1 = \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$，即空间的电场就是均匀电场！

2. 球面上的束缚电荷就是球对外场的响应来源。其对球外区域的贡献为：$\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3E_0\dfrac{1}{r^2}\cos\theta$。回想一个偶极子（偶极矩为$\vec{p}$）的电势为$\varphi_p = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$，对比发现这些束缚电荷对外场的贡献相当于一个放在原点的偶极子，其大小为

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}R^3\vec{E}_0 \tag{4.4.39}$$

   注：这个结论是严格的，并非在远场成立，这一点是否让你感到很意外？

3. 球内的场为外场与束缚电荷所产生的附加电场之和，结果为一均匀电场：

$$\vec{E}_{内} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{E}_0 \tag{4.4.40}$$

4. 当$\varepsilon_2 \to -\infty$时，介质球内的场为$\vec{E}_{内} \to 0$内，其效果相当于一个导体球。而此时，$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0$，也回到上堂课我们求解的导体球的解。其实，这样的一个推论（导体相当于$\varepsilon_2 \to -\infty$的介质）具有普遍意义，后面我们可以严格证明。

下面我们考虑一个简单的情况，即$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$（背景介质是空气），$\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r$，此时的物理图像更加清楚。因介质球内的场为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}_{内} = \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_0 \tag{4.4.41}$$

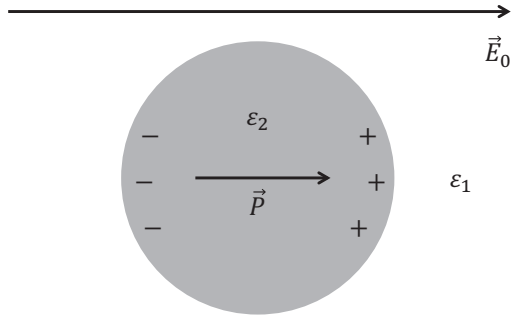


图 4.11

而同时，4.4.39可化成

$$\vec{p}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{2+\varepsilon_r}R^3\vec{E}_0=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{3}{2+\varepsilon_r}\vec{E}_0\times\left(4\pi R^3/3\right) \tag{4.4.42}$$

上面两式对比发现，此时极化强度正好就是偶极子的电偶极距/体积：

$$\vec{P}=\frac{\vec{p}}{4\pi R^3/3} \tag{4.4.43}$$

这当然是合理的，因为极化强度的定义就是$\vec{P}=\dfrac{\sum\vec{p}_i}{\Omega}$。因$\varepsilon_2>\varepsilon_0$，我们发现$\vec{E}_{内}<\vec{E}$，这是因为极化电荷在球内产生了电场抵消了部分外电场的贡献。这部分由**极化电荷在球内产生的电场**为

$$\vec{E}_{p内}=\vec{E}_{内}-\vec{E}_0=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon_2}\vec{E}_0=-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \tag{4.4.44}$$

这个场通常被称为“退极场”——由于极化产生的极化电荷产生的场，其作用是“退”掉外场的作用。整理后的结果为

$$\vec{E}_{内}=\vec{E}_0-\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \tag{4.4.45}$$

上面两式在很多情况下成立的，一般来说，退极场可以写成

$$\vec{E}_{退}=-L\cdot\vec{P}/\varepsilon_0 \tag{4.4.46}$$

L称为退极化因子，只依赖于物体的几何形状，其越大，说明退极效应越显著。容易证明：对平板$L=1$，对球$L=\frac{1}{3}$，对细针$L=0$，对椭球，针对长短轴的不同，L可以由$0\sim1$不等。总结下来，介质在外场下的静电行为是

- 被外场极化
- 极化电荷在球外的贡献为偶极子
- 极化电荷对球内的贡献为均匀电场——退极场（depolarization field）

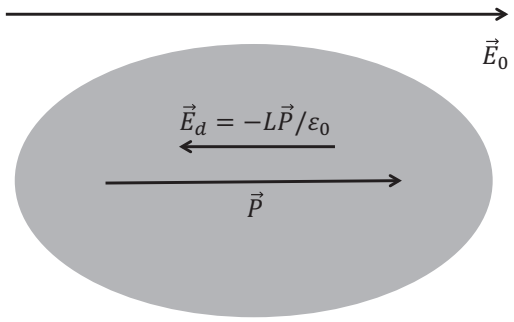


图 4.12

思考题：

1. 若外部介质不是空气，而是具有介电常数ε_1的某种电介质，极化强度$\vec{P}$是多少？4.4.43是否仍然成立？若不成立，为什么？
2. 有兴趣的同学请找文献查一查椭球体的“退极因子”的推导。

[例4] 在均匀外电场$\vec{E}=E_0\vec{e}_x$中有一半径为R、电荷线密度为λ的无限长导体圆柱．柱轴与外场垂直，求空间中的电场分布。

解：柱内区域的场为零，只需考虑柱外区域的电势，其满足方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{4.4.47}$$

边界条件为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\rho\to\infty} = E_0\hat{x} \\ \varphi\big|_{\rho=R} = \text{常数} \\ \oint \dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R} = \lambda/\varepsilon_0 \end{cases} \tag{4.4.48}$$

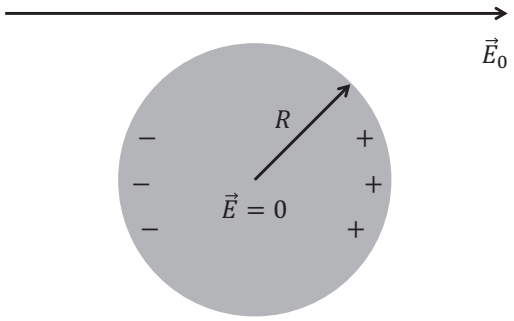


图 4.13

注：第一个边条值得讨论一下。处理均匀外场中的散射体的问题时，如果散射体是三维物体（如球），则任何感应（极化）电荷均在空间局域，因此在无穷远处，它们对场或者势的贡献都趋向于0，此时我们可以将边条（1）进一步改写成$\varphi\big|_{r\to\infty} = -\vec{E}\cdot\vec{r}$。然而处理2维问题（如无限长柱子）时，感应（极化）电荷会出现在无穷远处（因为柱子会延伸到无限远处），它们对电势的贡献不趋向于0！幸运的是，此时，它们对电场的贡献$\sim\dfrac{1}{\rho}$，故对电场的贡献仍趋于0。处理无限大平面问题时这个问题更严重——感应（极化）电荷沿着两个方向散布到无限远，故电场、电势均不趋向于0！不过通常1维问题根本无须这样求解。

此问题为与z无关的柱对称问题，故可以利用4.4.8展开

$$\varphi = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}\right)\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\sin(n\phi) \tag{4.4.49}$$

注意到

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \tag{4.4.50}$$

电场中ρ的阶数比电势中的低一阶。根据边条（1），势函数中所有比ρ^1发散快的项都不可以保留，故

$$A_n = C_n = 0 \qquad n > 1 \tag{4.4.51}$$

进一步利用边条（1）比较系数

$$E_\rho\big|_{\rho\to\infty} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = -A_1\cos\varphi - C_1\sin\varphi = E_0\cos\varphi \tag{4.4.52}$$

因为$\sin\phi$与$\cos\phi$正交，可得

$$A_1 = -E_0 \qquad C_1 = 0 \tag{4.4.53}$$

考虑边条（2），因$\varphi\big|_{\rho=R}$应与θ无关，故有

$$\begin{cases} A_nR^n + B_nR^{-n} = 0 \\ C_nR^n + D_nR^{-n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = E_0R^2 \\ B_n = 0 \qquad n > 1 \\ D_n = 0 \end{cases} \tag{4.4.54}$$

现考虑边条（3），对角度积分过程中所有$n > 1$的项都没有贡献（因为与角度有关），只有A_0, B_0两项留下来。最后结果为

$$B_0\frac{1}{R}2\pi R = -\lambda \Rightarrow B_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \tag{4.4.55}$$

A为一常数，不能唯一确定。总结下来，最终的电势为

$$\varphi = A_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho - E_0\rho\cos\phi + \frac{E_0R^2}{\rho}\cos\phi \tag{4.4.56}$$

分析4.4.56，我们发现空间电势由三部分贡献叠加而成：外场，无限长带电导体棒，以及一个2维偶极子（$\vec{p}=2\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$，参考补充题）的场：$\varphi_p^{(2)}=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\hat{\rho}}{\rho}$。柱外电场强度为

$$\vec{E}=\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}+E_0\cos\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\cos\phi\right)\vec{e}_\rho+\left(-E_0\sin\phi+\frac{E_0R^2}{\rho^2}\sin\phi\right)\vec{e}_\phi \tag{4.4.57}$$

注：由这个问题的求解我们又一次发现一个规律，即均匀外电场下无限长柱子的静电问题我们只需要考虑$l=1$项的贡献。这里的物理是均匀电场只包含$l=1$项，而同时柱子的良好几何特征保证了不会将不同l的项耦合，因此最终的散射场不会激发其他l项的贡献。

4.5 多极矩法

之前对静电边值问题我们已经介绍了2种严格的方法——镜像法及本征函数展开法。然而这些方法只能处理一些具有良好对称性的问题。在实际问题中，激发电场的电荷分布不见得具有良好的对称性，此时应如何处理？一般来讲这类问题我们只能数值处理。不过对某一类特定问题，电荷分布全部集中在一个很小的区域内，而我们想要求的又是远离带电体空间的电场，这时我们可采用一种近似的方法——**多极矩展开法**。

如图4.14所示，若电荷分布在有限体积V内，电荷密度为$\rho(\vec{r}')$，这个体积的线度为l，考查的是P点的电场，而P点和体积V内任一点O的距离为$\vec{r}$。多极矩法是讨论在$|\vec{r}|\gg l$情况下的场分布。P点电势的准确解的形式为

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{R} \tag{4.5.1}$$

这里，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$。由于P点离源较远，有$r'\ll r$，因此作为$\vec{r}'$的函数$\dfrac{1}{R}$可

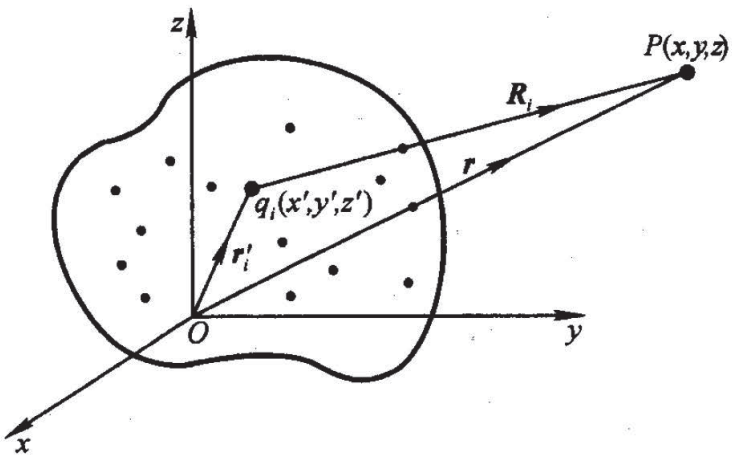


图 4.14

以在$\vec{r}' = 0$附近作Taylor展开：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \sum_{i=x,y,z} (-r'_i) \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0} + \cdots \tag{4.5.2}$$

$$= \frac{1}{r} - \sum_{i=x,y,z} r'_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=x,y,z} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \tag{4.5.3}$$

上式可以写成更紧凑的数学上完全等价的矢量（并矢）的形式：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \vec{r}' \vec{r}' : \nabla\nabla \frac{1}{r} + \cdots \tag{4.5.4}$$

因此，电势可以展开为

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \tag{4.5.5}$$

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \qquad Q = \int \rho(\vec{r}')d\tau' \tag{4.5.6}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r} \qquad \vec{p} = \int \rho(\vec{r}')\vec{r}'d\tau' \tag{4.5.7}$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int \rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau' : \nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{4.5.8}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{4.5.9}$$

$$\overleftrightarrow{D} = 3\int \rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau' \tag{4.5.10}$$

各项的物理意义如下：

- 第一项是一个点电荷的势，相当于V内电荷都集中在坐标原点时在P点所产生的势。

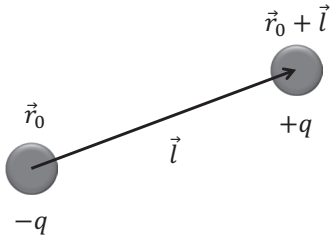


图 4.15

- 第二项是偶极子的势，$\varphi_1 = \dfrac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，体系相应的偶极矩为$\vec{p} = \int \rho\vec{r}'d\tau'$。为便于理解，考虑由一正一负两个点电荷组成体系，电荷位置分别处于$\vec{r}_0$及$\vec{r}_0 + \vec{l}$处，经过简单计算可得

$$Q = 0 \qquad \vec{p} = q\vec{l} \tag{4.5.11}$$

此即我们熟悉的电偶极距。4.5.7是电偶极矩在一般情况下的定义，相当于4.5.11式的推广。

- 第三项称为体系的四极矩的势，$\overleftrightarrow{D} = 3\int \rho(\vec{r}')\vec{r}'\vec{r}'d\tau'$为体系的四极矩。就像偶极矩可以看做两个大小相等负号相反的电荷（单极矩）靠近组成的体系一样，四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统，最简单的情况如图所示。 此时，容易证明，$\overleftrightarrow{D}$中唯一

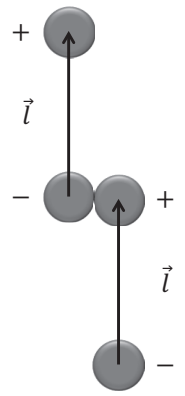


图 4.16

不为0的分量是

$$D_{zz} = 6l^2q \tag{4.5.12}$$

一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是4.5.10式。$\overleftrightarrow{D}$是一个并矢，或者说是个3×3矩阵，共有九个分量，由于它是对称的，所以只有六个独立分量。$\overleftrightarrow{D}$中还有一个隐含的不独立分量，注意到在$\vec{r} \neq 0$处总有$\nabla^2\frac{1}{r} = 0$（空间无电荷分布），亦即

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} = \overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\frac{1}{r} = 0 \tag{4.5.13}$$

上式显示对任意一个常数C，均有

$$C\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\frac{1}{r} \equiv 0 \tag{4.5.14}$$

若选择此常数正比于$\overleftrightarrow{D}$矩阵的迹

$$C \propto Tr\{\overleftrightarrow{D}\}/3 = \left(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}\right)/3 \tag{4.5.15}$$

根据4.5.10和4.5.14式, 我们发现φ_2可改写为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left(\overleftrightarrow{D} - \frac{Tr\{\overleftrightarrow{D}\}}{3}\overleftrightarrow{I}\right) : \nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{4.5.16}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{4.5.17}$$

其中

$$\overleftrightarrow{D} = \int\left(3\vec{r}'\vec{r}' - \vec{r}'^2\overleftrightarrow{I}\right)\rho d\tau' \tag{4.5.18}$$

$\overleftrightarrow{D}$称为**约化四极矩**，显然它是对称的无迹张量，即

$$\tilde{D}_{ij} = \tilde{D}_{ji} \qquad \tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{22} + \tilde{D}_{33} = 0 \tag{4.5.19}$$

只有5个独立分量。

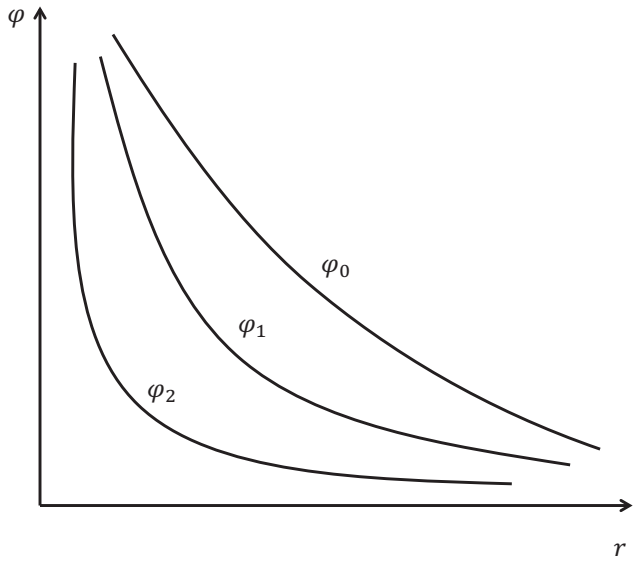


图 4.17

根据4.5.6-4.5.10可以看出，随着多极矩级数的增加，其对远处的势的贡献更快地减小$\varphi_0 \gg \varphi_1 \gg \varphi_2$。换言之，随着距离的推进，我们逐渐感知到电荷体的电荷、偶极子、四极子、$\cdots$的贡献。

————以下为选读内容————

直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R}$作Taylor展开。根据恒等式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\qquad r>r'\qquad(4.5.20)$$

电势为

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)}{r^{l+1}}\qquad(4.5.21)$$

$q_{lm}=\int r'^l Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)\rho(\vec{r}\,')d\tau'$称为多极矩，它实质上是笛卡儿坐标系中的多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解$l=0,1,2,\cdots$分别对应于点电荷、偶极距、电四极距、$\cdots$的贡献，而他们分别具有$2l+1$个独立分量（不同的m值），而这些矩所对应的“波函数——φ”类似原子物理中$s,p,d,f,\cdots$轨道电子的波函数。其实，我们可以这样来进一步理解多级矩。无源区Laplace的通解（假设$r\to\infty$时收敛）为

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=\sum_{l}\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\qquad(4.5.22)$$

其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比4.5.21和4.5.22，我们理解多极距展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！

思考题：比较直角坐标系和球坐标系下的多极矩表达式，在不同l子空间下建立它们之间的联系，讨论其中的物理（可以以$l=1$为例）。

————以上为选读内容————

[**例5**] 利用多极距展开法计算一个长度为L的带电棒（线电荷密度为λ）的电势（展开到电四极距）。

解：设棒的中心在坐标原点，则

$$Q = L\lambda \tag{4.5.23}$$

$$\vec{p} = \int \lambda z dz = 0 \tag{4.5.24}$$

$$D_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} 3\lambda z^2 dz = \frac{\lambda L^3}{4} \tag{4.5.25}$$

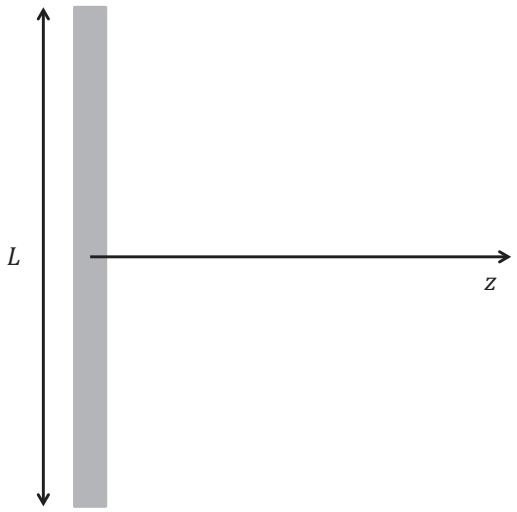


图 4.18

因此，电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{6}D_{zz}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \cdots \tag{4.5.26}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda L}{r} + \frac{\lambda L^3}{24}\frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right] + \cdots \tag{4.5.27}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\left(\frac{L}{r}\right) + \frac{\lambda}{24}\left(\frac{L}{r}\right)^3(3\cos^2\theta - 1)\right] + \cdots \tag{4.5.28}$$

你也可以选择直接积分求出电势，然后按照(L/r)的幂次展开，结果应当一致。这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开，展开的特征小量是（尺度/距离）。

Tips:

1. 从物理上讲，电偶极距考量的是体系是否破缺镜面反射对称性（x与$-x$, y与$-y$, z与$-z$）；电四极距考量的是体系的更细节的东西：x, y, z之间的对称性否被破坏——若破坏，则必有电四极距出现。

2. 函数形式$3\cos^2\theta - 1$似曾相识，事实上它就是$P_2 = (3x^2 - 1)/2$，也可以认为就是$l = 2, m = 0$的波函数$Y_{2,0}$（这里有轴对称）。

4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块电荷集中在小区域内体系的多极矩，不仅可以容易地得到其在**远处产生的电场**，还可以容易地计算出一个任意的带电体系与外场的**相互作用**。尽管这两类问题看上去很不相同，但使用的方法非常类似。 上一

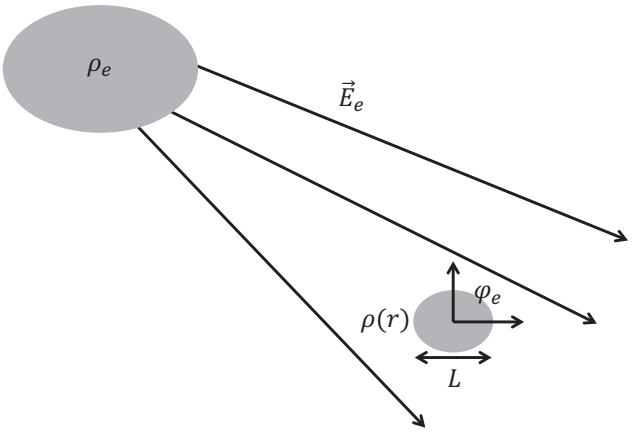


图 4.19

章中我们知道当一个点电荷在放置在远处的带电体（电荷密度ρ_e）产生的电势φ_e中时，其与外场的相互作用能为$q\varphi_e(\vec{r})$。现考虑处于φ_e中的连续带

电体（电荷密度为ρ，处在坐标原点附近），则带电体与外场的相互作用能为

$$U_i = \int \rho(\vec{r})\varphi_e(\vec{r})d\tau \tag{4.6.1}$$

应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。因为V很小，所以可将φ_e在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(0) + \vec{r}\cdot\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2!}\vec{r}\vec{r} : \nabla\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0} + \cdots \tag{4.6.2}$$

代入4.6.1式得

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + \cdots \tag{4.6.3}$$

其中

$$U_i^{(0)} = Q\varphi_e(0) \tag{4.6.4}$$

$$U_i^{(1)} = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_e\big|_0 = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e(\vec{r}=0) \tag{4.6.5}$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.6}$$

因为$(\nabla^2\varphi_e)_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离$V$很远处，故在$V$区域内$\rho_e = 0$，因此有$C\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = C\nabla^2\varphi_e\big|_0 = 0$。再一次，若我们选择常数$C$满足$C \propto Tr\{\overleftrightarrow{D}\}/3$，则有

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.7}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\overleftrightarrow{D} - \frac{1}{3}Tr\{\overleftrightarrow{D}\}\overleftrightarrow{I}\right] : \nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.8}$$

$$= \frac{1}{6}\overleftrightarrow{\tilde{D}} : \nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.9}$$

$$= -\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\tilde{D}} : \nabla\vec{E} \tag{4.6.10}$$

$U_i^{(0)}$, $U_i^{(1)}$和$U_i^{(2)}$分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。

我们发现，电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应——因此，多极矩随着级数的增加，愈加能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能$U_i^{(1)} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e$，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

4.6.1 电偶极矩在外场中受的力

设电偶极子在电场$\vec{E}_e$中受到电场的作用力$\vec{F}_e$，方向大小未知。假设施加外力$\vec{F}' = -\vec{F}_e$，则偶极子达到平衡，静止不动。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力$\delta\vec{F}' \to 0$，使得偶极子**无限缓慢**地平移$\delta\vec{r}$。将偶极子与外场看成一个体系，则在这个过程中，外力对体系（偶极子+外场）做的功为

$$\delta W' = \left(\vec{F}' + \delta\vec{F}'\right)\cdot\delta\vec{r} = \vec{F}'\cdot\delta\vec{r} = -\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r} \tag{4.6.11}$$

整个体系（电偶极子+外场）的能量增加为

$$\delta U = -\vec{p}\cdot\vec{E}\left(\vec{r}+\delta\vec{r}\right) + \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\delta\vec{r}\cdot\nabla\left[\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right] \tag{4.6.12}$$

注：因为偶极子运动无限缓慢，故动能没有增加。

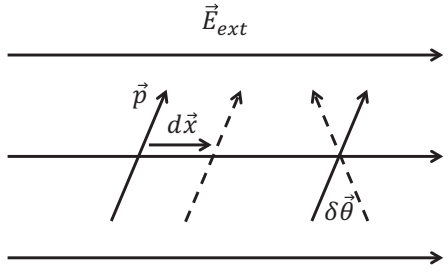


图 4.20

根据能量守恒上面2式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e = \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} + \vec{p}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \tag{4.6.13}$$

利用静电场$\nabla\times\vec{E}=0$，得

$$\vec{F}_e = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} \tag{4.6.14}$$

一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才受到电场的作用力！

4.6.2 电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为$\vec{M}_e$，则施加外力矩$\vec{M}' = -\vec{M}_e$将偶极矩**准静态**地转动一个$\delta\vec{\theta}$，外力矩作的功为$\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta} = -\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta}$，体系（偶极子+外场）的能量增加为$\delta\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$，故根据能量守恒有

$$-\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta} = -\delta\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = -\delta\vec{p}\cdot\vec{E} \tag{4.6.15}$$

因为$\vec{p}$的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p} = \delta\theta\times\vec{p} \tag{4.6.16}$$

这样

$$\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta} = \left(\delta\vec{\theta}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E} = \left(\vec{p}\times\vec{E}\right)\cdot\delta\vec{\theta} \tag{4.6.17}$$

即

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} \tag{4.6.18}$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

第 五 章

静磁场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由**稳恒电流**产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），静电场本身产生的电流一定不能稳恒！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们得到某种一定分布的稳恒电流$\vec{j}$，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

5.1 磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为$\vec{B} = \mu \vec{H}$。在两个磁介质的交

界面上相应的边值关系为

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \\ \vec{e}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{\alpha} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，可得

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{j} \tag{5.1.3}$$

静磁场满足$\nabla \cdot \vec{A} = 0$（此结论可由Biot-Sarvert定律推出，见第一章），上式变成

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\vec{j} \tag{5.1.4}$$

5.1.4式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量得方程——亦即每一个$\vec{A}$的分量场都满足泊松方程。所以矢势$\vec{A}$和标势φ在静场时满足同一形式的方程。

为了求解5.1.4，我们还要导出关于$\vec{A}$的边值关系。在介质分区均匀时，对应5.1.1式我们有

$$\vec{e}_n \cdot \left[\left(\nabla \times \vec{A}\right)_1 - \left(\nabla \times \vec{A}\right)_2\right] = 0 \tag{5.1.5}$$

$$\vec{e}_n \times \left[\frac{1}{\mu_1}\left(\nabla \times \vec{A}\right)_1 - \frac{1}{\mu_2}\left(\nabla \times \vec{A}\right)_2\right] = \vec{\alpha}_f \tag{5.1.6}$$

5.1.5式可进一步简化为

$$\nabla \cdot \left[\vec{e}_n \times \left(\vec{A}_1 - \vec{A}_2\right)\right]_{boundary} = 0 \tag{5.1.7}$$

上式显示$\vec{e}_n \times \left(\vec{A}_1 - \vec{A}_2\right)_{boundary}$为与界面位置无关的常矢量，但其方向和大小并不能从中得到。仿照我们以前在静电学中对电势的边界条件的处理，将关系式

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{5.1.8}$$

应用到交界面的一个闭合回路上，只要$\vec{B}$在交界面上的值是有限的，则有

$$\left(\vec{A}_1-\vec{A}_2\right)_{\parallel}=0\Rightarrow\vec{e}_n\times\left(\vec{A}_1-\vec{A}_2\right)=0 \tag{5.1.9}$$

这表示$\vec{A}$在边界的切线方向的分量是连续的，这与静电学中的边界条件$\varphi_1=\varphi_2\big|_{boundary}$（4.1.7）相对应。同样道理，事实上5.1.6对应于静电学中的另外一条边界条件$\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\sigma_f$（4.1.3），在某一些特定的条件下，完全可以把5.1.6式化成与4.1.3类似的形式。

因此，对静磁学问题，边界条件有两种设置方法：

1. 或者设置在边界上的$\vec{e}_n\times\vec{A}$的数值（根据5.1.9）。
2. 或者设置在边界上的$\vec{e}_n\times\vec{H}$的数值（对应边条5.1.6）。

设置好体系的边界条件，就可以在边条下求解Poisson方程解出$\vec{A}$和$\vec{B}$了。

我们一再看到了静磁场问题和静电场问题的类似性，其实这两个问题中场能的表达式也完全类似。静电场能量为

$$U_e=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{E}\cdot\vec{D}d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty\varphi\rho d\tau \tag{5.1.10}$$

静磁场的能量为

$$U_m=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{B}\cdot\vec{H}d\tau=\frac{1}{2}\int_\infty\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H}d\tau \tag{5.1.11}$$

$$=\frac{1}{2}\int_\infty\left[\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)+\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]d\tau \tag{5.1.12}$$

$$=\frac{1}{2}\int_\infty\vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \tag{5.1.13}$$

形式与静电场总能非常类似。

注：

1. 从现有的所有证据来看，你一定以为静磁场中的$\vec{A}$与静电场中的φ的地位类似（都是势），而$\vec{j}$与ρ的地位一致（都是源）。这是对的，但

又不完全对。从满足的方程和相对论协变等许多问题来看这个论断是对的，在有些情况下结论却恰恰相反——$\vec{A}$与ρ，$\vec{j}$与φ的地位一致（参考Landau或者Jackson的书）。严格推导需要很大的篇幅，但我们可以从一个简单的Argument来理解：在静电学中，当我们将电荷给定时，相当于使导体成为孤立导体，任何外界的变动都不会改变孤立导体上的电荷，这样的体系是“孤立体系”；当我们确定φ时，外界的变化会改变导体的电势因此必须有“外源”输出或抽出能量以保持恒定电势，因此这样的体系是个“有源体系”。现在我们看静磁学，给定电流$\vec{j}$情况下，如果外界发生改变则驱动电场相应发生变化，此时也必须从“电动势”输出或抽出能量以保持恒定电流，因此这个体系不是“孤立体系”，恰恰是一个“有体系”！从这个意义上讲，在考虑这类问题是（孤立或者有源），$\vec{j}$与φ的地位一致！

2. 静电边界条件的两类设置方法很容易实行——确定电势（接一个大的等势体，对应φ）或者确定电荷（孤立导体，对应$\vec{n}\cdot\vec{D}$）。你能否考虑下实际情况下静磁边界条件如何设置（$\vec{n}\times\vec{A}, \vec{n}\times\vec{H}$）？

5.2 静磁场的唯一性定理

与静电场类似，静磁场也有唯一性定理——对确定的体系，场的解由边界条件唯一确定。对静电问题，边界条件可以是设定边界上标势值$\varphi\big|_b$，或者是$\vec{D}$场在边界上垂直分量（与导体上的表面电荷有关）；与此相对应，对静磁问题，前者是边界上的矢势$\vec{A}$的切向分量（见边条5.1.5），后者是$\vec{H}$场的切向分量（与导体上的表面电流相关，见5.1.1）。

定理：如果静磁体系V内存在着电流和磁介质，且关系式$\vec{B}=\mu\vec{H}$成立，则体系内的磁场由电流和磁介质的分布及**边界条件**（边界上$\vec{A}$或$\vec{H}$的切向分量）**唯一确定**。

证明：设对同一个体系存在两组不同的解$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \mu\vec{H}'$和$\vec{B}'' = \nabla \times \vec{A}'' = \mu\vec{H}''$，均满足预设的边界条件，则有

$$\nabla \times \vec{H}' = \nabla \times \vec{H}'' = \vec{j} \tag{5.2.1}$$

$$\vec{e}_n \times \vec{H}'\Big|_b = \vec{e}_n \times \vec{H}''\Big|_b \quad or \quad \vec{e}_n \times \vec{A}'\Big|_b = \vec{e}_n \times \vec{A}''\Big|_b \tag{5.2.2}$$

根据场的线性叠加原理，我们可构造一个新的场，即令

$$\vec{B} = \vec{B}' - \vec{B}'' \qquad \vec{H} = \vec{H}' - \vec{H}'' \qquad \vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}'' \tag{5.2.3}$$

对于这样一个场，显然

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \qquad \vec{e}_n \times \vec{A}\Big|_b = 0 \quad or \quad \vec{e}_n \times \vec{H}\Big|_b = 0 \tag{5.2.4}$$

我们来计算这个场的能量：

$$U_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau = \frac{1}{2}\int_V \left(\nabla \times \vec{A}\right)\cdot\vec{H}d\tau \tag{5.2.5}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left[\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right) + \vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]d\tau \tag{5.2.6}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_S \left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_S \left[\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{e}_n\right]dS \tag{5.2.7}$$

根据矢量混合积公式$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$，5.2.7中右方积分函数可改写为

$$\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{e}_n = \left(\vec{e}_n\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H} = \left(\vec{H}\times\vec{e}_n\right)\cdot\vec{A} \tag{5.2.8}$$

根据5.2.4，我们发现，无论我们设置的边条是对$\vec{A}$还是对$\vec{H}$，5.2.7式右端恒为0。于是

$$\int \frac{1}{\mu}\left(\vec{B}' - \vec{B}''\right)\cdot\left(\vec{B}' - \vec{B}''\right)d\tau = 0 \tag{5.2.9}$$

由于体系的磁导率μ_r恒正，故要使积分值恒为零，被积函数必须恒为零，即

$$\vec{B}' = \vec{B}'' \quad or \quad \vec{H}' = \vec{H}'' \tag{5.2.10}$$

可见，所设的两个解是同一个解，定理得证。显然，类似我们对静电问题唯一性定理的证明，静磁问题中，只要B和H的关系是单调上升的，即使不是线性介质，唯一性定理仍然成立！

注：简单的讲，静磁场的唯一性定理和静电场的唯一性定理一样，都表述的是：对以一个给定的物理问题，解由边界条件唯一确定。当然，它们的适用条件也是一样的，只对B-H 关系单调且一一对应的体系成立。对铁磁/铁电等体系，一个给定的$\vec{E}, \vec{B}$场对应不同的$\vec{D}, \vec{H}$场，则唯一性定理不成立。

