第零章、一些数学准备

$ 0.1 球坐标下拉普拉斯算符的表示

球坐标与直角坐标之间有如下的变换关系

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{1}$$

或

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2}$$

先计算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r\sin\theta}\cdot r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned} \tag{3}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
=\ & \left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
\times\ & \left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
=\ & \sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
+\ & \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \sin\theta\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
+\ & \frac{1}{r}\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
-\ & \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&- \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&+ \frac{1}{r^2}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r}\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&+ \frac{1}{r^2}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r^2}\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\theta}\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

再计算 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$。同理，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r\sin\theta}\cdot r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&= \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&= \left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&\times \left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&= \sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&+ \sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \sin\theta\sin\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{r}\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
&+ \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin^2\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
&- \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&- \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&- \frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r}\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&- \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r}\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\\
&+ \frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&+ \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

最后，我们计算 $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。先计算 $\frac{\partial}{\partial z}$。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{\partial}{\partial\theta}+0\\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{r\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

由此，我们得到

$$
\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&- \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&+ \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\\
&+ \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

将这一结果与 (7) 式相加后，我们得到

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$ 0.2 柱坐标下拉普拉斯算符的表示

首先，柱坐标与直角坐标之间有如下的变换关系

$$
x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \qquad (11)
$$

或

$$
x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\varphi, \quad z = z. \qquad (12)
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

故我们得到

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
&= \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{y}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
&+ \frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{y}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

注意到 $\frac{x}{\rho} = \cos\varphi$ 和 $\frac{y}{\rho} = \sin\varphi$，上式又可被改写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
&+ \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \\
&+ \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\rho} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&- \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{1}{\rho^2}\left(\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \\
&+ \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\rho} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&+ \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{1}{\rho^2}\left(-\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

由此表达式，我们最后得到柱坐标下拉普拉斯算符的表示

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

\$ 0.3 有关 δ- 函数的一些知识

\$ 0.3.1 δ- 函数的各种表达形式

Dirac 引入的 δ- 函数的定义由下式给出

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

除此之外，更为重要的条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{18}$$

在数学上，δ- 函数可以通过所谓分布 (Distribution) 理论严格化。它实际上是一个泛函。

在实际计算中，为了方便起见，δ- 函数常常用某些函数的极限形式来表达。在这里，我们给出其最常用的几种表达方式。

(1) 首先，我们有

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right) = \delta(x). \tag{19}$$

实际上，当 $\sigma \to 0$ 时，δ- 函数的定义式显然是满足的。又由于

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2\right] dx \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tilde{x}^2)\, d\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned} \tag{20}$$

(2) 其次，我们有

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x). \tag{21}$$

为了证明这一表达式，我们注意到，当 $\alpha \to \infty$ 时，这一极限形式地满足 δ- 函数的定义。但是，为了证明它的积分等于 1，我们需要做一些准备工作。

首先，我们注意到积分公式

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \beta x\, dx = \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \gamma > 0 \tag{22}$$

成立。这是由于连续利用分步积分公式，我们有

$$I \;=\; \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \beta x\, dx = e^{-\gamma x} \frac{\sin \beta x}{\beta} \bigg|_0^{\infty} + \frac{\gamma}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \sin \beta x\, dx$$

$$= \frac{\gamma}{\beta}\int_0^\infty e^{-\gamma x}\sin\beta x\,dx = -\frac{\gamma}{\beta^2}e^{-\gamma x}\cos\beta x\Big|_0^\infty - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\int_0^\infty e^{-\gamma x}\cos\beta x\,dx$$
$$= \frac{\gamma}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\,I. \tag{23}$$

移项后，我们有

$$\left(1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\,I = \frac{\gamma}{\beta^2}. \tag{24}$$

将此式的两边同除以 $\left(1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$ 后，我们即可得到公式 (22) 。

现在，我们将公式 (22) 两边的变量 β 从 0 积分到 α 。我们得到

$$\int_0^\alpha d\beta\left(\int_0^\infty e^{-\gamma x}\cos\beta x\,dx\right) = \int_0^\infty dx\,e^{-\gamma x}\left(\int_0^\alpha d\beta\cos\beta x\right)$$
$$= \int_0^\infty dx\,e^{-\gamma x}\,\frac{\sin\alpha x}{x} = \int_0^\alpha d\beta\frac{\gamma}{\beta^2+\gamma^2} = \arctan\frac{\alpha}{\gamma}. \tag{25}$$

因此，我们有

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty dx\,e^{-\gamma x}\frac{\sin\alpha x}{x} = \int_0^\infty dx\,\frac{\sin\alpha x}{x} = \lim_{\gamma\to 0}\arctan\frac{\alpha}{\gamma} = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

现在，我们可以完成我们的证明了。我们有

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha x}{\pi x}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{\pi x}\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1. \tag{27}$$

因此，命题得证。

(3) 接下来，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ikx}\,dk = \delta(x). \tag{28}$$

事实上，直接的计算给出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ikx}\,dk = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^\alpha e^{ikx}\,dk = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{ikx}}{ix}\Big|_{-\alpha}^\alpha$$
$$= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2ix} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\alpha x}{x} = \delta(x). \tag{29}$$

(4) 最后，我们有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \delta(x). \tag{30}$$

首先，当 $x \neq 0$ 时，上式趋向于零。而当 $x = 0$ 时，上式为 ∞ 。其次，我们有

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\epsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \infty - \arctan(-\infty) \right] = 1. \quad (31)$$

因此，上式成立。

\$ 0.3.2 δ- 函数的一些性质

(1) δ- 函数是偶函数。即我们有

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (32)$$

(2) 对于任何连续函数 $f(x)$ ，下面的等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) \, dx = f(0) \quad (33)$$

成立。

(3) 对于任何连续函数 $f(x)$ ，下面的等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) \, dx = f(a) \quad (34)$$

成立。

(4) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ 。

这是由于，对于任何连续函数 $f(x)$ ，利用 δ- 函数是偶函数这一事实，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(|a|x) \, dx. \quad (35)$$

现在令 $|a|x = x'$ ，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x'}{|a|}\right) \delta(x')dx' = \frac{1}{|a|} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{|a|}\delta(x)\right) dx. \quad (36)$$

因此，上式成立。

(5) 考虑一个二次以上可导的函数 $\varphi(x)$ 。设 $\{x_i\}$ 为其单零点的集合。即在任一点 x_i 处，我们有

$$\varphi(x_i) = 0, \quad \varphi'(x_i) \neq 0. \quad (37)$$

那么，我们有

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i^N \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \tag{38}$$

按照定义，δ- 函数仅在 $\varphi(x) = 0$ 处不为零，因此，对于任何连续函数 $f(x)$，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\varphi(x))\, dx = \sum_i^N \int_{x_i-\epsilon_i}^{x_i+\epsilon_i} f(x)\delta(\varphi(x))\, dx \equiv \sum_i^N F_i. \tag{39}$$

下面，我们取某一个积分值 F_i 为例。

由于 $\varphi'(x_i) \neq 0$，我们总可以将 ϵ_i 取得到如此之小，使得 $\varphi(x)$ 在区间 $(x_i - \epsilon_i,\, x_i + \epsilon_i)$ 上是单调的。因此，我们可以引入新的变量 $u = \varphi(x)$，使得

$$u_1 = \varphi(x_i - \epsilon_i), \quad u_2 = \varphi(x_i) = 0, \quad u_3 = \varphi(x_i + \epsilon_i). \tag{40}$$

特别是当 $\varphi'(x_i) > 0$ 时，我们有

$$u_{\max} = u_3, \quad u_{\min} = u_1. \tag{41}$$

而当 $\varphi'(x_i) < 0$ 时，我们又有

$$u_{\max} = u_1, \quad u_{\min} = u_3. \tag{42}$$

利用这些记号，我们可以将 F_i 改写成

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{x_i-\epsilon_i}^{x_i+\epsilon_i} f(x)\delta(\varphi(x))\, dx = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} f(\varphi^{-1}(u))\delta(u)\, \frac{du}{|\varphi'(\varphi^{-1}(u))|} \\ &= \frac{f(\varphi^{-1}(u_2))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(u_2))|} = \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \end{aligned} \tag{43}$$

因此，积分 (39) 可以被写作

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\varphi(x))\, dx = \sum_i^N \int_{x_i-\epsilon_i}^{x_i+\epsilon_i} f(x)\delta(\varphi(x))\, dx = \sum_i^N \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|} \\ = &\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|} \right) dx. \end{aligned} \tag{44}$$

这样，我们就证明了我们上述公式的正确性。

$ 0.4 有关矢量分析的一些知识

(1) 验证恒等式

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}). \tag{45}$$

首先，按照定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{v}) &= \mathbf{A}\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{A}\times\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{vmatrix} \\
&= \left[A_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-A_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]\mathbf{i} \\
&+ \left[A_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)-A_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]\mathbf{j} \\
&+ \left[A_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-A_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\right]\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{46}$$

我们再计算 $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ 。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= \left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{j}) \\
&= \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(A_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&+ \left(A_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{47}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{v}) \\
&= \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(A_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j}\\
&+ \left(A_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}\\
&+ \left[A_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)-A_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]\mathbf{i}\\
&+ \left[A_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)-A_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]\mathbf{j}\\
&+ \left[A_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-A_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\right]\mathbf{k}\\
&= \left(A_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial x}+A_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial y}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\mathbf{j}\\
&+ \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \qquad (48)
\end{aligned}
$$

将上式中的 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{v}$ 对换，我们即可得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
&= \left(v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial y}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\mathbf{j}\\
&+ \left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

两式相加后，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{v})+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
&= \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{i}\\
&+ \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\mathbf{j}\\
&+ \left(A_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+A_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+A_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}\\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\right)\\
&= \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}). \qquad (50)
\end{aligned}
$$

恒等式得证。

第一章、绪论

$ 1.1 简短的历史回顾

众所周知，力学是第一门发展起来的现代意义上的物理学科。之所以会这样，是由于它的实用性导致了各国君主和贵族们的大力资助。这一事实的一个后果是，由于专业术语使用的“经济性”原则，力学的许多概念和名词稍加改动后即被应用到稍后发展起来的其它物理学科，例如电磁学，统计力学和量子力学。因此，人们不难理解，为什么物理专业学生进入大学后要系统学习的第一门专业课程既是力学。

与力学相比，电磁学的起源则是相当“卑微”的。实际上，电和磁现象在很长一段时间内仅仅是被用来娱乐大众或是传播迷信，是相当平民化的，根本得不到重视。由此导致的结果是，电磁学作为一门物理学科的发展是十分缓慢的。以电学为例。早在古希腊时期，人们就已经知道，若将琥珀在毛发上摩擦一下，即可用它来将散乱的草屑吸起。这一现象给大人和孩子们带来了极大的乐趣。但是，直到 1600 年，英国人 William Gilbert(他是当时英国女王伊丽莎白一世的御医) 才发现，不仅是琥珀，其它材料，例如玻璃，硫磺，蜡或者各种宝石都具有这种性质。为了向古希腊人致敬，他将这种性质称之为“electricity”，对应于希腊单词“$\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o\nu$”，即“琥珀性”。又过了一百多年，直到 1733 年，法国国王路易十四的御圆总管 Charles duFay 才意识到，存在两种 electricity，他分别称之为“vitreous”型和“resinou”型。又过了 13 年，英国人 Watson 于 1746 年提出，electricity 是一种弹性流体，充满了任何与 terraqueous globe 相接触的物体内，同时又可以在不同的物体间流动。因此，一个物体带电并非由于 electricity 会凭空产生，而是由于它可以被从其它物体传导而来。几乎同时，美国学者，也是开国元勋之一的 Benjamin Franklin 提出 vitreous 型 electricity 应是电流体在某一物体上的堆积导致的，而 resinous 型 electricity 则意味着电流体在某一物体上的缺失。这一想法是我们可以追溯到的电荷守恒最原始的表述，但也表明， Franklin 认为只存在一种电流体。对于带有多余电流体的物体，他称为“带正电的”，而其上电流体缺失的则称为“带负电的”。因此，当两个带电物体接触时， electricity 应该从带正电的物体流向带负电的物体，形成电流。

进一步，人们要研究带正电物体与带负电物体之间的相互作用力。Franklin 的学生 Aepinius 于 1759 年开始研究这一课题，但是第一个迈出关键一步的是英国学者，氧气

的发现者 Priestley 。 1767 年，作为好朋友，他从 Franklin 那里得知了一些令人迷惑的实验结果。为了解释这些现象， Priestley 仿照牛顿的万有引力定律，提出带正电物体与带负电物体之间的相互作用力应该反比于二者距离的平方。直到 1785 年，法国学者 Charles Coulomb 才第一次利用扭称实验确立了以他的名字命名的定律，并明确指出，负电是独立存在的，而不仅仅是电流体的缺失。用现代记号来书写的话，库仑定律可以写作

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r_2}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r_2}|^3}. \tag{1}$$

这里， q_1 和 q_2 分别是两个 “点电荷” 的带电量，而 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 分别是它们在一个参照系里的位置矢量。 ϵ_0 是一个正实数，称为真空介电常数。若我们使用公斤 - 米 - 秒制的话， ϵ_0 的取值为 8.854×10^{-12} 。相应的，电荷的单位是库仑 (C) ，它总是电子电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ 库仑的整数倍，而相互作用力 $\mathbf{F}$ 的单位为牛顿 (N) 。如此一来，真空介电常数 ϵ_0 的单位也就唯一地确定下来了。值得强调指出的是，类似于牛顿的万有引力定律，库仑定律告诉我们，两个点电荷之间的相互作用力总是沿着它们的联心线方向的。但与前者不同的是，由于电荷可正可负，二者之间的相互作用即可以是吸引的，也可以是排斥的。

在此之后，电学的发展又进入了一个相对的沉闷期。之所以会这样，一个重要的原因是获取充足的电荷是一件十分不易的事情。在发明电池之前，人们只能通过莱顿瓶或是 Franklin 风筝来收集电荷。前者造就了许多 “绝顶聪明” 的电学家，而后者则经常造成意外的不幸。例如， 1753 年早春，定居在俄国圣彼得堡的德国学者 G. W. Richmann 就在研究雷电时遭到雷击身亡。由于当时实验非常难做，作为一种电流通过后产生的稀少样品， Richmann 的尸体被俄国科学院大卸八块，寄给世界各地的电学家们进行研究，相关的结果也发表在各种顶级学术刊物上。为此， Priestley 赞叹到 “It is not given to every electrician to die in so glorious manner as the justly envied Richmann” 。因此，电池的发明，确实是物理学发展史上一个里程碑式的突破。从此，电磁学的发展驶入了快车道。下面，我们简要回顾一下这段历史。

早在 1729 年，英国人 Stephen Gray 就注意到了可以用一根金属丝将 electricity 从一个物体转移到另外一个物体。随后，如我们上面所述， Watson 和 Franklin 提出 electricity 是一种弹性流体的想法。特别是 Franklin 进一步引进了正电和负电，以及电

流的概念。1780 年，意大利人 Galvani 偶然注意到，当挂在黄铜钩子上的新鲜剥制的青蛙腿与用来挡狗的铁丝网罩上的铁丝相碰时，会发生抽搐，像是又活了似的。他认为这一现象与 electricity 有关，但其他学者则认为这是由某种尚未明确的化学反应导致的。因此，人们开始尝试将不同的物体插入各种各样的化学溶液中。然而，实验结果是令人失望的：效果不值一提。直到 1800 年， Volta 注意到，若将一小块铜片，一小块浸湿的硬纸片，一小块锌片，再一小块浸湿的硬纸片，一小块铜片这样重复叠置在一起，形成一个 “堆” 时，那么不小心用手指同时碰触到它的两端时，肌肉会有酸麻的感觉。就这样， Volta 制成了世界第一个电池。之后，人们发现，置于氯化铜溶液中的铜板和锌板构成的电池更为实用，可以用来产生源源不断的电流供应。

电池的发明有力地推动了电学自身的研究。例如，德国学者 Georg Ohm 在 1826 年提出了以他的名字命名的欧姆定律；英国学者 James Joule 于 1841 年，俄国学者 Heinrich Lenz 于 1842 年分别独立地提出了关于电流作功的焦耳 - 楞茨定律。更为重要的是，电池所能够提供的稳定电流使得物理学家终于有机会通过实验来了解电学现象和磁学现象之间的联系。

众所周知，中国人在很早以前就已经学会利用磁石来辨认方向了。特别是黄帝发明了司南车，并用于战争，取得了决定性的胜利。这一历史得到了各国史学家的认同。在此，我们自国外的电动力学教科书摘引一段叙述，以为佐证： “We are told that in 2637 B.C., during the 61st year of the reign of Hoang-ti, the emperor’s troops were pursuing prince Tehi-yeou when they lost their way in the fog on the plains of Tchou-lou. Upon seeing this, the emperor had mounted on a chariot the figure of a woman whose arm always pointed to the south. Thus able to find their way, the emperor’s troops captured the rebellious prince, who was put to death. This is the earliest historical allusion to the use of the compass.”

在西方，磁石可以吸引铁钉的现象也在很早以前就被注意到了。大约在公元前 800 年，自然界存在磁石 (实际上是四氧化三铁 $FeO - Fe_2O_3$) 的事实已经被记录在古希腊的文献中了。在英文中，磁性一词为 “Magnetism” 。一种说法是它源自大多数的磁石产于 Magnesia 省；另外一种说法是第一个发现磁石的是一位名叫 Magnes 的牧羊人。有一天放牧时，他碰巧站在一块天然磁石 (Lodestone) 上。结果，他鞋子上的铁钉被磁石吸引，

使他步履艰难。无论哪种说法正确，磁现象于三千年前即已被人类所熟悉，则是一件不争的事实。而指南针传到西方却是很晚的事情了。最早的记载可以追溯到 1186 年，由 St. Albans 修道院一位名叫 Nekham 的僧侣所记录。 1286 年， Pierre de Maricourt 试图用指南针来勾画一个球形磁石表面的磁力分布。令他吃惊的是，磁石是有两极的，而指南针针头的变化显示出在两极之间存在着类似地球两极之间经度线的磁力线分布。进一步，他利用两个相同的球形磁石进行研究。他发现，两个磁石之间的相互作用即可以是吸引的，也可以是排斥的。只是到了 1600 年， William Gilbert 才第一次对于这些关于磁现象的零散观察做了归纳，并对之开始了现代科学意义上的研究。这一年，他出版了题为 “De Magnete” 的巨著。在其中，他谈到， Maricourt 所用的磁石很像地球。根据这一观察， Gilbert 提出，地球本身实际就是一个磁石。同时，通过实验，他也破除了一些广为流传的古老的如金刚石或大蒜可以使磁石的磁性消失 (早期商船的舵手是不允许吃大蒜或洋葱等食物的，以免他们呼出的空气会使罗盘失灵) 的迷信说法。至于为什么磁石具有磁性， Gilbert 则语焉不详，只是说 “因为它有灵魂 (the Loadstone hath a soul” 。

接下来一位对于磁学研究做出有影响工作的是法国哲学家 Rene Descartes(当然，他说过的最为人所铭记的金句是 “I think, so I am”) 。1619 年，他发表了著作 “Principia” 的第四卷。其中，他阐述了关于为什么磁石头拥有磁性的理论。他认为，物质的磁性是由一些微小的 “线状体” 引起的。它们共有两类。一类由地球北极的一些孔穴进入，穿过地心的孔穴，再从地球南极的孔穴中出来，最后经过空气返回北极。而另外一类线状体则沿相反的方向运动。当它们在途中遇到一块磁石时，就会钻进去，然后绕着它象绕着地球一样运动，从而在其周围形成涡旋。那么为什么这些线状体只 “钟情” 于磁石，而对于别的物体 “不屑一顾” 呢？笛卡儿解释说，这是由于磁石实际上是在地球深层产生的，故具有与地球内部相同的孔穴结构。而地球表面的其它物体没有在地球内部 “锻炼” 过，就不具有这种能让线状体通过的孔穴结构。因此，也就不具有磁性。

这一理论影响了 18 世纪许多杰出的学者，例如著名的瑞士数学家 Leonard Euler 等人。当然，也有人持反对意见。例如，牛津大学的天文学家 John Keill 在 1700 年写到：“无疑，磁石的磁性起源于它的内部结构。证据是，当你用强力敲击磁石，其内部结构发生改变，故可失去磁性。又例如，当将磁石置于火焰上烤灸时，其内部结构也会

发生改变，故也会导致磁性的消失，显得于其它的石头无异。然而，将磁性的起源归因于磁石有灵魂，或是具有什么特殊的孔洞结构，并无助于我们理解撞击或烤炙是如何改变磁石的磁性的。显然，磁性的起源另有其它原因。”

以上所述，大致就是人们在 Volta 发明电池之前对于磁现象的认识。在拥有了电池所提供的稳定电流后，物理学家第一次得以认真研究电学现象和磁学现象的关系。早在 1681 年，就有人注意到二者之间存在着某种联系。当时，有一艘船从英国起航，前往美国的波士顿。出发后不久，这艘船即遭雷击，导致罗盘失灵。但是船长很快发现，罗盘仅是部分损坏，既本该指向北的指针现在指向南。因此，船长大胆决定，索性将错就错，继续前行，最后竟然将船安全驶入波士顿港口。此事长久地被人们津津乐道，直到后来 Franklin 证明雷击会引发电流，学者们才意识到雷击引起的电流可能改变了罗盘指针的磁性。

首先做出重要贡献的是丹麦学者 Hans Oersted 。从 1807 年开始，他就从事寻找电学现象与磁学现象之间联系的工作。他先是将两根导线分别接到一个电池的正极和负极板上，然后查看置放在导线边的指南针的指针是否有转动。尽管他不停地调整电池的数量 (等于调整电压) ，在其后的十三年中，他一直没有看到什么有趣的现象发生。直到 1819 年的一天，他要他的学生 Hansteen 将两条导线连接在一起，形成回路 (还有一种说法是，由于他的不慎，将两条导线偶然的短路了) ，才惊奇地看到，指南针的指针开始晃动了。1820 年 7 月 21 日，他用拉丁文发表了一个小册子，公布了自己的结果。由于整个实验的过程太漫长，而发现又太依赖于运气，使得一些后世学者感觉非常不好，宁可将之归功于中国人，以示古已有之，实在没有什么新奇的。作为证据，我们再从同一本电动力学教科书中引用一段话：“Early in the fourth century A.D. the Chinese physicist Kuopho, in his “Discourse on the Lodestone”, speculated on the connection between magnetism and electricity, writing that “the magnet attracts iron as amber attracts mustard seeds. There is a breath of wind that promptly and mysteriously penetrates both bodies, uniting them imperceptibly with the rapidity of an arrow. It is incomprehensible.” It would be another 1500 years before Oersted would make the connection”.

Oersted 的结果极大地震动了当时的学术界。学者们开始纷纷重复他的实验并予以扩展。 Dominique Arago 于 1820 年 9 月 11 日在法国科学院报告了奥斯忒的工作。七

天以后， Andre Ampere 即在同一场合宣读了一篇论文，提出物质内部的电流所引起的磁场，是导致铁磁现象出现的理论。稍后，在友人的帮助下，安培进一步将这一电流的存在局限在各个分子中。这使得人们对于物质磁性的理解大大前进了一步。另一方面，安培还研究了磁场施加给有电流通过的导线的力，并将之写作

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{2}$$

这里， $d\mathbf{l} = dl\mathbf{e_l}$ 为导线的线元矢量，而 I 为其中的电流 (在公斤 - 米 - 秒制中，电流的单位为库仑 / 秒，称为安培) 。 $\mathbf{B}$ 则定义为磁感应强度，其单位为牛顿 / 安培 · 米，称为特斯拉。同样，在 1820 年，法国学者 Jean-Baptiste Biot 和 Felix Savart 也提出了以他们的名字命名的由给定电流产生的磁感应强度的毕奥 - 萨伐尔定律。用现在为人们熟悉的记号，这一定律可以写作

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \tag{3}$$

这里， I_2 为一个位于 r_2 处的无穷小线元 $d\mathbf{l}_2$ 内的电流， $d\mathrm{B}(\mathbf{r}_1)$ 为其在 $\mathbf{r}_1$ 处引起的磁感应强度。比例系数 μ_0 称为真空磁化率，在公斤 - 米 - 秒制中，它的数值为牛顿 / 安培 ^{2} 。后人根据英国物理学家 Heaviside 的提议，将公式 (2) 称为安培定律，而将公式 (3) 称为毕奥 - 萨伐尔定律。验证这两个定律的一种实验方案如图所示 (引自伯克利教程 251 页) 。

既然电流可以产生磁场，接下来人们自然要问，磁场是否也可产生电场？众所周知，这一问题的答案是英国学者 Michael Faraday 给出的。他在 1831 年首次报道，在实验中观察到随时间改变的磁场会在导体回路内导致电流的出现。但是由于他早年所受数学教育的缺失，只能借助电力线和磁力线等直观图象对于这一现象进行定性的描述。之后，由于德国物理学家 Neumann 和 Weber 等人的努力，才得以将法拉第定律用数学的形式表达出来。根据 1834 年 Heinrich Lenz 提出的楞茨定律， Neumann 将这一定律写作

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{4}$$

这里， $\mathcal{E}$ 是由于感生电场沿一个回路 C 形成的感生电动势，即

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \tag{5}$$

而 $\Phi_B(t)$ 则是穿过由回路 C 所围成的一个任意曲面 S 的磁通量，即

$$\Phi_B(t) = \int\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \tag{6}$$

文献中，公式 (4) 被称为法拉第的电磁感应定律。

如上所述，最重要的一些关于电磁学的实验在年左右都已完成。接下来需要的是具有卓越的数学解析能力的牛顿类型的物理学家对之加以归纳、整理，使其系统化。历史将这一任务交给了在英国剑桥大学工作的苏格兰物理学家 James Maxwell 。正是由于他的工作，电动力学才最终成为继 “力学” 之后的第二门在现代意义上建立起来的物理学分支。我们将在本课程的第二章介绍麦克斯韦方程组的建立过程及其一些重要的推论。为此，我们需要首先介绍一些必要的数学知识。

$ 1.2 矢量分析的基本知识

在学习 “力学” 课程时，我们已经初步了解了矢量以及它的数乘、点乘和直乘的概念。这里，我们先将这些知识回顾一下。

习惯上，我们将熟悉的实数称为 “标量 (Scalar)” 。之后，这一称谓又被扩充到了复数。而所谓 “矢量 (Vector)” 则是一个即具有长度又具有方向的元素，记作

$$\vec{v} \equiv \mathbf{v} = v\vec{e_v} \equiv v\mathbf{e_v}. \tag{7}$$

这里，实数 $v > 0$ 为矢量 $\mathbf{v}$ 的长度，记作 $v \equiv ||\mathbf{v}||$ ；而 $\mathbf{e_v}$ 则是沿其方向的长度为单位的一个矢量，称为沿该方向的单位矢量。依赖这些记号，一个实标量 α 和一个矢量 $\mathbf{v}$ 之间的数乘定义为

$$\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v} \equiv (\alpha v)\mathbf{e_v}. \tag{8}$$

它是一个新的矢量。这里，我们遇到的一个问题是，当 α 为一个负数时如何来理解这个新的矢量。为此，我们引入矢量 $\mathbf{e_{-v}}$ 。它代表与 $\mathbf{v}$ 方向相反的单位矢量。利用这一定义，我们可以重新写出

$$\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v} = (\alpha v)\mathbf{e_v} = (-|\alpha|v)\mathbf{e_v} = |\alpha|v(-\mathbf{e_v}) = |\alpha|v\mathbf{e_{-v}}. \tag{9}$$

它代表一个长度为 $|\alpha|v$ ，而方向则与 $\mathbf{v}$ 相反的矢量。

在做了这些准备之后，我们现在可以定义矢量之间的加法了。对于任意两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，它们的和 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 由所谓平行四边形法则给出。但这一定义在实际运算中使用起来不大方便。为了简化问题，笛卡尔引入了以他的名字命名的直角坐标系。在这一坐标系下，我们可以任一矢量 $\mathbf{v}$ 的起点平行地移动到坐标系的原点，从而将该矢量写作

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y+v_z\mathbf{e}_z \tag{10}$$

这里，$\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 分别是沿 x,y 和 z 轴方向的单位矢量。习惯性地，人们将之分别记作 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$。而 v_x,v_y 和 v_z 则是矢量 $\mathbf{v}$ 在这三个方向上的投影。如此一来，我们又可将矢量 $\mathbf{v}$ 写作

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}. \tag{11}$$

接下来，我们定义两个矢量的点乘和直乘。任取两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$。它们的点乘为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=||\mathbf{A}||\cdot||\mathbf{B}||\cos\theta. \tag{12}$$

这里，θ 为二者之间的夹角。特别是当 $\theta=0$ 时，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=||\mathbf{A}||\cdot||\mathbf{B}||$，而当 $\theta=\pi/2$ 时，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$。在前一种情况中，我们称为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是平行的，记作 $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$。而在后一种情况中，我们称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是彼此垂直的，记作 $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$。不难验证，两个矢量的点乘满足对易关系

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}, \tag{13}$$

而与矢量的加法之间满足分配率

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \tag{14}$$

由此出发，再利用矢量的直角坐标系表示，我们得到

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{15}$$

这是一个标量。特别是对于同一个矢量 $\mathbf{v}$，我们有

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2=||\mathbf{v}||^2. \tag{16}$$

因此我们有 $||\mathbf{v}||=v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$。

矢量直乘的定义则稍微复杂一点。两个矢量的直积仍然是一个矢量，它可被写作

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}|| \sin\theta \mathbf{e}_{\mathbf{C}}. \tag{17}$$

而 $\mathbf{e}_{\mathbf{C}}$ 的方向则由右手螺旋法则来决定。根据这一法则，我们立刻可得

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \tag{18}$$

有意思的是，当 $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ 时， $\sin\theta = 0$ ，故 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ 。而当 $\theta = \pi/2$ 时， $\mathbf{C}$ 的长度为 $||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}||$ ，取最大值。这一点正好与点乘相反。同时，我们亦可很容易地验证

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B} \tag{19}$$

成立。利用此一事实以及矢量在直角坐标系下的表达式，我们又有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{20}$$

这一结果较为冗长。为了记忆方便，我们可以利用行列式的定义，将其写作

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{21}$$

关于点乘和直乘的关系，下面的两个恒等式是常常用到的。

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{22}$$

接下来，我们转向另外一个话题。假若有一个矢量 $\mathbf{A}$ ，它可以被定义在空间中的一个区域 Ω 上的每一点，即它可以被写作

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + A_y(x, y, z, t)\mathbf{j} + A_z(x, y, z, t)\mathbf{k}, \tag{23}$$

则我们称它为一个矢量场。例如，为了描述流体的运动，欧拉引入了速度场的概念，称为流体的欧拉表示法。一般而言，若无特殊声明，我们总是假设 $\mathbf{A}$ 的三个分量 $A_x(x, y, z, t)$ ，

$A_y(x,y,z,t)$ 和 $A_z(x,y,z,t)$ 作为自变量 x,y,z 和 t 的函数是连续的。若有必要，我们还会要求它们在 Ω 的大部分区域对这些变量是一次或二次可导的。推而广之，我们也可以在 Ω 中定义所谓标量场，例如温度 T 的连续分布。这时， $T(x,y,z,t)$ 作为空间坐标 x,y,z 和时间 t 的函数被要求是连续的。

对于一个给定的标量场，我们可以引入它的梯度 (Gradient) 的定义。任取区域 Ω 中的一点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 以及与它相邻的 $\mathbf{r}'=(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\equiv\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ 。则我们近似地有

$$\begin{aligned}&\Delta T(x,y,z,t)\equiv T(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z,t)-T(x,y,z,t)\\ \cong\ &\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\Delta z\end{aligned}\tag{24}$$

若我们引矢量

$$\operatorname{grad}T(x,y,z,t)=\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\mathbf{k},\tag{25}$$

以及

$$\Delta\mathbf{r}=\Delta x\mathbf{i}+\Delta y\mathbf{j}+\Delta z\mathbf{k},\tag{26}$$

那么上式可以重新写作

$$\Delta T(x,y,z,t)\cong\operatorname{grad}T(x,y,z,t)\cdot\Delta\mathbf{r}=||\operatorname{grad}T(x,y,z,t)||\cdot||\Delta\mathbf{r}||\cos\theta.\tag{27}$$

因此，当 $\theta=0$ ，即 $\operatorname{grad}T(x,y,z,t)\parallel\Delta\mathbf{r}$ 时， $\Delta T(x,y,z,t)$ 取极大值。也就是说，$\operatorname{grad}T(x,y,z,t)$ 的方向是标量场 $T(x,y,z,t)$ 在空间 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 处变化最快的方向。这是一个标量场的梯度的物理意义。

接下来，我们考虑一个矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的散度 (Divergence) 和旋度 (Curl) 。前者可以写作

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)\equiv\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z},\tag{28}$$

是一个标量，而后者则为

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)\equiv\left(\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial z}\right)\mathbf{i}\\ +\ &\left(\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{29}$$

显然是一个矢量。利用行列式的定义，矢量 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的旋度又可被写作

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x(x,y,z,t) & A_y(x,y,z,t) & A_z(x,y,z,t)\end{vmatrix} \tag{30}$$

从物理意义上看， $\mathrm{div}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 可以被视作 t 时刻从一个包含点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 的小体积 Δv 中单位时间内流出的矢量场 $\mathbf{A}$ 的通量，而 $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 则标志着在 $\mathbf{r}$ 点附近，矢量场 $\mathbf{A}$ 是否存在着涡旋结构。为了看清楚这些事实，我们还需要做一点数学准备。

矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的旋度的行列式表达式给了我们一个提示：可以引入一个算符

$$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{31}$$

从而将 $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ 重新写作

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x(x,y,z,t) & A_y(x,y,z,t) & A_z(x,y,z,t)\end{vmatrix}\equiv\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t). \tag{32}$$

有意思的是,利用这一记号,我们也可以将矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的散度和标量场 $T(x,y,z,t)$ 的梯度分别写成

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)&\equiv\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z}\equiv\nabla\cdot\mathbf{A},\\ \mathrm{grad}\,T(x,y,z,t)&\equiv\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\,\mathbf{k}\equiv\nabla T.\end{aligned} \tag{33}$$

这些记号在下面的讲述中会被交替使用。

标量场的梯度，矢量场的散度和旋度之间满足一些微分和积分恒等式。下面，我们挑几个最常用的讲解一下。首先，我们看两个微分恒等式。

$$\mathrm{rot}\,[\mathrm{grad}\,T(x,y,z,t)]=\nabla\times[\nabla T(x,y,z,t)]\equiv 0, \tag{34}$$

以及

$$\mathrm{div}\,[\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)]=\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t)]\equiv 0. \tag{35}$$

这里，我们只证明第二个恒等式。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
\text{div}\,[\text{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z,t) & A_y(x,y,z,t) & A_z(x,y,z,t) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial x}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_z(x,y,z,t)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y(x,y,z,t)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x(x,y,z,t)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z(x,y,z,t)}{\partial y \partial x} \\
&+ \frac{\partial^2 A_y(x,y,z,t)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x(x,y,z,t)}{\partial z \partial y} = 0. \qquad (36)
\end{aligned}$$

除此之外，矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的散度和旋度还满足如下的积分恒等式。任取一个区域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$。则我们有

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_{\widetilde{\Omega}} \text{div}\,\mathbf{A}(x,y,z,t)\,dxdydz. \qquad (37)$$

这里，S 为包围区域 $\widetilde{\Omega}$ 的封闭曲面，而面元 $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ 被定义作长度为 dS，方向沿外法线 $\mathbf{n}$ 的矢量。这一恒等式被称为高斯定理。另外一个常用的积分恒等式可被写作

$$\oint_C \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{l} = \int\int_S (\text{rot}\,\mathbf{A}(x,y,z,t))\cdot d\mathbf{S}. \qquad (38)$$

这里，C 为区域 Ω 内的一个环路，而 S 为任意一个以 C 为边界的曲面。环路的方向由科西 (Cauchy) 法则决定，而面元 $d\mathbf{S}$ 的方向现在则由右手螺旋法则决定。在文献中，这一公式被称为斯托克斯 (Stokes) 定理。接下来，我们分别给出这两个常用恒等式的简单证明。

首先看高斯定理的证明。为此，我们先取 $\widetilde{\Omega}$ 中一点 $\mathbf{r} = (x,y,z)$，以它为中心做一个边长为小量 Δl 的立方体，并取其六个面的外法线方向分别为 x，y 和 z 轴的正、负方向。我们考虑矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 在这六个面上的通量之和。为了确定起见，先让我们考虑法线方向沿 z 轴的两个面。显然，上表面的任意一个点的坐标可以写作 $(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\Delta l/2)$，而下表面上任意一个点的坐标可以写作 $(\widetilde{x},\widetilde{y},z-\Delta l/2)$。这里，$\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$ 的取值为 $x-\Delta l/2 \le \widetilde{x} \le x+\Delta l/2$ 以及 $y-\Delta l/2 \le \widetilde{y} \le y+\Delta l/2$。而上表面和下表

面的外法线分别是沿正 z 轴和负 z 轴方向的。因此，在上表面上，矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的通量为

$$\int_{\text{上表面}} \mathbf{A}\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\frac{\Delta l}{2},t\right)\cdot d\mathbf{S}=\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,A_z\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\frac{\Delta l}{2}\right). \tag{39}$$

当 $\Delta l\sim 0$ 时，我们可以将被积函数在中心点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 处做展开，并仅仅保留各个小量的一次幂项，即

$$\begin{aligned} & A_z\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\frac{\Delta l}{2}\right) \\ \cong\ & A_z(x,y,z)+\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial x}(\widetilde{x}-x)+\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)+\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\frac{\Delta l}{2}. \end{aligned} \tag{40}$$

将其代入上式后，我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\text{上表面}} \mathbf{A}\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\frac{\Delta l}{2},t\right)\cdot d\mathbf{S} \\ \cong\ & \int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,A_z(x,y,z)+\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial x}(\widetilde{x}-x) \\ +\ & \int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)+\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\frac{\Delta l}{2} \end{aligned} \tag{41}$$

同理，在下表面上，我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\text{下表面}} \mathbf{A}\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z-\frac{\Delta l}{2},t\right)\cdot d\mathbf{S} \\ \cong\ & -\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,A_z(x,y,z)-\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial x}(\widetilde{x}-x) \\ -\ & \int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)+\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}\,\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\frac{\Delta l}{2} \end{aligned} \tag{42}$$

积分表达式前面的负号的出现是由于下表面的外法线是指向 z 轴的负方向的。因此，矢量场 $\mathbf{A}$ 在上和下两个表面上的通量之和为

$$\begin{aligned} & \int_{\text{上表面}} \mathbf{A}\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z+\frac{\Delta l}{2},t\right)\cdot d\mathbf{S}+\int_{\text{下表面}} \mathbf{A}\left(\widetilde{x},\widetilde{y},z-\frac{\Delta l}{2},t\right)\cdot d\mathbf{S} \\ \cong\ & \frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z}(\Delta l)\int_{x-\frac{\Delta l}{2}}^{x+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{x}\int_{y-\frac{\Delta l}{2}}^{y+\frac{\Delta l}{2}}d\widetilde{y}=\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z}(\Delta l)^3. \end{aligned} \tag{43}$$

同上面的推导相同，我们可以得到矢量场 $\mathbf{A}$ 在外法线沿 x 轴和 y 轴方向的立方体的表面上的通量之和分别为 $(\partial A_x(x,y,z,t)/\partial x)(\Delta l)^3$ 和 $(\partial A_y(x,y,z,t)/\partial y)(\Delta l)^3$ 。现在，将这些结果相加，我们最后得到

$$\begin{aligned} & \oint\oint_{\text{小立方体表面}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \\ \cong & \left(\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z}\right)(\Delta l)^3 \\ = & \ \mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)(\Delta l)^3, \end{aligned} \tag{44}$$

或是

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{1}{(\Delta l)^3}\oint\oint_{\text{小立方体表面}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t). \tag{45}$$

也就是说， $\mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 为 t 时刻，矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 从一个包围点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 的的小体积元 ΔV 中单位时间流出去的通量。

现在，我们可以完成高斯定理的证明了。首先，我们可以取一些小的立方体来切割区域 $\widetilde{\Omega}$ 。注意到，对于两个相邻的小立方体而言，在它们的共同分界面上，彼此的外法线方向是相反的。也就是说，相对于一个小立方体的外法线方向，对于另外一个小立方体来说就是内法线方向。如此一来，对于矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ ，其来自两个小立方体的通量在这个分界面上会彼此抵消。因此，若令 S_i 为第 i 个小立方体的表面，则我们有

$$\begin{aligned} \oint\oint_{S_{\widetilde{\Omega}}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\oint\oint_{S_i}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(\Delta l)^3\frac{\oint\oint_{S_i}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{(\Delta l)^3} \\ = & \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(\Delta l)^3\mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t) = \int\int\int_{\widetilde{\Omega}}\mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)\,dxdydz. \end{aligned} \tag{46}$$

这就是我们所要证明的高斯定理。

同理，为了证明 Stokes 公式，我们可以任取一个以点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 为中心，边长为 Δl 的小正方形。它的边界构成一个回路 C ，其方向由 Cauchy 规定决定，而小正方形本身的法线方向 $\mathbf{n}$ 由右手螺旋法则决定。接下来，我们定义矢量场 $\mathbf{A}$ 在这个小正方形的边界 C 上的环流量为

$$\Sigma \equiv \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{47}$$

显然，这是一个标量。令这个小正方形的边长 Δl 趋向于零。若极限 $\lim_{\Delta l\to 0}\Sigma/(\Delta l)^2$ 存在的话，我们将之记作 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ 。我们要证明，它实际上等于 $\mathrm{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{n}$ 。为此，让我们考虑几个特例。

先考虑一个法线沿 z 轴方向，边长为 Δl 的小正方形。它的四条边，其上的坐标分别为 $(\widetilde{x},y+\Delta l/2,z)$ ， $(\widetilde{x},y-\Delta l/2,z)$ ， $(x+\Delta l/2,\widetilde{y},z)$ 以及 $(x-\Delta l/2,\widetilde{y},z)$ 。这里，坐标 $\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$ 的取值分别为 $x-\Delta l/2\le\widetilde{x}\le x+\Delta l/2$ ， $y-\Delta l/2\le\widetilde{y}\le y+\Delta l/2$ 。而由这四根边形成的回路的方向则由右手螺旋法则决定。因此，矢量场 $\mathbf{A}$ 在这四根边上的环流量分别为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\text{第一条边}}\mathbf{A}(\widetilde{x},y+\Delta l/2,z,t)\cdot d\mathbf{l}=\int_{x+\Delta l/2}^{x-\Delta l/2}A_x(\widetilde{x},y+\Delta l/2,z,t)\,d\widetilde{x}\\
\cong\;&-\int_{x-\Delta l/2}^{x+\Delta l/2}\left(A_x(x,y,z,t)+\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}(\widetilde{x}-x)+\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{\Delta l}{2}\right)d\widetilde{x}\\
=\;&-A_x(x,y,z,t)\Delta l-\int_{x-\Delta l/2}^{x+\Delta l/2}\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}(\widetilde{x}-x)d\widetilde{x}-\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{(\Delta l)^2}{2},\\
&\int_{\text{第二条边}}\mathbf{A}(\widetilde{x},y-\Delta l/2,z,t)\cdot d\mathbf{l}=\int_{x-\Delta l/2}^{x+\Delta l/2}A_x(\widetilde{x},y-\Delta l/2,z,t)\,d\widetilde{x}\\
\cong\;&\int_{x-\Delta l/2}^{x+\Delta l/2}\left(A_x(x,y,z,t)+\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}(\widetilde{x}-x)-\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{\Delta l}{2}\right)d\widetilde{x}\\
=\;&A_x(x,y,z,t)\Delta l+\int_{x-\Delta l/2}^{x+\Delta l/2}\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}(\widetilde{x}-x)d\widetilde{x}-\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\frac{(\Delta l)^2}{2},\\
&\int_{\text{第三条边}}\mathbf{A}(x+\Delta l/2,\widetilde{y},z,t)\cdot d\mathbf{l}=\int_{y-\Delta l/2}^{y+\Delta l/2}A_y(x+\Delta l/2,\widetilde{y},z,t)\,d\widetilde{y}\\
\cong\;&\int_{y-\Delta l/2}^{y+\Delta l/2}\left(A_y(x,y,z,t)+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{\Delta l}{2}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)\right)d\widetilde{y}\\
=\;&A_x(x,y,z,t)\Delta l+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{(\Delta l)^2}{2}+\int_{y-\Delta l/2}^{y+\Delta l/2}\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)d\widetilde{y},\\
&\int_{\text{第四条边}}\mathbf{A}(x-\Delta l/2,\widetilde{y},z,t)\cdot d\mathbf{l}=\int_{y+\Delta l/2}^{y-\Delta l/2}A_y(x-\Delta l/2,\widetilde{y},z,t)\,d\widetilde{y}\\
\cong\;&-\int_{y-\Delta l/2}^{y+\Delta l/2}\left(A_y(x,y,z,t)-\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{\Delta l}{2}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)\right)d\widetilde{y}\\
=\;&-A_x(x,y,z,t)\Delta l+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x}\frac{(\Delta l)^2}{2}-\int_{y-\Delta l/2}^{y+\Delta l/2}\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}(\widetilde{y}-y)d\widetilde{y}. \qquad (48)
\end{aligned}
$$

因此，在这个小的正方形的边界 C_z 上，矢量场 $\mathbf{A}$ 的环流量近似为

$$\oint_{C_z}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\text{第一条边}} \mathbf{A}(\widetilde{x}, y+\Delta l/2, z, t)\cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{第二条边}} \mathbf{A}(\widetilde{x}, y-\Delta l/2, z, t)\cdot d\mathbf{l} \\
&+ \int_{\text{第三条边}} \mathbf{A}(x+\Delta l/2, \widetilde{y}, z, t)\cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{第四条边}} \mathbf{A}(x-\Delta l/2, \widetilde{y}, z, t)\cdot d\mathbf{l} \\
&\cong \left(\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y}\right)(\Delta l)^2. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

由此，我们得到

$$
\mathbf{B}\cdot\mathbf{k} \equiv \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\oint_{C_z}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{(\Delta l)^2} = \frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial y} = [\mathrm{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)]_z. \qquad (50)
$$

同理，对于法线分别沿 x 轴和 y 轴的以点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 为中心的小正方形的边界 C_x 和 C_y 上的矢量场 $\mathbf{A}$ 的环流量，我们有

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_x}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} &\cong \left(\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial z}\right)(\Delta l)^2, \\
\oint_{C_y}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} &\cong \left(\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial x}\right)(\Delta l)^2. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}\cdot\mathbf{i} &\equiv \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\oint_{C_x}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{(\Delta l)^2} = \frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial z} = [\mathrm{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)]_x, \\
\mathbf{B}\cdot\mathbf{j} &\equiv \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\oint_{C_y}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{(\Delta l)^2} = \frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial x} = [\mathrm{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)]_y. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

综上所述，对于一个以点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 为中心，边长为 Δl 的小正方形的边界回路 C，我们最后得到极限表达式

$$
\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \equiv \lim_{\Delta l\to 0}\frac{1}{(\Delta l)^2}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \mathrm{rot}\mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{n}. \qquad (53)
$$

有了这一结果之后，我们现在取区域 Ω 内的任意一条闭合曲线 C 以及一个以它为边界的曲面 S。当边长 Δl 取得足够小时，我们用 N 个边长为 Δl 的小的正方形 $S_1, S_2, \cdots, S_N$ 近似地切割曲面 S。设这些小的正方形的边界为曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_N$。那么，对于两个相邻的小正方形 S_i 和 S_j 而言，根据 Cauchy 法则，其边界回路 C_i 和 C_j 在它们重叠线段上的取向正好是相反的。由此导致的结果是，在这一线段上，矢量场 $\mathbf{A}$ 对于回路 C_i 的环流量的贡献正好与其对于回路 C_j 的环流量的贡献彼此抵消。也就

是说，矢量场 $\mathbf{A}$ 对于这 N 个闭合曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_N$ 的环流量之和实际上等于在整个曲面 S 的边界 C 上的环流量大致相等，即我们有

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \cong \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \tag{54}$$

若令 $\Delta l \to 0$(等价于令 $N \to \infty$)，则我们有

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (\Delta l)^2 \frac{\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{(\Delta l)^2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (\Delta l)^2 \mathrm{rot}\ \mathbf{A}(x,y,z,t) \cdot \mathbf{n}_i = \int\int_S \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \tag{55}$$

此即 Stokes 公式。

通过以上的推导，我们也可以看到，若在空间一点 $\mathbf{r}$ 处， $\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \neq 0$ ，意味着矢量场 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 环绕该点的环流量不是零。也就是说，在该点处，矢量场有一个涡旋结构。

在做了这些准备工作之后，我们现在可以转入对于麦克斯韦方程组及其推论的研究了。

第二章、真空中的麦克斯韦方程组

1873 年， James Maxwell 发表了他的著作 “A Treatise on Electricity and Magnetism” 。作为一个杰出的数学物理学家，他归纳和总结了前人的工作，提出了以他名字命名的由四个方程组成的麦克斯韦方程组，并得出在真空中电磁扰动是以波的形式传播，其速率为光速的结论。为了理解这一奠基性的工作，我们需要对在此之前的一些实验结果做较为深入的数学分析。

$ 2.1 静电场

先让我们考虑静电场的情况。我们已经知道，两个静止不动的电荷 q_1 和 q_2 之间的受力由库仑定律

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r}_2|^3} \tag{1}$$

给出。若我们定义

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r}_2|^3} \tag{2}$$

为位于 $\mathbf{r}_2$ 处的电荷 q_2 在 $\mathbf{r}_1$ 处产生的电场强度，则上式又可被写作

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1). \tag{3}$$

由实验结果可以推论，电场具有叠加性。也就是说，由多个电荷在空间某处 $\mathbf{r}$ 所激发的电场强度等于每个电荷独立激发的电场强度之和。更为明确起见，设在空间 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N$ 处有 N 个独立的电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 存在。那么在 $\mathbf{r}$ 处，它们共同产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}). \tag{4}$$

在许多情况下，可以将电荷视作连续分布在空间某一个区域 Ω 内的。此时，我们可以引入电荷密度 ρ 的概念。任取 Ω 内的一点 $\mathbf{r}_) = (x_0, y_0, z_0)$ ，我们定义 $dQ = \rho(x, y, z)dV$ 为以 $\mathbf{r}_0$ 为中心的一个小的球形体积元 dV 内的电荷量。因此，我们得以将上面的求和式改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int_{\Omega} \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \frac{\mathbf{r} - \widetilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \widetilde{\mathbf{r}}|^3} d\widetilde{x} d\widetilde{y} \widetilde{z}. \tag{5}$$

在引入电场强度的概念后，我们可以计算一个给定的电荷分布所引起的电场对于任意一个闭合曲面 S 的通量。先考虑只有一个点电荷 q 存在的情况。按照定义，任何一个包含有此电荷的闭合曲面上的电场通量为

$$\oint\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot d\mathbf{S}. \tag{6}$$

这里，$\mathbf{r}_0$ 为电荷 q 的位置矢量，而 $\mathbf{r}$ 代表闭合曲面 S 上的一点。从教科书第 5 页的图 1-2 中，我们可以看到

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot d\mathbf{S} = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\,dS = \frac{\cos\theta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\,dS = d\omega \tag{7}$$

成立。这里，$d\omega$ 为小面元 dS 相对于点电荷 q 所张开的立体角。将其代入 (6) 式后，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\oint\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} &= \oint\oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint\oint_S d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned} \tag{8}$$

利用电场所满足的叠加原理，我们可以立刻得到当有 N 个独立的电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 存在时，任何一个包含有这些电荷的闭合曲面上的电场通量

$$\begin{aligned}&\oint\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_S (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\cdots+\mathbf{E}_N)\cdot d\mathbf{S} \\ =\ &\oint\oint_S \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{S} + \oint\oint_S \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{S} + \cdots + \oint\oint_S \mathbf{E}_N\cdot d\mathbf{S} \\ =\ &\frac{q_1}{\epsilon_0}+\frac{q_2}{\epsilon_0}+\cdots+\frac{q_N}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{Q}{\epsilon_0}.\end{aligned} \tag{9}$$

现在，我们可以直接写出电荷连续分布的情况下，任何一个闭合曲面上的电场通量的表达式

$$\oint\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int\int\int_{\widetilde{\Omega}} \rho(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})d\widetilde{x}d\widetilde{y}d\widetilde{z}. \tag{10}$$

这里，$\widetilde{\Omega}$ 为被闭曲面 S 包围的空间区域。

为了逻辑上的完备性，我们还需要说明，位于闭曲面 S 外的电荷分布对于其上的电场通量的贡献为零。这一点并不难理解。以位于闭曲面 S 外的一个单独电荷 q 对于曲面上的电场通量为例。我们注意到，从 q 所在的位置 $\mathbf{r}_0$ 延伸出去的任何一条直线，要

么与该曲面不相交，要么与之相交偶数次，而相交点处的曲面的外法线方向是两两相反的。这导致 q 引起的电场在以这些相交点为中心的小面元上的电通量彼此抵消。因此，电荷 q 引起的电场在整个闭曲面 S 上的电场通量一定恒为零。而若 q 是被曲面 S 包围的话，则从其位置 $\mathbf{r}_0$ 延伸出去的直线必与曲面相交，且相交的次数为奇数。这也就解释了为什么由它引起的在闭曲面 S 上的电场通量不为零的原因。

现在，让我们将公式 (10) 应用到以空间中一点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为中心，半径为 δ 的一个小的球形区域 Ω_δ 上。我们有

$$\oint\oint_{S_\delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int\int\int_{\Omega_\delta} \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z}. \tag{11}$$

这里， S_δ 为小球 Ω_δ 的球面。利用第一章中所证明过的高斯定理

$$\oint\oint_{S_\delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_{\Omega_\delta} \mathrm{div}\mathbf{E}\, dV, \tag{12}$$

我们又可将上式改写作

$$\oint\oint_{S_\delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int\int\int_{\Omega_\delta} \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z} = \int\int\int_{\Omega_\delta} \mathrm{div}\mathbf{E}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z} \tag{13}$$

当小球 Ω_δ 的半径 δ 足够小时，我们可用电场强度 $\mathbf{E}$ 和电荷密度 ρ 在小球中心 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处的值 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和 $\rho(x, y, z)$ 分别代替 $\mathbf{E}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ 和 $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ ，即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_0} \int\int\int_{\Omega_\delta} \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z} \cong \frac{1}{\epsilon_0} \int\int\int_{\Omega_\delta} \rho(x, y, z) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z} \\ = \quad & \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) \frac{4\pi}{3} \delta^3 \cong \int\int\int_{\Omega_\delta} \mathrm{div}\mathbf{E}(x, y, z) d\widetilde{x} d\widetilde{y} d\widetilde{z} = \mathrm{div}\mathbf{E}(x, y, z) \frac{4\pi}{3} \delta^3. \end{aligned} \tag{14}$$

现将小球的体积 $\frac{4\pi}{3}\delta^3$ 从上式两边除掉，并令 $\delta \to 0$ ，则我们得到

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(x, y, z) \equiv \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z). \tag{15}$$

这是电磁学中高斯定理的微分形式，也是真空中的麦克斯韦方程组的第一个方程，由 Gauss 于 1839 年在研究地磁场分布的过程中所证明。

接下来，让我们考虑静电场的旋度。在单个电荷存在的情况下，我们看到电场强度 $\mathbf{E}$ 是以 “辐射” 状的形式从电荷 q 指向无穷远处的，并不存在涡旋结构。因此，我们有理由期待静电场的旋度为零。下面，我们给这一结论一个数学证明。

首先，我们证明，由一个单独的点电荷 q 在空间中任何一条闭合曲线 C 上产生的电场环流量恒为零。实际上，若将点电荷 q 放在坐标系的原点处，则我们有

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\,dl\cos\theta}{r^3} = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}dr. \tag{16}$$

这里， θ 为矢径 $\mathbf{r}$ 与线元 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角。从教科书第 6 页上图 1-3 中不难看出，$\cos\theta dl = dr$ 。因此，我们有

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_C \frac{1}{r^2}dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_C d\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \tag{17}$$

再利用静电场强度所满足的线性叠加性，我们立刻可知，对于电荷的任何空间分布，对于由此产生的静电场，

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{18}$$

都成立。

另一方面，利用 Stokes 公式，我们又可得到

$$0 = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int\int_S (\mathrm{rot}\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}. \tag{19}$$

这里， S 是任何一个以回路 C 为边界的曲面。特别，若我们以点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为中心画一个半径为 δ 的圆 C_δ 的话，则下式

$$0 = \oint_{C_\delta} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int\int_{S_\delta} (\mathrm{rot}\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} \tag{20}$$

成立。这里， S_δ 为 C_δ 圈定的以 $\mathbf{r}$ 为圆心的圆盘。当 δ 足够小时，上式可以近似改写为

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int_{S_\delta} (\mathrm{rot}\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = \int\int_{S_\delta} (\mathrm{rot}\mathbf{E})\cdot \mathbf{n}\, dS \\ &\cong (\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x))\cdot\mathbf{n}\int\int_{S_\delta} dS = \pi\delta^2\,(\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x))\cdot\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{21}$$

或是

$$0 \cong (\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x))\cdot\mathbf{n}. \tag{22}$$

接下来，我们令 $\delta \to 0$ ，并由此得到

$$0 = \lim_{\delta\to 0}(\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x))\cdot\mathbf{n} = (\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x))\cdot\mathbf{n}, \tag{23}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(x,y,x) \equiv \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \tag{24}$$

这就是我们要证明的结果，也是真空中的麦克斯韦方程组的第二个方程。

这个结果有两个直接的推论。其一是静电场的作功是不依赖于路径的。因此，静电力是保守力。原因是，根据静电场 $\mathbf{E}$ 的定义，一个点电荷 q 在空间 $\mathbf{r}$ 处感受到的静电力为 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。因此，绕任何一条闭合路径 C 一周，静电场对电荷所作的总功为

$$W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \oint_C q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = q\oint\oint_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{25}$$

因此，对于空间中的任意两点 P 和 Q，以及连接它们的任意两条路径 L_1 和 L_2，我们有

$$\int_{L_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + \int_{-L_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \oint_{\widetilde{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{26}$$

这里，$-L_2$ 代表 L_2 的逆向路径，而 $\widetilde{C}$ 则是由 L_1 和 $-L_2$ 一起构成的闭合路径。将上式左边的第二项移项后，我们有

$$\int_{L_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{-L_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}. \tag{27}$$

也就是说，沿任何两条从点 P 到点 Q 的路径 L_1 和 L_2，静电力对一个点电荷所作之功是一样的。

其次，考虑到微分恒等式 $\nabla\times(\nabla f(\mathbf{r})) = 0$ 对于任何标量函数 $f(\mathbf{r})$ 都成立，$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ 的另外一个推论是静电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 可以写成一个标量函数 $\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})$ 的梯度，即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{\partial\widetilde{\Phi}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{\Phi}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial\widetilde{\Phi}(x,y,z)}{\partial z} \tag{28}$$

成立。以一个点电荷产生的静电场为例，我们可以直接验证这一结论。首先，不难验证

$$\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{29}$$

因此，由一个点电荷 q 引起的静电场强度可以写作

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla_{\mathbf{r}}\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right). \tag{30}$$

与定义式 (28) 进行比较后，我们看到对于点电荷引起的静电场而言，

$$\widetilde{\Phi}(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{31}$$

再利用电场强度矢量的线性叠加性，我们看到，对于由在空间一个区域 Ω 内连续分布的电荷密度引起的静电场，可以写出

$$\widetilde{\Phi}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_{\Omega}\frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz'. \tag{32}$$

按照英国数学家 Green 在 1828 年提出的建议， $\widetilde{\Phi}(x,y,z)$ 的负值，即

$$\Phi(x,y,z) = -\widetilde{\Phi}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_{\Omega}\frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz' \tag{33}$$

被定义为静电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的标量势。因此，我们有

$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\nabla\Phi(x,y,z). \tag{34}$$

在引入静电势的概念后，我们可以将静电场的作功改写作

$$\begin{aligned} W &= \int_P^Q q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = q\int_P^Q \nabla(-\Phi(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r} \\ &= -q\int_P^Q d\Phi(\mathbf{r})) = -q(\Phi(Q)-\Phi(P)) = q\Phi(P) - q\Phi(Q). \end{aligned} \tag{35}$$

仿照在“力学”中引入引力势能的作法，我们现在可以将 $q\Phi(P)$ 和 $q\Phi(Q)$ 分别视作电荷 q 在空间 P 处和 Q 处的静电势能。而静电场作功的结果是改变了电荷的静电势能。

更为重要的是，有了静电势的概念后，我们现在可以推导出求解静电场问题的泊松方程。为此，让我们回到高斯定理的微分表达式 (15) 。将式 (34) 代入其中后，我们有

$$-\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi(x,y,z)) = -\nabla^2\Phi(x,y,x) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z). \tag{36}$$

这里，

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{37}$$

称为拉普拉斯算符，而公式 (36) 则称为泊松方程，是求解静电学问题的基本方程。特别是当 $\rho(x,y,z) = 0$ 时，它退化为

$$\nabla^2\Phi(x,y,x) = 0. \tag{38}$$

此方程在文献中被称为拉普拉斯方程。

例 2.1: 电荷 Q 均匀分布在一个半径为 a 的球体内，试求由此产生的空间各点处的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 以及电势 $\Phi(\mathbf{r})$ 。

解: 先考虑电场强度的分布。取一个半径为 r 的同心球面。由对称性考虑，可认为球面上的电场强度具有相同的数值 $E(r)$ ，且方向沿球面的外法线。当 $r > a$ 时，球面所包围的总电荷为 Q 。此时，根据高斯定理，我们有

$$\oint\oint_{S_r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_{S_r} E(r)\, dS = E(r)\oint\oint_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{39}$$

或是

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{40}$$

也就是说，对于球外的观测者来说，空间中的电场分布似乎是由一个位于球心的电荷量为 Q 的点电荷引起的。

接下来，我们考虑 $r < a$ 的情况。类似地，我们取一个半径为 r 的同心球面。根据高斯定理，我们得到

$$\oint\oint_{S_r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_{S_r} E(r)\, dS = E(r)\oint\oint_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0}. \tag{41}$$

这里， Q_r 为球面 S_r 所包围的电荷。由于电荷 Q 是均匀分布在半径为 a 的球体中的，故我们有

$$Q_r = \int\int\int_{\Omega_r} \rho\, dV = \rho\int\int\int_{\Omega_r} dV = \rho\, V_{\Omega_r} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{a^3}. \tag{42}$$

将之代入上式后，我们得到

$$E(r) = \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}, \tag{43}$$

即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{a^3}. \tag{44}$$

综上所得，我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{a^3}, & r < a; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, & r > a. \end{cases} \tag{45}$$

显然，当 $r = a$ 时，电场强度是连续的。

为了求得静电势 $\Phi(\mathbf{r})$，我们可利用静电势的定义 $-\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的积分表达式，即

$$-\int_P^T \nabla\Phi(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_P^T d\Phi(\mathbf{r}) = -\left(\Phi(\mathbf{r}_T) - \Phi(\mathbf{r}_P)\right) = \int_P^T \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \tag{46}$$

先看 $r > a$ 的情况。将相应的电场强度的表达式代入后，我们有

$$-\left(\Phi(\mathbf{r}_T) - \Phi(\mathbf{r}_P)\right) = \int_P^T \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{r} = \int_P^T \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^3}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_P}\right). \tag{47}$$

若我们令 $r_T \to \infty$，则上式退化为

$$\left(\Phi(\infty) - \Phi(\mathbf{r}_P)\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_P}. \tag{48}$$

在电荷分布在空间一个有限区域内时，人们常将由此产生的静电势在无穷远处的值取作零，即 $\Phi(\infty) = 0$。因此，球体外任意一点的静电势可以进一步写作

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{49}$$

接下来，我们研究 $r < a$ 时的情况。同理，任取球体内两点 T 和 P，我们有

$$\begin{aligned} -\left(\Phi(\mathbf{r}_T) - \Phi(\mathbf{r}_P)\right) &= \int_P^T \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_P^T \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{a^3}\,d\mathbf{r} \\ &= \int_P^T \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}\,dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_T^2 - r_P^2}{a^3}. \end{aligned} \tag{50}$$

现在，我们令 T 点趋向于球面 S_a 上的一点 T_a。上式可被重新写作

$$-\left(\Phi(\mathbf{r}_{T_a}) - \Phi(\mathbf{r}_P)\right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{a^2 - r_P^2}{a^3} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_P^2}{a^3}. \tag{51}$$

由于静电势 $\Phi(\mathbf{r})$ 在球面 S_a 上是连续的，故

$$\Phi(\mathbf{r}_{T_a}) = \Phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}. \tag{52}$$

将之代入上式后，我们最后得到

$$\Phi(\mathbf{r}_P) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_P^2}{a^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_P^2}{a^3}. \tag{53}$$

综上所述，我们有

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{a^3}, & r < a; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, & r > a. \end{cases} \tag{54}$$

同样的结果也可以通过求解泊松方程来得到。对于 $r > a$ 的情况，泊松方程退化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi_2(\mathbf{r}) = 0. \tag{55}$$

考虑到电荷在球体 Ω_a 内的分布是均匀的，故由此引起的静电势应该具有空间各向同性。因此，我们可以引入球坐标

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \tag{56}$$

并将拉普拉斯算符改写为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{57}$$

又由于静电势 $\Phi_2(\mathbf{r})$ 仅是 r 的函数，即 $\Phi_2(\mathbf{r}) = \Phi_2(r)$，故拉普拉斯方程可进一步简化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi_2(r)}{\partial r} = 0. \tag{58}$$

将此方程积分一次后，我们得到

$$r^2\frac{\partial\Phi_2(r)}{\partial r} = C_1, \tag{59}$$

或是

$$\frac{\partial\Phi_2(r)}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}. \tag{60}$$

再积分一次后，我们有

$$\Phi_2(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \tag{61}$$

我们要求，在无穷远处，$\Phi_2(\infty) = 0$。由此我们得到 $C_2 = 0$。因此，当 $r > a$ 时，

$$\Phi_2(r) = -\frac{C_1}{r} \tag{62}$$

成立。

接下来，我们考虑 $r < a$ 的情况。此时，泊松方程可以写作

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho = -\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}a^3\epsilon_0}. \tag{63}$$

积分一次后，我们有

$$r^2\frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial r} = -\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}a^3\epsilon_0}\int r^2\,dr = -\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}a^3\epsilon_0}\frac{1}{3}r^3 + D_1, \tag{64}$$

或是

$$\frac{\partial \Phi_1(r)}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3} + \frac{D_1}{r^2}. \tag{65}$$

再次积分后，我们得到

$$\Phi_1(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r}{a^3}\,dr + \int \frac{D_1}{r^2}\,dr + D_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{2a^3} - \frac{D_1}{r} + D_2. \tag{66}$$

接下来，我们需要决定常数 C_1 ， D_1 和 D_2 。由于电荷密度 ρ 在整个球体 Ω_a 内是有限的，故我们要求静电势 $\Phi_1(r)$ 在 $r = 0$ 处也是有限的。这一要求导致 $D_1 = 0$ 。为了决定常数 C_1 和 D_2 ，我们可以利用在球体 Ω_a 的边界 (即 $r = a$) 处，静电势和电场强度应该是连续的这一条件。由此我们得到

$$\Phi_1(r = a) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{2a^3} + D_2 = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} + D_2 = \Phi_2(r = a) = -\frac{C_1}{a}, \tag{67}$$

$$\mathbf{E}_1(r = a) = -\frac{\partial \Phi_1(a)}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\mathbf{e}_r = \mathbf{E}_2(r = a) = -\frac{\partial \Phi_2(a)}{\partial r}\mathbf{e}_r = -\frac{C_1}{a^2}\mathbf{e}_r. \tag{68}$$

由第二式中，我们解得

$$C_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}. \tag{69}$$

代入第一式后，我们又得到

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}. \tag{70}$$

因此，我们最后得到在球体 Ω_a 内外静电势的分布为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Phi_1(r) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{2a^3}, & r < a; \\ \Phi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > a. \end{cases} \tag{71}$$

这一表达式与 (54) 式完全一样。若我们利用公式 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ 计算球体内外电场强度的分布，则得到与 (45) 式完全一样的结果。

\$ 2.2 电荷守恒定律和电流密度

在第一章中，我们以及提及，早在富兰克林时代，物理学家们即已知道电荷是可以从一个物体转移到另外一个物体去的，并提出了电荷守恒的概念。今天我们知道，电荷是构成物体的电子和质子的内部属性。在任何变化过程中，一个封闭系统的总电荷量总是保持严格不变的，称为电荷守恒定律。在这一节中，我们将给出这一定律的数学表达形式。

考虑空间中的一个给定区域 Ω。假设 t 时刻，此区域内的总电荷量为 $Q(t)$。我们引入电荷密度函数 $\rho(\mathbf{r},t)$，则 $Q(t)$ 可以被写作

$$Q(t) = \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t)\, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t)\, dV. \tag{72}$$

接下来，我们可以研究 $Q(t)$ 随时间的改变。根据电荷收恒定律，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta Q(t) &= Q(t+\Delta t) - Q(t) = \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t+\Delta t)\, dV - \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t)\, dV \\
&\cong \int\int\int_{\Omega} \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}\Delta t\, dV = \text{时间间隔}\Delta t\text{内流进}\Omega\text{的电荷量} \\
&- \quad \text{时间间隔}\Delta t\text{内流出}\Omega\text{的电荷量}.
\end{aligned} \tag{73}$$

若我们定义 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ 为 Ω 的边界 S 上一点 $\mathbf{r}$ 处的电流密度，即单位时间内穿过法线方向与其平行的单位面积的电荷量，则上式又可被改写为

$$\begin{aligned}
&\Delta Q(t) \cong \int\int\int_{\Omega} \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}\Delta t\, dV \\
=\ & \int\int_{S_1} j_{\text{内法线方向}}(\mathbf{r},t)\, dS\Delta t - \int\int_{S_2} j_{\text{外法线方向}}(\mathbf{r},t)\, dS\Delta t \\
=\ & -\int\int_{S_1} j_{\text{外法线方向}}(\mathbf{r},t)\, dS\Delta t - \int\int_{S_2} j_{\text{外法线方向}}(\mathbf{r},t)\, dS\Delta t \\
=\ & -\int\int_{S_1} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S}\Delta t - \int\int_{S_2} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S}\Delta t \\
=\ & \Delta t.
\end{aligned} \tag{74}$$