5.3 磁场的矢势解法：二维问题

原则上讲，给定边界条件以及电流分布（磁场的源），我们即可以通过解泊松方程5.1.4求解矢势从而进一步求解磁场。然而真正利用解析方法解矢势方程非常麻烦而且可解的问题并不太多。下面我们举最简单的一种体系——二维的稳定电流体系——来介绍求解矢势的方法。所谓二维问题，是指不仅体系的边界面是二维的，而且体系内的电流只沿着z轴方向流动。根据稳定电流的条件$\nabla \cdot \vec{j} = 0$可知，$\dfrac{\partial}{\partial z} j_z$，电流密度与$z$方向的空间坐标无关，即

$$\vec{j} = \vec{e}_z j(x, y) \tag{5.3.1}$$

根据静磁场的矢势的定义

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')d\tau'}{R} \tag{5.3.2}$$

$\vec{A}$只有z方向的分量；进一步根据体系沿z方向的平移不变性，$\vec{A}$只能是x, y的函数。综上，

$$\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y) \tag{5.3.3}$$

于是，$\vec{A}$所满足的方程变成一个标量方程：

$$\nabla^2 A = -\mu j_f \tag{5.3.4}$$

下面举一些例题来说明问题的求解。

[**例1**] 空间沿z方向有一无限长载流直导线（载有电流I），求空间的矢势分布。

解：这是个典型的2维问题，当然可以通过求解5.3.4得到。但这里可先求空间的磁场分布，再由$\vec{B}$场求$\vec{A}$场。由安培定理可得（取柱坐标系）

$$\oint \vec{B} \cdot dl = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\rho \tag{5.3.5}$$

根据$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$，可利用Stokes定理有$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$，选择如图所示

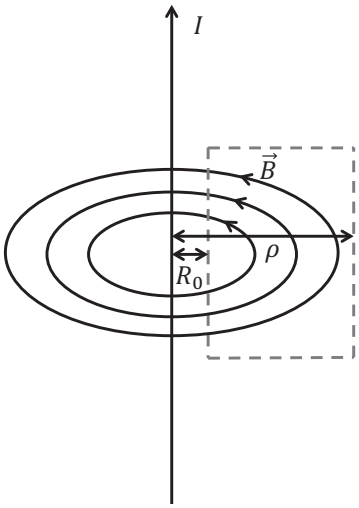


图 5.1

的安培环路，则有

$$[A(\rho) - A(R_0)]\, h = -h \int_{R_0}^{\rho} B(\rho')d\rho' \tag{5.3.6}$$

积分可得

$$A(\rho) = A(R_0) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right) \tag{5.3.7}$$

$$= const. - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \tag{5.3.8}$$

其中$const.$取决于矢势原点的选取。

注：本例也可以用$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$直接求出，不妨试试。

[**例2**] 求均匀场$\vec{B} = B_0\vec{e}_x$对应的矢势分布。

解： 乍一看，这个未必是个二维问题。考虑到均匀磁场可以是由放在无限远处的无限大载有z方向均匀面电流的金属板（平行于xz面）产生，这个问题就很清楚是2维问题，因此可设$\vec{A} = A(x,y)\vec{e}_z$。根据$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$，得

$$\partial_y A\vec{e}_x - \partial_x A\vec{e}_y = B_0\vec{e}_x \tag{5.3.9}$$

因此有

$$A(x,y) = B_0 y = B_0\rho\sin\theta \tag{5.3.10}$$

注：矢势的选取并不唯一，除了可以差一个积分常数外，矢势还可以任意加上一个“规范场”而不影响它们给出相同的磁场。上面这个结果是假设电流沿z方向，$\vec{A}$的方向因此定下来沿z方向，这等价于我们取定了一个规范。其实我们不一定非得做这个假设（规范），其它形式的电流也有可能产生同样的均匀磁场。比如$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$也可以对应同样的磁场，这是所谓Landau规范下的结果，你能证明这个结论并讨论一下其对应的电流分布吗？

[**例3**] 半径为R的圆柱形磁介质（磁导率为μ_2），放置于均匀的外磁场$\vec{B}_0$中，设柱外面为磁导率为μ_1的介质。场的方向与柱轴垂直，求空间的场分布。

解：如图所示，空间分成两个区域，$\rho > R$的区域矢势为$A_1(x,y)\hat{z}$, $\rho < R$的区域矢势为$A_2(x,y)\hat{z}$，它们均满足Laplace方程（没有传导电流）：

$$\nabla^2 A_1 = 0 \qquad \nabla^2 A_2 = 0 \tag{5.3.11}$$

考虑边值关系。在$\rho = R$的边界上，显然5.1.9式即为

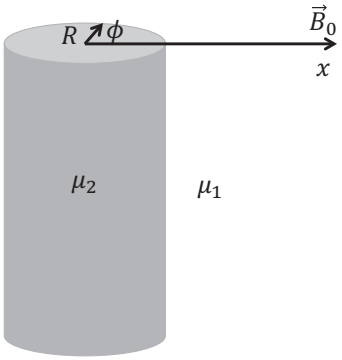


图 5.2

$$A_1(\rho = R) = A_2(\rho = R) \tag{5.3.12}$$

考虑边条5.1.6。因为$\vec{A} = A_1(x,y)\hat{z}$，利用柱坐标系$(\rho,\phi,z)$中的公式可得

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}\vec{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{n} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_z \tag{5.3.13}$$

我们就可以把5.1.6式写成

$$\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial \rho}\right)\Bigg|_{\rho=R} = -\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial \rho} \tag{5.3.14}$$

把它们与介质中的静电方程和边值关系比较，立即发现它们的形式完全一样。因此，二维静磁问题完全可以仿照静电问题中的各种解法来求解。

其他边界条件：

$$\rho = 0 \qquad A_2\text{有限} \tag{5.3.15}$$

$$\rho \to \infty \qquad A_1\text{包括均匀场的贡献} \tag{5.3.16}$$

即

$$\rho \to \infty \qquad A_1 = const. + B_0 y = const. + B_0 \rho \sin\phi \tag{5.3.17}$$

下面我们根据上述条件利用本征函数展开法找出各区的解。

根据问题的对称性，A_1, A_2可以展开成相应的本征函数的线性叠加：

$$\begin{cases} A_1 = g_0 + h_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n\rho^n + h_n\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})\sin(n\phi) \\ A_2 = g_0' + h_0' \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n'\rho^n + h_n'\rho^{-n})\cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n'\rho^n + d_n'\rho^{-n})\sin(n\phi) \end{cases} \tag{5.3.18}$$

根据边条5.3.15-5.3.17，易知：

$$\begin{cases} g_n = 0 \quad n = 1, 2, \cdots \\ c_1 = B_0 \\ c_n = 0 \quad n > 1 \\ h_0 = 0 \end{cases} \tag{5.3.19}$$

$$\begin{cases} h_n' = 0 \quad n = 1, 2, \cdots \\ d_n' = 0 \quad n > 1 \\ h_0' = 0 \end{cases} \tag{5.3.20}$$

由边条5.3.12-5.3.14，得到

$$\begin{cases} g_n R^n + h_n R^{-n} = g_n' R^n + h_n' R^{-n} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(n g_n R^{n-1} - n h_n R^{-n-1}\right) = \dfrac{1}{\mu_2}\left(n g_n' R^{n-1} - n h_n' R^{-n-1}\right) \end{cases} \tag{5.3.21}$$

以及

$$\begin{cases} c_n R^n + d_n R^{-n} = c_n' R^n + d_n' R^{-n} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(n c_n R^{n-1} - n d_n R^{-n-1}\right) = \dfrac{1}{\mu_2}\left(n c_n' R^{n-1} - n d_n' R^{-n-1}\right) \end{cases} \tag{5.3.22}$$

根据5.3.19与5.3.20，当$n > 1$时，5.3.21与5.3.22没有非平凡解，亦即所有$n > 1$时的参数均为0。当$n = 1$时，由5.3.22可以解得

$$d_1 = R^2 B_0 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \qquad c_1' = \frac{2B_0\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \tag{5.3.23}$$

除了不重要的常数$g_0 = g_0'$外，其余的系数均为零。故空间矢势（取常数为0）为

$$\begin{cases} A_1 = B_0\rho\sin\phi + B_0R^2\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\dfrac{\sin\phi}{\rho} \\ A_2 = \dfrac{2B_0\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\rho\sin\phi \end{cases} \tag{5.3.24}$$

根据矢势可以容易地计算出磁场的形式。这里，柱外的磁场由外磁场和介质磁化后的磁化电流在柱子外产生的磁场，后者完全等价于放置在原点处的一个2维偶极子，柱内的场为一均匀磁场，包含了外磁场以及“退磁场”的贡献。

Tips：从上一章到这一章的这么多例子中，我们可以清楚地明白，均匀外场下对柱、球等的影响只是激发$l = 1$项（即偶极项），其他的项都是0。这个原因也很简单，均匀场的势正比于r的一次方，因此它也只作用到$l = 1$这个子空间。明白了这个道理，以后再做相应的题目时可直接仅仅保留$l = 1$项（对均匀外场），结果的正确性由唯一性定理保证，以简化计算书写步骤。

5.4 磁场的标量势解法

我们已经介绍了磁场的矢势解法。尽管这种方法物理图像直接，但因$\vec{A}$是矢量场，运算极其繁复，实用性（特别是解析计算）不强。对比静电场，如果能引入标量势就容易多了。下面我们将仔细讨论引入磁标势的条件，并用它研究线性磁介质及（具有复杂的非线性响应）铁磁介质中的磁场。

5.4.1 磁标势

什么条件下可以引入磁标势？带着这个问题，让我们重新考察静磁场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases} \tag{5.4.1}$$

如果所考察的空间区域没有传导电流，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \tag{5.4.2}$$

上式提醒我们似乎可以据此引入标势φ_m（称为磁标势）

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m \tag{5.4.3}$$

但是，仔细考虑之后发现：只有条件5.4.2还不够保证可以引入磁标势。原因是能引入φ_m的充分必要条件是$\vec{H}$为保守场，亦即

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{5.4.4}$$

其中C为空间中的任意闭合回路。只有$\vec{H}$场对任意环路的积分都为0，才能对一个点唯一确定标势，亦即，φ_m为位置的单值函数。在很多情况下，5.4.2已经可以导致保守场，但有些情况下，即使考虑的空间没有电流，5.4.4仍不成立。比如对一个载流线圈，若我们做一个轮胎状的东西将空间有电流的部分完全清除（如图5.3所示），选择C_1，C_2，C_3等3个环路，对C_1，C_3来说，5.4.4均成立，对C_2来讲不成立。

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{5.4.5}$$

意味着是空间同一点的标势值不唯一。因此，仅有“无传导电流”这一条件还不能保证φ_m的单值性。

为了解决这个问题，我们引入以电流环为边界的任意曲面，并规定积分路径不允许穿过此曲面。直观地看，这个以电流环为边界的任意曲面对

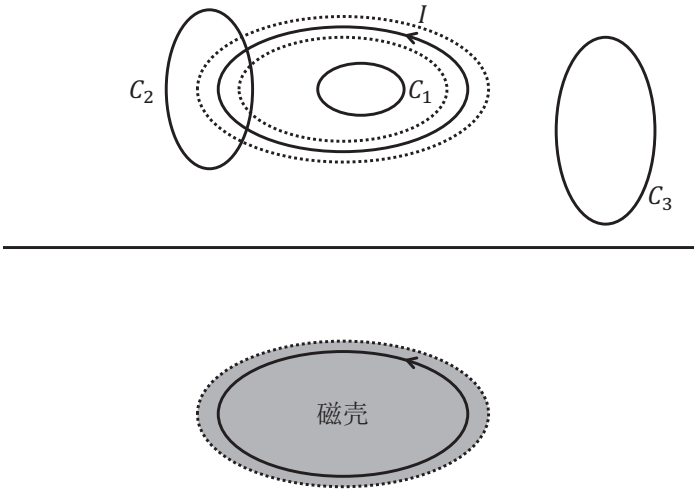


图 5.3

积分路径来说是个刚性的屏障，使得任何闭合积分路径都穿不过去，这样，φ_m不再是多值的了。为此，从曲面的一侧穿过曲面到另一测，磁标势φ_m是不连续的，存在着大小为I的跃变，即

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l}\Big|_{C_2} = -\int_{+}^{-} \nabla\varphi_m \cdot d\vec{l} = \varphi_m^{+} - \varphi_m^{-} = I \tag{5.4.6}$$

所以有时称此曲面为“磁壳”，而5.4.6作为磁标势在磁壳上的边界条件。因此，为了引入“磁标势”，我们必须：

- 构造合适的“磁壳”已使得空间变成“无源”且“单连通”；
- 设置合适的边界条件。

所以必须引入“磁壳”使得空间变成单连通！这样，就阻挡了那些有可能环绕电流的回路。这样的空间中φ_m不再是多值的了。但代价是：φ_m在磁壳的两边不连续，必须设定合适的边界条件。考虑磁壳的某一点上下的磁标势的差，按照定义，这个差值就是磁场沿某一路线在单连通

空间由“+”这一点积分到“−”这一点：

$$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = -\int_+^- \nabla\varphi_m \cdot d\vec{l} = \int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{5.4.7}$$

而另一方面，根据安培定律，这个积分的数值是：

$$\int_-^+ \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{5.4.8}$$

所以在“磁壳”的上下表面磁标势有一个$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$的跳跃，这就是磁标势在磁壳上的边界条件。

注：某种意义上讲，多联通空间中磁标势的“多值性”就像是几何上多个黎曼面的问题，引入“磁壳”就是选定其中一个“黎曼面”来工作。

5.4.2 线性磁介质中磁场问题

对于顺磁、抗磁两种线性磁介质，本构关系$\vec{B} = \mu\vec{H}$成立。因此在定义了合适的磁壳之后的区域内，有$\vec{B} = -\mu\nabla\varphi_m$。将其带入5.4.1式可得$\nabla \cdot (\mu\nabla\varphi_m) = 0$。在分块均匀的每一块磁介质内部，$\mu$是常数，因此有

$$\nabla^2\varphi_m = 0 \tag{5.4.9}$$

我们发现此时磁标势φ_m满足和电标势φ完全一样的Laplace方程，事实上，在无源区下，电和磁有着完美的对称:

$$\begin{array}{ccc}
\nabla \cdot \vec{D} = 0 & \Leftrightarrow & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \times \vec{E} = 0 & \Leftrightarrow & \nabla \times \vec{H} = 0 \\
\vec{D} = \varepsilon\vec{E} & \Leftrightarrow & \vec{B} = \mu\vec{H} \\
\varepsilon & \Leftrightarrow & \mu \\
\varpi & \Leftrightarrow & \varphi_m \\
\vec{E} = -\nabla\varphi & \Leftrightarrow & \vec{H} = -\nabla\varphi_m
\end{array}$$

因此，无须推导我们就可以根据电标势的结论直接给出两块磁介质界面上的磁标势的边界条件：

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \left(\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_1 = \mu_2 \left(\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right)_2 \end{cases} \tag{5.4.10}$$

所以，对无源的线性磁介质中磁场问题，需在边条5.4.10下求解方程5.4.9。解法技巧可借鉴电场的标势问题——唯一应当注意的是此时$\vec{E}$与$\vec{H}$对应，尽管这里只是数学上的对应，物理上讲$\vec{H}$不是真实的磁场！

[**例4**] 真空中将一个半径为R的磁介质球（磁导率为μ）放置于均匀磁场（$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$）中，求空间的$\vec{B}$场分布。

解： 这个问题的解法可借鉴4.4节中的例3。只要把那里的解做代

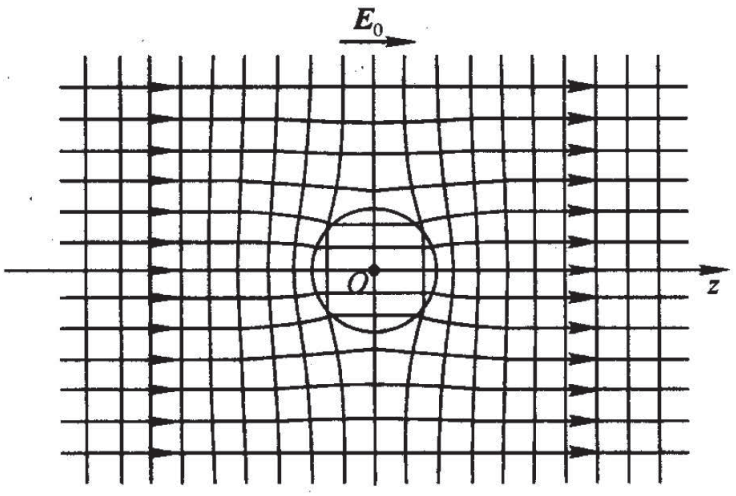


图 5.4

换：$\vec{E}_0 \to \vec{H}_0, \varepsilon \to \mu$，即可求出这个问题的空间磁标势分布：

$$\varphi_{m1} = -H_0 r\cos\theta + \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}R^3 H_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta \tag{5.4.11}$$

$$\varphi_{m2} = -\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0 r\cos\theta \tag{5.4.12}$$

定义

$$\vec{m} = \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}4\pi R^3 H_0 \hat{z} \tag{5.4.13}$$

并带入上式可得

$$\varphi_{m1} = -H_0 r\cos\theta + \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{5.4.14}$$

利用矢量微分运算，空间的$\vec{H}$场可因此求出：

$$\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = H_0\hat{z} - \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3} \tag{5.4.15}$$

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_{m2} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0\hat{z} \tag{5.4.16}$$

$\vec{H}$场不对应物理场，为了看清楚物理，进一步可以求出$\vec{B}$场：

$$\vec{B}_1 = \mu_0\vec{H}_1 = B_0\hat{z} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3} \tag{5.4.17}$$

$$\vec{B}_2 = \mu\vec{H}_2 = \frac{3\mu}{2\mu_0+\mu}B_0\hat{z} \tag{5.4.18}$$

注意到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}-3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}}{r^3} \tag{5.4.19}$$

正是真空中放置于原点的一个磁矩为$\vec{m}$的磁偶极子产生的磁感应场（参考第3讲1.2.48），因此磁介质球被磁化后对外界表现为一个磁偶极子。磁偶极子的磁标势和电偶极子的电标势之间有着很好的对称性：

$$\varphi_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\hat{r}}{r^2} \Leftrightarrow \varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \tag{5.4.20}$$

与静电场问题类似，磁介质球内部的$\vec{H}$场也是均匀磁场，强度小于外$\vec{H}$场（因为有**退磁场**的原因）。

注：

1. 磁标势以及磁偶极子$\vec{m}$的定义中没有μ_0，这是为什么？

2. 退磁场的概念是对$\vec{B}$场还是对$\vec{H}$场？讨论一下介质内的$\vec{B}$场与外场的大小？

[**例5**] 均匀磁介质球壳放在均匀外磁场$\vec{H}_0$中，外面的区域是真空，求场分布。

解： 设介质球壳的内外半径分别为R、R'，球壳的磁导率为μ。取$\vec{H}_0$方向为极轴方向的球坐标系，把空间分成三个区域：$r > R'$, $R' > r > R$, $r < R$。三个区域都没有传导电流，因此可使用磁标势

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{m1} = 0 & r > R' \\ \nabla^2\varphi_{m2} = 0 & R' > r > R \\ \nabla^2\varphi_{m3} = 0 & r < R \end{cases} \tag{5.4.21}$$

相应的边界条件为

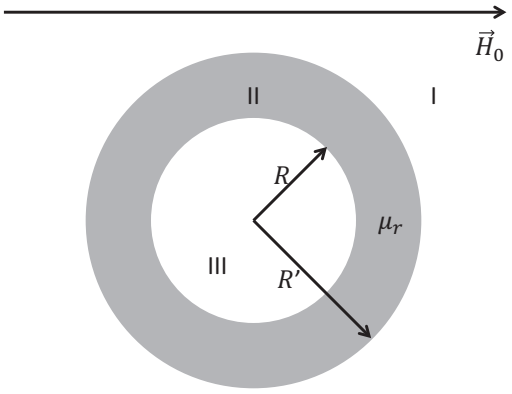


图 5.5

$$\begin{cases} \varphi_{m1} \to -H_0 r\cos\theta & r \to \infty \\ \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad \dfrac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \mu_r \dfrac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} & r = R' \\ \varphi_{m2} = \varphi_{m3} \quad \mu_r \dfrac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = \dfrac{\partial \varphi_{m3}}{\partial r} & r = R \\ \varphi_{m3}\text{有限} & r \to 0 \end{cases} \tag{5.4.22}$$

原则上，我们仍应将φ_{m1}, φ_{m2}, φ_{m3}展开成本征函数的叠加。因此时激发外场为均匀场，只有$l = 1$项非0，且处理的是球状体，因此我们可以引入如下试解：

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \left(c_1 r + \dfrac{d_1}{r^2}\right)\cos\theta \\ \varphi_{m2} = \left(c_2 r + \dfrac{d_2}{r^2}\right)\cos\theta \\ \varphi_{m3} = \left(c_3 r + \dfrac{d_3}{r^2}\right)\cos\theta \end{cases} \tag{5.4.23}$$

根据边条（1），（4）我们得知

$$c_1 = -H_0 \qquad d_3 = 0 \tag{5.4.24}$$

利用边值关系（2），（3）可以确定系数d_1, c_2, d_2, c_3（过程从略）。我们比较关心其中的两项

$$d_1 = \frac{H_0(\mu_r - 1)(1 + 2\mu_r)(R'^3 - R^3)}{(2 + \mu_r)(1 + 2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\dfrac{R}{R'})^3} \tag{5.4.25}$$

$$c_3 = \frac{-9\mu_r H_0}{(2 + \mu_r)(1 + 2\mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\dfrac{R}{R'})^3} \tag{5.4.26}$$

下面分析一下结果。从磁标势的结果中可以看出，球壳外的场是均匀场和偶极子场的叠加。与磁偶极子的标势对比发现整个球壳磁化后对外场表现为一个磁偶极矩$4\pi d_1$的磁偶极子。分析几个极限行为：

1. 在$R \to R'$或者$\mu_r \to 1$时，$m = 4\pi d_1 \to 0$，诱导磁矩消失；

2. 当$R \to 0$时，$m = 4\pi d_1 \to \dfrac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R'^3 H_0$，回到之前的例题；

3. 当$\mu_r \to \infty$时，磁偶极矩为

$$m = 4\pi d_1 \approx 4\pi H_0 R'^3 \tag{5.4.27}$$

它与R的大小无关，与一个金属球（或者是金属球壳）对外场的响应类似。

4. 球壳内的场是均匀场，其大小为$-c_3$。当$\mu_r \to \infty$时，球壳内的磁场为

$$\vec{H} = \frac{9\vec{H}_0}{2\mu_r \left[1 - (\dfrac{R}{R'})^3\right]} \to 0 \tag{5.4.28}$$

这就是所谓的磁屏蔽。选择的材料μ_r越大，壳层越厚（即$\dfrac{R}{R'} \ll 1$），则屏蔽效果越好。

注：

1. 在电的世界中，我们有自由电荷，而由自由电荷组成的介质就是金属导体，其对电场完全屏蔽，相当于$\varepsilon_r \to -\infty$的电介质；前面我们讲到当$\varepsilon_r \to -\infty$时，在静电学的范畴内也可以完全等效于一个导体。在磁的世界中，由于没有磁单极子的存在，我们没有类似金属导体的“磁导体”。然而要实现类似一个“磁导体”一样对磁场的响应，我们可以利用$\mu_r \to \infty$的磁介质——在静磁学的范畴内，其响应与“磁导体”一致。然而要实现高的ε_r, μ_r并不容易，目前的一个前沿课题就是基于“Metamaterial”的理念来实现任意的ε_r, μ_r。

2. 计算多层介质膜对外场的响应时，由于直接计算边值关系比较复杂，有时常采用“转移矩阵”的方法。其理念是根据l层和$l+1$层之间的

边值关系确定$\{c_l, d_l\}$与$\{c_{l+1}, d_{l+1}\}$之间的关系，并写成一个矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} \tag{5.4.29}$$

以此类推可以推知最外层和最内层的转开系数之间的关系：

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod T_{l+1,l} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} \tag{5.4.30}$$

最后根据最外层和最内层的边值条件确定相应系数。这种方法是非常一般且有用，可用在所有多层体系（板、柱、球）的“波”（量子、静电、静磁、电磁波$\cdots$）的散射问题。

5.4.3 铁磁介质问题

铁磁介质为非线性介质，本构关系$\vec{B} \neq \mu\vec{H}$。因此之前对线性介质推出的方法不再成立。但$\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$总是成立的，因此5.4.1式中第一式变为

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \tag{5.4.31}$$

若空间无传导电流且单连通，则可定义磁标势$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$。在铁磁介质的问题中，$\vec{M}$是$\vec{H}$的函数，由磁滞回路决定，换言之，$\vec{M}$是$\varphi_m$的隐函数，这使得5.4.31变为$\nabla^2\varphi_m = \nabla \cdot \vec{M}(\varphi_m)$，这是关于$\varphi_m$的一个非常复杂的方程，很难处理。必须明确知道$\vec{M}$和$\vec{H}$的关系才可以求解。图5.6是个非常典型的铁磁介质的磁化曲线，从中我们发现在不同的过程对应不同的物理。

初始磁化过程

铁磁介质一开始处于无磁性状态，加上磁场后磁矩出现。在这个过程中$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$，与顺磁介质一样（见下图），相应的方程为5.4.9。

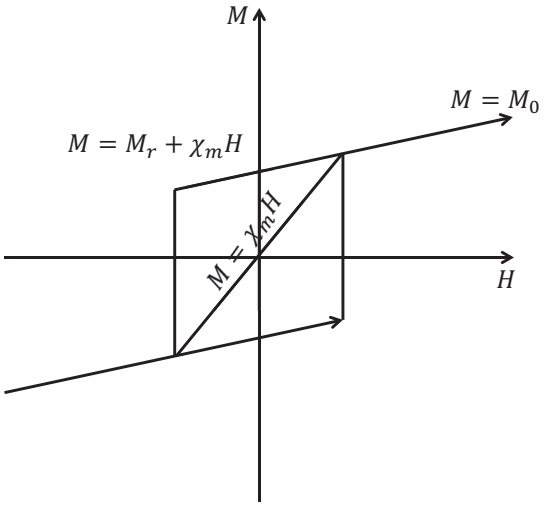


图 5.6

饱和磁化

当$H \to \infty$时，铁磁介质达到饱和磁化，$\vec{M} = \vec{M}_0$，再加外场都不会增加磁矩的大小。因此$\nabla \cdot \vec{M} = \nabla \cdot \vec{M}_0(\vec{r})$就变成了与等式左边H 无关的物理量，可以等效看作一个决定磁标势的有效的“源”。定义

$$\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}_0 \tag{5.4.32}$$

这里ρ_m称为假象磁荷密度，而磁标势满足的方程为标准的Poisson方程

$$\nabla^2 \varphi_m = -\rho_m \tag{5.4.33}$$

在这里，磁荷对磁标势起的作用于电荷对电标势的作用类似。

————以下为选读内容————

靠近剩余磁矩点时的行为

当体系被饱和磁化后再逐渐撤掉外磁场，在一般情况下，这个过程

中$\vec{H}$与$\vec{M}$的关系可近似为

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \chi'_m \vec{H} \tag{5.4.34}$$

其中$\vec{M}_r$为剩余磁矩。将上式代入5.4.32，并整理可得

$$(1+\chi'_m)\nabla^2\varphi_m = \nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\varphi_m = -\rho_m/\mu'_r \\ \nabla\cdot\vec{M}_r(\vec{r}) = -\rho_m \end{cases} \tag{5.4.35}$$

此时的物理行为仍然是有“磁荷”作为源的Possion方程，只是处于一个顺磁介质的背景中。可以说是将体系的顺磁性与饱和磁矩两样贡献分开。

————以上为选读内容————

下面求φ_m在两个磁介质交界面上的关系。

根据$\int H\cdot dl = -\Delta\varphi_m$，只要$H$在边界处不发散，边条

$$\varphi_{1m} = \varphi_{2m} \tag{5.4.36}$$

始终成立。考虑微分方程5.4.31对应的边界条件，显然有

$$\vec{e}_n\cdot\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = -\vec{e}_n\cdot\left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \tag{5.4.37}$$

对饱和磁化有

$$\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n\cdot\left(\vec{M}_0^1 - \vec{M}_0^2\right) \tag{5.4.38}$$

————以下为选读内容————

对靠近剩余磁矩点时有

$$\mu'_{r1}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_1 - \mu'_{r2}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}\right)_2 = \vec{e}_n\cdot\left(\vec{M}_r^1 - \vec{M}_r^2\right) \tag{5.4.39}$$

————以上为选读内容————

可见，交界面上的关系和静电介质完全类似，5.4.38式中等式右边对应的其实就是“假想”磁荷面密度。因此，引入磁荷和磁标势的好处在于我们可以借用静电学中的方法，第四章中讨论的许多方法都可运用。这在处理永久磁石所激发的磁场等问题时特别方便——因为对此类问题，体系本来就不存在“传导电流”又是单连同的，因此磁标势方法天然适用。

[**例6**] 求半径为R的球形永久磁铁（假设被饱和磁化$\vec{M}=M_0\hat{z}$）所激发的磁场。

解：把空间分成球内和球外两部分，整个空间不存在传导电流，因此球内外均可用磁标势。球外空间，没有磁矩因此磁荷$\rho_m=0$，球内区域有磁矩，但其为常数因此仍然没有磁荷。所以φ_{m1}, φ_{m2}均满足Laplace方程

$$\nabla^2\varphi_{m1}=0 \qquad \nabla^2\varphi_{m2}=0 \tag{5.4.40}$$

体系的边界条件

$$\begin{cases} \varphi_{m1}\to 0 & r\to\infty \\ \varphi_{m1}=\varphi_{m2} & r=R \\ \dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}-\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}=-\vec{e}_n\cdot\vec{M}_0=-M_0\cos\theta & r=R \\ \varphi_{m2}\text{有限} & r=0 \end{cases} \tag{5.4.41}$$

将φ_{m1}, φ_{m2}展开成本征函数的叠加，根据5.4.41中边界条件，可以预期只有$l=1$项非0（因为只有$l=1$项带有$\cos\theta$的角度依赖关系）。只保留$l=1$项，再考虑了5.4.41中两个极限下的边条，试解可以取为

$$\varphi_{m1}=\frac{A}{r^2}\cos\theta \qquad \varphi_{m2}=Br\cos\theta \tag{5.4.42}$$

代入5.4.41得

$$\begin{cases} \dfrac{A}{R^2}=BR \\ B+2\dfrac{A}{R^3}=M_0 \end{cases} \tag{5.4.43}$$

解之可得

$$A = \frac{M_0 R^3}{3} \qquad B = \frac{M_0}{3} \tag{5.4.44}$$

所以

$$\varphi_{m1} = \frac{M_0 R^3}{3}\frac{1}{r^2}\cos\theta \qquad \varphi_{m2} = \frac{M_0}{3} r\cos\theta \tag{5.4.45}$$

可见，球外空间的磁场是偶极场，其磁偶极矩为

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{M}_0 \tag{5.4.46}$$

球内的磁场强度为

$$\vec{H} = -\vec{M}_0/3 \tag{5.4.47}$$

球内的磁感应强度为

$$\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M} = \frac{2}{3}\vec{M}_0 \tag{5.4.48}$$

这时候比较$\vec{B}$场与$\vec{H}$场的行为很有意思。$\vec{B}$场线的法向是连续的，（因为$\nabla \cdot \vec{B} = 0$），但其在球的表面切向分量不连续（因为$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_M = \mu_0 \nabla \times \vec{M} \neq 0$，有磁化电流面密度）。$\vec{H}$场与电场的行为类似，与$\vec{B}$恰恰相反——其法向不连续，因为$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_M$，但其切向却连续。具体的场分布如图5.7所示。这里面的物理是：$\vec{B}$场看到的是磁化“电流”，看不到“磁荷”，$\vec{H}$场恰恰相反，看到的是“磁荷”，看不到“电流”。

5.5 磁多极矩展开 - 磁偶极子

若源电流分布集中在一个小区域V中，而我们只讨论其在远处的产生的磁场，这时可以仿照静电情况用多极矩展开的方法来处理。这里，我们重点讨论磁偶极子的场、磁偶极子与外磁场的相互作用。

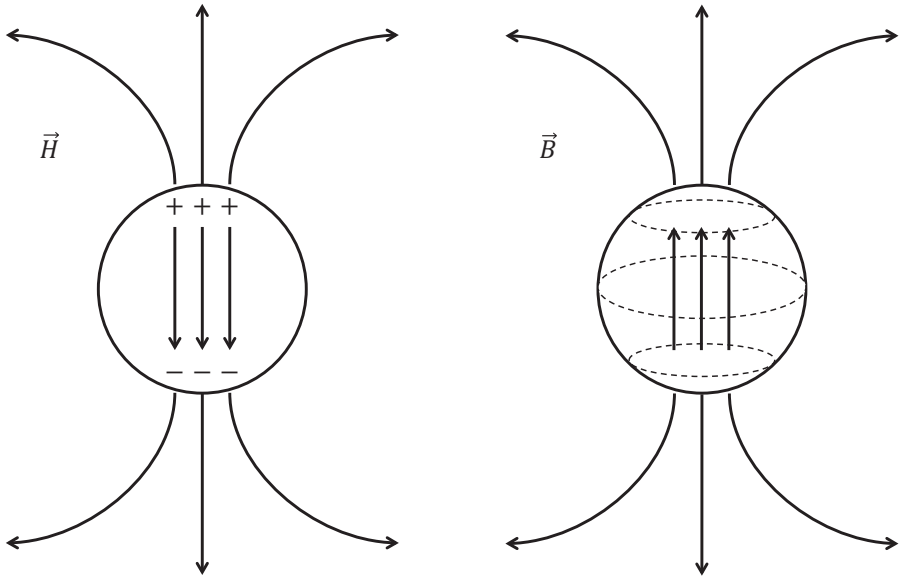


图 5.7

5.5.1 磁多极展开及磁偶极子产生的势

在全空间问题中，矢势$\vec{A}$的解为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau' \tag{5.5.1}$$

类似静电问题中的多极展开，把$\frac{1}{R}$在区域V内的某一点展开成$\vec{r}'$的幂级数。若展开点取在坐标的原点，则

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0} + \frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}' : \nabla\nabla\frac{1}{R}\Big|_{r'=0} + \cdots \tag{5.5.2}$$

只保留前两项，代人矢势表达式中得

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}d\tau' = \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \cdots \tag{5.5.3}$$

其中

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu}{4\pi r}\int \vec{j}(\vec{r}')d\tau' \tag{5.5.4}$$

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi r^3}\int \vec{j}\,(\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\tau' \tag{5.5.5}$$

这里我们将不直接处理电流密度$\vec{j}(\vec{r}')$，而利用一个没有证明其严格性但却非常有启发性的思路——将体积V内的电流分成许多独立的电流管道的叠加。因为是稳恒电流，每个流管为闭合回路且电流为一常数I_i。根据这一思路，可以在积分中做如下代换：

$$\vec{j}(\vec{r}')d\tau' = \sum_i I_i d\vec{l_i} \tag{5.5.6}$$

考虑第一项：

$$\vec{A}^{(0)} \propto \int \vec{j}d\tau' = \sum_i I_i \oint d\vec{l_i} \equiv 0 \tag{5.5.7}$$

5.5.7式背后的物理原因是电流为稳定电流。与电场的多级矩展开不同，磁多极矩的第一项恒为0，事实上，这正是自然界没有磁单极的显现。下面考虑第二项$\vec{A}^{(1)}$：

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_i I_i \oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{l_i} \tag{5.5.8}$$

对方环或是圆环，上式都可以严格积分出来（详见第二讲）。对任意形状，注意到$d\vec{r}' = d\vec{l_i}$，我们可以首先将上式中的积分进行配分：

$$\oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{l_i} = \oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{r}' = \oint \left\{d\left[(\vec{r}'\cdot\vec{r})\,\vec{r}'\right] - \vec{r}'\,(\vec{r}\cdot d\vec{r}')\right\} \tag{5.5.9}$$

在闭合环路条件下上式第一项为0，因此得到一个恒等式:

$$\oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{l_i} = -\oint \vec{r}'\,(\vec{r}\cdot d\vec{r}') = -\oint \vec{r}'\left(\vec{r}\cdot d\vec{l_i}\right) \tag{5.5.10}$$

现将5.5.8中的积分分成两项:

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i\left[\oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{l_i} + \oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\,d\vec{l_i}\right] \tag{5.5.11}$$

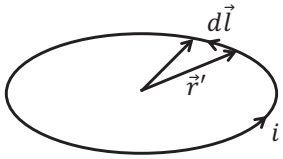


图 5.8

将上式中的一项用5.5.10来替代，则有

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i \left[\oint (\vec{r}'\cdot\vec{r})\, d\vec{l_i} - \oint \vec{r}'\left(\vec{r}\cdot d\vec{l_i}\right)\right] \tag{5.5.12}$$

利用矢量叉乘的恒等式$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，5.5.12可以被进一步改写为

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\sum_i I_i \oint \left(\vec{r}'\times d\vec{l_i}\right)\times\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5.5.13}$$

其中

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint \vec{r}'\times d\vec{l_i} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')d\tau' \tag{5.5.14}$$

被定义为**磁偶极矩**。上式是对磁偶极矩的最一般定义，针对任意电流分布均可以由此计算。对磁偶极子，我们或多或少已在不同场合介绍其性质，现再**总结如下：**

1. 对于一个小的载流闭合线圈，其磁偶极矩$\vec{m}$可以由5.5.14计算为

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}d\tau' = \frac{I}{2}\oint \vec{r}'\times d\vec{l}' = I\vec{S} \tag{5.5.15}$$

   式中$\vec{S}$是电流回路的面积，方向取右手螺旋。这是我们熟知的结果，只不过此处给出的磁偶极矩的定义5.5.14更一般。

2. 磁偶极子产生的场在第二讲中已经导出来过

$$\vec{B}_m = \nabla\times\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\vec{m}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{m}}{r^3} \tag{5.5.16}$$

其与电偶极子$\vec{p}$产生的电场$\vec{E}_p$形式一致。根据第十四讲，对一个磁偶极子产生的场，在没有电流的地方（$r \neq 0$处）可以引入磁标势$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = -\nabla\varphi_m$。磁偶极子的磁标势为

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{5.5.17}$$

与电偶极子的电标势一一对应。因此对于磁偶极子产生的场，我们既可以用矢势5.5.13计算，也可以利用磁标势5.5.17计算。在无源区，这两个表示方式是一致的。

3. **任意形状的环形电流回路的标势**

对任意形状的电流回路，若要考虑离环不太远处的场，这时磁偶极矩近似不精确。设回路中的电流强度为I，我们可以把以此回路为边界的任意曲面切割成许多小块，每小块的边界上都流有电流I，电流的方向同大回路的电流方向相同，这样，这些小块边界上电流相加的结果仍只在大回路中流有电流I。 对于每一小块面积都相应的有一个磁

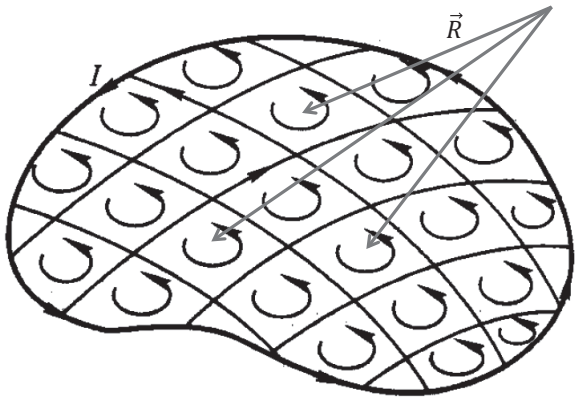


图 5.9

矩，其大小为$Id\vec{S}$，它在空间产生的磁标势为

$$\Delta\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\frac{\Delta\vec{S}\cdot\vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi}\Delta\Omega \tag{5.5.18}$$

式中的R是$d\vec{S}$至观察点的位置矢量，$\Delta\Omega$为这一小块电流回路对观察点张开的立体角。当每个小块电流回路的尺度足够小时，其所产生的场由磁偶极子描述5.5.18变成精确的（对大块电流源远场近似不成立，对足够小的电流回路远程近似变成精确的）。于是，整个回路所产生的磁标势严格为

$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \frac{I}{4\pi}\Omega \tag{5.5.19}$$

Ω是回路对观察点所张的立体角，是观察点r的函数。其磁感应强度为

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = -\mu_0\nabla\varphi_m = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\Omega(\vec{r}) \tag{5.5.20}$$

Ω正负的规定是：按电流的右手法则决定$\vec{e}_n$的面法线方向以后，若观察点在$\vec{e}_n$的正方向，则$\Omega > 0$，反之$\Omega < 0$。注意当观察点穿过电流围出的面积时，磁标势不连续。当观察点在载流面上时，$\Omega^+ = 2\pi$，而当其在面积下时，$\Omega^+ = -2\pi$，故，$\varphi_m^+ - \varphi_m^- = I$。其实，这个表面正是我们上次课讲的“磁壳”，必须挖掉其才使得磁标势的定义有意义，尽管其上面并无电流。

5.5.2 磁偶极子在外磁场中的能量、受力及力矩

与电偶极子在电场中类似，下面我们考虑磁偶极子在外磁场中受到的作用力（矩）。首先，前面已经推导出任意电流分布情况下的体系的总磁能为

$$U_m = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{B}\cdot\vec{H}d\tau = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{A}\cdot\vec{j}d\tau \tag{5.5.21}$$

假设一个载流线圈构成的磁偶极子（磁偶极矩为$\vec{m} = I\vec{S}$）处在由远处电流（简单起见，假设为另外一个载流线圈（电流为I_e））产生的静磁

场$\vec{B}_e$中，则体系的总磁能为

$$U_m = \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}+\vec{A}_e\right)\cdot\left(\vec{j}+\vec{j}_e\right)d\tau \tag{5.5.22}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}\cdot\vec{j}+\vec{A}_e\cdot\vec{j}_e\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \tag{5.5.23}$$

其中$\vec{A}$, $\vec{A}_e$分别对应电流I, I_e产生的矢势。类似电场的情形，似乎我们可以将前一项定义为体系的固有能，后一项定义为体系的相互作用能:

$$U_{int} = \frac{1}{2}\int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \tag{5.5.24}$$

进一步，根据矢量势的定义

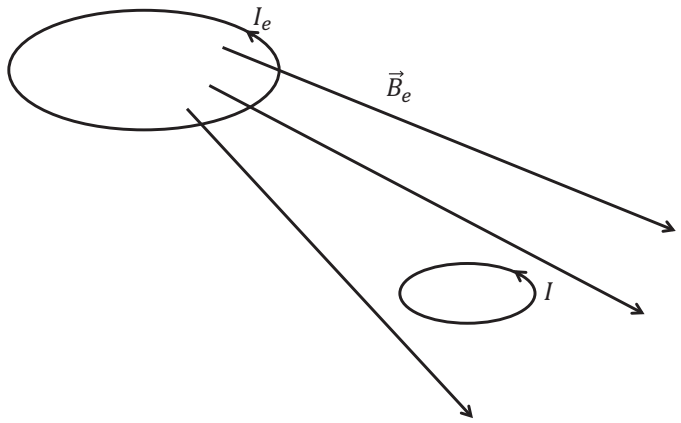


图 5.10

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}d\tau' \qquad \vec{A}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_e(\vec{r}\,')}{R}d\tau' \tag{5.5.25}$$

容易证明

$$\int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau = \int_\infty \left(\vec{A}\cdot\vec{j}_e\right)d\tau \tag{5.5.26}$$

因此有

$$U_{int} = \int_\infty \left(\vec{A}_e\cdot\vec{j}\right)d\tau = I\oint\vec{A}_e\cdot d\vec{l} = I\int_S \vec{B}_e\cdot d\vec{S} \tag{5.5.27}$$

$$= I\Phi_e = \frac{1}{2}\left(I\Phi_e+\Phi_e I\right) \tag{5.5.28}$$

其中

$$\Phi_e = \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} \qquad \Phi = \int_{S_e} \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{5.5.29}$$

分别为偶极子线圈中通过的外磁场的磁通量以及源线圈中通过的磁偶极子磁场的磁通量。当源距离目标线圈足够远时，可以将其磁场在线圈所处的空间在原点附近做Taylor展开：

$$\vec{B}_e(\vec{r}) \approx \vec{B}_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{r})_{\vec{r}=0} + \cdots \tag{5.5.30}$$

带入上式并只保留第一项:

$$U_{B,int} = I\vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{m} \cdot \vec{B}_e \tag{5.5.31}$$

这个形式与电偶极子在电场中的相互作用能$U_{E,int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$不同，似乎意味着在磁场中磁偶极子喜欢反平行于外磁场！这显然是不合理的，但问题在哪里？

问题出在对相互作用能以及固有能的定义上面。在电的情形，当电偶极子在电场中发生平动或是转动时，电场的固有能不发生变化，因为偶极子以及产生外电场的电荷分布并没有发生变化（因为这里取的边界条件为电荷体为孤立体系；如果将边界条件取做等势条件，情况会有所不同）。对此类磁场体系则有所不同，当磁偶极子相对外磁场的位形发生变化时，会在线圈中生感生电动势。根据Faraday电磁感应定律，偶极子线圈和源线圈中产生的感生电动势分别为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt} \qquad \varepsilon_e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.5.32}$$

偶极子线圈以及源线圈中的电流会因此被改变，此即是“互感效应”。在这个过程中“固有能”不可能保持恒定不变。若我们要求在变化过程中$\vec{m}$与$\vec{B}_e$均保持不变（亦即I, I_e不变），则必须由外接电动势做功抵消感生电动势的做功。在一个变动过程中，外电源必须做的功为

$$\Delta W_\varepsilon = -\int I\varepsilon dt - \int I_e\varepsilon_e dt = \int I\frac{d\Phi_e}{dt}dt + \int I_e\frac{d\Phi}{dt}dt = I\Delta\Phi_e + I_e\Delta\Phi \tag{5.5.33}$$

其中$\Delta\Phi_e$, $\Delta\Phi$是Φ_e, Φ在过程中的变化。对比5.5.28，我们发现

$$\Delta W_\varepsilon = 2\Delta U_{int} \tag{5.5.34}$$

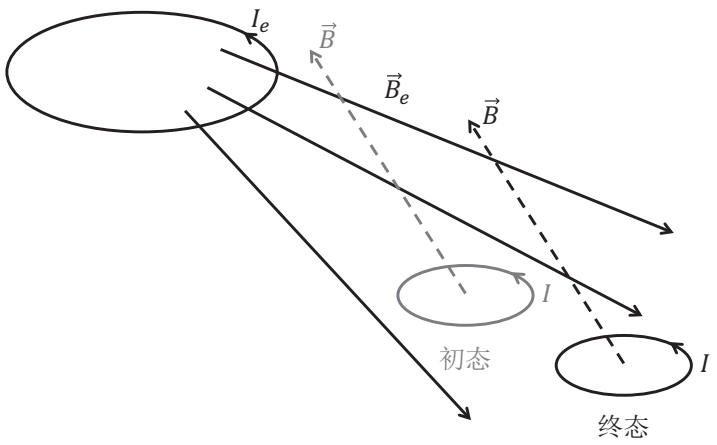


图 5.11

现在我们根据能量守恒来看一下保持电流不变条件下的“磁相互作用能”。对比目标线圈与源线圈的位形发生变化前后的初态与终态，因为电流强度一致保持不变，体系的总能量变化包括：

1. 磁场相互作用的变化：$\Delta U_B = \dfrac{1}{2}\left(I\Delta\Phi_e + I_e\Delta\Phi\right)$
2. 为了保证I_e, I维持不变，目标线圈及原线圈所携带的电源必须提供$\Delta W_\varepsilon = I\Delta\Phi_e + I_e\Delta\Phi = 2\Delta U_B$的能量。因此，将磁场与电源看成一体，电源中少了$2\Delta U_B$的能量。

因此，线圈+电源这个系统总的能量的变化为

$$\Delta\tilde{U}_{int} = -\vec{m}\cdot\vec{B}_e \tag{5.5.35}$$

与电偶极子在电场中的势能（相互作用能）完全一样！仿照电偶极子在电场受力及受力矩的推导，我们可推出磁偶极子在磁场中所受的力及力矩分别为

$$\vec{F}_B = -\nabla \tilde{U}_{int} = \nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right) = (\vec{m}\cdot\nabla)\,\vec{B} \tag{5.5.36}$$

$$\vec{\tau}_B = \vec{m}\times\vec{B} \tag{5.5.37}$$

Tips：电磁理论最难掌握的就是这一点了：许多物理量必须在注明是在什么条件下得到的。等势条件和孤立导体的条件得到的结论截然不同，同样，等电流条件和等矢势也不相同。

第六章

似稳场（准静场）

前面几章中我们研究了静止电荷产生的静电场、稳恒电流产生的静磁场。从现在开始，我们开始研究随时间变化的电磁场。本章研究随时间变化足够缓慢的电磁场，叫做似稳场，又叫“准静场”（Quasi-Static Field），这部分的研究是整个电工学的基础。事实上，对很多实际问题，尽管其中电磁场是随时间变化的，由于其满足“似稳”条件，这些问题可以在似稳近似下求解。这将极大地简化我们的计算，而且使得我们具有非常清晰的物理图像。在引言中我提及的**“电磁流变液”**，**“光镊”**等现象其实都属于此类问题。

6.1 似稳条件

原则上电磁规律是由Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{6.1.1}$$

决定的，其中$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$称为“位移电流”。位移电流的是由Maxwell引入的，其直接后果是导致电磁波的出现，使得电磁能量以电磁场的形式脱离源而存在。如图6.1所示，由电荷（由电荷密度ρ刻画）产生的电场$\vec{E}$作用于电荷上时会产生电流（由电流密度$\vec{j}$刻画），而进一步会产生磁场$\vec{B}$。当磁场$\vec{B}$发生变化时，根据Faraday定律会产生感应电场$\vec{E}_K$，其又进一步作用于电荷改变电流，回到之前的循环。若不考虑“位移电流”的影响，则这个图像告诉我们：电场、磁场被一直束缚在电荷、电流附近，即使随时间变化，也不会脱离电荷、电流而去，其行为大致与静态的电磁场相仿。

然而考虑了“位移电流”项之后，这个图像被从根本上打破了。如图6.1所示，变化的电场不仅可以作用到导线中的载流子上，而且可以因为电场变化通过**“位移电流”**的效应会导致新的磁场，而磁场的变化导致新的电场，电磁场就这样脱离电荷而去，这个过程叫做“辐射”——将在第九章具体展开阐述。

“电磁辐射”产生的电磁场的主要性质是：假设电荷电流均分布在原点附近，则空间$\vec{r}$位置处产生的场在某一时刻t的值$\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$是由比t早一些时候的电流、电荷$\vec{j}(t'=t-r/c)$, $\rho(\vec{r},t'=t-r/c)$决定的，而并不是由t时刻的电流和电荷决定，这就是所谓的“推迟效应”。物理上，这非常容易理解，因为某一时刻的电荷、电流产生的影响要经过r/c时间的电磁波

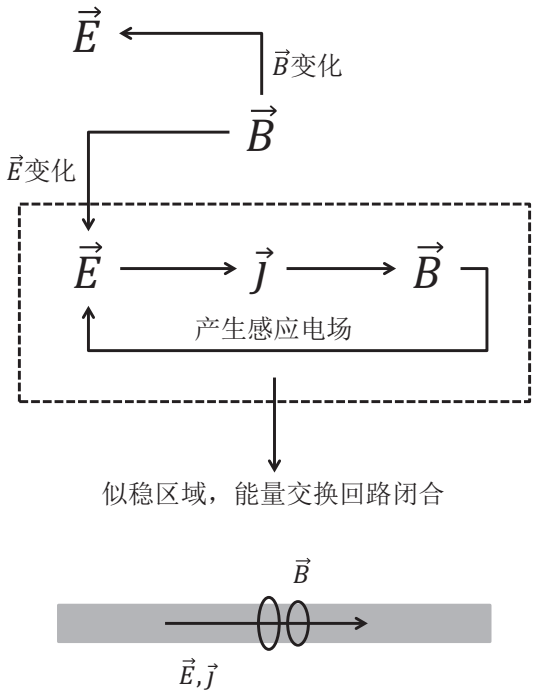


图 6.1

的传播才能到达$\vec{r}$点。这样的后果是场和源不再满足瞬时的变化关系，给我们的研究带来了麻烦。对此类问题具体计算时，必须严格求解全空间的波动方程（严格方法在第九章中介绍）。

当某些时空条件满足时，我们可以略去“位移电流”的影响，这样做的后果是使得源和场之间具有瞬时关系（当然是某种近似下的后果）。忽略位移电流后，在每一时刻，其源和场之间的关系类似于静态场的源和场的关系（尽管源和场都可以随时间变化！），因此这种场也称作“似稳场”。对这种场，很多我们针对静态电磁场发展的方法就可以使用，因此“似稳场”的研究具有重要的实际意义。那么，在什么情况下略去“位移电流”才算是合理的？这就是下面我们要讨论的**似稳条件**。

1. 如果考察的区域是在**导体内部**，其中除位移电流外还有传导电流：

$$\vec{j}_D = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{j}_c = \sigma_c \vec{E} \tag{6.1.2}$$

若场是谐变的，即$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$，则

$$\vec{j}_D \sim \varepsilon\,(-i\omega E) \qquad j_c \sim \sigma_c E \tag{6.1.3}$$

忽略位移电流的条件是$j_D \ll j_c$，即

$$\omega \ll \omega_\sigma = \frac{\sigma_c}{\varepsilon} \tag{6.1.4}$$

因此，似稳场成立的第一个条件是电磁场的变化频率远小于金属的特征频率$\omega_\sigma = \sigma_c/\varepsilon$。对于好的金属如铜，$\sigma_c \approx 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$，其特征频率为$\omega_\sigma \approx 6.7 \times 10^{18} Hz$。可见光的波长大约处于$400 \sim 700nm$区间, 对应的圆频率大约$1015Hz$，比特征频率小得多。可见，对于绝大多数金属而言，在很大的频率范围内在金属内部将位移电流忽略都是合理的。

Tips：需要指出的是，6.1.4是一个比较松的条件，更严格的考虑将在第七章讲述金属电导率的Drude模型时得到。比如根据6.1.4，似乎在整个可见光频率范围内，金属中的位移电流项都可以忽略——这并不正确。只有在GHz区域，忽略位移电流项才是正确的。

2. 如果考察的区域是**导电介质的外部**，这时没有传导电流j_c可以直接做比较，必须换一个角度思考这个问题。考察真空中$\vec{r}'$处的源$\vec{j}(\vec{r}', t)$在$\vec{r}$处激发的场，假设源是随时间谐变的，则所有物理量均带有$e^{-i\omega t}$的因子。如果不考虑“位移电流”的影响，则根据前面的讨论，不存在“辐射修正”以及“推迟效应”，磁场应由源“瞬时”决定，故

$$\vec{B}_0(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t) \times \vec{R}}{R^3} d\tau' \tag{6.1.5}$$

其中，$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$。然而考虑“位移电流”的影响后，空间的场是由过去时刻的源$\vec{j}(\vec{r}', t - R/c) = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega(t-R/c)}$激发的。在离激发源不太远的地方，考虑“位移电流”导致的辐射效应, 磁场大致表示为

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c) \times \vec{R}}{R^3} d\tau' = \vec{B}_0(\vec{r}, t)e^{i\omega R/c} \tag{6.1.6}$$

（具体证明将在第九章中给出）。假设我们要求场与源之间满足“瞬时关系”，则必须略去这一推迟效应。将上式作Taylor展开:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}, t) \left(1 + \frac{i}{c}\omega R + \cdots\right) \tag{6.1.7}$$

所以当条件

$$\frac{\omega}{c} R \ll 1 \tag{6.1.8}$$

即

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi} \tag{6.1.9}$$

满足时，可以略去推迟项$e^{i\omega R/c}$的影响（将其设为1）。这个过程相当于我们忽略“位移电流“导致的推迟效应，或者说是辐射修正。换句话说，当考察点到源的距离远小于场的波长时，略去位移电流是合理的，这就是似稳场成立的空间条件。例如，对于$50Hz$的频率，$\lambda = 6000km$；而对于$800kHz$的频率，$\lambda = 375m$。在低频情况下，如考察区域的线度远小于波长，则此场可看成是似稳场。

6.1.4和6.1.9式就是**似稳条件**。Quasi-Static Field的概念被人们广泛应用。

1. 比如前面提过的“电流变液”体系，即将一些介电球体放置在一个盛有溶液的器皿里，施加电场可以在很短的时间里将体系由悬浮液状态转变成为固态。然而因为溶液里不可避免地有少量自由电荷，如果施加直流电场将使得这些电荷在电场中运动从而附着在电极上，最后的

结果是使得电场被屏蔽，效率降低。为了避免这种情形，人们常用的方法是施加低频交流电，使得自由电荷不会朝一个方向运动直到极板上将电极屏蔽，而是来回运动。一般施加的交流电频率在1000周以内，对应的电磁波长为30公里，远远大于考虑的体系大小约为1米。此时，所有的物理量都仍然可以用静电场计算，尽管此时其实电场为交变电场！

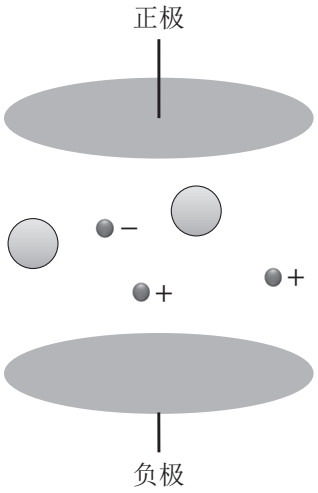


图 6.2

2. “光镊”是另外一个例子。利用激光形成一个空间上的非均匀电磁场分布，原则上这个电磁场当然是随时间剧烈震荡的。然而当**纳米尺度**的介电颗粒进入此区域时，因为光波波长为400 ∼ 700纳米，对此颗粒来说电磁场可以认为是“似稳场”。因此纳米颗粒受到的电磁波的作用力可以假设电磁场是为静电场来计算，这样就极大了简化了计算，甚至使得解析计算（尽管是近似的）变成可能。为交变电场！

3. 亚波长金属结构的共振是另一个“似稳场“的杰作！考虑一个复杂的金属结构（如金属开口环，或者金属小球）在电磁波下的响应，严格的计算将非常复杂。然而当金属结构的尺寸远小于电磁波的波长时，

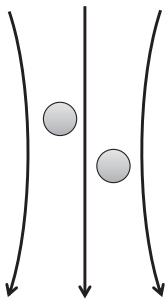


图 6.3

问题可以在“似稳”近似下求解。忽略位移电流项之后，此时结构的许多问题，如共振模式的本征频率及电磁响应等，都可以严格求解。2006年，我和美国Delaware大学的S.T. Chui教授合作，严格解出了金属环状结构的所有本征模式——求解的关键是“准静近似”。为交变电场！

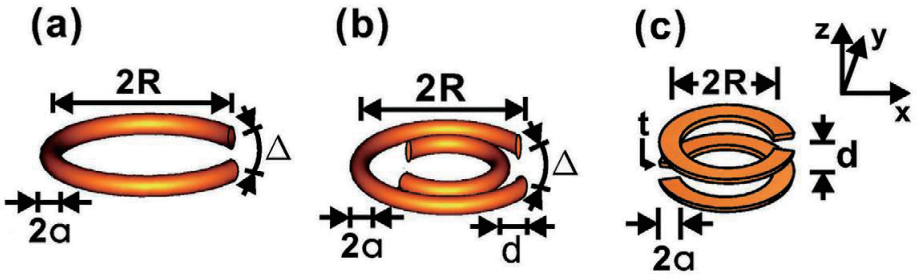


图 6.4

6.2 似稳场方程 - 场的扩散

在似稳条件满足时，可以将位移电流项扔掉。此时电磁场由似稳场方

程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} \end{cases} \tag{6.2.1}$$

及本构关系

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{6.2.2}$$

决定。似稳场方程6.2.1式比静态电磁场只多一个电磁感应方程。若考查导体内部的场，则还需另加一个本构方程：

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E} \tag{6.2.3}$$

在导体内部，当沿电流流动方向导线均匀时，电场（以及电流）的散度为0，因此没有电荷堆积，$\rho = 0$。将6.2.1式改写成$\vec{E}, \vec{H}$的方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma_c \vec{E} \end{cases} \tag{6.2.4}$$

由6.2.4式的第二、第四式消去$\vec{E}$则得到关于$\vec{H}$的方程：

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma_c} \nabla^2 \vec{H} \tag{6.2.5}$$

同理，由6.2.4式亦可得到关于$\vec{E}$的方程：

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma_c} \nabla^2 \vec{E} \tag{6.2.6}$$

6.2.5与6.2.6显示似稳条件下$\vec{E}$和$\vec{H}$的方程是我们熟知的**扩散方程**，$D = 1/\mu\sigma_c$是扩散系数。这说明导电介质中的电磁场会扩散，扩散的快慢取决

于电导率σ_c的大小，σ_c越大则扩散越慢。对于理想导体，扩散系数为零，而在绝缘体中，场的扩散系数为无限大。比如，在某一时刻在原点进行一下电磁扰动，比如将一个电荷搬来，在绝缘体中，电磁场瞬间被建立起来（或者说从原点扩散出去）；在导体中，这个电场却非常慢才能建立起来（扩散出去），在理想导体中，电场永远也不能被建立起来。为交变电场！

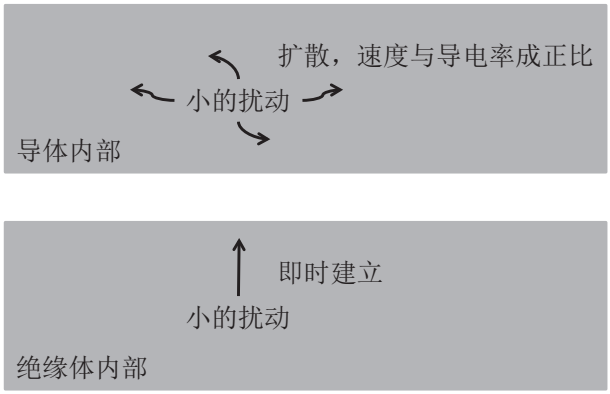


图 6.5

Tips：电导率越大扩散越小似乎与我们的直觉相违背：因为电导率大则电子对电场的响应大，似乎更容易来传播电磁信号才对？其实恰恰相反。可以通过如下一个简单的Argument来理解这件事情。在导体中做一个小的扰动，因为导体中有自由电荷，这些自由电荷会重新分布从而屏蔽这种扰动建立的电场，导体的导电性能愈好，这种阻碍效果就愈强。这就是为什么导体的电导率越大，场扩散的速度就越慢。绝缘体中没有任何自由电荷，因此电场在其中建立时没有阻碍——扩散速度无限大。当然，这一切都是在似稳场近似下成立。

6.3 导体表面层内的场分布 趋肤效应

建立了似稳场基本方程以后，我们进一步来研究它们所描写的电磁场在导体表面层内的分布特征。变化着的磁场在导体内可以感生电场，电场又引起电流，这种电流称为**傅科电流**。为了具体说明导体表面层内场分布的特征，我们来讨论一个最简单的情况：为交变电场！

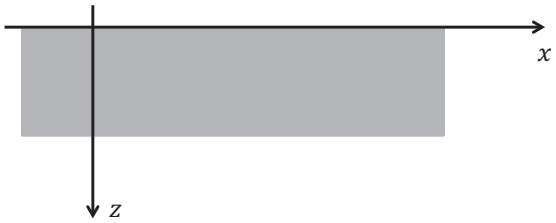


图 6.6

设导体占据$z>0$的空间，如图6.6所示。电磁场以一定的频率作简谐变化，即

$$\begin{cases}\vec{H}=\vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}\\ \vec{E}=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\end{cases} \tag{6.3.1}$$

考虑电流沿着x方向流动，则$\vec{E}$只有一个E_x非0，且只是z的函数。于是，扩散方程6.2.6现在变成

$$\left(\nabla^2+i\mu\sigma_c\omega\right)E_x(z)=0 \tag{6.3.2}$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z)+i\mu\sigma_c\omega E_x(z)=0 \tag{6.3.3}$$

一般线性方程的解具有$e^{\pm pz}$的形式。因此，我们令（省略x下标）

$$E(z)=E_0e^{-pz} \tag{6.3.4}$$

将其作为试解代入6.3.3式即有

$$p^2=-i\omega\mu\sigma_c \tag{6.3.5}$$

解之可得

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c}(1-i) = \pm\alpha(1-i) \tag{6.3.6}$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma_c} \tag{6.3.7}$$

所以，电场的通解为

$$\vec{E} = \vec{e}_x\left(E_0 e^{-\alpha(1-i)z} + E_0' e^{\alpha(1-i)z}\right)e^{-i\omega t} \tag{6.3.8}$$

考虑到$z \to \infty$时，电场应当收敛，故有$E_0' = 0$。因此，电场的解为

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \alpha z)} \tag{6.3.9}$$

6.3.9是数学意义上的解。物理的场应当取数学解的实部，可得

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z) \tag{6.3.10}$$

（此处设E_0为实数）。这个解显示电场随着z的增加一边振荡一边指数衰减，在$z = \dfrac{1}{\alpha}$深度处，场强减少到导体表面（$z = 0$）处的$1/e$，我们称这个深度为**趋肤深度**，记为δ：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma_c}} \tag{6.3.11}$$

6.3.11式表明，频率越高或电导率越大，则场所集中的导体的表向层越薄。理想导体时, $\sigma_c \to \infty$, $\delta \to 0$，场和电流全部趋向于表面。

由前面的讨论可以预料，当频率增加时，导体中的电流都集中到表面，这种电流的**“趋肤”现象**（Skin Effect）在电子工程技术中经常会碰到。作为一个例子，我们着重讨论圆柱形导线中的电流分布，这是一个非常具有实用价值的问题。

设导线内的电场与导线轴平行，其场满足扩散方程:

$$\nabla^2\vec{E} - \sigma_c\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.3.12}$$

由对称性分析，电流和场都是柱对称的，因此取柱坐标系(ρ, ϕ, z)。只有z方向分量，且只依赖于指标ρ。令$\vec{E} = \vec{e}_z E(\rho) e^{-i\omega t}$代入方程6.3.12可得

$$\frac{d^2}{d\rho^2}E(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}E(\rho) + k^2 E(\rho) = 0 \tag{6.3.13}$$

式中$k = \sqrt{i\omega\mu\sigma_c} = \sqrt{\omega\mu\sigma_c/2}(1+i) = \dfrac{1}{\delta}(1+i)$。这是一个标准的零阶贝塞尔方程。由于$\rho \to 0$时$E(\rho)$必须有限，故方程的解为

$$E(\rho) = E_0 J_0(k\rho) \tag{6.3.14}$$

这里我们这能取$\rho \to 0$是收敛的通解$J_0(k\rho)$，而不取另一个在此极限下不收敛的通解形式。因此，导线中的电流分布为

$$\vec{j} = \vec{e}_z \sigma_c E_0 J_0(k\rho) e^{-i\omega t} \tag{6.3.15}$$

常数E_0可由$I_0 = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$定出，$I_0$是总电流。

对以上情况讨论如下：

1. 若$\delta \gg R$，即$k\rho \to 0$，则$J_0(k\rho) \to 1$，所以

$$\vec{j} \propto \vec{e}_z const. \tag{6.3.16}$$

这表示电流是均匀分布的。根据6.3.11，$\delta \gg R$意味着频率很低，或者导电率很差，而同时导线很细。此时趋肤效应很微弱——没有明显的电流趋向导体表面分布的趋势。

2. 若$\delta \ll R$，则在整个考虑范围内$k\rho \gg 0$，此时贝塞尔函数的渐近式为

$$J_0(k\rho) \to \frac{e^{k\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot const. \tag{6.3.17}$$

因此，取合适的常数，我们可以将电流改写成

$$\vec{j} = \vec{z} j_0 \frac{\exp\left(-\dfrac{R-\rho}{\delta}\right)}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\omega t - \frac{\rho}{\delta}\right) \tag{6.3.18}$$

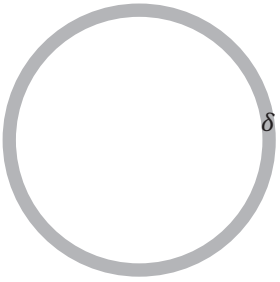


图 6.7

为交变电场！ 上式表明随着$(R-\rho)$的增大（即从表面到柱轴线），电流分布以指数形式衰减，并且ω越大（即δ越小）指数衰减越快，趋肤现象越强；电导率σ_c越大．趋肤现象也越严重。理想导体情况下，$\sigma_c \to \infty, \delta \to 0$，趋肤深度为0，电流只以面电流形式出现。

第七章

电磁波的传播

上一章我们指出，当“准静条件”满足时，可以将“位移电流”项弃掉，亦即将“辐射”项弃除，此时电磁能量完全被**束缚**在电荷、电流的附近。然而一般情况下位移电流项不能忽略。当“位移电流”加上之后，电场、磁场就不再束缚在电荷、电流的附近，在没有电荷、电流的**自由空间**也可以因为电磁场之间的相互转化而存在——这种场存在的形式就是**“电磁波”**，Maxwell方程最伟大的预言！从这一章开始，我们将进入电磁波这一神奇的世界。虽然电磁波原则上是由电荷、电流“辐射”出来的，但我们将“电磁辐射”这部分内容推迟到第九章讨论。在本章及下一章中，我们将假设电磁场已经从“辐射源”中辐射出来了，在这个基础上我们先研究在电磁波在不同介质中是如何传播的。这些电磁媒介包括**电介质**、**金属**中以及下一章介绍的**波导**等。为交变电场！