这里，S 为包围区域 Ω 的整个曲面。现将上式两边的 Δt 消去，并令它趋向于零，我们

得到等式

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}\, dV = -\oint\!\!\oint_{S} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\, dV. \tag{75}$$

在上式推导的最后一步，我们使用了高斯定理。由此积分形式，我们可以进一步得到电荷守恒率的微分形式

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \tag{76}$$

或是

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{77}$$

这就是所谓的连续性方程，它代表的是电荷守恒定律。特别是在稳恒的情况下，电荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ 将不依赖于时间 t 。此时，上式退化为

$$\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0, \tag{78}$$

即恒定电流是“无源的”，没有发源点，也没有终止点。换句话说，恒定电流只能在闭合回路中通过。

$ 2.3 静磁场

在第一章中，我们提到了毕奥 - 萨伐尔定律

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}. \tag{79}$$

如上所述，在稳恒电流的情况下，电流是在一个回路 L 中流动。因此，它在空间 $\mathbf{r}$ 处所引起的总磁感应强度可以写作

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L} d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{80}$$

或是

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dx'dy'dz'. \tag{81}$$

这里，Ω 为电流密度矢量 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 不为零的空间区域。公式 (81) 称为毕奥 - 萨伐尔定律的积分形式。接下来我们要推导它的微分形式。尽管前者可能更为直观一些，但后者在解静磁学问题时更为适用。

首先，我们注意到恒等式

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{82}$$

成立。因此，公式 (81) 可以被改写作

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dx'dy'dz'. \end{aligned}\tag{83}$$

利用恒等式

$$\nabla\times(\Phi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})) = (\nabla\Phi(\mathbf{r}))\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r})\,(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))\,, \tag{84}$$

我们可以将此式进一步改写为

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dx'dy'dz' \\ = \;& \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\nabla_{\mathbf{r}}\times\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\,dx'dy'dz'\end{aligned}\tag{85}$$

由于电流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 并不依赖于观察点坐标 $\mathbf{r}$，故此式右边的第二项为零。因此，我们得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz'\right) \equiv \nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{86}$$

而

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dx'dy'dz' \tag{87}$$

在文献中被称为由电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 引起的矢量势。关于矢势的其它一些性质，我们接下来还会做进一步的研究。

对 (86) 两边取散度后，我们得到

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})) \equiv 0. \tag{88}$$

也就是说，磁感应强度矢量场 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 是无源的，即没有起点，也没有终点，总是形成一个回路。

接下来，我们计算 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 的旋度。我们有

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dx'dy'dz'\right)\\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \nabla_{\mathbf{r}}\times\left(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\,dx'dy'dz'. \qquad (89)\end{aligned}$$

进一步，我们利用恒等式

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} \qquad (90)$$

改写上式。我们得到

$$\begin{aligned}&\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\\ =\ & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\,d\mathbf{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega (\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\mathbf{r}'\\ +\ & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\right)\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\mathbf{r}'\\ =\ & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\,d\mathbf{r}' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\mathbf{r}'. \qquad (91)\end{aligned}$$

我们需要论证上式最后一行中的第二项恒为零。为此，我们利用关系式

$$\nabla_{\mathbf{r}}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (92)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int\int\int_\Omega (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\mathbf{r}' = -\int\int\int_\Omega (\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'})\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dx'dy'dz'\\ =\ & -\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,j_x(x',y',z')\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\\ -\ & \int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,j_y(x',y',z')\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\\ -\ & \int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,j_z(x',y',z')\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (93)\end{aligned}$$

只需认真计算其中一项即可。例如，我们取上式右边的第一项，并对它做分步积分后得到

$$-\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\,j_x(x',y',z')\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, j_x(x', y', z') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\Bigg|_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_x(x', y', z')}{\partial x'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (94)
\end{aligned}
$$

由于在无穷远处，电流密度 j_x 为零，故上式中的第一项为零，只有第二项得以保留。同理，我们可得

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, j_y(x', y', z') \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_y(x', y', z')}{\partial y'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \qquad (95)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, j_z(x', y', z') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_z(x', y', z')}{\partial z'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \qquad (96)
\end{aligned}
$$

将之代入表达式 (93) 后，我们最后得到

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_{\Omega} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d\mathbf{r}' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_x(x', y', z')}{\partial x'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_y(x', y', z')}{\partial y'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \frac{\partial j_z(x', y', z')}{\partial z'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(x', y', z')\right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0. \qquad (97)
\end{aligned}
$$

在上式推导的最后一步，我们使用了稳恒电流所满足的连续性方程 $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ 。

由此一来，(91) 式可以简化为

$$
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) d\mathbf{r}'. \qquad (98)
$$

在此式中出现的散度因子当 $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ 时恒为零。这是由于，按照定义，我们有

$$
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \\
&= \frac{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}-3(x-x')^2[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^3} \\
&+ \frac{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}-3(y-y')^2[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^3} \\
&+ \frac{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}-3(z-z')^2[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^3} \\
&= \frac{3}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}-\frac{3[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{5/2}} \\
&= \frac{3}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}-\frac{3}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}=0. \quad (99)
\end{aligned}
$$

而当 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$ 时，此式不再成立。为了处理这一特殊情况，我们可以在取一个以 $\mathbf{r}$ 为球心，半径为 δ 的小球 Ω_δ 。因此， (98) 式又可被写作

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega-\Omega_\delta}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)d\mathbf{r}'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega_\delta}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega_\delta}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)d\mathbf{r}'. \quad (100)
\end{aligned}
$$

当 δ 充分小时，我们近似有 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cong\mathbf{j}(\mathbf{r})$ 。因此，上式又可被写作

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\cong\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega_\delta}\mathbf{j}(\mathbf{r})\left(\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)d\mathbf{r}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{j}(\mathbf{r})\int\int\int_{\Omega_\delta}\left(-\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)d\mathbf{r}'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{j}(\mathbf{r})\oint\oint_{S_\delta}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\cdot d\mathbf{S} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{j}(\mathbf{r})\oint\oint_{S_\delta}\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3}\cdot d\mathbf{S}=\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{j}(\mathbf{r})4\pi=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (101)
\end{aligned}
$$

在推导的中间步骤，我们使用了高斯定理。最后，我们令 $\delta\to 0$ ，从而得到

$$
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r})\equiv\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (102)
$$

这一方程也可以改写成一个积分形式。为此，我们任取一个曲面 S ，并将上式积分后有

$$
\int\int_S(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{S}=\int\int_S\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}=\mu_0 I. \quad (103)
$$

这里，I 为穿过曲面 S 的总电流。接下来，我们再对上式的左边使用 Stokes 定理后得到

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \tag{104}$$

这里，C 为曲面 S 的边界。此式给出了磁感应强度矢量绕一回路 C 的环流与穿过以该回路为边界的曲面 S 的总电流之间的关系，成为安培定律。

例 2.2: 在一根无穷长直导线中流动的电流 I 均匀分布在半径为 a 的导线的横截面上。求空间各点处的磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

解: 利用毕奥 - 萨伐尔定律，我们看到，空间每一点处的磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 都是应该沿着柱坐标系 (将导线的延展方向取作 z 轴) 的 $\mathbf{e}_\theta$ 方向的。又从对称性的角度考虑，磁感应强度矢量的值仅应依赖于坐标 r ，而与 θ 和 z 无关。也就是说，我们应有

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{e}_\theta. \tag{105}$$

现在，我们取一个以导线的轴心上一点为圆心，半径为 r ，且盘面的法线方向平行于 z 轴的圆盘 Ω_r ，并将其边界记作 $C = \partial\Omega_r$ 。那么根据安培定律，当 $r > a$ 时，我们有

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B(r)\mathbf{e}_\theta \cdot dl\mathbf{e}_\theta = \oint_C B(r)\, dl = \int_0^{2\pi} B(r)\, r d\theta = 2\pi r B(r) = \mu_0 I. \tag{106}$$

上式之所以成立，是由于当 $r > a$ 时，穿过盘面 Ω_r 的总电流恰为 I 。因此，我们解得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi|\mathbf{r}|}\mathbf{e}_\theta. \tag{107}$$

接下来，我们考虑 $r < a$ 的情况。注意到此时穿过盘面 Ω_r 的总电流 I_r 仅是 I 的一部分，我们有

$$\begin{aligned} &\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B(r)\mathbf{e}_\theta \cdot dl\mathbf{e}_\theta = \oint_C B(r)\, dl = \int_0^{2\pi} B(r)\, r d\theta = 2\pi r B(r) \\ = \;& \mu_0 I_r = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{108}$$

由此，我们得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I|\mathbf{r}|}{2\pi a^2}\mathbf{e}_\theta. \tag{109}$$

将此式与 (107) 式比较后我们发现，在导线的表面，即 $|\mathbf{r}| = a$ 处，磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 是连续变化的。

综合上面的推导，我们看到，当电荷分布以及电流分布不随时间变化时，电磁场在空间的分布满足微分关系式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}), \qquad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{110}$$

同时，我们还引入了标量势 $\Phi(\mathbf{r})$ 和矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的概念。它们同电磁场强的关系为

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{111}$$

当空间中静电荷密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ 和电流密度分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$) 已知时，标量势 $\Phi(\mathbf{r})$ 和矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可以被写作

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega \frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz', \; \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{112}$$

然而，必须强调一点的是，与电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 不同的是，标量势 $\Phi(\mathbf{r})$ 和矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 实验上是不可直接测量的。数学上，这表现为无论是标量势还是矢量势都不是唯一决定的。例如，我们可以在标势上加上一个常数 C ，即令

$$\Phi'(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + C, \tag{113}$$

而

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi'(\mathbf{r}) \tag{114}$$

仍然成立。更有甚者，若对矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 加上一个形为 $\nabla\Lambda(\mathbf{r})$ 的量，即令

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}), \tag{115}$$

这里 $\Lambda(\mathbf{r})$ 为任意一个可导函数，那么新的矢量势 $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ 给出的磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 并无改变，即

$$\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \times (\nabla\Lambda(\mathbf{r})) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{116}$$

在文献中，公式 (113) 和 (115) 所给出的变换称为规范变换 (gauge transformation) ，而 $\Lambda(\mathbf{r})$ 称为规范函数。关于规范变换和规范函数，在以后的章节中我们还会深入讨论。

例 2.3: 考虑一个均匀磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ 。试证如下两个矢量场 $\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = -By\mathbf{i}$ 都是其矢量势。

证：利用旋度的行列式表达

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z) & A_y(x,y,z) & A_z(x,y,z) \end{vmatrix} \tag{117}$$

我们可得

$$\nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{2}By & \frac{1}{2}Bx & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Bx\right)\mathbf{k} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}By\right)\mathbf{k} = B\mathbf{k} = \mathbf{B}, \tag{118}$$

以及

$$\nabla \times \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -By & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial y}(-By)\mathbf{k} = B\mathbf{k} = \mathbf{B}. \tag{119}$$

到目前为止，我们仅仅讨论了静电场和静磁场的情况。我们看到，在这种情况下，$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 是彼此独立的。为了将二者联系起来，我们需要考虑随时间改变的电磁场的情况。为此，我们可以借助法拉第的电磁感应定律

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\widetilde{\Phi}_B(t)}{dt}. \tag{120}$$

对于空间中一个给定的回路 C ，上式两边的电动势 $\mathcal{E}(t)$ 和磁通量 $\widetilde{\Phi}_B(t)$ 可以写作

$$\mathcal{E}(t) = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{l}, \tag{121}$$

以及

$$\widetilde{\Phi}_B(t) = \int\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{S}. \tag{122}$$

这里， S 为由回路 C 界定的一个曲面。将之代入法拉第定律后，我们有

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \tag{123}$$

再对此方程的左边使用 Stokes 定理后，我们进一步得到

$$\int\int_S (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \tag{124}$$

或是

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{125}$$

此即法拉第定律的微分形式。与静电场的情况不同，现在电场强度的旋度不再为零。

综上所述，到 1862 年时，已知的电磁规律可以归纳成四个方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \end{aligned} \tag{126}$$

但麦克斯韦注意到，它们彼此之间并不自洽。例如，若我们将第四式的两边取散度后有

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t). \tag{127}$$

另一方面，根据连续性方程，我们又有

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{128}$$

一般来说并不为零。为了消除这一不自洽之处，麦克斯韦又注意到，若将第一式的两边对时间求导的话，则

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{129}$$

成立。因此他提议将第四式修改为

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{130}$$

若再对此式两边求散度的话，我们有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)) &= \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) \\ = \quad \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) &= \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) = 0, \end{aligned} \tag{131}$$

从而消除了上述的不自洽之处。

由此，在 1862 年，麦克斯韦提出了一他的名字命名的方程组

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), \qquad & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\tfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0, & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0\epsilon_0 \tfrac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{132}$$

从而完成了经典电动力学的最后建立。

接下来，让我们看一下麦克斯韦方程组的一些直接推论。首先是真空中电磁波的传播。将方程组 (132) 中的第二式再取一次旋度后，我们有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)). \tag{133}$$

现将方程组 (132) 中的第四式代入上式的右边后有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}. \tag{134}$$

这里，我们用到了在真空中 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$ 这一事实。再利用恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \tag{135}$$

化简上式的左边，我们得到

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}. \tag{136}$$

将方程组 (132) 中的第一式代入上式的右边后有

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t) \right) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}. \tag{137}$$

但由于在真空中 $\rho(\mathbf{r},t) = 0$ 成立，故我们最后得到

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}, \tag{138}$$

或是

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{139}$$

若令

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \tag{140}$$

则此式又可被写作

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{141}$$

相似地，我们也可推出磁感应强度分布 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 在真空中所满足的传播方程，即

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{142}$$

在文献中，此种类型的方程被称为达朗贝尔方程 (d'Alembert equation) 。在力学中，它被用来描述弹性波在连续媒介质中的传播。为此，让我们回顾一下声波在钢丝线上的传播方程的推导。如图所示，我们以 $\xi(x,\,t)$ 标记钢丝上 x 处的横向位移。任取一小段位于 $(x,\,x+\Delta x)$ 处的钢丝，则其运动满足牛顿方程

$$(\rho\Delta x)\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial t^2} = T\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta. \tag{143}$$

又由于在 x- 轴方向上，这一段弦没有移动，故我们有

$$T\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta \approx 0. \tag{144}$$

当钢丝做微小振动时，角度 θ 很小，可以近似地取作 $\theta \approx 0$ 。因此公式 (143) 可以近似地写作

$$\begin{aligned}(\rho\Delta x)\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial t^2} &\approx \left(T\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)}{\cos(\theta+\Delta\theta)} - T\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta \\ &\approx T\left(\tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta\right) = T\left(\left.\frac{\partial\xi(x,\,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial\xi(x,\,t)}{\partial x}\right|_{x}\right) \\ &\approx T\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial x^2}\Delta x. \end{aligned} \tag{145}$$

将上式两边同时除以 Δx 后，再令它趋向于零，我们得到

$$\rho\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial x^2}, \tag{146}$$

或是

$$\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial t^2} - u^2\frac{\partial^2\xi(x,\,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{147}$$

不难验证，上式中出现的量

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{148}$$

具有速率的量纲，被解释作声波在钢丝线上的传播速率。事实上，若将已知的平面行波的表达式

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{149}$$

代入上式后，我们得到

$$u = \frac{\omega}{k}. \tag{150}$$

而这恰是平面行波相速率的表达式。

因此，麦克斯韦得出结论，真空中的岁时间改变的电磁场是以波的形式传播的，而传播的速率为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458\text{米/秒}, \tag{151}$$

恰与光速相同。又由于这个原因，麦克斯韦进一步提出，光就是电磁波。麦克斯韦的这些结论由德国物理学家 Heinrich Hertz 于 1886 年用实验加以验证。

接下来，我们看麦克斯韦方程组的第二个推论。将方程组 (132) 中的第四式与电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 点乘后，我们得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = \mu_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{152}$$

再将方程组中的第二式与磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 点乘后，我们又得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = -\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{153}$$

两式相减后给出

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) - \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) \\ = \;& \mu_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ = \;& \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E^2(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial B^2(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{154}$$

再利用矢量场满足的一个微分恒等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}), \tag{155}$$

我们又可将上式进一步改写为

$$\nabla(\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)))=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{2}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial E^2(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial B^2(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{156}$$

或是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0E^2(\mathbf{r},t)+\frac{1}{2\mu_0}B^2(\mathbf{r},t)\right)+\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))\right)+\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0. \tag{157}$$

若令

$$\mathcal{U}(\mathbf{r},t)\equiv\tfrac{1}{2}\epsilon_0E^2(\mathbf{r},t)+\tfrac{1}{2\mu_0}B^2(\mathbf{r},t)\quad\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\equiv\tfrac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)), \tag{158}$$

此式又可被写作

$$\frac{\partial\mathcal{U}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}(\mathbf{r},t)+\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0. \tag{159}$$

此式于 1884 年由 Poynting 得到，称为玻印亭定理，而 $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ 称为玻印亭矢量。

为了理解玻印亭定理的物理意义，我们注意到上式第一项中的量 $\frac{1}{2}\epsilon_0E^2$ 与 $\frac{1}{2\mu_0}B^2$ 都具有能量密度的量纲。要更清楚地看到这一点，我们可以通过研究电磁场对带电物体的作功来重新获得这些量。以 $\frac{1}{2}\epsilon_0E^2$ 为例。我们考虑两个点电荷 q_1 和 q_2 。假设开始时 q_1 被固定于空间 $\mathbf{r}_1$ 处，而 q_2 处于空间的无穷远处。现在，将 q_2 非常缓慢地从无穷远处移动到空间 $\mathbf{r}_2$ 处。在此过程中，外力所做之功当为

$$W_2=\int_\infty^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}_{外}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_\infty^{\mathbf{r}_2}(-q_2\mathbf{E}_1(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r}. \tag{160}$$

这里，

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r})=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} \tag{161}$$

为电荷 q_1 产生的在空间 $\mathbf{r}$ 处的电场强度。利用静电势的定义，我们可以将 W_2 改写作

$$W_2=-q_2\int_\infty^{\mathbf{r}_2}\mathbf{E}_1(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=q_2\Phi_1(\mathbf{r}_2). \tag{162}$$

又考虑到电荷 q_1 与 q_2 的地位是完全对等的，故我们当有

$$W_2=q_2\Phi_1(\mathbf{r})=q_1\Phi_2(\mathbf{r}), \tag{163}$$

或是

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(q_2\Phi_1(\mathbf{r}) + q_1\Phi_2(\mathbf{r})\right). \tag{164}$$

仿照上述论证，若将 q_1 和 q_2 分别固定在空间 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 处后，再将另外一个电荷为 q_3 的粒子自无穷远处缓慢移至 $\mathbf{r}_3$ 处，我们可将在此过程中外力做功得到的附加能量写作

$$\Delta W = q_3\left(\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)\right). \tag{165}$$

另一方面，考虑到电荷彼此之间的对等关系，这一能量亦等于先将电荷 q_3 固定在空间 $\mathbf{r}_3$ 处，然后分别 (不是先后) 将电荷 q_1 和 q_2 自无穷远处移至 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 处外力所做之功的求和，即

$$\Delta W = q_3\left(\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)\right) = q_1\Phi_3(\mathbf{r}_1) + q_2\Phi_3(\mathbf{r}_2). \tag{166}$$

将之对称化后，我们得到

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(q_1\Phi_3(\mathbf{r}_1) + q_2\Phi_3(\mathbf{r}_2) + q_3\Phi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\Phi_2(\mathbf{r}_3)\right). \tag{167}$$

现将 W_2 与 ΔW 相加后，我们得到三个电荷 q_1, q_2 和 q_3 之间的总能量为

$$\begin{aligned} & W_3 = W + \Delta W \\ = \;& \frac{1}{2}\left(q_1\Phi_2(\mathbf{r}_1) + q_2\Phi_1(\mathbf{r}_2) + q_1\Phi_3(\mathbf{r}_1) + q_2\Phi_3(\mathbf{r}_2) + q_3\Phi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\Phi_2(\mathbf{r}_3)\right) \\ = \;& \frac{1}{2}\left(q_1[\Phi_2(\mathbf{r}_1) + \Phi_3(\mathbf{r}_1)] + q_2[\Phi_1(\mathbf{r}_2) + \Phi_3(\mathbf{r}_2)] + q_3[\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)]\right) \\ = \;& \frac{1}{2}\left(q_1\Phi_{2,3}(\mathbf{r}_1) + q_2\Phi_{1,3}(\mathbf{r}_2) + q_3\Phi_{1,2}(\mathbf{r}_3)\right). \end{aligned} \tag{168}$$

这里，

$$\Phi_{i,j}(\mathbf{r}) = \Phi_i(\mathbf{r}) + \Phi_j(\mathbf{r}) \tag{169}$$

为电荷 q_i 和 q_j 在空间 $\mathbf{r}$ 处产生的静电势。仿此，当电荷是在空间连续分布时，我们可以立刻写出其总静电能为

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, dxdydz. \tag{170}$$

这一表达式有两个直接的推论。先看其一。将泊松方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \tag{171}$$

代入其中后，我们有

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, dxdydz = -\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} [\epsilon_0\nabla^2\Phi(\mathbf{r})]\Phi(\mathbf{r})\, dxdydz. \tag{172}$$

再进行分步积分，并使用关系式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \tag{173}$$

我们进一步得到

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}\oint\oint_{S_\infty} [\epsilon_0\nabla\Phi(\mathbf{r})]\Phi(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \epsilon_0[\nabla\Phi(\mathbf{r})\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r})]\, dxdydz \\ &= \int\int\int_{R^3} \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(\mathbf{r})\right)\, dxdydz. \end{aligned} \tag{174}$$

这里， S_∞ 为无穷远处的球面。当电荷分布在空间一个有限区域时，其上的静电势和电场强度皆为零，故上式中的面积分项取值为零。同时，从上式的最后一行可以看出，物理量 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 的确可以解释作电场的能量密度。

其次，若我们将静电势的表达式

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega \frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dx'dy'dz' \tag{175}$$

代入式 (170) 后，则电荷体系的能量可以被改写作

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\, dxdydz \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int\int\int_{R^3} dxdydz \int\int\int_{R^3} \frac{\rho(x,y,z)\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{176}$$

此式在原子 - 分子物理学的研究中经常被用到。

现在，让我们回到方程 (159) 。若暂时略去 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ 项，则该方程退化为一个连续性方程。它意味着电磁场的能量是守恒的，而矢量 $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 可以被解释作能量流密度，称为玻印亭矢量。很自然地，当 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ 时，人们将其解释作电磁场对于运动电荷的作功。上述解释可以通过将方程 (159) 的两边对于空间任一区域 Ω 的积分

$$\begin{aligned} &\int\int\int_\Omega \frac{\partial\mathcal{U}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\, dxdydz + \int\int\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\, dxdydz \\ +\ &\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\, dxdydz = 0, \end{aligned} \tag{177}$$

而看得更清楚。对于上式第二项使用高斯定理后，我们进一步得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\int\int\int_{\Omega}\mathcal{U}(\mathbf{r},t)\,dxdydz+\oint\oint_{S_\Omega}\mathbf{S}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} \\ + & \int\int\int_{\Omega}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\,dxdydz=0, \end{aligned} \tag{178}$$

这里， S_Ω 为包围区域 Ω 的闭曲面。此式告诉我们，区域 Ω 内电磁场对于运动电荷所做之功以及电磁场能量随时间的改变是由从边界面 S_Ω 流入的能量流予以补偿的，即总能量是守恒的。

既然谈到能量守恒定律，人们自然要问电磁场是否具有动量，且这一动量是否守恒？为了回答这一问题，让我们重新回到麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=\tfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), & \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=-\tfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=0, & \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\mu_0\epsilon_0\tfrac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{179}$$

将此方程组中的第二式与第四式分别与 $\frac{1}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 做直乘后相加，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))+\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) \\ = & \frac{1}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right)+\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times\left(\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) \\ = & -\mu_0\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mu_0\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\mu_0\epsilon_0\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ = & -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)-\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t), \end{aligned} \tag{180}$$

或是

$$\begin{aligned} & \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))+\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) \\ + & \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)+\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0. \end{aligned} \tag{181}$$

再利用麦克斯韦方程组的第一式 $\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t)$ 和第三式 $\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$ ，我们可以将上式的左边改写成

$$\begin{aligned} & \mu_0\epsilon_0\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))-\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\left(\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t)\right)\right] \\ + & \left[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\times(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))-\mathbf{B}(\mathbf{r},t)(\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t))\right] \\ + & \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right)+\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0. \end{aligned} \tag{182}$$

从上式两边除掉 μ_0 并加以整理后，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}[\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)] + [\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)] \\ + & \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)) - \mathbf{B}(\mathbf{r},t)(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t))] \\ + & \epsilon_0[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t)) - \mathbf{E}(\mathbf{r},t)(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t))] = 0. \end{aligned} \tag{183}$$

注意到，上式中的第二项 $\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 可以解释作一个运动的带电体在电磁场中所受到的力密度，故此式一定与冲量定理等价。特别是力学量 $\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 尽管看起来像是玻印亭矢量，但它实际上是电磁场的动量密度矢量。关于这一点我们将在第九章的学习中做更为详细的讨论。

在讨论静电场和静磁场时，我们引入了标量势和矢量势的概念，以及规范变换的定义。现在的问题是，在电场强度和磁感应强度可以随时间改变的情况下，我们应该对这些概念和定义做什么样的修改？先考虑磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 。由于 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$ 仍然成立，故我们可以直接引入一个含时的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ，使得

$$\nabla \times \mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{B}(x,y,z,t). \tag{184}$$

然而，对于标量势的重新引入就需要多说几句了。在含时的情况下，电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 的旋度不再为零，而是满足关系

$$\nabla \times \mathbf{E}(x,y,z,t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A}(x,y,z,t) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}. \tag{185}$$

移项后，我们有

$$\nabla \times \left(\mathbf{E}(x,y,z,t) + \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} \right) = 0. \tag{186}$$

因此，重新引入的标量势 $\Phi(\mathbf{r},t)$ 应该使得下式

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) + \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} = -\nabla \Phi(x,y,z,t), \tag{187}$$

即

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = -\nabla \Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{188}$$

成立。如同静电场和静磁场的情况，此时的标量是里和矢量势也并不是唯一确定的。事实上，我们可以引入任意一个可导函数 $\Lambda(x,y,z,t)$ ，并令

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t) &= \mathbf{A}(x,y,z,t) + \nabla\Lambda(x,y,z,t),\\ \widetilde{\Phi}(x,y,z,t) &= \Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial\Lambda(x,y,z,t)}{\partial t},\end{aligned} \tag{189}$$

则不难验证，由矢量势 $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t)$ 和标量势 $\widetilde{\Phi}(x,y,z,t)$ 所给出的电场强度和磁感应强度与由矢量势 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 和标量势 $\Phi(x,y,z,t)$ 给出的完全一样，即我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,t) = \nabla\times\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t) = \nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t) + \nabla\times(\nabla\Lambda(x,y,z,t))\\ =\;& \nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathbf{B}(x,y,z,t),\end{aligned} \tag{190}$$

以及

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,t) = -\nabla\widetilde{\Phi}(x,y,z,t) - \frac{\partial\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t)}{\partial t}\\ =\;& -\nabla\Phi(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda(x,y,z,t)) - \frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda(x,y,z,t))\\ =\;& -\nabla\Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} = \mathbf{E}(x,y,z,t).\end{aligned} \tag{191}$$

这样一来，我们就有了一定的自由度来选取更为适宜计算的标量势和矢量势，而不必担心会影响最后的计算结果了。

最常用的规范选择有两种。一种是所谓 Coulomb 规范，而另外一种是所谓 Lorentz 规范。先看第一种规范。若我们选取规范函数 $\Lambda(x,y,z,t)$ ，使得

$$\nabla^2\Lambda(x,y,z,t) = -\nabla\mathbf{A}(x,y,z,t) \tag{192}$$

成立，那么我们有

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t) = \nabla\cdot(\mathbf{A}(x,y,z,t) + \nabla\Lambda(x,y,z,t))\\ =\;& \nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t) + \nabla^2\Lambda(x,y,z,t) = 0.\end{aligned} \tag{193}$$

此时，新的标量势 $\widetilde{\Phi}(x,y,z,t)$ 满足方程

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t) = -\nabla^2\widetilde{\Phi}(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t)\\ =\;& -\nabla^2\widetilde{\Phi}(x,y,z,t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z,t),\end{aligned} \tag{194}$$

或是

$$\nabla^2\widetilde{\Phi}(x,y,z,t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z,t), \tag{195}$$

即静电场所满足的泊松方程。因此，条件 (193) 在文献中常被称为库仑规范 (也被称为横场条件。在第八章中，我们再解释此一称谓的起源) 。

在第二种情况，我们选取方程

$$\nabla^2\Lambda(x,y,z,t) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda(x,y,z,t) = -\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{196}$$

的解作为规范函数。因此，我们有

$$\begin{aligned}
& \nabla\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\widetilde{\Phi}(x,y,z,t)}{\partial t} \\
= \;& \nabla\cdot(\mathbf{A}(x,y,z,t) + \nabla\Lambda(x,y,z,t)) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial\Lambda(x,y,z,t)}{\partial t}\right) \\
= \;& \left(\nabla\cdot(\mathbf{A}(x,y,z,t) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}\right) + \left(\nabla^2\Lambda(x,y,z,t) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\Lambda(x,y,z,t)}{\partial t^2}\right) \\
= \;& 0.
\end{aligned} \tag{197}$$

此时的 $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,t)$ 和 $\widetilde{\Phi}(x,y,z,t)$ 被分别称为电磁场洛伦兹规范下的矢量势和标量势。在推导描述电磁场产生和辐射过程的推迟势时，这一规范非常有用。在第九章和第十章中，我们将对此加以更为详细的解释。

第三章、狭义相对论

$ 3.1 狭义相对论的基本假设和运动学理论

狭义相对论是在描述电磁学的 Maxwell 方程组确立之后提出的。其原因在于，通过联立求解 Maxwell 方程组，人们可以得到如下的描写在真空中传播的电磁波动方程

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

以及

$$\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

这里， $\mathbf{E}(x,\,y,\,z,\,t)$ 和 $\mathbf{B}(x,\,y,\,z,\,t)$ 为电磁波的电场和磁场强度。常数

$$c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=299792458\text{米/秒} \tag{3}$$

具有速度的量纲，被定义作电磁波在真空中的传播速度。注意到它等于当时实验上已知的光在真空中的传播速度， Maxwell 提出了光是电磁波的命题。

由于在推导 Maxwell 方程 (1) 和 (2) 时，并没有特别指定是在哪一个参照系中进行计算的，一个直接的推论是，光速是一个不依赖于参照系的普适常数。换句话说，在两个彼此做匀速直线运动的惯性参照系中，电磁波是以相同的速度传播的。这是与 Galieo 变换公式的结论相矛盾的。有意思的是，光速是普适的这一结论后来被实验物理学家通过实验加以了证实。这就使得人们要么放弃相对性原理，要么放弃 Galieo 变换公式。爱因斯坦选择了后者。

在 1905 年 9 月发表的一篇文章中，爱因斯坦首先提出了狭义相对论的两个基本假设。

(1) 相对性原理：物理定律在所有的惯性参照系都是等价的。因此，有关的运动方程应该具有相同的形式。

(2) 光速不变原理：在所有的参照系中，光在真空中传播的速率皆为 c 。而任何粒子在惯性参照系中的运动速率皆小于或等于光速。

现在，让我们看一看从这两个假设出发，我们可以导出什么结论。

我们考虑两个惯性参照系 S 和 S′。假设 S′ 系相对于 S 系做匀速直线运动，速度为 $\mathbf{V}$。设在 $t = t' = 0$ 时刻，两个参照系的原点 O 和 O' 重合，并从该处发射一个光脉冲信号。因此，在时刻 t 时，这个脉冲在 S 系中走过的距离为

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct. \tag{4}$$

同理，它在 S′ 系中走过的距离为

$$L' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = c't'. \tag{5}$$

根据光速不变假设，我们有 $c = c'$。因此，联合上面两式，我们得到

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \tag{6}$$

对于这个恒等式，我们可以给出如下的几何解释。引入一个假想的四维空间。令沿着它的四个互相垂直方向的单位向量为 $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{e}_t$。并且，我们将这个四维空间中任何一点的位置向量写作

$$\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z + (ict)\mathbf{e}_t. \tag{7}$$

注意，这里第四个分量 (时间分量) 为一个虚数。这是与通常的三维向量不同的。仿照通常三维空间中的解析几何学，我们定义四维向量 $\mathbf{R}$ 的长度的平方为为

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{8}$$

这一长度被称为四维长度。我们现在可以说，光脉冲信号在物理空间中的运动可以用四维空间中的一条直线来代表。这条直线上的每一点到原点的四维距离都是零。

相应地，我们可以将两个不同参照系 S 和 S′ 中光脉冲的坐标值 $(x,\, y,\, z,\, ict)$ 和 $(x',\, y',\, z',\, ict')$ 解释作四维空间中同一点 $\mathbf{R}$ 相对两组不同坐标轴 $(\mathbf{e}_x,\, \mathbf{e}_y,\, \mathbf{e}_z,\, \mathbf{e}_t)$ 以及 $(\mathbf{e}'_x,\, \mathbf{e}'_y,\, \mathbf{e}'_z,\, \mathbf{e}'_t)$ 的分量。这是由于方程 (6) 告诉我们，在四维空间中，这两组坐标给出的光脉冲点到原点的距离是相同的。而从解析几何中我们得知，它们所对应的坐标系是可以通过空间的旋转联系起来的。这就使得我们有可能找到 $(x,\, y,\, z,\, ict)$ 与 $(x',\, y',\, z',\, ict')$ 的关系。

为了简单起见，我们假设 S 系相对于 S′ 系的运动速度是沿 $\mathbf{e}_x$ 方向的。此时，我们可以取 $y = y'$ 和 $z = z'$ 。也就是说，我们假设，四维空间的旋转是发生在 $x - ict$ 平面内的。因此，四维空间中任一点 P 的坐标变换可以写作

$$x' = x\cos\theta + (ict)\sin\theta, \quad ict' = -x\sin\theta + (ict)\cos\theta, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{9}$$

这里，θ 是两套坐标系 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_t)$ 和 $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z, \mathbf{e}'_t)$ 中向量 $\mathbf{e}_x$ 及 $\mathbf{e}'_x$ 之间的夹角。

不难验证，在这样的坐标变换下， P 点的四维长度不变。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
& x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \\
= \;& x'^2 + y'^2 + z'^2 + (ict')^2 \\
= \;& [x\cos\theta + (ict)\sin\theta]^2 + y^2 + z^2 + [-x\sin\theta + (ict)\cos\theta]^2 \\
= \;& x^2\cos^2\theta + 2x(ict)\cos\theta\sin\theta + (ict)^2\sin^2\theta + y^2 + z^2 \\
+ \;& x^2\sin^2\theta - 2x(ict)\cos\theta\sin\theta + (ict)^2\cos^2\theta \\
= \;& x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

因此，光脉冲的运动方程 (6) 在此变换下自动被满足。

现在，我们来看如何通过已知条件定出 θ 的值。为此，我们考虑 S′ 参照系原点 O' 在 S 系中的运动。首先， O' 点在 S′ 系的坐标为 $x' = y' = z' = 0$ 。而在 S 参考系中，在时刻 t 时，其空间坐标为

$$x = Vt,\ y = 0,\ z = 0. \tag{11}$$

因此，对于 O' 点而言，我们有如下的坐标变换关系

$$\begin{aligned}
x' = 0 &= x\cos\theta + (ict)\sin\theta = Vt\cos\theta + (ict)\sin\theta, \\
ict' &= -x\sin\theta + (ict)\cos\theta = -Vt\sin\theta + (ict)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{12}$$

从第一个方程，我们解得

$$-\frac{x}{ict} = -\frac{V}{ic} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta. \tag{13}$$

进而，我们有

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{14}$$

以及

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -\frac{V}{ic}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{15}$$

将这些函数代入方程 (9) 中，我们得到

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + (ict)\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{ict\left(\frac{-V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ ict' &= -x\sin\theta + (ict)\cos\theta = \frac{-x\left(-\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + ict\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{16}$$

将第二个方程的两边同时除以 ic 后，我们得到

$$t' = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{17}$$

这些变换公式和 $y' = y$, $z' = z$ 一起，被称为 Lorentz 变换公式。从这些公式中，我们可以看到，若要求光速 c 在各个惯性参照系中不变的话，则时间在不同的参照系系中是不同的。这一点是与 Galieo 变换非常不一样的。

上面，我们利用光速在各个参照系中不变的假设，导出了 Lorentz 变换公式。对于任何一个四维空间中的点的坐标 (x, y, z, ict) 而言，除了满足光信号的运动方程

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{18}$$

之外，还可能满足

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0, \tag{19}$$

或是

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 < 0. \tag{20}$$

前者表示，质点在时刻 $t = 0$ 时从原点出发，在 t 时刻到达坐标为 (x, y, z) 的三维空间位置。这要求它的速率为

$$v = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{t^2}} > c. \tag{21}$$

但是按照 Einstein 狭义相对论的第一条假设，这在物理上是不可能的。这样的点被称为类空点。相反，第二种可能性描写在时刻 $t = 0$ 时从原点出发，以小于光速的速率 v 在

t 时刻到达坐标为 (x, y, z) 的三维空间位置的粒子的运动。这在物理上是可以实现的。这类点被称为类时点。而类空点集合与类时点集合是由满足方程 (18) 的全体点的集合 (代表光信号的全部可能轨迹，被称为光锥面) 隔开。

在讨论 Lorentz 变换所导致的一些结果之前，我们要强调一下，四维时空中任何一点的位置向量 $\mathbf{R}$ 的模

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{22}$$

在 Lorentz 变换下都是不变的。今后我们会看到，在适当引入的动量 - 能量向量以及所谓四维力向量的模也具有这样的性质。它们被统称为四维向量 (或四维矢量) 。今后，我们会看到，四维矢量的概念是非常有用的。

现在，让我们回过头来看一下 Lorentz 变换带来的结论。首先，我们从公式

$$t' = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{23}$$

出发。将此式的两边对于 t 求导后，我们有

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \dot{x}\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v_x V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24}$$

由此，我们可以导出同一个运动的质点在 S 系和 S′ 系中速度之间的变换关系。例如，我们有

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \frac{v_x - V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \tag{25}$$

同理，我们可得

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \tag{26}$$

从表面上看，这些变换公式与我们已经熟知的 Galieo 变换公式

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \tag{27}$$

非常不同。但是，在 $\frac{V}{c} \to 0$ 的极限下，可以很容易地看到， Lorentz 速度变换公式退化到 Galieo 速度变换公式。

作为一个特例，让我们考虑光在两个参照系中的运动。设在 S 系中，光沿 x 轴运动。因此，我们有 $v_x = c$, $v_y = 0$ 及 $v_z = 0$ 。将之代入 Lorentz 速度变换公式后，我们立刻可得

$$v'_y = v'_z = 0 \tag{28}$$

以及

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{cV}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{c - V}{\frac{(c-V)}{c}} = c. \tag{29}$$

也就是说，光在 S′ 系中的速度也是 c 。这就使得 Einstein 的光速不变假设成为自洽的。

Lorentz 变换的另外一个直接推论是所谓时间延缓效应。假设我们有一个在 S′ 系中静止的时钟同该系一起相对于 S 系运动，并且其在 S′ 参照系中的坐标为 $x' = x'_0$ 。则时钟在两个参照系的读数满足变换关系

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{30}$$

特别是相对于 S′ 系的时间间隔 $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ 对应于 S 系中的时间间隔

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{31}$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > 1, \tag{32}$$

故我们有

$$\Delta t > \Delta t'. \tag{33}$$

也就是说，在时钟静止的参考系中，其读数相对于其它惯性系而言总是最小的。这一效应称为时间延缓。它是可以通过实验来检验的。

例 3.1: 1936 年， Anderson 等人在宇宙线中发现 μ 介子。它带一个单位的负电荷 $-e$ ，但其质量为电子的 207 倍。此外，它是一个不稳定的粒子，会按下面的形式

$$\mu \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{34}$$

很快衰变。1950 年代中期，人们可以利用核反应堆在实验室中人工产生 μ 介子。此时，人们才注意到，在接近静止的情况下，其寿命大约为 2.15×10^{-6} 秒。这样，就产生了

一个有趣的问题。我们知道， Anderson 等人所观察到的 μ 介子是由宇宙射线中的高能质子与大气分子碰撞，在离开地面大约 6000 米处产生的，其速度大约为 0.995 倍的光速。而 Anderson 等人是在海拔 2000 米的山顶观测到 μ 介子的。因此， μ 介子存活了

$$\bar{\tau} \approx \frac{(6000-2000)\text{米}}{0.995\times 3\times 10^8\text{米/秒}} \approx 1.33\times 10^{-5}\text{秒}. \tag{35}$$

这导致了一个悖论。然而，从狭义相对论关于时间延缓的理论看，这并不是不可以理解的。我们知道，对于以山顶为原点的实验室参照系而言， μ 介子的寿命应当为

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.15\times 10^{-6}\text{秒}}{\sqrt{1-(0.995)^2}} \approx 2.15\times 10^{-5}\text{秒}. \tag{36}$$

它大于 $\bar{\tau}$ 。因此，人们可以在实验室参照系中观测到这一粒子。

作为 Lorentz 变换的推论，人们还可以推导出长度收缩以及角度旋转的现象。由于这些现象在实验上并不可测，我们就不再这里加以介绍了。感兴趣的同学可以阅读教科书 321 页上的内容。

例 3.2: 在如图所示的三个惯性系中， S' 沿 S 系的 x 轴以速率 V 做匀速直线运动。 S'' 系沿 S' 系的 y 轴以同样的速率 V 做匀速直线运动。当 $t=t'=t''=0$ 时，三个参照系的原点重合。设在 S'' 系的 $x''-y''$ 平面中，有一个以 O'' 点为圆心， R 为半径的静止圆环。问在 S 系的观测者看来，圆环的边界是一条什么曲线。

解: 在 S'' 系中，静止圆环的方程为

$$x''^2+y''^2=R^2. \tag{37}$$

一方面， S' 和 S'' 中，坐标之间的关系为

$$x''=x', \quad y''=\frac{y'-Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38}$$

另一方面， S 和 S' 中，坐标之间的关系为

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad t'=\frac{t-x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y'=y. \tag{39}$$

由此，我们可得

$$x''=x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y''=\frac{y'-Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{Vt-\frac{V^2}{c^2}x}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{40}$$

代入方程 (37) 后，我们得到

$$\frac{(x-Vt)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}+\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(y-\frac{Vt-\frac{V^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)^2=R^2. \tag{41}$$

当 $t=0$ 时，这一方程退化为

$$\left(1+\frac{\frac{V^4}{c^4}}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)x^2+\frac{2\frac{V^4}{c^4}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}xy+y^2-\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)R^2=0. \tag{42}$$

根据解析几何中二次曲线的理论，我们知道，这一方程代表的是一个椭圆。

例 3.3: 试用相对论变换公式，推导电磁波多普勒效应的表达式。

解: 设观测者在 S 系的原点 O 处，而一个发光物体一速度 $\mathbf{v}$ 相对于 S 系运动。在一个表观周期 (即信号源在 S 系的周期) $\widetilde{T}$ 内，物体与 O 点之间的距离增加了

$$\Delta r=v_r\widetilde{T}. \tag{43}$$

因此，在观测者看来，光波的波长应该为

$$\lambda'=\lambda+v_r\widetilde{T}. \tag{44}$$

因此，如同我们在七章中得到的结论一样，观测者测得的表观信号频率为

$$\nu'=\frac{c}{\lambda'}=\frac{c}{\lambda+v_r\widetilde{T}}=\frac{c/\lambda}{1+v_r\widetilde{T}/\lambda}=\frac{\widetilde{\nu}}{1+v_r\widetilde{T}/\lambda}, \tag{45}$$

或是

$$T'=\left(1+\frac{v_r\widetilde{T}}{\lambda}\right)\widetilde{T}=\left(1+\frac{v_r}{\lambda/\widetilde{T}}\right)\widetilde{T}=\left(1+\frac{v_r}{c}\right)\widetilde{T}. \tag{46}$$

另一方面，根据相对论时间延缓的理论，我们知道表观周期 $\widetilde{T}$ 与信号源的固有周期 T_0 之间的关系为

$$\widetilde{T}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{47}$$

将它代入 T' 的表达式后，我们有

$$T'=\left(1+\frac{v_r}{c}\right)\widetilde{T}=\frac{1+\frac{v_r}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}T_0. \tag{48}$$

又由于

$$T' = \frac{1}{\nu'}, \quad T_0 = \frac{1}{\nu_0}, \tag{49}$$

我们可以将上式改写为

$$\frac{\nu_0}{\nu'} = \frac{1+\frac{v_r}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{v\cos\theta}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{50}$$

当 $v_\perp = 0$ 时，我们有 $v = v_r$ 。此时，上式退化为

$$\nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}. \tag{51}$$

而当 $v_r = 0$ 时， $v = v_\perp$ 。此时，我们有

$$\nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v_r}{c}} = \nu_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{52}$$

这就是所谓电磁波的横向多普勒效应。

例 3.4: 光在高速运动镜面上的反射：假设有一面镜子，相对于实验室系 S 做高速运动。它的反射面与 y'- 轴平行。假设一束光线入射到此镜面上。在随着镜子一起运动的 S' 系中，光线的入射角 $\theta'_{入}$ 与其出射角 $\theta'_{出}$ 相等。试求在实验室系 S 中，光线入射角度 $\theta_{入}$ 与其出射角 $\theta_{出}$ 的关系。

解: 在 S' 系中，我们有

$$c'_{入x} = c\cos\theta'_{入}, \quad c'_{入y} = c\sin\theta'_{入}, \tag{53}$$

以及

$$c'_{出x} = -c\cos\theta'_{出}, \quad c'_{出y} = c\sin\theta'_{出}. \tag{54}$$

而在 S 系中，我们有

$$c_{入x} = c\cos\theta_{入}, \quad c_{入y} = c\sin\theta_{入}, \tag{55}$$

以及

$$c_{出x} = -c\cos\theta_{出}, \quad c_{出y} = c\sin\theta_{出}. \tag{56}$$

这些速度分量之间满足关系

$$c'_{入y} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}c_{入x}} c_{入y} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}c\sin\theta_{入}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta_{入}}, \tag{57}$$

以及

$$c'_{出y} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}c_{出x}}c_{出y} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}c\sin\theta_{出}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta_{出}}. \tag{58}$$

从这两个公式中，我们解得

$$\sin\theta'_{入} = \frac{c'_{入y}}{c} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta_{入}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta_{入}}, \quad \sin\theta'_{出} = \frac{c'_{出y}}{c} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta_{出}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta_{出}}. \tag{59}$$

由于 $\sin\theta'_{入} = \sin\theta'_{出}$，故我们有

$$\frac{\sin\theta_{入}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta_{入}} = \frac{\sin\theta_{出}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta_{出}}. \tag{60}$$

这就是我们要找的关系。

§ 3.2 相对论动力学

根据 Einstein 的狭义相对性原理，所有的物理定律及运动方程在等价的惯性系中都应该具有相同的表述形式。另外一方面，我们现在又知道，不同惯性系中的空间和时间坐标是通过 Lorentz 变换联系起来的。而这一变换不改变相应的四维向量的点乘。因此，一个很自然的想法是，所有的的运动方程都应该写成两个四维向量的内积的形式。

为了实现这一想法，首先我们看如何改写动量的定义。在三维空间中，一个质点的动量被定义为

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v} = m_0\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{61}$$

这里，m_0 应被理解为质点的固有质量，即它在与其一起运动的参照系中的静止质量。由于时间间隔 dt 不是一个 Lorentz 变换下的不变量，我们必须找一个具有时间量纲的 Lorentz 变换下的不变量来替换它，以构成一个 Lorentz 协变的四维动量 (既其内积在 Lorentz 变换下不变) 。实际上，我们可以去如下的量来代替 Δt 。

$$\begin{aligned}\Delta\tau \equiv \frac{1}{c}\Delta s &= \frac{1}{c}\sqrt{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2} \\ &= \frac{1}{c}\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}.\end{aligned} \tag{62}$$

显然，这是一个在 Lorentz 变换下不变的量。其次，在空间同一点处 ($x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$) ，我们有

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2} = \Delta t. \tag{63}$$

因此，它的确是具有时间量纲的量，被称为质点的固有时间。

现在，我们可以重新引入动量的空间分量为

$$\begin{aligned} p_x &= m_0\frac{dx}{d\tau} = m_0 c\frac{dx}{ds} = \frac{m_0 c\,dx}{\sqrt{c^2(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2}} \\ &= \frac{m_0 c\,dx}{dt\sqrt{c^2-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} = \frac{m_0 c\,dx}{dt\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{64}$$

以及

$$p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{65}$$

为了构造四维动量的第四个分量，我们仿照上面的定义。令 $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ 和 $x_4 = ict$ ，则我们有

$$p_4 = m_0\frac{dx_4}{d\tau} = m_0 c\frac{d(ict)}{\sqrt{c^2dt^2-dr^2}} = m_0\frac{ic\frac{dt}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = i\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv i\frac{E}{c}. \tag{66}$$

这里，物理量

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{67}$$

具有能量量纲，称为质点的能量.

上面的动量表达式看起来有点怪异，但实际上在低速极限 $\frac{v}{c} \sim 0$ 下，我们有

$$p_x \approx m_0 v_x, \quad p_y \approx m_0 v_y, \quad p_z \approx m_0 v_z, \tag{68}$$

即牛顿力学中的表达式。更为重要的是，我们有

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2\frac{v^2-c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2\frac{v^2-c^2}{c^2-v^2} = -m_0^2 c^2. \tag{69}$$

由于光速不变假设，这显然是一个在 Lorentz 变换下不变的量。因此，我们找到了四维协变动量的正确的表达式。

从四维协变动量的表达式出发，我们可以得到如下的结论。

(1) 如果坚持使用牛顿力学中的动量表达式

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z, \tag{70}$$

则质点的质量 m 应该被写作

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > m_0. \tag{71}$$

换句话说，一旦质点运动起来，其表观质量 m 应该大于其静止质量 m_0 。

(2) 我们看到，质点的能量 E 是以形式

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{72}$$

形式出现的。这与我们过去所熟知的质点能量的表达式非常不一样。在低速运动的极限下，前者是否可以退化为后者呢？

实际上，当 $v \ll c$ 时，我们可以利用 Taylor 展开的表达式

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \tag{73}$$

近似得到

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2. \tag{74}$$

公式的第二项是我们熟知的牛顿力学中质点动能的表达式。而第一项则是牛顿力学中未曾出现过的，称为质点的静止能。因此，在相对论力学中，能量守恒应该被表述为

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_{i0} c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} + \text{内能} = \text{常数}. \tag{75}$$

在低速度近似下，我们可以将其近似地写作

$$E = \sum_{i=1}^{N} m_{i0} c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_{i0} v_i^2 + \text{内能} = \text{常数}. \tag{76}$$

这一公式的一个直接推论是，若在某种物理过程的前后，体系中的粒子的总静止能减少了，则粒子的总动能或内能必然增加。这是今天核发电以及核武器的基本原理。

例 3.5: 当一个质子与一个中子结合成一个氘核时，质量亏损为

$$\begin{aligned} \Delta M_0 &= M_{\text{质子}} + M_{\text{中子}} - M_{\text{氘}} \\ &= (1.6726231 + 1.6749286 - 3.3435860) \times 10^{-27}\text{公斤} \\ &= 3.9657 \times 10^{-30}\text{公斤}. \end{aligned} \tag{77}$$

按照质 - 能关系，它相当于

$$\Delta E = \Delta M_0 c^2 = 3.9657 \times 10^{-27}\text{克} \times \left(3 \times 10^1 0\right)^2 = 3.9657 \times 9 \times 10^{-7}\text{尔格} \tag{78}$$

的能量被释放出来。换算成公斤 - 米 - 秒制，它大致等于 3.9657×10^{-13} 焦耳。因此，形成一克分子氘所释放出来的能量大约为

$$E = 3.9657 \times 10^{-30} \times 6 \times 10^{23} \approx 24 \times 10^{10}\text{焦耳}. \tag{79}$$

考虑到，一颗爆竹所释放的能量大约为 10^4 焦耳。因此，形成 3 克氘过程中释放的能量大约为 10^7 颗爆竹的能量。这是一个相当巨大的数字。

从公式

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{80}$$

出发，我们可以得到如下的质点动量与速度之间的关系

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E}. \tag{81}$$

与恒等式

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2, \tag{82}$$

或是

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{83}$$

一起构成了相对论性质点动力学的基础。由此得到的一个直接推论是，自然界可能存在质量为零 ($m_0 = 0$) 的粒子。此时，上面的公式化为

$$E^2 = p^2 c^2, \tag{84}$$

或是

$$E = pc. \tag{85}$$

因此，我们有

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} = \frac{\mathbf{p}c^2}{pc} = c\frac{\mathbf{p}}{p} = c\mathbf{e}_{\mathbf{p}}. \tag{86}$$

也就是说，这种粒子的速度与光速相同。另一方面，若一个质点的静止质量不为零，则其速率满足方程

$$|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{p}|c^2}{E} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}} < \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2}} = \frac{pc^2}{pc} = c. \tag{87}$$

也就是说，其速率永远小于光速。

今天，我们知道，静止质量为零的粒子有光子，中微子以及引力子。

由于 $\left(p_x,\, p_y,\, p_z,\, i\frac{E}{c}\right)$ 与 $(x,\, y,\, z,\, ict)$ 一样构成了一个四维动量向量，故在 Lorentz 变换下，它们具有相同的变换规律。因此，我们可以立刻写出

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c}\frac{E}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{p_x - \frac{VE}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad p'_y = p_y,\quad p'_z = p_z, \tag{88}$$

以及

$$E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{89}$$

这里，$\left(p_x,\, p_y,\, p_z,\, i\frac{E}{c}\right)$ 和 $\left(p'_x,\, p'_y,\, p'_z,\, i\frac{E'}{c}\right)$ 分别同一个质点的四维动量向量在 S 系和 S' 系中的分量。而 S' 系相对 S 系以匀速 V 沿 x- 轴的方向运动。

现在，我们来看一看，在狭义相对论中，牛顿运动方程应该做怎样的修改。牛顿第二定律告诉我们，质点的运动满足方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \tag{90}$$

这一方程显然在 Lorentz 变换下不是协变的。为了将它改写成协变的形式，我们可以引入所谓四维力 $(\widetilde{f}_1,\, \widetilde{f}_2,\, \widetilde{f}_3,\, \widetilde{f}_4)$。在一个给定的惯性参照系中，我们要求 $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{f}_2$ 和 $\widetilde{f}_3$ 与作用在质点上的外力在与该参照系相连接的坐标系中的投影 f_x, f_y 和 f_z 分别成正比。而 $\widetilde{f}_4$ 则由这一四维力的长度在 Lorentz 变换下不变这一条件来决定。相应地，我们应将牛顿方程改写为

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{dp_i}{\frac{1}{c}ds} = \widetilde{f}_i \tag{91}$$

的形式。这样以来，质点的运动方程就成为 Lorentz 变换下协变的了。具体写出来，我们有

$$\widetilde{f}_x = \frac{dp_x}{\frac{1}{c}ds} = \frac{cdp_x}{\sqrt{c^2dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{\frac{dp_x}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{f_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{92}$$

在推导的最后一步，我们利用了在给定惯性系下的牛顿方程

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x. \tag{93}$$

同理，我们有

$$\widetilde{f}_y = \frac{f_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \widetilde{f}_z = \frac{f_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{94}$$

现在，我们来决定四维力的第四个分量 $\widetilde{f}_4$ 。按照定义，我们有

$$\widetilde{f}_4 = \frac{dp_4}{\frac{1}{c}ds} = \frac{\frac{i}{c}\frac{dE}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = i\frac{\frac{\dot{E}}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{95}$$

为了检验这样定义的四维力在物理上是否有意义，让我们考察它和四维动量的内积。按照定义，我们有

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \widetilde{f}_i = \sum_{i=1}^{4} p_i \frac{dp_i}{\frac{1}{c}ds} = \frac{m_0 f_x v_x + m_0 f_y v_y + m_0 f_z v_z - m_0 c \cdot \frac{\dot{E}}{c}}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} = \frac{m_0 \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - m_0\dot{E}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{96}$$

另一方面，我们可以很容易地验证，这一公式的左边应该恒等于零。实际上，我们有

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \frac{dp_i}{\frac{1}{c}ds} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}\frac{dp_i^2}{\frac{1}{c}ds} = \sum_{i=1}^{4} \frac{d\left(-m_0^2c^2\right)}{\frac{1}{c}ds} \equiv 0. \tag{97}$$

也就是说，方程 (96) 右边表达式的分子应该为零。即我们有

$$m_0 \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - m_0\dot{E} = 0, \tag{98}$$

或是

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = \frac{dE}{dt}. \tag{99}$$

也就是说，外力所做之功的功率，等于质点能量随时间的改变率。这与我们以前的结论是完全一致的。

例 3.6: 试用相对论粒子的动能 E_k 来表示它的动量。

解：我们讲质点的动能定义为它的能量减去它的静止能。即我们有

$$E_k = E - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2, \tag{100}$$

或是

$$E_k + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E. \tag{101}$$

将此式两边平方后，我们有

$$(E_k + m_0c^2)^2 = E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4. \tag{102}$$

由此方程解出 p 来，我们即得到

$$p = \sqrt{\frac{(E_k + m_0c^2)^2}{c^2} - m_0^2c^2} = \sqrt{\frac{E_k(E_k + 2m_0c^2)}{c^2}}. \tag{103}$$

例 3.7: 静止质量为 m_0 的粒子在 $t = 0$ 时刻静止于 $x = 0$ 处。在一个沿着 x 轴方向的恒力 F 的作用下开始运动。试求

(1) 质点速度 v 和加速度 a 随着位置 x 的变化关系；

(2) v, a 和 x 随时间 t 的变化关系。

解: 根据公式 (99)，我们有

$$F \cdot \dot{x} = \frac{dE}{dt}. \tag{104}$$

因此，积分后，我们得到

$$Fx = \int dE + \widetilde{C} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \widetilde{C}. \tag{105}$$

由于当 $t = 0$ 时，我们有 $x = 0$, $v = 0$，故

$$\widetilde{C} = -m_0c^2, \tag{106}$$

或是

$$Fx = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \tag{107}$$

从此方程中，我们解出

$$\frac{F}{m_0c^2}\, x \equiv \alpha x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1, \tag{108}$$

或是

$$\frac{1}{1+\alpha x} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{109}$$

因此，我们有

$$v^2 = \left(1 - \frac{1}{(1+\alpha x)^2}\right) c^2. \tag{110}$$

为了求得加速度对于位置 x 的依赖关系，我们将上式对于时间 t 求导后得到

$$2v \cdot \dot{v} = 2v\, a = \frac{2\alpha \dot{x}}{(1+\alpha x)^3} c^2 = \frac{2\alpha c^2 v}{(1+\alpha x)^3}. \tag{111}$$

方程两边同除 $2v$ 后，我们得到

$$a = \frac{\alpha c^2}{(1+\alpha x)^3}. \tag{112}$$

为了求得速度 v 对于时间 t 的依赖关系，我们从运动方程

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x = F \tag{113}$$

解得

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft, \tag{114}$$

或是

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, Ft = m_0 v. \tag{115}$$

方程两边取平方后，我们有

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) F^2 t^2 = m_0^2 v^2, \tag{116}$$

或是

$$F^2 t^2 = \left(m_0^2 + \frac{F^2 t^2}{c^2}\right) v^2. \tag{117}$$

由此，我们解得

$$v^2 = \frac{F^2 t^2 c^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} = \frac{\alpha^2 c^4 t^2}{1 + \alpha^2 t^2 c^2}. \tag{118}$$

对于时间 t 求导后，我们有

$$2v \cdot \dot{v} = 2va = \frac{2 m_0^2 c^4 F^2 t}{(m_0^2 c^2 + F^2 t^2)^2}. \tag{119}$$

方程两边同除 $2v$ 后，我们得到

$$a = \frac{m_0^2 c^3 F}{(m_0^2 c^2 + F^2 t^2)^{3/2}}. \tag{120}$$

又从

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{Ftc}{\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2}} \tag{121}$$

以及 $x(t=0) = 0$ ，我们可以解得

$$x = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m_0^2c^2 + F^2t^2} - m_0c\right). \tag{122}$$

当 $F^2t^2 \ll m_0^2c^2$ 时，我们得到

$$x(t) \approx \frac{c}{F}\left[m_0c\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}\right) - m_0c\right] = \frac{1}{2}\frac{F^2t^2}{m_0c}\cdot\frac{c}{F} = \frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2. \tag{123}$$

这与牛顿力学的结果是完全一致的。

例 3.8: 质点 A 和 B 的静止质量同为 m_0 。今将 B 静止地置于惯性系 S 中。 A 则以 $v = \frac{3}{5}c$ 的速率对准 B 运动。若 A 和 B 的碰撞过程中没有能量损失，并且碰后连接在一起。试求碰后二者相对于 S 系的运动速率 u 以及系统的动能减少量 ΔE_K 。

解: 碰撞前质点 A 的能量为

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{124}$$

质点 B 的能量为 $E_{\mathrm{B}} = m_0c^2$ 。根据能量守恒条件，碰撞后产生的总粒子的静止质量 M_0 和速率 u 应该满足方程

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{A}} + E_{\mathrm{B}} &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}}} + m_0c^2 = \frac{5}{4}m_0c^2 + m_0c^2 \\ &= \frac{9}{4}m_0c^2 = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{125}$$

又根据动量守恒条件，我们有

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0\frac{3c}{5}}{\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}}} = \frac{3}{4}m_0c = \frac{M_0u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{126}$$

二者相除后，我们得到

$$\frac{\frac{9}{4}m_0c^2}{\frac{3}{4}m_0c} = 3c = \frac{M_0c^2}{M_0u} = \frac{c^2}{u}. \tag{127}$$

因此，我们有 $u=\frac{1}{3}c$ 。将它代入方程 (125) 后，我们得到

$$\frac{9}{4}m_0=\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=\frac{3M_0}{\sqrt{8}}. \tag{128}$$

因此，我们解得

$$M_0=\frac{9}{4}\frac{\sqrt{8}}{3}m_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}m_0\ >\ 2m_0. \tag{129}$$

即碰撞后产生的新的粒子的静止质量增大了。根据能量守恒定理，体系总动能的减少为

$$-\Delta E_K=M_0c^2-2m_0c^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)m_0c^2. \tag{130}$$

例 3.9: 试求电磁场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 在洛伦兹变换下的变换关系。

我们已经知道，在实验室系中，电磁场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 满足方程

$$\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)=-\frac{\partial\mathbf{B}(x,y,z,t)}{\partial t},\quad \nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)=0, \tag{131}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial y}-\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial z}=-\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial x}=-\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial t},\\
&\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial x}-\frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial y}=-\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial t},\\
&\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z}=0.
\end{aligned} \tag{132}$$

那么，根据爱因斯坦的相对性原理，在另外一个相对实验室系以匀速 $\mathbf{V}$ 运动的参照系 S' 中的电磁场强度矢量 $\mathbf{E}'(x',y',z',t')$ 和 $\mathbf{B}'(x',y',z',t')$ 也应该满足相同的方程，即

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E'_z(x',y',z',t')}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y(x',y',z',t')}{\partial z'}=-\frac{\partial B'_x(x',y',z',t')}{\partial t'},\\
&\frac{\partial E'_x(x',y',z',t')}{\partial z'}-\frac{\partial E'_z(x',y',z',t')}{\partial x'}=-\frac{\partial B'_y(x',y',z',t')}{\partial t'},\\
&\frac{\partial E'_y(x',y',z',t')}{\partial x'}-\frac{\partial E'_x(x',y',z',t')}{\partial y'}=-\frac{\partial B'_z(x',y',z',t')}{\partial t'},\\
&\frac{\partial B'_x(x',y',z',t')}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y(x',y',z',t')}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z(x',y',z',t')}{\partial z'}=0.
\end{aligned} \tag{133}$$

另一方面，当 $\mathbf{V}$ 的方向是沿 x 轴时，在洛伦兹变换下，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'}.
\end{aligned} \tag{134}$$

这里， $\beta = V/c$ 。将之代入 (132) 式后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial y'} - \frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial z'} \\
= \;& \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'},
\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial z'} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial x'} + \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial t'} \\
= \;& \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial t'},
\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial t'} - \frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial y'} \\
= \;& \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial t'},
\end{aligned} \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'} + \frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y'} \\
+ \;& \frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z'} = 0.
\end{aligned} \tag{138}$$

现将 (135) 式乘以 V/c^2 后在与 (138) 式相加，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{V}{c^2}\frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial y'} - \frac{V}{c^2}\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial z'} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'} \\
- \;& \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'} + \frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y'} + \frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z'} \\
= \;& \frac{\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'} - \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'}.
\end{aligned} \tag{139}$$

移项后我们有

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\beta^2}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_y(x,y,z,t)+\frac{V}{c^2}E_z(x,y,z,t)\right) \\ + & \frac{\partial}{\partial z'}\left(B_z(x,y,z,t)-\frac{V}{c^2}E_y(x,y,z,t)\right)=0, \end{aligned} \tag{140}$$

或是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{B_y(x,y,z,t)+\frac{V}{c^2}E_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ + & \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{B_z(x,y,z,t)-\frac{V}{c^2}E_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=0. \end{aligned} \tag{141}$$

同理，将 (138) 式乘以 V 后再与 (135) 式相加给出

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial y'}-\frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial z'}+\frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'} \\ - & \frac{\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'}+V\frac{\partial B_y(x,y,z,t)}{\partial y'}+V\frac{\partial B_z(x,y,z,t)}{\partial z'} \\ = & \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial x'}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'}, \end{aligned} \tag{142}$$

移项并整理后我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z(x,y,z,t)+VB_y(x,y,z,t)\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y(x,y,z,t)-VB_z(x,y,z,t)\right) \\ = & -\sqrt{1-\beta^2}\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'}, \end{aligned} \tag{143}$$

或是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{E_z(x,y,z,t)+VB_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{E_y(x,y,z,t)-VB_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ = & -\frac{\partial B_x(x,y,z,t)}{\partial t'}, \end{aligned} \tag{144}$$

接下来，我们再看将 (136) 式两边移项的结果

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{E_z(x,y,z,t)+VB_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\ = & -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{B_y(x,y,z,t)+\frac{V}{c^2}E_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \end{aligned} \tag{145}$$

以及将 (137) 式两边移项的结果

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{E_y(x,y,z,t)-VB_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)-\frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial y'}\\
=\ &-\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{B_z(x,y,z,t)-\frac{V}{c^2}E_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).
\end{aligned}\tag{146}$$

显然，若我们在方程 (141)，(144)，(145) 和 (146) 中令

$$\begin{aligned}
&E_x(x,y,z,t)\equiv E'_x(x',y',z',t'),\\
&\frac{E_y(x,y,z,t)-VB_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\equiv E'_y(x',y',z',t'),\\
&\frac{E_z(x,y,z,t)+VB_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\equiv E'_z(x',y',z',t'),\\
&B_x(x,y,z,t)\equiv B'_x(x',y',z',t'),\\
&\frac{B_y(x,y,z,t)+\frac{V}{c^2}E_z(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\equiv B'_y(x',y',z',t'),\\
&\frac{B_z(x,y,z,t)-\frac{V}{c^2}E_y(x,y,z,t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\equiv B'_z(x',y',z',t'),
\end{aligned}\tag{147}$$

则方程组 (133) 中的诸方程将自动得到满足。由此，我们得到了电磁场强度矢量在洛伦兹变换下的变换关系。在下一章中，我们将以数学上更为严格的方式给出这些变换关系的另外一种推导。

第四章、电动力学的拉格朗日量形式

在上面三章中，我们已经讲述了电动力学的发展简史，主要概念和基本方程式。在本章中，我们将用所谓拉格朗日量的形式把它们复述一遍。这样做的目的，不仅是为了将电动力学用一种更为紧凑和明晰的形式表达出来，也是由于这一形式有助于我们加深对于电动力学和狭义相对论之间的关系的理解。同时，更为重要的是，早在 1925 年，狄拉克 (Dirac) 即已发现，基于拉格朗日形式的所谓正则量子化方法 (canonical quantization)，可以使得人们从经典物理的牛顿方程出发，直接写出一个体系所满足的量子力学的薛定鄂方程 (Schrödinger equation)。这就使得拉格朗日形式的表述成为研究量子力学的不可或缺的工具。

拉格朗日表述的出发点是所谓 Maupertuis 原理。这一原理告诉我们，对于每一个力学体系，有一个叫作 “作用量 (action)” 的积分 S 存在。对于体系的实际运动过程，这个量应该取极值，即它的变分 δS 为零。首先，我们看一个自由粒子的作用量。按照爱因斯坦的相对性原理，它应该与我们所选取的惯性参照系无关。也就是说，在洛伦兹变换下，它应该是一个不变量。一个简单明了的选择是

$$S = \int_a^b \alpha \, d\tau. \tag{1}$$

这里，α 为一个待定常数，a 和 b 为自由粒子在一段时间间隔内运动的出发时的初始点和最后到达的终止点。τ 代表粒子的原时 (或固有时)。至于这样选取 S 是否合适以及如何确定常数 α，则要由可否利用 Maupertuis 原理推导出我们先前已知的结果来决定。

从第三章中，我们已经知道，对于实验式系而言，作用量 S 可以重新写作

$$S = \int_a^b \alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{2}$$

这里，t 为实验式参照系中的时间，c 为真空中的光速，而 v 为自由粒子相对于实验室参照系的速率。在文献中，被积函数

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \alpha\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} \tag{3}$$

称为粒子在实验式参照系中的拉格朗日量 (Lagrangian)。

接下来，我们要决定常数 α 。根据广义动量的定义，我们知道

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial v_y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial v_z} \tag{4}$$

成立。以 p_x 为例，我们有

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\alpha \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} \right) = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}}} \left(-\frac{2\dot{x}}{c^2} \right) = \frac{-\alpha v_x}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