7.1 电磁波在非导电介质中的传播

考虑最简单的情形——在无限大的**无源非导电**的介质中的电磁波的传

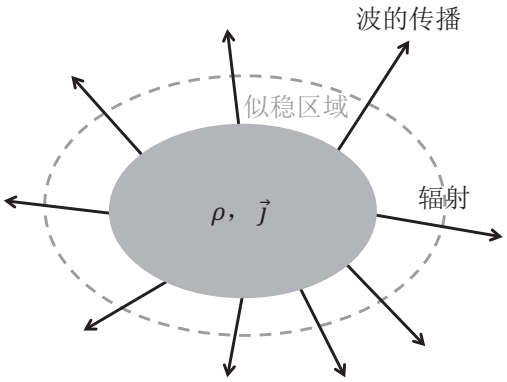


图 7.1

播行为。此时麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$。假定介质均匀且暂时不考虑**色散特性**，则ε, μ均为常数（色散介质指的是ε, μ随频率变化的材料，我们随后讲述）。7.1.1是电磁场耦合在一起的方程，不好求解，下面我们试图得到关于电场的方程。将第二条方程两边作用$\nabla\times$，则有

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\right) \tag{7.1.2}$$

根据第一条方程，有$\nabla \cdot \vec{E} = 0$，则电场满足的方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0 \tag{7.1.3}$$

式中

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} \tag{7.1.4}$$

基于同样的数学，我们发现磁场满足一样的方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0 \tag{7.1.5}$$

7.1.3和7.1.5式是标准的波动方程。与大家在力学中学到的绳波所满足的方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(x) = 0 \tag{7.1.6}$$

相比，这里不同是：

1. 场量是矢量；
2. 传播方向不仅仅是向x方向。

这给我们计算带来了一些麻烦，但设定传播方向后，每一个场的分量都满足与绳波一样的标量方程。考虑到7.1.6的解为$U(x) = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$，推广到电磁波的情形，则7.1.3和7.1.5的试解可以写为

$$\begin{pmatrix}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right) \tag{7.1.7}$$

其中$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$, ω, φ均为常数。代入7.1.3及7.1.5后发现试解7.1.7满足方程，但k, ω之间需满足关系式

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \tag{7.1.8}$$

整理可得

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow k = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{7.1.9}$$

7.1.9式是电磁波传播的**色散关系**，对波的传播性质有重要意义。

注：

1. 对任何波动方程，我们首先要问的是它的色散关系（注意不要和本构关系混淆！），亦即，频率ω（时域振动性质）与波矢k（空间域的

振动性质）之间的关系。这是波的大部分性质的基础，若色散关系相同，即使不同的波（如绳波和电磁波）也具有基本相似的性质。往大了说，色散关系描述的其实是能量（对应于ω）和动量（对应k）之间的关系！

2. 7.1.7式只是自由空间波动方程的一种试解，你能想出其它形式的试解吗？

我们对得到的电磁波的解**讨论如下**：

1. 7.1.7式中的$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$代表波动的振幅，$\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)$称为振动的相位。在给定时刻，方程

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=const. \tag{7.1.10}$$

所定义的曲面上相位相等，波场$\vec{E}$, $\vec{B}$也就相同，这个曲面叫作**等相位面**。显然满足7.1.10所定义的曲面为一平面，其垂直于$\vec{k}$，故7.1.7所描述的波称为**平面波**。还可能将试解7.1.7写成其他形式，如球面波或者是柱面波，分别对应的等相位面为球面或者是柱面。

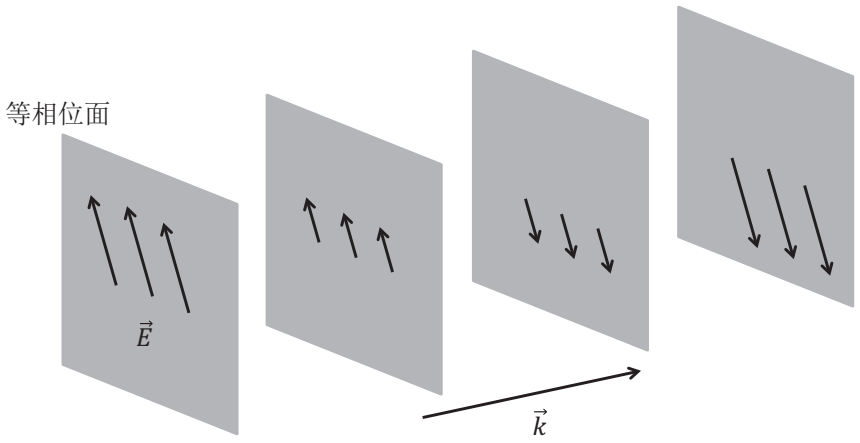


图 7.2

2. **波长**λ的定义为两个相位差为2π的等相位面之间的距离——在第二个等相面上，场量经过一个周期的振动回到第1个等相面上的值。显然λ由方程

$$k \cdot \lambda = 2\pi \tag{7.1.11}$$

确定，即

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{7.1.12}$$

$\vec{k}$被称为波矢量。

3. **波速**

等相位面的传播速度被称为波的**相速度**。设t时刻等相位面在r处，$t+\Delta t$时刻该等相位面垂直于$\vec{k}$运动到$r+\Delta r$的位置，则有

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi = const. = k \cdot (r + \Delta r) - \omega(t + \Delta t) + \varphi \tag{7.1.13}$$

故相速度为

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \omega / k \tag{7.1.14}$$

或

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \tag{7.1.15}$$

7.1.15式即是平面电磁被传播的速度，它与介质的性质有关，真空中有$\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$，故$v_p = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c$为光速，介质中的波速$v_p = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = c/n$，而$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$被定义为材料的折射率。

注：折射率的更基本的定义应当为$n = \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{\mu_r}$，因为它对$\varepsilon$, μ分别大于、小于0四种情况均正确。关于ε, μ均小于0的情况我们在后面还会分析。

4. **频率/周期**

相邻两次振动之间的时间为周期T，单位时间内的振动次数为频率f。在一个确定的位置处，场量随时间振荡，T是两个波峰之间的时间差。容易求得

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega \tag{7.1.16}$$

则振动频率为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.1.17}$$

经常把$\omega = 2\pi f$称为**角（圆）频率**，把f称为**线频率**。

5. 为了运算方便，常常把平面波写成复数形式，即

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\varphi\right)} \tag{7.1.18}$$

7.1.18式仍然是波动方程的**数学解**，但因为场量必须为实数，我们应当只取其实部作为**物理解**。然而写成复数形式对许多计算要简便很多，因此在实际运算时经常采用。但应当强调指出的是：只有实场才是有物理意义的场，复场只是为了计算方便！而之所以可以用复场计算是因为处理的方程7.1.3与7.1.5是线性方程！有时把常数因子$e^{i\varphi}$并人振幅中，则

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \tag{7.1.19}$$

注意，这时振幅$\begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix}$已是复数。反之，当电磁波的振幅是复数时，它表示电磁波有相位因子。根据色散关系7.1.9可知，k取正负均可。因此，

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{7.1.20}$$

也是波动方程的解。非常容易可以证明，7.1.20是电磁波沿反方向传播的解。

注：你会发现7.1.20式与$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)}$给出一样的实部，因而它们2个其实对应完全一样的电磁波。对波的时间变化项，在物理Community中，我们规定为$e^{-i\omega t}$，而IEEE 的Community规定为$e^{i\omega t}$。

6. 因为7.1.3和7.1.5式是由麦克斯韦方程约化而来的，约化过程中方程从一阶微分变成了二阶微分，因此它对应的解未必全都是原始Maxwell方程的解。我们需要将所得的解7.1.18重新带回到原始Maxwell方程做检查。带回Maxwell方程组中的第1，3两条方程，我们发现场量必须满足

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \tag{7.1.21}$$

这表明，电磁场振动的方向与传播方向$\vec{k}$相互垂直（在等相面内），亦即——**电磁波是横波**。同时带入方程

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{7.1.22}$$

得

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \tag{7.1.23}$$

上式说明$\vec{E}, \vec{B}$间不独立。带入第四条方程$\nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$可得到

$$\vec{k}\times\vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{B}_0 = -\varepsilon\mu\omega\vec{E}_0 \tag{7.1.24}$$

综合7.1.23与7.1.24得到结论：$\vec{E}, \vec{B}$和$\vec{k}$组成右手定则，且$\vec{E}, \vec{B}$之间的模量满足

$$|E_0| = \omega|B_0|/k = v|B_0| = c|B_0| \tag{7.1.25}$$

后面一个等式在真空中成立。进一步，可以得到另一个很重要的关系式

$$|E_0| = v\mu|H_0| = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}|H_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|H_0| = Z|H_0| \tag{7.1.26}$$

其中$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$称为**阻抗**，具有电阻的量纲，是一个描述电磁介质中电磁波传播时场量比例的重要物理量。**折射率**和**阻抗**是刻画电磁介质特性的最重要的两个量，他们各有各自不同的物理涵义，在确定电磁波的特性方面起着不同的作用。

注：在静电、静磁条件下电磁波的电、磁特性是分开的（分别由ε, μ独立决定），但电磁波将电场、磁场耦合在一起，因此此时需要用n, Z两个参数确定。

7. 平面波的**能流**

电磁场的能流定义为

$$\vec{S}_P=\vec{E}\times\vec{H} \tag{7.1.27}$$

注意真实的场是7.1.7，不能将复数场带入7.1.27式后再取实部，因为此运算是**非线性运算**。故7.1.7式中的$\vec{E}$, $\vec{H}$都应取实部之后再代入

$$\vec{S}_P(\vec{r},t)=\mathrm{Re}(\vec{E})\times\mathrm{Re}(\vec{H}) \tag{7.1.28}$$

上式表示的是能流的瞬时值。当电磁场随时间变化时，通常瞬时值没有意义，更关心的对能流的**时间平均值**。对能流在一个周期内做时间平均，得

$$\left\langle\vec{S}_P\right\rangle=\left\langle\mathrm{Re}(\vec{E})\times\mathrm{Re}(\vec{H})\right\rangle=\frac{1}{T}=\int_0^T\vec{S}_P dt \tag{7.1.29}$$

利用公式

$$\left\langle\mathrm{Re}(\vec{E})\times\mathrm{Re}(\vec{H})\right\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) \tag{7.1.30}$$

(证明见习题)，得到

$$\left\langle\vec{S}_P\right\rangle=\frac{1}{2}Z\cdot H_0^2\hat{k}=\frac{1}{2Z}E_0^2\hat{k} \tag{7.1.31}$$

同理，能量密度的时间平均值为

$$\vec{u}(\vec{r})=\langle u(\vec{r},t)\rangle=\left\langle\frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right\rangle=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2+\frac{\mu}{4}H_0^2=\frac{\varepsilon}{2}E_0^2 \tag{7.1.32}$$

非常容易从7.1.32中证明$\bar{u}_E = \frac{\varepsilon}{4}E_0^2 = \frac{\mu}{4}H_0^2 = \bar{u}_B$，亦即，平面电磁波电场携带的能量和磁场携带的能量相等！把7.1.31和7.1.32式比较，则得

$$\bar{\vec{S}}_P(\vec{r}) = \hat{k}\bar{u}(\vec{r})\frac{1}{\varepsilon Z} = \hat{k}\bar{u}(\vec{r})v = \bar{u}(\vec{r})\vec{v} \tag{7.1.33}$$

7.1.33式有着清晰的物理图像——能流即为单位时间通过单位面积的能量，单位时间内电磁波传输$l = v \times 1$的距离，因此单位时间内在体积为$\Omega = l \times 1 = v \times 1 \times 1$内的电磁波能量可以通过单位面积。故，**能流=能量×速度**。这与**电流密度=电荷密度×速度**的物理来源完全一致。平面电磁波在非导电介质中传播的情况如图所示。一个重要的特征是$\vec{E}$与$\vec{B}$为同相位变化的，即它们同时达到最大值，又同时达到最小值。

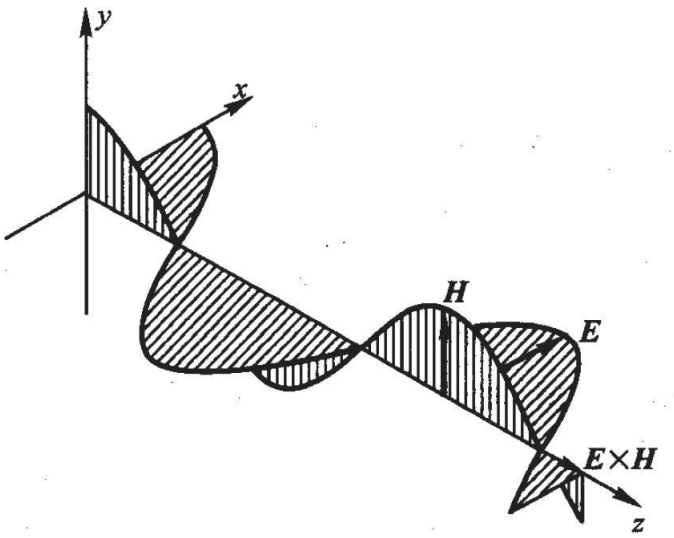


图 7.3

7.2 波的偏振和偏振矢量

电磁波是矢量波，**传播**和**偏振**是其最重要的两个特征。上一节我们

主要学习了波在线性无色散均匀媒质中的传播特性，本节中我们将重点学习波的偏振特性。让我们仔细研究横波条件7.1.21。对确定的传播方向$\vec{k}$，7.1.21式告诉我们电矢量$\vec{E}_0$必须在与其垂直的平面内。为确定起见，假设传播方向$\vec{k} \parallel \hat{z}$，则这个平面为$xy$平面，有2个相互垂直的单位矢量，$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$（其它$\vec{k}$方向可以类似处理）。注意，当我们取了复数场的表达式之后，原则上$\vec{E}_0$可以是一个复矢量——其每个分量均可取复数且可以由不同的相位。因此，$\vec{E}_0$的最一般形式为

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{x,0} + \vec{e}_y E_{y,0} = \vec{e}_x \left|E_{x,0}\right| e^{i\phi_x} + \vec{e}_y \left|E_{y,0}\right| e^{i\phi_y} \tag{7.2.1}$$

将其带入复场表达式$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$，再取实部，我们得到

$$E_x(z,t) = \left|E_{x,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi_x\right) \tag{7.2.2}$$

$$E_y(z,t) = \left|E_{y,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi_y\right) \tag{7.2.3}$$

显然，场随时间的振荡行为由四个参量：$E_{x,0}$, $E_{y,0}$, ϕ_x, ϕ_y确定。由7.2.3与7.2.3出发，在四个参量满足不同条件时，可以得到几种典型的偏振状态。

7.2.1 线偏振

线偏振是最简单的情形。当$\phi_x = \phi_y = \phi$时，电场随时间演化为

$$E_x(z,t) = \left|E_{x,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi\right) \tag{7.2.4}$$

$$E_y(z,t) = \left|E_{y,0}\right| \cos\left(kz - \omega t + \phi\right) \tag{7.2.5}$$

在任意一个确定的**波阵面上**（如取$z = 0$的xy平面），电场只在一个方向上随时间来回振动，因此这种偏振状态称为**线偏振**。

7.2.2 椭圆偏振

在最一般情况下，即不对四个参量施加任何限制，则波的偏振状态都

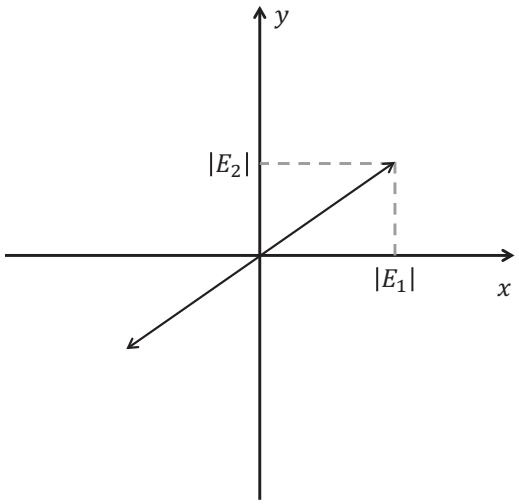


图 7.4

是椭圆偏振。考虑一个具体的例子：$\phi_x - \phi_y = \pi/2$, $|E_{x,0}| > |E_{y,0}|$，则

$$E_x(z,t) = -|E_{x,0}| \sin(kz - \omega t + \phi_y) \tag{7.2.6}$$

$$E_y(z,t) = \quad |E_{y,0}| \cos(kz - \omega t + \phi_y) \tag{7.2.7}$$

在任意一个确定的波阵面上，随着时间的演化，$\vec{E}$场的端点描出一个半长轴为$|E_{x,0}|$，半短轴为$|E_{y,0}|$的椭圆，故这种偏振状态称为**椭圆偏振**。若$\phi_x - \phi_y \neq \pi/2$，则椭圆的对称轴（长短轴）产生了一个转动，但偏振状态仍然是椭圆偏振。

7.2.3 圆偏振

进一步，当$|E_{x,0}| = |E_{y,0}| = A$, $\phi_x - \phi_y = \pm\pi/2$时，电场分量为

$$E_x(z,t) = \mp A \sin(kz - \omega t + \phi_y) \tag{7.2.8}$$

$$E_y(z,t) = \quad A \cos(kz - \omega t + \phi_y) \tag{7.2.9}$$

对这种波，在任一波阵面上，$\vec{E}$的端点随时间的演化描出一个半径为A的圆，故称为**圆偏振**。进一步考虑**两种情况**：

右旋圆偏振

$\phi_x - \phi_y = \pi/2$时，7.2.8与7.2.9式描述的是电场矢量顺时针旋转，称为**右旋圆偏振**。此时7.2.8与7.2.9可以重写为

$$\vec{E}_0 = \sqrt{2}Ae^{i\phi_1}\vec{e}_{right} \tag{7.2.10}$$

其中

$$\vec{e}_{right} = (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)/\sqrt{2} \tag{7.2.11}$$

就是右旋偏振的单位矢量。

左旋圆偏振

同理，$\phi_x - \phi_y = -\pi/2$时为**左旋圆偏振**。偏振态的单位矢量为

$$\vec{e}_{left} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)/\sqrt{2} \tag{7.2.12}$$

讨论：

1. 看上去左右旋光的定义和我们的常识正好相反，似乎以“$\vec{k}$的方向与$\vec{E}$的旋转方向成左/右手螺旋”来定义左右旋光会更容易使人习惯。这里的原因比较复杂，一个可能的解释是历史上人们根据在某一个给定的时刻看到的电场由远及近在空间（z）传播而来时的旋转来定义的（参考课堂上演示的偏振光动画）。

2. 在目前Metamaterial的研究中，一个热门的课题就是如何利用Metamaterial来调控光波的偏振状态，比如实现由线偏振到圆偏振、椭圆

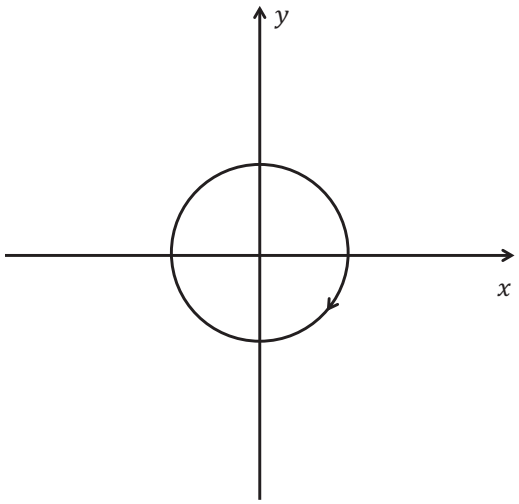


图 7.5

偏振的转化，或者是两个垂直方向的线偏振光的相互转化。有兴趣的同学参考“*J. M. Hao, et. al., Phys. Rev. Lett.99, 063908 (2007), Wujiong Sun, et al, Opt. Lett. 36 927 (2011)*”。

7.3 金属的等效介电常数 - Drude模型

前面两节我们研究了电磁波在最简单的电磁介质（线性、均匀、局域、各向同性、无色散，本构关系为$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu\vec{H}$）中的传播行为。下面我们将开始研究导电介质中的电磁波特性。对任何一种新的电磁介质，在研究其电磁波传播特性之前，都要首先知道这种电磁介质的**“本构关系”**，不然，Maxwell方程无法求解。事实上，这个世界之所以如此**“色彩缤纷”**，正是因为我们有各种具有不同的“本构关系”的电磁介质！本节中，我们将仔细探讨导电介质的本构关系——你们会发现导电介质与一般电介质非常的不同。

7.3.1 色散介质的本构关系

上次课我们学习了电磁波在真空以及均匀各向同性**非色散**的电磁介质中的行为，这两类介质的特点是，ε_r, μ_r均大于0，且不依赖于频率。从物理上讲，这种介质对电磁场的响应是**“局域”**以及**“瞬时”**的,即

$$\vec{D}(\vec{r},t)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},t)\qquad \vec{H}(\vec{r},t)=\mu^{-1}\vec{B}(\vec{r},t) \tag{7.3.1}$$

亦即，**此处、此时**的电磁扰动（由$\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$决定）只会引发**此处、此时**的电磁相响应$\vec{P}(\vec{r},t)$, $\vec{M}(\vec{r},t)$（进一步，$\vec{D}(\vec{r},t)$, $\vec{H}(\vec{r},t)$ ）。然而一般来讲，材料中的电荷运动行为非常复杂，因此最后本构关系也非常复杂，**“局域+瞬时”**仅仅是一种理想情形，通常只是材料的真实响应在**长波和低频下**的近似。在第一章中我们已经指出，一般情况下材料的响应为（最一般的线性响应的形式）：

$$\vec{D}(\vec{r},t)=\int\varepsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{E}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt' \tag{7.3.2}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\int\mu^{-1}(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{B}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt' \tag{7.3.3}$$

这意味着在任何时刻t'任何地点$\vec{r}'$给体系一个扰动$\vec{E}$，体系都有可能在时刻t（根据因果关系，$t>t'$）地点$\vec{r}$产生一个响应$\vec{D}$。这当然使得我们求解Maxwell方程变得非常复杂。注意，响应函数ε只依赖于距离差$\vec{r}-\vec{r}'$和时间差$t-t'$是体系的空间和时间平移不变性的要求。通常我们忽略“空间非局域效应”，即假设体系的响应在空间上为**局域**的。进一步，如果我们只考虑频率确定为ω的一支电磁波在此介质中运动，设复场$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$，代入7.3.1式可得

$$\vec{D}(\vec{r},t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t'}dt'=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{7.3.4}$$

其中

$$\varepsilon(\omega)=\int\varepsilon(t-t')e^{-i\omega(t'-t)}dt'=\int\varepsilon(\tilde{t})e^{i\omega\tilde{t}}d\tilde{t} \tag{7.3.5}$$

是时域响应函数的Fourier变换后的频域形式。因此本构关系此时变成（假设所有物理量均携带$e^{-i\omega t}$的时间变化因子）

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \tag{7.3.6}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\omega)\vec{H}(\vec{r}) \tag{7.3.7}$$

因此，无论再复杂的电磁介质，当其中的电磁波为单频时，其本构关系变成与常规电介质一样的（当然是在线性响应的前提下）。只不过，此种情形下ε, μ的数值依赖于频率值，这种行为我们称为“色散”，ε, μ依赖于频率的电磁介质我们称为“色散”介质。

我们可以把这个情况类比于一个秋千。当我们对一个秋千在t时刻给它一个推动力，它未必立即产生反应。但是，当我们对秋千施加一个随时间谐变的力，最终，这个秋千一定会以这个频率跟随外力振动，无论最初多么不情愿。

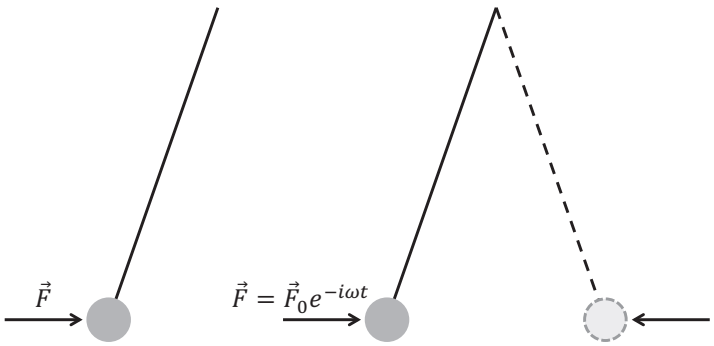


图 7.6

金属（更广义讲是导电介质）是非常重要的一类电磁介质。静态时金属的本构关系就是欧姆定律$\vec{j} = \sigma_c \vec{E}$。当外电场随时间谐变时，即$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$，类似受迫振动，电流和电位移矢量$\vec{j}, \vec{D}$也带有时间因子$e^{-i\omega t}$，即$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}$。此时，可定义频域的

电导率$\sigma(\omega)$和介电函数$\varepsilon(\omega)$为

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \qquad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \tag{7.3.8}$$

原则上讲，$\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$的严格求解应当借助于量子力学。对良导体，通常可以把体系看作电子自由地在晶格正离子组成的背景中运动——此既是自由电子气模型，也就是高能物理中所言的等离子体模型。在常温下，我们可以用经典理论借助等离子体模型来求解金属的$\sigma(\omega), \varepsilon(\omega)$。

7.3.2 金属的有效电导率

当有一束单频的电磁波施加在等离子体中时，空间将有电场$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$存在，则电子将受到电场力$e\vec{E}$。同时，电子运动时将受到其他粒子（晶格亦即声子，杂质等）的散射而丢失能量及动量。描述这种**散射力**的最简单的模型是“迟逾时间近似”，即**散射力**可写成

$$\vec{F}_{sca} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{7.3.9}$$

这个式子的物理意义是：电子平均τ时间受到一次“异种粒子”的散射而丢失其所有动量。因此，电子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \tag{7.3.10}$$

在长波近似下，在电子来回运动的区间内可以近似认为电场不发生显著变化：$E(\vec{r}) \sim \vec{E}_0$。显然电子将在单频外场力的作用下做“受迫振动”。将电子运动的试解$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$代入7.3.10可得

$$\vec{v}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{im\,(\omega + i/\tau)} \tag{7.3.11}$$

因此，电子的运动速度为

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{im\,(\omega + i/\tau)} \tag{7.3.12}$$

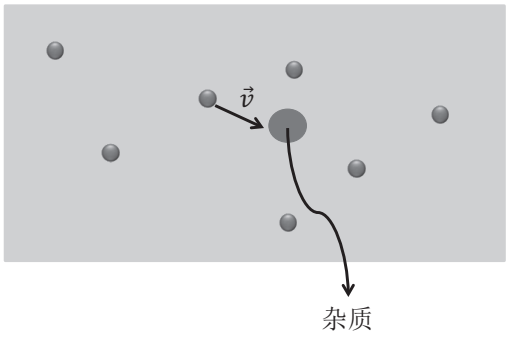


图 7.7

与之前一样，这里速度的复数形式只是为计算方便（基础是方程是线性方程！），真正有物理意义的是场量的实部。根据电流密度的定义，我们发现

$$\vec{j}(\vec{r},t)=n_e e\vec{v}(\vec{r},t)=-\frac{n_e e^2}{im\left(\omega+i/\tau\right)}\vec{E}(\vec{r},t) \tag{7.3.13}$$

式中n_e为单位体积内的电子数目。将7.3.13与7.3.8对比，可得电导率为

$$\sigma(\omega)=-\frac{n_e e^2}{im\left(\omega+i/\tau\right)} \tag{7.3.14}$$

对此做**如下讨论：**

1. 当$\omega\to 0$时，上式应当回到直流情况下金属的电导率σ_c。将7.3.14取$\omega\to 0$的极限，有$\sigma_c=\dfrac{n_e e^2}{m}\tau$。这就是迟逾时间近似下金属直流电导率的结果，故，人们常用金属的直流电导率的实验值来反过来确定参数τ。

2. 复数形式电导率不能只取实部！其实部、虚部都有明确的物理意义！对场量（如$\vec{E},\ \vec{j},\ \vec{v}$）我们才取其实部讨论，对电导率这个中间产物我们不可以这样做。事实上，Fourier分析表明只有在复场表示下（即以$e^{-i\omega t}$为基）才可以定义响应函数（如$\varepsilon(\omega),\ \mu(\omega),\ \sigma(\omega)$等，参考7.3.4-7.3.7的推导），对实场形式（$\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$）

无法得到线性正比关系，因此无法定义响应函数！将复电导率写成$\sigma(\omega) = \mathrm{Re}\left(\sigma(\omega)\right) + i\mathrm{Im}\left(\sigma(\omega)\right)$，可以证明实部对应着实际的能量耗散，但虚部并不对应能量耗散——这与直流电导率有着本质的不同！

3. 对一般良导体我们发现$\tau \sim 10^{-14}s$，因此：

   (a) **在GHz以下的频段（微波）**，$1/\tau \gg \omega$，此时$\sigma(\omega) \approx \sigma_c$，即有效电导率就是静态时的电导率。这里的原因是电子碰到一次散射的平均时间τ远小于电场发生变化的时间间隔$T \sim \dfrac{1}{\omega}$，电场还没有发生显著变化电子已经与杂质碰撞了成千上万次。因此这种条件下电导率与直流时相比并没有什么明显不同。

   (b) **在可见光频段**，$1/\tau \ll \omega \sim 10^{15}s^{-1}$，此时$\sigma(\omega) \approx i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}$，亦即，复数电导率的实部（对应耗散部分）远小于虚部（非能量耗散部分）。这里的物理图像是，电子在高频电场的作用下来回运动，还没有碰到散射（需要费时$\sim \tau$）就已经折返。因此，此时电子的行为与静态时极不相同，其主要行为是与电场相互交换能量（表现为电导率呈现虚部，电场不对电流做功），而不是与杂质碰撞耗散能量。

7.3.3 金属有效介电函数

有了金属的有效电导率，我们可以进一步导出其**有效介电函数**。根据Maxwell方程组的第4条方程，在单频条件下，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \left[\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0\right] \vec{E} \tag{7.3.15}$$

一般在静电、静磁条件下，我们把金属中的电流作为独立于金属的“自由电流”来处理，也就是说，在Maxwell方程中明显地写出$\vec{j}$这一项，而把去除了“传导电流”的金属的介电响应认为和真空无异（$\varepsilon = \varepsilon_0$），

当然有时也会把金属中的“价带”电子（束缚电荷）的影响考虑进去，此时，可取$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$。

然而在交变条件下，电流和电场一样随着时间协变。而且所谓自由电子也不再自由，必须在交变场的作用下做“折返跑”。某这个意义上讲，传导电流也变成了束缚在金属中响应电流。因此，通常此时将金属也看成一种电介质，把传导电流作为金属的束缚电流来考虑。对一个电介质，7.3.15应当写成

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \tag{7.3.16}$$

两式比较可得金属的有效介电常数为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega} \tag{7.3.17}$$

将7.3.13代入上式，即得金属的有效介电常数

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \tag{7.3.18}$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}} \tag{7.3.19}$$

是个只与金属性质有关的常量，叫做等离子共振频率。7.3.18即是著名的Drude模型，它非常好地描述了良导体从直流（$\omega = 0$）到紫外（$\omega > 10^{16}Hz$）的整个频谱的介电行为。ω_p描述的是自由电子气在外场下的一个集体震荡共振行为——显然密度越大，质量越小，这个集体振动的频率就越大。良导体的ω_p大都在紫外频区。

我们讨论两种典型情况下的金属的介电行为：

GHz及以下

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{7.3.20}$$

此时金属的ε_r具有一个极大的正的虚部，以及一个负的实部（不随频率变化）。

光波段

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 10\frac{\omega_p^2}{\omega} \qquad \text{（对金、银等良导体）} \tag{7.3.21}$$

从光波段到GHz

$\varepsilon_r(\omega)$由一个由负实部主导到正的虚部主导的一个转变。

7.4 电磁波在导电介质中的传播

上节中我们系统介绍了金属的有效介电函数$\varepsilon_r(\omega)$，下面我们研究电磁波在导电介质中的传播。原则上，我们需要在金属中求解如下Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{7.4.1}$$

针对一个特定频率ω，所有的场量均以$e^{-i\omega t}$形式随时间谐变：

$$\left(\vec{E}(\vec{r},t), \vec{H}(\vec{r},t), \rho(\vec{r},t), \vec{j}(\vec{r},t)\right) = \left(\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}), \rho(\vec{r}), \vec{j}(\vec{r})\right) e^{-i\omega t} \tag{7.4.2}$$

将金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中（参考7.3.16式），并利用连续性方程$\nabla \cdot \vec{j}_f + \dfrac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$，可以证明Maxwell方程针对时谐场的形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\varepsilon(\omega)\vec{E}\right) = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \end{cases} \tag{7.4.3}$$

对7.4.3中第2式同时作用$\nabla\times$，并利用$\nabla \cdot \vec{H} = 0$，可得

$$-\nabla^2\vec{H} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{H} \tag{7.4.4}$$

我们立刻发现这个针对单频的“时谐”Maxwell方程和无色散介质中磁场满足的方程7.1.5完全一样！只不过这时“介电常数”依赖于频率，只针对目前的所设的频率正确。7.4.4的解是平面波，$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$（此时只需考虑空间变化部分，时间部分总是$e^{-i\omega t}$），代入可解得电磁波传播的色散关系

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\omega) \tag{7.4.5}$$

这与一般介质中的色散关系全一样，除了此处ε_r是频率的函数，因此只要知道了$\varepsilon_r(\omega)$就可以求解7.4.5得到电磁波传播的行为。注意，上面的讨论是一般成立的，对任何**线形各向同性介质**，只要体系在频域的本构关系$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$已知，我们就可以利用7.4.5式电磁波传播的色散关系。下面考虑几个特殊情形:

7.4.1 良导体在GHz及以下频段

复波矢

良导体，如金银铜等，在GHz及以下频段的有效介电常数为

$$\varepsilon_r(\omega) \approx -const. + \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \approx \frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{7.4.6}$$

将7.4.6式代入7.4.5可得

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}\frac{\omega}{c} = (1+i)\alpha \tag{7.4.7}$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_c\mu_0\omega}{2}} \tag{7.4.8}$$

则

$$\vec{k} = (1+i)\alpha \cdot \vec{e} \tag{7.4.9}$$

其中$\vec{e}$任意单位矢量（传播方向）。

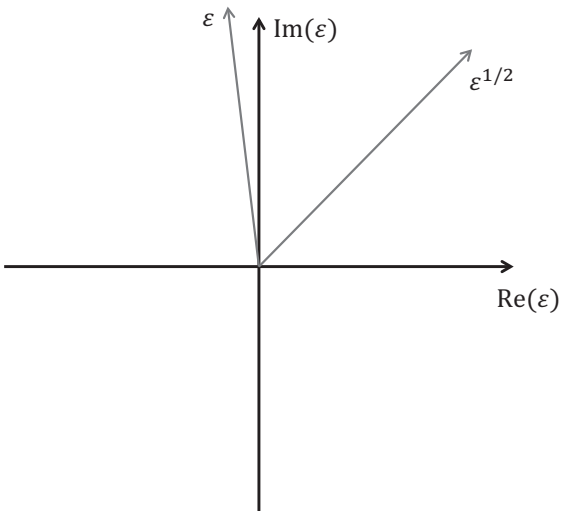


图 7.8

注意很多教材上假设$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \dfrac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}$，这其实并不完全正确。但事实上，这并不影响解的形式——当$\mathrm{Im}(\varepsilon_r) \gg \mathrm{Re}(\varepsilon_r)$时，解就是7.4.7式的形式，根本与$\varepsilon_r$的实部无关！（如图7.8所示）。

将7.4.9带入7.4.2，则电磁波在金属中的电场（假设传播方向为z方向）为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \tag{7.4.10}$$

当然横波条件要求$\vec{E}_0$在xy平面。可见，此时平面波的振幅沿传播方向指数衰减。

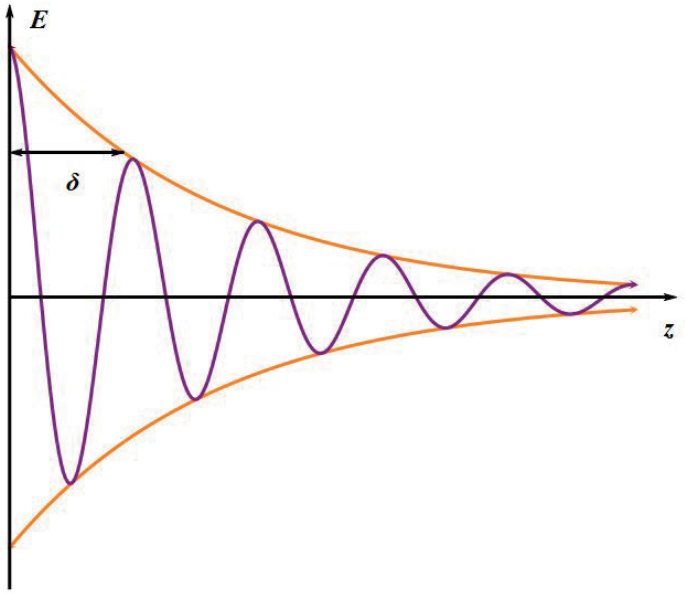


图 7.9

振幅衰减到$r = 0$处的$1/e$倍的距离$1/\alpha$称为**透入深度**（也叫**趋肤深度**），定义为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_c \mu \omega}} \tag{7.4.11}$$

因此电磁波不能渗入在导电介质的内部，而是很快在表面的一个厚度为δ的薄层内衰减掉。与此相对应：金属上产生的交流电流一定也只是局域

在表层的这个薄层内——这个结论我们曾在讨论准静态近似下的电流的趋肤效应时得到过。

Tips：这种衰减表示电磁波的能量有消耗。但对良导体，$\sigma_c \to \infty$, $\delta \to 0$，入射的电磁波几乎被100%反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在GHz），可以看作理想导体。

电磁场强度之间的关系

由7.4.3式中的第2式可得

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{\omega\delta}(1+i) \cdot \vec{e} \times \vec{E}_0 = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\sigma_c \mu_0}{\omega}}\vec{e} \times \vec{E}_0 \tag{7.4.12}$$

良导体内的电磁波有如下重要特点：

1. 与介质中的电磁波$\vec{B}$, $\vec{E}$之间**同相位**不同，此处$\vec{B}$, $\vec{E}$之间有$\frac{\pi}{4}$的相位差，趋向导体内部时，两者均以指数形式振荡衰减。

2. 良导体内部的电磁能量是以磁场能形式存在的：

$$U_B \sim \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 = \frac{\sigma_c}{2\omega}E_0^2 = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\right) \gg U_E \tag{7.4.13}$$

这种趋势随着频率的减小增大。当$\omega = 0$时，磁能是电能的无限大倍，因此$\vec{E}$只能为0——此时电磁场能量只以磁能的形式出现。这与静电时金属内部不存在静电场（但可以存在静磁场）的结果一致。导电介质中电磁波的传播特性如图7.10所示。

注：

(a) 这里$U_E \sim \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$指的是纯粹的电场的能量，并没有把“传导电流”携带的能量（其机械能及与电磁场的相互作用能）算上。

(b) 对色散介质，利用$U_E \sim \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} \sim \frac{1}{2}\varepsilon(\omega)\left|E\right|^2$计算介质中电磁场的总能量是不对的，否则你就得到负能量这个荒谬的结论。

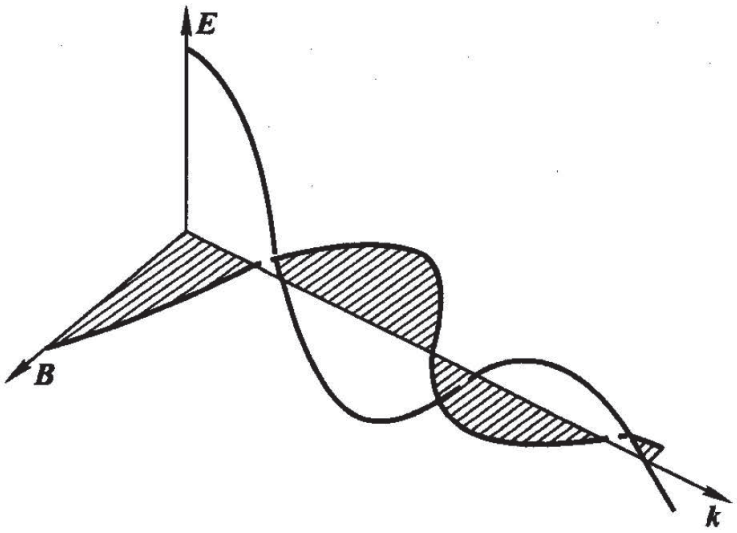


图 7.10

色散介质中的能量是个复杂的问题，要得到完整的答案，请参考Landau的书。

7.4.2 良导体在光波段（等离子体中的光波）

在光波段，金属的有效介电常数为$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$，这个模型也被广泛应用于研究其他自由电荷组成的等离子体（唯一的区别是电荷密度不同导致ω_p^2不同）。将其带入色散关系可得

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right) \tag{7.4.14}$$

对此我们作如下的讨论：

1. 当$\omega < \omega_p$时，k为一纯虚数，可写成$k = i/\delta$，其中

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}} \tag{7.4.15}$$

此时金属中的电磁场是纯粹的指数衰减的，$E \sim E_0 e^{ikr} = E_0 e^{-r/\delta}$，与7.4.10式表示的一边衰减一边振荡（传播）略有不同。这种波称为衰逝波，或者叫消逝波，倏逝波（Evanescent Wave）等。 当电磁波

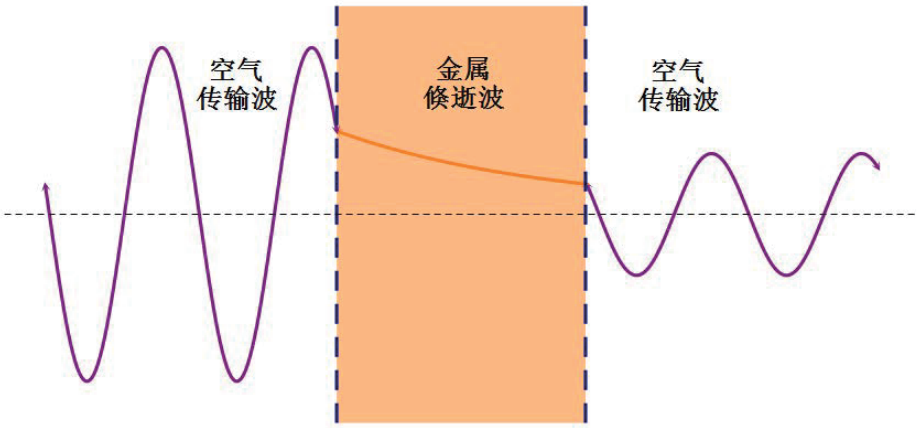


图 7.11

由空气入射到金属上时，进入金属后电磁波后的透入深度为δ。若金属为半无限大，则电磁波完全不能通过金属，因此将被反射回去；若金属板为有限厚度，则会有衰逝波隧穿过去。δ越大，则隧穿过去的电磁波就越多（如图7.11所示）。这种效应非常类似量子力学中的隧穿效应，而在这里金属（$\varepsilon_r < 0$）就类比于量子力学中的势垒，电介质（$\varepsilon_r > 0$）类比于势阱。

2. 磁场为

$$\vec{B}(z,t) = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times E_0 \vec{e}_x e^{-z/\delta} e^{-i\omega t} = \frac{i}{\omega\delta} E_0 \vec{e}_y e^{-z/\delta} e^{-i\omega t} \tag{7.4.16}$$

这里磁场与电场有$\pi/2$的相差，与介质、良导体在GHz等情形均不相同！这个相位的不同，造成了能流形式在各种介质中的不同！（参考作业题）

3. 当$\omega = \omega_p$时，$\delta \to \infty$，此时隧穿效应达到极值。

4. 当$\omega > \omega_p$, $0 < \varepsilon_r < 1$, $n = \sqrt{\varepsilon_r} < 1$，此时金属（或是等离子体）是比真空还要光疏的介质，光波可以在其中传播。但因为折射率与空气毕竟不同，所以此时一个有限厚度的金属板对电磁波仍然有反射，造成透射率的降低。因此，$\omega = \omega_p$就定义了一个由不透明到透明的等离子共振带边，实验上常利用这个现象来探测金属的等离子体共振频率。

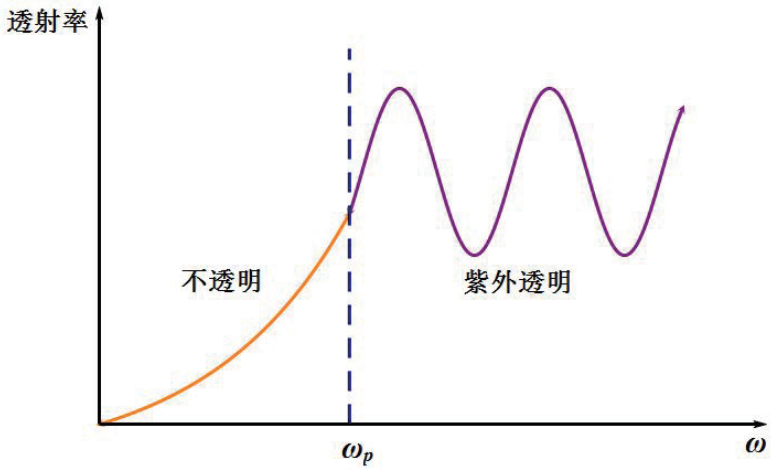


图 7.12

5. 金属在GHz和在光波段均可以很好的反射电磁波，但机理及表现形式完全不同。前者是靠金属的介电常数的虚部，而后者靠的是负的介电常数。

   Tips: $\omega = \omega_p$时，$\varepsilon_r \to 0$, $n \to 0$，我们发现体系具有许多奇异的特性。比如，根据7.4.16，$\vec{B} \to 0$，也就是此时体系内部只存在电场。另外，这种遂传透明现象与体系的厚度无关，这一点又与光学中法布里-帕罗效应很不相同。尽管现在研究的金属只能在紫外（ω_p）具有这个性质，基于Metamaterials，任何其实可以在任意频段均实现这种奇异材料。这种材料叫epsilon-near-zero(ENZ)或者zero-index-material(ZIM)，是目前非常热的前沿研究课题。

7.4.3 非良导体

对于导电性能不好的导电媒质，比如一些电介质，其既有价带电子贡献的介电性质（ε_r），又因为有少量掺杂的电荷或是其他原因具有很小的电导率σ_c。这种物质的复介电函数可以写成

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_r + i\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{7.4.17}$$

因为电导率很小，$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \ll 1$，7.4.17意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。将7.4.17带入色散关系7.4.5中可得

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \beta + i\alpha \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} + i\frac{\sigma_c}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{7.4.18}$$

电磁波的解为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\beta z - \omega t)} \tag{7.4.19}$$

显然，电磁波在这种介质中的传播性质又与良导体的两种情况均不同，与真空中的性质相仿，只是波在传播的过程中有少量能量耗散。注意到$\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}$即是体系的有效折射率，而上面的分析显示折射率的虚部对应着电磁波在体系中的耗散——这一点与电导率的实部恰好对应（注意$\tilde{\varepsilon}$和σ的关系7.3.17）。

Tips：研究电磁媒质中电磁波的特性的范式：

本构关系（微观理论）$\rightarrow$ 色散关系$\rightarrow$ 本征态（电场、磁场关系，偏振...）

7.5 旋光介质中的电磁波

之前我们研究了普通电介质和导电介质中电磁波的传播特性。这两种媒介的区别是前者通常为非色散介质，后者是色散介质；共同特性是它们

都是各向同性介质。下面我们将进一步研究一种**各向异性介质——旋光介质**，并且考察其中电磁波的传播特性。

当对等离子介质施加静磁场时，这类介质就叫做旋光介质。比如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者处于恒定磁场中的金属，都属于此类介质。要研究电磁波在这种介质中的传播行为，类似研究金属中的电磁波，我们还是首先研究其**本构关系**，然后再求解Maxwell方程在其中的解。

7.5.1 旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场$\vec{B}_0$中的自由电子气对电场的响应时。忽略杂质的散射项，电子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}_0\right) \tag{7.5.1}$$

其中，设静磁场$\vec{B}_0 = \vec{B}_0\vec{e}_z$，强度远远大于电磁场中的磁场；外电场随时间谐变（$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$）。显然，在外场的驱动下，电子的运动速度也具有$e^{-i\omega t}$因子。设$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$，则7.5.1式的3个分量形式可以写为

$$-i\omega v_{0x} = \frac{e}{m}E_{0x} + \frac{e}{m}v_{0y}B_0 \tag{7.5.2}$$

$$-i\omega v_{0y} = \frac{e}{m}E_{0y} - \frac{e}{m}v_{0x}B_0 \tag{7.5.3}$$

$$-i\omega v_{0z} = \frac{e}{m}E_{0z} \tag{7.5.4}$$

定义$\omega_B = \dfrac{|e|\,B_0}{m} = -\dfrac{eB_0}{m} > 0$（此处我们的定义是$e<0$），物理意义是电子在垂直磁场平面（$xy$平面）内做圆周运动的圆频率，代入以上3式并解

之可得

$$v_{0x} = \frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2} \tag{7.5.5}$$

$$v_{0y} = \frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0y} - \omega_B E_{0x}}{\omega^2 - \omega_B^2} \tag{7.5.6}$$

$$v_{0z} = -\frac{eE_{0z}}{im\omega} \tag{7.5.7}$$

将以上3式代入电流密度公式$\vec{j} = n_e e\vec{v}$，可得电流密度的形式：

$$j_x = \frac{n_e e^2}{m}\frac{i\omega E_{0x} + \omega_B E_{0y}}{\omega^2 - \omega_B^2}e^{-i\omega t} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}\left(i\omega E_x + \omega_B E_y\right) \tag{7.5.8}$$

$$j_y = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}\left(i\omega E_x - \omega_B E_y\right) \tag{7.5.9}$$

$$j_z = -\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega}E_z \tag{7.5.10}$$

我们发现电流和电场之间的关系满足一个拓展的欧姆定律

$$j_i = \sigma_{ij}E_j \quad or \quad \vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{E} \tag{7.5.11}$$

只不过此时电导率为一个**各向异性的矩阵**，其具体形式为

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_p^2\varepsilon_0}{\omega^2 - \omega_B^2}\begin{pmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\omega^2 - \omega_B^2}{i\omega} \end{pmatrix} \tag{7.5.12}$$

有了电导率矩阵，我们可以进一步求出介质的有效介电常数。此时，Maxwell第四条方程（时域谐变下）为$\nabla\times\vec{H} = \left(\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) - i\omega\varepsilon_0\right)\vec{E}$，在交变条件下将“传导电流”看成金属的束缚电流，则对此有效电介质来讲，方程应为$\nabla\times\vec{H} = -i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\vec{E}$。两式对比可得

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r(\omega) = I + i\frac{1}{\varepsilon_0\omega}\overleftrightarrow{\sigma}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{7.5.13}$$

这是一个各向异性的“等效介电常数”张量，其中

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_B}{(\omega^2 - \omega_B^2)\,\omega} \qquad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{7.5.14}$$

注：当$B_0 = 0$时，$\varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$，体系回到各向同性的等离子体。

所以磁场对等离子体的影响为：

1. 使得体系的有效介电函数变成各向异性；

2. 而且其非对角元素为纯虚数。

具有类似7.5.13式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异。与此相对应，若磁导率矩阵$\overleftrightarrow{\mu}_r(\omega)$具有7.5.13式，则体系称为**“旋磁材料”**。

7.5.2 旋光介质中的电磁波本征态

下面我们研究此类材料中的电磁波特性。下面介绍的方法其实是计算各向异性电磁材料中的波的行为的一个通用方法。取平面波试解$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)},\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kz-\omega t)}$（$\vec{E}_0,\ \vec{H}_0$为常矢量），将其带入频域的Maxwell方程组（注意到此时$\varepsilon_r(\omega)$为一张量），则有

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \left(\overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \right) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu_0 \vec{H}_0 \\ \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \end{cases} \tag{7.5.15}$$

一般条件下求解7.5.15相当复杂（参考习题）。下面做些简化，考虑最简单的一种情况：

1. 假设$\omega > \omega_p \gg \omega_B$，故$\varepsilon_1, \varepsilon_2$都是正实数，且$\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$；

2. $\vec{k} = k\vec{e}_z$

由第1式及$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r$的形式，可得$E_{0z} = 0$，即$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$，因此在此条件下电磁波仍然为横波！由第3、4式可得

$$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0 \tag{7.5.16}$$

整理可得（利用$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$）

$$k^2 \vec{E}_0 = k_0^2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \tag{7.5.17}$$

其中$k_0 = \omega/c$为真空中的波矢。7.5.17看上去与各向同性介质中的电磁波传播的色散关系极为类似，唯一的区别是此处$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r$为一张量。但也正因为这一特征，容易证明$\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_x$以及$\vec{E}_0 \parallel \vec{e}_y$的线偏振光波都不是7.5.17的解。那么此时电磁波的偏振态到底应当是什么？考虑到$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$，则一般情况的解为$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$，其中$E_{0x}, E_{0y}$一般情况下为复数。代入7.5.17，写出分别沿$x$和$y$方向的分量形式，可得2个方程。将这两个方程写成矩阵的形式，有

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 & i\varepsilon_2 k_0^2 \\ -i\varepsilon_2 k_0^2 & \varepsilon_1 k_0^2 - k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = 0 \tag{7.5.18}$$

解7.5.18式等于对角化相应的矩阵。计算得到2个本征值：

$$k_+ = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad k_- = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \tag{7.5.19}$$

将本征值带入7.5.18可得相应的本征矢量。整理之后结果为

$$k_+ : \quad E_{0x} = iE_{0y} \quad \Rightarrow \vec{E}_0^+ = E_0\left(\vec{e}_x - i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2} = E_0\vec{e}_{right} \tag{7.5.20}$$

$$k_- : \quad E_{0x} = -iE_{0y} \Rightarrow \vec{E}_0^- = E_0\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)/\sqrt{2} = E_0\vec{e}_{left} \tag{7.5.21}$$

7.5.19-7.5.21显示在这种材料中，沿z轴传播的电磁波的本征态不是线偏振的，恰恰对应着左右旋圆偏振！且7.5.19显示这两个本征态的色散关系（或者说传播的相速度）不相同。对右旋光，波的相速度为

$$v_{right} = \omega/k_+ = c/\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tag{7.5.22}$$

对左旋光

$$v_{left} = \omega/k_- = c/\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \tag{7.5.23}$$

因此，在介质中沿着磁场方向传播时，左旋光比右旋光的速度快。

7.5.3 法拉第效应

当一个**线偏振波**由各向同性的空间进入各向异性的等离子体中时，由于线偏振波可以分解为两个等幅的**左、右旋圆偏振波**，而左旋和右旋波的波速又不相等，结果是电磁波的偏振面在等离子体中以前进方向为轴不断地旋转。这种效应叫法拉第旋光效应，如图所示。

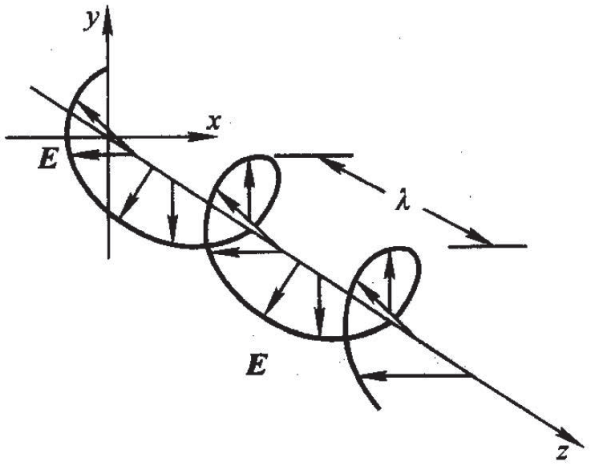


图 7.13

具体可以计算出电磁波的传播行为。设进入Faraday介质之前在真空中

传播的线偏振电磁波为

$$\vec{e}_x E_0 e^{i(k_0 z-\omega t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}E_0\left(\vec{e}_{right}+\vec{e}_{left}\right)e^{i(k_0 z-\omega t)} \tag{7.5.24}$$

进入Faraday介质后，假设旋光体系对左右旋光的透射率一样，则电磁波变成

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right}e^{ik_+ z}+\vec{e}_{left}e^{ik_- z}\right)e^{-i\omega t}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_{right}e^{i\Delta k\cdot z/2}+\vec{e}_{left}e^{-i\Delta k\cdot z/2}\right)e^{i(\bar{k}z-\omega t)} \tag{7.5.25}$$

$$=\frac{E_0}{2}\left[\left(e^{-i\Delta k\cdot z/2}+e^{i\Delta k\cdot z/2}\right)\vec{e}_x+i\left(e^{-i\Delta k\cdot z/2}-e^{i\Delta k\cdot z/2}\right)\vec{e}_y\right]e^{i\bar{k}z}e^{-i\omega t} \tag{7.5.26}$$

$$=E_0\left[\cos\left(\Delta k\cdot z/2\right)\vec{e}_x+\sin\left(\Delta k\cdot z/2\right)\vec{e}_y\right]e^{i\bar{k}z}e^{-i\omega t} \tag{7.5.27}$$

其中$\Delta k=k_+-k_-$, $\bar{k}=\left(k_++k_-\right)/2$。因此电磁波在旋光介质中的电矢量一边传播一边旋转（如图7.13所示）！假设Faraday介质的厚度为d，则从Faraday介质中出来时（将$z=d$带入7.5.27）重新变成线偏振，偏振方向为

$$\vec{E}\parallel\cos\left(\Delta k\cdot d/2\right)\vec{e}_x+\sin\left(\Delta k\cdot d/2\right)\vec{e}_y \tag{7.5.28}$$

与入射光比较偏振方向旋转了如下的角度

$$\Delta\phi=\Delta k\cdot d/2\approx k_0 d\varepsilon_2/\left(2\sqrt{\varepsilon_1}\right) \tag{7.5.29}$$

此即是著名的Faraday旋光效应，后面一项在考虑$\varepsilon_2\ll\varepsilon_1$后得到。因为$\varepsilon_2\propto\omega_B$，显然这个偏振转角正比于外磁场$B$及旋光介质的厚度$d$。

讨论：在各向同性的介质里，沿x、y方向偏振的光波的$\vec{k}$矢量相同（或者说状态简并），因此这种介质中左右旋电磁波同样状态简并。我们既可以用线偏振的光波作为基把任意偏振的波展开，等价地，我们也可以用左右旋光作为基来做同样的事情。但各向异性介质中不存在这种简并，我们必须求出色散关系对应的电磁本征态作为基，此时不能随意选取线偏振或者圆偏振波作为基。

7.6 电磁波在介质面上的反射和折射

至今为止，我们只学习了电磁波在一个**无限大均匀的块体材料**中传输时的行为。电磁波从一个材料进入另一个材料中会如何？此即是本节我们要学习的内容。

7.6.1 电磁波边界条件

光在两种介质的交界面上的反射和折射现象为大家所熟知。早期人们是基于牛顿的光粒子的概念用了许多假设推出光的反射和折射定律的。直到后来人们利用Maxwell方程以及边界条件，不加任何其他假设，成功推导出光的折射和反射定律时，人们才完全接受光的波动性。这里我们从Maxwell方程出发讨论电磁波的反射和折射现象。在界面上电磁场要满足边值条件

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_1(\vec{r},t)-\vec{E}_2(\vec{r},t)\right)\Big|_b=0 \qquad \vec{n}\times\left(\vec{H}_1(\vec{r},t)-\vec{H}_2(\vec{r},t)\right)\Big|_b=0 \quad (7.6.1)$$

由上述边界条件，我们可以推导出决定电磁波的界面上行为的2大定律。

7.6.2 反射、折射的基本规律 - Snell's Law（斯涅尔定律）

首先注意到电场、磁场的切向分量在交界面内**时时**且**处处**相等（我们已经把金属的传导电流在高频下作为束缚电流处理，因此金属也可以作为电介质来处理，无须考虑界面上的面自由电流！）若交界面为一平面，我们把它取为Oxy面。如图7.14所示，考虑一单色平面波入射到交界面上，其电场为

$$\vec{E}_i=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (7.6.2)$$

则电场切向分量在交界面上**时时相等**要求反射波、折射波也一定携带相同

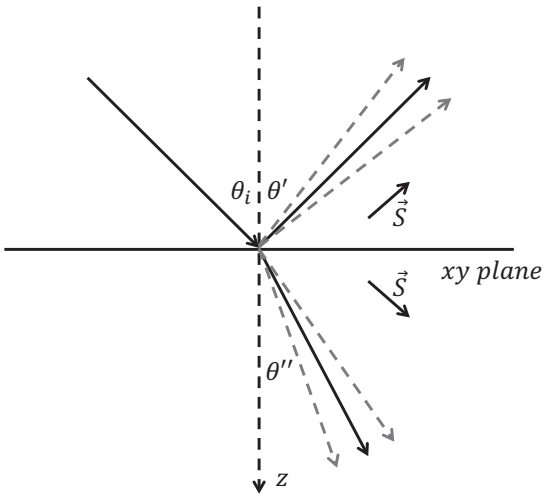


图 7.14

的时间因子$e^{-i\omega t}$，这个可以做如下理解：介质分子在外电磁波的作用下以频率ω做受迫振动，这种受迫振动是反射、折射波的来源，故反射、折射波一定也是以此频率振动，这其实是我们所处的世界的时间平移不变性的体现！假设介质1和2都是**均匀各向同性**的，则其中的电磁通解为平面波，因此，反射、折射波可以一般形式地写为所有频率为ω的沿不同方向传播的平面波的叠加

$$\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \sum_{\vec{k}'} \vec{E}'_0\left(\vec{k}'\right) e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{7.6.3}$$

$$\text{折射波} \qquad \vec{E}_d = \sum_{\vec{k}''} \vec{E}''_0\left(\vec{k}''\right) e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{7.6.4}$$

其中波矢应和频率当满足色散关系

$$k' = (\omega/c)\cdot n_1 \qquad k'' = (\omega/c)\cdot n_2 \tag{7.6.5}$$

其中$n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}\cdot\mu_{ri}}$为第$i$个体系的折射率。下面考虑7.6.2的第2个要求：电磁场在交界面上**处处相等**。这意味着反射波、折射波一定在xy平面内具

有相同的空间波动行为，亦即带有相同的因子$e^{i\vec{k}_\parallel\cdot\vec{r}}=e^{i(k_xx+k_yy)}$。这个结论身深层次的物理其实是体系在界面上的平移不变性！考虑界面上的任意2点在外场激励下的震动，其唯一的不同就是外场的相位有不同，因此这两点的振动差$e^{ik_\parallel\Delta r}$，因此响应的反射/折射波也差同样的相位。这意味着7.6.3与7.6.4式中反射、折射波的展开式中只有一支平面波满足要求，即

$$\vec{k}'_\parallel=\vec{k}''_\parallel=\vec{k}_\parallel \tag{7.6.6}$$

由7.6.5及7.6.6可得z方向上的$\vec{k}$矢量：

$$k'_z=\pm\sqrt{k'^2-k_\parallel^2}\qquad k''_z=\pm\sqrt{k''^2-k_\parallel^2} \tag{7.6.7}$$

如何确定7.6.7式应取正号还是负号？这里应当用到因果关系（Causality）！根据因果关系，反射波及折射波的能量都应当离开界面。在常规介质中波矢的方向与能量传播的方向（即Ponty矢量$\vec{S}$）同方向$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\parallel\hat{k}$。故7.6.7中$k'_z$应取负根，而$k''_z$应取正根。故反射、折射光如图7.14所示。由三方面的讨论：**时间平移不变性、界面空间平移不变性、因果关系**，我们可总结出反射、折射的基本规律：

1. 反射波、折射波的频率与入射波频率相等：$\omega'=\omega''=\omega$。

2. 根据$\vec{k}'_\parallel=\vec{k}''_\parallel=\vec{k}_\parallel$，若$k_y=0$，则必有$k'_y=k''_y=0$。这意味着，入射线、反射线和折射线在同一平面内——这个由入射波$\vec{k}$矢量与交界面垂直方向构成的平面定义为入射面。

3. k'_z, k''_z的正负号由因果关系确定！

4. 根据$k_x=k'_x$，有$k\sin\theta=k'\sin\theta'$，同时因为$k=k'$（入射波与反射波在同一种介质中），由此得出$\theta=\theta'$，即入射角等于反射角，即“镜面反射”。

5. 根据$k_x = k''_x$，必有$k\sin\theta = k''\sin\theta''$，再根据7.6.5，于是

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.6.8}$$

这就是光学中的折射定律（Snell's Law）。因为折射定律中所涉及的物理量仅仅是$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = \sqrt{\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_r}$，这正是$n$被称为介质的折射率的原因。

7.6.3 振幅关系 - Fresnel's Law（菲涅耳定律）

上面我们根据边值条件中的时空依赖关系推导出电磁波的传播方向所满足的要求，对折射波/反射波的振幅尚未讨论。下面我们根据7.6.2来讨论这件事情。对沿$\vec{k}$方向传播的具有任意偏振状态的平面电磁波，我们总可以将其分解成两个偏振方向相互垂直的电磁波的叠加。因此，下面我们将分两种情形分别考虑。

S波/TE（横电）波

在这种情况下，入射波的电场垂直于入射面（躺在交界面上），如图7.15所示。入射、反射、以及折射波的电场可以写成

$$\text{入射波} \qquad \vec{E}_i = \hat{y}E_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \tag{7.6.9}$$

$$\text{反射波} \qquad \vec{E}_r = \hat{y}E'_0 e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \tag{7.6.10}$$

$$\text{折射波} \qquad \vec{E}_t = \hat{y}E''_0 e^{i(k_x x + k''_z z - \omega t)} \tag{7.6.11}$$

根据Maxwell方程，磁场可写成

$$\vec{H} = \frac{1}{Z}\left(\hat{k}\times\vec{E}\right) \tag{7.6.12}$$

的形式，其中$Z = \sqrt{\mu}/\sqrt{\varepsilon}$是介质的阻抗。因此，入射、反射以及折射波的

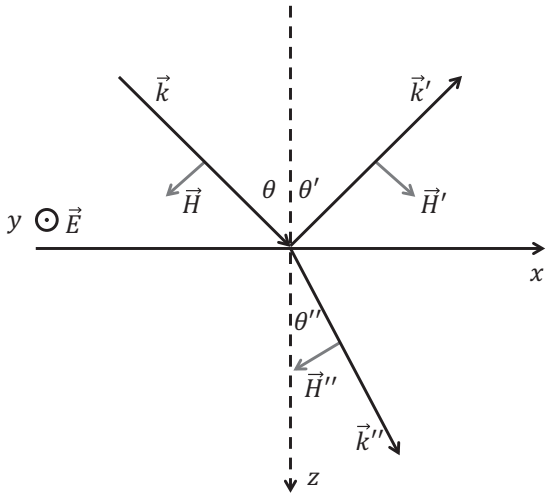


图 7.15

磁场为

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{Z_1}\frac{k_x\hat{z} - k_z\hat{x}}{k}e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \tag{7.6.13}$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_0'}{Z_1}\frac{k_x\hat{z} + k_z\hat{x}}{k}e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \tag{7.6.14}$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_0''}{Z_2}\frac{k_x\hat{z} - k_z\hat{x}}{k''}e^{i(k_x x + k_z'' z - \omega t)} \tag{7.6.15}$$

在交界面上（设$z = 0$）$\vec{E}, \vec{H}$的切向值相等，则有

$$E_0 + E_0' = E_0'' \tag{7.6.16}$$

$$\frac{k_z}{Z_1 k}E_0 - \frac{k_z}{Z_1 k}E_0' = \frac{k_z''}{Z_2 k''}E_0'' \tag{7.6.17}$$

注意到

$$k_z = k\cos\theta \qquad k_z'' = k''\cos\theta'' \tag{7.6.18}$$

解联立方程可得

$$E_0' = \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}E_0 \tag{7.6.19}$$

$$E_0'' = \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''}E_0 \tag{7.6.20}$$

反射、折射波与入射波中的**磁场振幅关系**可由7.6.13-7.6.15求出。

P波/TM（横磁）波

下面考虑另一种情况，即磁场垂直于入射面（或者说磁场躺在交界面内），此时先考虑磁场比较方便，如图所示。

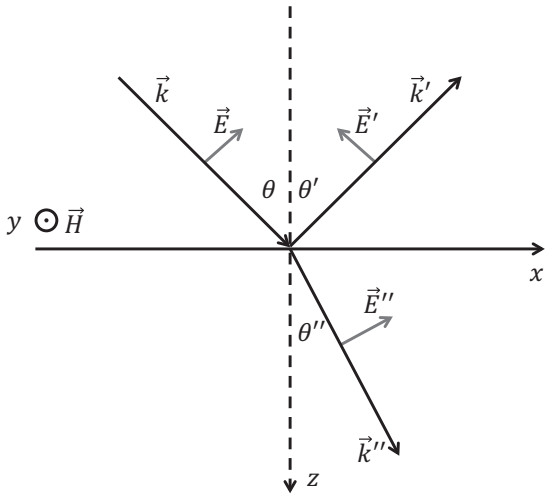


图 7.16

$$\text{入射波} \qquad \vec{H}_i = \hat{y} H_0 e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \tag{7.6.21}$$

$$\text{反射波} \qquad \vec{H}_r = \hat{y} H_0' e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)} \tag{7.6.22}$$

$$\text{折射波} \qquad \vec{H}_t = \hat{y} H_0'' e^{i(k_x x + k_z'' z - \omega t)} \tag{7.6.23}$$