另一方面，我们已知

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

比较以上两式，我们得到 $\alpha = -m_0 c^2$ 。因此，粒子的作用量 S 可以被重新写作

$$S = -m_0 c^2 \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{7}$$

有了粒子的拉格朗日量之后，我们即可写出其哈密顿量 H 。我们有

$$\begin{aligned} H &= p_x x + p_y y + p_z z - L = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{8}$$

我们看到，这恰恰是粒子的能量。

现在，我们要利用 Maupertuis 原理推导自由粒子的运动方程。首先，我们将粒子的作用量改写作

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c^2 \int_a^b d\tau = -m_0 c^2 \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \\ &= -m_0 c \int_a^b \sqrt{c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} \\ &= -m_0 c \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{4} (dx_i)^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

显然，这一表达式在洛伦兹变换下是不变的。将之取变分后，我们有

$$\delta S = -m_0 c \int_a^b \delta \sqrt{-\sum_{i=1}^{4} (dx_i)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -m_0 c\int_a^b \frac{(-1)\sum_{i=1}^4 2dx_i\,\delta(dx_i)}{2\sqrt{-\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}} = m_0 c\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^4 dx_i\,d(\delta x_i)}{\sqrt{-\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}} \\
&= m_0 c\sum_{i=1}^4 \frac{dx_i}{\sqrt{-\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}}\delta x_i\Big|_a^b - m_0 c\int_a^b \sum_{i=1}^4 d\left(\frac{dx_i}{\sqrt{-\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}}\right)\delta x_i \\
&= m_0 \sum_{i=1}^4 \frac{dx_i}{\sqrt{-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}}\delta x_i\Big|_a^b - m_0\int_a^b \sum_{i=1}^4 d\left(\frac{dx_i}{\sqrt{-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^4(dx_i)^2}}\right)\delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^4 \left(m_0\frac{dx_i}{d\tau}\right)\delta x_i\Big|_a^b - \int_a^b \sum_{i=1}^4 d\left(m_0\frac{dx_i}{d\tau}\right)\delta x_i. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

分别令

$$
\frac{dx_i}{d\tau} = u_i, \qquad m_0\frac{dx_i}{d\tau} = p_i, \qquad (11)
$$

为四维速度和动量，并利用 Maupertuis 原理，我们得到

$$
\delta S = \sum_{i=1}^4 (m_0 u_i)\delta x_i\Big|_a^b - \int_a^b \sum_{i=1}^4 d(m_0 u_i)\delta x_i = \sum_{i=1}^4 p_i\delta x_i\Big|_a^b - \sum_{i=1}^4\left(\int_a^b \frac{dp_i}{d\tau}d\tau\right)\delta x_i = 0. \qquad (12)
$$

由于 $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$ ，故上式中的第一项为零，即

$$
\delta S = -\sum_{i=1}^4\left(\int_a^b \frac{dp_i}{d\tau}d\tau\right)\delta x_i = 0. \qquad (13)
$$

成立。又由于 δx_i 是彼此独立的，故我们进一步有

$$
\int_a^b \frac{dp_i}{d\tau}d\tau = 0. \qquad (14)
$$

考虑到出发时的初始点 a 和最后到达的终止点 b 的任意性，则被积函数本身必须为零，即

$$
\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0, \qquad (15)
$$

或是

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0. \qquad (16)
$$

这就是我们已经熟悉的自由粒子运动满足的牛顿方程。

接下来，我们看如何用拉格朗日形式来描述一个带电粒子和外加电磁场之间的相互作用。我们将相应的作用量写作

$$S = S_{\rm m} + S_{\rm mf} = -m_0 c^2 \int_a^b d\tau + S_{\rm mf}. \tag{17}$$

这里，“m” 为 matter(物质) 的第一个字母，而 “f” 为 field(场) 的第一个字母。因此，$S_{\rm m}$ 为带电粒子的作用量，而 $S_{\rm mf}$ 表示粒子和外场相互作用的作用量。现在的问题是如何决定后者。

在第二章中，我们已经得知，电磁场可以用矢势和标势来描述。因此，我们引入四维势，其分量为 $A_1(x,y,z,t), A_2(x,y,z,t), A_3(x,y,z,t)$ 和 $A_4(x,y,z,t)$ 。我们要求它们在洛伦兹变换下同四维坐标 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ 和 $x_4 = ict$ 一样地变换。在此要求下，下面的积分

$$I = \int_a^b (A_1(x,y,z,t)dx_1 + A_2(x,y,z,t)dx_2 + A_3(x,y,z,t)dx_3 + A_4(x,y,z,t)dx_4) \tag{18}$$

显然是一个相对论不变量 (即在洛伦兹变换下不变的量) 。因此，我们可以将相互作用量 $S_{\rm mf}$ 写作

$$S_{\rm mf} = \beta \int_a^b (A_1(x,y,z,t)dx_1 + A_2(x,y,z,t)dx_2 + A_3(x,y,z,t)dx_3 + A_4(x,y,z,t)dx_4). \tag{19}$$

这里，β 是一个待定常数。同四维势的分量 $A_1(x,y,z,t), A_2(x,y,z,t), A_3(x,y,z,t)$ 和 $A_4(x,y,z,t)$ 一起，我们需要对总的作用量求变分后再利用 Maupertuis 原理重新推导出带电粒子在外加电磁场中满足的运动方程后对之加以确定。我们将看到，$A_1(x,y,z,t)$ ，$A_2(x,y,z,t)$ 和 $A_3(x,y,z,t)$ 恰好是电磁场的矢势分量 $A_x(x,y,z,t)$ ， $A_y(x,y,z,t)$ 和 $A_z(x,y,z,t)$ ，而 $A_4(x,y,z,t) = i\Phi(x,y,z,t)/c$ 。这里， $\Phi(x,y,z,t)$ 为电磁场的标量势，而 c 为真空中的光速。

现在，我们将总的作用量 S 对于坐标 x_i 取变分。我们有

$$\begin{aligned}
& \delta S = \delta S_{\rm m} + \delta S_{\rm mf} \\
= \;& \delta\left(-m_0 c^2 \int_a^b d\tau\right) + \delta\left(\beta \int_a^b (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4)\right) \\
= \;& -m_0 c\, \delta\left(\int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{4} (dx_i)^2}\right) + \beta\, \delta\left(\int_a^b (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_0 c \int_a^b \left(\sum_{i=1}^4 \frac{dx_i \delta(dx_i)}{\sqrt{-\sum_{i=1}^4 (dx_i)^2}} \right) + \beta \int_a^b \left(\sum_{i=1}^4 (\delta A_i) dx_i + \sum_{i=1}^4 A_i (\delta dx_i) \right) \\
&= m_0 \sum_{i=1}^4 \int_a^b \frac{dx_i \delta(dx_i)}{\frac{1}{c}\sqrt{-\sum_{i=1}^4 (dx_i)^2}} + \beta \int_a^b \left(\sum_{i=1}^4 (\delta A_i) dx_i + \sum_{i=1}^4 A_i \, d(\delta x_i) \right) \\
&= m_0 \sum_{i=1}^4 \int_a^b u_i \, d(\delta x_i) + \beta \sum_{i=1}^4 \int_a^b \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k \right) dx_i + \beta \sum_{i=1}^4 \int_a^b A_i \, d(\delta x_i). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

利用分步积分和条件 $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$，我们进一步得到

$$
\begin{aligned}
&\delta S = \delta S_{\mathrm{m}} + \delta S_{\mathrm{mf}} \\
&= -m_0 \sum_{i=1}^4 \int_a^b du_i \, \delta x_i + \beta \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \int_a^b \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k - \beta \sum_{i=1}^4 \int_a^b dA_i \, \delta x_i \\
&= -m_0 \sum_{i=1}^4 \int_a^b du_i \, \delta x_i + \beta \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \int_a^b \frac{\partial A_k}{\partial x_i} dx_k \delta x_i - \beta \sum_{i=1}^4 \int_a^b \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \right) \delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^4 \left[\int_a^b \left(-m_0 \, du_i + \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} dx_k - \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k \right) \right] \delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^4 \left[\int_a^b \left(-m_0 \frac{du_i}{d\tau} + \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{d\tau} - \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} \right) d\tau \right] \delta x_i. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

对于粒子真实的运动， Maupertuis 原理成立，即

$$
\delta S = \sum_{i=1}^4 \left[\int_a^b \left(-m_0 \frac{du_i}{d\tau} + \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{d\tau} - \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} \right) d\tau \right] \delta x_i = 0. \qquad (22)
$$

考虑到 $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ 和 δx_4 是彼此独立的，故

$$
\int_a^b \left(-m_0 \frac{du_i}{d\tau} + \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{d\tau} - \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} \right) d\tau = 0 \qquad (23)
$$

必须成立。又由于初始点 a 和终止点 b 的任意性，则被积函数本身必须为零，即

$$
-m_0 \frac{du_i}{d\tau} + \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{d\tau} - \beta \sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = 0, \qquad (24)
$$

或是

$$
m_0 \frac{du_i}{d\tau} = \beta \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) u_k. \qquad (25)
$$

若我们令

$$
F_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \frac{\partial A_k(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_k}, \qquad (26)
$$

则上式又可被写作

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = \beta \sum_{k=1}^{4} F_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_k. \tag{27}$$

根据定义，矩阵元 F_{ik} 是反对称的，即

$$F_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -F_{ki}(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{28}$$

成立。因此，对角元 F_{11}, F_{22}, F_{33} 和 F_{44} 皆为零。例如，当 $i = 1$ 时，运动方程 (27) 可以写作

$$m_0 \frac{du_1}{d\tau} = \beta F_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_2 + \beta F_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_3 + \beta F_{14}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_4. \tag{29}$$

另一方面，根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
& F_{12}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial A_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \\
= \; & \frac{\partial A_y(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial y} = (\mathrm{rot}\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, x_4))_z, \\
& F_{13}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial A_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \\
= \; & \frac{\partial A_z(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial z} = -(\mathrm{rot}\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, x_4))_y, \\
& F_{14}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial A_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \\
= \; & \frac{\partial A_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x} + i \frac{\partial A_x(x_1, x_2, x_3, x_4)}{c\, \partial t} \\
= \; & \frac{\partial A_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x} + i \frac{1}{c} \dot{A}_x(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned} \tag{30}$$

除此之外，我们还有

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \tag{31}$$

以及

$$u_1 = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_2 = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_3 = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{32}$$

将这些表达式代入 (29) 式后，我们有

$$\frac{d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt} \left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp_x}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta(\mathrm{rot}\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4))_z\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \beta(\mathrm{rot}\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4))_y\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&+ \beta\left(\frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x} + i\frac{1}{c}\frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial t}\right)\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\beta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left([\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}]_x + ic\frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial t}\right). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

整理后，我们得到

$$
\frac{dp_x}{dt} = \beta\left([\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)]_x + ic\frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial t}\right). \qquad (34)
$$

若我们取 β 为带电粒子的电荷 q，$A_x(x_1,x_2,x_3,x_4), A_y(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 和 $A_z(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为外加电磁场的矢势的三个分量，以及 $A_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = i\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)/c$(这里，$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为外加电磁场的标势，那么上式可进一步写作

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_x}{dt} &= q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x + q\left(ic\cdot\frac{i}{c}\frac{\partial\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial t}\right) \\
&= q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x + q\left(-(\nabla\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4))_x - \frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial t}\right) \\
&= q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4))_x + qE_x(x_1,x_2,x_3,x_4). \qquad (35)
\end{aligned}
$$

同理，对于 $i=2$ 和 $i=3$，我们也可得到

$$
\frac{dp_y}{dt} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4))_y + qE_y(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad (36)
$$

和

$$
\frac{dp_z}{dt} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4))_z + qE_z(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad (37)
$$

即带电粒子在电磁场中运动所满足的牛顿方程

$$
\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4) + q\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4) \qquad (38)
$$

的分量表达式。

现在，我们可以将作用量 S 明确写作

$$
S = S_{\mathrm{m}} + S_{\mathrm{mf}} = -m_0c^2\int_a^b d\tau + q\int_a^b (A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 + A_4dx_4)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -m_0c^2\int_a^b d\tau + q\int_a^b \left(A_1\frac{dx_1}{d\tau}+A_2\frac{dx_2}{d\tau}+A_3\frac{dx_3}{d\tau}+A_4\frac{dx_4}{d\tau}\right) d\tau \\
&= \int_a^b \left(-m_0c^2 + qA_1u_1 + qA_2u_2 + qA_3u_3 + qA_4u_4\right) d\tau \\
&= \int_a^b \left(-m_0c^2 + qA_x\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_y\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_z\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right. \\
&+ \left. q\frac{i\Phi}{c}\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt \\
&= \int_a^b \left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\mathbf{v} - q\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) dt, \qquad (39)
\end{aligned}
$$

即带电粒子在电磁场中运动的拉格朗日量为

$$
L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\mathbf{v} - q\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4). \qquad (40)
$$

最后，我们再来看一下 $i=4$ 的情况。我们有

$$
m_0\frac{du_4}{d\tau} = qF_{41}(x_1,x_2,x_3,x_4)u_1 + qF_{42}(x_1,x_2,x_3,x_4)u_2 + qF_{43}(x_1,x_2,x_3,x_4)u_3. \qquad (41)
$$

这里，

$$
\begin{aligned}
& F_{41}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial A_1(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial(ict)} - \frac{\partial\frac{i\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)}{c}}{\partial x} = \frac{i}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \\
&= \frac{i}{c}E_x(x_1,x_2,x_3,x_4), \\
& F_{42}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial A_2(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2} \\
&= \frac{i}{c}E_y(x_1,x_2,x_3,x_4), \\
& F_{43}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial A_3(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3} \\
&= \frac{i}{c}E_z(x_1,x_2,x_3,x_4). \qquad (42)
\end{aligned}
$$

将这些结果代入上面的方程后，我们得到

$$
m_0\frac{d\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt} = q\left(\frac{i}{c}E_x\right)\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\left(\frac{i}{c}E_y\right)\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\left(\frac{i}{c}E_z\right)\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (43)
$$

简化整理后我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = q\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\mathbf{v}, \tag{44}$$

即单位时间内粒子能量的改变等于外加电磁场作功的功率。这一结论显然是合理的。

接下来，我们考虑矢势 $\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 和标势 $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在两个惯性参照系之间的变换关系。由于 $A_x(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ， $A_y(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ， $A_z(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 和 $i\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)/c$ 是一个四维持矢量 (四维势) 的分量，故它们在两个不同惯性参照系之间的变换关系应与四维坐标 x_1,x_2,x_3 和 x_4 满足的变换关系，即洛伦兹变换

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\theta + x_4\sin\theta, \quad x_4' = -x_1\sin\theta + x_4\cos\theta, \\ x_2' &= x_2, \qquad\qquad\qquad x_3' = x_3 \end{aligned} \tag{45}$$

相同。这里， $\tan\theta = -V/ic$ 。因此，我们有

$$\begin{aligned} A_x'(x_1',x_2',x_3',x_4') &= A_1'(x_1',x_2',x_3',x_4') = A_1(x_1,x_2,x_3,x_4)\cos\theta + A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)\sin\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}A_x(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{-\frac{V}{ic}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{i}{c}\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)\right) \\ &= \frac{A_x(x_1,x_2,x_3,x_4) - \frac{V}{c^2}\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} A_y'(x_1',x_2',x_3',x_4') &= A_2'(x_1',x_2',x_3',x_4') = A_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = A_y(x_1,x_2,x_3,x_4), \\ A_z'(x_1',x_2',x_3',x_4') &= A_3'(x_1',x_2',x_3',x_4') = A_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = A_z(x_1,x_2,x_3,x_4), \end{aligned} \tag{47}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{i}{c}\Phi'(x_1',x_2',x_3',x_4') &= A_4'(x_1',x_2',x_3',x_4') = -A_1(x_1,x_2,x_3,x_4)\sin\theta + A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)\cos\theta \\ &= -\frac{-\frac{V}{ic}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}A_x(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{i}{c}\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)\right), \end{aligned} \tag{48}$$

或是

$$\Phi'(x_1',x_2',x_3',x_4') = \frac{\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4) - VA_x(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{49}$$

另一方面，根据定义，电磁场强度矢量由

$$F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j} \tag{50}$$

给出。具体一点讲，我们有

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{iE_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{iE_z}{c} \\ \frac{iE_x}{c} & \frac{iE_y}{c} & \frac{iE_z}{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

因此，为了决定电磁场强度矢量在两个参照系之间的变换，我们只需考虑矩阵元 F_{ij} 的变换关系即可。

首先，我们有

$$F'_{23}=\frac{\partial A'_3}{\partial x'_2}-\frac{\partial A'_2}{\partial x'_3}=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}=F_{23}. \tag{52}$$

这意味着

$$B'_x(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=B_x(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{53}$$

又因为

$$\begin{aligned} F'_{14} &= \frac{\partial A'_4}{\partial x'_1}-\frac{\partial A'_1}{\partial x'_4}=\left(\frac{\partial A'_4}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial A'_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_1}\right)-\left(\frac{\partial A'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_4}+\frac{\partial A'_1}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x'_4}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A'_4}{\partial x_1}\cos\theta+\frac{\partial A'_4}{\partial x_4}\sin\theta\right)-\left(\frac{\partial A'_1}{\partial x_1}(-\sin\theta)+\frac{\partial A'_1}{\partial x_4}\cos\theta\right) \\ &= \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(-\sin\theta A_1+\cos\theta A_4)\right]\cos\theta+\left[\frac{\partial}{\partial x_4}(-\sin\theta A_1+\cos\theta A_4)\right]\sin\theta\right) \\ &- \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\cos\theta A_1+\sin\theta A_4)\right](-\sin\theta)+\left[\frac{\partial}{\partial x_4}(\cos\theta A_1+\sin\theta A_4)\right]\cos\theta\right) \\ &= \left(-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cos^2\theta\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\sin^2\theta\frac{\partial A_1}{\partial x_4}+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial A_4}{\partial x_4}\right) \\ &- \left(-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial A_1}{\partial x_1}-\sin^2\theta\frac{\partial A_4}{\partial x_1}+\cos^2\theta\frac{\partial A_1}{\partial x_4}+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial A_4}{\partial x_4}\right) \\ &= \frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}=F_{14}, \end{aligned} \tag{54}$$

即

$$E'_x(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=E_x(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{55}$$

接下来，我们研究 F_{12} 的变换规律。我们有

$$F'_{12}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=\frac{\partial A'_2}{\partial x'_1}-\frac{\partial A'_1}{\partial x'_2}=\frac{\partial A_2}{\partial x'_1}-\frac{\partial A'_1}{\partial x_2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1'}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(A_1\cos\theta + A_4\sin\theta\right)\right) \\
&= \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\sin\theta - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\cos\theta - \frac{\partial A_4}{\partial x_2}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2}\right)\sin\theta \\
&= \cos\theta F_{12}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \sin\theta F_{42}(x_1,x_2,x_3,x_4). \qquad (56)
\end{aligned}
$$

也就是说，在两个惯性参照系之间的变换下， F_{12} 的脚标中只有 $i=1$ 是按照洛伦兹变换改变的。同理，我们可以推得

$$F'_{13}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) = \cos\theta F_{13}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \sin\theta F_{43}(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad (57)$$

$$F'_{42}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) = -\sin\theta F_{12}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \cos\theta F_{42}(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad (58)$$

$$F'_{43}(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) = -\sin\theta F_{13}(x_1,x_2,x_3,x_4) + \cos\theta F_{43}(x_1,x_2,x_3,x_4). \qquad (59)$$

现将

$$
\begin{aligned}
F_{12} = B_z, \qquad & F_{42} = \tfrac{iE_y}{c}, \\
\cos\theta = \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad & \sin\theta = \tfrac{\left(-\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},
\end{aligned} \qquad (60)
$$

代入 (56) 式后，我们有

$$B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{iE_y}{c}\frac{\left(-\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{B_z - \frac{V}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (61)$$

或是

$$B'_z(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) = \frac{B_z(x_1,x_2,x_3,x_4) - \frac{V}{c^2}E_y(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (62)$$

同理，将 $F_{13} = -B_y$ ， $F_{43} = \frac{iE_z}{c}$ 以及 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的表达式代入 (57) 式后有

$$-B'_y = \frac{(-B_y)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{iE_z}{c}\frac{\left(-\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{-B_y - \frac{V}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (63)$$

或是

$$B'_y(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) = \frac{B_y(x_1,x_2,x_3,x_4) + \frac{V}{c^2}E_z(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (64)$$

将 $F_{42}=\frac{iE_y}{c}$ ， $F_{12}=B_z$ 以及 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的表达式代入 (58) 式后有

$$\frac{iE'_y}{c}=\frac{B_z\left(\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+\frac{\frac{iE_y}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\left(\frac{i}{c}\right)\frac{-VB_z+E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{65}$$

或是

$$E'_y(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=\frac{E_y(x_1,x_2,x_3,x_4)-VB_z(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{66}$$

最后，将 $F_{43}=\frac{iE_z}{c}$ ， $F_{13}=-B_y$ 以及 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的表达式代入 (59) 式后有

$$\frac{iE'_z}{c}=\frac{-B_y\left(\frac{V}{ic}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+\frac{\frac{iE_z}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\left(\frac{i}{c}\right)\frac{VB_y+E_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{67}$$

或是

$$E'_z(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=\frac{E_z(x_1,x_2,x_3,x_4)+VB_y(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{68}$$

通过比较可以很容易地验证，电磁场强度矢量分量所满足的这些变换关系同第三章中给出的结果完全一样。

当 $V/c\sim 0$ 时，我们可以令 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\sim 1$ 。此时，上述变换式可以近似写作

$$\begin{aligned} &E'_x=E_x,\quad E'_y=E_y-VB_z,\quad E'_z=E_z+VB_y,\\ &B'_x=B_x,\quad B'_y=B_y+\tfrac{V}{c^2}E_z,\quad B'_z=B_z-\tfrac{V}{c^2}E_y, \end{aligned} \tag{69}$$

或者等价地

$$\begin{aligned} &E_x=E'_x,\quad E_y=E'_y+VB'_z,\quad E_z=E'_z-VB'_y,\\ &B_x=B'_x,\quad B_y=B'_y-\tfrac{V}{c^2}E'_z,\quad B_z=B'_z+\tfrac{V}{c^2}E'_y. \end{aligned} \tag{70}$$

我们可以将这些变换式更为紧凑地写作

$$\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\mathbf{E}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)-\mathbf{V}\times\mathbf{B}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4), \tag{71}$$

以及

$$\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\mathbf{B}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)+\frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{E}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4). \tag{72}$$

因此，若在 S' 系中， $\mathbf{B}'=0$ ，则在实验室系中我们有

$$\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\mathbf{E}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4),\quad \mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{E}'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4), \tag{73}$$

即

$$\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{74}$$

同理，若在 S' 系中 $\mathbf{E}'=0$ 成立，则在实验室中我们有

$$\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\mathbf{V}\times\mathbf{B}'(x_1',x_2',x_3',x_4'),\quad \mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\mathbf{B}'(x_1',x_2',x_3',x_4'), \tag{75}$$

或是

$$\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\mathbf{V}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{76}$$

接下来的一个问题是，我们可否利用矩阵 $\mathcal{F}$ 的矩阵元写出麦克斯韦方程组？答案是肯定的。

首先，我们注意到矩阵 $\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵元满足如下的恒等式

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j}\equiv 0. \tag{77}$$

实际上，按照矩阵元的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j}\\
=\;&\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)\\
=\;&\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_k\partial x_i}-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k\partial x_j}+\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i\partial x_k}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j\partial x_k}-\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j\partial x_i}=0.
\end{aligned} \tag{78}$$

现在恒等式 (77) 中取 $i=1,j=2,k=3$，则我们有

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0, \tag{79}$$

即麦克斯韦方程之一的

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)=0. \tag{80}$$

又若我们恒等式 (77) 中取 $i=1,j=2,k=4$，则得到

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}=\frac{\partial B_z}{\partial(ict)}+\frac{\partial\left(-\frac{i}{c}E_y\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{i}{c}E_x\right)}{\partial y}=0, \tag{81}$$

或是

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{82}$$

这是另外一个麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{83}$$

的 z 分量。类似地，若我们在恒等式 (77) 中取 $i = 1, j = 3, k = 4$ ，则得到

$$-(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{84}$$

而若在恒等式 (77) 中取 $i = 2, j = 3, k = 4$ ，就会得到

$$-(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial B_x}{\partial t}. \tag{85}$$

为了写出另外两个麦克斯韦方程，我们需要引进电磁场自身的作用量 S_f 。为此，先让我们研究一下矩阵 $\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵元在洛伦兹变换下的改变。一般的洛伦兹变换可以写作

$$x_i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x'_k, \tag{86}$$

或者是等价地

$$x'_i = \sum_{k=1}^{4} \left(\alpha^{-1}\right)_{ik} x_k. \tag{87}$$

这里， α^{-1} 代表洛伦兹变换矩阵 α 的逆矩阵。由于我们要求

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i x_i = \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} x'_j\right) \left(\sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x'_k\right) \\ = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha_{ik}\right) x'_j x'_k = \sum_{j=1}^{4} x'_j x'_j = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4 \end{aligned} \tag{88}$$

成立，故应有

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}, \tag{89}$$

即洛伦兹变换矩阵的任意两列彼此是正交的，而同一列则是归一的。这样的矩阵被称为正交矩阵。利用矩阵转置的概念，我们又可将上式重写为

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{4} \left(\alpha^T\right)_{ji} \alpha_{ik} = \delta_{jk}. \tag{90}$$

因此，一个正交矩阵的转置既是它的逆矩阵，记作

$$\alpha^T = \alpha^{-1}. \tag{91}$$

值得强调一点的是，在一般性洛伦兹变换 (86) 中，我们已经将空间旋转变换，空间反射变化变换

$$\begin{aligned} x = x_1 = -x_1' = -x', \quad y = x_2 = -x_2' = -y', \\ z = x_3 = -x_3' = -z', \quad ict = x_4 = x_4' = ict', \end{aligned} \tag{92}$$

以及时间反演变换

$$\begin{aligned} x = x_1 = x_1' = x', \quad y = x_2 = x_2' = y', \\ z = x_3 = x_3' = z', \quad ict = x_4 = -x_4' = -ict' \end{aligned} \tag{93}$$

都包括进来了。这些变换的全体构成的集合称为洛伦兹群 (Lorentz group) 。又由于任何一个洛洛兹变换所对应的矩阵 A 都是正交的，即

$$\alpha\alpha^T = I \tag{94}$$

成立，故将此式的两边取行列式后我们有

$$\det(\alpha\alpha^T) = (\det\alpha)(\det\alpha^T) = (\det\alpha)^2 = \det I = 1, \tag{95}$$

即

$$\det\alpha = \pm 1. \tag{96}$$

当一个洛伦兹变换的行列式 $\det\alpha = 1$, 我们称它为真洛伦兹变换 (proper Lorentz transformation) , 否则为赝洛伦兹变换 (improper Lorentz transformation) 。以空间反射变换为例。它的变换矩阵为

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{97}$$

显然，它的行列式为 -1，即空间反射变换是一个赝洛伦兹变换。同理可知，时间反演变换也是一个赝洛伦兹变换。

现在，我们可以对于四维矢量的定义做一推广了。若一个量 $p^{(4)}$ 有四个分量 $p^{(4)}=(p_1^{(4)},p_2^{(4)},p_3^{(4)},p_4^{(4)})$，且它们在两个参照系之间的变换满足与坐标 (x_1,x_2,x_3,x_4) 相同的洛伦兹变换，即

$$p_i^{(4)}=\sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}p_k^{\prime(4)}=\alpha_{i1}p_1^{\prime(4)}+\alpha_{i2}p_2^{\prime(4)}+\alpha_{i3}p_3^{\prime(4)}+\alpha_{i4}p_4^{\prime(4)}, \tag{98}$$

则我们称它为一个四维矢量。显然，一个四维矢量的分量满足恒等式

$$\begin{aligned}&\left(p_1^{(4)}\right)^2+\left(p_2^{(4)}\right)^2+\left(p_3^{(4)}\right)^2+\left(p_4^{(4)}\right)^2=\sum_{i=1}^{4}\left(p_i^{(4)}\right)^2\\ =&\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k_1}^{4}\alpha_{ik_1}p_{k_1}^{\prime(4)}\right)\left(\sum_{k_2}^{4}\alpha_{ik_2}p_{k_2}^{\prime(4)}\right)=\sum_{k_1}^{4}\sum_{k_2}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_{ik_1}\alpha_{ik_2}\right)p_{k_1}^{\prime(4)}p_{k_2}^{\prime(4)}\\ =&\sum_{k_1}^{4}\sum_{k_2}^{4}\delta_{k_1k_2}p_{k_1}^{\prime(4)}p_{k_2}^{\prime(4)}=\sum_{k_1}^{4}\left(p_{k_1}^{\prime(4)}\right)^2=\left(p_1^{\prime(4)}\right)^2+\left(p_2^{\prime(4)}\right)^2+\left(p_3^{\prime(4)}\right)^2+\left(p_4^{\prime(4)}\right)^2\end{aligned} \tag{99}$$

即一个四维矢量的“长度”在洛伦兹变换下是不变的。同理可证，任意两个四维矢量的“点乘”在洛伦兹变换下也是不变的。以四维坐标矢量和一个四维矢量 $(p_1^{(4)},p_2^{(4)},p_3^{(4)},p_4^{(4)})$ 为例，我们有

$$\begin{aligned}&x_1p_1^{(4)}+x_2p_2^{(4)}+x_3p_3^{(4)}+x_4p_4^{(4)}=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i^{(4)}=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k_1}^{4}\alpha_{ik_1}x_{k_1}^{\prime}\right)\left(\sum_{k_2}^{4}\alpha_{ik_2}p_{k_2}^{\prime(4)}\right)\\ =&\sum_{k_1}^{4}\sum_{k_2}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_{ik_1}\alpha_{ik_2}\right)x_{k_1}^{\prime}p_{k_2}^{\prime(4)}=\sum_{k_1}^{4}\sum_{k_2}^{4}\delta_{k_1k_2}x_{k_1}^{\prime}p_{k_2}^{\prime(4)}=\sum_{k_1}^{4}x_{k_1}^{\prime}p_{k_1}^{\prime(4)}\\ =&x_1^{\prime}p_1^{\prime(4)}+x_2^{\prime}p_2^{\prime(4)}+x_3^{\prime}p_3^{\prime(4)}+x_4^{\prime}p_4^{\prime(4)}.\end{aligned} \tag{100}$$

的确，它们的点乘在洛伦兹变换下也是不变的。

接下来，我们要引进所谓四维二阶张量的定义。若一个 4×4 矩阵的矩阵元在一个洛伦兹变换下按照如下规律改变

$$B_{ij}=\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\alpha_{ik}\alpha_{jl}B_{kl}^{\prime}, \tag{101}$$

则这个矩阵被称为一个四维二阶张量。我们要证明，根据这一定义，(51) 式中给出的矩阵 $\mathcal{F}$ 即是一个四维二阶张量，称为电磁场强度张量。

事实上，我们有

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{l=1}^{4}\alpha_{jl}A'_l\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}A'_k\right) \\ &= \sum_{l=1}^{4}\alpha_{jl}\frac{\partial A'_l}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}\frac{\partial A'_k}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{4}\alpha_{jl}\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_k}\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}\left(\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial A'_k}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{4}\alpha_{jl}\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_k}\left(\alpha^{-1}\right)_{ki}\right) - \sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}\left(\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial A'_k}{\partial x'_l}\left(\alpha^{-1}\right)_{lj}\right). \end{aligned} \tag{102}$$

利用 α 是一个正交矩阵这一事实，我们有可将该式进一步改写为

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \sum_{l=1}^{4}\alpha_{jl}\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_k}\left(\alpha^{T}\right)_{ki}\right) - \sum_{k=1}^{4}\alpha_{ik}\left(\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial A'_k}{\partial x'_l}\left(\alpha^{T}\right)_{lj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_k} - \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\frac{\partial A'_k}{\partial x'_l} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\left(\frac{\partial A'_l}{\partial x'_k} - \frac{\partial A'_k}{\partial x'_l}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\alpha_{ik}\alpha_{jl}F'_{kl}, \end{aligned} \tag{103}$$

即 $\mathcal{F}$ 是一个四维二阶 (反对称) 张量。

根据四维二阶张量的定义，我们可以很容易地证明，任意两个四维二阶张量 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{D}$ 的内积

$$\mathcal{B}\cdot\mathcal{D} \equiv \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}D_{ij} \tag{104}$$

在一个洛伦兹变换下是不变的，即它是一个四维标量。事实上，我们有

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}\cdot\mathcal{D} \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}D_{ij} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k_1=1}^{4}\sum_{l_1=1}^{4}\alpha_{ik_1}\alpha_{jl_1}B'_{k_1l_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{4}\sum_{l_2=1}^{4}\alpha_{ik_2}\alpha_{jl_2}D'_{k_2l_2}\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{4}\sum_{l_1=1}^{4}\sum_{k_2=1}^{4}\sum_{l_2=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_{ik_1}\alpha_{ik_2}\right)\left(\sum_{j=1}^{4}\alpha_{jl_1}\alpha_{jl_2}\right)B'_{k_1l_1}D'_{k_2l_2} \\ &= \sum_{k_1=1}^{4}\sum_{l_1=1}^{4}\sum_{k_2=1}^{4}\sum_{l_2=1}^{4}\delta_{k_1k_2}\delta_{l_1l_2}B'_{k_1l_1}D'_{k_2l_2} = \sum_{k_1=1}^{4}\sum_{l_1=1}^{4}B'_{k_1l_1}D'_{k_1l_1} = \mathcal{B}'\cdot\mathcal{D}'. \end{aligned} \tag{105}$$

特别是当 $\mathcal{B}=\mathcal{D}$ 时，我们有

$$\mathcal{B}\cdot\mathcal{B} = \mathcal{B}'\cdot\mathcal{B}'. \tag{106}$$

作为一个例子，我们看到

$$\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}F_{ij}=2\left(B^2(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}E^2(x,y,z,t)\right) \tag{107}$$

是一个洛伦兹变化下的不变量。

同理，我们可以定义四维三阶张量，四维四阶张量等等。以四维三阶张量为例。一组数 (共 64 个)(C_{ijk}) 构成一个四维三阶张量，若它们在一个洛伦兹变换下按照如下规律改变

$$C_{ijk}=\sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}C'_{lmn}. \tag{108}$$

根据这一定义，我们亦可将一个四维标量称为四维零阶张量，一个四维矢量称为四维一阶张量。在这里，我们仅介绍一个与电动力学研究有关的四维四阶张量。关于四维高阶张量的知识会在今后学习广义相对论和引力理论时引入。

我们定义四维完全反对称四阶张量为

$$\epsilon_{ijkl}=\begin{cases}1, & \text{若}(i,j,k,l)\text{是}(1,2,3,4)\text{的一个偶置换;}\\ -1, & \text{若}(i,j,k,l)\text{是}(1,2,3,4)\text{的一个奇置换.}\end{cases} \tag{109}$$

按照定义，下脚标 (i,j,k,l) 是两两不相等的。然而，我们可以很容易看到，若规定当一个分量的两个下脚标相等时该分量为零，则此定义可以很容易地被加以推广。因此，不为零的分量的个数恰好等于四个下脚标的全排列的个数，即 4! ，且

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=l}^{4}\epsilon_{ijkl}^2=1 \tag{110}$$

成立。

我们接下来要证明，在一个真的洛伦兹变换下，如此定义的 $\{\epsilon_{ijkl}\}$ 的确是按照一个四维四阶张量的方式变换的。为此，我们假设 $\{\epsilon'_{ijkl}\}$ 是定义在 S' 系中的四维完全反对称四阶张量，即其各个分量满足定义式 (109) 。又取一真洛伦兹变换 α ，并考虑如下定义的量

$$e_{mnst}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=l}^{4}\alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{sk}\alpha_{tl}\,\epsilon'_{ijkl}. \tag{111}$$

我们要证明

$$e_{mnst}=\epsilon_{mnst}, \tag{112}$$

即 S 系内的四维完全反对称四阶张量的分量。实际上，若注意到上面的变换式具有一个行列式的形式，并利用行列式的性质，我们可以直接写出

$$e_{mnst} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=l}^{4} \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{sk}\alpha_{tl}\, \epsilon'_{ijkl} = \det\alpha\, \epsilon_{mnst} = \epsilon_{mnst}. \tag{113}$$

这里，我们利用了一个真洛伦兹变换的行列式 $\det\alpha = 1$ 这一事实。

对于赝洛伦兹变换，情况变得有些复杂。以空间反射变换为例，我们有

$$\alpha_{1i} = -\delta_{1i}, \quad \alpha_{2j} = -\delta_{2j}, \quad \alpha_{3k} = -\delta_{3k}, \quad \alpha_{4l} = \delta_{4l} \tag{114}$$

成立。因此，一个四维四阶张量 $\mathcal{F}$ 的分量应该满足变换关系

$$\begin{aligned} F_{1234} &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=l}^{4} \alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\alpha_{4l}\, F'_{ijkl} \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=l}^{4} (-1)^3\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k}\delta_{4l}\, F'_{ijkl} = -F'_{1234}. \end{aligned} \tag{115}$$

但根据定义，我们显然有

$$\epsilon_{1234} = \epsilon'_{1234}, \tag{116}$$

并不变号，即 $\{\epsilon_{ijkl}\}$ 不按照赝洛伦兹变换进行变换。我们称这种量为赝四维四阶张量，以便与通常意义下的四维四阶张量 $\mathcal{F}$ 有所区别。

在定义了四维完全反对称四阶张量 $\{\epsilon_{ijkl}\}$ 后，我们可以引进所谓对偶张量的定义了。任给一个四维二阶张量 $\mathcal{B} = (B_{ij})$，我们定义与它对偶的四维二阶 (赝) 张量 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 的分量为 [1]

$$\widetilde{B}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \epsilon_{ijkl}B_{kl}. \tag{117}$$

一个重要的事实是，在一个真的洛伦兹变换下，一个四维二阶张量 $\mathcal{B}$ 同与它对偶的四维二阶赝张量 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 的内积是不变的。实际上，我们有

$$\mathcal{B}\cdot\widetilde{\mathcal{B}} \;\equiv\; \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} B_{ij}\widetilde{B}_{ij} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} B_{ij}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}B_{kl}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}B_{ij}B_{kl}$$

[1]同理，任给一个四维一阶张量 (即四维矢量 (B_1, B_2, B_3, B_4))，我们定义与它对偶的四维三阶 (赝) 张量的分量为 $\widetilde{B}_{ijk} = \epsilon_{ijk1}B_1 + \epsilon_{ijk2}B_2 + \epsilon_{ijk3}B_3 + \epsilon_{ijk4}B_4$ 。

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}\left(\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\alpha_{im}\alpha_{jn}B'_{mn}\right)\left(\sum_{s=1}^{4}\sum_{t=1}^{4}\alpha_{ks}\alpha_{lt}B'_{st}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\sum_{t=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}\,\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{ks}\alpha_{lt}\right)B'_{mn}B'_{st}. \tag{118}$$

注意到，按照行列式的定义，上式中最后一步中的括号中的求和可以写作

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}\,\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{ks}\alpha_{lt} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\epsilon_{ijkl}\,\alpha^{-1}_{mi}\alpha^{-1}_{nj}\alpha^{-1}_{sk}\alpha^{-1}_{tl}$$

$$= \det\alpha^{-1}\,\epsilon'_{mnst} = \epsilon'_{mnst}. \tag{119}$$

代入上式后，我们得到

$$\mathcal{B}\cdot\widetilde{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\sum_{t=1}^{4}\epsilon'_{mnst}B'_{mn}B'_{st} = \mathcal{B}'\cdot\widetilde{\mathcal{B}}', \tag{120}$$

即 $\mathcal{B}\cdot\widetilde{B}$ 在真洛伦兹变换下的确是不变的。但必须指出的是， $\mathcal{B}\cdot\widetilde{B}$ 不是一个四维标量，而是一个四维赝标量。这是由于，一个真正的四维标量在空间反射变换下应该是不变的。然而可以验证， $\mathcal{B}\cdot\widetilde{B}$ 在空间反射变换下会改变符号。

现在，我们将上述结果应用到 (51) 式给出的电磁场张量 $\mathcal{F}$。通过直接了当的计算，我们得到

$$\mathcal{F}\cdot\widetilde{\mathcal{F}} = -\frac{8i}{c}\,\mathbf{B}(x,y,z)\cdot\mathbf{E}(x,y,z). \tag{121}$$

因此， $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$ 也是一个洛伦兹变换下的不变量 (它实际上是一个赝标量，即它在空间反射下是变好的) 。这一事实导致了一些有趣的结论：

(i) 若一个体系中的电场强度 $\mathbf{E}$ 与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 在一个惯性系中是彼此垂直的，则它们在任何一个惯性系中都是垂直的。

(ii) 若在一个惯性系中，电场强度 $\mathbf{E}$ 与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的夹角是锐角 (或钝角) ，则在其它惯性系中，这一夹角仍为锐角 (或钝角) 。

(iii) 若在一个惯性系中， $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$ ，那么考虑到 $B^2-\frac{1}{c^2}E^2$ 也是一个洛伦兹变换下的不变量 (见 (107) 式) ，那么我们总可以找到另外一个惯性参照系，在其中 $\mathbf{E}=0$ 或是 $\mathbf{B}=0$ 成立 (取决于 $B^2-\frac{1}{c^2}E^2>0$ 还是 $B^2-\frac{1}{c^2}E^2<0$ 成立) 。

(iv) 反之，若在某一惯性参照系中， $\mathbf{E}=0$ 或 $\mathbf{B}=0$ 成立，那么在其它惯性系中的电场强度矢量和磁感应强度矢量总是彼此垂直的。

最后，我们再看一下所谓四维体积元

$$d\Omega \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \tag{122}$$

在洛伦兹变换下的变换规律。从多元微积分学我们知道，如下的变换关系

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)} \right| dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = |J| d\Omega' \tag{123}$$

在两套坐标系间成立。这里，

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_4}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x'_4} \end{vmatrix} \tag{124}$$

被称为雅可比行列式 (Jacobi determinant) 。对于洛伦兹变换，不难验证此时的雅可比行列式恰为洛伦兹变换的矩阵 α 的行列式。因此，对于真洛伦兹变换它等于 $+1$ ，而对于赝洛伦兹变换它等于 -1 。但在取了绝对值后，最后的结果都是 $+1$ 。因此，我们有

$$d\Omega = |J| d\Omega' = |\det\alpha| \, d\Omega' = d\Omega'. \tag{125}$$

在做了这些准备之后，我们现在可以考虑如何写出电磁场的作用量了。由于电磁场强度矢量唯一地由四维二阶张量 $\mathcal{F}$ 决定，而其作用量应该由一个洛伦兹变换下的标量给出，故我们取

$$S_{\rm f} = \gamma \int\int\int\int_{R^4} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} [F_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4)]^2 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \tag{126}$$

这里， γ 为一个待定常数。将 $S_{\rm f}$ 加到作用量 (39) 上，我们得到一个带电粒子，外电磁场以及由粒子本身产生的电磁场的总作用量

$$\begin{aligned} S &= S_{\rm m} + S_{\rm mf} + S_{\rm f} \\ &= -m_0 c^2 \int_a^b d\tau + q \int_a^b (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4) \\ &+ \gamma \int\int\int\int_{R^4} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} F_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) F_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned}$$

$$= -m_0c^2\int_a^b d\tau + q\int_a^b (A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 + A_4dx_4)$$
$$+ \gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega. \quad (127)$$

需要强调一点的是，由于上式中出现的 $F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 以及 $\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 应理解为既包含外加的，也包含粒子自身运动产生的全部的电磁场强度矢量和矢量势，我们现在可以去掉粒子的带电量 q 为无穷小的要求了。

接下来，我们要对电荷 q 多说几句。到目前为止，我们只考虑了点电荷。显然，一个点电荷的带电量 q 应同质点的静止质量 m_0 一样，是洛伦兹变换下的一个不变量，即一个四维标量。为了数学上的便利起见，我们可以将 q 想象成在一个无穷小的体积 dV 内连续分布的电荷，其密度为 $\rho(\mathbf{r},t)$ ，即我们有

$$q = \rho(\mathbf{r},t)dV. \quad (128)$$

由于 $(qdx_1, qdx_2, qdx_3, qdx_4)$ 是一个四维矢量，而

$$qdx_i = \rho(\mathbf{r},t)dVdx_i = (\rho(\mathbf{r},t)dx_i)dV = \left(\rho(\mathbf{r},t)\frac{dx_i}{dt}\right)dxdydzdt$$
$$= \left(\rho(\mathbf{r},t)\frac{dx_i}{dt}\right)\frac{dx_1dx_2dx_3dx_4}{ic} = \left(\rho(\mathbf{r},t)\frac{dx_i}{dt}\right)\frac{d\Omega}{ic}, \quad (129)$$

故

$$J_i = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{dx_i}{dt} \quad (130)$$

是一个四维矢量。这是由于四维体积元 $d\Omega$ 在洛伦兹变换下是不变的。可以很容易地验证， J_i 的前三个分量为

$$J_1 = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)v_x, \quad J_2 = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)v_y, \quad J_3 = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)v_z, \quad (131)$$

即我们所熟悉的电流密度的分量，而其第四个分量则为

$$J_4 = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{dx_4}{dt} = \rho(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{d(ict)}{dt} = ic\rho(x_1,x_2,x_3,x_4). \quad (132)$$

而我们所熟悉的连续性方程

$$\frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho(x,y,z,t)\mathbf{v}(x,y,z,t))$$
$$= \frac{\partial\rho(x,y,z,t)}{\partial t} + \frac{\partial J_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0 \quad (133)$$

现在可以被改写作

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(ic\rho(x_1,x_2,x_3,x_4))}{\partial(ict)}+\frac{\partial J_1(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3}\\
=\;&\frac{\partial J_4(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4}+\frac{\partial J_1(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3}\\
=\;&0. \qquad (134)
\end{aligned}$$

这一方程在洛伦兹变换下显然是不变的。更为重要的是，现在我们可以将总作用量 (127) 写成如下的对称形式

$$\begin{aligned}
&S=-m_0c^2\int_a^b d\tau+q\int_a^b(A_1dx_1+A_2dx_2+A_3dx_3+A_4dx_4)\\
+\;&\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega\\
=\;&-m_0c^2\int_a^b d\tau+\left(\int\int\int_{R^3}\rho(x,y,z,t)dxdydz\right)\int_a^b\sum_{k=1}^4 A_k(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_k\\
+\;&\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega\\
=\;&-m_0c^2\int_a^b d\tau+\int\int\int\int_{R^4}\sum_{k=1}^4\rho(x_1,x_2,x_3,x_4)A_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\left(\frac{dx_k}{dt}\right)dxdydzdt\\
+\;&\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega\\
=\;&-m_0c^2\int_a^b d\tau+\sum_{k=1}^4\int\int\int\int_{R^4}A_k(x_1,x_2,x_3,x_4)J_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{d\Omega}{ic}\\
+\;&\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega. \qquad (135)
\end{aligned}$$

在做了这些准备工作之后，现在我们可以利用 Maupertuis 原理来推导麦克斯韦方程组的另外两个方程了。

为此，我们将视带电粒子的运动为已知，而只对总作用中的场势做变分。我们有

$$\begin{aligned}
\delta S\;=\;&\delta\left(-m_0c^2\int_a^b d\tau\right)+\delta\left(\sum_{k=1}^4\int\int\int\int_{R^4}A_k(x_1,x_2,x_3,x_4)J_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{d\Omega}{ic}\right)\\
+\;&\delta\left(\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^4\sum_{j=1}^4\left(\frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_k(x_1,x_2,x_3,x_4))J_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{d\Omega}{ic} \\
&+ 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}\left(\frac{\delta\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}-\frac{\delta\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\right)d\Omega \\
&= \sum_{k=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_k(x_1,x_2,x_3,x_4))J_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{d\Omega}{ic} \\
&+ 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{\partial\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&- 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{\partial\delta A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}dx_1dx_2dx_3dx_4. \quad (136)
\end{aligned}
$$

对于上式右边的第二和第三项做分步积分后，我们得到

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \sum_{k=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_k(x_1,x_2,x_3,x_4))J_k(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&- 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&+ 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}\delta A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \quad (137)
\end{aligned}
$$

若我们在上式右边的第一项中将下脚标 k 改写成 j，并在第三项中调换脚标 i 和 j 的位置，则上式可以重新写作

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \sum_{j=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4))J_j(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&- 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&+ 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&= \sum_{j=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4))J_j(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&- 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \\
&- 2\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4))J_j(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3dx_4$$
$$- 4\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 \quad (138)$$

在上面推导的最后一步，我们用到了四维张量 F_{ij} 是反对称的这一事实，即

$$F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -F_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4). \quad (139)$$

现在，我们令 $\delta S = 0$ ，并由此得到

$$0 = \sum_{j=1}^{4}\int\int\int\int_{R^4}(\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4))J_j(x_1,x_2,x_3,x_4)\frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3dx_4$$
$$- 4\gamma\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}\delta A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4. \quad (140)$$

考虑到 $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$ 和 δA_4 是彼此独立取值的，故上式仅当相应的各个被积函数为零时才可能成立。由此我们得到

$$\frac{1}{ic}J_j(x_1,x_2,x_3,x_4) - 4\gamma\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i} = 0. \quad (141)$$

若取 $j = 1$ ，则我们有

$$\frac{1}{ic}J_1 = 4\gamma\left(\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_4}\right). \quad (142)$$

将

$$J_1 = j_x, \quad F_{11} = 0, \quad F_{21} = -B_z, \quad F_{31} = B_y, \quad F_{41} = \frac{i}{c}E_x \quad (143)$$

代入上式后，我们有

$$\frac{1}{ic}j_x = 4\gamma\left(-\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\frac{i}{c}\partial E_x}{ic\partial t}\right). \quad (144)$$

进一步化简后，我们得到

$$j_x = 4ic\gamma\left(-\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\right) = 4ic\gamma\left(-(\mathrm{rot}\mathbf{B})_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\right). \quad (145)$$

将此式与麦克斯韦方程

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (146)$$

的 x 分量相比较后，我们看到，若取

$$4ic\gamma = -\frac{1}{\mu_0}, \tag{147}$$

则两式相互重合。由此我们解得

$$\gamma = \frac{i}{4\mu_0 c} = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}. \tag{148}$$

同理，若在方程 (141) 中取 $j = 4$ ，我们有

$$\frac{1}{ic}J_4 = 4\gamma\left(\frac{\partial F_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4}\right). \tag{149}$$

将

$$J_4 = ic\rho, \quad F_{14} = -\frac{i}{c}E_x, \quad F_{24} = -\frac{i}{c}E_y, \quad F_{34} = -\frac{i}{c}E_z, \quad F_{44} = 0 \tag{150}$$

代入上式后，我们有

$$\frac{1}{ic}ic\rho = 4\gamma\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{i}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{i}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = 4\gamma\left(-\frac{i}{c}\right)\mathrm{div}\mathbf{E}. \tag{151}$$

将 $\gamma = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ 代入上式并简化后，我们有

$$\rho = 4\cdot\frac{i}{4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\left(-\frac{i}{c}\right)\mathrm{div}\mathbf{E} = \epsilon_0\mathrm{div}\mathbf{E}, \tag{152}$$

或是

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,y,z,t). \tag{153}$$

这就是我们要找的第四个麦克斯韦方程。

综上所述， N 个带电粒子的总作用量可以写作

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathrm{m}} + S_{\mathrm{mf}} + S_{\mathrm{f}} \\ &= -\sum_{n=1}^{N} m_{n0}c^2\int_a^b d\tau + \frac{1}{ic}\int\int\int\int_{R^4}\sum_{k=1}^{4}A_k J_k d\Omega \\ &+ \frac{i}{4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\int\int\int\int_{R^4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)d\Omega. \end{aligned} \tag{154}$$

这里， $d\Omega = dx_1dx_2dx_3dx_4$ 为四维空间的体积元， $\{A_k\}$ 代表四维矢势，其分量为

$$A_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = A_x(x,y,z,t), \quad A_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = A_y(x,y,z,t),$$
$$A_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = A_z(x,y,z,t), \quad A_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{i}{c}\Phi(x,y,z,t), \quad (155)$$

而电磁场强度张量定义为

$$F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j}. \quad (156)$$

需要说明一点的是，现在的四维电流密度

$$J_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = j_x(x,y,z,t), \quad J_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = j_y(x,y,z,t),$$
$$J_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = j_z(x,y,z,t), \quad J_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = ic\rho(x,y,z,t) \quad (157)$$

应该理解为是由 N 个带电粒子引起的总电流密度和电荷密度。利用 δ 函数的定义，我们可以将之写作

$$j_x(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{N} q_n v_{nx}(t)\delta(x-x_n(t))\delta(y-y_n(t))\delta(z-z_n(t)),$$
$$j_y(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{N} q_n v_{ny}(t)\delta(x-x_n(t))\delta(y-y_n(t))\delta(z-z_n(t)),$$
$$j_z(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{N} q_n v_{nz}(t)\delta(x-x_n(t))\delta(y-y_n(t))\delta(z-z_n(t)),$$
$$\rho(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{N} q_n \delta(x-x_n(t))\delta(y-y_n(t))\delta(z-z_n(t)). \quad (158)$$

依赖于这些记号，我们可以重新将麦克斯韦方程组写作

$$\frac{\partial F_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{jk}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_j} = 0, \quad (159)$$

以及

$$\frac{1}{ic}J_k(x_1,x_2,x_3,x_4) = i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial F_{ik}(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}. \quad (160)$$

顺便一提，我们在第二章中提到的洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t} = 0, \quad (161)$$

现在也可被改写作

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}+\frac{\partial A_4}{\partial x_4}=0. \tag{162}$$

显然，在洛伦兹变换下，这一约束条件的形式是不变的，即我们有

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A'_i(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)}{\partial x'_i}=0. \tag{163}$$

电动力学的拉格朗日量形式的价值在于它提供了一座从经典物理到量子物理的桥梁。利用狄拉克的正则量子化方法，人们可以先寻找一个经典物理方程所对应的拉格朗日量，然后引进正则广义动量和哈密顿量，加上量子化条件后，即可得到该体系的薛定谔方程 (Schrödinger equation)，完成这一过渡。作为一个例子，让我们考虑一个带电粒子在外加电磁场中的运动。

我们已经知道，在外加电磁场中，一个带电粒子 q 所满足的牛顿方程为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}(x_1,x_2,x_3,x_4)+q\mathbf{E}(x_1,x_2,x_3,x_4), \tag{164}$$

即本章中的公式 (38)。我们也看到，若将 (39) 式中给出的作用量

$$S=\int_a^b\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\mathbf{v}-q\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)dt \tag{165}$$

对其中的广义坐标 x_1,x_2,x_3 和 x_4 做变分，并对之使用 Maupertuis 原理，即可重新得到上面的运动方程。因此，一个一个带电粒子 q 在外加电磁场中运动所满足的牛顿方程对应的拉格朗日量为

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{v}-q\Phi(x,y,z,t), \tag{166}$$

即本章中的公式 (40)。接下来，我们写出广义动量。根据定义，广义动量的 x 分量为

$$\begin{aligned}P_x &= \frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial v_x}=\frac{\partial}{\partial v_x}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-q\Phi\right)\\ &= \frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+qA_x(x,y,z,t).\end{aligned} \tag{167}$$

同理，它的 y 分量和 z 分量分别为

$$P_y=\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+qA_y(x,y,z,t), \tag{168}$$

及

$$P_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_y(x,y,z,t). \tag{169}$$

现在，我们可以写出这个体系的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= v_x P_x + v_y P_y + v_z P_z - L = \frac{m_0 v_x^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 v_y^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 v_z^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &+ +q\mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{v} - q\mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{v} + q\Phi(x,y,z,t) \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\Phi(x,y,z,t) \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\Phi(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{170}$$

若我们仅仅考虑 $v \ll c$(非相对论) 的情况，则上式可被进一步简化为

$$H \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + q\Phi(x,y,z,t). \tag{171}$$

在略去常数项 $m_0 c^2$ 后，我们有

$$H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + q\Phi(x,y,z,t). \tag{172}$$

相应地，(167，(168) 和 (169) 式现在可以近似写作

$$P_x = m_0 v_x + qA_x(x,y,z,t),\ P_y = m_0 v_y + qA_y(x,y,z,t),\ P_z = m_0 v_z + qA_z(x,y,z,t). \tag{173}$$

必须强调一点的是，在哈密顿量 H 中出现的是广义坐标 x,y,z 和广义速度 v_x, v_y, v_z 。但按照定义，哈密顿量 H 应该是广义坐标 x,y,z 和广义动量 P_x, P_y, P_z 的函数。因此，我们还需用 P_x, P_y, P_z 替换掉 v_x, v_y, v_z 。为此，我们从 (173) 式中解出 v_x, v_y, v_z，并将之代入 H，由此得到

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{P_x - qA_x(x,y,z,t)}{m_0}\right)^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{P_y - qA_y(x,y,z,t)}{m_0}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{P_z - qA_z(x,y,z,t)}{m_0}\right)^2 + q\Phi(x,y,z,t) \\ &= \frac{1}{2m_0}(P_x - qA_x(x,y,z,t))^2 + \frac{1}{2m_0}(P_y - qA_y(x,y,z,t))^2 \\ &+ \frac{1}{2m_0}(P_z - qA_z(x,y,z,t))^2 + q\Phi(x,y,z,t) \\ &\equiv \frac{1}{2m_0}(\mathbf{P} - q\mathbf{A}(x,y,z,t))^2 + q\Phi(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{174}$$

若我们将坐标 x, y, z 和动量 P_x, P_y, P_z 视作算符，并对它们加上量子化对易关系

$$[\hat{x}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{I}, \tag{175}$$

则哈密顿量 H 亦可改写成算符

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m_0}(\hat{P}_x - q\hat{A}_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t))^2 + \frac{1}{2m_0}(\hat{P}_y - q\hat{A}_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t))^2 \\
&+ \frac{1}{2m_0}(\hat{P}_z - q\hat{A}_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t))^2 + q\hat{\Phi}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t) \\
&= \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - q\hat{A}_x(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t)\right)^2 + \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} - q\hat{A}_y(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t)\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} - q\hat{A}_z(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t)\right)^2 + q\hat{\Phi}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t).
\end{aligned} \tag{176}$$

这里，我们利用了动量算符在坐标表象中的表示

$$\hat{P}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{P}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{P}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{177}$$

最后，我们将哈密顿量算符代入薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,y,z,t), \tag{178}$$

这里，$\psi(x,y,z,t)$ 为描述带电粒子在外加电磁场中运动的波函数，从而得到

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\hat{\mathbf{A}}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t)\right)^2\psi(x,y,z,t) \\
&+ q\hat{\Phi}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},t)\psi(x,y,z,t).
\end{aligned} \tag{179}$$

这样，我们就完成了该体系的正则量子化过程。

第五章、连续媒介质中的麦克斯韦方程组

$ 5.1 束缚电荷和分子电流

在前四章中，我们讨论了在真空中的电动力学，介绍了其中麦克斯韦方程组的形式。但在实际问题中，我们遇到更多的是电磁波在物质 (或者说连续连续媒介质) 中传播的情况。在这一章中，我们要考虑由于连续媒介质的存在引起的对于麦克斯韦方程组的修正。

今天我们知道，物质是由原子组成的。而原子本身是由带正电荷的原子核以及带负电荷的电子构成的。这些电荷彼此之间的距离大约为 10^{-8} 厘米，而它们的个数 (在一克物质中) 大约为 10^{23} 。考虑到在多数情况下，我们所处理的电磁波的波长要远大于 10^{-8} 厘米 (以可见光为例，其波长大约为 $10^4\mathring{A}$ 的量级) ，我们可以略去物质的原子结构，而将之视作连续媒介质。这样做可以大大减少我们的计算量。

我们的出发点仍然是真空中的麦克斯韦方程组。仿照朗道和栗弗席兹的作法，我们用小写字母表示真空中的电磁场强度矢量，则这些方程可被写作

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{e}(\mathbf{r},t)=\tfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r},t), \qquad & \nabla\times\mathbf{e}(\mathbf{r},t)=-\tfrac{\partial\mathbf{b}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{b}(\mathbf{r},t)=0, \qquad & \nabla\times\mathbf{b}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\mu_0\epsilon_0\tfrac{\partial\mathbf{e}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1}$$

在引入连续媒介质后，其中的电子和原子核的运动都会对电荷密度 $\rho(\mathbf{r},t)$ 以及电流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ 带来影响，而这些影响无论是在空间尺度上还是时间尺度上都是存在剧烈涨落的。因此，不可避免的，我们需要对之进行统计处理。人们发现，在许多情况下仅需对电子和原子核的运动所带来的影响进行空间上的平均即可 [1] 。这一点从计算的角度看是十分重要的。事实上，对于涨落效应进行时间平均是一件困难的事情。为了克服这一困难，人们往往只能先将含时问题通过傅立叶变换 (Fourier transformation) 将之转换成一个以频率为自变量的问题，然后进行处理，而很少直接使用对于时间求平均的办法。因此，在下面的讨论中，若无特殊声明，对于各个物理的求平均将被理解为是指的对于空间中一个以 $\mathbf{r}$ 点为中心的宏观无穷小，但微观很大的区域 $\Delta\Omega(\mathbf{r})$ 进行的空间平均。例

[1] 较为详细的讨论可见 Charles Brau 所著 *Modern Problems in Classical Electrodynamics* (Oxford University Press, Oxford 2004) 一书的 283 页至 285 页上的叙述。

如，我们将电场强度矢量 $\mathbf{e}(\mathbf{r}',t)$ 对于空间自由度的平均值记作

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \equiv \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}',t)\rangle \equiv \frac{1}{V_{\Delta\Omega}} \int\int\int_{\Delta\Omega(\mathbf{r})} \mathbf{e}(x',y',z',t)dx'dy'dz'. \tag{2}$$

这里， $V_{\Delta\Omega}$ 为区域 $\Delta\Omega(\mathbf{r})$ 的体积。

对于麦克斯韦方程组中的方程求平均后，我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\langle\mathbf{e}(\mathbf{r}',t)\rangle = \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\langle\rho(\mathbf{r}',t)\rangle \equiv \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\rho}(\mathbf{r},t)\\
&\nabla\times\langle\mathbf{e}(\mathbf{r}',t)\rangle = \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\langle\mathbf{b}(\mathbf{r}',t)\rangle}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\rangle}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\langle\mathbf{b}(\mathbf{r}',t)\rangle = \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0,\\
&\nabla\times\langle\mathbf{b}(\mathbf{r}',t)\rangle = \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\langle\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\rangle + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\langle\mathbf{e}(\mathbf{r}',t)\rangle}{\partial t}\\
=\ & \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3}$$

要继续简化这些方程的关键一步在于意识到，出现在这些方程里的平均电荷密度 $\overline{\rho}(\mathbf{r},t)$ 和平均电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ 可以分为“自由的”和“束缚的”两部分，即我们有

$$\overline{\rho}(\mathbf{r},t) = \langle\rho(\mathbf{r}',t)\rangle = \overline{\rho}_f(\mathbf{r},t) + \overline{\rho}_b(\mathbf{r},t), \tag{4}$$

以及

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \langle\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\rangle = \mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) + \mathbf{J}_b(\mathbf{r},t). \tag{5}$$

为了说明这一分拆的合理性，让我们取连续媒介质静止的参照系为实验室系。那么，在这个参照系中，可以在介质中移动一个宏观尺度距离的电荷即称为“自由电荷”，由它们形成的电流即称为“自由电流”。与之对应的，只能局限在某个给定点 $\mathbf{r}$ 周围微观尺度区域内运动的电荷则称为“束缚电荷”，而由它们形成的电流则称为“束缚电流”。

为什么会出现束缚电荷和束缚电流呢？我们知道，在自然界存在两类电介质。一类介质的分子中的正电荷密度的中心和负电荷密度的中心相重合，没有固定的非零电偶极矩，例如氢气 (H_2) 分子，称为无极分子。而在另外一类介质的分子中的正电荷密度的中心和负电荷密度的中心不重合，从而导致一个固有的电偶极矩，例如水 (H_2O) 分子，称为极化分子。但即使是后者，在周围环境的温度不太低时，由于分子热运动的影响，各个极化分子的电偶极矩矢量也会是杂乱无章地取向的。这使得在整块连续媒介质内分

子的固有电偶极矩的平均值仍为零。但在有外加电场存在的情况下，无极分子中的正电荷和负电荷的位置会被移动，使得它们的密度中心不再重合，从而产生不为零的电偶极矩。而极化分子的固有电偶极矩的趋向则会发生改变，指向一个共同的方向。无论哪种情况，外加电场的引入都会诱导宏观电偶极矩分布的出现，导致一个非零的束缚电荷密度分布。 $\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)$ 。同理，介质分子中的电子运动会形成微观电流环。在没有外加磁场的情况下，它们各自的取向也是杂乱无章的，故不会形成宏观电流密度。而在有外加磁场的情况下，这些分子电流环的取向会变得一致，从而导致宏观电流密度，即束缚电流密度的出现。

若上述解释是合理的，我们期待束缚电荷密度 $\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)$ 将会与平均极化密度矢量

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\lim_{V_{\Delta\Omega}\to 0}\frac{\sum_i \mathbf{p}_i(t)}{V_{\Delta\Omega}} \tag{6}$$

有关。这里， $\mathbf{r}$ 为媒介质中的一点，而 $\Delta\Omega$ 是以 $\mathbf{r}$ 为中心的一个小区域， $V_{\Delta\Omega}$ 为它的体积。上式中的求和是对 $\Delta\Omega$ 中各个分子的电偶极矩进行的。而束缚电流密度 $\mathbf{J}_b(\mathbf{r},t)$ 将会与平均磁化密度矢量

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t)=\lim_{V_{\Delta\Omega}\to 0}\frac{\sum_i \mathbf{m}_i(t)}{V_{\Delta\Omega}} \tag{7}$$

有关。此式中的分子磁矩被定义作

$$\mathbf{m}_i = I_i\mathbf{a}_i = \text{第}i\text{个分子中的电流}\times\text{第}i\text{个分子中电流回路所围的面积矢量}. \tag{8}$$

下面，我们将推导这些关系 [2] 。

先考虑束缚电荷密度 $\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)$ 与极化密度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ 之间的关系。首先，电介质内部的全部的束缚电荷在有外加电场的情况下仍然满足中性条件，即

$$\int\int\int_{\Omega}\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)dxdydz=0. \tag{9}$$

这里， Ω 为电介质所占据的空间区域。另一方面，任取一个在区域 Ω 外为零的矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ ，我们都有

$$0=\oint\oint_{S_\Omega}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int\int\int_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)dxdydz. \tag{10}$$

[2] 摘自朗道和栗弗席兹著 “连续媒介质电动力学” 的第 6 节和第 27 节。

因此，

$$\int\int\int_{\Omega}\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)dxdydz=\int\int\int_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{A}(x,y,z,t)dxdydz=0 \tag{11}$$

成立。由此，我们期待可以将 $\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)$ 写成

$$\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)=\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{12}$$

的形式，而 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 是一个在区域 Ω 外为零的矢量场。我们要证明，这一猜想是对的，即我们有

$$\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)=-\mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{r},t), \tag{13}$$

而 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ 是电介质的极化密度矢量。

为此，让我们考虑积分

$$\mathcal{P}_{\text{偶极矩}}\equiv\int\int\int_{\Omega}\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t)\mathbf{r}dV\equiv\int\int\int_{\Omega}\overline{\rho}_b(x,y,z,t)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})dxdydz. \tag{14}$$

显然，$\mathcal{P}_{\text{偶极矩}}$ 可以解释作占据空间区域 Ω 的连续电媒介质的总电偶极矩。现将 (12) 式代入这一定义式后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\text{偶极矩}}=\int\int\int_{\Omega}\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})dxdydz\\
=&\int\int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial A_x(x,y,z,t)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x,y,z,t)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x,y,z,t)}{\partial z}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})dxdydz\\
=&\left(\int\int\int_{\Omega}x\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}x\frac{\partial A_y}{\partial y}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}x\frac{\partial A_z}{\partial z}dxdydz\right)\mathbf{i}\\
+&\left(\int\int\int_{\Omega}y\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}y\frac{\partial A_y}{\partial y}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}y\frac{\partial A_z}{\partial z}dxdydz\right)\mathbf{j}\\
+&\left(\int\int\int_{\Omega}z\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}z\frac{\partial A_y}{\partial y}dxdydz+\int\int\int_{\Omega}z\frac{\partial A_z}{\partial z}dxdydz\right)\mathbf{k}\\
=&\left(\int\int\int_{\Omega}x\frac{\partial A_x}{\partial x}dxdydz\right)\mathbf{i}+\left(\int\int\int_{\Omega}y\frac{\partial A_y}{\partial y}dxdydz\right)\mathbf{j}+\left(\int\int\int_{\Omega}z\frac{\partial A_z}{\partial z}dxdydz\right)\mathbf{k}\\
=&\left(-\int\int\int_{\Omega}A_xdxdydz\right)\mathbf{i}+\left(-\int\int\int_{\Omega}A_ydxdydz\right)\mathbf{j}+\left(-\int\int\int_{\Omega}A_zdxdydz\right)\mathbf{k}\\
=&\int\int\int_{\Omega}(-\mathbf{A}(x,y,z,t))dxdydz
\end{aligned} \tag{15}$$

显然，根据定义，$-\mathbf{A}(x,y,z,t))$ 可以解释作极化密度矢量，即

$$-\mathbf{A}(x,y,z,t)=\mathbf{P}(x,y,z,t) \tag{16}$$

成立。因此，我们证明了公式 (13) 。

接下来，我们考虑束缚电流密度 $\mathbf{J}_b(\mathbf{r},t)$ 与磁化密度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ 之间的关系。首先，我们注意到， $\mathbf{J}_b(\mathbf{r},t)$ 实际上可以分成两部分

$$\mathbf{J}_b(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}_b^{\mathrm{P}}(\mathbf{r},t)+\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(\mathbf{r},t). \tag{17}$$

其中第一项来自束缚电荷 (包括束缚电子和原子核的电荷) 的运动的贡献。取以媒介质中一点 $\mathbf{r}$ 为中心的一个小区域 $\Delta\Omega(\mathbf{r})$ ，则束缚束缚电流密度 $\mathbf{J}_b^{\mathrm{P}}(\mathbf{r},t)$ 可以写作

$$\mathbf{J}_b^{\mathrm{P}}(\mathbf{r},t)=\lim_{V_{\Delta\Omega(\mathbf{r})}\to 0}\frac{\sum_i q_i\mathbf{v}_i}{V_{\Delta\Omega(\mathbf{r})}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\lim_{V_{\Delta\Omega(\mathbf{r})}\to 0}\frac{\sum_i q_i\mathbf{r}_i}{V_{\Delta\Omega(\mathbf{r})}}\right)=\frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{18}$$

上式中的求和是对 $\Delta\Omega(\mathbf{r})$ 中的所有电荷 q_i 及其速度 $\mathbf{v}_i$ 进行的。而 $\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(\mathbf{r},t)$ 则是来自分子内部电子的环路运动形成的分子电流环的贡献。因此，对于媒介质内的任何一个封闭曲面 S ，我们期待

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S}=0 \tag{19}$$

成立。又利用高斯定理，我们得到

$$0=\oint\!\!\oint_S \mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S}=\int\int\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)dxdydz. \tag{20}$$

这导致了

$$\mathrm{div}\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)=0 \tag{21}$$

在媒介质内的每一点都成立。因此，我们期待 $\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)$ 可以写成

$$\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)=\nabla\times\mathbf{K}(x,y,z,t), \tag{22}$$

而 $\mathbf{K}(x,y,z,t)$ 是一个在连续媒介质外为零的矢量场。接下来，我们要证明， $\mathbf{K}(x,y,z,t)$ 实际上既是磁化密度矢量 $\mathbf{M}(x,y,z,t)$ 。

为此，让我们考虑积分

$$\mathcal{M}_{\text{磁偶极矩}}=\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)dxdydz. \tag{23}$$

显然，这是占据空间区域 Ω 的媒介质的总磁矩。将 (22) 式代入此式后，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{磁偶极矩}} &= \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(x,y,z,t)dxdydz\\ &= \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{K}(x,y,z,t))dxdydz.\end{aligned} \tag{24}$$

再利用矢量场满足的恒等式

$$\nabla(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{K}\cdot\nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K} + \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{K}) + \mathbf{K}\times(\nabla\times\mathbf{r}), \tag{25}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{K}) &= \nabla(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{K}\cdot\nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K} - \mathbf{K}\times(\nabla\times\mathbf{r}) \\
&= \nabla(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{K}\cdot\nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K} \\
&= \nabla(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{K} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K}.
\end{aligned} \tag{26}$$

将之代入 $\mathcal{M}_{\text{磁偶极矩}}$ 的表达式后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\text{磁偶极矩}} = \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{K})dxdydz \\
= \;& \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \nabla(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})dV - \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{K}dV - \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{K}dV \\
= \;& -\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{K}dV - \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \left(x\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial x} + y\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial y} + z\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial z}\right)dxdydz \\
= \;& -\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{K}dV + \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega (\mathbf{K}+\mathbf{K}+\mathbf{K})dxdydz \\
= \;& \int\int\int_\Omega \mathbf{K}(x,y,z,t)dxdydz.
\end{aligned} \tag{27}$$

因此，根据磁化密度矢量 $\mathbf{M}(x,y,z,t)$ 的定义，我们有

$$\mathbf{K}(x,y,z,t) = \mathbf{M}(x,y,z,t). \tag{28}$$

现在，让我们重新考虑方程组 (3) 。先看第一个方程。我们有

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\langle\rho(\mathbf{r}',t)\rangle = \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\rho}_f(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t). \tag{29}$$

将 (13) 式代入后，我们可以将之重写作

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\rho}_f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\mathbf{P}(\mathbf{r},t), \tag{30}$$

或是

$$\nabla\cdot(\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t)) = \overline{\rho}_f(\mathbf{r},t). \tag{31}$$

令

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}(\mathbf{r},t), \tag{32}$$

则上式化为

$$\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\overline{\rho}_f(\mathbf{r},t). \tag{33}$$

文献中， $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 被称为电感应强度矢量或电位移矢量。

当电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 不太强时，且连续媒介质是各向同性的，极化密度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ 一般可以写作

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\chi_e\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{34}$$

而 χ_e 被称为媒介质的极化率。由此，我们得到电感应强度矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 与电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 之间的关系

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\chi_e\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0(1+\chi_e)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{35}$$

比例系数 ϵ_r 被称为相对电容率，而比例系数 $\epsilon=\epsilon_r\epsilon_0$ 被称为媒介质的电容率 (或介电常数) 。当媒介质是各向异性的 (例如某些晶体) ，或者电场强度矢量较大时 (例如在激光场中) ，这一关系会比较复杂。在本课程中，我们不去讨论这些情况。

接下来，我们化简方程组 (3) 中的第四个方程。我们有

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=\mu_0\langle\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\rangle+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\\ &=\mu_0\left(\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)+\mathbf{J}_b^{\mathrm{P}}(\mathbf{r},t)+\mathbf{J}_b^{\mathrm{M}}(\mathbf{r},t)\right)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\\ &=\mu_0\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)+\mu_0\frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mu_0\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r},t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.\end{aligned} \tag{36}$$

将上式右边的第三项移项，并将第二项和第四项合并后，我们得到

$$\nabla\times(\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\mu_0\mathbf{M}(\mathbf{r},t))=\mu_0\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\right). \tag{37}$$

引入新的矢量场

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\equiv\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\mathbf{M}(\mathbf{r},t), \tag{38}$$

并利用电感应强度矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 的定义，我们可将此式重新写作

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{39}$$

在文献中， $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 被称为磁场强度矢量。当连续媒介质是各向同性的时，磁化密度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ 一般可以写作

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t)=\chi_m\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{40}$$

而 χ_m 被称为媒介质的磁化率。由此，我们得到磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 与磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 之间的关系

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\chi_m\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{41}$$

或是

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mu_r\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mu\mathbf{H}(\mathbf{r},t). \tag{42}$$

文献中， μ_r 被称为媒介质的相对磁导率，而 μ 则被称为媒介质的磁导率。

现将 (33) 式， (39) 式以及方程组 (3) 中的第二和三式合写在一起，我们最后得到修改后的在连续媒介质内的麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)&=\overline{\rho}_f(\mathbf{r},t), \qquad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\tfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=0, \qquad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)+\tfrac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.\end{aligned} \tag{43}$$

同时实验上也观察到， $\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)$ 是与电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 是成正比的，即

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)=\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{44}$$

σ 称为媒介质的电导率，而此公式称为欧姆定律，是由 Georg Ohm 于 1826 年提出的。

§ 5.2 电磁场的边值关系

我们上面所讨论的是在一个同质媒介质中电磁场的产生和传播的问题。在实际应用中，我们所遇到的情况往往是整个空间是由不同质的媒介质占据的，例如空气和水。此时，为了决定电磁场在空间的分布，除了解麦克斯韦方程之外，我们还需考虑在这些媒介质彼此之间的分界面上，电磁场强度矢量是如何改变的。

以电场强度矢量为例。我们考虑如教科书 25 页图 1-12 所示的一个横跨两种媒介质分界面的小盒子。将方程

$$\mathrm{div}\mathbf{D}(x,y,z,t)=\overline{\rho}_f(x,y,z,t) \tag{45}$$

的两边对于小盒子所占的区域 Ω 求积分，并使用高斯定理后，我们有

$$\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{D}(x,y,z,t)dxdydz = \oint\oint_{S} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_{\Omega} \overline{\rho}_f(x,y,z,t)dxdydz. \tag{46}$$

显然，当盒子的高度 h 以及上、下端面的半径 δ 都很小时，上式可以近似写作

$$\int\int_{\text{上表面}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} + \int\int_{\text{下表面}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} + \int\int_{\text{侧表面}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong \sigma_f(\mathbf{r},t)(\pi\delta^2) + Q_f. \tag{47}$$

这里， $\sigma_f(\mathbf{r},t)$ 为盒子中心处两种媒介质分界面上的自由面电荷密度，而 Q_f 为盒子内的体电荷密度的体积分。若我们规定，上表面处的外法线方向为正，侧表面的外法线方向记作 $\mathbf{t}$ ，则上式又可被进一步写作

$$D_{2n}(\pi\delta^2) - D_{1n}(\pi\delta^2) + D_t(2\pi\delta h) \cong \sigma_f(\mathbf{r},t)(\pi\delta^2) + Q_f. \tag{48}$$

现在，我们令 $h \to 0$ 。那么， $Q_f \to 0$ ，且上式左边的第三项亦趋近于零。因此，上式化简为

$$D_{2n}(\pi\delta^2) - D_{1n}(\pi\delta^2) \cong \sigma_f(\mathbf{r},t)(\pi\delta^2), \tag{49}$$

或是

$$D_{2n} - D_{1n} \cong \sigma_f(\mathbf{r},t). \tag{50}$$

我们再令 $\delta \to 0$ ，即可得到

$$D_{2n}(\mathbf{r},t) - D_{1n}(\mathbf{r},t) = \sigma_f(\mathbf{r},t). \tag{51}$$

此即联系两种不同媒介质中的电感应强度矢量的沿分界面的法向分量的边值关系。将类似的推导过程应用到方程

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{52}$$

我们立刻可得

$$B_{2n}(\mathbf{r},t) - B_{1n}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{53}$$

或是

$$B_{2n}(\mathbf{r},t) = B_{1n}(\mathbf{r},t). \tag{54}$$

也就是说，磁感应强度矢量在两种不同媒介质的分界面处的法向分量是连续的。

用同样的办法，我们也可以很容易地得到电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ，电极化密度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ ，磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 以及磁化密度矢量 $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ 在两种不同媒介质的分界面上的法向分量所满足的边值关系。以电极化密度矢量 $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ 为例。由于

$$\mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = -\overline{\rho}_b(\mathbf{r},t), \tag{55}$$

我们可以推得

$$P_{2n}(\mathbf{r},t) - P_{1n}(\mathbf{r},t) = -\sigma_b(\mathbf{r},t) \tag{56}$$

在两种不同媒介质的分界面处成立。

接下来，我们研究电磁场强度矢量在连续媒介质分界面上的切向分量所满足的边值条件。以磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 为例。将方程

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{57}$$

的两边沿教科书 27 页图 1-15 中所示的围到进行积分，并利用斯托克斯公式，我们得到

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int\int_S \nabla\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{J}_f\cdot d\mathbf{S} + \int\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}. \tag{58}$$

这里，S 代表由围道所界定的小矩形。若围道的长度为为 Δl ，宽度为 Δh ，当 $\Delta h \cong 0$ 时，我们近似有

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} &= \int_{C_1}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{H_1}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{H_2}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \\ &\cong J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t)\Delta l + J^t_{\rho f}(\mathbf{r},t)\Delta l + \int\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}.\end{aligned} \tag{59}$$

这里， $\mathbf{r}$ 代表小矩形中分界面上的一点，而 $J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t)\Delta l$ 和 $J^t_{\rho f}(\mathbf{r},t)\Delta l$ 分别为有由自由面电流密度的切向分量和自由体电流切向分量给出的贡献。

现在，我们令 $\Delta h \to 0$ 。由于磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 在分界面两边的媒介质中是有限的，电感应强度矢量 $\mathbf{D}$ 对时间的导数亦是有限的，故在此极限下上式可以简化为

$$\int_{C_1}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} \cong H_{2t}(\mathbf{r},t)\Delta l - H_{1t}(\mathbf{r},t)\Delta l \cong J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t)\Delta l, \tag{60}$$

或是

$$H_{2t}(\mathbf{r},t) - H_{1t}(\mathbf{r},t) \cong J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t). \tag{61}$$

再令 $\Delta l \to 0$ 后，我们得到

$$H_{2t}(\mathbf{r},t) - H_{1t}(\mathbf{r},t) = J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t). \tag{62}$$

此即磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 在两种不同媒介质的分界面上的切向分量所满足的边值关系。

类似的论证也可以应用到方程

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{63}$$

因此我们得到

$$E_{2t}(\mathbf{r},t) - E_{1t}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{64}$$

或是

$$E_{2t}(\mathbf{r},t) = E_{1t}(\mathbf{r},t). \tag{65}$$

引进自媒介质 1 指向媒介质 2 的单位法线矢量 $\mathbf{e}_n$ 后，这些边值关系可以写成如下的紧凑形式

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \qquad & \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = J^t_{\sigma f}(\mathbf{r},t), \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f(\mathbf{r},t), \qquad & \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

这些关系在解决实际的电磁场强度分布问题时是十分有用的。

例 5.1: 无穷大平行板电容器内有两层介质。正负金属板上均匀分布的自由电荷面密度分别为 σ_f 和 $-\sigma_f$ 。求介质内的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和束缚电荷密度 $\rho_b(\mathbf{r})$ 。

解: 从对称性的角度考虑问题，我们得出结论，无论是电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 还是电感应强度 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 在介质内的分布都应该是垂直于金属板的。将边值关系

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \tag{67}$$

应用于带正电荷的金属板，我们有

$$D_{\text{介质 1}} = D_{2n} = \sigma_f, \tag{68}$$

故在介质 1 内，

$$E_{\text{介质 1}} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_1} \tag{69}$$

成立。同理，在带负电荷的金属板附近，我们有

$$D_{\text{介质 }2} = -\sigma_f, \tag{70}$$

以及

$$E_{\text{介质 }2} = -\frac{\sigma_f}{\epsilon_2}. \tag{71}$$

又在远离带电极板的介质 1 和介质 2 内，方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(z) = \frac{\partial D_z(z)}{\partial z}\mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0}\overline{\rho}_f = 0 \tag{72}$$

都成立。因此，我们有 $D_z^{(1)} = C_1$ 和 $D_z^{(2)} = C_2$ 分别在介质 1 和介质 2 内成立。考虑到在两种媒介质的分界面上不存在自由电荷，故电感应矢量的法线方向的分量应该是连续的，故 $C_1 = C_2$ 成立。也就是说，我们有

$$D_{\text{介质 }1} = \epsilon_1 E_{\text{介质 }1} = D_{\text{介质 }2} = \epsilon_2 E_{\text{介质 }2}. \tag{73}$$

由此，我们解得

$$E_{\text{介质 }1} = \frac{D_{\text{介质 }1}}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_1}, \quad E_{\text{介质 }2} = \frac{D_{\text{介质 }2}}{\epsilon_2} = -\frac{\sigma_f}{\epsilon_2}. \tag{74}$$

因此，在两种媒介质的分界面上，我们有

$$\begin{aligned} \sigma_b &= -\left(P_{\text{介质 }2} - P_{\text{介质 }1}\right) = -P_{\text{介质 }2} + P_{\text{介质 }1} \\ &= -\left(D_{\text{介质 }1} - \epsilon_0 E_{\text{介质 }2}\right) + \left(D_{\text{介质 }1} - \epsilon_0 E_{\text{介质 }1}\right). \end{aligned} \tag{75}$$

由于 $D_{\text{介质 }1} = D_{\text{介质 }1}$，上式可被化简为

$$\sigma_b = \epsilon_0 E_{\text{介质 }2} - \epsilon_0 E_{\text{介质 }1} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)\sigma_f = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \tag{76}$$

而在介质 1 和带正电荷的金属板的分界面上，我们有

$$\sigma_b' = -\sigma_f + \epsilon_0 E_{\text{介质 }1} = -\sigma_f \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right). \tag{77}$$

同理，在介质 2 与带负电荷的金属板的分界面上，我们有

$$\sigma_b'' = \sigma_f - \epsilon_0 E_{\text{介质 }2} = \sigma_f \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right). \tag{78}$$

不难验证，

$$\sigma_b + \sigma_b' + \sigma_b'' = 0 \tag{79}$$

成立。也就是说，媒介质整体仍然保持电中性。

$ 5.3 连续媒介质中电磁场的能量和能量流

如同我们在第二章做过的，将方程 (57) 的两边与电场强度矢量做点乘后，我们得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{80}$$

再利用恒等式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) = -\nabla\cdot(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) + \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)), \tag{81}$$

可以将这一方程改写为

$$-\nabla\cdot(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) + \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{82}$$

将方程

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{83}$$

代入后，我们进一步得到

$$-\nabla\cdot(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) - \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{84}$$

将此式左边的两项移项到右边后给出

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)) + \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{J}_f(\mathbf{r},t) = 0. \tag{85}$$

将

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \tag{86}$$

代入此式后，我们最后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon}{2}E^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2\mu}H^2(\mathbf{r},t)\right) + \nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{J}_f(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{87}$$

如同真空时的情况，我们将

$$w = \frac{\epsilon}{2}E^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2\mu}B^2(\mathbf{r},t) \tag{88}$$

解释作媒介质中的电磁场能量密度，而将坡印亭矢量

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \tag{89}$$

解释作媒介质中的电磁场能量流密度， $\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$ 解释作电磁场对自由电荷做功的功率密度。它或者转化成电荷的动能，或者转化成焦耳热释放掉。

例 5.2: 同轴传输线内导线半径为 a ，外导线半径为 b 。两导线之间存在均匀绝缘介质。导线载有电流 I ，导线之间的电压为 U 。

(1) 忽略导线的电阻，计算绝缘介质中的电磁场能量流密度和传输功率；

(2) 考虑到内导线的有限电导率，计算通过内导线表面进入导线内的能量流密度，并证明它等于导线的损耗功率。

解: (1) 我们先求解电磁场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 。出于柱对称性的考虑，我们当有 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho)\mathbf{e}_\rho$ 。再利用高斯定理可以得到

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(\rho)\mathbf{e}_\rho = \frac{\sigma_f}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\rho, \quad a \le \rho \le b. \tag{90}$$

这里， σ_f 为内导线表面上的自由电荷面密度。因此，我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_f}{2\pi\epsilon\rho}\mathbf{e}_\rho, \quad a \le \rho \le b. \tag{91}$$

对于磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ，同样地，从对称性地考虑出发我们有

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(\rho)\mathbf{e}_\rho. \tag{92}$$

利用斯托克斯公式，若取一个 XY 平面内的以内导线轴心为圆心的，半径为 ρ 的圆周 C ，则我们得到

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H(\rho)(2\pi\rho) = \int\int_S \nabla\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \left(\mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} = I. \tag{93}$$

这里， S 为回路 C 的横截面。因此，我们有

$$H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}, \tag{94}$$

或是

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi. \tag{95}$$

现在，我们可以计算坡印亭矢量了。我们有

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\sigma_f}{2\pi\epsilon\rho}\mathbf{e}_\rho\right) \times \left(\frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi\right) = \frac{\sigma_f I}{4\pi^2\epsilon\rho^2}\mathbf{e}_z. \tag{96}$$

又由于两条导线之间的电势差为

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{\sigma_f}{2\pi\epsilon\rho}\mathbf{e}_\rho \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{\sigma_f}{2\pi\epsilon\rho}d\rho = \frac{\sigma_f}{2\pi\epsilon}\ln\frac{b}{a}, \tag{97}$$

我们可以解得

$$\sigma_f = \frac{2\pi\epsilon U_{ab}}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{98}$$

将之代入坡印亭矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们得到

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_f I}{4\pi^2\epsilon\rho^2}\mathbf{e}_z = \frac{2\pi\epsilon U_{ab}}{\ln\frac{b}{a}}\frac{I}{4\pi^2\epsilon\rho^2}\mathbf{e}_z = \frac{U_{ab}I}{2\pi\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho^2}\mathbf{e}_z. \tag{99}$$

由此导致的传输功率定义为

$$\begin{aligned} P &= \int\int_{\text{导体之间的横截面}} \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{U_{ab}I}{2\pi\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho^2}(2\pi\rho d\rho) \\ &= \int_a^b \frac{U_{ab}I}{2\pi\ln\frac{b}{a}}\frac{2\pi}{\rho}d\rho = \frac{U_{ab}I}{\ln\frac{b}{a}}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{U_{ab}I}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{a} = U_{ab}I. \end{aligned} \tag{100}$$

此式的右边既是众所周知的电路理论给出的传输功率的表达式。因此，我们看到在电路中能量实际上是由电磁场，而不是由电子的运动来传输的。

(2) 现在考虑内导线的电导率 σ 带来的影响。从欧姆定律，我们得到内导线中的电流密度为

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{r}) = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{e}_z = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{101}$$

因此，我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I}{\pi a^2\sigma}\mathbf{e}_z. \tag{102}$$

由于电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的切向分量在导体与媒介质的分界面上是连续的，故

$$E_z(\rho = a) = \frac{I}{\pi a^2\sigma} \tag{103}$$

成立。因此，坡印亭矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 除了 (96) 式中给出的部分外，还应该有一附加项 $\mathbf{S}_{\text{附加}}(\mathbf{r})$。它在内导线与媒介质的分界面处的值应为

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{附加}}(\rho=a) &= (E_z(\rho=a)\mathbf{e}_z)\times\mathbf{H}(\rho=a)\\ &= \left(\frac{I}{\pi a^2\sigma}\mathbf{e}_z\right)\times\left(\frac{I}{2\pi a}\mathbf{e}_\phi\right) = -\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\mathbf{e}_\rho.\end{aligned} \tag{104}$$

式中的负号表示这一部分能量是沿 ρ 的方向流进内导线的。因此，单位时间内流入一段长度为 L 的导线内部的能量为

$$\int\int_{\widetilde{S}}\left(-\mathbf{S}_{\text{附加}}(\rho=a)\right)\cdot d\mathbf{S} = \int_0^L\left(\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\right)(2\pi a)dl = I^2\frac{L}{\pi a^2\sigma}. \tag{105}$$

这里，$\widetilde{S}$ 为这段导线的外表面。考虑到因子 $R\equiv\frac{L}{\pi a^2\sigma}$ 恰是这段导线的电阻，故上式可被最后写作

$$\int\int_{\widetilde{S}}\left(-\mathbf{S}_{\text{附加}}(\rho=a)\right)\cdot d\mathbf{S} = I^2R. \tag{106}$$

这一结果告诉我们，单位时间内流入导线的能量被转换成焦耳热释放掉了。

第六章、静电场

$ 6.1 概论

在前五章中，我们介绍了经典电动力学的理论框架。从本章开始，让我们研究经典电动力学在一些特殊情况下的应用。首先，我们考虑电荷静止不动的情况。此时，系统中不存在电流，故磁场亦不存在。因此，麦克斯韦方程组退化为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}). \tag{1}$$

从第二章的讲解中，我们知道，第一个方程隐含着存在一个标量势 $\Phi(\mathbf{r})$，使得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\Phi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

成立。又利用关系式 $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})$，从第二个方程我们得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}). \tag{3}$$

再将 (2) 式代入后，我们得到有连续媒介质存在时的泊松方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}). \tag{4}$$

在此之前，让我们做一个注释。由于在静电学问题中磁场的缺失，代表电磁场能量流的坡印亭矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 恒为零。但其能量密度按照定义可写作

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\epsilon E^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

因此，在整个空间中，电场的总能量为

$$\begin{aligned} W &= \int\int\int_{R^3} w(\mathbf{r})dxdydz \\ &= \int\int\int_{R^3} \frac{1}{2}\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})dxdydz = -\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot (\nabla\Phi(\mathbf{r}))dxdydz \\ &= -\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}))\, dxdydz + \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \Phi(\mathbf{r})(\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}))dxdydz. \end{aligned} \tag{6}$$

对于上式中的第一项，我们可使用高斯定理，而对于第二项中的 $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})$，将之用 $\rho_f(\mathbf{r})$ 替换后得到

$$W = -\frac{1}{2}\oint\oint_{S_\infty} (\mathbf{D}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}))\, d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \Phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}))dxdydz. \tag{7}$$

当电荷是分布在一个有限的区域 Ω 中时，上式的第一项为零，故我们最后得到

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}))dxdydz. \tag{8}$$

现在，我们可以专注于如何求解静电学问题了。

$ 6.2 导体外的静电场

众所周知，所有的连续媒介质按照它们的电学性质，可以分成为两大类，既导体和绝缘体。前者和后者的区别在于，电场会在导体内引起电荷的运动，从而形成电流。从这一基本性质出发，我们可知，在电荷静止的情况下，导体内的电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 必须处处为零，否则会引起电荷的运动，产生电流。但电流在导体内的流动会导致焦耳热的释放，故不可能持久。另一方面，由于

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_b(\mathbf{r}) = 0, \tag{9}$$

以及 $\rho_b(\mathbf{r}) = 0$ 在导体内部成立，我们立刻可得

$$\rho_f(\mathbf{r}) = 0, \tag{10}$$

即自由电荷只能分布在导体表面。因此，有关导体的静电学问题就归结为确定导体外区域的电场分布和导体表面的电荷分布。

考虑到电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 在导体内为零，而靠近导体表面处的电场的切向分量又应该是连续改变的，我们立刻得到结论

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0 \tag{11}$$

在导体表面上成立。因此，在导体表面上，每一点处的电场强度矢量都应该是沿法线方向的。同时，由于 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ ，故在导体表面上， $\Phi(\mathbf{r})$ 应该为一个常数。也就是说，导体表面是静电势的一个等势面。

垂直于导体表面的电场分量和分布在导体表面上的电荷密度之间存在一个简单的比例关系。由于电感应矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 在两种媒介质分界面处的法线分量满足关系式

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f, \tag{12}$$

而在导体内

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = 0 \tag{13}$$

成立，故我们有

$$D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n} = \sigma_f, \tag{14}$$

或是

$$E_{2n} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_2}. \tag{15}$$

因此，导体上的全部电荷量为

$$Q = \oint\oint_S \epsilon_2 E_{2n} dS = \oint\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}. \tag{16}$$

这里， S 为包围导体的媒介质与导体之间的分界面。这些结论是我们在处理有关导体存在时的静电问题时所需注意的。

§ 6.3 静电学唯一性定理

如上所述，我们需要求解的静电学问题可以归结为在边条件

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) \tag{17}$$

以及

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r})}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r})}{\partial n} = -\sigma_f(\mathbf{r}) \tag{18}$$

下求解泊松方程

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}). \tag{19}$$

我们要证明，在某些条件下，若这一问题有解的话，解是唯一的。更为精确一点讲，我们有

唯一性定理：设在空间区域 Ω 内分布的体电荷密度 $\rho_f(\mathbf{r})$ 以及面电荷密度 $\sigma_f(\mathbf{r})$ 给定。又假设在 Ω 的边界面 $S = \partial\Omega$ 上，电势 $\Phi(\mathbf{r})\big|_S$，或 $\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n}\Big|_S$ 给定，那么静电学问题的解是唯一的。

证：为了简单起见，我们先考虑区域 Ω 内的媒介质为同质的情况。假设定理的结论不对，即存在至少两个方程 (19) 的解 $\Phi(\mathbf{r})$ 和 $\Psi(\mathbf{r})$。那么，二者之差

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \tag{20}$$

满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \nabla^2\Phi(\mathbf{r}) - \nabla^2\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}) - \left(-\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r})\right) = 0, \tag{21}$$

且在 Ω 的边界上有

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\Big|_S = \Phi(\mathbf{r})|_S - \Psi(\mathbf{r})|_S = 0, \tag{22}$$

以及

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_S = \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_S - \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_S = 0. \tag{23}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int\int_\Omega \epsilon\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\nabla^2\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})dxdydz \\ &= \oint\oint_S \epsilon\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})(\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{S} - \int\int\int_\Omega \epsilon(\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))\cdot(\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))dxdydz. \end{aligned} \tag{24}$$

又由于在边界上，条件 $\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\Big|_S = 0$ 或 $\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})}{\partial n}\Big|_S = 0$ 必有一个成立，故我们进一步得到

$$0 = -\int\int\int_\Omega \epsilon(\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))\cdot(\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))dxdydz \tag{25}$$

也就是说，

$$\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})) = 0. \tag{26}$$

这意味着

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) = \text{常数} \tag{27}$$

成立。换句话说，方程 (19) 的任意两个解最多只相差一个常数。但静电势函数附加上一个常数，对于由它决定的电场强度分布 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 并无影响，可以略去不计。

接下来，我们考虑区域 Ω 是由一些不同质的媒介质组成的情况。我们将第 i 种媒介质占据的区域记作 Ω_i ，即

$$\Omega = \cup_{i=1}^n \Omega_i. \tag{28}$$

而

$$0 = \sum_{i=1}^n \int\int\int_{\Omega_i} \epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla^2\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})dx_idy_idz_i \tag{29}$$

成立。若其中的某些区域，例如 Ω_k 是由导体占据的，那么与之有关的积分中的被积函数

$$\nabla^2\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r}) = \nabla^2\Phi_i(\mathbf{r}) - \nabla^2\Psi_i(\mathbf{r}) = 0. \tag{30}$$

因此，该积分实际上并不出现在求和中，既我们有

$$0 = \sum_{i=1}^{n}{}' \int\int\int_{\Omega_i} \epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla^2\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})dx_idy_idz_i \tag{31}$$

这里，$\sum'$ 表示已从求和中去除了导体占据的区域。接下来，我们对求和中的每一项做分部积分，并由此得到

$$0 = \sum_{i=1}^{n}{}' \oint\oint_{S_i} [\epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})]\cdot d\mathbf{S}_i - \sum_{i=1}^{n}{}' \int\int\int_{\Omega_i} \epsilon_i\left(\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\right)^2 dx_idy_idz_i. \tag{32}$$

我们要论证，上式中的第一个积分恒为零。为此，我们分别考虑两种情况。

(i) S_i 的一部分为 $S = \partial\Omega$ 的一部分。此时，由于 $\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\Big|_S = 0$ 或 $\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})}{\partial n}\Big|_S = 0$ 成立，故上式中第一个求和号中的相应的积分贡献为零。

(ii) S_i 的一部分为内边界，即存在一个区域 Ω_j，它和 Ω_i 共享这一分界面。此时，我们需要考虑两个积分的贡献之和

$$\Delta_{ij} = \oint\oint_{S_i'} [\epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})]\cdot d\mathbf{S}_i + \oint\oint_{S_j'} [\epsilon_j\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{r})]\cdot d\mathbf{S}_j. \tag{33}$$

这里，S_i' 和 S_j' 为区域 Ω_i 和区域 Ω_j 共享的那部分边界，只不过由于它们的外法线方向正好相反，故用不同记号标记。由于在这部分边界上，我们有 $\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r}) = \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{r})$ 以及 $d\mathbf{S}_i = -d\mathbf{S}_j$，故上式可以改写作

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \oint\oint_{S_i'} [\epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})]\cdot d\mathbf{S}_i + \oint\oint_{S_j'} [\epsilon_j\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{r})]\cdot(-d\mathbf{S}_i) \\ &= \oint\oint_{S_i'} \widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\left(\epsilon_i\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{\partial n} - \epsilon_j\frac{\partial\widetilde{\Phi}_j}{\partial n}\right) d\mathbf{S}_i. \end{aligned} \tag{34}$$

在分界面两边皆为绝缘体时，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \int\int_{S_i'} \widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\left[\left(\epsilon_i\frac{\partial\Phi_i(\mathbf{r})}{\partial n} - \epsilon_j\frac{\partial\Phi_j(\mathbf{r})}{\partial n}\right) - \left(\epsilon_i\frac{\partial\Psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} - \epsilon_j\frac{\partial\Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n}\right)\right] dS_i \\ &= \int\int_{S_i'} \widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\left[-\sigma_{if}(\mathbf{r}) - (-\sigma_{if}(\mathbf{r}))\right] dS_i = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

而当分界面的两边分别被绝缘体和导体占据时，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \int\int_{S_i'}\left(\epsilon_i\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\right)\cdot d\mathbf{S}_i = \epsilon_i\widetilde{\Phi}_i\int\int_{S_i'}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})}{\partial n}dS_i \\ &= \epsilon_i\widetilde{\Phi}_i\left(\int\int_{S_i'}\frac{\partial\Phi_i(\mathbf{r})}{\partial n}dS_i - \int\int_{S_i'}\frac{\partial\Psi_i(\mathbf{r})}{\partial n}dS_i\right) \\ &= \epsilon_i\widetilde{\Phi}_i\left(\int\int_{S_i'}[\sigma_f(\mathbf{r}-\sigma_f(\mathbf{r})]\right)dS_i = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

因此，(32) 式中的第一项在定理给定的条件下恒为零，而我们也由此得到

$$\sum_{i=1}^{n}{}'\int\int\int_{\Omega}\epsilon_i\left(\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})^2\right)dxdydz = 0. \tag{37}$$

如上所述，它隐含着泊松方程的两个解 $\Phi(\mathbf{r})$ 和 $\Psi(\mathbf{r})$ 之间最多差一个常数。

在解决实际问题时，往往给定的不是导体表面的面电荷密度 $\sigma_f(\mathbf{r})$，而是导体带的总电荷 Q_f。即便如此，唯一性定理仍然成立。这是由于此时 (32) 式中求和的第一项仍然为零。实际上，重复上面的论证，我们看到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}{}'\oint\oint_{S_i}\epsilon_i\left(\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}_i(\mathbf{r})\right)\cdot d\mathbf{S}_i \\ =\ &\epsilon_1\widetilde{\Phi}_1\Big|_{S_1'}\int\int_{S_1'}\frac{\partial\widetilde{\Phi_1}}{\partial n}\,dS + \epsilon_2\widetilde{\Phi}_2\Big|_{S_2'}\int\int_{S_2'}\frac{\partial\widetilde{\Phi_2}}{\partial n}\,dS + \epsilon_3\widetilde{\Phi}_3\Big|_{S_3'}\int\int_{S_3'}\frac{\partial\widetilde{\Phi_3}}{\partial n}\,dS. \end{aligned} \tag{38}$$

这里，为了简化问题，我们假设区域 Ω 内只有一个导体，它被三种不同的媒介质 1，2 和 3 所包围，分别共享边界 S_1'，S_2' 和 S_3'。由于导体在静电的情况下是等势面，故我们有

$$\widetilde{\Phi}_1\Big|_{S_1'} = \widetilde{\Phi}_1\Big|_{S_1'} = \widetilde{\Phi}_1\Big|_{S_1'} = K. \tag{39}$$

K 为一个常数。又由于

$$\epsilon_i\,\frac{\partial\widetilde{\Phi_i}}{\partial n}\bigg|_{S_i'} = \epsilon_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\bigg|_{S_i'} - \epsilon_i\frac{\partial\Psi_i}{\partial n}\bigg|_{S_i'} = \sigma_f^{\Phi_i}(\mathbf{r}) - \sigma_f^{\Psi_i}(\mathbf{r}), \quad i = 1,2,3, \tag{40}$$

我们可得

$$\sum_{i=1}^{n}{}'\oint\oint_{S_i}\epsilon_i(\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\nabla\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{S}_i = K\int\int_{S_1'}(\sigma_f^{\Phi_1}(\mathbf{r}) - \sigma_f^{\Psi_1}(\mathbf{r}))\,dS$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad K\int\!\!\int_{S_2'}(\sigma_f^{\Phi_2}(\mathbf{r})-\sigma_f^{\Psi_2}(\mathbf{r}))\,dS + K\int\!\!\int_{S_3'}(\sigma_f^{\Phi_3}(\mathbf{r})-\sigma_f^{\Psi_3}(\mathbf{r}))\,dS \\
&= \quad K\left(\int\!\!\int_{S_1'}\sigma_f^{\Phi_1}(\mathbf{r})\,dS_1+\int\!\!\int_{S_2'}\sigma_f^{\Phi_2}(\mathbf{r})\,dS_2+\int\!\!\int_{S_3'}\sigma_f^{\Phi_3}(\mathbf{r})\,dS_3\right) \\
&- \quad K\left(\int\!\!\int_{S_1'}\sigma_f^{\Psi_1}(\mathbf{r})\,dS_1+\int\!\!\int_{S_2'}\sigma_f^{\Psi_2}(\mathbf{r})\,dS_2+\int\!\!\int_{S_3'}\sigma_f^{\Psi_3}(\mathbf{r})\,dS_3\right) \\
&= \quad K(Q_f-Q_f)=0. \qquad (41)
\end{aligned}
$$

因此，静电学的唯一性定理仍然成立。

静电学问题解的唯一性定理给予了我们很大的灵活性。换句话说，无论我们用什么办法找到一个势函数 $\Phi(\mathbf{r})$，它在区域 Ω 内满足给定的泊松方程，又在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足给定的边界条件，那么它就一定是该静电学问题的唯一解。下面，让我们来看几个具体的例子。

例 6.1: 一根均匀带电的无限长直线的电荷密度为 τ。求空间中的电势分布。

解：可以先用高斯定理求出电场强度的分布为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{e}_r. \qquad (42)$$

再根据 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 与 $\Phi(\mathbf{r})$ 之间的关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\Phi(\mathbf{r})=-\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial r}\mathbf{e}_r \qquad (43)$$

得到

$$\Phi(\mathbf{r})=-\int\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}+C=-\int\left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}\right)dr+C=-\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\ln r+C. \qquad (44)$$

若我们取 $r=R_0$ 处电势的值为 $\Phi(R_0)=0$，则有

$$C=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\ln R_0. \qquad (45)$$

代入 $\Phi(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们最后有

$$\Phi(r)=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_0}{r}. \qquad (46)$$

例 6.2: 如教科书 46 页上图 2-4 所示的两个同心导体球壳之间充以两种不同的媒介质。其中，左半部分的媒介质的电容率为 ϵ_1，而右半球中的媒介质的电容率为 ϵ_2。设

内外球壳分别带总电量为 Q 和 $-Q$ 的电荷，且外球壳接地。求两个球壳之间的电场强度分布 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和球壳上的电荷密度分布 $\sigma_f(\mathbf{r})$ 。

解：在球壳之间，拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0 \tag{47}$$

成立，且 $\Phi(\mathbf{r})$ 为一连续函数。又在两种媒介质的分界面上，我们有

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n}. \tag{48}$$

若假设

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{A}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{B}{r^3}\mathbf{r}, \tag{49}$$

则拉普拉斯方程显然满足。又从边值关系 $E_{2t} = E_{1t}$ ，我们立刻可得

$$A = B, \tag{50}$$

而第二个边值 $D_{2n} = D_{1n}$ 亦自动满足。

由于内导体上的总电荷量为 Q ，我们应有

$$\begin{aligned} Q &= \oint\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int\!\!\int_{S_1} \epsilon_1\mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{S} + \int\!\!\int_{S_2}\epsilon_2\mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{S} \\ &= \int\!\!\int_{S_1}\epsilon_1\frac{A}{a^3}a\left(a^2\sin\theta d\theta d\varphi\right) + \int\!\!\int_{S_2}\epsilon_2\frac{A}{a^3}a\left(a^2\sin\theta d\theta d\varphi\right) \\ &= \epsilon_1 A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi + \epsilon_2 A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \\ &= 2\pi\epsilon_1 A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta + 2\pi\epsilon_2 A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta \\ &= 2\pi A(\epsilon_1+\epsilon_2). \end{aligned} \tag{51}$$

由此我们解得

$$A = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}. \tag{52}$$

将之代入电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, & \text{在左半部分;} \\ \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, & \text{在右半部分.} \end{cases} \tag{53}$$

此解满足唯一性定理所要求的所有条件，故是所要求的解。再利用 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$，我们可得在左半部分和右半部分内球表面处的面电荷密度分布为

$$\sigma_{1f}=D_{1n}=\epsilon_1 E_{1n}=\frac{\epsilon_1 Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)a^2},\quad \sigma_{2f}=D_{2n}=\epsilon_2 E_{2n}=\frac{\epsilon_2 Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)a^2}. \tag{54}$$

例 6.3: 电容率为 ϵ 的介质球被置于均匀外电场 $\mathbf{E}=E_0\mathbf{k}$ 中。求球内外的电势分布 $\Phi_{内}(\mathbf{r})$ 和 $\Phi_{外}(\mathbf{r})$。

解: 设球的半径为 R。由于体系具有球对称性，故我们可取球坐标系，同时将拉普拉斯方程写作

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0. \tag{55}$$

注意到所谓球谐函数

$$Y_{LM}(\theta,\varphi),\quad L=0,1,2,\ldots,\ -L\le M\le L \tag{56}$$

满足如下的微分等式

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y_{LM}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{LM}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=-L(L+1)Y_{LM}(\theta,\varphi), \tag{57}$$

我们可以利用分离变量法来求解此一方程，即令

将之代入拉普拉斯方程后，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}r^2\frac{\partial R_L(r)}{\partial r}Y_{LM}+\frac{R_L(r)}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y_{LM}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{LM}}{\partial\varphi^2}\right)\\ =\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R_L(r)}{\partial r}Y_{LM}(\theta,\varphi)-\frac{1}{r^2}L(L+1)R_L(r)Y_{LM}(\theta,\varphi)=0,\end{aligned} \tag{58}$$

或是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R_L(r)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}L(L+1)R_L(r)=0. \tag{59}$$

现令 $R_L(r)=r^S$，则我们有 $R'_L(r)=Sr^{S-1}$。代入上式后，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2(Sr^{S-1})-L(L+1)r^{S-2}=\frac{1}{r^2}S\frac{dr^{S+1}}{dr}-L(L+1)r^{S-2}\\ =\ &S(S+1)r^{S-2}-L(L+1)r^{S-2}=0,\end{aligned} \tag{60}$$

或是

$$S(S+1) = L(L+1). \tag{61}$$

由此，我们解得

$$S_1 = L, \quad S_2 = -(L+1). \tag{62}$$

对应的解为

$$R_L^{(1)}(r) = r^L, \quad R_L^{(2)}(r) = \frac{1}{r^{L+1}}. \tag{63}$$

根据微分方程理论，方程 (59) 的通解当为

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{L=0}^{\infty}\sum_{M=-L}^{M}\left(a_{LM}r^L + b_{LM}\frac{1}{r^{L+1}}\right)Y_{LM}(\theta,\varphi). \tag{64}$$

现在回到我们的问题。从对称性的角度考虑问题，电势分布 $\Phi(r,\theta,\varphi)$ 应该是与角度 φ 无关的，即 $\Phi(r,\theta,\varphi) = \Phi(r,\theta)$ 成立。因此，上式中的 M 应该取作零。这使得电势分布函数可以简写为

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} \Phi_1(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty}\left(a_L r^L + b_L\frac{1}{r^{L+1}}\right)P_L(\cos\theta), & r > R_0; \\ \Phi_2(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty}\left(c_L r^L + d_L\frac{1}{r^{L+1}}\right)P_L(\cos\theta), & r < R_0. \end{cases} \tag{65}$$

这里，我们用到了等式 $Y_{L0}(\theta,\varphi) = P_L(\cos\theta)$ ，而 $P(x)$ 称为勒让德多项式 (Legender polynomial) ，其定义如下

$$P(x) = \frac{1}{2^L L!}\frac{d^L}{dx^L}(x^2-1)^L. \tag{66}$$

我们接下来的任务就是要利用边值条件来决定两式中的展开系数 a_L ， b_L ， c_L 和 d_L 。

首先，我们注意到， $\Phi_2(r,\theta)$ 在球心，即 $r=0$ 处应取一有限值。这导致 $d_L = 0$ 。其次，当 $r \to \infty$ 时，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 应该趋向于介质球不存在时的外电场强度矢量 $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{k}$ ，而后者在空间一点 $\mathbf{r}$ 处沿矢径方向的分量为 $E_{r0} = E_0\cos\theta$ 。因此，对于 $\Phi_1(r,\theta)$ ，我们应有

$$\begin{aligned} E_{1r}(r,\theta) &= -\frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(r,\theta) = -\frac{\partial}{\partial r}\sum_{L=0}^{\infty}\left(a_L r^L + b_L\frac{1}{r^{L+1}}\right)P_L(\cos\theta) \\ &= \sum_{L=0}^{\infty}\left(-a_L L r^{L-1} + b_L(L+1)\frac{1}{r^{L+2}}\right)P_L(\cos\theta) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} E_0\cos\theta. \end{aligned} \tag{67}$$

比较上式的两边后，我们看到 $a_L = 0$ ，若 $L = 0, 2, 3, \cdots$ ，而

$$-a_1 = E_0. \tag{68}$$

因此，我们可以将 $\Phi_1(r,\theta)$ 和 $\Phi(r,\theta)$ 重新写作

$$\begin{aligned} \Phi_1(r,\theta) &= -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{L=0}^{\infty} b_L \frac{1}{r^{L+1}} P_L(\cos\theta) \\ &= -E_0 r\cos\theta + \sum_{L=0}^{\infty} b_L \frac{1}{r^{L+1}} P_L(\cos\theta), \end{aligned} \tag{69}$$

以及

$$\Phi_2(r,\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} c_L r^L P_L(\cos\theta). \tag{70}$$

接下来，我们考虑在介质球表面处的边值关系。我们要求电势 Φ 是连续的，而电感应强度矢量 $\mathbf{D}$ 的法向分量是连续的，即

$$\Phi_1(r = R_0,\theta) = \Phi_2(r = R_0,\theta), \quad -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi_1(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=R_0} = -\epsilon \left.\frac{\partial \Phi_2(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=R_0} \tag{71}$$

成立。将 $\Phi_1(r,\theta)$ 和 $\Phi_2(r,\theta)$ 的表达式代入后，我们有

$$\begin{aligned} &-E_0 R_0 P_0(\cos\theta) + \sum_{L=0}^{\infty} b_L \frac{1}{R_0^{L+1}} P_L(\cos\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} c_L R_0^L P_L(\cos\theta), \\ &-\epsilon_0 E_0 R_0 P_0(\cos\theta) - \sum_{L=0}^{\infty} \epsilon_0 b_L \frac{L+1}{R_0^{L+2}} P_L(\cos\theta) = \epsilon \sum_{L=0}^{\infty} c_L L R_0^{L-1} P_L(\cos\theta). \end{aligned} \tag{72}$$

先比较上式两边 $P_0(\cos\theta)$ 的系数，我们有

$$\frac{b_0}{R_0} = c_0, \quad \epsilon_0 \frac{b_0}{R_0^2} = 0, \tag{73}$$

并由此得到 $b_0 = c_0 = 0$ 。再比较 $P_1(\cos\theta)$ 的系数，我们又有

$$-E_0 R_0 + \frac{b_1}{R_0^2} = c_1 R_0, \quad -\epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 \frac{2b_2}{R_0^3} = \epsilon c_1. \tag{74}$$

由此我们解得

$$b_1 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 R_0^3, \quad c_1 = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0. \tag{75}$$

接下来，我们考虑 $L=2$ 的情况。通过比较方程两边 $P_2(\cos\theta)$ 的系数，我们得到

$$\frac{b_2}{R_0^3}=c_2R_0^2,\quad -\epsilon_0\frac{3b_2}{R_0^3}=2\epsilon c_2R_0, \tag{76}$$

并由此解得

$$b_2=c_2=0. \tag{77}$$

以此类推，不难验证

$$b_L=c_L=0 \tag{78}$$

当 $L\neq 1$ 时皆成立。将这些结果代入方程 (69) 和方程 (70) 后，我们最后得到

$$\Phi_1(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0\frac{R_0^3}{r^2}\cos\theta,\quad \Phi_2(r,\theta)=-\frac{3\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}E_0r\cos\theta. \tag{79}$$

对于这些结果，我们可以给予如下的解释。在介质球内，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 现在为

$$E_r=-\frac{\partial\Phi_2(r,\theta)}{\partial r}=\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0\cos\theta\leq E_0\cos\theta=E_{0r}. \tag{80}$$

这是由于在介质球被外电场极化后在左半球产生负的束缚电荷的缘故。这些电荷产生的附加电场正好与外电场方向相反，使得总电场变弱。此时，介质球的极化强度为

$$\mathbf{p}=\chi\epsilon_0\mathbf{E}=(\epsilon-\epsilon_0)\mathbf{E}=\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}3\epsilon_0\mathbf{E}_0, \tag{81}$$

而介质球的总电偶极矩为

$$\mathbf{P}=\frac{4\pi}{3}R_0^3\mathbf{p}=\frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}4\pi\epsilon_0R_0^3\mathbf{E}_0. \tag{82}$$

我们下面会论证，一个位于原点的电偶极子所产生的电势为

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}. \tag{83}$$

因此，(79) 式中 $\Phi_1(r,\theta)$ 的第二项恰为介质球电偶极矩在球外所产生的电势。

例 6.4: 试求导体表面上一个细锥形尖端附近的电场强度分布。

解: 我们选用球坐标系，原点取在圆锥尖点处，z 轴为圆锥尖的对称轴。设圆锥体的张开角度为 $\theta_0\ll 1$ 。于是导体外的区域为 $\theta_0\leq\theta\leq\pi$ 的取值范围。在导体内，我们有 $\Phi_1(\mathbf{r})=0$ ，而在导体外，电势满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi_2(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi_2(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi_2(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0, \tag{84}$$

以及边条件 $\Phi_2(r,\theta=\theta_0,\varphi)=0$ 。考虑到圆锥所具有的对称性， $\Phi_2(r,\theta,\varphi)$ 应与角度 φ 无关，故拉普拉斯方程退化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi_2(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi_2(r,\theta)}{\partial\theta}=0. \tag{85}$$

利用分离变量法，我们令 $\Phi_2(r,\theta)=R(r)f(\theta)$ ，则上式化为

$$\frac{f(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{R(r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}=0, \tag{86}$$

或是

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}=-\frac{1}{f(\theta)}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\right)=n(n+1). \tag{87}$$

同时我们要求 $f(\theta_0)=0$ 。

方程 (87) 可以改写成两个联立的方程

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}=n(n+1)R(r), \tag{88}$$

和

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}+n(n+1)f(\theta)=0. \tag{89}$$

对于第一个方程，若令 $R(r)=r^S$ ，则

$$S(S+1)=n(n+1) \tag{90}$$

成立。由此我们得到

$$R_1(r)=r^n,\quad R_2(r)=r^{-(n+1)}=\frac{1}{r^{n+1}}. \tag{91}$$

又由于我们期待，当 $r\to\infty$ 时 $R(r)\to 0$ ，故对于 $n\geq 0$ ，只有第二个解有意义。

接下来，我们考虑方程 (89) 的解。精确求解这一方程是一件困难的事情。但由于我们只关心电势 $\Phi_2(r,\theta)$ 在原点附近的行为，故可以做一些合理的近似，以简化问题。首先，根据实验结果，我们可以认为 $n\ll 1$ 。这样一来，方程 (89) 就可简化为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}+nf(\theta)\cong 0. \tag{92}$$

其次，在圆锥尖的周围的全部区域，电势应是一个缓变函数。因此，我们可以令

$$f(\theta) = C(1 + \psi(\theta)). \tag{93}$$

这里， $\psi(\theta)$ 是一个满足条件 $|\psi(\theta)| \ll 1, \theta_0 \leq \theta \leq \pi$ 的缓变函数。将之代入方程后，我们有

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial C(1+\psi(\theta))}{\partial\theta} + nC(1+\psi(\theta)) = \frac{C}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta} + nC \cong 0, \tag{94}$$

或是

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta} + n \cong 0, \tag{95}$$

这是一个二阶常微分方程。根据常微分方程理论，它应该有两个线性无关的解，而其它的解则是这两个解的线性叠加。可以直接验证，两个线性无关的解为

$$\psi_1(\theta) = n\ln\sin\theta, \quad \psi_2(\theta) = 2n\ln\sin\frac{\theta}{2}, \tag{96}$$

或是

$$f_1(\theta) = 1 + n\ln\sin\theta, \quad f_2(\theta) = 1 + 2n\ln\sin\frac{\theta}{2}. \tag{97}$$

又考虑到，在 $\theta = \pi$ 处，电势 $\Phi_2(r,\theta)$ 应为有界的，故只有 $f_2(\theta)$ 是合理的，即我们取

$$f(\theta) = f_2(\theta) = 1 + 2n\ln\sin\frac{\theta}{2}. \tag{98}$$

而待定常数 n 由边条件

$$f(\theta = \theta_0) = 1 + 2n\ln\sin\frac{\theta_0}{2} = 0 \tag{99}$$

来决定。我们解得

$$n = -\frac{1}{2\ln\sin\frac{\theta_0}{2}} \cong -\frac{1}{2\ln\frac{\theta_0}{2}} = \frac{1}{2\ln\frac{2}{\theta_0}}. \tag{100}$$

因此，我们最后得到圆锥点附近的电势分布为

$$\Phi_2(r,\theta) \cong \frac{C}{r^{n+1}}\left(1 + 2n\ln\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad n = \frac{1}{2\ln\frac{2}{\theta_0}}, \tag{101}$$

而

$$E_r(r,\theta) = -\frac{\partial \Phi_2(r,\theta)}{\partial r} \cong \frac{C(n+1)}{r^{n+2}} \left(1 + 2n \ln \sin \frac{\theta}{2}\right) \cong \frac{C}{r^2} \left(1 + \frac{1}{\ln \frac{2}{\theta_0}} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (102)$$

也就是说，在圆锥尖点附近，电场强度大约为 $\frac{1}{r^2}$ 的量级。这就解释了尖端放电的现象。至于常数 C ，则需给定导体的总的带电量才可决定。

例 6.5: 接地无限大平面导体附近有一点电荷 q ，求整个空间中的电场强度分布 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。

解：我们设导体的表面位于 $x-y$ 平面上，而电荷 q 位于空间点 $\mathbf{r} = (0,0,a)$ 处。从物理上讲，在点电荷 q 的作用下，导体会感生出与 q 的符号相反的电荷，且这些电荷应分布在导体的表面上，形成面电荷密度 $\sigma_f(x,y,0)$ 。当然，我们可以通过求解泊松方程来求出电势在上半空间中的分布，再利用 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ 来导出电场强度分布。但这样做是十分困难的。利用静电学的唯一性定理，我们看到了另外一种可能性：考虑到在上半空间中电荷分布已知，故若能在下半空间引入一些“虚拟”电荷，使得它们与真实电荷 q 一起在边界，即 $x-y$ 平面上共同产生所要求的边条件 $\Phi(x,y,0) = 0$ ，那么这些位于下半空间中的虚拟电荷与位于上半空间的真实电荷一起在上半空间 (不是在下半空间) 中产生的电场强度分布就会与真实的电场强度分布完全一样 (之所以将这些分布在下半空间中的电荷称为“虚拟”的，是由于在真实的物理体系中，下半空间中除了在导体表面处，其它地方的电荷分布一定恒为零) 。这样利用静电学的唯一性定理，通过引入虚拟电荷来解决静电学问题的方法在文献中被笼统地称为镜像法。

针对我们的问题而言，可以在下半空间的 $\mathbf{r}' = (0,0,-a)$ 处引入一个虚拟电荷 $-Q$ 。这样一来，真实电荷 Q 与虚拟电荷 $-Q$ 一起在导体表面上产生的电势为

$$\Phi(x,y,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(-a)^2}} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = 0, \quad (103)$$

是与真实物理体系中的边界条件吻合的。因此，二者在上半空间中产生的电势亦是真实的电势分布

$$\Phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}. \quad (104)$$

而相应的电场强度矢量分布则由 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ 给出。特别是我们有

$$\begin{aligned} E_z(x,y,z) &= -\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z} \\ &= \frac{Q(z-a)}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}} - \frac{Q(z+a)}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{105}$$

在 $z=0$ 处，我们有

$$E_z(x,y,0) = -\frac{2aQ}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{aQ}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}. \tag{106}$$

另一方面，由导体表面处的边值 $D_n = \sigma_f$ ，我们有

$$D_n(x,y,0) = \epsilon_0 E_z(x,y,0) = \sigma_f(x,y,0). \tag{107}$$

由此我们得到

$$\sigma_f(x,y,0) = -\frac{aQ}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}. \tag{108}$$

注意到，面电荷密度 $\sigma_f(x,y,0)$ 的符号正好与 Q 相反，即感应电荷与 Q 反号。进一步，若将 $\sigma_f(x,y,0)$ 对于整个导体表面积分的话，我们有

$$\begin{aligned} Q_{\text{感生}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma_f(x,y,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(-\frac{aQ}{2\pi(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} \right) \\ &= \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{aQ}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}} \right) = -aQ \int_0^{\infty} r dr \frac{1}{(r^2+a^2)^{3/2}} \\ &= -aQ \left. \frac{-1}{\sqrt{r^2+a^2}} \right|_0^{\infty} = -Q, \end{aligned} \tag{109}$$

即导体表面上感生出来的总电荷恰好为 $-Q$ 。

例 6.6: 有一点电荷 Q 位于距离两种无限大不同质媒介质的分界面为 a 处。试求它所产生的电场强度分布。

解: 如同上题，我们将两种媒介质的分解面取作平面 $z=0$ ，而将电荷 Q 置于空间 $\mathbf{r} = (0,0,a)$ 处。我们假设 Q 周围的媒介质电容率为 ϵ_1 ，而另一种媒介质的电容率为 ϵ_2 。很自然地，我们可以将电势在无穷远处的值取为零。由于空间中不存在导体，在两种媒介质的分界面处边值条件

$$\Phi_1(x,y,0) = \Phi_2(x,y,0), \quad \epsilon_1 \left. \frac{\partial\Phi_1(x,y,z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \epsilon_2 \left. \frac{\partial\Phi_2(x,y,z)}{\partial z} \right|_{z=0} \tag{110}$$

应该成立。根据静电学的唯一性定理，这一问题的解是唯一的。换句话说，只要我们在下半空间引入适当的虚拟电荷分布，使得两种媒介质分界面上的边值条件得以满足，那么在全空间中的电势分布以及电场强度分布也就唯一地决定下来了。

我们先在下半空间的 $\mathbf{r}' = (0, 0, -a)$ 处引虚拟电荷 Q' 。那么，在上半空间中各点处的电势即为

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}. \tag{111}$$

接下来，我们考虑下半空间中的电势分布。我们现在 $\mathbf{r} = (0, 0, a)$ 处引入一个虚拟电荷 $\widetilde{Q}$ ，并假设这一区域内的电势分布完全是由 $\widetilde{Q}$ 产生的，即

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{\widetilde{Q}}{4\pi\epsilon_2\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}. \tag{112}$$

将 $\Phi_1(x, y, z)$ 和 $\Phi_2(x, y, z)$ 代入边值条件后，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{Q}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\widetilde{Q}}{4\pi\epsilon_2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ &\frac{-\epsilon_1 Q(-a)}{4\pi\epsilon_1(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{-\epsilon_1 Q' a}{4\pi\epsilon_1(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-\epsilon_2\widetilde{Q}(-a)}{4\pi\epsilon_2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{113}$$

化简后，我们有

$$\frac{Q + Q'}{\epsilon_1} = \frac{\widetilde{Q}}{\epsilon_2}, \quad Q - Q' = \widetilde{Q}. \tag{114}$$

由此方程组，我们解得

$$Q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad \widetilde{Q} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q. \tag{115}$$

因此，我们最后得到的电势分布为

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{Q(\epsilon_1-\epsilon_2)}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1+\epsilon_2)\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}, & \text{当} z > 0; \\ \frac{2Q\epsilon_2}{4\pi\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}, & \text{当} z < 0. \end{cases} \tag{116}$$

将之取梯度后，即可得到空间各点处的电场强度分布 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 。

例 6.7: 真空中有一个半径为 R_0 的接地导电球，距离球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q 。求球外空间各点处的电势。

解：我们在球内一点处引入一个虚拟电荷 Q' 。从对称性考虑，我们让 Q 和 Q' 都处于 z 轴上。那么，球面上任何一点 P 处的电势为

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0\rho'} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}. \end{aligned} \tag{117}$$

因此，我们有

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = -\frac{\rho'}{\rho} = C, \tag{118}$$

而 C 为一个常数。我们现在选取 Q' 的位置，使得三角形 $\Delta OQ'P$ 与三角形 ΔOQP 是相似的 (它们已经有一个共同的角度 $\angle Q'OP$ 和一根共同的边 $\overline{OP}$ ，故只需要再调整 Q' 的位置，使得角度 $\angle OQP = \angle OPQ'$ 即可) 。因此，我们有

$$-\frac{Q'}{Q} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{b}{R_0} = \frac{R_0}{a}. \tag{119}$$

由此我们解得

$$b = \frac{R_0^2}{a} \tag{120}$$

以及

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q. \tag{121}$$

因此，根据静电学的唯一性定理，球外任何一点 $\mathbf{r}$ 处的电势现在可以写作

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \Phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0\rho'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho} - \frac{R_0 Q}{4\pi\epsilon_0 a\rho'} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{R_0}{a\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} - \frac{R_0}{a\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}}\right). \end{aligned} \tag{122}$$

这里， $b = \frac{R_0^2}{a}$ 。再将此式取梯度后，我们可得到电场强度的分布

$$\begin{aligned} & E_r(r,\theta) = -\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r} \\ = \ & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r-a\cos\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{3/2}} - \frac{R_0(r-b\cos\theta)}{a(r^2+b^2-2br\cos\theta)^{3/2}}\right), \end{aligned} \tag{123}$$

以及

$$E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{a\sin\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{3/2}} - \frac{R_0 b\sin\theta}{a(r^2+b^2-2br\cos\theta)^{3/2}}\right). \tag{124}$$

§ 6.4 格林函数

在上面的讨论中，我们研究了一些具体的例子。在这些例子中，体系多少有些对称性可以加以利用。下面，我们要考虑一般的静电学问题。为了这一目的，我们引入格林函数方法。

一般的静电学问题可以大致分为两类：一类是空间区域 Ω 中的电荷分布 $\rho_f(\mathbf{r})$ 和边界 $S=\partial\Omega$ 上各点处的电势 $\Phi_S(\mathbf{r})$ 已经给定；另外一类是 Ω 内的电荷分布 $\rho_f(\mathbf{r})$ 和边界 $S=\partial\Omega$ 上各点处的电场的法线分量 $\frac{\partial\Phi_S(\mathbf{r})}{\partial n}$ 已经给定。前者被称为第一类边值问题，而后者被称为第二类边值问题。我们的任务是用格林函数方法，在这两类边值条件下求解电势在 Ω 内各点处的分布 $\Phi(\mathbf{r})$ 。为此，我们引入所谓 δ- 函数的定义。它被定义作

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & 若 x \neq 0; \\ \infty, & 若 x = 0, \end{cases} \tag{125}$$

并且满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1. \tag{126}$$

这一函数原本是狄拉克 (Dirac) 于 1926 年引入以解决量子力学中连续谱态的归一化问题的，后被物理学家广泛应用于处理各种边值问题。严格地说，它不是一种通常意义上的函数，而是一种被称之为分布 (distribution) 的连续泛函。在实际运算中，人们常常用某些函数来逼近它。例如，在一维空间中，若我们考虑函数

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}, \quad \epsilon > o. \tag{127}$$

显然，当 $x \neq 0$ 时，我们有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = 0, \tag{128}$$

而当 $x=0$ 时，我们又有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x=0)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2}=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi\epsilon}=\infty. \tag{129}$$

另一方面，将 $f_\epsilon(x)$ 在实轴上积分后我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}dx=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\epsilon}\Big|_{-\infty}^{\infty}\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\infty-\arctan(-\infty)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1.\end{aligned} \tag{130}$$

因此，按照定义，我们当有

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}=\delta(x). \tag{131}$$

有了 δ 函数的定义后，我们现在可以将位于坐标原点处的一个带电量为 Q 的点电荷分布写作 $\rho(\mathbf{r})=Q\delta(\mathbf{r})$ 。这是由于等式

$$\begin{aligned}&\int\int\int_{R^3}\rho(\mathbf{r})dxdydx=\int\int\int_{R^3}Q\delta(\mathbf{r})dxdydx=\int\int\int_{R^3}Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydx\\ =\;& Q\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)dz\right)=Q\end{aligned} \tag{132}$$

成立。δ 函数的另外一个有用的性质是，它与一个连续函数 $f(\mathbf{r})$ 的乘积的积分等于该函数在 $\mathbf{r}=0$ 处的值，即我们有

$$\int\int\int_{R^3}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx=f(0). \tag{133}$$

这一公式的证明非常简单。让我们任取一个以原点为球心，半径为 ϵ 的小球 Ω_ϵ 。那么，我们都有

$$\begin{aligned}&\int\int\int_{R^3}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx\\ =\;&\int\int\int_{R^3/\Omega_\epsilon}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx+\int\int\int_{\Omega_\epsilon}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx\\ =\;&\int\int\int_{\Omega_\epsilon}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx.\end{aligned} \tag{134}$$

当 ϵ 足够小时，我们可以利用 $f(\mathbf{r})$ 在 $\mathbf{r}=0$ 处的值 $f(0)$ 代替它在被积函数的位置，从而得到

$$\int\int\int_{R^3}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx=\int\int\int_{\Omega_\epsilon}f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx$$

$$\begin{aligned} &\cong \int\int\int_{\Omega_\epsilon} f(0)\delta(\mathbf{r})dxdydx = f(0)\int\int\int_{\Omega_\epsilon}\delta(\mathbf{r})dxdydx \\ &= f(0)\int\int\int_{R^3}\delta(\mathbf{r})dxdydx = f(0). \end{aligned} \tag{135}$$

最后，我们令 $\epsilon \to 0$，则上式变为一个等式，即

$$\int\int\int_{R^3} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})dxdydx = f(0). \tag{136}$$

可以形象地讲，δ 函数将任何一个连续函数都映射到一个复数 $f(0)$ 去。在这种意义上，δ 函数可以被理解为一个连续泛函 (continuous functional) 。

接下来，我们要介绍一个十分有用的恒等式

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{137}$$

首先，不难验证

$$\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{138}$$

成立。其次，利用在第二章中的相关推导，我们看到当 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ 时，

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\nabla_{\mathbf{r}}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0. \tag{139}$$

因此，我们只需研究 $\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ 在 $\mathbf{r} \cong \mathbf{r}'$ 附近的行为即可。取一个以 $\mathbf{r}$ 为球心，δ 为半径的小球体 Ω_δ 。则我们有

$$\begin{aligned} &\int\int\int_{R^3}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\ &= \int\int\int_{R^3/\Omega_\delta}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' + \int\int\int_{\Omega_\delta}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\ &= \int\int\int_{\Omega_\delta}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{140}$$

对上式的右边使用高斯定理后，我们进一步得到

$$\begin{aligned} &\int\int\int_{R^3}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' = \int\int\int_{\Omega_\delta}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\ &= -\int\int\int_{\Omega_\delta}\nabla_{\mathbf{r}}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' = \int\int\int_{\Omega_\delta}\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\ &= \oint\oint_{S_\delta}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot d\mathbf{S}' = -\oint\oint_{S_\delta}\frac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\cdot d\mathbf{S}' = -4\pi. \end{aligned} \tag{141}$$

另一方面，按照定义，我们有

$$\int\int\int_{R^3}(-4\pi)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dx'dy'dz' = -4\pi, \tag{142}$$

故 (137) 式成立。

在做了这些准备之后，我们现在可以引入静电学问题中的格林函数了。它被定义作方程

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{143}$$

的解。根据点电荷与 δ 函数的关系， $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 也可以被解释作真空中一个位于空间 $\mathbf{r}'$ 处带电量为 $q=1$ 的点电荷在空间 $\mathbf{r}$ 处产生的静电势。我们知道，要想唯一地决定 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ，需要给出在相关的空间区域 Ω 的边界 $S=\partial\Omega$ 上的电势分布 Φ_S 或其导数分布 $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S$ 。让我们结合讲过的例子，分别考虑以下三种情况。

(1) 无界空间中的格临函数。在此情况下，可以将无穷远处的电势取为零。因此，$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 可以唯一地决定下来。我们有

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{144}$$

事实上，利用 (137) 式，我们可以直接验证

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\mathbf{r}}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \nabla^2_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned} \tag{145}$$

的确是我们要找的解。

例 6.8: 假设空间 R^3 被一种电容率为 ϵ 的均匀媒介质充满。在空间的一个有限区域 Ω 内存在有自由电荷，其密度分布为 $\rho_f(\mathbf{r})$ 。试求介质内的电势分布 $\Phi(\mathbf{r})$ 。

解: 介质内的电势分布应该满足泊松方程

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}'), \tag{146}$$

而根据物理的要求，电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 在无穷远处应该为零。现将此式的两边乘以 $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 并对 $\mathbf{r}'$ 积分后，我们有

$$\int\int\int_{R^3}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' = -\int\int\int_{R^3}\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dx'dy'dz'$$

$$= -\frac{1}{\epsilon}\int\int\int_{R^3}\frac{\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{147}$$

接下来，让我们重新改写上式的左边。我们有

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_{R^3} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= \oint\oint_{S_\infty} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{S}' - \int\int\int_{R^3}\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= -\int\int\int_{R^3}\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= -\oint\oint_{S_\infty}(\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}'\Phi(\mathbf{r}'))\cdot d\mathbf{S}' + \int\int\int_{R^3}\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz'.
\end{aligned} \tag{148}$$

由于

$$\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{149}$$

以及

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \nabla^2_{\mathbf{r}'}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \nabla^2_{\mathbf{r}}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{150}$$

成立，故上式又可被改写作

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_{R^3} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' = \int\int\int_{R^3}\nabla^2_{\mathbf{r}}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= \int\int\int_{R^3}\left(-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)\Phi(\mathbf{r}')dx'dy'dz' = -\frac{1}{\epsilon_0}\Phi(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{151}$$

将之代入 (147) 式的左边后，我们最后得到

$$-\frac{1}{\epsilon_0}\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}\int\int\int_{R^3}\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz', \tag{152}$$

或是

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int\int\int_{R^3}\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz'. \tag{153}$$

(2) 上半平面的格林函数。利用例题 6.7 的结果，我们可以直接写出此时的格林函数

$$\begin{aligned}
G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right. \\
&- \left.\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right).
\end{aligned} \tag{154}$$

(3) 球外空间的格林函数。若令

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}. \tag{155}$$

并利用例题 6.8 的结果，则我们有

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}-\frac{R/r'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}\right). \tag{156}$$

这里，R 为球的半径，而角度 α 则如教科书 60 页上的图 2-10 所示。将 b 代入上式后，我们有

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2+R^2-2rr'\cos\alpha}}\right). \tag{157}$$

接下来，我们讨论如何利用格林函数获得一般边值问题的解。先看第一类边值问题。由于自由电荷在空间中的分布密度函数 $\rho_f(\mathbf{r})$ 是已知的，故泊松方程

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')=-\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}'), \tag{158}$$

以及

$$\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{159}$$

成立。将 (158) 式乘以 $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 再减去 (159) 式乘以 $\Phi(\mathbf{r}')$ 后，我们得到

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')-\Phi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{\epsilon}\rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}'). \tag{160}$$