根据Maxwell方程，电场可由

$$\vec{E} = -Z\left(\hat{k} \times \vec{H}\right) \tag{7.6.24}$$

求得。我们再次看到阻抗的重要性。因此可以根据7.6.21-7.6.24式写出电

场$\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$的形式，再根据边界条件7.6.2得到（可与S波对比）

$$H_0' = \frac{Z_1\cos\theta - Z_2\cos\theta''}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta''}H_0 \tag{7.6.25}$$

$$H_0'' = \frac{2Z_1\cos\theta}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta''}H_0 \tag{7.6.26}$$

7.6.19, 7.6.20, 7.6.25, 7.6.26式被称为菲涅耳公式，在特殊情况下（$\mu_1 = \mu_2 = \mu$）回到菲涅耳早期基于以太理论导出的光学折/反射振幅关系式。这有力地论证了光是电磁波。

讨论：

1. 当ε, μ其中之一为负数甚至为虚数时，θ''失去几何意义，此时不应当做$\cos\theta'' = k_z''/k''$的替代，而应当直接写成k_z''/k'', k_z/k的形式；但Z的形式不必改，因为$\vec{E} = Z\left(\hat{k}\times\vec{H}\right)$仍然成立，尽管此处$Z$为复数。

2. (8.6.16)可以通过对（8.6.13）进行代换$Z \to \dfrac{1}{Z}$, $E \to H$得到！这反映了电磁场得对称性。电磁理论中有许多这种对称值得好好揣摩。

7.6.4 反射率及透射率

反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射率（Reflectance），物理意义是多少入射的能量被界面反射回来。无论对S波还是P波，反射波和入射波处于同一媒质中，阻抗值相同，入射角与反射角也相等。因此，反射率就是反射场与入射场振幅比例的模的平方：

$$R = \frac{\left\langle\vec{S}_r\right\rangle\cdot\hat{z}}{\left\langle\vec{S}_i\right\rangle\cdot\hat{z}} = \begin{cases} \dfrac{|E_0'|^2\cos\theta'/Z_1}{|E_0|^2\cos\theta/Z_1} = \left|\dfrac{E_0'}{E_0}\right|^2 & \text{S wave} \\ \dfrac{Z_1|H_0'|^2\cos\theta'}{Z_1|H_0|^2\cos\theta} = \left|\dfrac{H_0'}{H_0}\right|^2 & \text{P wave} \end{cases} \tag{7.6.27}$$

将7.6.19, 7.6.20, 7.6.25, 7.6.26式分别带入7.6.27式即得S，P两种偏振情况

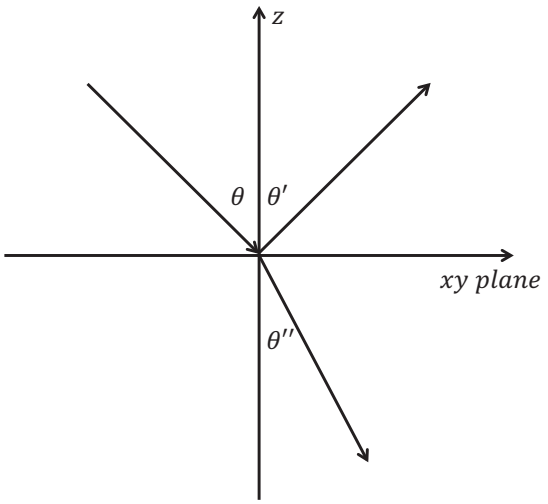


图 7.17

的反射率：

$$R_S = \left| \frac{Z_2 \cos\theta - Z_1 \cos\theta''}{Z_2 \cos\theta + Z_1 \cos\theta''} \right|^2 \tag{7.6.28}$$

$$R_P = \left| \frac{Z_2 \cos\theta'' - Z_1 \cos\theta}{Z_2 \cos\theta'' + Z_1 \cos\theta} \right|^2 \tag{7.6.29}$$

同样道理，透射率定义为

$$T = \frac{\left\langle \vec{S}_t \right\rangle \cdot \hat{z}}{\left\langle \vec{S}_i \right\rangle \cdot \hat{z}} = \begin{cases} \dfrac{\left|E_0''\right|^2 \cos\theta''/Z_2}{\left|E_0\right|^2 \cos\theta/Z_1} & \text{S wave} \\ \\ \dfrac{Z_2 \left|H_0''\right|^2 \cos\theta''}{Z_1 \left|H_0\right|^2 \cos\theta} & \text{P wave} \end{cases} \tag{7.6.30}$$

注：定义反射/透射率的时候，我们都不是直接对入（反、透）射波的能流操作，而是将其投影到界面的法向方向。这是因为对一个界面来讲，只有投影到其法向方向的能流分量才是“真正通过”这个界面的能流。

问题：你能否考虑一个有限大小的Beam在界面上的反射和折射，基于此搞清楚为什么能量守恒要乘以一个投影到法线的$\cos\theta$因子？

7.6.5 正入射条件下反射的几点讨论

1. 正入射条件下，无论S波还是P波，反射率均为

$$R = \left|\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right|^2 \tag{7.6.31}$$

在光学中，我们经常利用

$$R = \left|\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right|^2 \tag{7.6.32}$$

来计算反射率，其实这不完全正确，只有当介质没有磁性时，因为$Z_r = 1/\sqrt{\varepsilon_r} = 1/n$，两者等价。一般情况下正确的表达式应当由阻抗来描述。折射率完全决定了波的传播方向，然而阻抗却是决定波振幅的核心。两个物理量加在一起完全描述了一个电磁介质的所有电磁波行为。

2. 假设$Z_1 = Z_0$,则定义**相对阻抗**为$Z = Z_2/Z_0 = \sqrt{\mu_r}/\sqrt{\varepsilon_r}$对S波我们可以定义反射系数

$$r_s = \frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{E_0'}{E_0} \tag{7.6.33}$$

（P波有同样结果），它刻画了反射波与入射波的振幅（带相位）的比值。我们注意到无论对$Z \to 0$的介质还是对$Z \to \infty$的介质，都可以对电磁波进行强烈反射，但反射的位相却不相同。$Z \to 0$的介质其实就是理想电导体（因为金属$|\varepsilon_r| \to \infty$，简称Perfect Electric Conductor(PEC)），而$Z \to \infty$的介质对应的是$|\mu_r| \to \infty$的理想“磁导体”(PMC)自然界不存在，可以通过Metamaterial的概念实现。通过调控电磁波介质的阻抗特性，我们可以实现对电磁波反射位相的有效调控，从而实现一系列难以置信的新的电磁波现象。

7.6.6 Brewster 角

对常规介质，在可见光频段磁导率接近于μ_0（光频下磁性介质中的磁

矩无法跟上电磁场的变化，宏观上不显现磁性）。令$\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$，则此时折射系数与阻抗满足$Z_r = 1/\sqrt{\varepsilon_r} = 1/n$。利用折射定律

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \tag{7.6.34}$$

针对两种偏振光，带入反射率的表达式7.6.28与7.6.29可得

$$R_S = \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \tag{7.6.35}$$

$$R_P = \frac{\tan^2(\theta - \theta'')}{\tan^2(\theta + \theta'')} \tag{7.6.36}$$

对P波反射率，注意到当

$$\theta + \theta'' = \pi/2 \tag{7.6.37}$$

条件满足时，反射率为0：

$$R_P = 0 \tag{7.6.38}$$

亦即：当反射波与折射波相互垂直时，P极化电磁波完全不被反射！满

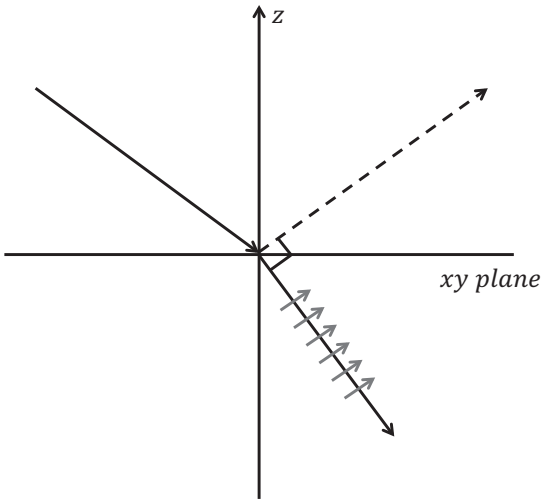


图 7.18

足7.6.37式条件的入射角称为布鲁斯特角（Brewster Angle），满足$\theta_B =$

$\tan^{-1}(n_2/n_1)$。其在光学中有着重要的理论和实际的意义——如当一支没有启偏的自然光已以这个角度入射到介质表面时，反射波没有P偏振分量，只有S偏振分量，这样反射波就变成了完全的线偏振波。可以利用下面的Argument从物理上理解Brewster Angle：

当P偏振电磁波入射到介质表面上时，在介质内部驱动介质分子来回振荡，这产生了如图7.18所示的电偶极子振荡。它们的重新辐射效应产生了折射波和反射波。当入射角等于Brewster Angle 时，反射波垂直于折射波，因为要满足横波条件，故在与反射波矢垂直方向运动的介质分子不可能辐射出反射波，故，此时介质对电磁波完全透明。注意，此结论以及几何解释只在非磁性材料中适用！对磁性介质（相对介电常数=1），结论恰恰相反！

7.7 全反射

在实际应用中，人们希望能有效控制电磁波的传播方向，因此，一个好的反射镜就变得必不可少。电磁波在金属表面被近乎全反射，因而金属镜子在光学上被广泛应用。然而这种反射仍有少量的能量耗散（特别是在光波段）。另外，当频率到达**紫外**时（频率高于**等离子共振频率**ω_p ），金属都变成透明材料，无法有效反射电磁波。因此急需寻找无耗散的全反射方式。人们发现当电磁波以特定角度从光密介质入射到光疏介质中时（$n_1 > n_2$ ），在界面上会发生无损耗的全反射。这种现象有许多实际应用，新兴的纤维光学就是由此发展出来的。当然，基于全介质的光子晶体是另外一个解决方案——这里就不再展开了，而只介绍基于介质的全反射现象。

7.7.1 全反射临界角

考虑电磁波从光密介质（折射率为n_1 ）入射到光疏介质中（折射率为$n_2 < n_1$ ），由折射定律$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \dfrac{n_2}{n_1}$可得

$$\sin\theta'' = \sin\theta\frac{n_1}{n_2} > \sin\theta \tag{7.7.1}$$

当入射角从$0 \to \dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta$ 从0变到1。因为$\dfrac{n_1}{n_2} > 1$，$\sin\theta''$从0变到一个比1大的数。因此当

$$\theta = \theta_c = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{7.7.2}$$

时，$\sin\theta'' = 1$。而当入射角$\theta > \theta_c$时，显然会出现$\sin\theta'' > 1$的情况，这时折射角将为一虚数，它已失去几何上作为角度的直观解释，不能直接将其带入Fresnel公式求解。然而，我们可以将其写回原始的波矢之间的关系。利用7.6.18得

$$\cos\theta'' \to \frac{k_z''}{k''} = \frac{\sqrt{k''^2 - k_x^2}}{k''} = \frac{\sqrt{(k_0 n_2)^2 - (k_0 n_1 \sin\theta)^2}}{k_0 n_2} \tag{7.7.3}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^2} \tag{7.7.4}$$

当$\theta > \theta_c$时，上式为纯虚数，记为$i\alpha$，其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_c}\right)^2 - 1} \tag{7.7.5}$$

将其代入公式7.6.19, 7.6.20, 7.6.25, 7.6.26，便有

$$E'_{0S} = \frac{Z_2\cos\theta - i\alpha Z_1}{Z_2\cos\theta + i\alpha Z_1}E_{0S} \tag{7.7.6}$$

$$H'_{0P} = \frac{Z_1\cos\theta - i\alpha Z_2}{Z_1\cos\theta + i\alpha Z_2}H_{0P} \tag{7.7.7}$$

可见，$R_S = R_P = 1$（参考7.6.27），亦即电磁波发生全反射，因此我们将θ_c称为**全反射临界角**。显然，S, P两种偏振的反射波的相位未必相同。因此当一支沿任意方向线偏振的电磁波以大于临界角的入射角被介质全反射时，其偏振图案原则上是椭圆偏振。

7.7.2 折射波

在发生全反射时，介质2中的电磁波并不为零，这是因为，如果介质2中的电磁波完全为零，就不可能满足边值关系。考虑S波，因为$k_z'' = in_2k_0\alpha = i\beta$, $k_x'' = k_x$，故折射波电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y}E_0'' \exp(-\beta z)\, e^{i(k_x x - \omega t)} \tag{7.7.8}$$

上式表示折射波将沿z方向衰减，沿x方向传播。因此，离界面几个波长处，场强振幅已变得很小，可以忽略不计；换句话说，电场不仅沿着界面方向传播，而且被限制在表面附近的一个区域内，所以称这种全反射的折射波为**表面波**。

7.7.3 折射波能流

既然存在折射波，那么在第二种介质中就有能流。考虑S波，则我们可以根据7.7.8式求出介质中的磁场

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{k}''}{\mu\omega} \times \vec{E}'' = \frac{E_0''}{\mu\omega}(k_x z - i\beta x)\exp(-\beta z)\, e^{i(k_x x - \omega t)} \tag{7.7.9}$$

假设E_0''为实数，可分别求得能流$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H}$ 的法向分量S_{Pz}和切向分量S_{Px}：

$$S_x = \frac{(E_0'')^2 k_x}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos^2(k_x x - \omega t) \tag{7.7.10}$$

$$S_z = -\frac{(E_0'')^2 \beta}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \sin(k_x x - \omega t)\cos(k_x x - \omega t) \tag{7.7.11}$$

由此可见：

1. 在界面的法线方向上能流以频率2ω作振动，在第二种介质中，S_{Pz}对时间的平均值为零，即平均来说没有能量流人介质2中。

2. 界面切线方向的能流S_{Px}对时间的平均值不为零，而是等于常数，它表示在x方向仍有能流。

3. 根据S_{Px}和S_{Pz}的表达式知道能流的大致走向如图所示。可见，在半个周期内电磁能量进入第二种介质，在另半个周期内能量重新释放出来变成反射波能量。

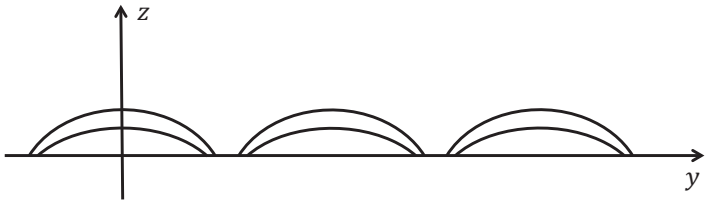


图 7.19

第八章

波导和谐振腔

上一章中我们研究了电磁波在体材料内以及在不同材料界面上的反射/折射行为，其中电磁波全都是以**平面波**的形式存在的。然而要将电磁波的信号传递到远方，用平面波的方法并不经济——因为平面波有着无限大的波前。实际生活中我们利用波导管来有效传递电磁波，将波导管的两端密封，便进一步得到谐振腔。本章我们将研究波导管中的电磁波的传播行为，以及谐振腔内的电磁振荡。

8.1 波导管中的场方程和边界条件

波导管是一无限长的中空金属管，其截面可以是任意形状，但通常波导管在传播方向是均匀的。电磁场在波导管中只能在管内且沿着管的轴线方向传播，这就使它与自由空间内传播的电磁波在性质上有很大的差别。

8.1.1 边界条件

因为电磁波完全封闭在波导管内，我们首先应当解决的问题是电磁波在波导管壁（亦即导体）上满足的边界条件。金属波导管通常在微波通信波段使用。上两章中我们已经学到在通讯波段，金属对电磁波有很好的屏蔽作用——电磁波、感应电流、感应电荷都局域在金属表面的一个厚度为“趋肤深度$\delta = \sqrt{2/\mu\omega\sigma_c}$”的一个薄层内，金属体内没有波、电流、电荷。因为良导体的σ_c非常大，趋肤深度非常小。我们可因此将真实导体（在微波段）简化为一个“理想导体”——即金属体内没有电磁波，但在表面上有面电荷σ、面电流分布$\vec{J}$，换言之，将趋肤深度层内的电荷、电流简化成面电荷、面电流。将Maxwell方程的积分形式应用到理想金属的表面，我们得到理想金属的边界条件

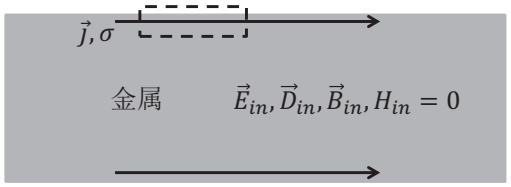


图 8.1

$$\vec{n}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\times\vec{E}=0 \tag{8.1.1}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{D}=\sigma \qquad \vec{n}\times\vec{H}=\vec{J} \tag{8.1.2}$$

其中$\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$等场量是在金属表面上（介质一侧）测到的。这里已经用了金属内部所有场量为0的条件。事实上σ和$\vec{J}$均是未知量，要根据求得的场利用8.1.2式来决定。故“理想导体”表面的场的边界条件就是8.1.1。

8.1.2 场方程

我们现在来研究截面为任意形状的、单连通的、且沿长度方向都是一样的直波导管的情形。若波导管中无源，且是真空，则波导中的电磁场满足波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = 0 \tag{8.1.3}$$

选择波导管的长度方向为z轴，我们感兴趣的是沿着z方向传播的解。但此时沿z方向传播的平面波一定不是波导管中的解，因为常矢量$\vec{E}_0$不可能满足理想导体边界条件8.1.1。注意到波导管沿z轴均匀，故场量对z的依赖关系一定为$e^{ik_z z}$，同时，时间轴的均匀性保证时间依赖关系总是$e^{-i\omega t}$。故设解为

$$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{E}_0(x,y)\\ \vec{B}_0(x,y)\end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{8.1.4}$$

代入方程8.1.3得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)\begin{pmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{pmatrix} = 0 \tag{8.1.5}$$

式中

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{8.1.6}$$

$$k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 \tag{8.1.7}$$

8.1.5式显示电磁场的6个分量全部满足Hemholtz方程，不过分别计算电场、磁场的6个分量将非常复杂。其实8.1.5是从Maxwell方程推出的2次方程，不是原始的Maxwell方程。当我们重新检查原始Maxwell方程组时，我们发现不同的场分量之间并不独立（就像平面波中电场与磁场的值并不独

立，比值是阻抗一样）。$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$的$x, y$两个方向上分量公式可得

$$\partial_y E_{0z} - ik_z E_{0y} = ik_0 c B_{0x} \tag{8.1.8}$$

$$ik_z E_{0x} - \partial_x E_{0z} = ik_0 c B_{0y} \tag{8.1.9}$$

由方程$\nabla \times \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$在$x, y$两个方向上的投影可得

$$\partial_y B_{0z} - ik_z B_{0y} = -i\frac{k_0}{c} E_{0x} \tag{8.1.10}$$

$$ik_z B_{0x} - \partial_x B_{0z} = -i\frac{k_0}{c} E_{0y} \tag{8.1.11}$$

利用上面四个方程可以将场的横向分量用纵向分量来表示的表达式为

$$\begin{cases} E_{0x} = \dfrac{i}{k_c^2}\left[k_0 \partial_y \left(cB_{0z}\right) + k_z \partial_x E_{0z}\right] \\ E_{0y} = -\dfrac{i}{k_c^2}\left[k_0 \partial_y \left(cB_{0z}\right) - k_z \partial_x E_{0z}\right] \\ cB_{0x} = -\dfrac{i}{k_c^2}\left[k_0 \partial_y E_{0z} - k_z \partial_x \left(cB_{0z}\right)\right] \\ cB_{0y} = \dfrac{i}{k_c^2}\left[k_0 \partial_y E_{0z} + k_z \partial_x \left(cB_{0z}\right)\right] \end{cases} \tag{8.1.12}$$

8.1.12式告诉我们：6个场分量只有2个是独立变量，一旦场的纵向分量E_{0z}, B_{0z}知道了，则其他分量可以通过8.1.12式得到。另外，值得注意的是E_{0y}和B_{0x}有很好的对称性，而E_{0x}和B_{0y}也有很好的对称性。这样我们只需要在边界条件8.1.1下计算E_{0z}, B_{0z}所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)\begin{pmatrix} \vec{E}_{0z}(x,y) \\ \vec{B}_{0z}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \tag{8.1.13}$$

然后利用8.1.12式推出所有的场量形式。

波的模式（偏振）

从8.1.13式我们可以看出，当$B_{0z} = 0, E_{0z} = 0$时，我们有$E_{0x} = E_{0y} = B_{0x} = B_{0y} = 0$，因此非平庸解不存在。这意味着波导管内不可能传

播横电磁波(TEM波)，或者类似真空中的平面波。可见，波导中波的解B_{0z}和E_{0z}不能同时为0。接下来我们考虑两个独立的情形:

1. $B_{0z} \neq 0$而$E_{0z} = 0$；横电波（TE波）

2. $B_{0z} = 0$但$E_{0z} \neq 0$；横磁波（TM波）

事实上，这与真空中电磁波的两种偏振状态非常类似。这是波导中电磁波的最显著特点之一。下面我们将以矩形波导为例说明波导中电磁波的行为。

注：我们常说电磁波是横波，但那时对真空中的平面波解才正确，在波导管内，电磁波横向受到波导壁的限制，完全的横波不可能存在。但后面我们介绍一种新的看法，大家可以明白其实波导管内没有横波和电磁波是横波这两者不矛盾。

8.2 矩形波导

矩形波导是指横截面为矩形的波导，结构如图8.2所示。设波导管壁为理想导体，分别考虑TE和TM两种偏振方式的波的传输行为。

8.2.1 TE波

由上节的讨论可知，首先要求出轴向分量B_{0z}。在现在的情况下方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) B_{0z} = 0 \tag{8.2.1}$$

考虑理想导体边界条件8.1.1，可得

$$E_{0x}\big|_{y=0,b} = E_{0y}\big|_{y=0,b} = B_{0x}\big|_{y=0,b} = B_{0y}\big|_{y=0,b} = 0 \tag{8.2.2}$$

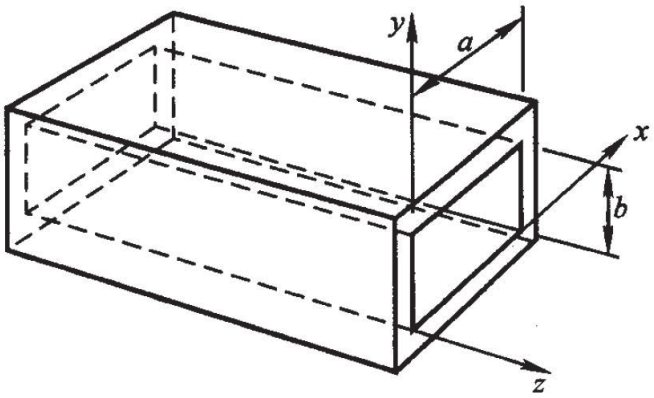


图 8.2

但这些条件都不是对B_{0z}的！根据8.1.12，在TE波的条件下（$E_{0z}=0$）有

$$E_{0x}=\frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_y B_{0z} \tag{8.2.3}$$

$$E_{0y}=-\frac{i}{k_c^2}ck_0\partial_x B_{0z} \tag{8.2.4}$$

$$B_{0x}=\frac{i}{k_c^2}k_z\partial_x B_{0z} \tag{8.2.5}$$

$$B_{0y}=\frac{i}{k_c^2}k_z\partial_y B_{0z} \tag{8.2.6}$$

因此8.2.2式可转化成对B_{0z}的如下边界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{0z}\bigg|_{x=0,a}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}B_{0z}\bigg|_{x=0,a}=0 \tag{8.2.7}$$

根据分离变量法，8.2.1的通解为

$$B_{0z}=B_0\left(\sin k_x x,\cos k_x x\right)\cdot\left(\sin k_y y,\cos k_y y\right) \tag{8.2.8}$$

其中

$$k_x^2+k_y^2=k_c^2 \tag{8.2.9}$$

再根据边条8.2.7，不难证明，满足上述方程和边界条件的解为：

$$B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{8.2.10}$$

$$k_c^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \tag{8.2.11}$$

式中m, n为正整数或零。把8.2.10与8.2.11代入8.2.3-8.2.6式得到$\vec{E}$, $\vec{B}$的全部分量为

$$\text{TE波}\begin{cases} E_x = -i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y = i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z = 0 \\ B_x = -i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_y = -i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2}B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_z = B_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \end{cases} \tag{8.2.12}$$

讨论如下：

1. **色散关系**

   8.2.10与8.2.11式说明8.2.1式中不是所有的k_c^2都可以给出符合边界条件的解，只有某些特定的值才被允许。根据k_c^2的定义，可计算波导管中传播模式对应的频率与波矢之间的关系（亦即我们常说的色散关系）：

   $$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{ck_c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{8.2.13}$$

   其中

   $$\omega_c = ck_c \tag{8.2.14}$$

2. **截止频率**

(a) 当$\omega < \omega_c$时，k_z为纯虚数，波导类似一个光波段下的金属，电磁波不能在其中传播，这种模式称为衰逝波，Evanescent Mode；

(b) 当$\omega > \omega_c$时，k_z为实数，波导类似一个常规电介质。电磁波可以传播，这种模式称为传播模式（Propagating Mode）。有时可以根据电介质中电磁波传播的色散关系$k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$，定义波导的**有效介电常数**为$\varepsilon_r = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$。

(c) ω_c给出了电磁波能够传播的最低频率，因此称为**截止频率**（Cut-Off Frequency）。

3. **模式**

m, n取不同的数值就对应了波的不同的模式，因为波在波导内传播时xy平面的电磁场图案（Pattern）保持不变。通常人们根据ω_c的大小来标记模式的高低。对TE模式来说，m, n中不能全部为0，因此当$a < b$时，TE模的最低阶模式为TE_{01}（又记为H_{01}，称为基模）；而当$a > b$时基模为H_{10}。在基模和第一高阶模的截止频率之间，波只能以一种模式存在（如图所示）。

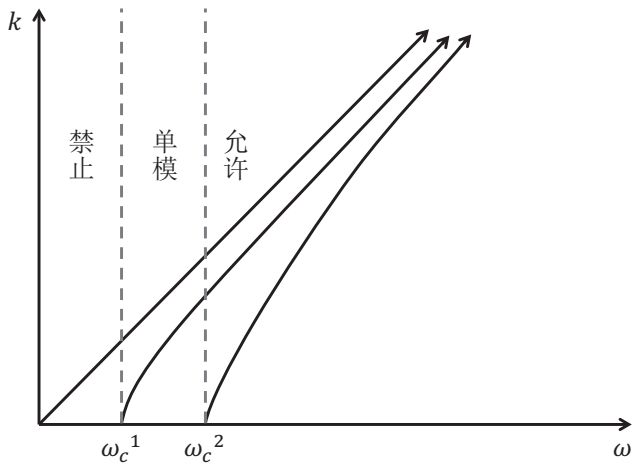


图 8.3

4. **物理图像**

作为一个例子，考察最简单的也是最常用的波型H_{10}波的场分布。由8.2.12式得

$$\begin{cases} E_y = i\dfrac{ck_0}{k_c}B_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_x = -i\dfrac{k_z}{k_c}B_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_z = B_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_z z-\omega t)} \end{cases} \tag{8.2.15}$$

电场只有y方向分量，因此在$y=0,b$两个边界自动满足PEC边条；为了使得在$x=0,a$出亦满足边条，E_y的大小必须沿a边正弦变化，中间强两边弱，形成了一个波长为$2a$的驻波。可以想象，对于高阶模式，无非是以两个界面为节点，形成有更多节点的驻波而已。

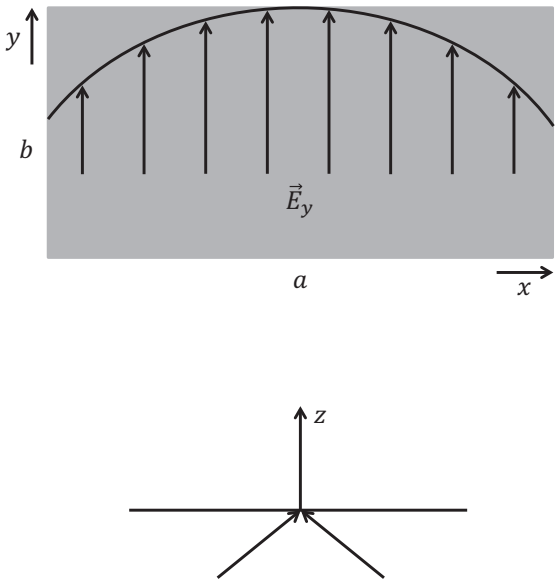


图 8.4

对于波导中的模式，事实上我们有另一种很有启发性的看法：每一个模式都可以展开成几个对称的斜入射的平面波的线性叠加。如

对TE_{10}模式，其波场8.2.15完全等价于一支波矢为$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_z\hat{z}$的平面波和另一支波矢为$\vec{k} = -k_x\hat{x} + k_z\hat{z}$的平面波的叠加，即

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0^{+} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \vec{E}_0^{-} e^{i(-k_x x + k_z z - \omega t)} \tag{8.2.16}$$

其中

$$k_x = \pi/a \tag{8.2.17}$$

我们前面讲过在波导管中常规的正入射的平面电磁波（横波）不能传播，因为其不满足波导管中横向约束的边界条件。然而将斜入射的电磁波进行合适的线性叠加之后的波可以满足波导管的边界条件，故可以传播。这种线性叠加后的波当然不是常规意义下的横波。

5. **能流**

仔细观察8.2.12式，不难发现横向场分量（E_x, E_y, B_x, B_y）之间没有相位差，而与纵向场分量B_z之间有$\pi/2$的相位差。这恰恰说明了波导中能流的时间平均值只能沿z轴非0！

8.2.2 TM波

下面来研究波导中的另一个偏振状态——TM波。首先此时要求出轴向分量E_{0z}，其满足的方程为8.1.13式，对应的边界条件8.2.2式现在可写成

$$E_{0z}\big|_{x=0,a} = 0 \qquad E_{0z}\big|_{x=0,b} = 0 \tag{8.2.18}$$

因此，容易求出满足上述边界的本征值问题的解为

$$E_{0z} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{8.2.19}$$

$$k_c^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \tag{8.2.20}$$

把以上两式代入8.1.12则可得横向分量。综合起来，TM波场为

$$\text{TM波}\begin{cases} E_x = i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_z}{k_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_y = i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_z}{k_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ E_z = E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_x = -i\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_y = i\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{k_0}{ck_c^2}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_z z-\omega t)} \\ B_z = 0 \end{cases} \tag{8.2.21}$$

我们作如下的讨论：

1. TM波的色散关系、截止频率都与TE波类似。甚至任何一个TM波模式也都可以分成几支平面波的叠加，只是平面波的偏振状态与TE有所不同而已。

2. 不同的是对TM波，m, n均不能为0，否则$E_{0z}\equiv 0$；因此对TM波，基模是TM_{11}模式。因此对同样一个波导，其TM波的截止频率一定高于TE波的截止频率。

8.3 谐振腔

低频电磁波是利用LC电路组成的振荡器激发的，当频率很高时(例如微波范围)，这种振荡回路有强烈的焦耳热损耗。因此，必须用另一种振荡器——**谐振腔**来激发高频电磁波。

谐振腔是由理想导体所围成的封闭腔体，显然腔中单色场满足如下方

程：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{8.3.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \qquad \nabla \times \vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E} \tag{8.3.2}$$

在边界上电磁场满足PEC边界条件

$$\vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \tag{8.3.3}$$

从根本上来说，我们是在边界条件8.3.3式下求解方程8.3.1和8.3.2式。

任意形状的谐振腔中的电磁模式必须数值求解。然而对最简单的谐振腔——长方体谐振腔，其电磁模式可以解析求解，这对我们理解谐振腔非常有帮助。将一个尺寸为$a \times b \times d$的长方体谐振腔看作一个截面为$a \times b$的长度为d的空腔波导两端加上PEC端面。不加端面时，空腔中的电磁波一定为波导中的电磁本征态。取定一个模式（如TE_{mn}模式），则谐振腔中的电磁场的一个分量为

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_z z}\right]e^{-i\omega t} \tag{8.3.4}$$

其他分量可以相应导出。加上PEC端面后，端面对电磁波进行反射，因此波导内的场现在由两部分叠加而成：一是沿着z方向传播的前进波；二是沿着$-z$方向的反射波。因此一般来说，有

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{ik_z z} + B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-ik_z z}\right]e^{-i\omega t} \tag{8.3.5}$$

B_0, B_0'两个系数应由在新加上的两个端面上的边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{E}\big|_{z=0,d} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B}\big|_{z=0,d} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_z\big|_{z=0,d} = 0 \tag{8.3.6}$$

决定（其他四个界面上的边界条件已经满足）。在$z = 0$处的边条要求

$$B_0' = -B_0 \tag{8.3.7}$$

而$z=d$处的边界条件给出

$$B_z\big|_{z=d}=2iB_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{8.3.8}$$

故有

$$\sin k_z d=0 \tag{8.3.9}$$

因此，k_z为

$$k_z=\frac{p\pi}{d}\qquad p=1,2,3\cdots \tag{8.3.10}$$

注意到$E_{0x}=\dfrac{i}{k_c^2}ck_0\partial_y B_{0z}$, $E_{0y}=-\dfrac{i}{k_c^2}ck_0\partial_x B_{0z}$，我们发现另一个边界条件$\vec{n}\times\vec{E}=0$自动在$z=0$和$z=d$处满足。最后得到矩形谐振腔内场的空间部分为

$$\begin{cases}B_{0x}=-2iB_0\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{p\pi}{d}\dfrac{1}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)\\ B_{0y}=-2iB_0\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{p\pi}{d}\dfrac{1}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)\\ B_{0z}=2iB_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)\\ E_{0x}=2B_0\dfrac{n\pi}{b}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)\\ E_{0y}=-2B_0\dfrac{m\pi}{a}\dfrac{ck_0}{k_c^2}\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{p\pi}{d}z\right)\\ E_{0z}=0\end{cases} \tag{8.3.11}$$

讨论如下：

1. 磁场表达式和电场表达式之间相差一个因子i，这表明电场和磁场在时间上存在着$\pi/2$的相位差。这种形式的波与传播波（E, B同相位），良导体中的电磁波（E, B有$\pi/4$的相位差）均不相同，与等离子体中的具有虚波矢的电磁波行为类似，因此可以预计，这里面平均没有能流。的确，电磁波在腔中形成了驻波，所有方向上都没有净的能量流动。

2. 因为$k_z = \frac{p\pi}{d}$，且$k_z^2 = k_0^2 = k_c^2$，于是得

$$k_0^2 = k_c^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \tag{8.3.12}$$