将此式的两边对全空间积分后，我们有

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_\Omega\left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')-\Phi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)dx'dy'dz'\\
=&\int\int\int_\Omega\left(-\frac{1}{\epsilon}\rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')\right)dx'dy'dz'\\
=&-\frac{1}{\epsilon}\int\int\int_\Omega\rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dx'dy'dz'+\frac{1}{\epsilon_0}\Phi(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{161}$$

对于上式的左边，我们可以使用恒等式

$$\Psi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')-\Phi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Psi(\mathbf{r}')=\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left(\Psi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}')-\Phi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\Psi(\mathbf{r}')\right). \tag{162}$$

因此，上式可以被改写作

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_\Omega \left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}')\nabla^2_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right) dx'dy'dz' \\
= &\int\int\int_\Omega \nabla_{\mathbf{r}'}\left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right) dx'dy'dz' \\
= &\oint\oint_{\partial\Omega} \left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}\Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)\cdot d\mathbf{S}' \\
= &\oint\oint_{\partial\Omega} \left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) dS' \\
= &-\frac{1}{\epsilon}\int\int\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dx'dy'dz' + \frac{1}{\epsilon_0}\Phi(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{163}$$

或是

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) = &\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\int\int\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&+ \epsilon_0\oint\oint_{\partial\Omega}\left(G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right) dS'.
\end{aligned} \tag{164}$$

由于在第一类边值问题中， $\rho(\mathbf{r}')$ 和 $\Phi(\mathbf{r}'|_{\partial\Omega}$ 是已知的，且在 $\partial\Omega$ 上， $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ ，故我们进一步得到

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\int\int\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')dx'dy'dz' - \epsilon_0\oint\oint_{\partial\Omega}\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS'. \tag{165}$$

因此， $\Phi(\mathbf{r})$ 可以唯一地决定下来。

对于第二类边值问题，我们必须保留 (164) 式右边的全部三项。因此，除了 $\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ 的值外，我们还需知道 $\Phi(\mathbf{r}')$ 在边界上的值。因此，格林函数方法并不大适合解第二类边值问题。

例 6.9: 在无穷大导体平面上切割出一个半径为 a 的圆。圆内和园外的部分用极为狭窄的绝缘环绝缘。设园内部分的电势为 V_0 ，园外部分的电势为零。求上半空间中的电势 $\Phi(\mathbf{r})$ 。

解: 显然，这是一个第一类边值问题，可以用格林函数方法求解。由于在上半空间中，自由电荷密度 $\rho_f(\mathbf{r}') = 0$ ，故 (165) 式退化为

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0\oint\oint_{\partial\Omega}\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS'. \tag{166}$$

这里， $\partial\Omega$ 为平面 $z'=0$ 。根据题给，我们又可将上式写作

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= -\epsilon_0\int\!\!\int_{R^2/S_a}\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS' - \epsilon_0\int\!\!\int_{S_a}\Phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS' \\ &= -\epsilon_0\int\!\!\int_{S_a}V_0\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS'. \end{aligned} \tag{167}$$

这里， S_a 为圆心在坐标原点处，半径为 a 的在导体表面切割出来的圆盘。接下来，我们需要计算其上 $\frac{\partial G_0}{\partial n'}$ 的表达式。

将 (154) 式给出的格林函数 $G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 对 z' 求导后，我们有

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right|_{S_a} = \frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial z'} \\ =\ & -\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)\right] \\ =\ & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} + \frac{z+z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

然后令 $z'=0$ ，我们得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right|_{S_a} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}.\end{aligned} \tag{168}$$

若引入柱坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z$ 以及 $x'=r'\cos\varphi', y'=r'\sin\varphi', z'$ ，则上式又可被改写作

$$\left.\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\right|_{S_a} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{z}{[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}}. \tag{169}$$

代入 (166) 式后，我们最后得到

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi(r,\varphi,z) = -V_0\epsilon_0\int\!\!\int_{S_a}\frac{\partial G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}dS' \\ &= \frac{V_0\epsilon_0}{2\pi\epsilon_0}\int_0^a r'dr'\int_0^{2\pi}\frac{zd\varphi'}{[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{V_0 z}{2\pi}\int_0^a r'dr'\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi'}{r^2+z^2]^{3/2}}\left(1+\frac{r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi')}{r^2+z^2}\right)^{-3/2}.\end{aligned} \tag{170}$$

此式无法严格计算，我们只好考虑当 $a \ll \sqrt{r^2+z^2}$ 时的极限情况。此时，我们可以对上式中的被积函数做展开而得到近似表达式

$$\begin{aligned}\Phi(r,\varphi,z) &\cong \frac{V_0 z}{2\pi(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^a r'dr'\left[2\pi\left(1-\frac{3}{2}\frac{r'^2}{r^2+z^2}\right)\right]\\ &= \frac{V_0 z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{3}{8}\frac{a^4}{r^2+z^2}\right)=\frac{V_0 z a^2}{2(r^2+z^2)^{3/2}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2+z^2}\right).\end{aligned} \tag{171}$$

\$ 6.5 电多极矩

在 (153) 式中，我们给出了一个无限大均匀介质中给定电荷密度 $\rho_f(\mathbf{r})$ 所产生的电势

$$\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\int\int_{R^3}\frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{172}$$

在许多物理问题中，电荷只分布在一个很小的区域 Ω 内，而人们所关心的又是电势 $\Phi(\mathbf{r})$ 在距离这一区域较远，即 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 远大于区域 Ω 的线度 l 处的值。因此，我们没有必要对上式中的积分求精确值。近似地，我们可以将被积表达式按照 $l/|\mathbf{r}|$ 的幂次做展开，然后决定 $\Phi(\mathbf{r})$ 的各级近似值。

当 $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ 时，我们近似有

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &\cong f(\mathbf{r})+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_i}(-x_i')+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x_i\partial x_j}(-x_i')(-x_j')\\ &= f(\mathbf{r})-\mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f(\mathbf{r})+\frac{1}{2!}(\mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}})^2 f(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{173}$$

将此展开式应用到上式中的被积函数，我们有

$$\begin{aligned}&\Phi(\mathbf{r})\cong\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\int\int_\Omega\rho_f(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{r}-\mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}(\mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}})^2\frac{1}{r}\right)dx'dy'dz'\\ =\;&\frac{1}{4\pi\epsilon r}\int\int\int_\Omega\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz'-\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\int\int_\Omega\rho_f(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\cdot\left(\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}\right)dx'dy'dz'\\ +\;&\frac{1}{8\pi\epsilon}\int\int\int_\Omega\rho(\mathbf{r}')\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i'x_j'\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}\right)dx'dy'dz'\\ =\;&\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r}-\frac{1}{\epsilon}\mathbf{P}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}+\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}.\end{aligned} \tag{174}$$

这里，

$$Q=\int\int\int_\Omega\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz',\quad \mathbf{P}=\int\int\int_\Omega\rho_f(\mathbf{r}')\mathbf{r}'dx'dy'dz', \tag{175}$$

以及

$$D_{ij} = \int\int\int_{\Omega} \rho_f(\mathbf{r}') 3x'_i x'_j dx'dy'dz' \tag{176}$$

分别称为体系的总电荷，电偶极矩和电四极矩。

由表达式 (174)，我们得出结论，作为第一级近似，可以将所有得电荷都置于原点处，那么在远离区域 Ω 的 $\mathbf{r}$ 处，电势将由 (174) 式中的第一项给出。进一步，若电荷密度分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 对于坐标原点不对称，那么 $\mathbf{P}$ 一般不为零。此时，(174) 式中的第二项对于电势的贡献会显现出来，我们有

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\mathbf{P}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon r^3}. \tag{177}$$

由于体系的总电荷以及电偶极矩的概念相对比较熟悉，我们下面将集中讨论电四极矩的性质。首先，我们注意到，按照定义，$\{D_{ij}\}$ 构成了一个 3×3 矩阵的矩阵元，并且这个矩阵是对称的，即

$$D_{ij} = \int\int\int_{\Omega} 3x'_i x'_j \rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' = D_{ji}. \tag{178}$$

因此，这九个量中最多只能有六个是彼此独立的。我们要证明，实际上它们之中只有五个是独立的。为此，我们先假定 $D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, D_{13}$ 和 D_{23} 是独立的。那么，若在前三个分量上各自加上一个常数 C，则新定义的六个分量

$$D'_{11} = D_{11}+C,\ D'_{22} = D_{22}+C,\ D'_{33} = D_{33}+C,\ D'_{12} = D_{12},\ D'_{13} = D_{13},\ D'_{23} = D_{23} \tag{179}$$

亦应该是独立的。现在，我们取

$$C = -\int\int\int_{\Omega} r'^2 \rho_f(x',y',z')dx'dy'dz', \tag{180}$$

则如此定义的新的六个分量可以统一地写作

$$D'_{ij} = D_{ij} - \delta_{ij}\int\int\int_{\Omega} r'^2 \rho_f(x',y',z')dx'dy'dz'. \tag{181}$$

接下来，我们要论证，它们给出的相应的电势的表达式并不改变。实际上，我们有

$$\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D'_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}dx'dy'dz' = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}dx'dy'dz'$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(x',y',z')\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}dx'dy'dz' \\
= & \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}D_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}dx'dy'dz' - \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{1}{6}\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}\right)dx'dy'dz'.
\end{aligned}
$$

利用方程 $\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$，我们看到，当 $\mathbf{r}\neq 0$ 时，上式的第二项为零。因此，四极矩 $\{D'_{ij}\}$ 和 $\{D_{ij}\}$ 在远处产生的静电势并无区别。

另一方面，按照定义，我们有

$$
\begin{aligned}
& D'_{11}+D'_{22}+D'_{33} = \left(D_{11}-\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz'\right) \\
+ & \left(D_{22}-\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz'\right)+\left(D_{33}-\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz'\right) \\
= & \int\int\int_{\Omega} 3x'x'\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' + \int\int\int_{\Omega} 3y'y'\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' \\
+ & \int\int\int_{\Omega} 3z'z'\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' - 3\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' \\
= & 3\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' - 3\int\int\int_{\Omega} r'^2\rho_f(x',y',z')dx'dy'dz' \\
= & 0. \qquad (182)
\end{aligned}
$$

也就是说，D'_{11},D'_{22} 和 D'_{33} 并非独立的。这导致了悖论。因此，六个分量 D_{11},D_{22},D_{33},D_{12}, D_{13} 和 D_{23} 中最多只有五个是独立的。在文献中，人们一般将 $\{D'_{ij}\}$ 定义作一个电荷体系的电四极矩张量。

例 6.10: 均匀带电椭球半长轴为 a，半短轴为 b，总带电量为 Q。求它的电四极矩及其在远处产生的电势。

解: 由于椭球上的总电荷为 Q，故我们有

$$
\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \qquad (183)
$$

又由于椭球的方程为

$$
\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2} = 1, \qquad (184)
$$

即它对于 x,y 和 z 轴是对称的，故

$$
\begin{aligned}
& P_x = \int\int\int_{\Omega} x'\rho_0 dx'dy'dz' = 0, \quad P_y = \int\int\int_{\Omega} y'\rho_0 dx'dy'dz' = 0, \\
& P_z = \int\int\int_{\Omega} z'\rho_0 dx'dy'dz' = 0. \qquad (185)
\end{aligned}
$$

因此，

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 0. \tag{186}$$

接下来，我们计算电四极矩张量的各个分量。首先，我们有

$$\rho_f = \frac{Q}{V_\Omega} = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}ab^2} = \frac{3Q}{4\pi ab^2}. \tag{187}$$

因此，第一个分量

$$D_{11} = \int\int\int_\Omega (3x'^2 - r'^2)\rho_f dx'dy'dz' = \rho_f \int\int\int_\Omega (2x'^2 - y'^2 - z'^2)dx'dy'dz'. \tag{188}$$

先计算

$$I = \int\int\int_\Omega x'^2 dx'dy'dz' = \int\int\int_\Omega y'^2 dx'dy'dz'. \tag{189}$$

我们有

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_\Omega x'^2 dx'dy'dz' = \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega (x'^2 + y'^2)dx'dy'dz' \\ &= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dz' \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z'^2}{a^2}}} \rho^2(\rho d\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi = \pi\int_{-a}^{a} dz' \int_0^{b\sqrt{1-\frac{z'^2}{a^2}}} \rho^3 d\rho \\ &= \pi\int_{-a}^{a} dz' \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{b\sqrt{1-\frac{z'^2}{a^2}}} = \frac{\pi}{4}\int_{-a}^{a} b^4\left(1-\frac{z'^2}{a^2}\right)^2 dz'. \end{aligned} \tag{190}$$

令 $z' = a\sin\theta$ ，则上式又可化简为

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_\Omega x'^2 dx'dy'dz' = \frac{\pi b^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^2 a\cos\theta d\theta \\ &= \frac{\pi ab^4}{4}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta\cos\theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos\theta d\theta\right) \\ &= \frac{\pi ab^4}{4}\left(\sin\theta|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}\sin^5\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{\pi ab^4}{4}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4\pi ab^4}{15}. \end{aligned} \tag{191}$$

同理，我们可得

$$\int\int\int_\Omega z'^2 dx'dy'dz' = \frac{4\pi a^3 b^2}{15}. \tag{192}$$

因此，我们最后得到

$$\begin{aligned} D_{11} &= \rho_f \left(2\int\int\int_\Omega x'^2 dx'dy'dz' - \int\int\int_\Omega y'^2 dx'dy'dz' - \int\int\int_\Omega z'^2 dx'dy'dz' \right) \\ &= \frac{3Q}{4\pi ab^2}\left(\frac{4\pi ab^4}{15} - \frac{4\pi a^3 b^2}{15} \right) = \frac{3Q}{ab^2}\frac{ab^2}{15}(b^2-a^2) = \frac{Q}{5}(b^2-a^2). \end{aligned} \tag{193}$$

同理，我们可得

$$D_{22} = D_{11} = \frac{Q}{5}(b^2-a^2), \quad D_{33} = \frac{2Q}{5}(a^2-b^2). \tag{194}$$

而利用对称性，可以很容易地看到

$$D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0. \tag{195}$$

因此，带电椭球在远处产生的电势为

$$\begin{aligned} \Phi^{(3)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} + D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r} + D_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\left(\frac{Q}{5}(b^2-a^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\frac{1}{r} + \frac{2Q}{5}(a^2-b^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{Q}{24\pi\epsilon_0}\frac{1}{5}(a^2-b^2)\left(-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\frac{1}{r} + 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \tag{196}$$

为了简化结果，我们再一次利用方程 $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ 而得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\frac{1}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}. \tag{197}$$

代入上式后，我们最后得到

$$\begin{aligned} \Phi^{(3)}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{120\pi\epsilon_0}(a^2-b^2)\left(3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{40\pi\epsilon_0}(a^2-b^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \\ &= \frac{Q(a^2-b^2)}{40\pi\epsilon_0}\frac{3r^2\cos^2\theta - r^2}{r^5} = \frac{Q(a^2-b^2)}{40\pi\epsilon_0}\frac{3r^2\cos^2\theta - r^2}{r^5} \\ &= \frac{Q(a^2-b^2)}{40\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}. \end{aligned} \tag{198}$$

因此，当 $r \gg a, b$ 时，带电椭球引起的电势为

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &\cong \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q(a^2-b^2)}{40\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{a^2-b^2}{10}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \right). \end{aligned} \tag{199}$$

例 6.11: 电荷体系再外电场中的能量

设外电场 $\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})$ 的电势为 $\Phi_{外}(\mathbf{r})$。那么，一个处于此电场中的带电体的能量为

$$W = \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})\Phi_{外}(\mathbf{r})dxdydz. \tag{200}$$

假设 Ω 是一个非常小的区域, 使得我们可以将其中的电势 $\Phi_{外}(\mathbf{r})$ 在某一点 (记作 $\mathbf{r}=0$) 附近做展开，即

$$\Phi_{外}(\mathbf{r}) \cong \Phi_{外}(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \Phi_{外}(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_{外}(0)}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{201}$$

将之代入 W 的表达式后，我们有

$$\begin{aligned} W &= \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})\Phi_{外}(\mathbf{r})dxdydz = \int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})\Phi_{外}(0)dxdydz \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_i \frac{\partial \Phi_{外}(0)}{\partial x_i} dxdydz + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int\int\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_{外}(0)}{\partial x_i \partial x_j} dxdydz \\ &= Q\Phi_{外}(0) + \mathbf{P}\cdot\nabla\Phi_{外}(0) + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\frac{\partial^2 \Phi_{外}(0)}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \tag{202}$$

其中的第一项可视作体系的电荷都集中在原点 $\mathbf{r}=0$ 时的电势能，第二项则解释作体系的电偶极矩在外场中的能量。我们又可将之写作

$$W^{(2)} = \mathbf{P}\cdot\nabla\Phi_{外}(0) = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{外}(0). \tag{203}$$

而第三项则为体系的电四极矩在外电场中的能量。它也可被重新写作

$$W^{(3)} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\frac{\partial^2 \Phi_{外}(0)}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\frac{\partial E_j^{外}(0)}{\partial x_i}. \tag{204}$$

因此可见，只有在非均匀外电场中，电四极矩对电势能的贡献才不为零。

利用电偶极矩的势能函数，我们可以计算它在电场 $\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})$ 中所感受到的力和力矩 $\mathbf{M}_{外}$[1]，即

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla W^{(2)} = -\nabla(-\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})) = \nabla(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})) \\ &= (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r}) + (\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})\cdot\nabla)\mathbf{P}) + \mathbf{P}\times(\nabla\times\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})) + \mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})\times(\nabla\times\mathbf{P}) \\ &= (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{205}$$

[1]关于力矩的定义，可以参考 Landau 和 Lifshitz 所著 “力学” 一书第 34 节的 (34.6) 式

而

$$\mathbf{M}_{外} = -\frac{\partial W^{(2)}}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}(-\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r})\mathbf{e}_{\delta\varphi}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}(PE_{外}(\mathbf{r})\cos\varphi)\mathbf{e}_{\delta\varphi} = -PE_{外}(\mathbf{r})\mathbf{e}_{\delta\varphi} = \mathbf{P}\times\mathbf{E}_{外}(\mathbf{r}). \qquad (206)$$

第七章、静磁学

$ 7.1 概论

当体系内的电流密度分布 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 不随时间改变，即稳恒时，它会产生一个不随时间改变的磁场强度分布，即静磁场。此时，麦克斯韦方程组退化为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \tag{1}$$

这里，$\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 为自由电流密度矢量。我们已经知道，可以引入一个不含时的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 来给出磁感应强度分布 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ，即

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{2}$$

但 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 不是唯一决定的，可以在其上加上一个形为 $\nabla\Lambda(\mathbf{r})$ 的附加项而不改变磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。这种多余的自由度可以通过对矢势加上一些限制条件来消除。例如，在研究静磁学问题时，我们常取满足条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{3}$$

的矢势。这样的矢势被称为满足库仑规范的矢势，或满足横场条件的矢势。在本章中，我们将解释第一种称呼的缘由，而在下一章中解释第二种称呼的起因。

我们知道，在均匀介质中， $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 成立。将之代入 (1) 式后，我们有

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r})\right) = \frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}). \tag{4}$$

再利用恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}, \tag{5}$$

我们又可将上式的左边改写成

$$\frac{1}{\mu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}). \tag{6}$$

若 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 满足库仑规范，则上式左边的第一项为零。因此，我们有

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu\mathbf{j}_f(\mathbf{r}). \tag{7}$$

将此式与静电势 $\Phi(\mathbf{r})$ 所满足的泊松方程

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon}\rho_f(\mathbf{r}) \tag{8}$$

相比较后，我们可以立刻写出它的解

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{9}$$

实际上，若我们将拉普拉斯算符 ∇^2 作用到上式的两边可得到

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla^2\left(\frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\right) \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\left(\nabla^2_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\left(-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)dx'dy'dz' \\
&= -\mu\mathbf{j}_f(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{10}$$

此即方程 (7)。由于 (9) 式给出的矢势表达式与电荷分布 $\rho_f(\mathbf{r})$ 给出的静电势分布 $\Phi(\mathbf{r})$ 在形式上完全一样，人们将满足条件 $\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ 的 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 称为满足库仑规范的矢势。

有了矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们可以计算磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 了。我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\times\left(\frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\right) \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \nabla_{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \left(\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\times\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \left(-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\times\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dx'dy'dz'.
\end{aligned} \tag{11}$$

当稳恒电流是在一根导线 C 上流动时，上式退化为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint_C Id\mathbf{l}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{12}$$

此即毕奥 - 萨伐尔定律。

自然，为了求解静磁学问题，我们还必须给定磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 所满足的边值条件。与第五章中所讨论的情况无异，我们当有

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = H_{2t} - H_{1t} = \alpha_t \tag{13}$$

在两种媒介质的分界面处成立。这里， α_t 为媒介质分界面上的自由电流密度。唯一需要强调一点的是。为了使得磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 在分界面上只发生有限的阶越，我们要求矢势 $\mathbf{A}$ 在分界面上是连续的，即

$$\mathbf{A}_2|_{\partial\Omega} = \mathbf{A}_1|_{\partial\Omega} \tag{14}$$

成立。

例 7.1: 求流经一根无穷长直导线的稳恒电流 I 所产生的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

解: 利用公式 (9) ，我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \mathbf{k}. \tag{15}$$

若令 $z - z' = \tilde{z}$ ，则上式化为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \tilde{z}^2}} \mathbf{k} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}) \Big|_0^{\infty} \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{16}$$

乍看起来， $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 似乎是发散的。但考虑矢势并不是物理可观测量，故这并不造成实际的困难。我们可以令 $R = R_0$ 时， $\mathbf{A}(R_0, z) = 0$ 。由此我们得到

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(R, z) - \mathbf{A}(R_0, z) = \mathbf{A}(R, z) \\ = \ & \frac{\mu_0 I}{2\pi} \lim_{\tilde{z} \to \infty} \left[\ln \left(\tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2} \right) - \ln R \right] \mathbf{k} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \lim_{\tilde{z} \to \infty} \left[\ln \left(\tilde{z} + \sqrt{R_0^2 + \tilde{z}^2} \right) - \ln R_0 \right] \mathbf{k} \\ = \ & \frac{\mu_0 I}{2\pi} \lim_{\tilde{z} \to \infty} \ln \frac{\tilde{z} + \sqrt{R^2 + \tilde{z}^2}}{\tilde{z} + \sqrt{R_0^2 + \tilde{z}^2}} \mathbf{k} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

将 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 取旋度后，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \mathbf{k} \right) \\ = \ & -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{R}{R_0} \right) \mathbf{e}_R \times \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{18}$$

例 7.2: 求半径为 a 的导线园环中电流 I 所产生的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

解: 如教科书 80 页上图 3-3 所示，在库仑规范下，我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L \frac{Id\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{19}$$

取球坐标后，我们可以将之改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{I(ad\varphi')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'}}\mathbf{e}_{\varphi'} \\ &= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos(\varphi'-\varphi)}}(-\sin\varphi'\mathbf{i}+\cos\varphi'\mathbf{j}).\end{aligned} \tag{20}$$

令 $\varphi'-\varphi=\widetilde{\varphi}$ 后，我们有

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\widetilde{\varphi}}}(-\sin(\widetilde{\varphi}+\varphi)\mathbf{i}+\cos(\widetilde{\varphi}+\varphi)\mathbf{j}). \tag{21}$$

此式中的积分无法精确计算。当 $r^2+a^2 \gg 2ar\sin\theta$ 时，我们近似有

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) \\ \cong\ & \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1+\frac{2ar\sin\theta\cos\widetilde{\varphi}}{r^2+a^2}\right)(-\sin(\widetilde{\varphi}+\varphi)\mathbf{i}+\cos(\widetilde{\varphi}+\varphi)\mathbf{j}) \\ =\ & \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1+\frac{2ar\sin\theta\cos\widetilde{\varphi}}{r^2+a^2}\right) \\ \times\ & (-\sin\widetilde{\varphi}\cos\varphi\mathbf{i}-\cos\widetilde{\varphi}\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\widetilde{\varphi}\cos\varphi\mathbf{j}-\sin\widetilde{\varphi}\sin\varphi\mathbf{j}).\end{aligned} \tag{22}$$

考虑到 $\sin\widetilde{\varphi}$ 是 $\widetilde{\varphi}$ 的奇函数，而 $\cos\widetilde{\varphi}$ 是 $\widetilde{\varphi}$ 的偶函数，我们可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) \\ =\ & \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1+\frac{2ar\sin\theta\cos\widetilde{\varphi}}{r^2+a^2}\right)(-\cos\widetilde{\varphi}\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\widetilde{\varphi}\cos\varphi\mathbf{j}) \\ =\ & \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\widetilde{\varphi}d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{1}{r^2+a^2}\mathbf{e}_\varphi+\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\widetilde{\varphi}d\widetilde{\varphi}}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{2ar\sin\theta\cos\widetilde{\varphi}}{r^2+a^2}\mathbf{e}_\varphi \\ =\ & \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2ar\sin\theta}{(r^2+a^2)^{3/2}}\cos^2\widetilde{\varphi}d\widetilde{\varphi}\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\frac{2ar\sin\theta}{(r^2+a^2)^{3/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\widetilde{\varphi})d\widetilde{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ =\ & \frac{\mu_0 Ia^2 r\sin\theta}{4\pi(r^2+a^2)^{3/2}}\pi\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 Ia^2 r\sin\theta}{4(r^2+a^2)^{3/2}}\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned} \tag{23}$$

将之取旋度后，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu_0 I a^2 r\sin^2\theta}{4(r^2+a^2)^{3/2}}\right)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0 I a^2 r^2\sin\theta}{4(r^2+a^2)^{3/2}}\right)\mathbf{e}_\theta \\
&= \frac{\mu_0 I a^2\cos\theta}{2(r^2+a^2)^{3/2}}\mathbf{e}_r - \frac{\mu_0 I a^2\sin\theta}{4}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}\right)\mathbf{e}_\varphi. \qquad (24)
\end{aligned}$$

\$ 7.2 磁标势方法

我们已经看到，为了描述磁场需要计算矢量势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 。但作为一个矢量， $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的计算比较复杂。因此，有人讨论是否在特殊的情况下可以用标量势来描述磁场 (从历史的角度讲，在电磁学发展的早期，确有学者认为磁场是由磁荷引起的，就如同电场是由电荷产生的一样。这样一来，试图用标量势来描述磁场就不是一件完全不可理解的事情了) 。的确，在静磁场的情况下，存在着这种可能性。又由于用标量势的方法处理问题较为简单，故接下来我们简单介绍一下如何利用标量势的方法求解某些静磁学问题。

我们首先回顾一下，在静电场情况下，之所以能够引入标量势是由于静电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 满足方程

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (25)$$

而静磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 满足的方程则为

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}). \qquad (26)$$

因此，若在某一空间区域 Ω 内部不存在自由电流，则上式退化为

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (27)$$

因此，仿照静电学的情况，我们可以在 Ω 内引标量势 $\Phi_M(\mathbf{r})$ ，使得

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_M(\mathbf{r}). \qquad (28)$$

这里， M 为 “Magnetism” 一词的第一个字母，而 $\Phi_M(\mathbf{r})$ 称为磁标量势。

在实际工作中，磁标量势方法常用来计算铁磁物质内的磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 。在这类物质中，磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 一般并不与 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 成正比。然而麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{29}$$

仍成立。将 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0(\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}))$ 代入上式后，我们得到

$$\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})) = 0, \tag{30}$$

或是

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}). \tag{31}$$

与静电学中的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \rho_b(\mathbf{r}). \tag{32}$$

相比较，我们可以将

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv -\rho_M(\mathbf{r}) \tag{33}$$

定义为 “束缚磁荷” 。因此， (31) 式又可写作

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0}\rho_M(\mathbf{r}). \tag{34}$$

相应地，磁标量势 $\Phi_M(\mathbf{r})$ 应该满足泊松方程

$$\nabla^2 \Phi_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0}\rho_M(\mathbf{r}). \tag{35}$$

因此，我们可以将求解静电学问题发展起来的方法直接借来求解铁磁体中的静磁学问题了。

例 7.3: 求磁化矢量为 $\mathbf{M}_0$ 的均匀铁磁球体所产生的磁场。

解: 在铁磁球的内外皆有 $\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$ ，故束缚磁荷只能分布在铁磁球的表面。因此，在球体的内、外区域，方程

$$\nabla^2 \Phi_{M1}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla^2 \Phi_{M2}(\mathbf{r}) = 0 \tag{36}$$

分别成立。我们取 $\mathbf{M}_0$ 的方向为球坐标的极轴方向，并写出拉普拉斯算符在这一坐标系下的表达式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{37}$$

利用第六章例 6.3 题的结果，我们可以直接写出

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \sum_{L=0}^{\infty}\left(a_L r^L + \frac{b_L}{r^{L+1}}\right)P_L(\cos\theta), \quad \Phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{L=0}^{\infty}\left(c_L r^L + \frac{d_L}{r^{L+1}}\right)P_L(\cos\theta). \tag{38}$$

考虑到当 $|\mathbf{r}| \to \infty$ 时， $\Phi_1(\mathbf{r})$ 应趋向于零，我们当有 $a_L = 0$ 对于所用的正整数 L 成立。又考虑到当 $\mathbf{r} \to 0$ 时， $\Phi_2(\mathbf{r})$ 应保持有限，故我们当有 $d_L = 0$ 对所有正整数成立。因此， $\Phi_1(\mathbf{r})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{r})$ 可以进一步简化为

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \sum_{L=0}^{\infty}\frac{b_L}{r^{L+1}}P_L(\cos\theta), \quad \Phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{L=0}^{\infty}c_L r^L P_L(\cos\theta). \tag{39}$$

为了决定展开系数 b_L 和 c_L ，我们需利用在铁磁球表面处成立的边值条件

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \tag{40}$$

在我们现在的问题中，第二个边值条件又可用简单一点的条件

$$\Phi_1(|\mathbf{r}| = R_0) = \Phi_2(|\mathbf{r}| = R_0) \tag{41}$$

来替代。因此，我们有

$$\sum_{L=0}^{\infty}\frac{b_L}{R_0^{L+1}}P_L(\cos\theta) = \sum_{L=0}^{\infty}c_L R_0^L P_L(\cos\theta), \tag{42}$$

以及

$$\begin{aligned}
& B_{2n}(R_0) = B_{2r}(R_0) = \mu_0(H_{2r}(R_0) + M_{2r}(R_0)) \\
= \;& \mu_0\left(-\frac{\partial\Phi_2(R_0)}{\partial r} + M_0\cos\theta\right) = \mu_0\left(-\sum_{L=0}^{\infty}c_L L R_0^{L-1}P_L(\cos\theta) + M_0\cos\theta\right) \\
= \;& B_{1n}(R_0) = B_{1r}(R_0) = \mu_0 H_{1r}(R_0) = \mu_0\left(-\frac{\partial\Phi_1(R_0)}{\partial r}\right) \\
= \;& \mu_0\sum_{L=0}^{\infty}(L+1)\frac{d_L}{R_0^{L+2}}P_L(\cos\theta)
\end{aligned} \tag{43}$$

比较此两式中 $P_L(\cos\theta)$ 前面的系数，我们得到

$$\frac{b_L}{R_0^{L+1}} = c_L R_0^L, \quad -\mu_0 c_1 + \mu_0 M_0 = 2\mu_0 \frac{b_1}{R_0^3}, \quad L = 1, \tag{44}$$

以及

$$-\mu_0 c_L L R_0^{L-1} = \mu_0 (L+1) \frac{b_L}{R_0^{L+2}}, \quad L \neq 1. \tag{45}$$

在上面的推导过程中，我们用到了关系式 $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ 。求解这些方程，我们得到

$$c_1 = \frac{M_0}{3}, \quad b_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}, \quad c_L = b_L = 0, \quad L \neq 1. \tag{46}$$

即

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{b_1}{r^2} P_1(\cos\theta) = \frac{M_0 R_0^3}{3r^2} \cos\theta = \frac{R_0^3}{3} \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \\ \Phi_2(\mathbf{r}) &= c_1 r P_1(\cos\theta) = \frac{M_0}{3} r \cos\theta = \frac{1}{3} \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{47}$$

而球外的磁感应强度矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Phi_1(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{R_0^3}{3} \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{4\pi R_0^3}{3} \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \tag{48}$$

这里，我们将 $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \mathbf{M}_0$ 定义为铁磁球体的总磁偶极矩。利用恒等式

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{m}}{r^3}, \tag{49}$$

我们进一步得到

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathbf{m}}{r^3}, \tag{50}$$

为一个位于原点处的磁偶极子 $\mathbf{m}$ 所产生的磁感应强度矢量分布。而在铁磁球体内，我们有

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} \mathbf{M}_0, \tag{51}$$

而磁感应强度矢量则为

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mu_0 (\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_0(\mathbf{r})) = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}_0. \tag{52}$$

§ 7.3 磁多极矩

在库仑规范下，我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{53}$$

这里，Ω 为电流密度不为零的空间区域。若 Ω 的线度很小，则在离开它比较远的观察点 $\mathbf{r}$ 处，我们近似有

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{r} - \mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}. \tag{54}$$

将之代入 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')}{r}dx'dy'dz' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\left(\mathbf{r}'\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{r}\right)dx'dy'dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')dx'dy'dz' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i'x_i}{r^3}\right)dx'dy'dz'. \end{aligned}\tag{55}$$

为了进一步简化上式，我们先证明一个有关稳恒电流的恒等式

$$\int\int\int_\Omega \left(f(\mathbf{r}')\left[\mathbf{j}_f(\mathbf{r})\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\right]g(\mathbf{r}') + g(\mathbf{r}')\left[\mathbf{j}_f(\mathbf{r})\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\right]f(\mathbf{r}')\right)dx'dy'dz' = 0. \tag{56}$$

这里，$f(\mathbf{r}')$ 和 $g(\mathbf{r}')$ 为两个任意定义在区域 Ω 内的可导函数。为了证明此式，我们仅需考虑式中第二项的分部积分，即

$$\begin{aligned}&\int\int\int_\Omega g(\mathbf{r}')\left[\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\right]f(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\ =\ &\int\int\int_\Omega g(\mathbf{r}')\left[j_x(\mathbf{r}')\frac{\partial f(\mathbf{r}')}{\partial x'} + j_y(\mathbf{r}')\frac{\partial f(\mathbf{r}')}{\partial y'} + j_z(\mathbf{r}')\frac{\partial f(\mathbf{r}')}{\partial z'}\right]dx'dy'dz' \\ =\ &\int\int_{S_x} g(\mathbf{r}')j_x(\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dy'dz'\Big|_{x'=-\infty}^{x'=\infty} - \int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}')\frac{\partial\left(j_x(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')\right)}{\partial x'}dx'dy'dz' \\ -\ &\int\int_{S_y} g(\mathbf{r}')j_y(\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dx'dz'\Big|_{y'=-\infty}^{y'=\infty} - \int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}')\frac{\partial\left(j_y(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')\right)}{\partial y'}dx'dy'dz' \\ +\ &\int\int_{S_z} g(\mathbf{r}')j_z(\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dx'dy'\Big|_{z'=-\infty}^{z'=\infty} - \int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}')\frac{\partial\left(j_z(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')\right)}{\partial z'}dx'dy'dz'. \end{aligned}\tag{57}$$

由于在无穷远处，我们有 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r}') = 0$，故上式中的边界项全部为零。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int\int\int_\Omega g(\mathbf{r}')\left[\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\right]f(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \\ =\ &-\int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}')\left(\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\right)g(\mathbf{r}')dx'dy'dz' - \int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}')\left[\mathbf{j}_f(\mathbf{r}')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\right]g(\mathbf{r}')dx'dy'dz'. \end{aligned}$$

对于稳恒电流，连续性方程 $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r}') = 0$ 成立，故上式退化为

$$\int\int\int_\Omega g(\mathbf{r}') \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}\right] f(\mathbf{r}') dx'dy'dz' = -\int\int\int_\Omega f(\mathbf{r}') \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}\right] g(\mathbf{r}') dx'dy'dz'. \quad (58)$$

移项后，我们即得恒等式 (56) 。

接下来，我们考虑两种特殊情况。若取 $f(\mathbf{r}') = 1$ ， $g(\mathbf{r}') = x_i'$ ，则 (56) 式化为

$$0 = \int\int\int_\Omega \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}\right] x_i' dx'dy'dz' = \int\int\int_\Omega j_i(\mathbf{r}') dx'dy'dz'. \quad (59)$$

也就是说，

$$\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}') dx'dy'dz' = 0 \quad (60)$$

成立。由此我们得出结论，展开式 (55) 中的第一项对于矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的贡献为零。

再考虑第二种情况。我们令 $f(\mathbf{r}') = x_i'$ ， $g(\mathbf{r}') = x_k'$ 。现在，恒等式 (56) 化为

$$\int\int\int_\Omega \left(x_i' j_k(\mathbf{r}') + x_k' j_i(\mathbf{r}')\right) dx'dy'dz' = 0. \quad (61)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 \int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' x_i dx'dy'dz' = \sum_{i=1}^3 x_i \int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' dx'dy'dz' \\
= &\sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' dx'dy'dz' + \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' dx'dy'dz'\right) \\
= &\sum_{i=1}^3 x_i \left(-\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_i(\mathbf{r}') x_k' dx'dy'dz' + \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' dx'dy'dz'\right) \\
= &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 x_i \int\int\int_\Omega \left(j_i(\mathbf{r}') x_k' - j_k(\mathbf{r}') x_i'\right) dx'dy'dz'. \quad (62)
\end{aligned}$$

利用矢量直积的恒等式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (63)$$

上式又可进一步写作

$$\sum_{i=1}^3 \int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r}') x_i' x_i dx'dy'dz' = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{r} \times \int\int\int_\Omega (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dx'dy'dz'\right)_k. \quad (64)$$

因此，展开式 (55) 可以改写作

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{x_i' x_i}{r^3}dx'dy'dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\times\int\int\int_{\Omega}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))dx'dy'dz'\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))dx'dy'dz'\right)\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \tag{65}$$

按照定义，

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))dx'dy'dz' \tag{66}$$

为稳恒电流的总磁偶极矩，故我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{67}$$

在 r 远大于 Ω 的线度的情况下成立。将之取旋度后，即可得到远离电流分布区域 Ω 处的磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\nabla\right)\mathbf{m}+\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}-(\nabla\cdot\mathbf{m})\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{68}$$

而由于

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right) = \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{69}$$

故上式第一项目为零，即

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r-\mathbf{m}}{r^3}. \tag{70}$$

有意思的是，这与我们用磁标量势方法得到的结果是一致的。

$ 7.4 静磁场的能量

在第五章中，我们已经得到静磁场的能量表达式为

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{B}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})dxdydz. \tag{71}$$

若将 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ， $\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 代入上式后，我们有

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\nabla\cdot(\mathbf{A}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}(\mathbf{r}))\,dxdydz+\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}))\,dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\oint\oint_S(\mathbf{A}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{S}+\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz. \end{aligned} \tag{72}$$

这里，我们使用了斯托克斯定理以及微分恒等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}). \tag{73}$$

注意到，在无穷远的边界面 S 上，磁场强度和磁感应强度矢量皆为零，故我们最后得到

$$W=\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz. \tag{74}$$

此式中的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 应该理解为是由电流密度 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 自身产生的。若我们要计算这一电流分布在外场中的相互作用能，还需在矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 上附加外场的矢势 $\mathbf{A}_e(\mathbf{r})$ ，并在电流密度 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 附加上产生该外场的电流分布密度 $\mathbf{j}_e(\mathbf{r})$ ，并由此得到总的磁场能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}(\mathbf{A}(\mathbf{r})+\mathbf{A}_e(\mathbf{r}))\cdot(\mathbf{j}_f(\mathbf{r})+\mathbf{j}_e(\mathbf{r}))\,dxdydz \\ &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz+\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r})dxdydz \\ &+ \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz+\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r})dxdydz. \end{aligned} \tag{75}$$

我们将此式右边的第三和第四项之和

$$W_{\rm int}=\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz+\frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r})dxdydz \tag{76}$$

视作电流密度分布 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$ 在外磁场 $\mathbf{A}_e(\mathbf{r})$ 中的相互作用能。又由于在库伦规范下，

$$\begin{aligned} &\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz=\int\int\int_{R^3}dxdydz\int\int\int_{R^3}\frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\ =\ &\int\int\int_{R^3}\mathbf{A}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r}')dx'dy'dz' \end{aligned} \tag{77}$$

成立，故 (76) 式中的两项实际上彼此相等，即我们有

$$\begin{aligned} W_{\rm int} &= \int\int\int_{R^3}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_f(\mathbf{r})dxdydz \\ &= \int\int\int_{R^3}dxdydz\int\int\int_{R^3}\frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{78}$$

我们将这一表达式应用到一个载有电流 I 的线圈后有

$$\begin{aligned} W_i &= \oint_C (Id\mathbf{l}) \cdot \mathbf{A}_e(\mathbf{r}) = I \oint_C \mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= I \int\int_S (\nabla \times \mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = I \int\int_S \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = I\Phi_e. \end{aligned} \tag{79}$$

这里，Φ_e 为外磁场 $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$ 在线圈中产生的磁通量。若线圈的线度远小于它到产生 $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$ 的场源 $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}) \neq 0$ 的区域 Ω 的距离，则我们可以将 $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$ 在 $\mathbf{r} = 0$ 点附近做展开，即

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) \cong \mathbf{B}_e(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B}_e(0). \tag{80}$$

将之代入 W_i 的表达式后，我们有

$$W_i = I \int\int_S \mathbf{B}_e(0) \cdot d\mathbf{S} + I \int\int_S (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B}_e(0) \cdot d\mathbf{S}. \tag{81}$$

其中，第一项可以写作

$$W_i^{(0)} = I \int\int_S \mathbf{B}_e(0) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0). \tag{82}$$

这里，$\mathbf{m}$ 为电流线圈的磁偶极矩 [1]

然而，(82) 式给出的结果似乎与实验事实相反：根据 (82) 式，为了要让相互作用能取极小，应该要求线圈的磁矩与外磁场的方向在平衡态时相反。之所以出现这一谬误

[1]这是由于任意一个电流线圈都可以看作是由它围成的曲面 S 上的小电流线圈 $\{C_i\}$ 拼接而成，而每个小线圈中的电流皆为 I 。因此，它的总的磁偶极矩为

$$\mathbf{m} = \lim_{N\to\infty} I \sum_i^N \Delta\mathbf{S}_i = I \int\int_S d\mathbf{S}. \tag{83}$$

但问题是，以同一线圈为边界而张成的曲面并不是唯一的。它们是否给出相同的面积分值呢？答案是肯定的。为此，让我们任取两个以 C 为边界的曲面 S_1 和 S_2 。它们共同构成一个闭曲面 S ，即

$$\int\int_{S_1} d\mathbf{S} - \int\int_{S_2} d\mathbf{S} = \oint\oint_S d\mathbf{S}. \tag{84}$$

(我们注意到，S_2 上的曲面方向是与其外法线方向相反的) 。再利用高斯定理，则可见上式为零。因此，

$$\int\int_{S_1} d\mathbf{S} = \int\int_{S_2} d\mathbf{S} \tag{85}$$

成立。

的原因是，我们在推导过程中粗心大意地假设了线圈中的电流和产生外磁场的电流在未达到平衡前与达到平衡状态后没有改变。这显然是不对的。为了仔细分析这一过程，我们假设外磁场是由另外一个负载电流 I_e 的线圈 C_e 产生的。同时，我们应该使用磁相互作用能的表达式 (76)，即

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3} \mathbf{j}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_e(\mathbf{r})dxdydz + \frac{1}{2}\int\int\int_{R^3}\mathbf{j}_e(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})dxdydz \\ &= \frac{1}{2}I\oint_C \mathbf{A}_e\cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{2}I_e\oint_{C_e}\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \tag{86}$$

采用与推导 (79) 式相同的步骤，我们得到

$$W_i^{(0)} = \frac{1}{2}I\Phi_e + \frac{1}{2}I_e\Phi. \tag{87}$$

这里，Φ_e 和 Φ 分别为 I_e 和 I 在相应的线圈 C 和 C_e 上产生的磁通量。当线圈运动时，若要保持电流 I 和 I_e 不变，我们当有

$$\delta W_i^{(0)} = \frac{1}{2}I\delta\Phi_e + \frac{1}{2}I_e\delta\Phi. \tag{88}$$

但由于磁通量改变，会在线圈上产生感生电动势，进而对电流做功。这样就会改变电流 I 和 I_e 的数值。因此，为了保持它们不变，必须有外电源提供能量，以抵消感生电动势所作之功。从法拉第定律我们知道，线圈 C 和 C_e 上的电动势分别为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_e}{dt}, \quad \mathcal{E}_e = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{89}$$

因此，在时间间隔 δt 内，感生电动势所做之功为

$$\mathcal{E}I\delta t + \mathcal{E}_e I_e\delta t = -I\delta\Phi_e - I_e\delta\Phi. \tag{90}$$

而为了抵消这一做功，外电源必须提供能量

$$\delta W_s = -(-I\delta\Phi_e - I_e\delta\Phi) = I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi, \tag{91}$$

才可保持电流 I 和 I_e 不变。根据能量守恒定理，这一能量被用于两项用途，一是使得磁场能量 $W_i^{(0)}$ 发生改变，二是转化为对外的机械做功，即我们有

$$\delta W_s = \delta W_i^{(0)} + \delta A = \frac{1}{2}I\delta\Phi_e + \frac{1}{2}I_e\delta\Phi + \delta A, \tag{92}$$

或是

$$\delta A = \frac{1}{2} I \delta \Phi_e + \frac{1}{2} I_e \delta \Phi = \delta W_i^{(0)} = \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{B}_e(0). \tag{93}$$

在这里，我们使用了公式 (87) 和公式 (82) 。考虑到对外的机械做功的结果是使得机械势能减少，故

$$\delta A = -\delta U \tag{94}$$

成立。由此，我们最后得到

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0). \tag{95}$$

这与我们的预期是一致的。

现在，我们可以利用公式

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \tag{96}$$

来决定磁偶极矩的受力了。我们有

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(\mathbf{r})) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}_e(\mathbf{r})) + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}_e(\mathbf{r}). \tag{97}$$

这里，我们利用了公式 $\nabla \times \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = 0$ ，即产生外场的电流不会出现在磁矩 $\mathbf{m}$ 所在的区域内。

另一方面，磁偶极矩所受到的力矩则由下式

$$L = -\frac{\partial}{\partial \theta} U(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \theta}(m B_e(0) \cos\theta) = -m B_e(0) \sin\theta \tag{98}$$

给出。再利用右手螺旋法则决定其方向，我们有

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e(0). \tag{99}$$

上面的推导依赖于物理的论证，但是不够严谨。为了做一比较，我们接下来再用另外一种方法重新推导磁偶极矩所受外力和外力矩的表达式。根据毕奥 - 萨伐尔定律，电流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \neq 0$ 的区域 Ω 所受到的外力为

$$\mathbf{F} = \int\int\int_{\Omega} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_e(\mathbf{r})\, dxdydz. \tag{100}$$

当 Ω 的线度远远小于 Ω' 到 Ω 的距离时，我们有

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_e(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B}_e(0). \tag{101}$$

因此， $\mathbf{F}$ 可以近似地写为

$$\mathbf{F} = \left(\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right) \times \mathbf{B}_e(0) + \left(\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\nabla)dxdydz\right) \times \mathbf{B}_e(0). \tag{102}$$

利用 (60) 式，我们看到此式的第一项为零。再利用 (61) 式，我们有

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}})dxdydz = \int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})\left(\sum_{i=1}^3 x_i\frac{\partial}{\partial X_i}\right)dxdydz \\
= &\sum_{i=1}^3\left(\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})x_i dxdydz + \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})x_i dxdydz\right)\frac{\partial}{\partial X_i} \\
= &\sum_{i=1}^3\left(-\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_i(\mathbf{r})x_k dxdydz + \frac{1}{2}\int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})x_i dxdydz\right)\frac{\partial}{\partial X_i} \\
= &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\left(\int\int\int_\Omega j_i(\mathbf{r})x_k dxdydz - \int\int\int_\Omega j_k(\mathbf{r})x_i dxdydz\right)\frac{\partial}{\partial X_i} \\
= &\left[\left(\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right)\times\nabla_{\mathbf{R}}\right]_k .
\end{aligned} \tag{103}$$

因此， $\mathbf{F}$ 可以写作

$$\mathbf{F} = \left[\left(\frac{1}{2}\int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right)\times\nabla_{\mathbf{R}}\right]\times\mathbf{B}_e(0) = (\mathbf{m}\times\nabla_{\mathbf{R}})\times\mathbf{B}_e(0). \tag{104}$$

再利用微分恒等式

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{b} = \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}), \tag{105}$$

即可得到

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)) - \mathbf{m}(\nabla_{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{B}_e(0)) = \nabla_{\mathbf{R}}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0)). \tag{106}$$

这隐含着磁偶极矩在外场 $\mathbf{B}_e(0)$ 中的势能为

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_e(0), \tag{107}$$

与 (95) 式给出的结果是一致的。

接下来，我们再计算磁偶极矩在外场中所感受的外力矩。我们有

$$\mathbf{L} = \int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times\mathbf{f}(\mathbf{r})dxdydz = \int\int\int_\Omega \mathbf{r}\times(\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_e(\mathbf{r}))dxdydz. \tag{108}$$

若只取展开式 (101) 的第一项，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \int\int\int_{\Omega} \mathbf{r}\times(\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_e(0))dxdydz \\ &= \int\int\int_{\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_e(0))\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz - \left(\int\int\int_{\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right)\mathbf{B}_e(0). \end{aligned} \tag{109}$$

利用微分恒等式

$$\nabla(\mathbf{j}(\mathbf{r})r^2) = r^2\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) + (\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\nabla)r^2) = 2\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}. \tag{110}$$

(这里，我们使用了连续性方程 $\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$) ，我们可以将上式改写作

$$\mathbf{L} = \int\int\int_{\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_e(0))\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz - \left(\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\nabla(\mathbf{j}(\mathbf{r})r^2)dxdydz\right)\cdot\mathbf{B}_e(0). \tag{111}$$

再利用高斯定理，可见上式第二项为零。因此，我们最后得到

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{3}\left(\int\int\int_{\Omega} x_i\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right)\cdot B_{ei}(0). \tag{112}$$

再一次利用 (61) 式，可得到

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\int\int\int_{\Omega}\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})dxdydz\right)\times\mathbf{B}_e(0) = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_e(0). \tag{113}$$

与 (99) 式完全一样。

第八章、电磁波的传播

在第六章和第七章中，我们分别讨论了静电和静磁，即电荷分布以及电流分布不随时间改变的情况。当电荷或电流分布可以随时间变化时，会导致随时间改变的电场和磁场。此时，如同麦克斯韦证明的那样，在真空中，电磁场将以波的形式传播，即它们分别满足如下的达朗贝尔方程

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{1}$$

这里， $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ 为真空中的光速。而在连续媒介质中，我们需要从麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho_f(\mathbf{r},t), \qquad & \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \qquad & \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r},t) + \tfrac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

出发，重新推导相应的波动方程。

首先，我们看到正是由于随时间改变的自由电荷密度 $\rho_f(\mathbf{r},t)$ 和传导电流密度 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r},t)$ 的存在，产生了随时间改变的电场和磁场。反过来，这些随时间改变的场强又会影响下一个时刻的自由电荷密度和传导电流密度。因此，从逻辑完备的角度看，我们应该在全空间联合求解上述四个方程。但由此带来的数学上的困难实在太大，使得人们不得不退而求其次，将求解连续媒介质内电磁波传播的问题分成两部分，即电磁波的传播和电磁波的产生问题。在本章中，我们将只关注第一部分问题，而忽略电磁波是如何产生的。为此，我们假设在连续媒介质中 $\rho_f(\mathbf{r},t) = 0$ 和 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r},t) = 0$ 成立。而在第九章和第十章中，我们再讨论电磁是如何产生的问题。

\$ 8.1 平面电磁波

当 $\rho_f(\mathbf{r},t) = 0$ 和 $\mathbf{j}_f(\mathbf{r},t) = 0$ 时，麦克斯韦方程组可以改写作

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 0, \quad & \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\tfrac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \quad & \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \tfrac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3}$$

在静电学和静磁学问题研究中，若电场强度和磁场强度不太大时，我们可以将电位移矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 写作

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}). \tag{4}$$

而对于随时间变化的电磁场，实验结果表明，在某些频率范围内，这些关系仍然成立，即

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu\mathbf{H}(\mathbf{r},t). \tag{5}$$

但是当电磁场的变化频率和引起连续介质中电极化或磁极化的束缚电子或分子的振动本征频率

为了简单起见，我们先考虑没有色散的情况。此时，麦克斯韦方程组可以被改写为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\mu\tfrac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\\ \nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\epsilon\tfrac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.\end{aligned} \tag{6}$$

将方程组的第一式两边取旋度后，我们有

$$\nabla\times\left(-\mu\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right)=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t))-\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{7}$$

再将方程组的第二式和第三式代入后，我们得到

$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t))=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{8}$$

或是

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\epsilon}\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0. \tag{9}$$

与真空中电磁强度矢量所满足的达朗贝尔方程相比，我们看到原方程中的 $\mu_0\epsilon_0$ 现在被 $\mu\epsilon$ 代替，而 $u=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 被视作电磁波在连续媒介质中的传播速率。又由于 $\mu>\mu_0$ ，$\epsilon>\epsilon_0$ 成立，我们看到

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}<\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}=c. \tag{10}$$

而 $n=c/u$ 被定义为媒介质的折射率。

同理，我们可以证明磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 亦满足相同的波动方程，即

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\epsilon}\nabla^2\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=0 \tag{11}$$

成立。下面，为了确定起见，我们以方程 (9) 为例进行讨论。

按照求解偏微分方程的标准程序，我们先考虑分量式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon}\nabla^2 E_x(\mathbf{r},t) \\ = \quad & \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon}\left(\frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

利用分离变量法，我们令

$$E_x(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z)f(t). \tag{13}$$

代入方程 (12) 后，我们得到

$$\Phi(\mathbf{r})\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - f(t)\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial z^2}\right) = 0, \tag{14}$$

或是

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{1}{\Phi(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial z^2}\right). \tag{15}$$

由于上式的左边为时间 t 的函数，而右边则为坐标 x 、 y 和 z 的函数，故方程两边相等隐含着其必为一个常数，即

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{1}{\Phi(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r})}{\partial z^2}\right) = C \tag{16}$$

成立。特别是我们有

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = C, \tag{17}$$

或是

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = Cf(t). \tag{18}$$

这是一个常微分方程。我们可以令 $f(t) = \exp(nt)$ 。将之代入后，我们得到代数方程

$$n^2 = C. \tag{19}$$

并由此解得 $n = \pm\sqrt{C}$ 。与之对应的是两个解

$$f_1(t) = \exp(\sqrt{C}t), \quad f_2(t) = \exp(-\sqrt{C}t). \tag{20}$$

而 $f(t)$ 的一般解为二者的线性叠加，即

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) = a_1 \exp\left(\sqrt{C}t\right) + a_2 \exp\left(-\sqrt{C}t\right). \tag{21}$$

接下来，我们研究微分方程

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r})}{\partial z^2}\right) = C\Phi(\mathbf{r}) \tag{22}$$

的解。受求解方程 (12) 的启发，我们可以令

$$\Phi(x, y, z) = \exp(m_1 x + m_2 y + m_3 z). \tag{23}$$

这里， m_1 、 m_2 和 m_3 为一些待定的常数。将之代入方程 (22) 后，我们有

$$\frac{1}{\mu\epsilon}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right)\exp(m_1 x + m_2 y + m_3 z) = C\exp(m_1 x + m_2 y + m_3 z), \tag{24}$$

或是

$$\frac{1}{\mu\epsilon}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right) = C = n^2. \tag{25}$$

为了决定这些常数，我们需要考虑到 $E^2(\mathbf{r}, t)$ 正比于时刻 t 时，空间 $\mathbf{r}$ 处的电场能量密度。而在介质中，这一密度是不会随着时间的增大而无限增大或趋向于零的。这就要求常数 n 不可为一实数，而只能为一纯虚数。习惯性地，我们取 $n = -i\omega$ ，即

$$f(t) = \exp(-i\omega t), \tag{26}$$

而 ω 为一具有量纲 $[T]^{-1}$ 的量，称为角频率。将 $n = -i\omega$ 代入 (25) 式后，我们得到

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n^2\mu\epsilon = -\omega^2\mu\epsilon. \tag{27}$$

显然， m_1 ， m_2 和 m_3 也必须为虚数，记作

$$m_1 = ik_x, \quad m_2 = ik_y, \quad m_3 = ik_z. \tag{28}$$

而相应的解可以写作

$$\Phi_{k_x,k_y,k_z}(x, y, z) = \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z) \equiv \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{29}$$

这里，矢量 $\mathbf{k}$ 被称为电磁波的波矢，其量纲为 $[L]^{-1}$ 。

综合上述结果，我们得到如下形式的方程 (12) 的解

$$E_x(x,y,z,t) = E_{x0}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t). \tag{30}$$

这里，E_{x0} 为一常数，而 $\mathbf{k}$ 和 ω 满足关系 $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ 。同理，我们也可求解 $E_y(x,y,z,t)$ 和 $E_z(x,y,z,t)$ ，并最后得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t). \tag{31}$$

这里， $\mathbf{E}_0 = E_{x0}\mathbf{i} + E_{y0}\mathbf{j} + E_{z0}\mathbf{k}$ 为一常矢量，而 E_{x0} ， E_{y0} 和 E_{z0} 皆为实数。我们还需注意到，这样求得的解要满足条件

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t) = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) = 0, \tag{32}$$

即

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 = k_xE_{x0} + k_yE_{y0} + k_zE_{z0} = 0. \tag{33}$$

这一条件被称为横场条件，它要求 $\mathbf{E}_0$ 总是与波矢 $\mathbf{k}$ 彼此垂直的。

为了解释 (31) 式的物理意义，我们可将其两边同时取实部。我们有

$$\mathrm{Re}\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_{物}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0\cos(\omega t - k_xx - k_yy - k_zz). \tag{34}$$

这代表一个行波，其中 $\mathbf{E}_0$ 称为行波的振幅，而 $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ 称为在时刻 t 时，空间 $\mathbf{r}$ 处该行波的相位。取垂直于波矢 $\mathbf{k}$ 的平面 P ，则 P 上任何一点的矢径 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{k}$ 的点乘 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ 为一常数，并不依赖于其位置。也就是说，在时刻 t 时，平面 P 上的空间点都具有同样的位相，即 P 是电磁行波的一个等相位面。反过来，在任意时刻 t ，电场强度矢量 (31) 的等相位面都是垂直于波矢量 $\mathbf{k}$ 的一个平面。这样的电磁行波被称为平面波，而 $\mathbf{k}$ 的方向则为其传播方向。又由于 $\mathbf{E}_0$ 的方向始终垂直于 $\mathbf{k}$ ，故被称为横波。在文献中，$\mathbf{E}_0$ 的方向被称为电磁波的偏振方向。可以选取与 $\mathbf{k}$ 垂直的任意两个互相正交的方向作为 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 的独立偏振方向。因此，对应于一个给定的波矢 $\mathbf{k}$ ，存在两个独立的偏振行波。

又由于余弦函数是一个周期函数，若在空间某一点 $\mathbf{r}$ 处，两个不同时刻 t 和 t' 时，$\mathbf{E}_{物}(x,y,z,t)$ 与 $\mathbf{E}_{物}(x,y,z,t')$ 是等值的，即

$$\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{E}_0\cos(\omega t'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{E}_0\cos(\omega(t'-t)+\omega t'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{35}$$

成立，则我们有

$$\omega(t'-t)=2\pi L. \tag{36}$$

这里， L 为一个非零整数。当 $L=1$ 时，相应的时间差

$$T=t'-t=\frac{2\pi}{\omega} \tag{37}$$

称为平面电磁波的周期，而其倒数则称为频率，单位为赫兹 (Hertz) ，即每秒钟电磁波在 $\mathbf{r}$ 处的振动次数。

类似地，若在同一时刻 t 时，两个不同相位平面 P 和 P' 上，电磁波 $\mathbf{E}_{物}(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{E}_{物}(x',y',z',t)$ 等值，即

$$\mathbf{E}_0\cos(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-k_xx'-k_yy'-k_zz') \tag{38}$$

成立，则我们可以引入一个新的坐标系。在这个坐标系中， $\mathbf{k}$ 的方向被取作 z 轴的方向，而 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 皆可取作这一坐标轴上的点，即 $\mathbf{r}=(0,0,\tilde{z})$ 和 $\mathbf{r}'=(0,0,\tilde{z}')$ 。因此，上式现在可以简化为

$$\mathbf{E}_0\cos(\omega t-|\mathbf{k}|\tilde{z})=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-|\mathbf{k}|\tilde{z}')=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-|\mathbf{k}|\tilde{z}-|\mathbf{k}|(\tilde{z}'-\tilde{z})). \tag{39}$$

因此，我们当有

$$|\mathbf{k}|(\tilde{z}'-\tilde{z}))=2\pi M. \tag{40}$$

这里， M 为一整数。同理，我们将 $M=1$ 时的距离差

$$\lambda=\tilde{z}'-\tilde{z}=\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \tag{41}$$

定义为电磁行波的波长，并由此解得

$$|\mathbf{k}|=\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{42}$$

有了这些定义之后，我们很自然地将物理量 $u = \frac{\lambda}{T}$ 定义作电磁行波的相位面地传播速度，即相速。将此式稍微修改一下后，我们有

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\left(\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}\right)}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{\mu\epsilon}. \tag{43}$$

这里，我们使用了公式 (37) 和 (42) 。

同理，由于磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 满足同样的波动方程，我们可以直接将它写作

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \tag{44}$$

这里， $\mathbf{H}_0$ 为一实矢量。又由于我们假设 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 仍然成立，故

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mu\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mu\mathbf{H}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \tag{45}$$

另一方面，利用麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{46}$$

我们可得 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ ，即 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 也是一个横波。再一次使用麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(x, y, z, t)}{\partial t}, \tag{47}$$

我们又可得

$$-i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{B}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \tag{48}$$

或是

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{B}_0. \tag{49}$$

由此，我们解得

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\omega}|\mathbf{k}|\mathbf{e}_\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu\epsilon}\mathbf{e}_\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \tag{50}$$

此式告诉我们，在传播过程中，磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 总是与电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 彼此垂直的，如教科书 115 页上图 4-2 所示。除此之外，我们还看到

$$\left|\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}\right| = \left|\frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{B}_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = u. \tag{51}$$

特别是在真空中， $\mu = \mu_0$ ， $\epsilon = \epsilon_0$ ，故我们有

$$\left|\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c. \tag{52}$$

我们已经知道，在连续媒介质中，电磁场的能量密度为

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right) = \frac{1}{2}\left(\epsilon E^2(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\mu}B^2(\mathbf{r},t)\right). \tag{53}$$

因此，波印亭矢量可以写为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\\
= \;& \frac{1}{\mu}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times(\sqrt{\mu\epsilon}\mathbf{e}_\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times(\mathbf{e}_\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t))\\
= \;& \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E^2(\mathbf{r},t)\mathbf{e}_\mathbf{k} = u\mathcal{U}\mathbf{e}_\mathbf{k},
\end{aligned} \tag{54}$$

即能量流的方向为波矢的方向，而其数值为能量密度与电磁波相速的乘积。为了计算 $\mathcal{U}$ ，我们可将

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{55}$$

代入其表达式，并得到

$$\mathcal{U}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\frac{\mu\epsilon}{\mu}|\mathbf{e}_\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0|^2\cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = \epsilon E_0^2\cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \tag{56}$$

而其平均值则为

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{U}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{U}(\mathbf{r},t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \epsilon E_0^2\cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})dt\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\epsilon E_0^2\left(1+\cos(2\omega t - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right)dt = \frac{1}{T}\epsilon E_0^2\int_0^T\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2.
\end{aligned} \tag{57}$$

我们看到，能量密度是与电场强度矢量的振幅的平方成正比的。

需要强调一点的是，我们所讨论的电磁场方程的平面波解

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{\omega 0}\exp(i\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{58}$$

仅仅与一个频率 ω 有关，称为单频率或单色波解。根据线形微分方程理论，波动方程的一般解应是这些单色波解的线形叠加，即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r},t)\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_{\omega 0}\exp(i\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,d\omega. \tag{59}$$

这里，波矢 $\mathbf{k}$ 应该满足条件

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{\mu\epsilon}, \tag{60}$$

以及

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0. \tag{61}$$

在上面的推导中，我们一直假设如同静电学的情况，关系式 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\epsilon\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 仍然成立，且 ϵ 和 μ 皆为实数。在更为实际的情况中，这些方程应该被代之以如下的含时关系

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\int_0^{\infty}f(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{r},t-\tau)d\tau,\ \ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\int_0^{\infty}g(\tau)\mathbf{H}(\mathbf{r},t-\tau)d\tau. \tag{62}$$

这里，$f(t)$ 和 $g(t)$ 被称为媒介质的响应函数。以 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 为例。若 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 为单色波，即 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$ 时，则 $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ 可被写成

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)+\int_0^{\infty}f(\tau)\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega(t-\tau))\,d\tau\\
=\ &\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)+\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)\int_0^{\infty}f(\tau)\exp(-i\omega\tau))\,d\tau\\
=\ &\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)(1+\widetilde{f}(\omega))\equiv\epsilon(\omega)\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r})\exp(i\omega t)=\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},t).
\end{aligned} \tag{63}$$

这里，$\widetilde{f}(\omega)$ 为响应函数 $f(t)$ 的傅立叶变换。因此，关系式

$$\mathbf{D}_{\omega}(\mathbf{r})=\epsilon(\omega)\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) \tag{64}$$

仍然成立。只不过此时的 $\epsilon(\omega)$ 是一个依赖于频率 ω 的函数。相同的，我们亦有

$$\mathbf{B}_{\omega}(\mathbf{r})=(1+\widetilde{g}(\omega))\,\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r})=\mu(\omega)\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}). \tag{65}$$

这里，$\widetilde{g}(\omega)$ 为响应函数 $g(t)$ 的傅立叶变换。

为了推导 $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ 所满足的方程，我们仍从麦克斯韦方程组 (3) 出发。将第二式的两边取旋度后，我们有

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t} = \nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) \\ = \quad \nabla\times\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}(-i\omega)e^{i\omega t} &= -i\omega\mu(\omega)\nabla\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{66}$$

从方程的两边消掉指数因子 $e^{i\omega t}$ 后，我们进一步得到

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})) - \nabla^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \\ = \quad -\nabla^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) &= -i\omega\mu(\omega)\nabla\times\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{67}$$

再从麦克斯韦方程组的第四式，我们得到

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= (\nabla\times\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}))\,e^{i\omega t} = \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ = \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right) &= i\omega\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t} = i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{68}$$

同样，从此式两边消掉指数因子 $e^{i\omega t}$ 后，我们有

$$\nabla\times\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}). \tag{69}$$

将之代入 (67) 式后，我们得到

$$-\nabla^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = i\omega\mu(\omega)(i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})) = \mu(\omega)\epsilon(\omega)\omega^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}), \tag{70}$$

或是

$$\nabla^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) + \mu(\omega)\epsilon(\omega)\omega^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = 0. \tag{71}$$

由于 $\mu(\omega)$ 、 $\epsilon(\omega)$ 和 ω^2 皆为非负的，故可令它们的乘积为

$$k^2(\omega) = \mu(\omega)\epsilon(\omega)\omega^2, \tag{72}$$

而上式简化为

$$\nabla\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = 0. \tag{73}$$

这一方程称为亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程。为了使得麦克斯韦方程组的另外两个方程也成立，我们还需要求

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\omega}\nabla \times \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \tag{74}$$

成立。

显然，若我们取

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0\omega} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \tag{75}$$

且令

$$|\mathbf{k}| = k(\omega) = \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}, \tag{76}$$

则赫姆霍兹方程可被满足。只不过此时的相速

$$u(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}} \tag{77}$$

是一个依赖于频率 ω 的函数。除此之外，上述其它结果皆可照搬无误。

\$ 8.2 电磁波在两种介质分界面上的反射和折射

光入射到两种不同的连续媒介质的分界面上时会发生反射和折射。这些现象可以用电磁波在该界面处所满足的边值关系加以解释，从而再次揭示光本质上是电磁波。

在第五章中，我们已知，电磁场在两种连续媒介质分界面处所满足的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f, \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \vec{\alpha}_f, \quad \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \end{aligned} \tag{78}$$

实际上，这四个方程中仅有两个是独立的，一般取为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \vec{\alpha}_f. \tag{79}$$

让我们考虑最简单的情况，即两种媒介质的分界面为一无穷大平面，将之取作 XY 平面。如教科书 118 页上图 4-3 所示，若有一单色电磁波从介质 1 射，其波矢 $\mathbf{k}$ 与 z 轴的夹角取作 θ(入射角) 。又假设反射波和折射电磁波亦为单色平面波，波矢分别为 $\mathbf{k}'$ 和

$\mathbf{k}''$，即我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_{\text{入射}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t),\quad \mathbf{E}_{\text{反射}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0'\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\omega t),\\&\mathbf{E}_{\text{折射}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0''\exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-i\omega t).\end{aligned}\tag{80}$$

那么，在介质 1 中，总的电场强度矢量应为

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{\text{入射}}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}_{\text{反射}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)+\mathbf{E}_0'\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\omega t).\tag{81}$$

而在媒介质 2 中，电场强度矢量为

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_{\text{折射}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0''\exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-i\omega t).\tag{82}$$

将它们代入 (79) 式中，我们得到

$$\mathbf{e}_n\times(\mathbf{E}_0\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)+\mathbf{E}_0'\exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\omega t))=\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}_0''\exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}-i\omega t),\tag{83}$$

或是

$$\begin{aligned}&(\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}_0)\exp(ik_xx+ik_yy)+(\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}_0')\exp(ik_x'x+ik_y'y)\\=\;&(\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}_0'')\exp(ik_x''x+ik_y''y).\end{aligned}\tag{84}$$

考虑到 x 和 y 坐标的任意性，我们要求

$$k_x=k_x'=k_x'',\quad k_y=k_y'=k_y''\tag{85}$$

必须成立。又若我们将入射波矢取在 XY 平面内，即令 $k_y=0$，则 k_y' 和 k_y'' 亦必须为零，即反射波矢和折射波矢亦必须在同一 XY 平面内。

又根据入射角的定义，我们有 $k_x=k\sin\theta$，并可同理定义反射角和折射角，即

$$k_x'=k'\sin\theta',\quad k_x''=k''\sin\theta''.\tag{86}$$

代入 (85) 式后，我们有

$$k\sin\theta=k'\sin\theta'=k''\sin\theta''.\tag{87}$$

先看第一个等式。我们有

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{k'}{k}. \tag{88}$$

又对于单色波而言，波数 k 与频率 ω 的关系为

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}, \tag{89}$$

故我们有

$$k(\omega) = k'(\omega) = \omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}. \tag{90}$$

由此我们得到

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{\omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}{\omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}} = 1, \tag{91}$$

或是

$$\sin\theta = \sin\theta', \tag{92}$$

即入射角等于反射角。

接下来，我们再考虑 (87) 式中的第二个等式

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'} = \frac{k'}{k''}. \tag{93}$$

将

$$k'(\omega) = \omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}, \quad k''(\omega) = \omega\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}, \tag{94}$$

代入后，我们有

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'} = \frac{\omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}{\omega\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}} = \frac{\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}{\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{95}$$

即

$$n_1\sin\theta' = n_2\sin\theta''. \tag{96}$$

这与众所周知的光在两种媒介质分界面处满足的折射定律是一致的。

现在，我们将边值关系 (84) 重新写作

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}' = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_0''. \tag{97}$$

为了求解 $\mathbf{E}_0'$ 和 $\mathbf{E}_0''$，我们还需要利用 (79) 中的第二个边值条件。首先，利用麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{98}$$

我们写出单色电磁波的振幅关系

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)) = i\mathbf{k} \times (\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) = i\omega \mathbf{B}_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t), \tag{99}$$

或是

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \tag{100}$$

又由于

$$\mathbf{B}_0 = \mu(\omega)\mathbf{H}_0, \tag{101}$$

我们进一步得到

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \tag{102}$$

因此，在媒介质 1 中的总磁场强度矢量为

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_{\text{入射}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}_{\text{反射}}(\mathbf{r},t) \\ = \;& \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) + \mathbf{H}_0' \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\ = \;& \frac{1}{\omega\mu_1(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) + \frac{1}{\omega\mu_1(\omega)}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} - i\omega t). \end{aligned} \tag{103}$$

而在媒介质 2 中的总磁场强度矢量则为

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_{\text{折射}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} - i\omega t). \tag{104}$$

由于在两种连续媒介质的分界面处的自由电流密度 $\vec{\alpha}_f = 0$，我们从 (79) 的第二个边值条件得出

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_\parallel \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r},t)\Big|_{z=0} \\ = \;& \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\omega\mu_1(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0\right) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)\Big|_{z=0} \\ + \;& \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\omega\mu_1(\omega)}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0'\right) \exp(i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r} - i\omega t)\Big|_{z=0} \\ = \;& \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0''\right) \exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} - i\omega t)\Big|_{z=0}. \end{aligned} \tag{105}$$

由于在 $z=0$ 的分界面上，我们有 $k_x = k'_x = k''_x$ 以及 $k_y = k'_y = k''$，故可消去上式两边的指数因子，并由此得到

$$\mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0\right) + \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0\right) = \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2(\omega)}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0\right). \tag{106}$$

将此式与 (97) 式联立，我们现在可以求解 $\mathbf{E}'_0$ 和 $\mathbf{E}''_0$ 了。

由于对于一个给定的波矢 $\mathbf{k}$，存在电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的两个独立偏振方向，故需分别讨论 $\mathbf{E}_0$ 垂直于和平行于入射面的情况。

(i) 当 $\mathbf{E}_0$ 垂直于入射面时，如教科书 119 页上图 4-4(a) 所示，我们有

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}''_0, \tag{107}$$

而

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0\right) + \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0\right) \\
= & \frac{1}{\mu_1(\omega)}\left((\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{k} - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_0\right) + \frac{1}{\mu_1(\omega)}\left((\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}'_0)\mathbf{k}' - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k}')\mathbf{E}'_0\right) \\
= & \frac{1}{\mu_1(\omega)}\left(-(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_0\right) + \frac{1}{\mu_1(\omega)}\left(-(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k}')\mathbf{E}'_0\right) \\
= & \frac{1}{\mu_1(\omega)}(-k\cos\theta\mathbf{E}_0 + \cos\theta\mathbf{E}'_0) = \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2(\omega)}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0\right) \\
= & \frac{1}{\mu_2(\omega)}\mathbf{e} \times (\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0) = \frac{1}{\mu_2(\omega)}\left((\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}''_0)\mathbf{k}'' - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k}'')\mathbf{E}''_0\right) \\
= & \frac{1}{\mu_2(\omega)}\left(-\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{k}''\right)\mathbf{E}''_0) = -\frac{1}{\mu_2(\omega)}k''\cos\theta''\mathbf{E}''_0.
\end{aligned} \tag{108}$$

再将 (107) 代入后，我们得到

$$\frac{1}{\mu_1(\omega)}\left(k\cos\theta E_0 - k'\cos\theta E'_0\right) = \frac{1}{\mu_2(\omega)}k''\cos\theta''E''_0. \tag{109}$$

由于

$$k = k' = \omega\sqrt{\mu_1(\omega)\sigma_1(\omega)}, \quad k'' = \omega\sqrt{\mu_2(\omega)\sigma_2(\omega)}, \tag{110}$$

故上式又可被写作

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1(\omega)}{\mu_1(\omega)}}(E_0 - E'_0)\cos\theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2(\omega)}{\mu_2(\omega)}}E''_0\cos\theta''. \tag{111}$$

考虑到在一般非铁磁性 (顺磁) 物质中， $\mu(\omega) \cong \mu_0$ ，我们又可将上式简化为

$$\sqrt{\epsilon_1(\omega)}(E_0 - E_0')\cos\theta = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}E_0''\cos\theta''. \tag{112}$$

因此，我们解得

$$E_0' = \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta - \sqrt{\epsilon_2(\omega)}\cos\theta''}{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta + \sqrt{\epsilon_2(\omega)}\cos\theta''}E_0, \quad E_0'' = \frac{2\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta}{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta + \sqrt{\epsilon_2(\omega)}\cos\theta''}E_0. \tag{113}$$

又考虑到折射定律

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}{\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}} \cong \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}}{\sqrt{\epsilon_2(\omega)}}, \tag{114}$$

我们可进一步将上式改写为

$$\begin{aligned} E_0' &= \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta - \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta + \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}E_0 \\ &= \frac{\cos\theta\sin\theta'' - \sin\theta\cos\theta''}{\cos\theta\sin\theta'' + \sin\theta\cos\theta''}E_0 = \frac{\sin(\theta''-\theta)}{\sin(\theta''+\theta)}E_0, \end{aligned} \tag{115}$$

以及

$$\begin{aligned} E_0'' &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta}{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\cos\theta + \frac{\sqrt{\epsilon_1(\omega)}\sin\theta}{\sin\theta''}\cos\theta''}E_0 \\ &= \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\cos\theta\sin\theta'' + \sin\theta\cos\theta''}E_0 = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta''+\theta)}E_0. \end{aligned} \tag{116}$$

接下来，我们讨论 $\mathbf{E}_0$ 平行于入射面，即如教科书 119 页上图 4-4(b) 所示的情况。此时，边值条件 (97) 化为

$$E_0\cos\theta - E_0'\cos\theta = E_0''\cos\theta'', \tag{117}$$

而边值条件 (106) 则为

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0\right) + \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0'\right) \\ =\ & \frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{e}_n \times (kE_0\odot) + \frac{1}{\mu_1(\omega)}\mathbf{e}_n \times (k'E_0'\odot) \\ =\ & \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2(\omega)}\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0''\right) = \frac{1}{\mu_2(\omega)}\mathbf{e}_n \times (k''E_0''\odot), \end{aligned} \tag{118}$$

故我们有

$$\frac{1}{\mu_1(\omega)}(kE_0 + k'E_0') = \frac{1}{\mu_2(\omega)}k''E_0''. \tag{119}$$

将 $k = k' = \omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}$ 及 $k'' = \omega\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}$ 代入并取 $\mu_1(\omega) \cong \mu_2(\omega) \cong \mu_0$ 后，我们得到

$$\sqrt{\epsilon_1(\omega)}(E_0 + E_0') = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}E_0''. \tag{120}$$

将此式与 (117) 式联立求解，并再次利用折射定律后，我们有

$$E_0' = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}E_0, \quad E_0'' = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')\cos(\theta + \theta'')}E_0, \tag{121}$$

称为菲涅尔 (Fresnel) 公式，给出了反射波和折射波对于入射波的电场强度的比值。特别值得一提的是，当 $\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$ 时，由此式我们得出结论 $E_0' = 0$，即入射电场中振幅平行于入射面的分量没有反射波。因此，此时入射得自然光 (为两种偏振光的等量混合) 的反射光将变为垂直于入射面偏振的完全偏振光。此即光学中的布儒斯特 (Brewster) 定律，相应的入射角称为布儒斯特角。

菲涅尔公式同时也给出了入射波、反射波和折射波之间的相位关系。例如，当 $\epsilon_2(\omega) > \epsilon_1(\omega)$ 时，根据折射定律，我们有 $\theta > \theta''$。此时，$\sin(\theta'' - \theta)$ 为负数。因此，当 E_0 与入射面垂直时，E_0' 和 E_0 的符号相反。这种现象在光学中称为半波损失。反之，若 $\epsilon_2(\omega) < \epsilon_1(\omega)$，则根据折射定律，我们有 $\theta < \theta''$。特别是当 $\sin\theta_c \equiv \sqrt{\epsilon_1(\omega)/\epsilon_2(\omega)}$ 时，$\theta'' = \pi/2$。这时的折射波将从两种媒介质的分界面上掠过。若再进一步增大入射角度 θ，就不可能定义折射角 θ'' 了。此时，我们期待将会有新的物理现象发生。此时，我们仍有

$$k_x'' = k_x = k\sin\theta, \quad k'' = \omega\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}, \quad k = \omega\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)} \tag{122}$$

成立。因此，$\mathbf{k}''$ 的 z 分量为

$$\begin{aligned} k_z'' &= \sqrt{k''^2 - k_x''^2} = \sqrt{k''^2 - (k\sin\theta)^2} = \sqrt{k''^2 - k^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{k^2\left(\frac{\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}}{\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}\right)^2 - k^2\sin^2\theta} = k\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\theta} \\ &= k\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{123}$$

当 $\theta > \theta_c$ 时， $\sin\theta > \sin\theta_c = n_{21}$ 。这样， k'' 就成了一个纯虚数，即

$$k'' = i\kappa = ik\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}. \tag{124}$$

而在介质 2 中的电场强度矢量为

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r} - i\omega t) = \mathbf{E}_0'' \exp(-\kappa z)\exp(ik_x'' x - i\omega t). \tag{125}$$

我们看到，折射波的电场强度矢量随着 z 的增大而指数衰减。因此，

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} \tag{126}$$

也被视作电磁波可以“渗入”媒介质 2 的薄层的厚度。

为了更为清楚地理解这一物理图像，让我们再来计算折射波的能流密度矢量。为此，我们需要计算磁场强度矢量 $\mathbf{H}''(\mathbf{r},t)$ 。当电场强度矢量 $\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)$ 垂直于入射面时，我们有

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) = E_0'' \exp(-\kappa z)\exp(ik_x'' - i\omega t)\mathbf{j}. \tag{127}$$

又因为

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}''(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\mathbf{k}''\times\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\left((k_x''\mathbf{i} + i\kappa\mathbf{e}_z)\times(E_0''\exp(-\kappa z)\exp(ik_x'' x - i\omega t)\mathbf{j})\right) \\
&= \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}k_x'' E_0'' \exp(-\kappa z)\exp(ik_x'' x - i\omega t)\mathbf{e}_z \\
&- \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}i\kappa E_0'' \exp(-\kappa z)\exp(ik_x'' x - i\omega t)\mathbf{i}.
\end{aligned} \tag{128}$$

取实部后，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) &= E_0'' \exp(-\kappa z)\cos(\omega t - k_x'' x)\mathbf{j}, \\
\mathbf{H}''(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\left(k_x'' E_0'' \exp(-\kappa z)\cos(\omega t - k_x'' x)\mathbf{e}_z\right. \\
&- \left. i\kappa E_0'' \exp(-\kappa z)\sin(\omega t - k_x'')\mathbf{i}\right).
\end{aligned} \tag{129}$$

因此，在媒介质 2 中的折射波能量流密度为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}''(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}''(\mathbf{r},t)=(E_0''\exp(-\kappa z)\cos(\omega t-k_x''x)\mathbf{j})\\
\times\ &\left(\frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}k_x''E_0''\exp(-\kappa z)\cos(\omega t-k_x''x)\mathbf{e}_z-\frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}\kappa E_0''\exp(-\kappa z)\sin(\omega t-k_x''x)\mathbf{i}\right)\\
=\ &\frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}k_x''E_0''^2\exp(-2\kappa z)\cos^2(\omega t-k_x''x)\mathbf{i}\\
+\ &\frac{1}{\omega\mu_2(\omega)}k_x''\kappa E_0''^2\exp(-2\kappa z)\cos(\omega t-k_x''x)\sin(\omega t-k_x''x)\mathbf{e}_z. \qquad (130)
\end{aligned}$$

将之对时间取平均值后，我们有

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{S}''}(\mathbf{r})=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{S}''(\mathbf{r},t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}''(\mathbf{r},t)\,dt\\
=\ &\frac{1}{2\omega\mu_2(\omega)}k_x''E_0''^2\exp(-2\kappa z)\mathbf{i}=\frac{1}{2\omega\mu_2(\omega)}k''\sin\theta''E_0''^2\exp(-2\kappa z)\mathbf{i}\\
=\ &\frac{1}{2\omega\mu_2(\omega)}\omega\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}\frac{\sin\theta}{n_{21}}E_0''^2\exp(-2\kappa z)\mathbf{i}\\
=\ &\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_2(\omega)}{\mu_2(\omega)}}E_0''^2\exp(-2\kappa z)\frac{\sin\theta}{n_{21}}\mathbf{i}. \qquad (131)
\end{aligned}$$

因此，折射平均能量流密度只有 x 分量，而沿 z 轴方向透入媒介质 2 的平均能量流密度为零。

若在全反射的情况下允许三角函数取复数值，则本节中推导出的有关反射波和折射波的公式仍然有效。例如，当电场强度矢量 E_0 垂直于入射面时，我们有

$$\begin{aligned}
E_0'\ &=\ \frac{\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}\cos\theta-\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}\cos\theta''}{\sqrt{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}\cos\theta+\sqrt{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}\cos\theta''}E_0\\
&=\ \frac{\cos\theta-\sqrt{\frac{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}\cos\theta''}{\cos\theta+\sqrt{\frac{\mu_2(\omega)\epsilon_2(\omega)}{\mu_1(\omega)\epsilon_1(\omega)}}\cos\theta''}E_0=\frac{\cos\theta-n_{21}\cos\theta''}{\cos\theta+n_{21}\cos\theta''}E_0. \qquad (132)
\end{aligned}$$

另一方面，在发生全反射的情况下，我们有

$$\begin{aligned}
&\sin\theta''=\frac{k_x''}{k''}=\frac{k_x}{k''}=\frac{k\sin\theta}{\sqrt{k_x''^2+k_z''^2}}=\frac{k\sin\theta}{\sqrt{(k\sin\theta)^2+(i\kappa)^2}}=\frac{k\sin\theta}{\sqrt{k^2\sin^2\theta-\kappa^2}}\\
=\ &\frac{k\sin\theta}{\sqrt{k^2\sin^2\theta-k^2(\sin^2\theta-n_{21}^2)}}=\frac{k\sin\theta}{\sqrt{k^2\sin^2\theta-k^2\sin^2\theta+k^2n_{21}^2}}=\frac{\sin\theta}{n_{21}}, \qquad (133)
\end{aligned}$$

而

$$\cos\theta'' = \frac{k_z''}{k''} = \frac{i\kappa}{k''} = \frac{i\kappa}{\sqrt{k_x''^2 - \kappa^2}} = \frac{i\sqrt{k^2\sin^2\theta - k^2 n_{21}^2}}{kn_{21}} = i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1}. \tag{134}$$

代入 E_0' 的表达式后，我们有

$$E_0' = \frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} E_0. \tag{135}$$

又由于

$$\left|\frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}\right| = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + (\sin^2\theta - n_{21}^2)}}{\sqrt{\cos^2\theta + (\sin^2\theta - n_{21}^2)}} = 1, \tag{136}$$

故我们有

$$E_0' = e^{-2i\phi} E_0. \tag{137}$$

这里，

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta}. \tag{138}$$

此式表明，反射波与入射波具有相同的振幅，尽管二者之间有一定的相位差。因此，反射波平均能量密度流在数值上与入射波平均能量密度流相等，即电磁波能量被全部反射回去。光波在光纤中的传播，即利用了全反射现象。

$ 8.3 有导体存在时电磁波的传播

在上面的讨论中，尽管没有明确声明，我们实际上仅考虑了两种媒介质都是绝缘体的情况。若其中一种介质是导体，所得到的结论应该做何修正，是我们在此节中要考虑的问题。

首先，我们注意到，在导体中可以存在传到电流，故在两种媒介质的分界面处可能有非零的传到电流密度 $\vec{\alpha}(\mathbf{r},t)$ 。其次，传到电流会导致焦耳热的产生，即电磁波能量转化为热能。这两点是我们在重新推导过程中需要注意的。

我们已知，在静电学的情况下，自由电荷只可分布在导体的表面。现在我们要论证，在存在交变电场的情况下，这一结论仍不失为一种好的近似。为此，让我们考虑导体内的一点 $\mathbf{r}$ 处的电荷密度函数 $\rho(\mathbf{r},t)$ 随时间的改变。首先，我们有连续性方程

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \tag{139}$$

这里， $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ 为该处的传导电流密度。其次，我们有欧姆定律

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{140}$$

这里， σ 为导体的电导率。它不依赖于时间和位置。利用麦克斯韦方程组的第一式

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\epsilon}\rho(\mathbf{r},t), \tag{141}$$

我们有

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=-\sigma\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\sigma}{\epsilon}\rho(\mathbf{r},t). \tag{142}$$

解此微分方程，我们有

$$\rho(\mathbf{r},t)=\rho_0(\mathbf{r})\exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon}t\right). \tag{143}$$

这里， $\rho(\mathbf{r})$ 为 $t=0$ 时刻，导体内 $\mathbf{r}$ 处的自由电荷密度。此式告诉我们，导体内一点的自由电荷密度是随时间的增长指数衰减的，而衰减时间为

$$\tau=\frac{\epsilon}{\sigma}. \tag{144}$$

因此，若电磁波的频率 $\nu\ll\tau$ ，或是

$$\frac{\sigma T}{\epsilon}=\frac{2\pi\sigma}{\epsilon\omega}\gg 1 \tag{145}$$

时，那么在时间间隔 t 远远小于电磁波的周期内，在导体内 $\mathbf{r}$ 处的自由电荷密度 $\rho(\mathbf{r},t)$ 就已经变得可以忽略不计了。也就是说，在条件 (145) 满足的情况下，导体内部的自由电荷分布仍可视作为零，即电荷仍只能分布于导体表面上。满足条件 (145) 的导体被称为良导体。一般的金属的特征值为 $\tau\cong 10^{-17}$ 秒。在接下来的讨论中，我们将假设这一条件总是满足的，即可忽略导体内部的自由电荷的分布。

在良导体假设下，导体内部的麦克斯韦方程组可以写作

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=-\tfrac{\partial\mathbf{B}(,\mathbf{r},t)}{\partial t}, &\quad \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)&=0,\\ \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)&=\tfrac{\partial\mathbf{D}(,\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{j}_f(\mathbf{r},t), &\quad \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=0.\end{aligned} \tag{146}$$

对于单色波而言，我们可以将这些方程简化为

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})&=i\mu(\omega)\epsilon(\omega)\mathbf{H}(,\mathbf{r}), &\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})&=0,\\ \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})&=-i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}(,\mathbf{r})+\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}), &\quad \nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})&=0.\end{aligned} \tag{147}$$

若我们将此方程组中的第三式改写为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \left(\epsilon(\omega) + i\frac{\sigma}{\omega}\right) \mathbf{E}(,\mathbf{r}) = -i\epsilon'(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{148}$$

可以看到，此方程与方程 (69) 在形式上是完全一样的，只不过作为代价，我们需要引入所谓“复电容率”

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon(\omega) + \frac{i\sigma}{\omega}. \tag{149}$$

因此，重复同样的推导过程，我们立刻可得导体内电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 所满足的赫姆霍兹方程

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \tag{150}$$

这里， $k = \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}$ 为一复数波矢。同时，我们仍需要求

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{151}$$

成立。在求解出 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 后，可再一次利用

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{152}$$

得到磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 。

我们知道，方程 (150) 的解为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \tag{153}$$

只不过现在波矢 $\mathbf{k}$ 为一复数矢量，即

$$\mathbf{k} = \vec{\beta} + i\vec{\gamma}. \tag{154}$$

这里， $\vec{\beta}$ 和 $\vec{\gamma}$ 为两个实矢量。将此式两边取平方后，我们得到

$$k^2 = (\omega^2\mu(\omega)\left(\epsilon(\omega) + i\frac{\sigma}{\omega}\right) = (\vec{\beta} + i\vec{\gamma})^2. \tag{155}$$

展开后，我们有

$$\omega^2\mu(\omega)\epsilon(\omega) + i\omega\mu(\omega)\sigma = \beta^2 - \gamma^2 + 2i\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}. \tag{156}$$

比较上式两边的实部和虚部后，我们得到

$$\omega^2\mu(\omega)\epsilon(\omega) = \beta^2 - \gamma^2, \quad \frac{1}{2}\omega\mu(\omega)\sigma = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}. \tag{157}$$

由于有耗散的缘故，电磁场能量只能渗透入导体表面的一个薄层内。因此，有导体存在时的传播问题一般是作为边值问题加以考虑的。电磁波主要是在导体以外的空间或介质中传播的，而渗入导体内的电磁波能量最终会被耗散成为焦耳热。在下面的讨论中，我们仅考虑垂直入射的情况，即取入射角 $\theta = 0$ 。

将导体与绝缘体的分界面取作 $x-y$ 平面，而 z 轴指向导体内部。由于入射波的波矢 $\mathbf{k}^{(0)}$ 仅有 z 分量，我们立刻可得导体内透射波 (折射) 波的波矢 $\mathbf{k}$ 也仅有 z 分量，即

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) = \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \\
&= \mathbf{E}_0'' \exp\left(i(\beta_z + i\gamma_z)\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \mathbf{E}_0'' \exp(-\gamma_z z)\exp(i\beta_z z - i\omega t).
\end{aligned} \tag{158}$$

代入 (157) 式后，我们有

$$\omega^2\mu(\omega)\epsilon(\omega) = \beta_z^2 - \gamma_z^2, \quad \frac{1}{2}\omega\mu(\omega)\sigma = \beta_z\gamma_z. \tag{159}$$

由此，我们解得

$$\begin{aligned}
\beta_z &= \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2(\omega)}}+1\right)\right]^{1/2}, \\
\gamma_z &= \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2(\omega)}}-1\right)\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{160}$$

当良导体条件

$$\frac{\sigma}{\omega^2\epsilon^2(\omega)} \gg 1 \tag{161}$$

成立时，我们近似有

$$\begin{aligned}
\beta_z &\cong \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2(\omega)}}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}, \\
\gamma_z &\cong \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2(\omega)}}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}.
\end{aligned} \tag{162}$$

因此，在导体内部，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 现在可以写作

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) \cong \mathbf{E}_0'' \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega\sigma}{2}}z\right) \exp\left(i\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega\sigma}{2}}z - i\omega t\right). \tag{163}$$

我们将满足条件

$$\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}z_c = 1, \tag{164}$$

或是

$$z_c = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu(\omega)\sigma}} \tag{165}$$

定义为穿透深度，视作电场能量可以进入导体的范围。当频率为 $100\mathrm{MH}_z$ 时，对于铜而言， $z_c = 0.7 \times 10^{-3}$ 厘米。由此可见，对于高频电磁波，电磁能量集中仅存在于导体表面的一个薄层内。这种现象称为趋肤效应。

又从磁场强度矢量 $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ 和电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ 的关系，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{H}''(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\omega\mu(\omega)}\mathbf{k}\times\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\omega}(\beta_z + i\gamma_z)\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}''(\mathbf{r},t) \\ &\cong \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}(1+i)\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}''(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu(\omega)}}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right)\mathbf{e}_n\times\mathbf{E}''(\mathbf{r},t).\end{aligned} \tag{166}$$

与真空中电磁场的关系

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{167}$$

相比较，我们看到

$$\frac{\left|\frac{\mathbf{B}''(\mathbf{r},t)}{\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)}\right|_{\text{导体}}}{\left|\frac{\mathbf{B}''(\mathbf{r},t)}{\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)}\right|_{\text{真空}}} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma\mu(\epsilon)}{\omega}}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma\mu(\epsilon)}{\omega\mu_0\epsilon_0}} \geq \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon(\omega)}}. \tag{168}$$

在良导体的情况下，这是一个远大于 1 的量。因此，我们有

$$\left|\frac{\mathbf{B}''(\mathbf{r},t)}{\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)}\right|_{\text{导体}} \gg \left|\frac{\mathbf{B}''(\mathbf{r},t)}{\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)}\right|_{\text{真空}}. \tag{169}$$

在高斯单位制中，上式的右边的比值为 1 。因此，在导体内部，

$$|\mathbf{B}''(\mathbf{r},t)| \gg |\mathbf{E}''(\mathbf{r},t)|. \tag{170}$$

成立。也就是说，金属内电磁波的能量主要是磁场能量。

接下来，我们考虑金属表面处的反射波 $\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)$ 和 $\mathbf{H}'(\mathbf{r},t)$ 。若仅考虑电磁场的偏振方向垂直于入射面的情况，我们有

$$\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_0'=\mathbf{E}_0'',\quad \mathbf{H}_0-\mathbf{H}_0'=\mathbf{H}_0''. \tag{171}$$

将

$$\mathbf{H}_0=\frac{1}{\omega\mu(\omega)}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 \tag{172}$$

代入第二式后，我们得到

$$\frac{1}{\omega\mu_0}k_0(E_0-E_0')=\frac{1}{\omega\mu(\omega)}k''E_0'' \tag{173}$$

近似地，我们仍可取 $\mu(\omega)\cong\mu_0$ ，即真空中的磁化率。因此，边值关系现在化为

$$E_0+E_0'=E_0'',\quad k_0(E_0-E_0')=k''E_0''. \tag{174}$$

由此，我们解得

$$E_0'=\frac{\frac{k_0}{k''}-1}{\frac{k_0}{k''}+1}E_0=\frac{k_0-k''}{k_0+k''}E_0. \tag{175}$$

将 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ 以及

$$k''=\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}(1+i) \tag{176}$$

代入后，我们得到

$$E_0'=\frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}-\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}(1+i)}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}+\sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}}(1+i)}E_0=-\frac{(1+i)-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{(1+i)+\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}E_0. \tag{177}$$

电磁波的反射系数定义为

$$\mathcal{R}=\left|\frac{E_0'}{E_0}\right|^2=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}=\frac{2-2\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}}{2}\cong 1-\sqrt{\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}}. \tag{178}$$

因此，电导率 σ 越大，则反射系数越接近于 1 。

例 8.1: 计算高频电磁波照射下导体的表面电阻。

由于趋肤效应，在靠近导体表面的薄层内，电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \exp(-\gamma_z z) \exp(i\beta_z z - i\omega t), \tag{179}$$

相应的电流密度为

$$\mathbf{j}_f(\mathbf{r},t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sigma \mathbf{E}_0 \exp(-\gamma_z z) \exp(i\beta_z z - i\omega t). \tag{180}$$

将之积分后，我们有

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_f(t) &= \int_0^\infty \mathbf{j}_f(\mathbf{r},t)\, dz = \int_0^\infty \sigma \mathbf{E}_0 \exp(-\gamma_z z) \exp(i\beta_z z - i\omega t)\, dz \\ &= \sigma \mathbf{E}_0 \left. \frac{\exp((i\beta_z - \gamma_z)z - i\omega t)}{i\beta_z - \gamma_z} \right|_0^\infty = \sigma \mathbf{E}_0 \frac{-\exp(-i\omega t)}{i\beta_z - \gamma_z} \\ &= \sigma \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + \gamma_z^2}} \exp(i\varphi). \end{aligned} \tag{181}$$

这里， $\tan\varphi = \beta_z/\gamma_z$ ，而 $\mathbf{E}_0$ 为 $z = 0$ 处的电场强度矢量。 $\vec{\alpha}$ 可以解释为通过单层横截线的面电流密度。取其实部后，我们得到

$$\vec{\alpha}_{\text{物理}} = \sigma \mathbf{E}_0 \frac{1}{\sqrt{\beta_z^2 + \gamma_z^2}} \cos(\omega t - \varphi). \tag{182}$$

另一方面，按照定义，导体内单位时间的损耗功率密度为

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r},t) &= \mathbf{j}_{\text{物理}}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{E}_{\text{物理}}(\mathbf{r},t) \\ &= [\sigma \mathbf{E}_0 \exp(-\gamma_z z) \cos(\omega t - \beta_z z)] \cdot [\mathbf{E}_0 \exp(-\gamma_z z) \cos(\omega t - \beta_z z)] \\ &= \sigma E_0^2 \exp(-2\gamma_z z) \cos^2(\omega t - \beta_z z). \end{aligned} \tag{183}$$

因此， $w(\mathbf{r},t)$ 对时间的平均值为

$$\begin{aligned} \overline{w}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{T} \int_0^T w(\mathbf{r},t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma E_0^2 \exp(-2\gamma_z z) \cos^2(\omega t - \beta_z z)\, dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sigma E_0^2 \exp(-2\gamma_z z)(1 + 2\cos(2\omega t - 2\beta_z z)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \exp(-2\gamma_z z). \end{aligned} \tag{184}$$

将之对 z 积分后，我们有

$$P_L = \int_0^\infty \overline{w}(\mathbf{r})dz = \int_0^\infty \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \exp(-2\gamma_z z)\, dz = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \frac{\exp(-2\gamma_z z)}{(-2\gamma_z)}\bigg|_0^\infty = \frac{\sigma}{4\gamma_z}E_0^2. \quad (185)$$

若令

$$\alpha_0 = \frac{\sigma E_0}{\sqrt{\beta_z^2 + \gamma_z^2}}, \quad (186)$$

或是

$$E_0 = \frac{\alpha_0}{\sigma}\sqrt{\beta_z^2 + \gamma_z^2}, \quad (187)$$

则我们可以看到， P_L 可以改写作

$$P_L = \frac{\sigma}{4\gamma_z}\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\sqrt{\beta_z^2 + \gamma_z^2}\right)^2 = \frac{\beta_z^2 + \gamma_z^2}{4\sigma\gamma_z}\alpha_0^2, \quad (188)$$

而将之解释作单位时间内单位横截线上的损耗功率。与直流电损耗功率公式

$$P = \frac{1}{2}RI^2 \quad (189)$$

做比较后，我们可以将

$$\widetilde{R} = \frac{\beta_z^2 + \gamma_z^2}{2\sigma\gamma_z} \quad (190)$$

视作导体在高频情况下出现的厚度为 z_c 的薄层内的电阻。又利用关系式

$$\beta_z \cong \gamma_z \cong \sqrt{\frac{\omega\mu(\omega)\sigma}{2}} = \frac{1}{z_c}, \quad (191)$$

我们最后有

$$\widetilde{R} \cong \frac{\left(\frac{1}{z_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{z_c}\right)^2}{2\sigma\left(\frac{1}{z_c}\right)} \cong \frac{1}{\sigma z_c}, \quad (192)$$

而

$$P_L = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma z_c}\alpha_0^2. \quad (193)$$

\$ 8.4 谐振腔

谐振腔是中空的金属腔。与我们在上节中讨论的情况不同的是，它的尺寸是有限的。在这种腔内，单色电磁波的频率只可取某些分立的特定值，称为允许频率。相应的，

其波矢也只能取一些分立的特定值。最为重要的一点是，这些允许电磁波模式是驻波，而不是行波。从技术的角度讲，谐振腔常被用来产生一定频率的电磁振荡，有着十分重要的应用。

为了简化问题，我们下面将谐振腔的金属壁视作理想导体，即 $\sigma = \infty$(在解决实际问题时，可以先将金属壁取作理想导体。将问题解决后，再考虑有限的电导率引起的焦耳热损耗) 。此时的边值关系为

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \vec{\alpha}_f(\mathbf{r}, t). \tag{194}$$

在下面的讨论中，我们将导体取为媒介质 1 ，而媒介质 2 则为真空或绝缘体。因此， $\mathbf{e}_n$ 当为由金属指向绝缘体的单位矢量。对于理想导体而言，我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{195}$$

因此，边值关系现在简化为

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \vec{\alpha}_f(\mathbf{r}, t). \tag{196}$$

自然，我们还需考虑横场条件

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{197}$$

若将谐振腔的一个边界面取作 XY 平面，则法线 $\mathbf{e}_n$ 是沿 z 轴方向的。由于电场强度矢量的切向分量是连续的，我们有

$$E_x(\mathbf{r}, t) = 0, \quad E_y(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{198}$$

在此边界面上成立，而横波条件相应地退化

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial E_z(x, y, z, t)}{\partial z} = 0. \tag{199}$$

这一形式用起来更为方便一些。

例 8.2: 证明两平行无穷大导体平面之间可以传播一种横向偏振地电磁波。

解：今后，我们将把横向偏振的电磁波记作 TEM (Transverse Electro-magnetic) 波，如教科书 129 页上的图 4-6 所示，设两导体与 y 轴垂直，那么在两导体面上，我们有

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_z(\mathbf{r}, t) = 0, \quad H_y(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{200}$$

若沿 z 轴传播的平面电磁波的电场强度矢量是沿 y 轴方向偏振的，则此平面电磁波满足所有的边界条件，故可以在导体板之间传播。而另外一种偏振的平面电磁波 ($\mathbf{E}'$ 与导体表面相切) 由于不满足边界条件，故不存在。也就是说，两块导体板之间只能传播一种偏振的 TEM 平面波。

下面，为了确定起见，让我们考虑一个矩形谐振腔。设它的边长分别为 L_1 ， L_2 和 L_3 。由于谐振腔的内部为均匀的绝缘介质，其中的电磁波满足赫姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial z^2}+k^2\mathbf{E}(\mathbf{r})=0. \tag{201}$$

令 $u=\mathbf{E}_x(\mathbf{r})$ ， $\mathbf{E}_y(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{E}_z(\mathbf{r})$ ，则我们可以只考虑如下的标量微分方程

$$\frac{\partial^2u(\mathbf{r})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(\mathbf{r})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u(\mathbf{r})}{\partial z^2}+k^2u(\mathbf{r})=0. \tag{202}$$

利用分离变量法，我们令

$$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z), \tag{203}$$

而每一个因子分别满足方程

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0,\\
&\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0,\\
&\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0,
\end{aligned} \tag{204}$$

且

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu(\omega)\epsilon(\omega). \tag{205}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
u(x,y,z)&=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)\\
\times\ &(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz).
\end{aligned} \tag{206}$$

此式中的待定常数需要通过边值条件来决定。例如，若取 $u(x,y,z)=E_x(x,y,z)$ ，则由于在 $x=0$ 的腔壁上， $E_x(x,y,z)$ 是沿法线方向的，故应有

$$\left.\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=0}=0. \tag{207}$$

因此，此时的 D_1 应该取为零。又由于在 $y=0$ 和 $z=0$ 的腔壁上， $E_x(x,y,z)$ 是沿切向方向的，应该为零，故必有 $C_1=0$ 和 $C_2=0$ 。因此，我们得到

$$E_x(x,y,z)=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z. \tag{208}$$

同理，我们可得

$$E_y(x,y,z)=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z,\quad E_z(x,y,z)=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z. \tag{209}$$

另一方面，在 $x=L_1$ 的腔壁上， $E_y(x,y,z)$ 是沿切向方向的，我们有边值条件

$$E_y(x=L_1,y,z)=0, \tag{210}$$

或是

$$A_2\sin k_x L_1\cos k_y y\sin k_z z=0. \tag{211}$$

这就要求

$$k_x L_1=n_1\pi,\quad n_1=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{212}$$

或是

$$k_x=\frac{n_1\pi}{L_1},\quad n_1=0,1,2,\cdots\cdots. \tag{213}$$

同理，对于 k_y 和 k_z ，我们也可论证，它们的取值分别为

$$k_y=\frac{n_2\pi}{L_2},\quad k_z=\frac{n_3\pi}{L_3},\quad n_2,n_3=0,1,2,\cdots\cdots. \tag{214}$$

需要强调一点的是，如此定义的电磁波强度矢量

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(x,y,z,t)\\
=\;&(E_x(x,y,z)\mathbf{i}+E_y(x,y,z)\mathbf{j}+E_z(x,y,z)\mathbf{e}_z)\exp(-i\omega t)\\
=\;&\left(A_1\cos\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{L_2}y\right)\sin\left(\frac{n_3\pi}{L_3}z\right)\mathbf{i}\right.\\
+\;&A_2\sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x\right)\cos\left(\frac{n_2\pi}{L_2}y\right)\sin\left(\frac{n_3\pi}{L_3}z\right)\mathbf{j}\\
+\;&\left.A_3\sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{L_2}y\right)\cos\left(\frac{n_3\pi}{L_3}z\right)\mathbf{e}_z\right)\exp(-i\omega t)
\end{aligned} \tag{215}$$

是驻波，而非行波。又由于 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 需满足横波条件

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x,y,z,t) = 0, \tag{216}$$

我们有

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0, \tag{217}$$

即 A_1 ， A_2 和 A_3 仅有两个是独立的。满足以上条件的单色波称为一个允许模式，或本征模式。它具有两个独立的偏振方向，其频率由下式

$$\omega_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}\sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2} \tag{218}$$

给出，称为谐振腔的本征频率。若 n_1 ， n_2 和 n_3 中有两个为零，由于 $\mathbf{E}(x,y,z,t) = 0$ 必成立，故当 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$ 时，最低的本征频率为

$$\omega_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}\sqrt{\left(\frac{1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_2}\right)^2}, \tag{219}$$

或

$$\nu_{110} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}\sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2}. \tag{220}$$

\$ 8.5 波导

在高频情况下，为了将电磁波能量从信号源传输到所需要的场地，人们往往利用所谓波导管。这是一种空心的金属管，其横截面即可以是矩形的，也可以是圆形的。在下面的讨论中，为了确定起见，我们仅考虑横截面为矩形的情况。

如教科书 132 页上图 4-8 所示，我们设波导的横截面位于坐标系的 XY 平面上。此时，管内的单色电磁波的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 满足赫姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x,y,z) + k^2 \mathbf{E}(x,y,z) = 0 \tag{221}$$

及横场条件 $\nabla \cdot \mathbf{E}(x,y,z) = 0$ 。由于电磁波是沿着 z 轴传播的，我们可以将之写作

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \vec{\mathcal{E}}(x,y)\exp(ik_z z), \tag{222}$$

即在 z 方向上传播的行波。将之代入赫姆霍兹方程后，我们得到关于 $\vec{\mathcal{E}}(x,y)$ 的微分方程

$$\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}(x,y)}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)\vec{\mathcal{E}}(x,y)=0. \tag{223}$$

令 $u(x,y)=\mathcal{E}_x(x,y)$ 或 $\mathcal{E}_y(x,y)$，我们有

$$\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)u(x,y)=0. \tag{224}$$

进一步，利用分离变量法，即令

$$u(x,y)=X(x)Y(y), \tag{225}$$

可得

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x)=0,\quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y)=0, \tag{226}$$

且

$$k_x^2+k_y^2=k^2-k_z^2 \tag{227}$$

成立。如同解谐振腔问题一样，我们得到

$$u(x,y)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy). \tag{228}$$

这里，C_1，D_1，C_2 和 D_2 需要通过边值条件

$$\begin{aligned}&E_y(x,y,z)=E_z(x,y,z)=0,\quad \tfrac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}=0,\text{当}x=0\text{或}a\text{时};\\&E_x(x,y,z)=E_z(x,y,z)=0,\quad \tfrac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}=0,\text{当}y=0\text{或}b\text{时}\end{aligned} \tag{229}$$

来决定。仿照上面的推导，我们立刻可得

$$\begin{aligned}E_x(x,y,z)&=A_1\cos k_xx\sin k_yy\exp(ik_zz),\\E_y(x,y,z)&=A_2\sin k_xx\cos k_yy\exp(ik_zz),\\E_z(x,y,z)&=A_3\sin k_xx\sin k_yy\exp(ik_zz),\end{aligned} \tag{230}$$

且

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b},\quad m,n=0,1,2,\cdots\cdots. \tag{231}$$

再考虑横波条件，我们有

$$k_x A_1 + k_y A_2 - i k_z A_3 = 0, \tag{232}$$

即 A_1 ， A_2 和 A_3 中仍然只有两个是独立的。在求出波导管内的电场强度矢量后，再利用方程

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\omega\mu(\omega)} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \tag{233}$$

即可求出相应的磁场强度矢量。任给一对整数 m 和 n ，我们有确定的 $k_x = \frac{m\pi}{a}$ 和 $k_y = \frac{n\pi}{b}$ ，即一个允许模式对应。此时，电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 有两个独立的偏振方向。若其中一个偏振方向具有 $E_z(x, y, z) = 0$ ，则 $A_3 = 0$ 成立。因此， (232) 式简化为

$$k_x A_1 + k_y A_2 = 0, \tag{234}$$

或是

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{k_y}{k_x} = -\frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}, \tag{235}$$

即

$$A_1 = Cna, \quad A_2 = -Cmb. \tag{236}$$

这里， C 为一个比例常数。也就是说， $E_x(x, y, z)$ ， $E_y(x, y, z)$ 和 $E_z(x, y, z)$ 是完全确定的。同时，根据 (233) 式，此时 $H_z(x, y, z) \neq 0$ 。这意味着，在波导内，电场强度矢量 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 不能同时为横波。通常的做法是，选取一种具有 $E_z(x, y, z) = 0$ 的电磁波，称为横电波，记作 TE_{mn} ，再选取一种具有 $H_z(x, y, z) = 0$ 的波，称为横磁波，记作 TM_{mn} 。一般情形下，波导管内传播的电磁波是这些波的线性叠加，即

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \mathbf{E}^{(1)}_{mn}(x, y, z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \mathbf{E}^{(2)}_{mn}(x, y, z). \tag{237}$$

又由于在波导管内传播的电磁波的频率是受到限制的，需要满足条件

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu(\omega)\epsilon(\omega), \tag{238}$$

或是

$$\omega = \frac{1}{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2} \geq \frac{1}{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{239}$$

若 $a > b$，则 TE_10 波具有最低截止频率

$$\nu_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}. \tag{240}$$

若波导管内的介质为真空，我们有

$$\nu_{10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{2a}, \tag{241}$$

而相应的波长为

$$\lambda_{10} = cT = \frac{c}{\nu_{10}} = 2a. \tag{242}$$

因此，在波导管内能够通过电磁波的最大波长为 $2a$ 。这就是为什么在厘米波段，波导管的应用最广泛。

TE_{10} 波还有其它一些有趣的性质。首先，除了 $E_z(x,y,z) = 0$ 之外，$E_x(x,y,z) = 0$ 也成立。因此，我们仅需考虑

$$E_y(x,y,z) = A_2 \sin\frac{\pi}{a}x, \quad k_z = 0. \tag{243}$$

又由于

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(x,y,z) &= -\frac{i}{\omega\mu(\omega)}\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z) = -\frac{i}{\mu(\omega)}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_2\sin\frac{\pi}{a}x & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{i}{\mu(\omega)}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_2\sin\frac{\pi}{a}x\right)\mathbf{e}_z = -\frac{i}{\mu(\omega)}A_2\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}x\mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{244}$$

故我们可将 A_2 写作

$$A_2 = \frac{i\omega\mu(\omega)a}{\pi}H_0. \tag{245}$$

因此， TE_{10} 波的电磁场分量为

$$E_y(x,y,z) = \frac{i\omega\mu(\omega)a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x, \qquad H_z(x,y,z) = H_0\cos\frac{\pi}{a}x, \tag{246}$$

且

$$E_x(x,y,z) = E_z(x,y,z) = H_y(x,y,z) = 0, \quad H_x(x,y,z) \cong 0 \tag{247}$$

成立。因此，根据边值关系

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}(x,y,z,t) = \vec{\alpha}(x,y,z,t), \tag{248}$$

我们看到，在窄边上，面电流是横穿过窄边流动的，如教科书 135 页上图 4-10 所示。而在宽边的 $x = \frac{a}{2}$ 处，面电流密度 $\vec{\alpha}(x = a/2, y, z) = 0$ 严格成立。因此，开在波导管宽边中部的纵向裂缝不会影响 TE_{10} 波的传播。这一点常被用在用探针测量波导内物理量的技术中。

\$ 8.6 电磁波在等离子体中的传播

当温度升高或受到电离时，原子中的电子和正离子实会分开，形成所谓等离子体。例如，在大气层中就存在着由等离子体组成的薄层，称为电离层。它的存在对于地球表面的无线电波的传播影响很大。下面，我们对此做一简要介绍。

在处于热平衡状态时，就整体而言，等离子体是电中性的。当其受到某种扰动，使得其中某一区域的净电荷密度不为零时，就会诱导出相应的静电场，力图恢复原来的电中性状态。由此导致的局部电荷密度发生的振荡现象，称为等离振荡。为了简单起见，我们下面忽略正离子实的运动，而仅考虑电子运动导致的电流的改变。令 $n(\mathbf{r},t)$ 为时刻 t 时，空间 $\mathbf{r}$ 处的电子密度函数，并令 $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ 为电子流的宏观速度。那么，利用连续性方程，我们得到

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)) = 0. \tag{249}$$

同时，牛顿方程

$$m\frac{dn(\mathbf{r},t)}{dt} = m\left(\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right) = (-e)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) \tag{250}$$

亦成立。这里， $\mathbf{E}(\mathbf{r},t))$ 为时刻 t 时，空间 $\mathbf{r}$ 处的电场强度矢量。假设处于热平衡状态时，电子的密度为 n_0 ，其电荷密度 $(-e)n_0$ 正好被正离子实的电荷密度所抵消。因此，当偏离平衡状态时，电子电荷密度的改变可以记作

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = (-e)(n(\mathbf{r},t) - n_0). \tag{251}$$

根据高斯定理，我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t) = -\frac{e}{\epsilon_0}(n(\mathbf{r},t) - n_0). \tag{252}$$

若仅考虑微小扰动，即 $\delta\rho = (-e)(n(\mathbf{r},t) - n_0) \cong 0$ 及 $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \cong 0$ 的情况，我们可以将上面的几个公式简化为

$$\frac{\partial \delta\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (-e)n_0 \nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \cong 0, \;\; \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \;\; \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t). \tag{253}$$

将第二式的两边取散度后，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\frac{e}{m}\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t). \tag{254}$$

再将方程组 (253) 中的第一式代入上式左边，将第三式代入右边后，我们又有

$$-\frac{1}{n_0}\frac{\partial^2 \delta\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{e}{m}\left(-\frac{1}{\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t)\right), \tag{255}$$

或是

$$\frac{\partial^2 \delta\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t) = 0. \tag{256}$$

若我们令

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = \delta\rho(\mathbf{r})e^{st}, \tag{257}$$

则上面的微分方程可以退化为一个代数方程

$$s^2 + \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0} = 0. \tag{258}$$

由此我们解得

$$s = \sqrt{-\frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}} = i\sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}} \equiv i\omega_p. \tag{259}$$

这里，ω_p 称为等离子体的振荡频率。大气层中电离层的等离子振荡频率大约为 MH_z 的量级。因此，在受到扰动后，其中电子电荷密度的改变可以写作

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = \delta\rho(\mathbf{r})e^{i\omega_p t}. \tag{260}$$

现在考虑有外加电场辐射到等离子体上的情况。此时，(253) 式中的三个方程应该改写为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \delta\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (-e)n_0\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \cong 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) - \frac{e}{m}\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t), \\ &\nabla\cdot(\mathbf{E}_i(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_e(\mathbf{r},t)) = \frac{1}{\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{261}$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{E}_e(\mathbf{r},t) = 0$ ，故最后一个方程可以简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r},t)) = \frac{1}{\epsilon_0}\delta\rho(\mathbf{r},t). \tag{262}$$

从这些方程可以看出，除了原来的等离子体振荡之外，外场 $\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t)$ 的主要影响是使得电子有了一个附加速度 $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ ，它随时间的改变由下式

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t) \tag{263}$$

决定。注意到 $\tilde{\mathbf{j}} = -n_0 e\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ ，上式又可被写作

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m}\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t). \tag{264}$$

若 $\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_e(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ，则我们有

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \tag{265}$$

代入上式后，我们得到

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}_e(\mathbf{r}). \tag{266}$$

换句话说， $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ 被视为外电场 $\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t)$ 在等离子体内引起的电流密度。仿照 8.3 节中的讨论，我们可以引入复电容率

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon(\omega) + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} = \epsilon(\omega) - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2}, \tag{267}$$

那么，等离子体内的电磁波的波数为

$$k = \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon'(\omega)} = \omega\sqrt{\mu_0\left(1 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2}\right)}. \tag{268}$$

因此，对于频率 $\omega > \omega_p$ 的电磁波，等离子体的折射率

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1, \tag{269}$$

即真空为“光密”媒介质。因此，存在着一个临界角度 θ_c ，当从地球表面入射到电离层的电磁波的入射角 $\theta > \theta_c$ 时，将会发生全反射现象，即电磁波会被反射回体面。这就是为什么短波信号可以被传送到很远的地方的原因。

当 $\omega < \omega_p$ 时，波数 k 为纯虚数。此时，电磁波不能在等离子体中传播。因此，等离子体频率 ω_p 也是电磁波在等离子体中传播的截止频率。

第九章、电磁波的辐射 (上)

在上一章中，我们研究了电磁波在媒介质中的传播问题。接下来，我们要讨论电磁波的产生问题。根据麦克斯韦方程组，任何电荷在空间分布的改变都会导致电磁波的产生。但若考虑是否可控，有两类特殊情况最为引人关注。一类问题是加在发射天线上的高频交变电流导致的电磁波辐射，还有一类是由于带电粒子的加速运动导致的电磁辐射。在本章中，我们先研究第一类电磁波辐射问题，而将第二类辐射问题的研究放在下一章。

第一类电磁波辐射的一个重要特点是电荷运动区域 Ω 较之从 Ω 到观察点的距离非常小。这使得我们可以忽略电磁场对于天线上的电流分布的影响，进而求解远离 Ω 的观察点处的电磁场的辐射。

\$ 9.1 电磁场的矢量势和标量势

在第二章中，我们曾引入电场强度矢量和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 的标量势 $\Phi(x,y,z,t)$ 和矢量势 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 的概念。它们之间的关系为

$$\mathbf{B}(x,y,z,t)=\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t),\quad \mathbf{E}(x,y,z,t)=-\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}. \quad (1)$$

比起直接使用 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$，在研究电磁场的辐射问题时，使用 $\Phi(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 反而更为方便一些。但与电场强度矢量和磁感应强度矢量不同的是，标势和矢势并不是物理可观测量。实际上，它们具有所谓规范不确定性，即若引入新的标势

$$\Phi'(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\Lambda(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

和矢势

$$\mathbf{A}'(x,y,z,t)=\mathbf{A}(x,y,z,t)+\nabla\Lambda(x,y,z,t), \quad (3)$$

则我们仍有

$$\mathbf{B}(x,y,z,t)=\nabla\times\mathbf{A}'(x,y,z,t),\quad \mathbf{E}(x,y,z,t)=-\nabla\Phi'(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}'(x,y,z,t)}{\partial t}. \quad (4)$$

这里，$\Lambda(x,y,z,t)$ 为一个任意的可导函数。从应用的角度考虑，人们自然是希望尽可能消除这一不确定性。为此，需要引入相应的规范条件。最常用的规范条件有两种：

(i) 选取适当的 $\Lambda(x,y,z,t)$，使得

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t)=0. \tag{5}$$

满足此条件的规范称为库仑规范 (或曰横场规范)。我们曾在第七章用它来求解静磁学问题。

(ii) 选取适当的 $\Lambda(x,y,z,t)$，使得 $\Phi(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 满足方程

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}=0, \tag{6}$$

称为洛伦兹 (Lorentz) 规范。若使用四维矢量记号，即令

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=ict, \tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned} &A_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=A_x(x,y,z,t),\quad A_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=A_y(x,y,z,t),\\ &A_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=A_z(x,y,z,t),\quad A_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\tfrac{i}{c}\Phi(x,y,z,t), \end{aligned} \tag{8}$$

则上式亦可被写作

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A_i(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_i}=0. \tag{9}$$

在洛伦兹变换下，此式是不变的。因此，它极为适宜用来研究电磁波的激发和产生问题。

\$ 9.2 推迟势

现在，让我们回到麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)=\frac{1}{\epsilon_0}\rho_f(x,y,z,t),\quad \nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)=-\frac{\partial\mathbf{B}(x,y,z,t)}{\partial t},\\ &\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)=0,\quad \nabla\times\mathbf{B}(x,y,z,t)=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(x,y,z,t)}{\partial t}+\mu_0\mathbf{j}_f(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{10}$$

将

$$\mathbf{B}(x,y,z,t)=\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t) \tag{11}$$

以及

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=-\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{12}$$

分别代入方程组的第一个和第四个方程的两边后，我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t)) = -\nabla^2\mathbf{A}(x,y,z,t)+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t))\\
=\;& \mu_0\mathbf{j}_f(x,y,z,t)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}\right)\\
=\;& \mu_0\mathbf{j}_f(x,y,z,t)-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\Phi(x,y,z,t)\right)-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t^2},
\end{aligned}\tag{13}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left(-\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}\right)\\
=\;& -\nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t))\\
=\;& \frac{1}{\epsilon_0}\rho_f(x,y,z,t).
\end{aligned}\tag{14}$$

(13) 式可以被改写为

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\mathbf{A}(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}\right)\\
=\;& -\mu_0\mathbf{j}_f(x,y,z,t).
\end{aligned}\tag{15}$$

同理，(14) 式亦可被改写为

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t))\\
=\;& \nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}\right)\\
=\;& -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_f(x,y,z,t).
\end{aligned}\tag{16}$$

若我们选取洛伦兹规范，则这两个方程皆退化为达朗贝尔方程，即

$$\nabla^2\mathbf{A}(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{j}_f(x,y,z,t),\tag{17}$$

和

$$\nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho_f(x,y,z,t).\tag{18}$$

我们要证明，它们的解可以被写作

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz',$$
$$\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{19}$$

这些公式显示，在空间 $\mathbf{r}$ 处，t 时刻的矢势和标势是由电荷分布和电流分布在较早时刻 $t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ 激发的。这一结果反映了电磁相互作用具有有限的传播速率 c，而非超距的。也就是说，电荷变化产生的影响不能够立刻传播至观察点，而需延迟一段时间才可到达。由于这一原因，(19) 式中给出的矢势和标势被称为延迟势。

为了推导上述延迟势，我们采用朗道和栗弗习兹所著“场论”一书 8.1 节中使用的方法。假设只有一个无穷小的电荷 $de(t)$ 位于坐标系的原点处。那么，方程 (18) 可以写作

$$\nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}de(t)\delta(\mathbf{r}). \tag{20}$$

在 $\mathbf{r}\neq 0$ 处，上式退化为

$$\nabla^2\Phi(x,y,z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z,t)}{\partial t^2}=0. \tag{21}$$

显然，在这种情况下，标势具有空间旋转不变性，即

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\Phi(|\mathbf{r}|,t)=\Phi(r,t) \tag{22}$$

成立。因此，我们可以引入球坐标系，并将拉普拉斯算符写作

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{23}$$

再令

$$\Phi(r,t)=\frac{u(r,t)}{r}, \tag{24}$$

则我们有

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi(r,t) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(r,t)}{\partial\varphi^2}\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u(r,t)}{r}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u(r,t)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}-u(r,t)\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}-\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

代入方程 (21) 后，我们有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}=0, \qquad (26)$$

或是

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2}=0. \qquad (27)$$

这一方程的通解可以写作

$$u(r,t)=f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{c}\right). \qquad (28)$$

相应地， $\Phi(r,t)$ 的一般形式为

$$\Phi(r,t)=\frac{u(r,t)}{r}=\frac{f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+\frac{f_2\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}. \qquad (29)$$

从物理上讲，上式中的第一项代表从原点向外传播的球面波，而第二项代表向内收敛的汇聚波。在研究电磁波辐射时，我们更关心的是出射波，故往往忽略掉第二项的贡献。因此，我们可将 $\Phi(r,t)$ 最后写作

$$\Phi(r,t)=\frac{\chi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}. \qquad (30)$$

为了决定函数 $\chi(t)$ 的形式，我们选取一个在原点附近与物理直观图像相一致的解。为此，我们注意到，当 $r\to 0$ 时， $\Phi(r,t)$ 将趋向于无穷大。因此，当 $r\cong 0$ 时，方程 (20) 中的第二项可以忽略不计算，即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial r}\cong-\frac{1}{\epsilon_0}de(t)\delta(\mathbf{r}) \qquad (31)$$

成立。这是一个位于原点处的带电量为 $de(t)$ 的电荷引起的电势所满足的泊松方程。我们知道它的解为

$$\Phi(r,t)\cong\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{de(t)}{r}. \qquad (32)$$

因此，我们有

$$\chi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} de(t). \tag{33}$$

代入 (30) 式后，我们得到

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{34}$$

如果点电荷不在原点处，而是位于空间 $\mathbf{r}'$ 处的话，我们只需将 r 用 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 替代即可。相应的推迟势的表达式为

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{35}$$

再由电场强度矢量所满足的线性叠加性，对于一般连续的电荷密度分布 $\rho(\mathbf{r}',t)$ ，我们可立刻写出它所激发的标量势为

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int_\Omega \frac{\rho\left(x',y',z',t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'dy'dz'. \tag{36}$$

由于矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 所满足的亦是达朗贝尔方程，对于它的每一个分量进行类似的处理，我们同样可以得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'dy'dz'. \tag{37}$$

这样，我们就求得了推迟势的表达式 (19) 。

为了达到逻辑上的自洽，我们还需证明，由公式 (19) 给出的推迟势在任何一个时刻 t 都满足洛伦兹规范。为此，我们先计算 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 。我们有

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'dy'dz' \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int_\Omega \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{38}$$

令

$$t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} = t', \tag{39}$$

我们可以将被积函数重新写作

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\nabla_{\mathbf{r}}t'+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\end{aligned}\tag{40}$$

注意到 t' 对于 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 的依赖关系，我们可以将 $\nabla_{\mathbf{r}}$ 换为 $\nabla_{\mathbf{r}'}$，即

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(-\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\nabla_{\mathbf{r}'}t'\right)-\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(-\nabla_{\mathbf{r}'}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')+\nabla_{\mathbf{r}'}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')|_{t'\text{不变}}\right)-\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\\ &= -\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\Big|_{t'\text{不变}}.\end{aligned}\tag{41}$$

将之代入 (38) 式后，我们有

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\frac{\mathbf{j}(x',y',z',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(x',y',z',t')\Big|_{t'\text{不变}}dx'dy'dz'.\end{aligned}\tag{42}$$

将高斯定理用到上式右边的第一项后，我们有

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\frac{\mathbf{j}(x',y',z',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{j}(x',y',z',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot d\mathbf{S}=0.\tag{43}$$

这里，我们用到了事实，即在位于无穷远处的边界面 $\partial\Omega$ 上，电流密度 $\mathbf{j}(x',y',z',t')=0$。因此，我们最后有

$$\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(x',y',z',t')\Big|_{t'\text{不变}}dx'dy'dz'.\tag{44}$$

接下来，再将 (36) 式两边对于时间求导后，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_\Omega\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\rho(x',y',z',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'.\end{aligned}\tag{45}$$

因此，(44) 式与 (45) 式之和给出

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t}\\
=\;&\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(x',y',z',t')\Big|_{t'\text{不变}}dx'dy'dz'\\
+\;&\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega\frac{\partial\rho(x',y',z',t')}{\partial t'}dx'dy'dz'\\
=\;&\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(x',y',z',t')|_{t'\text{不变}}+\frac{\partial\rho(x',y',z',t')}{\partial t'}\right)dx'dy'dz'. \quad (46)
\end{aligned}$$

在推导的最后一步，我们使用了表示电荷守恒律的连续性方程。因此，在任何时刻 t ，由 (19) 式给出的推迟势都是满足洛伦兹规范的。

本节中得到的推迟势是我们研究电磁波激发和产生的出发点，不仅可以用来求解第一类辐射问题，也可用在下一章中求解第二类辐射问题。

\$ 9.3 电偶极矩辐射

现在，让我们集中精力研究如何求解第一类电磁波的激发和产生问题。假设在空间中的一个小区域 Ω 内 (例如天线上) 存在交变电流

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)=\mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp(-i\omega t). \quad (47)$$

那么，空间中的矢势分布可以写作

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz'\\
&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(-i\omega t+i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'\\
&=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)dx'dy'dz'\right)e^{-i\omega t}. \quad (48)
\end{aligned}$$

也就是说， $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 可以写作 $\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 的形式，而

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)dx'dy'dz'. \quad (49)$$

由此，我们得到

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}))\,e^{-i\omega t}. \quad (50)$$

同理，我们期待

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{51}$$

亦成立。而从方程

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{52}$$

我们可得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{ic}{k}(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))e^{-i\omega t}. \tag{53}$$

因此，第一类电磁波的激发和产生问题归结为如何计算由 (49) 式给出的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 。

我们注意到，在 (49) 式中存在着三个不同的尺度： Ω 的线度 l 、电磁波的波长 λ 和从场源 Ω 到观测点的距离 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 。在第一类电磁波的激发和产生问题中，我们仅仅考虑满足条件

$$l\ll\lambda,\quad l\ll|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{54}$$

的情况 (其中第二个条件的物理含义较易理解，而第一个条件则意味着，我们不考虑波长短于厘米的电磁波的激发问题) 。至于 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 和 λ 之间的关系，可以分为三种情况：

(1) $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\ll\lambda$ 。满足此条件的空间区域称为近区。此时，相因子

$$\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)=\exp\left(2\pi i\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\lambda}\right)\cong 1. \tag{55}$$

因此，我们近似有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})\cong\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz', \tag{56}$$

即矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r}$ 具有恒定场的特点，相应的电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 具有静电场的纵向形式，而磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 也和恒定场相似。

(2) $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\sim\lambda$ 。这一区域称为感应区。在研究电磁波对于场源 (天线上的交变电流) 的反作用 (辐射阻抗) 以及几个靠近的辐射系统之间的相互作用时，必须考虑近区和感应区内电磁场的分布。

(3) $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg\lambda$ 。这一区域称为远区。在这一区域内，电磁波变为横向的辐射场，故是我们在本课程中感兴趣的区域。

为了方便起见，我们将坐标系的原点取在场源区域 Ω 内，则 $|\mathbf{r}'| \sim l$ 。将 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 做展开后，我们有

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r}| - \mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}. \tag{57}$$

代入矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的表达式 (49) 后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\
&\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')\frac{e^{ik(r-\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}})}}{r-\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}}dx'dy'dz' \\
&\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')\frac{1}{r}e^{ikr}e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}}dx'dy'dz'.
\end{aligned} \tag{58}$$

在这里，我们忽略了分母中的小量 $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ ，但保留了指数上的因子 $ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}} = i\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ 。在 $l \ll \lambda$ 的情况下，我们可以将之展开为

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')e^{-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}}dx'dy'dz' \\
&\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')(1-ik\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}})dx'dy'dz'.
\end{aligned} \tag{59}$$

其中，展开式中的各项对应于不同阶的电磁多级辐射。

我们先看展开式的第一项

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')dx'dy'dz'. \tag{60}$$

仿照 D. Jackson 所著 “Classical Electrodynamics” 中 9.2 节的作法，我们首先注意到恒等式

$$\int\int\int_\Omega \mathbf{j}(x',y',z')dx'dy'dz' = -\int\int\int_\Omega \mathbf{r}'(\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(x',y',z'))dx'dy'dz' \tag{61}$$

以及连续性方程

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = 0 \tag{62}$$

成立。在交变电流的情况下，我们有

$$\rho(\mathbf{r}',t) = \rho(\mathbf{r}')e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\omega t}. \tag{63}$$

将之代入上式后，我们有

$$-i\omega\rho(\mathbf{r}') + \nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0, \tag{64}$$

或是

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = i\omega\rho(\mathbf{r}'). \tag{65}$$

将 (61) 式和 (65) 式代入 (60) 式后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int\int\int_\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}') dx'dy'dz' = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int\int\int_\Omega \left(-\mathbf{r}'(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))\right) dx'dy'dz' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int\int\int_\Omega i\omega\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' dx'dy'dz' = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi r} e^{ikr}\mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{66}$$

这里，

$$\mathbf{p} = \int\int\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' dx'dy'dz' \tag{67}$$

为电偶极矩。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(-\frac{i\mu_0\omega}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{p}\right) \\
&= -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p} - \frac{1}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p}\right) \\
&\cong \frac{\mu_0\omega k}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p}.
\end{aligned} \tag{68}$$

再利用 (53) 式，我们得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{ic}{k}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{ic}{k}\nabla_\mathbf{r}\left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p}\right) = \frac{\omega^2 e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times (\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \tag{69}$$

若取如教科书 164 页上图 5-3 的球坐标系，则电磁场分布又可写作

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2 e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}|\mathbf{p}|\sin\theta\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2 e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}|\mathbf{p}|\sin\theta\mathbf{e}_\theta. \tag{70}$$

这里，$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 的方向总是与 $\mathbf{e}_\mathbf{r}$(也是 $\mathbf{k}$ 的方向) 垂直的，而 $\mathbf{E}(\mathbf{r}$ 的分布则要复杂一些，如教科书 165 页上图 5-4 所示。

在得到了在远区中电偶极矩电磁波辐射的电场分布和磁场分布后，我们可以计算相应的玻印亭矢量。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}|\mathbf{p}|\sin\theta\cos(kr-\omega t)\right)\left(\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}|\mathbf{p}|\sin\theta\cos(kr-\omega t)\right)(\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi) \\
&= \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5 r^2}\sin^2\theta\cos^2(kr-\omega t)\mathbf{e}_\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{71}$$

将之对时间求平均后，我们有

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5r^2}\sin^2\theta\mathbf{e}_\mathbf{r} = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3r^2}\sin^2\theta\mathbf{e}_\mathbf{r}. \tag{72}$$

因此，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，电偶极矩辐射最强。

将 $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})$ 在一个半径为 r 的球面上积分，我们可得总的电磁波辐射功率 P 。我们有

$$\begin{aligned}
P &= \oint\oint_{S_r}\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})r^2d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})|r^2d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^\pi \sin\theta d\theta\left(\frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{32\pi^2\epsilon_0c^3}\sin^2\theta\right) = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta \\
&= \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\int_0^\pi\sin^2\theta d(-\cos\theta) = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)d(-\cos\theta) \\
&= \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\int_{-1}^1(1-t^2)dt = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\left(2-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{16\pi\epsilon_0c^3}\frac{4}{3} = \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{12\pi\epsilon_0c^3}.
\end{aligned} \tag{73}$$

因此，当电偶极矩 $|\mathbf{p}|$ 保持不变时，则辐射总功率与电磁波的频率 ω 的四次方成正比，即频率升高时，辐射总功率迅速增大。

例 9.1: 作为一个电偶极矩电磁波辐射的例子，让我们考虑一根中心馈电的长度为 l 的天线。它由两根长度均为 $l/2$ ，沿 z 轴方向放置的直导线组成，二者之间有一个极细小的开缝，且两端分别连接在信号发生器上。具体构成如教科书 166 页上图 5-6 所示。当天线长度 $l \ll \lambda$ 时，天线上的电流分布可近似写作

$$I(z) = I_0\left(1-\frac{|z|}{l/2}\right), \quad |z| \le \frac{l}{2}. \tag{74}$$

因此，相应的电荷分布为

$$i\omega\rho_{z>0}(z) = \nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I_0\left(-\frac{1}{l/2}\right) = -\frac{2I_0}{l}, \tag{75}$$

以及

$$i\omega\rho_{z<0}(z) = \frac{2I_0}{l}, \tag{76}$$

或是

$$\rho_{z>0}(z) = \frac{2I_0}{\omega l}i, \quad \rho_{z<0}(z) = -\frac{2I_0}{\omega l}i. \tag{77}$$

因此，这一系统的电偶极矩为

$$\begin{aligned} p &= \int_{-l/2}^{l/2} z\rho(z)dz = \int_{-l/2}^{0} z\rho_{z<0}(z)dz + \int_{0}^{l/2} z\rho_{z>0}(z)dz \\ &= -\frac{2I_0}{\omega l}i\int_{-l/2}^{0} z\rho(z)dz + \frac{2I_0}{\omega l}i\int_{0}^{l/2} z\rho(z)dz = \frac{I_0 l}{2\omega}i. \end{aligned} \tag{78}$$

将之代入 (73) 式后，我们有

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega^4|\mathbf{p}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}\frac{I_0^2 l^2}{4\omega^2} = \frac{\omega^2 I_0^2 l^2}{48\pi\epsilon_0 c^3} \\ &= \frac{k^2 c^2 I_0^2 l^2}{48\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{k^2 I_0^2 l^2}{48\pi\epsilon_0 c} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 I_0^2 l^2\sqrt{\mu_0}}{48\pi\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}c} = \frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}I_0^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \end{aligned} \tag{79}$$

也就是说，此天线的辐射功率正比于 I_0^2 。将此式与一个电阻上的损耗功率 $P = \frac{1}{2}I^2R$ 相比较后，我们可以将

$$\widetilde{R} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{80}$$

视作一个等效电阻，称为天线的辐射电阻。一个天线的辐射电阻越大，就表示在一定的馈送电流下，其辐射本领越强。

\$ 9.4 磁偶极矩和电四极矩辐射

接下来，让我们考虑展开式 (59) 中的第二项

$$\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{j}(x',y',z')(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{r}')dx'dy'dz' \tag{81}$$

的贡献。首先，我们有恒等式

$$\begin{aligned} &\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e_r}) = \frac{1}{2}\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e_r}) + \frac{1}{2}\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e_r}) \\ = &\left(\frac{1}{2}\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e_r}) + \frac{1}{2}\mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{e_r})\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e_r}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{e_r})\right). \end{aligned} \tag{82}$$