所以，谐振腔允许存在的谐振频率和波长分别为

$$\omega = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \tag{8.3.13}$$

$$\lambda = 2\Big/\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \tag{8.3.14}$$

3. 谐振腔中的场用三个脚标m, n, p标记，每一组（m, n, p）的值决定一种振荡模式。对E波记为E_{mnp}，对H波记为H_{mnp}，并且E_{mnp}和H_{mnp}中的脚标m, n, p可取各种组合，使得谐振频率相等，但场的分布不同，此时说E_{mnp}和H_{mnp}是简并的。另外值得指出的是，在针对某一个方向写出的TM模式可能是另外一个方向的TM模式！由8.3.11式可以看出，对TE模式，p不能为0, 否则谐振腔中的电磁场全部为0。对TM模式的共振腔模分析发现，p可以为0，但m, n都不能为0。因此，综合TE, TM 的分析结果，谐振腔中m, n, p三个指标中只能有一个不是0！故谐振腔的最低价模式为（110），（101）或者（011）。

4. 在共振腔中加一个源，激发各个频率的波。当在腔壁凿一些小孔，或是将个别腔壁换成不是完全透射的，这时电磁波就会从这些地方耦合出去（如图8.5所示）。因为共振腔中只允许分立的模式存在，发射出去的电磁波就具有很好的选频性能，且辐射强度很高。另外电磁谐振腔也可以用到其它微波系统中，做选频，放大等功能。

5. 一个立方状的谐振腔，其能允许的最低阶的腔模式为TE_{011}（有3支兼并模式），对应的波长为$\lambda = \sqrt{2}a$。这就意味着，对常规的谐振腔，要想实现某一个波长的谐振功能，其尺度必须大于某一个特定的大小。若要实现一个较长波的频率，谐振腔就要做的很大，对我们实际应用不利。应用电磁特异介质改变腔壁的反射性能，我们可以改变

腔的谐振条件，从而打破这一尺度限制（参考我的研究组的两篇文章*APL 86，101101（2005）*；*APL 89，104104（2006）*。可从我的主页上下载）

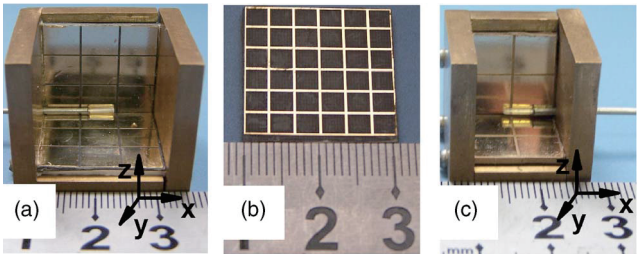


图 8.5

第九章

电磁波的辐射

我们在第七、八两章中已经介绍了电磁波在不同的媒质中的传输行为，然而，我们对电磁波如何产生的却仍然不知道。这一章中，我们将详细介绍电磁波如何从源（电荷、电流分布）区产生出来的，这个过程叫做电磁辐射。

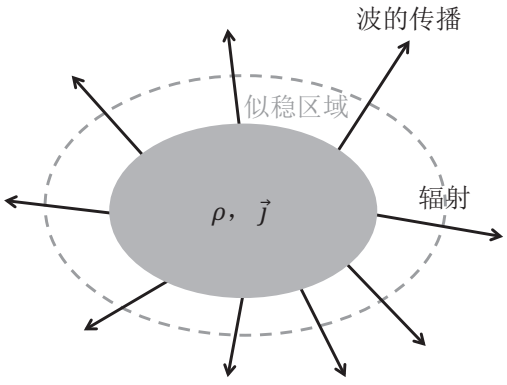


图 9.1

9.1 势、规范、及其满足的方程

9.1.1 势的定义

原则上讲，对确定的电荷分布$\rho(\vec{r},t)$和电流分布$\vec{j}(\vec{r},t)$，我们求它的辐射电磁场就是求解Maxwell方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{9.1.1}$$

直接求解$\vec{E},\vec{B}$场的方程通常比较麻烦，可以使用并矢格林函数的方法（参考JA Kong的书）。类似处理静电、静磁时的情况，我们在处理与源有关的辐射问题时解“势”的问题更加方便。与静电、静磁时相比，在一般情况下标势、矢势的定义有所不同。根据Maxwell方程第三式，可定义矢势$\vec{A}$为

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{B} \tag{9.1.2}$$

将其带入Maxwell方程第2式，可得

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0 \tag{9.1.3}$$

因此可以定义标势，其满足

$$\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\nabla\varphi\Rightarrow\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\varphi \tag{9.1.4}$$

9.1.2 规范条件（Gauge）

9.1.2与9.1.4所定义的势并不唯一。给定任意一个标量函数$\Lambda(\vec{r})$，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \tag{9.1.5}$$

将上式代入9.1.2和9.1.4，我们发现$\left\{\vec{A}', \varphi'\right\}$给出与$\left\{\vec{A}, \varphi\right\}$完全一样的$\vec{E}, \vec{B}$场。在经典电动力学的范畴内，$\vec{E}, \vec{B}$对应着真实的物理场，$\left\{\vec{A}, \varphi\right\}$并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系，$\left\{\vec{A}, \varphi\right\}$的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为**规范条件**。通常使用的规范是库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{9.1.6}$$

和洛仑兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{9.1.7}$$

值得注意的是：洛仑兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

9.1.3 势所满足的方程

将9.1.2和9.1.4带入Maxwell方程中的第1和第4式，我们得到对势的方程：

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) = -\rho / \varepsilon_0 \tag{9.1.8}$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \tag{9.1.9}$$

这组方程是$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$耦合在一起的，使用起来不方便。利用Lorentz规范条件可以将其化简成相当对称而标准的**有源波动方程**的形式

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\rho/\varepsilon_0 \tag{9.1.10}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{j} \tag{9.1.11}$$

因此，我们首先根据源的情况求解上两式得到势，然后再由势求出电磁场。

9.2 推迟势

由于$\vec{A}$和φ满足同样的方程，因此我们只要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t)=-\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0 \tag{9.2.1}$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \tag{9.2.2}$$

这个函数其实就是当t'时刻在$\vec{r}'$处做一个单位强度的扰动时，空间所激发的场。定义$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}',\,T=t-t'$，我们发现当格林函数已知后，对任意的电荷分布，其电势可以表示为

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{R},T)\rho(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt' \tag{9.2.3}$$

证明9.2.3式并不困难，只要对等式两端都作用一个$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$算符，再利用9.2.2，则发现9.2.3是9.2.1的正确解。下面求解格林函数。在$R,\,T$空间求解非常不方便，利用Fourier变换可得

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega \tag{9.2.4}$$

$$\delta(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega \tag{9.2.5}$$

代入9.2.2可以解得$(\vec{k},\omega)$空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k},\omega)=\frac{1}{k^2-k_0^2} \tag{9.2.6}$$

其中

$$k_0^2=(\omega/c)^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2 \tag{9.2.7}$$

因此，将9.2.6带回9.2.4可得$(\vec{R},T)$空间的格林函数为

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int G(\vec{R},\omega)d\omega \tag{9.2.8}$$

求解9.2.8这个积分并不容易。先计算对k的积分：

$$\begin{aligned}
G(\vec{R},\omega)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k} && (9.2.9)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}k^2dk\sin\theta d\theta && (9.2.10)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2iR}\int_0^\infty\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{k^2-k_0^2}kdk && (9.2.11)\\
&=\frac{1}{2(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{k}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk && (9.2.12)\\
&=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk && (9.2.13)\\
&=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\times && (9.2.14)\\
&\left\{\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{ikR}dk-\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{-ikR}dk\right\} && (9.2.15)
\end{aligned}$$

上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设k_0具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取+还是取−呢？选择的依据是**“因果关系”**！——在正常介质中这个虚部必须为正。“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得

能量被耗散。而k_0是介质中向前传播的波矢，假设$k_0 = \mathrm{Re}(k_0) + i\delta$，则$e^{ik_0 r}e^{-\omega t} = e^{i\mathrm{Re}(k_0)r}e^{-\delta r}e^{-i\omega t}$，因此$\delta$一定为正。

Tips：

1. 这里我们考虑的就是在实轴上的全积分，不是主轴积分(P)，因此一定要选择合适的路径；

2. 由9.2.7可知，当处于一定介质中时（如空气），因为介质的ε, μ一定因为耗散而有虚部，则k_0一定带有虚部！即是是真空，也会因为涨落而对电磁波有耗散。因此给k_0一个小的虚部不仅是数学的要求，还是物理的必然！

对上面的两个积分分别选择如图所示的闭合回路，将被积函数解析延拓到复平面，则利用留数定理容易推出

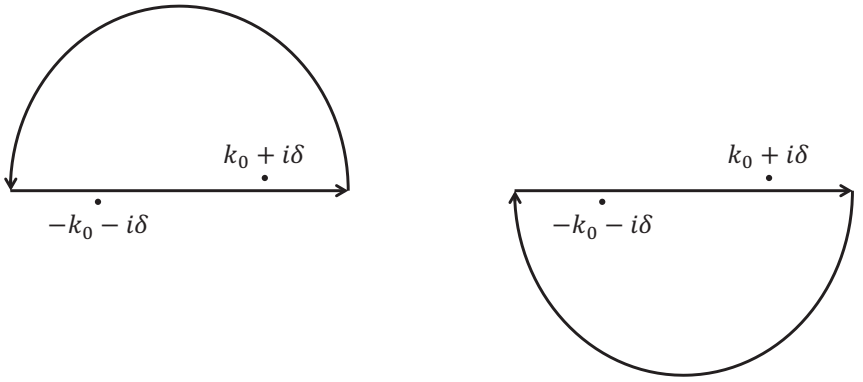


图 9.2

$$G(\vec{R},\omega) = \frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0 R} \times 2\pi i - \frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0 R} \times (-2\pi i) = \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \quad (9.2.16)$$

在9.2.16式中加入时间振荡因子$e^{-i\omega T}$，则发现这个解对应这样一个单频波，$\dfrac{e^{ik_0 R}}{4\pi R e^{-i\omega T}}$，其物理意义为一个点源的**“出射波”**——即从源点向**外**发

射的球面波。显然这是符合“因果关系”的解。若选择k_0的虚部为负，则结果为不符合因果关系的“会聚波”。进而将9.2.16代入9.2.8可得最终的格林函数

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{R}\delta(R/c-T)\rho(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau' \tag{9.2.17}$$

式中方括号[ ]表示$t'=t-\dfrac{R}{c}$，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\left[\vec{j}\right]}{R}d\tau' \tag{9.2.18}$$

我们注意到φ, $\vec{A}$的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时t时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需的时间。这就是**推迟势**，其物理的根据是因果关系。

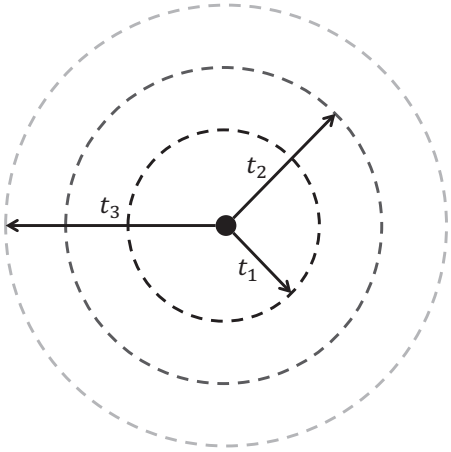


图 9.3

9.3 多极辐射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一很小区域内，而我们则关

心远场的行为，此时类似静电、静磁时的处理方法，我们可以作多极展开。

9.3.1 推迟势的多极展开

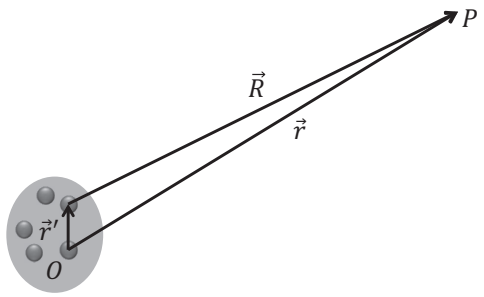


图 9.4

我们讨论的是远离源的场，即$r \gg l$，l为源的线度。被积函数是$\vec{R}$的函数，我们可以将它在$\vec{r}$处展开为级数，即

$$\frac{[\rho]}{R} = \frac{[\rho]}{R}\bigg|_{R=r} + \left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\left(\frac{[\rho]}{R}\right)_{R=r} + \cdots = \frac{[\rho]_0}{r} - \vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r} + \cdots \tag{9.3.1}$$

式中$[\rho]_0$表示$\rho\left(\vec{r}', t-\frac{r}{c}\right)$，以后为简便起见，脚标0不再写出。同理可得

$$\frac{\left[\vec{j}\right]}{R} = \frac{\left[\vec{j}\right]}{r} - \vec{r}'\cdot\nabla\frac{\left[\vec{j}\right]}{r} + \cdots \tag{9.3.2}$$

故

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{[\rho]}{r}d\tau' - \int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}d\tau' + \cdots\right) \tag{9.3.3}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}d\tau' - \int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}d\tau' + \cdots\right) \tag{9.3.4}$$

我们下面分别研究$\vec{A}$, φ展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

9.3.2 电偶极辐射

φ展开式中的第一项

$$\varphi_0 = \int \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \int [\rho] d\tau' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.3.5}$$

Q是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1 = -\int \vec{r}' \cdot \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = -\nabla \cdot \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.3.6}$$

式中$[\vec{p}] = \int \vec{r}'[\rho] d\tau'$，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$展开式中的第一项

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\left[\vec{j}\right]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int [\vec{v}\rho]\, d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\sum_i q_i \vec{v}_i\right] \tag{9.3.7}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left[\sum_i q_i \vec{r}_i\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\vec{p}] \tag{9.3.8}$$

所以，电偶极矩系统所产生的$\vec{A}$和φ为9.3.6及9.3.8。下面考虑单频的辐射源，$\rho(\vec{r}', t') = \rho(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$, $\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$（任意情况总可以展开成单频结果的叠加）。从联系$\vec{B}$与$\vec{A}$的公式，我们得到电偶极辐射场中的磁场部分为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \tag{9.3.9}$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地由磁场导出

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \tag{9.3.10}$$

下面仔细分析一下在9.3.9和9.3.10式中要用到的一项：

$$\nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = (\nabla \times [\vec{p}]) \frac{1}{r} + \left[\nabla \left(\frac{1}{r}\right) \times [\vec{p}]\right] \tag{9.3.11}$$

考虑第一项，因为$[\vec{p}] = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} e^{i\omega r/c}$，则微分运算可以代换成

$$\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r = ik\vec{e}_r \tag{9.3.12}$$

再考虑第二项，因为$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$，最终，9.3.11变为

$$i\frac{\omega}{c}\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\frac{1}{r}\right) \tag{9.3.13}$$

因此，$\frac{\omega}{c}$和$\frac{1}{r}$的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

近区

$r\ll\lambda$，但仍满足$r\gg l$。这时公式9.3.9和9.3.10中的旋度算子只要对分母运算即可。因为每对分母运算一次得到一个$\frac{1}{r}$因子，而对分子运算得到一个$\frac{1}{\lambda}$因子，显然$\frac{1}{r}$比$\frac{1}{\lambda}$贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$\vec{B}=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r\times[\vec{p}] \tag{9.3.14}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot[\vec{p}]\right)-[\vec{p}]\right] \tag{9.3.15}$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已——事实上在这个条件下，“准静态”近似适用（参考第六章）。

远区

不仅要求$r\gg l$，而且$r\gg\lambda$，λ为辐射场的波长，此时，公式9.3.11中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算∇算子作用到$[\vec{p}]$上即可，无需计算其作用到$\frac{1}{r}$上。这等价于做代换9.3.12。因此，远区场强的公式为

$$\vec{B}=\frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times[\vec{p}] \tag{9.3.16}$$

$$\vec{E}=-\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r\times\left(\vec{e}_r\times[\vec{p}]\right) \tag{9.3.17}$$

中间区域

虽然$r \gg l$，但$r \approx \lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子$\frac{1}{r}$和$\frac{\omega}{c} = \frac{1}{\lambda}$是同数量级。

思考题：与远场区不同，在近场区电场与磁场差一个i，这中间有什么物理值得我们思考呢？能否联系第六章准静态的知识，对上述事实作一番讨论？

[**例1**] 如图所示，两个金属小球分别带电荷$+Q$和$-Q$，它们之间距离为l，两小球的电荷的数值和符号同步地周期性变化，这就是所谓的赫兹振子。试分析赫兹振子辐射场的能流特点。

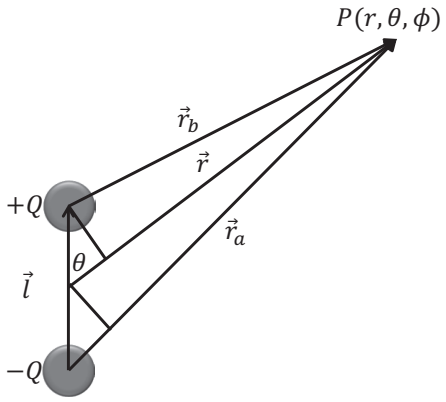


图 9.5

解：取球坐标系，$+Q$和$-Q$处在z轴上，设$Q = Q_0 e^{-i\omega t'}$（利用复场表示），则体系的电偶极矩为

$$\vec{p} = lQ\vec{e}_z = lQ_0 e^{-i\omega t'}\vec{e}_z = p_0 e^{-i\omega t'}\vec{e}_z \tag{9.3.18}$$

将它们代入偶极辐射的远区公式，有

$$\begin{cases} \vec{B} = \dfrac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi c r}\sin\theta e^{-i\omega(t-r/c)}\left(-\vec{e}_\phi\right) \\ \vec{E} = -\vec{e}_r \times \left(c\vec{B}\right) = \dfrac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r}\sin\theta e^{-i\omega(t-r/c)}\left(-\vec{e}_\theta\right) \end{cases} \tag{9.3.19}$$

由9.3.19式可以看出，场正比于$\frac{1}{r}$，电场只有$\vec{e}_\theta$方向分量，磁场只有$\vec{e}_\phi$方向分量，且$cB_\phi = E_\theta$。辐射场在偶极矩方向上为零。辐射能流的平均值为

$$\left\langle \vec{S}_P \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right) = \frac{c}{2\mu_0}\left|B\right|^2\vec{e}_r = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r \tag{9.3.20}$$

对这个结果讨论如下：

1. 辐射能流的特点是正比于$\frac{1}{r^2}$，偶极矩的平方，ω的四次方；
2. 这说明辐射能力在低频时较弱，而在高频时高，这与我们第六章所讨论的“准静态近似”的适用条件一致；
3. 辐射能流正比于$\frac{1}{r^2}$是一个稳定辐射问题的必然要求，如若不然，则必然在空间产生能量积累，从而辐射问题不稳定。也正因为如此，辐射能流在某一个特定的立体角组成的通道内保持相同。

基于此，在讨论辐射问题时，我们常用角分布的概念来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，其定义为

$$\left\langle f\left(\theta,\phi\right)\right\rangle = \frac{\left\langle \vec{S}_P \right\rangle\cdot d\vec{S}}{d\Omega} = \frac{\left\langle \vec{S}_P \right\rangle\cdot r^2 d\Omega}{d\Omega} = \left\langle \vec{S}_P \right\rangle\cdot r^2 \tag{9.3.21}$$

这表示在θ, ϕ方向单位立体角内的平均辐射能流，显然，现在

$$\left\langle f\left(\theta,\phi\right)\right\rangle = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\sin^2\theta \tag{9.3.22}$$

辐射角分布的情况如图9.6所示，在$\theta = \pi/2$的方向幅射最强，在$\theta = 0$或π的方向无辐射。

9.3.3 磁偶极辐射

下面考虑磁偶极辐射，此时应当考虑$\vec{A}_2$项。在**远场**（$r \gg \lambda$）及**单频**

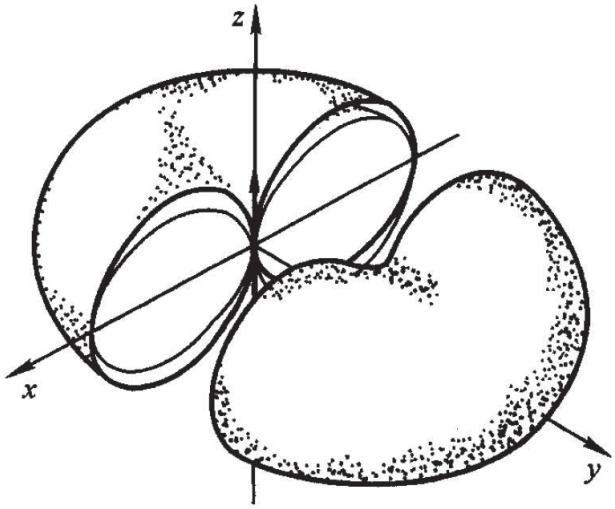


图 9.6

条件下，只保留∇对推迟势的作用（亦即，作代换$\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r$），则有

$$\vec{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{\left[\vec{j}\right]}{r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{r}' \cdot \left(i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r\right)\frac{\left[\vec{j}\right]}{r} d\tau' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c}\vec{r}\cdot\int \vec{r}'\left[\vec{j}\right] d\tau' \tag{9.3.23}$$

$$= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c}\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\left[\int\left(\vec{r}'\vec{j}+\vec{j}\vec{r}'\right)d\tau' + \int\left(\vec{r}'\vec{j}-\vec{j}\vec{r}'\right)d\tau'\right] \tag{9.3.24}$$

上式[ ]中第一项在静磁条件下为0（参考第十五讲5.5.10式），当电流随时间谐变时，其为电四极子的贡献（严格证明从略，但由$\vec{j} = \cdot\vec{P}$可知，此项积分正比于$\int \vec{r}'\vec{r}'\rho d\tau' \propto \overleftrightarrow{D}$）。第二项可改写为

$$\vec{A}_m = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c}\frac{1}{2}\int \vec{r}\cdot\left(\vec{r}'\vec{j}-\vec{j}\vec{r}'\right)d\tau' \tag{9.3.25}$$

$$= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c}\frac{1}{2}\int \vec{r}\times\left(\vec{j}\times\vec{r}'\right)d\tau' \tag{9.3.26}$$

$$= \frac{i\mu_0\omega}{4\pi r^2 c}\vec{r}\times[\vec{m}] \tag{9.3.27}$$

正是磁偶极子的贡献。这里第二个等式用到了关系式：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$。其它多极展开式中没有磁偶极子的贡献。因此，磁偶极

辐射所对应的矢势即为9.3.27式，标势为0。带入势和场的关系，即可求出磁偶极子的$\vec{E}$和$\vec{B}$：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_m = i\dfrac{\omega}{c}\vec{e}_r \times \vec{A}_m = -\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi c^2 r}\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times [\vec{m}]) \\ \vec{E} = -\vec{e}_r \times \left(c\vec{B}\right) = -\dfrac{\mu_0\omega^2}{4\pi c r}\vec{e}_r \times [\vec{m}] \end{cases} \tag{9.3.28}$$

讨论如下：

1. 我们注意到磁偶极子的辐射场9.3.28与电偶极子辐射场9.3.14-9.3.15非常相似。事实上，在讲解静电/静磁理论时我们已经了解到，$\mu_0\vec{m}$之于$\vec{B}$场与$\vec{p}/\varepsilon_0$之于$\vec{E}$场完全相同。现在，我们又看到了相同的依赖关系——将9.3.15中$\vec{E}$场中的$\vec{p}/\varepsilon_0$代换成$\mu_0\vec{m}$，我们就得到了磁偶极子的$\vec{B}$场！因此这两个场互为对偶场，记住一个就可以得到另一个。更一般地，当我们作如下代换$\vec{p} \to \dfrac{\vec{m}}{c}$, $\vec{E} \to c\vec{B}$, $c\vec{B} \to -\vec{E}$，即可由电偶极子的场推出磁偶极子的场。

2. 磁偶极辐射与电四极辐射一个量级，均比电偶极辐射小，因此对一个体系若其有磁偶极辐射，应当同时检查同一量级的电四极子是否存在。

9.4 线型天线辐射

我们讨论线型天线的辐射问题。线型天线是最典型也是最常见的天线结构，它具有较强的辐射能力和较好的辐射方向性。

要解决天线辐射的问题首先要知道天线中的电流分布。我们考虑输入到天线中的信号随时间作简谐变化，则天线中的电流线密度一定也随时间作简谐变化。假设天线由理想导体组成，则电流只在导体表面且满足$\vec{J} = \vec{n} \times \vec{H}$。进一步考虑磁场，其满足波动方程$\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{H} = 0$，

故其解一定是$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$的线性组合（$\vec{k}$可以取模为$k=\omega/c$的所有值）。当天线很细时，可只考虑$\vec{k}=\pm k\hat{z}$的两支波的贡献，故$\vec{H}$以及$\vec{J}$的形式一定只是$e^{i(\pm kz-\omega t)}$的线性组合。设信号沿天线的中点输入，取此点为坐标的原点，电流对此点是对称的，在天线的两端点（$z=\pm\dfrac{l}{2}$）处电流应为零，故电流分布为

$$I(z',t')=I_0e^{-i\omega t'}\sin\left[k\left(\frac{l}{2}-|z'|\right)\right] \tag{9.4.1}$$

知道了电流分布便可计算矢势$\vec{A}$：

$$A_z=\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin\left(\dfrac{kl}{2}-k|z'|\right)}{R}dz' \tag{9.4.2}$$

如图所示，有（图中$\vec{R}_0$记为$\vec{r}$）

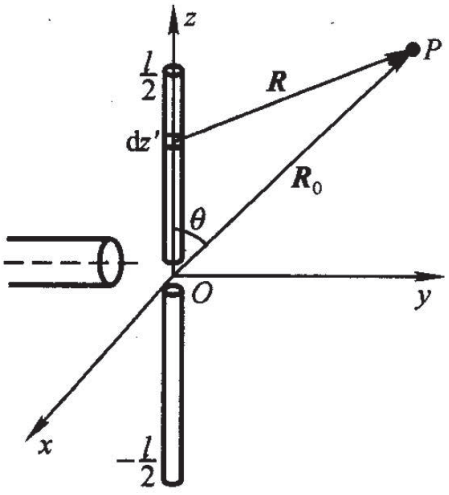


图 9.7

$$R\approx r-z'\cos\theta \tag{9.4.3}$$

将9.4.3代入9.4.2，在远场条件（$r \gg z', r \gg \lambda$）下得

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t-r/c)} \int_{-l/2}^{l/2} \sin\left(\frac{kl}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz'\cos\theta} dz' \tag{9.4.4}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi kr} e^{-i\omega(t-r/c)} \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta} \tag{9.4.5}$$

由$\vec{A}$可由$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$求得$\vec{B}$。考虑远场时作代换$\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r$，则

$$\vec{B} = ik\vec{e}_r \times \vec{A} = -ikA_z \sin\theta \vec{e}_\phi \tag{9.4.6}$$

电场容易求得

$$\vec{E} = -\hat{k} \times \left(c\vec{B}\right) = -ickA_z \sin\theta \vec{e}_\theta \tag{9.4.7}$$

由$\vec{E}$, $\vec{B}$即可求出辐射能流

$$\left\langle \vec{S}_P \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}^*\right) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2 \vec{e}_r \tag{9.4.8}$$

平均角分布为

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle = \left\langle \frac{\vec{S}_P \cdot d\vec{S}}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2 \tag{9.4.9}$$

它依赖于$\frac{kl}{2}$的值。**讨论如下：**

1. 当天线长度远小于波长时，$kl \ll 1$，可以将上式展开得

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \frac{(kl)^4 \sin^2\theta}{64} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \sin^2\theta \times \left(\frac{I_0 l^2}{4c}\right)^2 \tag{9.4.10}$$

与9.3.21对比发现，此时天线等价于一个电偶极子，强度为$p = \frac{I_0 l^2}{4c}$。显然对短天线，天线越长，辐射能力越大。

2. 当天线再增长到$kl \ll 1$条件不满足时，天线的辐射能力随kl做周期性振荡。通常人们将信号发生器与天线中间空隙的两端分别相连，给定一个定幅的输入信号，测量被反射回来的信号强度（称为反射损耗——Return Loss, S11 等），显然这个量越小，说明辐射出去的功率越强，因此S11的极小值就标示着天线辐射的一个极大值。研究发现，当$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$时，天线的辐射能力达到极值——特别是半波电线（长度$l = \frac{\lambda}{2}$）辐射能力最强。

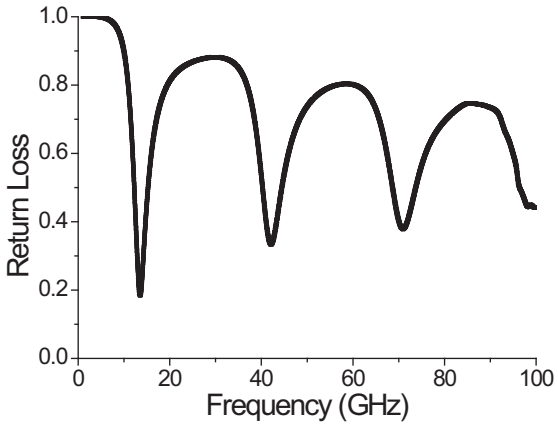


图 9.8

3. 随着$\frac{l}{\lambda}$的增大，辐射图案与偶极子辐射图案有了明显的区别，开始有分叉出现，并开始朝天线方向集中（书上的图形计算有误！）。真正有用的天线就是既有很好的辐射效率（S11极小），又有很好的辐射图案的半波天线。

9.5 天线阵

天线最重要的两个品质是辐射图案和辐射效率。虽然半波天线的辐射效率比较高，但它在ϕ角上没有任何的定向性，在θ角上有一定的定向性，

但不是很好。在实际应用中，为了获得更好的辐射方向性，我们常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得较好的方向性。最常用的是把半波天线当作基元天线列阵。惯常的排布有两种：一种是线性排列，另一种是横向排列，如图9.9所示；再有是$m \times n$方阵，如图9.10所示。 我们只

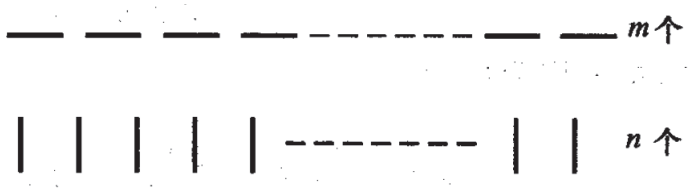


图 9.9

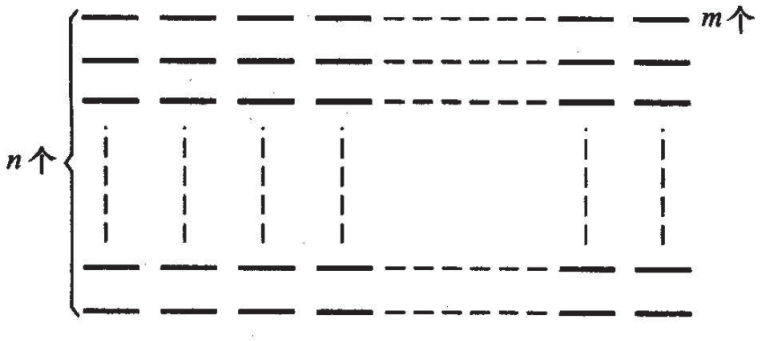


图 9.10

讨论在线性排列的情况下，它的辐射方向性同单一的半波天线有什么不同。如图9.11所示，m个半波天线线性排列，它们所激发的场到达远处某点的路程不同，这就使它们彼此间有相位差，从而发生干涉使辐射具有方向性。每个天线与其邻近的天线之间的路程差为$a\cos\theta$（a为两天线间的距离），若第一个天线的辐射场为

$$\vec{E}_1 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1} \tag{9.5.1}$$

则第二个半波天线的辐射场为

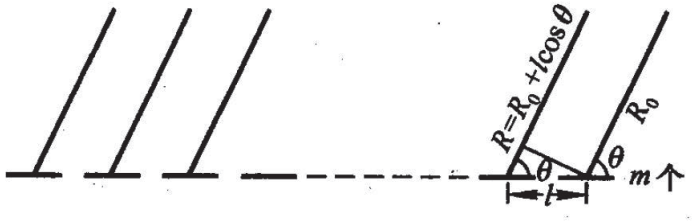


图 9.11

$$\vec{E}_2 = \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \tag{9.5.2}$$

由于$R_2 \approx R_1 + a\cos\theta$，在远场条件下（$R \gg \lambda$），有

$$\vec{E}_2 \approx \vec{C}(\theta)\frac{e^{ikR_1}}{R_1}e^{ika\cos\theta} = \vec{E}_1 e^{ika\cos\theta} \tag{9.5.3}$$

定义$\alpha = ka\cos\theta$，则同理可得第三个半波天线的场为

$$\vec{E}_3 \approx \vec{E}_1 e^{i2\alpha} \tag{9.5.4}$$

依次类推，得m个半波天线产生的总场为

$$\vec{E}_{total} = \sum_{N=0}^{m-1}\vec{E}_1 e^{iN\alpha} = \vec{E}_1\frac{1-e^{im\alpha}}{1-e^{i\alpha}} \tag{9.5.5}$$

可见它的辐射角分布比单个半波天线的角分布多了一个因子：

$$f(\alpha) = \left|\frac{1-e^{imka\cos\theta}}{1-e^{ika\cos\theta}}\right|^2 = \frac{\sin^2\left(\dfrac{m}{2}ka\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\dfrac{1}{2}ka\cos\theta\right)} \tag{9.5.6}$$

因此总的辐射角分布为

$$f_{total}\,(\theta,\phi) = f_{single}\,(\theta,\phi)\cdot f(\alpha) \tag{9.5.7}$$

即在原有的单个天线的角分布的图案基础上加上一个干涉后的“形状因子”。可以看出：

1. 当$\alpha = 0$时$f(\alpha)$有极大值，其值为$f(0) = m^2$。这说明向前传播的方向仍然是体系辐射最强的方向，而且辐射能力增强了m^2倍。这不奇怪，因为干涉相应使得此方向的所有天线都是相干叠加，场的振幅增强了m倍，功率增强m^2倍。

2. 当$\alpha = \dfrac{2\pi}{m}, \dfrac{4\pi}{m}, \cdots, \dfrac{(m-1)2\pi}{m}$时有极小值，分布情况如图所示，两个极小之间有个极大值，但高阶的极大值急剧减少。