先看第二项，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\left(\mathbf{j}(x',y',z')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_r) - \mathbf{r}'(\mathbf{j}(x',y',z')\cdot\mathbf{e}_r)\right)dx'dy'dz' \\ = &-\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{e}_r\times(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(x',y',z'))dx'dy'dz' \\ = &-\mathbf{e}_r\times\left(\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(x',y',z')dx'dy'dz'\right) \\ = &-\mathbf{e}_r\times\mathbf{m}. \end{aligned} \tag{83}$$

这里，

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(x', y', z')dx'dy'dz' \tag{84}$$

为电流分布的磁偶极矩。它对矢势的贡献为

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\mathbf{e}_r \times \mathbf{m}. \tag{85}$$

接下来，我们再来研究 (82) 式中第一项的贡献。利用恒等式

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'})\mathbf{r}', \tag{86}$$

我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_r)]\, dx'dy'dz' \\ = & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} [((\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'})\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{r}'(((\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'})\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_r)]\, dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{87}$$

令

$$\mathbf{e}_r = n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y + n_z\mathbf{e}_z, \tag{88}$$

则上式可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} [\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_r))\, dx'dy'dz' \\ = & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \left[\left(\sum_{i=1}^{3} j_i(x', y', z')\frac{\partial}{\partial x_i'}\right)\left(\sum_{k=1}^{3} x_k'\mathbf{e}_k\right)\right]\left(\sum_{l=1}^{3} x_l'n_l\right) dx'dy'dz' \\ + & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{3} x_k'\mathbf{e}_k\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{3} j_i(x', y', z')\frac{\partial}{\partial x_i'}\right)\left(\sum_{l=1}^{3} x_l'n_l\right)\right] dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{89}$$

对上式右边的第一项做分步积分后，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} (\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_r))dx'dy'dz' \\ = & \frac{1}{2}\oint\oint_{\partial\Omega} \left(\sum_{k=1}^{3} x_k'\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{l=1}^{3} x_l'n_l\right)\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} \\ - & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{3} x_k'\mathbf{e}_k\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(j_i(x', y', z')\left(\sum_{l=1}^{3} x_l'n_l\right)\right) dx'dy'dz' \\ + & \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{3} x_k'\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{3} j_i(x', y', z')\frac{\partial}{\partial x_i'}\right)\left(\sum_{l=1}^{3} x_l'n_l\right) dx'dy'dz' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{3}x'_k\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i(x',y',z')}{\partial x'_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{3}x'_l n_l\right)dx'dy'dz' \\
&- \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{3}x'_k\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{3}j_i(x',y',z')\frac{\partial}{\partial x'_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{3}x'_l n_l\right)dx'dy'dz' \\
&+ \frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{3}x'_k\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{3}j_i(x',y',z')\frac{\partial}{\partial x'_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{3}x'_l n_l\right)dx'dy'dz' \\
&= -\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{3}x'_k\mathbf{e}_k\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial j_i(x',y',z')}{\partial x'_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{3}x'_l n_l\right)dx'dy'dz' \\
&= -\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}\mathbf{r}'\left(\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')\right)(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_r)\,dx'dy'dz'. \qquad (90)
\end{aligned}
$$

再利用电荷的连续性方程

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)=0, \qquad (91)$$

我们有

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')=i\omega\rho(\mathbf{r}'). \qquad (92)$$

代入上式后，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\int\int_{\Omega}(\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_r)+\mathbf{r}'(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{e}_r))dx'dy'dz' \\
&= -\frac{i\omega}{2}\int\int\int_{\Omega}\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\left(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_r\right)dx'dy'dz' = -\frac{i\omega}{6}\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r. \qquad (93)
\end{aligned}
$$

这里，

$$\mathcal{D}\equiv\int\int\int_{\Omega}3\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\mathbf{r}'dx'dy'dz' \qquad (94)$$

定义为电荷分布的电四极矩。因此，我们得到电四极矩对矢势的贡献为

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r})=-\frac{k\omega\mu_0}{24\pi r}e^{ikr}\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r. \qquad (95)$$

相应地，电四极矩对于辐射区的磁感应强度矢量的贡献为

$$\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})=\nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{A}_Q(\mathbf{r})=ik\mathbf{e}_r\times\mathbf{A}_Q(\mathbf{r})=-\frac{ik^2\omega\mu_0}{24\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r), \qquad (96)$$

电场强度矢量的贡献为

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})=c\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})\times\mathbf{e}_r. \qquad (97)$$

我们注意到，无论是 $\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$ 还是 $\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})$ 都是垂直于 $\mathbf{e}_r$ 的，故若在 $\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r$ 上附加一个平行于 $\mathbf{e}_r$ 的矢量，将不会改变 $\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$ 或是 $\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})$ 。因此，我们可以重新令

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{D}}_{ij} &= \mathcal{D}_{ij} - \int\int\int_\Omega \rho(x',y',z')r'^2dx'dy'dz'\delta_{ij} \\ &= \int\int\int_\Omega \left(3x'_ix'_j - r'^2\delta_{ij}\right)\rho(x',y',z')dx'dy'dz'. \end{aligned} \tag{98}$$

此时，我们有

$$\widetilde{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r - \left(\int\int\int_\Omega r'^2\rho(x',y',z')dx'dy'dz'\right)\mathbf{e}_r. \tag{99}$$

将之代入 (96) 式和 (97) 式后，可以看到无论是 $\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})$ 还是 $\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$ 的表达式都没有改变。另一方面，如同前述，这样定义的电四极矩张量只有五个独立分量。

有了 $\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})$ 的表达式后，我们可以计算由电四极矩辐射导致的平均能流密度了。我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}_Q(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})\times\mathbf{B}_Q(\mathbf{r})\right) \\ =\ & \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{k^2\omega\mu_0 c}{24\pi r}\sin(kr-\omega t)(\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r))\times\mathbf{e}_r\right) \\ \times\ & \left(\frac{k^2\omega\mu_0}{24\pi r}\sin(kr-\omega t)(\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r))\right) \\ =\ & \frac{k^4\omega^2\mu_0 c}{24^2\pi^2r^2}\sin^2(kr-\omega t)\left\{[(\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r))\times\mathbf{e}_r]\times[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]\right\}. \end{aligned} \tag{100}$$

利用矢量恒等式

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}), \tag{101}$$

我们可以将上式简化为

$$\mathbf{S}_Q(\mathbf{r}) = \frac{k^4\omega^2\mu_0 c}{24^2\pi^2r^2}\sin^2(kr-\omega t)[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]^2\mathbf{e}_r. \tag{102}$$

对于时间求平均后，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}_Q(\mathbf{r},t) &= \frac{k^4\omega^2\mu_0 c}{24^2\pi^2r^2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(kr-\omega t)dt\right)[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]^2\mathbf{e}_r \\ &= \frac{k^4\omega^2\mu_0 c}{2\times 24^2\pi^2r^2}[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]^2\mathbf{e}_r. \end{aligned} \tag{103}$$

将 $k=\omega/c$ 和 $\mu_0=1/\epsilon_0c^2$ 代入上式后，我们最后得到

$$\overline{\mathbf{S}}_Q(\mathbf{r})=\frac{\frac{\omega^4}{c^4}\omega^2\frac{1}{\epsilon_0c^2}c}{4\times288\pi^2r^2}[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]^2\mathbf{e}_r=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\omega^6}{288\pi c^5r^2}[\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)]^2\mathbf{e}_r. \tag{104}$$

设电荷分布区域的线度为 l，则 $|\mathcal{D}|\sim O(l^2)$，故由电四极矩辐射导致辐射功率大约为 $(l/\lambda)^4$ 的量级。显然，与由电偶极矩辐射导致的辐射功率 (大约为 $(l/\lambda)^2$ 的量级) 相比，小了 $(l/\lambda)^2$ 倍。

例 9.2: 求教科书 169 页上图 5-8 所示的电四极矩以频率 ω 振荡时导致的电磁波辐射的功率和角分布。

解: 按照定义，我们不难看到，在这一体系的电四极矩中，仅有 D_{zz} 不为零，即我们有

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&D_{zz}\end{pmatrix}, \tag{105}$$

而

$$D_{zz}=3Q_1ll+3Q_3(-l)(-l)=6Ql^2. \tag{106}$$

因此，我们有

$$\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r=D_{zz}n_z\mathbf{e}_z=D_{zz}\cos\theta\mathbf{e}_z=6Ql^2\cos\theta\mathbf{e}_z, \tag{107}$$

以及

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r)=\mathbf{e}_r\times(6Ql^2\cos\theta)\mathbf{e}_z\\ =\;&-6Ql^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x+6Ql^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y.\end{aligned} \tag{108}$$

由此，我们得到

$$(\mathbf{e}_r\times(\mathcal{D}\cdot\mathbf{e}_r))^2=36Q^2l^4\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=36Q^2l^4\cos^2\theta\sin^2\theta. \tag{109}$$

将之代入 (104) 式后，我们有

$$\overline{\mathbf{S}}_Q(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\omega^6}{288\pi c^5r^2}(36Q^2l^4\cos^2\theta\sin^2\theta). \tag{110}$$

因此，如教科书 171 页上图 5-9 所示，辐射的角分布由因子 $\cos^2\theta\sin^2\theta$ 决定，而单位时间内的辐射功率则为

$$\begin{aligned}
P &= \oint\oint_{S_r} \overline{\mathbf{S}}_Q(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_{S_r} \overline{\mathbf{S}}_Q(\mathbf{r}) r^2 d\Omega \\
&= = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\omega^6}{288\pi c^5}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi(36Q^2l^4\sin^2\theta\cos^2\theta) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\omega^6}{288\pi c^5}\cdot(2\pi)\int_0^{\pi}(36Q^2l^4)\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2\epsilon_0}\cdot\frac{36Q^2l^4\omega^6}{288\pi c^5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2\epsilon_0}\cdot\frac{18Q^2l^4\omega^6}{144\pi c^5}\int_{-1}^{1}(1-t^2)t^2dt \\
&= \frac{9Q^2l^4\omega^6}{144\pi\epsilon_0 c^5}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{3Q^2l^4\omega^6}{48\pi\epsilon_0 c^5}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{Q^2l^4\omega^6}{16\pi\epsilon_0 c^5}\frac{2(5-3)}{15} = \frac{Q^2l^4\omega^6}{60\pi\epsilon_0 c^5} \\
&= \frac{4\pi^3}{15}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 I_0^2. \qquad (111)
\end{aligned}$$

其中， $I_0 = Q\omega$ 。

\$ 9.5 天线辐射

从上面的推导过程中我们看到，高频电流所产生的电磁波辐射功率中出现了一个因子 l/λ 。因此，要得到较大的辐射功率，应该尽可能使得天线的长度达到波长的数量级。最常用的天线是所谓半波天线。下面，我们对之给予简单介绍。

在本章的第 3 节中，我们讨论了中心馈电的直线状天线 (见教科书 166 页上的图 5-6) 。我们假设天线上的电流随时间的改变为

$$I(z) = I_0\left(1-\frac{2}{l}|z|\right), \quad |z|\le\frac{l}{2}, \qquad (112)$$

然后计算了其辐射功率。但这种作法有一个缺点，即没有将高频电流的波动性考虑进去。实际上，天线上的电流应该具有驻波的形式，就如同一根演奏中的小提琴琴弦上声波一样，既有波节 (node) ，也有波腹 (antinode) 。在考虑到这一点后，我们重新假设天线上的电流分布为

$$I(z) = \begin{cases} I_0\sin k\left(\frac{l}{2}-z\right), & 0\le z\le\frac{l}{2}; \\ I_0\sin k\left(\frac{l}{2}+z\right), & -\frac{l}{2}\le z\le 0. \end{cases} \qquad (113)$$

当 $z = l/2$ 或 $-l/2$ 时，电流皆为零，也就是说，天线的端点应该永远是高频电流分布的节点。当 $l = \lambda/2$ 成立时，我们可以将电流的表达式统一写作

$$I(z) = I_0 \sin k\left(\frac{\lambda}{4} - z\right) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{4} - kz\right) = I_0 \cos kz. \tag{114}$$

因此，$z = 0$ 处为高频电流驻波的一个波腹。因此，采用中心馈电的方式，可以保障信号源与天线之间有最大的能量交换。

利用矢势的表达式 (49)，我们现在有

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx'dy'dz' \\
&\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}(x',y',z')}{r} e^{ikr} e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{I_0 \cos kz' \mathbf{e}_r}{r} e^{ikr} e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dz' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} I_0 \cos kz' e^{-ikz'\cos\theta} dz'.
\end{aligned} \tag{115}$$

这里，θ 为 $\mathbf{r}$ 与 z 轴之间的夹角。先计算上式中的积分。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' e^{-ikz'\cos\theta} dz' \\
=\ &\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \left(\cos(kz'\cos\theta) - i\sin(kz'\cos\theta)\right) dz' \\
=\ &\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \cos(kz'\cos\theta) dz' - i\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \sin(kz'\cos\theta) dz'.
\end{aligned} \tag{116}$$

由于上式第二项中的被积函数是 z' 的奇函数，故积分值为零。因此，我们只需计算第一个积分即可。利用分步积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \equiv \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \cos(kz'\cos\theta) dz' = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos(kz'\cos\theta) d\left(\frac{\sin kz'}{k}\right) \\
=\ &\frac{\sin kz'}{k}\cos(kz'\cos\theta)\Big|_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} - \frac{1}{k}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \sin kz'(-\sin(kz'\cos\theta))(k\cos\theta) dz' \\
=\ &\frac{2}{k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) + \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \sin kz' \sin(kz'\cos\theta)\cos\theta dz' = \frac{2}{k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\
+\ &\cos\theta\left(-\frac{1}{k}\cos kz'\sin(kz'\cos\theta)|_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} + \frac{1}{k}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz'\cos(kz'\cos\theta)(k\cos\theta) dz'\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) + \cos^2\theta \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \cos(kz'\cos\theta)dz' \\
&= \frac{2}{k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) + \cos^2\theta\mathcal{M}. \qquad (117)
\end{aligned}
$$

移项后，我们有

$$
\mathcal{M} - \cos^2\theta\mathcal{M} = (1-\cos^2\theta)\mathcal{M} = \sin^2\theta\mathcal{M} = \frac{2}{k}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right), \qquad (118)
$$

或是

$$
\mathcal{M} \equiv \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos kz' \cos(kz'\cos\theta)dz' = \frac{2}{k\sin^2\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right). \qquad (119)
$$

将之代入 (115) 式后，我们有

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{2}{k\sin^2\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta}\mathbf{e}_z. \qquad (120)
$$

在得到 $\mathbf{A}(\mathbf{r}$ 的表达式后，我们即可写出磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 以及电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 了。我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -ik\frac{\mu_0 I_0}{2\pi k}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_z \\
&= -\frac{i\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi, \qquad (121)
\end{aligned}
$$

和

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r}) = c\mathbf{B}(\mathbf{r})\times\mathbf{e}_r = -\frac{i\mu_0 I_0 c}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathbf{e}_\theta. \qquad (122)
$$

因此，能量流密度的平均值为

$$
\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I_0^2 c}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}(-\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\varphi) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2}\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_r, \qquad (123)
$$

即辐射角分布由因子 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)/\sin^2\theta$ 给出，而总辐射功率为

$$
\begin{aligned}
P &= \oint\oint_{S_r}\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi r^2\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2}\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \\
&= \int_0^\pi \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta. \qquad (124)
\end{aligned}
$$

令 $\cos\theta = u$，我们有

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{1-\cos^2\theta}(-d\cos\theta) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{1-u^2} du \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{16\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\cos\pi u}{1+u} du + \frac{\mu_0 I_0^2 c}{16\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\cos\pi u}{1-u} du. \end{aligned} \tag{125}$$

在后面的一个积分中做变换 $u' = -u$，我们进一步得到

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{16\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\cos\pi u}{1+u} du + \frac{\mu_0 I_0^2 c}{16\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\cos\pi u'}{1+u'} du' \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\cos\pi u}{1+u} du. \end{aligned} \tag{126}$$

再令 $v = \pi(1+u)$ 后，可以将上式化简为

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\left(\pi\left(\frac{v}{\pi}-1\right)\right)}{\frac{v}{\pi}} d\left(\frac{v}{\pi}\right) = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\pi v}{v} dv \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{v} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\pi v)^{2n} dv = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \int_0^{2\pi} v^{2n-1} dv \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \frac{(2\pi)^{2n}}{2n} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(2\pi^2)^{2n}}{2n(2n)!}. \end{aligned} \tag{127}$$

此式中的级数收敛很快，其值大约为 2.44 。因此，我们有

$$P \cong 2.44 \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi}, \tag{128}$$

即辐射电阻为

$$\widetilde{R} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \times 2.44 = 73.2\text{欧姆}. \tag{129}$$

这是一个很大的数值。

在上面的讨论中，我们假设了天线上的电流密度分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ 是已知的。但由于天线上的电流分布实际上受到辐射导致的电磁场的影响的，故要更为准确地描述天线的辐射问题，就需要将天线上的电流密度分布与天线外的电磁场分布联合求解。作为一个简单的例子，让我们考虑一根长为 l，半径为 a 的圆柱形天线上的电流密度分布 [1] 。

[1]推导引自 J. D. Jackson 所著 “Classical Electrodynamics” 一书的 9.4 节

为了简化问题，我们假设天线是由理想导体制成的，且满足条件 $a \ll l$ ， $a \ll \lambda$ 。设天线是沿 z 轴方向放置的。由于是理想导体，故天线上仅有表面电流密度分布，且方向是沿 z 轴的。这使得磁场分布具有轴对称性。相应地，矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 也只有 z 分量，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int_{\Omega} \frac{j_z(x', y', z')\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dx'dy'dz' = A_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \tag{130}$$

成立。另一方面，利用洛伦兹规范条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} = 0, \tag{131}$$

我们可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{i\omega}{c^2} \Phi(x, y, z), \tag{132}$$

或是

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{ic}{k} \nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z). \tag{133}$$

又利用

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = -\nabla \Phi(x, y, z, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(x, y, z, t)}{\partial t}, \tag{134}$$

我们可得

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{ic}{k} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z)) + i\omega \mathbf{A}(x, y, z). \tag{135}$$

仅考虑电场强度矢量的 z 分量，我们有

$$E_z(x, y, z) = \frac{ic}{k} \left(\frac{\partial^2 A_z(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 A_z(x, y, z) \right). \tag{136}$$

又由于在金属圆柱的表面处，电场强度的切向分量应该连续改变的，而天线是由理想导体制成的，故

$$E_z(x, y, z)|_{\text{天线表面}} = 0 \tag{137}$$

成立。换句话说，我们有

$$\left(\frac{\partial^2 A_z(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 A_z(x, y, z) \right) \Big|_{\text{天线表面}} = 0. \tag{138}$$

不同于以前的假设，这一结果是严格的。接下来的任务是要从这一方程出发，推导出天线表面上的电流分布。

将 $j_z(x',y',z')=I(z')$ 代入 (130) 式后，我们得到

$$A_z(x,y,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{I(z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)dx'dy'dz'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\text{天线表面}}\frac{\exp\left(ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}I(z')d\mathbf{r}'. \quad (139)$$

在引入柱坐标 $x'=a\cos\varphi', y'=a\sin\varphi', z'$ 和 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z$ 后，上式可进一步写作

$$A_z(x,y,z)=\frac{\mu_0 a}{4\pi}\int_{z_0}^{z_0+l}I(z')dz'$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi'\frac{\exp\left(ik\sqrt{(a\cos\varphi-a\cos\varphi')^2+(a\sin\varphi-a\sin\varphi')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(a\cos\varphi-a\cos\varphi')^2+(a\sin\varphi-a\sin\varphi')^2+(z-z')^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 a}{4\pi}\int_{z_0}^{z_0+l}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left(ik\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\varphi-\varphi')+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\varphi-\varphi')+(z-z')^2}}I(z')dz'd\varphi'$$

$$=\frac{\mu_0 a}{4\pi}\int_{z_0}^{z_0+l}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left(ik\sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)+(z-z')^2}}I(z')dz'd\alpha$$

$$=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int_{z_0}^{z_0+l}\left(\int_0^{\pi}\frac{\exp\left(ik\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}}d\beta\right)I(z')dz'. \quad (140)$$

将之代入边界条件 (138) 后，我们有

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{z_0}^{z_0+l}\left(\int_0^{\pi}\frac{\exp\left(ik\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}}d\beta\right)I(z')dz'=0. \quad (141)$$

由于微分方程

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}+k^2U(z)=0 \quad (142)$$

的两个线性无关的解为

$$U_1(z)=\cos kz, \quad U_2(z)=\sin kz, \quad (143)$$

我们可以将此一方程的通解写作

$$\int_{z_0}^{z_0+l}\left(\int_0^{\pi}\frac{\exp\left(ik\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{4a^2\sin^2\beta+(z-z')^2}}d\beta\right)I(z')dz'=a_1\cos kz+a_2\sin kz. \quad (144)$$

为了决定展开系数 a_1 和 a_1，我们可以利用在天线的两端电流密度为零这一条件。然而这一积分方程的严格求解是非常困难的。作为一个极限情况，当 $a \to 0$ 时，我们可以证明，这一方程所给出的天线上的电流密度分布恰与 (113) 式完全一样。一般情况的讨论则超出了我们课程的覆盖范围。

例 9.3: N 条相同形状和尺寸的天线沿极轴等距离排列，彼此相距为 l，并同相位激发。求天线阵列的辐射角分布。

解: 设第一根天线在空间 $\mathbf{r}$ 处产生的电场强度矢量为 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(r, \theta, \varphi)$，那么第二根天线产生的电场强度矢量就是 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(r, \theta, \varphi)e^{ikl\cos\theta}$，并依此类推。因此，天线阵列在空间 $\mathbf{r}$ 处产生的总的电场强度矢量为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_0(r, \theta, \varphi)e^{inkl\cos\theta} = \mathbf{E}_0(r, \theta, \varphi)\frac{1 - e^{iNkl\cos\theta}}{1 - e^{ikl\cos\theta}}. \tag{145}$$

这导致了天线阵列的辐射角分布就是在第一根天线辐射的角分布函数上再乘上一个因子

$$\mathcal{F}(\theta) = \left|\frac{1 - e^{iNkl\cos\theta}}{1 - e^{ikl\cos\theta}}\right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kl\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kl\cos\theta\right)}. \tag{146}$$

§ 9.6 电磁波的衍射

到目前为止，我们已经介绍了第一类产生电磁波的方法。在开始讨论第二类方法的细节之前，我们先介绍一下与电磁波辐射紧密相关的两种现象，即电磁波的衍射现象和光压强现象。

先考察电磁波的衍射现象。当电磁波在传播过程中遇到障碍物或透过屏幕上的小孔时，会诱发偏离原来入射方向的出射电磁波。这一现象称为衍射。研究衍射问题时，人们关心的主要是如何计算绕过障碍物或透过小孔后的电磁波的角分布。

在光学理论中，研究衍射问题的基本方法是基于所谓惠更斯原理 (Huygens principle)，即假设光波前面上的每一点都可以视作一个次级光源，并发射子波。这些子波叠加后即得到向前传播的衍射光波。同理，若我们将电磁波前面上每一点视作一个小天线，由它们发射次级电磁波，然后将之叠加后形成向前传播的次级电磁波，则亦可根据此图象来研究电磁波的衍射现象。下面，我们根据这一想法讨论电磁波的衍射 [2]。

[2]详情见朗道和栗弗席兹著 "场论" 一书的第 7.7 节和第 7.9 节。

为了确定起见，让我们考虑一个无限大屏幕上的小孔，电磁波从屏幕的左边正入射。我们要计算在屏幕右边的半空间中各点的电磁波强度矢量。显然，这一问题应该利用边值条件，即屏幕的左边的电磁场强度矢量与屏幕右边的电磁场强度矢量在小孔处是连续的严格求解。但一般来讲，这种普适的求解过程过于复杂，很不实用。因此，人们往往退而求其次，采用一些近似方法，但仍足以很好地理解衍射现象。例如，我们可以用 $u(x,y,z)$ 来代表电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 或是磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z)$ 的任何一个分量，并假设在屏幕上除了小孔之外的任何一处

$$u(x,y,z)=0 \tag{147}$$

都成立。因此，屏幕是由何种材料制成的就无关紧要。同时，我们还假设，在小孔内，场强 $u(x,y,z)$ 的值与屏幕不存在时是一样的，故衍射后的电磁波在空间中分布将仅仅与小孔的形状有关。

现用一曲面 S 覆盖住小孔，即这一曲面是小孔的边缘为边界的。将这一曲面分割成面积为 $\Delta\mathbf{S}_i$ 的许多小面积元，其线度小于电磁波的波长。根据惠更斯原理，我们可以将每一个小面积元视作一个“小天线”，向各个方向辐射电磁波。因此，在屏幕右边的半空间中一点 $\mathbf{r}$ 的电磁波强度矢量就应该是所有这些“小天线”在该处产生的电磁场强度矢量之和。

小面积元 $\Delta\mathbf{S}_i$ 在空间 $\mathbf{r}$ 处所产生的场强显然与其自身处的场强 $u(x',y',z')$ 成正比，也与 $\Delta\mathbf{S}_i$ 在电磁波传播方向，即 $\mathbf{k}$ 方向上的投影值成正比。也就是说，我们有

$$\Delta u_i(x,y,z)=au(x',y',z')\frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Delta\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}}. \tag{148}$$

这里，a 为比例系数，而 $\mathbf{k}$ 为入射波的波矢，$\mathbf{k}'$ 为出射波的波矢。因此，在观察点 $\mathbf{r}$ 处的总场强为

$$u(x,y,z)=\sum_i\Delta u_i(x,y,z)=\oint\!\!\oint_S au(x',y',z')\frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}}. \tag{149}$$

为了决定比例常数 a，我们考虑一个沿着 x 轴方向传播的平面波。此时，入射波的波矢为 $\mathbf{k}=k\mathbf{e}_x$。那么，在空间 $\mathbf{r}=(x,0,0)$ 处的场强应为

$$u(x,0,0)=u_0e^{ikx}. \tag{150}$$

而由 (149) 式给出的场强则为

$$\begin{aligned} u(x,0,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' a u(0,y',z') \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= a u_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}\cos\theta}}{\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}}. \end{aligned} \tag{151}$$

这里， θ 是波矢 $\mathbf{k}'$ 与 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 之间的夹角。当 x 的绝对值很大时，我们可以近似地取 $\theta \cong 0$ ，或是 $\cos\theta \cong 1$ 。又由于被积函数中的指数函数是一个快速振荡因子，故积分的主要贡献来自于 $y'^2+z'^2 \cong 0$ 的区域。因此，我们可以将上式近似地写作

$$\begin{aligned} u_0 e^{ikx} &\cong a u_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\exp\left(ikx\sqrt{1+\frac{y'^2+z'^2}{x^2}}\right)}{x} \\ &\cong \frac{a u_0}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \exp\left(ikx + \frac{iky'^2}{2x} + \frac{ikz'^2}{2x}\right) \\ &= \frac{a u_0}{x} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp\left(\frac{iky'^2}{2x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz' \exp\left(\frac{ikz'^2}{2x}\right). \end{aligned} \tag{152}$$

利用积分恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi^2) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i), \tag{153}$$

我们最后得到

$$\begin{aligned} u_0 e^{ikx} &\cong \frac{a u_0}{x} e^{ikx} \left(\sqrt{\frac{2x}{k}}\right)^2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)\right)^2 = \frac{a u_0}{x} e^{ikx} \cdot \frac{2x}{k} \pi \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \\ &= \frac{2a u_0 \pi}{k} e^{ikx} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi a u_0}{k} e^{ikx} i = \frac{2\pi a u_0 i}{k} e^{ikx}, \end{aligned} \tag{154}$$

并由此解得

$$a \cong \frac{k}{2\pi i}. \tag{155}$$

此式当 $x \to \infty$ 时是精确的。

将 a 的表达式代入公式 (149) 后，我们即可得到根据惠更斯原理得到的电磁波的衍射强度公式

$$u(x,y,z) = \frac{k}{2\pi i} \oint\oint_S u(x',y',z') \frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_\mathbf{k}. \tag{156}$$

例 9.4: 波长为 λ 的平面电磁波垂直入射到一个无限大屏幕上长方形小孔中。设小孔的长度和宽度分别为 $2a$ 和 $2b$，且 $a, b \gg \lambda$。求夫琅和费衍射 (Fraunhofer diffraction) 图样。

解: 所谓夫琅和费衍射是指当光源和观察点都在距离屏幕很远 (或无穷远) 的位置的情况下的衍射现象。由于入射波是平面波，我们可以将它在屏幕左边的强度写作

$$u(x', y', z') = u_0 \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'). \tag{157}$$

同时， $\mathbf{k}'$ 近似地与 $\mathbf{r}$ 平行。因此，我们有

$$\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' \cong kr - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'. \tag{158}$$

将此式与 (157) 式一起代入 (156) 式后，我们有

$$u(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \oint\!\!\oint_S u_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}') \frac{e^{ikr - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_\mathbf{k} = \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \oint\!\!\oint_S e^{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{e}_\mathbf{k}. \tag{159}$$

现将入射电磁波的方向 (波矢 $\mathbf{k}$ 的方向) 取作 x 轴，则

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \int_{-a}^{a} dy' e^{-ik'_y y'} \int_{-a}^{a} dz' e^{-ik'_z z'} = \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \left. \frac{e^{-ik'_y y'}}{-ik'_y} \right|_{-a}^{a} \left. \frac{e^{-ik'_z z'}}{-ik'_z} \right|_{-b}^{b} \\ &= \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \cdot \frac{4}{k'_y k'_z} \sin k'_y a \sin k'_z b \end{aligned} \tag{160}$$

成立。若令 $\mathbf{k}'$ 与 y 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，与 z 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \beta$，则我们近似地有

$$k'_y = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k \sin\alpha \cong k\alpha, \quad \alpha \cong 0, \tag{161}$$

以及

$$k'_z = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = k \sin\beta \cong k\beta, \quad \beta \cong 0. \tag{162}$$

代入 (160) 式后，我们进一步得到

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \cdot \frac{4}{k^2 \sin\alpha \sin\beta} \sin(k \sin\alpha a) \sin(k \sin\beta b) \\ &\cong \frac{ku_0 e^{ikr}}{2\pi i r} \cdot \frac{4}{k^2 \alpha\beta} \sin k\alpha a \sin k\beta b. \end{aligned} \tag{163}$$

因此，在小孔右边的夫琅和费衍射波的光强角分布为

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta) &= |u(x,y,z)|^2 \cong \frac{4u_0^2}{\pi^2 r^2 k^2}\frac{\sin^2 k\alpha a}{\alpha^2}\frac{\sin^2 k\beta b}{\beta^2} \\ &= \frac{4k^2u_0^2a^2b^2}{\pi^2r^2}\left(\frac{\sin k\alpha a}{k\alpha a}\right)^2\left(\frac{\sin k\beta b}{k\beta b}\right)^2. \end{aligned} \tag{164}$$

$ 9.7 电磁波的动量和光压

在第二章中，从麦克斯韦方程组出发，我们曾经得到如下的方程

$$\begin{aligned} & \rho(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)+\mathbf{j}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t) \\ + \;& \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t)]-\left(\frac{1}{\mu_0}[\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)]\mathbf{B}(x,y,z,t)\right. \\ + \;& \epsilon_0[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)+\epsilon_0[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t) \\ + \;& \left.\frac{1}{\mu_0}[\nabla\times\mathbf{B}(x,y,z,t)]\times\mathbf{B}(x,y,z,t)\right)=0. \end{aligned} \tag{165}$$

注意到，此式左边第一和第二项之和

$$\mathbf{f}(x,y,z,t)\equiv\rho(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)+\mathbf{j}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t) \tag{166}$$

可以解释作系统电荷所受电磁力的密度。因此，根据牛顿第二定律，我们可以将之写作

$$\frac{\partial\mathbf{p}(x,y,z,t)}{\partial t}=\mathbf{f}(x,y,z,t)=\rho(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)+\mathbf{j}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t). \tag{167}$$

这里， $\mathbf{p}(x,y,z,t)$ 为系统的机械动量密度。因此，根据量纲比较， (165) 式中的第三项应该解释作电磁场的动量密度

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}(x,y,z,t)\equiv\epsilon_0\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t) \\ = \;& \epsilon_0\mu_0\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t)=\frac{1}{c^2}\mathbf{S}(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{168}$$

对时间的偏导数。这里， $\mathbf{S}(x,y,z,t)$ 为代表电磁场能量密度的坡印亭矢量。若我们令

$$\mathbf{P}(x,y,z,t)=\mathbf{p}(x,y,z,t)+\mathbf{g}(x,y,z,t)=\mathbf{p}(x,y,z,t)+\frac{1}{c^2}\mathbf{S}(x,y,z,t) \tag{169}$$

为体系的总的动量密度，则 (165) 式可以被改写作

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\mathbf{P}(x,y,z,t)}{\partial t}-\left(\frac{1}{\mu_0}[\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)]\mathbf{B}(x,y,z,t)+\epsilon_0[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)\right. \\ + \;& \left.\epsilon_0[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t)+\frac{1}{\mu_0}[\nabla\times\mathbf{B}(x,y,z,t)]\times\mathbf{B}(x,y,z,t)\right)=0 \end{aligned} \tag{170}$$

进一步，若此式中大括号内的四项之和可以被写作一个二阶三维空间张量 Π 的散度 $\nabla\cdot\Pi$，则此方程形为连续性方程，表示体系的动量是守恒的。的确，我们可以做到这一点。

首先，我们注意到

$$[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t)=[\mathbf{E}(x,y,z,t)\cdot\nabla]\mathbf{E}(x,y,z,t)-\frac{1}{2}\nabla E^2(x,y,z,t) \quad (171)$$

成立。因此，我们有

$$\begin{aligned}&[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)+[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t)\\ =\;&[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)+[\mathbf{E}(x,y,z,t)\cdot\nabla]\mathbf{E}(x,y,z,t)\\ -\;&\frac{1}{2}\nabla E^2(x,y,z,t).\end{aligned} \quad (172)$$

若对一个二阶三维空间张量

$$\mathcal{G}=(G_{ij})=\begin{pmatrix}G_{11}&G_{12}&G_{13}\\G_{21}&G_{22}&G_{23}\\G_{31}&G_{32}&G_{33}\end{pmatrix}, \quad (173)$$

我们定义其散度为

$$\nabla\mathcal{G}\equiv\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_i}\mathbf{e}_j=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial G_{1j}}{\partial x}+\frac{\partial G_{2j}}{\partial y}+\frac{\partial G_{3j}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_j, \quad (174)$$

则 (172) 式又可被改写作

$$\begin{aligned}&[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)+[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t)\\ =\;&\nabla\cdot[\mathbf{E}(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)]-\frac{1}{2}\nabla\cdot[\hat{I}E^2(x,y,z,t)].\end{aligned} \quad (175)$$

这里，

$$\hat{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad (176)$$

为 3×3 的单位矩阵。同理，我们有

$$\begin{aligned}&[\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)]\mathbf{B}(x,y,z,t)+[\nabla\times\mathbf{B}(x,y,z,t)]\times\mathbf{B}(x,y,z,t)\\ =\;&\nabla\cdot[\mathbf{B}(x,y,z,t)\mathbf{B}(x,y,z,t)]-\frac{1}{2}\nabla\cdot[\hat{I}B^2(x,y,z,t)].\end{aligned} \quad (177)$$

因此，(170) 式中的大括号四项之和现在可以写作

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{1}{\mu_0}[\nabla\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)]\mathbf{B}(x,y,z,t)+\epsilon_0[\nabla\cdot\mathbf{E}(x,y,z,t)]\mathbf{E}(x,y,z,t)\right.\\
+ \quad & \left.\epsilon_0[\nabla\times\mathbf{E}(x,y,z,t)]\times\mathbf{E}(x,y,z,t)+\frac{1}{\mu_0}[\nabla\times\mathbf{B}(x,y,z,t)]\times\mathbf{B}(x,y,z,t)\right)\\
= \quad & \nabla\cdot\left(-\epsilon_0\mathbf{E}(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(x,y,z,t)\mathbf{B}(x,y,z,t)\right.\\
+ \quad & \left.\frac{1}{2}\hat{I}\left(\epsilon_0E^2(x,y,z,t)+\frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right)\right). \qquad (178)
\end{aligned}$$

现在，若我们令

$$\begin{aligned}
\Pi(x,y,z,t) \quad \equiv \quad & -\epsilon_0\mathbf{E}(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t)-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(x,y,z,t)\mathbf{B}(x,y,z,t)\\
+ \quad & \frac{1}{2}\hat{I}\left(\epsilon_0E^2(x,y,z,t)+\frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right), \qquad (179)
\end{aligned}$$

则方程 (170) 可以明显写作

$$\frac{\partial\mathbf{P}(x,y,z,t)}{\partial t}+\nabla\cdot\Pi(x,y,z,t)=\frac{\partial\mathbf{p}(x,y,z,t)}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{g}(x,y,z,t)}{\partial t}+\nabla\cdot\Pi(x,y,z,t)=0. \qquad (180)$$

它具有连续性方程的形式，而 $\Pi(x,y,z,t)$ 被解释成电磁场能够的动量流密度张量。为了更好地理解这一物理量的意义，让我们考虑如下的例子。

取一个如教科书 183 页上图 5-16 所示的四面体，设其体积为 Δv 。那么，通过界面 $\triangle$OBC 流入 Δv 内的电磁场动量张量流分量为

$$\Pi_{xx}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{xy}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{xz}(x,y,z,t). \qquad (181)$$

同理，通过界面 $\triangle$OCA 流入 Δv 内的电磁场动量张量流分量为

$$\Pi_{yx}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{yy}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{yz}(x,y,z,t), \qquad (182)$$

而通过界面 $\triangle$OAB 流入 Δv 内的电磁场动量张量流分量为

$$\Pi_{zx}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{zy}(x,y,z,t),\ \ \Pi_{zz}(x,y,z,t). \qquad (183)$$

因此，对于一个物理无穷小的四方体，单位时间通过这三个界面流入的总的电磁场动量可近似写作

$$\mathbf{P}_{\mathrm{EM}}(t) = P_x(t)\mathbf{e}_x + P_y(t)\mathbf{e}_y + P_z(t)\mathbf{e}_z \cong \Delta\mathbf{S}\cdot\Pi(x_0, y_0, z_0, t). \tag{184}$$

比较此式两边，我们得到

$$\begin{aligned}
P_x(t) &\cong S_1\Pi_{xx}(x_0, y_0, z_0, t) + S_2\Pi_{yx}(x_0, y_0, z_0, t) + S_3\Pi_{zx}(x_0, y_0, z_0, t),\\
P_y(t) &\cong S_1\Pi_{xy}(x_0, y_0, z_0, t) + S_2\Pi_{yy}(x_0, y_0, z_0, t) + S_3\Pi_{zy}(x_0, y_0, z_0, t),\\
P_z(t) &\cong S_1\Pi_{xz}(x_0, y_0, z_0, t) + S_2\Pi_{yz}(x_0, y_0, z_0, t) + S_3\Pi_{zz}(x_0, y_0, z_0, t).
\end{aligned} \tag{185}$$

这里， S_1 ， S_2 ， S_3 分别为小四方体的界面 $\triangle$OBC ， $\triangle$OCA 和 $\triangle$OAB 的面积，而 (x_0, y_0, z_0) 为顶点 O 的坐标。由于小四方体内电磁场的动量是守恒的，故单位时间内从小四方体的界面 $\triangle$ABC 流出的电磁场动量为 $-\mathbf{P}_{\mathrm{EM}}(t)$ 。

例 9.5: 求平面电磁波的动量密度流张量。

解: 在平面电磁波中，我们知道 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ ， $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 和波矢 $\mathbf{k}$ 是彼此垂直的。又由于

$$\nabla\times\mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{186}$$

导致

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}(x, y, z, t) = -i\omega\mathbf{B}(x, y, z, t), \tag{187}$$

或是

$$|\mathbf{k}\mathbf{E}(x, y, z, t)| = |\omega\mathbf{B}(x, y, z, t)|, \tag{188}$$

故我们有

$$\epsilon_0 E^2(x, y, z, t) = \epsilon_0\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 B^2(x, y, z, t) = \epsilon_0 c^2 B^2(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu_0}B^2(x, y, z, t). \tag{189}$$

现将 (179) 式中给出的电磁场动量密度张量 $\Pi(x, y, z, t)$ 与电场强度矢量 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 点乘后，我们得到

$$\mathbf{E}(x, y, z, t)\cdot\Pi(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z, t)\cdot\left(-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(x, y, z, t)\mathbf{B}(x, y, z, t)\right.$$

$$
\begin{aligned}
- \quad & \epsilon_0 \mathbf{E}(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t) + \frac{1}{2}\hat{I}\left(\epsilon_0 E^2(x,y,z,t) + \frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right)\Big) \\
= \quad & -\frac{1}{\mu_0}[\mathbf{E}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{B}(x,y,z,t)]\mathbf{B}(x,y,z,t) - \epsilon_0 E^2(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t) \\
+ \quad & \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2(x,y,z,t) + \frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right)\mathbf{E}(x,y,z,t) \\
= \quad & -\epsilon_0 E^2(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t) + \epsilon_0 E^2(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t) = 0. \qquad (190)
\end{aligned}
$$

同理，我们可证

$$
\mathbf{E}(x,y,z,t)\cdot\Pi(x,y,z,t) = 0 \qquad (191)
$$

成立。因此，张量 $\Pi(x,y,z,t)$ 中仅有 $\Pi_{kk}(x,y,z,t)$ 可能非零，即

$$
\Pi(x,y,z,t) = \Pi_{kk}(x,y,z,t)\mathbf{e_k}\mathbf{e_k}. \qquad (192)
$$

又由于 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{e_k}(x,y,z,t) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{e_k}(x,y,z,t) = 0$ ，我们立刻得到

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{e_k}\cdot\Pi(x,y,z,t) = \mathbf{e_k}\cdot\left(-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(x,y,z,t)\mathbf{B}(x,y,z,t)\right. \\
- \quad & \left.\epsilon_0\mathbf{E}(x,y,z,t)\mathbf{E}(x,y,z,t) + \frac{1}{2}\hat{I}\left(\epsilon_0 E^2(x,y,z,t) + \frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right)\right) \\
= \quad & \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2(x,y,z,t) + \frac{1}{\mu_0}B^2(x,y,z,t)\right)\mathbf{e_k} \\
= \quad & \mathcal{W}(x,y,z,t)\mathbf{e_k}. \qquad (193)
\end{aligned}
$$

这里， $\beth(x,y,z,t)$ 为电磁场的能量密度。另一方面，我们又有

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{e_k}\cdot\Pi(x,y,z,t) = \mathbf{e_k}\cdot(\Pi_{kk}(x,y,z,t)\mathbf{e_k}\mathbf{e_k}) \\
= \quad & \Pi_{kk}(x,y,z,t)\,(\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{e_k})\,\mathbf{e_k} = \Pi_{kk}(x,y,z,t)\mathbf{e_k}. \qquad (194)
\end{aligned}
$$

比较上两式的右边，我们得到

$$
\Pi_{kk}(x,y,z,t) = \mathcal{W}(x,y,z,t). \qquad (195)
$$

因此，我们最后得到

$$
\Pi(x,y,z,t) = \mathcal{W}(x,y,z,t)\mathbf{e_k}\mathbf{e_k} = c|\mathbf{g}(x,y,z,t)|\mathbf{e_k}\mathbf{e_k}. \qquad (196)
$$

这里， $\mathbf{g}(x,y,z,t)$ 为电磁场的动量密度。

例 9.6: 平面电磁波入射到理想导体表面后被全部反射。假设入射角度为 θ ，求导体表面所受到的辐射 (光) 压强。

解: 将入射平面电磁波的动量密度分为与导体平面相切的分量 $\mathbf{g}_{入\parallel}(x,y,z,t)$ 和与导体平面相垂直的分量 $\mathbf{g}_{入\perp}(x,y,z,t)$ 。前者在反射后不改变，而后者会改变符号。根据例题 9.5 的结果，导体横截面处入射电磁波的动量流密度为

$$\overline{\mathcal{W}}_{入}(x,y,z)=|\overline{\mathbf{g}}_{入}(x,y,z)|c. \tag{197}$$

这里， $\overline{\mathcal{W}}_{入}(x,y,z)$ 和 $\overline{\mathbf{g}}_{入}(x,y,z)$ 分别为对时间求平均后的电磁波能量密度和动量密度。因此，在时间间隔 Δt 内，入射到导体表面面积元 ΔS 上的电磁场动量的法向分量为

$$\begin{aligned} P_{\perp} &\cong (\overline{\mathcal{W}}_{入}(x_0,y_0,z_0)\Delta t\Delta\widetilde{S})\cos\theta=\overline{\mathcal{W}}_{入}(x_0,y_0,z_0)\Delta t(\Delta S\cos\theta)\cos\theta \\ &= \overline{\mathcal{W}}_{入}(x_0,y_0,z_0)\Delta t\Delta S\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{198}$$

这里， $\widetilde{S}$ 为入射电磁波束 (光柱) 的横截面，而为导体表面面积元 ΔS 中一点的坐标。因此，反射后电磁波的动量改变 (等于电磁波法向动量的改变) 为

$$\Delta P_{\perp}=(-P_{\perp})-P_{\perp}=-2P_{\perp}=-2\overline{\mathcal{W}}_{入}(x_0,y_0,z_0)\Delta t\Delta S\cos^2\theta. \tag{199}$$

根据力学中的冲量定理，我们当有

$$\Delta P_{\perp}=-2\overline{\mathcal{W}}_{入}(x_0,y_0,z_0)\Delta t\Delta S\cos^2\theta\cong -P_{光压}(x_0,y_0,z_0)\Delta t\Delta S. \tag{200}$$

这里， $P_{光压}(x_0,y_0,z_0)$ 为导体表面 (x_0,y_0,z_0) 处所感受到的辐射压强。由此，在取极限 $\Delta S\to 0$ 后，我们得到

$$P_{光压}(x,y,z)=2\overline{\mathcal{W}}_{入}(x,y,z))\cos^2\theta. \tag{201}$$

另一方面，考虑到在导体表面处，总电场强度应该为入射电磁波和反射电磁波的场强之和，即

$$\mathbf{E}_{总}(x,y,z,t)=\mathbf{E}_{入}(x,y,z,t)+\mathbf{E}_{反}(x,y,z,t), \tag{202}$$

故我们有

$$E^2_{\text{总}}(x,y,z,t) = E^2_{\text{入}}(x,y,z,t) + E^2_{\text{反}}(x,y,z,t) + 2\mathbf{E}_{\text{入}}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{E}_{\text{反}}(x,y,z,t). \quad (203)$$

在对时间取平均后，上式中右边的干涉项消失，即

$$\overline{E^2_{\text{总}}}(x,y,z) = \overline{E^2_{\text{入}}}(x,y,z) + \overline{E^2_{\text{反}}}(x,y,z) \quad (204)$$

成立。又由于对于理想导体而言，我们有

$$\overline{E^2_{\text{入}}}(x,y,z) = \overline{E^2_{\text{反}}}(x,y,z), \quad (205)$$

故

$$\overline{E^2_{\text{总}}}(x,y,z) = 2\overline{E^2_{\text{入}}}(x,y,z). \quad (206)$$

将之代入 (201) 式后，我们最后得到

$$P_{\text{光压}}(x,y,z) = \overline{\mathcal{W}}_{\text{总}}(x,y,z))\cos^2\theta. \quad (207)$$

在对角度 θ 积分后，我们可得由各个方向入射的电磁波造成的对于导体表面的各向同性辐射压强

$$\begin{aligned} & P_{\text{各向同性光压}}(x,y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\, \overline{\mathcal{W}}_{\text{总}}(x,y,z))\cos^2\theta \\ = \;& \overline{\mathcal{W}}_{\text{总}}(x,y,z))\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta = -\frac{1}{3}\overline{\mathcal{W}}_{\text{总}}(x,y,z))\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \;& \frac{1}{3}\overline{\mathcal{W}}_{\text{总}}(x,y,z)). \end{aligned} \quad (208)$$

在一般情况下，由于电磁波辐射造成的光压强是不大的，往往可以忽略不计。但在恒星内部，光压强可以和万有引力相抗衡，对于星体的构造和演化起着至关重要的作用，必须予以考虑。

第十章、电磁波的辐射 (下)

在本章中，我们将仔细研究产生电磁波的第二种方法，即带电粒子加速运动导致的辐射。我们的出发点仍然是满足洛伦兹规范的推迟势表达式

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz',\\ \Phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int_\Omega \frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz',\end{aligned} \tag{1}$$

只不过对于带电粒子而言，

$$\mathbf{j}(x',y',z',t') = q\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t'))\mathbf{v}(t') = q\delta(x'-x_0(t'))\delta(y'-y_0(t'))\delta(z'-z_0(t'))\mathbf{v}(t'), \tag{2}$$

而 $\mathbf{v}(t')$ 应为粒子在辐射时刻 $t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ 时的速度。我们看到，在推迟势的表达式中，无论是矢势还是标势都不依赖带电粒子的加速度。因此，我们可以选取在 t' 时刻，粒子相对于静止的参照系 S'。在此参照系中，观察点 $\widetilde{\mathbf{r}}=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ 处的标量势与静电荷 q 产生的标量势和矢量势相同，即

$$\Phi'(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\widetilde{\mathbf{r}}-\widetilde{\mathbf{r}}'|},\quad \mathbf{A}'(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = 0 \tag{3}$$

成立。其中，坐标 $\widetilde{\mathbf{r}}$ 满足条件

$$|\widetilde{\mathbf{r}}-\widetilde{\mathbf{r}}'| = c(\widetilde{t}-\widetilde{t}'). \tag{4}$$

现在，让我们回到实验室参照系 S。按照 S' 系的定义，它相对于 S 系的速度恰为 $\mathbf{v}(t')$。另一方面，从第四章中，我们已经知道 $A_1=A_x, A_2=A_y, A_3=A_z, A_4=\frac{i}{c}\Phi$ 构成一个四维矢量。因此，我们有

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}'+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\Phi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \frac{i}{c}\Phi = \frac{\frac{i}{c}\Phi'-\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\mathbf{A}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

将 (3) 式中给出的标量势和矢量势代入后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mathbf{v}\Phi'}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2|\widetilde{\mathbf{r}}-\widetilde{\mathbf{r}}'|},\\ \Phi &= \frac{\Phi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\widetilde{\mathbf{r}}-\widetilde{\mathbf{r}}'|}.\end{aligned} \tag{6}$$

接下来，我们还需要将上式中的 $|\tilde{\mathbf{r}}-\tilde{\mathbf{r}}'|$ 用实验室系 S 中的量来替代。为此，我们只要利用四维坐标的洛伦兹变换即可。我们有

$$\begin{aligned}|\tilde{\mathbf{r}}-\tilde{\mathbf{r}}'| &= c(\tilde{t}-\tilde{t}') = c\frac{(t-t')-\frac{\mathbf{v}(t')}{c^2}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}} \\ &= \frac{c(t-t')-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}} = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\sqrt{1-\frac{v^2(t')}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

将这一结果代入 (6) 式中给出的矢量势和标量势的表达式后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x,y,z,t) &= \frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\right)}, \\ \Phi(x,y,z,t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

这里，时刻 t' 和 t 之间的关系由下式

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{c} \tag{9}$$

给出。该推迟势在文献中被称为李纳 - 维谢尔势 (Lienard-Wiechert potentials)，是我们讨论第二类辐射问题的出发点。

原则上，我们现在可以利用定义

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \nabla_{\mathbf{r}}\times\mathbf{A}(x,y,z,t),\quad \mathbf{E}(x,y,z,t) = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}, \tag{10}$$

来计算电磁场的强度分布矢量。但在计算中会遇到形如 $\frac{\partial t'}{\partial t}$ 和 $\nabla_{\mathbf{r}}t'$ 的量，故我们先来解决这一技术性问题。先考虑 $\frac{\partial t'}{\partial t}$ 。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{c}\right) = 1-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2} \\ &= 1-\frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2}}2(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{r}'(t')}{\partial t}\right) \\ &= 1+\frac{1}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}'(t')}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \\ &= 1+\frac{1}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\cdot\mathbf{v}(t')\frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned} \tag{11}$$

移项后，我们得到

$$\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}=1, \tag{12}$$

或是

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}}=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c}}. \tag{13}$$

再计算 $\nabla_{\mathbf{r}}t'$ 。我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}}t' &= \nabla_{\mathbf{r}}\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{c}\right)=-\nabla_{\mathbf{r}}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{c}=-\frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{r}}\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2} \\
&= -\frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{r}}\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2}\Big|_{t'\text{不变}}-\frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{r}'}\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2}\Big|_{\mathbf{r}\text{不变}}\frac{\partial\mathbf{r}'(t')}{\partial t'}\,\nabla_{\mathbf{r}}t' \\
&= -\frac{1}{c}\frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{2\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2}}+\frac{1}{c}\frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{2\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))^2}}\cdot\mathbf{v}(t')\,\nabla_{\mathbf{r}}t' \\
&= -\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\,\nabla_{\mathbf{r}}t'.
\end{aligned} \tag{14}$$

将上式右边的第二项移项后，我们得到

$$\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\right)\nabla_{\mathbf{r}}t'=-\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}, \tag{15}$$

或是

$$\nabla_{\mathbf{r}}t'=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}. \tag{16}$$

在做了这些准备之后，我们现在可以来计算带电粒子在做加速运动时刻的辐射场强了。我们先考虑较为常见，即 $|\mathbf{v}(t')|\ll c$ 的情况。此时，我们近似地有

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c}}\cong\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}=1, \tag{17}$$

以及

$$\nabla_{\mathbf{r}}t'=-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c}\right)}\cong-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}. \tag{18}$$

另一方面，对于形如

$$f(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r},t'(\mathbf{r},t)) \tag{19}$$

的复合函数，当保持时间 t 不变而对 $\mathbf{r}$ 求偏导时，需用 [1]

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}}|_{t'\text{不变}} + (\nabla_{\mathbf{r}} t') \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{20}$$

因此，磁感应强度矢量现在可以写作

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(x,y,z,t)|_{t'\text{不变}} + \nabla_{\mathbf{r}} t' \times \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t'}. \tag{21}$$

将 (8) 式中给出的矢量势代入后，我们看到上式右边的第一项为

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(x,y,z,t)|_{t'\text{不变}} \\ = \; & \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 \left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')) \right)} \right) \Bigg|_{t'\text{不变}} \\ = \; & \frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')} \right) \Bigg|_{t'\text{不变}}. \end{aligned} \tag{22}$$

在 $|\mathbf{v}(t')| \ll c$ 的情况下，这一表达式又可被近似写作

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(x,y,z,t)|_{t'\text{不变}} \cong \frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right) \\ = \; & \frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|^3} = O\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|^2} \right). \end{aligned} \tag{23}$$

同理，当 $\mathbf{v}(t') \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{r}} t' \times \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t'} \cong \left(-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right) \times \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right) \\ \cong \; & \left(-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right) \times \left(\frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right) = \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|^2} \\ = \; & O\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

因此，当 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| \to \infty$ 时，我们仅需保留 (21) 式中的第二项，即

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) \cong \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|^2} = \frac{q\dot{\mathbf{v}}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|}{c} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|^2}. \tag{25}$$

[1] 见俞允强著 “电动力学简明教程” 一书 185 页上的 (8.2.12) 式

类似地，对于电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ ，我们也有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &= -\nabla\Phi(x,y,z,t) - \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi(x,y,z,t)|_{t'\text{不变}} - \nabla_{\mathbf{r}}t'\left(\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t'}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned} \tag{26}$$

将 (8) 式中给出的标量势和矢量势代入后， $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 可以明确表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right)\Bigg|_{t'\text{不变}} \\ &- \nabla_{\mathbf{r}}t'\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned} \tag{27}$$

在 $|\mathbf{v}(t')| \ll c$ 的情况下，我们可以利用近似表达式 (17) 和 (18) 将上式化简为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &\cong -\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|\right)}\right)\Bigg|_{t'\text{不变}} \\ &- \left(-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right) \\ &\cong \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\cdot\frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2} - \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}. \end{aligned} \tag{28}$$

其中第一项为静电荷的库仑场强度矢量，与 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2$ 成反比，存在于粒子附近，而在远处可以忽略不计。因此，当 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2 \to \infty$ 时，我们当取

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(x,y,z,t) \\ \cong\ & \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\cdot\frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2} - \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|} \\ =\ & \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2} - \frac{\dot{\mathbf{v}}(t')|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

当 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2 \to \infty$ 时，

$$\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|} \cong \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \cong \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \tag{30}$$

近似成立。因此，在辐射区的 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 又可最后写作

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &\cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\left(\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))\right)\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\left(\mathbf{e_k}\times(\mathbf{e_k}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))\right).\end{aligned}\tag{31}$$

因此，在辐射区的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 是一个横场。

利用 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 的表达式，我们又可将磁感应强度矢量改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x,y,z,t) &\cong \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\\ &= \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\mathbf{e_r}=\frac{1}{c}\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}(x,y,z,t).\end{aligned}\tag{32}$$

因此，在辐射区的玻印亭矢量为

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}(x,y,z,t)=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t)\\ =\;&\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}(\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')))\right)\times\left(\frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\mathbf{e_r}\right)\\ =\;&\frac{1}{\mu_0}\frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2c^5|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\left([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\times[\dot{\mathbf{v}}(t')\times\mathbf{e_r}]\right)\\ =\;&\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0(\epsilon_0\mu_0)c^5|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\cdot\mathbf{e_r})\dot{\mathbf{v}}(t')\\ -\;&\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0(\epsilon_0\mu_0)c^5|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\cdot\dot{\mathbf{v}}(t'))\mathbf{e_r}\\ =\;&-\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\cdot\dot{\mathbf{v}}(t'))\mathbf{e_r}\\ =\;&-\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}(\mathbf{e_r}\cdot[(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))\times\dot{\mathbf{v}}(t')])\mathbf{e_r}\\ =\;&-\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}[(\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\mathbf{e_r})^2-(\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\dot{\mathbf{v}}(t'))(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})]\mathbf{e_r}\\ =\;&-\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}(\dot{v}^2(t')\cos^2\theta-\dot{v}^2(t'))\mathbf{e_r}\\ =\;&\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\sin^2\theta\mathbf{e_r}.\end{aligned}\tag{33}$$

这里，θ 为粒子加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t')$ 方向与电磁波辐射 $\mathbf{e_r}$ 方向之间的夹角。由此我们看到，在与粒子加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t')$ 垂直的方向上电磁波的辐射最强，而总辐射功率为

$$P(t) = \oint\oint_{S_r}\mathbf{S}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}\cong\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^2\sin\theta d\theta d\varphi\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})$$

$$= \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\cdot(2\pi)\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \sin^2\theta d\cos\theta = \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (34)$$

这一结果可以用来很好地描述 X 射线的辐射现象。这种射线是由于入射到一块金属靶上的电子被减速而产生的。由于电子的能量大约为 2 万电子伏, 其速度大约为 0.85×10^{10} 厘米 / 秒，与光速 3×10^{10} 厘米 / 秒相比，仍可视作可以忽略的量。

当粒子的速率 $|\mathbf{v}(t')|$ 与光速 c 可比时, 上述结果不再适用。此时, 我们必须回到 (10) 式, 重新计算粒子辐射导致的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 。我们注意到，每次对于含 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')$ 或 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 的分式求导时，都会使得该式中分母中 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 的幂次增加一个单位。但对于 $\mathbf{v}(t')$ 中变量 t' 求导再乘以 $\nabla_{\mathbf{r}}t'$ 后，并不会增加该式中分母中 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 的幂次。因此，若我们仅仅关心在 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 很大区域 (辐射区) 的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ ，即只保留分母中因子 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 最低幂次的项时，可直接计算 $\mathbf{v}(t')$ 对于 t' 的求导。例如，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi(x,y,z,t) &= \nabla_{\mathbf{r}}\Phi(x,y,z,t)|_{t'\text{不变}} + \nabla_{\mathbf{r}}t'\left(\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial t'}\right)\\
&= \nabla_{\mathbf{r}}\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\Bigg|_{t'\text{不变}}\\
&+ \nabla_{\mathbf{r}}t'\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\\
&\cong \nabla_{\mathbf{r}}t'\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}. \quad (35)
\end{aligned}$$

现将 (16) 式代入后，我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla\Phi(x,y,z,t)\\
=\ & \left(-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}\right)\left(\frac{q\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')) - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot\dot{\mathbf{r}}'(t')\right)}{4\pi\epsilon_0\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^2}\right)\\
=\ & -\frac{q[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))](\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\right)\\
\cong\ & -\frac{q[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))](\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')| - \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}. \quad (36)
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t'}\frac{q\mathbf{v}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\right)\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c}}\right). \quad (37)\end{aligned}$$

这里，我们使用了 (8) 式给出的矢量势以及 (13) 式。如上所述，在略去了 $O(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^{-2})$ 量级的项后，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (38)\\ \cong\ & \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\\ +\ & \frac{q\mathbf{v}(t')[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))]}{4\pi\epsilon_0 c^3\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^2}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\\ =\ & \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^2}+\frac{q\mathbf{v}(t')[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))]|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{4\pi\epsilon_0 c^3\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}.\end{aligned}$$

因此，在辐射区的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &= -\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}\\ &= \frac{q[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))](\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}\\ &- \frac{q\dot{\mathbf{v}}(t')|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^2}\\ &- \frac{q\mathbf{v}(t')[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))]|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{4\pi\epsilon_0 c^3\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}\\ &\times \{[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))](\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\\ &- \dot{\mathbf{v}}(t')|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)\\ &- \frac{\mathbf{v}(t')}{c}[\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))]|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|\}\\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)^3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \quad \left\{(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\times\left[\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right\} \\
&= \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\frac{\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^3}. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

同样地，在辐射区的磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 可以写作

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{B}(x,y,z,t) \\
= \quad & \nabla\times\mathbf{A}(x,y,z,t)\nabla_{\mathbf{r}}t'\times\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t'} \\
= \quad & -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\times\left(\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}\right) \\
= \quad & -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}\cdot\frac{\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\
= \quad & -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

另一方面，从表达式 (36) 我们看到，在辐射区，$\nabla\Phi(x,y,z,t)$ 与 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')$ 是平行的，故上式又可被改写作

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}(x,y,z,t) &= \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\times\left(-\nabla\Phi(x,y,z,t)-\frac{\partial\mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{c}\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}(x,y,z,t). \qquad (41)
\end{aligned}
$$

此式与 (39) 式一起给出了在辐射区一个加速运动的带电粒子产生的电磁场强度矢量。显然，这些场都是横向的，且 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 和 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 是彼此垂直的。同时，我们也可看到，在真空中运动的带电粒子，若其加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t')=0$，则它并不对外辐射电磁波。

$ 10.2 高速运动带电粒子辐射电磁波的角分布

接下来，我们计算高速运动带电粒子所产生的辐射电磁波的玻印亭矢量。我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}(x,y,z,t)=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t) \\
= \quad & \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}\frac{\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^3}\right)\times\left(\frac{1}{c}\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}(x,y,z,t)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\frac{\left|\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right|^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^6}\mathbf{e_r}. \tag{42}$$

按照定义，玻印亭矢量应该视作时刻 t 时从观测者周边单位时间内垂直通过单位横截面的电磁波能量。因此，为了计算总的辐射功率，我们需要将能量流密度对半径为 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|$ 的球面积分。但是我们注意到，在 Δt 时间间隔内，带电粒子移动了 $\mathbf{v}(t')\Delta t'$ 的路径。因此，我们用观测时间间隔 Δt 来计算得到的辐射电磁波的总能量并不是粒子在时间间隔 $\Delta t'$ 内辐射出去的总的电磁能量 (见教科书 245 页上的图 7-2)。因此，在计算带电粒子的电磁辐射功率时，用 $\Delta t'$ 来计时间间隔更为适合。也就是说，我们有

$$\begin{aligned}\Delta W(t') &= \oint\oint_{S_R}\mathbf{S}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}\left(\frac{dt}{dt'}\Delta t'\right)\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{S}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{e_r}\left(R^2\sin\theta d\theta d\varphi\right)\left(\frac{dt}{dt'}\Delta t'\right).\end{aligned} \tag{43}$$

将 (13) 式和 (42) 式代入后，我们得到

$$\begin{aligned}P(t') &= \lim_{\Delta t'\to 0}\frac{\Delta W(t')}{\Delta t'} = \left(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\Omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2\mathbf{S}(x,y,z,t)\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{dt}{dt'}\\ &= \left(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\Omega\frac{q^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|^2}\frac{\left|\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right|^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^6}(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\right)\\ &\times \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t'))}{c}}\\ &\cong \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\Omega\frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5}\frac{\left|\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right|^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5}.\end{aligned} \tag{44}$$

因此，高速运动带电粒子的电磁辐射的角分布为

$$\begin{aligned}\frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5}\frac{\left|\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right|^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5}\\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3}\frac{\left|\mathbf{e_r}\times\left[\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right]\right|^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5}.\end{aligned} \tag{45}$$

作为特例，让我们分别考虑两种情况。第一种是 $\dot{\mathbf{v}}(t')\parallel\mathbf{v}(t')$ 的情况 (X 射线辐射

的产生即属于这种情况) 。此时，我们有 $\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v} = 0$ ，而 (45) 式现在退化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{e_r} \times [(\mathbf{e_r} \times \dot{\mathbf{v}}(t'))]|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5}. \tag{46}$$

若令 θ 为速度 $\mathbf{v}(t')$ 与 $\mathbf{e_r}$ 之间的夹角 (也是加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t')$ 与 $\mathbf{e_r}$ 之间的夹角) ，则上式可以被进一步化简为

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|(\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{e_r} - \dot{\mathbf{v}}(t')(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5} \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\dot{v}(t')\cos\theta\mathbf{e_r} - \dot{\mathbf{v}}(t')|^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5} \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2(t')\cos^2\theta - 2\dot{v}(t')\cos\theta(\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\mathbf{e_r}) + \dot{v}^2(t')}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5} \\
&= \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5}.
\end{aligned} \tag{47}$$

当 $|\mathbf{v}(t')| \ll c$ 时，我们近似地有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \cong \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta. \tag{48}$$

将此式与前面推导出的低速轫致辐射的玻印亭矢量表达式 (33) 给出的角分布相比较，我们看到二者是完全一致的，其函数曲线由教科书 247 页上的图 7-3 中的虚线所示。而当 $|\mathbf{v}(t')| \ll c$ 时， (45) 式中的分母 $\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5 = \left(1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^5$ 在 $\theta \cong 0$ 的方向变得很小。因此，电磁波辐射能量强烈地集中在粒子向前运动的方向上。为了定量近似计算此时的辐射角分布，可以将 $\cos\theta$ 做展开，并只取前两项，即

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \cong 0. \tag{49}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta &\cong 1 - \frac{v(t')}{c}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{v(t')}{c}\right) + \frac{v(t')}{c}\frac{\theta^2}{2} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{v(t')}{c}\right)\left(1 + \frac{v(t')}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v(t')}{c}\right)} + \frac{v(t')}{c}\frac{\theta^2}{2} \cong \frac{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}}{2} + \frac{\theta^2}{2}.
\end{aligned} \tag{50}$$

在推导的最后一步，我们使用了近似 $\frac{v(t')}{c} \cong 1$ 。若引入参数 $\gamma(t') = \left(1 - \frac{v^2(t')}{c^2}\right)^{-1/2}$ ，则上式又可被写作

$$1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma(t')}\right)^2 + \theta^2). \tag{51}$$

因此， (47) 式现在被改写作

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} \cong \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\left(\frac{1}{\gamma(t')}\right)^2 + \theta^2\right)^5} = \frac{2q^2\dot{v}^2(t')}{\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(\frac{1}{\gamma^2(t')} + \theta^2\right)^5}. \tag{52}$$

其函数曲线由教科书 247 页上的图 7-3 中的实线所示。显然，此时的电磁波辐射能量主要集中在沿粒子速度 $\mathbf{v}(t')$ 方向上的锥角为

$$\Delta\theta \cong \frac{1}{\gamma(t')} \tag{53}$$

的射束之内。

将 (47) 式两边对全部立体角积分后，我们可得当 $\dot{\mathbf{v}}(t') \parallel \mathbf{v}(t')$ 时粒子辐射的总功率

$$\begin{aligned} P(t') &= \int\int d\Omega\, \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r}}{c}\right)^5} \\ &= \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^5} = \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta d\theta}{\left(1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^5}. \end{aligned} \tag{54}$$

为了计算这一积分，我们引入新的变量

$$\alpha = 1 - \frac{v(t')}{c}\cos\theta, \tag{55}$$

则有

$$d\alpha = \frac{v(t')}{c}\sin\theta d\theta, \tag{56}$$

或是

$$\sin\theta d\theta = \frac{c}{v(t')}d\alpha. \tag{57}$$

将之代入后， $P(t')$ 可以被写作

$$\begin{aligned} P(t') &= \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1 - \frac{c^2}{v^2(t')}(1-\alpha)^2}{\alpha^5}\frac{c}{v(t')}d\alpha \\ &= \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3}\frac{c}{v(t')}\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2(t')}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^5} + \frac{2c^2}{v^2(t')}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\alpha^4} - \frac{c^2}{v^2(t')}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\alpha^3}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