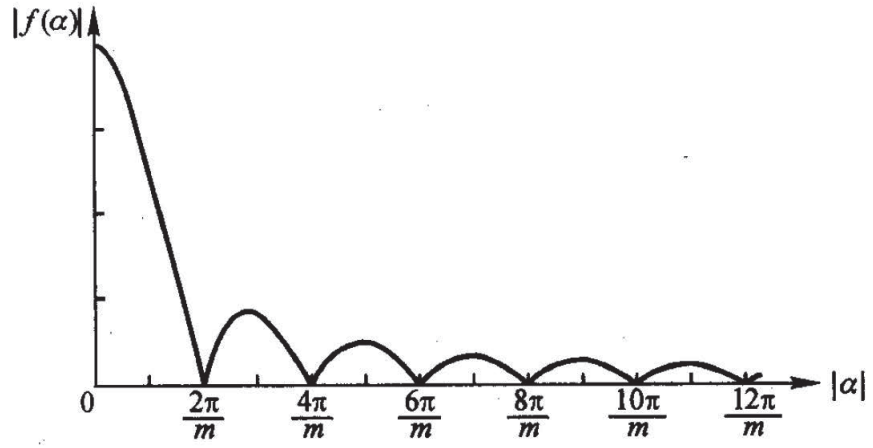


图 9.12

3. 主极大在$\alpha = 0$处，第一个极小在$\alpha = \dfrac{2\pi}{m}$处，即$ka\cos\theta = \dfrac{2\pi}{m}$处。若令$\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$，则$ka\sin\psi = \dfrac{2\pi}{m}$。$m$很大时主极大峰所处的角度范围为

$$|\psi| \leq \sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{mka}\right) \approx \frac{\lambda}{ma} \tag{9.5.8}$$

可见，m大则ψ角度小，这表示θ的方向性很强。

第十章

相对论电动力学

到现在为止，我们已经系统地研究了电磁场理论在不同条件下（静电、静磁、准静、辐射）的表现。然而，这些结果至今仍然是针对某一个特定坐标系成立的。在不同坐标系下的电磁现象之间的关联如何呢？这就是本章的研究内容。

10.1 狭义相对论的时空观

要想联系不同坐标系下的物理现象，就必须建立正确的时空变换，而后者是建立在一定的时空观下的。我们在本课程中只关心惯性坐标系之间的变换。牛顿在总结其发展的力学规律时得到了如下绝对时空观。

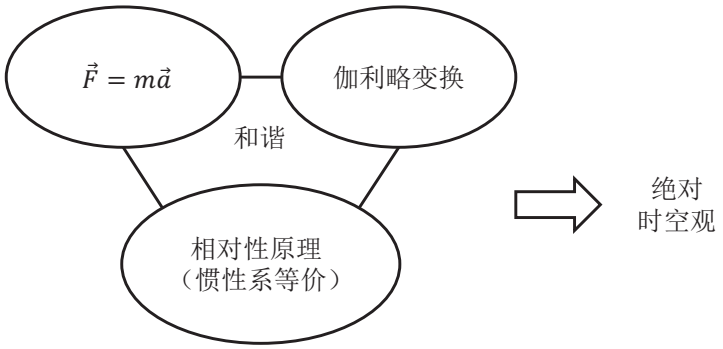


图 10.1

10.1.1 绝对时空观

相对性原理

物理世界的规律是通过时间和空间坐标来描述的，而物理规律本身应当与（惯性）坐标系的选取无关，这就是说，在不同的惯坐标系中，物理规律表述的形式始终保持不变，这是一个重要的基本假定，称为**相对性原理**，思想最先由伽利略提出。

力学规律

牛顿力学的基本方程是

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt} \tag{10.1.1}$$

伽利略变换

两个相对运动的惯性坐标系S和S'之间由伽利略变换联系起来:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases} \tag{10.1.2}$$

将10.1.2代入10.1.1发现力学规律在不同的坐标系中保持相同，因此，牛顿力学，伽利略变换与相对性原理和谐统一。

10.1.2 绝对时空观的困难

但是，当人们把绝对时空观应用到电磁理论时遇到了巨大的困难，主要表现在对光的传播规律的描述上。对于经典的力学规律描述的波，如水波，当它在一个坐标系中的速度为$\vec{u}$时，在相对于这个坐标系做匀速运动的另一个坐标系中测出的速度为$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$。特别是，当$\vec{u} = \vec{v}$时，$\vec{u}' = 0$，即水波不再运动。 电磁波也是一种波，有一个运动速度c，因此人们自然

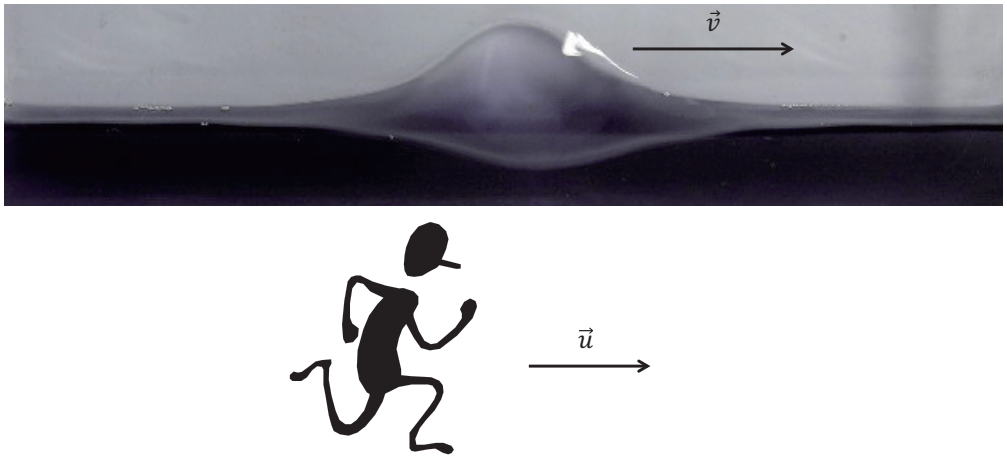


图 10.2



图 10.3 英国Heriot-Watt大学对罗素孤子发现情景的再现（平移之波）

要问：究竟这个光速c是在哪个坐标系中测得的？假设光速为c的这个坐标系叫做以太系，是否可以测得地球相对于以太系的运动速度？抑或地球就是那个绝对坐标系？

迈克耳孙和莫雷设计了精妙的干涉实验测量了不同条件下测量点相对于以太系的运动速度。然而实验测不到任何的以太漂移速度。换言之，在任何惯性坐标系中测得的光速是同一个常数c，与传播方向无关，与光源运动的速度无关。这个结果是惊人的，揭示了描述电磁规律的麦克斯韦方程组，与伽利略变换以及相对性原理不和谐。

10.1.3 爱因斯坦的选择

相对性原理、Maxwell方程以及伽利略变换不和谐，则必须放弃（改造）其中一个使得这三者和谐。爱因斯坦选择保留前面两个，放弃伽利略变换。他提出如下两条基本假设：

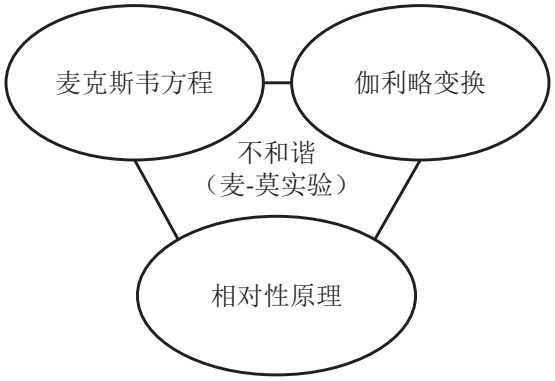


图 10.4

相对性原理

自然规律在不同惯性系中的表达式相同。

光速不变原理（选择Maxwell方程在一切惯性系中形式不变）

光速与光源的运动无关，与光的传播方向无关，在不同的惯性系中观察到的真空中的光速相同。这事实上并非爱因斯坦的假设，而是麦-莫实验所揭示的基本实验事实。在这个基础上，Maxwell方程组在所有坐标系下都保持不变，人们必须寻找新的时空变换来替代伽利略变换。

10.1.4 洛伦兹变换

基于不同惯性系中测出的光速不变这一假设，洛伦兹提出了他的时空变换。

考虑在$t = t' = 0$时，S与S'重合，S'系相对于S系沿x轴以速度$\vec{v}$运动。假设此时从原点发射一束光波，光沿各方向的传播方向都是c。所以t时

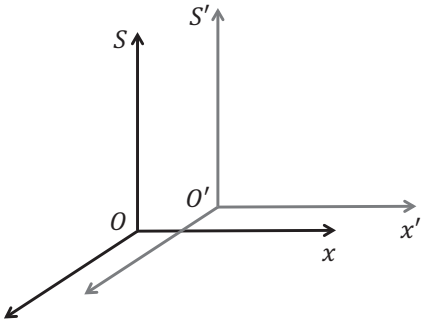


图 10.5

刻S系中光到达的位置满足

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{10.1.3}$$

存在两事件：

$$1\quad \text{发射}\qquad (0,0,0,0)$$
$$2\quad \text{接收}\qquad (x,y,z,t)$$

在S'看来，同样的事件应该用如下时空点描述:

$$1\quad \text{发射}\qquad (0,0,0,0)$$
$$2\quad \text{接收}\qquad (x',y',z',t')$$

根据光速不变原理，变换后的(x',y',z',t')必须满足

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \tag{10.1.4}$$

基于变换后满足10.1.3与10.1.4这个基本约束，数学家洛伦兹提出如下（线性）时空变换：

$$\begin{cases} x'=(x-vt)\big/\sqrt{1-v^2/c^2} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} \end{cases} \tag{10.1.5}$$

容易证明，若两个时空点原本满足10.1.3，则洛仑兹变换后的是空间一定满足10.1.4——也就是说，在S'系中观测事件传播的速度仍为c，而且是各向同性的—尽管S'相对S沿x轴运动，在S'系中看到的速度沿x轴与其它轴没有任何的不同！这个结果相当惊人，因为实施洛伦兹变换时貌似选择打破空间的对称性（选择了v为x方向），然而对测量光速来讲在这个扭曲的时空内没有任何各向异性。

引入一个虚构的由三维实空间和虚的时间轴构成的四维空间（闵可夫斯基空间），一个时空点在这个空间中的表示为

$$x_\mu = (x, y, z, ict) \tag{10.1.6}$$

则Lorentz变换可以写成

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \tag{10.1.7}$$

变换矩阵为

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{10.1.8}$$

其中$\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$。容易证明$\alpha$是个正交矩阵，即

$$\alpha \cdot \alpha^T = I \qquad \alpha^{-1} = \alpha^T \tag{10.1.9}$$

一个直接的结果就是

$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\mu \tag{10.1.10}$$

10.2 物理规律协变性的数学形式

相对性原理要求物理规律在不同的惯性坐标系下保持不变，而不同惯性系之间的物理量之间的关系由洛伦兹变换给出，这就要求描述物理规律

的物理方程式的形式一定要在Lorentz变换下保持不变。我们下面首先研究不同物理量在Lorentz变换是如何变换的。

10.2.1 物理量按时空变换性质分类

我们首先将所遇到的各种物理量作一番分类。先考虑大家熟知的三维空间中的一个纯坐标转动变换下，比如将坐标系以z轴为转轴转动θ角度（如图所示）。 在这个变换下我们看不同的物理量具有怎样的变换关系。

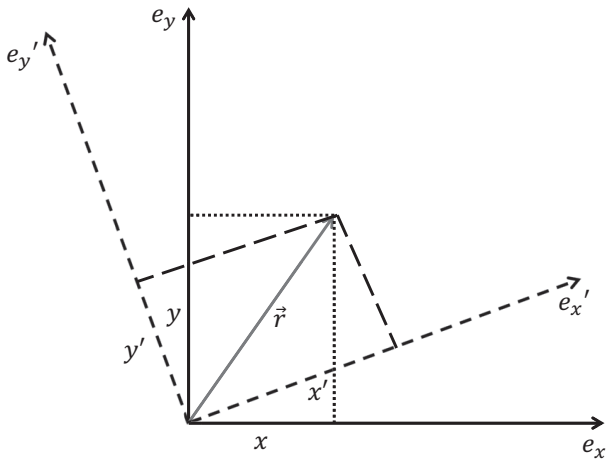


图 10.6

比如

1. 任意一点到原点的空间距离$r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$在变换下保持不变，这就是一个标量。

2. 位置矢量$\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$经过坐标旋转变换后变成$\vec{r}' = \{x_1', x_2', x_3'\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$与$\{x_1', x_2', x_3'\}$两组数之间的变换关系为

$$x_i' = T_{ij}x_i \tag{10.2.1}$$

其中，转动矩阵的形式为

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.2.2}$$

容易证明，所有三维空间的矢量（$\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{F}$等）的三个分量都满足上面的变换关系。我们把满足10.2.1式变换关系的三个数组成的物理量叫做矢量。

3. 同样道理，二阶张量（如电四极矩$\overleftrightarrow{D}$）中的9个元素在坐标变换下满足

$$D'_{ij} = T_{il}T_{jk}D_{lk} \tag{10.2.3}$$

10.2.2 物理量的四维时空变换

将上面对三维坐标变换的定义推广到四维时空变换。

标量

一个Lorentz变换下保持不变的物理量叫做标量。正交性质10.1.9显示，四维矢量的标积是个变换不变量：

$$x'_i x'_i = \alpha_{ij}\alpha_{ik}x_j x_k = x_j x_j \tag{10.2.4}$$

因此这是个**“四维标量”**。10.2.4是光速不变10.1.3与10.1.4的另外一种表述方式。通常将两个时空点之间的四维距离:

$$\Delta s^2 = -\Delta x_\mu \Delta x_\mu = (c\Delta t)^2 - |\Delta\vec{r}|^2 \tag{10.2.5}$$

叫做间隔，它描述的是两个事件之间的**时空间隔**，是个不依赖于惯性系的“标量”。在相对论时空观中，时间空间耦合在一起，单独讨论两个时件

的时间和空间间隔都没有意义（依赖于具体的参照系），但“间隔”却是有意义的物理量。

矢量（一阶张量）

定义一个由四个数量定义的集合$\{V_x, V_y, V_z, V_4\}$，若这些量在Lorentz变换下满足与四维坐标一样的变换关系

$$V'_\mu = \alpha_{\mu\nu} V_\nu \tag{10.2.6}$$

则这样的集合称为一个四维矢量（或是一阶张量）。

二阶张量

进一步，若有一物理量用4×4矩阵$T_{\mu\nu}$表示，在坐标变换$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$下，其变换关系为

$$T'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu k} \alpha_{\nu l} T_{kl} \tag{10.2.7}$$

则称此物理量为二阶张量。

几个例子

1. $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$的变换行为为一阶张量
   因为

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \Rightarrow x_\nu = \left(\alpha^{-1}\right)_{\nu\mu} \quad x'_\mu = \left(\alpha^T\right)_{\nu\mu} \quad x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\mu \tag{10.2.8}$$

   故

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{10.2.9}$$

   上式显示$\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} = \left\{ \nabla, -i\dfrac{\partial_t}{c} \right\}$就是一个四维矢量。

2. 任意两个四维矢量的标积为四维标量

比如四维间隔就是两个（四维时空位置）矢量的标积。同理，因为$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$是一个矢量，故有

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Box^2 \quad (10.2.10)$$

即$\Box^2$算符为四维不变量。由此推知，若A_μ为四维矢量，则此矢量的四维散度$\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu$为一不变量，即

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\alpha_{\mu\beta}A_\beta=\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\nu \quad (10.2.11)$$

10.2.3 物理规律的协变性

相对性原理要求，物理规律在任何一个惯性参考系内都是相同的，这就意味着在坐标变换下，表示物理规律的等式的形式应保持不变。如果等式两边的物理量是由同阶的张量构成的，那么这种形式的方程一定满足相对性原理，我们称这种形式的方程式为协变式。例如，某一物理规律可表示为如下形式：

$$A_\mu=B_\mu \quad (10.2.12)$$

式中A_μ, B_μ分别代表S系中这一物理过程的不同物理量。当把它变换到S'系时，由于A_μ, B_μ都是一阶张量(即矢量)，其变换规律分别为

$$A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}A_\nu \quad (10.2.13)$$

$$B'_\mu=\alpha_{\mu\nu}B_\nu \quad (10.2.14)$$

故

$$A'_\mu=\alpha_{\mu\nu}A_\nu=\alpha_{\mu\nu}B_\nu=B'_\mu \quad (10.2.15)$$

由此可见，要判断规律是否满足相对性原理，只要看其物理方程是否为Lorentz协变。反之，在我们构造任何新规律时，原则上都应当使其满足Lorentz协变。

10.2.4 速度及四维速度矢量

假定在S系中考察一个物体的运动，其速度的定义是$\vec{u}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$。现在假定$S'$系相对$S$系以速度$v$沿着$x$轴运动，则在$S'$系中同一粒子的速度定义为$\vec{u}'=\dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$。因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由Lorentz公式得

$$\begin{cases} dx'=(dx-vdt)\gamma_v \\ dy'=dy \\ dz'=dz \\ dt'=\left(dt-\dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{cases} \tag{10.2.16}$$

用上面第4个方程除前3个，则得

$$\begin{cases} u'_x=\dfrac{dx'}{dt'}=\dfrac{(dx-vdt)\gamma_v}{\left(dt-\dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v}=\dfrac{u_x-v}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y=\dfrac{dy'}{dt'}=\dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z=\dfrac{dz'}{dt'}=\dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} \end{cases} \tag{10.2.17}$$

上式决定了两个参考系中速度的变换，这就是相对论中的速度合成法则。在极限$v\ll c$的情况下（同时要求$|\vec{u}|\ll c$），可将分母展开，上式变成经

典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \tag{10.2.18}$$

根据这些结果可以回答之前几个Puzzle：

1. 为什么水波和电磁波都是波，换一个坐标系观测水波，其速度变化甚至变为0（像那位英国科学家一样骑着马追泰晤士河上的一个水孤波），但电磁波却从来不变（M-M 实验）？原因是水波的运动$u \ll c$，而电磁波的速度$u = c$。将$\vec{u} = c\hat{x}$带入10.2.17，发现$\vec{u}' = u'_x\hat{x}$, $u'_x = \dfrac{c-v}{1-vc/c^2} \equiv c$。这是一个多么惊人的结果？！当且仅当我们考察的“物质”的运动速度为光速时，无论如何换坐标系都不能改变其运动速度的观测值！

2. 可否改变坐标系运动速度v，使得原本低速运动的粒子在另一个坐标系的运动速度“超”光速？答案是“否”。即使我们以光速反向运动，根据10.2.17我们发现$u'_x = u_x + c/(1+cu_x/c^2) = c$，而当坐标系速度小于光速时，粒子速度也必然小于光速。也就是说，我们最多能使得粒子的相对运动速度达到光速，而不能超过光速！

注意到速度的变换公式很复杂，不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维空间速度的定义不是相对论协变的。如图10.7所示，在S系中测量粒子运动的速度，须定义两个事件，粒子在$t = 0$时刻在原点（时空坐标$(0,0,0,0)$），粒子在dt时刻在$d\vec{r}$这一点（时空坐标(dx, dy, dz, dt)）。三维速度的定义是$\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$——式中分子是三维矢量，很容易推广到四维协变形式$x_\mu = \{\vec{r}, ict\}$。问题出在分母上：$dt$不是一个四维标量！其在不同惯性系中测量值不同！为了解决这个问题，我们知道两个事件之间的四维时空

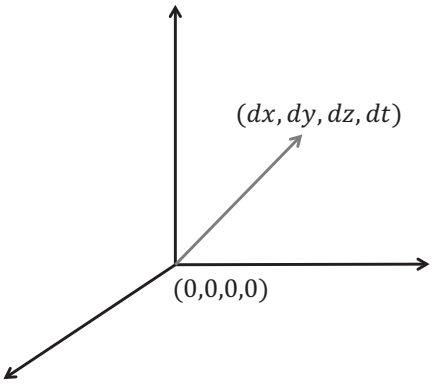


图 10.7

间隔

$$(ds)^2 = -dx_\mu dx_\mu = (cdt)^2 - d\vec{r}\cdot\vec{r} \tag{10.2.19}$$

是一个标量，其在不同惯性系中的测量值不变。可以据此定义一个具有时间量纲的标量

$$d\tau = ds/c = dt\sqrt{1-\vec{u}\cdot\vec{u}/c^2} = dt\sqrt{1-\beta_u^2} \tag{10.2.20}$$

用来替代dt。考察$d\tau$的物理意义。注意到其与坐标系无关，因此我们可以选取与粒子一起运动的坐标系来测量它。此时我们有$\beta_u^2 = 0$，因此得到$d\tau = dt$。故$d\tau$的物理意义为：在粒子静止的坐标系中测量的两个事件之间的时间差。通常我们也把$d\tau$称作“固有时”——Proper Time。对两个事件的时间间隔dt，在与粒子相对运动的坐标系中测到的值为

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2}} = \gamma_u d\tau \tag{10.2.21}$$

这个时间间隔值比与运动粒子相对静止的坐标系中测得的“固有时”增大了$\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$倍——这就是所谓**“运动时钟变慢”**效应（这里的运动时钟指得是在与粒子相对运动的坐标系中的“时钟”）。既然“固有时”是个与坐标变换无关的具有时间量纲的标量，我们可据此定义一个四维矢量

（四维速度）：

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_u\{\vec{u}, ic\} \tag{10.2.22}$$

它显然是在Lorentz变换下协变的，因为分子是个四维矢量而分母是个四维不变量。这个四维矢量中三维空间部分与三维速度矢量相关（但不是一回事！因为运动的时钟测得的时间不是固有时，需做修正——此即为γ_u的来源！）。

Tips：对理论物理学家来说，最重要的就是对任何一个三维矢量如何正确的找到它的四维伴侣！你试试其他的三维矢量，能否自己找到它们的伴侣？

10.3 麦克斯韦方程的协变形式

根据相对性原理要求，作为描述电磁体系物理规律的麦克斯韦方程组应当在Lorentz变换下协变。下面我们就将我们所关心的方程一一写成在Lorentz变换下协变的形式。

10.3.1 电荷守恒定律 - 四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{10.3.1}$$

此方程是在某一个坐标系（记为S系）下写出的，在S'系中$\vec{j}$, ρ都应相应变化成$\vec{j'}$, ρ'。根据相对性原理，10.3.1的方程形式应当洛伦兹变换下不变。因为$\{\vec{\nabla}, \partial(ict)\}$构成一个四维矢量，假如

$$J_\mu = (\vec{j}, ic\rho) \tag{10.3.2}$$

也构成一个四维矢量，则10.3.1式可以写成相对论不变的形式：

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{10.3.3}$$

为书写方便，式中$\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$记为$\partial_\mu$。下面我们证明$(\vec{j}, ic\rho)$确实构成一个四维矢量。实验显示，电荷是洛伦兹不变量，亦即——一个带电体在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同，这一实验事实将成为我们证明的关键。

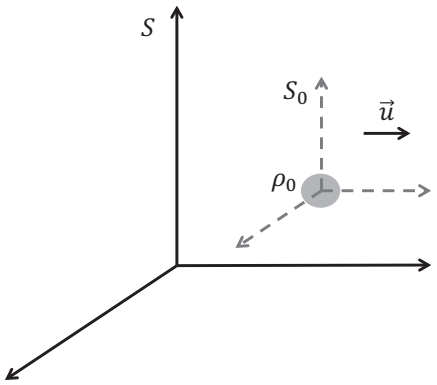


图 10.8

设在S系中有一体积元$\Delta\Omega$，其中电荷以速度u沿x方向运动，体积元$\Delta\Omega$中的总电荷为$\Delta Q = \rho\Delta\Omega$, 其中$\rho$为$S$系中测量的电荷密度。在与电荷相对静止的参考系$S_0$中，电荷速度为零，电荷密度为$\rho_0$，相应的体积元为$\Delta\Omega_0$，根据电荷的洛伦兹不变性，我们有

$$\rho\Delta\Omega = \rho_0\Delta\Omega_0 \tag{10.3.4}$$

由于S_0相对于S系以速度$\vec{u}$运动，则两个坐标系的时空微元的变换关系为

$$\begin{cases} \Delta x_0 = (\Delta x - u\Delta t)\gamma_u \\ \Delta y_0 = \Delta y \\ \Delta z_0 = \Delta z \\ \Delta t_0 = (\Delta t - u\Delta x/c^2)\,\gamma_u \end{cases} \tag{10.3.5}$$

在S系中测量运动物体的“长度”时必须同时进行，亦即，$\Delta t = 0$。将其带入上式，我们发现两参考系之间的体积元的关系为

$$\Delta\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0 = \gamma_u dx dy dz = \gamma_u \Delta\Omega \tag{10.3.6}$$

我们注意到同一个带电微元，其体积在相对其运动的坐标系中测量时（$d\Omega$）比静止坐标系测量出的结果$d\Omega_0$小，这就是所谓的**“运动物体长度收缩”**的概念。把10.3.6式代入10.3.4式，则得

$$\rho = \rho_0 \gamma_u \tag{10.3.7}$$

将上式代入电流密度的表达式发现

$$\vec{j} = \rho\vec{u} = \rho_0 \gamma_u \vec{u} \tag{10.3.8}$$

因为ρ_0为四维不变量，10.3.8式显示

$$(\vec{j}, ic\rho) = \rho_0 \left(\gamma_u \vec{u}, ic\gamma_u\right) = \rho_0 u_\mu \tag{10.3.9}$$

正好构成一个正比于四维速度的四维矢量，因此电流守恒定律是满足相对论协变性要求的。

Tips：其实写出正确的四维速度，又知道了电荷是个Lorentz不变量，10.3.8是非常容易预期的。

10.3.2 电磁势方程的协变形式

电磁场可以用矢势$\vec{A}$和标势φ来描写，在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0\vec{j}\\ -\rho/\varepsilon_0\end{pmatrix} \tag{10.3.10}$$

式中$\vec{A}$和φ应满足洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{10.3.11}$$

若我们定义一个四维矢量：

$$A_\mu = \left(\vec{A}, i\frac{\varphi}{c}\right) \tag{10.3.12}$$

则10.3.10式的电磁势方程可以写为

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \tag{10.3.13}$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{10.3.14}$$

10.3.13式很清楚地显示：若我们要求Maxwell方程在Lorentz变换下协变，则A_μ一定是一个四维矢量，因为等式右方的J_μ为一四维矢量，等式的左方亦应为一四维矢量，由于$\Box^2$为一标量，故A_μ为一四维矢量，称为四维势。这意味着矢势$\vec{A}$和标势φ在不同的坐标下会相互耦合在一起。

Tips：这里的逻辑与之前有点不同——根据M-M实验推断Maxwell方程组及所有相关的方程一定是Lorentz协变的。根据这些方程的协变性，我们断定A_μ为四维矢量。

10.3.3 电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式，电磁场强度$\vec{E}$和$\vec{B}$可以用电磁势$\vec{A}$和φ表示，即

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.3.15}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{10.3.16}$$

电磁场强$\vec{E}$和$\vec{B}$不是四维矢量。注意到$(\vec{\nabla}, \partial(ict))$构成四维矢量，$(\vec{A}, i\frac{\varphi}{c})$也构成四维矢量，显然上式右边是两个四维矢量，$\partial_\mu$, A_ν之间的数学运算。排除降阶的缩并运算（左边不是标量）、只能是升阶的并矢运算。再考虑到对称性，发现等式右边只能是一个反对称的二阶张量。综合上述分析，可定义

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{10.3.17}$$

$F_{\mu\nu}$是四维二阶反对称张量，满足$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，称为电磁场张量。直接结算可得其具体形式为

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix} \tag{10.3.18}$$

利用$F_{\mu\nu}$和J_μ，我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{10.3.19}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \tag{10.3.20}$$

合并写成一个一阶的Lorentz协变的形式：

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu \tag{10.3.21}$$

容易证明：$\nu = 4$的结果对应$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$，而$\nu = 1, 2, 3$的结果对应$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$。同理，可把两个齐次方程

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \tag{10.3.22}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{10.3.23}$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \qquad \mu \neq \nu \neq \alpha \tag{10.3.24}$$

10.3.21式和10.3.24式即是协变形式的麦克斯韦方程组。

10.4 电磁场的变换公式

下面考虑电磁场（由反对称电磁张量$F_{\mu\nu}$表示）在不同惯性系下得变换关系。因为$F_{\mu\nu}$是二阶张量，故不同参考系中的$F_{\mu\nu}$间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \tag{10.4.1}$$

根据Lorentz变换把10.4.1式具体写成分量的形式，则为

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma\left(E_2 - vB_3\right) \\ E'_3 = \gamma\left(E_3 + vB_2\right) \\ B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \dfrac{v}{c^2}E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \dfrac{v}{c^2}E_2) \end{cases} \tag{10.4.2}$$

假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则10.4.2式可表示为

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} + \dfrac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp} \end{cases} \tag{10.4.3}$$

上述场变换方程式自动给出了Lorentz力以及动生电动势的物理解释。动生电动势是指一段运动导体切割磁力线产生的电动势。在实验室坐标系下观测，体系只有静磁场，当一个导线以速度$\vec{v}$切割磁力线时，在导线静止的坐标系中产生了新的电场$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \approx (\vec{v} \times \vec{B})_{\perp}$（后一个等式在低速下成立），因此导线中的电荷会受到这个电场的作用力—这就是动

生电场（电动势）的来源．而导线中的电荷受到的力$\vec{F}' \approx q(\vec{v} \times \vec{B})_\perp$，就是Lorentz力的来源。

[**例1**] 试求匀速运动的点电荷的场。

解：设S系为实验室坐标系，其中点电荷以速度$\vec{v}$沿x轴运动。在这个坐标系中既有电场，又有磁场（运动电荷产生电流进而产生磁场），不方便求解。不妨另设S'系，其原点固定在点电荷q上跟着点电荷一起运动。在S'系中点电荷是静止的，只有电场没有磁场，其场为

$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{r'^3} \qquad \vec{B}'(\vec{r}', t') = 0 \tag{10.4.4}$$

我们随后将S'系中的电磁场利用变换公式变换到S系。因为S系相对S'系沿x轴以速度$-v$运动，则由式10.4.2得S系中的场强

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) \\ B_x = B'_x \\ \vec{B}_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp + \dfrac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_\perp) \end{cases} \tag{10.4.5}$$

由于$\vec{B}' = 0$，故

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qx'}{r'^3} \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\dfrac{qy'}{r'^3} \\ E_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\dfrac{qz'}{r'^3} \\ B_x = 0 \\ \vec{B}_\perp = \gamma\dfrac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}'_\perp = \dfrac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_\perp \end{cases} \tag{10.4.6}$$

现在必须把S'系中的$\vec{r}'$, t'用S系中的$\vec{r}$, t来表示，因为我们要知道的是在S系中的某一个时空点地场强。为此，设$t = 0$时点电荷q正好与S系的原

点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据洛伦兹变换，我们有

$$\begin{cases} x' = \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = -\gamma\beta x/c \end{cases} \tag{10.4.7}$$

将10.4.7代入10.4.6即可得最终结果。s'系中$\vec{r}'$可表示成

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left[(\gamma x)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} \tag{10.4.8}$$

这样，S系中在$\vec{r}$这一点（等同于S'系的$\vec{r}'$这一点）的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma q\vec{r}}{\left[(\gamma x)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \tag{10.4.9}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{\left[(r\cos\theta)^2 + (1-\beta^2)(r\sin\theta)^2\right]^{3/2}\gamma^2} \tag{10.4.10}$$

$$= \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{10.4.11}$$

式中θ是$\vec{r}$与$\vec{v}$的夹角。由10.4.6不难算出磁感应强度

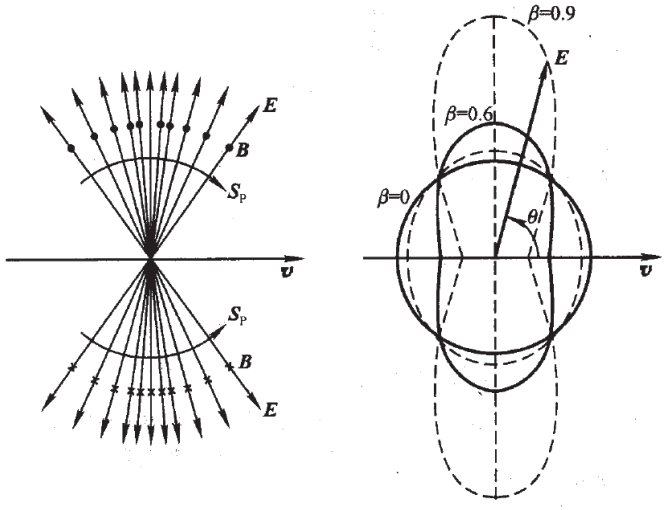
$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \tag{10.4.12}$$

我们看到，匀速运动的点电荷的场的特点是：

1. 电场方向仍然是沿着径向，但强度分布不再是球对称的，而是受制于一个与θ及运动速度v有关的角度分布函数

$$F_\beta(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{10.4.13}$$

$\theta = 0$处场最弱，$\theta = \pi/2$处场最强，场向着垂直于速度方向的平面集中，如图10.9(a)所示，集中的程度与点电荷运动速度有关，当$v \to c$时，场基本上集中分布在垂直于$\vec{v}$的平面内。图10.9(b)画出了三种不同β值的分布情况。



(a) (b)

图 10.9

2. 能流分布为

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \left[\vec{v} E^2 - \vec{E} \left(\vec{E} \cdot \vec{v} \right) \right] \tag{10.4.14}$$

注意到$\vec{E} \parallel \hat{r}$，容易计算得知

$$\vec{S}_P \cdot \hat{r} \propto \left[E^2 \left(\vec{v} \cdot \hat{r} \right) - E^2 \left(\vec{v} \cdot \hat{r} \right) \right] = 0 \tag{10.4.15}$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去。从上图我们也可直接看出，能流是在以电荷为中心的球面上流动。

3. 虽然能量并不沿着$\vec{r}$方向辐射出去，但在实验室系看，能流仍在做定向流，只伴随着电荷一起运动。要理解这个问题，只需要将时间加上即可。

Tips:

1. 在利用相对论电磁场变换公式时，不用忘了需要做两次Lorentz变换，一次是将场变换，另一次是将坐标点进行变换。

2. 为什么运动电荷的电场会发生有趣的畸变？根本的原因是“运动”尺子收缩，因此，将原本均匀分布的场向中间压缩。

3. 这个问题的求解，可以解释我们之前课堂上讲到的一个悬案：为什么两个孤立电流源之间的相互作用力不满足牛顿第三定律。你试试？

参考书目

- 蔡圣善, 朱耘, 徐建军. **电动力学**[M]. 高等教育出版社, 2002.
- 郭硕鸿. **电动力学**[M]. 高等教育出版社, 2008.
- Griffiths D J, Reed College. **Introduction to electrodynamics**[M]. Upper Saddle River, NJ: prentice Hall, 1999.
- Jackson J D, Fox R F. **Classical electrodynamics**[J]. American Journal of Physics, 1999, 67: 841.
- Landau L D, Lifšic E M, Pitaevskii L P. **Electrodynamics of continuous media**[M]. Oxford: Pergamon press, 1960.