这里， $\alpha_1 = 1 - \frac{v(')}{c}$ ， $\alpha_2 = 1 + \frac{v(')}{c}$ 。接下来，直接了当的计算给出

$$
\begin{aligned}
& P(t') \qquad (59)\\
= \; & \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\left(\left(1-\frac{c^2}{v^2(t')}\right)\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{\alpha^4}\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \frac{2c^2}{v^2(t')}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{\alpha^3}\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{c^2}{v^2(t')}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{c^2}{v^2(t')}\right)\left(\frac{1}{\alpha_2^4}-\frac{1}{\alpha_1^4}\right) + \frac{2c^2}{3v^2(t')}\left(\frac{1}{\alpha_2^3}-\frac{1}{\alpha_1^3}\right) - \frac{c^2}{2v^2(t')}\left(\frac{1}{\alpha_2^2}-\frac{1}{\alpha_1^2}\right)\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{c^2}{v^2(t')}\right)\left(\frac{1}{\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^4}-\frac{1}{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^4}\right)\right.\\
+ \; & \left.\frac{2c^2}{3v^2(t')}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^3}-\frac{1}{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^3}\right) - \frac{c^2}{2v^2(t')}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^2}\right)\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{c^2}{v^2(t')}\right)\frac{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^4-\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^4}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^4}\right.\\
+ \; & \left.\frac{2c^2}{3v^2(t')}\frac{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^3-\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^3}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} - \frac{c^2}{2v^2(t')}\frac{\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)^2-\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^2}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\left(-\frac{1}{4}\frac{c^2}{v^2(t')}\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)\frac{\left(-4\cdot 2\cdot\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3-4\cdot 2\cdot\frac{v(t')}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^4}\right.\\
+ \; & \left.\frac{2c^2}{3v^2(t')}\frac{\left(-2\cdot\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3-3\cdot 2\cdot\frac{v(t')}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} - \frac{c^2}{2v^2(t')}\frac{\left(-2\cdot 2\cdot\frac{v(t')}{c}\right)}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^2}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\frac{c^2}{v^2(t')}\left(\frac{2\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3+2\frac{v(t')}{c}}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} - \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3+4\frac{v(t')}{c}}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} + \frac{2\frac{v(t')}{c}}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^2}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\frac{c^2}{v^2(t')}\left(\frac{2\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3+2\frac{v(t')}{c}-\frac{4}{3}\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3-4\frac{v(t')}{c}+2\frac{v(t')}{c}\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\frac{c^2}{v^2(t')}\left(\frac{2\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3+2\frac{v(t')}{c}-\frac{4}{3}\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3-4\frac{v(t')}{c}+2\frac{v(t')}{c}-2\frac{v^3(t')}{c^3}}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3}\right)\\
= \; & -\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^2 v(t')}\frac{c^2}{v^2(t')}\frac{\left(-\frac{4}{3}\left(\frac{v(t')}{c}\right)^3\right)}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} = \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3} = \frac{q^2\dot{v}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}\gamma^6(t').
\end{aligned}
$$

这里， $\gamma(t')=\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^{-1/2}$ 。

在一些具体应用中，用粒子所受的外力 $\mathbf{F}(t')$ 替代其加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t')$ 较为方便。从第四章我们知道，作用在一个粒子上的外力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}=\frac{m_0\dot{\mathbf{v}}(t)\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}-m_0\mathbf{v}(t)\frac{-2\frac{\mathbf{v}(t)}{c^2}\cdot\dot{\mathbf{v}}(t)}{2\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}}{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\\ &= \frac{m_0\dot{\mathbf{v}}(t)\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)+m_0\mathbf{v}(t)\frac{\mathbf{v}(t)\cdot\dot{\mathbf{v}}(t)}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{60}$$

由于 $\dot{\mathbf{v}}(t')\parallel\mathbf{v}(t')$ ，上式又可被改写为

$$\mathbf{F}(t)=\frac{m_0\dot{v}(t)\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)+m_0v(t)\frac{v(t)\dot{v}(t)}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}}\mathbf{e}_{\mathbf{v}}=\frac{m_0\dot{v}(t)}{\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}}\mathbf{e}_{\mathbf{v}}, \tag{61}$$

或是

$$\dot{\mathbf{v}}(t)=\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}\mathbf{F}(t). \tag{62}$$

将之代入 (60) 式后，我们可得当 $\dot{\mathbf{v}}(t')\parallel\mathbf{v}(t')$ 时粒子辐射的总功率对外力的依赖关系为直接了当的计算给出

$$P(t')=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^3}\left(\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)^{3/2}\mathbf{F}(t')\right)^2=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0m_0^2c^3}F^2(t'). \tag{63}$$

由此可见，在给定的外力作用下，一个做直线加速运动的带电粒子的辐射总功率是与粒子的能量无关的。

接下来，我们再考虑 $\dot{\mathbf{v}}(t')\perp\mathbf{v}(t')$ 的情况。如教科书 247 页上图 7-4 所示，此时若

$$\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}=v(t')\cos\theta, \tag{64}$$

则

$$\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}=\dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi \tag{65}$$

成立。因此，我们有

$$\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\times\left(\left(\mathbf{e}_{\mathbf{r}}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathbf{e_r}\cdot\dot{\mathbf{v}}(t'))\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)-\left(\mathbf{e_r}\cdot\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\right)\dot{\mathbf{v}}(t')\\
&= \dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)-\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)\dot{\mathbf{v}}(t'). \qquad (66)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{e_r}\times\left(\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right)\right|^2\\
=\ &\left|\dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)-\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)\dot{\mathbf{v}}(t')\right|^2\\
=\ &\dot{v}^2(t')\sin^2\theta\cos^2\phi\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\cdot\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)+\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^2\dot{v}^2(t')\\
-\ &2\dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)\left(\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\cdot\dot{\mathbf{v}}(t')\right)\\
=\ &\dot{v}^2(t')\sin^2\theta\cos^2\phi\left(1-2\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}+\frac{v^2(t')}{c^2}\right)+\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^2\dot{v}^2(t')\\
-\ &2\dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)(\dot{v}(t')\sin\theta\cos\phi)\\
=\ &\dot{v}^2(t')\left(\sin^2\theta\cos^2\phi-2\frac{v(t')}{c}\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi+\frac{v^2(t')}{c^2}\sin^2\theta\cos^2\phi\right.\\
+\ &\left.1-2\frac{v(t')}{c}\cos\theta+\frac{v^2(t')}{c^2}\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\phi+2\frac{v(t')}{c}\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi\right)\\
=\ &\dot{v}^2(t')\left(-\sin^2\theta\cos^2\phi+\frac{v^2(t')}{c^2}\sin^2\theta\cos^2\phi+1-2\frac{v(t')}{c}\cos\theta+\frac{v^2(t')}{c^2}\cos^2\theta\right)\\
=\ &\dot{v}^2(t')\left(\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right). \qquad (67)
\end{aligned}
$$

将之代入 (45) 后，我们得到

$$
\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{16\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5}\frac{\dot{v}^2(t')\left(\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right)}{\left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)^5}. \qquad (68)
$$

其函数曲线由教科书 247 页上的图 7-5 给出。将上式两边对全部立体角积分后，我们可得当 $\dot{\mathbf{v}}(t')\perp\mathbf{v}(t')$ 时粒子辐射的总功率

$$
P(t')=\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{6\pi\epsilon_0c^3}\gamma^4(t')=\frac{q^2\dot{v}^2(t')}{6\pi\epsilon_0m_0^2c^3}\gamma^2(t')F^2(t'). \qquad (69)
$$

在推导的最后一步，我们再一次使用了关系式 (62) 。这一结果告诉我们，在给定的外力作用下，一个做圆周加速运动的带电粒子的辐射总功率是与粒子的能量的平方成正比的。

上述结果对于电子加速器的建造有重要的指导意义。目前有两种类型的电子加速器在使用中。一类是直线型的，还有一类为回旋型的。在后一类加速器中，用一定的电磁作用力使得电子加速时，电子会由于加速而产生辐射，其辐射功率与电子的能量平方成正比。因此，电子能量越大，其辐射损耗也就越大。当辐射所导致的能量损耗等于加速器所提供的能量时，电子的能量就不会再进一增大。另一方面，由于直线加速的电子的辐射能量与其能量无关，故其能量可以不受限制地升高。因此，目前能量较高的电子加速器一般采用直线型设计。

$ 10.3 加速运动带电粒子电磁波辐射的频谱分析

带电粒子做加速运动时产生的电磁辐射往往是脉冲型的，故不会是单色电磁波。例如，在 X 射线管内，具有一定能量的电子撞击到金属靶上，在很短的时间内减速到零。在这段时间内，它会辐射出脉冲 X 光。显然，无论是辐射的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 还是磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 都是时间的函数。我们以函数 $f(t)$ 代表这些矢量的一个分量，进而可使用傅立叶变换方法对其进行频谱分析。

从傅立叶变换理论我们知道，任意一个平方可积的实函数 $f(t)$ 都可以写成

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{70}$$

的形式。这里，$\widetilde{f}(\omega)$ 称为函数 $f(t)$ 的傅立叶分量，一般而言是一个复数。同时，$\widetilde{f}(\omega)$ 可以被反解出来，即我们有

$$\widetilde{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt. \tag{71}$$

值得强调一点的是，由于 $f(t)$ 是一个实函数，我们有

$$\widetilde{f}(-\omega)=\widetilde{f}^{*}(\omega). \tag{72}$$

这是由于，根据 $\widetilde{f}(\omega)$ 的定义，我们有

$$\widetilde{f}(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^{*}(t)e^{i\omega t}dt}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt}=\widetilde{f}^{*}(\omega). \tag{73}$$

因此，当 $f(t)$ 又是平方可积函数时，我们还有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(\omega_1)e^{-i\omega_1 t}d\omega_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(\omega_2)e^{-i\omega_2 t}d\omega_2\right)dt \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_2\,\widetilde{f}(\omega_1)\widetilde{f}(\omega_2)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}dt\right) \\
=\ & 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_2\,\widetilde{f}(\omega_1)\widetilde{f}(\omega_2)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}dt\right) \\
=\ & 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_2\,\widetilde{f}(\omega_1)\widetilde{f}(\omega_2)\delta(\omega_1+\omega_2) \\
=\ & 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\widetilde{f}(\omega_1)\widetilde{f}(-\omega_1) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\widetilde{f}(\omega_1)\widetilde{f}^*(\omega_1) \\
=\ & 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(\omega_1)|^2d\omega_1 = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{f}(\omega)|^2d\omega. \qquad (74)
\end{aligned}$$

在做了这些数学准备之后，我们现在可以开始研究加速运动带电粒子电磁波辐射的频谱了。我们的出发点仍然是是满足洛伦兹规范的推迟势表达式 (1) 。以推迟矢量势为例。由于

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(x,y,z,t) \\
=\ & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\
=\ & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{dx'dy'dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)d\omega\right) \\
=\ & \int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'\right), \qquad (75)
\end{aligned}$$

故与 $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)$ 的定义式

$$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (76)$$

比较后，我们得到

$$\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega\frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'. \qquad (77)$$

对于一个带电粒子，我们有

$$\mathbf{j}(x',y',z',t') = q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t')). \qquad (78)$$

这里， $\mathbf{r}_q(t')$ 为带电粒子在时刻 t' 时所在的位置。因此，我们有

$$\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{j}(x',y',z',t')e^{i\omega t'}\,dt'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t'))e^{i\omega t'}\,dt'. \quad (79)$$

将之代入 (77) 式后，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'\\ &=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t'))e^{i\omega t'}\,dt'\right)dx'dy'dz'\\ &=\frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|+i\omega t'\right)\,dt'\\ &=\frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}\exp\left(i\omega\left(t'+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}{c}\right)\right)\,dt'. \quad (80)\end{aligned}$$

当粒子在有限区域 Ω 运动，而观测者位于较远处时，可选取 Ω 内的一点作为坐标原点，并写出近似式

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|\cong r-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_q(t')\equiv r-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'(t'). \quad (81)$$

因此， $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)$ 又可进一步化简为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)&\cong\frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}(t')}{r}\exp\left(i\omega\left(t'+\frac{r}{c}-\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'(t')}{c}\right)\right)\,dt'\\ &=\frac{q\mu_0}{8\pi^2}\frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}r\right)}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}(t')\exp\left(i\omega t'-i\omega\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'(t')}{c}\right)\,dt'\\ &=\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}(t')\exp\left(i\omega t'-i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\right)\,dt'. \quad (82)\end{aligned}$$

这里， $k=\omega/c$ 为频率为 ω 的单色电磁波的波数。

接下来，我们计算带电粒子辐射电磁波的磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 的傅立叶分量 $\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega)$ 。按照定义，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega)&=\nabla_{\mathbf{r}}\times\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)=\left(\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\right)\times\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)\\ &\cong\frac{iqk}{8\pi^2\epsilon_0c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\times\mathbf{v}(t')]\exp\left(i\omega t'-i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\right)\,dt'. \quad (83)\end{aligned}$$

又利用关系式

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)=-c\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\times\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega) \quad (84)$$

(见教科书第五章的 (1.13) 式)，可以得到电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 的傅立叶分量 $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)$。我们有

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) = -\frac{iqk}{8\pi^2\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))]\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\,dt'. \quad (85)$$

注意到恒等式

$$\frac{d}{dt'}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right) = \left(i\omega - i\omega\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right), \quad (86)$$

或

$$\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right) = \frac{1}{i\omega}\frac{\frac{d}{dt'}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)}, \quad (87)$$

成立，我们可进一步将 $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)$ 改写为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\\
=\;& -\frac{iqk}{8\pi^2\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))}{i\omega\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)}\frac{d}{dt'}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\,dt'\\
=\;& \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{d}{dt'}\frac{\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)}\,dt'\\
=\;& \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)dt'\\
\times\;& \frac{[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)+\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))]}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}\\
=\;& \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{dt'}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}\\
\times\;& \left([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)+\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))]\right)\\
=\;& \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{dt'}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}\\
\times\;& \left([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]-\left(\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))]\right.\\
+\;& \left.\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)[\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{v}(t'))]\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{dt'}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}\\
&\times \left([\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t'))] - \left(\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)(\dot{\mathbf{v}}(t')\cdot\mathbf{e_r})\,\mathbf{e_r} + \left(\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\dot{\mathbf{v}}(t')(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\right.\\
&+ \left.\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)(\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{e_r})\,\mathbf{e_r} - \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\mathbf{v}'(t')(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\right)\\
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{dt'}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}\\
&\times \left(\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')) - \mathbf{e_r}\times\left(\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\times\dot{\mathbf{v}}(t')\right)\right)\\
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}dt'. \qquad (88)
\end{aligned}
$$

再利用近似式

$$
t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(t')|}{c} \cong t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r} \qquad (89)
$$

以及恒等式 (见 (13) 式)

$$
dt' = \frac{dt'}{dt}dt = \left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^{-1}dt, \qquad (90)
$$

我们可以进一步得到

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\\
&\cong \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t - i\omega\frac{r}{c}\right)\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^3}dt\\
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^3}dt. \qquad (91)
\end{aligned}
$$

将此式与电场强度矢量的逆傅立叶变换式

$$
\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(x,y,z,t)e^{i\omega t}dt \qquad (92)
$$

相比较，我们得到

$$
\mathbf{E}(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^3} \qquad (93)
$$

这与我们在本章第 1 节中得到的表达式 (39) 完全一样，从而进一步验证了表达式 (88) 的正确性。

接下来，我们计算辐射能量的角分布。按照定义，我们有

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\, r^2 dt. \tag{94}$$

(注意，由于是对于从 $-\infty$ 到 ∞ 的时间积分，故不必引入形为

$$\frac{dt}{dt'} = \left(1 - \frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\right) \tag{95}$$

的因子) 。将

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\mathbf{B}(x,y,z,t) \\ = \;& \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(x,y,z,t)\times\left(\frac{1}{c}\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\times\mathbf{E}(x,y,z,t)\right) = \frac{1}{\mu_0 c}E^2(x,y,z,t)\mathbf{e}_{\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{96}$$

代入后，我们有

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mu_0 c}E^2(x,y,z,t)(\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}})\, r^2 dt = \epsilon_0 c r^2\int_{-\infty}^{\infty} E^2(x,y,z,t)\, dt. \tag{97}$$

再利用恒等式 (74)，我们进一步得到

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int_0^{\infty}\frac{dW_\omega}{d\Omega}\, d\omega = 2\pi\epsilon_0 c r^2\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{E}(x,y,z,\omega)|^2\, d\omega \\ &= 4\pi\epsilon_0 c r^2\int_0^{\infty}|\mathbf{E}(x,y,z,\omega)|^2\, d\omega. \end{aligned} \tag{98}$$

因此，我们得到单色电磁波辐射能量的角分布的表达式为

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = 4\pi\epsilon_0 c r^2|\mathbf{E}(x,y,z,\omega)|^2. \tag{99}$$

此式和 (84) 式以及 (88) 式一起给出了对于带电粒子做加速运动时辐射电磁波进行频谱分析的主要公式。下面，让我们研究两个极限情况。

(i) 当 $|\mathbf{v}(t')| \ll c$ 时， $\mathbf{r}_q(t') = \mathbf{r}'(t') \sim \mathbf{v}(t')t'$ 。因此， (88) 式可近似写成

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega\frac{\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}dt' \\
&\cong \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t' - i\omega t'\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)\frac{\mathbf{e_r}\times\left(\mathbf{e_r}-\frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}(t')}{\left(1-\frac{\mathbf{v}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e_r}\right)^2}dt' \\
&\cong \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')])e^{i\omega t'}\,dt'. \qquad (100)
\end{aligned}
$$

设粒子从初始速度 $\mathbf{v}(t'=0)=\mathbf{v}_1$ 减速到最终速度 $\mathbf{v}(t'=\tau)=\mathbf{v}_2=0$ 所需的时间间隔为 τ，则我们进一步有

$$
\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\cong\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_0^{\tau}(\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')])e^{i\omega t'}\,dt'. \qquad (101)
$$

若 $\omega\tau\ll 1$，则 $e^{i\omega t'}$ 可以近似地取作 1，而此式可化简为

$$
\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\cong\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_0^{\tau}(\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')])\,dt'\cong\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}(\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\Delta\mathbf{v}]). \qquad (102)
$$

这里，$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=-\mathbf{v}_1$。将 $\mathbf{e_r}$ 与 $\Delta\mathbf{v}$ 之间的夹角取作 θ，则上式可改写为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) &= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}[\mathbf{e_r}(\mathbf{e_r}\cdot\Delta\mathbf{v})-(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{e_r})\Delta\mathbf{v}] \\
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}[\mathbf{e_r}\Delta v\cos\theta-\Delta\mathbf{v}]. \qquad (103)
\end{aligned}
$$

将之代入 (99) 式后，我们最后得到频率为 ω 的电磁波的辐射能量的角分布为

$$
\begin{aligned}
\frac{dW_\omega}{d\Omega} &= 4\pi\epsilon_0 c r^2\left|\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}[\mathbf{e_r}\Delta v\cos\theta-\Delta\mathbf{v}]\right|^2 \\
&= \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}\left((\Delta v)^2\cos^2\theta+(\Delta v)^2-2\Delta v\cos\theta(\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{e_r})\right) \\
&= \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}(\Delta v)^2(\cos^2\theta+1-2\cos^2\theta) \\
&= \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}(\Delta v)^2\sin^2\theta. \qquad (104)
\end{aligned}
$$

将此式两边对于立体角 $d\Omega$ 积分后，我们得到单位时间内的辐射能量

$$
W_\omega=\frac{q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}(\Delta v)^2. \qquad (105)
$$

我们注意到这一结果与频率 ω 无关。

另一方面，若 $\omega\tau \gg 1$，则 (101) 式中的 $e^{i\omega t'}$ 是一个快速振荡因子，导致

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) \cong \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_0^\tau (\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\dot{\mathbf{v}}(t')])e^{i\omega t'}\,dt' \cong 0. \tag{106}$$

因此，此时 $W_\omega \cong 0$ 成立。

将 W_ω 对于 ω 的依赖关系作图的话，我们会得到教科书 252 页上的图 7-7(a) 。若将 $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ 代入 (105) 式，我们进一步得到

$$W_\omega d\omega = W_\omega \left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right| d\lambda = \frac{q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}(\Delta v)^2 \left|\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)\right| d\lambda = \frac{q^2}{3\pi\epsilon_0 c^2}(\Delta v)^2\frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{107}$$

物理上，我们可以将

$$W_\lambda \equiv \frac{q^2(\Delta v)^2}{3\pi\epsilon_0 c^2\lambda^2} \tag{108}$$

解释作在单位时间内粒子以波长为 λ 的电磁波形式向外辐射的能量密度，其对波长 λ 的依赖关系如教科书 252 页上的图 7-7(b) 所示。但对于 X 射线谱的实际测量给出的 W_λ 的曲线却如图 7-7(c) 所示，在 λ 接近于零处存在一个尖锐的截止波长 λ_c 。当 $\lambda < \lambda_c$ 时，$W_\lambda = 0$ 。要解释这一现象，经典电动力学已经无能为力。这是一个量子力学效应，需要用量子电动力学的计算加以说明。

(ii) 当 $|\mathbf{v}(t')| \sim c$ 时，如前所述，每一瞬间带电粒子所产生的辐射电磁波都会集中在沿 $\mathbf{v}(t')$ 方向的一个狭窄射束内，射束的张角为 $\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$ 。因此，当粒子在作圆周运动时，它所产生的辐射就好像是一个旋转扫描的探照灯一样：在远处的观测者看来，这种辐射给出的是周期性的脉冲波形。

如同教科书 253 页上的图 7-8 所示，设带电粒子运动的圆周轨迹的半径为 ρ，则粒子经过路径 $\rho\Delta\theta$ 所用的时间为

$$\Delta t' = \frac{\rho\Delta\theta}{v} \cong \frac{\rho}{v\gamma} \cong \frac{\rho}{c\gamma}. \tag{109}$$

而对于远处的观测者来说，这一时间间隔为 (见 (13) 式)

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{dt}{dt'}\Delta t' = \left(1-\frac{v(t')}{c}\cos\theta\right)\Delta t' \cong \left(1-\frac{v(t')}{c}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\Delta t' \\ &= \left(1-\frac{v(t')}{c}+\frac{v(t')}{c}\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta t' \cong \left(1-\frac{v(t')}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta t'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\times 2\times\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)\Delta t'+\frac{\theta^2}{2}\Delta t' \\
&\cong \frac{1}{2}\left(1+\frac{v(t')}{c}\right)\left(1-\frac{v(t')}{c}\right)\Delta t'+\frac{\theta^2}{2}\Delta t' \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2(t')}{c^2}\right)\Delta t'+\frac{\theta^2}{2}\Delta t' \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma^2}\Delta t'+\frac{\theta^2}{2}\Delta t', \qquad (110)
\end{aligned}
$$

即

$$\Delta t \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\theta^2}{2}\right)\Delta t'. \qquad (111)$$

为了简化计算，我们下面用

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{\gamma^{-1}}\int_0^{\frac{1}{\gamma}}\theta^2\,d\theta = \gamma\int_0^{\frac{1}{\gamma}}\theta^2\,d\theta = \frac{1}{3\gamma^2} \qquad (112)$$

来替代 θ^2，它们在数量级上是相同的。我们有

$$\Delta t \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\Delta t' = \frac{2}{3}\frac{1}{\gamma^2}\Delta t' \cong \frac{1}{\gamma^2}\Delta t', \qquad (113)$$

或是

$$\Delta t' = \gamma^2\Delta t. \qquad (114)$$

将之代入 (109) 式后，我们有

$$\gamma^2\Delta t = \frac{\rho}{c\gamma}. \qquad (115)$$

由此，我们解得

$$\Delta t = \frac{\rho}{c\gamma^3}. \qquad (116)$$

另一方面，由于辐射电磁波的电场强度矢量的傅立叶分量表达式 (91) 中因子 $e^{i\omega t}$ 的存在，辐射电磁波的频率将主要分布在小于由条件 $\omega_c\Delta t\sim 1$ 决定的范围内，而

$$\omega_c \cong \frac{1}{\Delta t} = \frac{c\gamma^3}{\rho} \cong \frac{v\gamma^3}{\rho} = 2\pi\frac{v}{2\pi\rho}\gamma^3 = \frac{2\pi}{T}\gamma^3 = \omega_0\gamma^3. \qquad (117)$$

这里，ω_0 为带电粒子作圆周运动的角频率。

又由于圆周运动是周期的，故它的辐射能量可以展开成傅立叶级数，即

$$W(t) = C_0 + C_1 \exp(-i\omega_0 t) + C_2 \exp(-2i\omega_0 t) + \cdots\cdots \tag{118}$$

即辐射频率的取值实际上是分立的，为 ω_0 的整数倍。其中，ω_0 所对应的为基频辐射，而 $2\omega_0$ ，$3\omega_0$ 等对应的则分别称为二次谐波，三次谐波辐射等等。这种辐射谱即可以在电子回旋加速器中被观察到，也可以在天文观测中被看到。后者是由于告诉运动的带电粒子在恒星的强磁场中作圆周运动所导致的。

\$ 10.4 切连科夫辐射

在本章的前一部分，我们研究了一个带电粒子在真空中做加速运动时辐射电磁波的现象。一个自然的问题是，如果带电粒子是在某种连续媒介质，例如水中运动时情况是否会有所改变。实际上，此时的带电粒子的电场会在构成媒介质的分子中诱导出束缚电荷和束缚电流，而后者会激发次级电磁波。同时，这些次波与运动粒子自身导致的电磁场可以互相干涉，产生向外辐射的电磁波，造成粒子本身的动能的损失。由于篇幅所限，我们在此仅仅讨论一种情况，即带电粒子自身的运动速率超过电磁波在该媒介质传播的速率。此时，我们会看到，即使带电粒子是在媒介质中作匀速直线运动，它也会向外辐射电磁波。这种辐射现象被称为切连科夫辐射 (Cherenkov radiation) 。

切连科夫辐射的物理机制如教科书中 225 页上的图 7-10 所示。设在介质内的带电粒子在作匀速直线运动，其速率 v 大于介质内的光速 $\frac{c}{n}$(n 为该媒介质的折射率) 。在粒子运动的路径附近，构成介质的分子内部的电子受到扰动，形成束缚电流，进而产生次波。设粒子在时刻 $t_1, t_2, \cdots$ 依次经过 $M_1, M_2, \cdots$ 点，并在时刻 t 时到达 M 点。在同一时刻 t ，m_i 点处的束缚电流产生的次波会到达半径为 $\overline{M_iP}$ 的球面上。因此，我们有

$$\overline{M_iP} = \frac{c}{n}(t - t_i), \quad \overline{M_iM} = v(t - t_i). \tag{119}$$

不难看出，若 $v > \frac{c}{n}$ ，则带电粒子在运动路径上各点处所激发的次波在时刻 t 时都局限在一个锥体之内。在锥面上，各个次波互相叠加，形成一个 “冲击波” 型波面，导致沿锥面法线方向传播的辐射电磁波的出现。显然，这一辐射电磁波的传播方向与粒子运动方向的夹角 θ_c 由下式

$$\cos\theta_c = \frac{\left(\frac{c}{n}\right)}{v} = \frac{c}{nv}. \tag{120}$$

决定。

接下来，让我们对切连科夫辐射做更进一步的定量分析。为了简化问题，我们假设连续媒介质的电容率 ϵ 以及磁化率 μ 都是不依赖于电磁波频率的常数，且 $\mu \cong \mu_0$ 成立。我们的出发点仍然是推迟势 (1)，只不过其中的光速 c 现在应该代之以 c/n。因此，我们有

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}(x,y,z,t) \\
= & \frac{\mu}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\left(\frac{c}{n}\right)}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\
\cong & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\left(\frac{c}{n}\right)}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy'dz' \\
= & \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{dx'dy'dz'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{n|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)d\omega\right) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{n\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'\right). \qquad (121)
\end{aligned}$$

将之与 $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)$ 的定义式

$$\mathbf{A}(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (122)$$

比较后，我们得到

$$\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_{\Omega}\frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{n\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz'. \qquad (123)$$

又由于当带电粒子在连续媒介质中是以常速率 v 作匀速直线运动时，其位置可以写作 $\mathbf{r}_q(t')=\mathbf{v}t'$，故相应地我们有

$$\mathbf{j}(x',y',z',t')=q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t')). \qquad (124)$$

仿照 (79)，我们有

$$\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t'))e^{i\omega t'}\,dt'. \qquad (125)$$

将之代入 $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)$ 的表达式后，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\widetilde{\mathbf{j}}(x',y',z',\omega)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{n\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_\Omega \frac{\exp\left(i\frac{n\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_q(t'))e^{i\omega t'}\,dt'\right)dx'dy'dz' \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}\exp\left(i\frac{n\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|+i\omega t'\right)\,dt' \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}\exp\left(i\omega\left(t'+\frac{n|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')|}{c}\right)\right)\,dt'. \qquad (126)
\end{aligned}$$

当粒子在有限区域 Ω 运动，而观测者位于较远处时，可选取 Ω 内的一点作为坐标原点，并写出近似式

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q(t')| \cong r-\mathbf{e}_\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_q(t') \equiv r-\mathbf{e}_\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'(t'). \qquad (127)$$

因此， $\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega)$ 又可进一步化简为

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) &\cong \frac{\mu_0}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\mathbf{v}}{r}\exp\left(i\omega\left(t'+\frac{nr}{c}-\frac{n\mathbf{e}_\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'(t')}{c}\right)\right)\,dt' \\
&= \frac{q\mu_0}{8\pi^2}\frac{\exp\left(i\frac{n\omega}{c}r\right)}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t'-i\omega\frac{n\mathbf{e}_\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'(t')}{c}\right)\,\mathbf{v}dt' \\
&= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega t'-i\omega\frac{n\mathbf{r}'(t')}{c}\cdot\mathbf{e}_\mathbf{r}\right)\,\mathbf{v}dt'. \qquad (128)
\end{aligned}$$

这里， $k=n\omega/c$ 为频率为 ω 的单色电磁波在连续媒介质内的波数。若取带电粒子的运动速度 $\mathbf{v}$ 的方向为 x 轴，而 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{e}_\mathbf{r}$ 之间的夹角为 θ ，则

$$\mathbf{r}'(t')\cdot\mathbf{e}_\mathbf{r} = r'(t')\cos\theta = vt'\cos\theta \qquad (129)$$

成立。将之代入上式后，我们进一步得到

$$\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) = \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega\left(\frac{r'(t')}{v}-\frac{n}{c}r'(t')\cos\theta\right)\right)\,dr'(t')\mathbf{e}_x. \qquad (130)$$

接下来，我们计算带电粒子辐射电磁波的磁感应强度矢量 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 的傅立叶分量 $\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega)$ 。按照定义，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega) &= \nabla_\mathbf{r}\times\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) = \left(\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\times\widetilde{\mathbf{A}}(x,y,z,\omega) \\
&\cong \frac{iqk}{8\pi^2\epsilon_0c^2}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega\left(\frac{r'(t')}{v}-\frac{n}{c}r'(t')\cos\theta\right)\right)\,dr'(t')[\mathbf{e}_\mathbf{r}\times\mathbf{e}_x]. \qquad (131)
\end{aligned}$$

又利用关系式

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) = -\frac{c}{n}\mathbf{e_r} \times \widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega) \tag{132}$$

(见教科书第五章的 (1.13) 式),可以得到带电粒子辐射电磁波的电场强度矢量 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 的傅立叶分量 $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)$ 。我们有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega) \\
\cong\ & -\frac{iqk}{8\pi^2 n\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega\left(\frac{r'(t')}{v}-\frac{n}{c}r'(t')\cos\theta\right)\right)dr'(t')\{\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\} \\
=\ & -\frac{iqk}{8\pi^2 n\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)r'(t')\right)dr'(t')\{\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\} \\
=\ & -\frac{iqk}{4\pi n\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\{\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\}.
\end{aligned} \tag{133}$$

在推导的最后一步，我们使用了 δ- 函数的表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk. \tag{134}$$

由 δ- 函数的定义可知，若

$$\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta \neq 0, \tag{135}$$

则 $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)=0$ 。而当 $v<\frac{c}{n}$ 时，$\frac{c}{nv}>1$ 。此时，不可能找到一个角度 θ 使得 δ- 函数内的表达式为零。因此，在这种情况下，无论是 $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ 还是 $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 都恒等于零，即不可能发生切连科夫辐射。但当 $v>\frac{c}{n}$ 时，我们可以找到一个角度 θ_c ，使得

$$\cos\theta_c = \frac{c}{nv} \tag{136}$$

成立。因此，沿此角度方向上辐射的电磁场强度矢量变成无穷大。事实上，由于连续媒介质的折射率 n 总是与电磁波的频率 ω 有关的，特别是当 $\omega\to\infty$ 时，$n\to 1$ 成立，故存在一个 ω_c ，当 $\omega>\omega_c$ 时，我们有 $\frac{c}{n}\sim c$ 。这使得真实的辐射电磁波辐射的场强不会在一个尖锐的辐射角度 θ_c 处变为无穷大，而是分布于一个有一定宽度的辐射角度区域范围内的。

最后，让我们计算带电粒子切连科夫辐射的玻印亭矢量。将 (131) 式以及 (133) 式代入后，我们有

$$\widetilde{\mathbf{S}}(x,y,z,\omega) \ = \ \frac{1}{\mu}\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\times\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega) \cong \frac{1}{\mu_0}\widetilde{\mathbf{E}}(x,y,z,\omega)\times\widetilde{\mathbf{B}}(x,y,z,\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{iqk}{4\pi n\epsilon_0 c}\frac{e^{kr}}{r}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\{\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\}\right)\\
&\times \left(\frac{iqk}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{e^{kr}}{r}\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\right)\\
&= \frac{q^2k^2}{16\pi^2 n\mu_0\epsilon_0^2 c^3}\frac{e^{2kr}}{r^2}\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)(\{\mathbf{e_r}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]\}\times[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x])\\
&= \frac{q^2k^2}{16\pi^2 n\mu_0\epsilon_0^2 c^3}\frac{e^{2kr}}{r^2}\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)(\mathbf{e_r}[\mathbf{e_r}\times\mathbf{e}_x]^2)\\
&= \frac{q^2k^2}{16\pi^2 n\mu_0\epsilon_0^2 c^3}\frac{e^{2kr}}{r^2}\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\sin^2\theta\mathbf{e_r}. \qquad (137)
\end{aligned}
$$

将之代入在单位时间内粒子以频率为 ω 的单色电磁波形式向外辐射的能量密度的角分布的表达式

$$
\frac{dW_\omega}{d\Omega} = 4\pi r^2\left|\widetilde{\mathbf{S}}(x,y,z,\omega)\cdot\mathbf{e_r}\right| \qquad (138)
$$

后，我们有

$$
\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2k^2}{4\pi n\mu_0\epsilon_0^2 c^3}\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\sin^2\theta = \frac{q^2\omega^2 n}{4\pi\epsilon_0 c^3}\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\sin^2\theta. \qquad (139)
$$

为了给此式一个合理的物理解释，我们需要对于式中出现的因子 $\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)$ 给予一个更为仔细的说明。

我们的出发点仍是 δ- 函数的表达式 (134) 。利用这一表达式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\delta^2\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right) = \delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\\
&= \delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)r'\right]\,dr'\right)\\
&= \delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)r'\right]\,dr'\right)\\
&= \delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\left(\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}e^{i0}\,dr'\right)\\
&= \delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\left(\lim_{L\to\infty}\frac{2L}{2\pi}\right). \qquad (140)
\end{aligned}
$$

将之代入 (139) 式后，我们得到

$$
\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2\omega^2 n}{8\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\cdot\left(\lim_{L\to\infty}2L\right). \qquad (141)
$$

将 $\lim_{L\to\infty} 2L$ 从上式两边除掉后，我们进一步有

$$\lim_{L\to\infty}\frac{dW_\omega}{(2L)d\Omega}=\frac{d^2W_\omega}{dLd\Omega}=\frac{q^2\omega^2 n}{8\pi^2\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right), \tag{142}$$

并将其解释作带电粒子在走过单位长度路径后在单位频率间隔内辐射电磁波能量的角分布。δ- 函数的存在表示只有在与粒子速度成 $\theta_c=\arccos\frac{c}{nv}$ 的角度方向上才有辐射出现。将此式对于全部立体角度积分后，我们得到带电粒子在走过单位长度路径后在单位频率间隔内辐射电磁波的能量

$$\begin{aligned}\frac{dW_\omega}{dL} &= \frac{q^2\omega^2 n}{8\pi^2\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\sin^2\theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)\\ &= \frac{q^2\omega^2 n}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \sin^3\theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)d\theta.\end{aligned} \tag{143}$$

利用恒等式

$$\delta(\phi(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\phi'(x_i)|}\delta(x-x_i), \tag{144}$$

(这里，$\{x_i\}$ 是函数 $\phi(x)$ 的零点集合，而 $\phi'(x_i)$ 则是函数 $\phi(x)$ 在零点 x_i 处的一阶导数)，我们有

$$\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega}{c}\cos\theta\right)=\frac{1}{\frac{n\omega}{c}\sin\theta_c}\delta(\theta-\theta_c). \tag{145}$$

代入上式后，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dW_\omega}{dL} &= \frac{q^2\omega^2 n}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^\pi \sin^3\theta\frac{1}{\frac{n\omega}{c}\sin\theta_c}\delta(\theta-\theta_c)\,d\theta\\ &= \frac{q^2\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\sin^2\theta_c=\frac{q^2\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left(1-\cos^2\theta_c\right)\\ &= \frac{q^2\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right).\end{aligned} \tag{146}$$

若考虑到折射率 n 实际上是依赖于辐射电磁波频率 ω，即

$$n^2(\omega)=\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)\cong\epsilon_r(\omega), \tag{147}$$

则上式应该被修改为

$$\frac{dW_\omega}{dL}\cong\frac{q^2\omega}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left(1-\frac{c^2}{v^2\epsilon_r(\omega)}\right),\ \text{且}\ v>\frac{c}{n(\omega)}\cong\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}}\ \text{成立}. \tag{148}$$

但对于通常遇到的连续媒介质，其相对电容率 $\epsilon_r(\omega)$ 仅会在一定的频率范围内满足条件 $\epsilon_r(\omega) > \frac{c^2}{v^2}$，故使得切连科夫辐射只会在这一频率范围内发生。

在实际工作中，切连科夫辐射现象被广泛应用于粒子计数器的制造技术。

\$ 10.5 电磁辐射阻尼

如上所述，当带电粒子受外力 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 作用而做加速运动时，它会向外辐射电磁波，从而损失掉部分能量。可以等效地认为，做加速运动的带电粒子受到了一个辐射阻尼力 $\mathbf{F}_{\text{辐射}}$，使得它的运动满足牛顿方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = \mathbf{F}_{\text{外}} + \mathbf{F}_{\text{辐射}}. \tag{149}$$

下面，我们从能量守恒定理的角度考虑 $\mathbf{F}_{\text{辐射}}$ 的形式。由于实际工作需要，我们仅需考虑 $|\mathbf{v}(t)| \ll c$ 的情况。此时，根据 (34) 式，当粒子的加速度为 $\dot{\mathbf{v}}(t)$ 时，粒子总的辐射功率为

$$P(t) = \frac{q^2\dot{v}^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{150}$$

由此导致的能量损失，可以视作是由辐射阻尼力 $\mathbf{F}_{\text{辐射}}$ 作功导致的。因此，在一段时间 (比如一个束缚电子的运动周期 T) 内，下式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{F}_{\text{辐射}}\cdot\mathbf{v}(t)\,dt = -\left(\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt\right) = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{q^2\dot{v}^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,dt \\
= &-\frac{1}{T}\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{v}}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\Big|_0^T + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\,dt \\
= &\frac{1}{T}\int_0^T \frac{q^2\ddot{\mathbf{v}}(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}\cdot\mathbf{v}(t)\,dt
\end{aligned} \tag{151}$$

成立。比较上式的两边后，我们的得到

$$\mathbf{F}_{\text{辐射}} = \frac{q^2\ddot{\mathbf{v}}(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{152}$$

注意，此式仅在对于时间求平均的意义下成立。

接下来，我们将这一结果应用到一个特例，即一个带电粒子在直线上做简谐振动的情况。在满足条件 $|\mathbf{v}(t)| \ll c$ 的情况下，粒子的运动方程可以写作

$$m_0\ddot{x}(t) = F_{\text{外}}(t) + F_{\text{辐射}}(t) = -kx(t) + \frac{q^2\dddot{v}(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{153}$$

令 $\frac{k}{m_0}=\omega_0^2$ 并移动项后，我们有

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=\frac{q^2\ddot{v}(t)}{6\pi m_0\epsilon_0 c^3}. \tag{154}$$

当带电粒子的电磁辐射不太强烈时，我们可暂时忽略上式中右边的项带来的影响，而近似得到

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)\cong 0. \tag{155}$$

这是众所周知的所谓简谐振动方程。它的解的一般形式为

$$x(t)=A\exp(-i\omega_0 t). \tag{156}$$

这里， A 为一个复常数。对于这个解，我们显然有

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x(t)}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\omega_0^2 A\exp(-i\omega_0 t)\right)=-\omega_0^2\frac{dx(t)}{dt}=-\omega_0^2\dot{x}(t). \tag{157}$$

因此，我们可以用微扰法来处理辐射阻尼效应带来的影响。为此，我们用上式给出的 $-\omega_0^2\dot{x}(t)$ 来替代 (154) 式右边中的因子 $\ddot{v}(t)$ ，从而将之改写为

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)\cong-\frac{q^2\omega_0^2\dot{x}(t)}{6\pi m_0\epsilon_0 c^3}, \tag{158}$$

或是

$$\ddot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0. \tag{159}$$

这里，系数 γ 为

$$\gamma=\frac{q^2\omega_0^2}{6\pi m_0\epsilon_0 c^3}. \tag{160}$$

这是一个阻尼谐振子方程。若令 $x(t)=\exp(st)$ (s 为一待定复常数) ，则可将此方程化为一个代数方程

$$s^2+\gamma s+\omega_0^2=0. \tag{161}$$

由此，我们解得

$$s_\pm=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}}{2}=\pm\,\omega_0\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2-1}-\frac{\gamma}{2}. \tag{162}$$

当 $\gamma \ll \omega_0$ 时，我们近似有

$$s_\pm \cong \pm i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}. \tag{163}$$

因此，方程 (159) 的近似解为

$$x(t) = B\exp\left(\pm i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t\right). \tag{164}$$

只取负值 $-i\omega_0$ ，则阻尼谐振子方程的解可以写作

$$x(t) = B\exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t\right). \tag{165}$$

这一表达式成立的条件 $\gamma \ll \omega_0$ 亦可被写为

$$\gamma = \frac{q^2\omega_0^2}{6\pi m_0\epsilon_0 c^3} \ll \omega_0, \tag{166}$$

或是

$$\frac{q^2}{6\pi m_0\epsilon_0 c^3} \ll \sqrt{\frac{m_0}{k}}. \tag{167}$$

一般而言，这一条件通常都是成立的。

由于做阻尼振动的振子的振幅是随时间增长而指数衰减的，它所辐射的电磁波场强对时间的依赖亦应如此，即我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp\left(-i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2}t\right), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{168}$$

这里， $t = 0$ 为最初激发的电磁波传至空间点 $\mathbf{r}$ 处的时刻， $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ 为一个不含时的矢量。相应的电场强度矢量的傅立叶分量为

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp\left(i(\omega-\omega_0)t - \frac{\gamma}{2}t\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\frac{\exp\left(i(\omega-\omega_0)t - \frac{\gamma}{2}t\right)}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\frac{(-1)}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{i}{2\pi}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\frac{1}{(\omega-\omega_0)+i\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \tag{169}$$

另一方面，单位时间内的电磁波辐射能量应该正比于 $|\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)|^2$ 的角度积分。因此，我们应有

$$W_\omega = \alpha\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}, \tag{170}$$

而单位时间内的电磁波辐射的总能量应该为

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} W_\omega \, d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\alpha \, d\omega}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \alpha \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-1} \arctan \frac{\omega-\omega_0}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2\alpha}{\gamma}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi\alpha}{\gamma}. \end{aligned} \tag{171}$$

由此，我们得到

$$\alpha = \frac{W\gamma}{2\pi} \tag{172}$$

以及

$$W_\omega = \frac{W}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \tag{173}$$

在教科书 263 页上的图 7-13 中给出了 W_ω 的曲线。我们看到，当 $\omega = \omega_0$ 时，W_ω 取极大值；而当 $|\omega - \omega_0| = \frac{\gamma}{2}$ 时，W_ω 降为极大值的一半。因此，γ 亦被称为谱线的 (半) 宽度，其倒数 $\tau = \frac{1}{\gamma}$ 被定义为振子的寿命。

在光谱学测量中，谱线宽度

$$\Delta\lambda = \left|\Delta\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\gamma \tag{174}$$

大致为 10^{-5} 纳米。实际上看到的谱线宽度有的接近这一数值，有的则远小于这一数值。这一事实表明，电磁波的辐射并不能完全用经典电动力学来说明。但辐射阻尼的概念以及振子寿命和谱线宽度的关系是具有普遍意义的。由于向外辐射电磁波，原子中电子的激发态具有一定的寿命。电子的跳迁几率越大，则其产生的电磁波辐射就越强，激发态的寿命就越短。这导致由此跳迁过程导致的光谱线的宽度就越大。

电子处于基态时，不会产生电磁波辐射。这一点和经典电动力学的图像有着深刻的矛盾。按照经典电动力学，电子在原子核产生的电场作用下运动，具有加速度，故一定会向外辐射电磁波。这导致其能量不断减少，最终注定要 “掉” 到原子核内部去。换句话说，在自然界中根本不可能存在稳定的原子。这显然是荒谬的。正是这一悖论促使尼尔斯 · 玻尔 (Niels Bohr) 开始了他革命性的工作，于 1913 年引入了老的量子论，并最终导致了量子力学在 1925 年的建立。

第十一章、媒介质对电磁波的影响

$ 11.1 自由电子对电磁波的散射

当一定频率的外来电磁波投射到一个电子上时，会使得电子做受迫振动，继而向外辐射电磁波，产生所谓次波。这种现象被称为电磁波的散射。在本节中，我们先研究一个自由电子对电磁波的散射；在下一节中，我们再研究束缚电子对于电磁波的散射。最后，我们将所得到的结果应用到宏观连续媒介质的介电常数对电磁波频率的依赖关系，即所谓色散关系的讨论中。

假设电子在外加电磁场的作用下的运动速率 $v \ll c$，则电子运动区域的线度 $l = vT \ll cT = \lambda$，其中 T 为外加电磁场的周期，而 λ 为其波长。因此，我们可以用其运动区域一点处 $\mathbf{r}'_0$ 的电磁场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}'_0) = \mathbf{E}_0$ 来代替作用在电子上的随地点改变的实际电磁场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$。又由于 $v \ll c$，而磁场对于电子运动的洛伦兹力为 $e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cong e\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$，故其对电场作用在电子上的库仑力 $e\mathbf{E}$ 之比为 $\frac{v}{c} \ll 1$ 的量级。因此，作为一个好的近似，我们可以略去磁场对于电子运动的影响。

令入射电磁波的电场强度为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$。那么，根据上一章的结果，电子的运动满足方程

$$m_0 \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}_{外} + \mathbf{F}_{辐} = e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{r}'}{dt^3}, \tag{1}$$

或是

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_0 c^3} \frac{d^3\mathbf{r}'}{dt^3} = \frac{e}{m_0}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{2}$$

在辐射阻尼力比较小的情况下，我们可以近似取

$$\frac{d^3\mathbf{r}'}{dt^3} \cong -\omega^2 \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \tag{3}$$

将之代入上式后，我们进一步得到

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{e}{m_0}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{4}$$

这里，$\gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_0 c^3}$ 为辐射阻尼系数。

我们先考虑上述方程的一个极限，即 $\gamma = 0$ 的情况。当忽略掉辐射阻尼带来的效应时，方程 (4) 退化为

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{e}{m_0}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{5}$$

若我们令

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t), \tag{6}$$

则可得到

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{e}{m_0\omega^2}\mathbf{E}_0. \tag{7}$$

因此，由于电子振动导致的次波辐射的电场强度矢量为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \cong \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left(\mathbf{e_r} \times \left(\mathbf{e_r} \times \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)\right) \tag{8}$$

将运动方程 (5) 代入后，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &\cong \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\left[\mathbf{e_r} \times (\mathbf{e_r} \times \mathbf{E}_0)\right]\exp(-i\omega t) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\left[(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{E}_0)\mathbf{e_r} - \mathbf{E}_0\right]\exp(-i\omega t).\end{aligned} \tag{9}$$

令 α 为矢量 $\mathbf{E}_0$ 与 $\mathbf{e_r}$ 之间的夹角，则上式可明确写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\left[E_0\cos\alpha\mathbf{e_r} - \mathbf{E}_0\right]\exp(-i\omega t). \tag{10}$$

相应地，次波的坡印亭矢量对时间的平均值为

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\left(\frac{1}{c}\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\right) \\ =\ & \frac{1}{2\mu_0 c}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\left[\mathbf{e_r}\times(E_0\cos\alpha\mathbf{e_r}-\mathbf{E}_0)\right] \\ =\ & \frac{1}{2\mu_0 c}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\right)^2(E_0\cos\alpha\mathbf{e_r}-\mathbf{E}_0)\times(-\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}_0) \\ =\ & \frac{1}{2\mu_0 c}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_0 r}\right)^2\left[-E_0\cos\alpha\mathbf{e_r}\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}_0)+\mathbf{E}_0\times(\mathbf{e_r}\times\mathbf{E}_0)\right] \\ =\ & \frac{e^4}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\left[-E_0\cos\alpha(\mathbf{e_r}\cdot\mathbf{E}_0)\mathbf{e_r}+E_0\cos\alpha\mathbf{E}_0+E_0^2\mathbf{e_r}-(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{e_r})\mathbf{E}_0\right] \\ =\ & \frac{e^4}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\left[-E_0^2\cos^2\alpha\mathbf{e_r}+E_0\cos\alpha\mathbf{E}_0+E_0^2\mathbf{e_r}-E_0\cos\alpha\mathbf{E}_0\right] \\ =\ & \frac{e^4}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}E_0^2(1-\cos^2\alpha)\mathbf{e_r} = \frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\sin^2\alpha\mathbf{e_r}.\end{aligned} \tag{11}$$

因此，若为了方便起见，暂时取 $\mathbf{E}_0$ 的方向为坐标系的 z 轴，则单位时间内次波的辐射功率可以写作

$$\begin{aligned} P &= \oint\oint_{S_r} \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \oint\oint_{S_r} |\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})| dS = \oint\oint_{S_r} |\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})|\, r^2 \sin\alpha d\alpha d\varphi \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5m_0^2r^2}\sin^2\alpha\right) r^2\sin\alpha d\alpha d\varphi \\ &= \frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5m_0^2}\int_0^{\pi}\sin^3\alpha d\alpha\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\mu_0\epsilon_0^2c^5m_0^2} \\ &= \frac{8\pi}{3}\frac{\epsilon_0 c}{2}\frac{e^4E_0^2}{16\pi^2\epsilon_0^2c^4m_0^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{\epsilon_0 c}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0c^2m_0}\right)^2 E_0^2. \end{aligned} \tag{12}$$

上式中的物理量

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0c^2m_0} \cong 2.8\times10^{-13}\text{厘米} \tag{13}$$

被称为电子的经典半径，故 P 又可被写作

$$P = \frac{8\pi}{3}\frac{\epsilon_0 c}{2}r_e^2E_0^2. \tag{14}$$

又由于 $\frac{\epsilon_0 c}{2}E_0^2$ 恰好为入射电磁波的能流密度 I_0，我们最后得到

$$P = \frac{8\pi}{3}I_0r_e^2. \tag{15}$$

在文献中，此式被称为汤姆逊 (J. J. Thomson) 公式，而物理量

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \tag{16}$$

则被称为自由电子对于入射电磁波的汤姆逊散射截面。

接下来，我们计算次波 (散射电磁波) 的角分布。取如同教科书 266 页上图 7-14 所示的坐标系，即入射波的波矢 $\mathbf{k}$ 的方向为 z 轴，而与之垂直的电场矢量 $\mathbf{E}_0$ 位于 XY 平面内。同时，将 $\mathbf{e_r}$ 取在 XZ 平面内。令 $\mathbf{E}_0$ 与 x 轴之间的夹角为 ϕ，而 $\mathbf{e_r}$ 与 z 轴之间的夹角为 θ，则我们有

$$\cos\alpha = \mathbf{e}_{\mathbf{E}_0}\cdot\mathbf{e_r} = (\mathbf{e}_{\mathbf{E}_0})_x(\mathbf{e_r})_x = \cos\phi\sin\theta, \tag{17}$$

既

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\cos^2\phi\sin^2\theta. \tag{18}$$

将之代入次波的坡印亭矢量对时间的平均值的表达式 (11) 后，我们有

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2} \sin^2\alpha \mathbf{e_r} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}(1-\cos^2\phi\sin^2\theta)\mathbf{e_r}, \tag{19}$$

或是

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e_r} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}(1-\cos^2\phi\sin^2\theta). \tag{20}$$

由于入射电磁波一般是非偏振的，故我们需要对上式中出现的角度 ϕ 求算术平均，即

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e_r}} &= \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\phi\sin^2\theta)d\phi\right) \\
&= \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}(1+\cos 2\phi)\sin^2\theta\right)d\phi \\
&= \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)d\phi \\
&= \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5 m_0^2 r^2}\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \\
&= \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\frac{r_e^2}{r^2}I_0.
\end{aligned} \tag{21}$$

这样，我们就得到次波辐射的角分布。

单位立体角内的散射功率与入射电磁波的强度之比

$$\frac{(\overline{\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e_r}})r^2}{I_0} = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)r_e^2 \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{22}$$

被定义为自由电子对入射电磁波的微分散射截面。它对散射角度的依赖关系如教科书 267 页上的图 7-15 中的实线所示。在角度 θ 较小时，与实验上观测到的由虚线所示的结果符合得较好，但在大角度时则有较大的偏离。为了解释这一误差，需要考虑量子力学效应的修正。

\$ 11.2 束缚电子对电磁波的散射

接下来，我们考虑外来电磁波投射到束缚在原子内部的电子对入射电磁波的散射。为了简化问题起见，我们用谐振子的图像来描述电子在原子内的运动，即自由电子的运动方程 (4) 要被改写作

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \gamma\frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{k}{m_0}\mathbf{r} = \frac{e}{m_0}\mathbf{E}_0\exp(-i\omega t). \tag{23}$$

这里， k 为谐振子的弹性系数，而 $\gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_0 c^3}$ 代表电子的辐射阻尼系数。

将形式为

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t) \tag{24}$$

的试探解代入上式后，我们得到代数方程

$$-\omega^2 \mathbf{r}_0 + \gamma(-i\omega)\mathbf{r}_0 + \omega_0^2 \mathbf{r}_0 = \frac{e}{m_0}\mathbf{E}_0. \tag{25}$$

因此我们解得

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e}{m_0}\frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \tag{26}$$

即电子的位置随时间的改变为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t) = \frac{e}{m_0}\frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\exp(-i\omega t) \\ &= \frac{e}{m_0}\frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}\exp(-i\omega t + i\delta). \end{aligned} \tag{27}$$

这里， $\omega_0 = \sqrt{k/m_0}$ 为谐振子的固有振动角频率，而由下式

$$\tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{28}$$

决定的角度 δ 称为受迫振动的初相角。因此，次波辐射的电场强度矢量为

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left[\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \left(\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)\right] \\ = \;& \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\frac{e}{m_0}\frac{(-i\omega)^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}\left((\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_\mathbf{r})\mathbf{e}_\mathbf{r} - \mathbf{E}_0\right)\exp(-i\omega t + i\delta). \end{aligned} \tag{29}$$

而次波的坡印亭矢量对时间的平均值为

$$\begin{aligned} &\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \left(\frac{1}{c}\mathbf{e}_\mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})\right) \\ = \;& \frac{1}{2\mu_0 c}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r m_0}\frac{-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}\right)^2 \left((\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_\mathbf{r})\mathbf{e}_\mathbf{r} - \mathbf{E}_0\right)^2 \\ = \;& \frac{1}{2\mu_0 c}\frac{e^4\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 r^2 m_0^2}\frac{E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\sin^2\alpha\,\mathbf{e}_\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{30}$$

或是

$$\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} I_0 \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2\alpha \mathbf{e_r}. \tag{31}$$

这里， α 为 $\mathbf{E}_0$ 与 $\mathbf{e_r}$ 之间的夹角。因此，我们得到单位时间内次波辐射的辐射功率为

$$\begin{aligned} P &= \oint\oint_{S_r} \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e_r}\, r^2 d\Omega = \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} I_0 r_e^2 \sin^2\alpha \\ &= 2\pi \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} I_0 r_e^2 \int_0^\pi \sin^3\alpha d\alpha = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} I_0 r_e^2, \end{aligned} \tag{32}$$

而束缚电子对于入射电磁波的总的散射截面为

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} r_e^2. \tag{33}$$

下面，让我们来考虑几种极限情况。

(i) $\omega \ll \omega_0$ 。此时，束缚电子对于入射电磁波的总散射截面退化为

$$\sigma \cong \frac{8\pi}{3}\frac{\omega^4}{\omega_0^4} r_e^2 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 r_e^2. \tag{34}$$

此式被称呼为瑞利 (Rayleigh) 散射公式。它表明，束缚电子对于低频率的入射电磁波的散射随其频率的四次方而增强。瑞利用此式解释了为什么天空看起来是蓝色的。我们知道，太阳的光辐射近似地可以看成是以黄光 (波长大约为 $\lambda \cong 6000\mathring{A}$ 为主的黑体辐射谱，而束缚在分子内的电子的固有振动频率 ω_0 比 $\omega_{黄}$ 要大得多。因此，当 $\omega > \omega_{黄}$ 时，一方面太阳光的辐射强度随频率的增高而减弱，另一方面是大气分子中的束缚电子的散射效应随频率的增高而加强，造成的结果是被强烈散射的光的波长主要集中在 $\lambda = 4600\mathring{A}$ 左右，即蓝光的范围 [1] 。

(ii) $\omega \gg \omega_0$ 。此时，束缚电子对于入射电磁波的总散射截面可以写作

$$\sigma \cong \frac{8\pi}{3} r_e^2, \tag{35}$$

即所谓汤姆逊散射截面。它隐含着此时的电子运动可以视作自由的。

(iii) 当 $\omega = \omega_0$ 时，我们有

$$\sigma \cong \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 r_e^2. \tag{36}$$

[1] 见 ≪ 大学物理 ≫ 杂志 2015 年 34 卷第二期 19 页，胡晓东著 “LED 照亮世界” 一文。

由于 $\omega_0 \gg \gamma$，故 $\omega = \omega_0$ 时的束缚电子对于入射电磁波的总散射截面远远大于汤姆逊散射截面。这种现象被称为共振散射。此时，入射电磁波的能量会被电子的振动强烈吸收，使得振动幅度增大，直到由电子辐射出去的次波的能量等于它所吸收的入射波的能量，振幅才可达到稳恒值。这一过程会在光谱中形成一条吸收谱线。接下来，让我们定量地计算一下此时电子所吸收的入射电磁波的能量。

为此，我们考虑单位时间内作受迫振动的电子向外辐射的电磁波的总能量。将 (32) 式的两边对电磁波的角频率 ω 积分后，我们有

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} I_0(\omega) r_e^2 d\omega. \tag{37}$$

对这一积分的主要贡献来自 $\omega \sim \omega_0$ 的区域。因此，我们可以近似地取 $I_0(\omega) \cong I_0(\omega_0)$，并得到

$$\begin{aligned}
W &\cong \frac{8\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} d\omega \\
&= \frac{8\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2\gamma^2} d\omega \\
&\cong \frac{8\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^4}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega_0)^2 + \omega_0^2\gamma^2} d\omega \\
&= \frac{8\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} d\omega \\
&= \frac{2\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} d\omega \\
&= \frac{2\pi}{3} I_0(\omega_0) r_e^2 \omega_0^2 \, \frac{2}{\gamma} \arctan\left(-\frac{2(\omega_0 - \omega)}{\gamma}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{4\pi}{3\gamma} I_0(\omega_0) r_e^2 \omega_0^2 [\arctan\infty - \arctan(-\infty)] \\
&= \frac{4\pi^2}{3\gamma} I_0(\omega_0) r_e^2 \omega_0^2.
\end{aligned} \tag{38}$$

将

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}, \quad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m_0 c^3} \tag{39}$$

代入上式后，我们看到 W 的表达式又可以化简为

$$W = 2\pi^2 r_e c I_0(\omega_0). \tag{40}$$

根据能量守恒，W 也等于作受迫振动的电子运动达到稳恒状态时单位时间内从入射电磁波吸收的总能量。总而言之，共振散射现象实际上是电磁波能量被束缚电子运动吸收后再辐射的过程。

\$ 11.3 媒介质对电磁波的色散

现代物理学的一个重要研究方向是如何用微观力学机制来考察宏观物质的性质。在这里，我们仅以媒介质对电磁波的色散为例来给予一个简短的说明。

当外来电磁波入射到连续媒介质内时，由于电子散射的次波与入射电磁波相互叠加，形成在媒介质内传播的电磁波。介质的宏观电磁现象决定于极化强度 $\mathbf{P}$ 和磁化强度 $\mathbf{M}$ 这两个物理量。现在，我们讨论一下在稀薄气体中这两个物理量对于入射电磁波的场强和频率的依赖关系。

设介质内单位体积内的束缚电子数目为 N，且每个电子以同样的固有频率 ω_0 做受迫振动。在稀薄气体近似下，可以忽略电子之间的相互作用，故作用在每个电子上的电场强度等于外电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{41}$$

此时，媒介质的电极化强度矢量可以写作

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} e\mathbf{r}_i \tag{42}$$

利用上节的结果，我们可以直接写出

$$\mathbf{r}_i = \frac{e}{m_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \tag{43}$$

将之代入 (42) 式，我们得到极化强度矢量为

$$\mathbf{P} = \frac{Ne}{m_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t), \tag{44}$$

以及电位移强度矢量

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \frac{Ne}{m_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \equiv \mathbf{D}_0 \exp(-i\omega t). \tag{45}$$

根据定义，我们得到媒介质的电容率为

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{Ne}{m_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \epsilon_0 + \frac{Ne}{m_0}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \tag{46}$$

因此，我们有

$$\mathrm{Re}\,\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne}{m_0}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \epsilon_0\left(1+\frac{Ne}{m_0\epsilon_0}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\right), \tag{47}$$

以及

$$\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega) = \frac{Ne}{m_0}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \epsilon_0\left(\frac{Ne}{m_0\epsilon_0}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\right). \tag{48}$$

从物理上讲，电容率的虚部导致了媒介质对于入射电磁波的吸收，而其实部显示的如教科书 269 页上的图 7-16 所示的对于频率 ω 的依赖关系称为色散关系。值得强调一点的是，$\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega)$ 在 $\omega=\omega_0$ 处有一个尖锐的极值。也就是说，在发生共振散射的时候，会伴随着媒介质对入射电磁波的强烈吸收。

在上述推导中，我们假设所有的束缚电子是以同一个固有频率 ω_0 做振动的。在实际情况中，电子可能会以多种固有频率做振动。在这种情形下，我们可以假设一个电子以固有频率 ω_{0i} 做振动的几率为 f_i，即 $f_i \geq 0$，且 $\sum_i f_i = 1$。因此，媒介质的电容率可以相应地修改为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \sum_i \frac{Ne^2}{m_0}\frac{f_i}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\omega\gamma_i}. \tag{49}$$

这里，γ_i 为第 i 种振动模式的阻尼系数。

根据定义，媒介质的折射率为

$$\aleph(\omega) = n(\omega)+i\eta(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1+\sum_i \frac{Ne^2}{m_0\epsilon_0}\frac{f_i}{\omega_{0i}^2-\omega^2-i\omega\gamma_i}}$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{Ne^2}{m_0\epsilon_0}\sum_i \frac{f_i(\omega_{0i}^2-\omega^2)}{(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2}\right)+i\frac{Ne^2}{m_0\epsilon_0}\sum_i \frac{f_i\omega\gamma_i}{(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2}}. \tag{50}$$

将上式平方，并比较等式两边的实部和虚部后，我们得到

$$n^2(\omega)-\eta^2(\omega) = 1+\frac{Ne^2}{m_0\epsilon_0}\sum_i \frac{f_i(\omega_{0i}^2-\omega^2)}{(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2}, \tag{51}$$

以及

$$n(\omega)\eta(\omega) = \frac{Ne^2}{2m_0\epsilon_0}\sum_i \frac{f_i\omega\gamma_i}{(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2}. \tag{52}$$

复折射率 $\aleph(\omega)$ 的实部 $n(\omega)$ 即为光学实验上测定的折射率。必须指出的是，经典理论并不能告诉我们如何正确计算各个振动模式的固有频率 ω_{0i}。要决定这些振动模式，需要使用量子力学。

复折射率 $\aleph(\omega)$ 的虚部 $\eta(\omega)$ 导致媒介质对于入射电磁波的吸收。必须强调一点的是，导体与绝缘媒介质对于入射电磁波的吸收机制是不同的。对于导体，吸收的能量转变为自由电子的动能，进一步自由电子与离子实的碰撞又将之转化为焦耳热。但在媒介质中，束缚电子吸收的能量则又转化为振子的辐射能，作为次波被释放出去 [2] 。

根据定义，电磁波在媒介质中传播的相速度为

$$v = \frac{c}{n(\omega)}, \tag{53}$$

故 $n(\omega)$ 与电磁波的频率有关意味着电磁波的相速度与频率有关。当入射电磁波是由不同频率的单色波叠加而成时，若各单色组分有不同的传播速度，会使得电磁波发生弥散，称为色散。当电磁波在两种不同媒介质的分界面处发生折射时，色散有另外一种表现，即电磁波的入射角和折射角的比值成为频率的函数。这就使得不同频率的电磁波的组分向不同方向发生折射，从而可以将各个单色电磁波分开。例如，我们可以用棱镜将太阳光分解成为七色光。

通常，电磁波的相速度随入射电磁波的频率的增高是减小的，称为正常色散。反之，则称为反常色散现象。如图所示 [3] ，我们看到，但入射电磁波的频率远离吸收区时，色散是正常的。但在吸收区内，色散是反常的。另一方面，在 $\omega < \omega_0$ 时， $n(\omega) > 1$ ，即电磁波的相速度小于真空中的光速 c；但当 $\omega > \omega_0$ 时， $n(\omega) < 1$ ，媒介质内电磁波的相速度超过真空中的光速 c 。然而，由于电磁波的相速度是波相位的运动导致的，并不携带任何信息，故并不会引起因果律的破坏。

§ 11.4 经典电动力学的适用范围

下面的总结性文字引自俞允强教授著 “电动力学简明教程”(第一版)216 页至 218 页。

赫兹用电磁波实验证实麦克斯韦理论的预言是在 19 世纪的后期。正是在同一时期，物理研究开始了向微观领域的深入。电子和原子核的发现是重要的标志，表明了微观粒子不仅是理论概念，而且也是客观实体。对微观现象的实验研究使得人们逐渐认识到，

[2] 在上面的讨论中，我们没有过多地考虑电磁波在媒介质中传播时的吸收。这相当于假设入射电磁波的频率 ω 与各个振动模式的固有频率 ω_{0i} 都相差较大。

[3] 见俞允强著 “电动力学简明教程” 一书 215 页上的图 9.4 。

微观粒子与宏观物体并不仅仅是大小的区别，它们的性质和规律都有质的不同。因此，20 世纪前确立的物理规律并不是整个物理学的基础，而是有局限性的。今天人们把这部分理论称为经典物理，相应地把与微观粒子相关的概念和规律称为量子物理。

众所周知，微观粒子与宏观物体的基本区别在于前者具有波和粒子的二像性。在经典理论中，变化的电磁场用波来描述，而它的粒子性的一面并没有得到反映。同样，微观粒子具有波动性的一面在经典力学中也没有反映。经典理论在某些物理现象上的失效，其根本原因正在这里。

把经典理论用于原子结构模型上的失败是一个重要例子。使使得电子和原子核构成束缚系统，按照经典理论，电子的运动必有加速度，从而必有辐射。我们已讨论过，这推论与原子的稳定性构成了尖锐的冲突。电子是具有波粒二像性的粒子，无疑是造成这一矛盾的基本原因。但值得强调，在这个问题中，电子运动尺度与它的德布罗意 (De Broglie) 波长 $\lambda = h/p$ 可比拟。这样，电子的波动性成了它的主要性质，才使得它的行为与经典物理规律出现了矛盾。

用一个相反的例子可以说明强调这一点的必要性。当电子在宏观磁场中作圆周运动时，实验表明它的行为仍然是服从经典理论的。经典力学能正确地给出它的轨道半径和向心加速度，经典电动力学也能正确给出它的辐射频率和强度。显然，电子具有波粒二像性的本质并没有改变。由于此时的运动尺度远大于其德布罗意波长，使得它的波动性没有充分体现。经验告诉我们，在这类情况下，经典理论作为好的近似，依然是适用的。

按这样的认识，原子或分子的结构问题，以及由于内部结构变化引起的辐射或吸收现象都是量子物理问题，经典理论在这类问题中是不适用的。在本章中我们已经看到，介质在外加电磁场作用下的共振频率不能由经典理论算出，其原因就在此。原子的辐射频率不能由经典理论给出，也是同样的原因。

电动力学作为电磁作用的动力学，它涉及带电粒子和电磁场两方面。当带电粒子的波动性成主要性质时经典理论将失效，这是问题的一方面。当电磁场的粒子性起主要作用时，经典理论也将失效，这是问题的另一方面。

按量子理论，频率为 ν 的电磁波也可看成光子流，其中每一光子具有能量 $E = h\nu$ 。在讨论光的散射时已指出过，散射过程本质上是光子与带电粒子的碰撞。当光子的 “质量”$h\nu/c^2$ 与带电粒子的质量 m_0 相比可以忽略时，光的粒子性是次要的，经典电动力学

是好的近似。当波的频率很高，以致当光子的“质量”不可忽略，则经典电动力学将失效。这是电磁作用中光的粒子性的一种表现。

光的粒子性的另一种表现形式可以用光电效应为例来说明。在光电效应中，电磁作用表现为电子对光子的吸收。按量子理论，微观粒子对光的吸收是一种概率现象。当光照射在金属表面上时，表面附近的每个电子都有一定概率吸收到一个光子，从而获得能量 $h\nu$ 。一个电子要吸收到几个光子，即获得几倍 $h\nu$ 的能量的概率很小。因此要使电子获得足够的能量以克服表面势垒的束缚，入射光须有足够高的频率，而不是足够大的强度。增大光的强度是增加单位时间入射的光子数，它的效果是增加可能吸收到光子的电子数，而不是增大单个电子的能量。光电效应的实验完全证实了这些特征。光电效应的实验完全证实了这些特征。这说明由经典理论无法解释它是光在这过程中呈现出显著的量子性的结果。

上面我们从几个方面分析了使经典电动力学理论失效的因素，目的是说明，光的粒子性和带电粒子的波动性都不显著的电磁过程才是经典电动力学所适用的过程。